

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

---

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение  
высшего профессионального образования  
«Пензенский государственный университет  
архитектуры и строительства»  
(ПГУАС)

С.В. Бакушев

# **ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ МЕХАНИКИ ДЕФОРМИРУЕМОГО ТВЁРДОГО ТЕЛА**

Рекомендовано Редсоветом университета  
в качестве учебного пособия для студентов,  
обучающихся по направлению подготовки 08.05.01  
«Строительство уникальных зданий и сооружений»

Пенза 2015

УДК 51-74  
ББК 22.251я73  
Б19

Рецензенты: доктор технических наук, профессор  
А.М. Данилов (ПГУАС);  
доктор технических наук, профессор  
А.А. Трещёв (Тульский государственный  
университет)

**Бакушев С.В.**

Б19 Численные методы механики деформируемого твёрдого тела:  
учеб. пособие / С.В. Бакушев. – Пенза: ПГУАС, 2015. – 268 с.

Книга посвящена систематическому изложению курса численных методов применительно к решению прикладных задач теории упругости и строительной механики. И собственно численные методы, и их реализация при решении задач теории упругости и строительной механики иллюстрируются несложными, но характерными примерами.

Учебное пособие подготовлено на кафедре «Механика» и предназначено для студентов, обучающихся по направлению подготовки 08.05.01 «Строительство уникальных зданий и сооружений». Книга может быть полезной студентам технических специальностей, аспирантам, специализирующимся в области механики деформируемого твёрдого тела, а также инженерам-строителям и инженерам-проектировщикам.

© Пензенский государственный университет  
архитектуры и строительства, 2015

© Бакушев, С.В. 2015

## ПРЕДИСЛОВИЕ

*Механика деформируемого твёрдого тела* рассматривается как единая наука, объединяющая те научные дисциплины, которые по традиции излагаются и изучаются раздельно. Сюда, в частности, можно отнести сопротивление материалов, строительную механику, теорию упругости, теорию пластичности, теорию разрушения и так далее. Механика является во всех своих разделах постоянно развивающейся наукой, генерирующей новые и совершенствующей известные методы определения напряжённого и деформированного состояний твёрдых тел. Для механики недостаточно написать определяющие уравнения, как можно более точно отражающие действительную работу реальных твёрдых тел и конструкций; нужно ещё уметь их решать при данных граничных условиях. Ввиду этого широкое распространение получили различные численные методы решения задач, что связано с внедрением и использованием ЭВМ и их программно-математического обеспечения практически во всех сферах науки и инженерной практики.

Данное учебное пособие посвящено изложению численных методов решения задач механики деформируемого твёрдого тела. Книга состоит из шести глав.

В первой главе описывается введение в численные методы, включающее темы: погрешности вычислений, численные методы решения нелинейных уравнений, системы линейных и нелинейных уравнений, системы уравнений специального вида, собственные значения и собственные векторы матриц, приближение функций, вычисление интегралов, численные методы интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений.

Во второй главе рассматривается расчёт стержневых систем в матричной форме и методом конечных элементов.

В третьей главе описываются метод конечных разностей для решения плоской задачи теории упругости применительно к балкам-стенкам, а также расчёт методом конечных разностей тонких прямоугольных пластин.

Четвёртая глава посвящена решению плоской задачи теории упругости и расчёту тонких пластин с помощью тригонометрических рядов.

В пятой главе представлены методы решения задач теории упругости на основе вариационных принципов: метод Ритца – Тимошенко, метод Бубнова – Галёркина, метод конечных элементов применительно к решению плоской задачи теории упругости и расчёту тонких пластин.

В шестой главе излагаются основы метода граничных элементов.

Содержание книги соответствует Федеральному государственному образовательному стандарту высшего образования по направлению подготовки 08.05.01 «Строительство уникальных зданий и сооружений» (уровень специалитета) 2014 года и ориентировано на профессиональную деятельность выпускников в области проектирования уникальных зданий и

сооружений, проведения научных исследований в области теории уникальных зданий и сооружений для решения следующих профессиональных задач:

1) сбор, систематизация и анализ информационных исходных данных для проектирования уникальных зданий и сооружений;

2) расчёт, конструирование и мониторинг уникальных зданий и сооружений с использованием лицензионных универсальных и специализированных программно-вычислительных комплексов и систем автоматизированного проектирования;

3) разработка и верификация методов и программных средств расчёта объекта проектирования, расчётное обеспечение проектной и рабочей документации;

4) изучение и анализ научно-технической информации, отечественного и зарубежного опыта;

5) использование лицензионных универсальных и специализированных программно-вычислительных комплексов и систем автоматизированного проектирования;

6) организация и разработка методик проведения экспериментов, составление описания проводимых исследований и систематизация результатов;

7) подготовка данных в установленной форме для составления обзоров, отчётов, научных и иных публикаций.

При изучении курса «Численные методы механики деформируемого твёрдого тела» у обучающихся будут сформированы следующие общекультурные, общепрофессиональные и профессиональные компетенции:

✓ способность к абстрактному мышлению, анализу, синтезу (ОК-1);  
✓ готовность действовать в нестандартных ситуациях, нести социальную и этическую ответственность за принятые решения (ОК-2);  
✓ готовность к саморазвитию, самореализации, использованию творческого потенциала (ОК-3);

✓ способность к самоорганизации и самообразованию (ОК-7);  
✓ владение эффективными правилами, методами и средствами сбора, обмена, хранения и обработки информации, навыками работы с компьютером как средством управления информацией (ОПК-2);

✓ способностью решать стандартные задачи профессиональной деятельности на основе информационной и библиографической культуры с применением информационно-коммуникационных технологий и с учётом основных требований информационной безопасности (ОПК-3);

✓ умение использовать основные законы естественнонаучных дисциплин в профессиональной деятельности, применять методы математического анализа и математического (компьютерного) моделирования, теоретического и экспериментального исследования (ОПК-6);

✓ способность выявить естественнонаучную сущность проблем, возникающих в ходе профессиональной деятельности, привлечь их для решения соответствующий физико-математический аппарат (ОПК-7);

✓ знание научно-технической информации, отечественного и зарубежного опыта по профилю деятельности (ПК-10);

✓ владение методами математического (компьютерного) моделирования на базе универсальных и специализированных программно-вычислительных комплексов и систем автоматизированного проектирования, методами постановки и проведения экспериментов по заданным методикам (ПК-11);

✓ способность вести разработку эскизных, технических и рабочих проектов уникальных объектов с использованием универсальных и специализированных программно-вычислительных комплексов и систем автоматизированного проектирования (ПСК-1.1).

При изучении дисциплины “Численные методы механики деформируемого твёрдого тела” студенты должны получить исчерпывающие сведения о численных методах решения математических задач, о возникающих в процессе решения погрешностях, о методах их оценки и приёмах их уменьшения; освоить приближённые методы решения задач теории упругости и строительной механики (метод конечных разностей, метод конечных элементов, метод граничных элементов, решение с помощью тригонометрических рядов); получить практические навыки численного расчёта стержневых систем, балок-стенок, изгибаемых пластин, массивных тел; иметь представление о пакетах прикладных программ, реализующих основные численные методы расчёта строительных конструкций.

Следует отметить, что данное учебное пособие не претендует на исчерпывающее и полное представление всех численных методов решения прикладных задач механики деформируемого твёрдого тела. Вместе с тем изложение в одной книге собственно численных методов и методов решения задач теории упругости и строительной механики является весьма продуктивным.

## ВВЕДЕНИЕ

*Механика деформируемого твёрдого тела* – естественная наука (часть механики сплошных сред), изучающая изменение формы твёрдых тел при внешних и внутренних воздействиях и движении. Согласно формуле специальности 01.02.04 «Механика деформируемого твёрдого тела», *механика деформируемого твёрдого тела* – область науки и техники, изучающая закономерности процессов деформирования, повреждения и разрушения материалов различной природы, а также напряжённо-деформированное состояние твёрдых тел из этих материалов, при механических, тепловых, радиационных, статических и динамических воздействиях в пассивных и активных, газовых и жидких средах и полях различной природы.

Целью *механики деформируемого твёрдого тела* являются:

- установление законов деформирования, повреждения и разрушения материалов на основе экспериментальных данных;
- выявление новых связей между структурой материалов, характером внешних воздействий и процессами деформирования и разрушения;
- разработка методов постановки и методов решения краевых задач для прогноза поведения деформируемых твёрдых тел различной природы при разнообразных воздействиях.

Область исследований *механики деформируемого твёрдого тела* охватывает широкий круг задач, включающий:

1. Разработку законов деформирования, повреждения и разрушения материалов, в том числе природных, искусственных и вновь создаваемых.
2. Совершенствование и разработку теорий моделей деформируемых тел с простой и сложной структурой.
3. Разработку механики композиционных и интеллектуальных материалов и конструкций.
4. Решение прикладных задач теории упругости, пластичности и ползучести.
5. Исследование теории накопления повреждений, механики разрушения твёрдых тел и разработку критериев прочности при сложных режимах нагружения.
6. Разработку математических моделей и численных методов анализа работы конструкций применительно к задачам, не допускающим прямого аналитического исследования.
7. Экспериментальные методы исследования процессов деформирования, повреждения и разрушения материалов, в том числе объектов, испытывающих фазовые структурные превращения при внешних воздействиях.

Зарождение *механики деформируемого твёрдого тела* как науки датируется 1638 г., когда в голландском городе Лейдене была издана книга Галилео Галилея «Беседы и математические доказательства, касающиеся

двух новых отраслей науки». Здесь Галилеем была дана постановка проблемы о прочности тел и предпринята первая в истории человечества попытка решить этот вопрос на научной основе. Конечно, и в догалилеево время возводились поражающие ум человека архитектурные творения, однако их сооружение выполнялось на базе эмпирических знаний, методом проб, на базе знаний, передававшихся от поколения к поколению как результат опыта, накопленного в практической деятельности.

В двадцатом столетии *механика деформируемого твёрдого тела* получила своё дальнейшее достойное развитие. Достаточно указать на выдающиеся монографии и учебники по общим и прикладным вопросам теории упругости, теории пластичности, строительной механики, сопротивления материалов А.В.Александрова, Н.И.Безухова, Н.М.Беляева, В.В.Болотина, В.З.Власова, А.С.Вольмира, Б.Г.Галёркина, Г.Я.Галина, Г.А.Гениева, Г.Генки, А.А.Гольденвейзера, А.Б.Даркова, Д.Д.Ивлева, А.А.Ильюшина, А.Ю.Ишлинского, Л.М.Качанова, В.А.Киселёва, Л.С.Лейбензона, А.И.Лурье, А.Лява, Н.Н.Малинина, Р.Мизеса, Н.И.Мусхелишвили, А.Надаи, В.В.Новожилова, П.Ф.Папковича, В.Прагера, Ю.Н.Работнова, Х.А.Рахматулина, А.Р.Ржаницина, Л.И.Седова, Б.Сен-Венана, В.В.Соколовского, А.Ф.Смирнова, Я.С.Уфлянда, М.М.Филоненко-Бородича, Р.Хилла и так далее.

Широкое применение достижений математики и физики, технические приложения механики деформируемого твёрдого тела, развитие компьютерной техники и технологий приводят к тому, что возводимые здания и сооружения проектируются более надёжными, более долговечными, более безопасными, более изысканными и привлекательными.

**Численные методы** механики деформируемого твёрдого тела основаны на вычислительной математике. Классическая математика рассматривает задачи с точки зрения доказательства существования и единственности решения. Вычислительная математика занимается построением и анализом методов, позволяющих получить достаточно точное решение за конечное число шагов и допускающих возможность оценить сделанную ошибку.

Некоторые классы задач позволяют построить аналитическое решение, например:

✓ решение алгебраических уравнений

$$ax + b = 0, \text{ решение } x = -\frac{b}{a};$$

$$ax^2 + bx + c = 0, \text{ решение } x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a};$$

$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ , аналитическое решение возможно с использованием формул Кордано;

$ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0$ , построение аналитического решения, вообще говоря, невозможно;





$$\text{Здесь } \delta_{ij} = \sum_l \int \frac{M_i \cdot M_j}{EI} dz, \quad \Delta_{ip} = \sum_l \int \frac{M_i \cdot M_p}{EI} dz.$$

Для стержневой системы, изображённой на рис. 3,  $n = 21$ .

4. Определение главных площадок, задаваемых направляющими косинусами нормалей  $(l, m, n)$ , и главных нормальных напряжений  $\sigma_k$ ,  $k = 1, 2, 3$ , действующих на главных площадках, математически сводится к решению системы линейных однородных алгебраических уравнений:

$$\left. \begin{aligned} (\sigma_k - \sigma) \cdot l + \tau_{yx} \cdot m + \tau_{zx} \cdot n &= 0, \\ \tau_{xy} \cdot l + (\sigma_k - \sigma) \cdot m + \tau_{zy} \cdot n &= 0, \\ \tau_{xz} \cdot l + \tau_{yz} \cdot m + (\sigma_k - \sigma) \cdot n &= 0. \end{aligned} \right\}$$

5. Решение прямой задачи теории упругости в перемещениях (решение Ламе) математически сводится к интегрированию системы трёх дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка относительно трёх функций перемещений  $u = u(x, y, z)$ ,  $v = v(x, y, z)$ ,  $w = w(x, y, z)$ :

$$\left. \begin{aligned} \nabla^2 u + (1 - 2\nu)^{-1} \frac{\partial \varepsilon}{\partial x} &= 0, \\ \nabla^2 v + (1 - 2\nu)^{-1} \frac{\partial \varepsilon}{\partial y} &= 0, \\ \nabla^2 w + (1 - 2\nu)^{-1} \frac{\partial \varepsilon}{\partial z} &= 0. \end{aligned} \right\}$$

$$\text{Здесь } \nabla^2 \dots = \frac{\partial^2 \dots}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \dots}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \dots}{\partial z^2};$$

$$\varepsilon = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z; \quad \varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z}.$$

Для получения частного решения необходимо задать условия на поверхности деформируемого твёрдого тела в перемещениях:

$$u(x_0, y_0, z_0) = u_0, \quad v(x_0, y_0, z_0) = v_0, \quad w(x_0, y_0, z_0) = w_0.$$

6. Решение плоской задачи теории упругости (обобщённое плоское напряжённое состояние), расчёт балок-стенок, математически сводится к интегрированию бигармонического уравнения:

$$\frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^4} + \frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \varphi}{\partial y^4} = 0.$$

$$\text{Здесь } \sigma_x = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}, \quad \sigma_y = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}, \quad \tau_{xy} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y}.$$

7. Расчёт тонких пластин на изгиб математически сводится к интегрированию дифференциального уравнения изогнутой срединной поверхности пластинки:

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{q}{D},$$

с учётом условий на контуре тонкой пластинки.

8. Решение задачи о распространении упругопластических волн деформаций в тонком стержне математически сводится к интегрированию волнового уравнения в одномерной постановке:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2(\varepsilon) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0,$$

$$\text{где } a^2(\varepsilon) = \frac{1}{\rho} \frac{d\sigma}{d\varepsilon}.$$

Эти примеры показывают, что аналитическое построение решения либо чрезвычайно затруднительно, либо практически невозможно. Выход может быть только один: для построения решения задач следует использовать приближённые численные методы с оценкой погрешности получаемого решения.

# Глава 1. ВВЕДЕНИЕ В ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ

## §1. Погрешности вычислений

Абсолютной погрешностью  $\Delta$  приближённого числа  $A^*$  называется абсолютная величина разности между соответствующим точным числом  $A$  и приближённым числом  $A^*$ :

$$\Delta = |A - A^*|. \quad (1)$$

Обычно число  $A$  неизвестно. Приближённое число  $A^*$ , как правило, известно и известна точность  $\varepsilon$ , с которой оно получено.

Требуется определить:

1. Сколько верных знаков содержится в приближённом числе  $A^*$ .
2. До какого знака можно округлить число  $A^*$ , чтобы ошибка округления  $\Delta_{\text{ок}}$  была меньше заданной точности вычислений  $\varepsilon$ .

*Определение.*  $n$  первых значащих цифр приближённого числа  $A^*$  являются верными, если абсолютная погрешность этого числа  $\Delta$  не превышает половины единицы разряда, выражаемого  $n$ -й значащей цифрой, считая слева направо:

$$\Delta = |A - A^*| \leq \frac{1}{2} 10^{m-n+1}. \quad (2)$$

Здесь  $m$  – значение наибольшего разряда числа  $A^*$ ;

$n$  – количество верных разрядов числа  $A^*$ .

Цифры, расположенные справа от  $n$ -го разряда приближённого числа  $A^*$ , называют сомнительными.

Для правильного применения формулы (2) следует помнить, что в десятичной системе счисления любое десятичное число раскладывается в ряд по степеням числа десять:

$$\begin{aligned} a &= a_m a_{m-1} \dots a_1 a_0, a_{-1} a_{-2} \dots a_{m-n+1} = \\ &= a_m \cdot 10^m + a_{m-1} \cdot 10^{m-1} + \dots + a_0 \cdot 10^0 + a_{-1} \cdot 10^{-1} + \dots + a_{m-n+1} \cdot 10^{m-n+1}. \end{aligned} \quad (3)$$

Здесь  $a_m, a_{m-1}, \dots$  – цифры.

**Пример 1.**

$$12,345 = 1 \cdot 10^1 + 2 \cdot 10^0 + 3 \cdot 10^{-1} + 4 \cdot 10^{-2} + 5 \cdot 10^{-3},$$

то есть  $m = 1, n = 5$ .

*Правило.* При округлении числа до  $z$  значащих цифр ошибка округления  $\Delta_{\text{ок}}$  не должна превышать точность вычислений  $\varepsilon$  и максимальной ошибки округления  $\max \Delta_{\text{ок}}$ :

$$\Delta_{\text{ок}} \leq \varepsilon; \quad \Delta_{\text{ок}} \leq \max \Delta_{\text{ок}}. \quad (4)$$

*Определение.* Максимальная ошибка округления до  $z$  значащих цифр не превышает половины единицы разряда, выражаемой  $z$ -й значащей цифрой:

$$\max \Delta_{\text{ок}} < \frac{1}{2} 10^{m-z+1}. \quad (5)$$

Значащими цифрами приближенного числа  $A^*$  называют все его верные цифры, начиная от первой слева, отличной от нуля, до первой сомнительной цифры включительно. Все остальные цифры называются незначащими. Записывая конечные результаты приближенных вычислений, незначащие цифры числа следует отбрасывать.

Абсолютная погрешность приближенного числа  $A^*$  после его округления вычисляется путём сложения погрешности округления с первоначальной абсолютной погрешностью числа  $A^*$ ; затем полученную абсолютную погрешность следует округлить в сторону увеличения.

*Пример 2.*

Пусть задано число  $A = 35,97$ ; округлим его до числа  $A^* = 36,00$  и найдём количество верных знаков  $n$  в числе  $A^*$ .

Здесь  $m = 1$ . Тогда  $\Delta = |A - A^*| = 0,03$ .

В) Пусть  $n = 3$ , тогда  $0,03 < \frac{1}{2} \cdot 10^{1-3+1} = 0,05$ .

Г) Пусть  $n = 4$ , тогда  $0,03 > \frac{1}{2} \cdot 10^{1-4+1} = 0,005$ .

Таким образом, число  $A^* = 36,00$  имеет три верных знака.

*Пример 3.*

Пусть приближенное число  $A^* = 5,1846565232$  получено с погрешностью  $\varepsilon = 0,001$ . Найти количество верных знаков в числе  $A^*$ .

Здесь  $m = 0$ .

А) Пусть  $n = 4$ , тогда  $0,001 > \frac{1}{2} \cdot 10^{0-4+1} = 0,0005$ .

Б) Пусть  $n = 3$ , тогда  $0,001 < \frac{1}{2} \cdot 10^{0-3+1} = 0,005$ .

Таким образом, число  $A^*$  имеет три верных знака.

Пример 4.

Пусть приближённое число  $A^* = 5,1846565232$  получено с погрешностью  $\varepsilon = 0,006$ . Найти количество верных знаков в числе  $A^*$ .

Здесь  $m = 0$ .

А) Пусть  $n = 3$ , тогда  $0,006 > \frac{1}{2} \cdot 10^{0-3+1} = 0,005$ .

Б) Пусть  $n = 2$ , тогда  $0,006 < \frac{1}{2} \cdot 10^{0-2+1} = 0,05$ .

Таким образом, число  $A^*$  имеет два верных знака.

Пример 5.

Пусть приближённое число  $A^* = 5,1846565232$  получено с погрешностью  $\varepsilon = 0,001$ . Округлить число  $A^*$ .

Здесь  $m = 0$ .

А) Пусть  $a = 5,185$ , то есть  $z = 4$ , тогда  $\Delta_{\text{ок}} = |A^* - a| = 0,0003434768$  и  $\max \Delta_{\text{ок}} = \frac{1}{2} \cdot 10^{0-4+1} = 0,0005$ .

В итоге  $\varepsilon = 0,001 > \Delta_{\text{ок}} < \max \Delta_{\text{ок}} = 0,0005$ .

Б) Пусть  $a = 5,18$ , то есть  $z = 3$ , тогда  $\Delta_{\text{ок}} = |A^* - a| = 0,0046565232$  и  $\max \Delta_{\text{ок}} = \frac{1}{2} \cdot 10^{0-3+1} = 0,005$ .

В итоге  $\Delta_{\text{ок}} > \varepsilon = 0,001$ .

В) Пусть  $a = 5,184$ , то есть  $z = 4$ , тогда  $\Delta_{\text{ок}} = |A^* - a| = 0,0006565232$  и  $\max \Delta_{\text{ок}} = \frac{1}{2} \cdot 10^{0-4+1} = 0,0005$ .

В итоге  $\Delta_{\text{ок}} > \max \Delta_{\text{ок}}$ .

В итоге принимаем  $a = 5,185$  с погрешностью  $\varepsilon = 0,001$  и тремя верными знаками. Больше количество цифр сохранять в числе  $A^*$  нерационально, поскольку они не достоверны.

Пример 6.

Пусть приближённое число  $A^* = 5,1846565232$  получено с погрешностью  $\varepsilon = 0,006$ . Округлить число  $A^*$ .

Здесь  $m = 0$ .

А) Пусть  $a = 5,18$ , то есть  $z = 3$ , тогда  $\Delta_{\text{ок}} = |A^* - a| = 0,0046565232$  и  $\max \Delta_{\text{ок}} = \frac{1}{2} \cdot 10^{0-3+1} = 0,005$ .

В итоге  $\varepsilon = 0,006 > \Delta_{\text{ок}} < \max \Delta_{\text{ок}} = 0,005$ .

В итоге принимаем  $a = 5,18$  с погрешностью  $\varepsilon = 0,006$  и двумя верными знаками.

Абсолютная погрешность недостаточна для характеристики точности измерения или вычисления. Так, при двух измерениях длины  $l_1 = (100,8 \pm 0,1)$  м и  $l_2 = (5,2 \pm 0,1)$  м результат первого измерения точнее. Поэтому часто используется относительная погрешность  $\delta$  приближенного числа  $A^*$ .

Относительной погрешностью  $\delta$  приближённого числа  $A^*$  называется частное от деления абсолютной погрешности  $\Delta$  на приближённое число  $A^*$ :

$$\delta = \frac{\Delta}{A^*}. \quad (6)$$

*Определение.* Если положительное приближённое число  $A^*$  имеет  $n$  верных знаков, то относительная погрешность этого числа не превосходит величины

$$\delta \leq \frac{1}{a_m} \left( \frac{1}{10} \right)^{n-1}. \quad (7)$$

Здесь  $a_m$  – первая значащая цифра числа  $A^*$ .

Формула (7) позволяет по числу верных знаков приближённого числа вычислить его относительную погрешность, а также по известной относительной погрешности приближённого числа определить количество верных знаков.

**Пример 7.**

Пусть приближённое число  $A^* = 5,185$  получено с погрешностью  $\varepsilon = 0,001$ . Найти относительную погрешность числа  $A^*$ .

Здесь  $a_m = 5$ ,  $n = 3$ , то есть  $\delta = \frac{1}{5} \cdot \left( \frac{1}{10} \right)^{3-1} = 0,2 \cdot 10^{-2} = 0,2\%$ .

**Пример 8.**

Сколько верных знаков будет в числе  $\sqrt{20}$ , если относительная погрешность не превышает  $0,1\%$ .

Здесь  $a_m = 4$ ,  $\delta = 0,001$ , то есть  $\frac{1}{4} \cdot \left( \frac{1}{10} \right)^{n-1} \geq 0,001$ . Отсюда  $10^{n-1} \leq 250$ , то есть  $n \leq 4$ .

## Правила вычисления погрешностей

### I. Погрешность сложения (вычитания).

Из соотношения (1) следует:

$$A^* - \Delta_A \leq A \leq A^* + \Delta_A, \quad (\text{а})$$

$$B^* - \Delta_B \leq B \leq B^* + \Delta_B. \quad (\text{б})$$

Сложив (а) и (б), получим:

$$(A^* + B^*) - (\Delta_A + \Delta_B) \leq (A + B) \leq (A^* + B^*) + (\Delta_A + \Delta_B).$$

Отсюда

$$\left| (A^* + B^*) - (A + B) \right| \leq \Delta_A + \Delta_B. \quad (\text{в})$$

Так как, по определению

$$\left| (A^* + B^*) - (A + B) \right| = \Delta_{A+B}, \quad (\text{г})$$

то, сопоставляя (в) и (г), будем иметь:

$$\Delta_{A+B} \leq \Delta_A + \Delta_B. \quad (\text{8})$$

Перепишем соотношение (б) так:

$$B^* + \Delta_B \geq B \geq B^* - \Delta_B. \quad (\text{д})$$

Отняв от (а) выражение (в), получим:

$$(A^* - B^*) - (\Delta_A + \Delta_B) \leq (A - B) \leq (A^* - B^*) + (\Delta_A + \Delta_B),$$

то есть

$$\left| (A^* - B^*) - (A - B) \right| \leq \Delta_A + \Delta_B. \quad (\text{е})$$

По определению

$$\left| (A^* - B^*) - (A - B) \right| \leq \Delta_{A-B}. \quad (\text{ж})$$

Сопоставляя (е) и (ж), получаем:

$$\Delta_{A-B} \leq \Delta_A + \Delta_B. \quad (\text{9})$$

Таким образом, абсолютная погрешность суммы и разности не превышает суммы абсолютных погрешностей слагаемых.

Далее найдём относительную погрешность суммы и разности. Легко видеть, что

$$\delta_{A+B} = \frac{\Delta_{A+B}}{A^* + B^*} = \frac{\Delta_A + \Delta_B}{A^* + B^*}, \quad (\text{10})$$

$$\delta_{A-B} = \frac{\Delta_{A-B}}{A^* - B^*} = \frac{\Delta_A + \Delta_B}{A^* - B^*}. \quad (\text{11})$$

Из соотношений (10) и (11) следует, что  $\delta_{A+B} < \delta_{A-B}$ .

II. Погрешность умножения (деления).

Из соотношений (а) и (б) получаем:

$$A^*(1 - \delta_A) \leq A \leq A^*(1 + \delta_A), \quad (\text{и})$$

$$B^*(1 - \delta_B) \leq B \leq B^*(1 + \delta_B). \quad (\text{к})$$

Перемножаем (и) и (к):

$$A^*B^*(1 - \delta_A - \delta_B + \delta_A\delta_B) \leq A \cdot B \leq A^*B^*(1 + \delta_A + \delta_B + \delta_A\delta_B).$$

Учитывая малость величины  $\delta_A\delta_B$ , получим:

$$A^*B^* - A^*B^*(\delta_A + \delta_B) \leq A \cdot B \leq A^*B^* + A^*B^*(\delta_A + \delta_B),$$

то есть 
$$|A^*B^* - AB| \leq A^*B^*(\delta_A + \delta_B) \quad (\text{л})$$

Поскольку  $|A^*B^* - AB| = \Delta_{AB}$ , то соотношение (л) приводит к выражению

$$\delta_{AB} \leq \delta_A + \delta_B. \quad (12)$$

Итак, относительная погрешность произведения не превышает суммы относительных погрешностей сомножителей.

Переходя в соотношении (л) к абсолютным погрешностям чисел  $A^*$  и  $B^*$ , найдём абсолютную погрешность произведения:

$$\Delta_{AB} \leq A^*B^* \left( \frac{\Delta_A}{A^*} + \frac{\Delta_B}{B^*} \right) = \Delta_A B^* + \Delta_B A^*. \quad (13)$$

Перепишем соотношение (к) в следующем виде:

$$\frac{1}{B^*(1 - \delta_B)} \geq \frac{1}{B} \geq \frac{1}{B^*(1 + \delta_B)}. \quad (\text{м})$$

Умножая (и) на (м) и учитывая, что относительная погрешность положительное число и не превосходит единицу:  $0 < \delta < 1$ , получаем:

$$\frac{A^*(1 - \delta_A)}{B^*(1 + \delta_B)} \leq \frac{A}{B} \leq \frac{A^*(1 + \delta_A)}{B^*(1 - \delta_B)}.$$

После элементарных преобразований и с учетом малости произведения  $\delta_A\delta_B$  получим:

$$\frac{A^*}{B^*} - \frac{A^*}{B^*}(\delta_A + \delta_B) \leq \frac{A}{B} \leq \frac{A^*}{B^*} + \frac{A^*}{B^*}(\delta_A + \delta_B).$$



Отсюда

$$\left| \frac{A^*}{B^*} - \frac{A}{B} \right| \leq \frac{A^*}{B^*} (\delta_A + \delta_B), \text{ то есть } \Delta_{\frac{A}{B}} \leq \frac{A^*}{B^*} (\delta_A + \delta_B), \text{ следовательно,}$$

$$\delta_{\frac{A}{B}} \leq \delta_A + \delta_B. \quad (14)$$

Таким образом, относительная погрешность частного не превосходит суммы относительных погрешностей делимого и делителя.

Далее найдём абсолютную погрешность частного:

$$\Delta_{\frac{A}{B}} \leq \frac{A^*}{B^*} (\delta_A + \delta_B) = \frac{A^*}{B^*} \left( \frac{\Delta_A}{A^*} + \frac{\Delta_B}{B^*} \right) = \frac{\Delta_A B^* + \Delta_B A^*}{(B^*)^2}. \quad (15)$$

Пример 9.

Приближённое число  $A^* = 2,181$  получено с абсолютной погрешностью  $\Delta_A = 0,001$ ; приближённое число  $B^* = 0,327$  получено с абсолютной погрешностью  $\Delta_B = 0,003$ . Тогда

$$A^* + B^* = 2,181 + 0,327 = 2,508; \quad \Delta_{A+B} = 0,001 + 0,003 = 0,004;$$

$$A^* - B^* = 2,181 - 0,327 = 1,854; \quad \Delta_{A-B} = 0,001 + 0,003 = 0,004;$$

$$B^* - A^* = 0,327 - 2,181 = -1,854; \quad \Delta_{B-A} = 0,003 + 0,001 = 0,004;$$

$$\delta_{A+B} = \frac{0,004}{2,181 + 0,327} = 0,0016; \quad \delta_{A-B} = \frac{0,004}{2,181 - 0,327} = 0,0022.$$

$$A^* \cdot B^* = 2,181 \cdot 0,327 = 0,7132;$$

$$\delta_{AB} = \delta_A + \delta_B = \frac{\Delta_A}{A^*} + \frac{\Delta_B}{B^*} = \frac{0,001}{2,181} + \frac{0,003}{0,327} = 0,00963;$$

$$\Delta_{AB} = 0,001 \cdot 0,327 + 0,003 \cdot 2,181 = 0,00687;$$

$$\frac{A^*}{B^*} = \frac{2,181}{0,327} = 6,66972;$$

$$\delta_{\frac{A}{B}} = \delta_A + \delta_B = 0,00963; \quad \Delta_{\frac{A}{B}} = \frac{0,001 \cdot 0,327 + 0,003 \cdot 2,181}{0,327^2} = 0,06425.$$

### III. Погрешность функций и выражений.

Для вычисления погрешностей функций и арифметических выражений можно воспользоваться тремя методами.

#### А) Метод прямых вычислений.

Пример 10.

Найти погрешность функции  $y(x) = 2 \cdot x^2 + x - 1$  в точке  $x = 1,2$  вычисленной с погрешностью  $\Delta_x = 0,1$ .

Решение:

а)  $x \cdot x = 1,2 \cdot 1,2 = 1,44$ ;  $\Delta_{x \cdot x} = 2\Delta_x \cdot x = 2 \cdot 0,1 \cdot 1,2 = 0,24$ ;

б)  $2x^2 = 2 \cdot 1,2^2 = 2,88$ ;  $\Delta_{2x^2} = 2 \cdot 0,24 = 0,48$ ;

в)  $2x^2 + x = 2,88 + 1,2 = 4,08$ ;  $\Delta_{2x^2+x} = 0,48 + 0,1 = 0,58$ ;

г)  $2x^2 + x + 1 = 4,08 + 1 = 5,08$ ;  $\Delta_y = 0,58$ .

#### Б) Метод среднего.

Пусть  $y = f(x)$ . Тогда погрешность с избытком  $\Delta_y^{(+)} = |f(x + \Delta_x) - f(x)|$ .

Погрешность с недостатком  $\Delta_y^{(-)} = |f(x - \Delta_x) - f(x)|$ . Погрешность

функции будет равна:  $\Delta_y = \frac{\Delta_y^{(+)} + \Delta_y^{(-)}}{2}$ .

Пример 11.

Найти погрешность функции  $y(x) = 2 \cdot x^2 + x - 1$  в точке  $x = 1,2$  вычисленной с погрешностью  $\Delta_x = 0,1$ .

Решение.

$$\Delta_y^{(+)} = |f(x + \Delta_x) - f(x)| = \left| \left[ 2 \cdot (1,2 + 0,1)^2 + (1,2 + 0,1) - 1 \right] - \left[ 2 \cdot 1,2^2 + 1,2 - 1 \right] \right| = 0,60;$$

$$\Delta_y^{(-)} = |f(x - \Delta_x) - f(x)| = \left| \left[ 2 \cdot (1,2 - 0,1)^2 + (1,2 - 0,1) - 1 \right] - \left[ 2 \cdot 1,2^2 + 1,2 - 1 \right] \right| = 0,56;$$

$$\Delta_y = \frac{\Delta_y^{(+)} + \Delta_y^{(-)}}{2} = \frac{0,60 + 0,56}{2} = 0,58.$$

#### В) Метод дифференциала.

Погрешность функции будет определяться соотношением

$$\Delta_y \cong |dy| = |f'(x)| \cdot \Delta_x.$$

Пример 12.

Найти погрешность функции  $y(x) = 2 \cdot x^2 + x - 1$  в точке  $x = 1,2$  вычисленной с погрешностью  $\Delta_x = 0,1$ .

Решение.

$$\Delta_y \cong |dy| = |f'(x)| \cdot \Delta_x = |4 \cdot x + 1| \cdot \Delta_x = |4 \cdot 1,2 + 1| \cdot 0,1 = 0,58.$$

### *Накопление погрешностей*

Решение задачи, полученное численным методом, обычно является приближенным, то есть содержит некоторую погрешность. Причинами появления этой погрешности являются следующие обстоятельства:

- 1) приближенное отображение реального физического процесса или явления математической моделью (погрешность математической модели) –  $\varepsilon_{\text{мод}}$ ;
- 2) погрешность исходных данных –  $\varepsilon_{\text{дан}}$ , являющихся, как правило, приближенными числами, полученными из эксперимента или в результате решения других задач;
- 3) погрешность метода решения задачи –  $\varepsilon_{\text{м}}$ ;
- 4) погрешность округления при выполнении каждой арифметической операции над числами –  $\varepsilon_{\text{ок}}$ .

Общая погрешность решения задачи складывается из погрешности математической модели, погрешности исходных данных, погрешности метода решения задачи и погрешности округления:

$$\varepsilon = \varepsilon_{\text{мод}} + \varepsilon_{\text{дан}} + \varepsilon_{\text{м}} + \varepsilon_{\text{ок}}. \quad (16)$$

Погрешность в решении, обусловленная первыми двумя причинами, называется неустранимой. Погрешность метода решения задачи может быть уменьшена выбором более точного метода. Погрешность округлений чрезвычайно трудно поддаётся оценке, так как определяется количеством арифметических операций, а при решении задачи на ЭВМ ещё и разрядной сеткой, а также количеством использованных встроенных функций.

Погрешности, возникающие в процессе решения сложных задач, необходимо учитывать, так как они могут существенно влиять на результат вычислений.

Численный метод можно считать удачно выбранным, если его погрешность в несколько раз меньше неустранимой погрешности, а погрешность, возникшая при округлении (вычисленная погрешность), по крайней мере в несколько раз меньше погрешности метода.

### *Понятие устойчивости алгоритма вычислений*

Устойчивыми являются такие алгоритмы вычислений, для которых возникающие в процессе счёта погрешности убывают или, по крайней мере, не возрастают в процессе получения решения. Для неустойчивых алгоритмов вычислений погрешности могут нарастать настолько быстро, что уже за небольшое число шагов будет получен совершенно неверный результат.

На практике использование неустойчивых алгоритмов недопустимо.

Исследование устойчивости методов численного решения различных математических задач и сходимости приближённых решений к точным – одна из основных задач вычислительной математики.

## §2. Численные методы решения нелинейных уравнений

Пусть на отрезке  $[A, B]$  задана непрерывная функция  $y = f(x)$  (рис. 4). Требуется найти некоторые или все корни уравнения

$$f(x) = 0. \quad (1)$$

Всякое число  $\xi \in [A, B]$ , обращающее уравнение (1) в тождество  $f(\xi) \equiv 0$ , называется корнем уравнения или его решением.

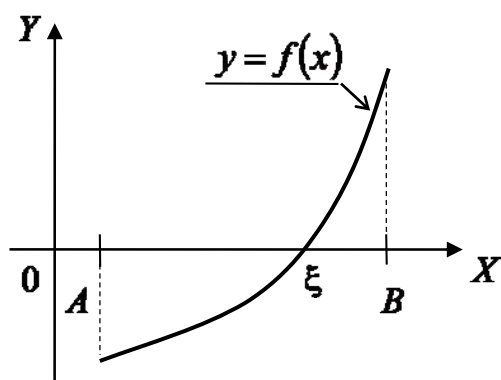


Рис. 4

В большинстве случаев корни уравнения (1) можно найти лишь приближённо.

Численное решение нелинейного уравнения  $f(x) = 0$ , то есть нахождение приближенных значений корней с заданной точностью  $\varepsilon$ , осуществляют в следующие два этапа: отделение корня – 1-й этап; уточнение корня – 2-й этап.

**Э т а п 1 .** Отделение корня.

Отделение корня заключается в определении на оси  $x$  такого интервала  $[a, b]$ , на концах которого функция  $y = f(x)$  принимает разные знаки, то есть  $f(a) \cdot f(b) < 0$ . Тогда в соответствии с теоремой Больцано – Коши внутри интервала  $[a, b]$  существует точка  $x = \xi$ , в которой значение функции  $f(x)$  равно нулю:  $f(\xi) \equiv 0$ , то есть число  $\xi$  является корнем уравнения  $f(x) = 0$ .

Методы отделения корней строго не классифицированы, однако подразделяются на аналитические, графические и физические.

**Аналитический способ** отделения корней нелинейного уравнения  $f(x) = 0$  состоит в последовательном вычислении значений функции  $y = f(x)$ , как правило, с постоянным шагом  $h$  по оси  $x$ , то есть  $x_i = x_0 + ih$  (здесь  $x_0 = A$ ), до тех пор, пока не будет выполнено неравенство  $f(x_{i-1}) \cdot f(x_i) < 0$ . При аналитическом способе отделения действительных корней необходимо учитывать следующее: если на концах интервала  $[x_{i-1}, x_i]$  функция  $f(x)$  имеет разные знаки, то есть  $f(x_{i-1}) \cdot f(x_i) < 0$ , то на интервале  $[x_{i-1}, x_i]$  имеется нечётное количество корней; если  $f(x_{i-1}) \cdot f(x_i) > 0$ , то на интервале  $[x_{i-1}, x_i]$  имеется чётное количество корней или их нет совсем. Если  $f(x_{i-1}) \cdot f(x_i) < 0$  и производная  $f'(x)$  не меняет знак на интервале  $[x_{i-1}, x_i]$ , то уравнение (1), вообще говоря, имеет

единственный корень на интервале  $[x_{i-1}, x_i]$ . В этом случае границы интервала  $[a, b]$  будут равны:  $a = x_{i-1}$ ,  $b = x_i$ .

**Графический способ** отделения корней нелинейного уравнения  $f(x)=0$  состоит в построении графика функции  $y = f(x)$ . Абсциссы точек пересечения кривой графика с осью  $OX$  и будут корнями уравнения (1). В некоторых случаях уравнение  $f(x)=0$  удобно представить в эквивалентном виде  $f_1(x)=f_2(x)$ , а потом построить графики функций  $y_1 = f_1(x)$  и  $y_2 = f_2(x)$ . Абсциссы точек пересечения этих графиков будут корнями уравнения (1). Границы интервала  $[a, b]$  в этом случае определяются визуально.

**Физический способ** отделения корней нелинейного уравнения (1) состоит в анализе физического смысла функции  $y = f(x)$ . В некоторых случаях это позволяет определить интервалы, в которых могут находиться корни уравнения (1).

Э т а п 2 . Уточнение корня.

Уточнение корня выполняется различными методами: методом половинного деления, методом простых итераций, методом касательных (метод Ньютона), методом пропорциональных частей (метод хорд), комбинированным методом хорд и касательных. Эти методы различаются скоростью и условиями сходимости к точному решению, условиями окончания итерационного процесса. Рассмотрим метод половинного деления и метод простых итераций более подробно.

I. **Метод половинного деления** – один из самых простых и, безусловно, сходящихся численных методов уточнения корня нелинейного уравнения. Предположим, что отделение корней произведено и на интервале  $[a, b]$  содержится только один корень (рис. 5):

$$f(a) \cdot f(b) < 0. \quad (2)$$

Вычислим абсциссу середины интервала  $[a, b]$ :

$$\xi = \frac{a+b}{2}. \quad (3)$$

Если  $f(\xi) = 0$ , то  $x = \xi$  – это корень уравнения  $f(x) = 0$ .

Если  $f(\xi) \neq 0$ , то из двух подынтервалов  $[a, \xi]$  и  $[\xi, b]$  корень уравнения будет находиться

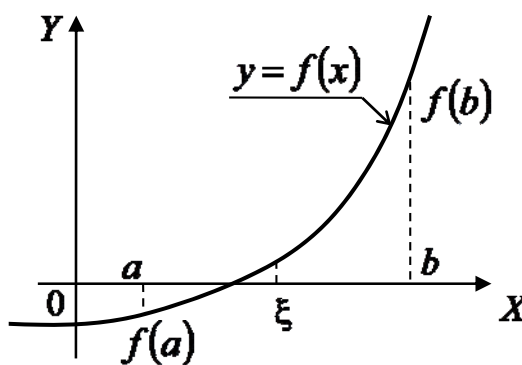


Рис. 5

в том, на концах которого функция  $y = f(x)$  принимает разные знаки. Таким образом,

- если  $f(a) \cdot f(\xi) < 0$ , то есть корень уравнения находится на интервале  $[a, \xi]$ , и тогда, принимая  $b = \xi$ , рассматриваем новый интервал  $[a, b]$ , для которого определяем абсциссу середины интервала и процедуру вычислений повторяем;

- если  $f(a) \cdot f(\xi) > 0$ , то есть корень уравнения находится на интервале  $[\xi, b]$ , и тогда, принимая  $a = \xi$ , рассматриваем новый интервал  $[a, b]$ , для которого определяем абсциссу середины интервала и процедуру вычислений повторяем.

Если требуется найти корень уравнения с точностью  $\varepsilon$ , то деление пополам продолжаем до тех пор, пока длина интервала  $[a, b]$  не станет меньше  $2\varepsilon$ :

$$|a - b| < 2\varepsilon. \quad (4)$$

Условие (4) называется условием окончания итерационного процесса.

Координата середины интервала  $[a, b]$  есть значение корня с точностью  $\varepsilon$ :

$$\xi = \frac{a + b}{2}.$$

Метод половинного деления сходится для любых непрерывных на отрезке  $[A, B]$  функций  $y = f(x)$ . Для достижения требуемой точности  $\varepsilon$  необходимо совершить  $n \approx \log_2 \frac{b-a}{2\varepsilon}$  итераций. Это означает, что для получения каждых трёх верных десятичных знаков необходимо выполнить около 10 итераций.

**II. Метод простых итераций** состоит в замене исходного уравнения (1) эквивалентным ему уравнением вида

$$x = \varphi(x) \quad (5)$$

и построении итерационной последовательности

$$x_{k+1} = \varphi(x_k), \quad (6)$$

сходящейся при  $k \rightarrow \infty$  к точному решению. На рис. 6 показана графическая интерпретация метода.

Начальное приближение решения  $x_0$  принимается из интервала  $[a, b]$ . Заданная

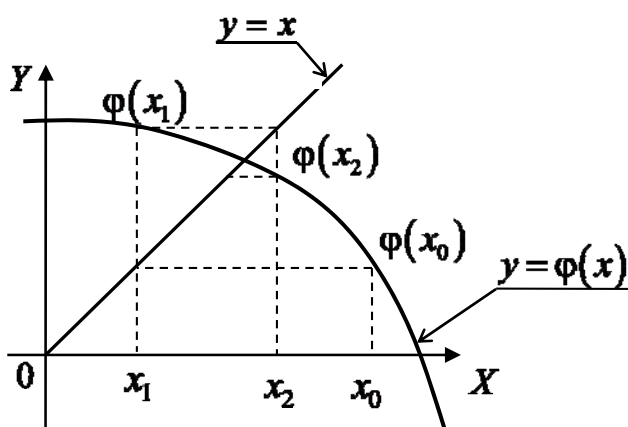


Рис. 6

точность вычислений  $\varepsilon$  обеспечивается выполнением неравенства:

$$|x_{k-1} - x_k| \leq \varepsilon. \quad (7)$$

Итерационный процесс будет сходящимся, если для любых  $x$  из интервала  $[a, b]$  выполняется неравенство

$$|\varphi'(x)| < 1. \quad (8)$$

**Пример.**

Найти положительный корень уравнения  $2x^2 - 3x - 8 = 0$  методом половинного деления и методом итераций с точностью  $\varepsilon = 0,01$ .

**Решение.**

Для определения интервала поиска решения заданного уравнения построим график функции  $y(x) = 2x^2 - 3x - 8$  на участке изменения аргумента  $x$  от  $x = -10$  до  $x = 10$  с шагом  $x = 1$  (рис.7).

Таким образом, положительный корень уравнения  $2x^2 - 3x - 8 = 0$  находится на интервале  $[0, 5]$ . Для его отделения составим таблицу значений  $x, y(x)$ :

$x$	0	1	2	3
$y(x)$	-8	-9	-6	1

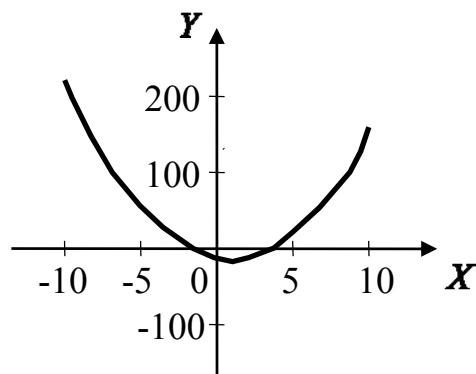


Рис. 7

Так как  $y(2) \cdot y(3) = (-6) \cdot 1 < 0$ , то корень уравнения находится на интервале  $[2, 3]$ . Уточняем его методом половинного деления.

Первая итерация:  $a = 2, b = 3$ .

$$\xi = \frac{a+b}{2} = \frac{2+3}{2} = 2,5; \quad y(2) \cdot y(2,5) = (-6) \cdot (-3) = 18 > 0,$$

то есть  $a = \xi = 2,5; b = 3$ . Проверяем условие окончания итерационного процесса:  $|a - b| = |2,5 - 3| = 0,5 > 2 \cdot \varepsilon = 2 \cdot 0,01 = 0,02$ .

Переходим к следующей итерации.

Вторая итерация:

$$\xi = \frac{a+b}{2} = \frac{2,5+3}{2} = 2,75; \quad y(2,5) \cdot y(2,75) = (-3) \cdot (-1,125) = 3,375 > 0,$$

то есть  $a = \xi = 2,75; b = 3$ .  $|a - b| = |2,75 - 3| = 0,25 > 2 \cdot \varepsilon = 0,02$ .

Третья итерация:

$$\xi = \frac{a+b}{2} = \frac{2,75+3}{2} = 2,875;$$

$$y(2,75) \cdot y(2,875) = (-1,125) \cdot (-0,094) = 0,106 > 0,$$

то есть  $a = \xi = 2,875$ ;  $b = 3$ .

$$|a-b| = |2,875-3| = 0,125 > 2 \cdot \varepsilon = 0,02.$$

Четвёртая итерация:

$$\xi = \frac{a+b}{2} = \frac{2,875+3}{2} = 2,938;$$

$$y(2,875) \cdot y(2,938) = (-0,094) \cdot (0,45) = -0,042 < 0,$$

то есть  $a = 2,875$ ;  $b = \xi = 2,938$ .

$$|a-b| = |2,875-2,938| = 0,063 > 2 \cdot \varepsilon = 0,02.$$

Пятая итерация:

$$\xi = \frac{a+b}{2} = \frac{2,875+2,938}{2} = 2,907;$$

$$y(2,875) \cdot y(2,907) = (-0,094) \cdot (0,18) = -0,017 < 0,$$

то есть  $a = 2,875$ ;  $b = \xi = 2,907$ .

$$|a-b| = |2,875-2,907| = 0,032 > 2 \cdot \varepsilon = 0,02.$$

Шестая итерация:

$$\xi = \frac{a+b}{2} = \frac{2,875+2,907}{2} = 2,891;$$

$$y(2,875) \cdot y(2,891) = (-0,094) \cdot (0,043) = -0,004 < 0, \text{ то есть}$$

$$a = 2,875; \quad b = \xi = 2,891.$$

$$|a-b| = |2,875-2,891| = 0,016 < 2 \cdot \varepsilon = 0,02.$$

Итак, положительный корень уравнения  $2x^2 - 3x - 8 = 0$ , полученный с точностью  $\varepsilon = 0,01$  по методу половинного деления, равен:

$$\xi = \frac{a+b}{2} = \frac{2,875+2,891}{2} = 2,883.$$

Уточняем корень исходного уравнения  $2x^2 - 3x - 8 = 0$  методом итераций.

Приводим уравнение к эквивалентному виду:  $x = \frac{2x^2 - 8}{3}$ , то есть

$$\varphi(x) = \frac{2x^2 - 8}{3}.$$

Проверим условие сходимости итерационного процесса на интервале  $[2, 3]$ :  $|\varphi'(x)| = \left| \frac{4x}{3} \right| = \left| \frac{4 \cdot 2,5}{3} \right| = 3,33 > 1$ . Условие сходимости не выполняется.





Система имеет бесчисленное множество решений, если главный определитель и все побочные определители равны нулю:  $\Delta = 0$ ,  $\Delta_j = 0$ , причём

$$\Delta_j = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = 0,$$

где  $a_{1j} = b_1$ ,  $a_{2j} = b_2$ , ...,  $a_{nj} = b_n$ , и, кроме того,  $j = 1, 2, \dots, n$ .

Система не имеет решений, если  $\Delta = 0$ ,  $\Delta_j \neq 0$  ( $j = 1, 2, \dots, n$ ).

Под решением системы понимают совокупность чисел  $x_1, x_2, \dots, x_n$  таких, что при их подстановке в исходную систему (1) получатся верные равенства (тождества).

В матричном виде система (1) имеет вид:

$$\mathbf{A} \cdot \bar{\mathbf{X}} = \bar{\mathbf{B}}. \quad (3)$$

Здесь  $\mathbf{A}$  – матрица коэффициентов при неизвестных системы (1);  $\bar{\mathbf{X}}$  – вектор-столбец неизвестных;  $\bar{\mathbf{B}}$  – вектор-столбец правых частей:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}; \quad \bar{\mathbf{X}} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}; \quad \bar{\mathbf{B}} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix}.$$

Методы решения систем уравнений подразделяют на точные (прямые) и итерационные (приближенные).

### I. Метод Крамера.

Является точным методом решения систем линейных алгебраических уравнений. При этом решение системы определяется по формулам Крамера:

$$x_j = \frac{\Delta_j}{\Delta}, \quad (4)$$

где  $j = 1, 2, \dots, n$ .

При решении систем сколько-нибудь высокого порядка ( $n > 5$ ) применение формул Крамера нецелесообразно, а при больших  $n$  ( $n > 100$ ) даже при применении ЭВМ – абсолютно исключается, так как для вычисления одного определителя необходимо выполнить  $n \cdot n!$  операций. Как следствие – большое время вычислений и большая погрешность округлений.

При прямом вычислении определителя 20-го порядка надо сделать  $4,5 \cdot 10^{19}$  операций. На ЭВМ, которая делает 1000000 операций в секунду, потребовалось бы  $1,4 \cdot 10^6$  лет.

**Пример.**

Решить методом Крамера систему линейных алгебраических уравнений

$$\left. \begin{aligned} 6x_1 - x_2 - x_3 &= 11,33; \\ -x_1 + 6x_2 - x_3 &= 32; \\ -x_1 - x_2 + 6x_3 &= 42. \end{aligned} \right\}$$

**Решение.**

Вычисляем главные и побочные определители:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 6 & -1 & -1 \\ -1 & 6 & -1 \\ -1 & -1 & 6 \end{vmatrix} = 196 \neq 0; \quad \Delta_1 = \begin{vmatrix} 11,33 & -1 & -1 \\ 32 & 6 & -1 \\ 42 & -1 & 6 \end{vmatrix} = 914,55;$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 6 & 11,33 & -1 \\ -1 & 32 & -1 \\ -1 & 42 & 6 \end{vmatrix} = 1493; \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} 6 & -1 & 11,33 \\ -1 & 6 & 32 \\ -1 & -1 & 42 \end{vmatrix} = 1773.$$

$$\text{Тогда } x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{914,55}{196} = 4,666;$$

$$x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{1493}{196} = 7,617;$$

$$x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{1773}{196} = 9,046.$$

## II. Метод Гаусса.

Состоит в том, чтобы исходную линейную систему (3) с помощью преобразований, не изменяющих решение системы, привести к виду:

$$\mathbf{A}^* \cdot \bar{\mathbf{X}} = \bar{\mathbf{B}}^* . \quad (5)$$

Здесь  $\mathbf{A}^*$  – верхняя треугольная матрица коэффициентов;  $\bar{\mathbf{B}}^*$  – изменённый в процессе преобразований вектор-столбец правых частей исходной системы уравнений:

$$\mathbf{A}^* = \begin{pmatrix} a_{11}^* & a_{12}^* & \dots & a_{1n}^* \\ 0 & a_{22}^* & \dots & a_{2n}^* \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn}^* \end{pmatrix}; \quad \bar{\mathbf{B}}^* = \begin{pmatrix} b_1^* \\ b_2^* \\ \dots \\ b_n^* \end{pmatrix}.$$

Переход от системы (3) к системе (5) – это прямой ход метода Гаусса; определение неизвестных из системы (5) – это обратный ход метода Гаусса.

В качестве примера рассмотрим систему трёх линейных алгебраических уравнений:

$$\left. \begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 &= b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 &= b_2, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 &= b_3. \end{aligned} \right\} \quad (\text{a})$$

Выпишем расширенную матрицу системы (a):

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & b_3 \end{pmatrix} \quad (\text{б})$$

Умножим первую строку матрицы (б) на  $\left(\frac{a_{21}}{a_{11}}\right)$  и затем вычтем её из

второй строки. Теперь умножим первую строку матрицы (б) на  $\left(\frac{a_{31}}{a_{11}}\right)$  и

затем вычтем её из третьей строки. Оставив первую строку матрицы (б) без изменения, получим преобразованную расширенную матрицу:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & b_1 \\ 0 & \left(a_{22} - \frac{a_{21}}{a_{11}}a_{12}\right) & \left(a_{23} - \frac{a_{21}}{a_{11}}a_{13}\right) & \left(b_2 - \frac{a_{21}}{a_{11}}b_1\right) \\ 0 & \left(a_{32} - \frac{a_{31}}{a_{11}}a_{12}\right) & \left(a_{33} - \frac{a_{31}}{a_{11}}a_{13}\right) & \left(b_3 - \frac{a_{31}}{a_{11}}b_1\right) \end{pmatrix}$$

Выражения в круглых скобках переобозначим. В итоге будем иметь преобразованную расширенную матрицу:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & b_1 \\ 0 & a'_{22} & a'_{23} & b'_2 \\ 0 & a'_{32} & a'_{33} & b'_3 \end{pmatrix} \quad (\text{в})$$

Далее рассматриваем подматрицу матрицы (в):

$$\begin{pmatrix} a'_{22} & a'_{23} & b'_2 \\ a'_{32} & a'_{33} & b'_3 \end{pmatrix} \quad (\Gamma)$$

Умножим первую строку матрицы (г) на  $\left(\frac{a'_{32}}{a'_{22}}\right)$  и затем вычтем её из второй строки. Оставив первую строку без изменений, получим:

$$\begin{pmatrix} a'_{22} & a'_{23} & b'_2 \\ 0 & \left(a'_{33} - \frac{a'_{32}a'_{23}}{a'_{22}}\right) & \left(b'_3 - \frac{a'_{32}b'_2}{a'_{22}}\right) \end{pmatrix}$$

Переобозначая выражения в квадратных скобках, будем иметь:

$$\begin{pmatrix} a'_{22} & a'_{23} & b'_2 \\ 0 & a''_{33} & b''_3 \end{pmatrix} \quad (\Delta)$$

С учётом результата (д), матрица (в) получает вид:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & b_1 \\ 0 & a'_{22} & a'_{23} & b'_2 \\ 0 & 0 & a''_{33} & b''_3 \end{pmatrix} \quad (\epsilon)$$

Теперь система (а) может быть записана в следующем виде:

$$\left. \begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 &= b_1; \\ a'_{22}x_2 + a'_{23}x_3 &= b'_2; \\ a''_{33}x_3 &= b''_3. \end{aligned} \right\} \quad (\text{ж})$$

Прямой ход метода Гаусса выполнен.

Определяя неизвестные из системы (ж), выполняем обратный ход метода Гаусса:

$$\begin{aligned} x_3 &= \frac{b''_3}{a''_{33}}; \\ x_2 &= \frac{1}{a'_{22}} \left( b'_2 - a'_{23} \frac{b''_3}{a''_{33}} \right); \\ x_1 &= \frac{1}{a_{11}} \left[ b_1 - \frac{a_{12}}{a'_{22}} \left( b'_2 - a'_{23} \frac{b''_3}{a''_{33}} \right) - a_{13} \frac{b''_3}{a''_{33}} \right]. \end{aligned}$$

Алгоритм предполагает, что диагональные элементы  $a_{kk} \neq 0$  в процессе решения задачи. Такой алгоритм называется алгоритмом метода Гаусса без выбора главного элемента. Если некоторые диагональные элементы в процессе решения задачи обнуляются, то алгоритм надо модифицировать

таким образом, чтобы путём перестановки строк или столбцов исключить деления на нуль. Такой алгоритм называется алгоритмом метода Гаусса с выбором главного элемента.

**Пример.**

Решить методом Гаусса систему линейных алгебраических уравнений

$$\left. \begin{aligned} -x_1 - x_2 + 6x_3 &= 42; \\ -x_1 + 6x_2 - x_3 &= 32; \\ 6x_1 - x_2 - x_3 &= 11,33. \end{aligned} \right\}$$

**Решение.**

Выпишем расширенную матрицу исходной системы:

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 & 6 & 42 \\ -1 & 6 & -1 & 32 \\ 6 & -1 & -1 & 11,33 \end{pmatrix}$$

Умножим первую строку расширенной матрицы на  $\frac{-1}{-1}=1$  и затем вычтем её из второй строки. Теперь умножим первую строку расширенной матрицы на  $\frac{6}{-1}=-6$  и затем вычтем её из третьей строки. Оставив первую строку расширенной матрицы без изменения, получим:

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 & 6 & 42 \\ 0 & 7 & -7 & -10 \\ 0 & -7 & 35 & 263,33 \end{pmatrix}$$

Умножим вторую строку полученной матрицы на  $\frac{-7}{7}=-1$  и затем вычтем её из третьей строки. Оставив первые две строки без изменения, получим:

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 & 6 & 42 \\ 0 & 7 & -7 & -10 \\ 0 & 0 & 28 & 253,33 \end{pmatrix}$$







Поскольку  $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -10 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} = 51 \neq 0$ , то система имеет единственное решение.

Проверим условия (9):  $|1| < |-10|$ ,  
 $|1| < |5|$ .

Следовательно, процедуры метода простой итерации и метода Зейделя не позволяют получить решение исходной системы с помощью формул (6):

$$\begin{cases} x = -9 + 10y, \\ y = 6 - 5x. \end{cases}$$

Преобразуем исходную систему путём перестановки столбцов к эквивалентному виду:

$$\begin{cases} 10y - x = 9, \\ y + 5x = 6. \end{cases}$$

При этом,  $\Delta = \begin{vmatrix} 10 & -1 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = 51 \neq 0$ .

Условия (9) будут иметь вид:

$$|10| > |-1|,$$

$$|5| > |1|.$$

Условия диагонального преобладания выполняются. Решение методами простой итерации и Зейделя можно получить с помощью формул:

$$\begin{cases} y = \frac{1}{10}(9 + x), \\ x = \frac{1}{5}(6 - y). \end{cases}$$

**Пример 2.**

Решить систему линейных алгебраических уравнений

$$\begin{cases} -x_1 - x_2 + 6x_3 = 42 \\ 6x_1 - x_2 - x_3 = 11,33 \\ -x_1 + 6x_2 - x_3 = 32 \end{cases}$$

методом простой итерации с точностью  $\varepsilon = 0,02$ . В качестве начального приближения принять числа:  $x_1^{(0)} = 1$ ;  $x_2^{(0)} = 1$ ;  $x_3^{(0)} = 1$ .

### Решение

Матрица коэффициентов исходной системы не имеет диагонального преобладания. Действительно:

$$\begin{aligned}|-1| &< |-1| + |6|; \\|-1| &< |6| + |-1|; \\|-1| &< |-1| + |6|.\end{aligned}$$

Переставив строки в исходной системе, приведём матрицу коэффициентов к диагональному преобладанию:

$$\left. \begin{aligned}6x_1 - x_2 - x_3 &= 11,33; \\-x_1 + 6x_2 - x_3 &= 32; \\-x_1 - x_2 + 6x_3 &= 42.\end{aligned} \right\}$$

Приведём эту систему к виду (6):

$$\left. \begin{aligned}x_1 &= \frac{1}{6}(11,33 + x_2 + x_3); \\x_2 &= \frac{1}{6}(32 + x_1 + x_3); \\x_3 &= \frac{1}{6}(42 + x_1 + x_2).\end{aligned} \right\}$$

Далее построим итерационный процесс.

Первая итерация:

$$\left. \begin{aligned}x_1^{(1)} &= \frac{1}{6}(11,33 + x_2^{(0)} + x_3^{(0)}) = \frac{1}{6}(11,33 + 1 + 1) = 2,222; \\x_2^{(1)} &= \frac{1}{6}(32 + x_1^{(0)} + x_3^{(0)}) = \frac{1}{6}(32 + 1 + 1) = 5,667; \\x_3^{(1)} &= \frac{1}{6}(42 + x_1^{(0)} + x_2^{(0)}) = \frac{1}{6}(42 + 1 + 1) = 7,333.\end{aligned} \right\}$$

Условие окончания итерационного процесса не выполняется:

$$\left. \begin{aligned}|x_1^{(1)} - x_1^{(0)}| &= |2,222 - 1| = 1,222 > \varepsilon = 0,02; \\|x_2^{(1)} - x_2^{(0)}| &= |5,667 - 1| = 4,667 > \varepsilon = 0,02; \\|x_3^{(1)} - x_3^{(0)}| &= |7,333 - 1| = 6,333 > \varepsilon = 0,02.\end{aligned} \right\}$$

Вторая итерация:

$$\left. \begin{aligned} x_1^{(2)} &= \frac{1}{6}(11,33 + x_2^{(1)} + x_3^{(1)}) = \frac{1}{6}(11,33 + 5,667 + 7,333) = 4,055; \\ x_2^{(2)} &= \frac{1}{6}(32 + x_1^{(1)} + x_3^{(1)}) = \frac{1}{6}(32 + 2,222 + 7,333) = 6,926; \\ x_3^{(2)} &= \frac{1}{6}(42 + x_1^{(1)} + x_2^{(1)}) = \frac{1}{6}(42 + 2,222 + 5,667) = 8,315. \end{aligned} \right\}$$

Условие окончания итерационного процесса вновь не выполняется:

$$\left. \begin{aligned} |x_1^{(2)} - x_1^{(1)}| &= |4,055 - 2,222| = 1,833 > \varepsilon = 0,02; \\ |x_2^{(2)} - x_2^{(1)}| &= |6,926 - 5,667| = 1,259 > \varepsilon = 0,02; \\ |x_3^{(2)} - x_3^{(1)}| &= |8,315 - 7,333| = 0,982 > \varepsilon = 0,02. \end{aligned} \right\}$$

Третья итерация:

$$\left. \begin{aligned} x_1^{(3)} &= \frac{1}{6}(11,33 + x_2^{(2)} + x_3^{(2)}) = \frac{1}{6}(11,33 + 6,926 + 8,315) = 4,428; \\ x_2^{(3)} &= \frac{1}{6}(32 + x_1^{(2)} + x_3^{(2)}) = \frac{1}{6}(32 + 4,055 + 8,315) = 7,395; \\ x_3^{(3)} &= \frac{1}{6}(42 + x_1^{(2)} + x_2^{(2)}) = \frac{1}{6}(42 + 4,055 + 6,926) = 8,830. \end{aligned} \right\}$$

Условие окончания итерационного процесса опять не выполняется:

$$\left. \begin{aligned} |x_1^{(3)} - x_1^{(2)}| &= |4,428 - 4,055| = 0,373 > \varepsilon = 0,02; \\ |x_2^{(3)} - x_2^{(2)}| &= |7,395 - 6,926| = 0,469 > \varepsilon = 0,02; \\ |x_3^{(3)} - x_3^{(2)}| &= |8,830 - 8,315| = 0,515 > \varepsilon = 0,02. \end{aligned} \right\}$$

Четвёртая итерация:

$$\left. \begin{aligned} x_1^{(4)} &= \frac{1}{6}(11,33 + x_2^{(3)} + x_3^{(3)}) = \frac{1}{6}(11,33 + 7,395 + 8,830) = 4,592; \\ x_2^{(4)} &= \frac{1}{6}(32 + x_1^{(3)} + x_3^{(3)}) = \frac{1}{6}(32 + 4,428 + 8,830) = 7,543; \\ x_3^{(4)} &= \frac{1}{6}(42 + x_1^{(3)} + x_2^{(3)}) = \frac{1}{6}(42 + 4,428 + 7,395) = 8,971. \end{aligned} \right\}$$

Условие окончания итерационного процесса снова не выполняется:

$$\left. \begin{aligned} |x_1^{(4)} - x_1^{(3)}| &= |4,592 - 4,428| = 0,164 > \varepsilon = 0,02; \\ |x_2^{(4)} - x_2^{(3)}| &= |7,543 - 7,395| = 0,148 > \varepsilon = 0,02; \\ |x_3^{(4)} - x_3^{(3)}| &= |8,971 - 8,830| = 0,141 > \varepsilon = 0,02. \end{aligned} \right\}$$

Пятая итерация:

$$\left. \begin{aligned} x_1^{(5)} &= \frac{1}{6}(11,33 + x_2^{(4)} + x_3^{(4)}) = \frac{1}{6}(11,33 + 7,543 + 8,971) = 4,641; \\ x_2^{(5)} &= \frac{1}{6}(32 + x_1^{(4)} + x_3^{(4)}) = \frac{1}{6}(32 + 4,592 + 8,971) = 7,594; \\ x_3^{(5)} &= \frac{1}{6}(42 + x_1^{(4)} + x_2^{(4)}) = \frac{1}{6}(42 + 4,592 + 7,543) = 9,023. \end{aligned} \right\}$$

Условие окончания итерационного процесса всё ещё не выполняется:

$$\left. \begin{aligned} |x_1^{(5)} - x_1^{(4)}| &= |4,641 - 4,592| = 0,049 > \varepsilon = 0,02; \\ |x_2^{(5)} - x_2^{(4)}| &= |7,594 - 7,543| = 0,051 > \varepsilon = 0,02; \\ |x_3^{(5)} - x_3^{(4)}| &= |9,023 - 8,971| = 0,052 > \varepsilon = 0,02. \end{aligned} \right\}$$

Шестая итерация:

$$\left. \begin{aligned} x_1^{(6)} &= \frac{1}{6}(11,33 + x_2^{(5)} + x_3^{(5)}) = \frac{1}{6}(11,33 + 7,594 + 9,023) = 4,658; \\ x_2^{(6)} &= \frac{1}{6}(32 + x_1^{(5)} + x_3^{(5)}) = \frac{1}{6}(32 + 4,641 + 9,023) = 7,611; \\ x_3^{(6)} &= \frac{1}{6}(42 + x_1^{(5)} + x_2^{(5)}) = \frac{1}{6}(42 + 4,641 + 7,594) = 9,039. \end{aligned} \right\}$$

Условие окончания итерационного процесса выполняется:

$$\left. \begin{aligned} |x_1^{(6)} - x_1^{(5)}| &= |4,658 - 4,641| = 0,017 < \varepsilon = 0,02; \\ |x_2^{(6)} - x_2^{(5)}| &= |7,611 - 7,594| = 0,017 < \varepsilon = 0,02; \\ |x_3^{(6)} - x_3^{(5)}| &= |9,039 - 9,023| = 0,016 < \varepsilon = 0,02. \end{aligned} \right\}$$

Таким образом, решение исходной системы линейных алгебраических уравнений, полученное методом итераций с точностью  $\varepsilon = 0,02$ , равно:

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= 4,658; \\ x_2 &= 7,611; \\ x_3 &= 9,039. \end{aligned} \right\}$$

Пример 3.

Решить систему линейных алгебраических уравнений

$$\left. \begin{aligned} 6x_1 - x_2 - x_3 &= 11,33 \\ -x_1 - x_2 + 6x_3 &= 42 \\ -x_1 + 6x_2 - x_3 &= 32 \end{aligned} \right\}$$

методом Зейделя с точностью  $\varepsilon = 0,02$ . В качестве начального приближения принять числа:  $x_1^{(0)} = 1$ ;  $x_2^{(0)} = 1$ ;  $x_3^{(0)} = 1$ .

Решение.

Матрица коэффициентов исходной системы не имеет диагонального преобладания. Действительно:

$$\begin{aligned} |6| &> |-1| + |-1|; \\ |-1| &< |-1| + |6|; \\ |-1| &< |-1| + |6|. \end{aligned}$$

Переставив строки в исходной системе, приведём матрицу коэффициентов к диагональному преобладанию:

$$\left. \begin{aligned} 6x_1 - x_2 - x_3 &= 11,33; \\ -x_1 + 6x_2 - x_3 &= 32; \\ -x_1 - x_2 + 6x_3 &= 42. \end{aligned} \right\}$$

Приведём эту систему к виду (6):

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= \frac{1}{6}(11,33 + x_2 + x_3); \\ x_2 &= \frac{1}{6}(32 + x_1 + x_3); \\ x_3 &= \frac{1}{6}(42 + x_1 + x_2). \end{aligned} \right\}$$

Далее построим итерационный процесс.

Первая итерация:

$$\left. \begin{aligned} x_1^{(1)} &= \frac{1}{6}(11,33 + x_2^{(0)} + x_3^{(0)}) = \frac{1}{6}(11,33 + 1 + 1) = 2,222; \\ x_2^{(1)} &= \frac{1}{6}(32 + x_1^{(1)} + x_3^{(0)}) = \frac{1}{6}(32 + 2,222 + 1) = 5,870; \\ x_3^{(1)} &= \frac{1}{6}(42 + x_1^{(1)} + x_2^{(1)}) = \frac{1}{6}(42 + 2,222 + 5,870) = 8,349. \end{aligned} \right\}$$

Условие окончания итерационного процесса не выполняется:

$$\left. \begin{aligned} |x_1^{(1)} - x_1^{(0)}| &= |2,222 - 1| = 1,222 > \varepsilon = 0,02; \\ |x_2^{(1)} - x_2^{(0)}| &= |5,870 - 1| = 4,870 > \varepsilon = 0,02; \\ |x_3^{(1)} - x_3^{(0)}| &= |8,349 - 1| = 7,349 > \varepsilon = 0,02. \end{aligned} \right\}$$

Вторая итерация:

$$\left. \begin{aligned} x_1^{(2)} &= \frac{1}{6}(11,33 + x_2^{(1)} + x_3^{(1)}) = \frac{1}{6}(11,33 + 5,870 + 8,349) = 4,258; \\ x_2^{(2)} &= \frac{1}{6}(32 + x_1^{(2)} + x_3^{(1)}) = \frac{1}{6}(32 + 4,258 + 8,349) = 7,434; \\ x_3^{(2)} &= \frac{1}{6}(42 + x_1^{(2)} + x_2^{(2)}) = \frac{1}{6}(42 + 4,258 + 7,434) = 8,949. \end{aligned} \right\}$$

Условие окончания итерационного процесса вновь не выполняется:

$$\left. \begin{aligned} |x_1^{(2)} - x_1^{(1)}| &= |4,258 - 2,222| = 2,036 > \varepsilon = 0,02; \\ |x_2^{(2)} - x_2^{(1)}| &= |7,434 - 5,870| = 1,564 > \varepsilon = 0,02; \\ |x_3^{(2)} - x_3^{(1)}| &= |8,949 - 8,349| = 0,600 > \varepsilon = 0,02. \end{aligned} \right\}$$

Третья итерация:

$$\left. \begin{aligned} x_1^{(3)} &= \frac{1}{6}(11,33 + x_2^{(2)} + x_3^{(2)}) = \frac{1}{6}(11,33 + 7,434 + 8,949) = 4,619; \\ x_2^{(3)} &= \frac{1}{6}(32 + x_1^{(3)} + x_3^{(2)}) = \frac{1}{6}(32 + 4,619 + 8,949) = 7,595; \\ x_3^{(3)} &= \frac{1}{6}(42 + x_1^{(3)} + x_2^{(3)}) = \frac{1}{6}(42 + 4,619 + 7,595) = 9,036. \end{aligned} \right\}$$

Условие окончания итерационного процесса опять не выполняется:

$$\left. \begin{aligned} |x_1^{(3)} - x_1^{(2)}| &= |4,619 - 4,258| = 0,361 > \varepsilon = 0,02; \\ |x_2^{(3)} - x_2^{(2)}| &= |7,595 - 7,434| = 0,161 > \varepsilon = 0,02; \\ |x_3^{(3)} - x_3^{(2)}| &= |9,036 - 8,949| = 0,087 > \varepsilon = 0,02. \end{aligned} \right\}$$

Четвёртая итерация:

$$\left. \begin{aligned} x_1^{(4)} &= \frac{1}{6}(11,33 + x_2^{(3)} + x_3^{(3)}) = \frac{1}{6}(11,33 + 7,595 + 9,036) = 4,660; \\ x_2^{(4)} &= \frac{1}{6}(32 + x_1^{(4)} + x_3^{(3)}) = \frac{1}{6}(32 + 4,660 + 9,036) = 7,616; \\ x_3^{(4)} &= \frac{1}{6}(42 + x_1^{(4)} + x_2^{(4)}) = \frac{1}{6}(42 + 4,660 + 7,616) = 9,046. \end{aligned} \right\}$$

Условие окончания итерационного процесса выполняется для третьего уравнения:

$$\left. \begin{aligned} |x_1^{(4)} - x_1^{(3)}| &= |4,660 - 4,619| = 0,041 > \varepsilon = 0,02; \\ |x_2^{(4)} - x_2^{(3)}| &= |7,616 - 7,595| = 0,021 < \varepsilon = 0,02; \\ |x_3^{(4)} - x_3^{(3)}| &= |9,046 - 9,036| = 0,01 < \varepsilon = 0,02. \end{aligned} \right\}$$

Пятая итерация:

$$\left. \begin{aligned} x_1^{(5)} &= \frac{1}{6}(11,33 + x_2^{(4)} + x_3^{(4)}) = \frac{1}{6}(11,33 + 7,616 + 9,046) = 4,665; \\ x_2^{(5)} &= \frac{1}{6}(32 + x_1^{(5)} + x_3^{(4)}) = \frac{1}{6}(32 + 4,665 + 9,046) = 7,619; \\ x_3^{(5)} &= \frac{1}{6}(42 + x_1^{(5)} + x_2^{(5)}) = \frac{1}{6}(42 + 4,665 + 7,619) = 9,047. \end{aligned} \right\}$$

Условие окончания итерационного процесса выполняется:

$$\left. \begin{aligned} |x_1^{(5)} - x_1^{(4)}| &= |4,665 - 4,660| = 0,005 < \varepsilon = 0,02; \\ |x_2^{(5)} - x_2^{(4)}| &= |7,619 - 7,616| = 0,003 < \varepsilon = 0,02; \\ |x_3^{(5)} - x_3^{(4)}| &= |9,047 - 9,046| = 0,001 < \varepsilon = 0,02. \end{aligned} \right\}$$

Итак, решение исходной системы линейных алгебраических уравнений, полученное методом Зейделя с точностью  $\varepsilon = 0,02$ , равно:

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= 4,665; \\ x_2 &= 7,619; \\ x_3 &= 9,047. \end{aligned} \right\}$$

### *Обусловленность систем линейных алгебраических уравнений*

Правые части  $b_j$  и коэффициенты  $a_{ij}$  системы (1) известны, вообще говоря, лишь приближённо (например, они получаются из физических измерений с некоторой степенью достоверности либо путём вычислений с неизбежным округлением). Возникает вопрос: как неточно заданные правые части и коэффициенты системы (1) влияют на получаемое решение?

Пример 4.

Рассмотрим систему линейных алгебраических уравнений:

$$\left. \begin{aligned} x_1 + 0,99x_2 &= 1,99; \\ 0,99x_1 + 0,98x_2 &= 1,97. \end{aligned} \right\}$$

Решение этой системы очевидно:  $x_1 = 1, x_2 = 1$ .

Рассмотрим далее ту же систему, но с уточнённой правой частью:

$$\left. \begin{aligned} x_1 + 0,99x_2 &= 1,989903; \\ 0,99x_1 + 0,98x_2 &= 1,970106. \end{aligned} \right\}$$

Решение этой системы:  $x_1 = 3, x_2 = -1,0203$ .

Как следует из примера, незначительная погрешность в правых частях системы привела к существенному изменению её решения.

Исследования показывают, что между величинами относительной ошибки решения  $\delta_x$ , относительной погрешности задания правых частей  $\delta_b$  и коэффициентов системы  $\delta_a$  имеют место следующие зависимости:

$$\delta_x \leq C \cdot \delta_b; \quad \delta_x \leq C \cdot \delta_a. \quad (10)$$

Здесь  $C$  – степень обусловленности.

По величине  $C$  судят о том, насколько матрица коэффициентов системы (1) – матрица  $\mathbf{A}$  – «хороша» с точки зрения вычислений:

- если  $C = 1 \div 10$  – это хорошо обусловленные системы;
- если  $C = 10 \div 10^3$  – это удовлетворительно обусловленные системы;
- если  $C = 10^3 \div 10^5$  – это плохо обусловленные системы;
- если  $C > 10^5$  – это почти вырожденные системы.

Решать системы линейных алгебраических уравнений, для которых  $C > 10^3$  любыми методами весьма затруднительно.

Непосредственное определение степени обусловленности является, в общем случае, задачей чрезвычайно сложной. Для симметричных матриц  $\mathbf{A} = \{a_{ij}\}$ , где  $a_{ij} = a_{ji}$ , степень обусловленности определяется так:

$$C = \frac{|\lambda_{\max}|}{|\lambda_{\min}|}.$$

Здесь  $\lambda_{\max}$  и  $\lambda_{\min}$  – наибольшее и наименьшее собственные значения матрицы  $\mathbf{A}$ .

Для плохо обусловленных систем, как правило, главный определитель стремится к нулю:  $\Delta \rightarrow 0$ . Плохо обусловленные системы иногда, по видимому, указывают на то, что физическая задача поставлена недостаточно корректно.

Кстати, в рассмотренном выше примере:  $C = 39600; \Delta = 0,0001$ .



### Вычисление определителей

Можно выполнять методом Гаусса, используя только прямой ход. Действительно, для верхней треугольной матрицы

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

определитель будет равен:  $\Delta = |A| = a_{11} \cdot a_{22} \cdot \dots \cdot a_{nn}$ .

Вычисление определителя  $n$ -го порядка «в лоб» сводится к разложению матрицы по элементам какой-либо строки:  $\Delta = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \dots + a_{in}A_{in}$ .

Здесь  $A_{ij}$  – адьюнкты соответствующих элементов  $a_{ij}$  матрицы  $\mathbf{A}$ :

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1,j-1} & a_{1,j+1} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2,j-1} & a_{2,j+1} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i-1,1} & a_{i-1,2} & \dots & a_{i-1,j-1} & a_{i-1,j+1} & \dots & a_{i-1,n} \\ a_{i+1,1} & a_{i+1,2} & \dots & a_{i+1,j-1} & a_{i+1,j+1} & \dots & a_{i+1,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{n,j-1} & a_{n,j+1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Разложение матрицы каждого адьюнкта выполняется до тех пор, пока не получим определители 3-го порядка. Определители третьего порядка вычисляются по правилу Саррюса (по правилу треугольника).

### Вычисление обратной матрицы

Для нахождения компонент  $x_{ij}$  матрицы  $\mathbf{A}^{-1}$ , обратной к исходной матрице  $\mathbf{A}$  с компонентами  $a_{ij}$ , используем основное соотношение:

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^{-1} = \mathbf{E}.$$

Или в развёрнутом виде:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & \dots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \dots & x_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_{n1} & x_{n2} & \dots & x_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

Вполне понятно, что каждый столбец обратной матрицы  $\mathbf{A}^{-1}$  есть решение системы линейных уравнений типа (1), правая часть которой есть

соответствующий столбец единичной матрицы  $\mathbf{E}$ . Таким образом, вычисление обратной матрицы  $\mathbf{A}^{-1}$  сводится к решению " $n$ " систем линейных уравнений, в частности, методом Гаусса.

Вычисление обратной матрицы «по определению» выполняется путём деления элементов «присоединённой» матрицы  $\tilde{\mathbf{A}}$  на определитель  $\Delta$  матрицы  $\mathbf{A}$ :

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{\tilde{\mathbf{A}}}{\Delta} = \left( \begin{array}{cccc} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1n} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{array} \right) \cdot \frac{1}{\Delta},$$

где  $A_{ij}$  – адьюнкты соответствующих элементов матрицы  $\mathbf{A}$ .

### *LDL<sup>T</sup>-разложение*

Если матрица  $\mathbf{A}$  является симметричной и её элементы, расположенные на главной диагонали, отличны от нуля, то её можно представить в виде произведения специальных матриц:

$$\mathbf{A} = \mathbf{L} \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{L}^T. \quad (11)$$

Здесь  $\mathbf{L}$  – нижняя треугольная матрица с единичными диагональными элементами:

$$\mathbf{L} = \left( \begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & 1 & 0 & \dots & 0 \\ a_{31} & a_{31} & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & 1 \end{array} \right),$$

$\mathbf{D}$  – диагональная матрица:

$$\mathbf{D} = \left( \begin{array}{cccc} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{array} \right).$$

При этом решение линейной системы (1), то есть определение вектора неизвестных  $\bar{\mathbf{X}}$ , сводится к последовательному решению систем линейных алгебраических уравнений:

$$\mathbf{L} \cdot \bar{\mathbf{Y}} = \bar{\mathbf{B}}; \quad \mathbf{D} \cdot \bar{\mathbf{Z}} = \bar{\mathbf{Y}}; \quad \mathbf{L}^T \cdot \bar{\mathbf{X}} = \bar{\mathbf{Z}}. \quad (12)$$

Таким образом, всякий метод  $LDL^T$ -разложения матрицы  $\mathbf{A}$  можно рассматривать и как алгоритм решения симметричных линейных систем.

Вообще говоря, для симметричных матриц общего вида метод  $LDL^T$ -разложения численно неустойчив. Однако, если матрица  $\mathbf{A}$  является

положительно определённой или является матрицей с диагональным преобладанием, устойчивость  $LDL^T$ -разложения гарантирована.

Следует отметить, что системы линейных уравнений, используемых в механике деформируемого твёрдого тела, как правило, имеют матрицы коэффициентов, симметричных относительно главной диагонали.

### *Уточнение решений систем линейных алгебраических уравнений*

Полученное приближенное решение системы линейных алгебраических уравнений можно уточнить. Пусть для системы

$$\mathbf{A} \cdot \bar{\mathbf{X}} = \bar{\mathbf{B}} \quad (13)$$

найден приближенное решение  $\bar{\mathbf{X}}_0$ . При этом точное решение системы (2) будет равно:

$$\bar{\mathbf{X}} = \bar{\mathbf{X}}_0 + \bar{\boldsymbol{\delta}}. \quad (14)$$

Здесь  $\bar{\boldsymbol{\delta}} = (\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_n)^T$  – поправки для решения  $\bar{\mathbf{X}}_0$ .

Подставив (14) в (13), получим:

$$\mathbf{A} \cdot (\bar{\mathbf{X}}_0 + \bar{\boldsymbol{\delta}}) = \mathbf{A} \cdot \bar{\mathbf{X}}_0 + \mathbf{A} \cdot \bar{\boldsymbol{\delta}} = \bar{\mathbf{B}}$$

Отсюда  $\mathbf{A} \cdot \bar{\boldsymbol{\delta}} = \bar{\mathbf{B}} - \mathbf{A} \cdot \bar{\mathbf{X}}_0 = \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}. \quad (15)$

Здесь  $\bar{\boldsymbol{\varepsilon}} = \bar{\mathbf{B}} - \mathbf{A} \cdot \bar{\mathbf{X}}_0$  – вектор невязки для приближённого решения  $\bar{\mathbf{X}}_0$ .

Таким образом, для определения вектора поправки  $\bar{\boldsymbol{\delta}}$  к приближённому решению  $\bar{\mathbf{X}}_0$  нужно решить систему линейных алгебраических уравнений

$$\mathbf{A} \cdot \bar{\boldsymbol{\delta}} = \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}. \quad (16)$$

После этого уточнённое решение системы (13) будет определяться по формуле (14).

### **Пример 5.**

Пусть приближённое решение системы линейных алгебраических уравнений

$$\left. \begin{aligned} x_1 - 2x_2 + 4x_3 &= 16 \\ x_1 + x_2 - 3x_3 &= 12 \\ 4x_1 + 5x_2 + x_3 &= 8 \end{aligned} \right\}$$

равно  $x_1^{(0)} = 11,65$ ;  $x_2^{(0)} = -7,20$ ;  $x_3^{(0)} = -2,52$ .

Требуется уточнить это приближённое решение.

**Решение.**

Вычисляем вектор невязки (15):  $\bar{\boldsymbol{\varepsilon}} = \bar{\mathbf{B}} - \mathbf{A} \cdot \bar{\mathbf{X}}_0$ , то есть

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16 \\ 12 \\ 8 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 1 & 1 & -3 \\ 4 & 5 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 11,65 \\ -7,20 \\ -2,52 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,03 \\ -0,01 \\ -0,08 \end{pmatrix}.$$

Вычисляем вектор поправки  $\bar{\delta}$ , решая систему (16):  $\mathbf{A} \cdot \bar{\delta} = \bar{\varepsilon}$ , то есть

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 1 & 1 & -3 \\ 4 & 5 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \\ \delta_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,03 \\ -0,01 \\ -0,08 \end{pmatrix}.$$

В итоге получаем:  $\delta_1 = -0,476$ ;  $\delta_2 = 0,309$ ;  $\delta_3 = 0,281$ .

Уточнённое решение исходной системы вычисляем по формуле (14):

$$\begin{aligned} x_1 &= x_1^{(0)} + \delta_1 = 11,65 - 0,476 = 11,174; \\ x_2 &= x_2^{(0)} + \delta_2 = -7,20 + 0,309 = -6,891; \\ x_3 &= x_3^{(0)} + \delta_3 = -2,52 + 0,281 = -2,239. \end{aligned}$$

Для определения возможной ошибки  $\overline{\Delta \mathbf{X}}$  решения  $\bar{\mathbf{X}}$  линейной системы (13), у которой матрица коэффициентов  $\mathbf{A}$  и вектор правых частей  $\bar{\mathbf{B}}$  заданы с известными погрешностями  $\Delta \mathbf{A}$  и  $\overline{\Delta \mathbf{B}}$ , имеем:

$$(\mathbf{A} + \Delta \mathbf{A}) \cdot (\bar{\mathbf{X}} + \overline{\Delta \mathbf{X}}) = \bar{\mathbf{B}} + \overline{\Delta \mathbf{B}}$$

Раскрыв скобки, получим:

$$\mathbf{A} \cdot \bar{\mathbf{X}} + \Delta \mathbf{A} \cdot \bar{\mathbf{X}} + \mathbf{A} \cdot \overline{\Delta \mathbf{X}} + \Delta \mathbf{A} \cdot \overline{\Delta \mathbf{X}} = \bar{\mathbf{B}} + \overline{\Delta \mathbf{B}}.$$

Произведением  $\Delta \mathbf{A} \cdot \overline{\Delta \mathbf{X}}$  пренебрегаем в силу его малости. Так как вектор  $\bar{\mathbf{X}}$  – решение системы (13), то  $\mathbf{A} \cdot \bar{\mathbf{X}} = \bar{\mathbf{B}}$ . В результате получаем:

$$\mathbf{A} \cdot \overline{\Delta \mathbf{X}} = \overline{\Delta \mathbf{B}} - \Delta \mathbf{A} \cdot \bar{\mathbf{X}}. \quad (16)$$

В системе (16) вектор правой части  $\overline{\Delta \mathbf{B}} - \Delta \mathbf{A} \cdot \bar{\mathbf{X}}$  известен. Решая систему (16), находим вектор возможной ошибки  $\overline{\Delta \mathbf{X}}$  решения  $\bar{\mathbf{X}}$  линейной системы (13), заданной с известными погрешностями.

**Пример 6.**

В системе линейных алгебраических уравнений

$$\left. \begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 4x_3 &= 3 \\ 2x_1 + 4x_2 + 6x_3 &= 2 \\ 4x_1 + 6x_2 + 8x_3 &= 5 \end{aligned} \right\}$$

матрица коэффициентов  $\mathbf{A}$  задана с погрешностью 0,01; вектор правых частей – с погрешностью 0,02.





$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} \Delta x_1 + \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \Delta x_2 + \dots + \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \Delta x_n = -f_1(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \dots, x_n^{(0)}); \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} \Delta x_1 + \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \Delta x_2 + \dots + \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \Delta x_n = -f_2(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \dots, x_n^{(0)}); \\ \dots; \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} \Delta x_1 + \frac{\partial f_n}{\partial x_2} \Delta x_2 + \dots + \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \Delta x_n = -f_n(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \dots, x_n^{(0)}). \end{array} \right. \quad (5)$$

Найденные значения  $\Delta x_i$  в дальнейшем используются как поправки к исходному приближенному решению:

$$\left. \begin{array}{l} x_1^{(1)} = x_1^{(0)} + \Delta x_1, \\ x_2^{(1)} = x_2^{(0)} + \Delta x_2, \\ \dots, \\ x_n^{(1)} = x_n^{(0)} + \Delta x_n. \end{array} \right\} \quad (6)$$

Условие окончания итерационного процесса имеет вид:

$$|\Delta x_i| \leq \varepsilon, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (7)$$

**Пример.**

Методом Ньютона найти решение системы нелинейных алгебраических уравнений

$$\left. \begin{array}{l} x^2 + y + z - 1 = 0 \\ x^2 + y^2 + z - 2 = 0 \\ x^2 + y^2 + z^2 - 3 = 0 \end{array} \right\}$$

с точностью  $\varepsilon = 0,01$  исходя из начального приближения решения  $x_0 = 1; y_0 = 1; z_0 = 1$ .

**Решение.**

Исходная система, приведённая к виду (5):

$$\left. \begin{array}{l} 2x \cdot \Delta x + 1 \cdot \Delta y + 1 \cdot \Delta z = -(x^2 + y + z - 1) \\ 2x \cdot \Delta x + 2y \cdot \Delta y + 1 \cdot \Delta z = -(x^2 + y^2 + z - 2) \\ 2x \cdot \Delta x + 2y \cdot \Delta y + 2z \cdot \Delta z = -(x^2 + y^2 + z^2 - 3) \end{array} \right\} \quad (*)$$

Первая итерация:  $x_0 = 1; y_0 = 1; z_0 = 1$ , то есть система (\*)

$$\left. \begin{array}{l} 2 \cdot \Delta x + 1 \cdot \Delta y + 1 \cdot \Delta z = -2 \\ 2 \cdot \Delta x + 2 \cdot \Delta y + 1 \cdot \Delta z = -1 \\ 2 \cdot \Delta x + 2 \cdot \Delta y + 2 \cdot \Delta z = 0 \end{array} \right\}$$

имеет решение:  $\Delta x = -2; \Delta y = 1; \Delta z = 1$ .

Условие окончания итерационного процесса не выполняется:

$$|\Delta x| = 2 > \varepsilon = 0,01; \quad |\Delta y| = 1 > \varepsilon = 0,01; \quad |\Delta z| = 1 > \varepsilon = 0,01.$$

Вычисляем новое приближение решения:

$$x_1 = x_0 + \Delta x = 1 - 2 = -1;$$

$$y_1 = y_0 + \Delta y = 1 + 1 = 2;$$

$$z_1 = z_0 + \Delta z = 1 + 1 = 2.$$

Вторая итерация:  $x_1 = -1$ ;  $y_1 = 2$ ;  $z_1 = 2$ , то есть система (\*)

$$\left. \begin{aligned} -2 \cdot \Delta x + 1 \cdot \Delta y + 1 \cdot \Delta z &= -4 \\ -2 \cdot \Delta x + 4 \cdot \Delta y + 1 \cdot \Delta z &= -5 \\ -2 \cdot \Delta x + 4 \cdot \Delta y + 4 \cdot \Delta z &= -6 \end{aligned} \right\}$$

имеет решение:  $\Delta x = 1,667$ ;  $\Delta y = -0,333$ ;  $\Delta z = -0,333$ .

Условие окончания итерационного процесса не выполняется:

$$|\Delta x| = 1,667 > \varepsilon = 0,01; \quad |\Delta y| = 0,333 > \varepsilon = 0,01; \quad |\Delta z| = 0,333 > \varepsilon = 0,01.$$

Вычисляем новое приближение решения:

$$x_2 = x_1 + \Delta x = -1 + 1,667 = 0,667;$$

$$y_2 = y_1 + \Delta y = 2 - 0,333 = 1,667;$$

$$z_2 = z_1 + \Delta z = 2 - 0,333 = 1,667.$$

Третья итерация:  $x_2 = 0,667$ ;  $y_2 = 1,667$ ;  $z_2 = 1,667$ , то есть система (\*)

$$\left. \begin{aligned} 1,334 \cdot \Delta x + 1 \cdot \Delta y + 1 \cdot \Delta z &= -2,779 \\ 1,334 \cdot \Delta x + 3,334 \cdot \Delta y + 1 \cdot \Delta z &= -2,891 \\ 1,334 \cdot \Delta x + 3,334 \cdot \Delta y + 3,334 \cdot \Delta z &= -3,003 \end{aligned} \right\}$$

имеет решение:  $\Delta x = 2,011$ ;  $\Delta y = -0,048$ ;  $\Delta z = -0,048$ .

Условие окончания итерационного процесса не выполняется:

$$|\Delta x| = 2,011 > \varepsilon = 0,01; \quad |\Delta y| = 0,048 > \varepsilon = 0,01; \quad |\Delta z| = 0,048 > \varepsilon = 0,01.$$

Вычисляем новое приближение решения:

$$x_3 = x_2 + \Delta x = 0,667 + 2,011 = 2,678;$$

$$y_3 = y_2 + \Delta y = 1,667 - 0,048 = 1,619;$$

$$z_3 = z_2 + \Delta z = 1,667 - 0,048 = 1,619.$$

Четвёртая итерация:  $x_3 = 2,678$ ;  $y_3 = 1,619$ ;  $z_3 = 1,619$ , то есть система (\*)

$$\left. \begin{aligned} 5,356 \cdot \Delta x + 1 \cdot \Delta y + 1 \cdot \Delta z &= -9,410 \\ 5,356 \cdot \Delta x + 3,238 \cdot \Delta y + 1 \cdot \Delta z &= -9,412 \\ 5,356 \cdot \Delta x + 3,238 \cdot \Delta y + 3,238 \cdot \Delta z &= -9,414 \end{aligned} \right\}$$

имеет решение:  $\Delta x = -1,575$ ;  $\Delta y = -0,0009$ ;  $\Delta z = -0,0009$ .



Условие окончания итерационного процесса не выполняется:  
 $|\Delta x| = 1,575 > \varepsilon = 0,01$ ;  $|\Delta y| = 0,0009 < \varepsilon = 0,01$ ;  $|\Delta z| = 0,0009 < \varepsilon = 0,01$ .

Вычисляем новое приближение решения:

$$\begin{aligned}x_4 &= x_3 + \Delta x = 2,678 - 1,575 = 1,103; \\y_4 &= y_3 + \Delta y = 1,619 - 0,0009 = 1,618; \\z_4 &= z_3 + \Delta z = 1,619 - 0,0009 = 1,618.\end{aligned}$$

Пятая итерация:  $x_4 = 1,103$ ;  $y_4 = 1,618$ ;  $z_4 = 1,618$ , то есть система (\*)

$$\left. \begin{aligned}2,206 \cdot \Delta x + 1 \cdot \Delta y + 1 \cdot \Delta z &= -3,453 \\2,206 \cdot \Delta x + 3,236 \cdot \Delta y + 1 \cdot \Delta z &= -3,453 \\2,206 \cdot \Delta x + 3,236 \cdot \Delta y + 3,236 \cdot \Delta z &= -3,452\end{aligned} \right\}$$

имеет решение:  $\Delta x = -1,565$ ;  $\Delta y = 0,0$ ;  $\Delta z = 0,0$ .

Условие окончания итерационного процесса не выполняется:

$$|\Delta x| = 1,575 > \varepsilon = 0,01; \quad |\Delta y| = 0,0009 < \varepsilon = 0,01; \quad |\Delta z| = 0,0009 < \varepsilon = 0,01.$$

Ограничиваясь пятью итерациями, решение исходной системы нелинейных алгебраических уравнений, полученное методом Ньютона с точностью  $\varepsilon = 0,01$ , равно:

$$\begin{aligned}x &= x_4 + \Delta x = 1,103 - 1,565 = -0,462; \\y &= y_4 + \Delta y = 1,618 + 0,0 = 1,618; \\z &= z_4 + \Delta z = 1,618 + 0,0 = 1,618.\end{aligned}$$

## §5. Системы уравнений специального вида

Системами линейных алгебраических уравнений специального вида будем называть такие системы уравнений, у которых матрица коэффициентов  $\mathbf{A}$ , во-первых, имеет много нулевых элементов, во-вторых, ненулевые элементы расположены специальным образом. Сюда относятся:

1. Системы уравнений с трёхдиагональной матрицей коэффициентов:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} x & x & & & \\ & x & x & x & \\ & & x & x & x \\ & & & x & x & x \\ & & & & x & x \end{pmatrix}.$$



**Метод прогонки** является точным методом решения систем линейных алгебраических уравнений специального вида, таких, у которых матрица коэффициентов  $A$  является трёхдиагональной:

$$\left. \begin{array}{l} c_1x_1 + b_1x_2 + \phantom{c_2x_2 + b_2x_3 +} = f_1 \\ a_2x_1 + c_2x_2 + b_2x_3 + \phantom{c_3x_3 + b_3x_4 +} = f_2 \\ \phantom{a_2x_1 +} + a_3x_2 + c_3x_3 + b_3x_4 + \phantom{c_4x_4 + b_4x_5 +} = f_3 \\ \phantom{a_2x_1 +} \phantom{+ a_3x_2 +} + a_4x_3 + c_4x_4 + b_4x_5 + \phantom{c_5x_5 + b_5x_6 +} = f_4 \\ \dots \phantom{a_2x_1 +} \dots \phantom{+ a_3x_2 +} \dots \phantom{+ a_4x_3 +} \dots \phantom{+ a_5x_4 +} \dots \phantom{+ a_6x_5 +} \dots \phantom{+ a_7x_6 +} \dots \phantom{+ a_8x_7 +} \dots \phantom{+ a_9x_8 +} \dots \phantom{+ a_{10}x_9 +} = f_5 \\ \phantom{a_2x_1 +} \phantom{+ a_3x_2 +} \phantom{+ a_4x_3 +} \phantom{+ a_5x_4 +} \phantom{+ a_6x_5 +} \phantom{+ a_7x_6 +} \phantom{+ a_8x_7 +} + a_{n-1}x_{n-2} + c_{n-1}x_{n-1} + b_{n-1}x_n = f_{n-1} \\ \phantom{a_2x_1 +} \phantom{+ a_3x_2 +} \phantom{+ a_4x_3 +} \phantom{+ a_5x_4 +} \phantom{+ a_6x_5 +} \phantom{+ a_7x_6 +} \phantom{+ a_8x_7 +} \phantom{+ a_9x_8 +} + a_nx_{n-1} + c_nx_n = f_n \end{array} \right\} (1)$$

Решение системы с трёхдиагональной матрицей коэффициентов выполняется с использованием рекуррентных соотношений. Для их получения выполним следующее.

Из 1-го уравнения найдём:  $x_1 = -\frac{b_1}{c_1}x_2 + \frac{f_1}{c_1}$ . Пусть  $k_1 = -\frac{b_1}{c_1}$ ,  $m_1 = \frac{f_1}{c_1}$ .

Тогда  $x_1 = k_1x_2 + m_1$ . (а)

Из 2-го уравнения с учётом формулы (а) получим:  $a_2(k_1x_2 + m_1) + c_2x_2 + b_2x_3 = f_2$ , то есть  $x_2 = -\frac{b_2}{a_2k_1 + c_2}x_3 + \frac{f_2 - a_2m_1}{a_2k_1 + c_2}$ .

Пусть  $k_2 = -\frac{b_2}{a_2k_1 + c_2}$ ,  $m_2 = \frac{f_2 - a_2m_1}{a_2k_1 + c_2}$ . Тогда  $x_2 = k_2x_3 + m_2$ .

Из 3-го уравнения по аналогии получим:  $x_3 = k_3x_4 + m_3$ , где  $k_3 = -\frac{b_3}{a_3k_2 + c_3}$ ,  $m_3 = \frac{f_3 - a_3m_2}{a_3k_2 + c_3}$ .

Таким образом, для  $i$ -го уравнения будем иметь:

$$x_i = k_i x_{i+1} + m_i, \quad (б)$$

где  $k_i = -\frac{b_i}{a_i k_{i-1} + c_i}$ ,  $m_i = \frac{f_i - a_i m_{i-1}}{a_i k_{i-1} + c_i}$ .

Формулы (б) справедливы для  $i = 2, 3, \dots, n - 1$ . Коэффициенты  $k_i$  и  $m_i$  вычисляются через  $k_{i-1}$  и  $m_{i-1}$ . Значит, зная  $k_1$  и  $m_1$  (определяются из 1-го уравнения системы (1)), можно последовательно определить  $k_2, m_2; k_3, m_3; \dots; k_{n-1}, m_{n-1}$ . Этот процесс рекуррентного определения коэффициентов  $k_i$  и  $m_i$  называется *прямым ходом прогонки*.

Уравнение (б) при  $i = n - 1$  получает вид:

$$x_{n-1} = k_{n-1}x_n + m_{n-1}. \quad (в)$$

Подставив (в) в последнее уравнение системы (1), получим:

$$x_n = \frac{f_n - a_n m_{n-1}}{a_n k_{n-1} + c_n}. \quad (\text{г})$$

С учётом (г) из рекуррентного соотношения (б) можно определить, с учётом формулы (а), все значения  $x_i$ ,  $i=1, 2, \dots, n$ , то есть найти решение системы (1). Процесс рекуррентного определения решения системы (1) называется *обратным ходом прогонки*.

Если матрица коэффициентов системы (1) имеет диагональное преобладание, то есть  $|c_i| \geq |a_i| + |b_i|$ ,  $i=1, 2, \dots, n$ , то метод прогонки является устойчивым.

К системам с трёхдиагональной матрицей коэффициентов сводятся конечные разностные методы решения краевых задач для обыкновенных дифференциальных уравнений, в частности второго порядка.

Следует отметить, что симметричные матрицы  $\mathbf{A}$  приводятся к трёхдиагональному виду путём эквивалентных преобразований. Одна из таких процедур была предложена Парлетом и Ридом в 1970г. (см. Икрамов Х.А. Численные методы для симметричных линейных систем. М.: Наука, 1988). Последовательность соответствующих эквивалентных преобразований приведена ниже:

$$\begin{pmatrix} x & x & x & x & x \\ x & x & x & x & x \\ x & x & x & x & x \\ x & x & x & x & x \\ x & x & x & x & x \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} x & x & & & \\ x & x & x & x & x \\ & x & x & x & x \\ & & x & x & x \\ & & & x & x & x \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} x & x & & & \\ x & x & x & & \\ & x & x & x & x \\ & & x & x & x \\ & & & x & x & x \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} x & x & & & \\ x & x & x & & \\ & x & x & x & \\ & & x & x & x \\ & & & x & x \end{pmatrix}$$

Компактная схема трехдиагонализации предложена Аасеном 1971г. Это один из самых эффективных симметричных алгоритмов.

Метод блочной диагонализации с полным выбором использует приведение матрицы  $\mathbf{A}$ , системы уравнений к блочно-диагональному виду с диагональными блоками первого и второго порядка (метод предложен Парлетом и Банчем в 1971г.)

Существуют и другие методы диагонализации исходной симметричной матрицы  $\mathbf{A}$ . Например, метод нетреугольной диагонализации (Дакс и Каниэл, 1977г.)

Для систем уравнений с ленточной матрицей коэффициентов используется метод  $LDL^T$ -разложения при условии, что не выполняются перестановки строк или столбцов. При этом "ленточность" матрицы  $\mathbf{A}$  не теряется.



Поскольку продольные силы, зависящие от внешней нагрузки, связаны между собой:  $N_2 = k \cdot N_1$ , то условие равенства нулю главного определителя системы канонических уравнений позволяет определить усилия в стойках  $N_1$  и  $N_2$  в момент потери устойчивости.

Итак, не решая систему канонических уравнений метода перемещений, то есть не определяя угловые и линейные перемещения узлов рамы в момент потери устойчивости, находим искомые величины – значения критических сил.

**Пример 2. Определение главных напряжений.**

На произвольной наклонной площадке, ориентация которой задаётся нормалью  $\bar{v}$  с направляющими косинусами  $l, m, n$ , связь между проекциями внешней нагрузки  $p_{vx}, p_{vy}, p_{vz}$  на оси декартовой системы координат, действующими на этой площадке, и внутренними напряжениями  $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{zx}$ , действующими на площадках, совпадающих с плоскостями координатных граней, определяется соотношениями (рис. 9):

$$\left. \begin{aligned} p_{vx} &= \sigma_x \cdot l + \tau_{yx} \cdot m + \tau_{zx} \cdot n, \\ p_{vy} &= \tau_{xy} \cdot l + \sigma_y \cdot m + \tau_{zy} \cdot n, \\ p_{vz} &= \tau_{xz} \cdot l + \tau_{yz} \cdot m + \sigma_z \cdot n. \end{aligned} \right\} \quad (a)$$

Площадки, на которых действуют только нормальные напряжения, называются главными. Пусть площадка  $a, b, c$  – главная; её ориентация в пространстве задаётся направляющими косинусами  $l, m, n$  нормали  $\bar{v}$ .

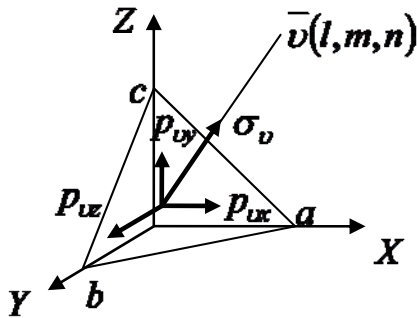


Рис. 9

Поскольку площадка  $a, b, c$  – главная, то касательное напряжение  $\tau_v$ , действующее на этой площадке, будет равно нулю. Тогда полное напряжение, действующее по площадке  $a, b, c$ , совпадает с направлением нормали  $\bar{v}$  и равно главному нормальному напряжению  $\sigma_v$  на этой площадке.

Из рис. 9 следует, что

$$p_{vx} = \sigma_v \cdot l, \quad p_{vy} = \sigma_v \cdot m, \quad p_{vz} = \sigma_v \cdot n. \quad (б)$$

Сопоставив (а) и (б), получим:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_v \cdot l &= \sigma_x \cdot l + \tau_{yx} \cdot m + \tau_{zx} \cdot n, \\ \sigma_v \cdot m &= \tau_{xy} \cdot l + \sigma_y \cdot m + \tau_{zy} \cdot n, \\ \sigma_v \cdot n &= \tau_{xz} \cdot l + \tau_{yz} \cdot m + \sigma_z \cdot n. \end{aligned} \right\}$$

Приводя в полученной системе уравнений подобные слагаемые, будем иметь:

$$\left. \begin{aligned} (\sigma_x - \sigma_v) \cdot l + \tau_{yx} \cdot m + \tau_{zx} \cdot n &= 0, \\ \tau_{xy} \cdot l + (\sigma_y - \sigma_v) \cdot m + \tau_{zy} \cdot n &= 0, \\ \tau_{xz} \cdot l + \tau_{yz} \cdot m + (\sigma_z - \sigma_v) \cdot n &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (\text{в})$$

В системе (в) определению подлежат 4 величины  $\sigma_v, l, m, n$ . Её можно рассматривать как систему линейных однородных алгебраических уравнений относительно трёх неизвестных  $l, m, n$ . Неизвестное главное напряжение  $\sigma_v$  входит в коэффициенты системы (в). Главное напряжение имеет физический смысл только на некоторой площадке, ориентация которой устанавливается направляющими косинусами  $l, m, n$  её нормали. Поскольку  $l^2 + m^2 + n^2 = 1$ , то тривиальное решение системы (в) исключается. Следовательно, из условия

$$\Delta = \begin{vmatrix} \sigma_x - \sigma_v & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y - \sigma_v & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z - \sigma_v \end{vmatrix} = 0 \quad (\text{г})$$

определяются главные напряжения  $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$ . Кстати, уравнение (г) – третьего порядка, имеющего три вещественных корня. Подставляя эти корни по очереди в систему (в) и используя дополнительное соотношение  $l^2 + m^2 + n^2 = 1$ , получаем три системы линейных алгебраических уравнений для определения направляющих конусов. Каждая из этих систем определяет свой набор направляющих косинусов, задающих направление трёх нормалей к главным площадкам. В курсе теории упругости показано, что эти три нормали являются взаимно ортогональными. Таким образом, в любой точке деформированного тела имеем три взаимно перпендикулярные главные площадки, на которых действуют три главных нормальных напряжения.

Условия, при которых определитель матрицы коэффициентов однородной системы линейных алгебраических уравнений становится равным нулю, называются *собственными значениями* матрицы; соответствующие ненулевые решения однородной системы линейных уравнений называются *собственными векторами*.

**З а м е ч а н и е.** Собственные векторы определяются, как правило, с точностью до постоянного множителя.

## §7. Собственные значения и собственные векторы матриц

Каждая матрица  $n$ -го порядка имеет " $n$ " собственных значений  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  и " $n$ " соответствующих собственных векторов:

$$\begin{aligned}\bar{\mathbf{u}}_1 &= (x_{11}, x_{21}, \dots, x_{n1})^T; \\ \bar{\mathbf{u}}_2 &= (x_{12}, x_{22}, \dots, x_{n2})^T; \\ &\dots\dots\dots; \\ \bar{\mathbf{u}}_n &= (x_{1n}, x_{2n}, \dots, x_{nn})^T.\end{aligned}$$

По определению собственные значения и собственные векторы удовлетворяют соотношениям:

$$\mathbf{A} \cdot \bar{\mathbf{u}}_1 = \lambda_1 \bar{\mathbf{u}}_1; \quad \mathbf{A} \cdot \bar{\mathbf{u}}_2 = \lambda_2 \bar{\mathbf{u}}_2; \quad \dots; \quad \mathbf{A} \cdot \bar{\mathbf{u}}_n = \lambda_n \bar{\mathbf{u}}_n. \quad (1)$$

В развёрнутом виде формулы (1) записываются так:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_{1k} \\ x_{2k} \\ \dots \\ x_{nk} \end{pmatrix} = \lambda_k \begin{pmatrix} x_{1k} \\ x_{2k} \\ \dots \\ x_{nk} \end{pmatrix}, \quad k = 1, 2, \dots, n. \quad (2)$$

Зависимость (2) приводит к системе линейных однородных алгебраических уравнений:

$$\left. \begin{aligned} (a_{11} - \lambda_k) \cdot x_{1k} + a_{12} \cdot x_{2k} + \dots + a_{1n} \cdot x_{nk} &= 0, \\ a_{21} \cdot x_{1k} + (a_{22} - \lambda_k) \cdot x_{2k} + \dots + a_{2n} \cdot x_{nk} &= 0, \\ \dots\dots\dots, \\ a_{n1} \cdot x_{1k} + a_{n2} \cdot x_{2k} + \dots + (a_{nn} - \lambda_k) \cdot x_{nk} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

Смысл выражений (1) заключается в том, что собственные векторы – это такие векторы, которые матрица преобразует в коллинеарные им векторы; при этом соответствующие им собственные значения являются коэффициентами растяжения длины исходного собственного вектора.

Для определения всех собственных значений необходимо, как это следует из системы (3), найти корни характеристического многочлена:

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix} = 0. \quad (4)$$



Уравнение (4) называется “вековым”.

Для больших "n" развертывание векового уравнения – уже проблема.

В развёрнутом виде левая часть уравнения (4) представляет собой полином  $n$ -й степени относительно  $\lambda$ :

$$(-1)^n \left[ \lambda^n - \sigma_1 \lambda^{n-1} + \sigma_2 \lambda^{n-2} - \dots + (-1)^n \sigma_n \right] = 0. \quad (5)$$

Здесь  $\sigma_1 = \sum_{\alpha=1}^n a_{\alpha\alpha}$  – сумма всех диагональных миноров первого порядка матрицы **A**;

$\sigma_2 = \sum_{\alpha < \beta} \begin{vmatrix} a_{\alpha\alpha} & a_{\alpha\beta} \\ a_{\beta\alpha} & a_{\beta\beta} \end{vmatrix}$  – сумма всех диагональных миноров второго порядка матрицы **A**;

$\sigma_3 = \sum_{\alpha < \beta < \gamma} \begin{vmatrix} a_{\alpha\alpha} & a_{\alpha\beta} & a_{\alpha\gamma} \\ a_{\beta\alpha} & a_{\beta\beta} & a_{\beta\gamma} \\ a_{\gamma\alpha} & a_{\gamma\beta} & a_{\gamma\gamma} \end{vmatrix}$  – сумма всех диагональных миноров третьего порядка матрицы **A**;

И так далее. Наконец,

$$\sigma_n = \Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \quad \text{– определитель матрицы } \mathbf{A}.$$

Таким образом, на основании сказанного заключаем, что непосредственное вычисление коэффициентов векового уравнения чрезвычайно затруднительно. Поэтому созданы специальные методы развёртывания векового определителя: метод Данилевского А.М., метод Крылова А.Н., метод Леверрье, метод неопределённых коэффициентов, метод интерполяции и др. Рассмотрим более подробно некоторые из них.

### **I. Метод Данилевского А.М.**

Сущность метода заключается в приведении векового определителя (4) к нормальному виду Фробениуса:

$$\begin{vmatrix} p_1 - \lambda & p_2 & p_3 & \dots & p_n \\ 1 & -\lambda & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & -\lambda & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -\lambda \end{vmatrix} = 0. \quad (6)$$



Пример.

Методом А.Н. Крылова найти характеристический полином матрицы [9]

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Решение.

Выберем начальный вектор  $\mathbf{y}^{(0)} = (1 \ 0 \ 0 \ 0)^T$ .

Пользуясь формулами (10), найдём:

$$\mathbf{y}^{(1)} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{y}^{(0)} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix};$$

$$\mathbf{y}^{(2)} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{y}^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 30 \\ 22 \\ 18 \\ 20 \end{pmatrix};$$

$$\mathbf{y}^{(3)} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{y}^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 30 \\ 22 \\ 18 \\ 20 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 208 \\ 178 \\ 192 \\ 242 \end{pmatrix};$$

$$\mathbf{y}^{(4)} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{y}^{(3)} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 208 \\ 178 \\ 192 \\ 242 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2108 \\ 1704 \\ 1656 \\ 1992 \end{pmatrix}.$$

Составим систему (9):

$$\begin{pmatrix} y_1^{(3)} & y_1^{(2)} & y_1^{(1)} & y_1^{(0)} \\ y_2^{(3)} & y_2^{(2)} & y_2^{(1)} & y_2^{(0)} \\ y_3^{(3)} & y_3^{(2)} & y_3^{(1)} & y_3^{(0)} \\ y_4^{(3)} & y_4^{(2)} & y_4^{(1)} & y_4^{(0)} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ p_4 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} y_1^{(4)} \\ y_2^{(4)} \\ y_3^{(4)} \\ y_4^{(4)} \end{pmatrix},$$

которая, в нашем случае, имеет вид:

$$\begin{pmatrix} 208 & 30 & 1 & 1 \\ 178 & 22 & 2 & 0 \\ 192 & 18 & 3 & 0 \\ 242 & 20 & 4 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ p_4 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} 2108 \\ 1704 \\ 1656 \\ 1992 \end{pmatrix}.$$

Отсюда получаем:  $p_1 = -4$ ;  $p_2 = -40$ ;  $p_3 = -56$ ;  $p_4 = -20$ .

Следовательно, характеристический полином исходной матрицы имеет вид:  $\lambda^4 - 4\lambda^3 - 40\lambda^2 - 56\lambda - 20 = 0$ .

### III. Метод Леве́рье.

Основан на формулах Ньютона для сумм степеней корней алгебраического уравнения. Алгоритм метода Леве́рье следующий:

1. Вычисляются степени данной матрицы  $\mathbf{A}$ :

$$\begin{aligned} \mathbf{A}^1 &= \mathbf{A}, \\ \mathbf{A}^2 &= \mathbf{A} \cdot \mathbf{A}, \\ \mathbf{A}^3 &= \mathbf{A}^2 \cdot \mathbf{A}, \\ &\dots\dots\dots, \\ \mathbf{A}^n &= \mathbf{A}^{n-1} \cdot \mathbf{A}. \end{aligned} \tag{11}$$

2. Вычисляются суммы элементов главных диагоналей матриц

$$\mathbf{A}^k, \quad k = 1, 2, \dots, n.$$

$$\begin{aligned} S_1 &= \sum_{i=1}^n a_{ii} \quad (\text{для матрицы } \mathbf{A}^1); \\ S_2 &= \sum_{i=1}^n a_{ii} \quad (\text{для матрицы } \mathbf{A}^2); \\ &\dots\dots\dots; \\ S_n &= \sum_{i=1}^n a_{ii} \quad (\text{для матрицы } \mathbf{A}^n); \end{aligned} \tag{12}$$

3. Вычисляются коэффициенты  $p_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$  характеристического полинома исходной матрицы  $\mathbf{A}$

$$\lambda^n + p_1\lambda^{n-1} + p_2\lambda^{n-2} + \dots + p_n = 0$$

по формулам:

$$\begin{aligned} p_1 &= -S_1, \\ p_2 &= -\frac{1}{2}(S_2 + p_1S_1), \\ &\dots\dots\dots, \\ p_n &= -\frac{1}{2}(S_n + p_1S_{n-1} + \dots + p_{n-1}S_1). \end{aligned} \tag{13}$$

Несмотря на трудоёмкость, метод Леверрье обладает рядом достоинств: несложная схема вычислений и отсутствие исключительных случаев.

Пример.

Методом Леверрье найти характеристический полином матрицы [9]

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Решение.

Образуем степени  $\mathbf{A}^k$  ( $k = 2, 3, 4$ ) матрицы  $\mathbf{A}$ :

$$\mathbf{A}^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 30 & 22 & 18 & 20 \\ 22 & 18 & 16 & 18 \\ 18 & 16 & 18 & 22 \\ 20 & 18 & 22 & 30 \end{pmatrix};$$

$$\mathbf{A}^3 = \begin{pmatrix} 30 & 22 & 18 & 20 \\ 22 & 18 & 16 & 18 \\ 18 & 16 & 18 & 22 \\ 20 & 18 & 22 & 30 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 208 & 178 & 192 & 242 \\ 178 & 148 & 154 & 192 \\ 192 & 154 & 148 & 178 \\ 242 & 192 & 178 & 208 \end{pmatrix};$$

$$\mathbf{A}^4 = \begin{pmatrix} 208 & 178 & 192 & 242 \\ 178 & 148 & 154 & 192 \\ 192 & 154 & 148 & 178 \\ 242 & 192 & 178 & 208 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2108 & 1704 & 1656 & 1992 \\ 1704 & 1388 & 1368 & 1656 \\ 1656 & 1368 & 1388 & 1704 \\ 1992 & 1656 & 1704 & 2108 \end{pmatrix}.$$

Вычисляем суммы элементов главных диагоналей полученных матриц:

$$s_1 = 1 + 1 + 1 + 1 = 4;$$

$$s_2 = 30 + 18 + 18 + 30 = 96;$$

$$s_3 = 208 + 148 + 148 + 208 = 712;$$

$$s_4 = 2108 + 1388 + 1388 + 2108 = 6992.$$

По формулам (13) найдём:

$$p_1 = -s_1 = -4;$$

$$p_2 = -\frac{1}{2}(s_2 + p_1 s_1) = -\frac{1}{2}(96 - 4 \cdot 4) = -40;$$

$$p_3 = -\frac{1}{3}(s_3 + p_1 s_2 + p_2 s_1) = -\frac{1}{3}(712 - 4 \cdot 96 - 40 \cdot 4) = -56;$$

$$p_4 = -\frac{1}{4}(s_4 + p_1 s_3 + p_2 s_2 + p_3 s_1) = -\frac{1}{4}(6992 - 4 \cdot 712 - 40 \cdot 96 - 56 \cdot 4) = -20.$$

В итоге характеристический полином исходной матрицы имеет вид:  
 $\lambda^4 - 4\lambda^3 - 40\lambda^2 - 56\lambda - 20 = 0$ .

После развёртывания определителя (4) корни характеристического полинома (5) – собственные значения матрицы **A** – можно находить методами, предназначенными для решения нелинейных уравнений.

Задача на собственные значения легко решается для некоторых простых форм матрицы **A**: диагональной, трехдиагональной, треугольной или почти треугольной. В этих случаях определитель (4) также будет иметь диагональную, трехдиагональную и так далее структуру; характеристический полином (5) выродится в произведение диагональных элементов, то есть собственные значения будут равны диагональным элементам матрицы **A**:

$$\lambda_i = a_{ii}, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (14)$$

Многие численные методы решения задач на собственные значения основаны на приведении матрицы **A** к одной из перечисленных выше простых форм с помощью *преобразований подобия*, поскольку преобразования подобия не меняют собственных значений матрицы.

I. Метод Якоби – приведение матрицы к почти диагональному виду.

II. Метод Гивенса – приведение симметричных матриц к трехдиагональному виду.

III. Метод Хаусхолдера – приведение симметричных матриц к трехдиагональному виду.

IV. Метод *LR*-преобразования – приведение матрицы квазидиагональному виду.

V. Метод *QR*-преобразования – приведение матрицы к квазидиагональному виду.

**З а м е ч а н и е .** Матрицы **A** и **B** называются подобными, если существует такая не особая матрица **T**, что  $\mathbf{A} = \mathbf{T}^{-1} \cdot \mathbf{B} \cdot \mathbf{T}$ . При этом говорят, что матрица **A** получается из матрицы **B** преобразованием подобия.

### *Приложения в механике деформируемого твёрдого тела*

Многие задачи механики деформируемого твёрдого тела математически сводятся к решению задач линейной алгебры.

#### 1. Строительная механика.

Расчёт рам методом ”сил”, методом ”перемещений”, ”смешанным методом” сводятся к решению полных систем линейных алгебраических уравнений.

Расчёт стержневых систем на устойчивость (определение критических сил), расчёт на колебания (определение частоты собственных колебаний) сводится к решению однородных систем линейных алгебраических уравнений – определение собственных значений.

## 2. Соппротивление материалов.

Расчёт перемещений в балках и балках на упругом основании методом конечных разностей (краевые задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений) сводится к решению систем линейных алгебраических уравнений с трехдиагональной матрицей коэффициентов.

## 3. Теория упругости.

Решение плоской задачи теории упругости в перемещениях или напряжениях методом конечных разностей сводится к решению системы линейных алгебраических уравнений с ленточной матрицей коэффициентов.

Расчёт тонких плит на изгиб методом конечных разностей сводится к решению систем линейных алгебраических уравнений с ленточной матрицей коэффициентов.

Расчёт конструкций методом конечных элементов сводится к решению систем линейных алгебраических уравнений с клеточной матрицей коэффициентов.

## §8. Приближение функций

Задача о приближении функций ставится следующим образом: данную функцию  $f(x)$  требуется заменить обобщённым полиномом  $Q_m(x)$  заданного порядка "m" так, чтобы отклонение (в известном смысле) функции  $f(x)$  от обобщённого полинома  $Q_m(x)$  на указанном множестве  $X = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$  было наименьшим.

Обобщённый полином  $Q_m(x)$  имеет вид:

$$Q_m(x) = c_0 \cdot \varphi_0(x) + c_1 \cdot \varphi_1(x) + \dots + c_m \cdot \varphi_m(x). \quad (1)$$

Здесь  $c_1, c_2, \dots, c_m$  – искомые величины – константы;

$\varphi_0(x), \varphi_1(x), \dots, \varphi_m(x)$  – совокупность линейно независимых функций.

*Определение.* Совокупность функций будет линейно независимой, если

$$c_0 \cdot \varphi_0(x) + c_1 \cdot \varphi_1(x) + \dots + c_m \cdot \varphi_m(x) = 0 \text{ лишь тогда, когда} \\ c_0 = c_1 = \dots = c_m = 0.$$

*Пример.* Линейно независимыми будет совокупность функций:  $\varphi_0(x) = 1, \varphi_1(x) = x, \varphi_2(x) = x^2, \dots, \varphi_m(x) = x^m$ .

Термин «отклонение двух функций» понимается по-разному. При этом мы получаем различные типы задач теории приближений: интерполирование, среднеквадратичное приближение, равномерное приближение и так далее.





3) При  $m = n \rightarrow \infty$  полином  $Q_m(x)$  на множестве  $X = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$  начинает осциллировать (рис. 11):

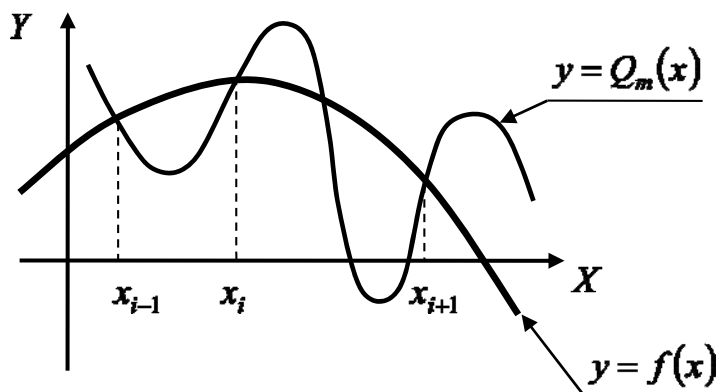


Рис. 11

Пример.

Построить интерполяционный полином  $L(x)$ , совпадающий с функцией  $f(x)=3^x$  ( $-1 \leq x \leq 1$ ) в точках  $x_0 = -1$ ,  $x_1 = 0$ ,  $x_2 = 1$  [10].

Решение.

Полагаем  $L(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2$ . Для определения коэффициентов  $a_0$ ,  $a_1$ ,  $a_2$  имеем систему линейных алгебраических уравнений вида:

$$\left. \begin{aligned} L(x_0) &\equiv a_0 - a_1 + a_2 = 3^{x_0} = 3^{-1} = \frac{1}{3}; \\ L(x_1) &\equiv a_0 = 3^{x_1} = 3^0 = 1; \\ L(x_2) &\equiv a_0 + a_1 + a_2 = 3^{x_2} = 3^1 = 3. \end{aligned} \right\}$$

Отсюда  $a_0 = 1$ ;  $a_1 = \frac{4}{3}$ ;  $a_2 = \frac{2}{3}$ , следовательно,  $3^x \approx 1 + \frac{4}{3}x + \frac{2}{3}x^2$ . Здесь  $-1 \leq x \leq 1$ .

Например,  $3^{\frac{1}{2}} = \sqrt{3} \approx 1 + \frac{2}{3} + \frac{1}{6} = 1,833$ ;

$$3^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{3} \approx 1 + \frac{4}{9} + \frac{2}{27} = 1,519$$
;

$$3^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{3} \approx 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{24} = 1,375.$$

## II. Точечное квадратичное аппроксимирование функций.

В этом случае полином  $Q_m(x)$ , приближающий данную функцию  $f(x)$ , строят, используя точечный способ наименьших квадратов.

За меру отклонения полинома  $Q_m(x)$  от данной функции  $f(x)$  на множестве  $X = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$  принимают величину, равную сумме квадратов отклонений полинома  $Q_m(x)$  от функции  $f(x)$  на заданной системе точек (рис. 12):

$$S_m = \sum_{i=0}^n [Q_m(x_i) - f(x_i)]^2. \quad (6)$$

Здесь  $m < n$ .

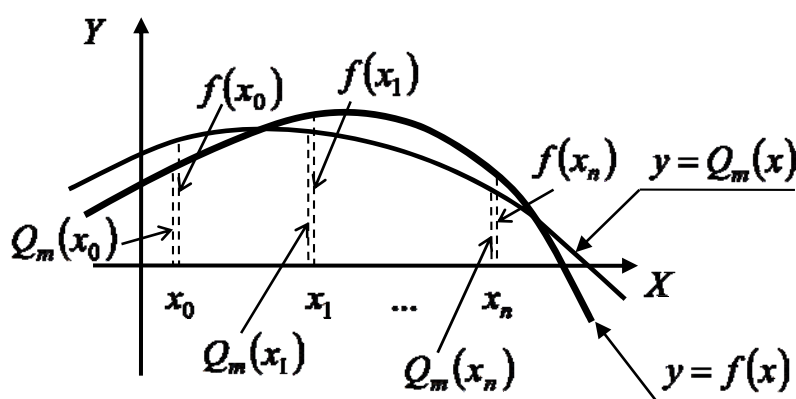


Рис. 12

Вполне понятно, что среднеквадратичное отклонение  $S_m$  будет функцией коэффициентов  $c_k$ ,  $k = 0, 1, \dots, m$ :

$$S_m = \Phi(c_0, c_1, \dots, c_m). \quad (7)$$

Коэффициенты  $c_k$ ,  $k = 0, 1, \dots, m$ , надо подобрать так, чтобы среднеквадратичное отклонение  $S_m$  было минимальным. Из условия минимума функции (7) получаем систему уравнений:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial S_m}{\partial c_0} &= 0; \\ \frac{\partial S_m}{\partial c_1} &= 0; \\ &\dots; \\ \frac{\partial S_m}{\partial c_m} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (8)$$



Коэффициенты  $c_k$ ,  $k = 0, 1, \dots, m$ , определяемые формулами (12), называются коэффициентами Фурье функции  $f(x)$ . Доказано, что обобщённый полином с коэффициентом Фурье данной функции обладает наименьшим квадратичным отклонением от этой функции по сравнению со всеми другими обобщёнными полиномами того же порядка " $m$ ".

Свойства обобщённых полиномов  $Q_m(x)$  с коэффициентами Фурье:

1. При увеличении числа слагаемых младшие коэффициенты  $c_k$  остаются неизменными.

2. При увеличении " $m$ " квадратичная погрешность монотонно убывает, то есть присоединение новых слагаемых в полиноме  $Q_m(x)$  увеличивает точность аппроксимации.

Примерами ортогональных функций являются, в частности, полиномы Чебышева, ортогональные на системе равноотстоящих точек; полиномы Лежандра, ортогональные на отрезке  $[-1, 1]$ ; полиномы Эрмита; полиномы Лагерра.

**Пример.**

Методом наименьших квадратов подобрать аппроксимирующий полином второй степени  $Q_m(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2$  для данных [10]:

$x$	0,78	1,56	2,34	3,12	3,81
$y(x)$	2,50	1,20	1,12	2,25	4,28

**Решение.**

В нашем случае  $m = 2$ ,  $n = 4$ . Следовательно, система (10) имеет вид:

$$\left. \begin{aligned} a_0(\varphi_0, \varphi_0) + a_1(\varphi_1, \varphi_0) + a_2(\varphi_2, \varphi_0) &= (f, \varphi_0); \\ a_0(\varphi_0, \varphi_1) + a_1(\varphi_1, \varphi_1) + a_2(\varphi_2, \varphi_1) &= (f, \varphi_1); \\ a_0(\varphi_0, \varphi_2) + a_1(\varphi_1, \varphi_2) + a_2(\varphi_2, \varphi_2) &= (f, \varphi_2). \end{aligned} \right\}$$

Здесь  $\varphi_0(x) = 1$ ,  $\varphi_1(x) = x$ ,  $\varphi_2(x) = x^2$ ;  $f = y(x)$ .

$$\begin{aligned} (\varphi_0, \varphi_0) &= \sum_{i=0}^4 \varphi_0(x_i) \cdot \varphi_0(x_i) = \varphi_0(x_0) \cdot \varphi_0(x_0) + \varphi_0(x_1) \cdot \varphi_0(x_1) + \\ &+ \varphi_0(x_2) \cdot \varphi_0(x_2) + \varphi_0(x_3) \cdot \varphi_0(x_3) + \varphi_0(x_4) \cdot \varphi_0(x_4) = \\ &= 1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 = 5; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (\varphi_1, \varphi_1) &= \sum_{i=0}^4 \varphi_1(x_i) \cdot \varphi_1(x_i) = \varphi_1(x_0) \cdot \varphi_1(x_0) + \varphi_1(x_1) \cdot \varphi_1(x_1) + \\ &+ \varphi_1(x_2) \cdot \varphi_1(x_2) + \varphi_1(x_3) \cdot \varphi_1(x_3) + \varphi_1(x_4) \cdot \varphi_1(x_4) = \\ &= x_0 \cdot x_0 + x_1 \cdot x_1 + x_2 \cdot x_2 + x_3 \cdot x_3 + x_4 \cdot x_4 = \\ &= 0,78^2 + 1,56^2 + 2,34^2 + 3,12^2 + 3,81^2 = 32,768; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(\varphi_2, \varphi_2) &= \sum_{i=0}^4 \varphi_2(x_i) \cdot \varphi_2(x_i) = \varphi_2(x_0) \cdot \varphi_2(x_0) + \varphi_2(x_1) \cdot \varphi_2(x_1) + \\
&+ \varphi_2(x_2) \cdot \varphi_2(x_2) + \varphi_2(x_3) \cdot \varphi_2(x_3) + \varphi_2(x_4) \cdot \varphi_2(x_4) = \\
&= x_0^2 \cdot x_0^2 + x_1^2 \cdot x_1^2 + x_2^2 \cdot x_2^2 + x_3^2 \cdot x_3^2 + x_4^2 \cdot x_4^2 = \\
&= 0,78^4 + 1,56^4 + 2,34^4 + 3,12^4 + 3,81^4 = 341,750;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(\varphi_1, \varphi_0) &= (\varphi_0, \varphi_1) = \sum_{i=0}^4 \varphi_1(x_i) \cdot \varphi_0(x_i) = \varphi_1(x_0) \cdot \varphi_0(x_0) + \varphi_1(x_1) \cdot \varphi_0(x_1) + \\
&+ \varphi_1(x_2) \cdot \varphi_0(x_2) + \varphi_1(x_3) \cdot \varphi_0(x_3) + \varphi_1(x_4) \cdot \varphi_0(x_4) = \\
&= x_0 \cdot 1 + x_1 \cdot 1 + x_2 \cdot 1 + x_3 \cdot 1 + x_4 \cdot 1 = \\
&= 0,78 + 1,56 + 2,34 + 3,12 + 3,81 = 11,610;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(\varphi_2, \varphi_0) &= (\varphi_0, \varphi_2) = \sum_{i=0}^4 \varphi_2(x_i) \cdot \varphi_0(x_i) = \varphi_2(x_0) \cdot \varphi_0(x_0) + \varphi_2(x_1) \cdot \varphi_0(x_1) + \\
&+ \varphi_2(x_2) \cdot \varphi_0(x_2) + \varphi_2(x_3) \cdot \varphi_0(x_3) + \varphi_2(x_4) \cdot \varphi_0(x_4) = \\
&= x_0^2 \cdot 1 + x_1^2 \cdot 1 + x_2^2 \cdot 1 + x_3^2 \cdot 1 + x_4^2 \cdot 1 = \\
&= 0,78^2 + 1,56^2 + 2,34^2 + 3,12^2 + 3,81^2 = 32,768;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(\varphi_2, \varphi_1) &= (\varphi_1, \varphi_2) = \sum_{i=0}^4 \varphi_2(x_i) \cdot \varphi_1(x_i) = \varphi_2(x_0) \cdot \varphi_1(x_0) + \varphi_2(x_1) \cdot \varphi_1(x_1) + \\
&+ \varphi_2(x_2) \cdot \varphi_1(x_2) + \varphi_2(x_3) \cdot \varphi_1(x_3) + \varphi_2(x_4) \cdot \varphi_1(x_4) = \\
&= x_0^2 \cdot x_0 + x_1^2 \cdot x_1 + x_2^2 \cdot x_2 + x_3^2 \cdot x_3 + x_4^2 \cdot x_4 = \\
&= 0,78^3 + 1,56^3 + 2,34^3 + 3,12^3 + 3,81^3 = 102,762;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(f, \varphi_0) &= \sum_{i=0}^4 y(x_i) \cdot \varphi_0(x_i) = y(x_0) \cdot \varphi_0(x_0) + y(x_1) \cdot \varphi_0(x_1) + \\
&+ y(x_2) \cdot \varphi_0(x_2) + y(x_3) \cdot \varphi_0(x_3) + y(x_4) \cdot \varphi_0(x_4) = \\
&= 2,50 \cdot 1 + 1,20 \cdot 1 + 1,12 \cdot 1 + 2,25 \cdot 1 + 4,28 \cdot 1 = \\
&= 11,350;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(f, \varphi_1) &= \sum_{i=0}^4 f(x_i) \cdot \varphi_1(x_i) = y(x_0) \cdot \varphi_1(x_0) + y(x_1) \cdot \varphi_1(x_1) + \\
&+ y(x_2) \cdot \varphi_1(x_2) + y(x_3) \cdot \varphi_1(x_3) + y(x_4) \cdot \varphi_1(x_4) = \\
&= 2,50 \cdot x_0 + 1,20 \cdot x_1 + 1,12 \cdot x_2 + 2,25 \cdot x_3 + 4,28 \cdot x_4 = \\
&= 2,50 \cdot 0,78 + 1,20 \cdot 1,56 + 1,12 \cdot 2,34 + 2,25 \cdot 3,12 + 4,28 \cdot 3,81 = \\
&= 29,770;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(f, \varphi_2) &= \sum_{i=0}^4 f(x_i) \cdot \varphi_2(x_i) = y(x_0) \cdot \varphi_2(x_0) + y(x_1) \cdot \varphi_2(x_1) + \\
&+ y(x_2) \cdot \varphi_2(x_2) + y(x_3) \cdot \varphi_2(x_3) + y(x_4) \cdot \varphi_2(x_4) = \\
&= 2,50 \cdot x_0^2 + 1,20 \cdot x_1^2 + 1,12 \cdot x_2^2 + 2,25 \cdot x_3^2 + 4,28 \cdot x_4^2 = \\
&= 2,50 \cdot 0,78^2 + 1,20 \cdot 1,56^2 + 1,12 \cdot 2,34^2 + 2,25 \cdot 3,12^2 + 4,28 \cdot 3,81^2 = \\
&= 94,604.
\end{aligned}$$

Таким образом, система уравнений для определения коэффициентов  $a_0, a_1, a_2$  имеет вид:

$$\left. \begin{aligned}
5a_0 + 11,61a_1 + 32,768a_2 &= 11,350; \\
11,61a_0 + 32,768a_1 + 102,761a_2 &= 29,770; \\
31,768a_0 + 102,761a_1 + 341,750a_2 &= 94,604.
\end{aligned} \right\}$$

Решив эту систему, получим:  $a_0 = 5,045$ ;  $a_1 = -4,043$ ;  $a_2 = 1,009$ .

Следовательно, искомым полиномом есть

$$Q_m(x) = 5,045 - 4,043x + 1,009x^2.$$

### III. Равномерное приближение функций.

В теории приближения функций вводится понятие о *равномерном приближении* (рис.13). В этом случае под абсолютным отклонением на отрезке  $[a, b]$  обобщённого полинома  $Q_m(x)$  от данной непрерывной функции  $f(x)$  понимается число

$$\Delta_m = \max_{a \leq x \leq b} |f(x) - Q_m(x)| \leq \varepsilon. \quad (13)$$

Здесь  $\varepsilon$  – произвольное малое, заранее заданное положительное число.

В этом случае говорят, что обобщённый полином  $Q_m(x)$  на отрезке  $[a, b]$  равномерно приближает функцию  $f(x)$  с точностью до  $\varepsilon$ .

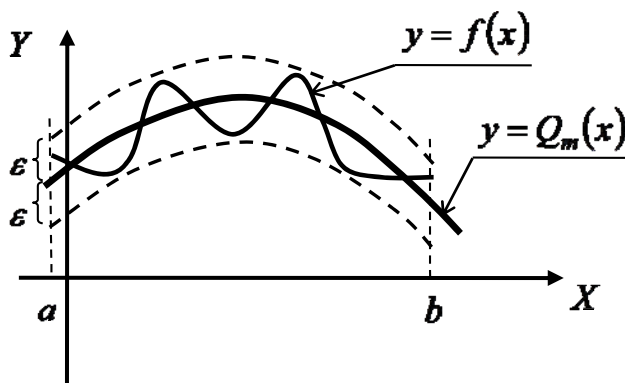


Рис. 13

При решении задачи о равномерном приближении функции  $f(x)$  в качестве обобщённого полинома  $Q_m(x)$  следует брать полиномы Чебышева.

## §9. Вычисление интегралов

Будем рассматривать алгоритмы численного вычисления однократных определённых интегралов вида:

$$\int_a^b f(x) dx. \quad (1)$$

Задача численного интегрирования функций заключается в вычислении значения определённого интеграла на основании ряда значений подынтегральной функции  $f(x)$ .

Значение определённого интеграла имеет простой геометрический смысл: величина определённого интеграла равна площади криволинейной трапеции (рис. 14):

$$S = \int_a^b f(x) dx.$$

Обычный приём численного вычисления интеграла состоит в том, что данную функцию  $f(x)$  на рассматриваемом отрезке  $[a, b]$  заменяют аппроксимирующей функцией  $\varphi(x)$  простого вида (например полиномом), а затем приближённо полагают:

$$\int_a^b f(x) dx \cong \int_a^b \varphi(x) dx. \quad (2)$$

Как правило, этот приём реализуется с помощью интерполяционных полиномов Лагранжа, Чебышева, Лежандра и так далее. При этом погрешность формулы (2) вполне определена и вычисляется по аналитической формуле. При произвольном выборе аппроксимирующей функции  $\varphi(x)$  оценка погрешности формулы (2) затруднительна.

По определению

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k) \cdot \Delta x_k. \quad (3)$$

Отсюда следует, что за приближенное значение интеграла  $I = \int_a^b f(x) dx$  можно взять интегральную сумму  $S = \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k) \cdot \Delta x_k$ , причём отклонение суммы  $S$  от интеграла  $I$  будет сколь угодно мало, если отрезок  $[a, b]$  будет разделён на достаточно малые части.

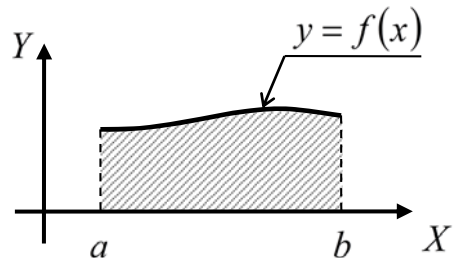


Рис. 14

Для численного вычисления определённых интегралов используются формулы прямоугольников, трапеций; формула Симпсона, Ньютона – Котеса, Чебышева, Гаусса и так далее.

### I. Формула прямоугольников.

Разделим отрезок  $[a, b]$  (рис. 15) на "n" равных частей  $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$  и в точках деления вычислим значения подынтегральной функции  $y_i = f(x_i)$ ,  $i = 0, 1, \dots, n$ . Тогда

$$\int_a^b f(x) dx \cong \frac{b-a}{n} (y_0 + y_1 + \dots + y_{n-1}); \quad (4)$$

$$\int_a^b f(x) dx \cong \frac{b-a}{n} (y_1 + y_2 + \dots + y_n); \quad (5)$$

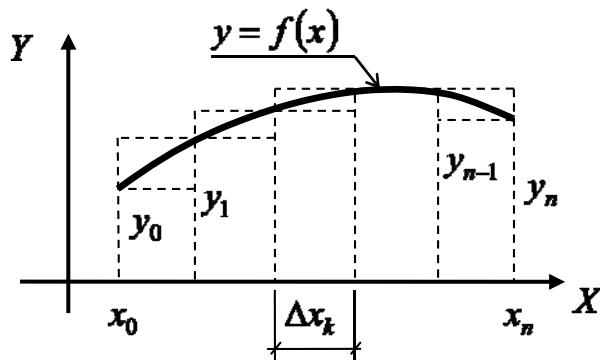


Рис. 15

Формула (4) определяет приближенное значение интеграла с недостатком; формула (5) – с избытком.

### II. Формула трапеций.

Взяв за значение интеграла среднее арифметическое правых частей формул (4) и (5) получим более точную формулу:

$$\int_a^b f(x) dx \cong \frac{b-a}{n} \left( \frac{y_0}{2} + y_1 + y_2 + \dots + y_{n-1} + \frac{y_n}{2} \right) = \frac{b-a}{2n} \sum_{i=0}^{n-1} (y_i + y_{i+1}). \quad (6)$$

### III. Формула Симпсона.

Разделим отрезок  $[a, b]$  (рис. 16) на чётное число точек  $n = 2m$ . Через точки с чётными номерами проводим отрезки парабол так, чтобы они проходили через три точки  $y_{2i-2}, y_{2i-1}, y_{2i}$ ,  $i = 1, 2, \dots, m$ . Тогда

$$\int_a^b f(x) dx \cong \frac{b-a}{3n} (y_0 + 4y_1 + y_2) + \frac{b-a}{3n} (y_2 + 4y_3 + y_4) + \dots$$

$$\dots + \frac{b-a}{3n} (y_{2m-2} + 4y_{2m-1} + y_{2m}) = \frac{b-a}{3n} \sum_{\substack{i=0 \\ \Delta i=2}}^{2(m-1)} (y_i + 4y_{i+1} + y_{i+2}).$$



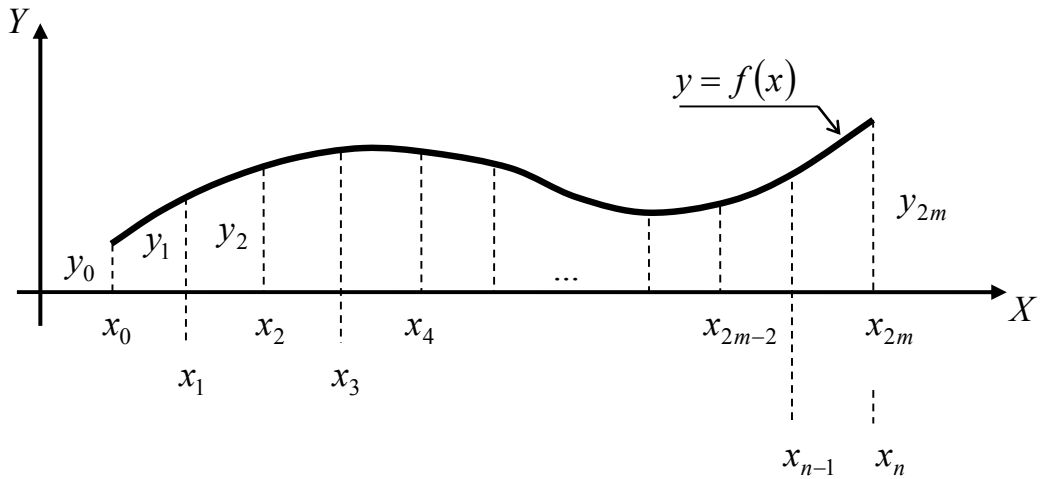


Рис. 16

Для оценки погрешностей формул трапеций и Симпсона используется полиномом Лагранжа при  $n=1$  и  $n=2$  соответственно. Погрешность формулы трапеций оценивается величиной

$$\Delta \leq -\frac{(b-a)^3}{12n^2} y''(\xi), \text{ где } a \leq \xi \leq b. \quad (8)$$

Погрешность формулы Симпсона оценивается величиной

$$\Delta \leq -\frac{(b-a)^5}{180n^4} y^{IV}(\xi), \text{ где } a \leq \xi \leq b. \quad (9)$$

Следует отметить, что точность приближенного вычисления интеграла пропорциональна, вообще говоря, количеству точек деления отрезка  $[a, b]$ . При этом формула Симпсона дает более точный, вообще говоря, результат, чем формула трапеций. Кроме того, точность вычисления интеграла существенно зависит как от вида функции  $f(x)$ , так и от расположения точек деления на отрезке  $[a, b]$ .

Пример.

Для функции  $f(x) = -8 + 45x^2 - 25x^4$  точное значение интеграла на отрезке  $[-1, 1]$  (рис. 17) равно [9]:  $I = \int_{-1}^1 f(x) dx = 4$ .

Разделив отрезок  $[-1, 1]$  на два участка  $[-1, 0]$  и  $[0, 1]$ , вычислим значение интеграла  $I$  по формуле трапеций и Симпсона. В итоге получим:

$$\text{по формуле (6) } I = \frac{1}{2} f(-1) + f(0) + \frac{1}{2} f(1) = 4;$$

по формуле (7)  $I = \frac{1}{3}f(-1) + \frac{4}{3}f(0) + \frac{1}{3}f(1) = -2,67$ .

Как видим, результат по формуле трапеций совпадает с точным, в то время как по формуле Симпсона результат получили совершенно неверный.

При численном вычислении интегралов рекомендуется придерживаться следующих правил (рис. 18):

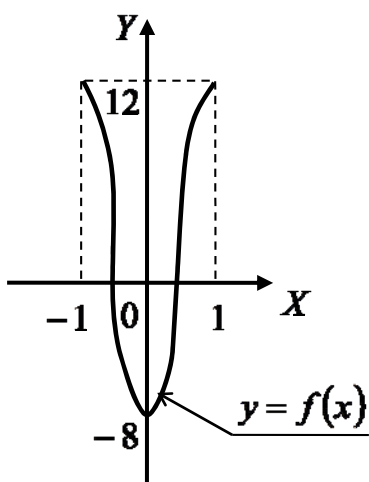


Рис. 17

1. Шаг разбиения  $\frac{b-a}{n}$  следует выбирать

так, чтобы он был намного меньше расстояний между соседними нулями функции  $f(x)$  и нулями её производной  $f'(x)$ .

2. Надо разбивать отрезки интегрирования  $[a, b]$  на частичные отрезки  $[\alpha, \beta]$ , внутри каждого из которых функции  $f(x)$  и  $f'(x)$  сохраняют постоянный знак. Значение интеграла на отрезке  $[a, b]$  будет равно сумме значений интеграла на каждом частичном отрезке  $[\alpha, \beta]$ :

$$\int_a^b f(x) dx = \sum_{i=1}^k \int_{\alpha_i}^{\beta_i} f(x) dx. \quad (10)$$

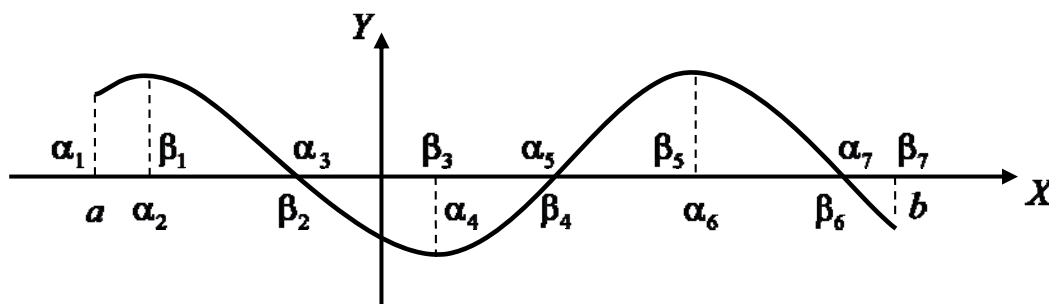


Рис. 18

Общая погрешность вычисления интеграла будет равна:

$$\varepsilon = \Delta + \varepsilon_{\text{ок}} + \varepsilon_{\text{сум}}. \quad (11)$$

Здесь  $\Delta$  – погрешность метода;

$\varepsilon_{\text{ок}}$  – погрешность округлений;

$\varepsilon_{\text{сум}}$  – погрешность суммирования частичных интегралов.



## §10. Численные методы интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений

Задачи механики деформируемого твёрдого тела математически формулируются не только как краевые задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений или уравнений с частными производными, но и как задачи с начальными условиями для обыкновенных дифференциальных уравнений или систем обыкновенных дифференциальных уравнений. Такого типа задачи возникают при исследовании колебательных процессов в стержнях, пластинах, оболочках; при определении температурных полей для нестационарных задач теплопроводности и так далее.

Среди множества численных методов решения задач с начальными условиями (кстати, такие задачи называются задачами Коши) выделяют метод Эйлера – самый простой, но наименее точный, и семейство методов Рунге – Кутты.

Задача Коши – одна из основных задач теории дифференциальных уравнений (обыкновенных и с частными производными) – состоит в нахождении решения (интеграла) дифференциального уравнения, удовлетворяющего так называемым начальным условиям (начальным данным).

Задача Коши обычно возникает при анализе процессов, определяемых дифференциальным законом эволюции и начальным состоянием (математическим выражением которых и являются уравнение и начальное условие). Этим мотивируется терминология и выбор обозначений: начальные данные задаются, как правило, при нулевых начальных условиях, а решение отыскивается при условиях больших нуля. От краевых задач задача Коши отличается тем, что область, в которой должно быть определено искомое решение, здесь заранее не указывается.

### *Метод Эйлера*

Метод Эйлера – наиболее простой численный метод решения обыкновенных дифференциальных уравнений или их систем. Впервые описан Леонардом Эйлером в 1768 году в работе «Интегральное исчисление». Метод Эйлера является явным, одношаговым методом первого порядка точности, основанным на аппроксимации интегральной кривой кусочно-линейной функцией, так называемой ломаной Эйлера.

На рис. 19 показано точное решение задачи Коши – кривая  $AB$  и приближённое решение – ломаная Эйлера  $AA_1A_2A_3A_4A_5$ .

Пусть требуется найти решение обыкновенного дифференциального уравнения

$$\frac{dy(x)}{dx} = f(x, y), \quad (1)$$

удовлетворяющее начальному условию

$$y(x_0) = y_0. \quad (2)$$

Предполагается, что функция  $f(x, y)$  в рассматриваемой области, содержащей точку  $(x_0, y_0)$ , имеет непрерывные частные производные  $\frac{\partial f(x, y)}{\partial x}$  и  $\frac{\partial f(x, y)}{\partial y}$  до некоторого порядка  $m$  и решение задачи Коши (1), (2) существует.

В линейной области  $x > x_0$  вводим ряд точек

$$x_i = x_0 + ih. \quad (3)$$

Здесь  $h = \text{const}$  – некоторое постоянное число (шаг);  $i = 0, 1, 2, \dots, n$ ;  $n$  – число, определяющее количество точек деления рассматриваемой линейной области.

В соответствии с методом Эйлера приближённые значения искомой функции  $y(x)$  находят последовательно по формулам

$$y_{i+1} = y_i + \Delta y_i; \quad \Delta y_i = h \cdot f(x_i, y_i), \quad i = 0, 1, 2, \dots, n. \quad (4)$$

При этом искомая интегральная кривая заменяется ломаной.

Метод Эйлера прост, но имеет малую точность. Погрешность метода на каждом шаге имеет порядок  $O(h^2)$ , то есть это метод первого порядка точности, поэтому при его использовании необходимо принимать малый шаг  $h$ .

Более точным является усовершенствованный метод Эйлера, в котором на каждом шаге вначале вычисляется  $k_1 = h \cdot f(x_i, y_i)$ , а затем  $\Delta y_i = h \cdot f\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{k_1}{2}\right)$ . Этот метод даёт на каждом шаге погрешность порядка  $O(h^3)$ , то есть имеет второй порядок точности.

Рассмотрим применение метода Эйлера при решении задачи Коши для систем обыкновенных дифференциальных уравнений.

Пусть даны система обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{d\bar{Y}}{dx} = \bar{F}(x, \bar{Y}) \quad (5)$$

и начальные условия

$$\bar{Y}(x_0) = \bar{Y}_0. \quad (6)$$

Здесь  $\bar{Y} = (y_1, y_2, \dots, y_m)^T$ ;  $\bar{F} = (f_1, f_2, \dots, f_m)^T$ .

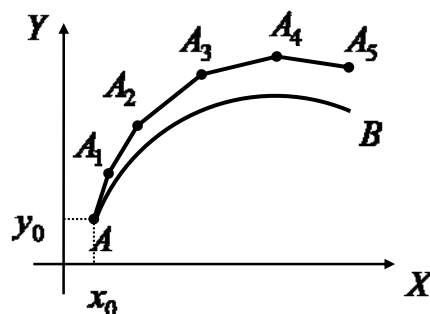


Рис. 19

Приближённое решение задачи с начальными условиями (5), (6) находят в следующем виде:

$$\bar{Y}_{i+1} = \bar{Y}_i + \Delta \bar{Y}_i; \quad \Delta \bar{Y}_i = h \cdot \bar{F}(x_i, \bar{Y}_i), \quad i = 0, 1, 2, \dots, n. \quad (7)$$

Пример.

Найти приближённое уравнение изогнутой оси консольного стержня (рис. 20) длиной  $l$ , нагруженного на конце консоли сосредоточенной силой  $F$ . Изгибная жёсткость стержня  $EI$  задана.

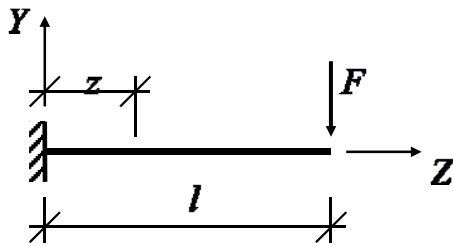


Рис. 20

Решение.

Дифференциальное уравнение изогнутой оси стержня имеет вид:

$$\frac{d^2 v(z)}{dz^2} = \frac{M_x(z)}{EI}, \quad (a)$$

причём

$$v(0) = 0 \text{ и } \varphi(0) = \left. \frac{dv(z)}{dz} \right|_{z=0} = 0. \quad (б)$$

Здесь  $M_x(z) = F(z-l)$ . (в)

Таким образом, для определения уравнения изогнутой оси стержня имеем задачу Коши (а), (б) для дифференциального уравнения второго порядка.

Приведём уравнение (а) к системе уравнений:

$$\frac{dv(z)}{dz} = \varphi(z); \quad \frac{d\varphi(z)}{dz} = \frac{F(z-l)}{EI}. \quad (г)$$

Разделим длину стержня на  $n$  частей. Тогда  $h = \frac{l}{n}$ ,  $z_i = z_0 + ih$ ,  
 $i = 0, 1, 2, \dots, n$ ; причём  $z_0 = 0$ ,  $v_0 = 0$ ,  $\varphi_0 = 0$ ,  $\Delta v_0 = h\varphi_0 = 0$ ,  
 $\Delta \varphi_0 = h \frac{F(z_0-l)}{EI}$ ;  $z = z_i$ ,  $v_{i+1} = v_i + \Delta v_i$ ,  $\varphi_{i+1} = \varphi_i + \Delta \varphi_i$ ,  $\Delta v_i = h\varphi_i$ ,  
 $\Delta \varphi_i = h \frac{F(z_i-l)}{EI}$ .

Применяя схему (7), получаем:

$$i = 0, \quad z_0 = 0, \quad v_1 = v_0 + \Delta v_0 = 0, \quad \varphi_1 = \varphi_0 + \Delta \varphi_0 = h \frac{F(z_0-l)}{EI};$$

$$i = 1, \quad z_1 = h, \quad \Delta v_1 = h\varphi_1 = h^2 \frac{F(z_0 - l)}{EI}, \quad \Delta\varphi_1 = h \frac{F(z_1 - l)}{EI},$$

$$v_2 = v_1 + \Delta v_1 = h^2 \frac{F(z_0 - l)}{EI},$$

$$\varphi_2 = \varphi_1 + \Delta\varphi_1 = h \frac{F(z_0 - l)}{EI} + h \frac{F(z_1 - l)}{EI};$$

$$i = 2, \quad z_2 = 2h, \quad \Delta v_2 = h\varphi_2 = h \left[ h \frac{F(z_0 - l)}{EI} + h \frac{F(z_1 - l)}{EI} \right],$$

$$\Delta\varphi_2 = h \frac{F(z_2 - l)}{EI},$$

$$v_3 = v_2 + \Delta v_2 = h \frac{F(z_0 - l)}{EI} + h \left[ h \frac{F(z_0 - l)}{EI} + h \frac{F(z_1 - l)}{EI} \right],$$

$$\varphi_3 = \varphi_2 + \Delta\varphi_2 = h \frac{F(z_0 - l)}{EI} + h \frac{F(z_1 - l)}{EI} + h \frac{F(z_2 - l)}{EI};$$

$$i = 3, \quad z_3 = 3h, \quad \Delta v_3 = h\varphi_3 = h \left[ h \frac{F(z_0 - l)}{EI} + h \frac{F(z_1 - l)}{EI} + h \frac{F(z_2 - l)}{EI} \right],$$

$$\Delta\varphi_3 = h \frac{F(z_3 - l)}{EI};$$

$$v_4 = v_3 + \Delta v_3, \quad \varphi_4 = \varphi_3 + \Delta\varphi_3;$$

и так далее.

На рис. 21 показано точное решение  $v(z) = \frac{Fz^2}{2EI} \left( \frac{z}{3} - l \right)$  задачи Коши (а), (б) и приближённое решение, полученное методом Эйлера.

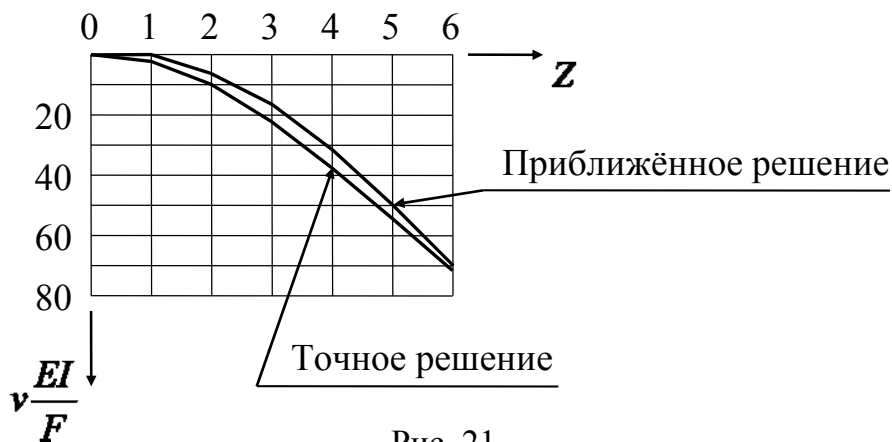


Рис. 21

Метод Эйлера являлся исторически первым методом численного решения задачи Коши. О. Коши использовал этот метод для доказательства существования решения задачи Коши. Ввиду невысокой точности и вычислительной неустойчивости для практического нахождения решений задачи Коши метод Эйлера применяется редко. Однако ввиду своей простоты метод Эйлера находит применение в теоретических исследованиях дифференциальных уравнений, задач вариационного исчисления и ряда других математических проблем.

### *Метод Рунге – Кутты*

Методы Рунге – Кутты – важное семейство численных алгоритмов решения обыкновенных дифференциальных уравнений и их систем. Данные методы явного и неявного приближённого вычисления были разработаны около 1900 года немецкими математиками К. Рунге и М.В. Куттой.

Формально методом Рунге – Кутты является модифицированный и исправленный метод Эйлера. Наиболее часто используется и реализована в различных математических пакетах (Maple, MathCAD, Maxima) стандартная схема четвёртого порядка. Иногда при выполнении расчётов с повышенной точностью применяются схемы пятого и шестого порядков. Построение схем более высокого порядка сопряжено с большими вычислительными трудностями.

Основная схема этого метода заключается в следующем. Вычисление значения функции  $y(x)$  на  $i$ -м шаге выполняется по формуле

$$y_{i+1} = y_i + \Delta y_i, \quad \Delta y_i = \frac{1}{6} \left[ k_1^{(i)} + 2k_2^{(i)} + 2k_3^{(i)} + k_4^{(i)} \right]. \quad (8)$$

Здесь

$$k_1^{(i)} = h \cdot f(x_i, y_i); \quad k_2^{(i)} = h \cdot f \left[ x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{k_1^{(i)}}{2} \right];$$

$$k_3^{(i)} = h \cdot f \left[ x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{k_2^{(i)}}{2} \right]; \quad k_4^{(i)} = h \cdot f \left[ x_i + h, y_i + k_3^{(i)} \right], \quad i = 0, 1, 2, \dots, n.$$

Погрешность приведённой схемы метода Рунге – Кутты на каждом шаге равна  $O(h^5)$ .

Метод Рунге – Кутты легко адаптируется к решению задачи Коши для системы дифференциальных уравнений. Например, для системы двух дифференциальных уравнений

$$\frac{dy(x)}{dx} = \varphi(x, y, z); \quad \frac{dz(x)}{dx} = \psi(x, y, z)$$



при начальных условиях  $y(x_0) = y_0$ ,  $z(x_0) = z_0$  процесс нахождения решения  $y(x)$  и  $z(x)$  на  $i$ -м шаге сводится к следующим операциям.

При заданных или найденных значениях  $h, x_i, y_i, z_i$  вычисляются последовательно:

$$k_1^{(i)} = h \cdot \varphi(x_i, y_i, z_i); \quad m_1^{(i)} = h \cdot \psi(x_i, y_i, z_i);$$

$$k_2^{(i)} = h \cdot \varphi\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{k_1^{(i)}}{2}, z_i + \frac{m_1^{(i)}}{2}\right);$$

$$m_2^{(i)} = h \cdot \psi\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{k_1^{(i)}}{2}, z_i + \frac{m_1^{(i)}}{2}\right);$$

$$k_3^{(i)} = h \cdot \varphi\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{k_2^{(i)}}{2}, z_i + \frac{m_2^{(i)}}{2}\right);$$

$$m_3^{(i)} = h \cdot \psi\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{k_2^{(i)}}{2}, z_i + \frac{m_2^{(i)}}{2}\right);$$

$$k_4^{(i)} = h \cdot \varphi\left(x_i + h, y_i + k_3^{(i)}, z_i + m_3^{(i)}\right);$$

$$m_4^{(i)} = h \cdot \psi\left(x_i + h, y_i + k_3^{(i)}, z_i + m_3^{(i)}\right).$$

Затем находят  $\Delta y_i$  и  $\Delta z_i$  по формулам:

$$\Delta y_i = \frac{1}{6} \left[ k_1^{(i)} + 2k_2^{(i)} + 2k_3^{(i)} + k_4^{(i)} \right],$$

$$\Delta z_i = \frac{1}{6} \left[ m_1^{(i)} + 2m_2^{(i)} + 2m_3^{(i)} + m_4^{(i)} \right].$$

Далее определяют значения функций  $y(x)$  и  $z(x)$  на  $(i+1)$ -м шаге:

$$y_{i+1} = y_i + \Delta y_i; \quad z_{i+1} = z_i + \Delta z_i.$$

## Глава 2. ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ РАСЧЁТА СТЕРЖНЕВЫХ СИСТЕМ

### §11. Матричная форма определения перемещений

В стержневых системах типа балок, рам и так далее, стержни (элементы) которых в основном работают на изгиб, перемещения от внешних нагрузок определяют по формуле Мора с учётом одного интеграла:

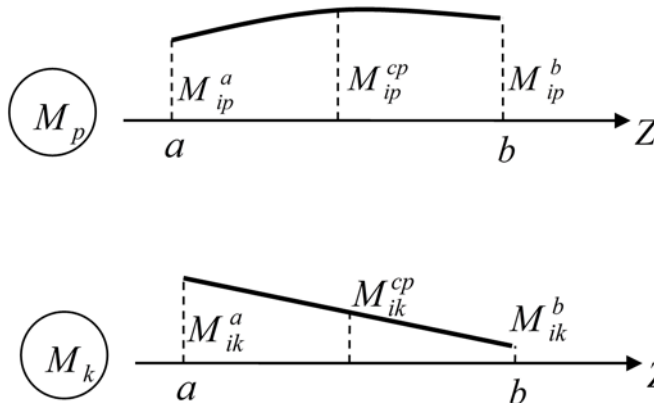
$$\Delta_{kp} = \sum \int \frac{M_k \cdot M_p}{EI} dz. \quad (1)$$

Здесь  $k$  – номер сечения, в котором определяется перемещение.

Для случая, когда  $M_k$  – линейная функция, а функция  $(M_p / EI)$  не выше третьей степени, интеграл (1) вычисляется по формуле Симпсона. Например, для  $i$ -го участка длиной  $l_i$  формула (1) получает вид:

$$\Delta_{kp} = \int_a^b \frac{M_k M_p}{EI_i} dz = \frac{l_i}{6} \left( \frac{M_{ik}^a M_{ip}^a}{EI_i^a} + 4 \frac{M_{ik}^{cp} M_{ip}^{cp}}{EI_i^{cp}} + \frac{M_{ik}^b M_{ip}^b}{EI_i^b} \right). \quad (2)$$

Здесь  $M_{ik}^a, M_{ik}^{cp}, M_{ik}^b$  – значения изгибающих моментов по концам и в середине участка  $l_i$  от единичной обобщённой силы;  $M_{ip}^a, M_{ip}^{cp}, M_{ip}^b$  – значения изгибающих моментов по концам и в середине участка  $l_i$  от внешней нагрузки;



$EI_i^a, EI_i^{cp}, EI_i^b$  – значения жёсткостей в начале, середине и конце участка  $l_i$ .

В матричной форме выражение (2) имеет вид:

$$\Delta_{kp} = (M_{ik}^a, M_{ik}^{cp}, M_{ik}^b) \frac{l_i}{6EI_0} \begin{pmatrix} g_i^a & 0 & 0 \\ 0 & 4g_i^{cp} & 0 \\ 0 & 0 & g_i^b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} M_{ip}^a \\ M_{ip}^{cp} \\ M_{ip}^b \end{pmatrix}. \quad (3)$$

Здесь  $g_i^j = \frac{EI_0}{EI_i^j}, j=a, cp, b; EI_0$  – жёсткость, принятая за эталон.

Формулу (3) запишем в компактной форме:

$$\Delta_{kp} = \mathbf{M}'_{ik} \cdot \mathbf{b}_i \cdot \overline{\mathbf{M}}_{ip}. \quad (4)$$

Здесь  $\mathbf{M}'_{ik}$  – матрица-строка (транспонированный столбец) влияния изгибающих моментов на  $i$ -м участке от обобщённой единичной силы, проложенной в  $k$ -м сечении:

$$\mathbf{M}'_{ik} = (M_{ik}^a, M_{ik}^{cp}, M_{ik}^b); \quad (5)$$

$\mathbf{b}_i$  – матрица податливости  $i$ -го участка:

$$\mathbf{b}_i = \frac{l_i}{6EI_0} \begin{pmatrix} g_i^a & 0 & 0 \\ 0 & 4g_i^{cp} & 0 \\ 0 & 0 & g_i^b \end{pmatrix}; \quad (6)$$

$\bar{\mathbf{M}}_{ip}$  – вектор изгибающих моментов на  $i$ -м участке от внешней нагрузки:

$$\bar{\mathbf{M}}_{ip} = \begin{pmatrix} M_{ip}^a \\ M_{ip}^{cp} \\ M_{ip}^b \end{pmatrix}. \quad (7)$$

При постоянной жёсткости по длине  $i$ -го участка ( $g_i^a = g_i^{cp} = g_i^b$ ) матрица податливости  $\mathbf{b}_i$  принимает вид:

$$\mathbf{b}_i = \frac{l_i}{6EI_i} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (8)$$

Если жёсткость постоянна и обе функции  $M_{ik}^a$  и  $M_{ip}^a$  линейны, то  $M_{ik}^{cp} = \frac{1}{2}(M_{ik}^a + M_{ik}^b)$ ,  $M_{ip}^{cp} = \frac{1}{2}(M_{ip}^a + M_{ip}^b)$ ,  $g_i = 1$ . При этом формула (3) получает вид:

$$\Delta_{ik} = (M_{ik}^a, M_{ik}^b) \frac{l_i}{6EI_i} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} M_{ip}^a \\ M_{ip}^b \end{pmatrix}. \quad (9)$$

Здесь  $\mathbf{b}_i = \frac{l_i}{6EI_i} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$  – матрица податливости.

Кроме того, в случае, когда  $i$ -м участке один из концевых моментов равен нулю (например, при шарнирном опирании), порядок матрицы податливости понижается до первого:

$$b_i = \frac{l_i}{6EI_i} (2).$$

Для системы, состоящей из  $m$  элементов (стержней), при вычислении перемещения  $\Delta_{kp}$  следует выполнить суммирование по всем стержням:

$$\Delta_{kp} = \sum_{i=1}^m (\mathbf{M}'_{ik} \cdot \mathbf{b}_i \cdot \overline{\mathbf{M}}_{ip}) = \quad (10)$$

$$= \mathbf{M}'_{1k} \cdot \mathbf{b}_1 \cdot \overline{\mathbf{M}}_{1p} + \mathbf{M}'_{2k} \cdot \mathbf{b}_2 \cdot \overline{\mathbf{M}}_{2p} + \dots + \mathbf{M}'_{mk} \cdot \mathbf{b}_m \cdot \overline{\mathbf{M}}_{mp} = \mathbf{L}'_{mk} \cdot \mathbf{B} \cdot \overline{\mathbf{M}}_p.$$

Здесь  $\mathbf{L}'_{mk}$  – матрица-строка влияния изгибающих моментов в заданной системе от обобщённой силы  $x_k = 1$ , приложенной в  $k$  – м сечении по направлению искомого перемещения:

$$\mathbf{L}'_{mk} = (\mathbf{M}'_{1k}, \mathbf{M}'_{2k}, \dots, \mathbf{M}'_{mk}); \quad (11)$$

$\mathbf{B}$  – квазидиагональная матрица податливости всей системы,

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} \mathbf{b}_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \mathbf{b}_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \mathbf{b}_m \end{pmatrix}; \quad (12)$$

$\overline{\mathbf{M}}_p$  – вектор изгибающих моментов в заданной системе от внешних сил,

$$\overline{\mathbf{M}}_p = (\overline{\mathbf{M}}_{1p}, \overline{\mathbf{M}}_{2p}, \dots, \overline{\mathbf{M}}_{mp})^T. \quad (13)$$

Справедливость соотношения (10) покажем для системы, состоящей из двух ( $m=2$ ) элементов разной жёсткости, когда эпюры моментов  $M_k$  и  $M_p$  линейны. Имеем:

$$\Delta_{kp} = \sum_{i=1}^2 (\mathbf{M}'_{ik} \cdot \mathbf{b}_i \cdot \overline{\mathbf{M}}_{ip}) = \mathbf{M}'_{1k} \cdot \mathbf{b}_1 \cdot \overline{\mathbf{M}}_{1p} + \mathbf{M}'_{2k} \cdot \mathbf{b}_2 \cdot \overline{\mathbf{M}}_{2p} =$$

$$= (M_{1k}^a, M_{1k}^b) \frac{l_1}{6EI_1} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} M_{1p}^a \\ M_{1p}^b \end{pmatrix} +$$

$$+ (M_{2k}^a, M_{2k}^b) \frac{l_2}{6EI_2} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} M_{2p}^a \\ M_{2p}^b \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{l_1}{6EI_1} (2M_{1k}^a + M_{1k}^b, M_{1k}^a + 2M_{1k}^b) \cdot \begin{pmatrix} M_{1p}^a \\ M_{1p}^b \end{pmatrix} + \quad (a)$$

$$+ \frac{l_2}{6EI_2} (2M_{2k}^a + M_{2k}^b, M_{2k}^a + 2M_{2k}^b) \cdot \begin{pmatrix} M_{2p}^a \\ M_{2p}^b \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{l_1}{6EI_1} [(2M_{1k}^a + M_{1k}^b) \cdot M_{1p}^a + (M_{1k}^a + 2M_{1k}^b) \cdot M_{1p}^b] +$$

$$+ \frac{l_2}{6EI_2} [(2M_{2k}^a + M_{2k}^b) \cdot M_{2p}^a + (M_{2k}^a + 2M_{2k}^b) \cdot M_{2p}^b].$$

С другой стороны,

$$\begin{aligned}
 \Delta_{kp} &= \mathbf{L}'_{mk} \cdot \mathbf{B} \cdot \overline{\mathbf{M}}_p = \\
 &= (M_{1k}^a, M_{1k}^b, M_{2k}^a, M_{2k}^b) \begin{pmatrix} \frac{l_1}{6EI_1} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} & 0 \\ 0 & \frac{l_2}{6EI_2} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} M_{1p}^a \\ M_{1p}^b \\ M_{2p}^a \\ M_{2p}^b \end{pmatrix} = \\
 &= \left[ \frac{l_1}{6EI_1} (2M_{1k}^a + M_{1k}^b) + 0 + 0, \frac{l_1}{6EI_1} (M_{1k}^a + 2M_{1k}^b) + 0 + 0, \right. \\
 & \left. 0 + 0 + \frac{l_2}{6EI_2} (2M_{2k}^a + M_{2k}^b), 0 + 0 + \frac{l_2}{6EI_2} (M_{2k}^a + 2M_{2k}^b) \right] \cdot \begin{pmatrix} M_{1p}^a \\ M_{1p}^b \\ M_{2p}^a \\ M_{2p}^b \end{pmatrix} = \quad (6) \\
 &= \frac{l_1}{6EI_1} (2M_{1k}^a + M_{1k}^b) \cdot M_{1p}^a + \frac{l_1}{6EI_1} (M_{1k}^a + 2M_{1k}^b) \cdot M_{1p}^b = \\
 &= \frac{l_2}{6EI_2} (2M_{2k}^a + M_{2k}^b) \cdot M_{2p}^a + \frac{l_2}{6EI_2} (M_{2k}^a + 2M_{2k}^b) \cdot M_{2p}^b.
 \end{aligned}$$

Очевидно, что соотношения (а) и (б) равны. Этим доказывается справедливость соотношения (10).

При одновременном вычислении перемещений по "r" направлениям, то есть при нахождении вектора перемещения  $\overline{\Delta}_p$  матричная запись может быть представлена в виде:

$$\overline{\Delta}_p = \mathbf{L}'_m \cdot \mathbf{B} \cdot \overline{\mathbf{M}}_p. \quad (14)$$

Здесь  $\mathbf{L}'_m$  — транспонированная матрица влияния изгибающих моментов, имеющая r строк, состоящих из ординат эпюр моментов от обобщённых сил  $x_1 = x_2 = \dots = x_r = 1$ ;

$$\mathbf{L}'_m = \begin{pmatrix} \mathbf{M}'_{11} & \mathbf{M}'_{21} & \dots & \mathbf{M}'_{m1} \\ \mathbf{M}'_{12} & \mathbf{M}'_{22} & \dots & \mathbf{M}'_{m2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \mathbf{M}'_{1r} & \mathbf{M}'_{2r} & \dots & \mathbf{M}'_{mr} \end{pmatrix}; \quad (15)$$

$\mathbf{B}$  – квазидиагональная матрица податливости всей системы, её структура определяется формулой (12);

$\bar{\mathbf{M}}_p$  – вектор изгибающих моментов в заданной системе от внешней нагрузки, его структура определяется формулой (13);

$\bar{\Delta}_p$  – вектор искомых перемещений,

$$\bar{\Delta}_p = \begin{pmatrix} \Delta_{1p} \\ \Delta_{2p} \\ \dots \\ \Delta_{rp} \end{pmatrix}. \quad (16)$$

Здесь  $\Delta_{ip}$ ,  $i=1,2,\dots,r$  – перемещение по  $i$  – му направлению.

Матричный метод позволяет одновременно вычислять перемещения системы по " $r$ " направлениям от действия " $t$ " совокупностей нагрузок. При этом перемещения будут определяться по формуле (14), в которой матрица влияния будет задаваться соотношением (15), матрица податливости – соотношением (12), а вектор изгибающих моментов и вектор искомых перемещений будут записываться в виде матриц:

$$\bar{\mathbf{M}}_p = \begin{pmatrix} \bar{\mathbf{M}}_{1p_1} & \bar{\mathbf{M}}_{1p_2} & \dots & \bar{\mathbf{M}}_{1p_t} \\ \bar{\mathbf{M}}_{2p_1} & \bar{\mathbf{M}}_{2p_2} & \dots & \bar{\mathbf{M}}_{2p_t} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \bar{\mathbf{M}}_{mp_1} & \bar{\mathbf{M}}_{mp_2} & \dots & \bar{\mathbf{M}}_{mp_t} \end{pmatrix}; \quad (17)$$

$$\bar{\Delta}_p = \begin{pmatrix} \Delta_{1p_1} & \Delta_{1p_2} & \dots & \Delta_{1p_t} \\ \Delta_{2p_1} & \Delta_{2p_2} & \dots & \Delta_{2p_t} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \Delta_{rp_1} & \Delta_{rp_2} & \dots & \Delta_{rp_t} \end{pmatrix}. \quad (18)$$

Перемещение в ферме, то есть стержневой системе, элементы которой работают в основном на осевое растяжение (сжатие), нагруженной узловой внешней нагрузкой, в матричной форме имеет вид:

$$\bar{\Delta}_p = \mathbf{L}_N \cdot \mathbf{B}_N \cdot \bar{\mathbf{N}}_p. \quad (19)$$

Здесь  $L_N$  – транспонированная матрица нормальных усилий в стержнях фермы от обобщённых единичных сил;

$\bar{N}_P$  – вектор внутренних усилий в стержнях фермы от внешней нагрузки;

$\mathbf{B}_N$  – матрица податливости стержней фермы,

$$\mathbf{B}_N = \begin{pmatrix} \frac{1}{EA_1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \frac{1}{EA_2} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \frac{1}{EA_n} \end{pmatrix}. \quad (20)$$

Здесь  $n$  – количество стержней в ферме.

При расчёте перемещений в матричной форме общая погрешность результата будет складываться из погрешности метода Симпсона для численного вычисления интеграла и погрешности округлений при выполнении арифметических вычислений.

**Пример.**

Найти горизонтальное перемещение сечения 1 и угол поворота сечения 6 в portalной раме на рис. 22 [28].

**Решение.**

Разобьём раму на 4 участка: I, II, III и IV. Поскольку первый участок нагружен распределённой нагрузкой, наметим на нём три сечения: 1, 2, 3; на втором, третьем и четвёртом участках наметим по два сечения: 3, 4; 4, 5 и 5, 6.

На основании условий задачи имеем  $m = 4$ ,  $r = 2$ .

Строим грузовую и единичные эпюры моментов (рис. 23).

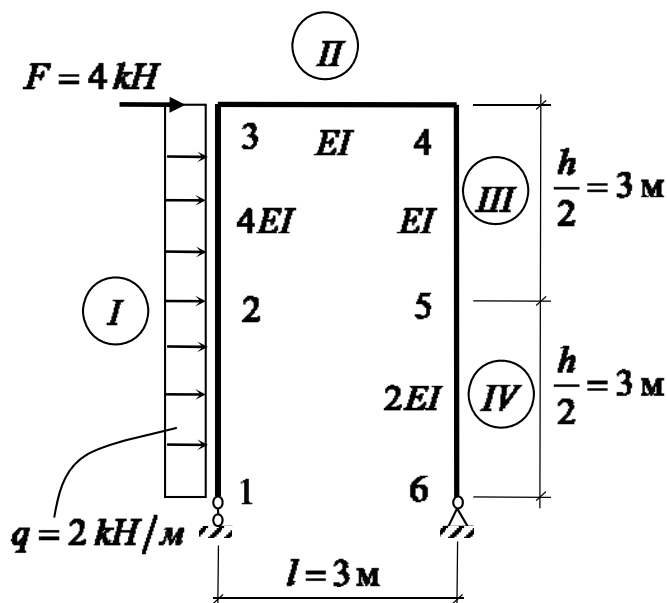


Рис. 22

Формируем матрицу податливости системы:

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} \mathbf{b}_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{b}_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{b}_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{b}_4 \end{pmatrix}.$$

Здесь

$$\mathbf{b}_1 = \frac{l_1}{6EI_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \frac{6}{6 \cdot 4EI} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{4EI} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix};$$

$$\mathbf{b}_2 = \frac{l_2}{6EI_2} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \frac{3}{6EI} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{4EI} \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix};$$

$$\mathbf{b}_3 = \frac{l_3}{6EI_3} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \frac{3}{6EI} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{4EI} \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix};$$

$$\mathbf{b}_4 = \frac{l_4}{6EI_4} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \frac{3}{6 \cdot 2EI} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{4EI} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

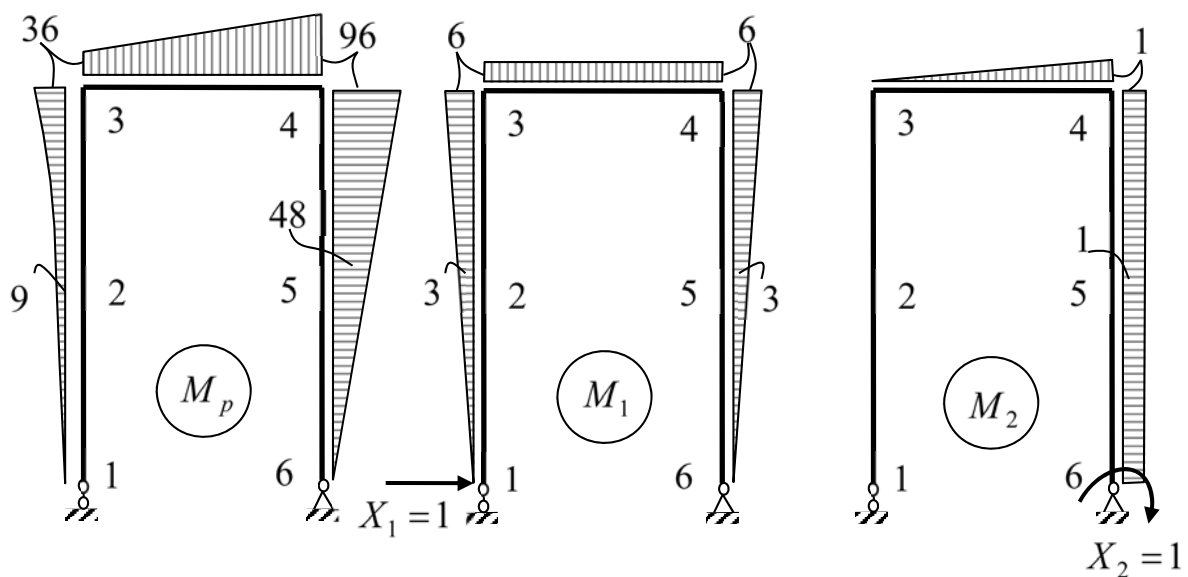


Рис. 23

Запишем матрицу влияния изгибающих моментов от обобщённых единичных сил:

$$\mathbf{L}'_m = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 6 & 6 & 6 & 3 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$



Здесь первая строка – это ординаты эпюры моментов  $M_1$ ; вторая строка – это ординаты эпюры моментов  $M_2$  в пронумерованных сечениях заданной стержневой системы (рамы).

Формируем матрицу влияния изгибающих моментов от грузового воздействия:

$$\overline{\mathbf{M}}_p = (0 \quad 9 \quad 36 \quad 36 \quad 96 \quad 96 \quad 48 \quad 48 \quad 0)^T.$$

Вектор искомых перемещений имеет вид:  $\overline{\Delta}_p = \begin{pmatrix} \Delta_{1p} \\ \Delta_{2p} \end{pmatrix}$ .

На основании соотношения (14) получаем:

$$\begin{pmatrix} \Delta_{1p} \\ \Delta_{2p} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 6; & 6 & 6; & 6 & 3; & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0; & 0 & 1; & 1 & 1; & 1 & 1 \end{pmatrix} \times$$

$$\times \frac{1}{4EI} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 9 \\ 36 \\ 36 \\ 96 \\ 96 \\ 48 \\ 48 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{EI} \begin{pmatrix} 2349 \\ 366 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, горизонтальное перемещение сечения 1 равно:  $\Delta_{1p} = \frac{2349}{EI}$ ; угол поворота сечения б равен:  $\Delta_{2p} = \frac{366}{EI}$ .

## §12. Расчёт стержневых систем методом сил в матричной форме

Начальная стадия расчёта статически неопределимых стержневых систем в матричной форме, связанная с определением степени статической неопределённости и выбором основной системы, ничем не отличается от расчёта обычным способом.

Система канонических уравнений метода сил в матричной форме имеет вид:

$$\mathbf{A}_s \cdot \overline{\mathbf{X}} + \overline{\Delta}_p = 0. \quad (1)$$

Здесь  $\mathbf{A}_\delta$  – матрица перемещений в основной системе,

$$\mathbf{A}_\delta = \begin{pmatrix} \delta_{11} & \delta_{12} & \dots & \delta_{1n} \\ \delta_{21} & \delta_{22} & \dots & \delta_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \delta_{n1} & \delta_{n2} & \dots & \delta_{nn} \end{pmatrix};$$

$\bar{\mathbf{X}}$  – вектор неизвестных усилий,  $\bar{\mathbf{X}} = (X_1 \ X_2 \ \dots \ X_n)^T$ ;

$\bar{\Delta}_p$  – вектор перемещений в основной системе от внешней нагрузки,

$$\bar{\Delta}_p = (\Delta_{1p} \ \Delta_{2p} \ \dots \ \Delta_{np})^T;$$

$n$  – степень статической неопределимости системы.

В матрице перемещений  $\delta_{ij}$  – перемещение по направлению  $i$  от действия единичной силы, приложенной по направлению  $j$ .

Матрицу перемещений  $\mathbf{A}_\delta$  можно представить в следующем виде:

$$\mathbf{A}_\delta = (\mathbf{L}_m^0)^T \cdot \mathbf{B} \cdot \mathbf{L}_m^0. \quad (2)$$

Здесь  $\mathbf{L}_m^0$  – матрица влияния внутренних усилий (изгибающих моментов для стержневых систем, элементы которых работают преимущественно на изгиб) в основной системе от единичных сил, приложенных по направлению «лишних» связей  $X_1 = X_2 = \dots = X_n = 1$ ,

$$\mathbf{L}_m^0 = \begin{pmatrix} \mathbf{M}_{11} & \mathbf{M}_{12} & \dots & \mathbf{M}_{1n} \\ \mathbf{M}_{21} & \mathbf{M}_{22} & \dots & \mathbf{M}_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \mathbf{M}_{n1} & \mathbf{M}_{n2} & \dots & \mathbf{M}_{nn} \end{pmatrix};$$

$m$  – количество элементов (стержней) в стержневой системе;

$\mathbf{B}$  – матрица податливости отдельных элементов (участков), на которые разбивают заданную стержневую систему;

Вектор перемещений  $\bar{\Delta}_p$  в основной системе от нагружения внешними силами можно записать так:

$$\bar{\Delta}_p = (\mathbf{L}_m^0)^T \cdot \mathbf{B} \cdot \mathbf{L}_{mp}^0 \cdot \bar{\mathbf{P}}. \quad (3)$$

Здесь  $\mathbf{L}_{mp}^0$  – матрица влияния внутренних усилий (изгибающих моментов) в основной системе от единичной внешней нагрузки.

$\bar{\mathbf{P}}$  – вектор-столбец внешней нагрузки на систему.

Решив матричное уравнение (1), найдём вектор неизвестных:

$$\bar{\mathbf{X}} = -\mathbf{A}_\delta^{-1} \cdot \bar{\Delta}_p. \quad (4)$$

Учитывая соотношения (2) и (3), уравнение (4) преобразуем к виду:

$$\bar{\mathbf{X}} = -\left[ (\mathbf{L}_m^0)^T \cdot \mathbf{V} \cdot \mathbf{L}_m^0 \right]^{-1} \cdot (\mathbf{L}_m^0)^T \cdot \mathbf{V} \cdot \mathbf{L}_{mp}^0 \cdot \bar{\mathbf{P}}. \quad (5)$$

Вектор изгибающих моментов в пронумерованных сечениях заданной статически неопределимой стержневой системы найдём, используя соотношение:

$$\bar{\mathbf{M}} = \mathbf{L}_{mp}^0 \cdot \bar{\mathbf{P}} + \mathbf{L}_m^0 \cdot \bar{\mathbf{X}}. \quad (6)$$

Таким образом, для численной реализации на ЭВМ матричного метода сил необходимо составить четыре исходные матрицы:  $\mathbf{L}_m^0$ ,  $\mathbf{V}$ ,  $\mathbf{L}_{mp}^0$ ,  $\bar{\mathbf{P}}$ .

Окончательная эпюра изгибающих моментов должна удовлетворять как уравнениям равновесия, так и всем кинематическим условиям. В матричной форме это равносильно отысканию полного вектора перемещений  $\bar{\mathbf{Z}}$ , значение которого должно быть равно нулю:

$$\bar{\mathbf{Z}} = (\mathbf{L}_m^0)^T \cdot \mathbf{V} \cdot \bar{\mathbf{M}} \equiv 0. \quad (7)$$

Формула (7) используется для проверки правильности построенного решения.

При действии на статически неопределимую стержневую систему отдельно "t" вариантов внешних воздействий система канонических уравнений имеет вид:

$$\mathbf{A}_\delta \cdot \mathbf{X} + \Delta = 0. \quad (8)$$

Здесь  $\mathbf{X}$  – матрица неизвестных, имеющая "t" столбцов;  
 $\mathbf{A}_\delta$  – матрица перемещений в основной системе от единичных сил  $X_1 = X_2 = \dots = X_n = 1$ ;  
 $\Delta = (\mathbf{L}_m^0)^T \cdot \mathbf{V} \cdot \mathbf{A}_{mp}^0 \cdot \mathbf{P}$  – матрица перемещений от всех "t" вариантов нагрузок в основной системе;  
 $\mathbf{A}_{mp}^0$  – матрица влияния изгибающих моментов в основной системе от всех "t" вариантов внешних единичных нагрузок  $F_1^{(1)}, F_2^{(1)}, \dots, F_1^{(2)}, F_2^{(2)}, \dots, F_k^{(t)} = 1$ , приложенных отдельно;  
 $\mathbf{P}$  – матрица всех "t" вариантов внешних воздействий.

Решение системы (8) имеет вид:

$$\mathbf{X} = -\mathbf{A}_\delta^{-1} \cdot \Delta. \quad (9)$$

Окончательные значения изгибающих моментов от всех "t" вариантов внешних воздействий получим в виде матрицы:

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} M_1^{(1)} & M_1^{(2)} & \dots & M_1^{(t)} \\ M_2^{(1)} & M_2^{(2)} & \dots & M_2^{(t)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ M_m^{(1)} & M_m^{(2)} & \dots & M_m^{(t)} \end{pmatrix} = \mathbf{A}_{mp}^0 \cdot \mathbf{P} + \mathbf{L}_m^0 \cdot \mathbf{X}. \quad (10)$$

Таким образом, при расчёте системы методом сил в матричной форме необходимо:

- выбрать основную систему метода сил;
- построить единичные эпюры моментов от единичных воздействий  $X_1 = X_2 = \dots = X_n = 1$ ;
- построить единичные грузовые эпюры моментов от грузовой нагрузки, принимаемой равной единице:  $F_1^{(1)}, F_2^{(1)}, \dots, F_1^{(2)}, F_2^{(2)}, \dots, F_k^{(t)} = 1$ ;
- составить матрицы  $\mathbf{L}_m^0$ ,  $\mathbf{B}$ ,  $\mathbf{L}_{mp}^0$ ,  $\mathbf{P}$  и выполнить их перемножение.

Пример.

Построить эпюры внутренних усилий в статически неопределимой раме (рис. 24) методом сил в матричной форме [28].

Исходные данные:  $h = 3$  м,  $l = 6$  м,  $F = 3$  кН,  $q = 2$  кН/м.

Решение.

Рама является три раза статически неопределимой. Для получения основной системы отбросим правую жёсткую опору и заменим её действие тремя неизвестными силами  $X_1, X_2, X_3$  (рис. 25).

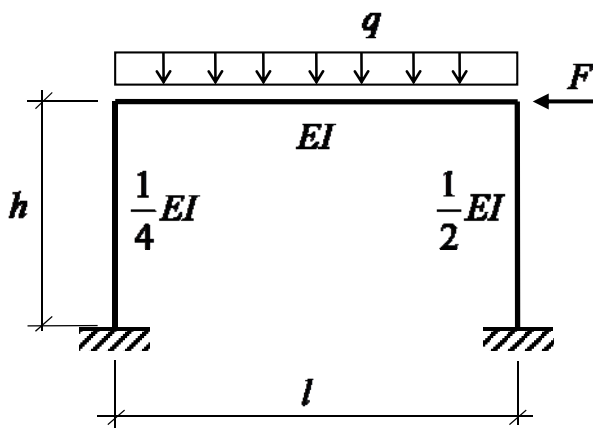


Рис. 24

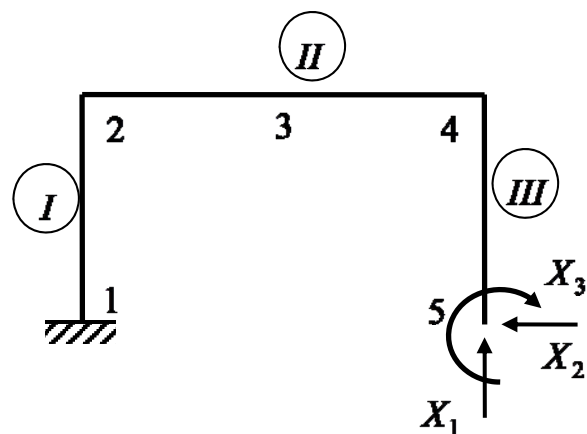


Рис. 25

Разобьем раму на три участка I, II, III. На левой стойке наметим два сечения: 1, 2; на ригеле – три сечения: 2, 3, 4; на правой стойке – два сечения: 4, 5 (рис. 25).

Строим единичные эпюры моментов в основной системе (рис. 26):

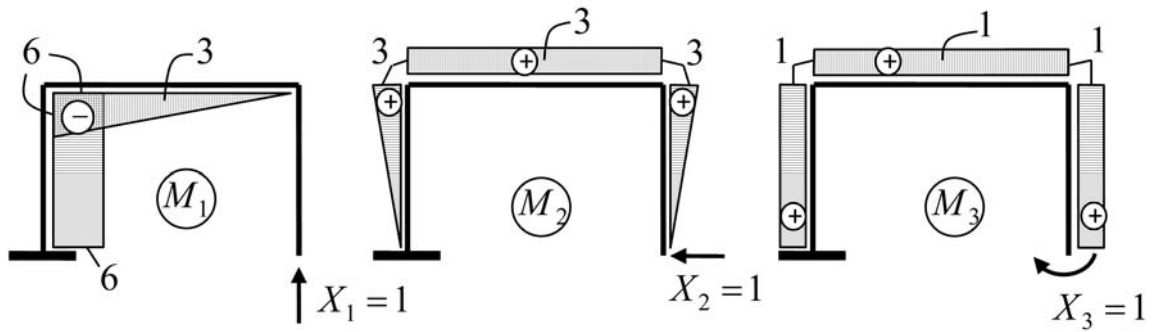


Рис. 26

Строим эпюры моментов от единичной грузовой нагрузки (рис. 27):

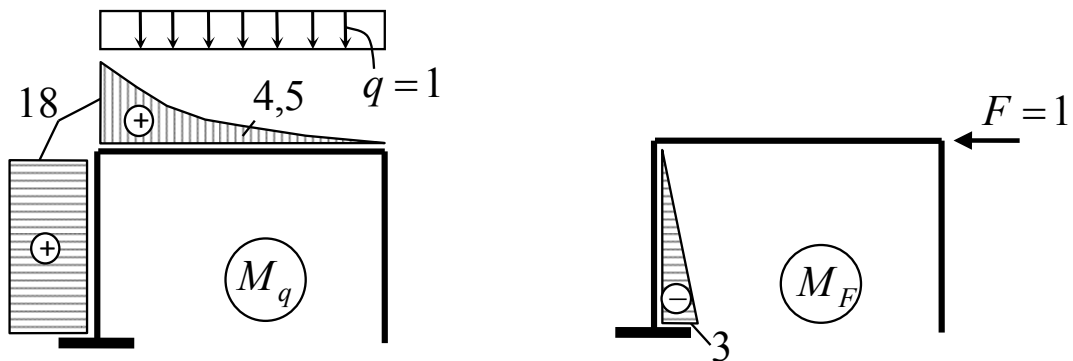


Рис. 27

Формируем расчётные матрицы:

$$\mathbf{L}_m^0 = \begin{pmatrix} -6 & 0 & 1 \\ -6 & 3 & 1 \\ -6 & 3 & 1 \\ -3 & 3 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad \mathbf{L}_{mp}^0 = \begin{pmatrix} 18 & -3 \\ 18 & 0 \\ 18 & 0 \\ 4,5 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad \bar{\mathbf{P}} = \begin{pmatrix} q \\ F \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Матрица податливости:

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} \mathbf{b}_1 & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{b}_2 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{b}_3 \end{pmatrix}.$$

Здесь

$$\mathbf{b}_1 = \frac{h}{6EI_1} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \frac{3 \cdot 4}{6EI} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{EI} \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix};$$

$$\mathbf{b}_2 = \frac{l}{6EI_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \frac{6}{6EI} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{EI} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix};$$

$$\mathbf{b}_3 = \frac{h}{6EI_3} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \frac{3 \cdot 2}{6EI} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{EI} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

То есть матрица податливости получает вид:

$$\mathbf{B} = \frac{1}{EI} \begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Перемножаем матрицы:

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_\delta &= (\mathbf{L}_m^0)^T \cdot \mathbf{B} \cdot \mathbf{L}_m^0 = \\ &= \frac{1}{EI} \begin{pmatrix} -6 & -6 & -6 & -3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -6 & 0 & 1 \\ -6 & 3 & 1 \\ -6 & 3 & 1 \\ -3 & 3 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \\ &= \frac{1}{EI} \begin{pmatrix} 504 & -162 & -90 \\ -162 & 108 & 45 \\ -90 & 45 & 24 \end{pmatrix}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bar{\Delta}_p &= \begin{pmatrix} \Delta_{1p} \\ \Delta_{2p} \\ \Delta_{3p} \end{pmatrix} = (\mathbf{L}_m^0)^T \cdot \mathbf{B} \cdot \mathbf{L}_{mp}^0 \cdot \bar{\mathbf{P}} = \\ &= \frac{1}{EI} \begin{pmatrix} -6 & -6 & -6 & -3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \times \\ &\times \begin{pmatrix} 18 & 0 \\ 18 & 0 \\ 18 & 0 \\ 4,5 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \frac{1}{EI} \begin{pmatrix} -2592 \\ 810 \\ 450 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Далее находим:

$$\mathbf{A}_\delta^{-1} = \frac{EI}{93312} \begin{pmatrix} 567 & -162 & 2430 \\ -162 & 3996 & -8100 \\ 2430 & -8100 & 28188 \end{pmatrix}.$$

Теперь находим вектор неизвестных:

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{X}} &= \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{pmatrix} = -\mathbf{A}_\delta^{-1} \cdot \bar{\Delta}_p = \\ &= -\frac{EI}{93312} \begin{pmatrix} 567 & -162 & 2430 \\ -162 & 3996 & -8100 \\ 2430 & -8100 & 28188 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{EI} \begin{pmatrix} -2592 \\ 810 \\ 450 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5,44 \\ -0,13 \\ 1,88 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Подсчитываем значения изгибающих моментов в пронумерованных сечениях заданной стержневой системы:

$$\bar{\mathbf{M}} = \begin{pmatrix} M_1 \\ M_2 \\ M_2 \\ M_3 \\ M_4 \\ M_4 \\ M_5 \end{pmatrix} = \mathbf{L}_{mp}^0 \cdot \bar{\mathbf{P}} + \mathbf{L}_m^0 \cdot \bar{\mathbf{X}} = \begin{pmatrix} 18 & -3 \\ 18 & 0 \\ 18 & 0 \\ 4,5 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -6 & 0 & 1 \\ -6 & 3 & 1 \\ -6 & 3 & 1 \\ -3 & 3 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5,44 \\ -0,13 \\ 1,88 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3,75 \\ 4,88 \\ 4,88 \\ -5,81 \\ 1,5 \\ 1,5 \\ 1,88 \end{pmatrix}$$

Выполняем проверку:

$$\bar{\mathbf{Z}} = \mathbf{L}_m^0 \cdot \mathbf{B} \cdot \bar{\mathbf{M}} = \frac{1}{EI} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Строим окончательную эпюру моментов (рис. 28):

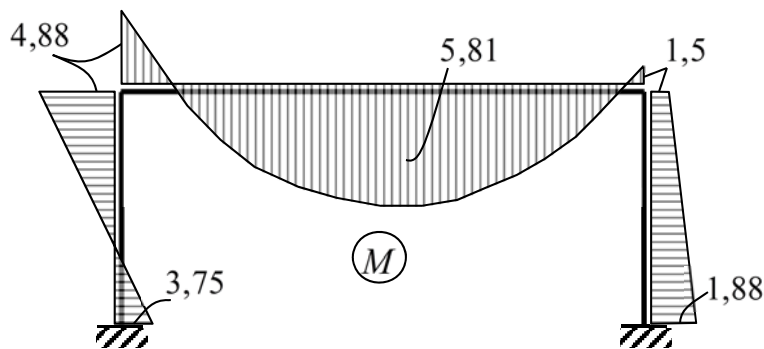


Рис. 28

Окончательные эпюры поперечных и продольных сил строятся по окончательной эпюре изгибающих моментов методами строительной механики.

### §13. Расчёт стержневых систем методом перемещений в матричной форме

Для "n" раз кинематически неопределимой системы канонические уравнения метода перемещений в матричной форме имеют вид:

$$\mathbf{R}_r \cdot \bar{\mathbf{Z}} + \bar{\mathbf{R}}_p = 0. \quad (1)$$



Здесь  $\mathbf{R}_r$  – матрица реакций в присоединённых связях в основной системе от единичных перемещений этих связей,

$$\mathbf{R}_r = \begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{1n} \\ r_{21} & r_{22} & r_{2n} \\ \dots & \dots & \dots \\ r_{n1} & r_{n2} & r_{nn} \end{pmatrix};$$

$\bar{\mathbf{Z}}$  – вектор неизвестных перемещений,  $\bar{\mathbf{Z}} = (Z_1, Z_2, \dots, Z_n)^T$ ;

$\bar{\mathbf{R}}_p$  – вектор реактивных усилий в присоединённых связях от внешней нагрузки,  $\bar{\mathbf{R}}_p = (R_{1p} \quad R_{2p} \quad \dots \quad R_{np})^T$ ;

$r_{ij}$  – реакция в  $i$ -й связи от единичного перемещения  $j$ -й связи.

Для вычислений компонентов матрицы реакций  $\mathbf{R}_r$  и вектора реактивных усилий  $\bar{\mathbf{R}}_p$  воспользуемся способом перемещения эпюр:

$$r_{ik} = \sum \int \frac{M_i M_k}{EI} dz; \quad R_{ip} = - \sum \int \frac{M_i M_p^1}{EI} dz. \quad (2)$$

В силу того что элементы  $r_{ik}, R_{ip}$  вычисляются так же, как и  $\delta_{ik}, \Delta_{ip}$  метода сил, то и матрицы  $\mathbf{R}_r$  и  $\mathbf{R}_p$  можно вычислять аналогично матрицам  $\mathbf{A}_\delta, \bar{\mathbf{\Delta}}_p$  метода сил:

$$\mathbf{R}_r = (\mathbf{L}_m^0)^T \cdot \mathbf{V} \cdot \mathbf{L}_m^0; \quad \bar{\mathbf{R}}_p = -(\mathbf{L}_m^0)^T \cdot \mathbf{V} \cdot \mathbf{L}_{mp}^0 \cdot \bar{\mathbf{P}}. \quad (3)$$

Здесь  $\mathbf{L}_m^0$  – матрица влияния изгибающих моментов в основной системе метода перемещений от единичных перемещений присоединённых связей  $Z_1 = 1, Z_2 = 1, \dots, Z_n = 1$ . Матрица содержит " $n$ " столбцов и " $m$ " строк;

$n$  – число единичных перемещений;

$m$  – число сечений, в которых вычисляются внутренние усилия;

$\mathbf{V}$  – матрица податливости отдельных, несвязанных элементов;

$\mathbf{L}_{mp}^0$  – матрица влияния изгибающих моментов в любой статистически определимой системе, полученной из заданной, от внешних сил, равных единице,  $F_1 = 1, F_2 = 1, \dots, F_k = 1$ ;

$\bar{\mathbf{P}}$  – вектор внешних сил,  $\bar{\mathbf{P}} = (F_1 \quad F_2 \quad \dots \quad F_k)$ .

Решив матричное уравнение (1), найдём вектор неизвестных:

$$\bar{\mathbf{Z}} = -\mathbf{R}_r^{-1} \cdot \bar{\mathbf{R}}_p = \left[ (\mathbf{L}_m^0)^T \cdot \mathbf{V} \cdot \mathbf{L}_m^0 \right]^{-1} \cdot (\mathbf{L}_m^0)^T \cdot \mathbf{V} \cdot \mathbf{L}_{mp}^0 \cdot \bar{\mathbf{P}}. \quad (4)$$

Окончательные значения изгибающих моментов в пронумерованных сечениях заданной стержневой системы определяют по уравнению

$$\bar{\mathbf{M}} = \mathbf{L}_{mp} \bar{\mathbf{P}} + \mathbf{L}_m^0 \cdot \bar{\mathbf{Z}}. \quad (5)$$

Здесь  $L_{mp}$  – матрица влияния изгибающих моментов в основной системе метода перемещений от внешних сил, равных единице.

При действии на статически неопределимую систему "t" вариантов внешних нагрузок векторы  $\bar{Z}$  и  $\bar{R}_p$  переходят в прямоугольные матрицы порядка  $n \times t$ , где  $n$  – степень кинематической неопределимости системы. Матрица реакций  $R_p$  вычисляется по формуле (3).

Таким образом, для расчёта системы методом перемещений в матричной форме необходимо построить матрицы  $L_m^0$ ,  $L_{mp}^0$ ,  $V$ ,  $L_{mp}$  и вектор  $\bar{P}$ . При этом алгоритм расчёта будет следующим:

- а) выбор основной системы метода перемещений;
- б) построение единичных эпюр моментов от единичных воздействий  $Z_1 = Z_2 = \dots = Z_n = 1$ ;
- в) построение единичных грузовых эпюр моментов от грузовой нагрузки, принимаемой равной единице, в статически определимой системе;
- г) построение единичных грузовых эпюр моментов от грузовой нагрузки, принимаемой равной единице, в основной системе метода перемещений;
- д) составление матриц  $L_m^0$ ,  $L_{mp}^0$ ,  $V$ ,  $L_{mp}$ ,  $\bar{P}$  и их перемножение.

Проверкой правильности полученного решения является *статическая проверка*, заключающаяся в проверке выполнения условий равновесия узлов стержневой системы.

#### Пример.

Построить эпюры внутренних усилий в статически неопределимой раме (рис. 29) методом перемещений в матричной форме [28].

Исходные данные:  $F = 6$  кН;  $q = \frac{4}{3}$  кН/м. Длины и жёсткости стержней

показаны на рис. 29. Для упрощения будем полагать, что  $EI = 1$ . Стержневая системы будет три раза кинематически неопределима ( $n = 3$ ).

#### Решение.

Разбиваем заданную систему на семь участков, руководствуясь тем, чтобы в пределах каждого участка эпюры изгибающих моментов не имели разрывов и точек перегиба (на основной системе эти участки отмечены арабскими цифрами в кружочках). На каждом участке намечаем расчётные сечения: на участке 1 – сечения 1 и 2; на участке 2 – сечения 3 и 4; на участке 3 – сечения 5 и 6; на участке 4 – сечения 7 и 9; на участке 5 – сечения 8 и 9; на участке 6 – сечения 9, 10 и 11; на участке 7 – сечения 12 и 13.

Принимаем рабочее правило для изгибающих моментов: направление положительных моментов отмечено знаком  $\oplus$  (рис. 30).

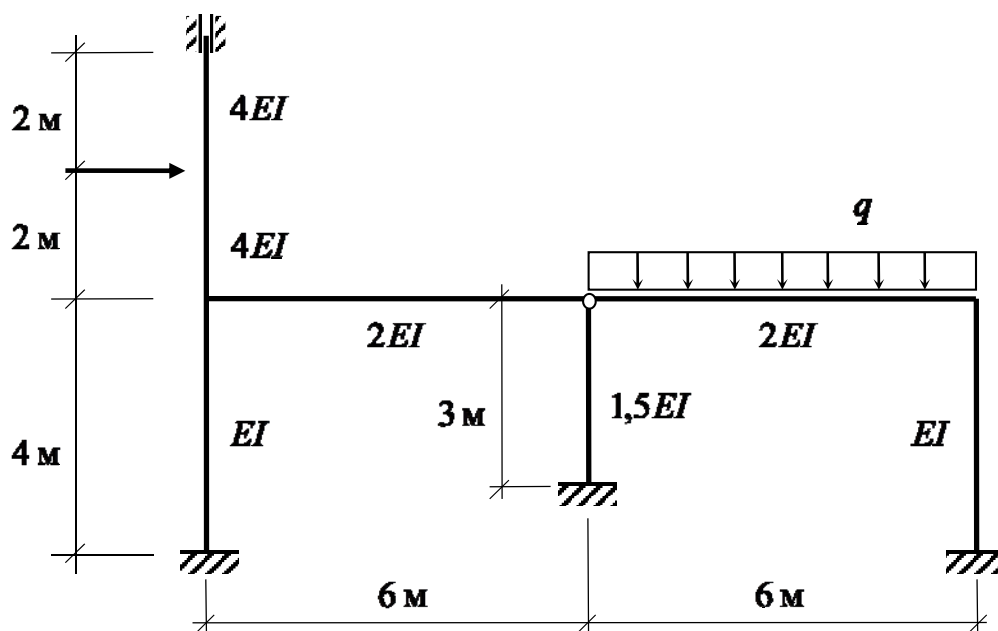


Рис. 29

Основная система метода перемещений показана на рис. 30.

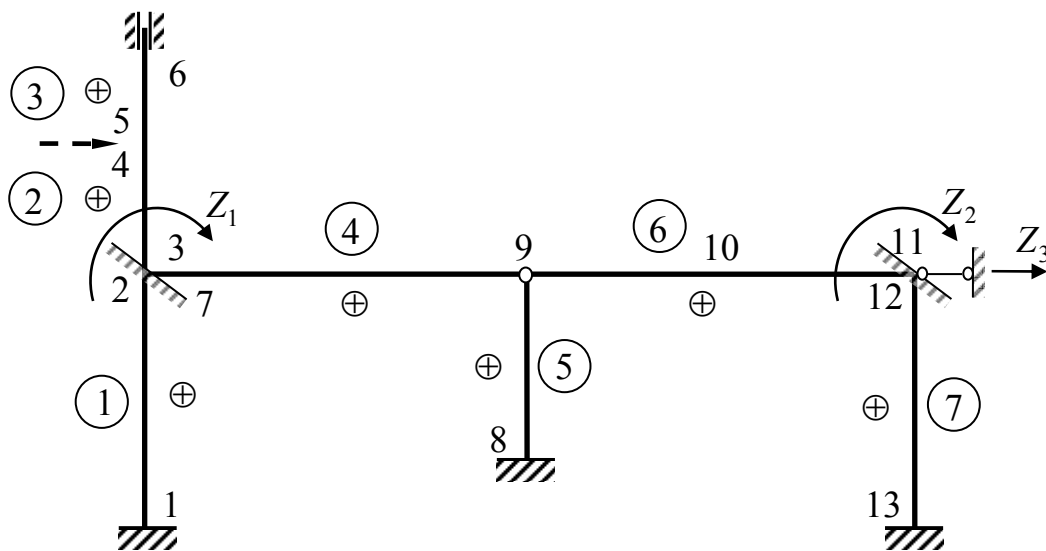


Рис. 30

Строим единичные эпюры (рис. 31, а,б,в,г,д,е,ж), помня, что  $EI=1$ .

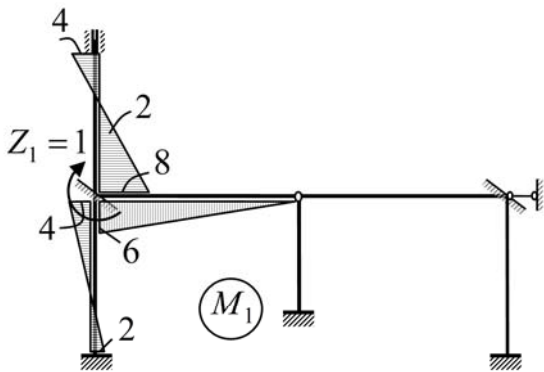


Рис. 31а

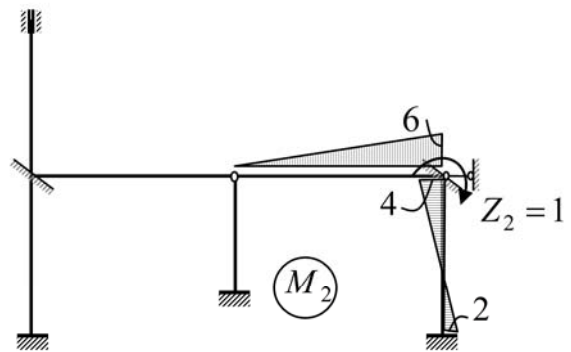


Рис. 31б

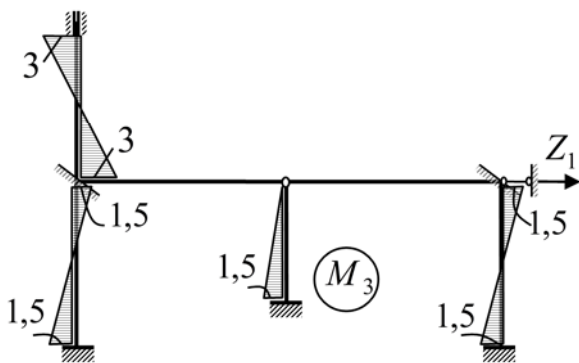


Рис. 31в

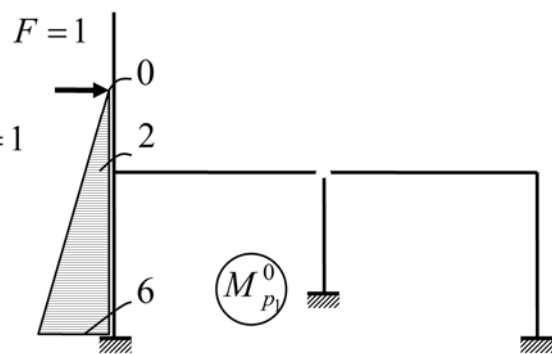


Рис. 31г

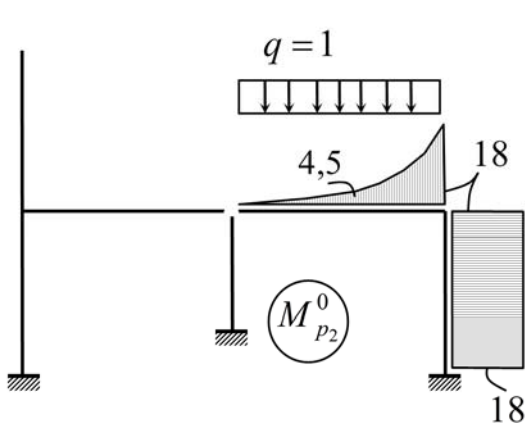


Рис. 31д

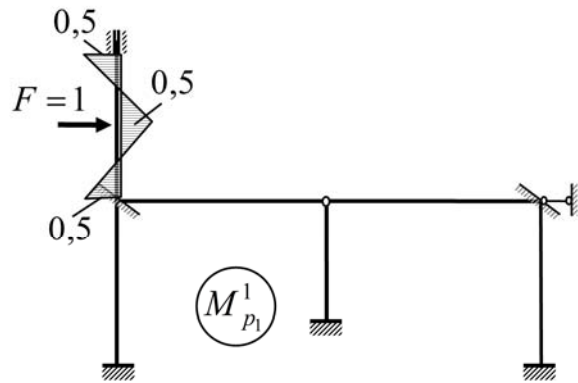


Рис. 31е

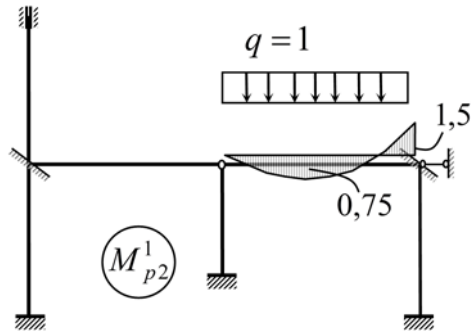


Рис. 31ж

Составляем расчётные матрицы:

$$\mathbf{L}_m^0 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1,5 \\ -4 & 0 & 1,5 \\ -8 & 0 & -3 \\ -2 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 3 \\ 6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1,5 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & -6 & 0 \\ 0 & 4 & -1,5 \\ 0 & -2 & 1,5 \end{pmatrix}; \quad \mathbf{L}_{mp}^0 = \begin{pmatrix} -6 & 0 \\ -2 & 0 \\ 2 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & -4,5 \\ 0 & -18 \\ 0 & -18 \\ 0 & -18 \end{pmatrix}; \quad \mathbf{L}_{mp} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0,5 & 0 \\ -0,5 & 0 \\ -0,5 & 0 \\ 0,5 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0,75 \\ 0 & -1,5 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix};$$

$$\bar{\mathbf{P}} = \begin{pmatrix} 6 \\ 4/3 \end{pmatrix}.$$

Матрица податливости имеет вид:

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} \mathbf{b}_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \mathbf{b}_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \mathbf{b}_7 \end{pmatrix},$$

где

$$\mathbf{b}_1 = \frac{4}{6EI} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{12} \begin{pmatrix} 16 & 8 \\ 8 & 16 \end{pmatrix}; \quad \mathbf{b}_2 = \frac{2}{6 \cdot 4EI} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{12} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix};$$

$$\mathbf{b}_3 = \frac{2}{6 \cdot 4EI} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{12} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}; \quad \mathbf{b}_4 = \frac{6}{6 \cdot 2EI} (2) = \frac{1}{12} (12);$$

$$\mathbf{b}_5 = \frac{3}{6 \cdot 1,5EI} (2) = \frac{1}{12} (8); \quad \mathbf{b}_6 = \frac{6}{6 \cdot 2EI} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{12} \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 24 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix};$$

$$\mathbf{b}_7 = \frac{4}{6 \cdot EI} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{12} \begin{pmatrix} 16 & 8 \\ 8 & 16 \end{pmatrix}.$$

Выполняем перемножение матриц:

$$\mathbf{R}_r = (\mathbf{L}_m^0)^T \cdot \mathbf{B} \cdot \mathbf{L}_m^0 = \begin{pmatrix} 18 & 0 & 1,5 \\ 0 & 10 & -1,5 \\ 1,5 & -1,5 & 3,5 \end{pmatrix};$$

$$\bar{\mathbf{R}}_p = -(\mathbf{L}_m^0)^T \cdot \mathbf{B} \cdot \mathbf{L}_{mp}^0 \cdot \bar{\mathbf{P}} = \begin{pmatrix} 3 \\ -6 \\ 3 \end{pmatrix};$$

$$\bar{\mathbf{Z}} = -\mathbf{R}_r^{-1} \cdot \bar{\mathbf{R}}_p = \begin{pmatrix} 0,12 \\ -0,51 \\ 0,59 \end{pmatrix}.$$

$$\bar{\mathbf{M}} = \mathbf{L}_{mp} \cdot \bar{\mathbf{P}} + \mathbf{L}_m \cdot \bar{\mathbf{Z}} = \begin{pmatrix} -0,645 \\ 0,410 \\ 0,296 \\ -3,235 \\ -3,235 \\ 5,233 \\ 0,706 \\ 0,881 \\ 0,0 \\ 4,536 \\ -2,928 \\ -2,928 \\ 1,905 \end{pmatrix}.$$

По полученным координатам вектора  $\bar{M}$ , с учётом принятого правила знаков для изгибающих моментов, строим окончательную эпюру изгибающих моментов (рис. 32):

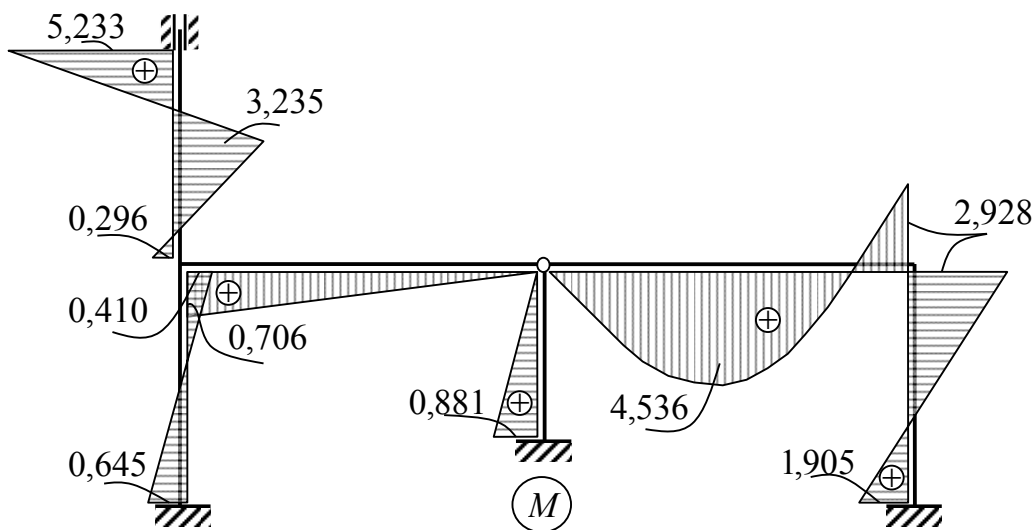


Рис. 32

Окончательные эпюры поперечных и продольных сил строятся по окончательной эпюре изгибающих моментов методами строительной механики.

#### §14. Метод конечных элементов для расчёта стержневых систем

Для организации расчёта стержневой системы методом конечных элементов система разбивается на конечные элементы в виде прямолинейных или криволинейных стержней (например, для расчёта арок) с различными условиями соединения конечных элементов в узлах. Все внешние силы, действующие на стержневую систему, считаются приложенными в узлах по направлению их возможных перемещений. Внеузловые нагрузки предварительно приводятся к узловым. Для преобразования внеузловой нагрузки к узловой используют таблицы метода перемещений.

При расчёте плоских стержневых систем методом конечных элементов приняты те же гипотезы, что и в обычном методе перемещений, за исключением того, что при анализе напряжённо-деформированного состояния стержневого конечного элемента учитывается влияние не только изгибных деформаций, но и продольных деформаций на перемещения вершин конечного элемента.

В качестве конечных элементов рассматриваются прямолинейные стержни, имеющие постоянную жёсткость по длине. Между собой конечные элементы могут соединяться в узлах жёстко или с помощью шарнира. При наличии в системе криволинейных стержней или стержней с

переменной жёсткостью их, с достаточной степенью точности, разбивают на участки, в пределах которых стержни считают прямолинейными, с усреднённой постоянной жёсткостью.

В методе конечных элементов различают общую (глобальную)  $X^0, Y^0, Z^0$  и местную (локальную)  $X, Y, Z$  системы координат. Глобальная система координат задаётся для всей стержневой системы, относительно которой определяются перемещения узлов сопряжения стержней. Локальная система координат связывается с каждым стержнем (конечным элементом) так, что из двух осей, расположенных в плоскости стержневой системы, одна направлена вдоль оси стержневого конечного элемента.

Дискретная модель стержневой системы, которая связывается с общей системой осей координат  $X^0, Y^0, Z^0$ , характеризуется  $n$  параметрами обобщённых перемещений  $Z_i$  и узловых силовых воздействий  $P_i$ , составляющих векторы:

$$\bar{\mathbf{Z}} = \begin{pmatrix} Z_1 \\ Z_2 \\ \vdots \\ Z_n \end{pmatrix}; \quad \bar{\mathbf{P}} = \begin{pmatrix} P_1 \\ P_2 \\ \vdots \\ P_n \end{pmatrix}. \quad (1)$$

Эти векторы связаны между собой матрицей жёсткости всей системы  $\mathbf{K}$ :

$$\bar{\mathbf{P}} = \mathbf{K} \cdot \bar{\mathbf{Z}}. \quad (2)$$

Каждый конечный элемент связан с местной системой осей координат  $X, Y, Z$  и характеризуется своими параметрами узловых перемещений  $\bar{\mathbf{V}}$  и соответствующими узловыми усилиями  $\bar{\mathbf{S}}$ :

$$\bar{\mathbf{V}}_{i(j)} = \begin{pmatrix} u \\ v \\ \phi_z \end{pmatrix}; \quad \bar{\mathbf{S}}_{i(j)} = \begin{pmatrix} S_x \\ S_y \\ M_z \end{pmatrix}. \quad (3)$$

Здесь  $i$  – начальный узел стержневого конечного элемента;  $j$  – конечный узел стержневого конечного элемента;  $u, v$  – линейные перемещения узла вдоль осей  $X, Y$ ;  $\phi_z$  – угловое перемещение узла относительно оси  $Z$ ;  $S_x, S_y$  – узловые силы по направлению соответствующих осей;  $M_z$  – узловой момент относительно оси  $Z$ .

Векторы  $\bar{\mathbf{V}}$  и  $\bar{\mathbf{S}}$  связаны матрицей жёсткости конечного элемента  $\mathbf{r}$ :

$$\bar{\mathbf{S}} = \mathbf{r} \cdot \bar{\mathbf{V}}. \quad (4)$$



$$\text{Здесь } \bar{\mathbf{S}} = \begin{pmatrix} \bar{\mathbf{S}}_i \\ \bar{\mathbf{S}}_j \end{pmatrix}; \quad \bar{\mathbf{V}} = \begin{pmatrix} \bar{\mathbf{V}}_i \\ \bar{\mathbf{V}}_j \end{pmatrix}.$$

Кроме того, для элементов, в пределах которых внеузловая нагрузка преобразуется к узловой, формируют векторы грузовых усилий  $\bar{\mathbf{S}}^0$ .

На рис. 33 показаны принятые положительные направления узловых сил и узловых моментов, а также линейных и угловых перемещений.

Рассмотрим построение матрицы жёсткости стержневого конечного элемента в местной системе координат.

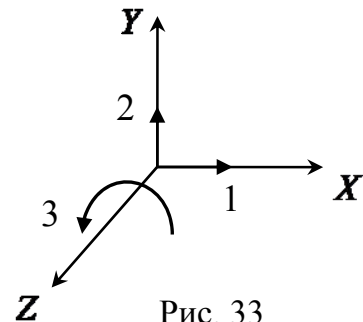


Рис. 33

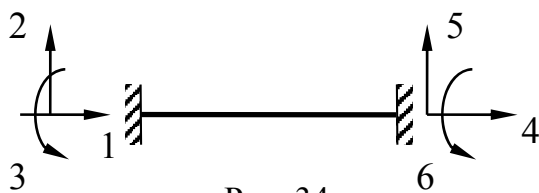


Рис. 34

Матрица жёсткости стержневого конечного элемента в местной системе координат устанавливает связь между единичными перемещениями и соответствующими усилиями в узловых точках для горизонтально

расположенного конечного элемента. В соответствии с вышесказанным всё многообразие стержневых конечных элементов можно свести к трём типам элементов.

а) Конечный элемент, жёстко защемлённый по концам (балочно-защемлённый) (рис. 34). Такой элемент имеет шесть степеней свободы, то есть неизвестными являются шесть возможных перемещений узловых точек элемента. Матрица жёсткости будет иметь вид:

$$\mathbf{r} = \begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} & \dots & r_{16} \\ r_{21} & r_{22} & \dots & r_{26} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ r_{61} & r_{62} & \dots & r_{66} \end{pmatrix}. \quad (5)$$

б) Конечный элемент, жёстко защемлённый с одного конца и имеющий шарнирную опору с другого конца (балочно-комбинированный) (рис. 35). Такой элемент имеет пять степеней свободы. Матрица жёсткости будет пятого порядка:

$$\mathbf{r} = \begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} & \dots & r_{15} \\ r_{21} & r_{22} & \dots & r_{25} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ r_{51} & r_{52} & \dots & r_{55} \end{pmatrix}.$$

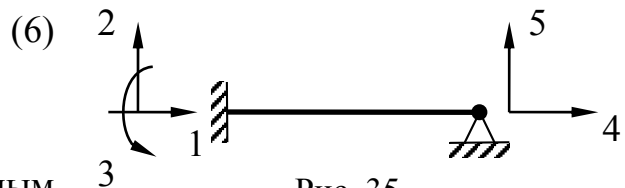


Рис. 35

в) Конечный элемент с шарнирным опиранием по обеим сторонам

(шарнирно-стержневой) (рис. 36). Такой элемент имеет четыре степени свободы и матрица жёсткости будет четвёртого порядка:

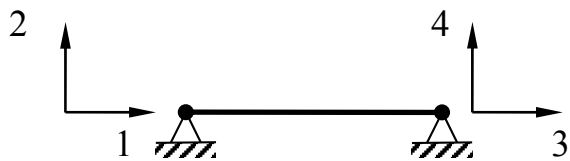


Рис. 36

$$\mathbf{r} = \begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} & r_{14} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} & r_{24} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} & r_{34} \\ r_{41} & r_{42} & r_{43} & r_{44} \end{pmatrix}. \quad (7)$$

В матрицах (65), (66), (67) компонента  $r_{ij}$  — это реактивное усилие в связи  $i$  от единичного перемещения связи  $j$ .

Матрицу жёсткости  $\mathbf{r}$  часто записывают в блочном виде:

$$\mathbf{r} = \begin{pmatrix} \mathbf{r}_{nn} & \mathbf{r}_{nk} \\ \mathbf{r}_{kn} & \mathbf{r}_{kk} \end{pmatrix}. \quad (8)$$

Здесь  $\mathbf{r}_{nn}$  — блок реакций в связях, наложенных на начальный узел, от единичных перемещений связей, наложенных на начальный узел конечного элемента;  $\mathbf{r}_{nk}$  — блок реакций в связях, наложенных на начальный узел, от единичных перемещений связей, наложенных на конечный узел конечного элемента;  $\mathbf{r}_{kn}$  — блок реакций в связях, наложенных на конечный узел, от единичных перемещений связей, наложенных на начальный узел конечного элемента;  $\mathbf{r}_{kk}$  — блок реакций в связях, наложенных на конечный узел, от единичных перемещений связей, наложенных на конечный узел конечного элемента.

для матрицы (5)

$$\mathbf{r}_{nn} = \begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{r}_{nk} = \begin{pmatrix} r_{14} & r_{15} & r_{16} \\ r_{24} & r_{25} & r_{26} \\ r_{34} & r_{35} & r_{36} \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{r}_{kn} = \begin{pmatrix} r_{41} & r_{42} & r_{43} \\ r_{51} & r_{52} & r_{53} \\ r_{61} & r_{62} & r_{63} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{r}_{kk} = \begin{pmatrix} r_{44} & r_{45} & r_{46} \\ r_{54} & r_{55} & r_{56} \\ r_{64} & r_{65} & r_{66} \end{pmatrix};$$

для матрицы (6)

$$\mathbf{r}_{nn} = \begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{r}_{nk} = \begin{pmatrix} r_{14} & r_{15} \\ r_{24} & r_{25} \\ r_{34} & r_{35} \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{r}_{kn} = \begin{pmatrix} r_{41} & r_{42} & r_{43} \\ r_{51} & r_{52} & r_{53} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{r}_{kk} = \begin{pmatrix} r_{44} & r_{45} \\ r_{54} & r_{55} \end{pmatrix};$$

для матрицы (7)

$$\mathbf{r}_{HH} = \begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} \\ r_{21} & r_{22} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{r}_{HK} = \begin{pmatrix} r_{13} & r_{14} \\ r_{23} & r_{24} \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{r}_{KH} = \begin{pmatrix} r_{31} & r_{32} \\ r_{41} & r_{42} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{r}_{KK} = \begin{pmatrix} r_{33} & r_{34} \\ r_{43} & r_{44} \end{pmatrix}.$$

Численные значения реакций определяют, используя таблицы метода перемещений. Знак реакции принимается положительным, если направление реакции совпадает с положительным направлением соответствующего перемещения.

1. Формирование матрицы жёсткости для конечного элемента с шестью степенями свободы.

1) Задаём единичное перемещение первой связи (рис. 37):  $V_1 = 1$ .

В этом случае при упругой работе стержня  $\Delta l = \frac{Nl}{EA}$ . Так как  $\Delta l = V_1 = 1$ ,

то  $N = \frac{EA}{l}$ . В соответствии с рис. 37.

$$r_{11} = \frac{EA}{l}; \quad r_{21} = 0; \quad r_{31} = 0;$$

$$r_{41} = -\frac{EA}{l}; \quad r_{51} = 0; \quad r_{61} = 0.$$

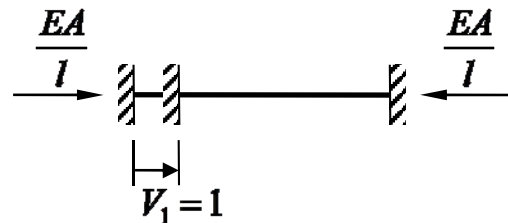


Рис. 37

2) Задаём единичное перемещение второй связи (рис. 38):  $V_2 = 1$ .

В соответствии с таблицей метода перемещений строим эпюру изгибающих моментов и определяем опорные реакции. Тогда

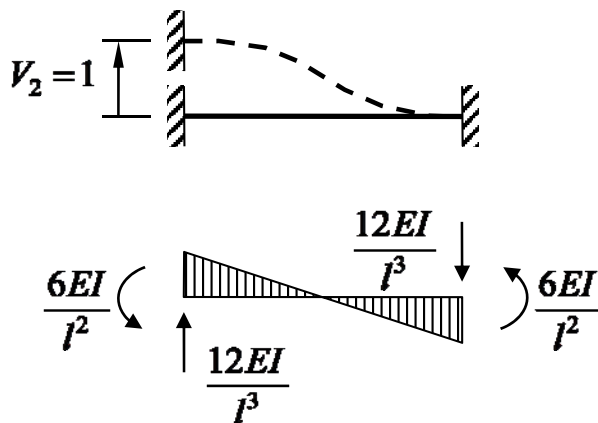


Рис. 38

$$r_{12} = 0; \quad r_{22} = \frac{12EI}{l^3}; \quad r_{32} = \frac{6EI}{l^2};$$

$$r_{42} = 0; \quad r_{52} = -\frac{12EI}{l^3}; \quad r_{62} = \frac{6EI}{l^2}.$$

3) Задаём единичное перемещение третьей связи (рис. 39):  $V_3 = 1$ .

Вновь обращаемся к таблице метода перемещений и строим эпюру изгибающих моментов, а также определяем опорные реакции. Тогда, в соответствии с рис. 39,

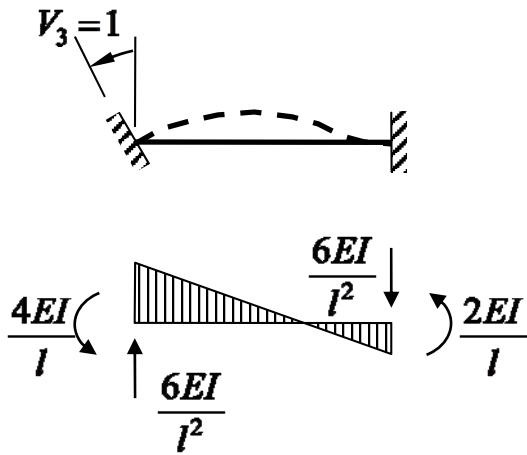


Рис. 39

$$r_{14} = -\frac{EA}{l}; \quad r_{24} = 0; \quad r_{34} = 0;$$

$$r_{44} = \frac{EA}{l}; \quad r_{54} = 0; \quad r_{64} = 0.$$

$$r_{13} = 0; \quad r_{23} = \frac{6EI}{l^2}; \quad r_{33} = \frac{4EI}{l};$$

$$r_{43} = 0; \quad r_{53} = -\frac{6EI}{l^2}; \quad r_{63} = \frac{2EI}{l}.$$

4) Задаём единичное перемещение четвёртой связи (рис. 40):  $V_4 = 1$ .

В соответствии с рис. 40,

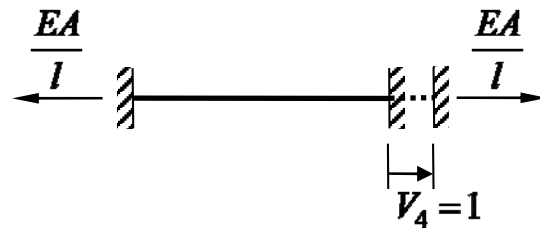


Рис. 40

5) Задаём единичное перемещение пятой связи (рис. 41):  $V_5 = 1$ .

В соответствии с таблицей метода перемещений строим эпюру изгибающих моментов и определяем опорные реакции. Тогда

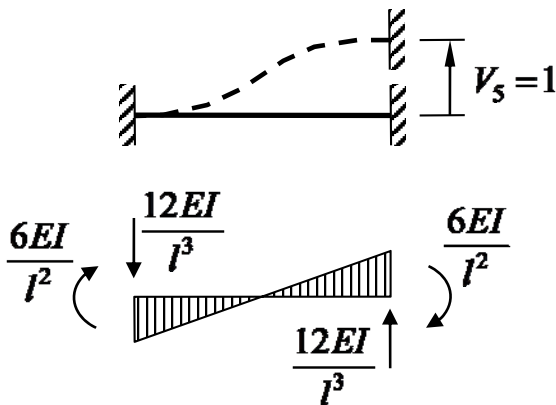


Рис. 41

$$r_{15} = 0; \quad r_{25} = -\frac{12EI}{l^3}; \quad r_{35} = -\frac{6EI}{l^2};$$

$$r_{45} = 0; \quad r_{55} = \frac{12EI}{l^3}; \quad r_{65} = -\frac{6EI}{l^2}.$$

6) Задаём единичное перемещение шестой связи (рис. 42):  $V_6 = 1$ .

Вновь обращаемся к таблице метода перемещений и строим эпюру изгибающих моментов, а также определяем опорные реакции. Тогда, в соответствии с рис. 42,

$$r_{16} = 0; \quad r_{26} = \frac{6EI}{l^2}; \quad r_{36} = \frac{2EI}{l};$$

$$r_{46} = 0; \quad r_{56} = -\frac{6EI}{l^2}; \quad r_{66} = \frac{4EI}{l}.$$

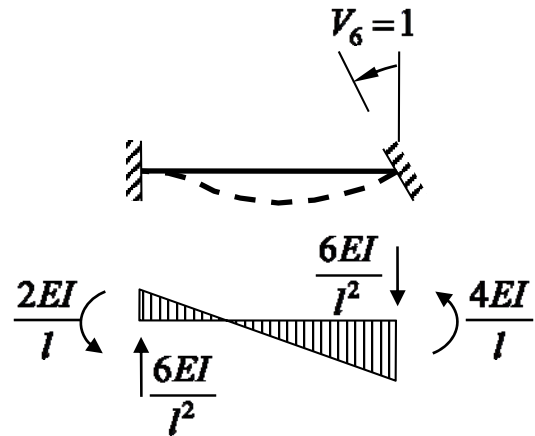


Рис. 42

По полученным данным формируем матрицу жёсткости балочно-зашемлённого конечного элемента:

$$\mathbf{r} = \begin{pmatrix} \frac{EA}{l} & 0 & 0 & -\frac{EA}{l} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{l^3} & \frac{6EI}{l^2} & 0 & -\frac{12EI}{l^3} & \frac{6EI}{l^2} \\ 0 & \frac{6EI}{l^2} & \frac{4EI}{l} & 0 & -\frac{6EI}{l^2} & \frac{2EI}{l} \\ -\frac{EA}{l} & 0 & 0 & \frac{EA}{l} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI}{l^3} & -\frac{6EI}{l^2} & 0 & \frac{12EI}{l^3} & -\frac{6EI}{l^2} \\ 0 & \frac{6EI}{l^2} & \frac{2EI}{l} & 0 & -\frac{6EI}{l^2} & \frac{4EI}{l} \end{pmatrix}. \quad (9)$$

2. Формирование матрицы жёсткости для конечного элемента с пятью степенями свободы.

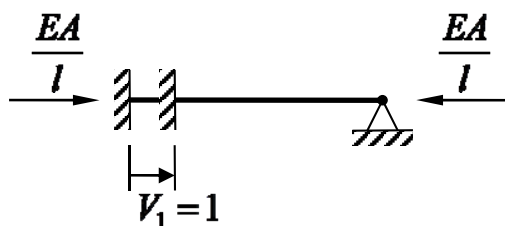


Рис. 43

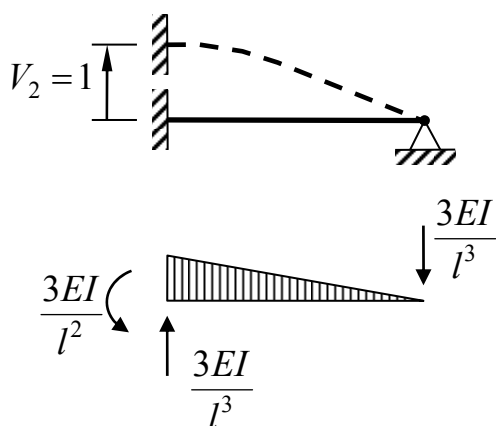
1) Задаём единичное перемещение первой связи (рис. 43):  $V_1 = 1$ .

В соответствии с рис. 43,

$$r_{11} = \frac{EA}{l}; \quad r_{21} = 0; \quad r_{31} = 0;$$

$$r_{41} = -\frac{EA}{l}; \quad r_{51} = 0.$$

2) Задаём единичное перемещение второй связи (рис. 44):  $V_2 = 1$ .



В соответствии с таблицей метода перемещений строим эпюру изгибающих моментов и определяем опорные реакции. Тогда

$$r_{12} = 0; \quad r_{22} = \frac{3EI}{l^3}; \quad r_{32} = \frac{3EI}{l^2};$$

$$r_{42} = 0; \quad r_{52} = -\frac{3EI}{l^3}.$$

Рис. 44

3) Задаём единичное перемещение третьей связи (рис. 45):  $V_3 = 1$ .

Вновь обращаемся к таблице метода перемещений и строим эпюру изгибающих моментов, а также определяем опорные реакции. Тогда, в соответствии с рис. 45,

$$r_{13} = 0; \quad r_{23} = \frac{3EI}{l^2}; \quad r_{33} = \frac{3EI}{l};$$

$$r_{43} = 0; \quad r_{53} = -\frac{3EI}{l^2}.$$

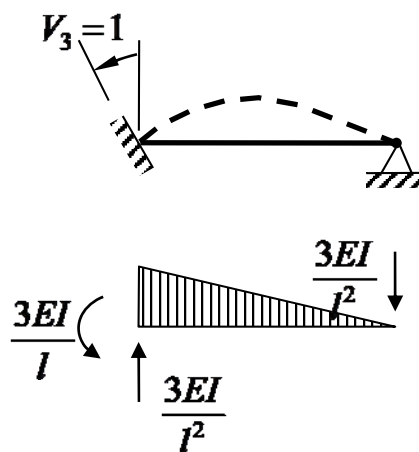


Рис. 45

4) Задаём единичное перемещение четвёртой связи (рис. 46):  $V_4 = 1$ .

В соответствии с рис. 46,

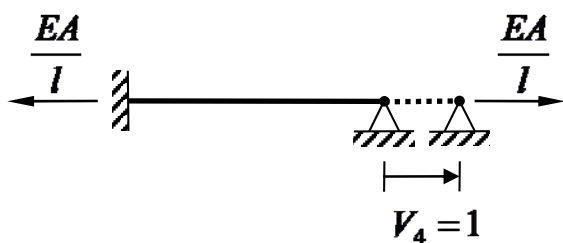


Рис. 46

$$r_{14} = -\frac{EA}{l}; \quad r_{24} = 0; \quad r_{34} = 0;$$

$$r_{44} = \frac{EA}{l}; \quad r_{54} = 0.$$

5) Задаём единичное перемещение пятой связи (рис. 47):  $V_5 = 1$ .

В соответствии с таблицей метода перемещений строим эпюру изгибающих моментов и определяем опорные реакции. Тогда

$$r_{15} = 0; \quad r_{25} = -\frac{3EI}{l^3}; \quad r_{35} = -\frac{3EI}{l^2};$$

$$r_{45} = 0; \quad r_{55} = \frac{3EI}{l^3}.$$

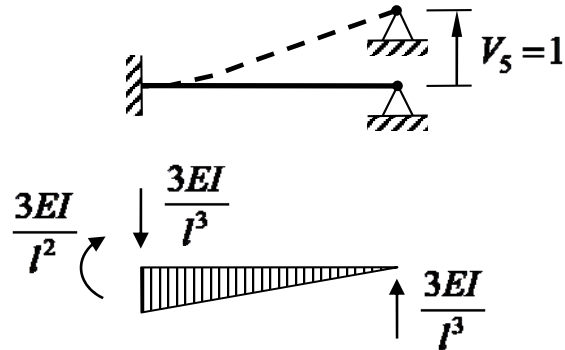


Рис. 47

Легко видеть, что матрица жёсткости балочно-комбинированного конечного элемента будет иметь вид:

$$\mathbf{r} = \begin{pmatrix} \frac{EA}{l} & 0 & 0 & -\frac{EA}{l} & 0 \\ 0 & \frac{3EI}{l^3} & \frac{3EI}{l^2} & 0 & -\frac{3EI}{l^3} \\ 0 & \frac{3EI}{l^2} & \frac{3EI}{l} & 0 & -\frac{3EI}{l^2} \\ -\frac{EA}{l} & 0 & 0 & \frac{EA}{l} & 0 \\ 0 & -\frac{3EI}{l^3} & -\frac{3EI}{l^2} & 0 & \frac{3EI}{l^3} \end{pmatrix}. \quad (10)$$

3. Формирование матрицы жёсткости для конечного элемента с четырьмя степенями свободы.

1) Задаём единичное перемещение первой связи (рис. 48):  $V_1 = 1$ .

В соответствии с рис. 48

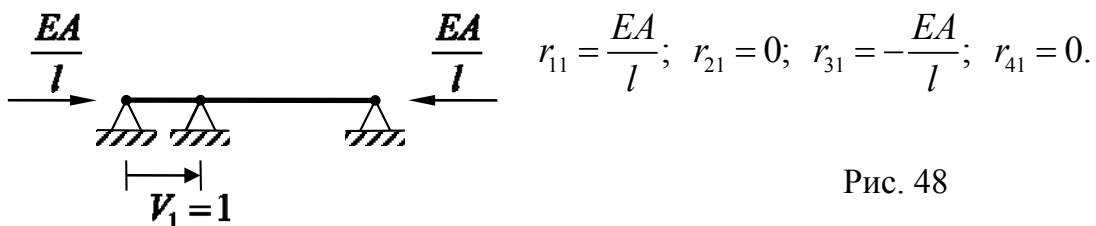


Рис. 48

2) Задаём единичное перемещение второй связи (рис. 49):  $V_2 = 1$ .

В этом случае изгибающие моменты и опорные реакции отсутствуют, то есть

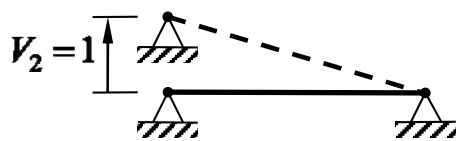


Рис. 49

$$r_{12} = 0; \quad r_{22} = 0; \quad r_{32} = 0; \quad r_{42} = 0.$$

3) Задаём единичное перемещение третьей связи (рис. 50):  $V_3 = 1$ .

В соответствии с рис. 50

$$r_{13} = -\frac{EA}{l}; \quad r_{23} = 0; \quad r_{33} = \frac{EA}{l}; \quad r_{43} = 0.$$

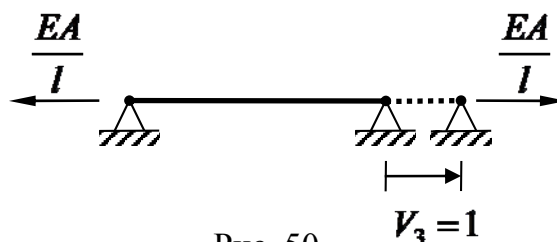


Рис. 50

4) Задаём единичное перемещение четвёртой связи (рис. 51):  $V_4 = 1$ .

В этом случае изгибающие моменты и опорные реакции отсутствуют, то есть

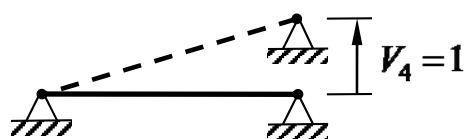


Рис. 51

есть

$$r_{14} = 0; \quad r_{24} = 0; \quad r_{34} = 0; \quad r_{44} = 0.$$

Для матрицы жёсткости шарнирно-стержневого конечного элемента получим:

$$\mathbf{r} = \begin{pmatrix} \frac{EA}{l} & 0 & -\frac{EA}{l} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{EA}{l} & 0 & \frac{EA}{l} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (11)$$

Стержневой конечный элемент может располагаться на плоскости не только горизонтально, но и под углом к горизонту (рис. 52). Ввиду этого необходимо составить формулы перехода от матрицы реакций в местной системе координат к матрице реакций в общей системе координат.

Для этого предварительно построим матрицу  $\mathbf{C}$ , которая преобразует перемещения конечного элемента  $\bar{\mathbf{Z}}$  в общей системе координат в перемещения  $\bar{\mathbf{V}}$  в местной системе координат по выражению

$$\bar{\mathbf{V}} = \mathbf{C} \cdot \bar{\mathbf{Z}}. \quad (12)$$



Из рис. 52 следует:

$$\begin{aligned} V_1 &= Z_1 \cos \alpha + Z_2 \sin \alpha; \\ V_2 &= -Z_1 \sin \alpha + Z_2 \cos \alpha; \\ V_3 &= Z_3; \\ V_4 &= Z_4 \cos \alpha + Z_5 \sin \alpha; \\ V_5 &= -Z_4 \sin \alpha + Z_5 \cos \alpha; \\ V_6 &= Z_6. \end{aligned}$$

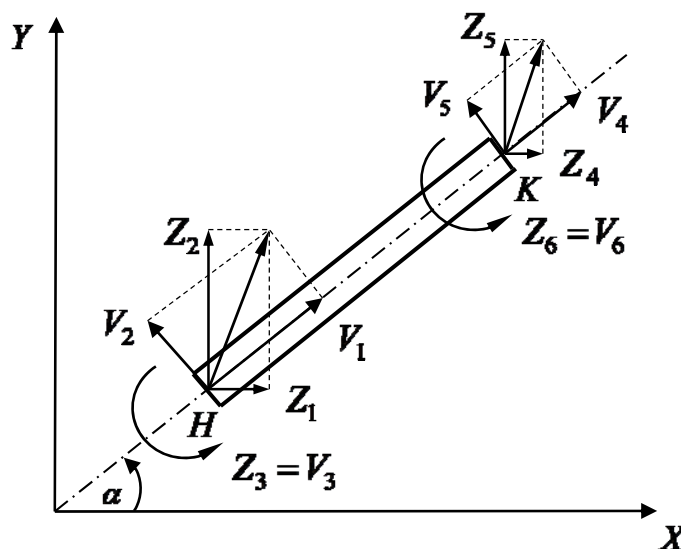


Рис. 52

В матричной форме эти соотношения записываются следующим образом:

$$\begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \\ V_4 \\ V_5 \\ V_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\sin \alpha & \cos \alpha & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos \alpha & \sin \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} Z_1 \\ Z_2 \\ Z_3 \\ Z_4 \\ Z_5 \\ Z_6 \end{pmatrix}. \quad (13)$$

Матрица преобразования  $\mathbf{C}$  может быть записана в блочной форме:

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} \mathbf{C}_H & 0 \\ 0 & \mathbf{C}_K \end{pmatrix}, \quad (14)$$

где для жёсткого узла

$$\mathbf{C}_{H(K)} = \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha & 0 \\ -\sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (15)$$

для шарнирного узла

$$\mathbf{C}_{H(K)} = \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}. \quad (16)$$

Так как рассматриваются плоские упругие стержневые системы, то векторы узловых усилий и узловых перемещений как для отдельного

конечного элемента, так и для стержневой системы в целом, связаны между собой линейно:

$$\bar{\mathbf{S}} = \mathbf{r} \cdot \bar{\mathbf{V}} \quad - \text{ в местной системе координат;} \quad (17)$$

$$\bar{\mathbf{F}} = \mathbf{R} \cdot \bar{\mathbf{Z}} \quad - \text{ в общей системе координат.} \quad (18)$$

Переход от общей системы координат к местной системе координат для перемещений конечного элемента выполняется в соответствии с соотношением (12). По аналогии можно получить формулы перехода от общей системы координат к местной системе координат и для узловых усилий конечного элемента:

$$\bar{\mathbf{S}} = \mathbf{C} \cdot \bar{\mathbf{F}}. \quad (19)$$

Здесь  $\bar{\mathbf{S}}$ ,  $\bar{\mathbf{F}}$  – узловые усилия конечного элемента соответственно, в местной и в общей системах осей координат.

Учитывая формулы (19), (17) и (12), найдём

$$\bar{\mathbf{F}} = \mathbf{C}^{-1} \cdot \bar{\mathbf{S}} = \mathbf{C}^{-1} \cdot \mathbf{r} \cdot \bar{\mathbf{V}} = \mathbf{C}^{-1} \cdot \mathbf{r} \cdot \mathbf{C} \cdot \bar{\mathbf{Z}}. \quad (20)$$

Для матрицы направляющих косинусов выполняется равенство  $\mathbf{C}^{-1} = \mathbf{C}^T$ . Тогда формула (20) получает вид:

$$\bar{\mathbf{F}} = \mathbf{C}^T \cdot \mathbf{r} \cdot \mathbf{C} \cdot \bar{\mathbf{Z}} = \mathbf{R} \cdot \bar{\mathbf{Z}}. \quad (21)$$

Здесь  $\mathbf{R} = \mathbf{C}^T \cdot \mathbf{r} \cdot \mathbf{C}$  – матрица жёсткости конечного элемента в общей системе координат.

При формировании матриц жёсткости отдельных элементов  $\mathbf{r}$  должны быть зафиксированы начало и конец каждого стержня, так как от этого зависит знак угла  $\alpha$ , определяющего ориентацию стержня в общей системе осей координат  $XOY$ .

На конкретном примере рассмотрим, как формируется матрица жёсткости для стержневой системы в целом, когда имеются матрицы жёсткости для всех отдельных конечных элементов. Пусть задана некоторая

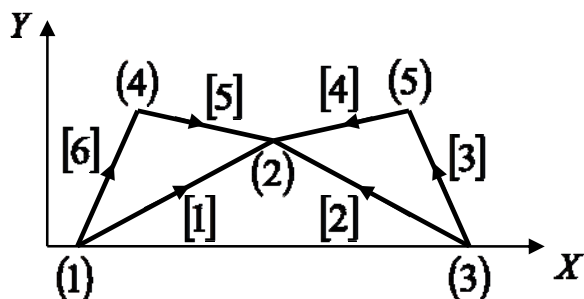


Рис. 53

стержневая система (рис. 53). Все узлы (1), (2), (3), (4), (5) будем считать жёсткими, то есть с каждым из них связано по три возможных перемещения. Стрелка на каждом стержне показывает направление от начала конечного элемента к его концу. Матрицу жёсткости

стержневой системы покажем в блочном виде с размерами блоков  $3 \times 3$ , так

как с каждым блоком связано по три возможных перемещения (горизонтальное, вертикальное и поворот жёсткого узла).

$$\mathbf{K} = \begin{pmatrix} \mathbf{k}_{11} & \mathbf{k}_{12} & 0 & \mathbf{k}_{14} & 0 \\ \mathbf{k}_{21} & \mathbf{k}_{22} & \mathbf{k}_{23} & \mathbf{k}_{24} & \mathbf{k}_{25} \\ 0 & \mathbf{k}_{32} & \mathbf{k}_{33} & 0 & \mathbf{k}_{35} \\ \mathbf{k}_{41} & \mathbf{k}_{42} & 0 & \mathbf{k}_{44} & 0 \\ 0 & \mathbf{k}_{52} & \mathbf{k}_{53} & 0 & \mathbf{k}_{55} \end{pmatrix}. \quad (22)$$

Здесь  $\mathbf{k}_{ij}$  – матричный блок, в котором первый индекс указывает номер узла, в котором возникает блок реакций; второй индекс – номер узла, смещением которого эти реакции вызваны. Нулевые блоки обозначают, что соответствующие узлы не связаны непосредственно стержнем и прямо не взаимодействуют, то есть не передают реакции из узла в узел.

Каждой строке в матрице (22) соответствует группа реакций в соответствующем узле, а каждый столбец отвечает вектору перемещений данного узла.

Общая матрица жёсткости  $\mathbf{K}$  получается путём суммирования соответствующих матриц жёсткости отдельных стержней. Так,

$$\begin{aligned} \mathbf{k}_{11} &= \mathbf{R}_{HH}^{[1]} + \mathbf{R}_{HH}^{[6]}, & \mathbf{k}_{12} &= \mathbf{R}_{HK}^{[1]}, & \mathbf{k}_{14} &= \mathbf{R}_{HK}^{[6]}, \\ \mathbf{k}_{21} &= \mathbf{R}_{KH}^{[1]}, & \mathbf{k}_{22} &= \mathbf{R}_{KK}^{[1]} + \mathbf{R}_{KK}^{[2]} + \mathbf{R}_{KK}^{[4]} + \mathbf{R}_{KK}^{[5]}, \\ \mathbf{k}_{23} &= \mathbf{R}_{KH}^{[2]}, & \mathbf{k}_{24} &= \mathbf{R}_{KH}^{[5]}, & \mathbf{k}_{25} &= \mathbf{R}_{KH}^{[4]}, \\ \mathbf{k}_{32} &= \mathbf{R}_{HK}^{[2]}, & \mathbf{k}_{33} &= \mathbf{R}_{HH}^{[2]} + \mathbf{R}_{HH}^{[3]}, & \mathbf{k}_{35} &= \mathbf{R}_{HK}^{[3]}, \\ \mathbf{k}_{41} &= \mathbf{R}_{KH}^{[6]}, & \mathbf{k}_{42} &= \mathbf{R}_{HK}^{[5]}, & \mathbf{k}_{44} &= \mathbf{R}_{KK}^{[6]} + \mathbf{R}_{HH}^{[5]}, \\ \mathbf{k}_{52} &= \mathbf{R}_{HK}^{[4]}, & \mathbf{k}_{53} &= \mathbf{R}_{KH}^{[3]}, & \mathbf{k}_{55} &= \mathbf{R}_{HH}^{[4]} + \mathbf{R}_{KK}^{[3]}. \end{aligned} \quad (23)$$

Суммирование блоков, указанных в каждом элементе матрицы жёсткости  $\mathbf{K}$ , ведётся поэлементно. Заметим, что для любых двух блоков, расположенных симметрично относительно главной диагонали матрицы жёсткости  $\mathbf{K}$ , справедливо равенство  $\mathbf{k}_{nm} = \mathbf{k}_{mn}^T$ .

Рассмотрим порядок расчёта стержневых систем методом конечных элементов. Порядок расчёта стержневых систем методом конечных элементов можно разбить на три основных этапа: подготовительный, вычислительный и обработку результатов.

1. Подготовительный этап включает в себя разработку расчётной схемы стержневой системы, разбиение расчётной схемы на отдельные элементы, нумерацию узлов и конечных элементов, выбор общей системы координат. После этого составляются исходные матрицы: матрицы жёсткости

направляющих косинусов  $\mathbf{C}$ . Далее формируют вектор внешних нагрузок  $\bar{\mathbf{P}}$ , предварительно преобразовав внеузловую нагрузку к узловой.

2. Вычислительная часть включает в себя выполнение следующих этапов:

а. Вычисление матриц жёсткости конечных элементов в общей системе координат  $\mathbf{R} = \mathbf{C}^T \cdot \mathbf{r} \cdot \mathbf{C}$ .

б. Формирование матрицы жёсткости всей стержневой системы  $\mathbf{K}$ .

с. Вычисление вектора перемещений вершин конечных элементов стержневой системы в общей системе осей координат  $\bar{\mathbf{Z}} = \mathbf{K}^{-1} \cdot \bar{\mathbf{P}}$ .

д. Формирование векторов перемещений вершин каждого конечного элемента в общей системе координат.

е. Вычисление вектора узловых усилий для отдельных конечных элементов в местной системе координат  $\bar{\mathbf{S}} = \mathbf{r} \cdot \mathbf{C} \cdot \bar{\mathbf{Z}}$ .

ф. Определение результирующих усилий в узлах отдельных конечных элементов в местной системе координат с учётом преобразований внеузловой нагрузки  $\bar{\mathbf{S}} = \bar{\mathbf{S}} + \bar{\mathbf{S}}^0$ .

3. Обработка результатов состоит в построении эпюр внутренних усилий – изгибающих моментов, поперечных и продольных сил, а также в проверке решения. Необходимой и достаточной является статическая проверка решения, то есть все узлы рамы должны находиться в равновесии.

**Пример.**

Методом конечных элементов построить эпюры внутренних усилий в раме (рис. 54). Длина стойки  $l_1 = 4$  м, длина ригеля  $l_2 = 4$  м, длина

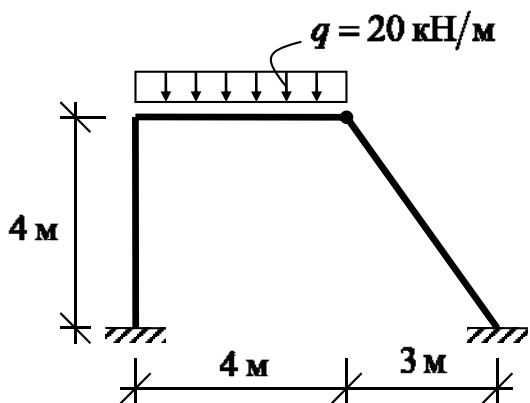


Рис. 54

наклонного стержня

$$l_3 = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5 \text{ м.}$$

Жёсткости стержней рамы при осевом растяжении сжатии заданы следующими:  $EA_1 = EA_3 = 10 \text{ Н}$ ,

$EA_2 = 20 \text{ Н}$ ; жёсткости стержней

рамы при изгибе равны:

$$EI_1 = 1 \text{ Н} \cdot \text{м}^2, \quad EI_2 = 2 \text{ Н} \cdot \text{м}^2,$$

$$EI_3 = 0,125 \text{ Н} \cdot \text{м}^2.$$

**Решение.**

Выбираем основную систему метода конечных элементов (рис.

55), разбивая раму на три прямолинейных конечных элемента [1], [2], [3]. Нумеруем узлы (1), (2), (3), (4).

В узле (3) элементы соединяются между собой жёстко, с этим узлом связаны три неизвестных перемещения  $Z_1, Z_2, Z_3$ . В узле (4) элементы соединяются шарниром, здесь два неизвестных перемещения  $Z_4, Z_5$ . В опорных узлах (1) и (2) все три перемещения равны нулю. Следовательно, рассматриваемая рама имеет пять неизвестных перемещений в методе конечных элементов. Конечный элемент [1] балочно-защемлённого типа; конечные элементы [2] и [3] балочно-комбинированного типа.

Общую систему координат  $(X^0, Y^0)$  располагаем таким образом, чтобы координаты всех узлов были положительными.

Распределённую по ригелю нагрузку приводим к узловой (рис. 56), используя для этого таблицы метода перемещений.

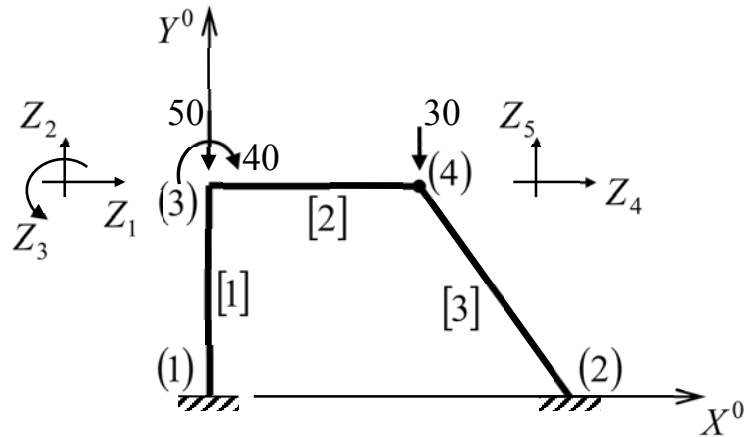


Рис. 55

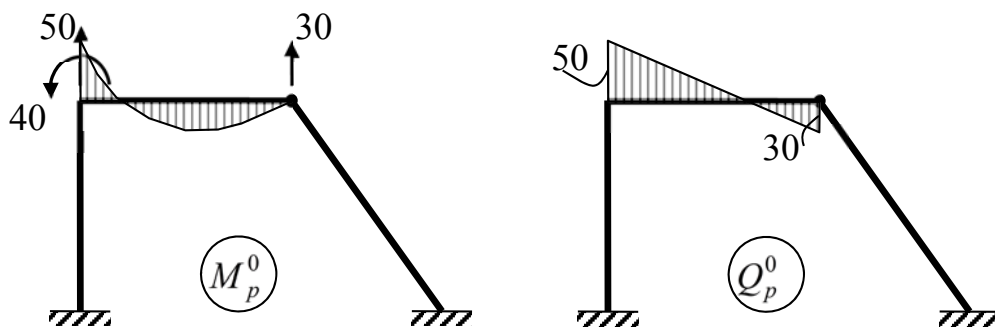


Рис. 56

Составляем исходные матрицы. Вектор внешних нагрузок  $\bar{\mathbf{P}}$  для стержневой системы в целом в общей системе координат и векторы преобразований внеузловых нагрузок к узловым для конечных элементов в местных системах осей координат  $\bar{\mathbf{S}}_k$  имеют вид:

$$\bar{\mathbf{P}} = \begin{pmatrix} 0 \\ -50 \\ -40 \\ 0 \\ -30 \end{pmatrix}; \quad \bar{\mathbf{S}}_{[1]}^0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad \bar{\mathbf{S}}_{[2]}^0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 50 \\ 40 \\ 0 \\ 30 \end{pmatrix}; \quad \bar{\mathbf{S}}_{[3]}^0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Составляем матрицы жёсткости всех конечных элементов в местной системе координат. Начало каждого конечного элемента связываем с меньшим номером узла, конец конечного элемента – с бóльшим номером узла.

Для КЭ [1] имеем:  $\mathbf{r}_1 = \begin{pmatrix} \mathbf{r}_{\text{HH}} & \mathbf{r}_{\text{HK}} \\ \mathbf{r}_{\text{KH}} & \mathbf{r}_{\text{KK}} \end{pmatrix}$ . Здесь матрицы  $\mathbf{r}_{\text{HH}}, \mathbf{r}_{\text{HK}}, \mathbf{r}_{\text{KH}}$ , в соответствии с расчётной схемой, имеют нулевые компоненты. В силу этого

$$\mathbf{r}_1 = \begin{pmatrix} \frac{EA_1}{l_1} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI_1}{l_1^3} & -\frac{6EI_1}{l_1^2} \\ 0 & -\frac{6EI_1}{l_1^2} & \frac{4EI_1}{l_1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2,5 & 0 & 0 \\ 0 & 0,188 & -0,375 \\ 0 & -0,375 & 1 \end{pmatrix}.$$

Для КЭ [2] имеем:

$$\mathbf{r}_2 = \begin{pmatrix} \frac{EA_2}{l_2} & 0 & 0 & -\frac{EA_2}{l_2} & 0 \\ 0 & \frac{3EI_2}{l_2^3} & \frac{3EI_2}{l_2^2} & 0 & -\frac{3EI_2}{l_2^3} \\ 0 & \frac{3EI_2}{l_2^2} & \frac{3EI_2}{l_2} & 0 & -\frac{3EI_2}{l_2^2} \\ -\frac{EA_2}{l_2} & 0 & 0 & \frac{EA_2}{l_2} & 0 \\ 0 & -\frac{3EI_2}{l_2^3} & -\frac{3EI_2}{l_2^2} & 0 & \frac{3EI_2}{l_2^3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 & -5 & 0 \\ 0 & 0,094 & 0,375 & 0 & -0,094 \\ 0 & 0,375 & 1,5 & 0 & -0,375 \\ -5 & 0 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & -0,094 & -0,375 & 0 & 0,094 \end{pmatrix}.$$

Для КЭ [3] имеем:  $\mathbf{r}_3 = \begin{pmatrix} \mathbf{r}_{\text{HH}} & \mathbf{r}_{\text{HK}} \\ \mathbf{r}_{\text{KH}} & \mathbf{r}_{\text{KK}} \end{pmatrix}$ . Здесь матрицы  $\mathbf{r}_{\text{HH}}, \mathbf{r}_{\text{HK}}, \mathbf{r}_{\text{KH}}, \mathbf{r}_{\text{KK}}$  в соответствии с расчётной схемой, имеют нулевые компоненты. В силу этого

$$\mathbf{r}_3 = \begin{pmatrix} \frac{EA_3}{l_3} & 0 \\ 0 & \frac{3EI_3}{l_3^3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0,003 \end{pmatrix}.$$

Матрицы направляющих косинусов имеют ту же размерность, что и матрицы жёсткости: для первого элемента  $3 \times 3$ , для второго  $5 \times 5$ , для третьего  $2 \times 2$ . Поворот элементов осуществляется против часовой стрелки вокруг начального узла из горизонтального положения до рабочего положения на расчётной схеме. В нашем случае  $\alpha_1 = 90^\circ$ ,  $\alpha_2 = 0^\circ$ ,  $\alpha_3 = 127^\circ$ . Матрицы направляющих косинусов получают вид:

$$\mathbf{C}_1 = \begin{pmatrix} \cos \alpha_1 & \sin \alpha_1 & 0 \\ -\sin \alpha_1 & \cos \alpha_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix};$$

$$\mathbf{C}_2 = \begin{pmatrix} \cos \alpha_2 & \sin \alpha_2 & 0 & 0 & 0 \\ -\sin \alpha_2 & \cos \alpha_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos \alpha_2 & \sin \alpha_2 \\ 0 & 0 & 0 & -\sin \alpha_2 & \cos \alpha_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix};$$

$$\mathbf{C}_3 = \begin{pmatrix} \cos \alpha_3 & \sin \alpha_3 \\ -\sin \alpha_3 & \cos \alpha_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0,602 & 0,799 \\ -0,799 & -0,602 \end{pmatrix}.$$

Матрицы жёсткости отдельных конечных элементов в общей системе координат вычисляются по формуле  $\mathbf{R}_k = \mathbf{C}_k^T \cdot \mathbf{r}_k \cdot \mathbf{C}_k$ :

$$\mathbf{R}_1 = \mathbf{C}_1^T \cdot \mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{C}_1 = \begin{pmatrix} 0,188 & 0 & 0,375 \\ 0 & 2,5 & 0 \\ 0,375 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{R}_2 = \mathbf{C}_2^T \cdot \mathbf{r}_2 \cdot \mathbf{C}_2 = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 & -5 & 0 \\ 0 & 0,094 & 0,375 & 0 & -0,094 \\ 0 & 0,375 & 1,5 & 0 & -0,375 \\ -5 & 0 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & -0,094 & -0,375 & 0 & 0,094 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{R}_3 = \mathbf{C}_3^T \cdot \mathbf{r}_3 \cdot \mathbf{C}_3 = \begin{pmatrix} 0,726 & -0,96 \\ -0,96 & 1,277 \end{pmatrix}.$$

Матрица жёсткости стержневой системы в целом формируется из блоков матриц жёсткости отдельных элементов следующим образом:

$$\begin{aligned} \mathbf{K} &= \begin{pmatrix} \mathbf{R}_{3,3}^{[1]} + \mathbf{R}_{3,3}^{[2]} & \mathbf{R}_{3,4}^{[2]} \\ \mathbf{R}_{4,3}^{[2]} & \mathbf{R}_{4,4}^{[2]} + \mathbf{R}_{4,4}^{[3]} \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 5,188 & 0 & 0,375 & -5 & 0 \\ 0 & 2,594 & 0,375 & 0 & -0,094 \\ 0,375 & 0,375 & 2,5 & 0 & -0,375 \\ -5 & 0 & 0 & 5,726 & -0,96 \\ 0 & -0,094 & -0,375 & -0,96 & 1,371 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Далее определяем вектор перемещений узловых точек стержневой системы в общей системе осей координат:

Далее определяем вектор перемещений узловых точек стержневой системы в общей системе осей координат:

$$\bar{\mathbf{Z}} = \mathbf{K}^{-1} \cdot \bar{\mathbf{P}} =$$

$$= \begin{pmatrix} 5,188 & 0 & 0,375 & -5 & 0 \\ 0 & 2,594 & 0,375 & 0 & -0,094 \\ 0,375 & 0,375 & 2,5 & 0 & -0,375 \\ -5 & 0 & 0 & 5,726 & -0,96 \\ 0 & -0,094 & -0,375 & -0,96 & 1,371 \end{pmatrix}^{-1} \times \begin{pmatrix} 0 \\ -50 \\ -40 \\ 0 \\ -30 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -85,224 \\ -20,561 \\ -13,578 \\ -89,447 \\ -89,638 \end{pmatrix}.$$

Формируем векторы перемещений вершин каждого конечного элемента в соответствии с рис. 55.

$$\bar{\mathbf{Z}}_1 = \begin{pmatrix} -85,224 \\ -20,561 \\ -13,578 \end{pmatrix}, \quad \bar{\mathbf{Z}}_2 = \begin{pmatrix} -85,224 \\ -20,561 \\ -13,578 \\ -89,447 \\ -89,638 \end{pmatrix}, \quad \bar{\mathbf{Z}}_3 = \begin{pmatrix} -89,447 \\ -89,638 \end{pmatrix}.$$

$$\bar{\mathbf{F}}_3 = \mathbf{R}_3 \cdot \bar{\mathbf{Z}}_3 = \begin{pmatrix} 21 \\ -28,63 \end{pmatrix}.$$



Усилия в узлах конечных элементов в местной системе координат, с учётом векторов преобразований нагрузок, определяются по формуле  $\bar{\mathbf{S}}_k = \mathbf{r}_k \cdot \mathbf{C}_k \cdot \bar{\mathbf{Z}}_k + \bar{\mathbf{S}}_k^0$ :

$$\bar{\mathbf{S}}_1 = \mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{C}_1 \cdot \bar{\mathbf{Z}}_1 + \bar{\mathbf{S}}_1^0 = \begin{pmatrix} -51,403 \\ 21,071 \\ -45,537 \end{pmatrix},$$

$$\bar{\mathbf{S}}_2 = \mathbf{r}_2 \cdot \mathbf{C}_2 \cdot \bar{\mathbf{Z}}_2 + \bar{\mathbf{S}}_2^0 = \begin{pmatrix} 21,114 \\ 51,384 \\ 45,537 \\ -21,114 \\ 28,616 \end{pmatrix},$$

$$\bar{\mathbf{S}}_3 = \mathbf{r}_3 \cdot \mathbf{C}_3 \cdot \bar{\mathbf{Z}}_3 + \bar{\mathbf{S}}_3^0 = \begin{pmatrix} -35,515 \\ 0,376 \end{pmatrix}.$$

Имея векторы усилий в местной системе координат, прикладываем их к соответствующим узлам отдельных стержневых конечных элементов стержневой системы и строим эпюры внутренних усилий (рис. 57).

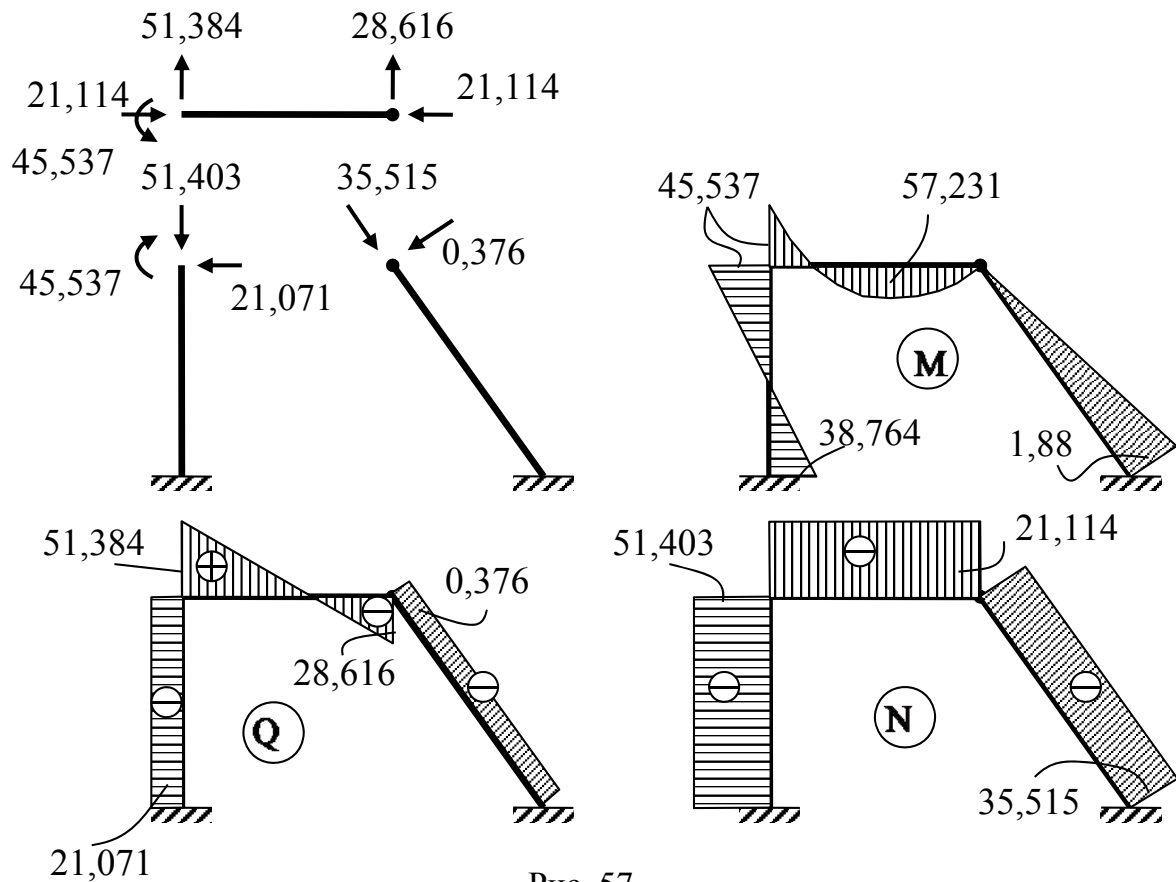


Рис. 57

Для выполнения статической проверки запишем условия равновесия стержневой системы (рис. 58). При этом опорные реакции найдём по эпюрам внутренних усилий.

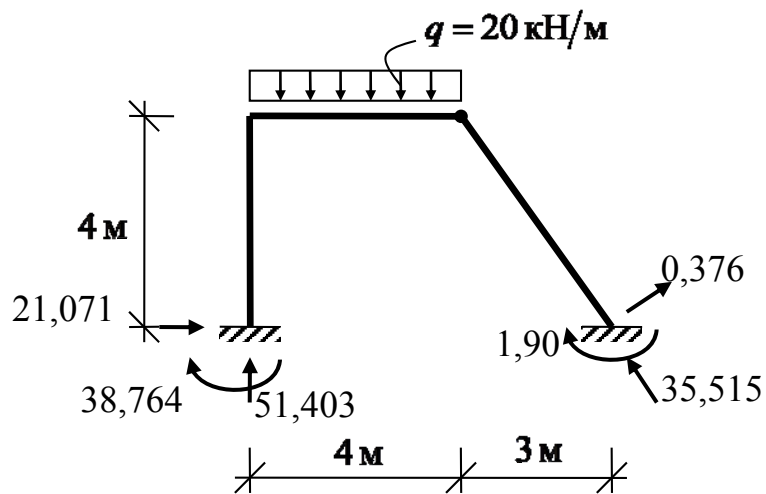


Рис. 58

Условия статического равновесия выполняются:

$$\sum X = 0: 21,071 + 0,376 \cdot \sin\left(\arctan\frac{4}{3}\right) - 35,515 \cdot \cos\left(\arctan\frac{4}{3}\right) \equiv 0;$$

$$\sum Y = 0: 51,403 + 0,376 \cdot \cos\left(\arctan\frac{4}{3}\right) + 35,515 \cdot \sin\left(\arctan\frac{4}{3}\right) - 4 \cdot q \equiv 0;$$

$$\sum M_B = 0: q \cdot 4 \cdot 5 - 51,403 \cdot 7 - 38,764 - 35,515 \equiv 0.$$

## Глава 3. МЕТОД КОНЕЧНЫХ РАЗНОСТЕЙ

### §15. Решение плоской задачи теории упругости методом конечных разностей

Расчёт строительных конструкций, находящихся в условиях плоской задачи, методами теории упругости математически сводится к решению краевых задач для дифференциальных уравнений в частных производных. Одним из наиболее простых и понятных методов решения таких задач является метод конечных разностей (МКР).

Метод конечных разностей (метод сеток) состоит в следующем:

1. Область, где ищется решение, покрывают сеткой, узлы которой нумеруют в определённом порядке.

2. В каждом внутреннем узле расчётной сеточной области записывают разрешающие дифференциальные уравнения, в которых производные заменяют конечно-разностными операторами.

3. Краевые (граничные) условия также записывают с использованием конечно-разностных операторов.

4. Решают полученную систему конечно-разностных уравнений относительно искомых функций в узлах расчётной сеточной области.

В методе сеток решение задачи представляется в виде совокупности узловых значений искомых функций. Математически решение краевой задачи методом сеток сводится к решению системы линейных алгебраических уравнений.

#### *Конечно-разностные операторы*

Конечно-разностные операторы строятся на основании теоремы Тейлора: если функция  $f(x)$  непрерывна вместе со своими производными на отрезке  $(x_0, x_0 + \Delta)$ , то эта функция в точке  $x = x_0 + \Delta$  может быть выражена через производные в точке  $x = x_0$  формулой

$$f(x_0 + \Delta) = f(x_0) + f'(x_0) \cdot \Delta + \frac{1}{2!} \cdot f''(x_0) \cdot \Delta^2 + \dots \quad (1)$$

Положим  $x_0 = x_i$  и применим формулу (1) для точек  $x = x_{i+1}$  и  $x = x_{i-1}$  (рис. 59):

$$f_{i+1} = f_i + f_i' \Delta + \frac{\Delta^2}{2!} f_i'' + \frac{\Delta^3}{3!} f_i''' + \dots; \quad (2)$$

$$f_{i-1} = f_i - f_i' \Delta + \frac{\Delta^2}{2!} f_i'' - \frac{\Delta^3}{3!} f_i''' + \dots; \quad (3)$$

Складывая и вычитая формулы (2) и (3), получаем:

$$f'_i = \frac{f_{i+1} - f_{i-1}}{2\Delta}; \quad f''_i = \frac{f_{i+1} - 2f_i + f_{i-1}}{\Delta^2};$$

Далее

$$\begin{aligned} f'''_i &= \frac{d}{dx}(f''_i) = \frac{f''_{i+1} - f''_{i-1}}{2\Delta} = \\ &= \frac{f_{i+2} - 2f_{i+1} + 2f_{i-1} - f_{i-2}}{2 \cdot \Delta^3}; \end{aligned} \quad (4)$$

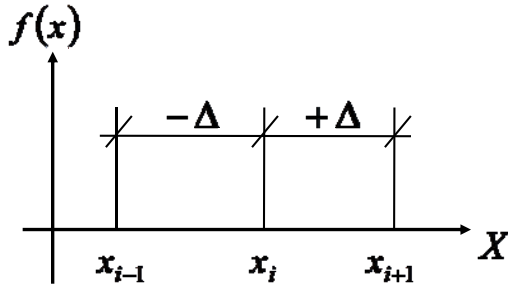


Рис. 59

аналогично

$$f^{IV}_i = \frac{f_{i+2} - 4f_{i+1} + 6f_i - 4f_{i-1} + f_{i-2}}{\Delta^4}.$$

Формулы (4) выражают значения первых четырёх производных от функции  $f(x)$  в точке  $x_i$  через значения этой функции  $f(x)$  в соседних точках. Операторы (2) симметричны относительно их центра ( $|- \Delta| = | + \Delta|$ ), и соответствующие им формулы называются *центральными конечными разностями*.

Запишем по аналогии, пользуясь рис. 60, конечно-разностные операторы для функции двух переменных:  $\varphi = \varphi(x, y)$ .

$$\left. \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right|_{ij} = \frac{1}{2\Delta x} (\varphi_{i+1,j} - \varphi_{i-1,j});$$

$$\left. \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right|_{ij} = \frac{1}{2\Delta y} (\varphi_{i,j+1} - \varphi_{i,j-1});$$

$$\left. \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \right|_{ij} = \frac{1}{\Delta x^2} (\varphi_{i+1,j} - 2\varphi_{i,j} + \varphi_{i-1,j});$$

$$\left. \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} \right|_{ij} = \frac{1}{\Delta y^2} (\varphi_{i,j+1} - 2\varphi_{i,j} + \varphi_{i,j-1});$$

$$\left. \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} \right|_{ij} = \frac{1}{4\Delta x \cdot \Delta y} (\varphi_{i+1,j+1} - \varphi_{i-1,j+1} - \varphi_{i+1,j-1} + \varphi_{i-1,j-1}); \quad (5)$$

$$\left. \frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^4} \right|_{ij} = \frac{1}{\Delta x^4} (\varphi_{i+2,j} - 4\varphi_{i+1,j} + 6\varphi_{i,j} - 4\varphi_{i-1,j} + \varphi_{i-2,j});$$

$$\frac{\partial^4 \phi}{\partial y^4} \Big|_{ij} = \frac{1}{\Delta y^4} (\varphi_{i,j+2} - 4\varphi_{i,j+1} + 6\varphi_{i,j} - 4\varphi_{i,j-1} + \varphi_{i,j-2});$$

$$\frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^2 \partial y^2} \Big|_{ij} = \frac{1}{\Delta x^2 \cdot \Delta y^2} (\varphi_{i+1,j+1} + \varphi_{i+1,j-1} - 2\varphi_{i+1,j} - 2\varphi_{i,j+1} +$$

$$+ 4\varphi_{i,j} - 2\varphi_{i,j-1} - 2\varphi_{i-1,j} + \varphi_{i-1,j+1} + \varphi_{i-1,j-1}).$$

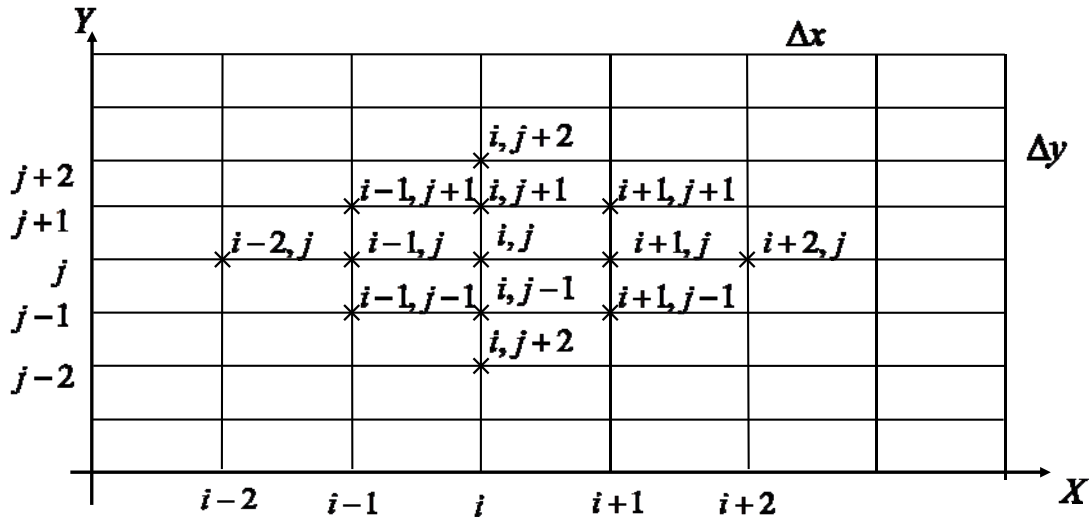


Рис. 60

Заменяя в дифференциальных уравнениях производные конечно-разностными операторами, мы допускаем погрешность, которая оценивается остаточным членом ряда Тейлора в разложении (1). Все конечно-разностные операторы (4) и (5) записаны с погрешностью порядка  $O(h^2)$ .

*Метод конечных разностей для решения краевых задач для обыкновенных дифференциальных уравнений*

Рассмотрим этот метод на примере решения обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка

$$\frac{d^2 y(x)}{dx^2} + P(x) \frac{dy(x)}{dx} + Q(x)y = f(x) \quad (6)$$

при следующих краевых условиях:

$$\alpha_0 \cdot y(a) + \alpha_1 \frac{dy(x)}{dx} \Big|_{x=a} = A; \quad \beta_0 \cdot y(b) + \beta_1 \frac{dy(x)}{dx} \Big|_{x=b} = B. \quad (7)$$

Требуется найти функцию  $y(x)$ , удовлетворяющую на отрезке  $[a, b]$  (рис. 61) дифференциальному уравнению (6), а на концах отрезка – краевым условиям (7).

Считается, что на отрезке  $[a, b]$  функции  $P(x), Q(x), f(x)$  непрерывны;  $\alpha_0, \alpha_1, \beta_0, \beta_1$  – заданные числа, причём

$$|\alpha_0| + |\alpha_1| \neq 0, \quad |\beta_0| + |\beta_1| \neq 0.$$

Метод конечных разностей позволяет свести краевую задачу к решению системы линейных алгебраических уравнений.

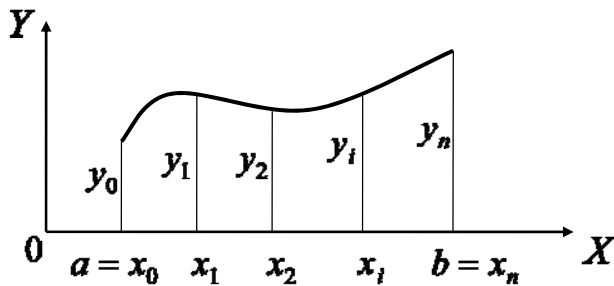


Рис. 61

Разобьём отрезок  $[a, b]$  на  $n$  равных частей точками  $x_1, x_2, \dots, x_{n-1}$  с шагом  $h = \frac{b-a}{n}$ . Тогда

$$x_i = a + ih, \quad i = 0, 1, 2, \dots, n. \quad (8)$$

Введём обозначения:

$$y_i = y(x_i), \quad P_i = P(x_i),$$

$$Q_i = Q(x_i), \quad f_i = f(x_i).$$

В соответствии с алгоритмом метода конечных разностей запишем в каждом внутреннем узле расчётной области дифференциальное уравнение (6), в котором производные заменим соответствующими конечно-разностными операторами (4). В итоге для точки с номером  $i$  получим:

$$\frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2} + P_i \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2h} + Q_i y_i = f_i, \quad i = 1, 2, \dots, n-1. \quad (9)$$

Получили систему  $(n-1)$  уравнений относительно неизвестных  $y_1, y_2, \dots, y_n$ . Недостающие два уравнения получим из краевых условий (7):

$$\alpha_0 \cdot y_0 + \alpha_1 \frac{y_1 - y_0}{h} = A; \quad \beta_0 \cdot y_n + \beta_1 \frac{y_n - y_{n-1}}{h} = B. \quad (10)$$

Преобразуем уравнения (9):

$$\left( \frac{1}{h^2} - \frac{P_i}{2h} \right) y_{i-1} + \left( -\frac{2}{h^2} + Q_i \right) y_i + \left( \frac{1}{h^2} + \frac{P_i}{2h} \right) y_{i+1} = f_i, \quad i = 1, 2, \dots, n-1.$$

После введения обозначений

$$A_i = 1 - \frac{P_i h}{2}, \quad C_i = 2 - Q_i h^2, \quad B_i = 1 + \frac{P_i h}{2}, \quad F_i = f_i h^2$$

получится система линейных алгебраических уравнений с трёхдиагональной матрицей коэффициентов:

$$A_i y_{i-1} - C_i y_i + B_i y_{i+1} = F_i, \quad i = 1, 2, \dots, n-1. \quad (11)$$

Для решения системы (11) совместно с уравнениями (10) целесообразно использовать метод прогонки.

**Пример 1.**

Составить систему конечно-разностных уравнений для численного интегрирования дифференциального уравнения изогнутой оси стержня на двух опорах длиной  $l$ , нагруженного равномерно-распределённой нагрузкой интенсивности  $q$ . Изгибная жёсткость стержня  $EI$  задана.

**Решение.**

Краевая задача для решения данной задачи состоит из дифференциального уравнения изогнутой оси балки

$$\frac{d^2 v(z)}{dz^2} = \frac{M_x(z)}{EI}$$

и краевых условий:

$$v(0) = 0, \quad v(l) = 0.$$

Сопоставляя данную краевую задачу с задачей (6), (7), получаем:

$$P(x) \equiv 0, \quad Q(x) \equiv 0, \quad f(x) = \frac{M_x(z)}{EI};$$

$$\alpha_0 = 1, \quad \alpha_1 = 0, \quad A = 0;$$

$$\beta_0 = 1, \quad \beta_1 = 0, \quad B = 0;$$

$$a = 0, \quad b = l.$$

Дальнейшее решение выполняется по формулам (11) совместно с уравнениями (10).

*Метод конечных разностей для решения плоской задачи теории упругости в перемещениях*

Рассмотрим полупространство, находящееся в условиях плоской деформации (рис. 62), то есть нагруженное, например, равномерно-распределённой полосовой нагрузкой, бесконечно простирающейся в направлении оси  $Z$ .

Выберем в качестве расчётной прямоугольную область такую, что на её границах перемещения равны нулю (рис. 63):

$$u = 0; \quad v = 0.$$

Будем считать, что перемещения поверхности полупространства заданы:

$$u(x,0) = u_0; \quad v(x,0) = v_0.$$

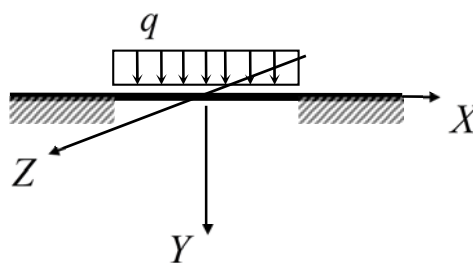


Рис. 62

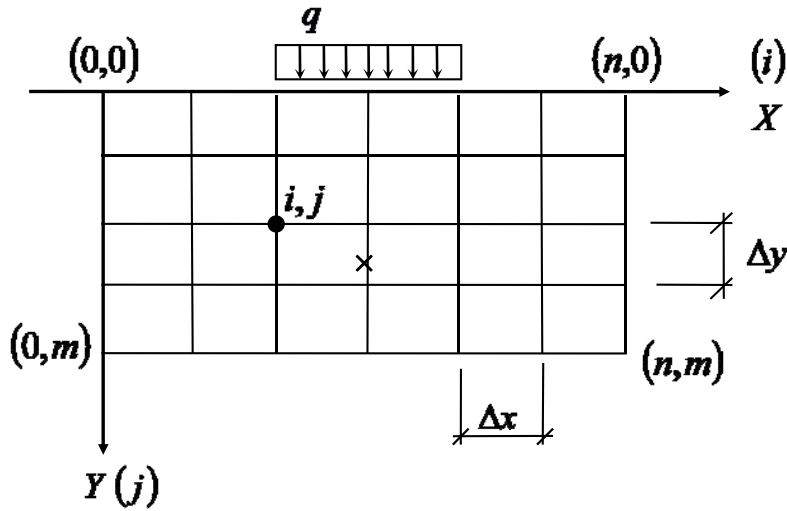


Рис. 63

Разрешающие уравнения плоской задачи в перемещениях, как известно, имеют вид:

$$\left. \begin{aligned} \frac{E}{1-\nu^2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + G \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \left( G + \frac{\nu E}{1-\nu^2} \right) \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + F_x &= 0; \\ \frac{E}{1-\nu^2} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + G \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \left( G + \frac{\nu E}{1-\nu^2} \right) \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + F_y &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

Запишем систему (12) для узла  $(i, j)$  с учётом конечно-разностных операторов:

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{E}{1-\nu^2} \frac{u_{i+1,j} - 2u_{ij} + u_{i-1,j}}{\Delta x^2} + G \frac{u_{i,j+1} - 2u_{ij} + u_{i,j-1}}{\Delta y^2} + \\ + \left( G + \frac{\nu E}{1-\nu^2} \right) \frac{v_{i+1,j+1} - v_{i-1,j+1} - v_{i+1,j-1} + v_{i-1,j-1}}{4\Delta x \cdot \Delta y} + F_{ij}^{(x)} &= 0; \\ \frac{E}{1-\nu^2} \frac{v_{i+1,j} - 2v_{ij} + v_{i-1,j}}{\Delta x^2} + G \frac{v_{i,j+1} - 2v_{ij} + v_{i,j-1}}{\Delta y^2} + \\ + \left( G + \frac{\nu E}{1-\nu^2} \right) \frac{u_{i+1,j+1} - u_{i-1,j+1} - u_{i+1,j-1} + u_{i-1,j-1}}{4\Delta x \cdot \Delta y} + F_{ij}^{(y)} &= 0; \end{aligned} \right. \quad (13)$$

Здесь  $i = 1, 2, \dots, n-1$ ;  $j = 1, 2, \dots, m-1$ .

Таким образом, систему (13) нужно записать  $(n-1)(m-1)$  раз. В итоге получаем систему линейных алгебраических уравнений порядка  $2(n-1)(m-1)$ , содержащую  $2(n-1)(m-1)$  неизвестных. Часть неизвестных, соответствующих контурным точкам расчётной сетки, нам известна:



$$\begin{aligned}
u_{ij}, v_{ij} &: \text{ для } i = 0, 1, 2, \dots, n; j = 0; \\
u_{ij} = 0; v_{ij} = 0 &: \text{ для } i = 0; j = 1, 2, \dots, m-1; \\
&\text{ для } i = 0, 1, 2, \dots, n; j = m; \\
&\text{ для } i = n; j = 1, 2, \dots, m-1.
\end{aligned}$$

Итак, количество неизвестных в системе (13) будет равно:

$$2(n+1)(m+1) - 2 \cdot 2(n+1) - 2 \cdot 2(m-1) = 2(n-1)(m-1),$$

то есть равно количеству уравнений.

Решив систему (13), будем знать в каждой точке расчётной сеточной области значения функций перемещений  $u$  и  $v$ . Далее для определения всех характеристик напряжённо-деформированного состояния, то есть напряжений и деформаций, и оценки прочности полупространства, решаем обратную задачу теории упругости. Деформации в каждом узле расчётной сетки определяются на основании уравнений Коши:

$$\begin{aligned}
\varepsilon_x|_{ij} &= \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)_{ij} = \frac{u_{i+1,j} - u_{i-1,j}}{2\Delta x}; \\
\varepsilon_y|_{ij} &= \left( \frac{\partial v}{\partial y} \right)_{ij} = \frac{v_{i,j+1} - v_{i,j-1}}{2\Delta y}; \\
\gamma_{xy}|_{ij} &= \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right)_{ij} = \frac{u_{i,j+1} - u_{i,j-1}}{2\Delta y} + \frac{v_{i+1,j} - v_{i-1,j}}{2\Delta x}.
\end{aligned} \tag{14}$$

Напряжения в каждом узле расчётной сеточной области определяются на основании закона Гука в форме Ламе:

$$\sigma_x|_{ij} = \lambda \varepsilon_{ij} + 2G(\varepsilon_x)_{ij}; \quad \sigma_y|_{ij} = \lambda \varepsilon_{ij} + 2G(\varepsilon_y)_{ij}; \quad \tau_{xy}|_{ij} = G(\gamma_{xy})_{ij}. \tag{15}$$

$$\text{Здесь } \varepsilon = \varepsilon_x + \varepsilon_y; \quad \lambda = \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)}; \quad G = \frac{E}{2(1+\nu)}.$$

**Пример 2.**

Рассмотрим напряжённо-деформированное состояние полупространства (рис. 64). Все точки полосы  $P$  шириной  $L_0$ , расположенной на его свободной поверхности, получают начальное вертикальное  $u^{(0)}$  и горизонтальное  $v^{(0)}$ , перпендикулярное направлению оси  $Z$  смещение. Полупространство будет находиться в состоянии плоской деформации.

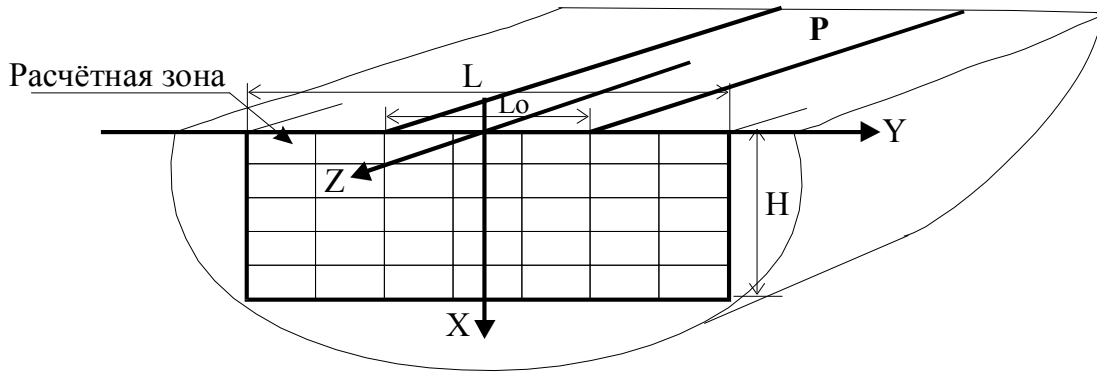


Рис. 64

Определение напряжённо деформированного состояния полупространства математически сводится к решению краевой задачи для системы дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \left( K_0 + \frac{4}{3} G_0 \right) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + G_0 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \left( K_0 + \frac{1}{3} G_0 \right) \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} = -F_x; \\ \left( K_0 + \frac{1}{3} G_0 \right) \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + G_0 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \left( K_0 + \frac{4}{3} G_0 \right) \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = -F_y. \end{cases} \quad (\text{a})$$

Краевые условия будем определять следующим образом:

– на поверхности полупространства

$$\text{для } -L_0/2 \leq y \leq L_0/2 \quad u(0, y) = u^{(0)}(y); \quad v(0, y) = v^{(0)}(y);$$

$$\text{для } y < -L_0 \text{ и } y > L_0 \quad u(0, y) = 0; \quad v(0, y) = 0.$$

– внутри полупространства  $u(\infty, \infty) = 0; \quad v(\infty, \infty) = 0.$

Для построения решения выделим в полупространстве прямоугольную область шириной  $L$  и высотой  $H$ . Решение сформулированной задачи будем выполнять методом конечных разностей на прямоугольной сетке с шагом  $l$  по горизонтали и шагом  $h$  по вертикали (рис. 65).

Алгоритм решения поставленной задачи будет следующим:

1. Задаёмся начальным приближением решения  $u_{ij}^{(0)}, v_{ij}^{(0)}$  в каждом внутреннем узле  $(ij)$  расчётной области. В качестве начального приближения решения принимаем линейный закон  $u = ax + b; v = cx + d$ , убывающий в направлении вертикали под воздействием и убывающий в направлении горизонтали влево и вправо от воздействия (на рис. 65 – это заштрихованные треугольные эпюры). Таким образом, имеем:

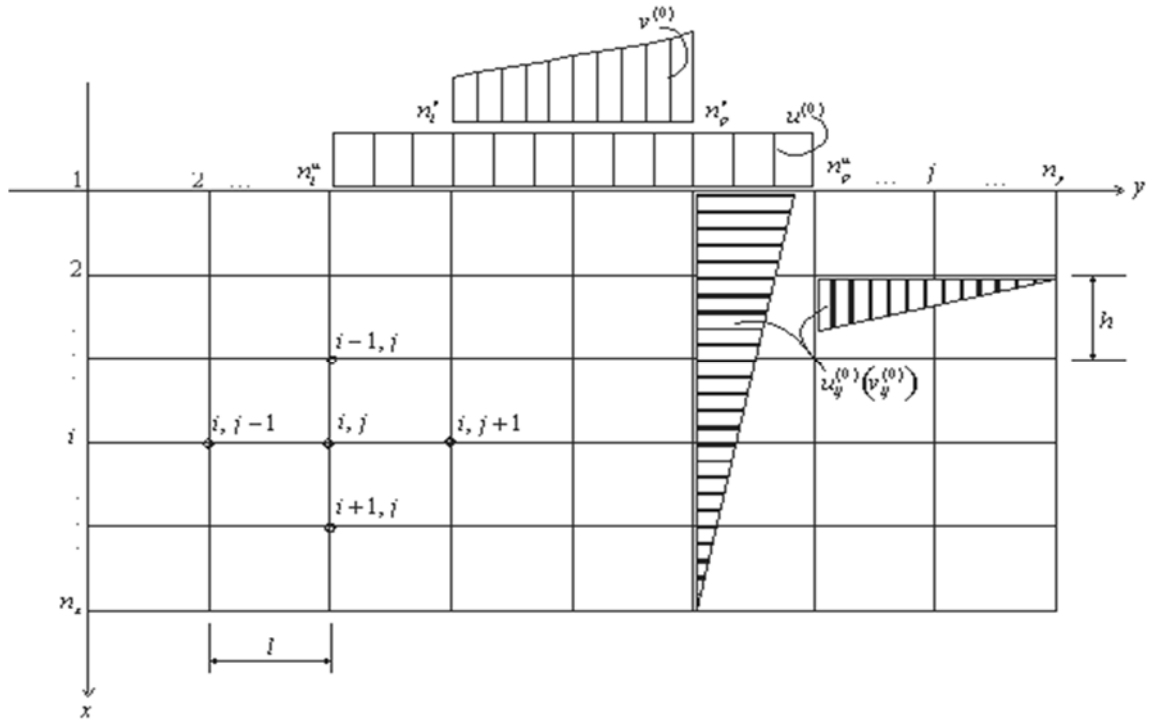


Рис. 65

✓ для  $1 \leq i \leq n_x$  и  $n_l^{(u,v)} \leq j \leq n_p^{(u,v)}$  получим

$$\begin{cases} u_{ij} = u_{1,j}^{(0)} \left( 1 - \frac{i-1}{n_x-1} \right); \\ v_{ij} = v_{1,j}^{(0)} \left( 1 - \frac{i-1}{n_x-1} \right); \end{cases}$$

✓ для  $2 \leq i \leq n_x$  и  $1 \leq j \leq n_l^{(u,v)}$  будем иметь

$$\begin{cases} u_{ij} = u_{i,n_l^{(u)}} \frac{j-1}{n_l^{(u)}-1}; \\ v_{ij} = v_{i,n_l^{(v)}} \frac{j-1}{n_l^{(v)}-1}; \end{cases}$$

✓ для  $2 \leq i \leq n_x$  и  $n_p^{(u,v)} \leq j \leq n_y$  имеем

$$\begin{cases} u_{ij} = u_{i,n_p^{(u)}} \frac{j-n_y}{n_p^{(u)}-n_y}; \\ v_{ij} = v_{i,n_p^{(v)}} \frac{j-n_y}{n_p^{(v)}-n_y}. \end{cases}$$

2. На границе расчётной области значения искомым функций  $u_{ij}$  и  $v_{ij}$  определяются так:

✓ верхняя граница  $i = 1; j = 1, 2, \dots, n_l^u \Rightarrow u_{ij} = 0;$   
 $i = 1; j = 1, 2, \dots, n_l^v \Rightarrow v_{ij} = 0;$

$$i = 1; j = n_l^u, \dots, n_p^u \Rightarrow u_{ij} = u_{1,j}^{(0)};$$

$$i = 1; j = n_l^v, \dots, n_p^v \Rightarrow v_{ij} = v_{1,j}^{(0)};$$

$$i = 1; j = n_p^u, \dots, n_y \Rightarrow u_{ij} = 0;$$

$$i = 1; j = n_p^v, \dots, n_y \Rightarrow v_{ij} = 0;$$

$$\checkmark \text{ левая граница } i = 1, 2, \dots, n_x; j = 1 \Rightarrow u_{ij} = u_{i,1} = 0; v_{ij} = v_{i,1} = 0;$$

$$\checkmark \text{ правая граница } i = 1, 2, \dots, n_x; j = n_y \Rightarrow u_{ij} = u_{i,n_y} = 0; v_{ij} = v_{i,n_y} = 0;$$

$$\checkmark \text{ нижняя граница } i = n_x; j = 1, 2, \dots, n_y \Rightarrow u_{ij} = u_{n_x,j} = 0; v_{ij} = v_{n_x,j} = 0.$$

3. Для каждой внутренней точки  $(ij)$  расчётной сеточной области записываем систему (а), в которой производные заменяем конечными разностями с погрешностью в остаточном члене порядка  $O(h^2)$ . Таким образом, для каждой точки  $(ij)$  получаем систему двух линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных  $u_{ij}, v_{ij}$ . В развёрнутом виде эта система имеет следующий вид:

$$\left\{ \begin{array}{l} \left( K_0 + \frac{4}{3} G_0 \right) \frac{u_{i,j+1} - 2u_{ij} + u_{i,j-1}}{l^2} + G_0 \frac{u_{i+1,j} - 2u_{ij} + u_{i-1,j}}{h^2} + \\ + \left( K_0 + \frac{1}{3} G_0 \right) \frac{v_{i-1,j+1} - v_{i+1,j+1} - v_{i-1,j-1} + v_{i+1,j-1}}{2lh} = -F_{ij}^{(x)}; \\ \left( K_0 + \frac{1}{3} G_0 \right) \frac{u_{i-1,j+1} - u_{i+1,j+1} - u_{i-1,j-1} + u_{i+1,j-1}}{2lh} + \\ + G_0 \frac{v_{i,j+1} - 2v_{ij} + v_{i,j-1}}{l^2} + \left( K_0 + \frac{4}{3} G_0 \right) \frac{v_{i+1,j} - 2v_{ij} + v_{i-1,j}}{h^2} = -F_{ij}^{(y)}. \end{array} \right. \quad (б)$$

4. Решаем систему (б) методом Крамера:

$$u_{ij} = \frac{\Delta_u}{\Delta}; \quad v_{ij} = \frac{\Delta_v}{\Delta}.$$

Здесь  $\Delta = a^{(1)}b^{(2)}$ ;  $\Delta_u = c^{(1)}b^{(2)}$ ;  $\Delta_v = a^{(1)}c^{(2)}$ , причём

$$a^{(1)} = -\frac{2}{l^2} \left( K_0 + \frac{4}{3} G_0 \right) - \frac{2}{h^2} G_0; \quad b^{(2)} = -\frac{2}{l^2} G_0 - \frac{2}{h^2} \left( K_0 + \frac{4}{3} G_0 \right);$$

$$c^{(1)} = F_{ij}^{(x)} - \frac{1}{l^2} \left( K_0 + \frac{4}{3} G_0 \right) (u_{i,j+1} + u_{i,j-1}) - \frac{1}{h^2} G_0 (u_{i+1,j} + u_{i-1,j}) - \\ - \frac{1}{2lh} \left( K_0 + \frac{1}{3} G_0 \right) (v_{i-1,j+1} - v_{i+1,j+1} - v_{i-1,j-1} + v_{i+1,j-1});$$

$$c^{(2)} = F_{ij}^{(y)} - \frac{1}{2lh} \left( K_0 + \frac{1}{3} G_0 \right) (u_{i-1,j+1} - u_{i+1,j+1} - u_{i-1,j-1} + u_{i+1,j-1}) - \frac{1}{l^2} G_0 (v_{i,j+1} + v_{i,j-1}) - \frac{1}{h^2} \left( K_0 + \frac{4}{3} G_0 \right) (v_{i+1,j} + v_{i-1,j}).$$

5. Проверяем условие окончания процесса итераций:

$$|u_{ij}^{(k)} - u_{ij}^{(k-1)}| \leq \delta, \quad |v_{ij}^{(k)} - v_{ij}^{(k-1)}| \leq \delta.$$

Здесь  $k$  – номер итерации;  $\delta$  – погрешность вычислений.

При выполнении расчётов параметры геометрии полупространства принимались следующими: ширина расчётной области  $L = 24$  м, толщина сжимаемой толщи полупространства  $H = 12$  м, количество узлов сетки по вертикали  $n_x = 13$ , количество узлов сетки по горизонтали  $n_y = 21$ . Механические константы материала полупространства  $K_0 = 1,1547 \cdot G_0$ . Вычисления выполнялись с точностью  $\delta \leq 0,0001$ . Начальные смещения границы полупространства показаны на рис. 66.

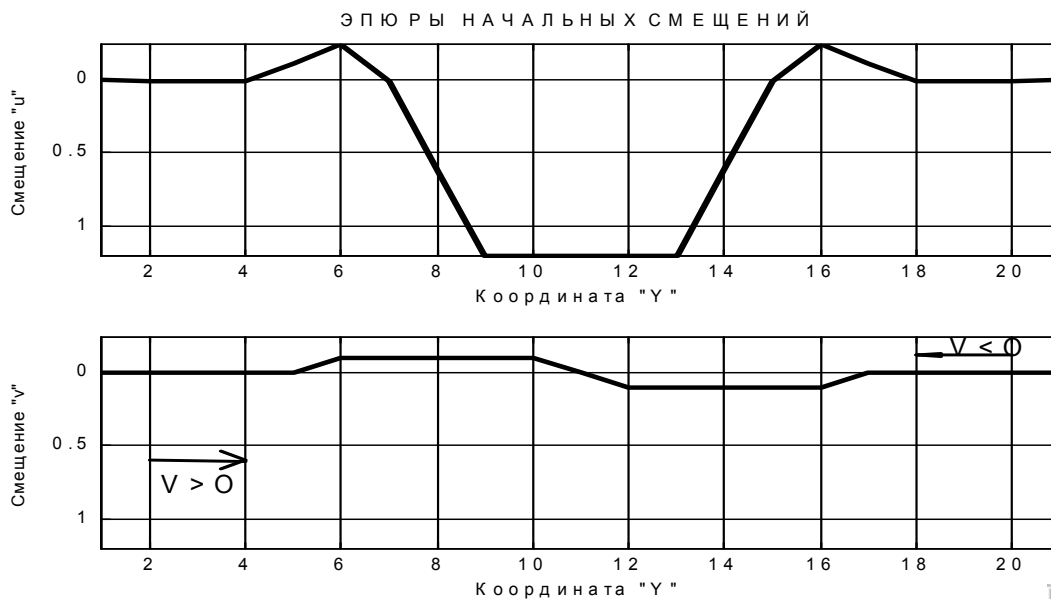


Рис. 66

На рис. 67 представлены эпюры вертикальных перемещений, построенные для уровней в нуль, три, шесть, девять и двенадцать метров глубины полупространства.

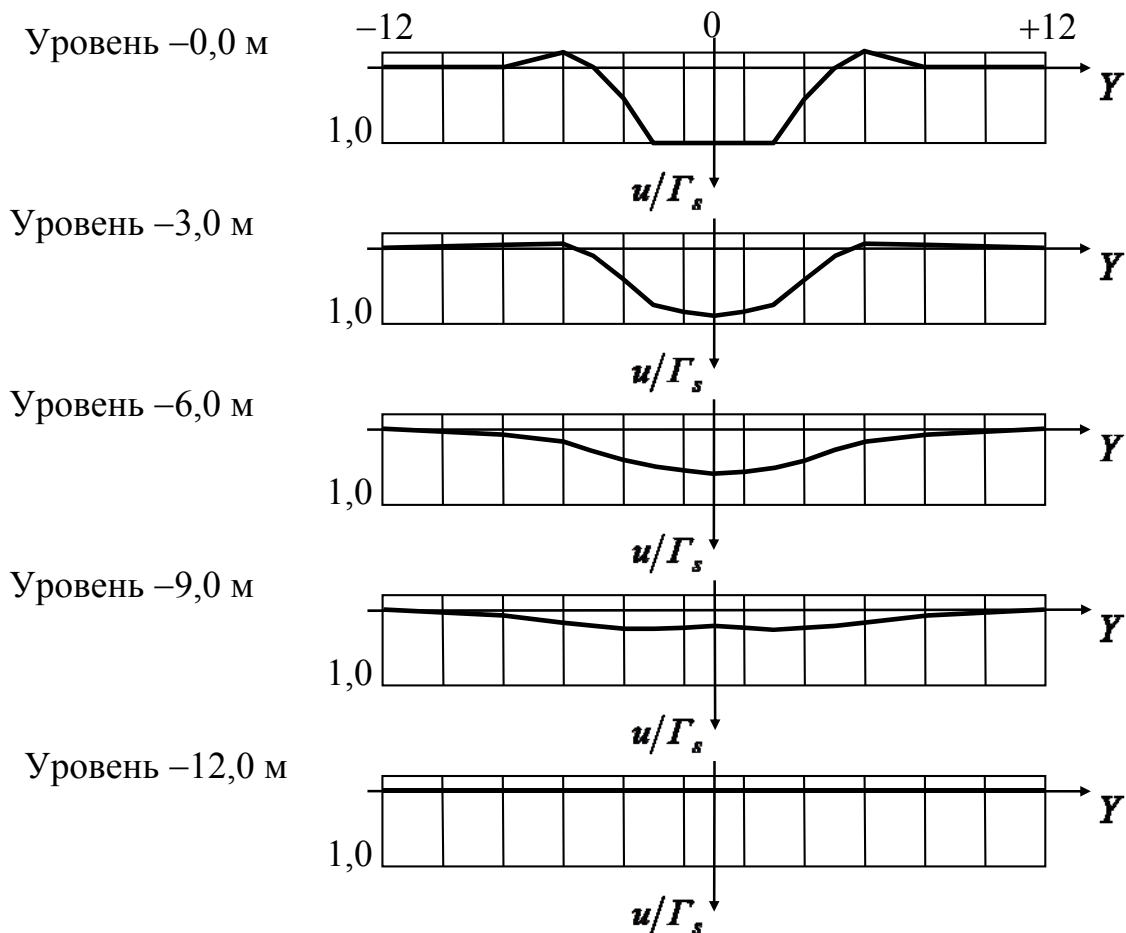


Рис. 67

*Метод конечных разностей для решения плоской задачи теории упругости в напряжениях*

Решение плоской задачи теории упругости в напряжениях математически сводится к интегрированию бигармонического уравнения

$$\frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 \varphi}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^4 \varphi}{\partial y^4} = 0, \quad (16)$$

удовлетворяющего краевым условиям:

$$p_{nx} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial^2 y} l - \left( \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} + F_x y + F_y x \right) m; \quad (17)$$

$$p_{ny} = - \left( \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} + F_x y + F_y x \right) l + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} m.$$

Зная функцию напряжений  $\varphi(x, y)$ , найдём напряжения:

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}; \quad \sigma_y = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}; \quad \tau_{xy} = - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} - F_x y - F_y x. \quad (18)$$

Далее имеем обратную задачу теории упругости, когда известными являются напряжения в каждой точке тела.

В соответствии с алгоритмом МКР, в каждом внутреннем узле расчётной сетки записывается уравнение (16), в котором производные заменяются конечно-разностными операторами. При этом в часть конечно-разностных уравнений войдут и значения функции  $\varphi(x, y)$  для узлов на контуре и для узлов, расположенных на расстоянии одного шага вне контура. Записывая краевые условия (17) с использованием конечно-разностных операторов, мы также вынуждены будем использовать внеконтурные узлы. Это обстоятельство приводит к тому, что количество конечно-разностных уравнений будет меньше числа неизвестных. Следовательно, необходимо каким-то образом определить значение искомой функции в контурных и законтурных узлах.

Для определения значений искомой функции  $\varphi(x, y)$  в контурных и законтурных узлах воспользуемся *равной аналогией*, предложенной профессорами П.Л. Пастернаком, П.М. Варваком, А.П. Сеницыным.

Прежде всего, используя формулы для конечно-разностной аппроксимации первой производной, выразим значения функции напряжений в законтурных узлах через значения этой функции в соответствующих внутриконтурных узлах и значение нормальной производной к контуру.

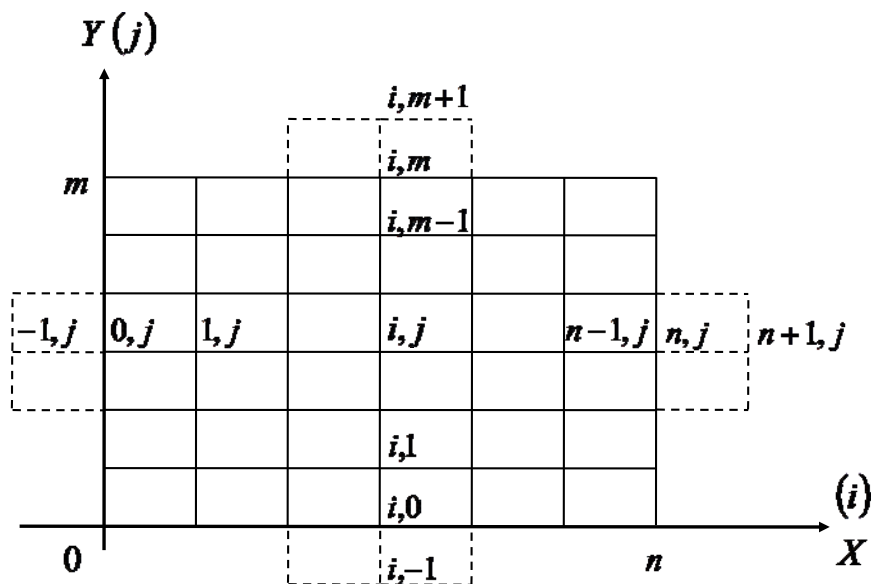


Рис. 68

В соответствии с рис. 68, имеем:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)_{0,j} &= \frac{1}{2\Delta x}(\varphi_{1,j} - \varphi_{-1,j}); & \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)_{n,j} &= \frac{1}{2\Delta x}(\varphi_{n+1,j} - \varphi_{n-1,j}); \\ \left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)_{i,0} &= \frac{1}{2\Delta y}(\varphi_{i,1} - \varphi_{i,-1}); & \left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)_{i,m} &= \frac{1}{2\Delta y}(\varphi_{i,m+1} - \varphi_{i,m-1}). \end{aligned}$$

Отсюда получаем:

$$\begin{aligned} \varphi_{-1,j} &= \varphi_{1,j} - 2\Delta x \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)_{0,j}; \\ \varphi_{n+1,j} &= \varphi_{n-1,j} + 2\Delta x \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)_{n,j}; \\ \varphi_{i,-1} &= \varphi_{i,1} - 2\Delta y \left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)_{i,0}; \\ \varphi_{i,m+1} &= \varphi_{i,m-1} + 2\Delta y \left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)_{i,m}. \end{aligned} \tag{19}$$

Формулы (19) определяют значения функции  $\varphi(x, y)$  в законтурных точках через значения функции напряжений во внутриконтурных точках и значения нормальных производных функции  $\varphi(x, y)$  на соответствующих границах прямоугольной расчётной области.

В качестве расчётной области будем рассматривать балку-стенку под действием произвольной контурной нагрузки, действующей параллельно её плоскости. Балка-стенка будет находиться в условиях обобщённого плоского напряжённого состояния. Далее сопоставим напряжения в балке-стенке, действующие на площадках, параллельных её контуру, с внутренними усилиями в элементах (стержнях) рамы, совпадающей с контуром балки-стенки, для одной и той же внешней нагрузки. Следует отметить, что балка-стенка, равно как и соответствующая рама, под действием внешней нагрузки находится в равновесии.

Изобразим балку-стенку (рис. 69) и соответствующую раму (рис.70):



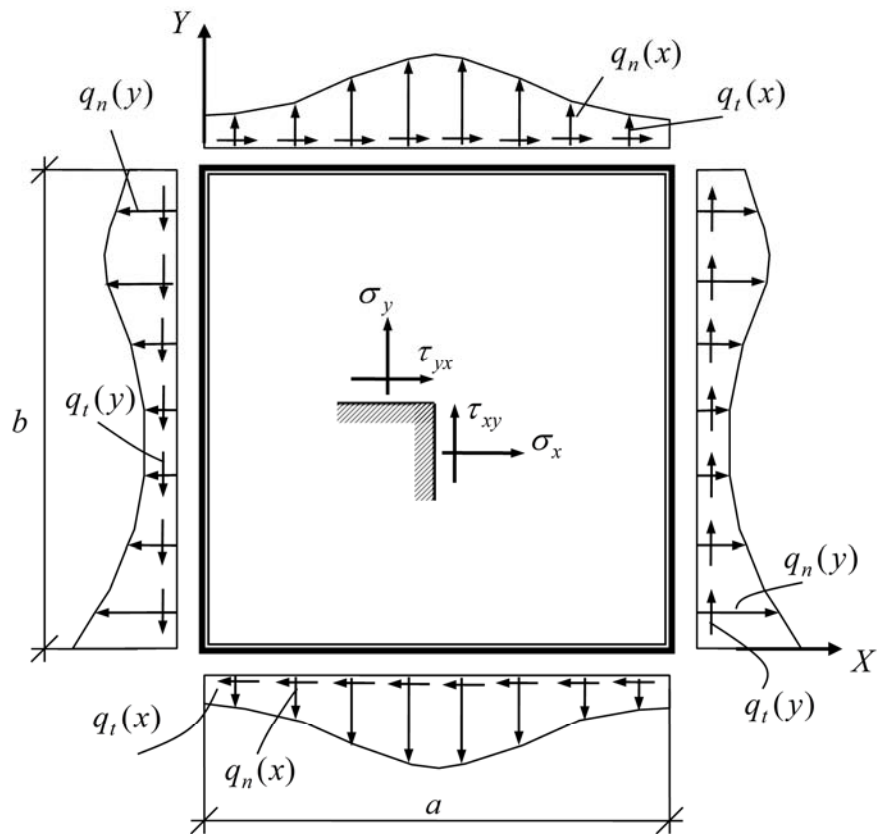


Рис. 69

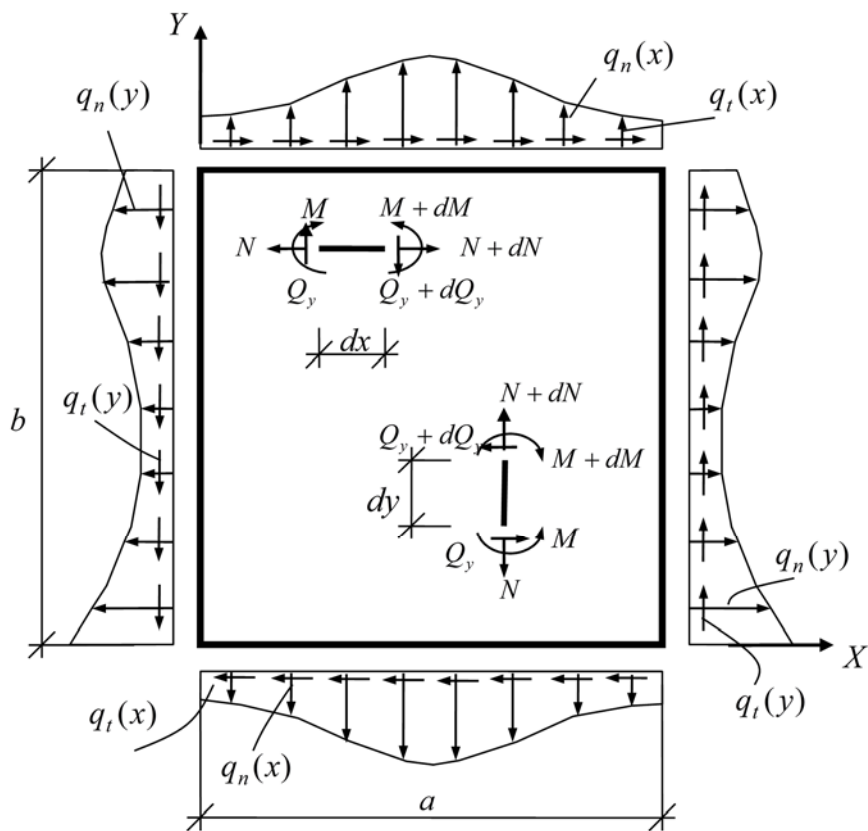


Рис. 70

1. Рассмотрим левый край балки-стенки и левый стержень рамы:

$$x=0, \quad 0 \leq y \leq b.$$

На площадке, параллельной оси  $Y$  и примыкающей к левому краю балки-стенки (рис. 71), напряжения равны:



$$\sigma_x = \frac{\partial^2 \varphi(0, y)}{\partial y^2} = \frac{d^2 \varphi}{dy^2} = q_n(y);$$

$$\tau_{xy} = -\frac{\partial^2 \varphi(0, y)}{\partial x \partial y} = -\frac{d}{dy} \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)_{x=0} = q_t(y).$$

Рис. 71

Найдём связь между внутренними усилиями в левом стержне рамы (рис. 72).

$$\Sigma y=0: \quad -N + (N + dN) - q_t(y) dy = 0, \text{ то есть}$$

$$\frac{dN}{dy} = q_t(y). \quad (21)$$

$$\Sigma x=0: \quad -Q + (Q + dQ) - q_n(y) dy = 0, \text{ то есть}$$

$$\frac{dQ}{dy} = q_n(y). \quad (22)$$

$$\Sigma M_1=0: \quad M + Q dy + q_n(y) \frac{dy^2}{2} - (M + dM) = 0,$$

$$\text{то есть} \quad \frac{dM}{dy} = Q. \quad (23)$$

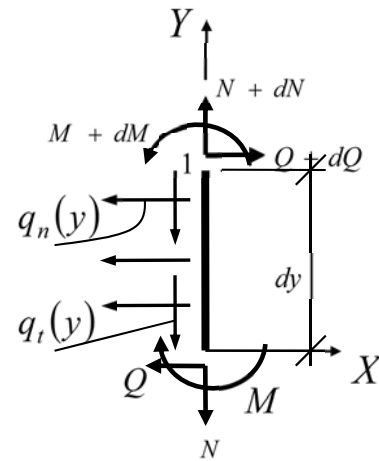


Рис. 72

Сопоставив (22) и (23), получим:

$$\frac{d^2 M}{dy^2} = \frac{dQ}{dy} = q_n(y). \quad (24)$$

2. Рассмотрим верхний край балки-стенки и верхний стержень рамы:

$$0 \leq x \leq a, \quad y = b.$$

На площадке, параллельной оси  $X$  и примыкающей к верхнему краю балки-стенки (рис. 73), напряжения равны:

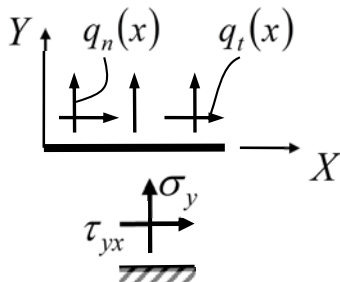


Рис. 73

$$\sigma_y = \frac{\partial^2 \varphi(x, b)}{\partial x^2} = \frac{d^2 \varphi}{dx^2} = q_n(x);$$

$$\tau_{yx} = -\frac{\partial^2 \varphi(x, b)}{\partial x \partial y} = -\frac{d}{dx} \left( \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)_{y=b} = q_t(x).$$

Найдём связь между внутренними усилиями в верхнем стержне рамы (рис. 74).

$$\Sigma x = 0: -N + q_t(x)dx + (N + dN) = 0,$$

то есть 
$$\frac{dN}{dx} = -q_t(x). \quad (26)$$

$$\Sigma y = 0: Q + q_n(x)dx - (Q + dQ) = 0,$$

то есть 
$$\frac{dQ}{dx} = q_n(x). \quad (27)$$

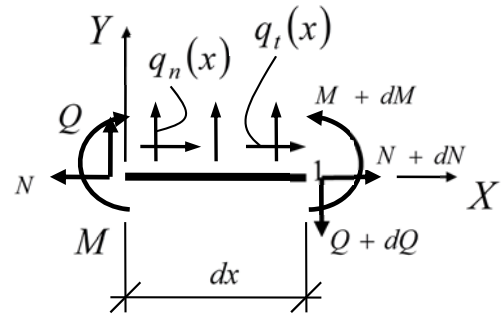


Рис. 74

$$\Sigma M_1 = 0:$$

$$Qdx + M + q_n(x)\frac{dx^2}{2} - (M - dM) = 0,$$

то есть 
$$\frac{dM}{dx} = Q. \quad (28)$$

Сопоставив (27) и (28), получим:

$$\frac{d^2M}{dx^2} = \frac{dQ}{dx} = q_n(x). \quad (29)$$

3. Рассмотрим правый край балки-стенки и правый стержень рамы:

$$x = a, \quad 0 \leq y \leq b.$$

На площадке параллельной оси  $Y$  и примыкающей к правому краю балки-стенки (рис. 75) напряжения равны:

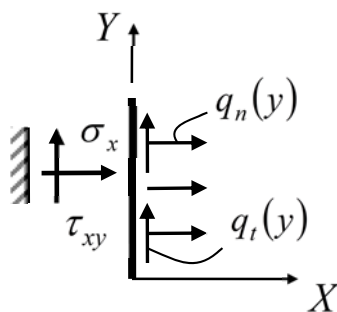


Рис. 75

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 \varphi(a, y)}{\partial y^2} = \frac{d^2 \varphi}{dy^2} = q_n(y); \quad (30)$$

$$\tau_{xy} = -\frac{\partial^2 \varphi(a, y)}{\partial x \partial y} = -\frac{d}{dy} \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)_{x=a} = q_t(y).$$

Найдём связь между внутренними усилиями в левом стержне рамы (рис. 76).

$$\Sigma y = 0: -N + (N + dN) + q_t(y)dy = 0,$$

то есть 
$$\frac{dN}{dy} = -q_t(y). \quad (31)$$

$$\Sigma x = 0: -Q + (Q + dQ) + q_n(y)dy = 0,$$

ТО ЕСТЬ 
$$\frac{dQ}{dy} = -q_n(y). \quad (32)$$

$$\Sigma M_1 = 0: M - Qdy + q_n(y) \frac{dy^2}{2} - (M + dM) = 0;$$

ТО ЕСТЬ 
$$\frac{dM}{dy} = -Q. \quad (33)$$

Сопоставив (32) и (33), получим:

$$\frac{d^2 M}{dy^2} = -\frac{dQ}{dy} = q_n(y). \quad (34)$$

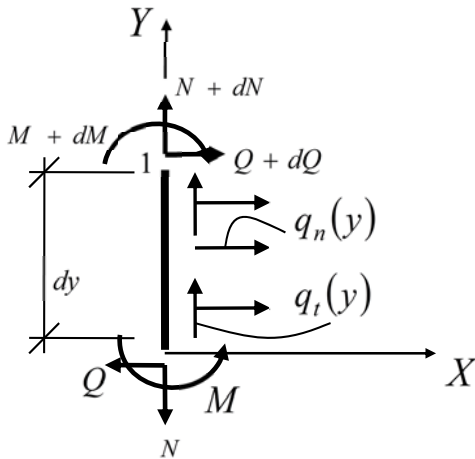


Рис. 76

4. Рассмотрим нижний край балки-стенки и нижний стержень рамы:

$$0 \leq x \leq a, \quad y = 0.$$

На площадке, параллельной оси  $X$  и примыкающей к нижнему краю балки-стенки (рис. 77), напряжения равны:

$$\sigma_y = \frac{\partial^2 \varphi(x, b)}{\partial x^2} = \frac{d^2 \varphi}{dx^2} = q_n(x);$$

$$\tau_{yx} = -\frac{\partial^2 \varphi(x, b)}{\partial x \partial y} = -\frac{d}{dx} \left( \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)_{y=0} = q_t(x).$$

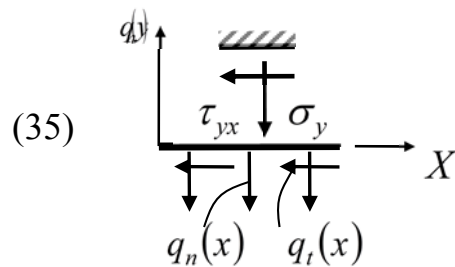


Рис. 77

Найдём связь между внутренними усилиями в нижнем стержне рамы (рис. 78):

$$\Sigma x = 0: -N - q_t(x) dx + (N + dN) = 0,$$

ТО ЕСТЬ 
$$\frac{dN}{dx} = q_t(x). \quad (36)$$

$$\Sigma y = 0: Q - q_n(x) dx - (Q + dQ) = 0,$$

ТО ЕСТЬ 
$$\frac{dQ}{dx} = -q_n(x). \quad (37)$$

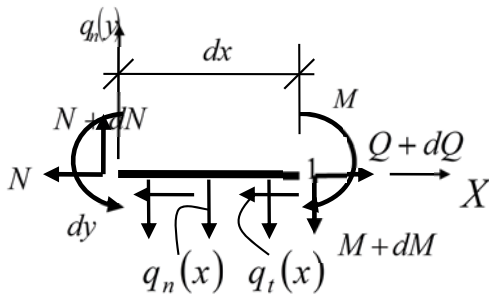


Рис. 78

$$\Sigma M_1 = 0: \quad M - Qdx + q_n(x) \frac{dx^2}{2} - (M - dM) = 0,$$

то есть 
$$\frac{dM}{dx} = -Q. \quad (38)$$

Сопоставив (37) и (38), получим:

$$\frac{d^2 M}{dx^2} = -\frac{dQ}{dx} = q_n(x). \quad (39)$$

Анализ и сопоставление формул (20), (21) и (24); (25), (26) и (29); (30), (31) и (34); (35), (36) и (39) показывают, что функцию напряжений  $\varphi(x, y)$  на контуре балки-стенки в некоторой точке можно принять за значение изгибающего момента в данном сечении рамы с такой же нагрузкой; значение нормальной производной к контуру балки-стенки в некоторой точке можно принять равным продольной силе в данном сечении условной рамы, очертания которой совпадают с контуром пластинки.

Итак, для контурной точки с номером "k" имеем:

$$\varphi_k = M_k; \quad \left( \frac{\partial \varphi}{\partial n} \right)_k = N_k. \quad (40)$$

При этом, как это следует из формул (20)-(39):

- ✓ для левого края пластины  $\frac{\partial \varphi}{\partial x} = -N$ ;
- ✓ для нижнего края пластины  $\frac{\partial \varphi}{\partial y} = -N$ ;
- ✓ для правого края пластины  $\frac{\partial \varphi}{\partial x} = N$ ;
- ✓ для верхнего края пластины  $\frac{\partial \varphi}{\partial y} = N$ .

Следовательно, формулы (19) можно записать следующим образом:

$$\begin{aligned} \varphi_{-1,j} &= \varphi_{1,j} + 2\Delta_x N_{ЛК}; & \varphi_{i,-1} &= \varphi_{i,1} + 2\Delta_y N_{НК}; \\ \varphi_{n+1,j} &= \varphi_{n-1,j} + 2\Delta_x N_{ПК}; & \varphi_{i,m+1} &= \varphi_{i,m-1} + 2\Delta_y N_{БК}. \end{aligned} \quad (41)$$

*Правило знаков:* если ординаты эпюры моментов  $M$  в раме (откладываемые со стороны растянутого волокна) отложены внутрь контура рамы, то такие  $\varphi_k = M_k > 0$ , и наоборот. Растягивающая продольная сила считается положительной, то есть  $\left( \frac{\partial \varphi}{\partial n} \right)_k = N_k > 0$ , если  $N_k$  – растягивающая сила.

**З а м е ч а н и е .** Любой замкнутый прямоугольный контур три раза статически неопределим, а потому построение эпюр изгибающих моментов и продольных сил в нём является достаточно сложной задачей. Однако было доказано, что построение этих эпюр для определения значений функции напряжений и нормальной производной на контуре прямоугольной балки-стенки можно выполнять в статически определимой раме. Для этого следует каким-либо образом превратить замкнутый контур в статически определимую стержневую систему, то есть убрать три «лишние связи». Это можно сделать по-разному, например, разорвав стержень рамы в каком-либо сечении либо поставив шарниры.

**П р и м е р 3 .**

Расчёт балки-стенки [17].

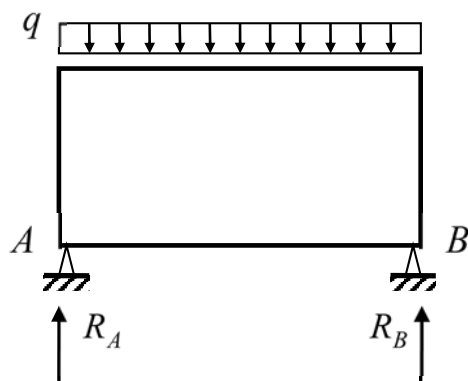


Рис. 79

Рассмотрим балку-стенку, нагруженную по верхнему краю равномерно распределённой нагрузкой (рис. 79).

Покроем балку-стенку сеткой с шагом  $\Delta x$  вдоль горизонтальной оси  $X$  и шагом  $\Delta y$  вдоль вертикальной оси  $Y$  так, что  $\Delta x = \Delta y = \Delta$ . В силу симметрии нагрузки относительно вертикальной срединной оси  $O - O_1$ , пронумеруем узлы сетки так, как показано на рис. 80. В качестве единицы длины примем величину шага  $\Delta$ .

Тогда опорные реакции будут равны:

$$R_A = R_B = R = \frac{5}{2}q\Delta.$$

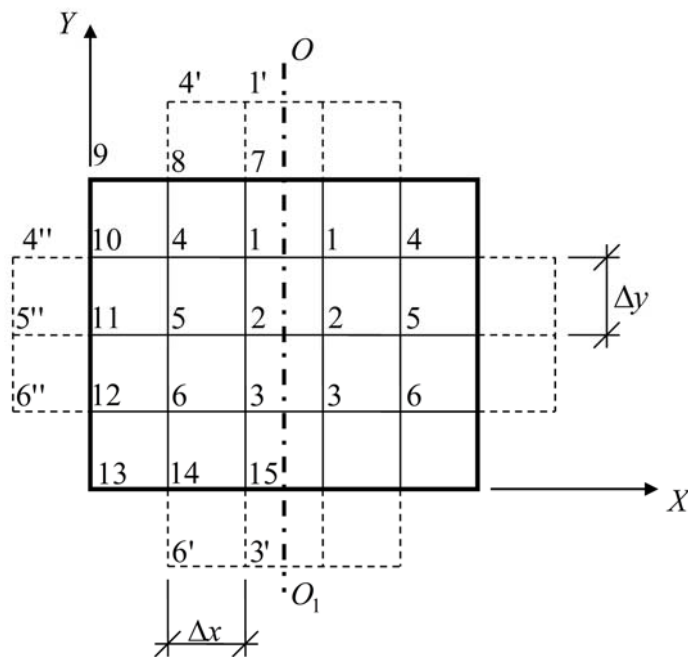


Рис.80

Строим эпюры изгибающих моментов и продольных сил в статически определимой раме (рис. 81).

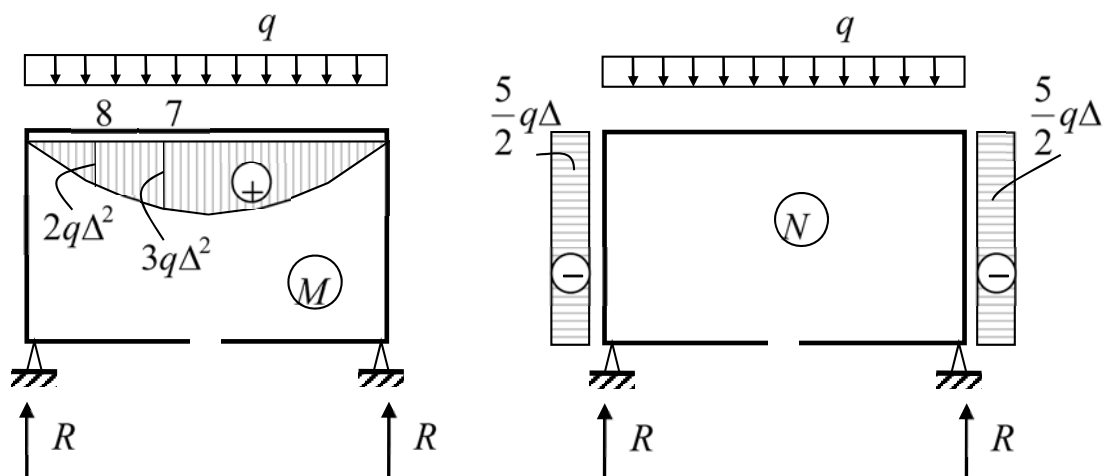


Рис. 81

Используя формулы (40<sub>1</sub>), вычисляем значения функции напряжений в контурных узлах сетки:

$$\varphi_7 = 3q\Delta^2; \quad \varphi_8 = 2q\Delta^2; \quad \varphi_9 = \dots = \varphi_{15} = 0.$$

Вычисляем значение функции напряжений в законтурных узлах сетки, используя формулы (41):

$$\begin{aligned} \varphi_{1'} &= \varphi_1; & \varphi_{4'} &= \varphi_4; & \varphi_{4''} &= \varphi_4 - 5q\Delta^2; & \varphi_{5''} &= \varphi_5 - 5q\Delta^2; & \varphi_{6''} &= \varphi_6 - 5q\Delta^2; \\ \varphi_{3'} &= \varphi_3; & \varphi_{6'} &= \varphi_6. \end{aligned}$$

Запишем уравнение (16) в узлах 1, 2, 3, 4, 5, 6, используя конечно-разностные операторы (3). Переход от двух индексов в операторах (3) к одному в расчётных узлах выполняется по базовому узлу, то есть, если, например, уравнение (16) записывается для узла с номером 4, то его двойной индекс будет " $i, j$ ". Тогда узел справа с номером 1 будет иметь двойной индекс " $i+1, j$ "; узел слева с номером 10 – двойной индекс " $i-1, j$ "; узел снизу с номером 5 – двойной индекс " $i, j-1$ "; и так далее.

Узел 1:

$$\begin{aligned} &(\varphi_4 - 4\varphi_1 + 6\varphi_1 - 4\varphi_4 + \varphi_{10}) + \\ &+ 2(\varphi_8 + \varphi_2 - 2\varphi_1 - 2\varphi_7 + 4\varphi_1 - 2\varphi_2 - 2\varphi_4 + \varphi_8 + \varphi_5) + \\ &+ (\varphi_{1'} - 4\varphi_7 + 6\varphi_1 - 4\varphi_2 + \varphi_3) = 0; \end{aligned}$$

Узел 2:

$$\begin{aligned} & (\varphi_5 - 4\varphi_2 + 6\varphi_2 - 4\varphi_5 + \varphi_{11}) + \\ & + 2(\varphi_1 + \varphi_3 - 2\varphi_2 - 2\varphi_1 + 4\varphi_2 - 2\varphi_3 - 2\varphi_5 + \varphi_4 + \varphi_6) + \\ & + (\varphi_7 - 4\varphi_1 + 6\varphi_2 - 4\varphi_3 + \varphi_{15}) = 0; \end{aligned}$$

Узел 3:

$$\begin{aligned} & (\varphi_6 - 4\varphi_3 + 6\varphi_3 - 4\varphi_6 + \varphi_{12}) + \\ & + 2(\varphi_2 + \varphi_{15} - 2\varphi_3 - 2\varphi_2 + 4\varphi_3 - 2\varphi_{15} - 2\varphi_6 + \varphi_5 + \varphi_{14}) + \\ & + (\varphi_1 - 4\varphi_2 + 6\varphi_3 - 4\varphi_{15} + \varphi_{3'}) = 0; \end{aligned}$$

Узел 4:

$$\begin{aligned} & (\varphi_1 - 4\varphi_1 + 6\varphi_4 - 4\varphi_{10} + \varphi_{4''}) + \\ & + 2(\varphi_7 + \varphi_2 - 2\varphi_1 - 2\varphi_8 + 4\varphi_4 - 2\varphi_5 - 2\varphi_{10} + \varphi_9 + \varphi_{11}) + \\ & + (\varphi_{4'} - 4\varphi_8 + 6\varphi_4 - 4\varphi_5 + \varphi_6) = 0; \end{aligned}$$

Узел 5:

$$\begin{aligned} & (\varphi_2 - 4\varphi_2 + 6\varphi_5 - 4\varphi_{11} + \varphi_{5''}) + \\ & + 2(\varphi_1 + \varphi_3 - 2\varphi_2 - 2\varphi_4 + 4\varphi_5 - 2\varphi_6 - 2\varphi_{11} + \varphi_{10} + \varphi_{12}) + \\ & + (\varphi_8 - 4\varphi_4 + 6\varphi_5 - 4\varphi_6 + \varphi_{14}) = 0; \end{aligned}$$

Узел 6:

$$\begin{aligned} & (\varphi_3 - 4\varphi_3 + 6\varphi_6 - 4\varphi_{12} + \varphi_{6''}) + \\ & + 2(\varphi_2 + \varphi_{15} - 2\varphi_3 - 2\varphi_5 + 4\varphi_6 - 2\varphi_{14} - 2\varphi_{12} + \varphi_{11} + \varphi_{13}) + \\ & + (\varphi_4 - 4\varphi_5 + 6\varphi_6 - 4\varphi_{14} + \varphi_{6'}) = 0. \end{aligned}$$

Решив полученную систему конечно-разностных уравнений шестого порядка, получим:

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= 2,675q\Delta^2; & \varphi_2 &= 1,973q\Delta^2; & \varphi_3 &= 0,883q\Delta^2; \\ \varphi_4 &= 1,849q\Delta^2; & \varphi_5 &= 1,449q\Delta^2; & \varphi_6 &= 0,775q\Delta^2. \end{aligned}$$

Для определения напряжения в узлах расчётной сетки воспользуемся соотношениями (18) без учёта объёмных сил, в которых производные заменим конечно-разностными операторами. Например, для узла 7 получим:

$$\begin{aligned} \sigma_x^{(7)} &= \left( \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} \right)^{(7)} = \frac{1}{\Delta^2} (\varphi_{1'} - 2\varphi_7 + \varphi_{\phi_1}) = -0,65q; \\ \sigma_y^{(7)} &= \left( \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \right)^{(7)} = \frac{1}{\Delta^2} (\varphi_8 - 2\varphi_7 + \varphi_8) = -q; \\ \tau_{xy}^{(7)} &= - \left( \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} \right)^{(7)} = - \frac{1}{4\Delta^2} (\varphi_{1'} - \varphi_{4'} - \varphi_1 + \varphi_4) = 0. \end{aligned}$$



Зная величину напряжений в каждом узле расчётной сеточной области, можно оценить прочность балки-стенки, воспользовавшись какой-либо теорией прочности.

Деформации в узлах расчётной сетки определяются на основании обобщённого закона Гука. Например, для узла 7 получим:

$$\varepsilon_x^{(7)} = \frac{1}{E} [\sigma_x^{(7)} - \nu \cdot \sigma_y^{(7)}] = \frac{1}{E} (-0,65q + \nu q) = \frac{q}{E} (\nu - 0,65);$$

$$\varepsilon_y^{(7)} = \frac{1}{E} [\sigma_y^{(7)} - \nu \cdot \sigma_x^{(7)}] = \frac{1}{E} (q + 0,65q \cdot \nu) = \frac{q}{E} (1 + 0,65\nu);$$

$$\gamma_{xy}^{(7)} = \frac{E}{2(1+\nu)} \tau_{xy}^{(7)} = 0.$$

На рис. 82 показаны эпюры напряжений, построенные вдоль линии 7-1-2-3-15.

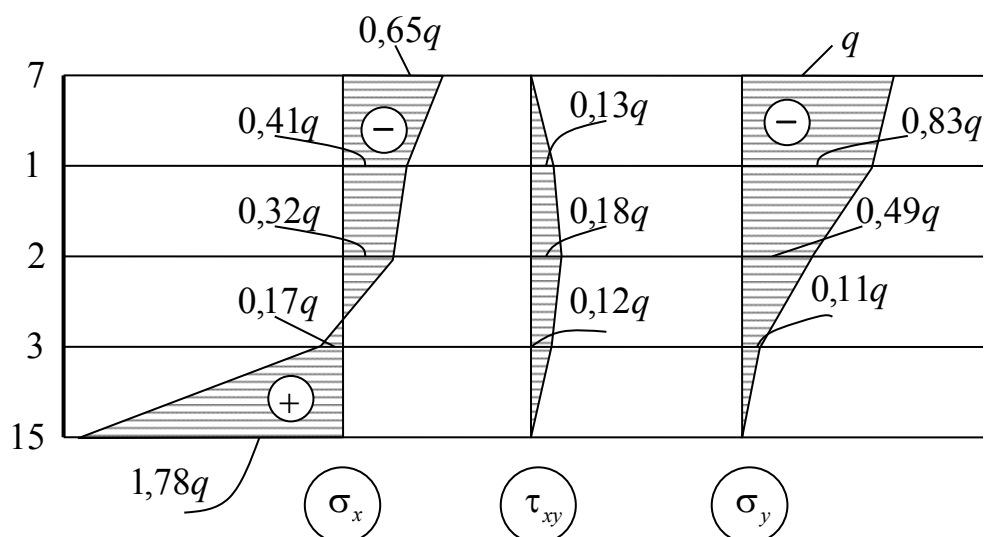


Рис. 82

Как следует из рис. 82, эпюры напряжений в балке-стенке, конечно, отличаются от соответствующих эпюр в обычной балке, однако общий характер их изменения по высоте сохраняется.

Достаточной проверкой правильности полученного решения является выполнение уравнения совместности деформации  $\nabla^2(\sigma_x + \sigma_y) = 0$  в каждом узле расчётной сетки.

## §16. Расчёт тонких пластин методом конечных разностей

Различают аналитические и численные методы расчёта тонких пластин. К первым относятся, в частности, решение в двойных тригонометрических рядах (решение Навье); решение в одинарных тригонометрических рядах

(решение Леви). Численными методами являются, например, метод конечных разностей (МКР) и метод конечных элементов (МКЭ).

Расчёт изотропных пластин на изгиб сводится к решению краевой задачи для дифференциального уравнения равновесия – дифференциального уравнения изогнутой срединной поверхности пластины [уравнение Софи Жермен (Sophie Germain)]:

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{q(x, y)}{D}. \quad (1)$$

Здесь  $w = w(x, y)$  – прогиб срединной поверхности пластины;

$D = \frac{E \cdot h^3}{12(1 - \nu^2)}$  – цилиндрическая жёсткость;  $h$  – толщина пластины.

При расчёте тонких пластин методом конечных разностей, общий алгоритм метода сеток сохраняется без каких-либо изменений. Как и в плоской задаче, пластину покрываем сеткой с шагом  $\Delta x$  вдоль оси  $X$  и с шагом  $\Delta y$  вдоль оси  $Y$  (рис. 83). В каждом внутреннем узле записываем бигармоническое уравнение (1), в котором производные заменяем конечно-разностными операторами. При этом с неизбежностью появляются законтурные точки.

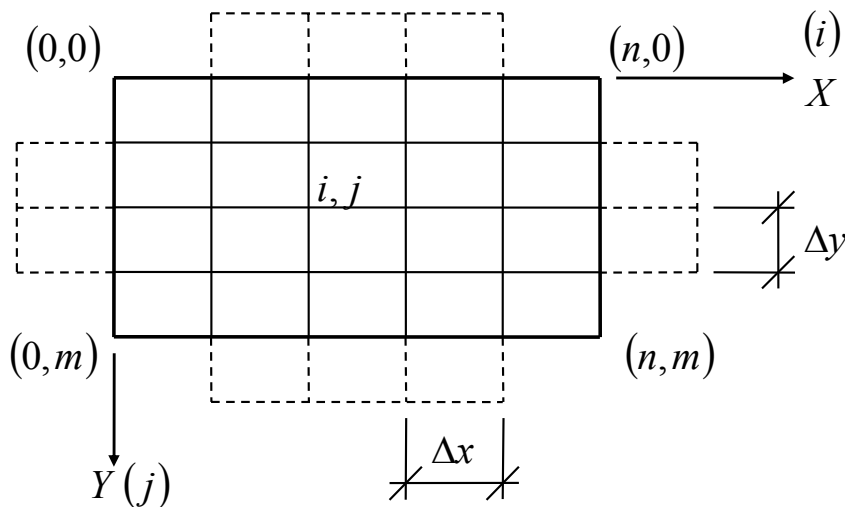


Рис. 83

Значения функции прогиба  $w(x, y)$  в контурных и законтурных точках определяются на основании краевых условий (рис. 84).

Рассмотрим основные виды закреплений тонких прямоугольных пластин по контуру: жёсткую заделку и шарнирное закрепление по всем четырём сторонам, а также свободный край пластины.

1. Жёсткая заделка.

На стороне пластины, имеющей жёсткое защемление, прогиб и угол поворота равны нулю:

- сторона  $0-n$ :  $w(x,0)=0, \left. \frac{\partial w(x,y)}{\partial y} \right|_{y=0} = 0$ . В конечных разностях

получим:

$$w_{i,0} = 0; \frac{w_{i,1} - w_{i,-1}}{2\Delta y} = 0, \text{ то есть } w_{i,-1} = w_{i,1}; \quad (2)$$

- сторона  $m-n,m$ :  $w(x,b)=0, \left. \frac{\partial w(x,y)}{\partial y} \right|_{y=b} = 0$ . В конечных разностях

получим:

$$w_{i,m} = 0; \frac{w_{i,m+1} - w_{i,m-1}}{2\Delta y} = 0, \text{ то есть } w_{i,m+1} = w_{i,m-1}; \quad (3)$$

- сторона  $0-m$ :  $w(0,y)=0, \left. \frac{\partial w(x,y)}{\partial x} \right|_{x=0} = 0$ . В конечных разностях

будем иметь:

$$w_{0,j} = 0; \frac{w_{1,j} - w_{-1,j}}{2\Delta x} = 0, \text{ то есть } w_{-1,j} = w_{1,j}; \quad (4)$$

- сторона  $n-n,m$ :  $w(a,y)=0, \left. \frac{\partial w(x,y)}{\partial x} \right|_{x=a} = 0$ . В конечных разностях

будем иметь:

$$w_{n,j} = 0; \frac{w_{n+1,j} - w_{n-1,j}}{2\Delta x} = 0, \text{ то есть } w_{n+1,j} = w_{n-1,j}. \quad (5)$$

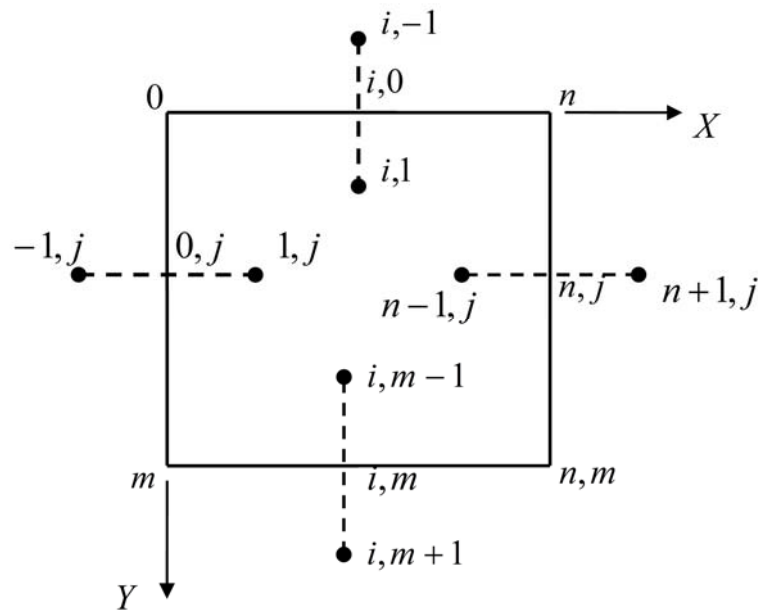


Рис. 84

Итак, если край пластины имеет жёсткое опирание, то формулы (2) – (5) показывают, что прогибы во внеконтурных точках равны прогибам в соответствующих внутриконтурных точках.

## 2. Шарнирное опирание.

На стороне пластины, имеющей шарнирное опирание, прогиб и изгибающий момент равны нулю:

- сторона  $0 - n$ :  $w(x,0)=0$ ;  $M_y(x,0)=-D \cdot \left( \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)_{y=0} = 0$ . Так как

пластина в направлении оси  $X$  не искривляется, то есть  $\left. \frac{\partial^2 w(x,y)}{\partial x^2} \right|_{y=0} \equiv 0$ , и,

кроме того,  $D \neq 0$ , то условие  $M_y=0$  сводится к соотношению

$\left. \frac{\partial^2 w(x,y)}{\partial y^2} \right|_{y=0} = 0$ . В конечных разностях получаем:

$$w_{i,0} = 0; \quad \frac{w_{i,1} - 2w_{i,0} + w_{i,-1}}{\Delta y^2} = 0,$$

то есть

$$w_{i,-1} = -w_{i,1}. \quad (6)$$

- сторона  $m - n, m$ :  $w(x,b)=0$ ;  $M_y(x,b)=-D \cdot \left( \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)_{y=b} = 0$ . Так

как пластина в направлении оси  $X$  не искривляется, то есть  $\left. \frac{\partial^2 w(x,y)}{\partial x^2} \right|_{y=b} \equiv 0$ ,

и, кроме того,  $D \neq 0$ , то условие  $M_y=0$  сводится к соотношению

$\left. \frac{\partial^2 w(x,y)}{\partial y^2} \right|_{y=b} = 0$ . В конечных разностях получаем:

$$w_{i,m} = 0; \quad \frac{w_{i,m+1} - 2w_{i,m} + w_{i,m-1}}{\Delta y^2} = 0,$$

то есть

$$w_{i,m+1} = -w_{i,m-1}. \quad (7)$$

- сторона  $0 - m$ :  $w(0,y)=0$ ;  $M_x(0,y)=-D \cdot \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)_{x=0} = 0$ . Так

как пластина в направлении оси  $Y$  не искривляется, то есть  $\left. \frac{\partial^2 w(x,y)}{\partial y^2} \right|_{x=0} \equiv 0$ ,

и, кроме того,  $D \neq 0$ , то условие  $M_x = 0$  сводится к соотношению

$$\left. \frac{\partial^2 w(x, y)}{\partial x^2} \right|_{x=0} = 0. \text{ В конечных разностях получаем:}$$

$$w_{0,j} = 0; \quad \frac{w_{1,j} - 2w_{0,j} + w_{-1,j}}{\Delta x^2} = 0,$$

то есть

$$w_{-1,j} = -w_{1,j}. \quad (8)$$

• сторона  $n - n, m$ :  $w(a, y) = 0$ ;  $M_x(a, y) = -D \cdot \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)_{x=a} = 0$ . Так

как пластина в направлении оси  $Y$  не искривляется, то есть  $\left. \frac{\partial^2 w(x, y)}{\partial y^2} \right|_{x=a} \equiv 0$ ,

и, кроме того,  $D \neq 0$ , то условие  $M_x = 0$  сводится к соотношению

$$\left. \frac{\partial^2 w(x, y)}{\partial x^2} \right|_{x=a} = 0. \text{ В конечных разностях получаем:}$$

$$w_{n,j} = 0; \quad \frac{w_{n+1,j} - 2w_{n,j} + w_{n-1,j}}{\Delta x^2} = 0,$$

то есть

$$w_{n+1,j} = -w_{n-1,j}. \quad (9)$$

Итак, если край пластины имеет шарнирное опирание, то, как показывают формулы (6)–(9), прогибы во внеконтурных точках равны прогибам в соответствующих внутриконтурных точках, но взятые с противоположным знаком.

### 3. Свободное опирание.

На стороне пластины, свободной от опор и внешних воздействий, все внутренние усилия – изгибающий момент, поперечная сила, крутящий момент – равны нулю. На сторонах пластины, параллельных оси  $OX$ , равенство нулю внутренних усилий

$$M_y = -D \left( \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) = 0, \quad Q_y = -D \frac{\partial}{\partial y} \nabla^2 w = 0, \quad H = -D(1 - \nu) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = 0$$

приводится к соотношениям:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0; \quad \frac{\partial}{\partial y} \left[ \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + (2 - \nu) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right] = 0. \quad (a)$$

Подставив формулу (a<sub>1</sub>) в выражение (a<sub>2</sub>), получим окончательно условия на сторонах пластины, параллельных оси  $OX$ :

$$\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0; \quad 2(1 - \nu) \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \cdot \partial y} = 0. \quad (10)$$

Здесь  $\nabla^2 w \equiv \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)$  – гармонический оператор Лапласа.

Запишем формулы (10) в конечных разностях.

- сторона  $0 - n$ :

$$\frac{w_{i,1} - 2w_{i,0} + w_{i,-1}}{\Delta y^2} + \nu \frac{w_{i+1,0} - 2w_{i,0} + w_{i-1,0}}{\Delta x^2} = 0;$$

$$2(1-\nu) \frac{\partial^3 w(x,y)}{\partial x^2 \cdot \partial y} \Big|_{y=0} = \frac{2(1-\nu)}{2\Delta y} \left[ \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)_{i,1} - \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)_{i,-1} \right] = \quad (11)$$

$$= \frac{(1-\nu)}{\Delta y \cdot \Delta x^2} \left[ (w_{i+1,1} - 2w_{i,1} + w_{i-1,1}) - (w_{i+1,-1} - 2w_{i,-1} + w_{i-1,-1}) \right] = 0;$$

- сторона  $m - n, m$ :

$$\frac{w_{i,m+1} - 2w_{i,m} + w_{i,m-1}}{\Delta y^2} + \nu \frac{w_{i+1,m} - 2w_{i,m} + w_{i-1,m}}{\Delta x^2} = 0;$$

$$2(1-\nu) \frac{\partial^3 w(x,y)}{\partial x^2 \cdot \partial y} \Big|_{y=b} = \frac{2(1-\nu)}{2\Delta y} \left[ \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)_{i,m+1} - \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)_{i,m-1} \right] = \quad (12)$$

$$= \frac{(1-\nu)}{\Delta y \cdot \Delta x^2} \left[ (w_{i+1,m+1} - 2w_{i,m+1} + w_{i-1,m+1}) - (w_{i+1,m-1} - 2w_{i,m-1} + w_{i-1,m-1}) \right] = 0.$$

На сторонах пластины, параллельных оси  $OY$ , равенство нулю внутренних усилий

$$M_x = -D \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) = 0, \quad Q_x = -D \frac{\partial}{\partial x} \nabla^2 w = 0, \quad H = -D(1-\nu) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = 0$$

приводится к соотношениям:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0; \quad \frac{\partial}{\partial x} \left[ \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + (2-\nu) \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right] = 0. \quad (б)$$

Подставив формулу (б<sub>1</sub>) в выражение (б<sub>2</sub>), получим окончательно условия на сторонах пластины, параллельных оси  $OY$ :

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0; \quad 2(1-\nu) \frac{\partial^3 w}{\partial x \cdot \partial y^2} = 0. \quad (13)$$

Запишем формулы (13) в конечных разностях.

- сторона  $0 - m$ :

$$\frac{w_{1,j} - 2w_{0,j} + w_{-1,j}}{\Delta x^2} + \nu \frac{w_{0,j+1} - 2w_{0,j} + w_{0,j-1}}{\Delta y^2} = 0;$$

$$2(1-\nu) \frac{\partial^3 w(x,y)}{\partial x \cdot \partial y^2} \Big|_{x=0} = \frac{2(1-\nu)}{2\Delta x} \left[ \left( \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)_{1,j} - \left( \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)_{-1,j} \right] = \quad (14)$$

$$= \frac{(1-\nu)}{\Delta x \cdot \Delta y^2} \left[ (w_{1,j+1} - 2w_{1,j} + w_{1,j-1}) - (w_{-1,j+1} - 2w_{-1,j} + w_{-1,j-1}) \right] = 0;$$

- сторона  $n - n, m$ :

$$\frac{w_{n+1,j} - 2w_{n,j} + w_{n-1,j}}{\Delta x^2} + \nu \frac{w_{n,j+1} - 2w_{n,j} + w_{n,j-1}}{\Delta y^2} = 0;$$

$$2(1-\nu) \frac{\partial^3 w(x,y)}{\partial x \cdot \partial y^2} \Big|_{x=a} = \frac{2(1-\nu)}{2\Delta x} \left[ \left( \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)_{n+1,j} - \left( \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)_{n-1,j} \right] =$$

$$= \frac{(1-\nu)}{\Delta y \cdot \Delta x^2} \left[ (w_{n+1,j+1} - 2w_{n+1,j} + w_{n+1,j-1}) - (w_{n-1,j+1} - 2w_{n-1,j} + w_{n-1,j-1}) \right] = 0.$$

(15)

Решение краевой задачи об изгибе тонкой пластины методом конечных разностей математически сводится к решению системы линейных алгебраических уравнений. При любом опирании по контуру система линейных алгебраических уравнений (система конечно-разностных уравнений) будет замкнута. Её решение даёт числовое поле прогибов пластины в узлах расчётной сетки.

**Пример.**

Рассмотрим тонкую пластинку под действием поперечной нагрузки  $q(x, y)$ , то есть находящуюся в условиях изгиба. Левая сторона пластины, совпадающая с осью  $Y$ , имеет шарнирную опору, правая сторона, параллельная оси  $Y$ , имеет жёсткое защемление. Стороны пластины, параллельные оси  $X$ , свободны от опор.

Покроем пластинку сеткой так, что вдоль оси  $X$  будет  $n$  участков, а вдоль оси  $Y$  –  $m$  участков. Количество конечно-разностных уравнений, в соответствии с алгоритмом метода конечных разностей, будет равно:

$$(n-1)(m-1) + 2 \cdot 2(n-1) = nm - m + 3n - 3. \quad (\text{в})$$

Количество неизвестных – прогибов в узлах расчётной сетки – будет определяться формулой

$$(n-1)(m+1) + 2(n-1) = nm - m + 3n - 3. \quad (\text{г})$$

Сопоставляя формулы (в) и (г), видим, что количество уравнений равно количеству искомым неизвестных. Система замкнута.

Зная прогибы, можно подсчитать величину внутренних усилий и напряжений в каждом узле расчётной сетки и, следовательно, оценить её прочность.

Конечно-разностные формулы для внутренних усилий в узле  $(i, j)$  имеют следующий вид:

$$\begin{aligned}
M_x|_{i,j} &= -D \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)_{i,j} = \\
&= -D \left( \frac{w_{i+1,j} - 2w_{i,j} + w_{i-1,j}}{\Delta x^2} + \nu \frac{w_{i,j+1} - 2w_{i,j} + w_{i,j-1}}{\Delta y^2} \right); \\
Q_x|_{i,j} &= -D \left( \frac{\partial}{\partial x} \nabla^2 w \right)_{i,j} = \\
&= -D \left( \frac{w_{i+1,j} - 2w_{i,j} + w_{i-1,j}}{\Delta x^2} + \frac{w_{i,j+1} - 2w_{i,j} + w_{i,j-1}}{\Delta y^2} \right); \\
H|_{i,j} &= -D(1-\nu) \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)_{i,j} = \\
&= -\frac{D(1-\nu)}{4\Delta x \cdot \Delta y} (\varphi_{i+1,j+1} - \varphi_{i-1,j+1} - \varphi_{i+1,j-1} + \varphi_{i-1,j-1}); \\
Q_y|_{i,j} &= -D \left( \frac{\partial}{\partial y} \nabla^2 w \right)_{i,j} = \\
&= -D \left( \frac{w_{i,j+1} - 2w_{i,j} + w_{i,j-1}}{\Delta y^2} + \frac{w_{i+1,j} - 2w_{i,j} + w_{i-1,j}}{\Delta x^2} \right); \\
M_y|_{i,j} &= -D \left( \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)_{i,j} = \\
&= -D \left( \frac{w_{i,j+1} - 2w_{i,j} + w_{i,j-1}}{\Delta y^2} + \nu \frac{w_{i+1,j} - 2w_{i,j} + w_{i-1,j}}{\Delta x^2} \right);
\end{aligned} \tag{16}$$

Для вычисления напряжений в узлах расчётной сетки имеем следующие соотношения:

$$\begin{aligned}
\sigma_x|_{i,j} &= \frac{12(M_x)_{i,j}}{h^3} z; & \sigma_y|_{i,j} &= \frac{12(M_y)_{i,j}}{h^3} z; & \tau_{xy}|_{i,j} &= \frac{12(H)_{i,j}}{h^3} z; \\
\tau_{yz}|_{i,j} &= \frac{6(Q_y)_{i,j}}{h^3} \left( \frac{h^4}{4} - z^2 \right); & \tau_{zx}|_{i,j} &= \frac{6(Q_x)_{i,j}}{h^3} \left( \frac{h^4}{4} - z^2 \right).
\end{aligned} \tag{17}$$

Здесь  $h$  – толщина пластины;  $z$  – координата, отсчитываемая от срединной поверхности пластины в направлении оси  $Z$ .



**З а м е ч а н и е .** При записи уравнения Софи Жермен для  $k$ -го узла  $(\nabla^2 \nabla^2 w)_k = \frac{q_k}{D}$ ,  $k = 1, 2, \dots, n$ , в качестве величины нагрузки в узле  $q_k$  следует брать среднюю нагрузку по грузовой площади  $A_{zp} = \Delta x \cdot \Delta y$ , окружающей узел  $k$  (рис. 85).

Если в узле  $k$  приложена сосредоточенная сила  $F_k$ , то интенсивность нагрузки будет определяться зависимостью  $q_k = \frac{F_k}{A_{zp}}$ .

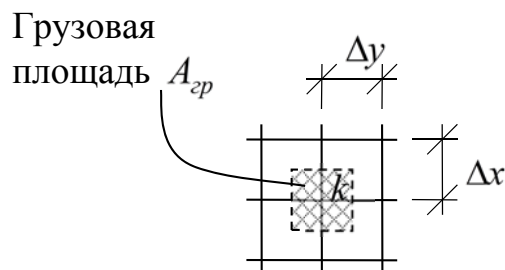


Рис. 85

### *Пластина на упругом основании*

Если пластина лежит на сплошном деформируемом основании, то при записи дифференциального уравнения изгиба необходимо учесть распределённую по площади пластины реакцию (отпор) основания  $r = r(x, y)$ . Уравнение изгиба при этом получает вид:

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{q(x, y) - r(x, y)}{D}. \quad (18)$$

В зависимости от свойств основания связь между отпором  $r = r(x, y)$  и прогибами пластины  $w(x, y)$  может быть различной.

*Первая модель упругого основания* (Фусса – Винклера) построена на следующих допущениях:

1. Основание считается упругим и двусторонним, в котором могут возникать вертикальные реакции обоих направлений.

2. Реакции основания на подошву пластины пропорциональны вертикальным перемещениям поверхности основания:

$$r(x, y) = -k \cdot w_0(x, y) = -k \cdot w(x, y). \quad (19)$$

Здесь  $w_0(x, y)$  – вертикальные перемещения основания, прилегающего к подошве пластины;  $w(x, y)$  – вертикальные перемещения срединной поверхности пластины;  $k$  – экспериментально определяемый коэффициент пропорциональности – коэффициент постели.

Дифференциальное уравнение изогнутой срединной поверхности пластины на сплошном упругом основании Фусса – Винклера имеет вид:

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} - \frac{k}{D} w(x, y) = \frac{q(x, y)}{D}. \quad (20)$$

Решение дифференциального уравнения (20) методом конечных разностей никаких особых трудностей не вызывает.

*Вторая модель упругого основания* (М.М. Филоненко-Бородича и др.), в которой реакция основания определяется двумя коэффициентами постели  $c_1$  и  $c_2$ :

$$r(x, y) = c_1 \cdot w(x, y) - c_2 \left( \frac{\partial^2 w(x, y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w(x, y)}{\partial y^2} \right). \quad (21)$$

Здесь  $c_1 = \frac{(1 - \nu_0)E_0}{(1 + \nu_0)(1 - 2\nu_0)H}$ ;  $c_2 = \frac{E_0 H}{8(1 + \nu_0)}$ ;  $E_0$  – модуль упругости основания;  $\nu_0$  – коэффициент Пуассона основания;  $H$  – глубина (мощность) сжимаемой толщ.

Дифференциальное уравнение изогнутой срединной поверхности пластины на сплошном упругом основании М.М. Филоненко-Бородича имеет вид:

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} - \frac{c_2}{D} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) + \frac{c_1}{D} w(x, y) = \frac{q(x, y)}{D}. \quad (22)$$

Решение дифференциального уравнения (22) может быть выполнено методом конечных разностей по методике, изложенной выше.

*Третья модель упругого основания* (М.И. Горбунова-Посадова и др.) в виде упругого полупространства. В этой модели прогибы поверхности полупространства могут быть определены от распределённой нагрузки с помощью решения Буссинеска. Так, например, вертикальное перемещение любой точки поверхности от сосредоточенной силы  $F$  равно:

$$w_0(x, y) = \frac{F(1 - \nu_0^2)}{\pi \cdot E_0 \cdot r}.$$

Здесь  $r$  – расстояние от точки, где приложена сила  $F$ , до точки, где определяется перемещение.

Полное перемещение  $w^*(x, y)$  некоторой точки  $S(x, y)$  поверхности упругого полупространства от всей распределённой по площади пластины реакции основания  $r = r(\xi, \eta)$  можно определить по формуле

$$w^*(x, y) = \int_0^a \int_0^b \frac{(1 - \nu_0^2) \cdot r(\xi, \eta)}{\pi \cdot E_0 \cdot \sqrt{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2}} d\xi \cdot d\eta. \quad (23)$$

Здесь  $(x, y)$  – координаты точки поверхности основания, в которой определяется вертикальное перемещение;  $(\xi, \eta)$  – текущие координаты точки приложения нагрузки  $r = r(\xi, \eta)$ ;  $a$  и  $b$  – размеры пластины в направлении осей  $X$  и  $Y$  соответственно.

Это перемещение должно быть равно прогибу пластины, определяемому из дифференциального уравнения (18), куда входит неизвестная реакция упругого основания.

Таким образом, расчёт пластины, лежащей на упругом полупространстве, сводится к совместному решению уравнений (18) и (23). Решение этих уравнений в аналитическом виде представляет значительные математические трудности.

## Глава 4. РЕШЕНИЕ ПРИ ПОМОЩИ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ РЯДОВ

### §17. Решение плоской задачи теории упругости при помощи тригонометрических рядов

При решении некоторых задач теории упругости, в частности, когда нагрузка не является непрерывной, удобно искать решение при помощи тригонометрических рядов. Поскольку решение при этом строится в виде бесконечного тригонометрического ряда, его точность во многом будет зависеть от количества используемых в решении членов ряда. Кроме того, на точность получаемого решения будет влиять и точность аппроксимации, при помощи тригонометрических рядов действующей на конструкцию нагрузки. Первое исследование плоской задачи методом рядов Фурье дал, по-видимому, Е.Матье (E.Mathien, *Theorie de l'Elasticite des Corps Solides*, Gauthier-Villars, Paris, 1890).

Следует сказать, что тригонометрические ряды получили широкое распространение при решении задач теории упругости. В частности тригонометрические ряды находят своё достойное применение не только при решении плоской задачи теории упругости, куда относится расчёт балок-стенок, расчёт ранд-балок, расчёт пластинчатых систем, но и при расчёте тонких пластин.

#### *Решение Файлона и решение Рибьера*

При решении плоской задачи теории упругости с помощью рядов Фурье функцию напряжений записывают в виде бесконечного ряда, каждый член которого представляет собой произведение двух функций, одна из которых зависит только от координаты  $x$ , а другая – только от координаты  $y$ , то есть

$$\varphi(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} Y_m(y) \cdot X_m(x). \quad (1)$$

Если в качестве функций  $X_m(x)$  взять функцию синуса:  $X_m(x) = \sin \frac{m\pi x}{a}$ , то получим решение, которое впервые было предложено Файлоном (1903 год). Если в качестве функций  $X_m(x)$  взять функцию косинуса:  $X_m(x) = \cos \frac{m\pi x}{a}$ , то получим решение, которое впервые было предложено Рибьером (1903 год). Таким образом, функция напряжений (1) содержит известные функции  $X_m(x)$  и неизвестные функции  $Y_m(y)$ , подлежащие определению.

Будем рассматривать построение решения применительно к балке-стенке (рис. 86).

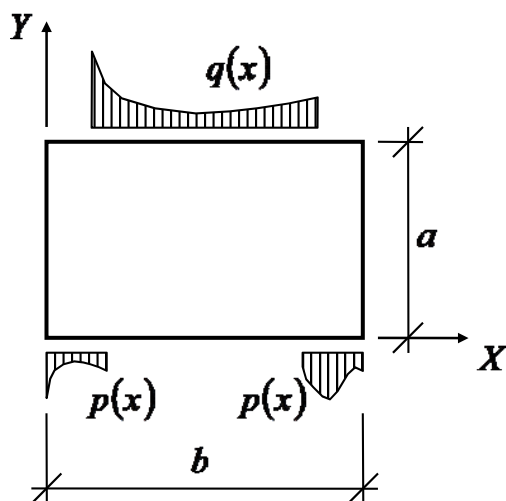


Рис. 86

Подставив решения (1) в бигармоническое уравнение, получим:

$$\sum_{m=1}^{\infty} \left[ \lambda_m^4 Y_m(y) - 2\lambda_m^2 \frac{\partial^2 Y_m(y)}{\partial y^2} + \frac{\partial^4 Y_m(y)}{\partial y^4} \right] \cdot X(\lambda_m x) = 0. \quad (2)$$

Здесь  $\lambda = \frac{m\pi}{a}$ .

Уравнение (2) должно выполняться для любых  $x$  и  $y$ , то есть

$$\lambda_m^4 Y_m(y) - 2\lambda_m^2 \frac{\partial^2 Y_m(y)}{\partial y^2} + \frac{\partial^4 Y_m(y)}{\partial y^4} = 0, \quad m = 1, 2, \dots, \infty. \quad (3)$$

Таким образом, для определения  $m$  неизвестных функций  $Y_m(y)$  получили  $m$  обыкновенных дифференциальных уравнений (3). Общий интеграл этого дифференциального уравнения для любого номера  $m$  имеет вид:

$$Y_m(y) = C_{1m} \operatorname{ch}(\lambda_m y) + C_{2m} \operatorname{sh}(\lambda_m y) + C_{3m} y \cdot \operatorname{ch}(\lambda_m y) + C_{4m} y \cdot \operatorname{sh}(\lambda_m y). \quad (4)$$

Произвольные постоянные  $C_{1m}, C_{2m}, C_{3m}, C_{4m}$  следует подбирать так, чтобы граничные условия на контуре балки-стенки удовлетворялись по возможности полнее. Для этого необходимо вычислить напряжения, действующие в балке-стенке, и использовать граничные условия на её горизонтальных сторонах.

Для напряжений получаем:

$$\begin{aligned}\sigma_x &= \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\partial^2 Y_m(y)}{\partial y^2} \cdot X_m(\lambda_m x); \\ \sigma_y &= \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = \sum_{m=1}^{\infty} Y_m(y) \cdot \frac{\partial^2 X_m(\lambda_m x)}{\partial x^2}; \\ \tau_{xy} &= -\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} = -\sum_{m=1}^{\infty} \frac{\partial Y_m(y)}{\partial y} \cdot \frac{\partial X_m(\lambda_m x)}{\partial x}.\end{aligned}\quad (5)$$

Рассмотрим граничные условия.

При  $y = 0$  имеем:

$$\begin{aligned}\sigma_y &= (-1) \sum_{m=1}^{\infty} Y_m(0) \cdot \lambda_m^2 \cdot X_m(\lambda_m x) = P(x); \\ \tau_{xy} &= -(\pm 1) \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\partial Y_m(0)}{\partial y} \cdot \lambda_m \cdot X_m(\lambda_m x) = 0.\end{aligned}\quad (6)$$

При  $y = b$  получаем:

$$\begin{aligned}\sigma_y &= (-1) \sum_{m=1}^{\infty} Y_m(b) \cdot \lambda_m^2 \cdot X_m(\lambda_m x) = q(x); \\ \tau_{xy} &= -(\pm 1) \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\partial Y_m(b)}{\partial y} \cdot \lambda_m \cdot X_m(\lambda_m x) = 0.\end{aligned}\quad (7)$$

Здесь знак “+” в круглых скобках – для решения Файлона; знак “–” в круглых скобках – для решения Рибьера.

Разложим функции нагрузок  $p(x)$  и  $q(x)$  в ряды Фурье по синусам для решения Файлона и по косинусам для решения Рибьера.

$$\begin{aligned}p(x) &= \sum_{m=1}^{\infty} \bar{a}_m \cdot X_m(\lambda_m x); \\ q(x) &= \sum_{m=1}^{\infty} \tilde{a}_m \cdot X_m(\lambda_m x).\end{aligned}\quad (8)$$

Здесь в соответствии с формулой Эйлера

$$\begin{aligned}\bar{a}_m &= \frac{2}{a} \int_0^a p(x) \cdot X_m(\lambda_m x) dx; \\ \tilde{a}_m &= \frac{2}{a} \int_0^a q(x) \cdot X_m(\lambda_m x) dx.\end{aligned}$$

Поскольку условия (6), (7) должны выполняться для любых  $x \in [0, b]$ , то с учётом соотношений (8) получаем:

$$\left. \begin{aligned} (-1)\lambda_m^2 \cdot Y_m(0) &= \bar{a}_m; \\ \frac{\partial Y_m(0)}{\partial y} &= 0; \\ (-1)\lambda_m^2 \cdot Y_m(b) &= \tilde{a}_m; \\ \frac{\partial Y_m(b)}{\partial y} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

Здесь в соответствии с соотношением (4)

$$\begin{aligned} Y_m(0) &= C_{1m}; \\ \frac{\partial Y_m(0)}{\partial y} &= C_{2m} \cdot \lambda_m + C_{3m}; \\ Y'_m(b) &= C_{1m} \operatorname{ch}(\lambda_m b) + C_{2m} \operatorname{sh}(\lambda_m b) + C_{3m} b \cdot \operatorname{ch}(\lambda_m b) + C_{4m} b \cdot \operatorname{sh}(\lambda_m b); \\ \frac{\partial Y_m(b)}{\partial y} &= C_{1m} \cdot \lambda_m \cdot \operatorname{sh}(\lambda_m b) + C_{2m} \cdot \lambda_m \cdot \operatorname{ch}(\lambda_m b) + \\ &+ C_{3m} [\operatorname{ch}(\lambda_m b) + b \cdot \operatorname{sh}(\lambda_m b)] + C_{4m} [\operatorname{sh}(\lambda_m b) + b \cdot \operatorname{ch}(\lambda_m b)]. \end{aligned}$$

Итак, система (9) для каждого номера  $m$  представляет собой систему линейных алгебраических уравнений относительно четырёх произвольных постоянных  $C_{1m}, C_{2m}, C_{3m}, C_{4m}$ . Решив систему (9) и определив постоянные интегрирования  $C_{1m}, C_{2m}, C_{3m}, C_{4m}$ , получаем для каждого номера  $m$  функцию  $Y_m(y)$ . Тем самым решение (1) построено.

Из формул (5) следует, что на торцах балки-стенки при  $x = 0$  и  $x = a$  для решения Файлона нормальные напряжения равны нулю:  $\sigma_x = 0$ , а касательные напряжения отличны от нуля:  $\tau_{xy} \neq 0$ . Это противоречит заданным условиям нагружения рассматриваемой балки-стенки. Для решения Рибьера на торцах балки-стенки при  $x = 0$  и  $x = a$  касательные напряжения равны нулю:  $\tau_{xy} = 0$ , а нормальные напряжения отличны от нуля  $\sigma_x \neq 0$ . Это опять-таки противоречит заданным условиям нагружения рассматриваемой балки-стенки.

Таким образом, применение тригонометрических функций для решения плоской задачи теории упругости в напряжениях нельзя признать универсальным методом, так как не всегда удаётся удовлетворить граничным условиям на боковых гранях.

Вместе с тем, если рассматриваемая конструкция балки-стенки предполагает наличие касательных напряжений на торцевых вертикальных поверхностях, например балка-стенка, входящая в состав балочной конструкции типа ростверка, то решение с использованием тригонометрических рядов (решение Файлона) будет удовлетворять граничным условиям на боковых гранях. Решение Рибьера для неразрезной балки-стенки, у которой торцевые сечения остаются плоскими и не поворачиваются, но вертикальные перемещения развиваются свободно, также будет удовлетворять всем граничным условиям. Вопросы расчёта таких конструкций подробно изложены у Александрова А.В. [1], и мы на них останавливаться не будем.

**Пример.**

Рассмотрим балку-стенку [17], нагруженную по верхней  $y = -c$  и нижней  $y = c$  сторонам распределённой нагрузкой, изменяющейся вдоль координатной оси  $X$  по синусоидальному закону (рис. 87).

$$q_m(x) = A_m \sin(\lambda_m x);$$

$$p_m(x) = B_m \sin(\lambda_m x).$$

Длина балки-стенки равна  $l$ .

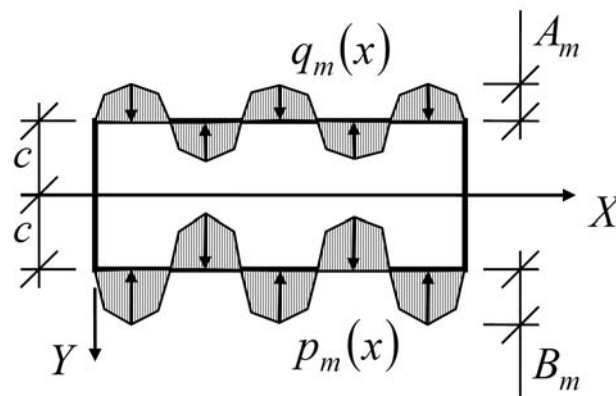


Рис. 87

Граничные условия по верхней и нижней сторонам балки-стенки имеют вид:

- ✓ при  $y = c$ ,  $\sigma_y = -B_m \sin(\lambda_m x)$ ;  $\tau_{yx} = 0$ ;
- ✓ при  $y = -c$ ,  $\sigma_y = -A_m \sin(\lambda_m x)$ ;  $\tau_{yx} = 0$ .

Принимая во внимание соотношения (5) и (4) для решения Файлона, получаем для каждого номера  $m$  систему четырёх уравнений с четырьмя неизвестными:



$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_y(x) = -[C_1 \operatorname{ch}(\lambda_m c) + C_2 \operatorname{sh}(\lambda_m c) + C_3 \cdot c \cdot \operatorname{ch}(\lambda_m c) + \\ \quad + C_4 \cdot c \cdot \operatorname{sh}(\lambda_m c)] \lambda_m^2 \sin(\lambda_m x) = -B_m \sin(\lambda_m x); \\ \sigma_x(x) = -[C_1 c \operatorname{ch}(\lambda_m c) - C_2 c \operatorname{sh}(\lambda_m c) - C_3 \cdot c \cdot c \operatorname{ch}(\lambda_m c) - \\ \quad - C_4 \cdot c \cdot c \operatorname{sh}(\lambda_m c)] \lambda_m^2 \sin(\lambda_m x) = -A_m \sin(\lambda_m x); \\ \tau_{xy}(x) = -\{\lambda_m C_1 \operatorname{sh}(\lambda_m c) + \lambda_m C_2 \operatorname{ch}(\lambda_m c) + C_3 [\operatorname{ch}(\lambda_m c) + \lambda_m \cdot c \cdot \operatorname{sh}(\lambda_m c)] + \\ \quad + C_4 [\operatorname{sh}(\lambda_m c) + \lambda_m \cdot c \cdot \operatorname{ch}(\lambda_m c)]\} \lambda_m \cos(\lambda_m x) = 0; \\ \tau_{yx}(x) = -\{-\lambda_m C_1 \operatorname{sh}(\lambda_m c) + \lambda_m C_2 \operatorname{ch}(\lambda_m c) + C_3 [\operatorname{ch}(\lambda_m c) + \lambda_m \cdot c \cdot \operatorname{sh}(\lambda_m c)] + \\ \quad + C_4 [-\operatorname{sh}(\lambda_m c) - \lambda_m \cdot c \cdot \operatorname{ch}(\lambda_m c)]\} \lambda_m \cos(\lambda_m x) = 0. \end{array} \right.$$

Решив полученную систему линейных алгебраических уравнений относительно постоянных  $C_{1m}, C_{2m}, C_{3m}, C_{4m}$ , найдём:

$$\begin{aligned} C_1 &= \frac{A_m + B_m}{\lambda_m^2} \frac{\operatorname{sh}(\lambda_m c) + \lambda_m \cdot c \cdot \operatorname{ch}(\lambda_m c)}{\operatorname{sh}(2\lambda_m c) + 2\lambda_m c}, \\ C_2 &= \frac{B_m - A_m}{\lambda_m^2} \frac{\operatorname{ch}(\lambda_m c) + \lambda_m \cdot c \cdot \operatorname{sh}(\lambda_m c)}{\operatorname{sh}(2\lambda_m c) - 2\lambda_m c}, \\ C_3 &= \frac{A_m - B_m}{\lambda_m^2} \frac{\lambda_m \operatorname{ch}(\lambda_m c)}{\operatorname{sh}(2\lambda_m c) - 2\lambda_m c}, \\ C_4 &= -\frac{A_m + B_m}{\lambda_m^2} \frac{\lambda_m \operatorname{sh}(\lambda_m c)}{\operatorname{sh}(2\lambda_m c) + 2\lambda_m c}. \end{aligned}$$

Подставляя полученные выражения для постоянных интегрирования  $C_{1m}, C_{2m}, C_{3m}, C_{4m}$  в функцию  $Y_m(y)$  (формула (4)), получаем окончательные формулы для напряжений (формулы (5)):

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \left\{ (A_m + B_m) \frac{\operatorname{ch}(\lambda_m y) [\lambda_m \cdot c \cdot \operatorname{ch}(\lambda_m c) - \operatorname{sh}(\lambda_m c)] - \lambda_m \cdot y \cdot \operatorname{sh}(\lambda_m y) \cdot \operatorname{sh}(\lambda_m c)}{\operatorname{sh}(2\lambda_m c) + 2\lambda_m c} + \right. \\ &\quad \left. + (A_m - B_m) \frac{\operatorname{sh}(\lambda_m y) [\operatorname{ch}(\lambda_m c) - \lambda_m \cdot c \cdot \operatorname{sh}(\lambda_m c)] + \lambda_m \cdot y \cdot \operatorname{ch}(\lambda_m y) \cdot \operatorname{ch}(\lambda_m c)}{\operatorname{sh}(2\lambda_m c) - 2\lambda_m c} \right\} \times \\ &\quad \times \sin(\lambda_m x); \end{aligned}$$

$$\sigma_y = - \left\{ (A_m + B_m) \frac{\operatorname{ch}(\lambda_m y) [\lambda_m \cdot c \cdot \operatorname{ch}(\lambda_m c) + \operatorname{sh}(\lambda_m c)] - \lambda_m \cdot y \cdot \operatorname{sh}(\lambda_m y) \cdot \operatorname{sh}(\lambda_m c)}{\operatorname{sh}(2\lambda_m c) + 2\lambda_m c} + \right. \\ \left. + (A_m - B_m) \frac{\lambda_m \cdot y \cdot \operatorname{ch}(\lambda_m c) \cdot \operatorname{ch}(\lambda_m y) - [\operatorname{ch}(\lambda_m c) + \lambda_m \cdot c \cdot \operatorname{sh}(\lambda_m c)] \cdot \operatorname{sh}(\lambda_m y)}{\operatorname{sh}(2\lambda_m c) - 2\lambda_m c} \right\} \times \\ \times \sin(\lambda_m x);$$

$$\tau_{xy} = - \left\{ (A_m + B_m) \frac{\lambda_m \cdot c \cdot \operatorname{ch}(\lambda_m c) \cdot \operatorname{sh}(\lambda_m y) - \lambda_m \cdot y \cdot \operatorname{sh}(\lambda_m c) \cdot \operatorname{ch}(\lambda_m y)}{\operatorname{sh}(2\lambda_m c) + 2\lambda_m c} + \right. \\ \left. + (A_m - B_m) \frac{\lambda_m \cdot y \cdot \operatorname{sh}(\lambda_m y) \cdot \operatorname{ch}(\lambda_m c) - \lambda_m \cdot c \cdot \operatorname{sh}(\lambda_m c) \cdot \operatorname{ch}(\lambda_m y)}{\operatorname{sh}(2\lambda_m c) - 2\lambda_m c} \right\} \sin(\lambda_m x).$$

Отсюда следует, что по торцам балки-стенки при  $x=0$  и  $x=l$  напряжения  $\sigma_x = 0$ . Первое слагаемое в формуле касательных напряжений, пропорциональное  $A_m + B_m$ , даёт касательные напряжения, разнозначные для верхней и нижней части вертикального сечения балки-стенки, равнодействующая сил от которых равна нулю. Второе слагаемое, пропорциональное  $A_m - B_m$ , даёт касательные напряжения, уравнивающие заданную нагрузку.

## §18. Расчёт тонких пластин при помощи тригонометрических рядов

Расчёт тонких пластин при помощи тригонометрических рядов хотя и относится к аналитическим методам решения, однако для получения точного решения следует брать бесконечное число членов ряда. Если же ограничиться конечным количеством членов ряда, то решение будет приближённым.

В теории тонких пластин при построении расчёта при помощи тригонометрических рядов различают решение Навье, то есть решение при помощи двойных тригонометрических рядов, и решение Мориса – Леви, то есть решение при помощи одинарных тригонометрических рядов. Характерной особенностью решения Навье является его простота, однако в этом решении присутствуют и существенные недостатки, которые сводятся к следующему:

- метод Навье позволяет рассчитывать только те пластины, которые имеют шарнирное опирание по всем четырём сторонам;
- двойной тригонометрический ряд Навье медленно сходится, и для построения решения с более-менее приемлемой точностью приходится

брать достаточно много членов ряда; в некоторых случаях эти ряды вообще расходятся.

Метод одинарных тригонометрических рядов свободен от этих недостатков, однако его отличает достаточная сложность, и, кроме того, метод Мориса – Леви позволяет рассчитывать только те пластины, которые на двух противоположных сторонах имеют шарнирное опирание, а на остальных двух опирание может быть любым.

В качестве замечания отметим, что методами, которые позволяют рассчитывать тонкие прямоугольные пластинки с произвольным опиранием по контуру, являются, например, метод конечных разностей и метод конечных элементов.

### Решение Навье

Решение задачи о поперечном изгибе прямоугольной пластины, шарнирно опёртой по всему контуру (рис. 88), математически сводится к решению краевой задачи для дифференциального уравнения изогнутой срединной поверхности пластинки

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{q(x, y)}{D} \quad (1)$$

совместно с краевыми условиями

$$w = 0 \text{ и } \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0 \text{ при } x = 0 \text{ или } x = a; \quad (2)$$

$$w = 0 \text{ и } \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0 \text{ при } y = 0 \text{ или } y = b. \quad (3)$$

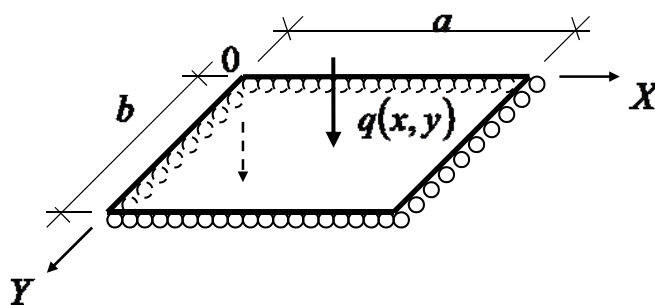


Рис. 88

Функция прогибов  $w(x, y)$  строится в виде двойного тригонометрического ряда (ряда Фурье):

$$w(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} A_{mn} \cdot \sin \frac{m\pi x}{a} \cdot \sin \frac{n\pi y}{b}. \quad (4)$$

Здесь коэффициенты  $A_{mn}$  подлежат определению.

Данное решение, предложенное Навье, пригодно при действии произвольной поперечной нагрузки на пластину, шарнирно опёртую по всем четырём сторонам.

Решение (4) удовлетворяет краевым условиям (2) и (3). Действительно:

при  $x = 0$ ,  $\sin \frac{m\pi x}{a} = \sin 0^0 = 0$  ( $m = 1, 2, 3, \dots$ ), то есть  $w(0, y) = 0$ ;

при  $x = a$ ,  $\sin \frac{m\pi a}{a} = \sin m\pi = 0$  ( $m = 1, 2, 3, \dots$ ), то есть  $w(a, y) = 0$ ;

при  $y = 0$ ,  $\sin \frac{n\pi y}{b} = \sin 0^0 = 0$  ( $n = 1, 2, 3, \dots$ ), то есть  $w(x, 0) = 0$ ;

при  $y = b$ ,  $\sin \frac{n\pi b}{b} = \sin n\pi = 0$  ( $n = 1, 2, 3, \dots$ ), то есть  $w(x, b) = 0$ .

Вторые производные функции прогибов

$$\frac{\partial^2 w(x, y)}{\partial x^2} = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} A_{mn} \cdot \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 \cdot \sin \frac{m\pi x}{a} \cdot \sin \frac{n\pi y}{b},$$

$$\frac{\partial^2 w(x, y)}{\partial y^2} = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} A_{mn} \cdot \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 \cdot \sin \frac{m\pi x}{a} \cdot \sin \frac{n\pi y}{b}$$

содержат синусы тех же аргументов, что и сама функция. Поэтому и вторые производные на всех сторонах пластины обращаются в нуль. Следовательно, все граничные условия (2) и (3) выполняются.

Коэффициенты  $A_{mn}$  определяются из условия, что искомое решение (4) должно удовлетворять дифференциальному уравнению изогнутой срединной поверхности пластины (1). Подставив (4) в (1), получим:

$$\begin{aligned} & \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} A_{mn} \left(\frac{m\pi}{a}\right)^4 \cdot \sin \frac{m\pi x}{a} \cdot \sin \frac{n\pi y}{b} + \\ & + \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} A_{mn} 2 \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 \cdot \sin \frac{m\pi x}{a} \cdot \sin \frac{n\pi y}{b} + \\ & + \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} A_{mn} \left(\frac{n\pi}{b}\right)^4 \cdot \sin \frac{m\pi x}{a} \cdot \sin \frac{n\pi y}{b} = \frac{q(x, y)}{D}. \end{aligned} \quad (5)$$

Разложим внешнюю нагрузку в такой же двойной тригонометрический ряд:

$$q(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} C_{mn} \cdot \sin \frac{m\pi x}{a} \cdot \sin \frac{n\pi y}{b}. \quad (6)$$

Коэффициенты этого ряда определяются по формуле, известной из курса высшей математики:

$$C_{mn} = \frac{4}{ab} \int_0^a \int_0^b q(x, y) \cdot \sin \frac{m\pi x}{a} \cdot \sin \frac{n\pi y}{b} dx dy. \quad (7)$$

Уравнение (5) с учётом соотношений (6) и (7) можно записать так:

$$\begin{aligned} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} A_{mn} \left[ \left( \frac{m\pi}{a} \right)^4 + 2 \left( \frac{m\pi}{a} \right)^2 \left( \frac{n\pi}{b} \right)^2 + \left( \frac{n\pi}{b} \right)^4 \right] \cdot \sin \frac{m\pi x}{a} \cdot \sin \frac{n\pi y}{b} = \\ = \frac{1}{D} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} C_{mn} \cdot \sin \frac{m\pi x}{a} \cdot \sin \frac{n\pi y}{b}. \end{aligned} \quad (8)$$

Приравнявая коэффициенты при соответствующих тригонометрических функциях левой и правой части в формуле (8), будем иметь:

$$\begin{aligned} A_{mn} \left[ \left( \frac{m\pi}{a} \right)^4 + 2 \left( \frac{m\pi}{a} \right)^2 \left( \frac{n\pi}{b} \right)^2 + \left( \frac{n\pi}{b} \right)^4 \right] \cdot \sin \frac{m\pi x}{a} \cdot \sin \frac{n\pi y}{b} = \\ = \frac{C_{mn}}{D} \sin \frac{m\pi x}{a} \cdot \sin \frac{n\pi y}{b}, \end{aligned}$$

Отсюда получаем:

$$A_{mn} = \frac{C_{mn}}{\frac{D\pi^4}{a^4} \left[ m^2 + n^2 \left( \frac{a}{b} \right)^2 \right]^2}. \quad (9)$$

Для равномерно распределённой нагрузки  $q$ , приложенной по площади прямоугольника  $a_1 \leq x \leq a_2$ ,  $b_1 \leq y \leq b_2$ , формулу (7) можно представить в следующем виде:

$$C_{mn} = \frac{4q}{ab} \int_{a_1}^{a_2} \sin \frac{m\pi x}{a} dx \int_{b_1}^{b_2} \sin \frac{n\pi y}{b} dy.$$

Произведя интегрирование, получим:

$$C_{mn} = \frac{4q}{ab} \left( \frac{a}{m\pi} \right) \left( \frac{b}{n\pi} \right) \left[ \cos \frac{m\pi a_2}{a} - \cos \frac{m\pi a_1}{a} \right] \cdot \left[ \cos \frac{n\pi b_2}{b} - \cos \frac{n\pi b_1}{b} \right],$$

или, после элементарных преобразований,

$$C_{mn} = \frac{4q}{m\pi^2} \left[ \cos \frac{m\pi a_2}{a} - \cos \frac{m\pi a_1}{a} \right] \cdot \left[ \cos \frac{n\pi b_2}{b} - \cos \frac{n\pi b_1}{b} \right]. \quad (10)$$

Подставив (10) в (9), получим окончательное выражение для коэффициентов  $A_{mn}$ :

$$A_{mn} = \frac{4qa^4 \left( \cos \frac{m\pi a_2}{a} - \cos \frac{m\pi a_1}{a} \right) \cdot \left( \cos \frac{n\pi b_2}{b} - \cos \frac{n\pi b_1}{b} \right)}{D\pi^6 mn \left( m^2 + n^2 \left( \frac{a}{b} \right)^2 \right)^2}. \quad (11)$$

Таким образом, расчёт пластины сводится к определению коэффициентов  $C_{mn}$  по формулам (7) от конкретно заданной нагрузки  $q(x,y)$ , после чего по формулам (9) определяются значения коэффициентов  $A_{mn}$  ряда (4), а по выражению (4) – значения прогибов пластины.

Далее приведём расчётные формулы для вычисления изгибающих моментов, крутящего момента, поперечных сил, приведённых поперечных сил (опорных реакций) и сосредоточенных реакций в углах пластины при построении решения в двойных тригонометрических рядах.

Изгибающие моменты:

$$\begin{aligned} M_x(x,y) &= -D \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) = \\ &= D \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} A_{mn} \pi^2 \left( \frac{m^2}{a^2} + \nu \frac{n^2}{b^2} \right) \cdot \sin \frac{m\pi x}{a} \cdot \sin \frac{n\pi y}{b}; \\ M_y(x,y) &= -D \left( \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) = \\ &= D \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} A_{mn} \pi^2 \left( \frac{n^2}{b^2} + \nu \frac{m^2}{a^2} \right) \cdot \sin \frac{m\pi x}{a} \cdot \sin \frac{n\pi y}{b}. \end{aligned} \quad (12)$$

Крутящий момент:

$$H(x,y) = -D(1-\nu) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = -D(1-\nu) \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} A_{mn} \pi^2 \frac{mn}{ab} \cdot \cos \frac{m\pi x}{a} \cdot \cos \frac{n\pi y}{b}. \quad (13)$$

Поперечные силы:

$$\begin{aligned} Q_x(x,y) &= -D \left( \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} \right) = D \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} A_{mn} \pi^3 \left( \frac{m^3}{a^3} + \frac{mn^2}{ab^2} \right) \cdot \cos \frac{m\pi x}{a} \cdot \sin \frac{n\pi y}{b}; \\ Q_y(x,y) &= -D \left( \frac{\partial^3 w}{\partial y^3} + \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} \right) = D \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} A_{mn} \pi^3 \left( \frac{n^3}{b^3} + \frac{nm^2}{ba^2} \right) \cdot \sin \frac{m\pi x}{a} \cdot \cos \frac{n\pi y}{b}. \end{aligned} \quad (14)$$

Приведённые поперечные силы (опорные реакции):

$$V_x(x, y) = Q_x + \frac{\partial H}{\partial y} = -D \left( \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + (2 - \nu) \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} \right) =$$

$$= D \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} A_{mn} \pi^3 \left[ \frac{m^3}{a^3} + (2 - \nu) \frac{mn^2}{ab^2} \right] \cdot \cos \frac{m\pi x}{a} \cdot \sin \frac{n\pi y}{b}; \quad (15)$$

$$V_y(x, y) = Q_y + \frac{\partial H}{\partial x} = -D \left( \frac{\partial^3 w}{\partial y^3} + (2 - \nu) \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} \right) =$$

$$= D \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} A_{mn} \pi^3 \left[ \frac{n^3}{b^3} + (2 - \nu) \frac{nm^2}{ba^2} \right] \cdot \sin \frac{m\pi x}{a} \cdot \cos \frac{n\pi y}{b}.$$

Сосредоточенные реакции в углах пластины:

$$R(x_0, y_0) = 2H = -2D(1 - \nu) \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} A_{mn} \pi^2 \frac{m}{a} \cdot \frac{n}{b} \cdot \cos \frac{m\pi x_0}{a} \cdot \cos \frac{n\pi y_0}{b}. \quad (16)$$

Здесь  $x_0, y_0$  – координаты углов прямоугольной пластины.

Положительные направления сосредоточенных реакций показаны на рис. 89. Здесь же показаны положительные направления равнодействующих приведённых поперечных сил  $R_{x0}, R_{y0}, R_{xa}, R_{yb}$ . Из формулы (16) следует:

1) угол при  $x = 0, y = 0$

$$R_1 = -2D(1 - \nu) \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} A_{mn} \pi^2 \frac{m}{a} \cdot \frac{n}{b}; \quad (17)$$

2) угол при  $x = a, y = 0$

$$R_2 = -2D(1 - \nu) \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} A_{mn} \pi^2 \frac{m}{a} \cdot \frac{n}{b} \cdot \cos m\pi; \quad (18)$$

3) угол при  $x = a, y = b$

$$R_3 = -2D(1 - \nu) \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} A_{mn} \pi^2 \frac{m}{a} \cdot \frac{n}{b} \cdot \cos m\pi \cdot \cos n\pi; \quad (19)$$

4) угол при  $x = a, y = 0$

$$R_4 = -2D(1 - \nu) \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} A_{mn} \pi^2 \frac{m}{a} \cdot \frac{n}{b} \cdot \cos n\pi. \quad (20)$$

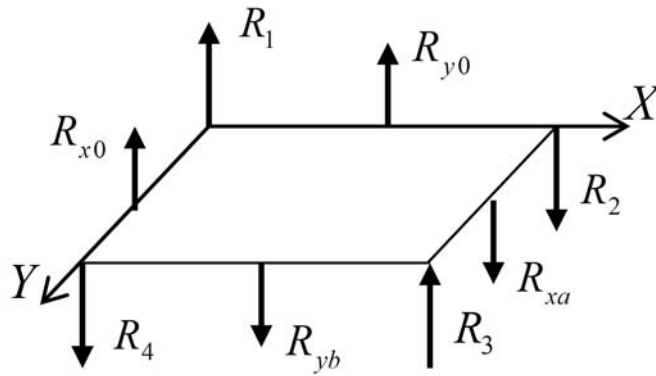


Рис. 89

Пример 1.

Подобрать толщину прямоугольной пластины из условия прочности Губера – Мизеса – Генки. Прямоугольная пластина, шарнирно опёртая по всему контуру, загружена равномерно распределённой нагрузкой интенсивностью  $q$  по площади прямоугольника ABCD (рис. 90).

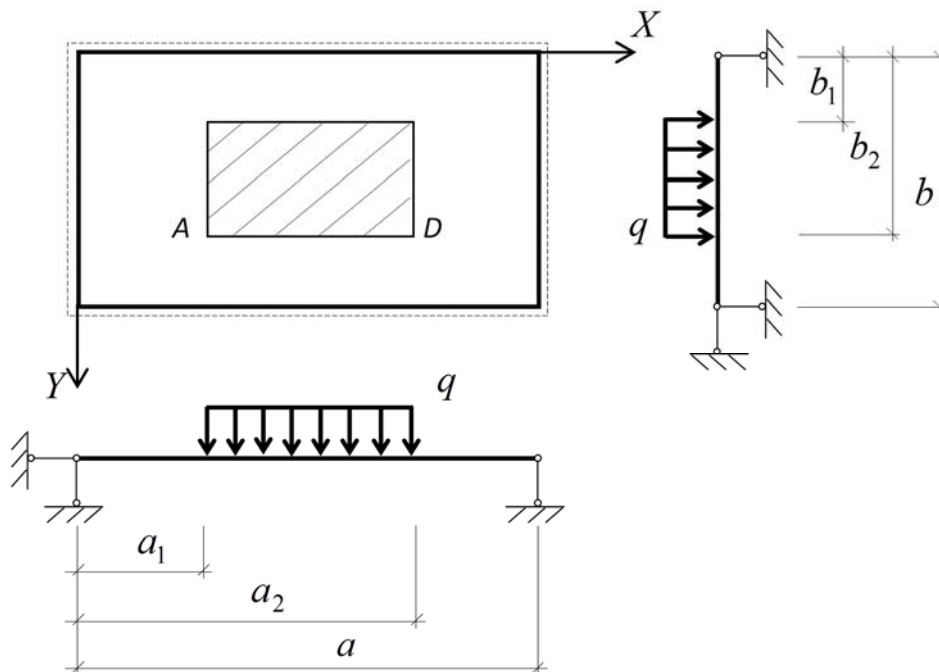


Рис. 90

Дано:  $a = 3$  м;  $b = 1$  м;  $a_1 = 0,5$  м;  $a_2 = 2,5$  м;  $b_1 = 0,25$  м;  $b_2 = 0,75$  м;  
 $q = 8 \cdot 10^5$  Па;  $\nu = 0,2$ ;  $R = 2,1 \cdot 10^8$  Па.



Приближённое уравнение изогнутой срединной поверхности пластины (4) запишем с использованием четырёх членов ряда:

$$w(x, y) = A_{11} \cdot \sin \frac{\pi x}{a} \cdot \sin \frac{\pi y}{b} + A_{12} \cdot \sin \frac{\pi x}{a} \cdot \sin \frac{2\pi y}{b} + \\ + A_{21} \cdot \sin \frac{2\pi x}{a} \cdot \sin \frac{\pi y}{b} + A_{22} \cdot \sin \frac{2\pi x}{a} \cdot \sin \frac{2\pi y}{b}.$$

**Решение.**

1. Вычисляем коэффициенты  $A_{11}$ ,  $A_{12}$ ,  $A_{21}$ ,  $A_{22}$ :

$$A_{11} = \frac{6,604 \cdot 10^3}{D} \text{ (Н} \cdot \text{м}^2 \text{)}; \quad A_{12} = \frac{0,00}{D} \text{ (Н} \cdot \text{м}^2 \text{)};$$

$$A_{21} = \frac{0,00}{D} \text{ (Н} \cdot \text{м}^2 \text{)}; \quad A_{22} = \frac{0,00}{D} \text{ (Н} \cdot \text{м}^2 \text{)}.$$

2. Составляем приближённое уравнение изогнутой поверхности срединного слоя:

$$w(x, y) = \frac{6,604 \cdot 10^3}{D} \cdot \sin \frac{\pi x}{3} \cdot \sin \frac{\pi y}{1}.$$

3. Определяем внутренние усилия:

$$M_x(x, y) = 2,028 \cdot 10^4 \cdot \sin \frac{\pi x}{3} \cdot \sin \frac{\pi y}{1}; \quad M_y(x, y) = 6,662 \cdot 10^4 \cdot \sin \frac{\pi x}{3} \cdot \sin \frac{\pi y}{1};$$

$$Q_x(x, y) = 7,576 \cdot 10^4 \cdot \cos \frac{\pi x}{3} \cdot \sin \frac{\pi y}{1}; \quad Q_y(x, y) = 2,275 \cdot 10^5 \cdot \sin \frac{\pi x}{3} \cdot \cos \frac{\pi y}{1};$$

$$H(x, y) = -5,460 \cdot 10^4 \cdot \cos \frac{\pi x}{3} \cdot \cos \frac{\pi y}{1}.$$

4. Строим эпюры относительных прогибов и изгибающих моментов в сечении  $x_m = 0,5a$  и в сечении  $y_m = 0,5b$ . В силу симметрии в этих сечениях прогибы и изгибающие моменты максимальны.

- сечение  $x_m = 0,5a$ :

$$w(1,5; y) = \frac{6,604 \cdot 10^3}{D} \cdot \sin \frac{\pi}{2} \cdot \sin \frac{\pi y}{1};$$

$$M_x(1,5; y) = 2,028 \cdot 10^4 \cdot \sin \frac{\pi}{2} \cdot \sin \frac{\pi y}{1};$$

- сечение  $y_m = 0,5b$ :

$$w(x; 0,5) = \frac{6,604 \cdot 10^3}{D} \cdot \sin \frac{\pi x}{3} \cdot \sin \frac{\pi}{2};$$

$$M_y(x; 0,5) = 6,662 \cdot 10^4 \cdot \sin \frac{\pi x}{3} \cdot \sin \frac{\pi}{2}.$$

Соответствующие графики представлены на рис. 91.

Подбираем толщину пластины. Выпишем формулы для напряжений,

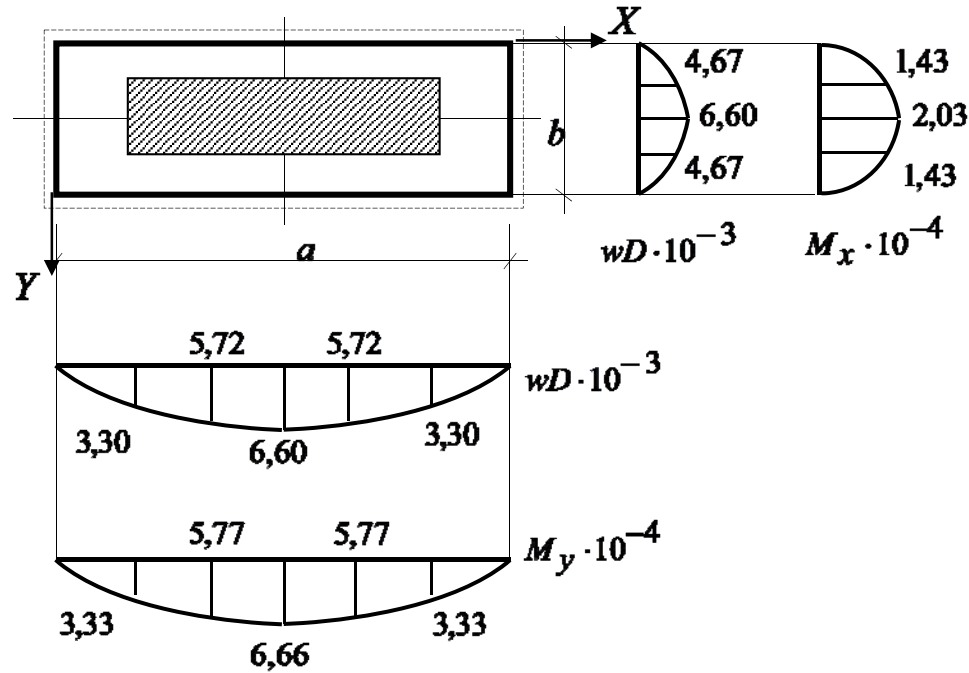


Рис. 91

возникающих в сечениях пластины, перпендикулярных её срединной плоскости:

$$\sigma_x(x, y) = \frac{12M_x(x, y)}{h^3} z; \quad \sigma_y(x, y) = \frac{12M_y(x, y)}{h^3} z; \quad \tau_{xy}(x, y) = \frac{12H(x, y)}{h^3} z;$$

$$\tau_{yz}(x, y) = \frac{6Q_y(x, y)}{h^3} \left( \frac{h^2}{4} - z^2 \right); \quad \tau_{zx}(x, y) = \frac{6Q_x(x, y)}{h^3} \left( \frac{h^2}{4} - z^2 \right).$$

Как следует из эпюр, максимальные изгибающие моменты, а следовательно, и максимальные нормальные напряжения  $\sigma_x$  и  $\sigma_y$  возникают в

центре пластины ( $x = x_m, y = y_m$ ) на верхней  $\left( z = z^{(-)} = -\frac{h}{2} \right)$  и нижней

$\left( z = z^{(+)} = +\frac{h}{2} \right)$  её поверхностях. В силу симметрии крутящий момент в

центре пластины  $H = 0$  и, следовательно,  $\tau_{xy} = 0$ . Таким образом, в наиболее опасной точке  $(x_m, y_m, z^{(\pm)})$  имеем плоское напряжённое состояние  $(\sigma_z = 0, \tau_{zx} = 0, \tau_{zy} = 0)$  и напряжения  $\sigma_x(x_m, y_m, z^{(\pm)})$  и  $\sigma_y(x_m, y_m, z^{(\pm)})$  являются главными нормальными напряжениями. Поскольку  $M_x > 0$  и  $M_y > 0$ , то знак у напряжений  $\sigma_x$  и  $\sigma_y$  будет определяться знаком координаты  $z$ , то есть на верхней грани пластины  $(z = -\frac{h}{2})$  оба напряжения будут отрицательными, на нижней  $(z = +\frac{h}{2})$  – положительными. Учитывая значения моментов  $M_x$  и  $M_y$  в точке  $(x_m, y_m)$ , получаем:  $\sigma_x = \sigma_2$  и  $\sigma_y = \sigma_1$ , поскольку, как известно,  $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$  и для пластин  $\sigma_3 = 0$ .

В соответствии с теорией прочности Губера – Мизеса – Генки  $\frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2} \leq R$ , толщина пластины будет определяться по формуле

$$h \geq \sqrt{\frac{6}{R} \sqrt{M_x(x_m, y_m)^2 - M_x(x_m, y_m) \cdot M_y(x_m, y_m) + M_y(x_m, y_m)^2}}$$

и составит:

$$h \geq 4,111 \cdot 10^{-2} \text{ м} = 4,111 \text{ см.}$$

5. Определяем распределённые реакции. На основании соотношений (15) получаем:

1)  $0 \leq x \leq a, y = 0$

$$V_x = 0; \quad V_y(x) = 7,925 \cdot 10^3 \cdot \sin \frac{\pi x}{3}.$$

2)  $0 \leq x \leq a, y = b$

$$V_x = 0; \quad V_y(x) = -7,925 \cdot 10^3 \cdot \sin \frac{\pi x}{3}.$$

3)  $x = 0, 0 \leq y \leq b$

$$V_x(y) = 0,711 \cdot 10^3 \cdot \sin \pi y; \quad V_y = 0.$$

4)  $x = a, 0 \leq y \leq b$

$$V_x(y) = -0,711 \cdot 10^3 \cdot \sin \pi y; \quad V_y = 0.$$

Вычисления показывают, что распределённые реакции вдоль контура пластины направлены вверх и одинаковы на противоположных сторонах пластины.

6. Определяем сосредоточенные реакции в углах пластины:

$$R_1 = -3,476 \cdot 10^4 \text{ Н}; \quad R_2 = 3,476 \cdot 10^4 \text{ Н};$$

$$R_3 = -3,476 \cdot 10^4 \text{ Н}; \quad R_4 = 3,476 \cdot 10^4 \text{ Н}.$$

Эпюры распределённых реакций по контуру пластины и сосредоточенные реакции в углах пластины показаны на рис. 92.

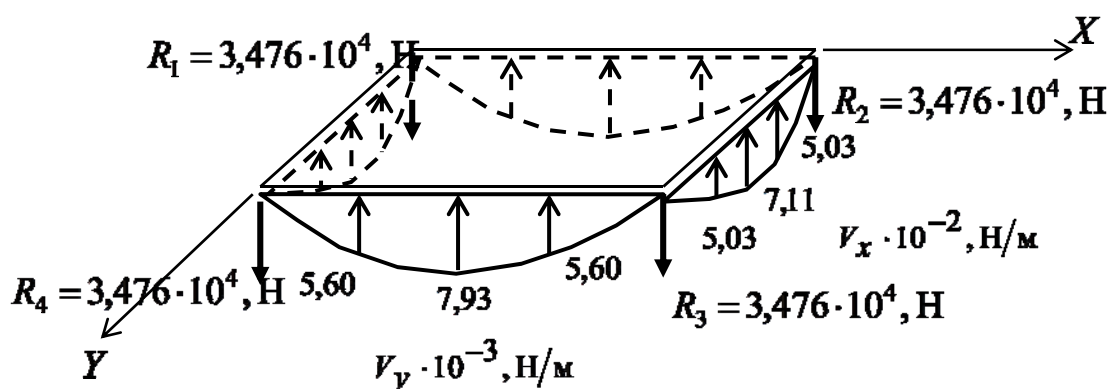


Рис. 92

Все четыре реакции направлены вниз, то есть в сторону действующей нагрузки. Это значит, что углы пластины стремятся сместиться вверх и их нужно специальным образом закреплять от подъёма.

### Решение Мориса – Леви

В решении Мориса – Леви функция прогибов принимается в виде ряда, каждый член которого представляет собой произведение двух функций, одна из которых зависит только от координаты  $x$ , а другая – только от координаты  $y$ :

$$w(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} Y_m(y) \cdot \sin \frac{m\pi x}{a}. \quad (21)$$

Здесь  $Y_m(y)$  – функции, подлежащие определению.

Функции  $Y_m(y)$  должны выбираться так, чтобы функция  $w(x, y)$  удовлетворяла уравнению изогнутой срединной поверхности пластинки (1) и условиям закрепления на тех сторонах пластинки, где краевые условия могут быть произвольными, то есть при  $y=0$  и  $y=b$ .

Решение (21) удовлетворяется на противоположных сторонах пластины, имеющих шарнирное опирание, то есть (рис. 93) при  $x=0$  или  $x=a$

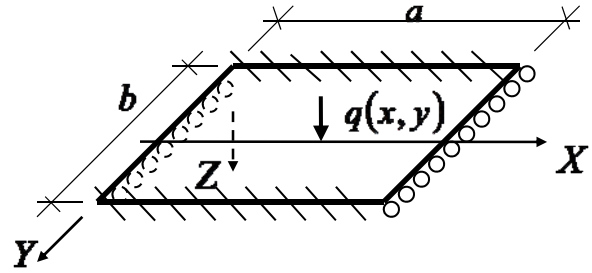


Рис. 93

$$w = 0 \text{ и } \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0. \quad (22)$$

Действительно:

$$\text{при } x=0, \sin \frac{m\pi x}{a} = \sin 0^0 = 0 \quad (m=1,2,3,..), \text{ то есть } w(0, y) = 0;$$

$$\text{при } x=a, \sin \frac{m\pi a}{a} = \sin m\pi = 0 \quad (m=1,2,3,..), \text{ то есть } w(a, y) = 0;$$

Вторые производные функции прогибов

$$\frac{\partial^2 w(x, y)}{\partial x^2} = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} Y_m(y) \cdot \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 \cdot \sin \frac{m\pi x}{a},$$

$$\frac{\partial^2 w(x, y)}{\partial y^2} = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} Y_m(y) \cdot \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 \cdot \sin \frac{m\pi x}{a}$$

содержат синусы тех же аргументов, что и сама функция. Поэтому и вторые производные на сторонах пластины  $x=0$  и  $x=a$  обращаются в нуль. Следовательно, граничные условия (22) выполняются.

Для определения функции  $Y_m(y)$  подставим выражение (21) в уравнение (1):

$$D \sum_{m=1}^{\infty} \left( Y_m^{(IV)} - 2 \frac{m^2 \pi^2}{a^2} Y_m^{(II)} + \frac{m^4 \pi^4}{a^4} Y_m \right) \sin \frac{m\pi x}{a} = q(x, y). \quad (23)$$

Разложим действующую на пластину нагрузку в одинарный ряд по синусам:

$$q(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} q_m \cdot \sin \frac{m\pi x}{a}. \quad (24)$$

Здесь коэффициенты ряда Фурье  $q_m$  вычисляются по формулам:

$$q_m = q_m(y) = \frac{2}{a} \int_0^a q(x, y) \cdot \sin \frac{m\pi x}{a} dx \quad (m = 1, 2, 3, \dots). \quad (25)$$

Рассматривая соотношения (23) и (24) совместно, видим, что равенство рядов будет соблюдено, если будут равны коэффициенты у соответствующих синусов, то есть

$$Y_m^{(IV)} - 2 \frac{m^2 \pi^2}{a^2} Y_m^{(II)} + \frac{m^4 \pi^4}{a^4} Y_m = \frac{q_m}{D} \quad (m = 1, 2, 3, \dots). \quad (26)$$

Таким образом, неизвестные функции  $Y_m(y)$  для каждого номера  $m = 1, 2, 3, \dots$  определяются из обыкновенного линейного неоднородного дифференциального уравнения (26).

Общее решение уравнения (26) для каждого номера  $m = 1, 2, 3, \dots$  складывается из общего решения  $Y_m^0$  соответствующего однородного уравнения, когда в правой части уравнения (26) стоит нуль, и частного решения  $Y_m^{ch}$  неоднородного уравнения:

$$Y_m(y) = Y_m^0(y) + Y_m^{ch}(y). \quad (27)$$

Общее решение можно записать в двух формах:  
первая – показательная форма

$$Y_m^0(y) = C_{1m} e^{-\lambda_m y} + C_{2m} \lambda_m y \cdot e^{-\lambda_m y} + C_{3m} e^{\lambda_m y} + C_{4m} \lambda_m y \cdot e^{\lambda_m y}, \quad (28)$$

вторая – гиперболо-тригонометрическая

$$Y_m^0(y) = C_{1m} \operatorname{ch} \lambda_m y + C_{2m} \lambda_m y \cdot \operatorname{sh} \lambda_m y + C_{3m} \operatorname{sh} \lambda_m y + C_{4m} \lambda_m y \cdot \operatorname{ch} \lambda_m y. \quad (29)$$

Здесь  $\lambda_m = \frac{m\pi}{a}$ ; произвольные постоянные  $C_{1m}, C_{2m}, C_{3m}, C_{4m}$  находятся из условий на продольных сторонах пластины при  $y = 0$  и  $y = b$ .

Частное решение уравнения (26) зависит от вида действующей нагрузки, то есть от вида функции  $q_m(y)$ . Например, если функция  $q_m(y)$  линейно зависит от координаты  $y$ , то есть  $q_m(y) = A + By$ , то

$$Y_m^{ch}(y) = \frac{A + By}{D\lambda_m^4}. \quad (30)$$

После построения функции  $Y_m(y)$  вычисляется функция прогиба (21), а затем и внутренние усилия в пластине.

Изгибающие моменты:

$$M_x(x, y) = -D \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) = D \sum_{m=1}^{\infty} \left[ \left( \frac{m\pi}{a} \right)^2 Y_m(y) - \nu \frac{d^2 Y_m(y)}{dy^2} \right] \cdot \sin \frac{m\pi x}{a};$$

$$M_y(x, y) = -D \left( \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) = D \sum_{m=1}^{\infty} \left[ \left( \frac{m\pi}{a} \right)^2 \nu Y_m(y) - \frac{d^2 Y_m(y)}{dy^2} \right] \cdot \sin \frac{m\pi x}{a}.$$
(31)

Крутящий момент:

$$H(x, y) = -D(1-\nu) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = -D(1-\nu) \sum_{m=1}^{\infty} \frac{m\pi}{a} \frac{dY_m(y)}{dy} \cos \frac{m\pi x}{a}.$$
(32)

Поперечные силы:

$$Q_x(x, y) = -D \left( \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} \right) = -D \sum_{m=1}^{\infty} \left[ -\left( \frac{m\pi}{a} \right)^3 Y_m(y) + \frac{m\pi}{a} \frac{d^2 Y_m(y)}{dy^2} \right] \cdot \cos \frac{m\pi x}{a};$$

$$Q_y(x, y) = -D \left( \frac{\partial^3 w}{\partial y^3} + \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} \right) = -D \sum_{m=1}^{\infty} \left[ \frac{d^3 Y_m(y)}{dy^3} - \left( \frac{m\pi}{a} \right)^2 \frac{dY_m(y)}{dy} \right] \cdot \sin \frac{m\pi x}{a}.$$
(33)

Приведённые поперечные силы (опорные реакции):

$$V_x(x, y) = Q_x + \frac{\partial H}{\partial y} = -D \left( \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + (2-\nu) \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} \right) =$$

$$= -D \sum_{m=1}^{\infty} \left[ -\left( \frac{m\pi}{a} \right)^3 Y_m(y) + (2-\nu) \frac{m\pi}{a} \frac{d^2 Y_m(y)}{dy^2} \right] \cdot \cos \frac{m\pi x}{a};$$

$$V_y(x, y) = Q_y + \frac{\partial H}{\partial x} = -D \left( \frac{\partial^3 w}{\partial y^3} + (2-\nu) \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} \right) =$$

$$= -D \sum_{m=1}^{\infty} \left[ \frac{d^3 Y_m(y)}{dy^3} - (2-\nu) \left( \frac{m\pi}{a} \right)^2 \frac{dY_m(y)}{dy} \right] \cdot \sin \frac{m\pi x}{a}.$$
(34)

Сосредоточенные реакции в углах пластины:

$$R(x_0, y_0) = 2H = -2D(1-\nu) \sum_{m=1}^{\infty} \frac{m\pi}{a} \frac{dY_m(y_0)}{dy} \cos \frac{m\pi x_0}{a}.$$
(35)

В качестве примера рассмотрим пластину с шарнирным опиранием по краям  $x=0$ ,  $x=a$  и жёстким опиранием по краям  $y=\pm\frac{b}{2}$ . Пластина нагружена равномерно распределённой нагрузкой интенсивностью  $q$ .

По формуле (25) при  $q = \text{const}$  найдём

$$q_m = \frac{4q}{m\pi}; \quad m = 1, 3, 5, \dots$$

$$q_m = 0; \quad m = 2, 4, 6, \dots$$

Учитывая симметрию относительно оси  $x$ , в общем решении  $Y_m^0(y)$  удерживаем только первых два слагаемых, а частное решение  $Y_m^{ch}(y)$  принимаем по формуле (30) при  $A = \frac{4q}{m\pi}$  и  $B = 0$ . В итоге соотношение (27) получает вид:

$$Y_m(y) = C_{1m} \text{ch} \lambda_m y + C_{2m} \lambda_m y \cdot \text{sh} \lambda_m y + \frac{4q}{m\pi \lambda_m^4 D}. \quad (36)$$

На сторонах пластины, имеющих жёсткое защемление, прогиб и угол поворота в направлении оси  $y$  равны нулю, то есть

$$w(x, y) \Big|_{y=\pm \frac{b}{2}} = 0; \quad \frac{\partial w(x, y)}{\partial y} \Big|_{y=\pm \frac{b}{2}} = 0. \quad (37)$$

Сопоставляя условия (37) с решением (21), получаем:

$$Y_m(y) \Big|_{y=\pm \frac{b}{2}} = 0 \text{ и } \frac{\partial Y_m(y)}{\partial y} \Big|_{y=\pm \frac{b}{2}} = 0. \quad (38)$$

В развёрнутом виде система уравнений (38) равна:

$$\left. \begin{aligned} C_{1m} \text{ch} \frac{\lambda_m b}{2} + C_{2m} \frac{\lambda_m b}{2} \text{sh} \frac{\lambda_m b}{2} + \frac{4q}{m\pi \lambda_m^4 D} &= 0; \\ C_{1m} \text{sh} \frac{\lambda_m b}{2} + C_{2m} \left( \frac{\lambda_m b}{2} \text{ch} \frac{\lambda_m b}{2} + \text{sh} \frac{\lambda_m b}{2} \right) &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (39)$$

Решив систему (39), найдём:

$$C_{1m} = -\frac{4q}{m\pi \lambda_m^4 D} \frac{\text{sh} \frac{\lambda_m b}{2} + \frac{\lambda_m b}{2} \text{ch} \frac{\lambda_m b}{2}}{\text{sh} \frac{\lambda_m b}{2} \cdot \text{ch} \frac{\lambda_m b}{2} + \frac{\lambda_m b}{2}};$$

$$C_{2m} = \frac{4q}{m\pi \lambda_m^4 D} \frac{\text{sh} \frac{\lambda_m b}{2}}{\text{sh} \frac{\lambda_m b}{2} \cdot \text{ch} \frac{\lambda_m b}{2} + \frac{\lambda_m b}{2}}. \quad (40)$$



Подставив формулы (40) в соотношение (36), получим выражение для функций  $Y_m(y)$ . Выражение для функции прогибов получим на основании соотношения (21):

$$w(x, y) = \sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} Y_m(y) \cdot \sin \frac{m\pi x}{a}. \quad (41)$$

Для вычисления внутренних усилий в пластине найдём производные от функции  $Y_m(y)$ :

$$\frac{\partial Y_m(y)}{\partial y} = C_{1m} \lambda_m \operatorname{sh} \lambda_m y + C_{2m} \lambda_m (\operatorname{sh} \lambda_m y + \lambda_m y \cdot \operatorname{ch} \lambda_m y);$$

$$\frac{\partial^2 Y_m(y)}{\partial y^2} = C_{1m} \lambda_m^2 \operatorname{ch} \lambda_m y + C_{2m} \lambda_m^2 (2 \operatorname{ch} \lambda_m y + \lambda_m y \cdot \operatorname{sh} \lambda_m y);$$

$$\frac{\partial^3 Y_m(y)}{\partial y^3} = C_{1m} \lambda_m^3 \operatorname{sh} \lambda_m y + C_{2m} \lambda_m^3 (3 \operatorname{sh} \lambda_m y + \lambda_m y \cdot \operatorname{ch} \lambda_m y).$$

### Пример 2.

Подобрать толщину прямоугольной пластины из условия прочности Губера – Мизеса – Генки. Прямоугольная пластина имеет шарнирное опирание по сторонам  $x=0$  и  $x=a$ , по сторонам  $y = \pm \frac{b}{2}$  контур пластины жёстко защемлён (рис. 94). Пластина нагружена равномерно распределённой нагрузкой интенсивностью  $q$ .

Дано:  $a=1$  м;  $b=2$  м;  $q=8 \cdot 10^5$  Па;  $\nu=0,2$ ;  $R=2,1 \cdot 10^8$  Па.

Приближённое уравнение изогнутой срединной поверхности пластины запишем с использованием двух членов ряда (21).

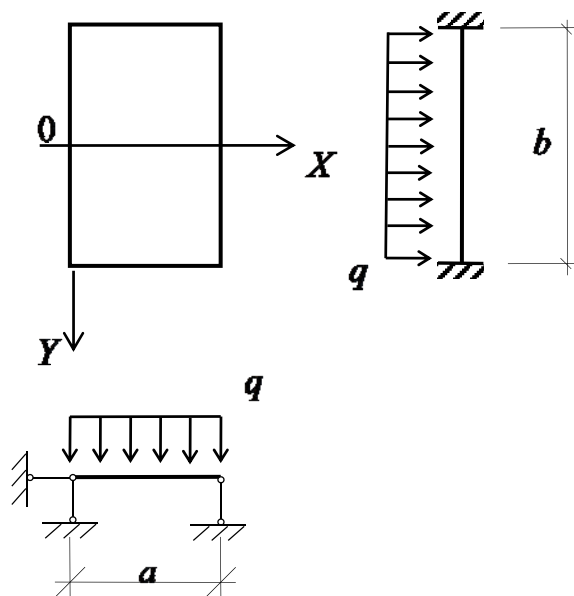


Рис. 94

### Решение.

1. Вычисляем коэффициенты  $C_1$  и  $C_2$  для каждого номера  $m$ :

а)  $m=1$ ;  $\lambda_1 = \frac{m\pi}{a}$ .

$$C_{11} = -\frac{4q}{\pi\lambda_1^4 D} \frac{\operatorname{sh} \frac{\lambda_1 b}{2} + \frac{\lambda_1 b}{2} \operatorname{ch} \frac{\lambda_1 b}{2}}{\operatorname{sh} \frac{\lambda_1 b}{2} \cdot \operatorname{ch} \frac{\lambda_1 b}{2} + \frac{\lambda_1 b}{2}} = -\frac{3,661 \cdot 10^3}{D} (\text{м}^4 \cdot \text{Па});$$

$$C_{21} = \frac{4q}{\pi\lambda_1^4 D} \frac{\operatorname{sh} \frac{\lambda_1 b}{2}}{\operatorname{sh} \frac{\lambda_1 b}{2} \cdot \operatorname{ch} \frac{\lambda_1 b}{2} + \frac{\lambda_1 b}{2}} = \frac{881,394}{D} (\text{м}^4 \cdot \text{Па});$$

б)  $m=3$ ;  $\lambda_3 = \frac{m\pi}{a}$ .

$$C_{13} = -\frac{4q}{3\pi\lambda_3^4 D} \frac{\operatorname{sh} \frac{\lambda_3 b}{2} + \frac{\lambda_3 b}{2} \operatorname{ch} \frac{\lambda_3 b}{2}}{\operatorname{sh} \frac{\lambda_3 b}{2} \cdot \operatorname{ch} \frac{\lambda_3 b}{2} + \frac{\lambda_3 b}{2}} = -\frac{0,072}{D} (\text{м}^4 \cdot \text{Па});$$

$$C_{23} = \frac{4q}{3\pi\lambda_3^4 D} \frac{\operatorname{sh} \frac{\lambda_3 b}{2}}{\operatorname{sh} \frac{\lambda_3 b}{2} \cdot \operatorname{ch} \frac{\lambda_3 b}{2} + \frac{\lambda_3 b}{2}} = \frac{6,945 \cdot 10^{-3}}{D} (\text{м}^4 \cdot \text{Па}).$$

2. Составляем функцию  $Y_m(y)$  и её производные для каждого номера  $m$ :

а)  $m=1$ ,  $Y_1(y) = C_{11} \operatorname{ch} \lambda_1 y + C_{21} \lambda_1 y \cdot \operatorname{sh} \lambda_1 y + \frac{4q}{\pi\lambda_1^4 D}$

$$\frac{\partial Y_1(y)}{\partial y} = C_{11} \lambda_1 \operatorname{sh} \lambda_1 y + C_{21} \lambda_1 (\operatorname{sh} \lambda_1 y + \lambda_1 y \cdot \operatorname{ch} \lambda_1 y);$$

$$\frac{\partial^2 Y_1(y)}{\partial y^2} = C_{11} \lambda_1^2 \operatorname{ch} \lambda_1 y + C_{21} \lambda_1^2 (2 \operatorname{ch} \lambda_1 y + \lambda_1 y \cdot \operatorname{sh} \lambda_1 y);$$

$$\frac{\partial^3 Y_1(y)}{\partial y^3} = C_{11} \lambda_1^3 \operatorname{sh} \lambda_1 y + C_{21} \lambda_1^3 (3 \operatorname{sh} \lambda_1 y + \lambda_1 y \cdot \operatorname{ch} \lambda_1 y);$$

б)  $m=3$ ,  $Y_3(y) = C_{13} \operatorname{ch} \lambda_3 y + C_{23} \lambda_3 y \cdot \operatorname{sh} \lambda_3 y + \frac{4q}{3\pi\lambda_3^4 D}$

$$\frac{\partial Y_3(y)}{\partial y} = C_{13} \lambda_3 \operatorname{sh} \lambda_3 y + C_{23} \lambda_3 (\operatorname{sh} \lambda_3 y + \lambda_3 y \cdot \operatorname{ch} \lambda_3 y);$$

$$\frac{\partial^2 Y_3(y)}{\partial y^2} = C_{13} \lambda_3^2 \operatorname{ch} \lambda_3 y + C_{23} \lambda_3^2 (2 \operatorname{ch} \lambda_3 y + \lambda_3 y \cdot \operatorname{sh} \lambda_3 y);$$

$$\frac{\partial^3 Y_3(y)}{\partial y^3} = C_{13} \lambda_3^3 \operatorname{sh} \lambda_3 y + C_{23} \lambda_3^3 (3 \operatorname{sh} \lambda_3 y + \lambda_3 y \cdot \operatorname{ch} \lambda_3 y).$$

3. Составляем приближённое уравнение изогнутой поверхности срединного слоя:

$$w(x, y) = Y_1(y) \cdot \sin \frac{\pi x}{a} + Y_3(y) \cdot \sin \frac{3\pi x}{a}.$$

4. Определяем внутренние усилия. На основании соотношений (31)-(33) находим:

$$M_x(x, y) = D \left[ \left( \frac{\pi}{a} \right)^2 Y_1(y) - \nu \frac{d^2 Y_1(y)}{dy^2} \right] \cdot \sin \frac{\pi x}{a} + \\ + D \left[ \left( \frac{3\pi}{a} \right)^2 Y_3(y) - \nu \frac{d^2 Y_3(y)}{dy^2} \right] \cdot \sin \frac{3\pi x}{a};$$

$$M_y(x, y) = D \left[ \left( \frac{\pi}{a} \right)^2 \nu Y_1(y) - \frac{d^2 Y_1(y)}{dy^2} \right] \cdot \sin \frac{\pi x}{a} + \\ + D \left[ \left( \frac{3\pi}{a} \right)^2 \nu Y_3(y) - \frac{d^2 Y_3(y)}{dy^2} \right] \cdot \sin \frac{3\pi x}{a}.$$

$$H(x, y) = -D(1-\nu) \frac{\pi}{a} \frac{dY_1(y)}{dy} \cos \frac{\pi x}{a} - D(1-\nu) \frac{3\pi}{a} \frac{dY_3(y)}{dy} \cos \frac{3\pi x}{a}.$$

$$Q_x(x, y) = D \left[ \left( \frac{\pi}{a} \right)^3 Y_1(y) - \frac{\pi}{a} \frac{d^2 Y_1(y)}{dy^2} \right] \cdot \cos \frac{\pi x}{a} + \\ + D \left[ \left( \frac{3\pi}{a} \right)^3 Y_3(y) - \frac{3\pi}{a} \frac{d^2 Y_3(y)}{dy^2} \right] \cdot \cos \frac{3\pi x}{a};$$

$$Q_y(x, y) = -D \left[ \frac{d^3 Y_1(y)}{dy^3} - \left( \frac{\pi}{a} \right)^2 \frac{dY_1(y)}{dy} \right] \cdot \sin \frac{\pi x}{a} - \\ - D \left[ \frac{d^3 Y_3(y)}{dy^3} - \left( \frac{3\pi}{a} \right)^2 \frac{dY_3(y)}{dy} \right] \cdot \sin \frac{3\pi x}{a}.$$

5. Строим эпюры относительных прогибов и изгибающих моментов в сечении  $x_m = 0,5a$  и в сечении  $y_m = 0$  (рис. 95). В силу симметрии в этих сечениях прогибы и изгибающие моменты максимальны.

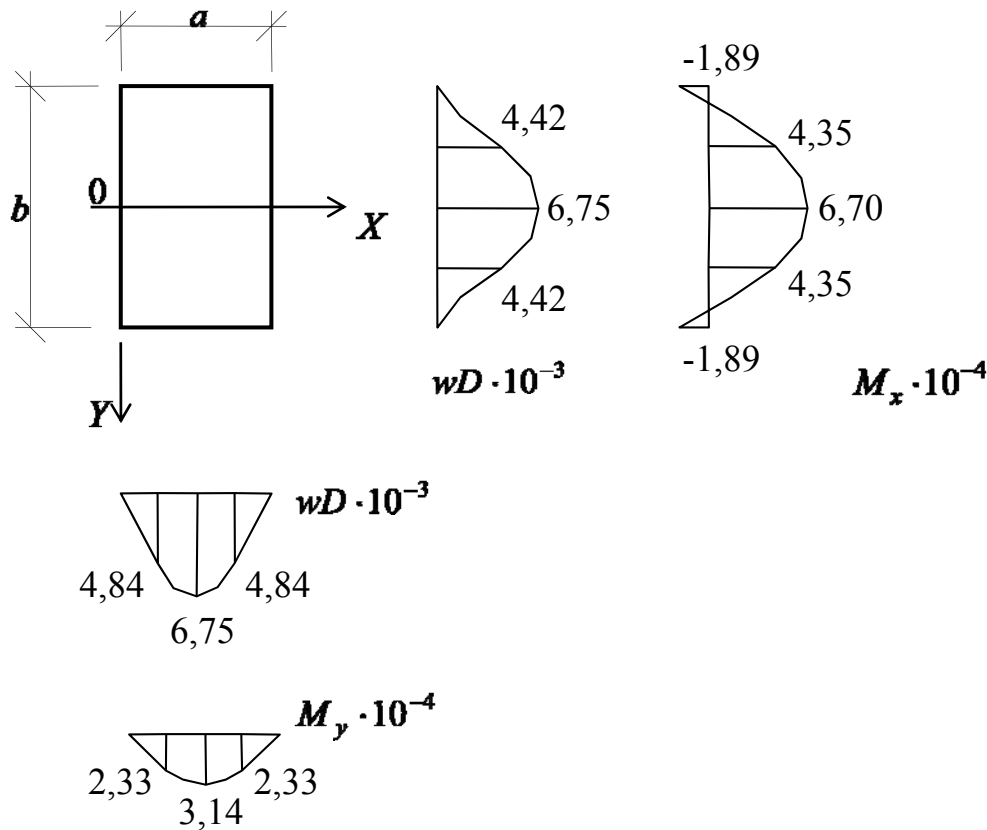


Рис. 95

6. Подбираем толщину пластины. Выпишем формулы для напряжений, возникающих в сечениях пластины, перпендикулярных её срединной плоскости:

$$\sigma_x(x, y) = \frac{12M_x(x, y)}{h^3} z; \quad \sigma_y(x, y) = \frac{12M_y(x, y)}{h^3} z; \quad \tau_{xy}(x, y) = \frac{12H(x, y)}{h^3} z;$$

$$\tau_{yz}(x, y) = \frac{6Q_y(x, y)}{h^3} \left( \frac{h^2}{4} - z^2 \right); \quad \tau_{zx}(x, y) = \frac{6Q_x(x, y)}{h^3} \left( \frac{h^2}{4} - z^2 \right).$$

Как следует из эпюр, максимальные изгибающие моменты, а следовательно, и максимальные нормальные напряжения  $\sigma_x$  и  $\sigma_y$  возникают в центре пластины ( $x = x_m, y = y_m$ ) на верхней  $\left( z = z^{(-)} = -\frac{h}{2} \right)$  и нижней  $\left( z = z^{(+)} = +\frac{h}{2} \right)$  её поверхностях. В силу симметрии крутящий момент в центре пластины  $H = 0$  и, следовательно,  $\tau_{xy} = 0$ . Таким образом, в

наиболее опасной точке  $(x_m, y_m, z^{(\pm)})$  имеем плоское напряжённое состояние  $(\sigma_z = 0, \tau_{zx} = 0, \tau_{zy} = 0)$  и напряжения  $\sigma_x(x_m, y_m, z^{(\pm)})$  и  $\sigma_y(x_m, y_m, z^{(\pm)})$  являются главными нормальными напряжениями. Поскольку  $M_x > 0$  и  $M_y > 0$ , то знак у напряжений  $\sigma_x$  и  $\sigma_y$  будет определяться знаком координаты  $z$ , то есть на верхней грани пластины  $(z = -\frac{h}{2})$  оба напряжения будут отрицательными, на нижней  $(z = +\frac{h}{2})$  – положительными. Учитывая значения моментов  $M_x$  и  $M_y$  в точке  $(x_m, y_m)$ , получаем:  $\sigma_x = \sigma_2$  и  $\sigma_y = \sigma_1$ , поскольку, как известно,  $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$  и для пластин  $\sigma_3 = 0$ .

В соответствии с теорией прочности Губера – Мизеса – Генки  $\frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2} \leq R$ , толщина пластины будет определяться по формуле

$$h \geq \sqrt{\frac{6}{R} \sqrt{M_x(x_m, y_m)^2 - M_x(x_m, y_m) \cdot M_y(x_m, y_m) + M_y(x_m, y_m)^2}},$$

и составит:

$$h \geq 4,073 \cdot 10^{-2} \text{ м} = 4,073 \text{ см}.$$

7. *Определяем распределённые реакции.* На основании соотношений (34) получаем:

$$1) 0 \leq x \leq a, \quad y = +\frac{b}{2} \text{ и } y = -\frac{b}{2}$$

$$V_x = 0;$$

$$V_y(x) = -D \left[ \frac{d^3 Y_1(y)}{dy^3} - (2 - \nu) \left( \frac{\pi}{a} \right)^2 \frac{dY_1(y)}{dy} \right] \cdot \sin \frac{\pi x}{a} - \\ - D \left[ \frac{d^3 Y_3(y)}{dy^3} - (2 - \nu) \left( \frac{3\pi}{a} \right)^2 \frac{dY_3(y)}{dy} \right] \cdot \sin \frac{3\pi x}{a}.$$

$$2) x = 0 \text{ и } x = a, \quad -\frac{b}{2} \leq y \leq +\frac{b}{2}$$

$$V_x(y) = -D \left[ -\left( \frac{\pi}{a} \right)^3 Y_1(y) + (2 - \nu) \frac{\pi}{a} \frac{d^2 Y_1(y)}{dy^2} \right] \cdot \cos \frac{\pi x}{a} - \\ - D \left[ -\left( \frac{3\pi}{a} \right)^3 Y_3(y) + (2 - \nu) \frac{3\pi}{a} \frac{d^2 Y_3(y)}{dy^2} \right] \cdot \cos \frac{3\pi x}{a};$$

$$V_y = 0.$$

Вычисления показывают, что распределённые реакции вдоль контура пластины направлены вверх и одинаковы на противоположных сторонах пластины.

8. Определяем сосредоточенные реакции в углах пластины:

$$R(x_0, y_0) = 2H = -2D(1-\nu) \frac{\pi}{a} \frac{dY_1(y_0)}{dy} \cos \frac{\pi x_0}{a} - 2D(1-\nu) \frac{3\pi}{a} \frac{dY_3(y_0)}{dy} \cos \frac{3\pi x_0}{a}.$$

В итоге получаем:

$$R_1 = -1,6 \cdot 10^{-10} \cong 0 \text{ Н}; \quad R_2 = 1,6 \cdot 10^{-10} \cong 0 \text{ Н};$$

$$R_3 = -1,6 \cdot 10^{-10} \cong 0 \text{ Н}; \quad R_4 = 1,6 \cdot 10^{-10} \cong 0 \text{ Н},$$

то есть сосредоточенные реакции в углах пластины отсутствуют.

Эпюры распределённых реакций по контуру пластины изображены на рис. 96.

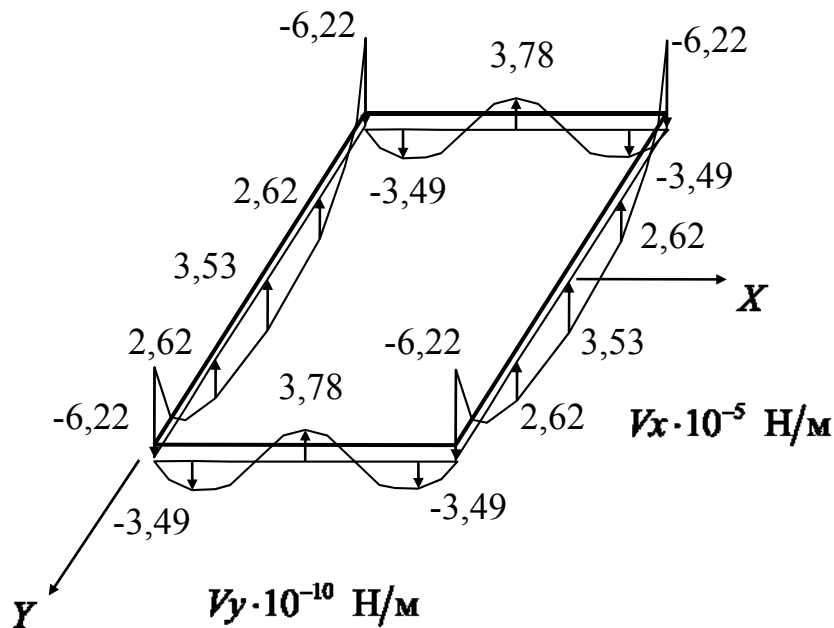


Рис. 96

Численные расчёты показывают, что распределённая реакция вдоль жёсткой заделки практически равна нулю.

## Глава 5. МЕТОДЫ НА ОСНОВЕ ВАРИАЦИОННЫХ ПРИНЦИПОВ

### §19. Вариационная формулировка задач теории упругости

В самом общем случае любая механическая задача может быть сформулирована с двух точек зрения:

1. С точки зрения движения механической системы и действующих на неё сил.

2. С точки зрения энергетического баланса движущейся механической системы.

Первая точка зрения приводит к математической формулировке задачи в виде дифференциальных уравнений. Вторая позиция математически формирует задачу в виде некоторых интегральных соотношений или функционалов. Оба подхода эквивалентны и приводят к одному и тому же результату. Разница заключается в трудоёмкости решения задачи.

#### *Понятие о функционале*

Пусть дан некоторый класс (множество) функций  $K = \{y(x)\}$ , где  $x$  – независимая переменная или совокупность нескольких независимых переменных  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ .

Говорят, что переменная величина  $I = I[y(x)]$  есть функционал от функции  $y = y(x)$ , если каждой функции  $y(x) \in K$  по заданному закону ставится в соответствие определённое число  $I$ .

*Замечание.* Функция каждому числу ставит в соответствие другое число; функционал каждой функции ставит в соответствие определённое число; производная каждой функции ставит в соответствие другую функцию.

Основная задача, связанная с исчислением функционалов – это определение его экстремума, то есть нахождение условий, при которых функционал принимает экстремальное (максимальное или минимальное) значение.

**Пример 1.**

1) Площадь криволинейной трапеции, как известно, определяется соотношением  $S = \int_a^b y(x) dx$ , то есть является функционалом. Требуется: для заданного класса функций (например, только выпуклых или только вогнутых) найти такую функцию, при которой площадь криволинейной трапеции будет максимальна или минимальна.

2) Длина дуги вычисляется по формуле  $L = \int_a^b \sqrt{1 + \left[ \frac{dy(x)}{dx} \right]^2} dx$ , то есть

тоже является функционалом. Требуется: для заданного класса функций (например, только выпуклых или только вогнутых) найти такую функцию, при которой длина дуги будет максимальна или минимальна.

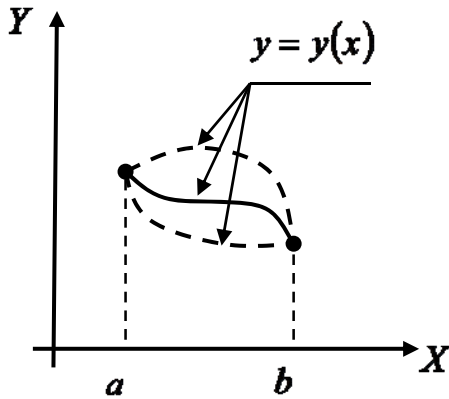


Рис. 97

### Уравнения теории упругости в матричной форме

Введём следующие векторы-столбцы:

$$\begin{aligned}
 \bar{\mathbf{u}} &= (u, v, w)^T; \\
 \bar{\boldsymbol{\varepsilon}} &= (\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z, \gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{zx})^T; \\
 \bar{\boldsymbol{\sigma}} &= (\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{zx})^T; \\
 \bar{\mathbf{F}} &= (F_x, F_y, F_z)^T; \\
 \bar{\mathbf{P}} &= (p_{nx}, p_{ny}, p_{nz})^T.
 \end{aligned} \tag{1}$$

При этом основные группы соотношений теории упругости можно, очевидно, записать в следующем виде.

1. Геометрические соотношения:

$$\bar{\boldsymbol{\varepsilon}} = \mathbf{A}^T \cdot \bar{\mathbf{u}}. \tag{2}$$

Здесь матрица  $\mathbf{A}$  имеет следующую структуру:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 & \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial z} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} & 0 & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{pmatrix}$$



2. Уравнения равновесия:

$$\mathbf{A} \cdot \bar{\boldsymbol{\sigma}} + \bar{\mathbf{F}} = 0. \quad (3)$$

3. Физические уравнения.

а. В форме закона Гука:

$$\bar{\boldsymbol{\varepsilon}} = \mathbf{C} \cdot \bar{\boldsymbol{\sigma}}. \quad (4)$$

Здесь матрица упругой податливости  $\mathbf{C}$  имеет следующую структуру:

$$\mathbf{C} = \frac{1}{E} \begin{pmatrix} 1 & -\nu & -\nu & 0 & 0 & 0 \\ -\nu & 1 & -\nu & 0 & 0 & 0 \\ -\nu & -\nu & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2(1+\nu) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2(1+\nu) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2(1+\nu) \end{pmatrix}.$$

б. В форме Ламе:

$$\bar{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{D} \cdot \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}. \quad (5)$$

Здесь матрица жёсткости  $\mathbf{D}$  равна:

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} K_0 + \frac{4}{3}G_0 & K_0 - \frac{2}{3}G_0 & K_0 - \frac{2}{3}G_0 & 0 & 0 & 0 \\ K_0 - \frac{2}{3}G_0 & K_0 + \frac{4}{3}G_0 & K_0 - \frac{2}{3}G_0 & 0 & 0 & 0 \\ K_0 - \frac{2}{3}G_0 & K_0 - \frac{2}{3}G_0 & K_0 + \frac{4}{3}G_0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & G_0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & G_0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & G_0 \end{pmatrix}.$$

4. Уравнения совместности деформации:

$$\mathbf{B} \cdot \bar{\boldsymbol{\varepsilon}} = 0. \quad (6)$$

Здесь матрица  $\mathbf{B}$  определяется следующим образом:

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2}{\partial y^2} & \frac{\partial^2}{\partial x^2} & 0 & -\frac{\partial^2}{\partial x \cdot \partial y} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial^2}{\partial z^2} & \frac{\partial^2}{\partial y^2} & 0 & -\frac{\partial^2}{\partial y \cdot \partial z} & 0 \\ \frac{\partial^2}{\partial z^2} & 0 & \frac{\partial^2}{\partial x^2} & 0 & 0 & -\frac{\partial^2}{\partial z \cdot \partial x} \\ 2\frac{\partial^2}{\partial y \cdot \partial z} & 0 & 0 & -\frac{\partial^2}{\partial z \cdot \partial x} & \frac{\partial^2}{\partial x^2} & -\frac{\partial^2}{\partial x \cdot \partial y} \\ 0 & 2\frac{\partial^2}{\partial z \cdot \partial x} & 0 & -\frac{\partial^2}{\partial y \cdot \partial z} & -\frac{\partial^2}{\partial x \cdot \partial y} & \frac{\partial^2}{\partial y^2} \\ 0 & 0 & 2\frac{\partial^2}{\partial x \cdot \partial y} & \frac{\partial^2}{\partial z^2} & -\frac{\partial^2}{\partial z \cdot \partial x} & -\frac{\partial^2}{\partial y \cdot \partial z} \end{pmatrix}.$$

5. Условия на поверхности:

$$\mathbf{L} \cdot \bar{\boldsymbol{\sigma}} = \bar{\mathbf{P}}. \quad (7)$$

Здесь матрица  $\mathbf{L}$  имеет следующую структуру:

$$\mathbf{L} = \begin{pmatrix} l & 0 & 0 & m & 0 & n \\ 0 & m & 0 & l & n & 0 \\ 0 & 0 & n & 0 & m & l \end{pmatrix};$$

$l, m, n$  – направляющие косинусы нормали к рассматриваемой площади поверхности тела.

При записи уравнений теории упругости в матричной форме решение прямой задачи теории упругости в перемещениях сводится к интегрированию системы дифференциальных уравнений вида:

$$\mathbf{A} \cdot \left[ \mathbf{D} \cdot (\mathbf{A}^T \cdot \bar{\mathbf{u}}) \right] + \bar{\mathbf{F}} = 0. \quad (8)$$

Решение прямой задачи теории упругости в напряжениях сводится к интегрированию системы дифференциальных уравнений следующего вида:

$$\begin{cases} \mathbf{B} \cdot (\mathbf{C} \cdot \bar{\boldsymbol{\sigma}}) = 0, \\ \mathbf{A} \cdot \bar{\boldsymbol{\sigma}} + \bar{\mathbf{F}} = 0. \end{cases} \quad (9)$$

Решения системы уравнений (8) и (9) должны удовлетворять условиям на поверхности в перемещениях и напряжениях (7).

### Вариационный принцип Лагранжа

Полная потенциальная энергия деформированного тела "Э" состоит из потенциальной энергии деформации тела (потенциал внутренних сил) "U" и энергии внешних сил (потенциал внешних сил) "Π":

$$\mathcal{E} = U + \Pi. \quad (10)$$

Будем считать, что в начальном, недеформированном, состоянии полная потенциальная энергия деформированного тела  $\mathcal{E}_0 = 0$ . Следовательно, полная энергия деформированного тела представляет собой изменение энергии внутренних и внешних сил при переходе тела из начального в деформированное состояние.

Энергия любой системы сил измеряется работой, которую могут совершить эти силы при переводе системы из рассматриваемого состояния в начальное, нулевое, состояние. Поэтому при составлении выражения (10) будем вычислять энергию как работу внутренних сил упругости (для потенциала внутренних сил  $U$ ) и внешних сил (для потенциала внешних сил  $\Pi$ ) при мысленном переводе тела из деформированного в начальное (недеформированное) состояние.

Удельный потенциал внутренних сил определяется, как известно, соотношением

$$U_0 = \frac{1}{2} \bar{\boldsymbol{\sigma}}^T \cdot \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}. \quad (11)$$

Полный потенциал внутренних сил будет равен:

$$U = \iiint_V U_0 \cdot dV = \frac{1}{2} \iiint_V \bar{\boldsymbol{\sigma}}^T \cdot \bar{\boldsymbol{\varepsilon}} \cdot dV. \quad (12)$$

Внешние силы, определяемые вектором  $\bar{\mathbf{p}}$ , и объёмные силы, задаваемые вектором  $\bar{\mathbf{F}}$ , на перемещениях, соответствующих переводу тела из деформированного в недеформированное состояние, совершают работу, равную:

$$\Pi = \iint_S \bar{\mathbf{p}}^T \cdot \bar{\mathbf{u}} \cdot dS + \iiint_V \bar{\mathbf{F}}^T \cdot \bar{\mathbf{u}} \cdot dV. \quad (13)$$

Отметим, что при этом работа внутренних сил будет положительной, а работа внешних и объёмных сил – отрицательной. То есть соотношение (10) получает вид:

$$\mathcal{E} = \iiint_V U_0 \cdot dV - \iint_S \bar{\mathbf{p}}^T \cdot \bar{\mathbf{u}} \cdot dS - \iiint_V \bar{\mathbf{F}}^T \cdot \bar{\mathbf{u}} \cdot dV. \quad (14)$$

Используя закон упругости (5), геометрические соотношения (2), соотношение (11), формулу (14) можно записать в терминах функций перемещений:

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2} \iiint_V \left[ (\mathbf{A}^T \cdot \bar{\mathbf{u}})^T \cdot \mathbf{D} \cdot (\mathbf{A}^T \cdot \bar{\mathbf{u}}) \right] \cdot dV - \iint_S \bar{\mathbf{p}}^T \cdot \bar{\mathbf{u}} \cdot dS - \iiint_V \bar{\mathbf{F}}^T \cdot \bar{\mathbf{u}} \cdot dV. \quad (15)$$

Итак, полная потенциальная энергия деформированного тела вполне определяется заданием функций перемещений  $u, v, w$ , зависящих, вообще говоря, от пространственных координат.

*Принцип Лагранжа* формулируется так: для истинных перемещений  $u, v, w$  функционал полной энергии деформированного тела  $\mathcal{E}$  имеет экстремальное (стационарное) значение, то есть его первая вариация равна нулю.

Согласно этому принципу, если  $\bar{\mathbf{u}}$  – истинные перемещения точек тела, при которых имеет место равновесие, то работа внешних и внутренних сил на произвольном бесконечно малом изменении перемещений  $\delta \bar{\mathbf{u}} = (\delta u, \delta v, \delta w)^T$ , допускаемом связями тела, должна быть равна нулю, то есть

$$\Delta \mathcal{A} = \Delta \mathcal{A}^{\text{внутр}} + \Delta \mathcal{A}^{\text{внешн}} = 0. \quad (16)$$

Так как работа внутренних сил пропорциональна изменению потенциала внутренних сил, а работа внешних сил пропорциональна изменению потенциала внешних сил, то есть  $\Delta \mathcal{A}^{\text{внутр}} \approx -\Delta U$ ;  $\Delta \mathcal{A}^{\text{внешн}} \approx -\Delta \Pi$ , то на основании (16) получаем:  $\Delta \mathcal{A} = -\Delta \mathcal{E}$ .

Итак, для истинных перемещений  $\bar{\mathbf{u}}$  изменение полной потенциальной энергии деформированного тела  $\Delta \mathcal{E}$ , вызванное вариациями перемещений  $\delta \bar{\mathbf{u}}^T$ , должно быть равно нулю:

$$\Delta \mathcal{E} = \mathcal{E}(\bar{\mathbf{u}} + \delta \bar{\mathbf{u}}) - \mathcal{E}(\bar{\mathbf{u}}) = 0. \quad (17)$$

Соотношение (17) представляют в виде ряда, в котором каждое слагаемое зависит от соответствующей степени  $\delta \bar{\mathbf{u}}$ :

$$\Delta \mathcal{E} = \Delta \mathcal{E}_1(\delta \bar{\mathbf{u}}) + \Delta \mathcal{E}_2(\delta \bar{\mathbf{u}}^2) + \dots = 0. \quad (18)$$

Здесь  $\delta \mathcal{E} = \Delta \mathcal{E}_1(\delta \bar{\mathbf{u}})$  – первая вариация функционала энергии;

$\delta^2 \mathcal{E} = \Delta \mathcal{E}_2(\delta \bar{\mathbf{u}}^2)$  – вторая вариация функционала энергии.

Устремляя в (18) вариации перемещений  $\delta \bar{\mathbf{u}}$  к нулю и отбрасывая все слагаемые, кроме первого, как бесконечно малые более высокого порядка малости, приходим к равенству:

$$\delta \mathcal{E} = 0. \quad (19)$$

Равенство нулю первой вариации функционала (19) является необходимым условием локального экстремума этого функционала, то есть в локальной зоне изменения функций-аргументов, функционал с точностью до бесконечно малых первого порядка сохраняет неизменное (стационарное) значение. В соответствии с теоремой Лежен Дирихле:

- при  $\delta \mathcal{E} = 0$  и  $\delta^2 \mathcal{E} > 0$  – полная энергия деформированного тела минимальна и его равновесие устойчиво;
- при  $\delta \mathcal{E} = 0$  и  $\delta^2 \mathcal{E} < 0$  – эта энергия максимальна и равновесие системы внутренних и внешних сил неустойчиво;
- при  $\delta \mathcal{E} = 0$  и  $\delta^2 \mathcal{E} = 0$  – энергия стационарна, а тело находится в состоянии безразличного равновесия.

Итак, решая задачу теории упругости с использованием принципа Лагранжа, следует найти такие функции перемещений  $u, v, w$ , зависящие, вообще говоря, от пространственных координат, при которых первая вариация полной потенциальной энергии деформированного тела будет равна нулю:  $\delta \mathcal{E} = 0$ .

Помимо рассмотренного принципа Лагранжа в теории упругости известно ещё несколько вариационных принципов, различающихся и выбором варьируемых функций, и видом соответствующего функционала.

В принципе Лагранжа варьируемыми функциями служат перемещения  $\bar{\mathbf{u}}$ , а соответствующий функционал (15) определяет полную потенциальную энергию деформированного тела.

В принципе Кастильяно варьируемыми функциями являются напряжения  $\bar{\boldsymbol{\sigma}}$ , а соответствующий функционал определяет дополнительную энергию деформируемого тела:

$$\mathcal{E}_k = \iiint_V \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^{-T} \cdot \delta \bar{\boldsymbol{\sigma}} \cdot dV - \iint_{S_2} \bar{\mathbf{u}}_{S_2}^{-T} \cdot \bar{\mathbf{p}}_{S_2} \cdot dS_2. \quad (20)$$

Здесь  $S_2$  – часть поверхности тела, на которой заданы перемещения.

*Принцип Кастильяно* говорит о том, что истинные напряжения сообщают дополнительной энергии деформируемого тела стационарное значение.

В принципе Рейсснера в качестве варьируемых функций приняты функции и перемещений  $\bar{\mathbf{u}}$ , и напряжений  $\bar{\boldsymbol{\sigma}}$ . Функционал Рейсснера имеет вид:

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_p = & -\frac{1}{2} \iiint_V \bar{\boldsymbol{\sigma}}^T \cdot \mathbf{C} \cdot \bar{\boldsymbol{\sigma}} \cdot dV - \iiint_V \bar{\mathbf{u}}^T \cdot (\mathbf{A} \cdot \bar{\boldsymbol{\sigma}} + \bar{\mathbf{F}}) \cdot dV + \\ & + \iint_{S_1} \bar{\mathbf{u}}^T \cdot (\mathbf{L} \cdot \bar{\boldsymbol{\sigma}} - \bar{\mathbf{p}}_{S_1}) \cdot dS + \iint_{S_2} \bar{\mathbf{u}}_{S_2}^T \cdot \mathbf{L} \cdot \bar{\boldsymbol{\sigma}} \cdot dS. \end{aligned} \quad (21)$$

Здесь  $S_1$  – часть поверхности тела, на которой задана нагрузка.

*Принцип Рейсснера* утверждает, что для истинных перемещений и напряжений первая вариация функционала Рейсснера равна нулю.

В принципе Ху и Вашицу в качестве независимо варьируемых функций приняты и перемещения  $\bar{\mathbf{u}}$ , и напряжения  $\bar{\boldsymbol{\sigma}}$ , и деформации  $\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}$ . Функционал Ху – Вашицу можно записать в следующей форме:

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_{X-B} = & \frac{1}{2} \iiint_V \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^T \cdot \mathbf{D} \cdot \bar{\boldsymbol{\varepsilon}} \cdot dV + \iiint_V \bar{\boldsymbol{\sigma}}^T \cdot (\mathbf{A}^T \cdot \bar{\mathbf{u}} + \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}) \cdot dV - \\ & - \iiint_V \bar{\mathbf{u}}^T \cdot \bar{\mathbf{F}} \cdot dV - \iint_{S_1} \bar{\mathbf{u}}^T \cdot \bar{\mathbf{p}} \cdot dS - \iint_{S_2} (\bar{\mathbf{u}} - \bar{\mathbf{u}}_{S_2})^T \cdot \mathbf{L} \cdot \bar{\boldsymbol{\sigma}} \cdot dS. \end{aligned} \quad (22)$$

*Принцип Ху – Вашицу* говорит о том, что для истинных перемещений, напряжений и деформаций первая вариация функционала Ху – Вашицу равна нулю.

Решение задач теории упругости на основе сформулированных принципов сводится к отысканию экстремума соответствующего функционала.

## §20. Метод Ритца

В 1909 году Вальтер Ритц, швейцарский физик-теоретик и математик, предложил метод решения общей задачи об экстремуме функционала. Метод предусматривает выбор пробной функции, которая должна минимизировать определённый функционал, в виде суперпозиций известных функций, которые удовлетворяют граничным условиям. При этом задача сводится к поиску неизвестных коэффициентов суперпозиции.

Пусть для функции  $\psi(x, y, z)$ , составляющей оператор  $R$ , задан функционал

$$I(\psi) = \iiint_V R \left( x, y, z, \psi, \frac{\partial \psi}{\partial x}, \frac{\partial \psi}{\partial y}, \frac{\partial \psi}{\partial z}, \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}, \dots \right) \cdot dV. \quad (1)$$

Требуется подобрать функцию  $\psi(x, y, z)$ , удовлетворяющую заданным граничным условиям так, чтобы функционал  $I(\psi)$  принимал экстремальное значение.

Ритц предложил искать решение данной вариационной задачи в виде ряда:

$$\psi(x, y, z) \cong \tilde{\psi}(x, y, z) = \sum_1^n \alpha_i \cdot \xi_i(x, y, z). \quad (2)$$

Здесь  $\xi_i(x, y, z)$  – так называемые *координатные функции*, которые должны быть линейно независимыми и такими, чтобы функция  $\psi(x, y, z)$  удовлетворяла заданным граничным условиям при любых значениях произвольных параметров  $\alpha_i$ .

Поскольку координатные функции нами выбраны (заданы), то функцию  $\tilde{\psi}(x, y, z)$  можно считать зависящей только от произвольных параметров  $\alpha_i$  и пространственных координат:

$$\tilde{\psi}(x, y, z) = \tilde{\psi}(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n, x, y, z).$$

После подстановки функции  $\tilde{\psi}(x, y, z)$  в функционал (23) получаем некоторую функцию, зависящую только от неизвестных параметров  $\alpha_i$ :

$$I = I(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n).$$

Для того чтобы эта функция принимала экстремальное значение, необходимо, чтобы

$$\frac{\partial I}{\partial \alpha_i} = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (3)$$

Таким образом, вариационная задача свелась к задаче об отыскании экстремума функции многих переменных.

Решив систему (3), находим числа  $\alpha_i, i = 1, 2, \dots, n$ , тем самым получаем приближённое решение вариационной задачи в виде ряда:

$$\psi(x, y, z) = \sum_1^n \alpha_i \cdot \xi_i(x, y, z). \quad (4)$$

Итак, решая вариационную задачу по методу Ритца, мы должны выбрать такую систему координатных функций, чтобы каждая из них обязательно удовлетворяла кинематическим условиям на границе тела. При этом и дифференциальные уравнения равновесия, и силовые краевые условия будут удовлетворяться приближённо. Сходимость метода в общем случае не выяснена.

### Метод Ритца – Тимошенко

Применительно к задачам расчёта конструкций метод Ритца успешно использовался С.П.Тимошенко, в силу чего метод расчёта строительных конструкций на основе вариационного принципа Лагранжа называется методом Ритца – Тимошенко.

В общем случае трёхмерного тела на основании принципа Лагранжа отыскивается экстремум полной потенциальной энергии деформированного тела  $\mathcal{E} = U + \Pi$ , являющейся функцией перемещений  $u, v, w$ . Решение вариационной задачи с использованием метода Ритца в этом случае записывается так:

$$\left. \begin{aligned} u &= u_0(x, y, z) + \sum_{i=1}^K \alpha_i \cdot u_i(x, y, z); \\ v &= v_0(x, y, z) + \sum_{j=1}^L \beta_j \cdot v_j(x, y, z); \\ w &= w_0(x, y, z) + \sum_{q=1}^M \gamma_q \cdot w_q(x, y, z). \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

Здесь  $u_0(x, y, z), v_0(x, y, z), w_0(x, y, z)$  – назначаемые функции координат, точно удовлетворяющие кинематическим граничным условиям;  $u_i(x, y, z), v_j(x, y, z), w_q(x, y, z)$  – заданные координатные функции, удовлетворяющие кинематическим краевым условиям;  $\alpha_i, \beta_j, \gamma_q$  – неизвестные (искомые) параметры.

Условие экстремума функционала энергии получает вид:

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial \alpha_i} &= \frac{\partial U}{\partial \alpha_i} + \frac{\partial \Pi}{\partial \alpha_i} = 0; \quad i = 1, 2, \dots, K; \\ \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial \beta_j} &= \frac{\partial U}{\partial \beta_j} + \frac{\partial \Pi}{\partial \beta_j} = 0; \quad j = 1, 2, \dots, L; \\ \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial \gamma_q} &= \frac{\partial U}{\partial \gamma_q} + \frac{\partial \Pi}{\partial \gamma_q} = 0; \quad q = 1, 2, \dots, M. \end{aligned} \right. \quad (6)$$

Совокупность уравнений (6) образует систему линейных алгебраических уравнений порядка  $K + L + M$ . Решая систему (6), определяем параметры  $\alpha_i, \beta_j, \gamma_q$ .

Рассмотрим пример использования метода Ритца-Тимошенко для расчёта изгибаемого стержня [24].



Пример 1.

Определить наибольший прогиб и максимальные напряжения, возникающие под действием равномерно распределённой нагрузки интенсивностью  $q$  в консольной балке длиной  $l$  с площадью поперечного сечения  $A$  (рис. 98).

Решение.

Вычислим потенциальную энергию деформации  $U$  консольной балки. Удельная потенциальная энергия деформации, в терминах деформаций, определяется соотношением

$$U_0 = G \left[ \frac{\nu}{1-2\nu} (\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z)^2 + (\varepsilon_x^2 + \varepsilon_y^2 + \varepsilon_z^2) + \frac{1}{2} (\gamma_{xy}^2 + \gamma_{yz}^2 + \gamma_{zx}^2) \right] \quad (a)$$

Согласно гипотезе плоских сечений углы сдвига в координатных плоскостях  $x y z$  отсутствуют и потому третья скобка в выражении (a) будет равна нулю. Поскольку в изгибаемом

стержне  $\varepsilon_z = \frac{y}{\rho} \cong y \frac{d^2 v}{dz^2}$ ,  $\varepsilon_y = \varepsilon_x = -\nu \cdot \varepsilon_z$  и,

кроме того,  $E = 2G(1 + \nu)$ , то формула (a) преобразуется к виду:

$$U_0 = \frac{1}{2} E \cdot y^2 \left( \frac{d^2 v}{dz^2} \right)^2.$$

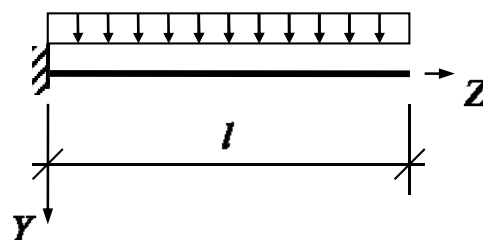


Рис. 98

Интегрируя удельную энергию по всему объёму балки, получаем:

$$\begin{aligned} U &= \int_V U_0 dV = \frac{1}{2} \int_V E \cdot y^2 \left( \frac{d^2 v}{dz^2} \right)^2 dV = \\ &= \frac{1}{2} \int_l \int_A E \cdot y^2 \left( \frac{d^2 v}{dz^2} \right)^2 dA \cdot dz = \frac{1}{2} \int_l E \left( \frac{d^2 v}{dz^2} \right)^2 dz \int_A y^2 dA = \frac{1}{2} \int_l E \cdot I_x \left( \frac{d^2 v}{dz^2} \right)^2 dz. \end{aligned}$$

Вычислим потенциал внешних сил  $\Pi$ .

Работа элементарной внешней силы  $dF = q \cdot dz$ , приложенной к элементу балки  $dz$ , на возможном перемещении  $\delta v$  будет равна:  $dF \cdot \delta v = q \cdot dz \cdot \delta v$ . Работа всех внешних сил на возможных перемещениях найдётся интегрированием этого выражения по длине:  $\int_l q \cdot \delta v \cdot dz$ . Так как интен-

сивность  $q$  на возможном перемещении остаётся постоянной, то вариация потенциала внешних сил будет равна:  $\delta \Pi = - \int_l q \cdot \delta v \cdot dz = - \delta \int_l q \cdot v \cdot dz$ .

Отсюда находим:

$$\Pi = - \int_l q \cdot v \cdot dz.$$

В итоге полная потенциальная энергия деформированного тела (консольной балки) будет равна:

$$\mathcal{E} = U + \Pi = \int_0^l \left[ \frac{1}{2} E \cdot I_x \left( \frac{d^2 v}{dz^2} \right)^2 - q \cdot v \right] dz. \quad (\text{б})$$

Зададим функцию прогибов в виде ряда:

$$v(z) = \sum_{k=1}^n a_k \cdot \left( 1 - \cos \frac{k\pi \cdot z}{2l} \right), \quad k = 1, 3, 5, 7, \dots \quad (\text{в})$$

$$\text{Тогда } \frac{dv(z)}{dz} = \sum_{k=1}^n a_k \cdot \frac{k\pi}{2l} \sin \frac{k\pi \cdot z}{2l}; \quad \frac{d^2 v(z)}{dz^2} = \sum_{k=1}^n a_k \cdot \left( \frac{k\pi}{2l} \right)^2 \cos \frac{k\pi \cdot z}{2l}.$$

Здесь координатные функции  $\xi_k(z) = 1 - \cos \frac{k\pi \cdot z}{2l}$  линейно независимы и удовлетворяют геометрическим граничным условиям:

- ✓ при  $z = 0$   $v(0) = 0$ , то есть  $\xi_k(0) \equiv 0$ ;
- ✓ при  $z = 0$   $\frac{dv(0)}{dz} = 0$ , то есть  $\frac{d\xi_k(0)}{dz} = \frac{k\pi}{2l} \sin \frac{k\pi \cdot z}{2l} \equiv 0$ .

Подставив (в) в формулу (б), получим:

$$\begin{aligned} \mathcal{E} = \int_0^l \left\{ \frac{1}{2} E \cdot I_x \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_i \cdot a_j \left( \frac{i\pi}{2l} \right)^2 \cdot \left( \frac{j\pi}{2l} \right)^2 \cos \frac{i\pi \cdot z}{2l} \cdot \cos \frac{j\pi \cdot z}{2l} - \right. \\ \left. - q \sum_{k=1}^n a_k \left( 1 - \cos \frac{k\pi \cdot z}{2l} \right) \right\} dz. \end{aligned} \quad (\text{г})$$

Заметим, что поскольку  $i$  и  $j$ -нечётные числа, то

$$\text{при } i \neq j \text{ интеграл } \int_0^l \cos \frac{i\pi \cdot z}{2l} \cos \frac{j\pi \cdot z}{2l} dz = 0;$$

$$\text{при } i = j \text{ интеграл } \int_0^l \cos \frac{i\pi \cdot z}{2l} \cos \frac{j\pi \cdot z}{2l} dz = 1.$$

$$\text{Кроме того, } \int_0^l \cos \frac{k\pi \cdot z}{2l} dz = \frac{2l}{k\pi} \sin \frac{k\pi}{2}.$$

При этом выражение (г) получает вид:

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2} E \cdot I_x \cdot l \sum_{k=1}^n a_k^2 \left( \frac{k\pi}{2l} \right)^4 - q \cdot l \sum_{k=1}^n a_k \left( 1 - \frac{2}{k\pi} \sin \frac{k\pi}{2} \right). \quad (\text{д})$$

Согласно условиям (3)

$$\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial a_k} = \frac{1}{2} E \cdot I_x \cdot l \left( \frac{k\pi}{2l} \right)^4 a_k - q \cdot l \left( 1 - \frac{2}{k\pi} \sin \frac{k\pi}{2} \right) = 0, \quad k = 1, 3, 5, 7, \dots,$$

откуда

$$a_k = \frac{32ql^4}{\pi^4 k^4 E \cdot I_x} \left( 1 - \frac{2}{k\pi} \sin \frac{k\pi}{2} \right). \quad (\text{е})$$

Подставив (е) в ряд (в), получим формулу, позволяющую вычислить прогиб в любом сечении консольной балки, нагруженной равномерно распределённой нагрузкой:

$$v(z) = \sum_{k=1}^n \frac{32ql^4}{\pi^4 k^4 E \cdot I_x} \left( 1 - \frac{2}{k\pi} \sin \frac{k\pi}{2} \right) \cdot \left( 1 - \cos \frac{k\pi \cdot z}{2l} \right), \quad k = 1, 3, 5, 7, \dots \quad (\text{ж})$$

Максимальный прогиб будет при  $z = l$ , то есть

$$v_{\max} = v(l) = \sum_{k=1}^n a_k \cdot \left( 1 - \cos \frac{k\pi}{2} \right). \quad (\text{и})$$

Наибольшие напряжения равны:

$$\sigma_{\max} = \frac{E \cdot I_x}{W_x} \left( \frac{d^2 v(z)}{dz^2} \right)_{z=l} = \frac{E \cdot I_x}{W_x} \sum_{k=1}^n a_k \left( \frac{k\pi}{2l} \right)^2. \quad (\text{к})$$

Результаты численных расчётов сведены в таблицу.

	Количество членов ряда (в)	$v_{\max}$	Погрешность в %	$\sigma_{\max}$	Погрешность в %
Приближённое решение	1	$0,11937 \frac{ql^4}{EI_x}$	4,5	$0,29454 \frac{ql^2}{W_x}$	41,3
	2	$0,12429 \frac{ql^4}{EI_x}$	0,57	$0,40372 \frac{ql^2}{W_x}$	19,2
	3	$0,12475 \frac{ql^4}{EI_x}$	0,20	$0,43202 \frac{ql^2}{W_x}$	13,6
	4	$0,12490 \frac{ql^4}{EI_x}$	0,08	$0,45006 \frac{ql^2}{W_x}$	10,0
	5	$0,12496 \frac{ql^4}{EI_x}$	0,03	$0,45936 \frac{ql^2}{W_x}$	8,1
Точное решение		$0,12500 \frac{ql^4}{EI_x}$	-	$0,50000 \frac{ql^2}{W_x}$	-

Приведённая таблица показывает, что точность определения напряжений ниже точности определения перемещений.

Рассмотрим пример использования метода Ритца – Тимошенко для расчёта тонкой пластины, находящейся в условиях изгиба [30].

**Пример 2.**

Найти максимальный прогиб и максимальные изгибающие моменты в тонкой пластинке, шарнирно опёртой по контуру и находящейся под действием равномерно распределённой нагрузки интенсивностью  $q$  (рис. 99).

**Решение.**

Для тонких пластинок, в соответствии с гипотезами Кирхгофа, удельная потенциальная энергия деформации будет равна:

$$U_0 = \frac{1}{2} (\sigma_x \varepsilon_x + \sigma_y \varepsilon_y + \tau_{xy} \gamma_{xy}).$$

Внося сюда напряжения и деформации, выраженные через прогибы срединной поверхности:

$$\begin{aligned} \sigma_x &= -\frac{E \cdot z}{2(1-\nu^2)} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right); & \varepsilon_x &= -z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}; \\ \sigma_y &= -\frac{E \cdot z}{2(1-\nu^2)} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right); & \varepsilon_y &= -z \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}; \\ \tau_{xy} &= -\frac{E \cdot z}{1+\nu} \frac{\partial^2 w}{\partial x \cdot \partial y}; & \gamma_{xy} &= -2z \frac{\partial^2 w}{\partial x \cdot \partial y}, \end{aligned}$$

после элементарных преобразований получаем:

$$U_0 = \frac{E \cdot z^2}{2(1-\nu^2)} \left\{ (\nabla^2 w)^2 - 2(1-\nu) \left[ \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x \cdot \partial y} \right)^2 \right] \right\}.$$

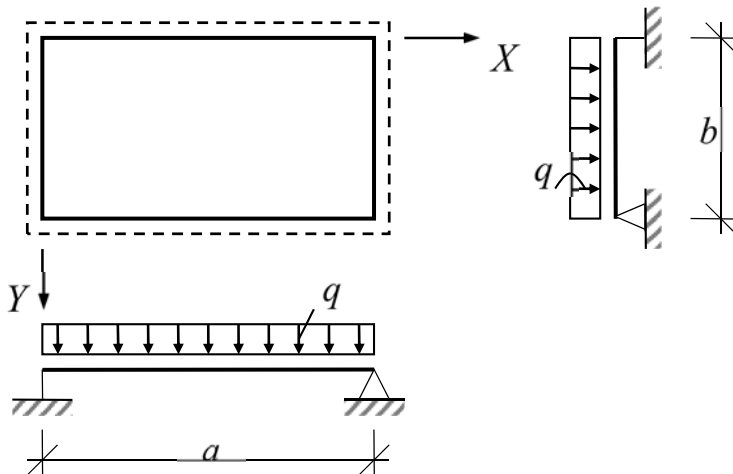


Рис. 99

Потенциальная энергия деформации пластины с учётом того, что прогибы пластины являются функциями только двух пространственных координат  $x$  и  $y$ , будет равна:

$$U = \int_V U_0 dV = \frac{E}{2(1-\nu^2)} \iint_s \left\{ (\nabla^2 w)^2 - 2(1-\nu) \left[ \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x \cdot \partial y} \right) \right] \right\} dx \cdot dy \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} z^2 dz.$$

После интегрирования получим:

$$U = \frac{D}{2} \iint_s \left\{ (\nabla^2 w)^2 - 2(1-\nu) \left[ \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x \cdot \partial y} \right) \right] \right\} dx \cdot dy. \quad (\text{л})$$

Здесь  $D = \frac{E \cdot h^3}{12(1-\nu^2)}$  – цилиндрическая жёсткость.

Для пластины, шарнирно закреплённой по контуру, формула (л) упрощается и принимает вид:

$$U = \frac{D}{2} \iint_s (\nabla^2 w)^2 dx \cdot dy. \quad (\text{м})$$

При вычислении потенциала внешних сил объёмными силами пренебрегаем, и тогда поверхностная нагрузка интенсивности  $q$  на перемещении  $w$  совершит работу, равную:

$$\Pi = - \iint_s q \cdot w \cdot dx \cdot dy. \quad (\text{н})$$

В итоге полная потенциальная энергия деформированного тела (пластины) будет равна:

$$\mathcal{E} = U + \Pi = \iint_s \left[ \frac{D}{2} (\nabla^2 w)^2 - qw \right] dx \cdot dy. \quad (\text{о})$$

Приближённое выражение функции прогибов принимаем в виде двойного ряда по синусам:

$$w(x, y) = \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n a_{kl} \cdot \sin \frac{k\pi \cdot x}{a} \cdot \sin \frac{l\pi \cdot y}{b}. \quad (\text{п})$$

Здесь координатные функции  $\xi_k(x, y) = \sin \frac{k\pi \cdot x}{a} \cdot \sin \frac{l\pi \cdot y}{b}$  линейно независимы и удовлетворяют геометрическим граничным условиям:

✓ при  $x=0$  и  $x=a$  имеем  $w(x,y)=0$ ,  $\frac{\partial^2 w(x,y)}{\partial x^2}=0$ , то есть

$$\begin{aligned}\xi_k(0,y) &\equiv 0, \quad \xi_k(a,y) \equiv 0; \\ \frac{\partial^2 \xi_k(0,y)}{\partial x^2} &= -\left(\frac{k\pi}{a}\right)^2 \sin \frac{k\pi \cdot 0}{a} \sin \frac{l\pi \cdot y}{b} \equiv 0, \\ \frac{\partial^2 \xi_k(a,y)}{\partial x^2} &= -\left(\frac{k\pi}{a}\right)^2 \sin \frac{k\pi \cdot a}{a} \sin \frac{l\pi \cdot y}{b} \equiv 0;\end{aligned}$$

✓ при  $y=0$  и  $y=b$  имеем  $w(x,y)=0$ ,  $\frac{\partial^2 w(x,y)}{\partial y^2}=0$ , то есть

$$\begin{aligned}\xi_k(x,0) &\equiv 0, \quad \xi_k(x,b) \equiv 0; \\ \frac{\partial^2 \xi_k(x,0)}{\partial x^2} &= -\left(\frac{l\pi}{b}\right)^2 \sin \frac{k\pi \cdot x}{a} \sin \frac{l\pi \cdot 0}{b} \equiv 0, \\ \frac{\partial^2 \xi_k(x,b)}{\partial x^2} &= -\left(\frac{l\pi}{b}\right)^2 \sin \frac{k\pi \cdot x}{a} \sin \frac{l\pi \cdot b}{b} \equiv 0.\end{aligned}$$

Подставив формулу (п) в соотношение (м), будем иметь:

$$U = \frac{\pi^4 D}{2} \int_0^a \int_0^b \left[ \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n a_{kl} \left( \frac{k^2}{a^2} + \frac{l^2}{b^2} \right) \sin \frac{k\pi \cdot x}{a} \sin \frac{l\pi \cdot y}{b} \right]^2 dx \cdot dy. \quad (\text{р})$$

Возведение в квадрат двойного ряда равносильно перемножению двух многочленов, где каждый член первого ряда умножается на каждый член второго ряда. Чтобы отличить члены одного ряда от членов другого, в одном из них индексы  $k$  и  $l$  заменим соответственно на  $c$  и  $d$ . Тогда выражение, стоящее в квадратных скобках под интегралом в формуле (р), преобразуется следующим образом:

$$\begin{aligned}& \left[ \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n a_{kl} \left( \frac{k^2}{a^2} + \frac{l^2}{b^2} \right) \sin \frac{k\pi \cdot x}{a} \sin \frac{l\pi \cdot y}{b} \right]^2 = \\ &= \left[ \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n a_{kl} \left( \frac{k^2}{a^2} + \frac{l^2}{b^2} \right) \sin \frac{k\pi \cdot x}{a} \sin \frac{l\pi \cdot y}{b} \right] \times \\ & \times \left[ \sum_{c=1}^n \sum_{d=1}^n a_{cd} \left( \frac{c^2}{a^2} + \frac{d^2}{b^2} \right) \sin \frac{c\pi \cdot x}{a} \sin \frac{d\pi \cdot y}{b} \right] = \\ &= \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n \sum_{c=1}^n \sum_{d=1}^n a_{kl} a_{cd} \left( \frac{k^2}{a^2} + \frac{l^2}{b^2} \right) \cdot \left( \frac{c^2}{a^2} + \frac{d^2}{b^2} \right) \times \\ & \times \sin \frac{k\pi \cdot x}{a} \sin \frac{l\pi \cdot y}{b} \cdot \sin \frac{c\pi \cdot x}{a} \sin \frac{d\pi \cdot y}{b}.\end{aligned}$$

Подставим этот ряд в формулу (р). Меняя порядок интегрирования и суммирования, а также вынося постоянные величины за знак интеграла, получаем:

$$U = \frac{\pi^4 D}{2} \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n \sum_{c=1}^n \sum_{d=1}^n a_{kl} a_{cd} \left( \frac{k^2}{a^2} + \frac{l^2}{b^2} \right) \cdot \left( \frac{c^2}{a^2} + \frac{d^2}{b^2} \right) \times \\ \times \int_0^a \sin \frac{k\pi \cdot x}{a} \cdot \sin \frac{c\pi \cdot x}{a} dx \cdot \int_0^b \sin \frac{l\pi \cdot y}{b} \cdot \sin \frac{d\pi \cdot y}{b} dy. \quad (с)$$

Первый из интегралов в формуле (с) равен:

$$\int_0^a \sin \frac{k\pi \cdot x}{a} \cdot \sin \frac{c\pi \cdot x}{a} dx \begin{cases} = 0, & \text{если } k \neq c; \\ = \frac{a}{2}, & \text{если } k = c. \end{cases}$$

Второй из интегралов в формуле (с):

$$\int_0^b \sin \frac{l\pi \cdot y}{b} \cdot \sin \frac{d\pi \cdot y}{b} dy \begin{cases} = 0, & \text{если } l \neq d; \\ = \frac{b}{2}, & \text{если } l = d. \end{cases}$$

С учётом сказанного потенциальная энергия деформации пластины получает вид:

$$U = \frac{\pi^4 D \cdot a \cdot b}{8} \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n a_{kl}^2 \left( \frac{k^2}{a^2} + \frac{l^2}{b^2} \right)^2. \quad (т)$$

Подставим функцию прогибов (п) в формулу для потенциала внешних сил (н). Получим:

$$\Pi = -q \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n a_{kl} \int_0^a \sin \frac{k\pi \cdot x}{a} dx \cdot \int_0^b \sin \frac{l\pi \cdot y}{b} dy = -\frac{4q \cdot a \cdot b}{\pi^2} \sum_k \sum_l \frac{a_{kl}}{k \cdot l}. \quad (у)$$

Здесь  $k = 1, 3, 5, 7, \dots$ ;  $l = 1, 3, 5, 7, \dots$

Полная потенциальная энергия деформированного тела (пластины) с учётом соотношений (т) и (у) будет равна:

$$\mathcal{E} = \sum_k \sum_l \left[ \frac{\pi^4 D \cdot a \cdot b}{8} a_{kl}^2 \left( \frac{k^2}{a^2} + \frac{l^2}{b^2} \right)^2 - \frac{4q \cdot a \cdot b}{\pi^2} \cdot \frac{a_{kl}}{k \cdot l} \right]. \quad (ф)$$

Здесь  $k = 1, 3, 5, 7, \dots$ ;  $l = 1, 3, 5, 7, \dots$

Коэффициенты  $a_{kl}$  нужно выбирать так, чтобы полная потенциальная энергия деформированного тела имела минимум, то есть

$$\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial a_{kl}} = \frac{\pi^4 D \cdot a \cdot b}{8} 2a_{kl} \left( \frac{k^2}{a^2} + \frac{l^2}{b^2} \right)^2 - \frac{4q \cdot a \cdot b}{\pi^2} \cdot \frac{1}{k \cdot l} = 0.$$

Отсюда находим:

$$a_{kl} = \frac{16q}{\pi^6 D \cdot k \cdot l} \left( \frac{k^2}{a^2} + \frac{l^2}{b^2} \right)^{-2}, \quad k = 1, 3, 5, 7, \dots; \quad l = 1, 3, 5, 7, \dots \quad (\text{х})$$

С учётом коэффициентов (х), прогибы (п) в пластине будут определяться по формуле

$$w(x, y) = \frac{16q}{\pi^6 D \cdot k \cdot l} \sum_k \sum_l \frac{1}{k \cdot l} \left( \frac{k^2}{a^2} + \frac{l^2}{b^2} \right)^{-2} \sin \frac{k\pi \cdot x}{a} \cdot \sin \frac{l\pi \cdot y}{b}. \quad (\text{ц})$$

Здесь  $k = 1, 3, 5, 7, \dots; \quad l = 1, 3, 5, 7, \dots$

Рассмотрим приближённое решение, ограничиваясь одним членом ряда (ц). Тогда

$$w_1(x, y) = \frac{16q \cdot a^4}{\pi^6 D} \left( 1 + \frac{a^2}{b^2} \right)^{-2} \sin \frac{\pi \cdot x}{a} \cdot \sin \frac{\pi \cdot y}{b}. \quad (\text{ч})$$

Отсюда следует, что максимальный прогиб возникает в центре пластины (при  $x = \frac{a}{2}$  и  $y = \frac{b}{2}$ ) и для квадратной пластины ( $a = b$ ) и коэффициент Пуассона  $\nu = 0,3$  будет равен:  $\max w_1 = 0,0455 \frac{q \cdot a^4}{E \cdot h^3}$ . Прибли-

жённое значение отличается от точного  $\max w = 0,0443 \frac{q \cdot a^4}{E \cdot h^3}$  на 2,7 %.

Подставив в формулы для изгибающих моментов  $M_x = -D \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)$  и  $M_y = -D \left( \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)$  приближённое решение (ч), получим следующие соотношения:

$$M_x = \frac{16q \cdot a^2}{\pi^4} \frac{1 + \nu \frac{a^2}{b^2}}{\left( 1 + \frac{a^2}{b^2} \right)^2} \sin \frac{\pi \cdot x}{a} \cdot \sin \frac{\pi \cdot y}{b};$$

$$M_y = \frac{16q \cdot a^2}{\pi^4} \frac{\nu + \frac{a^2}{b^2}}{\left( 1 + \frac{a^2}{b^2} \right)^2} \sin \frac{\pi \cdot x}{a} \cdot \sin \frac{\pi \cdot y}{b}.$$



Максимальные изгибающие моменты также возникают в центре пластины  $\left( \text{при } x = \frac{a}{2} \text{ и } y = \frac{b}{2} \right)$  и для квадратной пластины  $(a = b)$ , и коэффициент Пуассона  $\nu = 0,3$  будет равен:  $\max M_x = \max M_y = 0,0535q \cdot a^2$ . Приближённое значение отличается от точного  $\max M = 0,0479q \cdot a^2$  на 11,7 %.

Таким образом, и при расчёте тонких пластин методом Ритца – Тимошенко точность определения перемещений выше точности определения изгибающих моментов. Вычисление поперечных сил показывает, что точность их определения ещё ниже.

## §21. Метод Бубнова – Галёркина

Метод Бубнова – Галёркина является одним из методов приближённого решения краевых задач для дифференциальных уравнений прикладной теории упругости. Его идея была высказана кораблестроителем проф. И.Г.Бубновым в 1913 году. Независимо от него этот метод был широко использован академиком Б.Г.Галёркиным в 1915 году при решении задач прикладной теории упругости.

Метод Бубнова – Галёркина основан на свойстве ортогональных функций  $\psi_0(x_1, x_2, \dots, x_m)$ ,  $\psi_1(x_1, x_2, \dots, x_m)$ , ...,  $\psi_n(x_1, x_2, \dots, x_m)$  обращать в нуль интеграл от произведения любых двух различных функций этого семейства на заданном промежутке  $x_1, x_2, \dots, x_m \in [S]$ :

$$\int_S \psi_k(x_1, x_2, \dots, x_m) \cdot \psi_i(x_1, x_2, \dots, x_m) \cdot dx_1 \cdot dx_2 \cdot \dots \cdot dx_m = 0. \quad (1)$$

Здесь  $S$  – область решения краевой задачи.

С формально-математической точки зрения этот метод состоит в следующем. Пусть дано дифференциальное уравнение

$$L[\omega(x_1, x_2, \dots, x_m)] = 0. \quad (2)$$

Здесь символом  $L$  обозначен дифференциальный оператор уравнения. Например, для стержня, находящегося в условиях плоского поперечного изгиба,

$$L[v(z)] \equiv EIv''''(z) - q(z); \quad (3)$$

для плоской задачи теории упругости

$$L[\varphi(x, y)] \equiv \frac{\partial^4 \varphi(x, y)}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 \varphi(x, y)}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \varphi(x, y)}{\partial y^4}; \quad (4)$$

для изгиба тонких пластин

$$L[w(x, y)] \equiv D \left[ \frac{\partial^4 w(x, y)}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w(x, y)}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w(x, y)}{\partial y^4} \right] - q(x, y). \quad (5)$$

Решение дифференциального уравнения (2) будем искать в виде следующего ряда:

$$\tilde{\omega}(x_1, x_2, \dots, x_m) = \sum_{j=1}^N \alpha_j \cdot f_j(x_1, x_2, \dots, x_m). \quad (6)$$

Здесь  $\alpha_j$  – неизвестные постоянные множители, подлежащие определению;  $f_j(x_1, x_2, \dots, x_m)$  – координатные (базисные) функции, которые задаём так, чтобы они удовлетворяли всем (кинематическим и силовым) граничным условиям.

Вполне понятно, что уравнение (2) с решением (6) в самом общем случае не будет равно тождественно нулю, то есть  $L[\tilde{\omega}(x_1, x_2, \dots, x_m)] \neq 0$ . В каждой точке области решения задачи  $S$  величина  $L[\tilde{\omega}(x_1, x_2, \dots, x_m)]$  будет иметь своё значение, отличное, вообще говоря, от нуля. Эту величину называют *функцией-ошибкой*.

Если бы дифференциальный оператор  $L[\tilde{\omega}(x_1, x_2, \dots, x_m)]$  был равен точно нулю, то функция  $L[\tilde{\omega}(x_1, x_2, \dots, x_m)]$  была бы ортогональна к любой функции  $F(x_1, x_2, \dots, x_m)$  в области  $S$ , то есть

$$\int_S L[\tilde{\omega}(x_1, x_2, \dots, x_m)] \cdot F(x_1, x_2, \dots, x_m) \cdot dx_1 \cdot dx_2 \cdot \dots \cdot dx_m = 0. \quad (7)$$

Не имея такой возможности, но стремясь к минимальной величине функции-ошибки, потребуем, чтобы она (функция-ошибка) была ортогональна к каждой из базисных функций  $f_j(x_1, x_2, \dots, x_m)$ :

$$\int_S L[\tilde{\omega}(x_1, x_2, \dots, x_m)] \cdot f_i(x_1, x_2, \dots, x_m) \cdot dx_1 \cdot dx_2 \cdot \dots \cdot dx_m = 0. \quad (8)$$

Здесь  $i = 1, 2, \dots, N$ .

Для линейного дифференциального оператора (2)

$$L[\omega(x_1, x_2, \dots, x_m)] = \sum_j \alpha_j \cdot L[f_j(x_1, x_2, \dots, x_m)].$$

В силу этого, после подстановки решения (6) в уравнение (8) и замены интеграла от суммы суммой интегралов, получим систему линейных алгебраических уравнений:

$$\left. \begin{aligned} a_{11} \cdot \alpha_1 + a_{12} \cdot \alpha_2 + \dots + a_{1N} \cdot \alpha_N + b_1 &= 0; \\ a_{21} \cdot \alpha_1 + a_{22} \cdot \alpha_2 + \dots + a_{2N} \cdot \alpha_N + b_2 &= 0; \\ \dots &\dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ a_{N1} \cdot \alpha_1 + a_{N2} \cdot \alpha_2 + \dots + a_{NN} \cdot \alpha_N + b_N &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

Здесь

$$a_{ij} = \int_S L^* [f_i(x_1, x_2, \dots, x_m)] \cdot f_j(x_1, x_2, \dots, x_m) \cdot dx_1 \cdot dx_2 \cdot \dots \cdot dx_m; \quad (10)$$

$$b_i = \int_S L^0(x_1, x_2, \dots, x_m) \cdot f_i(x_1, x_2, \dots, x_m) \cdot dx_1 \cdot dx_2 \cdot \dots \cdot dx_m; \quad (11)$$

$L^0(x_1, x_2, \dots, x_m)$  – свободные члены оператора  $L$ ;

$L^*(x_1, x_2, \dots, x_m)$  – оператор  $L$  за исключением свободных членов.

Решение системы уравнений (9) и даёт искомые коэффициенты  $\alpha_j$  разложения (6).

Если уравнение (2) нелинейное, то и система (9) относительно  $\alpha_j$  также будет нелинейной.

Методу Бубнова – Галёркина можно дать вариационную трактовку, если задача, описываемая исходным дифференциальным уравнением (2), допускает вариационную постановку. Действительно, рассмотрим, например, линейный дифференциальный оператор для изгиба пластин (5). Функция  $D \cdot \nabla^4 \tilde{w}(x, y) - q(x, y)$  представляет собой проекцию на ось  $Z$  всех внешних и внутренних сил, действующих на бесконечно малый элемент пластины. Функция прогибов  $\tilde{w}(x, y)$  есть перемещение в направлении той же оси. Значит, функции  $f_i(x, y)$  тоже являются перемещениями в направлении оси  $Z$  и их вполне можно считать возможными перемещениями. Следовательно, уравнения Бубнова – Галёркина (8) приближённо выражают равенство нулю работы всех внешних и внутренних сил в пластине на возможных перемещениях.

Таким образом, метод Бубнова – Галёркина, как и метод Ритца – Тимошенко, исходит из принципа возможных перемещений, поэтому оба метода равноправны. В обоих случаях аппроксимирующую функцию необходимо выбирать так, чтобы она удовлетворяла геометрическим граничным условиям. Выполнение статических условий необязательно.

Так как уравнение (8) можно трактовать как выражение принципа возможных перемещений, то в качестве базисных функций  $f_j(x_1, x_2, \dots, x_m)$ , в

зависимости от смысла дифференциального оператора  $L$ , следует брать не сами функции  $f_j$ , а какую-либо производную от функции  $f_j$  так, чтобы подынтегральное выражение в формуле (8) давало элементарную работу. Опыт показывает, что такой подход обеспечивает большую точность при удержании одного и того же числа членов ряда.

Рассмотрим пример использования метода Бубнова – Галёркина для расчёта изгибаемого стержня [24].

**Пример 1.**

Определить наибольший прогиб и максимальные напряжения, возникающие под действием равномерно распределённой нагрузки интенсивностью  $q$  в консольной балке длиной  $l$  с площадью поперечного сечения  $A$  (рис. 100).

**Решение.**

Дифференциальное уравнение изогнутой оси стержня имеет вид:

$$EI_x \frac{d^2v(z)}{dz^2} - \frac{1}{2}q(l-z)^2 = 0. \quad (a)$$

В качестве функции  $\tilde{w}(z)$ , см. формулу (6), примем ряд:

$$\frac{d^2v(z)}{dz^2} = \sum_{n=1,3,5}^{\infty} a_n \left( 1 - \sin \frac{n\pi z}{2l} \right)$$

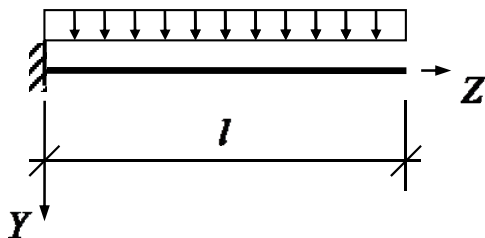


Рис. 100

и в дальнейшем ограничимся одним (первым) членом этого ряда, то есть

$$\frac{d^2v(z)}{dz^2} = a_1 \left( 1 - \sin \frac{\pi z}{2l} \right). \quad (б)$$

Интегрируя соотношение (б), получаем:

$$v(z) = a_1 \left[ \frac{z^2}{2} + \left( \frac{2l}{\pi} \right)^2 \sin \frac{\pi z}{2l} + Az + B \right]. \quad (в)$$

Постоянные интегрирования  $A$  и  $B$  найдём из условий в заделке: при  $z=0$  имеем  $v(0)=0$  и  $\frac{dv(0)}{dz}=0$ , то есть  $A=-\frac{2l}{\pi}$ ,  $B=0$ . Уравнение (в) получает вид:

$$v(z) = a_1 \left[ \frac{z^2}{2} + \left( \frac{2l}{\pi} \right)^2 \sin \frac{\pi z}{2l} - \frac{2lz}{\pi} \right]. \quad (г)$$

Таким образом, функция

$$f_1(z) = \frac{z^2}{2} + \left(\frac{2l}{\pi}\right)^2 \sin \frac{\pi z}{2l} - \frac{2lz}{\pi}. \quad (\text{д})$$

В соответствии с процедурой Бубнова – Галёркина, подставляем выражение (г) в уравнение (а), умножаем результат на функцию (д) и интегрируем полученное произведение по  $z$  от нуля до  $l$ :

$$\int_0^l \left[ EI_x a_1 \left( 1 - \sin \frac{\pi z}{2l} \right) - \frac{1}{2} q (l - z)^2 \right] \cdot \left[ \frac{z^2}{2} + \left(\frac{2l}{\pi}\right)^2 \sin \frac{\pi z}{2l} - \frac{2lz}{\pi} \right] \cdot dz = 0.$$

В результате получаем:

$$a_1 = \frac{ql^2}{2EI_x} \frac{\frac{1}{60} - \frac{1}{6\pi} + \frac{8}{\pi^3} - \frac{64}{\pi^5}}{\frac{1}{6} - \frac{1}{\pi} - \frac{6}{\pi^2} + \frac{24}{\pi^3}}.$$

В соответствии с формулой (г)

$$v_{\max} = v(l) = a_1 \left[ \frac{l^2}{2} + \left(\frac{2l}{\pi}\right)^2 - \frac{2l^2}{\pi} \right] = 0,11598 \frac{ql^4}{EI_x}.$$

Найдём максимальное нормальное напряжение:

$$\sigma_z^{\max} = \sigma_z(0) = \frac{EI_x}{W_x} \frac{d^2 v_{\max}}{dz^2} = \frac{EI_x}{W_x} a_1 = 0,43170 \frac{ql^2}{W_x}.$$

Сопоставляя полученные результаты с результатами решения данной задачи методом Ритца – Тимошенко, видим, что точность вполне удовлетворительная.

Рассмотрим пример использования метода Бубнова – Галёркина для расчёта тонкой пластины, находящейся в условиях изгиба [25].

**Пример 2.**

Прямоугольная пластина размером  $2a$  на  $2b$  и толщиной  $h$  закреплена на краях  $x = \pm a$  и свободно опирается на краях  $y = \pm b$ . Нагрузка – равномерно распределённое давление интенсивностью  $q$ . Определить прогиб в центре пластины, если коэффициент поперечной деформации материала пластины  $\nu = 0,3$ .

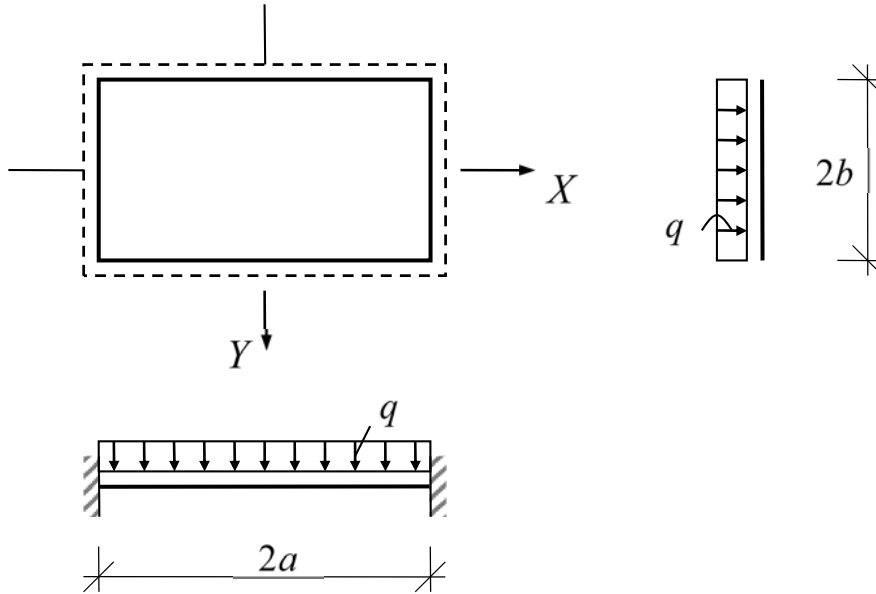


Рис. 101

Решение.

В качестве функции  $\tilde{w}(x, y)$ , см. формулу (6), примем ряд

$$w(x, y) = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} w_m \left( 1 + \cos \frac{(2n-1)\pi x}{a} \right) \cos \frac{(2m-1)\pi y}{2b} \quad (\text{а})$$

и в дальнейшем ограничимся одним (первым) членом этого ряда, то есть

$$w(x, y) = \frac{1}{2} w_0 \left( 1 + \cos \frac{\pi x}{a} \right) \cos \frac{\pi y}{2b}. \quad (\text{б})$$

Легко видеть, что условия на контуре пластины при этом выполняются.

Подставим уравнение (б) в дифференциальное уравнение изогнутой срединной поверхности пластины:

$$\frac{\partial^4 w(x, y)}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w(x, y)}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w(x, y)}{\partial y^4} - \frac{p}{D} = 0.$$

В итоге получим:

$$w_0 \frac{\pi^4}{2} \left[ \frac{1}{a^4} \cos \frac{\pi x}{a} + \frac{1}{2a^2 b^2} \cos \frac{\pi x}{a} + \frac{1}{16b^4} \left( 1 + \cos \frac{\pi x}{a} \right) \right] \cos \frac{\pi y}{2b} - \frac{p}{D} \neq 0.$$

Умножая это выражение на  $\left(1 + \cos \frac{\pi x}{a}\right) \cos \frac{\pi y}{2b}$  и интегрируя в пределах от  $-a$  до  $+a$  и от  $-b$  до  $+b$ , получаем:

$$w_0 = \frac{192pb^4(1-\nu^2)}{Eh^3\pi^5\left(\frac{3}{16} + \frac{b^2}{2a^2} + \frac{b^4}{a^4}\right)}.$$

Таким образом, уравнение изогнутой срединной поверхности пластины (а) получает вид:

$$w(x, y) = \frac{96pb^4(1-\nu^2)}{Eh^3\pi^5\left(\frac{3}{16} + \frac{b^2}{2a^2} + \frac{b^4}{a^4}\right)} \left(1 + \cos \frac{\pi x}{a}\right) \cos \frac{\pi y}{2b}. \quad (в)$$

Прогиб в центре пластины при  $x=0$  и  $y=0$ , как это следует из соотношения (в), будет равен  $w_0$ .

Численные расчёты показывают, что:

- ✓ при  $a=b$ ,  $w_0 = 0,338 \frac{pb^4}{Eh^3}$ ; точное значение  $w_0 = 0,342 \frac{pb^4}{Eh^3}$ ;
- ✓ при  $a=2b$ ,  $w_0 = 1,520 \frac{pb^4}{Eh^3}$ ; точное значение  $w_0 = 1,580 \frac{pb^4}{Eh^3}$ ;
- ✓ при  $a=3b$ ,  $w_0 = 2,240 \frac{pb^4}{Eh^3}$ ; точное значение  $w_0 = 2,040 \frac{pb^4}{Eh^3}$ .

Сопоставление результатов показывает, что точность решения, полученного по методу Бубнова – Галёркина, вполне удовлетворительна.

Метод Бубнова – Галёркина можно также с уверенностью применять и при определении напряжений, возникающих в пластинах. При этом желательно, однако, решать задачу, по крайней мере, во втором приближении, то есть сохранять в разложении (б) не менее двух членов ряда.

## §22. Метод конечных элементов

*Метод конечных элементов (МКЭ)* – основной метод современной строительной механики и механики деформируемого твёрдого тела, лежащий в основе подавляющего большинства современных программных комплексов, предназначенных для выполнения расчётов строительных конструкций на ЭВМ.

Метод конечных элементов впервые был применён в инженерной практике в начале 50-х гг. XX в. Первоначально он развивался по двум независимым друг от друга направлениям – инженерному и математическому.

На раннем этапе формулировки МКЭ основывались на принципах строительной механики. Позднее, когда были сформулированы основы метода в вариационной постановке, стало возможным распространение его на другие задачи механики деформируемого твёрдого тела: оптимальное проектирование, учёт нелинейного поведения, динамику конструкций и т.п.

Развитие МКЭ шло параллельно с эволюцией современных информационных технологий в различных областях науки и инженерной практики.

Значительный вклад в разработку МКЭ был сделан Дж. Аргирисом. Им впервые дана общая матричная формулировка расчёта стержневых систем на базе фундаментальных энергетических принципов, определена матрица податливости, а также введено понятие матрицы жёсткости. Работы Дж. Аргириса и его сотрудников, опубликованные в период 1954–1960 гг., стали отправной точкой для матричной формулировки известных численных методов и применения ЭВМ в расчётах конструкций.

Для развития МКЭ особое значение имели вариационные принципы механики и математические методы, основанные на этих принципах. Дискретизацию задачи на основе вариационного метода Ритца впервые в 1943 г. применил Р. Курант. Лишь в 1950-е гг. появились аналогичные работы Ж. Поли, Ж. Герша и др.

Первая работа, в которой была изложена современная концепция МКЭ, относится к 1956 г. Американские учёные М. Тэрнер, Р. Клафф, Г. Мартин и Л. Топп, решая плоскую задачу теории упругости, ввели конечный элемент треугольного вида, для которого сформировали матрицу жёсткости и вектор узловых сил. Название *метод конечных элементов* ввёл в 1960 г. Р. Клафф. В период 1960–1965 гг. опубликованы работы, в которых на основе вариационных принципов получены матрицы жёсткости конечных элементов для решения задач изгиба плит, тонких оболочек, массивов. Среди них следует отметить работы Р. Мак-Лейа, Р. Мелоша, Дж. Бесселина, Ф. де Веубеке, М. Джонса, Т. Пиана. В 1967 г. издана первая монография о МКЭ О. Зенкевича и И. Чанга, в которой рассмотрены основы метода и область его применения. К семидесятым годам XX века относится появление математической теории конечных элементов. Здесь можно выделить труды Р. Галлагера, Ж. Деклу, Дж. Одена, Г. Стренга, Дж. Фикса, А. Розина и др.

Метод конечных элементов, как и многие другие численные методы, основан на представлении реальной конструкции её дискретной моделью и замене дифференциальных уравнений, описывающих напряжённо-деформированное состояние сплошных тел, системой алгебраических уравнений. Вместе с тем метод конечных элементов допускает ясную геометрическую, конструктивную и физическую интерпретацию.

Метод конечных элементов в математическом плане относится к группе вариационно-разностных. Устойчивость, сходимость и точность метода в общем случае ещё не имеют строгого математического доказательства. Правильность работы созданных алгоритмов и программ, реализующих



метод конечных элементов, проверяют на известных точных решениях либо путём эксперимента. На практике получают суждение о точности и сходимости метода, оценивая результаты расчётов с его использованием по мере увеличения числа вкладываемых в рассматриваемую область конечных элементов (рис. 102). Если по мере увеличения числа узловых точек решение стремится к определённым результатам, то это в некоторой мере служит гарантией возможности достижения нужной точности.

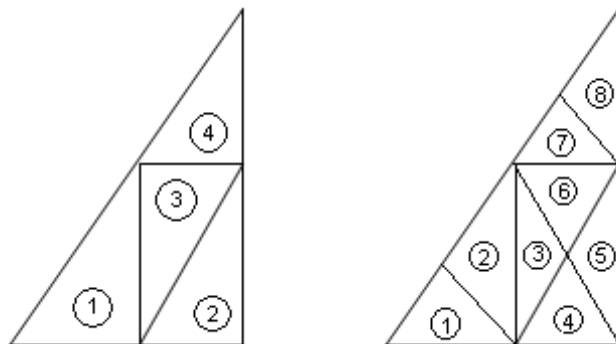


Рис. 102

В методе конечных элементов область, где ищется решение, разбивается с помощью сетки, в общем случае неравномерной, на отдельные подобласти – конечные элементы. Конечный элемент может иметь произвольную форму: треугольник, прямоугольник, ромб и так далее – для плоской задачи; параллелепипед, тетраэдр, пирамида и так далее – для пространственной задачи.

Искомая непрерывная функция, определяющая напряжённо-деформированное состояние тела (функция перемещений, функция напряжений), аппроксимируется кусочно-непрерывной, определённой на множестве конечных элементов. Аппроксимация может задаваться произвольным образом, но чаще всего для этих целей используются полиномы, которые подбираются так, чтобы обеспечить непрерывность искомой функции в узлах на границах элементов.

При реализации метода конечных элементов возможны два подхода.

#### 1. Решение в напряжениях.

Решение в напряжениях заключается в задании поля возможных напряжений. В этом случае к узловым точкам относят напряжения  $\sigma_x^i$ ,  $\sigma_y^i$ ,  $\tau_{xy}^i$  (плоская задача) и вводят предположения об их распределении, в частности линейном, в пределах каждого конечного элемента. Далее определяют деформации и перемещения как функции узловых напряжений. Используя потом условие минимума дополнительной энергии, приходят к системе линейных алгебраических уравнений относительно узловых напряжений. Далее решается обратная задача теории упругости, когда в каждой точке тела (в каждом узле) известны напряжения. Подобный подход является аналогом классического метода сил строительной механики.

## 2. Решение в перемещениях.

Решение в перемещениях заключается в задании поля возможных перемещений. В этом случае каждому  $i$ -му узлу становятся в соответствие перемещения  $u_i$  и  $v_i$ . Далее вводится предположение о линейном распределении перемещений в пределах каждого конечного элемента. Имея выражения для перемещений, нетрудно найти деформации и напряжения. Минимизируя далее функцию полной потенциальной энергии деформируемого тела, придём к системе линейных алгебраических уравнений, определяющих неизвестные (искомые) перемещения узлов. Далее решается обратная задача теории упругости, когда в каждой точке тела (в каждом узле) известны перемещения. Полученная система алгебраических уравнений является аналогом канонических уравнений метода перемещений строительной механики.

## 3. Смешанный метод.

Возможно построение такого решения, при котором частью неизвестных являются перемещения узловых точек, а частью – напряжения в узлах. В этом случае получаемая система алгебраических уравнений является аналогом смешанного метода строительной механики.

В методе конечных элементов полную энергию системы представляют как сумму энергий, каждую из которых относят к соответствующему конечному элементу. Такое отношение энергии к конкретному по форме элементу даёт возможность получить сравнительно простые формулы, исключая необходимость проведения достаточно громоздких вычислений в каждом отдельном случае.

### *Основное уравнение метода конечных элементов*

Рассмотрим сплошное, однородное, изотропное, упругое тело, находящееся в равновесии под действием объёмных  $\bar{\mathbf{F}}$  и поверхностных  $\mathbf{p}$  сил (рис. 103). Разобьём это тело на отдельные подобласти (конечные элементы) одинаковой формы и, если это необходимо, разных размеров так, чтобы все внешние силы были приложены в вершинах элементов.

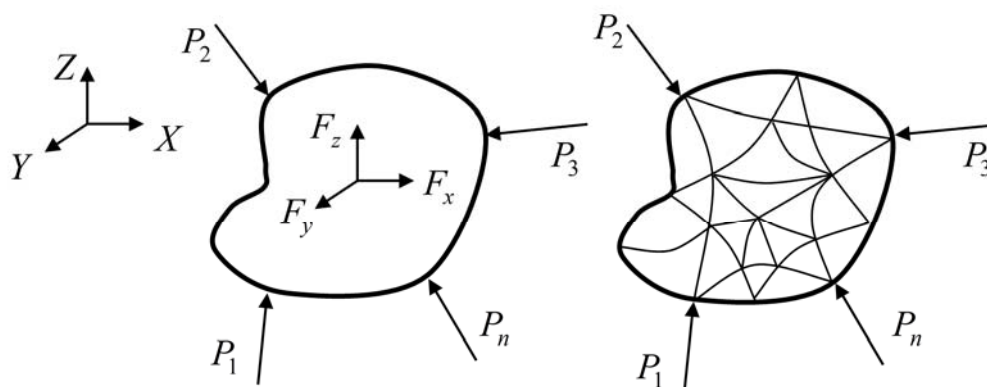


Рис. 103

Неизвестные компоненты перемещений вершин элементов обозначим через  $u_i, v_i, w_i; i = 1, 2, \dots, n$ . Здесь  $n$  – число вершин конечных элементов.

В соответствии с процедурой Ритца функции перемещений примем в виде следующих рядов:

$$\left. \begin{aligned} u(x, y, z) &= \sum_{i=1}^n u_i \cdot f_i(x, y, z); \\ v(x, y, z) &= \sum_{i=1}^n v_i \cdot \varphi_i(x, y, z); \\ w(x, y, z) &= \sum_{i=1}^n w_i \cdot \psi_i(x, y, z). \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

Здесь  $f_i(x, y, z), \varphi_i(x, y, z), \psi_i(x, y, z)$  – координатные функции, то есть функции, удовлетворяющие кинематическим граничным условиям, а также условиям сплошности (непрерывности) в узлах.

Полная потенциальная энергия деформированного тела будет определяться уравнением

$$\mathcal{E} = U(u, v, w) - \Pi(\bar{\mathbf{F}}, \bar{\mathbf{P}}), \quad (2)$$

где  $U(u, v, w)$  – потенциальная энергия деформации тела;  $\Pi(\bar{\mathbf{F}}, \bar{\mathbf{P}})$  – потенциал внешних сил.

$$\begin{aligned} U(u, v, w) &= \frac{1}{2} \iiint_V \bar{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \bar{\boldsymbol{\varepsilon}} \cdot dV = G \iiint_V \left\{ \frac{1-\nu}{1-2\nu} \left[ \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial w}{\partial z} \right)^2 \right] + \right. \\ &+ \frac{2\nu}{1-2\nu} \left[ \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial y} \cdot \frac{\partial w}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial z} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} \right] + \\ &\left. + \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 \right] \right\} dV, \quad (3) \end{aligned}$$

$$\Pi(\bar{\mathbf{F}}, \bar{\mathbf{P}}) = \iiint_V (F_x \cdot u + F_y \cdot v + F_z \cdot w) dV + \iint_S (P_{nx} \cdot u + P_{ny} \cdot v + P_{nz} \cdot w) dS. \quad (4)$$

Поскольку рассматривается тело, состоящее из конечного числа отдельных элементов, интегрирование в уравнениях (3) и (4) следует заменить суммированием.

Из уравнения (3) видно, что потенциальная энергия деформации тела является квадратичной функцией от перемещений его точек. В соответствии с выражением (1) перемещения точек тела являются функцией первой степени от перемещений вершин элементов. Тогда потенциальная деформация

тела может быть представлена как квадратная функция от перемещений вершин конечных элементов  $u_i, v_i, w_i$ , то есть

$$U(u, v, w) = \sum_{i=1}^n \left[ \alpha_i u_i^2 + \beta_i v_i^2 + \gamma_i w_i^2 + 2(\delta_i u_i v_i + \varepsilon_i v_i w + \xi_i w_i u_i) \right]. \quad (5)$$

Сопоставляя уравнения (3) и (5), можно ожидать, что неизвестные коэффициенты  $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i, \delta_i, \varepsilon_i, \xi_i$  будут функциями механических констант среды и координат вершин элементов.

Обозначим вектор перемещений вершин элементов, слагающих тело, матрицей-столбцом:

$$\bar{\mathbf{U}} = (u_1, u_2, \dots, u_n; v_1, v_2, \dots, v_n; w_1, w_2, \dots, w_n)^T. \quad (6)$$

Тогда выражение для потенциальной энергии деформации тела (5) в матричной форме можно записать так:

$$U(u, v, w) = \frac{1}{2} \bar{\mathbf{U}}^T \cdot \mathbf{K} \cdot \bar{\mathbf{U}}. \quad (7)$$

Здесь  $\mathbf{K}$  – квадратная матрица порядка  $3n$ .

Матрица  $\mathbf{K}$  имеет следующую структуру:

$$\mathbf{K} = \begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 & \dots & 0 & \delta_1 & 0 & \dots & 0 & \xi_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \alpha_2 & \dots & 0 & 0 & \delta_2 & \dots & 0 & 0 & \xi_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \alpha_n & 0 & 0 & \dots & \delta_n & 0 & 0 & \dots & \xi_n \\ \delta_1 & 0 & \dots & 0 & \beta_1 & 0 & \dots & 0 & \varepsilon_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \delta_2 & \dots & 0 & 0 & \beta_2 & \dots & 0 & 0 & \varepsilon_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \delta_n & 0 & 0 & \dots & \beta_n & 0 & 0 & \dots & \varepsilon_n \\ \xi_1 & 0 & \dots & 0 & \varepsilon_1 & 0 & \dots & 0 & \gamma_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \xi_2 & \dots & 0 & 0 & \varepsilon_2 & \dots & 0 & 0 & \gamma_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \xi_n & 0 & 0 & \dots & \varepsilon_n & 0 & 0 & \dots & \gamma_n \end{pmatrix}. \quad (8)$$

Для доказательства достаточно выполнить матричное умножение в формуле (8) и получить формулу (5).

Из уравнения (4) видно, что потенциал внешних сил выражается функцией первой степени от перемещений точек тела или, с учетом формулы (1), – от перемещений вершин элементов, то есть

$$\Pi(\bar{\mathbf{F}}, \bar{\mathbf{P}}) = \sum_{i=1}^n (F_{xi} \cdot u_i + F_{yi} \cdot v_i + F_{zi} \cdot w_i). \quad (9)$$

Здесь  $F_{xi}, F_{yi}, F_{zi}$  – компоненты внешних сил (поверхностных и объёмных), приложенных к вершинам элементов.

Обозначим вектор узловых внешних сил, приложенных к вершинам элементов, слагающих тело, матрицей столбцом:

$$\bar{\mathbf{F}} = (F_{x1}, F_{x2}, \dots, F_{xn}; F_{y1}, F_{y2}, \dots, F_{yn}; F_{z1}, F_{z2}, \dots, F_{zn})^T. \quad (10)$$

Тогда уравнение потенциала узловых сил (9) в матричной форме запишется так:

$$\Pi(\bar{\mathbf{F}}, \bar{\mathbf{P}}) = \bar{\mathbf{U}}^T \cdot \bar{\mathbf{F}}. \quad (11)$$

Уравнение полной потенциальной энергии деформированного тела (2), принимая во внимание соотношения (7) и (11), в матричной форме будет иметь вид:

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2} \bar{\mathbf{U}}^T \cdot \mathbf{K} \cdot \bar{\mathbf{U}} - \bar{\mathbf{U}}^T \cdot \bar{\mathbf{F}}. \quad (12)$$

Для определения действительных перемещений вершин конечных элементов, составляющих исследуемое тело, найдём минимум потенциальной энергии (12):

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial u_i} &= 2 \sum_{i=1}^n (\alpha_i u_i + \delta_i v_i + \xi_i w_i) - \sum_{i=1}^n F_{x_i} = 0; \\ \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial v_i} &= 2 \sum_{i=1}^n (\beta_i v_i + \delta_i u_i + \varepsilon_i w_i) - \sum_{i=1}^n F_{y_i} = 0; \\ \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial w_i} &= 2 \sum_{i=1}^n (\gamma_i w_i + \varepsilon_i v_i + \xi_i u_i) - \sum_{i=1}^n F_{z_i} = 0. \end{aligned} \quad (13)$$

Соотношение (13) в матричной форме можно записать в следующем виде:

$$\bar{\mathbf{F}} = \mathbf{K} \cdot \bar{\mathbf{U}}. \quad (14)$$

Здесь  $\bar{\mathbf{F}}$  – вектор, состоящий из  $3n$  членов, являющихся компонентами объёмных и поверхностных сил, приложенных к узлам (матрица (вектор) обобщённых сил);

$\bar{\mathbf{U}}$  – вектор, состоящий из  $3n$  компонентов перемещений узлов (матрица (вектор) обобщённых перемещений);

$\mathbf{K}$  – квадратная матрица порядка  $3n$ , связывающая обобщённые силы и обобщённые перемещения (обобщённая матрица жёсткости системы).

Формула (14) есть основное матричное уравнение метода конечных элементов. В развёрнутом виде уравнение (14), для линейной задачи, представляет собой систему линейных алгебраических уравнений, откуда при известных нагрузках, действующих на тело, можно определить перемещения вершин конечных элементов, слагающих твёрдое тело.

Таким образом, определение компонентов перемещения вершин конечных элементов, на которые мысленно делится сплошное упругое тело, в общем случае пространственной задачи сводится к составлению и решению матричного уравнения (14).

Определение вида матрицы жёсткости системы может быть выполнено различными способами. Достаточно просто это сделать, сначала определив вид матрицы жёсткости отдельного конечного элемента, а затем показав общий вид формирования матрицы жёсткости совокупности конечных элементов, слагающих твёрдое тело.

#### *Матрица жёсткости треугольного конечного элемента*

Рассмотрим конечный элемент  $ijk$  треугольной формы (рис. 104).

Силы, действующие в вершинах элемента, обозначим  $F_{xi}, F_{yi}; F_{xj}, F_{yj}; F_{xk}, F_{yk}$ . В результате деформации вершины получают перемещения  $u_i, v_i; u_j, v_j; u_k, v_k$  и точки  $i, j, k$  займут положения  $i', j', k'$ .

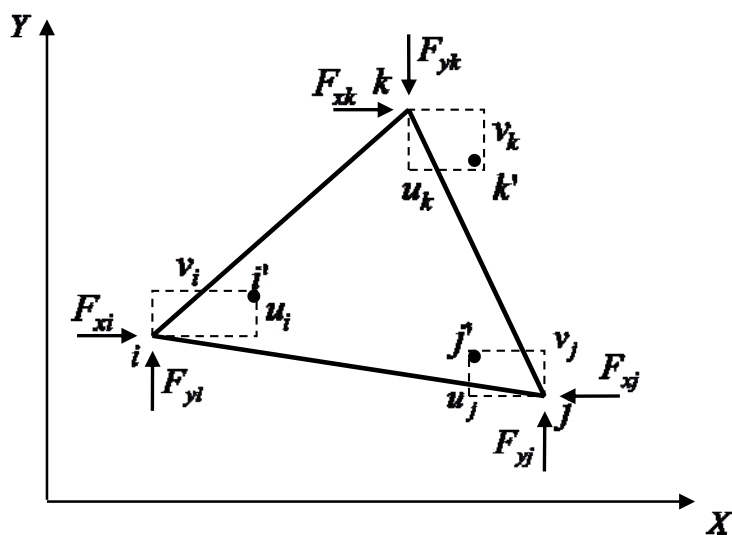


Рис. 104

В соответствии с процедурой Ритца представим перемещения внутри конечного элемента в виде следующих рядов:

$$\left. \begin{aligned} u(x, y) &= u_i f_i(x, y) + u_j f_j(x, y) + u_k f_k(x, y) = \sum_m u_m \cdot f_m(x, y); \\ v(x, y) &= v_i \phi_i(x, y) + v_j \phi_j(x, y) + v_k \phi_k(x, y) = \sum_m v_m \cdot \phi_m(x, y). \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

Здесь  $f_m(x, y)$ ;  $\varphi_m(x, y)$ ,  $m = i, j, k$  – координатные функции, выбираемые так, чтобы удовлетворялись и граничные условия, и условия сплошности.

Строго говоря, функции  $f_m(x, y)$ ;  $\varphi_m(x, y)$  должны выбираться так, чтобы было соблюдено условие неразрывности поля деформаций, то есть они должны являться квадратичными функциями от координат. В простейшем случае принимается некоторое смягчение условий неразрывности и функции  $f_m(x, y)$ ;  $\varphi_m(x, y)$  выбирают так, чтобы удовлетворялись лишь условия неразрывности перемещений. Это возможно, если принять, что компоненты перемещений точек являются линейными функциями координат:

$$\left. \begin{aligned} u(x, y) &= \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y; \\ v(x, y) &= \alpha_4 + \alpha_5 x + \alpha_6 y. \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

Неизвестные коэффициенты  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_6$  определяются из условий для вершин элемента:

$$\left. \begin{aligned} u_i &= \alpha_1 + \alpha_2 x_i + \alpha_3 y_i; & v_i &= \alpha_4 + \alpha_5 x_i + \alpha_6 y_i; \\ u_j &= \alpha_1 + \alpha_2 x_j + \alpha_3 y_j; & v_j &= \alpha_4 + \alpha_5 x_j + \alpha_6 y_j; \\ u_k &= \alpha_1 + \alpha_2 x_k + \alpha_3 y_k; & v_k &= \alpha_4 + \alpha_5 x_k + \alpha_6 y_k. \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

В матричной форме систему (17) можно записать следующим образом:

$$\bar{\mathbf{u}} = \mathbf{Q} \cdot \bar{\mathbf{a}}. \quad (18)$$

Здесь  $\bar{\mathbf{u}} = (u_i, u_j, u_k, v_i, v_j, v_k)^T$  – вектор-столбец перемещений;

$\bar{\mathbf{a}} = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5, \alpha_6)^T$  – вектор-столбец коэффициентов;

$\mathbf{Q}$  – квазидиагональная матрица вида

$$\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} \mathbf{Q}_1 & 0 \\ 0 & \mathbf{Q}_1 \end{pmatrix}, \text{ причём } \mathbf{Q}_1 = \begin{pmatrix} 1 & x_i & y_i \\ 1 & x_j & y_j \\ 1 & x_k & y_k \end{pmatrix}.$$

Решая матричное уравнение (18), найдём:

$$\bar{\mathbf{a}} = \mathbf{Q}^{-1} \cdot \bar{\mathbf{u}}. \quad (19)$$

Здесь  $\mathbf{Q}^{-1} = \begin{pmatrix} \mathbf{Q}_1^{-1} & 0 \\ 0 & \mathbf{Q}_1^{-1} \end{pmatrix}$  и  $\mathbf{Q}_1^{-1} = \frac{1}{2S} \begin{pmatrix} x_j y_k - x_k y_j & x_k y_i - x_i y_k & x_i y_j - x_j y_i \\ y_j - y_k & y_k - y_i & y_i - y_j \\ x_k - x_j & x_i - x_k & x_j - x_i \end{pmatrix}$ ;

$S = \frac{1}{2}(x_j y_k + x_i y_j + x_k y_i - x_j y_i - x_k y_j - x_i y_k)$  – площадь треугольного элемента.

Из уравнения (19) получаем:

$$\begin{aligned}
 \alpha_1 &= \frac{1}{2S} \left[ (x_j y_k - x_k y_j) u_i + (x_k y_i - x_i y_k) u_j + (x_i y_j - x_j y_i) u_k \right]; \\
 \alpha_2 &= \frac{1}{2S} \left[ (y_j - y_k) u_i + (y_k - y_i) u_j + (y_i - y_j) u_k \right]; \\
 \alpha_3 &= \frac{1}{2S} \left[ (x_k - x_j) u_i + (x_i - x_k) u_j + (x_j - x_i) u_k \right]; \\
 \alpha_4 &= \frac{1}{2S} \left[ (x_j y_k - x_k y_j) v_i + (x_k y_i - x_i y_k) v_j + (x_i y_j - x_j y_i) v_k \right]; \\
 \alpha_5 &= \frac{1}{2S} \left[ (y_j - y_k) v_i + (y_k - y_i) v_j + (y_i - y_j) v_k \right]; \\
 \alpha_6 &= \frac{1}{2S} \left[ (x_k - x_j) v_i + (x_i - x_k) v_j + (x_j - x_i) v_k \right].
 \end{aligned} \tag{20}$$

Подставив (20) в уравнения (16), получим:

$$\left. \begin{aligned}
 u(x, y) &= a_i(x, y) u_i + a_j(x, y) u_j + a_k(x, y) u_k; \\
 v(x, y) &= a_i(x, y) v_i + a_j(x, y) v_j + a_k(x, y) v_k.
 \end{aligned} \right\} \tag{21}$$

Здесь

$$\left\{ \begin{aligned}
 a_i(x, y) &= \frac{1}{2S} \left[ x_j y_k - x_k y_j + (y_j - y_k) x + (x_k - x_j) y \right]; \\
 a_j(x, y) &= \frac{1}{2S} \left[ x_k y_i - x_i y_k + (y_k - y_i) x + (x_i - x_k) y \right]; \\
 a_k(x, y) &= \frac{1}{2S} \left[ x_i y_j - x_j y_i + (y_i - y_j) x + (x_j - x_i) y \right].
 \end{aligned} \right. \tag{22}$$

Сопоставляя зависимости (21) и (15) видим, что функции  $a_i(x, y)$ ,  $a_j(x, y)$ ,  $a_k(x, y)$  есть не что иное, как координатные функции  $f_m(x, y)$ ;  $\varphi_m(x, y)$ ,  $m = i, j, k$ .

Вид решения (21) соответствует заданному (15), а формулы (22) удовлетворяют условию неразрывности перемещений и граничным условиям. Действительно, если рассмотреть вершину  $i$ , для которой  $x = x_i$  и  $y = y_i$ , то из формул (22) следует, что  $a_i = 1$ ,  $a_j = 0$ ,  $a_k = 0$ . При этом, в соответствии с формулами (21), получаем:  $u = u_i$ ,  $v = v_i$ . Для вершины  $j$   $x = x_j$  и  $y = y_j$ ; из формул (22) следует, что  $a_i = 0$ ,  $a_j = 1$ ,  $a_k = 0$ . В



соответствии с формулами (21)  $u = u_j$ ,  $v = v_j$ . Для вершины  $k$   $x = x_k$  и  $y = y_k$ ; из формул (22) следует, что  $a_i = 0$ ,  $a_j = 0$ ,  $a_k = 1$ . И вновь, в соответствии с формулами (21),  $u = u_k$ ,  $v = v_k$ .

Функции перемещений, определяемые формулами (21), являются непрерывными не только в пределах элемента, но и на границах между элементами. Для доказательства достаточно рассмотреть точку, расположенную на общей границе между двумя конечными элементами и по формулам (21) найти её перемещения через координаты первого и второго конечных элементов. Вычисления показывают, что полученные результаты будут тождественно равны.

Найдём деформации внутри конечного элемента. Дифференцируя соотношения (21), получаем:

$$\begin{aligned}\varepsilon_x &= \frac{\partial u(x, y)}{\partial x} = \frac{1}{2S} [(y_j - y_k)u_i + (y_k - y_i)u_j + (y_i - y_j)u_k]; \\ \varepsilon_y &= \frac{\partial v(x, y)}{\partial y} = \frac{1}{2S} [(x_k - x_j)v_i + (x_i - x_k)v_j + (x_j - x_i)v_k]; \\ \gamma_{xy} &= \frac{\partial u(x, y)}{\partial y} + \frac{\partial v(x, y)}{\partial x} = \frac{1}{2S} [(x_k - x_j)u_i + (x_i - x_k)u_j + (x_j - x_i)u_k + \\ &\quad + (y_j - y_k)v_i + (y_k - y_i)v_j + (y_i - y_j)v_k].\end{aligned}\tag{23}$$

Как видно из соотношений (23), деформации  $\varepsilon_x$ ,  $\varepsilon_y$ ,  $\gamma_{xy}$  не зависят от координат точек, взятых внутри конечного элемента, то есть являются постоянными в пределах каждого элемента. Для другого конечного элемента, смежного с рассматриваемым, деформации также будут постоянными, но различными, вообще говоря, по величине. Из физических уравнений теории упругости следует, что и напряжения  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$ ,  $\tau_{xy}$  в пределах конечного элемента являются постоянными величинами, не зависящими от координат, но их величина меняется от элемента к элементу.

Итак, перемещения в теле, разделённом на треугольные конечные элементы, являются непрерывными, а деформации и напряжения, оставаясь постоянными в пределах конечных элементов, претерпевают разрывы на границах между ними.

Перейдём теперь непосредственно к отысканию вида матрицы жёсткости треугольного конечного элемента.

Потенциальная энергия деформации треугольного элемента, с учетом того, что напряжения и деформации постоянны, будет равна:

$$U(u, v) = \frac{1}{2} S \cdot \bar{\sigma}^T \cdot \bar{\varepsilon}.\tag{24}$$

Здесь  $S$  – площадь конечного элемента;  $\bar{\sigma} = (\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy})^T$ ;  
 $\bar{\varepsilon} = (\varepsilon_x, \varepsilon_y, \gamma_{xy})$ .

Введём обозначения:

$$\begin{aligned} y_{ij} &= y_i - y_j; & x_{ij} &= x_i - x_j; & \dots \\ y_{jk} &= y_j - y_k; & x_{jk} &= x_j - x_k; & \dots \\ y_{ki} &= y_k - y_i; & x_{ki} &= x_k - x_i; & \dots \end{aligned}$$

Запишем уравнения (23) в матричной форме:

$$\bar{\varepsilon} = \mathbf{B} \cdot \bar{\mathbf{u}}. \quad (25)$$

Здесь

$$\mathbf{B} = \frac{1}{2S} \begin{pmatrix} y_{jk} & y_{ki} & y_{ij} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x_{kj} & x_{ik} & x_{ji} \\ x_{kj} & x_{ik} & x_{ji} & y_{jk} & y_{ki} & y_{ij} \end{pmatrix}.$$

Обобщённый закон Гука в матричной форме имеет вид:

$$\bar{\sigma} = \mathbf{D} \cdot \bar{\varepsilon}. \quad (26)$$

Здесь для случая плоской деформации

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} \lambda + 2G & \lambda & 0 \\ \lambda & \lambda + 2G & 0 \\ 0 & 0 & G \end{pmatrix};$$

для случая плоского напряжённого состояния

$$\mathbf{D} = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{pmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{pmatrix},$$

причём  $\lambda = \frac{E \cdot \nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}$ ;  $G = \frac{E}{2(1+\nu)}$ .

Подставляя формулы (25) и (26) в соотношение (24) и принимая во внимание правила выполнения матричных операций

$$\mathbf{D}^T = \mathbf{D}, \quad \bar{\sigma}^T = (\mathbf{D} \cdot \bar{\varepsilon})^T = \bar{\varepsilon}^T \cdot \mathbf{D}^T, \quad \bar{\varepsilon}^T = (\mathbf{B} \cdot \bar{\mathbf{u}})^T = \bar{\mathbf{u}}^T \cdot \mathbf{B}^T,$$

получаем:

$$U(u, v) = \frac{1}{2} S \cdot \bar{\sigma}^T \cdot \bar{\varepsilon} = \frac{1}{2} S \cdot (\mathbf{D} \cdot \bar{\varepsilon})^T \cdot (\mathbf{B} \cdot \bar{\mathbf{u}}) = \frac{1}{2} S \cdot \bar{\mathbf{u}}^T \cdot \mathbf{B}^T \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{B} \cdot \bar{\mathbf{u}}. \quad (27)$$

С другой стороны, известно (см. соотношение (7)), что потенциальную энергию деформации можно выразить через матрицу жёсткости:

$$U(u, v) = \frac{1}{2} \bar{\mathbf{U}}^T \cdot \mathbf{K} \cdot \bar{\mathbf{U}}. \quad (28)$$

Сравнивая уравнения (27) и (28), запишем матрицу жёсткости треугольного элемента:

$$\mathbf{K} = S \cdot \mathbf{B}^T \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{B}. \quad (29)$$

В развёрнутом виде матрица жёсткости  $\mathbf{K}$  треугольного элемента имеет вид:

$$\mathbf{K} = \begin{pmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} & k_{14} & k_{15} & k_{16} \\ & k_{22} & k_{23} & k_{24} & k_{25} & k_{26} \\ & & k_{33} & k_{34} & k_{35} & k_{36} \\ & & & k_{44} & k_{45} & k_{46} \\ & k_{ij} = k_{ji} & & & k_{55} & k_{56} \\ & & & & & k_{66} \end{pmatrix}. \quad (30)$$

Компоненты матрицы жёсткости равны:

$$\begin{aligned} k_{11} &= Ay_{jk}^2 + Gx_{jk}^2; & k_{23} &= -Ay_{ij}y_{ik} - Gx_{ij}x_{ik}; & k_{36} &= -Bx_{ij}y_{ij}; \\ k_{12} &= -Ay_{ik}y_{jk} - Gx_{ik}x_{jk}; & k_{24} &= Cx_{jk}y_{ik} + Gx_{ik}y_{jk}; & k_{44} &= Ax_{jk}^2 + Gy_{jk}^2; \\ k_{13} &= Ay_{ij}y_{jk} + Gx_{ij}x_{jk}; & k_{25} &= -Bx_{ik}y_{ik}; & k_{45} &= -Ax_{ik}x_{jk} - Gy_{ik}y_{jk}; \\ k_{14} &= -Bx_{jk}y_{jk}; & k_{26} &= Cx_{ij}y_{ik} + Gx_{ik}y_{ij}; & k_{46} &= Ax_{ij}x_{jk} + Gy_{ij}y_{jk}; \\ k_{15} &= Cx_{ik}y_{jk} + Gx_{jk}y_{ik}; & k_{33} &= Ay_{ij}^2 + Gx_{ij}^2; & k_{55} &= Ax_{ik}^2 + Gy_{ik}^2; \\ k_{16} &= -Cx_{ij}y_{jk} - Gx_{jk}y_{ij}; & k_{34} &= -Cx_{jk}y_{ij} - Gx_{ij}y_{jk}; & k_{56} &= -Ax_{ij}x_{ik} - Gy_{ij}y_{ik}; \\ k_{22} &= Ay_{ik}^2 + Gx_{ik}^2; & k_{35} &= Cx_{ik}y_{ij} + Gx_{ij}y_{ik}; & k_{66} &= Ax_{ij}^2 + Gy_{ij}^2. \end{aligned} \quad (31)$$

Здесь для плоской деформации  $A = \lambda + 2G$ ;  $B = \lambda + G$ ;  $C = \lambda$ ; для плоского напряжённого состояния  $A = \frac{E}{1-\nu^2}$ ;  $B = \frac{E}{2(1-\nu)}$ ;  $C = \frac{E \cdot \nu}{2(1-\nu^2)}$ .

Основное уравнение для треугольного конечного элемента имеет вид:

$$\bar{\mathbf{F}} = \mathbf{K} \cdot \bar{\mathbf{u}}. \quad (32)$$

Здесь  $\bar{\mathbf{F}} = (F_{xi}, F_{xj}, F_{xk}, F_{yi}, F_{yj}, F_{yk})^T$  – вектор-столбец узловых сил;  
 $\bar{\mathbf{u}} = (u_i, u_j, u_k, v_i, v_j, v_k)^T$  – вектор-столбец узловых перемещений треугольного конечного элемента.

Запишем расчётные формулы для вычисления напряжений. Подставив формулу (25) в соотношение (26), получим:

$$\bar{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{D} \cdot \mathbf{B} \cdot \bar{\mathbf{u}}. \quad (33)$$

Отсюда

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \frac{1}{2S} \left\{ A \left[ (y_j - y_k)u_i + (y_k - y_i)u_j + (y_i - y_j)u_k \right] + \right. \\ &\quad \left. + C \left[ (x_k - x_j)v_i + (x_i - x_k)v_j + (x_j - x_i)v_k \right] \right\}; \\ \sigma_y &= \frac{1}{2S} \left\{ C \left[ (y_j - y_k)u_i + (y_k - y_i)u_j + (y_i - y_j)u_k \right] + \right. \\ &\quad \left. + A \left[ (x_k - x_j)v_i + (x_i - x_k)v_j + (x_j - x_i)v_k \right] \right\}; \\ \tau_{xy} &= \frac{1}{2S} G \left[ (x_k - x_j)u_i + (x_i - x_k)u_j + (x_j - x_i)u_k + \right. \\ &\quad \left. + (y_j - y_k)v_i + (y_k - y_i)v_j + (y_i - y_j)v_k \right] \end{aligned} \quad (34)$$

Поскольку и напряжения, и деформации остаются постоянными в пределах треугольного конечного элемента, то по мере уменьшения размеров конечных элементов решение будет стремиться к точному.

#### *Более сложные случаи задания формы конечных элементов*

Треугольным конечным элементом не исчерпывается всё многообразие форм конечных элементов, используемых в расчётах. Кроме того, каждая форма конечного элемента обладает теми или иными недостатками и преимуществами по сравнению с другими. В силу этого рассмотрим некоторые другие формы плоских конечных элементов и познакомимся с конечными элементами для решения трёхмерных задач.

Отметим одну важную особенность. Компоненты перемещений точек треугольного конечного элемента полностью определялись шестью компонентами перемещений его вершин, то есть треугольный элемент в плоской задаче имеет шесть степеней свободы. Рассматривая конечные элементы другой формы, будем считать, что количество их степеней свободы равно количеству компонентов перемещений узловых точек и должно быть равно количеству неизвестных коэффициентов в функциях для перемещений. При этих условиях неразрывность перемещений будет удовлетворена.

I. Плоская задача, прямоугольный элемент (рис. 105).

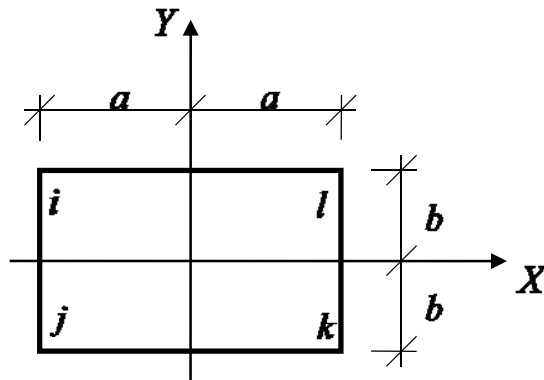


Рис. 105

Функции перемещений примем в виде:

$$\left. \begin{aligned} u(x, y) &= \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y + \alpha_4 xy; \\ v(x, y) &= \alpha_5 + \alpha_6 x + \alpha_7 y + \alpha_8 xy. \end{aligned} \right\} \quad (35)$$

В матричной форме соотношения (35) получают вид:

$$\bar{\mathbf{u}} = \mathbf{Q} \cdot \bar{\mathbf{a}}. \quad (36)$$

Здесь  $\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} \mathbf{Q}_1 & 0 \\ 0 & \mathbf{Q}_1 \end{pmatrix}$ , причём

$$\mathbf{Q}_1 = \begin{pmatrix} 1 & x_i & y_i & x_i y_i \\ 1 & x_j & y_j & x_j y_j \\ 1 & x_k & y_k & x_k y_k \\ 1 & x_l & y_l & x_l y_l \end{pmatrix}.$$

Решив матричное уравнение (36), получим:

$$\bar{\mathbf{a}} = \mathbf{Q}^{-1} \cdot \bar{\mathbf{u}}. \quad (37)$$

После определения компонентов вектора  $\bar{\mathbf{a}}$  формулы (35) получают вид:

$$\left. \begin{aligned} u(x, y) &= a_i(x, y)u_i + a_j(x, y)u_j + a_k(x, y)u_k + a_l(x, y)u_l; \\ v(x, y) &= a_i(x, y)v_i + a_j(x, y)v_j + a_k(x, y)v_k + a_l(x, y)v_l. \end{aligned} \right\} \quad (38)$$

Для прямоугольного элемента с началом координат в его центре (как на рис. 105) коэффициенты уравнений (38) равны:

$$\left. \begin{aligned} a_i(x, y) &= (a - x)(b - y); & a_j(x, y) &= (a + x)(b - y); \\ a_k(x, y) &= (a + x)(b + y); & a_l(x, y) &= (a - x)(b + y). \end{aligned} \right\} \quad (39)$$

На основании уравнений (35) найдём деформации, которые будут уже линейными функциями координат:

$$\bar{\boldsymbol{\varepsilon}} = \mathbf{L} \cdot \bar{\mathbf{a}}. \quad (40)$$

Здесь

$$\mathbf{L} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & y & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & x \\ 0 & 0 & 1 & x & 0 & 1 & 0 & y \end{pmatrix}.$$

Следовательно, для прямоугольного элемента не только перемещения, но и деформации, а значит, и напряжения являются непрерывными функциями пространственных координат.

Уравнение потенциальной энергии деформации прямоугольного конечного элемента при этом запишется так:

$$\begin{aligned} U(u, v) &= \frac{1}{2} \iint_S \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^{-T} \cdot \mathbf{D} \cdot \bar{\boldsymbol{\varepsilon}} \cdot dS = \frac{1}{2} \iint_S (\mathbf{L} \cdot \bar{\mathbf{a}})^T \cdot \mathbf{D} \cdot (\mathbf{L} \cdot \bar{\mathbf{a}}) \cdot dS = \\ &= \frac{1}{2} \iint_S (\mathbf{L} \cdot \mathbf{Q}^{-1} \cdot \bar{\mathbf{u}})^T \cdot \mathbf{D} \cdot (\mathbf{L} \cdot \mathbf{Q}^{-1} \cdot \bar{\mathbf{u}}) \cdot dS = \\ &= \frac{1}{2} \bar{\mathbf{u}}^{-T} \left\{ \iint_S (\mathbf{Q}^{-1})^T \cdot \mathbf{L}^T \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{L} \cdot \mathbf{Q}^{-1} \cdot dS \right\} \bar{\mathbf{u}}. \end{aligned}$$

Следовательно, матрица жёсткости прямоугольного элемента будет равна:

$$\mathbf{K} = \iint_S (\mathbf{Q}^{-1})^T \cdot \mathbf{L}^T \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{L} \cdot \mathbf{Q}^{-1} \cdot dS. \quad (41)$$

Матрица  $\mathbf{K}$  будет квадратной, симметричной, восьмого порядка.

Матрица жёсткости прямоугольного элемента, определённая формулой (41), записана в локальной системе координат, когда координатные оси параллельны сторонам прямоугольника, а начало координат совпадает с центром прямоугольника. Для составления матрицы жёсткости совокупности конечных элементов следует перейти к общей (глобальной) системе координат  $\tilde{X}\tilde{O}\tilde{Y}$ :

$$\left. \begin{aligned} \tilde{X} &= X_0 + X \cdot \cos \beta - Y \cdot \sin \beta; \\ \tilde{Y} &= Y_0 + X \cdot \sin \beta + Y \cdot \cos \beta. \end{aligned} \right\}$$

Здесь  $X_0, Y_0$  – координаты центра прямоугольника в глобальной системе координат;  $X, Y$  – координаты рассматриваемой точки конечного элемента в локальной системе координат;  $\beta$  – угол между направлением одноимённых осей локальной и глобальной систем координат.

Число степеней свободы прямоугольного конечного элемента равно восьми.

Для пространственных конечных элементов ограничимся лишь тем, что приведём вид функций для перемещений их точек. Получение выражений для матриц жёсткости таких элементов может быть выполнено по методике, рассмотренной для плоских конечных элементов. Следует иметь в виду, что громоздкость математических преобразований при усложнении формы конечного элемента значительно возрастает.

### II. Пространственная задача, элемент в форме тетраэдра (рис. 106).

Это простейший элемент для пространственной задачи. Функции перемещений принимаются в виде:

$$\left. \begin{aligned} u(x, y, z) &= \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y + \alpha_4 z; \\ v(x, y, z) &= \alpha_5 + \alpha_6 x + \alpha_7 y + \alpha_8 z; \\ w(x, y, z) &= \alpha_9 + \alpha_{10} x + \alpha_{11} y + \alpha_{12} z. \end{aligned} \right\} \quad (42)$$

Как и в случае треугольного плоского элемента, перемещения в теле, составленном из тетраэдров, получаются непрерывными, а напряжения и деформации, постоянные в пределах элемента, претерпевают разрывы на его границах.

Число степеней свободы конечного элемента в виде тетраэдра равно двенадцати.

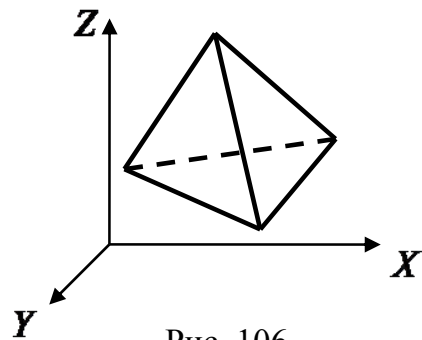


Рис. 106

### III. Пространственная задача, элемент в форме прямоугольного параллелепипеда (рис. 107).

Функции перемещений принимаются в следующем виде:

$$\left. \begin{aligned} u(x, y, z) &= \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y + \alpha_4 z + \alpha_5 xy + \alpha_6 yz + \alpha_7 zx + \alpha_8 xyz; \\ v(x, y, z) &= \alpha_9 + \alpha_{10} x + \alpha_{11} y + \alpha_{12} z + \alpha_{13} xy + \alpha_{14} yz + \alpha_{15} zx + \alpha_{16} xyz; \\ w(x, y, z) &= \alpha_{17} + \alpha_{18} x + \alpha_{19} y + \alpha_{20} z + \alpha_{21} xy + \alpha_{22} yz + \alpha_{23} zx + \alpha_{24} xyz. \end{aligned} \right\} \quad (43)$$

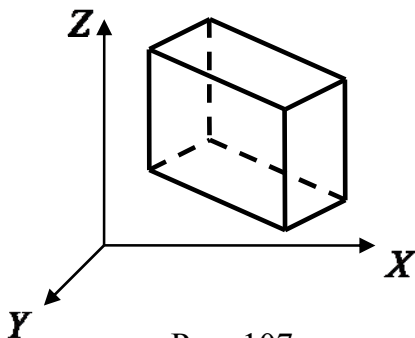


Рис. 107

Для конечного элемента в форме прямоугольного параллелепипеда и перемещения, и деформации, и напряжения являются непрерывными функциями пространственных координат.

Число степеней свободы конечного элемента в виде прямоугольного параллелепипеда равно двадцати четырёх.

Можно и дальше усложнять форму конечных элементов и вид функций для

перемещений при решении плоской и пространственной задач: введение дополнительных узлов на границе элементов, использование криволинейных границ элементов (изопараметрические конечные элементы) и так далее. С одной стороны, эти усложнения позволяют более гибко вписываться в форму исследуемого тела и получать непрерывные функции для напряжений и деформаций, больше соответствующие действительной работе конструкции, с другой – это приводит к существенному возрастанию громоздкости выражений и расчётов.

*Составление обобщённой матрицы жёсткости  
совокупности конечных элементов*

Обобщённая матрица жёсткости всей системы определяется путём последовательного объединения матриц жёсткости отдельных элементов.

Пусть плоское упругое тело разделено на  $N$  треугольных конечных элементов, вершины которых образуют  $n$  узловых точек. Совокупность узловых сил образует матрицу-столбец обобщённых сил размерностью  $2n$ :

$$\bar{\Phi} = (\Phi_{x1}, \Phi_{x2}, \dots, \Phi_{xn}, \Phi_{y1}, \Phi_{y2}, \dots, \Phi_{yn})^T.$$

Матрица-столбец обобщённых узловых перемещений также имеет размерности  $2n$ :

$$\bar{\mathbf{u}} = (u_1, u_2, \dots, u_n, v_1, v_2, \dots, v_n)^T.$$

Обобщённые силы  $\bar{\Phi}$  и обобщённые перемещения  $\bar{\mathbf{u}}$  связаны матрицей жёсткости  $\mathbf{K}$  совокупности конечных элементов размерностью  $2n \times 2n$ :

$$\bar{\Phi} = \mathbf{K} \cdot \bar{\mathbf{u}}, \text{ где } \mathbf{K} = \begin{pmatrix} K_{11} & \dots & K_{1,2n} \\ \dots & \dots & \dots \\ K_{2n,1} & \dots & K_{2n,2n} \end{pmatrix}.$$

Будем считать, что матрицы жёсткости треугольных элементов, составляющих упругое тело, определены.

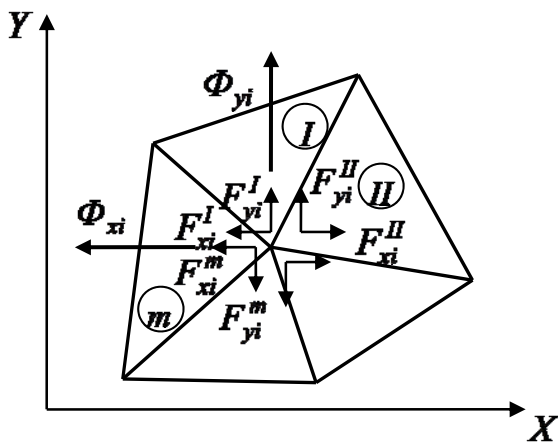


Рис. 108

Пусть в некоторой узловой точке  $i$  рассматриваемой системы объединяются  $m$  треугольных элементов (рис. 108); пусть  $\Phi_{xi}, \Phi_{yi}$  – внешние силы, действующие в этой точке. Усилия  $\Phi_{xi}, \Phi_{yi}$  распределяются некоторым образом на вершины всех  $m$  элементов так, что в точке  $i$  на каждый треугольник действуют, вообще говоря, неизвестные заранее составляющие этих сил:  $F_{xi}^I, F_{xi}^{II}, \dots, F_{xi}^m, F_{yi}^I, F_{yi}^{II}, \dots, F_{yi}^m$ .



Характер разделения сил  $\Phi_{xi}$ ,  $\Phi_{yi}$  на составляющие должен быть таким, чтобы напряжённо-деформированное состояние в каждом элементе соответствовало возникшему в нём при совместной работе всех элементов, объединённых в точке  $i$ , то есть необходимо выполнение условия равновесия в этой точке:

$$\left. \begin{aligned} \Phi_{xi} &= F_{xi}^I + F_{xi}^{II} + \dots + F_{xi}^m; \\ \Phi_{yi} &= F_{yi}^I + F_{yi}^{II} + \dots + F_{yi}^m. \end{aligned} \right\} \quad (44)$$

Кроме того, в силу неразрывности перемещений, компоненты перемещений вершин конечных элементов, объединяющихся в точке  $i$ , должны быть одинаковы (рис. 109) и равны  $u_i, v_i$ , то есть

$$\left. \begin{aligned} u_i &= u_i^I = u_i^{II} = \dots = u_i^m; \\ v_i &= v_i^I = v_i^{II} = \dots = v_i^m. \end{aligned} \right\} \quad (45)$$

Правые части в формуле (44) для каждого конечного элемента связаны с перемещениями его вершин матрицами жёсткости этих конечных элементов. Формируя уравнения (44) для всех вершин системы конечных элементов, с учётом равенств (45), можно вычислить составляющие матрицы жёсткости совокупности конечных элементов.

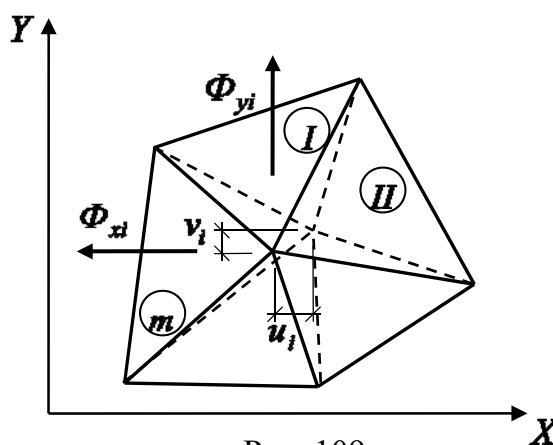


Рис. 109

Как это делать, покажем на частном примере.

**Пример.**

Рассмотрим плоское упругое тело, разделённое на три треугольных конечных элемента. На рис. 110 обозначены: арабскими цифрами 1, 2, 3, 4, 5 – номера вершин конечных элементов; римскими цифрами I, II, III – номера конечных элементов; дугой со стрелкой – направление обхода вершин конечных элементов внутри каждого конечного элемента. К вершинам совокупности конечных элементов приложены составляющие внешних сил  $\Phi_{xi}$ ,  $\Phi_{yi}$ .

Запишем основное уравнение метода конечных элементов, в котором левый вектор-столбец узловых сил составим из компонент узловых сил, относящихся к каждому отдельному конечному элементу; правый вектор-столбец перемещений будет представлять собой совокупность перемещений, также относящихся к вершинам каждого конечного элемента. Тогда матрица жёсткости должна иметь блочную структуру, в которой каждый блок должен связывать узловые силы отдельного конечного элемента с соответствующими перемещениями его вершин.

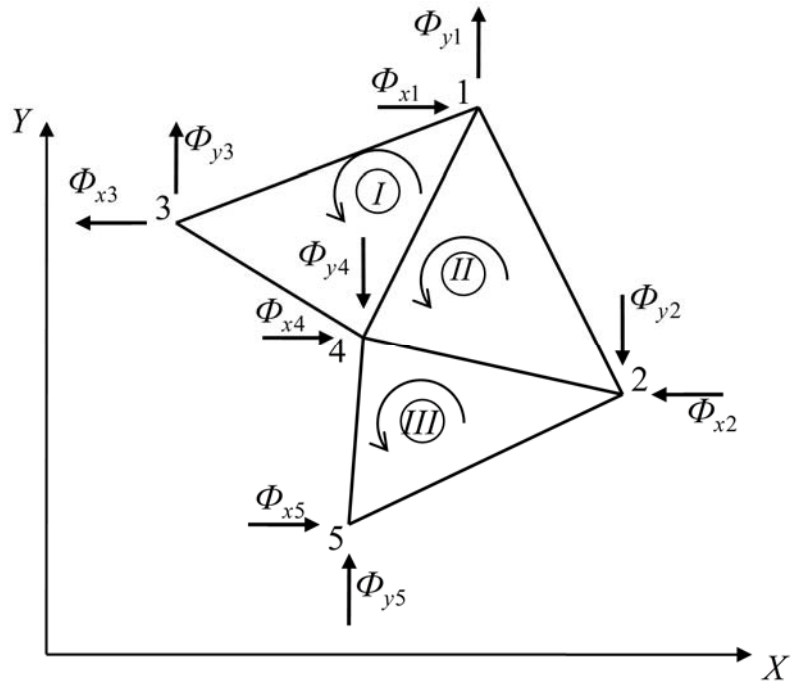


Рис. 110

$$\begin{pmatrix} F_{x1}^I \\ F_{x3}^I \\ F_{x4}^I \\ F_{y1}^I \\ F_{y3}^I \\ F_{y4}^I \\ - \\ F_{x1}^{II} \\ F_{x4}^{II} \\ F_{x2}^{II} \\ F_{y1}^{II} \\ F_{y4}^{II} \\ F_{y2}^{II} \\ - \\ F_{x2}^{III} \\ F_{x4}^{III} \\ F_{x5}^{III} \\ F_{y2}^{III} \\ F_{y4}^{III} \\ F_{y5}^{III} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{16} & \vdots & 0 & 0 & \dots & 0 & \vdots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{26} & \vdots & 0 & 0 & \dots & 0 & \vdots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_{31} & a_{32} & \dots & a_{36} & \vdots & 0 & 0 & \dots & 0 & \vdots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_{41} & a_{42} & \dots & a_{46} & \vdots & 0 & 0 & \dots & 0 & \vdots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_{51} & a_{52} & \dots & a_{56} & \vdots & 0 & 0 & \dots & 0 & \vdots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_{61} & a_{62} & \dots & a_{66} & \vdots & 0 & 0 & \dots & 0 & \vdots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ - & - & - & - & - & - & - & - & - & - & - & - & - & - \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \vdots & b_{11} & b_{12} & \dots & b_{16} & \vdots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \vdots & b_{21} & b_{22} & \dots & b_{26} & \vdots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \vdots & b_{31} & b_{32} & \dots & b_{36} & \vdots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \vdots & b_{41} & b_{42} & \dots & b_{46} & \vdots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \vdots & b_{51} & b_{52} & \dots & b_{56} & \vdots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \vdots & b_{61} & b_{62} & \dots & b_{66} & \vdots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ - & - & - & - & - & - & - & - & - & - & - & - & - & - \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \vdots & 0 & 0 & \dots & 0 & \vdots & c_{11} & c_{12} & \dots & c_{16} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \vdots & 0 & 0 & \dots & 0 & \vdots & a_{c_{21}} & c_{22} & \dots & c_{26} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \vdots & 0 & 0 & \dots & 0 & \vdots & c_{31} & c_{32} & \dots & c_{36} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \vdots & 0 & 0 & \dots & 0 & \vdots & c_{41} & c_{42} & \dots & c_{46} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \vdots & 0 & 0 & \dots & 0 & \vdots & c_{51} & c_{52} & \dots & c_{56} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \vdots & 0 & 0 & \dots & 0 & \vdots & c_{61} & c_{62} & \dots & c_{66} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} u_1 \\ u_3 \\ u_4 \\ v_1 \\ v_3 \\ v_4 \\ - \\ u_1 \\ u_4 \\ u_2 \\ v_1 \\ v_4 \\ v_2 \\ - \\ u_2 \\ u_4 \\ u_5 \\ v_2 \\ v_4 \\ v_5 \end{pmatrix} \quad (46)$$

Пользуясь уравнением (46), составим уравнения равновесия (44) для каждой вершины совокупности конечных уравнений:

$$\begin{aligned}\Phi_{x1} &= F_{x1}^I + F_{x1}^{II} = a_{11}u_1 + a_{12}u_3 + a_{13}u_4 + a_{14}v_1 + a_{15}v_3 + a_{16}v_4 + \\ &\quad + b_{11}u_1 + b_{12}u_4 + b_{13}u_2 + b_{14}v_1 + b_{15}v_4 + b_{16}v_2 = \\ &= (a_{11} + b_{11})u_1 + b_{13}u_2 + a_{12}u_3 + (a_{13} + b_{12})u_4 + \\ &\quad + (a_{14} + b_{14})v_1 + b_{16}v_2 + a_{15}v_3 + (a_{16} + b_{15})v_4;\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Phi_{x2} &= F_{x2}^{II} + F_{x2}^{III} = b_{31}u_1 + b_{32}u_4 + b_{33}u_2 + b_{34}v_1 + b_{35}v_4 + b_{36}v_2 + \\ &\quad + c_{11}u_2 + c_{12}u_4 + c_{13}u_5 + c_{14}v_2 + c_{15}v_4 + c_{16}v_5 = \\ &= b_{31}u_1 + (b_{33} + c_{11})u_2 + (b_{32} + c_{12})u_4 + c_{13}u_5 + \\ &\quad + b_{34}v_1 + (b_{36} + c_{14})v_2 + (b_{35} + c_{15})v_4 + c_{16}v_5;\end{aligned}$$

$$\Phi_{x3} = F_{x3}^I = a_{21}u_1 + a_{22}u_3 + a_{23}u_4 + a_{24}v_1 + a_{25}v_3 + a_{26}v_4;$$

$$\begin{aligned}\Phi_{x4} &= F_{x4}^I + F_{x4}^{II} + F_{x4}^{III} = a_{31}u_1 + a_{32}u_3 + a_{33}u_4 + a_{34}v_1 + a_{35}v_3 + a_{36}v_4 + \\ &\quad + b_{21}u_1 + b_{22}u_4 + b_{23}u_2 + b_{24}v_1 + b_{25}v_4 + b_{26}v_2 + \\ &\quad + c_{21}u_2 + c_{22}u_4 + c_{23}u_5 + c_{24}v_2 + c_{25}v_4 + c_{26}v_5 = \\ &= (a_{31} + b_{21})u_1 + (b_{23} + c_{21})u_2 + a_{32}u_3 + (a_{33} + b_{22} + c_{22})u_4 + c_{23}u_5 + \\ &\quad + (a_{34} + b_{24})v_1 + (b_{26} + c_{24})v_2 + a_{35}v_3 + (a_{36} + b_{25} + c_{25})v_4 + c_{26}v_5;\end{aligned}$$

$$\Phi_{x5} = F_{x5}^{III} = c_{31}u_2 + c_{32}u_4 + c_{33}u_5 + c_{34}v_2 + c_{35}v_4 + c_{36}v_5; \quad (47)$$

$$\begin{aligned}\Phi_{y1} &= F_{y1}^I + F_{y1}^{II} = a_{41}u_1 + a_{42}u_3 + a_{43}u_4 + a_{44}v_1 + a_{45}v_3 + a_{46}v_4 + \\ &\quad + b_{41}u_1 + b_{42}u_4 + b_{43}u_2 + b_{44}v_1 + b_{45}v_4 + b_{46}v_2 = \\ &= (a_{41} + b_{41})u_1 + b_{43}u_2 + a_{42}u_3 + (a_{43} + b_{42})u_4 + \\ &\quad + (a_{44} + b_{44})v_1 + b_{46}v_2 + a_{45}v_3 + (a_{46} + b_{45})v_4;\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Phi_{y2} &= F_{y2}^{II} + F_{y2}^{III} = b_{61}u_1 + b_{62}u_4 + b_{63}u_2 + b_{64}v_1 + b_{65}v_4 + b_{66}v_2 + \\ &\quad + c_{41}u_2 + c_{42}u_4 + c_{43}u_5 + c_{44}v_2 + c_{45}v_4 + c_{46}v_5 = \\ &= b_{61}u_1 + (b_{63} + c_{41})u_2 + (b_{62} + c_{42})u_4 + c_{43}u_5 + \\ &\quad + b_{64}v_1 + (b_{66} + c_{44})v_2 + (b_{65} + c_{45})v_4 + c_{46}v_5;\end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
K_{11} &= a_{11} + b_{11}; & K_{12} &= b_{13}; & K_{13} &= a_{12}; \\
K_{14} &= a_{13} + b_{12}; & K_{15} &= 0; & K_{16} &= a_{14} + b_{14}; \\
K_{17} &= b_{16}; & K_{18} &= a_{15}; & K_{19} &= a_{16} + b_{15}; \\
K_{1,10} &= 0; & K_{22} &= b_{33} + c_{11}; & K_{23} &= 0; \\
K_{24} &= b_{32} + c_{12}; & K_{25} &= c_{13}; & K_{26} &= b_{34}; \\
K_{27} &= b_{36} + c_{14}; & K_{28} &= 0; & K_{29} &= b_{35} + c_{15}; \\
K_{2,10} &= c_{16}; & K_{33} &= a_{22}; & K_{34} &= a_{23}; \\
K_{35} &= 0; & K_{36} &= a_{24}; & K_{37} &= 0; \\
K_{38} &= a_{25}; & K_{39} &= a_{26}; & K_{3,10} &= 0; \\
K_{44} &= a_{33} + b_{22} + c_{22}; & K_{45} &= c_{23}; & K_{46} &= a_{34} + b_{24}; \\
K_{47} &= b_{26} + c_{24}; & K_{48} &= a_{35}; & K_{49} &= a_{36} + b_{25} + c_{25}; \\
K_{4,10} &= c_{26}; & K_{55} &= c_{33}; & K_{56} &= 0; \\
K_{57} &= c_{34}; & K_{58} &= 0; & K_{59} &= c_{35}; \\
K_{5,10} &= c_{36}; & K_{66} &= a_{44} + b_{44}; & K_{67} &= b_{46}; \\
K_{68} &= a_{45}; & K_{69} &= a_{46} + b_{45}; & K_{6,10} &= 0; \\
K_{77} &= b_{66} + c_{44}; & K_{78} &= 0; & K_{79} &= b_{65} + c_{45}; \\
K_{7,10} &= c_{46}; & K_{88} &= a_{55}; & K_{89} &= a_{56}; \\
K_{8,10} &= 0; & K_{99} &= a_{66} + b_{55} + c_{55}; & K_{9,10} &= c_{56}; \\
K_{10,10} &= c_{66}.
\end{aligned} \tag{49}$$

Итак, компоненты матрицы жёсткости совокупности конечных элементов  $\mathbf{K}$  построены. Следует отметить, что компоненты матриц жёсткости I, II и III конечных элементов, составляющих упругое тело, а именно матрицы  $\mathbf{A} = \{a_{ij}\}$ ,  $\mathbf{B} = \{b_{ij}\}$ ,  $\mathbf{C} = \{c_{ij}\}$ ,  $i, j = 1, 2, \dots, 6$ , известны.

Для получения решения в числовом виде необходимо определиться с координатами вершин конечных элементов, модулем упругости и коэффициентом Пуассона материала упругого тела, действующими на упругое тело внешними нагрузками. Затем вычислить компоненты матриц жёсткости отдельных конечных элементов по формулам (31), а также компоненты матрицы жёсткости совокупности конечных элементов по формулам (49), решить систему линейных алгебраических уравнений (48) относительно перемещений вершин конечных элементов. Наконец, рассчитать напряжения по формулам (47) и оценить прочность упругого тела по одной из теорий прочности. При необходимости можно вычислить деформации по формулам (23) и перемещения по формулам (21).

Метод конечных элементов для расчёта тонких пластин

Рассмотрим построение матрицы жёсткости и грузового вектора для прямоугольного конечного элемента, находящегося в условиях поперечного изгиба и описывающего напряжённо-деформированное состояние тонкой изгибаемой пластины [26].

Тонкую пластину (рис. 111), нагруженную поперечной распределённой нагрузкой  $q(x, y)$ , разобьём на прямоугольные четырёхузловые конечные

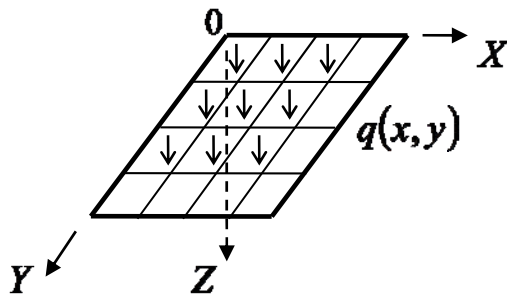


Рис. 111

элементы. Связь конечных элементов между собой осуществляется в узлах. Для корректности решения задачи необходимо обеспечить на межэлементных границах непрерывность не только функции прогибов, но и её первых производных, которые по физическому смыслу являются углами поворота. Таким образом, в каждом  $k$ -м узле конечного элемента (рис. 112)

в качестве узловых обобщённых перемещений задаём прогиб  $w_k(x_k, y_k)$  и углы поворота относительно осей  $X$  и  $Y$ :  $\varphi_{xk}(x_k, y_k) = \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)_k$ ,

$$\varphi_{yk}(x_k, y_k) = - \left( \frac{\partial w}{\partial y} \right)_k.$$

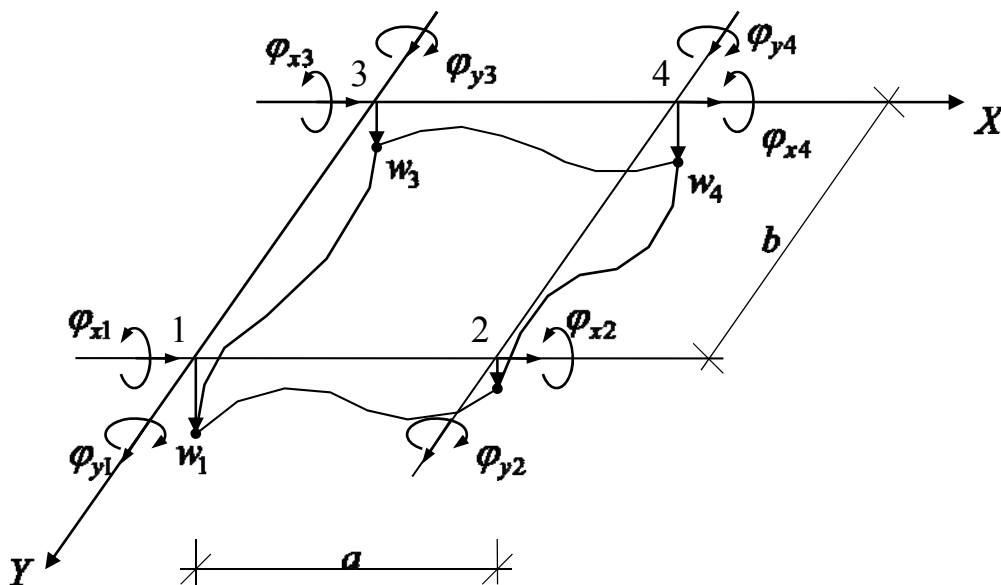


Рис. 112

Вектор неизвестных узловых обобщённых перемещений конечного элемента имеет вид:

$$\bar{\mathbf{Z}}^e = (\bar{\mathbf{Z}}_1, \bar{\mathbf{Z}}_2, \bar{\mathbf{Z}}_3, \bar{\mathbf{Z}}_4)^T. \quad (50)$$

Здесь  $\bar{\mathbf{Z}}_k$  – вектор неизвестных узловых обобщённых перемещений  $k$ -го узла:

$$\bar{\mathbf{Z}}_k = (w_k \quad \varphi_{xk} \quad \varphi_{yk})^T = \left( w_k \quad \left( \frac{\partial w}{\partial y} \right)_k \quad \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)_k \right)^T.$$

Функцию прогибов  $w(x, y)$  внутри прямоугольного конечного элемента зададим в виде кубического полинома, симметричного относительно  $x$ ,  $y$  и содержащего двенадцать слагаемых (по числу степеней свободы конечного элемента):

$$w(x, y) = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y + \alpha_4 x^2 + \alpha_5 xy + \alpha_6 y^2 + \alpha_7 x^3 + \alpha_8 x^2 y + \alpha_9 xy^2 + \alpha_{10} y^3 + \alpha_{11} x^3 y + \alpha_{12} xy^3. \quad (51)$$

Углы поворота при этом будут определены так:

$$\begin{aligned} \varphi_x(x, y) &= \frac{\partial w(x, y)}{\partial y} = \alpha_3 + \alpha_5 x + 2\alpha_6 y + \alpha_8 x^2 + \\ &\quad + 2\alpha_9 xy + 3\alpha_{10} y^2 + \alpha_{11} x^3 + 2\alpha_{12} xy^2; \\ \varphi_y(x, y) &= -\frac{\partial w(x, y)}{\partial x} = -(\alpha_2 + 2\alpha_4 x + \alpha_5 y + 3\alpha_7 x^2 + \\ &\quad + 2\alpha_8 xy + \alpha_9 y^2 + 3\alpha_{11} x^2 y + \alpha_{12} y^3). \end{aligned} \quad (52)$$

Решение, построенное на основе аппроксимации (51), удовлетворяет дифференциальному уравнению изогнутой срединной поверхности пластины при отсутствии распределённой нагрузки, поскольку при подстановке функции (51) в левую часть уравнения Софи Жермен она (левая часть) обращается в нуль. То есть конечный элемент пластины может быть нагружен лишь на контуре статическими и кинематическими воздействиями. При этом внутри конечного элемента условия равновесия удовлетворяются.

Следует отметить, что непрерывность прогибов  $w(x, y)$  и углов поворота  $\varphi_x(x, y)$  по межэлементной границе при  $x=0$  и  $x=a$  обеспечена, в то время как непрерывность углов поворота  $\varphi_y(x, y)$  не обеспечена. Соответственно по межэлементной границе  $y=0$  и  $y=b$  непрерывность

прогибов  $w(x, y)$  и углов поворота  $\varphi_y(x, y)$  обеспечена, а непрерывность углов поворота  $\varphi_x(x, y)$  не обеспечена.

Опыт применения таких конечных элементов для расчёта изгибаемых тонких пластин показал, что, несмотря на некоторую некорректность аппроксимации перемещений функцией (51), полученные решения обладают достаточно высокой инженерной точностью. Именно поэтому для расчёта изгибаемых тонких пластин широко применяются прямоугольные конечные элементы с двенадцатью неизвестными.

Запишем выражения (51) и (52) в матричной форме:

$$\bar{\mathbf{Z}}(x, y) = \mathbf{L}(x, y) \cdot \bar{\mathbf{a}}. \quad (53)$$

Здесь

$$\bar{\mathbf{Z}} = \begin{pmatrix} w(x, y) \\ \varphi_x(x, y) \\ \varphi_y(x, y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} w(x, y) \\ \frac{\partial w(x, y)}{\partial y} \\ \frac{\partial w(x, y)}{\partial x} \end{pmatrix}; \quad (54)$$

$$\mathbf{L}(x, y) = \begin{pmatrix} 1 & x & y & x^2 & xy & y^2 & x^3 & x^2y & xy^2 & y^3 & x^3y & xy^3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & x & 2y & 0 & x^2 & 2xy & 3y^2 & x^3 & 3xy^2 \\ 0 & -1 & 0 & -2x & -y & 0 & -3x^2 & -2xy & -y^2 & 0 & -3x^2y & -y^3 \end{pmatrix};$$

$$\bar{\mathbf{a}} = (\alpha_1 \quad \alpha_2 \quad \alpha_3 \quad \alpha_4 \quad \alpha_5 \quad \alpha_6 \quad \alpha_7 \quad \alpha_8 \quad \alpha_9 \quad \alpha_{10} \quad \alpha_{11} \quad \alpha_{12})^T.$$

Подставив последовательно в соотношение (54) координаты узлов конечного элемента  $(0,0; a,0; 0,b; a,b)$ , выразим коэффициенты  $\alpha_k$  через обобщённые перемещения узлов конечного элемента. Получим:

$$\bar{\mathbf{Z}}_1 = \mathbf{L}_1 \cdot \bar{\mathbf{a}}, \quad \bar{\mathbf{Z}}_2 = \mathbf{L}_2 \cdot \bar{\mathbf{a}}, \quad \bar{\mathbf{Z}}_3 = \mathbf{L}_3 \cdot \bar{\mathbf{a}}, \quad \bar{\mathbf{Z}}_4 = \mathbf{L}_4 \cdot \bar{\mathbf{a}}.$$

Совокупность полученных соотношений можно записать в виде единого матричного выражения:

$$\bar{\mathbf{Z}}^e = \mathbf{L} \cdot \bar{\mathbf{a}}, \quad (55)$$

причём  $\mathbf{L} = (\mathbf{L}_1 \quad \mathbf{L}_2 \quad \mathbf{L}_3 \quad \mathbf{L}_4)^T$ , где

$$\mathbf{L}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix};$$



$$\mathbf{L}_2 = \begin{pmatrix} 1 & a & 0 & a^2 & 0 & 0 & a^3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & a & 0 & 0 & a^2 & 0 & 0 & a^3 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -2a & 0 & 0 & -3a^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix};$$

$$\mathbf{L}_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & b & 0 & 0 & b^2 & 0 & 0 & 0 & b^3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 2b & 0 & 0 & 0 & 3b^2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & -b & 0 & 0 & 0 & -b^2 & 0 & 0 & -b^3 \end{pmatrix};$$

$$\mathbf{L}_4 = \begin{pmatrix} 1 & a & b & a^2 & ab & b^2 & a^3 & a^2b & ab^2 & b^3 & a^3b & ab^3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & a & 2b & 0 & a^2 & 2ab & 3b^2 & a^3 & 3ab^2 \\ 0 & -1 & 0 & -2a & -b & 0 & -3a^2 & -2ab & -b^2 & 0 & -3a^2b & -b^3 \end{pmatrix}.$$

Решив матричное уравнение (55), получим выражение вектора коэффициентов  $\bar{\mathbf{a}}$  через вектор обобщённых перемещений узлов конечного элемента:

$$\bar{\mathbf{a}} = \mathbf{L}^{-1} \cdot \bar{\mathbf{Z}}^e. \quad (56)$$

При выполнении практических расчётов матрицу  $\mathbf{L}^{-1}$  в общем виде обычно не вычисляют, а выполнение данной процедуры осуществляют в виде подпрограммы конечно-элементного комплекса и получают компоненты матрицы  $\mathbf{L}^{-1}$  в виде чисел для каждого конечного элемента.

Найдём деформации в произвольной точке конечного элемента:

$$\varepsilon_x(x, y, z) = -z \frac{\partial^2 w(x, y)}{\partial x^2}; \quad \varepsilon_y(x, y, z) = -z \frac{\partial^2 w(x, y)}{\partial y^2};$$

$$\gamma_{xy}(x, y, z) = -2z \frac{\partial^2 w(x, y)}{\partial x \cdot \partial y}.$$

Запишем эти соотношения в матричной форме:

$$\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}(x, y, z) = -z \cdot \mathbf{B}(x, y) \cdot \bar{\mathbf{a}} = -z \cdot \mathbf{B}(x, y) \cdot \mathbf{L}^{-1} \cdot \bar{\mathbf{Z}}^e. \quad (57)$$

Здесь

$$\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}(x, y, z) = \begin{pmatrix} \varepsilon_x(x, y, z) \\ \varepsilon_y(x, y, z) \\ \gamma_{xy}(x, y, z) \end{pmatrix};$$

$$\mathbf{B}(x, y) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 6x & 2y & 0 & 0 & 6xy & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 2x & 6y & 0 & 6xy \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 4x & 4y & 0 & 6x^2 & 6y^2 \end{pmatrix}.$$

Найдём напряжения в произвольной точке конечного элемента, выполненного из однородного изотропного материала. В соответствии с законом Гука связь между напряжениями и деформациями для плоской задачи имеет вид:

$$\sigma_x = \frac{E}{1-\nu^2}(\varepsilon_x + \nu\varepsilon_y); \quad \sigma_y = \frac{E}{1-\nu^2}(\nu\varepsilon_x + \varepsilon_y); \quad \tau_{xy} = \frac{E}{2(1+\nu)}\gamma_{xy}.$$

Запишем эти соотношения в матричной форме:

$$\bar{\boldsymbol{\sigma}}(x, y, z) = \mathbf{D} \cdot \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}(x, y) = -z \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{B}(x, y) \cdot \mathbf{L}^{-1} \cdot \bar{\mathbf{Z}}^e. \quad (58)$$

Здесь

$$\bar{\boldsymbol{\sigma}}(x, y, z) = \begin{pmatrix} \sigma_x(x, y, z) \\ \sigma_y(x, y, z) \\ \tau_{xy}(x, y, z) \end{pmatrix}; \quad \mathbf{D} = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{pmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{pmatrix}.$$

Выражения потенциальной энергии внутренних сил  $U$  и потенциала внешних сил  $\Pi$  для тонкой изгибаемой пластины имеют вид:

$$U = \frac{1}{2} \iiint_V \bar{\boldsymbol{\sigma}}^T(x, y, z) \cdot \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}(x, y, z) \cdot dV, \quad \Pi = - \iint_S w(x, y) \cdot q(x, y) \cdot dS. \quad (59)$$

Подставив соотношения (51), (53), (56), (57), (58) в формулы (59), получим:

$$\begin{aligned} U &= \frac{1}{2} \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} z^2 dz \cdot \left(\bar{\mathbf{Z}}^e\right)^T \cdot \left(\mathbf{L}^{-1}\right)^T \cdot \int_0^a \int_0^b \mathbf{B}^T(x, y) \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{B}(x, y) \cdot dx \cdot dy \cdot \mathbf{L}^{-1} \cdot \bar{\mathbf{Z}}^e = \\ &= \frac{h^3}{24} \left(\bar{\mathbf{Z}}^e\right)^T \cdot \left(\mathbf{L}^{-1}\right)^T \cdot \int_0^a \int_0^b \mathbf{B}^T(x, y) \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{B}(x, y) \cdot dx \cdot dy \cdot \mathbf{L}^{-1} \cdot \bar{\mathbf{Z}}^e; \\ \Pi &= - \left(\bar{\mathbf{Z}}^e\right)^T \cdot \left(\mathbf{L}^{-1}\right)^T \cdot \int_0^a \int_0^b \mathbf{L}_w^T(x, y) \cdot q(x, y) \cdot dx \cdot dy. \end{aligned}$$

Здесь  $\mathbf{L}_w(x, y)$  – первая строка матрицы  $\mathbf{L}(x, y)$ ,

$$\mathbf{L}_m(x, y) = (1 \quad x \quad y \quad x^2 \quad xy \quad y^2 \quad x^3 \quad x^2y \quad xy^2 \quad y^3 \quad x^3y \quad xy^3).$$

Отсюда следует, что выражения для матрицы жёсткости  $\mathbf{K}^e$  и грузового вектора  $\bar{\mathbf{R}}_F^e$  будут равны:

$$\begin{aligned} \mathbf{K}^e &= \frac{h^3}{24} (\mathbf{L}^{-1})^T \cdot \int_0^a \int_0^b \mathbf{B}^T(x, y) \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{B}(x, y) \cdot dx \cdot dy \cdot \mathbf{L}^{-1}; \\ \bar{\mathbf{R}}_F^e &= -(\mathbf{L}^{-1})^T \cdot \int_0^a \int_0^b \mathbf{L}_w^T(x, y) \cdot q(x, y) \cdot dx \cdot dy. \end{aligned} \quad (60)$$

Построение матрицы жёсткости совокупности прямоугольных конечных элементов для тонкой изгибаемой пластины можно выполнить по методике, изложенной ранее для треугольных конечных элементов.

*Реализация метода конечных элементов  
на электронных вычислительных машинах*

Развитие метода конечных элементов как прямого численного метода для решения задач механики деформируемого твёрдого тела обусловлено прежде всего разработкой высокопроизводительных электронных средств автоматизации вычислений и развитием программно-математического обеспечения электронных вычислительных машин, а также разработкой математических моделей исследуемых физических явлений, адекватных реальным процессам с достаточной степенью точности [26].

Первые программные комплексы на базе метода конечных элементов были разработаны в 60-х годах XX столетия. Сюда относятся следующие программные продукты: STRUDL-2; SAP-4; NONSAP; ASKA; NASTRAN; SESAM-69 и др.

В конце 70-х годов XX столетия программные комплексы, реализующие метод конечных элементов, появились и в СССР. Назовём некоторые из них: МИРАЖ (1973 г.); МОРЕ (1978 г.); ПРАСАК (1979 г.); КАСКАД-2 (1976 г.); ПРОЧНОСТЬ-75 (1978 г.); ПАРАДОКС (1984 г.); ПАРСЕК (1984 г.); ЛИРА (1982 г.); СПРИНТ (1981 г.); ПРОКРУСТ (1981 г.); ПАРУС (1983 г.).

В настоящее время наиболее широкое распространение получили следующие программные комплексы для решения самых разнообразных задач методом конечных элементов: NASTRAN, ANSYS, ADINA, COSMOS, ABAQUS, MARC, PLAXIS, LIRA, SCAD, MicroFe, ROBOT Millennium и так далее.

Следует отметить, что одной из тенденций в развитии программных комплексов, реализующих метод конечных элементов, является возрастание порядка решаемых в задачах систем уравнений. Этот показатель в настоящее время превысил значение  $10^8$  в наиболее мощных разработках. Но даже в гораздо менее мощных комплексах значение 100-300 тысяч неизвестных считается нормой.

С организационной точки зрения программный комплекс, реализующий метод конечных элементов, можно упрощённо представить в виде схемы, приведенной на рис. 113.

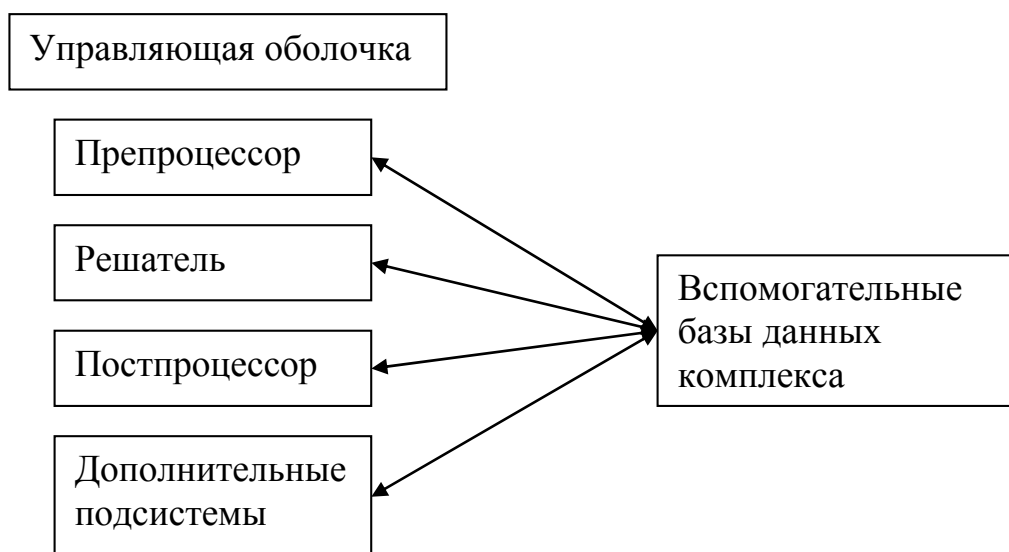


Рис. 113

*Экспликация к рис. 113.*

*Управляющая оболочка* является посредником между пользователем и основными частями комплекса. Она по указанию пользователя осуществляет инициализацию и завершение сеанса работы с комплексом, инициализацию его частей и передачу управления между ними.

*Препроцессор* – система средств, позволяющих выполнить разработку и описание математической модели объекта.

*Решатель* – система средств, позволяющих сформировать и реализовать математическую модель объекта, то есть вычислить основные и вспомогательные параметры, определяющие поведение модели.

*Постпроцессор* – система средств, позволяющих выполнить визуализацию полученных результатов в различных формах, способствующих эффективному их анализу.

*Дополнительные подсистемы* – система средств, позволяющих выполнить работу, не связанную непосредственно с применением метода конечных элементов, а являющуюся процессом переработки информации, полученной в результате применения метода конечных элементов с целью создания проекта объекта.

*Вспомогательные базы данных* – система средств, содержащих данные о свойствах материалов, о геометрических характеристиках сечений типовых изделий, о значениях критериев и о коэффициенте надёжности в условиях оценки различных свойств системы и так далее.

В перечне типов решаемых задач строительной механики и механики деформируемого твёрдого тела, как правило, присутствуют:

- ✓ линейный статический расчёт;
- ✓ определение частот и форм собственных колебаний;
- ✓ определение значения критического параметра нагрузки в задаче о потере устойчивости равновесия в линейной постановке;
- ✓ расчёт вынужденных колебаний, иногда частного вида, например гармонических;
- ✓ построение амплитудно-частотной характеристики;
- ✓ нелинейно-статический расчёт с ограниченным набором нелинейностей частного вида, например физическая нелинейность – расчёт с учетом пластической деформации; геометрическая нелинейность – расчёт по деформируемой схеме при малых перемещениях; конструктивная – расчёт системы с отключающимися связями.

Каждый программный комплекс, реализующий метод конечных элементов, содержит библиотеку конечных элементов. Состав библиотеки определяется типами систем и задач, на решение которых ориентирован программный комплекс. Так, программный комплекс SCAD имеет в составе библиотеки свыше ста типов конечных элементов.

Расчёт по методу конечных элементов, даже автоматизированный с использованием самых мощных программных комплексов, является приближённым. Причинами погрешности при расчётах являются:

- ошибки округления;
- недостаточная дискретизация внутренней части области твёрдого тела;
- неточность представления границ тела;
- несовместность на границах элементов;
- погрешность дискретной модели.

Несмотря на это, на современном этапе метод конечных элементов является мощным инструментом и для решения задач математической физики, и для решения задач механики деформируемого твёрдого тела, и для решения задач машиностроения, включая автомобильную, авиационную, аэрокосмическую отрасли и так далее.

## Глава 6. МЕТОД ГРАНИЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ.

### §23. Метод граничных элементов

#### *Введение*

С конца 60-х годов XX столетия, с развитием средств вычислительной техники, получил широкое распространение численный метод решения краевых задач – метода граничных элементов (МГЭ), называемого также методом граничных интегральных уравнений (МГИУ). Сравнение метода граничных элементов с методами конечных элементов и конечных разностей показало его конкурентоспособность, а во многих задачах и превосходство по точности и достоверности результатов, по времени работы процессора, по объёму занимаемой памяти, по простоте алгоритма и так далее. Это обусловлено тремя его решающими преимуществами – сокращением на единицу геометрической размерности задачи, лёгкостью исследования бесконечных областей и точным удовлетворением исходному дифференциальному уравнению внутри расчётной области.

Крауч С. и Старфилд А. в своей работе [18] отметили: «Техника граничных элементов – вычислительная Золушка, которая выросла в тени методов конечных разностей и конечных элементов. Хотя методы граничных элементов по своей природе просты в применении и очень гибки в приложениях ко многим проблемам, они не получили того внимания, которого заслуживали. Причин такого положения несколько.

1. В то время как имеется целый ряд доступных общих программ (или пакетов программ), реализующих методы конечных разностей и конечных элементов, программы метода граничных элементов написаны в основном для решения частных задач и предназначены для определённых групп пользователей.

2. Авторы статей практического плана по методам граничных элементов склонны описывать предмет в контексте частной научной или инженерной проблемы. Поэтому не всегда очевидно, что метод, развитый для решения задач одного типа, применим также и к иным задачам.

3. Наконец, теоретические работы по методам граничных элементов воспринимаются многими исследователями и инженерами как нечто весьма трудное для понимания. Математический аппарат, применявшийся для построения этих методов, по-видимому, помешал многим увидеть простоту и привлекательность получаемого в конечном счёте алгоритма».

Большой вклад в создание различных вариантов МГЭ внесли труды западных и отечественных учёных. Среди них можно отметить Баттерфилда Р., Бенерджи П.К., Бреббиа К., Вроубела Л., Кацикаделиса Джона Т., Крауча С., Крузо Т.А., Риццо Ф.Ж., Старфилда А., Уокера С., Александрова А.В., Купрадзе В.Д., Михлина С.Г., Н.И. Мусхелишвили, Перлина П.И., Угодчикова А.Г., Хуторянского Н.М. и др. Число публикаций по развитию

и применению МГЭ в различных задачах весьма велико и не поддаётся полному описанию.

Появление и прогресс метода граничных элементов обусловлены тем, что большой класс краевых задач, описываемых дифференциальными уравнениями параболического, эллиптического и гиперболического типов, сводится к интегральным уравнениям Вольтерра и Фредгольма. Методы решения краевых задач на базе интегральных уравнений считаются более точными и экономичными, чем методы, основанные на аппроксимации дифференциальных операторов (МКЭ, МКР) [11, 12].

### *Основы метода граничных элементов*

При изложении метода граничных элементов будем придерживаться книги Крауча С. и Старфилда А. «Методы граничных элементов в механике твёрдого тела» [18].

Любая краевая задача механики деформируемого твёрдого тела формулируется в виде совокупности дифференциальных уравнений в некоторой области  $R$ , на границе которой  $C$  задаются нормальные и касательные напряжения и перемещения. Аналитические решения получаются наиболее легко, когда область  $R$  однородная (свойства материала в области  $R$  не изменяются от точки к точке), когда геометрия проста, когда просты граничные условия и, наконец, когда определяющие дифференциальные уравнения в частных производных линейны, вследствие чего суммирование некоторых их решений даёт новое решение в области  $R$ .

В теории упругости существуют аналитические решения, например задача о сосредоточенной силе, приложенной в упругом теле. Такие решения принято называть сингулярными решениями, поскольку они хорошо ведут себя всюду в области  $R$ , за исключением точки приложения сосредоточенной силы, поскольку здесь имеет место математическая аномалия – сингулярность. Если на твёрдое тело действуют несколько сосредоточенных сил в разных точках, то для отыскания решения (в линейных задачах) можно суммировать решения от каждой силы в отдельности.

Для «реальных задач» построить аналитическое решение зачастую не удаётся. Даже когда определяющие дифференциальные уравнения в частных производных линейны, область  $R$  может оказаться неоднородной, геометрия – нерегулярной, а граничные условия – трудноописываемыми простыми математическими функциями. В таких случаях, используя численные методы, находят приближенное решение. Численные методы решения краевых задач можно разделить на два отчётливых класса: класс, который требует использования аппроксимаций во всей области  $R$ , и класс, который требует использования аппроксимаций только на границе  $C$ . В

первый класс входят методы конечных разностей и конечных элементов, во второй – методы граничных элементов.

В методах граничных элементов на элементы разбивается только граница  $C$  области, как показано на рис. 114. Численное решение строится на основе полученных предварительно *аналитических решений* для простых

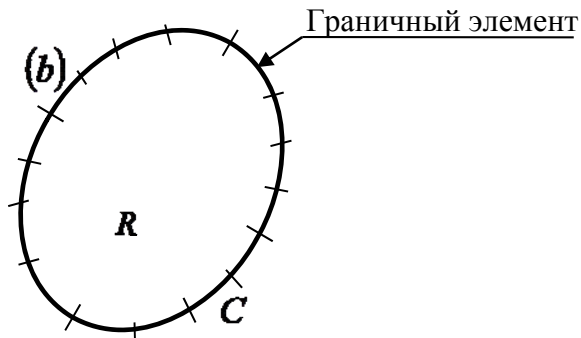


Рис. 114

сингулярных задач таким образом, чтобы удовлетворить приближённо заданным граничным условиям на каждом элементе  $(b)$  контура  $C$ . Поскольку каждое сингулярное решение удовлетворяет в области  $R$  определяющим дифференциальным уравнениям в частных производных, то нет необходимости делить саму область  $R$  на сетку элементов. Система уравнений, подлежащих решению, будет иметь

порядок, значительно меньший, чем порядок соответствующей системы уравнений метода конечных элементов, однако матрица коэффициентов системы уравнений теперь будет полностью заполненной.

Поскольку находить аналитическое решение соответствующих дифференциальных уравнений для неограниченной области легче, чем для фактической ограниченной области  $R$  с границей  $C$  (например, задача о действии сосредоточенной силы в точке бесконечной упругой среды, известная как задача Кельвина, имеет аналитическое решение), то при реализации метода граничных элементов для ограниченной области поступают следующим образом. Ограниченную область  $R$  с границей  $C$  мысленно помещают в неограниченную область. Границу области  $R$  теперь обозначим  $C'$ . Далее полагают, что сингулярное решение приближённо воспроизводит в средней точке каждого граничного элемента на границе  $C'$  точно те же условия, какие заданы на границе  $C$  ограниченной области  $R$ . Если контур  $C'$  разделён на  $N$  элементов, то надо иметь  $N$  сингулярных решений, которые в сумме удовлетворят требуемым условиям в центре каждого элемента на границе  $C'$ . Суммарное воздействие всех  $N$  сингулярностей на произвольный граничный элемент можно выразить через интенсивности сингулярностей. Хотя значения этих интенсивностей не известны, но зато из граничных условий известно их совместное влияние. Следовательно, можно записать систему  $N$  линейных алгебраических уравнений относительно  $N$  неизвестных значений интенсивностей сингулярностей. Как только эти уравнения решены, можно построить решение в любой точке ограниченной области  $R$ .



Вспомогательный контур  $C'$  можно рассматривать как границу для двух различных задач. В одной из них – в так называемой внутренней задаче – рассматриваемая область  $R$  есть конечная область внутри контура  $C$ . Другая задача называется внешней задачей, и в этом случае  $R$  – неограниченная область вне контура  $C$ .

*Нормальная нагрузка на полуплоскость (задача Фламана)*

Рассмотрим полупространство  $-\infty \leq x \leq +\infty, y \leq 0$  с границей  $y = 0$ , на свободной поверхности которого действует сосредоточенно-полосовая нагрузка  $F_y$ , бесконечно протяжённая в направлении оси  $Z$  (рис. 115).

Полупространство находится в условиях плоской деформации и, следовательно, можно ограничиться рассмотрением типичного поперечного сечения  $-\infty \leq x \leq +\infty, y \leq 0$  с границей  $y = 0$ .

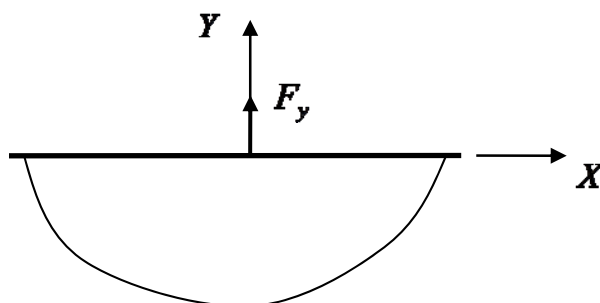


Рис. 115

Задача о сосредоточенной силе, приложенной перпендикулярно к поверхности упругой изотропной полуплоскости, известна как задача Фламана [34]. Её решение:

$$\begin{aligned} \sigma_x(x, y) &= -\frac{2}{\pi} F_y \frac{x^2 y}{(x^2 + y^2)^2}; \\ \sigma_y(x, y) &= -\frac{2}{\pi} F_y \frac{y^3}{(x^2 + y^2)^2}; \\ \tau_{xy}(x, y) &= -\frac{2}{\pi} F_y \frac{xy^2}{(x^2 + y^2)^2}. \end{aligned} \tag{1}$$

$$\begin{aligned} u(x, y) &= \frac{F_y}{2\pi G} \left[ (1 - 2\nu) \left( \arctg \frac{y}{x} + \frac{\pi}{2} \right) + \frac{xy}{x^2 + y^2} \right]; \\ v(x, y) &= \frac{F_y}{2\pi G} \left[ -2(1 - \nu) \cdot \ln \left( \sqrt{\frac{x^2 + y^2}{L^2}} \right) + \frac{y^3}{x^2 + y^2} \right]. \end{aligned} \tag{2}$$

Здесь  $L$  – произвольная постоянная.

Формулы (1) и (2) позволяют определить напряжения и перемещения в произвольной точке  $(x, y)$  полуплоскости.

Компоненты вектора усилий на свободной границе полуплоскости определяются выражениями:

$$t_x = \sigma_x n_x + \tau_{yx} n_y = \tau_{yx}; \quad t_y = \tau_{xy} n_x + \sigma_y n_y = \sigma_y. \quad (3)$$

Здесь  $n_x = 0$  и  $n_y = 1$  – направляющие косинусы нормали к границе полуплоскости  $y = 0$ .

Из соотношений (1) следует, что напряжения в точке  $x = 0, y = 0$  не определены, то есть в этой точке они сингулярны.

Поскольку рассматриваемая задача симметрична относительно оси  $y$ , то для  $y \leq 0$  имеем  $-\pi \leq \arctg\left(\frac{y}{x}\right) \leq 0$ . В частности для  $y = 0$  получаем:

$$\arctg\left(\frac{y}{x}\right) = \begin{cases} -\pi, & \text{если } x < 0, y = 0; \\ 0, & \text{если } x > 0, y = 0. \end{cases} \quad (4)$$

Прилагая эти результаты к первому из выражений (2), находим

$$u = -\frac{1-2\nu}{4G} F_y, \quad \text{если } x < 0, y = 0; \quad (5)$$

$$u = +\frac{1-2\nu}{4G} F_y, \quad \text{если } x > 0, y = 0,$$

то есть компонента  $u$  перемещения границы полуплоскости постоянна по обе стороны от приложенной силы.

Принимая  $y = 0$ , из второго выражения (2) получаем:

$$v(x) = -\frac{1-\nu}{\pi G} F_y [\ln|x| - \ln|L|], \quad y = 0. \quad (6)$$

Это уравнение показывает, что перемещение  $v$  стремится к  $+\infty$  в точке приложения силы  $F_y > 0$  и к  $-\infty$  на большом удалении от этой точки.

Постоянная  $L$  в соотношении (2) была введена, чтобы конкретизировать значения перемещений  $v$  в задаче Фламана. Согласно (6), перемещение  $v$  равно нулю при  $x = \pm L, y = 0$ . Этот выбор произволен и означает, что мы условились измерять перемещение  $v$  относительно смещения произвольной точки  $x = \pm L$  границы полуплоскости.

Решение задачи Фламана с помощью принципа суперпозиции может быть обобщено для упругой полуплоскости  $y < 0$  при более сложном распределении напряжений на её границе. Рассмотрим случай непрерывного распределения нагрузки на границе полуплоскости (рис. 116).

Пусть напряжения на свободной границе  $t_x = \tau_{yx} = \tau_{xy}$  и  $t_y = \sigma_y$  заданы следующим образом:

$$\begin{aligned} \tau_{xy} &= 0, \quad -\infty \leq x \leq +\infty, \quad y=0; \\ \sigma_y &= \begin{cases} p_y(x), & b_1 \leq x \leq b_2, \quad y=0; \\ 0, & x < b_1, \quad x > b_2, \quad y=0. \end{cases} \end{aligned} \quad (7)$$

Результирующая сила (на единицу длины)  $F_y$  в пределах малого участка  $d\xi$  границы около точки  $x = \xi$  (дискретная сила) равна:

$$F_y(\xi) = p_y(\xi) \cdot d\xi. \quad (8)$$

Суммируя влияние всех  $N$  дискретных сил  $F_y(\xi^i)$  на участке  $b_1 \leq x \leq b_2$ , компоненту перемещения  $v$  в произвольной точке полуплоскости  $(x, y)$  можно записать в виде выражения

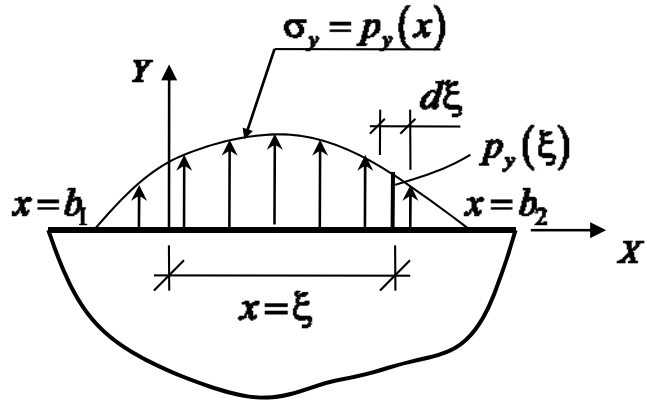


Рис. 116

$$\begin{aligned} v(x, y) = \frac{1}{2\pi G} \sum_{i=1}^N \left\{ -2(1-\nu) \left[ \ln \sqrt{(x - \xi^i)^2 + y^2} - \ln |L - \xi^i| \right] + \right. \\ \left. + \frac{y^2}{(x - \xi^i)^2 + y^2} \right\} p_y(\xi^i) \cdot d\xi^i. \end{aligned} \quad (9)$$

Переходя к пределу при  $d\xi^i \rightarrow 0$ , получим:

$$\begin{aligned} v(x, y) = \frac{1}{2\pi G} \int_{b_1}^{b_2} \left\{ -2(1-\nu) \left[ \ln \sqrt{(x - \xi)^2 + y^2} - \ln |L - \xi| \right] + \right. \\ \left. + \frac{y^2}{(x - \xi)^2 + y^2} \right\} p_y(\xi) \cdot d\xi. \end{aligned} \quad (10)$$

Аналогичные выражения можно написать и для величин  $u$ ,  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$ ,  $\tau_{xy}$ .

**Пример 1.**

Рассмотрим случай постоянной нагрузки  $p_y(x) = P_y = \text{const}$  на участке  $b_1 = -a \leq x \leq b_2 = a, y = 0$  (рис. 117).

Граничные условия в этом случае имеют вид:

$$\begin{aligned} \tau_{xy} &= 0, \quad |x| < \infty, \quad y = 0; \\ \sigma_y &= \begin{cases} P_y, & |x| < a, \quad y = 0; \\ 0, & |x| > a, \quad y = 0. \end{cases} \end{aligned} \quad (11)$$

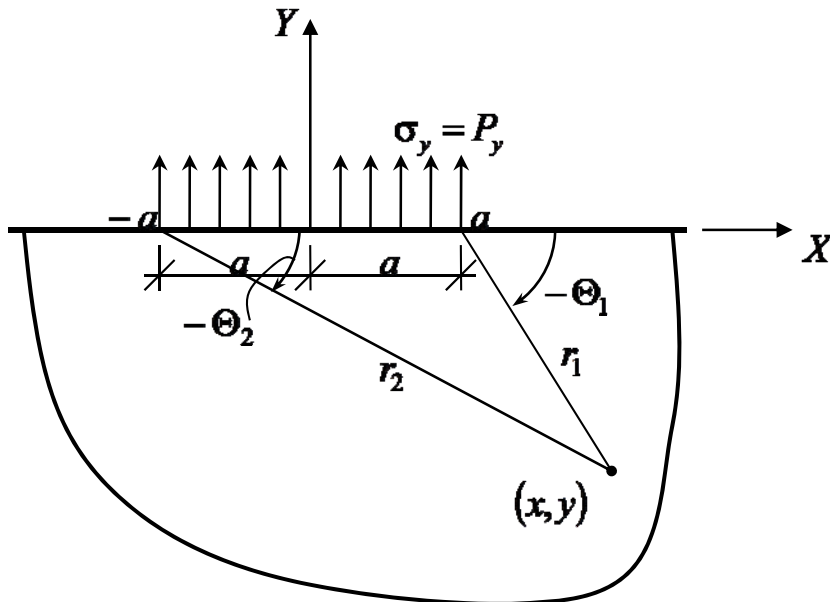


Рис. 117

Расчётные соотношения записываются в следующей форме:

$$\begin{aligned} u(x, y) &= -\frac{P_y}{2\pi G} \left\{ (1-2\nu) \cdot [(x-a) \cdot \Theta_1 - (x+a) \cdot \Theta_2 - \pi \cdot a] + \right. \\ &\quad \left. + (1-\nu) \cdot y \cdot \ln \left( \frac{r_1^2}{r_2^2} \right) \right\}; \\ v(x, y) &= \frac{P_y}{2G} \left\{ -(1-2\nu) \cdot y \cdot (\Theta_1 - \Theta_2) + \right. \\ &\quad + (1-\nu) \cdot [(x-a) \cdot \ln(r_1^2) - (x+a) \cdot \ln(r_2^2) + \\ &\quad \left. + (L-a) \cdot \ln(l-a)^2 - (L-a) \cdot \ln(L-a)^2] \right\}, \end{aligned} \quad (12)$$

$$\begin{aligned}\sigma_x(x,y) &= -\frac{P_y}{\pi} \left[ \Theta_1 - \Theta_2 + \frac{y \cdot (x-a)}{r_1^2} - \frac{y \cdot (x+a)}{r_2^2} \right]; \\ \sigma_y(x,y) &= -\frac{P_y}{\pi} \left[ \Theta_1 - \Theta_2 - \frac{y \cdot (x-a)}{r_1^2} + \frac{y \cdot (x+a)}{r_2^2} \right]; \\ \tau_{xy}(x,y) &= -\frac{P_y}{\pi} y^2 \left( \frac{1}{r_1^2} - \frac{1}{r_2^2} \right).\end{aligned}\tag{13}$$

Здесь  $\Theta_1 = \operatorname{arctg}\left(\frac{y}{x-a}\right)$ ,

$$\Theta_2 = \operatorname{arctg}\left(\frac{y}{x+a}\right),$$

$$r_1^2 = (x-a)^2 + y^2,$$

$$r_2^2 = (x+a)^2 + y^2.$$

ак правило, для большинства распределений  $p_y(x)$  нагрузок на границе интегралы типа (10) не имеют аналитического решения. Поэтому данную задачу следует решать численно, рассматривая дискретную аппроксимацию фактического распределения напряжений на границе.

На рис. 118 приведён пример дискретной аппроксимации распределённой нагрузки путём разбиения нагруженной части границы полуплоскости на  $N$  участков. Эти участки называются *границными элементами*.

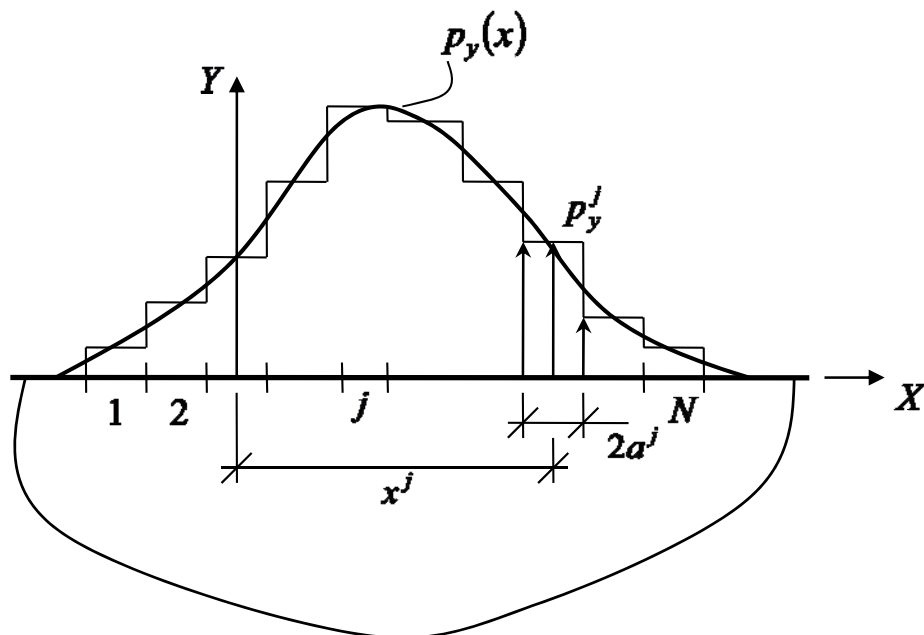


Рис. 118

Нормальные напряжения на каждом граничном элементе (см. рис. 118) приняты постоянными; для типичного элемента  $j$  эти напряжения обозначаются через  $p_y^j$ . Перемещения и напряжения в произвольной точке  $(x, y)$  полуплоскости, вызванные напряжением на  $j$ -м элементе, находятся путем замены  $P_y, L, x$  и  $a$  в (12) – (13) на  $P_y^j, L - x^j, x - x^j$  и  $a^j$  соответственно, где  $x^j$  – координата средней точки граничного элемента, а  $2a^j$  – его длина. Тогда численное решение задачи представляет собой сумму  $N$  отдельных решений, отвечающих всем номерам  $j$  от единицы до  $N$ . Эта процедура эквивалентна простому численному интегрированию функций, определяющих перемещения и напряжения в полуплоскости  $y < 0$  при произвольном распределении нормальных напряжений, приложенных на границе. Очевидно, можно подойти сколь угодно близко к точному решению, выбирая граничные элементы все меньшей и меньшей длины.

### Задача о вдавливании штампа

В этом случае на границе заданы и перемещения, и напряжения. Такие задачи известны как смешанные краевые задачи теории упругости. Пример смешанной краевой задачи иллюстрирует рис. 119, где показана задача о вдавливании в полуплоскость жёсткого штампа со «смазкой» на контакте. Граничные условия записываются следующим образом:

$$\begin{aligned} v &= -v_0 = \text{const}, \quad |x| \leq b, \quad y = 0; \\ \tau_{xy} &= 0, \quad |x| < \infty, \quad y = 0; \\ \sigma_y &= 0, \quad |x| > b, \quad y = 0. \end{aligned} \tag{14}$$

Эти условия означают, что под штампом нормальные напряжения  $\sigma_y$  неизвестны и отличны от нуля.

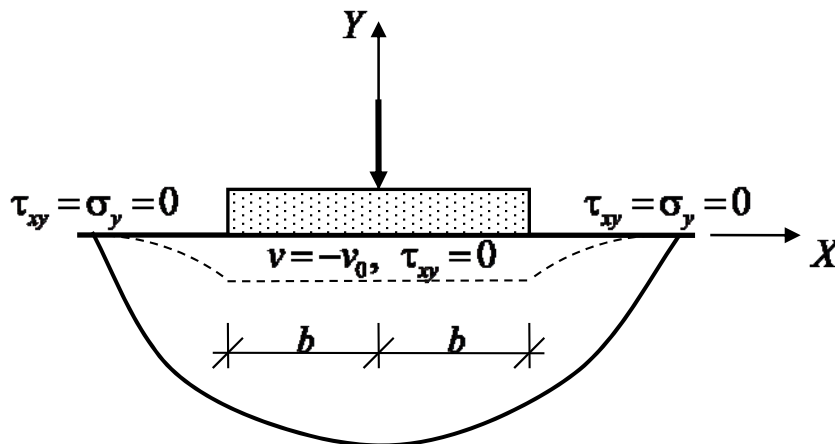


Рис. 119

Аналитическое решение для напряжений под штампом и перемещений на границе в данной задаче имеет вид [31]:

$$\begin{aligned} \sigma_y(x) &= -\frac{G \cdot v_0}{(1-\nu) \cdot \ln(2)} \frac{1}{\sqrt{b^2 - x^2}}, \quad |x| < b; \\ v(x) &= -v_0 \left[ 1 - \frac{\ln\left(\frac{x}{b} + \sqrt{\frac{x^2}{b^2} - 1}\right)}{\ln(2)} \right], \quad |x| \geq b, \quad y = 0. \end{aligned} \quad (15)$$

#### Численная процедура решения задачи о штампе.

Опишем численную процедуру решения задачи. Эта процедура служит простым примером метода граничных элементов.

Задача о жёстком штампе, может быть сформулирована в виде следующего вопроса: какое распределение нормальных напряжений  $\sigma_y = t_y(x)$  надо приложить на участке  $|x| < b, y = 0$  для того, чтобы перемещение  $v$  на этом участке было постоянным и равным  $v_0$ ? Для численного решения этой задачи рассмотрим дискретную аппроксимацию непрерывно распределённых напряжений, которые существуют в действительности. Подобная дискретная аппроксимация представлена с помощью  $N$  граничных элементов одинаковых размеров, расположенных на участке  $|x| < b, y = 0$ .

Будем полагать, что граничные элементы настолько малы, что нормальное напряжение, действующее на каждый граничный элемент  $\sigma_y = T_y^j = \text{const}$ . Тогда численное решение рассматриваемой задачи сводится к отысканию таких значений напряжений  $T_y^j$  всех  $j$  от единицы до  $N$ , при которых перемещение в центре каждого из элементов окажется равным  $v_0$ .

В соответствии с формулой (12) имеем:

$$\begin{aligned} v(x, 0) &= -\frac{1-\nu}{\pi G} P_y \left[ (x-a) \cdot \ln|x+a| - (x-a) \cdot \ln|x-a| + \right. \\ &\quad \left. + (L-a) \cdot \ln(L-a) - (L+a) \cdot \ln(L+a) \right]. \end{aligned} \quad (16)$$

Если постоянная нагрузка действует на полоске шириной  $2a$  с центром в точке  $x = x^j$ ,  $y = 0$ , то формулу (16) можно переписать в виде:

$$\begin{aligned} v(x, 0) = & -\frac{1-\nu}{\pi G} T_y^j \left[ (x - x^j + a) \cdot \ln|x - x^j + a| - \right. \\ & - (x - x^j - a) \cdot \ln|x - x^j - a| + \\ & + (L - x^j - a) \cdot \ln(L - x^j - a) - \\ & \left. - (L - x^j + a) \cdot \ln(L - x^j + a) \right]. \end{aligned} \quad (17)$$

Теперь перемещение в центре  $i$ -го элемента, вызванное действием постоянной нагрузки в  $j$ -м элементе, на основании (17) получает вид:

$$\begin{aligned} v(x^i, 0) = & -\frac{1-\nu}{\pi G} T_y^j \left[ (x^i - x^j + a) \cdot \ln|x^i - x^j + a| - \right. \\ & - (x^i - x^j - a) \cdot \ln|x^i - x^j - a| + \\ & + (L - x^j - a) \cdot \ln(L - x^j - a) - \\ & \left. - (L - x^j + a) \cdot \ln(L - x^j + a) \right]. \end{aligned} \quad (18)$$

Перемещение  $v$  в центре  $i$ -го элемента, возникающее от действия постоянной нагрузки во всех  $N$  элементах, определяется путём суперпозиции:

$$v^i = \sum_{j=1}^N B^{ij} \cdot T_y^j. \quad (19)$$

Здесь

$$\begin{aligned} B^{ij} = & -\frac{1-\nu}{\pi G} \left[ (x^i - x^j + a) \cdot \ln|x^i - x^j + a| - \right. \\ & - (x^i - x^j - a) \cdot \ln|x^i - x^j - a| + \\ & + (L - x^j - a) \cdot \ln(L - x^j - a) - \\ & \left. - (L - x^j + a) \cdot \ln(L - x^j + a) \right]. \end{aligned} \quad (20)$$

Коэффициент  $B^{ij}$  называется *коэффициентом влияния*; он представляет собой перемещение в центре  $i$ -го элемента, возникающее от действия постоянной единичной нагрузки на  $j$ -м элементе.

По определению должно выполняться условие  $L > x^j$ .



Таким образом, численное решение задачи о штампе даётся следующей системой  $N$  линейных уравнений с  $N$  неизвестными:

$$\left. \begin{aligned} B^{11}T_y^1 + B^{12}T_y^2 + \dots + B^{1N}T_y^N &= -v_0; \\ B^{21}T_y^1 + B^{22}T_y^2 + \dots + B^{2N}T_y^N &= -v_0; \\ &\vdots \\ B^{N1}T_y^1 + B^{N2}T_y^2 + \dots + B^{NN}T_y^N &= -v_0. \end{aligned} \right\} \quad (21)$$

Эти уравнения необходимо разрешить относительно неизвестных напряжений  $T_y^j$ , действующих по подошве штампа. После того как напряжения по подошве штампа станут известны, можно определить напряжения и перемещения в любой точке полуплоскости  $(x, y)$ , решая задачу Фламана для распределённой нагрузки.

### *Прямой метод граничных интегралов*

В основе прямого метода граничных интегралов лежит теорема линейной теории упругости, называемая *теоремой взаимности* (теорема Бетти) [21, 30].

Теорема взаимности связывает решения двух различных краевых задач для одной и той же области  $R$ . Предположим, что одна краевая задача характеризуется касательными и нормальными перемещениями  $u_s, u_n$  и напряжениями  $\sigma_s, \sigma_n$  на контуре  $C$  области  $R$ ; другая задача характеризуется перемещениями  $\tilde{u}_s, \tilde{u}_n$  и напряжениями  $\tilde{\sigma}_s, \tilde{\sigma}_n$  на том же контуре  $C$  области  $R$ . Теорема взаимности утверждает, что работа, производимая первой системой сил  $(\sigma_s, \sigma_n)$  на перемещениях второй системы  $(\tilde{u}_s, \tilde{u}_n)$ , равна работе, производимой второй системой сил  $(\tilde{\sigma}_s, \tilde{\sigma}_n)$  на перемещениях первой системы  $(u_s, u_n)$ . То есть

$$\int_C (\sigma_s \cdot \tilde{u}_s + \sigma_n \cdot \tilde{u}_n) ds = \int_C (\tilde{\sigma}_s \cdot u_s + \tilde{\sigma}_n \cdot u_n) ds. \quad (22)$$

Если первая (без тильды) задача та, которую мы пытаемся решить, а для второй (с тильдой) задачи мы уже знаем решение, то формула (22) представляет собой интегральное уравнение, связывающее неизвестные граничные параметры рассматриваемой задачи с заданными граничными параметрами и решением другой задачи для той же области  $R$ . Решение этой второй задачи называют *контрольным (тестовым) решением*.

Теперь контур  $C$  области  $R$  аппроксимируем с помощью  $N$  примыкающих друг к другу прямолинейных отрезков. Уравнение (22) при этом получает вид:

$$\sum_{j=1}^N \int_{\Delta s^j} (\sigma_s \cdot \tilde{u}_s + \sigma_n \cdot \tilde{u}_n) ds = \sum_{j=1}^n \int_{\Delta s^j} (\tilde{\sigma}_s \cdot u_s + \tilde{\sigma}_n \cdot u_n) ds. \quad (23)$$

Здесь  $\Delta s^j$  – это  $j$ -й отрезок, длина которого составляет  $2a^j$ .

Если считать, что для рассматриваемой задачи перемещения и напряжения на границе в пределах каждого отрезка постоянны, то выражение (23) получает вид:

$$\sum_{j=1}^N \sigma_s^j \int_{\Delta s^j} \tilde{u}_s ds + \sum_{j=1}^N \sigma_n^j \int_{\Delta s^j} \tilde{u}_n ds = \sum_{j=1}^n u_s^j \int_{\Delta s^j} \tilde{\sigma}_s ds + \sum_{j=1}^n u_n^j \int_{\Delta s^j} \tilde{\sigma}_n ds. \quad (24)$$

Здесь  $\sigma_s^j$ ,  $\sigma_n^j$  и  $u_s^j$ ,  $u_n^j$  – значения напряжений и перемещений в центре  $j$ -го отрезка.

Поскольку число отрезков (граничных элементов) равно  $N$ , в итоге мы имеем  $4N$  граничных параметров  $u_s^j$ ,  $u_n^j$ ,  $\sigma_s^j$ ,  $\sigma_n^j$ . Половина из них задана граничными условиями, которым мы пытаемся удовлетворить, а другая половина – неизвестные, которые мы стараемся найти. Предполагая пока, что нам также известно решение тестовой задачи ( $\tilde{u}_s$ ,  $\tilde{u}_n$ ,  $\tilde{\sigma}_s$ ,  $\tilde{\sigma}_n$ ), видим, что уравнение (24) содержит  $2N$  неизвестных. Следовательно, для отыскания этих неизвестных необходимо иметь ещё  $2N - 1$  уравнений, аналогичных (24). Другими словами, в целом для заданной области  $R$  надо иметь  $2N$  различных контрольных решений.

Нужную систему  $2N$  контрольных решений можно найти, прикладывая на границе в центре каждого  $i$ -го элемента сосредоточенную касательную и нормальную силы  $F_s^i$  и  $F_n^i$ ,  $i = 1, 2, \dots, N$ . Формула (24) при этом получает вид:

- для касательных сил  $F_s^i$

$$\begin{aligned} & \sum_{j=1}^N \sigma_s^j \int_{\Delta s^j} \tilde{u}_s(F_s^i) ds + \sum_{j=1}^N \sigma_n^j \int_{\Delta s^j} \tilde{u}_n(F_s^i) ds = \\ & = \sum_{j=1}^n u_s^j \int_{\Delta s^j} \tilde{\sigma}_s(F_s^i) ds + \sum_{j=1}^n u_n^j \int_{\Delta s^j} \tilde{\sigma}_n(F_s^i) ds; \end{aligned} \quad (25)$$

- для нормальных сил  $F_n^i$

$$\begin{aligned} & \sum_{j=1}^N \sigma_s^j \int_{\Delta s^j} \tilde{u}_s(F_n^i) ds + \sum_{j=1}^N \sigma_n^j \int_{\Delta s^j} \tilde{u}_n(F_n^i) ds = \\ & = \sum_{j=1}^n u_s^j \int_{\Delta s^j} \tilde{\sigma}_s(F_n^i) ds + \sum_{j=1}^n u_n^j \int_{\Delta s^j} \tilde{\sigma}_n(F_n^i) ds. \end{aligned} \quad (26)$$

Уравнения (25) и (26) можно представить в форме

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^N B_{ss}^{ij} \cdot \sigma_s^j + \sum_{j=1}^N B_{sn}^{ij} \cdot \sigma_n^j &= \sum_{j=1}^n A_{ss}^{ij} \cdot u_s^j + \sum_{j=1}^n A_{sn}^{ij} \cdot u_n^j; \\ \sum_{j=1}^N B_{ns}^{ij} \cdot \sigma_s^j + \sum_{j=1}^N B_{nn}^{ij} \cdot \sigma_n^j &= \sum_{j=1}^n A_{ns}^{ij} \cdot u_s^j + \sum_{j=1}^n A_{nn}^{ij} \cdot u_n^j. \end{aligned} \quad (27)$$

Здесь  $i$  принимает значения от единицы до  $N$ , а граничные коэффициенты влияния  $B_{ss}^{ij} = \int_{\Delta s^j} \tilde{u}_s(F_s^i) ds$ , ... можно вычислить по контрольным решениям.

Система линейных уравнений (27) позволяет вычислить неизвестные граничные параметры (перемещения и напряжения) *прямо* по заданным граничным условиям.

Построение контрольных решений выполняется, вообще говоря, для сосредоточенной силы, приложенной в точке бесконечной упругой среды. Задача о действии сосредоточенной силы в точке бесконечной упругой среды известна как задача Кельвина [34]. Задача Кельвина для условий плоской деформации иллюстрируется рис. 120. Решение этой задачи выражается через функцию  $g(x, y)$ , определяемую формулой

$$g(x, y) = -\frac{1}{4\pi(1-\nu)} \ln(\sqrt{x^2 + y^2}). \quad (28)$$

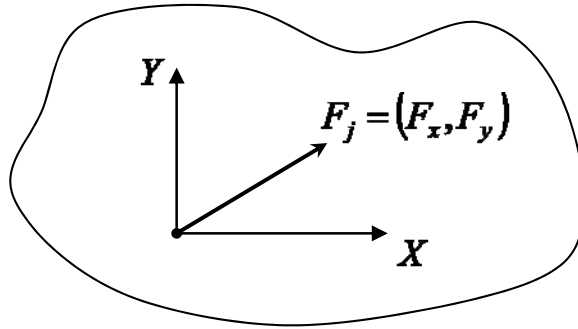


Рис. 120

Перемещения при этом будут равны:

$$\begin{aligned} u(x, y) &= \frac{F_x}{2G} \left[ (3-4\nu)g - x \frac{\partial g}{\partial x} \right] + \frac{F_y}{2G} \left( -y \frac{\partial g}{\partial x} \right); \\ v(x, y) &= \frac{F_x}{2G} \left( -x \frac{\partial g}{\partial y} \right) + \frac{F_y}{2G} \left[ (3-4\nu)g - y \frac{\partial g}{\partial y} \right]. \end{aligned} \quad (29)$$

Напряжения определяются соотношениями:

$$\begin{aligned}
 \sigma_x(x, y) &= F_x \left[ 2(1-\nu) \frac{\partial g}{\partial x} - x \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} \right] + F_y \left( 2\nu \frac{\partial g}{\partial y} - y \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} \right); \\
 \sigma_y(x, y) &= F_x \left( 2\nu \frac{\partial g}{\partial x} - x \frac{\partial^2 g}{\partial y^2} \right) + F_y \left[ 2(1-\nu) \frac{\partial g}{\partial y} - y \frac{\partial^2 g}{\partial y^2} \right]; \\
 \tau_{xy}(x, y) &= F_x \left[ (1-2\nu) \frac{\partial g}{\partial y} - x \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} \right] + F_y \left[ (1-2\nu) \frac{\partial g}{\partial x} - y \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y} \right].
 \end{aligned} \tag{30}$$

В приведённых выражениях производные равны:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial g}{\partial x} &= -\frac{1}{4\pi(1-\nu)} \frac{x}{x^2 + y^2}; & \frac{\partial g}{\partial y} &= -\frac{1}{4\pi(1-\nu)} \frac{y}{x^2 + y^2}; \\
 \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y} &= \frac{1}{4\pi(1-\nu)} \frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2}; & \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} &= -\frac{\partial^2 g}{\partial y^2} = \frac{1}{4\pi(1-\nu)} \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2}.
 \end{aligned} \tag{31}$$

Заметим, что сосредоточенная сила  $F_i = (F_x, F_y)$  была помещена в начале координат. Если эту силу расположить в точке  $x = c_x$ ,  $y = c_y$ , то в решении (28)-(31) нужно заменить координаты  $x$  и  $y$  на преобразованные координаты  $x - c_x$  и  $y - c_y$ .

В прямом методе граничных интегралов граничные коэффициенты влияния получают путём приложения сосредоточенной силы (с компонентами  $F_s^i$  и  $F_n^i$ ) в средней точке  $i$ -го отрезка контура  $C$  и интегрирования перемещений и напряжений, вызванных этими силами, вдоль  $j$ -го отрезка в соответствии с формулами (25) и (26). Изменяя  $i$  от единицы до  $N$ , то есть прикладывая поочерёдно  $N$  сосредоточенных сил по контуру, получаем необходимую систему алгебраических уравнений (27).

При вычислении коэффициентов влияния  $B_{ss}^{ij}, \dots$  воспользуемся локальной системой координат  $\bar{x}, \bar{y}$  с началом в центре  $j$ -го отрезка контура  $C$  (рис. 121). Эти координаты соответствуют обычным локальным координатам  $s^j$  и  $n^j$ , причём ось  $\bar{x}$  (или  $s^j$ ) направлена по направлению обхода контура, а ось  $\bar{y}$  (или  $n^j$ ) направлена вне рассматриваемой области. Принятые направления обхода контура показаны на рис. 121. Мы хотим вычислить перемещения и напряжения на  $j$ -м отрезке, вызванные действием сосредоточенной силы, приложенной в центре  $i$ -го отрезка. Компоненты этой силы, параллельная и перпендикулярная  $i$ -му отрезку, равны  $F_s^i$  и  $F_n^i$

соответственно. Из рис. 121 легко видеть, что компоненты этой силы в направлениях  $\bar{x} = s^j$  и  $\bar{y} = n^j$  определяются следующими выражениями:

$$F_{\bar{x}} = F_s^i \cos(\gamma) - F_n^i \sin(\gamma); \quad F_{\bar{y}} = F_s^i \sin(\gamma) - F_n^i \cos(\gamma). \quad (32)$$

Здесь  $\gamma = \beta^i - \beta^j$ .

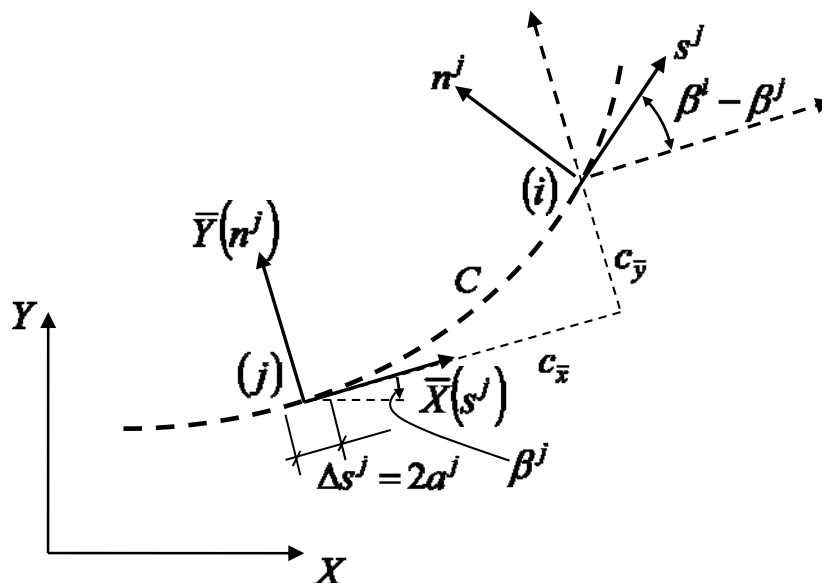


Рис. 121

Используя формулы (28) – (31), запишем выражения для перемещений и напряжений, вызванных силами  $F_{\bar{x}}$ ,  $F_{\bar{y}}$ , приложенными в точке  $\bar{x} = c_{\bar{x}}$ ,  $\bar{y} = c_{\bar{y}}$ , то есть в точке (i). Это осуществляется заменой  $x$  и  $y$  в формулах (29)–(30) на  $\bar{x} - c_{\bar{x}}$  и  $\bar{y} - c_{\bar{y}}$  и изменением координатных индексов  $x$  и  $y$  на  $\bar{x}$  и  $\bar{y}$ . Теперь перемещения  $\tilde{u}_s = u_{\bar{x}}$ ,  $\tilde{u}_n = u_{\bar{y}}$  и напряжения  $\tilde{\sigma}_s = \tau_{\bar{x}\bar{y}}$ ,  $\tilde{\sigma}_n = \sigma_{\bar{y}}$  на  $j$ -м отрезке (наше контрольное решение) находим из полученных выражений, подставляя в них  $\bar{y} = 0$  и учитывая соотношения (32):

$$\begin{aligned} \tilde{u}_s &= \frac{F_s^i}{2G} \left[ (3 - 4\nu) \cdot g \cdot \cos(\gamma) - \frac{\partial g}{\partial \bar{x}} (\bar{x} - c_{\bar{x}}) \cdot \cos(\gamma) + \frac{\partial g}{\partial \bar{x}} c_{\bar{y}} \cdot \sin(\gamma) \right] + \\ &+ \frac{F_n^i}{2G} \left[ -(3 - 4\nu) \cdot g \cdot \sin(\gamma) + \frac{\partial g}{\partial \bar{x}} (\bar{x} - c_{\bar{x}}) \cdot \sin(\gamma) + \frac{\partial g}{\partial \bar{x}} c_{\bar{y}} \cdot \cos(\gamma) \right]; \\ \tilde{u}_n &= \frac{F_s^i}{2G} \left[ (3 - 4\nu) \cdot g \cdot \sin(\gamma) - \frac{\partial g}{\partial \bar{x}} (\bar{x} - c_{\bar{x}}) \cdot \cos(\gamma) + \frac{\partial g}{\partial \bar{y}} c_{\bar{y}} \cdot \sin(\gamma) \right] + \\ &+ \frac{F_n^i}{2G} \left[ (3 - 4\nu) \cdot g \cdot \cos(\gamma) + \frac{\partial g}{\partial \bar{y}} (\bar{x} - c_{\bar{x}}) \cdot \sin(\gamma) + \frac{\partial g}{\partial \bar{y}} c_{\bar{y}} \cdot \cos(\gamma) \right]. \end{aligned} \quad (33)$$

$$\begin{aligned}
\tilde{\sigma}_s = & F_s^i \left[ (1-2\nu) \frac{\partial g}{\partial x} \sin(\gamma) + (1-2\nu) \frac{\partial g}{\partial y} \cos(\gamma) - \right. \\
& \left. - \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y} (\bar{x} - c_{\bar{x}}) \cos(\gamma) + \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y} c_{\bar{y}} \sin(\gamma) \right] + \\
& + F_n^i \left[ (1-2\nu) \frac{\partial g}{\partial x} \cos(\gamma) - (1-2\nu) \frac{\partial g}{\partial y} \sin(\gamma) + \right. \\
& \left. + \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y} (\bar{x} - c_{\bar{x}}) \sin(\gamma) + \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y} c_{\bar{y}} \cos(\gamma) \right]; \\
\tilde{\sigma}_n = & F_s^i \left[ 2\nu \frac{\partial g}{\partial x} \cos(\gamma) + 2(1-\nu) \frac{\partial g}{\partial y} \sin(\gamma) - \right. \\
& \left. - \frac{\partial^2 g}{\partial y^2} (\bar{x} - c_{\bar{x}}) \cos(\gamma) + \frac{\partial^2 g}{\partial y^2} c_{\bar{y}} \sin(\gamma) \right] + \\
& + F_n^i \left[ -2\nu \frac{\partial g}{\partial x} \sin(\gamma) + 2(1-\nu) \frac{\partial g}{\partial y} \cos(\gamma) + \right. \\
& \left. + \frac{\partial^2 g}{\partial y^2} (\bar{x} - c_{\bar{x}}) \sin(\gamma) + \frac{\partial^2 g}{\partial y^2} c_{\bar{y}} \cos(\gamma) \right].
\end{aligned} \tag{34}$$

Здесь  $g(\bar{x}, \bar{y}) = -\frac{1}{4\pi(1-\nu)} \ln \left( \sqrt{(\bar{x} - c_{\bar{x}})^2 + (\bar{y} - c_{\bar{y}})^2} \right)$ , причём сама функция  $g(\bar{x}, \bar{y})$  и её производные определяются в выражениях (33) и (34) при  $\bar{y} = 0$ .

Выражения (33) и (34) дают два контрольных решения для каждого конечного элемента  $i$ : одно – для касательной силы  $F_s^i$ , другое для нормальной силы  $F_n^i$ . Коэффициенты влияния  $B_{ss}^{ij}, \dots$  в соотношениях (27) получаются путём поочередного выбора этих решений (то есть  $F_s^i \neq 0, F_n^i = 0$  и  $F_s^i = 0, F_n^i \neq 0$ ), подстановки формул (33) и (34) в зависимости (25) и (26) и выполнения необходимого интегрирования вдоль  $\Delta s^j$ , то есть интегрирования по  $\bar{x}$  в пределах от  $-a^j$  до  $+a^j$ . Поскольку в полученных при этом уравнениях силы  $F_s^i$  и  $F_n^i$  входят и в левую, и в правую части уравнений, то их можно считать равными +1.

Итак, получаем:

$$\begin{aligned}
B_{ss}^{ij} &= \int_{-a^j}^{+a^j} \tilde{u}_s(F_s^i) d\bar{x} = \frac{1}{2G} \left[ (3-4\nu)\bar{T}_1 \cos(\gamma) + c_{\bar{y}}(\bar{T}_2 \sin(\gamma) - \bar{T}_3 \cos(\gamma)) \right]; \\
B_{sn}^{ij} &= \int_{-a^j}^{+a^j} \tilde{u}_n(F_s^i) d\bar{x} = \frac{1}{2G} \left[ (3-4\nu)\bar{T}_1 \sin(\gamma) + c_{\bar{y}}(\bar{T}_2 \cos(\gamma) - \bar{T}_3 \sin(\gamma)) \right]; \\
B_{ns}^{ij} &= \int_{-a^j}^{+a^j} \tilde{u}_s(F_n^i) d\bar{x} = \frac{1}{2G} \left[ -(3-4\nu)\bar{T}_1 \sin(\gamma) + c_{\bar{y}}(\bar{T}_2 \cos(\gamma) - \bar{T}_3 \sin(\gamma)) \right]; \\
B_{nn}^{ij} &= \int_{-a^j}^{+a^j} \tilde{u}_n(F_n^i) d\bar{x} = \frac{1}{2G} \left[ (3-4\nu)\bar{T}_1 \cos(\gamma) - c_{\bar{y}}(\bar{T}_2 \sin(\gamma) - \bar{T}_3 \cos(\gamma)) \right]; \\
A_{ss}^{ij} &= \int_{-a^j}^{+a^j} \tilde{\sigma}_s(F_s^i) d\bar{x} = \\
&= \left[ (1-2\nu)\bar{T}_2 \sin(\gamma) + 2(1-\nu)\bar{T}_3 \cos(\gamma) + c_{\bar{y}}(\bar{T}_4 \sin(\gamma) + \bar{T}_5 \cos(\gamma)) \right]; \\
A_{sn}^{ij} &= \int_{-a^j}^{+a^j} \tilde{\sigma}_n(F_s^i) d\bar{x} = \\
&= \left[ -(1-2\nu)\bar{T}_2 \cos(\gamma) + 2(1-\nu)\bar{T}_3 \sin(\gamma) + c_{\bar{y}}(\bar{T}_4 \cos(\gamma) - \bar{T}_5 \sin(\gamma)) \right]; \\
A_{ns}^{ij} &= \int_{-a^j}^{+a^j} \tilde{\sigma}_s(F_n^i) d\bar{x} = \\
&= \left[ (1-2\nu)\bar{T}_2 \cos(\gamma) - 2(1-\nu)\bar{T}_3 \sin(\gamma) + c_{\bar{y}}(\bar{T}_4 \cos(\gamma) - \bar{T}_5 \sin(\gamma)) \right]; \\
A_{nn}^{ij} &= \int_{-a^j}^{+a^j} \tilde{\sigma}_n(F_n^i) d\bar{x} = \\
&= \left[ (1-2\nu)\bar{T}_2 \sin(\gamma) + 2(1-\nu)\bar{T}_3 \cos(\gamma) - c_{\bar{y}}(\bar{T}_4 \sin(\gamma) + \bar{T}_5 \cos(\gamma)) \right].
\end{aligned} \tag{35}$$

Здесь  $\bar{T}_1, \dots, \bar{T}_5$  – это определённые интегралы от функции  $g(x, y)$  и её производных (вычисленных при  $\bar{y} = 0$ ):

$$\begin{aligned}
\bar{T}_1 &= -\frac{1}{4\pi(1-\nu)} \left[ c_{\bar{y}} \left( \operatorname{arctg} \frac{c_{\bar{y}}}{c_{\bar{x}} - a^j} - \operatorname{arctg} \frac{c_{\bar{y}}}{c_{\bar{x}} + a^j} \right) - \right. \\
&\quad \left. - (c_{\bar{x}} - a^j) \ln \left( \sqrt{(c_{\bar{x}} - a^j)^2 + c_{\bar{y}}^2} \right) + (c_{\bar{x}} + a^j) \ln \left( \sqrt{(c_{\bar{x}} - a^j)^2 + c_{\bar{y}}^2} \right) \right]; \\
\bar{T}_2 &= -\frac{1}{4\pi(1-\nu)} \left[ \ln \left( \sqrt{(c_{\bar{x}} - a^j)^2 + c_{\bar{y}}^2} \right) - \ln \left( \sqrt{(c_{\bar{x}} + a^j)^2 + c_{\bar{y}}^2} \right) \right]; \\
\bar{T}_3 &= \frac{1}{4\pi(1-\nu)} \left[ \operatorname{arctg} \frac{c_{\bar{y}}}{c_{\bar{x}} - a^j} - \operatorname{arctg} \frac{c_{\bar{y}}}{c_{\bar{x}} + a^j} \right]; \\
\bar{T}_4 &= \frac{1}{4\pi(1-\nu)} \left[ \frac{c_{\bar{y}}}{(c_{\bar{x}} - a^j)^2 + c_{\bar{y}}^2} - \frac{c_{\bar{y}}}{(c_{\bar{x}} + a^j)^2 + c_{\bar{y}}^2} \right]; \\
\bar{T}_5 &= \frac{1}{4\pi(1-\nu)} \left[ \frac{c_{\bar{y}} - a^j}{(c_{\bar{x}} - a^j)^2 + c_{\bar{y}}^2} - \frac{c_{\bar{y}} + a^j}{(c_{\bar{x}} + a^j)^2 + c_{\bar{y}}^2} \right].
\end{aligned} \tag{36}$$

При совпадении точек  $(i)$  и  $(j)$  формулы (36) получают вид:

$$\begin{aligned}
\bar{T}_1 &= -\frac{a^j \cdot \ln(a^j)}{2\pi(1-\nu)} = -\frac{a^i \cdot \ln(a^i)}{2\pi(1-\nu)}; \\
\bar{T}_2 &= 0; \\
\bar{T}_3 &= \frac{1}{4\pi(1-\nu)}; \\
\bar{T}_4 &= 0; \\
\bar{T}_5 &= -\frac{1}{4\pi a^j (1-\nu)} = -\frac{1}{4\pi a^i (1-\nu)}.
\end{aligned} \tag{37}$$

Диагональные члены коэффициентов влияния, отражающие собственные воздействия элементов, получаются подстановкой соотношений (37) в зависимости (35) с учётом того, что угол  $\gamma = 0$ :

$$\begin{aligned}
B_{sn}^{ii} &= B_{ns}^{ii} = 0; \\
B_{ss}^{ii} &= B_{nn}^{ii} = -\frac{3-4\nu}{4\pi G} a^i \ln(a^i); \\
A_{sn}^{ii} &= A_{ns}^{ii} = 0; \\
A_{ss}^{ii} &= A_{nn}^{ii} = +\frac{1}{2}.
\end{aligned} \tag{38}$$



Уравнения (27) составляют основу прямого метода граничных интегралов. Для любой краевой задачи половина из  $4N$  параметров этих уравнений  $(u_s^i, u_n^i, \sigma_s^i, \sigma_n^i; i = 1, \dots, N)$  задаётся как граничные условия, в то время как другая половина соответствует неизвестным. Коэффициенты влияния определяются в соответствии с геометрией задачи по формулам (35). Следовательно, уравнения (27) можно использовать для записи системы  $2N$  алгебраических уравнений с  $2N$  неизвестными. Неизвестными в этой системе уравнений являются фактические граничные перемещения или напряжения, которые не заданы как граничные условия.

**Пример 2.**

Краевая задача в напряжениях. В этом случае для всех  $N$  граничных элементов известны величины  $\sigma_s^i = (\sigma_s^i)_0$  и  $\sigma_n^i = (\sigma_n^i)_0$ . Система уравнений (27) для определения перемещений  $u_s^i$  и  $u_n^i$  для всех  $i = 1, \dots, N$  получает вид:

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n A_{ss}^{ij} \cdot u_s^j + \sum_{j=1}^n A_{sn}^{ij} \cdot u_n^j &= \sum_{j=1}^N B_{ss}^{ij} \cdot (\sigma_s^j)_0 + \sum_{j=1}^N B_{sn}^{ij} \cdot (\sigma_n^j)_0; \\ \sum_{j=1}^n A_{ns}^{ij} \cdot u_s^j + \sum_{j=1}^n A_{nn}^{ij} \cdot u_n^j &= \sum_{j=1}^N B_{ns}^{ij} \cdot (\sigma_s^j)_0 + \sum_{j=1}^N B_{nn}^{ij} \cdot (\sigma_n^j)_0. \end{aligned} \quad (39)$$

**Пример 3.**

Смешанная краевая задача. Будем полагать, что на всех  $N$  граничных элементах заданы нормальные напряжения  $\sigma_n^i = (\sigma_n^i)_0$  и касательные перемещения  $u_s^i = (u_s^i)_0$ . Система уравнений (27) для определения касательных напряжений  $\sigma_s^i$  и нормальных перемещений  $u_n^i$  для всех  $i = 1, \dots, N$  получает вид:

$$\begin{aligned} -2G \sum_{j=1}^N B_{ss}^{ij} \cdot \frac{\sigma_s^j}{2G} + \sum_{j=1}^N A_{sn}^{ij} \cdot u_n^j &= -\sum_{j=1}^n A_{ss}^{ij} \cdot (u_s^j)_0 + \sum_{j=1}^N B_{sn}^{ij} \cdot (\sigma_n^j)_0; \\ -2G \sum_{j=1}^N B_{ns}^{ij} \cdot \frac{\sigma_s^j}{2G} + \sum_{j=1}^n A_{nn}^{ij} \cdot u_n^j &= -\sum_{j=1}^n A_{ns}^{ij} \cdot (u_s^j)_0 + \sum_{j=1}^N B_{nn}^{ij} \cdot (\sigma_n^j)_0. \end{aligned} \quad (40)$$

Итак, для всех типов краевых задач основную расчётную систему алгебраических уравнений можно представить в следующем виде:

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^N C_{ss}^{ij} \cdot X_s^j + \sum_{j=1}^N C_{sn}^{ij} \cdot X_n^j &= Y_s^i; \\ \sum_{j=1}^N C_{ns}^{ij} \cdot X_s^j + \sum_{j=1}^N C_{nn}^{ij} \cdot X_n^j &= Y_n^i. \end{aligned} \quad (41)$$

В этих уравнениях  $Y_s^i$  и  $Y_n^i$  суть определённые линейные комбинации *известных* граничных параметров, а  $C_{ss}^{ij}, \dots$  – коэффициенты влияния при неизвестных граничных параметрах  $X_s^j$  и  $X_n^j$ .

### Формулы Сомильяны

Формулы Сомильяны [22] – интегральные тождества – используются, если требуется найти решение *внутри* рассматриваемой области  $R$ . Для плоской задачи эти формулы дают перемещения внутренней точки  $p$  области  $R$ :

$$\begin{aligned} u_x(p) &= -\int_C [u_s \tilde{\sigma}_s(F_x) + u_n \tilde{\sigma}_n(F_x)] ds + \int_C [\sigma_s \tilde{u}_s(F_x) + \sigma_n \tilde{u}_n(F_x)] ds; \\ u_y(p) &= -\int_C [u_s \tilde{\sigma}_s(F_y) + u_n \tilde{\sigma}_n(F_y)] ds + \int_C [\sigma_s \tilde{u}_s(F_y) + \sigma_n \tilde{u}_n(F_y)] ds. \end{aligned} \quad (42)$$

Здесь  $u_s, u_n, \sigma_s, \sigma_n$  – граничные перемещения и напряжения для задачи, решение которой мы уже имеем (см. формулы (41)), а  $\tilde{u}_s(F_i), \tilde{u}_n(F_i), \tilde{\sigma}_s(F_i), \tilde{\sigma}_n(F_i)$  – нормальные и касательные перемещения и напряжения на границе  $C$ , вызванные действием единичной силы  $F_i = (F_x = 1, F_y = 1)$  в точке  $p$ .

Уравнения (42) можно разрешить численно, разбивая границу  $C$  на  $N$  элементов и предполагая, что  $u_s, u_n, \sigma_s, \sigma_n$  постоянны в пределах каждого граничного элемента. Это даёт

$$\begin{aligned} u_x(p) &= -\sum_{j=1}^N \left[ u_s^j \int_{\Delta s^j} \tilde{\sigma}_s(F_x) ds + u_n^j \int_{\Delta s^j} \tilde{\sigma}_n(F_x) ds \right] + \\ &+ \sum_{j=1}^N \left[ \sigma_s^j \int_{\Delta s^j} \tilde{u}_s(F_x) ds + \sigma_n^j \int_{\Delta s^j} \tilde{u}_n(F_x) ds \right]; \\ u_y(p) &= -\sum_{j=1}^N \left[ u_s^j \int_{\Delta s^j} \tilde{\sigma}_s(F_y) ds + u_n^j \int_{\Delta s^j} \tilde{\sigma}_n(F_y) ds \right] + \\ &+ \sum_{j=1}^N \left[ \sigma_s^j \int_{\Delta s^j} \tilde{u}_s(F_y) ds + \sigma_n^j \int_{\Delta s^j} \tilde{u}_n(F_y) ds \right]. \end{aligned} \quad (43)$$

Здесь все граничные параметры  $u_s^j, u_n^j, \sigma_s^j, \sigma_n^j$  известны. Интегралы вычисляются в локальной системе координат  $\bar{x}, \bar{y}$  с центром в начале  $j$ -го

граничного элемента (рис. 122) в каждой точке  $p$  с координатами  $\bar{x} = c_{\bar{x}}$ ,  $\bar{y} = c_{\bar{y}}$ , где отыскиваются перемещения  $u_x(p)$ ,  $u_y(p)$ .

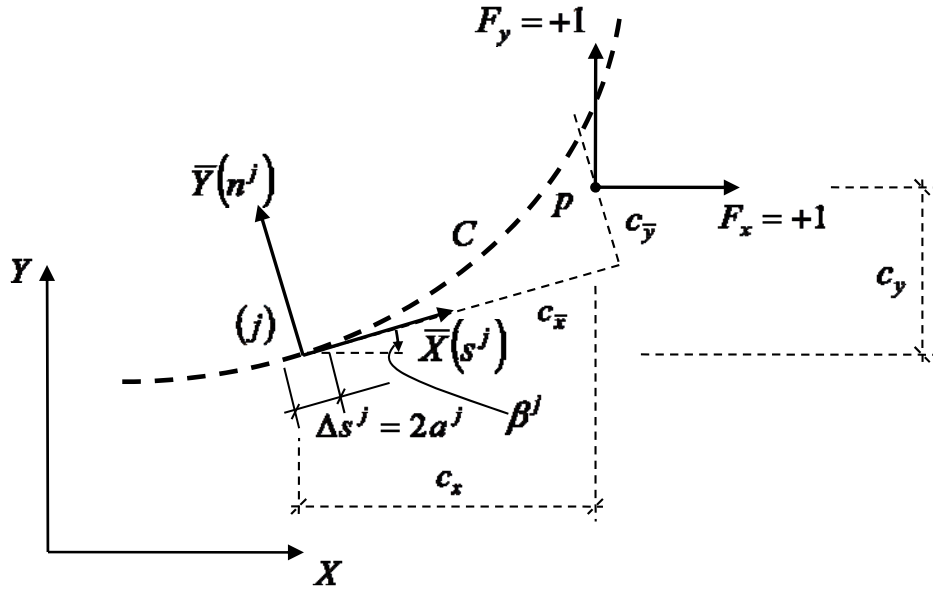


Рис. 122

В формулах (43) величины с тильдами — это перемещения  $\tilde{u}_s = u_{\bar{x}}$ ,  $\tilde{u}_n = u_{\bar{y}}$  и напряжения  $\tilde{\sigma}_s = \tau_{\bar{x}\bar{y}}$ ,  $\tilde{\sigma}_n = \sigma_{\bar{y}}$ , возникающие в  $j$ -м граничном элементе под действием сосредоточенных сил  $F_x = +1$  и  $F_y = +1$ , приложенных в точке  $p$ . Выражения для этих величин можно получить непосредственно из соотношений (33) и (34), полагая  $\gamma = -\beta^j$ , так как  $\beta^i = 0$  и  $F_s^i = F_x$ ,  $F_n^i = F_y$ . Уравнения (43) при этом получают вид:

$$\begin{aligned}
 u_x(p) = & \sum_{j=1}^N \left\{ (1-2\nu) \cdot \bar{T}_2 \sin(\beta^j) - 2(1-\nu) \cdot \bar{T}_3 \cos(\beta^j) + \right. \\
 & + c_{\bar{y}} \left[ \bar{T}_4 \sin(\beta^j) - \bar{T}_5 \cos(\beta^j) \right] \left. \right\} u_s^j + \\
 & + \sum_{j=1}^N \left\{ (1-2\nu) \cdot \bar{T}_2 \cos(\beta^j) + 2(1-\nu) \cdot \bar{T}_3 \sin(\beta^j) - \right. \\
 & - c_{\bar{y}} \left[ \bar{T}_4 \cos(\beta^j) + \bar{T}_5 \sin(\beta^j) \right] \left. \right\} u_n^j + \\
 & + \sum_{j=1}^N \left\{ (3-4\nu) \cdot \bar{T}_1 \cos(\beta^j) - c_{\bar{y}} \left[ \bar{T}_2 \sin(\beta^j) + \bar{T}_3 \cos(\beta^j) \right] \right\} \frac{\sigma_s^j}{2G} + \\
 & + \sum_{j=1}^N \left\{ -(3-4\nu) \cdot \bar{T}_1 \sin(\beta^j) + c_{\bar{y}} \left[ \bar{T}_2 \cos(\beta^j) - \bar{T}_3 \sin(\beta^j) \right] \right\} \frac{\sigma_n^j}{2G};
 \end{aligned} \tag{44}$$

$$\begin{aligned}
u_y(p) = & \sum_{j=1}^N \left\{ -(1-2\nu) \cdot \bar{T}_2 \cos(\beta^j) - 2(1-\nu) \cdot \bar{T}_3 \cos(\beta^j) - \right. \\
& \left. - c_{\bar{y}} \left[ \bar{T}_4 \cos(\beta^j) + \bar{T}_5 \sin(\beta^j) \right] \right\} u_s^j + \\
& + \sum_{j=1}^N \left\{ (1-2\nu) \cdot \bar{T}_2 \sin(\beta^j) - 2(1-\nu) \cdot \bar{T}_3 \cos(\beta^j) - \right. \\
& \left. - c_{\bar{y}} \left[ \bar{T}_4 \sin(\beta^j) - \bar{T}_5 \cos(\beta^j) \right] \right\} u_n^j + \\
& + \sum_{j=1}^N \left\{ (3-4\nu) \cdot \bar{T}_1 \sin(\beta^j) + c_{\bar{y}} \left[ \bar{T}_2 \cos(\beta^j) - \bar{T}_3 \sin(\beta^j) \right] \right\} \frac{\sigma_s^j}{2G} + \\
& + \sum_{j=1}^N \left\{ (3-4\nu) \cdot \bar{T}_1 \cos(\beta^j) + c_{\bar{y}} \left[ \bar{T}_2 \sin(\beta^j) + \bar{T}_3 \cos(\beta^j) \right] \right\} \frac{\sigma_n^j}{2G}.
\end{aligned}$$

Здесь коэффициенты  $\bar{T}_1, \dots, \bar{T}_5$  определяются в соответствии с формулами (36).

Что касается деформаций, то они определяются обычным образом:

$$\varepsilon_x(p) = \frac{\partial u_x(p)}{\partial c_x}; \quad \varepsilon_y(p) = \frac{\partial u_y(p)}{\partial c_y}; \quad \gamma_{xy}(p) = \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial u_x(p)}{\partial c_y} + \frac{\partial u_y(p)}{\partial c_x} \right]. \quad (45)$$

Используя формулы преобразования

$$c_{\bar{x}} = c_x \cdot \cos(\beta^j) + c_y \cdot \sin(\beta^j); \quad c_{\bar{y}} = -c_x \cdot \sin(\beta^j) + c_y \cdot \cos(\beta^j),$$

соотношения (45) приведём к виду:

$$\begin{aligned}
\varepsilon_x(p) &= \frac{\partial u_x(p)}{\partial c_{\bar{x}}} \cos(\beta^j) - \frac{\partial u_x(p)}{\partial c_{\bar{y}}} \sin(\beta^j); \\
\varepsilon_y(p) &= \frac{\partial u_y(p)}{\partial c_{\bar{x}}} \sin(\beta^j) + \frac{\partial u_y(p)}{\partial c_{\bar{y}}} \cos(\beta^j); \\
\gamma_{xy}(p) &= \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial u_x(p)}{\partial c_{\bar{x}}} \sin(\beta^j) + \frac{\partial u_x(p)}{\partial c_{\bar{y}}} \cos(\beta^j) + \right. \\
&\quad \left. + \frac{\partial u_y(p)}{\partial c_{\bar{x}}} \cos(\beta^j) - \frac{\partial u_y(p)}{\partial c_{\bar{y}}} \sin(\beta^j) \right].
\end{aligned} \quad (46)$$

Подставляя (44) в (46) и используя затем формулы обобщённого закона Гука, находим напряжения:

$$\begin{aligned}
\sigma_x(p) = & 2G \sum_{j=1}^N \left\{ 2\bar{T}_4 \cos^2(\beta^j) + \bar{T}_5 \sin(2\beta^j) - \right. \\
& \left. - c_{\bar{y}} \left[ \bar{T}_6 \sin(2\beta^j) - \bar{T}_7 \cos(2\beta^j) \right] \right\} u_s^j + \\
& + 2G \sum_{j=1}^N \left\{ -\bar{T}_5 - c_{\bar{y}} \left[ \bar{T}_6 \sin(2\beta^j) + \bar{T}_7 \cos(2\beta^j) \right] \right\} u_n^j + \\
& + \sum_{j=1}^N \left\{ -\bar{T}_2 - 2(1-\nu) \left[ \bar{T}_2 \cos(2\beta^j) - \bar{T}_3 \sin(2\beta^j) \right] + \right. \\
& \left. + c_{\bar{y}} \left[ \bar{T}_4 \cos(2\beta^j) + \bar{T}_5 \sin(2\beta^j) \right] \right\} \sigma_s^j + \\
& + \sum_{j=1}^N \left\{ -\bar{T}_3 + (1-2\nu) \left[ \bar{T}_2 \sin(2\beta^j) + \bar{T}_3 \cos(2\beta^j) \right] + \right. \\
& \left. + c_{\bar{y}} \left[ \bar{T}_4 \sin(2\beta^j) - \bar{T}_5 \cos(2\beta^j) \right] \right\} \sigma_n^j; \\
\sigma_y(p) = & 2G \sum_{j=1}^N \left\{ 2\bar{T}_4 \sin^2(\beta^j) - \bar{T}_5 \sin(2\beta^j) - \right. \\
& \left. - c_{\bar{y}} \left[ \bar{T}_6 \cos(2\beta^j) - \bar{T}_7 \sin(2\beta^j) \right] \right\} u_s^j + \\
& + 2G \sum_{j=1}^N \left\{ -\bar{T}_5 + c_{\bar{y}} \left[ \bar{T}_6 \sin(2\beta^j) + \bar{T}_7 \cos(2\beta^j) \right] \right\} u_n^j + \\
& + \sum_{j=1}^N \left\{ -\bar{T}_2 + 2(1-\nu) \left[ \bar{T}_2 \cos(2\beta^j) - \bar{T}_3 \sin(2\beta^j) \right] + \right. \\
& \left. + c_{\bar{y}} \left[ \bar{T}_4 \cos(2\beta^j) + \bar{T}_5 \sin(2\beta^j) \right] \right\} \sigma_s^j + \\
& + \sum_{j=1}^N \left\{ -\bar{T}_3 - (1-2\nu) \left[ \bar{T}_2 \sin(2\beta^j) + \bar{T}_3 \cos(2\beta^j) \right] + \right. \\
& \left. + c_{\bar{y}} \left[ \bar{T}_4 \sin(2\beta^j) - \bar{T}_5 \cos(2\beta^j) \right] \right\} \sigma_n^j;
\end{aligned} \tag{47}$$

$$\begin{aligned}
\tau_{xy}(p) = & 2G \sum_{j=1}^N \left\{ \bar{T}_4 \sin(2\beta^j) - \bar{T}_5 \cos(2\beta^j) - \right. \\
& \left. - c_y \left[ \bar{T}_6 \sin(2\beta^j) + \bar{T}_7 \sin(2\beta^j) \right] \right\} u_s^j + \\
& + 2G \sum_{j=1}^N \left\{ c_y \left[ \bar{T}_6 \cos(2\beta^j) - \bar{T}_7 \sin(2\beta^j) \right] \right\} u_n^j + \\
& + \sum_{j=1}^N \left\{ -2(1-\nu) \left[ \bar{T}_2 \sin(2\beta^j) + \bar{T}_3 \cos(2\beta^j) \right] + \right. \\
& \left. + c_y \left[ \bar{T}_4 \sin(2\beta^j) - \bar{T}_5 \cos(2\beta^j) \right] \right\} \sigma_s^j + \\
& + \sum_{j=1}^N \left\{ -(1-2\nu) \left[ \bar{T}_2 \cos(2\beta^j) - \bar{T}_3 \sin(2\beta^j) \right] - \right. \\
& \left. - c_y \left[ \bar{T}_4 \cos(2\beta^j) + \bar{T}_5 \sin(2\beta^j) \right] \right\} \sigma_n^j.
\end{aligned}$$

В этих выражениях функции  $\bar{T}_1, \dots, \bar{T}_5$  определяются по формулам (36), а функции  $\bar{T}_6, \bar{T}_7$  вычисляются:

$$\begin{aligned}
\bar{T}_6 = & -\frac{1}{4\pi(1-\nu)} \left\{ \frac{(c_x - a^j)^2 - c_y^2}{\left[ (c_x - a^j)^2 + c_y^2 \right]^2} - \frac{(c_x + a^j)^2 - c_y^2}{\left[ (c_x + a^j)^2 + c_y^2 \right]^2} \right\}; \\
\bar{T}_7 = & -\frac{1}{4\pi(1-\nu)} \left\{ \frac{c_x - a^j}{\left[ (c_x - a^j)^2 + c_y^2 \right]^2} - \frac{c_x + a^j}{\left[ (c_x + a^j)^2 + c_y^2 \right]^2} \right\}.
\end{aligned} \tag{48}$$

Следует отметить, что все полученные ранее результаты метода граничных элементов выражались через локальные касательные и нормальные компоненты перемещений и усилий вдоль заданной границы. Однако существует приём, когда методы граничных элементов формулируются в терминах глобальных компонент  $x, y$  этих величин, то есть  $u_i = (u_x, u_y)$  и  $t_i = (t_x, t_y)$ . Связь между локальной и глобальной формулировками метода граничных элементов легко установить, используя простые формулы преобразования координат. Например, используя соотношения

$$\begin{aligned}
u_s^j = & u_x^j \cos(\beta^j) + u_y^j \sin(\beta^j); \quad u_n^j = -u_x^j \sin(\beta^j) + u_y^j \cos(\beta^j); \\
\sigma_s^j = & t_x^j \cos(\beta^j) + t_y^j \sin(\beta^j); \quad \sigma_n^j = -t_x^j \sin(\beta^j) + t_y^j \cos(\beta^j),
\end{aligned}$$

соотношения (27) можно представить в виде

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^N B_{xx}^{ij} \cdot t_x^j + \sum_{j=1}^N B_{xy}^{ij} \cdot t_y^j &= \sum_{j=1}^n A_{xx}^{ij} \cdot u_x^j + \sum_{j=1}^n A_{xy}^{ij} \cdot u_y^j; \\ \sum_{j=1}^N B_{yx}^{ij} \cdot t_x^j + \sum_{j=1}^N B_{yy}^{ij} \cdot t_y^j &= \sum_{j=1}^n A_{yx}^{ij} \cdot u_x^j + \sum_{j=1}^n A_{yy}^{ij} \cdot u_y^j. \end{aligned} \quad (49)$$

Здесь «глобальные» коэффициенты влияния  $B_{xx}^{ij}, \dots$  связаны с локальными коэффициентами выражениями вида

$$B_{xx}^{ij} = B_{ss}^{ij} \cos(\beta^j) - B_{sn}^{ij} \sin(\beta^j), \dots \quad (50)$$

Для более подробного изучения формулировки метода граничных элементов в терминах глобальных компонент перемещений и усилий следует обратиться к специальной литературе. Мы здесь на этом останавливаться не будем.

Надо сказать, что приведённое выше описание прямого метода граничных интегралов не исчерпывает всё многообразие методов граничных элементов. Следует обратить внимание читателя на такие достаточно универсальные, но гораздо менее трудоёмкие не прямые методы граничных элементов, как метод фиктивных нагрузок, или метод разрывных решений [18]. Преимущество прямого метода граничных интегралов состоит в том, что пока что он проявил себя как более подходящий для развития этого направления по сравнению с непрямыми методами граничных элементов.

Недостатками традиционной постановки метода граничных элементов являются:

- Рассматриваются граничные условия одного типа (либо Дирихле, либо Неймана), смешанная задача не рассмотрена. (Не составляет труда записать уравнения смешанной задачи, но они не имеют теории решения.)
- Граница должна быть гладкой. (Полученные при решении задачи Неймана сингулярные интегралы не существуют в угловых точках кусочно-гладкой границы.)
- Матрица результирующей системы линейных алгебраических уравнений, полностью заполненная, в отличие от МКЭ, в котором она содержит большое количество нулей.

Также к недостаткам можно отнести техническую сложность метода граничных элементов.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Цель и задачи, поставленные при написании данного учебного пособия, выполнены. В первой главе книги дано систематическое изложение собственно численных методов решения разнообразных задач математики, имеющих непосредственное приложение в механике деформируемого твёрдого тела (численные методы решения нелинейных уравнений, численные методы решения систем линейных и нелинейных алгебраических уравнений, методы аппроксимации и приближения функций, численные методы вычисления интегралов, численные методы интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений); изложены основы теории и правила вычисления погрешностей. В последующих главах описываются инженерные методы решения задач строительной механики (определение перемещений в стержневой системе в матричной форме, расчёт стержневых систем методом сил и методом перемещений в матричной форме, метод конечных элементов для расчёта стержневых систем) и теории упругости (метод конечных разностей применительно к расчёту стержней, балок-стенок, тонких изгибаемых пластин; расчёт с помощью тригонометрических рядов применительно к плоской задаче теории упругости и расчёту изгибаемых пластинок; вариационные методы расчёта: метод Ритца – Тимошенко, метод Бубнова – Галёркина, метод конечных элементов; метод граничных элементов).

Автор не стремился охватить всё многообразие инженерных методов расчёта деформируемых тел, да это и нереально сделать в одной книге. Однако наряду с изложением такого популярного в настоящее время метода, как метод конечных элементов, в книге представлены и такие «старые», но остающиеся классическими методами, как метод решения задач теории упругости с помощью тригонометрических рядов, метод Ритца – Тимошенко, метод Бубнова – Галёркина. Не остался без внимания и метод граничных элементов, имеющий известные преимущества перед методом конечных элементов, но отличающийся более сложным математическим аппаратом.

Такой подход к изложению материала сделан в книге намеренно, поскольку достоверность решения задачи, согласно современным воззрениям тем выше, чем ближе друг к другу результаты решения, полученные разными методами. Более того, расчёт ответственных сооружений, для повышения их надёжности и безопасности, вообще следует производить разными методами, принимая во внимание то обстоятельство, что расчёт выполняется, как правило, на персональных компьютерах и, следовательно, процедура расчёта от пользователя скрыта.

Надеюсь, что данная книга поможет читателю стать грамотным специалистом в области расчёта сооружений.



## БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Александров, А.В. Основы теории упругости и пластичности [Текст] / А.В. Александров, В.Д. Потапов. – М.: Высшая школа., 1990. – 399 с.
2. Безухов, Н.И. Основы теории упругости, пластичности и ползучести [Текст] / Н.И. Безухов. – М.: Высшая школа, 1968. – 512 с.
3. Бреббия, К. Методы граничных элементов [Текст] / К. Бреббия [и др.]; пер. с англ. – М.: Мир, 1987. – 524 с.
4. Варвак, П.М. Метод сеток в задачах расчёта строительных конструкций [Текст] / П.М. Варвак, Л.П. Варвак. – М., Стройиздат, 1977. – 154 с.
5. Волков, Е.А. Численные методы [Текст]: учеб. пособие для вузов / Е.А. Волков. – 2-е изд., испр. – М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1987. – 248 с.
6. Горбунов-Посадов, М.И. Балки и плиты на упругом основании [Текст] / М.И. Горбунов-Посадов. – М.: Стройиздат, 1949.
7. Горбунов-Посадов, М.И. Расчёт конструкций на упругом основании [Текст] / М.И. Горбунов-Посадов, Т.А. Маликова, В.И. Соломин. – 3-е изд., перераб. и доп. – М.: Стройиздат, 1984. – 679 с.
8. Дарков, А.В. Строительная механика [Текст] / А.В. Дарков, Н.Н. Шапошников. – М.: Высшая школа. 1985. – 607с.
9. Демидович, В.П. Основы вычислительной математики [Текст] / В.П. Демидович, И.А. Марон. – М.: Наука, 1966. – 664 с.
10. Демидович, В.П. Численные методы анализа [Текст] / В.П. Демидович, И.А. Марон, Э.З. Шувалова. – М.: Наука, 1967. – 368 с.
11. Зенкевич, О. Метод конечных элементов в технике [Текст] / О. Зенкевич. – М.: Мир, 1975. – 541 с.
12. Зенкевич, О. Метод конечных элементов в теории сооружений и в механике сплошных сред. Нью-Йорк, 1967. [Текст] / О. Зенкевич, И. Чанг; пер. с англ. А.П. Троицкого и С.В. Соловьёва; под ред. докт. техн. наук Ю.К. Зарецкого. – М.: Недра, 1974. – 240 с.
13. Икрамов, Х.Д. Численные методы для симметричных линейных систем [Текст] / Х.Д. Икрамов. – М.: Наука, 1988. – 160 с.
14. Калиткин, Н.Н. Численные методы [Текст] / Н.Н. Калиткин. – М.: Наука, 1978. – 512 с.
15. Кацикаделис, Джон Т. Граничные элементы: теория и приложения [Текст] / Джон Т. Кацикаделис. – М.: Изд-во АСВ, 2007. – 336 с.
16. Киселёв, В.А. Расчёт пластин [Текст] / В.А. Киселёв. – М.: Стройиздат, 1973. – 152 с.
17. Киселёв, В.П. Плоская задача теории упругости: учеб. пособие для вузов / В.П. Киселёв. – М.: Высшая школа, 1976. – 151 с.
18. Крауч, С. Методы граничных элементов в механике твёрдого тела [Текст] / С. Крауч, А. Старфилд; пер. с англ. – М.: Мир, 1987. – 328 с.
19. Купрадзе, В.Д. Методы потенциала в теории упругости [Текст] / В.Д. Купрадзе. – М.: Гос. изд-во технико-теоретической литературы, 1963. – 472 с.
20. Купрадзе, В.Д. Трёхмерные задачи математической теории упругости и термоупругости [Текст] / В.Д. Купрадзе. – М.: Наука, 1976. – 664 с.

21. Лурье, А.И. Теория упругости [Текст] / А.И. Лурье. – М.: Наука, 1970. – 939 с.

22. Ляв, А.Е. Математическая теория упругости [Текст] / А.Е. Ляв. – М.-Л., 1935.

23. Подгорный, А.Н. Основы и методы прикладной теории упругости [Текст]: учеб. пособие для вузов / А.Н. Подгорный, Г.А. Марченко, В.И. Пустынников. – Киев: Вища школа. Головное издательство. 1981. – 328 с.

24. Пономарёв, С.Д. Расчёты на прочность в машиностроении. Т. I. Теоретические основы и экспериментальные методы. Расчёты стержневых элементов конструкций при статической нагрузке [Текст] / С.Д. Пономарёв [и др.]; под ред. С.Д. Пономарёва. – М.: Машгиз, 1959. – 884 с.

25. Пономарёв С.Д. Расчёты на прочность в машиностроении. Т. II. Некоторые задачи прикладной теории упругости. Расчёты за пределами упругости. Расчёты на ползучесть [Текст] / С.Д. Пономарёв [и др.]; под ред. С.Д. Пономарёва. – М.: Машгиз, 1959. – 884 с.

26. Потапов, В.Д. Строительная механика: в 2 кн. Кн.1. Статика упругих систем [Текст]: учебник для вузов / В.Д. Потапов, А.В. Александров, С.Б. Косицын, Д.Б. Долотказин; под ред. В.Д.Потапова. – М.: Высшая школа, 2007. – 511 с.

27. Ржаницын, А.Р. Строительная механика [Текст] / А.Р. Ржаницын. – М.: Высшая школа, 1991. – 440 с.

28. Руководство к практическим занятиям по курсу строительной механики [Текст] / Г.К. Клейн [и др.]. – М.: Высшая школа, 1980. – 384 с.

29. Розин, Л.Ф. Метод конечных элементов в применении к упругим системам [Текст] / Л.Ф. Розин. – М., Стройиздат, 1977. – 128 с.

30. Самуль, В.И. Основы теории упругости и пластичности [Текст]: учеб. пособие для студентов вузов / В.И. Самуль. – 2-е изд., перераб. – М.: Высшая школа, 1982. – 264 с.

31. Снеддон, И.Н. Преобразование Фурье [Текст] / И.Н. Снеддон. – М.: ИЛ, 1955.

32. Теличко, Г.Н. Основы строительной механики плоских стержневых систем [Текст]: учебник / Г.Н. Теличко. – Тула: Изд-во Тул. гос. ун-та, 2004. – 440 с.

33. Тимошенко, С.П. Пластинки и оболочки [Текст] / С.П. Тимошенко, С. Войновский-Кригер. – М.: Физматгиз, 1966. – 636 с.

34. Тимошенко, С.П. Теория упругости [Текст] / С.П. Тимошенко, Дж. Гудьер. – М., Наука, 1975. – 575 с.

35. Филоненко-Бородич, М.М. Теория упругости [Текст] / М.М. Филоненко-Бородич. – М.: Физматгиз, 1959. – 364 с.

36. Угодчиков, А.Г. Метод граничных элементов в механике деформируемого твёрдого тела [Текст] / А.Г. Угодчиков, Н.М. Хуторянский. – Казань: Изд-во Казанского ун-та, 1986. – 296 с.

37. Хечумов, Р.А. Применение метода конечных элементов к расчёту конструкций [Текст]: учеб. пособие для технических вузов / Р.А.Хечумов [и др.]; под общ. ред. Р.А.Хечумова. – М.: Изд-во Ассоциации строительных вузов, 1994. – 353 с.

## ОГЛАВЛЕНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ .....	3
ВВЕДЕНИЕ .....	6
Глава 1. ВВЕДЕНИЕ В ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ .....	11
§1. Погрешности вычислений .....	11
§2. Численные методы решения нелинейных уравнений .....	20
§3. Системы линейных алгебраических уравнений .....	25
§4. Системы нелинейных уравнений .....	45
§5. Системы уравнений специального вида .....	49
§6. Системы однородных линейных уравнений .....	53
§7. Собственные значения и собственные векторы матриц .....	56
§8. Приближение функций .....	63
§9. Вычисление интегралов .....	71
§10. Численные методы интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений .....	76
Глава 2. ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ РАСЧЁТА СТЕРЖНЕВЫХ СИСТЕМ .....	82
§11. Матричная форма определения перемещений .....	82
§12. Расчёт стержневых систем методом сил в матричной форме .....	89
§13. Расчёт стержневых систем методом перемещений в матричной форме .....	96
§14. Метод конечных элементов для расчёта стержневых систем .....	103
Глава 3. МЕТОД КОНЕЧНЫХ РАЗНОСТЕЙ .....	123
§15. Решение плоской задачи теории упругости методом конечных разностей .....	123
§16. Расчёт тонких пластин методом конечных разностей .....	145
Глава 4. РЕШЕНИЕ ПРИ ПОМОЩИ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ РЯДОВ .....	156
§17. Решение плоской задачи теории упругости при помощи тригонометрических рядов .....	156
§18. Расчёт тонких пластин при помощи тригонометрических рядов .....	162
Глава 5. МЕТОДЫ НА ОСНОВЕ ВАРИАЦИОННЫХ ПРИНЦИПОВ .....	183
§19. Вариационная формулировка задач теории упругости .....	183
§20. Метод Ритца .....	190
§21. Метод Бубнова – Галёркина .....	201
§22. Метод конечных элементов .....	207
Глава 6. МЕТОД ГРАНИЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ .....	238
§23. Метод граничных элементов .....	238
ЗАКЛЮЧЕНИЕ .....	264
БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК .....	265

Учебное издание

Бакушев Сергей Васильевич

**ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ МЕХАНИКИ  
ДЕФОРМИРУЕМОГО ТВЁРДОГО ТЕЛА**

Учебное пособие

Редактор                    М.А. Сухова  
Верстка                     Н.В. Кучина

---

Подписано в печать 05.10.2015.    Формат 60x84/16.  
Бумага офисная «Снегурочка». Печать на ризографе.  
Усл.печ.л. 15,58.    Уч.-изд.л. 16,75.    Тираж 80 экз.  
Заказ № 343.

---

Издательство ПГУАС.  
440028, г. Пенза, ул. Германа Титова, 28.

