МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«Пензенский государственный университет
архитектуры и строительства»
(ПГУАС)

Е.И.Куимова, С.Н. Ячинова, А.Н.Круглова

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Рекомендовано Редсоветом университета
в качестве учебного пособия для студентов,
обучающихся по направлению 38.03.01 «Экономика»

Пенза 2015

УДК 517(075.8)
ББК 22.161я73
К89

Рецензенты: кандидат педагогических наук, доцент 13 кафедры (общепрофессиональных дисциплин) Т.Ю.Новичкова (Пензенский артиллерийский инженерный институт);
кандидат технических наук, доцент кафедры «Математика и математическое моделирование» О.В.Снежкина (ПГУАС)

Куимова Е.И.

К89 Математический анализ. Дифференциальные уравнения: учеб. пособие / Е.И.Куимова, С.Н.Ячинова, А.Н.Круглова – Пенза: ПГУАС, 2015. – 104 с.

Учебное пособие представляет собой руководство к решению обыкновенных дифференциальных уравнений и их систем. Излагаемые теоретические вопросы сопровождаются задачами, приводимыми с решениями. Содержит варианты заданий для самостоятельного решения, тестовые задания.

Данное учебное пособие подготовлено на кафедре «Математика и математическое моделирование» и предназначено для использования студентами, обучающимися по направлению 38.03.01 «Экономика», при изучении дисциплины «Математический анализ».

ПРЕДИСЛОВИЕ

Пособие посвящено методам решения задач из курса обыкновенных дифференциальных уравнений.

Основная цель работы – помочь студентам в формировании математического мышления, в выработке практических навыков решения и исследования дифференциальных уравнений, описывающих эволюционные процессы в различных областях естествознания, что способствует реализации компетенции ОПК-2 Федерального государственного образовательного стандарта, которая заключается в способности осуществлять сбор, анализ и обработку данных, необходимых для решения профессиональных задач.

Пособие разбито на разделы. В каждом разделе большое внимание уделено изложению методов решения типовых задач теории обыкновенных дифференциальных уравнений, подбору и решению задач, объясняющих основные идеи, понятия, теоретические факты и их практическое применение, подбору большого числа задач для самостоятельного решения студентами, которые помогут проверить уровень освоения дисциплины.

Учебное пособие может использоваться при самостоятельной работе студентами дневного и заочного отделений, а также при дистанционном обучении.

За основу пособия принят материал курса «Математический анализ» по теме «Дифференциальные уравнения», читаемый студентам, обучающимся по направлению 38.03.01 «Экономика».

1. ОБЩИЕ СВЕДЕНИЯ О ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЯХ

При решении различных задач математики, физики, химии и других наук часто пользуются математическими моделями в виде уравнений, связывающих независимую переменную, искомую функцию и ее производные. Такие уравнения называются дифференциальными (термин принадлежит Г.Лейбницу, 1676 г.).

Первые исследования дифференциальных уравнений проведены были в конце XVIIв. в связи с изучением проблем механики и необходимостью решения некоторых геометрических задач. В становление теории дифференциальных уравнений значительный вклад внесли Г.Лейбниц, И.Ньютон, Л.Эйлер, Ж.Лагранж, О.Коши, С.В.Ковалевская, А.М.Ляпунов. В XX в. теория дифференциальных уравнений получила дальнейшее развитие в трудах И.Г.Петровского, В.И.Смиронова, С.Л.Соболева, А.Н. Тихонова, Ю.А.Митропольского, Н.П.Еругина.

1.1. Основные понятия

Дифференциальным уравнением (***ДУ***) называется уравнение, связывающее независимую переменную, искомую функцию и ее производные:

$$F\left(x, y, y', y'', ..., y^{(n)}\right) = 0 .$$

Наивысший порядок производной, входящей в ДУ, называется ***порядком*** этого уравнения.

Например, уравнение $y''' - 3y'' + 2y = 0$ – обыкновенное ДУ третьего порядка, а уравнение $x^2 y' + 5xy = y^2$ – первого порядка, $y \cdot z'_x = x \cdot z'_y$ – ДУ в частных производных первого порядка.

Решением дифференциального уравнения называется функция, которая при подстановке в уравнение обращает его в тождество.

Если искомая неизвестная функция зависит от одной переменной, то ДУ называют *обыкновенным*; в противном случае – ДУ в *частных производных*. Начнем с рассмотрения обыкновенных ДУ.

Процесс нахождения решения ДУ называется его *интегрированием*, а график решения ДУ – *интегральной кривой*.

1.2. Задачи, приводящие к дифференциальным уравнениям

Задача 1. Материальная точка массы m замедляет свое движение под воздействием силы сопротивления среды, пропорциональной квадрату скорости V. Найти зависимость скорости от времени. Найти скорость точки через 4 с после начала замедления, если $V(0)=100$ м/с, а $V(1)=50$ м/с.

Решение. Примем за независимую переменную время t, отсчитываемое от начала замедления движения материальной точки. Тогда скорость точки V будет функцией от t, т.е. $V=V(t)$.

Для нахождения $V(t)$ применим второй закон Ньютона (основной закон механики):

$$m=a\cdot F,$$

где $a=V'(t)$ – ускорение движущего тела;

F – результирующая сила, действующая на тело в процессе движения.

В данном случае $F=-kV^2$, $k>0$ – коэффициент пропорциональности (знак минус указывает на то, что скорость тела уменьшается). Следовательно, функция $V=V(t)$ является решением дифференциального уравнения

$$m\cdot V'=-k\cdot V^2,\ V'=-\frac{k}{m}V^2,$$

где m – масса тела.

Решением дифференциального уравнения является функция

$$V=\frac{1}{\frac{k}{m}\cdot t+C},$$

где C – const.

Для нахождения скорости точки через 4 с после начала замедления, найдем параметры $\frac{k}{m}$ и C, учитывая условия задачи:

$$V(0)=\frac{1}{C}=100,\ C=\frac{1}{100} \qquad \text{и} \qquad V(1)=\frac{1}{\frac{k}{m}+C}=50,\ \frac{k}{m}=\frac{1}{100}.$$

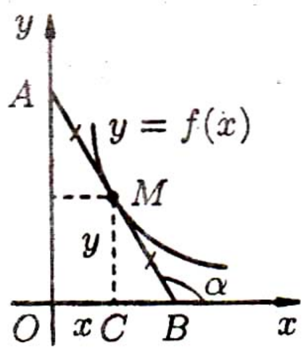
Следовательно, скорость точки изменяется по закону

$$V=\frac{100}{t+1}.$$

Поэтому $V(4)=20$ м/с.

Задача 2. Найти кривую, проходящую через точку (4;1), зная, что отрезок любой касательной к ней, заключенный между осями координат, делится в точке касания пополам.

Решение. Пусть $M(x;y)$ – произвольная точка кривой, уравнение которой $y=f(x)$. Для определенности предположим, что кривая расположена в первой четверти (см. рисунок).



Для составления дифференциального уравнения воспользуемся геометрическим смыслом первой производной: $\operatorname{tg}\alpha$ есть угловой коэффициент касательной; в точке $M(x;y)$ он равен y', т.е. $y'=\operatorname{tg}\alpha$.

Из рисунка видно, что $\operatorname{tg}(\angle MBC)=\dfrac{MC}{BC}$,

$$\operatorname{tg}(\angle MBC)=\operatorname{tg}(180°-\alpha)=-\operatorname{tg}\alpha,\quad MC=y.$$

По условию задачи $AM=MB$, следовательно, $OC=CB=x$.

Таким образом, получаем $-\operatorname{tg}\alpha=\dfrac{y}{x}$ или $y'=-\dfrac{y}{x}$. Решением полученного дифференциального уравнения является функция $y=\dfrac{4}{x}$ (гипербола).

Можно показать, что

- закон изменения массы радия в зависимости от времени, когда нет цепной реакции («радиоактивный распад»), описывается дифференциальным уравнением $\dfrac{dm}{dt}=-k\cdot m$, где $k>0$ – коэффициент пропорциональности; $m(t)$ – масса радия в момент времени t;
- «закон охлаждения тел», т.е. закон изменения температуры тела в зависимости от времени, описывается уравнением $\dfrac{dT}{dt}=-k(T-t_0)$, где $T(t)$ – температура тела в момент времени t; k – коэффициент пропорциональности; t_0 – температура воздуха (среды охлаждения);
- зависимость массы x вещества, вступившего в химическую реакцию, от времени t во многих случаях описывается уравнением $\dfrac{dx}{dt}=k\cdot x$, где k – коэффициент пропорциональности;
- «закон размножения бактерий» (зависимость массы m бактерий от времени t) описывается уравнением $m'_t=k\cdot m$, где $k>0$;
- закон изменения давления воздуха в зависимости от высоты над уровнем моря описывается уравнением $\dfrac{dp}{dh}=-k\cdot p$, где $p(h)$ – атмосферное давление воздуха на высоте h, $k>0$.

Приведенные примеры указывают на исключительно важную роль дифференциальных уравнений при решении самых разнообразных задач.

2. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ПЕРВОГО ПОРЯДКА

2.1. Основные понятия и определения

ДУ первого порядка в общем случае можно записать в виде

$$F(x;y;y')=0. \qquad (2.1.1)$$

Если уравнение (2.1.1) удается разрешить относительно y', то получим

$$y'=f(x,y) \qquad (2.1.2)$$

– ***уравнение первого порядка, разрешенное относительно производной***.

Теорема Коши (существования и единственности решения ДУ первого порядка). Если в уравнении $y'=f(x,y)$ функция *f(x,y)* и ее частная производная $f'_y(x,y)$ непрерывны в некоторой области *D*, содержащей точку (x_0,y_0), то существует единственное решение $y=\varphi(x)$ этого уравнения, удовлетворяющее условиям:

$$y=y_0 \text{ при } x=x_0 \qquad (2.1.3)$$

С геометрической точки зрения теорема утверждает, что через каждую внутреннюю точку (x_0,y_0) области *D* проходит единственная интегральная кривая. Очевидно, что в области *D*, содержащей бесчисленное множество точек, уравнение (2.1.2) имеет бесчисленное множество интегральных кривых.

Условия (2.1.3), в силу которых функция принимает заданное значение y_0 при $x=x_0$, называются ***начальными условиями*** и часто записываются в виде

$$y\big|_{x=x_0}=y_0. \qquad (2.1.4)$$

Задача нахождения решения ДУ (2.1.2), удовлетворяющего начальным условиям (2.1.4), называется ***задачей Коши***.

Общим решением ДУ первого порядка называется функция

$$y=\varphi(x,C), \qquad (2.1.5)$$

зависящая от *x* и произвольной постоянной *C* и удовлетворяющая двум условиям:

1. Она является решением уравнения при любом значении *C*.
2. При любом начальном условии $y=y_0$ при $x=x_0$ существует единственное значение постоянной $C=C_0$, такое, что функция $y=\varphi(x,C_0)$ удовлетворяет данному начальному условию.

При этом предполагается, что точка (x_0, y_0) принадлежит той области, в которой выполняются условия теоремы Коши.

Если общее решение задано в неявном виде

$$\Phi(x, y, C) = 0, \qquad (2.1.6)$$

то его часто называют ***общим интегралом ДУ***.

Частным решением ДУ называется функция

$$y = \varphi(x; C_0), \qquad (2.1.7)$$

которая получается из его общего решения фиксированием произвольной постоянной. Аналогично определяется частный интеграл уравнения

$$\Phi(x, y, C_0) = 0. \qquad (2.1.8)$$

2.2. Уравнения с разделяющимися переменными и приводящиеся к ним

Дифференциальные уравнения вида

$$P(x)dx + Q(y)dy = 0 \qquad (2.2.1)$$

называется ***уравнением с разделенными переменными***.

В таких дифференциальных уравнениях одно слагаемое зависит только от x, а другое – от y.

Общий интеграл ДУ с разделенными переменными имеет вид

$$\int P(x)dx + \int Q(x)dy = C. \qquad (2.2.2)$$

ДУ с разделяющимися переменными называется уравнение вида

$$P_1(x) \cdot Q_1(y)dx + P_2(x) \cdot Q_2(y)dy = 0. \qquad (2.2.3)$$

Уравнение (2.2.3) легко сводится к уравнению (2.2.1) путем почленного деления обеих его частей на $Q_1(y) \cdot P_2(x) \neq 0$. Получаем

$$\frac{P_1(x)}{P_2(x)}dx + \frac{Q_2(y)}{Q_1(y)}dy = 0. \qquad (2.2.4)$$

Общий интеграл

$$\int \frac{P_1(x)}{P_2(x)}dx + \int \frac{Q_2(y)}{Q_1(y)}dy = C. \qquad (2.2.5)$$

Замечания:

1. При почленном делении обеих частей ДУ на $Q_1(y) \cdot P_2(x)$ могут быть потеряны некоторые решения. Поэтому следует отдельно решить уравне-

ние $Q_1(y)\cdot P_2(x)=0$ и установить те решения ДУ, которые не могут быть получены из общего решения – ***особые решения***.

2. Уравнение $y'=f_1(x)\cdot f_2(y)$ также сводится к уравнению с разделенными переменными. Для этого достаточно записать производную через дифференциалы $y'=\dfrac{dy}{dx}$ и разделить переменные.

3. Уравнение $y'=f(ax+by+c)$, где a,b,c – действительные числа, путем замены $z=ax+by+c$ сводится к ДУ с разделяющимися переменными. Дифференцируя обе части уравнения по x, получим:

$$z'=a+by',\ \text{т.е. }\ z'=a+b\cdot f(z(x))\Rightarrow\frac{dz}{a+b\cdot f(z)}=dx.$$

Интегрируя последнее уравнение и, заменяя z на $ax+by+c$, получим общий интеграл исходного уравнения.

Пример 1. Решить уравнение $\dfrac{x}{1+x^2}dx+ydy=0$.

Решение. Данное ДУ – уравнение с разделенными переменными. Поэтому находим общий интеграл уравнения по формуле (2.2.2):

$$\int\frac{x}{1+x^2}dx+\int ydy=C;$$

$$\frac{1}{2}\int\frac{d(1+x^2)}{1+x^2}+\int ydy=C;$$

$$\frac{1}{2}\ln(1+x^2)+\frac{y^2}{2}=C \text{ – общий интеграл ДУ.}$$

Пример 2. Решить уравнение $x^2y^2y'+1=y$.

Решение. Приведем уравнение к виду (2.2.3):

$$x^2y^2\frac{dy}{dx}=y-1;$$

$$x^2y^2dy=(y-1)dx;$$

Делим обе части уравнения на $x^2\cdot(y-1)\neq 0$ и получаем

$$\frac{y^2}{y-1}dy=\frac{dx}{x^2}.$$

Переменные разделены. Интегрируем обе части уравнения:

$$\int\frac{y^2}{y-1}dy=\int\frac{dx}{x^2}+C;$$

$$\int\frac{(y^2-1)+1}{y-1}dy=\int\frac{dx}{x^2}+C;$$

$$\int (y+1)dy + \int \frac{dy}{y-1} = \int \frac{dx}{x^2} + C;$$

$$\frac{y^2}{2} + y + \ln(y-1) = -\frac{1}{x} + C \text{ – общий интеграл ДУ.}$$

При делении на $x^2 \cdot (y-1)$ могли быть потеряны решения $x = 0$ и $y - 1 = 0,\ y = 1$. Проверкой убеждаемся, что $y = 1$ – решение исходного уравнения, а $x = 0$ – нет.

Пример 3. Найти частное решение уравнения $y' \cdot \sin x = y \cdot \ln y$, удовлетворяющее начальному условию $y\left(\frac{\pi}{2}\right) = e$.

Решение. Запишем производную через отношение дифференциалов

$$\sin x \cdot \frac{dy}{dx} = y \cdot \ln y.$$

Умножим обе части ДУ на dx:

$$\sin x \cdot dy = y \cdot \ln y \cdot dx.$$

Разделим обе части на $y \cdot \ln y \cdot \sin x \neq 0$:

$$\frac{dy}{y \cdot \ln y} = \frac{dx}{\sin x};$$

$$\int \frac{dy}{y \cdot \ln y} = \int \frac{dx}{\sin x} + \ln|C|;$$

$$\ln|\ln y| = \ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right| + \ln|C|;$$

$$\ln|\ln y| = \ln\left|C \cdot \operatorname{tg}\frac{x}{2}\right|;$$

$$\ln y = C \cdot \operatorname{tg}\frac{x}{2},$$

$$y = e^{C \cdot tg\frac{x}{2}} \text{ – общее решение ДУ.}$$

Чтобы найти частное решение, удовлетворяющее начальному условию, подставим в общее решение $x = \frac{\pi}{2}$, $y = e$.

$$e = e^{C \cdot tg\frac{\pi}{4}},\ e = e^C \Rightarrow C = 1.$$

Частное решение ДУ: $y = e^{tg\frac{x}{2}}$.

Пример 4. Решить уравнение $y' - y = 2x - 3$.

Решение. Приведем уравнение к виду $y' = f(ax + by + c)$.

$y' = 2x - 3 + y$ – уравнение, приводящееся к уравнению с разделяющимися переменными.

Сделаем замену: $z(x) = 2x - 3 + y \Rightarrow z' = 2 + y' \Rightarrow y' = z' - 2$.

Тогда $z' - 2 = z$, $z' = z + 2$.

Так как $z' = \dfrac{dz}{dx}$, то $\dfrac{dz}{dx} = z + 2$.

Разделяя переменные и интегрируя, получим: $\dfrac{dz}{z+2} = dx$.

$$\int \frac{dz}{z+2} = \int dx + C,$$
$$\ln|z+2| = x + C,$$
$$z + 2 = e^{x+C},$$
$$(2x - 3 + y) + 2 = e^{x+C},$$

$2x + y - 1 = C \cdot e^x$ – общий интеграл ДУ.

Пример 5. Найти частное решение уравнения $(x + 2y)y' = 1$, удовлетворяющее начальному условию $y(0) = -1$.

Решение. Сделаем замену: $\begin{cases} z = x + 2y, \\ z\,y' = 1. \end{cases}$

$$z' = 1 + 2y' \Rightarrow y' = \frac{z' - 1}{2}.$$

Тогда получим:

$$z \cdot \frac{z' - 1}{2} = 1,$$
$$z \cdot (z' - 1) = 2,$$
$$z \cdot z' - z = 2,$$
$$z \cdot z' = 2 + z.$$

$z \cdot \dfrac{dz}{dx} = 2 + z$ – уравнение с разделяющимися переменными.

Разделим переменные и проинтегрируем обе части ДУ:

$$\frac{z\,dz}{2+z} = dx,$$
$$\int \frac{z\,dz}{2+z} = \int dx + C,$$
$$\int \frac{(z+2) - 2}{2+z} dz = \int dx + C,$$
$$\int dz - \int \frac{2}{2+z} dz = \int dx + C,$$
$$z - 2\ln|2+z| = x + C,$$

$$x+2y-2\ln|2+x+2y|=x+C,$$

$\ln|2+x+2y|=y-C$, или $2+x+2y=C\cdot e^{y}$ – общий интеграл ДУ.

Используя начальные условия, найдем значение произвольной постоянной C:

$$2+0-2=C\cdot e^{-1},\ 0=C\cdot e^{-1}\Rightarrow C=0.$$

$2+x+2y=0$ – частное решение ДУ.

Задачи для самостоятельного решения

В задачах 1–34 решить дифференциальное уравнение

1. $y'=3\sqrt[3]{y^2}$.

2. $y'=5^{x+y}$.

3. $xy'-y=0$.

4. $yy'+x=0$.

5. $x^2y'+y=0$.

6. $xyy'=1-x^2$.

7. $yy'+x=1$.

8. $(x+1)y'+xy=0$.

9. $x\,dy+y\,dx=0$.

10. $yy'=\dfrac{1-2x}{y}$.

11. $(1+y^2)dx+xy\,dy=0$.

12. $xy'+y=y^2$.

13. $2x^2yy'+y^2=2$.

14. $y\ln y+x\,dx=0$.

15. $\sqrt{y^2+1}\,dx=xy\,dy$.

16. $xy'+y=y^2$.

17. $(1+y^2)dx+(1+x^2)\,dy=0$.

18. $(x^2-1)y'+2xy^2=0$.

19. $e^{y}(1+x^2)dy-2x(1+e^{y})dx=0$.

20. $x\cdot(y^2-4)dx+y\,dy=0$.

21. $\ln(\cos y)\,dx+x\,tgy\,dy=0$.

22. $(1+y^2)dx=x\,dy$.

23. $xy\,dx+(x+1)dy=0$.

24. $y'-xy^2=2xy$.

25. $y'\cdot ctgx+y=2$.

26. $(1+e^{x})yy'=e^{y}$.

27. $\dfrac{y}{y'}=\ln y,\ y(2)=1$.

28. $y'=2\sqrt{y},\ y(1)=2$.

29. $2y'\sqrt{x}=y$, $y(4)=1$.

30. $(1+e^{x})yy'=e^{x}$, $y(0)=1$.

31. $x^2y'+y^2=0$, $y(-4)=1$.

32. $(1+y^2)dx-xy\,dy=0$, $y(2)=1$.

33. $(2x+1)dy+y^2dx=0$, $y(4)=1$

34. $xy'=\dfrac{y}{\ln x}$, $y(e)=1$.

2.3. Однородные дифференциальные уравнения первого порядка. Уравнения в полных дифференциалах

К уравнению с разделяющимися переменными приводятся однородные ДУ первого порядка.

Функция $f(x,y)$ называется ***однородной функцией n-го порядка***, если при умножении каждого ее аргумента на произвольный множитель λ вся функция умножается на λ^n, т.е.

$$f(\lambda\cdot x,\lambda\cdot y)=\lambda^n\cdot f(x,y).$$

Например, $f(x,y)=\dfrac{x^2+y^2}{5x^2-y^2}$ – однородная функция нулевого порядка, так как

$$f(\lambda\cdot x,\lambda\cdot y)=\frac{(\lambda\cdot x)^2+((\lambda\cdot y))^2}{5(\lambda\cdot x)^2-(\lambda\cdot y)^2}=\frac{\lambda^2(x^2+y^2)}{\lambda^2(5x^2-y^2)}=f(x,y).$$

ДУ $y'=f(x,y)$ называется ***однородным ДУ первого порядка***, если $f(x,y)$ – однородная функция нулевого порядка.

Пусть $y'=f(x,y)$ – однородное ДУ первого порядка.

1. Пусть $\lambda=\dfrac{1}{x}$, тогда

$$f(x,y)=f(\lambda\cdot x,\lambda\cdot y)=f\left(\frac{1}{x}\cdot x,\frac{1}{x}\cdot y\right)=f\left(1,\frac{y}{x}\right),$$

Исходное ДУ $y'=f(x,y)$ примет вид

$$y'=f\left(1,\frac{y}{x}\right). \qquad (2.3.1)$$

Замечание. Возможен случай, когда $x'=f\left(\dfrac{x}{y},1\right)$, где $x=x(y)$.

2. Введем подстановку: $u(x)=\dfrac{y}{x}$, $y=u\cdot x$, $y'=u'\cdot x+u\cdot x'=u'\cdot x+u$.
3. Уравнение (1) запишем в виде $u'\cdot x+u=f(1,u)$.
4. Получим уравнение с разделяющимися переменными

$$\frac{du}{dx}\cdot x=f(1,u)-u, \text{ или } \frac{du}{f(1,u)-u}=\frac{dx}{x}.$$

5. Интегрируя, находим

$$\int\frac{du}{f(1,u)-u}=\ln|x|+C.$$

6. Заменяя после интегрирования u отношением $\frac{y}{x}$, получим общий интеграл данного ДУ.

Замечание. Однородное ДУ первого порядка еще называют ДУ с однородными коэффициентами. Оно может быть записано в виде

$P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0$, где $P(x,y)$ и $Q(x,y)$ – однородные функции одинакового порядка.

Пример 1. Решить уравнение $y' = \frac{y}{x} + \frac{7x^2}{y^2}$.

Решение. Уравнении однородное, так как

$$f(\lambda \cdot x; \lambda \cdot y) = \frac{\lambda \cdot y}{\lambda \cdot x} + \frac{7(\lambda \cdot x)^2}{(\lambda \cdot y)^2} = \frac{y}{x} + \frac{7x^2}{y^2}.$$

Введем подстановку $u(x) = \frac{y}{x}$, $y = u \cdot x$, $y' = u' \cdot x + u$.

Запишем уравнение в виде

$$u' \cdot x + u = u + \frac{7}{u^2},$$

$$u' \cdot x = \frac{7}{u^2}.$$

Разделим переменные:

$$\frac{du}{dx} \cdot x = \frac{7}{u^2},$$

$$u^2 du = \frac{7dx}{x}.$$

Проинтегрировав $\int u^2 du = 7\int \frac{dx}{x} + \ln|C|$, получим:

$$\frac{u^3}{3} = 7\ln|x| + \ln|C|,$$

$$\frac{u^3}{3} = \ln|x^7 \cdot C|.$$

Заменим u отношением $\frac{y}{x}$:

$\frac{1}{3}\left(\frac{y}{x}\right)^3 = \ln|x^7 \cdot C|$, $y = x \cdot \sqrt[3]{3\ln|x^7 \cdot C|}$ – общее решение ДУ.

Пример 2. Решить уравнение $(x^2 - y^2)dx + 2xy\,dy = 0$.

Решение. Уравнение однородное. Приведем его к виду (2.3.1)

$$x^2 - y^2 + 2xy\frac{dy}{dx} = 0;$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y^2 - x^2}{2xy};$$

$$y' = \frac{\left(\frac{y}{x}\right)^2 - 1}{2\frac{y}{x}}.$$

Введем подстановку $u(x) = \frac{y}{x}$, $y = u \cdot x$, $y' = u' \cdot x + u$.

Запишем уравнение в виде

$$u + x \cdot u' = \frac{u^2 - 1}{2u};$$

$$x \cdot u' = \frac{u^2 - 1}{2u} - u;$$

$$x \cdot u' = \frac{u^2 - 1 - 2u^2}{2u};$$

$$x \cdot u' = -\frac{u^2 + 1}{2u}.$$

Разделим переменные:

$$x \cdot \frac{du}{dx} = -\frac{u^2 + 1}{2u};$$

$$\frac{2u\,du}{u^2 + 1} = -\frac{dx}{x}.$$

Проинтегрировав $\int \frac{2udu}{u^2 + 1} = -\int \frac{du}{u} + \ln|C|$, получим:

$$\ln|u^2 + 1| = -\ln|u| + \ln|C|,$$

$$u^2 + 1 = \frac{C}{x}.$$

Заменим u отношением $\frac{y}{x}$:

$$\frac{y^2}{x^2} + 1 = \frac{C}{x};$$

$y^2 + x^2 = Cx$ – общий интеграл ДУ.

Пример 3. Решить уравнение $x\,y' = \sqrt{x^2 - y^2} + y$.

Решение. Уравнение однородное. Приведем его к виду (2.3.1):

$$y' = \frac{\sqrt{x^2 - y^2}}{x} + \frac{y}{x},$$

$$y' = \sqrt{\frac{x^2 - y^2}{x^2}} + \frac{y}{x},$$

$$y' = \sqrt{1 - \left(\frac{y}{x}\right)^2} + \frac{y}{x}.$$

Введем подстановку $u(x) = \dfrac{y}{x}$, $y = u \cdot x$, $y' = u' \cdot x + u$.

Запишем уравнение в виде

$$u' \cdot x + u = \sqrt{1 - u^2} + u,$$

$$u' \cdot x = \sqrt{1 - u^2}.$$

Разделим переменные:

$$\frac{du}{dx} \cdot x = \sqrt{1 - u^2},$$

$$\frac{du}{\sqrt{1 - u^2}} = \frac{dx}{x}.$$

Проинтегрировав $\displaystyle\int \frac{du}{\sqrt{1 - u^2}} = \int \frac{dx}{x} + \ln|C|$, получим:

$$\arcsin u = \ln|x| + \ln|C|,$$

$$\arcsin u = \ln|C \cdot x|.$$

Заменим u отношением $\dfrac{y}{x}$:

$$\arcsin\frac{y}{x} = \ln|C \cdot x| \text{ или } y = x \cdot \sin\ln|C \cdot x| \text{ – общее решение ДУ.}$$

При разделении переменных возможна потеря решений $x = 0$, $y = \pm x$. Непосредственной подстановкой в уравнение проверяем, что $x = 0$ не является решением данного ДУ, а функция $y = \pm x$ – решения, которые не входят в общий интеграл уравнения.

Уравнение

$$P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0 \qquad (2.3.2)$$

называется ***уравнением в полных дифференциалах***, если его левая часть есть полный дифференциал некоторой функции $u(x, y)$, т.е. $P(x, y)dx + Q(x, y)dy = du(x, y)$.

В этом случае уравнение (2.3.2) можно записать в виде $du(x,y)=0$, а его общий интеграл будет иметь вид

$$du(x,y)=C. \qquad (2.3.3)$$

Приведем условие, по которому можно сделать вывод о том, что выражение $\Delta = P(x,y)dx + Q(x,y)dy$ есть полный дифференциал некоторой функции.

<u>Теорема</u>. Для того, чтобы выражение $\Delta = P(x,y)dx + Q(x,y)dy$, где функции $P(x,y)$ и $Q(x,y)$ и их частные производные $\frac{\partial P}{\partial y}$ и $\frac{\partial Q}{\partial x}$ непрерывны в некоторой открытой, односвязной области D плоскости *Oxy*, было полным дифференциалом, необходимо и достаточно выполнение условия

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} \text{ для любого } (x,y) \in D.$$

Пусть дано уравнение (1) $P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0$.

1. Находим $\frac{\partial P}{\partial y}$ и $\frac{\partial Q}{\partial x}$. Если $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$, то уравнение (2.3.2) в полных дифференциалах.

2. Определим область *D*, в которой $P(x,y)$, $Q(x,y)$, $\frac{\partial P}{\partial y}$, $\frac{\partial Q}{\partial x}$ – непрерывны. Возьмем $(x_0, y_0) \in D$.

3. Проинтегрируем $\int\limits_{x_0}^{x} P(x,y)dx + \int\limits_{y_0}^{y} Q(x,y)dy = C$.

Пример 1. Решить уравнение $\left(2x + 3x^2 y\right)dx + \left(x^3 - 3y^2\right)dy = 0$.

Решение.

1. $P(x,y) = 2x + 3x^2 y$, $Q(x,y) = x^3 - 3y^2$.

Находим $\frac{\partial P}{\partial y} = 3x^2$, $\frac{\partial Q}{\partial x} = 3x^2$.

$\Rightarrow \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} = 3x^2$ – исходное ДУ – уравнение в полных дифференциалах.

2. $D: x \in R, y \in R$. Возьмем $x_0 = 0$, $y_0 = 0$.

3. Проинтегрируем:

$$\int\limits_0^x \left(2x + 3x^2 y\right)dx - \int\limits_0^y 3y^2 dy = C;$$

$$x^2 + x^3 y - y^3 = C \text{ – общий интеграл ДУ.}$$

Пример 2. Решить уравнение $y' = \dfrac{5-2xy}{3y^2+x^2}$.

Решение. Приведем уравнение к виду (2.3.2)

$$\frac{dy}{dx} = \frac{5-2xy}{3y^2+x^2},$$

$$\left(3y^2+x^2\right)dy = (5-2xy)dx,$$

$$(2xy-5)dx + \left(3y^2+x^2\right)dy = 0.$$

1. $P(x,y) = 2xy-5$, $Q(x,y) = 3y^2+x^2$.

Находим $\dfrac{\partial P}{\partial y} = 2x$, $\dfrac{\partial Q}{\partial x} = 2x$.

$\Rightarrow \dfrac{\partial P}{\partial y} = \dfrac{\partial Q}{\partial x} = 2x$ – исходное ДУ – уравнение в полных дифференциалах.

2. $D: x \in R, y \in R$. Возьмем $x_0 = 0$, $y_0 = 0$.

3. Проинтегрируем:

$$\int_0^x (2xy-5)dx + \int_0^y \left(3y^2+x^2\right)dy = C;$$

$$x^2 y - 5x + y^3 = C \text{ – общий интеграл ДУ.}$$

Пример 3. Решить уравнение $(\sin xy + xy\cdot\cos xy)dx + x^2\cdot\cos xy\,dy = 0$.

Решение.

1. $P(x,y) = \sin xy + xy\cdot\cos xy$, $Q(x,y) = x^2\cos xy$.

Находим:

$\dfrac{\partial P}{\partial y} = x\cdot\cos xy + x\cdot\cos xy - x^2 y\cdot\sin xy = 2x\cdot\cos xy - x^2 y\cdot\sin xy$;

$\dfrac{\partial Q}{\partial x} = 2x\cdot\cos xy - x^2 y\cdot\sin xy$; $\Rightarrow$

$\dfrac{\partial P}{\partial y} = \dfrac{\partial Q}{\partial x} = 2x\cdot\cos xy - x^2 y\cdot\sin xy$ – исходное ДУ – уравнение в полных дифференциалах.

2. $D: x \in R, y \in R$. Возьмем $x_0 = 0$, $y_0 = 0$.

3. Проинтегрируем:

$\displaystyle\int_0^x (\sin xy + xy\cdot\cos xy)dx + \int_0^y x^2\cdot\cos xy dy = C$;

$\displaystyle\int_0^x (\sin xy + xy\cdot\cos xy)dx = -\frac{1}{y}\cos xy + x\cdot\sin xy + \frac{1}{y}\cos xy + \varphi(y) =$

$= x\cdot\sin xy + \varphi(y)$.

Интеграл $\int_0^x xy \cdot \cos xy dx$ вычислим по частям:

$$\int_0^x xy \cdot \cos xy dx = \left| \begin{matrix} u = xy & du = ydx \\ dv = \cos xy dx & v = \frac{1}{y}\sin xy \end{matrix} \right| = x \cdot \sin xy \Big|_0^x - \int_0^x \sin xy dx =$$

$$= x \cdot \sin xy + \frac{1}{y}\cos xy + C .$$

$$\int_0^y x^2 \cdot \cos xy\, dy = x \cdot \sin xy + \psi(x) .$$

Общий интеграл ДУ: $x \cdot \sin xy = C$.

Пример 4. Решить уравнение $3x^2 \cdot (1 + \ln y)dx = \left(2y - \frac{x^3}{y}\right)dy$.

Решение. Приведем исходное уравнение к виду (2.3.2):

$$3x^2 \cdot (1 + \ln y)dx + \left(\frac{x^3}{y} - 2y\right)dy = 0 .$$

1. $P(x, y) = 3x^2 \cdot (1 + \ln y)$, $Q(x, y) = \frac{x^3}{y} - 2y$.

Находим:

$\frac{\partial P}{\partial y} = 3x^2 \cdot \frac{1}{y}$, $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{3x^2}{y}$. $\Rightarrow$

$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{3x^2}{y}$ – исходное ДУ – уравнение в полных дифференциалах.

2. $D: x \in R, y > 0$. Возьмем $x_0 = 0$, $y_0 = 1$.

3. Проинтегрируем:

$$\int_0^x 3x^2(1 + \ln y)dx + \int_1^y \left(\frac{x^3}{y} - 2y\right)dy = C_1 .$$

$$\int_0^x 3x^2(1 + \ln y)dx = x^3 \cdot (1 + \ln y) + \varphi(y) .$$

$$\int_1^y \left(\frac{x^3}{y} - 2y\right)dy = x^3 \cdot \ln y - y^2 - 1 + \psi(x) .$$

$x^3 \cdot (1 + \ln y) - y^2 - 1 = C_1$,

$x^3 \cdot (1 + \ln y) - y^2 = C$ – общий интеграл ДУ.

Задачи для самостоятельного решения

В задачах 35–68 решить дифференциальное уравнение

35. $y' = \frac{y}{x} + \frac{x}{y}$.

36. $xdy - \left(4\sqrt{x^2 + y^2} + y\right)dx = 0$.

37. $xy^2 dy = \left(x^3 + y^3\right)dx$.

38. $\left(x^2 + y^2\right)dx + xydy = 0$.

39. $\left(x^2 - 3y^2\right)dx + 2xydy = 0$.

40. $y' = \frac{2xy}{3x^2 - y^2}$.

41. $\left(y - 3x^2\right)dx - (4y - x)dy = 0$.

42. $(2x - y)dx + (x + y)dy = 0$.

43. $\left(y^2 - xy\right)dx + \left(x^2 - 2xy\right)dy = 0$.

44. $xyy' = x^2 y' + y^2$.

45. $xy' = y \ln \frac{y}{x}$.

46. $xy' = x \cdot e^{\frac{y}{x}} + y$.

47. $y' = \frac{x + y}{x - y}$.

48. $xyy' = y^2 + 2x^2$

49. $y' = \frac{y}{x^2} + 4\frac{y}{x} + 2$.

50. $xy' - y = \frac{x}{\operatorname{arctg}\left(\frac{y}{x}\right)}$.

51. $y' = 4 + \frac{y}{x} + \left(\frac{y}{x}\right)^2$, $y(1) = 2$.

52. $y' = \frac{y^2 - 2x^2}{x^2}$.

53. $\left(y^3 - x\right)y' = y$.

54. $3x^2 e^y + \left(x^3 e^y - 1\right)y' = 0$.

55. $\frac{y}{x}dx + \left(y^3 + \ln x\right)dy = 0$.

56. $\left(2x^3 - xy^2\right)dx + \left(2y^3 - x^2 y\right)dy = 0$.

57. $\left(x^2 + \sin y\right)dx + (1 + x \cdot \cos y)dy = 0$.

58. $e^{-y}dx - \left(2y + x \cdot e^{-y}\right)dy = 0$.

59. $\frac{y}{x}dx + \left(y^3 + \ln x\right)dy = 0$.

60. $\frac{2x}{y^3}dx + \frac{y^2 - 3x^2}{y^4}dy = 0$.

61. $\left(2x \cdot \cos^2 y\right)dx + \left(2y - x^2 \cdot \sin 2y\right)dy = 0$.

62. $(3x \cdot \sin y + 1)dx + \left(\frac{3}{2}x^2 \cdot \cos y + 3\right)dy = 0$.

63. $\left(3x^2 - 2x - y\right)dx + \left(2y - x + 3y^2\right)dy = 0$.

64. $\left(2x - 9x^2 y^2\right)dx + \left(4y^3 - 6x^3 y\right)dy = 0$.

65. $\left(1 + x \cdot \sqrt{x^2 + y^2}\right)dx + \left(-1 + \sqrt{x^2 + y^2}\right) \cdot y\,dy = 0$.

66. $\left(2x^3 - xy^2\right)dx + \left(2y^3 - x^2 y\right)dy = 0$.

67. $\left(e^{x+y} + 3x^2\right)dx + \left(e^{x+y} + 4y^3\right)dy = 0$, $y(0) = 0$.

68. $e^y dx + \left(x \cdot e^y - 2y\right)dy = 0$, $y(1) = 0$.

2.4. Линейные уравнения первого порядка. Уравнения Бернулли

Уравнения вида

$$y' + P(x)\cdot y = Q(x), \qquad (2.4.1)$$

где $P(x)$ и $Q(x)$ – непрерывные функции на промежутке (a,b) или числа, называется ***линейным ДУ первого порядка***.

Замечание. Линейное ДУ первого порядка, в котором y – аргумент, а $x = x(y)$, имеет вид

$$x' + P(y)\cdot x = Q(y).$$

Особенность ДУ (2.4.1): искомая функция y и ее производная y' входят в уравнение в первой степени, не перемножаясь между собой.

Рассмотрим **способ И.Бернулли** интегрирования ДУ (2.4.1).

Решение линейного уравнения (2.4.1) будем искать в виде произведения двух функций $u = u(x)$ и $v = v(x)$.

1. Пусть $y = u(x)\cdot v(x)$.

2. Найдем производную $y' = u'\cdot v + u\cdot v'$.

3. Подставив y и y' в уравнение (**), получим:

$$u'\cdot v + u\cdot v' + P\cdot u\cdot v = Q;$$
$$u\cdot v' + v\cdot(u' + P\cdot u) = Q.$$

Положим $u' + P\cdot u = 0$, значит $u\cdot v' = Q$. Имеем систему ДУ с разделяющимися переменными:

$$\begin{cases} u' + P\cdot u = 0, \\ u\cdot v' = Q. \end{cases} \qquad (2.4.2)$$

4. В качестве u выберем частное решение уравнения

$$u' + P\cdot u = 0. \qquad (2.4.3)$$

Разделим в нем переменные

$$\frac{du}{dx} + P\cdot u = 0,$$
$$\frac{du}{dx} = -P\cdot u,$$
$$\frac{du}{u} = -P\cdot dx.$$

Проинтегрировав, получим:

$$\ln|u| = -\int P dx + C_1.$$

Нам достаточно найти одну из функций, удовлетворяющих уравнению (2.4.2), так как добавление C_1 не повлияет на вид общего решения данного уравнения. Пусть $C_1 = 0$, тогда

$$u = e^{-\int P dx}.$$

5. Подставив найденную функцию u во второе уравнение системы (2.4.2), получим:

$$v' \cdot e^{-\int P dx} = Q.$$

Получим уравнение с разделяющимися переменными. Решим его:

$$\frac{dv}{dx} \cdot e^{-\int P dx} = Q,$$

$$dv \cdot e^{-\int P dx} = Q\,dx,$$

$$dv = Q \cdot e^{\int P dx}\,dx,$$

$$v = \int Q \cdot e^{\int P dx} dx + C.$$

6. По формуле $y = u \cdot v$ получим общее решение уравнения (2.4.1):

$$y = \left(\int Q \cdot e^{-\int P dx} dx + C \right) \cdot e^{-\int P dx}.$$

Уравнение вида $y' + P(x) \cdot y = Q(x) \cdot y^n$, где $n \in R$, $n \neq 0$, $n \neq 1$, называется ***уравнением Бернулли***.

Замечание: Уравнение Бернулли, в котором y – аргумент, а $x = x(y)$, имеет вид

$$x' + P(y) \cdot x = Q(y) \cdot x^n, \text{ где } n \in R,\ n \neq 0,\ n \neq 1.$$

Уравнение Бернулли можно свести к линейному.

Если в уравнении Бернулли $n = 0$, то уравнение – линейное, при $n = 1$ – с разделяющимися переменными.

В общем случае, разделив уравнение Бернулли на $y^n \neq 0$, получим:

$$y^{-n} \cdot y' + P \cdot y^{-n+1} = Q. \qquad (2.4.4)$$

Обозначим $y^{-n+1} = z(x)$, тогда $z' = \dfrac{dz}{dx} = (1-n) \cdot y^{-n} \cdot y'$.

Отсюда находим $\qquad y^{-n} \cdot y' = \dfrac{z'}{1-n}$.

Тогда уравнение (2.4.4) принимает вид

$\dfrac{1}{1-n} \cdot z' + P(x) \cdot z = Q(x)$ – уравнение линейное относительно z. Таким образом, подстановка $z = y^{-n+1}$ сводит уравнение (2.4.4) к линейному.

Решать его будем способом Бернулли $y = u \cdot v$ (не сводя его к линейному).

Пример 1. Решить уравнение $y' - \dfrac{2}{x+1} \cdot y = (x+1)^3$.

Решение.

1. Уравнение линейное, введем подстановку $y = u(x) \cdot v(x)$.
2. $y' = u' \cdot v + u \cdot v'$.
3. Подставив y и y' в исходное уравнение, получим:

$$u' \cdot v + u \cdot v' - \frac{2uv}{x+1} = (x+1)^3;$$

$$u \cdot v' + v \cdot \left(u' - \frac{2u}{x+1} \right) = (x+1)^3;$$

$$\begin{cases} u' - \dfrac{2u}{x+1} = 0, \\ u \cdot v' = (x+1)^3. \end{cases}$$

4. Решим уравнение $u' - \dfrac{2u}{x+1} = 0$. Разделим переменные:

$$\frac{du}{dx} - \frac{2u}{x+1} = 0,$$

$$\frac{du}{dx} = \frac{2u}{x+1},$$

$$\frac{du}{u} = \frac{2dx}{x+1}.$$

Проинтегрировав, получим:

$$\ln|u| = 2\ln|x+1|,$$

$$u = (x+1)^2.$$

5. Подставим найденную функцию u во второе уравнение системы:

$$u \cdot v' = (x+1)^3,$$

$$(x+1)^2 \cdot v' = (x+1)^3,$$

$$v' = x+1.$$

Следовательно,

$$\frac{dv}{dx} = x+1,$$

$$dv = (x+1)dx,$$

$$v = \frac{(x+1)^2}{2} + C.$$

6. $y = u \cdot v = \left(\dfrac{(x+1)^2}{2} + C \right) \cdot (x+1)^2$ – общее решение ДУ.

Пример 2. Найти частное решение уравнения $x\,y' - y = x^2 \cdot \sin x$, если $y\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 1$.

Решение.

1. Уравнение линейное, введем подстановку $y = u(x) \cdot v(x)$.
2. $y' = u' \cdot v + u \cdot v'$.
3. Подставив y и y' в исходное уравнение, получим:

$$x \cdot (u'v + uv') - uv = x^2 \cdot \sin x,$$

$$x \cdot u' \cdot v + x \cdot u \cdot v' - uv = x^2 \cdot \sin x;$$

$$x \cdot u \cdot v' + u' \cdot (x \cdot u' - u) = x^2 \cdot \sin x,$$

$$\begin{cases} x \cdot u' - u = 0, \\ x \cdot v' \cdot u = x^2 \sin x. \end{cases}$$

4. Решим уравнение $x \cdot u' - u = 0$. Разделим переменные:

$$\frac{x\,du}{dx} - u = 0,$$

$$\frac{x\,du}{dx} = u,$$

$$x\,du = u\,dx,$$

$$\frac{du}{u} = \frac{dx}{x}.$$

Проинтегрировав, получим:

$$\ln|u| = \ln|x|,$$

$$u = x.$$

5. Подставим найденную функцию u во второе уравнение системы:

$$x^2 v' = x^2 \sin x,$$

$$\frac{dv}{dx} = \sin x,$$

$$dv = \sin x\,dx,$$

следовательно, $v = -\cos x + C$.

6. $y = u \cdot v = x \cdot \left(-\cos x + C\right)$ – общее решение ДУ.

Найдем частное решение. Подставим $y = 1$, $x = \dfrac{\pi}{2}$ в общее решение и найдем постоянную *C*:

$$1 = \frac{\pi}{2} \cdot \left(-\cos\frac{\pi}{2} + C\right),$$

$$1 = \frac{\pi}{2} C,$$

$$c = \frac{2}{\pi}.$$

Следовательно, $y = x \cdot \left(-\cos x + \frac{2}{\pi} \right)$ – частное решение ДУ.

Пример 3. Решить уравнение $(x + y) \cdot y' = 1$.

Решение.

1. Учитывая, что $y' = \frac{1}{x'}$, от исходного уравнения переходим к линейному ДУ, в котором y – аргумент, а $x = x(y)$:

$$x' = x + y.$$

Введем подстановку: $x = u(y) \cdot v(y)$.

2. $x' = u' \cdot v + u \cdot v'$.

3. Подставив x и x' в исходное уравнение, получим:

$$u' \cdot v + u \cdot v' = u \cdot v + y,$$

$$u' \cdot v + u \cdot v' - u \cdot v = y,$$

$$v \cdot (u' - u) + u \cdot v' = y,$$

$$\begin{cases} u' - u = 0, \\ u \cdot v' = y. \end{cases}$$

4. Решим уравнение $u' - u = 0$. Разделим переменные

$$\frac{du}{dy} = u,$$

$$\frac{du}{u} = dy.$$

Проинтегрировав, получим:

$$\ln|u| = y,$$

$$u = e^{y}.$$

5. Подставим найденную функцию u во второе уравнение системы

$$e^{y} v' = y,$$

$$\frac{e^{y} dv}{dy} = y,$$

$$dv = e^{-y} y\, dy,$$

$$v = \int e^{-y} y\, dy + C.$$

$$\int e^{-y} y\, dy = \begin{vmatrix} u = y & du = dy \\ dv = e^{-y} dy & v = -e^{-y} \end{vmatrix} = -e^{-y} y + \int e^{-y} dy = -e^{-y} y - e^{-y} + C.$$

$v = -e^{-y}(y + 1) + C$.

6. $x = u \cdot v = \left(-e^{-y}(y + 1) + C \right) \cdot e^{y} = -(y + 1) + C \cdot e^{y}$ – общее решение ДУ.

Пример 4. Решить уравнение Бернулли $xy' + y = y^2 \cdot \ln x$.

Решение.

1. Введем подстановку $x = u(y) \cdot v(y)$.
2. $x' = u' \cdot v + u \cdot v'$.
3. Подставив x и x' в исходное уравнение, получим:

$$x \cdot u' \cdot v + x \cdot v' \cdot u + u \cdot v = u^2 \cdot v^2 \cdot \ln x,$$

$$\begin{cases} x \cdot u' + u = 0, \\ x \cdot v' \cdot u = u^2 \cdot v^2 \cdot \ln x. \end{cases}$$

4. Решим уравнение $x \cdot u' + u = 0$.

$$x \cdot \frac{du}{dx} + u = 0,$$

$$x \cdot \frac{du}{dx} = -u.$$

Разделим переменные:

$$\frac{du}{u} = -\frac{dx}{x},$$

$$\ln u = -\ln x,$$

$$\ln u = \ln x^{-1},$$

$$u = \frac{1}{x}.$$

5. Находим функцию v, подставив найденную функцию u, во второе уравнение системы:

$$x \cdot v' \cdot \frac{1}{x} = \frac{1}{x^2} \cdot v^2 \cdot \ln x,$$

$$v' = \frac{v^2 \cdot \ln x}{x^2},$$

$$\frac{dv}{dx} = \frac{v^2 \cdot \ln x}{x^2},$$

$$\frac{dv}{v^2} = \frac{\ln x}{x^2} dx,$$

$$\int \frac{dv}{v^2} = \int \frac{\ln x}{x^2} dx + C.$$

Интеграл $\int \frac{\ln x}{x^2} dx$ вычислим методом интегрирования по частям:

$$\int \frac{\ln x}{x^2} dx = \begin{vmatrix} u = \ln x & du = \frac{dx}{x} \\ dv = \frac{dx}{x^2} & v = -\frac{1}{x} \end{vmatrix} = -\frac{\ln x}{x} + \int \frac{dx}{x^2} = -\frac{\ln x}{x} - \frac{1}{x} + C.$$

Получаем:

$$-\frac{1}{v}=-\frac{\ln x}{x}-\frac{1}{x}+C,$$

$$\frac{1}{v}=\frac{\ln x+1-Cx}{x},$$

$$v=\frac{x}{\ln x+1-Cx}.$$

6. $y=u\cdot v=\dfrac{1}{\ln x+1-Cx}$ – общее решение ДУ.

Задачи для самостоятельного решения

В задачах 69–100 решить дифференциальное уравнение

69. $y'-\dfrac{y}{x}=x$.

70. $y'+\dfrac{y}{x}=-xy^2$.

71. $y'-y\cdot tgx=\dfrac{1}{\cos x}$.

72. $xy'+2y=\sin x$.

73. $(2e^y-x)\cdot y'=1$.

74. $y'+\dfrac{1-2x}{x^2}\cdot y=1$.

75. $y'-y=e^x$.

76. $y'=x+y$.

77. $y'+2xy=2xe^{-x^2}$.

78. $y'+y=\cos x$.

79. $y'+xy=xy^3$.

80. $y'x+y=-xy^2$.

81. $y'+y=xy^3$.

82. $xy'+2y=x^5y^2$.

83. $y'+\dfrac{2y}{x}=x^3$.

84. $x^2y'=2xy+3$.

85. $(1+y^2)dx+xy\,dy=0$.

86. $3xy'-2y=\dfrac{x^3}{y^2}$.

87. $xy'-y=x^2\cdot\cos x$.

88. $2xy'+x=y^2$.

89. $xy'-2y=-x^2$.

90. $xy'+y-e^x=0$.

91. $y'+\dfrac{y}{x+1}=-y^2$.

92. $y'-y\cdot\operatorname{tg}x+y^2\cdot\cos x=0$.

93. $y'-\dfrac{y}{x\cdot\ln x}=x\cdot\ln x$.

94. $y'\cdot\operatorname{ctg}x+y=2\cos^2 x\cdot\operatorname{ctg}x$.

95. $xy'+y=\sin x,\ y\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=\dfrac{2}{\pi}$.

96. $xy'-xy=e^x,\ y(1)=e$.

97. $xy'-2y=2x^4,\ y(1)=0$.

98. $xy'-3y=5x^2,\ y(1)=0$.

99. $y'\cdot\sqrt{1-x^2}+y=\arcsin x,\ y(0)=0$.

100. $y'-y\cdot\operatorname{tg}x=\dfrac{1}{\cos x},\ y(0)=0$.

Дифференциальные уравнения первого порядка

Название уравнения	Вид уравнения	Метод интегрирования
1	2	3
1. С разделенными переменными	$P(x)\,dx + Q(y)\,dy = 0$	$\int P(x)\,dx + \int Q(y)\,dy = C$
2. С разделяющимися переменными	$P_1(x)Q_1(y)dx + P_2(x)Q_2(y)\,dy = 0$	$\int \frac{P_1(x)}{P_2(x)}dx + \int \frac{Q_1(y)}{Q_2(y)}dy = C$
3. Приводящиеся к уравнению с разделяющимися переменными	а) $\frac{dx}{dy} = f(ax + bx + C)$;	а) подстановка $ax + by + c = z$
	б) $\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{a_1x + b_1y + C_1}{a_2x + b_2y + C_2}\right)$, если $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = 0$	б) подстановка $a_1x + b_1y = z$
4. Линейные относительно y	$\frac{dy}{dx} + P(x)\,y = Q(x)$	а) метод Лагранжа б) метод Бернулли: $y = u \cdot v$
5. Уравнение Бернулли	$\frac{dy}{dx} + P(x)\,y = Q(x)\,y^n$ $(n \neq 0, n \neq 1)$	Метод Бернулли: $y = u \cdot v$
6. Однородные	а) $\frac{dy}{dx} = F\left(\frac{y}{x}\right)$; б) $P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = 0$ $P(tx,ty) = t^k P(x,y)$ $Q(tx,ty) = t^k Q(x,y)$	Подстановка $\frac{y}{x} = u$

1	2	3
7. Приводящиеся к однородному	$\frac{dy}{dx}=f\left(\frac{a_1x+b_1y+c_1}{a_2x+b_2y+c_2}\right)$, если $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}\neq 0$	$\begin{cases} a_1x+b_1y+c_1=0 \\ a_2x+b_2y+c_2=0 \end{cases}\Rightarrow (x_0,y_0)\Rightarrow$ $\Rightarrow\begin{cases} \overline{x}=x+x_0 \\ \overline{y}=y+y_0 \end{cases}\Rightarrow \frac{dy}{dx}=F\left(\frac{\overline{y}}{\overline{x}}\right)$
8. В полных дифференциалах	$P(x,y)\,dx+Q(x,y)\,dy=0$, $\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}$	$\int\limits_{x_0}^{x}P(x,y)\,dx+\int\limits_{y_0}^{y}Q(x,y)dy=C$
9. Приводящиеся к уравнению в полных дифференциалах	$P(x,y)\,dx+Q(x,y)\,dy=0$, если $\frac{\partial P}{\partial y}\neq\frac{\partial Q}{\partial x}$, но а) $\frac{\frac{\partial P}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial x}}{Q}=u(x)$ б) $\frac{\frac{\partial P}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial x}}{-P}=u(y)$	а) $\ln\mu=\int\frac{\frac{\partial P}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial x}}{Q}dx$ б) $\ln\mu=\int\frac{\frac{\partial P}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial x}}{-P}dy$ $\mu P(x,y)\,dx+\mu Q(x,y)\,dy=0$ (см.8)

Индивидуальные задания

I. Найти общее решение дифференциального уравнения

1. $e^{x+3y}dy = xdx$.

2. $y'\sin x = y\ln y$.

3. $y' = (2x-1)ctgy$.

4. $\dfrac{\operatorname{tg} y}{\cos^2 x}dy + \dfrac{\operatorname{tg} x}{\cos^2 y}dx = 0$.

5. $(1+e^x)\,ydy - e^y dx = 0$.

6. $(y^2+3)\,dx - \dfrac{e^x}{x}ydy = 0$.

7. $\sin y\cos x\,dy = \cos y\sin x\,dx$.

8. $y' = (2y+1)\operatorname{tg} x$.

9. $(\sin(x+y)+\sin(x-y))dx + \dfrac{dy}{\cos y} = 0$.

10. $(1+e^x)y\,y' = e^x$.

11. $3e^x\sin y\,dx + (1-e^x)\cos y\,dy = 0$.

12. $\sin x\operatorname{tg} y\,dx - \dfrac{dy}{\sin x} = 0$.

13. $y' = \dfrac{e^{2x}}{\ln y}$.

14. $3^{x^2+y}dy + xdx = 0$.

15. $(\cos(x-2y)+\cos(x+2y))y' = \dfrac{1}{\cos x}$.

16. $y' = e^{x^2}x(1+y^2)$.

17. $\operatorname{ctg} x\cos^2 y\,dx + \sin^2 x\operatorname{tg} y\,dy = 0$.

18. $\sin x\cdot y' = y\cos x + 2\cos x$.

19. $1+(1+y')e^y = 0$.

20. $y'\operatorname{ctg} x + y = 2$.

21. $e^x\sin y\,dx + \operatorname{tg} y\,dy = 0$.

22. $\dfrac{e^{-x^2}dy}{x} + \dfrac{dx}{\cos^2 y} = 0$.

23. $(\sin(2x+y)-\sin(2x-y))dx = \dfrac{dy}{\sin y}$.

24. $(1+e^{3y})x\,dx = e^{3y}dy$.

25. $\cos y\,dx = 2\sqrt{1+x^2}dy + \cos y\sqrt{1+x^2}dy$.

26. $y'\sqrt{1-x^2} - \cos^2 y = 0$.

27. $e^x\operatorname{tg} y\,dx = \dfrac{1-e^x}{\cos^2 y}dy$.

28. $3^{y^2-x^2} = \dfrac{y\,y'}{x}$.

29. $\cos^3 y\cdot y' - \cos(2x+y) = \cos(2x-y)$.

30. $y' + \sin(x+y) = \sin(x-y)$.

II. Найти общее решение дифференциального уравнения

1. $(xy+x^3y)y' = 1+y^2$.

2. $\dfrac{y'}{7^{y-x}} = 3$.

3. $y - xy' = 2(1+x^2y')$.

4. $y - xy' = 1+x^2y'$.

5. $(x+4)dy - xydx = 0$.

6. $y' + y + y^2 = 0$.

7. $y^2\ln xdx - (y-1)xdy = 0$.

8. $(x+xy^2)dy + ydx - y^2dx = 0$.

9. $(x^2+x)y\,dx + (y^2+1)dy = 0$.

10. $y' + 2y - y^2 = 0$.

11. $(xy^3+x)dx + (x^2y^2-y^2)dy = 0$.

12. $(1+y^2)dx - (y+yx^2)dy = 0$.

13. $y' = 2xy + x$.

14. $y - xy' = 3(1 + x^2 y')$.

15. $2x\,y\,y' = 1 - x^2$.

16. $(x^2 - 1)y' - xy = 0$.

17. $(y^2 x + y^2)dy + xdx = 0$.

18. $x\,y' - y = y^2$.

19. $(1 + x^3)y^3 dx - (y^2 - 1)x^3 dy = 0$.

20. $\sqrt{y^2 + 1}\,dx = xy\,dy$.

21. $y' - xy^2 = 2xy$.

22. $2x^2 y\,y' + y^2 = 2$.

23. $y' = \dfrac{1 + y^2}{1 + x^2}$.

24. $y'\sqrt{1 + y^2} = \dfrac{x^2}{y}$.

25. $(y + 1)y' = \dfrac{y}{\sqrt{1 - x^2}} + xy$.

26. $xyy' = \dfrac{1 + x^2}{1 - y^2}$.

27. $(1 + x^2)y' + y\sqrt{1 + x^2} = xy$.

28. $(xy - x^2)dy + y(1 - x)dx = 0$.

29. $(x^2 y - y)^2 y' = x^2 y - y + x^2 - 1$.

30. $\sqrt{1 - y^2}\,dx + y\sqrt{1 - x^2}\,dy = 0$.

III. Найти общее решение дифференциального уравнения

1. $y - xy' = \dfrac{x}{\cos\dfrac{y}{x}}$.

2. $(y^2 - 3x^2)dy + 2xy\,dx = 0$.

3. $(x + 2y)\,dx - x\,dy = 0$.

4. $(x - y)dx + (x + y)dy = 0$.

5. $(y^2 - 2xy)dx + x^2 dy = 0$.

6. $y^2 + x^2 y' = xyy'$.

7. $xy' - y = x\,tg\left(\dfrac{y}{x}\right)$.

8. $xy' = y - xe^{y/x}$.

9. $xy' - y = (x + y)\ln\left(\dfrac{x + y}{x}\right)$.

10. $xy' = y \cdot \cos\ln\left(\dfrac{y}{x}\right)$.

11. $\left(y + \sqrt{xy}\right)dx = xdy$.

12. $xy' = \sqrt{x^2 - y^2} + y$.

13. $y = x\left(y' - \sqrt[x]{e^y}\right)$.

14. $y' = \dfrac{y}{x} - 1$.

15. $y'x + x + y = 0$.

16. $ydx + \left(2\sqrt{xy} - x\right)dy = 0$.

17. $xdy - ydx = \sqrt{x^2 + y^2}\,dx$.

18. $(x - y)ydx - x^2 dy = 0$.

19. $xy + y^2 = (2x^2 + xy)y'$.

20. $(x^2 - 2xy)y' = xy - y^2$.

21. $\left(2\sqrt{xy} - y\right)dx + x\,dy = 0$.

22. $xy' + y\left(\ln\dfrac{y}{x} - 1\right) = 0$.

23. $(x^2 + y^2)dx + 2xydy = 0$.

24. $(y^2 - 2xy)dx - x^2 dy = 0$.

25. $(x + 2y)dx + xdy = 0$.

26. $(2x - y)dx + (x + y)dy = 0$.

27. $2x^3 y' = y(2x^2 - y^2)$.

28. $x^2 y' = y(x + y)$.

29. $y' = \dfrac{x}{y} + \dfrac{y}{x}$.

30. $\left(4x^2 + 3xy + y^2\right)dx + \left(4y^2 + 3xy + x^2\right)dy = 0$.

IV. Найти частное решение дифференциального уравнения

1. $\left(x^2 + 1\right)y' + 4xy = 3$, $y(0) = 0$.

2. $y' + y\,tgx = \dfrac{1}{\cos x}$, $y(0) = 0$.

3. $(1 - x)(y' + y) = e^{-x}$, $y(0) = 0$.

4. $xy' - 2y = 2x^4$, $y(1) = 0$.

5. $y' = 2x\left(x^2 + y\right)$, $y(0) = 0$.

6. $y' - y = e^x$, $y(0) = 1$.

7. $xy' + y + xe^{-x^2} = 0$, $y(1) = \dfrac{1}{2e}$.

8. $\cos y\,dx = (x + 2\cos y)\sin y\,dy$, $y(0) = \dfrac{\pi}{4}$.

9. $x^2y' + xy + 1 = 0$, $y(1) = 0$.

10. $y\,x' + x = 4y^3 + 3y^2$, $y(2) = 1$.

11. $(2x + y)dy = ydx + 4\ln y\,dy$, $y(0) = 1$.

12. $y' = \dfrac{y}{3x - y^2}$, $y(0) = 1$.

13. $(1 - 2xy)y' = y(y - 1)$, $y(0) = 1$.

14. $x(y' - y) = e^x$, $y(1) = 0$.

15. $y = x(y' - x\cos x)$, $y\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 0$.

16. $(xy' - 1)\ln x = 2y$, $y(e) = 0$.

17. $\left(2e^y - x\right)y' = 1$, $y(0) = 0$.

18. $xy' + (x + 1)y = 3x^2e^{-x}$, $y(1) = 0$.

19. $\left(x + y^2\right)dy = ydx$, $y(0) = 1$.

20. $\left(\sin^2 y + x\,ctgy\right)y' = 1$, $y(0) = \dfrac{\pi}{2}$.

21. $(x + 1)y' + y = x^3 + x^2$, $y(0) = 0$.

22. $xy' - 2y + x^2 = 0$, $y(1) = 0$.

23. $xy' + y = \sin x$, $y\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = \dfrac{2}{\pi}$.

24. $(x^2-1)y'-xy=x^3-x$, $y(\sqrt{2})=1$.

25. $(1-x^2)y'+xy=1$, $y(0)=1$.

26. $y'\operatorname{ctg}x-y=2\cos^2 x\cdot\operatorname{ctg}x$, $y(0)=0$.

27. $x^2y'=2xy+3$, $y(1)=-1$.

28. $y'+2xy=xe^{-x^2}$, $y(0)=0$.

29. $y'-3x^2y-x^2e^{x^3}=0$, $y(0)=0$.

30. $xy'+y=\ln x+1$, $y(1)=0$.

V. Найти общее решение дифференциального уравнения

1. $y'+y=x\sqrt{y}$.

2. $ydx+2xdy=\dfrac{2y\sqrt{x}}{\cos^2 y}dy$.

3. $y'+2y=y^2e^x$.

4. $y'=y^4\cos x+y\,tgx$.

5. $xy\,dy=(y^2+x)dx$.

6. $xy'+2y+x^5y^3e^x=0$.

7. $y'x^3\sin y=xy'-2y$.

8. $(2x^2y\ln y-x)y'=y$.

9. $2y'-\dfrac{x}{y}=\dfrac{xy}{x^2-1}$.

10. $xy'-2x^2\sqrt{y}=4y$.

11. $xy^2y'=x^2+y^3$.

12. $(x+1)(y'+y^2)=-y$.

13. $y'x+y=-xy^2$.

14. $y'-xy=-y^3e^{-x^2}$.

15. $xy'-2\sqrt{x^3y}=y$.

16. $y'+xy=x^3y^3$.

17. $y'=\dfrac{x}{y}e^{2x}+y$.

18. $yx'+x=-yx^2$.

19. $x(x-1)y'+y^3=xy$.

20. $2x^3yy'+3x^2y^2+1=0$.

21. $\dfrac{dx}{x}=\left(\dfrac{1}{y}-2x\right)dy$.

22. $y'+x\sqrt[3]{y}=3y$.

23. $xy'+y=y^2\ln x$.

24. $xdx=\left(\dfrac{x^2}{y}-y^3\right)dy$.

25. $y'+2xy=2x^3y^3$.

26. $y'+y=\dfrac{x}{y^2}$.

27. $y'-y\,tgx+y^2\cos x=0$.

28. $y'+\dfrac{2y}{x}=\dfrac{2\sqrt{y}}{\cos^2 x}$.

29. $y'-y+y^2\cos x=0$.

30. $y'=x\sqrt{y}+\dfrac{xy}{x^2-1}$.

VI. Найти общее решение дифференциального уравнения

1. $\frac{1}{x}dy - \frac{y}{x^2}dx = 0$.

2. $\frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2} = 0$.

3. $(2x - y + 1)dx + (2y - x - 1)dy = 0$.

4. $xdx + ydy + \frac{ydx - xdy}{x^2 + y^2} = 0$.

5. $\left(\frac{x}{\sqrt{x^2 - y^2}} - 1\right)dx - \frac{ydy}{\sqrt{x^2 - y^2}} = 0$.

6. $\frac{2x(1 - e^y)}{(1 + x^2)^2}dx + \frac{e^y}{1 + x^2}dy = 0$.

7. $\frac{2x}{y^3}dx + \frac{y^2 - 3x^2}{y^4}dy = 0$.

8. $\left(1 - e^{x/y}\right)dx + e^{x/y}\left(1 - \frac{x}{y}\right)dy = 0$.

9. $x(2x^2 + y^2) + y(x^2 + 2y^2)y' = 0$.

10. $\left(3x^2 + 6xy^2\right)dx + \left(6x^2y + 4y^3\right)dy = 0$.

11. $\left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} + \frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right)dx + \left(\frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} + \frac{1}{y} - \frac{1}{y^2}\right)dy = 0$.

12. $\left(3x^2 \operatorname{tg} y - \frac{2y^3}{x^3}\right)dx + \left(\frac{x^3}{\cos^2 y} + 4y^3 + \frac{3y^2}{x^2}\right)dy = 0$.

13. $\left(2x + \frac{x^2 + y^2}{x^2 + y}\right)dx = \frac{x^2 + y^2}{xy^2}dy$.

14. $\left(\frac{\sin 2x}{y} + x\right)dx + \left(y - \frac{\sin^2 x}{y^2}\right)dy = 0$.

15. $\left(3x^2 - 2x - y\right)dx + \left(2y - x + 3y^2\right)dy = 0$.

16. $\frac{xdx + ydy}{\sqrt{x^2 + y^2}} + \frac{xdy - ydx}{x^2} = 0$.

17. $\left(3x^2y + y^3\right)dx + \left(x^3 + 3xy^2\right)dy = 0$.

18. $y\left(x^2 + y^2 + a^2\right)dy + x\left(x^2 - y^2 - a^2\right)dx = 0$.

19. $\left(\sin y + y\sin x + \frac{1}{x}\right)dx + \left(x\cos y - \cos x + \frac{1}{y}\right)dy = 0$.

20. $\dfrac{y+\sin x\cos^2 yx}{\cos^2 xy}dy+\left(\dfrac{x}{\cos^2 xy}-\sin y\right)dy=0$.

21. $(3x^2-y\cos xy+y)dx+(x-x\cos xy)dy=0$.

22. $\left(12x^3-e^{x/y}\dfrac{1}{y}\right)dx+\left(16y+\dfrac{x}{y^2}e^{x/y}\right)dy=0$.

23. $\left(\dfrac{y}{2\sqrt{xy}}+2xy\sin x^2y+4\right)dx+\left(\dfrac{x}{2\sqrt{xy}}+x^2\sin x^2y\right)dy=0$.

24. $y\cdot 3^{xy}\ln 3\,dx+\left(x\cdot 3^{xy}\ln 3-3\right)dy=0$.

25. $\left(\dfrac{1}{x-y}+3x^2y^7\right)dx+\left(7x^3y^6-\dfrac{1}{x-y}\right)dy=0$.

26. $\left(\dfrac{2y}{x^3}+y\cos xy\right)dx+\left(\dfrac{1}{x^2}+x\cos xy\right)dy=0$.

27. $\left(\dfrac{y}{\sqrt{1-x^2y^2}}-2x\right)dx+\dfrac{xdy}{\sqrt{1-x^2y^2}}=0$.

28. $\left(5x^4y^4+28x^6\right)dx+\left(4x^5y^3-3y^2\right)dy=0$.

29. $\left(2xe^{x^2+y^2}+2\right)dx+\left(2ye^{x^2+y^2}-3\right)dy=0$.

30. $\left(3y^3\cos 3x+7\right)dx+\left(3y^2\sin 3x-2y\right)dy=0$.

3. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ВЫСШИХ ПОРЯДКОВ

3.1. Основные понятия и определения

Дифференциальные уравнения порядка выше первого называются ***ДУ высших порядков. ДУ второго пор***ядка в общем случае записывается в виде

$$F(x; y; y'; y'') = 0 \tag{3.1.1}$$

или, если это возможно, в идее, разрешенном относительно старшей производной

$$y'' = f(x; y; y'), \tag{3.1.2}$$

где x – аргумент; y – искомая функция; y', y'' – производные функции y первого и второго порядка соответственно.

Решением ДУ (3.1.2) называется функция $y = \varphi(x)$, которая при подставке в уравнение обращает его в тождество.

Общим решением ДУ (3.1.2) называется функция $y = \varphi(x; C_1; C_2)$ (где C_1, C_2 – не зависящие от x произвольные постоянные), удовлетворяющая условиям:

1. $\varphi(x; C_1; C_2)$ является решением ДУ для каждого фиксированного значения C_1, C_2.

2. Каковы бы ни были начальные условия

$$\begin{cases} y(x_0) = y_0; \\ y'(x_0) = y'_0. \end{cases} \tag{3.1.3}$$

существуют единственные значения постоянных $C_1 = C_{10}$ и $C_2 = C_{20}$ такие, что функция $y = \varphi(x; C_{10}; C_{20})$ удовлетворяет начальным условиям (3.1.3).

Решение $y = \varphi(x; C_{10}; C_{20})$ уравнения (3.1.2) получающееся из общего решения $y = \varphi(x; C_1; C_2)$ при конкретных значениях постоянных $C_1 = C_{10}$ и $C_2 = C_{20}$, называется ***частным решением***.

Решения ДУ (3.1.2), записанное в виде $\Phi(x; y; C_1; C_2) = 0$, $\Phi(x; y; C_{10}; C_{20}) = 0$, называются общими и частными интегралами соответственно.

График всякого решения ДУ второго порядка называется интегральной кривой. Общее решение ДУ (3.1.2) представляет собой множество интегральных кривых; частное решение – одна интегральная кривая этого множества, проходящая через точку (x_0, y_0) и имеющая в ней касательную с заданным угловым коэффициентом $y'(x_0) = y'_0$.

Переписав ДУ (3.1.1) в виде

$$F\left(x; y; y'; \frac{y''}{\left(1+(y')^2\right)^{3/2}} \cdot \left(1+(y')^2\right)^{3/2}\right) = 0,$$

видим, что ДУ второго порядка устанавливает связь между координатами точки $(x; y)$ интегральной кривой, угловым коэффициентом $k = y'$ касательной к ней и кривизной $k = \dfrac{y''}{\left(1+(y')^2\right)^{3/2}}$ в точке $(x; y)$. В этом состоит геометрический смысл ДУ второго порядка.

Как и в случае уравнения первого порядка, задача нахождения решения ДУ (3.1.2), удовлетворяющего заданным начальным условиям (3.1.3), называется ***задачей Коши***.

Теорема (существования и единственности задачи Коши).

Если в уравнении (3.1.2) функция $f(x; y; y')$ и ее частные производные непрерывны в некоторой замкнутой области D изменения переменных x, y и y', то для всякой точки $(x_0; y_0; y'_0) \in D$ существует единственное решение $y = \varphi(x; C_{10}; C_{20})$ уравнения (3.1.2), удовлетворяющее начальным условиям (3.1.3).

Аналогичные понятия и определения имеют место для **ДУ *n*-го порядка**, которое в общем виде записывается:

$$F\left(x; y; y'; y''; ...; y^{(n)}\right) = 0,$$

или $y^{(n)} = f\left(x; y; y'; y''; ...; y^{(n-1)}\right)$, (3.1.4)

если его можно разрешить относительно старшей производной.

В ДУ (3.1.4) x – аргумент, y – искомая функция.

Начальные условия для ДУ (3.1.4) имеют вид:

$$\begin{cases} y(x_0) = y_0; \\ y'(x_0) = y'_0; \\ y''(x_0) = y''_0; \\ .... \\ y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}. \end{cases} \tag{3.1.5}$$

Общим решением ДУ n-го порядка является функция вида

$$y = \varphi(x; C_1; C_2; ...; C_n),$$

содержащая *n* произвольных, не зависящих от x постоянных.

Решение ДУ (3.1.4), получающееся из общего решения при конкретных значениях постоянных $C_1 = C_{10}$, $C_2 = C_{20}, \ldots,$ $C_n = C_{n0}$, называется ***частным решением***.

Задача Коши для ДУ n-го порядка: найти решение ДУ (3.1.4), удовлетворяющее начальным условиям (3.1.5).

Значения $C_{10}, C_{20}, ..., C_{n0}$ находятся из системы уравнений:

$$\begin{cases} y_0 = \varphi(x_0; C_1; C_2; ...; C_n); \\ y_0' = \varphi(x_0; C_1; C_2; ...; C_n); \\ .... \\ y_0^{(n-1)} = \varphi(x_0; C_1; C_2; ...; C_n). \end{cases}$$

Проинтегрировать (решить) ДУ n-го порядка означает – найти его общее решение или частное решение (интеграл) в зависимости от тог, заданы начальные условия или нет.

Задача нахождения решения ДУ n-го порядка сложнее, чем первого. Поэтому рассмотрим лишь отдельные виды ДУ высших порядков.

3.2. Уравнения, допускающие понижение порядка

Одним из методов интегрирования ДУ высших порядков является метод понижения порядка с помощью подходящей подстановки. Суть метода состоит в том, чтобы с помощью замены переменной (подстановки) данное ДУ сводится к уравнению, порядок которого ниже порядка исходного ДУ.

Рассмотри четыре типа уравнений, допускающих понижение порядка.

I тип. Пусть дано уравнение

$$y'' = f(x). \tag{3.2.1}$$

Проинтегрировав его дважды, получим общее решение:

$$y' = \int f(x)dx + C_1 ,$$

$$y'' = \int \left(\int f(x)\, dx + C_1 \right) dx = \int \left(\int f(x)\, dx \right) dx + C_1 x + C_2 .$$

Если дано уравнение

$$y^{(n)} = f(x), \tag{3.2.2}$$

то его общее решение получим путем n-кратного интегрирования:

$$\int y^{(n)} dx = \int f(x)\, dx + C_1 ;$$

$$y^{(n-1)} = \varphi(x) + C_1, \text{ где } \varphi(x) = \int f(x)\, dx ;$$

$$\int y^{(n-1)} dx = \int \varphi(x)\, dx + C_1 x + C_2 \text{ и т.д.}$$

Пример 1. Решить уравнение $y^{IV} = \sin 2x$.

Решение. Последовательно интегрируя четыре раза уравнение, получим:

$$y''' = \int \sin 2x dx + C_1 = -\frac{1}{2}\cos 2x + C_1 ,$$

$$y'' = \int\left(-\frac{1}{2}\cos 2x + C_1\right)dx + C_2 = -\frac{1}{2}\int \cos 2x dx + C_1\int dx + C_2 =$$

$$= -\frac{1}{4}\sin 2x + C_1 x + C_2 ,$$

$$y' = \int\left(-\frac{1}{4}\sin 2x + C_1 x + C_2\right)dx + C_3 = -\frac{1}{4}\int \sin 2x dx + C_1\int x dx + C_2\int dx + C_3 =$$

$$= \frac{1}{8}\cos 2x + C_1\frac{x^2}{2} + C_2 x + C_3 ,$$

$$y = \int\left(\frac{1}{8}\cos 2x + C_1\frac{x^2}{2} + C_2 x + C_3\right)dx + C_4 =$$

$$= \frac{1}{8}\int \cos 2x dx + \frac{C_1}{2}\int x^2 dx + C_2\int x dx + C_3\int dx + C_4 =$$

$$= \frac{1}{16}\sin 2x + C_1\frac{x^3}{6} + C_2\frac{x^2}{2} + C_3 x + C_4$$ – общее решение ДУ.

Рассмотрим ДУ второго порядка в общем виде:

$$f(x; y; y'; y'') = 0. \qquad (3.2.3)$$

II тип. ***Уравнение (3.2.3) не содержит явно искомой функции*** y**.**

$$f(x; y'; y'') = 0. \qquad (3.2.4)$$

Чтобы понизить порядок уравнения, обозначим $y' = p$, где $p = p(x)$ – новая неизвестная функция.

Тогда $y'' = p'$ и уравнение (3.2.4) примет вид

$$f(x; p; p') = 0$$ – ДУ первого порядка.

Пусть $p = \varphi(x; C_1)$ – общее решение ДУ первого порядка. Значит, $y' = \varphi(x; C_1)$. Для нахождения y достаточно проинтегрировать последнее уравнение. Общее решение уравнения (3.2.4) будет иметь вид:

$$y = \int \varphi(x; C_1)\, dx + C_2 .$$

Пусть дано уравнение вида

$$F\left(x; y^{(k)}; ....; y^{(n)}\right) = 0, \qquad (3.2.5)$$

которое также ***не содержит явно искомой функции*** y ***и производных*** $y', y'', \ldots, y^{(k-1)}$.

Чтобы понизить порядок уравнения, обозначим $y^{(k)} = p(x)$. Тогда $y^{(k+1)} = p'; \ldots; y^{(n)} = p^{(n-k)}$ и уравнение (5) примет вид

$$F\left(x; p; p'; \ldots; p^{(n-k)}\right) = 0.$$

С помощью данной подстановки порядок ДУ понижается на k единиц.

Частным случаем уравнения (3.2.5) является уравнение

$$F\left(x; y^{(n-1)}; y^{(n)}\right) = 0. \qquad (3.2.6)$$

Замена: $y^{(n-1)} = p(x)$, $y^{(n)} = p'$. Таким образом, уравнение (3.2.6) сводится к ДУ первого порядка.

Пример 2. Решить уравнение $xy'' - y' = 0$.

Решение. В данное уравнение не входит явно функция $y(x)$, поэтому оно допускает понижение порядка с помощью замены $y' = p(x)$, тогда $y'' = p'$.

Подставив y' и y'' в уравнение, получим ДУ первого порядка с разделяющимися переменными:

$$x \cdot p' - p = 0, \; x\frac{dp}{dx} = p, \; \frac{dp}{p} = \frac{dx}{x}.$$

Проинтегрировав, получим:

$$\ln|p| = \ln|x| + \ln C_1, \; p = C_1 x, \text{ или } y' = C_1 x,$$

$$\frac{dy}{dx} = C_1 x, \; dy = C_1 x dx,$$

$y = C_1 \int x dx + C_2 = C_1 \frac{x^2}{2} + C_2$ – общее решение ДУ.

Пример 3. Решить уравнение $\left(1 + x^2\right)y'' - 2xy' = 0$, $y(1) = 0$, $y'(1) = 1$.

Решение. В данное уравнение не входит явно функция $y(x)$, поэтому оно допускает понижение порядка с помощью замены $y' = p(x)$, тогда $y'' = p'$.

Сделав замену, получим ДУ первого порядка с разделяющимися переменными:

$$\left(1 + x^2\right)p' - 2xp = 0.$$

$$\left(1 + x^2\right)p' = 2xp, \; \left(1 + x^2\right)\frac{dp}{dx} = 2xp, \; \frac{dp}{p} = \frac{2xdx}{1 + x^2}.$$

Проинтегрировав, получим:

$$\ln|p| = \ln\left|1 + x^2\right| + \ln C_1 \text{ или } p = C_1 \cdot \left(1 + x^2\right).$$

Или $y' = C_1 \cdot \left(1 + x^2\right)$,

$y = C_1 \int \left(1 + x^2\right) dx + C_2 = C_1 x + C_1 \dfrac{x^3}{3} + C_2$ – общее решение ДУ.

Подставим в производную и функцию значения $x = 1$, $y = 0$, $y' = 1$:

$$\begin{cases} 1 = 2C_1, \\ 0 = C_1 + \dfrac{C_1}{3} + C_2, \end{cases}$$

получим $C_1 = \dfrac{1}{2}$, $C_2 = -\dfrac{2}{3}$.

Следовательно,

$$y = \frac{x^3}{6} + \frac{x}{2} - \frac{2}{3} \text{ – частное решение ДУ.}$$

III тип. ***Уравнение (3.2.3) не содержит явно независимой переменной*** x

$$f(y; y'; y'') = 0. \qquad (3.2.7)$$

Чтобы понизить порядок уравнения (3.2.7), сделаем замену $y' = p(y)$. Дифференцируем это равенство по x, учитывая, что $y' = p(y(x))$:

$$y'' = \frac{d(y')}{dx} = \frac{d\,p(y)}{dx} = \frac{d\,p(y)}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = \frac{dp(y)}{dy} \cdot p,$$

т.е. $y'' = p \cdot p'_y$.

Уравнение (3.2.7) запишется в виде

$$f(y; p; p'_y \cdot p) = 0. \qquad (3.2.8)$$

Функция $p = \varphi(y; C_1)$ является общим решением ДУ (3.2.8). Тогда $y' = \varphi(y; C_1)$ – ДУ с разделяющимися переменными. Интегрируя его, находим общий интеграл уравнения (3.2.7):

$$\int \frac{dy}{\varphi(y; C_1)} = x + C_2.$$

Пусть дано уравнение

$$F\left(y; y'; y''; \ldots; y^{(n)}\right) = 0.$$

Его порядок можно понизать на единицу, положив $y' = p$, где $p = p(y)$, тогда $y'' = p \cdot p'_y$:

$$y''' = \frac{d}{dx}\left(p \cdot p'_y\right) = \frac{d}{dy}\left(p \cdot p'_y\right) \cdot \frac{dy}{dx} = p \cdot \left((p'_y)^2 + p \cdot p''_{yy}\right) \text{ и т.д.}$$

Пример 4. Решить уравнение $y'' + 2y\,(y')^3 = 0$.

Решение. В данное уравнение не входит явно независимая переменная x, поэтому оно допускает понижение порядка. Замена $y' = p(y)$, $y'' = p \cdot p'$ приведет к уравнению

$$p \cdot p' + 2y \cdot p^3 = 0.$$

1) $p = 0$, $y' = 0$, $y = C$.

2) $p \neq 0$, $\dfrac{dp}{dy} = -2y \cdot p^2$, $\displaystyle\int \frac{dp}{p^2} = -\int 2y dy + C_1$.

Проинтегрировав, получим:

$$\frac{1}{p} = y^2 + C_1,\ p = \frac{1}{y^2 + C_1} \text{ или } \frac{dy}{dx} = \frac{1}{y^2 + C_1},$$

$$\int \left(y^2 + C_1\right) dy = \int dx + C_2,$$

$\dfrac{y^3}{3} + C_1 y = x + C_2$ – общий интеграл ДУ.

Пример 5. Решить уравнение $y'' - (y')^2 + y'(y-1) = 0$, $y(0) = 2$, $y'(0) = 2$.

Решение. В данное уравнение не входит явно независимая переменная x, поэтому оно допускает понижение порядка. Замена $y' = p(y)$, $y'' = p \cdot p'$ приведет к уравнению

$$p' \cdot p - p^2 + p \cdot (y-1) = 0,$$

где $p \neq 0$, т.к. иначе $y' = 0$, что противоречит начальному условию $y'(0) = 2$.

$$p' - p + y - 1 = 0 \text{ – линейное ДУ первого порядка.}$$

Решим его методом Бернулли.

Полагаем $p = u \cdot v$, $p' = u' \cdot v + u \cdot v'$.

$$u' \cdot v + u \cdot v' - u \cdot v + y - 1 = 0,$$

$$u' \cdot v + u \cdot (v' - v) = 1 - y,$$

$$\begin{cases} v' - v = 0, \\ u' \cdot v = 1 - y. \end{cases}$$

Решим первое уравнение системы:

$$v' - v = 0,\ \frac{dv}{dy} = v,\ \frac{dv}{v} = dy,\ \underline{v = e^y}.$$

Подставим найденную функцию v во второе уравнение системы

$$u' \cdot e^y = 1 - y,\ \frac{du}{dy} \cdot e^y = 1 - y,\ du = (1-y) \cdot e^{-y} dy.$$

Интегрируя последнее равенство, находим u:

$$u = -e^{-y}(1-y) + e^{-y} + C_1.$$

$$\int (1-y)\cdot e^{-y}dy = \begin{vmatrix} u=1-y & du=-dy \\ dv=e^{-y}dy & v=-e^{-y} \end{vmatrix} = -e^{-y}(1-y) - \int -e^{-y}(-dy) =$$

$$= -e^{-y}(1-y) - \int e^{-y}dy = -e^{-y}(1-y) - \left(-e^{-y}\right) + C .$$

Следовательно, $p = u\cdot v = \left(-e^{-y}(1-y) + e^{-y} + C_1\right)\cdot e^{y}$, или $p = C_1 e^{y} + y$.

Заменяя p на y', получаем $y' = C_1 e^{y} + y$.

Подставляя $y = 2$, $y' = 2$ в это равенство, находим C_1:

$$2 = C_1 \cdot e^2 + 2 \Rightarrow C_1 = 0 .$$

Имеем $y' = y$, значит $\dfrac{dy}{dx} = y$, $\dfrac{dy}{y} = dx$, $\ln|y| = x + \ln|C_2|$, $y = C_2 \cdot e^{x}$.

Находим C_2 из начальных условий

$$2 = C_2 \cdot e^0 \Rightarrow C_2 = 2 .$$

Таким образом, $y = 2e^{x}$ – частное решение ДУ.

IV тип. В уравнении (3.2.3) ***функция*** $f(x;y;y'')$ ***– однородная относительно искомой функции*** y ***и ее производных*** y'***,*** y''***,*** т.е. уравнение не меняется при одновременной замене y, y', y'' на ty, ty', ty''.

Чтобы понизать порядок уравнения, обозначим $y' = p\cdot y$, где $p = p(x)$ – новая неизвестная функция. Тогда $y'' = p'\cdot y + p\cdot y' = p'\cdot y + p^2\cdot y$.

Уравнение вида $F\left(y;y';y'';...;y^{(n)}\right) = 0$, где F – однородная функция, относительно $y, y', y'', ..., y^{(n)}$ решается аналогичной подстановкой, т.е. $y' = p\cdot y$, $y'' = p'\cdot y + p^2\cdot y$,

$$y''' = p''\cdot y + p'\cdot y' + 2p\cdot p'\cdot y + p^2\cdot y' = p''\cdot y + 3p\cdot p'\cdot y + p^3\cdot y \text{ и т.д.}$$

Пример 7. Решить уравнение $x^2 y y'' = (y - x y')^2$

Решение. Уравнение однородное относительно y, y', y'', поэтому оно допускает понижение порядка.

Замена $y' = p(x)\cdot y$, $y'' = p'\cdot y + p^2\cdot y$ приведет к уравнению

$$x^2 y\left(y p^2 + p'\cdot y\right) = (y - xyp)^2, \text{ или}$$

$$x^2y^2p^2 + p'x^2y^2 = y^2 - 2xy^2p + x^2y^2p^2 .$$

После преобразований получим

$x^2p' + 2xp = 1$ – линейное ДУ первого порядка.

Решаем способом Бернулли.

Полагаем $p=u\cdot v$, $p'=u'\cdot v+u\cdot v'$.

$x^2\cdot u'\cdot v+x^2\cdot u\cdot v'+2x\cdot u\cdot v=1$, или $x\cdot v\cdot\left(x\cdot u'+2u\right)+x^2\cdot v'\cdot u=1$.

$$\begin{cases} x\cdot u'+2u=0, \\ x^2\cdot v'\cdot u=1. \end{cases}$$

Решим первое уравнение системы:

$$x\cdot u'+2u=0,\ x\cdot\frac{du}{dx}=-2u,\ \frac{du}{u}=-2\frac{dx}{x},$$

$$\ln|u|=-2\ln|x|,\ \underline{u=\frac{1}{x^2}}.$$

Подставим найденную функцию u во второе уравнение системы:

$$x^2\cdot v'\cdot\frac{1}{x^2}=1,\ v'=1,$$

$$dv=dx,\ \underline{v=x+C_1}.$$

Следовательно, $p=\frac{1}{x^2}\cdot\left(x+C_1\right)=\frac{1}{x}+\frac{C_1}{x^2}$.

Учитывая, что $y'=p\cdot y$, получим:

$$\frac{dy}{dx}=y\cdot\left(\frac{1}{x}+\frac{C_1}{x^2}\right),\ \frac{dy}{y}=\left(\frac{1}{x}+\frac{C_1}{x^2}\right)dx,$$

$$\ln|y|=\ln|x|-\frac{C_1}{x}+\ln C_2,$$

$$y=e^{\ln|x|-\frac{C_1}{x}+\ln C_2},\text{ или } y=C_2\cdot x\cdot e^{-\frac{C_1}{x}}\text{ – общее решение ДУ.}$$

Задачи для самостоятельного решения

В задачах 101–119 решить дифференциальное уравнение

101. $y'''=x+\sin 2x$.

102. $y'''=\cos\frac{x}{3}$.

103. $y'''=\frac{1}{x}$.

104. $y'''=3x-e^{-x}$.

105. $y'''=\sin 5x$.

106. $y^{IV}=2x$.

107. $y'''=x\cdot\ln x$, $y(1)=y'(1)=y''(1)=0$.

108. $y'''=x\cdot e^x$, $y(0)=y'(0)=y''(0)=0$.

109. $y''-\frac{y'}{x}=0$.

110. $x^2y''=y'^2$.

111. $2xy'y''=1+\left(y'\right)^2$.

112. $xy''=y'$.

113. $xy''=y'$, $y(1)=2$, $y'(1)=4$.

114. $2xy''=y'$, $y(1)=\frac{1}{3}$, $y'(1)=2$.

115. $(y'')^2 = y'$.

116. $(y')^2 + 2yy'' = 0$.

117. $2yy'' = (y')^2 + 1$.

118. $y'' \cdot \operatorname{tg} y = 2(y')^2$.

119. $x \cdot y'' \cdot \ln x = y'$, $y(e) = 1$, $y'(e) = 2$.

Индивидуальные задания

I. Найти частное решение дифференциального уравнения

1. $y''' = \sin x, \ \ y(0) = 1, y'(0) = 0, y''(0) = 0$.

2. $y''' = \dfrac{1}{x}, \ y(1) = \dfrac{1}{4}, y'(1) = y''(1) = 0$.

3. $y'' = \dfrac{1}{\cos^2 x}, \ y(0) = 1, y'(0) = \dfrac{3}{5}$.

4. $y''' = \dfrac{6}{x^3}, \ y(1) = 0, y'(1) = 5, y''(1) = 1$.

5. $y'' = 4\cos 2x, \ \ y(0) = 1, y'(0) = 3$.

6. $y'' = \dfrac{1}{1+x^2}, \ y(0) = 0, y'(0) = 0$.

7. $x\,y''' = 2, \ \ y(1) = \dfrac{1}{2}, y'(1) = y''(1) = 0$.

8. $y''' = e^{2x}, \ \ y(0) = \dfrac{9}{8}, y'(0) = \dfrac{1}{4}, y''(0) = -\dfrac{1}{2}$.

9. $y''' = \cos^2 x, \ \ y(0) = 1, y'(0) = -\dfrac{1}{8}, y''(0) = 0$.

10. $y'' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \ y(0) = 2, y'(0) = 3$.

11. $y'' = \dfrac{1}{\sin^2 2x}, \ y\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = \dfrac{\pi}{4}, y'\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = 1$.

12. $y'' = x + \sin x, \ \ y(0) = -3, y'(0) = 0$.

13. $y'' = \operatorname{arctg} x, \ y(0) = y'(0) = 0$.

14. $y'' = \operatorname{tg} x \cdot \dfrac{1}{\cos^2 x}, \ y(0) = \dfrac{1}{2}, y'(0) = 0$.

15. $y''' = e^{x/2} + 1, \ y(0) = 8, y'(0) = 5, y''(1) = 2$.

16. $y'' = \dfrac{x}{e^{2x}}, \ y(0) = \dfrac{1}{4}, y'(0) = -\dfrac{1}{4}$.

17. $y'' = \sin^2 3x, \ \ y(0) = -\dfrac{\pi^2}{16}, y'(0) = 0$.

18. $y''' = x\sin x, \ y(0) = 0, y'(0) = 0, y''(0) = 0$.

19. $y'''\sin^4 x = \sin 2x$, $y\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2}$, $y'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$, $y''\left(\frac{\pi}{2}\right) = -1$.

20. $y'' = \cos x + e^{-x}$, $y(0) = -e^{-\pi}$, $y'(0) = 1$.

21. $y'' = \sin^3 x$, $y\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\frac{7}{9}$, $y'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$.

22. $y''' = \sqrt{x} - \sin 2x$, $y(0) = -\frac{1}{8}$, $y'(0) = \frac{1}{8}$, $y''(0) = \frac{1}{2}$.

23. $y'' = 2\sin x\cos^2 x$, $y(0) = -\frac{5}{9}$, $y'(0) = -\frac{2}{3}$.

24. $y'' = \dfrac{1}{\cos^2 \frac{x}{2}}$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$.

25. $y'' = 2\sin^2 x\cos x$, $y(0) = \frac{1}{9}$, $y'(0) = 1$.

26. $y'' = 2\sin x\cos^2 x - \sin^3 x$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$.

27. $y'' = 2\cos x\sin^2 x - \cos^3 x$, $y(0) = \frac{2}{3}$, $y'(0) = 2$.

28. $y'' = x - \ln x$, $y(1) = -\frac{5}{12}$, $y'(1) = \frac{3}{2}$.

29. $y'' = \frac{1}{x^2}$, $y(1) = 3$, $y'(1) = 1$.

30. $y''' = \cos 4x$, $y(0) = 2$, $y'(0) = \frac{15}{16}$, $y''(0) = 0$.

II. Найти общее решение дифференциального уравнения, допускающего понижение порядка

1. $(1 - x^2)y'' - xy = 2$.

2. $2xy'y'' = y'^2 - 1$.

3. $x^3y'' + x^2y = 1$.

4. $y'' + y'\operatorname{tg} x = \sin 2x$.

5. $y''x\ln x = y'$.

6. $xy'' - y' = x^2e^x$.

7. $y''x\ln x = 2y'$.

8. $x^2y'' + xy' = 1$.

9. $y'' = -\frac{x}{y}$.

10. $xy'' = y'$.

11. $y'' = y' + x$.

12. $xy'' = y' + x^2$.

13. $xy'' = y'\ln\frac{y'}{x}$.

14. $xy'' + y' = \ln x$.

15. $y''\operatorname{tg} x = y' + 1$.

16. $y'' + 2xy'^2 = 0$.

17. $2xy'y''=y'^2+1$. **18.** $y''-\frac{y'}{x-1}=x(x-1)$.

19. $y'''+y''\operatorname{tg}x=\frac{1}{\cos x}$. **20.** $y''-2y'\operatorname{ctg}x=\sin^3 x$.

21. $y''+4y'=2x^2$. **22.** $xy''-y'=2x^2e^x$.

23. $x(y''+1)+y'=0$. **24.** $y''+4y'=\cos 2x$.

25. $y''+y'=\sin x$. **26.** $x^2y''=y'^2$.

27. $2xy''y'=y'^2-4$. **28.** $y'''x\ln x=y''$.

29. $y''\operatorname{ctg}x+y'=2$. **30.** $(1+x^2)y''=2xy$.

III. Решить задачу Коши для дифференциального уравнения, допускающего понижение порядка

1. $y''=y'e^y$, $y(0)=0, y'(0)=1$.

2. $y'^2+2yy''=0$, $y(0)=1, y'(0)=1$.

3. $yy''+y'^2=0$, $y(0)=1, y'(0)=1$.

4. $y''+2yy'^2=0$, $y(0)=2, y'(0)=\frac{1}{3}$.

5. $y''tgy=2y'^2$, $y(1)=\frac{\pi}{2}, y'(1)=2$.

6. $2yy''=y'^2$, $y(0)=1, y'(0)=1$.

7. $yy''-y'^2=y^4$, $y(0)=1, y'(0)=1$.

8. $y''=-\frac{1}{2y^3}$, $y(0)=\frac{1}{2}, y'(0)=\sqrt{2}$.

9. $y''=1-y'^2$, $y(0)=0, y'(0)=0$.

10. $y''^2=y'$, $y(0)=\frac{2}{3}, y'(0)=1$.

11. $2yy''-y'^2=1$, $y(0)=2, y'(0)=1$.

12. $y''=2-y$, $y(0)=2, y'(0)=2$.

13. $y''=\frac{1}{y^3}$, $y(0)=1, y'(0)=0$.

14. $yy''-2y'^2=0$, $y(0)=1, y'(0)=2$.

15. $y''=y'+y'^2$, $y(0)=0, y'(0)=1$.

16. $y''+\frac{2}{1-y}y'^2=0$, $y(0)=0, y'(0)=1$.

17. $y''(1+y)=5y'^2$, $y(0)=0, y'(0)=1$.

18. $y''(2y+3)-2y'^2=0$, $y(0)=0, y'(0)=3$.

19. $4y''^2 = 1 + y'^2$, $y(0) = 1, y'(0) = 0$.
20. $2y'^2 = (y-1)y''$, $y(0) = 2, y'(0) = 2$.
21. $1 + y'^2 = yy'$, $y(0) = 1, y'(0) = 0$.
22. $y'' + yy'^3 = 0$, $y(0) = 1, y'(0) = 2$.
23. $yy'' - y'^2 = 0$, $y(0) = 1, y'(0) = 2$.
24. $yy'' - y'^2 = y^2 \ln y$, $y(0) = 1, y'(0) = 1$.
25. $y(1 - \ln y)y'' + (1 + \ln y)y'^2 = 0$, $y(0) = 1, y'(0) = 1$.
26. $y''(1 + y) = y'^2 + y'$, $y(0) = 2, y'(0) = 2$.
27. $y'' = \dfrac{y'}{\sqrt{y}}$, $y(0) = 1, y'(0) = 2$.
28. $y'' = y(1 + y'^2)$, $y(0) = 0, y'(0) = 0$.
29. $yy'' - 2yy'\ln y = y'^2$, $y(0) = 1, y'(0) = 1$.
30. $y'' = \dfrac{1}{\sqrt{y}}$, $y(0) = 0, y'(0) = 0$.

3.3. Линейные однородные дифференциальные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами

Уравнения вида

$$y'' + a_1(x) \cdot y' + a_2(x) \cdot y = 0, \qquad (3.3.1)$$

где $a_1(x)$, $a_2(x)$ – функции, ***называются линейными однородными дифференциальными уравнениями (ЛОДУ) второго порядка***;

Если a_1, a_2 – числа, то уравнение (3.3.1) называется ***линейным однородным дифференциальным уравнением второго порядка с постоянными коэффициентами.***

Рассмотрим основное свойство решения ЛОДУ второго порядка.

Теорема 1. Если $y_1 = y_1(x)$, $y_2 = y_2(x)$ – решения уравнения (3.3.1), C_1, C_2 – произвольные постоянные, то $C_1 \cdot y_1 + C_2 \cdot y_2$ есть также решения этого уравнения.

Функции $y_1 = y_1(x)$ и $y_2 = y_2(x)$ называются линейно независимыми на интервале $(a; b)$, если равенство

$$\alpha_1 \cdot y_1 + \alpha_2 \cdot y_2 = 0, \qquad (3.3.2)$$

где $\alpha_1, \alpha_2 \in R$, выполняется тогда и только тогда, когда $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$.

Если хотя бы одно из чисел или отлично от нуля и выполняется равенство (3.3.2), то функции и называются линейно зависимыми на интервале $(a; b)$.

Очевидно, что функции y_1 и y_2 линейно зависимы тогда и только тогда, когда их отношение есть постоянная величина, т.е. для всех $x \in (a; b)$ выполняется равенство $\dfrac{y_1}{y_2} = \lambda$ или $y_1 = \lambda y_2, \lambda = \mathrm{const}$.

Например,

функции $y_1 = 3e^x$ и $y_2 = e^x$ линейно зависимы для всех x: $\dfrac{y_1}{y_2} = 3 = \mathrm{const}$;

Функции $y_1 = 3e^x$ и $y_3 = e^{2x}$ линейно независимы для всех x: $\dfrac{y_1}{y_2} = \dfrac{3e^x}{e^{2x}} = 3e^{-x} \neq \mathrm{const}$.

Средством изучения линейно зависимости системы функций является так называемый определитель Вронского, или вронскиан (Ю.Вронский – польский математик).

Для двух дифференцируемых функций $y_1 = y_1(x)$ и $y_2 = y_2(x)$ вронскиан имеет вид

$$W(x) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}.$$

<u>Теорема 2.</u> Если дифференцируемые функции $y_1(x)$ и $y_2(x)$ линейно зависимы на интервале $(a; b)$, то определитель Вронского, оставленные для этих функций на интервале $(a; b)$, тождественно равен нулю.

<u>Теорема 3.</u> Если функции $y_1(x)$ и $y_2(x)$ – линейно независимые решения уравнения (3.3.1) на интервале $(a; b)$, то определитель Вронского на этом интервале нигде не обращается в нуль.

Следовательно, вронскиан не равен нулю ни в одной точке интервала определитель Вронского тогда и только тогда, когда частные решения ЛОДУ линейно независимы на этом интервале.

Совокупность любых двух линейно независимых на интервале $(a; b)$ частных решений $y_1(x)$ и $y_2(x)$ ЛОДУ второго порядка определяет ***фундаментальную систему решений*** этого решения: любое произвольное решение может быть получено как комбинация $y = \alpha_1 \cdot y_1(x) + \alpha_2 \cdot y_2(x)$.

Например, частные решения $y_1 = \sin x$, $y_2 = \cos x$, $y_3 = 2\sin x$ и $y_4 = 5\cos x$ (их бесчисленное множество) уравнения $y'' + y = 0$ образуют фундаментальную систему решений; решения же $y_5 = 0$ и $y_6 = \cos x$ не образуют фундаментальную систему решений этого уравнения.

<u>Теорема 4.</u> (о структуре общего решения линейного однородного уравнения второго порядка). Если y_1 и y_2 – два линейно независимых решения уравнения (3.3.1), то

$$y = C_1 \cdot y_1 + C_2 \cdot y_2, \tag{3.3.3}$$

где C_1, C_2 – произвольные постоянные, есть его общее решение.

Уравнение $\lambda^2 + a_1\lambda + a_2 = 0$ называется ***характеристическим*** для уравнения $y'' + a_1 \cdot y' + a_2 \cdot y = 0$.

<u>Теорема 5.</u> Общее решение уравнения $y'' + a_1 \cdot y' + a_2 \cdot y = 0$ может быть записано следующим образом:

1. Если корни характеристического уравнения действительные и различные ($\lambda_1 \neq \lambda_2$), то его общее решение имеет вид

$$y = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x}.$$

2. Если корни характеристического уравнения действительные и равные ($\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$), то его общее решение имеет вид

$$y = C_1 e^{\lambda x} + C_2 x e^{\lambda x} = e^{\lambda x}(C_1 + C_2 x).$$

3. Если корни характеристического уравнения комплексно-сопряженные ($\lambda_{1,2} = \alpha \pm \beta i$), то его общее решение имеет вид

$$y = C_1 e^{\alpha x}\cos\beta x + C_2 e^{\alpha x}\sin\beta x = e^{\alpha x}(C_1\cos\beta x + C_2\sin\beta x).$$

Замечание. Изложенная теория ЛОДУ второго порядка полностью переносится и на ЛОДУ *n*-го порядка.

Пример 1. Решить уравнение $y'' + y' - 2y = 0$.

Решение. Составляем характеристическое уравнение

$$\lambda^2 + \lambda - 2 = 0.$$

Корни характеристического уравнения $D = 1 + 8 = 9 > 0,\ \lambda_1 = 1, \lambda_2 = -2$ – действительные и различные.

Этим корням соответствует фундаментальная система решений:

$$y_1 = e^x,\quad y_2 = e^{-2x}.$$

Общее решение уравнения имеет вид $y = C_1 e^x + C_2 e^{-2x}$.

Пример 2. Решить уравнение $y'' - 2y' + y = 0$.

Решение. Составляем характеристическое уравнение

$$\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0.$$

Корни характеристического уравнения $D = 4 - 4 = 0$, $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$ – действительные и равные.

Этим корням соответствует фундаментальная система решений:

$$y_1 = e^x, \quad y_2 = x e^x.$$

Общее решение уравнения имеет вид $y = C_1 e^x + C_2 x e^x = e^x (C_1 + C_2 x)$.

Пример 3. Решить уравнение $y'' - 4y' + 13y = 0$.

Решение. Составляем характеристическое уравнение

$$\lambda^2 - 4\lambda + 13 = 0.$$

Корни характеристического уравнения $D = 16 - 52 = -36 < 0$,

$\alpha = -\frac{p}{2}, \beta = \sqrt{q - \frac{p^2}{4}}$, $\lambda_{1,2} = 2 \pm 3i$ – комплексные.

Этим корням соответствует фундаментальная система решений:

$$y_1 = e^{2x} \cos 3x, \quad y_2 = e^{2x} \sin 3x.$$

Общее решение уравнения имеет вид

$$y = C_1 e^{2x} \cos 3x + C_2 e^{2x} \sin 3x = e^{2x} (C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x).$$

Пример 4. Решить уравнение $y'' - 8y' + 7y = 0$, если $y(0) = 3, y'(0) = 1$.

Решение. Составляем характеристическое уравнение

$$\lambda^2 - 8\lambda + 7 = 0.$$

Корни характеристического уравнения $D = 64 - 28 = 36 > 0$, $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 7$ – действительные и различные.

Общее решение уравнения имеет вид $y = C_1 e^x + C_2 e^{7x}$.

Для нахождения частного решения находим производную:

$$y' = C_1 e^x + 7C_2 e^{7x}.$$

Используя начальные условия, составляем систему:

$$\begin{cases} 3 = C_1 + C_2, \\ 1 = C_1 + 7C_2 \end{cases} \Rightarrow C_1 = 3 - C_2, \quad 3 - C_2 + 7C_2 = 0, \quad 6C_2 = -2,$$

$$C_2 = -\frac{1}{3}, \quad C_1 = 3 + \frac{1}{3} = \frac{10}{3}.$$

Тогда частное решение имеет вид:

$$y = -\frac{1}{3} e^x + \frac{10}{3} e^{7x}.$$

Пример 5. Решить уравнение $y''' - 2y'' - 3y' = 0$.

Решение. Составляем характеристическое уравнение

$$\lambda^3 - 2\lambda^2 - 3\lambda = 0.$$

Корни характеристического уравнения:

$\lambda(\lambda^2-2\lambda-3)=0$, $\lambda_1=0$, $D=4+12=16>0, \lambda_2=3, \lambda_3=-1$ – действительные и различные.

Общее решение уравнения имеет вид: $y=C_1+C_2e^{3x}+C_3e^{-x}$.

Пример 6. Решить уравнение $y^{V}-2y^{IV}+2y'''-4y''+y'-2y=0$.

Решение. Составляем характеристическое уравнение

$$\lambda^5-2\lambda^4+2\lambda^3-4\lambda^2+\lambda-2=0, \text{ или}$$

$$(\lambda-2)(\lambda^2+1)^2=0.$$

Корни характеристического уравнения: $\lambda_1=2$ – действительный, $\lambda_{2,3}=\pm i$, $\lambda_{4,5}=\pm i$ – мнимые.

Общее решение уравнения имеет вид:

$$y=C_1e^{2x}+C_2\cos x+C_3\sin x+C_4 x\cos x+C_5 x\sin x.$$

Задачи для самостоятельного решения

В задачах 120 – 158 решить дифференциальное уравнение

120. $y''+4y'=0$.

121. $y''-2y'-3y=0$.

122. $9y''+12y'+4y=0$.

123. $4y''+8y'+5y=0$.

124. $y''+y'-2y=0$.

125. $y''-y=0$.

126. $y''-4y'+3y=0$.

127. $y''-5y'+4y=0$.

128. $y''-6y'+9y=0$.

129. $y''-3y'+2y=0$.

130. $y''+8y'+25y=0$.

131. $y''-4y'+4y=0$.

132. $y''-4y'+3y=0$.

133. $y''-2y'+2y=0$.

134. $y''-4y=0$.

135. $y''+4y'=0$.

136. $y''-y=0$.

137. $y''+2y'+5y=0$.

138. $y''-2y'+y=0$.

139. $y''+3y'+2y=0$

140. $4y''-8y'+5y=0$.

141. $y''+2y'+y=0$.

142. $y''+6y'+13y=0$.

143. $3y''-2y'-8y=0$.

144. $y''-4y'+3y=0$, $y(0)=6$, $y'(0)=10$.

145. $y''+4y'+29y=0$, $y(0)=0$, $y'(0)=15$.

146. $4y''+4y'+y=0$, $y(0)=2$, $y'(0)=0$.

147. $y''-2y'+2y=0$, $y(0)=0$, $y'(0)=1$.

148. $y''-2y'+3y=0$, $y(0)=1$, $y'(0)=3$.

149. $y'''+6y''+11y'+6y=0$.

150. $y'''-8y=0$.

151. $2y'''+3y''+y'=0$

152. $y^{IV}-13y''+36y=0$.

153. $y^{IV} - 8y'' + 16y = 0$. **154.** $y^{IV} - y = 0$.

155. $2y^{IV} + 2y''' + y'' = 0$. **156.** $y^{VI} + 2y^{V} + y^{IV} = 0$.

157. $y^{IV} + 2y''' + 5y'' - 2y' - 5y = 0$.

158. $y^{V} + 4y^{IV} + 5y''' - 2y' + 4y = 0$.

Индивидуальные задания

I. Найти общее решение линейного однородного дифференциального уравнения

1. а) $y'' + 4y = 0$; б) $y'' - 10y' + 25y = 0$; в) $y'' + 3y' + 2y = 0$.

2. а) $y'' - y' - 2y = 0$; б) $y'' + 9y = 0$; в) $y'' + 4y' + 4y = 0$.

3. а) $y'' - 4y' = 0$; б) $y'' - 4y' + 13y = 0$; в) $y'' - 3y' + 2y = 0$.

4. а) $y'' - 5y' + 6y = 0$; б) $y'' + 3y' = 0$; в) $y'' + 2y' + 5y = 0$.

5. а) $y'' - 2y' + 10y = 0$; б) $y'' + y' - 2y = 0$; в) $y'' - 2y' = 0$.

6. а) $y'' - 4y = 0$; б) $y'' + 2y' + 17y = 0$; в) $y'' - y' - 12y = 0$.

7. а) $y'' + y' - 6y = 0$; б) $y'' + 9y' = 0$; в) $y'' - 4y' + 20y = 0$.

8. а) $y'' - 49y = 0$; б) $y'' - 4y' + 5y = 0$; в) $y'' + 2y' - 3y = 0$.

9. а) $y'' + 7y' = 0$; б) $y'' - 5y' + 4y = 0$; в) $y'' + 16y = 0$.

10. а) $y'' - 6y' + 8y = 0$; б) $y'' + 4y' + 5y = 0$; в) $y'' + 5y' = 0$.

11. а) $4y'' - 8y' + 3y = 0$; б) $y'' - 3y' = 0$; в) $y'' - 2y' + 10y = 0$.

12. а) $y'' + 4y' + 20y = 0$; б) $y'' - 3y' - 10y = 0$; в) $y'' - 16y = 0$.

13. а) $9y'' + 6y' + y = 0$; б) $y'' - 4y' - 21y = 0$; в) $y'' + y = 0$.

14. а) $2y'' + 3y' + 4y = 0$; б) $y'' + 4y' + 8y = 0$; в) $y'' - 6y' + 9y = 0$.

15. а) $y'' - 10y' + 21y = 0$; б) $y'' - 2y' + 2y = 0$; в) $y'' + 4y' = 0$.

16. а) $y'' + 6y' = 0$; б) $y'' + 10y' + 29y = 0$; в) $y'' - 8y' + 7y = 0$.

17. а) $y'' + 25y = 0$; б) $y'' + 6y' + 9y = 0$; в) $y'' + 2y' + 2y = 0$.

18. а) $y'' - 3y' = 0$; б) $y'' - 7y' - 8y = 0$; в) $y'' + 4y' + 13y = 0$.

19. а) $y'' - 3y' - 4y = 0$; б) $y'' + 6y' + 13y = 0$; в) $y'' + 2y' = 0$.

20. а) $2y'' + 25y' = 0$; б) $y'' - 10y' + 16y = 0$; в) $y'' - 8y' + 16y = 0$.

21. а) $y'' - 3y' - 18y = 0$; б) $y'' - 6y' = 0$; в) $y'' + 2y' + 5y = 0$.

22. а) $y'' - 6y' + 13y = 0$; б) $y'' - 2y' - 15y = 0$; в) $y'' - 8y' = 0$.

23. а) $y'' + 2y' + y = 0$; б) $y'' + 6y' + 25y = 0$; в) $y'' - 4y' = 0$.

24. а) $y'' + 10y' = 0$; б) $y'' - 6y' + 8y = 0$; в) $4y'' + 4y' + y = 0$.

25. а) $y'' + 5y = 0$; б) $9y'' - 6y' + y = 0$; в) $y'' + 6y' + 8y = 0$.

26. а) $y'' + 6y' + 10y = 0$; б) $y'' - 4y' + 4y = 0$; в) $y'' - 5y' + 4y = 0$.

27. а) $y'' - y = 0$; б) $4y'' + 8y' - 5y = 0$; в) $y'' - 6y' + 10y = 0$.

28. а) $y'' + 8y' + 25y = 0$; б) $y'' + 9y' = 0$; в) $9y'' + 3y' - 2y = 0$.

29. а) $6y'' + 7y' - 3y = 0$; б) $y'' + 16y = 0$; в) $4y'' - 4y' + y = 0$.

30. а) $9y'' - 6y' + y = 0$; б) $y'' + 12y' + 37y = 0$; в) $y'' - 2y' = 0$.

II. Найти частное решение линейного однородного дифференциального уравнения.

1. $y''' - 7y'' + 6y' = 0$, $y(0) = 0, y'(0) = 0, y''(0) = 30$.

2. $y^{V} - 9y''' = 0$, $y(0) = 1, y'(0) = -1, y''(0) = 0$.

3. $y''' - y'' = 0$, $y(0) = 0, y'(0) = 0, y''(0) = -1$.

4. $y''' - 4y' = 0$, $y(0) = 0, y'(0) = 2, y''(0) = 4$.

5. $y''' + y' = 0$, $y(0) = 0, y'(0) = 1, y''(0) = 1$.

6. $y''' - y' = 0$, $y(0) = 0, y'(0) = 2, y''(0) = 4$.

7. $y^{IV} + 2y''' - 2y' - y = 0$, $y(0) = 0, y'(0) = 0, y''(0) = 0, y'''(0) = 8$.

8. $y''' + y'' - 5y' + 3y = 0$, $y(0) = 0, y'(0) = 1, y''(0) = -14$.

9. $y''' + y'' = 0$, $y(0) = 0, y'(0) = 1, y''(0) = -1$.

10. $y''' - 5y'' + 8y' - 4y = 0$, $y(0) = 1, y'(0) = -1, y''(0) = 0$.

11. $y''' + 3y'' + 2y' = 0$, $y(0) = 0, y'(0) = 0, y''(0) = 2$.

12. $y''' + 3y'' + 3y' + y = 0$, $y(0) = -1, y'(0) = 0, y''(0) = 1$.

13. $y''' - 2y'' + 9y' - 18y = 0$, $y(0) = -2{,}5, y'(0) = 0, y''(0) = 0$.

14. $y''' + 9y' = 0$, $y(0) = 0, y'(0) = 9, y''(0) = -18$.

15. $y''' - 3y'' + 12y' = 0$, $y(0) = 0, y'(0) = 1, y''(0) = 133$.

16. $y^{IV} - 5y'' + 4y = 0$, $y(0) = -2, y'(0) = 1, y''(0) = 2, y'''(0) = 0$.

17. $y^{IV} - 10y'' + 9y = 0$, $y(0) = 0, y'(0) = 0, y''(0) = 8, y'''(0) = 24$.

18. $y''' - y'' + y' - y = 0$, $y(0) = 0, y'(0) = 1, y''(0) = 0$.

19. $y''' - 3y'' + 3y' - y = 0$, $y(0) = 0, y'(0) = 0, y''(0) = 4$.

20. $y''' - y'' + 4y' - 4y = 0$, $y(0) = -1, y'(0) = 0, y''(0) = -6$.

21. $y^{IV} - 2y''' + y'' = 0$, $y(0) = -2, y'(0) = 0, y''(0) = 1, y'''(0) = 2$.

22. $y^{IV} - y = 0$, $y(0) = 0, y'(0) = 0, y''(0) = 0, y'''(0) = -4$.

23. $y^{IV} - 16y = 0$, $y(0) = 0, y'(0) = 0, y''(0) = 0, y'''(0) = -8$.

24. $y''' + y'' - 4y' - 4 = 0$, $y(0) = 0, y'(0) = 0, y''(0) = 12$.

25. $y''' + 2y'' + 9y' + 18y = 0$, $y(0) = 1, y'(0) = -3, y''(0) = -9$.

26. $y^{V} - 6y^{IV} + 9y''' = 0$, $y(0) = y'(0) = y''(0) = y'''(0) = 0, y^{IV}(0) = 27$.

27. $y''' + 2y'' + y' = 0$, $y(0) = 0, y'(0) = 2, y''(0) = -3$.

28. $y''' - y'' - y' + y = 0$, $y(0) = -1, y'(0) = 0, y''(0) = 1$.

29. $y^{IV} + 5y'' + 4y = 0$, $y(0) = 1, y'(0) = 4, y''(0) = -1, y'''(0) = -16$.

30. $y^{IV} + 10y'' + 9y = 0$, $y(0) = 1, y'(0) = 3, y''(0) = -9, y'''(0) = -27$.

3.4. Линейные неоднородные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами

Уравнения вида

$$y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + a_2(x)y^{(n-2)} + ... + a_n(x)y = f(x), \qquad (3.4.1)$$

где $a_1(x), a_2(x),..., a_n(x), f(x)$ – непрерывные функции от x на интервале ($a;b$) (или постоянные числа), называются ***линейными неоднородными дифференциальными уравнениями (ЛНДУ) n-го порядка***.

Соответствующие им линейные однородные уравнения имеют вид

$$y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + a_2(x)y^{(n-2)} + ... + a_n(x)y = 0. \qquad (3.4.2)$$

Теорема (о структуре общего решения ЛНДУ n-го порядка)

Общее решение ЛНДУ n-го порядка равно сумме какого-либо частного решения y^* линейного неоднородного уравнения и общего решения $\overline{y}$ соответствующего ему линейного однородного уравнения, т.е.

$$y = y^* + \overline{y}.$$

План решения ЛНДУ *n*-го порядка со специальной правой частью

Пусть дано уравнение

$$y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + a_2(x)y^{(n-2)} + ... + a_n(x)y = f(x)$$

1. Найти $\overline{y}$ – общее решение линейного однородного дифференциального уравнения

$$y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + a_2(x)y^{(n-2)} + ... + a_n(x)y = 0.$$

2. Найти y^* – частное решение ЛНДУ по специальному виду его правой части $f(x)$. При этом использовать **теорему**: если

$$f(x) = e^{\alpha x}(P_m(x)\cos\beta x + Q_n(x)\sin\beta x),$$

где $P_m(x)$ – многочлен степени m; $Q_n(x)$ – многочлен степени n,

то $$y^* = x^s e^{\alpha x}(M_r(x)\cos\beta x + N_r(x)\sin\beta x),$$

где $M_r(x), N_r(x)$ – многочлены степени r, r=max(m,n),

Значение r	Общий вид многочленов $M_r(x), N_r(x)$
r=0	A
r=1	$Ax+B$
r=2	Ax^2+Bx+C
r=3	Ax^3+Bx^2+Cx+D
----------------------------	------------------------
r=l	$A_1x^l+A_2x^{l-1}+A_3x^{l-2}+\ldots+A_{l+1}$

s – число корней характеристического уравнения, равных $(\alpha+\beta i)$.

3. Найти коэффициенты многочленов $M_r(x)$ и $N_r(x)$ методом неопределенных коэффициентов, предварительно подставив y^* и ее производные в ЛНДУ.

4. Записать общее решение линейного неоднородного дифференциального уравнения в виде

$$y = y^* + \bar{y}.$$

Соответствие вида частного решение виду правой части ЛНДУ

Вид правой части	$\alpha+\beta i$	Вид частного решения
1. $f(x)=P_n(x)$, $P_n(x)$ – многочлен степени n от x.	а) $\alpha+\beta i=0$ – не корень характеристического уравнения б) $\alpha+\beta i=0$ – корень характеристического уравнения кратности s.	а) $y^*=Q_n(x)$, $Q_n(x)$ – многочлен той же степени, что и $P_n(x)$. б) $y^*=x^sQ_n(x)$, $Q_n(x)$ – многочлен той же степени, что и $P_n(x)$.
2. $f(x)=P_n(x)e^{\alpha x}$, $P_n(x)$ – многочлен степени n от x.	а) α – не корень характеристического уравнения б) α – корень характеристического уравнения кратности s.	а) $y^*=Q_n(x)e^{\alpha x}$, $Q_n(x)$ – многочлен той же степени, что и $P_n(x)$. б) $y^*=x^sQ_n(x)e^{\alpha x}$, $Q_n(x)$ – многочлен той же степени, что и $P_n(x)$.
3. $f(x)=C\cos\beta x+D\sin\beta x$, *C*,*D* – постоянные числа	а) βi – не корень характеристического уравнения б) βi – корень характеристического уравнения кратности s.	а) $y^*=A\cos\beta x+B\sin\beta x$, *A* и *B* – постоянные неопределенные коэффициенты б) $y^*=x^s(A\cos\beta x+B\sin\beta x)$ *A* и *B* – постоянные неопределенные коэффициенты
4. $f(x)=(P_m(x)\cos\beta x+Q_n(x)\sin\beta x)$ $P_m(x)$ – многочлен степени *m*, $Q_n(x)$ – многочлен степени *n*	а) $\alpha+\beta i$ – не корень характеристического уравнения б) $\alpha+\beta i$ – корень характеристического уравнения кратности *s*.	а) $y^*=e^{\alpha x}(M_r(x)\cos\beta x+$ $N_r(x)\sin\beta x)$ $M_r(x), N_r(x)$ – многочлены степени *r*, *r*=max(*m*,*n*) б) $y^*=x^se^{\alpha x}(M_r(x)\cos\beta x+$ $N_r(x)\sin\beta x)$ $M_r(x), N_r(x)$ – многочлены степени *r*, *r*=max(*m*,*n*)

Пример 1. Решить уравнение $y'' - 2y' + y = x - 4$.

Решение. Найдем общее решение $\overline{y}$ ЛОДУ: $y'' - 2y' + y = 0$.

Характеристическое уравнение $\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0$, или $(\lambda - 1)^2 = 0$, $\lambda_{1,2} = 1$.

Общее решение ЛОДУ: $\overline{y} = C_1 e^x + C_2 x e^x$.

Найдем частное решение исходного уравнения:

$$f(x) = x - 4.$$
$$\alpha = 0, \beta = 0,$$
$$\alpha + \beta i = 0, \quad \Rightarrow y^* = Ax + B,$$
$$s = 0, r = 1.$$

где A и B – неопределенные коэффициенты.

Найдем A и B.

$(y^*)' = A$, $(y^*)'' = 0$.

Подставив $y^*, (y^*)', (y^*)''$ в исходное уравнение, получим: $-2A + Ax + B = x - 4$.

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x, находим коэффициенты A и B:

$x: \quad A = 1,$

$x^0: \quad -2A + B = -4 \Rightarrow B = -2.$

Поэтому частное решение данного уравнения имеет вид

$$y^* = x - 2.$$

Следовательно, $y = \overline{y} + y^* = C_1 e^x + C_2 x e^x + x - 2$ – общее решение уравнения.

Пример 2. Решить уравнение $y'' - 6y' + 8y = e^{2x}$.

Решение. Найдем общее решение $\overline{y}$ ЛОДУ: $y'' - 6y' + 8y = 0$.

Характеристическое уравнение $\lambda^2 - 6\lambda + 8 = 0$, $D = 36 - 32 = 4$, $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 4$.

Общее решение ЛОДУ: $\overline{y} = C_1 e^{2x} + C_2 e^{4x}$.

Найдем частное решение исходного уравнения:

$f(x) = e^{2x}$.

$\alpha = 2, \beta = 0,$

$\alpha + \beta i = 2, \quad \Rightarrow y^* = Axe^{2x}$, где A – неопределенный коэффициент.

$s = 1, r = 0.$

Найдем A.

$(y^*)' = Ae^{2x} + 2Axe^{2x}$,

$(y^*)'' = 2Ae^{2x} + 2Ae^{2x} + 4Axe^{2x} = 4Ae^{2x} + 4Axe^{2x}$.

Подставив $y^*, (y^*)', (y^*)''$ в исходное уравнение, получим:

$4Ae^{2x} + 4Axe^{2x} - 6(Ae^{2x} + 2Axe^{2x}) + 8Axe^{2x} = e^{2x}$,

$-2Ae^{2x} = e^{2x} \Rightarrow A = -\dfrac{1}{2}$.

Поэтому частное решение данного уравнения имеет вид

$$y^* = -\frac{1}{2}xe^{2x}.$$

Следовательно, $y = \overline{y} + y^* = C_1e^{2x} + C_2e^{4x} - \dfrac{1}{2}xe^{2x}$ – общее решение уравнения.

Пример 3. Решить уравнение $y'' - 4y' + 13y = 40\cos 3x$.

Решение. Найдем общее решение $\overline{y}$ ЛОДУ: $y'' - 4y' + 13y = 0$.

Характеристическое уравнение $\lambda^2 - 4\lambda + 13 = 0$, $D = 16 - 52 = -36$, $\lambda_1 = 2 + 3i$, $\lambda_2 = 2 - 3i$.

Общее решение ЛОДУ: $\overline{y} = C_1e^{2x}\cos 3x + C_2e^{2x}\sin 3x$.

Найдем частное решение исходного уравнения:

$f(x) = 40\cos 3x$.

$\alpha = 0, \beta = 3,$

$\alpha + \beta i = 3i,$

$s = 0, r = 0.$

$\Rightarrow y^* = A\cos 3x + B\sin 3x$, где A и B – неопределенные коэффициенты.

Найдем A и B.

$(y^*)' = -3A\sin 3x + 3B\cos 3x$,

$(y^*)'' = -9A\cos 3x - 9B\sin 3x$.

Подставив $y^*, (y^*)', (y^*)''$ в исходное уравнение, получим:

$$-9A\cos 3x - 9B\sin 3x - 4(-3A\sin 3x + 3B\cos 3x) +$$
$$+13(A\cos 3x + B\sin 3x) = 40\cos 3x$$

или $(-9A - 12B + 13A)\cos 3x + (-9B + 12A + 13B)\sin 3x = 40\cos 3x$.

Отсюда имеем:

$\cos 3x: \quad 4A - 12B = 40,$

$\sin 3x: \quad 4B + 12A = 0 \Rightarrow B = -3A.$

$4A + 36A = 40 \Rightarrow A = 1, B = -3$

Поэтому частное решение данного уравнения имеет вид

$$y^* = \cos 3x - 3\sin 3x.$$

Следовательно, $y = \overline{y} + y^* = C_1e^{2x}\cos x + C_2e^{2x}\sin 3x + \cos 3x - 3\sin 3x$ – общее решение уравнения.

Пример 4. Решить уравнение $y'' - 5y' + 4y = 4x^2 e^{2x}$.

Решение. Найдем общее решение $\overline{y}$ ЛОДУ: $y'' - 5y' + 4y = 0$.

Характеристическое уравнение $\lambda^2 - 5\lambda + 4 = 0$, $D = 25 - 16 = 9$, $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 4$.

Общее решение ЛОДУ: $\overline{y} = C_1 e^x + C_2 e^{4x}$.

Найдем частное решение исходного уравнения:

$$f(x) = 4x^2 e^{2x}.$$

$$\alpha = 2, \beta = 0,$$

$$\alpha + \beta i = 2,$$

$$s = 0, r = 2.$$

$$\Rightarrow y^* = e^{2x}\left(Ax^2 + Bx + C\right),$$

где A, B, C – неопределенные коэффициенты.

Найдем A, B, C.

$$(y^*)' = 2e^{2x}\left(Ax^2 + Bx + C\right) + e^{2x}(2Ax + B),$$

$$(y^*)'' = 4e^{2x}\left(Ax^2 + Bx + C\right) + 2e^{2x}(2Ax + B) + 2e^{2x}(2Ax + B) + e^{2x} 2A =$$

$$= 4e^{2x}\left(Ax^2 + Bx + C\right) + 4e^{2x}(2Ax + B) + 2Ae^{2x}.$$

Подставив $y^*, (y^*)', (y^*)''$ в исходное уравнение, получим:

$$4e^{2x}\left(Ax^2 + Bx + C\right) + 4e^{2x}(2Ax + B) + 2Ae^{2x} - 10e^{2x}\left(Ax^2 + Bx + C\right) -$$
$$- 5e^{2x}(2Ax + B) + 4e^{2x}\left(Ax^2 + Bx + C\right) = 4x^2 e^{2x}, \text{ или}$$

$$-2\left(Ax^2 + Bx + C\right) - (2Ax + B) + 2A = 4x^2.$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x, находим коэффициенты A, B, C:

$$\begin{array}{c\|l} x^2 & -2A = 4 \Rightarrow A = -2, \\ x & -2B - 2A = 0, B = -A \Rightarrow B = 2, \\ x^0 & -2C - B + 2A = 0, C = -(B - 2A)/2, C = -3. \end{array}$$

Поэтому частное решение данного уравнения имеет вид

$$y^* = \left(-2x^2 + 2x - 3\right)e^{2x}.$$

Следовательно,

$y = \overline{y} + y^* = C_1 e^x + C_2 e^{4x} + \left(-2x^2 + 2x - 3\right)e^{2x}$ – общее решение уравнения.

Пример 5. Решить уравнение $y'' - 6y' + 9y = 25e^x \sin x$.

Решение. Найдем общее решение $\overline{y}$ ЛОДУ: $y'' - 6y' + 9y = 0$.

Характеристическое уравнение $\lambda^2 - 6\lambda + 9 = 0$, $(\lambda - 3)^2 = 0$, $\lambda_1 = \lambda_2 = 3$.

Общее решение ЛОДУ: $\overline{y} = C_1 e^{3x} + C_2\, x e^{3x}$.

Найдем частное решение исходного уравнения:

$$f(x) = 25e^x \sin x.$$

$$\begin{aligned} &\alpha = 1, \beta = 1, \\ &\alpha + \beta i = 1 + i, \\ &s = 0, r = 0. \end{aligned}$$

$$\Rightarrow y^* = e^x (A\cos x + B\sin x),$$

где A и B – неопределенные коэффициенты.

Найдем A и B.

$$\begin{aligned}(y^*)' &= e^x (A\cos x + B\sin x) + e^x(-A\sin x + B\cos x) = \\ &= e^x(\cos x \cdot (A + B) + \sin x \cdot (B - A)),\end{aligned}$$

$$(y^*)'' = e^x(\cos x \cdot (A + B) + \sin x \cdot (B - A)) + e^x(-\sin x \cdot (A + B) + \cos x \cdot (B - A)).$$

Подставим $y^*, (y^*)', (y^*)''$ в исходное уравнение и, сокращая обе части уравнения на e^x, получим:

$$(3A - 4B)\cos x + (4A + 3B)\sin x = 25\sin x.$$

Отсюда имеем:

$$\begin{array}{r||l} \cos x & 3A - 4B = 0 \Rightarrow A = (4B)/3, \\ \sin x & 4A + 3B = 25 \Rightarrow B = 3,\ A = 4. \end{array}$$

Поэтому частное решение данного уравнения имеет вид

$$y^* = e^x(4\cos x + 3\sin x).$$

Следовательно,

$y = \overline{y} + y^* = C_1 e^{3x} + C_2 x e^{3x} + e^x(4\cos x + 3\sin x)$ – общее решение уравнения.

Пример 6. Найти частное решение уравнения $y'' + y = 4\cos x$, удовлетворяющее начальным условиям $y(0) = 3$, $y'(0) = 1$.

Решение. Найдем общее решение $\overline{y}$ ЛОДУ: $y'' + y = 0$.

Характеристическое уравнение $\lambda^2 + 1 = 0$, $\lambda_1 = i$, $\lambda_2 = -i$.

Общее решение ЛОДУ: $\overline{y} = C_1 \cos x + C_2 \sin x$.

Найдем частное решение исходного уравнения:

$$f(x) = 4\cos x.$$

$$\begin{aligned}&\alpha = 0, \beta = 1,\\&\alpha + \beta i = i,\\&s = 1, r = 0.\end{aligned}$$

$$\Rightarrow y^* = x\big(A\cos x + B\sin x\big),$$

где A и B – неопределенные коэффициенты.

Найдем A и B.

$$\left(y^*\right)' = A\cos x + B\sin x + x\cdot(-A\sin x + B\cos x),$$

$$\begin{aligned}\left(y^*\right)'' &= -A\sin x + B\cos x - A\sin x + B\cos x + x\cdot(-A\cos x - B\sin x) =\\ &= -2A\sin x + 2B\cos x - x\cdot(A\cos x + B\sin x).\end{aligned}$$

Подставив $y^*, (y^*)''$ в исходное уравнение, получим:

$$-2A\sin x + 2B\cos x - x\cdot(A\cos x + B\sin x) + x\cdot(A\cos x + B\sin x) = 4\cos x,$$

$$-2A\sin x + 2B\cos x = 4\cos x.$$

Отсюда имеем:

$$\begin{array}{r||l}\cos x & 2B = 4 \Rightarrow B = 2,\\ \sin x & -2A = 0 \Rightarrow A = 0.\end{array}$$

Общее решение имеет вид

$$y = \overline{y} + y^* = C_1 \cos x + C_2 \sin x + 2x\sin x.$$

Найдем частное решение.

$$y' = -C_1 \sin x + C_2 \cos x + 2\sin x + 2x\cos x.$$

Подставим в $y(x)$ и $y'(x)$ начальные условия $y(0) = 3$, $y'(0) = 1$.

$$C_1 \cos 0 + C_2 \sin 0 + 2\cdot 0\cdot \sin 0 = 3 \Rightarrow C_1 = 3,$$

$$-C_1 \sin 0 + C_2 \cos 0 + 2\sin 0 + 2\cdot 0\cdot \cos 0 = 1 \Rightarrow C_2 = 1.$$

Искомое частное решение

$$y = 3\cos x + \sin x + 2x\sin x.$$

Принцип наложения решений

Теорема о наложении решений.

Если y_1^* – решение уравнения

$$y^{(n)}+a_1(x)y^{(n-1)}+...+a_n(x)y=f_1(x),$$

а y_2^* – решение уравнения

$$y^{(n)}+a_1(x)y^{(n-1)}+...+a_n(x)y=f_2(x),$$

то сумма $y_1^*+y_2^*$ является решением уравнения

$$y^{(n)}+a_1(x)y^{(n-1)}+...+a_n(x)y=f_1(x)+f_2(x).$$

Пример 7. Решить уравнение $y''-2y'+y=\sin x+e^{-x}$.

Решение. Найдем общее решение $\overline{y}$ ЛОДУ: $y''-2y'+y=0$. Характеристическое уравнение $\lambda^2-2\lambda+1=0$, или $(\lambda-1)^2=0$, $\lambda_{1,2}=1$.

Общее решение ЛОДУ: $\overline{y}=C_1e^x+C_2xe^x$.

Найдем частное решение исходного уравнения:

$f_1(x)=\sin x$.	$f_2(x)=e^{-x}$.
$\alpha=0$,	$\alpha=-1$,
$\beta=1$,	$\beta=0$,
$\alpha+\beta i=i$,	$\alpha+\beta i=-1$,
$s=0$,	$s=0$,
$r=0$;	$r=0$;
$y_1^*=A\sin x+B\cos x$.	$y_2^*=Ce^{-x}$.

Определим коэффициенты *A* и *B*.

$$(y_1^*)'=A\cos x-B\sin x,\ (y_1^*)''=-A\sin x-B\cos x.$$

$$-A\sin x-B\cos x-2(A\cos x-B\sin x)+A\sin x+B\cos x=\sin x,$$

$$-A\sin x-B\cos x-2A\cos x+2B\sin x+A\sin x+B\cos x=\sin x,$$

$$-2A\cos x+2B\sin x=\sin x.$$

$$\cos x:-2A=0\Rightarrow A=0,$$

$$\sin x:2B=1\Rightarrow B=\frac{1}{2}.$$

$$y_1^*=\frac{1}{2}\cos x.$$

Определим коэффициент C.

$$(y_2^*)' = -Ce^{-x},\ (y_2^*)'' = Ce^{-x}.$$

$$Ce^{-x} + 2Ce^{-x} + Ce^{-x} = e^{-x}, \text{ или } 4Ce^{-x} = e^{-x},\ 4C = 1 \Rightarrow C = \frac{1}{4}.$$

$$y_2^* = \frac{1}{4}e^{-x}.$$

Общее решение ЛНДУ имеет вид

$$y = \overline{y} + y_1^* + y_2^* = C_1e^x + C_2xe^x + \frac{1}{2}\cos x + \frac{1}{4}e^{-x}.$$

Пример 8. Решить уравнение $y'' - y = 2e^x - x^2$.

Решение. Найдем общее решение $\overline{y}$ ЛОДУ: $y'' - y = 0$.

Характеристическое уравнение $\lambda^2 - 1 = 0$, или $(\lambda - 1)(\lambda + 1) = 0$, $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -1$.

Общее решение ЛОДУ: $\overline{y} = C_1x + C_2e^{-x}$.

Найдем частное решение исходного уравнения:

$f_1(x) = 2e^x$.	$f_2(x) = -x^2$.
$\alpha = 1$,	$\alpha = 0$,
$\beta = 1$,	$\beta = 0$,
$\alpha + \beta i = 1$,	$\alpha + \beta i = 0$,
$s = 1$,	$s = 0$,
$r = 0$;	$r = 2$;
$y_1^* = Axe^x$.	$y_2^* = Bx^2 + Cx + D$.

Определим коэффициент A.

$$(y_1^*)' = Ae^x + Axe^x;\ (y_1^*)'' = Ae^x + Ae^x + Axe^x = 2Ae^x + Axe^x.$$

$$2Ae^x + Axe^x - Axe^x = 2e^x, \text{ или } 2Ae^x = 2e^x,\ A = 1.$$

$$y_1^* = xe^x.$$

Определим коэффициенты B, C, D.

$(y_2^*)' = 2Bx + C$, $(y_2^*)'' = 2B$.

$2B - Bx^2 - Cx - D = -x^2$.

$x^2 : -B = -1 \Rightarrow B = 1$,

$x : -C = 0 \Rightarrow C = 0$,

$x^0 : 2B - D = 0 \Rightarrow D = 2B = 2$.

$y_2^* = x^2 + 2$.

Таким образом, общее решение ЛНДУ имеет вид

$$y=\overline{y}+y_1^*+y_2^*=C_1e^x+C_2e^{-x}+xe^x+x^2+2\,.$$

Метод вариации произвольных постоянных

Рассмотрим ЛНДУ

$$y^{(n)}+a_1(x)y^{(n-1)}+a_2(x)y^{(n-2)}+\ldots+a_n(x)y=f(x)\,. \qquad (3.4.3)$$

Его общим решением является функция $y=y^*+\overline{y}$.

Общее решение уравнения (3.4.3) можно найти, если известно общее решение $\overline{y}$ соответствующего однородного уравнения, методом вариации произвольных постоянных (метод Лагранжа), состоящем в следующем. Пусть $\overline{y}=c_1y_1(x)+c_2y_2(x)$ – общее решение линейного однородного уравнения, соответствующего уравнению (3.4.3).

Заменим в общем решении постоянные c_1 и c_2 неизвестными функциями $z_1(x)$ и $z_2(x)$ и подберем их так, чтобы функция

$$y^*=z_1(x)\,y_1(x)+z_2(x)\,y_2(x) \qquad (3.4.4)$$

была решением уравнения (3.4.3). Найдем производную

$$(y^*)'=z_1'(x)\,y_1(x)+z_1(x)\,y_1'(x)+z_2'(x)\,y_2(x)+z_2(x)\,y_2'(x)\,.$$

Подберем функции $z_1(x)$ и $z_2(x)$ так, чтобы

$$z_1'(x)\,y_1(x)+z_2'(x)\,y_2(x)=0\,. \qquad (3.4.5)$$

Тогда

$$(y^*)'=z_1(x)\,y_1'(x)+z_2(x)\,y_2'(x)\,,$$

$$(y^*)''=z_1'(x)\,y_1'(x)+z_1(x)\,y_1''(x)+z_2'(x)\,y_2'(x)+z_2(x)\,y_2''(x)\,.$$

Подставляя выражение для y^*, $(y^*)'$, $(y^*)''$ в уравнение (3.4.3), получим:

$$z_1'(x)\,y_1'(x)+z_1(x)\,y_1''(x)+z_2'(x)\,y_2'(x)+z_2(x)\,y_2''(x)+$$

$$+a_1\left[z_1(x)\,y_1'(x)+z_2(x)\,y_2'(x)\right]+a_2\left[z_1(x)\,y_1(x)+z_2(x)\,y_2(x)\right]=f(x)\,,$$

или

$$z_1(x)\cdot\left[y_1''(x)+a_1(x)\cdot y_1'(x)+a_2(x)\cdot y_1(x)\right]+$$

$$+z_2(x)\cdot\left[y_2''(x)+a_1(x)\,y_2'(x)+a_2(x)\,y_2(x)\right]+z_1'(x)\,y_1'(x)+z_2'(x)\,y_2'(x)=f(x)\,.$$

Поскольку $z_1(x)$ и $z_2(x)$ – решения соответствующего однородного уравнения, то выражения в квадратных скобках равны нулю, а поэтому

$$z_1'(x)\cdot y_1'(x)+z_2'(x)\cdot y_2'(x)=f(x). \qquad (3.4.6)$$

Таким образом, функция (3.4.4) будет частным решением y^* уравнения (3.4.3), если функции $z_1(x)$ и $z_2(x)$ удовлетворяют системе уравнений (3.4.5) и (3.4.6):

$$\begin{cases} z_1'(x)\cdot y_1(x)+z_2'(x)\cdot y_2(x)=0, \\ z_1'(x)\cdot y_1'(x)+z_2'(x)\cdot y_2'(x)=f(x). \end{cases} \qquad (3.4.7)$$

Определитель системы $\begin{vmatrix} z_1(x) & z_2(x) \\ z_1'(x) & z_2'(x) \end{vmatrix} \neq 0$, так как это определитель Вронского для фундаментальной системы частных решений $y_1(x)$ и $y_2(x)$ соответствующего однородного уравнения. Поэтому система (3.4.7) имеет единственное решение:

$$z_1'(x)=\varphi_1(x),\ z_2'(x)=\varphi_2(x),$$

где $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$ – функции от x.

Интегрируя эти функции, находим $z_1(x)$ и $z_2(x)$, а затем по формуле (3.4.4) составляем частное решение уравнения (3.4.3).

Суть метода представим в виде алгоритма для ЛНДУ второго порядка.

1. $y''+a_1y'+a_2y=f(x)$
2. $y''+a_1y'+a_2y=0$
3. $\overline{y}=C_1y_1+C_2y_2$ – общее решение ЛОДУ
4. $C_1=C_1(x), C_2=C_2(x)$
5. $y=C_1(x)y_1+C_2(x)y_2$ - общее решение ЛНДУ
6. $\begin{cases} C_1'(x)y_1+C_2'(x)y_2=0; \\ C_1'(x)y_1'+C_2'(x)y_2'=f(x). \end{cases} \Rightarrow C_1(x), C_2(x).$

Пример 9. Решить уравнение $y''-4y'+5y=\dfrac{e^{2x}}{\cos x}$.

Решение.

1. Составляем однородное уравнение, соответствующее неоднородному дифференциальному уравнению: $y''-4y'+5y=0$.

Характеристическое уравнение имеет вид: $\lambda^2-4\lambda+5=0$.

$$D=16-20=-4,\ \lambda_{1,2}=\frac{4\pm 2i}{2}=2\pm i.$$

2. Общее решение однородного уравнения имеет вид:

$$\overline{y}=e^{2x}\left(c_1\cos x+c_2\sin x\right)=c_1 e^{2x}\cos x+c_2 e^{2x}\sin x,\text{ где } c_1,\ c_2\ -\text{const.}$$

3. Варьируем константы c_1, c_2, заменяя их неизвестными функциями $z_1(x)$, $z_2(x)$.

4. Общее решение неоднородного уравнения будем искать в виде

$$y^*=z_1(x)e^{2x}\cos x+z_2(x)e^{2x}\sin x,$$

где $z_1(x)$, $z_2(x)$ – неизвестные функции.

5. Необходимо решить систему двух уравнений с двумя неизвестными:

$$\begin{cases} z_1'(x)\,y_1+z_2'(x)\,y_2=0;\\ z_1'(x)\,y_1'+z_2'(x)\,y_2'=\dfrac{f(x)}{a_0(x)}. \end{cases}$$

Из полученного выше решения $y^*=z_1(x)e^{2x}\cos x+z_2(x)e^{2x}\sin x$ получаем:

$$y_1=e^{2x}\cos x,\ y_2=e^{2x}\sin x.$$

Найдем производные:

$$y_1'=(e^{2x}\cos x)'=2e^{2x}\cos x-e^{2x}\sin x=e^{2x}(2\cos x-\sin x),$$

$$y_2'=(e^{2x}\sin x)'=2e^{2x}\sin x+e^{2x}\cos x=e^{2x}(2\sin x+\cos x).$$

Из исходного уравнения $f(x)=\dfrac{e^{2x}}{\cos x}$. Коэффициент a_0 – это коэффициент при второй производной исходного уравнения, в данном случае $a_0=1$.

Тогда система будет иметь вид:

$$\begin{cases} z_1'(x)e^{2x}\cos x+z_2'(x)e^{2x}\sin x=0;\\ z_1'(x)e^{2x}(2\cos x-\sin x)+z_2'(x)e^{2x}(2\sin x+\cos x)=\dfrac{e^{2x}}{\cos x}. \end{cases}$$

Систему решаем по формулам Крамера.

Найдем главный определитель системы:

$$W=\begin{vmatrix} e^{2x}\cos x & e^{2x}\sin x\\ e^{2x}(2\cos x-\sin x) & e^{2x}(2\sin x+\cos x)\end{vmatrix}=$$

$$=e^{2x}\cos x\cdot e^{2x}(2\sin x+\cos x)-e^{2x}(2\cos x-\sin x)\cdot e^{2x}\sin x=$$

$$=e^{4x}(2\cos x\sin x+\cos^2 x)-e^{4x}(2\cos x\sin x+\sin^2 x)=$$

$$=e^{4x}(2\cos x\sin x+\cos^2 x-2\cos x\sin x+\sin^2 x)=e^{4x}\neq 0.$$

Так как $W=e^{4x}\neq 0$, система имеет единственное решение.

$$W_1=\begin{vmatrix} 0 & e^{2x}\sin x\\ \dfrac{e^{2x}}{\cos x} & e^{2x}(2\sin x+\cos x)\end{vmatrix}=0-\frac{e^{2x}}{\cos x}\cdot e^{2x}\sin x=-\frac{e^{4x}\sin x}{\cos x}.$$

Находим производную:

$$z_1'(x)=\frac{W_1}{W}=\frac{-\dfrac{e^{4x}\sin x}{\cos x}}{e^{4x}}=-\frac{\sin x}{\cos x}.$$

Функцию $z_1(x)$ восстанавливаем интегрированием:

$$z_1(x)=-\int\frac{\sin x}{\cos x}dx=\int\frac{d(\cos x)}{\cos x}=\ln|\cos x|+C_1.$$

Находим функцию $z_2(x)$. Для этого сначала находим определитель:

$$W_2=\begin{vmatrix} e^{2x}\cos x & 0 \\ e^{2x}(2\cos x-\sin x) & \dfrac{e^{2x}}{\cos x}\end{vmatrix}=e^{2x}\cos x\cdot\frac{e^{2x}}{\cos x}-0=e^{4x}.$$

Находим производную:

$$z_2'(x)=\frac{W_2}{W}=\frac{e^{4x}}{e^{4x}}=1.$$

Восстанавливаем функцию $z_2(x)$ интегрированием:

$$z_2(x)=\int dx=x+C_2.$$

6. Записываем общее решение неоднородного уравнения в виде $y=z_1(x)e^x+z_2(x)xe^x$, подставляя найденные функции $z_1(x)$, $z_2(x)$:

$$y=\left(\ln|\cos x|+C_1\right)\cdot e^{2x}\cos x+(x+C_2)e^{2x}\sin x,$$

где C_1, C_2 – const.

Пример 10. Решить уравнение $y''-2y'+y=e^x x^{-2}$.

Решение.

1. Составляем однородное уравнение, соответствующее неоднородному дифференциальному уравнению: $y''-2y'+y=0$.

Характеристическое уравнение имеет вид

$$\lambda^2-2\lambda+1=0,\ (\lambda-1)^2=0.$$

Корни характеристического уравнения $\lambda_{1,2}=1$.

2. Общее решение однородного уравнения имеет вид:

$$\overline{y}=c_1e^x+c_2xe^x,$$

где c_1, c_2 – const.

3. Варьируем константы c_1, c_2, заменяя их неизвестными функциями $z_1(x)$, $z_2(x)$.

4. Общее решение неоднородного уравнения будем искать в виде

$$y^* = z_1(x)e^x + z_2(x)xe^x,$$

где $z_1(x)$, $z_2(x)$ – неизвестные функции.

5. Запишем и решим систему двух уравнений с двумя неизвестными:

$$\begin{cases} z_1'(x)e^x + z_2'(x)xe^x = 0; \\ z_1'(x)e^x + z_2'(x)(e^x + xe^x) = x^{-2}e^x. \end{cases}$$

Систему решаем по формулам Крамера.

Найдем главный определитель системы:

$$W = \begin{vmatrix} e^x & xe^x \\ e^x & e^x + xe^x \end{vmatrix} = e^x \cdot \left(e^x + xe^x\right) - e^x \cdot xe^x = e^{2x} + xe^{2x} - xe^{2x} = e^{2x} \neq 0.$$

Так как $W = e^{2x} \neq 0$, система имеет единственное решение.

$$W_1 = \begin{vmatrix} 0 & xe^x \\ x^{-2}e^x & e^x + xe^x \end{vmatrix} = 0 - x^{-2}e^x \cdot xe^x = -x^{-1} \cdot e^{2x}.$$

Находим производную:

$$z_1'(x) = \frac{W_1}{W} = \frac{-x^{-1}e^{2x}}{e^{2x}} = -x^{-1} = -\frac{1}{x}.$$

Функцию $z_1(x)$ восстанавливаем интегрированием:

$$z_1(x) = -\int \frac{1}{x}dx = -\ln x + C_1 = \ln\frac{1}{x} + C_1.$$

Находим функцию $z_2(x)$. Для этого сначала находим определитель:

$$W_2 = \begin{vmatrix} e^x & 0 \\ e^x & x^{-2}e^x \end{vmatrix} = e^x \cdot x^{-2}e^x - 0 = x^{-2}e^{2x}.$$

Находим производную:

$$z_2'(x) = \frac{W_2}{W} = \frac{x^{-2}e^{2x}}{e^{2x}} = x^{-2} = \frac{1}{x^2}.$$

Восстанавливаем функцию $z_2(x)$ интегрированием:

$$z_2(x) = \int \frac{1}{x^2}dx = -\frac{1}{x} + C_2.$$

6. Записываем общее решение неоднородного уравнения в виде $y = z_1(x)e^x + z_2(x)xe^x$, подставляя найденные функции $z_1(x)$, $z_2(x)$:

$$y = \left(\ln\frac{1}{x} + C_1\right)e^x + \left(-\frac{1}{x} + C_2\right)xe^x,$$

где C_1, C_2 – const.

Пример 11. Решить уравнение $y'' - 2y' + y = e^x x^{-2}$

Решение.

1. Составляем однородное уравнение, соответствующее данному неоднородному ДУ: $y'' - 2y' + y = 0$.

Характеристическое уравнение имеет вид $\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0$ или $(\lambda - 1)^2 = 0$.

Корни характеристического уравнения: $\lambda_{1,2} = 1$.

2. Общее решение однородного уравнения: $\overline{y} = C_1 e^x + C_2 x e^x$

3. $C_1 = C_1(x), \quad C_2 = C_2(x)$.

4. Общее решение неоднородного уравнения будем искать в виде:

$$y = C_1(x) e^x + C_2(x) x e^x.$$

5. Запишем и решим систему

$$\begin{cases} C_1'(x) e^x + C_2'(x) x e^x = 0; \\ C_1'(x) e^x + C_2'(x)(e^x + x e^x) = x^{-2} e^x. \end{cases}$$

$$-\begin{cases} C_1'(x) + C_2'(x) x = 0; \\ C_1'(x) + C_2'(x)(1 + x) = x^{-2}. \end{cases}$$

$$-C_2'(x) = -x^{-2},\ C_2'(x) = x^{-2},\ C_2(x) = \int \frac{dx}{x^2} + C_2 = -\frac{1}{x} + C_2.$$

$$C_1'(x) + \frac{1}{x} = 0,\ C_1'(x) = -\frac{1}{x},\ C_1(x) = -\int \frac{dx}{x} + C_1 = \ln\frac{1}{x} + C_1.$$

6. $y = \left(\ln\frac{1}{x} + C_1 \right) e^x + \left(-\frac{1}{x} + C_2 \right) x e^x$ – общее решение ЛНДУ.

Задачи для самостоятельного решения

В задачах 159 – 182 решить дифференциальное уравнение

159. $y'' + 2y' + 2y = 1 + x$.

160. $y'' + y' + y = \left(x + x^2\right) e^x$.

161. $y'' + y = \sin x - \cos x$.

162. $y'' - y' = e^x \sin x$

163. $y'' - 2y' + 2y = 2x$.

164. $y'' + y = 2x^3 - x + 2$.

165. $y'' - 7y' + 6y = \sin x$.

166. $y'' + y = -8\cos 3x$.

167. $y'' + y = x\cos x$.

168. $y'' + y' + y = 3\cos 2x$

169. $y'' + 8y' = 8x$.

170. $y'' - 4y' = 4e^{4x}$.

171. $y'' - 4y' + 3y = x^2$.

172. $5y'' - 6y' + 5y = e^{\frac{3}{5}x} \cos x$.

173. $7y'' - y' = 14x$.

174. $y'' + 4y' + 3y = 9e^{-3x}$.

175. $y'' + 3y' = 3xe^{-3x}$.

176. $y'' - 4y' + 8y = e^{2x} + \sin 2x$.

177. $y'' + 5y' + 6y = 10(1 - x)e^{-2x}$.

178. $y'' - 3y' + 2y = xe^{x}$.

179. $y'' - 5y' = 3x^2 + \sin 5x$.

180. $y'' + y' - 2y = 2e^{-2x} + e^{2x}$

181. $y'' + y' = \cos x + \sin 5x$.

182. $y'' + 2y' + y = x^2 e^{-x} \cos x$.

В задачах 183 – 192 найти решения уравнений, удовлетворяющие указанным начальным условиям

183. $y'' + y = 4e^{x}$, $y(0) = 4$, $y'(0) = -3$.

184. $y'' - 2y' = 2e^{x}$, $y(1) = -1$, $y'(1) = 0$.

185. $y'' + 4y = \sin x$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 1$.

186. $y'' + 2y' + 2y = xe^{-x}$, $y(0) = y'(0) = 0$.

187. $y'' - y' = 2(1 - x)$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 1$.

188. $y'' - 2y' + 10y = 10x^2 + 18x + 6$, $y(0) = 1$, $y'(0) = -3{,}2$.

189. $y'' + y + \sin 2x = 0$, $y(\pi) = y'(\pi) = 1$.

190. $y'' - 2y' = e^{x}(x^2 + x - 3)$, $y(0) = y'(0) = 2$.

191. $y'' - 4y' + 5y = 2x^2 e^{x}$, $y(0) = 2$, $y'(0) = 3$.

192. $y'' + 4y = 4(\sin 2x + \cos 2x)$, $y(\pi) = y'(\pi) = 2\pi$.

В задачах 193 – 206 найти частные решения уравнений по виду правой части, не вычисляя коэффициентов

193. $y'' - 2y' + y = 2$.

194. $y'' + 2y' + y = x^2 e^{-x} \cos x$.

195. $y'' + y = 5\cos 2x - x\sin 2x$.

196. $y'' + y' = x\sin 2x + x^2 \cos 2x$.

197. $y'' - 2y' + 5y = x^2 e^{x} \cos 2x$.

198. $y''' - 6y'' + 9y' = xe^{3x}$.

199. $y'' + 7y' + 10y = xe^{-2x} \cos 5x$.

200. $y'' - 8y' + 20y = 5xe^{4x} \sin 2x$.

201. $y'' - 6y' + 9y = x^2 + x + 3$.

202. $y''' + y' = \sin x + x\cos x$.

203. $y'' - 3y' + 2y = 5 + e^{x}$.

204. $y'' + 4y = \sin 2x + \cos 7x$.

205. $y'' - y' - 2y = e^{x} + e^{-2x}$.

206. $y'' - 3y' = x^2 - 1 + \cos x$.

В задачах 207 – 216 решить уравнения способом вариации постоянных

207. $y'' - 2y' + y = \dfrac{e^{x}}{x^2 + 1}$.

208. $y'' - y' = e^{2x} \cos e^{x}$.

209. $y'' + y = \dfrac{1}{\sin x}$.

210. $y'' - 2y' + y = 3e^{-x}\sqrt{x + 1}$.

211. $y'' + y = \dfrac{1}{\cos x}$.

212. $y'' - 2y' + y = \dfrac{e^{x}}{x}$.

213. $y'' + 4y = 2\,\mathrm{tg}\, x$.

214. $y'' + 4y = \dfrac{1}{\cos 2x}$.

215. $y'' - y = \dfrac{2e^x}{e^x - 1}$. **216.** $y''' - 2y'' - y' + 2y = \dfrac{2x^3 + x^2 - 4x - 6}{x^4}$.

Индивидуальные задания

I. Найти общее решение линейного неоднородного дифференциального уравнения

1. а) $y'' + y' = 2x - 1$; б) $y'' - 8y' + 17y = 10e^{2x}$.

2. а) $y'' - 2y' + 5y = 10e^{-x}\cos 2x$; б) $y'' + y' - 6y = e^{3x}(6x + 1)$.

3. а) $y'' - 2y' - 8y = 12\sin 2x - 36\cos 2x$;

б) $y'' - 7y' + 12y = 3e^{4x}$.

4. а) $y'' - 12y' + 36y = 14e^{6x}$; б) $y'' - 2y' = 6 + 12x - 24x^2$.

5. а) $y'' - 3y' + 2y = (34 - 12x)e^{-x}$;

б) $y'' - 6y' + 34y = 18\cos 5x + 60\sin 5x$.

6. а) $y'' - 6y' + 10y = 51e^{-x}$; б) $y'' - 2y' = e^{2x}(4x + 4)$.

7. а) $y'' + y = 2\cos x - (4x + 4)\sin x$;

б) $y'' + 2y' + y = 4x^3 + 24x^2 + 22x - 4$.

8. а) $y'' + 6y' + 10y = 74e^{3x}$; б) $y'' - 4y' = 8 - 16x$.

9. а) $y'' - y' + 2y = 3\cos x + 19\sin x$; б) $y'' - 2y' + y = 4e^x$.

10. а) $y'' + 6y' + 9y = (48x + 8)e^x$;

б) $y'' - 8y' + 20y = 16(\sin 2x - \cos 2x)$.

11. а) $y'' + 5y' = 72e^{2x}$; б) $y'' - 6y' + 13y = 34e^{-3x}\sin 2x$.

12. а) $y'' - 5y' - 6y = 3\cos x + 19\sin x$;

б) $y'' + 2y' - 3y = e^x(12x^2 + 6x - 4)$.

13. а) $y'' - 8y' + 12y = 36x^4 - 96x^3 + 24x^2 + 16x - 2$;

б) $y'' + 4y' + 4y = 6e^{-2x}$.

14. а) $y'' + 8y' + 25y = 18e^{5x}$; б) $y'' + 3y' = 10 - 6x$.

15. а) $y'' - 9y' + 20y = 126e^{-2x}$;

б) $y'' + 10y' + 25y = 40 + 52x - 240x^2 - 200x^3$.

16. а) $y'' + 36y = 36 + 66x - 36x^3$;

б) $y'' + 4y' + 20y = 4\cos 4x - 52\sin 4x$.

17. а) $y'' + y = -4\cos x - 2\sin x$; б) $y'' + 4y' + 5y = 5x^2 - 32x + 5$.

18. а) $y'' + 2y' - 24y = 6\cos 3x - 33\sin 3x$;

б) $y'' + 2y' + y = e^{-x}(12x - 10)$.

19. а) $y'' + 6y' + 13y = -75\sin 2x$; б) $y'' - 4y' + y = e^{2x}(-24x - 10)$.

20. а) $y'' + 5y' = 39\cos 3x - 105\sin 3x$; б) $y'' + 6y' + 9y = 72e^{3x}$.

21. а) $y'' - 4y' + 29y = 104\sin 5x$; б) $y'' + 16y = 80e^{2x}$.

22. а) $y'' - 4y' + 5y = (24\sin x + 8\cos x)e^{-2x}$;

б) $y'' + 4y' = 15e^{x}$.

23. а) $y'' + 16y = 8\cos 4x$; б) $y'' + y' - 2y = 9\cos x - 7\sin x$.

24. а) $y'' + 9y = 9x^4 + 12x^2 - 27$; б) $y'' + 2y' + y = e^{-x}(18x + 8)$.

25. а) $y'' - 12y' + 40y = 2e^{6x}$; б) $y'' - 14y' + 49y = 144\sin 7x$.

26. а) $y'' + 4y' = e^{x}(24\cos 2x + 2\sin 2x)$;

б) $y'' + 9y = 10e^{3x}$.

27. а) $y'' + 2y' + y = 6e^{-x}$; б) $4y'' - 4y' + y = -25\cos x$.

28. а) $y'' + 2y' + 37y = 37x^2 - 33x + 74$;

б) $3y'' - 5y' - 2y = 6\cos 2x + 38\sin 2x$.

29. а) $6y'' - y' - y = 3e^{2x}$; б) $y'' + 4y' + 29y = 26e^{-x}$.

30. а) $2y'' + 7y' + 3y = 222\sin 3x$; б) $4y'' + 3y' - y = 11\cos x - 7\sin x$.

II. Найти частное решение линейного неоднородного дифференциального уравнения, удовлетворяющее данным начальным условиям

1. $y'' - 2y' + y = -12\cos 2x - 9\sin 2x,\ y(0) = -2,\ y'(0) = 0.$

2. $y'' - 6y' + 9y = 9x^2 - 39x + 65,\ y(0) = -1,\ y'(0) = 1.$

3. $y'' + 2y' + 2y = 2x^2 + 8x + 6,\ y(0) = 1,\ y'(0) = 4.$

4. $y'' - 6y' + 25y = 9\sin 4x - 24\cos 4x,\ y(0) = 2,\ y'(0) = -2.$

5. $y'' - 14y' + 53y = 53x^3 - 42x^2 + 59x - 14,\ y(0) = 0,\ y'(0) = 7.$

6. $y'' + 6y = e^{x}(\cos 4x - 8\sin 4x),\ y(0) = 0,\ y'(0) = 5.$

7. $y'' - 4y' + 20y = 16xe^{2x},\ y(0) = 0,\ y'(0) = 5.$

8. $y'' - 12y' + 36y = 32\cos 2x + 24\sin 2x,\ y(0) = 2,\ y'(0) = 4.$

9. $y'' + y = x^3 - 4x^2 + 7x - 10,\ y(0) = 2,\ y'(0) = 3.$

10. $y'' - y = e^{-x}(14 - 16x),\ y(0) = 0,\ y'(0) = -1.$

11. $y'' + 8y' + 16y = 16x^2 - 16x + 66,\ y(0) = 3,\ y'(0) = 0.$

12. $y'' + 10y' + 34y = -9e^{-5x},\ y(0) = 0,\ y'(0) = 6.$

13. $y'' - 6y' + 25y = (32x - 12)\sin x - 36x\cos 3x,\ y(0) = 4,\ y'(0) = 0.$

14. $y'' + 25y = e^{x}(\cos 5x - 10\sin 5x),\ y(0) = 3,\ y'(0) = -4.$

15. $y'' + 2y' + 5y = -8e^{-x}\sin 2x,\ y(0) = 2,\ y'(0) = 6.$

16. $y'' - 10y' + 25y = e^{5x},\ y(0) = 1,\ y'(0) = 0.$

17. $y'' + y' - 12y = e^{4x}(16x + 22),\ y(0) = 3,\ y'(0) = 5.$

18. $y'' - 2y' + 5y = 5x^2 + 6x - 12,\ y(0) = 0,\ y'(0) = 2.$

19. $y'' + 8y' + 16y = 16x^3 + 24x^2 - 10x + 8,\ y(0) = 1,\ y'(0) = 3.$

20. $y'' - 2y' + 37y = 36e^x \cos 6x,\ y(0) = 0,\ y'(0) = 6.$

21. $y'' - 8y' = 16 + 48x^2 - 128x^3,\ y(0) = -1,\ y'(0) = 14.$

22. $y'' + 12y' + 36y = 72x^3 - 18,\ y(0) = 1,\ y'(0) = 0.$

23. $y'' + 3y' = e^{2x}(40x + 58),\ y(0) = 0,\ y'(0) = 2.$

24. $y'' - 9y' + 218y = 26\cos x - 8\sin x,\ y(0) = 0,\ y'(0) = 2.$

25. $y'' + 8y' = 18x + 60x^2 - 32x^3,\ y(0) = 5,\ y'(0) = 2.$

26. $y'' - 3y' + 2y = -\sin x - 7\cos x,\ y(0) = 2,\ y'(0) = 7.$

27. $y'' + 2y' = 6x^2 + 2x + 1,\ y(0) = 2,\ y'(0) = 2.$

28. $y'' + 16y = 32e^{4x},\ y(0) = 2,\ y'(0) = 0.$

29. $y'' + 5y' + 6y = 52\sin 2x,\ y(0) = -2,\ y'(0) = -2.$

30. $y'' - 4y = 8e^{2x},\ y(0) = 1,\ y'(0) = -8.$

III. Определить и записать структуру частного решения y^* линейного неоднородного дифференциального уравнения по виду функции $f(x)$

1. $2y'' - 7y' + 3y = f(x)$;

а) $f(x) = e^{3x}(2x + 1)$; б) $f(x) = \cos 3x$.

2. $3y'' - 7y' + 2y = f(x)$;

а) $f(x) = 3xe^{2x}$; б) $f(x) = \sin 2x - 3\cos 2x$.

3. $2y'' + y' - y = f(x)$;

а) $f(x) = (x^2 - 5)e^{-x}$; б) $f(x) = x\sin x$.

4. $2y'' - 9y' + 4y = f(x)$;

а) $f(x) = -2e^{4x}$; б) $f(x) = e^x \cos 4x$.

5. $y'' + 49y = f(x)$;

а) $f(x) = x^3 + 4x$; б) $f(x) = 3\sin 7x$.

6. $y'' - 3y' + 2y = f(x)$;

а) $f(x) = x + 2e^x$; б) $f(x) = 3\cos 4x$.

7. $3y'' + 10y' + 3y = f(x)$;

а) $f(x) = e^{-3x}$; б) $f(x) = 2\cos 3x - \sin 3x$.

8. $y'' - 4y' + 4y = f(x)$;

а) $f(x) = \sin 2x + 2e^{2x}$; б) $f(x) = x^2 - 4$.

9. $y'' - y' + y = f(x)$;

а) $f(x) = e^x \cos x$; б) $f(x) = 7x + 2$.

10. $y'' - 3y' = f(x)$;

а) $f(x) = 2x^2 - 5x$; б) $f(x) = e^{-x}\sin 2x$.

11. $y'' + 3y' - 4y = f(x)$;

а) $f(x) = 3xe^{-4x}$; б) $f(x) = x\sin x$.

12. $y'' + 36y = f(x)$;

а) $f(x) = 4xe^{-x}$; б) $f(x) = 2\sin 6x$.

13. $y'' - 6y' + 9y = f(x)$;

а) $f(x) = (x-2)e^{3x}$; б) $f(x) = 4\cos x$.

14. $4y'' - 5y' + y = f(x)$;

а) $f(x) = e^{x}(4x+2)$; б) $f(x) = e^{x}\sin 3x$.

15. $4y'' + 7y' - 2y = f(x)$;

а) $f(x) = 3e^{-2x}$; б) $f(x) = (x-1)\cos 2x$.

16. $y'' - y' - 6y = f(x)$;

а) $f(x) = 2xe^{3x}$; б) $f(x) = 9\cos x - \sin x$.

17. $y'' - 16y = f(x)$;

а) $f(x) = -3e^{4x}$; б) $f(x) = \cos x - 4\sin x$.

18. $y'' - 4y' = f(x)$;

а) $f(x) = (x-2)e^{4x}$; б) $f(x) = 3\cos 4x$.

19. $y'' - 2y' + 2y = f(x)$;

а) $f(x) = e^{4x}(2x-3)$; б) $f(x) = e^{x}\sin x$.

20. $5y'' - 6y' + y = f(x)$;

а) $f(x) = x^2e^{x}$; б) $f(x) = \cos x - \sin x$.

21. $5y'' + 9y' - 2y = f(x)$;

а) $f(x) = x^3 - 2x$; б) $f(x) = 2\sin 2x - 3\cos 2x$.

22. $y'' - 2y' - 15y = f(x)$;

а) $f(x) = 4xe^{3x}$; б) $f(x) = x\sin 5x$.

23. $y'' - 3y' = f(x)$;

а) $f(x) = 2x^3 - 4x$; б) $f(x) = 2e^{3x}\cos x$.

24. $y'' - 7y' + 12y = f(x)$;

а) $f(x) = xe^{3x} + 2e^{x}$; б) $f(x) = 3x\sin 2x$.

25. $y'' + 9y' = f(x)$;

а) $f(x) = x^2 + 4x - 3$; б) $f(x) = xe^{2x}\sin x$.

26. $y'' - 4y' + 5y = f(x)$;

а) $f(x) = -2xe^{x}$; б) $f(x) = x\cos 2x - \sin 2x$.

27. $y'' + 3y' + 2y = f(x)$;

а) $f(x) = e^{-x}(3x-7)$; б) $f(x) = \cos x - 3\sin x$.

28. $y'' - 8y' + 16y = f(x)$;

а) $f(x) = 2xe^{4x}$; б) $f(x) = \cos 4x + 2\sin 4x$.

29. $y'' + y' - 2y = f(x)$;

а) $f(x) = 3x\cos 2x$; б) $f(x) = 3x\cos 2x$.

30. $y'' + 3y' - 4y = f(x)$;

а) $f(x) = 6xe^{-x}$; б) $f(x) = x^2 \sin 2x$.

IV. Решить дифференциальное уравнение методом вариации произвольных постоянных

1. $y'' - y = \dfrac{e^x}{e^x + 1}$.

2. $y'' + 4y = \dfrac{1}{\cos 2x}$.

3. $y'' - 4y' + 5y = \dfrac{e^{2x}}{\cos x}$.

4. $y''' + y' = \dfrac{\sin x}{\cos^2 x}$.

5. $y'' + 9y = \dfrac{1}{\sin 3x}$.

6. $y'' + 2y' + y = xe^x + \dfrac{1}{xe^x}$.

7. $y'' + 2y' + 2y = \dfrac{e^{-x}}{\cos x}$.

8. $y'' - 2y' + 2y = \dfrac{e^x}{\sin^2 x}$.

9. $y'' + 2y' + 2y = e^{-x} ctgx$.

10. $y'' - 2y' + 2y = \dfrac{e^{-x}}{\sin x}$.

11. $y'' - 2y' + y = \dfrac{e^x}{x^2}$.

12. $y'' + y = \operatorname{tg} x$.

13. $y'' + 4y = \operatorname{ctg} 2x$.

14. $y'' + y = \operatorname{ctg} x$.

15. $y'' - 2y' + y = \dfrac{e^x}{x}$.

16. $y'' + 2y' + y = \dfrac{e^{-x}}{x}$.

17. $y'' + y = \dfrac{1}{\cos x}$.

18. $y'' + y = \dfrac{1}{\sin x}$.

19. $y'' + 4y = \dfrac{1}{\sin 2x}$.

20. $y'' + 4y = \operatorname{tg} 2x$.

21. $y'' + 4y' + 4y = \dfrac{e^{-2x}}{x^3}$.

22. $y'' - 4y' + 4y = \dfrac{e^{2x}}{x^3}$.

23. $y'' + 2y' + y = 3e^{-x}\sqrt{x+1}$.

24. $y'' + y = -\operatorname{ctg}^2 x$.

25. $y'' - y' = e^{2x} \cdot \cos(e^x)$.

26. $y'' - y' = e^{2x} \cdot \sin(e^x)$.

27. $y'' + y = \operatorname{tg}^2 x$.

28. $y'' + y = \dfrac{2}{\sin^2 x}$.

29. $y'' + 2y' + 5y = \dfrac{e^{-x}}{\sin 2x}$.

30. $y'' + 9y = \dfrac{1}{\cos 3x}$.

4. СИСТЕМЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

4.1. Основные понятия

Для решения многих задач математики, физики, техники (задач динамики криволинейного движения; задач электротехники для нескольких электрических цепей; определения состава системы, в которой протекают несколько последовательных химических реакций I порядка и других) нередко требуется несколько функций. Нахождение этих функций может привести к нескольким дифференциальным уравнениям, образующим систему.

Системой дифференциальных уравнений называется совокупность дифференциальных уравнений, каждое из которых содержит независимую переменную, искомые функции и их производные.

Общий вид системы дифференциальных уравнений первого порядка, содержащей n искомых функций $y_1, y_2, ..., y_n$ следующий:

$$\begin{cases} F_1(x; y_1; y_2; ...; y_n; y_1'; y_2'; ...; y_n') = 0, \\ .... \\ F_n(x; y_1; y_2; ...; y_n; y_1'; y_2'; ...; y_n') = 0. \end{cases}$$

Система дифференциальных уравнений первого порядка, разрешенных относительно производной, т.е. система вида

$$\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dx} = f_1(x; y_1; y_2; ...; y_n), \\ \dfrac{dy_2}{dx} = f_2(x; y_1; y_2; ...; y_n), \\ .... \\ \dfrac{dy_n}{dx} = f_n(x; y_1; y_2; ...; y_n). \end{cases} \qquad (4.1.1)$$

называется ***нормальной системой дифференциальных уравнений***. При этом предполагается, что число уравнений равно числу искомых функций.

Решением системы (4.1.1) называется совокупность из n функций $y_1, y_2, ..., y_n$, удовлетворяющих каждому из уравнений этой системы.

Начальные условия для системы (4.1.1) имеют вид

$$y_1(x_0) = y_1^0, \ y_2(x_0) = y_2^0, \ \ldots, \ y_n(x_0) = y_n^0. \qquad (4.1.2)$$

Задача Коши для системы (4.1.1) ставится следующим образом: найти решение системы (4.1.1), удовлетворяющее начальным условиям (4.1.2).

Теорема (существования и единственности решения задачи Коши). Если в системе (4.1.1) все функции $f_i(x; y_1;...; y_n)$ непрерывны вместе со всеми своими частными производными по y_i в некоторой области D ($(n+1)$-мерного пространства), то в каждой точке $M_0(x_0; y_1^0; y_2^0;...; y_n^0)$ этой области существует, и притом единственное, решение $y_1 = \varphi_1(x)$, $y_2 = \varphi_2(x)$, …, $y_n = \varphi_n(x)$ системы, удовлетворяющее начальным условиям (4.1.2).

Меняя в области D точку M_0 (т.е. начальные условия), получим бесчисленное множество решений, которое можно записать в виде решения, зависящего от n произвольных постоянных:

$$y_1 = \varphi_1(x; C_1; C_2;...: C_n),\ \ldots,\ y_n = \varphi_n(x; C_1; C_2;...: C_n).$$

Это решение является *общим*, если по заданным начальным условиям (4.2) можно однозначно определить постоянные $C_1; C_2;...: C_n$ из системы уравнений

$$\begin{cases} \varphi_1(x; C_1; C_2;...; C_n) = y_1^0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \varphi_n(x; C_1; C_2;...; C_n) = y_n^0. \end{cases}$$

Решение, получающееся из общего при конкретных значениях постоянных $C_1; C_2;...: C_n$, называется *частным решением системы* (4.1.1).

4.2. Интегрирование нормальных систем

Одним из основных методов интегрирования нормальной системы дифференциальных уравнений является метод сведения системы к одному дифференциальному уравнению высшего порядка. Метод основан на следующих соображениях.

Пусть дана нормальная система (4.1.1). Продифференцируем по x любое уравнение системы, например первое:

$$\frac{d^2 y_1}{dx^2} = \frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_1}{\partial y_1} \cdot \frac{dy_1}{dx} + \frac{\partial f_1}{\partial y_2} \cdot \frac{dy_2}{dx} + \ldots + \frac{\partial f_1}{\partial y_n} \cdot \frac{dy_n}{dx}.$$

Подставив в это равенство значения производных $\frac{dy_1}{dx}$, $\frac{dy_2}{dx}$,…, $\frac{dy_n}{dx}$ из системы (4.1.1), получим

$$\frac{d^2 y_1}{dx^2} = \frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_1}{\partial y_1} \cdot f_1 + \frac{\partial f_1}{\partial y_2} \cdot f_2 + \ldots + \frac{\partial f_1}{\partial y_n} \cdot f_n,$$

или, кратко,

$$\frac{d^2 y_1}{dx^2} = F_2(x; y_1; y_2; ...; y_n).$$

Продифференцировав полученное равенство еще раз, и заменив значения производных $\frac{dy_1}{dx}$, …, $\frac{dy_n}{dx}$ из системы (4.1.1), получим

$$\frac{d^3 y_1}{dx^3} = F_3(x; y_1; y_2; ...; y_n).$$

Продолжая этот процесс (дифференцируем – подставляем – получаем), находим:

$$\frac{d^n y_1}{dx^n} = F_n(x; y_1; y_2; ...; y_n).$$

Соберем полученные уравнения в систему:

$$\begin{cases} \frac{dy_1}{dx} = f_1(x; y_1; y_2; ...; y_n), \\ \frac{d^2 y_1}{dx^2} = F_2(x; y_1; y_2; ...; y_n), \\ \frac{d^3 y_1}{dx^3} = F_3(x; y_1; y_2; ...; y_n), \\ .... \\ \frac{d^n y_1}{dx^n} = F_n(x; y_1; y_2; ...; y_n). \end{cases} \tag{4.2.1}$$

Из первых $(n-1)$ уравнений системы (4.2.1) выразим функции y_2, y_3, …, y_n через x, функцию y_1 и ее производные y_1', y_1'', …, $y_1^{(n-1)}$. Получим:

$$\begin{cases} y_2 = \psi_2(x; y_1; y_1'; ...; y_1^{(n-1)}), \\ y_3 = \psi_3(x; y_1; y_1'; ...; y_1^{(n-1)}), \\ .... \\ y_n = \psi_n(x; y_1; y_1'; ...; y_1^{(n-1)}). \end{cases} \tag{4.2.2}$$

Найденные значения y_2, y_3, …, y_n подставим в последнее уравнение системы (4.2.2). Получим одно дифференциальное уравнение n-го порядка относительно искомой функции y_1:

$$\frac{d^n y_1}{dx} = \Phi(x; y_1; y_1'; ...; y_1^{(n-1)}).$$

Пусть его общее решением имеет вид

$$y_1 = \varphi_1(x;c_1;c_2;...;c_n).$$

Продифференцировав его $(n-1)$ раз и подставив значения производных $y_1';y_1'';...;y_1^{(n-1)}$ в уравнение системы (4.2.2), найдем функции y_2, y_3, …, y_n:

$$y_2 = \varphi_2(x;c_1;c_2;...;c_n),\ \ \ldots,\ \ y_n = \varphi_n(x;c_1;c_2;...;c_n).$$

Пример 1. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = 4y - 3z, \\ \dfrac{dz}{dx} = 2y - 3z. \end{cases}$$

Решение. Продифференцируем первое уравнение:

$$y'' = 4y' - 3z'.$$

Подставляем втрое уравнение системы $z' = 2y - 3z$ в полученное равенство:

$$y'' = 4y' - 3(2y - 3z),\ \ y'' = 4y' - 6y + 9z,\ \ y'' - 4y' + 6y = 9z.$$

Составляем систему уравнений:

$$\begin{cases} y' = 4y - 3z, \\ y'' - 4y' + 6y = 9z. \end{cases}$$

Из первого уравнения системы выражаем z через y и y':

$$z = \frac{4y - y'}{3}.$$

Подставляем значение z во второе уравнение последней системы:

$$y'' - 4y' + 6y = \frac{9(4y - y')}{3},\ \ y'' - 4y' + 6y = 3(4y - y'),$$

$$y'' - 4y' + 6y = 12y - 3y',\ \ y'' - y' - 6y = 0.$$

Получили одно линейное однородное дифференциальное уравнение второго порядка. Найдем его общее решение.

Характеристическое уравнение $\lambda^2 - \lambda - 6 = 0$ имеет корни $\lambda_1 = -2$, $\lambda_2 = 3$.

Тогда общее решение

$$y = c_1 e^{-2x} + c_2 e^{3x}.$$

Найдем функцию z. Значения

$$y = c_1 e^{-2x} + c_2 e^{3x}, \; y' = (c_1 e^{-2x} + c_2 e^{3x})' = -2c_1 e^{-2x} + 3c_2 e^{3x}$$

подставляем в выражение z через y и y':

$$z = \frac{4y - y'}{3} = \frac{1}{3}\left(4(c_1 e^{-2x} + c_2 e^{3x} - (-2c_1 e^{-2x} + 3c_2 e^{3x})\right) =$$

$$= \frac{1}{3}\left(4c_1 e^{-2x} + 4c_2 e^{3x} + 2c_1 e^{-2x} - 3c_2 e^{3x}\right) = 2c_1 e^{-2x} + \frac{1}{3} c_2 e^{3x}.$$

Таким образом, общее решение данной системы уравнений имеет вид

$$y = c_1 e^{-2x} + c_2 e^{3x}, \; z = 2c_1 e^{-2x} + \frac{1}{3} c_2 e^{3x}.$$

Замечание. Систему уравнений (4.2.1) можно решать методом интегрируемых комбинаций. Суть метода состоит в том, что посредством арифметических операций из уравнений данной системы образуют так называемые интегрируемые комбинации, т.е. легко интегрируемые уравнения относительно новой неизвестной функции.

Проиллюстрируем технику этого метода на следующем примере.

Пример 2. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = y + 1, \\ \dfrac{dy}{dt} = x + 1. \end{cases}$$

Решение. Сложи почленно уравнения системы:

$$x' + y' = x + y + 2, \text{ или } (x + y)' = (x + y) + 2.$$

Обозначим $z = x + y$, тогда имеем

$$z' = z + 2.$$

Решим полученное уравнение:

$$\frac{dz}{dt} = z + 2, \;\; \frac{dz}{z+2} = dt, \;\; \ln(z+2) = t + \ln c_1, \;\; \ln(z+2) - \ln c_1 = t,$$

$$\frac{z+2}{c_1} = e^t, \;\; z + 2 = c_1 e^t.$$

Возвращаясь к переменным x и y, получим первый интеграл системы:

$$x + y = c_1 e^t - 2.$$

Из первого интеграла системы выразим одну из искомых функций через другую, тем самым уменьшим на единицу число искомых функций. Например,

$$y = c_1 e^t - 2 - x.$$

Тогда первой уравнение системы примет вид

$$x' = c_1 e^t - 2 - x + 1, \quad x' + x = c_1 e^t - 1.$$

4.3. Системы линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами

Рассмотрим еще один метод интегрирования системы уравнений (4.1.1) в случае, когда она представляет собой систему линейных однородных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами, т.е. систему вида

$$\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dx} = a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + \ldots + a_{1n}y_n, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \dfrac{dy_n}{dx} = a_{n1}y_1 + a_{n2}y_2 + \ldots + a_{nn}y_n. \end{cases}$$

Для простоты ограничимся рассмотрением системы трех уравнений с тремя неизвестными функциями y_1, y_2, y_3:

$$\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dx} = a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + a_{13}y_3, \\ \dfrac{dy_2}{dx} = a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + a_{23}y_3, \\ \dfrac{dy_3}{dx} = a_{31}y_1 + a_{32}y_2 + a_{33}y_3. \end{cases} \tag{4.3.1}$$

где все коэффициенты a_{ij} $(i, j = 1,2,3)$ – постоянные.

Частное решение системы (4.3.1) будем искать в виде

$$y_1 = \alpha \cdot e^{kx}, \; y_2 = \beta \cdot e^{kx}, \; y_3 = \gamma \cdot e^{kx}, \tag{4.3.2}$$

где α, β, γ – постоянные, которые надо найти так, чтобы функции (4.3.2) удовлетворяли системе (4.3.1).

Подставив эти функции в систему (4.3.1) и сократив на множитель $e^{kx} \neq 0$, получим:

$$\begin{cases} \alpha k = a_{11}\alpha + a_{12}\beta + a_{13}\gamma, \\ \beta k = a_{21}\alpha + a_{22}\beta + a_{23}\gamma, \\ \gamma k = a_{31}\alpha + a_{32}\beta + a_{33}\gamma, \end{cases}$$

или

$$\begin{cases}(a_{11}-k)\,\alpha+a_{12}\,\beta+a_{13}\,\gamma=0,\\ a_{21}\,\alpha+(a_{22}-k)\beta+a_{23}\,\gamma=0,\\ a_{31}\,\alpha+a_{32}\,\beta+(a_{33}-k)\gamma=0.\end{cases} \qquad (4.3.3)$$

Систему (4.3.3) можно рассматривать как однородную систему трех алгебраических уравнений с тремя неизвестными α,β,γ. Чтобы эта система имела ненулевое решение, необходимо и достаточно, чтобы определитель системы был равен нулю:

$$\begin{vmatrix}a_{11}-k & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22}-k & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}=0. \qquad (4.3.4)$$

Уравнение (4.3.4) называется характеристически уравнением системы (4.3.3). Раскрыв определитель, получим уравнение третьей степени относительно k. Рассмотрим возможные случаи.

<u>Первый случай.</u> Корни характеристического уравнения действительны и различны: k_1,k_2,k_3. Для каждого корня k_i $(i=1,2,3)$ запишем систему (4.3.4) и определим коэффициенты $\alpha_i,\beta_i,\gamma_i$ (один их коэффициентов можно считать равным единице). Тогда получаем:

для корня k_1 частное решение системы (4.3.1):

$$y_1^{(1)}=\alpha_1\cdot e^{k_1x},\; y_2^{(1)}=\beta_1\cdot e^{k_1x},\; y_3^{(1)}=\gamma_1\cdot e^{k_1x};$$

для корня k_2: $y_1^{(2)}=\alpha_2\cdot e^{k_2x}$, $y_2^{(2)}=\beta_2\cdot e^{k_2x}$, $y_3^{(2)}=\gamma_2\cdot e^{k_2x}$;

для корня k_3: $y_1^{(3)}=\alpha_3\cdot e^{k_3x}$, $y_2^{(3)}=\beta_3\cdot e^{k_3x}$, $y_3^{(3)}=\gamma_3\cdot e^{k_3x}$.

Эти функции образуют фундаментальную систему, общее решение системы (4.3.1) записывается в виде:

$$\begin{aligned}y_1&=c_1\,\alpha_1e^{k_1x}+c_2\,\alpha_2e^{k_2x}+c_3\,\alpha_3e^{k_3x},\\ y_2&=c_1\,\beta_1e^{k_1x}+c_2\,\beta_2e^{k_2x}+c_3\,\beta_3e^{k_3x},\\ y_3&=c_1\,\gamma_1e^{k_1x}+c_2\,\gamma_2e^{k_2x}+c_3\,\gamma_3e^{k_3x}.\end{aligned} \qquad (4.3.5)$$

Пример 1. Решить систему уравнений:

$$\begin{cases}\dfrac{dy_1}{dx}=y_1-y_2,\\ \dfrac{dy_2}{dx}=-4y_1+y_2.\end{cases}$$

Решение. Характеристическое уравнение (4.3.4) данной системы имеет вид

$$\begin{vmatrix} 1-k & -1 \\ -4 & 1-k \end{vmatrix} = 0,$$

или $1-2k+k^2-4=0$, $k^2-2k-3=0$, $k_1=-1$, $k_2=3$.

Частные решения данной системы ищем в виде

$$y_1^{(1)} = \alpha_1 e^{k_1 x},\ y_2^{(1)} = \beta_1 e^{k_1 x} \text{ и}$$
$$y_1^{(2)} = \alpha_2 e^{k_2 x},\ y_2^{(2)} = \beta_2 e^{k_2 x}.$$

Найдем α_i и β_i $(i=1,2)$.

При $k=-1$ система (4.3.3) имеет вид

$$\begin{cases} (1-(-1))\alpha_1 - \beta_1 = 0, \\ -4\alpha_1 + (1-(-1))\beta_1 = 0, \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2\alpha_1 - \beta_1 = 0, \\ -4\alpha_1 + 2\beta_1 = 0. \end{cases}$$

Эта система имеет бесчисленное множество решений. Положим $\alpha_1 = 1$, тогда $\beta_1 = 2$. Получаем частные решения

$$y_1^{(1)} = e^{-x} \text{ и } y_2^{(1)} = 2e^{-x}.$$

При $k_2 = 3$ система (4.3.3) имеет вид

$$\begin{cases} (1-3)\alpha_2 - \beta_2 = 0, \\ -4\alpha_2 + (1-3)\beta_2 = 0, \end{cases}$$

$$\begin{cases} -2\alpha_2 - \beta_2 = 0, \\ -4\alpha_2 - 2\beta_2 = 0. \end{cases}$$

Положим $\alpha_2 = 1$, тогда $\beta_2 = -2$. Значит, корню $k_2 = 3$ соответствуют частные решения:

$$y_1^{(2)} = e^{3x} \text{ и } y_2^{(2)} = -2e^{3x}.$$

Общее решение исходной системы, согласно формуле (4.3.5), запишется в виде:

$$y_1 = C_1 e^{-x} + C_2 e^{3x},\ y_2 = 2C_1 e^{-x} - 2C_2 e^{3x}.$$

<u>Второй случай.</u> Корни характеристического уравнения различные, но среди них есть комплексные: $k_1 = a+ib$, $k_2 = a-ib$, k_3. Вид частных решений определяется так же как и в первом случае.

Замечание. Вместо полученных частных решений можно взять их линейные комбинации, применяя формулы Эйлера; в результате получим два действительных решения, содержащих функции вида $e^{ax}\cos bx$, $e^{ax}\sin bx$. Или, выделяя действительные и мнимые части в найденных комплексных частных решениях, получим два действительных частных решения. При этом комплексно-сопряженный корень $k_2 = a - ib$ не даст новых линейно независимых действительных решений.

Пример 2. Найти частное решение системы

$$\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dx} = y_1 + y_2, \\ \dfrac{dy_2}{dx} = -y_1 + y_2 - y_3, \\ \dfrac{dy_3}{dx} = 3y_2 + y_3, \end{cases}$$

удовлетворяющее начальным условиям: $y_1(0) = 7$, $y_2(0) = 2$, $y_3(0) = 1$.

Решение. Составим и решим характеристическое уравнение:

$$\begin{vmatrix} 1-k & 1 & 0 \\ -1 & 1-k & -1 \\ 0 & 3 & 1-k \end{vmatrix} = 0,$$

$$(1-k)\cdot\begin{vmatrix} 1-k & -1 \\ 3 & 1-k \end{vmatrix} - 1\cdot\begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 1-k \end{vmatrix} = 0,$$

$$(1-k)\cdot(1 - 2k + k^2 + 3) - (k-1) = 0,$$

$$(1-k)\cdot(k^2 - 2k + 4 + 1) = 0,\ (1-k)\cdot(k^2 - 2k + 5) = 0$$

$$k_1 = 1,\ k_2 = 1 + 2i,\ k_3 = 1 - 2i.$$

Для $k_1 = 1$ получаем:

$$\begin{cases} 0\cdot\alpha_1 + \beta_1 + 0\cdot\gamma_1 = 0, \\ -\alpha_1 + 0\cdot\beta_1 - \gamma_1 = 0, \\ 0\cdot\alpha_1 + 3\beta_1 + 0\cdot\gamma_1 = 0. \end{cases}$$

Решая систему, положим, что $\alpha_1 = 1$, тогда $\beta_1 = 0$, $\gamma_1 = -1$.

Частное решение системы:

$$y_1^{(1)} = e^{2x},\ y_2^{(1)} = 0,\ y_3^{(1)} = e^{-x}.$$

Для $k_2 = 1 + 2i$ получаем:

$$\begin{cases} -2i\cdot\alpha_2 + \beta_2 = 0, \\ -\alpha_2 - 2i\cdot\beta_2 - \gamma_2 = 0, \\ 3\beta_2 - 2i\cdot\gamma_2 = 0. \end{cases}$$

Решая систему, положим, что $\alpha_2 = 1$, тогда $\beta_2 = 2i$, $\gamma_2 = 3$.

Частное комплексное решение системы:

$$y_1^{(2)} = e^{(1+2i)x} = e^x\left(\cos 2x + i\sin 2x\right),$$

$$\operatorname{Re} y_1^{(2)} = e^x\cos 2x,\ \operatorname{Im} y_1^{(2)} = e^x\sin 2x;$$

$$y_2^{(2)} = 2ie^{(1+2i)x} = e^x\left(2i\cos 2x - 2\sin 2x\right),$$

$$\operatorname{Re} y_2^{(2)} = -2e^x \sin 2x,\ \operatorname{Im} y_2^{(2)} = 2e^x \cos 2x;$$

$$y_3^{(2)} = 3e^{(1+2i)x} = e^x\left(3\cos 2x + i3\sin 2x\right),$$

$$\operatorname{Re} y_3^{(2)} = 3e^x \cos 2x,\ \operatorname{Im} y_3^{(2)} = 3e^x \sin 2x.$$

Корень $k_3 = 1 - 2i$ приведет к таким же решениям.

Следовательно, общее решение системы имеет вид:

$$y_1 = C_1 e^x + C_2 e^x \cos 2x + C_3 e^x \sin 2x,$$

$$y_2 = C_1 \cdot 0 - 2C_2 e^x \sin 2x + 2C_3 e^x \cos 2x,$$

$$y_3 = -C_1 e^x + 3C_2 e^x \cos 2x + 3C_3 e^x \sin 2x.$$

Найдем частное решение системы при заданных начальных условиях $y_1(0) = 7$, $y_2(0) = 2$, $y_3(0) = 1$. Получим систему уравнений, из которой определим постоянные C_1, C_2, C_3:

$$\begin{cases} 7 = C_1 + C_2 + 0, \\ 2 = 0 - 0 + 2C_3, \\ 1 = -C_1 + 3C_2 + 0, \end{cases} \Rightarrow C_1 = 5, C_2 = 2, C_3 = 1.$$

Тогда искомое частное решение имеет вид:

$$y_1 = 5e^x + 2e^x \cos 2x + e^x \sin 2x,$$

$$y_2 = -4e^x \sin 2x + 2e^x \cos 2x,$$

$$y_3 = -5e^x + 6e^x \cos 2x + 3e^x \sin 2x.$$

Третий случай. Характеристическое уравнение имеет корень k кратности m $(m = 2,3)$. Решение системы, соответствующее кратному корню, следует искать в виде:

а) если $m = 2$, то

$$y_1 = (A + Bx)e^{kx},$$

$$y_2 = (C + Dx)e^{kx},$$

$$y_3 = (E + Fx)e^{kx};$$

б) если $m = 3$, то

$$y_1 = \left(A + Bx + Cx^2\right)e^{kx},$$

$$y_2 = \left(D + Ex + Fx^2\right)e^{kx},$$

$$y_3 = \left(G + Hx + Nx^2\right)e^{kx}.$$

Это решение зависит от m произвольных постоянных. Постоянные $A, B, C, ..., N$ определяются методом неопределенных коэффициентов. Выразив все коэффициенты через m из них, полагаем поочередно один из них равным единице, а остальные равными нулю. Получим m линейно независимых частных решений системы (4.3.1).

Пример 3. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dx} = y_1 - y_2 + y_3, \\ \dfrac{dy_2}{dx} = y_1 + y_2 - y_3, \\ \dfrac{dy_3}{dx} = -y_2 + 2y_3. \end{cases}$$

Решение. Составим и решим характеристическое уравнение

$$\begin{vmatrix} 1-k & -1 & 1 \\ 1 & 1-k & -1 \\ 0 & -1 & 2-k \end{vmatrix} = 0.$$

Вычислим определитель, раскладывая по элементам первого столбца

$$(1-k)\cdot\left(2-k-2k+k^2-1\right)-1\cdot(-2+k+1)=0,$$

$$(1-k)\cdot\left(k^2-3k+1\right)+(1-k)=0,$$

$$(1-k)\cdot\left(k^2-3k+1+1\right)=0,\ (1-k)\cdot\left(k^2-3k+2\right)=0,$$

$$k_1=2,\ k_2=k_3=1.$$

При $k_1 = 2$ система (4.7) имеет вид

$$\begin{cases} -\alpha_1 - \beta_1 + \gamma_1 = 0, \\ \alpha_1 - \beta_1 - \gamma_1 = 0, \\ -\beta_1 = 0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \beta_1 = 0 \\ \alpha_1 - \gamma_1 = 0. \end{cases}$$

Полагая $\gamma_1 = 1$, находим $\alpha_1 = 1$. Получаем одно частное решение исходной системы:

$$y_1^{(1)} = e^{2x},\ y_2^{(1)} = 0,\ y_3^{(1)} = e^{2x}.$$

Двукратному корню $k = k_2 = k_3 = 1$ $(m = 2)$ соответствует решение вида

$$y_1^{(2,3)} = (A + Bx)e^x,$$

$$y_2^{(2,3)} = (C + Dx)e^x,$$

$$y_3^{(2,3)} = (E + Fx)e^x.$$

Подставляем эти выражения (решения) в уравнения исходной системы:

$$\begin{cases} B\cdot e^x + (A+Bx)e^x = (A+Bx)e^x - (C+Dx)e^x + (E+Fx)e^x, \\ D\cdot e^x + (C+Dx)e^x = (A+Bx)e^x + (C+Dx)e^x - (E+Fx)e^x, \\ F\cdot e^x + (E+Fx)e^x = -(C+Dx)e^x + 2(E+Fx)e^x. \end{cases}$$

После сокращения на $e^x \neq 0$ и группировки получим:

$$\begin{cases} (D-F)x + B + C - E = 0, \\ (B-F)x + A - D - E = 0, \\ (D-F)x + C + F - E = 0. \end{cases}$$

Эти равенства тождественно выполняются лишь в случае, когда

$$\begin{cases} D-F=0, \\ B-F=0 \\ B+C-E=0, \\ A-D-E=0, \\ C+F-E=0. \end{cases}$$

Выразим все коэффициенты через два из них $(m=2)$, через A и B.

Из второго уравнения имеем:

$$F=B.$$

С учетом первого уравнения, получаем

$$D=B.$$

Из четвертого уравнения находим

$$E=A-D, \text{ т.е. } E=A-B.$$

Из третьего уравнения:

$$C=E-B, \text{ т.е. } C=A-B-B=A-2B.$$

Коэффициенты A и B – произвольные.

Полагая $A=1$, $B=0$, находим:

$$C=1,\ D=0,\ E=1,\ F=0.$$

Полагая $A=0$, $B=1$, находим:

$$C=-2,\ D=1,\ E=-1,\ F=1.$$

Получаем два линейно независимых частных решения, соответствующих двукратному корню $k=1$:

$$y_1^{(2)}=e^x,\ y_2^{(2)}=e^x,\ y_3^{(2)}=e^x \text{ и}$$

$$y_1^{(3)}=xe^x,\ y_2^{(3)}=(-2+x)e^x,\ y_3^{(3)}=(-1+x)e^x.$$

Общее решение исходной системы имеет вид:

$$y_1=C_1e^{2x}+C_2e^x+C_3\,xe^x,$$

$$y_2=C_2e^x+C_3\,(x-2)e^x,$$

$$y_3=C_1e^{2x}+C_2e^x+C_3\,(x-1)e^x.$$

Задачи для самостоятельного решения

В задачах 217 – 226 решить систему дифференциальных уравнений

217. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt}=-7x+y, \\ \dfrac{dy}{dt}=-2x-5y; \end{cases}$

218. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt}=x-3y, \\ \dfrac{dy}{dt}=3x+y; \end{cases}$

219. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x + 5y, \\ \dfrac{dy}{dt} = -x - 3y; \end{cases}$

220. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 3x - y, \\ \dfrac{dy}{dt} = 4x - y; \end{cases}$

221. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x + 5y, \\ \dfrac{dy}{dt} = 7x + 3y; \end{cases}$

222. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 4x + 6y, \\ \dfrac{dy}{dt} = 4x + 2y; \end{cases}$

223. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x + 4y, \\ \dfrac{dy}{dt} = x + y; \end{cases}$

224. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x - 3y, \\ \dfrac{dy}{dt} = x + 5y; \end{cases}$

225. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 5x + 8y, \\ \dfrac{dy}{dt} = 3x + 3y; \end{cases}$

226. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 2x + 3y, \\ \dfrac{dy}{dt} = x + 4y. \end{cases}$

Индивидуальные задания

I. Решить систему дифференциальных уравнений двумя способами:
а) сведением к дифференциальному уравнению высшего порядка;
б) с помощью характеристического уравнения.

1. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 2x + y, \\ \dfrac{dy}{dt} = 3x + 4y. \end{cases}$

2. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x - y, \\ \dfrac{dy}{dt} = -4x + y. \end{cases}$

3. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -x + 8y, \\ \dfrac{dy}{dt} = x + y. \end{cases}$

4. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -2x - 3y, \\ \dfrac{dy}{dt} = -x. \end{cases}$

5. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x - y, \\ \dfrac{dy}{dt} = -4x + 4y. \end{cases}$

6. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -2x + y, \\ \dfrac{dy}{dt} = -3x + 2y. \end{cases}$

7. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 6x - y, \\ \dfrac{dy}{dt} = 3x + 2y. \end{cases}$

8. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 2x + y, \\ \dfrac{dy}{dt} = -6x - 3y. \end{cases}$

9. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = y, \\ \dfrac{dy}{dt} = x. \end{cases}$

10. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -x + 2y, \\ \dfrac{dy}{dt} = 3x + 4y. \end{cases}$

11. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -2x, \\ \dfrac{dy}{dt} = y. \end{cases}$

12. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 4x + 2y, \\ \dfrac{dy}{dt} = 4x + 6y. \end{cases}$

13. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 8x - 3y, \\ \dfrac{dy}{dt} = 2x + y. \end{cases}$

14. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 3x + y, \\ \dfrac{dy}{dt} = x + 3y. \end{cases}$

15. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 2x + 3y, \\ \dfrac{dy}{dt} = 5x + 4y. \end{cases}$

16. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x + 2y, \\ \dfrac{dy}{dt} = 3x + 6y. \end{cases}$

17. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 5x + 4y, \\ \dfrac{dy}{dt} = 4x + 5y. \end{cases}$

18. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x + 2y, \\ \dfrac{dy}{dt} = 4x + 3y. \end{cases}$

19. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x + 4y, \\ \dfrac{dy}{dt} = x + y. \end{cases}$

20. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 3x - 2y, \\ \dfrac{dy}{dt} = 2x + 8y. \end{cases}$

21. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x + 4y, \\ \dfrac{dy}{dt} = 2x + 3y. \end{cases}$

22. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 7x + 3y, \\ \dfrac{dy}{dt} = x + 5y. \end{cases}$

23. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 4x - y, \\ \dfrac{dy}{dt} = -x + 4y. \end{cases}$

24. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 2x + 8y, \\ \dfrac{dy}{dt} = x + 4y. \end{cases}$

25. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 5x + 8y, \\ \dfrac{dy}{dt} = 3x + 3y. \end{cases}$

26. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 3x + y, \\ \dfrac{dy}{dt} = 8x + y. \end{cases}$

27. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x - 5y, \\ \dfrac{dy}{dt} = -x - 3y. \end{cases}$

28. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -5x + 2y, \\ \dfrac{dy}{dt} = x - 6y. \end{cases}$

29. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 6x + 3y, \\ \dfrac{dy}{dt} = -8x - 5y. \end{cases}$

30. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 4x - 8y, \\ \dfrac{dy}{dt} = -8x + 4y. \end{cases}$

ТЕСТЫ

Вариант 1

1. Уравнение $xy' + y = 1$…является…

1) однородным относительно x и y дифференциальным уравнением первого порядка;

2) уравнением Бернулли;

3) уравнением с разделяющимися переменными;;

4) линейным неоднородным дифференциальным уравнением 2-го порядка.

2. Общее решение дифференциального уравнения $xy' + y = 0$ имеет вид…

1) $y = \frac{C}{x}, C \in R$; 2) $y = C - x, C \in R$;

3) $y = C \cdot x, C \in R$;; 4) $\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} = C, C \in R$.

3. Общее решение линейного однородного дифференциального уравнения второго порядка $y'' + 4y' + 3y = 0$ имеет вид…

1) $y = C_1 \cdot e^{-x} + C_2 \cdot e^{-3x}$; 2) $y = C_1 \cdot e^{x} + C_2 \cdot e^{3x}$;

3) $y = C_1 \cdot e^{-x} + C_2 \cdot e^{3x}$; 4) $y = C_1 \cdot e^{x} + C_2 \cdot e^{3x}$

4. Общий вид частного решения $\overline{y}$ линейного неоднородного дифференциального уравнения второго порядка $y'' - 4y' = 2$ будет выглядеть так…

1) $\overline{y} = 2A$; 2) $\overline{y} = A$; 3) $\overline{y} = A \cdot x^2$; 4) $\overline{y} = A \cdot x$.

5. Уравнение $y'' + 4y' + 5y = 0$ является…

1) линейным неоднородным дифференциальным уравнением второго порядка с постоянными коэффициентами;

2) уравнением Бернулли;

3) линейным однородным дифференциальным уравнением второго порядка с постоянными коэффициентами;

4) дифференциальным уравнением с разделяющимися переменными.

6. Решение задачи Коши $y' + y \cdot tgx = 0$, $y(0) = 1$ имеет вид…

1) $y = \sin x$; 2) $y = \cos x$; 3) $C = 1$; 4) $y = \cos x + 1$.

7. Дифференциальное уравнение $y' - \frac{y}{x} = \ln\frac{y}{x} - 2$ заменой $u = \frac{y}{x}$ приводится к уравнению с разделенными переменными, которое имеет вид…

1) $\frac{du}{\ln u + u - 2} = dx$; 2) $\frac{du}{\ln u + 2u - 2} = \frac{dx}{x}$;

3) $\frac{du}{\ln u - 2} = \frac{dx}{x}$; 4) $\frac{du}{\ln u} = \frac{dx}{x-2}$.

8. Общее решение системы дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = y \\ \frac{dy}{dt} = 3y - 2x \end{cases}$$ имеет вид…

1) $x = C_1 e^{-t} - C_2 e^{2t}$, $y = C_1 e^{-t} - 2C_2 e^{2t}$;

2) $x = C_1 e^{-t} + C_2 e^{-2t}$, $y = -C_1 e^{-t} - 2C_2 e^{-2t}$;

3) $x = C_1 e^{t} - C_2 e^{2t}$, $y = C_1 e^{t} + C_2 e^{2t}$;

4) $x = C_1 e^{t} + C_2 e^{2t}$, $y = C_1 e^{t} + 2C_2 e^{2t}$.

9. Установите соответствие между дифференциальным уравнением второго порядка и его общим решением

1) $y'' - 10y' + 26y = 0$;

2) $y'' - 3y' - 18y = 0$;

3) $y'' + 10y' + 26y = 0$;

A) $y = e^{-3x}\left(C_1 \cos 6x + C_2 \sin 6x\right)$;

B) $y = e^{-5x}\left(C_1 \cos x + C_2 \sin x\right)$;

C) $y = e^{5x}\left(C_1 \cos x + C_2 \sin x\right)$;

D) $y = C_1 \cdot e^{-3x} + C_2 \cdot e^{6x}$.

10. Однородным дифференциальным уравнением первого порядка являются дифференциальные уравнения…

1) $(2y+3)y' + x(y^2 - 1) = 0$; 2) $(x^2 - 2y^2)y' - y(x+y) = 0$;

3) $(x^2 - 2)y' - y^3(x+1) = 0$; 4) $(2x+3y)y' + y - 4x = 0$

Вариант 2

1. Уравнение $yy' - 1 = x$ …является…

1) однородным относительно x и y дифференциальным уравнением первого порядка;

2) уравнением Бернулли;

3) уравнением с разделяющимися переменными;

4) линейным неоднородным дифференциальным уравнением 2-го порядка.

2. Общее решение дифференциального уравнения $y' + 2xy = 0$ имеет вид…

1) $y = C - e^{x^2}, C \in R$; 2) $y = C - x^2, C \in R$;

3) $y = C \cdot e^{-x^2}, C \in R$; 4) $y = C + e^{-x^2}, C \in R$.

3. Общее решение линейного однородного дифференциального уравнения второго порядка $y'' + 4y' + 5y = 0$ имеет вид…

1) $y = e^{-2x}(C_1 \cdot \cos x + C_2 \cdot \sin x)$; 2) $y = e^{-x}(C_1 \cdot \cos 2x + C_2 \cdot \sin 2x)$;

3) $y = C_1 \cdot e^{-5x} + C_2 \cdot e^{x}$; 4) $y = e^{2x}(C_1 \cdot \cos x + C_2 \cdot \sin x)$.

4. Общий вид частного решения $\overline{y}$ линейного неоднородного дифференциального уравнения второго порядка $y'' - y = 2x$ будет выглядеть так…

1) $\overline{y} = 2A \cdot x$; 2) $\overline{y} = A \cdot x + B$; 3) $\overline{y} = A \cdot x$; 4) $\overline{y} = A \cdot x^2 + B \cdot x$.

5. Уравнение $y'' - 4y' + 3y = x$ является…

1) линейным неоднородным дифференциальным уравнением второго порядка с постоянными коэффициентами;

2) уравнением Бернулли;

3) линейным однородным дифференциальным уравнением второго порядка с постоянными коэффициентами;

4) дифференциальным уравнением с разделяющимися переменными.

6. Частное решение дифференциального уравнения $y' = \dfrac{1}{\cos^2 2x}$, удовлетворяющее условию $y\left(\dfrac{\pi}{8}\right) = 0$ имеет вид…

1) $y = 2\,\mathrm{tg}\,2x - 2$; 2) $y = \dfrac{1}{2}\mathrm{tg}\,2x + \dfrac{1}{2}$;

3) $y=\frac{1}{2}\operatorname{tg}2x-\frac{1}{2}$; 4) $y=\operatorname{tg}2x-1$.

7. Дифференциальное уравнение $(2x-y)dx+(x+2y)dy=0$ заменой $u=\frac{y}{x}$ приводится к уравнению с разделенными переменными, которое имеет вид…

1) $\frac{1+2u}{3+u}du=dx$; 2) $\frac{1+2u}{2-u}du=dx$;

3) $\frac{1+2u}{1+u^2}du=-\frac{2}{x}dx$; 4) $\frac{1+2u}{1-2u+u^2}du=-\frac{2}{x}dx$.

8. Общее решение системы дифференциальных уравнений

$$\begin{cases}\frac{dx}{dt}=2x+3y\\ \frac{dy}{dt}=x\end{cases}$$ имеет вид…

1) $x=C_1e^t+3C_2e^{3t}$, $y=C_1e^t+C_2e^{3t}$;

2) $x=C_1e^{-t}+C_2e^{3t}$, $y=C_1e^{-t}+C_2e^{3t}$;

3) $x=-C_1e^{-t}+C_2e^{3t}$, $y=C_1e^{-t}+C_2e^{3t}$;

4) $x=C_1e^t-3C_2e^{-3t}$, $y=C_1e^t+C_2e^{-3t}$.

9. Установите соответствие между дифференциальным уравнением второго порядка и его общим решением

1) $y''+2y'-15y=0$; A) $y=e^x(C_1\cos4x+C_2\sin4x)$;

2) $y''-2y'-15y=0$; B) $y=C_1\cdot e^{-5x}+C_2\cdot e^{3x}$;

3) $y''-8y'+17y=0$; C) $y=C_1\cdot e^{-3x}+C_2\cdot e^{5x}$;

D) $y=e^{4x}(C_1\cos x+C_2\sin x)$.

10. Дифференциальным уравнением первого порядка с разделяющимися переменными являются дифференциальные уравнения….

1) $\operatorname{tg}x\left(y^2+1\right)y'+y\left(\sqrt{x}+1\right)=0$; 2) $y'=\frac{x}{\sqrt{y(x+y)}}$;

3) $\left(x^2+2xy+2y^2\right)y'+x^2=0$; 4) $x(y+1)y'+y\sin x=0$.

Вариант 3

1. Уравнение $y' + \ln\frac{y}{x} = 1$ является…

1) однородным относительно x и y дифференциальным уравнением первого порядка;

2) уравнением Бернулли;

3) уравнением с разделяющимися переменными;

4) линейным неоднородным дифференциальным уравнением 2-го порядка.

2. Общее решение дифференциального уравнения $\frac{1}{2}y' - xy = x$ имеет вид…

1) $y = Cx^2 - 1, C \in R$; 2) $y = C - e^{x^2}, C \in R$;

3) $y = Ce^{x^2} - 1, C \in R$; 4) $y = C + e^{x^2}, C \in R$.

3. Общее решение линейного однородного дифференциального уравнения второго порядка $y'' + 4y' + 4y = 0$ имеет вид…

1) $y = e^{-2x}(C_1x + C_2)$; 2) $y = e^{2x}(C_1x + C_2)$;

3) $y = C_1xe^{2x} + C_2$; 4) $y = C_1 \cdot e^{-2x} + C_2$.

4. Общее решение линейного неоднородного дифференциального уравнения второго порядка $y'' - 6y' + 9y = 3e^{-x}$ имеет вид…

1) $y = C_1e^{-3x} + C_2xe^{-3x} + \frac{3}{16}e^{-x}$; 2) $y = C_1e^{3x} + C_2e^{3x} + \frac{3}{16}e^{-x}$;

3) $y = C_1e^{3x} + C_2xe^{3x} + \frac{3}{16}e^{-x}$; 4) $y = C_1e^{3x} + C_2xe^{3x} + \frac{3}{4}e^{-x}$.

5. Дифференциальное уравнение $\sqrt{x^6 + x^{\alpha}y^2} - (x^2y - 4y^2x) \cdot y' = 0$ будет однородным дифференциальным уравнением первого порядка при α равном…

1) 4; 2) 6; 3) 0; 4) 2.

6. Уравнение $y'' - 4y' + 5y = 2x$ является…

1) линейным неоднородным дифференциальным уравнением второго порядка с постоянными коэффициентами;

2) линейным дифференциальным уравнением первого порядка;

3) линейным однородным дифференциальным уравнением второго порядка с постоянными коэффициентами;

4) дифференциальным уравнением с разделяющимися переменными.

7. Решение задачи Коши $xy' + y = 3$, $y(1) = 0$ имеет вид…

1) $y = 0$; 2) $y = \dfrac{3(x-1)}{x}$;

3) $y = 3(x-1)$; 4) $y = \dfrac{3(x+1)}{x}$.

8. Общее решение системы дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x + 5y \\ \dfrac{dy}{dt} = -x - 3y \end{cases} \quad \text{имеет вид}$$

1) $x = e^{t}\left((2C_1 + C_2)\cos t + (C_1 + 2C_2)\sin t\right),\ y = e^{t}\left(C_1 \cos t + C_2 \sin t\right)$;

2) $x = e^{t}\left((2C_1 + C_2)\cos t - (C_1 + 2C_2)\sin t\right),\ y = e^{t}\left(C_1 \cos t - C_2 \sin t\right)$;

3) $x = e^{-t}\left((-2C_1 - C_2)\cos t + (C_1 - 2C_2)\sin t\right),\ y = e^{-t}\left(C_1 \cos t + C_2 \sin t\right)$;

4) $x = e^{-t}\left((2C_1 + C_2)\cos t + (C_1 + 2C_2)\sin t\right),\ y = e^{-t}\left(C_1 \cos t - C_2 \sin t\right)$.

9. Установите соответствие между дифференциальным уравнением второго порядка и его общим решением

1) $y'' + 8y' + 16y = 0$; A) $y = C_1 \cdot e^{-2x} + C_2 \cdot e^{3x}$;

2) $y'' - 8y' + 16y = 0$; B) $y = (C_1 + C_2 x) \cdot e^{4x}$;

3) $y'' + 4y' + 13y = 0$; C) $y = e^{-2x}\left(C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x\right)$;

D) $y = (C_1 + C_2 x) \cdot e^{-4x}$.

10. Уравнением Бернулли являются дифференциальные уравнения…

1) $(1 + x^2)y' - y\sin x + \dfrac{x+4}{y^2} = 0$; 2) $y' = \dfrac{2x+1}{\sqrt{x(y+2)}}$;

3) $xy' - y\sqrt{x+2} + \dfrac{e^x}{y} = 0$; 4) $(5x - 2y)y' + \dfrac{x+2y}{3} = 0$.

Вариант 4

1. Уравнение $yy' - 2 = x$ является…

1) однородным относительно x и y дифференциальным уравнением первого порядка;

2) линейным однородным дифференциальным уравнением второго порядка с постоянными коэффициентами;

3) уравнением с разделяющимися переменными;

4) линейным дифференциальным уравнением первого порядка.

2. Общее решение дифференциального уравнения $y' - \dfrac{3y}{x} = x$ имеет вид…

1) $y = x^2 + Cx, C \in R$; 2) $y = Cx^3 + x^2, C \in R$;

3) $y = Cx^3 - x^2, C \in R$; 4) $y = -x^2 + C, C \in R$.

3. Общее решение линейного однородного дифференциального уравнения второго порядка $y'' - 2y' + 10y = 0$ имеет вид…

1) $y = e^{3x}\left(C_1 \cdot \cos x + C_2 \cdot \sin x\right)$;

2) $y = e^{x}\left(C_1 \cdot \cos 3x + C_2 \cdot \sin 3x\right)$;

3) $y = e^{-2x}\left(C_1 \cdot \cos 10x + C_2 \cdot \sin 10x\right)$;

4) $y = e^{-x}\left(C_1 \cdot \cos 3x + C_2 \cdot \sin 3x\right)$.

4. Общий вид частного решения $\overline{y}$ линейного неоднородного дифференциального уравнения второго порядка $y'' - 5y' = x^2 + 1$ будет выглядеть так…

1) $\overline{y} = A + Be^{5x}$; 2) $\overline{y} = Ax^3 + Bx^2 + Cx$;

3) $\overline{y} = Ax^2 + Bx + C$; 4) $\overline{y} = Ax^2 + B$.

5. Дифференциальное уравнение $\sqrt{x^4 + y^4} \cdot y' - \left(x^2 y^{\alpha} - 4xy\right) = 0$ будет однородным дифференциальным уравнением первого порядка при α равном…

1) 1; 2) 0; 3) 4; 4) 2.

6. Уравнение $y'' + 3y' + 4y = 0$ является…

1) линейным неоднородным дифференциальным уравнением второго порядка с постоянными коэффициентами;

2) линейным дифференциальным уравнением первого порядка;

3) линейным однородным дифференциальным уравнением второго порядка с постоянными коэффициентами;

4) дифференциальным уравнением с разделяющимися переменными.

7. Решение задачи Коши $y' \cdot \cos^2 x + y = tgx$, $y(0) = -1$ имеет вид…

1) $y = tgx + e^{-tgx}$; 2) $y = e^{tgx} - 1$;

3) $y = tgx - 1 + e^{-tgx}$; 4) $y = tgx - 1$.

8. Общее решение системы дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 3x + y \\ \dfrac{dy}{dt} = x + 3y \end{cases}$$ имеет вид

1) $x = -C_1 e^{2t} + C_2 e^{4t}$, $y = C_1 e^{2t} + C_2 e^{4t}$;

2) $x = C_1 e^{2t} - C_2 e^{4t}$, $y = C_1 e^{2t} + C_2 e^{4t}$;

3) $x = -C_1 e^{4t} + C_2 e^{2t}$, $y = C_1 e^{4t} + C_2 e^{2t}$;

4) $x = C_1 e^{4t} - C_2 e^{2t}$, $y = C_1 e^{4t} - C_2 e^{2t}$.

9. Установите соответствие между дифференциальным уравнением второго порядка и его общим решением

1) $y'' + 5y' - 6y = 0$; A) $y = C_1 \cdot e^{-x} + C_2 \cdot e^{6x}$;

2) $y'' - 5y' - 6y = 0$; B) $y = C_1 \cdot e^{-5x} + C_2 \cdot e^{x}$;

3) $y'' - 4y' - 5y = 0$; C) $y = C_1 \cdot e^{-x} + C_2 \cdot e^{5x}$;

D) $y = C_1 \cdot e^{-6x} + C_2 \cdot e^{x}$.

10. Однородным дифференциальным уравнением первого порядка являются дифференциальные уравнения…

1) $y\,dy + (x - 2y)\,dx = 0$; 2) $(y + xy)dx + (x - xy)dy = 0$;

3) $y\,y' + x = 1$; 4) $y - x\,y' = y \ln \dfrac{x}{y}$.

Вариант 5

1. Уравнение $2y' + \ln\frac{y}{x} = 3$ является…

1) однородным относительно x и y дифференциальным уравнением первого порядка;

2) уравнением Бернулли;

3) уравнением с разделяющимися переменными;

4) линейным дифференциальным уравнением первого порядка.

2. Общее решение дифференциального уравнения $y'x + y = x^2$ имеет вид…

1) $y = \frac{x^2}{3} + \frac{C}{x}, C \in R$; 2) $y = x^2 - Cx, C \in R$;

3) $y = -\frac{x^2}{3} + \frac{C}{x}, C \in R$; 4) $y = x^2 + C, C \in R$.

3. Общее решение линейного однородного дифференциального уравнения второго порядка $y'' + 4y' + 4y = 0$ имеет вид…

1) $y = (C_1 + C_2 x)e^{-2x}$; 2) $y = e^{-2x}(C_1 \cdot \cos 2x + C_2 \cdot \sin 2x)$;

3) $y = C_1 \cdot \sin 2x + C_2 \cdot \cos 2x$; 4) $y = (C_1 + C_2 x)e^{2x}$.

4. Общий вид частного решения $\overline{y}$ линейного неоднородного дифференциального уравнения второго порядка $y'' - 2y' + 5y = \sin 2x$ будет выглядеть как…

1) $\overline{y} = e^x(A\sin 2x + B\cos 2x)$; 2) $\overline{y} = A\sin 2x + B\cos 2x$;

3) $\overline{y} = A + B\sin 2x$; 4) $\overline{y} = x(A\sin 2x + B\cos 2x)$.

5. Дифференциальное уравнение $x^\alpha - 2x^2y^2 + (xy - 3y) \cdot y' = 0$ будет уравнением с разделяющимися переменными при значении α, равном…

1) 1; 2) 4; 3) 2; 4) 0.

6. Уравнение $y'' - 4y' + 5y = 2x$ является…

1) линейным неоднородным дифференциальным уравнением второго порядка с постоянными коэффициентами;

2) линейным дифференциальным уравнением первого порядка;

3) линейным однородным дифференциальным уравнением второго порядка с постоянными коэффициентами;

4) дифференциальным уравнением с разделяющимися переменными.

7. Решение задачи Коши $y' - \frac{2y}{x} = x^3$, $y(0) = \frac{1}{2}$ имеет вид…

1) $y = \frac{x^4}{2} + \frac{31x^2}{8}$;

2) $y = \frac{x^4}{3} + \frac{x}{6}$;

3) $y = \left(\frac{x^2}{2} + C\right)x^2$;

4) $y = \frac{x^4}{2}$.

8. Общее решение системы дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 3x + y \\ \frac{dy}{dt} = 8x + y \end{cases}$$ имеет вид

1) $x = -\frac{1}{4}C_1e^{t} + \frac{3}{4}C_2e^{-5t}$, $y = C_1e^{t} + C_2e^{-5t}$;

2) $x = -\frac{1}{4}C_1e^{-t} + \frac{3}{4}C_2e^{5t}$, $y = C_1e^{-t} + C_2e^{5t}$;

3) $x = -\frac{1}{4}C_1e^{-5t} - \frac{3}{4}C_2e^{t}$, $y = C_1e^{-5t} - C_2e^{t}$;

4) $x = \frac{1}{4}C_1e^{-5t} + \frac{3}{4}C_2e^{t}$, $y = C_1e^{-5t} - C_2e^{t}$.

9. Установите соответствие между дифференциальным уравнением второго порядка и его общим решением

1) $y'' - 3y' - 4y = 0$;

2) $y'' + 3y' - 4y = 0$;

3) $y'' + 14y' + 13y = 0$;

A) $y = C_1 \cdot e^{-4x} + C_2 \cdot e^{x}$;

B) $y = C_1 \cdot e^{-x} + C_2 \cdot e^{-13x}$;

C) $y = e^{-2x}\left(C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x\right)$;

D) $y = C_1 \cdot e^{-x} + C_2 \cdot e^{4x}$.

10. Линейным дифференциальным уравнением первого порядка являются дифференциальные уравнения…

1) $y\,y' + x = 1$;

2) $y' - y \operatorname{ctg} x = \sin x$;

3) $2\left(1 + e^{x}\right)y\,y' = e^{x}$;

4) $y\,dx - \left(3x + 1 + \ln y\right)dy = 0$.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В различных областях человеческой деятельности возникает большое число задач, которые сводятся к решению дифференциальных уравнений. Характер этих задач и методику их решения схематично можно описать следующим образом. Происходит некоторый процесс, например экономический, социальный, химический, физический. Если имеется достаточно полная информация о течении этого процесса, то можно попытаться построить его математическую модель. Во многих случаях такой моделью служит дифференциальное уравнение, одним из решений которого является искомая функциональная характеристика процесса. Дифференциальное уравнение моделирует процесс в том смысле, что оно описывает эволюцию процесса, характер происходящих с материальной системой изменений, возможные варианты этих изменений в зависимости от первоначального состояния системы.

Поэтому усвоение методов решения обыкновенных дифференциальных уравнений способствует формированию системы знаний и операционных умений, используемых для решения задач, возникающих при выполнении основных видов профессиональной деятельности и развитию личностных качеств, необходимых для высококвалифицированных специалистов.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Берман, Г.Н. Сборник задач по курсу математического анализа [Текст]: учеб. пособие / Г.Н.Берман. – СПб.: Изд-во «Профессия», 2001. – 432 с.
2. Бугров, Я.С., Никольский, С.М. Высшая математика в 3 т. Т.2: Дифференциальное и интегральное исчисление [Текст]: учеб. для вузов / Я.С. Бугров, С.М. Никольский; под ред. В.А.Садовничего. – М.: Дрофа, 2004. – 512 с.
3. Пискунов, Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисления для втузов. Т.2 [Текст]: учеб. для втузов / Н.С.Пискунов. – М.: Наука, 1985. – 560 с.
4. Понтрягин, Л.С. Дифференциальные уравнения и их приложения [Текст] /Л.С.Понтрягин. – М.: Наука, 1998. – 208 с.
5. Колесников, А.Н. Краткий курс математики для экономистов [Текст]: учеб. пособие / А.Н.Колесников. – М.: ИНФРА-М, 2001. – 208 с.
6. Кремер, Н.Ш. Высшая математика для экономистов [Текст] / Н.Ш. Кремер. – М.:ЮНИТИ, 2003. – 471 с.
7. Сборник задач по высшей математике для экономистов [Текст]: учеб. пособие / Под ред. В.И.Ермакова. – М.: ИНФРА-М, 2003. – 575 с.
8. Филиппов, А.Ф. Сборник задач по дифференциальным уравнениям [Текст]: учеб. пособие /А.Ф.Филиппов. – Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика» , 2000. – 176 с.
9. Шипачев, В.С. Высшая математика [Текст]: учеб. для вузов / В.С.Шипачев. – М.: Высш. шк., 2005. – 479 с.
10. Шипачев, В.С. Задачник по высшей математике [Текст]: учеб. пособие / В.С.Шипачев. – М.: Высш. шк., 2003. – 304 с.

О Г Л А В Л Е Н И Е

Учебное издание

Куимова Елена Ивановна
Ячинова Светлана Николаевна
Круглова Альбина Николаевна

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ
ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ
Учебное пособие

В авторской редакции
Верстка Н.А. Сазонова

Подписано в печать 2.06.15. Формат 60×84/16.
Бумага офисная «Снегурочка». Печать на ризографе.
Усл.печ.л. 6,045. Уч.-изд.л. 6,5. Тираж 80 экз.
Заказ № 233.

Издательство ПГУАС.
440028, г. Пенза, ул. Германа Титова, 28.