

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«Пензенский государственный университет
архитектуры и строительства»
(ПГУАС)

Н.А. Очкина

ФИЗИКА

КОЛЕБАНИЯ И ВОЛНЫ

Рекомендовано Редсоветом университета
в качестве учебного пособия
для студентов, обучающихся по направлению
21.03.02 «Землеустройство и кадастры»

Под общей ред. доктора технических наук,
профессора Г.И. Грейсуха

Пенза 2015

УДК 534+537.8

ББК 22.3 я73

О-95

Рецензенты: кандидат технических наук, доцент
С.В. Тертычная (ПГУ);
кандидат физико-математических
наук, доцент П.П. Мельниченко
(ПГУАС)

Очкина Н.А.

Физика. Колебания и волны: учеб. пособие / Н.А. Очкина; под
О-95 общ. ред. Г.И. Грейсуха. – Пенза: ПГУАС, 2015. – 184 с.

Рассмотрены основы теории колебательных и волновых процессов. Показана универсальность законов колебательных и волновых процессов. Приведен математический аппарат для анализа различных колебательных и волновых процессов в физике и технике. Представлены методы решения практических задач и даны задачи для самостоятельного решения двух уровней сложности, что позволяет осуществлять процесс обучения на основе компетентностного, личностно-ориентированного подхода.

Учебное пособие подготовлено на кафедре «Физика и химия» и предназначено для студентов, обучающихся по направлению 21.03.02 «Землеустройство и кадастры».

© Пензенский государственный университет
архитектуры и строительства, 2015

© Очкина Н.А., 2015

ПРЕДИСЛОВИЕ

Настоящее учебное пособие разработано в соответствии с программой курса «Физика» ФГОС ВПО третьего поколения для направления 21.03.02 «Землеустройство и кадастры» и имеет целью совершенствование компетенций как в процессе овладения студентами знаниями о физических явлениях в вузе, так и в последующей профессиональной и научной деятельности.

Пособие, посвященное изучению одной из частей курса физики «Колебания и волны», содержит пять глав:

1. Механические колебания.
2. Основы термодинамики
3. Механические волны.
4. Электромагнитные волны.
5. Волновые свойства света.

В первой части каждой из глав рассмотрены основы теории колебательных или волновых процессов. Во второй части изложена методика и приведены примеры решения задач. Третья часть касается самостоятельной работы студентов и включает задачи двух уровней сложности: среднего и достаточного.

Таким образом, учебное пособие позволяет осуществлять процесс обучения и учения на основе компетентностного, личностно-ориентированного подхода.

Систематическая работа с пособием, как в аудитории, так и во внеаудиторное время, способствует формированию у студентов:

знаний фундаментальных законов физики;

умений использовать основные законы физики в профессиональной деятельности, применять методы моделирования для теоретического и экспериментального исследований;

Работа с учебным пособием в аудитории под руководством преподавателя в коллективе с другими студентами позволяет **овладеть** культурой мышления, способностью к обобщению, анализу, восприятию, системати-

зации информации, постановке цели и выбору путей её достижения; умением логически верно, аргументировано и ясно строить устную и письменную речь; методами экспериментального исследования в физике, навыками ведения физического эксперимента; способностью использовать приемы первой помощи, методы защиты в условиях чрезвычайных ситуаций (ОК-9).

Внеаудиторная работа (самостоятельное решение задач различного уровня сложности) позволяет *овладеть* способностью к самоорганизации и самообразованию; навыками работы с дополнительной учебной, научной и справочной литературой; осуществлять самооценку и самоанализ на основе самопроверки в процессе выполнения заданий.

В тексте учебного пособия наиболее важные положения и термины, а также формулировки законов и формулы выделены **жирным шрифтом** и *курсивом*. Это способствует более эффективному усвоению материала студентами.

ВВЕДЕНИЕ

Теория колебаний и волн является областью науки, исследующей колебательные и волновые явления разного вида. В различных колебательных и волновых процессах обнаруживаются одни и те же закономерности, которые описываются одними и теми же математическими и физическими моделями. Колебательная и волновая теория устанавливает общие свойства колебательных и волновых процессов в реальных системах независимо от свойств конкретной системы и определяет связь между параметрами системы и её колебательными (волновыми) характеристиками, связанными с проявлением её природы (физической, химической и пр.). Поэтому результаты, полученные при исследовании колебаний и волн, например, в механике, могут быть перенесены в оптику или радиотехнику.

Изучение любого волнового или колебательного процесса начинается с идеализации реальной системы, т.е. с построения модели и составления для нее соответствующих уравнений. Идеализации одних и тех же систем могут быть различны в зависимости от того, какое явление исследуется. Справедливость принятых идеализаций оценивается путем сравнения результатов теории, построенной на основании данной модели, с результатами анализа более общей модели или с проведением реальной системы – экспериментом.

Методы колебательной и волновой теории – это методы анализа уравнений, описывающих модели реальных систем. Большинство из них совпадают с методами качественной теории дифференциальных уравнений.

Изучение колебаний на разных этапах играло стимулирующую роль в развитии науки. Так, исследования колебаний маятника дали возможность Г. Галилею более точно измерить промежутки времени (1636 г.), изучение законов обращения планет вокруг Солнца привело И. Ньютона к созданию начал классической механики (1686 г.), Д. Максвелл, следуя М. Фарадею, связал свойства электрических колебаний с волновыми характеристиками (1864 г.). В результате корпускулярно-волнового рассмотрения материи появилась квантовая механика.

По мере изучения колебаний различной физической природы возникло убеждение о возможности общего подхода к ним, основанного на свойствах и закономерностях колебательных процессов вообще. В результате появилась теория колебаний и волн, которая, основываясь на математических и физических моделях, устанавливает общие свойства колебательных и волновых процессов в реальных системах.

I. КОЛЕБАНИЯ

1. МЕХАНИЧЕСКИЕ КОЛЕБАНИЯ

1.1. Общие сведения

Колебаниями называются процессы движения или изменения состояния, характеризующиеся определенной повторяемостью во времени. Например, колеблется излучение звезд, в недрах которых происходят циклические ядерные реакции; движение Луны вызывает периодически повторяющиеся приливы и отливы на Земле. Другими примерами часто наблюдаемых в окружающем нас мире периодически повторяющихся процессов являются: восход и заход солнца, волнение на море, колебания маятника часов, переменный электрический ток, электромагнитные волны, колебания молекул в твердом теле и т. д.

Колебательные явления обладают общими чертами и даже подчиняются одинаковым закономерностям, несмотря на то, что могут иметь совершенно разную физическую природу. Самая характерная черта колебательных движений состоит в том, что они многократно повторяются через определенные промежутки времени. Универсальность законов колебательных процессов позволяет с единой точки зрения рассматривать различные виды колебаний, встречающиеся в разнообразных физических явлениях и технических устройствах.

Единый подход к изучению различных колебаний позволяет глубже проанализировать любое конкретное явление, выявить аналогию между совершенно разными по всей природе явлениями, найти общий язык для их описания и, в конечном счете, почувствовать единство физического мира.

В зависимости от вида повторяющегося процесса различают: *механические, электромагнитные, электромеханические* и т.д. колебания.

Колебания широко распространены в природе и технике. Во многих случаях они играют отрицательную роль. Колебания моста, возникающие из-за толчков, сообщаемых ему колесами поезда при прохождении через стыки рельсов, колебания (вибрации) корпуса корабля, вызванные вращением гребного винта, вибрации крыльев самолета – могут привести к катастрофическим последствиям. В подобных случаях задача заключается в том, чтобы предотвратить возникновение колебаний или, во всяком случае, воспрепятствовать тому, чтобы амплитуда колебаний достигла опасной величины.

Вместе с тем колебательные процессы лежат в самой основе различных отраслей техники. Так, например, на колебательных процессах основана вся радиотехника.

В зависимости от характера воздействия на колеблющуюся систему различают *свободные* (или *собственные*) колебания, *вынужденные* колебания, *автоколебания* и *параметрические* колебания.

Свободными, или *собственными*, называют колебания, которые происходят в системе, предоставленной самой себе после того, как ей был сообщен толчок, либо она была выведена из положения равновесия. Примером могут служить колебания шарика, подвешенного на нити (маятник). Для того чтобы вызвать колебания, можно либо толкнуть шарик, либо, отведя в сторону, отпустить его.

Вынужденными называются колебания, в процессе которых колебательная система подвергается воздействию внешней периодически изменяющейся силы. Примером служат колебания моста, возникающие при прохождении по нему людей, шагающих в ногу.

Автоколебания, как и вынужденные колебания, сопровождаются воздействием на колеблющуюся систему внешних сил, однако моменты времени, когда осуществляются эти воздействия, задаются самой колебательной системой – система сама управляет внешним воздействием. Примером автоколебательной системы являются часы, в которых маятник получает толчки за счет энергии поднятой гири или закрученной пружины, причем эти толчки происходят в моменты прохождения маятника через среднее положение.

При *параметрических* колебаниях за счет внешнего воздействия происходит периодическое изменение какого-либо параметра системы, например, длины нити, к которой подвешен шарик, совершающий колебания.

Простейшими являются *гармонические колебания*, т.е. такие колебания, при которых колеблющаяся величина (например, отклонение маятника от положения равновесия) изменяется во времени по закону синуса или косинуса. Изучение гармонических колебаний важно по следующим причинам:

- во-первых, колебания в природе и в технике часто имеют характер, очень близкий к гармоническим;
- во-вторых, периодические процессы иной формы (с другой зависимостью от времени) могут быть представлены как наложение нескольких гармонических колебаний.

Любой колебательный процесс характеризуется мгновенным значением колеблющейся величины s и ее максимальным значением s_0 (амплитудой).

Колебания, происходящие с постоянной амплитудой, называют *незатухающими*, а колебания с уменьшающейся амплитудой – *затухающими*.

Минимальный промежуток времени T , через который повторяется значение колеблющейся величины, называют *периодом* колебаний.

Частотой ν называют число полных колебаний, совершаемых за единицу времени,

$$\nu = \frac{1}{T}.$$

Частота колебаний измеряется в герцах. Герц – это частота колебаний, период которых равен 1 секунде, т.е. $1 \text{ Гц} = 1 \text{ с}^{-1}$.

Циклической, или круговой, частотой периодических колебаний называется число полных колебаний за время равное 2π секунд

$$\omega = 2\pi\nu = \frac{2\pi}{T}.$$

Циклическую частоту ω выражают в радианах на секунду (рад/с).

1.2. Свободные незатухающие колебания

1.2.1. Кинематика и динамика гармонических колебаний

Дифференциальное уравнение свободных незатухающих колебаний

$$\frac{d^2s}{dt^2} + \omega_0^2 s = 0, \quad (1)$$

где s – колеблющаяся величина; $\omega_0 = 2\pi/T$ – циклическая частота колебаний ($T = 1/\nu$ – период колебаний, ν – частота колебаний).

Решение уравнения (1) имеет вид

$$s = A \cos(\omega_0 t + \varphi_0),$$

где s – значение колеблющейся величины в момент времени t ; A – амплитуда колебаний.

Аргумент косинуса $\varphi = (\omega_0 t + \varphi_0)$ называют *фазой колебаний*. Фаза колебаний определяет значение колеблющейся величины в момент времени t .

φ_0 – начальная фаза колебаний. Начальная фаза определяет значение колеблющейся величины в момент времени $t_0 = 0$ с.

Фаза колебаний представляет собой угловую меру времени, прошедшего от начала колебаний. Если начальная фаза колебаний $\varphi_0 = 0$, то фазе $\varphi = 2\pi$ соответствует $t = T$, фазе $\pi/2$ соответствует $t = T/4$ и т.д.

Если положение состояния колеблющейся системы в любой момент времени может быть описано единственным параметром, то система имеет одну степень свободы (так, например, колебания пружинного маятника, происходящие в заданной плоскости, могут быть описаны изменением одной координаты x).

В этом случае дифференциальное уравнение свободных незатухающих колебаний имеет вид

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega_0^2 x = 0,$$

где x – смещение груза от положения равновесия в момент времени t .

$$x = A \cos(\omega_0 t + \varphi_0).$$

График свободных незатухающих колебаний величины x , происходящих по закону косинуса, представлен на рис. 1.

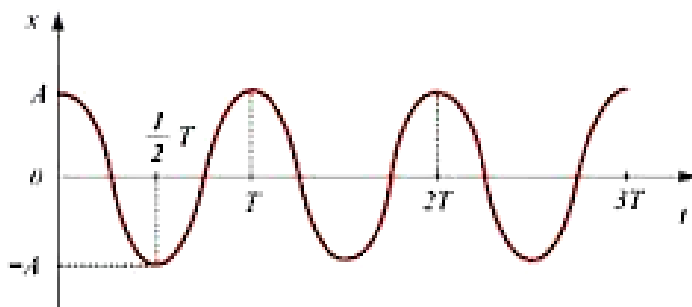


Рис. 1

Мгновенная скорость точки, совершающей гармонические колебания,

$$v = \frac{dx}{dt} = -A\omega_0 \sin(\omega_0 t + \varphi_0) = A\omega_0 \cos(\omega_0 t + \varphi_0 + \pi/2), \quad (2)$$

где $A\omega_0 = v_{\max}$ – амплитуда скорости.

Мгновенное ускорение точки, совершающей гармонические колебания,

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2} = -A\omega_0^2 \cos(\omega_0 t + \varphi_0) = A\omega_0^2 \cos(\omega_0 t + \varphi_0 + \pi), \quad (3)$$

где $A\omega_0^2 = a_{\max}$ – амплитуда ускорения.

Из формул (2) и (3) следует, что фаза скорости v отличается от фазы величины x на $\pi/2$, а фаза ускорения a отличается от фазы величины x на π . Следовательно, в моменты времени, когда $x = 0$, v приобретает наибольшее значение, когда же x достигает максимального отрицательного значения, то a приобретает наибольшее положительное значение (рис. 2).

Сила, вызывающая гармонические колебания,

$$F = ma = -mA\omega_0^2 \cos(\omega_0 t + \varphi_0) = -m\omega_0^2 x,$$

где $mA\omega_0^2 = F_{\max}$ – амплитуда силы; m – масса колеблющейся точки.

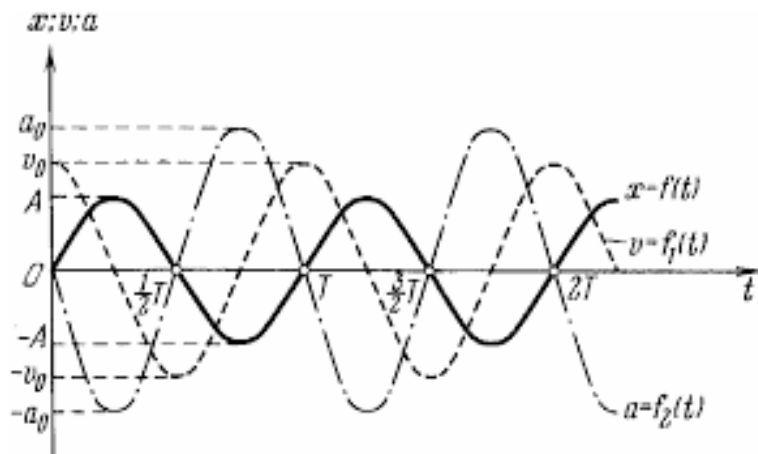


Рис.2

1.2.2. Энергетические превращения при гармонических колебаниях

Рассмотрим механическую систему, имеющую одну степень свободы, т.е. положение этой системы может быть задано с помощью одной величины x . Потенциальная энергия системы

$$U = U(x). \quad (4)$$

Допустим, что система обладает положением устойчивого равновесия. В этом случае функция $U(x)$ имеет минимум.

Разложим функцию $U(x)$ в ряд по степеням x , причем ограничимся рассмотрением малых колебаний (значение x мало), так что высшими степенями x можно будет пренебречь. По формуле Маклорена

$$U(x) = U(0) + U'(0)x + (1/2)U''(0)x^2 + \dots \quad (5)$$

Так как при $x = 0$, $U(x) = 0$, $U'(x) = 0$, а $U''(x) > 0$, то

$$U(x) = \frac{1}{2}kx^2, \quad (6)$$

где $U''(0) = k (k > 0)$. Выражение (6) идентично выражению для потенциальной энергии упруго деформированной пружины. Сила, действующая на систему:

$$F_x = -\frac{dU}{dx} = -kx. \quad (7)$$

Сила называется *квазиупругой*. Она всегда направлена к положению равновесия, иногда ее называют *возвращающей*.

Квазиупругая сила является консервативной. Поэтому полная энергия гармонических колебаний должна оставаться постоянной (рис. 3).

В процессе колебаний происходит превращение кинетической энергии в потенциальную и обратно, причем в моменты наибольшего отклонения от положения равновесия полная энергия E равна только потенциальной энергии, которая достигает своего наибольшего значения $E_{\Pi(\max)}$

$$E = E_{\Pi(\max)} = U = \frac{kA^2}{2}; \quad (8)$$

при прохождении же системы через положение равновесия полная энергия равна только кинетической энергии, которая в эти моменты достигает своего наибольшего значения $E_{K(\max)}$

$$E = E_{K(\max)} = K = \frac{m v_{\max}^2}{2} = \frac{mA^2 \omega_0^2}{2} \quad (9)$$

(выше было показано, что амплитуда скорости равна $A\omega_0$). Выражения (8) и (9) равны друг другу, так как $m\omega_0^2 = k$.

Кинетическая энергия

$$E_K = \frac{mv^2}{2} = \frac{mA^2 \omega_0^2}{2} \sin^2(\omega_0 t + \varphi_0). \quad (10)$$

Потенциальная энергия

$$E_{\Pi} = \frac{kx^2}{2} = \frac{kA^2}{2} \cos^2(\omega_0 t + \varphi_0). \quad (11)$$

Сложив (10) с (11) и приняв во внимание, что $m\omega_0^2 = k$, получим выражение для полной энергии

$$E = E_K + E_{\Pi} = \frac{kA^2}{2} = \frac{mA^2 \omega_0^2}{2}. \quad (12)$$

Из (8), (9) и (12) следует, что полная энергия гармонических колебаний остается постоянной с течением времени.

Используя формулы тригонометрии, выражения для E_K и E_{Π} можно привести к виду

$$E_K = E \sin^2(\omega_0 t + \varphi_0) = E \left[\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos 2(\omega_0 t + \varphi_0) \right], \quad (13)$$

$$E_{\Pi} = E \cos^2(\omega_0 t + \varphi_0) = E \left[\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 2(\omega_0 t + \varphi_0) \right], \quad (14)$$

где E – полная энергия системы.

Из формул (13) и (14) видно, что E_K и E_{Π} изменяются с частотой, в два раза превышающей частоту гармонических колебаний. Средние значения

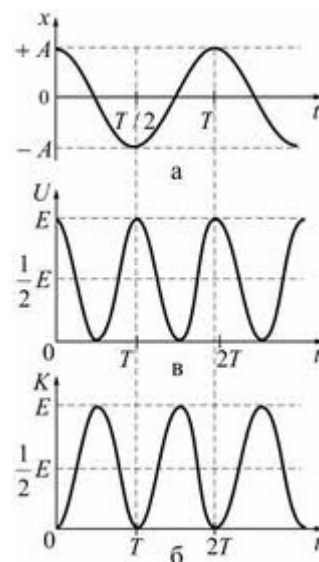


Рис.3

квадрата синуса и квадрата косинуса равны, как известно, $1/2$. Следовательно, среднее значение E_K совпадает со средним значением E_{II} и равно $E/2$.

ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

Пример 1. Материальная точка совершает гармонические колебания вдоль оси X . По прошествии времени $t_1 = 0,1$ с от начала движения смещение точки от положения равновесия $x_1 = 0,05$ м, скорость $v_{1x} = 0,62$ м/с, ускорение $a_{1x} = -5,4$ м/с². Определите: 1) амплитуду, циклическую частоту и начальную фазу колебаний; 2) смещение, скорость и ускорение в начальный момент времени.

Дано:	Решение
$t_1 = 0,1$ с	Закон колебаний материальной точки
$x_1 = 0,05$ м	$x = A \sin(\omega_0 t + \varphi_0)$. (1)
$v_{1x} = 0,62$ м/с	Законы изменения скорости и ускорения со временем
$a_{1x} = -5,4$ м/с ²	
$A - ?, \omega_0 - ?, \varphi_0 - ?,$ $x(0) = ?, v_x(0) = ?,$ $a_x(0) = ?$	$v_x = \frac{dx}{dt} = A\omega_0 \cos(\omega_0 t + \varphi_0)$, (2)
	$a_x = \frac{dv}{dt} = -A\omega_0^2 \sin(\omega_0 t + \varphi_0)$. (3)

Подставив в уравнения (1)-(3) значения t_1 , x_1 , v_{1x} и a_{1x} , получим

$$x_1 = A \sin(\omega_0 t_1 + \varphi_0), v_{x1} = A\omega_0 \cos(\omega_0 t_1 + \varphi_0), a_{x1} = -A\omega_0^2 \sin(\omega_0 t_1 + \varphi_0). \quad (4)$$

Рассмотрим сначала первое и третье из уравнений (4). Легко видеть, что

$$a_{x1} = -x_1 \omega_0^2, \text{ откуда } \omega_0 = \sqrt{\frac{-a_{1x}}{x_1}},$$

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{5,4}{0,05}} = 10,4 \text{ с}^{-1}.$$

Возведя в квадрат первые два уравнения системы (4) (предварительно следует второе из уравнений разделить на ω_0) и почленно сложив их,

$$\text{получаем } x_1^2 + \frac{v_{1x}^2}{\omega_0^2} = A^2, \text{ откуда амплитуда колебаний } A = \sqrt{x_1^2 + \frac{v_{1x}^2}{\omega_0^2}}.$$

$$A = \sqrt{25 \cdot 10^{-4} + \frac{0,62^2}{10,4^2}} = 0,078 \text{ м}.$$

Чтобы найти начальную фазу, подставим найденные значения A и ω_0 , например, в первое из уравнений (4). Так как начальную фазу принято

выражать в долях π , то запишем уравнение (1), введя период колебаний $T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 0,6$ с.

$$\text{Тогда } \omega_0 t_1 = \frac{2\pi t_1}{T} = \frac{2\pi}{6} \text{ и } x_1 = A \sin\left(\frac{2\pi}{6} + \varphi_0\right).$$

$$\frac{2\pi}{6} + \varphi_0 = \arcsin \frac{x_1}{A} = \arcsin 0,64 = 40^\circ = \frac{2\pi}{9}, \text{ откуда } \varphi_0 = -\frac{\pi}{9}.$$

По найденным значениям A и φ_0 определим координату, скорость и ускорение точки в начальный момент времени. Для этого подставим в уравнения (1)–(3) значение $t = 0$:

$$x(0) = 0,078 \sin\left(-\frac{\pi}{9}\right) = -0,027 \text{ м};$$

$$v_x(0) = 0,078 \cdot 10,4 \cos\left(-\frac{\pi}{9}\right) = 0,76 \text{ м/с};$$

$$a_x(0) = -0,078 \cdot 10,4^2 \sin\left(-\frac{\pi}{9}\right) = 2,89 \text{ м/с}^2.$$

$$\text{О т в е т: } A = 0,078 \text{ м}; \omega_0 = 10,4 \text{ с}^{-1}; \varphi_0 = -\frac{\pi}{9};$$

$$x(0) = -0,027 \text{ м}; v_x(0) = 0,76 \text{ м/с}; a_x(0) = 2,89 \text{ м/с}^2.$$

Пример 2. Материальная точка совершает гармонические колебания согласно уравнению $x = 0,02 \cos\left(\pi t + \frac{\pi}{2}\right)$, м. Определите: 1) амплитуду колебаний; 2) период колебаний; 3) начальную фазу колебаний; 4) максимальную скорость точки; 5) максимальное ускорение точки; 6) определите промежуток времени после начала отсчета до момента, когда точка будет проходить через положение равновесия.

Дано:	Решение
$x = 0,02 \cos\left(\pi t + \frac{\pi}{2}\right)$, м	1) Запишем общий вид уравнения гармонических колебаний
$\nu = 0,5$ Гц	$x = A \cos(\omega_0 t + \varphi_0).$
$A = 3$ см	Сравнивая его с уравнением гармонических колебаний точки, заданным в условии задачи
$x = 1,5$ см	$x = 0,02 \cos\left(\pi t + \frac{\pi}{2}\right),$
$A - ?, \quad T - ?, \quad \varphi_0 - ?,$	определим амплитуду колебаний $A = 0,02$ м.
$v_{\max} - ?, \quad a_{\max} - ?, \quad t - ?$	

2) Период гармонических колебаний

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0},$$

где ω_0 – циклическая частота колебаний.

По условию задачи $\omega_0 = \pi$, тогда $T = 2$ с.

Начальная фаза колебаний $\varphi_0 = \frac{\pi}{2}$.

Мгновенная скорость точки, совершающей гармонические колебания,

$$v = \frac{dx}{dt} = -A\omega_0 \sin(\omega_0 t + \varphi_0),$$

где $A\omega_0 = v_{\max}$ – максимальное значение (амплитуда) скорости.

$$v_{\max} = 0,02\pi = 0,02 \cdot 3,14 = 6,28 \text{ см/с.}$$

Мгновенное ускорение точки, совершающей гармонические колебания,

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2} = -A\omega_0^2 \cos(\omega_0 t + \varphi_0),$$

где $A\omega_0^2 = a_{\max}$ – максимальное значение (амплитуда) ускорения.

$$a_{\max} = 0,02\pi^2 = 0,02 \cdot 3,14^2 = 19,7 \text{ см/с}^2.$$

В положении равновесия $x = 0$, то есть $0,02 \cos\left(\pi t + \frac{\pi}{2}\right) = 0$, откуда

$$\pi t + \frac{\pi}{2} = (2m+1)\frac{\pi}{2} \quad (m=0,1,2,3,\dots),$$

$$t = \frac{m\pi}{\pi} = m.$$

О т в е т: 1) $A = 0,02$ м; 2) $T = 2$ с; 3) $\varphi_0 = \frac{\pi}{2}$; 4) $v_{\max} = 6,28$ см/с;

5) $a_{\max} = 19,7$ см/с²; 6) $t = m$ с, где $m = 0,1,2,3,\dots$

Пример 3. Материальная точка массой $m = 5$ г совершает гармонические колебания с частотой $\nu = 0,5$ Гц. Амплитуда колебаний $A = 3$ см. Определите: 1) скорость v точки в момент времени, когда смещение от положения равновесия $x = 1,5$ см; 2) максимальную силу $F_{\max}$, действующую на точку; 3) полную энергию E колеблющейся точки.

Дано:	Решение
$m = 5$ г	1) Уравнение гармонических колебаний имеет вид
$\nu = 0,5$ Гц	$x = A \cos(\omega_0 t + \varphi_0).$
$A = 3$ см	Скорость точки
$x = 1,5$ см	$v = \frac{dx}{dt} = -A\omega_0 \sin(\omega_0 t + \varphi_0).$
$v - ?, F_{\max} - ?, E - ?$	

Чтобы выразить скорость через смещение, надо исключить из записанных формул время.

Для этого возведем оба уравнения в квадрат, разделим первое на A^2 , второе на произведение $A^2\omega_0^2$ и сложим

$$\frac{x^2}{A^2} + \frac{v^2}{A^2\omega_0^2} = 1, \text{ или } \frac{x^2}{A^2} + \frac{v^2}{4\pi^2\nu^2 A^2} = 1.$$

Решив последнее уравнение относительно v , получим

$$v = \pm 2\pi\nu\sqrt{A^2 - x^2}.$$

Выполнив вычисления по этой формуле, найдем значение скорости точки $v = \pm 8,2$ см/с.

Знак плюс соответствует случаю, когда направление скорости совпадает с положительным направлением оси x , знак минус – когда направление скорости совпадает с отрицательным направлением оси x .

Гармонические колебания могут происходить и по закону

$$x = A \sin(\omega_0 t + \varphi_0).$$

Повторив решение для колебаний, происходящих по закону синуса, получим тот же ответ.

2) Силу, действующую на точку, найдем по второму закону Ньютона

$$F = ma,$$

где m – масса точки; a – ее ускорение.

Мгновенное ускорение точки, совершающей гармонические колебания,

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2} = -A\omega_0^2 \cos(\omega_0 t + \varphi_0), \text{ или } a = -4\pi^2\nu^2 A \cos(\omega_0 t + \varphi_0).$$

Подставим выражение ускорения в формулу силы, получим

$$F = -4\pi^2\nu^2 mA \cos(\omega_0 t + \varphi_0).$$

Максимальное значение силы

$$F_{\max} = 4\pi^2\nu^2 mA.$$

Подставив в эту формулу значения величин π, ν, m и A , найдем величину максимальной силы, действующей на точку

$$F_{\max} = 1,49 \text{ мН}.$$

3) Полная энергия колеблющейся точки является суммой ее кинетической и потенциальной энергий, вычисленных для любого момента времени.

$$E = E_K + E_{\Pi}.$$

Проще всего вычислить полную энергию в момент, когда кинетическая энергия достигает максимального значения. Поэтому полная энергия E колеблющейся точки равна максимальному значению кинетической энергии

$$E = E_{K(\max)} = \frac{mv_{\max}^2}{2} = \frac{mA^2\omega_0^2}{2} = \frac{4\pi^2\nu^2mA^2}{2} = 2\pi^2\nu^2mA^2.$$

Расчет, выполненный с помощью полученной формулы, дает результат

$$E = 22,1 \text{ мкДж.}$$

О т в е т: $v = \pm 8,2 \text{ см/с}$; $F_{\max} = 1,49 \text{ мН}$; $E = 22,1 \text{ мкДж}$.

Пример 4. Полная энергия E гармонически колеблющейся точки равна 10 мкДж , а максимальная сила $F_{\max}$, действующая на точку, равна $0,5 \text{ мН}$. Напишите уравнение движения этой точки, если период T колебаний равен 4 с , а начальная фаза $\varphi_0 = \pi / 6$.

Дано:	Решение
$E = 10^{-5} \text{ Дж}$ $F_{\max} = 0,5 \cdot 10^{-3} \text{ Н}$ $T = 4 \text{ с}$ $\varphi_0 = \pi / 6$ $x = x(t) - ?$	Полная энергия гармонически колеблющейся точки $E = \frac{mA^2\omega_0^2}{2},$ где m – масса точки; A – амплитуда; ω_0 – циклическая частота колебаний.

Максимальная сила, действующая на точку,

$$|F_{\max}| = mA\omega_0^2.$$

Почленно разделив первое из этих уравнений на второе, получим

$$\frac{E}{|F_{\max}|} = \frac{mA^2\omega_0^2}{2mA\omega_0^2} = \frac{A}{2},$$

откуда амплитуда колебаний $A = \frac{2E}{F_{\max}}$.

$$A = \frac{2 \cdot 10^{-6}}{0,5 \cdot 10^{-3}} = 0,04 \text{ м.}$$

Циклическая частота колебаний $\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$.

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2} \text{ с}^{-1}.$$

Уравнение гармонических колебаний имеет вид

$$x = A \cos(\omega_0 t + \varphi_0).$$

Подставив в него значения A , ω_0 и φ_0 , получим

$$x = 0,04 \left(\frac{\pi}{2} t + \frac{\pi}{6} \right), \text{ м.}$$

$$\text{О т в е т: } x = 0,04 \cos \left(\frac{\pi}{2} t + \frac{\pi}{6} \right), \text{ м.}$$

Пример 5. Определите отношение кинетической энергии E_K точки, совершающей гармонические колебания, к ее потенциальной энергии E_{Π} , если известна фаза колебаний.

Дано:	Решение
φ – фаза колебаний	Уравнение гармонических колебаний точки
$\varphi = \omega_0 t + \varphi_0$	$x = A \cos(\omega_0 t + \varphi_0).$
$\frac{E_K}{E_{\Pi}} - ?$	Мгновенная скорость точки, совершающей гармонические колебания,
	$v = \frac{dx}{dt} = -A\omega_0 \sin(\omega_0 t + \varphi_0).$

Мгновенное ускорение точки

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2 x}{dt^2} = -A\omega_0^2 \cos(\omega_0 t + \varphi_0) = -\omega_0^2 x.$$

Кинетическая энергия точки

$$E_K = \frac{mv^2}{2} = \frac{mA^2\omega_0^2}{2} \sin^2(\omega_0 t + \varphi_0).$$

Потенциальная энергия

$$E_{\Pi} = -\int_0^x F dx = \int_0^x m\omega_0^2 x dx = \frac{m\omega_0^2 x^2}{2} = \frac{mA^2\omega_0^2}{2} \cos^2(\omega_0 t + \varphi_0),$$

$$\frac{E_K}{E_{\Pi}} = \frac{\sin^2(\omega_0 t + \varphi_0)}{\cos^2(\omega_0 t + \varphi_0)} = \operatorname{tg}^2(\omega_0 t + \varphi_0).$$

$$\text{О т в е т: } \frac{E_K}{E_{\Pi}} = \operatorname{tg}^2(\omega_0 t + \varphi_0).$$

ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ

Средний уровень

1. Материальная точка совершает синусоидальные колебания с амплитудой 4 см и периодом 2 с. Смещение в начальный момент времени равно 2 см. Запишите уравнение колебаний точки.

О т в е т: $x = 0,04 \sin\left(\pi t + \frac{\pi}{6}\right)$.

2. Материальная точка совершает гармонические колебания по закону $x = 0,3 \cos\left(\frac{2\pi}{3}t + \frac{\pi}{4}\right)$. Чему равно максимальное значение скорости точки?

О т в е т: $v_{\max} = 0,2\pi$ м/с.

3. Материальная точка совершает гармонические колебания по закону $x = 0,9 \cos\left(\frac{2\pi}{3}t + \frac{\pi}{4}\right)$. Какой вид имеет уравнение зависимости ускорения от времени?

О т в е т: $a = -0,4\pi^2 \cos\left(\frac{2\pi}{3}t + \frac{\pi}{4}\right)$.

4. Запишите уравнение гармонических колебаний частицы, если ее максимальное ускорение $0,5 \text{ м/с}^2$, период колебаний 2 с, а смещение от положения равновесия в начальный момент времени 0,025 м.

О т в е т: $x = 0,05 \cos\left(\pi t + \frac{\pi}{3}\right)$.

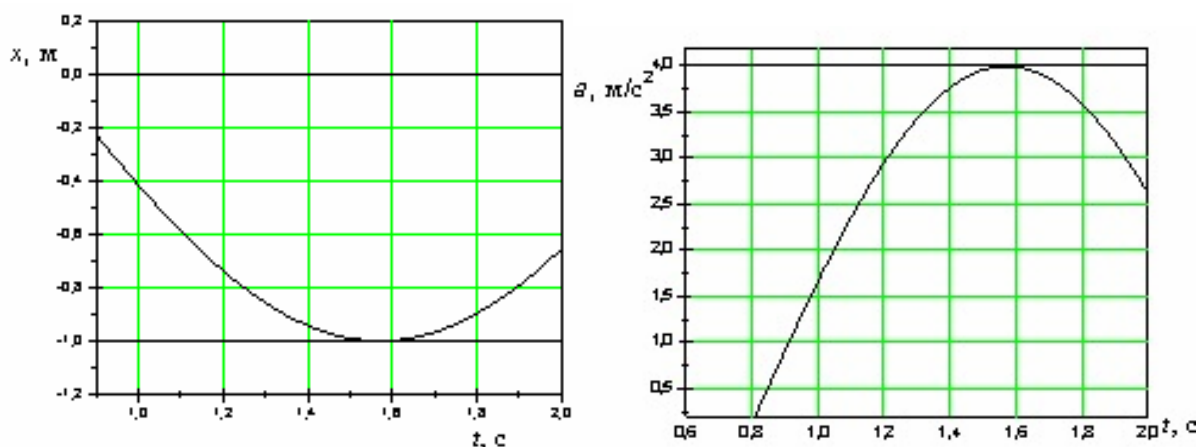
5. Материальная точка совершает гармонические колебания с амплитудой $A = 4$ см и частотой $\nu = 2$ с. Смещение точки от положения равновесия в начальный момент времени равно своему максимальному значению. Запишите уравнение гармонических колебаний точки (в СИ).

О т в е т: $x = 0,04 \cos 4\pi t$.

6. Частица может колебаться вдоль оси OX под действием результирующей силы $\vec{F} = -k\vec{x}$ с амплитудой A и циклической частотой ω , где k – положительная константа. Определите скорость частицы в момент времени, когда $x = A/2$.

О т в е т: $v = \sqrt{3}\omega A/2$.

7. На рисунках изображены зависимости от времени координаты и ускорения материальной точки, колеблющейся по гармоническому закону. Определите циклическую частоту колебаний точки.



О т в е т: $\omega = 2$ рад/с.

8. Амплитуда колебаний груза, скрепленного с горизонтальной пружиной, жесткость которой 1200 Н/м, равна 0,1 м. Определите полную механическую энергию системы.

О т в е т: $E = 6$ Дж.

Достаточный уровень

1. Гармонические колебания величины s описываются уравнением $s = 0,02 \cos\left(6\pi t + \frac{\pi}{3}\right)$, м. Определите: 1) амплитуду колебаний; 2) циклическую частоту; 3) частоту колебаний; 4) период колебаний.

О т в е т: 1) $A = 0,02$ м; 2) $\omega_0 = 6\pi$ с⁻¹; 3) $\nu = 3$ Гц; 4) $T = 0,33$ с.

2. Запишите уравнение гармонических колебаний точки с амплитудой $A = 8$ см, если за $t = 1$ мин совершается $n = 120$ колебаний и начальная фаза колебаний равна 45° .

О т в е т: $x = 0,08 \cos\left(4\pi t + \frac{\pi}{4}\right)$, м.

3. Материальная точка совершает гармонические колебания с амплитудой $A = 4$ см и периодом $T = 2$ с. Напишите уравнение колебаний точки, если ее движение начинается из положения $x_0 = 2$ см.

О т в е т: $x = 0,04 \cos\left(\pi t + \frac{\pi}{3}\right)$, м.

4. Точка совершает гармонические колебания с периодом $T=6$ с и начальной фазой, равной нулю. Определите, за какое время, считая от начала движения, точка сместится от положения равновесия на половину амплитуды.

О т в е т: $t = 1$ с.

5. Напишите уравнение гармонического колебания точки, если амплитуда колебаний $A = 15$ см, максимальная скорость $v_{\max} = 30$ см/с, начальная фаза $\varphi_0 = 10^\circ$.

О т в е т: $x = 0,15 \cos\left(2t + \frac{\pi}{18}\right)$, м.

6. Точка совершает гармонические колебания по закону $x = 3 \cos\left(\frac{\pi}{2}t + \frac{\pi}{8}\right)$, м. Определите: 1) период T колебаний; 2) максимальную скорость $v_{\max}$ точки; 3) максимальное ускорение $a_{\max}$ точки.

О т в е т: 1) $T = 4$ с; 2) $v_{\max} = 4,71$ м/с; 3) $a_{\max} = 7,4$ м/с².

7. Точка совершает гармонические колебания с амплитудой $A = 10$ см и периодом $T = 5$ с. Определите: 1) максимальную скорость; 2) максимальное ускорение.

О т в е т: 1) $v_{\max} = 12,6$ см/с; 2) $a_{\max} = 15,8$ см/с².

8. Скорость материальной точки, совершающей гармонические колебания, задается уравнением $v(t) = -6 \sin 2\pi t$. Запишите зависимость смещения точки от времени.

О т в е т: $x(t) = \frac{3}{\pi} \cos 2\pi t$, м.

9. Материальная точка совершает колебания согласно уравнению $x = A \sin \omega t$. В какой-то момент времени смещение точки $x_1 = 15$ см. При возрастании фазы колебания в два раза смещение x_2 оказалось равным 24 см. Определите амплитуду A колебаний.

О т в е т: $A = 25$ см.

10. Частица совершает гармонические колебания с частотой 5 Гц. Амплитуда колебаний 5 мм. Движение начинается из положения $x_0 = 3$ мм по синусоидальному закону. Запишите уравнение движения частицы.

О т в е т: $x = 0,005 \sin(\pi t + 0,64)$, м.

11. Материальная точка совершает гармонические колебания согласно уравнению $x = 0,02 \cos\left(\pi t + \frac{\pi}{2}\right)$, м. Определите: 1) амплитуду колебаний; 2) период колебаний; 3) начальную фазу колебаний; 4) максимальную скорость точки; 5) максимальное ускорение точки; 6) через сколько времени после начала отсчета точка будет проходить через положение равновесия.

О т в е т: 1) $A = 2$ см; 2) $T = 2$ с; 3) $\varphi = \frac{\pi}{2}$; 4) $v_{\max} = 6,28$ см/с;

5) $a_{\max} = 19,7$ см/с²; 6) $t = m$ с, где $m = 0, 1, 2, 3, \dots$

12. Материальная точка, совершающая гармонические колебания с частотой $\nu = 1$ Гц, в момент времени $t = 0$ проходит положение, определяемое координатой $x_0 = 5$ см, со скоростью $v_0 = 15$ см/с. Определите амплитуду колебаний.

О т в е т: $A = 5,54$ см.

13. Начальная фаза колебаний точки равна $\varphi_0 = \frac{\pi}{3}$. Период колебаний $T = 0,06$ с. Определите ближайшие моменты времени, в которые скорость и ускорение в два раза меньше амплитудных значений.

О т в е т: $t_1 = 0$; $t_2 = 0,025$ с.

14. Точка совершает гармонические колебания. В некоторый момент времени смещение точки $x = 5$ см, скорость $v = 20$ см/с и ускорение $a = -80$ см/с². Определите: циклическую частоту, период, амплитуду и фазу колебаний в этот момент времени.

О т в е т: $\omega_0 = 4$ с⁻¹; $T = 1,57$ с; $A = 7,07$ см; $\varphi_0 = \frac{\pi}{4}$ рад.

15. Частица массой 5 г совершает гармонические колебания по закону $x = A \sin 2\pi \nu t$, где $A = 3$ см; $\nu = 0,5$ Гц. Определите максимальную силу, действующую на частицу.

О т в е т: $F = 1,5$ мН.

16. Тело массой $m = 10$ г совершает гармонические колебания по закону $x = 0,1 \cos(4\pi t + \pi/4)$, м. Определите максимальные значения: 1) возвращающей силы; 2) кинетической энергии.

О т в е т: 1) $|F_{\max}| = 0,158$ Н; 2) $T_{\max} = 7,89$ мДж.

17. Материальная точка массой $m = 50$ г совершает гармонические колебания согласно уравнению $x = 0,1 \cos \frac{3\pi}{2}t$, м. Определите: 1) возвращающую силу F для момента времени $t = 0,5$ с; 2) полную энергию E точки.
О т в е т: 1) $F = 78,5$ мН; 2) $E = 5,55$ мДж.

18. Груз, подвешенный к спиральной пружине, колеблется по вертикали с амплитудой $A = 6$ см. Определите полную энергию E колебаний груза, если жесткость k пружины составляет 500 Н/м.

О т в е т: $E = \frac{kA^2}{2} = 0,9$ Дж.

19. Материальная точка массой $m = 20$ г совершает гармонические колебания по закону $x = 0,1 \cos(4\pi t + \pi/4)$, м. Определите полную энергию E этой точки.

О т в е т: $E = 15,8$ мДж.

20. Полная механическая энергия частицы, колеблющейся по синусоидальному закону, равна 30 мкДж, а максимальная сила, действующая на неё, равна 1,5 мН. Запишите уравнение колебаний точки, если период колебаний 2 с, а начальная фаза $\pi/3$.

О т в е т: $x = 0,04 \cos\left(\pi t + \frac{\pi}{3}\right)$.

21. Определите полную энергию материальной точки массой m , колеблющейся по закону $x = A \cos(\omega_0 t + \varphi)$.

О т в е т: $E = \frac{mA^2\omega_0^2}{2}$.

22. Материальная точка совершает колебания по закону: $x = x_0 \sin\left(2\pi t + \frac{\pi}{6}\right)$. В какой момент времени ее потенциальная энергия равна кинетической?

О т в е т: $t = \frac{1}{24}$ с.

23. Материальная точка массой 10 г колеблется по закону $x = 0,05 \sin(0,6t + 0,8)$. Определите максимальную силу, действующую на точку, и полную энергию колебаний.

О т в е т: $F_{\max} = 1,8 \cdot 10^{-4}$ Н; $W = 4,5$ мкДж.

24. Точка совершает гармонически колебания, уравнение которых имеет вид $x = 0,05 \sin 2t$. Определите момент времени (ближайший к началу отсчета), в который потенциальная энергия точки $\Pi = 10^{-4}$ Дж, а возвращающая сила $F = 5 \cdot 10^{-3}$ Н. Какова фаза колебаний в этот момент времени?

О т в е т: $t = 2,04$ с; $\varphi = 4,07$ рад.

25. Материальная точка колеблется согласно уравнению $x = A \cos \omega t$, где $A = 5$ см и $\omega = \pi/12$ с $^{-1}$. Когда возвращающая F сила в первый раз достигает значения -12 мН, потенциальная энергия Π точки оказывается равной $0,15$ мДж. Определите: 1) этот момент времени t ; 2) соответствующую этому моменту фазу ωt .

О т в е т: 1) $t = 4$ с; 2) $\omega t = \frac{\pi}{3}$ рад.

26. Амплитуда колебаний груза массой $1,5$ кг, скрепленного с горизонтальной пружиной, жесткость которой 1200 Н/м, равна $0,1$ м. Определите кинетическую и потенциальную энергию системы при фазе 50° , ее полную механическую энергию и период колебаний.

О т в е т: $T = 4,5$ Дж; $\Pi = 1,5$ Дж; $E = 6$ Дж; $t = 0,22$ с.

1.3. Гармонический осциллятор

Гармоническим осциллятором называется система, совершающая колебания, описываемые уравнением вида

$$\frac{d^2 s}{dt^2} + \omega_0^2 s = 0.$$

Колебания гармонического осциллятора являются важным примером периодического движения и служат точной или приближенной моделью во многих задачах классической и квантовой физики. Примерами гармонического осциллятора являются пружинный, физический и математический маятники.

1.3.1. Пружинный маятник

Пружинный маятник – система, состоящая из груза массой m , прикрепленного к абсолютно упругой пружине, и совершающая гармонические колебания под действием упругой силы $\vec{F} = -kx$, где k – жесткость пружины, x – смещение груза от положения равновесия в момент времени t (рис.4).

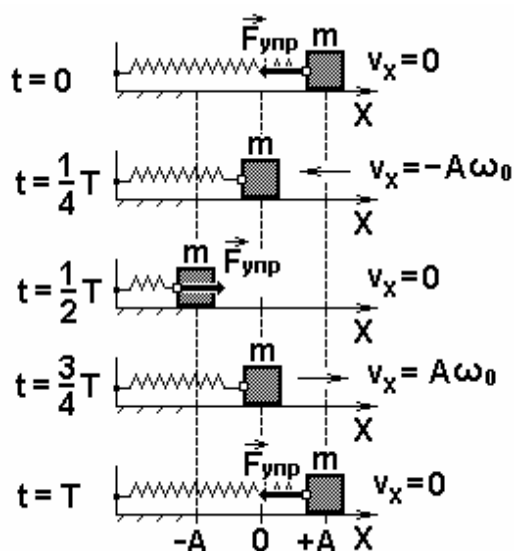


Рис. 4

На основании второго закона Ньютона $F = ma$, или $F = m \frac{d^2x}{dt^2}$.

Отсюда следует

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = -kx \text{ или } m \frac{d^2x}{dt^2} + kx = 0. \quad (15)$$

Выражение (15) является дифференциальным уравнением свободных незатухающих колебаний пружинного маятника.

Величина $\omega_0 = \sqrt{k/m}$ является циклической частотой колебаний пружинного маятника. Учитывая это, формулу (15) можно записать в виде

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m}x = 0.$$

Решением этого однородного дифференциального уравнения второго порядка является функция вида

$$x = A \sin(\omega_0 t + \varphi_0),$$

где A и φ_0 – произвольные постоянные, для определения которых необходимо знать начальные условия. Каждое конкретное колебание характеризуется определенными значениями амплитуды A и начальной фазы φ_0 . Тело данной массы m , находясь под действием одной и той же упругой силы $F = -kx$, может совершать колебания с различными амплитудами и начальными фазами в зависимости от начальных условий, но период колебания всегда остается одним и тем же.

Период колебаний пружинного маятника

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}}.$$

1.3.2. Физический маятник

Физический маятник – твердое тело, совершающее под действием силы тяжести колебания около неподвижной горизонтальной оси O , не проходящей через центр масс C тела (рис. 5).

На рис. 5 $\vec{F}_\tau$ и $\vec{F}_n$ – тангенциальная и нормальная составляющие силы тяжести $m\vec{g}$. При отклонении маятника от положения равновесия на угол α

тангенциальная составляющая $\vec{F}_\tau$ возвращает его к положению равновесия.

$$F_\tau = -mg \sin \alpha.$$

При малых α $\sin \alpha \approx \alpha$, поэтому $F_\tau = -mg\alpha$.

Вращающий момент этой силы

$$M = -mgl\alpha, \quad (16)$$

где m – масса маятника; l – расстояние от точки подвеса O до центра масс C маятника.

В соответствии с основным законом динамики вращательного движения

$$M = J\varepsilon, \text{ или } M = J \frac{d^2\alpha}{dt^2}, \quad (17)$$

где J – момент инерции маятника относительно оси вращения.

Из (16) и (17) следует:

$$\frac{d^2\alpha}{dt^2} + \frac{mgl}{J}\alpha = 0 \quad (18)$$

Выражение (18) является дифференциальным уравнением свободных незатухающих колебаний физического маятника.

Решением этого уравнения является функция вида

$$\alpha = \alpha_0 \sin(\omega_0 t + \varphi_0),$$

где α_0 – амплитуда колебаний физического маятника.

Циклическая частота колебаний физического маятника $\omega_0 = \sqrt{\frac{mgl}{J}}$,

период колебаний $T = 2\pi \sqrt{\frac{J}{mgl}}$.

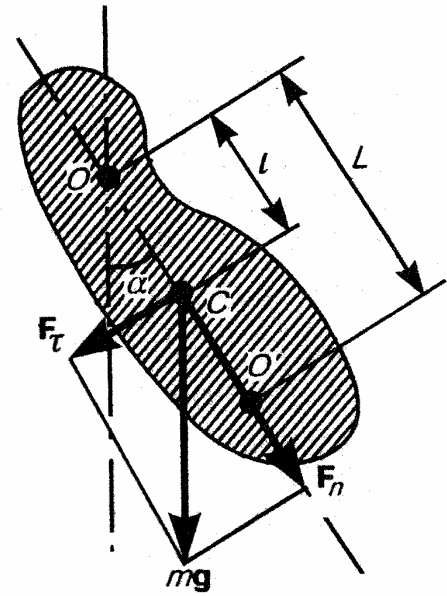


Рис. 5

1.3.3. Математический маятник

Математический маятник – идеализированная система, состоящая из материальной точки массой m , подвешенной на нерастяжимой невесомой нити, колеблющаяся под действием силы тяжести. Хорошим приближением математического маятника является небольшой тяжелый шарик, подвешенный на тонкой нити (рис. 6).

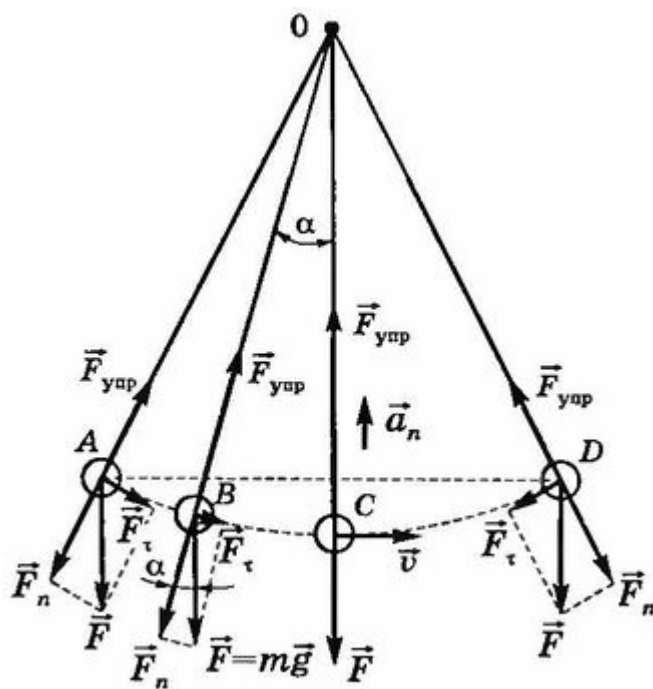


Рис. 6

Колебания математического маятника, как и физического, происходят под действием тангенциальной составляющей силы тяжести.

Момент инерции материальной точки относительно точки подвеса

$$J = ml^2,$$

поэтому дифференциальное уравнение свободных незатухающих колебаний математического маятника имеет вид

$$\frac{d^2\alpha}{dt^2} + \frac{g}{l}\alpha = 0,$$

где l – длина нити.

Отсюда следует, что математический маятник совершает гармонические колебания по закону $\alpha = \alpha_0 \sin(\omega_0 t + \phi_0)$ с циклической частотой

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}}$$

и периодом

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}.$$

ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

Пример 1. Математический маятник длиной $l_1 = 40$ см и физический маятник в виде тонкого прямого стержня длиной $l_2 = 60$ см синхронно колеблются около одной и той же горизонтальной оси. Определите расстояние центра масс стержня от оси колебаний.

Дано:	Решение
$l_1 = 40$ см	Так как маятники колеблются синхронно, то периоды их колебаний одинаковы $T_1 = T_2$.
$l_2 = 60$	
$a - ?$	

Период колебаний математического маятника

$$T_1 = 2\pi\sqrt{\frac{l_1}{g}}.$$

Период колебаний математического маятника

$$T_2 = 2\pi\sqrt{\frac{I}{mga}},$$

где $I = \frac{1}{12}ml_2^2 + ma^2 = m\left(\frac{1}{12}l_2^2 + a^2\right).$

Тогда

$$T_2 = 2\pi\sqrt{\frac{m\left(\frac{1}{12}l_2^2 + a^2\right)}{mga}} = 2\pi\sqrt{\frac{\frac{1}{12}l_2^2 + a^2}{ga}}.$$

Приравняем выражения для периодов колебаний маятников

$$2\pi\sqrt{\frac{l_1}{g}} = 2\pi\sqrt{\frac{\frac{1}{12}l_2^2 + a^2}{ga}}.$$

Выразим из полученной формулы l_1

$$l_1 = \frac{l_2^2 + 12a^2}{12a}$$

и приведем это уравнение к виду

$$12a^2 - 12l_1a + l_2^2 = 0.$$

Это квадратное уравнение имеет два решения: $a_1 = 0,3$ м; $a_2 = 0,1$ м.

Если $a_1 = 0,3$ м, то центр масс стержня находится на краю стержня, следовательно, этот ответ неверный.

О т в е т: $a = 0,1$ м.

Пример 2. Брусек массой $M = 10$ кг, лежащий на гладкой горизонтальной поверхности, прикреплен к горизонтальной пружине жесткости k . В брусок попадает и застревает в нём пуля массой $m = 9$ г, летящая со скоростью $v = 500$ м/с, направленной вдоль оси пружины. Амплитуда возникших при этом колебаний $A = 0,1$ м. Определите период этих колебаний.

Дано: $M = 10 \text{ кг}$ $m = 0,009 \text{ кг}$ $v = 500 \text{ м/с}$ $A = 0,1 \text{ м}$ $T = ?$	Решение Взаимодействие пули с бруском описывается законом сохранения импульса, так как время их взаимодействия по сравнению с периодом возникших колебаний мало ($\Delta t \ll T$). $mv = (M + m)u, \quad (1)$ где u – скорость бруска и застрявшей в нём после взаимодействия пули.
---	--

Согласно закону сохранения энергии

$$\frac{kA^2}{2} = \frac{(M + m)u^2}{2}, \quad (2)$$

где k – жёсткость пружины.

Из уравнений (1) и (2) следует, что

$$k = \frac{m^2 v^2}{A^2 (M + m)}.$$

Циклическая частота возникших гармонических колебаний

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{M + m}}.$$

Период колебаний равен

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi \sqrt{\frac{M + m}{k}}.$$

$$T = 2\pi \frac{A(M + m)}{mv}.$$

$$T = 2 \cdot 3,14 \frac{0,1(10 + 9 \cdot 10^{-3})}{9 \cdot 10^{-3} \cdot 500} = 14 \text{ с.}$$

О т в е т: $T = 14 \text{ с.}$

Пример 3. Деревянный брусок массой $m = 3,2 \text{ кг}$ с площадью основания $S = 400 \text{ см}^2$ плавает в воде. Брусок слегка погрузили в воду глубже и отпустили. Найдите частоту колебаний бруска. Силой трения пренебечь. Плотность воды $\rho = 1000 \text{ кг/м}^3$.

Дано: $m = 3,2 \text{ кг}$ $S = 0,04 \text{ м}^2$ $\rho = 1000 \text{ кг/м}^3$ $v = ?$	Решение На брусок действуют две силы: сила тяжести $m\vec{g}$ и сила Архимеда $\vec{F}_A$ (см. рисунок). Так как брусок плавает на поверхности воды, то $m\vec{g} + \vec{F}_A = 0.$
--	---

Спроектируем это уравнение на вертикально направленную ось X :

$$mg = \rho g V_1. \quad (1)$$

где V_1 – объем погруженной части бруска. Если глубину погружения бруска увеличить на x , то сила Архимеда станет равной $F'_A = \rho g (V_1 + xS)$.

Равновесие нарушится, и на брусок будет действовать сила $\vec{F} = m\vec{g} + \vec{F}'_A$, проекция которой на ось X будет равна

$$F'_x = mg - \rho g (V_1 + xS). \quad (2)$$

Подставив в формулу (2) значение силы тяжести из (1), получим

$$F'_x = -\rho g S x,$$

то есть на брусок будет действовать сила, пропорциональная смещению его из положения равновесия, и уравнение движения бруска примет вид

$$a + \frac{\rho g S}{m} x = 0.$$

Следовательно, собственная циклическая частота колебаний бруска будет равна

$$\omega = \sqrt{\frac{\rho g S}{m}},$$

а период колебаний

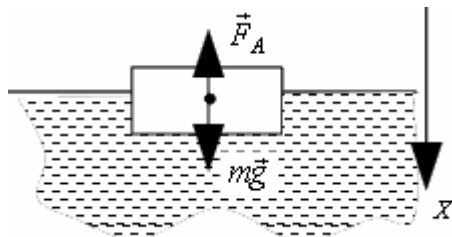
$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{\rho g S}}.$$

Частота колебаний бруска

$$\nu = \frac{1}{T} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{\rho g S}{m}} = 1,8 \text{ Гц.}$$

О т в е т: $\nu = 1,8 \text{ Гц.}$

Пример 4. Шарик подвешен на длинной нити. Первый раз его поднимают по вертикали до точки подвеса, второй раз отклоняют на небольшой угол. В каком из этих случаев шарик быстрее возвращается к начальному положению, если его отпустить?



Дано:	Решение
l – длина нити	Рассмотрим первый случай. Из уравнения
$t_1/t_2 = ?$	$l = gt_1^2/2$ найдем время t_1 свободного падения шарика с высоты, равной длине l нити:
	$t_1 = \sqrt{2l/g}. \quad (1)$

Во втором случае время t_2 движения шарика из отклоненного положения в положение равновесия найдем из уравнения гармонических колебаний $x = A \sin(\omega_0 t + \varphi_0)$. Так как в начальный момент времени маятник имеет максимальное отклонение от положения равновесия, то $\varphi_0 = \pi/2$.

Поскольку в положении равновесия $x = 0$, то $0 = A \sin(\omega_0 t_2 + \pi/2)$, следовательно, $\sin(\omega t_2 + \pi/2) = 0$, $\omega t_2 + \pi/2 = \pi$, откуда

$$t_2 = \pi/(2\omega) = T/4. \quad (2)$$

Шарик представляет собой математический маятник, поэтому период его колебаний $T = 2\pi\sqrt{l/g}$. Подставив это выражение в (2), найдем

$$t_2 = \frac{T}{4} = \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{l}{g}}. \quad (3)$$

Поделив уравнение (1) на (3), получим

$$\frac{t_1}{t_2} = \frac{\sqrt{2l/g}}{\pi\sqrt{l/g}/2} = \frac{2\sqrt{2}}{\pi} \approx 0,9.$$

Следовательно, в первом случае шарик быстрее возвратится к начальному положению.

О т в е т: в первом случае

Пример 5. Физический маятник представляет собой тонкий однородный стержень длиной 35 см. Определите, на каком расстоянии от центра масс должна быть точка подвеса, чтобы частота колебаний была максимальной.

Дано:	Решение
$l = 35 \text{ см} = 0,35 \text{ м}$	Период колебаний физического маятника
$\omega_0 = \omega_{0 \text{ max}}$	$T = 2\pi \sqrt{\frac{J}{mgx}},$
$x = ?$	где m – масса маятника, J – момент инерции груза (стержня) относительно точки подвеса, x – расстояние от точки подвеса до центра масс груза.

Циклическая частота свободных незатухающих колебаний маятника

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T} = \sqrt{\frac{mgx}{J}}.$$

Момент инерции стержня относительно точки подвеса определим с помощью теоремы Штейнера

$$J = \frac{ml^2}{12} + mx^2,$$

тогда

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{mgx}{\frac{ml^2}{12} + mx^2}} = \left(\frac{12gx}{l^2 + 12x^2} \right)^{1/2}.$$

Исследуем функцию зависимости ω_0 от x на максимум

$$\frac{d\omega_0}{dx} = \frac{\sqrt{3g}(l^2 - 12x^2)}{\sqrt{x(l^2 + 12x^2)^3}} = 0,$$

откуда $l^2 - 12x^2 = 0$, $x = \frac{l}{2\sqrt{3}}$.

$$x = \frac{0,35}{2\sqrt{3}} = 10,1 \text{ см.}$$

О т в е т: $x = 10,1$ см.

Пример 6. К вертикальной невесомой пружине, верхний конец которой закреплен, подвешен груз массой $m = 0,1$ кг. Жесткость пружины $k = 40$ Н/м. Определите период вертикальных колебаний системы, которые возникнут, если вывести груз из положения равновесия. Определите амплитуду и начальную фазу, если в момент $t = 0$ груз оттянуть вниз на расстояние $x_1 = 0,1$ м и сообщить ему начальную скорость $v_1 = 3,5$ м/с, направленную вниз (вверх).

Дано:
 $m = 0,1$ кг
 $k = 40$ Н/м
 $x_1 = 0,1$ м
 $v_1 = 3,5$ м/с

 $T - ?$, $X_0 - ?$, $\varphi_0 - ?$

Решение

Задача практически состоит из двух самостоятельных частей. Период колебаний можно определить только в случае, если груз, движущийся поступательно, совершает гармонические колебания. Это значит, что ускорение груза должно быть прямо пропорционально его смещению от положения равновесия и направлено в противоположную сторону.

В процессе движения на груз действуют две силы: тяжести и упругости пружины. Сила упругости пружины однозначно определяется растяжением или сжатием пружины, т.е. смещением ее незакрепленного конца. Если ввести ось Ox , то координата x груза равна смещению конца пружины от прямой AA' – уровня, на котором находился конец пружины в положении равновесия. Тогда полное растяжение пружины равно $x + S_0$ и сила упругости

$$f_x = -k(x + S_0), \quad (1)$$

где S_0 – растяжение пружины, при котором груз находился в положении устойчивости равновесия, когда

$$kS_0 = mg. \quad (2)$$

Поскольку обе силы (тяжести и упругости) направлены вдоль оси Ox , уравнение движения для груза можно записать сразу в скалярном виде:

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = mg - k(x + S_0).$$

Раскрывая скобки и учитывая равенство (2), получаем

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -kx. \quad (3)$$

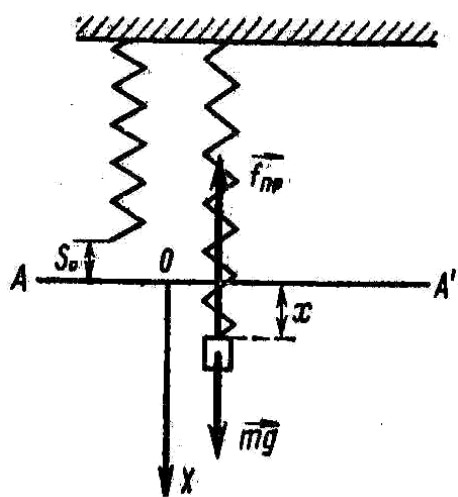
Это и есть дифференциальное уравнение гармонических колебаний, которое позволяет однозначно определить период колебаний.

Амплитуду колебаний X_0 можно найти, рассматривая изменение энергии при переходе из положения, в котором система находится в момент $t = 0$, в положение, при котором $x = X_0$.

Полная энергия системы состоит из кинетической энергии груза, потенциальной энергии груза в поле тяготения Земли (пружина невесома, поэтому речь идет только о грузе) и потенциальной энергии упругой деформации. Поскольку диссипативных сил нет и никакие внешние силы на систему «груз – пружина» не действуют, полная энергия системы при рассматриваемом переходе остается постоянной:

$$\Delta K + \Delta U_{\text{тяг}} + \Delta U_{\text{упр}} = 0. \quad (4)$$

После определения амплитуды колебаний начальную фазу φ_0 можно найти, если выразить координату x и скорость v_x как функции времени и



приравнять эти выражения при $t=0$ к значениям x_1 и v_{1x} , данным в условии задачи.

Уравнение (3) показывает, что тело заданной массы совершает гармонические колебания относительно положения равновесия с циклической частотой $\omega = \sqrt{k/m}$ и периодом $T = 2\pi\sqrt{m/k} = 0,31$ с.

Найдем каждое из слагаемых, входящих в уравнение (4). В начальном положении ($t=0$), как следует из условия задачи, $x = x_1$, $v_x = v_{1x}$. В конечном положении $x = X_0$, $v_x = 0$. Следовательно, при этом переходе

$$\Delta K = -mv_1^2 / 2, \quad \Delta U_{\text{тяг}} = -mg(X_0 - x_1),$$

$$\Delta U_{\text{упр}} = k(X_0 - S_0)^2 / 2 - k(x_1 + S_0)^2 / 2. \quad (5)$$

Выражение потенциальной энергии деформации объясняется тем, что растяжение пружины при любом положении тела больше, чем его координата x (для $x > 0$) на величину S_0 .

Прежде чем подставлять выражение (5) в (4), рассмотрим отдельно изменение потенциальной энергии системы:

$$\Delta U_{\text{тяг}} + \Delta U_{\text{упр}} = -mg(X_0 - x_1) + kX_0^2 / 2 - kx_1^2 / 2 + kS_0(X_0 - x_1)$$

(члены, содержащие S_0^2 , взаимно уничтожаются). Учитывая равенство (2), получаем

$$\Delta U = \Delta U_{\text{тяг}} + \Delta U_{\text{упр}} + kX_0^2 / 2 - kx_1^2 / 2. \quad (6)$$

Можно показать, что найденное изменение потенциальной энергии равно взятой с обратной знаком работе результирующей силы при переходе тела от $x = x_1$ к $x = X_0$:

$$f_{x \text{ рез}} = -kx, \quad dA = -kx dx,$$

$$\Delta U = -A = \int_{x_1}^{X_0} kx dx = kX_0^2 / 2 - kx_1^2 / 2.$$

Такой результат справедлив для любого гармонического осциллятора: изменение потенциальной энергии равно взятой с обратным знаком работе результирующей квазиупругой силы.

Подставим первое из выражений (5) и (6) в (4), получим

$$-mv_1^2 / 2 + kX_0^2 / 2 - kx_1^2 / 2 = 0,$$

откуда

$$X_0 = \sqrt{mv_1^2 / k + x_1^2} = 0,2 \text{ м.}$$

Запишем теперь выражения для $x(t)$ и $v_x(t)$:

$$x = X_0 \sin(\omega t + \varphi_0),$$

$$v_x = \frac{dx}{dt} = X_0 \omega \cos(\omega t + \varphi_0).$$

При $t = 0$

$$x(0) = X_0 \sin \varphi_0 = x_1, \quad v_x(0) = X_0 \omega \cos \varphi_0 = \pm v_1. \quad (7)$$

Следовательно, $\varphi_0 = \arcsin(x_1 / X_0) = \pi / 6$ (или $5\pi / 6$). Знак «+» в выражении (7) соответствует направлению вектора скорости v_1 вниз.

В этом случае $X_0 \omega \cos \varphi_0 > 0$. Следовательно, $\varphi_0 = \pi / 6$.

Если вектор скорости v_1 направлен вверх, то $v_{1x} = -v_1$, $X_0 \omega \cos \varphi_0 < 0$. Следовательно, $\varphi_0 = 5\pi / 6$.

О т в е т: $X_0 = 0,2$ м; $\varphi_{01} = \pi / 6$, $\varphi_{02} = 5\pi / 6$.

ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ

Средний уровень

1. Смещение груза массой 100 г, прикрепленного к невесомой пружине, происходит по закону:

$$x = 0,04 \cos\left(30t + \frac{\pi}{8}\right) \text{ м.}$$

Определите жесткость этой пружины.

О т в е т: $k = 90$ Н/м.

2. На сколько процентов изменится период колебания груза на пружине, если массу и амплитуду колебаний увеличить на 800 %, а жесткость пружины увеличить на 300 %?

О т в е т: увеличится на 50 %.

1. Шарик, подвешенный на пружине, совершает гармонические колебания, происходящие по закону:

$$x = 0,02 \cos\left(6\pi t + \frac{\pi}{4}\right) \text{ м.}$$

За сколько секунд этим шариком будет пройден путь, равный 4 см?

О т в е т: за $1/3$ с.

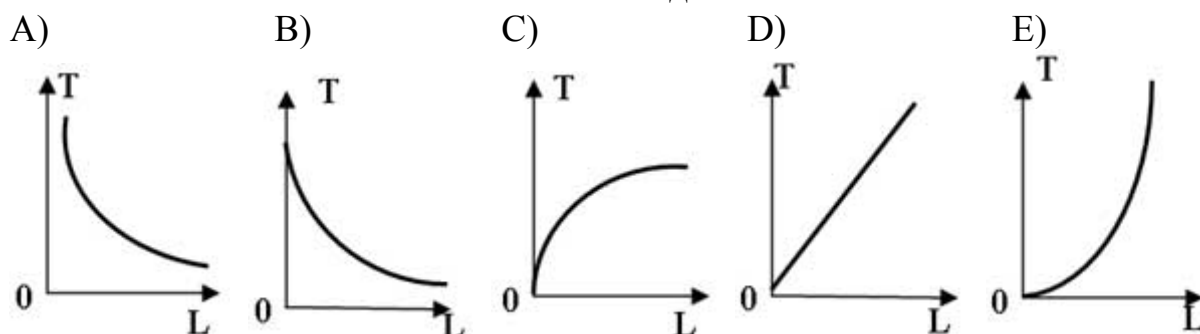
4. Груз, подвешенный на упругом резиновом шнуре, совершает гармонические колебания. Во сколько раз уменьшится период колебаний, если груз прикрепить к этому же шнуру, но сложенному вдвое?

О т в е т: уменьшится в 2 раза.

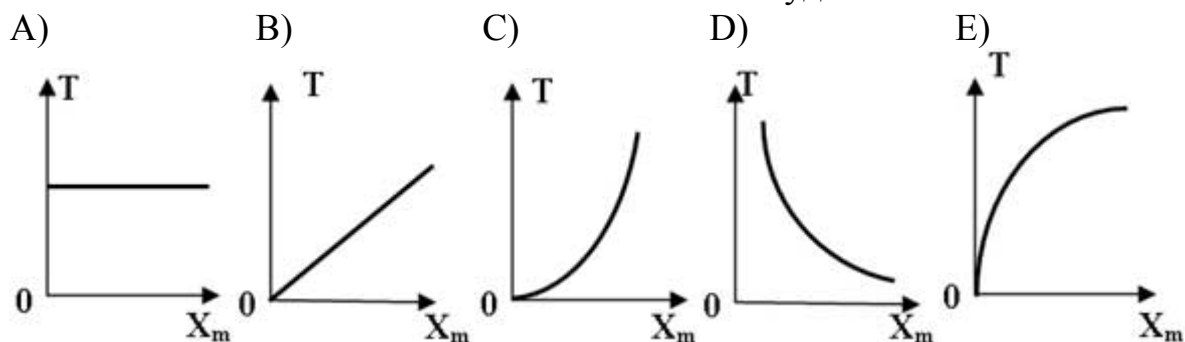
5. Определите первоначальную длину математического маятника, если известно, что при уменьшении длины маятника на 5 см частота колебаний увеличивается в 1,5 раза.

О т в е т: $l_1 = 9$ см.

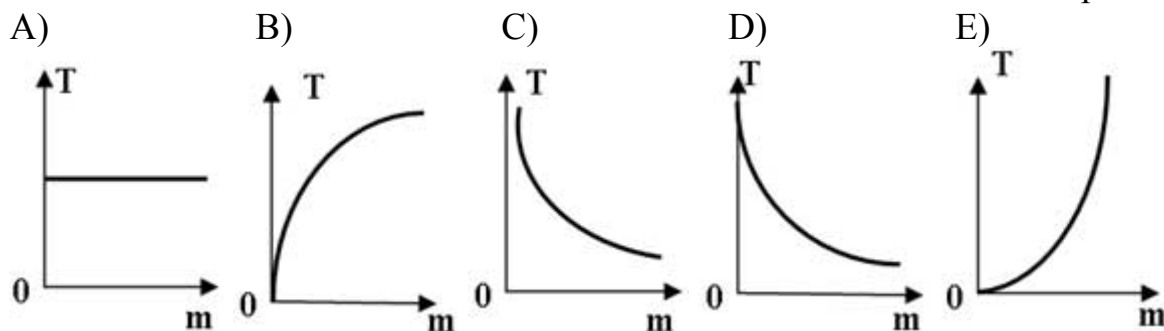
6. Какой из нижеприведенных графиков отражает зависимость периода колебаний математического маятника от длины его нити?

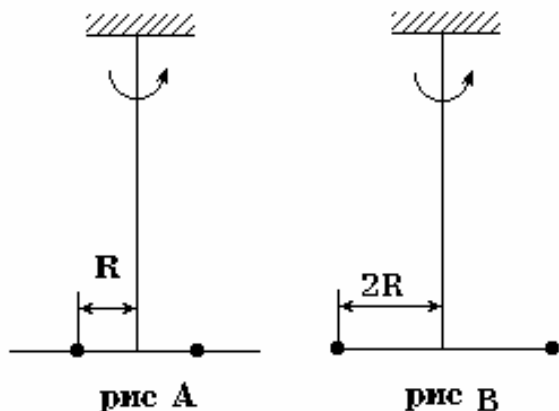


7. Какой из нижеприведенных графиков отражает зависимость периода колебаний математического маятника от амплитуды его колебаний?



8. Какой из нижеприведенных графиков отражает зависимость периода колебаний математического маятника от массы колеблющегося шарика?





9. Крутильный маятник представляет собой вертикальную проволоку, на нижнем конце которой закреплен очень легкий горизонтальный стержень с двумя грузами небольших размеров (рис. А). Во сколько раз изменится период колебаний маятника, если расстояние от оси вращения до грузов увеличить в 2 раза (рис. В)?

О т в е т: увеличится в 4 раза.

10. Маятник настенных механических часов представляет собой легкий стержень с грузиком. Для регулировки точности хода часов грузик можно перемещать по стержню. Как изменится период колебаний маятника, если грузик переместить с конца стержня на середину?

О т в е т: уменьшится в $\sqrt{2}$ раз.

11. Кинематический закон движения гармонического осциллятора имеет вид $x(t) = A \cos(Bt + C)$, где $A = 16$ см; $B = \frac{11\pi}{15}$ рад/с; $C = \frac{13\pi}{10}$. В момент времени $t = 500$ мс кинетическая энергия осциллятора $E_k = 21$ мДж. Чему равно максимальное значение модуля возвращающей силы?

О т в е т: $F_{\max} = 0,35$ Н.

Достаточный уровень

1. Маятник совершает гармонические колебания. Через сколько времени он первый раз отклонится от положения равновесия на расстояние, равное одной трети амплитуды, если период колебаний 2 с, начальная фаза

$$\varphi_0 = \frac{\pi}{18}.$$

О т в е т: $t = 0,05$ с.

2. Начальная фаза колебаний точки равна $\varphi_0 = \frac{\pi}{3}$. Период колебаний $T = 0,06$ с. Определите ближайшие моменты времени, в которые скорость и ускорение в два раза меньше амплитудных значений.

О т в е т: $t_1 = 0$; $t_2 = 0,025$ с.

3. Спиральная пружина обладает жесткостью $k = 25$ Н/м. Определите, тело какой массы m должно быть подвешено к пружине, чтобы за $t = 1$ мин совершалось 25 колебаний.

О т в е т: $m = 3,65$ кг.

4. Если увеличить массу груза, подвешенного к спиральной пружине, на 600 г, то период колебаний груза возрастает в 2 раза. Определите массу первоначально подвешенного груза.

О т в е т: $m = 200$ г.

5. При подвешивании грузов массами $m_1 = 600$ г и $m_2 = 400$ г к свободным пружинам последние удлинились одинаково ($\Delta l = 10$ см). Пренебрегая массой пружин, определите: 1) периоды колебаний грузов; 2) какой из грузов при одинаковых амплитудах обладает большей энергией и во сколько раз.

О т в е т: 1) $T_1 = T_2 = 0,63$ с; 2) $\frac{E_1}{E_2} = \frac{m_1}{m_2} = 1,5$.

6. На горизонтальной пружине жесткостью $k = 900$ Н/м укреплен шар массой $M = 4$ кг, лежащий на гладком столе, по которому он может скользить без трения. Пуля массой $m = 10$ г, летящая с горизонтальной скоростью $v_0 = 600$ м/с и имеющая в момент удара скорость, направленную вдоль оси пружины, попала в шар и застряла в нем. Пренебрегая массой пружины и сопротивлением воздуха, определите: 1) амплитуду колебаний шара; 2) период колебаний шара.

О т в е т: 1) $A = 10$ см; 2) $T = 0,419$ с.

7. На чашку весов массой M , подвешенную на пружине жесткостью k , с высоты h падает небольшой груз массой m . Удар груза о дно чашки является абсолютно неупругим. Чашка в результате падения груза начинает совершать колебания. Определите амплитуду A этих колебаний.

О т в е т: $A = \sqrt{\frac{m^2 g^2}{k^2} + \frac{2m^2 gh}{(m + M)k}}$.

8. Физический маятник представляет собой тонкий однородный стержень длиной 35 см. Определите, на каком расстоянии от центра масс должна быть точка подвеса, чтобы частота колебаний была максимальной.

О т в е т: $x = 10,1$ см.

9. Однородный диск радиусом $R = 20$ см колеблется около горизонтальной оси, проходящей на расстоянии $l = 15$ см от центра диска. Определите период T колебаний относительно этой оси.

О т в е т: $T = 1,07$ с.

10. Тонкий обруч радиусом $R = 50$ см подвешен на вбитый в стену гвоздь и колеблется в плоскости, параллельной стене. Определите период T колебаний обруча.

О т в е т: $T = 2$ с.

11. Тонкий однородный стержень длиной $l = 60$ см может свободно вращаться вокруг горизонтальной оси, проходящей через верхний конец стержня. Стержень отклонили на угол $\alpha_0 = 0,01$ рад и в момент времени $t_0 = 0$ отпустили. Считая колебания малыми, определите период колебаний стержня и запишите функцию $\alpha(t)$.

О т в е т: $T = 1,27$ с; $\alpha(t) = 0,01 \cos 1,57\pi t$, рад.

12. Тонкий однородный стержень длиной $l = 60$ см может свободно вращаться вокруг горизонтальной оси, отстоящей на расстоянии $x = 15$ см от его середины. Определите период колебаний стержня, если он совершает малые колебания.

О т в е т: $T = 1,19$ с.

13. Маятник состоит из стержня ($l = 30$ см, $m = 50$ г), на верхнем конце которого укреплен маленький шарик (материальная точка массой $m' = 40$ г), на нижнем – шарик ($R = 5$ см, $m = 100$ г). Определите период колебаний этого маятника около горизонтальной оси, проходящей через точку O в центре стержня.

О т в е т: $T = 1,24$ с.

14. Математический маятник, состоящий из нити длиной $l = 1$ м и свинцового шарика радиусом $r = 2$ см, совершает гармонические колебания с амплитудой $A = 6$ см. Определите: 1) скорость шарика при прохождении им положения равновесия; 2) максимальное значение возвращающей силы. Плотность свинца $\rho = 11,3$ г/см.

О т в е т: 1) $v_{\max} = A \sqrt{\frac{g}{l+r}} = 0,186$ м/с; 2) $F_{\max} = \frac{4}{3} \rho \pi r^3 A \frac{g}{l+r} = 218$ мН.

15. Два математических маятника имеют одинаковую массу, длины, отличающиеся в $n = 1,5$ раза, и колеблются с одинаковой угловой амплиту-

дой. Определите, какой маятник обладает большей энергией и во сколько раз.

О т в е т: $\frac{E_1}{E_2} = 1,5$.

16. Два математических маятника, длины которых отличаются на $\Delta l = 16$ см, совершают за одно и то же время один $n_1 = 10$ колебаний, другой – $n_2 = 6$ колебаний. Определите длины маятников l_1 и l_2 .

О т в е т: $l_1 = 9$ см; $l_2 = 25$ см.

17. Математический маятник длиной $l = 50$ см подвешен в кабине самолета. Определите период T колебаний маятника, если самолет движется: 1) равномерно; 2) горизонтально с ускорением $a = 2,5$ м/с.

О т в е т: 1) $T = 1,42$ с; 2) $T = 1,4$ с.

18. Некоторое тело качается вокруг оси с периодом $T_1 = 0,5$ с так, что его центр масс находится на расстоянии $l = 10$ см ниже точки подвеса. Если к центру масс прикрепить грузик массой $m = 50$ г, то период качаний становится $T_2 = 0,6$ с. Найдите момент инерции тела относительно оси качания.

О т в е т: $J = 9,3 \cdot 10^{-5}$ кг·м².

19. На доске лежит груз массой 1 кг. Доска совершает гармонические колебания в вертикальной плоскости с периодом 0,5 с и амплитудой 2 см. Определите силу давления груза на доску в момент времени 3,2 с.

О т в е т: $F = 7,95$ Н.

20. Доска совершает гармонические колебания в горизонтальном направлении с периодом 5 с. Лежащее на ней тело начинает скользить, когда амплитуда колебаний достигает 0,6 м. Каков коэффициент трения покоя между грузом и доской?

О т в е т: $\mu = 0,1$.

21. Диск радиусом 20 см подвешен на веревке длиной 30 см, прикрепленной к его ободу. Найдите период качаний диска вокруг точки подвеса.

О т в е т: $T = 1,5$ с.

1.4. СЛОЖЕНИЕ ГАРМОНИЧЕСКИХ КОЛЕБАНИЙ

1.4.1. Сложение двух гармонических колебаний одинакового направления и частоты

Решение ряда вопросов, в частности, сложение нескольких колебаний одинакового направления (или, что то же самое, сложение нескольких гармонических функций) значительно облегчается и становится наглядным, если изображать колебания графически в виде векторов на плоскости. Полученная таким способом схема называется *векторной диаграммой*.

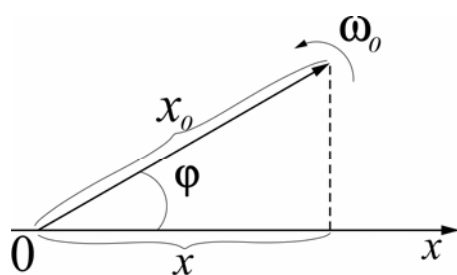


Рис. 7

Возьмем ось, которую обозначим буквой x (рис. 7).

Из точки O , взятой на оси, отложим вектор длиной x_0 , образующий с осью угол φ . Если привести этот вектор во вращение с угловой скоростью ω_0 , то проекция конца вектора будет перемещаться по оси x в пределах от $-x_0$ до $+x_0$, причем координата этой проекции будет изменяться со временем по закону

$$x = x_0 \cos(\omega_0 t + \varphi_0).$$

Следовательно, проекция конца вектора на ось будет совершать гармонические колебания с амплитудой, равной длине вектора, с круговой частотой, равной угловой скорости вращения вектора, и с начальной фазой, равной углу, образуемому вектором с осью в начальный момент времени.

Из сказанного следует, что гармоническое колебание может быть задано с помощью вектора, длина которого равна амплитуде колебания, а направление вектора образует с осью x угол, равный начальной фазе колебания.

Рассмотрим сложение двух гармонических колебаний одинакового направления и одинаковой частоты:

$$x_1 = x_{01} \cos(\omega_0 t + \varphi_{01}),$$

$$x_2 = x_{02} \cos(\omega_0 t + \varphi_{02}).$$

Представим оба колебания с помощью векторов $\vec{x}_{01}$ и $\vec{x}_{02}$, образующих с осью x углы φ_{01} и φ_{02} соответственно (рис. 8). Построим по правилам сложения векторов результирующий вектор $\vec{x}_0$. Проекция этого вектора на ось x равна сумме проекций слагаемых векторов, т.е.

$$x = x_1 + x_2.$$

Следовательно, вектор $\vec{x}_0$ представляет собой результирующее колебание. Этот вектор вращается с той же угловой скоростью ω_0 , как и векторы $\vec{x}_{01}$ и $\vec{x}_{02}$, так что результирующее движение будет гармоническим колебанием с частотой ω_0 , амплитудой x_0 и начальной фазой ϕ .

Из построения видно, что

$$x_0^2 = x_{01}^2 + x_{02}^2 - 2x_{01}x_{02} \cos[\pi - (\phi_2 - \phi_1)] =$$

$$= x_{01}^2 + x_{02}^2 + 2x_{01}x_{02} \cos(\phi_2 - \phi_1),$$

$$\operatorname{tg} \phi = \frac{x_{01} \sin \phi_1 + x_{02} \sin \phi_2}{x_{01} \cos \phi_1 + x_{02} \cos \phi_2}.$$

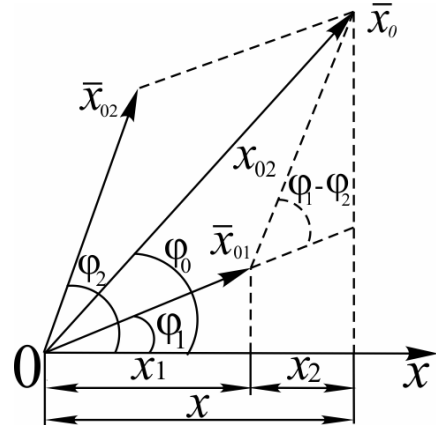


Рис. 8

Итак, представление гармонических колебаний посредством векторов дает возможность свести сложение нескольких колебаний к операции сложения векторов. Этот прием бывает особенно полезен, например, в оптике, где световые колебания в некоторой точке определяются как результат наложения многих колебаний, приходящих в данную точку от различных участков волнового фронта.

Проанализируем выражение для квадрата амплитуды результирующего колебания. Если разность фаз складываемых колебаний $\phi_2 - \phi_1$ равна нулю, амплитуда результирующего колебания равна сумме x_{01} и x_{02} . Если разность фаз $\phi_2 - \phi_1$ равна $+\pi$ или $-\pi$, т.е. колебания происходят в противофазе, то амплитуда результирующего колебания равна $|x_{01} - x_{02}|$.

Если частоты складываемых колебаний неодинаковы, то векторы $\vec{x}_{01}$ и $\vec{x}_{02}$ будут вращаться с различной скоростью. В этом случае результирующий вектор $\vec{x}_0$ пульсирует по величине и вращается с непостоянной скоростью. Следовательно, результирующим движением в этом случае будет не гармоническое колебание, а некоторый сложный колебательный процесс.

1.4.2. Биения

Особый интерес представляет случай, когда два складываемых гармонических колебания одинакового направления мало отличаются по частоте. Такие колебания называются *биениями*.

Обозначим частоту одного из колебаний буквой ω , частоту второго колебания через $(\omega + \Delta\omega)$. По условию $\Delta\omega \ll \omega$. Амплитуды обоих колебаний будем полагать одинаковыми и равными x_0 . Поскольку частоты

колебаний несколько отличны, всегда можно выбрать начало отсчета времени так, чтобы начальные фазы обоих колебаний были равны нулю.

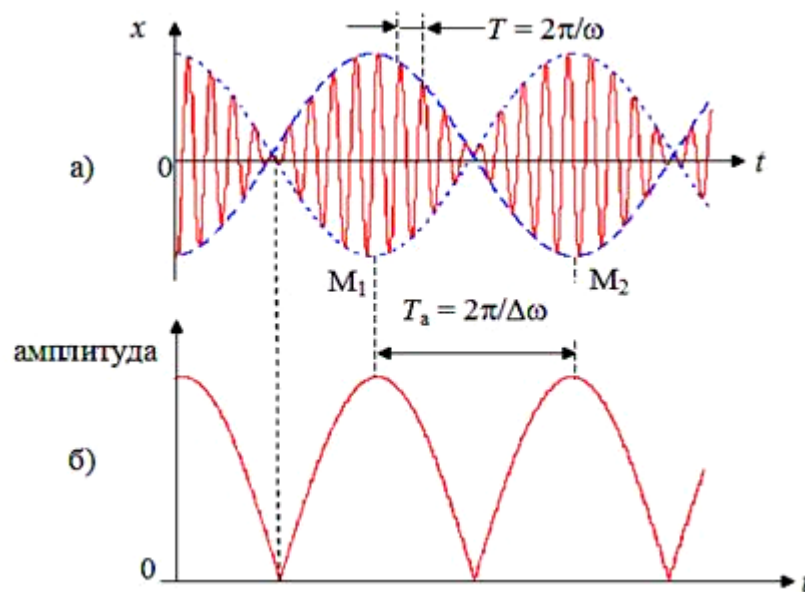


Рис. 9

Практически это означает, что мы должны дождаться, пока смещения в обоих колебаниях достигнут одновременно наибольшего положительного значения, и в этот момент «запустить секундомер». Тогда уравнения обоих колебаний будут иметь следующий вид:

$$x_1 = x_0 \cos \omega t ,$$

$$x_2 = x_0 \cos(\omega + \Delta\omega)t .$$

Складывая эти два выражения и применяя тригонометрическую формулу для суммы косинусов, получаем:

$$x = x_1 + x_2 = \left[2x_0 \cos\left(\frac{\Delta\omega}{2}t\right) \right] \cos \omega t \quad (19)$$

(во втором множителе пренебрегаем членом $\frac{\Delta\omega}{2}$ по сравнению с ω).

Заклученный в скобки множитель в формуле (19) изменяется гораздо медленнее, чем второй множитель. Ввиду условия $\Delta\omega \ll \omega$ за то время, за которое множитель $\cos \omega t$ совершает несколько полных колебаний, множитель, стоящий в квадратных скобках, почти не изменяется. Это дает основание рассматривать колебание (19) как гармоническое колебание с частотой ω , амплитуда которого изменяется по некоторому периодическому закону.

График амплитуды показан на рис. 9б. Аналитическое выражение для амплитуды имеет вид

$$A = \left| 2x_0 \cos\left(\frac{\Delta\omega}{2}t\right) \right|. \quad (20)$$

Функция (20) – периодическая функция с частотой, в два раза превышающей частоту выражения, стоящего под знаком модуля, т.е. с частотой $\Delta\omega$. Таким образом, частота пульсаций амплитуды – ее называют *частотой биений* – равна разности частот складываемых колебаний.

1.4.3. Сложение взаимно перпендикулярных колебаний

Допустим, что материальная точка может совершать колебания как вдоль оси x , так и вдоль перпендикулярной к ней оси y . Если возбудить оба колебания, то материальная точка будет двигаться по некоторой криволинейной траектории, форма которой зависит от разности фаз обоих колебаний.

Выберем начало отсчета времени так, чтобы начальная фаза первого колебания была равна нулю. Тогда уравнения колебаний запишутся следующим образом:

$$x = A \cos \omega t, \quad y = B \cos(\omega t + \alpha), \quad (21)$$

где α – разность фаз складываемых колебаний.

Выражения (21) представляют собой заданное в параметрической форме уравнения траектории, по которой движется точка, участвующая в обоих колебаниях. Чтобы получить уравнение траектории в обычном виде, нужно исключить из уравнений (21) параметр t .

Из первого уравнения следует, что

$$\cos \omega t = \frac{x}{A}.$$

Следовательно,

$$\sin \omega t = \pm \sqrt{1 - \frac{x^2}{A^2}}.$$

Из уравнения (21) для y имеем

$$\frac{y}{B} = \cos(\omega t + \alpha) = \cos \omega t \cos \alpha + \sin \omega t \sin \alpha,$$

или, преобразуя это уравнение, получим

$$\frac{y}{B} = \frac{x}{A} \cos \alpha \pm \sin \alpha \sqrt{1 - \frac{x^2}{A^2}}.$$

Последнее уравнение после несложных преобразований можно привести к виду

$$\frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{B^2} - \frac{2xy}{AB} \cos \alpha = \sin^2 \alpha. \quad (22)$$

Это уравнение эллипса, оси которого ориентированы относительно координатных осей x и y произвольно. Ориентация эллипса и величины его полуосей зависят довольно сложным образом от амплитуд A и B и разности фаз α складываемых колебаний.

Исследуем форму траектории в некоторых частных случаях:

1. Разность фаз $\alpha = 0$. В этом случае уравнение (22) принимает вид

$$\left(\frac{x}{A} - \frac{y}{B} \right)^2 = 0,$$

откуда получается уравнение прямой

$$y = \frac{B}{A} x.$$

Колеблющаяся точка перемещается по этой прямой, причем расстояние ее от начала координат $r = \sqrt{x^2 + y^2}$. Подставляя в эту формулу выражения (21) для x и y и учитывая, что $\alpha = 0$, получим закон изменения r со временем:

$$r = \sqrt{A^2 + B^2} \cos \omega t. \quad (23)$$

Из (23) следует, что результирующее движение является гармоническим колебанием вдоль прямой с частотой ω и амплитудой, равной $\sqrt{A^2 + B^2}$ (рис. 10).

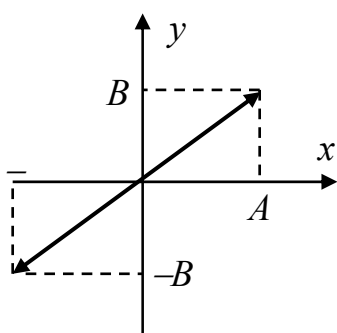


Рис. 10

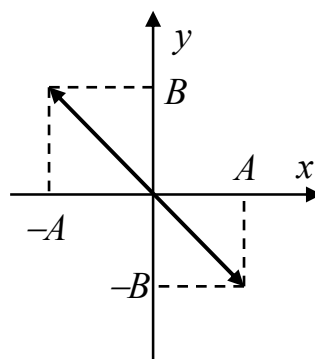


Рис. 11

2. Разность фаз $\alpha = \pm\pi$. Уравнение (22) имеет вид

$$\left(\frac{x}{A} + \frac{y}{B}\right)^2 = 0,$$

откуда следует, что результирующее движение представляет собой гармоническое колебание вдоль прямой (рис. 11)

$$y = -\frac{B}{A}x.$$

3. При $\alpha = \pm\frac{\pi}{2}$ уравнение (22) переходит в уравнение эллипса

$$\frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{B^2} = 1,$$

приведенного к координатным осям, причем полуоси эллипса равны соответствующим амплитудам складываемых колебаний. При равенстве амплитуд эллипс вырождается в окружность.

Случаи $\alpha = +\frac{\pi}{2}$ и $\alpha = -\frac{\pi}{2}$ отличаются направлением движения по эллипсу или по окружности. Если $\alpha = +\frac{\pi}{2}$ (уравнения (21) можно записать в виде $x = A\cos\omega t$, $y = -B\sin\omega t$), то в момент $t=0$ точка находится в положении 1 (рис. 12). В последующие моменты времени координата x уменьшается, а координата y становится отрицательной. Следовательно, движение совершается по часовой стрелке.

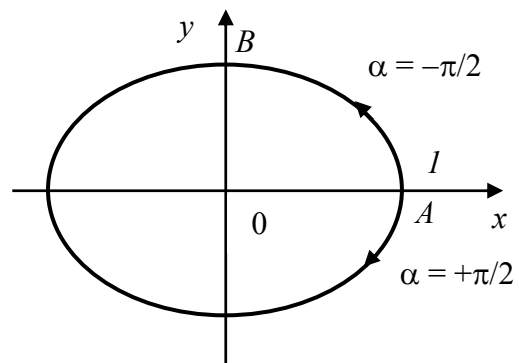


Рис. 12

При $\alpha = -\frac{\pi}{2}$ уравнения складываемых колебаний имеют вид

$$x = A\cos\omega t, \quad y = B\sin\omega t.$$

В этом случае движение происходит против часовой стрелки.

Из сказанного следует, что равномерное движение по окружности радиуса R с угловой скоростью ω может быть представлено как сумма двух взаимно перпендикулярных колебаний

$$x = R\cos\omega t, \quad y = \pm R\sin\omega t$$

(знак «+» в выражении для y соответствует движению против часовой стрелки, знак «-» — движению по часовой стрелке).

В случае, когда частоты взаимно перпендикулярных колебаний отличаются на очень малую величину $\Delta\omega$, их можно рассматривать как

колебания одинаковой частоты, но с изменяющейся разностью фаз. В этом случае уравнения колебаний можно представить в виде

$$x = A \cos \omega t, \quad y = B \cos [\omega t + (\Delta \omega t + \alpha)],$$

и выражение $\Delta \omega t + \alpha$ рассматривать как разность фаз, медленно изменяющуюся со временем по линейному закону.

Результирующее движение в этом случае происходит по медленно видоизменяющейся кривой, которая последовательно принимает форму, отвечающую всем значениям разности фаз от $-\pi$ до $+\pi$.

Если частоты взаимно перпендикулярных колебаний не одинаковы, то траектория результирующего движения имеет вид довольно сложных кривых, называемых *фигурами Лиссажу*.

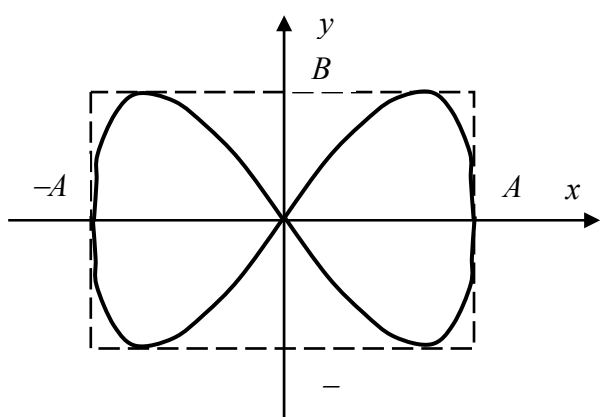


Рис. 13

На рис. 13 показана одна из простейших траекторий, получающаяся при отношении частот 1:2 и разности фаз, равной $\pi/2$.

Уравнения колебаний имеют следующий вид:

$$x = A \cos \omega t, \quad y = B \cos (2\omega t + \pi/2).$$

За то время, пока вдоль оси x точка успевает переместиться из одного крайнего положения в другое, вдоль оси y , выйдя из нулевого по-

ложения, она успевает достигнуть одного крайнего положения, затем другого и вернуться в нулевое положение.

При отношении частот 1:2 и разности фаз, равной нулю, траектория вырождается в незамкнутую кривую (рис. 14), по которой точка движется туда и обратно.

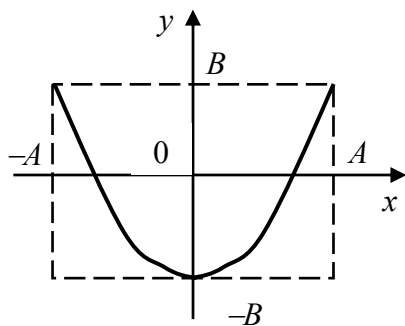


Рис. 14

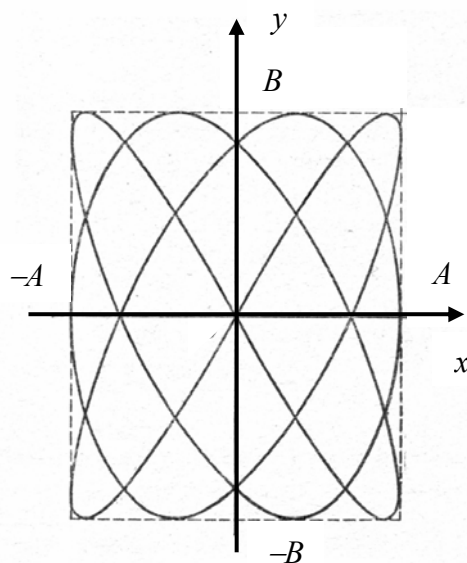


Рис. 15

Чем ближе к единице дробь, выражающая отношение частот колебаний, тем сложнее оказывается форма фигуры Лиссажу. Например, на рис. 15 показана кривая для отношения частот 3:4 и разности фаз, равной $\pi/2$.

ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

Пример 1. Точка участвует одновременно в двух гармонических взаимно перпендикулярных колебаниях с кратными периодами, одинаковыми амплитудами и начальными фазами, равными нулю. Начертите траекторию точки, если период колебаний по оси OY в два раза больше, чем по оси OX .

Дано:	Решение
$A_1 = A_2 = A$	Уравнения гармонических колебаний по осям OX и OY имеют следующий вид:
$\varphi_{01} = \varphi_{02} = 0$	$x = A \sin \frac{2\pi}{T_1} t, \quad (1)$
$T_2 = 2T_1$	$y = A \sin \frac{2\pi}{T_2} t. \quad (2)$
$y(x) - ?$	

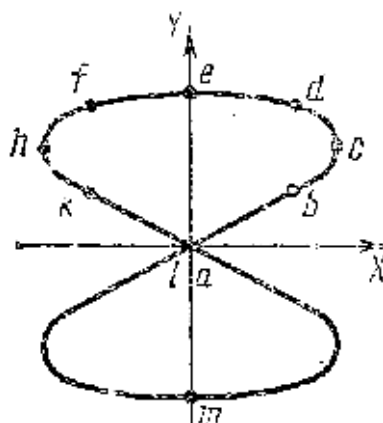
Так как по условию задачи $T_2 = 2T_1$, то уравнение (2) можно привести к виду

$$y = A \sin \frac{2\pi}{2T_1} t = A \sin \frac{\pi}{T_1} t. \quad (3)$$

Используя уравнения (1) и (3), составим таблицу для значений x и y в различные моменты времени t , выраженные в долях периода T_1 :

t	x	y	Точка на графике	t	x	y	Точка на графике
0	0	0	a	$5T_1/8$	-0,7A	0,9A	f
$T_1/8$	0,7A	0,4A	b	$3T_1/4$	-A	0,7A	h
$T_1/4$	A	0,7A	c	$7T_1/8$	-0,7A	0,4A	k
$3T_1/8$	0,7A	0,9A	d	T_1	0	0	l
$T_1/2$	0	A	e				

Построим траекторию $abcdefghkl$ точки, используя данные таблицы. Вследствие симметрии дополним траекторию участком aml .



Пример 2. Складываются два колебания одинакового направления, выражаемые уравнениями:

$$x_1 = 0,01 \cos \pi \left(t + \frac{1}{6} \right); \quad x_2 = 0,02 \cos \pi \left(t + \frac{1}{2} \right)$$

(длина – в метрах, время – в секундах). 1) Определите амплитуды, периоды и начальные фазы складываемых колебаний; 2) напишите уравнение результирующего колебания.

Дано:	Решение
$x_1 = 0,01 \cos \pi \left(t + \frac{1}{6} \right)$ $x_2 = 0,02 \cos \pi \left(t + \frac{1}{2} \right)$	Запишем уравнение гармонических колебаний в общем виде $x = A \cos \left(\frac{2\pi}{T} t + \varphi_0 \right). \quad (1)$ Преобразуем уравнения, заданные в условии задачи, к такому же виду: $x_1 = 0,01 \cos \left(\pi t + \frac{\pi}{6} \right); \quad (2)$ $x_2 = 0,02 \cos \left(\pi t + \frac{\pi}{2} \right) \quad (3)$ и сравним уравнения (2) и (3) с уравнением (1).
$A_1 = ?, A_2 = ?, T_1 = ?,$ $T_2 = ?$ $\varphi_{01} = ?, \varphi_{02} = ?$ $x(t) = ?$	

Из сравнения находим:

для первого колебания:

амплитуда $A_1 = 0,01$ м, период $T_1 = 2$ с и начальная фаза $\varphi_{01} = \frac{\pi}{6}$ рад = 30° ;

для второго колебания:

$A_2 = 0,02$ м, период $T_2 = 2$ с и начальная фаза $\varphi_{02} = \frac{\pi}{2}$ рад = 90° .

Для того чтобы написать уравнение результирующего колебания, надо определить период T , амплитуду A и начальную фазу φ_0 результирующего колебания.

Из полученных результатов видно, что периоды складываемых колебаний одинаковы ($T_1 = T_2 = 2$ с).

Следовательно, и результирующее колебание будет иметь тот же период $T = 2$ с.

Для определения амплитуды результирующего колебания удобно воспользоваться векторной диаграммой.

Согласно теореме косинусов получим

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos \Delta\varphi},$$

$$A = \sqrt{0,01^2 + 0,02^2 + 2 \cdot 0,01 \cdot 0,02 \cos(90^\circ - 30^\circ)} = 0,026 \text{ м.}$$

Тангенс начальной фазы результирующего колебания определим по формуле

$$\operatorname{tg} \varphi_0 = \frac{A_1 \sin \varphi_1 + A_2 \sin \varphi_2}{A_1 \cos \varphi_1 + A_2 \cos \varphi_2},$$

откуда начальная фаза

$$\varphi_0 = \operatorname{arctg} \frac{A_1 \sin \varphi_1 + A_2 \sin \varphi_2}{A_1 \cos \varphi_1 + A_2 \cos \varphi_2},$$

$$\varphi_0 = \operatorname{arctg} \frac{0,01 \sin 30^\circ + 0,02 \sin 90^\circ}{0,01 \cos 30^\circ + 0,02 \cos 90^\circ} = 0,4\pi \text{ рад.}$$

С учетом найденных значений T , A и φ_0 уравнение результирующего колебания имеет вид

$$x(t) = 0,026 \cos \pi(t + 0,4).$$

$$\text{О т в е т: } A_1 = 0,01 \text{ м; } A_2 = 0,02 \text{ м; } T_1 = T_2 = 2 \text{ с; } \varphi_{01} = \frac{\pi}{6} \text{ рад; } \varphi_{02} = \frac{\pi}{2}.$$

Пример 3. Точка участвует одновременно в двух гармонических колебаниях, происходящих во взаимно перпендикулярных направлениях и описываемых уравнениями $x = A \sin \omega t$ и $y = A \sin 2\omega t$. Определите уравнение траектории точки и вычертите ее с нанесением масштаба.

Дано: $x = A \sin \omega t$ $y = A \sin 2\omega t$	Решение Уравнение первого колебания по условию задачи имеет вид $x = A \sin \omega t$, откуда $\frac{x}{A} = \sin \omega t, \cos \omega t = \sqrt{1 - \frac{x^2}{A^2}}.$
$y(x) - ?$	

Запишем уравнение второго колебания в виде

$$y = A \sin 2\omega t = 2A \sin \omega t \cos \omega t.$$

Разделив первое уравнение на второе, получим

$$\frac{x}{y} = \frac{1}{2 \cos \omega t},$$

или

$$\frac{x}{y} = \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{x^2}{A^2}}}.$$

Возведем в квадрат обе части последнего уравнения

$$\frac{x^2}{y^2} = \frac{1}{4} \frac{1}{\left(1 - \frac{x^2}{A^2}\right)}$$

и выразим y^2

$$y^2 = 4x^2 \left(1 - \frac{x^2}{A^2}\right).$$

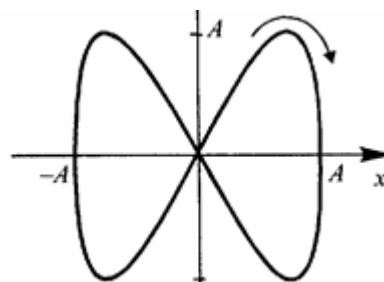
Построим траекторию движения точки.

$$t = 0 \quad x = 0 \quad y = 0;$$

$$t = \frac{T}{12} \quad x = 0,5A \quad y = 0,866A;$$

$$t = \frac{T}{8} \quad x = 0,707A \quad y = A;$$

$$t = \frac{T}{6} \quad x = 0,866A \quad y = 0,866A$$



О т в е т: $y^2 = 4x^2 \left(1 - \frac{x^2}{A^2}\right).$

Пример 4. Результирующее колебание, получающееся при сложении двух гармонических колебаний одного направления, описывается уравне-

нием вида $x = A \cos t \cos 45t$ (t – в секундах). Определите: 1) циклические частоты складываемых колебаний; 2) период биений результирующего колебания.

Дано:	Решение
$x = A \cos t \cos 45t$	Результирующее смещение колеблющегося тела
1) $\omega_1 - ?$ $\omega_2 - ?$	$x = x_1 + x_2$.
2) $T - ?$	Уравнение биений имеет вид
	$x = 2A \cos \frac{\omega_1 - \omega_2}{2} t \cos \left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2} t + \varphi \right).$
	$\frac{\omega_1 - \omega_2}{2} = 1, \quad \omega_1 - \omega_2 = 2, \quad \frac{\omega_1 + \omega_2}{2} = 45, \quad \omega_1 + \omega_2 = 90.$
	$2\omega_1 = 92, \quad \omega_1 = 46 \text{ с}^{-1}, \quad \omega_2 = 44 \text{ с}^{-1}.$
	$T = \frac{2\pi}{\Delta\omega} = \frac{2\pi}{2\text{с}^{-1}} = 3,14 \text{ с}.$

О т в е т: 1) $\omega_1 = 46 \text{ с}^{-1}$, $\omega_2 = 44 \text{ с}^{-1}$; 2) $T = 3,14 \text{ с}$.

ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ

Средний уровень

1. Складываются два гармонических колебания одного направления с одинаковыми периодами и равными амплитудами A_0 . Найдите амплитуду результирующего колебания при разности фаз а) $3\pi/2$; б) π ; в) $\pi/3$.

О т в е т: а) $A_0\sqrt{2}$; б) 0; в) $A_0\sqrt{3}$.

2. Складываются два гармонических колебания одного направления с одинаковыми частотами и амплитудами, равными $A_1 = A_0$ и $A_2 = 2A_0$. Найдите амплитуду результирующего колебания при разности фаз а) 0; б) π ; в) $\pi/3$.

О т в е т: а) $3A_0$; б) A_0 ; в) $A_0\sqrt{7}$.

3. Складываются два гармонических колебания одного направления с одинаковыми периодами. При какой разности фаз результирующее колебание имеет а) максимальную амплитуду; б) минимальную амплитуду?

О т в е т: а) 0; б) π .

4. Складываются два гармонических колебания одного направления с одинаковыми периодами и равными амплитудами A_0 . Определите раз-

ность фаз складываемых колебаний, если амплитуда результирующего колебания равна A_0 .

О т в е т: $\Delta\varphi = 2\pi/3$.

5. Складываются два гармонических колебания одного направления с одинаковыми частотам и амплитудами, равными $A_1 = A_0$ и $A_2 = 2A_0$. Найдите разность фаз, если амплитуда результирующего колебания равна а) $A_0\sqrt{5}$; б) $A_0\sqrt{3}$.

О т в е т: а) $\pi/2$; б) $2\pi/3$.

6. Частица участвует в двух однонаправленных колебаниях: $x_1 = A_1 \sin \omega t$ и $x_2 = A_2 \cos \omega t$, где $\omega = 1 \text{ с}^{-1}$, $A_1 = 0,001 \text{ м}$, $A_2 = 0,002 \text{ м}$. Определите амплитуду результирующего колебания, его частоту и начальную фазу. Запишите уравнение результирующего колебания.

О т в е т: $x = 0,00224 \cos(t - 0,46)$.

7. Частица участвует одновременно в двух взаимно перпендикулярных колебаниях: $x = A_1 \cos(\omega t + \pi/2)$, $y = A_2 \cos \omega t$, где $A_1 = 2 \text{ м}$, $A_2 = 3 \text{ м}$. По какой траектории движется частица?

О т в е т: Траектория – эллипс с полуосями 2 и 3 м.

8. Два одинаково направленных гармонических колебаний одинакового периода с амплитудами $A_1 = 4 \text{ см}$ и $A_2 = 8 \text{ см}$ имеют разность фаз $\varphi = 45^\circ$. Определите амплитуду результирующего колебания.

О т в е т: $A = 11,2 \text{ см}$.

9. Амплитуда результирующего колебания, получающегося при сложении двух одинаково направленных гармонических колебаний одинаковой частоты, обладающих разностью фаз 60° , равна $A = 6 \text{ см}$. Определите амплитуду A_2 второго колебания, если $A_1 = 5 \text{ см}$.

О т в е т: $A_2 = 1,65 \text{ см}$.

10. Определите разность фаз двух одинаково направленных гармонических колебаний одинаковой частоты и амплитуды, если амплитуда их результирующего колебания равна амплитудам складываемых колебаний.

О т в е т: $\varphi = 120^\circ$

Достаточный уровень

1. Складываются два гармонического колебания одного направления, описываемых уравнениями $x_1 = 3 \cos 2\pi t$, см и $x_2 = 3 \cos\left(2\pi t + \frac{\pi}{4}\right)$, см. Определите для результирующего колебания: 1) амплитуду; 2) начальную фазу. Запишите уравнение результирующего колебания и представьте векторную диаграмму сложения амплитуд.

О т в е т: 1) $A = 5,54$ см; 2) $\varphi_0 = \frac{\pi}{8}$ рад; $x = 5,54 \cos\left(2\pi t + \frac{\pi}{8}\right)$, см.

2. Частица участвует в двух одинаково направленных колебаниях вдоль оси OX $x_1 = 0,01 \sin \omega t$ и $x_2 = 0,02 \cos \omega t$, где $\omega = 10\pi \text{ с}^{-1}$. Определите амплитуду, частоту и начальную фазу результирующего колебания.

О т в е т: $A = 2,24$ см; $\nu = 0,16$ Гц; $\varphi_0 = 0,15\pi$ рад.

3. Разность фаз двух одинаково направленных гармонических колебаний одинакового периода, равного 8 с, и одинаковой амплитуды 2 см составляет $\pi/4$. Запишите уравнение движения, получающегося в результате сложения этих колебаний, если начальная фаза одного из них равна нулю.

О т в е т: $x = 0,037 \cos\left(\frac{\pi t}{4} + \frac{\pi}{8}\right)$.

4. Разность фаз двух одинаково направленных гармонических колебаний одинакового периода $T = 4$ с и одинаковой амплитуды $A = 5$ см составляет $\frac{\pi}{4}$. Напишите уравнение движения, получающегося в результате сложения этих колебаний, если начальная фаза одного из них равна нулю.

О т в е т: $x = 9,24 \cos\left(\frac{\pi t}{2} + \frac{\pi}{8}\right)$, см.

5. Частица участвует одновременно в двух взаимно перпендикулярных колебаниях $x = 0,02 \cos \omega t$, $y = 0,03 \sin \omega t$. Запишите уравнение траектории результирующего колебания.

О т в е т: $\frac{x^2}{0,0004} + \frac{y^2}{0,0009} = 1$.

6. Точка участвует одновременно в двух гармонических колебаниях, происходящих во взаимно перпендикулярных направлениях и описывае-

мых уравнениями $x = 3\cos\omega t$, см и $y = 4\cos\omega t$, см. Определите уравнение траектории точки и вычертите ее с нанесением масштаба.

О т в е т: $y = \frac{4x}{3}$.

7. Точка участвует одновременно в двух гармонических колебаниях, происходящих во взаимно перпендикулярных направлениях и описываемых уравнениями $x = \cos 2\pi t$ и $y = \cos \pi t$. Определите уравнение траектории точки и вычертите ее с нанесением масштаба.

О т в е т: $2y^2 - x = 1$.

8. Частоты колебаний двух одновременно звучащих камертонов настроены на 560 и 560,5 Гц. Определите период биений.

О т в е т: $T_6 = 2$ с.

9. В результате сложения двух колебаний, период одного из которых $T_1 = 0,02$ с, получают биение с периодом $T_6 = 0,2$ с. Определите период T_2 второго складываемого колебания.

О т в е т: $T_2 = 18,2$ мс.

10. Складываются два гармонических колебания одного направления имеющие одинаковые амплитуды и одинаковые начальные фазы с периодами $T_1 = 2$ с и $T_2 = 2,05$ с. Определите: 1) период результирующего колебания; 2) период биения.

О т в е т: 1) $T = 2,02$ с; 2) $T_6 = 82$ с.

11. Точка участвует в двух гармонических колебаниях одинаковой частоты, происходящих во взаимно перпендикулярных направлениях и описываемых уравнениями $x = A\sin(\omega t + \pi/2)$ и $y = A\sin\omega t$. Определите уравнение траектории точки и вычертите ее с нанесением масштаба, указав направление ее движения по этой траектории.

О т в е т: $x^2 + y^2 = A^2$, против часовой стрелки.

12. Точка участвует в двух гармонических колебаниях, происходящих во взаимно перпендикулярных направлениях и описываемых уравнениями $x = A\sin\omega t$ и $y = B\cos\omega t$, где A , B и ω – положительные постоянные. Определите уравнение траектории точки, вычертите ее с нанесением масштаба, указав направление ее движения по этой траектории.

О т в е т: $\frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{B^2} = 1$, по часовой стрелке.

13. Точка участвует одновременно в двух гармонических колебаниях, происходящих во взаимно перпендикулярных направлениях и описываемых уравнениями $x = 3\cos 2\omega t$, см и $y = 4\cos(2\omega t + \pi)$, см. Определите уравнение траектории точки и вычертите ее с нанесением масштаба.

О т в е т: $y = -\frac{4}{3}x$.

1.5. Затухающие колебания

Затухающими называют колебания, амплитуда которых вследствие потерь энергии реальной колебательной системой уменьшается с течением времени.

В случае механических колебаний механическая энергия системы убывает за счет действия сил трения и других сил сопротивления.

Дифференциальное уравнение свободных затухающих колебаний имеет вид

$$\frac{d^2s}{dt^2} + 2\delta \frac{ds}{dt} + \omega_0^2 s = 0, \quad (24)$$

где $2\delta = \frac{b}{m}$, (b – коэффициент сопротивления, т.е. коэффициент пропорциональности между скоростью v и силой сопротивления); m – масса колеблющегося тела; ω_0 – собственная частота системы (т. е. частота, с которой совершались бы свободные колебания системы в отсутствии сопротивления среды (при $b = 0$)).

При не слишком сильном затухании общее решение уравнения (24) имеет вид

$$s = A_0 e^{-\delta t} \cos(\omega t + \varphi_0), \quad (25)$$

где A_0 – амплитуда колебаний в начальный момент времени; φ_0 – начальная фаза колебаний; ω – условная циклическая частота затухающих колебаний

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}.$$

На рис. 16 дан график функции (25). Пунктирными линиями показаны пределы, в которых изменяется значение колеблющейся величины x .

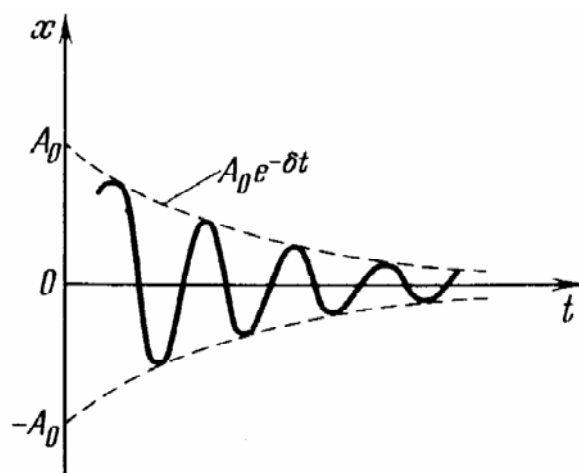


Рис. 16

В соответствии с видом функции (20) движение системы можно рассматривать как гармонические колебания с частотой ω с амплитудой, изменяющейся по закону $A(t) = A_0 e^{-\delta t}$.

Верхняя пунктирная кривая (см. рис. 16) есть график функции $A(t)$, причем величина A_0 представляет собой амплитуду в начальный момент времени. Значение величины x в начальный момент времени $x(0)$ зависит от A_0 , а также от начальной фазы φ_0 :

$$x(0) = A_0 \cos \varphi_0.$$

Скорость затухания колебаний определяется величиной $\delta = b / 2m$, называемой *коэффициентом затухания*.

Промежуток времени τ , за который амплитуда колебаний уменьшается в e раз, называется *временем релаксации*.

$$\tau = \frac{1}{\delta}.$$

Условный период затухающих колебаний

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}}. \quad (26)$$

Отношение значений амплитуд, соответствующих моментам времени, отличающимся на период,

$$\frac{A(t)}{A(t+T)} = e^{\delta T}.$$

Величину $e^{\delta T}$ называют *декрементом затухания*.

Для характеристики колебательной системы обычно используется логарифмический декремент затухания λ :

$$\lambda = \ln \frac{A(t)}{A(t+T)} = \delta T. \quad (27)$$

Выразив в соответствии с (22) δ через λ и T , закон убывания амплитуды со временем можно записать в виде

$$A = A_0 e^{-\frac{\lambda}{T} t}$$

За время релаксации τ система успевает совершить $N = \tau / T$ колебаний. Из условия $e^{-\lambda/T} = e^{-\delta}$ получается, что $\lambda(t/T) = \lambda N = 1$. Следовательно, логарифмический декремент затухания является величиной, обратной числу колебаний, совершаемых системой за время релаксации.

Другой характеристикой колебательной системы является *добротность*

$$Q = \pi / \lambda = \pi N_e.$$

Добротность пропорциональна числу колебаний N_e , совершаемых системой за то время релаксации.

ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

Пример 1. За время $\tau = 0,25T$ смещение тела, совершающего затухающие колебания, составило $x = 4,5$ см. Условный период колебаний $T = 8$ с, логарифмический декремент затухания $\theta = 0,8$. Начальная фаза колебаний равна $\varphi = 0$. Запишите уравнение затухающих колебаний и постройте график колебаний.

Дано:	Решение
$\tau = 0,25T$	Условная циклическая частота затухающих колебаний
$x = 4,5$ см	
$T = 8$ с	$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{\pi}{4} \frac{\text{рад}}{\text{с}}.$
$\theta = 0,8$	
$\varphi = 0$	Коэффициент затухания колебаний δ определим из формулы
$x = x(t) - ?$	
	$\theta = \delta T.$
	$\delta = \frac{\theta}{T} = 0,1 \text{ с}^{-1}.$

Значение амплитуды колебаний в момент времени τ определим, воспользовавшись уравнением

$$x(\tau) = Ae^{-\delta\tau} \sin \omega\tau = A \exp\left(-\frac{\delta T}{4}\right) \sin\left(\frac{\pi T}{16}\right).$$

$$x(\tau) = A \exp(-0,2) \sin \frac{\pi}{2}; \quad x(\tau) = 0,819A, \text{ откуда } A = \frac{x(\tau)}{0,819} = 5,5 \text{ см.}$$

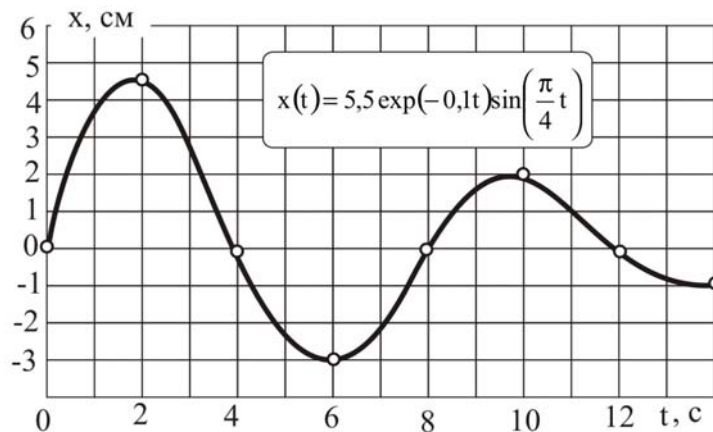
Тогда уравнение затухающих колебаний будет иметь вид

$$x(t) = 5,5 \exp(-0,1t) \sin\left(\frac{\pi}{4}t\right).$$

Для построения графика колебаний вычислим значения $x(t)$ для моментов времени: $\tau_1 = 0,25T = 2$ с; $\tau_2 = 0,5T = 4$ с; $\tau_3 = 0,75T = 6$ с; $\tau_4 = T = 8$ с; $\tau_5 = 1,25T = 10$ с; $\tau_6 = 1,5T = 12$ с. Составим таблицу значений τ и $x(\tau)$.

$\tau, \text{с}$	2	4	6	8	10	12
$x(\tau), \text{см}$	4,5	0	-3	0	1,98	0

График функции $x(t) = 5,5 \exp(-0,1t) \sin\left(\frac{\pi}{4}t\right)$ имеет вид:



О т в е т: $x(t) = 5,5 \exp(-0,1t) \sin\left(\frac{\pi}{4}t\right)$.

Пример 2. Определите условный период затухающих колебаний, если период собственных колебаний системы без потерь равен $T_0 = 1$ с, а логарифмический декремент составляет $\theta = 0,8$.

Дано:	Решение
$T_0 = 1 \text{ с}$	Условный период затухающих колебаний
$\theta = 0,628$	$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}}.$
$T - ?$	Так как собственная частота колебаний системы без потерь $\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0}$, а коэффициент затухания колебаний
	$\delta = \frac{\theta}{T},$

то

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{4\pi^2}{T_0^2} - \frac{\theta^2}{T^2}}},$$

откуда

$$T^2 = \frac{4\pi^2}{\frac{4\pi^2}{T_0^2} - \frac{\theta^2}{T^2}}; \quad \frac{4\pi^2 T^2}{T_0^2} - \theta^2 = 4\pi^2; \quad 4\pi^2 T^2 = T_0^2 4\pi^2 + T_0^2 \theta^2,$$

$$T^2 = T_0^2 + \frac{T_0^2 \theta^2}{4\pi^2}; \quad T = T_0 \sqrt{1 + \frac{\theta^2}{4\pi^2}}.$$

$$T = 1 \sqrt{1 + \frac{0,39438}{39,478}} = 1,00498 \text{ с.}$$

О т в е т: $T = 1,00498 \text{ с.}$

Пример 3. Амплитуда затухающих колебаний математического маятника за время $\tau_1 = 5$ мин уменьшилась в два раза. За какое время, считая от начального момента, амплитуда уменьшится в восемь раз?

Дано:	Решение
$\tau_1 = 5 \text{ мин}$	Логарифмический декремент затухания колебаний
$\tau_2 = ?$	
	$\theta = \frac{A(t)}{A(t+T)} = e^{-\delta t}, \quad (1)$

где $A(t)$ – амплитуда колебаний в момент времени t ; $A(t+T)$ – значение амплитуды через промежуток времени, равный одному периоду колебаний; δ – коэффициент затухания колебаний.

Из уравнения (1) определим величину коэффициента затухания.

Для этого перепишем уравнение (1) следующим образом:

$$\ln \frac{A_0}{A} = \delta \tau_1; \quad \ln 2 = 300\delta; \quad \delta = 2,3 \cdot 10^{-3} \text{ с}^{-1}. \quad (2)$$

Воспользовавшись соотношениями (2), определим искомое время, соответствующее уменьшению амплитуды в восемь раз:

$$\ln 8 = \delta \tau_2; \quad \tau_2 = \frac{\ln 8}{\delta} = \frac{2,1}{2,3 \cdot 10^{-3}} = 504 \text{ с.} \quad (3)$$

О т в е т: $\tau_2 = 15,1 \text{ мин.}$

Пример 4. Тело массой $m = 1$ кг, соединенное с двумя одинаковыми недеформированными пружинами жёсткостью $k = 50$ Н/м, соединенными параллельно, находится в вязкой среде с коэффициентом сопротивления $b = 0,05$ кг/с. Определить логарифмический декремент при возникновении малых колебаний, период колебаний и коэффициент затухания.

Дано:	Решение
$m = 1$ кг	Коэффициент затухания колебаний
$k = 50$ Н/м	$\delta = b/2m = 0,05/2 = 0,025 \text{ с}^{-1}$.
$b = 0,05$ кг/с	Собственная частота колебаний тела с учетом
$\theta - ?, T - ?, \delta - ?$	того, что пружины соединены параллельно,
	$\omega_0 = \sqrt{\frac{2k}{m}} = 10 \frac{\text{рад}}{\text{с}}.$

Период затухающих колебаний тела

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}} = \frac{6,28}{\sqrt{100 - 6,25 \cdot 10^{-4}}} = 0,628 \text{ с}.$$

Логарифмический декремент затухания колебаний

$$\theta = \delta T = 0,0157.$$

$$\text{О т в е т: } \theta = 0,0157; T = 0,628 \text{ с}; \delta = 0,025 \text{ с}^{-1}.$$

Пример 5. Математический маятник длиной $l = 0,5$ м совершает небольшие колебания в среде, в которой коэффициент затухания равен $\delta = 0,9 \text{ с}^{-1}$. Определите время τ и число полных колебаний n , по истечении которых амплитуда маятника уменьшится в пять раз. Во сколько раз должен возрасти коэффициент трения, чтобы колебания оказались невозможными?

Дано:	Решение
$l = 0,5$ м	При отсутствии трения малые колебания маятника в вертикальной плоскости происходят по гармоническому закону, причем собственная циклическая частота математического маятника, как
$\delta = 0,9 \text{ с}^{-1}$	известно, зависит только от длины подвеса:
$A = \frac{A_0}{5}$	$\omega_0 = \sqrt{g/l}.$ (1)
$\tau - ?, n - ?$	

Вследствие трения колебания маятника будут затухающими:

$$\varphi = \varphi_0 e^{-\delta t} \sin \omega t,$$

где φ – угол отклонения нити маятника от вертикали в момент t . (Очевидно, записанный закон движения соответствует такому началу отсчета времени, что при $t = 0$ маятник проходит через положение равновесия, т.е. $\varphi = 0$.)

Условный период затухающих колебаний

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}}. \quad (2)$$

Амплитудой затухающих колебаний принято считать выражение, стоящее перед гармоническим сомножителем. В соответствии с этим определением амплитуда A затухающих колебаний изменяется со временем по экспоненциальному закону:

$$A(t) = \varphi_0 e^{-\delta t}. \quad (3)$$

Записав выражения амплитуды для двух моментов t и $t + \tau$ и учитывая, что отношение этих амплитуд задано, можно найти искомое время τ .

Число n полных колебаний за это время можно определить, если известен период T .

Затухающие колебания по записанному выше закону возникают, как следует из решения соответствующего дифференциального уравнения, только при условии $\delta < \omega_0$ [это очевидно из выражения (2): при $\delta > \omega_0$ период и циклическая частота оказываются мнимыми величинами]. При $\delta \geq \omega_0$ происходит аperiодический процесс.

Запишем выражение (3) для моментов времени t и $t + \tau$:

$$A_1 = \varphi_0 e^{-\delta t}, \quad A_2 = \varphi_0 e^{-\delta(t+\tau)}.$$

Отношение амплитуд $A_1 / A_2 = e^{\delta\tau} = 5$. Логарифмируя это выражение, находим

$$\tau = \ln 5 / \delta = 1,79 \text{ с.}$$

Число полных колебаний, прошедших за время τ , равно отношению $n = \tau / T$. Определив из выражения (1) собственную циклическую частоту математического маятника и подставив ее в выражение (2), получим $T = 1,45 \text{ с}$. Из сравнения T и τ видно, что $1 < n < 2$, т.е. по прошествии двух полных колебаний амплитуда уменьшится уже больше, чем в 5 раз, что соответствует уменьшению энергии маятника больше, чем в 25 раз.

Предельное значение коэффициента затухания δ , при котором возможны колебания, $\delta_{\text{макс}} = \omega_0$, причем $\delta = b / (2m)$, где m – масса маятника, постоянная по условию задачи; b – коэффициент трения. Следовательно, искомое увеличение

$$z = \frac{b_{\text{макс}}}{b} = \frac{\delta_{\text{макс}}}{\delta}.$$

Так как $\delta_{\text{макс}} = \omega_0$, то $z = \omega_0 / \delta = 4,9$.

О т в е т: $\tau = 1,79 \text{ с}$.

Пример 6. Математический маятник длиной $l = 2$ м, колеблющийся в среде с потерями, за время $\tau = 10$ мин потерял 50 % своей энергии. Определите логарифмический декремент маятника.

Дано:	Решение
$l = 2$ м	В первом приближении можно считать, что энергия затухающих колебаний пропорциональна квадрату амплитуды
$\tau = 10$ мин	$\left. \begin{aligned} E_1 &= A_0^2 \exp(-2\delta t_1); \\ E_2 &= A_0^2 \exp[-2\delta(t_1 + \tau)]. \end{aligned} \right\} \quad (1)$
$\frac{E_2}{E_1} = 0,5$	
$\theta = ?$	
По условию задачи	

$$\frac{E_2}{E_1} = 0,5. \quad (2)$$

Подставив уравнения (1) в условие (2), получим

$$\frac{E_2}{E_1} = \exp(-2\delta\tau) = 0,5,$$

откуда $-2\delta\tau = \ln 0,5$.

$$\delta = -\frac{\ln 0,5}{2\tau} = -\frac{-0,693}{1200} = 5,8 \cdot 10^{-4} \text{ с}^{-1}.$$

Период колебаний маятника ввиду малости коэффициента затухания можно приближённо определить по формуле

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}} = 6,28\sqrt{\frac{2}{10}} = 2,8 \text{ с}.$$

Логарифмический декремент затухания колебаний

$$\theta = \delta T = 1,6 \cdot 10^{-3}.$$

Ответ: $\theta = 1,6 \cdot 10^{-3}$.

ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ

Средний уровень

1. Как изменится время релаксации, если при неизменном коэффициенте трения среды увеличить массу груза на пружине в 2 раза?

Ответ: увеличится в 2 раза.

2. Дифференциальное уравнение колебательного движения частицы имеет вид $\frac{d^2x}{dt^2} + 6\frac{dx}{dt} + 50x = 0$. Определите условный период затухающих колебаний.

Ответ: $T = 1$ с.

3. Колебательное движение частицы описывается уравнением $x = 0,7e^{-0,4t} \sin(1,5t + 0,6)$, где x измеряется в метрах, t – в секундах. Определите период свободных колебаний этой частицы в том случае, когда силы сопротивления отсутствуют.

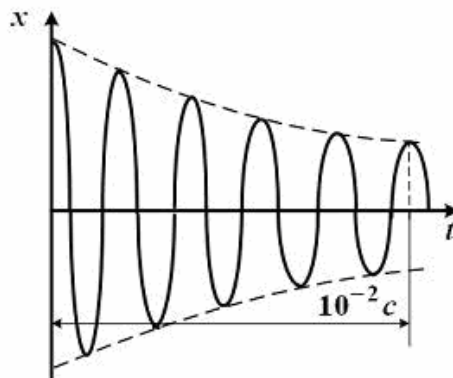
О т в е т: $T = 4,05$ с.

4. Маятник совершает колебания, которые подчиняются дифференциальному уравнению $\frac{d^2x}{dt^2} + 0,5\frac{dx}{dt} + 900x = 0$. Чему равно время релаксации?

Ответ: $\tau = 4$ с.

5. График зависимости координаты материальной точки от времени для затухающих колебаний имеет вид, показанный на рисунке. Определите циклическую частоту колебаний.

Ответ: $\omega = 10^3 \pi$ рад/с.



7. Тело совершает колебания по закону $x = 0,03e^{-0,25t} \cos 30t$. Определите время релаксации.

Ответ: $\tau = 4$ с.

8. Амплитуда затухающих колебаний уменьшилась в e^2 раз (e – основание натурального логарифма) за 100 мс. Определите коэффициент затухания колебаний.

Ответ: $\delta = 20$ с⁻¹.

9. Начальная амплитуда затухающих колебаний частицы равна 18 мм. Через 15 с после начала колебаний амплитуда стала равной 6 мм. В какой момент времени амплитуда будет равна 1,8 мм?

Ответ: $t = 3,14$ с.

10. Каков логарифмический декремент колебаний маятника длиной 0,8 м, если его начальная амплитуда 5° , а через 5 мин амплитуда стала $0,5^\circ$?

Ответ: $\theta = 0,014$.

11. Через сколько времени после начала колебаний энергия колебаний камертона с частотой 600 Гц уменьшится в 10^6 раз, если логарифмический декремент колебаний равен 0,0008?

Ответ: $t = 14,4$ с.

Достаточный уровень

1. Период затухающих колебаний $T = 1$ с, логарифмический декремент $\Theta = 0,3$, начальная фаза равна нулю. Смещение точки в момент времени $t = 2T$ составляет 5 см. Запишите уравнение колебаний.

О т в е т: $x = 9,1 \cdot e^{-0,3t} \cos 2\pi t$, см.

2. Амплитуда затухающих колебаний маятника за $t = 2$ мин уменьшилась в 2 раза. Определите коэффициент затухания δ .

О т в е т: $\delta = 5,78 \cdot 10^{-3} \text{ с}^{-1}$.

3. Логарифмический декремент Θ колебаний маятника равен 0,01. Определите число N полных колебаний маятника до уменьшения его амплитуды в 3 раза.

О т в е т: $N = 110$.

4. Амплитуда затухающих колебаний математического маятника за 1 мин уменьшилась в 3 раза. Определите, во сколько раз она уменьшится за 4 мин.

О т в е т: $\frac{A_1}{A_3} = 81$.

5. Через сколько времени энергия колебаний камертона с частотой 600 Гц уменьшится в 10^6 раз, если логарифмический декремент затухания равен 0,0008?

О т в е т: $t = 14$ с.

6. Тело массой $m = 0,6$ кг, подвешенное к спиральной пружине жесткостью $k = 30$ Н/м, совершает в некоторой среде упругие колебания. Логарифмический декремент колебаний $\Theta = 0,01$. Определите: 1) время, за которое амплитуда колебаний уменьшится в 3 раза; 2) число полных

колебаний, которые должно совершить тело, чтобы произошло подобное уменьшение амплитуды.

О т в е т: 1) $t_1 = 97,6$ с; 2) $N_1 = 110$.

7. При наблюдении затухающих колебаний выяснилось, что для двух последовательных колебаний амплитуда второго меньше амплитуды первого на 60 %. Период затухающих колебаний $T = 0,5$ с. Определите: 1) коэффициент затухания δ ; 2) для тех же условий частоту ν_0 незатухающих колебаний.

О т в е т: 1) $\delta = 1,83 \text{ с}^{-1}$; 2) $\nu_0 = 2,02$ Гц.

8. Тело массой $m = 100$ г, совершая затухающие колебания, за $\tau = 1$ мин потеряло 40 % своей энергии. Определите коэффициент сопротивления b .

О т в е т: $b = 8,51 \cdot 10^{-4}$ кг/с.

9. За время, в течении которого система совершает $N = 50$ полных колебаний, амплитуда уменьшается в 2 раза. Определите добротность Q системы.

О т в е т: $Q = 227$.

10. Задано уравнение затухающих колебаний точки

$$x(t) = 10 \exp(-0,1t) \sin\left(\frac{\pi}{3}t\right).$$

Найдите зависимость скорости движения точки от времени; постройте график.

О т в е т: $v(t) = 10 \exp(-0,1t) \left[\frac{\pi}{3} \cos \frac{\pi}{3}t - 0,1 \sin \frac{\pi}{3}t \right]$.

11. Математический маятник колеблется в среде, обеспечивающей величину логарифмического декремента $\theta = 0,5$. Во сколько раз уменьшится амплитуда колебаний по истечении одного полного периода колебаний?

О т в е т: $\frac{A_1}{A_2} = 1,65$.

12. Математический маятник в течение 120 секунд уменьшил амплитуду колебаний в 4 раза. Определите величину логарифмического декремента, если длина нити составляет $l = 2,28$ м.

О т в е т: $\theta = 0,035$.

13. Математический маятник длиной колеблется в среде с коэффициентом затухания $\delta = 0,045$. Определите время τ , в течение которого амплитуда колебаний уменьшится в 10 раз.

О т в е т: $\tau = 51$ с.

14. Уравнение затухающих колебаний точки имеет вид $x(t) = 100 \exp(-0,01t) \cos(8\pi t)$, мм. Определите амплитуду после того, как будут выполнены $N = 100$ полных колебаний.

О т в е т: $A_N = 36,78$ мм.

15. Математический маятник длиной $l = 2$ м колеблется в среде с логарифмическим декрементом $\theta = 0,01$. За какое время τ с момента начала колебаний его энергия колебаний уменьшается в 10 раз?

О т в е т: $\tau = 5,4$ мин.

16. Определите число полных колебаний N , в течение которых энергия системы уменьшится в два раза. Логарифмический декремент колебаний $\theta = 0,01$.

О т в е т: $N = 35$.

17. Найдите период затухающих колебаний математического маятника если период его собственных колебаний составляет $T_0 = 1$ с, а логарифмический декремент равен $\theta = 0,628$.

О т в е т: $T = 1,0054$ с.

18. Тело массой $m = 5$ кг совершает гармонические затухающие колебания. За первые 50 с колебаний тело теряет 60 % своей первоначальной энергии. Определите коэффициент сопротивления среды.

О т в е т: $b = 0,0916$ кг/с.

1.6. Вынужденные колебания

1.6.1. Общие сведения

Свободные колебания происходят с частотой, определяемой параметрами колебательной системы (масса, сопротивление, коэффициент упругости). Колебания, возникающие под действием внешней, периодически изменяющейся силы $F = F_0 \cos \Omega t$, называют *вынужденными механическими колебаниями*.

Дифференциальное уравнение вынужденных механических колебаний в общем случае имеет вид

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\delta \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = \frac{F_0}{m} \cos \Omega t, \quad (28)$$

где m – масса колеблющегося тела; F_0 – амплитудное значение внешней вынуждающей силы; Ω – циклическая частота внешней вынуждающей силы.

Решение уравнения (28):

$$x = A \cos(\Omega t - \varphi),$$

где A – амплитуда вынужденных колебаний; φ – сдвиг фаз между колебаниями изменяющейся величины и вынуждающей силы.

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{2\delta\Omega}{\omega_0^2 - \Omega^2}.$$

Амплитуда вынужденных колебаний

$$A = \frac{F_0}{m \sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4\delta^2 \Omega^2}}, \quad (29)$$

где $\delta = b / 2m$.

Анализ выражения (29) показывает, что если заданы амплитуда вынуждающей силы F_0 и параметры колебательной системы m , b , k , то амплитуда A вынужденных колебаний определяется частотой вынуждающей силы Ω . Как видно из выражения (29), чем меньше разность собственной частоты ω_0 и частоты вынуждающей силы Ω , тем больше амплитуда вынужденных колебаний.

1.6.2. Резонанс

Явление резкого возрастания амплитуды вынужденных колебаний при определенном значении частоты вынуждающей силы называют *механическим резонансом*.

Частоту вынуждающей силы, при которой наступает резонанс, называют *резонансной частотой*.

Для определения резонансной частоты необходимо найти минимум функции $f = \sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4\delta^2 \Omega^2}$, являющейся заменителем в формуле (29). Для этого первую производную этой функции по Ω приравнивают к нулю.

$$f' = -4\omega_0^2 \Omega + 4\Omega^3 + 8\delta^2 \Omega = 0.$$

Разделив обе части этого уравнения на 4Ω , получим

$$-\omega_0^2 + \Omega^2 + 2\delta^2 = 0,$$

откуда

$$\Omega_{\text{рез}} = \sqrt{\omega_0^2 - 2\delta^2}. \quad (30)$$

Из формулы (29) следует, что резонансная амплитуда

$$A_{\text{рез}} = \frac{F_0}{2m\delta\sqrt{\omega_0^2 + \delta^2}}. \quad (31)$$

Анализ выражений (30) и (31) показывает, что резонансная частота и резонансная амплитуда зависят от коэффициента затухания δ . С уменьшением коэффициента затухания резонансная частота возрастает и стремится к собственной частоте ($\delta_1 < \delta_2 < \delta_3$).

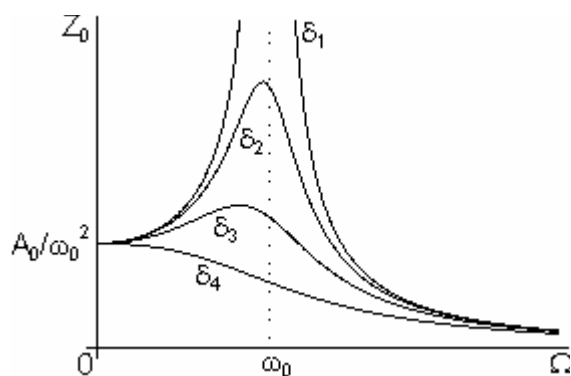


Рис. 17

На рис. 17 показан график зависимости амплитуды вынужденных колебаний от частоты вынуждающей силы.

Из рисунка видно, что чем меньше затухание, тем больше увеличивается амплитуда по мере приближения к резонансной частоте. При больших δ резонанс слабо выражен, так как с возрастанием амплитуды быстро увеличиваются потери энергии на трение и сопротивление среды.

1.6.3. Автоколебания

При затухающих колебаниях энергия системы расходуется на преодоление сопротивления среды. Если восполнить эту убыль энергии, колебания станут незатухающими. Если система сама управляет воздействием внешних сил, то возникающее в ней колебания называют *автоколебаниями*.

Автоколебания поддерживаются источником энергии, находящимся в самой системе. Амплитуда и период автоколебаний определяются параметрами автоколебательной системы. Примером автоколебаний является колебания маятника часов.

Автоколебательной системой называют физическую систему, в которой могут существовать автоколебания (рис. 18).



Рис. 18

В автоколебательной системе можно выделить:

- 1) колебательную систему, параметры которой определяют частоту автоколебаний;
- 2) источник энергии, поддерживающий колебания в системе;
- 3) клапан, регулирующий поступление энергии в колебательную систему;
- 4) устройство положительной обратной связи, посредством которой колебательная система управляет клапаном так, чтобы энергия, поступающая в систему за период, компенсировала потери энергии (например, на преодоление трения и сопротивления среды за то же время).

Обратная связь – воздействие результатов какого-либо процесса на его протекание.

Если отклонение какой-либо характеристики процесса в некоторый момент времени приводит благодаря обратной связи к дальнейшему росту этого отклонения, то обратная связь называется положительной; если к уменьшению – отрицательной.

Амплитуда автоколебаний определяется параметрами колебательной системы и энергией, поступающей в систему за период.

1.6.4. Параметрический резонанс

В рассмотренном предыдущем разделе приложенная извне сила обуславливала непосредственно смещение системы из положения равновесия.

Оказывается, существует иной вид воздействия извне, с помощью которого можно сильно раскачать систему. Этот вид воздействия заключается в совершаемом в такт с колебаниями периодическом изменении какого-либо параметра системы, вследствие чего само явление называется *параметрическим резонансом*, т.е. можно сказать, что параметрический резонанс – это явление раскачки колебаний при периодическом изменении параметров тех элементов системы, в которых сосредотачивается энергия колебаний (реактивные или энергоемкие параметры). Параметрический резонанс возможен в колебательных системах различной физической природы.

Примером механической системы, в которой возможен параметрический резонанс является маятник в виде груза массой m , подвешенный на нити, длину l которой можно изменять (рис. 10).

Собственная частота колебаний маятника

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}}.$$

Сила натяжения нити максимальна в нижнем положении груза и минимальна в крайних. Поэтому если уменьшить l в нижнем и увеличивать в крайних положениях, то работа внешней силы, совершаемая в среднем за период, оказывается положительной и колебания маятника будут продолжаться за счет работы по изменению параметра l системы. На параметрическом резонансе основано самораскачивание на качелях, когда эффективная длина маятника периодически изменяется при приседаниях и вставаниях качающегося.

Параметрический резонанс учитывается в небесной механике при расчете возмущений планетных орбит, вызванных влиянием других планет.

ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

Пример 1. Под действием внешней вертикальной силы $F_x = F_0 \cos \omega t$ тело, подвешенное на пружине, совершает установившиеся вынужденные колебания по закону $x = a \cos(\omega t - \varphi)$. Определите работу A силы F за период.

Дано:	Решение
$F_x = F_0 \cos \omega t$	Элементарная работа силы $\vec{F}$ за период
$x = a \cos(\omega t - \varphi)$	$dA = F_x dt,$ (1)
$A = ?$	где $dx = -a\omega \sin(\omega t - \varphi) dt.$ (2)

Подставляя (2) в (1), получим

$$dA = -(F_0 \cos \omega t) a \omega \sin(\omega t - \varphi) dt.$$

Работа силы $\vec{F}$ за период

$$A = -a\omega F_0 \int_0^T \cos \omega t \sin(\omega t - \varphi) dt.$$

Используя известное тригонометрическое соотношение, получим

$$A = -a\omega F_0 \int_0^T [\sin(2\omega t - \varphi) + \sin(-\varphi)] dt$$

Интеграл от первого слагаемого за период равен нулю. Поэтому

$$A = \frac{a\omega F_0 T \sin \varphi}{2} = \pi a F_0 \sin \varphi.$$

О т в е т: $A = \pi a F_0 \sin \varphi$.

Пример 5. Шарик массой $m = 50$ г подвешен на невесомой пружине жесткостью $k = 20$ Н/м. Под действием вынуждающей вертикальной гармонической силы с циклической частотой $\Omega = 18$ с⁻¹ он совершает установившиеся вынужденные колебания с амплитудой $X_{01} = 1,3$ см. При этом

смещение шарика отстает по фазе от вынуждающей силы на $\varphi = \frac{\pi}{4}$. Определите работу вынуждающей силы за время, равное периоду колебаний. Во сколько раз найденное значение меньше той максимальной работы, которую может совершить вынуждающая сила за период?

Дано:	Решение
$m = 50$ г $k = 20$ Н/м $\Omega = 18$ с ⁻¹ $X_{01} = 1,3$ см $\varphi = \frac{\pi}{4}$	Шарик можно принять за материальную точку, которая совершает вынужденные гармонические колебания. Элементарная работа вынуждающей силы $\vec{F}$ $dA = \vec{F} \vec{v} dt, \quad (1)$ где $\vec{v}$ – скорость шарика. Введем ось X, направленную вертикально (как и вынуждающая сила). Проекция вынуждающей силы на эту ось изменяется по закону $F_x = F_0 \sin \Omega t, \quad (2)$ где F_0 – амплитудное значение вынуждающей силы; Ω – циклическая частота.
$A_1 = ?$, $\frac{A_{\text{макс}}}{A_1} = ?$	

Смещение колеблющегося тела от положения равновесия (также вдоль оси X) и скорость его в этом случае изменяются со временем по законам:

$$x = X_0 \sin(\Omega t - \varphi), \quad (3)$$

$$v_x = X_0 \omega \cos(\Omega t - \varphi), \quad (4)$$

причем амплитуда и сдвиг по фазе вынужденных колебаний

$$X_0 = \frac{F_0 / m}{\sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4\delta^2 \Omega^2}}, \quad (5)$$

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{2\delta\Omega}{\omega_0^2 - \Omega^2}, \quad (6)$$

где $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ – собственная циклическая частота шарика.

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{20}{0,05}} = 20 \text{ с}^{-1}.$$

Уравнения (5) и (6) образуют систему относительно неизвестных δ и F_0 (δ – коэффициент затухания колебаний). Подставив выражения (2) и (4) в (1), получим

$$dA = F_x v_x dt = F_0 X_0 \Omega \sin \Omega t \cos(\Omega t - \varphi) dt. \quad (7)$$

Работа, совершаемая за период, может быть найдена интегрированием уравнения (7) по времени. Как видно, элементарная работа знакопеременна. Очевидно, работа вынуждающей силы за период будет наибольшей тогда, когда скорость колеблющегося шарика и вынуждающая сила изменяются со временем без сдвига по фазе. Это значит, что для любого момента

$$\cos(\Omega t - \varphi) = \sin \Omega t. \quad (8)$$

Уравнения (8) и (6) позволяют найти значения φ и Ω , при которых работа вынуждающей силы максимальна.

Чтобы найти работу вынуждающей силы за период, проинтегрируем выражение (7) по времени, заменив предварительно $\cos(\Omega t - \varphi)$ по тригонометрической формуле косинуса разности двух углов:

$$A = F_0 X_0 \Omega \left(\cos \varphi \int_0^T \sin \Omega t \cos \Omega t dt + \sin \varphi \int_0^T \sin^2 \Omega t dt \right).$$

Интегрирование по переменной t в пределах от 0 до T соответствует интегрированию по переменной Ωt в пределах от 0 до 2π , поэтому

$$\int_0^T \sin \Omega t \cos \Omega t dt = 0, \quad \int_0^T \sin^2 \Omega t dt = \frac{T}{2} = \frac{\pi}{\Omega}.$$

Тогда искомая работа $A = F_0 X_0 \pi \sin \varphi$.

Из равенства (6) при $\varphi = \frac{\pi}{4}$ и $\Omega = \omega_0$ получим

$$2\delta\Omega_1 = \omega_0^2 - \Omega_1^2. \quad (10)$$

Подставим выражение (10) в (5):

$$X_{01} = \frac{F_0}{m(\omega_0^2 - \Omega_1^2)\sqrt{2}}, \text{ откуда } F_0 = X_{01}m(\omega_0^2 - \Omega_1^2)\sqrt{2}. \quad (11)$$

Подставив выражение (11) и $\varphi_1 = \frac{\pi}{4}$ в (9), получим

$$A_1 = X_{01}^2 m \pi (\omega_0^2 - \Omega_1^2), \quad A_1 = 0,013^2 \cdot 0,053,14 (400 - 324) = 2 \cdot 10^{-3} \text{ Дж}.$$

Тождество (8) справедливо при $\varphi_0 = \frac{\pi}{2}$. Подставляя это значение φ_0 в равенство (6), находим $\operatorname{tg} \varphi_0 = \infty$, что возможно при $\Omega = \omega_0$. При этой частоте работа вынуждающей силы за период оказывается максимальной.

$$\frac{A_{\max}}{A_1} = \frac{X_{0p} \sin \varphi_0}{X_{01} \sin \varphi_1},$$

где X_{0p} и φ_0 – амплитуда вынужденных колебаний и сдвиг по фазе относительно вынуждающей силы при $\Omega = \omega_0$.

Из равенства (5) получим

$$X_{0p} = \frac{F_0}{2m\delta\omega_0}.$$

Учитывая выражения (10) и (11), находим $X_{0p} = \frac{X_{01}\Omega_1\sqrt{2}}{\omega_0}$.

Тогда $\frac{A_{\max}}{A_1} = \frac{X_{01}\Omega_1\sqrt{2}}{X_{01}\omega_0 \sin \varphi_1}$. Так как $\sin \varphi_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}$, то $\frac{A_{\max}}{A_1} = \frac{2\Omega_1}{\omega_0} = 1,8$.

О т в е т: $A_1 = 2 \cdot 10^{-3} \text{ Дж}$; $\frac{A_{\max}}{A_1} = 1,8$.

ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ

Средний уровень

1. Маятник совершает вынужденные колебания со слабым коэффициентом затухания, которые подчиняются дифференциальному уравнению $\frac{d^2x}{dt^2} + 0,5 \frac{dx}{dt} + 900x = 0,1 \cos 150t$. Во сколько раз нужно уменьшить частоту вынуждающей силы, чтобы амплитуда колебаний стала максимальной?

О т в е т: в 5 раз.

2. Пружинный маятник с жесткостью пружины 90 Н/м совершает вынужденные колебания со слабым коэффициентом затухания, которые подчиняются дифференциальному уравнению $\frac{d^2x}{dt^2} + 0,5\frac{dx}{dt} + 900x = 0,1\cos 10t$.

Во сколько раз нужно увеличить массу груза, чтобы амплитуда колебаний стала максимальной?

О т в е т: в 9 раз.

3. Определите амплитуду вынужденных колебаний частицы массой 2 кг, если дифференциальное уравнение ее движения имеет вид $\frac{d^2x}{dt^2} + 6\frac{dx}{dt} + 30x = 4\sin 2t$, где смещение x дано в метрах, а время t – в секундах.

О т в е т: $A = 0,07$ м.

4. Частица совершает вынужденные колебания по закону $x = 0,5\cos 2t$, где x измеряется в метрах, t – в секундах. Вынуждающая сила имеет вид $F = 5\cos 2t$, Н. Каков коэффициент затухания, если масса частицы 5 кг?

О т в е т: $\delta = 0,5 \text{ с}^{-1}$.

5. На сколько резонансная частота отличается от условной частоты затухающих колебаний осциллятора, равной 1 кГц, если коэффициент затухания осциллятора равен 400 с^{-1} ?

О т в е т: $\Delta\nu = 4,8$ Гц.

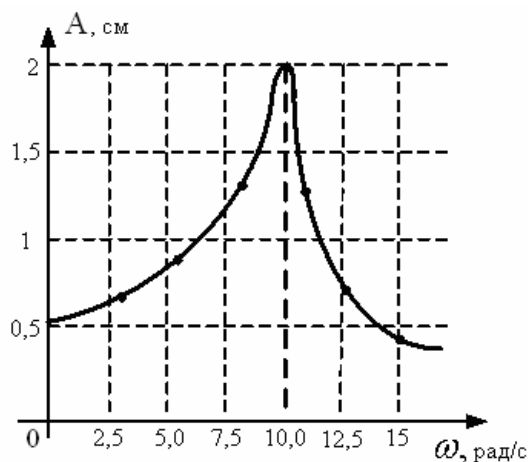
6. На рисунке представлена зависимость амплитуды колебаний математического маятника от частоты внешней силы. Чему равна длина нити маятника?

А. 0,02 м;

Б. 1 м;

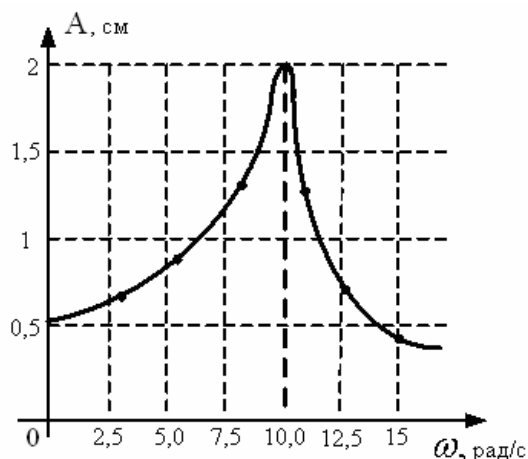
В. 0,2 м;

Г. 0,1 м.



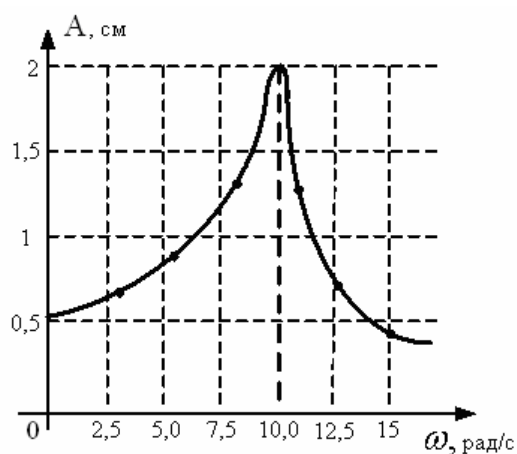
7. На рисунке представлена зависимость амплитуды колебаний груза массой 0,1 кг на пружине от частоты внешней силы. Определите коэффициент жесткости пружины.

- А. 1 Н/м; Б. 100 Н/м;
В. 1000 Н/м; Г. 10 Н/м.

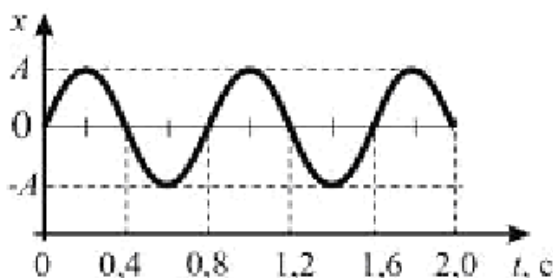


8. На рисунке представлена зависимость амплитуды колебаний груза на пружине с жесткостью $k = 10$ Н/м от частоты внешней силы. Чему равна максимальная энергия этой системы?

- А. 40 Дж; Б. 0,004 Дж;
В. 0,002 Дж; Г. 20 Дж.



9. Свободные гармонические колебания маятника описываются графиком, представленным на рисунке. На маятник начинает действовать периодически изменяющаяся вынуждающая сила. При какой частоте вынуждающей силы колебания войдут в резонанс?



О т в е т: $\Omega = 1,25$ Гц.

10. При какой скорости поезда рессоры его вагонов будут особенно сильно колебаться под действием толчков колес о стыки рельсов, если длина рельсов 12,5 м, нагрузка на рессору равна 55 кН, а прогиб рессоры при нагрузке 10 кН равен 16 мм?

О т в е т: $v = 21,2$ м/с.

Достаточный уровень

1. Определите резонансную частоту колебательной системы, если собственная частота колебаний $\nu_0 = 300$ Гц, а логарифмический декремент $\theta = 0,2$.

О т в е т: $\nu_{\text{рез}} = 299,7$ Гц.

2. Собственная частота ν_0 колебаний некоторой системы составляет 500 Гц. Определите частоту ν затухающих колебаний этой системы, если резонансная частота $\nu_{\text{рез}} = 499$ Гц.

О т в е т: $\nu = 499,5$ Гц.

3. Период затухающих колебаний системы составляет 0,2 с, а отношение амплитуд первого и шестого колебаний равно 13. Определите резонансную частоту данной колебательной системы.

О т в е т: $\nu_{\text{рез}} = 4,98$ Гц.

4. Гиря массой $m = 0,5$ кг, подвешенная на спиральной пружине жесткостью $k = 50$ Н/м, совершает колебания в вязкой среде с коэффициентом сопротивления $b = 0,5$ кг/с. На верхний конец пружины действует вынуждающая сила, изменяющаяся по закону $F = 0,1 \cos \Omega t$, Н. Определите для данной колебательной системы: 1) коэффициент затухания δ ; 2) резонансную амплитуду $A_{\text{рез}}$.

О т в е т: 1) $\delta = 0,5 \text{ с}^{-1}$; 2) $A_{\text{рез}} = 2$ см.

5. Гиря массой $m = 400$ г, подвешенная на спиральной пружине жесткостью $k = 40$ Н/м, опущена в масло. Коэффициент сопротивления b для этой системы составляет 0,5 кг/с. На верхний конец пружины действует вынуждающая сила, изменяющаяся по закону $F = \cos \Omega t$, Н. Определите: 1) амплитуду вынужденных колебаний, если частота вынуждающей силы, вдвое меньше собственной частоты колебаний; 2) частоту вынуждающей силы при которой амплитуда вынужденных колебаний максимальна; 3) резонансную амплитуду.

О т в е т: 1) $A = 3,3$ см; 2) $\omega_{\text{рез}} = 9,96 \text{ с}^{-1}$; 3) $A_{\text{рез}} = 20$ см.

6. Амплитуда двух вынужденных колебаний системы с одинаковыми собственными частотами при всех значениях частоты вынуждающей силы различаются вдвое. Определите, какой одной (и только одной) из величин (массой, коэффициентом сопротивления среды, коэффициентом упругости, амплитудой вынуждающей силы) отличаются эти системы.

О т в е т: $F_{01} = 2F_{02}$.

2. ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ КОЛЕБАНИЯ

2.1. Свободные электромагнитные колебания в колебательном контуре

В цепи, состоящей из последовательно соединенных катушки индуктивностью L и конденсатора емкостью C , могут возникать электрические колебания. Поэтому такая цепь называется *колебательным контуром*. На рис. 19 изображены последовательные стадии колебательного процесса в контуре, не обладающем активным сопротивлением.

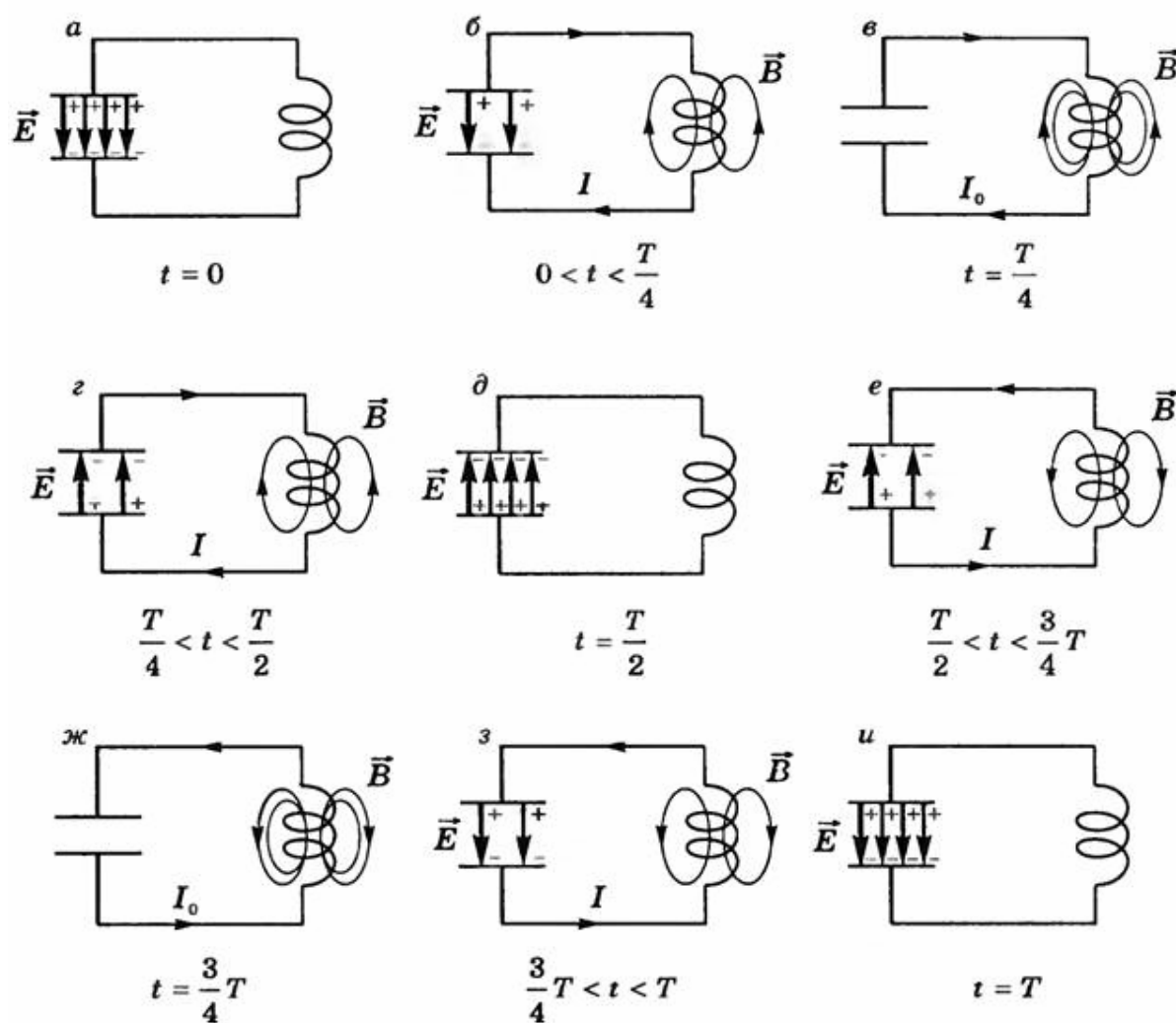


Рис. 19

Колебания в контуре можно вызвать, либо сообщив обкладкам конденсатора некоторый начальный заряд, либо возбуждив в катушке индуктивности ток (например, путем выключения внешнего магнитного поля, пронизывавшего витки катушки). Воспользуемся первым способом. Присоединим к источнику тока отключенный от катушки конденсатор. Это

приведет к возникновению на обкладках разноименных зарядов $+q$ и $-q$ (рис. 19а).

Между облаками возникнет электрическое поле, энергия которого равна $q^2 / 2C$. Если затем отключить источник тока и замкнуть конденсатор на катушку (рис. 19б), то конденсатор начнет заряжаться и в контуре потечет ток. В результате энергия электрического поля будет уменьшаться, но зато возникнет магнитное поле, обусловленное током, текущим через катушку, энергия которого возрастает. Эта энергия равна $LI_0^2 / 2$.

Поскольку активное сопротивление контура равно нулю, полная энергия, равная сумме энергий электрического и магнитного полей, не расходуется на нагревание проводов и будет оставаться постоянной. Поэтому в момент, когда напряжение в конденсаторе, а следовательно, и энергия электрического поля обращаются в ноль, энергия магнитного поля, а значит, и ток достигают наибольшего значения (начиная с этого момента времени ток течет за счет ЭДС самоиндукции). В дальнейшем ток уменьшается, и, когда заряды на обкладках достигнут первоначального значения q , сила тока станет равной нулю. Затем те же процессы протекают в обратном направлении (рис. 19д, ж, и), после чего система приходит в исходное состояние и весь цикл повторяется снова.

В ходе процесса периодически изменяются (т.е. колеблются) заряд на обкладках, напряжение на конденсаторе и сила тока, текущего через катушку. Колебания сопровождаются взаимными превращениями электрического и магнитного полей.

Полная энергия W контура в любой момент времени равна сумме энергий магнитного и электрического полей:

$$W = \frac{Li^2}{2} + \frac{q^2}{2C}.$$

Эта энергия не изменяется с течением времени, если сопротивление R контура равно нулю.

Производная полной энергии по времени равна нулю

$$\left(\frac{Li^2}{2} \right)' + \left(\frac{q^2}{2C} \right)' = 0 \quad \text{или} \quad \left(\frac{Li^2}{2} \right)' = - \left(\frac{q^2}{2C} \right)'. \quad (32)$$

Физический смысл уравнения (32) состоит в том, что скорость изменения энергии магнитного поля равна по модулю скорости изменения энергии электрического поля; знак минус указывает на то, что, когда энергия электрического поля возрастает, энергия магнитного поля убывает, и наоборот. Именно благодаря этому полная энергия не изменяется.

Вычисляя обе производные в уравнении (32), получим

$$\frac{Li^2}{2} 2ii' = -\frac{1}{2C} qq'. \quad (33)$$

Но производная заряда по времени представляет собой силу тока в данный момент времени:

$$i = q', \quad (34)$$

поэтому уравнение (33) можно переписать в следующем виде:

$$Li'i = -\frac{qi}{C}. \quad (35)$$

Производная силы тока по времени равна второй производной заряда по времени. Подставив в уравнение (35) $i' = q''$ и разделив левую и правую части этого уравнения на Li , получим дифференциальное уравнение свободных электромагнитных колебаний в контуре

$$q'' + \frac{1}{LC} q = 0, \text{ или } \frac{d^2 q}{dt^2} + \frac{1}{LC} q = 0. \quad (36)$$

Обозначим

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}, \quad (37)$$

тогда уравнение (37) примет вид

$$\frac{d^2 q}{dt^2} + \omega_0^2 q = 0. \quad (38)$$

Это уравнение описывает изменение во времени величины заряда на обкладках конденсатора.

Математическая форма полученного уравнения не отличается от дифференциального уравнения свободных механических колебаний.

Решением этого уравнения является функция

$$q = q_0 \cos(\omega_0 t + \varphi_0). \quad (39)$$

Таким образом, заряд на обкладках конденсатора изменяется по гармоническому закону с частотой, определяемой выражением (37). Эта частота называется *собственной частотой контура* (она соответствует собственной частоте гармонического осциллятора).

Период свободных электромагнитных колебаний в контуре определяют по формуле Томсона

$$T = 2\pi\sqrt{LC}.$$

Напряжение на конденсаторе отличается от заряда множителем $1/C$.

$$U = \frac{q}{C} \cos(\omega_0 t + \varphi) = U_0 \cos(\omega_0 t + \varphi). \quad (40)$$

Продифференцировав функцию (39) по времени, получим выражение для силы тока

$$I = -\omega_0 q_0 \sin(\omega_0 t + \varphi) = I_0 \cos\left(\omega_0 t + \varphi + \frac{\pi}{2}\right) \quad (41)$$

Таким образом, сила тока опережает по фазе напряжение на конденсаторе на $\pi/2$.

Сопоставление формул (39) и (40) с формулой (41) показывает, что в момент, когда ток в катушке достигает наибольшего значения, заряд и напряжение на обкладках конденсатора обращаются в ноль, и наоборот. Из формул (40) и (41) следует, что

$$U_0 = \frac{q_0}{C}, \quad I = \omega_0 q_0.$$

Определив отношение этих амплитуд, и заменив $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$, получим

$$U_0 = I_0 \sqrt{\frac{L}{C}}. \quad (42)$$

Эту формулу можно получить также, исходя из того, что наибольшее значение энергии электрического поля $q_0^2/2C$ должно быть равно наибольшему значению энергии магнитного поля $LI_0^2/2$.

Полная энергия в колебательном контуре в любой момент времени складывается из энергии, запасенной в конденсаторе (электрическая энергия), и энергии магнитного поля, созданного током в катушке индуктивности:

$$W = \frac{Li^2}{2} + \frac{q^2}{2C}. \quad (43)$$

Полная энергия не изменяется со временем, что проверяется подстановкой значений $q(t)$ и $I(t)$. Тогда

$$E = \frac{q_0^2}{2C} = \frac{LI_0^2}{2}.$$

2.2. Аналогия механических и электромагнитных колебаний

Электромагнитные колебания в контуре имеют сходство со свободными механическими колебаниями, например колебаниями груза, закрепленного на пружине. Сходство относится не к природе самих величин, которые периодически изменяются, а к процессам периодического изменения различных величин.

Соответствие между механическими и электрическими величинами при колебательных процессах можно свести в табл. 1.

Т а б л и ц а 1

Механическая система	Электромагнитная система
Масса m	Индуктивность L
Координата x	Заряд q
Скорость $v = x'$	Сила тока $i = q'$
Жесткость пружины k	Величина, обратная емкости $1/C$
Потенциальная энергия $W_n = kx^2 / 2$	Энергия электрического поля $W_3 = q^2 / 2C$
Кинетическая энергия $W_k = mv^2 / 2$	Энергия магнитного поля $W_M = Li^2 / 2$

Соответствие между механическими и электрическими величинами при колебательных процессах (математический или пружинный маятники) можно изобразить графически (рис. 20).

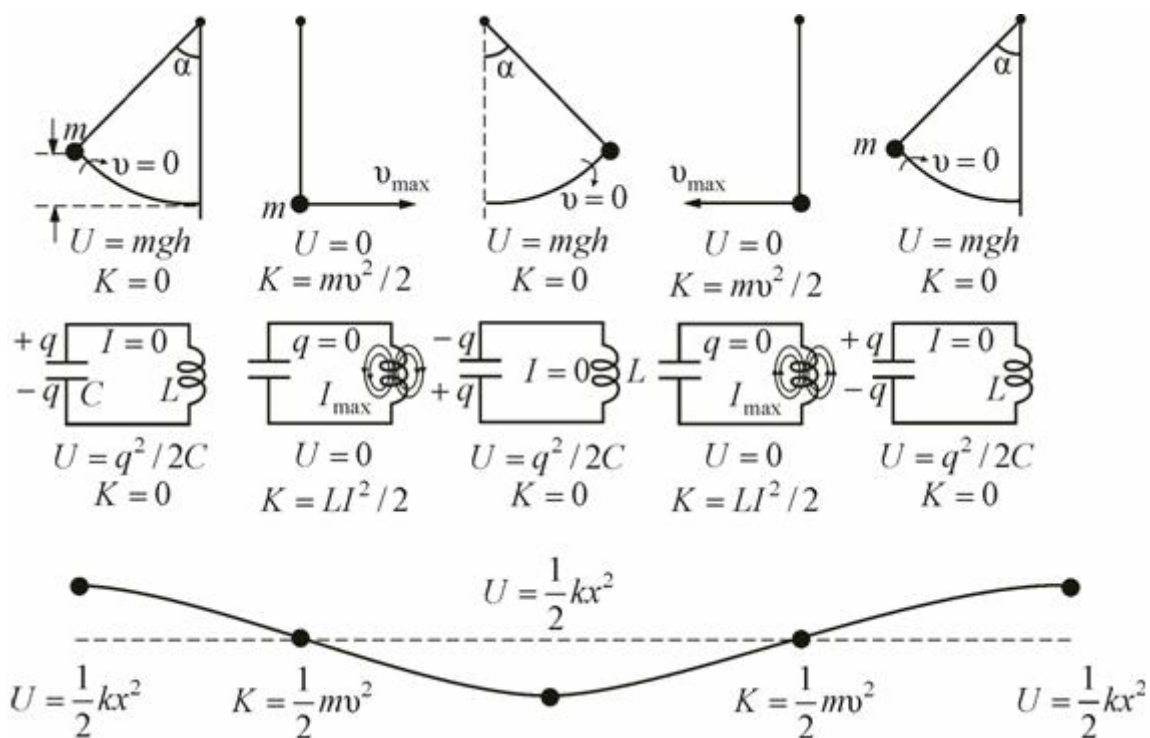


Рис. 20

ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

Пример 1. Колебательный контур состоит из катушки индуктивностью $L = 0,1$ Гн и конденсатора емкостью $C = 39,5$ мкФ. Заряд конденсатора $q_0 = 3$ мкКл. Пренебрегая сопротивлением контура, запишите уравнение: 1) изменение силы тока в цепи в зависимости от времени; 2) изменения напряжения на конденсаторе в зависимости от времени.

Дано:	Решение
$L = 0,1$ Гн	Циклическая частота колебаний в контуре
$C = 39,5$ мкФ $= 3,95 \cdot 10^{-5}$ Ф	
$q_0 = 3$ мкКл $= 3 \cdot 10^{-6}$ Кл	$\omega_0 = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{2\pi\sqrt{LC}} = \frac{1}{\sqrt{LC}}$
$R = 0$	$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{0,1 \cdot 3,95 \cdot 10^{-5}}} = 160\pi \text{ с}^{-1}$
$I(t) - ?, U(t) - ?$	

Мгновенное значение заряда конденсатора

$$q = q_0 \cos \omega_0 t.$$

Мгновенное значение силы тока в катушке

$$I = \frac{dq}{dt} = -q_0 \omega_0 \sin \omega_0 t = -q_0 \omega_0 \cos \left(\omega_0 t + \frac{\pi}{2} \right),$$

$$I = 1,5 \cos \left(160\pi t + \frac{\pi}{2} \right), \text{ мА}$$

Мгновенное значение напряжения на обкладках конденсатора

$$U_c = \frac{q}{C} = \frac{q_0}{C} \cos \omega_0 t,$$

$$U_c = 76 \cos(160\pi t), \text{ мВ.}$$

$$\text{О т в е т: 1) } I = 1,5 \cos \left(160\pi t + \frac{\pi}{2} \right), \text{ мА; 2) } U_c = 76 \cos(160\pi t), \text{ мВ.}$$

Пример 2. Напряжение на обкладках конденсатора в колебательном контуре изменяется по закону $U = 10 \cos 10^4 t$ (В). Емкость конденсатора $C = 10$ мкФ. Найдите индуктивность контура и закон изменения силы тока в нем.

Дано:	Решение
$U = 10 \cos 10^4 t$ (В)	Напряжение U на обкладках конденсатора в колебательном контуре изменяется по гармоническому закону
$C = 10^{-5}$ Ф	
$L - ?, I(t) - ?$	$U = U_0 \cos \omega t,$
	где U_0 – амплитудное значение напряжения;

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{2\pi\sqrt{LC}} = \frac{1}{\sqrt{LC}} - \text{циклическая частота (в условии задачи } \omega = 10^4 \text{ с}^{-1}\text{);}$$

L – индуктивность катушки; C – емкость конденсатора.

Отсюда

$$L = \frac{1}{\omega^2 C} = \frac{1}{10^8 \cdot 10^{-5}} = 10^{-3} \text{ Гн}.$$

Заряд на обкладках конденсатора q равен

$$q = CU = CU_0 \cos \omega t.$$

Сила тока в катушке

$$I = \frac{dq}{dt} = -\omega CU_0 \sin \omega t.$$

Подставляя числовые значения, получим

$$I = -10^4 \cdot 10^{-5} \cdot 10 \sin 10^4 t = -\sin 10^4 t \text{ А}.$$

$$\text{О т в е т: } L = 10^{-3} \text{ Гн; } I = -\sin 10^4 t \text{ А}.$$

Пример 3. Максимальная сила тока в колебательном контуре $I_0 = 0,1$ А, максимальное напряжение на обкладках конденсатора $U_0 = 200$ В. Найдите циклическую частоту колебаний, если энергия контура $W = 0,2$ мДж.

Дано:	Решение
$I_0 = 0,1 \text{ А}$	В колебательном контуре максимальная энергия
$U_0 = 200 \text{ В}$	электрмического поля конденсатора $W_3 = \frac{CU_0^2}{2}$ равна
$W = 0,2 \text{ мДж}$	максимальной энергии магнитного поля катушки с
$\omega - ?$	током $W_m = \frac{LI_0^2}{2}$.
	$\frac{CU_0^2}{2} = \frac{LI_0^2}{2},$

откуда

$$W = \frac{I_0 U_0 \sqrt{LC}}{2}.$$

Циклическая частота

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{2\pi\sqrt{LC}} = \frac{1}{\sqrt{LC}}.$$

Таким образом,

$$W = \frac{I_0 U_0}{2\omega},$$

откуда

$$\omega = \frac{I_0 U_0}{2W}. \quad \omega =$$

$$\omega = \frac{0,1 \cdot 200}{2 \cdot 2 \cdot 10^{-4}} = 5 \cdot 10^{-4} \text{ с}^{-1}.$$

О т в е т: $\omega = 5 \cdot 10^{-4} \text{ с}^{-1}$.

Пример 4. Колебательный контур состоит из конденсатора емкостью $C = 37,5 \text{ нФ}$ и катушки с индуктивностью $L = 0,68 \text{ Гн}$. Максимальное значение заряда на обкладках конденсатора равно $q_0 = 2,5 \text{ мкКл}$. Напишите уравнения изменения напряжения и заряда на обкладках конденсатора и тока в катушке и найдите значения этих величин в момент времени $T/2$.

Дано:	Решение
$C = 37,5 \text{ нФ}$ $L = 0,68 \text{ Гн}$ $q_0 = 2,5 \text{ мкКл}$	Напряжение U и заряд q на обкладках конденсатора связаны между собой соотношением $U = q / C$.
$U(t) - ?$, $I(t) - ?$, $q(t) - ?$, $U - ?$, $I - ?$, $q - ?$	Изменение напряжения на обкладках конденсатора происходит по гармоническому закону, $U = \cos \omega t$, где $\omega = 2\pi\nu = 2\pi / T$ – циклическая частота, ν – частота, T – период колебаний.

Период колебаний определим по формуле Томсона

$$T = 2\pi\sqrt{LC},$$

$$T = 6,28\sqrt{0,68 \cdot 3,75 \cdot 10^{-8}} = 10^{-3} \text{ с}.$$

Циклическая частота равна $\omega = 2\pi / T = 2\pi \cdot 10^3 \text{ с}^{-1}$.

Выражение $U = U(t)$ будет иметь вид

$$U = \frac{q}{C} \cos \omega t.$$

$$U = \frac{2,5 \cdot 10^{-6}}{3,75 \cdot 10^{-8}} \cos 2\pi \cdot 10^3 t = 66,7 \cos(2\pi \cdot 10^3 t).$$

Мгновенное значение заряда на обкладках конденсатора найдем по формуле

$$\begin{aligned} q &= U \cdot C = 66,7 C \cdot \cos(2\pi \cdot 10^3 t) = \\ &= 66,7 \cdot 3,75 \cdot 10^{-8} \cos(2\pi \cdot 10^3 t) = 2,5 \cdot 10^{-6} \cos(2\pi \cdot 10^3 t) \text{ Кл}. \end{aligned}$$

Мгновенное значение силы тока

$$I = \frac{dq}{dt} = -2,5 \cdot 10^{-6} 2\pi \cdot 10^3 \sin(2\pi \cdot 10^3 t).$$

$$I = -15,7 \cdot 10^{-3} \sin(2\pi \cdot 10^3 t) \text{ А.}$$

Значения искомых величин в момент времени $T / 2$ равны:

$$I = -15,7 \cdot 10^{-3} \sin(2\pi \cdot 10^3 \cdot T / 2) = -15,7 \cdot 10^{-3} \sin \pi = 0.$$

$$U = 66,7 \cdot \cos(2\pi \cdot 10^3 \cdot T / 2) = 66,7 \cdot \cos \pi = -66,7 \text{ В.}$$

$$q = 2,5 \cdot 10^{-6} \cdot \cos(2\pi \cdot 10^3 \cdot T / 2) = 2,5 \cdot 10^{-6} \cdot \cos \pi = -2,5 \cdot 10^{-6} \text{ Кл.}$$

$$\text{О т в е т: } U = 66,7 \cos(2\pi \cdot 10^3 t); q = 2,5 \cdot 10^{-6} \cos(2\pi \cdot 10^3 t); \\ I = -15,7 \cdot 10^{-3} \sin(2\pi \cdot 10^3 t); I = 0; U = -66,7 \text{ В}; q = -2,5 \cdot 10^{-6} \text{ Кл.}$$

ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ

Достаточный уровень

1. В колебательном контуре величина заряда на пластинах конденсатора изменяется по закону

$$q = 0,07 \cos\left(6\pi t + \frac{\pi}{7}\right), \text{ Кл.}$$

Определите частоту колебаний силы тока в этом контуре.

О т в е т: $\nu = 3 \text{ Гц.}$

2. Сила тока в идеальном колебательном контуре изменяется по закону

$$\frac{d^2 i}{dt^2} + 9 \cdot 10^6 i = 0.$$

Определите период колебаний величины заряда на пластинах конденсатора.

О т в е т: $T = 2 \text{ мс.}$

3. Какое из нижеприведенных утверждений справедливо для идеального колебательного контура?

А) Увеличение емкости конденсатора приводит к уменьшению периода колебаний.

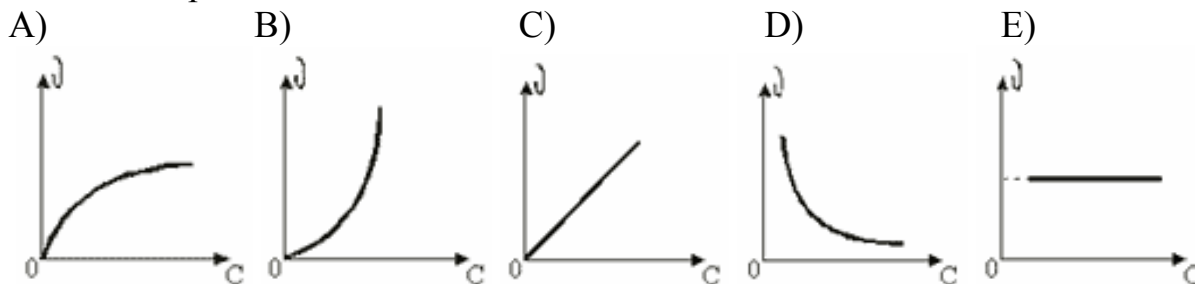
В) В течение одного периода колебаний происходит двукратное превращение энергии.

С) Колебания заряда и силы тока происходят синфазно (в одной фазе).

Д) Введение в соленоид ферромагнитного сердечника приводит к увеличению периода колебаний.

Е) При максимальной силе тока в контуре напряжение на конденсаторе также максимально.

4. Какой из нижеприведенных графиков наиболее точно отражает зависимость частоты колебаний в идеальном контуре от величины емкости конденсатора?



5. В колебательном контуре заряд на пластинах конденсатора изменяется с течением времени по закону

$$q = 0,07 \sin\left(2000t + \frac{\pi}{12}\right), \text{ Кл.}$$

Определите индуктивность данного контура, если емкость конденсатора равна 25 нФ.

О т в е т: $L = 10$ Гн.

6. В идеальном колебательном контуре индуктивность увеличилась в 5 раз, а площадь пластин плоского конденсатора уменьшили в такое же число раз. Во сколько раз изменилась циклическая частота колебаний?

О т в е т: уменьшилась в 5 раз.

7. В идеальном колебательном контуре заряд на пластинах конденсатора изменяется по закону

$$q = 0,03 \cos\left(4\pi t + \frac{\pi}{5}\right), \text{ Кл.}$$

Определите значение амплитуды силы тока в этом контуре.

О т в е т: $I_0 = 0,38$ А.

8. Сколько одинаковых конденсаторов необходимо подсоединить параллельно к такому же конденсатору в колебательном контуре, чтобы период колебаний в этом контуре увеличился бы в 4 раза?

О т в е т: 15

9. В идеальном колебательном контуре конденсатор полностью заполнили диэлектриком с диэлектрической проницаемостью 81. Во сколько раз изменилась частота колебаний?

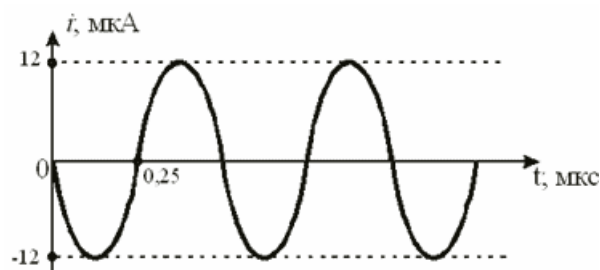
О т в е т: уменьшилась в 9 раз.

10. На сколько процентов изменилась амплитуда колебаний силы тока в идеальном колебательном контуре, если индуктивность соленоида увеличилась на 800 %, а емкость конденсатора уменьшилась в 36 раз?

О т в е т: увеличилась на 200 %.

11. На рисунке представлен график зависимости изменения силы тока в соленоиде, входящем в состав колебательного контура от времени. Определите резонансную частоту этого контура.

О т в е т: 2 МГц.

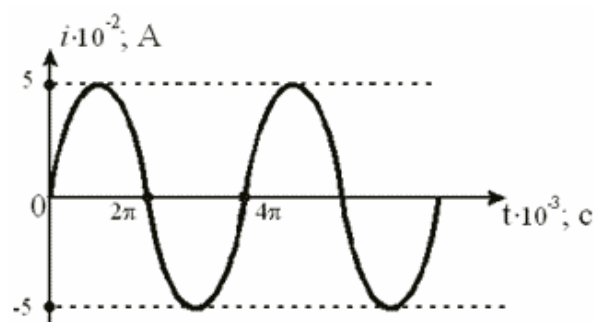


12. Определите частоту колебаний в идеальном колебательном контуре, если максимальный заряд на конденсаторе 2 мкКл, а максимальная сила тока в цепи 24 А.

О т в е т: 2 МГц.

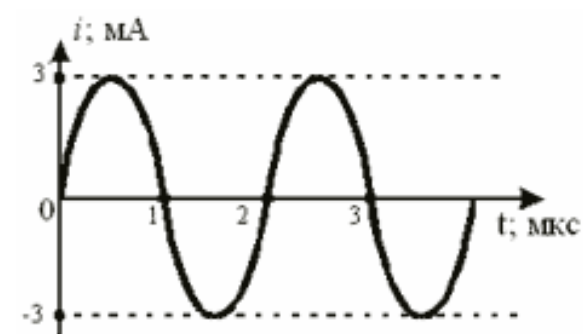
13. На рисунке приведен график зависимости силы тока от времени в колебательном контуре. Определите величину заряда на конденсаторе в момент времени $2\pi \cdot 10^{-3}$ с.

О т в е т: 0.

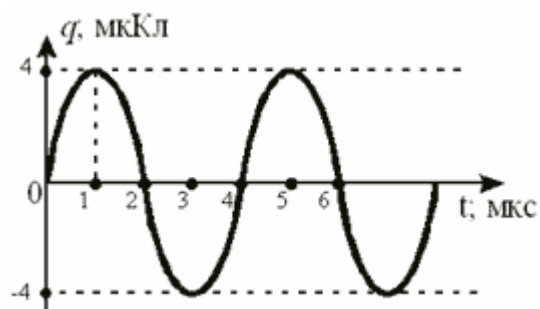
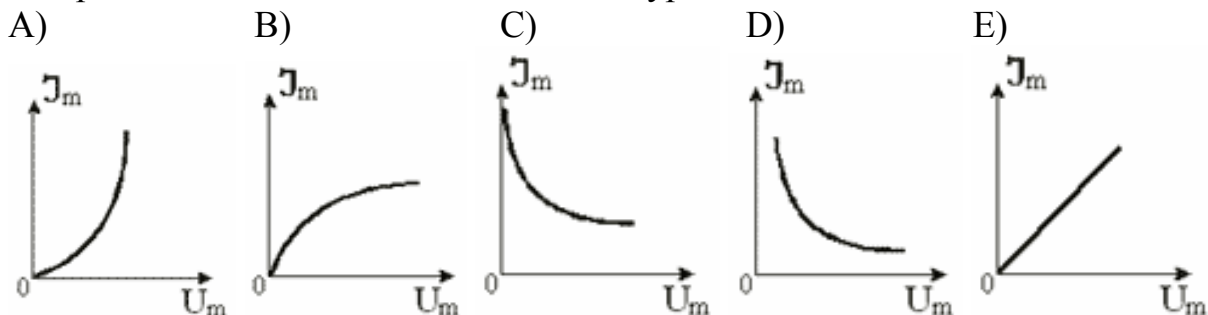


14. На рисунке показан график зависимости силы тока от времени в колебательном контуре, индуктивность катушки которого равна 2 мГн. Определите полную энергию E , энергию электрического поля $E_{\text{эл}}$ и энергию магнитного поля $E_{\text{маг}}$ в момент времени 10,5 мкс.

О т в е т: $E = 9$ нДж; $E_{\text{эл}} = 0$; $E_{\text{маг}} = 9$ нДж.



15. Какой из нижеприведенных графиков отражает зависимость амплитуды силы тока от максимального напряжения на пластинах конденсатора в идеальном колебательном контуре?



16. В какой или какие моменты времени из интервала времени 2–6 мкс сила тока в колебательном контуре принимает максимальные значения?

О т в е т: 2 мкс; 4 мкс; 6 мкс.

17. Какие утверждения справедливы для идеального колебательного контура?

I. Если последовательно к конденсатору подсоединить такой же конденсатор, то частота колебаний уменьшится.

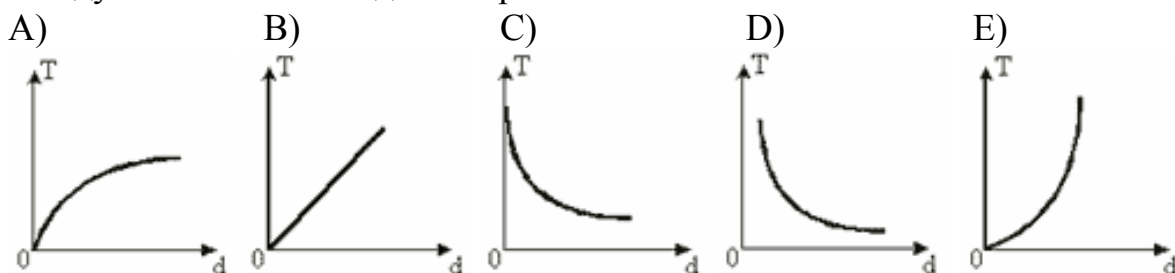
II. Колебания силы тока в катушке и напряжения на конденсаторе происходят синфазно (в одной фазе).

III. В колебательном контуре, обладающем активным сопротивлением, будут происходить незатухающие колебания, если период действия внешней ЭДС совпадет с периодом собственных колебаний.

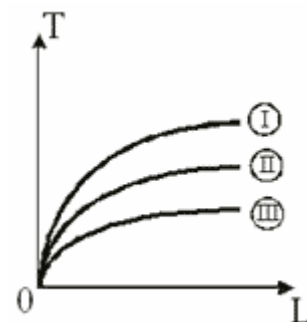
IV. Увеличение расстояния между пластинами плоского конденсатора приводит к увеличению периода колебаний.

V. В момент времени, когда сила тока в контуре максимальна, напряжение на конденсаторе равно нулю.

18. Какой из нижеприведенных графиков отражает зависимость периода колебаний в идеальном колебательном контуре от расстояния между пластинами конденсатора?



19. На рисунке представлен график зависимости периода колебаний от индуктивности для трех конденсаторов, входящих в состав колебательных контуров и имеющих одинаковые размеры, но различные диэлектрики. Определите род диэлектрика в каждом конденсаторе.



- А) I – слюда; II – бумага; III – стекло.
 В) I – слюда; II – стекло; III – бумага.
 С) I – стекло; II – слюда; III – бумага.
 D) I – стекло; II – бумага; III – слюда.
 Е) I – бумага; II – стекло; III – слюда.

20. В идеальном колебательном контуре сила тока изменяется по закону

$$i = 3 \sin \pi t, \text{ мА}$$

Определите амплитуду заряда на конденсаторе.

О т в е т: 1 мКл.

21. В идеальном колебательном контуре величина заряда на конденсаторе емкостью 4 мкФ изменяется по закону

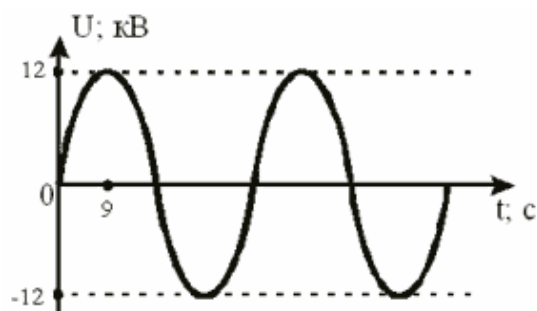
$$\frac{d^2 q}{dt^2} + 4 \cdot 10^4 q = 0.$$

Определите амплитуду силы тока в контуре, если полная энергия равна 0,8 мДж.

О т в е т: 16 мА.

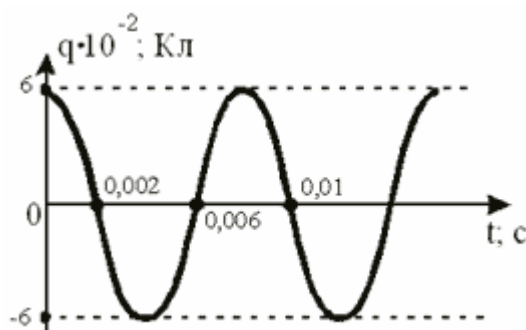
22. На рисунке представлена зависимость напряжения на конденсаторе емкостью 6 мкФ от времени в идеальном колебательном контуре. Определите силу тока через промежуток времени равный трем периодам.

О т в е т: 12 мА.



23. Используя приведенный рисунок, определите полную энергию колебательного контура через 0,01 с после начала колебаний. Емкость конденсатора 6 пФ.

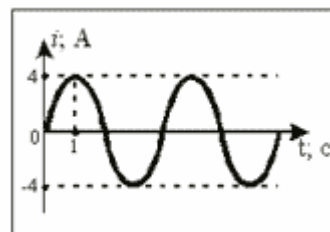
О т в е т: $3 \cdot 10^8$ Дж.



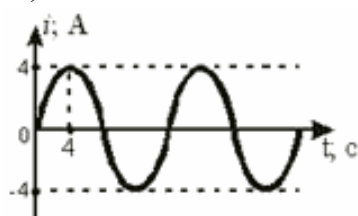
24. Конденсатор зарядили до напряжения 210 В. Определите напряжение на конденсаторе в тот момент времени, когда энергия магнитного поля будет в три раза больше электрического поля.

О т в е т: 105 В.

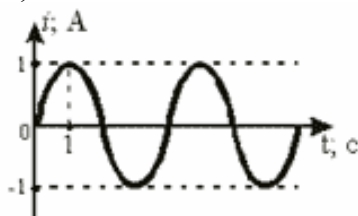
25. Сила тока в колебательном контуре изменяется по закону так, как показано на рисунке. Какой из нижеприведенных графиков отражает зависимость силы тока от времени, если к конденсатору подсоединить параллельно еще 15 таких же незаряженных конденсаторов?



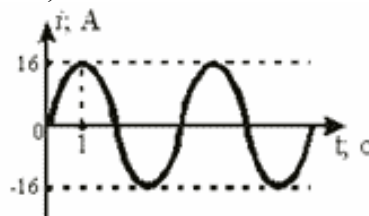
A)



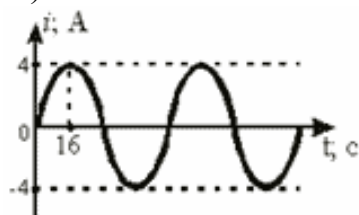
B)



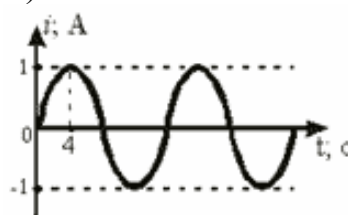
C)



D)



E)



26. Заряженный конденсатор емкостью 2 мкФ подключили к соленоиду индуктивностью 0,8 мГн. Через какой минимальный промежуток времени энергия электрического поля конденсатора станет равной энергии магнитного поля?

О т в е т: 30 мкс.

27. На сколько процентов изменится максимальная энергия в идеальном колебательном контуре, если, не меняя параметров, характеризующих данный контур, амплитуду напряжения увеличить в 2 раза?

О т в е т: увеличится на 300 %.

28. Какие из нижеприведенных утверждений для идеального колебательного контура не справедливы?

I. Если в начальный момент времени амплитуда силы тока максимальна и полная энергия колебательного контура равна 70 Дж, то через $1/8$ периода энергия магнитного поля равна 35 Дж.

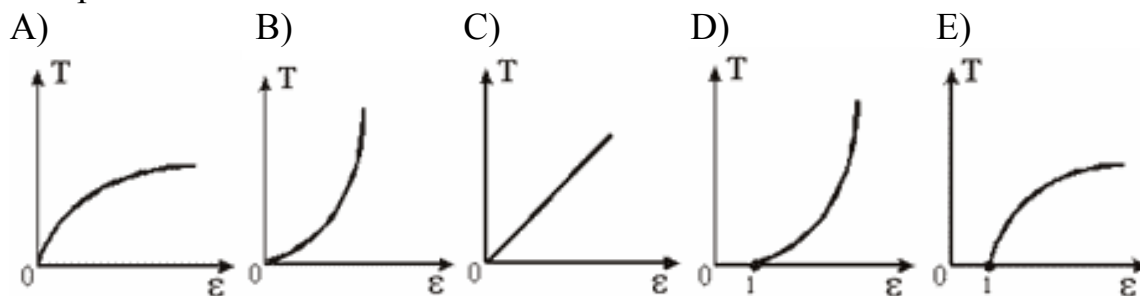
II. При параллельном подключении второго конденсатора к колебательному контуру частота колебаний увеличивается.

III. Период колебаний увеличится, если между пластинами конденсатора поместить диэлектрик так, чтобы он полностью заполнил объем между половинами площадей пластин.

IV. Увеличение индуктивности соленоида в четыре раза приводит к увеличению амплитуды заряда на конденсаторе в такое же число раз.

V. Резонансная частота колебания в колебательном контуре, обладающем активным сопротивлением, равна 5 кГц, следовательно, собственный период колебаний равен 0,2 мс.

29. Какой из нижеприведенных графиков отражает зависимость периода колебаний в идеальном колебательном контуре от диэлектрической проницаемости диэлектрика, находящегося между пластинами конденсатора?



Достаточный уровень

1. Сила тока в колебательном контуре, содержащем катушку индуктивностью $L = 0,1$ Гн и конденсатор, изменяется со временем по закону $I = -0,1 \sin 200\pi t$, А. Определите: 1) период колебаний; 2) емкость конденсатора; 3) максимальное напряжение на обкладках конденсатора; 4) максимальную энергию магнитного поля; 5) максимальную энергию электрического поля.

О т в е т: 1) $T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 10$ мс; 2) $C = \frac{T^2}{4\pi^2 L} = 25,3$ мкФ;

3) $U_m = \frac{I_m}{\omega_0 C} = 6,29$ В; 4) $W_m^m = \frac{LI_m^2}{2} = 0,5$ мДж;

5) $W_m^э = \frac{CU_m^2}{2} = 0,5$ мДж.

2. Колебательный контур содержит соленоид (длина $l = 5$ см, площадь поперечного сечения $S_1 = 1,5 \text{ см}^2$, число витков $N = 500$) и плоский

конденсатор (расстояние между пластинами $d = 1,5$ мм, площадь пластин $S_2 = 100$ см²). Определите частоту ω_0 собственных колебаний контура.

О т в е т: $\omega_0 = 4,24 \cdot 10^6$ рад/с.

3. Конденсатор емкостью C зарядили до напряжения U_m и замкнули на катушку индуктивностью L . Пренебрегая сопротивлением контура, определите амплитудное значение силы тока в данном колебательном контуре.

О т в е т: $I_m = U_m \sqrt{\frac{C}{L}}$.

4. Сила тока в колебательном контуре изменяется по закону $I = 0,1 \sin 10^3 t$ (А). Индуктивность контура $0,1$ Гн. Найдите закон изменения напряжения на конденсаторе и его емкость.

О т в е т: $C = 10^{-5}$ Ф; $U = -10 \cos 10^3 t$.

5. В колебательном контуре максимальная сила тока $0,2$ А, максимальное напряжение на обкладках конденсатора 40 В. Найдите энергию колебательного контура, если период колебаний $15,7$ мкс.

О т в е т: $W = 10^{-5}$ Дж.

6. Энергия свободных незатухающих колебаний, происходящих в колебательном контуре, составляет $0,2$ мДж. При медленном раздвигании пластин конденсатора частота колебаний увеличилась в $n=2$ раза. Определите работу, совершенную против сил электрического поля.

О т в е т: $A = 0,6$ мДж.

7. Колебательный контур содержит катушку с общим числом витков $N = 100$ индуктивностью $L = 10$ мкГн и конденсатор емкостью $C = 1$ нФ. Максимальное напряжение U_m на обкладках конденсатора составляет 100 В. Определите максимальный магнитный поток, пронизывающий катушку.

О т в е т: $\Phi_m = 0,1$ мкВб.

2.3. Свободные затухающие электромагнитные колебания

Всякий реальный контур обладает активным сопротивлением R .

Энергия, запасенная в контуре, постепенно расходуется в этом сопротивлении на нагревание, вследствие чего свободные колебания затухают.

Закон Ома, записанный для цепи, изображенной на рис. 21, имеет вид

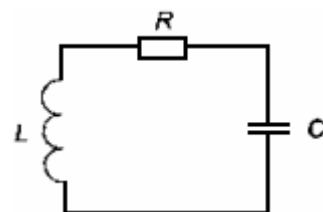


Рис. 21

$$IR = -\frac{q}{C} - L \frac{dI}{dt}. \quad (44)$$

Разделив это уравнение на L и заменив I на $\frac{dq}{dt}$, а dI/dt на $\frac{d^2q}{dt^2}$, получим

$$\frac{d^2q}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{dq}{dt} + \frac{1}{LC} q = 0. \quad (45)$$

Приняв во внимание, что величина, обратная LC , равна квадрату собственной частоты контура ω_0 , и введя обозначение

$$2\delta = R/L, \quad (46)$$

уравнению (45) можно придать вид

$$\frac{d^2q}{dt^2} + 2\delta \frac{dq}{dt} + \omega_0^2 q = 0, \quad [\delta = R/(2L)]. \quad (47)$$

Формула (47) – дифференциальное уравнение свободных затухающих электромагнитных колебаний в контуре. Оно совпадает с дифференциальным уравнением затухающих механических колебаний.

При условии, что $\delta^2 < \omega_0^2$, т.е. при $\frac{R^2}{4L^2} < \frac{1}{LC}$, решение уравнения (47) имеет вид

$$q = q_0 e^{-\delta t} \cos(\omega t + \varphi_0), \quad (48)$$

где ω – условная циклическая частота затухающих колебаний ($\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}$).

Подставив в последнюю формулу значение $\omega_0 = 1/LC$ и δ , найдем, что

$$\omega = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}}. \quad (49)$$

Таким образом, частота затухающих колебаний ω меньше собственной частоты ω_0 . При $R = 0$ выражение (49) принимает вид $\omega_0 = 1 / \sqrt{LC}$.

Условный период колебаний в контуре

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{1/(LC) - R^2/(4L^2)}}.$$

Разделив уравнение (48) на C , получим напряжение на конденсаторе

$$U = \frac{q_0}{C} e^{-\delta t} \cos(\omega t + \phi_0) = U_0 e^{-\delta t} \cos(\omega t + \phi_0).$$

Чтобы найти силу тока в цепи, продифференцируем уравнение (48) по времени:

$$I = \frac{dq}{dt} = q_0 e^{-\delta t} [-\delta \cos(\omega t + \phi_0) - \omega \sin(\omega t + \phi_0)].$$

График функции (48) изображен на рис. 22.

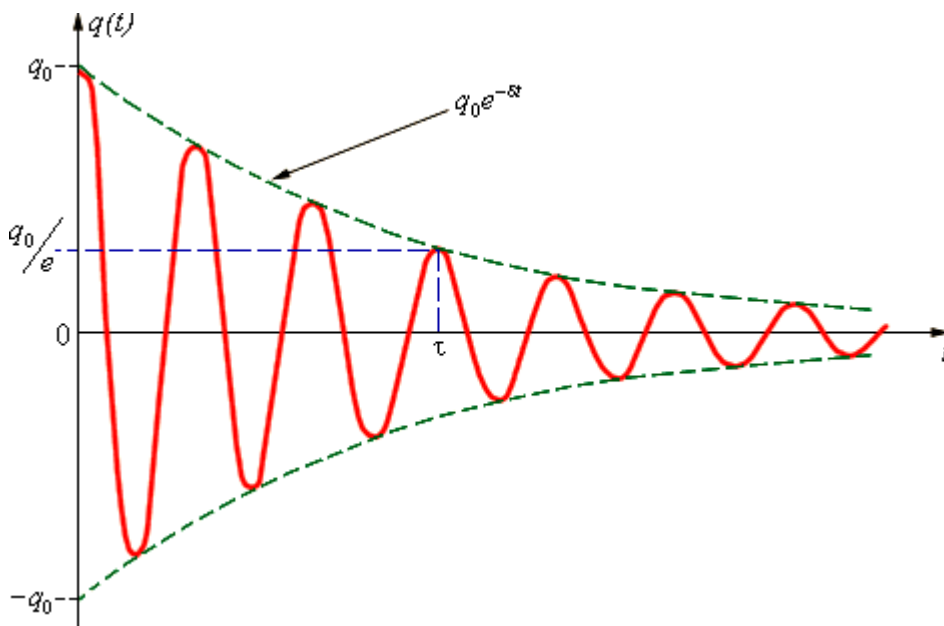


Рис. 22

Графики для напряжения и силы тока имеют аналогичный вид. Логарифмический декремент затухания колебаний

$$\lambda = \ln \frac{x_0(t)}{x_0(t+T)} = \delta T, \quad (50)$$

где $x_0(t)$ – амплитуда соответствующей величины (q, U, I).

Логарифмический декремент затухания является величиной, обратной числу колебаний N_e , совершаемых за время, в течение которого амплитуда уменьшается в e раз (т.е. за время релаксации):

$$\lambda = 1 / N_e.$$

Подставим в формулу (50) значение δ и заменив T на $2\pi / \omega$, получим

$$\lambda = \frac{R}{2L} \frac{2\pi}{\omega} = \frac{\pi R}{L\omega}. \quad (51)$$

Частота ω , а следовательно, и λ определяются параметрами контура L, C и R . Таким образом, логарифмический декремент затухания является характеристикой контура.

Если затухание невелико ($\delta^2 \ll \omega_0^2$), можно считать, что $\omega \approx \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$.

Тогда

$$\lambda \approx \frac{\pi R \sqrt{LC}}{L} = \pi R \sqrt{\frac{L}{C}}. \quad (52)$$

Добротность колебательного контура θ

$$\theta = \frac{\pi}{\lambda} = \pi N_e. \quad (53)$$

Из формулы (53) следует, что добротность контура тем выше, чем больше число колебаний совершается, прежде чем амплитуда колебаний уменьшится в e раз.

В случае слабого затухания, используя выражение (52), получим

$$\theta = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}}.$$

Добротность контура θ можно выразить через убыль относительного уменьшения энергии за период, т.е.

$$\theta = -2\pi \frac{W}{\Delta W}.$$

При $\frac{R^2}{4L^2} \geq \frac{1}{LC}$, т.е. при $\beta^2 \geq \omega_0^2$ вместо колебаний происходит апериодический разряд конденсатора. Сопротивление контура, при котором колебательный процесс переходит в апериодический, называется *критическим*. Значение критического сопротивления определяется условием $\frac{R_k^2}{4L^2} = \frac{1}{LC}$, откуда $R_k = 2\sqrt{L/C}$.

2.4. Вынужденные электромагнитные колебания. Резонанс

До сих пор рассматривались собственные колебания, т.е. колебания, происходящие в отсутствие внешних воздействий. Внешнее воздействие было необходимо лишь для того, чтобы вывести систему из состояния равновесия, после чего она предоставлялась самой себе. Уравнение собственных колебаний $\frac{d^2q}{dt^2} + \omega_0^2 q = 0$ вообще не содержит следов внешнего воздействия на систему: оно отражается лишь в начальных условиях.

Но очень часто приходится сталкиваться с колебаниями, которые происходят при постоянно присутствующем внешнем воздействии. Особенно важен и в то же время достаточно прост для изучения случай, когда внешнее воздействие имеет периодический характер. Общей чертой вынужденных колебаний является то, что спустя некоторое время после начала колебаний система полностью «забывает» свое начальное состояние, колебания приобретают стационарный характер и не зависят от начальных условий. Начальные условия проявляются только в период установления колебаний, которые обычно называют переходным процессом.

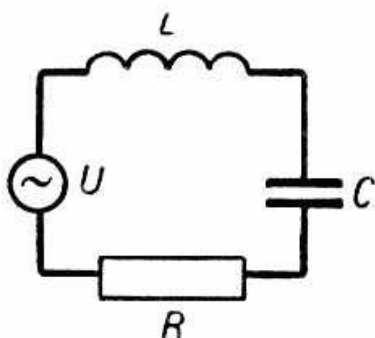


Рис. 23

Чтобы вызвать вынужденные колебания, нужно оказывать на систему внешнее периодически изменяющее воздействие. В случае электрических колебаний это можно осуществить, если включить последовательно с элементами контура переменную ЭДС (рис. 23) или, разорвав контур, подать на образовавшиеся контакты переменное напряжение

$$U = U_0 \cos \omega t.$$

Это напряжение нужно прибавить к ЭДС самоиндукции.

В результате формула закона Ома $IR = -\frac{q}{C} - L\frac{dI}{dt}$ примет вид

$$IR = -\frac{q}{C} - L\frac{dI}{dt} + U_0 \cos \omega t.$$

Произведя преобразования, получим дифференциальное уравнение вынужденных электрических колебаний

$$\frac{d^2q}{dt^2} + 2\delta \frac{dq}{dt} + \omega_0^2 q = \frac{U_0}{L} \sin \omega t. \quad (54)$$

Уравнение (54) аналогично уравнению вынужденных механических колебаний.

Частное решение уравнения (54) имеет вид

$$q = q_0 \sin(\omega t - \varphi), \quad (55)$$

где

$$q_0 = \frac{U_0 / L}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\delta^2 \omega^2}}, \quad \operatorname{tg} \varphi = \frac{2\delta \omega}{\omega_0^2 - \omega^2}.$$

Подстановка значений ω_0^2 и δ дает

$$q_0 = \frac{U_0}{\omega \sqrt{R^2 + [\omega L - 1/(\omega C)]^2}},$$

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{R}{1/(\omega C) - \omega L}.$$

Продифференцировав по времени уравнение (55), найдем силу тока в контуре при установившихся колебаниях

$$I = -\omega q_0 \sin(\omega t - \varphi) = I_0 \cos(\omega t - \varphi + \frac{\pi}{2}), \quad (56)$$

$$\text{где } I_0 = \omega q_0 = \frac{U_0}{\sqrt{R^2 + [\omega L - 1/(\omega C)]^2}}.$$

Из уравнений $U = U_0 \cos \omega t$ и (56) видно, что сдвиг фаз между током и приложенным напряжением составляет $\pi/2$.

Амплитуда силы тока I_0 в контуре зависит от величины R и соотношений между L, C и ω . При постоянном активном сопротивлении R контура, если

$$\omega L = \frac{1}{\omega C} \quad \text{или} \quad \omega = \frac{1}{\sqrt{LC}}, \quad (57)$$

амплитуда силы тока максимальна и равна

$$I_0 = \frac{U_0}{R}.$$

Условие (57) означает, что частота внешней переменной ЭДС равна частоте собственных колебаний контура. Равенство частоты переменной ЭДС и частоты собственных колебаний контура является условием электрического резонанса.

При условии (57) амплитудные значения силы тока и связанных с ней величин достигают наибольших значений. Резонансные кривые для I аналогичны резонансным кривым для механических колебательных систем (рис. 24).

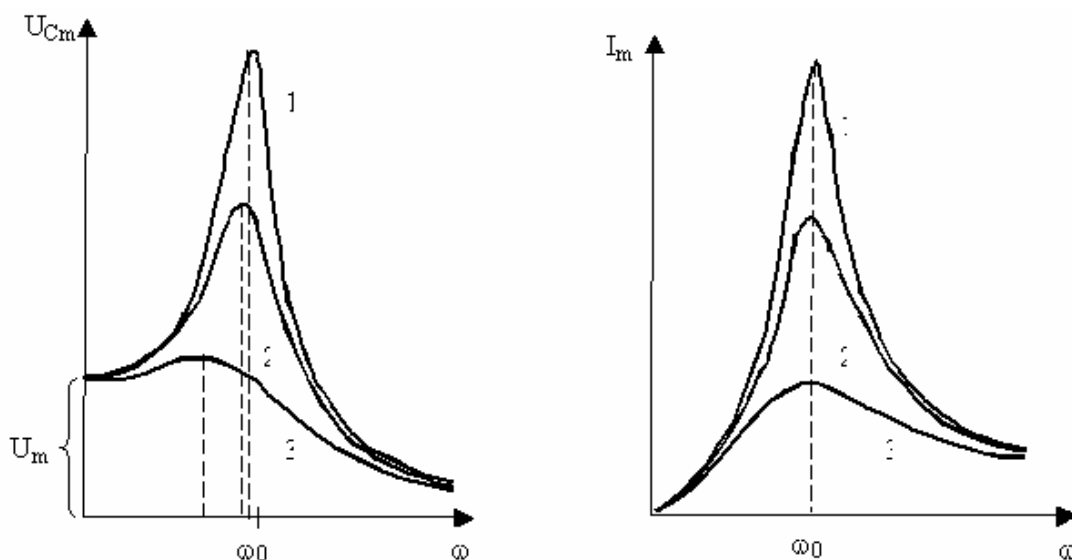


Рис. 24

ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

Пример 1. Колебательный контур состоит из катушки индуктивностью $L = 0,01$ Гн, конденсатора емкостью $C = 0,1$ мкФ и резистора сопротивлением $R = 20$ Ом. Определите, через сколько полных колебаний амплитуда тока в контуре уменьшится в e раз.

Дано:

$$L = 0,01 \text{ Гн}$$

$$C = 0,1 \text{ мкФ} = 10^{-7} \text{ Ф}$$

$$R = 20 \text{ Ом}$$

$$\frac{I_{m0}}{I_{mN}} = e$$

$$I_{mN}$$

$$N - ?$$

Решение

В случае затухающих колебаний отношение амплитуд, разделенных промежутком времени t ,

$$\frac{I_{m0}}{I_{mN}} = e^{\delta t}.$$

По условию задачи

$$\frac{I_{m0}}{I_{mN}} = e.$$

Из записанных формул следует, что

$$\delta t = 1.$$

Коэффициент затухания колебаний в контуре

$$\delta = R / 2L,$$

следовательно

$$t = \frac{1}{\delta} = \frac{2L}{R}.$$

С другой стороны,

$$t = NT,$$

где T – условный период затухающих колебаний.

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}},$$

где ω_0 – собственная частота колебаний контура

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}.$$

Подставив в формулу условного периода затухающих колебаний выражения для ω_0 и δ , получим

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{1/(LC) - R^2/(4L^2)}}.$$

Число полных колебаний, через которые амплитуда тока в контуре уменьшится в e раз,

$$N = \frac{t}{T} = \frac{L}{\pi R} \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}}$$

$$N = \frac{10^{-2}}{3,14 \cdot 20} \sqrt{\frac{1}{10^{-2} \cdot 10^{-7}} - \frac{20^2}{4 \cdot 10^{-4}}} = 5.$$

О т в е т: $N = 5$.

Пример 2. Определите логарифмический декремент, при котором энергия колебательного контура за $N = 5$ полных колебаний уменьшится в $n = 8$ раз.

Дано:	Решение
$N = 5$	Энергия магнитного поля катушки с током
$\frac{W_0}{W_N} = n = 8$	$W = \frac{LI^2}{2},$
$\lambda - ?$	откуда
	$I = \sqrt{\frac{2W}{L}}.$
	$\frac{I_0}{I_N} = \sqrt{\frac{W_0}{W_N}} = \sqrt{n}.$

Логарифмический декремент

$$\lambda = \delta T,$$

$$\ln \frac{I_0}{I_N} \delta N T, \quad \ln \sqrt{n} = \lambda N, \quad \text{откуда } \lambda = \frac{\ln \sqrt{n}}{N}.$$

$$\lambda = \frac{\ln \sqrt{8}}{5} = 0,21.$$

О т в е т: $\lambda = 0,21$.

Пример 3. Колебательный контур содержит катушку индуктивностью $L = 10^{-4}$ Гн, конденсатор емкостью $C = 10^{-8}$ Ф и резистор сопротивлением $R = 3$ Ом. Определите среднюю мощность, потребляемую контуром, необходимую для поддержания в нем незатухающих колебаний с амплитудным значением напряжения на конденсаторе $U_m = 2$ В.

Дано:	Решение
$L = 10^{-4}$ Гн	Средняя мощность, потребляемая контуром,
$C = 10^{-8}$ Ф	
$R = 3$ Ом	$\langle P \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T I^2 R dt.$
$U_m = 2$ В	
$\langle P \rangle - ?$	Заряд конденсатора изменяется во времени по закону $q = q_m \cos \omega t.$

Из формулы электроемкости конденсатора выразим амплитудное значение его заряда

$$C = \frac{q_m}{U_m}$$

откуда

$$q_m = CU_m.$$

$$\omega = \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}.$$

Мгновенное значение силы тока в контуре

$$I = \frac{dq}{dt} = -q_m \omega \sin \omega t.$$

Подставив это выражение в формулу средней мощности, получим

$$\langle P \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T I^2 R dt = \frac{\omega^2 q_m^2 R}{T} \int_0^T \sin^2 \omega t dt = \frac{\omega^2 q_m^2 R}{2} = \frac{CU_m^2 R}{2L}.$$

$$\langle P \rangle = \frac{10^{-8} \cdot 4 \cdot 3}{2 \cdot 10^{-4}} = 0,6 \text{ мВт.}$$

О т в е т: $\langle P \rangle = 0,6 \text{ мВт.}$

Пример 4. В цепь колебательного контура, содержащего катушку индуктивностью $L = 0,2$ Гн, конденсатор емкостью $C = 4 \cdot 10^{-5}$ Ф и резистор сопротивлением $R = 9,7$ Ом, подключено внешнее переменное напряжение с амплитудным значением $U_m = 180$ В и частотой $\omega = 314$ рад/с. Определите: 1) амплитудное значение силы тока I_m в цепи; 2) разность фаз ϕ между током и внешним напряжением; 3) амплитудное значение напря-

жения U_{Lm} на катушке; 4) амплитудное значение напряжения U_{Cm} на конденсаторе.

Дано:	Решение
$L = 0,2 \text{ Гн}$	Амплитудное значение силы тока в цепи
$C = 4 \cdot 10^{-5} \text{ Ф}$	
$R = 9,7 \text{ Ом}$	
$U_m = 180 \text{ В}$	
$\omega = 314 \text{ рад/с}$	
$I_m - ?, \varphi - ?,$	$I_m = \frac{U_m}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}}.$
$U_{Lm} - ?, U_{Cm} - ?$	$I_m = \frac{180}{\sqrt{9,7^2 + \left(314 \cdot 0,2 - \frac{1}{314 \cdot 4 \cdot 10^{-5}}\right)^2}} = 9,27 \text{ А.}$

Разность фаз φ между током и внешним напряжением

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R}.$$

$$\varphi = \arctg \frac{314 \cdot 0,2 - \frac{1}{314 \cdot 4 \cdot 10^{-5}}}{9,7} = -60^\circ.$$

$$\text{При } C \rightarrow \infty \quad U_{Lm} = I_m \sqrt{R^2 + (\omega L)^2}.$$

$$U_{Lm} = 9,27 \sqrt{9,7^2 + (314 \cdot 0,2)^2} = 589 \text{ В.}$$

$$\text{При } L \rightarrow 0, R \rightarrow 0 \quad U_{Cm} = I_m \sqrt{\left(-\frac{1}{\omega C}\right)^2} = I_m \frac{1}{\omega C}.$$

$$U_{Cm} = 9,27 \frac{1}{314 \cdot 4 \cdot 10^{-5}} = 738 \text{ В.}$$

$$\text{О т в е т: } I_m = 9,27 \text{ А; } \varphi = -60^\circ; U_{Lm} = 589 \text{ В; } U_{Cm} = 738 \text{ В.}$$

ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ

Средний уровень

1. Каким уравнением описываются вынужденные колебания заряда конденсатора в колебательном контуре?

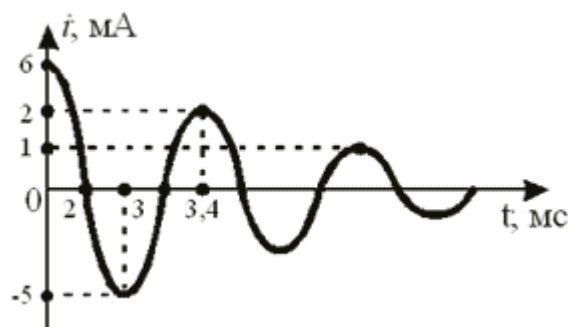
$$\text{а) } \frac{d^2 q}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{dq}{dt} + \frac{1}{LC} q = 0;$$

$$\text{б) } \frac{d^2 q}{dt^2} + \frac{1}{LC} q = 0;$$

в) $\frac{d^2 q}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{dq}{dt} + \frac{1}{LC} q = 0.$

2. В колебательном контуре сила тока изменяется так, как показано на рисунке. Какое количество теплоты выделится через 3,4 мс после начала колебаний? Индуктивность контура 5 мГн.

О т в е т: $0,8 \cdot 10^{-8}$ Дж



3. Как изменяется частота колебаний в реальном RLC -контуре при уменьшении емкости конденсатора?

- 1) увеличивается;
- 2) сначала увеличивается, потом уменьшается;
- 3) не изменяется;
- 4) уменьшается.

4. Уменьшение амплитуды колебаний в системе с затуханием характеризуется временем релаксации. Как изменится время релаксации, если при неизменном омическом сопротивлении индуктивность катушки в колебательном контуре увеличить в 2 раза?

- 1) уменьшится в 2 раза;
- 2) увеличится в 2 раза;
- 3) уменьшится в 4 раза;
- 4) увеличится в 4 раза.

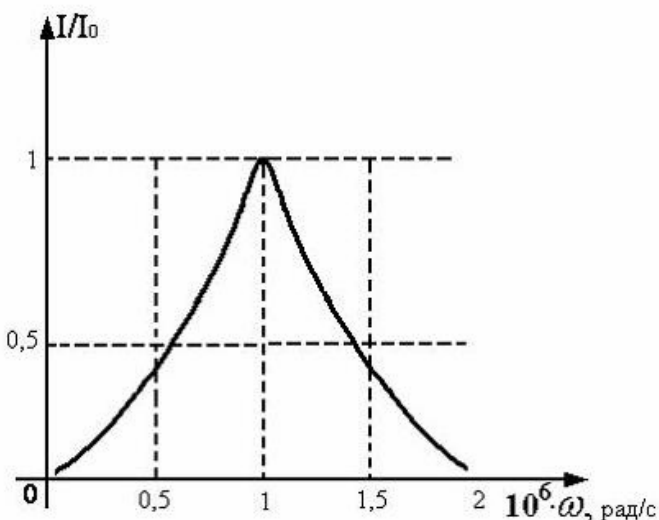
5. Чему равно время релаксации в колебательном контуре, состоящем из катушки индуктивности $L = 10$ Гн, конденсатора $C = 10$ мкФ и сопротивления $R = 5$ Ом?

О т в е т: 4 с.

6. Колебательный контур обладает некоторым сопротивлением. Каков должен быть период действия внешней ЭДС, чтобы колебания тока происходили по закону $i = 0,08 \sin\left(8\pi t + \frac{\pi}{6}\right)$, А?

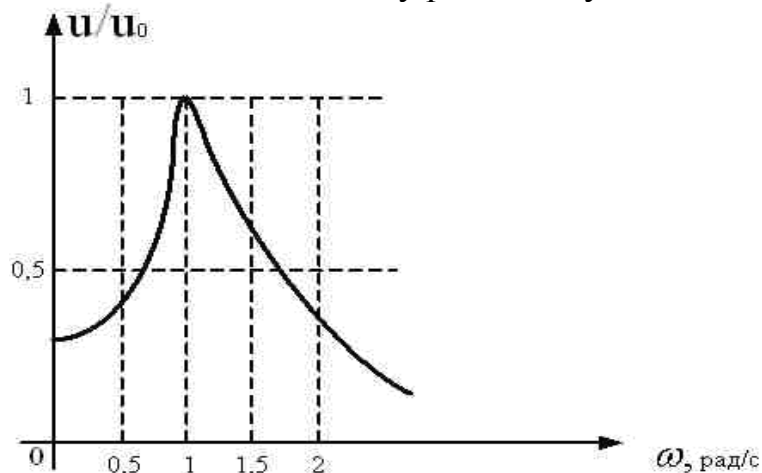
О т в е т: 1/4 с.

7. На рисунке представлена зависимость относительной амплитуды колебаний силы тока в катушке индуктивностью 1 мГн, включенной в колебательный контур. Чему равна емкость конденсатора?



О т в е т: $C = 1$ нФ.

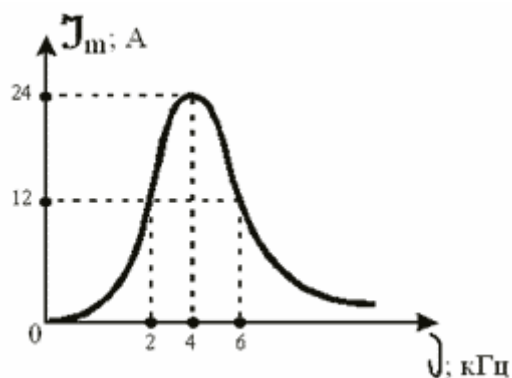
8. На рисунке представлена зависимость амплитуды колебаний напряжения на конденсаторе емкостью 1 мФ, включенного в колебательный контур, от частоты внешней силы. Чему равна индуктивность катушки?



О т в е т: $L = 10^3$ Гн.

9. На рисунке представлен график зависимости амплитуды силы тока в идеальном колебательном контуре от частоты действия внешней ЭДС. Определите амплитуду заряда на пластинах конденсатора при резонансе.

О т в е т: $q_m = 1$ мКл.



Достаточный уровень

1. Частота колебаний в колебательном контуре с добротностью $Q = 2500$ равна 550 кГц . Определите время, за которое амплитуда тока в этом контуре уменьшится в 4 раза.

Ответ: $t = 2 \text{ мс}$.

2. Колебательный контур содержит катушку индуктивностью $L = 6 \text{ мГн}$, конденсатор емкостью $C = 10 \text{ нФ}$ и резистор сопротивлением $R = 10 \text{ Ом}$. Определите для случая максимума тока отношение энергии магнитного поля катушки к энергии электрического поля конденсатора.

Ответ: $\frac{W_{\text{м}}}{W_{\text{э}}} = 6$.

3. Определите добротность колебательного контура, состоящего из катушки индуктивностью $L = 2 \text{ мГн}$, конденсатора емкостью $C = 0,2 \text{ мкФ}$ и резистора сопротивлением $R = 1 \text{ Ом}$.

Ответ: $Q = 100$.

4. Колебательный контур состоит из катушки индуктивностью $L = 10 \text{ мГн}$, конденсатора емкостью $C = 0,1 \text{ мкФ}$ и резистора сопротивлением $R = 20 \text{ Ом}$. Определите, через сколько полных колебаний амплитуда тока в контуре уменьшится в e раз.

Ответ: $N = 5$.

5. Определите логарифмический декремент затухания, при котором энергия колебательного контура за $N = 5$ полных колебаний уменьшается в 8 раз.

Ответ: $\theta = 0,21$.

6. Определите резонансную частоту колебательной системы, если собственная частота колебаний 300 Гц , а логарифмический декремент $\theta = 0,2$.

Ответ: $\nu = 300 \text{ Гц}$.

7. Колебательный контур состоит из катушки индуктивностью $L = 6 \text{ мГн}$, конденсатора емкостью $C = 1 \text{ нФ}$ и резистора сопротивлением $R = 0,5 \text{ Ом}$. Какую мощность нужно подводить к контуру, чтобы поддерживать в нем незатухающие колебания с амплитудой напряжения на конденсаторе $U_{\text{max}} = 10 \text{ В}$?

Ответ: $P = 4,2 \text{ мВт}$.

8. Колебательный контур содержит катушку индуктивностью $L = 25$ мГн, конденсатор емкостью $C = 10$ мкФ и резистор сопротивлением $R = 1$ Ом. Конденсатор заряжен количеством электричества $q_{\max} = 1$ мКл. Определите: 1) период колебаний контура; 2) логарифмический декремент затухания колебаний.

Ответ: 1) $T = 3,14$ мс; 2) $\theta = 0,063$.

II. ВОЛНЫ

3. МЕХАНИЧЕСКИЕ ВОЛНЫ

3.1. Общие сведения

Волны представляют собой процесс распространения в пространстве с течением времени какого-либо возмущения материальной среды или физического поля. Они бывают самой разнообразной природы: в зависимости от того, что колеблется и где распространяется, различают звуковые волны в упругой среде, волны на поверхности воды, электромагнитные волны в вакууме или веществе и т.п. Несмотря на различную физическую природу, волны любого типа, как и колебания, имеют очень много общего и подчиняются аналогичным закономерностям.

По физической природе различают *механические волны* (упругие, звуковые, волны на поверхности жидкости), *электромагнитные волны* в волноводах, в различных средах (свет, радиоволны, рентгеновское излучение).

По ориентации возмущений относительно направлений распространения различают *продольные волны* (звуковые волны в газе, где смещения частиц происходят вдоль направления распространения волны) и *поперечные волны* (волны в струне, где частицы смещаются перпендикулярно направлению распространения волны).

По характеру зависимости возмущения от времени в фиксированной точке (по форме) различают *одиночные волны* или импульсы – короткие возмущения, не имеющие регулярного характера; *волновые пакеты* – ограниченные совокупности регулярно повторяющихся возмущений; *цуги волн* – ограниченные возмущения синусоидальной формы.

Важное значение для теории волновых процессов имеет представление о *гармонической* или *монохроматической волне* – бесконечно протяженной волне с синусоидальной зависимостью возмущения от координат и времени.

Упругие волны – механические возмущения (деформация), распространяющиеся в упругой среде. Источниками упругих волн являются тела, которые, воздействуя на среду, вызывают эти возмущения.

Упругая волна называется гармонической (т.е. синусоидальной), если соответствующие ей колебания среды являются гармоническими.

Звуковые (акустические) волны – упругие волны малой интенсивности. Звуки воспринимаются ухом человека, если их частота лежит в интервале от 20 Гц до 20 кГц. Не воспринимаемые на слух колебания с частотой ниже 20 Гц называют инфразвуком, а выше 20 кГц – ультразвуком.

Бегающие волны – волны, переносящие энергию в пространстве.

Однородная среда – среда, физические свойства которой не изменяются от точки к точке.

Изотропная среда – среда, физические свойства которой одинаковы во всех направлениях.

Анизотропная среда – среда, физические свойства которой различны в различных направлениях.

Среды, однородные и изотропные в отношении одних физических свойств, могут быть не изотропными в отношении других свойств. Например, монокристалл, однородный по своим упругим свойствам, оптически неоднородный для рентгеновских лучей; кристаллы с кубической решеткой оптически изотропны, а в отношении упругих свойств они анизотропны.

Фронт волны (волновой фронт) – геометрическое место точек, до которых доходят колебания к моменту времени t .

Волновая поверхность – геометрическое место точек, колеблющихся в одинаковой фазе.

В зависимости от формы волновой поверхности различают плоские, сферические и цилиндрические волны.

Волновых поверхностей существует бесконечное множество (они неподвижны), а волновой фронт в каждый момент времени один (он все время перемещается).

3.2. Уравнение волны. Фазовая скорость

Распространение волн в однородной изотропной среде описывается дифференциальным уравнением в частных производных

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial z^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2},$$

где v – скорость распространения волны (фазовая скорость); ξ – смещение частицы среды от положения равновесия.

Частным решением этого уравнения является функция

$$\xi(x, t) = A \cos(\omega t - kx + \varphi_0),$$

где $\xi(x, t)$ – смещение точек среды с координатой x в момент времени t ; A – амплитуда волны; ω – циклическая частота; $k = 2\pi/\lambda = 2\pi/(vT) = \omega/v$ – волновое число (λ – длина волны; v – фазовая скорость; T – период колебаний); φ_0 – начальная фаза колебаний.

Эта функция описывает бегущую гармоническую волну.

Длина волны

$$\lambda = vT.$$

Уравнение сферической волны

$$\xi(r, t) = \frac{A_0}{r} \cos(\omega t - kx + \varphi_0),$$

где r – расстояние от центра волны до рассматриваемой точки среды.

Фазовая скорость равна скорости перемещения в пространстве точек поверхности, соответствующей любому фиксированному значению фазы.

Для плоской волны из условия $\omega t - kx + \varphi_0 = \text{const}$ следует, что

$$v = \frac{dx}{dt} = \frac{\omega}{k},$$

где ω – циклическая частота; k – волновое число.

Фазовая скорость волны зависит от свойств среды, в которой она распространяется.

Фазовая скорость распространения продольных волн:

в твердых телах

$$v = \sqrt{\frac{E}{\rho}},$$

где E – модуль Юнга; ρ – плотность тела;

в жидкости и газе

$$v = \sqrt{\frac{k}{\rho}},$$

где k – модуль объемной упругости среды; ρ – плотность невозмущенной среды;

в идеальном газе

$$v = \sqrt{\gamma \frac{RT}{M}},$$

где $\gamma = \frac{c_p}{c_v}$; R – универсальная газовая постоянная; T – абсолютная температура;

M – молярная масса газа.

Фазовая скорость распространения поперечных (сдвиговых) волн в изотропном твердом теле

$$v = \sqrt{\frac{G}{\rho}},$$

где G – модуль сдвига; ρ – плотность тела.

3.3. Энергия упругой волны

При распространении в среде плоской волны происходит перенос энергии. Мысленно выделим элементарный объем ΔV , настолько малый, что скорость движения и деформацию во всех его точках можно считать одинаковыми и равными соответственно $\frac{\partial s}{\partial t}$ и $\frac{ds}{dx}$.

Выделенный объем обладает кинетической энергией

$$W_k = \frac{m}{2} \left(\frac{\partial s}{\partial t} \right)^2 = \frac{\rho}{2} \left(\frac{\partial s}{\partial t} \right)^2 \Delta V, \quad (58)$$

где $m = \rho \Delta V$ – масса вещества в объеме ΔV ; ρ – плотность среды

$$\left[\frac{ds}{dt} = A \omega \cos \left(t - \frac{x}{v_\phi} \right) \right]$$

Подставляя в формулу (58) значение $\left(\frac{ds}{dt} \right)^2$, получаем

$$W_k = \frac{1}{2} \rho A^2 \omega^2 \cos^2 \omega \left(t - \frac{x}{v_\phi} \right) \Delta V. \quad (59)$$

Из формулы (59) видно, что максимумы кинетической энергии приходятся на те точки среды, которые проходят в данный момент времени положения равновесия ($\xi = 0$); в эти моменты времени указанные точки среды характеризуется наибольшей скоростью.

Рассматриваемый объем обладает также потенциальной энергией упругой деформации

$$W_n = \frac{E \varepsilon^2}{2} \Delta V,$$

где E – модуль Юнга; $\varepsilon = \frac{\partial s}{\partial x}$ – относительное удлинение или сжатие.

Учитывая выражение для производной $\frac{\partial s}{\partial x} = -A \frac{\omega}{v_\phi} \cos \omega \left(t - \frac{x}{v_\phi} \right)$, формулу для потенциальной энергии можно записать в виде

$$\Delta W_n = \frac{1}{2} \rho A^2 \omega^2 \cos^2 \omega \left(t - \frac{x}{v_\phi} \right) \Delta V. \quad (60)$$

Анализ выражений (59) и (60) показывает, что максимумы потенциальной и кинетической энергии совпадают. Это является характерной особенностью бегущих волн. Полная энергия объема ΔV :

$$\Delta W = \Delta W_k + \Delta W_n = \rho A^2 \omega^2 \cos^2 \omega \left(t - \frac{x}{v_\phi} \right) \Delta V. \quad (61)$$

Разделив величину полной энергии на занятый ею объем, получим объемную плотность энергии

$$w = \frac{\Delta W}{\Delta V} = \rho A^2 \omega^2 \cos^2 \omega \left(t - \frac{x}{v_\phi} \right). \quad (62)$$

Из выражения (62) следует, что плотность энергии является функцией координаты x , т.е. в различных точках пространства она имеет различные значения. Максимального значения плотность энергии достигает в тех точках пространства, где смещение равно нулю ($\xi = 0$).

Средняя плотность энергии в каждой точке равна

$$w_{\text{ср}} = \frac{1}{2} \rho A^2 \omega^2, \quad (63)$$

так как среднее значение $\cos^2 \omega \left(t - \frac{x}{v_\phi} \right)$ равно $1/2$.

Таким образом, среда, в которой распространяется волна, обладает дополнительным запасом энергии, которая доставляется от источника колебаний в различные области среды.

Перенос энергии в волнах количественно характеризуется вектором плотности потока энергии $\vec{s}$. Этот вектор для упругих волн называется вектором Умова (по имени русского ученого Н. А. Умова). Направление вектора Умова совпадает с направлением переноса энергии, а его модуль равен энергии, переносимой волной за единицу времени сквозь единичную площадку, расположенную перпендикулярно направлению распространения волны.

$$s = wv.$$

ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

Пример 1. Поперечная волна распространяется вдоль упругого шнура со скоростью $v = 10$ м/с. Амплитуда колебаний точек шнура $A = 5$ см, период колебаний $T = 1$ с. Запишите уравнение волны и определите: 1) длину волны; 2) фазу колебаний, смещение, скорость и ускорение точки,

расположенной на расстоянии $x_1 = 9$ м от источника колебаний, в момент времени $t_1 = 2,5$ с.

Дано:	Решение
$v = 10$ м/с $A = 5$ см $T = 1$ с $x_1 = 9$ м $t_1 = 2,5$ с	Уравнение волны, распространяющейся вдоль шнура $\xi = A \cos \omega \left(t - \frac{x}{v} \right),$
$\xi(x, t) = ?$ 1) $\lambda = ?$ 2) $\varphi_1 = ?$, $\xi_1 = ?$, $v_1 = ?$ $a_1 = ?$	где ω – циклическая частота $\omega = \frac{2\pi}{T}$, поэтому $\xi = A \cos \frac{2\pi}{T} \left(t - \frac{x}{v} \right),$ $\xi = 0,05 \cos \frac{2\pi}{1} \left(t - \frac{x}{10} \right) = 0,05 \cos \left(2\pi t - \frac{\pi x}{5} \right).$

Длина волны $\lambda = vT$, $\lambda = 10 \cdot 1 = 10$ м.

Фаза волны $\phi = \frac{2\pi}{T} \left(t - \frac{x}{v} \right)$. В момент времени t_1 :

$$\varphi_1 = \frac{2\pi}{T} \left(t_1 - \frac{x_1}{v} \right), \quad \varphi_1 = \frac{2\pi}{1} \left(2,5 - \frac{9}{10} \right) = 3,2\pi.$$

$$\xi_1 = A \cos \varphi_1 = 0,05 \cos 3,2\pi = -0,04 \text{ м.}$$

Скорость точки

$$v_1 = \frac{d\xi}{dt} = -A \frac{2\pi}{T} \sin \frac{2\pi}{T} \left(t_1 - \frac{x_1}{v} \right),$$

$$v_1 = -0,05 \frac{2\pi}{1} \sin \frac{2\pi}{1} \left(2,5 - \frac{9}{10} \right) = -0,185 \text{ м/с.}$$

Ускорение точки

$$a = \frac{d^2\xi}{dt^2} = -A \left(\frac{2\pi}{T} \right)^2 \cos \frac{2\pi}{T} \left(t - \frac{x_1}{v} \right),$$

$$a_1 = -0,05 \frac{4\pi^2}{1} \cos 3,2\pi = -1,6 \text{ м/с}^2.$$

$$\text{О т в е т: } \xi(x, t) = 5 \cos \left(2\pi t - \frac{\pi}{5} x \right), \text{ м}$$

$$1) \lambda = 10 \text{ м; } 2) \varphi_1 = 3,2\pi, \xi_1 = -0,04 \text{ м, } v_1 = 0,185 \text{ м/с, } a_1 = -1,6 \text{ м/с}^2.$$

Пример 2. Волна распространяется по прямой со скоростью $v = 20$ м/с. Две точки, находящиеся на этой прямой на расстояниях $x_1 = 12$ м и $x_2 = 15$ м от источника волн, колеблются по закону синуса с одинаковыми амплитудами $A = 0,1$ м и с разностью фаз $\Delta\varphi = 0,75\pi$. Определите длину волны λ , напишите уравнение волны и найдите смещения указанных точек в момент времени $t = 1,2$ с.

Дано:
 $v = 20$ м/с
 $A = 0,1$ м
 $x_1 = 12$ м
 $x_2 = 15$ м
 $\Delta\varphi = 0,75\pi$

 $\xi(x, t) = ?$, $\xi_1 = ?$,
 $\xi_2 = ?$

Решение
 Точки, находящиеся друг от друга на расстоянии, равном длине волны λ , колеблются с разностью фаз, равной 2π . Точки, находящиеся друг от друга на любом расстоянии Δx , колеблются с разностью фаз:

$$\Delta\varphi = \frac{\Delta x}{\lambda} 2\pi.$$

Решая это равенство относительно λ , получим:

$$\lambda = \Delta x \frac{2\pi}{\Delta\varphi}.$$

Расстояние Δx между указанными точками равно:

$$\Delta x = 15 - 12 = 3 \text{ м.}$$

Подставляя числовые значения величин, входящих в выражение λ , получим:

$$\lambda = 3 \frac{2\pi}{0,75\pi} = 8 \text{ м.}$$

Скорость распространения волны v связана с длиной волны λ и периодом колебаний T соотношением

$$v = \frac{\lambda}{T},$$

откуда $T = \frac{\lambda}{v} = \frac{8}{20} = 0,4$ с.

Циклическая частота $\omega = \frac{2\pi}{T}$, $\omega = \frac{2\pi}{0,4} = 5\pi$ с⁻¹, поэтому уравнение волны имеет вид

$$\xi(x, t) = 0,1 \sin 5\pi \left(t - \frac{x}{20} \right).$$

Чтобы найти смещения ξ_1 и ξ_2 указанных точек, достаточно в это уравнение подставить заданные значения t и x ($t=1,2$ с, $x_1=12$ м, $x_2=15$ м), тогда

$$\xi_1 = 0,1 \sin 5\pi \left(1,2 - \frac{12}{20}\right) = 0,1 \sin 3\pi = 0;$$

$$\xi_2 = 0,1 \sin 5\pi \left(1,2 - \frac{15}{20}\right) = 0,1 \sin 2,25\pi = 0,1 \sin 0,25\pi = 0,071 \text{ м.}$$

О т в е т: $\lambda = 8$ м; $\xi(x, t) = 0,1 \sin 5\pi \left(t - \frac{x}{20}\right)$, м; $\xi_1 = 0$;
 $\xi_2 = 0,071$ м.

Пример 3. Поперечная волна распространяется вдоль упругого шнура со скоростью $v=15$ м/с. Период T колебаний точек шнура равен 1,2 с, амплитуда $A=2$ м. Определите: 1) длину волны λ ; 2) фазу φ колебаний, смещение ξ , скорость v и ускорение a точки, отстоящей на расстоянии $x=45$ м от источника волн в момент $t=4$ с; 3) разность фаз $\Delta\varphi$ колебаний двух точек, лежащих на луче и отстоящих от источника волн на расстояниях $x_1=20$ м и $x_2=30$ м.

Дано:	Решение
$v=15$ м/с	1) Длина волны равна расстоянию, которое волна проходит за один период,
$A=2$ м	$\lambda = vT$.
$T=1,2$ с	Подставив значения величин v и T , получим
$x_1=9$ м	$\lambda = 18$ м.
$t_1=4$ с	2) Запишем уравнение волны
$x_1=20$ м	$\xi = A \cos \omega(t - x/v),$
$x_2=30$ м	где ξ – смещение колеблющейся точки; x – расстояние
1) λ – ?	точки от источника волн; v – скорость распространения
2) φ – ?, ξ – ?,	волны.
v – ?, a – ?	
3) $\Delta\varphi$ – ?	

Фаза колебаний точки с координатой x в момент времени t определяется выражением, стоящим в уравнении волны под знаком косинуса:

$$\varphi = \omega \left(t - \frac{x}{v}\right), \text{ или } \varphi = \frac{2\pi}{T} \left(t - \frac{x}{v}\right),$$

где учтено, что $\omega = 2\pi / T$.

Произведя вычисления по последней формуле, получим

$$\varphi = 5,24 \text{ рад, или } \varphi = 300^\circ.$$

Смещение точки определим, подставив в уравнение волны значения амплитуды A и фазы φ :

$$\xi = 1 \text{ см.}$$

Скорость v точки находим, взяв первую производную от смещения по времени:

$$v = \frac{d\xi}{dt} = -A\omega \sin \omega \left(t - \frac{x}{v} \right) = -\frac{2\pi A}{T} \sin \omega \left(t - \frac{x}{v} \right) = \frac{2\pi A}{T} \sin \varphi.$$

Подставив в эту формулу значения величин π , A , T и φ и выполнив вычисления, получим

$$v = 9 \text{ см/с.}$$

Ускорение есть первая производная от скорости по времени, поэтому

$$a = \frac{dv}{dt} = -A\omega^2 \cos \omega \left(t - \frac{x}{v} \right) = -\frac{4\pi^2 A}{T^2} \cos \varphi.$$

Произведя вычисления по этой формуле, найдем

$$a = -27,4 \text{ см/с}^2.$$

3) Разность фаз $\Delta\varphi$ колебаний двух точек волны связана с расстоянием Δx между этими точками соотношением

$$\Delta\varphi = (2\pi / \lambda) \Delta x = (2\pi / \lambda) (x_2 - x_1).$$

Подставив значения величин λ , x_1 и x_2 и вычислив, получим

$$\Delta\varphi = 3,49 \text{ рад, или } \Delta\varphi = 200^\circ.$$

О т в е т: 1) $\lambda = 18\text{ м}$; 2) $\varphi = 5,24 \text{ рад}$, $\xi = 1 \text{ см}$, $v = 9 \text{ см/с}$,
 $a = -27,4 \text{ см/с}^2$; 3) $\Delta\varphi = 3,49 \text{ рад}$.

ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ

Средний уровень

1. Какие утверждения справедливы для продольной волны?
 - 1) Возникновение волны связано с деформацией сдвига.
 - 2) Частицы среды колеблются в направлениях, перпендикулярных направлению распространения волны.
 - 3) Частицы среды колеблются в направлении распространения волны.
2. Какие утверждения справедливы для поперечной волны?
 - 1) Частицы среды колеблются в направлении распространения волны.

2) Частицы среды колеблются в направлениях, перпендикулярных направлению распространения волны.

3) Возникновение волны связано с деформацией сжатия – растяжения.

3. Какие утверждения справедливы для плоской волны?

1) Амплитуда волны не зависит от расстояния до источника колебаний (при условии, что поглощением среды можно пренебречь).

2) Амплитуда волны обратно пропорциональна расстоянию до источника колебаний (в непоглощающей среде).

3) Волновые поверхности имеют вид концентрических сфер.

4. Какие утверждения справедливы для сферической волны?

1) Амплитуда волны не зависит от расстояния до источника колебаний (при условии, что поглощением среды можно пренебречь).

2) Волновые поверхности имеют вид параллельных друг другу плоскостей.

3) Амплитуда волны обратно пропорциональна расстоянию до источника колебаний (в непоглощающей среде).

5. Выберите правильное суждение.

В газовой среде распространяются...

1) продольные и поперечные волны;

2) только поперечные волны;

3) только продольные волны.

6. Смещение частиц среды в плоской бегущей звуковой волне выражается соотношением $\xi(x, t) = A_0 \cos\left(\omega t - \frac{2\pi}{\lambda} x\right)$. Каким соотношением выражается скорость частиц среды в этой волне?

О т в е т: $v = -A_0 \omega \sin\left(\omega t - \frac{2\pi}{\lambda} x\right)$.

7. Смещение частиц среды в плоской бегущей звуковой волне выражается соотношением $\xi(x, t) = A_0 \cos\left(\omega t - \frac{2\pi}{\lambda} x\right)$. Каким соотношением выражается ускорение частиц среды в этой волне?

О т в е т: $a = -A_0 \omega^2 \cos\left(\omega t - \frac{2\pi}{\lambda} x\right)$.

8. Уравнение плоской синусоидальной волны, распространяющейся вдоль оси OX , имеет вид $\xi = 0,2 \cos 2\pi \left(t - \frac{x}{100} \right)$. Найдите длину волны.

О т в е т: $\lambda = 100$ м.

9. Уравнение плоской волны, распространяющейся вдоль оси OX , имеет вид $\xi = 0,01 \sin 10^3 \left(t - \frac{x}{500} \right)$. Найдите длину волны.

О т в е т: $\lambda = 3,14$ м.

10. Уравнение плоской синусоидальной волны, распространяющейся вдоль оси OX со скоростью 500 м/с, имеет вид $\xi = 0,01 \sin(10^3 t - kx)$. Определите волновое число.

О т в е т: $k = 2 \text{ м}^{-1}$.

11. Уравнение плоской синусоидальной волны, распространяющейся вдоль оси OX , имеет вид $\xi = 0,01 \sin(10^3 t - 2x)$. Определите амплитуду ускорения частиц среды.

О т в е т: $a_{\max} = 10^4 \text{ м/с}^2$.

12. Уравнение плоской синусоидальной волны, распространяющейся вдоль оси OX , имеет вид $\xi = 0,01 \sin(10^3 t - 2x)$. Определите скорость распространения волны.

О т в е т: $v = 500 \text{ м/с}$.

13. Уравнение плоской синусоидальной волны, распространяющейся вдоль оси OX со скоростью 500 м/с, имеет вид $\xi = 0,01 \sin(\omega t - 2x)$. Определите циклическую частоту колебаний волны.

О т в е т: $\omega = 1000 \text{ рад/с}$.

14. Уравнение плоской синусоидальной волны, распространяющейся вдоль оси OX со скоростью 500 м/с, имеет вид $\xi = 0,01 \sin(10^3 t - kx)$. Определите длину волны.

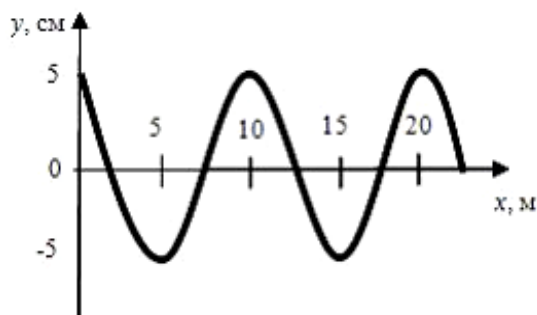
О т в е т: $\lambda = 3,14$ м.

15. Уравнение волны имеет вид $\xi = 0,01 \cos(12,6 \cdot 10^3 t - 37x)$. Чему равна скорость распространения волны?

О т в е т: $v = 341 \text{ м/с}$.

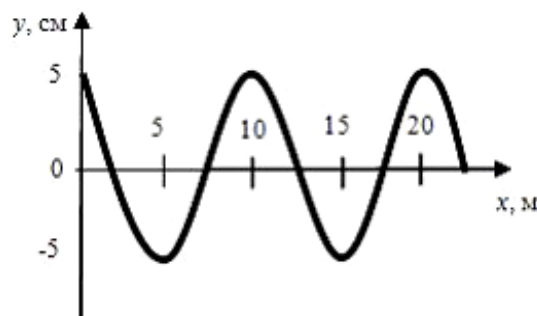
16. На рисунке представлен профиль поперечной бегущей волны, которая распространяется со скоростью 200 м/с. Чему равна амплитуда скорости колебаний точек среды?

О т в е т: $v_{\max} = 6,28$ м/с.



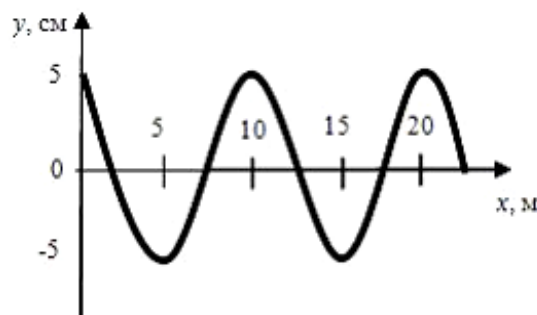
17. На рисунке представлен профиль поперечной бегущей волны. Чему равно значение волнового числа?

О т в е т: $k = 0,628$ м⁻¹.



18. На рисунке представлен профиль поперечной упругой бегущей волны, которая распространяется со скоростью 1000 м/с. Чему равна циклическая частота волны?

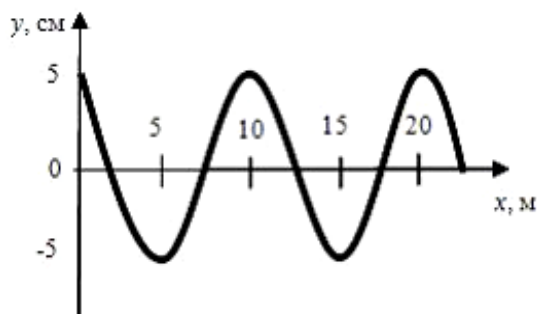
О т в е т: $\omega = 628$ рад/с.



19. На рисунке представлен профиль поперечной бегущей волны, которая распространяется со скоростью 200 м/с. Запишите уравнение данной волны.

О т в е т:

$$y(x,t) = 0,05 \cos(125,6t - 0,628x).$$



20. Плоская звуковая волна $\xi(x,t) = A \cos(\omega t - kx)$ распространяется в упругой среде. Чему равна скорость колебаний частиц среды, отстоящих от источника на расстоянии $x = \lambda / 6$, в момент времени $t = T / 4$?

О т в е т: $v = -\frac{A\omega}{2}$.

21. Уравнение бегущей волны имеет вид $\xi = 6 \cdot 10^{-3} \cos(1570t - 4,6x)$. Чему равно отношение амплитудного значения скорости частиц среды к скорости распространения волны?

О т в е т: $\frac{v_{\max}}{v} = 0,028$.

22. В упругой среде плотностью ρ распространяется плоская синусоидальная волна с частотой ω и амплитудой A . При переходе волны в другую среду, плотность которой в 2 раза меньше, амплитуду увеличивают в 4 раза. Во сколько раз увеличится объемная плотность энергии, переносимая волной?

О т в е т: увеличится в 8 раз.

23. В упругой среде плотностью ρ распространяется плоская синусоидальная волна с частотой ω и амплитудой A . Как изменится объемная плотность энергии, если частоту увеличить в 4 раза, а амплитуду уменьшить в 2 раза?

О т в е т: увеличится в 4 раза.

24. В упругой среде плотностью ρ распространяется плоская синусоидальная волна. Во сколько раз увеличится плотность потока энергии, если амплитуда волны увеличится в 4 раза?

О т в е т: увеличится в 16 раз.

25. В упругой среде плотностью ρ распространяется плоская синусоидальная волна. Во сколько раз увеличится плотность потока энергии, если амплитуда волны увеличится в 4 раза, а частота в 2 раза?

О т в е т: увеличится в 64 раза.

26. Плотность потока энергии, переносимой волной в упругой среде плотностью ρ , увеличилась в 16 раз при неизменной скорости и частоте волны. Во сколько раз при этом возросла амплитуда волны?

О т в е т: возросла в 4 раза.

27. Скорость звука в воде 1450 м/с. Частота колебаний 725 Гц. Определите, на каком расстоянии находятся ближайшие точки, совершающие колебания: а) синфазно; б) в противофазе; в) при разности фаз $\pi/4$.

О т в е т: а) $\Delta x_1 = 2$ м; б) $\Delta x_2 = 1$ м; в) $\Delta x_3 = 0,25$ м.

Достаточный уровень

1. Продольная волна с частотой 362 Гц распространяется в воздухе со скоростью 345 м/с. Чему равна длина волны? За какое время фаза в данной точке меняется на $\frac{\pi}{2}$ рад? Чему равна разность фаз между точками, отстоящими друг от друга на 20 см?

О т в е т: $\lambda = 0,953$ м; $t = 0,69$ мс; $\Delta\phi = 0,42$ рад.

2. Плоская синусоидальная волна распространяется вдоль прямой, совпадающей с положительным направлением оси x в среде, не поглощающей энергию, со скоростью $v = 10$ м/с. Две точки, находящиеся на одной прямой на расстояниях $x_1 = 7$ м и $x_2 = 10$ м от источника колебаний, колеблются с разностью фаз $\Delta\phi = 3\pi/5$. Амплитуда волны $A = 5$ см. Определите: 1) длину волны λ ; 2) уравнение волны; 3) смещение ξ_2 второй точки в момент времени $t_2 = 2$ с.

О т в е т: 1) $\lambda = 10$ м; 2) $\xi(x, t) = 0,05 \cos \omega \left(2\pi t - \frac{\pi}{5} x \right)$, м; 3) $\xi_2 = 5$ см.

3. Косинусоидальная волна с нулевой начальной фазой распространяется вдоль упругого шнура со скоростью 10 м/с. Период колебаний частиц шнура 1 с. Определите фазу волны в точке, расположенной на расстоянии 9 м от источника волны в момент времени 2,5 с.

О т в е т: $\phi = 3,2\pi$ рад/с.

4. Звуковые колебания с частотой $\nu = 450$ Гц и амплитудой $A = 0,3$ мм распространяются в упругой среде. Длина волны $\lambda = 80$ см. Определите: 1) скорость распространения волн; 2) максимальную скорость частиц среды.

О т в е т: 1) $v = 360$ м/с; 2) $\left(\frac{d\xi}{dt} \right)_{\max} = 0,848$ м/с.

5. Косинусоидальная волна распространяется со скоростью 12 м/с. Две точки, расположенные на расстоянии 7 и 12 м от источника, колеблются с разностью фаз $5\pi/6$. Амплитуда волны 6 см. Определите длину волны и смещение второй точки в момент времени 3 с. Начальная фаза колебаний равна $\pi/2$.

О т в е т: $\lambda = 12$ м; $\xi = 0,058$ м.

6. Волна распространяется в упругой среде со скоростью $v = 150$ м/с. Определите частоту ν колебаний, если минимальное расстояние Δx между точками среды, фазы колебаний которых противоположны, равно 0,75 м.

О т в е т: $\nu = 100$ Гц.

7. Определите разность фаз $\Delta\varphi$ колебаний двух точек, лежащих на луче и расположенных друг от друга на расстоянии $\Delta l = 1$ м, если длина волны $\lambda = 0,5$ м.

О т в е т: $\Delta\varphi = 4\pi$, точки колеблются в фазе.

8. Две точки лежат на луче и находятся от источника колебаний на расстояниях $x_1 = 4$ м и $x_2 = 7$ м. Период колебаний $T = 20$ мс и скорость v распространения волны равна 300 м/с. Определите разность фаз колебаний этих точек.

О т в е т: $\Delta\varphi = \pi$, точки колеблются в противофазе.

9. Сейсмическая волна, падающая со скоростью 5,6 км/с под углом 45° на границу раздела между двумя слоями земной коры с различными свойствами, испытывает преломление, причем угол преломления равен 30° . С какой скоростью будет распространяться волна во второй среде?

О т в е т: $v_2 = 4$ км/с.

3.4. Принцип суперпозиции и групповая скорость

Принцип суперпозиции волн: *результатирующее возмущение в какой-либо точке среды при одновременном распространении в ней нескольких волн равно сумме возмущений от каждой из этих волн.*

Любую несинусоидальную волну можно заменить эквивалентной ей системой синусоидальных волн – группой волн, или волновым пакетом.

Спектр частот – совокупность значений частот этих синусоидальных волн.

Скорость распространения волн определяется физическими свойствами среды. Если существует зависимость скорости гармонической волны от частоты (длины волн), то наблюдается явление, называемое дисперсией. Понятие скорости распространения волны является простым лишь в случае отсутствия дисперсии, при этом волны различной формы и интенсивности распространяются с одинаковой скоростью, которую называют фазовой (v).

В диспергирующей среде волновой пакет перемещается со скоростью, называемой групповой. Это скорость перемещения центра пакета (максимальной амплитуды).

Групповая скорость волны (пакета) – это скорость переноса энергии этой волной.

Связь между групповой $U = d\omega / dk$ и фазовой $v = \omega / k$ скоростями:

$$U = v - \lambda \frac{dv}{d\lambda},$$

где λ – длина волны.

В недиспергирующей среде $\frac{dv}{d\lambda} = 0$ и групповая скорость совпадает с фазовой.

3.5. Интерференция волн. Стоячие волны

Если в пространстве одновременно распространяется несколько волн от различных источников, то происходит их наложение (суперпозиция) без возмущения друг друга. Волны, обладающие постоянством разности фаз во времени и одинаковой частотой, называют *когерентными*. При наложении когерентных волн наблюдается *интерференция* – усиление колебаний в одних точках пространства и ослабление в других, т.е. перераспределение энергии в пространстве, причем закон сохранения энергии не нарушается.

При интерференции двух встречных волн с одинаковой амплитудой возникает стоячая волна. Запишем уравнения этих волн:

$$\xi_1 = A \sin(\omega t - \frac{2\pi x}{\lambda}), \quad \xi_2 = A \sin(\omega t + \frac{2\pi x}{\lambda}).$$

Суммарное смещение частиц среды при интерференции этих волн равно

$$\xi = \xi_1 + \xi_2 = A \left[\sin(\omega t - \frac{2\pi x}{\lambda}) + \sin(\omega t + \frac{2\pi x}{\lambda}) \right].$$

Выполнив тригонометрические преобразования выражения, получим

$$\xi = 2A \cos \frac{2\pi x}{\lambda} \sin \omega t. \quad (64)$$

Формула (64) – уравнение стоячей волны. Из него вытекает, что в каждой точке стоячей волны происходят колебания той же частоты, что и у интерферирующих волн, а амплитуда стоячей волны является периодической функцией координаты x

$$A_{\text{ст}} = \left| 2A \cos \frac{2\pi x}{\lambda} \right|.$$

Максимального значения (т.е. значения $2A$) амплитуда достигает в тех точках пространства, координаты которых удовлетворяют условию

$$\frac{2\pi x}{\lambda} = \pm \pi n \quad (n = 0, 1, 2, \dots).$$

Точки, имеющие такие координаты, называют *пучностями* стоячей волны.

Минимального значения (т.е. значения, равного нулю) амплитуда достигает в тех точках пространства, координаты которых удовлетворяют условию

$$\frac{2\pi x}{\lambda} = \pm(n + \frac{1}{2})\pi.$$

Точки, имеющие такие координаты, называют *узлами* стоячей волны.

Из рис. 25 видно, что расстояние между соседними пучностями и соседними узлами равно $\frac{\lambda}{2}$.

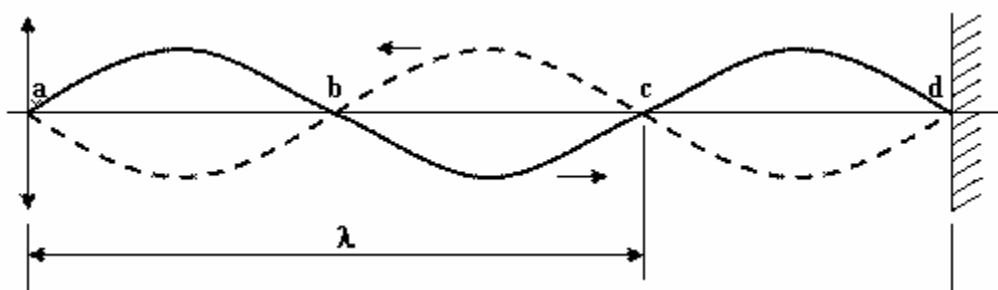


Рис. 25

Длина стоячей волны – расстояние между двумя узлами или двумя пучностями.

$$\lambda_{\text{ст}} = \lambda / 2,$$

где λ – длина бегущей волны.

При переходе через узел фаза колебаний изменяется скачком на π . Точки, лежащие по разные стороны от узла, колеблются в противофазе; все точки, находящиеся между соседними узлами, колеблются синфазно (в одинаковой фазе)

Скорость частиц в стоячей волне описывается уравнением

$$v = \frac{\partial \xi}{\partial t} = -\left(2\xi_0 \cos 2\pi \frac{x}{\lambda}\right) \sin \omega t = -(2\xi_0 \omega \cos kx) \sin \omega t.$$

Деформация среды

$$\varepsilon = \frac{\partial \xi}{\partial x} = -\left(2\xi_0 \frac{2\pi}{\lambda} \cos 2\pi \frac{x}{\lambda}\right) \cos \omega t = -(2\xi_0 k \cos kx) \cos \omega t.$$

Энергия стоячей волны периодически (с частотой 2ω) перекачивается от узлов, где сосредоточена W_n , к пучностям, где сосредоточена W_k , и обратно. Стоячая волна энергию не переносит.

ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

Пример 1. На шнуре длиной $l = 3$ м, один конец которого привязан к стене, другой колеблется с частотой $\nu = 5$ Гц, возбуждаются стоячие волны. При этом между источником и стеной образуется шесть узлов. Найдите скорость распространения волны в шнуре.

Дано:	Решение
$l = 3$ м	Уравнение бегущей волны $\xi_1 = A \cos \omega \left(t - \frac{x}{v} \right)$, уравнение отраженной волны $\xi_2 = A \cos \omega \left(t + \frac{x}{v} \right)$.
$n = 6$	
$\nu = 5$ Гц	
$v = ?$	

Уравнение стоячей волны

$$\xi(x, t) = \xi_1 + \xi_2 = A \cos \left(\omega t - \frac{\omega x}{v} \right) + A \cos \left(\omega t + \frac{\omega x}{v} \right) = 2A \cos \frac{\omega x}{v} \cdot \cos \omega t.$$

Так как $\omega = \frac{2\pi}{T}$, $\lambda = vT$, то $\frac{\omega x}{v} = \frac{2\pi}{T} \frac{T}{\lambda} x = \frac{2\pi}{\lambda} x$ и уравнение стоячей волны имеет вид

$$\xi(x, t) = 2A \cos \frac{2\pi}{\lambda} x \cdot \cos \omega t. \quad (1)$$

Амплитуда стоячей волны

$$A_{\text{ст}} = 2A \cos \frac{2\pi}{\lambda} x. \quad (2)$$

В узлах стоячей волны

$$A_{\text{ст}} = 0, \quad 2A \cos \frac{2\pi}{\lambda} x = 0. \quad (3)$$

Решение уравнения (3) имеет вид

$$\frac{2\pi x_m}{\lambda} = \left(m - \frac{1}{2} \right) \pi,$$

где $m = 1, 2, \dots$

Откуда координата m -го узла

$$x_m^{\text{узн}} = \left(m - \frac{1}{2} \right) \frac{\lambda}{2}, \quad (m = 1, 2, \dots). \quad (4)$$

В пучностях стоячей волны

$$A_{\text{ст}} = 2A, \quad 2A \cos \frac{2\pi}{\lambda} x = 2A,$$

откуда координата m -й пучности

$$x_m^{\text{пучн}} = (m-1) \frac{\lambda}{2}, \quad (m=1, 2, \dots). \quad (5)$$

Если на шнуре длиной l укладывается n узлов, и при этом один конец шнура свободен (первая пучность), а второй закреплен (n -й узел), то из формул (4) и (5) следует, что

$$l = x_n^{\text{узн}} - x_1^{\text{пучн}} = \left(n - \frac{1}{2}\right) \frac{\lambda}{2} - 0 = \frac{(2n-1)\lambda}{4},$$

откуда $\lambda = \frac{4l}{2n-1}.$

Скорость распространения волны $v = \lambda/T = \lambda v = \frac{4lv}{2n-1}.$

$$v = \frac{4 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 6 - 1} = 5,45 \text{ м/с.}$$

О т в е т: $v = 5,45 \text{ м/с.}$

Пример 2. Один конец упругого стержня соединен с источником гармонических колебаний, подчиняющихся закону $\xi = A \cos \omega t$, а другой его конец жестко закреплен. Учитывая, что отражение в месте закрепления стержня происходит от более плотной среды, определите характер колебаний в любой точке стержня.

Дано:	Решение
$\xi = A \cos \omega t$	Уравнение бегущей волны
Среда более плотная	$\xi_1 = A \cos \omega \left(t - \frac{x}{v} \right).$
$\xi(x, t) - ?$	Уравнение отраженной волны
	$\xi_2 = A \cos \left[\omega \left(t + \frac{x}{v} \right) + \pi \right] = -A \cos \omega \left(t + \frac{x}{v} \right).$

Уравнение стоячей волны

$$\begin{aligned} \xi(x, t) &= \xi_1 + \xi_2 = A \cos \left(\omega t - \frac{\omega x}{v} \right) - A \cos \left(\omega t + \frac{\omega x}{v} \right) = \\ &= A \left[\cos \omega t \cdot \cos \frac{\omega x}{v} + \sin \omega t \cdot \sin \frac{\omega x}{v} - \cos \omega t \cdot \cos \frac{\omega x}{v} + \sin \omega t \cdot \sin \frac{\omega x}{v} \right] = \end{aligned}$$

$$= 2A \sin \frac{\omega x}{v} \cdot \sin \omega t,$$

где $\omega = \frac{2\pi}{T}$, $\lambda = vT$.

Тогда

$$\frac{\omega x}{v} = \frac{2\pi}{T} \frac{T}{\lambda} x = \frac{2\pi}{\lambda} x.$$

Поэтому уравнение стоячей волны можно записать в виде

$$\xi(x, t) = 2A \sin \frac{2\pi}{\lambda} x \cdot \sin \omega t.$$

В точках с координатами $x = \pm m \frac{\lambda}{2}$ ($m = 0, 1, 2, \dots$) образуются узлы.

В точках с координатами $x = \pm \left(m + \frac{1}{2}\right) \frac{\lambda}{2}$ ($m = 0, 1, 2, \dots$) – пучности.

О т в е т: при $x = \pm m \frac{\lambda}{2}$ ($m = 0, 1, 2, \dots$) – узлы;

при $x = \pm \left(m + \frac{1}{2}\right) \frac{\lambda}{2}$ ($m = 0, 1, 2, \dots$) – пучности.

Пример 3. На расстоянии $l = 4$ м от источника плоской волны с частотой $\nu = 440$ Гц перпендикулярно ее лучу расположена стена. Определите расстояния от источника волн до точек, в которых будут первые три узла и три пучности стоячей волны, возникшей в результате сложения бегущей и отраженной от стены волн. Скорость v волны считать равной 440 м/с.

Дано:

$$l = 4 \text{ м}$$

$$\nu = 440 \text{ Гц}$$

$$v = 440 \text{ м/с.}$$

$$x_n - ?, \quad x'_n - ?$$

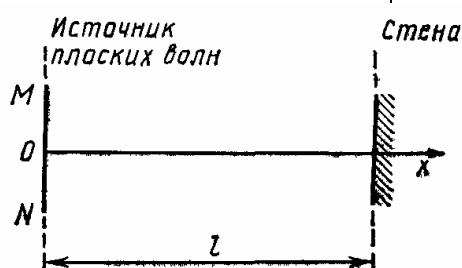
Решение

Выберем систему координат так, чтобы ось x была направлена вдоль луча бегущей волны и начало O координат совпадало с точкой, находящейся на источнике MN плоской волны (см. рисунок). С учетом этого уравнение бегущей волны запишется в виде

$$\xi_1 = A \cos(\omega t - kx). \quad (1)$$

Поскольку в точку с координатой x волна возвратится, пройдя дважды расстояние $l - x$, и при отражении от стены, как среды более плотной, изменит фазу на π , то уравнение отраженной волны может быть записано в виде

$$\xi_2 = A \cos\{\omega t - k[x + 2(l - x)] + \pi\}.$$



После очевидных упрощений получим

$$\xi_2 = -A \cos[\omega t - k(2l - x)]. \quad (2)$$

Сложив уравнения (1) и (2), найдем уравнение стоячей волны:

$$\xi = \xi_1 + \xi_2 = A \cos(\omega t - k\chi) - A \cos[\omega t - k(2l - \chi)].$$

Воспользовавшись формулой разности косинусов, найдем

$$\xi = -2A \sin k(l - x) \sin(\omega t - kl).$$

Так как выражение $A \sin k(l - x)$ не зависит от времени, то взятое по модулю, оно может рассматриваться как амплитуда стоячей волны:

$$A_{\text{ст}} = |2A \sin k(l - x)|.$$

Зная выражение амплитуды, можем найти координаты узлов и пучностей.

Узлы возникнут в тех точках, где амплитуда стоячей волны равна нулю: $|2A \sin k(l - x)| = 0$. Это равенство выполняется для точек, координаты x_n которых удовлетворяют условию

$$k(l - x_n) = n\pi \quad (n = 0, 1, 2, \dots). \quad (3)$$

Но $k = 2\pi / \lambda$, или, так как $\lambda = v / \nu$,

$$k = 2\pi\nu / v. \quad (4)$$

Подставив это выражение k в (3), получим

$$2\pi\nu(l - x_n) = n\pi v,$$

откуда координаты узлов

$$x_n = l - n v / (2\nu).$$

Подставив в эту формулу значения l , ν , v и $n = 0, 1, 2$, найдем координаты первых трех узлов:

$$x_0 = 4 \text{ м}, \quad x_1 = 3,61 \text{ м}, \quad x_2 = 3,23 \text{ м}.$$

Пучности возникнут в тех точках, где амплитуда стоячей волны максимальна: $2A \sin k(l - x') = 2A$. Это равенство выполняется для точек, координаты x'_n которых удовлетворяют условию

$$k(l - x'_n) = (2n + 1)(\pi / 2) \quad (n = 0, 1, 2, 3, \dots).$$

Выразив здесь k по (4), получим

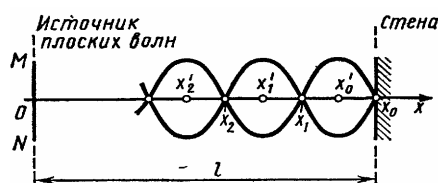
$$4\nu x'_n = 4\nu l - (2n + 1)v,$$

откуда координаты пучностей

$$x'_n = l - (2n + 1) \upsilon / (4\nu).$$

Подставив в эту формулу значения l , ν , υ и $n = 0, 1, 2$, найдем координаты первых трех пучностей:

$$x'_0 = 3,81 \text{ м}, x'_1 = 3,42 \text{ м}, x'_2 = 3,04 \text{ м}.$$



Границы максимальных смещений точек среды в зависимости от их координат изображены на рисунке. Здесь же отмечены координаты $x_0, x_1, x_2, \dots$ узлов и координаты $x'_0, x'_1, x'_2, \dots$ пучностей стоячей волны.

О т в е т: $x_0 = 4 \text{ м}, x_1 = 3,61 \text{ м}, x_2 = 3,23 \text{ м}; x'_0 = 3,81 \text{ м},$
 $x'_1 = 3,42 \text{ м}, x'_2 = 3,04 \text{ м}.$

ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ

Средний уровень

1. На шнуре длиной $l = 2 \text{ м}$, один конец которого привязан к стенке, а другой колеблется с частотой $\nu = 5 \text{ Гц}$, возбуждаются стоячие волны. При этом между стенкой и свободным концом образуются 3 узла. Найти скорость распространения волн вдоль шнура.

О т в е т: $\upsilon = 8 \text{ м/с}.$

2. Определите длину бегущей волны, если в стоячей волне расстояние между первой и седьмой пучностями 15 см.

О т в е т: $\lambda = 0,05 \text{ м}.$

3. Определите длину бегущей волны, если в стоячей волне расстояние между первым и четвертым узлами равно 15 см.

О т в е т: $\lambda = 0,1 \text{ м}.$

4. Объясните, где человек слышит более громкий звук: в пучности или в узле стоячей волны.

Достаточный уровень

1. Два когерентных источника колеблются в одинаковых фазах с частотой $\nu = 400 \text{ Гц}$. Скорость распространения колебаний в среде $\upsilon = 1 \text{ км/с}$. Определите, при какой наименьшей разности хода, не равной нулю, будет наблюдаться: 1) максимальное усиление колебаний; 2) максимальное ослабление колебаний.

О т в е т: $\Delta_{\max} = 2,5 \text{ м}, \Delta_{\min} = 1,25 \text{ м}.$

2. Два когерентных источника посылают поперечные волны в одинаковых фазах. Периоды колебаний $T = 0,2$ с, скорость распространения волн в среде $v = 800$ м/с. Определите, при какой разности хода в случае наложения волн будет наблюдаться: 1) ослабление колебаний; 2) усиление колебаний.

О т в е т: 1) $\Delta = \pm 80(2m + 1)$, м ($m = 0, 1, 2, \dots$);

2) $\Delta = \pm 160m$, м ($m = 0, 1, 2, \dots$).

3. Два динамика расположены на расстоянии $d = 0,5$ м друг от друга и воспроизводят один и тот же музыкальный тон на частоте $\nu = 1500$ Гц. Приемник находится на расстоянии $l = 4$ м от центра динамика. Принимая скорость звука $v = 340$ м/с, определите, на какое расстояние от центральной линии параллельно динамикам надо отодвинуть приемник, чтобы он зафиксировал первый интерференционный минимум.

О т в е т: $x = 90,7$ см.

4. Два динамика расположены на расстоянии $d = 2$ м друг от друга и воспроизводят музыкальный тон частотой $\nu = 1$ кГц. Приемник находится на расстоянии $l = 4$ м от линии расположения динамиков. Определите, на какое расстояние от центральной линии параллельно плоскости динамиков надо сдвинуть приемник, чтобы он зафиксировал первый интерференционный максимум. Скорость звука 340 м/с.

О т в е т: $x = 0,349$ м.

5. Определите длину бегущей волны, если в стоячей волне: 1) расстояние между первой и седьмой пучностями 15 см; 2) расстояние между первым и четвертым узлом равно 15 см.

О т в е т: $\lambda_1 = 0,015$ м; $\lambda_2 = 0,1$ м.

6. Труба, длина которой $l = 1$ м, заполнена воздухом и открыта с одного конца. Принимая скорость звука $v = 340$ м/с, определите при какой наименьшей частоте в трубе будет возникать стоячая звуковая волна.

О т в е т: $\nu_0 = 85$ Гц.

7. Стержень с закрепленными концами имеет длину $l = 70$ см. При трении стержень издает звук, основная частота (наименьшая частота, при которой может возникать стоячая волна) которого $\nu_0 = 1$ кГц. Определите: 1) скорость звука v в стержне; 2) какие обертоны (волны с кратными основным частотами) может иметь звук, издаваемый стержнем.

О т в е т: 1) $v = 1,4$ км/с; 2) $\nu_i = k\nu_0$ ($k = 2, 3, 4, \dots$).

4. ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ ВОЛНЫ

4.1. Свойства электромагнитных волн

Различные виды механических волн, как поперечных, так и продольных, объединяет одно общее свойство: они могут распространяться только в непрерывных упругих средах (в твердых телах, жидкостях или газах). В вакууме механические волны распространяться не могут.

Английский физик Джеймс Максвелл (1831–1879 гг.) на основании изучения экспериментальных работ Фарадея по электричеству и магнетизму в 1864 г. высказал гипотезу о существовании особых волн, способных распространяться в вакууме. Эти волны Максвелл назвал *электромагнитными*.

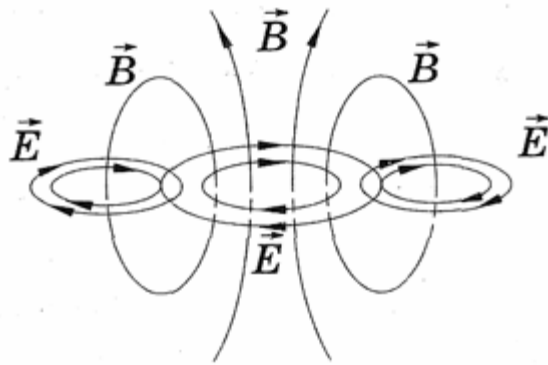


Рис. 26

По представлениям Максвелла, при любом изменении электрического поля возникает вихревое магнитное поле и, наоборот, при любом изменении магнитного поля возникает вихревое электрическое поле. Однажды начавшийся процесс взаимного порождения магнитного и электрического полей должен непрерывно продолжаться и захватывать все новые и новые области в окружающем пространстве (рис. 26).

Процесс взаимного порождения электрических и магнитных полей происходит во взаимно перпендикулярных плоскостях. Переменное электрическое поле порождает вихревое магнитное поле, переменное магнитное поле порождает вихревое электрическое поле.

Совокупность связанных друг с другом периодически изменяющихся электрического и магнитного полей называют *электромагнитным полем*.

Согласно теории Максвелла переменное электромагнитное поле распространяется в пространстве с конечной скоростью. Электромагнитное поле, распространяющееся с конечной скоростью в вакууме или в какой-либо среде, называется *электромагнитной волной*.

Максвелл показал, что векторы напряженностей переменного электрического поля (**E**) и переменного магнитного поля (**H**) удовлетворяют волновому уравнению типа:

$$\Delta E = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 E}{\partial t^2}, \quad (65)$$

$$\Delta H = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 H}{\partial t^2}. \quad (66)$$

$$\left[\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} - \text{оператор Лапласа; } v - \text{фазовая скорость} \right].$$

Скорость распространения электромагнитных волн определяется электрическими и магнитными свойствами среды, в которой они распространяются:

$$v = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0 \epsilon \mu}},$$

где ϵ_0 и μ_0 – электрическая и магнитная постоянные, ϵ и μ – относительные диэлектрическая и магнитная проницаемости среды. Если электромагнитные волны распространяются в вакууме, то $\epsilon = 1$, $\mu = 1$. Скорость распространения электромагнитных волн в вакууме:

$$c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} = \frac{1}{\sqrt{8,85 \cdot 10^{-12} \text{ Ф/м} \cdot 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ Гн/м}}} = 3 \cdot 10^8 \text{ м/с}.$$

Скорость распространения электромагнитных волн в вакууме равна скорости света в вакууме: $c = 3 \cdot 10^8 \text{ м/с}$.

Электромагнитные волны являются поперечными: векторы $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$ взаимно перпендикулярны и лежат в плоскости, перпендикулярной вектору $\mathbf{v}$ – скорости распространения волны. Кроме того, в электромагнитной волне $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$ всегда колеблются в одинаковых фазах, одновременно достигают максимума, одновременно обращаются в нуль (рис. 27).

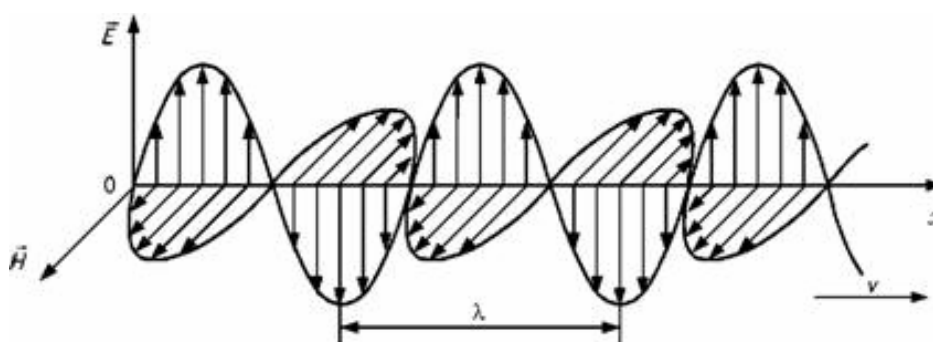


Рис. 27

Мгновенные значения $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$ в любой точке связаны отношением

$$\sqrt{\epsilon_0 \epsilon} \mathbf{E} = \sqrt{\mu_0 \mu} \mathbf{H}.$$

Уравнениям (65) и (66) удовлетворяют плоские монохроматические электромагнитные волны ($\mathbf{E}_x = \mathbf{E}_z = 0$, $\mathbf{H}_x = \mathbf{H}_z = 0$), описываемые уравнениями

$$\mathbf{E}_y = \mathbf{E}_0 \sin(\omega t + \varphi_0), \quad (67)$$

$$\mathbf{H}_y = \mathbf{H}_0 \sin(\omega t + \varphi_0), \quad (68)$$

где $\mathbf{E}_0$, $\mathbf{H}_0$ – амплитуды векторов $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$.

В уравнениях (67) и (68) φ_0 одинаковые, так как колебания электрического и магнитного векторов в электромагнитной волне происходят в одинаковой фазе.

Реальное существование электромагнитных волн, возможности их передачи и приема были доказаны Г. Герцем.

Герцем Г., Лебедевым А.П. и другими физиками были исследованы основные свойства электромагнитных волн (интерференция, дифракция, поляризация, давление и т.д.).

4.2. Энергия электромагнитных волн

Энергия электромагнитного поля равна сумме энергий электрического и магнитного полей:

$$W = W_{\text{э}} + W_{\text{м}}.$$

Объемная плотность энергии электромагнитного поля соответственно складывается из объемных плотностей энергий электрического и магнитного полей

$$w = w_{\text{э}} + w_{\text{м}} = \frac{\varepsilon \varepsilon_0 \mathbf{E}^2}{2} + \frac{\mu \mu_0 \mathbf{H}^2}{2}.$$

Объемная плотность энергии электрического и магнитного полей волны в каждый момент времени одинакова:

$$w_{\text{э}} = w_{\text{м}}.$$

Так как электрическая и магнитная составляющие электромагнитного поля энергетически равноправны, то

$$w = 2w_{\text{э}} = \varepsilon_0 \varepsilon E^2. \quad (69)$$

Так как $\mathbf{E} \sqrt{\varepsilon \varepsilon_0} = \mathbf{H} \sqrt{\mu \mu_0}$, то формулу (69) можно записать в виде

$$w = \sqrt{\varepsilon \varepsilon_0 \mu \mu_0} \mathbf{E} \mathbf{H} = \frac{1}{v} \mathbf{E} \mathbf{H},$$

где v – скорость распространения электромагнитной волны.

Умножив последнее выражение на скорость распространения волны, получим

$$\mathbf{S} = wv = \mathbf{E}\mathbf{H}.$$

где $\mathbf{S}$ – вектор плотности потока энергии электромагнитной волны.

Так как векторы $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$ взаимно перпендикулярны, то вектор плотности потока электромагнитной энергии можно представить как векторное произведение $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$:

$$\mathbf{S} = [\mathbf{E}\mathbf{H}].$$

Вектор $\mathbf{S}$ называют *вектором Умова – Пойнтинга*. Он направлен в сторону распространения электромагнитной волны, а его модуль равен энергии, переносимой электромагнитной волной за единицу времени сквозь единичную площадку, перпендикулярную направлению распространения волны.

4.3. Шкала электромагнитных волн

Из теории Максвелла следует, что различные электромагнитные волны имеют общую природу.

Опытами Герца была установлена идентичность природы электромагнитного излучения и света. Из этого следует очень важный вывод, что видимый свет представляет электромагнитное излучение. Дальнейшие исследования подтвердили, что не только видимый свет, но и инфракрасное и ультрафиолетовое излучения, рентгеновское и гамма-излучение имеют электромагнитную природу, т.е. *электромагнитные волны имеют очень широкий диапазон частот или длин волн*.

Спектр электромагнитного излучения охватывает радиоволны, инфракрасное излучение, видимый свет, ультрафиолетовое, рентгеновское и гамма-излучение. Названия для лучей, лежащих в различных областях спектра, сложились исторически. Электромагнитные волны всех длин распространяются в пространстве с одной и той же скоростью. Отличаются они друг от друга только длиной волны:

$$\lambda = \frac{c}{\nu},$$

где c – скорость света, ν – частота волны.

Радиоволны и УКВ имеют длину волны от нескольких километров до нескольких сантиметров. Генерируют их с помощью вибраторов различных конструкций.

Инфракрасное излучение, видимый свет и ультрафиолетовые лучи испускают тела, нагретые до различных температур. Чем выше температура тела, тем короче длина волны испускаемых им электромагнитных волн.

Рентгеновское излучение возникает при резком торможении заряженных частиц – электронов. Гамма-излучение испускается при радиоактивном распаде атомов.

Некоторые виды электромагнитных волн

Излучение	Длина волны, м	Частота волны, Гц	Источник излучения
Радиоволны	$10^3 - 10^{-5}$	$3 \cdot 10^5 - 3 \cdot 10^{12}$	Колебательный контур Вибратор Герца Массовый излучатель Ламповый генератор
Световые волны инфракрасное излучение видимый свет ультрафиолетовое излучение	$5 \cdot 10^{-4} - 8 \cdot 10^{-7}$ $8 \cdot 10^{-7} - 4 \cdot 10^{-7}$ $4 \cdot 10^{-7} - 10^{-9}$	$10^{11} - 3,75 \cdot 10^{14}$ $3,75 \cdot 10^{14} - 7,5 \cdot 10^{14}$ $7,5 \cdot 10^{14} - 3 \cdot 10^{17}$	Лампы, лазер
Рентгеновское излучение	$2 \cdot 10^{-9} - 6 \cdot 10^{-12}$	$1,5 \cdot 10^{17} - 5 \cdot 10^{19}$	Трубка Рентгена
Гамма-излучение	Меньше $6 \cdot 10^{-12}$	Больше $5 \cdot 10^{19}$	Радиоактивный распад Ядерные процессы Космические процессы

ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

Пример 1. Колебательный контур состоит из конденсатора емкостью $C = 444$ пФ и катушки с индуктивностью $L = 4$ мГн. На какую длину волны настроен контур?

Дано: $C = 444 \cdot 10^{-12}$ Ф $L = 4 \cdot 10^{-6}$ Гн $\lambda - ?$	Решение Длина волны λ , на которую настроен контур, равна $\lambda = cT$, где c – скорость распространения волны; T – период колебаний в контуре.
--	---

По формуле Томсона период колебаний в контуре равен

$$T = 2\pi\sqrt{LC}.$$

Тогда

$$\lambda = 2\pi c\sqrt{LC},$$

$$\lambda = 2 \cdot 3,14 \cdot 3 \cdot 10^8 \sqrt{4,44 \cdot 10^{-10} \cdot 4 \cdot 10^{-3}} = 2511 \text{ м.}$$

О т в е т: $\lambda = 2511$ м.

Пример 2. В однородной изотропной среде с диэлектрической проницаемостью, равной $\varepsilon = 2$, и магнитной проницаемостью, равной $\mu = 1$, распространяется плоская электромагнитная волна. Амплитуда напряженности электрического поля волны $E_0 = 50$ В/м. Определите амплитуду напряженности магнитного поля и фазовую скорость волны.

Дано:	Решение
$\varepsilon = 2$	Фазовая скорость волны v равна
$\mu = 1$	$v = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon\mu}} = \frac{3 \cdot 10^8}{\sqrt{2 \cdot 1}} = 2,12 \cdot 10^8 \text{ м/с.}$
$E_0 = 50$ В/м	Напряженности электрического и магнитного полей в электромагнитной волне колеблются в одной фазе, и для них выполняется соотношение
$H_0 - ?, v - ?$	$E_0 \sqrt{\varepsilon\varepsilon_0} = H_0 \sqrt{\mu\mu_0},$

откуда
$$H_0 = \sqrt{\frac{\varepsilon\varepsilon_0}{\mu\mu_0}} \cdot E_0.$$

$$H_0 = \sqrt{\frac{2 \cdot 8,85 \cdot 10^{-12}}{12,56 \cdot 10^{-7}}} \cdot 50 = 0,19 \text{ А/м.}$$

О т в е т: $v = 2,12 \cdot 10^8$ м/с, $H_0 = 0,19$ А/м.

Пример 3. Уравнение плоской электромагнитной волны, распространяющейся в среде с магнитной проницаемостью, равной $\mu = 1$, имеет вид $E = 10 \sin(6,28 \cdot 10^8 t - 4,19x)$. Определите диэлектрическую проницаемость среды и длину волны.

Дано:	Решение
$\mu = 1$	Уравнение плоской электромагнитной волны в общем виде
$E = 10 \sin(6,28 \cdot 10^8 t - 4,19x)$	$E = E_0 \sin(\omega t - kx),$
$\varepsilon - ?, \lambda - ?$	где E_0 – амплитудное значение напряженности электрического поля, $k = 2\pi / \lambda$ – волновое число, λ – длина волны, ω – циклическая частота, $\omega = kv$, v – фазовая скорость.

По условию задачи $k = 4,19 \text{ м}^{-1}$.

Тогда

$$\lambda = \frac{2\pi}{k}; \lambda = \frac{6,28}{4,19} = 1,5 \text{ м.}$$

Фазовая скорость волны

$$v = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon \cdot \mu}},$$

откуда

$$\varepsilon = \frac{1}{\mu} \cdot \frac{c^2}{v^2},$$

или, с учетом того, что $v = \omega / k$, а ω по условию задачи равна $6,28 \cdot 10^8 \text{ с}^{-1}$, получим

$$\varepsilon = \frac{1}{\mu} \left(\frac{ck}{\omega} \right)^2;$$

$$\varepsilon = \frac{9 \cdot 10^{16} \cdot 4,19^2}{6,28^2 \cdot 10^{16}} = 4.$$

О т в е т: $\varepsilon = 4$.

Пример 4. В вакууме распространяется плоская электромагнитная волна, амплитуда напряженности электромагнитного поля которой $E_0 = 100 \text{ В/м}$. Какую энергию переносит эта волна через площадку $S = 50 \text{ см}^2$, расположенную перпендикулярно направлению распространения волны, за 1 мин? Период волны $T \ll t$.

Дано:
 $E_0 = 100 \text{ В/м}$
 $S = 50 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2$
 $t = 60 \text{ с}$

 $W - ?$

Решение

Энергия, переносимая через площадку S , перпендикулярную направлению распространения волны, в единицу времени равна

$$\frac{dW}{dt} = w c S,$$

где w – объемная плотность энергии.

$$w = \frac{\varepsilon_0 E^2}{2} + \frac{\mu_0 H^2}{2},$$

или с учетом того, что

$$\varepsilon_0 E^2 = \mu_0 H^2, \quad w = \varepsilon_0 E^2.$$

Напряженность электрического поля волны $E = E_0 \sin \omega t$.

Таким образом, $\frac{dW}{dt} = c S \varepsilon_0 E_0^2 \sin^2 \omega t$.

Энергия, переносимая волной за время t , будет определяться интегралом

$$W = \int_0^t c S \varepsilon_0 E_0^2 \sin^2 \omega t dt = c S \varepsilon_0 \int_0^t \sin^2 \omega t dt = c S \varepsilon_0 E_0^2 \left(\frac{t}{2} - \frac{\sin 2\omega t}{4\omega} \right).$$

По условию задачи $T \ll t$, поэтому

$$\frac{t}{2} \ll \frac{\sin 2\omega t}{4\omega},$$

тогда $W = \frac{1}{2} c S \varepsilon_0 E_0^2 t.$

$$W = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 10^8 \cdot 5 \cdot 10^{-3} \cdot 8,85 \cdot 10^{-12} \cdot 10^4 \cdot 60 = 4 \text{ Дж.}$$

О т в е т: $W = 4 \text{ Дж.}$

Пример 5. В вакууме распространяется плоская электромагнитная волна. Амплитуда напряженности магнитного поля волны $H_0 = 0,1 \text{ А/м}$. Определите энергию, переносимую этой волной через поверхность площадью $S = 1 \text{ м}^2$, расположенную перпендикулярно направлению распространения волны, за время $t = 1 \text{ с}$. Период волны $T \ll t$.

Дано:	Решение
$\varepsilon = 1$	Плотность потока энергии электромагнитной
$\mu = 1$	волны определяется вектором Пойнтинга
$H_0 = 0,1 \text{ А/м}$	$\mathbf{s} = \mathbf{E} \cdot \mathbf{H}.$
$S = 1 \text{ м}^2$	Учитывая, что векторы $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$ электромагнитной
$t = 1 \text{ с}$	волны взаимно перпендикулярны, для модуля век-
$W - ?$	тора $\mathbf{s}$ получим
	$s = EH.$

Так как величины E и H в каждой точке волны меняются со временем по гармоническому закону, находясь в одинаковых фазах, то мгновенное значение s равно

$$s = E_0 \sin \omega t \cdot H_0 \sin \omega t = E_0 H_0 \sin^2 \omega t.$$

Энергия, переносимая через площадку S , перпендикулярную направлению распространения волны в единицу времени,

$$\frac{dW}{dt} = \int_S \vec{s} d\vec{S} = sS = SE_0 H_0 \sin^2 \omega t.$$

Учитывая, что в электромагнитной волне

$$\frac{1}{2} \varepsilon_0 \varepsilon E_0^2 = \frac{1}{2} \mu_0 \mu H_0^2,$$

найдем $E_0 = H_0 \sqrt{\frac{\mu_0 \mu}{\varepsilon_0 \varepsilon}}.$

Тогда

$$\frac{dW}{dt} = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon_0 \epsilon}} H_0^2 S \sin^2 \omega t$$

Энергия, переносимая волной за время t , равна

$$W = \sqrt{\frac{\mu_0 \mu}{\epsilon_0 \epsilon}} H_0^2 S \int_0^t \sin^2 \omega dt = \sqrt{\frac{\mu_0 \mu}{\epsilon_0 \epsilon}} H_0^2 S \left(\frac{t}{2} - \frac{\sin 2\omega t}{4\omega} \right).$$

По условию задачи $T \ll t$, поэтому $\frac{t}{2} \ll \frac{\sin 2\omega t}{4\omega}$, тогда

$$W = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\mu_0 \mu}{\epsilon_0 \epsilon}} H_0^2 S t.$$

Подставляя числовые значения, получим

$$W = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{12,56 \cdot 10^{-7}}{8,85 \cdot 10^{-12}}} \cdot 0,01 = 1,88 \text{ Дж.}$$

О т в е т: $W = 1,88 \text{ Дж.}$

ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ

Средний уровень

1. Электромагнитная волна с частотой $\nu = 4 \text{ МГц}$ переходит из немагнитной среды с диэлектрической проницаемостью $\epsilon = 3$ в вакуум. Определите приращение ее длины.

- 1) 11,7 м; 2) 21,7 м; 3) 31,7 м; 4) 41,7 м.

2. Во сколько раз нужно увеличить мощность радиолокатора для увеличения его радиуса действия в 2 раза?

- 1) 2; 2) 4; 3) 8; 4) 16.

3. Скорость распространения электромагнитных волн в некоторой среде составляет $2,5 \cdot 10^8 \text{ м/с}$. Определите длину электромагнитной волны в этой среде, если ее частота в вакууме равна 10^6 Гц .

- 1) 100 м; 2) 150 м; 3) 200 м; 4) 250 м.

4. Радиолокатор обнаружил в море подводную лодку, отраженный сигнал от которой дошел до него за 36 мкс. Определите расстояние от локатора до лодки (диэлектрическая проницаемость воды равна 81).

- 1) 600 м; 2) 200 м; 3) 1800 м; 4) 2400 м.

5. В вакууме распространяется плоская электромагнитная волна. Амплитуда напряженности электрического поля волны составляет 50 мВ/м. Определите интенсивность волны.

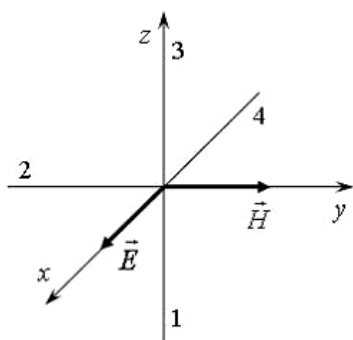
- 1) 1,32 мкВт/м²;
- 2) 2,32 мкВт/м²;
- 3) 3,32 мкВт/м²;
- 4) 4,32 мкВт/м².

6. В вакууме распространяется плоская электромагнитная волна. Амплитуда напряженности магнитного поля волны составляет 5 мА/м. Определите интенсивность волны.

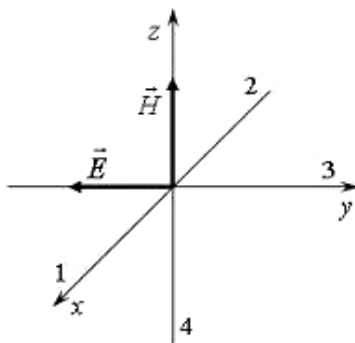
- 1) 1,71 мВт/м²;
- 2) 2,71 мВт/м²;
- 3) 3,71 мВт/м²;
- 4) 4,71 мВт/м².

7. На рисунке показана ориентация векторов напряженности электрического ($\vec{E}$) и магнитного ($\vec{H}$) полей в электромагнитной волне. Куда направлен вектор плотности потока энергии электромагнитного поля?

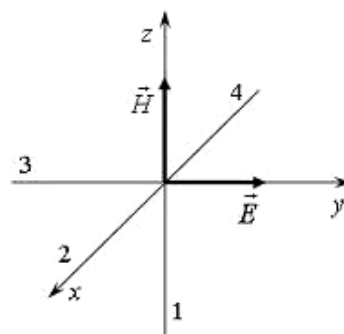
A)



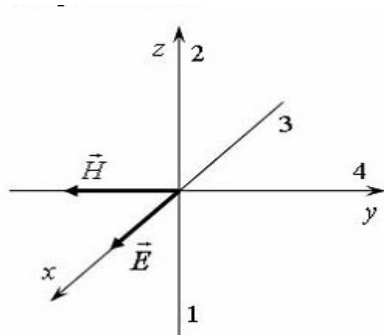
B)



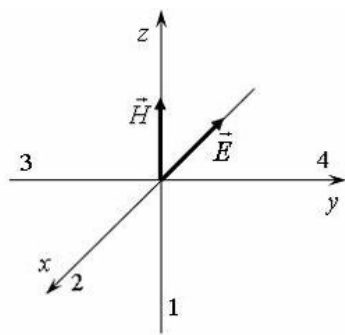
C)



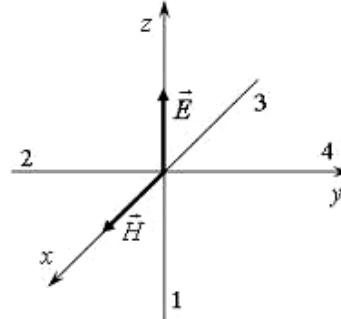
D)



E)



F)



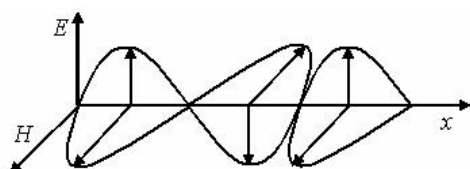
8. Как изменится плотность потока энергии, переносимой электромагнитной волной, при уменьшении в 2 раза амплитуды колебаний векторов напряженности электрического и магнитного полей?

- 1) уменьшится в 2 раза;
- 2) останется неизменной;
- 3) уменьшится в 4 раза.

9. Плоская электромагнитная волна распространяется в диэлектрике с проницаемостью $\varepsilon = 4$. Амплитудное значение электрического вектора волны $E_0 = 0,55$ мВ/м. Чему равна интенсивность волны?

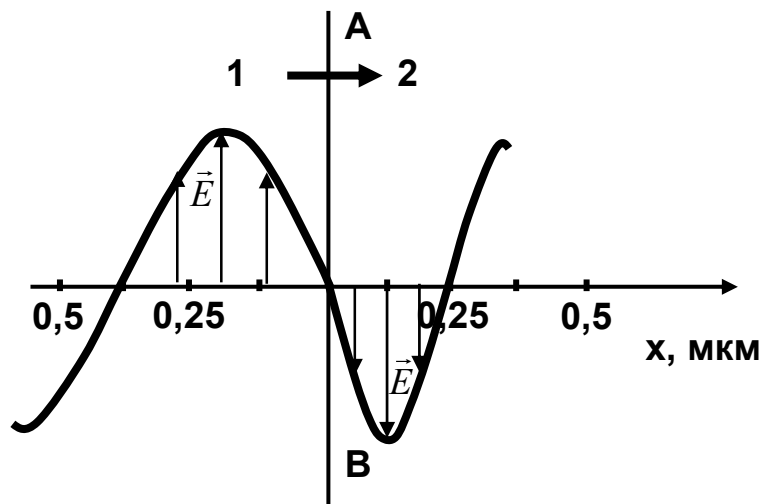
О т в е т: $J = 8 \cdot 10^{-10}$ Вт/м².

10. В электромагнитной волне векторы напряженности электрического и магнитного полей колеблются...



- 1) в одинаковых фазах;
- 2) в противоположных фазах;
- 3) в сдвинутых на $\frac{\pi}{2}$ фазах.

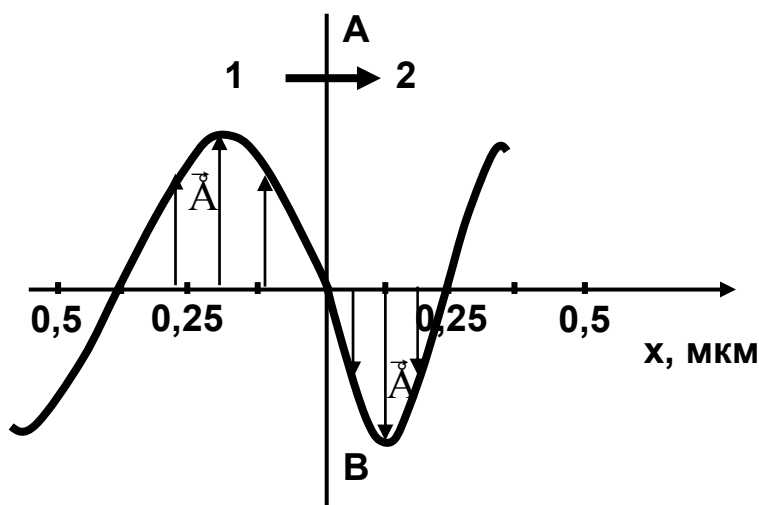
11. На рисунке представлена мгновенная фотография электрической составляющей электромагнитной волны, переходящей из среды 1 в среду 2 перпендикулярно границе раздела АВ.



Чему равно отношение скорости света в среде 2 к его скорости в среде 1?

- 1) 0,67;
- 2) 1,5;
- 3) 1,75;
- 4) 0,84.

12. На рисунке представлена мгновенная фотография электрической составляющей электромагнитной волны, переходящей из среды 1 в среду 2 перпендикулярно границе раздела АВ.



Чему равен относительный показатель преломления среды 1 относительно среды 2?

- 1) 0,67; 2) 1,5; 3) 1,75; 4) 0,84.

Достаточный уровень

1. Радиолокатор работает на волне $\lambda = 15$ см и испускает импульсы с частотой $\nu_{\text{исп}} = 4$ кГц. Длительность каждого импульса $\tau = 2$ мкс. Какова наибольшая дальность S_{max} обнаружения цели? Сколько колебаний N содержится в одном импульсе? Какова частота электромагнитных колебаний $\nu_{\text{кол}}$ в радиоволне?

О т в е т: $S_{\text{max}} = 3,7 \cdot 10^4$ м; $N = 4 \cdot 10^3$; $\nu_{\text{кол}} = 2 \cdot 10^9$ Гц.

2. Изменение разности потенциалов на обкладках конденсатора в колебательном контуре происходит в соответствии с уравнением $U = 50 \cos 10^4 \pi t$. Емкость конденсатора равна 0,1 мкФ. Найдите период колебаний, индуктивность контура, закон изменения силы тока со временем и длину волны.

О т в е т: $T = 2 \cdot 10^{-4}$ с; $L = 0,01$ Гн; $I = -0,157 \sin 10^4 \pi t$, А; $\lambda = 6 \cdot 10^4$ м.

3. Определите длину электромагнитной волны в вакууме, на которую настроен колебательный контур, если максимальный заряд на обкладках конденсатора 50 нКл, а максимальная сила тока в контуре 1,5 А. Активным сопротивлением контура пренебречь.

О т в е т: $\lambda = 62,8$ м.

4. В вакууме распространяется плоская электромагнитная волна с частотой 30 МГц. Определите расстояние, на котором фаза волны изменится на 270° .

О т в е т: $X_1 = 7,5$ м.

5. Определите длину и фазовую скорость электромагнитной волны, распространяющейся в среде без потерь с относительными проницаемостями $\varepsilon = \mu = 10$, если частота волны 10 МГц.

О т в е т: $\lambda = 3$ м, $v_\phi = 3 \cdot 10^7$ м/с.

6. Максимальная напряженность электрического поля электромагнитной волны по санитарным нормам не должна превышать 5 В/м. Найдите допустимую плотность потока электромагнитного излучения.

О т в е т: $I = 66$ мВт/м².

7. В однородной и изотропной среде с $\varepsilon = 3$ и $\mu = 1$ распространяется плоская электромагнитная волна. Амплитуда напряженности электрического поля волны $E_m = 10,0$ В/м. Найдите: а) амплитуду напряженности магнитного поля волны H_m , б) фазовую скорость v волны.

О т в е т: $H_m = 46$ мА / м; $v = 1,7 \cdot 10^8$ м/с.

8. Для определения скорости звука в воздухе методом акустического резонанса используется труба с поршнем и звуковой мембраной, закрывающей один из ее торцов. Расстояние между соседними положениями поршня, при котором наблюдается резонанс на частоте $\nu = 2500$ Гц, составляет $l = 6,8$ см. Определите скорость звука в воздухе.

О т в е т: $v = 340$ м/с.

5. ВОЛНОВЫЕ СВОЙСТВА СВЕТА

5.1. Интерференция света

Основные формулы

- Абсолютный показатель преломления среды

$$n = \frac{c}{v},$$

где c – скорость света в вакууме; v – скорость света в среде.

- Оптическая длина пути световой волны

$$L = nl,$$

где l – геометрическая длина пути световой волны в среде с показателем преломления n .

- Оптическая разность хода двух световых волн

$$\Delta = L_2 - L_1;$$

$$L_2 = n_2 l_2, \quad L_1 = n_1 l_1.$$

• Связь разности фаз $\Delta\varphi$ колебаний с оптической разностью хода световых волн

$$\Delta\varphi = \frac{2\pi\Delta}{\lambda},$$

где $\Delta\varphi$ – разность фаз колебаний; Δ – оптическая разность хода волн; λ – длина волны.

- Условие максимума интенсивности света при интерференции

$$\Delta = \pm k\lambda, \quad (k = 0, 1, 2, 3, \dots),$$

или $\Delta\varphi = 2k\pi$ (фазы одинаковы).

- Условие минимума интенсивности света при интерференции

$$\Delta = \pm(2k + 1)\frac{\lambda}{2}, \quad (k = 0, 1, 2, 3, \dots),$$

или $\Delta\varphi = (2k + 1)\pi$ (фазы противоположны).

• Оптическая разность хода световых волн, отраженных от верхней и нижней поверхностей тонкой плоскопараллельной пластинки или пленки, находящейся в воздухе,

$$\Delta = 2d\sqrt{n^2 - \sin^2 i} + \frac{\lambda}{2},$$

где d – толщина пластинки (пленки); i – угол падения; λ – длина волны света.

Радиусы светлых колец Ньютона в отраженном свете (или темных в проходящем)

$$r_k = \sqrt{(2k-1)R\frac{\lambda}{2}},$$

где k – номер кольца ($k = 1, 2, 3, \dots$); R – радиус кривизны поверхности линзы, соприкасающейся с плоскопараллельной стеклянной пластинкой.

Радиусы темных колец в отраженном свете (или светлых в проходящем)

$$r_k = \sqrt{kR\lambda}.$$

ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

Пример 1. Два когерентных монохроматических источника света расположены друг от друга на расстоянии 1 мм и удалены от экрана на расстояние 2,5 м. Определите ширину интерференционных полос на экране, если длина волны света равна 0,5 мкм.

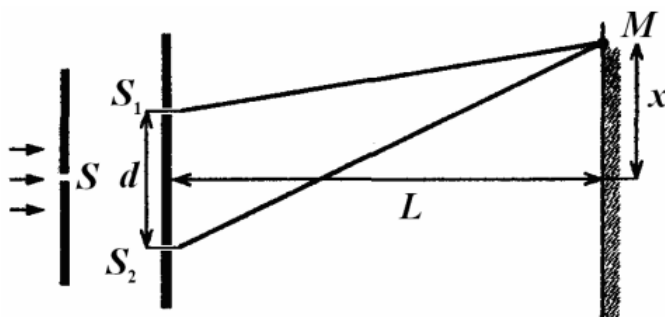
Дано:

$$d = 1 \text{ мм} = 10^{-3} \text{ м}$$

$$L = 2,5 \text{ м}$$

$$\lambda = 0,5 \text{ мкм} = 0,5 \cdot 10^{-6} \text{ м}$$

$$\Delta x - ?$$



Решение

Шириной интерференционной полосы называется расстояние между соседними максимумами (серединами светлых полос) или минимумами (серединами темных полос).

Разность хода двух когерентных лучей, интерферирующих в некоторой точке экрана,

$$\Delta = \frac{x \cdot d}{L},$$

где x – расстояние точки наложения лучей от середины интерференционной картины; d – расстояние между источниками; L – удаление экрана от источников света.

В точке экрана наблюдается интерференционный максимум, если

$$\Delta = \pm k\lambda.$$

Разности хода лучей для двух соседних светлых полос соответственно равны

$$\Delta_1 = \frac{dx_1}{L} \quad \text{и} \quad \Delta_2 = \frac{dx_2}{L},$$

или

$$k\lambda = \frac{dx_1}{L} \quad \text{и} \quad (k+1)\lambda = \frac{dx_2}{L},$$

где x_1 и x_2 – расстояния полос от середины интерференционной картины.

Вычитая из второго уравнения первое, получим

$$\frac{d}{L}(x_2 - x_1) = \lambda,$$

откуда расстояние между соседними максимумами

$$\Delta x = x_2 - x_1 = \frac{\lambda L}{d}.$$

$$\Delta x = \frac{0,5 \cdot 10^{-6} \cdot 2,5}{10^{-3}} = 1,25 \text{ мм.}$$

О т в е т : $\Delta x = 1,25 \text{ мм.}$

Пример 2. На мыльную пленку под углом $i = 30^\circ$ падает параллельный пучок монохроматических лучей с длиной волны $0,589 \text{ мкм}$. При какой минимальной толщине пленки отраженные лучи максимально ослаблены в результате интерференции? Показатель преломления мыльной воды $1,33$.

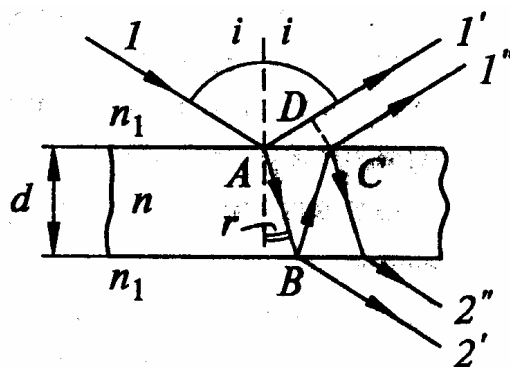
Дано:

$$i = 30^\circ$$

$$\lambda = 0,589 \text{ мкм} = 0,589 \cdot 10^{-6} \text{ м}$$

$$n = 1,33$$

$$d_{\min} = ?$$



Решение

Разность хода световых лучей, интерферирующих в тонкой пленке, равна

$$\Delta = 2d\sqrt{n^2 - \sin^2 i} + \frac{\lambda}{2}, \quad (1)$$

где d – толщина пленки; i – угол падения; $\frac{\lambda}{2}$ – дополнительная разность хода, связанная с отражением света от верхней поверхности пленки (от оптически более плотной среды).

Лучи, отраженные от двух поверхностей пленки, ослабляют друг друга при условии, что

$$\Delta = \pm(2k + 1) \frac{\lambda}{2}.$$

Минимальное значение разности хода, при которой свет ослабляется, соответствует значению $k = 1$,

$$\Delta = \pm(2 \cdot 1 + 1) \cdot \frac{\lambda}{2} = \frac{3\lambda}{2}.$$

Подставляя это значение разности хода лучей в уравнение (1), получим

$$\frac{3}{2}\lambda = 2d_{\min} \sqrt{(n^2 - \sin^2 i)} + \frac{\lambda}{2}.$$

Из последней формулы выразим минимальную толщину пленки

$$d_{\min} = \frac{\lambda}{2\sqrt{(n^2 - \sin^2 i)}}.$$

$$d_{\min} = \frac{0,589 \cdot 10^{-6}}{2\sqrt{(1,33^2 - \sin^2 30^\circ)}} = 0,239 \cdot 10^{-6} \text{ м.}$$

О т в е т : $d_{\min} = 0,239 \cdot 10^{-6} \text{ м.}$

Пример 3. Между двумя стеклянными шлифованными пластинками протянут волос так, что образовался воздушный клин. Диаметр волоса $5 \cdot 10^{-2} \text{ мм}$. Определите расстояние от волоса до вершины воздушного клина, если лучи длиной волны $0,5 \text{ мкм}$ при нормальном падении на пластинку дают в отраженном свете 8 интерференционных полос на 8 см длины пластинки.

Дано:

$$d = 5 \cdot 10^{-2} \text{ мм}$$

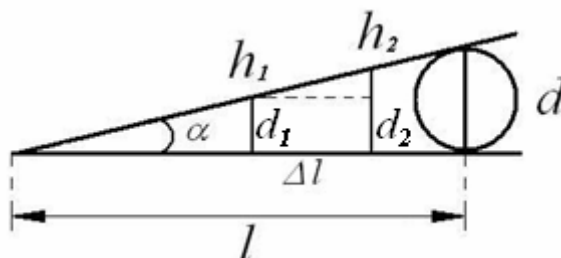
$$= 5 \cdot 10^{-5} \text{ м}$$

$$\lambda = 0,5 \text{ мкм} = 0,5 \cdot 10^{-6} \text{ м}$$

$$i = 0^\circ$$

$$\Delta l = 1 \text{ см} = 1 \cdot 10^{-2} \text{ м}$$

$$l - ?$$



Решение

Из рисунка видно, что расстояние от волоса до вершины клина

$$l = d \cdot \operatorname{ctg} \alpha.$$

Для того чтобы выразить $\operatorname{ctg} \alpha$, выделим участок Δl длиной в 1 см. Толщина клина в начале и конце выделенного участка соответственно равна d_1 и d_2 . Из рисунка видно, что $\operatorname{ctg} \alpha = \frac{\Delta l}{(d_2 - d_1)}$.

Если принять за ширину интерференционной полосы расстояние между соседними максимумами, то разности хода лучей, отраженных от нижней и верхней поверхности клина, в начале и конце выделенного участка будут соответственно равны

$$\Delta_1 = k\lambda; \Delta_2 = (k + 8)\lambda. \quad (1)$$

Учитывая, что угол между поверхностями клина очень мал, можно пренебречь изменением толщины клина и считать, что условия интерференции отраженных от нижней и верхней поверхностей клина лучей такие же, как и в тонкой пленке, ограниченной плоскопараллельными поверхностями.

При нормальном падении лучей ($i = 0^\circ$)

$$\Delta_1 = 2d_1n + \frac{\lambda}{2}, \quad \Delta_2 = 2d_2n + \frac{\lambda}{2}. \quad (2)$$

Из уравнений (1) и (2) следует, что

$$k\lambda = 2d_1n + \frac{\lambda}{2}, \quad (3)$$

$$(k + 8)\lambda = 2d_2n + \frac{\lambda}{2}. \quad (4)$$

Вычитая уравнение (3) из уравнения (4), получим

$$d_2 - d_1 = \frac{4\lambda}{n},$$

откуда

$$l = \frac{d\Delta l n}{4\lambda},$$

$$l = \frac{5 \cdot 10^{-5} \cdot 10^{-2} \cdot 1}{4 \cdot 10^{-6}} = 0,25 \text{ м.}$$

О т в е т : $l = 0,25 \text{ м.}$

Пример 4. На сколько изменится радиус первого темного кольца Ньютона, наблюдаемого в отраженном свете ($\lambda = 0,64$ мкм), если пространство между пластинкой и линзой заполнить водой? Абсолютный показатель преломления воды 1,33. Радиус сферической поверхности линзы 1 м.

Дано:	Решение
$\lambda = 0,64 \text{ мкм} = 0,64 \cdot 10^{-6} \text{ м}$	Радиусы темных колец, наблюдаемых в отраженном свете для случая, когда между пластиной и линзой находится воздух, рассчитываются по формуле
$n_{\text{в}} = 1,33$	
$R = 1 \text{ м}$	
$k = 1$	$r_k = \sqrt{kR\lambda},$
$\Delta r = ?$	где k – номер кольца.

Если же пространство между пластиной и линзой заполнено водой, то радиус кольца будет равен

$$r_2 = \sqrt{\frac{kR\lambda}{n_{\text{в}}}}.$$

Изменение радиуса кольца при замене воздуха водой составит

$$\Delta r = \sqrt{kR\lambda} - \sqrt{\frac{kR\lambda}{n_{\text{в}}}} = \sqrt{kR\lambda} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{n_{\text{в}}}}\right).$$

$$\Delta r = \sqrt{1 \cdot 0,64 \cdot 10^{-6}} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{1,33}}\right) = 0,104 \cdot 10^{-3} \text{ м}.$$

О т в е т : $\Delta r = 0,104 \cdot 10^{-3} \text{ м}.$

ТЕСТЫ

1. Что такое интерференция?

- 1) явление зависимости показателя преломления среды от длины волны;
- 2) явление огибания волнами препятствий и захождение в область геометрической тени;
- 3) явление наложения падающей и отраженной волн, в результате чего образуются стоячие волны;
- 4) явление наложения в пространстве двух или нескольких когерентных волн, в результате чего происходит пространственное перераспределение светового потока.

2. Укажите необходимое и достаточное условие для интерференции двух волн:

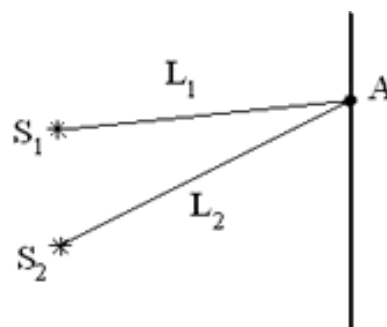
- 1) постоянная для каждой точки разность фаз и одинаковое направление колебаний;
- 2) одинаковая частота и одинаковое направление колебаний;
- 3) одинаковая амплитуда и одинаковая частота колебаний;
- 4) одинаковая частота и постоянная для каждой точки разность фаз.

3. При каком сдвиге фаз в колебаниях вектора напряженности электрического поля в данной точке экрана две плоские световые волны с длиной волны 400 нм и 800 нм и с одинаковой амплитудой полностью гасят друг друга при интерференции?

- 1) при сдвиге фаз, равном $\frac{\pi}{2}$;
- 2) при сдвиге фаз, равном π ;
- 3) при сдвиге фаз, равном 2π ;
- 4) ни при каком сдвиге фаз.

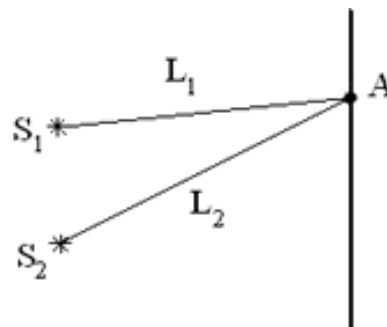
4. При каком условии в т.А наблюдается минимум интерференции в воздухе, если S_1 и S_2 – источники когерентных волн, а L_1 и L_2 – расстояния от т.А до источников?

- 1) $L_2 - L_1 = m \frac{\lambda}{4}$, $m=0, 1, 2, \dots$;
- 2) $L_2 - L_1 = m \frac{\lambda}{2}$, $m=0, 1, 2, \dots$;
- 3) $L_2 - L_1 = 2m \frac{\lambda}{2}$, $m=0, 1, 2, \dots$;
- 4) $L_2 - L_1 = (2m-1) \frac{\lambda}{2}$, $m=1, 2, 3, \dots$



5. При каком условии в т. А наблюдается максимум интерференции в воздухе, если S_1 и S_2 – источники когерентных волн, а L_1 и L_2 – расстояния от т. А до источников?

- 1) $L_2 - L_1 = (2m-1) \frac{\lambda}{4}$, $m=1, 2, 3, \dots$;
- 2) $L_2 - L_1 = m \frac{\lambda}{2}$, $m=0, 1, 2, \dots$;
- 3) $L_2 - L_1 = 2m \frac{\lambda}{2}$, $m=0, 1, 2, \dots$;
- 4) $L_2 - L_1 = (2m-1) \frac{\lambda}{2}$, $m=1, 2, 3, \dots$



6. Разность хода двух волн, испущенных когерентными источниками с одинаковой начальной фазой, равна $\frac{\lambda}{2}$. Амплитуда колебаний в каждой волне равна a . Чему равна амплитуда A результирующего колебания в этой точке вследствие интерференции волн?

- 1) $A = 0$; 2) $A = a$; 3) $A = 2a$; 4) $0 < A < a$.

7. Как соотносятся между собой расстояния между максимумами Δx и минимумами $\Delta x'$ интерференции?

- 1) $\Delta x = 2\Delta x'$; 2) $\Delta x = \Delta x'$; 3) $\Delta x \gg \Delta x'$; 4) $\Delta x \ll \Delta x'$.

8. При выполнении какого условия когерентные волны с фазами φ_1 и φ_2 и разностью хода Δ при наложении максимально усиливаются ($k = 0, 1, 2, \dots$)?

- 1) $\varphi_1 - \varphi_2 = \frac{\pi}{2}$; 2) $\varphi_1 - \varphi_2 = (2k + 1)\pi$;
3) $\varphi_1 - \varphi_2 = 2k\pi$; 4) $\Delta = (2k + 1)\frac{\lambda}{2}$.

9. Укажите условие минимума при интерференции в тонких пленках:

- 1) $y_k = \frac{k\lambda L}{d}$; 2) $2d\sqrt{n^2 - \sin^2 i} = m\lambda_0$;
3) $y_k = \frac{(2k + 1)\frac{\lambda}{2}L}{d}$; 4) $2d\sqrt{n^2 - \sin^2 i} = (2m - 1)\frac{\lambda_0}{2}$.

10. Укажите условие максимума при интерференции в тонких пленках:

- 1) $y_k = \frac{k\lambda L}{d}$; 2) $2d\sqrt{n^2 - \sin^2 i} = m\lambda_0$;
3) $y_k = \frac{(2k + 1)\frac{\lambda}{2}L}{d}$; 4) $2d\sqrt{n^2 - \sin^2 i} = (2m - 1)\frac{\lambda_0}{2}$.

11. Какое соотношение должно быть между расстоянием до экрана от источников когерентных волн L и расстоянием между источниками d , чтобы наблюдать визуально интерференционную картину?

- 1) $L = d$; 2) $L \gg d$; 3) $L \ll d$; 4) $d = 10L$.

12. При какой разности хода наблюдается интерференционный максимум при наложении двух когерентных волн с длинами 2 мкм?

- 1) 1,5 мкм; 2) 0,5 мкм; 3) 2 мкм; 4) 1 мкм.

13. При какой разности хода наблюдается интерференционный минимум при наложении двух когерентных волн с длинами 2 мкм?

- 1) 1,5 мкм; 2) 0,5 мкм; 3) 2 мкм; 4) 1 мкм.

14. Что будет наблюдаться в данной точке пространства, если оптическая разность хода интерферирующих в этой точке лучей равна $\frac{5\lambda}{2}$?

- 1) минимум интенсивности света;
2) максимум интенсивности света;
3) интенсивности лучей складываются;
4) интенсивности лучей вычитаются.

15. Тонкая пленка, освещенная белым светом, вследствие явления интерференции в отраженном свете имеет зеленый цвет. Каким станет цвет пленки при увеличении ее толщины?

- 1) станет красным; 2) станет синим;
3) не изменится; 4) станет белым.

16. Тонкая пленка, освещенная белым светом, вследствие явления интерференции в отраженном свете имеет зеленый цвет. Каким станет цвет пленки при увеличении ее показателя преломления?

- 1) станет красным; 2) станет синим;
3) не изменится; 4) станет белым.

17. Ширина интерференционной полосы какого цвета будет наибольшей?

- 1) фиолетового; 2) синего; 3) зеленого; 4) красного.

18. На плоскую непрозрачную пластину с двумя узкими параллельными щелями падает по нормали плоская монохроматическая волна из зеленой части видимого спектра. За пластиной на параллельном ей экране наблюдается интерференционная картина. Как изменится интерференционная картина, если использовать монохроматический свет из красной части видимого спектра?

- 1) расстояние между интерференционными полосами увеличится;
2) расстояние между интерференционными полосами уменьшится;
3) расстояние между интерференционными полосами не изменится;
4) интерференционная картина исчезнет.

19. Интерференционная картина наблюдается в белом свете. Как окрашен центральный максимум?

- 1) в белый цвет; 2) в красный цвет;
3) в синий цвет; 4) в фиолетовый цвет.

20. Тонкая плоскопараллельная пластина освещается параллельным пучком белого света. Ни для одной длины волны не выполняется условие максимума. Как окрашена пластина?

- | | |
|------------------|--------------------|
| 1) в белый цвет; | 2) в красный цвет; |
| 3) в синий цвет; | 4) темная. |

21. Каким явлением объясняется постоянно меняющаяся радужная окраска мыльных пузырей?

- | | |
|--------------------------|------------------------|
| 1) дисперсией света; | 2) дифракцией света; |
| 3) интерференцией света; | 4) поляризацией света. |

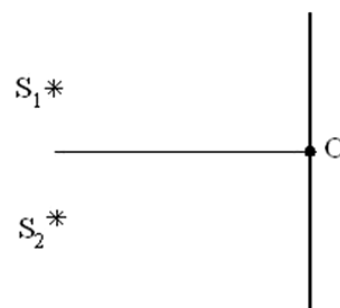
ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ

1. Разность хода двух интерферирующих лучей равна $\frac{\lambda}{4}$. Чему равна разность фаз колебаний?

2. Разность фаз двух интерферирующих световых волн равна 5π , а разность хода между ними равна $12,5 \cdot 10^{-7}$ м. Какую длину имеют эти волны?

3. При какой разности хода возникает максимум второго порядка при интерференции когерентных лучей с длиной волны 400 нм?

6. Чему равна разность фаз колебаний, возбуждаемых волнами от двух когерентных источников S_1 и S_2 в т.О (центральный максимум)?



7. Разность фаз колебаний в данной точке 8π . Каков результат интерференции в этой точке?

8. Разность фаз колебаний в данной точке 5π . Каков результат интерференции в этой точке?

9. Когерентные источники света S_1 и S_2 находятся в среде с показателем преломления, равным 2, и испускают свет с частотой $4 \cdot 10^{14}$ Гц. Каков порядок интерференционного максимума в точке, в которой геометрическая разность хода лучей равна 1,5 мкм?

10. Когерентные источники света S_1 и S_2 находятся в среде с показателем преломления 1,5. Геометрическая разность хода испускаемых ими лучей в точке, где наблюдается второй интерференционный минимум, равна 0,6 мкм. Определите частоту источников света.

11. Расстояние между источниками в опыте Юнга увеличили в 2 раза. Как изменится расстояние от первого максимума интерференционной картины до центральной линии экрана?

12. В опыте Юнга щели, расположенные на расстоянии 0,3 мм, освещались монохроматическим светом с длиной волны 0,6 мкм. Определите расстояние от щелей до экрана, если ширина интерференционных полос равна 1 мм.

13. Свет от проекционного фонаря, пройдя через синее стекло, падал на картон с двумя маленькими отверстиями и далее направлялся на экран. Расстояние между интерференционными полосами на экране 0,8 мм, расстояние между отверстиями 1 мм, расстояние от отверстий до экрана 1,7 м. Найдите длину световой волны.

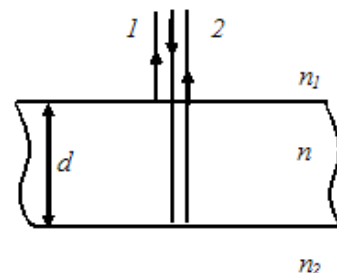
14. При наблюдении интерференции фиолетового света в опыте Юнга расстояние между соседними темными полосами на экране равно 2 мм. Каким станет это расстояние, если источник фиолетового света заменили источником красного света, длина волны которого в 1,5 раза больше?

15. Расстояние между соседними темными интерференционными полосами на экране 1,6 мм. Когерентные источники света лежат в плоскости, параллельной экрану, на расстоянии 8 м от него. Длина световой волны 600 нм. Чему равно расстояние (в мм) между источниками? При расчетах принять, что $\sin \alpha \approx \tan \alpha$.

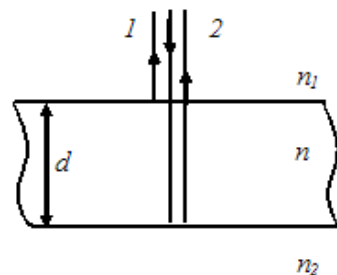
16. Как изменится ширина полосы при интерференции, если расстояние между источниками уменьшить в 2 раза?

17. Расстояние от источников до экрана уменьшили в 4 раза. Как изменится ширина интерференционной полосы при прочих равных условиях?

18. Тонкая стеклянная пластинка с показателем преломления $n = 1,5$ и толщиной $d = 2$ мкм помещена между двумя средами с показателями преломления $n_1 = 1,2$ и $n_2 = 1,6$. На пластинку по нормали падает свет с длиной волны $\lambda = 600$ нм. Найдите разность хода (в нм) интерферирующих отраженных лучей.



19. Тонкая стеклянная пластинка с показателем преломления $n = 1,5$ и толщиной $d = 2$ мкм помещена между двумя средами с показателями преломления $n_1 = 1,2$ и $n_2 = 1,3$. На пластинку по нормали падает свет с длиной волны $\lambda = 600$ нм. Найдите разность хода (в нм) интерферирующих отраженных лучей.



20. Тонкая мыльная пленка освещается светом с длиной волны $0,6$ мкм. На сколько мкм отличаются разности хода двух отраженных волн для светлой и для следующей за ней темной интерференционных полос?

21. Какую наименьшую толщину должна иметь прозрачная пластина из вещества с показателем преломления, равным n , чтобы при нормальном падении на неё света с длиной волны λ она в отраженном свете казалась черной?

22. Мыльный пузырь имеет зеленую окраску ($\lambda = 540$ нм) в области точки, ближайшей к наблюдателю. Показатель преломления мыльной воды $1,35$. Какова минимальная толщина пузыря (в нм) в указанной области?

23. На пути плоской световой волны, распространяющейся в воздухе, поместили стеклянную пластинку толщиной 1 см. Показатель преломления стекла $1,5$. Пластинка расположена перпендикулярно направлению распространения света. На сколько мм увеличилась оптическая длина пути?

24. В опыте с интерферометром Майкельсона для смещения интерференционной картины на 500 полос потребовалось переместить зеркало на расстояние $0,161$ мм. Чему равна длина волны падающего света в нанометрах?

25. Плосковыпуклая линза выпуклой стороной лежит на стеклянной пластинке (установка для наблюдения колец Ньютона). На плоскую поверхность линзы нормально падает свет с длиной волны $0,6$ мкм. Какова толщина воздушного зазора (в нм) в том месте, где в отраженном свете видно первое светлое кольцо?

26. Плосковыпуклая линза выпуклой стороной лежит на стеклянной пластинке (установка для наблюдения колец Ньютона). На плоскую поверхность линзы нормально падает свет с длиной волны $0,6$ мкм. Какова толщина воздушного зазора (в нм) в том месте, где в отраженном свете видно первое темное кольцо?

27. Плосковыпуклая линза, радиус кривизны которой 12 м, положена выпуклой стороной на плоскопараллельную пластинку. На плоскую грань линзы нормально падает монохроматический свет и в отражённом свете образуются тёмные и светлые кольца. Определите длину волны монохроматического света, если радиус шестого тёмного кольца равен $7,2 \cdot 10^{-3}$ м.

28. Установка для получения колец Ньютона освещается нормально падающим монохроматическим светом. Радиус четвертого темного кольца, наблюдаемого в отраженном свете, равен 4 мм. Найдите длину волны падающего света, если радиус кривизны линзы 8 м.

29. Два гармонических осциллятора, колеблющихся с одинаковыми частотами и начальными фазами, находятся на расстоянии $l = 2\lambda$ друг от друга, где λ – длина волны излучения. Расстояние L до точки наблюдения М много больше расстояния l между осцилляторами. При каком угле излучения φ амплитуда результирующей волны максимальна?



30. Два полупрозрачных зеркала расположены параллельно друг другу. На них перпендикулярно плоскости зеркал падает световая волна, частота которой $0,5 \cdot 10^{15}$ Гц. При каком минимальном расстоянии между зеркалами может наблюдаться первый интерференционный минимум в отраженном свете?

31. Два полупрозрачных зеркала расположены параллельно друг другу. На них перпендикулярно плоскостям этих зеркал падает световая волна. Длина волны равна 600 нм. При каком минимальном расстоянии между зеркалами может наблюдаться первый интерференционный максимум в отраженном свете?

32. Два полупрозрачных зеркала расположены параллельно друг другу. На них перпендикулярно плоскостям этих зеркал падает световая волна, частота которой равна $0,5 \cdot 10^{15}$ Гц. При каком минимальном расстоянии между зеркалами может наблюдаться первый интерференционный минимум в проходящем свете?

33. На плоскую непрозрачную пластину с параллельными щелями S_1 и S_2 по нормали падает плоская монохроматическая световая волна так, что щели служат когерентными источниками света. Параллельно пластине на расстоянии 20 см от нее установлен экран. Расстояние между централь-

ным и первым максимумами интерференционной картины на экране равно 1 мм. Чему равна длина волны падающего света, выраженная в нанометрах, если расстояние между щелями равно 0,1 мм?

5.2. Дифракция света

Основные формулы

- Радиус k -й зоны Френеля:
для сферической волны

$$r_k = \sqrt{\frac{ab}{a+b} k \lambda},$$

где a – расстояние диафрагмы с круглым отверстием от точечного источника света; b – расстояние диафрагмы от экрана, на котором ведется наблюдение дифракционной картины; k – номер зоны Френеля; λ – длина волны;

для плоской волны

$$r_k = \sqrt{bk\lambda}.$$

- Дифракция света на одной щели при нормальном падении лучей. Условие минимумов интенсивности света

$$a \sin \varphi = \pm k \lambda, \quad k = 1, 2, 3, \dots,$$

где a – ширина щели; φ – угол дифракции; k – номер минимума; λ – длина волны.

Условие максимумов интенсивности света

$$a \sin \varphi = (2k + 1) \frac{\lambda}{2}, \quad k = 1, 2, 3, \dots$$

- Дифракция света на дифракционной решетке при нормальном падении лучей. Условие главных максимумов интенсивности

$$d \sin \varphi = \pm k \lambda, \quad k = 0, 1, 2, 3, \dots,$$

где d – период решетки; k – номер главного максимума; φ – угол между нормалью к поверхности решетки и направлением дифрагированных волн.

- Разрешающая сила дифракционной решетки

$$R = \frac{\lambda}{\Delta \lambda} = kN,$$

где $\Delta \lambda$ – наименьшая разность длин волн двух соседних спектральных линий, при которой эти линии могут быть видны отдельно в спектре, полученном посредством данной решетки; N – число штрихов решетки; k – порядковый номер дифракционного максимума.

- Угловая дисперсия дифракционной решетки

$$D_{\varphi} = \frac{\delta\varphi}{\delta\lambda} = \frac{k}{d \cdot \cos \varphi}.$$

- Линейная дисперсия дифракционной решетки

$$D_l = \frac{\delta l}{\delta\lambda}.$$

- Для малых углов дифракции

$$D_l \approx F D_{\varphi} \approx F \frac{k}{d},$$

где F – главное фокусное расстояние линзы, собирающей на экране дифрагирующие волны.

- Разрешающая сила объектива телескопа

$$R = \frac{1}{\beta} = \frac{D}{1,22\lambda},$$

где β – наименьшее угловое расстояние между двумя светлыми точками, при котором изображения этих точек в фокальной плоскости объектива могут быть видны раздельно; D – диаметр объектива; λ – длина волны.

- Формула Вульфа – Бреггов:

$$2d \sin \theta = k\lambda,$$

где d – расстояние между атомными плоскостями кристалла; θ – угол скольжения, определяющий направление, в котором имеет место зеркальное отражение лучей.

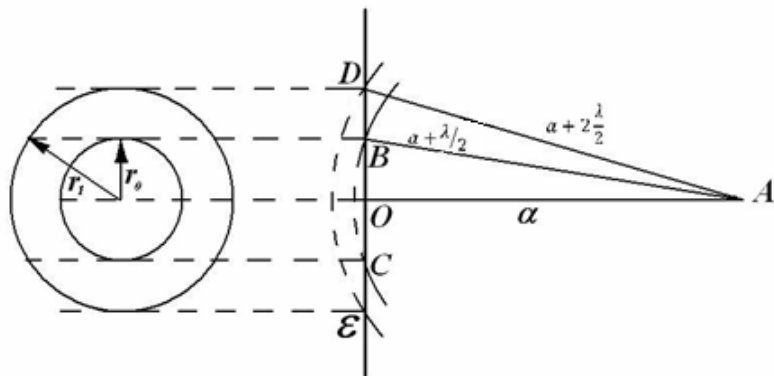
ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

Пример 1. Сравните между собой площади центральной и первой зон Френеля, построенных из точки наблюдения, отстоящих на расстоянии a от плоского фронта волны.

Дано:

a – расстояние от плоского фронта волны до точки наблюдения.

Сравнить S_0 и S_1



Решение

Для получения центральной зоны Френеля из точки наблюдения A описывают сферу радиуса $a + \frac{\lambda}{2}$. На рисунке дуга окружности BC представляет собой часть линии пересечения этой сферы с плоскостью чертежа. Пересечение сферы с волновым фронтом DE также даст окружность, ограничивающую участок фронта в виде круга радиуса r_0 , представляющий собой центральную зону Френеля.

Первую зону получают, описывая из точки A сферу радиуса $a + 2\frac{\lambda}{2}$. Ее пересечение с фронтом волны также дает окружность, но уже большего радиуса r_1 .

Часть волнового фронта, заключенная между двумя окружностями и имеющая вид плоского кольца, является первой зоной Френеля.

Площадь центральной зоны Френеля

$$S_0 = \pi r_0^2.$$

Площадь первой зоны равна разности площадей большого круга радиуса r_1 и малого круга радиуса r_0

$$S_1 = \pi r_1^2 - \pi r_0^2 = \pi(r_1^2 - r_0^2).$$

Из рисунка видно, что квадрат радиуса центральной зоны Френеля

$$r_0^2 = (OB)^2 = (AB)^2 - (AO)^2$$

или

$$r_0^2 = \left(a + \frac{\lambda}{2}\right)^2 - a^2 = a\lambda + \frac{\lambda^2}{4}.$$

Отбрасывая за малостью член, содержащий λ^2 , получим

$$r_0^2 = a\lambda.$$

Аналогично

$$r_1^2 = (OD)^2 = (AD)^2 - (AO)^2$$

или

$$r_1^2 = (a + \lambda)^2 - a^2 = 2a\lambda + \lambda^2 \approx 2a\lambda.$$

Площади центральной и первой зоны Френеля соответственно равны:

$$S_0 = \pi r_0^2 = \pi a\lambda; \tag{1}$$

$$S_1 = \pi(r_1^2 - r_0^2) = \pi a\lambda. \tag{2}$$

Из (1) и (2) следует, что

$$S_0 = S_1.$$

О т в е т : $S_0 = S_1$.

Пример 2. Ширина щели, освещаемой монохроматическим светом ($\lambda = 0,45$ мкм), равна 0,15 мм. С помощью линзы дифракционная картина наблюдается на экране, расположенном в ее фокальной плоскости. Определите расстояние между минимумами второго порядка, если оптическая сила линзы 5 дптр.

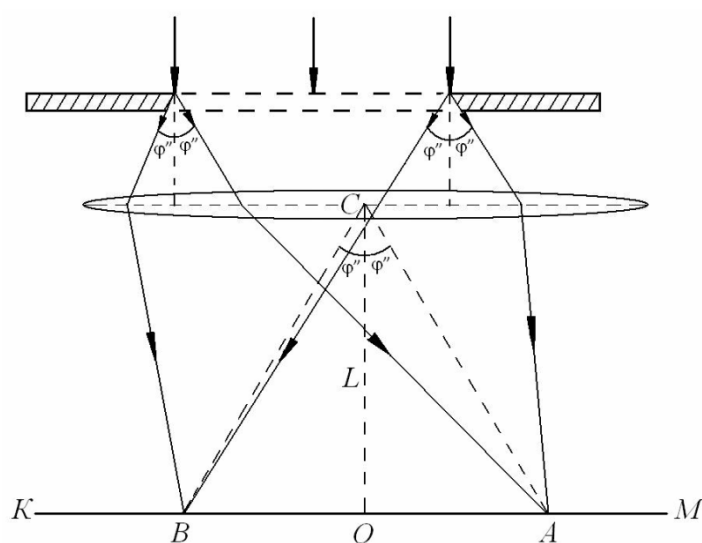
Дано:

$$\lambda = 0,45 \text{ мкм} = 0,45 \cdot 10^{-6} \text{ м}$$

$$a = 0,15 \text{ мм} = 0,15 \cdot 10^{-3} \text{ м}$$

$$D = 5 \text{ дптр}$$

$AB - ?$



Решение

Дифракционные минимумы образуются по обе стороны от середины дифракционной картины в результате интерференции дифрагированных лучей, собираемых линзой в точках ее фокальной плоскости.

Пусть точки A и B экрана KM соответствуют минимумам второго порядка. В этих точках соберутся лучи, дифрагированные под соответствующим этому порядку углом φ'' . Для получения точек A и B на рисунке проводим через оптический центр линзы C побочные оптические оси, составляющие угол φ'' с главной оптической осью.

Пересечения этих осей с фокальной плоскостью линзы и дадут искомые точки. Для полноты картины изобразим ход лучей, прошедших линзу.

В задаче требуется определить расстояние AB , равное $2OA$.

Из прямоугольного треугольника AOC следует, что

$$OA = OC \operatorname{tg} \varphi''.$$

По условию задачи дифракционная картина находится в фокальной плоскости линзы.

$$\text{Поэтому } OC = F = \frac{1}{D},$$

где D – оптическая сила линзы; F – фокусное расстояние.

Минимумы образуются при углах дифракции, удовлетворяющих условию

$$\sin \varphi = \frac{k\lambda}{a},$$

где a – ширина щели; k – порядок минимума.

Для минимума второго порядка угол дифракции φ'' очень мал, поэтому приближенно можно считать, что

$$\sin \varphi'' = \operatorname{tg} \varphi''.$$

Так как $k = 2$, то

$$\operatorname{tg} \varphi'' = \frac{2\lambda}{a}.$$

$$AB = 2OA = 2OC \operatorname{tg} \varphi'' = 2OC \frac{2\lambda}{a} = \frac{4\lambda}{Da}.$$

$$AB = \frac{4 \cdot 0,45 \cdot 10^{-6}}{5 \cdot 0,15 \cdot 10^{-3}} = 2,4 \cdot 10^{-3} \text{ м.}$$

$$\text{О т в е т: } AB = 2,4 \cdot 10^{-3} \text{ м.}$$

Пример 3. Какую постоянную должна иметь дифракционная решетка шириной $l = 2,5$ см для того, чтобы ее разрешающая способность в области зеленых лучей ($\lambda = 0,55$ мкм) в спектре первого порядка ($k = 1$) составляла $\Delta\lambda = 55$ пм?

Дано:

$$l = 2,5 \text{ см} = 2,5 \cdot 10^{-2} \text{ м}$$

$$\lambda = 0,55 \text{ мкм} = 0,55 \cdot 10^{-6} \text{ м}$$

$$\Delta\lambda = 55 \text{ пм} = 55 \cdot 10^{-12} \text{ м}$$

$$d = ?$$

Решение

Разрешающая способность дифракционной решетки характеризует ее свойство разделять излучения, близкие по длине волны. Она связана с другими характеристиками решетки следующими соотношениями:

$$R = \frac{\lambda}{\Delta\lambda} = kN, \quad (1)$$

где N – число штрихов.

$$N = \frac{l}{d}, \quad (2)$$

где l – ширина решетки; d – постоянная (период) решетки.

Из (1) и (2) следует, что

$$\frac{\lambda}{\Delta\lambda} = \frac{kl}{d},$$

откуда

$$d = \frac{kl\Delta\lambda}{\lambda}.$$

$$d = \frac{2,5 \cdot 10^{-2} \cdot 55 \cdot 10^{-12}}{0,55 \cdot 10^{-6}} = 2,5 \text{ мкм.}$$

О т в е т : $d = 2,5 \text{ мкм.}$

Пример 4. Определите линейную дисперсию дифракционной решетки для света с длиной волны $\lambda = 0,589 \text{ мкм}$ в спектре второго порядка, если период решетки $d = 4 \text{ мкм}$. Фокусное расстояние линзы, проектирующей спектр на экран, равно 50 см .

Дано:

$$\lambda = 0,589 \text{ мкм} = 0,589 \cdot 10^{-6} \text{ м}$$

$$d = 4 \text{ мкм} = 4 \cdot 10^{-6} \text{ м}$$

$$k = 2$$

$$F = 50 \text{ см} = 0,5 \text{ м}$$

$$D_l - ?$$

Решение

Линейной дисперсией D_l дифракционной решетки называется величина, характеризующая ширину спектра, полученного с данной установкой, состоящей из дифракционной решетки и линзы. Она связана с угловой дисперсией D_φ следующим соотношением:

$$D_l \approx F D_\varphi. \quad (1)$$

Угловой дисперсией дифракционной решетки называется величина, характеризующая ширину спектра, полученного с ее помощью. Чем больше дисперсия, тем на больший угловой интервал растягивается данный интервал волн:

$$D_\varphi = \frac{\delta\varphi}{\delta\lambda} = \frac{k}{d \cdot \cos\varphi}. \quad (2)$$

Воспользовавшись условием дифракционного максимума $d \sin\varphi = \pm k\lambda$, выразим $\cos\varphi$ через $\sin\varphi$:

$$\cos\varphi = \sqrt{1 - \sin^2\varphi} = \sqrt{1 - \left(\frac{k\lambda}{d}\right)^2}. \quad (3)$$

Из (1), (2) и (3) следует, что линейная дисперсия решетки равна

$$D_l = \frac{kF}{d \sqrt{1 - \left(\frac{k\lambda}{d}\right)^2}}.$$

$$D_l = \frac{2 \cdot 0,5}{4 \cdot 10^{-6} \sqrt{1 - \left(\frac{2 \cdot 0,589 \cdot 10^{-6}}{4 \cdot 10^{-6}}\right)^2}} = 0,262.$$

О т в е т: $D_l = 0,262$.

ТЕСТЫ

1. Если за непрозрачным диском, освещенным ярким источником света небольшого размера, поставить обратимую фотопленку, исключив попадание на нее отраженных от стен комнаты лучей, то при ее проявлении после большой выдержки в центре тени можно обнаружить светлое пятно. Какое явление при этом наблюдается?

- | | |
|-----------------------|-----------------------|
| 1) преломление света; | 2) поляризация света; |
| 3) рассеяние света; | 4) дисперсия света; |
| 5) дифракция света. | |

2. На свету CD-диск имеет радужную окраску. Какое физическое явление лежит в основе этого?

- | | |
|-------------------------|---------------------|
| 1) интерференция света; | 2) отражение света; |
| 3) дифракция света; | 4) дисперсия света. |

3. Что такое дифракция?

- 1) явление зависимости показателя преломления среды от длины волны;
- 2) явление огибания волнами препятствий и захождение в область геометрической тени;
- 3) явление наложения падающей и отраженной волн, в результате чего образуются стоячие волны;
- 4) явление, при котором колебания светового вектора каким-либо образом упорядоченно (линейно, эллиптически, циркулярно).

4. Укажите условие минимума при дифракции на щели.

- 1) $\Delta = (2k + 1) \frac{\lambda}{2}$;
- 2) $b \sin \varphi = k\lambda$, b – ширина щели;
- 3) $d \sin \varphi = k\lambda$, d – период решетки;

4) $b \sin \varphi = (2k + 1) \frac{\lambda}{2}$, b – ширина щели.

5. Укажите условие главных максимумов при дифракции на решетке.

$$1) \Delta = 2k \frac{\lambda}{2};$$

$$2) \quad k \sin \varphi = d\lambda;$$

$$3) \ d \sin \varphi = k \lambda ;$$

$$4) \quad d \sin \varphi = (2k + 1) \frac{\lambda}{2};$$

6. Каково условие главных минимумов при дифракции на решетке?

$$1) \Delta = (2k+1)\frac{\lambda}{2};$$

$$2) \quad b \sin \varphi = k\lambda;$$

$$3) \ d \sin \varphi = k\lambda ;$$

$$4) \quad d \sin \varphi = (2k + 1) \frac{\lambda}{2}.$$

7. Условие максимума в дифракционной картине, полученной с помощью решетки, $d \sin \varphi = k\lambda$. Чем является k в этой формуле?

1) целым числом;

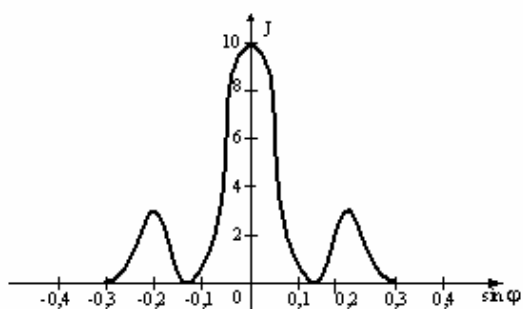
2) четным числом;

3) нечетным числом;

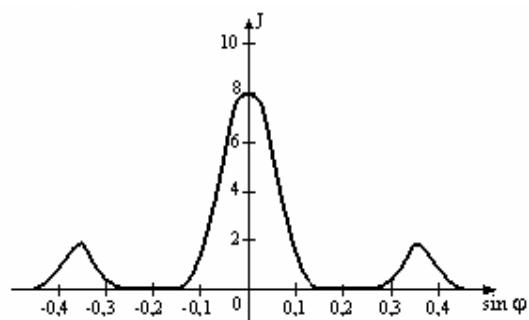
4) дробным числом.

8. Одна и та же дифракционная решетка освещается различными монохроматическими излучениями с различными интенсивностями. Какой рисунок соответствует случаю освещения светом с наибольшей частотой? (J – интенсивность света, φ – угол дифракции).

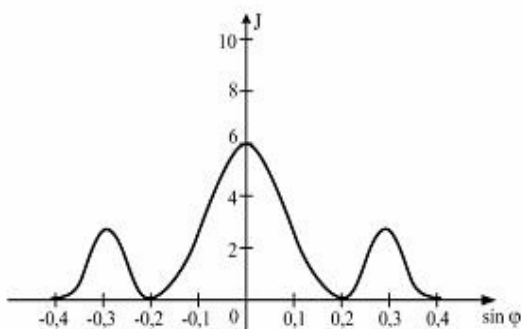
1)



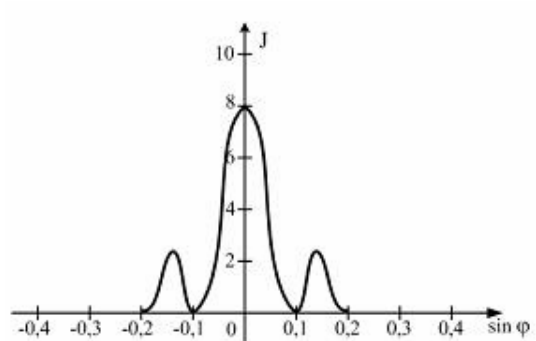
2)



3)

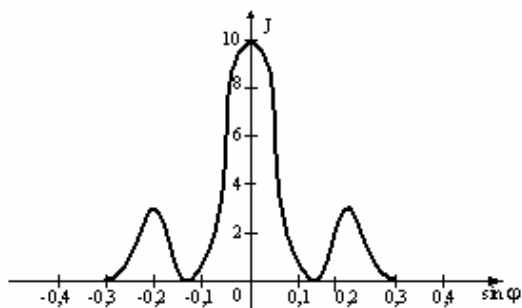


4)

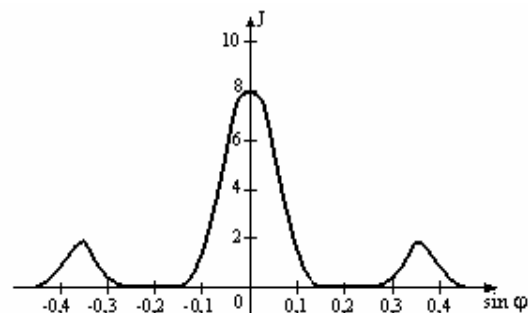


9. Одна и та же дифракционная решетка освещается различными монохроматическими излучениями с разными интенсивностями. Какой рисунок соответствует случаю освещения светом с наибольшей длиной волны? (J – интенсивность света, φ – угол дифракции).

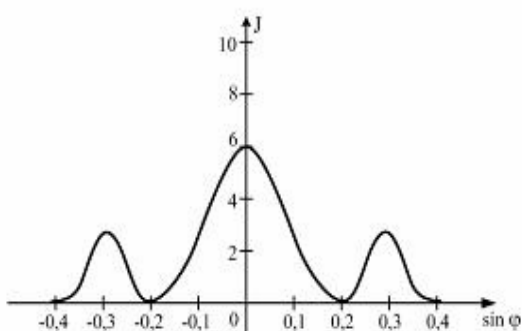
1)



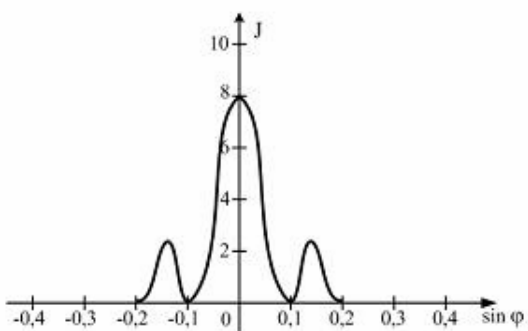
2)



3)



4)



10. Для каких лучей угол дифракции в спектре k -го порядка наибольший?

- 1) фиолетовых; 2) зеленых; 3) красных; 4) желтых.

11. Дифракционная решетка освещается зеленым светом. Что произойдет с картиной дифракционного спектра на экране при освещении решетки красным светом?

- 1) сузится; 2) расширится;
3) исчезнет; 4) не изменится;
5) ответ неоднозначный, т.к. зависит от параметров решетки.

12. Чему равна разность фаз $\Delta\varphi$ колебаний в центре экрана от двух соседних зон Френеля?

- 1) $\Delta\varphi = \pi$; 2) $\Delta\varphi = 2\pi$; 3) $\Delta\varphi = \frac{\pi}{2}$; 4) $\Delta\varphi = \frac{\pi}{4}$.

13. Отверстие оставляет открытой одну зону Френеля, амплитуда колебаний которой в центре экрана равна A_1 . Чему равна амплитуда результирующих колебаний в центре экрана?

- 1) $A = \frac{A_1}{2}$; 2) $A = A_1$; 3) $A = \frac{A_1}{4}$; 4) $A = 2A_1$.

14. Отверстие оставляет открытыми две зоны Френеля, амплитуды колебаний которых в центре экрана равны A_1 и A_2 . Чему равна амплитуда результирующего колебания в центре экрана?

- 1) $A = 0$; 2) $A = 2A_2$; 3) $A = A_1 + A_2$; 4) $A = 2A_1$.

15. Щель освещается белым светом. Какой цвет имеет центральный максимум?

- 1) белый; 2) красный; 3) фиолетовый; 4) желтый.

16. Дифракционная решетка освещается белым светом. Какой цвет имеет центральный максимум?

- 1) белый; 2) красный; 3) фиолетовый; 4) желтый.

17. Дифракционная решетка освещается белым светом. Максимумы какого цвета ближе расположены к центру дифракционной картины?

- 1) зеленого; 2) красного; 3) фиолетового; 4) желтого.

18. Дифракционная решетка освещается белым светом. Максимумы какого цвета дальше расположены от центра дифракционной картины?

- 1) зеленого; 2) красного; 3) фиолетового; 4) желтого.

19. Дифракционная картина наблюдается на непрозрачном диске, закрывающем 5 зон Френеля. Что наблюдается в центре дифракционной картины?

- 1) тень от диска; 2) максимум интенсивности;
3) светлое пятно; 4) минимум интенсивности.

20. Отверстие оставляет открытыми три зоны Френеля, амплитуды колебаний которых в центре экрана равны A_1 , A_2 и A_3 . Чему равна амплитуда результирующего колебания в центре экрана?

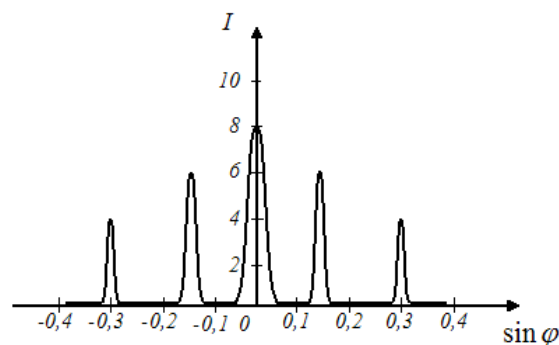
- 1) $A = A_1 - A_2 + A_3$; 2) $A = \frac{A_1}{2} + \frac{A_3}{2}$;
3) $A = A_1 + A_2 + A_3$; 4) $A = \frac{A_1}{2} - \frac{A_2}{2} + \frac{A_3}{2}$.

ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ

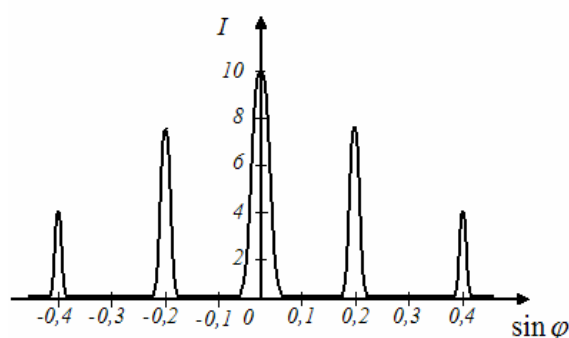
1. Постоянная дифракционной решетки равна 2 мкм. Каков наибольший порядок спектра для желтой линии натрия, соответствующей длине волны 589 нм?

2. На дифракционную решетку по нормали к ее поверхности падает плоская световая волна с длиной волны λ . Каков наибольший порядок максимума, наблюдаемого в фокальной плоскости собирающей линзы, если постоянная решетки $d = 4,5\lambda$?

3. При дифракции на дифракционной решетке с периодом, равным 0,004 мм, наблюдается зависимость интенсивности монохроматического излучения от синуса угла дифракции, представленная на рисунке (изображены только главные максимумы). Чему равна длина волны монохроматического излучения?



4. При дифракции на дифракционной решетке наблюдается зависимость интенсивности излучения с длиной волны 400 нм от синуса угла дифракции, представленная на рисунке (изображены только главные максимумы). Чему равно количество штрихов на 1 мм длины решетки?



5. Сколько штрихов содержит дифракционная решетка длиной 1 см, если при нормальном падении на нее света с длиной волны 0,5 мкм максимум второго порядка наблюдается под углом 30° ?

6. Дифракционная решетка содержит 500 штрихов на 1 мм. Какова длина волны падающего света, если второй дифракционный максимум наблюдается под углом 30° ?

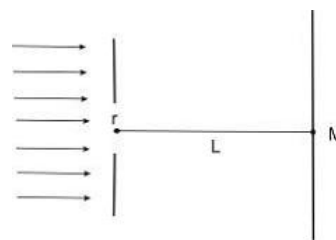
7. Дифракционная решетка содержит 500 штрихов на 1 мм. Длина волны падающего света равна 500 нм. Под каким углом наблюдается третий дифракционный минимум?

8. Определите число штрихов на 1 мм дифракционной решетки, если углу $\frac{\pi}{2}$ соответствует максимум пятого порядка для монохроматического света с длиной волны 0,5 мкм.

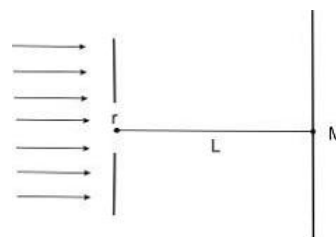
9. Дифракционная решетка содержит 500 штрихов на 1 мм. Какова длина волны падающего света, если первый дифракционный минимум наблюдается под углом 30° ?

10. Дифракционная решетка содержит 500 штрихов на 1 мм. Длина волны падающего света равна 760 нм. Под каким углом наблюдается первый дифракционный максимум?

11. На диафрагму с круглым отверстием радиусом 2 мм падает нормально параллельный пучок света длиной волны 0,5 мкм. На пути лучей, прошедших через отверстие, на расстоянии 1 м помещают экран. Сколько зон Френеля укладывается в отверстии диафрагмы для т.М?



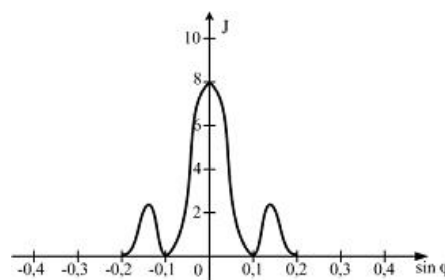
12. На диафрагму с круглым отверстием радиусом 1 мм падает нормально параллельный пучок света длиной волны 0,5 мкм. На пути лучей, прошедших через отверстие, на расстоянии 1 м помещают экран. Сколько зон Френеля укладывается в отверстии диафрагмы для т.М? Что будет наблюдаться в центре экрана в т.М?



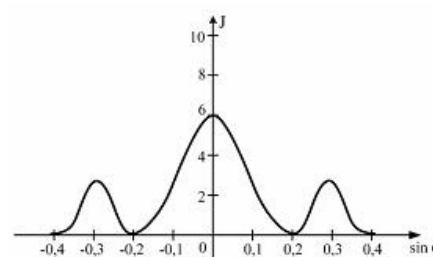
13. Плоская световая волна с длиной волны 0,6 мкм падает на диафрагму со щелью шириной 10^{-5} м. Определите, под каким углом к первоначальному распространению света будут открыты семь зон Френеля. Минимум или максимум интенсивности будет при этом наблюдаться на экране за диафрагмой?

14. Определите расстояние от точки наблюдения до отверстия, если отверстие открывает: 1) две зоны Френеля, 2) три зоны Френеля.

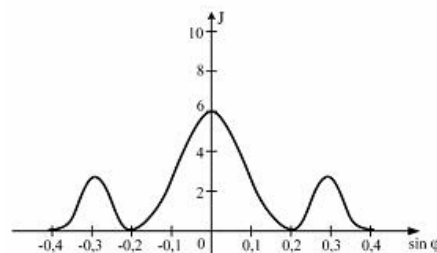
15. При наблюдении дифракции на щели получена зависимость интенсивности монохроматического излучения длиной волны 500 нм от синуса угла дифракции (см. рисунок). Найдите ширину щели.



16. На узкую щель шириной b падает нормально плоская световая волна длиной λ . На рисунке схематически представлена зависимость интенсивности света от синуса угла дифракции. Чему равно отношение $\frac{b}{\lambda}$?



17. На узкую щель шириной b падает нормально плоская световая волна длиной λ . На рисунке схематически представлена зависимость интенсивности света от синуса угла дифракции. Расстояние от щели до экрана составляет 0,5 м. Чему равна ширина центрального максимума (в см)? (Учесть, что $\sin \varphi \approx \tan \varphi$.)



5.3. Поляризация света

Основные формулы

- Угол полной поляризации отраженного света (угол Брюстера)

$$i_B = \arctg n_{21},$$

где i_B – угол падения, при котором отраженная световая волна полностью поляризована; n_{21} – показатель преломления вещества, от поверхности которого происходит отражение относительно среды, откуда падает луч.

- Формула Френеля:

$$I = \frac{1}{2} I_0 \left[\frac{\sin^2(i - r)}{\sin^2(i + r)} + \frac{\lg^2(i - r)}{\lg^2(i + r)} \right],$$

где I – интенсивность света, отраженного от поверхности диэлектрика; I_0 – интенсивность естественного света, падающего на поверхность диэлектрика; i – угол падения лучей; r – угол преломления.

- Закон Малюса:

$$I = I_0 \cos^2 \varphi,$$

где I_0 – интенсивность света, прошедшего через поляризатор; I – интенсивность света, вышедшего из анализатора; φ – угол между плоскостями поляризации поляризатора и анализатора.

- Степень поляризации

$$P = \frac{I_{\max} - I_{\min}}{I_{\max} + I_{\min}},$$

где $I_{\max}$ и $I_{\min}$ – максимальная и минимальная интенсивности частично-поляризованного света, пропускаемого анализатором.

• Коэффициент отражения света при нормальном падении на границу раздела сред:

$$\rho = \frac{(n - 1)^2}{(n + 1)^2}.$$

- Угол вращения плоскости поляризации в сахарном растворе

$$\varphi = \alpha c l,$$

где φ – угол поворота плоскости поляризации; c – концентрация сахарного раствора; l – длина трубки с раствором; α – удельное вращение сахарного раствора (величина, численно равная углу поворота плоскости поляризации при концентрации раствора, равной единице, если длина трубки равна 1 дм).

ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

Пример 1. Луч естественного света отражается от плоского стеклянного дна сосуда, наполненного водой. Каков должен быть угол падения луча, чтобы отраженный луч был максимально поляризован? Абсолютный показатель преломления стекла $n_{\text{ст}} = 1,52$, воды – $n_{\text{в}} = 1,33$.

Дано:	Решение
$n_{\text{ст}} = 1,52$	По закону Брюстера отраженный луч максимально поляризован при условии, что
$n_{\text{в}} = 1,33$	
$i_{\text{в}} - ?$	
	$\text{tg } i_{\text{в}} = n_{21}.$

По условию задачи луч отражается от стекла в воду, следовательно

$$n_{21} = \frac{n_{\text{ст}}}{n_{\text{в}}}.$$

Тогда

$$\text{tg } i_{\text{в}} = \frac{n_{\text{ст}}}{n_{\text{в}}} = \frac{1,52}{1,33} = 1,14.$$

$$i_{\text{в}} = \arctg 1,14 = 48^{\circ}48'.$$

О т в е т : $i_{\text{в}} = 48^{\circ}48'.$

Пример 2. Естественный луч света падает на плоскопараллельную стеклянную пластинку. Угол падения равен углу полной поляризации. Какую часть интенсивности падающего естественного света составит при этом интенсивность отраженного луча? Показатель преломления стекла $n_{\text{ст}} = 1,52$.

Дано:	Решение
$n_{\text{ст}} = 1,52$	Согласно формуле Френеля интенсивность света I , отраженного от поверхности диэлектрика,
$i = i_{\text{в}}$	
$\frac{I}{I_0} - ?$	
	$I = \frac{1}{2} I_0 \left[\frac{\sin^2(i - r)}{\sin^2(i + r)} + \frac{\text{tg}^2(i - r)}{\text{tg}^2(i + r)} \right], \quad (1)$

где I_0 – интенсивность естественного света, падающего на поверхность диэлектрика; i – угол падения лучей; r – угол преломления.

При угле падения i , равном углу полной поляризации i_B , отраженный и преломленный лучи взаимно перпендикулярны, поэтому

$$i_B + r = \frac{\pi}{2}.$$

В этом случае формула (1) приобретает вид

$$I = \frac{1}{2} I_0 \sin^2(i_B - r),$$

поэтому

$$\frac{I}{I_0} = \frac{1}{2} \sin^2(i_B - r).$$

Согласно закону Брюстера

$$\operatorname{tg} i_B = n_{21},$$

откуда

$$i_B = \operatorname{arctg} 1,52 = 56^\circ 40', \quad r = 90^\circ - 56^\circ 40' = 33^\circ 20'.$$

$$\frac{I}{I_0} = \frac{1}{2} \sin^2 33^\circ 20' = 0,078.$$

$$\text{О т в е т : } \frac{I}{I_0} = 0,078.$$

Пример 3. На пути плоскополяризованного луча света поместили пластинку кварца, вырезанную параллельно оптической оси кристалла. Какой толщины должна быть пластинка, для того чтобы образующаяся разность хода между обыкновенными и необыкновенными лучами составила $1/4$ длины волны желтого света ($\lambda = 0,589$ мкм)? Максимальный показатель преломления необыкновенного луча данной длины волны $n_n = 1,553$, показатель преломления обыкновенного луча для кварца $n_o = 1,543$.

Дано:

$$\lambda = 0,589 \text{ мкм} = 0,589 \cdot 10^{-6} \text{ м}$$

$$n_n = 1,553$$

$$n_o = 1,543$$

$$\Delta = \frac{\lambda}{4}$$

$$l - ?$$

Решение

Попадая в пластинку из кварца, поляризованный свет распространяется в ней как два луча: обыкновенный и необыкновенный.

Эти лучи поляризованы в двух взаимно перпендикулярных плоскостях.

Оба луча идут в одном и том же направлении, но с разными скоростями.

Различие в скоростях будет максимальным, так как по условию лучи распространяются в пластинке перпендикулярно оси кристалла.

Оптическая разность хода лучей

$$\Delta = l n_{\text{н}} - l n_{\text{о}} = l (n_{\text{н}} - n_{\text{о}}), \quad (1)$$

где l – толщина кварцевой пластинки; $n_{\text{н}}$ – максимальное значение показателя преломления необыкновенного луча; $n_{\text{о}}$ – показатель преломления обыкновенного луча данной длины волны для кварца.

Из формулы (1) выразим толщину пластинки

$$l = \frac{\Delta}{n_{\text{н}} - n_{\text{о}}} = \frac{\lambda}{4 \cdot (n_{\text{н}} - n_{\text{о}})}.$$

$$l = \frac{0,589 \cdot 10^{-6}}{4(1,553 - 1,544)} = 14,7 \text{ мкм.}$$

О т в е т : $l = 14,7$ мкм.

Пример 4. Какой процент первоначальной интенсивности сохранится после прохождения света через два николя, если угол между плоскостями поляризации их составляет $\varphi = 75^\circ$ и каждый из николей в отдельности поглощает 5% падающего на него света?

Дано:	Решение
$\varphi = 75^\circ$	Интенсивность света, прошедшего через первый
$\frac{\Delta I}{I} = 0,05$	николь,
$\frac{I}{I_0} = ?$	$I_1 = \frac{1}{2} I_0 \cdot 0,95,$
	где I_0 – первоначальная интенсивность света, падающего на первый николь (поляризатор).

Согласно закону Малюса интенсивность света, прошедшего через анализатор, равна

$$I_2 = I_1 \cdot \cos^2 \varphi.$$

Но так как и во втором николе (анализаторе) происходит ослабление интенсивности на 5 %, то свет, прошедший через оба николя, будет иметь интенсивность

$$I = \frac{1}{2} I_0 \cdot 0,95 \cdot \cos^2 75^\circ \cdot 0,95 = 0,03 I_0.$$

Поэтому

$$\frac{I}{I_0} = 3\%.$$

О т в е т : $\frac{I}{I_0} = 3\%.$

ТЕСТЫ

1. Что такое поляризация?

- 1) явление зависимости показателя преломления среды от длины волны;
- 2) явление огибания волнами препятствий и захождение в область геометрической тени;
- 3) явление наложения падающей и отраженной волн, в результате чего образуются стоячие волны;
- 4) явление, при котором колебания светового вектора каким-либо образом упорядочены (линейно, эллиптически, циркулярно).

2. Поляризация света доказывает, что свет – это...

- 1) поток заряженных частиц;
- 2) поток электрически нейтральных частиц;
- 3) поперечная волна;
- 4) продольная волна.

3. Что можно сказать о колебаниях вектора $\vec{E}$ в луче естественного света?

- 1) колебания вектора $\vec{E}$ происходят строго в одной плоскости;
- 2) колебания вектора $\vec{E}$ происходят во всевозможных направлениях;
- 3) колебания вектора $\vec{E}$ происходят с различными частотами, амплитудами и фазами;
- 4) колебания вектора $\vec{E}$ происходят с одинаковыми частотами.

4. Естественный свет проходит через стеклянную пластинку и частично поляризуется. Как изменится степень поляризации света, если на пути света поставить еще одну такую же пластинку?

- 1) уменьшится;
- 2) увеличится;
- 3) не изменится.

5. Что называется плоскостью поляризации?

- 1) плоскость колебаний светового вектора (напряженности электрического поля световой волны);
- 2) плоскость колебаний вектора напряженности магнитного поля световой волны;
- 3) плоскость, в которой лежат отраженный луч, преломленный луч и перпендикуляр к точке падения;
- 4) плоскость, перпендикулярная вектору скорости световой волны, в которой происходят колебания векторов напряженности электрического и напряженности магнитного полей.

6. Что называется плоскостью колебаний?

- 1) плоскость колебаний светового вектора (напряженности электрического поля световой волны);
- 2) плоскость колебаний вектора напряженности магнитного поля световой волны;
- 3) плоскость, в которой лежат отраженный луч, преломленный луч и перпендикуляр к точке падения;
- 4) плоскость, перпендикулярная вектору скорости световой волны, в которой происходят колебания векторов напряженности электрического и напряженности магнитного полей.

7. Что представляет собой явление двойного лучепреломления?

- 1) раздваивание каждого падающего луча на границе двух диэлектриков;
- 2) раздваивание каждого падающего луча в прозрачных кристаллах, кроме кристаллов кубической формы;
- 3) отражение падающего луча от верхней и нижней поверхности прозрачной пленки;
- 4) отражение при падении света из оптически более плотной среды в оптически менее плотную при углах падения от $\alpha_{\text{пр}}$ до $\frac{\pi}{2}$.

8. Какая формула выражает закон Брюстера?

- 1) $\text{tg}(i_{\text{пр}}) = n$;
- 2) $I = I_0 \cos^2 \alpha$;
- 3) $\text{tg}(i) = n$;
- 4) $\text{tg}(i) = \frac{1}{n}$.

9. Какая формула выражает закон Малюса?

- 1) $\text{tg}(i_{\text{пр}}) = n$;
- 2) $I = I_0 \cos^2 \alpha$;
- 3) $\text{tg}(i) = n$;
- 4) $D = \frac{dn}{d\lambda}$.

10. Пучок естественного света проходит через два идеальных поляризатора. Интенсивность естественного света равна I_0 , угол между плоскостями пропускания поляризаторов равен φ . Чему равна интенсивность света после первого поляризатора?

- 1) $I = \frac{I_0}{2}$;
- 2) $I = \frac{I_0}{2} \cos^2 \varphi$;
- 3) $I = I_0$;
- 4) $I = I_0 \cos^2 \varphi$.

11. Плоскополяризованный свет падает на анализатор. Какие изменения происходят с лучом при вращении анализатора вокруг направления луча?

- 1) в соответствии с законом Малюса изменяется интенсивность света;
- 2) изменяется направление плоскости колебаний;
- 3) изменяется направление плоскости поляризации;
- 4) интенсивность выходящего луча не изменяется.

12. Естественный свет падает на границу раздела двух диэлектриков под углом Брюстера. Что можно сказать об отраженном луче?

- 1) частично поляризован;
- 2) плоскополяризован;
- 3) полностью поляризован в плоскости падения;
- 4) с преломленным лучом составляет угол 90° .

13. На идеальный поляризатор падает свет интенсивности I_0 от обычного источника. Как меняется интенсивность света за поляризатором при его вращении вокруг направления распространения луча?

- 1) меняется от $I_{\min}$ до $I_{\max}$;
- 2) меняется от I_0 до $I_{\max}$;
- 3) не меняется и равна I_0 ;
- 4) не меняется и равна $\frac{1}{2}I_0$.

14. Естественный свет падает на границу раздела двух диэлектриков под углом Брюстера. Что при этом происходит?

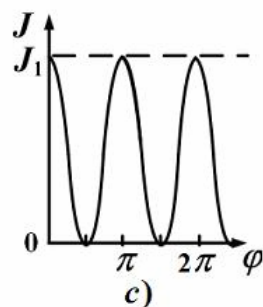
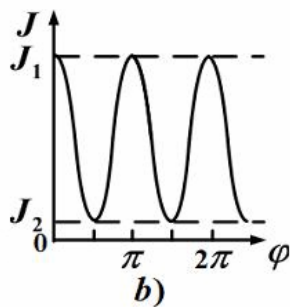
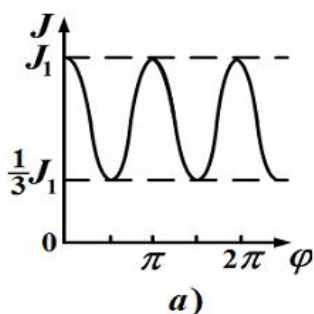
- 1) двойное лучепреломление;
- 2) поворот плоскости поляризации;
- 3) поляризация отраженного и преломленного лучей;
- 4) дисперсия света.

15. На диэлектрическое зеркало под углом Брюстера падает луч естественного света. Укажите верные утверждения.

- 1) оба луча не поляризованы;
- 2) отраженный луч поляризован частично;
- 3) преломленный луч полностью поляризован;
- 4) отраженный луч полностью поляризован.

16. На рисунке представлены графики зависимости интенсивности J света, прошедшего через поляризатор, от угла поворота φ поляризатора для трех разных световых пучков. Укажите верное для данных графиков

соотношение степеней поляризации падающих на поляризатор световых волн:



- 1) $P_a < P_b < P_c$; 2) $P_a = P_b < P_c$; 3) $P_a > P_b > P_c$; 4) $P_a < P_b = P_c$.

17. Что такое дисперсия?

- 1) явление зависимости показателя преломления среды от длины волны;
- 2) явление огибания волнами препятствий и захождение в область геометрической тени;
- 3) явление, при котором колебания светового вектора каким-либо образом упорядочены (линейно, эллиптически, циркулярно);
- 4) явление наложения в пространстве двух или нескольких когерентных волн, в результате чего происходит пространственное перераспределение светового потока.

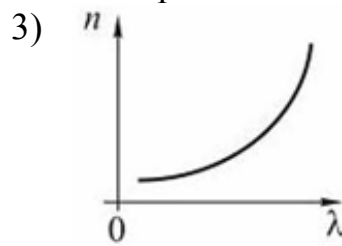
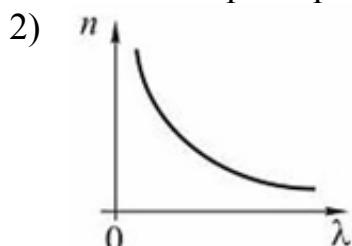
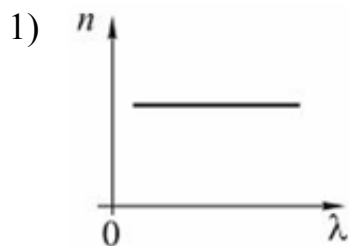
18. Чем обусловлено разложение белого света в спектр при прохождении через призму?

- 1) интерференцией света; 2) дисперсией света;
- 3) отражением света; 4) дифракцией света.

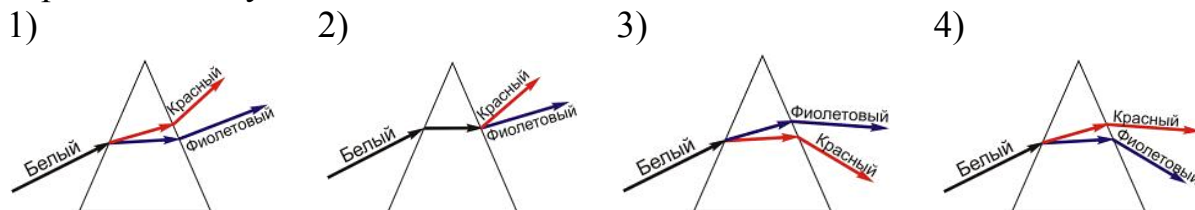
19. Каким явлением объясняется радуга на небе?

- 1) дисперсией света; 2) дифракцией света;
- 3) интерференцией света; 4) поляризацией света.

20. На каком рисунке отражена зависимость показателя преломления n вещества от длины световой волны λ при нормальной дисперсии?



21. В стеклянной призме происходит разложение белого света в спектр. На рисунках представлен ход лучей в призме. Какой рисунок правильно отражает ход лучей?



22. Разложение пучка солнечного света в спектр при прохождении его через призму объясняется тем, что свет состоит из набора электромагнитных волн разной длины, которые, попадая в призму,...

- 1) движутся с разной скоростью;
- 2) имеют одинаковую частоту;
- 3) поглощаются в разной степени;
- 4) имеют одинаковую длину волны.

23. На переднюю грань прозрачной стеклянной призмы падают параллельные друг другу зеленый и красный лучи. Каков ход этих лучей после прохождения призмы?

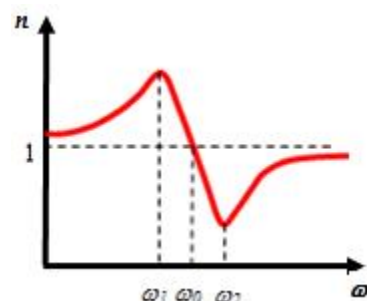
- 1) они останутся параллельными;
- 2) они разойдутся так, что не будут пересекаться;
- 3) они пересекутся;
- 4) ответ зависит от сорта стекла.

24. Показатель преломления воды для красного света равен 1,329, а для голубого – 1,337. Какое явление наблюдается в связи с этим при прохождении света в воде?

- 1) нормальная дисперсия; 2) аномальная дисперсия;
- 3) оптическая активность; 4) поляризация.

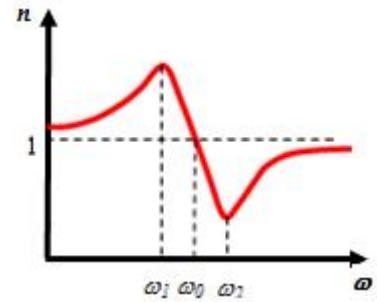
25. На рисунке изображена дисперсионная кривая для некоторого вещества. Для какого диапазона частот наблюдается интенсивное поглощение света?

- 1) от ω_1 до ω_2 ; 2) от 0 до ω_1 ;
- 3) от ω_1 до ω_0 ; 4) от ω_2 до ∞ .



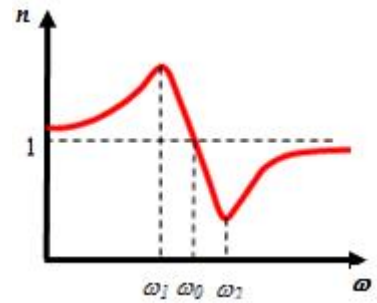
26. Кривая дисперсии в области одной из полос поглощения имеет вид, показанный на рисунке. Для какого диапазона частот наблюдается нормальная дисперсия?

- 1) $\omega_1 < \omega < \omega_2$; 2) $\omega < \omega_1$;
- 3) $\omega < \omega_1, \omega > \omega_2$; 4) $\omega > \omega_2$.

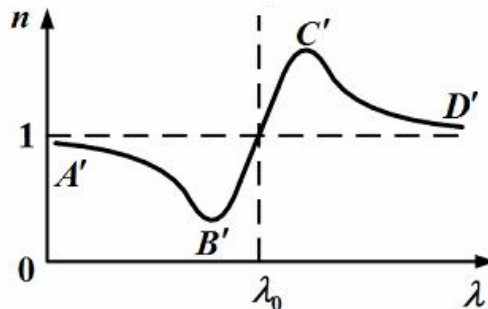
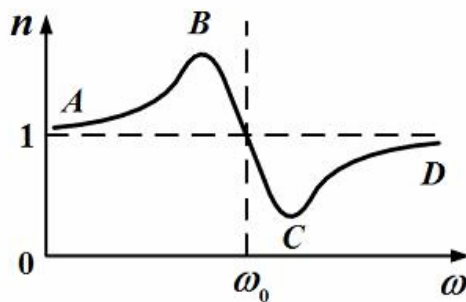


27. На рисунке изображена дисперсионная кривая для некоторого вещества. Для какого диапазона частот наблюдается аномальная дисперсия?

- 1) от ω_1 до ω_2 ; 2) от 0 до ω_1 ;
- 3) от ω_1 до ω_0 ; 4) от ω_2 до ∞ .



28. Графики дисперсионных кривых зависимостей показателя преломления среды от частоты ω и длины волны λ света имеют вид, представленный на рисунках:

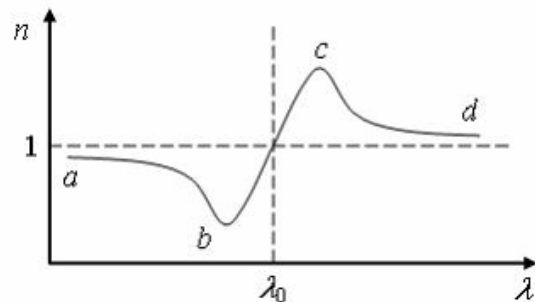


Чему соответствуют участки кривых AB и $C'D'$?

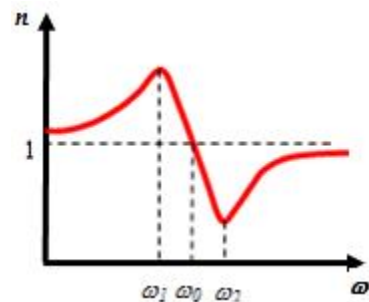
- 1) AB и $C'D'$ – нормальной дисперсии;
- 2) AB и $C'D'$ – аномальной дисперсии;
- 3) AB – аномальной дисперсии, $C'D'$ – нормальной дисперсии;
- 4) AB – нормальной дисперсии, $C'D'$ – аномальной дисперсии.

29. Кривая дисперсии в области одной из полос поглощения имеет вид, показанный на рисунке. Каково соотношение между фазовой v и групповой u скоростями для участка bc ?

- 1) $u > v > c$; 2) $u > v$;
- 3) $u < v$; 4) $u = v$.



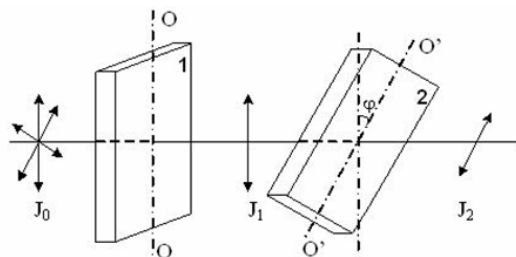
30. Кривая дисперсии в области одной из полос поглощения имеет вид, показанный на рисунке. Для какой области частот групповая скорость u света в веществе больше фазовой скорости v ?



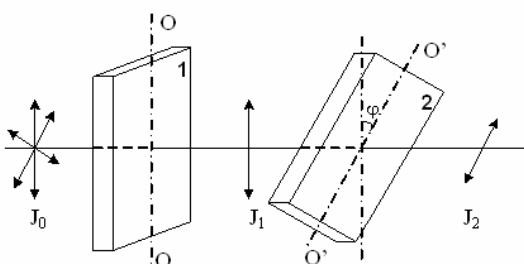
- 1) $\omega_1 < \omega < \omega_2$; 2) $\omega > \omega_2$;
- 3) $\omega < \omega_1$, $\omega > \omega_2$; 4) $\omega < \omega_1$.

ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ

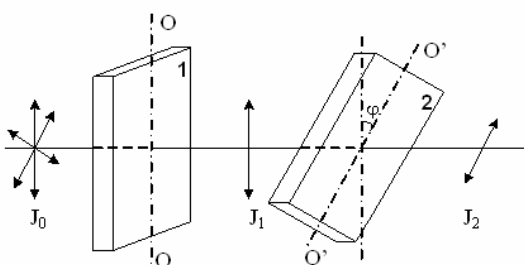
1. На пути естественного света помещены две пластинки турмалина. После прохождения пластинки 1 свет полностью поляризован. $J_2 = J_1$, где J_1 и J_2 – интенсивности света, прошедшего пластинки 1 и 2 соответственно. Чему равен угол между направлениями OO и $O'O'$?



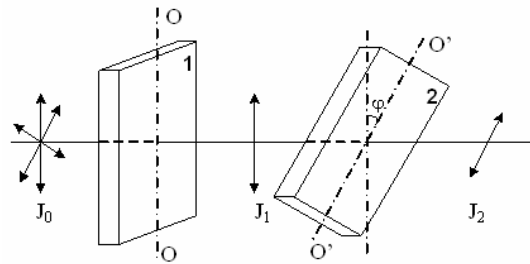
2. На пути естественного света помещены две пластины турмалина. После прохождения пластины 1 свет полностью поляризован. J_1 и J_2 – интенсивности света, прошедшего через пластинки 1 и 2 соответственно. Угол между направлениями OO и $O'O'$ $\varphi = 60^\circ$. Каким соотношением связаны J_1 и J_2 ?



3. На пути естественного света помещены две пластины турмалина. После прохождения пластины 1 свет полностью поляризован. $J_2 = \frac{3}{4} J_1$, где J_1 и J_2 – интенсивности света, прошедшего через пластинки 1 и 2 соответственно. Чему равен угол между направлениями OO и $O'O'$?



4. На пути естественного света помещены две пластины турмалина. После прохождения пластины 1 свет полностью поляризован. J_0 – интенсивность естественного света, J_1 и J_2 – интенсивности света, прошедшего через пластинки 1 и 2 соответственно. Угол между направлениями OO и $O'O'$ $\varphi = 30^\circ$. Каким соотношением связаны J_2 и J_0 ?



5. Угол между плоскостями пропускания двух поляризаторов равен 45° . Как изменится интенсивность света, прошедшего через оба поляризатора, если угол увеличить в 2 раза?

6. Естественный свет проходит через два поляризатора, угол между главными плоскостями которых 30° . Во сколько раз изменится интенсивность света, прошедшего через эту систему, если угол между плоскостями поляризаторов увеличить в два раза?

7. Естественный свет падает на систему из 5 последовательно расположенных поляроидов, причем плоскость пропускания каждого последующего поляроида образует угол 30° с плоскостью пропускания предыдущего. Каким соотношением связана интенсивность света на выходе из системы с интенсивностью света на входе? Поглощением света в поляроидах пренебречь.

8. Естественный свет с интенсивностью J_0 падает на вход устройства, состоящего из двух скрещенных поляроидов. Между поляроидами поместили третий поляроид, ось которого составляет с осью первого угол α . Каково отношение интенсивности света, прошедшего через систему, к интенсивности падающего на систему света?

9. Анализатор в 2 раза уменьшает интенсивность линейно поляризованного света, приходящего к нему от поляризатора. Если между поляризатором и анализатором поместить кварцевую пластинку, то свет через такую систему проходить не будет. На какой угол при этом кварцевая пластинка поворачивает плоскость поляризации?

10. Пластинку из оптически активного вещества толщиной $d = 2$ мм поместили между параллельными николями, в результате чего плоскость поляризации монохроматического света повернулась на угол $\varphi = 30^\circ$. При какой минимальной толщине (в мм) пластинки поле зрения поляриметра станет совершенно темным?

11. Пластинку из оптически активного вещества толщиной $d = 1$ мм поместили между параллельными николями, в результате чего плоскость поляризации монохроматического света повернулась на угол $\varphi = 60^\circ$. При какой минимальной толщине (в мм) пластинки поле зрения поляриметра станет совершенно темным?

12. Кварцевую пластинку толщиной 3 мм, вырезанную перпендикулярно оптической оси, поместили между двумя поляризаторами. Определите постоянную вращения кварца для красного света, если его интенсивность после прохождения этой системы максимальна, когда угол между главными плоскостями поляризаторов 45° .

13. Раствор сахара с концентрацией $0,25 \text{ г/см}^3$ толщиной 18 см поворачивает плоскость поляризации монохроматического света на угол 30° . Другой раствор толщиной 16 см поворачивает плоскость поляризации этого же света на угол 24° . Определите концентрацию сахара во втором растворе.

14. При падении света из воздуха на диэлектрик отраженный луч полностью поляризован. Угол падения 60° . Чему равен угол преломления?

15. При падении света из воздуха на диэлектрик отраженный луч полностью поляризован. Угол преломления равен 30° . Чему равен показатель преломления диэлектрика?

16. Естественный свет падает на кристалл алмаза под углом полной поляризации. Найдите угол преломления света.

17. Определите угол полной поляризации при отражении света от диэлектрика, показатель преломления которого равен $\sqrt{3}$.

18. Угол Брюстера при падении света из воздуха на диэлектрик равен 60° . Чему равна скорость света в диэлектрике?

19. Под каким углом к горизонту должно находиться Солнце, чтобы его лучи, отраженные от поверхности воды, были максимально поляризованы?

20. Для того чтобы уменьшить блеск водной поверхности озера, обусловленный отражением от нее солнечных лучей, применяют солнцезащитные очки с поляроидами. Под каким углом к горизонту находится Солнце, если отраженные солнечные лучи от поверхности озера полно-

стью гасятся поляроидом? Как при этом ориентирована плоскость пропускания поляроида? Показатель преломления воды равен 1,33.

21. Естественный свет падает на поверхность диэлектрика под углом полной поляризации. Коэффициент отражения света равен 0,92. Найдите степень поляризации преломленного луча.

22. Естественный свет падает на поверхность диэлектрика под углом полной поляризации. Коэффициент пропускания света равен 0,085. Найдите степень поляризации преломленного луча.

23. Естественный свет падает на поверхность диэлектрика под углом полной поляризации. Степень поляризации преломленного луча составляет 0,09. Найдите коэффициент отражения света.

24. Естественный свет проходит через два поляризатора, угол между главными плоскостями которых 30° . Во сколько раз уменьшится интенсивность света после прохождения этой системы? Считать, что каждый поляризатор отражает и поглощает 10 % падающего на него света.

25. Чему равен угол между главными плоскостями двух поляризаторов, если интенсивность света, прошедшего через них, уменьшилась в 5,3 раза? Считать, что каждый поляризатор отражает и поглощает 13 % падающего на них света.

26. Измерение дисперсии показателя преломления оптического стекла дало $n_1 = 1,528$ для $\lambda_1 = 0,434$ мкм и $n_2 = 1,523$ для $\lambda_2 = 0,486$ мкм. Вычислить отношение групповой скорости к фазовой для света с длиной волны 0,434 мкм.

27. Вычислить групповую и фазовую скорости света с длиной волны 643,8 нм в воде, если известно, что показатель преломления для этой длины волны равен 1,3314, а для волны длиной 656,3 нм он равен 1,3311.

28. Вычислить разницу между фазовой и групповой скоростью для света с длиной волны 0,768 мкм в стекле, если известно, что показатель преломления для этой длины волны равен 1,511, а для волны длиной 0,656 мкм он равен 1,514.

29. Найти отношение групповой скорости к фазовой для света с длиной волны 0,6 мкм в среде с показателем преломления 1,5 и дисперсией $-5 \cdot 10^4 \text{ м}^{-1}$.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Колебания свойственны всем явлениям природы. Пульсирует излучение звёзд, в недрах которых происходят циклические ядерные реакции; с высокой степенью периодичности вращаются планеты Солнечной системы; движение Луны вызывает приливы и отливы на Земле; в земной ионосфере и атмосфере циркулируют потоки заряженных и нейтральных частиц; ветры возбуждают колебания и волны на поверхности водоёмов и т.д.

Внутри любого живого организма непрерывно происходят разнообразные ритмично повторяющиеся процессы, например с удивительной надёжностью бьётся человеческое сердце, даже психика людей подвержена колебаниям. В виде сложнейшей совокупности колебаний частиц (электронов, фотонов, протонов и др.) и полей можно представить «устройство» микромира.

В технике колебания либо выполняют определённые функции (маятник, колебательный контур, генератор колебаний и др.), либо возникают как неизбежное проявление физических свойств (вибрации машин и сооружений, неустойчивости и вихревые потоки при движении тел в газах и т.д.).

В физике выделяются колебания механические, электромагнитные и их комбинации. Это обусловлено той исключительной ролью, которую играют гравитационные и электромагнитные взаимодействия в масштабах, характерных для жизнедеятельности человека. С помощью распространяющихся механических колебаний плотности и давления воздуха, воспринимаемых нами как звук, а также очень быстрых колебаний электрических и магнитных полей, воспринимаемых нами как свет, мы получаем большую часть прямой информации об окружающем мире.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК:

1. Трофимова, Т.И. Сборник задач по курсу физики с решениями [Текст] / Т.И. Трофимова, З.Г. Павлова. – М.: Абрис, 2012. – 312 с.
2. Бондарев, Б.В. Курс общей физики [Текст] / Б.В. Бондарев, Н.П. Калашников, Г.Г. Спирин. – М. : Юрайт, 2013. – 354 с.
3. Грабовский, Р.И. Курс физики [Текст] / Р.И. Грабовский. – СПб.: Лань, 2012. – 608 с.
4. . Паршаков, А.Н. Физика колебаний [Текст] / А.Н. Паршаков. – Пермь: ПГТУ, 2010. – 302 с.
5. Сивухин, Д.В. Общий курс физики [Текст] / Д.В. Сивухин. – М.: Физматлит, 2014. – 560 с.
6. Трофимова, Т.И. Курс физики [Текст] / Т.И. Трофимова. – М.: КноРус, 2015. – 592 с.
7. Никеров, В.А. Механика и молекулярная физика [Текст] / В.А. Никеров. – М.: Дашков и К, 2012. – 136 с.
8. Хавруняк, В.Г. Курс физики [Текст] / В.Г. Хавруняк. – М.: ИНФРА-М, 2014. – 400 с.

ОГЛАВЛЕНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ	3
ВВЕДЕНИЕ	5
I. КОЛЕБАНИЯ.....	6
1. МЕХАНИЧЕСКИЕ КОЛЕБАНИЯ.....	6
1.1. Общие сведения	6
1.2. Свободные незатухающие колебания.....	8
1.2.1. Кинематика и динамика гармонических колебаний	8
1.2.2. Энергетические превращения при гармонических колебаниях	10
1.3. Гармонический осциллятор	23
1.3.1. Пружинный маятник	23
1.3.2. Физический маятник	24
1.3.3. Математический маятник	25
1.4. СЛОЖЕНИЕ ГАРМОНИЧЕСКИХ КОЛЕБАНИЙ	40
1.4.1. Сложение двух гармонических колебаний одинакового направления и частоты.....	40
1.4.2. Биения	41
1.4.3. Сложение взаимно перпендикулярных колебаний	43
1.5. Затухающие колебания	55
1.6. Вынужденные колебания	66
1.6.1. Общие сведения	66
1.6.2. Резонанс	67
1.6.3. Автоколебания	68
1.6.4. Параметрический резонанс.....	69
2. ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ КОЛЕБАНИЯ	77
2.1. Свободные электромагнитные колебания в колебательном контуре.....	77
2.2. Аналогия механических и электромагнитных колебаний.....	81
2.3. Свободные затухающие электромагнитные колебания.....	93
2.4. Вынужденные электромагнитные колебания. Резонанс.....	96
II. ВОЛНЫ.....	106
3. МЕХАНИЧЕСКИЕ ВОЛНЫ.....	106
3.1. Общие сведения	106
3.2. Уравнение волны. Фазовая скорость	107
3.3. Энергия упругой волны.....	109
3.4. Принцип суперпозиции и групповая скорость	120
3.5. Интерференция волн. Стоячие волны	121
4. ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ ВОЛНЫ	129
4.1. Свойства электромагнитных волн	129
4.2. Энергия электромагнитных волн	131
4.3. Шкала электромагнитных волн	132

5. ВОЛНОВЫЕ СВОЙСТВА СВЕТА.....	142
5.1. Интерференция света	142
5.2. Дифракция света	155
5.3. Поляризация света	167
ЗАКЛЮЧЕНИЕ	181
БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК:	182

Учебное издание

Очкина Наталья Александровна

ФИЗИКА.
КОЛЕБАНИЯ И ВОЛНЫ

Учебное пособие

Под общ. ред. Г.И. Грейсуха

Р е д а к т о р Н.Ю. Шалимова
В е р с т к а Н.А. Сазонова

Подписано в печать 29.06.2015. Формат 60×84/16.
Бумага офисная «Снегурочка». Печать на ризографе.
Усл. печ. л. 10,7. Уч.-изд. л. 11,5. Тираж 80 экз.
Заказ №264.



Издательство ПГУАС.
440028, г.Пенза, ул. Германа Титова, 28.