МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Федеральное государственное бюджетное образовательное
учреждение высшего образования
«Пензенский государственный университет
архитектуры и строительства»
(ПГУАС)

ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ И МЕТОДЫ ОПТИМИЗАЦИИ

Методические указания
для подготовки к зачету по направлению подготовки 09.03.02
«Информационные системы и технологии»

Пенза 2016

УДК 519.6 (075.8)
ББК 22.193я73
Ч-67

Рекомендовано Редсоветом университета

Рецензент – доктор технических наук, профессор
А.М. Данилов (ПГУАС)

Ч-67 **Численные** методы и методы оптимизации: методические указания для подготовки к зачету по направлению подготовки 09.03.02 «Информационные системы и технологии» / В.В. Кузина, А.Н. Кошев. – Пенза: ПГУАС, 2016. – 40 с.

Представлены методические рекомендации для подготовки к зачету по дисциплине «Численные методы и методы оптимизации», примерные вопросы для зачета и тестовые задания по всем разделам курса, список рекомендуемых литературных источников.

Методические указания подготовлены на кафедре «Информационно-вычислительные системы» и предназначены для студентов, обучающихся по программе подготовки академического бакалавриата по направлению подготовки 09.03.02 «Информационные системы и технологии» очной формы обучения при изучении дисциплины «Численные методы и методы оптимизации».

© Пензенский государственный университет архитектуры и строительства, 2016
© Кузина В.В., Кошев А.Н., 2016

ПРЕДИСЛОВИЕ

Зачеты служат формой проверки усвоения обучающимися учебного материала, выполнения лабораторных работ и самостоятельной работы студента в соответствии с учебным планом.

Зачет по дисциплине «Численные методы и методы оптимизации» проводится с целью промежуточного контроля знаний и навыков, полученных на лекционных и лабораторных занятиях на кафедре «Информационно-вычислительные системы», а также при выполнении обязательных самостоятельных работ обучающимися по направлению подготовки 09.03.02 «Информационные системы и технологии».

Зачет проводится в соответствии с графиком учебного процесса, как правило, до начала экзаменационной сессии.

Зачет по дисциплине «Численные методы и методы оптимизации» проводится в два этапа: 1-й этап представляет собой компьютерное тестирование, материал которого охватывает все темы курса за семестр; 2-й этап проводится по билетам, содержащим один теоретический вопрос и одну задачу.

Результат оценивается по системе «зачтено» или «не зачтено» и заносится ведущим преподавателем в зачетную книжку студента.

Зачет может быть выставлен автоматом по усмотрению ведущего преподавателя с учетом академической активности студента в течение семестра по итогам текущих занятий: по баллам, набранными студентами в рамках текущего контроля.

ВВЕДЕНИЕ

Дисциплина «Численные методы и методы оптимизации» является вариативной частью обязательных дисциплин учебного цикла ООП.

Задачи освоения дисциплины являются:

– приобретение обучающимися знания о численных методах алгебры и математического анализа, их применимости в профессиональной деятельности;

– приобретение обучающимися знания об оптимизации целевых функций без ограничений и с ограничениями различного вида для их дальнейшего применения в профессиональной деятельности;

– формирование умения применять методы оптимизации для отыскания точек экстремума функций без ограничений и при их наличии;

– выработка умения реализовывать численные методы решения задач оптимизации в различных интегрированных математических средах (MathCad, Mathlab и др.).

Знания, умения и приобретенные компетенции будут использованы при изучении дисциплины «Теория информационных процессов и систем» ООП.

Процесс изучения дисциплины направлен на формирование следующих компетенций:

– владение широкой общей подготовкой (базовыми знаниями) для решения практических задач в области информационных систем и технологий;

– способность использовать основные законы естественнонаучных дисциплин в профессиональной деятельности, применять методы математического анализа и моделирования, теоретического и экспериментального исследования.

Планируемые результаты обучения (показатели достижения заданного уровня освоения компетенции):

знать:

– математический аппарат современных численных методов;

– основные положения и методы задач линейного, выпуклого и нелинейного программирования, о приложениях теории в информатике, программировании и вычислительной технике;

– методы математического программирования и математического моделирования;

– современные математические пакеты программ для решения задач математического программирования;

уметь:

– реализовывать численные методы решения задач оптимизации на ПЭВМ;

– решать типовые задачи;

– использовать встроенные функции математических пакетов для решения задач оптимизации;

– программировать вычислительные алгоритмы и решать типовые задачи на компьютере;

владеть:

– базовыми знаниями и навыками численных методов решения задач оптимизации;

– навыками решения проблемных задач, требующих применения логико-математического аппарата;

– навыками работы в интегрированных математических средах, навыками работы с прикладными математическими пакетами программ;

– навыками решения проблемных задач, используя вычислительный эксперимент;

иметь представление:

– о математическом аппарате современных численных методов;

– об основных положениях и методах решения задач оптимизации, о приложениях теории в информатике, программировании и вычислительной технике;

– о применении методов математического программирования в профессиональной деятельности;

– о математическом моделировании и вычислительном эксперименте.

МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ ПО ПОДГОТОВКЕ К ЗАЧЕТУ

Промежуточная аттестация включает в себя сдачу зачета по дисциплине «Численные методы и методы оптимизации», которая изучается в 4-м семестре в соответствии с учебным планом направления подготовки 09.03.02 «Информационные системы и технологии», реализуемым в университете.

Подготовка к зачету заключается в изучении и тщательной проработке обучающимся учебного материала дисциплины.

Для лучшего усвоения учебного материала и удобства подготовки студентов к зачету преподавателями данного курса – авторами методических указаний – на файл-сервере кафедры представлен комплекс материалов: полнотекстовые файлы лекционного материала, методические указания по подготовке к лабораторным работам и всем видам контроля (входного, текущего, промежуточного).

Рекомендуется при подготовке к зачету повторить все темы, ответить на контрольные вопросы и выполнить задания в конце каждой темы. При проработке лекций особое внимание рекомендуется уделить терминологии, используемой в дисциплине и основным понятиям.

Дополнительно к изучению конспектов лекций и учебного пособия «Численные методы решения задач оптимизации» необходимо пользоваться другими учебными пособиями, в том числе электронными, приведенными в конце данных методических указаний.

Студент, пропустивший занятия по уважительной причине или отсутствии таковой, обязан отработать материал самостоятельно.

Качественной подготовкой к зачету является:

− полное знание всего учебного материала по курсу, выражающееся в строгом соответствии излагаемого студентом материалу учебного пособия и лекций;

− знание дополнительного материала;

− чёткие правильные ответы на дополнительные вопросы, задаваемые преподавателем с целью выяснить объём знаний студента;

– умение решать задачи оптимизации с использованием компьютера;

– владение численными методами решения задач оптимизации.

Неудовлетворительной подготовкой, вследствие которой студенту не зачитывается прохождение курса, является:

− недостаточное знание всего учебного материала по курсу;

− нечёткие ответы или отсутствие ответа на дополнительные вопросы, задаваемые преподавателем с целью выяснить объём знаний студента;

– неправильное решение задач;

– неумение использовать компьютер при решении задач оптимизации;

− отсутствие подготовки к зачету или отказ студента от сдачи зачета.

К зачету допускается студент, успешно выполнивший все предусмотренные программой курса лабораторные работы и защитивший их в компьютерном классе, продемонстрировав преподавателю электронный вариант и сдавший печатный либо рукописный вариант отчета.

Зачет по курсу проводится, как правило, в два этапа: 1) в виде компьютерного тестирования, включающего как теоретические, так и практические задания по всему пройденному материалу, в том числе выносимого на самостоятельное изучение; 2) по билетам, включающим один теоретический вопрос и задачу.

Преподавателю предоставляется право воспользоваться примерными тестовыми заданиями или составить новые тестовые задания в полном соответствии с материалом учебной дисциплины.

Критерии оценки на зачете

Студент, набравший на первом этапе при компьютерном тестировании не менее 60%, допускается ко второму этапу.

Студент, набравший при тестировании 95–100%, может быть освобожден от второго этапа по усмотрению преподавателя.

На 2-м этапе студент даёт ответы на вопросы билета после предварительной подготовки. Студенту предоставляется право отвечать на вопросы билета без подготовки по его желанию.

Преподаватель имеет право задавать дополнительные вопросы, если студент недостаточно полно осветил тематику вопроса, если затруднительно однозначно оценить ответ, если студент не может ответить на вопрос билета, если студент отсутствовал на занятиях в семестре.

Оценка «**зачтено**» выставляется студенту, который

– показал глубокие систематизированные знания, дав полный ответ на вопрос билета с приведением примера;

– без ошибок решил задачу с использованием пакета прикладных программ (MS Excel, MathCAD или др.) или составив программу на любом языке программирования;

– правильно ответил не менее чем на 60% дополнительных вопросов.

Обязательным условием выставленной оценки является правильная речь и владение математической терминологией и символикой.

Дополнительным условием получения оценки «зачтено» могут стать хорошие успехи при выполнении самостоятельной работы и коллоквиума, систематическая активная работа на занятиях.

Оценка «**не зачтено**» выставляется студенту, который не справился с 40% вопросов и заданий билета, в ответах на другие вопросы допустил существенные ошибки. Не может ответить на дополнительные вопросы, предложенные преподавателем. Не имеет целостного представления о взаимосвязях тем курса.

Методические указания к выполнению теста

Тесты, разработанные авторами данного пособия, хранятся в системе MOODLE и расположены по принципу: «Факультет – Кафедра-разработчик – Наименование дисциплины – Тест».

То есть в нашем случае: «ИСИ – ИВС – Численные методы и методы оптимизации – Тест».

Для записи на курс каждый студент должен ввести адрес своей электронной почты и получить ссылку – подтверждение на своем почтовом ящике.

После того как запись на курс произведена, можно приступать к тестированию, набрав в адресной строке браузера:

http://do.pguas.ru

В начале тестирования каждый студент предварительно должен ввести в компьютер логин – пароль, выдаваемые преподавателем.

Каждый вопрос, наряду с заданием, содержит 3-4 формы ответа, одна (или несколько) из которых является правильной, а другие формы учитывают возможные наиболее часто допускаемые студентами ошибки.

Кроме того, имеются вопросы на соответствие и так называемые открытые вопросы, ожидающие ввода числа или пропущенного слова.

После прохождения теста компьютер выдает в процентном соотношении каждому студенту количество верных ответов.

Следует иметь в виду, что количество попыток ограничено: одна или две, по усмотрению преподавателя. Тестирование ограничено еще и по времени: например, на предложенные случайной выборкой 20 вопросов устанавливается время 45 минут.

Для подготовки к тесту необходимо изучение материала по каждому из приведенных ниже вопросов.

ТЕСТОВЫЕ ЗАДАНИЯ К ЗАЧЕТУ
(I уровень)

К разделу 1. Введение в численные методы и методы оптимизации

1. Математическая модель – это:
- ✓ физические законы и соотношения;
- ✓ компьютерная программа;
- ✓ описание процесса средствами математики;
- ✓ системы математических уравнений, устанавливающих связи между факторами, параметрами, исходными данными и результирующими значениями выходных величин.

2. Математическую модель можно представить в виде:
- ✓ системы алгебраических уравнений;
- ✓ решения дифференциального уравнения;
- ✓ теоремы высшей математики;
- ✓ дифференциальных уравнений и алгебраических неравенств.

3. Укажите, какие из следующих действий можно отнести к этапам математического моделирования:
- ✓ установление эквивалентностей бесконечно-малых величин;
- ✓ решение систем математических уравнений и неравенств;
- ✓ описание экономических законов математическими терминами;
- ✓ полное описание исследуемого процесса разговорным языком в стихотворной форме.

4. Анализ численных результатов при математическом моделировании позволяет:
- ✓ установить методику экспериментальных исследований;
- ✓ скорректировать математическую модель;
- ✓ установить необходимость корректировки математической модели;
- ✓ принять решение о замене метода решения математической задачи.

5. Термин «некорректность» можно отнести:
- ✓ к методу решения математической задачи;
- ✓ к математической модели;
- ✓ к математической задаче;
- ✓ к исходным данным для решения задачи.

6. Для корректно поставленной математической задачи выберите все истинные утверждения:
- ✓ она устойчива по отношению к начальным условиям;
- ✓ любое ее решение лежит в области допустимых значений;
- ✓ она имеет решение для допустимых исходных данных;
- ✓ она не может иметь два или более решений.

7. Если погрешность вычислений при использовании алгоритма накапливается по линейному закону, то:
- ✓ алгоритм не является устойчивым;
- ✓ алгоритм является условно устойчивым;
- ✓ для определения устойчивости алгоритма необходима дополнительная информация;
- ✓ алгоритм называется линейно устойчивым.

8. В чем заключается задача оптимизации:
- ✓ в поиске минимума целевой функции?
- ✓ в поиске максимума целевой функции при заданных ограничениях?
- ✓ в поиске экстремума целевой функции без ограничений?
- ✓ в поиске корней целевой функции в заданной области?

9. Наименьшее значение функции в области определения есть:
- ✓ седловая точка;
- ✓ локальный минимум;
- ✓ глобальный минимум;
- ✓ точка, в которой производная функции может обратиться в 0.

10. Что такое градиент функции:
- ✓ число, которое показывает скорость изменения функции?
- ✓ вектор, который показывает направление и скорость наискорейшего возрастания функции?
- ✓ вектор, перпендикулярный антиградиенту?
- ✓ вектор, который показывает направление убывания функции?

11. Что показывает вектор антиградиента:
- ✓ скорость изменения целевой функции?
- ✓ направление наискорейшего возрастания функции?
- ✓ направление и скорость наискорейшего убывания функции?
- ✓ направление, перпендикулярное градиенту?

12. Как направлен градиент функции по отношению к линии уровня на плоскости:

- ✓ перпендикулярно в любой точке?
- ✓ перпендикулярно касательной в любой точке?
- ✓ параллельно?
- ✓ по касательной?

1. Выберите свойства, которые характерны для модуля градиента функции:
   - ✓ это вектор с положительными компонентами;
   - ✓ это возрастающая скалярная функция;
   - ✓ график функции $|\nabla f(x)|$ пересекает ось Ox в точке минимума функции $f(x)$;
   - ✓ является длиной вектора частных производных функции $f(x)$ в точке x.

14. В каких случаях модуль градиента одномерной функции $f(x)$ является убывающей функцией в области определения:

- ✓ когда $f(x)$ – убывающая функция?
- ✓ когда вторая производная $f''(x) < 0$?
- ✓ когда скорость роста функции $f(x)$ – убывающая функция?
- ✓ когда $f(x)$ целиком лежит в отрицательной области?

15. Матрица Гессе – это:

- ✓ матрица частных производных первого порядка функции n переменных;
- ✓ матрица частных производных вектора-функции левых частей СНАУ $f_i(X) = 0;\ X = (x_1, x_2, \ldots, x_n);\ i = 1, \ldots, n$ $\left(\dfrac{\partial f_i}{\partial x_j}\right)$ $j = 1, \ldots, n$;
- ✓ матрица частных производных второго порядка функции n переменных;
- ✓ то же, что и матрица Якоби для СНАУ.

16. Градиент функции $y = f(x)$ используется при поиске корня:

- ✓ в методе хорд;
- ✓ в методе касательных;
- ✓ в методе наискорейшего спуска;
- ✓ в методе Ньютона для минимизации функции нескольких переменных.

К разделу 2. Элементы линейного программирования

17. Сколько решений может иметь задача линейного программирования (выберите все правильные варианты ответов):
   - ✓ единственное решение?
   - ✓ несколько решений?
   - ✓ бесконечное множество решений?
   - ✓ ни одного решения?

18. По каким причинам может отсутствовать решение задачи линейного программирования (выберите все правильные варианты ответов):
   - ✓ система ограничений задачи несовместна?
   - ✓ область допустимых значений не ограничена?
   - ✓ линия уровня проходит через границу области допустимых значений?
   - ✓ система ограничений определяет невыпуклую область?

19. Как задачу отыскания максимума линейной формы свести к задаче отыскания минимума:
   - ✓ сменить знак целевой функции?
   - ✓ сменить знак аргумента целевой функции?
   - ✓ найти минимум функции, обратной к целевой?
   - ✓ найти минимум целевой функции в области, являющейся дополнением к заданной ограничениями?

20. Какие из компьютерных средств целесообразно использовать при решении задачи линейного программирования (введите название программного продукта)?

21. Область допустимых значений для ЗЛП может представлять собой:
   - ✓ первый квадрант на координатной плоскости;
   - ✓ выпуклый многоугольник;
   - ✓ куб;
   - ✓ круг.

22. Опорными решениями ЗЛП являются:
   - ✓ внутренние точки допустимого множества;
   - ✓ точки на границе допустимой области;
   - ✓ крайние точки допустимого множества;
   - ✓ точки локальных оптимумов функции-критерия.

23. Какое количество опорных решений может иметь ЗЛП (выделите все возможные варианты):

- ✓ одно решение?
- ✓ бесконечное число?
- ✓ равное количеству ограничений?
- ✓ несколько?

24. ЗЛП не имеет решений, когда:

- ✓ целевая функция является разрывной;
- ✓ область допустимых значений не регулярна;
- ✓ область допустимых значений не ограничена сверху и снизу;
- ✓ все ограничения являются равенствами.

25. ЗЛП некорректна, когда:

- ✓ количество переменных в целевой функции не равно количеству переменных в ограничениях;
- ✓ целевая функция не является линейной формой;
- ✓ область допустимых значений для задачи минимизации не ограничена сверху;
- ✓ все допустимые значения сосредоточены на отрезке прямой.

26. Целевая функция в задаче о раскрое может представлять собой:

- ✓ количественную характеристику отходов производства;
- ✓ стоимость затрат на раскрой материала;
- ✓ количество необходимых заготовок;
- ✓ затраты на утилизацию отходов производства.

27. Ограничения в задаче о рационе могут иметь следующее смысловое значение:

- ✓ являются ограничениями на потребление определенных продуктов;
- ✓ определяют условия удовлетворения организма в необходимых питательных веществах;
- ✓ ограничивают затраты на стоимость потребительской корзины;
- ✓ определяют наиболее рациональные количества потребляемых веществ.

28. Смысл задачи о планировании производства как задачи линейного программирования состоит:

- ✓ в минимизации затрат на производство при условии выполнения плана производства;
- ✓ в максимизации цены продукции при минимальных энергетических затратах;

- ✓ в достижении плановых показателей по выпуску продукции при удовлетворительном ее качестве;
- ✓ в минимизации себестоимости продукции при выполнении плана производства.

29. Какое минимальное количество ограничений на переменные двухмерной ЗЛП необходимо, чтобы допустимая область представляла собой треугольник:

- ✓ одно?
- ✓ два?
- ✓ три?
- ✓ четыре?

30. Какую область определяют ограничения двухмерной ЗЛП: $x_1 > 0$, $x_2 > 0$, $x_1 + x_2 \geq 1$, $x_1 + x_2 \leq 2$:

- ✓ треугольник;
- ✓ квадрат;
- ✓ трапецию;
- ✓ пятиугольник.

31. Что представляет собой поверхность уровня целевой функции $f(x) = x_1 + 2x_2 + 3x_3$:

- ✓ плоскость, параллельную плоскости *xOy*?
- ✓ сферу?
- ✓ плоскость, перпендикулярную вектору $\{1, 2, 3\}$?
- ✓ часть плоскости, расположенную в первом квадранте?

32. Опорное решение ЗЛП – это:

- ✓ крайняя точка допустимого множества ЗЛП;
- ✓ одно из решений ЗЛП;
- ✓ точка пересечения гиперповехностей *n*-мерного пространства;
- ✓ точка, координаты которой удовлетворяют всем ограничениям ЗЛП.

33. Пусть $A_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{12} \\ \vdots \\ a_{1m} \end{pmatrix}$, $A_2 = \begin{pmatrix} a_{21} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{2m} \end{pmatrix}$, …, $A_n = \begin{pmatrix} a_{n1} \\ a_{n2} \\ \vdots \\ a_{nm} \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$ – вектор-столбцы и вектор свободных членов ограничений в канонической постановке ЗЛП. Равенство $A_1x_1 + A_2x_2 + \ldots + A_nx_n = B$ означает:

- ✓ линейную зависимость векторов $A_1, A_2, \ldots, A_n$;

- ✓ систему ограничений на векторы $A_1, A_2, \ldots, A_n$ в ЗЛП;
- ✓ вектор $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ – опорное решение ЗЛП;
- ✓ векторы $A_1, A_2, \ldots, A_n, B$ не являются линейно независимыми.

34. Какие из выражений являются истинными:
- ✓ ЗЛП может иметь бесконечное множество опорных решений?
- ✓ размерность вектора опорного решения равна количеству ограничений типа равенств в канонической постановке ЗЛП?
- ✓ вектор опорного решения имеет только неотрицательные компоненты?
- ✓ размерность вектора опорного решения равна размерности ЗЛП?

35. Для нахождения опорного решения ЗЛП в канонической форме необходимо:
- ✓ найти единственное решение СЛАУ, задающей ограничения на переменные ЗЛП;
- ✓ найти произвольное решение СЛАУ, задающей ограничения на переменные ЗЛП;
- ✓ найти коэффициенты разложения вектора B по базису $A_{i_1}, A_{i_2}, \ldots, A_{i_k}$ для системы ограничений ЗЛП $\sum_{i=1}^{n} A_i x_i = B$;
- ✓ найти разложение вектора B по базису $A_{i_1}, A_{i_2}, \ldots, A_{i_k}$ для системы ограничений ЗЛП $\sum_{i=1}^{n} A_i x_i = B$ с положительными координатами.

К разделу 3. Элементы выпуклого программирования

36. Какую область определяет неравенство $f(x) - g(x) \le 0$, если $f(x)$ – выпуклая, а $g(x)$ – вогнутая:
- ✓ вогнутую?
- ✓ регулярную?
- ✓ выпуклую?
- ✓ произвольную?

37. Как соотносятся между собой векторы $\nabla f(x^*)$ и некоторое направление $\bar{d}$, если $f'_{\bar{d}}(x^*) = 0$:
- ✓ перпендикулярны?
- ✓ параллельны и направлены в одну сторону?
- ✓ противонаправлены?
- ✓ скалярное произведение этих векторов равно 0?

38. В каких случаях модуль градиента $\left|\nabla f(x)\right|$ одномерной функции может иметь большую скорость роста, чем сама функция $f(x)$:

- ✓ всегда, когда $f(x)$ – возрастающая функция?
- ✓ всегда, когда $f'(x)$ – возрастающая функция?
- ✓ когда $f(x)=e^{kx}$, $k>1$?
- ✓ когда $\left|f'(x)\right|<\left|f''(x)\right|$?

39. Выпуклое множество – это:

- ✓ область значений выпуклой функции;
- ✓ множество, лежащее целиком в одном из полупространств, которое образуется при пересечении всего пространства гиперплоскостью, касательной к произвольной точке границы множества;
- ✓ множество, которое вместе с двумя своими произвольными точками содержит весь отрезок, соединяющий эти точки;
- ✓ множество V, для которого выполняется соотношение:

if $x_1 \in V$ & $x_2 \in V \Rightarrow \{\forall\lambda \in [0,1] \Rightarrow \lambda x_1 + (1-\lambda)x_2 \in V\}$.

40. Выпуклая функция – это:

- ✓ функция, не имеющая точек разрыва;
- ✓ функция, матрица Гессе которой в области определения положительно определена;
- ✓ функция, которая имеет производную во всей области определения;
- ✓ функция, не имеющая точек перегиба.

41. Выберите истинные утверждения:

- ✓ строго выпуклая функция выпукла;
- ✓ непрерывно дифференцируемая функция выпукла;
- ✓ выпуклая функция всегда непрерывна;
- ✓ выпуклая функция не обязательно дифференцируема.

42. Выпуклая функция – это функция, для которой в области определения выполняются условия:

- ✓ $f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \le \lambda f(x_1) + (1-\lambda)f(x_2)$, $\lambda \le 1$;
- ✓ $f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \le \lambda f(x_1) + (1-\lambda)f(x_2)$, $0 \le \lambda \le 1$;
- ✓ $f(0{,}5x_1 + 0{,}5x_2) \le 0{,}5f(x_1) + 0{,}5f(x_2)$;
- ✓ $f(x_1 + \lambda x_2) \le f(x_1) + \lambda f(x_2)$, $\forall\lambda \in R$.

43. Выпуклая функция должна быть определена:
- на вогнутом множестве;
- ✓ на выпуклом множестве;
- ✓ на множестве

$D = \{x \in R^n: \text{ если } x_1 \in D; x_2 \in D \Rightarrow \lambda x_1 + (1-\lambda)x_2 \in D \ \forall\lambda \in [0,1]\}$;
- ✓ на любом подмножестве R^n.

44. Множество точек $M = \{x \in R^n: \ x = \lambda x_1 + (1-\lambda)x_2 \ \ \forall\lambda \in [0,1]\}$ определяет:
- ✓ отрезок между точками x_1, x_2 в пространстве R^n;
- ✓ прямую линию в пространстве R^n;
- ✓ отрезок на прямой с направляющим вектором λ;
- ✓ отрезок прямой, соединяющий точки x_1, x_2.

45. Выпуклая функция всегда:
- ✓ четная;
- ✓ нечетная;
- ✓ непрерывная;
- ✓ дифференцируемая.

46. Определите соответствие:

✓ $f(x) = x^2, \quad x < 0$	– нечетная;
✓ $f(x) = x^3$	– выпуклая;
✓ $f(x) = e^x$	– возрастающая;
✓ $f(x) = -\ln x, \ \ x > 0$	– убывающая.

47. Выпуклая функция непрерывна в любой внутренней точке области определения D, так как:
- ✓ она определена на выпуклом множестве;
- ✓ для нее выполняется условие $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0), \ \forall x_0 \in D$;
- ✓ дифференцируема в любой внутренней точке;
- ✓ все собственные числа ее матрицы Гессе положительны.

48. Каким свойствам удовлетворяет функция $f(x) = |x|, \ x \in R^n$:
- ✓ выпуклая, дифференцируемая?
- ✓ выпуклая, непрерывная?
- ✓ четная, выпуклая?
- ✓ четная, непрерывная?

49. Производными по направлению для функции $y=|x|$ являются (выберите возможные варианты ответа):

-1; 1; $\frac{1}{x}$; $\left|\frac{1}{x}\right|$.

50. Для функции $y=|x_1+x_2|$ величина –1 является производной по направлению:

- ✓ $d=(1,\ 1)$;
- ✓ $d=(0,\ 1)$;
- ✓ $d=(-1, 0)$;
- ✓ $d=(0, -1)$.

51. Локальный максимум вогнутой функции $g(x)$ является также:

- ✓ ее глобальным максимумом;
- ✓ глобальным минимумом функции $-g(x)$;
- ✓ локальным минимумом функции $-g(x)$;
- ✓ локальным минимумом функции $\frac{1}{g(x)}$.

52. Пусть $g_i(x),\ i=1,\dots,n$ – система вогнутых функций. Множество Ω – выпуклое, если:

- ✓ $\Omega=\{x: g_i(x)\le 1,\ i=1,\dots,n\}$;
- ✓ $\Omega=\{x: g_i(x)\le 0,\ i=1,\dots,n\}$;
- ✓ $\Omega=\left\{x: \sum_{i=1}^{n} g_i(x)\le 0\right\}$;
- ✓ $\Omega=\{\forall x_1, x_2 : \{g_i(x_1)\le 0,\ g_i(x_2)\le 0,\ i=1,\dots,n\}\Rightarrow g_i(x_i+(1-\lambda)x_2)\le 0\}$

53. Функция $z=x^2+y^2$ является выпуклой в области *D*, так как:

- ✓ $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\ge 0,\ \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\ge 0\quad \forall(x,y)\in D$;
- ✓ $\begin{vmatrix} \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y} \\ \frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x} & \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \end{vmatrix}\ge 0,\ \left|\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right|\ge 0$;

- ✓ матрица Гессе $\begin{pmatrix} \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \end{pmatrix}$ положительно определена;
- ✓ матрица Гессе $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ имеет положительные главные миноры.

54. Неравенство $f(x) - g(x) \le 0$, где $f(x)$ – вогнутая, а $g(x)$ – выпуклая функции, определяет:
- ✓ – выпуклую область;
- ✓ – вогнутую область;
- ✓ – произвольную область;
- ✓ – не определяет никакую связную область.

55. Составить соответствие утверждений в левой и правой колонках.
В некоторой точке из области определения функции:

✓ Производная по направлению равна нулю	– функция постоянна по данному направлению;
✓ Производная по направлению есть величина положительная	– функция может иметь в данной точке локальный экстремум;
✓ Производная по направлению отрицательна	– функция возрастает в данном направлении;
✓ Производная по направлению равна нулю в любой точке данного направления	– направление указывает на возможную точку локального минимума.

56. Допустимая область ЗВП, определяемая системой неравенств $x^2 + y^2 \le 1$; $(x-1)^2 + y^2 \le 1$, является:
- ✓ нерегулярной;
- ✓ выпуклой;
- ✓ удовлетворяет условию Слейтера;
- ✓ открытой.

57. Допустимая область удовлетворяет условию Слейтера для ЗВП, если она (выберите все возможные варианты ответа):
- ✓ не регулярна;
- ✓ не пустая;
- ✓ выпуклая;
- ✓ содержит хотя бы одну точку, удовлетворяющую ограничениям ЗВП.

58. Для ЗВП: $x^2 \to \min$; $x^2 + y^2 \le 1$; $x \ge 0$; $y \ge 0$, решением будет:
- ✓ точка $(0{,}0)$;
- ✓ отрезок $0 \le x \le 1$; $y = 0$;
- ✓ отрезок $x = 0$; $0 \le y \le 1$;
- ✓ точка $(1{,}0)$.

59. Функция Лагранжа ЗВП является:
- ✓ выпуклой;
- ✓ положительно определенной;
- ✓ вогнутой;
- ✓ суммой выпуклых функций.

60. Функция Лагранжа в седловой точке $\left(x^*, u^*\right)$:
- ✓ минимальна;
- ✓ максимальна;
- ✓ имеет локальный минимум по переменной x;
- ✓ имеет глобальный максимум по переменной u.

61. Функцией Лагранжа для ЗВП: $x^2 \to \min\limits_{x\in\Omega}$; $x \in \Omega \subset R^2$; $x_1^2 + x_2^2 \le 1$; $x_1 \ge 0$, $x_2 \ge 0$, будет функция:
- ✓ $x_1^2 + x_2^2 + u_1 x_1^2 + u_2$;
- ✓ $x_1^2 + u_1 x_1^2 + u_2 x_2^2$;
- ✓ $x_1^2 - u_1\left(x_1^2 + x_2^2 - 1\right)$;
- ✓ $u_1 x_1^2 + u_2 x_2^2 + x_1^2$.

62. Для функции Лагранжа $L(x,u)$ ЗВП в седловой точке $\left(x^*, u^*\right)$ можно записать:
- ✓ $L\left(x^*, u^*\right)$ имеет глобальный максимум по переменным x, u;
- ✓ $L\left(x^*, u^*\right) = \max\limits_{x\in\Omega} \min\limits_{u_j \ge 0} L(x,u)$;
- ✓ $L\left(x^*, u^*\right) = \min\limits_{x\in\Omega} \max\limits_{u_j \ge 0} L(x,u)$;
- ✓ $L\left(x^*, u\right) \le L\left(x^*, u^*\right) \le L\left(x, u^*\right)$.

63. Выберите условия выполнения теоремы Куна – Таккера:

- ✓ допустимая область является регулярной;
- ✓ для функции-критерия выполняется условие Слейтера;
- ✓ пара векторов x^*, u^*, где x^* – решение ЗВП, а u^*: $u_j^* \geq 0$, является седловой точкой ЗВП;
- ✓ векторы x^*, u^* являются множителями Лагранжа.

64. Выберите верные утверждения:

- ✓ теорема Куна – Таккера представляет собой необходимые и достаточные условия существования седловой точки ЗВП;
- ✓ существование седловой точки ЗВП является достаточным, но не необходимым условием существования решения ЗВП;
- ✓ все компоненты векторов x^* и u^*, где x^* – решение ЗВП, в седловой точке строго положительны;
- ✓ теорема Куна – Таккера справедлива как для дифференцируемых, так и для недифференцируемых функций.

65. Исходя из свойств седловой точки ЗВП:

$$L(x^*, u) \leq L(x^*, u^*) \leq L(x, u^*),$$

выберите справедливое неравенство:

- ✓ $f(x) + \sum_{j=1}^{m} u_j^* g_j(x) \leq f(x^*) + \sum_{j=1}^{m} u_j g_j(x^*)$;
- ✓ $f(x^*) + \sum_{j=1}^{m} u_j g_j(x^*) \leq f(x^*) + \sum_{j=1}^{m} u_j^* g_j(x^*)$;
- ✓ $f(x) + \sum_{j=1}^{m} u_j^* g_j(x) \leq f(x^*) + \sum_{j=1}^{m} u_j^* g_j(x^*)$;
- ✓ $f(x^*) + \sum_{j=1}^{m} u_j^* g_j(x^*) \leq f(x^*) + \sum_{j=1}^{m} u_j g_j(x^*)$;

66. Какие из соотношений входят в систему необходимых и достаточных условий существования седловой точки функции Лагранжа ЗВП:

$$\left(x^*, \frac{\partial L^*}{\partial x}\right) = 0\ ? \qquad \frac{\partial L^*}{\partial u} \geq 0\ ? \qquad u^* \geq 0\ ? \qquad \left(u^*, \frac{\partial L^*}{\partial u}\right) = 0\ ?$$

67. Какие из соотношений входят в систему необходимых и достаточных условий существования седловой точки функции Лагранжа ЗВП:

$$\frac{\partial L^*}{\partial x} \geq 0\ ? \qquad x^* \geq 0\ ? \qquad \frac{\partial L^*}{\partial u} \leq 0\ ? \qquad \left(u^*, \frac{\partial L^*}{\partial x}\right) = 0\ ?$$

К разделу 4. Методы безусловной минимизации (минимизация без ограничений)

68. Пусть $x=(x_1, \dots, x_n)$; $F(x)=(F_1(x), F_2(x), \dots, F_m(x))$. Каковы могут быть размерности векторов x и F, чтобы можно было решать задачу минимизации функции $F(x)$:

- ✓ произвольные?
- ✓ $n=1$, m – произвольное целое?
- ✓ n – произвольное целое, $m=1$?
- ✓ $n=1$; $m=1$?

69. Пусть $f(x)$, $x=(x_1, \dots, x_n)$ – непрерывно дифференцируемая функция. Равенство $\nabla f(x^*)=0$, где ∇ – символ градиента, означает:

- ✓ x^* – точка минимума;
- ✓ x^* – точка максимума;
- ✓ x^* – точка перегиба;
- ✓ x^* – стационарная точка.

70. Стационарную точку функции можно найти:

- ✓ методом минимизации нулевого порядка;
- ✓ методом решения системы уравнений $\nabla f(x^*)=0$, где ∇ – символ градиента;
- ✓ методом минимизации первого порядка;
- ✓ методом интерполяции функции $f(x)$.

71. Составить соответствие в утверждениях. Указанные методы применяются при минимизации соответствующих функций:

✓ методы второго порядка	– недифференцируемых функций;
✓ методы нулевого порядка	– функций, имеющих производные любого порядка;
✓ методы первого порядка	– дифференцируемых функций, не имеющих вторых производных;
✓ методы аппроксимации	– выпуклых функций.

72. Для поиска минимума функции $f(x)$ с заданной точностью методом золотого сечения понадобилось вычисление четырех вложенных интервалов $[a_0, b_0]$, $[a_1, b_1]$, $[a_2, b_2]$, $[a_3, b_3]$. Сколько вычислений $f(x)$ потребовалось:

4?5?   8?   9?

73. Выберите положения, которые используются в методе золотого сечения:

- ✓ строится сходящаяся к точке минимума числовая последовательность;
- ✓ используется деление отрезка, которому принадлежит точка минимума, на три равные части;
- ✓ строится последовательность вложенных интервалов, каждый из которых содержит точку минимума;
- ✓ используется деление отрезка, содержащего точку минимума, на две неравные части так, чтобы отношение длины всего отрезка к длине большей его части равнялось отношению длин большей и меньшей частей.

74. После выполнения k шагов по методу золотого сечения вычислены новые значения $(x, y) \in [a_k, b_k]$:

$y := a_k + \gamma(b_k - a_k)$; $x := b_k + (\gamma - 1)(b_k - a_k)$.

Выберите оператор продолжения алгоритма из предложенных, следующий за оператором проверки условия

if $f(y) < f(x)$ then ...

- ✓ $a_{k+1} := a_k$; $b_{k+1} = y$;
- ✓ $a_{k+1} := x$; $b_{k+1} = b_k$;
- ✓ $a_{k+1} := y$; $b_{k+1} = b_k$;
- ✓ $a_{k+1} := a_k$; $b_{k+1} = x$.

75. Метод золотого сечения – это:

- ✓ метод одномерной оптимизации;
- ✓ метод многомерной оптимизации;
- ✓ итерационный метод;
- ✓ градиентный метод.

76. Как повысить точность нахождения решения в методе золотого сечения:

- ✓ увеличить количество итераций?
- ✓ уменьшить задаваемую погрешность?
- ✓ увеличить точность представления чисел компьютере?
- ✓ увеличить быстродействие ЭВМ?

77. Как влияет в методе золотого сечения сокращение исходного отрезка $[a, b]$:

- ✓ приводит к уменьшению времени поиска минимума функции?
- ✓ приводит к увеличению числа итераций при поиске минимума функции?

- ✓ позволяет получить результат с большей точностью?
- ✓ не влияет?

78. Параметр $\tau = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$ в методе золотого сечения выбран таким по следующим причинам (выберите истинные):
- ✓ позволяет построить сходящуюся последовательность интервалов $[a_k, b_k]$, содержащих x^* – точку минимума функции $f(x)$;
- ✓ позволяет минимизировать количество вычислений функции $f(x)$ за счет быстрой сходимости $a_k \to x^*$; $b_k \to x^*$ при $k \to \infty$;
- ✓ позволяет сократить количество вычислений $f(x)$ за счет правильной организации разбиения интервала $[a_k, b_k]$ точками x, y;
- ✓ позволяет организовать деление отрезка $[a_k, b_k]$ на три равные части.

1. Метод покоординатного спуска (выберите верные утверждения):
- ✓ является методом минимизации нулевого порядка;
- ✓ использует только частные производные минимизируемой функции;
- ✓ является методом последовательных приближений к точке минимума функции;
- ✓ используется только для минимизации функции одной переменной.

80. Метод покоординатного спуска (выберите верные утверждения):
- ✓ содержит в себе алгоритмы одномерной оптимизации;
- ✓ позволяет получать приближение к точке минимума сразу по всем переменным минимизируемой функции;
- ✓ реализуется только совместно с одним из методов одномерной минимизации;
- ✓ реализуется только совместно с методом золотого сечения.

81. Решением задачи безусловной минимизации является нахождение точки минимума x^* функции $f(x) = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Условием окончания работы метода покоординатного спуска является:
- ✓ полная однократная минимизация функции $f(x)$ по всем компонентам вектора $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$;
- ✓ $\left\| x^k - x^* \right\| \le \varepsilon$, где x^k – приближение к точке минимума на k-й итерации;

- ✓ $\left|f\left(x^*\right)-f\left(x^k\right)\right|\leq\varepsilon$;
- ✓ $\left|f\left(x^{k+1}\right)-f\left(x^k\right)\right|\leq\varepsilon$, где k и k + 1– приближение к точке минимума соответственно на k-м и (k + 1)-м шагах минимизации.

82. Пусть минимизируемая функция есть функция двух переменных $f\left(x_1,x_2\right)$. Минимизация функции методом покоординатного спуска с заданной точностью потребовала 4 шага. Сколько раз использовался метод одномерной минимизации для отыскания точки минимума $f\left(x_1,x_2\right)$:

- ✓ 2 раза?
- ✓ 4 раза?
- ✓ 8 раз?
- ✓ 16 раз?

83. Основными составляющими метода Хука и Дживса для минимизации функции являются:

- ✓ исследующий поиск;
- ✓ минимизация по выбранному направлению;
- ✓ поиск по образцу;
- ✓ поиск по направлению градиента.

84. Направление для минимизации в методе Хука и Дживса задается:

- ✓ вектором антиградиента;
- ✓ случайным образом;
- ✓ после циклического поиска компонент вектора направления убывания функции по всем переменным;
- ✓ одновременным изменением всех переменных в сторону убывания функции.

85. Если поиск по образцу в методе Хука и Дживса привел к нулевому вектору направления, необходимо:

- ✓ увеличить одно из приращений аргумента Δx_i;
- ✓ уменьшить все приращения аргумента Δx_i, $i=1, 2, \ldots, n$;
- ✓ задать новое начальное приближение x^0;
- ✓ считать процедуру поиска минимума функции законченной.

86. Выберите правильные утверждения.

Для реализации комплексного поиска Бокса необходимо:

- ✓ задать ограничения на все переменные минимизируемой функции;
- ✓ вычислить градиент функции в точке начального приближения к минимуму;

- ✓ построить многогранник со случайными $2n$ вершинами (n – размерность задачи) в области поиска минимума;
- ✓ заменить «наихудшую» вершину, в которой значение функции наибольшее, на центр тяжести всех вершин многогранника.

87. Метод Бокса гарантированно даст решение, если:
- ✓ минимизируемая функция непрерывна и дифференцируема, ограничения представлены в виде равенств;
- ✓ минимизируемая функция не монотонна, ограничения определяют выпуклую область;
- ✓ минимизируемая функция непрерывна и одноэкстремальна, ограничений нет;
- ✓ минимизируемая функция нескольких переменных дифференцируема.

88. При реализации метода случайного поиска для минимизации функции $f(x)$ используется формула $x^{k+1} = x^k + \lambda^k \left[\beta \frac{z^k}{\left\| z^k \right\|} + (1-\beta) r^k \right]$.

Выберите верные определения:
- ✓ x^{k+1}, x^k – векторы последовательных приближений к точке минимума;
- ✓ $\frac{z^k}{\left\| z^k \right\|}$ – нормированный вектор предыстории, включающий в себя все удачно выбранные направления до k-й итерации включительно;
- ✓ r^k – случайное число из интервала [0, 1];
- ✓ x^{k+1} принимается в качестве (k + 1)-го приближения к точке минимума, только если $f(x^{k+1}) < f(x^k)$.

89. Для минимизации функции $f(x)$ методом случайного поиска используется формула $x^{k+1} = x^k + \lambda^k \left[\beta \frac{z^k}{\left\| z^k \right\|} + (1-\beta) r^k \right]$.

Если $f(x^{k+1}) \geq f(x^k)$, то необходимо:
- ✓ получить новый вектор r^k и продолжить алгоритм случайного поиска;
- ✓ изменить вектор предыстории u^{k+1} посредством изменения параметра β;
- ✓ уменьшить коэффициент λ^k по формуле $\lambda^k := \lambda^k \alpha; \quad 0 \leq \alpha \leq 1$.

- ✓ считать точку x^k точкой минимума.

90. Выберите верные утверждения:
   - ✓ Если вектор-градиент функции нескольких переменных отрицателен, то он показывает направление убывания функции.
   - ✓ Градиент и антиградиент функции совпадают в точке минимума.
   - ✓ Градиент возрастающей функции нескольких переменных есть число положительное.
   - ✓ Градиент – это вектор, направленный перпендикулярно касательной плоскости поверхности в трехмерном пространстве, определяемой функцией $z = f(x, y)$.

91. Итерационный процесс минимизации по методу градиентного спуска определяется формулой: $x^{k+1} = x^k + \lambda^k s^k$. Укажите ошибочные утверждения:
   - ✓ $\lambda^k = \left(\lambda_1^k, \lambda_2^k, \ldots, \lambda_k^k\right)$ – k-тое приближение к точке минимума;
   - ✓ $s^k = \dfrac{\nabla f\left(x^k\right)}{\left\|\nabla f\left(x^k\right)\right\|}$, где $\nabla f\left(x^k\right)$ – градиент функции $f(x)$ – единичный вектор в направлении минимизации;
   - ✓ λ^k может быть как положительным, так и отрицательным числом, меньшим единицы;
   - ✓ размерности векторов x^k и $\nabla f\left(x^k\right)$, градиента функции $f(x)$, совпадают.

92. Методом градиентного поиска $x^{k+1} = x^k - \lambda^k \dfrac{\nabla f\left(x^k\right)}{\left\|\nabla f\left(x^k\right)\right\|}$ можно найти:
   - ✓ точку минимума;
   - ✓ точку перегиба;
   - ✓ стационарную точку;
   - ✓ точку максимума.

93. Методом градиентного поиска $x^{k+1} = x^k + \lambda^k \dfrac{\nabla f\left(x^k\right)}{\left\|\nabla f\left(x^k\right)\right\|}$ можно найти:
   - ✓ точку максимума;
   - ✓ стационарную точку;
   - ✓ точку минимума;
   - ✓ точку перегиба.

94. Если $x^* = \left(x_1^*,\ x_2^*,\ x_n^*\right)$ – точка минимума функции $f(x)$, то:

- ✓ $\left\|\nabla f\left(x^k\right)\right\| \to 0$ при $x^k \to x^*,\ i = 1,2,\ldots,n$;
- ✓ $\dfrac{\partial f\left(x^k\right)}{\partial x_i^k}$ неограниченно убывает при $x^k \to x^*$;
- ✓ $f\left(x^k\right) \to 0$ при $x^k \to x^*$;
- ✓ $|\Gamma| = 0$, где $\Gamma = \dfrac{\partial^2 f\left(x^k\right)}{\partial x_i\, \partial x_j}$ – матрица Гессе.

95. В процедуре минимизации функции используется формула $x^{k+1} = x^k - \lambda^k \dfrac{\nabla f\left(x^k\right)}{\left\|\nabla f\left(x^k\right)\right\|}$. Реализация такой процедуры может привести к аварийному останову вычислительного процесса, если (выберите верные утверждения):

- ✓ начиная из точки x^0 ни для какого значения λ^k уменьшение функции в точке x^1 не происходит;
- ✓ $f\left(x^k\right)$ имеет разрыв в точке x^k;
- ✓ x^k – стационарная точка функции $f(x)$;
- ✓ x^{k+1} – точка минимума функции $f(x)$.

96. Выберите возможные способы расчета параметра λ^k в формуле наискорейшего спуска $x^{k+1} = x^k - \lambda^k \dfrac{\nabla f\left(x^k\right)}{\left\|\nabla f\left(x^k\right)\right\|}$:

- ✓ $\lambda^k = \text{const} > 1$;
- ✓ $\lambda^k = \lambda^{k-1} \cdot \gamma, \quad \gamma < 1$;
- ✓ $\lambda^k = \lambda^{k-1} \cdot \gamma, \quad \gamma$ – возрастающая последовательность;
- ✓ $\lambda^k = \min\limits_{\lambda} f\left(x^k + \lambda^k s^k\right)$.

97. Выберите правильные утверждения:

- ✓ метод наискорейшего спуска при минимизации выпуклой функции сходится из любого начального приближения;
- ✓ метод наискорейшего спуска сходится к глобальному минимуму для любой дважды дифференцируемой функции;
- ✓ если функция имеет производные любого порядка и вогнута, то методом наискорейшего спуска можно найти ее максимум из любого начального приближения;

- ✓ для любой дифференцируемой функции метод наискорейшего спуска из любого начального приближения приведет в стационарную точку.

98. Выберите правильные утверждения:
- ✓ метод сопряженного градиента является методом нулевого порядка;
- ✓ на каждом шаге в методе сопряженного градиента выполняется минимизация функции по заданному направлению;
- ✓ условием окончания работы алгоритма поиска минимума функции по методу сопряженного градиента является равенство нулю всех частных производных функции;
- ✓ если все частных производные функции на (k + 1)-м шаге ее минимизации по методу сопряженного градиента окажутся равными 0, то произойдет останов работы алгоритма.

99. Выберите случаи из предложенных, когда работа алгоритма по методу Ньютона для минимизации функции

$$x^{k+1} = x^k - [\nabla^2 f(x^k)]^{-1} \cdot \nabla f(x^k)$$

на (k + 1)-м шаге будет прервана:
- ✓ $\left\|\nabla f(x^{k+1})\right\| < \left\|\nabla f(x^k)\right\|$;
- ✓ $\det(\nabla^2 f(x^k)) = 0$;
- ✓ $[\nabla^2 f(x^k)]$ – плохо обусловленной матрицы;
- ✓ $\left\|\nabla f(x^k)\right\| = 0$.

100. Из перечисленных выберите те задачи, которые можно решать методом Ньютона для минимизации функции.
- ✓ находить глобальный минимум любой дифференцируемой функции;
- ✓ решать систему линейных алгебраических уравнений;
- ✓ решать задачи нелинейного программирования без ограничений;
- ✓ находить минимумы квадратичных форм.

К разделу 5. Элементы нелинейного программирования

101. Каноническая форма записи существует (выберите правильные ответы):
- ✓ для задачи линейного программирования;
- ✓ для задачи нелинейного программирования;
- ✓ для задачи выпуклого программирования;

- ✓ для задачи поиска экстремума функции без ограничений.

102. Задача линейного программирования $z = f(x,y) \to \min\limits_{x,y}$; $\varphi(x,y) = 0$, сводится к задаче одномерной минимизации в случае (выберите правильные ответы):

- ✓ когда $f(x,y)$ и $\varphi(x,y)$ – дважды дифференцируемые функции;
- ✓ когда $\varphi(x,y)$ можно преобразовать к виду $x = g(y)$;
- ✓ когда $\varphi(x,y)$ можно преобразовать к виду $y = \varphi(x)$;
- ✓ когда x и y допускают параметрическое представление.

103. Для задачи нелинейного программирования $z = f(x,y) \to \min\limits_{x,y}$; $\varphi(x,y) = 0$, и функции $\Phi(x,y) = f(x,y) + \mu\varphi(x,y)$ выберите правильные записи метода множителей Лагранжа:

- ✓ $\begin{cases} f'_x(x,y) + \mu\varphi(x,y) = 0, \\ f'_y(x,y) + \mu\varphi(x,y) = 0, \\ \varphi(x,y) = 0. \end{cases}$
- ✓ $\begin{cases} \dfrac{f'_x}{\varphi'_x} = \dfrac{f'_y}{\varphi'_y} = -\mu, \\ \varphi(x,y) = 0. \end{cases}$
- ✓ $\Phi'_x = \Phi'_y = \Phi'_\mu = 0$.
- ✓ $\Phi'_x = \Phi'_y = \Phi'_z = 0$.

104. Выберите правильные утверждения:

- ✓ в методе штрафных функций функция штрафа выбирается независимо от функции – критерия минимизации;
- ✓ для решения ЗНП по методу штрафных функций используются методы безусловной минимизации;
- ✓ штрафная функция в методе штрафных функций для решения ЗНП имеет в качестве своих аргументов ограничения в виде неравенств;
- ✓ методом итерационных функций любую ЗНП можно свести к задаче на отыскание безусловного экстремума.

105. Метод штрафных функций позволяет:

- ✓ свести ЗНП с ограничениями к задаче без ограничений;
- ✓ использовать функцию Лагранжа для решения ЗНП;
- ✓ минимизировать целевую функцию;
- ✓ преобразовать систему ограничений.

106. Методы итерационных функций включают в себя (выберите правильные ответы):

- ✓ метод внешней точки;
- ✓ метод внутренних ограничений;
- ✓ метод внешнего поиска;
- ✓ комбинированный метод внешних и внутренних прямых.

107. В качестве функции штрафа в методе внутренней точки выбрана функция $\Phi(x, r_k) = r_k \sum_{i=1}^{m} \frac{1}{\varphi_i(x)}$. Выберите тип ограничений на функции $\varphi_i(x)$, для которых может быть использована такая функция штрафа:

- ✓ $\varphi_i(x) \le 0 \quad i = 1,...,n$;
- ✓ $\varphi_{i_k}(x) \ge 0$, $i_k \in I_k$; $\varphi_{j_m}(x) \le 0$, $j_m \in J_m$; $I_k \cup J_m = \{1,2,...,n\}$;
- ✓ $\varphi_{j_s}(x) = 0$, $j_s = J_s$; $\varphi_{i_e}(x) \ge 0$, $i_e \in I_e$; $J_s \cup I_e = \{1,2,...,n\}$;
- ✓ $\varphi_i(x) \ge 0 \quad i = 1,...,n$.

108. Выберите правильное утверждение:

- ✓ Если для реализации метода необходимо знать хотя бы одну точку из области допустимых значений ЗНП, то это – метод внешней точки.
- ✓ Метод внешней точки нельзя применять в комбинации с методом внутренней точки, так как они являются противоречивыми.
- ✓ В методе внешней точки штрафная функция обращается в 0 только внутри допустимой области ЗНП.
- ✓ В методе внешней точки штрафная функция всегда положительна.

109. В ЗНП ограничения присутствуют в виде неравенств $\varphi_i(x) \ge 0, i = 1, ..., n$. Выберите возможную функцию штрафа (из предложенных) для реализации метода внешней точки:

- ✓ $\Phi(x, R) = r_k \sum_{i=1}^{n} (\varphi_i(x))^2$;
- ✓ $\Phi(x, R) = r_k \sum_{i=1}^{n} (|\varphi_i(x)| - \varphi_i(x))^2$;
- ✓ $\Phi(x, R) = r_k \sum_{i=1}^{n} (\frac{|\varphi_i(x)|}{\varphi(x)} - 1)(\varphi_i(x))^2$;

- ✓ $\Phi(x,R)=r_k\sum_{i=1}^{n}(|\varphi_i(x)|-\varphi_i(x))(e^{\varphi_i(x)}-1)$.

110. ЗНП записана в виде: $f(x)\to\min_x$; $\varphi_i(x)\ge 0$, $i=1,...,n$. Пусть в некоторой точке x_0, такой что $\varphi_{i_k}(x)\ge 0$; $\varphi_{i_e}(x)\le 0$; $i_k\in I_k$; $i_e\in I_e$; $I_k\cup I_e=\{1,2,\dots,n\}$. Выберите правильно сформулированные функции для безусловной минимизации методом штрафных функций:

- ✓ $\Psi(x)=f^2(x)+\sum_{i_k\in I_k}\varphi_{i_k}^2(x)+\sum_{i_e\in I_t}(|\varphi_{i_e}(x)|-\varphi_{i_e}(x))^2$;
- ✓ $\Psi(x)=f^2(x)+\sum_{i_k\in I_k}\ln\varphi_{i_k}(x)+\sum_{i_e\in I_t}(|\varphi_{i_e}(x)|-\varphi_{i_e}(x))^2$;
- ✓ $\Psi(x)=f(x)+\sum_{i_k\in I_k}\frac{1}{\varphi_{i_k}(x)}+\sum_{i_e\in I_t}(|\varphi_{i_e}(x)|-\varphi_{i_e}(x))^2$;
- ✓ $\Psi(x)=f(x)+\sum_{i_k\in I_k}\ln\varphi_{i_k}(x)+\sum_{i_e\in I_t}\frac{1}{|\varphi_{i_e}(x)|}$.

111. Какие из предложенных формулировок теоремы Куна – Таккера для ЗНП верны:

- ✓ оптимальное решение ЗНП всегда является точкой Куна – Таккера ЗНП?
- ✓ если все функции, участвующие в постановке ЗНП, дифференцируемы, то точка Куна – Таккера является точкой локального минимума ЗНП?
- ✓ для дифференцируемых функций ЗНП точка минимума целевой функции ЗНП является точкой Куна – Таккера?
- ✓ для того чтобы точка была точкой Куна – Таккера, достаточно чтобы она была решением ЗНП, если целевая функция и функции ограничений – дифференцируемые?

112. Найдите соответствие между методом поиска экстремума и его характеристикой:

✓ метод Ньютона	– метод нулевого порядка;
✓ метод градиентного спуска	– метод первого порядка;
✓ метод золотого сечения	– метод второго порядка;
✓ метод половинного делени	– не является методом оптимизации.

113. Метод Ньютона сходится при минимизации функции за n итераций, где n – количество переменных, для:
- ✓ линейной функции;
- ✓ квадратичной функции;
- ✓ экспоненциальной функции;
- ✓ дважды дифференцируемой функции.

114. Функция Лагранжа для ЗНП представляет собой:
- ✓ целевую функцию, умноженную на множитель Лагранжа;
- ✓ произведение множителя Лагранжа на функцию ограничения;
- ✓ сумму целевой функции и произведения множителя Лагранжа на функцию ограничения;
- ✓ двухмерную линейную комбинацию целевой функции и функции ограничения.

ПРИМЕРНЫЙ ПЕРЕЧЕНЬ ВОПРОСОВ К ЗАЧЕТУ (II уровень)

1. Методы оптимизации (МО). Предмет и задачи курса. Построение математической модели. Классификация МО и задач математического программирования.

2. Основные понятия: допустимая точка, точка оптимума, направление, градиент, производная по направлению и ее представление через градиент функции, мгновенная скорость изменения функции по заданному направлению.

3. Теорема о функции, имеющей положительную производную по заданному направлению. Следствие из этой теоремы о равенстве нулю градиента функции в точке оптимума.

4. Общая формулировка задачи линейного программирования (ЗЛП). Пример. Стандартные формы представления ЗЛП. Каноническая форма ЗЛП. Векторная форма.

5.Типичные задачи линейного программирования: задача о раскрое, задача о рационе, задача о планировании производства, транспортная задача. Примеры.

6. Геометрическая интерпретация ЗЛП. Допустимая область, вершина допустимой области, примеры допустимых областей. Критерий оптимизации, линии уровня целевой функции, градиент. Геометрическое решение ЗЛП. Пример.

7. Свойства ЗЛП и их решений.

8. Опорные решения ЗЛП. Свойства опорных решений. Базис опорного решения. Способы отыскания опорного решения. Пример. Теорема об оптимальном опорном решении ЗЛП.

9. Симплекс-метод решения ЗЛП.

10. Решение ЗЛП в системе MathCAD.

11. Выпуклые множества, определения, примеры.

12. Выпуклые функции, определения, примеры.

13. Теоремы о выпуклых функциях: о непрерывности, о производной по направлению, о необходимом и достаточном условии выпуклости, о свойстве локального минимума, о выпуклости допустимой области, о матрице Гессе выпуклой функции.

14. Общая формулировка задачи выпуклого программирования. Пример.

15. Функция Лагранжа задачи выпуклого программирования. Пример.

16. Седловая точка задачи выпуклого программирования.

17. Теорема Куна – Таккера. Доказательство.

18. Условия теоремы Куна – Таккера для дифференцируемых функций.

19. Отыскание седловой точки задачи выпуклого программирования (на примере).

20. Методы безусловной минимизации:

– для функции одной переменной (методы полного перебора, золотого сечения, Ньютона, градиентного поиска);

– для функции нескольких переменных:

1) нулевого порядка (покоординатный спуск, комплексный поиск Бокса);

2) первого порядка (градиентный спуск, метод сопряженного градиента);

3) второго порядка (метод Ньютона).

21. Общая формулировка задачи нелинейного программирования. Пример.

22. Метод множителей Лагранжа (на примере функции двух переменных).

23. Теорема о седловой точке задачи нелинейного программирования. Отыскание седловой точки.

24. Методы штрафных функций. Общее понятие.

25. Метод внутренней точки. Пример.

26. Метод внешней точки. Пример.

27. Метод Левенберга – Марквардта. Пример.

28. Метод Тихонова. Пример.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В методическом пособии представлены рекомендации, тесты и примерные вопросы к зачету по дисциплине «Численные методы и методы оптимизации».

В результате изучения данной дисциплины и контроля усвоения материала у студентов и слушателей курса формируются знания основных алгоритмов типовых численных методов решения задач оптимизации, а также умения применять математические методы при решении профессиональных задач повышенной сложности, в том числе в интегрированной математической среде *MathCad* и *MS Excel*.

Необходимыми предпосылками для успешного усвоения дисциплины являются знания, умения, навыки, компетенции, сформированные у студентов при изучении курса вычислительной математики, а признаком успешного усвоения – получение оценки «зачтено».

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

Основная литература

1. Кошев А.Н. Численные методы решения задач оптимизации [Текст]: учеб. пособие / А.Н. Кошев, В.В. Кузина. – Пенза: ПГУАС, 2012. – 132 с.

Дополнительная литература

2. Аттетков, А.В. Введение в методы оптимизации [Электронный ресурс]: учеб. пособие / А.В. Аттетков, В.С. Зарубин, А.Н. Канатников.– Электрон. текстовые данные.– М.: Финансы и статистика, 2014.– 272 с.– Режим доступа: http://www.iprbookshop.ru/18794.– ЭБС «IPRbooks», по паролю.
3. Бахвалов, Н.С. Численные методы [Электронный ресурс]/ Н.С. Бахвалов, Н.П. Жидков, Г.М. Кобельков. – Электрон. текстовые данные.– М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2012.– 635 с.– Режим доступа: http://www.iprbookshop.ru/6502.– ЭБС «IPRbooks», по паролю.
4. Бахвалов, Н.С. Численные методы в задачах и упражнениях [Электронный ресурс]: учеб. пособие/ Н.С. Бахвалов, А.В. Лапин, Е.В. Чижонков. – Электрон. текстовые данные.– М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2013.– 240 с.– Режим доступа: http://www.iprbookshop.ru/12282.– ЭБС «IPRbooks», по паролю.
5. Кондаков, Н.С. Основы численных методов [Электронный ресурс]: практикум/ Н.С. Кондаков. – Электрон. текстовые данные. – М.: Московский гуманитарный университет, 2014.– 92 с.– Режим доступа: http://www.iprbookshop.ru/39690.– ЭБС «IPRbooks», по паролю.
6. Дьяконов, В.П. MATLAB. Полный самоучитель [Электронный ресурс]/ В.П. Дьяконов. – Электрон. текстовые данные.– М.: ДМК Пресс, 2014.– 768 с.– Режим доступа: http://www.iprbookshop.ru/7911.– ЭБС «IPRbooks», по паролю.
7. Седов, Е.С. Основы работы в системе компьютерной алгебры Mathematica [Электронный ресурс]/ Е.С. Седов. – Электрон. текстовые данные.– М.: Интернет-Университет Информационных Технологий (ИНТУИТ), 2016. – 401 с.– Режим доступа: http://www.iprbookshop.ru/16717.– ЭБС «IPRbooks», по паролю.

Методические указания для обучающихся по освоению дисциплины

8. Контрольно-измерительные материалы по курсу «Численные методы и методы оптимизации» [Текст]: учебно-методическое пособие / В.В. Кузина, А.Н. Кошев. – Пенза: ПГУАС, 2013. – 60 с.

Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети «Интернет», необходимых для освоения дисциплины

1. http://www.intuit.ru/
2. http://www.exponenta.ru/
3. www.mathnet.ru – общероссийский математический портал;
4. http://e.lanbook.com/books/?p_f_1_temp_id=18&p_f_1_65=917&p_f_1_63=&p_f_1_67= – электронно-библиотечная система, издательство «Лань»;
5. www.elibrary.ru – научная электронная библиотека;
6. http://lib.mexmat.ru/ – электронная библиотека механико-математического факультета МГУ;
7. http://www.newlibrary.ru/genre/nauka/matematika/kompyutery_i_matematika/ – электронная библиотека по математике;
8. http://www.edu.ru/modules.php?op=modload&name=Web_Links&file=index&l_op=viewlink&cid=2851 – федеральный портал российского профессионального образования: численные методы;
9. https://mipt.ru/education/chair/computational_mathematics/study/materials/compmath/ – кафедра вычислительной математики МФТИ: вычислительная математика (3 курс).

ОГЛАВЛЕНИЕ

Учебное издание

Кузина Валентина Владимировна
Кошев Александр Николаевич

ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ И МЕТОДЫ ОПТИМИЗАЦИИ
Методические указания для подготовки к зачету
по направлению подготовки 09.03.02
«Информационные системы и технологии»

В авторской редакции
Верстка Н.В. Кучина

Подписано в печать 23.05.16. Формат 60х84/16.
Бумага офисная «Снегурочка». Печать на ризографе.
Усл.печ.л. 2,325. Уч.-изд.л. 2,5. Тираж 80 экз.
Заказ № 331.

Издательство ПГУАС.
440028, г. Пенза, ул. Германа Титова, 28.