МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Федеральное государственное бюджетное образовательное
учреждение высшего образования
«Пензенский государственный университет
архитектуры и строительства»
(ПГУАС)

ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ И МЕТОДЫ ОПТИМИЗАЦИИ

Методические указания
для выполнения самостоятельной работы
по направлению подготовки 09.03.02
«Информационные системы и технологии»

Пенза 2016

УДК 519.6 (075.8)
ББК 22.193я73
Ч-67

Рекомендовано Редсоветом университета

Рецензент – доктор технических наук, профессор
А.М. Данилов (ПГУАС)

Ч-67 **Численные** методы и методы оптимизации: методические указания для выполнения самостоятельной работы по направлению подготовки 09.03.02 «Информационные системы и технологии» / В.В. Кузина, А.Н. Кошев. – Пенза: ПГУАС, 2016. – 28 с.

Изложены материалы для подготовки студентов к самостоятельной работе по дисциплине «Численные методы и методы оптимизации»: контрольные вопросы и задания для самопроверки уровня теоретических знаний и практических навыков решения задач, рекомендации для подготовки к входному и текущему контролю, задания для коллоквиума, библиографический список рекомендуемых источников.

Методические указания подготовлены на кафедре «Информационно-вычислительные системы» и предназначены для студентов, обучающихся по программе подготовки академического бакалавриата по направлению 09.03.02 «Информационные системы и технологии» очной формы обучения при изучении дисциплины «Численные методы и методы оптимизации».

ПРЕДИСЛОВИЕ

Самостоятельная работа студента – это вид учебной деятельности, выполняемый обучающимся без непосредственного контакта с преподавателем или управляемый преподавателем опосредовано через специальные учебные и методические материалы в соответствии с учебным планом и рабочей программой дисциплины.

Самостоятельная работа студентов, обучающихся в ФГБОУ ВО «Пензенский государственный университет архитектуры и строительства» по программе подготовки академического бакалавриата по направлению 09.03.02 «Информационные системы и технологии» очной формы обучения при изучении дисциплины «Численные методы и методы оптимизации» предназначена для овладения дисциплиной и включает:

– работу с учебными и методическими пособиями по дисциплине, конспектом лекций и др. с целью усвоения теоретического материала дисциплины, рассмотренного в рамках лекционных занятий, и тем, предложенных для самостоятельного изучения;

– подготовку к предстоящей лабораторной работе и оформление проделанной лабораторной работы в соответствии с методическими рекомендациями;

– подготовку к входному, текущему и промежуточному видам контроля, включающей повторение теоретического материала и выполнение практических заданий с целью обретения навыков решения типовых и творческих задач;

– выполнение расчетно-графической работы;

– поиск информации по предложенной теме научного исследования.

Самостоятельная работа студента направлена на формирование следующих компетенций:

– владение широкой общей подготовкой (базовыми знаниями) для решения практических задач в области информационных систем и технологий;

– способность использовать основные законы естественнонаучных дисциплин в профессиональной деятельности, применять методы математического анализа и моделирования, теоретического и экспериментального исследования.

ВВЕДЕНИЕ

На самостоятельную работу студента (СРС) при изучении дисциплины «Численные методы и методы оптимизации» отводится 52 часа, что составляет 48% от общей трудоемкости изучения дисциплины.

Самостоятельная работа студента представляет собой способ активного, целенаправленного приобретения студентом новых для него знаний и умений без непосредственного участия в этом процессе преподавателей и является, как правило, внеаудиторной работой.

Самостоятельная работа включает учебную, учебно-исследовательскую, научно-исследовательскую работу студентов, выполняемую во внеаудиторное время по заданию и при методическом руководстве преподавателя, но без его непосредственного участия.

Самостоятельная работа проводится с целью вовлечения студента в самостоятельную познавательную деятельность, формирующую у него потребность в систематическом самообразовании, что способствует стимулированию профессионального роста студентов, воспитанию их творческой активности.

Самостоятельная работа студентов, обучающихся в ФГБОУ ВО «Пензенский государственный университет архитектуры и строительства» по программе подготовки академического бакалавриата по направлению 09.03.02 «Информационные системы и технологии» очной формы обучения при изучении дисциплины «Численные методы и методы оптимизации» предназначена для овладения дисциплиной и направлена на решение следующих задач:

– приобретение обучающимися знания о численных методах алгебры и математического анализа, их применимости в профессиональной деятельности;

– формирование умения применять методы оптимизации для отыскания точек экстремума функций без ограничений и при их наличии;

– приобретение обучающимися знания об оптимизации целевых функций без ограничений и с ограничениями различного вида для их дальнейшего применения в профессиональной деятельности;

– выработка умения реализовывать численные методы решения задач оптимизации в различных интегрированных математических средах (MathCad, Matlab и др.).

Критериями оценки результатов самостоятельной работы студента являются:

− уровень освоения студентом учебного материала;

– демонстрация освоения знаний при устном опросе (обоснованность и четкость изложения ответа) и выполнение расчетно-графической и лабораторных работ;

– сформированность умений и использование теоретических знаний при выполнении практических заданий;

– владение навыками использования численных методов решения типовых и творческих задач с использованием пакетов прикладных программ;

– умение реализовывать вычислительные алгоритмы в виде компьютерных программ.

Контроль самостоятельной работы студентов проводится в виде устного опроса, выполнения и защиты расчетно-графической и лабораторных работ, коллоквиумов, компьютерного тестирования и зачета.

Окончательная оценка освоения дисциплины в форме «зачтено» – «не зачтено» производится на зачете и заносится в зачетную книжку студента.

МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ ПО САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЕ СТУДЕНТОВ

Самостоятельная работа предполагает максимальную активность студентов в организации умственного труда, поиске информации, стремлении получить знания, овладении навыками и умениями.

Самостоятельную работу студентов по дисциплине «Численные методы и методы оптимизации» можно разделить на аудиторную, организуемую преподавателем, и внеаудиторную, организуемую студентом.

Аудиторная самостоятельная работа проводится в виде входного контроля знаний, выполнения лабораторных работ, коллоквиума, компьютерного тестирования и зачета.

Внеаудиторная самостоятельная работа студента включает:

– текущую работу над материалом учебной дисциплины – конспектирование лекций, работу с учебной и научной литературой, в том числе, с использованием электронных ресурсов сети Интернет, Web-серверов научных библиотек, в результате которой студент получает навыки пользования словарями, энциклопедиями, справочниками и поисковыми системами; узнает о новых научных разработках в области развития и применения численных методов;

– подготовку к лабораторным занятиям, коллоквиумам, тестированию и зачету;

– выполнение семестровых домашних заданий (ответов на контрольные вопросы, решения задач, составления алгоритмов и программ и т.д.).

Внеаудиторная самостоятельная работа студента проводится с целью:

– систематизировать и закрепить полученные теоретические знания и практические умения и навыки;

– углубить и расширить теоретические знания по дисциплине;

– сформировать общие и профессиональные компетенции;

– сформировать способности к саморазвитию, совершенствованию и самоорганизации;

– развить самостоятельность, ответственность, организованность.

Перед выполнением студентами внеаудиторной самостоятельной работы преподаватель знакомит студентов с основными требованиями, предъявляемыми к выполнению задания, которые включают: цель задания, содержание и сроки выполнения, ориентировочный объем работы, форму представления результатов работы, критерии оценки. Преподаватель предупреждает студентов о возможных типичных ошибках, встречающихся при выполнении задания.

Для подготовки к входному контролю, который состоит в выполнении лабораторной работы по исследованию функции методом дифференциального исчисления, рекомендуется повторить такие понятия как область определения и область значений функции; точки разрыва; нули функции; асимптоты; четность-нечетность функции; периодичность; интервалы монотонности и точки экстремума; интервалы выпуклости-вогнутости и точки перегиба; производные первого и второго порядков; пределы функции; построение графиков функций.

В основе подготовки к лабораторной работе лежит проработка лекционного материала, а также ознакомление с рекомендованной по заданной теме учебной и научной литературой, включая информацию официальных интернет-ресурсов.

При подготовке к коллоквиуму, который содержит типовые и творческие задания на знание основных численных методов оптимизации, рекомендуется обратить внимание на графический и аналитический методы решения задач линейного программирования; доказательство выпуклости функций и решение задач выпуклого программирования; методы условной и безусловной оптимизации при решении задач нелинейного программирования.

Подготовка к зачету предполагает повторение теоретического материала по всем темам курса, в соответствии с рабочей программой, а также решение задач математического программирования с использованием компьютерных технологий.

Критериями оценки результатов внеаудиторной самостоятельной работы студента являются:

– уровень освоения студентом учебного материала (пороговый, повышенный, высокий);

– умение студента использовать теоретические знания при выполнении лабораторных заданий;

– сформированность знаний и умений;

– умение активно использовать электронные образовательные ресурсы, находить необходимую информацию и применять ее в учебном процессе;

– обоснованность и четкость изложения ответа;

– оформление выполненных заданий в соответствии с требованиями;

– умение четко сформулировать проблему, провести анализ литературных источников и обосновать выбор метода решения задачи;

– умение определить, проанализировать альтернативные возможности, варианты решения.

Рекомендуемая литература разделена на основную и дополнительную.

ПРОГРАММА САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ СТУДЕНТОВ

Раздел 1. Введение в численные методы и методы оптимизации

На СРС отводится 6 часов.

Обратить внимание на:

– знание математического аппарата современных численных методов;

– умение применять численные методы решения задач оптимизации в различных интегрированных математических средах;

– владение основными численными методами решения прикладных задач в профессиональной сфере.

Тема 1.1. Введение в численные методы и методы оптимизации. Предмет и задачи курса, представление о методах математического программирования и их классификации.

Тема 1.2. Основные определения.

Тема 1.3. Теоремы о функции, имеющей производную по заданному направлению.

Контрольные вопросы и задания

1. Может ли в задаче нелинейного программирования целевая функция быть линейной?

2. Какой вид имеет целевая функция в задаче выпуклого программирования?

3. Всегда ли решение задачи математического программирования является стационарной точкой целевой функции?

4. Нарисуйте локальный и глобальный минимумы функции в некоторой области.

5. Определите стационарную точку функции

$$f(x_1, x_2) = x_1^3 + x_2^2 - x_1 - x_2$$

на интервале $x_1 \in (0, 2)$; $x_2 \in (0, 2)$.

6. Задана точка $X^0(1,1)$ и определено направление $\mathbf{D} = (2,1)$. Точки на прямой, соответствующей направлению $\mathbf{D}$ и проходящей через заданную точку, выражаются уравнением

$$y = X^0 + \tau D .$$

Напишите уравнение прямой, проходящей через заданную точку X^0.

7. Для функции $\Phi(x_1, x_2) = x_1^2 + 0{,}1x_2^2$ вычислите направление наискорейшего возрастания в точке $X^0(1,1)$.

Определите точки экстремума функции $\Phi(x_1, x_2)$.

Вычислите производную по направлению $\mathbf{D}$ в точке X^0.

Раздел 2. Элементы линейного программирования

На СРС отводится 12 часов.

Тема 2.1. Общая постановка задачи.

Постановка задачи линейного программирования (ЗЛП), каноническая форма представления ЗЛП, типичные ЗЛП.

Тема 2.2. Каноническая форма ЗЛП.

Тема 2.3. Формулировка некоторых типичных задач линейного программирования.

Задача о раскрое. Задача о планировании производства. Задача о рационе. Транспортная задача.

Тема 2.4. Свойства решений ЗЛП.

Опорные решения. Свойства и методы определения опорных решений.

Тема 2.5. Графический метод решения ЗЛП.

Тема 2.6. Симплекс-метод решения ЗЛП.

Контрольные вопросы и задания

1.Докажите, что если функция $f(x)$, определенная на интервале $[a, b]$, такова, что $f(a) \cdot f(b) > 0$, то уравнение $f(x) = 0$ имеет четное число корней либо не имеет их вовсе. Сформулируйте задачу линейного программирования в общем виде.

2.Предприятие выпускает два типа продукции ($j = 1, 2$) и использует при этом три вида ресурсов ($i = 1, 2, 3$). Запас каждого вида ресурса ограничен условными величинами: 270, 600, 240 соответственно. На производство единицы j-го продукта расходуется a_{ij} единиц i-го ресурса: $a_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 6 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$. Доход от реализации единицы 1-го продукта составляет 3 у.е., 2-го – 2 у.е. Осуществите постановку задачи по определению объема производства каждого продукта таким образом, чтобы при имеющихся ресурсах получить максимальную прибыль.

3.Составьте математическую модель транспортной задачи, имеющей следующие условия.

В трех пунктах отправления сосредоточен однородный груз в количествах 420 т, 380 т и 400 т соответственно, который необходимо перевезти в три пункта назначения в количествах, равных 260 т, 520 т и 420 т соответственно.

Тарифы перевозок 1 т груза из каждого пункта отправления в каждый пункт назначения задаются матрицей $\begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 7 & 5 & 8 \\ 6 & 9 & 7 \end{pmatrix}$.

Найдите план перевозок, обеспечивающий вывоз имеющегося в пунктах отправления и завоз необходимого в пунктах назначения груза при минимальной общей стоимости перевозок.

4. Сформулируйте задачу о передаче максимального количества информации по разветвленной сети каналов связи между двумя пунктами.

5. Имеются листы бумаги размером 10 × 10 см. Из этой бумаги необходимо вырезать 5 равносторонних треугольников со стороной 6 см; 8 кругов диаметром 4 см; 7 прямоугольников со стороной 5 см. Сформулируйте ЗЛП для определения оптимального плана раскроя листов бумаги, минимизирующего функцию отходов. Решите задачу графически. Определите опорные решения.

6. Решите ЗЛП симплекс-методом

$$f(x) = x_1 - 2x_2 + 6x_3 + 2x_4 - 3x_5 \to \min$$

при ограничениях

$$\begin{cases} 9x_1 \qquad - 2x_3 + x_4 + x_5 = 4; \\ 3x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 - 3x_5 = 3; \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \ge 0. \end{cases}$$

Раздел 3. Элементы выпуклого программирования

На СРС отводится 10 часов.

Обратить внимание на:

– знание численных методов решения задачи выпуклого программирования;

– умение использовать среды программирования для реализации алгоритмов и методов решения задачи выпуклого программирования.

Тема 3.1. Основные определения.

Выпуклый анализ. Выпуклые множества, выпуклые функции, непрерывность и дифференцируемость. Экстремальные свойства функций на выпуклых множествах.

Тема 3.2. Теоремы о выпуклых функциях.

Тема 3.3. Задача выпуклого программирования.

Постановка и решение задачи выпуклого программирования (ЗВП). условие регулярности Слейтера. Функция Лагранжа. Седловая точка. Теорема Куна – Таккера.

Контрольные вопросы и задания

1. Дайте определение функции выпуклой (строго выпуклой), вогнутой (строго вогнутой).

2. Какая матрица называется матрицей Гёссе?

3. Какая функция является положительно-полуопределенной в выпуклом множестве?

4. Какая точка называется внутренней, внешней, граничной точкой выпуклого множества?

5. Пусть дана задача поиска $\max \varphi(x)$ при ограничениях $h_i(x) \geq 0$, $i = 1,...,n;$ $x_g \geq 0$, $j = 1,\ldots,m$, где $\varphi(x)$, $h_g(x)$ – вогнутые функции. Запишите функцию Лагранжа для этой задачи. Приведите пример.

6. Сформулируйте условия теоремы Куна – Таккера для задачи $f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2 \to \min\limits_{x_1, x_2}$ при ограничениях $x_1 > 0;$ $x_2 > 0;$ $x_1^2 + x_2^2 - 1 \leq 0$ и решите задачу.

Раздел 4. Методы безусловной минимизации (минимизация без ограничений)

На СРС отводится 18 часов.

Обратить внимание на:

– знание методов нулевого, первого и второго порядков решения задач одномерной и многомерной оптимизации нелинейных функций без ограничений.

Тема 4.1. Методы минимизации нулевого порядка.

Методы одномерной оптимизации: метод перебора, метод золотого сечения. Методы многомерной оптимизации: метод покоординатного спуска, метод Хука и Дживса, комплексный поиск Бокса, повторяющийся случайный поиск.

Тема 4.2. Методы минимизации первого порядка.

Метод градиентного спуска. Метод сопряженного градиента Флетчера – Ривса.

Тема 4.2. Методы минимизации второго порядка.

Метод Ньютона.

Контрольные вопросы и задания

1. Чему равен коэффициент τ в методе золотого сечения?

2. Можно ли применять для минимизации функции метод, аналогичный методу «золотого сечения», но с параметром $\tau \ne \frac{\sqrt{5}-1}{2}$? Чем такой метод будет существенно отличаться от метода «золотого сечения»?

3. Как повысить точность метода золотого сечения?

4. Почему для функций «овражного типа» методы первого порядка не являются эффективными? Является ли функция $z = 10^{-6} y^2 + x^2$ функцией овражного типа? Обоснуйте.

5. С какой целью проводится исследующий поиск вокруг базовой точки в методе Хука и Дживса?

6. Почему метод градиентного спуска не может быть использован для отыскания минимума линейной формы? Дайте геометрическую интерпретацию для случая $f(x_1, x_2)$.

7. В каких случаях градиентный метод может не привести в точку минимума?

8. Какую роль в формуле $x^{(k+1)} = x^{(k)} - \frac{\lambda^{(k)} \nabla f\left(x^{(k)}\right)}{\left\|\nabla f\left(x^{(k)}\right)\right\|}$ играет делитель $\left\|\nabla f(x^{(k)})\right\|$ и как его вычислить? Является эта величина векторной или скалярной?

9. В чем сходство и отличие методов Ньютона для решения СНАУ и минимизации функций?

10. Каково условие окончания поиска минимума функции $f(x)$ по методу покоординатного спуска? В каких случаях это условие может «не сработать»? Приведите пример.

11. В чем состоит идея метода сопряженного градиента?

12. Для минимизации каких функций методом Ньютона достаточно выполнить один шаг?

13. Выполните один шаг минимизации функции $f(x, y) = x^2 + y^2$ из начальной точки (2, 2) методом наискорейшего спуска с оптимальным выбором параметра оптимизации λ.

14. Напишите алгоритм модифицированного метода наискорейшего спуска, когда вычисленный градиент функции на некотором шаге минимизации используется несколько раз.

15. Найдите минимум $f(x) = (x_1 - 1)^2 + 25(x_2 + 1)^2$ путем сведения задачи к системе алгебраических уравнений.

16. Выполните два шага минимизации функции $y = x_1^2 + 10(x_2 - 1)^2$ всеми известными вам методами многомерной оптимизации. Принять $x_0 = (1,\ 0)$.

Раздел 5. Элементы нелинейного программирования

На СРС отводится 6 часов.

Обратить внимание на:

– знание методов решения задач оптимизации нелинейных функций с ограничениями.

Тема 5.1. Решение задачи нелинейного программирования (ЗНП) методом множителей Лагранжа.

Тема 5.2. Решение ЗНП методом штрафных функций.

Методы внутренней и внешней точки, метод барьеров.

Тема 5.3.Седловая точка для ЗНП.

Теорема Куна – Таккера.

Контрольные вопросы и задания

1. В чем отличие задачи нелинейного программирования от задачи линейного программирования?
2. Можно ли решать ЗНП методом множителей Лагранжа, если ограничения на переменные заданы в виде неравенств?
3. В чем отличие методов внутренней и внешней точки?
4. Можно ли решать ЗНП методом штрафных функций, если ограничения на переменные заданы в виде равенств?
5. Какими свойствами должны обладать функции, участвующие в постановке ЗНП, чтобы для решения ЗНП можно было применять теорему Куна – Таккера?
6. Решите ЗНП методом, основанным на теореме Куна – Таккера:

$$x_1^2 + 10\left(x_2^2 - 2\right) \to \min_{x_1,\, x_2}; \quad x_1 + x_2 > 0; \quad x_1^2 - x_2^2 > 0.$$

ВОПРОСЫ И ЗАДАНИЯ ДЛЯ КОЛЛОКВИУМА

К разделу 1. Введение в численные методы и методы оптимизации

1. Приведите пример задачи математического программирования. Разберите и классифицируйте поставленную задачу.

2. Как соотносятся между собой выпуклое и квадратичное программирование. Является ли одно из них подразделом другого? Обоснуйте ответ. Приведите пример.

3. В канонической форме ограничения типа неравенств имеют вид $g_i(x_1, \ldots, x_n) \leq 0$. Допустимо ли использование строгого неравенства (типа <) вместо нестрогого (типа $\leq$)? Ответ обоснуйте. Как ограничение с нестрогим неравенством $g_i(x_1, \ldots, x_n) \leq 0$ привести к ограничению со строгим неравенством для той же ЗНП?

4. Используя базовое определение точки минимума функции, докажите, что точка $x = 0$ является минимумом функции $y = x^2$.

5. Сколько локальных экстремумов (максимально) может иметь функция $y = ax^2 + bx^2 + cx + d$? Обоснуйте ответ.

6. Когда выражение $x = x^0 + D\tau$ определяет прямую линию? Что здесь представляют собой величины такое x, x^0, D, τ? Какова разновидность этих величин?

7. Куда направлен и что показывает градиент функции n переменных? Покажите на примере.

8. В каких случаях градиент функции n переменных равен нулю? Приведите примеры.

9. Какими должны быть направляющие косинусы у заданного направления, чтобы оно совпало направлением градиента?

10. Исходя из определения, вычислите производную функции $z = x^2 + y^2$ в точке (0 ,0) по направлению $D = \{1, 1\}$.

11. Докажите, что антиградиент (вектор, противоположный градиенту) показывает направление наискорейшего убывания функции.

12. Все ли точки, в которых градиент равен нулю, являются точками минимума функции n переменных? Привести примеры.

13. Каким образом можно задать направление, перпендикулярное данному? Найдите вектор, перпендикулярный вектору $D = \{1;\ 0{,}5\}$.

14. Приведите геометрическое обоснование факта равенства нулю градиента в точке минимума. Почему в точке минимума функции одной переменной вторая производная является положительной величиной?

15. Какой математический смысл имеют следующие ситуации:

а) градиент функции равен 0 во всей области определения функции;

б) компоненты градиента одинаковы во всех точках области определения?

16. Является ли модуль градиента возрастающей функции – возрастающей функцией? В каких случаях модуль градиента – убывающая функция в области определения?

17. Каково пространственное соотношение выбранного направления $\bar{d}$ и градиента ∇f в некоторой точке области определения x, если производная функции по направлению $f'_{\bar{d}}\left(x^*\right)=0$?

18. Может ли модуль градиента возрастающей функции иметь большую скорость роста, чем сама функция? Приведите пример.

19. Приведите собственный пример задачи оптимизации. Укажите целевую функцию и ограничения.

20. В каких случаях математическое решение задачи оптимизации может не являться истинным решением, т.е. не отражать истинные оптимальные условия реального процесса или явления?

21. Сформулируйте многоэкстремальную задачу оптимизации. Можно ли свести такую задачу к обычной задаче оптимизации?

22. В каких случаях задача математического программирования не имеет решения? Предложите максимальное количество таких случаев.

23. Какова должна быть функция критерия $\Phi(x)$, чтобы выполнялось условие $\min\limits_x \Phi(x) = \max\limits_x \Phi(-x)$?

24. В каких случаях глобальный и локальный минимумы функции совпадают? Приведите пример.

25. Является ли производная по направлению частной производной? Докажите свое утверждение на примере.

26. Что означает каждый из трех случаев: производная по направлению 1) больше 0; 2) меньше 0; 3) равна 0. Ответ обоснуйте.

27. Какое направление задает градиент функции нескольких переменных? Каковы свойства этого направления?

28. Может ли функция в точке, где градиент равен нулю, не иметь экстремума? Приведите примеры.

К разделу 2. Элементы линейного программирования

29. Когда ЗЛП имеет единственное решение? Приведите пример.

30. Может ли ЗЛП иметь ровно два решения? Приведите пример.

31. Может ли ЗЛП иметь бесконечное множество решений? Приведите пример.

32. В каких случаях ЗЛП не имеет решений? Приведите пример.

33. В каких случаях ЗЛП заведомо не имеет решения?

34. Может ли ЗЛП $f(x)=\sum_{g=1}^{n} c_g x_g$; $x_g \geq 0$ иметь единственное решение? Приведите пример и геометрическую интерпретацию для вашего вывода.

35. Дайте геометрическую интерпретацию ЗЛП для функции трех переменных. Что геометрически выражают целевая функция и функции ограничений? Приведите пример.

36. Имеются листы бумаги размером 20×20 см. Из этой бумаги необходимо вырезать 5 равносторонних треугольников с длиной стороны 6 см; 8 кругов диаметром 4 см и 10 прямоугольников с длиной стороны 5 см. Сформулируйте ЗЛП для определения оптимального плана раскроя листов бумаги, минимизирующего функцию отходов.

37. Переформулируйте задачу о рационе таким образом, чтобы рацион содержал минимальное количество некоторого (вредного) вещества при ограничении стоимости корзины и сохранении остальных ограничений в задаче о рационе.

38. Приведите пример ЗЛП с двумя переменными, которая имеет в качестве решения отрезок прямой. Дайте геометрическую интерпретацию этой задачи.

39. Почему градиент целевой функции ЗЛП не зависит от точки, в которой он вычисляется? Какой поверхности он перпендикулярен? Почему?

40. При каких условиях ЗЛП имеет единственное опорное решение? Приведите пример.

41. Может ли ЗЛП иметь ровно два опорных решения? Приведите пример.

42. Каково минимальное количество опорных решений ЗЛП? В каких случаях?

43. Почему ЗЛП не может иметь бесконечное число опорных решений? Пояснить на примере.

44. Дайте геометрическое истолкование факту, что оптимальное решение ЗЛП является опорным, на примере ЗЛП второго порядка.

45. Может ли целевая функция ЗЛП быть разрывной функцией? Обоснуйте ответ.

46. Допустимо ли в ограничениях ЗЛП использование строгих неравенств?

47. Допустима ли ситуация, когда количество переменных в целевой функции не совпадает с количеством переменных в ограничениях?

48. Приведите пример, когда допустимая область ЗЛП является пустым множеством. Какой геометрический и технологический смысл имеет такая ситуация?

49. Предложите компьютерный алгоритм решения ЗЛП.

50. Предложите конкретную (с описанием всех переменных, целевой функции и ограничений) формулировку задачи о раскрое, отличную от примеров, приводимых на лекции, лабораторных и курсовых работах.

51. Предложите конкретную (с описанием всех переменных, целевой функции и ограничений) формулировку задачи о рационе, отличную от примеров, приводимых на лекции, лабораторных и курсовых работах.

52. Предложите конкретную (с описанием всех переменных, целевой функции и ограничений) формулировку задачи о планировании производства, отличную от примеров, приводимых на лекции, лабораторных и курсовых работах.

53. Предложите конкретную (с описанием всех переменных, целевой функции и ограничений) формулировку транспортной задачи, отличную от примеров, приводимых на лекции, лабораторных и курсовых работах.

54. Приведите пример задачи о раскрое, которая не имеет решения.

55. Приведите пример задачи о рационе, которая не имеет решения.

56. Приведите пример задачи о планировании производства, которая не имеет решения.

57. Приведите пример транспортной задачи, которая не имеет решения.

58. Приведите пример двумерной ЗЛП, когда область допустимых решений представляет собой треугольник.

59. Приведите пример двумерной ЗЛП, когда область допустимых решений представляет собой квадрат.

60. Приведите пример двумерной ЗЛП, когда область допустимых решений представляет собой неограниченную область.

61. Приведите пример двумерной ЗЛП, когда область допустимых решений представляет собой отрезок.

62. Приведите пример двумерной ЗЛП, когда область допустимых решений представляет собой точку.

63. Приведите пример двумерной ЗЛП, когда область допустимых решений представляет собой пустое множество.

64. Дайте определение «крайней точки» допустимого множества.

65. Приведите пример двумерной ЗЛП с неограниченной допустимой областью, имеющей единственное решение.

66. Обоснуйте свойство ЗЛП о выпуклости допустимой области.

67. Поясните смысл предложения «Целевая функция ограничена сверху на допустимом множестве» и одного из свойств решений ЗЛП.

68. Каким свойством должна обладать целевая функция, чтобы задача минимизации ЗЛП имела решение?

69. Может ли ЗЛП иметь бесконечное множество решений, когда граница допустимой области является отрезком прямой?

70. Означает ли равенство $A_1x_1 + A_2x_2 + \ldots + A_nx_n = B$ линейную зависимость векторов $A_1,\ A_2, \ldots, A_n$?

71. Может ли вектор опорного решения иметь нулевые компоненты?

72. Напишите алгоритм (составьте схему) проверки: является ли выбранное допустимое решение ЗЛП опорным.

73. Может ли ЗЛП иметь бесконечное число опорных решений? Обоснуйте ответ.

74. Есть ли связь между размерностью ЗЛП и количеством опорных решений?

75. Какова размерность вектора опорного решения? Могут ли существовать два опорных решения разной размерности?

76. Все ли опорные решения являются оптимальными решениями? Могут ли два различных опорных решения быть оптимальными?

77. Напишите алгоритм (составьте схему) решения ЗЛП с использованием понятий и свойств опорных решений.

78. Напишите алгоритм (составьте схему) поиска опорного решения ЗЛП.

К разделу 3. Элементы выпуклого программирования

79. Может ли выпуклая функция быть определена на невыпуклом множестве?

80. Пусть $y = f(x)$ – выпуклая функция, определенная на множестве D. Являются ли $M_1 = \{x, y : x \in D \,\&\, y \geq f(x)\}$ и $M_2 = \{x, y : x \in D \,\&\, y \leq f(x)\}$ – выпуклыми множествами?

81. Чем отличаются выпуклая и строго выпуклая функции? Дайте геометрическую интерпретацию.

82. Докажите, что множество точек $M_1 = \{x : x = \lambda x_1 + (1-\lambda)x_2,\ \lambda \in [0,1]\}$ определяет в пространстве отрезок, соединяющий точки x_1 и x_2.

83. Какое множество точек определяется равенством $y = \lambda f(x_1) + (1-\lambda) f(x_2)$ при $x_1, x_2 \in D$, где D – выпуклое множество.

84. Является ли неравенство $f(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) \leq \alpha_1 f(x_1) + \alpha_2 f(x_2)$, где $\alpha_1 < 1,\ \alpha_2 < 1$, определяющим выпуклую функцию?

85. Всегда ли четные функции (удовлетворяющие условию $f(-x) = f(x)$) – выпуклые? Приведите примеры.

86. . Может ли сумма выпуклой и вогнутой функций быть выпуклой? Приведите пример.

87. Из определения выпуклой функции покажите, что выпуклая функция непрерывна в любой внутренней точке.

88. Существуют ли функции, непрерывные на некотором замкнутом интервале, для которых не существует ни одной точки в этом интервале, в окрестности которой функция не является ни выпуклой, ни вогнутой? Обоснуйте ответ.

89. Является ли функция $y = |x|$ выпуклой на интервале [–1, 1]? Везде ли дифференцируема эта функция? В каждой ли точке имеет эта функция производную по направлению?

90. Вычислите производные по возможным направлениям для функции $y = |x|$ в точке $x = 0$.

91. Приведите пример, иллюстрирующий теорему 3 о выпуклости дифференцируемой функции в точке x на выпуклом замкнутом множестве X, для которой выполняется условие $(f'(x),\ y - x) \le f(y) - f(x),\ x, y \in X$.

92. Докажите, что локальный максимум вогнутой функции совпадает с ее глобальным максимумом.

93. Докажите, что система неравенств $g_i(x) \le 0,\ i = 1, \ldots, m$ определяет выпуклое множество, если все $g_i(x)$ – выпуклые.

94. Что такое матрица Гессе для одномерной функции $y = f(x)$. Что представляет собой условие выпуклости для одномерной функции? Приведите пример.

95. Является ли выпуклой функция $y = 3x + 1$? Обоснуйте ответ.

96. Докажите, что сумма любого конечного числа вогнутых функций является вогнутой функцией.

97. Какую область (вогнутую; выпуклую; произвольную) определяет неравенство $f(x) - g(x) \le 0$, если функция $f(x)$ – выпуклая, а функция $g(x)$ – вогнутая?

98. Почему для выпуклой функции обязательно выполняется неравенство $f\left(\frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{2}x_2\right) \le \frac{1}{2}f(x_1) + \frac{1}{2}f(x_2)$. Является ли обязательным выполнение неравенства $f\left(\frac{1}{3}x_1 + \frac{1}{3}x_2\right) \le \frac{1}{3}f(x_1) + \frac{1}{3}f(x_2)$? Ответ обоснуйте.

99. Какие значения может принимать параметр λ в определении строго выпуклой функции?

100. Может ли выпуклая функция не иметь производной во внутренней точке области определения? Приведите пример.

101. Почему выпуклая функция определяется только на выпуклом множестве? Какие множества называются выпуклыми? Существуют ли «вогнутые множества»?

102. Какое значение имеет производная по произвольному направлению выпуклой функции в точке минимума? Почему?

103. Докажите, что глобальный максимум вогнутой функции совпадает с любым локальным максимумом этой функции.

104. Докажите, что система неравенств $g_i(x) \le 0$, $g = 1, \ldots, m$, где $g_i(x)$ – выпуклые функции, определяет выпуклое множество.

105. Всегда ли система неравенств $g_i(x) \le 0$, $j = 1, \ldots, n$, $x \in X$, где $g_i(x)$ – выпуклые, а $h_i(x)$ – вогнутые функции, определяет выпуклое множество? Ответ обоснуйте.

106. Приведите пример ЗВП, для которой не выполняется условие регулярности Слейтера.

107. Пусть дана задача: $\varphi(x) \to \max$ при ограничениях $h_i(x) \ge 0$, $i = 1, \ldots, n$; $x_g \ge 0$, $j = 1, \ldots, m$, где $\varphi(x)$, $h_g(x)$ – вогнутые функции. Запишите функцию Лагранжа для этой задачи. Приведите пример.

108. Почему из условия о седловой точке $L(x^*, u) \le L(x^*, u^*) \le L(x, u^*)$ следует, что функция $L(x^*, u)$ имеет глобальный минимум по переменной u?

109. Сформулируйте и докажите достаточность условий теоремы Куна – Таккера для задачи: $f = x_1^2 + x_2^2 \to \min$ при ограничениях $x_1 > 0$; $x_2 > 0$; $x_1^2 + x_2^2 - 1 \le 0$.

110. Приведите пример условий теоремы Куна – Таккера для дифференцируемой выпуклой функции одной переменной.

111. Пусть $x \in E''$, $f(x) \in E$. Напишите систему уравнений для отыскания стационарной точки. Когда такая система будет линейной?

112. В каких случаях для функции $f(x) \in E$, $x \in E^n$, не существует стационарной точки? Приведите пример.

113. Привести пример нерегулярной области ЗВП.

114. Привести пример области, удовлетворяющей условию Слейтера, в ограничении которой участвуют выпуклая и вогнутая функции.

115. ЗВП сформулирована в виде: $f(x) \to \max\limits_{x \in \Omega}$; $x = (x_1, x_2)$ при ограничениях $\varphi(x) \le 0$, $g(x) \ge 0$, где $\varphi(x)$ – выпуклая, $g(x)$ – вогнутая функции; $x_1 \ge 0$, $x_2 \le 0$. Привести ЗВП к канонической форме.

116. Записать функцию Лагранжа для ЗВП: $f(x) \to \max\limits_{x \in \Omega}$; $g(x) \ge 0$, $\varphi(x) \le 0$, где $g(x)$ – вогнутая, $\varphi(x)$ – выпуклая функции; $x \ge 0$.

117. Определите, является функция $\varphi(x)=\sum_{j=1}^{m} u_j g_j(x)$ выпуклой или вогнутой. Ответ обоснуйте.

К разделу 4. Методы безусловной минимизации (минимизация без ограничений)

118. Существует ли связь между задачей минимизации функции *n* переменных и задачей решения системы из *n* уравнений? Можно ли одну задачу заменить другой? Придите пример.

119. Почему для функций «овражного типа» методы первого порядка не являются эффективными? Является ли функция $z = 10^{-6} y^2 + x^2$ функцией овражного типа. Ответ обоснуйте.

120. В чем преимущество методов минимизации, использующих производные функции, перед методами, не использующими производные. Обоснуйте на примере.

121. Покажите, каким образом получен параметр $\tau = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ в методе «золотого сечения».

122. Можно ли применять для минимизации метод, аналогичный методу «золотого сечения», но с параметром $\tau \neq \frac{\sqrt{5}-1}{2}$? Чем такой метод будет существенно отличаться от метода «золотого сечения»?

123. Составьте блок-схему алгоритма метода «золотого сечения».

124. Составьте блок-схему алгоритма метода покоординатного спуска.

125. Каким образом можно искать минимум функции $y = f\left(x_1^k, x_2^k, \ldots, x_{i-1}^k, x_i, x_{i+1}^k, \ldots, x_n^k\right)$, как функции одной (какой именно?) переменной в методе покоординатного спуска?

126. Каково условие окончания поиска минимума функции $f(x)$ по методу покоординатного спуска? В каких случаях это условие может «не сработать»? Приведите пример.

127. Составьте блок-схему алгоритма метода прямого поиска.

128. Составьте блок-схему алгоритма исследующего поиска в алгоритме прямого поиска.

129. Составьте блок-схему алгоритма поиск по образцу в алгоритме Хука и Дживса.

130. Составьте блок-схему алгоритма комплексного поиска Бокса.

131. Составьте блок-схему алгоритма замены «наихудшей» вершины в комплексном поиске Бокса.

132. Почему метод градиентного спуска не может быть применим для отыскания минимума линейной формы? Дайте геометрическую интерпретацию для случая $n = 2$.

133. Выполните два шага минимизации функции $z = 10x^2 + 0.1y^2$ методом градиентного спуска. Оцените результат.

134. Какую роль играет делитель $\left\|\nabla f\left(x^k\right)\right\|$ в формуле $x^{k+1} = x^k - \dfrac{\lambda^k \nabla f\left(x^k\right)}{\left\|\nabla f\left(x^k\right)\right\|}$? Является ли эта величина векторной? Скалярной? Как ее вычислить?

135. Каков тип стационарной точки (0,0) для поверхности $z = x^3 + y^3$?

136. Выполните один шаг минимизации функции $z = x^2 + y^2$ из начальной точки (2, 2) методом наискорейшего спуска с оптимальным выбором параметра оптимизации λ.

137. Напишите алгоритм модифицированного метода наискорейшего спуска, когда вычисленный градиент функции на некотором шаге минимизации используется несколько раз.

138. Найдите минимум функции $f(x) = (x_1 - 1)^2 + 25(x_2 + 1)^2$ путем сведения задачи к системе алгебраических уравнений.

139. За сколько шагов можно отыскать минимум квадратичной формы методом Ньютона? Почему? Поясните на примере.

140. Как выбирать параметр λ^k в методе Ньютона для поиска минимума функции n переменных? Поясните на примере.

141. Можно ли решать задачу математического программирования: $z = f(x, y) \to \min$) при ограничении $\varphi(x, y) = 0$, если функции $f(x, y)$ и $\varphi(x, y)$ – линейные формы. Обоснуйте ответ. Приведите пример.

К разделу 5. Элементы нелинейного программирования

142. Поясните на примере принципиальное отличие методов внутренней и внешней точки для решения ЗНП.

143. Приведите условия (хотя бы одно), при которых ЗНП в векторной форме при $F(X) = 0$; $Y(X) \le 0$ не имеет решения.

144. Привести пример допустимой области ЗВП с участием не менее двух выпуклых функций в системе ограничений.

145. В каком случае функция Лагранжа совпадает с целевой функцией ЗЛП? В каком случае функция Лагранжа равна отрицанию целевой функции?

146. Какова размерность вектора-аргумента функции Лагранжа? Может ли быть седловой точкой нулевой вектор?

147. Является ли седловая точка точкой глобального экстремума? Может ли функция Лагранжа иметь глобальный экстремум в допустимой области?

148. Сформулируйте теорему Куна – Таккера для ЗЛП: $f(x) \to \max\limits_{x \in \Omega}$; $g(x) \le 0$, $\varphi(x) \ge 0$, где $g(x)$ – выпуклая, $\varphi(x)$ –вогнутая функции; $x \le 0$.

149. Подробно поясните, почему из неравенства $f(x^*) + \sum\limits_{j=1}^{m} u_j g_j(x^*) \le f(x^*) + \sum\limits_{j=1}^{m} u_j^* g_j(x^*)$ для функции Лагранжа следует, что $g(x^*) \le 0$.

150. Подробно поясните, почему в функции Лагранжа $\sum\limits_{j=1}^{m} u_j g_j(x^*) = 0$.

151. Выпишите все условия теоремы Куна – Таккера для дифференцируемых функций для ЗВП: $f(x) \to \max\limits_{x \in \Omega}$; $g(x) \le 0$; $\varphi(x) \ge 0$, где $g(x)$ – выпуклая, $\varphi(x)$ – вогнутая функции; $x \ge 0$.

152. Можно ли решать задачи линейного программирования при помощи теоремы Куна – Таккера? Сформулируйте функцию Лагранжа для ЗЛП.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В методических указаниях представлены рекомендации по выполнению самостоятельной работы при изучении дисциплины «Численные методы и методы оптимизации», содержатся контрольные задания и вопросы для самоконтроля при подготовке к входному, текущему и промежуточному контролю.

Подготовка к входному контролю предполагает повторение материала, который был изучен студентами ранее, при изучении дисциплин «Математика» и «Вычислительная математика».

Текущая СРС представляет собой работу с лекционным материалом, подготовку к лабораторным занятиям; выполнение расчетно-графической работы; опережающую самостоятельную работу; выполнение домашних заданий; изучение тем, вынесенных на самостоятельную проработку, а также подготовку к коллоквиуму, тестированию и зачету.

Контроль результатов самостоятельной работы проводится в формах самоконтроля студентов и контроля преподавателем в следующих видах: устного опроса студентов по теоретической и практической части, а также по результатам входного и текущего контроля, выполнения лабораторных работ и коллоквиума. На основе результатов текущего контроля формируется допуск студента к промежуточной аттестации – к зачету. Зачет проводится в виде компьютерного тестирования и в устной форме и оценивается преподавателем.

Для самостоятельной работы студентов используются учебная и методическая литература, сеть Internet для работы с Web-серверами научных библиотек, интегрированные математические системы и другие научно-образовательные ресурсы.

Организация самостоятельной работы осуществляется в соответствии с графиком учебного процесса и самостоятельной работы. Содержание материала соответствует требованиям государственных стандартов.

Самостоятельная работа, не предусмотренная образовательной программой, учебным планом и учебно-методическими материалами, раскрывающими и конкретизирующими их содержание, осуществляется студентами инициативно, с целью реализации собственных учебных и научных интересов.

Результаты самостоятельной научно-исследовательской работы студентов могут быть опубликованы в специализированных студенческих или научных, научно-методических изданиях вуза и его подразделений, апробированы на научно-практических студенческих конференциях.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

Перечень учебно-методического обеспечения для самостоятельной работы

Основная литература

1. Кошев А.Н. Численные методы решения задач оптимизации [Текст]: учеб. пособие / А.Н. Кошев, В.В. Кузина. – Пенза: ПГУАС, 2012. – 132 с.

Дополнительная литература

2. Аттетков, А.В. Введение в методы оптимизации [Электронный ресурс]: учеб. пособие / А.В. Аттетков, В.С. Зарубин, А.Н. Канатников.– Электрон. текстовые данные.– М.: Финансы и статистика, 2014.– 272 с.– Режим доступа: http://www.iprbookshop.ru/18794.– ЭБС «IPRbooks», по паролю.

3. Бахвалов, Н.С. Численные методы [Электронный ресурс]/ Н.С. Бахвалов, Н.П. Жидков, Г.М. Кобельков. – Электрон. текстовые данные.– М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2012.– 635 с.– Режим доступа: http://www.iprbookshop.ru/6502.– ЭБС «IPRbooks», по паролю.

4. Бахвалов, Н.С. Численные методы в задачах и упражнениях [Электронный ресурс]: учеб. пособие/ Н.С. Бахвалов, А.В. Лапин, Е.В. Чижонков. – Электрон. текстовые данные.– М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2013.– 240 с.– Режим доступа: http://www.iprbookshop.ru/12282.– ЭБС «IPRbooks», по паролю.

5. Кондаков, Н.С. Основы численных методов [Электронный ресурс]: практикум/ Н.С. Кондаков. – Электрон. текстовые данные. – М.: Московский гуманитарный университет, 2014.– 92 с.– Режим доступа: http://www.iprbookshop.ru/39690.– ЭБС «IPRbooks», по паролю.

6. Дьяконов, В.П. MATLAB. Полный самоучитель [Электронный ресурс]/ В.П. Дьяконов. – Электрон. текстовые данные.– М.: ДМК Пресс, 2014.– 768 с.– Режим доступа: http://www.iprbookshop.ru/7911.– ЭБС «IPRbooks», по паролю.

7. Седов, Е.С. Основы работы в системе компьютерной алгебры Mathematica [Электронный ресурс]/ Е.С. Седов. – Электрон. текстовые данные.– М.: Интернет-Университет Информационных Технологий (ИНТУИТ), 2016. – 401 с.– Режим доступа: http://www.iprbookshop.ru/16717.– ЭБС «IPRbooks», по паролю.

Методические указания для обучающихся по освоению дисциплины

8. Контрольно-измерительные материалы по курсу «Численные методы и методы оптимизации» [Текст]: учебно-методическое пособие / В.В. Кузина, А.Н. Кошев. – Пенза: ПГУАС, 2013. – 60 с.

Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети «Интернет», необходимых для освоения дисциплины

1. http://www.intuit.ru/
2. http://www.exponenta.ru/
3. www.mathnet.ru – общероссийский математический портал;
4. http://e.lanbook.com/books/?p_f_1_temp_id=18&p_f_1_65=917&p_f_1_63=&p_f_1_67= – электронно-библиотечная система, издательство «Лань»;
5. www.elibrary.ru – научная электронная библиотека;
6. http://lib.mexmat.ru/ – электронная библиотека механико-математического факультета МГУ;
7. http://www.newlibrary.ru/genre/nauka/matematika/kompyutery_i_matematika/ – электронная библиотека по математике;
8. http://www.edu.ru/modules.php?op=modload&name=Web_Links&file=index&l_op=viewlink&cid=2851 – федеральный портал российского профессионального образования: численные методы;
9. https://mipt.ru/education/chair/computational_mathematics/study/materials/compmath/ – кафедра вычислительной математики МФТИ: вычислительная математика (3 курс).

ОГЛАВЛЕНИЕ

Учебное издание

Кузина Валентина Владимировна
Кошев Александр Николаевич

ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ И МЕТОДЫ ОПТИМИЗАЦИИ
Методические указания для выполнения самостоятельной работы по направлению подготовки 09.03.02
«Информационные системы и технологии»

В авторской редакции
Верстка Н.В. Кучина

Подписано в печать 24.05.16. Формат 60х84/16.
Бумага офисная «Снегурочка». Печать на ризографе.
Усл.печ.л. 1,63. Уч.-изд.л. 1,75. Тираж 80 экз.
Заказ № 329.

Издательство ПГУАС.
440028, г. Пенза, ул. Германа Титова, 28.