МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Федеральное государственное бюджетное
образовательное учреждение высшего образования
«Пензенский государственный университет
архитектуры и строительства»
(ПГУАС)

И.А. Гарькина, А.М. Данилов

МАТЕМАТИКА

Учебно-методическое пособие
по выполнению контрольных работ
для направления подготовки 08.03.01 «Строительство»

Пенза 2016

УДК 51
ББК 22.1
Г21

Рекомендовано Редсоветом университета
Рецензент – доктор педагогических наук, профессор, проректор по научной работе В.В.Усманов (ПГУАС)

Гарькина И.А.
Г21 Математика: учеб.-метод. пособие по выполнению контрольных работ для направления подготовки 08.03.01 «Строительство»/ И.А. Гарькина, А.М. Данилов. – Пенза: ПГУАС, 2016. – 52 с.

Приводятся типовые варианты контрольных работ с решениями. Приводятся методики оценки знаний, исходя из требований к формированию компетенций, предусмотренных ФОС по направлению подготовки бакалавров 08.03.01 «Строительство».

Подготовлены на кафедре «Математика и математическое моделирование» и предназначены для использования студентами, обучающимися по направлению подготовки 08.03.01 «Строительство», при изучении дисциплины «Математика».

ВВЕДЕНИЕ

Дисциплина «Математика» является **базовой** частью **общепрофессионального модуля Б1.Б.2.1 ООП.**

Изучение дисциплины «Математика» направлено на формирование следующих компетенций:

– **использование основных законов естественнонаучных дисциплин в профессиональной деятельности, применение методов математического анализа и математического (компьютерного) моделирования, теоретического и экспериментального исследования.**

Планируемые результаты обучения (показатели достижения заданного уровня освоения компетенции):

знать:

– основные математические формулы и понятия;

– основные методы решения математических задач;

– элементы вычислительной математики;

– технологию сбора анализа и обработки математической информации;

– основные методы математического моделирования в решении прикладных задач;

уметь:

– использовать методы математического моделирования;

– применять методы физико-математического анализа к решению конкретных естественнонаучных и технических проблем;

– анализировать и синтезировать поставленную математическую задачу и принимать на этой основе рациональные решения;

владеть:

– основными способами и методами решения математических задач для решения естественнонаучных задач;

– навыками создания математического шаблона для его дальнейшего использования в решении профессиональных задач;

– методами обработки и интерпретирования результатов эксперимента;

– приемами использования методов математического моделирования в профессиональной деятельности;

иметь представление:

– о методах решения математических задач в профессиональной деятельности;

– о математических подходах к решению задач строительной отрасли;

– о связи математических моделей с моделируемыми материальными явлениями.

– **способность выявить естественнонаучную сущность проблем, возникающих в ходе профессиональной деятельности, привлечь их для решения соответствующий физико-математический аппарат.**

Планируемые результаты обучения (показатели достижения заданного уровня освоения компетенции):

знать:

– математическую символику и основные математические формулы;

– основные виды математических моделей;

– алгоритмы решения математических задач;

– основные принципы выбора математических составляющих при решении профессиональных задач;

уметь:

– применять математические методы для решения практических задач;

– использовать стандартные схемы решения в новых математических задачах;

– анализировать этапы решения математических и прикладных задач;

владеть:

– основами математической теории;

– методами решения прикладных задач;

– спецификой исследования математических моделей с учетом их иерархической структуры и оценки пределов применимости полученных результатов;

иметь представление:

– о применении математического аппарата в решении профессиональных задач;

– о связи математических моделей с моделируемыми материальными явлениями.

– **владение эффективными правилами, методами и средствами сбора, обмена, хранения и обработки информации, навыками работы с компьютером как средством управления информацией**

Планируемые результаты обучения (показатели достижения заданного уровня освоения компетенции):

знать:

– современные тенденции развития информатики, вычислительной техники, компьютерных технологий;

– статистические методы исследования и обработки информации;

– элементы вычислительной математики;

– технологию сбора анализа и обработки математической информации;

уметь:

– использовать математическую символику для выражения количественных и качественных отношений объектов;

– выполнять самостоятельный поиск информации необходимой для решения математических и прикладных задач;

владеть:

– методами обработки и интерпретирования результатов эксперимента;

– основными методами, способами и средствами получения, хранения и переработки информации;

– основами работы с компьютером как средством управления информации на уровне, позволяющем использовать компьютерную технику и специализированные компьютерные программы в своей профессиональной деятельности;

иметь представление:

– о применении компьютерных технологий при проведении работ в области математических исследований;

– о статистических методах исследования и обработки информации.

– способность осуществлять поиск, хранение, обработку и анализ информации из различных источников и баз данных, представлять ее в требуемом формате с использованием информационных, компьютерных и сетевых технологий.

Планируемые результаты обучения (показатели достижения заданного уровня освоения компетенции):

знать:

– технологию сбора анализа и обработки математической информации;

– сущность работы с компьютером как средством управления информацией;

уметь:

– выполнять самостоятельный поиск информации необходимой для решения математических и прикладных задач;

– использовать, хранить и перерабатывать информацию с применением вычислительной техники;

– работать с математической литературой;

– получать информацию из глобальных сетей, позволяющую расширить свой уровень знаний;

владеть:

– навыками исследовательской работы;

– современными математическими инструментами анализа и способа исследования экспериментальных данных;

– основами работы с компьютером как средством управления информации на уровне, позволяющем использовать компьютерную технику и специализированные компьютерные программы в своей профессиональной деятельности;

иметь представление:

– о видах, формах и методах математической обработки экспериментальных данных.

МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ

В процессе изучения курса математики в соответствии с учебным планом студент должен выполнить 3 контрольные работы (по 1 в семестр).

При решении задач необходимо обосновать каждый этап решения, исходя из теоретических положений курса.

Решение задач и примеров следует излагать подробно, вычисления располагать в строгом порядке, отделяя вспомогательные вычисления от основных.

Решение каждой задачи должно доводиться до ответа, требуемого условием, и по возможности в общем виде с выводом формулы. Затем в полученную формулу подставляют числовые значения (если они даны). В промежуточные вычисления не следует вводить приближенные значения корней, числа π и т.п.

Полученный ответ следует проверять способами, вытекающими из существа данной задачи.

Оценка «5» ставится за работу, выполненную полностью без ошибок и недочётов.

Оценка «4» ставится за работу, выполненную полностью, но при наличии в ней не более одной грубой и одной негрубой ошибки и одного недочёта, не более трёх недочётов.

Оценка «3» ставится, если студент правильно выполнил не менее 2/3 всей работы или допустил не более одной грубой ошибки и двух недочётов, не более одной грубой ошибки и одной негрубой ошибки, не более трех негрубых ошибок, одной негрубой ошибки и трех недочётов, при наличии 4 - 5 недочётов.

Оценка «2» ставится, если число ошибок и недочётов превысило норму для оценки 3 или правильно выполнено менее 2/3 всей работы.

ПРИМЕРНЫЕ ВАРИАНТЫ КОНТРОЛЬНЫХ РАБОТ С РЕШЕНИЯМИ

Примерный вариант решения контрольной работы № 1

1 семестр

Задача 1. Дана система линейных уравнений

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 6, \\ 2x_1 + 3x_2 - 4x_3 = 20, \\ 3x_1 - 2x_2 - 5x_3 = 6. \end{cases}$$

Доказать ее совместность и решить двумя способами:
1) методом Гаусса; 2) средствами матричного исчисления.

Решение

Вычислим определитель системы

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 3 & -4 \\ 3 & -2 & -5 \end{vmatrix} = -58 \neq 0.$$

Следовательно, система совместна.

1) Решение системы методом Гаусса

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & 6 \\ 2 & 3 & -4 & 20 \\ 3 & -2 & -5 & 6 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & 6 \\ 0 & 7 & -10 & 8 \\ 0 & 4 & -14 & -12 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & 6 \\ 0 & 1 & -10/7 & 8/7 \\ 0 & 0 & -58/7 & -116/7 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & 6 \\ 0 & 1 & -10/7 & 8/7 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{array}\right).$$

Откуда

$$x_3 = 2;$$

$$x_2 - 10/7x_3 = 8/7, \;\; x_2 = 8/7 + 10/7 \cdot 2 = 4;$$

$$x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 6, \quad x_1 = 6 + 2 \cdot 4 - 3 \cdot 2 - 3 \cdot 2 = 8.$$

Ответ: $x_1 = 8,\; x_2 = 4,\; x_3 = 2.$.

2) Решение системы средствами матричного исчисления.

Запишем систему в виде матричного уравнения, введя три матрицы:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 3 & -4 \\ 3 & -2 & -5 \end{pmatrix}; \;\; B = \begin{pmatrix} 6 \\ 20 \\ 6 \end{pmatrix}; \;\; x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

$$A \cdot x = B \Rightarrow x = A^{-1} \cdot B.$$

Найдем обратную матрицу A^{-1}.

Определитель матрицы A:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 3 & -4 \\ 3 & -2 & -5 \end{vmatrix} = -58 \neq 0.$$

Следовательно, матрица A невырожденная и обратная матрица A^{-1} существует:

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot A^{*},$$

где A^* – присоединенная матрица.
Запишем транспонированную матрицу

$$A^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 3 & -2 \\ 3 & -4 & -5 \end{pmatrix}$$

и каждый ее элемент заменим его алгебраическим дополнением.

Получим присоединенную матрицу:

$$A^{*} = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ -4 & -5 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} -2 & -2 \\ 3 & -5 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 3 & -4 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -4 & -5 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & -5 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -4 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -2 & -2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -23 & -16 & -1 \\ -2 & -14 & 10 \\ -13 & -4 & 7 \end{pmatrix}.$$

$$A^{-1} = -\frac{1}{58} \begin{pmatrix} -23 & -16 & -1 \\ -2 & -14 & 10 \\ -13 & -4 & 7 \end{pmatrix}.$$

Найдем матрицу X:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = -\frac{1}{58} \begin{pmatrix} -23 & -16 & -1 \\ -2 & -14 & 10 \\ -13 & -4 & 7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ 20 \\ 6 \end{pmatrix} = -\frac{1}{58} \begin{pmatrix} -138 & -320 & -6 \\ -12 & -280 & +60 \\ -78 & -80 & +42 \end{pmatrix} =$$

$$= -\frac{1}{58} \begin{pmatrix} -464 \\ -232 \\ -116 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Откуда $x_1 = 8,\ x_2 = 4,\ x_3 = 2.$

Задача 2. Даны координаты вершин пирамиды A_1 (10, 6, 6); A_2 (–2, 8, 2); A_3(6, 8, 9); A_4 (7, 10, 3).

Найти: 1) длины ребер A_1A_2, A_1A_3, A_1A_4; 2) косинус угла между ребрами A_1A_2 и A_1A_4; 3) площадь грани $A_1A_2A_3$; 4) уравнения прямой A_1A_2;

5) уравнение плоскости $A_1A_2A_3$; 6) уравнения высоты, опущенной из вершины A_4 на грань $A_1A_2A_3$; 7) угол между ребром A_1A_4 и гранью $A_1A_2A_3$; 8) объем пирамиды (двумя способами). Сделать чертеж.

Решение

1) Имеем:

$$\overline{A_1A_2} = (-12, 2, -4);\ \overline{A_1A_3} = (-4, 2, 3);\ \overline{A_1A_4} = (-3, 4, -3),$$

$$\left|\overline{A_1A_2}\right| = \sqrt{(-12)^2 + 2^2 + (-4)^2} = \sqrt{144+4+16} = \sqrt{164} = 2\sqrt{41},$$

$$\left|\overline{A_1A_3}\right| = \sqrt{(-4)^2 + 2^2 + 3^2} = \sqrt{16+4+9} = \sqrt{29},$$

$$\left|\overline{A_1A_4}\right| = \sqrt{(-3)^2 + 4^2 + (-3)^2} = \sqrt{9+16+9} = \sqrt{34}.$$

2) $\left(\overline{A_1A_2}, \overline{A_1A_4}\right) = -12\cdot(-3) + 2\cdot 4 + (-4)\cdot(-3) = 36+8+12 = 56$

Угол между α ребрами равен углу между векторами:

$$\alpha = \left\langle \overline{A_1A_2}, \overline{A_1A_4} \right\rangle.$$

Тогда

$$\cos\alpha = \frac{\left(\overline{A_1A_2}, \overline{A_1A_4}\right)}{\left|A_1A_2\right|\cdot\left|A_1A_4\right|}\frac{56}{2\sqrt{41}\cdot\sqrt{34}} = \frac{28}{\sqrt{1394}} \approx 0,7499.$$

3) Площадь грани $A_1A_2A_3$ равна площади треугольника, построенного на векторах $\overline{A_1A_2}$ и $\overline{A_1A_3}$:

$$S_{\Delta A_1A_2A_3} = \frac{1}{2}\left|\left[\overline{A_1A_2}, \overline{A_1A_3}\right]\right|.$$

Найдем векторное произведение $\left[\overline{A_1A_2}, \overline{A_1A_3}\right]$:

$$\left[\overline{A_1A_2}, \overline{A_1A_3}\right] = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ -12 & 2 & -4 \\ -4 & 2 & 3 \end{vmatrix} = \bar{i}\cdot\begin{vmatrix} 2 & -4 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} - \bar{j}\begin{vmatrix} -12 & -4 \\ -4 & 3 \end{vmatrix} + \bar{k}\begin{vmatrix} -12 & 2 \\ -4 & 2 \end{vmatrix} =$$

$$= (6+8)\bar{i} - (-36-16)\bar{j} + (-24+8)\bar{k} = 14\bar{i} + 52\bar{j} - 16\bar{k} = (14, 52, -16).$$

Модуль векторного произведения:

$$\left(\left[\overline{A_1A_2}, A_1A_3\right]\right(= \sqrt{14^2 + 52^2 + (-16)^2} = \sqrt{196 + 2704 + 256} =$$

$$= \sqrt{3156} = 2\sqrt{789}.$$

Откуда искомая площадь:

$$S_{\Delta A_1A_2A_3} = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \sqrt{789} = \sqrt{789} \approx 28{,}089 \ \left(\text{ед.}^2\right).$$

4) Уравнения прямой A_1A_2 определяется как уравнения прямой, проходящей через две данные точки :

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1},$$

$$\frac{x - 10}{-2 - 10} = \frac{y - 6}{8 - 6} = \frac{z - 6}{2 - 6},$$

$$\frac{x - 10}{-12} = \frac{y - 6}{2} = \frac{z - 6}{-4},$$

или

$$\frac{x - 10}{-6} = \frac{y - 6}{1} = \frac{z - 6}{-2},$$

5) Уравнение плоскости $A_1A_2A_3$ запишем как уравнение плоскости, проходящей через три данные точки:

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0;$$

$$\begin{vmatrix} x - 10 & y - 6 & z - 6 \\ -2 - 10 & 8 - 6 & 2 - 6 \\ 6 - 10 & 8 - 6 & 9 - 6 \end{vmatrix} = 0; \quad \begin{vmatrix} x - 10 & y - 6 & z - 6 \\ -12 & 2 & -4 \\ -4 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 0;$$

$$(x - 10) \cdot \begin{vmatrix} 2 & -4 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} - (y - 6) \cdot \begin{vmatrix} -12 & -4 \\ -4 & 3 \end{vmatrix} + (z - 6) \cdot \begin{vmatrix} -12 & 2 \\ -4 & 2 \end{vmatrix} = 0;$$

$$(x - 10)(6 + 8) - (y - 6)(-36 - 16) + (z - 6)(-24 + 8) = 0;$$

$$14(x - 10) + 52(y - 6) - 16(z - 6) = 0;$$

$$14x + 52y - 16z - 356 = 0.$$

Следовательно, искомое уравнение плоскости $A_1A_2A_3$:

$$7x+26y-8z-178=0.$$

6) Уравнения высоты из точки A_4 на грань $A_1A_2A_3$ определится как уравнения прямой, проходящей через точку A_4 перпендикулярно плоскости $A_1A_2A_3$:

$$\frac{x-x_0}{l}=\frac{y-y_0}{m}=\frac{z-z_0}{n}.$$

За направляющий вектор $\overline{a}=(l,m,n)$ примем нормальный вектор плоскости $A_1A_2A_3$:

$$\overline{n}=(7,26,-8).$$

Тогда уравнения высоты запишутся в виде:

$$\frac{x-7}{7}=\frac{y-10}{26}=\frac{z-3}{-8}.$$

7) Угол β между ребром A_1A_4 и гранью $A_1A_2A_3$ – это угол между прямой и плоскостью, составляющий в сумме с углом между направляющим вектором прямой и нормальным вектором плоскости прямой угол.

Следовательно,

$$\sin\beta=\frac{(\overline{a},\overline{n})}{|\overline{a}|\cdot|\overline{n}|}.$$

$$\overline{a}=\overline{A_1A_4}=(-3,4,-3),\quad |\overline{a}|=\sqrt{34},$$

$$\overline{n}=(7,\,26,-8),\ |\overline{n}|=\sqrt{7^2+26^2+(-8)^2}=\sqrt{49+676+64}=\sqrt{789};$$

$$(\overline{a},\overline{n})=-3\cdot 7+4\cdot 26+(-3)\cdot(-8)=-21+104+24=107.$$

Откуда

$$\sin\beta=\frac{107}{\sqrt{34}\cdot\sqrt{789}}=\frac{107}{\sqrt{26826}}\approx 0{,}6533\ \ (\,\beta\approx\arcsin 0{,}6533\approx 39^\circ 20'\,).$$

8) Объем пирамиды $A_1A_2A_3A_4$ равен, с одной стороны, одной шестой модуля смешанного произведения векторов $\overline{A_1A_2},\ \overline{A_1A_3},\ \overline{A_1A_4}$, с другой стороны – одной третьей произведения площади S основания $A_1A_2A_3$ на высоту H, опущенную на основание из вершины A_4.

Так что:

$$V_{\text{пир}}=\frac{1}{6}\left\|\begin{matrix}x_1 & y_1 & z_1\\ x_2 & y_2 & z_2\\ x_3 & y_3 & z_3\end{matrix}\right\|=\frac{1}{6}\cdot\begin{vmatrix}-12 & 2 & -4\\ -4 & 2 & 3\\ -3 & 4 & -3\end{vmatrix}=$$

$$= \frac{1}{6}\left(-12 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & -3 \end{vmatrix} - 2 \cdot \begin{vmatrix} -4 & 3 \\ -3 & -3 \end{vmatrix} - 4 \cdot \begin{vmatrix} -4 & 2 \\ -3 & 4 \end{vmatrix} \right) =$$

$$= \frac{1}{6}\left(-12 \cdot (-18) - 2 \cdot 21 - 4 \cdot (-10) \right) = \frac{107}{3} = 35\frac{2}{3} \ \left(\text{ед.}^3 \right)$$

Или $V_{\text{пир}} = \frac{1}{3} S_{\Delta A_1 A_2 A_3} \cdot H$.

Высоту H найдем как расстояние от точки A_4 (7, 10, 3) до плоскости $A_1 A_2 A_3$:

$$H = d = \left| \frac{Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \right| =$$

$$= \frac{7 \cdot 7 + 26 \cdot 10 - 8 \cdot 3 - 178}{\sqrt{7^2 + 26^2 + (-8)^2}} = \frac{49 + 260 - 24 - 178}{\sqrt{789}} = \frac{107}{789},$$

$$V_{\text{пир}} = \frac{1}{3}\sqrt{789} \cdot \frac{107}{789} = \frac{107}{3} = 35\frac{2}{3} \ \left(\text{ед.}^3 \right).$$

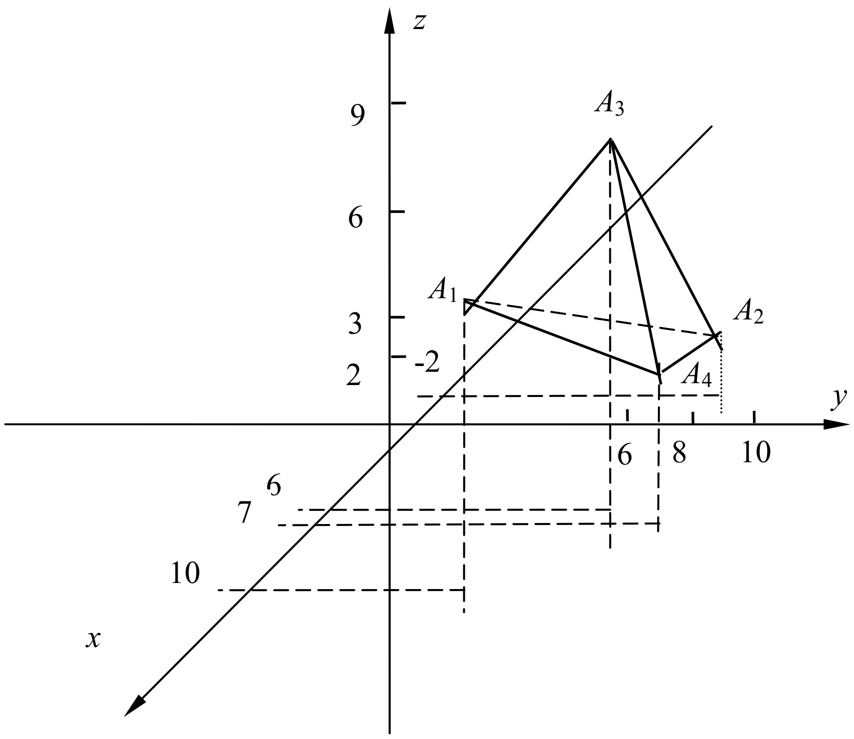


Рис. 1 (к задаче № 2)

Задача 3. Установить вид кривой, заданной уравнением

$$9x^2 + 4y^2 - 36 = 0.$$

Привести уравнение кривой к каноническому виду и изобразить на чертеже.

Решение

$9x^2 + 4y^2 - 36 = 0 \Rightarrow 9x^2 + 4y^2 = 36 \Rightarrow \dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{9} = 1$ – эллипс

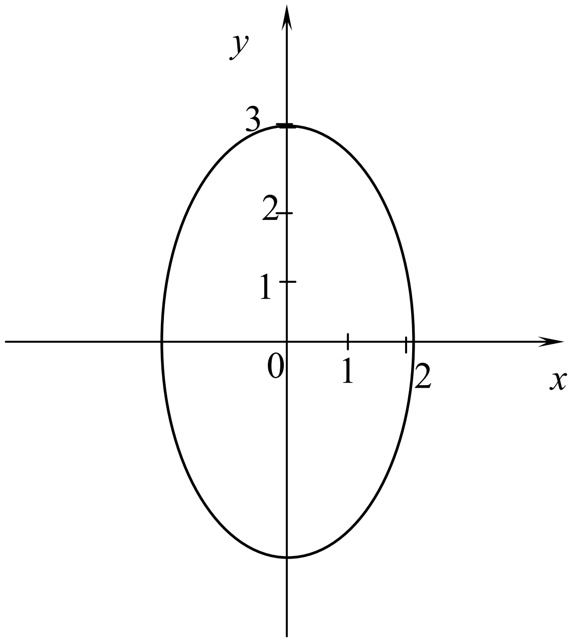


Рис. 2

Задача 4. Найти предел $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{4+3x}-\sqrt{4-3x}}{7x}$, не пользуясь правилом Лопиталя.

Здесь имеем неопределенность $\dfrac{0}{0}$. Чтобы ее раскрыть, умножим числитель и знаменатель дроби на выражение, сопряженное числителю $\left(\sqrt{4+3x}+\sqrt{4-3x}\right)$. После этого можно сократить дробь на x:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{4+3x}-\sqrt{4-3x}}{7x} = \lim_{x\to 0}\frac{4+3x-(4-3x)}{7x\left(\sqrt{4+3x}+\sqrt{4-3x}\right)} =$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{6x}{7x\left(\sqrt{4+3x}+\sqrt{4-3x}\right)} = \lim_{x\to 0}\frac{6}{7\left(\sqrt{4+3x}+\sqrt{4-3x}\right)} =$$

$$= \frac{6}{7\left(\sqrt{4}+\sqrt{4}\right)} = \frac{3}{14}.$$

Задача 5. Дана функция $f\left(x\right)=15^{\frac{1}{3-x}}$ и два значения аргумента $x_1 = 3$ и $x_2 = 1$. Требуется: 1)найти предел функции при приближении к каждому из заданных значений слева и справа; 2) установить, является ли данная функция непрерывной или разрывной для каждого из заданных значений x; 3) сделать чертеж.

Решение

Функция $f\left(x\right)=15^{\frac{1}{3-x}}$ в точке $x = 3$ не определена. Найдем в этой точке левый и правый односторонние пределы.

$$\lim_{x\to 3-o} 15^{\frac{1}{3-x}} = 15^{+\infty} = +\infty;$$

$$x<3 \Rightarrow 3-x>0$$

$$\lim_{x\to 3+o} 15^{\frac{1}{3-x}} = 15^{-\infty} = \frac{1}{15^{+\infty}} = 0.$$

$$x>3 \Rightarrow 3-x<0$$

В точке $x_1 = 3$ функция терпит бесконечный разрыв.

В точке $x_2 = 1$ функция непрерывна: $\lim\limits_{x\to 1} 15^{\frac{1}{3-x}} = 15^{\frac{1}{2}} = \sqrt{15}.$

Сделаем схематический чертеж (рис.3).

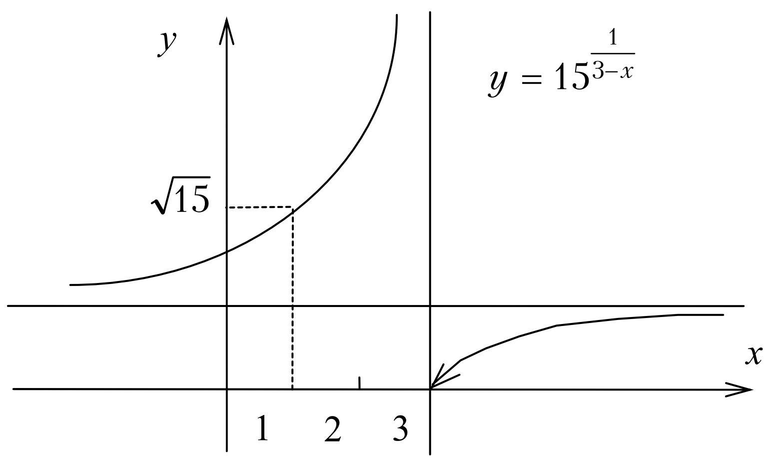


Рис.3

Задача 6. Найти производные $\dfrac{dy}{dx}$ данных функций:

а) $y = \dfrac{2x^2 - x - 1}{3\sqrt{2+4x}}$;

б) $y = (x+5)^2 \cdot \arccos^3 5x^4$;

в) $y = (\sin 3x)^{\operatorname{arcctg} x}$;

г) $y^2 = x + \ln\left(\dfrac{y}{x}\right)$.

Решение

При решении указанных примеров используются следующие правила дифференцирования:

1) $c' = 0,\ c = \text{const}$;

2) $x' = 1,\ x$ – независимая переменная;

3) $(u+v)' = u' + v'$, где $u = u(x);\ v = v(x)$;

4) $(u \cdot v)' = u'v + v'u$;

5) $(c \cdot u)' = c \cdot u'$;

6) $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - v'u}{v^2}\ (v \neq 0)$;

7) если $y = f(u),\ u = u(x)$, то есть $y = f(u(x))$ – сложная функция, составленная из дифференцируемых функций, то $u'_x = y'_u \cdot u'_x$ или $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{dy}{du} \cdot \dfrac{du}{dx}$. Кроме этого используется таблица производных элементарных функций:

1) $(u^\alpha)' = \alpha u^{\alpha - 1} \cdot u'$;

2) $(a^u)' = a^u \cdot \ln a \cdot u'$;

3) $(e^u)' = e^u \cdot u'$;

4) $(\log_a u)' = \dfrac{u'}{u \cdot \ln a}$;

5) $(\ln u)' = \dfrac{u'}{u}$;

6) $(\sin u') = \cos u \cdot u'$;

7) $(\cos u)' = -\sin u \cdot u'$;

8) $\left(\mathrm{tg}u\right)' = \dfrac{u'}{\cos^2 u}$;

9) $\left(\mathrm{ctg}u\right)' = -\dfrac{u'}{\sin^2 u}$;

10) $\left(\arcsin u\right)' = \dfrac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$;

11) $\left(\arccos u\right)' = -\dfrac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$;

12) $\left(\mathrm{arctg}u\right)' = \dfrac{u'}{1+u^2}$;

13) $\left(\mathrm{acctg}u\right)' = -\dfrac{u'}{1+u^2}$.

а) $y = \dfrac{2x^2 - x - 1}{3\sqrt{2+4x}}$.

Воспользуемся правилом дифференцирования дроби:

$$\left(\frac{U}{V}\right)' = \frac{U'V - UV'}{V^2},\ V \neq 0.$$

Для всех $2+4x>0$; $x > -\dfrac{1}{2}$ имеем:

$$y' = \frac{(4x-1)3\sqrt{2+4x} - (2x^2-x-1)3\dfrac{1}{2\sqrt{2+4x}}4}{9(2+4x)} =$$

$$= \frac{(4x-1)3(2+4x) - (2x^2-x-1)6}{9(2+4x)\sqrt{2+4x}} =$$

$$= \frac{3(16x^2+4x-2-4x^2+2x+2)}{9(2+4x)\sqrt{2+4x}} = \frac{9x(4x+2)}{9(2+4x)\sqrt{2+4x}} = \frac{x}{\sqrt{2+4x}}.$$

б) $y = \left(x+5\right)^2 \arccos^3 5x^4$,

$$y' = 2\left(x+5\right)\arccos^3 5x^4 + \left(x+5\right)^2 3\arccos^2 5x^4 \frac{-20x^3}{\sqrt{1-25x^8}} =$$

$$= 2\left(x+5\right)\arccos^3 5x^4 - \frac{60x^3\left(x+5\right)^2 \arccos^2 5x^4}{\sqrt{1-25x^8}}.$$

в) $y=\left(\sin 3x\right)^{\operatorname{arcctg}x}$.

Это показательно-степенная функция. Прологарифмируем ее:

$$\ln y=\operatorname{arcctg}x\ln\left(\sin 3x\right)$$

и затем продифференцируем обе части полученного равенства:

$$\frac{y'}{y}=-\frac{\ln\left(\sin 3x\right)}{1+x^2}+\frac{\operatorname{arcctg}x\cos 3x\cdot 3}{\sin 3x}=-\frac{\ln\left(\sin 3x\right)}{1+x^2}+3\operatorname{ctg}3x\operatorname{arcctg}x.$$

Отсюда выразим y':

$$y'=(\sin 3x)^{\operatorname{arcctg}x}\left(3\operatorname{ctg}3x\operatorname{arcctg}x-\frac{3\ln(\sin 3x)}{1+x^2}\right).$$

г) $y^2=x+\ln\left(\dfrac{y}{x}\right)$.

Это неявно заданная функция. Продифференцируем по x обе части уравнения:

$$2yy'=1+\frac{1}{y/x}\frac{y'x-y}{x^2};$$

$$2xy^2y'=xy+y'x-y.$$

Разрешим полученное равенство относительно производной y':

$$y'\left(2xy^2-x\right)=xy-y;$$

$$y'=\frac{xy-y}{2xy^2-x}.$$

Задача 9. Найти вторые производные от функций:

а) $y=\dfrac{4x+7}{2x+3}$

$$y'=\frac{4(2x+3)-2(4x+7)}{(2x+2)^2}=\frac{8x+12-8x-14}{(2x+2)^2}=-\frac{2}{(2x+3)^2};$$

$$y''=\frac{2}{(2x+3)^4}2(2x+3)2=\frac{8}{(2x+3)^3};$$

б) $\begin{cases}x=\sin^2 t,\\ y=\dfrac{1}{\cos^2 t}\end{cases}$ (параметрически заданная функция)

Здесь

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t},$$

$$y'_t = -\frac{1}{\cos^4 t} 2\cos t(-\sin t) = \frac{2\sin t}{\cos^3 t},$$

$$x'_t = 2\sin t \cos t,$$

$$y'_x = \frac{2\sin t}{\cos^3 t 2\sin t \cos t} = \frac{1}{\cos^4 t};$$

$$y''_x = \frac{(y'_x)'_t}{x'_t},$$

$$(y'_x)'_t = -\frac{1}{\cos^8 t}(4\cos^3 t(-\sin t)) = \frac{4\sin t}{\cos^5 t},$$

$$y''_{xx} = \frac{4\sin t}{\cos^5 t 2\sin t \cos t} = \frac{2}{\cos^6 t}.$$

Задача 10. Исследовать методами дифференциального исчисления функцию $f(x) = \frac{x^3}{x^2 - 1}$ и построить ее график.

Решение

Исследуем функцию по следующей схеме:

1) Область определения. Точки разрыва. Вертикальные асимптоты.

Функция теряет смысл, если знаменатель обращается в нуль ($x^2 - 1 = 0$). Следовательно, $x = \pm 1$ – точки бесконечного разрыва.

$$\lim_{\substack{x \to -1-0 \\ x < -1}} \frac{x^3}{x^2 - 1} = \lim_{\substack{x \to -1-0 \\ x+1<0}} \frac{x^3}{(x-1)(x+1)} = -\infty;$$

$$\lim_{\substack{x \to -1-0 \\ x < -1}} \frac{x^3}{x^2 - 1} = \lim_{\substack{x \to -1+0 \\ x+1<0}} \frac{x^3}{(x-1)(x+1)} = +\infty;$$

$$\lim_{\substack{x \to 1-0 \\ x < 1}} \frac{x^3}{x^2 - 1} = \lim_{\substack{x \to 1-0 \\ x-1<0}} \frac{x^3}{(x-1)(x+1)} = -\infty;$$

$$\lim_{\substack{x \to 1+0 \\ x > 1}} \frac{x^3}{x^2 - 1} = \lim_{\substack{x \to 1+0 \\ x-1>0}} \frac{x^3}{(x-1)(x+1)} = +\infty;$$

Данная кривая имеет две вертикальные асимптоты: $x = -1$ и $x = 1$.

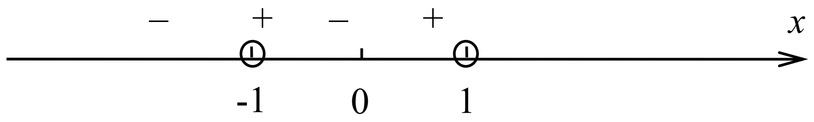
2) Корни функции. Интервалы знакопостоянства. Четность, нечетность.

Найдем точки, в которых функция обращается в нуль:

$$f\left(x\right)=\frac{x^3}{x^2-1}=0$$

при $x = 0$. Точка пересечения с осью абсцисс 0 (0, 0). Укажем интервалы знакопостоянства функции.

Знак $f\left(x\right)$



$$f\left(-x\right)=\frac{-x^3}{\left(-x\right)^2-1}=-\frac{x^3}{x^2-1}=-f\left(x\right).$$

Следовательно, функция нечетная и ее график симметричен относительно начала координат 0 (0, 0).

3) Интервалы возрастания, убывания. Экстремумы.

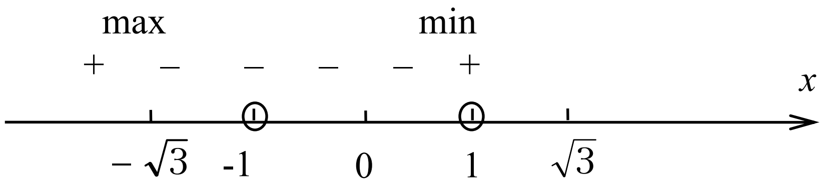
Найдем первую производную и приравняем ее к нулю:

$$f'\left(x\right)=\frac{3x^2\left(x^2-1\right)-x^3\cdot 2x}{\left(x^2-1\right)^2}=\frac{x^2\left(3x^2-3-2x^2\right)}{\left(x^2-1\right)^2}=\frac{x^2\left(x^2-3\right)}{\left(x^2-1\right)^2}=0;$$

$x_1=0,\ x_2=-\sqrt{3},\ x_3=\sqrt{3}$ – стационарные точки.

Определим вид экстремума и интервалы возрастания и убывания функции.

Знак $f'\left(x\right)$



Вычислим функцию в точках экстремума

$$f\left(-\sqrt{3}\right)=\frac{-3\sqrt{3}}{3-1}=-\frac{3}{2}\sqrt{3}\approx -2{,}55,\ f\left(\sqrt{3}\right)=\frac{3\sqrt{3}}{3-1}=\frac{3}{2}\sqrt{3}\approx 2{,}55.$$

Точка $A\left(-\sqrt{3};-\frac{3}{2}\sqrt{3}\right)$ – точка максимума.

Точка B ($\sqrt{3};\frac{3}{2}\sqrt{3}$) – точка минимума (рис.4).

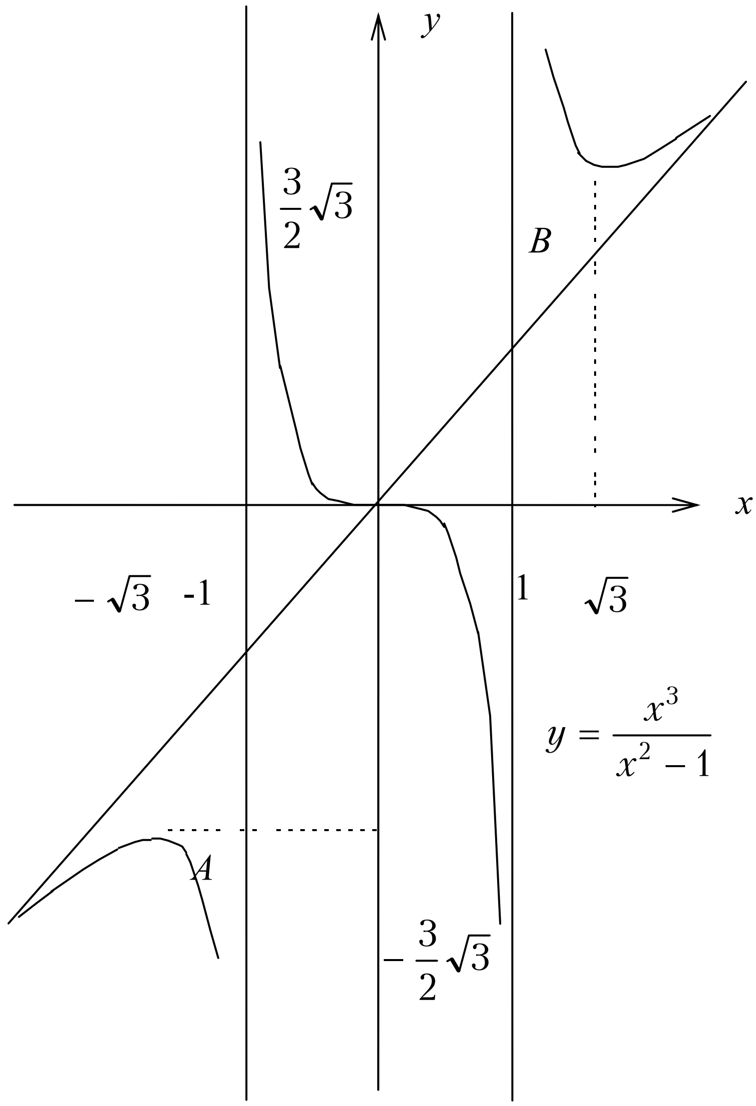


Рис.4

Функция возрастает на интервалах $(-\infty;-\sqrt{3})$ и $(\sqrt{3};\infty)$ и убывает на интервалах $\left(-\sqrt{3};-1\right),\left(-1;1\right)$ и $(1;\sqrt{3})$.

4) Интервалы выпуклости, вогнутости. Точки перегиба.

Найдем вторую производную и приравняем ее к нулю:

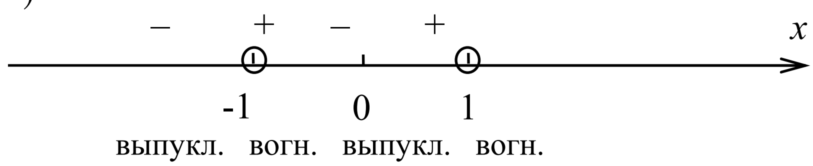
$$f''(x)=\left(\frac{x^4-3x^2}{\left(x^2-1\right)^2}\right)'=\frac{\left(4x^3-6x\right)\left(x^2-1\right)^2-2\left(x^2-1\right)\cdot 2x\left(x^4-3x^2\right)}{\left(x^2-1\right)^4}=$$

$$=\frac{2x\left(x^2-1\right)\left(\left(2x^2-3\right)\left(x^2-1\right)-2\left(x^4-3x^2\right)\right)}{\left(x^2-1\right)^4}=\frac{2x\left(x^2+3\right)}{\left(x^2-1\right)^3}=0.$$

Следовательно, $x=0$ – возможная точка перегиба.

Укажем интервалы выпуклости и вогнутости.

Знак $f''(x)$



Точка 0 (0, 0) – точка перегиба графика функции.

Интервалы выпуклости: $(-\infty;1)$ и (0,1).

Интервалы вогнутости: (–1, 0) и (1, +∞).

5) Наклонные асимптоты.

Найдем

$$k=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^2}{x^2-1}=1,$$

$$b=\lim_{x\to\pm\infty}\left(f(x)-kx\right)=\lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{x^3}{x^2-1}-x\right)=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x}{x^2-1}=0$$

Таким образом, у данной кривой существует одна наклонная асимптота $y=x$.

График функции приводится на рис.4.

Задача 11. Проверить, удовлетворяет ли уравнению

$$x^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+2xy\frac{\partial^2 u}{\partial x dy}+y^2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$$

функция $u=xe^{y/x}$.

Решение

Найдем все производные второго порядка от функции $u=xe^{y/x}$:

$$\frac{\partial u}{\partial x}=e^{y/x}+xe^{y/x}\left(-\frac{y}{x^2}\right)=e^{y/x}\left(1-\frac{y}{x}\right)=e^{y/x}\frac{x-y}{x};$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=xe^{y/x}\cdot\frac{1}{x}=e^{y/x};$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=e^{y/x}\left(-\frac{y}{x^2}\right)\cdot\frac{x-y}{x}+e^{y/x}\cdot\frac{x-(x-y)}{x^2}=e^{y/x}\frac{y^2}{x^3};$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = e^{y/x}\frac{1}{x} = \frac{e^{y/x}}{x}; \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = e^{y/x}\left(-\frac{y}{x^2}\right) = -\frac{ye^{y/x}}{x^2}.$$

Подставим найденные производные в уравнение

$$x^2 e^{y/x}\frac{y^2}{x^2} + 2xy\left(-\frac{ye^{y/x}}{x^2}\right) + y^2\frac{e^{y/x}}{x} =$$

$$= \frac{e^{y/x}}{x}\left(y^2 - 2y^2 + y^2\right) = 0.$$

Получили тождество и, следовательно, функция удовлетворяет уравнению.

Задача 12. Найти формулу вида $y = ax + b$ методом наименьших квадратов по данным таблицы:

x	1	2	3	4	5
y	5,9	6,9	5,4	3,4	3,9

Решение

Найдем коэффициенты a и b путем минимизации суммы

$$S(a,b) = \sum_{i=1}^{\infty}\left(y_i - (ax_i + b)\right)^2.$$

По данным таблицы составим систему двух линейных уравнений:

$$\begin{cases} \sum\limits_{i=1}^{\infty} y_i x_i - a\sum\limits_{i=1}^{\infty} x_i^2 - b\sum\limits_{i=1}^{\infty} x_i = 0 \\ \sum\limits_{i=1}^{\infty} y_i - a\sum\limits_{i=1}^{\infty} x_i - bn = 0, \end{cases}$$

решив которую найдем параметры a и b.

Предварительно вычислим суммы:

$$\sum_{i=1}^{5} x_i y_i = 5{,}9 + 13{,}8 + 16{,}2 + 13{,}6 + 19{,}5 = 69;$$

$$\sum_{i=1}^{5} x_i^2 = 1 + 4 + 9 + 16 + 25 = 55;$$

$$\sum_{i=1}^{5} x_i = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 15;$$

$$\sum_{i=1}^{5} y_i = 5,9 + 6,9 + 5,4 + 3,4 + 3,9 = 25,5.$$

Составим систему уравнений:

$$55a + 76,5 - 45a = 69,$$

$$10a = -7,5 \Rightarrow a = -0,75,$$

$$b = 5,1 + 2,25 = 7,35.$$

Искомая формула имеет вид:

$$y = -0,75x + 7,35.$$

График искомой зависимости приводится на рис. 7.

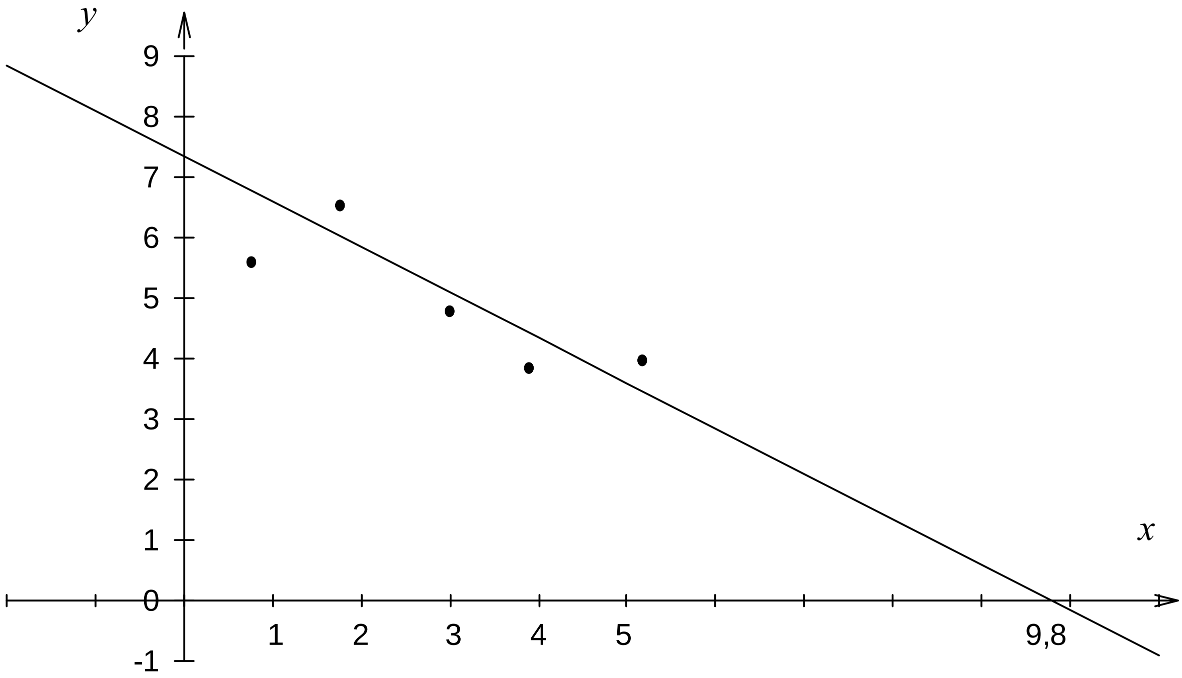


Рис. 5

Примерный вариант решения контрольной работы № 2

2 семестр

Задача 1. Найти неопределенные интегралы:

а) $\int \frac{\cos x}{\sqrt{9 - \sin^2 x}} dx$.

Сделаем подстановку $\sin x = t$, тогда $\cos x dx = dt$, следовательно, $d(\sin x) = \cos x dx$. Согласно формуле $\int \frac{dU}{\sqrt{a^2 - U^2}} = \arcsin \frac{U}{a} + C$, находим:

$$\int \frac{\cos x}{\sqrt{9 - \sin^2 x}} dx = \int \frac{d(\sin x)}{\sqrt{3^2 - (\sin x)^2}} = \arcsin \frac{\sin x}{3} + C.$$

б) $\int \cos \frac{7x}{2} \cdot \cos \frac{4x}{5} dx$.

Применяя формулу $\cos\alpha \cdot \cos\beta = \frac{1}{2}\left[\cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta)\right]$, будем иметь:

$$\int = \frac{1}{2}\int \left[\cos\left(\frac{7x}{2} + \frac{4x}{5}\right) + \cos\left(\frac{7x}{2} - \frac{4x}{5}\right)\right] dx =$$

$$= \frac{1}{2}\int \left(\cos \frac{43x}{10} + \cos \frac{28}{10} x\right) dx = \frac{1}{2}\int \cos \frac{43x}{10}\, dx + \frac{1}{2}\int \cos \frac{28x}{10}\, dx =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{10}{43} \sin \frac{43x}{10} + \frac{1}{2} \cdot \frac{10}{28} \cdot \sin \frac{28x}{10} + C = \frac{5}{43} \sin \frac{43x}{10} + \frac{5}{28} \sin \frac{28x}{10} + C.$$

в) $\int (x-1) \sin 2x dx$.

Примем $U = x - 1$, $dV = \sin 2x dx$, тогда $dU = dx$, $V = -\frac{1}{2}\cos 2x$.

Используя формулу интегрирования по частям $\int U dV = UV - \int V dU$, получим:

$$\int (x-1)\sin 2x dx = \left|\begin{matrix} U = x - 1 \\ dV = \sin 2x dx \end{matrix}\right| \begin{matrix} dU = dx \\ V = -\frac{1}{2}\cos 2x \end{matrix}\Bigg| =$$

$$= -\frac{x-1}{2}\cos 2x + \frac{1}{2}\int \cos 2x dx = \frac{1-x}{2}\cos 2x + \frac{1}{4}\sin 2x + C.$$

г) $\int (1 - 2x) e^{3x} dx$.

Примем $U = 1 - 2x$, $dV = e^{3x} dx$, тогда $dU = -2dx$, $V = \frac{1}{3} e^{3x}$.

Используя формулу интегрирования по частям $\int UdV = UV - \int VdU$, получим:

$$\int (1-2x)e^{3x}dx = \begin{vmatrix} U = 1-2x & dU = -2dx \\ dV = e^{3x}dx & V = \frac{1}{3}e^{3x} \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{1-2x}{3}e^{3x} + \frac{2}{3}\int e^{3x}dx = \frac{1-2x}{3}e^{3x} + \frac{2}{9}e^{3x} + C.$$

д) $\int \frac{(2x-1)dx}{\sqrt{x^2+2x+3}}$.

Выделим в числителе производную подкоренного выражения и разложим полученный интеграл на разность двух интегралов. Применяя формулы $\int \frac{dU}{\sqrt{U}} = 2\sqrt{U} + C$ и $\int \frac{dU}{\sqrt{U^2+a^2}} \ln\left|U + \sqrt{U^2+a^2}\right| + C$, получим:

$$\int \frac{(2x-1)dx}{\sqrt{x^2+2x+3}} = \int \frac{(2x+2)-3}{\sqrt{x^2+2x+3}}dx = \int \frac{(2x+2)dx}{\sqrt{x^2+2x+3}} - 3\int \frac{dx}{\sqrt{(x+1)^2+2}} =$$

$$= 2\sqrt{^2+2x+3} - 3\ln\left|x+1+\sqrt{x^2+2x+3}\right| + C.$$

е) $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{4+x^2}}$.

Применяя подстановку $x = 2\mathrm{tg}t$, $dx = \frac{2dt}{\cos^2 t}$,

$$\mathrm{tg}t = \frac{x}{2} \Rightarrow \frac{\sin t}{\cos t} = \frac{x}{2} \Rightarrow \frac{\sin t}{\sqrt{1-\sin^2 t}} = \frac{x}{2} \Rightarrow \frac{\sin^2 t}{1-\sin^2 t} = \frac{x^2}{4} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sin^2 t = \frac{x^2}{4} - \frac{x^2}{4}\sin^2 t \Rightarrow \sin^2 t\left(1 + \frac{x^2}{4}\right) = \frac{x^2}{4} \Rightarrow \sin^2 t = \frac{\frac{x^2}{4}}{1+\frac{x^2}{4}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sin^2 t = \frac{x^2}{4+x^2} \Rightarrow \sin t = \sqrt{\frac{x^2}{4+x^2}},$$ получим:

$$\int \frac{dx}{x^2\sqrt{4+x^2}} = \int \frac{2dt}{\cos^2 t \cdot 4\mathrm{tg}^2 t\sqrt{4+4\mathrm{tg}^2 t}} = \frac{1}{4}\int \frac{dt}{\sin^2 t\sqrt{1+\mathrm{tg}^2 t}} =$$

$$= \frac{1}{4}\int \frac{dt}{\sin^2 t\sqrt{\frac{\cos^2 t + \sin^2 t}{\cos^2 t}}} = \frac{1}{4}\int \frac{\cos dt}{\sin^2 t} = \frac{1}{4}\int \frac{d(\sin t)}{\sin^2 t} = -\frac{1}{4}(\sin t)^{-1} + C =$$

$$= -\frac{1}{4\sin t} + C = -\frac{1}{4\sqrt{\dfrac{x^2}{4+x^2}}} + C.$$

ж) $\int \frac{16xdx}{\left(2x^2 - x\right)\left(x+1\right)}$.

Разложим знаменатель на произведение линейных множителей и представим рациональную дробь в виде суммы простейших дробей:

$$\frac{16x}{x(2x-1)(x+1)} = \frac{16}{(2x-1)(x+1)} = \frac{A}{2x-1} + \frac{B}{x+1}.$$

Должны иметь $16 = Ax + A + 2Bx - B$ или $16 = \left(A + 2B\right)x + A - B$.

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x, получим систему уравнений:

$$\begin{cases} A + 2B = 0 \\ A - B = 16 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = -2B \\ -2B - B = 16. \end{cases}$$

Решив систему, найдем $A = \frac{32}{3}$ и $B = -\frac{16}{3}$.

Интеграл представляется разностью двух интегралов:

$$\int \frac{16xdx}{\left(2x^2 - x\right)\left(x+1\right)} = \int \frac{\frac{32}{3}}{2x-1}dx - \int \frac{\frac{16}{3}}{x+1}dx = = \frac{32}{3}\cdot\frac{1}{2}\ln\left|2x-1\right| - \frac{16}{3}\ln\left|x+1\right| + C =$$

$$= \frac{16}{3}\left(\ln\left|2x-1\right| - \ln\left|x+1\right|\right) + C = \frac{16}{3}\ln\left|\frac{2x-1}{x+1}\right| + C.$$

Задача 2. Вычислить определенные интегралы:

а) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2a}} \left(x+3\right)\sin axdx$.

$$\int\limits_0^{\frac{\pi}{2a}} (x+3)\sin axdx = \left| \begin{matrix} U = x+3 \\ dV = \sin axdx \end{matrix} \right| \quad \left. \begin{matrix} du = dx \\ V = -\dfrac{1}{a}\cos ax \end{matrix} \right| =$$

$$= -\frac{x+3}{a}\cos ax\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2a}} + \frac{1}{a}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2a}} \cos axdx = -\frac{x+3}{a}\cos ax\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2a}} + \frac{1}{a^2}\sin ax\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2a}} =$$

$$= -\frac{\frac{\pi}{2a}+3}{a}\cos\left(a\cdot\frac{\pi}{2a}\right)+\frac{0+3}{a}\cos 0^\circ+\frac{1}{a^2}\sin\left(a\cdot\frac{\pi}{2a}\right)-\frac{1}{a}\sin 0 =$$

$$= \frac{3}{a}+\frac{1}{a^2}=\frac{3a+1}{a^2}.$$

б) $\int\limits_0^5 \frac{xdx}{\sqrt{1+3x}}$.

Примем $\sqrt{1+3x}=t$. Найдем пределы интегрирования для t:
если x=0, то t=1;
если x=5, то t=4.

Выразим x: $1+3x=t^2$, $\quad x=\frac{t^2-1}{3}$ и найдем дифференциал обеих частей выражения $dx=\frac{2tdt}{3}$. Подставив x, dx и найденные пределы интегрирования в интеграл, получим:

$$\int\limits_0^5 \frac{xdx}{\sqrt{1+3x}} = \left| \begin{array}{l} \sqrt{1+3x}=t, \quad dx=\dfrac{2tdt}{3} \\ x=0,\, t=1 \\ x=5,\, t=4 \end{array} \right| =$$

$$= \int\limits_1^4 \frac{(t^2-1)}{3\cdot t}\frac{2t}{3}dt = \frac{2}{9}\int\limits_1^4 \left(t^2-1\right)dt = \frac{2}{9}\int\limits_1^4 \left(t^2-1\right)dt =$$

$$= \frac{2}{9}\left(\frac{t^3}{3}-t\right)\Bigg|_1^4 = \frac{2}{9}\left(\frac{64}{3}-4-\frac{1}{3}+1\right) = \frac{2}{9}\left(\frac{63}{3}-3\right) = \frac{2}{9}\cdot 18^2 = 4.$$

Задача 3. Вычислить несобственный интеграл или установить его расходимость $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2+1}$.

Рассмотрим предел:

$$\lim_{\alpha\to-\infty}\int\limits_\alpha^0 \frac{dx}{x^2+1} + \lim_{\beta\to\infty}\int\limits_0^\beta \frac{dx}{x^2+1} = \lim_{\alpha\to-\infty} \operatorname{arctg}x\Big|_\alpha^0 + \lim_{\beta\to\infty}\operatorname{arctg}x\Big|_0^\beta =$$

$= -\operatorname{arctg}(-\infty)+\operatorname{arctg}(+\infty) = -\left(-\frac{\pi}{2}\right)+\frac{\pi}{2}=\pi$. $\Rightarrow$ Несобственный интеграл $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2+1}$ сходится.

Задача 4. Изменить порядок интегрирования в интеграле $\int\limits_0^1 dy \int\limits_{\sqrt{y}}^{2-y} f(x,y)\,dx.$

Решение:

Область интегрирования D (рис.6) ограничена линиями: $y=0$, $x=\sqrt{y}$, $x=2-y$.

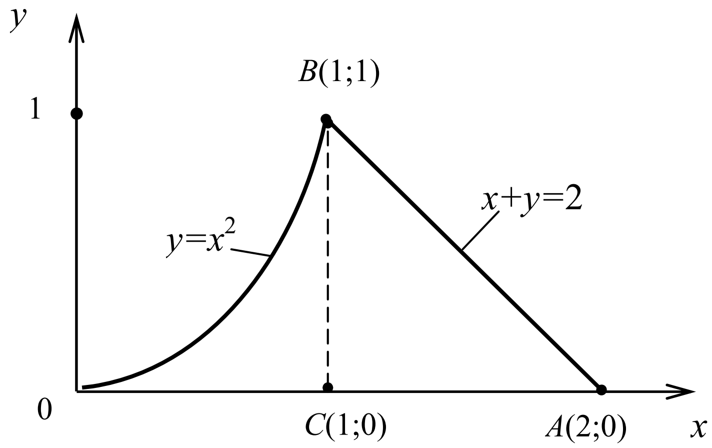


Рис.6

Если же сначала интегрировать по y, затем по x, то область D сначала надо разбить на две области OBC и CBA. Получим:

$$\int\limits_0^1 dy \int\limits_{\sqrt{y}}^{2-y} f(x,y)\,dx = \int\limits_0^1 dx \int\limits_0^{x^2} f(x,y)\,dy + \int\limits_1^2 dx \int\limits_0^{2-x} f(x,y)\,dy.$$

Задача 5.

а) Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y=(x+1)^2$, $y=5-x$ и осью OX (рис.7).

Решение:

По уравнениям границы области D построим данную фигуру. Линии, ограничивающие ее, пересекаются в точке M (1; 4). Должны иметь $y=(x+1)^2$ и $y=5-x$.

Откуда $(x+1)^2 = 5-x$;

$$x^2+3x-4=0,\ M_1(-4;9)\notin D,$$

$$x_1=-4,\ x_2=1;$$

$$y_1=9,\ y_2=4,\ M_2(1;4)\in D.$$

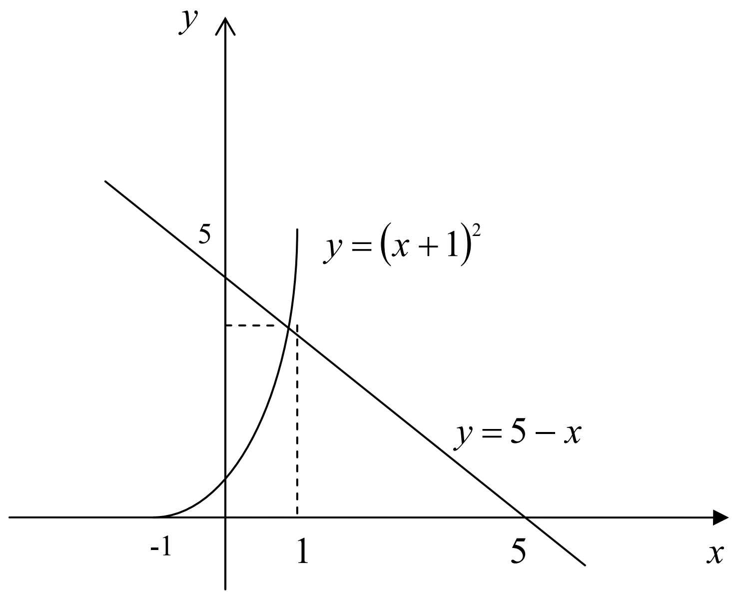


Рис.7

Для области D справедливы неравенства

$$0 \le y \le 4,\ \sqrt{y} - 1 \le x \le 5 - y.$$

Искомая площадь

$$S = \iint\limits_D dxdy = \int\limits_c^d dy \int\limits_{\varphi_1(y)}^{\varphi_2(y)} dx = \int\limits_0^4 dy \int\limits_{\sqrt{y}-1}^{5-y} dx = \int\limits_0^4 \left(5 - y - \sqrt{y} + 1\right) dy =$$

$$= \int\limits_0^4 \left(6 - y - \sqrt{y}\right) dy = \left(6y - \frac{y^2}{2} - \frac{2}{3} y^{3/2}\right)\Bigg|_0^4 = 24 - 8 - \frac{2 \cdot 8}{3} = \frac{32}{3}.$$

б). Вычислить площадь фигуры, ограниченной линией $\rho^2 = a^2 \sin 2\varphi$ (рис.8).

Решение:

Построив кривую и замечая, что она симметрична относительно полюса и что при изменении φ от 0 до $\frac{\pi}{2}$ текущая точка (φ, ρ) отсечет половину кривой, расположенную выше полярной оси, будем иметь:

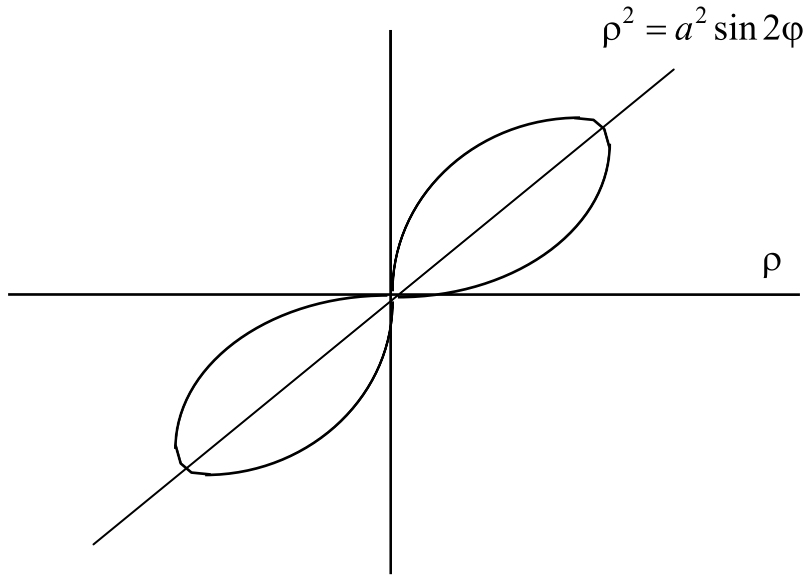


Рис.8

$$S = \iint\limits_D \rho d\rho d\varphi = 2\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int\limits_0^{a\sqrt{\sin 2\varphi}} \rho d\rho = a^2 \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2\varphi d\varphi =$$

$$= -\frac{a^2}{2}\cos 2\varphi \Big(_0^{\frac{\pi}{2}} = a^2.$$

Задача 6. Найти объем тела, ограниченного данными поверхностями $x + y + z = 4, \quad x = 3, \quad y = 2, \quad x = o, \quad y = 0, \quad z = 0$ (рис. 9, 10)

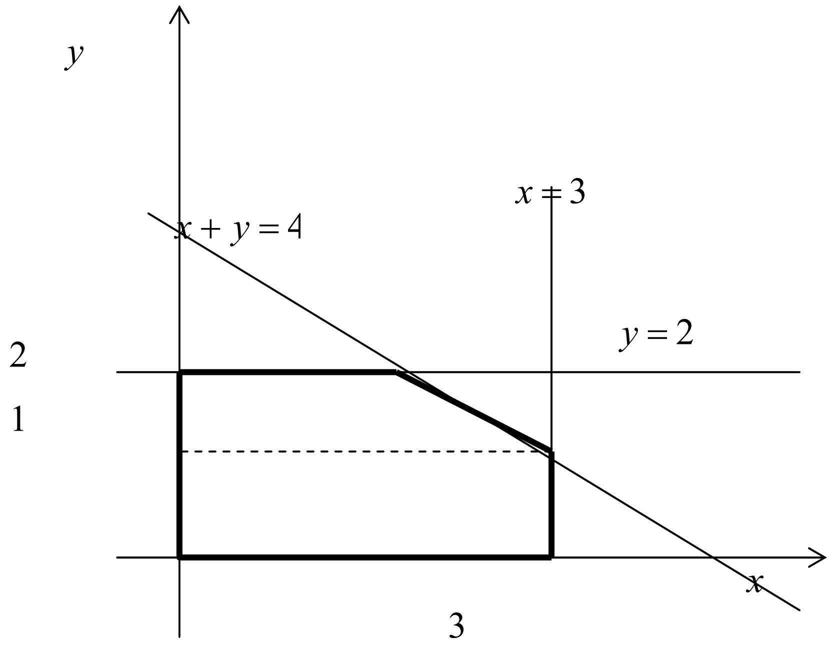


Рис.9

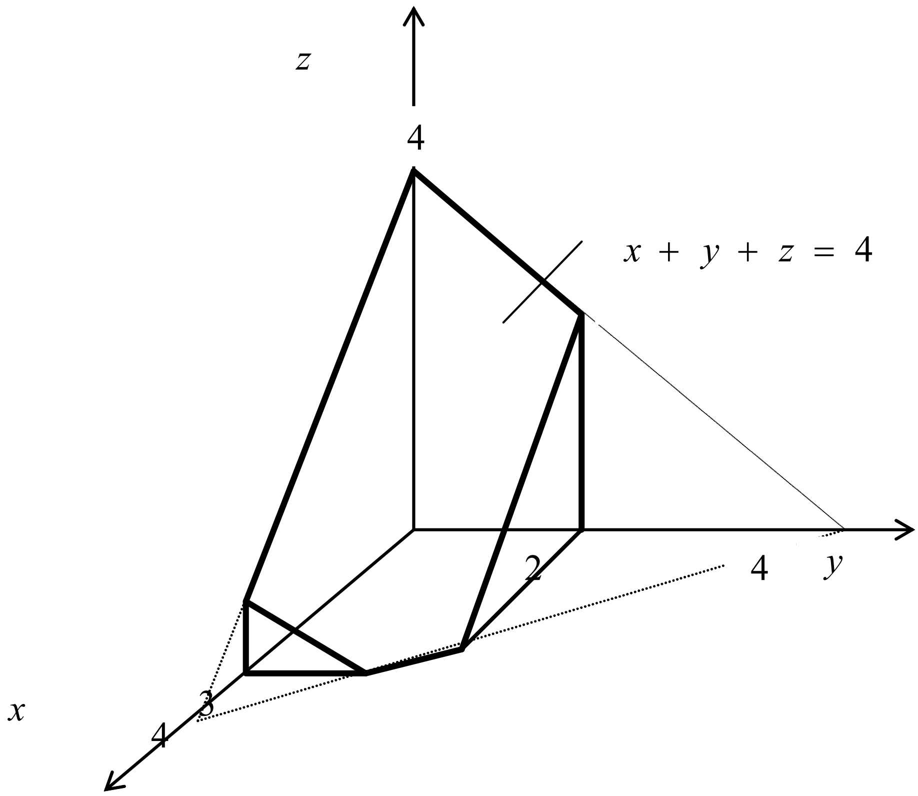


Рис.10

$$V=\int_0^1 dy\int_0^3 dx\int_0^{4-x-y}dz+\int_1^2 dy\int_0^{4-y}dx\int_0^{4-x-y}dz=\int_0^1 dy\int_0^3(4-x-y)dx+\int_1^2 dy\int_0^{4-y}(4-x-y)dx=$$

$$=\int_0^1\left(4x-\frac{x^2}{2}-yx\right)\Big|_0^3 dy+\int_1^2\left(4x-\frac{x^2}{2}-yx\right)\Big|_0^{4-y} dy=$$

$$=\int_0^1(12-\frac{9}{2}-3y)dy+\int_1^2\left(4(4-y)-\frac{(4-y)^2}{2}-y(4-y)\right)dy=$$

$$=\int_0^1\left(\frac{15}{2}-3y\right)dy+\int_1^2\left(16-4y-8+4y-\frac{y^2}{2}-4y+y^2\right)dy=$$

$$=\int_0^1\left(\frac{15}{2}-3y\right)dy+\int_1^2\left(8-4y+\frac{y^2}{2}\right)dy=\left(\frac{15}{2}y-\frac{3y^2}{2}\right)\Big|_0^1+\left(8y-2y^2+\frac{y^3}{6}\right)\Big|_1^2=\frac{55}{6}\text{ кв.ед.}$$

Задача 7. Найти центр тяжести однородного тела, ограниченного конической поверхностью $z=\sqrt{x^2+y^2}$ и плоскостью $z=3$ (рис. 11, 12).

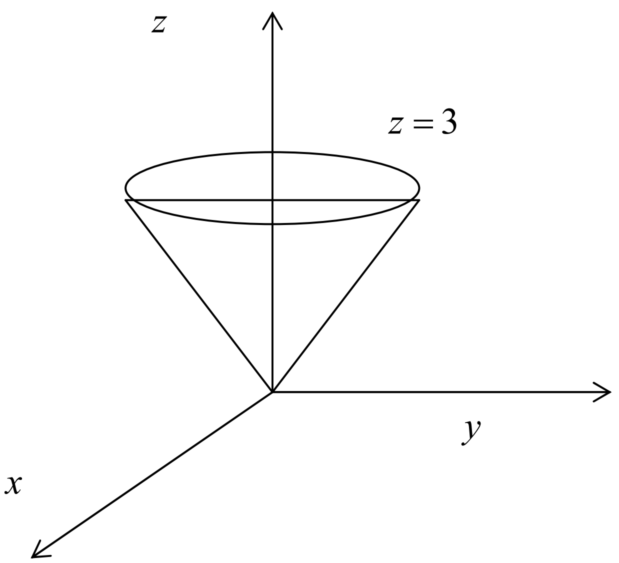


Рис.11

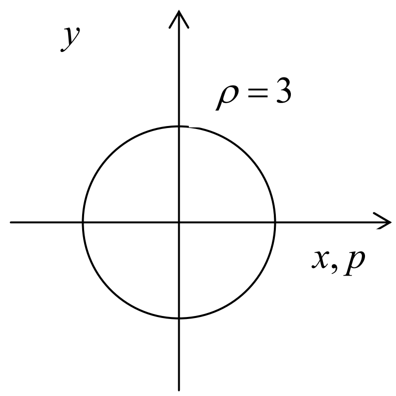


Рис.12

$$M_{yz} = M_{xz} = 0$$

$$M_{xy} = \iint\limits_D dxdy \int\limits_{\sqrt{x^2+y^2}}^{3} z\,dz = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^3 \rho\, d\rho \int\limits_\rho^3 z\,dz = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^3 \rho \frac{z^2}{2}\Big|_\rho^3 d\rho =$$

$$= \frac{1}{2}\int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^3 \left(9\rho - \rho^3\right) d\rho = \frac{1}{2}\int\limits_0^{2\pi} \left(\frac{9\rho^2}{2} - \frac{\rho^4}{4}\right)\Big|_0^3 d\varphi = \frac{1}{2}\int\limits_9^{2\pi} \left(\frac{81}{2} - \frac{81}{4}\right) d\varphi =$$

$$= \frac{81}{8}\varphi\Big|_0^{2\pi} == \frac{81}{4}\pi$$

$$m = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^3 \rho\, d\rho \int\limits_\rho^3 dz = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^3 \rho\left(3-\rho\right) d\rho = \int\limits_0^{2\pi} \left(\frac{3\rho^2}{2} - \frac{\rho^3}{3}\right)\Big|_0^3 d\varphi =$$

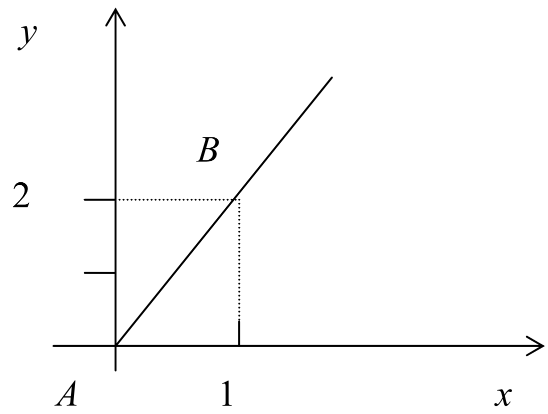
$$= \int\limits_0^{2\pi} \left(\frac{27}{2} - \frac{27}{3}\right) d\varphi = 9\pi$$

$$\overline{z} = \frac{81}{4}\pi / 9\pi = \frac{9}{4}$$

$$C\,(0{,}0{,}\frac{9}{4}).$$

Задача 8. Вычислить $\int\limits_{AB} \frac{dL}{\sqrt{x^2+y^2+4}}$, где AB – отрезок прямой, соединяющий точки $A\left(0,2\right)$ и $B\left(1,2\right)$.

Решение:



Уравнение прямой, проходящей через две заданные точки имеет вид: $\dfrac{x-x_1}{x_2-x_1}=\dfrac{y-y_1}{y_2-y_1}$. Тогда уравнение данной прямой: $y=2x$.

Дифференциал дуги: $dL=\sqrt{1+\left(2x\right)'^{2}}dx=\sqrt{1+4}dx=\sqrt{5}dx$.

$$\int\limits_{AB}\frac{dL}{\sqrt{x^2+y^2+4}}=$$

$$=\int\limits_0^1\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{x^2+\left(2x\right)^2+4}}dx=\int\limits_0^1\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5x^2+4}}dx=\int\limits_0^1\frac{dx}{\sqrt{x^2+\frac{4}{5}}}=\ln\left|x+\sqrt{x^2+\frac{4}{5}}\right|\Big|_0^1=$$

$$=\ln\left|1+\sqrt{\frac{9}{5}}\right|-\ln\left|1+\sqrt{\frac{4}{5}}\right|=\ln\frac{3+\sqrt{5}}{2}.$$

Задача 9. Вычислить $J=\int\limits_L xydx+\left(x^2+y\right)dy,$ если линия L – дуга параболы $y=x^2$, расположенная между точками A (0, 0) и B (2, 4).

Решение

Из $y=x^2$ следует $dy=2xdx,\ \ x\in\left[0,2\right]$. Откуда

$$\int\limits_L P\left(x,y\right)dx+Q\left(x,y\right)dy=\int\limits_a^b\Big(P\big(x,f\left(x\right)\big)+Q\big(x,f\left(x\right)\big)f'\left(x\right)\Big)dx=$$

$$=\int\limits_0^2\Big(x\cdot x^2+\left(x^2+x^2\right)\cdot 2x\Big)dx=\int\limits_0^2 5x^3dx=\frac{5}{4}x^4\Big|_0^2=20.$$

Задача 10. Найти общее решение дифференциального уравнения.

а) $y^2 \ln x dx - (y-1) x dy = 0.$

Имеем $y^2 \ln x dx = (y-1) x dx.$

Это уравнение с разделяющимися переменными. Разделив переменные, получим:

$$\frac{y-1}{y^2} dy = \frac{\ln x}{x} dx.$$

$$\left(\frac{1}{y} - \frac{1}{y^2}\right) dy = \frac{\ln x}{x} dx\,.$$

Интегрируя обе части последнего равенства, получим общее решение исходного уравнения

$$\frac{1}{y} + \ln y = c + \frac{\ln^2 x}{2}.$$

б) $\left(x^2 - 1\right) y' - xy = x^3 - x.$

Данное уравнение линейное, так как y и y' входят в него в первой степени. Для нахождения общего решения линейного дифференциального уравнения первого порядка вводятся вместо одной неизвестной функции y – две неизвестные функции u и v: $y = uv$ для того, чтобы одной из них распорядиться по своему усмотрению. Подставим $y = uv$ и $y' = u'v + v'u$ в данное уравнение, предварительно разделив все уравнения на $\left(x^2 - 1\right) \neq 0$:

$$u'v + v'u - \frac{x}{x^2 - 1} uv = \frac{x\left(x^2 - 1\right)}{x^2 - 1}.$$

Вынесем из двух последних слагаемых левой части последнего уравнения общий множитель:

$$u'v + u\left(v' - \frac{x}{x^2 - 1} v\right) = x. \quad (*)$$

Выражение в скобках зависит только от v и x.
Приравняем это выражение нулю (по своему усмотрению):

$$v' - \frac{x}{x^2 - 1} v = 0.$$

Получим дифференциальное уравнение первого порядка с разделяющимися переменными относительно неизвестной функции v. Разделим переменные: $\frac{dv}{dx} = \frac{x}{x^2 - 1} v;$ $\frac{dv}{v} = \frac{x}{x^2 - 1} dx.$

Откуда $\ln|v| = \frac{1}{2}\ln\left|x^2-1\right| + c..$

В частности, можно принять $v = \sqrt{x^2-1}$.

Подставляя v в (*), получим дифференциальное уравнение с разделяющимися переменными относительно u и x:

$$u'\sqrt{x^2-1} = x.$$

Разделив переменные, будем иметь $\frac{du}{dx}\sqrt{x^2-1} = x$;

$$du = \frac{x}{\sqrt{x^2-1}}dx.$$

Интегрируя, найдем: $u = \sqrt{x^2-1} + c$.

Подставив u и v в $y = uv$, получим общее решение:

$$y = \sqrt{x^2-1}\left(\sqrt{x^2-1} + c\right) = x^2 - 1 + c\sqrt{x^2-1}.$$

Задача 11. Найти общее решение уравнения $y''' = \frac{1}{x}$.

Последовательно интегрируя, получим:

$$y'' = \int \frac{1}{x}dx = \ln|x| + C_1,$$

$$y' = \int\left(\ln|x| + C_1\right)dx = \int \ln|x|dx + C_1\int dx = \begin{vmatrix} u = \ln|x| & du = \dfrac{dx}{x} \\ dv = dx & v = \int dx = x \end{vmatrix} =$$

$$= x\cdot\ln|x| - \int x\cdot\frac{dx}{x} + C_1\int dx = x\cdot\ln|x| - x + C_1x + C_2.$$

$$y = \int\left(x\cdot\ln|x| - x + C_1x + C_2\right)dx = \int x\cdot\ln|x|dx + C_1\int xdx + C_2\int dx =$$

$$= \begin{vmatrix} u = \ln|x| & du = \dfrac{dx}{x} \\ dv = xdx & v = \int xdx = \dfrac{x^2}{2} \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{x^2}{2}\ln|x| - \frac{1}{2}\int\frac{x^2dx}{x} + C_1\int xdx + C_2\int dx =$$

$$= \frac{x^2}{2}\ln|x| - \frac{x^2}{4} + C_1\frac{x_2}{2} + C_2x + C_3.$$

Задача 12. Найти частное решение уравнения $y'' - \frac{y'}{x-1} = x(x-1)$ при $y(2)=1,\ y'(2)=-1$.

Введем $y' = p \Rightarrow p' - \frac{p}{x-1} = x(x-1)$,

$$\frac{dp}{dx} - \frac{p}{x-1} = x(x-1)$$

или

$$\frac{dp}{dx} - \frac{1}{x-1}p = x(x-1).$$

Это линейное уравнение.

Введем

$$p = uv \Rightarrow \frac{dp}{dx} = v\frac{du}{dx} + u\frac{dv}{dx} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow v\frac{du}{dx} + u\frac{dv}{dx} - \frac{1}{x-1}uv = x(x-1),$$

$$\frac{dv}{v} = \frac{dx}{x},\ \ \ln|v| = \ln|x-1|.$$

Откуда $v = x-1$.

Исходное уравнение будет иметь вид:

$$(x-1)\frac{du}{dx} = x(x-1), x \neq 1.$$

Откуда

$$\frac{du}{dx} = x,\ \ u = \frac{x^2}{2} + C_1.$$

Тогда

$$y' = p = \left(\frac{x^2}{2} + C_1\right)(x-1) = \frac{x^3}{2} - \frac{x^2}{2} + C_1x - C_1.$$

Интегрируя, получим:

$$y = \frac{x^4}{8} - \frac{x^3}{6} + \frac{C_1}{2}x^2 + C_1x + C_2.$$

Из начальных условий

$$y(2) = 1,$$

$$y'(2) = -1$$

следует

$$C_1 = -3, C_2 = \frac{1}{3}.$$

Откуда

$$y = \frac{1}{24}\left(3x^4 - 4x^3 - 36x^2 + 72x + 8\right).$$

Задача 13. Найти частное решение дифференциального уравнения, удовлетворяющее данным начальным условиям:

$$y'' - 4y = 8e^{2x};\ y(0) = 1;\ y'(0) = -8.$$

Общее решение состоит из суммы какого-либо частного решения $\overline{y}$ данного уравнения и общего решения y_0 соответствующего однородного уравнения: $y'' - 4y = 0$, т.е. $y = y_0 + \overline{y}$

Характеристическое уравнение

$$k^2 - 4 = 0$$

имеет корни $k_{1,2} = \pm 2$.

Им соответствуют два линейно независимых решения однородного дифференциального уравнения $y_1 = e^{2x}$; $y_2 = e^{-2x}$. Тогда общее решение однородного уравнения имеет вид:

$$y_0 = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-2x}.$$

Найдем частное решение $\overline{y}$ неоднородного уравнения. Так как правая часть *ДУ* равна $f(x) = 8e^{2x}$, то и $\overline{y}$ будем искать в виде

$$Ae^{\alpha x} \cdot x^s,$$

где A – неизвестный коэффициент, который надо найти, s – число корней характеристического уравнения, совпадающих с коэффициентом α в показателе степени функции $e^{\alpha x}$, стоящей в правой части уравнения. В рассматриваемом случае $k_1 = \alpha = 2$; $k_2 = -2 \neq \alpha$. Число совпадений α с k_1 и k_2 равно единице: $s = 1$. Итак, окончательно:

$$\overline{y} = Ae^{2x}x.$$

Найдем коэффициент A.

Для этого возьмем производные

$$\begin{array}{r|l} -4 & \overline{y} = Ae^{2x} \\ 0 & \overline{y}' = 2Ae^{2x}x + Ae^{2x} \\ 1 & \overline{y}'' = 4Ae^{2x}x + 4Ae^{2x} \end{array}$$

Умножая $\overline{y}, \overline{y}', \overline{y}''$ на их коэффициенты в уравнении (т.е. соответственно на –4; 0; 1) и сложив, получим левую часть неоднородного уравнения, которая должна быть тождественно равна правой, т.е.

$$4Ae^{2x}x + 4Ae^{2x} - 4Ae^{2x}x = 8e^{2x}$$

или

$$4Ae^{2x} = 8e^{2x} \Rightarrow 4A = 8 \Rightarrow A = 2.$$

Подставив A в $\overline{y}$, получим:

$$\overline{y} = 2xe^{2x}.$$

Общее решение уравнения будет иметь вид:

$$y = C_1e^{2x} + C_2e^{-2x} + 2xe^{2x}.$$

Найдем частное решение уравнения, удовлетворяющее начальным условиям $y(0) = 1$; $y'(0) = 8$. Для этого в общее решение и в

$$y' = 2C_1e^{2x} - 2C_2e^{-2x} + 4xe^{2x} + 2e^{2x}.$$

подставим начальные условия. Получим линейную систему уравнений относительно неизвестных c_1 и c_2:

$$\begin{cases} 1 = C_1 + C_2 \\ -8 = 2C_1 - 2C_2 + 2. \end{cases}$$

Решив, найдем: $C_1 = -2$; $C_2 = 3$.

После подстановки C_1, C_2 в общее решение получим частное решение уравнения

$$y = -2e^{2x} + 3e^{-2x} + 2xe^{2x},$$

удовлетворяющее начальным условиям.

Задача 14. Найти общее решение системы дифференциальных уравнений

$$\frac{dx}{dt} = x + 5y,$$
$$\frac{dy}{dt} = -x - 3y.$$

Продифференцируем второе уравнение системы по t:

$$\frac{d^2y}{dt^2} = -\frac{dx}{dt} - 3\frac{dy}{dt}.$$

Подставим $\frac{dx}{dt}=x+5y$ (см. первое уравнение) в $\frac{d^2y}{dt^2}$:

$$\frac{d^2y}{dt^2}+2\frac{dy}{dt}+2y=0.$$

Характеристическое уравнение имеет вид:

$$k^2+2k+2=0.$$

Корни этого уравнения $k_{1,2}=-1\pm i\ \left(\alpha=-1,\beta=1\right)$.

Тогда

$$y=C_1e^{-t}\cos t+C_2e^{-t}\sin t.$$

Откуда

$$\frac{dy}{dt}=-C_1e^{-t}\cos t-C_1e^{-t}\sin t-C_2e^{-t}\sin t+C_2e^{-t}\cos t.$$

Выразим из второго уравнения $x=-\frac{dy}{dt}-3y$.

Откуда

$$x=e^{-t}\left[\left(C_2-2C_1\right)\cos t+\left(C_1-2C_2\right)\sin t\right].$$

Общее решение исходной системы примет вид:

$$x=e^{-t}\left[\left(C_2-2C_1\right)\cos t+\left(C_1-2C_2\right)\sin t\right],$$

$$y=C_1e^{-t}\cos t+C_2e^{-t}\sin t.$$

Примерный вариант решения контрольной работы № 3

3 семестр

Задача 1. Исследовать сходимость числовых рядов:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n\cdot 4^n}{\left(2n-1\right)!}.$$

Это числовой ряд с положительными членами.
Воспользуемся признаком Даламбера. Имеем:

$$l=\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(n+1\right)\cdot 4^{n+1}\cdot\left(2n-1\right)!}{\left(2n+1\right)!\cdot n\cdot 4^n}=$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n}\lim_{n\to\infty}\frac{4\cdot1\cdot2\cdot3\cdot\ldots\cdot(2n-1)}{1\cdot2\cdot3\cdot\ldots\cdot(2n-1)\cdot2n(2n+1)} = 0.$$

Так как $l < 1$, ряд сходится.

Задача 2. Исследовать сходимость знакочередующегося ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\cdot\frac{2n+3}{5n^2-4}.$$

Условия теоремы Лейбница выполняются:

$$\lim_{n\to\infty}u_n = \lim_{n\to\infty}\frac{2n+3}{5n^2-4} = \lim_{n\to\infty}\frac{2+\frac{3}{n}}{5n-\frac{4}{n}} = 0,$$

$$u_n - u_{n+1} = \frac{2n+3}{5n^2-4} - \frac{2(n+1)+3}{5(n+1)^2-4} =$$

$$= \frac{(2n+3)(5n^2+10n+1)+(2n+5)(5n^2-4)}{(5n^2-4)(5n^2+10n+1)} =$$

$$= \frac{10n^2+40n+23}{(5n^2-4)(5n^2+10n+1)} > 0;$$

$$u_n > u_{n+1} \quad \forall\, n \in N.$$

Так что ряд сходящийся.

Рассмотрим ряд $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ из абсолютных величин членов данного ряда и сравним его с расходящимся гармоническим рядом $\sum_{n=1}^{\infty}v_n = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$. Имеем $\lim_{n\to\infty}\frac{u_n}{v_n} = \frac{2}{5} \neq 0$, так что ряд $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ расходится. Следовательно, ряд $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\left(\frac{2n+3}{5n^2-4}\right)$ сходится условно.

Задача 3. Найти интервал сходимости степенного ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x+9)^n}{n^2\cdot6^n}.$$

Воспользуемся признаком Даламбера для ряда из абсолютных величин. Имеем:

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(x+9)^{n+1}\cdot n^2\cdot6^n}{(n+1)^2\cdot6^{n+1}\cdot(x+9)^n}\right| = \left|\frac{x+9}{6}\right|.$$

Ряд сходится, если $\frac{|x+9|}{6}<1$, т.е. $|x+9|<6$, $-6<x+9<6$, $-15<x<-3$.

В указанном промежутке данный ряд абсолютно сходится.

Проверим граничные точки.

1) $x=-15$: $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-15+9)^n}{6^n\cdot n^2}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-6)^n}{n^2\cdot 6^n}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}$.

Составив ряд из абсолютных величин членов знакочередующегося ряда, получим: $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$, который сходится, как обобщенный гармонический ряд вида $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$ при $p = 2$.

Следовательно, ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\cdot\frac{1}{n^2}$ абсолютно сходится.

2) $x=-3$: $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{6^n}{n^2\cdot 6^n}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$.

Полученный ряд сходится.

Итак, областью сходимости ряда является $[-15, -3]$.

Задача 4. Вычислить определенный интеграл $\int\limits_0^{0,25}\sqrt[4]{1+2x^2}\cdot dx$ с точностью до 0,001, разложив подынтегральную функцию в ряд и почленно его проинтегрировав. Подынтегральная функция может быть представлена в виде биномиального ряда

$$(1+x)^m=1+mx+\frac{m(m-1)}{2!}x^2+\frac{m(m-1)(m-2)}{3!}x^3+\ldots$$

при замене в нем x на $2x^2$ и $m=\frac{1}{4}$.

$$\sqrt[4]{1+2x^2}=\left(1+2x^2\right)^{\frac{1}{4}}=1+\frac{1}{2}x^2+\frac{\frac{1}{4}\left(-\frac{3}{4}\right)\cdot 2^2}{2!}x^4+$$

$$+\frac{\frac{1}{4}\cdot\left(-\frac{3}{4}\right)\cdot\left(-\frac{7}{4}\right)}{3!}\cdot 2^3\cdot x^6+\ldots=1+\frac{1}{2}x^2-\frac{3}{8}x^4+\frac{7}{16}x^6-\ldots.$$

Проинтегрируем этот ряд.

$$\int\limits_0^{\frac{1}{4}}\left(1+\frac{1}{2}x^2-\frac{3}{8}x^4+\frac{7}{16}x^6-\ldots\right)dx=$$

$$=\left(x+\frac{x^3}{6}-\frac{3x^5}{40}+\frac{7x^7}{112}-...\right)\Bigg|_0^{\frac{1}{4}}=\frac{1}{4}+\frac{1}{6\cdot 4^3}-\frac{3}{40\cdot 4^5}+\frac{1}{16\cdot 4^7}...=$$

$$=\frac{1}{4}+\frac{1}{384}-\frac{3}{40960}+....$$

По теореме Лейбница, отбросив члены последнего ряда, начиная с члена $\frac{3}{40960}$, допустим ошибку, не превосходящую абсолютной величины этого члена, то есть меньшую 0,001.

Окончательно:

$$\int_0^{0,25}\sqrt[4]{1+2x^2}\cdot dx\approx\frac{1}{4}+\frac{1}{384}\approx 0,2526\approx 0,253.$$

Задача 5. Разложить данную функцию $f(x)=x^2+2$ в интервале (–π; π) в ряд Фурье.

Так как функция $f(x)=x^2+2$ четная, то ряд Фурье и коэффициенты Фурье имеют вид:

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cdot\cos nx,$$

$$a_0=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)\cdot dx;\ \ a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)\cdot\cos nx\cdot dx\Rightarrow$$

$$a_0=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\left(x^2+2\right)dx=\frac{2}{\pi}\left(\frac{x^3}{3}+2x\right)\Bigg(_0^{\pi}=\frac{2}{\pi}\left(\frac{\pi^3}{3}+2\pi\right)=\frac{2}{3}\pi^2+4.$$

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\left(x^2+2\right)\cdot\cos nxdx=\left|\begin{matrix}u=x^2+2\\ dv=\cos nxdx\end{matrix}\right|\begin{matrix}du=2xdx\\ v=\frac{1}{n}\sin nx\end{matrix}\right|=$$

$$=\frac{2}{\pi}\left(\frac{x^2+2}{n}\cdot\sin nx\Bigg|_0^{\pi}-\frac{2}{n}\int_0^{\pi}x\cdot\sin nxdx\right)=$$

$$=-\frac{4}{n\pi}\int_0^{\pi}x\cdot\sin nxdx=\left|\begin{matrix}u=x\\ dv=\sin nxdx\end{matrix}\right|\begin{matrix}du=dx\\ v=-\frac{1}{n}\cos nx\end{matrix}\right|=$$

$$= -\frac{4}{n\pi}\left(-\frac{x}{n}\cdot\cos nx\Big|_0^{\pi} + \frac{1}{n}\int_0^{\pi}\cos nx dx \right) =$$

$$= \frac{4}{n^2\pi}\left(\pi\cdot\cos n\pi\right) - \frac{4}{n^2\pi}\cdot\frac{1}{n}\sin nx\Big|_0^{\pi} = \frac{4\cos n\pi}{n^2}.$$

Так как $\cos n\pi = \left(-1\right)^n$, получим: $a_n = \left(-1\right)^n\cdot\frac{4}{n^2}$.

Окончательно: $x^2 + 2 = \frac{\pi^2}{3} + 2 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(-1\right)^n\cdot\frac{4}{n^2}\cdot\cos nx.$

6. У сборщика имеется 3 конусных и 7 эллиптических валиков. Сборщик наудачу взял один валик, а затем второй. Найти вероятность того, что первых взятый валик – конусный, а второй эллиптический.

Решение. Вероятность того, что первый взятый валик окажется конусным (событие A), равна

$$P\left(A\right) = \frac{3}{10}.$$

Вероятность того, что второй валик окажется эллиптическим (событие B), вычисленная в предположении, что первый валик – конусный, то есть исковая вероятность равна

$$P_A\left(B\right) = \frac{7}{9}.$$

Искомая вероятность по теореме умножения вероятностей зависимых событий равна

$$P\left(AB\right) = P\left(A\right)\cdot P_A\left(B\right) = \frac{3}{10}\cdot\frac{7}{9} = \frac{7}{30}.$$

7. Из 30 студентов 10 имеют спортивные разряды. Какова вероятность того, что выбранные наудачу 3 студента – разрядники?

Решение. Пусть событие A – 3 выбранные наудачу студента – разрядники. Общее число случаев набора 3 студентов из 30 равно

$$n = C_{30}^3 = \frac{30!}{3!\cdot 27!} = \frac{28\cdot 29\cdot 30}{1\cdot 2\cdot 3} = 28\cdot 29\cdot 5 = 4060,$$

так как комбинации из 30 студентов по 3 представляют собой сочетания (отличаются только составом студентов). Число случаев, благоприятствующих событию A, равно

$$m = C_{10}^3 = \frac{10!}{3!\cdot 7!} = \frac{8\cdot 9\cdot 10}{1\cdot 2\cdot 3} = 8\cdot 3\cdot 5 = 120.$$

Тогда

$$P(A)=\frac{m}{n}=\frac{120}{4060}\approx 0,030.$$

8. По условиям лотереи «Спортлото 6 из 45» участник, угадавший только 4 вида спорта из отобранных при случайном розыгрыше 6 видов спорта из 45, получает минимальный денежный приз. Найти вероятность того, что участник лотереи угадает 4 цифры.

Решение. Пусть событие *A* – получение минимального денежного приза (угадывание только 4 видов спорта из 6 выигравших). Найдем число способов, какими можно выбрать 4 вида спорта из 6, то есть C_6^4. К каждой комбинации четырех выигравших видов спорта из шести следует присоединить комбинацию двух невыигравших видов из 45-6=39 – C_{39}^2. По правилу произведения общее число случаев, благоприятствующих событию *A*, равно $m=C_6^4\cdot C_{39}^2$.

Общее число случаев, то есть всех вариантов заполнения карточек спортлото, есть C_{45}^6, так как каждый вариант заполнения отличается только составом видов спорта.

Тогда

$$P(A)=\frac{m}{n}=\frac{C_6^4\cdot C_{39}^2}{C_{45}^6}=0,00136.$$

9. Вероятность того, что студент сдаст первый экзамен, равна 0,9; второй – 0,9; третий – 0,8. Найти вероятность того, что студентом будут сданы: а) только один экзамен; б) только два экзамена; в) три экзамена.

Решение. а) Пусть событие *B* – студент сдаст один экзамен из трех; A_i – студент сдаст i-й экзамен ($i=\overline{1,3}$). Событие *B* произойдет, если студент сдаст только первый экзамен из трех, или только второй, или только третий, то есть

$$P(B)=P\left(A_1\overline{A}_2\overline{A}_3+\overline{A}_1A_2\overline{A}_3+\overline{A}_1\overline{A}_2A_3\right)=$$
$$=0,9\cdot 0,1\cdot 0,2+0,1\cdot 0,9\cdot 0,2+0,1\cdot 0,1\cdot 0,8=0,044.$$

б) Пусть событие *C* – студент сдаст только два экзамена. Событие *C* означает сдачу любых двух экзаменов из трех, то есть

$$P(C)=P\left(A_1A_2\overline{A}_3+A_1\overline{A}_2A_3+\overline{A}_1A_2A_3\right)=$$
$$=0,9\cdot 0,9\cdot 0,2+0,9\cdot 0,1\cdot 0,8+0,1\cdot 0,9\cdot 0,8=0,306.$$

в) Пусть событие D – студент сдаст все три экзамена, то есть $D = A_1 A_2 A_3$. Тогда

$$P(D) = P(A_1 A_2 A_3) = 0,9 \cdot 0,9 \cdot 0,8 = 0,648.$$

10. Имеется два набора деталей. Первый набор содержит 10 деталей, а второй 15. Вероятность того, что деталь первого набора стандартна, равна 0,8; а второго – 0,9. Найти вероятность того, что взятая наудачу деталь – стандартна.

Решение. Пусть событие A – извлеченная деталь стандартная, B_1 – деталь извлечена из первого набора, B_2 – деталь извлечена из второго набора.

Тогда $P(B_1) = \dfrac{10}{25} = \dfrac{2}{5}$, $P(B_2) = \dfrac{15}{25} = \dfrac{3}{5}$.

Условная вероятность того, что из первого набора будет извлечена стандартная деталь, по условию равна $P_{B_1}(A) = 0,8$, а из второго – $P_{B_2}(A) = 0,9$.

Искомая вероятность того, что извлеченная наудачу деталь – стандартная, по формуле полной вероятности равна

$$P(A) = P(B_1)P_{B_1}(A) + P(B_{21})P_{B_{21}}(A) = 0,4 \cdot 0,8 + 0,6 \cdot 0,9 = 0,86.$$

11. Вероятность прорастания семян данного сорта растений равна 0,75. Посеяно 300 семян. Найти наивероятнейшее число всходов.

Решение. По условию задачи $p = 0,75; q = 1 - 0,75 = 0,25; n = 300$. Наивероятнейшее число наступлений события определяется с помощью двойного неравенства

$$np - q \le k_0 \le np + p.$$

Тогда

$$300 \cdot 0,75 - 0,25 \le k_0 \le 300 \cdot 0,75 + 0,75,$$

$$224,75 \le k_0 \le 225,75.$$

Так как k_0 – целое число, то k_0=225.

12. Вероятность нормального расхода электроэнергии на продолжении каждых из 6 суток постоянна и равна $p = 0,75$. Найти вероятность того, что в течение ближайших 4 суток расход электроэнергии не превысит нормы.

Решение. По условию задачи имеем: $p = 0,75$; $q = 1 - 0,75 = 0,25$; $n = 6$, $k = 4$. Искомая вероятность по формуле Бернулли равна:

$$P_6(4) = C_6^4 p^4 q^{6-4} = \frac{6!}{4!2!} 0,75^4 0,25^2 = 0,30.$$

13. Вероятность того, что деталь не прошла проверку ОТК, равна $p = 0,2$. Найти вероятность того, что среди 400 случайно отобранных деталей окажется непроверенных от 70 до 100 деталей.

Решение. По условию $p = 0,2$; $q = 1 - 0,2 = 0,8$; $n = 400; k_1 = 70; k_2 = 100$.

Воспользуемся интегральной теоремой Лапласа:

$$P_{400}(70,100) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{x'}^{x''} e^{-\frac{x^2}{2}} dz = \Phi(x'') - \Phi(x').$$

Вычислим нижний и верхний пределы интегрирования:

$$x' = \frac{k_1 - np}{\sqrt{npq}} = \frac{70 - 400 \cdot 0,2}{\sqrt{400 \cdot 0,2 \cdot 0,8}} = -1,25;\ x'' = \frac{k_2 - np}{\sqrt{npq}} = \frac{100 - 400 \cdot 0,2}{\sqrt{400 \cdot 0,2 \cdot 0,8}} = 2,5.$$

Таким образом, имеем

$$P_{400}(70,100) = \Phi(2,5) - \Phi(-1,25) = \Phi(2,5) + \Phi(1,25).$$

По таблице 2 приложения находим

$$\Phi(1,25) = 0,3944; \Phi(2,5) = 0,4838.$$

Искомая вероятность равна

$$P_{400}(70,100) = 0,4938 + 0,3944 = 0,8882.$$

14. Завод отправил на базу 5000 доброкачественных изделий. Вероятность того, что в пути изделие повредится, равна 0,0002. Найти вероятность того, что на базу прибудут три негодных изделия.

Решение. По условию $n = 5000, p = 0,0002, k = 3$. Найдем λ:

$$\lambda = np = 5000 \cdot 0,0002 = 1.$$

Искомая вероятность по формуле Пуассона приближенно равна

$$P_{5000}(3) = \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!} = \frac{e^{-1}}{3!} = \frac{1}{6e} \approx 0,06.$$

15. На телефонной станции неправильное соединение происходит с вероятностью $\frac{1}{200}$. Найти вероятность того, что среди 200 соединений произойдет:

а) точно 1 неправильное соединение;

б) меньше чем 3 неправильных соединения;

в) больше чем 2 неправильных соединения.

Решение. Здесь вероятность события мала, поэтому используем формулу Пуассона:

$$P_n(k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda},$$

где $\lambda = np$.

а) $n = 200$; $p = \dfrac{1}{200}$; $k = 1$. Найти $P_{200}(1)$.

$$\lambda = 200 \cdot \frac{1}{200} = 1.$$

По таблице $P_{200}(1) = 0,3679$.

б) $n = 200$; $P = \dfrac{1}{200}$; $k < 3$. Найти $P_{200}(k < 3)$

$$\lambda = 1,\ P_{200}(k < 3) = P_{200}(0) + P_{200}(1) + P_{200}(2) =$$
$$= 0,3679 + 0,3679 + 0,1839 = 0,997.$$

в) $n = 200$; $P = \dfrac{1}{200}$; $k > 2$. Найти $P_{200}(k > 2)$

$$\lambda = 1;\ P_{200}(k > 2) = 1 - P_{200}(k \le 2) = 1 - P_{200}(k < 3) =$$
$$= 1 - 0,9197 = 0,0803.$$

16. Дискретная случайная величина X может принимать только два значения x_1 и x_2, причем $x_1 < x_2$. Известны вероятность $p_1 = 0,3$, математическое ожидание $M[X] = 3,1$ и дисперсия $D[X] = 1,89$. Найти закон распределения случайной величины X.

Решение. Поскольку $p_1 + p_2 = 1$, то $p_2 = 0,7$; $M[X] = 0,3x_1 + 0,7x_2 = 3,1$ или $3x_1 + 7x_2 = 31$; $D[X] = 0,3x_1^2 + 0,7x_2^2 - 3,1^2 = 1,89$ или $3x_1^2 + 7x_2^2 = 115$. Из системы уравнений

$$\begin{cases} 3x_1 + 7x_2 = 31 \\ 3x_1^2 + 7x_2^2 = 115 \end{cases}$$

с учетом условия $x_1 < x_2$, получим $x_1 = 1, x_2 = 4$. Следовательно, $P(X = 1) = 0,3; P(X = 4) = 0,7$.

17. Дана функция распределения случайной величины X:

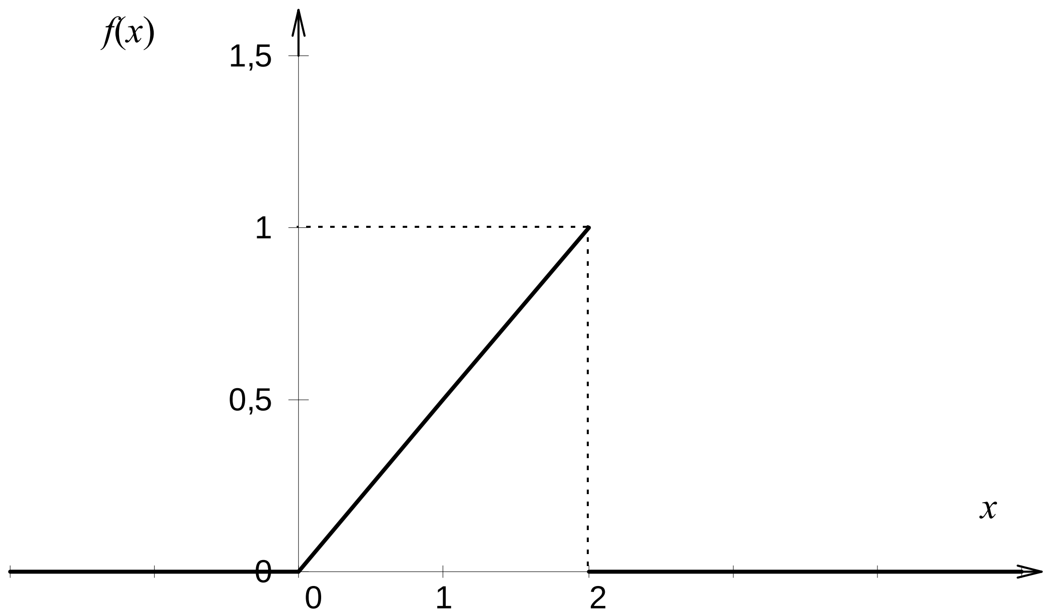
$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \le 0, \\ \dfrac{x^2}{4} & \text{при } 0 < x \le 2, \\ 1 & \text{при } x > 2. \end{cases}$$

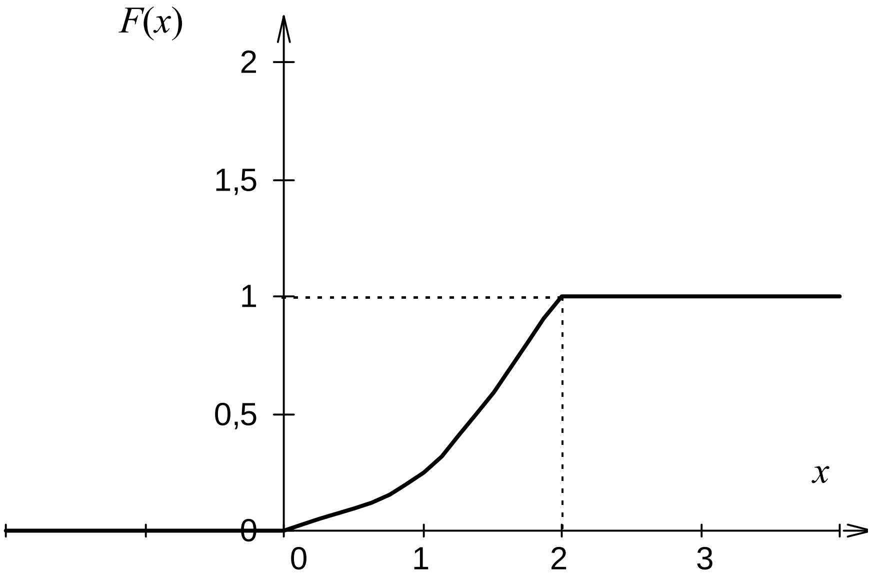
Найти плотность вероятности $f(x)$, построить графики $f(x)$ и $F(x)$, найти вероятность $P(1 \le X < 2)$, вычислить математическое ожидание $M[X]$ и дисперсию $D[X]$.

Решение. Плотность вероятности

$$f(x) = F'(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \le 0, \\ \dfrac{x}{2} & \text{при } 0 < x \le 2, \\ 0 & \text{при } x > 2. \end{cases}$$

Построим графики функции $f(x)$ и $F(x)$





Вероятность $P(1 \le X < 2)$ попадания случайной величины в интервал $[1,2)$ равна приращению ее функции распределения на этом интервале, то есть

$$P(1 \le X < 2) = F(2) - F(1) = \frac{2^2}{4} - \frac{1^2}{4} = \frac{3}{4}$$

или через плотность вероятности $f(x)$:

$$P(1 \le X < 2) = \int_1^2 \frac{x}{2} dx = \frac{x^2}{4} \Big|_1^2 = \frac{3}{4}.$$

Математическое ожидание

$$M[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x) dx = \int_{-\infty}^{0} x \cdot 0 \cdot dx + \int_0^2 x \cdot \frac{x}{2} dx + \int_2^{\infty} x \cdot 0 dx = 0 + \frac{x^3}{6} \Big|_0^2 + 0 = \frac{4}{3}.$$

Дисперсия

$$D[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \cdot f(x) dx - \left(M[X]\right)^2 = \int_{-\infty}^{0} x^2 \cdot 0 \cdot dx + \int_0^2 x^2 \cdot \frac{x}{2} dx + \int_2^{\infty} x^2 \cdot 0 dx - \left(\frac{4}{3}\right)^2 =$$

$$= \frac{x^4}{8} \Big|_0^2 - \frac{16}{9} = 2 - \frac{16}{9} = \frac{2}{9}.$$

18. Найти доверительный интервал для оценки математического ожидания a нормального распределения с надежностью $\gamma = 0,95$, зная выборочную среднюю $\overline{x}_в = 75,15$, объем выборки $n = 64$ и среднее квадратическое отклонение σ=8.

Решение. По условию $n = 64$, $\overline{x}_в = 75,15$, σ=8, $\gamma = 0,95$. Поскольку параметр σ известен, интервальную оценку найдем согласно формуле

$$P\left(\overline{x}_в - t\frac{\sigma}{\sqrt{n}} < a < \overline{x}_в + t\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = 2\Phi(t) = \gamma.$$

По таблице интегральной функции Лапласа $\Phi(t)$ из условия $\gamma = 0,95$ найдем $t = 1,96$.

Тогда точность оценки равна

$$\delta = t\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1,96 \cdot \frac{8}{\sqrt{64}} = 1,96.$$

Отсюда доверительный интервал имеет вид

$$75,15-1,96 \le a \le 75,15+1,96$$

и окончательно

$$73,19 \le a \le 77,11.$$

СПИСОК РЕКОМЕНДУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Письменный, Д.Т. Конспект лекций по высшей математике [Текст]: в 2 ч. / Д.Т. Письменный. –М.: Айрис-Пресс, 2011. – Ч.1. – 288 с.
2. Письменный Д.Т. Конспект лекций по высшей математике [Текст]: в 2 ч. / Д.Т. Письменный. – М.: Айрис-Пресс, 2015. – Ч.2. – 256 с.
3. Данко, П.Е. Высшая математика в упражнениях и задачах [Текст] / П.Е. Данко, А.Г. Попов, Т.Я. Кожевникова. – М.: АСТ, Мир и образование, 2014. – 816 с.
4. Шипачев, В.С. Высшая математика: полный курс [Текст]: учебник для бакалавров / В.С. Шипачев; под ред. А.Н. Тихонова. – 4-е изд., испр. и доп. – М.: Юрайт, 2015. – 608 с.
5. Гнеденко, Б.В. Элементарное введение в теорию вероятностей [Текст] / Б.В. Гнеденко, А.Я. Хинчин. – М.: Либроком, 2013. – 208 с.
6. Лунгу, К.Н. Сборник задач по высшей математике. 1 курс [Текст] / К.Н. Лунгу, Д.Т. Письменный. –М.: Айрис-Пресс, 2013. – 592 с.
7. Лунгу, К.Н. Сборник задач по высшей математике. 2 курс [Текст] / К.Н. Лунгу, Д.Т. Письменный. – М.: Айрис-Пресс, 2013. – 576 с.
8. Беклемишева, Л.А. Сборник задач по аналитической геометрии и линейной алгебре [Текст] / Л.А. Беклемишева, А.Ю. Петрович, И.А. Чубаров. – М.: Физматлит, 2014. – 496 с.
9. Клетеник, Д.В. Сборник задач по аналитической геометрии [Текст] / Д.В. Клетеник. – М.: Лань, Профессия, 2010. – 224 с.
10. Кудрявцев, Л.Д. Курс математического анализа [Текст]: учебник: в 3 т. / Л.Д. Кудрявцев. – М.: Юрайт, 2015. – Т.1. – 704 с.
11. Кудрявцев, Л.Д. Курс математического анализа [Текст]: учебник: в 3 т. / Л.Д. Кудрявцев. – М.: Юрайт, 2014. – Т.2. – 720 с.
12. Бугров, Я.С. Высшая математика [Текст]: задачник / Я.С. Бугров, С.М. Никольский. –М.: Юрайт, 2015. – 192 с.
13. Лунгу, К.Н. Руководство к решению задач [Текст]: в 2 ч. / К.Н. Лунгу, Е.А. Макаров. – М.: Физматлит, 2014. – Ч.1. – 216 с.
14. Лунгу К.Н., Макаров Е.А. Руководство к решению задач [Текст]: в 2 ч. / К.Н. Лунгу, Е.А. Макаров. – М.: Физматлит, 2015. – Ч.2. – 384 с.
15. Запорожец, Г.И. Руководство к решению задач по математическому анализу [Текст]: учеб. пособие / Г.И. Запорожец. – Изд. 6-е, стер. – СПб.: Лань, 2010. – 460 с.
16. Выгодский, М.Я. Справочник по высшей математике [Текст] / М.Я. Выгодский. – М.: АСТ: Астрель, 2010. – 703 с.
17. Теория вероятностей и математическая статистика в задачах [Текст] / В.А. Ватутин, Г.И. Ивченко, Ю.И. Медведев, В.П. Чистяков. – М.: Ленанд, 2015. – 386 с.

18. Гмурман В.Е. Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике [Текст] / В.Е. Гмурман. – М.: Юрайт, 2015. – 418 с.

19. Гарькина, И.А. Тесты по математике с тезисным изложением теоретического материала [Текст] / И.А. Гарькина, А.М. Данилов, А.Н. Круглова. – Пенза: ПГУАС, 2013. – 392 с.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Учебное издание

Гарькина Ирина Александровна
Данилов Александр Максимович

МАТЕМАТИКА

Учебно-методическое пособие
по выполнению контрольных работ
для направления подготовки 08.03.01 «Строительство»

В авторской редакции
Верстка; Н.А. Сазонова

Подписано в печать 30.06.16. Формат 60×84/16.
Бумага офисная «Снегурочка». Печать на ризографе.
Усл. печ. л. 3,02. Уч.-изд. л. 3,25. Тираж 80 экз.
Заказ № 450.

Издательство ПГУАС.
440028, г.Пенза, ул. Германа Титова, 28.