МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Федеральное государственное бюджетное
образовательное учреждение высшего образования
«Пензенский государственный университет
архитектуры и строительства»
(ПГУАС)

И.А. Гарькина, А.М. Данилов

МАТЕМАТИКА

Учебно-методическое пособие
к практическим занятиям
по направлению подготовки 08.03.01 «Строительство»

Пенза 2016

УДК 51
ББК 22.1
Г21

Рекомендовано Редсоветом университета
Рецензент – доктор педагогических наук, профессор, проректор по научной работе В.В.Усманов (ПГУАС)

Гарькина И.А.
Г21 Математика: учеб.-метод. пособие к практическим занятиям по направлению подготовки 08.03.01 «Строительство»/ И.А. Гарькина, А.М. Данилов. – Пенза: ПГУАС, 2016. – 100 с.

Приводятся методические рекомендации по проведению практических занятий, исходя из требований к формированию компетенций, предусмотренных ФОС по направлению подготовки бакалавров 08.03.01 – Строительство.

Подготовлены на кафедре «Математика и математическое моделирование» и предназначены для использования студентами, обучающимися по направлению подготовки 08.03.01 «Строительство», при изучении дисциплины «Математика».

ВВЕДЕНИЕ

Дисциплина «Математика» является **базовой** частью **общепрофессионального модуля Б1.Б.2.1 ООП.**

Изучение дисциплины «Математика» направлено на формирование следующих компетенций:

– **использование основных законов естественнонаучных дисциплин в профессиональной деятельности, применение методов математического анализа и математического (компьютерного) моделирования, теоретического и экспериментального исследования.**

Планируемые результаты обучения (показатели достижения заданного уровня освоения компетенции):

знать:

– основные математические формулы и понятия;

– основные методы решения математических задач;

– элементы вычислительной математики;

– технологию сбора анализа и обработки математической информации;

– основные методы математического моделирования в решении прикладных задач;

уметь:

– использовать методы математического моделирования;

– применять методы физико-математического анализа к решению конкретных естественнонаучных и технических проблем;

– анализировать и синтезировать поставленную математическую задачу и принимать на этой основе рациональные решения;

владеть:

– основными способами и методами решения математических задач для решения естественнонаучных задач;

– навыками создания математического шаблона для его дальнейшего использования в решении профессиональных задач;

– методами обработки и интерпретирования результатов эксперимента;

– приемами использования методов математического моделирования в профессиональной деятельности;

иметь представление:

– о методах решения математических задач в профессиональной деятельности;

– о математических подходах к решению задач строительной отрасли;

– о связи математических моделей с моделируемыми материальными явлениями.

– **способность выявить естественнонаучную сущность проблем, возникающих в ходе профессиональной деятельности, привлечь их для решения соответствующий физико-математический аппарат.**

Планируемые результаты обучения (показатели достижения заданного уровня освоения компетенции):

знать:

– математическую символику и основные математические формулы;

– основные виды математических моделей;

– алгоритмы решения математических задач;

– основные принципы выбора математических составляющих при решении профессиональных задач;

уметь:

– применять математические методы для решения практических задач;

– использовать стандартные схемы решения в новых математических задачах;

– анализировать этапы решения математических и прикладных задач;

владеть:

– основами математической теории;

– методами решения прикладных задач;

– спецификой исследования математических моделей с учетом их иерархической структуры и оценки пределов применимости полученных результатов;

иметь представление:

– о применении математического аппарата в решении профессиональных задач;

– о связи математических моделей с моделируемыми материальными явлениями.

– владение эффективными правилами, методами и средствами сбора, обмена, хранения и обработки информации, навыками работы с компьютером как средством управления информацией

Планируемые результаты обучения (показатели достижения заданного уровня освоения компетенции):

знать:

– современные тенденции развития информатики, вычислительной техники, компьютерных технологий;

– статистические методы исследования и обработки информации;

– элементы вычислительной математики;

– технологию сбора анализа и обработки математической информации;

уметь:

– использовать математическую символику для выражения количественных и качественных отношений объектов;

– выполнять самостоятельный поиск информации необходимой для решения математических и прикладных задач;

владеть:

– методами обработки и интерпретирования результатов эксперимента;

– основными методами, способами и средствами получения, хранения и переработки информации;

– основами работы с компьютером как средством управления информации на уровне, позволяющем использовать компьютерную технику и специализированные компьютерные программы в своей профессиональной деятельности;

иметь представление:

– о применении компьютерных технологий при проведении работ в области математических исследований;

– о статистических методах исследования и обработки информации.

– способность осуществлять поиск, хранение, обработку и анализ информации из различных источников и баз данных, представлять ее в требуемом формате с использованием информационных, компьютерных и сетевых технологий.

Планируемые результаты обучения (показатели достижения заданного уровня освоения компетенции):

знать:

– технологию сбора анализа и обработки математической информации;

– сущность работы с компьютером как средством управления информацией;

уметь:

– выполнять самостоятельный поиск информации необходимой для решения математических и прикладных задач;

– использовать, хранить и перерабатывать информацию с применением вычислительной техники;

– работать с математической литературой;

– получать информацию из глобальных сетей, позволяющую расширить свой уровень знаний;

владеть:

– навыками исследовательской работы;

– современными математическими инструментами анализа и способа исследования экспериментальных данных;

– основами работы с компьютером как средством управления информации на уровне, позволяющем использовать компьютерную технику и специализированные компьютерные программы в своей профессиональной деятельности;

иметь представление:

– о видах, формах и методах математической обработки экспериментальных данных.

МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ

Практическое занятие, **как** одна из форм организации учебного процесса, заключается в выполнении студентами под руководством преподавателя комплекса учебных заданий с целью усвоения научно-теоретических основ учебной дисциплины, приобретения навыков и опыта творческой деятельности, овладения современными методами практической работы с применением технических средств.

Задачи практических занятий:

– закрепление, углубление и расширение знаний студентов при решении конкретных практических задач;

– развитие познавательных способностей, самостоятельности мышления, творческой активности студентов;

– выработка способности логического осмысления самостоятельно полученных данных;

– обеспечение рационального сочетания коллективной и индивидуальной форм обучения.

Практические занятия преследуют познавательную, развивающую, воспитательную функции. По характеру выполняемых студентами заданий они подразделяются на:

– *ознакомительные* (закрепление и конкретизация изученного теоретического материала);

– *аналитические* (получение новой информации на основе формализованных методов);

– *творческие* (получение новой информации на основе самостоятельно выбранных подходов к решению задач).

Типичные структурные элементы практического занятия:

– вводная часть *(*формулировка темы, цели и задач занятия, обоснование его значимости в профессиональной подготовке студентов; изложение теоретических основ; пробное выполнение заданий под руководством преподавателя***);***

– основная часть *(*предполагает самостоятельное выполнение заданий студентами: дополнительные разъяснения по ходу работы, ответы на вопросы студентов);

– заключительная часть *(*подведение общих итогов занятия, оценка результатов работы студентов, устранение пробелов в знаниях и умениях студентов).

Содержание практического занятия должно соответствовать рабочей программе дисциплины. Цели и задачи должны быть определены четко и ясно, исходя из органического единства теории и практики при решении конкретных задач. Предполагается: соответствие занятий содержанию лекционного курса; наличие учебников, учебных пособий и других источников; реализация внутрипредметных и междисциплинарных связей.

При оценке открытых занятий должны учитываться:

– знание предмета, профессиональная компетентность преподавателя;

– эмоциональность, увлекательность изложения материала;

– умение мобилизовать внимание аудитории, вызвать интерес к выполнению заданий, создавать творческую атмосферу занятия;

– способность устанавливать контакты со студентами;

– отношение к студентам (внимательное, требовательное, равнодушное, неуважительное и т.п.);

– отношения студентов к преподавателю (уважительное, ироничное, равнодушное и т.п.);

– культура речи, дикция и др.

Результативность практического занятия определяется по

– степени реализации цели и задач работы;

– качеству выполнения заданий; степени соответствия результатов работы заданным требованиям;

– формированию у студентов необходимых компетенций;

– воспитательному воздействию на студентов.

Основной формой практических занятий являются упражнения, на основе которых формируются предусмотренные компетенции. Цель занятий должна быть ясна не только преподавателю, но и студентам. Следует организовывать практическое занятий так, чтобы студенты постоянно ощущали нарастание сложности выполняемых заданий, испытывали положительные эмоции от переживания собственного успеха в учении, были заняты напряженной творческой работой, поисками правильных и точных решений. Большое значение имеют индивидуальный подход и продуктивное педагогическое общение. Обучаемые должны получить возможность раскрыть и проявить свои способности, свой личностный потенциал. Поэтому при разработке заданий и плана занятий преподаватель должен учитывать уровень подготовки и интересы каждого студента группы, выступая в роли консультанта и не подавляя самостоятельности и инициативы студентов.

При проведении практических занятий следует учитывать роль повторения. Но оно должно быть не нудным, однообразным.

Самостоятельность работы студентов при подготовке к практическому занятию и непосредственно на практическом занятии предполагают наличие соответствующих методических указаний. Для проведения практических занятий преподавателем осуществляется:

– подбор вопросов для оценки знаний студентами теоретического материала, изложенного на лекциях и изученного ими самостоятельно;

– выбор материала для примеров и упражнений;

– решение преподавателем выбранных задач;

– распределение времени на решение каждой задачи;

– подбор иллюстративного материала, необходимого для решения задач; расположение рисунков и записей на доске.

По результатам практических занятий преподавателем осуществляется рубежный и итоговый контроль знаний студентов.

ТИПОВЫЕ ЗАДАЧИ С ПРИМЕРАМИ ИХ РЕШЕНИЯ

Линейная алгебра и аналитическая геометрия

Задание 1. Найти $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 & -1 \\ 4 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 1 & -5 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}$

Решение.

Разложим данный определитель четвертого порядка по элементам второй строки, так как эта строка содержит наибольшее количество нулевых элементов.

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 & -1 \\ 4 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 1 & -5 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 4\cdot(-1)^{1+2}\cdot\begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 3 & 1 & -5 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -4\cdot 1\cdot(-1)^{1+3}\cdot\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 1 & -5 \end{vmatrix} =$$

$$= -4\big(3\cdot(-5) - 1\cdot(-1)\big) = 56.$$

Ответ: 56.

Задание 2. Найти $3A - 4B^{\mathrm{T}}$, если $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$,

Решение.

$$3A = 3\cdot\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & -9 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}; \quad B^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}; \quad 4B^{\mathrm{T}} = 4\cdot\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16 & 12 \\ 8 & -4 \end{pmatrix};$$

$$3A - 4B^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} 6 & -9 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 16 & 12 \\ 8 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -10 & -21 \\ -5 & 4 \end{pmatrix}.$$

Ответ: $\begin{pmatrix} -10 & -21 \\ -5 & 4 \end{pmatrix}$.

Задание 3. Найти A^{-1}, если $A=\begin{pmatrix}3 & 2\\ 1 & 1\end{pmatrix}$.

Решение.

Определитель матрицы A равен: $|A|=\begin{vmatrix}3 & 2\\ 1 & 1\end{vmatrix}=3\cdot 1-2\cdot 1=1\neq 0$, значит матрица A^{-1} существует. Составим транспонированную матрицу $A^{T}=\begin{pmatrix}3 & 1\\ 2 & 1\end{pmatrix}$, а затем присоединенную матрицу $A^{*}=\begin{pmatrix}(-1)^{1+1}\cdot 1 & (-1)^{1+2}\cdot 2\\ (-1)^{2+1}\cdot 1 & (-1)^{2+2}\cdot 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & -2\\ -1 & 3\end{pmatrix}$.

Обратная матрица $A^{-1}=\dfrac{1}{|A|}\cdot A^{*}=\dfrac{1}{1}\cdot\begin{pmatrix}1 & -2\\ -1 & 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & -2\\ -1 & 3\end{pmatrix}$.

Ответ: $\begin{pmatrix}1 & -2\\ -1 & 3\end{pmatrix}$.

Задание 4. Даны векторы $\overline{a}$ = (2, 1, 0); $\overline{b}$ = (1, –1, 2); $\overline{c}$ = (2, 2, 1); $\overline{x}$ = (3, 7, -7) в некотором базисе. Показать, что векторы $\overline{a},\overline{b},\overline{c}$ образуют базис трехмерного пространства, и найти координаты вектора $\overline{x}$ в этом базисе.

Решение

Базис n-мерного линейного векторного пространства составляют ровно n линейно независимых векторов. Следовательно, надо показать, что векторы $\overline{a},\overline{b},\overline{c}$ линейно независимы, то есть нулевая линейная комбинация этих векторов

$$\alpha\overline{a}+\beta\overline{b}+\gamma\overline{c}=\overline{0}$$

возможна только при нулевых коэффициентах $\alpha=\beta=\gamma=0$.

Запишем матричное уравнение

$$\alpha\cdot\begin{pmatrix}2\\ 1\\ 0\end{pmatrix}+\beta\cdot\begin{pmatrix}1\\ -1\\ 2\end{pmatrix}+\gamma\begin{pmatrix}2\\ 2\\ -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 0\end{pmatrix}$$

и перейдем к системе уравнений

$$\begin{cases}2\cdot\alpha+\beta+2\gamma=0\\ 1\cdot\alpha-\beta+2\gamma=0\\ 0\cdot\alpha+2\beta-\gamma=0.\end{cases}$$

Вычислим определитель этой системы:

$$\Delta=\begin{vmatrix}2 & 1 & 2\\ 1 & -1 & 2\\ 0 & 2 & -1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}-1 & 2\\ 2 & -1\end{vmatrix}\cdot 2-\cdot\begin{vmatrix}1 & 2\\ 2 & -1\end{vmatrix}=(2-4)\cdot 2-(-1-4)=-1.$$

Определитель $\Delta\neq 0$, следовательно, имеется единственное решение $\alpha=\beta=\gamma=0.$, а векторы $\overline{a},\overline{b},\overline{c}$ линейно независимы и образуют базис. Найдем координаты вектора $\overline{x}=(x_1,x_2,x_3)$ в базисе векторов $\overline{a},\overline{b},\overline{c}$. Координаты вектора – это коэффициенты при базисных векторах в его разложении по базису.

Тогда

$$\overline{x}=x_1\cdot\overline{a}+x_2\overline{b}+x_3\cdot\overline{c}$$

или

$$\begin{pmatrix}2\\ 1\\ 0\end{pmatrix}x_1+\begin{pmatrix}1\\ -1\\ 2\end{pmatrix}x_2+\begin{pmatrix}2\\ 2\\ -1\end{pmatrix}x_3=\begin{pmatrix}3\\ 7\\ -7\end{pmatrix}.$$

Перейдем к системе уравнений

$$\begin{cases}2x_1+x_2+2x_3=3\\ x_1-x_2+2x_3=7\\ 2x_2-x_3=-7.\end{cases}$$

Решим систему по формулам Крамера:

$$\Delta_1=\begin{vmatrix}3 & 1 & 2\\ 7 & -1 & 2\\ -7 & 2 & -1\end{vmatrix}=3\cdot\begin{vmatrix}-1 & 2\\ 2 & -1\end{vmatrix}-1\cdot\begin{vmatrix}7 & 2\\ -7 & -1\end{vmatrix}+2\cdot\begin{vmatrix}7 & -1\\ -7 & 2\end{vmatrix}=$$

$$=3(1-4)-1(-7+14)+2(14-7)=-9-7+14=-2;$$

$$\Delta_2=\begin{vmatrix}2 & 3 & 2\\ 1 & 7 & 2\\ 0 & -7 & -1\end{vmatrix}=2\cdot\begin{vmatrix}7 & 2\\ -7 & -1\end{vmatrix}-1\cdot\begin{vmatrix}3 & 2\\ -7 & -1\end{vmatrix}=$$

$$=2(-7+14)-1(-3+14)=-14-11=3;$$

$$\Delta_3=\begin{vmatrix}2 & 1 & 3\\ 1 & -1 & 7\\ 0 & 2 & -7\end{vmatrix}=2\cdot\begin{vmatrix}-1 & 7\\ 2 & -7\end{vmatrix}-1\cdot\begin{vmatrix}1 & 3\\ 2 & -7\end{vmatrix}=$$

$$=2(7-14)-1(-7-6)=-14+13=-1;$$

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{-2}{-1} = 1;$$

$$x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{3}{-1} = -3;$$

$$x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{-1}{-1} = 1.$$

Ответ: в базисе $\left\{\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}\right\}$ $\overline{x}$ = (1, -3, 1).

Задание 5. Дана система линейных уравнений

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 6 \\ 2x_1 + 3x_2 - 4x_3 = 20 \\ 3x_1 - 2x_2 - 5x_3 = 6 \end{cases}$$

Доказать ее совместность и решить двумя способами:
1) методом Гаусса; 2) средствами матричного исчисления.

Решение

Вычислим определитель системы

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 3 & -4 \\ 3 & -2 & -5 \end{vmatrix} = -58 \neq 0.$$

Следовательно, система совместна.
1) Решение системы методом Гаусса

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & 6 \\ 2 & 3 & -4 & 20 \\ 3 & -2 & -5 & 6 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & 6 \\ 0 & 7 & -10 & 8 \\ 0 & 4 & -14 & -12 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & 6 \\ 0 & 1 & -10/7 & 8/7 \\ 0 & 0 & -58/7 & -116/7 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & 6 \\ 0 & 1 & -10/7 & 8/7 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{array}\right).$$

Откуда

$$x_3 = 2;$$

$$x_2 - 10/7x_3 = 8/7, \quad x_2 = 8/7 + 10/7 \cdot 2 = 4;$$

$$x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 6, \quad x_1 = 6 + 2 \cdot 4 - 3 \cdot 2 - 3 \cdot 2 = 8.$$

Ответ: $x_1 = 8,\ x_2 = 4,\ x_3 = 2..$

2) Решение системы средствами матричного исчисления.

Запишем систему в виде матричного уравнения, введя три матрицы:

$$A=\begin{pmatrix}1 & -2 & 3\\ 2 & 3 & -4\\ 3 & -2 & -5\end{pmatrix};\ B=\begin{pmatrix}6\\ 20\\ 6\end{pmatrix};\ x=\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}.$$

$$A\cdot x=B\Rightarrow x=A^{-1}\cdot B.$$

Найдем обратную матрицу A^{-1}.

Определитель матрицы A:

$$|A|=\begin{vmatrix}1 & -2 & 3\\ 2 & 3 & -4\\ 3 & -2 & -5\end{vmatrix}=-58\neq 0.$$

Следовательно, матрица A невырожденная и обратная матрица A^{-1} существует:

$$A^{-1}=\frac{1}{|A|}\cdot A^{*},$$

где A^* – присоединенная матрица.

Запишем транспонированную матрицу

$$A^{\mathrm{T}}=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ -2 & 3 & -2\\ 3 & -4 & -5\end{pmatrix}$$

и каждый ее элемент заменим его алгебраическим дополнением.

Получим присоединенную матрицу

$$A^{*}=\begin{pmatrix}\begin{vmatrix}3 & -2\\ -4 & -5\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}-2 & -2\\ 3 & -5\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}-2 & 3\\ 3 & -4\end{vmatrix}\\ -\begin{vmatrix}2 & 3\\ -4 & -5\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}1 & 3\\ 3 & -5\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}1 & 2\\ 3 & -4\end{vmatrix}\\ \begin{vmatrix}2 & 3\\ 3 & -2\end{vmatrix} & -\begin{bmatrix}1 & 3\\ -2 & -2\end{bmatrix} & \begin{vmatrix}1 & 2\\ -2 & 3\end{vmatrix}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-23 & -16 & -1\\ -2 & -14 & 10\\ -13 & -4 & 7\end{pmatrix}.$$

$$A^{-1}=-\frac{1}{58}\begin{pmatrix}-23 & -16 & -1\\ -2 & -14 & 10\\ -13 & -4 & 7\end{pmatrix}.$$

Найдем матрицу X:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = -\frac{1}{58}\begin{pmatrix} -23 & -16 & -1 \\ -2 & -14 & 10 \\ -13 & -4 & 7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ 20 \\ 6 \end{pmatrix} = -\frac{1}{58}\begin{pmatrix} -138 & -320 & -6 \\ -12 & -280 & +60 \\ -78 & -80 & +42 \end{pmatrix} =$$

$$= -\frac{1}{58}\begin{pmatrix} -464 \\ -232 \\ -116 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Откуда $x_1 = 8,\ x_2 = 4,\ x_3 = 2.$

Задание 6. Найти $\overline{c} = 2\overline{a} - 3\overline{b}$, если $\overline{a} = 3\overline{i} - 2\overline{j} + \overline{k}$ и $\overline{b} = -\overline{i} + 3\overline{j} - 7\overline{k}$.

Решение.

$2\overline{a} = 2\cdot\left(3\overline{i} - 2\overline{j} + \overline{k}\right) = 6\overline{i} - 4\overline{j} + 2\overline{k}$; $3\overline{b} = 3\left(-\overline{i} + 3\overline{j} - 7\overline{k}\right) = -3\overline{i} + 9\overline{j} - 21\overline{k}$.

Тогда вектор

$$\overline{c} = 2\overline{a} - 3\overline{b} = (6\overline{i} - 4\overline{j} + 2\overline{k}) - \left(-3\overline{i} + 9\overline{j} - 21\overline{k}\right) = 9\overline{i} - 13\overline{j} + 23\overline{k}.$$

Ответ: $9\overline{i} - 13\overline{j} + 23\overline{k}$.

Задание 7. Найти длину $\left|\overline{a}\right|$ вектора $\overline{a} = \overline{i} + \overline{j} - 3\overline{k}$.

Решение.

Если вектор задан своими координатами $\overline{a} = \left(a_1, a_2, a_3\right)$ (разложен по единичным векторам), то его модуль или длина находятся по формуле: $\left|\overline{a}\right| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$.

$$\left|\overline{a}\right| = \sqrt{1^2 + 1^2 + \left(-3\right)^2} = \sqrt{1+1+9} = \sqrt{11}.$$

Ответ: $\sqrt{11}$.

Задание 8. Даны координаты вершин пирамиды A_1 (10, 6, 6); A_2 (–2, 8, 2); A_3(6, 8, 9); A_4 (7, 10, 3). Найти: 1) длины ребер A_1A_2, A_1A_3, A_1A_4; 2) косинус угла между ребрами A_1A_2 и A_1A_4; 3) площадь грани $A_1A_2A_3$; 4) уравнения прямой A_1A_2; 5) уравнение плоскости $A_1A_2A_3$; 6) уравнения высоты, опущенной из вершины A_4 на грань $A_1A_2A_3$; 7) угол между ребром A_1A_4 и гранью $A_1A_2A_3$; 8) объем пирамиды (двумя способами). Сделать чертеж.

Решение

1) Имеем:

$$\overline{A_1A_2} = (-12, 2, -4);\ \overline{A_1A_3} = (-4, 2, 3);\ \overline{A_1A_4} = (-3, 4, -3),$$

$$\left|\overline{A_1A_2}\right| = \sqrt{(-12)^2 + 2^2 + (-4)^2} = \sqrt{144+4+16} = \sqrt{164} = 2\sqrt{41},$$

$$\left|\overline{A_1A_3}\right| = \sqrt{(-4)^2 + 2^2 + 3^2} = \sqrt{16+4+9} = \sqrt{29},$$

$$\left|\overline{A_1A_4}\right| = \sqrt{(-3)^2 + 4^2 + (-3)^2} = \sqrt{9+16+9} = \sqrt{34}.$$

2) $\left(\overline{A_1A_2}, \overline{A_1A_4}\right) = -12\cdot(-3) + 2\cdot 4 + (-4)\cdot(-3) = 36+8+12 = 56$

Угол между α ребрами равен углу между векторами:

$$\alpha = \left\langle \overline{A_1A_2}, \overline{A_1A_4} \right\rangle.$$

Тогда

$$\cos\alpha = \frac{\left(\overline{A_1A_2}, \overline{A_1A_4}\right)}{\left|A_1A_2\right|\cdot\left|A_1A_4\right|}\frac{56}{2\sqrt{41}\cdot\sqrt{34}} = \frac{28}{\sqrt{1394}} \approx 0,7499.$$

3) Площадь грани $A_1A_2A_3$ равна площади треугольника, построенного на векторах $\overline{A_1A_2}$ и $\overline{A_1A_3}$:

$$S_{\Delta A_1A_2A_3} = \frac{1}{2}\left|\left[\overline{A_1A_2}, \overline{A_1A_3}\right]\right|.$$

Найдем векторное произведение $\left[\overline{A_1A_2}, \overline{A_1A_3}\right]$:

$$\left[\overline{A_1A_2}, \overline{A_1A_3}\right] = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ -12 & 2 & -4 \\ -4 & 2 & 3 \end{vmatrix} = \bar{i}\cdot\begin{vmatrix} 2 & -4 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} - \bar{j}\begin{vmatrix} -12 & -4 \\ -4 & 3 \end{vmatrix} + \bar{k}\begin{vmatrix} -12 & 2 \\ -4 & 2 \end{vmatrix} =$$

$$= (6+8)\bar{i} - (-36-16)\bar{j} + (-24+8)\bar{k} = 14\bar{i} + 52\bar{j} - 16\bar{k} = (14, 52, -16).$$

Модуль векторного произведения:

$$\left|\left[\overline{A_1A_2}, A_1A_3\right]\right| = \sqrt{14^2 + 52^2 + (-16)^2} = \sqrt{196+2704+256} =$$

$$= \sqrt{3156} = 2\sqrt{789}.$$

Откуда искомая площадь:

$$S_{\Delta A_1A_2A_3} = \frac{1}{2}\cdot 2\cdot\sqrt{789} = \sqrt{789} \approx 28,089 \ \left(\text{ед.}^2\right).$$

4) Уравнения прямой A_1A_2 определяется как уравнения прямой, проходящей через две данные точки:

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{z-z_1}{z_2-z_1},$$

$$\frac{x-10}{-2-10}=\frac{y-6}{8-6}=\frac{z-6}{2-6},$$

$$\frac{x-10}{-12}=\frac{y-6}{2}=\frac{z-6}{-4},$$

или

$$\frac{x-10}{-6}=\frac{y-6}{1}=\frac{z-6}{-2},$$

5) Уравнение плоскости $A_1A_2A_3$ запишем как уравнение плоскости, проходящей через три данные точки:

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix}=0;$$

$$\begin{vmatrix} x-10 & y-6 & z-6 \\ -2-10 & 8-6 & 2-6 \\ 6-10 & 8-6 & 9-6 \end{vmatrix}=0; \quad \begin{vmatrix} x-10 & y-6 & z-6 \\ -12 & 2 & -4 \\ -4 & 2 & 3 \end{vmatrix}=0;$$

$$(x-10)\cdot\begin{vmatrix} 2 & -4 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}-(y-6)\cdot\begin{vmatrix} -12 & -4 \\ -4 & 3 \end{vmatrix}+(z-6)\cdot\begin{vmatrix} -12 & 2 \\ -4 & 2 \end{vmatrix}=0;$$

$$(x-10)(6+8)-(y-6)(-36-16)+(z-6)(-24+8)=0;$$

$$14(x-10)+52(y-6)-16(z-6)=0;$$

$$14x+52y-16z-356=0;$$

Следовательно, искомое уравнение плоскости $A_1A_2A_3$:

$$7x+26y-8z-178=0\ -$$

6) Уравнения высоты из точки A_4 на грань $A_1A_2A_3$ определится как уравнения прямой, проходящей через точку A_4 перпендикулярно плоскости $A_1A_2A_3$:

$$\frac{x-x_0}{l}=\frac{y-y_0}{m}=\frac{z-z_0}{n}.$$

За направляющий вектор $\overline{a}=(l,m,n)$ примем нормальный вектор плоскости $A_1A_2A_3$:

$$\overline{n}=(7,26,-8).$$

Тогда уравнения высоты запишутся в виде:

$$\frac{x-7}{7}=\frac{y-10}{26}=\frac{z-3}{-8}.$$

7) Угол β между ребром A_1A_4 и гранью $A_1A_2A_3$ – это угол между прямой и плоскостью, составляющий в сумме с углом между направляющим вектором прямой и нормальным вектором плоскости прямой угол.

Следовательно,

$$\sin\beta=\frac{(\overline{a},\overline{n})}{|\overline{a}|\cdot|\overline{n}|}.$$

$$\overline{a}=\overline{A_1A_4}=(-3,4,-3),\quad |\overline{a}|=\sqrt{34},$$

$$\overline{n}=(7,\,26,-8),\ |\overline{n}|=\sqrt{7^2+26^2+(-8)^2}=\sqrt{49+676+64}=\sqrt{789};$$

$$(\overline{a},\overline{n})=-3\cdot7+4\cdot26+(-3)\cdot(-8)=-21+104+24=107.$$

Откуда

$$\sin\beta=\frac{107}{\sqrt{34}\cdot\sqrt{789}}=\frac{107}{\sqrt{26826}}\approx0,6533\ \ (\beta\approx\arcsin0,6533\approx39^\circ20').$$

8) Объем пирамиды $A_1A_2A_3A_4$ равен, с одной стороны, одной шестой модуля смешанного произведения векторов $\overline{A_1A_2},\overline{A_1A_3},\overline{A_1A_4}$, с другой стороны – одной третьей произведения площади S основания $A_1A_2A_3$ на высоту H, опущенную на основание из вершины A_4.

Так что:

$$V_{\text{пир}}=\frac{1}{6}\left\|\begin{matrix}x_1&y_1&z_1\\x_2&y_2&z_2\\x_3&y_3&z_3\end{matrix}\right\|=\frac{1}{6}\cdot\begin{vmatrix}-12&2&-4\\-4&2&3\\-3&4&-3\end{vmatrix}=$$

$$=\frac{1}{6}\left(-12\cdot\begin{vmatrix}2&3\\4&-3\end{vmatrix}-2\cdot\begin{vmatrix}-4&3\\-3&-3\end{vmatrix}-4\cdot\begin{vmatrix}-4&2\\-3&4\end{vmatrix}\right)=$$

$$=\frac{1}{6}\left(-12\cdot(-18)-2\cdot21-4\cdot(-10)\right)=\frac{107}{3}=35\frac{2}{3}\ \ \left(\text{ед.}^3\right)$$

Или $V_{\text{пир}}=\frac{1}{3}S_{\Delta A_1A_2A_3}\cdot H$.

Высоту H найдем как расстояние от точки A_4 (7, 10, 3) до плоскости $A_1A_2A_3$:

$$H=d=\left|\frac{Ax_0+By_0+Cz_0+D}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}\right|=$$

$$=\frac{7\cdot 7+26\cdot 10-8\cdot 3-178}{\sqrt{7^2+26^2+(-8)^2}}=\frac{49+260-24-178}{\sqrt{789}}=\frac{107}{789},$$

$$V_{\text{пир}}=\frac{1}{3}\sqrt{789}\cdot\frac{107}{789}=\frac{107}{3}=35\frac{2}{3}\quad\left(\text{ед.}^3\right).$$

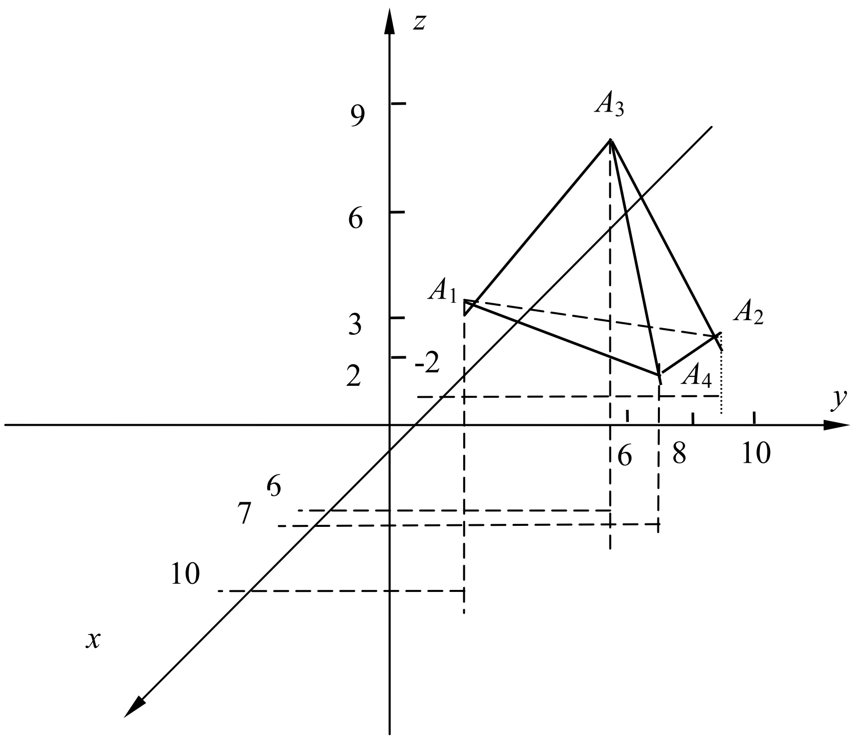


Рис.1 (к задаче № 8)

Задание 9. Найти величины отрезков (с учетом знаков), отсекаемых прямой

$$2x+y-8=0$$

на осях координат.

Решение.

Перейдем от общего уравнения прямой к уравнению в отрезках:

$2x+y=8;\Leftrightarrow\frac{2x}{8}+\frac{y}{8}=\frac{8}{8};\Leftrightarrow\frac{x}{4}+\frac{y}{8}=1$. Значит $a=4,\ b=8$.

Ответ: $a=4\quad b=8$.

Задание 10. Какие из заданных плоскостей: $a)\,4x+5y-3z+1=0$; $b)2\,y-z+3=0$; $c)\,2x-5y+3z=0$; $d)\,7z+1=0$; параллельны оси OX:

1) $a)$ и $c)$; 2) $b)$ и $d)$; 3) только $d)$; 4) ни одна.

Решение.

Первая плоскость содержит все три переменные, поэтому пересекает все координатные оси.

В уравнении второй плоскости отсутствует переменная *x*, так что она параллельна оси *Ox*.

В уравнении третьей плоскости отсутствует свободное слагаемое; плоскость проходит через начало координат (не параллельна ни одной из осей).

В уравнении четвертой плоскости содержатся лишь одна переменная *z* и свободное слагаемое; плоскость проходит параллельно плоскости *Oxy*, а следовательно параллельна и оси *Ox*.

Ответ: 2) $b)$ и $d)$.

Задание 11. Найти точку *N*, симметричную точке *M* (2, -5, 7) относительно прямой, проходящей через точки *A* (5, 4, 6) и *B*(–2,–17,–8).

Решение

Канонические уравнения прямой, проходящей через две заданные точки имеют вид:

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{z-z_1}{z_2-z_1}.$$

Для точек *A* и *B* будем иметь:

$$\frac{x-5}{-7}=\frac{y-4}{-21}=\frac{z-6}{-14}$$

или

$$\frac{x-5}{1}=\frac{y-4}{3}=\frac{z-6}{2}.$$

Уравнение плоскости, проектирующей точку *M* (2, –5, 7) на данную прямую (рис. 2), имеет вид:

$$A(x-2)+B(y+5)+C(z-7)=0.$$

Координаты нормального вектора (*A, B, C)* плоскости, перпендикулярной прямой, заменим координатами направляющего вектора (1, 3, 2) данной прямой. Уравнение указанной плоскости будет иметь вид:

$$1\cdot(x-2)+3(y+5)+2(z-7)=0$$

или

$$x-3y+2z-1=0.$$

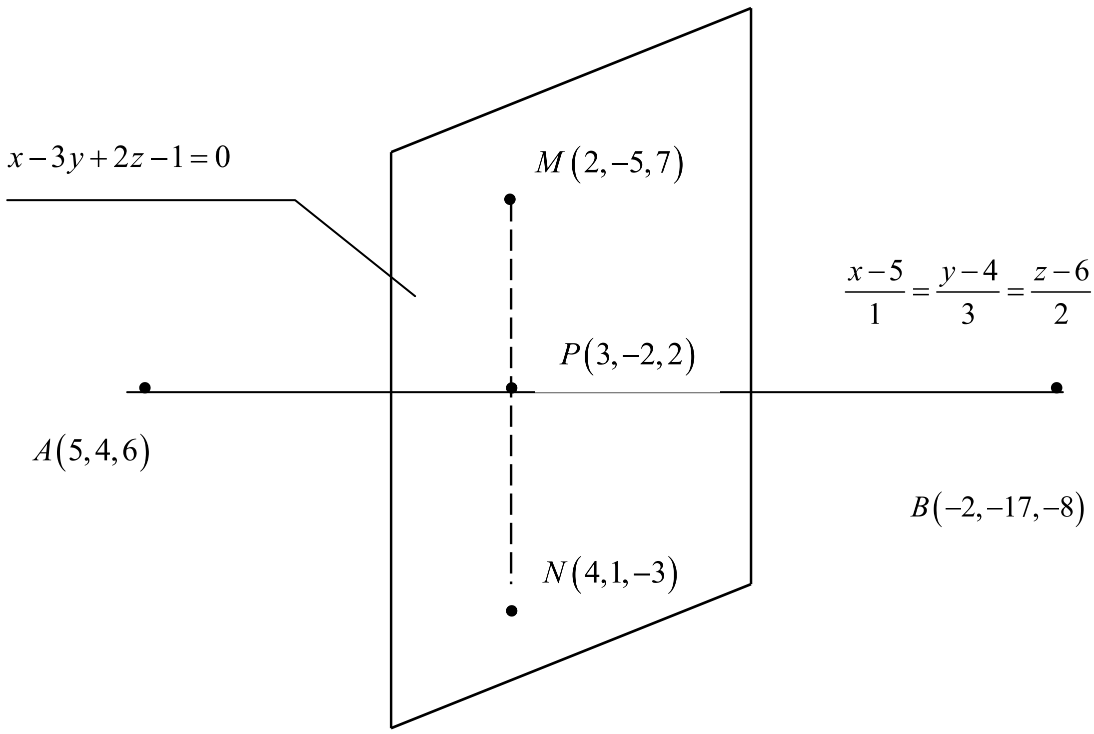


Рис.2 (к задаче 11)

Параметрические уравнения прямой *AB* имеют вид:

$$x = t + 5,$$
$$y = 3t + 4,$$
$$z = 2t + 6.$$

Подставляя *x,y,z* в уравнение плоскости, найдем $t=-2$.
Отсюда $x=-2+5=3$, $y=-6+4=-2$, $z=-4+6=2$, P (3,–2,2).

Координаты симметричной точки найдем, используя формулы для координат середины отрезка:

$$x_N = 2x_P - x_M = 2\cdot 3 - 2 = 4,$$
$$y_N = 2y_P - y_M = 2\cdot(-2)-(-5) = 1,$$
$$z_N = 2z_P - z_M = 2\cdot 2 - 7 = -3.$$

Ответ: $N(4, 1, -3)$.

Задание 12. Составить параметрические уравнения прямой:

$$\begin{cases} x+2y-z-6=0, \\ 2x-y+z+1=0. \end{cases}$$

Решение

Найдем вектор $\overline{a} = l\overline{i} + m\overline{j} + n\overline{k}$, параллельный искомой прямой. Так как он должен быть перпендикулярен нормальным векторам $\overline{n_1} = \overline{i} + 2\overline{j} - \overline{k}$ и $\overline{n_2} = 2\overline{i} - \overline{j} + \overline{k}$ заданных плоскостей (рис. 3), то за $\overline{a}$ можно принять векторное произведение векторов $\overline{n_1}$ и $\overline{n_2}$:

$$\overline{a} = \left[\overline{n_1}, \overline{n_2}\right] = \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}\overline{i} - \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}\overline{j} + \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}\overline{k} =$$

$$= \overline{i} - 3\overline{j} - 5\overline{k} = (1, -3, -5).$$

Таким образом, $l = 1, m = -3, n = -5$.

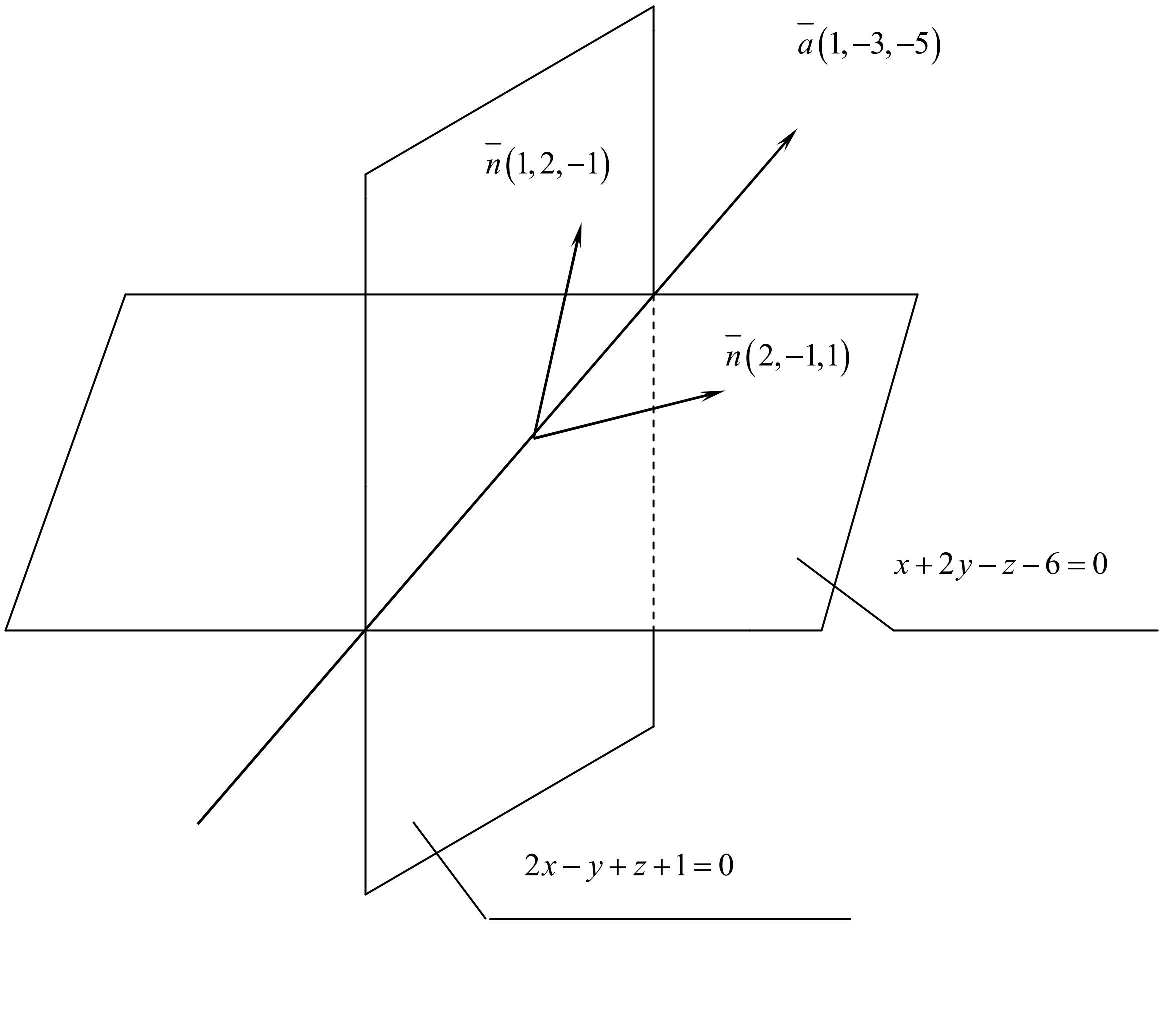


Рис. 3 (к задаче 12)

В качестве точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$, через которую проходит искомая прямая, можно взять точку ее пересечения с любой из координатных плоскостей, например, с плоскостью YOZ. Так как при этом $x_1 = 0$, то координаты y_1 и z_1 этой точки определятся из системы уравнений, состоящей из уравнений заданных плоскостей, если в них принять $x = 0$:

$$\begin{cases} 2y - z - 6 = 0, \\ -y + z + 1 = 0. \end{cases}$$

Решив эту систему, найдем $y_1 = 5,\ z_1 = 4$.

Так что, искомая прямая определится уравнениями:

$$\frac{x}{1} = \frac{y-5}{-3} = \frac{z-4}{-5}$$

или

$$\begin{aligned} x &= t, \\ y &= 5 - 3t, \\ z &= 4 - 5t. \end{aligned}$$

Ответ: $\frac{x}{1} = \frac{y-5}{-3} = \frac{z-4}{-5}$.

Задание 13. Даны координаты вершин треугольника $A(1,1,1)$, $B(5,1,-2)$, $C(7,9,1)$. Найти длину биссектрисы AD.

Решение. Найдем длины сторон треугольника, образующих угол A:

$$\left|\overline{AC}\right| = \sqrt{(x_C - x_A)^2 + (y_C - y_A)^2 + (Z_C - Z_A)^2} =$$

$$= \sqrt{(7-1)^2 + (9-1)^2 + (1-1)^2} = 10.$$

$$\left|\overline{AB}\right| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (Z_B - Z_A)^2} =$$

$$= \sqrt{(5-1)^2 + (1-1)^2 + (-2-1)^2} = 5.$$

Так как биссектриса делит сторону CB на части, пропорциональные прилежащим сторонам, то $\left|\overline{CD}\right| : \left|\overline{DB}\right| = \left|\overline{AC}\right| : \left|\overline{AB}\right|$, то есть $\left|\overline{DB}\right| = \lambda \cdot \left|\overline{DC}\right|$, $\lambda = \frac{10}{5} = 2$.

Для координат точки D будем иметь:

$$x_D = \frac{x_C + \lambda \cdot x_B}{1+\lambda} = \frac{7+2\cdot 5}{1+2} = \frac{17}{3},$$

$$y_D = \frac{y_C + \lambda \cdot y_B}{1+\lambda} = \frac{9+2\cdot 1}{1+2} = \frac{11}{3},$$

$$z_D = \frac{z_C + \lambda \cdot z_B}{1+\lambda} = \frac{1+2\cdot(-2)}{1+2} = -1.$$

Искомая точка – $D\left(\frac{17}{3}, \frac{11}{3}, -1\right)$. Длина биссектрисы:

$$\left|\overline{AD}\right| = \sqrt{\left(\frac{17}{3}-1\right)^2 + \left(\frac{11}{3}-1\right)^2 + (-1-1)^2} = \sqrt{21,777+7,111+4} = 5,735.$$

Задание 14. Установить вид кривых, заданных уравнениями. Привести уравнения кривых к каноническому виду и изобразить их на чертеже

а) $x^2 - 16y + 48 = 0$; б) $x^2 + y^2 - 4 = 0$;

в) $9x^2 + 4y^2 - 36 = 0$; г) $x^2 + 2y^2 + 1 = 0$;

д) $x^2 - y^2 + 2y = 0$; е) $x^2 + y^2 + 2y + 1 = 0$.

Решение

а) $x^2 - 16y + 48 = 0 \Rightarrow x^2 = 16(y-3)$ – парабола;

б) $x^2 + y^2 - 4 = 0 \Rightarrow x^2 + y^2 = 4$ – окружность (1);

в) $9x^2 + 4y^2 - 36 = 0 \Rightarrow 9x^2 + 4y^2 = 36 \Rightarrow \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$ – эллипс ;

г) $x^2 + 2y^2 + 1 = 0 \Rightarrow x^2 + 2y^2 = -1 \Rightarrow \frac{x^2}{1} + \frac{y^2}{\frac{1}{2}} = -1$ – мнимый эллипс;

д) $x^2 - y^2 + 2y = 0 \Rightarrow x^2 - (y^2 - 2y + 1) + 1 = 0 \Rightarrow (y-1)^2 - x^2 = 1$ – гипербола;

е) $x^2 + y^2 + 2y + 1 = 0 \Rightarrow x^2 + (y+1)^2 = 0$ – точка.

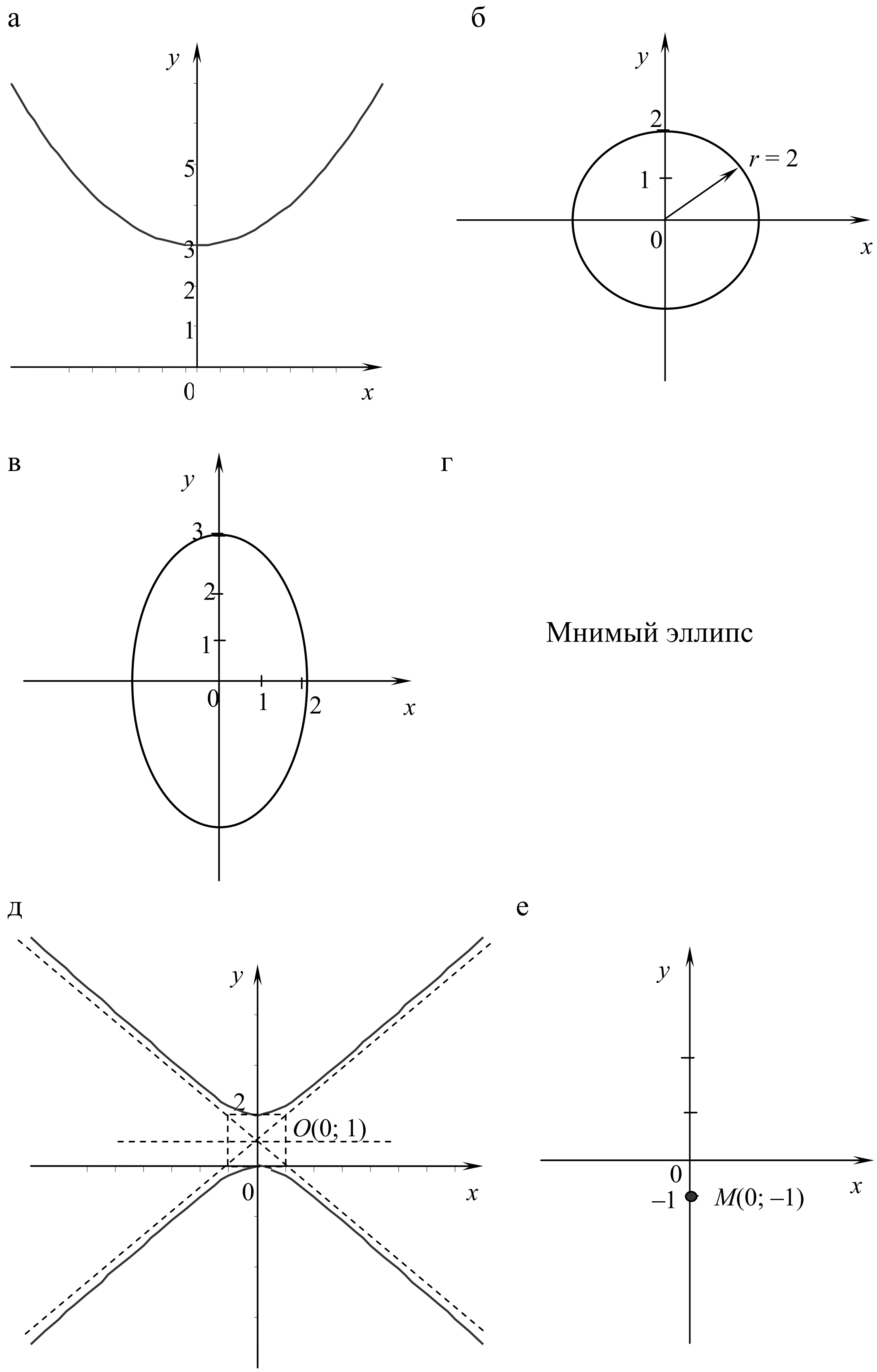


Рис. 4 (к задаче14)

Задание 15. Построить на плоскости область решений системы линейных неравенств

$$\begin{cases} 2x - y \le 8 \\ 3x + 5y \ge 30 \\ -2x + 4y \le 12. \end{cases}$$

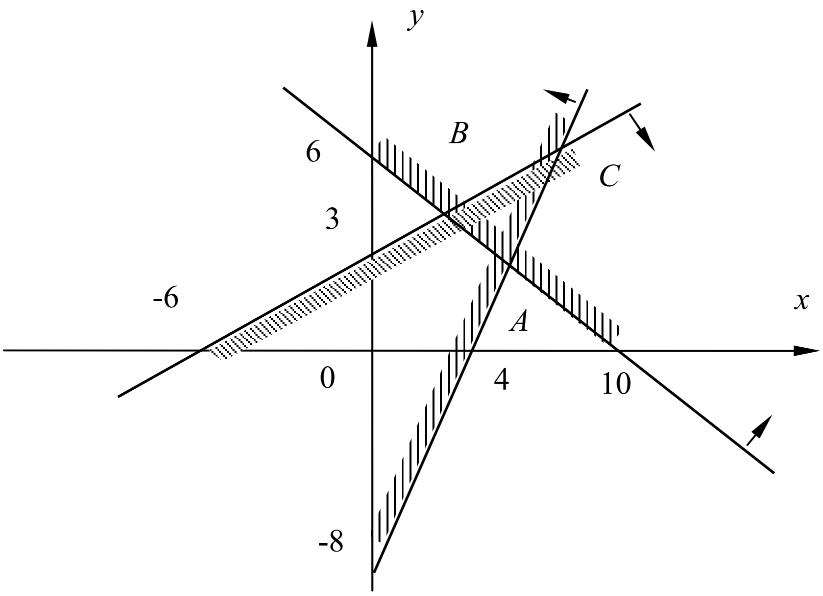


Рис.5 (к задаче № 15)

Ответ: областью решений является множество точек плоскости, ограниченное треугольником *ABC*.

Задание 16. Записать уравнение линии $2x^2 + 2y^2 = 72$ в полярных координатах.

Решение.

Имеем $x = \rho\cos\varphi$, $y = \rho\sin\varphi$. Тогда исходное уравнение примет вид:

$2\rho^2\cos^2\varphi + 2\rho^2\sin^2\varphi = 72$,

$2\rho^2\left(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi\right) = 72$,

$2\rho^2 = 72$,

$\rho^2 = 36$. Так как $\rho \ge 0$, то уравнение примет вид $\rho = 6$.

Ответ: $\rho = 6$.

Задание 17. Линия задана уравнением

$$r = \frac{4}{2 - 3\cos\varphi}$$

в полярной системе координат. Требуется: 1) построить линию по точкам, начиная от $\varphi = 0$ до $\varphi = 2\pi$ и придавая значения через промежуток $\frac{\pi}{8}$; 2) найти уравнение данной линии в декартовой прямоугольной системе координат, у которой начало совпадает с полюсом, а положительная полуось – с полярной осью; 3) по уравнению в декартовой системе координат определить, какая это линия.

Решение

Составим таблицу значений функции.

φ	$\cos\varphi$	$3\cos\varphi$	$2-3\cos\varphi$	$r = \frac{4}{2 - 3\cos\varphi}$
0	1	3	–1	не сущ.
$\frac{\pi}{8} = 22{,}5°$	0,92	2,76	–0,76	-″-
$\frac{\pi}{4} = 45°$	0,70	2,10	–0,1	-″-
$3\frac{\pi}{8} = 67{,}5°$	0,38	1,14	0,86	4,6
$\frac{\pi}{2} = 90°$	0	0	2	2
$5\frac{\pi}{8} = 112{,}5°$	–0,38	–1,14	3,14	1,28
$3\frac{\pi}{4} = 135°$	–0,70	–2,10	4,10	1
$7\frac{\pi}{8} = 157{,}5°$	–0,92	2,76	4,76	0,84
$\pi = 180°$	–1	–3	5	0,80

В силу симметрии функции $\cos\varphi$ значения функции от $\varphi = \pi$ до $\varphi = 2\pi$ повторяются в обратном порядке

Найдем уравнение линии в декартовой прямоугольной системе координат.

Формулы перехода

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi; \\ y = r\sin\varphi, \end{cases}$$

где $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, $\cos\varphi = \frac{x}{r} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$.

Подставляя в уравнение линии, получим:

$$\sqrt{x^2 + y^2} = \frac{4}{2 - \frac{3x}{\sqrt{x^2 + y^2}}}.$$

Преобразуем полученное уравнение:

$$1 = \frac{4}{2\sqrt{x^2 + y^2} - 3x},$$

$$2\sqrt{x^2 + y^2} - 3x = 4,\ 2\sqrt{x^2 + y^2} = 3x + 4,$$

$$4\left(x^2 + y^2\right) = 9x^2 + 24x + 16,$$

$$5x^2 + 24x - 4y^2 = -16,$$

$$5\left(x^2 + 2\cdot\frac{12}{5}x + \frac{144}{25}\right) - 4y^2 = \frac{144}{5} - 16,$$

$$5\left(x + \frac{12}{5}\right)^2 - 4y^2 = \frac{64}{5},$$

$$\frac{\left(x + \frac{12}{5}\right)^2}{\frac{64}{25}} - \frac{y^2}{\frac{64}{20}} = 1.$$

Это уравнение гиперболы, смещенной по оси Ox влево на 2,4 единицы с полуосями

$$a = \frac{8}{5};\ b = \frac{8}{2\sqrt{5}}.$$

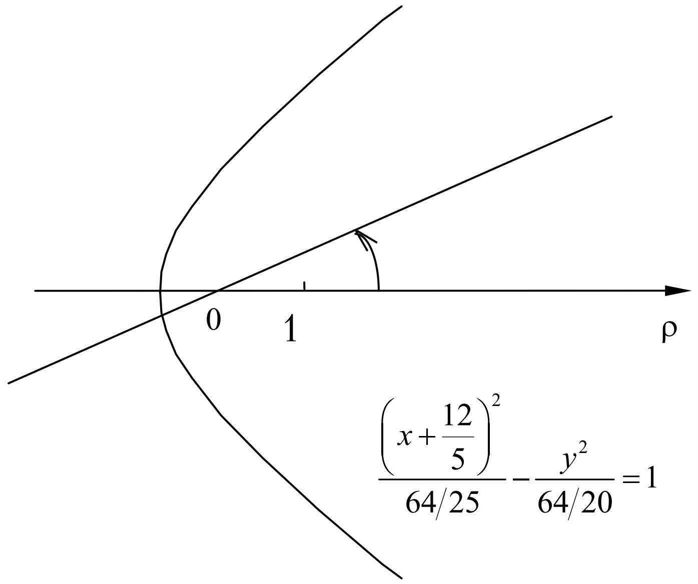


Рис.6 (к задаче № 17)

Математический анализ. Дифференциальное исчисление функций одной и нескольких переменных

Задание 1. На какое множество функция $y = 2^x - 4$ отображает множество $[3;\quad 4]$?

Решение.

Заданная функция ставит в соответствие каждой точке x_0 из данного отрезка значение функции $y(x_0)$, вычисленное в данной точке. Результатом отображения является отрезок, границы которого вычисляются как значения функции от границ отрезка-прообраза:

$y(3) = 2^3 - 4 = 8 - 4 = 4$;

$y(4) = 2^4 - 4 = 16 - 4 = 12$.

С учетом монотонного возрастания заданной функции на отрезке $[3;\quad 4]$, тогда следует, что образом данного отрезка является отрезок $[4;12]$.

Ответ: $[4;12]$.

Задание 2. С помощью преобразования графика функции $y = \sin x$ построить график функции $y = -2\sin(3x+2)$.

Решение

От функции $y = \sin x$ к функции $y = -2\sin(3x+2)$ можно перейти с помощью следующей цепочки преобразований:

$$y = \sin x,$$
$$y_1 = \sin 3x,$$
$$y_2 = -2\sin 3x,$$
$$y_3 = -2\sin(3x+2).$$

Геометрически это приводит к следующим построениям (рис.6):

1) Построим одну волну синусоиды $y = \sin x$.

2) График функции $y_1 = \sin 3x$ получается сжатием предыдущего графика в три раза, так как период этой функции $T = \dfrac{2\pi}{3}$.

3) График функции $y_2 = -2\sin 3x$ получается из графика $y_1 = \sin 3x$ растяжением в 2 раза вдоль оси *Oy* и отражением полученного графика от оси *Ox*.

4) График функции $y = -2\sin 3\left(x + \dfrac{2}{3}\right)$ получается из графика функции $y_2 = -2\sin 3x$ путем сдвига вдоль оси *Ox* влево на $\dfrac{2}{3}$ единицы.

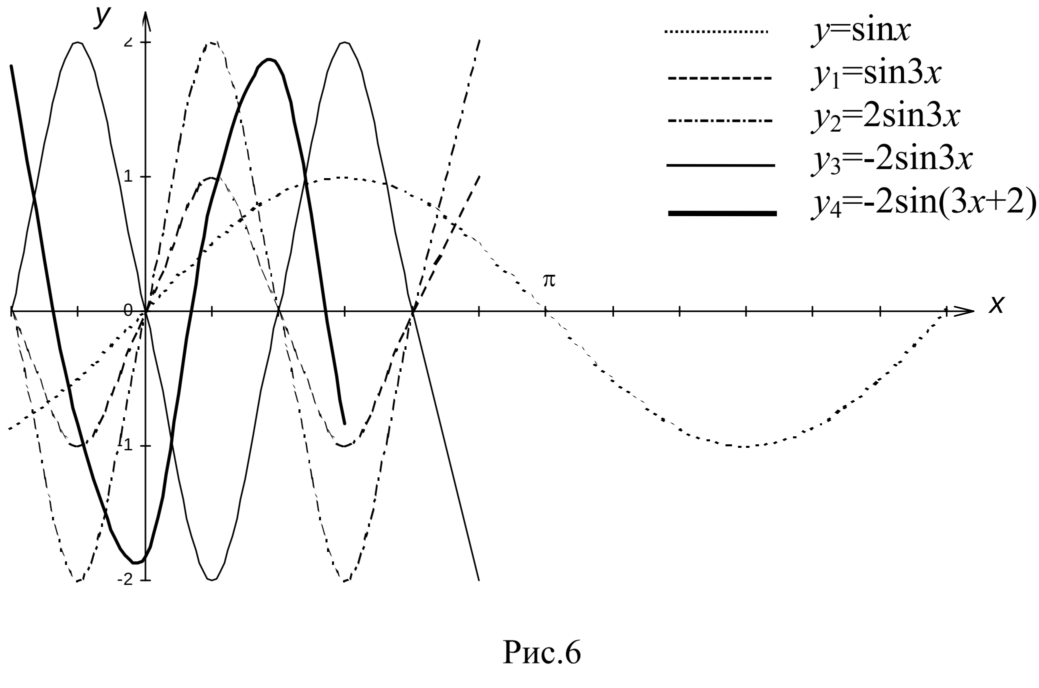


Рис.6

Задание 4. Найти указанные пределы, не пользуясь правилом Лопиталя.

1) Найти $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{4x^3 + 3x^2 - 1}{3x^3 - 3x + 1}$.

Точка $x = 2$ принадлежит области определения функции.

Воспользуемся тем, что для всех основных элементарных функций в любой точке их области определения имеет место равенство $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f\left(\lim\limits_{x\to x_0} x\right)$:

$$\lim_{x\to 2}\frac{4x^3+3x^2-1}{3x^2-3x+1}=\frac{4\cdot 8+3\cdot 4-1}{3\cdot 4-3\cdot 2+1}=\frac{43}{7}.$$

2) Найти $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^6-3x^2-2}{2x^6+4x+5}$.

В данном случае имеем неопределенность $\dfrac{\infty}{\infty}$. В подобного рода примерах пользуются утверждением: многочлен при $x\to\infty$ эквивалентен своему старшему члену

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^6-3x^2-2}{2x^6+4x+5}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^6}{2x^6}=\frac{1}{2}.$$

3) Найти $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{2x^2-3x-2}{x^2-3x+2}$.

При подстановке предельного значения аргумента получим неопределенность $\dfrac{0}{0}$, которая разрешается сокращением дроби на разность x – 2. Для чего квадратные трехчлены, стоящие в числителе и в знаменателе, разложим по формуле

$$ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2),$$

где x_1 и x_2 – корни квадратного трехчлена:

$$\lim_{x\to 2}\frac{2x^2-3x-2}{x^2-3x+2}=\lim_{x\to 2}\frac{2(x-2)\left(x+\frac{1}{2}\right)}{(x-2)(x-1)}=\lim_{x\to 2}\frac{2x+1}{x-1}=$$

$$=\frac{2\cdot 2+1}{2-1}=5.$$

4) Найти $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{3x^2-10x+3}{x^2-9}$.

Предел находится аналогично предыдущему:

$$\lim_{x\to 3}\frac{3x^2-10x+3}{x^2-9}=\lim_{x\to 3}\frac{3(x-3)\left(x-\frac{1}{3}\right)}{(x-3)(x+3)}=\lim_{x\to 3}\frac{3x-1}{x+3}=$$

$$=\frac{3\cdot 3-1}{3+3}=\frac{8}{6}=\frac{4}{3}.$$

5) Найти $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{4+3x}-\sqrt{4-3x}}{7x}$.

Здесь также имеем неопределенность $\dfrac{0}{0}$. Чтобы ее раскрыть, умножим числитель и знаменатель дроби на выражение, сопряженное числителю $\left(\sqrt{4+3x}+\sqrt{4-3x}\right)$. После этого можно сократить дробь на x:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{4+3x}-\sqrt{4-3x}}{7x}=\lim_{x\to 0}\frac{4+3x-(4-3x)}{7x\left(\sqrt{4+3x}+\sqrt{4-3x}\right)}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{6x}{7x\left(\sqrt{4+3x}+\sqrt{4-3x}\right)}=\lim_{x\to 0}\frac{6}{7\left(\sqrt{4+3x}+\sqrt{4-3x}\right)}=$$

$$=\frac{6}{7\left(\sqrt{4}+\sqrt{4}\right)}=\frac{3}{14}.$$

6) Найти $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{2x+1}-3}$.

Неопределенность $\dfrac{0}{0}$ разрешается умножением числителя и знаменателя дроби на произведение выражений $\left(\sqrt{x}+2\right)\left(\sqrt{2x+1}+3\right)$, одно из которых сопряженное числителю, другое – знаменателю. После этого сократим дробь на двучлен $(x-4)$:

$$\lim_{x\to 4}\frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{2x+1}-3}=\lim_{x\to 4}\frac{(x-4)\left(\sqrt{2x+1}+3\right)}{\left(\left(\sqrt{2x+1}\right)^2-9\right)\left(\sqrt{x}+2\right)}=$$

$$=\lim_{x\to 4}\frac{(x-4)\left(\sqrt{2x+1}+3\right)}{2(x-4)\left(\sqrt{x}+2\right)}=\frac{1}{2}\lim_{x\to 4}\frac{\sqrt{2x+1}+3}{\sqrt{x}+2}=$$

$$=\frac{1}{2}\frac{\sqrt{2\cdot 4+1}+3}{\sqrt{4}+2}=\frac{3}{4}.$$

7) Найти $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 4x}{x\sin 2x}$.

Используем формулу $2\sin^2 x=1-\cos 2x$, а затем – эквивалентность величин $\sin 2x\sim 2x$ при $x\to 0$:

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 4x}{x\sin 2x}=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2 2x}{2x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{(2x)^2}{x^2}=4.$$

8) Найти $\lim\limits_{x\to 0} x\cdot \sin 5x \cdot \operatorname{ctg}^2 2x$.

Заменим эквивалентные величины $\sin 5x \sim 5x$ и $\operatorname{tg} 2x \sim 2x$ при $x\to 0$:

$$\lim_{x\to 0} x\cdot \sin 5x\cdot \operatorname{ctg}^2 2x = \lim_{x\to 0}\frac{x\sin 5x}{\operatorname{tg}^2 2x} = \lim_{x\to 0}\frac{5x^2}{(2x)^2} = \frac{5}{4}.$$

9) $\lim\limits_{x\to 2}(3x-5)^{\frac{x}{x-2}}$.

Сделаем предварительно замену переменной. Обозначим $y = x-2$; $y\to 0$ при $x\to 2$. Тогда

$$\lim_{x\to 2}(3x-5)^{\frac{x}{x-2}} = \lim_{y\to 0}\left(3(y+2)-5\right)^{\frac{y+2}{y}} =$$

$$= \lim_{y\to 0}(3y+1)^{\frac{2}{y}+1} = e^{3\cdot 2} = e^6.$$

Приведем и другой способ вычисления. А именно, при вычислении пределов выражений вида u^v, где $u(x)\to 1$ и $v(x)\to\infty$ при данном предельном переходе, удобно пользоваться формулой $\lim u^v = e^{\lim v\ln u}$.

Так как в данном случае $u = 3x-5$ и $v = \dfrac{x}{x-2}\to\infty$ при $x\to 2$, то, пользуясь последней формулой, получим

$$\lim_{x\to 2}(3x-5)^{\frac{x}{x-2}} = e^{\lim\limits_{x\to 2}\frac{x}{x-2}\cdot\ln(3x-5)} = e^{\lim\limits_{y\to 0}\frac{y+2}{y}\ln(3y+1)} =$$

$$= e^{\lim\limits_{y\to 0}\frac{y+2}{y}\cdot 3y} = e^{\lim\limits_{y\to 0}3(y+2)} = e^6.$$

10) $\lim\limits_{x\to\infty}(x+3)\left(\ln(x+5)-\ln(x+2)\right)$.

Запишем разность логарифмов как логарифм частного и, выделив целую часть дроби, заменим эквивалентные величины:

$$\ln(1+\alpha)\sim\alpha \text{ при } \alpha\to 0.$$

Откуда

$$\lim_{x\to\infty}(x+3)\left(\ln(x+5)-\ln(x+3)\right) = \lim_{x\to\infty}(x+3)\ln\frac{x+5}{x+3} =$$

$$= \lim_{x\to\infty}(x+3)\ln\left(1+\frac{2}{x+3}\right) = \lim_{x\to\infty}(x+3)\frac{2}{x+3} = 2.$$

Задание 4. Определить число точек разрыва функции $f(x)=\dfrac{1}{x(x+5)(x-3)}$

Решение.

Точками разрыва будут точки, в которых функция не существует, то есть нули знаменателя.

$x(x+5)(x-3)=0 \Leftrightarrow x=0$ или $x=-5$, или $x=3$

Ответ: 3

Задание 5. Дана функция $f(x)=15^{\frac{1}{3-x}}$ и два значения аргумента $x_1 = 3$ и $x_2 = 1$. Требуется: 1)найти предел функции при приближении к каждому из заданных значений слева и справа; 2) установить, является ли данная функция непрерывной или разрывной для каждого из заданных значений x; 3) сделать чертеж.

Решение

Функция $f(x)=15^{\frac{1}{3-x}}$ в точке $x = 3$ не определена. Найдем в этой точке левый и правый односторонние пределы.

$$\lim_{x\to 3-o} 15^{\frac{1}{3-x}} = 15^{+\infty} = +\infty;$$

$$x<3 \Rightarrow 3-x>0$$

$$\lim_{x\to 3+o} 15^{\frac{1}{3-x}} = 15^{-\infty} = \frac{1}{15^{+\infty}} = 0.$$

$$x>3 \Rightarrow 3-x<0$$

В точке $x_1 = 3$ функция терпит бесконечный разрыв.

В точке $x_2 = 1$ функция непрерывна:

$$\lim_{x\to 1} 15^{\frac{1}{3-x}} = 15^{\frac{1}{2}} = \sqrt{15}.$$

Сделаем схематический чертеж (рис.7).

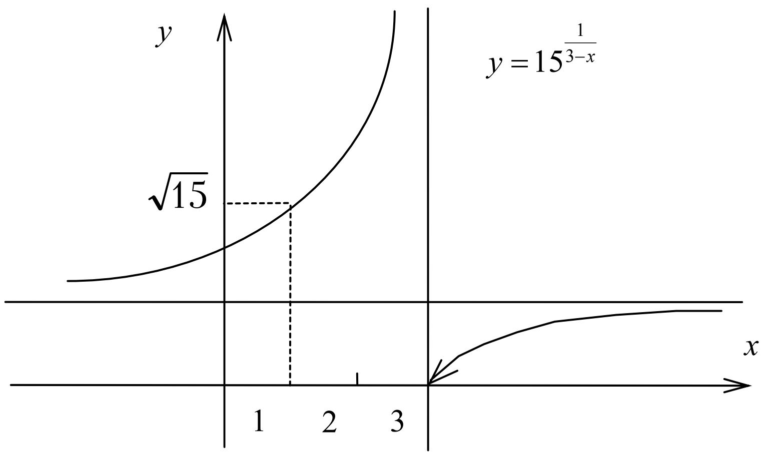


Рис.7

Задание 6. Функция задается различными аналитическими выражениями для различных областей изменения независимой переменной

$$f(x)=\begin{cases} x+2, & \text{где } x\le -1; \\ x^2+1, & \text{где } -1<x\le 1; \\ -x+3, & \text{где } x>1. \end{cases}$$

Требуется:

1) найти точки разрыва функции, если они существуют;

2) найти скачок функции в каждой точке разрыва;

3) сделать схематический чертеж.

Решение

Данная функция определена при всех значениях x. Разрыв она может иметь в точках $x = -1$ и $x = 1$. Найдем односторонние пределы в этих точках.

$$\lim_{\substack{x\to -1-0\\ x<-1}} f(x)=\lim_{x\to -1-0}(x+2)=-1+2=-1;$$

$$\lim_{\substack{x\to -1+0\\ x>-1}} f(x)=\lim_{x\to -1+0}\left(x^2+1\right)=1+1=2.$$

Так как $\lim\limits_{x\to -1-0} f(x)\neq \lim\limits_{x\to -1+0} f(x)$, то функция $f(x)$ в точке $x = -1$ терпит конечный разрыв.

Скачок функции в этой точке равен

$$\lim_{x\to -1+0} f(x)-\lim_{x\to -1-0} f(x)=2-1=1;$$

Найдем односторонние пределы функции в точке $x = 1$.

$$\lim_{\substack{x\to -1-0\\ x<1}} f(x)=\lim_{x\to -1-0} f\left(x^2+1\right)=1+1=2;$$

$$\lim_{\substack{x\to -1+0\\ x>1}} f(x)=\lim_{x\to -1+0} f(-x+3)=-1+3=2.$$

Так как $\lim\limits_{x\to -1-0} f(x)=\lim\limits_{x\to -1+0} f(x)=2$, то функция $f(x)$ в точке $x = 1$ непрерывна.

Сделаем схематический чертеж (рис.8).

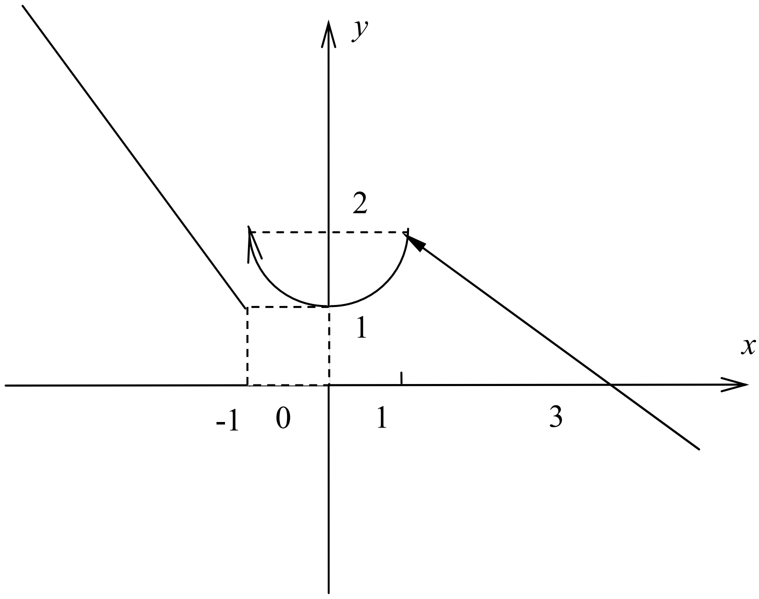
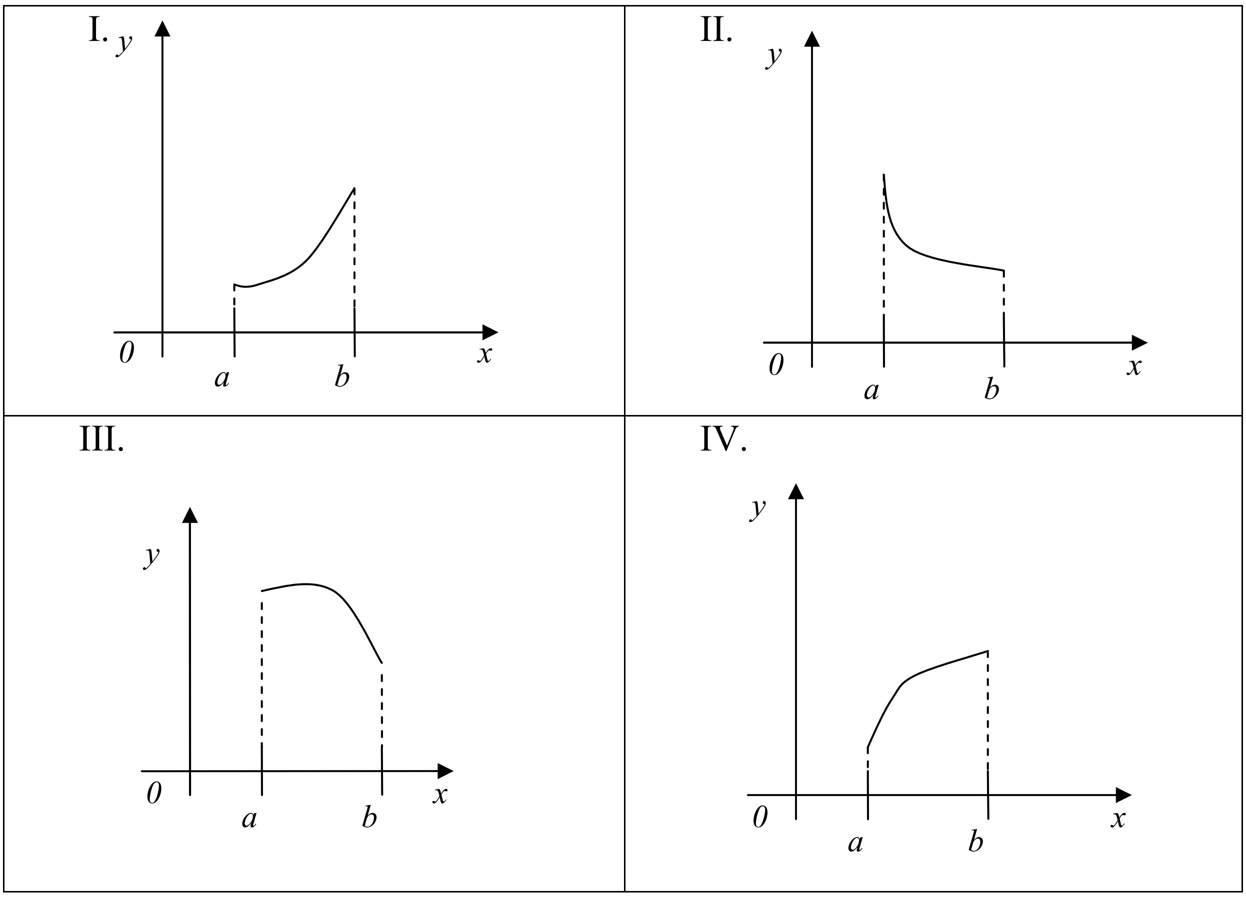


Рис.8

Задание 7. Графики каких из функций одновременно удовлетворяют трем условиям: $y > 0$, $y' > 0$, $y'' < 0$ на всем отрезке $[a; b]$?

1) Все графики; 2) Только IV; 3) Только III и IV; 4) Только II.



Решение.

Первое условие ($y > 0$) определяет положение кривой относительно оси *ОУ*.

По условию $y > 0$, следовательно, график функции y лежит выше оси *ОУ*.

Второе условие ($y' > 0$) показывает, возрастает или убывает функция на данном промежутке. По условию $y' > 0$, следовательно, функция возрастает на интервале.

Третье условие $y'' < 0$ позволяет определить форму графика функции. По условию $y'' < 0$, следовательно, функция выпукла на данном интервале.

Всем трем условиям удовлетворяет только график на рис. IV.

Ответ: Только IV.

Задание 8. Найти производные $\frac{dy}{dx}$ данных функций:

а) $y = \sqrt[5]{3x^2 + 4x + 5} + \frac{4}{(x-4)^4}$; б) $y = \cos^5 3x \cdot tg(4x+1)^3$;

в) $y = (x+5)^2 \cdot \arccos^3 5x^4$; г) $y = (\sin 3x)^{\mathrm{arcctg} x}$;

д) $y^2 = x + \ln\left(\frac{y}{x}\right)$.

Решение

При решении указанных примеров используются следующие правила дифференцирования:

1) $c' = 0,\ c = \mathrm{const}$;

2) $x' = 1,\ x$ – независимая переменная;

3) $(u+v)' = u' + v'$, где $u = u(x);\ v = v(x)$;

4) $(u \cdot v)' = u'v + v'u$;

5) $(c \cdot u)' = c \cdot u'$;

6) $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - v'u}{v^2}\ (v \neq 0)$;

7) если $y = f(u),\ u = u(x)$, то есть $y = f(u(x))$ – сложная функция, составленная из дифференцируемых функций, то $u'_x = y'_u \cdot u'_x$ или $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$. Кроме этого используется таблица производных элементарных функций:

1) $(u^\alpha)' = \alpha u^{\alpha-1} \cdot u'$;

2) $\left(a^u\right)' = a^u \cdot \ln a \cdot u'$;

3) $\left(e^u\right)' = e^u \cdot u'$;

4) $\left(\log_a u\right)' = \dfrac{u'}{u \cdot \ln a}$;

5) $\left(\ln u\right)' = \dfrac{u'}{u}$;

6) $\left(\sin u'\right) = \cos u \cdot u'$;

7) $\left(\cos u\right)' = -\sin u \cdot u'$;

8) $\left(\mathrm{tg} u\right)' = \dfrac{u'}{\cos^2 u}$;

9) $\left(\mathrm{ctg} u\right)' = -\dfrac{u'}{\sin^2 u}$;

10) $\left(\arcsin u\right)' = \dfrac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$;

11) $\left(\arccos u\right)' = -\dfrac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$;

12) $\left(\mathrm{arctg} u\right)' = \dfrac{u'}{1+u^2}$;

13) $\left(\mathrm{acctg} u\right)' = -\dfrac{u'}{1+u^2}$.

а) $y = \sqrt[5]{3x^2 + 4x + 5} + \dfrac{4}{(x-4)^4}$.

$$y' = \left(\left(3x^2 + 4x + 5\right)^{\frac{1}{5}}\right)' + 4\left(\left(x-4\right)^{-4}\right)' =$$

$$= \frac{1}{5}\left(3x^2 + 4x + 5\right)^{-\frac{4}{5}}\left(3x^2 + 4x + 5\right)' + 4(-4)(x-4)^{-5}(x-4)' =$$

$$= \frac{6x+4}{5\sqrt[5]{\left(3x^2 + 4x + 5\right)^4}} - \frac{16}{(x-4)^5}.$$

б) $y = \cos^5 3x \cdot \mathrm{tg}(4x+1)^3$

$$y' = \left(\cos^5 3x\right)' \cdot \mathrm{tg}(4x+1)^3 + \cos^5 3x \cdot \left(\mathrm{tg}(4x+1)^3\right)' =$$

$$=5\cos^4 3x\cdot(-\sin 3x)\cdot 3\cdot \operatorname{tg}(4x+1)^3+\cos^5 3x\frac{3(4x+1)^2\cdot 4}{\cos^2(4x+1)^3}=$$

$$=-15\cos^4 3x\sin 3x\cdot \operatorname{tg}(4x+1)^3+\frac{12(4x+1)^2\cdot\cos^5 3x}{\cos^2(4x+1)^3}.$$

в) $y=(x+5)^2\arccos^3 5x^4$

$$y'=2(x+5)\arccos^3 5x^4+(x+5)^2 3\arccos^2 5x^4\frac{-20x^3}{\sqrt{1-25x^8}}=$$

$$=2(x+5)\arccos^3 5x^4-\frac{60x^3(x+5)^2\arccos^2 5x^4}{\sqrt{1-25x^8}}.$$

г) $y=(\sin 3x)^{\operatorname{arcctg}x}$.

Это показательно-степенная функция. Прологарифмируем ее:

$$\ln y=\operatorname{arcctg}x\ln(\sin 3x)$$

и затем продифференцируем обе части полученного равенства:

$$\frac{y'}{y}=-\frac{\ln(\sin 3x)}{1+x^2}+\frac{\operatorname{arcctg}x\cos 3x\cdot 3}{\sin 3x}=-\frac{\ln(\sin 3x)}{1+x^2}+3\operatorname{ctg}3x\operatorname{arcctg}x.$$

Отсюда выразим y':

$$y'=(\sin 3x)^{\operatorname{arcctg}x}\left(3\operatorname{ctg}3x\operatorname{arcctg}x-\frac{3\ln(\sin 3x)}{1+x^2}\right).$$

д) $y^2=x+\ln\left(\frac{y}{x}\right)$.

Это неявно заданная функция. Продифференцируем по x обе части уравнения:

$$2yy'=1+\frac{1}{y/x}\frac{y'x-y}{x^2};$$

$$2xy^2y'=xy+y'x-y.$$

Разрешим полученное равенство относительно производной y':

$$y'\left(2xy^2-x\right)=xy-y;$$

$$y'=\frac{y(x-1)}{x(2y^2-1)}.$$

Задание 9. Найти $\dfrac{dy}{dx},\dfrac{d^2y}{dx^2}$ для функций.

Решение

а) $y=(x+1)e^{3x^2-5}$.

$$y'=e^{3x^2-5}+(x+1)e^{3x^2-5}6x=e^{3x^2-5}\left(1+6x^2+6x\right),$$

$$y''=e^{3x^2-5}6x(6x^2+6x+1)+e^{3x^2-5}(12x+6)=$$

$$=6e^{3x^2-5}\left(6x^3+6x^2+x+2x+1\right)=6e^{3x^2-5}\left(6x^3+6x^2+3x+1\right).$$

б) $\begin{cases} x=\sqrt{t^2-1} \\ y=\dfrac{t+1}{\sqrt{t^2-1}}. \end{cases}$

Это параметрическая функция, для которой: $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{y'_t}{x'_t}$ и $\dfrac{d^2y}{dx^2}=\dfrac{\left(y'_x\right)'_t}{x'_t}$;

$$y'_t=\frac{\sqrt{t^2-1}-(t+1)\dfrac{2t}{2\sqrt{t^2-1}}}{t^2-1}=\frac{t^2-1-2t^2-2t}{\sqrt{\left(t^2-1\right)^3}}=-\frac{t+1}{\sqrt{\left(t^2-1\right)^3}};$$

$$x'_t=\frac{t}{\sqrt{t^2-1}};\quad \frac{dy}{dx}=-\frac{t+1}{\sqrt{\left(t^2-1\right)^3}}\cdot\frac{\sqrt{t^2-1}}{t}=-\frac{t+1}{\left(t^2-1\right)t}=-\frac{1}{t(t-1)};$$

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)'_t=-\left(\frac{1}{t^2-t}\right)'=\frac{2t-1}{\left(t^2-t\right)^2}=\frac{2t-1}{t^2(t-1)^2};$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{2t-1}{t^2(t-1)^2}\cdot\frac{\sqrt{t^2-1}}{t}=\frac{(2t-1)\sqrt{t^2-1}}{t^3(t-1)^2}.$$

Задание 10. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $f(x)=\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\cos x$ на отрезке $\left[0;\dfrac{\pi}{2}\right]$.

Область определения функции $(-\infty;\infty)$. Найдем критические точки $f'(x)=-\sin x=0,\ x=\pi n.$ При $n=0$ $x=0\in\left[0;\dfrac{\pi}{2}\right]$. Это единственная критическая точка на данном интервале. Вычислим значения функции в критической точке и на концах отрезка:

$$f(0)=\frac{\sqrt{3}}{2}+1=\frac{\sqrt{3}+2}{2};\quad f\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Выбираем среди найденных значений функции наименьшее и наибольшее:

$$\min_{x\in\left[0;\,\frac{\pi}{2}\right]} f(x)=f\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2};$$

$$\max_{x\in\left[0;\,\frac{\pi}{2}\right]} f(x)=f(0)=\frac{\sqrt{3}+2}{2}$$

Задание 11. Исследовать методами дифференциального исчисления функцию $f(x)=\dfrac{x^3}{x^2-1}$ и построить ее график.

Решение

Исследуем функцию по следующей схеме:

1) Область определения. Точки разрыва. Вертикальные асимптоты.

Функция теряет смысл, если знаменатель обращается в нуль ($x^2-1=0$). Следовательно, $x=\pm1$ – точки бесконечного разрыва:

$$\lim_{\substack{x\to-1-0\\ x<-1}}\frac{x^3}{x^2-1}=\lim_{\substack{x\to-1-0\\ x+1<0}}\frac{x^3}{(x-1)(x+1)}=-\infty;$$

$$\lim_{\substack{x\to-1+0\\ x>-1}}\frac{x^3}{x^2-1}=\lim_{\substack{x\to-1+0\\ x+1>0}}\frac{x^3}{(x-1)(x+1)}=+\infty;$$

$$\lim_{\substack{x\to1-0\\ x<1}}\frac{x^3}{x^2-1}=\lim_{\substack{x\to1-0\\ x-1<0}}\frac{x^3}{(x-1)(x+1)}=-\infty;$$

$$\lim_{\substack{x\to1+0\\ x>1}}\frac{x^3}{x^2-1}=\lim_{\substack{x\to1+0\\ x-1>0}}\frac{x^3}{(x-1)(x+1)}=+\infty;$$

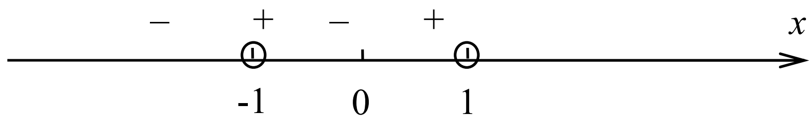
Данная кривая имеет две вертикальные асимптоты: $x=-1$ и $x=1$.

2) Корни функции. Интервалы знакопостоянства. Четность, нечетность.

Найдем точки, в которых функция обращается в нуль: $f(x)=\dfrac{x^3}{x^2-1}=0$ при $x = 0$.

Точка пересечения с осью абсцисс 0 (0, 0). Укажем интервалы знакопостоянства функции.

Знак $f(x)$



$$f(-x)=\frac{-x^3}{(-x)^2-1}=-\frac{x^3}{x^2-1}=-f(x).$$

Следовательно, функция нечетная и ее график симметричен относительно начала координат 0 (0, 0).

3) Интервалы возрастания, убывания. Экстремумы.

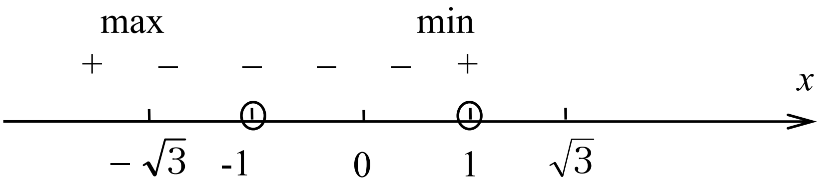
Найдем первую производную и приравняем ее к нулю:

$$f'(x)=\frac{3x^2\left(x^2-1\right)-x^3\cdot 2x}{\left(x^2-1\right)^2}=\frac{x^2\left(3x^2-3-2x^2\right)}{\left(x^2-1\right)^2}=\frac{x^2\left(x^2-3\right)}{\left(x^2-1\right)^2}=0;$$

$x_1=0,\ x_2=-\sqrt{3},\ x_3=\sqrt{3}$ – стационарные точки.

Определим вид экстремума и интервалы возрастания и убывания функции.

Знак $f'(x)$



Вычислим функцию в точках экстремума

$$f\left(-\sqrt{3}\right)=\frac{-3\sqrt{3}}{3-1}=-\frac{3}{2}\sqrt{3}\approx-2{,}55,\quad f\left(\sqrt{3}\right)=\frac{3\sqrt{3}}{3-1}=\frac{3}{2}\sqrt{3}\approx 2{,}55.$$

Точка $A\left(-\sqrt{3};-\dfrac{3}{2}\sqrt{3}\right)$ – точка максимума.

Точка B ($\sqrt{3};\dfrac{3}{2}\sqrt{3}$) – точка минимума (рис.10).

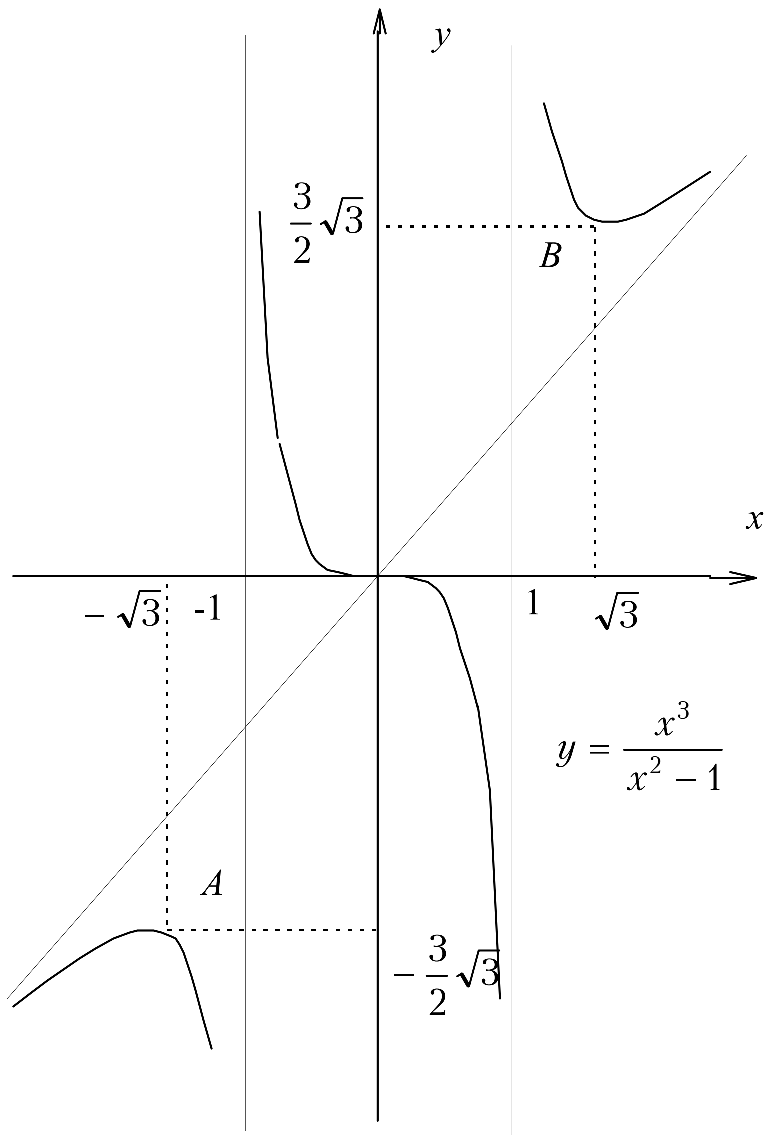


Рис.9

Функция возрастает на интервалах $(-\infty;-\sqrt{3})$ и $(\sqrt{3};\infty)$ и убывает на интервалах $\left(-\sqrt{3};-1\right)$, $\left(-1;1\right)$ и $(1;\sqrt{3})$.

4) Интервалы выпуклости, вогнутости. Точки перегиба.

Найдем вторую производную и приравняем ее к нулю:

$$f''(x) = \left(\frac{x^4-3x^2}{\left(x^2-1\right)^2}\right)' = \frac{\left(4x^3-6x\right)\left(x^2-1\right)^2 - 2\left(x^2-1\right)\cdot 2x\left(x^4-3x^2\right)}{\left(x^2-1\right)^4} =$$

$$= \frac{2x\left(x^2-1\right)\left(\left(2x^2-3\right)\left(x^2-1\right)-2\left(x^4-3x^2\right)\right)}{\left(x^2-1\right)^4} = \frac{2x\left(x^2+3\right)}{\left(x^2-1\right)^3} = 0.$$

Следовательно, $x = 0$ – возможная точка перегиба.

Укажем интервалы выпуклости и вогнутости.

Знак $f''(x)$

$$\begin{array}{ccccccccc} & - & & + & & - & & + & \quad x \\ \longrightarrow & & \circ & & | & & \circ & & \longrightarrow \\ & & -1 & & 0 & & 1 & & \end{array}$$

выпукл. вогн. выпукл. вогн.

Точка 0 (0, 0) – точка перегиба графика функции.

Интервалы выпуклости: $(-\infty;1)$ и (0,1).

Интервалы вогнутости: (–1, 0) и (1, +∞).

5) Наклонные асимптоты.

Найдем

$$k = \lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^2}{x^2-1} = 1,$$

$$b = \lim_{x\to\pm\infty}\left(f(x)-kx\right) = \lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{x^3}{x^2-1}-x\right) = \lim_{x\to\pm\infty}\frac{x}{x^2-1} = 0$$

Таким образом, у данной кривой существует одна наклонная асимптота $y = x$.

График функции приводится на рис.9.

Задание 12. Найти производную и градиент скалярного поля $u = x^2y^2z - \ln(z-1)$ в точке M (1; 1; 2) по направлению вектора $\bar{l} = 5\bar{i} - 6\bar{j} + 2\sqrt{5}\bar{k}$.

Решение

Производная скалярного поля $u(x,y,z)$ по направлению вектора $\bar{l} = l_1\bar{i} + l_2\bar{j} + l_3\bar{k}$ вычисляем по формуле

$$\frac{\partial u}{\partial l} = \frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma,$$

где $\cos\alpha = \frac{l_1}{|l|}$; $\cos\beta = \frac{l_2}{|l|}$; $\cos\gamma = \frac{l_3}{|l|}$ являются координатами единичного вектора $\overline{l_0}$, а $|\bar{l}| = \sqrt{l_1^2 + l_2^2 + l_3^2}$.

Найдем длину вектора $\bar{l}$.

$$|\bar{l}| = \sqrt{5^2 + 6^2 + \left(2\sqrt{5}\right)^2} = \sqrt{25+36+20} = \sqrt{81} = 9.$$

Тогда $\cos\alpha = \frac{5}{9}$; $\cos\beta = -\frac{2}{3}$; $\cos\gamma = \frac{2\sqrt{5}}{9}$.

Частные производные функции $u(x, y, z)$ в точке M (1; 1; 2) имеют значения:

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_M = \left.\left(2xy^2z\right)\right|_M = 2\cdot1\cdot1\cdot2 = 4;$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_M = \left.\left(2x^2yz\right)\right|_M = 2\cdot1\cdot1\cdot2 = 4;$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_M = \left.\left(x^2y^2 - \frac{1}{z-1}\right)\right|_M = 1\cdot1\cdot\frac{1}{2-1} = 0;$$

Подставляя в формулу, найдем:

$$\left.\frac{\partial u}{\partial l}\right|_M = 4\cdot\frac{5}{9} + 4\cdot\left(-\frac{2}{3}\right) + 0\frac{2\sqrt{5}}{9} = 4\left(\frac{5}{9} - \frac{2}{3}\right) = -\frac{4}{9}.$$

Градиент скалярного поля $u(x, y, z)$ есть вектор $\overline{\mathrm{grad}u}$, направленный по нормали к поверхности у ровня в сторону возрастания поля. Вычисляем по формуле

$$\overline{\mathrm{grad}u} = \frac{\partial u}{\partial x}\bar{i} + \frac{\partial u}{\partial y}\bar{j} + \frac{\partial u}{\partial z}\bar{k}$$

Подставляя значения частных производных в последнюю формулу, получим:

$$\overline{\mathrm{grad}u} = 4\bar{i} + 4\bar{j}.$$

Задание 13. Проверить, удовлетворяет ли уравнению

$$x^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2xy\frac{\partial^2 u}{\partial x dy} + y^2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

функция $u = xe^{y/x}$.

Решение

Найдем все производные второго порядка от функции $u = xe^{y/x}$:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = e^{y/x} + xe^{y/x}\left(-\frac{y}{x^2}\right) = e^{y/x}\left(1 - \frac{y}{x}\right) = e^{y/x}\frac{x-y}{x},$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = xe^{y/x}\cdot\frac{1}{x} = e^{y/x},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=e^{y/x}\left(-\frac{y}{x^2}\right)\cdot\frac{x-y}{x}+e^{y/x}\cdot\frac{x-(x-y)}{x^2}=e^{y/x}\frac{y^2}{x^3},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=e^{y/x}\frac{1}{x}=\frac{e^{y/x}}{x};\ \frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=e^{y/x}\left(-\frac{y}{x^2}\right)=-\frac{ye^{y/x}}{x^2}.$$

Подставим найденные производные в уравнение

$$x^2e^{y/x}\frac{y^2}{x^2}+2xy\left(-\frac{ye^{y/x}}{x^2}\right)+y^2\frac{e^{y/x}}{x}=$$

$$=\frac{e^{y/x}}{x}\left(y^2-2y^2+y^2\right)=0.$$

Получили тождество, и следовательно, функция удовлетворяет уравнению.

Задание 14. Найти экстремум функции $z=x\sqrt{y}-x^2-y+6x+3$.

Решение

Найдем частные производные: $\frac{\partial z}{\partial x}=\sqrt{y}-2x+6,\ \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{x}{2\sqrt{y}}-1.$

Приравнивая эти производные к нулю, получим систему уравнений, из которой определяются стационарные точки данной функции:

$$\begin{cases}\sqrt{y}-2x+6=0\\ \dfrac{x}{2\sqrt{y}}-1=0.\end{cases}$$

Из второго уравнения:

$$\sqrt{y}=\frac{x}{2}$$

Подставим это выражение в первое уравнение, получим:

$$\frac{x}{2}-2x+6=0;\ x-4x+12=0;$$

$$3x=12;\ x=4; y=2^2=4.$$

Таким образом, имеем одну стационарную точку M (4; 4). Проверим ее на экстремум с помощью достаточных условий. Для этого найдем сначала вторые частные производные:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial xdy}=\frac{1}{2\sqrt{y}};\ \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=-\frac{x}{4y\sqrt{y}};\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=-2.$$

Подставим координаты стационарной точки:

$$\left.\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right|_M=-2;\left.\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\right|_M=\frac{1}{2\sqrt{4}}=\frac{1}{4};\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=-\frac{4}{4\cdot 4\cdot\sqrt{4}}=-\frac{1}{8}.$$

Подсчитаем

$$\Delta = \left.\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right|_M \cdot \left.\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right|_M - \left[\left.\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\right|_M\right]^2 = -2\left(-\frac{1}{8}\right) - \left(\frac{1}{4}\right)^2 =$$

$$= \frac{1}{4} - \frac{1}{16} = \frac{3}{16} > 0.$$

Величина $\Delta > 0$ и $\left.\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right|_M < 0$, следовательно, в точке M (4; 4) функция имеет максимум. Подсчитаем максимальное значение функции:

$$z(4;4) = 4\sqrt{4} - 4^2 - 4 + 6 \cdot 4 + 3 = 8 - 16 - 1 + 24 = 15;$$

$z_{\max} = 15$ в точке M (4; 4).

Задание 15. Найти наибольшее и наименьшее значения функции

$$z = x^2 - 2xy + \frac{5}{2}y^2 - 2x$$

в области *D*, ограниченной прямыми $x = 0$; $y = 0$; $x = 2$; $y = 2$.

Решение

Изобразим область *D*. Она представляет собой квадрат (рис.11). Найдем стационарные точки, лежащие внутри квадрата:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2x - 2y - 2;$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -2x + 5y.$$

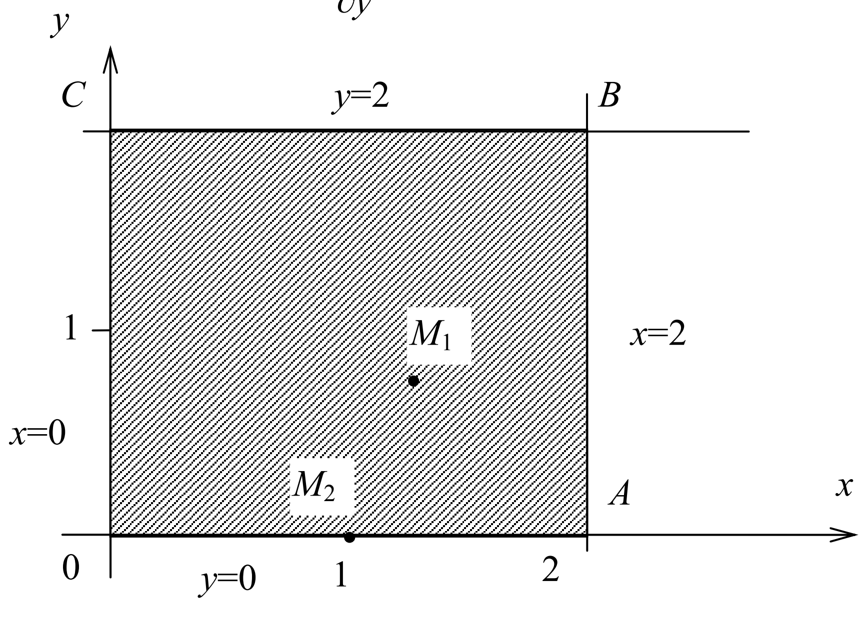


Рис.11

Приравнивая производные к нулю, получим систему

$$\begin{cases} x-y=1 \\ 2x=5y; \end{cases}$$

$$\begin{cases} y=x-1, & x-\dfrac{2}{5}x-1=0 \\ y=\dfrac{2}{5}x, & \dfrac{3}{5}x=1 \Rightarrow x=\dfrac{5}{3};\;\; y=\dfrac{5}{3}-1=\dfrac{2}{3}. \end{cases}$$

Как видим, стационарная точка $M_1\,(\frac{5}{3};\frac{2}{3})$ лежит внутри квадрата. Подсчитаем значение функции в этой точке:

$$z(M_1)=\left(\frac{5}{3}\right)^2-2\cdot\frac{5}{3}\cdot\frac{2}{3}+\frac{5}{2}\left(\frac{2}{3}\right)^2-2\cdot\frac{5}{2}=$$

$$=\frac{25}{9}-\frac{20}{9}+\frac{10}{9}-\frac{10}{3}=\frac{5}{9}-\frac{20}{9}=-\frac{15}{9}.$$

Затем найдем наибольшее и наименьшее значения функции на сторонах квадрата:

1) сторона OA: $y = 0;\; 0 \le x \le 2$

$$z=z(x)=x^2-2x.$$

На концах интервала $z\big|_O=z(0)=0;\;\; z\big|_A=z(2)=0.$ Стационарные точки найдем из уравнения $z'(x)=0$:

$$z'(x)=2x-2=0;\;\; x=1;\;\; M_2(1;0).$$

Подсчитаем значение функции в этой точке:

$$z\big|_{M_2}=z(1)=1-2=-1.$$

2) Сторона AB: $x = 2;\; 0 \le y \le 2.$;

$$z=z(y)=4-4y+\frac{5}{2}y^2-4=\frac{5}{2}y^2-4y.$$

На концах интервала $z\big|_B=z(2)=\frac{5}{2}\cdot 4-8=2.$

Найдем стационарные точки:

$$z'(y)=5y-4=0;\;\; y=\frac{4}{5};\;\; M_3\left(2;\,\frac{4}{5}\right).$$

Подсчитаем значение функции в точке M_3:

$$z\Big|_{M_3} = \frac{5}{2}\left(\frac{4}{5}\right)^2 - 4\cdot\frac{4}{5} = \frac{8}{5} - \frac{16}{5} = -\frac{8}{5}.$$

3) Сторона BC: $y = 2$; $0 \le x \le 2$;

$$z = z(x) = x^2 - 6x + 10.$$

На концах интервала

$$z\big|_C = z(0) = 10.$$

Найдем стационарные точки:

$$z' = z'(x) = 2x - 6;\ \ x = 3 \notin [0,2]$$

4) Сторона OC: $x = 0$; $0 \le y \le 2$;

$$z = z(y) = \frac{5}{2}y^2.$$

Найдем стационарные точки:

$$z'(y) = 5y = 0;\ \ y = 0.$$

Получили граничную точку.

Из всех найденных значений функции z выбираем наибольшее и наименьшее значения:

$z_{\max} = 10$ в точке $C(0; 2)$;

$z_{\min} = -\frac{15}{9}$ в точке $M1\left(\frac{5}{3};\frac{2}{3}\right)$.

Задание 16. Найти уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности $2x^2 - y^2 + 2z^2 + xy + xz = 3$ в точке $M_0(1;2;1)$.

Решение

Найдем частные производные:

$$F'_x = 4x + y + z\,;$$

$$F'_y = -2y + x;$$

$$F'_z = 4z + x;$$

вычислим их в точке M_0:

$$F'_x\big|_{M_0} = 4\cdot 1 + 2 + 1 = 7\,;$$

$$F'_y\Big|_{M_0} = -2\cdot 2 + 1 = -3;$$

$$F'_z\Big|_{M_0} = 4\cdot 1 + 1 = 5.$$

Подставим в уравнение касательной плоскости:

$$F'_x\Big|_{M_0}\left(x - x_0\right) + F'_y\Big|_{M_0}\left(y - y_0\right) + F'_z\Big|_{M_0}\left(z - z_0\right) = 0;$$

$$7\left(x-1\right) - 3\left(y-2\right) + 5\left(z-1\right) = 0,$$

$$7x - 3y + 5z - 6 = 0$$

и в уравнение нормали:

$$\frac{x - x_0}{F'_x\Big|_{M_0}} = \frac{y - y_0}{F'_y\Big|_{M_0}} = \frac{z - z_0}{F'_z\Big|_{M_0}},$$

$$\frac{x-1}{7} = \frac{y-2}{-3} = \frac{z-1}{5}.$$

Задание 17. Найти формулу вида $y = ax + b$ методом наименьших квадратов по данным таблицы:

x	1	2	3	4	5
y	5,9	6,9	5,4	3,4	3,9

Решение

Найдем коэффициенты a и b путем минимизации суммы

$$S\left(a,b\right) = \sum_{i=1}^{\infty}\left(y_i - \left(ax_i + b\right)\right)^2.$$

По данным таблицы составим систему двух линейных уравнений

$$\begin{cases} \sum\limits_{i=1}^{\infty} y_i x_i - a\sum\limits_{i=1}^{\infty} x_i^{\ 2} - b\sum\limits_{i=1}^{\infty} x_i = 0 \\ \sum\limits_{i=1}^{\infty} y_i - a\sum\limits_{i=1}^{\infty} x_i - bn = 0, \end{cases}$$

решив которую найдем параметры a и b.

Предварительно вычислим суммы:

$$\sum_{i=1}^{5} x_i y_i = 5{,}9 + 13{,}8 + 16{,}2 + 13{,}6 + 19{,}5 = 69;$$

$$\sum_{i=1}^{5} x_i^{\ 2} = 1 + 4 + 9 + 16 + 25 = 55;$$

$$\sum_{i=1}^{5} x_i = 1+2+3+4+5 = 15;$$

$$\sum_{i=1}^{5} y_i = 5,9+6,9+5,4+3,4+3,9 = 25,5.$$

Составим систему уравнений:

$$\begin{cases} 55a+15b = 69 \\ 3a+b = 5,1 \Rightarrow b = 5,1-3a, \end{cases}$$

$$55a+76,5-45a = 69,$$

$$10a = -7,5 \Rightarrow a = -0,75,$$

$$b = 5,1+2,25 = 7,35;$$

Искомая формула имеет вид:

$$y = -0,75x+7,35$$

График искомой зависимости приводится на рис.12.

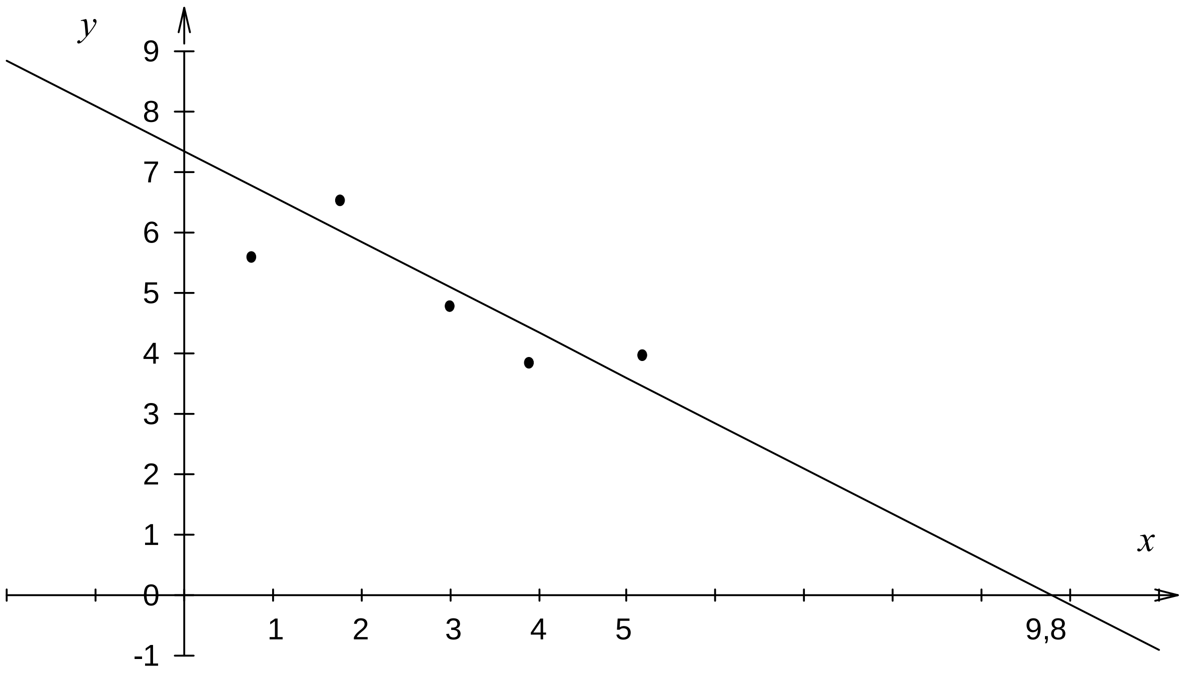


Рис.12

Элементы теории функций комплексного переменного. Неопределенный и определенный интеграл. Кратные и криволинейные интегралы

Задание 1. Дано комплексное число $z = \dfrac{16}{1+i\sqrt{3}}$.

Записать число в алгебраической, тригонометрической и показательной формах.

Решение. Запишем число z в алгебраической форме:

$$z = \frac{16}{1+i\sqrt{3}} = \frac{16\left(1-i\sqrt{3}\right)}{\left(1+i\sqrt{3}\right)\left(1-i\sqrt{3}\right)} = \frac{16\left(1-i\sqrt{3}\right)}{1+3} = 4\left(1-i\sqrt{3}\right) = 4-4\sqrt{3}i.$$

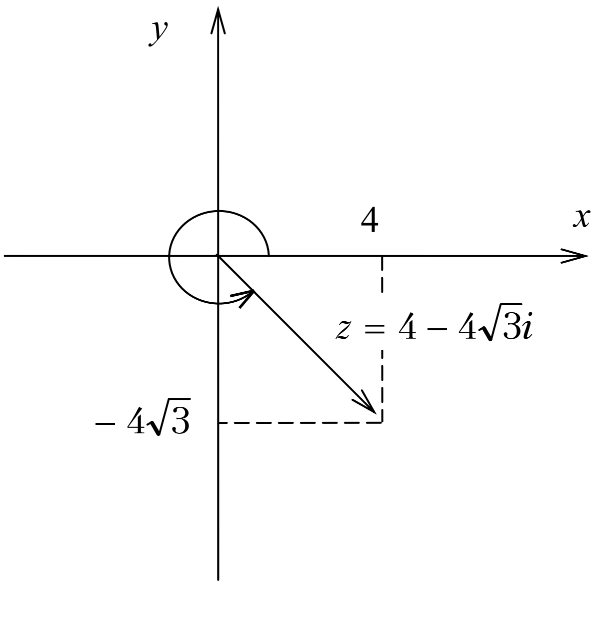
В тригонометрической форме

$$z = r\left(\cos\varphi + i\sin\varphi\right),$$

где $r = \sqrt{x^2+y^2}$, $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$; r – модуль комплексного числа. При этом $\operatorname{tg}\varphi = \dfrac{y}{x}$ – главные значения $\left(0 \le \varphi < 2\pi\right)$ аргумента комплексного числа. В данном случае $x = 4$, $y = -4\sqrt{3}$;

$$r = \sqrt{16+16\cdot 3} = \sqrt{64} = 8.$$

$$\operatorname{tg}\varphi = -\sqrt{3};\ \varphi = 2\pi - \frac{\pi}{3} = \frac{5\pi}{3}.$$



Тригонометрическая форма числа будет

$$z = 8\cdot\left(\cos\frac{5\pi}{3} + i\sin\frac{5\pi}{3}\right).$$

Показательная форма комплексного числа

$$z = r\cdot e^{i\varphi} = 8e^{\frac{5\pi}{3}i}.$$

Задание 2. Для комплексного числа $z=-5+2i$ записать $\overline{z}$.

Решение. Если комплексное число имеет вид $z=x+iy$, то сопряженное ему комплексное число $\overline{z}$ имеет вид: $\overline{z}=x-iy$. Значит $\overline{z}=-5-2i$.

Задание 3. Найти значение функции $f(z)=3z^2$ в точке $z_0=2+3i$.

Решение. Подставим в функцию $f(z)=3z^2$ вместо переменной z число $z_0=2+3i$. Тогда

$$f(z_0)=3\cdot(2+3i)^2=3\cdot\left(4+12i+9i^2\right)=3\cdot(4+12i-9)=3\cdot(-5+12i)=-15+36i.$$

Задание 4. Найти значение производной функции $f(z)=2-z^3$ в точке $z_0=i$.

Решение. Найдем производную от данной функции: $f'(z)=-3z^2$;

значение производной в точке $z_0=i$

$$f'(i)=-3i^2=3.$$

Задание 5. Найти неопределенные интегралы.

а) $\int\frac{x+9}{4x^2+13}dx.$

Решение. Разбив данный интеграл на два, получим интегралы, сводящиеся к табличным интегралам вида:

$$\int\frac{du}{u}=\ln|u|+c \quad \text{и} \quad \int\frac{du}{u^2+a^2}=\frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{u}{a}+c,$$

$$\int\frac{x+9}{4x^2+13}dx=\int\frac{xdx}{4x^2+13}+9\int\frac{dx}{4x^2+13}=$$

$$=\frac{1}{8}\int\frac{8xdx}{4x^2+Б13}+9\int\frac{dx}{(2x)^2+\left(\sqrt{13}\right)^2}=\frac{1}{8}\ln\left(4x^2+13\right)+$$

$$+\frac{9}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{13}}\operatorname{arctg}\frac{2x}{\sqrt{1Б3}}+c.$$

б) $\int(2x+3)\cdot\cos\frac{3x}{2}\cdot dx.$

Решение. Используем формулу интегрирования по частям:

$$\int u\cdot dv=uv-\int v\cdot du.$$

$$\int(2x+3)\cdot\cos\frac{3x}{2}\cdot dx=\left|\begin{matrix}u=2x+3 \\ dv=\cos\frac{3x}{2}\cdot dx\end{matrix}\right|\left.\begin{matrix}du=2dx \\ v=\frac{2}{3}\sin\frac{3x}{2}\end{matrix}\right|=$$

$$=\frac{2}{3}(2x+3)\cdot\sin\frac{3x}{2}-\frac{4}{3}\int\sin\frac{3x}{2}\cdot dx=\frac{2}{3}(2x+3)\cdot\sin\frac{3x}{2}+\frac{8}{9}\cos\frac{3x}{2}+c.$$

в) $\displaystyle\int\frac{3x^3+x^2+5x+1}{x^3+x}dx=J.$

Решение. Поделив числитель на знаменатель, представим неправильную дробь в виде суммы целой и дробной частей:

$$\frac{3x^3+x^2+5x+1}{x^3+x}=3+\frac{x^2+2x+1}{x^3+x}.$$

Разложим правильную дробь на простейшие:

$$\frac{x^2+2x+1}{x\left(x^2+1\right)}=\frac{A}{x}+\frac{Bx+C}{x^2+1}=\frac{Ax^2+A+Bx^2+Cx}{x\left(x^2+1\right)}.$$

Приравняв числители, найдем A,B,C из условия равенства многочленов:

$$(A+B)x^2+Cx+A=x^2+2x+1.$$

$$\begin{cases}A+B=1 \\ C\quad\;\;=2 \\ A\quad\;\;=1\end{cases}$$

Решив систему, имеем $A = 1$, $B = 0$, $C = 2$.
Тогда

$$J=\int\left(3+\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2+1}\right)dx=3x+\ln\big(x\big(+2\operatorname{arctg}x+C.$$

г) $\displaystyle\int\frac{dx}{3\sin x+\cos x+2}=J.$

Решение. Применив универсальную тригонометрическую подстановку $\operatorname{tg}\frac{x}{2}=t$ и заменив $\sin x=\frac{2t}{1+t^2}$, $\cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2}$, $dx=\frac{2dt}{1+t^2}$, получим:

$$J=\int\frac{2dt}{\left(1+t^2\right)\left(\frac{6t}{1+t^2}+\frac{1-t^2}{1+t^2}+2\right)}=\int\frac{2dt}{t^2+6t+3}=$$

$$=2\int\frac{dt}{(t+3)^2-6}=2\int\frac{d(t+3)}{(t+3)^2-\left(\sqrt{6}\right)^2}=$$

$$=2\frac{1}{2\sqrt{6}}\ln\left|\frac{t+3-\sqrt{6}}{t=3+\sqrt{6}}\right|+c=\frac{1}{\sqrt{6}}\ln\left|\frac{\operatorname{tg}\frac{x}{2}+3-\sqrt{6}}{\operatorname{tg}\frac{x}{2}+\sqrt{6}+3}\right|+C.$$

Задание 6. Вычислить определенный интеграл

$$\int_4^9\frac{\sqrt{x}\cdot dx}{\sqrt{x}-1}.$$

Решение. Сделав замену $x=t^2$ и найдя новые пределы интегрирования, получим: $dx=2tdt,\ t^2=4,\ t=2,\ t^2=9,\ t=3$

$$\int_4^9\frac{\sqrt{x}\cdot dx}{\sqrt{x}-1}=\int_2^3\frac{t\cdot 2tdt}{t-1}=2\int_2^3\frac{\left(t^2-1\right)+1}{t-1}=$$

$$=2\int_2^3\left(t+1+\frac{1}{t-1}\right)dt=2\left(\frac{t^2}{2}+t+\ln|t-1|\right)\Bigg|_2^3=$$

$$=2\left(\frac{9}{2}+3+\ln 2-2-2-\ln 1\right)=9-2+2\ln 2=7+2\ln 2.$$

Задание 7. Вычислить интеграл $\int_0^1 e^{x^2}dx$ по формуле Симпсона, разбив интервал интегрирования на 10 частей. Все вычисления производить с округлением до третьего десятичного знака.

Решение. Для вычисления данного интеграла по формуле Симпсона

$$\int_a^b f(x)dx\approx\frac{b-a}{6n}\left(y_0+y_{2n}+2\left(y_2+y_4+\ldots+y_{2n-2}\right)+\right.$$

$$\left.+4\left(y_1+y_3+\ldots+y_{2n-1}\right)\right),$$

где $a=0,\ b=1,\quad 2n=10,\ n=5,\ y=e^{x^2}$, введем обозначения:

$$y_0+y_{2n}=\Sigma_1,\ y_2+y_4+\ldots+y_{2n-2}=\Sigma_2,\ y_1+y_3+\ldots+y_{2n-1}=\Sigma_3.$$

Составим таблицу значений подынтегральной функции, записывая ординаты с четными и нечетными номерами в разные столбцы. В последней строке запишем результаты суммирования по этим столбцам.

i	x_i	$y_i = e^{xi^2}$		
		при i=0, i=10	при четном i	при нечетном i
0	0	1		
1	0,1			1,010
2	0,2		1,041	
3	0,3			1,094
4	0,4		1,174	
5	0,5			1,284
6	0,6		1,433	
7	0,7			1,632
8	0,8		1,896	
9	0,9			2,248
10	1	2,718		
		Σ_1=3,718	Σ_2=5,544	Σ_3=7,268

Подставив полученные результаты в формулу Симпсона, получим:

$$\int_0^1 e^{x^2} \cdot dx \approx \frac{1}{30}(3,718 + 2\cdot 5,544 + 4\cdot 7,268) = 1,463.$$

Задание 8. Вычислить несобственные интегралы или установить их расходимость.

а) $\int\limits_{-\infty}^{0} \frac{dx}{9x^2+6x+2}$.

Решение.

$$\int\limits_{-\infty}^{0} \frac{dx}{9x^2+6x+2} = \lim_{a\to-\infty}\int\limits_a^0 \frac{dx}{(3x+1)^2+1} = \frac{1}{3}\lim_{a\to-\infty}\int\limits_a^0 \frac{d(3x+1)}{(3x+1)^2+1} =$$

$$= \frac{1}{3}\lim \operatorname{arctg}(3x+1)\Big(_a^0 = \frac{1}{3}\lim_{a\to-\infty}\left(\operatorname{arctg}1\text{-}\operatorname{arctg}(3a+1)\right) =$$

$$= \frac{1}{3}\left(\frac{\pi}{4} - \left(-\frac{\pi}{2}\right)\right) = \frac{1}{3}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{3}\cdot\frac{3\pi}{4} = \frac{\pi}{4}.$$

Предел существует, значит, несобственный интеграл сходится.

б) $\int\limits_2^5 \frac{dx}{(x-2)^3}$

Решение. Подынтегральная функция $f(x)=\dfrac{1}{(x-2)^3}$ имеет разрыв при $x = 2$, поэтому

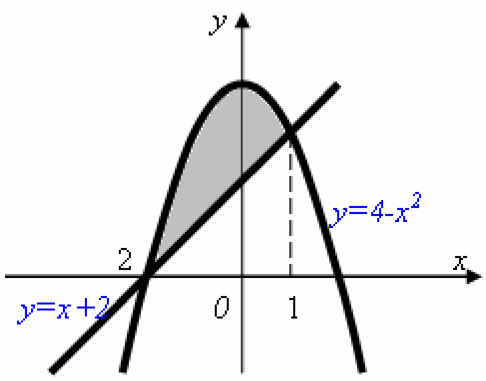
$$\int_2^5 \frac{dx}{(x-2)^3} = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{2+\varepsilon}^5 \frac{dx}{(x-2)^3} =$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{-1}{2(x-2)^2}\Bigg|_{2+\varepsilon}^5 = -\frac{1}{2}\lim_{\varepsilon\to 0}\left(\frac{1}{9}-\frac{1}{\varepsilon^2}\right)=\infty.$$

Предел бесконечен, несобственный интеграл расходится.

Задание 9. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями $y=4-x^2$, $y=x+2$.

Решение. Изобразим графики указанных кривых на координатной плоскости:



Фигура, площадь которой необходимо найти, заключена между кривыми $y=4-x^2$, $y=x+2$. Абсциссы точек пересечения этих кривых равны -2 и 1.

Площадь криволинейной трапеции найдем с помощью интеграла $S=\int_a^b\left(f_1(x)-f_2(x)\right)dx$. Получим, что площадь данной области равна:

$$S=\int_{-2}^{1}\left(\left(4-x^2\right)-(x+2)\right)dx=\int_{-2}^{1}\left(4-x^2-x-2\right)dx=\int_{-2}^{1}\left(2-x^2-x\right)dx=$$

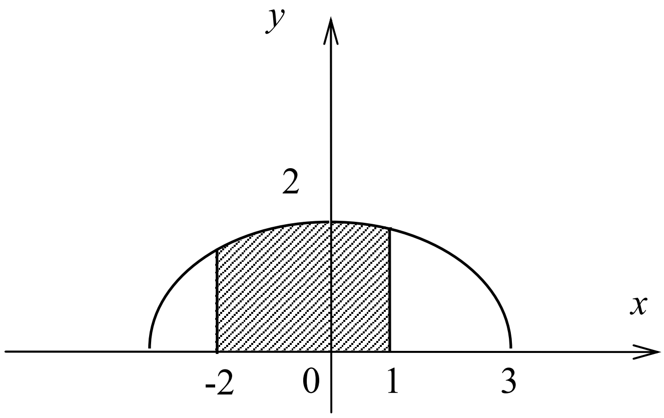
$$=\left(2x-\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}\right)\Bigg|_{-2}^{1}=2-\frac{1}{3}-\frac{1}{2}+4-\frac{8}{3}+2=4{,}5 \text{ кв.ед.}$$

Задание 10. Вычислить объем тела, образованного вращением вокруг оси OX фигуры, ограниченной линиями: $y = 2\sqrt{1-\frac{x^2}{9}}$, $x = -2$, $x = 1$, $y = 0$.

Построим фигуру, ограниченную указанными линиями.

Преобразуем первое из этих уравнений:

$$y^2 = 4\left(1-\frac{x^2}{9}\right),\ \frac{y^2}{4} = 1-\frac{x^2}{9},\ \frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4} = 1.$$



Первое уравнение определяет верхнюю половину эллипса с полуосями $a = 3$, $b = 2$.

Воспользуемся формулой

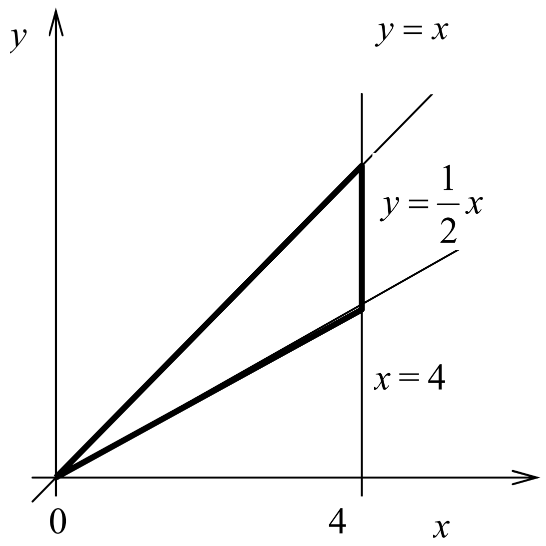
$$V_x = \pi\int_a^b y^2 dx.$$

$$V_x = \pi\int_{-2}^{1} 4\left(1-\frac{x^2}{9}\right)dx = 4\pi\left(x-\frac{x^3}{27}\right)\Bigg|_{-2}^{1} = 4\pi\left(1-\frac{1}{27}+2-\frac{8}{27}\right) =$$

$$4\pi\left(3-\frac{9}{27}\right) = \frac{32\pi}{3} \text{ куб.ед.}$$

Задание 11. Вычислить двойной интеграл $\iint\limits_D \left(x^3+y^3\right)dxdy$, если область D ограничена линиями $y = \frac{1}{2}x,\ y = x,\quad x = 4$.

Решение. Построим заданную область D.



Контур этой области пересекается всякой прямой, параллельно оси Oy в двух точках. Внутреннее интегрирование производится по переменной y, а внешнее – по x:

$$\iint\limits_D \left(x^3 + y^3\right) dxdy = \int\limits_0^4 dx \int\limits_{\frac{1}{2}x}^{x} \left(x^3 + y^3\right) dy .$$

Вычисления следует начинать с внутреннего интеграла $\int\limits_{\frac{1}{2}x}^{x} \left(x^3 + y^3\right) dy$, в котором величина x должна рассматриваться как постоянная.

$$\int\limits_{\frac{1}{2}x}^{x} \left(x^3 + y^3\right) dy = (x^3 y + \frac{y^4}{4})\Big|_{\frac{1}{2}x}^{x} = x^2\left(x - \frac{1}{2}x\right) + \frac{1}{4}\left(x^4 - \frac{1}{16}x^4\right) = \frac{47}{64}x^4 .$$

Далее вычислим внешний интеграл

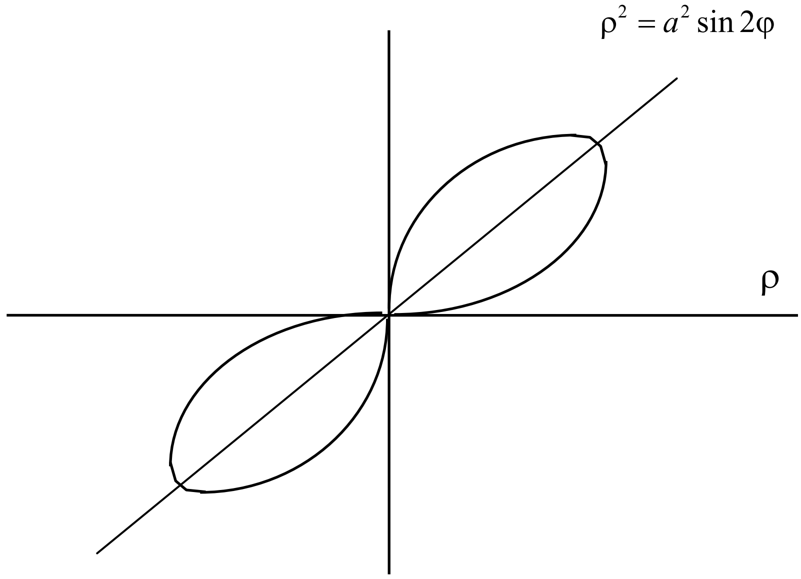
$$\int\limits_0^4 \frac{47}{64}x^4 dx = \frac{47}{64}\cdot\frac{x^5}{5}\Big|_0^4 = \frac{47}{64}\cdot\frac{4^5}{5} = \frac{752}{5} .$$

Задание 12. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линией $\rho^2 = a^2 \sin 2\varphi$.

Решение. Построив кривую и замечая, что она симметрична относительно полюса и что при изменении φ от 0 до $\dfrac{\pi}{2}$ текущая точка (φ, ρ) отсечет половину кривой, расположенную выше полярной оси, будем иметь:

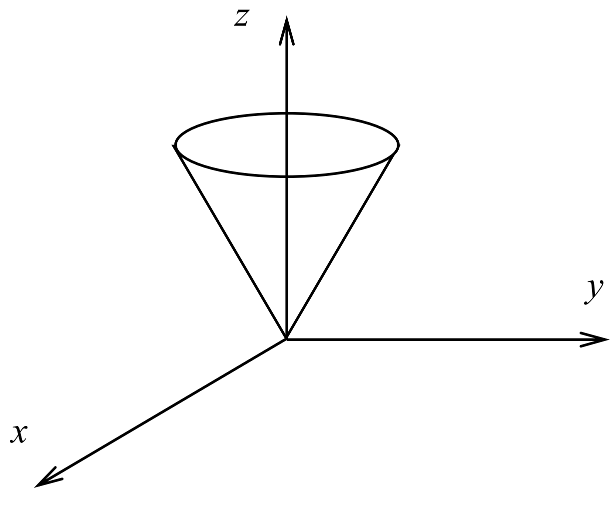
$$S = \iint_D \rho d\rho d\varphi = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{a\sqrt{\sin 2\varphi}} \rho d\rho = a^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2\varphi d\varphi =$$

$$= -\frac{a^2}{2}\cos 2\varphi \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = a^2.$$



Задание 13. Найти массу тела, ограниченного поверхностями $z = 0$, $x^2 + y^2 = R^2$, $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, если плотность тела равна $\delta = \sqrt{x^2 + y^2}$.

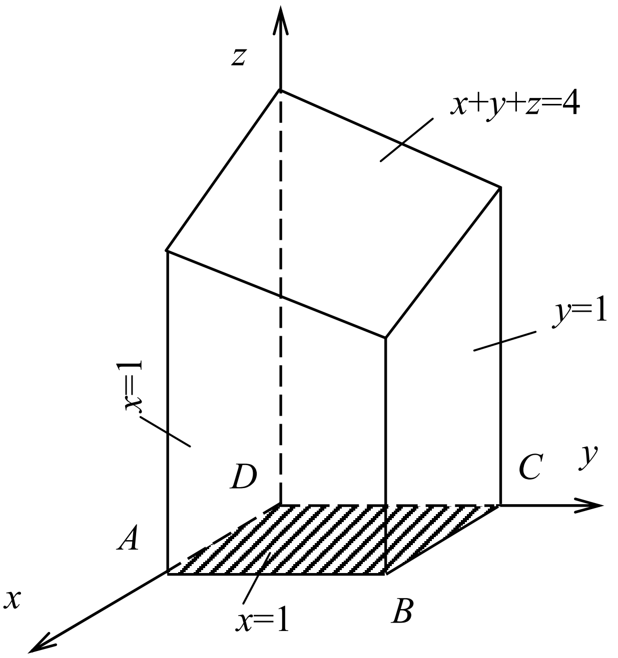
Решение.



$$m=\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^R\rho d\rho\int_0^{\rho}\delta dz=\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^R\rho d\rho\int_0^{\rho}\rho dz=\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^R\rho^3 d\rho=\frac{R^4}{4}\int_0^{2\pi}d\varphi=$$

$$=\frac{R^4}{4}\cdot 2\pi=\frac{\pi R^4}{2}.$$

Задание 14. Найти центр тяжести однородной усеченной призмы, ограниченной координатными плоскостями и плоскостями $x+y+z=4$, $x=1,\quad y=1$.



Построив данные плоскости, замечаем, что ограниченная ими усеченная призма симметрична относительно плоскости $x=y$. Вследствие этого $x_c=y_c$.

Для однородного вертикального цилиндрического тела (с образующей, параллельной оси OZ), имеющего своим основанием область D на плоскости XOY и ограниченного поверхностью $z=f(x,y)$, координаты центра тяжести выражаются формулами:

$$x_c=\frac{\iint\limits_D xzdxdy}{\iint\limits_D xdxdy}=\frac{M_{yz}}{m};\quad y_c=\frac{\iint\limits_D yzdxdy}{\iint\limits_D zdxdy}=\frac{M_{xz}}{m};\quad z_c=\frac{\iint\limits_D z^2dxdy}{\iint\limits_D xdxdy}=\frac{M_{xy}}{m}.$$

$$M_{yz}=\iint\limits_D xzdxdy=\iint\limits_{OABC}x(4-x-y)dxdy=-\int_0^1 xdx\int_0^1(4-x-y)d(4-x-y)=$$

$$= -\int_0^1 \frac{(4-x-y)^2}{2}\Big|_0^1 x dx = \frac{1}{2}\int_1^0 \left(2x^3 - 7x\right)dx = \frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}x^3 - \frac{7}{2}x^2\right)\Big| \; = \frac{17}{12}.$$

$$M_{xy} = \iint_D z^2 dxdy = \iint_{OABC} (4-x-y)^2 dxdy = -\int_0^1 dx \int_0^1 (4-x-y)^2 d(4-x-y) =$$

$$= -\int_0^1 \frac{(4-x-y)^3}{3}\Big| dx = \frac{1}{3}\int_1^0 \left((3-x)^3 - (4-x)^3\right)dx =$$

$$= \frac{1}{3}\left(\frac{(x-3)^4}{4} - \frac{(x-4)^4}{4}\right)\Big| = \frac{55}{6}.$$

$$m = \iint_D z dxdy \int_0^1 dx \int_0^1 (4-x-y)dy = -\frac{1}{2}\int_0^1 (4-x-y)^2 \Big| dx =$$

$$= -\frac{1}{2}\int_0^1 \left((3-x)^2 - (4-x)^2\right)dx = \frac{1}{2}\left(\frac{(x-3)^3}{3} - \frac{(x-4)^3}{3}\right)\Big| = 3.$$

$$x_c = y_c = \frac{M_{yz}}{m} = \frac{17}{36}, \qquad z_c = \frac{M_{xy}}{m} = \frac{55}{36}.$$

Задание 15. Вычислить $J = \int_L xydx + \left(x^2 + y\right)dy$, если линия L – дуга параболы $y = x^2$, расположенная между точками A (0, 0) и B (2, 4).

Решение. Из $y = x^2$ следует $dy = 2xdx$, $x \in [0,2]$. Откуда

$$\int_L P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \int_a^b \Big(P\big(x, f(x)\big) + Q\big(x, f(x)\big)f'(x)\Big)dx =$$

$$= \int_0^2 \left(x \cdot x^2 + \left(x^2 + x^2\right)\cdot 2x\right)dx = \int_0^2 5x^3 dx = \frac{5}{4}x^4\Big|_0^2 = 20.$$

Задание 16. Проверить, является ли заданное выражение $4x\left(x^2 - y^2\right)dx - 4y\left(x^2 - y^2\right)dy$ полным дифференциалом функции $u(x,y)$, и найти $u(x,y)$. Сделать проверку.

Решение. Имеем: $P = 4x\left(x^2 - y^2\right)$, $Q = -4y\left(x^2 - y^2\right)$.

Выполняется равенство

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} = -8xy.$$

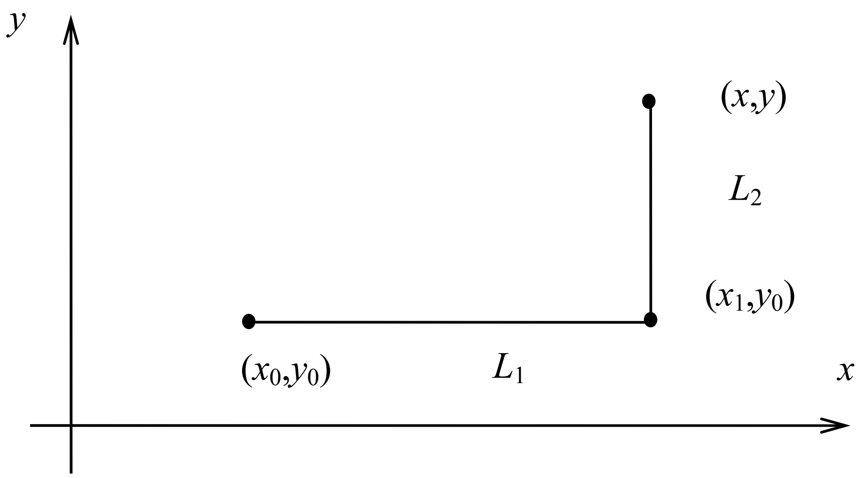
Следовательно, данное выражение действительно является полным дифференциалом некоторой функции.

Справедливо:

$$u(x,y) = L\int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} Pdx + Qdy + C = L\int_{x_0,y_0}^{x,y} 4x\left(x^2 - y^2\right)dx -$$
$$-4y\left(x^2 - y^2\right)dy + C,$$

где криволинейный интеграл в правой части равенства можно брать по любому пути L.

Выберем в качестве пути интегрирования L ломаную, состоящую из двух звеньев L_1, L_2 параллельных осям координат .



Тогда

$$u(x,y) = (L_1)\int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} 4x\left(x^2 - y\right)dx - 4y\left(x^2 - y^2\right)dy +$$
$$+(L_2)\int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} 4x\left(x^2 - y^2\right)dx - 4y\left(x^2 - y^2\right)dy.$$

Но на L_1 $y = y_0 = \text{const},\ dy = 0;$ на L_2 $x = \text{const},\ dx = 0.$

Следовательно,

$$u(x,y) = \int_{x_0}^{x} 4\left(x^2 - y_0^2\right)xdx - \int_{y_0}^{y} 4\left(x^2 - y^2\right)ydy + c.$$

Обыкновенные дифференциальные уравнения

Задание 1. Решить уравнение $\sqrt{y^2+1}\,dx = xy\,dy$.

Решение. Разделив левую и правые части уравнения на выражение $x\sqrt{y^2+1}$ (при $x \neq 0$), приходим к равенству $\frac{dx}{x} = \frac{ydy}{\sqrt{y^2+1}}$. Интегрируя, получим:

$$\int \frac{dx}{x} = \int \frac{ydy}{\sqrt{y+1}}$$

или

$$\ln|x| = \sqrt{y^2+1} + C.$$

Задание 2. Решить уравнение $y' + \frac{x^2+y^2}{xy} = 0$.

Решение. Заменив *x* на *kx*, а *y* на *ky*, заметим, что уравнение не изменилось. Это доказывает, что оно однородное.

Введя $y=ux$ ($y' = u'x + u$), получим:

$$u'x + u + \frac{x^2+u^2x^2}{xux} = 0$$

или, сокращая на x^2:

$$u'x + u + \frac{1+u^2}{u} = 0,$$

$$u'x + \frac{1+2u^2}{u} = 0,$$

$$\frac{du}{dx}x = -\frac{1+2u^2}{u}.$$

Получили уравнение с разделяющимися переменными, которое после разделения переменных запишется следующим образом:

$$-\frac{u}{1+2u^2}du = \frac{dx}{x}.$$

Интегрируя, имеем:

$$-\frac{1}{4}\ln\left(1+2u^2\right) = \ln|x| + \ln|C|$$

или

$$\frac{1}{1+2u^2}=Cx^4.$$

Заменив u на $\frac{y}{x}$, получим:

$$\frac{1}{1+\frac{2y^2}{x^2}}=Cx^4;$$

$$\frac{x^2}{x^2+2y^2}=Cx^4,$$

$$\frac{1}{x^2+2y^2}=Cx^2,$$

$$x^2\left(x^2+2y^2\right)=\frac{1}{C}$$

или $\left(C:=\frac{1}{C}\right)$

$$x^2\left(x^2+2y^2\right)=C.$$

Задание 3. Проинтегрировать уравнение $y'-\frac{2xy}{1+x^2}=4\frac{\sqrt{y}}{\sqrt{1+x^2}}\operatorname{arctg}x$.

Решение. Это уравнение Бернулли. Сделав замену $y=uv,\ y'=u'v+uv'$, получим:

$$uv'+u\left(v'-\frac{2xv}{1+x^2}\right)=4\frac{\sqrt{uv}}{\sqrt{1+x^2}}\operatorname{arctg}x.$$

Примем за v какое-либо частное решение уравнения

$$v'-\frac{2xv}{1+x^2}=0.$$

Разделяя в нем переменные, находим:

$$\frac{dv}{v}=\frac{2xdx}{1+x^2};\quad \ln v=\ln\left(1+x^2\right);\quad v=1+x^2$$

(постоянную интегрирования не вводим).

Для отыскания *u* имеем уравнение

$$u'x = 4\frac{\sqrt{uv}}{\sqrt{1+x^2}}\operatorname{arctg} x\,,$$

или (поскольку $v = 1 + x^2$)

$$u' = \frac{4\sqrt{u}\operatorname{arctg}x}{1+x^2}dx\,,$$

$$\sqrt{u} = \operatorname{arctg}^2 x + C\,.$$

Таким образом, $u = \left(\operatorname{arctg}^2 x + C\right)^2$ и $y = uv = \left(\operatorname{arctg}^2 x + C\right)^2\left(1 + x^2\right)$.

Задание 4. Решить уравнение $\left(3x^2 + 6xy^2\right)dx + \left(6x^2y + 4y^2\right)dy = 0$.

Решение. $P(x, y) = 3x^2 + 6xy^2 \quad Q(x, y) = 6x^2y + 4y^2$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = 12xy \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = 12xy\,,$$

значит, данное уравнение в полных дифференциалах, то есть

$$U(x, y) = \frac{\partial U}{\partial x}dx + \frac{\partial Q}{\partial y}dy = 0\,,$$

$$\frac{\partial U}{\partial x} = 3x^2 + 6xy^2 \qquad \text{и} \qquad \frac{\partial U}{\partial y} = 6x^2y + 4y^2\,.$$

Интегрируя $\frac{\partial U}{\partial x}$ по *x*, получим:

$$U(x, y) = \int\left(3x^2 + 6xy^2\right)dx = x^3 + 3x^2y^2 + \varphi(y)\,.$$

Продифференцируем полученное выражение по *y*:

$$\frac{\partial U}{\partial y} = 6x^2y + \varphi'(y)\,,$$

но $\frac{\partial U}{\partial y} = 6x^2y + 4y^2$, тогда $6x^2y + \varphi'(y) = 6x^2y + 4y^2$ и $\varphi'(y) = 4y^2$. Откуда $\varphi(y) = \frac{4y^3}{3} + C$, а $U(x, y) = x^3 + 3x^2 + \frac{4}{3}y^3 + C = 0$ – общий интеграл данного уравнения.

Задание 5. Проинтегрировать уравнение $ydx-\left(x^2y+x\right)dy=0$.

Решение.

$$P(x,y)=y, \qquad Q(x,y)=x^2y+x,$$

$$\frac{\partial P}{\partial y}=1, \qquad \frac{\partial Q}{\partial x}=-(1+2xy),$$

$$\frac{\partial P}{\partial y}\neq\frac{\partial Q}{\partial x},$$

то есть уравнение не является уравнением в полных дифференциалах. Найдем интегрирующий множитель. *(Интегрирующим множителем для уравнения* $P(x,y)dx+Q(x,y)dy=0$ *называется такая функция* $\mu(x,y)\neq 0$*, после умножения на которую уравнение превращается в уравнение в полных дифференциалах. Если функции* $P(x,y)$ *и* $Q(x,y)$ *в уравнении имеют непрерывные частные производные и не обращаются в нуль одновременно, то интегрирующий множитель существует*) Рассмотрим разность

$$\frac{\partial P}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial x}=2(1+xy),$$

$$Q(x,y)=x^2y+x=x(1+xy).$$

Выражение $\dfrac{\dfrac{\partial P}{\partial y}-\dfrac{\partial Q}{\partial x}}{Q(x,y)}=-\dfrac{2}{x}$ зависит только от x. Тогда

$$\mu=e^{\int\left(-\frac{2}{x}\right)dx}=e^{-2\ln|x|}=\frac{1}{x^2}.$$

Умножая обе части уравнения на $\mu=\dfrac{1}{x^2}$ $(x\neq 0)$, получим уравнение

$$\frac{y}{x^2}dx-\left(y+\frac{1}{x}\right)dy=0,$$

которое является уравнением в полных дифференциалах.

$$\frac{\partial U}{\partial x}=\frac{y}{x^2} \qquad \frac{\partial U}{\partial y}=-\left(y+\frac{1}{x}\right)$$

$$U(x,y)=-\frac{1}{x}y+\varphi(y),$$

$$\frac{\partial U}{\partial y} = -\frac{1}{x} + \varphi'(y) \quad \text{или} \quad \frac{\partial U}{\partial y} = -\frac{1}{x} - y.$$

Откуда

$$\varphi'(y) = -y,$$

$$\varphi(y) = -\frac{y^2}{2} + C,$$

$$U(x, y) = -\frac{y^2}{2} - \frac{y}{x} + C,$$

$$\frac{y^2}{2} + \frac{y}{x} = C \text{ – общий интеграл.}$$

Задание 6. Найти общее решение уравнения $y''' = \frac{1}{x}$.

Решение. Последовательно интегрируя, получим:

$$y'' = \int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C_1,$$

$$y' = \int \left(\ln|x| + C_1\right) dx = \int \ln|x| dx + C_1 \int dx = \begin{vmatrix} u = \ln|x| & du = \frac{dx}{x} \\ dv = dx & v = \int dx = x \end{vmatrix} =$$

$$= x \cdot \ln|x| - \int x \cdot \frac{dx}{x} + C_1 \int dx = x \cdot \ln|x| - x + C_1 x + C_2.$$

$$y = \int \left(x \cdot \ln|x| - x + C_1 x + C_2\right) dx = \int x \cdot \ln|x| dx + C_1 \int x dx + C_2 \int dx =$$

$$= \begin{vmatrix} u = \ln|x| & du = \frac{dx}{x} \\ dv = x dx & v = \int x dx = \frac{x^2}{2} \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{x^2}{2} \ln|x| - \frac{1}{2} \int \frac{x^2 dx}{x} + C_1 \int x dx + C_2 \int dx =$$

$$= \frac{x^2}{2} \ln|x| - \frac{x^2}{4} + C_1 \frac{x_2}{2} + C_2 x + C_3.$$

Задание 7. Найти частное решение уравнения $y'' - \frac{y'}{x-1} = x(x-1)$ при $y(2) = 1,\ y'(2) = -1$.

Решение. Введем $y' = p \Rightarrow p' - \dfrac{p}{x-1} = x(x-1)$,

$$\frac{dp}{dx} - \frac{p}{x-1} = x(x-1)$$

или

$$\frac{dp}{dx} - \frac{1}{x-1}p = x(x-1).$$

Это линейное уравнение.

Введем

$$p = uv \Rightarrow \frac{dp}{dx} = v\frac{du}{dx} + u\frac{dv}{dx} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow v\frac{du}{dx} + u\frac{dv}{dx} - \frac{1}{x-1}uv = x(x-1),$$

$$\frac{dv}{v} = \frac{dx}{x}, \quad \ln|v| = \ln|x-1|.$$

Откуда $v = x - 1$.

Исходное уравнение будет иметь вид:

$$(x-1)\frac{du}{dx} = x(x-1), x \neq 1.$$

Откуда

$$\frac{du}{dx} = x, \quad u = \frac{x^2}{2} + C_1.$$

Тогда

$$y' = p = \left(\frac{x^2}{2} + C_1\right)(x-1) = \frac{x^3}{2} - \frac{x^2}{2} + C_1x - C_1.$$

Интегрируя, получим:

$$y = \frac{x^4}{8} - \frac{x^3}{6} + \frac{C_1}{2}x^2 + C_1x + C_2.$$

Из начальных условий

$$y(2) = 1,$$
$$y'(2) = -1$$

следует

$$C_1 = -3, C_2 = \frac{1}{3}.$$

Откуда

$$y = \frac{1}{24}\left(3x^4 - 4x^3 - 36x^2 + 72x + 8\right).$$

Задание 8. Решить уравнение $y'' + 2y\left(y'\right)^3 = 0$.

Решение. Замена $y' = p\left(y\right), y'' = p\frac{dp}{dy}$ приводит к уравнению первого порядка:

$$p\frac{dp}{dy} + 2yp^3 = 0$$

или

$$\frac{dp}{p^2} = -2ydy.$$

Интегрируя, получим:

$$p = \frac{1}{y^2 + C_1},$$

то есть

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{y^2 + C_1}$$

или

$$\left(y^2 + C_1\right)dy = dx.$$

В итоге получим общий интеграл исходного уравнения:

$$\frac{y^3}{3} + C_1 y = x + C_2.$$

Задание 9. Найти общее решение уравнения: $y'' - 7y' + 6y = 0$.

Решение. Составим характеристическое уравнение $k^2 - 7k + 6y = 0$; его корни $k_1 = 6,\ k_2 = 1$. Следовательно, e^{6x} и e^x – частные линейно независимые решения, а общее решение имеет вид

$$y = C_1 e^{6x} + C_2 e^x.$$

Задание10. Найти общее решение уравнения $y'' - 4y' + 13y = 0$.

Решение. Характеристическое уравнение имеет корни $k_{1,2} = 2 \pm 3i$. Корни характеристического уравнения комплексные сопряженные, поэтому им соответствуют частные решения $e^{2x}\cos 3x$ и $e^{2x}\sin 3x$. Следовательно, общее решение имеет вид

$$y = e^{2x}\left(C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x\right).$$

Задание 11. Найти частное решение уравнения $y'' - 2y' + y = 0$ при $y(0) = 1,\ y'(0) = 0$.

Решение. Решая характеристическое уравнение $k^2 - 2k + 1 = 0$, получим $k_1 = k_2 = 1$. Общее решение имеет вид $y = \left(C_1 + C_2 x\right)e^x$. Найдем такие значения постоянных C_1 и C_2, при которых выполняются заданные начальные условия. Так как $y(0) = 1$, то $C_1 = 1$ и, поскольку $y' = y + C_2 e^x$ и $y'(0) = 0$, то $C_2 = -1$. Таким образом, окончательно получим частное решение

$$y = (1 - x)e^x.$$

Задание12. Решить уравнение $y'' + y = \dfrac{1}{\sin x} \quad (0 < x < \pi)$.

Решение. Характеристическое уравнение $k^2 + 1 = 0$ имеет корни $k_{1,2} = \pm i$. Общее решение однородного уравнения имеет вид

$$y_0 = C_1 \cos x + C_2 \sin x.$$

Будем искать частное решение неоднородного уравнения в виде

$$y = C_1(x)\cos x + C_2(x)\sin x.$$

Решая систему

$$C_1'(x)\cos x + C_2'(x)\sin x = 0$$

$$-C_1'(x)\sin x + C_2' \cos x = \frac{1}{\sin x},$$

получим:

$$C_1'(x) = \frac{dC_1(x)}{dx} = -1, \quad C_2'(x) = \frac{dC_2(x)}{dx} = \frac{\cos x}{\sin x}.$$

Интегрируя, найдем:

$$C_1(x) = -x + C_1, \qquad C_2(x) = \int \frac{\cos x}{\sin x}dx = \ln\left|\sin x\right| + C_2.$$

Общее решение будет иметь вид:

$$y=\left(-x+C_1\right)\cos x+\left(\ln\left|\sin x\right|+C_2\right)\sin x.$$

Задание 13. Найти общее решение уравнения: $y''-2y'+10y=x\cos 2x$.

Решение. Соответствующее однородное уравнение

$$y''-2y'+10y=0.$$

Его характеристическое уравнение

$$k^2-2k=10=0$$

имеет корни:

$$k_{1,2}=1\pm 3i.$$

Общее решение однородного уравнения имеет вид:

$$y_0=e^x\left(C_1\cos 3x+C_2\sin 3x\right).$$

Частное решение неоднородного уравнения будем искать в виде:

$$\overline{y}=\left(Ax+B\right)\cos 2x+\left(Cx+D\right)\sin 2x.$$

Имеем:

$$\overline{y}'=A\cos 2x-2\left(Ax+B\right)\sin 2x+C\sin 2x+2\left(Cx+D\right)\cos 2x$$

$$\overline{y}''=-4A\sin 2x-4\left(Ax+B\right)\cos 2x+4C\cos 2x-4\left(Cx+D\right)\sin 2x$$

$$-4A\sin 2x-4\left(Ax+B\right)\cos 2x+4C\cos 2x-4\left(Cx+D\right)\sin 2x-$$
$$-2A\cos 2x+4\left(Ax+B\right)\sin 2x-2C\sin 2x-4\left(Cx+D\right)\cos 2x+$$

$$+10\left(Ax+B\right)\cos 2x+10\left(Cx+D\right)\sin 2x=x\cos 2x.$$

Подставляя в исходное уравнение, получим тождество:

$$x\cos 2x\equiv$$
$$\equiv\left(6Ax-4Cx-2A+6B+4C-4D\right)\cos 2x+$$
$$+\left(4Ax-6Cx-4A+4B-2C+6D\right)\sin 2x$$

Сравнивая коэффициенты при $\cos 2x$ и $\sin 2x$ в левой и правой частях этого равенства, получим:

$$x=\left(6A-4C\right)x-2A+6D+4C-4D,$$
$$0=\left(4A+6C\right)x-4A+4B-2C+6D.$$

Сравнивая коэффициенты при одинаковых степенях переменной x в левой и правой частях равенств, получим:

$$\begin{aligned}6A-4C&=1\\4A+6C&=0\\-2A+6B+4C-4D&=0\\-4A+4B-2C+6D&=0\end{aligned}.$$

Откуда $A=\frac{3}{26};\ C=-\frac{1}{13};\ B=\frac{29}{338};\ D=-\frac{1}{169}$.

Искомое частное решение

$$\overline{y}=\left(\frac{3}{26}x+\frac{29}{338}\right)\cos 2x+\left(-\frac{1}{13}x-\frac{1}{169}\right)\sin 2x.$$

Общее решение заданного уравнения получим, складывая это частное решение с общим решением соответствующего однородного уравнения:

$$y=e^{x}\left(C_1\cos 3x+C_2\sin 3x\right)+\left(\frac{3}{26}x+\frac{29}{338}\right)\cos 2x+\left(-\frac{1}{13}x-\frac{1}{169}\right)\sin 2x.$$

Задание14. Найти частное решение дифференциального уравнения, удовлетворяющее данным начальным условиям:

$$y''-4y=8e^{2x};\ y(0)=1;\ y'(0)=-8.$$

Решение. Общее решение состоит из суммы какого-либо частного решения $\overline{y}$ данного уравнения и общего решения y_0 соответствующего однородного уравнения: $y''-4y=0$, т.е. $y=y_0+\overline{y}$

Характеристическое уравнение

$$k^2-4=0$$

имеет корни $k_{1,2}=\pm 2$.

Им соответствуют два линейно независимых решения однородного дифференциального уравнения $y_1=e^{2x}$; $y_2=e^{-2x}$. Тогда общее решение однородного уравнения имеет вид:

$$y_0=C_1e^{2x}+C_2e^{-2x}.$$

Найдем частное решение $\overline{y}$ неоднородного уравнения. Так как правая часть *ДУ* равна $f(x)=8e^{2x}$, то и $\overline{y}$ будем искать в виде

$$Ae^{\alpha x}\cdot x^{s},$$

где A – неизвестный коэффициент, который надо найти; s – число корней характеристического уравнения, совпадающих с коэффициентом α в показателе степени функции $e^{\alpha x}$, стоящей в правой части уравнения. В рассматриваемом случае $k_1 = \alpha = 2;\ \ k_2 = -2 \neq \alpha$. Число совпадений α с k_1 и k_2 равно единице: $s = 1$. Итак, окончательно:

$$\overline{y} = Ae^{2x}x\,.$$

Найдем коэффициент A.

Для этого возьмем производные

$$\begin{array}{r|l} -4 & \overline{y} = Ae^{2x} \\ 0 & \overline{y}' = 2Ae^{2x}x + Ae^{2x} \\ 1 & \overline{y}'' = 4Ae^{2x}x + 4Ae^{2x} \end{array}$$

Умножая $\overline{y}, \overline{y}', \overline{y}''$ на их коэффициенты в уравнении (т.е. соответственно на –4; 0; 1) и сложив, получим левую часть неоднородного уравнения, которая должна быть тождественно равна правой, т.е.

$$4Ae^{2x}x + 4Ae^{2x} - 4Ae^{2x}x = 8e^{2x}$$

или

$$4Ae^{2x} = 8e^{2x} \Rightarrow 4A = 8 \Rightarrow A = 2.$$

Подставив A в $\overline{y}$, получим:

$$\overline{y} = 2xe^{2x}.$$

Общее решение уравнения будет иметь вид:

$$y = C_1e^{2x} + C_2e^{-2x} + 2xe^{2x}.$$

Найдем частное решение уравнения, удовлетворяющее начальным условиям $y(0) = 1;\ y'(0) = 8$. Для этого в общее решение и в

$$y' = 2C_1e^{2x} - 2C_2e^{-2x} + 4xe^{2x} + 2e^{2x}.$$

подставим начальные условия. Получим линейную систему уравнений относительно неизвестных c_1 и c_2:

$$\begin{cases} 1 = C_1 + C_2 \\ -8 = 2C_1 - 2C_2 + 2. \end{cases}$$

Решив, найдем: $C_1 = -2;\ C_2 = 3$.

После подстановки C_1, C_2 в общее решение получим частное решение уравнения

$$y = -2e^{2x} + 3e^{-2x} + 2xe^{2x},$$

удовлетворяющее начальным условиям.

Задание 15. Решить уравнение $y'' - y = 2e^x - x^2$.

Решение. Характеристическое уравнение $k^2 - 1 = 0$ имеет корни $k_1 = 1$ и $k_2 = -1$. Тогда общее решение однородного уравнения будет иметь вид

$$y_0 = C_1 e^{-x} + C_2 e^x .$$

Частное решение неоднородного уравнения будем искать виде:

$$\overline{y} = Axe^x + Bx^2 + Cx = D,$$

$$\overline{y}' = Ae^x + Axe^x + 2Bx + C,$$

$$\overline{y}'' = 2Ae^x + Axe^x + 2B .$$

Подставляя в исходное уравнение, получим:

$$2Ae^x + Axe^x + 2B - Axe^x - Bx^2 - Cx - D = 2e^x - x^2 .$$

Приравнивая коэффициенты при подобных членах в обеих частях уравнения, получим:

$$\begin{matrix} 2A = 2 & & A = 1 \\ -B = -1 & \Rightarrow & B = 1 \\ -C = 0 & & C = 0 \\ 2B - D = 0 & & D = 2 \end{matrix}$$

$$\overline{y} = xe^x + x^2 + 2 .$$

Общее решение будет иметь вид

$$y = C_1 e^{-x} + C_2 e^x + xe^x + x^2 + 2 .$$

Задание 16. Найти общее решение системы дифференциальных уравнений

$$\frac{dx}{dt} = x + 5y,$$

$$\frac{dy}{dt} = -x - 3y.$$

Решение. Продифференцируем второе уравнение системы по t:

$$\frac{d^2 y}{dt^2} = -\frac{dx}{dt} - 3\frac{dy}{dt} .$$

Подставим $\frac{dx}{dt} = x + 5y$ (см. первое уравнение) в $\frac{d^2 y}{dt^2}$:

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + 2\frac{dy}{dt} + 2y = 0 .$$

Характеристическое уравнение имеет вид:

$$k^2+2k+2=0.$$

Корни этого уравнения $k_{1,2}=-1\pm i$ $(\alpha=-1,\beta=1)$.

Тогда

$$y=C_1e^{-t}\cos t+C_2e^{-t}\sin t.$$

Откуда

$$\frac{dy}{dt}=-C_1e^{-t}\cos t-C_1e^{-t}\sin t-C_2e^{-t}\sin t+C_2e^{-t}\cos t.$$

Выразим из второго уравнения $x=-\frac{dy}{dt}-3y$.

Откуда

$$x=e^{-t}\left[\left(C_2-2C_1\right)\cos t+\left(C_1-2C_2\right)\sin t\right].$$

Общее решение исходной системы примет вид:

$$x=e^{-t}\left[\left(C_2-2C_1\right)\cos t+\left(C_1-2C_2\right)\sin t\right],$$

$$y=C_1e^{-t}\cos t+C_2e^{-t}\sin t.$$

Числовые и степенные ряды. Ряды Фурье

Задание 1. Найти сумму ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}$.

Решение. Для нахождения суммы ряда надо найти предел при $n\to\infty$ n-й частичной суммы:

$$S_n=\frac{1}{1\cdot2}+\frac{1}{2\cdot3}+\frac{1}{3\cdot4}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}.$$

Для того чтобы придать S_n более удобный вид для перехода к пределу, воспользуемся тождеством, предварительно найдя коэффициенты A и B.

$$\frac{1}{k(k+1)}=\frac{A}{k}+\frac{B}{k+1},$$

$$1=A(k+1)+Bk\Rightarrow(A+B)k+A=1\Rightarrow$$

$$\begin{cases} A+B=0 \\ A=1 \end{cases} \Rightarrow B=-A=-1.$$

$$\frac{1}{k(k+1)}=\frac{1}{k}+\frac{1}{k+1}.$$

Полагая здесь k=1, 2, 3,…, n, получим:

$$\frac{1}{1\cdot 2}=1-\frac{1}{2},$$

$$\frac{1}{2\cdot 3}=\frac{1}{2}-\frac{1}{3},$$

$$\frac{1}{3\cdot 4}=\frac{1}{3}-\frac{1}{4},$$

$$\dots$$

$$\frac{1}{n(n+1)}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}.$$

Следовательно, $S_n=\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\dots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right).$

Очевидно, что в этой сумме все слагаемые попарно уничтожаются, кроме первого и последнего, поэтому

$$S_n=1-\frac{1}{n+1},\ \text{откуда}\ \lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)=1,$$

т.е. ряд сходится, и его сумма равна 1.

Задание 2. Исследовать сходимость числовых рядов:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n\cdot 4^n}{(2n-1)!}$.

Решение. Это числовой ряд с положительными членами. Воспользуемся признаком Даламбера. Имеем:

$$\rho=\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)\cdot 4^{n+1}\cdot(2n-1)!}{(2n+1)!\cdot n\cdot 4^n}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n}\lim_{n\to\infty}\frac{4\cdot 1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot(2n-1)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot(2n-1)\cdot 2n(2n+1)}=0.$$

Так как $\rho<1$, ряд сходится.

б) $\sum\frac{3^n n!}{n^n}$.

Решение. Используем признак Даламбера

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=l.$$

Если $l<1$ – ряд сходится, $l>1$ – ряд расходится, $l=1$ – ?

$$u_n=\frac{3^n\cdot n!}{n^n};$$

$$u_{n+1}=\frac{3^{n+1}\cdot(n+1)!}{(n+1)^{n+1}};$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{3^{n+1}\cdot(n+1)!n^n}{(n+1)^{n+1}\cdot 3^n\cdot n!}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{3(n+1)n^n}{(n+1)^{n+1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{3n^n}{(n+1)^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{3}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}=\frac{3}{e}>1,$$

а потому ряд расходится.

в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\cdot\dfrac{2n+3}{5n^2-4}.$

Решение. Это знакочередующийся ряд.

Условия теоремы Лейбница выполняются:

$$\lim_{n\to\infty}u_n=\lim_{n\to\infty}\frac{2n+3}{5n^2-4}=\lim_{n\to\infty}\frac{2+\frac{3}{n}}{5n-\frac{4}{n}}=0,$$

$$u_n-u_{n+1}=\frac{2n+3}{5n^2-4}-\frac{2(n+1)+3}{5(n+1)^2-4}=$$

$$=\frac{(2n+3)(5n^2+10n+1)+(2n+5)(5n^2-4)}{(5n^2-4)(5n^2+10n+1)}=$$

$$=\frac{10n^2+40n+23}{(5n^2-4)(5n^2+10n+1)}>0;$$

$$u_n>u_{n+1}\quad\forall\, n\in N.$$

Так что ряд сходящийся.

Рассмотрим ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ из абсолютных величин членов данного ряда и сравним его с расходящимся гармоническим рядом $\sum_{n=1}^{\infty} v_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$. Имеем $\lim_{n\to\infty} \frac{u_n}{v_n} = \frac{2}{5} \neq 0$, так что ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ расходится. Следовательно, ряд $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \left(\frac{2n+3}{5n^2-4} \right)$ сходится условно.

г) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}$.

Решение. Воспользуемся признаком Лейбница.

Члены данного знакочередующегося ряда убывают по абсолютному значению

$$1 > \left| \frac{-1}{3} \right| > \frac{1}{5} > \left| -\frac{1}{7} \right| > \ldots$$

$$\text{и} \ \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2n-1} = 0.$$

Поэтому, согласно признаку Лейбница, данный ряд сходится. Установим, сходится ли этот ряд абсолютно или неабсолютно (условно). Для этого исследуем положительный ряд $\sum \frac{1}{2n-1}$, составленный из абсолютных значений членов данного ряда.

Применяя интегральный признак

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{2x-1} dx = \frac{1}{2} \lim_{\beta\to+\infty} \int_1^{\beta} \frac{d(2x-1)}{2x-1} = \frac{1}{2} \lim_{\beta\to+\infty} \ln(2x-1)\Big|_1^{\beta} =$$

$$= \frac{1}{2} \lim_{\beta\to+\infty} \ln(2\beta-1) = +\infty,$$

заключаем, что ряд с положительными членами расходится. Следовательно, данный ряд сходится неабсолютно.

Задание 3. Найти интервал сходимости степенных рядов

$$\text{а)} \ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+9)^n}{n^2 \cdot 6^n}.$$

Решение. Воспользуемся признаком Даламбера для ряда из абсолютных величин.

Имеем:

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(x+9)^{n+1}\cdot n^2\cdot 6^n}{(n+1)^2\cdot 6^{n+1}\cdot (x+9)^n}\right| = \left|\frac{x+9}{6}\right|.$$

Ряд сходится, если $\frac{|x+9|}{6}<1$, т.е. $|x+9|<6$,

$$-6<x+9<6,\quad -15<x<-3.$$

В указанном промежутке данный ряд абсолютно сходится.

Проверим граничные точки.

1) $x = –15$: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-15+9)^n}{6^n\cdot n^2}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-6)^n}{n^2\cdot 6^n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}.$

Составив ряд из абсолютных величин членов знакочередующегося ряда, получим ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$, который сходится, как обобщенный гармонический ряд вида $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$ при $p = 2$.

Следовательно, ряд $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\cdot\frac{1}{n^2}$ абсолютно сходится.

2) $x = –3$: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{6^n}{n^2\cdot 6^n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}.$

Полученный ряд сходится.

Итак, областью сходимости ряда является [–15, –3].

б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x+8)^{3n}}{n^2}$.

Решение. Используем признак Даламбера:

$$u_n=\frac{(x+8)^{3n}}{n^2},\quad u_{n+1}=\frac{(x+8)^{3n+3}}{(n+1)^2};$$

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|<1.$$

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(x+8)^{3n+3}n^2}{(n+1)^2(x+8)^{3n}}\right| = |x+8|^3\lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{(n+1)^2}=|x+8|^3<1.$$

$$|x+8|<1\Rightarrow -1<x+8<1\Rightarrow -9<x<-7.$$

Границы найденного интервала исследуем особо.

При x=–7 получим ряд с положительными членами $\sum \frac{1}{n^2}$.

Исследуем его по интегральному признаку:

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2} = \lim_{\beta \to +\infty} \int_1^{\beta} x^{-2} = \lim_{\beta \to +\infty} \left(-\frac{1}{x} \right) \Bigg|_1^{\beta} =$$

$$= \lim_{\beta \to +\infty} \left(1 = \frac{1}{\beta} \right) = 1,$$

т.е. ряд сходится.

При x=–9 получим знакочередующийся ряд с общим членом

$$a_n = \frac{(-1)^{3n}}{n^2} = \frac{(-1)^n}{n^2},$$

который сходится согласно признаку Лейбница. Следовательно, интервалом сходимости данного ряда является отрезок $-9 \le x \le -7$.

Задание 4. Вычислить определенный интеграл $\int_0^{0,25} \sqrt[4]{1+2x^2} \cdot dx$ с точностью до 0,001, разложив подынтегральную функцию в ряд и почленно его проинтегрировав.

Решение. Подынтегральная функция может быть представлена в виде биномиального ряда

$$(1+x)^m = 1 + mx + \frac{m(m-1)}{2!}x^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{3!}x^3 + \ldots$$

При замене в нем x на $2x^2$ и $m = \frac{1}{4}$:

$$\sqrt[4]{1+2x^2} = \left(1+2x^2\right)^{\frac{1}{4}} = 1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{\frac{1}{4}\left(-\frac{3}{4}\right) \cdot 2^2}{2!}x^4 +$$

$$+ \frac{\frac{1}{4} \cdot \left(-\frac{3}{4}\right) \cdot \left(-\frac{7}{4}\right)}{3!} \cdot 2^3 \cdot x^6 + \ldots = 1 + \frac{1}{2}x^2 - \frac{3}{8}x^4 + \frac{7}{16}x^6 - \ldots .$$

Проинтегрируем этот ряд.

$$\int_0^{\frac{1}{4}}\left(1+\frac{1}{2}x^2-\frac{3}{8}x^4+\frac{7}{16}x^6-...\right)dx=$$

$$=\left(x+\frac{x^3}{6}-\frac{3x^5}{40}+\frac{7x^7}{112}-...\right)\Bigg|_0^{\frac{1}{4}}=\frac{1}{4}+\frac{1}{6\cdot 4^3}-\frac{3}{40\cdot 4^5}+\frac{1}{16\cdot 4^7}...=$$

$$=\frac{1}{4}+\frac{1}{384}-\frac{3}{40960}+\ldots$$

В соответствии с теоремой Лейбница ошибка вычисления определенного интеграла будет меньше 0,001 при отбрасывании членов полученного ряда, начиная с третьего.

Окончательно имеем:

$$\int_0^{0,25}\sqrt[4]{1+2x^2}\cdot dx\approx\frac{1}{4}+\frac{1}{384}\approx 0,2526\approx 0,253.$$

Задание 5. Найти три первых, отличных от нуля, члена разложения в степенной ряд решения $y=y(x)$ дифференциального уравнения, удовлетворяющего данному начальному условию:

$$y'=xy^2+1,\ \ y(1)=0.$$

Решение. Искомое решение запишем в виде ряда Тейлора при $x_0=1$:

$$y=y(x_0)+y'(x_0)\cdot(x-x_0)+\frac{y''(x_0)}{2!}\cdot(x-x_0)^2+\ \ldots$$

$$+\frac{y^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+\ \ldots$$

Из начального условия $y(x_0)=0.$

Найдем значения производных при $x_0=1$:

$$y'(1)=1;\quad y''=y^2+x\cdot 2y\cdot y',\quad y''(1)=0;$$

$$y'''=2y\cdot y'+2yy'+2xy'^2+2xyy''=4y\cdot y'+2xy'^2+2xyy'',$$

$$y'''=(1)=2.$$

$$y^{\mathrm{IV}}=4y'^2+4yy''+2y'^2+2x\cdot 2y'\cdot y''+2yy''+2xy'y''+2xyy''',$$

$$y^{\mathrm{IV}}(1)=6.$$

Таким образом,

$$y \approx x-1+\frac{2}{3!}(x-1)^3+\frac{6}{4!}(x-1)^4$$

или

$$y \approx x-1+\frac{1}{3}(x-1)^3+\frac{1}{4}(x-1)^4.$$

Задание 6. Разложить данную функцию $f(x)=x^2+2$ в интервале (–π; π) в ряд Фурье.

Решение. Так как функция $f(x)=x^2+2$ четная, то ряд Фурье и коэффициенты Фурье имеют вид:

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cdot\cos nx,$$

$$a_0=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)\cdot dx;\ \ a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)\cdot\cos nx\cdot dx \Rightarrow$$

$$a_0=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\left(x^2+2\right)dx=\frac{2}{\pi}\left(\frac{x^3}{3}+2x\right)\Bigg|_0^{\pi}=\frac{2}{\pi}\left(\frac{\pi^3}{3}+2\pi\right)=\frac{2}{3}\pi^2+4.$$

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\left(x^2+2\right)\cdot\cos nxdx=\left|\begin{matrix}u=x^2+2\\ dv=\cos nxdx\end{matrix}\right|\begin{matrix}du=2xdx\\ v=\frac{1}{n}\sin nx\end{matrix}\Bigg|=$$

$$=\frac{2}{\pi}\left(\frac{x^2+2}{n}\cdot\sin nx\Bigg|_0^{\pi}-\frac{2}{n}\int_0^{\pi}x\cdot\sin nxdx\right)=$$

$$=-\frac{4}{n\pi}\int_0^{\pi}x\cdot\sin nxdx=\left|\begin{matrix}u=x\\ dv=\sin nxdx\end{matrix}\right|\begin{matrix}du=dx\\ v=-\frac{1}{n}\cos nx\end{matrix}\Bigg|=$$

$$=-\frac{4}{n\pi}\left(-\frac{x}{n}\cdot\cos nx\Big|_0^{\pi}+\frac{1}{n}\int_0^{\pi}\cos nxdx\right)=$$

$$=\frac{4}{n^2\pi}\left(\pi\cdot\cos n\pi\right)-\frac{4}{n^2\pi}\cdot\frac{1}{n}\sin nx\Big|_0^{\pi}=\frac{4\cos n\pi}{n^2}.$$

Так как $\cos n\pi=(-1)^n$, получим: $a_n=(-1)^n\cdot\dfrac{4}{n^2}$.

Окончательно: $x^2+2=\frac{\pi^2}{3}+2+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\cdot\frac{4}{n^2}\cdot\cos nx.$

Задание 7. Разложить в ряд Фурье по синусам функцию $f(x)=\frac{x}{3}$, заданную в промежутке (0;π). Построить график функции и график полученного результата.

Решение. Продолжим функцию в промежуток (– π;0) нечетным образом. В этом случае: a_0=0 и a_n=0.

Тогда

$$b_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)\sin nxdx;$$

$$b_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{x}{3}\sin nxdx=\frac{2}{3\pi}\int_0^{\pi}x\sin nxdx=$$

$$\left.\begin{array}{l}u=x\\ dv=\sin xdx\end{array}\right|\begin{array}{l}du=dx\\ v=-\frac{1}{n}\cos nx\end{array}$$

$$=\frac{2}{3\pi}\left(-\frac{x}{n}\cos nx\Big|_0^{\pi}+\frac{1}{n}\int_0^{\pi}\cos nxdx\right)=$$

$$=\frac{2}{3\pi}\left(-\frac{x}{n}\cos nx\Big|_0^{\pi}+\frac{1}{n^2}\sin nx\Big|_0^{\pi}\right)=$$

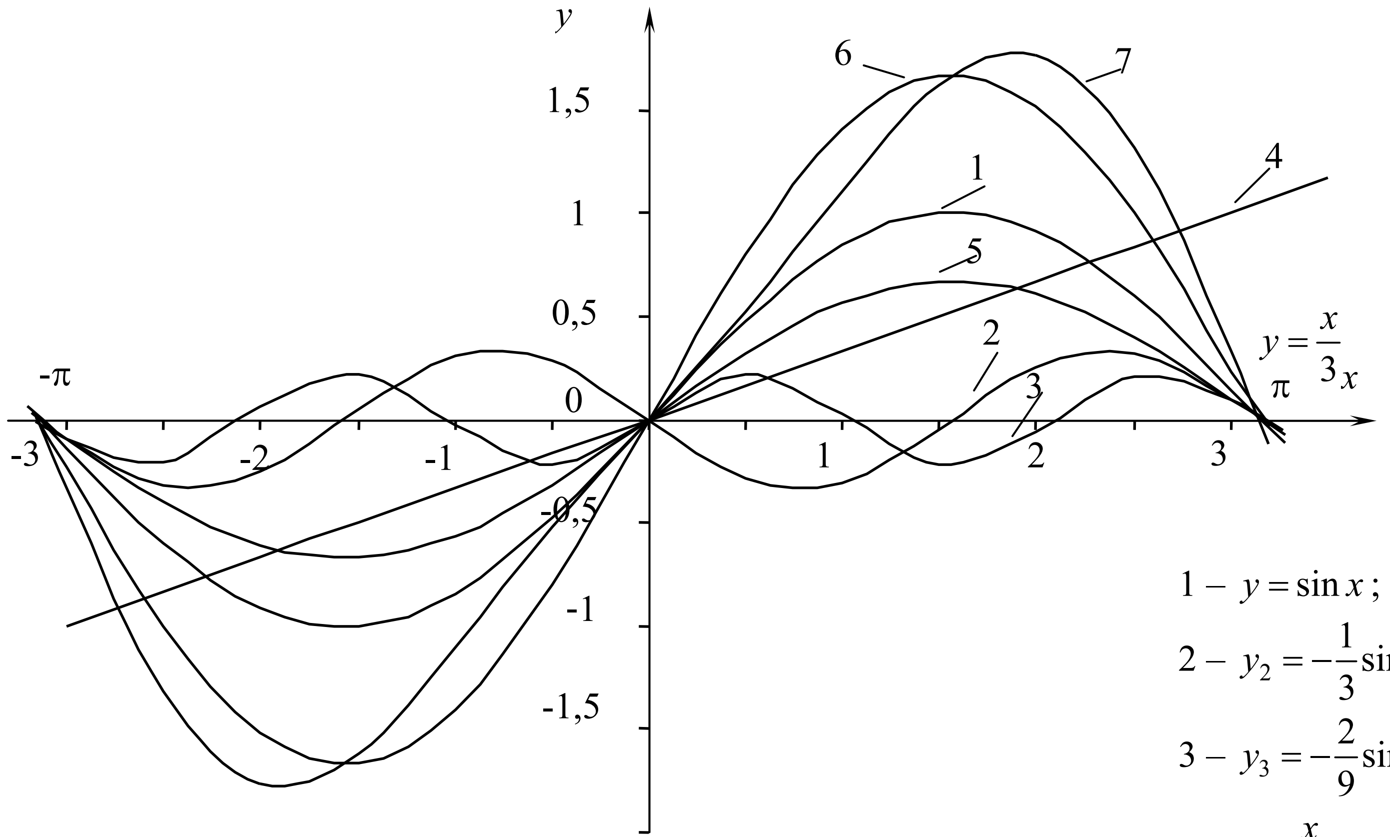
$$=\frac{2}{3\pi}\left(-\frac{\pi}{n}\cos\pi n+\frac{0}{n}\cos 0x+\frac{1}{n^2}\sin\pi n-\frac{1}{n^2}\sin 0\right)=$$

$$=\frac{2}{3\pi}\left(-\frac{\pi}{n}(-1)^n\right)=\frac{2}{3}\frac{(-1)^{n+1}}{n};$$

$$\frac{x}{3}=\frac{2}{3}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\sin nx=\frac{2}{3}\left(\sin x-\frac{1}{2}\sin 2x+\frac{1}{3}\sin 3x-\frac{1}{4}\sin 4x+\ldots\right)=$$

$$=\frac{2}{3}\sin x-\frac{1}{3}\sin 2x+\frac{2}{9}\sin 3x-\frac{1}{6}\sin 4x+\ldots$$

Построим график.



1 – $y = \sin x$;

2 – $y_2 = -\frac{1}{3}\sin 2x$;

3 – $y_3 = -\frac{2}{9}\sin 3x$;

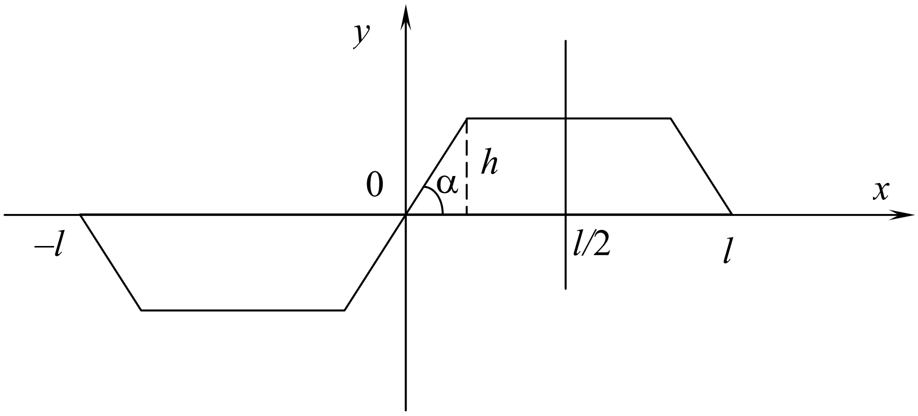
4 – $y = \frac{x}{3}$;

5 – $y_1 = -\frac{2}{3}\sin x$;

6 – $S_1 = y_1 + y_2$;

7 – $y = S_1 + y_3$

Задание 8. Разложить в ряд Фурье функцию с периодом $2l$, график которой изображен на рисунке, на интервале $(-l;l)$.



Решение. Вводя обозначение $\operatorname{tg}\alpha = k$, приходим к следующему выражению нечетной функции $f(x)$ на четверти $\left(0;\dfrac{l}{2}\right)$ интервала:

$$f(x) = \begin{cases} kx \text{ на } \left(0;\dfrac{h}{k}\right); \\ h \text{ на } \left(\dfrac{h}{k};\dfrac{l}{2}\right). \end{cases}$$

Эта нечетная функция удовлетворяет условиям теоремы о разложимости и, следовательно, разлагается в ряд Фурье. В силу нечетности функции коэффициенты $a_0=0$ и $a_n=0$.

Так как график функции $f(x)$ симметричен также относительно прямой $x = \dfrac{l}{2}$ (функция обладает «двойной симметрией»), то $b_{2m} = 0$, а

$$b_{2m+1} = \frac{4}{l}\int_0^{\frac{l}{2}} f(x)\sin\frac{\pi(2m+1)x}{l}dx =$$

$$= \frac{4}{l}\int_0^{\frac{h}{k}} kx\sin\frac{\pi(2m+1)x}{l}dx + \frac{4}{l}\int_{\frac{h}{k}}^{\frac{l}{2}} h\sin\frac{\pi(2m+1)x}{l}dx.$$

Интегрируя первое слагаемое по частям и замечая, что второй интеграл является «табличным», после упрощений получим:

$$b_{2m+1} = \frac{4kl}{\pi^2(2m+1)^2}\sin\frac{\pi(2m+1)h}{kl}.$$

Искомое разложение функции $f(x)$ в ряд Фурье будет иметь вид:

$$f(x)=\sum_{m=0}^{\infty} b_{2m+1}\sin\frac{\pi(2m+1)x}{l}=$$

$$=\frac{4kl}{\pi^2}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{(2m+1)^2}\sin\frac{(2m+1)h}{kl}\sin\frac{\pi(2m+1)x}{l}.$$

Теория вероятностей и математическая статистика

Задание 1. Расписание одного дня состоит из 5 уроков. Определить число вариантов расписания при выборе из 11 дисциплин.

Решение. Каждый вариант расписания представляет набор 5 дисциплин из 11, отличающихся от других вариантов как составом своих дисциплин, так и порядком их следования (или тем и другим), то есть является размещением из 11 элементов по 5.

$$A_{11}^5=\frac{11!}{(11\text{-}5)!}=\frac{11!}{6!}=11\cdot 10\cdot 9\cdot 8\cdot 7=55440\,.$$

Задание 2. На тренировках занимаются 12 баскетболистов. Сколько может быть образовано тренером различных стартовых пятерок?

Решение. Так как при составлении стартовой пятерки тренера интересует только состав пятерки, то достаточно определить число сочетаний

$$C_{12}^5=\frac{12!}{7!\cdot 5!}=\frac{8\cdot 9\cdot 10\cdot 11\cdot 12}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}=8\cdot 9\cdot 11=792\,.$$

Задание 3. На пяти карточках написаны буквы А, Д, Л, К, О. После тщательного перемешивания берут по одной карточке и кладут последовательно рядом. Какова вероятность того, что получится слово «лодка»?

Решение. Пусть событие А – получение слова «лодка». Различные комбинации пяти букв из пяти возможных представляют собой перестановки, так как отличаются только порядком следования букв, то есть общее число случаев $n=P_5=5!$, из которых благоприятствует событию А $m=1$ случай. Поэтому

$$P(A)=\frac{m}{n}=\frac{1}{P_5}=\frac{1}{5!}=\frac{1}{120}.$$

Задание 4. Набирая номер телефона, абонент забыл последние две цифры и, помня лишь, что эти цифры различны, набрал их наугад. Найти вероятность того, что набраны нужные цифры.

Решение. Обозначим через A событие – набраны две нужные цифры. Всего можно набрать столько различных цифр, сколько может быть составлено размещений из десяти цифр по две, то есть $A_{10}^2 = 10 \cdot 9 = 90$. Благоприятствует событию A лишь один исход. Так что $P(A) = \frac{1}{90}$.

Задание 5. Среди 17 студентов группы, из которых 8 девушек, разыгрывается 7 билетов. Какова вероятность, что среди обладающих билетами окажутся 4 девушки?

Решение. Пусть событие A – среди обладающих билетами окажутся 4 девушки. Число всевозможных способов распределения 7 билетов среди 17 студентов $n = C_{17}^7 = \frac{17!}{10! \cdot 7!}$. Число способов отбора 4 девушек из 8: $m_1 = C_8^4$; каждая такая четверка может быть в сочетании с тройкой из 9 юношей: $m_2 = C_{90}^3$. Тогда

$$P(A) = \frac{m_1 m_2}{n} = \frac{C_8^4 \cdot C_9^3}{C_{17}^7} = \frac{17! \cdot 10! \cdot 8! \cdot 9!}{17! \cdot 4! \cdot 4! \cdot 3! \cdot 6!} = \frac{735}{2431} \approx 0{,}302.$$

Задание 6. Возле остановки останавливаются автобусы маршрутов №13, №18, №25 и №27. Для студента попутными являются маршруты №25 и №27.Вычислить вероятность того, что к остановке первым подойдет автобус попутного для студента номера, если по линиям маршрутов №13, №18, №25 и №27 курсируют соответственно 10,13,15 и 12 автобусов. Протяженности маршрутов считаются одинаковыми.

Решение. Всего по указанным маршрутам курсируют

10 + 13 + 15 + 12 = 50 автобусов.

Вероятности событий A и B, состоящих соответственно в том, что к остановке подойдет автобус маршрута №25 и №27, равны:

$$P(A) = \frac{15}{50} = 0{,}3 \quad \text{и} \quad P(B) = \frac{12}{50} = 0{,}24.$$

Так как события A и B несовместные, то по теореме сложения вероятность того, что к остановке подойдет автобус маршрута №25 и №27, равна:

$$P(A+B) = P(A) + P(B) = 0{,}3 + 0{,}24 = 0{,}54.$$

Задание 7. Вероятность выхода изделия из строя при эксплуатации сроком до одного года равна 0,13, а при эксплуатации до 3 лет – 0,46. Найти вероятность выхода изделия из строя при эксплуатации сроком от 1 до 3 лет.

Решение. Пусть события A, B, C – выход из строя изделий при эксплуатации сроком соответственно до 1 года, от 1 года до 3 лет, свыше 3 лет, причем по условию $P(A) = 0{,}13$, $P(C) = 0{,}36$. Очевидно, что

$C = A + B$, где A и B – несовместные события. По теореме сложения $P(C) = P(A) + P(B)$, откуда

$$P(B) = P(C) - P(A) = 0{,}36 - 0{,}13 = 0{,}23.$$

Задание 8. Найти вероятность того, что получится слово «МАТЕМАТИКА», если на отдельных карточках написаны три буквы А, по две буквы М и Т, по одной букве И, Е, К и разложены в случайном порядке.

Решение. Пусть событие С – получение слова «МАТЕМАТИКА». Событие С наступит, если первой окажется карточка с буквой М (2 шанса из 10), вторая – с буквой А (3 шанса из оставшихся 9), третья – с буквой Т (2 шанса из оставшихся 8) и т.д. По теореме умножения

$$P(C) = P(M) \cdot P_{\text{М}}(A) \cdot P_{\text{МА}}(T) \cdot P_{\text{МАТ}}(E) \cdot P_{\text{МАТЕ}}(M) \cdots =$$

$$= \frac{2}{10} \cdot \frac{3}{9} \cdot \frac{2}{8} \cdot \frac{1}{7} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 = 6{,}6 \cdot 10^{-6}.$$

Задание 9. Вероятность установления в данной местности снежного покрова с октября равна 0,1. Определить вероятность того, что в ближайшие два года в этой местности устойчивый снежный покров с октября не установится ни разу.

Решение. Пусть A_1 – событие, состоящее в том, что в данной местности с октября установится устойчивый снежный покров в первый год, а A_2 – во второй год. По условию задачи вероятности указанных событий: $P(A_1) = 0{,}1$ и $P(A_2) = 0{,}1$.

Определим вероятности противоположных событий $\overline{A}_1$ и $\overline{A}_2$:

– вероятность того, что в первый год снежный покров с октября не установится $P(\overline{A}_1) = 1 - P(A_1) = 1 - 0{,}1 = 0{,}9$;

– вероятность того, что во второй год снежный покров с октября не установится $P(\overline{A}_2) = 1 - P(A_2) = 1 - 0{,}1 = 0{,}9$.

Пусть событие C – событие, состоящее в том, что в течение ближайших двух лет устойчивый снежный покров с октября не установится ни разу. Событию C соответствует совмещение событий $\overline{A}_1$ и $\overline{A}_2$. Поэтому,

$$P(C) = P(A_1) \cdot P(A_2) = 0{,}9 \cdot 0{,}9 = 0{,}81.$$

Задание 10. В электрическую цепь последовательно включены три элемента, работающих независимо друг от друга. Вероятности отказов этих элементов соответственно равны: 0,1; 0,15; 0,2 ($p_1 = 0{,}1$; $p_2 = 0{,}15$; $p_3 = 0{,}2$). Найти вероятность того, что тока в цепи не будет.

Решение. Так как элементы включены последовательно, то тока не будет (событие А), если откажет хотя бы один из элементов:

$$P(A) = 1 - q_1 \cdot q_2 \cdot q_3 = 1 - 0{,}9 \cdot 0{,}85 \cdot 0{,}8 = 0{,}388,$$

где $q_1 = 1 - p_1 = 1 - 0{,}1 = 0{,}9$;

$q_2 = 1 - p_2 = 1 - 0{,}15 = 0{,}85$;
$q_3 = 1 - p_3 = 1 - 0{,}2 = 0{,}8$.

Задание 11. Рабочий обслуживает три станка. Известно, что вероятность бесперебойной работы на протяжении часа после наладки равна для первого станка 0,9, для второго – 0,8 и для третьего – 0,7. Найти вероятность того, что за этот час только один станок откажет в работе и потребует вмешательства рабочего.

Решение. Пусть событие A_1 – бесперебойная работа первого станка в течение часа, A_2 – второго станка, A_3 – третьего станка. По условию задачи вероятности указанных событий равны

$$P(A_1) = p_1 = 0{,}9; \quad P(A_2) = p_2 = 0{,}8; \quad P(A_3) = p_3 = 0{,}7.$$

Установим вероятности противоположных событий $\overline{A}_1, \overline{A}_2, \overline{A}_3$:

$$P(\vec{A}_1) = q_1 = 1 - p_1 = 0{,}1; \quad q_2 = 1 - p_2 = 0{,}2; \quad q_3 = 1 - p_3 = 0{,}3.$$

Обозначим через событие B событие, состоящее в том, что за этот час только один станок откажет в работе. Событию B будет соответствовать совмещение событий $\overline{A}_1 \cdot A_2 \cdot A_3$ (отказ первого станка и бесперебойная работа второго и третьего станков) или совмещение событий $A_1 \cdot \overline{A}_2 \cdot A_3$ (отказ второго станка и бесперебойная работа первого и третьего станков) или совмещение событий $A_1 \cdot A_2 \cdot \overline{A}_3$ (отказ третьего станка и бесперебойная работа первого и второго станков). Поэтому

$$P(B) = P(\overline{A}_1 A_2 A_3) + P(A_1 \overline{A}_2 A_3) + P(A_1 A_2 \overline{A}_3) =$$
$$= q_1 p_2 p_3 + p_1 q_2 p_3 + p_1 p_2 q_3 =$$
$$= 0{,}1 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}7 + 0{,}9 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}7 + 0{,}9 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}3 = 0{,}398.$$

Задание 12. В посевах пшеницы на делянке имеется 95 % здоровых растений. Выбирают два растения. Определить вероятность того, что среди них хотя бы одно окажется здоровым.

Решение. Пусть события A – первое растение – здоровое, событие B – второе растение – здоровое, событие $A + B$ – хотя бы одно растение – здоровое. Так как события A и B совместны, то

$$P(A + B) = P(A) + P(B) - P(AB) =$$
$$= 0{,}95 + 0{,}95 - 0{,}95 \cdot 0{,}95 = 0{,}9975.$$

Задание 13. На предприятии изготавливаются изделия определенного вида на трех поточных линиях. На первой линии производится 30 % изделий от общего объема их производства, на второй – 25 %, на третьей – остальная часть продукции. Каждая из линий характеризуется соответственно следующими процентами годности производимых изделий: 97 %, 98 %, 96 %. Определить вероятность того, что наугад взятое изделие, выпущенное предприятием, окажется бракованным.

Решение. Введем обозначения: A – событие, состоящее в том, что наугад взятое изделие оказалось бракованным; H_1, H_2, H_3 – гипотезы производства изделия соответственно на первой, второй и третьей линиях.

Имеем

$$P(H_1)=0{,}30;\ P(H_2)=0{,}25;\ P(H_3)=0{,}45.$$

Найдем условные вероятности $P_{H_i}(A)$ $(i=1,2,3)$ по формуле $P_{H_i}(A)=1-P_{H_i}(\overline{A})$, где $\overline{A}$ – событие, противоположное событию A (изделие бракованное):

$$P_{H_1}(A)=1-P_{H_1}(\overline{A})=1-0{,}97=0{,}03;$$

$$P_{H_2}(A)=1-P_{H_2}(\overline{A})=1-0{,}98=0{,}02;$$

$$P_{H_3}(A)=1-P_{H_3}(\overline{A})=1-0{,}96=0{,}04.$$

По формуле полной вероятности найдем искомую вероятность

$$P(A)=P(H_1)P_{H_1}(A)+P(H_2)P_{H_2}(A)+P(H_3)P_{H_3}(A)=$$
$$=0{,}30\cdot 0{,}03+0{,}25\cdot 0{,}02+0{,}45\cdot 0{,}04=0{,}032.$$

Задание 14. На склад поступает продукция трех фабрик, причем продукция первой фабрики составляет 20 %, второй – 46 % и третьей – 34 %. Известно, что средний процент нестандартных изделий для первой фабрики равен 3 %, для второй – 2 %, для третьей – 1 %. Найти вероятность того, что наудачу взятое нестандартное изделие произведено на первой фабрике.

Решение. Обозначим через A событие, состоящее в том, что взято нестандартное изделие, через H_1, H_2, H_3 – гипотезы, состоящие в том, что взято изделие, изготовленное соответственно на первой, на второй, на третьей фабрике.

Из условия задачи следует, что

$$P(H_1)=0{,}20;\quad P(H_2)=0{,}46;\quad P(H_3)=0{,}34;$$

$$P_{H_1}(A)=0{,}03;\quad P_{H_2}(A)=0{,}02;\quad P_{H_3}(A)=0{,}01.$$

Тогда полная вероятность будет равна

$$P(A)=P(H_1)P_{H_1}(A)+P(H_2)P_{H_2}(A)+P(H_3)P_{H_3}(A)=$$

$$=0{,}20\cdot 0{,}03+0{,}46\cdot 0{,}02+0{,}34\cdot 0{,}01=0{,}0186.$$

Имеем:

$$P_A(H_1)=\frac{P(H_1)P_{H_1}(A)}{P(A)}=\frac{0,20\cdot 0.03}{0,0186}\approx 0,322.$$

Задание 15. Вероятность попадания в мишень при одном выстреле равна 0,8. Найти наиболее вероятное число попаданий в мишень при 5 выстрелах и соответствующую этому числу вероятность.

Решение. Поскольку $np+p=5\cdot 0,8+0,8=4,8$ – не целое число, то принимаем $k_0=4$. Вероятность $P_5(4)$ найдем по формуле Бернулли:

$$P_5(4)=C_5^4\cdot(0,8)^4\cdot 0,2=0,4096.$$

Задание 16. Образец радиоактивного вещества содержит $1,5\cdot 10^{20}$ ядер, вероятность распада каждого из которых в фиксированную минуту $p=10^{-20}$. Определить: 1) ожидаемое среднее число распадов в образце за одну минуту; 2) вероятность $P_n(k)$ наблюдения k распадов в минуту для $k=0,1,2,3$; 3) вероятность наблюдения 4 и более распадов одну минуту.

Решение. По условию вероятность распада ничтожно мала, а $n=1,5\cdot 10^{20}$ – велико. Воспользуемся формулой Пуассона.

Среднее число распадов равно $\lambda=np=1,5\cdot 10^{20}\cdot 10^{-20}=1,5$.

$$P_{1,5\cdot 10^{20}}(0)=e^{-1,5}\cdot 1,5^0=0,223;$$

$$P_{1,5\cdot 10^{20}}(1)=e^{-1,5}\cdot 1,5=0,335;$$

$$P_{1,5\cdot 10^{20}}(2)=e^{-1,5}\cdot\frac{1,5^2}{2!}=0,251;$$

$$P_{1,5\cdot 10^{20}}(3)=e^{-1,5}\cdot\frac{1,5^3}{3!}=0,126;$$

$$P_{1,5\cdot 10^{20}}(k\ge 4)=1-(0,223+0,335+0,251+0,126)=0,065.$$

Задание 17. Дискретная случайная величина X имеет закон распределения:

x_i	3	4	5	6	7
p_i	p_1	0,15	p_3	0,25	0,35

Найти вероятности $p_1 = P(X = 3)$ и $p_3 = P(X = 5)$, если известно, что p_3 в 4 раза больше p_1.

Решение. Из

$$p_1 + 0{,}15 + p_3 + 0{,}25 + 0{,}35 = 1$$

следует

$$p_1 + p_3 = 1 - (0{,}15 + 0{,}25 + 0{,}35) = 0{,}25.$$

С учетом $p_3 = 4p_1$ имеем:

$$p_1 + p_3 = p_1 + 4p_1 = 5p_1 = 0{,}25.$$

Откуда $p_1 = 0{,}05$; $p_3 = 4p_1 = 4 \cdot 0{,}05 = 0{,}20$.

Задание 17. Случайная величина X задана функцией распределения:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x < -1; \\ \frac{1}{3}x + \frac{1}{3} & \text{при } -1 \le x \le 2; \\ 1 & \text{при } x > 2. \end{cases}$$

Найти вероятность того, что в результате испытания X примет значение, заключенное в интервале $(0,1)$.

Решение. Из $P(x_1 \le X < x_2) = F(x_2) - F(x_1)$ найдем:

$$P(0 \le X < 1) = F(1) - F(0) = \frac{2}{3} - \frac{1}{3} = \frac{1}{3}.$$

Задание 18. Случайная величина X задана функцией распределения

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } \quad x \le 0; \\ \dfrac{1 - \cos x}{2} & \text{при } \quad 0 < x \le \pi; \\ 1 & \text{при } \quad x > \pi. \end{cases}$$

Найти плотность распределения величины X. Вычислить вероятность того, что случайная величина X примет значения из интервала $\left(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}\right)$.

Решение. Плотность вероятности $f(x)$ и функция распределения $F(x)$ случайной величины X связаны соотношением $F'(x) = f(x)$. Следовательно,

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad x \le 0; \\ \dfrac{\sin x}{2} & \text{при} \quad 0 < x \le \pi; \\ 0 & \text{при} \quad x > \pi. \end{cases}$$

Искомая вероятность:

$$P\left(\frac{\pi}{3} < x < \frac{\pi}{2}\right) = \int\limits_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x\,dx}{2} = -\frac{1}{2}\cos x \,\Big|_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} = -\frac{1}{2}\left(\cos\frac{\pi}{2} - \cos\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{4}.$$

Задание 19. Найти математическое ожидание случайной величины $Z = 7X - 2Y + 3$, если известно, что $M[X] = 3, M[Y] = 2$.

Решение. В соответствии со свойствами математического ожидания найдем

$$M[Z] = M[7X - 2Y + 3] = 7M[X] - 2M[Y] + 3 = 3\cdot 7 - 2\cdot 2 + 3 = 20.$$

Задание 20. Найти дисперсию случайной величины $Z = 3X - 2Y + 1$, если известно, что случайные величины X и Y независимы и $D[X] = 5$, $D[Y] = 4$.

Решение. Используя свойства дисперсии, получим:

$$D[Z] = 3^2 D[X] + 2^2 D[Y] + D[1] = 9\cdot 5 + 4\cdot 4 + 0 = 61.$$

Задание 21. Найти числовые характеристики $M[X]$, $D[X]$ и $\sigma[X]$ непрерывной случайной величины X, заданной плотностью распределения

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad x \le 2; \\ 0,5 & \text{при} \quad 2 < x \le 4; \\ 0 & \text{при} \quad x > 4. \end{cases}$$

Решение. Имеем:

$$M[X] = \int\limits_2^4 x \cdot 0,5\,dx = \frac{x^2}{4}\Big|_2^4 = \frac{1}{4}(16 - 4) = 3;$$

$$D[X] = \int\limits_2^4 (x-3)^2 \cdot 0,5\,dx = \frac{1}{2}\int\limits_2^4 \left(x^2 - 6x + 9\right)dx =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{x^3}{3} - 3x^2 + 9x\right)\Big|_2^4 = \frac{1}{3}$$

(или $$D[X]=\int_2^4 x^2\cdot 0{,}5\,dx-3^2=\frac{1}{2}\int_2^4 x^2\,dx-9=$$

$$=\frac{x^3}{6}\Big|_2^4-9=\frac{1}{6}(64-8)-9=\frac{1}{3});$$

$$\sigma[X]=\sqrt{D[X]}=\sqrt{\frac{1}{3}}\approx 0{,}58.$$

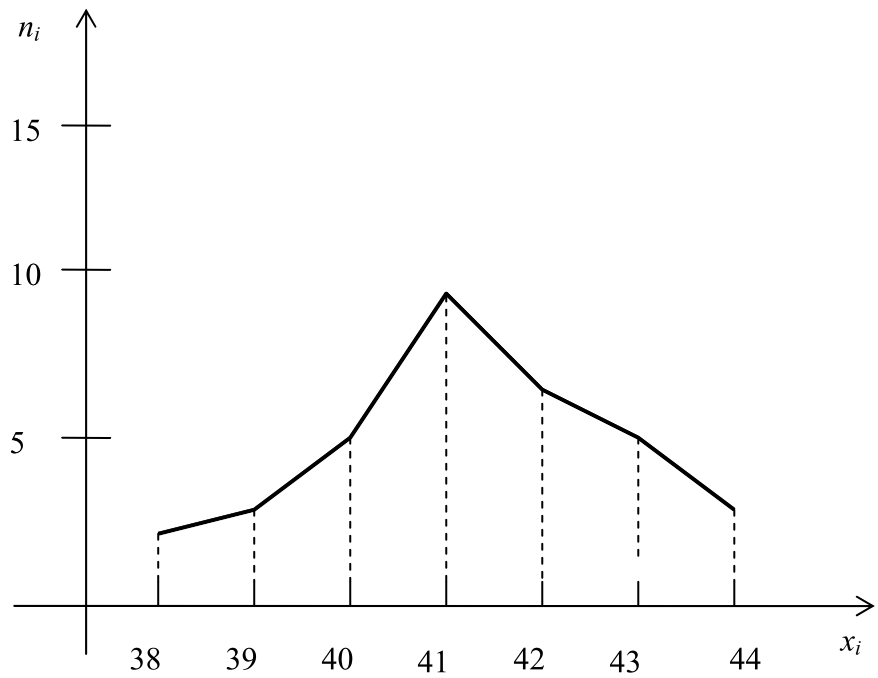
Задание 21. Составить вариационный ряд и построить полигон частот для следующих значений длины случайным образом отобранных заготовок: 39, 41, 40, 43, 41, 44, 43, 41, 41, 42, 43, 39, 40, 42, 44, 41, 42, 38, 42, 41, 41, 42, 40, 40, 43, 41, 38, 39, 41, 42.

Решение. Длина каждой из отобранных заготовок дана в виде конкретного значения, поэтому вариационный ряд будет дискретным. В первой строке таблицы расположим значения признака X (длина заготовки) в порядке возрастания, а во второй – количество заготовок данной длины (частота).

x_i	38	39	40	41	42	43	44
n_i	2	3	4	9	6	4	2

$$\sum_{i=1}^{7} n_i = 30.$$

Для построения полигона по оси OX отложим значения признака x_i, а по оси OY – частоты n_i. Полученные точки соединим отрезками прямых.



Задание 22. Записать эмпирическую функцию по данным выборки:

2 8 7 5 8 5 8 7 8 5.

Решение. Статистическое распределение имеет вид:

x_i	2	5	7	8
n_i	1	3	2	4

Объем выборки равен $n = 1 + 3 + 2 + 4 = 10$. Наименьшее наблюденное значение признака равно 2, следовательно, $F^*\left(x < 2\right) = 0$.

Значения $X < 5$, а именно $x = 2$, наблюдалось 1 раз, следовательно, $F^*\left(x < 5\right) = \frac{1}{10} = 0{,}1$.

Значения $X < 7$ наблюдалось $1 + 3 = 4$ раза, следовательно, $F^*\left(x < 7\right) = 0{,}4$.

Значения $X < 8$ наблюдалось $1 + 3 + 2 = 6$ раз, следовательно, $F^*\left(x < 8\right) = 0{,}6$.

Так как $x = 10$ – наибольшее наблюденное значение, то $F^*\left(x \geq 8\right) = 1$.

Таким образом, эмпирическая функция аналитически может быть представлена так:

$$F^*\left(x\right) = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad x < 2; \\ 0{,}1 & \text{при} \quad 2 \leq x < 5; \\ 0{,}4 & \text{при} \quad 5 \leq x < 7; \\ 0{,}6 & \text{при} \quad 7 \leq x < 8; \\ 1 & \text{при} \quad x \geq 8. \end{cases}$$

Задание 23. Найти методом произведений выборочную среднюю, дисперсию, асимметрию и эксцесс следующего статистического распределения

x_i	10,2	10,4	10,6	10,8	11,0	11,2	11,4	11,6	11,8	12,0
n_i	2	3	8	13	25	20	12	10	6	1

Решение. Составим расчетную таблицу, для чего в качестве ложного нуля выберем варианту 11,0 (она имеет наибольшую частоту); в клетке третьего столбца, которая принадлежит строке, содержащей наибольшую частоту, пишем 0; над нулем последовательно –1, –2, –3, –4, а под нулем – 1, 2, 3, 4, 5.

x_i	n_i	u_i	$u_i n_i$	$u_i^2 n_i$	$u_i^3 n_i$	$u_i^4 n_i$	$(u_i+1)^4 n_i$
10,2	2	–4	–8	32	–128	512	162
10,4	3	–3	–9	27	–81	243	48
10,6	8	–2	–16	32	–64	128	8
10,8	13	–1	–13	13	–13	13	0
11,0	25	0	0	0	0	0	25
11,2	20	1	20	20	20	20	320
11,4	12	2	24	48	96	192	972
11,6	10	3	30	90	270	810	2560
11,8	6	4	24	96	384	1536	3750
12,0	1	5	5	25	125	625	1296
$\sum$	100		57	383	609	4079	9141

Контроль:

$$\sum (u_i+1)^4 n_i = 9141;$$

$$\sum u_i^4 n_i + 4\sum u_i^3 n_i + 6\sum u_i^2 n_i + 4\sum u_i n_i + n =$$
$$= 4079 + 4\cdot 609 + 6\cdot 383 + 4\cdot 57 + 100 = 9141.$$

Совпадение сумм свидетельствует о том, что вычисления произведены правильно.

Вычислим условные начальные моменты:

$$\nu_1^* = \frac{\sum u_i n_i}{n} = \frac{57}{100} = 0,57; \qquad \nu_2^* = \frac{\sum u_i^2 n_i}{n} = \frac{383}{100} = 3,83;$$

$$\nu_3^* = \frac{\sum u_i^3 n_i}{n} = \frac{609}{100} 6,09; \qquad \nu_4^* = \frac{\sum u_i^4 n_i}{n} = \frac{4079}{100} = 40,79.$$

Шаг $h = 10,4 - 10,2 = 0,2$.

Найдем выборочную среднюю и дисперсию:

$$\overline{x}_в = \nu_1^* \cdot h + C = 0,57 \cdot 0,2 + 11 = 11,1;$$

$$D_в = \mu_2 = \left[\nu_2^* - \left(\nu_1^*\right)^2\right]\cdot h^2 = \left[3,83 - 0,57^2\right]\cdot 0,2^2 = 0,14.$$

Выборочное среднее квадратическое отклонение $\sigma_в = \sqrt{0,14}$.

Найдем центральные эмпирические моменты третьего и четвертого порядков

$$\mu_3 = \left[\nu_3^* - 3\nu_2^* M\nu_1^* + 2\left(M\nu_1^*\right)^3\right]\cdot h^3 =$$

$$=\left[6,09-3\cdot 3,83\cdot 0,57+2\cdot\left(0,57\right)^3\right]\cdot 0,2^3=-0,0007;$$

$$\mu_4=\left[\nu_4^*-4\nu_3^*\nu_1^*+6\nu_2^*\left(\nu_1^*\right)^2-3\left(\nu_1^*\right)^4\right]\cdot h^4=$$

$$=\left[40,79-4\cdot 6,09\cdot 0,57+6\cdot 3,83\cdot\left(0,57\right)^2-3\cdot\left(0,57\right)^4\right]\cdot 0,2^4=0,054.$$

Асимметрия и эксцесс равны соответственно:

$$A_s=\frac{\mu_3}{\sigma^3}=\frac{-0,0007}{\left(\sqrt{0,14}\right)^3}=-0,01;$$

$$E_s=\frac{\mu_4}{\sigma^4}-3=\frac{0,054}{0,14^2}-3=-0,24.$$

Задание 24. По результатам 10 наблюдений установлено, что средний темп роста акций предприятий отрасли равен 104,4 %. В предположении, что ошибки наблюдений распределены по нормальному закону со средним квадратическим отклонением 1 %, определить с надежностью 0,95 интервальную оценку для генеральной средней.

Решение. По условию $n = 10$, $\overline{x}_\text{в}=104,4\,\%$, $\sigma = 1$ %, $\gamma = 0,95$. Поскольку параметр σ известен, интервальную оценку найдем согласно формуле

$$P\left(\overline{x}_\text{в}-t\frac{\sigma}{\sqrt{n}}<a<\overline{x}_\text{в}+t\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)=2\Phi\left(t\right)=\gamma.$$

По таблице интегральной функции Лапласа $\Phi(t)$ из условия $\gamma = 0,95$ найдем $t = 1,96$.

Тогда точность оценки равна

$$\delta=t\frac{\sigma}{\sqrt{n}}=1,96\cdot\frac{1}{\sqrt{10}}=0,62.$$

Отсюда доверительный интервал имеет вид

$$104,4-0,62\le a\le 104,4+0,62$$

и окончательно

$$103,78\le a\le 105,02.$$

СПИСОК РЕКОМЕНДУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Письменный, Д.Т. Конспект лекций по высшей математике [Текст]: в 2 ч. / Д.Т. Письменный. –М.: Айрис-Пресс, 2011. – Ч.1. – 288 с.
2. Письменный Д.Т. Конспект лекций по высшей математике [Текст]: в 2 ч. / Д.Т. Письменный. – М.: Айрис-Пресс, 2015. – Ч.2. – 256 с.
3. Данко, П.Е. Высшая математика в упражнениях и задачах [Текст] / П.Е. Данко, А.Г. Попов, Т.Я. Кожевникова. – М.: АСТ, Мир и образование, 2014. – 816 с.
4. Шипачев, В.С. Высшая математика: полный курс [Текст]: учебник для бакалавров / В.С. Шипачев; под ред. А.Н. Тихонова. – 4-е изд., испр. и доп. – М.: Юрайт, 2015. – 608 с.
5. Гнеденко, Б.В. Элементарное введение в теорию вероятностей [Текст] / Б.В. Гнеденко, А.Я. Хинчин. – М.: Либроком, 2013. – 208 с.
6. Лунгу, К.Н. Сборник задач по высшей математике. 1 курс [Текст] / К.Н. Лунгу, Д.Т. Письменный. –М.: Айрис-Пресс, 2013. – 592 с.
7. Лунгу, К.Н. Сборник задач по высшей математике. 2 курс [Текст] / К.Н. Лунгу, Д.Т. Письменный. – М.: Айрис-Пресс, 2013. – 576 с.
8. Беклемишева, Л.А. Сборник задач по аналитической геометрии и линейной алгебре [Текст] / Л.А. Беклемишева, А.Ю. Петрович, И.А. Чубаров. – М.: Физматлит, 2014. – 496 с.
9. Клетеник, Д.В. Сборник задач по аналитической геометрии [Текст] / Д.В. Клетеник. – М.: Лань, Профессия, 2010. – 224 с.
10. Кудрявцев, Л.Д. Курс математического анализа [Текст]: учебник: в 3 т. / Л.Д. Кудрявцев. – М.: Юрайт, 2015. – Т.1. – 704 с.
11. Кудрявцев, Л.Д. Курс математического анализа [Текст]: учебник: в 3 т. / Л.Д. Кудрявцев. – М.: Юрайт, 2014. – Т.2. – 720 с.
12. Бугров, Я.С. Высшая математика [Текст]: задачник / Я.С. Бугров, С.М. Никольский. –М.: Юрайт, 2015. – 192 с.
13. Лунгу, К.Н. Руководство к решению задач [Текст]: в 2 ч. / К.Н. Лунгу, Е.А. Макаров. – М.: Физматлит, 2014. – Ч.1. – 216 с.
14. Лунгу К.Н., Макаров Е.А. Руководство к решению задач [Текст]: в 2 ч. / К.Н. Лунгу, Е.А. Макаров. – М.: Физматлит, 2015. – Ч.2. – 384 с.
15. Запорожец, Г.И. Руководство к решению задач по математическому анализу [Текст]: учеб. пособие / Г.И. Запорожец. – Изд. 6-е, стер. – СПб.: Лань, 2010. – 460 с.
16. Выгодский, М.Я. Справочник по высшей математике [Текст] / М.Я. Выгодский. – М.: АСТ: Астрель, 2010. – 703 с.
17. Теория вероятностей и математическая статистика в задачах [Текст] / В.А. Ватутин, Г.И. Ивченко, Ю.И. Медведев, В.П. Чистяков. – М.: Ленанд, 2015. – 386 с.

18. Гмурман В.Е. Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике [Текст] / В.Е. Гмурман. – М.: Юрайт, 2015. – 418 с.
19. Гарькина, И.А. Тесты по математике с тезисным изложением теоретического материала [Текст] / И.А. Гарькина, А.М. Данилов, А.Н. Круглова. – Пенза: ПГУАС, 2013. – 392 с.

О Г Л А В Л Е Н И Е

Учебное издание

Гарькина Ирина Александровна
Данилов Александр Максимович

МАТЕМАТИКА

Учебно-методическое пособие к практическим занятиям
по направлению подготовки 08.03.01 «Строительство»

В авторской редакции
Верстка; Н.А. Сазонова

Подписано в печать 30.06.16. Формат 60×84/16.
Бумага офисная «Снегурочка». Печать на ризографе.
Усл. печ. л. 5,81. Уч.-изд. л. 6,25. Тираж 80 экз.
Заказ № 451.

Издательство ПГУАС.
440028, г.Пенза, ул. Германа Титова, 28.