

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Федеральное государственное бюджетное
образовательное учреждение высшего образования
«Пензенский государственный университет
архитектуры и строительства»
(ПГУАС)

А.М. Данилов, И.А. Гарькина

**ОБЩИЙ КУРС МАТЕМАТИКИ:
МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССОВ И СИСТЕМ**

Пенза 2016

УДК 517-047.58

ББК 22.1

Д18

Рецензенты: доктор физико-математических наук, профессор О.А. Голованов (Пензенский артиллерийский инженерный институт ВА МТО);

доктор химических наук, профессор кафедры «Информационно-вычислительные системы» А.Н.Кошев (ПГУАС)

Данилов А.М.

Д18 **Общий курс математики: моделирование процессов и систем:**
моногр. / А.М. Данилов, И.А. Гарькина. – Пенза: ПГУАС, 2016. –
116 с.

ISBN 978-5-9282-1371-8

На многочисленных примерах рассматриваются вопросы математического моделирования процессов и систем с использованием различных разделов общего курса математики. Особое внимание уделяется формализации и решению прикладных задач. При изложении материала учитывается доступность для начинающих исследователей по прикладной математике.

Подготовлена на кафедре «Математика и математическое моделирование» и предназначена специалистов, научных работников, аспирантов и студентов вузов при решении вопросов математического моделирования.

ISBN 978-5-9282-1371-8

© Пензенский государственный университет
архитектуры и строительства, 2016

© Данилов А.М., Гарькина И.А., 2016

ПРЕДИСЛОВИЕ

Основная цель науки – исследование явлений реальной действительности; *наука начинается с наблюдения изучаемых явлений и когнитивного моделирования* (позволяют разработать теории для увязывания фактов и дающих умозрительное их описание и объяснение). Впоследствии теории могут развиваться без обращения к наблюдениям и позволят предсказать, что произойдет под влиянием различных условий. Далее теоретические выводы должны проверяться путем новых наблюдений исследуемых процессов и явлений. При согласовании теоретических выводов с данными, полученными в результате наблюдений, уверенность в правильности теории возрастает. В противном случае ее следует признать несостоятельной или продолжить совершенствовать. Иногда указанная схема исследований не выдерживается: теории появляются до обнаружения соответствующих явлений или теории, обоснованные наблюдениями, остаются непроверенными.

Наибольшими возможностями познания действительности обладает математическое моделирование. Оно позволяет исследовать процессы с различным физическим содержанием, но описываемые одинаковыми математическими соотношениями (успешно применяется и в самой математике; так, решения, полученные численными методами, являются моделями истинных решений, которые можно рассматривать как реальные объекты). Сложность и многообразие процессов функционирования реальных систем не позволяют получить абсолютно адекватные математические модели (математическая модель, описывающая формализованный процесс функционирования системы, в состоянии охватить только основные, характерные закономерности). Как правило, практически невозможно указать формальные правила для выбора характеристик состояний и параметров исследуемых реальных систем. Исследователь вынужден руководствоваться лишь собственной интуицией, опирающейся на постановку прикладной задачи и понимание природы функционирования системы. Исходя из этого книга, прежде всего, ориентирована на использование математического моделирования для решения ряда практических задач. Хотя математическое моделирование считается одним из основных методов познания действительности, но нередко не учитывается неоднозначность модели, описывающей конкретную систему или процесс. Действительно, рассмотрим устройство, которое по числу $x = \overline{1,9}$ на входе выдает на выходе число $y = 9x = y_1 \cdot 10 + y_2$ (таблица умноже-

ния на 9). Пусть требуется построить математическую модель этого устройства (определить структуру и параметры «черного ящика», преобразующего x в y). Очевидно, задача не имеет однозначного решения. Например, возможны два решения, структурные схемы которых приводятся на рис.1 (а,б).

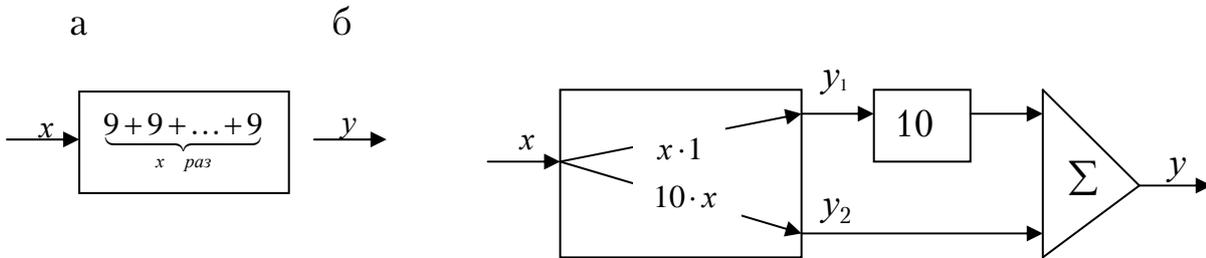


Рис.1. Схемы умножения на 9

Налицо *общая задача идентификации* (определяются структура и параметры математической модели по входу x и выходу y). Выбор модели из имеющейся совокупности, в основном, определяется принятой точностью («Принцип 100%-й эффективности математики», Бутковский А.Г. [1]).

В большинстве случаев предполагается, что структура математической модели известна и требуется по входным и выходным воздействиям определить лишь ее параметры (*частная задача идентификации*). Пусть, например, реальная система описывается обыкновенным дифференциальным уравнением с постоянными коэффициентами: входное воздействие $x(t)$ преобразуется в выходное – $y(t)$ (рис.2). Здесь решается *обратная задача теории дифференциальных уравнений*, а именно: по известному решению $y(t)$ при заданном $x(t)$ определяются коэффициенты дифференциального уравнения:

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_n y = b_0 x^{(m)} + b_1 x^{(m-1)} + \dots + b_{m-1} x + b_m.$$

Структуру определяют принятые значения m и n .

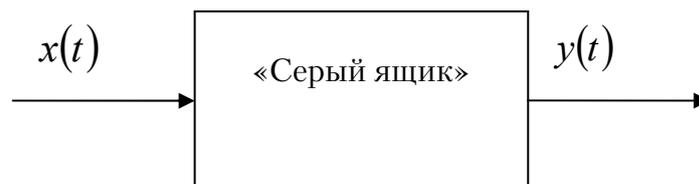


Рис.2

При решении многих технико-экономических экстремальных задач при описании *функций отклика* (параметры оптимизации) аналитическими зависимостями эффективно используются *регрессионные модели* (получаются методами математического планирования эксперимента). Так, эффективно определяется состав композиционного материала, обеспечивающий получение оптимальных физико-механических характеристик. Решаются и иные задачи: определение оптимальных условий культивирования микроорганизмов; управление трудовыми ресурсами и запасами, оптимальное размещение объектов, составление календарных планов, выбор наилучших проектных решений и т.д. Важную роль математические модели играют и при решении задач прокладки систем тепло-, газо- и водоснабжения, трассировки дорог (в основном, используются математическое программирование, теория графов и др.). При решении задач диагностики отказов (в том числе диагностики заболеваний человека), экспертизы зданий и сооружений широко используются как детерминированные, так и стохастические модели.

Если задача сформулирована на математическом языке, то она полностью переходит в сферу математики, разработанной и строго обоснованной науки, так что за дальнейшую судьбу задачи волноваться не нужно, если она окажется непомерно трудной. Однако это не всегда справедливо. Тем не менее, все более справедливым становится старая истина, что *во всяком знании столько науки, сколько в нем математики*. Конечно, здесь нет призыва к тривиальной и претенциозной математизации, когда без математики вполне можно обойтись.

Нет никакого сомнения, что процесс математизации, развитие и применение математических моделей и математического аппарата в ближайшие годы будет усиливаться. Этим объясняется возросший интерес к тому, как именно осуществляется процесс применения математики: как создаются математические модели, как они изучаются, как интерпретируются и т.д. В то же время, этот вопрос все еще изучен поразительно слабо. При этом, конечно, *речь идет не о многочисленных конкретных случаях применения математики, а об изучении общих законов этого применения*.

Нет особых путей в приложениях математики, позволяющих избежать кропотливого освоения, развития и применения современных математических методов, необходимых для того или иного исследования. Будем помнить, что призывы к гибкости, адекватности и гармонии при использовании математических моделей не имеют ничего общего с вульгаризацией.

Авторы будут признательны за любые пожелания и предложения по улучшению структуры и содержания книги (адрес: 440028, г.Пенза, ул.Германа Титова, 28, ПГУАС, кафедра математики и математического моделирования).

ВВЕДЕНИЕ

Идентификация – экспериментальное изучение действительности и построение необходимых для решения практической или познавательной проблемы всех возможных с точки зрения исследователя моделей. К настоящему времени идентификационный подход еще окончательно не оформился в связи с размытостью представлений об *идентификации* как об *особом типе человеческой деятельности*. Процесс познания действительности при создании реальных систем не всегда можно научно объяснить. Пока в нём *доминирует математический уровень строгости*, и *математический язык рассматривается как наилучшее средство представления системы*. В большинстве работ ограничиваются лишь постановкой и исследованием математических задач и не затрагиваются содержательные и человеческие аспекты практической идентификации. Подобная избирательность во многом определяется тем, что при значительном объеме представлений о потенциально возможных способах исследования не в состоянии разработать детальную общую схему идентификации, ориентированную на использование определенной системы научных понятий, достаточных с точки зрения большинства исследователей для обоснования. На сегодня *понятия, отражающие роль человека при определении целей идентификации, теоретически не сформулированы*.

В теории управления под идентификацией [1, 2] понимается определение структуры системы и ее параметров на основе анализа ее входных и выходных данных; рассматривается как инструмент проверки гипотез о соответствии структуры и/или параметров системы и модели на основе экспериментальных данных о ее функционировании. *Структурная идентификация* состоит в определении *вида математической модели* системы (общая задача идентификации). После того как математическая модель системы определена, проводят *параметрическую идентификацию* (частная задача идентификации), заключающуюся в определении *числовых параметров* математической модели, при которых решение задачи соответствовало бы экспериментальным данным (найденные значения констант не должны противоречить физическому смыслу и теоретическим соображениям). Роль структуры модели трудно переоценить, *неудачный выбор ее сводит на нет и все результаты параметрической идентификации*.

К *статическим* относят модели, инвариантные относительно времени (используются для описания процессов и явлений, независящих от времени). Для описания изменения систем и процессов во времени

используются *динамические модели* (допускается изменение структуры и параметров во времени). Построение динамических моделей (например, для задач управления), как правило, более сложно, чем построение статических. Поэтому как упрощение динамических моделей используются *квазидинамические*.

Модели могут быть в разной степени формализованными, *но все они обладают тем главным свойством, что связывают наблюдения в некоторую общую картину*. Решение задачи построения математических моделей динамических систем по данным наблюдений за их поведением и составляет предмет теории идентификации, которая тем самым становится **элементом общей научной методологии**.

В динамической системе происходит взаимодействие между его разнотипными частями, и формируются *наблюдаемые (выходные) сигналы*. Все остальные сигналы рассматриваются как *возмущения (входные сигналы; измеряемые и не измеряемые шумы)*. *Совокупность предполагаемых связей между наблюдаемыми сигналами и является моделью в широком смысле*. Модель может принимать разные форму и степень математической детализации (или вообще без использования языка математики). В большинстве случаев соотношения, описывающие взаимодействие различных составляющих динамической системы, задаются в виде систем алгебраических, дифференциальных (разностных), алгебро-дифференциальных или интегральных уравнений. Такие модели называются **математическими** (непрерывные и дискретные по времени, сосредоточенные и распределенные, детерминированные или стохастические, линейные или нелинейные и др. в зависимости от типа используемых уравнений).

Численные характеристики изучаемой системы (процесса) могут быть константами (не изменяются в ходе процесса) или переменными. Часть из них может быть измерена лабораторными методами в ходе эксперимента (изменяемые константы и переменные), а другая либо вообще не может быть измерена современными методами, либо их измерение чрезвычайно трудоемко и дорого (не измеряемые константы и переменные).

Выбор метода идентификации определяется неоднозначно, ибо в самой постановке задачи заранее предполагается неопределенность (неполнота знаний об объекте, ограничения в наблюдениях объекта во времени, неточность измерения сигналов на входе и на выходе объекта и т. п.).

Как видим, идентификация включает три этапа:

– выбор структуры модели по результатам изучения системы или по имеющимся априорным сведениям;

- определение критерия близости (подобия) модели и системы,
- определение по экспериментальным данным, исходя из выбранного критерия, параметров модели.

В силу значительной сложности структурная идентификация часто сводится к эвристическому заданию структуры модели, опираясь на априорные данные. Здесь *эффективность последующей параметрической идентификации во многом определяется тем, насколько удачно была выбрана структура модели*. В известных методах параметрической идентификации учитываются особенности исследуемой системы, условия функционирования, способ тестирования, способы анализа экспериментальных данных, вид получаемых моделей и др.

Методы идентификации по временным затратам разделяются на *оперативные и ретроспективные*. При оперативной идентификации обеспечивается отслеживание меняющихся параметров объекта на основе рекуррентных алгоритмов обработки данных аппаратными средствами в темпе, близком к скорости протекания процессов в изучаемом объекте. При ретроспективной идентификации значительно упрощаются условия решения задач. Здесь возможно многократное обращение к накопленным экспериментальным данным, что позволяет осуществить подбор наиболее эффективных алгоритмов их анализа.

Всегда важным остается выбор процедуры сравнения для оценки *адекватности* получаемой модели объекту. Основное требование к модели – *адекватность объекту изучения; иначе теряется смысл моделирования*. Создание адекватной модели возможно лишь в случае, когда свойства и взаимосвязи моделируемого объекта в достаточной степени изучены. Налицо парадокс: если объект изучен, зачем его моделировать; а если объект не изучен, то, как можно построить адекватную модель. Традиционно он разрешается тем, что *модель не обосновывается, а постулируется на основе эмпирических сведений, которыми располагает исследователь*.

В настоящее время используется так называемая *гомеостатическая концепция моделирования систем*, выражающаяся в *пошаговом приведении исходной модели к состоянию, подобному объекту-оригиналу*, за счет включения в модель программных механизмов адаптации и интерпретации, а также организации эффективного диалога с исследователем. Сначала на основе данных описательной модели строится *каркас системной модели* (нулевое приближение), учитывающий априори известные свойства моделируемой системы. Далее проводится *модельный эксперимент*, и полученные при этом данные используются для корректировки каркаса; формируется *модель системы в первом приближении*. Полученная модель вновь корректируется по результатам эксперимента;

формируется *второе приближение* модели системы и т.д. *Циклический обучающий процесс* «эксперимент-данные-корректировка» многократно повторяется, но никогда *не завершается построением окончательной системной модели* (полученное приближение к системе-оригиналу может нуждаться в уточнении в ходе дальнейших исследований).

Адекватность системной модели объекту изучения нельзя доказать: модель может быть принята либо отвергнута на том основании, что получаемые с ее помощью оценки и выводы противоречат наблюдаемым фактам. Системная модель всегда будет отличаться от оригинала; можно говорить об асимптотическом приближении к нему при выполнении определенных условий для каждой практической задачи. Асимптотическая сходимость обеспечивается тем, что объектом моделирования является конкретная система с присущими только ей *автономными законами функционирования* (свойственны и присущи только данной системе). Отметим, ***адекватность достигается сужением сферы использования данной системной модели, ограниченностью ее практической применимости.*** Адекватность повышается за счет модельных экспериментов: появляются новые знания интуитивного характера, которые могут использоваться для настройки модели и ее свойств к свойствам изучаемого объекта. *Процесс моделирования позволяет глубже проникнуть в существо объекта-оригинала, а модельные исследования приводят к открытию новых свойств и закономерностей функционирования изучаемой системы.*

На сегодня пока нет единой теории построения системных моделей, в полной мере реализующей *концепцию системного гомеостазиса*. *Системные модельные исследования итеративны*: любая системная проблема решается на основе последовательного приближения и *не имеет окончательного решения*. Это согласуется с одним из основных принципов системного подхода: ни при каком сколь угодно глубоком познании *невозможно получить исчерпывающую характеристику изучаемого объекта*. Вопрос состоит в том, *насколько качественно данный уровень познания позволяет разрешить поставленную проблему.*

Для оценки эффективности и надежности модели используются *количественные критерии*. На основе *качественных критериев* модель оценивается с точки зрения ее понятности, простоты использования, тестируемости, возможности развития, а также применения в других проблемных областях. Критерий является количественным, когда его значения имеет смысл сравнивать: насколько или во сколько раз одно значение больше другого. В случае качественного критерия такие сравнения бессмысленны. Промежуточное положение между количественными и качественными критериями занимают *критерии с балльными*

шкалами. Утверждение о значениях критериев с заданными типами шкал называется адекватным, если его истинность сохраняется после любых допустимых преобразований, определяемых типами шкал. Так что при анализе и решении многокритериальной задачи оптимизации необходимо применять только те определения и понятия, методы и процедуры, которые приводят к получению адекватных выводов и рекомендаций.

Системные исследования являются симбиозом теоретических модельных экспериментов с наблюдениями, эмпирическими исследованиями, натурными (лабораторными) экспериментами. *Ведущая роль моделирования состоит в том, что модель должна предшествовать натурным экспериментам и указывать направления сбора информации в процессе наблюдений. В то же время результаты модельных исследований нуждаются в фактических исходных данных и требуют экспериментального подтверждения.*

Системный подход к анализу и синтезу сложных систем состоит в упрощении сложности и ограничении разнообразия формализованного описания системы (работа исследователя) с учетом возможного проявления свойств, неопределенности состояния системы (свойства реальной системы).

Под фактором сложной системы понимается независимая переменная величина, при изменении значений которой изменяются критерии качества сложной системы. *Простой фактор* не подразделяется на другие факторы (есть функция самого себя). *Сложный фактор* — функция других, физически независимых факторов.

Критерием качества q_j является численная (иногда качественная) величина, характеризующая способность удовлетворить установленные и/или предполагаемые потребности. Совокупность критериев качества $\{q_j\}$ определяет качество системы.

Факторы по возможности управления ими можно разделить на группы. *Управляемые факторы* x_1, x_2, \dots, x_k можно изменять и поддерживать на определенных уровнях в процессе эксперимента с необходимой точностью. Предполагается, что случайные и систематические ошибки уровней факторов в повторных опытах пренебрежимо малы, а их коэффициенты вариации существенно (на порядок и более) меньше, чем коэффициенты вариации критериев качества. Напомним,

коэффициент вариации $V = \frac{\sigma[X]}{M[X]} \cdot 100\%$ случайной величины X есть

мера относительного разброса случайной величины; показывает, какую долю среднего значения этой величины составляет ее средний разброс;

в отличие от среднего квадратического отклонения дает не абсолютную, а относительную меру разброса значений признака в статистической совокупности (вычисляется только для количественных данных). Управляемые факторы позволяют целенаправленно изменять параметры качества сложной системы.

Неуправляемые факторы z_1, z_2, \dots, z_n можно контролировать с необходимой точностью, но их нельзя изменять и поддерживать с заданной точностью в условиях исследовательского эксперимента. Их значения заключены в определенных пределах, устанавливаемых допусками, либо неподвластны влиянию исследователя.

Неконтролируемые факторы w_1, w_2, \dots, w_l – информация о которых во время проведения исследовательского эксперимента у исследователя отсутствует.

Для получения многофакторной математической модели необходимо из значительного числа факторов, влияющих на моделируемые критерии качества, выбрать статистически значимые (определяются на основании отсеивающего эксперимента). Для последующего включения их в оптимизационный или модельный эксперимент осуществляется априорный анализ группы факторов.

Кроме главных эффектов различных порядков на критерии качества могут влиять и различные взаимодействия факторов (*создают системный эффект влияния факторов на моделируемый критерий качества*). Выявление взаимодействия факторов, их оценка при создании многофакторных математических моделей являются определяющими для получения качественных моделей.

При формализованном описании входные параметры системы рассматриваются как факторы, а выходные параметры – критериями качества.

Сведем воедино наиболее важные системные свойства.

Целенаправленность (смысл создания и функционирования системы) заключается в достижении поставленных перед системой целей (*критериев качества*). Определяющим является достижение *экстремальных значений целей*. *Наличие цели/целей объединяет отдельные элементы системы между собой в единое целое.*

Эффективность – показатель достижимости системой заданной желаемой точки $q^0(q_1^0, q_2^0, \dots, q_m^0)$ в критериальном пространстве; $q_j, j = \overline{1, m}$ – частный критерий качества (показатель качества или *эффективности*, критериальная функция, целевая функция) функционирования сложной системы.

Эмергентность (существование интегративных качеств) – несводимость свойств системы к сумме свойств ее отдельных подсистем ((англ. *emergence* — возникновение, появление нового); наличие у системы особых свойств, не присущих её подсистемам и блокам; несводимость свойств системы к сумме свойств её компонентов (системный эффект)). Описание системы должно быть целостным.

Функциональность – свойство, заключающееся в получении необходимой информации о системе по результатам ее функционирования. Основной способ получения информации – проведение системного эксперимента.

Целостность – определяется необходимостью рассмотрения полного набора взаимосвязанных подсистем C_1, C_2, \dots, C_n системы C (связана с потерей свойств системы при рассмотрении лишь отдельных не связанных между собой подсистем).

Неопределенность – отсутствие необходимой информации о фактических свойствах состояния и функционирования системы (значимость влияния факторов и их значения, вероятностные свойства случайных ошибок факторов и критериев качества, формализованное описание функционирования системы и др.).

Оптимальность – соответствие критериев качества системы возможным наилучшим значениям.

Сложность определяется структурой составного объекта, части которого можно рассматривать как системы, закономерно объединенные в единое целое в соответствии с определенными принципами или связанными между собой заданными отношениями.

Сложную систему можно расчлениить (необязательно единственным образом) на конечное число частей (подсистем). Каждую подсистему можно расчлениить на конечное число более мелких подсистем и т. д., вплоть до получения подсистем низшего, первого уровня (*элементов*) сложной системы, которые либо объективно не подлежат расчленению на части, либо относительно их дальнейшей неделимости имеется соответствующая договоренность. Таким образом, подсистема является с одной стороны сложной системой из нескольких элементов (подсистем низшего уровня), а с другой — элементом системы старшего уровня.

Иерархичность – место системы в иерархии «надсистема – система – подсистема». Иерархичность влияет на цели, стоящие перед системой, ее связи с другими системами, руководящую или подчиненную роль в ряду иерархии и другие определяющие свойства.

Статистичность – характеризуется известными законами распределения параметров системы, вероятностным типом связей между факторами и критериями качества системы.

Системными свойствами критериев качества порождается системный эффект (*принцип Ле Шателье-Самуэльсона*): внешнее воздействие, выводящее систему из устойчивого равновесия, стимулирует в ней процессы, стремящиеся ослабить результат этого воздействия.

В традиционных учебниках, в основном, рассматривается аксиоматическое, законченное изложение соответствующих дисциплин. В предлагаемой книге производится детальный анализ процесса построения математической модели вполне конкретного, простого, но интересного явления из различных областей механики, физики, экономики и т.д. Указываются подходы к описанию и анализу реальных проблем, возможности ее математической идеализации. Определяются пути построения модели, степени пригодности и соответствие реальному объекту исследования. Почувствовать в чем состоит искусство моделирования можно на основе приводимых ниже примеров и задач, иллюстрирующих различные особенности процесса моделирования. Для удобства читателя примеры составлены в соответствии с традиционными разделами общего курса высшей математики.

1. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ

1. Пусть стоимость 1 м² фасада составляет a рублей, для других стен – b рублей, а стоимость крыши в пересчете на 1 м² ее основания равна c рублей. Определить соотношения между длиной, шириной и высотой для углового дома объемом v м³ так, чтобы стоимость его стен и плоской крыши была наименьшей.

Решение.

Угловой дом имеет по фасаду две стены. Будем полагать, что основание дома – прямоугольник длиной x м и шириной y м, высота дома равна $\frac{V}{xy}$ м.

Тогда площадь двух стен по фасаду равна

$$x \frac{V}{xy} + y \frac{V}{xy} = V \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \right),$$

а площадь двух других – $V \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \right)$. При этом площадь основания крыши равна xy .

Искомая стоимость стен и крыши

$$u = aV \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \right) + bV \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \right) + cxy$$

или

$$u = (a+b)V \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \right) + cxy.$$

Необходимые условия экстремума будут иметь вид:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = (a+b)V \left(-\frac{1}{x^2} \right) + cy = 0,$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = (a+b)V \left(-\frac{1}{y^2} \right) + cx = 0.$$

Откуда

$$cy = \frac{(a+b)V}{x^2} \Rightarrow x^2 y = \frac{a+b}{c} V;$$

$$cx = \frac{(a+b)V}{y^2} \Rightarrow xy^2 = \frac{a+b}{c}V.$$

Из равенства правых частей будем иметь

$$x^2y = xy^2.$$

С учетом $x \neq 0, y \neq 0$ получим

$$x = y = \sqrt[3]{\frac{a+b}{c}V}.$$

Так что основанием дома должен быть квадрат со стороной, равной $\sqrt[3]{\frac{a+b}{c}V}$.

Из предыдущего определится отношение между стороной основания и высотой дома:

$$x : \frac{V}{xy} = x : \frac{V}{x^2} = x^3 : V = \frac{a+b}{c}V : V = \frac{a+b}{c},$$

т.е. отношение сторон квадрата к высоте дома должно быть равно $\frac{a+b}{c}$.

Без каких-либо исследований ясно, что при полученных размерах дома достигается минимум стоимости.

2. Требуется сделать открытый цилиндрический резервуар объемом V . Стоимость материала, из которого делается дно резервуара, в m раз больше стоимости материала, идущего на его боковые стенки. При каких размерах резервуара стоимость его будет минимальной?

Решение.

Развернутая поверхность открытого сверху цилиндра состоит из нижнего основания $S_1 = \pi R^2$ и боковой поверхности $S_2 = 2\pi Rh$. Стоимость резервуара определится поверхностью используемого материала

$$y = S_1 + S_2 = m\pi R^2 + 2\pi Rh.$$

Задача свелась к определению минимума функции y при условии $\pi R^2 h = V$.

С учетом $h = \frac{V}{\pi R^2}$ будем иметь:

$$y = y(R) = m\pi R^2 + \frac{2V}{R}.$$

Дифференцируя по R и приравняв производную нулю, найдем единственный корень полученного уравнения:

$$y' = 2m\pi R - \frac{2V}{R^2} = 0 \Rightarrow m\pi R^3 - V = 0 \Rightarrow$$

$$R_0 = \sqrt[3]{\frac{V}{m\pi}} = \left(\frac{V}{m\pi}\right)^{\frac{1}{3}}.$$

Откуда

$$h_0 = \frac{V}{\pi R_0^2} = \frac{V}{\pi \left(\frac{V}{m\pi}\right)^{\frac{2}{3}}} = m \left(\frac{V}{m\pi}\right)^{\frac{1}{3}} = mR_0.$$

Таким образом, искомая стоимость будет минимальной, если высота цилиндра будет в m раз превышать радиус его основания:

$$h_0 = mR_0.$$

В том, что найденное $R = R_0$ доставляет минимум функции y , легко убедиться, определив знак второй производной в критической точке:

$$y''|_{R=R_0} = \left(2m\pi R - \frac{2V}{R^2}\right)' \Big|_{R=R_0} = \left(2m\pi + \frac{4V}{R^3}\right) \Big|_{R=R_0},$$

$$y''|_{R_0} = \left(\frac{V}{m\pi}\right)^{\frac{1}{3}} = 2m\pi + \frac{4V}{\left(\frac{V}{m\pi}\right)} = 6m\pi > 0.$$

В частном случае, с другой стороны, при $m=1$ минимальная стоимость достигается при минимальном расходе материала. Для того, чтобы изготовить открытый цилиндр заданного объема V с затратой минимального количества материала, надо высоту цилиндра взять равной его радиусу. Необходимый для этого расход материала (не учитывая запаса на изготовление швов) определяется по формулам:

$$y = m\pi R^2 + \frac{2V}{R}, \quad R_0 = \sqrt[3]{\frac{V}{m\pi}} = \left(\frac{V}{m\pi}\right)^{\frac{1}{3}} \text{ при } m=1.$$

3. Какие размеры надо придать цилиндрической емкости с крышкой данного объема V , чтобы поверхность была наименьшей?

Решение.

Пусть r – радиус основания цилиндра, h – высота цилиндра (величины r и h – переменные; если придать r какое-либо значение, то h определится из условия, что емкость цилиндра равна V ; $V = \pi r^2 h$, $h = \frac{V}{\pi r^2}$).

Поверхность емкости S состоит из двух оснований, площадь которых равна $2\pi r^2$, и боковой поверхности, площадь которой равна $2\pi r h = 2\pi r \frac{V}{\pi r^2} = \frac{2V}{r}$, т.е.

$$S = 2\pi r^2 + \frac{2V}{r}.$$

Найдем минимум функции $S(r)$ (V задано!):

$$\frac{dS}{dr} = 4\pi r - \frac{2V}{r^2} = \frac{2(2\pi r^3 - V)}{r^2}.$$

Так что $\frac{dS}{dr} = 0$, если $2\pi r^3 - V = 0$.

Откуда $r = \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}$.

Имеем $\frac{d^2S}{dr^2} = 4\pi + \frac{4V}{r^3}$, ($\pi, V, r > 0$).

Из $4\pi + \frac{4V}{r^3} > 0$ следует $S''(r) > 0$, т.е. $S(r)$ имеет минимум.

Следовательно, поверхность емкости минимальна при

$$r = \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}} \quad \text{и} \quad h = \frac{V}{\pi r^2} = \frac{V}{\pi \sqrt[3]{\frac{V^2}{4\pi^2}}} = 2\sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}} = 2r = d.$$

4. Пусть даны две точки A и B по разные стороны от оси Ox (рис.1.1). Какой путь ведет в самое короткое время из точки A в точку B , если скорость по одну сторону от оси Ox равна c_1 , а по другую сторону c_2 ?

Решение.

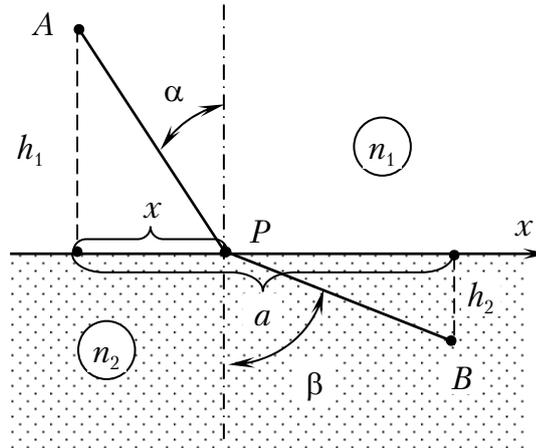


Рис.1.1

Ясно, что этот «кратчайший путь» должен состоять из двух прямолинейных отрезков, которые смыкаются в некоторой точке P оси Ox . Длины отрезков PA и PB соответственно равны $\sqrt{h_1^2 + x^2}$ и $\sqrt{h_2^2 + (a-x)^2}$.

Время, необходимое для прохождения пути APB , определяется делением длин на соответствующие скорости:

$$f(x) = \frac{1}{c_1} \sqrt{h_1^2 + x^2} + \frac{1}{c_2} \sqrt{h_2^2 + (a-x)^2}.$$

Дифференцируя, получим

$$f'(x) = \frac{1}{c_1} \frac{x}{\sqrt{h_1^2 + x^2}} - \frac{1}{c_2} \frac{a-x}{\sqrt{h_2^2 + (a-x)^2}},$$

$$f''(x) = \frac{1}{c_1} \frac{h_1^2}{(h_1^2 + x^2)^{\frac{3}{2}}} + \frac{1}{c_2} \frac{h_2^2}{(h_2^2 + (a-x)^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Из необходимого условия экстремума $f'(x) = 0$ получим:

$$\frac{1}{c_1} \frac{x}{\sqrt{h_1^2 + x^2}} = \frac{1}{c_2} \frac{a-x}{\sqrt{h_2^2 + (a-x)^2}}.$$

Это эквивалентно условию

$$\frac{1}{c_1} \sin \alpha = \frac{1}{c_2} \sin \beta$$

или $\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{c_1}{c_2}$.

Физический смысл рассматриваемой задачи вытекает из принципа кратчайшего времени распространения света. Луч света проходит между двумя точками тот путь, для которого требуется наименьшее время.

Если c_1 и c_2 означают скорости света по обе стороны плоскости раздела двух оптических сред, то путь светового луча должен определяться формулой $\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{c_1}{c_2}$.

Таким образом, мы получили закон преломления, установленный Виллебордом Снеллиусом (1580-1626).

Так как скорости распространения света c_1 и c_2 обратно пропорциональны коэффициентам преломления сред n_1 и n_2 , то $\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{n_1}{n_2}$ (отношение синуса угла падения α к синусу угла преломления β есть величина, постоянная для двух данных сред).

5. Построить график функции $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$.

Эта функция играет большую роль в теории вероятностей. Ее график называется основной кривой вероятностей.

Функция $\varphi(x)$ показательная с основанием $e > 1$. Она определена на всем множестве действительных чисел $-\infty < x < +\infty$ и положительна, график функции $\varphi(x)$ расположен выше оси Ox .

При $x \rightarrow \pm\infty, \left(-\frac{x^2}{2} \rightarrow -\infty\right)$

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \right) = 0.$$

Ось Ox служит для кривой $y = \varphi(x)$ асимптотой. Так как x входит в уравнение кривой только в квадрате, то $\varphi(-x) = \varphi(+x)$, а кривая симметрична относительно оси Oy .

Найдем точки экстремума и промежутки возрастания и убывания функции $\varphi'(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} (-x) = \varphi(x)(-x)$.

Так как $\varphi(x) > 0$, то $\varphi'(x) = 0$, если $-x = 0$, $x = 0$. Слева от $x = 0$ $-x > 0$ и $\varphi'(x) > 0$, справа от $x = 0$ $-x < 0$ и $\varphi'(x) < 0$.

Значит, $x = 0$ – точка максимума. Экстремальное значение

$$\varphi_{\max} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^0 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \approx 0,4.$$

При этом $\varphi(x)$ – функция, возрастающая в промежутке $-\infty < x < 0$ и убывающая в промежутке $0 < x < +\infty$.

Найдем точки перегиба и промежутки выпуклости и вогнутости:

$$\begin{aligned} \varphi''(x) &= [\varphi(x)(-x)]' = \varphi'(x)(-x) + (-1)\varphi(x) = \\ &= \varphi(x)(-x)(-x) - \varphi(x) = \varphi(x)(x^2 - 1). \end{aligned}$$

Так как $\varphi(x) > 0$, то $\varphi''(x) = 0$ при $x^2 - 1 = 0$, или при $x = \pm 1$. При $|x| < 1$ производная $\varphi''(x) < 0$, а если $|x| > 1$, то $\varphi''(x) > 0$.

Следовательно, кривая выпукла при $-1 < x < +1$ и вогнута при $-\infty < x < -1$ и $1 < x < +\infty$. Точки $x = \pm 1$ являются точками перегиба. В этих точках $y_{\text{пер}} = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right) e^{-\frac{1}{2}} \approx 0,242$ (рис.1.2).

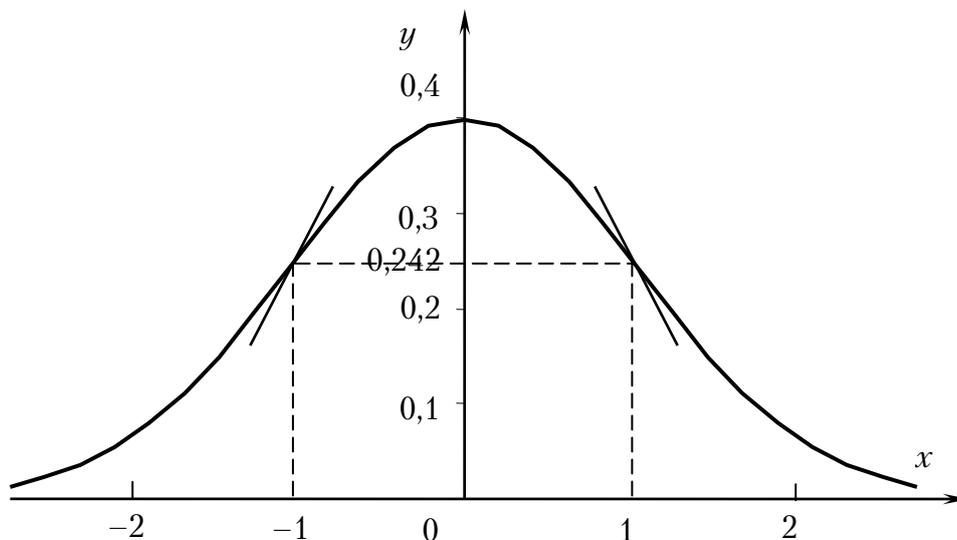


Рис.1.2

6. Выбрать место для постройки моста через реку так, чтобы длина дороги между двумя пунктами, расположенными по разные стороны от реки, была наименьшая.

Решение.

Сделаем схематический план местности вблизи указанных в условии объектов (рис.1.3).

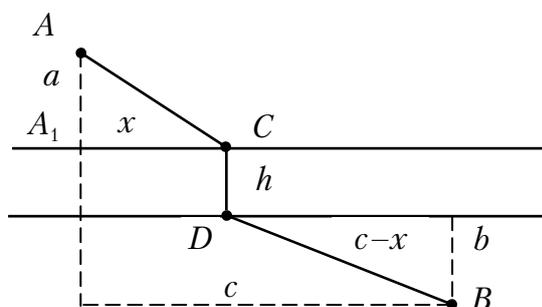


Рис. 1.3

Расстояния a , b , c и h согласно условию задачи являются постоянными. Если мост построен в указанном на плане месте, то длина дороги между пунктами A и B

$$l = AC + h + DB.$$

Выбрав за независимую переменную x , получим:

$$AC = \sqrt{a^2 + x^2}, \quad DB = \sqrt{b^2 + (c-x)^2},$$

$$l = \sqrt{a^2 + x^2} + h + \sqrt{b^2 + (c-x)^2},$$

где x изменяется на отрезке $[0, c]$.

Найдем наименьшее значение функции $l(x)$ на отрезке $[0, c]$.

Имеем

$$l' = \frac{x}{\sqrt{a^2 + x^2}} + \frac{x-c}{\sqrt{b^2 + (x-c)^2}} = \frac{x\sqrt{b^2 + (c-x)^2} + (x-c)\sqrt{a^2 + x^2}}{\sqrt{(a^2 + x^2)(b^2 + (x-c)^2)}}.$$

Из $l' = 0$ следует

$$x^2(b^2 + (x-c)^2) = (x-c)^2(a^2 + x^2); \quad b^2x^2 = a^2(x-c)^2.$$

Откуда

$$x_1 = \frac{ac}{a-b} \quad \text{и} \quad x_2 = \frac{ac}{a+b}.$$

Точка x_1 лежит вне отрезка $0 \leq x \leq c$; при $a > b, x_1 > c$, при $a < b, x_1 < 0$.

Точка x_2 лежит внутри этого отрезка при любых положительных значениях a, b и c , так как при этом $x_2 > 0$ и $\frac{a}{a+b} < 1$, т.е. $x_2 < c$.

Производная l' существует всюду, поэтому функция l других критических точек не имеет. Внутри отрезка $[0, c]$ функция имеет одну критическую точку x_2 . Исследуя эту критическую точку по знаку производной l' слева и справа от нее, убеждаемся, что точка x_2 есть точка минимума.

Согласно свойству непрерывных функций, в этой единственной на отрезке $[0, c]$ точке минимума непрерывная функция l имеет и наименьшее значение из всех ее значений на этом отрезке.

Таким образом, чтобы длина дороги между двумя пунктами, расположенными по разные стороны от реки, была наименьшая, следует построить мост в том месте, где расстояние $A_1C = x = \frac{ac}{a+b}$.

7. Установить зависимость длины стрелы автомобильного крана для постройки здания с плоской крышей (рис.1.4), имеющего высоту H и ширину $2l$.

Решение.

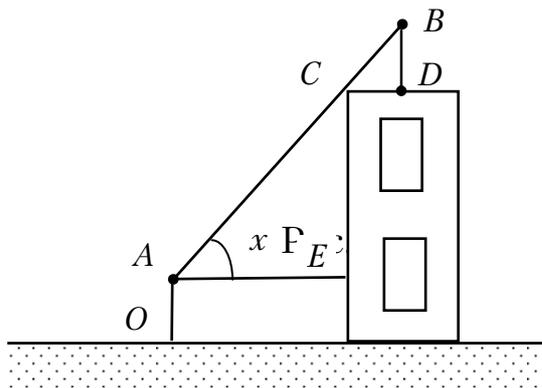


Рис. 1.4

Так как автомобильный кран может перемещаться вокруг всего здания, то крюк крана достанет до любой точки здания, если достанет до середины крыши (по ширине).

Пусть кран, находясь в точке O , подает деталь на середину крыши с углом наклона стрелы x .

Имеем:

$$BC = \frac{CD}{\cos x} = \frac{l}{\cos x}, \quad AC = \frac{CE}{\sin x} = \frac{H-h}{\sin x},$$

где $h=AO$ – высота подвеса стрелы крана.

Длина стрелы крана

$$L = \frac{H-h}{\sin x} + \frac{l}{\cos x}.$$

Из формулы видно, что для указанной работы кран, установленный в другой точке (ближе к зданию или дальше от него), должен иметь другую длину стрелы, так как в этой точке меняется угол x . Определим наиболее выгодное место установки крана, т.е. такое место, с которого заданная работа может быть выполнена краном с наименьшей длиной стрелы. Для этого, очевидно, достаточно определить, при каком угле x из промежутка $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ функция L принимает наименьшее значение.

Найдем производную:

$$L'(x) = \frac{l \cos x}{\sin^2 x} \left(\operatorname{tg}^3 x - \frac{H-h}{l} \right).$$

Функция L достигает наименьшего значения при

$$x = \operatorname{arctg} \sqrt[3]{\frac{H-h}{l}}.$$

Подставив указанное значение угла x в L , получим наименьшее возможное значение длины стрелы.

8. Чтобы выпилить из цилиндрического бревна наименее прогибающуюся прямоугольную балку, на торце бревна проводят диаметр AB , делят его на три равные части и из точек деления C и D проводят перпендикуляры к диаметру (рис.1.5). Прямоугольник $AEBF$ (почему это прямоугольник?) принимают за основание искомой балки. Докажите правомерность такого способа, приняв к сведению, что сопротивление изгибу прямо пропорционально произведению ширины на квадрат высоты сечения балки.

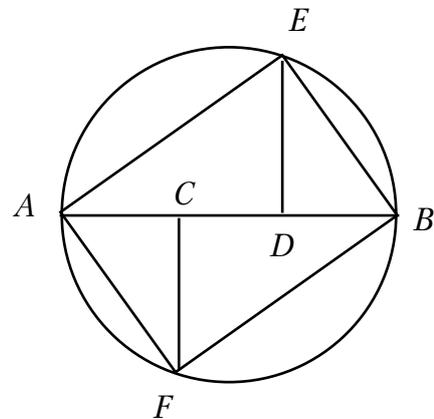


Рис.1.5

Решение.

Пусть d – диаметр бревна; x – ширина, а h – высота выпиленной из бревна прямоугольной балки.

При любых x и h справедливо:

$$h^2 = d^2 - x^2.$$

Тогда сопротивление изгибу равно:

$$F(x) = kx(d^2 - x^2), \quad (0 \leq x \leq d).$$

Функция F принимает наибольшее значение на $[0, d]$ при $F'(x) = 0$, т.е. при $x = \frac{d}{\sqrt{3}}$.

Так что балка должна иметь ширину $x = \frac{d}{\sqrt{3}}$ и высоту

$h = \sqrt{d^2 - x^2} = \frac{d\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$ ($h = \sqrt{2}x$). Именно к такому отношению размеров и

приводит описанный выше практический способ. Действительно, воспользовавшись тем, что катет есть среднее пропорциональное между гипотенузой и своей проекцией на гипотенузу, получим:

$$\frac{AE^2}{BE^2} = \frac{AD}{BD} = 2,$$

откуда следует, что $AE = \sqrt{2}BE$.

9. На какой высоте h надо повесить фонарь над центром круговой площадки радиуса a , чтобы площадка была максимально освещена у ее границы (рис.1.6) ?

Решение.

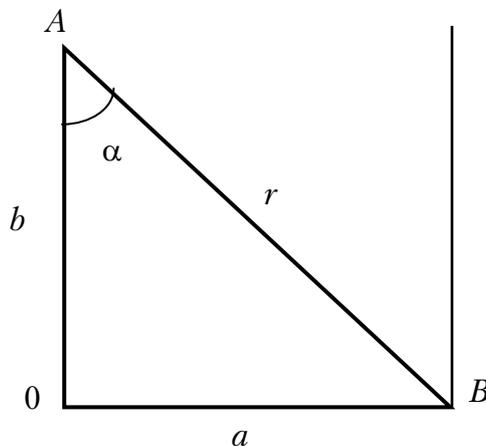


Рис. 1.6

Известно, что освещенность E обратно пропорциональна квадрату расстояния от источника света и прямо пропорциональна косинусу угла, образованного нормалью к поверхности с направлением светового потока, т.е.

$$E = k \frac{\cos \alpha}{r^2},$$

где k зависит от силы источника света, помещенного в точке A . Из $\triangle OAB$ следует:

$$\cos \alpha = \frac{h}{r}, \quad r = \sqrt{h^2 + a^2}.$$

Приняв h за независимую переменную, получим

$$E = E(h) = k \frac{h}{\sqrt{h^2 + a^2} (h^2 + a^2)} = k \frac{h}{(h^2 + a^2)^{\frac{3}{2}}} \quad (h > 0).$$

Исследуем $E(h)$ на экстремум. Имеем:

$$\begin{aligned} E' &= k \frac{(h^2 + a^2)^{\frac{3}{2}} - \frac{3}{2}(h^2 + a^2)^{\frac{1}{2}} \cdot 2h \cdot h}{(h^2 + a^2)^3} = k \frac{(h^2 + a^2)^{\frac{1}{2}}(h^2 + a^2 - 3h^2)}{(h^2 + a^2)^3} = \\ &= k \frac{a^2 - 2h^2}{(h^2 + a^2)^{\frac{5}{2}}} = k \frac{\left(\frac{a}{\sqrt{2}} - h\right)\left(\frac{a}{\sqrt{2}} + h\right)}{(h^2 + a^2)^{\frac{5}{2}}}; \end{aligned}$$

$$E' = 0 \text{ при } h = \frac{a}{\sqrt{2}}.$$

Так как $E' > 0$ в промежутке $\left(0; \frac{a}{\sqrt{2}}\right)$ и $E' < 0$ в промежутке $\left(\frac{a}{\sqrt{2}}; +\infty\right)$, то при $h = \frac{a}{\sqrt{2}}$ функция имеет максимум, т.е. при значении

$h = \frac{a}{\sqrt{2}} \approx 0,7a$ освещенность в точке B является наибольшей.

10. По двум улицам движутся к перекрестку две автомашины с постоянными скоростями u_1 и u_2 . Считая, что улицы пересекаются под прямым углом, и зная, что в некоторый момент времени автомашины

находятся от перекрестка на расстояниях a_1 и a_2 определить, через какое время расстояние между ними станет наименьшим.

Решение.

Первая машина за время t будет находиться от перекрестка на расстоянии $|a_1 - u_1 t|$, вторая – на расстоянии $|a_2 - u_2 t|$. Так что, расстояние l между машинами определится в виде

$$l = l(t) = \sqrt{(a_1 - u_1 t)^2 + (a_2 - u_2 t)^2}.$$

Имеем

$$\begin{aligned} l'(t) &= \frac{2[(a_1 - u_1 t)(-u_1) + (a_2 - u_2 t)(-u_2)]}{2\sqrt{(a_1 - u_1 t)^2 + (a_2 - u_2 t)^2}} = \\ &= \frac{a_1 u_1 + a_2 u_2 - t_2(u_1^2 + u_2^2)}{\sqrt{(a_1 - u_1 t)^2 + (a_2 - u_2 t)^2}}; \end{aligned}$$

При $t_1 = \frac{a_1 u_1 + a_2 u_2}{u_1^2 + u_2^2}$ имеем $l'(t_1) = 0$.

При переходе через t_1 $l'(t)$ меняет знак с минуса на плюс. Следовательно, в момент t_1 функция достигает минимума.

Отметим, что знаменатель $l'(t)$ может обратиться в нуль только при условии $\frac{a_1}{a_2} = \frac{u_1}{u_2}$, что соответствует случаю, когда машины должны встретиться на перекрестке. Не рассматривая этот частный случай, можно утверждать, что $l(t)$ в интервале $(0; \infty)$ имеет единственный

экстремум (минимум). В силу предыдущего функция достигает своего наименьшего значения на указанном интервале в точке минимума.

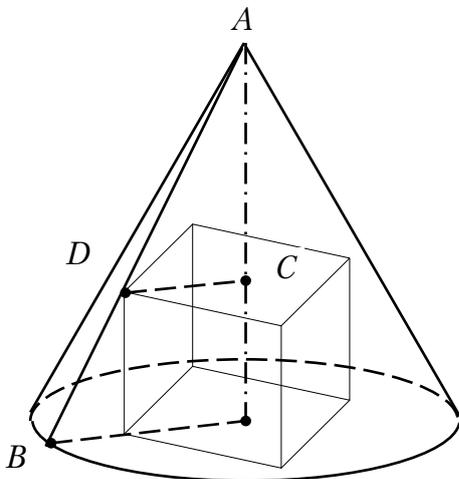


Рис. 1.7

11. Указать размеры прямоугольного параллелепипеда наибольшего возможного объема, вписанного в прямой круговой конус с радиусом основания R и высотой H (рис.1.7).

Решение.

Обозначим размеры основания параллелепипеда через x и y и высоту

через z . Тогда объем $V=xyz$. Используя то, что параллелепипед вписан в данный конус, можно найти соотношение между x , y , z , H и R . Действительно, из подобия треугольников OAB и CAD находим:

$$\frac{2(H-z)}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{H}{R},$$

откуда $z = H - \frac{H}{2R}\sqrt{x^2+y^2}$. Подставляя выражение для z в формулу объема, получим объем параллелепипеда как функцию двух переменных x и y :

$$V = \frac{H}{2R}xy(2R - \sqrt{x^2+y^2}).$$

Из рисунка видно, что x и y должны удовлетворять неравенству

$$\frac{1}{4}(x^2+y^2) \leq R^2, \text{ или } x^2+y^2 \leq 4R^2.$$

Таким образом, надо найти наибольшее значение $V(x,y)$ в замкнутой области (круг радиуса $2R$).

Найдем стационарные точки внутри области:

$$V'_x = \frac{H}{2R}y \frac{2R\sqrt{x^2+y^2} - 2x^2 - y^2}{\sqrt{x^2+y^2}},$$

$$V'_y = \frac{H}{2R}x \frac{2R\sqrt{x^2+y^2} - 2x^2 - y^2}{\sqrt{x^2+y^2}},$$

откуда $V'_x = 0$ и $V'_y = 0$ $x = y = \frac{2\sqrt{2}}{3}R$. (Значения $x=0$ и $y=0$ не рассматриваем, так как в этом случае $V=0$.) Тогда $z = \frac{H}{3}$. Объем при та-

ких размерах равен: $V = \frac{8}{27}R^2H$. Исследуем функцию $V(x,y)$ на границе области. Если $x^2+y^2 = 4R^2$, то $V=0$. Следовательно, полученные выше размеры $x = y = \frac{2\sqrt{2}}{3}R$ и $z = \frac{H}{3}$ дают действительно наибольший искомый объем.

12. Для хранения боевой техники необходимо построить помещение прямоугольной формы с площадью 200 м^2 , высота стены 3 м , крыша равноскатная на обе стороны под углом 30° к горизонту, без потолка (рис.1.8). Определить размеры помещения, при которых расход материалов будет минимальным.

Решение.

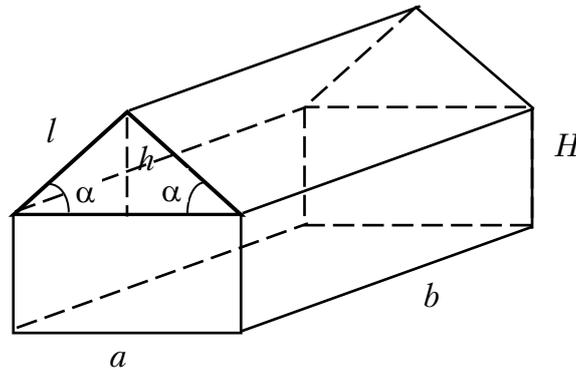


Рис. 1.8

Примем за критерий эффективности общую площадь поверхности помещения.

$$\begin{aligned}
 S &= ab + 2(a+b)H + 2 \cdot \frac{1}{2}ah + 2bl = \\
 &= \left| l = \frac{\alpha}{2 \cos 30^\circ} = \frac{a}{\sqrt{3}}; h = l \sin 30^\circ = \frac{l}{2} \right| = \\
 &= 200 + 6(a+b) + a \cdot \frac{a}{2\sqrt{3}} + 2b \frac{a}{\sqrt{3}} = \\
 &= 200 + 6(a+b) + \frac{1}{2\sqrt{3}}a^2 + \frac{2}{\sqrt{3}}ab.
 \end{aligned}$$

С учетом

$$b = \frac{200}{a},$$

получим

$$\begin{aligned}
 S &= 200 + 6\left(a + \frac{200}{a}\right) + \frac{1}{2\sqrt{3}}a^2 + \frac{2}{\sqrt{3}}ab = \\
 &= 200 \frac{\sqrt{3} + 2}{\sqrt{3}} + 6a + \frac{1200}{a} + \frac{a^2}{2\sqrt{3}}.
 \end{aligned}$$

Из $S'_a = 6 - \frac{1200}{a^2} + \frac{a}{\sqrt{3}} = 0$ получим

$$a^3 + 6\sqrt{3}a^2 - 1200\sqrt{3} = 0.$$

Решив полученное уравнение, находим

$$a = 10,07 \text{ м,}$$

$$b = \frac{200}{10,07} = 19,85 \text{ м.}$$

Из $S''_{aa} = 0 + 1200 \frac{2}{a^3} + \frac{1}{\sqrt{3}} > 0$ следует, что указанным a и b соответствует минимальный расход материалов.

13. Для хранения и охраны военного имущества требуется огородить забором прямоугольный участок площадью $S=1,5$ га и затем разделить его таким же забором на две равные части (рис.1.9). Определить размеры участка, при которых расход материалов на ограждение будет наименьшим.

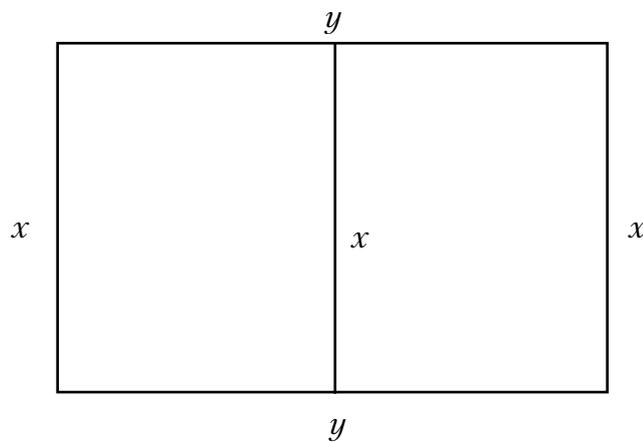


Рис. 1.9

1-й способ решения.

Примем за критерий эффективности общую длину забора

$$l = 3x + 2y.$$

По условию $xy=15000 \text{ м}^2$, следовательно, $y = \frac{15000}{x}$, тогда

$$l = 3x + \frac{3000}{x}.$$

Для определения l_{\min} найдем $l'(x) = 0$:

$$l'(x) = 3 - \frac{30000}{x^2} = 0 \Rightarrow x = 100 \text{ м}, y = \frac{15000}{100} = 150 \text{ м}.$$

Нетрудно проверить, что при $x=100$ м будет l_{\min} .

Действительно, $l''(x) = \frac{60000}{x^3} > 0$.

2-й способ решения.

Составим функцию Лагранжа

$$\Phi(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda \Phi_\lambda = 3x + 2y + \lambda(xy - 15000);$$

$$\left. \begin{aligned} \Phi'_x = 3 + \lambda y = 0; \lambda = -\frac{3}{y}; \\ \Phi'_y = 2 + \lambda x = 0; \lambda = -\frac{2}{x}; \\ \Phi'_\lambda = xy - 15000 = 0; \end{aligned} \right\}$$

2. ИНТЕГРАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ

1. Определить длину цепной линии*, уравнение которой имеет вид

$$y = \gamma \operatorname{ch} \frac{x}{\gamma},$$

где γ – постоянная величина, характеризующая собой точку максимального провеса (рис.2.1).

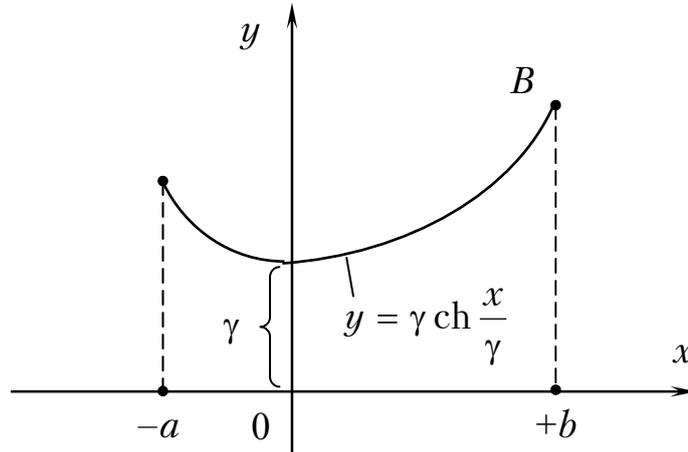


Рис. 2.1

Решение. Найдем длину цепной линии от произвольной точки $A(x=-a)$ до точки $B(x=b)$ при $\gamma=1$. Взяв производную от гиперболического косинуса, найдем:

$$y' = (\operatorname{ch} x)' = \operatorname{sh} x.$$

Откуда искомая длина

$$s = \int_{-a}^{+b} \sqrt{1 + \operatorname{sh}^2 x} dx = \int_{-a}^{+b} \operatorname{ch} x dx = \operatorname{sh} x \Big|_{-a}^{+b} = \operatorname{sh} b + \operatorname{sh} a,$$

так как согласно основному тождеству для гиперболических функций

$$1 + \operatorname{sh}^2 x = \operatorname{ch}^2 x.$$

* Название «цепная линия» происходит оттого, что такую форму принимает гибкая и нерастяжимая тяжелая нить (например цепь), подвешенная за оба конца. Задача вычисления длины цепной линии встречается при проектировании различных вантовых конструкций, в частности, цепных мостов.

Кроме того, поскольку гиперболический синус есть функция нечетная, то

$$-\operatorname{sh}(-a) = +\operatorname{sh} a.$$

В общем случае $\gamma \neq 1$, аналогично найдем, что длина дуги цепной линии, заключенная между точками $A(-a)$ и $B(+b)$, будет определяться формулой

$$s = \gamma \left(\operatorname{sh} \frac{b}{\gamma} + \operatorname{sh} \frac{a}{\gamma} \right).$$

Если абсцисса точки A будет положительной, а не отрицательной, как на рис.2.1, то

$$s = \gamma \left(\operatorname{sh} \frac{b}{\gamma} - \operatorname{sh} \frac{a}{\gamma} \right).$$

2. Часть шара ACA_1 , отсекаемая от него какой-нибудь плоскостью AA_1 , называется шаровым сегментом. Шаровой сегмент будем рассматривать как тело вращения, образующееся при вращении кругового сегмента ABA_1C вокруг его высоты BC (рис.2.2), и вычислим его объем.

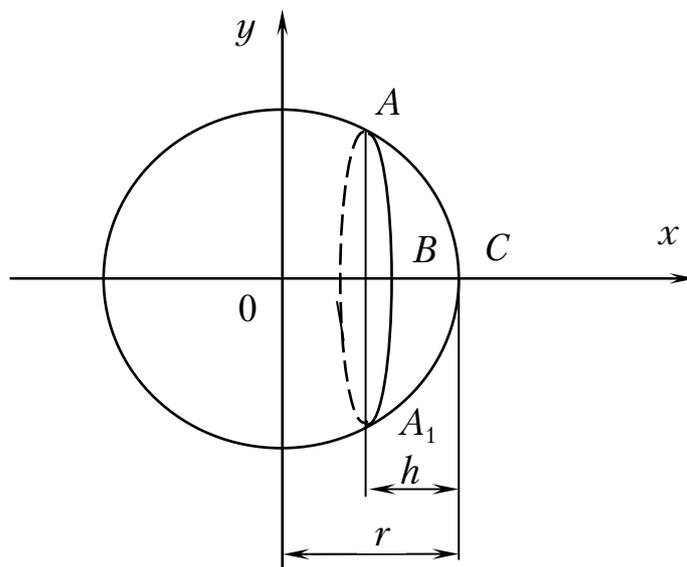


Рис.2.2

Дано: радиус круга r и высота h сегмента, уравнение линии, ограничивающей круговой сегмент, $x^2 + y^2 = r^2$, где x изменяется от $r-h$ до r .

Отсюда

$$y^2 = r^2 - x^2, a = r - h \text{ и } b = r.$$

Тогда объем шарового сегмента как тела вращения

$$\begin{aligned} v &= \pi \int_{r-h}^r (r^2 - x^2) dx = \pi \Big|_{r-h}^r \left(r^2 x - \frac{x^3}{3} \right) = \\ &= \pi \left\{ \left(r^3 - \frac{r^3}{3} \right) - \left[r^2(r-h) - \frac{(r-h)^3}{3} \right] \right\} = \pi h^2 \left(r - \frac{1}{3} h \right). \end{aligned}$$

Рассматривая πh^2 как площадь основания цилиндра, а $r - \frac{1}{3}h$ как его высоту, можно констатировать, что объем шарового сегмента равен объему цилиндра, у которого радиус основания есть высота сегмента, а высота цилиндра есть радиус шара, уменьшенный на одну треть высоты сегмента.

3. При вращении круга вокруг оси Ox , лежащей в плоскости круга и не пересекающей его, образуется тор. Вычислим объем тора (рис.2.3).

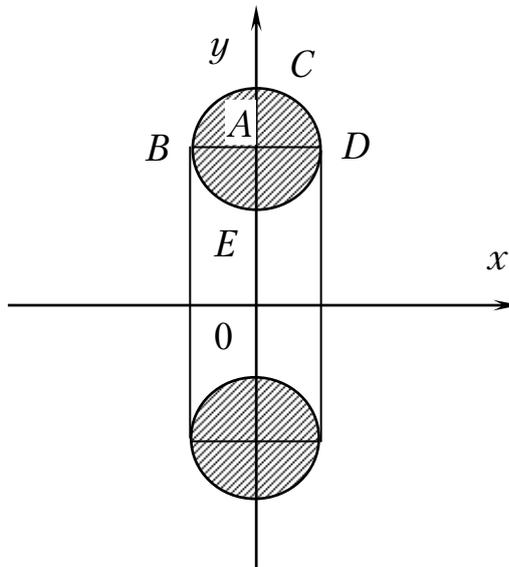


Рис.2.3

Пусть центр круга A лежит на оси Oy , его координаты $(0;b)$, радиус круга равен r . Тогда уравнение окружности этого круга

$$x^2 + (y - b)^2 = r^2.$$

Из этого уравнения находим два значения y :

$$y - b = \pm \sqrt{r^2 - x^2};$$

$$y_1 = b + \sqrt{r^2 - x^2}; \quad (1)$$

$$y_2 = b - \sqrt{r^2 - x^2}. \quad (2)$$

Уравнение (1) – для точек полуокружности BCD , (2) – для точек полуокружности BED .

Объем тора

$$v = \pi \int_{-r}^r (y_1^2 - y_2^2) dx = 2\pi \int_0^r (y_1^2 - y_2^2) dx = 2\pi \int_0^r (y_1 + y_2)(y_1 - y_2) dx.$$

С учетом

$$y_1 + y_2 = 2b, \quad y_1 - y_2 = 2\sqrt{r^2 - x^2}$$

после интегрирования найдем

$$v = 8\pi b \int_0^r \sqrt{r^2 - x^2} dx = 8\pi b \cdot \frac{\pi r^2}{4};$$

$$v = \pi r^2 \cdot 2\pi b,$$

т.е. объем тора равен произведению площади круга сечения тора на длину средней окружности тора.

4. Определить величину давления жидкости на одну сторону вертикально стоящей плоской пластины $aABb$ (рис.2.4).

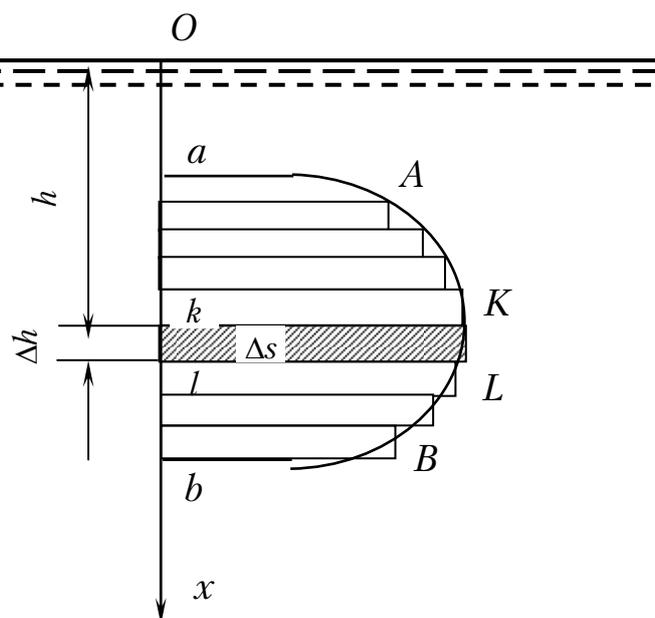


Рис. 2.4

Разделим отрезок ab на n частей, и длину полученных отрезков обозначим через Δh .

На каждом отрезке Δh построим, как на основании, прямоугольник с высотой, равной ширине пластины на уровне какой-нибудь точки отрезка Δh , например, на уровне начала отрезка Δh , площадь прямоугольника обозначим через Δs . Возьмем один из таких прямоугольников $kKlL$; пусть его верхняя сторона kK отстоит от свободной поверхности жидкости на расстоянии h и вообразим, что он расположен на глубине h не вертикально, а горизонтально. Тогда он испытывает давление, равное весу столба жидкости, имеющего основанием площадь Δs , а высотой h , т.е. равное $\gamma h \Delta s$, где γ – удельный вес жидкости.

Давление жидкости в каждой ее точке одинаковое во все стороны. Поэтому, если повернем прямоугольник $kKlL$ вокруг горизонтали kK до прежнего его вертикального положения, то он будет испытывать давление несколько большее, чем когда он был в горизонтальном положении, потому что давление в точках, лежащих ниже kK , несколько больше, чем на уровне kK .

Будем считать, что давление по всей высоте Δh одинаковое, такое, как и на линии kK , когда сила давления на прямоугольник равна $\gamma h \Delta s$.

Таким образом, получили элемент для вычисления силы давления на всю пластину.

Здесь

$$\Delta s = kK \Delta h,$$

причем kK имеет определенное значение для каждого значения h на отрезке $[a, b]$, является функцией от h . Обозначим ее через $f(h)$, контур пластины является графиком функции $f(h)$.

Тогда

$$\Delta s = f(h) \Delta h.$$

Будем считать, что функция $f(h)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$, график ее – контур $aABb$ – плавная линия, без скачков. Давление, взятое на все прямоугольники, есть интегральная сумма

$$\sum_a^b \gamma h \Delta s$$

и имеет предел при $\Delta h \rightarrow 0$. Этот предел и есть давление P жидкости на пластину $aABb$:

$$P = \lim_{\Delta h \rightarrow 0} \sum_a^b \gamma h \Delta s = \gamma \int_a^b h ds,$$

где $ds = f(h)dh$.

В этой формуле переменной интегрирования служит глубина погружения h , и до операции интегрирования надо площадь прямоугольника выразить через h .

5. Круглый иллюминатор диаметром 30 см в вертикальном борту судна наполовину погружен в воду (рис.2.5). Найти давление воды на погруженную часть в тихой воде.

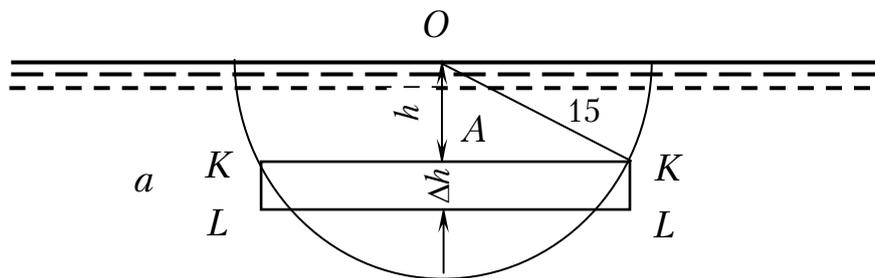


Рис. 2.5

Решение. Площадь прямоугольника

$$\Delta s = kK \Delta h.$$

Из треугольника AOK найдем, что $kK = 2\sqrt{15^2 - h^2} = 2\sqrt{225 - h^2}$. В данном случае $f(h) = 2\sqrt{225 - h^2}$, $\Delta s = f(h) \cdot \Delta h = 2\sqrt{225 - h^2} \Delta h$. Для воды $\gamma = 1$. Пределы интегрирования $a = 0$, $b = 15$. Давление воды на погруженную часть иллюминатора:

$$P = \gamma \int_a^b h \Delta s, \text{ или } P = 2 \int_0^{15} h \sqrt{225 - h^2} \Delta h.$$

Применим подстановку: $225 - h^2 = u^2$, $-2h dh = 2u du$, $h dh = -u du$; новые пределы интегрирования: $\alpha = \sqrt{225 - 0} = 15$, $\beta = \sqrt{225 - 15^2} = 0$. Получим:

$$P = -2 \int_{15}^0 u^2 du = -2 \int_0^{15} u^2 du = \frac{2}{3} \Big|_0^{15} u^3 = \frac{2}{3} \cdot 15^2 = 2250 \text{ Г.}$$

6. Газ заключен в цилиндр с подвижным поршнем (рис.2.6), имеющим площадь a кв.ед. Считая, что при увеличении объема газа соблюдается закон Бойля-Мариотта $p\nu=k$, вычислить работу, произведенную силой давления газа при увеличении его объема от ν_0 до ν_1 .

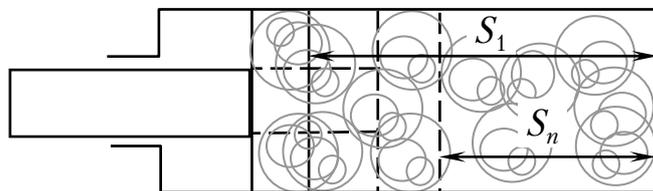


Рис.2.6

Решение. Пусть ν – объем газа в цилиндре, p – давление газа на единицу площади поршня. Так как площадь поршня равна a единиц, то сила давления на него равна pa . Предположим, что при увеличении объема от ν_0 до ν_1 поршень проходит путь $s = s_1 - s_0$; тогда работа силы давления

$$W = \int_{s_0}^{s_1} pad s.$$

Независимой переменной величиной следует считать не s , а ν – объем газа. Чтобы перейти к переменному ν , выразим p и ds через ν :

$$p = \frac{k}{\nu}.$$

Предположим, что поршень продвинулся на величину ds , когда объем газа увеличился на $d\nu$. Тогда

$$d\nu = ads \text{ и } ds = \frac{d\nu}{a}.$$

Подставляя выражения p и ds в интеграл и заменяя пределы интегрирования s_0 и s_1 соответствующими им пределами изменения объемов ν_0 и ν_1 , получим:

$$W = \int_{s_0}^{s_1} pad s = \int_{\nu_0}^{\nu_1} \frac{k}{\nu} a \frac{d\nu}{a} = k \int_{\nu_0}^{\nu_1} \frac{d\nu}{\nu} = k \ln \frac{\nu_1}{\nu_0}.$$

7. Вычислить работу, которую надо произвести, чтобы выкачать воду из резервуара конической формы с вершиной, обращенной книзу (рис.2.7). Резервуар наполнен доверху водой. Радиус основания конуса $R=1$ м, высота конуса $H=2$ м.

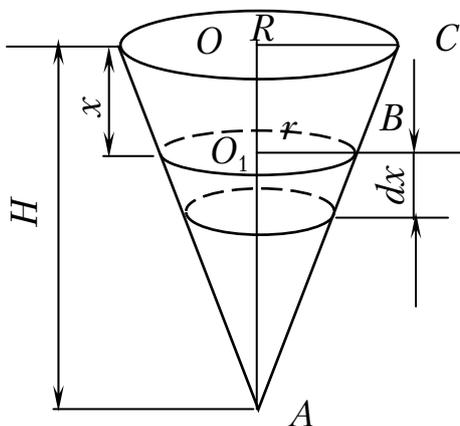


Рис. 2.7

Выделим на глубине x горизонтальный слой высотой dx . Работа A , совершаемая на поднятие слоя воды весом P , зависит от высоты его подъема x . Изменение глубины x на малую величину dx вызовет изменение объема V на величину

$$\Delta V = \pi r^2 dx$$

(элементарный слой примем за цилиндр ввиду малости dx , r – радиус основания слоя). Выразим r через переменную x и постоянные R и H . Из подобия треугольников AOC и AO_1B имеем $r:R=(H-x):H$.

Откуда $r = \frac{R}{H}(H-x) = R - \frac{R}{H}x$. Подставив в выражение для ΔV , получим:

$$\Delta V = \pi \left(R - \frac{R}{H}x \right)^2 dx.$$

Вес ΔP слоя воды в объеме ΔV составляет:

$$\Delta P = 9807\pi \left(R - \frac{R}{H}x \right)^2 dx.$$

При изменении P на величину ΔP совершаемая работа A изменится на величину

$$dA = 9807\pi \left(R - \frac{R}{H}x \right)^2 x dx.$$

Проинтегрировав это равенство при изменении x от 0 до H , получим:

$$\begin{aligned} A &= \int_0^H 9807\pi \left(R - \frac{R}{H}x \right)^2 x dx = \int_0^H 9807\pi R^2 \left(x - \frac{2x^2}{H} + \frac{x^3}{H^2} \right) dx = \\ &= 9807\pi R^2 \left[\frac{x^2}{2} - \frac{2x^3}{3H} + \frac{x^4}{4H^2} \right]_0^H = \frac{9807}{12} \pi R^2 H^2. \end{aligned}$$

Подставив числовые значения R и H , найдем:

$$A = 9807\pi l^2 \frac{2^2}{12} = 3269\pi.$$

8. Котел, имеющий форму полушара радиуса R , наполнен водой (рис.2.8). Какую работу необходимо совершить, чтобы выкачать воду из этого котла?

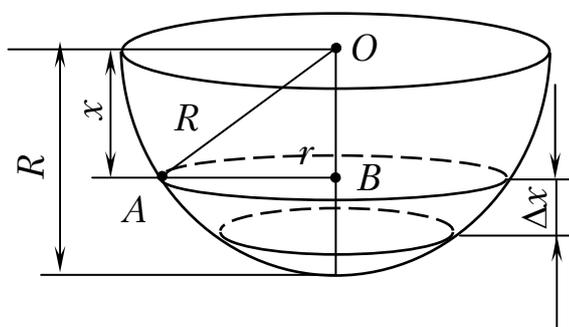


Рис.2.8

Решение. Разбив высоту котла R на n равных частей, получим толщину элементарного слоя: $\frac{R}{n} = \Delta x$. Пусть рассматриваемый слой находится на глубине x . Найдем радиус r элементарного слоя из $\triangle OAB$: $r^2 = R^2 - x^2$. Приняв слой за цилиндр радиуса r , получим элементарный объем:

$$\Delta V = \pi r^2 \Delta x = \pi (R^2 - x^2) \Delta x.$$

Вес ΔP слоя воды в объеме ΔV есть

$$\Delta P = 9807\pi(R^2 - x^2)\Delta x.$$

Элементарная работа, совершаемая при подъеме слоя воды ΔV , составляет:

$$\Delta A = \Delta P x = 9807\pi(R^2 - x^2)x\Delta x.$$

Сумма всех элементарных работ выражается приближенным равенством

$$A \approx \sum_0^R 9807\pi(R^2 - x^2)x\Delta x.$$

При $n \rightarrow \infty$ ($\Delta x \rightarrow 0$) получим

$$\begin{aligned} A &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \sum_0^R 9807\pi(R^2 - x^2)x\Delta x = \int_0^R 9807\pi(R^2 - x^2)x dx = \\ &= 9807\pi \left[\frac{R^2 x^2}{2} - \frac{x^4}{4} \right]_0^R = 9807\pi \left(\frac{R^4}{2} - \frac{R^4}{4} \right) \approx 2452\pi R^4 \text{ [Дж]}. \end{aligned}$$

9. Вычислить силу давления воды на вертикальный прямоугольный шлюз с основанием 20 м и высотой 5 м (уровень воды совпадает с верхним обрезом шлюза) (рис.2.9).

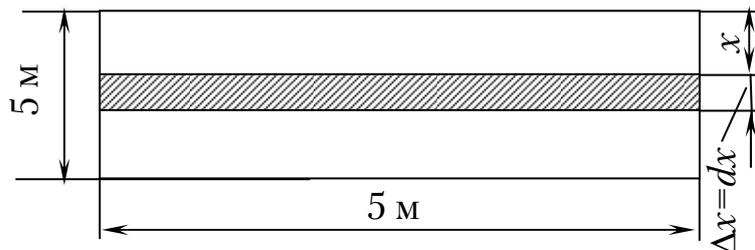


Рис. 2.9

Решение. Разделим стенку шлюза по ее высоте H на n горизонтальных полосок и выделим одну из них на глубине x . Пусть $\frac{H}{n} = \Delta x$, тогда площадь полоски составляет $\Delta S = 20\Delta x$.

Давление жидкости по закону Паскаля передается во все стороны с одинаковой силой, поэтому сила давления ΔP на всю полоску равна весу столба воды, имеющего основанием эту полоску и высоту, равную глубине x . Ввиду малости Δx будем считать, что все точки полоски находятся на глубине x .

Найдем силу давления воды ΔP , Н, на полоску ΔS :

$$\Delta P = 9,807\delta x \Delta S = 9807x \cdot 20\Delta x = 9807 \cdot 20x\Delta x,$$

где δ – плотность воды.

Каждая полоска испытывает различные силы давления в зависимости от глубины x .

Сложив элементарные силы давления ΔP , получим приближенное значение силы давления P , испытываемого шлюзом:

$$P \approx \sum_0^5 9807 \cdot 20x\Delta x.$$

При $n \rightarrow \infty$ ($\Delta x \rightarrow 0$) получим

$$\begin{aligned} P &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \sum_0^5 9807 \cdot 20x\Delta x = 9807 \cdot 20 \int_0^5 x dx = \\ &= 9807 \cdot 10x^2 \Big|_0^5 = 98070 \cdot 25 = 2451750 = 2,45 \text{ МН}. \end{aligned}$$

10. Вычислить силу давления воды на вертикальную плотину, имеющую форму равнобедренной трапеции с основаниями a и b ($a > b$) и высотой h (рис.2.10).

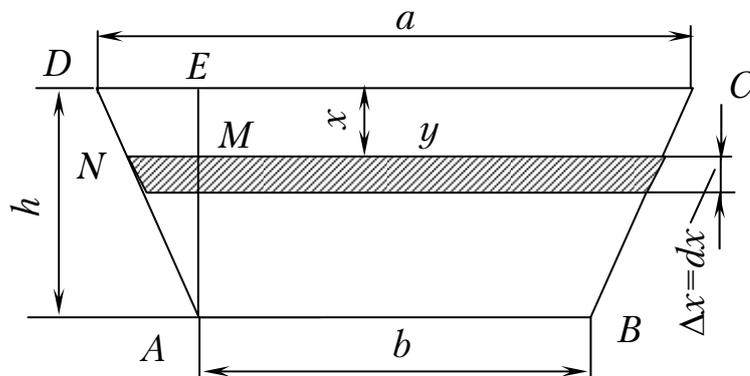


Рис. 2.10

Решение. Пусть заштрихованная полоска расположена на глубине x и имеет размеры y и dx . Приближенная величина силы давления воды на эту полоску составляет:

$$\Delta P = xydx = dP.$$

Выразим переменную y через x и размеры трапеции a , b и h . Из подобия треугольников ADE и ANM имеем $|DE|:|NM| = |AE|:|AM|$. $|DE| = (a-b)/2$, $|NM| = (y-b)/2$, $|AE| = h$, $|AM| = h-x$. Отсюда

$$\frac{a-b}{y-b} = \frac{h}{h-x},$$

или

$$y = a - \frac{a-b}{h}x.$$

Следовательно,

$$dP = x \left(a - \frac{a-b}{h}x \right) dx.$$

Интегрируя при изменении x от 0 до h , найдем:

$$P = \int_0^h \left(ax - \frac{a-b}{h}x^2 \right) dx = \left[\frac{ax^2}{2} - \frac{a-b}{3h}x^3 \right]_0^h = \frac{h^2(a+2b)}{6}.$$

11. Плоская пята (опорная часть вертикального вращающегося вала) представляет собой цилиндрическое тело, которое опирается на подпятник своим плоским основанием, имеющим форму кругового кольца, с внешним радиусом R и внутренним радиусом r_0 (рис.2.11). Определить мощность, затраченную на преодоление трения в пяте.

Пусть p – функция от радиуса-вектора r . При этом полное давление на пяту уравнивается давлением P со стороны вала.

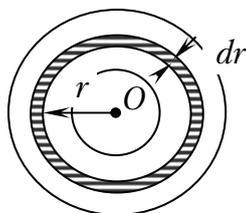
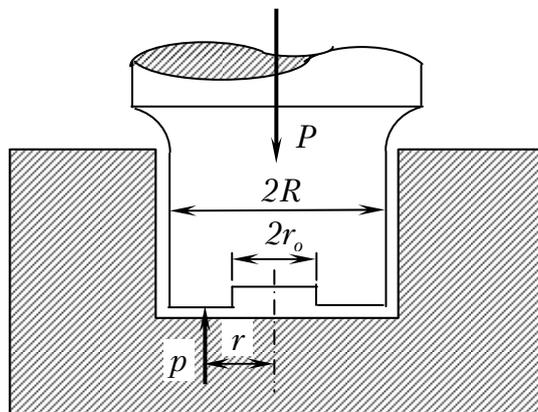


Рис.2.11

Для того чтобы вычислить это полное давление, обратимся к методу суммирования бесконечно малых элементов, причем за независимую переменную примем радиус r , изменяющийся от r_0 до R . Разбивая этот промежуток на части, разложим все кольцо на элементарные концентрические кольца, так что все давление P сложится из элементарных давлений, соответствующих отдельным кольцам. Рассмотрим далее кольцо, ограниченное окружностями радиусов r и $r+dr$ (на рисунке оно заштриховано). Площадь этого кольца есть $\pi(r+dr)^2 - \pi r^2 = 2\pi r + \pi(dr)^2$. Отбрасывая бесконечно малую второго порядка $\pi(dr)^2$, можно принять эту площадь приближенно равной $2\pi r dr$. Если p есть давление (на единицу площади) в точке, отстоящей от центра на расстояние r , то рассматриваемому кольцу отвечает элементарное давление

$$dP = p \cdot 2\pi r dr,$$

так что, суммируя, получим равенство

$$P = 2\pi \int_{r_0}^R p r dr. \quad (1)$$

Оно и выражает тот факт, что суммарное давление, распределенное по пяте, равно давлению со стороны вала.

Определим момент M силы трения во вращающейся пяте относительно оси вращения. Рассмотрим снова элементарное кольцо, о котором шла речь выше. Развивающаяся в нем сила трения, противодействующая вращению, будет

$$\mu dP = 2\pi \mu p r dr,$$

так что соответствующий ей элементарный момент

$$dM = 2\pi \mu p r^2 dr.$$

Отсюда полный момент трения

$$M = 2\pi \mu \int_{r_0}^R p r^2 dr. \quad (2)$$

Как известно из механики, работа A , производимая таким постоянным вращательным моментом M в одну секунду, получается умножением момента M на угловую скорость вращения ω , 1/с:

$$A = M\omega.$$

Для того чтобы довести до конца вычисление работы A , теперь нужно сделать те или иные допущения относительно закона распределения давления p на поверхности пяты.

Самым простым является предположение, что давление распределяется равномерно, т.е. что $p=c=\text{const}$. Если давление P равномерно распределяется по площади кольца $\pi(R^2 - r_0^2)$, то на единицу площади

$$\text{придется давление } p = c = \frac{P}{\pi(R^2 - r_0^2)}.$$

Подставляя это значение вместо p , получим:

$$M = 2\pi\mu \frac{P}{\pi(R^2 - r_0^2)} \int_{r_0}^R r^2 dr = \frac{2}{3}\mu P \frac{R^3 - r_0^3}{R^2 - r_0^2}.$$

В частности, для сплошной пяты будем иметь: $M = \frac{2}{3}\mu PR$.

Полученные результаты справедливы лишь для новых, не обтершихся пят. Дело в том, что при вращении вала точки пяты, дальше отстоящие от центра O , движутся с большей скоростью, в них работа трения больше и, соответственно, больше и изнашивание как пяты, так и подпятника; благодаря этому часть давления перелagается на более близкие к центру части пяты. Для старых приработавшихся пят обычно допускается, что давление на них распределяется так, что работа трения (на единицу площади), а с ней и изнашивание, всюду сохраняют постоянную величину. Если разделить элементарную работу $dA = \omega dM$ на площадь $2\pi r dr$ элементарного кольца, то указанное допущение представится в виде $\omega \mu pr = \text{const}$, откуда и $pr = c = \text{const}$ (p изменяется обратно пропорционально расстоянию r от центра). Подставляя c вместо pr в условие (1), найдем величину этой постоянной:

$$P = 2\pi c \int_{r_0}^R dr = 2\pi c (R - r_0),$$

откуда

$$c = \frac{P}{2\pi(R - r_0)}.$$

Наконец, заменив и в (2) pr полученным выражением, получим:

$$M = 2\pi\mu \frac{P}{\pi(R^2 - r_0^2)} \int_{r_0}^R r dr = \frac{1}{2}\mu P (R + r_0).$$

Для сплошной же пяты $M = \frac{1}{2}\mu PR$.

Легко видеть, что потеря мощности на трение в случае приработавшихся пят меньше, чем в случае новых пят.

12. В стенке резервуара имеется прямоугольное отверстие. Определить расход воды, т.е. объем воды Q , м³, вытекающий в 1 с (рис.2.12).

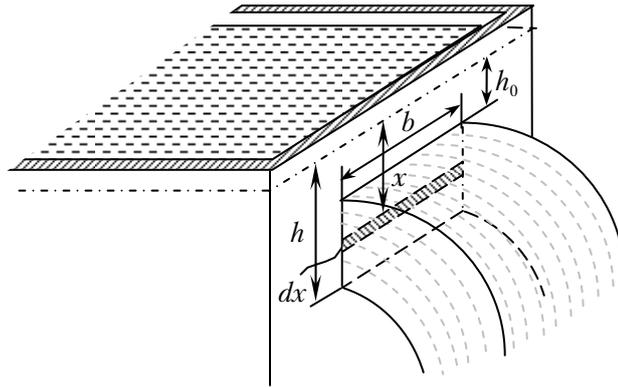


Рис. 2.12

Если в стенке резервуара, наполненного водой, на глубине h , м, под поверхностью воды имеется горизонтальная щель, то через нее вода будет вытекать со скоростью v , м/с: $v = \sqrt{2gh}$. (Эта формула доказывается в гидродинамике, известна под названием формулы Торичелли. Она имеет такой же вид, как и формула для скорости, приобретаемой тяжелой материальной точкой при падении с высоты h .)

Элементарной полоске ширины dx на глубине x отвечает скорость $v = \sqrt{2gx}$; так как ее площадь есть $b dx$, то расход воды через эту полоску

$$dQ = \sqrt{2gx} b dx.$$

Суммируя, найдем:

$$Q = \sqrt{2gb} \int_{h_0}^h x^{\frac{1}{2}} dx = \frac{2}{3} \sqrt{2gb} \left(h^{\frac{3}{2}} - h_0^{\frac{3}{2}} \right).$$

Фактический расход несколько менее вычисленного, ввиду наличия трения в жидкости и сжатия струи. Влияние этих факторов обык-

новенно учитывают с помощью некоторого эмпирического коэффициента $\mu < 1$ и полагают

$$Q = \frac{2}{3} \mu \sqrt{2gb} \left(h^{\frac{3}{2}} - h_0^{\frac{3}{2}} \right).$$

При $h_0 = 0$ получается формула для расхода воды через прямоугольный водослив:

$$Q = \frac{2}{3} \mu \sqrt{2gb} h^{\frac{3}{2}}.$$

13. Найти среднее значение давления p_m при изменении p от 2 до 10 Па, если давление p и объем v связаны соотношением

$$pv^{\frac{3}{2}} = 160.$$

Решение. При изменении давления p от 2 до 10 Па объем v пробегает отрезок $\left[4\sqrt[3]{4}, 4\sqrt[3]{100} \right]$, отсюда

$$\begin{aligned} p_m &= \frac{1}{4(\sqrt[3]{100} - \sqrt[3]{4})} \int_{4\sqrt[3]{4}}^{4\sqrt[3]{100}} 160v^{-\frac{3}{2}} dv = \\ &= -\frac{320}{4(\sqrt[3]{100} - \sqrt[3]{4})} v^{-\frac{1}{2}} \Big|_{4\sqrt[3]{4}}^{4\sqrt[3]{100}} = \frac{40}{\sqrt[3]{20}(\sqrt[3]{10} + \sqrt[3]{2})} \approx 4,32 \text{ Па}. \end{aligned}$$

14. Определить среднюю скорость v_m течения в поперечном сечении канала.

В гидравлике существует формула Базена, выражающая скорость v течения воды в широком прямоугольном канале в зависимости от глубины h рассматриваемой точки под свободной поверхностью,

$v = v_0 - 20\sqrt{HL} \left(\frac{h}{H} \right)^2$, где v_0 – скорость на свободной поверхности, H – глубина канала, L – его уклон.

Решение. Имеем

$$v_m = \frac{1}{H} \int_0^H \left[v_0 - 20\sqrt{HL} \left(\frac{h}{H} \right)^2 \right] dh = v_0 - \frac{20}{3} \sqrt{HL}.$$

15. Найти среднюю потребляемую мощность в цепи переменного тока, если сила тока I и напряжение u выражаются следующими формулами:

$$I = I_0 \cos(\omega t + \alpha);$$

$$u = u_0 \cos(\omega t + \alpha + \phi),$$

где ϕ – постоянный сдвиг фазы напряжения по сравнению с силой тока (параметры ω и α в среднюю мощность не войдут).

Решение.

Если функция $f(x)$ задана на бесконечном интервале $[0, \infty)$, то ее средним значением μ называется

$$\mu = \lim_{b \rightarrow \infty} \frac{1}{b} \int_0^b f(x) dx,$$

если этот предел существует.

Средняя потребляемая мощность

$$w_{\text{cp}} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T I_0 \cos(\omega t + \alpha) u_0 \cos(\omega t + \alpha + \phi) dt.$$

Учитывая, что

$$\cos \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} [\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)],$$

получим:

$$w_{\text{cp}} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{I_0 u_0}{2T} \int_0^T [\cos(2\omega t + 2\alpha + \phi) + \cos \phi] dt =$$

$$= \lim_{T \rightarrow \infty} \left\{ \frac{I_0 u_0}{4\omega} \cdot \frac{\sin(2\omega T + 2\alpha + \phi) - \sin(2\alpha + \phi)}{T} + \frac{I_0 u_0}{2} \cos \phi \right\} = \frac{I_0 u_0}{2} \cos \phi.$$

Отсюда понятно, почему в электротехнике придается такое важное значение величине $\cos \phi$.

16. Доказать, что площади $S_0, S_1, S_2, S_3, \dots$, ограниченные осью Ox и полуволнами кривой $y = e^{-\alpha x} \sin \beta x, x \geq 0$ (рис.2.13), образуют геометрическую прогрессию со знаменателем $q = e^{\frac{-\alpha\pi}{\beta}}$.

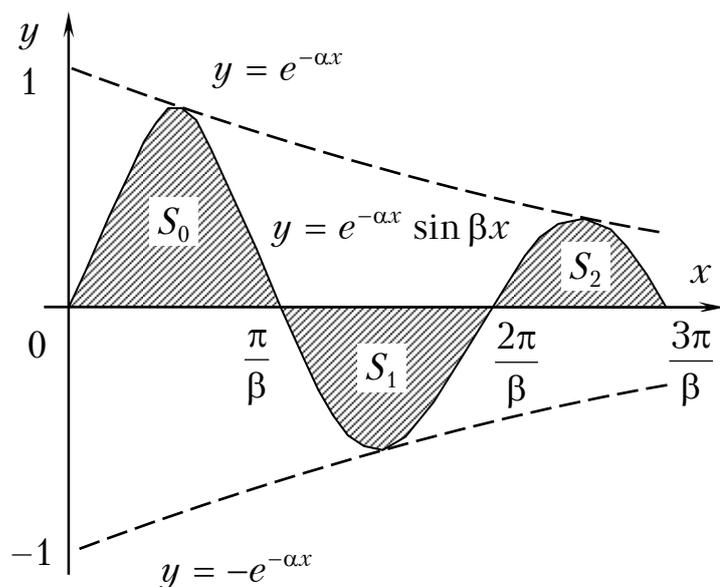


Рис. 2.13

Решение. Кривая пересекает положительную полуось Ox в точках, в которых $\sin \beta x = 0$, откуда

$$x_n = \frac{n\pi}{\beta}, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Функция $y = e^{-\alpha x} \sin \beta x$ положительна в интервалах (x_{2k}, x_{2k+1}) и отрицательна в интервалах (x_{2k+1}, x_{2k+2}) , т.е. знак функции в интервале (x_n, x_{n+1}) совпадает со знаком числа $(-1)^n$. Поэтому

$$S_n = \int_{\frac{n\pi}{\beta}}^{\frac{(n+1)\pi}{\beta}} |y| dx = (-1)^n \int_{\frac{n\pi}{\beta}}^{\frac{(n+1)\pi}{\beta}} e^{-\alpha x} \sin \beta x dx.$$

Но неопределенный интеграл равен:

$$\int e^{-\alpha x} \sin \beta x dx = -\frac{e^{-\alpha x}}{\alpha^2 + \beta^2} (\alpha \sin \beta x + \beta \cos \beta x) + C.$$

Следовательно,

$$S_n = (-1)^{n+1} \left[\frac{e^{-\alpha x}}{\alpha^2 + \beta^2} (\alpha \sin \beta x + \beta \cos \beta x) \right]_{\frac{n\pi}{\beta}}^{\frac{(n+1)\pi}{\beta}} =$$

$$= \frac{(-1)^{n+1}}{\alpha^2 + \beta^2} \left[e^{-\alpha(n+1)\frac{\pi}{\beta}} \beta (-1)^{n+1} - e^{-\alpha n \frac{\pi}{\beta}} \beta (-1)^n \right] = \frac{\beta}{\alpha^2 + \beta^2} e^{-\alpha n \frac{\pi}{\beta}} \left(1 + e^{-\alpha \frac{\pi}{\beta}} \right).$$

Отсюда

$$q = \frac{S_{n+1}}{S_n} = \frac{e^{-\alpha(n+1)\frac{\pi}{\beta}}}{e^{-\alpha n \frac{\pi}{\beta}}} = e^{-\alpha \frac{\pi}{\beta}},$$

что и требовалось доказать.

17. Пусть бесконечная (в обе стороны) балка, лежащая на упругом основании, изгибается сосредоточенной силой P . Если совместить ось Ox с первоначальным положением оси балки (до изгиба), а ось Oy провести через точку O приложения силы и направить вниз, то после изгиба ось балки будет описываться уравнением

$$y = \frac{P\alpha}{2k} e^{-\alpha|x|} (\cos \alpha x + \sin \alpha |x|),$$

где α и k – некоторые постоянные.

Вычислить потенциальную энергию упругой деформации по формуле

$$W = Ee \int_0^{\infty} (y'')^2 dx \quad (E, e - \text{const}).$$

Решение. Найдем y'' :

$$\begin{aligned} y'' &= \frac{P\alpha^3}{k} e^{-\alpha x} [(\cos \alpha x + \sin \alpha x) - 2(-\sin \alpha x + \cos \alpha x) + (-\sin \alpha x - \cos \alpha x)] = \\ &= \frac{P\alpha^3}{k} e^{-\alpha x} (\sin \alpha x - \cos \alpha x). \end{aligned}$$

Отсюда

$$\begin{aligned} W &= \frac{P^2 \alpha^6 Ee}{k^2} \int_0^{\infty} e^{-2\alpha x} (1 - 2 \sin \alpha x \cos \alpha x) dx = \\ &= \frac{P^2 \alpha^6 Ee}{k^2} \left[\frac{1}{2\alpha} - \frac{2\alpha}{4\alpha^2 + 4\alpha^2} \right] = \frac{P^2 \alpha^6 Ee}{4k^2}. \end{aligned}$$

18. Найти количество тепла, выделяемое переменным синусоидальным током $I = I_0 \sin\left(\frac{2\pi}{T}t - \phi\right)$ в течение периода T в проводнике с сопротивлением R .

Решение. Для постоянного тока количество тепла в единицу времени определяется законом Джоуля-Ленца

$$Q = 0,24I^2R.$$

При переменном токе дифференциал количества тепла равен:

$$dQ = 0,24I^2(t)Rdt,$$

откуда

$$Q = 0,24R \int_{t_1}^{t_2} I^2 dt.$$

В рассматриваемом случае

$$Q = 0,24RI_0^2 \int_0^T \sin^2\left(\frac{2\pi}{T}t - \phi\right) dt = 0,12RI_0^2 \left[t - \frac{T}{2\pi} \frac{\sin^2\left(\frac{2\pi}{T}t - \phi\right)}{2} \right]_0^T = 0,12RTI_0^2.$$

3. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

1. Описать процесс роста популяций бактерий, если скорость ее роста в момент t равна $0,1$ размера популяции $x'(t)$.

Решение. По условию скорость роста $\frac{dx(t)}{dt}$ в момент времени t равна $0,1x'(t)$, то есть

$$\frac{dx(t)}{dt} = 0,1x'(t).$$

Получили дифференциальное уравнение первого порядка.

2. Определить размер популяции бактерий после ее роста в течение 4 часов при начальном размере популяции $x(0) = 1000$, если удельная скорость роста равна $\frac{1}{1+2t}$.

Решение. Удельная скорость роста равна $\frac{x'(t)}{x(t)}$. Так что справедливо

$$\frac{x'(t)}{x(t)} = \frac{1}{1+2t} \Rightarrow \ln x(t) = \frac{1}{2} \ln(1+2t) + c$$
$$(x(t) \geq 0, t > 0).$$

Откуда

$$x(t) = e^c \sqrt{1+2t}.$$

Пусть $e^c = k$, тогда

$$x(t) = k\sqrt{1+2t}.$$

Из $x(0) = 1000$ следует $k = 1000$. Искомое решение имеет вид

$$x(t) = 1000\sqrt{1+2t}.$$

Размер популяции после 4 часов $x(4) = 1000\sqrt{1+8} = 3000$.

3. При влиянии глюкозы в кровеносную систему контролируется ее количество $G(t)$ в крови пациента. В предположении, что глюкоза вводится в кровь с постоянной скоростью V , а разлагается и удаляется из кровеносной системы со скоростью, пропорциональной имеющемуся количеству, определить значение глюкозы в крови.

Решение. Функция $G(t)$ удовлетворяет неоднородному линейному уравнению первого порядка

$$\frac{dG(t)}{dt} = V - aG(t),$$

где a – положительная постоянная.

Решение имеет вид

$$G(t) = ce^{-at} + \frac{V}{a}.$$

Постоянную c можно выразить через начальное количество глюкозы в крови $G(0)$, то есть

$$G(0) = c + \frac{V}{a}.$$

Тогда

$$G(t) = \frac{V}{a} + \left(G(0) - \frac{V}{a} \right) e^{-at}.$$

С увеличением времени $G(t)$ приближается к пределу, равному $\frac{V}{a}$. Это и есть равновесное количество глюкозы в крови.

4. Скорость популяции $x(t)$ в расчете на одну особь представляет собой разность между рождаемостью $\beta = const$ и средней смертностью $kx(t)$ (увеличение смертности с ростом популяции может происходить, например, вследствие эффектов скученности или усиливающейся конкуренции за доступные пищевые ресурсы).

Определить модель роста популяции. Для случая $x(0) = 10$, $\beta = 1$, $k = 0,001$ определить равновесный размер популяции.

Решение. Удельная скорость роста популяции

$$\frac{1}{x} \frac{dx}{dt} = \beta - kx(t).$$

Откуда

$$\int \frac{1}{x(\beta - kx)} dx = \int dt.$$

С учетом

$$\frac{1}{x(\beta - kx)} = \frac{1}{\beta x} + \frac{k}{\beta(\beta - kx)},$$

интегрируя, получим

$$x(t) = \frac{x(0)\beta e^{\beta t}}{\beta - kx(0) + kx(0)e^{\beta t}}.$$

При $x(0) = 10$, в силу предыдущего, получим:

$$x(t) = \frac{e^{0,1t}}{0,09 + 0,01e^{0,1t}}.$$

При $t \rightarrow \infty$ популяция $x(t)$ приближается к равновесному размеру $\frac{\beta}{k} = 100$. При таком размере популяции рождаемость в точности компенсирует смертность.

5. Взаимное влияние популяций двух конкурирующих видов на скорости их роста описывается однородной линейной системой

$$x'(t) = 2x(t) - y(t),$$

$$y'(t) = -x(t) + 2y(t).$$

Определить численности видов в любой последующий момент времени при размерах начальных популяций $x(0) = 100$ и $y(0) = 200$ особей.

Решение. Из первого уравнения следует

$$x''(t) = 2x'(t) - y'(t).$$

С учетом

$$y(t) = 2x(t) - x'(t)$$

из второго уравнения получим

$$y'(t) = -x(t) + 2y(t) = -x(t) + 2(2x(t) - x'(t)).$$

Откуда следует

$$x''(t) - 4x'(t) + 3x(t) = 0.$$

Общее решение этого уравнения имеет вид

$$x(t) = c_1 e^{3t} + c_2 e^t,$$

где c_1 и c_2 – постоянные.

Из первого уравнения получим

$$y(t) = 2x(t) - x'(t) = -c_1 e^{3t} + c_2 e^t.$$

Из начальных условий следует

$$\begin{aligned}c_1 + c_2 &= 100; \\ -c_1 + c_2 &= 200.\end{aligned}$$

Откуда искомое решение имеет вид

$$\begin{aligned}x(t) &= 150e^t - 50e^{3t}; \\ y(t) &= 150e^t + 50e^{3t}.\end{aligned}$$

Вымирание первого вида происходит в момент времени t_0 , когда

$$\begin{aligned}x(t_0) &= 150e^{t_0} - 50e^{3t_0} = 0; \\ y(t_0) &= 150e^{t_0} + 50e^{3t_0}.\end{aligned}$$

Это имеет место при $e^{2t_0} = 3$.

Откуда

$$t_0 = \frac{\ln 3}{2}.$$

При $t > t_0$ второй вид продолжает расти в соответствии с уравнением

$$y'(t) = 2y(t).$$

Откуда

$$y(t) = ce^{2t}.$$

С учетом

$$y(t_0) = 150e^{t_0} + 50e^{3t_0} = ce^{2t_0}$$

получим

$$c = \frac{y(t_0)}{3}.$$

Тогда функция $y(t)$, определяющая рост популяции второго вида после вымирания первого, имеет вид

$$y(t) = \frac{y(t_0)}{3} e^{2t}$$

или

$$y(t) = y(t_0) e^{2(t-t_0)}, \quad t > t_0.$$

6. Локомотив движется по горизонтальному участку пути со скоростью V . За какое время t , и на каком расстоянии S , он будет остановлен тормозом, если сопротивление движению после начала торможения пропорционально весу локомотива mq ?

Решение. По второму закону Ньютона будем иметь

$$m \frac{d^2 S}{dt^2} = -kmq,$$

где k – коэффициент пропорциональности.

Откуда

$$\frac{dS}{dt} = -kqt + c_1, S = -\frac{kq}{2}t^2 + c_1t + c_2.$$

Значения c_1 и c_2 определяются из начальных условий:

$$S|_{t=0} = 0, \frac{dS}{dt}|_{t=0} = V,$$

а именно

$$c_1 = 0, c_2 = V.$$

Откуда равнение движения локомотива имеет вид

$$S = Vt - \frac{kq}{2}t^2.$$

Из $\frac{dS}{dt} = 0$ определится время торможения:

$$t_{\text{т}} = \frac{V}{kq}.$$

При этом

$$S(t_{\text{т}}) = S_{\text{т}} = \frac{V^2}{2kq}.$$

7. Найти форму зеркала, отражающего все лучи, выходящие из данной точки O параллельно данному направлению Oy .

Решение. Пусть кривая $y = y(x)$ определяет меридиальное сечение L зеркала (рис. 3.1).

Пусть далее $M(x, y)$ – произвольная точка этой кривой. Так как угол падения равен углу отражения, имеем:

$$\varphi_2 = \varphi_3 = \varphi_1.$$

Откуда следует, что $|\overline{ON}| = |\overline{OM}|$.

Справедливо:

$$|\overline{OM}| = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Откуда

$$N(0, -\sqrt{x^2 + y^2}).$$

С другой стороны, из уравнения касательной

$$Y - y = k(X - x), (k = y'(x) = \operatorname{tg} \varphi_1)$$

при $X = 0$ следует:

$$Y = y - y'(x).$$

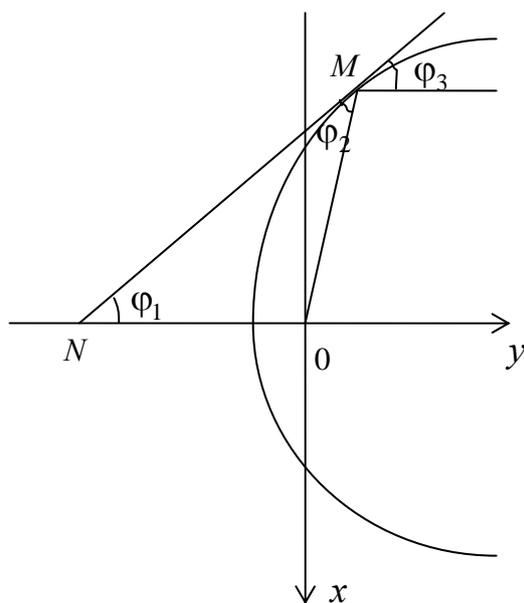


Рис. 3.1

С учетом предыдущего имеем

$$y' = \frac{x}{2} + \sqrt{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2}.$$

Получили однородное дифференциальное уравнение первого порядка. Его общий интеграл имеет вид

$$y = \frac{x^2 - c^2}{2c},$$

которому соответствует семейство парабол, симметричных относительно оси Oy с общим фокусом в заданной точке $O(0,0)$. Кривая L будет одна из них. Тогда искомая поверхность зеркала есть параболоид, образованной вращением кривой L вокруг ее оси.

Отметим, что если на зеркало падает параллельный пучок света, то после отражения лучи сфокусируются с точки O .

8. Найти дифференциальное уравнение параллельного колебания контура (рис.3.2) с потерями, считая, что входным сигналом служит ток $i(t)$, а выходным сигналом является напряжение $u(t)$ на контуре

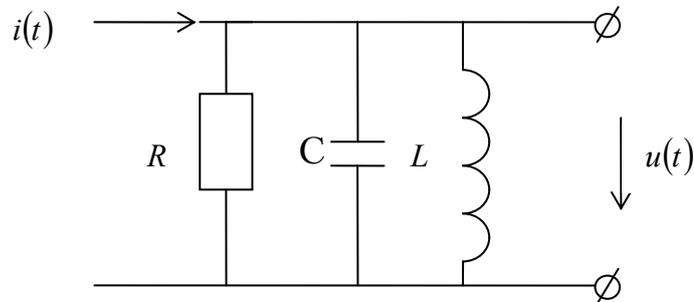


Рис. 3.2

Решение. Суммируя токи

$$i_C = C \frac{du}{dt}, i_L = \frac{1}{L} \int_{-\infty}^t u d\xi, i_R = \frac{u}{R},$$

получаем уравнение

$$C \frac{du}{dt} + \frac{1}{L} \int_{-\infty}^t u d\xi + \frac{u}{R} = i,$$

которое путем однократного дифференцирования по времени приводится к виду

$$\frac{d^2 u}{dt^2} + 2\alpha \frac{du}{dt} + \omega_0^2 u = \frac{1}{C} \frac{di}{dt},$$

где $\alpha = \frac{1}{2RC}$ – коэффициент затухания контура;

$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ – частота собственных колебаний в контуре без потерь.

9. Определить апериодическую разрядку конденсатора (рис.3.3) емкостью C , предварительно заряженного до напряжения U_0 и в момент времени $t = 0$ замыкаемого на резистор сопротивления R .

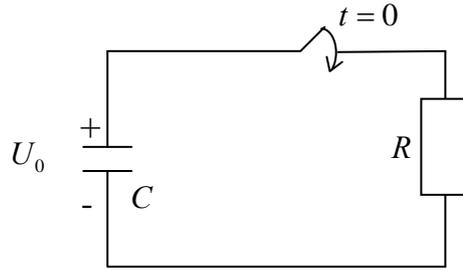


Рис. 3.3

Решение. Цепь описывается следующим дифференциальным уравнением относительно переменной U_C – напряжения на конденсаторе:

$$\tau \frac{dU_C}{dt} + U_C = 0$$

при единственном начальном условии $U_C(0) = U_0$.

Характеристическое уравнение $\tau\lambda + 1 = 0$ имеет корень $\lambda = -\frac{1}{\tau}$.

Отсюда находим общее решение уравнения свободных колебаний:

$$U_C(t) = ce^{-\frac{1}{\tau}t}$$

Для того чтобы удовлетворить начальному условию, следует положить $C = U_0$. Окончательно имеем

$$U_C(t) = U_0 e^{-\frac{1}{\tau}t}$$

Итак, отрицательному вещественному корню характеристического уравнения отвечает собственное колебание, экспоненциально убывающее по времени.

Постоянная времени τ данной цепи есть промежуток времени, а в течение которого свободный процесс затухает в $t = 2,71828\dots$ раз.

10. Описать колебательную разрядку конденсатора.

Решение. Пусть предыдущий пример усложняется тем, что в цепи имеется также индуктивный элемент L (рис.3.4). Дифференциальное уравнение цепи относительно тока $i(t)$, составленное на основании второго закона Кирхгофа, имеет вид

$$\frac{d^2i}{dt^2} + 2\alpha \frac{di}{dt} + \omega_0^2 i = 0,$$

где $\alpha = \frac{R}{2L}$, $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$.

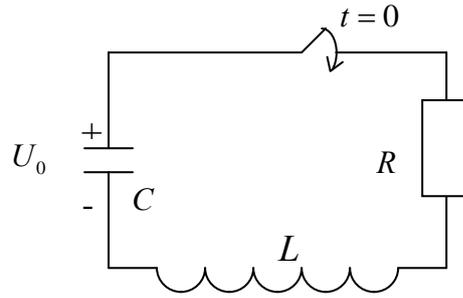


Рис. 3.4

Первое начальное условие $i(0) = 0$ обусловлено наличием в контуре индуктивного элемента.

В начальный момент времени напряжение на конденсаторе уравновешивается ЭДС самоиндукции:

$$U_0 + L \left. \frac{di}{dt} \right|_{t=0} = 0,$$

откуда следует *второе* начальное условие:

$$\left. \frac{di}{dt} \right|_{t=0} = -\frac{U_0}{L}.$$

Характеристическое уравнение данной цепи

$$\lambda^2 + 2\alpha\lambda + \omega_0^2 = 0$$

имеет комплексно-сопряженные корни

$$\lambda_{1,2} = -\alpha \pm j\sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2} = -\alpha \pm j\omega_C,$$

где ω_C – частота собственных колебаний системы.

Если потери в контуре достаточно малы, то $\omega_0 \gg \alpha$, поэтому $\omega_C \approx \omega_0$.

Общее решение однородного уравнения

$$i(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t}$$

содержит коэффициенты c_1 и c_2 , удовлетворяющие системе алгебраических уравнений (см. начальные условия):

$$c_1 + c_2 = 0;$$

$$\lambda_1 c_1 + \lambda_2 c_2 = -\frac{U_0}{L},$$

откуда

$$c_1 = \frac{-U_0}{j2\omega_0 L}, \quad c_2 = \frac{U_0}{j2\omega_0 L}.$$

Подставив эти коэффициенты в выражение для $i(t)$, получим окончательно:

$$i(t) = -\frac{U_0}{\omega_c L} e^{-\alpha t} \sin \omega_c t.$$

11. В железнодорожных скальных выемках для защиты кюветов от попадания в них каменных осей с откосов устраивается «полка» DC (рис.3.5). Учитывая возможность движения камня из наивысшей точки A откоса и полагая при этом его начальную скорость V_A равной нулю, определить минимальную ширину полки b и скорость V_c , с которой камень падает на нее. Предполагается, что по участку AB откоса, составляющему угол α с горизонтом и имеющему длину l , камень движется τ секунд.

Коэффициент трения скольжения камня на участке AB $f = \text{const}$, а сопротивление воздуха пренебрежимо мало.

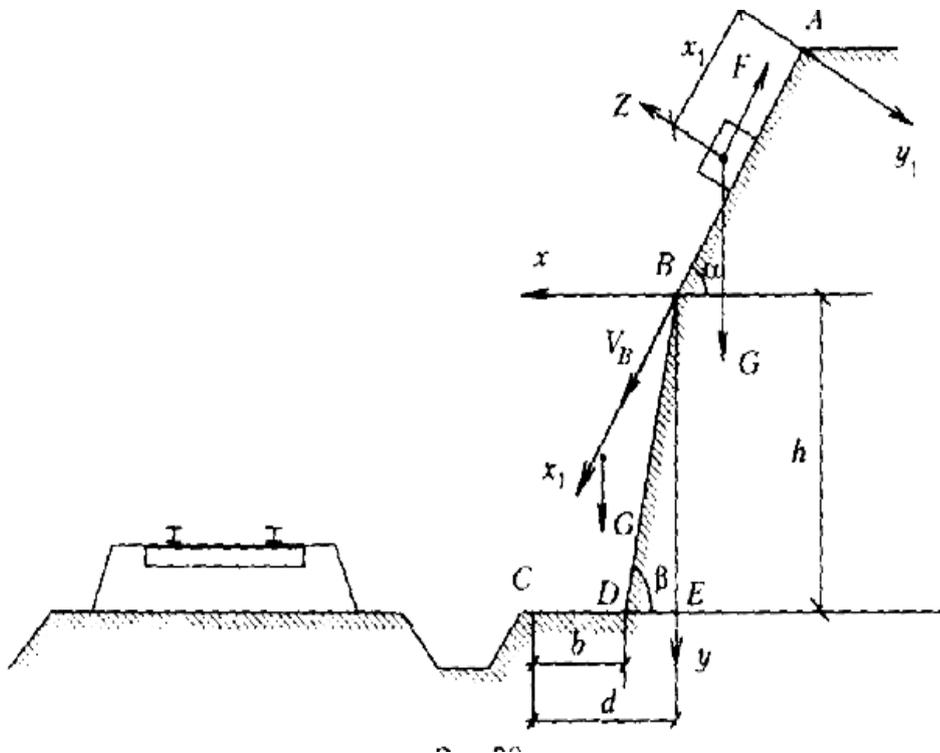


Рис. 3.5

Решение. Рассмотрим движение камня на участке AB . Принимая камень за материальную точку, составим дифференциальное уравнение движения камня на участке AB :

$$m\ddot{x}_1 = G \sin \alpha - fG \cos \alpha,$$

где $F = fN = fG \cos \beta$ – сила трения;

или

$$\ddot{x}_1 = q \sin \alpha - fq \cos \alpha.$$

Интегрируя дважды, получим:

$$\dot{x}_1 = (q \sin \alpha - fq \cos \alpha)t + c_1;$$

$$x_1 = \frac{1}{2}(q \sin \alpha - fq \cos \alpha)t^2 + c_1t + c_2.$$

С учетом $x_{10} = 0$ и $\dot{x}_{10} = 0$ при $t = 0$ получим

$$c_1 = 0, c_2 = 0.$$

Откуда

$$\dot{x}_1 = (q \sin \alpha - fq \cos \alpha)t;$$

$$x_1 = \frac{1}{2}(q \sin \alpha - fq \cos \alpha)t^2.$$

Для момента τ , когда камень покидает участок, имеем

$$\dot{x}_1 = V_B, x_1 = l,$$

то есть

$$V_B = (q \sin \alpha - fq \cos \alpha)\tau;$$

$$l = \frac{1}{2}(q \sin \alpha - fq \cos \alpha)\tau^2 = \frac{V_B \tau}{2}.$$

Откуда

$$V_B = \frac{2l}{\tau}.$$

Рассмотрим движение камня от точки B до точки C .

Дифференциальные уравнения его движения

$$m\ddot{x} = 0;$$

$$m\ddot{y} = G.$$

Интегрируя первое из этих уравнений, получим:

$$\dot{x} = c_3;$$

$$x = c_3t + c_4.$$

С учетом $x_0 = 0, \dot{x}_0 = V_B \cos \alpha$ при $t = 0$ получим

$$c_3 = V_B \cos \alpha, c_4 = 0.$$

Откуда

$$\begin{aligned}\dot{x} &= V_B \cos \alpha; \\ x &= (V_B \cos \alpha)t.\end{aligned}$$

Интегрируя уравнение $m\ddot{y} = G$, имеем:

$$\begin{aligned}\dot{y} &= qt + c_5; \\ y &= \frac{1}{2}qt^2 + c_5t + c_6.\end{aligned}$$

С учетом $y_0 = 0, \dot{y}_0 = V_B \sin \alpha$ при $t = 0$ найдем

$$c_5 = V_B \sin \alpha, c_6 = 0.$$

Окончательно:

$$\begin{aligned}\dot{y} &= qt + V_B \sin \alpha; \\ y &= \frac{1}{2}qt^2 + (V_B \sin \alpha)t.\end{aligned}$$

Таким образом, уравнение движения камня имеют вид:

$$\begin{aligned}x &= V_B \cos \alpha \cdot t; \\ y &= \frac{1}{2}qt^2 + V_B \sin \alpha \cdot t.\end{aligned}$$

Уравнение его траектории найдем, исключив параметр t из уравнений движения. Определив t

Из первого уравнения и подставив его значение во второе, получим уравнение параболы:

$$y = \frac{q}{2V_B^2 \cos^2 \alpha} x^2 + x \operatorname{tg} \alpha.$$

В момент падения

$$y = h, x = d,$$

то есть

$$h = \frac{q}{2V_B^2 \cos^2 \alpha} d^2 + d \operatorname{tg} \alpha$$

или

$$\frac{q}{2V_B^2 \cos^2 \alpha} d^2 + d \operatorname{tg} \alpha - h = 0.$$

Поскольку траекторией движения камня является ветвь параболы с положительными абсциссами ее точек, то d является положительным корнем полученного уравнения.

Минимальная ширина полки определится из условия

$$b = d - ED = d - \frac{h}{\operatorname{tg}\beta}.$$

Используя уравнение движения камня $x = V_B \cos \alpha \cdot t$, найдем время T движения камня от точки B до точки C из выражения:

$$d = V_B \cos \alpha \cdot T.$$

Откуда

$$T = \frac{d}{V_B \cos \alpha}.$$

Скорость камня при падении найдем через проекции скорости на оси координат:

$$\dot{x} = V_B \cos \alpha;$$

$$\dot{y} = qt + V_B \sin \alpha$$

по формуле

$$V = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}.$$

Для момента падения ($t = T$) имеем

$$V_C = \sqrt{(V_B \cos \alpha)^2 + (qT + V_B \sin \alpha)^2}.$$

12. Консольная балка длиной l нагружена сосредоточенной силой P в точке B . Найти уравнение упругой линии (кривой изгиба) и определить величину прогиба h конца балки (рис.3.6).

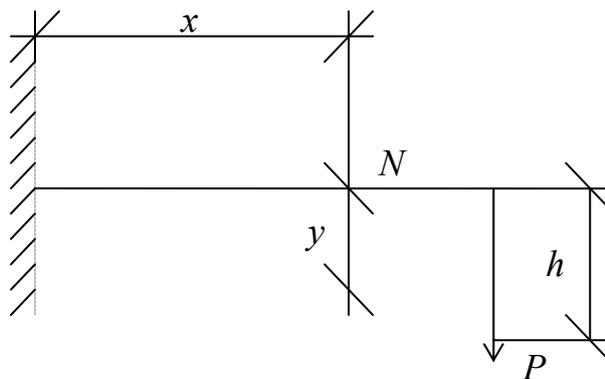


Рис. 3.6

Решение. Изгибающий момент M для сечения с центром в точке $N(x, y)$ равен моменту силы P относительно точки N , то есть

$$M(x) = P(l - x).$$

В курсе сопротивления материалов показывается, что радиус кривизны упругой линии для балок любого сечения

$$R = \frac{EJ}{M(x)}, \quad EJ = \text{const}.$$

С учетом

$$R = \frac{(1 + y'^2)^{\frac{3}{2}}}{y''}$$

получим

$$\frac{(1 + y'^2)^{\frac{3}{2}}}{y''} = \frac{EJ}{M(x)}.$$

Предполагая изгибы балок малыми, можно считать, что в любой ее точке угловой коэффициент касательной y' мало отличается от нуля, поэтому величиной $(y')^2$ можно пренебречь.

Откуда получим дифференциальное уравнение относительно y :

$$y'' = \frac{P}{EJ}(l - x).$$

Интегрируя, найдем:

$$y' = -\frac{P}{EJ} \frac{(l - x)^2}{2} + c_1;$$

$$y = \frac{P}{EJ} \frac{(l - x)^3}{6} + c_1 x + c_2.$$

С учетом условий $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$ получим

$$\frac{P}{EJ} \frac{l^3}{6} + c_2 = 0,$$

$$-\frac{P}{EJ} \frac{l^2}{2} + c_1 = 0.$$

Откуда

$$c_1 = \frac{P l^2}{EJ 2}, c_2 = -\frac{P l^3}{EJ 6}.$$

Так что

$$y = \frac{P}{2EJ} \left(lx^2 - \frac{x^3}{3} \right).$$

Прогиб балки в точке B определится при $x = l$:

$$h = \frac{1}{EJ} \frac{Pl^3}{3}.$$

13. Цилиндр с жидкостью, налитой до глубины z_0 , приведен во вращательное движение вокруг вертикальной оси Oz с угловой скоростью ω_0 (рис.3.7). Определить форму поверхности уровня.

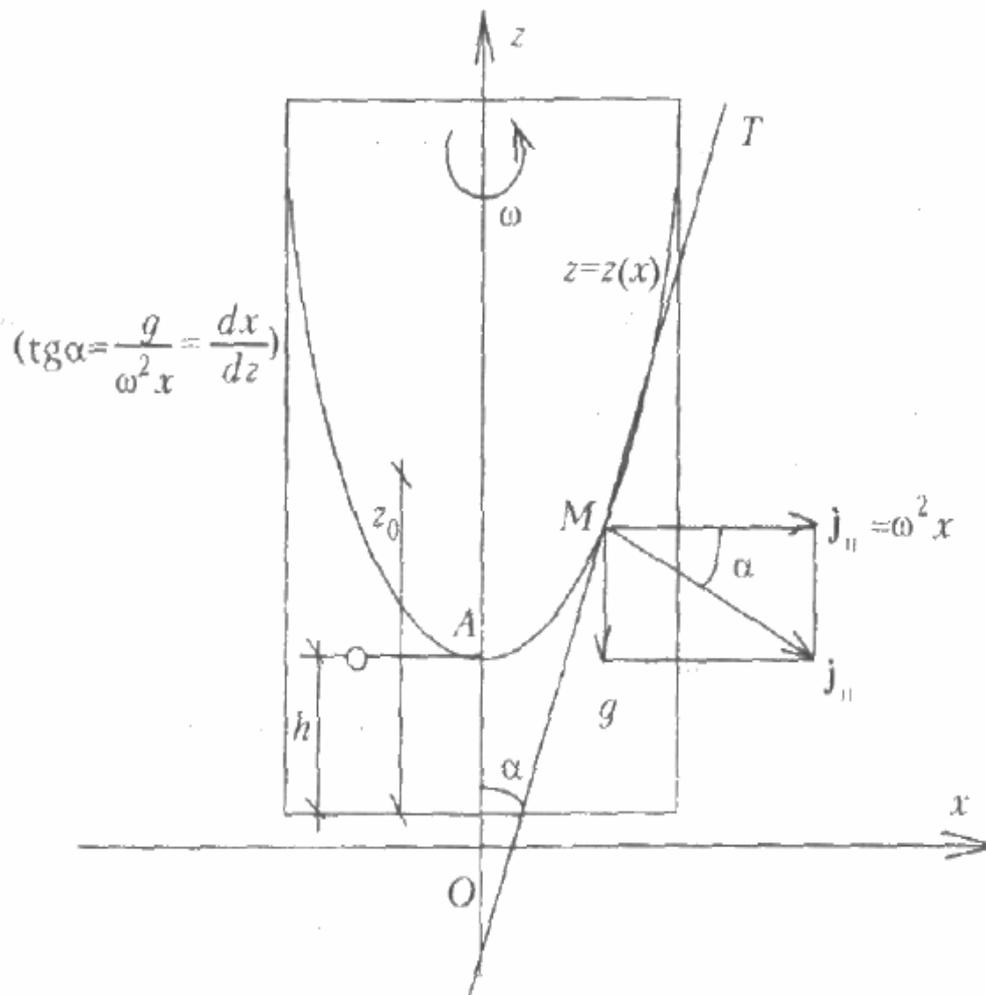


Рис. 3.7

Решение. Здесь рассматривается часто встречающийся в практике случай относительного покоя жидкости во вращающихся сосудах (например, в сепараторах и центрифугах, применяемых для разделения жидкостей).

Вращающиеся стенки цилиндра приведут во вращательное движение ближайшие к стенкам слои жидкости, а затем вследствие вязкости жидкости – всю ее массу, и все частицы жидкости будут вращаться с одной и той же угловой скоростью ω .

Так как движение симметрично относительно оси вращения, то рассмотрим равновесие частиц жидкости, расположенных в плоскости координат xOy , вращающейся с угловой скоростью ω . Объемными силами будут силы земного тяготения и силы инерции. Последняя представляет собой центробежную силу, направленную параллельно оси Ox и в сторону от оси вращения.

В точке M на расстоянии x от оси Oz линейная скорость частицы $v = x\omega$, поэтому для нее центробежное ускорение

$$j_{\text{н}} = \frac{(x\omega)^2}{x} = x\omega^2,$$

и, следовательно, полное ускорение внешних объемных сил

$$j_{\text{п}} = \sqrt{q^2 + (x\omega^2)^2}.$$

Согласно принципу Даламбера, при любом движении тела можно пользоваться уравнениями статики, если к системе действующих сил прибавить силы инерции (они направлены в сторону, противоположную движению). Такая система сил будет уравновешена, и тело можно считать находящимся в равновесном состоянии.

Воспользовавшись указанным принципом, после несложных преобразований получим:

$$\omega^2 x dx - q dz = 0$$

или

$$dz = \frac{\omega^2}{q} x dx,$$

и после интегрирования

$$z = \frac{\omega^2}{2q} x^2 + c,$$

что представляет собой уравнение параболы с вершиной на оси Oz в точке A , имеющей координату $z = h$.

Поскольку уравнение симметрично относительно оси Oz , то поверхность уровня будет представлять собой параболоид вращения.

14. Определить распределение скоростей движения вязкой жидкости с плотностью ρ в круглой цилиндрической трубе радиусом r_0 при ламинарном режиме (когда струйки движутся параллельно друг другу).

Решение. Стенки, вдоль которых происходит движение, покрываются прилипшими к ним частицами жидкости; скорость движения непосредственно на стенке равна нулю. Первый пристенный движущийся слой жидкости будет скользить по стенке, покрытой прилипшими частицами.

Совместим ось Ox с осью трубы и наметим ось Or по направлению измерения диаметра трубы (рис. 3.8), затем выделим внутри трубы центральный круглоцилиндрический столб движущейся жидкости радиусом (на рис. 3.8 заштрихован).

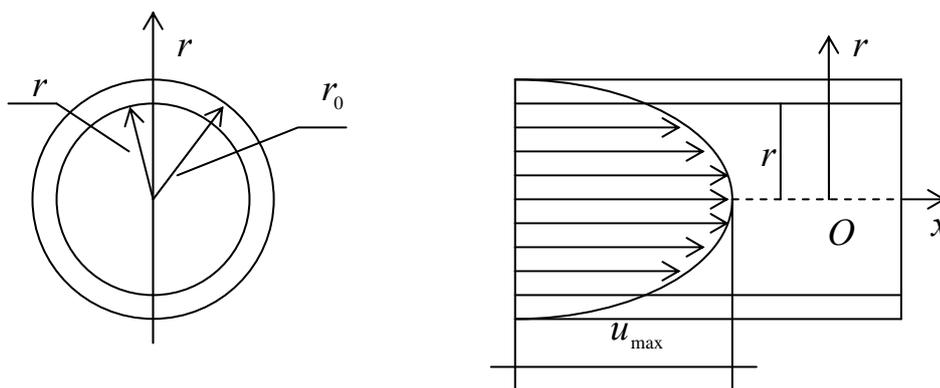


Рис. 3.8

В гидравлике показывается:

$$\gamma \frac{r}{2} J = \eta \frac{du}{dr}$$

или

$$du = \frac{1}{2} \frac{\gamma}{\eta} J r dr,$$

где $\gamma = \rho g$, J – гидравлический уклон, η – коэффициент вязкости.

Интегрируя это уравнение, получим:

$$u = -\frac{\gamma}{4\eta} J r^2 + c.$$

Постоянную интегрирования c найдем из условия $u = 0$ при $r = r_0$:

$$0 = -\frac{\gamma}{4\eta} J r_0^2 + c,$$
$$c = \frac{\gamma}{4\eta} J r_0^2.$$

Откуда

$$u = \frac{\gamma}{4\eta} J (r_0^2 - r^2).$$

При этом максимальная величина скорости (в центре трубы)

$$u_{\max} = \frac{\gamma}{4\eta} J r_0^2.$$

15. Вещество A разлагается на два вещества – P и Q . Скорость образования каждого из них пропорциональна количеству неразложившегося вещества A . Найти законы изменения количеств x и y веществ P и Q в зависимости от времени t , если через час после начала разложения x и y равны соответственно $\frac{1}{8}a$ и $\frac{3}{8}a$, где a – первоначальное количество вещества A .

Решение. В момент времени t количество вещества A равно $a - x - y$. Так что справедливо

$$\frac{dx}{dt} = k_1(a - x - y),$$
$$\frac{dy}{dt} = k_2(a - x - y).$$

Разделив обе части второго уравнения на соответствующие части первого, получим:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{k_1}{k_2}.$$

Откуда

$$y = \frac{k_1}{k_2} x + c.$$

Из $x = y = 0$ при $t = 0$ следует $c = 0$. Откуда

$$y = \frac{k_1}{k_2} x.$$

Заменив в первом уравнении y через $\frac{k_1}{k_2}x$, найдем:

$$\frac{dx}{dt} + (k_1 + k_2)x = k_1a.$$

Общее решение этого линейного уравнения первого порядка:

$$x = \frac{k_1a}{k_1 + k_2} + c_1 e^{-(k_1+k_2)t}.$$

Используя начальное условие ($x = 0$ при $t = 0$), найдем $c_1 = -\frac{k_1a}{k_1 + k_2}$

и, следовательно,

$$x = \frac{k_1a}{k_1 + k_2} \left(1 - e^{-(k_1+k_2)t}\right).$$

Подставив x в равенство $y = \frac{k_2a}{k_1 + k_2} \left(1 - e^{-(k_1+k_2)t}\right)$.

Зная, что $\frac{1}{8}a$ и $\frac{3}{8}a$ при $t = 1$, составим систему уравнений для определения коэффициентов k_1 и k_2 :

$$\begin{aligned} \frac{k_1}{k_1 + k_2} \left(1 - e^{-(k_1+k_2)}\right) &= \frac{1}{8}, \\ \frac{k_2}{k_1 + k_2} \left(1 - e^{-(k_1+k_2)}\right) &= \frac{3}{8}. \end{aligned}$$

Сложив соответствующие части обоих уравнений, получим:

$$1 - e^{-(k_1+k_2)} = \frac{1}{2},$$

откуда

$$e^{-(k_1+k_2)} = \frac{1}{2};$$

$$k_1 + k_2 = \ln 2.$$

Разделив обе части второго уравнения на соответствующие части первого, имеем $k_2 = 3k_1$. Таким образом, $k_1 = \frac{1}{4} \ln 2$, $k_2 = \frac{3}{4} \ln 2$, и искомое решение запишется в виде:

$$x = \frac{1}{4}a \left(1 - 2^{-t}\right);$$

$$y = \frac{3}{4}a \left(1 - 2^{-t}\right).$$

16. Осуществить параметрическую идентификацию кинетических процессов, протекающих в гомогенной и гетерогенной системах.

Пусть

$$\Delta x = z = x - x_m.$$

Если стабилизированный параметр x_m изменить на значение Δx за счет внешнего возмущающего воздействия, а затем снять это возмущение, то параметр x вернется к значению x_m . Отсюда следует:

$$\frac{dx}{dt} = -kz.$$

С учетом $\frac{dz}{dt} = \frac{dx}{dt}$ будем иметь

$$\frac{dz}{dt} = -kz. \quad (1)$$

Общее решение (1) имеет вид:

$$z = ce^{-kt}.$$

Откуда

$$x = x_m + ce^{-kt}.$$

При начальном условии $z(0) = -x_m$ ($x(0) = 0$) получим

$$\frac{dx}{dt} = -k(1 - e^{-kt}). \quad (2)$$

Таким образом, *динамические процессы в гомогенных системах определяются уравнением*

$$\frac{dx}{dt} = -k(x - x_m)$$

(апериодическое звено с передаточной функцией $W(p) = \frac{k}{T \cdot p + 1}$) и имеют вид (2).

Здесь предполагалось, что проявление отдельных структурных элементов либо подавлено глобальными процессами, либо влияние этих процессов на систему незначительно.

При анализе дисперсных систем такое предположение во многих случаях неприемлемо. В этих системах характерным для кинетических процессов $x(t)$ является наличие точки перегиба. В гомогенных системах она отсутствует.

С математической точки зрения *кинетические процессы во многих дисперсных системах могут быть описаны дифференциальным уравнением второго порядка* ($W(p) = \frac{k}{(T_1 p + 1)(T_2 p + 1)}$). При анализе таких

кинетических процессов необходимо учитывать не только скорость изменения контролируемого параметра, но как минимум и ускорение.

В отклонениях от равновесного состояния $x = x_m$ здесь будем иметь:

$$\ddot{z} + 2n\dot{z} + \omega_0^2 z = 0 \quad (n > 0). \quad (3)$$

Пусть $k_{1,2} = -\lambda_{1,2}$ – корни характеристического уравнения

$$k^2 + 2nk + \omega_0^2 = 0.$$

Рассмотрим сначала случай

$$n^2 - \omega_0^2 > 0.$$

Имеем

$$z = c_1 e^{-\lambda_1 t} + c_2 e^{-\lambda_2 t},$$

где

$$\lambda_1 = n + \sqrt{n^2 - \omega_0^2}; \quad \lambda_2 = n - \sqrt{n^2 - \omega_0^2}; \quad \lambda_1 > \lambda_2 > 0.$$

При $z(0) = -x_m$, $\dot{z}(0) = 0$ с учетом

$$\dot{z}(t) = -c_1 \lambda_1 e^{-\lambda_1 t} - c_2 \lambda_2 e^{-\lambda_2 t}$$

будем иметь

$$z(0) = c_1 + c_2 = -x_m,$$

$$\dot{z}(0) = -(c_1 \lambda_1 + c_2 \lambda_2) = 0.$$

Откуда

$$c_1 = \frac{\lambda_2}{\lambda_1 - \lambda_2} x_m, \quad c_2 = -\frac{\lambda_1}{\lambda_1 - \lambda_2} x_m.$$

Тогда

$$z = \frac{\lambda_2}{\lambda_1 - \lambda_2} x_m e^{-\lambda_1 t} - \frac{\lambda_1}{\lambda_1 - \lambda_2} x_m e^{-\lambda_2 t}, \quad (4)$$

$$x = \frac{x_m}{\lambda_1 - \lambda_2} (\lambda_2 e^{-\lambda_1 t} - \lambda_1 e^{-\lambda_2 t}) + x_m.$$

Имеем

$$\ddot{z} = \ddot{x} = c_1 \lambda_1^2 e^{-\lambda_1 t} + c_2 \lambda_2^2 e^{-\lambda_2 t}.$$

Из $\ddot{x} = 0$ следует

$$\frac{\lambda_2 \lambda_1^2}{\lambda_1 - \lambda_2} x_m e^{-\lambda_1 t} - \frac{\lambda_1 \lambda_2^2}{\lambda_1 - \lambda_2} x_m e^{-\lambda_2 t} = 0.$$

Откуда

$$\lambda_1 e^{-\lambda_1 t_n} = \lambda_2 e^{-\lambda_2 t_n},$$

или

$$\frac{\lambda_1}{\lambda_2} = e^{(\lambda_1 - \lambda_2)t_n}.$$

Так что точке перегиба соответствует значение $t = t_n$, определяемое из условия

$$t_n = \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2} \ln \frac{\lambda_1}{\lambda_2} \quad (5)$$

(при $t = t_n$ вогнутость сменяется на выпуклость).

Займемся определением λ_1 и λ_2 по $x(t)$, полученной экспериментально. Так как $\lambda_2 < \lambda_1$, то в (4) составляющая $\lambda_2 \frac{x_m}{\lambda_1 - \lambda_2} e^{-\lambda_1 t}$ затухает

быстрее, чем аналогичная составляющая, соответствующая корню λ_2 . Поэтому значение λ_2 можно определить по концу экспериментально полученного процесса $x(t)$.

Без ограничения общности рассуждений можно принять $x_m = 1$ (равносильно масштабированию $x(t)$).

В силу предыдущего

$$1 - x(t) = \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2} \left(-\lambda_2 e^{-\lambda_1 t} + -\lambda_1 e^{-\lambda_2 t} \right). \quad (6)$$

Определим значение t_1 такое, чтобы при $t > t_1$ выполнялось

$$1 - x(t) \approx \frac{\lambda_1}{\lambda_1 - \lambda_2} e^{-\lambda_2 t}.$$

Должны иметь

$$\lambda_1 e^{-\lambda_2 t} \gg \lambda_2 e^{-\lambda_1 t}$$

ИЛИ

$$\frac{\lambda_1}{\lambda_2} \gg e^{-(\lambda_1 - \lambda_2)t},$$

ИЛИ

$$\ln \frac{\lambda_1}{\lambda_2} \gg -(\lambda_1 - \lambda_2) \cdot t.$$

Откуда

$$\frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2} \ln \frac{\lambda_1}{\lambda_2} \gg -t$$

ИЛИ

$$t_n \gg -t, \quad t \gg t_n.$$

Таким образом,

$$1 - x(t) \approx \frac{\lambda_1}{\lambda_1 - \lambda_2} e^{-\lambda_2 t}$$

при $t \gg t_n$.

Введем

$$y(t) = 1 - x(t) \approx A e^{-\lambda_2 t}.$$

Тогда

$$y(t+T) = A e^{-\lambda_2(t+T)}.$$

Откуда

$$\Delta = \frac{y(t)}{y(t+T)} = \frac{A e^{-\lambda_2 t}}{A e^{-\lambda_2(t+T)}} = e^{\lambda_2 T}$$

ИЛИ

$$\lambda_2 T = \ln \Delta,$$

ИЛИ

$$\lambda_2 = \frac{\ln \Delta}{T}.$$

Далее из $\ddot{x} = 0$ следует

$$\lambda_1 e^{-\lambda_1 t_n} = \lambda_2 e^{-\lambda_2 t_n},$$

$$r e^{-r\lambda_2 t} = e^{-\lambda_2 t}, \quad \left(r = \frac{\lambda_1}{\lambda_2} > 1 \right),$$

$$r = e^{(r-1)\lambda_2 t}, \quad \ln r = (r-1)\lambda_2 t, \quad \frac{1}{r-1} \ln r = \lambda_2 t, \quad \ln r^{\frac{1}{r-1}} = \lambda_2 t.$$

Откуда

$$r^{\frac{1}{r-1}} = e^{\lambda_2 t_n}. \quad (7)$$

Рассмотрим функцию

$$y = r^{\frac{1}{r-1}}.$$

Имеем

$$\begin{aligned} \ln y &= \frac{1}{r-1} \ln r, \\ \frac{\dot{y}}{y} &= \frac{\frac{1}{r}(r-1) - \ln r}{(r-1)^2} = \frac{\left(1 - \frac{1}{r}\right) - \ln r}{(r-1)^2}, \\ \dot{y} &= r^{\frac{1}{r-1}} \frac{\left(1 - \frac{1}{r}\right) - \ln r}{(r-1)^2}. \end{aligned}$$

Отсюда $\dot{y} < 0$ при $r > 1$.

Справедливо

$$\begin{aligned} \lim_{r \rightarrow 1} r^{\frac{1}{r-1}} &= \lim_{\alpha \rightarrow 0} (1 + \alpha)^{\frac{1}{\alpha}} = e, \\ \alpha &= r - 1. \end{aligned}$$

Так что в интервале $(1, \infty)$ $y = r^{\frac{1}{r-1}}$ не превышает e . Поэтому уравнение (6) имеет решение $\tilde{r} > 1$ лишь при $e^{\lambda_2 t_n} < e$.

Откуда следует

$$v = \lambda_2 t_n < 1, \quad (8)$$

и λ_2 должно удовлетворять условию

$$t_n < \frac{1}{\lambda_2}. \quad (9)$$

При этом $\lambda_{2\max} = n$ (тогда $\lambda_1 = \lambda_2$, $n = \omega_0$).

Из (5) следует

$$v = \lambda_2 t_n = \frac{1}{\frac{\lambda_1}{\lambda_2} - 1} \ln \frac{\lambda_1}{\lambda_2}$$

или

$$v = \frac{\ln r}{r-1}. \quad (10)$$

Из

$$\frac{dv}{dr} = \frac{1 - \frac{1}{r} - \ln r}{(r-1)^2} < 0$$

следует, что $v = \lambda_2 t_n$ с ростом r уменьшается.

Отметим,

$$\frac{dy}{dr} = r^{\frac{1}{r}-1} \frac{dv}{dr}.$$

График функции $r = r(v)$, полученный аппроксимацией табличных значений решений уравнения (8) при различных $v = \lambda_2 t_n$ методом наименьших квадратов, приводится на рис. 3.9.

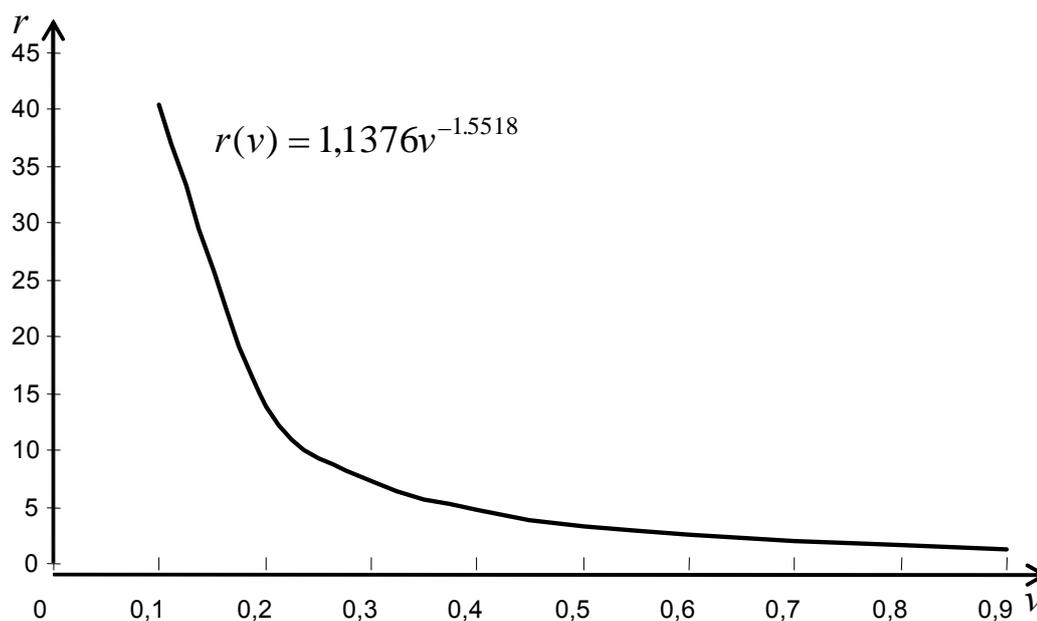


Рис. 3.9. Вид функции $r = r(v)$

Определим зависимость корней λ_1, λ_2 (определяют вид кинетического процесса) от параметров модели ω_0 и n (определяют упругие и демпфирующие свойства материала).

Из

$$\lambda_1 = n + \sqrt{n^2 - \omega_0^2} < 2n, \quad \lambda_2 = n - \sqrt{n^2 - \omega_0^2} < n, \quad (n^2 > \omega_0^2)$$

следует

$$\lambda_2 < n < \lambda_1 < 2n.$$

При этом $\lambda_1 \rightarrow \lambda_2$ при $n \rightarrow \omega_0$.

Справедливо

$$\begin{aligned} \frac{\partial \lambda_1}{\partial n} &= 1 + \frac{n}{\sqrt{n^2 - \omega_0^2}} > 0, & \frac{\partial \lambda_2}{\partial n} &= 1 - \frac{n}{\sqrt{n^2 - \omega_0^2}} < 0, \\ \frac{\partial \lambda_1}{\partial \omega_0} &= -\frac{\omega_0}{\sqrt{n^2 - \omega_0^2}} < 0, & \frac{\partial \lambda_2}{\partial \omega_0} &= \frac{\omega_0}{\sqrt{n^2 - \omega_0^2}} > 0, \\ \frac{\partial^2 \lambda_1}{\partial n^2} &= -\frac{\omega_0^2}{\sqrt{(n^2 - \omega_0^2)^3}} < 0, & \frac{\partial^2 \lambda_2}{\partial n^2} &= \frac{\omega_0^2}{\sqrt{(n^2 - \omega_0^2)^3}} > 0, \\ \frac{\partial^2 \lambda_1}{\partial \omega_0^2} &= \frac{\omega_0^2}{\sqrt{(n^2 - \omega_0^2)^3}} > 0, & \frac{\partial^2 \lambda_2}{\partial \omega_0^2} &= -\frac{\omega_0^2}{\sqrt{(n^2 - \omega_0^2)^3}} < 0. \end{aligned}$$

Вид зависимостей $\lambda_1 = \lambda_1(\omega_0, n)$ и $\lambda_2 = \lambda_2(\omega_0, n)$ приводится на рис. 3.10.

Введем безразмерный коэффициент демпфирования $\xi = \frac{n}{\omega_0}$, $n \geq \omega_0$,

$\xi \geq 1$. Его величина определяется структурой и физико-химическими свойствами материала.

Имеем

$$\lambda_1 = \left(\xi + \sqrt{\xi^2 - 1} \right) \cdot \omega_0, \quad \lambda_2 = \left(\xi - \sqrt{\xi^2 - 1} \right) \cdot \omega_0; \quad (11)$$

$$\lambda_1 - \lambda_2 = 2 \omega_0 \sqrt{\xi^2 - 1};$$

$$r = \frac{\xi + \sqrt{\xi^2 - 1}}{\xi - \sqrt{\xi^2 - 1}} = \frac{\left(\xi + \sqrt{\xi^2 - 1} \right) \cdot \left(\xi + \sqrt{\xi^2 - 1} \right)}{\left(\xi - \sqrt{\xi^2 - 1} \right) \cdot \left(\xi + \sqrt{\xi^2 - 1} \right)} = \left(\xi + \sqrt{\xi^2 - 1} \right)^2 = \frac{1}{\omega_0^2} \lambda_1^2;$$

$$\lambda_1 = \omega_0 \sqrt{r}; \quad \lambda_1 = \lambda_2 r; \quad \lambda_2 = \frac{1}{\sqrt{r}} \omega_0.$$

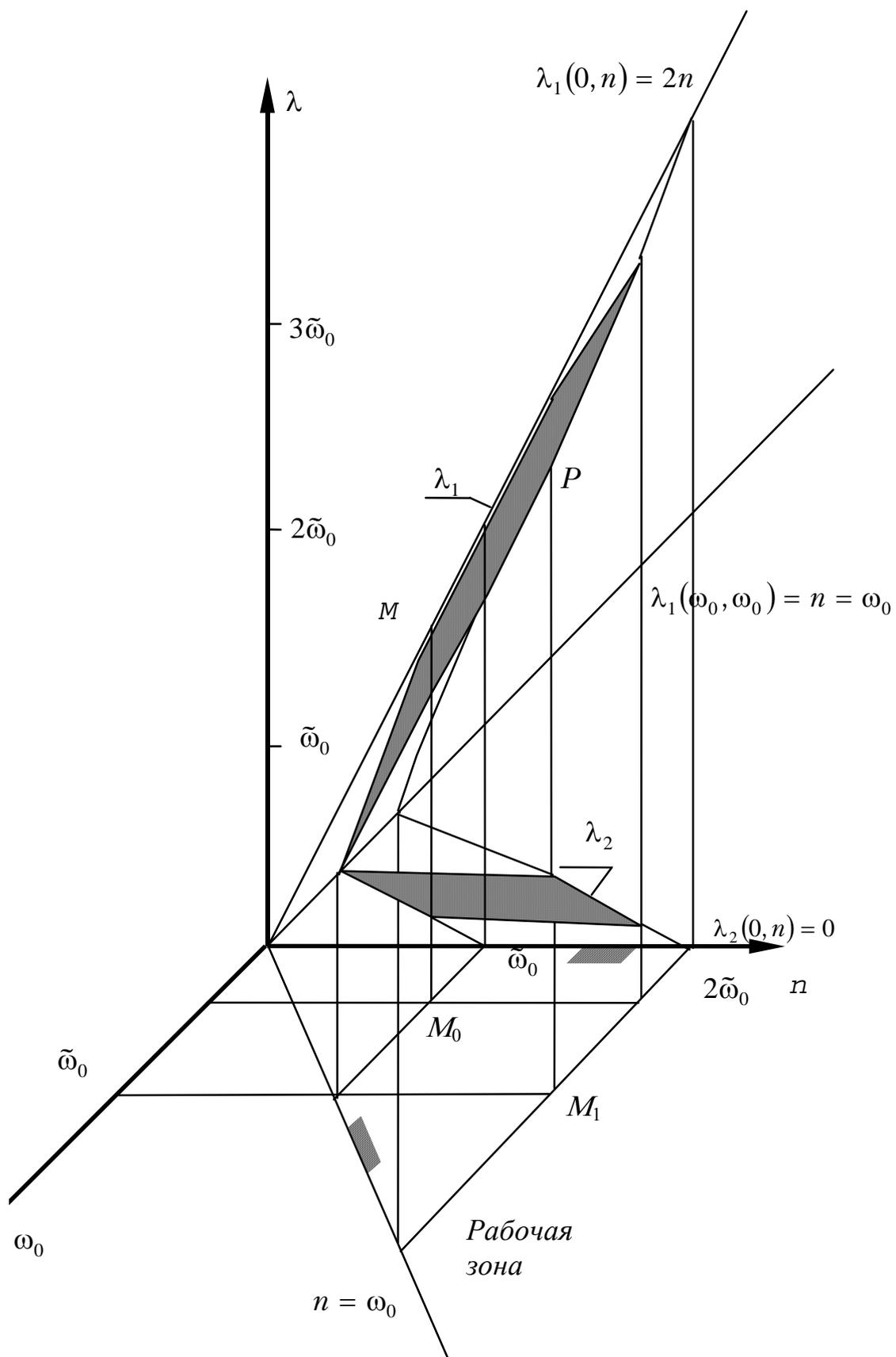


Рис. 3.10. Вид функций $\lambda_1 = \lambda_1(\omega_0, n)$ и $\lambda_2 = \lambda_2(\omega_0, n)$

Справедливо

$$\begin{aligned}\frac{\partial r}{\partial \xi} &= 2(\xi + \sqrt{\xi^2 - 1}) \cdot \left(1 + \frac{\xi}{\sqrt{\xi^2 - 1}}\right) = 2(\xi + \sqrt{\xi^2 - 1}) \cdot \left(\frac{\sqrt{\xi^2 - 1} + \xi}{\sqrt{\xi^2 - 1}}\right) = \\ &= 2 \frac{(\xi + \sqrt{\xi^2 - 1})^2}{\sqrt{\xi^2 - 1}} = \frac{2}{\sqrt{\xi^2 - 1}} r.\end{aligned}$$

Откуда следует

$$\frac{\partial r}{\partial \xi} > 0 \quad \forall \quad \xi \geq 1.$$

Как видим, с ростом ξ значение $\frac{\lambda_1}{\lambda_2}$ растет.

Из

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 r}{\partial \xi^2} &= 2 \left[\frac{\partial r}{\partial \xi} \sqrt{\xi^2 - 1} - r \frac{\xi}{\xi^2 - 1} \right] \cdot \frac{1}{\xi^2 - 1} = 2 \left[\frac{2}{\sqrt{\xi^2 - 1}} r \sqrt{\xi^2 - 1} - r \frac{\xi}{\xi^2 - 1} \right] \cdot \frac{1}{\xi^2 - 1} = \\ &= 2r \left[2 - \frac{\xi}{\xi^2 - 1} \right] \cdot \frac{\xi}{\xi^2 - 1} = \frac{2r}{\sqrt{(\xi^2 - 1)^3}} (2\sqrt{\xi^2 - 1} - \xi);\end{aligned}$$

$$\frac{d^2 r}{d \xi^2} = 0;$$

получим

$$\xi = 2\sqrt{\xi^2 - 1}; \quad 3\xi^2 = 4; \quad \xi = \frac{2}{\sqrt{3}}.$$

Так, что функция $r = r(\xi)$ имеет перегиб в точке с абсциссой $\xi = \frac{2}{\sqrt{3}}$, при этом при $1 \leq \xi \leq \frac{2}{\sqrt{3}}$ функция выпукла, при $\xi > \frac{2}{\sqrt{3}}$ – вогнута.

Легко заметить, что функция $r = r(\xi)$ является решением дифференциального уравнения

$$\frac{dr}{d\xi} - \frac{2}{\sqrt{\xi^2 - 1}} \cdot r = 0.$$

Имеем

$$\frac{dr}{r} = 2 \frac{d\xi}{\sqrt{\xi^2 - 1}}, \quad \xi \neq 1.$$

Откуда

$$\ln|r| = 2 \int \frac{d\xi}{\sqrt{\xi^2 - 1}}, \quad \ln|r| = 2 \ln \left| \xi + \sqrt{\xi^2 - 1} \right| - \ln c,$$

$$r = c \left(\xi + \sqrt{\xi^2 - 1} \right)^2.$$

При начальном условии $r(\xi_0) = \left(\xi_0 + \sqrt{\xi_0^2 - 1} \right)^2$ получим: $c = 1$.

Откуда

$$r = \left(\xi + \sqrt{\xi^2 - 1} \right)^2.$$

Далее рассмотрим *связь между характеристиками кинетических процессов и параметрами модели*.

Изменение структуры и физико-химических свойств материала приводит к изменению расположения точки перегиба. Определим связь между абсциссой точки перегиба и параметрами ω_0 , n модели (или $\xi = \frac{n}{\omega_0}$ и ω_0).

Из формул (5), (11) следует

$$t_n = \frac{1}{2\sqrt{n^2 - \omega_0^2}} \ln \frac{n + \sqrt{n^2 - \omega_0^2}}{n - \sqrt{n^2 - \omega_0^2}}.$$

Откуда

$$\begin{aligned} \frac{\partial t_n}{\partial \omega_0} &= \frac{1}{2(n^2 - \omega_0^2) \sqrt{\left(\frac{n}{\omega_0}\right)^2 - 1}} \left(\ln \frac{n + \sqrt{n^2 - \omega_0^2}}{n - \sqrt{n^2 - \omega_0^2}} - 2 \frac{n}{\omega_0} \sqrt{\left(\frac{n}{\omega_0}\right)^2 - 1} \right) = \\ &= \frac{1}{2(n^2 - \omega_0^2) \sqrt{\left(\frac{n}{\omega_0}\right)^2 - 1}} \left(\ln r - 2\xi \sqrt{\xi^2 - 1} \right). \end{aligned}$$

В силу $n^2 > \omega_0^2$ отсюда следует, что знак $\frac{\partial t_n}{\partial \omega_0}$ определяется знаком функции $y = \ln r - 2\xi\sqrt{\xi^2 - 1}$. Так как $y < 0 \quad \forall \xi > 1$, то значение t_n убывает с ростом ω_0 ($\omega_0 > 0$, $\xi = \frac{n}{\omega_0} > 1$).

Также справедливо

$$\begin{aligned} \frac{\partial t_n}{\partial n} &= \frac{n}{2\sqrt{(n^2 - \omega_0^2)^3}} \left(\frac{2\sqrt{n^2 - \omega_0^2}}{n} - \ln \frac{n + \sqrt{n^2 - \omega_0^2}}{n - \sqrt{n^2 - \omega_0^2}} \right) = \\ &= \frac{n}{2\sqrt{(n^2 - \omega_0^2)^3}} \left(2\sqrt{1 - \frac{1}{\xi^2}} - \ln r \right) < 0 \quad \forall \xi > 1 \quad (n > \omega_0). \end{aligned}$$

Откуда следует, с ростом n значение t_n уменьшается, точка перегиба смещается влево.

Таким образом, для увеличения значения t_n следует уменьшить ω_0 и n (предполагается выполнение условия $n > \omega_0$).

При разработке материалов следует учитывать зависимости λ_2 и r от ξ , ω_0 , n .

Имеем

$$r = r(\xi), \quad \xi = \frac{n}{\omega_0} = \xi(\omega_0, n).$$

Справедливо

$$\frac{\partial r}{\partial \omega_0} = \frac{dr}{d\xi} \frac{\partial \xi}{\partial \omega_0} = \frac{dr}{d\xi} \left(-\frac{n}{\omega_0^2} \right).$$

Отсюда с учетом $\frac{dr}{d\xi} > 0 \quad \forall \xi \geq 1$ следует $\frac{\partial r}{\partial \omega_0} < 0 \quad \forall \xi \geq 1$.

Также справедливо

$$\frac{\partial r}{\partial n} = \frac{dr}{d\xi} \frac{\partial \xi}{\partial n} = \frac{dr}{d\xi} \cdot \frac{1}{\omega_0} > 0 \quad \forall \xi \geq 1.$$

Имеем

$$\frac{\partial^2 r}{\partial \omega_0^2} = -\frac{\partial}{\partial \omega_0} \left(\frac{dr}{d\xi} \cdot \frac{n}{\omega_0^2} \right) = -\left[\frac{\partial}{\partial \omega_0} \left(\frac{dr}{d\xi} \right) \frac{n}{\omega_0^2} + \frac{dr}{d\xi} \left(-\frac{n}{\omega_0^2} \right)' \right] =$$

$$\begin{aligned}
&= - \left(\frac{n}{\omega_0^2} \left(\frac{dr}{d\xi} \right)'_{\omega_0} - \frac{2n}{\omega_0^3} \frac{dr}{d\xi} \right) = \frac{n}{\omega_0^2} \left(\frac{2}{\omega_0^2} \frac{dr}{d\xi} - \left(\frac{dr}{d\xi} \right)'_{\xi} \frac{\partial \xi}{\partial \omega_0} \right) = \\
&= \frac{n}{\omega_0^2} \left(\frac{2}{\omega_0^2} \frac{dr}{d\xi} + \frac{d^2r}{d\xi^2} \frac{n}{\omega_0^2} \right) = \frac{n}{\omega_0^3} \left(2 \frac{dr}{d\xi} + \frac{n}{\omega_0} \frac{d^2r}{d\xi^2} \right) = \\
&= \frac{n}{\omega_0^3} \left[2 \frac{2}{\sqrt{\xi^2 - 1}} r + \frac{n}{\omega_0} \frac{2r}{\sqrt{(\xi^2 - 1)^3}} (2\sqrt{\xi^2 - 1} - \xi) \right] = \\
&= \frac{2rn}{\omega_0^3 \sqrt{\xi^2 - 1}} \left[2 + \frac{n}{\omega_0 (\xi^2 - 1)} (2\sqrt{\xi^2 - 1} - \xi) \right] > 0 \quad \forall \xi > \frac{2}{\sqrt{3}};
\end{aligned}$$

$$\frac{\partial^2 r}{\partial n^2} = \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{dr}{d\xi} \frac{1}{\omega_0} \right) = \left(\frac{dr}{d\xi} \right)'_n \frac{1}{\omega_0} = \frac{d^2r}{d\xi^2} \frac{\partial \xi}{\partial n} \frac{1}{\omega_0} = \frac{1}{\omega_0} \frac{d^2r}{d\xi^2} > 0 \quad \forall \xi > \frac{2}{\sqrt{3}}.$$

Зависимость $r = r(\omega_0, n)$ приводится на рис. 3.11.

Выше предполагалось, что корни характеристического уравнения различны. Однако в ряде случаев корни могут оказаться равными. В связи с этим рассмотрим *случай кратных корней*. В этом случае общее решение уравнения (3) имеет вид

$$z = (c_1 + c_2 t) e^{-nt}, \quad \lambda_1 = \lambda_2 = n = \omega_0.$$

Из начальных условий

$$z(0) = -x_m, \quad \dot{z}(0) = 0$$

следует

$$c_1 = -x_m, \quad c_2 = n c_1.$$

Решение задачи Коши дает

$$z = (x_m - n x_m t) e^{-nt}.$$

Откуда

$$x = x_m - (x_m + n x_m t) e^{-nt}$$

или

$$x = x_m [1 - (1 + nt) e^{-nt}].$$

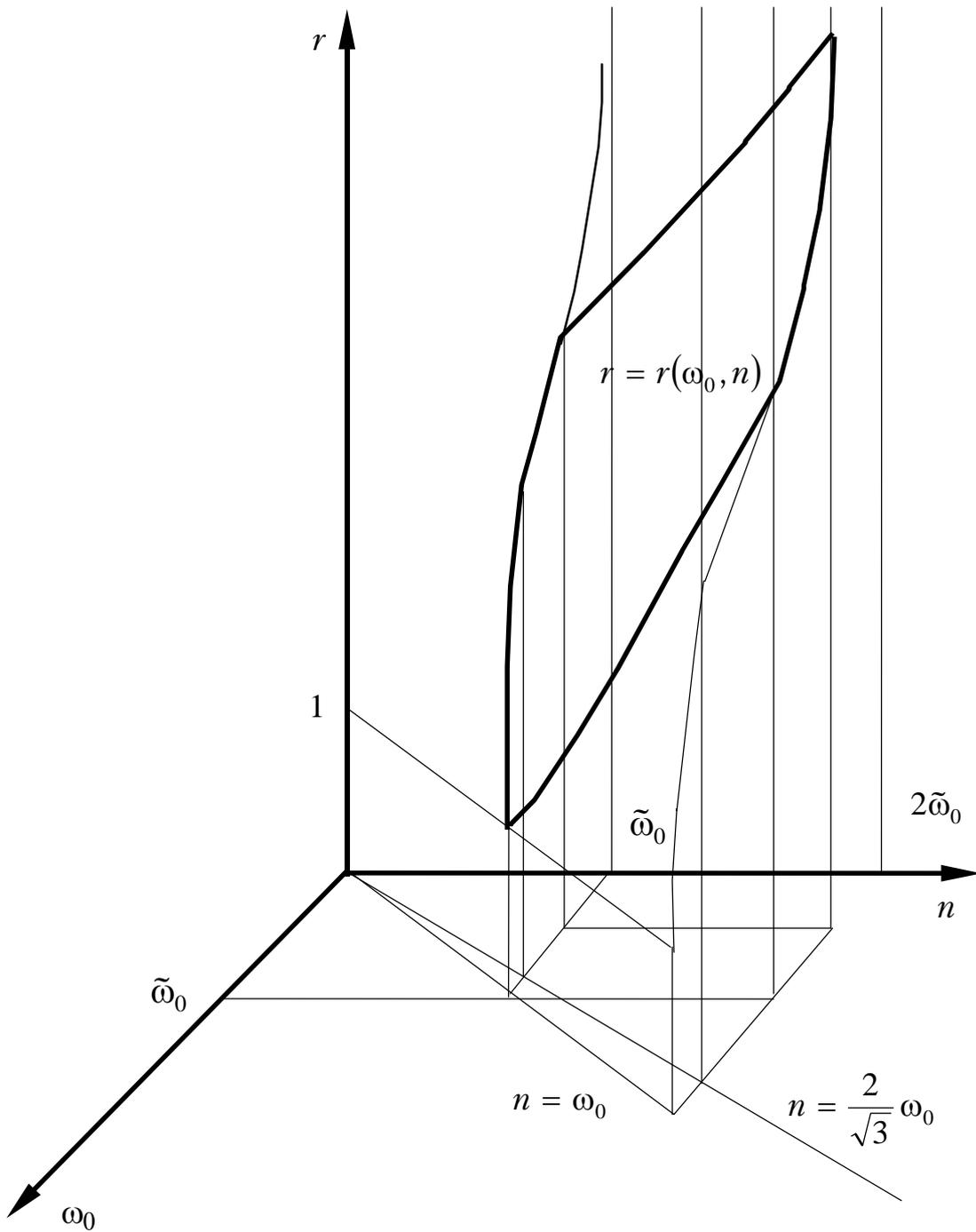


Рис. 3.11. Зависимость $r = r(\omega_0, n)$

В частности, при $x_m = 1$ имеем

$$x = 1 - (1 + nt) \cdot e^{-nt},$$

и $\ddot{x} = 0$ при $nt = 1$. Откуда абсцисса точки перегиба

$$t_n = \frac{1}{n}$$

(t_n не зависит от x_m), а

$$x(t_n) = x\left(\frac{1}{n}\right) = x_m \left[1 - \left(1 + n \frac{1}{n} \right) \cdot e^{-n \frac{1}{n}} \right] = x_m \left(1 - \frac{2}{e} \right)$$

не зависит от n .

Таким образом, точка перегиба процесса $x(t)$ есть точка $M_n \left(\frac{1}{n}; \left(1 - \frac{2}{e} \right) \cdot x_m \right)$.

Увеличение n (здесь $\omega_0 = n$) ведет к сдвигу точки M_n влево (уменьшению t_n). Расположение M_n при $n > 1$ и $n < 1$ показано соответственно на рис. 3.12 а,б.

Справедливо:

$$x(1) = x_m \left(1 - \frac{1+n}{e^n} \right); \quad x(n) = x_m \left(1 - \frac{1+n^2}{e^{n^2}} \right).$$

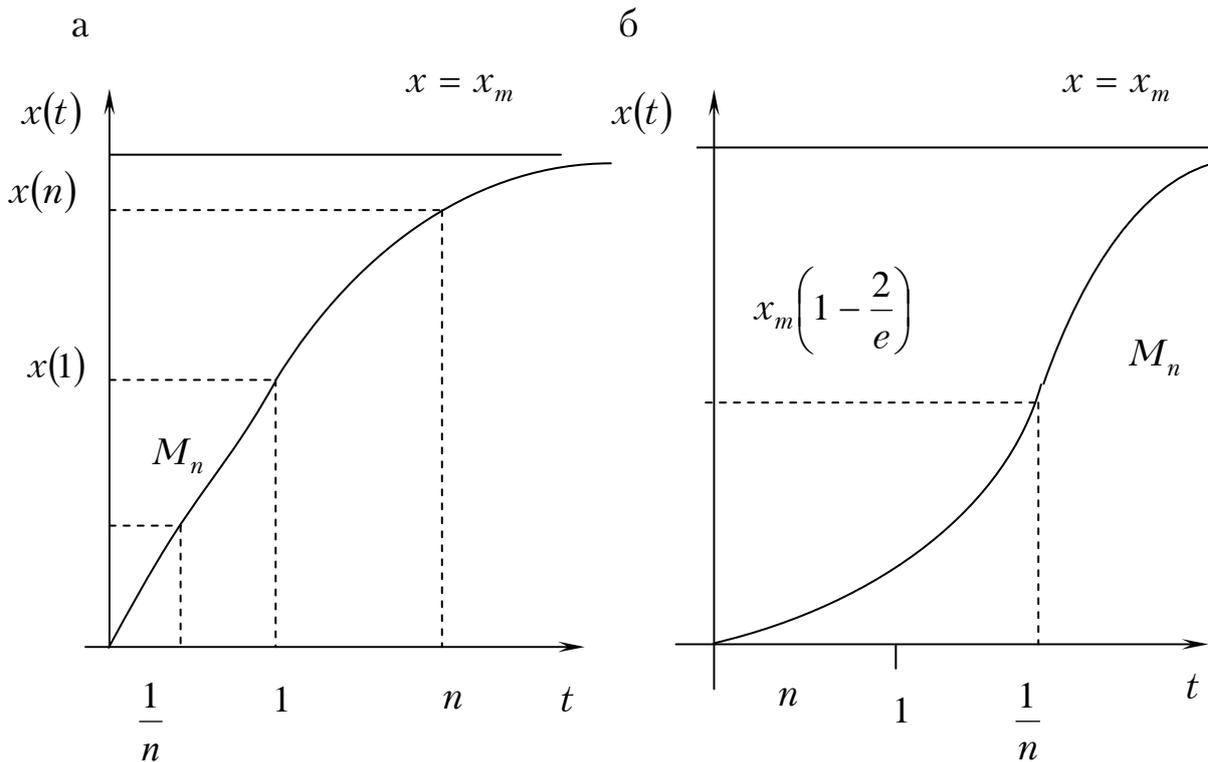


Рис.3.12. Расположение точки перегиба в случае кратных корней:
а) $n > 1$; б) $n < 1$

Из приведенного выше вытекает алгоритм определения абсциссы точки перегиба в случае кратных корней, а именно: абсцисса точки M_n

равна абсциссе точки пересечения кривой $x = x(t)$ с прямой $x = x_m \left(1 - \frac{2}{e}\right)$.

Невыполнение условия $x\left(\frac{1}{n}\right) = x_m \left(1 - \frac{2}{e}\right) \forall n$ означает: $\lambda_1 \neq \lambda_2$.

Из

$$\frac{\partial x}{\partial n} = x_m \left(-t e^{-nt} + t(1+nt)e^{-nt}\right) = x_m n t^2 e^{-nt} > 0 \quad \forall t$$

следует, что $x(t)$ возрастает с ростом $n \forall t$ (рис. 3.13).

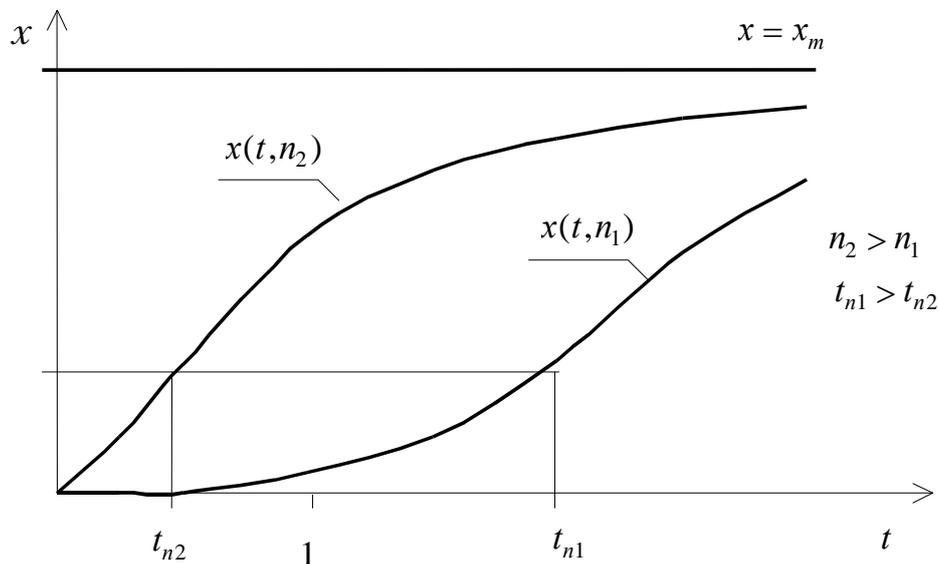


Рис. 3.13. Вид кинетических процессов в случае кратных корней при различных n

Время τ_0 , в течение которого контролируемый параметр примет значение, равное $0,95 \cdot x_m$ (приближенное время выхода контролируемого параметра на эксплуатационное значение), определяется из условия

$$x(\tau_0) = 0,95 \cdot x(\infty) = 0,95 x_m$$

или

$$1 + n \tau_0 = 20 e^{-n \tau_0}$$

(например, при $n = 0,17$; $\tau_0 = 11,3$; $t_n \approx 5,88$).

Далее рассмотрим процессы вида, приводимого на рис.3.14. Такой процесс характерен для кинетики *внутренних напряжений* в эпоксидных композитах.

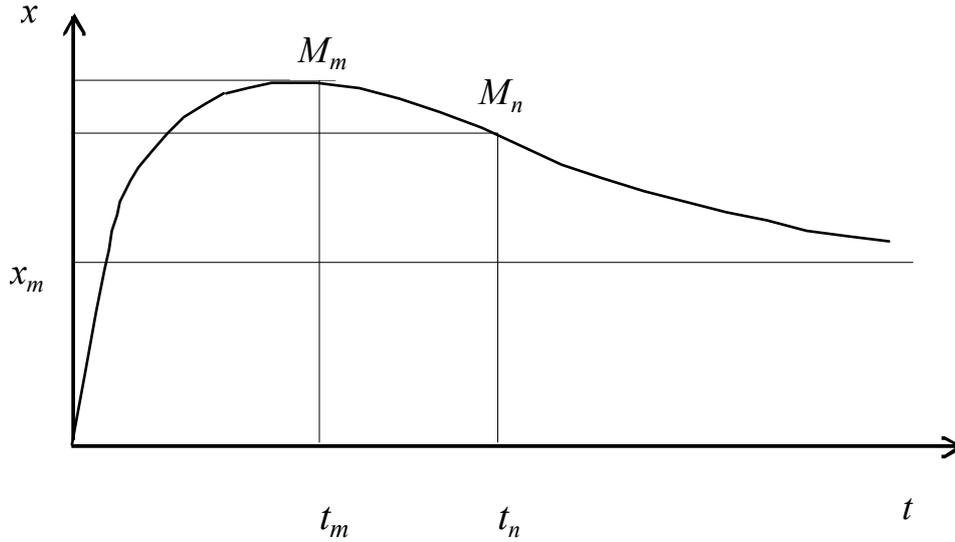


Рис. 3.14

Покажем, что такие процессы описываются динамической моделью вида

$$\ddot{z} + 2n\dot{z} + \omega_0^2 z = 0$$

и являются решением уравнения (1) при начальных условиях

$$\begin{aligned} z(0) &= -x_m, \quad (\dot{z}(0) = 0); \\ \dot{z}(0) &= \dot{x}(0) = \dot{x}_0. \end{aligned} \quad (12)$$

Действительно, здесь решение задачи Коши имеет вид:

$$x = c_1 \cdot e^{-\lambda_1 t} + c_2 \cdot e^{-\lambda_2 t} + x_m \quad (\lambda_1 > \lambda_2). \quad (13)$$

Откуда

$$\dot{x} = -c_1 \lambda_1 e^{-\lambda_1 t} - c_2 \lambda_2 e^{-\lambda_2 t}.$$

Точка перегиба определяется из условия $\ddot{x} = c_1 \lambda_1^2 e^{-\lambda_1 t} + c_2 \lambda_2^2 e^{-\lambda_2 t} = 0$, из которого следует, что существует не более одной точки перегиба.

Абсцисса точки M_n перегиба (рис. 3.14) определяется в виде:

$$t_n = \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2} \ln \left[\left(-\frac{c_1}{c_2} \right) \cdot \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2} \right)^2 \right], \quad (14)$$

где постоянные интегрирования находятся из соотношения:

$$\begin{aligned} c_1 + c_2 &= -x_m, \\ -c_1 \lambda_1 - c_2 \lambda_2 &= \dot{x}_0. \end{aligned}$$

Абсцисса точки M_m должна удовлетворять условию $\dot{x}(t) = 0$, что дает:

$$t_m = \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2} \ln \left[\left(-\frac{c_1}{c_2} \right) \frac{\lambda_1}{\lambda_2} \right]. \quad (15)$$

Должны иметь

$$-\frac{c_1}{c_2} = \frac{\dot{x}_0 - x_m \lambda_2}{\dot{x}_0 - x_m \lambda_1} > 0 \quad (16)$$

Откуда следует, что $x(t)$ достигает максимума при $t = t_m$ и при выполнении одного из условий $\dot{x}_0 > x_m \lambda_1$ или $\dot{x}_0 < x_m \lambda_2$.

Из

$$(\lambda_1 - \lambda_2) \cdot t_n = \ln \frac{\lambda_1}{\lambda_2}$$

и

$$-\frac{c_1}{c_2} = \frac{\dot{x}_0 - x_m \lambda_2}{\dot{x}_0 - x_m \lambda_1}, \quad -\frac{c_1}{c_2} > 1$$

получим

$$\left(-\frac{c_1}{c_2} \right) \frac{\lambda_1}{\lambda_2} > \frac{\lambda_1}{\lambda_2}.$$

Откуда следует $t_n > t_m$.

Имеем

$$\begin{aligned} t_n &= \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2} \ln \left[\left(-\frac{c_1}{c_2} \right) \cdot \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2} \right)^2 \right] = \\ &= \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2} \left[\ln \left(-\frac{c_1}{c_2} \right) \cdot \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2} \right) + \ln \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2} \right) \right] = \\ &= t_m + \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2} \ln \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2} \right) = t_m + \delta. \end{aligned}$$

Справедливо

$$\delta = t_n - t_m = \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2} \ln \frac{\lambda_1}{\lambda_2}. \quad (17)$$

Из (15) следует

$$\begin{aligned}
 t_m(\lambda_1 - \lambda_2) &= \ln\left(-\frac{c_1}{c_2}\right) + \ln\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right), \\
 \ln\left(-\frac{c_1}{c_2}\right) &= t_m(\lambda_1 - \lambda_2) - \ln\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right), \\
 -\frac{c_1}{c_2} &= e^{t_m(\lambda_1 - \lambda_2) - \ln\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right)} = e^{t_m(\lambda_1 - \lambda_2)} \cdot \frac{\lambda_2}{\lambda_1}.
 \end{aligned} \tag{18}$$

Из изложенного выше вытекает следующий *алгоритм параметрической идентификации* кинетических процессов рассматриваемого вида:

1. По концу переходного процесса определяется λ_2 .

2. Определяется $\delta = t_n - t_m$.

3. По (17) по известным λ_2 и δ определяется λ_1 .

4. По (18) при известных λ_1 и λ_2 определяется $\left(-\frac{c_1}{c_2}\right)$.

5. По уже известным значениям $\lambda_1, \lambda_2, x_m, \left(-\frac{c_1}{c_2}\right)$, используя

соотношение (16), определяется

$$\dot{x}_0 = \frac{\lambda_2 x_m + \frac{c_1}{c_2} \lambda_1 x_m}{1 + \frac{c_1}{c_2}}.$$

6. Наконец, определяется

$$x(t) = c_1 e^{-\lambda_1 t} + c_2 e^{-\lambda_2 t} + x_m.$$

Таким образом, задача идентификации решена полностью.

Настройка модели может быть осуществлена с учетом влияния идентифицируемых параметров на характеристики кинетических процессов.

Некоторые виды процессов при различных значениях идентифицируемых параметров приводятся рис. 3.15-3.17.

Совершенно очевидно, идентифицируемые параметры $\lambda_1, \lambda_2, \dot{x}_0$ при оптимальных структуре и свойствах материала должны находиться в некоторых достаточно жестко ограниченных пределах.

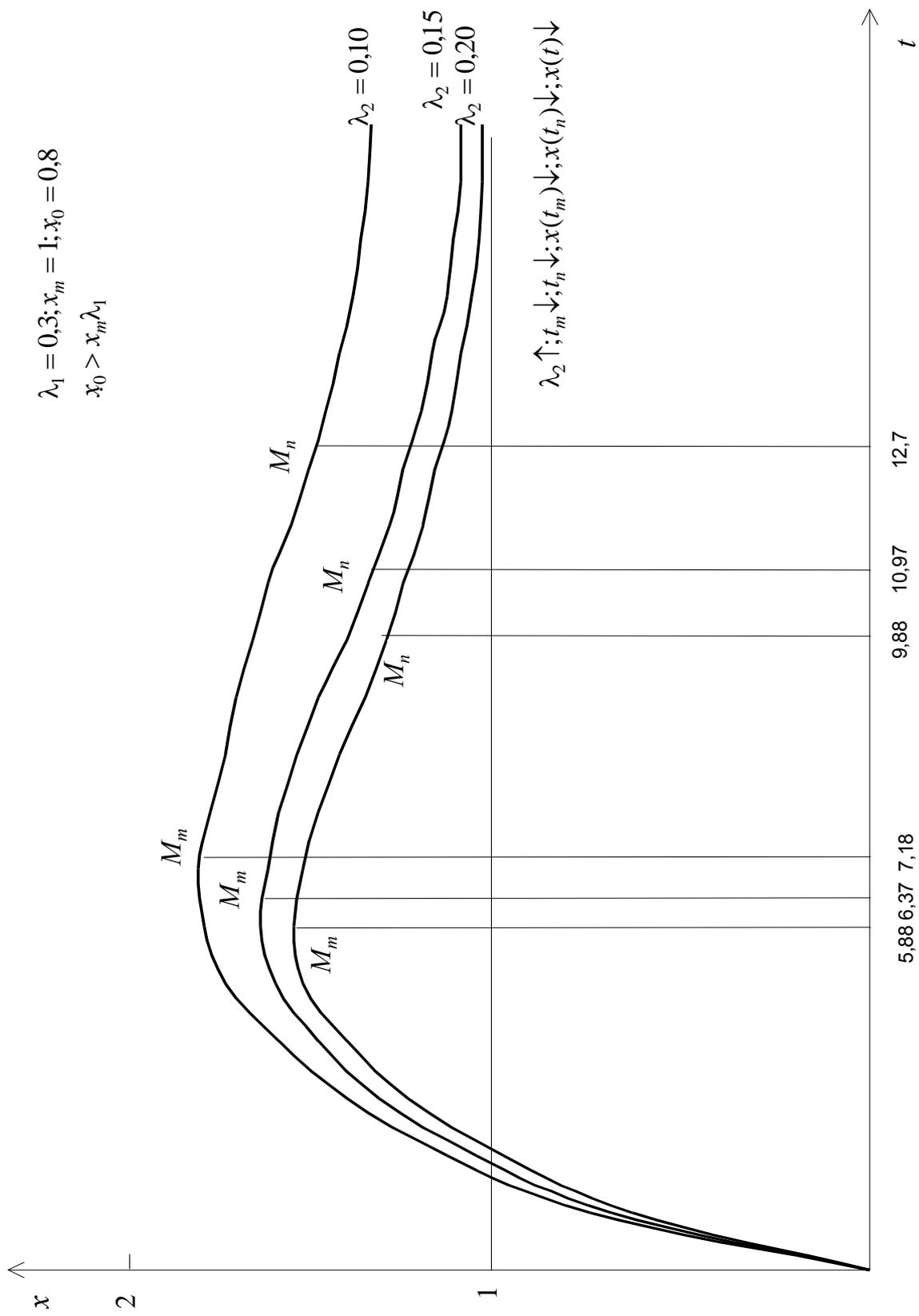


Рис. 3.15. Зависимость внутренних напряжений от λ_2

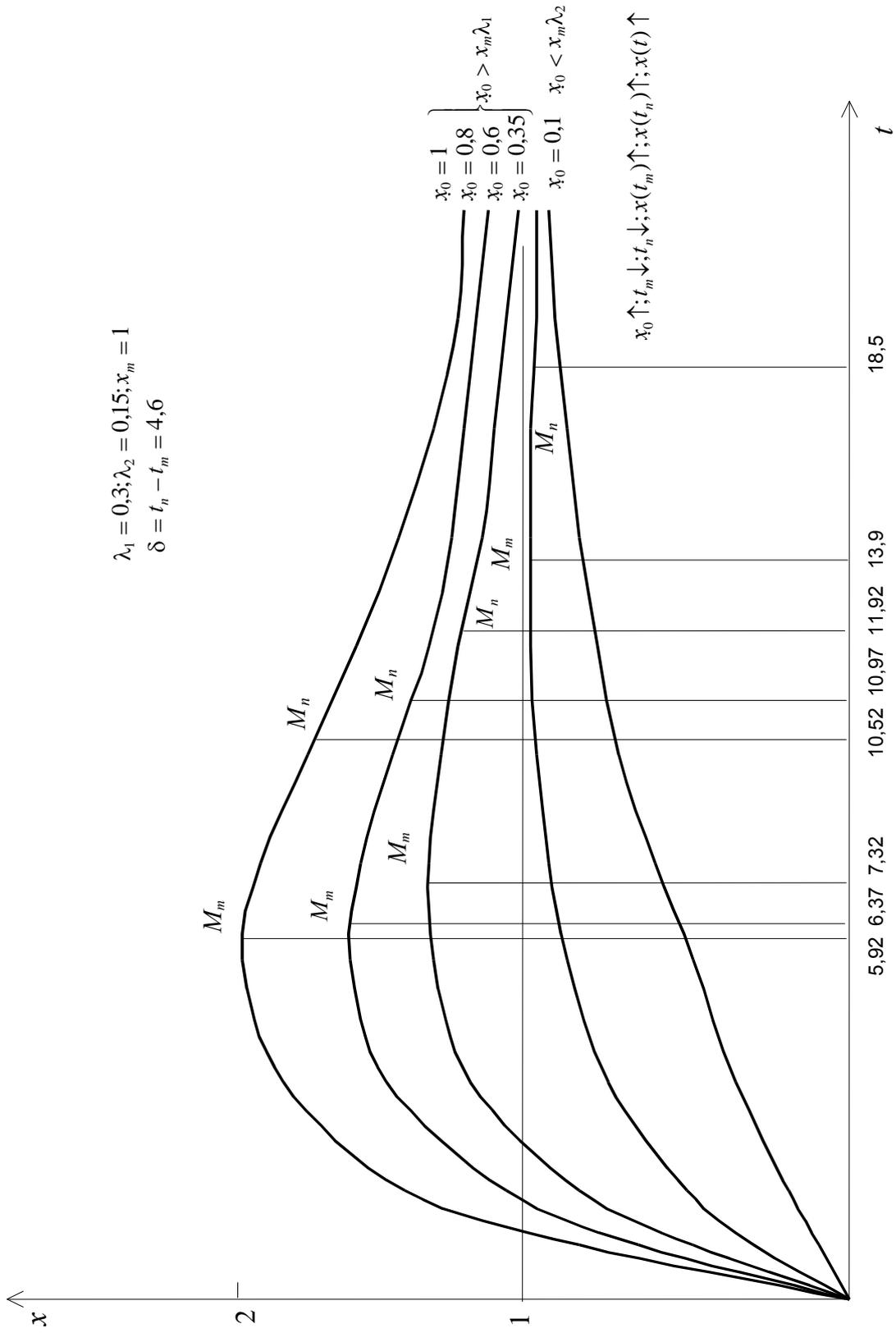


Рис. 3.16. Зависимость внутренних напряжений от x_0

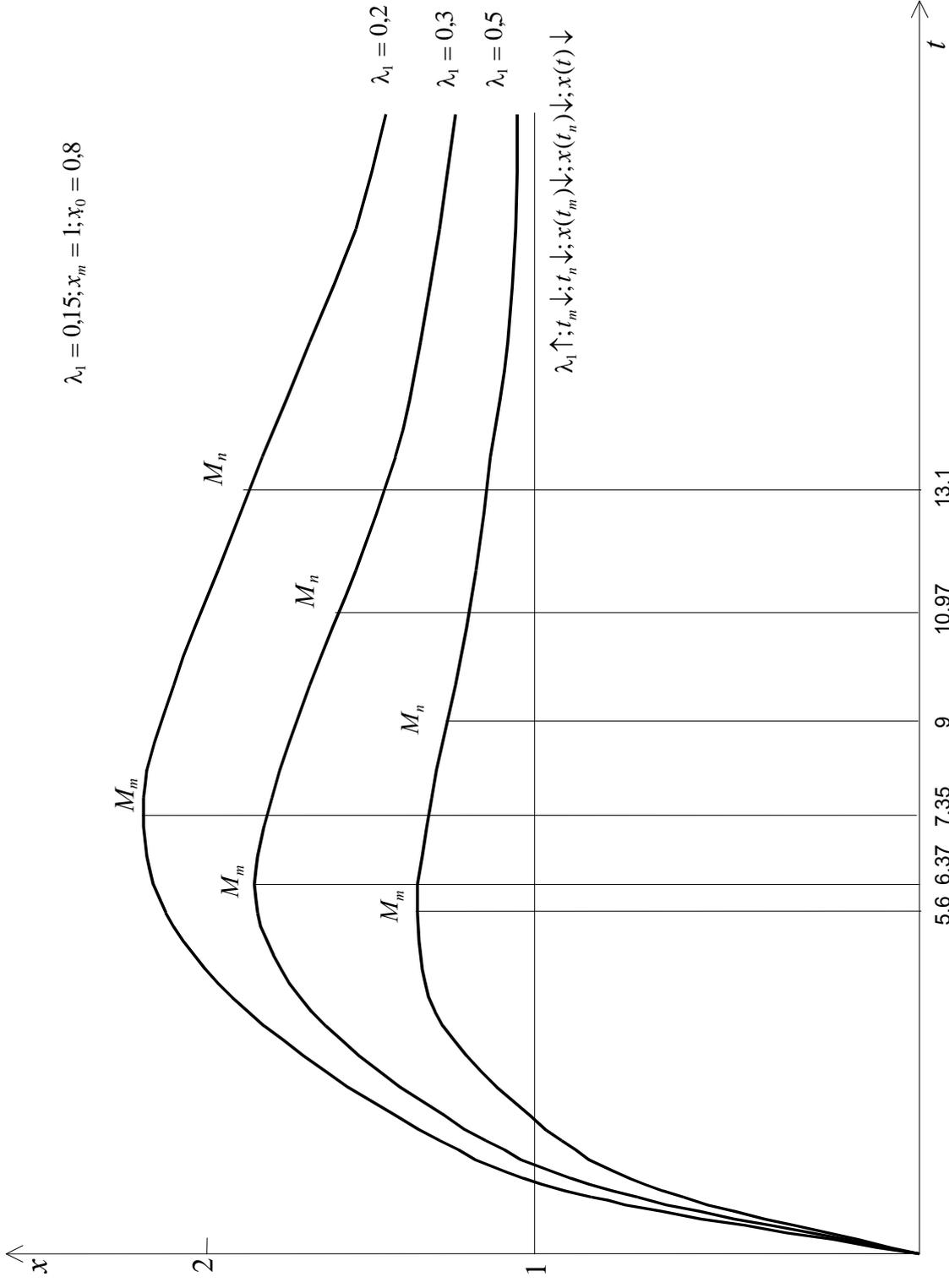


Рис. 3.17. Зависимость внутренних напряжений от λ_1

Обобщением рассматриваемого процесса является процесс, приводимый на рис. 3.18 (например, кинетика саморазогрева эпоксидных композитов), который определяется как решение задачи Коши:

$$\ddot{z} + 2n\dot{z} + \omega_0^2 = 0, \quad (z = x - x_m; \quad x = z + x_m)$$

$$z(0) = x_0 - x_m; \quad \dot{z}(0) = \dot{x}_0; \quad (x(0) = x_0)$$

(при $x_0 = 0$ получится предыдущий процесс).

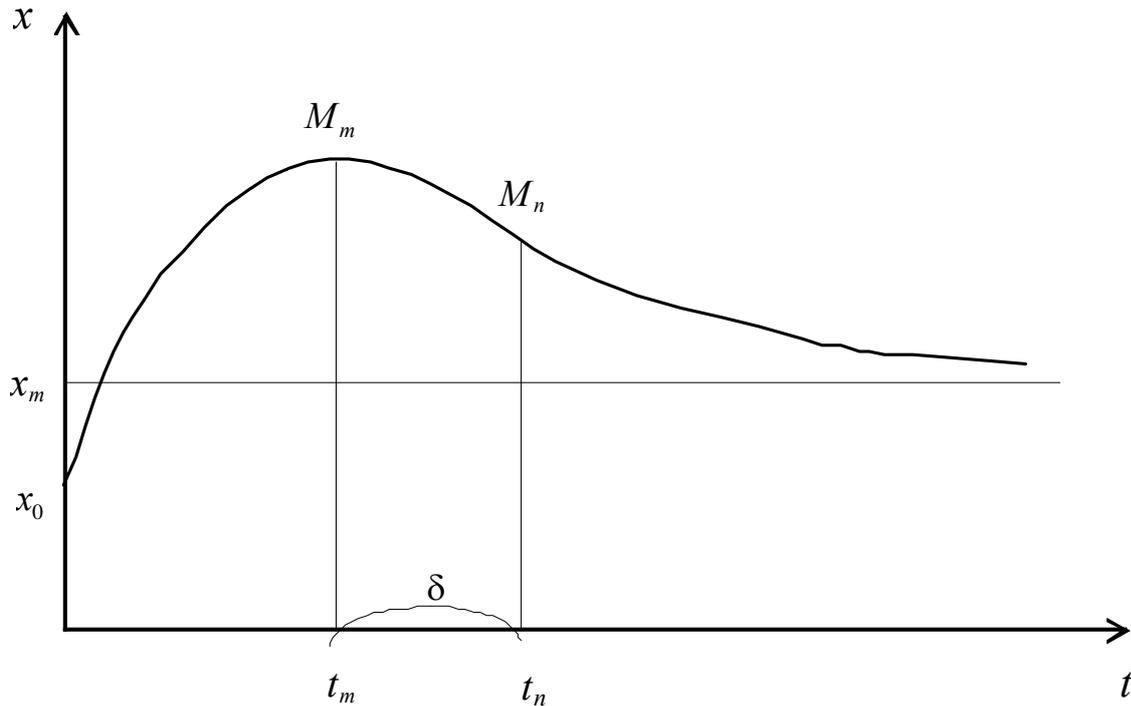


Рис. 3.18

Действительно, как и ранее, будем иметь

$$x = c_1 e^{-\lambda_1 t} + c_2 e^{-\lambda_2 t} + x_m.$$

Однако здесь постоянные интегрирования определяются из условий

$$x(0) = c_1 + c_2 + x_m = x_0;$$

$$\dot{x}(0) = -c_1 \lambda_1 - c_2 \lambda_2 = \dot{x}_0.$$

Откуда

$$c_1 = -\frac{\lambda_2 (x_0 - x_m) + \dot{x}_0}{\lambda_1 - \lambda_2};$$

$$c_2 = \frac{\lambda_1(x_0 - x_m) + \dot{x}_0}{\lambda_1 - \lambda_2}.$$

Как и ранее, абсциссы точек максимума M_m и перегиба M_n определяются в виде (14) и (15). Однако здесь

$$-\frac{c_1}{c_2} = \frac{\lambda_2(x_0 - x_m) + \dot{x}_0}{\lambda_1(x_0 - x_m) + \dot{x}_0}. \quad (19)$$

Алгоритм идентификации этого процесса будет аналогичен предыдущему с той лишь разницей, что определение \dot{x}_0 осуществляется по известным значениям $\left(-\frac{c_1}{c_2}\right)$, λ_1 , λ_2 , x_0 , x_m из соотношения (19).

Изменения характеристик процессов в зависимости от параметров динамической модели показаны на рис. 3.19-3.23. Уточнение параметров динамической модели можно осуществлять с использованием указанных зависимостей.

Решение задачи идентификации кинетических процессов позволяет установить параметры модели, соответствующей строительному материалу.

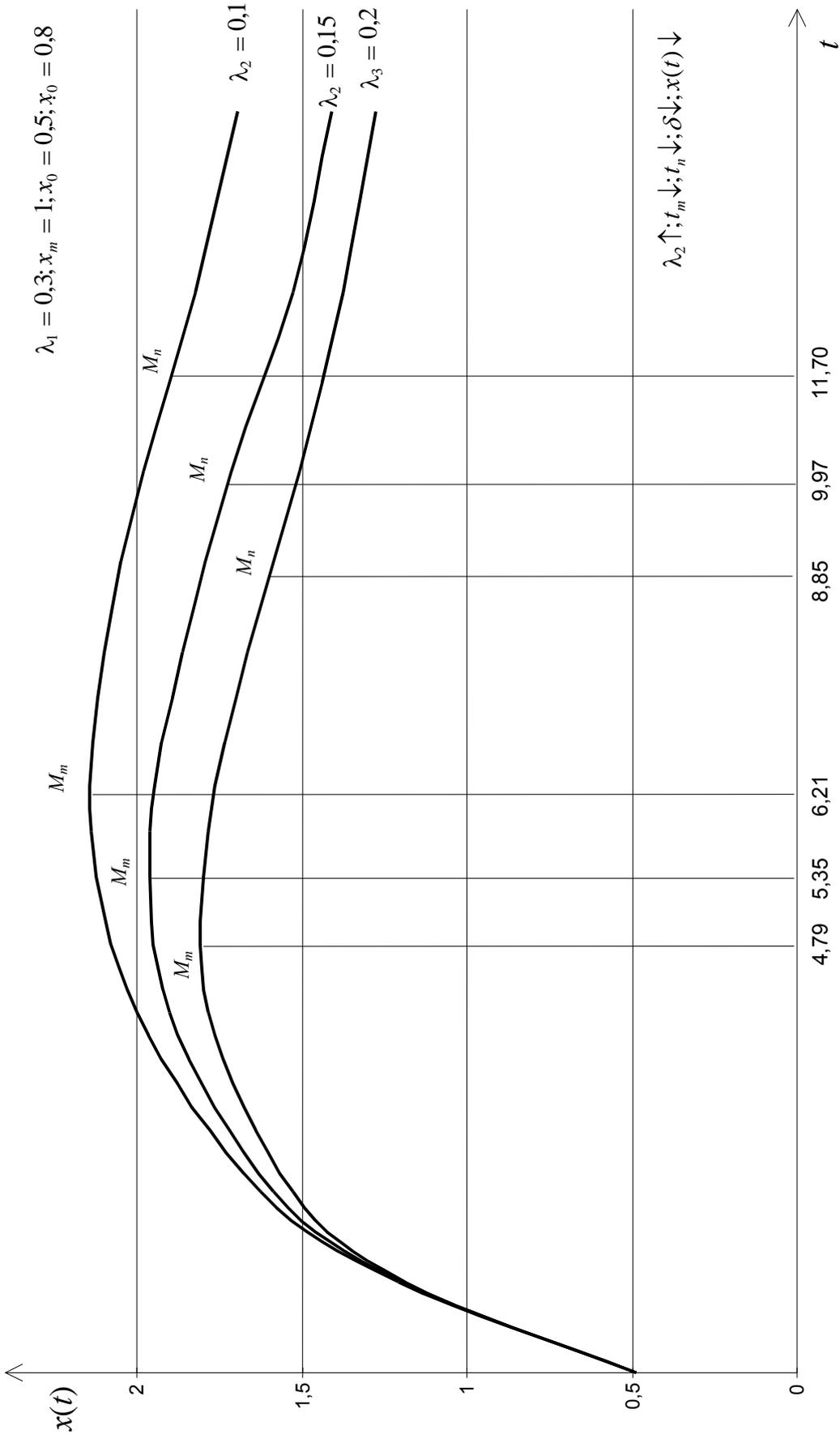


Рис. 3.19

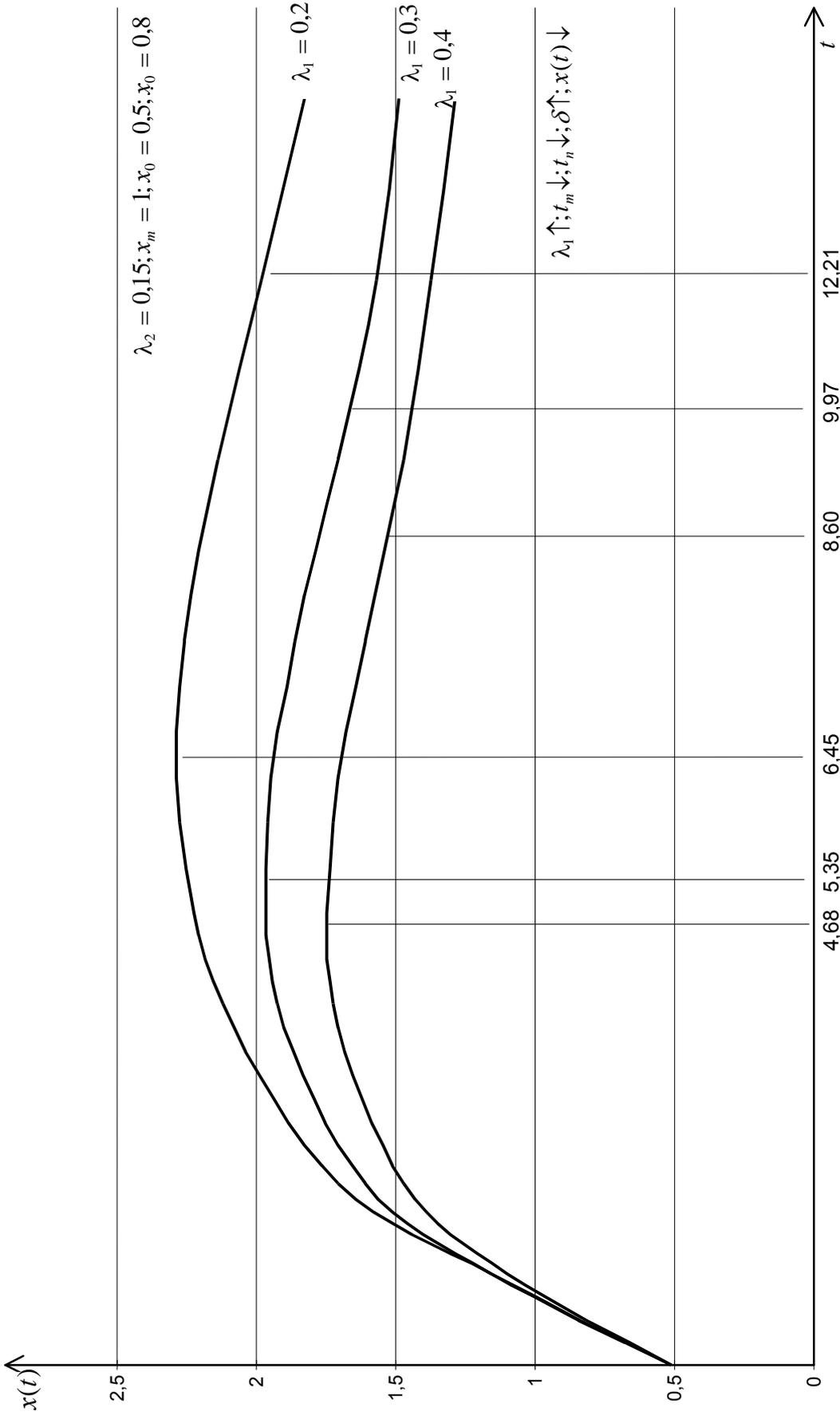


Рис. 3.20

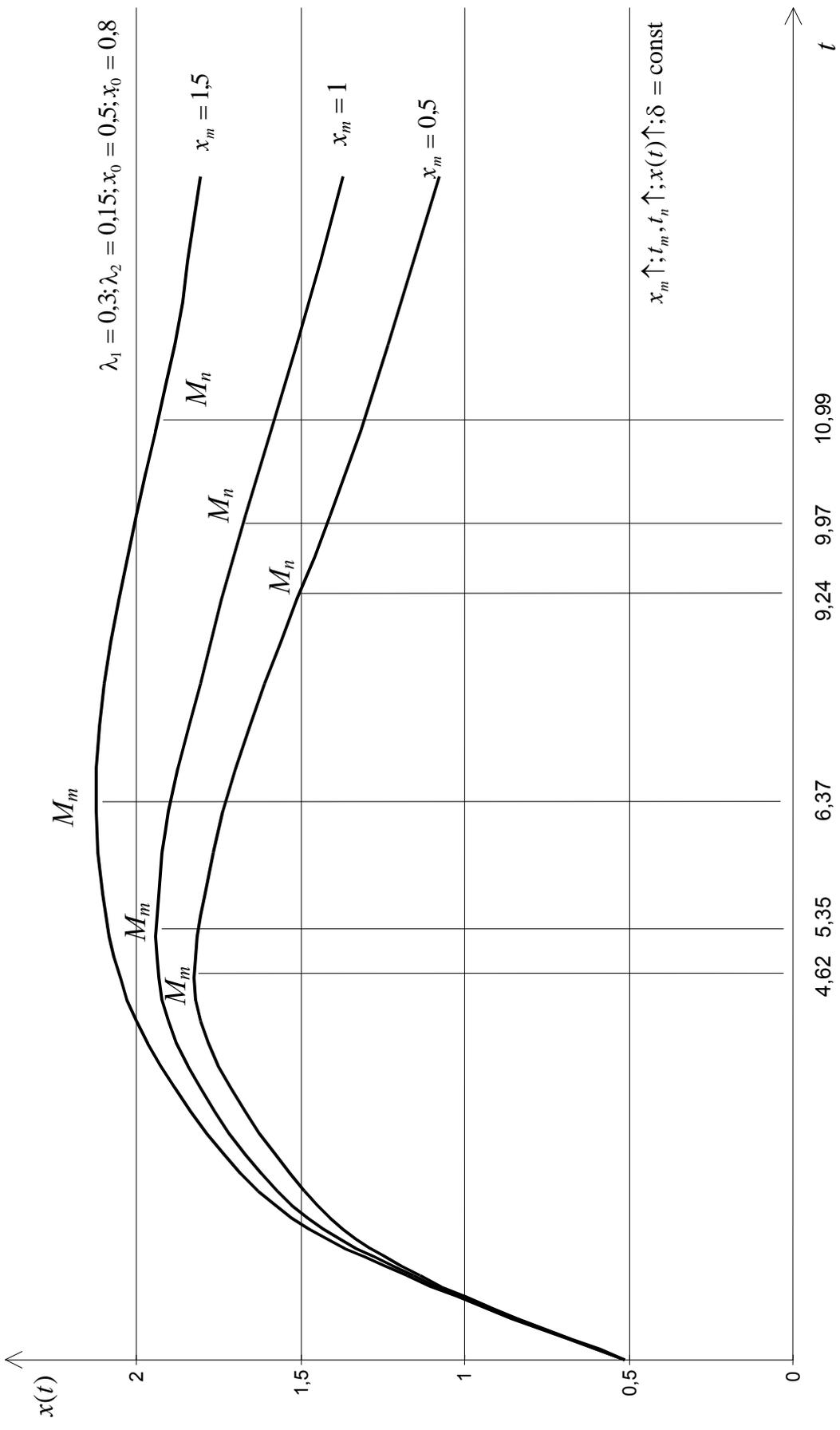


Рис. 3.21

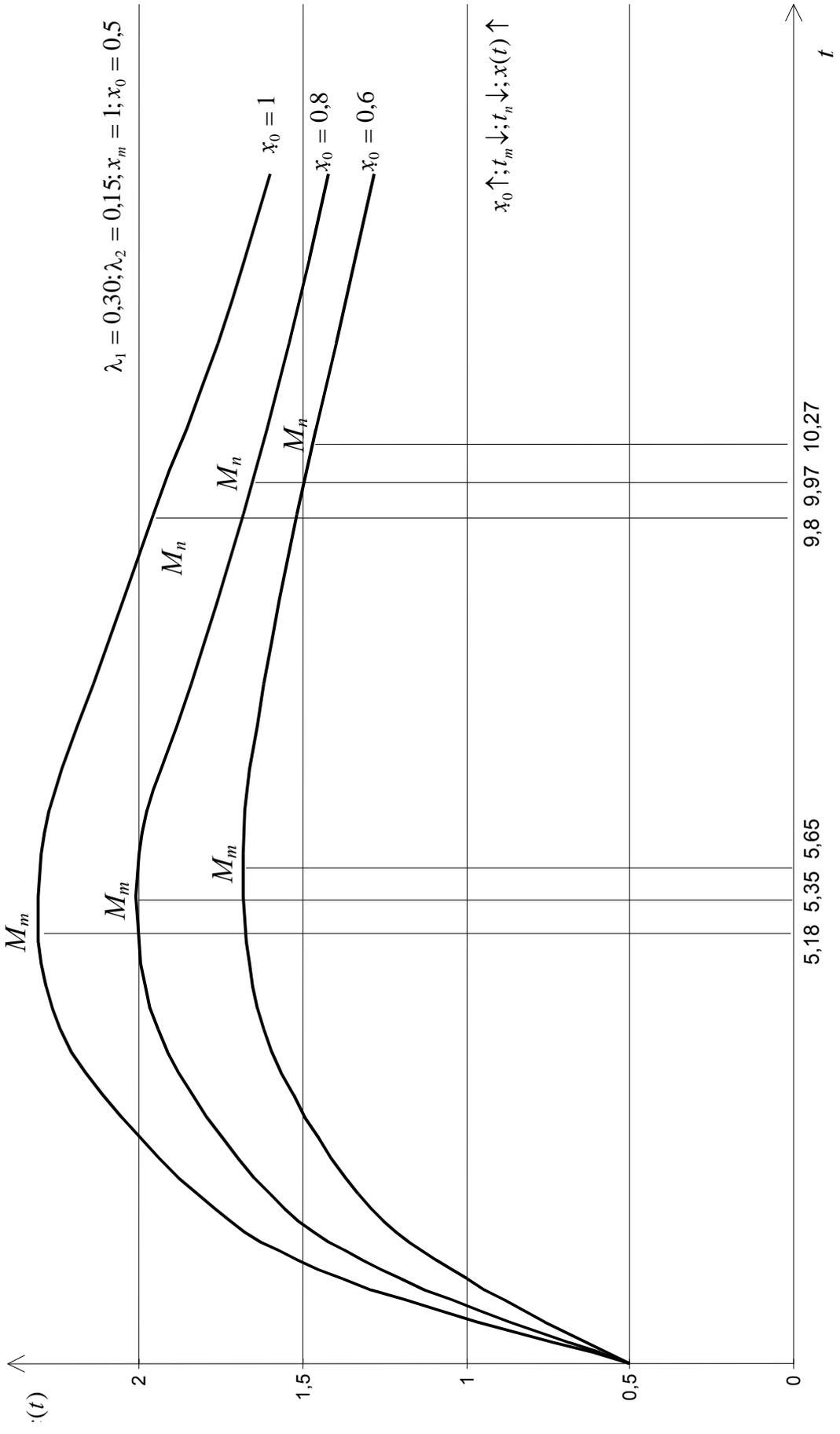


Рис. 3.22

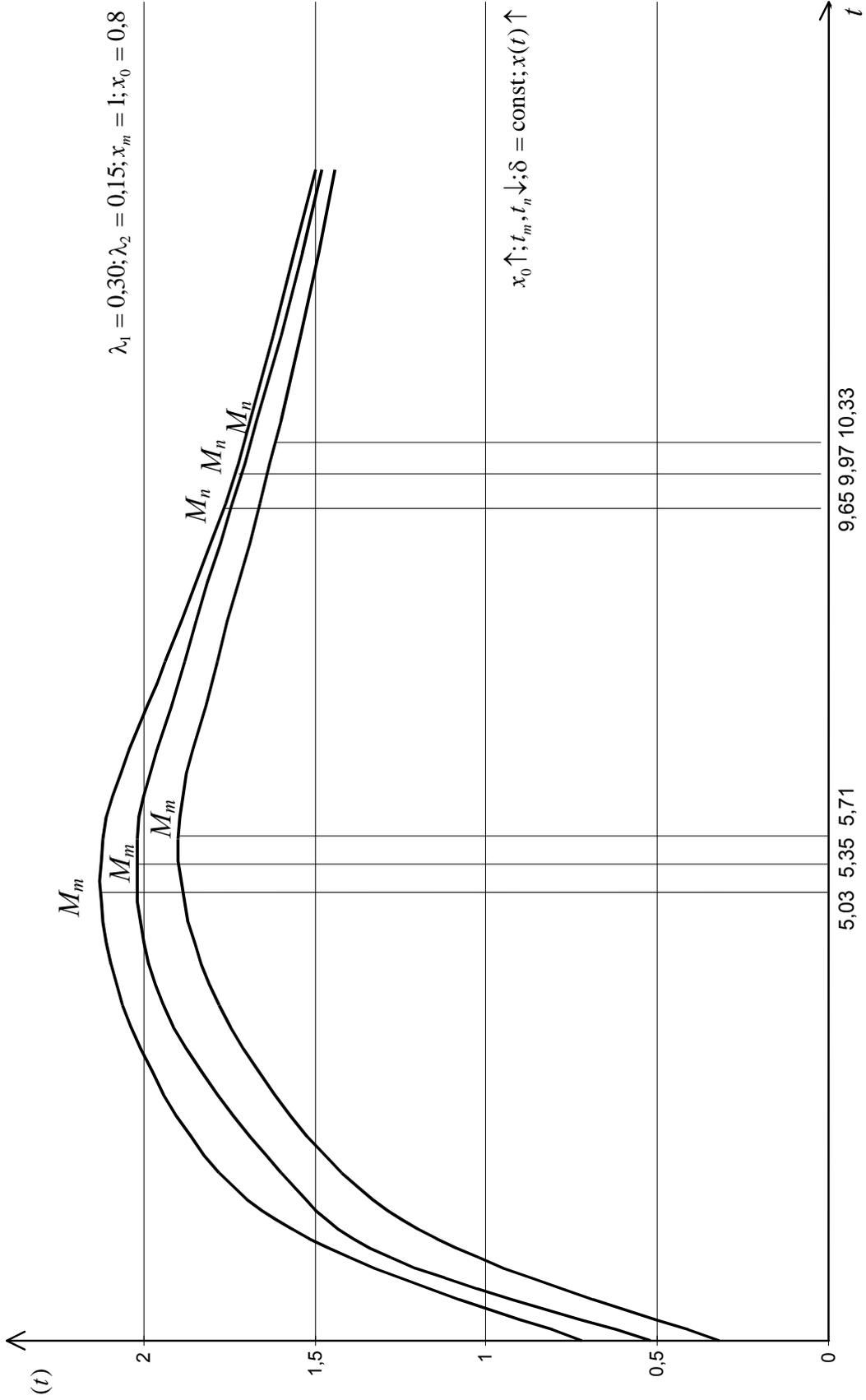


Рис. 3.23

4. ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА

1. В результате 100 измерений люфта X (в градусах) в рулевом управлении автомобилей получены следующие значения:

4,39	4,59	4,52	4,61
4,49	4,40	4,67	4,75
4,31	4,62	4,45	4,64
4,39	4,28	4,71	4,47
4,59	4,41	4,32	4,77
4,72	4,69	4,43	4,34
4,49	4,57	4,51	4,46
4,67	4,66	4,74	4,57
4,67	4,72	4,65	4,59
4,56	4,53	4,55	4,65
4,60	4,80	4,83	4,69
4,62	4,56	4,73	4,51
4,77	4,76	4,59	4,63
4,79	4,67	4,50	4,71
4,72	4,65	4,59	4,49
4,75	4,79	4,71	4,76
4,85	4,77	4,61	4,85
4,71	4,84	4,98	4,70
4,63	4,72	4,74	4,42
4,75	4,64	4,61	4,77
4,81	4,70	4,81	4,66
4,69	4,87	4,73	4,70
4,62	4,53	4,49	4,66
4,61	4,52	4,79	4,53
4,49	4,62	4,60	4,60

По критерию Пирсона проверить гипотезу о нормальном распределении случайной величины X .

Решение. Изучение выборки начнем с составления статистического распределения случайной величины (табл.1).

Таблица 1

Интервал $x_i - x_{i+1}$	4,28-4,38	4,38-4,48	4,48-4,58	4,58-4,68	4,68-4,78	4,78-4,88	4,88-4,98
Середина интервала $x_{i\text{cp.}}$	4,33	4,33	4,53	4,63	4,73	4,83	4,93
Частота n_i	4	9	17	30	27	11	2
Относительная частота $W_i = \frac{n_i}{n}$	0,04	0,09	0,17	0,30	0,27	0,11	0,02
Плотность частоты $\frac{n_i}{h}$	40	90	170	300	270	110	20
Плотность относительной частоты $\frac{W_i}{h}$	0,4	0,9	1,7	3	2,7	1,1	0,2
Накопленная частость	0,04	0,13	0,3	0,6	0,87	0,98	1

Определим числовые характеристики выборки методом произведений. Получим табл. 2, в столбцах которой указываются $x_{i\text{cp.}}$, n_i , u_i , $u_i n_i$, $u_i^2 n_i$, $u_i^3 n_i$, $u_i^4 n_i$, $(u_i + 1)^4 n_i$; $u_i = \frac{x_i - C}{h}$ – условные варианты; постоянная C (ложный нуль) является примерно серединой вариационного ряда и имеет наибольшую частоту. Последняя строка содержит сумму соответствующих значений элементов каждого из столбцов. Последний столбец используется для контроля вычислений. При правильно проведенных вычислениях должно выполняться условие:

$$\sum (u_i + 1)^4 n_i = \sum u_i^4 n_i + 4 \sum u_i^3 n_i + 6 \sum u_i^2 n_i + 4 \sum u_i n_i + n.$$

Таблица 2

$x_{i\text{cp.}}$	n_i	u_i	$u_i n_i$	$u_i^2 n_i$	$u_i^3 n_i$	$u_i^4 n_i$	$(u_i + 1)^4 n_i$
4,33	4	-3	-12	36	-108	324	64
4,43	9	-2	-18	36	-72	144	9
4,53	17	-1	-17	17	-17	17	0
4,63	30	0	0	0	0	0	30
4,73	27	1	27	27	27	27	432
4,83	11	2	22	44	88	176	891
4,93	2	3	6	18	54	162	512
	100	0	8	187	-28	850	1938

После того, как расчетная таблица заполнена и проверена правильность вычислений, вычисляют условные начальные моменты:

$$v_1^* = \frac{\sum u_i n_i}{n} = \frac{8}{100} = 0,08; \quad v_2^* = \frac{\sum u_i^2 n_i}{n} = \frac{187}{100} = 1,87;$$

$$v_3^* = \frac{\sum u_i^3 n_i}{n} = \frac{-28}{100} = -0,28; \quad v_4^* = \frac{\sum u_i^4 n_i}{n} = \frac{850}{100} = 8,5.$$

Выборочная средняя:

$$\bar{x}_B = v_1^* \cdot h + C = 0,08 \cdot 0,1 + 4,63 = 4,638.$$

В силу громоздкости непосредственного вычисления центральных моментов их выражают через начальные моменты:

$$\mu_2 = v_2 - (v_1)^2,$$

$$\mu_3 = v_3 - 3v_2 v_1 + 2(v_1)^3,$$

$$\mu_4 = v_4 - 4v_3 v_1 + 6v_2 (v_1)^2 - 3(v_1)^4.$$

С учетом $v_k = v_k^* \cdot h^k$ получим следующие значения центральных моментов:

$$\mu_2 = \left[v_2^* - (v_1^*)^2 \right] \cdot h^2 = \left[1,87 - (0,08)^2 \right] \cdot 0,01 = 0,017736;$$

$$\mu_3 = \left[v_3^* - 3v_2^* v_1^* + 2(v_1^*)^3 \right] \cdot h^3 = \left[-0,28 - 3 \cdot 1,87 \cdot 0,08 + 2(0,08)^3 \right] \cdot 0,001 = -0,0007;$$

$$\mu_4 = \left[v_4^* - 4v_3^* v_1^* + 6v_2^* (v_1^*)^2 - 3(v_1^*)^4 \right] \cdot h^4 =$$

$$= \left[8,5 - 4 \cdot (-0,28) \cdot 0,08 + 6 \cdot 1,27 \cdot (0,08)^2 - 3(0,08)^4 \right] \cdot 0,0001 = 0,000841.$$

Выборочная дисперсия:

$$D_B = \mu_2 = 0,017736.$$

Выборочное среднее квадратическое отклонение:

$$\sigma_B = \sqrt{0,017736} = 0,13318 \approx 0,133.$$

Выборочная дисперсия имеет систематическую ошибку, приводящую к уменьшению дисперсии. Вычисляют исправленную дисперсию

$$S^2 = \frac{n}{n-1} D_B.$$

Исправленное среднее квадратическое отклонение:

$$S = \sqrt{\frac{n}{n-1} \cdot D_B} = \sqrt{\frac{100}{99} \cdot 0,017736} = 0,1338 \approx 0,134.$$

Для оценки отклонения эмпирического распределения от нормального определяют **асимметрию**

$$A_s = \frac{\mu_3}{\sigma_B^3} = \frac{-0,0007}{0,133^3} \approx -0,2975.$$

и эксцесс

$$E_s = \frac{\mu_4}{\sigma_B^4} - 3 = \frac{0,000841}{0,133^4} \approx -0,3122.$$

Коэффициент вариации (показывает относительный разброс вокруг выборочной средней \bar{x}_B):

$$V = \frac{\sigma_B}{\bar{x}_B} \cdot 100\% = \frac{0,133}{4,638} \cdot 100\% = 2,87\%.$$

Воспользуемся критерием Пирсона. В качестве меры расхождения U примем величину χ^2 , равную сумме квадратов отклонений частот (статистических вероятностей) w_i от гипотетических p_i , рассчитанных по предполагаемому распределению, взятых в некоторыми весами c_i :

$$U = \chi^2 = \sum_{i=1}^m c_i (w_i - p_i)^2.$$

Веса c_i вводятся таким образом, чтобы при одних и тех же отклонениях $(w_i - p_i)^2$ больший вес имели отклонения, при которых p_i мала, и меньший вес – при которых p_i велика. Поэтому c_i принимаются обратно-пропорциональными вероятностям p_i . При $c_i = \frac{n}{p_i}$ и $n \rightarrow \infty$ статистика

$$U = \chi^2 = \sum_{i=1}^m \frac{n}{p_i} (w_i - p_i)^2$$

или

$$U = \chi^2 = \sum_{i=1}^m \frac{(w_i - p_i)^2}{np_i}$$

имеет χ^2 -распределение с $k = m - r - 1$ степенями свободы, где m – число интервалов эмпирического распределения (вариационного ряда); r – число параметров теоретического распределения, вычисленных по экспериментальным данным. Числа $n_i = nw_i$ и np_i называются соответственно *эмпирическими и теоретическими частотами*.

Для выбранного уровня значимости α по таблице χ^2 -распределения находят критическое значение χ^2 при числе степеней свободы $k = m - r - 1$. Если фактически наблюдаемое значение χ^2 больше критического, то есть $\chi^2_{\text{набл.}} > \chi^2_{\text{крит.}}$, то гипотеза H_0 (значения люфта распределены нормально) отвергается, если $\chi^2_{\text{набл.}} \leq \chi^2_{\text{крит.}}$, гипотеза H_0 не противоречит опытным данным.

Теоретические вероятности попадания X в интервалы определяются из

$$P_i = \Phi\left(\frac{x_{i+1} - a}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{x_i - a}{\sigma}\right),$$

где x_i, x_{i+1} – границы i -го интервала:

$$\begin{aligned} P_1 &= P(4,28 < \bar{x}_B < 4,38) = \Phi\left(\frac{4,38 - 4,638}{0,134}\right) - \Phi\left(\frac{4,28 - 4,638}{0,134}\right) = \\ &= \Phi(-1,9254) - \Phi(-2,6716) = -0,4729 + 0,4962 = 0,0233; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P_2 &= P(4,38 < \bar{x}_B < 4,48) = \Phi\left(\frac{4,48 - 4,638}{0,134}\right) - \Phi\left(\frac{4,38 - 4,638}{0,134}\right) = \\ &= \Phi(-1,1791) - \Phi(-1,9254) = -0,3799 + 0,4729 = 0,0930; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P_3 &= P(4,48 < \bar{x}_B < 4,58) = \Phi\left(\frac{4,58 - 4,638}{0,134}\right) - \Phi\left(\frac{4,48 - 4,638}{0,134}\right) = \\ &= \Phi(-0,4328) - \Phi(-1,1791) = -0,1676 + 0,3799 = 0,2123; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P_4 &= P(4,58 < \bar{x}_B < 4,68) = \Phi\left(\frac{4,68 - 4,638}{0,134}\right) - \Phi\left(\frac{4,58 - 4,638}{0,134}\right) = \\ &= \Phi(0,3134) - \Phi(-0,4328) = 0,1229 + 0,1676 = 0,2909; \end{aligned}$$

$$P_5 = P(4,68 < \bar{x}_B < 4,78) = \Phi\left(\frac{4,78 - 4,638}{0,134}\right) - \Phi\left(\frac{4,68 - 4,638}{0,134}\right) = \\ = \Phi(1,0597) - \Phi(0,3134) = 0,3553 - 0,1229 = 0,2324;$$

$$P_6 = P(4,78 < \bar{x}_B < 4,88) = \Phi\left(\frac{4,88 - 4,638}{0,134}\right) - \Phi\left(\frac{4,78 - 4,638}{0,134}\right) = \\ = \Phi(1,8060) - \Phi(1,0597) = 0,4646 - 0,3553 = 0,1093;$$

$$P_7 = P(4,88 < \bar{x}_B < 4,98) = \Phi\left(\frac{4,98 - 4,638}{0,134}\right) - \Phi\left(\frac{4,88 - 4,638}{0,134}\right) = \\ = \Phi(2,5522) - \Phi(1,8060) = 0,4947 - 0,4646 = 0,0301.$$

Результаты представлены в табл. 3.

Таблица 3

Интервал $x_i - x_{i+1}$	Эмпирическая частота n_i	Вероятность p_i	Теоретич. частота np_i	$(n_i - np_i)^2$	$\frac{(n_i - np_i)^2}{np_i}$
4,28-4,38	4	0,0233	2,33	2,7889	1,197
4,38-4,48	9	0,0930	9,30	0,009	0,0097
4,48-4,58	17	0,2123	21,23	17,8929	0,8428
4,58-4,68	30	0,2909	29,09	0,8281	0,0285
4,68-4,78	27	0,2324	23,24	14,1376	0,6083
4,78-4,88	11	0,1093	10,93	0,0289	0,0026
4,88-4,98	2	0,0301	3,01	1,0201	0,3389
		0,9913			$\chi^2 = 3,0278$

По таблице критических точек распределения χ^2 (уровень значимости $\alpha = 0,05$; число степеней свободы $k = 7 - 2 - 1 = 4$) находим $\chi_{кр}^2(0,05; 4) = 9,5$.

Так как $3,0278 < 9,5$, т.е. $\chi_{набл}^2 < \chi_{кр}^2$, то нет оснований отвергнуть гипотезу о нормальном распределении значений люфта.

2. Определить прямую регрессии, определяющую зависимость коэффициента теплопроводности λ , Вт / (м²·°С) жаростойкого бетона с заполнителем из магнезита от средней температуры нагрева t °С по данным эксперимента, приводимым в таблице:

t °C	100	300	600	700	900	1100
λ	5,90	5,35	4,78	4,20	3,60	3,00
m	2	3	3	4	4	2

Составим корреляционную таблицу:

$t = x$	$\lambda = y$						n_t
	3,00	3,60	4,20	4,78	5,35	5,90	
100						2	2
300					3		3
600				3			3
700			4				4
900		4					4
1100	2						2
n_λ	2	4	4	3	3	2	18

Определим оценки математических ожиданий x и y :

$$\bar{x}_0 = \frac{1}{18} \sum_{i=1}^{18} x_i = \frac{1}{18} \cdot 11500 = 638,9; \quad \bar{y}_0 = \frac{1}{18} \sum_{i=1}^{18} y_i = \frac{1}{18} \cdot 79,39 = 4,41.$$

Составим корреляционную таблицу для системы центрированных случайных величин $\overset{\circ}{x}$ и $\overset{\circ}{y}$:

$\overset{\circ}{t}$	$\overset{\circ}{\lambda}$						n_t
	-1,41	-0,81	-0,21	0,37	0,94	1,49	
-538,9						2	2
-338,9					3		3
-38,9				3			3
61,1			4				4
261,1		4					4
461,1	2						2
n_λ	2	4	4	3	3	2	18

Определим оценки дисперсий D_x и D_y :

$$\tilde{D}_x = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n \overset{\circ}{x}_i^2 = \frac{1}{17} \cdot 1642774 = 96633,7;$$

$$\tilde{D}_y = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n \overset{\circ}{y}_i^2 = \frac{1}{17} \cdot 14,5986 = 0,8574.$$

Определим оценки среднеквадратических отклонений:

$$\tilde{\sigma}_x = S_x = \sqrt{\tilde{D}_x} = 311, \quad \tilde{\sigma}_y = S_y = \sqrt{\tilde{D}_y} = 0,93.$$

Определим оценку корреляционного момента:

$$\tilde{K}_{xy} = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n x_i y_i = \frac{1}{17}(-4803) = -282,5.$$

Определим оценку коэффициента корреляции:

$$\tilde{r}_{xy} = r^* = \frac{K_{xy}}{\tilde{\sigma}_x \tilde{\sigma}_y} = \frac{-282,5}{311 \cdot 0,93} = -0,977.$$

Таким образом, корреляционная зависимость между X и Y близка к линейной.

Определим эмпирические прямые регрессии:

$$y - \bar{y}_0 = \bar{r}_{xy} \frac{\tilde{\sigma}_y}{\tilde{\sigma}_x} (x - \bar{x}_0); \quad x - \bar{x}_0 = \bar{r}_{xy} \frac{\tilde{\sigma}_x}{\tilde{\sigma}_y} (y - \bar{y}_0).$$

Откуда

$$y = -0,0028 x + 6,2; \quad x = -326,7 y + 2080.$$

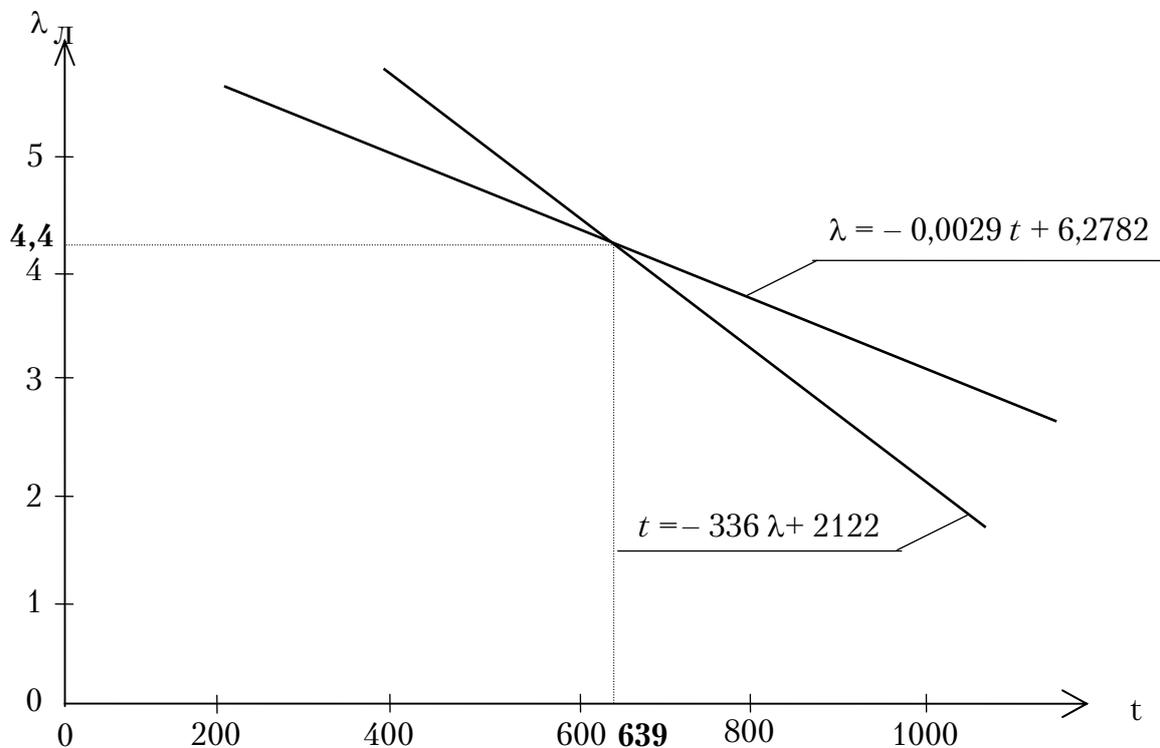


Рис. 4.1

3. Вероятность брака при изготовлении кирпича $p = 0,01$. Определить количество n кирпичей, которые следует отобрать, чтобы с вероятностью 0,95 можно было утверждать, что относительная частота появления брака среди отобранных кирпичей отклонится от постоянной вероятности p по абсолютной величине не более чем на 0,005.

Решение. По условию $p = 0,01$; $q = 0,99$; $\varepsilon = 0,005$. Должно выполняться

$$P\left(\left|\frac{k}{n} - 0,01\right| \leq 0,005\right) = 0,95 \approx 2\Phi\left(0,005\sqrt{\frac{n}{0,01 \cdot 0,99}}\right).$$

Откуда

$$2\Phi(0,05\sqrt{n}) \approx 0,95$$

или

$$\Phi(0,05\sqrt{n}) \approx 0,475.$$

По таблице для $\Phi(x) \approx 0,475$ найдем $x = 1,96$. Откуда $\sqrt{n} = 39,2$; $n \approx 1540$.

Таким образом, с большой уверенностью (с вероятностью 0,95) можно ожидать, что в одной партии из 1540 кирпичей будет от $(0,01 - 0,005)1540 \gg 8$ до $(0,01 - 0,005)1540 \approx 8$ до $(0,01 + 0,005)1540 \approx 24$ бракованных. Маловероятно, хотя и возможно (с вероятностью 0,05), что бракованных кирпичей будет менее 8 и более 24.

Если проб по 1540 кирпичей будет достаточно много, то в 95% них проб число бракованных кирпичей будет заключено между 8 и 24.

4. Указать число n образцов для определения предела прочности X нового материала, чтобы с вероятностью, не меньшей $1 - \delta$, можно было ожидать, что отклонение среднего арифметического \bar{x} от математического ожидания не превысит ε .

Решение. Имеем

$$P\left(\left|\bar{X} - m\right| < \varepsilon\right) \geq 1 - \frac{\sigma^2}{n\varepsilon^2} \geq 1 - \delta$$

Отсюда

$$\delta \geq \frac{\sigma^2}{n\varepsilon^2}$$

или

$$n \geq \frac{\sigma^2}{\varepsilon^2 \delta}.$$

К сожалению, часто значение σ бывает неизвестно.

При $\varepsilon = \alpha\sigma$

$$n \geq \frac{1}{\alpha^2 \delta}.$$

В частности, при $\alpha = 1, \varepsilon = \sigma, \delta = 0,05$ имеем $n \geq 20$. Откуда

$$P(|\bar{X} - m| < \sigma) \geq 1 - \frac{1}{n} \quad \forall n \geq 20.$$

Аналогично при $\varepsilon = 2\sigma, \alpha = 2$

$$P(|\bar{X} - m| < 2\sigma) \geq 1 - \frac{1}{4n} \quad \forall n \geq 5.$$

5. Расследуются причины аварийного состояния жилого дома. Экспертная комиссия высказала следующие гипотезы о причинах аварийного состояния (при предположении качества фундаментных блоков и при условии, что грунт соответствует геологическим изысканиям):

H_1 – блоки уложены на мерзлый грунт;

H_2 – неправильно выполнены правила производства работ в весеннее время;

H_3 – укладка производилась при разной температуре;

H_4 – заглубление фундамента выше глубины промерзания грунта.

Согласно статистике:

$$P(H_1) = 0,3; P(H_2) = 0,4; P(H_3) = 0,2; P(H_4) = 0,1.$$

Обнаружено, что в этой ситуации имело место отклонение от проекта: не уложена песчаная подготовка (событие A); условные вероятности гипотез при наличии этого факта согласно той же статистике равны:

$$P(A|H_1) = 0,9; P(A|H_2) = 0; P(A|H_3) = 0,2; P(A|H_4) = 0,3.$$

Найти апостериорные вероятности гипотез.

Решение.

$$P(H_1|A) = \frac{0,3 \cdot 0,9}{0,3 \cdot 0,9 + 0,4 \cdot 0 + 0,2 \cdot 0,2 + 0,1 \cdot 0,3} = \frac{0,27}{0,34} = 0,794;$$

$$P(H_2|A) = 0;$$

$$P(H_3|A) = \frac{0,2 \cdot 0,2}{0,34} \approx 0,117;$$

$$P(H_4|A) = \frac{0,1 \cdot 0,3}{0,34} \approx 0,088.$$

Как видим, наиболее вероятным является укладка блоков на мерзлый грунт.

6. Испытывается узел управления системы отопления, состоящий из системы задвижек, элеватора и регулятора расхода. Надежности этих трех элементов известны и соответственно равны

$$P_1 = 0,99; P_2 = 0,8; P_3 = 0,5.$$

Элементы выходят из строя независимо друг от друга. До срока капитального ремонта выяснилось, что рассматриваемый узел управления системы отопления неисправен. Найти, с учетом этого, вероятности гипотез:

H_1 – неисправна система задвижек;

H_2 – неисправен элеватор;

H_3 – неисправен регулятор расхода.

Решение. Отметим, что до опыта возможны были не только гипотезы H_1, H_2, H_3 , но и гипотезы:

H_0 – исправны все три элемента;

H_4 – неисправны система задвижек и элеватор;

H_5 – неисправны система задвижек и регулятор расхода;

H_6 – неисправны элеватор и регулятор расхода;

H_7 – неисправны все 3 элемента.

Опыт показал, что имеет место одна из гипотез H_1, H_2, H_3 , то есть событие $A = H_1 + H_2 + H_3$.

Априорные вероятности этих гипотез:

$$P(H_1) = 0,99 \cdot 0,2 \cdot 0,5 = 0,099;$$

$$P(H_2) = 0,8 \cdot 0,01 \cdot 0,5 = 0,004;$$

$$P(H_3) = 0,5 \cdot 0,2 \cdot 0,01 = 0,001;$$

$$P(A) = \sum_{j=1}^3 P(H_j) = 0,104.$$

Апостериорные вероятности гипотез:

$$P(H_1 | A) = \frac{0,099}{0,104} \approx 0,95;$$

$$P(H_2 | A) = \frac{0,004}{0,104} \approx 0,04;$$

$$P(H_3 | A) = \frac{0,001}{0,104} \approx 0,01,$$

так что с вероятностью 0,95 можно утверждать, что неисправна система задвижек.

7. Рассмотрим приложение вероятностных методов оценке эффективности применения некоторой добавки в композиционном материале. Обозначим:

A – событие, заключающееся в использовании добавки,

B – факт получения необходимых свойств.

Тогда $P(B|A)$ – вероятность получения необходимых свойств при использовании данной добавки, $P(B|\bar{A})$ – вероятность получения указанных свойств без применения добавки. Знания этих двух вероятностей вполне достаточно для суждения об эффективности добавки.

Вероятность $P(B|A)$ даёт представление о том, насколько возможно получить необходимые свойства добавлением этой компоненты. Но, не зная о степени невозможности получить указанные свойства без применения данной компоненты ($P(\bar{B}|\bar{A})$), нельзя судить о степени целесообразности применения добавки.

Поскольку применение добавки субъективно, то при характеристике зависимости между A и B с помощью одного коэффициента его следует выбрать так, чтобы он не изменял своего значения при изменении $P(AB)$ при неизмененных значениях $P(B|A)$ и $P(B|\bar{A})$.

Отметим, что нельзя вполне охарактеризовать зависимость между событиями при помощи одного числа. Для полной характеристики надо знать 3 числа, которые позволили бы определить вероятности всех 4 совмещений: AB , $A\bar{B}$, $\bar{A}B$, $\bar{A}\bar{B}$ (их сумма, как вероятность суммы единственно возможных несовместных событий, равна 1; для независимых событий $P(AB) = P(A)P(B)$, а для зависимых: $P(AB) = P(A)P(B|A)$). Связь между событиями B и A , в известной мере, характеризуется величиной $\delta = P(AB) - P(A)P(B)$, в общем случае δ оказывается мало пригодной для оценки эффективности применения добавки, т.к. она существенно зависит от $P(A)$:

$$\delta = P(A)P(\bar{A})[P(B|A) - P(B|\bar{A})].$$

Константа (коэффициент регрессии события B относительно события A)

$$\rho_B = \frac{\delta}{P(A)P(\bar{A})} = P(B|A) - P(B|\bar{A})$$

показывает, насколько увеличивается вероятность получения необходимых свойств при применении добавки; так же как и связь δ , обращается в нуль тогда и только тогда, если A и B независимы (ρ_B имеет знак δ).

Если вероятность одного факта возрастает после наступления другого, то $\delta > 0$; если наступление одного из них уменьшает вероятность другого, то $\delta < 0$ ($\delta = P(A)[P(B|A) - P(B)]$); $P(B|A) = P(B) + \frac{\delta}{P(A)} |\rho_B| \leq 1$, так как $P(B|A)$ и $P(B|\bar{A})$ положительны и меньше единицы).

Коэффициент регрессии

$$\rho_A = P(A|B) - P(A|\bar{B}) = \rho_B \frac{P(A)P(\bar{A})}{P(B)P(\bar{B})}; \rho_A = \rho_B \frac{\rho_A}{\rho_B}.$$

Знание обоих коэффициентов позволяет, по существу, определить взаимоотношение между A и B , так как каждый из них выражает разность между вероятностями одного из событий в случае наступления или ненаступления другого.

Для характеристики зависимости между A и B иногда можно ограничиться указанием средней геометрической из обоих коэффициентов регрессии:

$$R = R_{AB} = \pm \sqrt{\rho_A \rho_B} = \rho_B \sqrt{\frac{P(A)P(\bar{A})}{P(B)P(\bar{B})}}$$

(коэффициент корреляции между A и B ; знак R совпадает со знаками коэффициентов регрессии ρ_A и ρ_B).

Справедливо: $R_{\bar{A}\bar{B}} = -R_{AB}$; $R_{\bar{A}B} = R_{AB}$; $R_{AB} = 0$ тогда и только тогда, когда A и B независимы; $|R| \leq 1$, причём $R = 1$ тогда и только тогда, когда $P(A) = P(B) = P(AB)$; $R = -1$ тогда и только тогда, когда

$P(A) = P(\bar{B}) = P(A\bar{B})$; $R \leq \sqrt{\frac{P(\bar{A})P(B)}{P(A)P(\bar{B})}}$, иначе $P(B|A)$ была бы отрица-

тельной. Коэффициент корреляции может быть значительно меньше 1 и, несмотря на это, A может быть следствием B ; даёт весьма неточное представление о характере зависимости между A и B , если кроме R неизвестны индивидуальные вероятности этих событий (или по

крайней мере значение $\frac{P(\bar{A})P(B)}{P(A)P(\bar{B})}$, являющееся наибольшим значе-

нием R при данных $P(A)$ и $P(B) \leq P(A)$, которое позволяет определить оба коэффициента регрессии).

Очевидна возможность использования указанных результатов для решения и обратной задачи (задача экспертизы): определить факт использования добавки при наличии определённых свойств у материала. Для большей наглядности примем:

$$P(B|A) = \frac{29}{30}; \quad P(B|\bar{A}) = \frac{26}{30}; \quad P(\bar{B}|A) = \frac{1}{30}; \quad P(\bar{B}|\bar{A}) = \frac{4}{30}.$$

Имеем $\delta = 0,1P(A)P(\bar{A})$ и существенно зависит от $P(A)$ и $P(\bar{A})$, то есть от вероятности использования и неиспользования добавки (связь δ плохо характеризует эффективность применения добавки). С учётом $\rho_B = P(B|A) - P(B|\bar{A})$, следует, что вероятность получения необходимых свойств при применении добавки больше вероятности получения необходимых свойств без применения добавки на $\rho_B = 0,1$. Коэффициент регрессии $\rho_A = P(A|B) - P(A|\bar{B})$, но он менее интересен в рассматриваемом случае, ибо показывает, насколько вероятнее применение добавки в случае получения необходимых свойств, чем вероятность применения добавки при отсутствии необходимых свойств.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Искусством построения моделей можно овладеть только в результате собственной практики. В чем состоит это искусство можно почувствовать, рассматривая примеры, которые, так или иначе, иллюстрируют различные особенности процесса моделирования. Среди рассматриваемых моделей присутствуют модели физических явлений, значительная часть которых показывает математический аппарат, необходимый инженеру-строителю. Модели первой группы по своей природе являются детерминированными. Ко второй группе относятся стохастические модели. Здесь применяются методы математической статистики и исследования операции.

На практике исходным пунктом является эмпирическая ситуация, когда перед исследователем стоит задача, на которую требуется найти ответ. Формулировка задачи не так проста, как может показаться: реальные ситуации очерчены не четко, а сложные взаимодействия с окружающей средой делает практически невозможным точное описание ситуации. Формулировка может быть продолжительной и требовать владения многими навыками, не всегда имеющими отношение к математике. Параллельно с постановкой задачи происходит процесс выявления основных (существенных) особенностей явления. Для физических явлений процесс схематизации или идеализации решает ведущую роль (в реальном явлении участвует множество процессов; некоторые явления могут оказаться важными, многие другие – несущественными). После выявления существенных факторов производится перевод факторов на язык математических понятий и величин, и постулируются соотношения между этими величинами. Это *самая трудная часть процесса моделирования*. Здесь невозможно дать никаких рекомендаций. Приведенные в книге задачи моделирования иллюстрируют разнообразие используемых подходов.

После построения модели следует проверка ее адекватности; частично до некоторой степени она проверяется уже в ходе постановки задач. Уравнения или другие соотношения, сформулированные в модели, всегда сопоставляются с исходной ситуацией.

Укажем наиболее важные аспекты в проверке адекватности модели. Прежде всего, математическая основа модели должна быть непротиворечивой и подчиняться законам математической логики. Справедливость модели определяет ее способность адекватного описания исходной ситуации. Однако вывод о том, что предложенная модель выдержит такую проверку, в значительной степени субъективен. *Можно*

добиться некоторого отражения действительности моделью, но модель никогда не будет совпадать с действительностью. В основном все определяется тем, насколько результаты модельных исследований можно использовать для установления зависимости физических, экономических или других характеристик реальных процессов и систем. При этом следует отчетливо осознавать математический смысл, полученных модельных решений на языке реального мира. Модель начинается с самого простого и совершенствуется, принимая более сложные очертания с одновременным достижением более глубокого понимания процесса явления или системы.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Письменный, Д.Т. Конспект лекций по высшей математике [Текст]: в 2 ч. / Д.Т. Письменный. – М.: Айрис-Пресс, 2011. – Ч. 1. – 288 с.
2. Письменный Д.Т. Конспект лекций по высшей математике [Текст]: в 2 ч. / Д.Т. Письменный. – М.: Айрис-Пресс, 2015. – Ч. 2. – 256 с.
3. Данко, П.Е. Высшая математика в упражнениях и задачах [Текст] / П.Е. Данко, А.Г. Попов, Т.Я. Кожевникова. – М.: АСТ, Мир и образование, 2014. – 816 с.
4. Бугров, Я.С. Высшая математика. Задачник [Текст] / Я.С. Бугров, С.М. Никольский. – М.: Юрайт, 2015. – 192 с.
5. Ватутин, В.А. Теория вероятностей и математическая статистика в задачах [Текст] / В.А. Ватутин, Г.И. Ивченко, Ю.И. Медведев, В.П. Чистяков. – М.: Ленанд, 2015. – 386 с.
6. Данилов, А.М. Математическое и компьютерное моделирование сложных систем [Текст] / А.М. Данилов, Э.Р. Домке, И.А. Гарькина. – Пенза: ПГУАС, 2011. – 296 с.
7. Данилов, А.М. Теория вероятностей и математическая статистика с инженерными приложениями [Текст] / А.М. Данилов, И.А. Гарькина. – Пенза: ПГУАС, 2010. – 228 с.
8. Селезнев, В.Е. Основы численного моделирования магистральных трубопроводов [Текст] / В.Е. Селезнев, В.В. Алешин, С.Н. Прялов. – М.: МАКС Пресс, 2009. – 436 с.
9. Красс, М.С. Математика в экономике: мат. методы и модели: учеб. для вузов [Текст] / М.С. Красс, Б.П. Чупрынов; под ред. М.С. Красса. – М.: Финансы и статистика, 2007. – 541 с.
10. Шапкин, А.С. Задачи по высшей математике, теории вероятностей, математической статистике, математическому программированию с решениями: учеб. пособие для вузов по специальности «Мат. методы в экономике» и др. экон. специальностям [Текст] / А.С. Шапкин. – 5-е изд. – М.: Дашков и К°, 2009. – 431 с.
11. Флегонтов А.В. Структурно-инвариантное моделирование сложных систем [Текст]: монография / А.В. Флегонтов. – М.: Изд-во РГПУ, 2012. – 147 с.
12. Аверилл, М. Лоу. Имитационное моделирование [Текст] / М. Лоу Аверилл, В. Дэвид Кельтон. – СПб.: Питер, Издательская группа ВНУ, 2004. – 848 с.

13. Кривоножко, В.Е. Моделирование и анализ деятельности сложных систем [Текст]: монография / В.Е. Кривоножко, А.В. Лычев. – М.: ЛЕНАНД, 2013. – 256 с.

14. Цыгичко, В.Н. Синтез иерархических систем управления: Теория и практика [Текст]: монография / В.Н. Цыгичко, А.Ю. Попович. – М.: КРАСАНД, 2012. – 256 с.

ОГЛАВЛЕНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ.....	3
ВВЕДЕНИЕ	6
1. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ	14
2. ИНТЕГРАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ	31
3. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ.....	51
4. ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА.....	98
ЗАКЛЮЧЕНИЕ	112
БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК.....	114

Учебное издание

Данилов Александр Максимович

Гарькина Ирина Александровна

ОБЩИЙ КУРС МАТЕМАТИКИ:
МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССОВ И СИСТЕМ

Монография

В авторской редакции

Верстка Н.А. Сазонова

Подписано в печать 10.02.16. Формат 60×84/16.

Бумага офисная «Снегурочка». Печать на ризографе.

Усл.печ.л. 6,74. Уч.-изд.л. 7,25. Тираж 500 экз. 1-й завод 100 экз.

Заказ № 110.

Издательство ПГУАС.
440028, г. Пенза, ул. Германа Титова, 28.