

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«Пензенский государственный университет
архитектуры и строительства»
(ПГУАС)

С.В. Бакушев, В.В. Зернов

ТЕОРИЯ УПРУГОСТИ

РУКОВОДСТВО К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧ

Рекомендовано Редсоветом университета
в качестве учебного пособия для студентов,
обучающихся по направлению «Строительство»

Пенза 2014

УДК 539.3
ББК 22.251я73
Б19

Рецензенты: доктор технических наук, профессор
М.М. Алиев (Альметьевский государственный нефтяной институт);
доктор технических наук, профессор
Н.Н. Ласьков (ПГУАС)

Бакушев С.В.

Б19 Теория упругости. Руководство к решению задач / С.В. Бакушев, В.В. Зернов. – Пенза: ПГУАС, 2014. – 128 с.

Рассматриваются вопросы расчёта балок-стенок и тонких плит на изгиб, а также тонких плит на упругом основании. Приведены конкретные примеры решения задач, как без использования средств вычислительной техники, так и с использованием математического пакета MathCAD при решении задачи на персональном компьютере.

Учебное пособие подготовлено на кафедре «Механика» и предназначено для студентов, обучающихся по направлению «Строительство». Книга может быть полезной студентам технических специальностей, изучающим курс «Теория упругости», а также аспирантам, исследующим вопросы расчёта сооружений.

© Пензенский государственный университет
архитектуры и строительства, 2014

© С.В.Бакушев, В.В.Зернов 2014

ПРЕДИСЛОВИЕ

Данное учебное пособие содержит описание процедур решения прикладных задач теории упругости и предназначено для практического закрепления теоретического материала путём самостоятельного решения задач. Варианты исходных данных даются в главе 1.

В пособии даются краткие теоретические сведения и примеры решения задач, как в режиме ручного расчёта, так и на персональном компьютере с использованием математического пакета MathCAD. Пособие охватывает следующие разделы курса теории упругости: плоская задача теории упругости – расчёт балки-стенки с использованием функции напряжений при помощи целых полиномов; расчёт тонких пластин на изгиб в двойных тригонометрических рядах; расчёт тонких плит на упругом основании Фусса – Винклера на изгиб в двойных тригонометрических рядах.

Первая задача на тему: «Расчёт балки-стенки (плоская задача теории упругости)» предполагает, что студенты в процессе её решения познакомятся с основами теории упругости и освоят её следующие разделы: теория напряжений, теория деформаций, физические уравнения теории упругости, общая система уравнений теории упругости, решение прямой задачи теории упругости в напряжениях и перемещениях, обратная задача теории упругости, теории прочности, плоская задача теории упругости, решение плоской задачи теории упругости с использованием функции напряжений в форме целых полиномов, а также в форме тригонометрических рядов (решения Файлона и решение Рибьера).

При решении второй задачи на тему: «Расчёт прямоугольной пластины опёртой по контуру на изгиб» студенты должны освоить техническую теорию изгиба тонких пластин, знать основные допущения, положенные в основу построения теории расчёта тонких пластин, уметь определять перемещения, деформации и напряжения в пластине, уметь формулировать краевые условия при различных случаях опирания пластины по контуру,

знать как записываются условия прочности пластины. Кроме того необходимо знать методы расчёта прямоугольных пластин на изгиб, в частности, уметь строить решение задачи с использованием двойных и одинарных тригонометрических рядов.

Третья задача посвящена расчёту тонких плит на упругом основании Фусса – Винклера. При её решении студенты должны получить представление о моделях упругого основания, используемых при расчёте конструкций на упругом основании, знать методику расчёта тонких плит на упругом основании Фусса – Винклера, иметь представление о формулировке краевых условий, уметь выполнять расчёт тонких плит на упругом основании, шарнирно опёртых по контуру, в двойных тригонометрических рядах.

Решение задач теории упругости – это достаточно трудный и утомительный процесс, связанный с проведением и большого объёма арифметических вычислений и, как правило, большого объёма алгебраических преобразований. Отсюда, как следствие, большое количество ошибок, опечаток, перепроверок. А поэтому использование современных информационных технологий на базе персональных компьютеров при решении задач теории упругости просто необходимо.

В пособии решение каждой задачи даётся в двух вариантах: при ручном её выполнении и, в качестве иллюстрации, решение этой же задачи на персональном компьютере с использованием возможностей математического пакета MachCAD. Пакет MachCAD является всего лишь инструментом и решение, получаемое с его помощью, как правило, требует осмысления и ручной обработки. MachCAD не позволяет, вообще говоря, получать решение в полностью автоматизированном режиме и в форме удобной пользователю. Его преимуществом является то, что он полностью избавляет пользователя от выполнения арифметических операций, а, зачастую, и от проведения сложных алгебраических преобразований. Кроме того, MachCAD позволяет при решении задачи получать результаты, которые при ручном счёте получить практически нельзя. Например, построение поверхностей распределения напряжений и деформаций в деформируемом теле, построение поверхностей прочности и так далее.

Краткое изложение основ работы с математическим пакетом MachCAD представлено в приложении.

Следует иметь в виду, что, например, построение поверхности прочности, хотя и не даёт количественных характеристик прочности, однако позволяет выявить качественную картину и наметить области, в которых прочность может быть нарушена. Кроме этого, иллюстрация распределения напряжений и деформаций в деформируемом теле в виде поверхностей, наряду с плоскими эпюрами, создаёт более целостную картину о распределении напряжённо-деформированного состояния, а, следовательно, и более целостное представление о работе тела под нагрузкой.

ВВЕДЕНИЕ

Общая система уравнений теории упругости включает три группы соотношений.

I. Геометрические уравнения, устанавливающие связь между компонентами вектора перемещений $u = u(x, y, z)$, $v = v(x, y, z)$, $w = w(x, y, z)$ и компонентами симметричного тензора деформации $\varepsilon_x = \varepsilon_x(x, y, z)$, $\varepsilon_y = \varepsilon_y(x, y, z)$, $\varepsilon_z = \varepsilon_z(x, y, z)$, $\gamma_{xy} = \gamma_{xy}(x, y, z)$, $\gamma_{yz} = \gamma_{yz}(x, y, z)$, $\gamma_{zx} = \gamma_{zx}(x, y, z)$:

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x}; \quad \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}; \quad \varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z}; \\ \gamma_{xy} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}; \quad \gamma_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}; \quad \gamma_{zx} = \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}. \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь u, v, w - проекции полного перемещения точки на оси декартовой системы координат; $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z$ - относительные линейные деформации бесконечно-малого линейного элемента в направлении осей декартовой системы координат; $\gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{zx}$ - углы сдвига - изменение прямых углов между двумя бесконечно-малыми линейными элементами, выходящими из одной точки в направлении осей декартовой системы координат (рис.1).

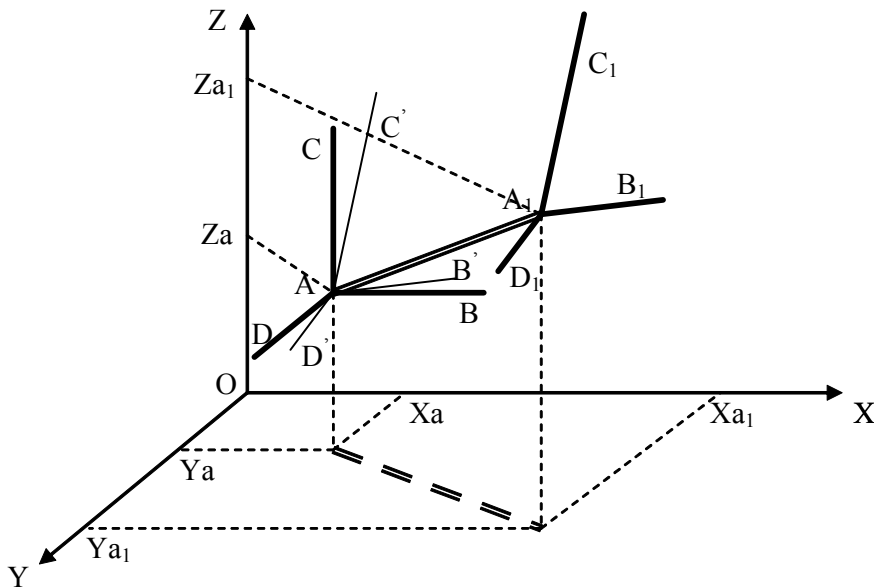


Рис. 1

На рис.1 обозначено: т. $A(X_a, Y_a, Z_a)$ - положение точки в состоянии до деформации; т. $A_1(X_{a1}, Y_{a1}, Z_{a1})$ - положение точки в состоянии после деформации; AB, AC, AD - линейные элементы в состоянии до деформации;

ции; A_1B_1, A_1C_1, A_1D_1 – линейные элементы в состоянии после деформации; отрезок AA_1 – полное перемещение точки в результате деформации.

Перемещения в направлении осей декартовой системы координат будут равны: $u = Xa_1 - Xa$, $v = Ya_1 - Ya$, $w = Za_1 - Za$.

Линейные деформации:

$$\varepsilon_x = \frac{A_1B_1 - AB}{AB}, \quad \varepsilon_y = \frac{A_1C_1 - AC}{AC}, \quad \varepsilon_z = \frac{A_1D_1 - AD}{AD}.$$

Угловые деформации: $\gamma_{xy} = \angle B'AB$, $\gamma_{yz} = \angle D'AD$, $\gamma_{zx} = \angle C'AC$.

Главными осями деформации называются такие три взаимно перпендикулярные прямые, проходящие через данную точку тела и совпадающие по направлениям с такими тремя линейными элементами тела, которые остаются взаимно перпендикулярными и после деформации тела. Линейные деформации в направлении главных осей $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ называются главными линейными деформациями, причём $\varepsilon_1 \geq \varepsilon_2 \geq \varepsilon_3$. В любой точке тела в общем случае деформированного состояния всегда можно указать три взаимно перпендикулярных направления, являющиеся главными.

II. Статические уравнения, устанавливающие дифференциальную связь между компонентами симметричного тензора напряжений $\sigma_x = \sigma_x(x, y, z)$, $\sigma_y = \sigma_y(x, y, z)$, $\sigma_z = \sigma_z(x, y, z)$, $\tau_{xy} = \tau_{xy}(x, y, z)$, $\tau_{yz} = \tau_{yz}(x, y, z)$, $\tau_{zx} = \tau_{zx}(x, y, z)$:

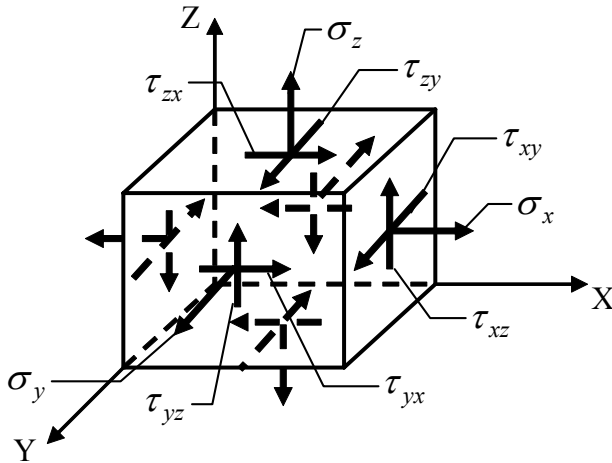


Рис. 2

в окрестностях рассматриваемой точки; F_x, F_y, F_z – проекции объёмной силы на оси декартовой системы координат (рис.2). В соответствии с законом парности касательных напряжений $\tau_{ij} = \tau_{ji}$.

Площадки, на которых касательные напряжения равны нулю, называются главными. Нормальные напряжения $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$, действующие на них

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + F_x &= 0; \\ \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} + F_y &= 0; \\ \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + F_z &= 0. \end{aligned} \quad (2)$$

Здесь $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$ – нормальные напряжения, $\tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{zx}$ – касательные напряжения, действующие на гранях элементарного параллелепипеда, выделенного в

– главными нормальными напряжениями, причём $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$. В любой точке тела в общем случае напряжённого состояния всегда можно указать три взаимно перпендикулярные площадки, являющиеся главными.

III. Физические уравнения, устанавливающие связь между компонентами тензоров напряжений и деформаций в пределах упругости. Физические уравнения обычно записываются либо в форме обобщённого закона Гука (здесь деформации выражаются через напряжения):

$$\begin{aligned}\varepsilon_x &= \frac{1}{E} \left[\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z) \right]; & \gamma_{xy} &= \frac{1}{G} \tau_{xy}; \\ \varepsilon_y &= \frac{1}{E} \left[\sigma_y - \nu(\sigma_z + \sigma_x) \right]; & \gamma_{yz} &= \frac{1}{G} \tau_{yz}; \\ \varepsilon_z &= \frac{1}{E} \left[\sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y) \right]; & \gamma_{zx} &= \frac{1}{G} \tau_{zx},\end{aligned}\quad (3)$$

либо в форме Ламе (здесь напряжения выражаются через деформации):

$$\begin{aligned}\sigma_x &= \lambda \varepsilon + 2G \varepsilon_x; & \tau_{xy} &= G \gamma_{xy}; \\ \sigma_y &= \lambda \varepsilon + 2G \varepsilon_y; & \tau_{yz} &= G \gamma_{yz}; \\ \sigma_z &= \lambda \varepsilon + 2G \varepsilon_z; & \tau_{zx} &= G \gamma_{zx}.\end{aligned}\quad (4)$$

Здесь E – модуль упругости, G – модуль сдвига, ν – коэффициент Пуассона, λ – коэффициент Ламе, причём $G = \frac{E}{2(1+\nu)}$ и

$$\lambda = \frac{\nu \cdot E}{(1+\nu)(1-2\nu)}; \quad \varepsilon = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z.$$

Таким образом, имеем замкнутую систему 15-и дифференциально-алгебраических уравнений с 15-ю неизвестными: три компонента перемещений u, v, w , шесть компонент деформации $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z, \gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{zx}$ и шесть компонент напряжения $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{zx}$. Решение любой задачи теории упругости можно найти путём интегрирования системы линейных уравнений (1), (2), (3), либо (1), (2), (4). Найденные 15-ь функций пространственных координат должны удовлетворять граничным условиям, заданным на контуре тела.

Для твёрдых деформируемых тел, находящихся в равновесии, различают, вообще говоря, два основных варианта краевых (граничных) условий:

1. Краевые условия в перемещениях, когда на поверхности Ω , ограничивающей тело, заданы перемещения (кинематические граничные условия):

$$u(x_0, y_0, z_0) = u_\Omega, \quad v(x_0, y_0, z_0) = v_\Omega, \quad w(x_0, y_0, z_0) = w_\Omega. \quad (5)$$

2. Краевые условия в напряжениях, когда на поверхности Ω , ограничивающей тело, заданы внешние силы (статические граничные условия):

$$\left. \begin{aligned} p_{nx} &= \sigma_x l + \tau_{yx} m + \tau_{zx} n, \\ p_{ny} &= \tau_{xy} l + \sigma_y m + \tau_{zy} n, \\ p_{nz} &= \tau_{xz} l + \tau_{yz} m + \sigma_z n. \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

Здесь p_{nx} , p_{ny} , p_{nz} – проекции вектора поверхностной нагрузки, действующей на элементарной площадке на поверхности тела, на оси декартовой системы координат; l , m , n – направляющие косинусы нормали к элементарной площадке, выделенной на поверхности тела; (x_0, y_0, z_0) – координаты точки на поверхности тела.

Кроме записи краевых условий в перемещениях (5) или в напряжениях (6) возможны смешанные краевые условия, когда на одной части поверхности Ω_1 , ограничивающей тело, заданы перемещения, а на другой Ω_2 – напряжения; либо, когда из трёх равенств, которые должны быть заданы в каждой точке границы тела, одно (или два) формулируются в перемещениях, а два (или одно) – в напряжениях. Возможны и более сложные краевые условия, когда на поверхности, ограничивающей тело, задаются производные от перемещений или напряжений, либо, когда, например, поверхностные силы задаются в виде функций от краевых значений перемещений.

В каждой точке тела, для обеспечения его сплошности в процессе деформирования, должны выполняться условия неразрывности деформаций:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} &= \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y}; & 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y \partial z} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y} + \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} - \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} \right); \\ \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial y^2} &= \frac{\partial^2 \gamma_{yz}}{\partial y \partial z}; & 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x \partial z} &= \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} + \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} - \frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y} \right); \\ \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial z^2} &= \frac{\partial^2 \gamma_{zx}}{\partial z \partial x}; & 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial x \partial y} &= \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y} - \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} \right). \end{aligned} \quad (7)$$

В теории упругости принято различать два основных типа задач.

1. Прямая задача. Известными являются все объёмные и поверхностные силы или смещения на границе тела. Требуется определить напряжённо-деформированное состояние, то есть перемещения, деформации и напряжения в каждой точке тела.

Прямая задача теории упругости является наиболее трудной. Получить точные решения прямой задачи теории упругости в общем случае очень сложно, а порой и невозможно. В курсе теории упругости исследуются возможные пути упрощения этой задачи или нахождения её приближённого решения.

Один из путей упрощения состоит в том, что определяются не сразу все 15-ь искомых функций (три функции перемещений, шесть функций деформаций и шесть функций напряжений), а лишь некоторые из них, принимаемые за основные. Рассмотрим в связи с этим два характерных подхода, составляющие так называемые метод напряжений (решение в напряжениях) и метод перемещений (решение в перемещениях).

В методе напряжений за основные неизвестные принимаются компоненты тензора напряжений. Решение математически сводится к интегрированию системы дифференциальных уравнений, получаемых путём подстановки физических соотношений (3) в уравнения неразрывности деформаций (7). Учитывая при этом уравнения равновесия (2), получают разрешающие уравнения в напряжениях (уравнения Бельтрами-Митчелла):

$$\begin{aligned}
\nabla^2 \sigma_x + (1-\nu)^{-1} \frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial x^2} &= -(1-\nu)^{-1} \left[(2-\nu) \frac{\partial F_x}{\partial x} + \nu \frac{\partial F_y}{\partial y} + \nu \frac{\partial F_z}{\partial z} \right]; \\
\nabla^2 \sigma_y + (1-\nu)^{-1} \frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial y^2} &= -(1-\nu)^{-1} \left[\nu \frac{\partial F_x}{\partial x} + (2-\nu) \frac{\partial F_y}{\partial y} + \nu \frac{\partial F_z}{\partial z} \right]; \\
\nabla^2 \sigma_z + (1-\nu)^{-1} \frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial z^2} &= -(1-\nu)^{-1} \left[\nu \frac{\partial F_x}{\partial x} + \nu \frac{\partial F_y}{\partial y} + (2-\nu) \frac{\partial F_z}{\partial z} \right]; \\
\nabla^2 \tau_{xy} + (1+\nu)^{-1} \frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial x \partial y} &= - \left(\frac{\partial F_x}{\partial y} + \frac{\partial F_y}{\partial x} \right); \\
\nabla^2 \tau_{yz} + (1+\nu)^{-1} \frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial y \partial z} &= - \left(\frac{\partial F_y}{\partial z} + \frac{\partial F_z}{\partial y} \right); \\
\nabla^2 \tau_{zx} + (1+\nu)^{-1} \frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial z \partial x} &= - \left(\frac{\partial F_z}{\partial x} + \frac{\partial F_x}{\partial z} \right).
\end{aligned} \tag{8}$$

В методе перемещений за основные неизвестные принимаются компоненты вектора перемещений. Решение математически сводится к интегрированию системы дифференциальных уравнений, получаемых путём подстановки физических (4) и геометрических (1) уравнений в уравнения равновесия (2). В итоге получают разрешающую систему трёх дифференциальных уравнений относительно функций перемещений (уравнения Ламе):

$$\begin{aligned}
G \nabla^2 u + (\lambda + G) \frac{\partial \varepsilon}{\partial x} + F_x &= 0; \\
G \nabla^2 v + (\lambda + G) \frac{\partial \varepsilon}{\partial y} + F_y &= 0; \\
G \nabla^2 w + (\lambda + G) \frac{\partial \varepsilon}{\partial z} + F_z &= 0.
\end{aligned} \tag{9}$$

В соотношениях (8) и (9) величина $\nabla^2 = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right)$ – это оператор Лапласа.

2. **Обратная задача.** Известной (заданной в каждой точке деформированного твёрдого тела) считается одна из трёх систем функций: перемещения, деформации или напряжения. Необходимо найти остальные неизвестные, в том числе объёмные и поверхностные силы. Обратная задача возникает при проверке правильности приближённых и сконструированных решений. При решении обратной задачи теории упругости могут иметь место три случая.

Случай А. Заданы перемещения в каждой точке деформированного твёрдого тела: $u(x, y, z)$; $v(x, y, z)$; $w(x, y, z)$, причём такие, что условия неразрывности деформаций (7) выполняются. В этом случае деформации определяются из геометрических соотношений (1), напряжения – из физических уравнений (4), поверхностные силы – из граничных условий (6), объёмные силы – из уравнений равновесия (2).

Случай Б. Заданы деформации в каждой точке деформированного твёрдого тела: $\varepsilon_x(x, y, z)$, $\varepsilon_y(x, y, z)$, $\varepsilon_z(x, y, z)$, $\gamma_{xy}(x, y, z)$, $\gamma_{yz}(x, y, z)$, $\gamma_{zx}(x, y, z)$ удовлетворяющие условиям неразрывности деформаций (7). В этом случае сначала определяются напряжения из физических уравнений (4), затем перемещения из геометрических соотношений (1), затем поверхностные силы из граничных условий (6) и, наконец, объёмные силы – из уравнений равновесия (2).

Случай В. Внутри деформированного твёрдого тела заданы напряжения: $\sigma_x(x, y, z)$, $\sigma_y(x, y, z)$, $\sigma_z(x, y, z)$, $\tau_{xy}(x, y, z)$, $\tau_{yz}(x, y, z)$, $\tau_{zx}(x, y, z)$. В этом случае, прежде всего, находят деформации из физических соотношений (3), затем перемещения из геометрических соотношений (1), затем поверхностные силы из граничных условий (6) и, наконец, объёмные силы – из уравнений равновесия (2). Уравнения неразрывности деформаций могут служить в качестве контроля правильности построенного решения.

Помимо двух основных рассмотренных методов решения задач теории упругости в напряжениях и перемещениях часто используется смешанная форма решения, когда разрешающие уравнения составляют частично относительно перемещений, а частично относительно напряжений.

Следует отметить, что до настоящего времени общего метода решения прямой задачи теории упругости не существует. Это объясняется тем, что современная математика не обладает аналитическим аппаратом, позволяющим получить решение системы уравнений (1), (2), (3) или (1), (2), (4) для произвольно нагруженных упругих тел общего вида. Однако отсутст-

вие общего решения не означает, что теория упругости в своём развитии не достигла существенных успехов. Наоборот, к настоящему времени разработано большое число различных методов решения конкретных, важных для инженерной практики прямых задач.

Для инженерной практики особо важное значение имеют приближённые, но достаточно общие методы решения задач прикладной теории упругости.

Теории прочности. Целью решения задачи теории упругости является, вообще говоря, оценка прочности деформируемого тела. Для тела, находящегося в условиях сложного напряжённо-деформированного состояния, оценка его прочности в каждой точке выполняется в соответствии с теориями прочности. Степень опасности любого напряжённого состояния оценивается, главным образом, на результатах опытов при простом растяжении (сжатии). Мера напряжённого состояния, при достижении которой происходит переход от упругого состояния к предельному, устанавливается с помощью критериев пластичности (текучести) или прочности (разрушения).

Лемма: два каких-либо напряжённых состояния считаются равноопасными, если они при пропорциональном увеличении главных напряжений одновременно становятся предельными.

В качестве одного (основного) из равноопасных напряжённых состояний принимается напряжённое состояние в точке при одноосном растяжении. Значение напряжения, при котором образец материала в условиях одноосного напряжённого состояния оказывается в равноопасном состоянии с рассматриваемым сложным напряжённым состоянием в точке, называется эквивалентным напряжением $\sigma_{\text{эКВ}}$.

Таким образом, условие прочности при сложном напряжённом состоянии в общем случае имеет вид:

$$\sigma_{\text{эКВ}} = f(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) \leq R. \quad (10)$$

Здесь R – расчётное сопротивление, определяемое из опытов на осевое растяжение.

Первая теория прочности вводит критерий наибольших нормальных напряжений, в соответствии с которым напряжённое состояние становится предельным, когда наибольшее напряжение в точке достигает величины опасного напряжения, определяемого из опытов на осевое растяжение:

$$\sigma_{\text{эКВ}} = \sigma_{\text{max}} = \sigma_1 \leq \sigma_0 = R. \quad (11)$$

Здесь σ_0 – предельное значение напряжения, полученное из опытов на одноосное растяжение.

Как показали многочисленные эксперименты, критерий наибольших нормальных напряжений не отражает условий перехода материала в пластическое состояние или его разрушение. В настоящее время первая теория прочности на практике не применяется и имеет лишь историческое значение.

Вторая теория прочности вводит критерий наибольших удлинений, в соответствии с которым напряжённое состояние в точке становится предельным, когда наибольшие удлинения в точке достигают опасного значения, определяемого из опытов на осевое растяжение:

$$\varepsilon_{\max} = \varepsilon_1 \leq \varepsilon_0. \quad (12)$$

Здесь ε_0 – предельное значение относительного удлинения, полученное из опытов на одноосное растяжение.

Так как $\varepsilon_1 = \frac{1}{E} [\sigma_1 - \nu(\sigma_2 + \sigma_3)]$ и $\varepsilon_0 = \frac{1}{E} \sigma_0$, то критерий (12) получает вид:

$$\sigma_{\text{экв}} = \sigma_1 - \nu(\sigma_2 + \sigma_3) \leq \sigma_0 = R. \quad (13)$$

Как и первая, вторая теория недостаточно подтверждается опытами и в большей степени оправдывается для хрупких материалов.

Третья теория прочности (теория прочности Треска–Сен-Венана) вводит критерий наибольших касательных напряжений, в соответствии с которым напряжённое состояние становится предельным, когда наибольшие касательные напряжения в точке достигают опасного значения:

$$\tau_{\max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} \leq \tau_0 = \frac{\sigma_0}{2}, \text{ то есть}$$

$$\sigma_{\text{экв}} = \sigma_1 - \sigma_3 \leq \sigma_0 = R. \quad (14)$$

Третья теория прочности удовлетворительно подтверждается опытами с пластичными материалами, одинаково сопротивляющимися как растяжению, так и сжатию.

Энергетические теории прочности основываются на предположении, что количество удельной потенциальной энергии деформации, накопленной к моменту наступления предельного состояния в материале, одинаково как при любом сложном напряжённом состоянии, так и при простом растяжении.

Первая энергетическая теория прочности вводит критерий полной удельной потенциальной энергии, в соответствии с которым напряжённое состояние в точке становится предельным, когда полная удельная потенциальная энергия деформации U_0 достигает своего наибольшего значения U_0' , то есть $U_0 \leq U_0'$.

Так как $U_0 = \frac{1}{2E} \left[(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)^2 - 2(1+\nu)(\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_3\sigma_1) \right]$,
 $U_0' = \frac{\sigma_0^2}{2E}$ – предельное значение удельной энергии, определяемое из опыта

на одноосное растяжение, то критерий полной удельной потенциальной энергии получает вид:

$$\sigma_{\text{экв}} = \sqrt{(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)^2 - 2(1+\nu)(\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_3\sigma_1)} \leq \sigma_0 = R. \quad (15)$$

Первая энергетическая теория прочности экспериментами не подтверждается.

Вторая энергетическая теория прочности вводит критерий удельной потенциальной энергии формоизменения, в соответствии с которым напряжённое состояние в точке становится предельным, когда удельная потенциальная энергия формоизменения U^ϕ достигает своего наибольшего значения U_0^ϕ (теория Губера – Мизеса – Генки).

$$\text{Имеем: } U^\phi = \frac{1+\nu}{6E} \left[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2 \right]; \quad U_0^\phi = \frac{1+\nu}{3E} \sigma_0^2.$$

Таким образом, критерий удельной потенциальной энергии формоизменения имеет вид:

$$\sigma_{\text{экв}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2} \leq \sigma_0 = R. \quad (16)$$

Энергетическая теория прочности формоизменения хорошо подтверждается в опытах с пластичными материалами (несколько лучше, чем теория прочности наибольших касательных напряжений) и широко применяется на практике.

Кроме рассмотренных выше теорий прочности, в которых в качестве гипотезы, устанавливающей причину наступления предельного напряжённого состояния, принималась величина какого-либо одного фактора, например напряжения, удлинения, энергии, широкое распространение имеют теории, в которых устанавливается определённая зависимость прочностных свойств материала от вида напряжённого состояния. К таким теориям относятся: теория прочности Мора, теории прочности Ягна, Баландина, Миролюбова, Гениева и других учёных-механиков.

Следует отметить, что выбор того или иного критерия в качестве расчётного зависит в первую очередь от свойств материала рассматриваемой конструкции и в отдельных случаях от вида напряжённого состояния, а зачастую обуславливается главным образом удобством решения задачи. Руководствоваться здесь следует нормами проектирования.

ОБЩИЕ МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ

§1. Выбор варианта задания и исходных данных

В пособие входят три задачи: расчёт балки-стенки (плоская задача теории упругости); расчёт прямоугольной пластины шарнирно опёртой по контуру на изгиб; расчёт плиты на упругом основании.

Исходные данные для каждой задачи выбираются в соответствии с шифром (номером зачётной книжки).

Для *первой задачи* номер варианта и соответствующая функция напряжений выбираются из табл. 1 по сумме трёх последних цифр шифра, а все числовые данные и размеры балки-стенки – из табл. 2 и табл. 3 по последней цифре шифра. Так, например, номер зачётной книжки (шифр) 79012. Сумма трёх последних цифр $0+1+2=3$. Следовательно, из табл. 1 для варианта 3 выбирается функция напряжений $\varphi = Axy + B(xy^2 + x^2y)$.

Последняя цифра шифра – это цифра 2. Из табл.2 для этой цифры выбираются данные:

$$A = 0,3 \cdot 10^7 \text{ Па}; B = 3,0 \cdot 10^7 \text{ Па/м}; C = 3,0 \cdot 10^7 \text{ Па/м}^2;$$

$$D = -2,0 \cdot 10^7 \text{ Па/м}^3; a = 3 \text{ м}; b = 1 \text{ м}; x_m = 0,0 \text{ м}; y_m = 0,25 \text{ м}.$$

Из табл. 3 – выбираются затем следующие данные:

$$E = 2,1 \cdot 10^{11} \text{ Па}; R = 2,2 \cdot 10^8 \text{ Па}; \nu = 0,26.$$

(Числовые значения C, D для решения задачи не нужны, так как их нет в заданной функции напряжений.)

Расчётная схема балки-стенки представлена на рис. 3.

Для *второй задачи* числовые значения определяются из табл.4 по сумме трёх последних цифр шифра. Например, для шифра 79012 сумма трёх последних цифр равна 3. Из табл. 4 для варианта 3 выписываем данные:

$$a = 3 \text{ м}, b = 1 \text{ м}, a_1 = 0 \text{ м}, a_2 = 3 \text{ м}, b_1 = 0,25 \text{ м}, b_2 = 0,75 \text{ м},$$

$$q = 7 \cdot 10^5 \text{ Па}, R = 2,1 \cdot 10^8 \text{ Па}, \nu = 0,29.$$

Расчётная схема пластины представлена на рис. 17.

Для *третьей задачи* исходные данные выбираются так же, как для второй задачи – по сумме трёх последних цифр шифра из табл. 5 и табл. 6. Например, для варианта 3 (шифр 79012) выписываем данные из табл. 5:

$$a = 2 \text{ м}, b = 1 \text{ м}, a_1 = 0 \text{ м}, a_2 = 2 \text{ м}, b_1 = 0,25 \text{ м}, b_2 = 0,75 \text{ м}, q = 35 \cdot 10^5 \text{ Па}.$$

Из табл. 6 выписываем следующие данные:

$$E = 2,1 \cdot 10^{11} \text{ Па}, \nu = 0,27, R = 2,1 \cdot 10^8 \text{ Па},$$

$$E_0 = 8 \cdot 10^7 \text{ Па}, \nu_0 = 0,19, H = 12 \text{ м}.$$

Расчётная схема плиты представлена на рис. 24.

§2. Исходные данные

Т а б л и ц а 1

№ Варианта	Функция напряжения	№ Варианта	Функция напряжения
0	$\varphi = Axy + B(x^3 + y^3)$	14	$\varphi = A(x^2 - y^2) - C(x^4 - y^4)$
1	$\varphi = A(xy - y^2) + Bx^3$	15	$\varphi = Axy + Bxy^2$
2	$\varphi = A(xy + x^2) + By^3$	16	$\varphi = A(xy - y^2) - C(x^3y - xy^3)$
3	$\varphi = Axy + B(xy^2 + x^2y)$	17	$\varphi = A(xy + x^2) + C(x^3y + xy^3)$
4	$\varphi = Axy - B(xy^2 - x^2y)$	18	$\varphi = Bx^3 + D(x^5 - 5xy^4)$
5	$\varphi = Bx^2y$	19	$\varphi = By^3 + D(y^5 - 5x^4y)$
6	$\varphi = Bx^2y + Cxy^3$	20	$\varphi = Bx^2y - D(x^5 - 5xy^4)$
7	$\varphi = Bxy^2 - Cx^3y$	21	$\varphi = Bxy^2 + 2D(x^5 - 5xy^4)$
8	$\varphi = Bxy^2 + C(xy^3 + x^3y)$	22	$\varphi = A(x^2 + y^2) + 3D(5xy^4 - x^5)$
9	$\varphi = Bx^2y - C(xy^3 - x^3y)$	23	$\varphi = A(x^2 + y^2) + C(x^3y - xy^3)$
10	$\varphi = C(x^4 - y^4)$	24	$\varphi = A(x^2 + y^2) + C(x^2y^2 - x^2y^2)$
11	$\varphi = Bxy^2 - C(x^4 - y^4)$	25	$\varphi = Axy + 3C(x^4 - y^4)$
12	$\varphi = Cx^3y - C(x^4 - y^4)$	26	$\varphi = Axy + Bxy^2 + 2C(x^4 - y^4)$
13	$\varphi = Cxy^3 - 2C(x^4 - y^4)$	27	$\varphi = Ax^2 + B(x^3 + y^3) - Cx^2y$

Таблица 2

Последняя цифра шифра	A , Па	B , Па/м	C , Па/м ²	D , Па/м ³	a , м	b , м	x_m , м	y_m , м
0	$0,1 \cdot 10^7$	$1,0 \cdot 10^7$	$5,0 \cdot 10^7$	$-3,0 \cdot 10^7$	1	1	0	0
1	$0,2 \cdot 10^7$	$2,0 \cdot 10^7$	$4,0 \cdot 10^7$	$-2,5 \cdot 10^7$	2	1	0,5	0
2	$0,3 \cdot 10^7$	$3,0 \cdot 10^7$	$3,0 \cdot 10^7$	$-2,0 \cdot 10^7$	3	1	0	0,25
3	$0,4 \cdot 10^7$	$4,0 \cdot 10^7$	$2,0 \cdot 10^7$	$-1,5 \cdot 10^7$	2	2	-0,5	0
4	$0,5 \cdot 10^7$	$5,0 \cdot 10^7$	$1,0 \cdot 10^7$	$-1,0 \cdot 10^7$	3	2	0	-0,5
5	$0,6 \cdot 10^7$	$6,0 \cdot 10^7$	$-1,0 \cdot 10^7$	$1,0 \cdot 10^7$	3	3	0,75	0,75
6	$0,7 \cdot 10^7$	$7,0 \cdot 10^7$	$-2,0 \cdot 10^7$	$1,5 \cdot 10^7$	2	3	-0,5	0,75
7	$0,8 \cdot 10^7$	$8,0 \cdot 10^7$	$-3,0 \cdot 10^7$	$2,0 \cdot 10^7$	1	3	-0,25	-0,75
8	$0,9 \cdot 10^7$	$9,0 \cdot 10^7$	$-4,0 \cdot 10^7$	$2,5 \cdot 10^7$	1	2	0,25	-0,5
9	$1,0 \cdot 10^7$	$10,0 \cdot 10^7$	$-5,0 \cdot 10^7$	$3,0 \cdot 10^7$	1	1	0	0

Таблица 3

Последняя цифра шифра	E , Па	R , Па	ν ,
0	$2,1 \cdot 10^{11}$	$2,1 \cdot 10^8$	0,22
1	$2,1 \cdot 10^{11}$	$2,15 \cdot 10^8$	0,24
2	$2,1 \cdot 10^{11}$	$2,2 \cdot 10^8$	0,26
3	$2,0 \cdot 10^{11}$	$2,25 \cdot 10^8$	0,28
4	$2,0 \cdot 10^{11}$	$2,45 \cdot 10^8$	0,3
5	$2,0 \cdot 10^{11}$	$2,4 \cdot 10^8$	0,3
6	$2,0 \cdot 10^{11}$	$2,34 \cdot 10^8$	0,31
7	$1,9 \cdot 10^{11}$	$2,28 \cdot 10^8$	0,32
8	$1,9 \cdot 10^{11}$	$2,1 \cdot 10^8$	0,33
9	$1,9 \cdot 10^{11}$	$2,0 \cdot 10^8$	0,34

Таблица 4

№ Варианта	a , м	b , м	a_1 , м	a_2 , м	b_1 , м	b_2 , м	q , Па	R , Па	ν
0	1	1	0	1	0	1	$5 \cdot 10^5$	$2,1 \cdot 10^8$	0,25
1	2	1	0	2	0,25	0,75	$6 \cdot 10^5$	$2,1 \cdot 10^8$	0,27
2	3	1	0	3	0,25	0,75	$7 \cdot 10^5$	$2,1 \cdot 10^8$	0,29
3	2	2	0	2	0,5	1,5	$8 \cdot 10^5$	$2,15 \cdot 10^8$	0,31
4	3	2	0	3	0,5	1,5	$9 \cdot 10^5$	$2,15 \cdot 10^8$	0,24
5	3	3	0	3	1	2	$10 \cdot 10^5$	$2,15 \cdot 10^8$	0,26
6	1	1	0,25	0,75	0	1	$9 \cdot 10^5$	$2,2 \cdot 10^8$	0,28
7	1	2	0,25	0,75	0,5	1,5	$8 \cdot 10^5$	$2,2 \cdot 10^8$	0,30
8	1	3	0,25	0,75	1	2	$7 \cdot 10^5$	$2,2 \cdot 10^8$	0,25
9	2	2	0,25	1,75	0,25	1,75	$6 \cdot 10^5$	$2,25 \cdot 10^8$	0,27
10	2	3	0,75	1,25	1	2	$5 \cdot 10^5$	$2,25 \cdot 10^8$	0,29
11	3	3	1	2	1,25	1,75	$4 \cdot 10^5$	$2,25 \cdot 10^8$	0,31
12	1	1	0,1	0,9	0,1	0,9	$5 \cdot 10^5$	$2,0 \cdot 10^8$	0,24
13	2	1	0,2	1,8	0,2	0,8	$6 \cdot 10^5$	$2,0 \cdot 10^8$	0,26
14	3	1	0,8	2,2	0,3	0,7	$7 \cdot 10^5$	$2,0 \cdot 10^8$	0,28
15	2	2	0,5	1,5	0,8	1,2	$8 \cdot 10^5$	$2,3 \cdot 10^8$	0,30
16	3	2	0,4	2,6	0,4	1,6	$9 \cdot 10^5$	$2,3 \cdot 10^8$	0,25
17	3	3	1	2	1,25	1,75	$10 \cdot 10^5$	$2,3 \cdot 10^8$	0,27
18	1	1	0,1	0,9	0,1	0,9	$9 \cdot 10^5$	$2,45 \cdot 10^8$	0,29
19	1	2	0,3	0,7	0,4	1,6	$8 \cdot 10^5$	$2,45 \cdot 10^8$	0,31
20	1	3	0,4	0,6	0	3	$7 \cdot 10^5$	$2,45 \cdot 10^8$	0,24
21	2	2	0,5	1,5	0,5	1,5	$6 \cdot 10^5$	$2,1 \cdot 10^8$	0,26
22	2	3	0,9	1,1	0	3	$5 \cdot 10^5$	$2,1 \cdot 10^8$	0,28
23	3	3	0	3	0	3	$4 \cdot 10^5$	$2,1 \cdot 10^8$	0,30
24	1	1	0	1	0,25	0,75	$6 \cdot 10^5$	$2,18 \cdot 10^8$	0,31
25	2	1	0,25	1,75	0	1	$8 \cdot 10^5$	$2,18 \cdot 10^8$	0,24
26	2	2	0,5	1,5	0,5	1,5	$5 \cdot 10^5$	$2,18 \cdot 10^8$	0,26
27	2	3	0	2	0	3	$7 \cdot 10^5$	$2,1 \cdot 10^8$	0,28

Таблица 5

№ Варианта	a , м	b , м	a_1 , м	a_2 , м	b_1 , м	b_2 , м	q , Па
0	2	1	0,5	1,5	0	1	$33 \cdot 10^5$
1	1	1	0	1	0	1	$36 \cdot 10^5$
2	2	1	0	2	0,25	0,75	$35 \cdot 10^5$
3	3	1	0	3	0,25	0,75	$34 \cdot 10^5$
4	2	2	0	2	0,5	1,5	$33 \cdot 10^5$
5	3	2	0	3	0,5	1,5	$32 \cdot 10^5$
6	3	3	0	3	1	2	$31 \cdot 10^5$
7	1	1	0,25	0,75	0	1	$30 \cdot 10^5$
8	1	2	0,25	0,75	0,5	1,5	$37 \cdot 10^5$
9	1	3	0,25	0,75	1	2	$38 \cdot 10^5$
10	2	2	0,25	1,75	0,25	1,75	$39 \cdot 10^5$
11	2	3	0,75	1,25	1	2	$40 \cdot 10^5$
12	3	3	1	2	1,25	1,75	$41 \cdot 10^5$
13	1	1	0,1	0,9	0,1	0,9	$42 \cdot 10^5$
14	2	1	0,2	1,8	0,2	0,8	$43 \cdot 10^5$
15	3	1	0,8	2,2	0,3	0,7	$44 \cdot 10^5$
16	2	2	0,5	1,5	0,8	1,2	$45 \cdot 10^5$
17	3	2	0,4	2,6	0,4	1,6	$38 \cdot 10^5$
18	3	3	1	2	1,25	1,75	$37 \cdot 10^5$
19	1	1	0,1	0,9	0,1	0,9	$36 \cdot 10^5$
20	1	2	0,3	0,7	0,4	1,6	$35 \cdot 10^5$
21	1	3	0,4	0,6	0	3	$34 \cdot 10^5$
22	2	2	0,5	1,5	0,5	1,5	$33 \cdot 10^5$
23	2	3	0,9	1,1	0	3	$32 \cdot 10^5$
24	3	3	0	3	0	3	$31 \cdot 10^5$
25	1	1	0	1	0,25	0,75	$30 \cdot 10^5$
26	2	1	0,25	1,75	0	1	$29 \cdot 10^5$
27	2	2	0,5	1,5	0,5	1,5	$38 \cdot 10^5$

Таблица 6

№ Варианта	E , Па	ν	R , Па	E_0 , Па	ν_0	H , м
0	$2,1 \cdot 10^{11}$	0,25	$2,1 \cdot 10^8$	$4 \cdot 10^7$	0,15	12
1	$2,1 \cdot 10^{11}$	0,26	$2,1 \cdot 10^8$	$6 \cdot 10^7$	0,17	12
2	$2,1 \cdot 10^{11}$	0,27	$2,1 \cdot 10^8$	$8 \cdot 10^7$	0,19	12
3	$2,1 \cdot 10^{11}$	0,28	$2,1 \cdot 10^8$	$10 \cdot 10^7$	0,21	12
4	$2,1 \cdot 10^{11}$	0,29	$2,1 \cdot 10^8$	$12 \cdot 10^7$	0,23	12
5	$2,1 \cdot 10^{11}$	0,30	$2,1 \cdot 10^8$	$14 \cdot 10^7$	0,25	10
6	$2,1 \cdot 10^{11}$	0,24	$2,1 \cdot 10^8$	$16 \cdot 10^7$	0,27	10
7	$2,0 \cdot 10^{11}$	0,23	$2,0 \cdot 10^8$	$18 \cdot 10^7$	0,29	10
8	$2,0 \cdot 10^{11}$	0,22	$2,0 \cdot 10^8$	$20 \cdot 10^7$	0,31	10
9	$2,0 \cdot 10^{11}$	0,21	$2,0 \cdot 10^8$	$22 \cdot 10^7$	0,33	10
10	$2,0 \cdot 10^{11}$	0,25	$2,0 \cdot 10^8$	$24 \cdot 10^7$	0,35	15
11	$2,0 \cdot 10^{11}$	0,26	$2,0 \cdot 10^8$	$23 \cdot 10^7$	0,37	15
12	$2,0 \cdot 10^{11}$	0,27	$2,0 \cdot 10^8$	$21 \cdot 10^7$	0,39	15
13	$2,0 \cdot 10^{11}$	0,28	$2,0 \cdot 10^8$	$19 \cdot 10^7$	0,41	15
14	$2,0 \cdot 10^{11}$	0,29	$2,0 \cdot 10^8$	$17 \cdot 10^7$	0,15	12
15	$2,2 \cdot 10^{11}$	0,30	$2,2 \cdot 10^8$	$15 \cdot 10^7$	0,17	12
16	$2,2 \cdot 10^{11}$	0,24	$2,2 \cdot 10^8$	$13 \cdot 10^7$	0,19	12
17	$2,2 \cdot 10^{11}$	0,23	$2,2 \cdot 10^8$	$11 \cdot 10^7$	0,21	12
18	$2,2 \cdot 10^{11}$	0,22	$2,2 \cdot 10^8$	$9 \cdot 10^7$	0,23	12
19	$2,2 \cdot 10^{11}$	0,21	$2,2 \cdot 10^8$	$7 \cdot 10^7$	0,25	10
20	$2,2 \cdot 10^{11}$	0,25	$2,2 \cdot 10^8$	$5 \cdot 10^7$	0,27	10
21	$2,2 \cdot 10^{11}$	0,26	$2,2 \cdot 10^8$	$3 \cdot 10^7$	0,29	10
22	$1,9 \cdot 10^{11}$	0,27	$1,9 \cdot 10^8$	$1 \cdot 10^7$	0,31	10
23	$1,9 \cdot 10^{11}$	0,28	$1,9 \cdot 10^8$	$2 \cdot 10^7$	0,33	10
24	$1,9 \cdot 10^{11}$	0,29	$1,9 \cdot 10^8$	$5 \cdot 10^7$	0,35	15
25	$1,9 \cdot 10^{11}$	0,30	$1,9 \cdot 10^8$	$10 \cdot 10^7$	0,37	15
26	$1,9 \cdot 10^{11}$	0,24	$1,9 \cdot 10^8$	$15 \cdot 10^7$	0,39	15
27	$1,9 \cdot 10^{11}$	0,23	$1,9 \cdot 10^8$	$20 \cdot 10^7$	0,41	15

МЕТОДИКА ВЫПОЛНЕНИЯ РАБОТЫ

§1. Расчёт балки-стенки (плоская задача теории упругости)

Плоской задачей теории упругости называют задачу о таком напряжённом состоянии тела, когда все площадки одного какого-либо направления, например перпендикулярные к оси Z , являются заведомо главными. При этом главное напряжение σ_z или равно нулю, или может быть выражено через напряжения σ_x и σ_y .

Различают плоскую деформацию, при которой перемещения всех точек тела параллельны одной плоскости (плоскости XOY), причём $\sigma_z \neq 0$, $\tau_{yz} = \tau_{zx} = 0$; $\varepsilon_z = 0$, $\gamma_{yz} = \gamma_{zx} = 0$ и обобщённое плоское напряжённое состояние, при котором напряжения по всем элементарным площадкам, параллельным плоскости XOY , равны нулю ($\sigma_z = 0$, $\tau_{yz} = \tau_{zx} = 0$; $\varepsilon_z \neq 0$, $\gamma_{yz} = \gamma_{zx} = 0$), а напряжённое состояние во всех точках, лежащих на одном перпендикуляре к этой плоскости, одинаково.

Примером плоской деформации может служить полупространство, находящееся под действием бесконечно длинной полосовой нагрузки; примером плоского напряжённого состояния может служить балка-стенка (тонкая пластина), на которую по контуру действуют самоуравновешенные нагрузки, постоянные по толщине пластины и параллельные её срединной плоскости.

Особенностью плоской задачи теории упругости является то, что все величины, характеризующие напряжённо-деформированное состояние: перемещения u , v , напряжения σ_x , σ_y , τ_{xy} и деформации ε_x , ε_y , γ_{xy} зависят только от двух координат x и y : $u(x, y)$, $v(x, y)$, $\sigma_x(x, y)$, $\sigma_y(x, y)$, $\tau_{xy}(x, y)$, $\varepsilon_x(x, y)$, $\varepsilon_y(x, y)$, $\gamma_{xy}(x, y)$.

Общая система уравнений плоской задачи теории упругости сводится к совокупности следующих соотношений:

1. Геометрические уравнения

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}. \quad (17)$$

2. Статические уравнения

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + F_x &= 0; \\ \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + F_y &= 0. \end{aligned} \quad (18)$$

3. Физические уравнения

- в форме обобщённого закона Гука:

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E_1}(\sigma_x - \nu_1 \sigma_y) ; \quad \varepsilon_y = \frac{1}{E_1}(-\nu_1 \sigma_x + \sigma_y) ; \quad \gamma_{xy} = \frac{1}{G} \tau_{xy}. \quad (19)$$

- в форме Ламе:

$$\sigma_x = \frac{E_1}{1 - \nu_1^2}(\varepsilon_x + \nu_1 \varepsilon_y) ; \quad \sigma_y = \frac{E_1}{1 - \nu_1^2}(\nu_1 \varepsilon_x + \varepsilon_y) ; \quad \tau_{xy} = G \gamma_{xy}. \quad (20)$$

Здесь, для обобщённого плоского напряжённого состояния $E_1 = E$, $\nu_1 = \nu$; для плоской деформации $E_1 = \frac{E}{1 - \nu^2}$, $\nu_1 = \frac{\nu}{1 - \nu}$.

4. Условия на поверхности (на контуре) тела

- кинематические граничные условия

$$u(x_0, y_0) = u_0, \quad v(x_0, y_0) = v_0. \quad (21)$$

- статические граничные условия

$$\left. \begin{aligned} p_{nx} &= \sigma_x l + \tau_{yx} m, \\ p_{ny} &= \tau_{xy} l + \sigma_y m. \end{aligned} \right\} \quad (22)$$

5. Уравнения совместности деформаций

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y}. \quad (23)$$

Решение плоской задачи теории упругости в напряжениях при постоянных объёмных силах сводится к интегрированию бигармонического уравнения:

$$\frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \varphi}{\partial y^4} = 0, \quad (24)$$

то есть нахождению функции напряжений $\varphi(x, y)$. Нормальные и касательные напряжения при этом определяются так:

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}, \quad \sigma_y = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}, \quad \tau_{xy} = -\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y}. \quad (25)$$

Процедура решения плоской задачи теории упругости с использованием функции напряжений сводится к построению (заданию) такой функции двух переменных $\varphi(x, y)$, которая удовлетворяет бигармоническому уравнению (24). В этом случае функцию $\varphi(x, y)$ можно принять в качестве

функции напряжений и тем самым найти напряжения (25). Зная напряжения (25) из условий на поверхности тела (22) устанавливают, какому виду контурной нагрузки удовлетворяет задаваемая функция напряжений $\varphi(x, y)$. Если контурная нагрузка p_{nx} и p_{ny} , действующая на балку-стенку известна, то из условий на поверхности (22) определяются неизвестные коэффициенты и параметры функции напряжений.

Функцию напряжений $\varphi(x, y)$ можно задавать в виде целых полиномов. Например, для расчёта прямоугольной балки-стенки определить функцию напряжений в виде полинома третьей степени:

$$\varphi(x, y) = \frac{a_3}{6} x^3 + \frac{b_3}{2} x^2 y + \frac{c_3}{2} xy^2 + \frac{d_3}{6} y^3. \quad (26)$$

Полином (26) удовлетворяет бигармоническому уравнению (24).

Рассмотрим функцию $\varphi(x, y) = Cx^4$. Данная функция не удовлетворяет бигармоническому уравнению (24). Действительно:

$$\frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^4} = 24C; \quad \frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^2 \partial y^2} = 0; \quad \frac{\partial^4 \varphi}{\partial y^4} = 0,$$

то есть $\frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \varphi}{\partial y^4} = 24C + 2 \cdot 0 + 0 = 24C \neq 0$. Значит, функцию $\varphi(x, y) = Cx^4$ нельзя принять в качестве функции напряжений, следовательно, она не является решением плоской задачи теории упругости.

Функцию напряжений можно задавать в виде бесконечного тригонометрического ряда Фурье. При этом различают решение Л.Файлона, когда функция напряжений имеет вид:

$$\varphi(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} Y_m(y) \cdot \sin \frac{m\pi x}{a}, \quad (27)$$

либо решение М. Рибьера:

$$\varphi(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} Y_m(y) \cdot \cos \frac{m\pi x}{a}. \quad (28)$$

Здесь a – размер балки-стенки в направлении оси OX .

Неизвестные функции $Y_m(y)$ определяют из решений обыкновенных дифференциальных уравнений четвёртого порядка при подстановке функций напряжений (27) и (28) в бигармоническое уравнение (24). Входящие в общие интегралы дифференциальных уравнений четвёртого порядка постоянные определяют из условий на контуре балки-стенки.

Решение плоской задачи теории упругости в напряжениях при помощи тригонометрических рядов Фурье (решение Файлона и решение Рибьера)

обладает тем существенным недостатком, что условия на контуре балки-стенки выполняются приближённо.

Прочность балки-стенки будет обеспечена, если в каждой её точке эквивалентное напряжение не превысит расчётное сопротивление. Для рассмотренных теорий прочности соответствующие критерии для плоской задачи получают вид:

-первая теория прочности:

$$\sigma_{\text{экв}} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2} \leq R \quad (29)$$

-вторая теория прочности:

$$\sigma_{\text{экв}} = (1 - \nu) \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{1 + \nu}{2} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2} \leq R \quad (30)$$

-теория прочности Треска – Сен-Венана:

$$\sigma_{\text{экв}} = \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2} \leq R \quad (31)$$

-теория прочности Губера – Мизеса – Генки:

$$\sigma_{\text{экв}} = \sqrt{\sigma_x^2 - \sigma_x \sigma_y + \sigma_y^2 + 3\tau_{xy}^2} \leq R \quad (32)$$

Для определения перемещений в балке-стенке можно воспользоваться формулами профессора Петербургского государственного университета путей сообщения Императора Александра I Малиева А.С.

Строим функцию напряжений и перемещений $\omega(x, y)$, связанную с функцией напряжений $\varphi(x, y)$ соотношением

$$\frac{\partial^2 \omega(x, y)}{\partial x \partial y} = \varphi(x, y). \quad (33)$$

Для случая обобщённого плоского напряжённого состояния функции перемещений при этом будут равны:

$$u(x, y) = \frac{1}{E} \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} - \nu \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} \right), \quad v(x, y) = \frac{1}{E} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} - \nu \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} \right). \quad (34)$$

Функция напряжений и перемещений $\omega(x, y)$ несложно строится по известной функции напряжений $\varphi(x, y)$.

Пример. Пусть $\varphi(x, y) = x^3 y^4 + x^5 + y^3$.

Тогда функция напряжений и перемещений, очевидно, должна иметь вид: $\omega(x, y) = \frac{1}{4} x^4 \frac{1}{5} y^5 + \frac{1}{6} x^6 y + \frac{1}{4} y^4 x$.

Задание

Для балки-стенки, изображённой на рис. 3 требуется:

1. Найти напряжения $\sigma_x(x, y)$, $\sigma_y(x, y)$, $\tau_{xy}(x, y)$.
2. Определить контурную нагрузку, соответствующую заданной функции напряжений.

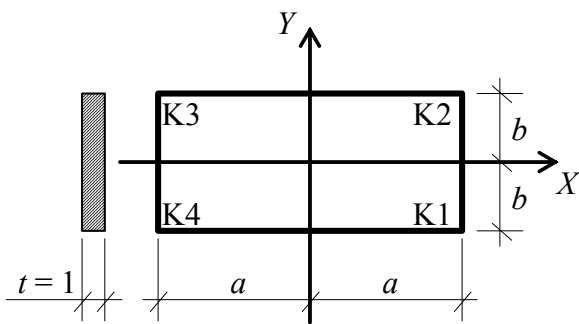


Рис. 3

3. Построить эпюры напряжений $\sigma_x(x, y)$, $\sigma_y(x, y)$, $\tau_{xy}(x, y)$ для сечений, проходящих через заданную точку $M(x_m, y_m)$ перпендикулярно оси X и перпендикулярно оси Y .

4. Оценить прочность балки-стенки в точке $M(x_m, y_m)$ в соответствии с теорией прочности Треска – Сен-Венана и теорией

прочности Губера – Мизеса – Генки.

5. Найти деформации $\varepsilon_x(x, y)$, $\varepsilon_y(x, y)$, $\gamma_{xy}(x, y)$.
6. Проверить выполнение уравнения совместности деформаций.
7. Построить эпюры деформаций $\varepsilon_x(x, y)$, $\varepsilon_y(x, y)$, $\gamma_{xy}(x, y)$ для сечений, проходящих через точку $M(x_m, y_m)$ перпендикулярно оси X и перпендикулярно оси Y .
8. Определить перемещения $u(x, y)$, $v(x, y)$.
9. Построить графики перемещений контура балки-стенки.
10. Построить контур балки-стенки в состоянии после деформации.

Порядок решения задачи

1. Проверяем корректность постановки задачи. Для этого заданную функцию напряжений подставляем в бигармоническое уравнение (24).
2. Определяем напряжения в балке-стенке как функции пространственных координат в соответствии с формулами (25).
3. Определяем контурную нагрузку по каждой грани балки-стенки, используя краевые условия (22).
4. Строим эпюры контурной нагрузки, нормальной к контуру.

5. Строим эпюры контурной нагрузки, касательной к контуру.
6. Строим эпюры напряжений в заданных сечениях.
7. Вычисляем значение эквивалентного напряжения в точке $M(x_m, y_m)$ по теории прочности Треска – Сен-Венана (31) и теории прочности Губера – Мизеса – Генки (32) и оцениваем прочность пластинки.
8. Определяем деформации в балке-стенке как функции пространственных координат в соответствии с обобщённым законом Гука (19).
9. Проверяем выполнение условий совместности деформаций (23).
10. Строим эпюры деформаций в заданных сечениях.
11. Определяем перемещения $u(x, y)$, $v(x, y)$ в балке-стенке, используя формулы (33) и (34).
12. Строим графики перемещений контура балки-стенки по нормали и по касательной к контуру.
13. Определяем контур балки-стенки в состоянии после деформации путем геометрического сложения ординат эпюр перемещений точек контура по нормали и по касательной к контуру.

Пример решения конкретной задачи

Дано: $\varphi(x, y) = B(x^3 + y^3) + C(xy^3 - x^3y) - D(x^5 - 5xy^4)$;

$B = 10^6$ Па/м, $C = 2,4 \cdot 10^7$ Па/м², $D = -10^7$ Па/м³;

$E = 2,1 \cdot 10^{11}$ Па – модуль упругости;

$\nu = 0,3$ – коэффициент Пуассона материала пластинки;

$R = 2,4 \cdot 10^8$ Па – расчётное сопротивление;

$a = 3$ м, $b = 1$ м, $x_m = 1$ м, $y_m = 0,5$ м

Решение

1. Проверяем корректность постановки задачи. Находим выражение производных:

$$\frac{\partial^4 \varphi(x, y)}{\partial x^4} = -120Dx, \quad \frac{\partial^4 \varphi(x, y)}{\partial x^2 \partial y^2} = 0, \quad \frac{\partial^4 \varphi(x, y)}{\partial y^4} = 120Dx.$$

Подставляя полученные производные в бигармоническое уравнение (24) видим, что оно удовлетворяется тождественно. Следовательно, заданная функция $\varphi(x, y)$ является функцией напряжений плоской задачи теории упругости.

2. *Определяем напряжения.* В соответствии с формулами (25), имеем:

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = 6By + 6Cxy + 60Dxy^2,$$

$$\sigma_y = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = 6Bx - 6Cxy - 20Dx^3,$$

$$\tau_{xy} = -\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} = -3C(y^2 - x^2) - 20Dy^3.$$

Учитывая значения коэффициентов B , C , D , получаем:

$$\sigma_x = 6 \cdot 10^7 y(0,1 + 2,4x - 10xy),$$

$$\sigma_y = 2 \cdot 10^7 x(0,3 - 7,2y + 10x^2), \quad (\text{a})$$

$$\tau_{xy} = -2 \cdot 10^7 [3,6(y^2 - x^2) - 10y^3].$$

3. *Определяем контурную нагрузку.* Используя граничные условия на контуре (22), подсчитаем интенсивность распределённой внешней нормальной и касательной нагрузок на каждой грани $K1-K2$, $K2-K3$, $K3-K4$, $K4-K1$ балки-стенки (рис. 4).

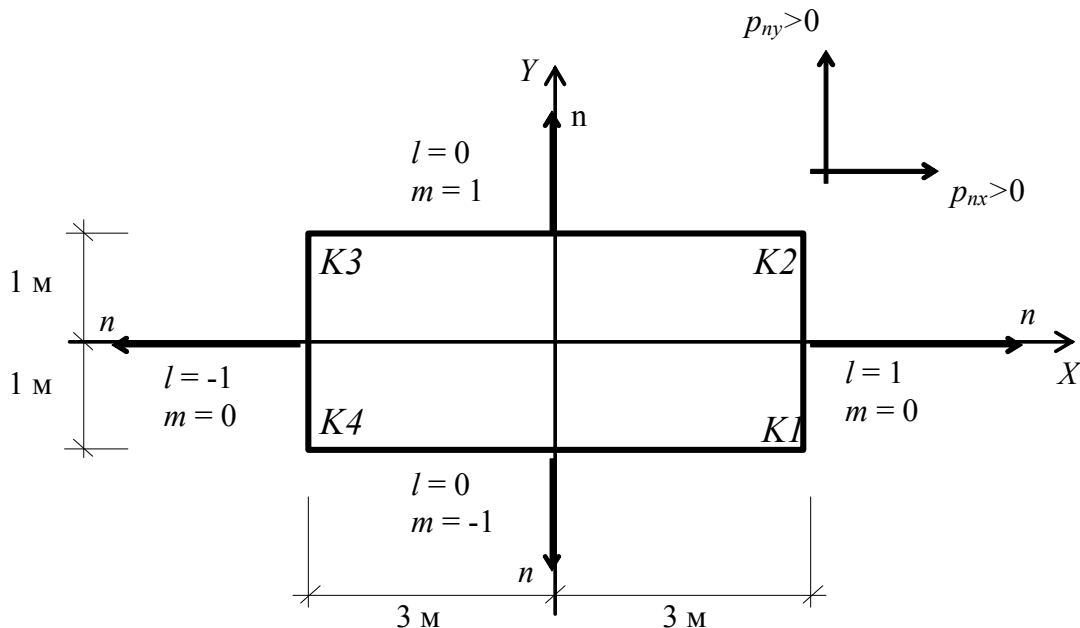


Рис. 4

а) Грань $K1-K2$. Внешняя нормаль n к контуру $K1-K2$ совпадает с направлением оси X , то есть $l = \cos(x, n) = 1$, $m = \cos(y, n) = 0$. Для стороны

K1-K2 балки-стенки $x = 3$, $-1 \leq y \leq 1$. Интенсивность нормальной к контуру нагрузки будет равна

$$\begin{aligned} p_{nx} &= \sigma_x \cdot 1 = 6 \cdot 10^7 y(0,1 + 2,4x - 10xy) = \\ &= 6 \cdot 10^7 y(0,1 + 2,4 \cdot 3 - 10 \cdot 3y) = \quad ; \\ &= 6y(7,3 - 30y) \cdot 10^7; \end{aligned} \quad (\text{б})$$

интенсивность касательной к контуру нагрузки будет равна

$$\begin{aligned} p_{ny} &= \tau_{xy} \cdot 1 = -2 \cdot 10^7 [3,6(y^2 - x^2) - 10y^3] = \\ &= -2 \cdot 10^7 [3,6(y^2 - 3^2) - 10y^3] = \\ &= -2 \cdot [3,6(y^2 - 9) - 10y^3] \cdot 10^7. \end{aligned} \quad (\text{в})$$

б) Грань *K2-K3*. Внешняя нормаль n к контуру *K2-K3* совпадает с направлением оси Y , то есть $l = \cos(x, n) = 0$, $m = \cos(y, n) = 1$. Для стороны *K2-K3* балки-стенки $-3 \leq x \leq 3$, $y = 1$. Интенсивность касательной к контуру нагрузки будет равна

$$\begin{aligned} p_{nx} &= \tau_{yx} \cdot 1 = -2 \cdot 10^7 [3,6(y^2 - x^2) - 10y^3] = \\ &= -2 \cdot 10^7 [3,6(1^2 - x^2) - 10 \cdot 1^3] = \\ &= 2(3,6x^2 + 6,4) \cdot 10^7; \end{aligned} \quad (\text{г})$$

интенсивность нормальной к контуру нагрузки будет равна

$$\begin{aligned} p_{ny} &= \sigma_y \cdot 1 = 2 \cdot 10^7 x(0,3 - 7,2y + 10x^2) = \\ &= 2 \cdot 10^7 x(0,3 - 7,2 \cdot 1 + 10x^2) = \\ &= 2 \cdot x(-6,9 + 10x^2) \cdot 10^7. \end{aligned} \quad (\text{д})$$

в) Грань *K3-K4*. Внешняя нормаль n к контуру *K3-K4* направлена противоположно направлению оси X , то есть $l = \cos(x, n) = -1$, $m = \cos(y, n) = 0$. Для стороны *K3-K4* балки-стенки $x = -3$, $-1 \leq y \leq 1$. Интенсивность нормальной к контуру нагрузки будет равна

$$\begin{aligned} p_{nx} &= \sigma_x \cdot (-1) = -6 \cdot 10^7 y(0,1 + 2,4x - 10xy) = \\ &= -6 \cdot 10^7 y[0,1 + 2,4 \cdot (-3) - 10 \cdot (-3)y] = \\ &= -6y(-7,1 + 30y) \cdot 10^7; \end{aligned} \quad (\text{е})$$

интенсивность касательной к контуру нагрузки будет равна

$$\begin{aligned}
 p_{ny} &= \tau_{xy} \cdot (-1) = 2 \cdot 10^7 [3,6(y^2 - x^2) - 10y^3] = \\
 &= 2 \cdot 10^7 \{3,6[y^2 - (-3)^2] - 10y^3\} = \\
 &= 2[3,6(y^2 - 9) - 10y^3] \cdot 10^7.
 \end{aligned}
 \tag{ж}$$

г) Грань $K4-K1$. Внешняя нормаль n к контуру $K4-K1$ направлена противоположно направлению оси Y , то есть $l = \cos(x, n) = 0$, $m = \cos(y, n) = -1$. Для стороны $K4-K1$ балки-стенки $-3 \leq x \leq 3$, $y = -1$. Интенсивность касательной к контуру нагрузки будет равна

$$\begin{aligned}
 p_{nx} &= \tau_{yx} \cdot (-1) = 2 \cdot 10^7 [3,6(y^2 - x^2) - 10y^3] = \\
 &= 2 \cdot 10^7 \{3,6[(-1)^2 - x^2] - 10 \cdot (-1)^3\} = \\
 &= 2(-3,6x^2 + 13,6) \cdot 10^7.
 \end{aligned}
 \tag{з}$$

интенсивность нормальной к контуру нагрузки будет равна

$$\begin{aligned}
 p_{ny} &= \sigma_y \cdot (-1) = -2 \cdot 10^7 x(0,3 - 7,2y + 10x^2) = \\
 &= -2 \cdot 10^7 x[0,3 - 7,2 \cdot (-1) + 10x^2] = \\
 &= -2x(7,5 + 10x^2) \cdot 10^7.
 \end{aligned}
 \tag{и}$$

4. Строим эпюры контурной нагрузки, нормальной к контуру. Эпюры контурной нагрузки строим в соответствии с формулами (б, д, е, и) по точкам (рис. 5).

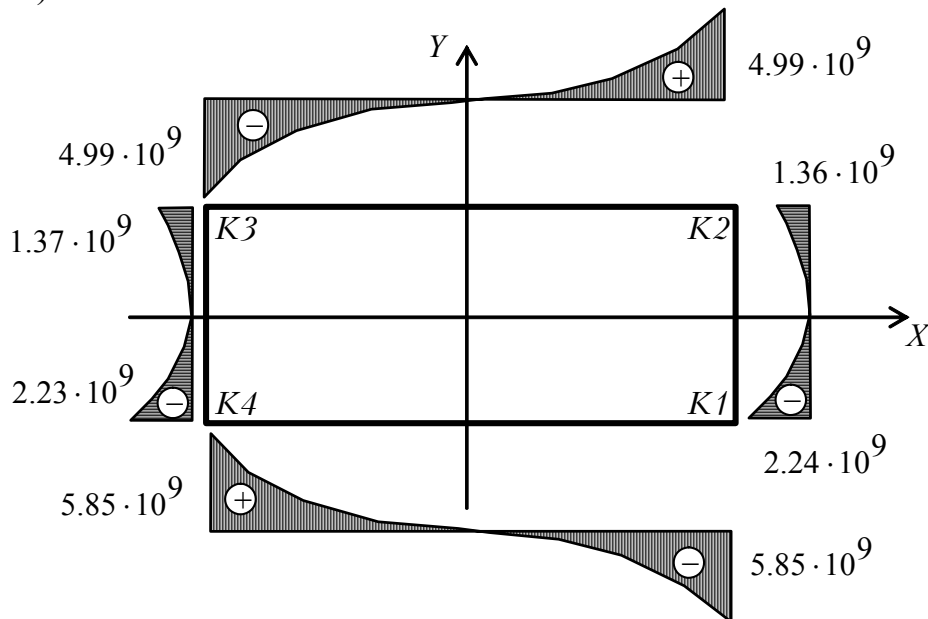


Рис. 5

- а) Грань $K1-K2$: $p_{nx} = 6y(7,3 - 30y) \cdot 10^7$, $-1 \leq y \leq 1$.
 б) Грань $K2-K3$: $p_{ny} = 2 \cdot x(-6,9 + 10x^2) \cdot 10^7$, $-3 \leq x \leq 3$.
 в) Грань $K3-K4$: $p_{nx} = -6y(-7,1 + 30y) \cdot 10^7$, $-1 \leq y \leq 1$.
 г) Грань $K4-K1$: $p_{ny} = 2x(7,5 + 10x^2) \cdot 10^7$, $-3 \leq x \leq 3$.

Результаты вычислений сведены в табл. 7

Т а б л и ц а 7

	Грань $K1-K2$	Грань $K3-K4$		Грань $K2-K3$	Грань $K4-K1$
y , м	p_{nx} , Па	p_{nx} , Па	x , м	p_{ny} , Па	p_{ny} , Па
-1	-2,24E+09	-2,23E+09	-3	-4,99E+09	5,85E+09
-0,75	-1,34E+09	-1,33E+09	-2,5	-2,78E+09	3,50E+09
-0,5	-6,69E+08	-6,63E+08	-2	-1,32E+09	1,90E+09
-0,25	-2,22E+08	-2,19E+08	-1,5	-4,68E+08	9,00E+08
0	0,00E+00	0,00E+00	-1	-6,20E+07	3,50E+08
0,25	-3,00E+06	-6,00E+06	-0,5	4,40E+07	1,00E+08
0,5	-2,31E+08	-2,37E+08	0	0,00E+00	0,00E+00
0,75	-6,84E+08	-6,93E+08	0,5	-4,40E+07	-1,00E+08
1	-1,36E+09	-1,37E+09	1	6,20E+07	-3,50E+08
			1,5	4,68E+08	-9,00E+08
			2	1,32E+09	-1,90E+09
			2,5	2,78E+09	-3,50E+09
			3	4,99E+09	-5,85E+09

5. Строим эпюры контурной нагрузки, касательной к контуру. Эпюры контурной нагрузки строим в соответствии с формулами (в, г, ж, з) по точкам (рис. 6).

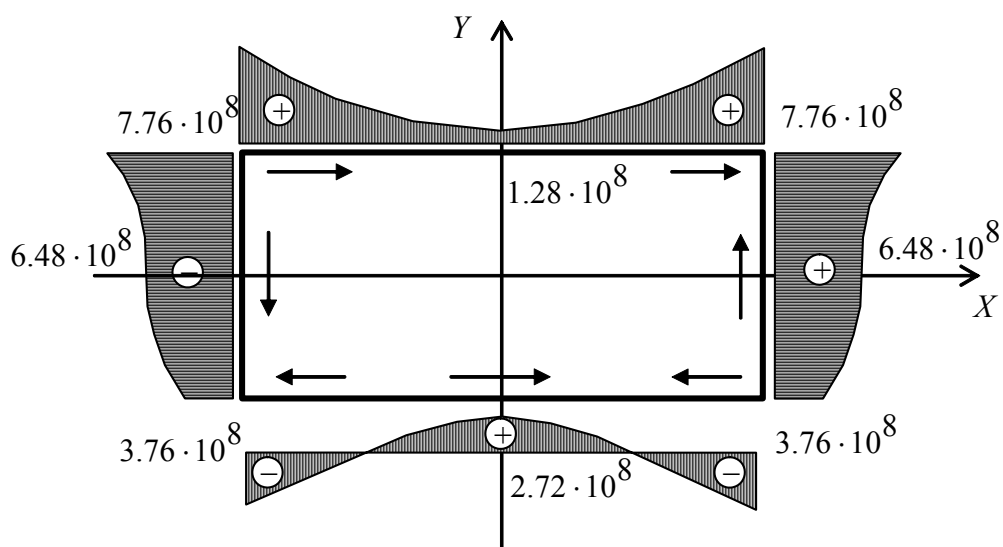


Рис. 6

а) Грань $K1-K2$: $p_{ny} = -2 \cdot [3,6(y^2 - 9) - 10y^3] \cdot 10^7, -1 \leq y \leq 1.$

б) Грань $K2-K3$: $p_{nx} = 2(3,6x^2 + 6,4) \cdot 10^7, -3 \leq x \leq 3.$

в) Грань $K3-K4$: $p_{ny} = 2[3,6(y^2 - 9) - 10y^3] \cdot 10^7, -1 \leq y \leq 1.$

г) Грань $K4-K1$: $p_{nx} = -2(-3,6x^2 + 13,6) \cdot 10^7, -3 \leq x \leq 3.$

Результаты вычислений сведены в табл. 8

Т а б л и ц а 8

$y, м$	$p_{ny}, Па$	$p_{ny}, Па$	$x, м$	$p_{nx}, Па$	$p_{nx}, Па$
-1	3,76E+08	-3,76E+08	-3	7,76E+08	-3,76E+08
-0,75	5,23E+08	-5,23E+08	-2,5	5,78E+08	-1,78E+08
-0,5	6,05E+08	-6,05E+08	-2	4,16E+08	-1,60E+07
-0,25	6,40E+08	-6,40E+08	-1,5	2,90E+08	1,10E+08
0	6,48E+08	-6,48E+08	-1	2,00E+08	2,00E+08
0,25	6,47E+08	-6,47E+08	-0,5	1,46E+08	2,54E+08
0,5	6,55E+08	-6,55E+08	0	1,28E+08	2,72E+08
0,75	6,92E+08	-6,92E+08	0,5	1,46E+08	2,54E+08
1	7,76E+08	-7,76E+08	1	2,00E+08	2,00E+08
			1,5	2,90E+08	1,10E+08
			2	4,16E+08	-1,60E+07
			2,5	5,78E+08	-1,78E+08
			3	7,76E+08	-3,76E+08

6. Строим эпюры напряжений в заданных сечениях $x_m = 1 м$ и $y_m = 0,5 м$. В сечении $x_m = 1 м$, то есть в сечении, перпендикулярном к оси X , строим эпюры напряжений σ_x, τ_{xy} ; в сечении $y_m = 0,5 м$, перпендикулярном к оси Y , – эпюры σ_y, τ_{yx} .

С помощью соотношений (а) находим напряжения:

– в сечении $x_m = 1 м$:

$$\sigma_x = 6 \cdot 10^7 y(2,5 - 10y); \quad \tau_{xy} = -2 \cdot 10^7 [3,6(y^2 - 1) - 10y^3]; \quad (к)$$

– в сечении $y_m = 0,5 м$:

$$\sigma_y = 2 \cdot 10^7 x(10x^2 - 3,3); \quad \tau_{yx} = 2 \cdot 10^7 (3,6x^2 + 0,35). \quad (л)$$

Эпюры напряжений в заданных сечениях строим по точкам. Результаты вычислений сведены в табл. 9. Соответствующие графики представлены на рис. 7.

Таблица 9

Сечение $x_m=1$ м			Сечение $y_m=0,5$ м		
y , м	Нормальное напряжение	Касательное напряжение	x , м	Нормальное напряжение	Касательное напряжение
-1	-7,50E+08	-2,00E+08	-3	-5,20E+09	6,55E+08
-0,75	-4,50E+08	-5,29E+07	-2,5	-2,96E+09	4,57E+08
-0,5	-2,25E+08	2,90E+07	-2	-1,47E+09	2,95E+08
-0,25	-7,50E+07	6,44E+07	-1,5	-5,76E+08	1,69E+08
0	0,00E+00	7,20E+07	-1	-1,34E+08	7,90E+07
0,25	0,00E+00	7,06E+07	-0,5	8,00E+06	2,50E+07
0,5	-7,50E+07	7,90E+07	0	0,00E+00	7,00E+06
0,75	-2,25E+08	1,16E+08	0,5	-8,00E+06	2,50E+07
1	-4,50E+08	2,00E+08	1	1,34E+08	7,90E+07
			1,5	5,76E+08	1,69E+08
			2	1,47E+09	2,95E+08
			2,5	2,96E+09	4,57E+08
			3	5,20E+09	6,55E+08

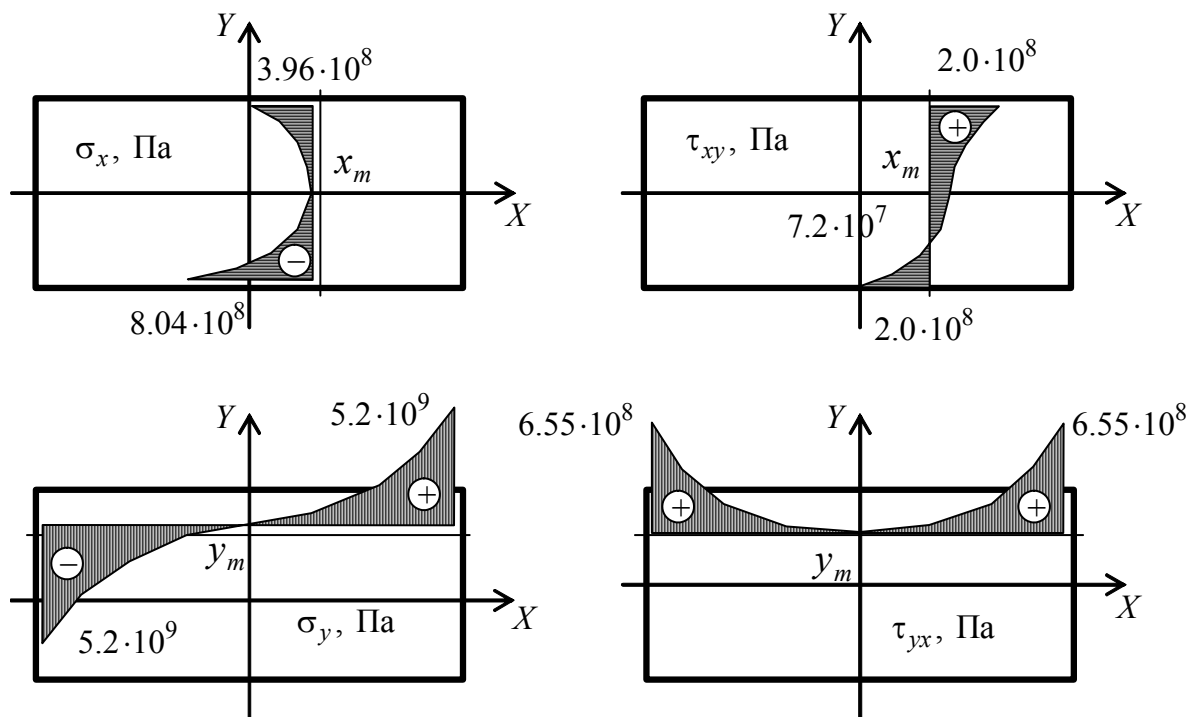


Рис. 7

7. Вычисляем значение эквивалентного напряжения и оцениваем прочность балки-стенки в точке $M(x_m, y_m)$.

В соответствии с теорией прочности Треска–Сен-Венана (формула (29)) и соотношениями (а), получаем:

$$\begin{aligned}\sigma_{\text{экв}}(x_m, y_m) &= \sqrt{\left[\sigma_x(x_m, y_m) - \sigma_y(x_m, y_m)\right]^2 + 4\left[\tau_{xy}(x_m, y_m)\right]^2} = \\ &= \left\langle \left[6 \cdot 10^7 y_m (0,1 + 2,4x_m - 10x_m y_m) - 2 \cdot 10^7 x_m (0,3 - 7,2y_m + 10x_m^2) \right]^2 + \right. \\ &\quad \left. + 4 \left\{ -2 \cdot 10^7 \left[3,6(y_m^2 - x_m^2) - 10y_m^3 \right] \right\}^2 \right\rangle^{\frac{1}{2}} = \left\langle \left[6 \cdot 10^7 \cdot 0,5 \cdot (0,1 + 2,4 \cdot 1 - \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - 10 \cdot 1 \cdot 0,5) - 2 \cdot 10^7 \cdot 1 \cdot (0,3 - 7,2 \cdot 0,5 + 10 \cdot 1^2) \right]^2 + 4 \cdot \left\{ -2 \cdot 10^7 \cdot \left[3,6 \cdot (0,5^2 - \right. \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - 1^2) - 10 \cdot 0,5^3 \right] \right\}^2 \right\rangle^{\frac{1}{2}} = 2,62 \cdot 10^8 \text{ Па} > R = 2,4 \cdot 10^8 \text{ Па}.\end{aligned}$$

Это означает, что прочность балки-стенки в точке $M(x_m, y_m)$ по теории прочности Треска – Сен-Венана не обеспечена.

В соответствии с теорией прочности Губера – Мизеса – Генки (формула (30)) и соотношениями (а), будем иметь:

$$\begin{aligned}\sigma_{\text{экв}}(x_m, y_m) &= \left\{ \left[\sigma_x(x_m, y_m) \right]^2 - \sigma_x(x_m, y_m) \cdot \sigma_y(x_m, y_m) + \right. \\ &\quad \left. + \left[\sigma_y(x_m, y_m) \right]^2 + 3\tau_{xy}^2(x_m, y_m) \right\}^{\frac{1}{2}} = \\ &= \left\langle \left[6 \cdot 10^7 y_m (0,1 + 2,4x_m - 10x_m y_m) \right]^2 - \left[6 \cdot 10^7 y_m (0,1 + 2,4x_m - 10x_m y_m) \right] \times \right. \\ &\quad \times \left[2 \cdot 10^7 x_m (0,3 - 7,2y_m + 10x_m^2) \right] + \left[2 \cdot 10^7 x_m (0,3 - 7,2y_m + 10x_m^2) \right]^2 + \\ &\quad \left. + 3 \cdot \left\{ -2 \cdot 10^7 \left[3,6(y_m^2 - x_m^2) - 10y_m^3 \right] \right\}^2 \right\rangle^{\frac{1}{2}} = \left\langle \left[6 \cdot 10^7 \cdot 0,5 \cdot (0,1 + 2,4 \cdot 1 - \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - 10 \cdot 1 \cdot 0,5) \right]^2 - \left[6 \cdot 10^7 \cdot 0,5 \cdot (0,1 + 2,4 \cdot 1 - 10 \cdot 1 \cdot 0,5) \right] \cdot \left[2 \cdot 10^7 \cdot 1 \cdot (0,3 - \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - 7,2 \cdot 0,5 + 10 \cdot 1^2) \right] + \left[2 \cdot 10^7 \cdot 1 \cdot (0,3 - 7,2 \cdot 0,5 + 10 \cdot 1^2) \right]^2 + \right. \\ &\quad \left. + 3 \cdot \left\{ -2 \cdot 10^7 \cdot \left[3,6 \cdot (0,5^2 - 1^2) - 10 \cdot 0,5^3 \right] \right\}^2 \right\rangle^{\frac{1}{2}} = \\ &= 2,29 \cdot 10^8 \text{ Па} \leq R = 2,4 \cdot 10^8 \text{ Па}.\end{aligned}$$

Это означает, что прочность балки-стенки в точке $M(x_m, y_m)$ по теории прочности Губера – Мизеса – Генки обеспечена.

Таким образом, если нормы проектирования предусматривают оценку прочности тела в заданной точке по теории прочности Треска – Сен-Венана, то, поскольку в соответствии с расчётом его прочность в заданной точке не обеспечена, тело под действием внешней нагрузки в заданной точке разрушится. Если же нормы проектирования предусматривают оценку прочности тела в заданной точке по теории прочности Губера – Мизеса – Генки, то, поскольку в соответствии с расчётом его прочность в заданной точке обеспечена, тело будет работать под действием внешней нагрузки без опасности разрушения в заданной точке. Следует отметить, что судить о прочности деформируемого тела в целом, вообще говоря, можно лишь при условии, что принятое условие прочности выполняется во всех его точках.

8. *Определяем деформации в балке-стенке.* В соответствии с обобщённым законом Гука (3), получаем:

$$\begin{aligned}\varepsilon_x &= \frac{1}{E}(\sigma_x - \nu\sigma_y) = \\ &= \frac{2}{2,1 \cdot 10^4} \left[3y(0,1 + 2,4x - 10xy) - 0,3x(0,3 - 7,2y + 10x^2) \right]; \\ \varepsilon_y &= \frac{1}{E}(\sigma_y - \nu\sigma_x) = \\ &= \frac{2}{2,1 \cdot 10^4} \left[x(0,3 - 7,2y + 10x^2) - 0,9y(0,1 + 2,4x - 10xy) \right]; \\ \gamma_{xy} &= \frac{2(1+\nu)}{E} \tau_{xy} = \frac{4 \cdot 1,3}{2,1 \cdot 10^4} \left[-3,6(y^2 - x^2) + 10y^3 \right].\end{aligned}\tag{м}$$

9. *Проверяем выполнение условий совместности деформаций.* Имеем:

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} &= \frac{2}{2,1 \cdot 10^4} \left[3y(0,1 + 2,4x - 10xy) - 0,3x(0,3 - 7,2y + 10x^2) \right] = -\frac{120x}{2,1 \cdot 10^4}, \\ \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} &= \frac{2}{2,1 \cdot 10^4} \left[x(0,3 - 7,2y + 10x^2) - 0,9y(0,1 + 2,4x - 10xy) \right] = \frac{120x}{2,1 \cdot 10^4}, \\ \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} &= \frac{1}{0,4 \cdot 10^4} \left[-3,6(y^2 - x^2) + 10y^3 \right] = 0.\end{aligned}$$

Таким образом, уравнение (23) удовлетворяется.

10. Строим эпюры деформаций в заданных сечениях $x_m = 1$ м и $y_m = 0,5$ м. В сечении $x_m = 1$ м, то есть в сечении, перпендикулярном к оси X , строим эпюры деформаций $\varepsilon_x, \gamma_{xy}$; в сечении $y_m = 0,5$ м, перпендикулярным к оси Y , – эпюры $\varepsilon_y, \gamma_{yx}$.

С помощью соотношений (м) находим деформации:

– в сечении $x_m = 1$ м:

$$\varepsilon_x = \frac{2}{2,1 \cdot 10^4} [3y(2,5 - 10y) - 0,3 \cdot (-7,2y + 10,3)];$$

$$\gamma_{xy} = \frac{1}{0,4 \cdot 10^4} [-3,6(y^2 - 1) + 10y^3].$$
(н)

– в сечении $y_m = 0,5$ м:

$$\varepsilon_y = \frac{2}{2,1 \cdot 10^4} [x(-3,3 + 10x^2) - 0,45 \cdot (0,1 - 2,6x)];$$

$$\gamma_{yx} = \frac{1}{0,4 \cdot 10^4} [3,6x^2 + 0,35].$$
(о)

Эпюры деформаций в заданных сечениях строим по точкам. Результаты вычислений сведены в табл. 10. Соответствующие графики представлены на рис. 8.

Т а б л и ц а 10

Сечение $x_m=1$ м			Сечение $y_m=0,5$ м		
$y, \text{ м}$	Линейная деформация	Угловая деформация	$x, \text{ м}$	Линейная деформация	Угловая деформация
-1	-4,07E-03	-2,50E-03	-3	-2,51E-02	-8,19E-03
-0,75	-2,59E-03	-6,61E-04	-2,5	-1,44E-02	-5,71E-03
-0,5	-1,47E-03	3,63E-04	-2	-7,26E-03	-3,69E-03
-0,25	-7,03E-04	8,05E-04	-1,5	-2,95E-03	-2,11E-03
0	-2,94E-04	9,00E-04	-1	-7,92E-04	-9,88E-04
0,25	-2,43E-04	8,83E-04	-0,5	-6,05E-05	-3,13E-04
0,5	-5,49E-04	9,88E-04	0	-4,29E-05	-8,75E-05
0,75	-1,21E-03	1,45E-03	0,5	-2,52E-05	-3,13E-04
1	-2,23E-03	2,50E-03	1	7,07E-04	-9,88E-04
			1,5	2,87E-03	-2,11E-03
			2	7,17E-03	-3,69E-03
			2,5	1,43E-02	-5,71E-03
			3	2,51E-02	-8,19E-03

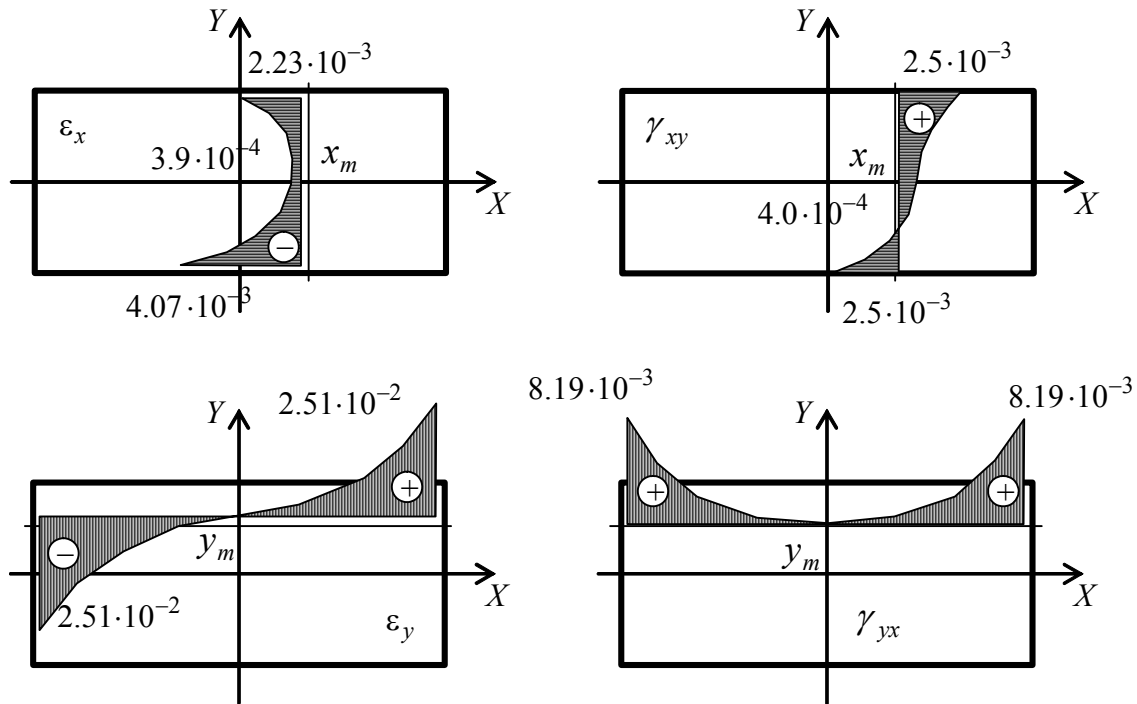


Рис. 8

11. Определяем перемещения $u(x, y)$, $v(x, y)$ в балке-стенке.

Строим функцию перемещений и напряжений $\omega(x, y)$. В соответствии с зависимостью (33) видом заданной функции напряжений, функция $\omega(x, y)$ будет иметь вид:

$$\omega(x, y) = B \frac{1}{4} xy(x^3 + y^3) + C \frac{1}{8} x^2 y^2 (y^2 - x^2) - D \frac{1}{2} x^2 y \left(\frac{1}{3} x^4 - y^4 \right). \quad (\text{п})$$

По формулам (34) и соотношению (п) вычисляем функции перемещений:

$$\begin{aligned} u(x, y) &= \frac{1}{E} \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} - \nu \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} \right) = \frac{1}{E} \left[6Bxy + 3C(1 + \nu)x^2 y + 30Dx^2 y^2 - \right. \\ &\quad \left. - 3\nu Bx^2 - \nu Cy^3 + 5\nu Dx^4 - 5D\nu y^4 \right] = \\ &= \frac{1}{2,1 \cdot 10^{11}} \left[6 \cdot 10^6 xy + 3 \cdot 2,4 \cdot 10^7 \cdot 1,3x^2 y + 30 \cdot (-10^7)x^2 y^2 - \right. \\ &\quad \left. - 3 \cdot 0,3 \cdot 10^6 x^2 - 0,3 \cdot 2,4 \cdot 10^7 y^3 + 5 \cdot 0,3 \cdot (-10^7)x^4 + 5 \cdot 0,3 \cdot 10^7 y^4 \right] = \\ &= \frac{3}{2,1 \cdot 10^5} \left[2xy + 31,2x^2 y - 100x^2 y^2 - 0,3x^2 - 2,4y^3 - 5x^4 + 5y^4 \right], \end{aligned}$$

(р)

$$\begin{aligned}
v(x, y) &= \frac{1}{E} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} - \nu \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} \right) = \frac{1}{E} \left[6Bxy - 3C(1 + \nu)xy^2 - 20Dx^3y - \right. \\
&\quad \left. - 3\nu By^2 + \nu Cx^3 - 20\nu Dxy^3 \right] = \\
&= \frac{1}{2,1 \cdot 10^{11}} \left[6 \cdot 10^6 xy - 3 \cdot 2,4 \cdot 10^7 \cdot 1,3xy^2 - 20 \cdot (-10^7)x^3y - \right. \\
&\quad \left. - 3 \cdot 0,3 \cdot 10^6 y^2 + 0,3 \cdot 2,4 \cdot 10^7 x^3 - 20 \cdot 0,3 \cdot (-10^7)xy^3 \right] = \\
&= \frac{1}{2,1 \cdot 10^5} \left[6xy - 93,6xy^2 + 200x^3y - 0,9y^2 + 7,2x^3 + 60xy^3 \right].
\end{aligned}$$

12. *Строим графики перемещений контура балки-стенки.* Прежде всего, пользуясь соотношениями (п), определяем вертикальные и горизонтальные перемещения контура балки-стенки. Затем строим эпюры перемещений вдоль контура по точкам (рис. 9, 10). Результаты вычислений сведены в табл. 11.

а). Грань *K1-K2* пластинки: $x = 3$ м; $-1 \text{ м} \leq y \leq 1$ м.

$$\begin{aligned}
u(3, y) &= \frac{3}{2,1 \cdot 10^5} (-407,7 + 286,8y - 900y^2 - 2,4y^3 + 5y^4); \\
v(3, y) &= \frac{1}{2,1 \cdot 10^5} (194,4 + 5418y - 281,7y^2 + 180y^3).
\end{aligned}$$

б) Грань *K2-K3* пластинки: $-3 \text{ м} \leq x \leq 3$ м; $y = 1$ м.

$$\begin{aligned}
u(x, 1) &= \frac{3}{2,1 \cdot 10^5} (2,6 + 2x - 69,1 \cdot x^2 - 5x^4); \\
v(x, 1) &= \frac{1}{2,1 \cdot 10^5} (-0,9 - 27,6x + 207,20x^3).
\end{aligned}$$

в) Грань *K3-K4* пластинки: $x = -3$ м; $-1 \text{ м} \leq y \leq 1$ м.

$$\begin{aligned}
u(-3, y) &= \frac{3}{2,1 \cdot 10^5} (-407,7 + 274,8y - 900y^2 - 2,4y^3 + 5y^4); \\
v(-3, y) &= \frac{1}{2,1 \cdot 10^5} (-194,4 - 5418y + 279,9y^2 - 180y^3).
\end{aligned}$$

г) Грань *K4-K1* пластинки: $-3 \text{ м} \leq x \leq 3$ м; $y = -1$ м.

$$\begin{aligned}
u(x, -1) &= \frac{3}{2,1 \cdot 10^5} (7,4 - 2x - 131,5x^2 - 5x^4); \\
v(x, -1) &= \frac{1}{2,1 \cdot 10^5} (-0,9 - 159,6x - 192,8x^3).
\end{aligned}$$

Таблица 11

Сторона $K1-K2$			Сторона $K2-K3$		
$y, \text{ м}$	$u(y), \text{ м}$	$v(y), \text{ м}$	$x, \text{ м}$	$u(x), \text{ м}$	$v(x), \text{ м}$
-1	-2,27E-02	-2,71E-02	-3	-1,47E-02	-2,63E-02
-0,75	-1,61E-02	-1,95E-02	-2,5	-8,99E-03	-1,51E-02
-0,5	-1,11E-02	-1,24E-02	-2	-5,11E-03	-7,63E-03
-0,25	-7,65E-03	-5,62E-03	-1,5	-2,59E-03	-3,14E-03
0	-5,82E-03	9,26E-04	-1	-1,05E-03	-8,60E-04
0,25	-5,60E-03	7,31E-03	-0,5	-2,28E-04	-6,19E-05
0,5	-6,99E-03	1,36E-02	0	3,71E-05	-4,29E-06
0,75	-9,98E-03	1,99E-02	0,5	-2,00E-04	5,33E-05
1	-1,45E-02	2,62E-02	1	-9,93E-04	8,51E-04
			1,5	-2,50E-03	3,13E-03
			2	-5,00E-03	7,63E-03
			2,5	-8,85E-03	1,51E-02
			3	-1,45E-02	2,62E-02

Сторона $K3-K4$			Сторона $K4-K1$		
$y, \text{ м}$	$u(y), \text{ м}$	$v(y), \text{ м}$	$x, \text{ м}$	$u(x), \text{ м}$	$v(x), \text{ м}$
-1	-2,25E-02	2,71E-02	-3	-2,25E-02	2,71E-02
-0,75	-1,60E-02	1,95E-02	-2,5	-1,44E-02	1,62E-02
-0,5	-1,10E-02	1,24E-02	-2	-8,49E-03	8,86E-03
-0,25	-7,61E-03	5,62E-03	-1,5	-4,44E-03	4,23E-03
0	-5,82E-03	-9,26E-04	-1	-1,82E-03	1,67E-03
0,25	-5,65E-03	-7,31E-03	-0,5	-3,54E-04	4,90E-04
0,5	-7,08E-03	-1,36E-02	0	1,06E-04	-4,29E-06
0,75	-1,01E-02	-1,99E-02	0,5	-3,83E-04	-4,99E-04
1	-1,47E-02	-2,63E-02	1	-1,87E-03	-1,68E-03
			1,5	-4,53E-03	-4,24E-03
			2	-8,61E-03	-8,87E-03
			2,5	-1,45E-02	-1,62E-02
			3	-2,27E-02	-2,71E-02

На рис. 9 представлены эпюры продольных перемещений точек контура балки-стенки вдоль осей координат X и Y : для стороны $K1-K2$ – это перемещения $u(x, y)$; для стороны $K2-K3$ – это перемещения $v(x, y)$; для стороны $K3-K4$ – это перемещения $u(x, y)$; для стороны $K4-K1$ – это перемещения $v(x, y)$. На рис. 10 представлены эпюры поперечных перемещений точек контура балки-стенки вдоль осей координат X и Y : для стороны $K1-K2$ – это перемещения $v(x, y)$; для стороны $K2-K3$ – это перемещения $u(x, y)$; для стороны $K3-K4$ – это перемещения $v(x, y)$; для стороны $K4-K1$ – это перемещения $u(x, y)$.

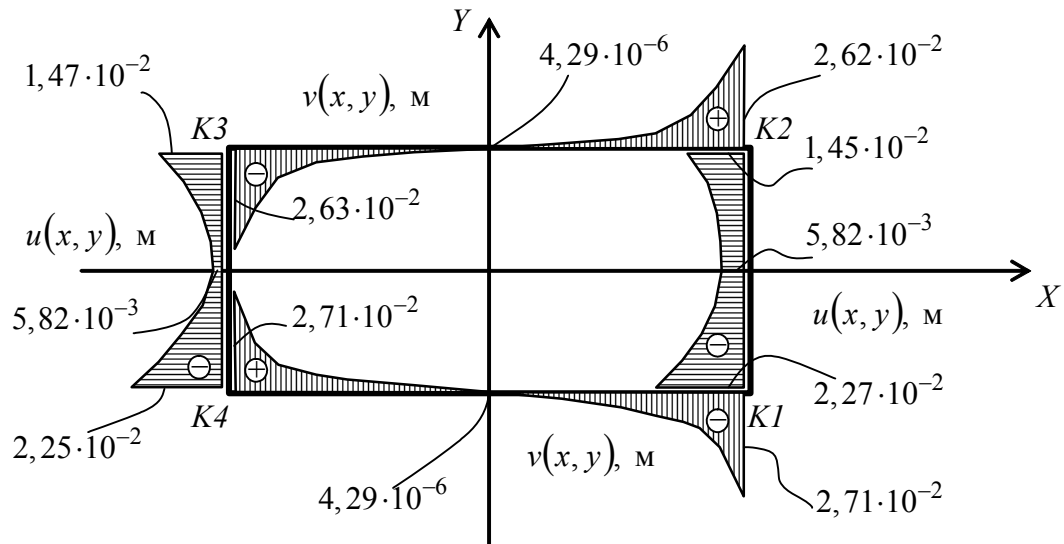


Рис. 9

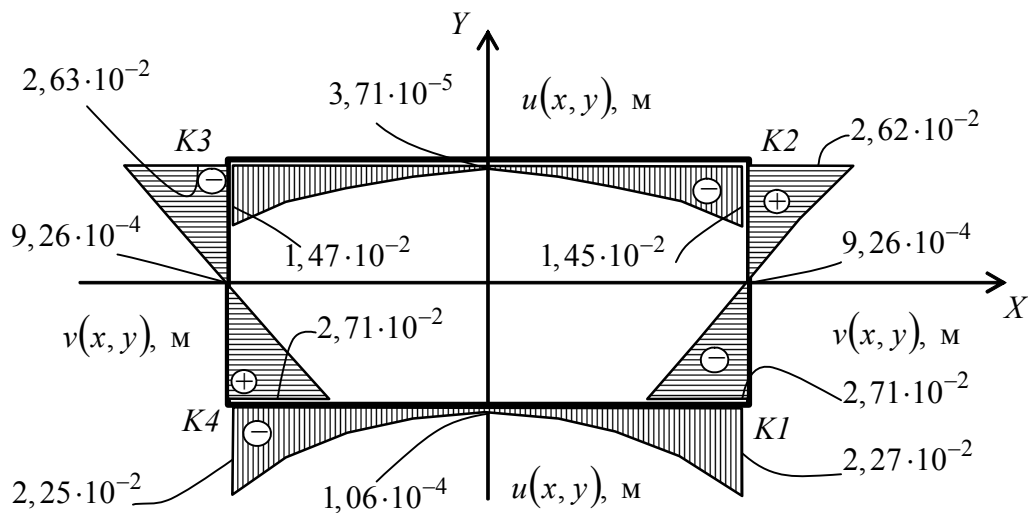


Рис. 10

13. Определяем форму контура балки-стенки в состоянии после деформации путем геометрического сложения ординат эпюр перемещений точек контура в соответствии с рис. 9, 10 и табл. 11.

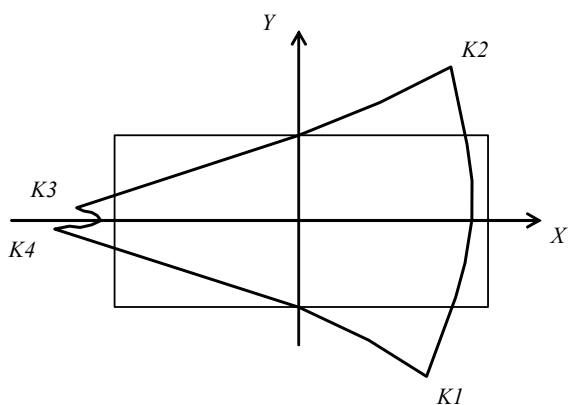


Рис. 11

Замечание: каждая точка контура балки-стенки получает перемещения и вдоль оси X , и вдоль оси Y . Строя эти перемещения для каждой точки контура, получаем форму контура балки-стенки (форму балки-стенки) в состоянии после деформации. Результаты построений представлены на рис. 11.

Решение задачи с использованием математического пакета MathCAD

Ниже, в качестве примера, представлено решение плоской задачи теории упругости – расчёт балки стенки – при помощи целых полиномов с использованием возможностей математического пакета MathCAD.

■ **Решение плоской задачи при помощи целых полиномов.**

Система СИ.

Определяем пользовательские единицы измерений:

1 ньютон	$\underline{H} := 1\text{N}$
1 ньютон * 1 метр	$Hm := H \cdot m$
1 ньютон / 1 метр	$Hdm := \frac{H}{m}$
1 паскаль = 1 ньютон / 1 квадратный метр	$\underline{Pa} := \frac{H}{m^2}$
1 паскаль / 1 метр	$Pdm := \frac{Pa}{m}$
1 паскаль / 1 квадратный метр	$Pdm2 := \frac{Pa}{m^2}$
1 паскаль / 1 кубический метр	$Pdm3 := \frac{Pa}{m^3}$

Зададим функцию напряжений:

$$\phi(x, y) := B \cdot (x^3 + y^3) + C \cdot (x \cdot y^3 - x^3 \cdot y) - D \cdot (x^5 - 5 \cdot x \cdot y^4)$$

Проверяем корректность постановки задачи:

$$\frac{d^4}{dx^4} \phi(x, y) \rightarrow -120 \cdot D \cdot x \quad \frac{d^2}{dx^2} \left(\frac{d^2}{dy^2} \phi(x, y) \right) \rightarrow 0 \quad \frac{d^4}{dy^4} \phi(x, y) \rightarrow 120 \cdot D \cdot x$$

Следовательно, функция напряжений удовлетворяет бигармоническому уравнению.

Исходные данные:

$$B := 1 \cdot 10^6 \cdot Pdm \quad \underline{C} := 2.4 \cdot 10^7 \cdot Pdm2 \quad D := -1 \cdot 10^7 \cdot Pdm3$$

$$E := 2.1 \cdot 10^{11} \cdot \text{Pa} \quad R := 2.4 \cdot 10^8 \cdot \text{Pa} \quad \nu := 0.3$$

$$a := 3 \cdot \text{m} \quad b := 1 \cdot \text{m} \quad x_m := 1 \cdot \text{m} \quad y_m := 0.5 \cdot \text{m}$$

Определяем напряжения:

$$\frac{d^2}{dy^2} \phi(x, y) \rightarrow 6 \cdot B \cdot y + 6 \cdot C \cdot x \cdot y + 60 \cdot D \cdot x \cdot y^2$$

$$\sigma_x(x, y) := 6 \cdot B \cdot y + 6 \cdot C \cdot x \cdot y + 60 \cdot D \cdot x \cdot y^2$$

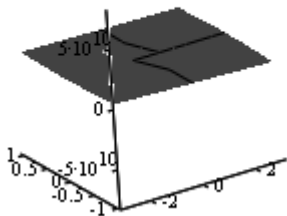
$$\frac{d^2}{dx^2} \phi(x, y) \rightarrow 6 \cdot B \cdot x - 20 \cdot D \cdot x^3 - 6 \cdot C \cdot x \cdot y$$

$$\sigma_y(x, y) := 6 \cdot B \cdot x - 6 \cdot C \cdot x \cdot y - 20 \cdot D \cdot x^3$$

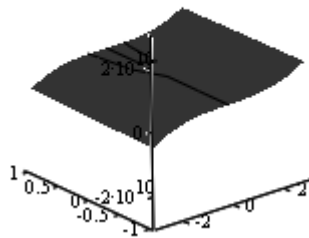
$$\frac{d}{dx} \left(\frac{d}{dy} \phi(x, y) \right) \rightarrow 20 \cdot D \cdot y^3 - C \cdot (3 \cdot x^2 - 3 \cdot y^2)$$

$$\tau_{xy}(x, y) := -3 \cdot C \cdot (y^2 - x^2) - 20 \cdot D \cdot y^3$$

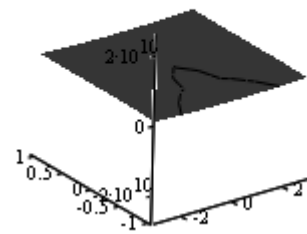
Строим поверхности напряжений:



σ_x



σ_y



τ_{xy}

Определяем контурную нагрузку:

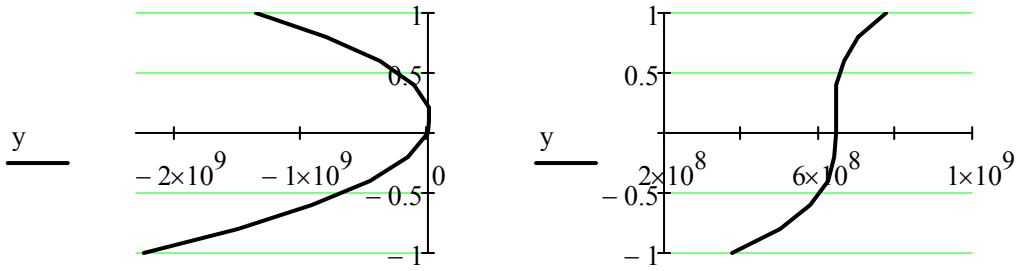
- Грань K1-K2:

$$\cos \alpha := 1 \quad \cos \beta := 0 \quad x := a \quad y := -b, \left(-b + 2 \cdot \frac{b}{10} \right) .. b$$

$$p_{nx12}(x, y) := \sigma_x(x, y) \cdot \cos \alpha + \tau_{xy}(x, y) \cdot \cos \beta$$

$$p_{ny12}(x, y) := \tau_{xy}(x, y) \cdot \cos \alpha + \sigma_y(x, y) \cdot \cos \beta$$

■ Строим эпюры контурной нагрузки:



$p_{nx12}(x, y)$

$p_{ny12}(x, y)$

$x = 3 \text{ m}$

$y =$

$p_{nx12}(x, y) =$

$p_{ny12}(x, y) =$

-1	m
-0.8	
-0.6	
-0.4	
-0.2	
0	
0.2	
0.4	
0.6	
0.8	
1	

$-2.238 \cdot 10^9$	Pa
$-1.502 \cdot 10^9$	
$-9.108 \cdot 10^8$	
$-4.632 \cdot 10^8$	
$-1.596 \cdot 10^8$	
$-9.726 \cdot 10^8$	
$1.56 \cdot 10^7$	
$-1.128 \cdot 10^8$	
$-3.852 \cdot 10^8$	
$-8.016 \cdot 10^8$	
$-1.362 \cdot 10^9$	

$3.76 \cdot 10^8$	Pa
$4.995 \cdot 10^8$	
$5.789 \cdot 10^8$	
$6.237 \cdot 10^8$	
$6.435 \cdot 10^8$	
$6.48 \cdot 10^8$	
$6.467 \cdot 10^8$	
$6.493 \cdot 10^8$	
$6.653 \cdot 10^8$	
$7.043 \cdot 10^8$	
$7.76 \cdot 10^8$	

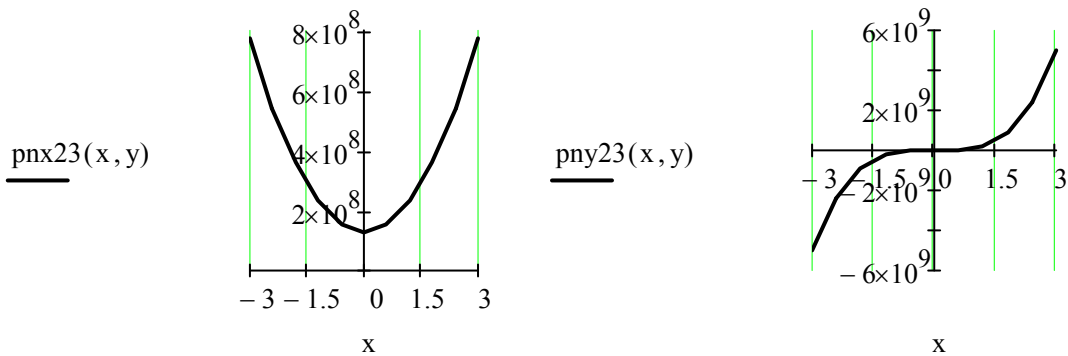
- Грань K2-K3:

$$\cos\alpha := 0 \quad \cos\beta := 1 \quad x := -a, \left(-a + 2 \cdot \frac{a}{10}\right) .. a \quad y := b$$

$$p_{nx23}(x, y) := \sigma_x(x, y) \cdot \cos\alpha + \tau_{xy}(x, y) \cdot \cos\beta$$

$$p_{ny23}(x, y) := \tau_{xy}(x, y) \cdot \cos\alpha + \sigma_y(x, y) \cdot \cos\beta$$

Строим эпюры контурной нагрузки:



x =	y = 1 m	pnx23(x, y) =	pny23(x, y) =
-3		7.76 · 10 ⁸ Pa	-4.986 · 10 ⁹ Pa
-2.4		5.427 · 10 ⁸	-2.434 · 10 ⁹
-1.8		3.613 · 10 ⁸	-9.18 · 10 ⁸
-1.2		2.317 · 10 ⁸	-1.8 · 10 ⁸
-0.6		1.539 · 10 ⁸	3.96 · 10 ⁷
0		1.28 · 10 ⁸	-6.128 · 10 ⁻⁸
0.6		1.539 · 10 ⁸	-3.96 · 10 ⁷
1.2		2.317 · 10 ⁸	1.8 · 10 ⁸
1.8		3.613 · 10 ⁸	9.18 · 10 ⁸
2.4		5.427 · 10 ⁸	2.434 · 10 ⁹
3		7.76 · 10 ⁸	4.986 · 10 ⁹

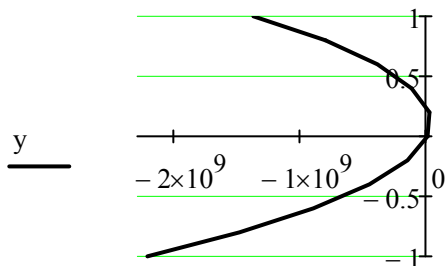
- Грань К3-К4:

$$\cos\alpha := -1 \quad \cos\beta := 0 \quad x := -a \quad y := -b, \left(-b + 2 \cdot \frac{b}{10}\right) .. b$$

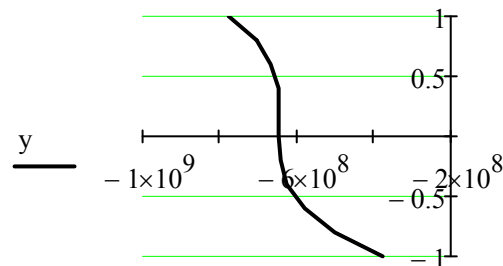
$$pnx34(x, y) := \sigma_x(x, y) \cdot \cos\alpha + \tau_{xy}(x, y) \cdot \cos\beta$$

$$pny34(x, y) := \tau_{xy}(x, y) \cdot \cos\alpha + \sigma_y(x, y) \cdot \cos\beta$$

Строим эпюры контурной нагрузки:



pnx34(x, y)



pny34(x, y)

x = -3 m	y =	pnx34(x, y) =	pny34(x, y) =
	-1	-2.226 · 10 ⁹ Pa	-3.76 · 10 ⁸ Pa
	-0.8	-1.493 · 10 ⁹	-4.995 · 10 ⁸
	-0.6	-9.036 · 10 ⁸	-5.789 · 10 ⁸
	-0.4	-4.584 · 10 ⁸	-6.237 · 10 ⁸
	-0.2	-1.572 · 10 ⁸	-6.435 · 10 ⁸
	0	-9.459 · 10 ⁻⁸	-6.48 · 10 ⁸
	0.2	1.32 · 10 ⁷	-6.467 · 10 ⁸
	0.4	-1.176 · 10 ⁸	-6.493 · 10 ⁸
	0.6	-3.924 · 10 ⁸	-6.653 · 10 ⁸
	0.8	-8.112 · 10 ⁸	-7.043 · 10 ⁸
	1	-1.374 · 10 ⁹	-7.76 · 10 ⁸

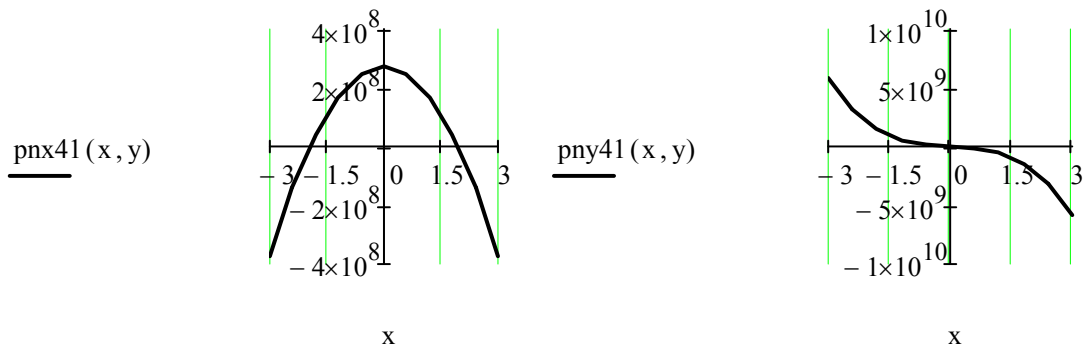
■ - Грань K4-K1:

$$\cos\alpha := 0 \quad \cos\beta := -1 \quad x := -a, \left(-a + 2 \cdot \frac{a}{10}\right) .. a \quad y := -b$$

$$pnx41(x, y) := \sigma_x(x, y) \cdot \cos\alpha + \tau_{xy}(x, y) \cdot \cos\beta$$

$$pny41(x, y) := \tau_{xy}(x, y) \cdot \cos\alpha + \sigma_y(x, y) \cdot \cos\beta$$

Строим эпюры контурной нагрузки:



x =

-3
-2.4
-1.8
-1.2
-0.6
0
0.6
1.2
1.8
2.4
3

m

$$y = -1 \text{ m}$$

pnx41(x, y) =

-3.76 · 10 ⁸
-1.427 · 10 ⁸
3.872 · 10 ⁷
1.683 · 10 ⁸
2.461 · 10 ⁸
2.72 · 10 ⁸
2.461 · 10 ⁸
1.683 · 10 ⁸
3.872 · 10 ⁷
-1.427 · 10 ⁸
-3.76 · 10 ⁸

Pa

pny41(x, y) =

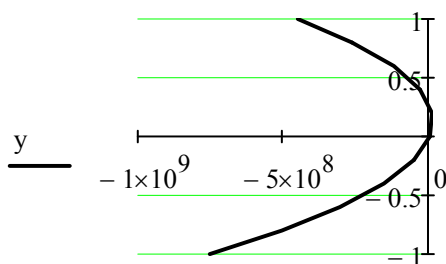
5.85 · 10 ⁹
3.125 · 10 ⁹
1.436 · 10 ⁹
5.256 · 10 ⁸
1.332 · 10 ⁸
-6.661 · 10 ⁻⁸
-1.332 · 10 ⁸
-5.256 · 10 ⁸
-1.436 · 10 ⁹
-3.125 · 10 ⁹
-5.85 · 10 ⁹

Pa

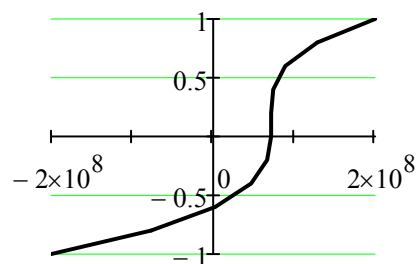
Строим эпюры напряжений в точке M(xm, ym):

1. Эпюры напряжений вдоль вертикали.

$$x := x_m \quad y := -b, \left(-b + 2 \cdot \frac{b}{10}\right) .. b$$



$\sigma_x(x, y)$

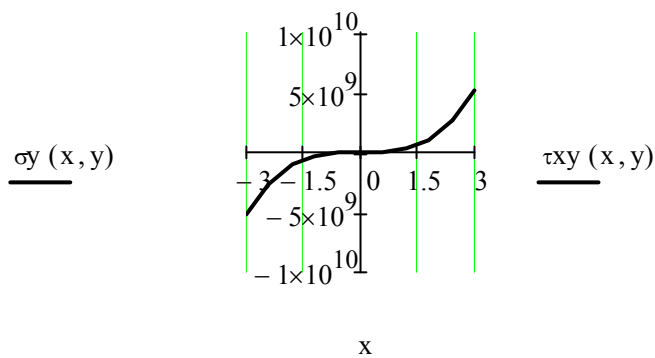


$\tau_{xy}(x, y)$

$x = 1 \text{ m}$	$y =$	$\sigma_x(x, y) =$	$\tau_{xy}(x, y) =$
	-1 m	$-7.5 \cdot 10^8 \text{ Pa}$	$-2 \cdot 10^8 \text{ Pa}$
	-0.8	$-5.04 \cdot 10^8$	$-7.648 \cdot 10^7$
	-0.6	$-3.06 \cdot 10^8$	$2.88 \cdot 10^6$
	-0.4	$-1.56 \cdot 10^8$	$4.768 \cdot 10^7$
	-0.2	$-5.4 \cdot 10^7$	$6.752 \cdot 10^7$
	0	$-3.331 \cdot 10^{-8}$	$7.2 \cdot 10^7$
	0.2	$6 \cdot 10^6$	$7.072 \cdot 10^7$
	0.4	$-3.6 \cdot 10^7$	$7.328 \cdot 10^7$
	0.6	$-1.26 \cdot 10^8$	$8.928 \cdot 10^7$
	0.8	$-2.64 \cdot 10^8$	$1.283 \cdot 10^8$
	1	$-4.5 \cdot 10^8$	$2 \cdot 10^8$

2. Эпюры напряжений вдоль горизонтали.

$$x := -a, \left(-a + 2 \cdot \frac{a}{10} \right) .. a \quad y := ym$$



$x =$	$y = 0.5 \text{ m}$	$\sigma_y(x, y) =$	$\tau_{xy}(x, y) =$
-3 m		$-5.202 \cdot 10^9 \text{ Pa}$	$6.55 \cdot 10^8 \text{ Pa}$
-2.4		$-2.606 \cdot 10^9$	$4.217 \cdot 10^8$
-1.8		$-1.048 \cdot 10^9$	$2.403 \cdot 10^8$
-1.2		$-2.664 \cdot 10^8$	$1.107 \cdot 10^8$
-0.6		$-3.6 \cdot 10^6$	$3.292 \cdot 10^7$
0		$-2.931 \cdot 10^{-8}$	$7 \cdot 10^6$
0.6		$3.6 \cdot 10^6$	$3.292 \cdot 10^7$
1.2		$2.664 \cdot 10^8$	$1.107 \cdot 10^8$
1.8		$1.048 \cdot 10^9$	$2.403 \cdot 10^8$
2.4		$2.606 \cdot 10^9$	$4.217 \cdot 10^8$
3		$5.202 \cdot 10^9$	$6.55 \cdot 10^8$

Вычисляем значение эквивалентного напряжения и оцениваем прочность балки-стенки в точке $M(xm, ym)$.

Теория прочности Треска-Сен-Венана.

$$\sigma_e(x, y) := \sqrt{(\sigma_x(x, y) - \sigma_y(x, y))^2 + 4 \cdot \tau_{xy}(x, y)^2}$$

$$\sigma_e(x_m, y_m) = 2.62 \times 10^8 \text{ Pa}$$

$$R = 2.4 \times 10^8 \text{ Pa}$$

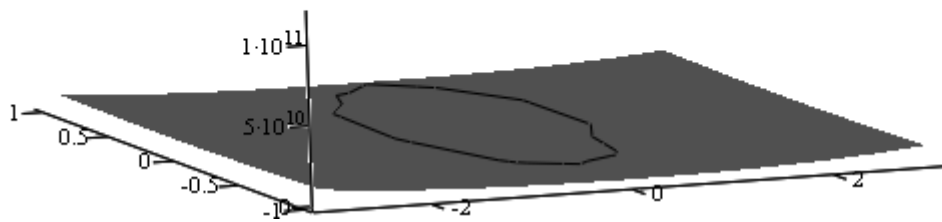
$$L := \sigma_e(x_m, y_m) < R$$

$$L = 0$$

Прочность балки-стенки в точке $M(x_m, y_m)$ по теории прочности Треска-Сен-Венана не обеспечена.

Строим поверхность прочности.

$$\sigma_t(x_m, y_m) := \sigma_e(x_m, y_m) - R$$



σ_e

Теория прочности Губера-Мизеса-Генки

$$\sigma_e(x, y) := \sqrt{\sigma_x(x, y)^2 - \sigma_x(x, y) \cdot \sigma_y(x, y) + \sigma_y(x, y)^2 + 3 \cdot \tau_{xy}(x, y)^2}$$

$$\sigma_e(x_m, y_m) = 2.288 \times 10^8 \text{ Pa}$$

$$R = 2.4 \times 10^8 \text{ Pa}$$

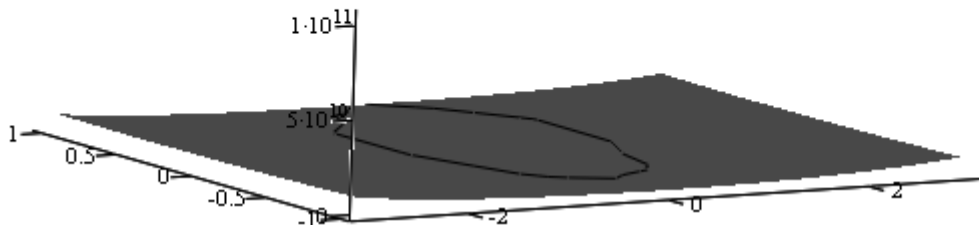
$$L := \sigma_e(x_m, y_m) < R$$

$$L = 1$$

Прочность балки-стенки в точке $M(x_m, y_m)$ по теории прочности Губера-Мизеса-Генки обеспечена.

Строим поверхность прочности.

$$\sigma_g(x_m, y_m) := \sigma_e(x_m, y_m) - R$$



σ_g

■ Определяем деформации:

$$\varepsilon_x(x, y) := \left(\frac{1}{E} \right) \cdot (\sigma_x(x, y) - \nu \cdot \sigma_y(x, y))$$

$$\varepsilon_y(x, y) := \left(\frac{1}{E} \right) \cdot (\sigma_y(x, y) - \nu \cdot \sigma_x(x, y))$$

$$\gamma_{xy}(x, y) := \left[\frac{2 \cdot (1 + \nu)}{E} \right] \cdot \tau_{xy}(x, y)$$

Проверяем выполнение условий совместности деформаций:

$$\sigma_x(x, y) := 6 \cdot BB \cdot yy + 6 \cdot CC \cdot xx \cdot yy + 60 \cdot DD \cdot xx \cdot yy^2$$

$$\sigma_y(x, y) := 6 \cdot BB \cdot xx - 6 \cdot CC \cdot xx \cdot yy - 20 \cdot DD \cdot xx^3$$

$$\tau_{xy}(x, y) := -3 \cdot CC \cdot (yy^2 - xx^2) - 20 \cdot DD \cdot yy^3$$

$$\varepsilon_x(x, y) := \left(\frac{1}{EE} \right) \cdot (\sigma_x(x, y) - \nu \cdot \sigma_y(x, y))$$

$$\varepsilon_y(x, y) := \left(\frac{1}{EE} \right) \cdot (\sigma_y(x, y) - \nu \cdot \sigma_x(x, y))$$

$$\gamma_{xy}(x, y) := \left[\frac{2 \cdot (1 + \nu \nu)}{EE} \right] \cdot \tau_{xy}(x, y)$$

$$\frac{d^2}{dy^2} \varepsilon_x(x, y) + \frac{d^2}{dxx^2} \varepsilon_y(x, y) - \frac{d}{dxx} \left(\frac{d}{dy} \gamma_{xy}(x, y) \right) \rightarrow 0$$

Таким образом, совместность деформаций выполняется.

Строим поверхности деформаций:

$$\sigma_x(x, y) := 6 \cdot B \cdot y + 6 \cdot C \cdot x \cdot y + 60 \cdot D \cdot x \cdot y^2$$

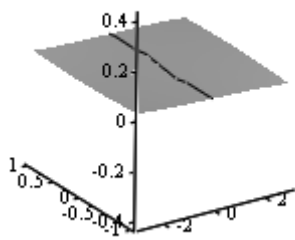
$$\sigma_y(x, y) := 6 \cdot B \cdot x - 6 \cdot C \cdot x \cdot y - 20 \cdot D \cdot x^3$$

$$\tau_{xy}(x, y) := -3 \cdot C \cdot (y^2 - x^2) - 20 \cdot D \cdot y^3$$

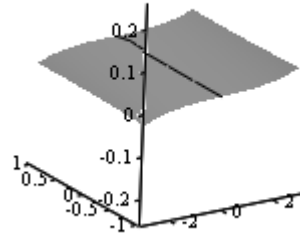
$$\varepsilon_x(x, y) := \left(\frac{1}{E} \right) \cdot (\sigma_x(x, y) - \nu \cdot \sigma_y(x, y))$$

$$\varepsilon_y(x, y) := \left(\frac{1}{E} \right) \cdot (\sigma_y(x, y) - \nu \cdot \sigma_x(x, y))$$

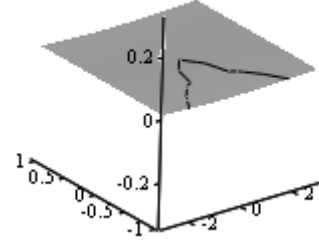
$$\gamma_{xy}(x, y) := \left[\frac{2 \cdot (1 + \nu)}{E} \right] \cdot \tau_{xy}(x, y)$$



ϵ_x



ϵ_y

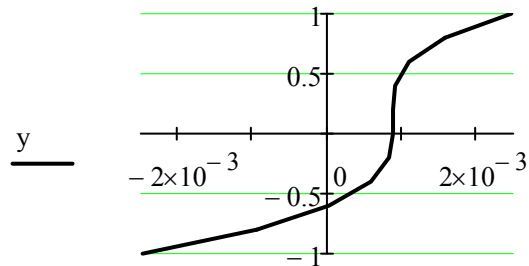
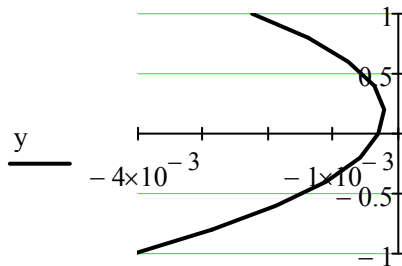


γ_{xy}

Строим эпюры деформаций в точке $M(xm, ym)$:

1. Эпюры деформаций вдоль вертикали.

$$x := xm \quad y := -b, \left(-b + 2 \cdot \frac{b}{10}\right) .. b$$



$\epsilon_x(x, y)$

$x = 1 \text{ m}$

$y =$

-1
-0.8
-0.6
-0.4
-0.2
0
0.2
0.4
0.6
0.8
1

$\epsilon_x(x, y) =$

$-4.071 \cdot 10^{-3}$
$-2.859 \cdot 10^{-3}$
$-1.875 \cdot 10^{-3}$
$-1.119 \cdot 10^{-3}$
$-5.926 \cdot 10^{-4}$
$-2.943 \cdot 10^{-4}$
$-2.246 \cdot 10^{-4}$
$-3.834 \cdot 10^{-4}$
$-7.709 \cdot 10^{-4}$
$-1.387 \cdot 10^{-3}$
$-2.231 \cdot 10^{-3}$

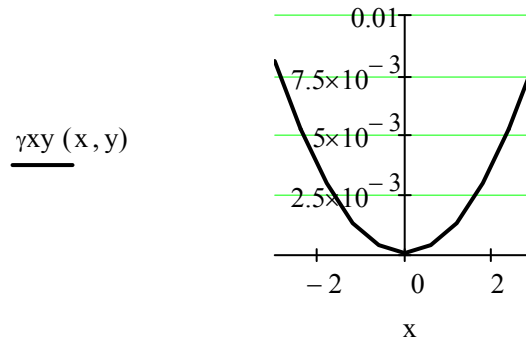
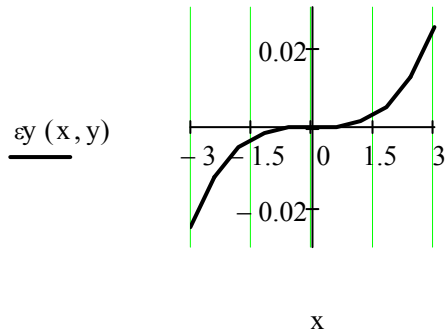
$\gamma_{xy}(x, y)$

$\gamma_{xy}(x, y) =$

$-2.476 \cdot 10^{-3}$
$-9.469 \cdot 10^{-4}$
$3.566 \cdot 10^{-5}$
$5.903 \cdot 10^{-4}$
$8.36 \cdot 10^{-4}$
$8.914 \cdot 10^{-4}$
$8.756 \cdot 10^{-4}$
$9.073 \cdot 10^{-4}$
$1.105 \cdot 10^{-3}$
$1.589 \cdot 10^{-3}$
$2.476 \cdot 10^{-3}$

2. Эпюры деформаций вдоль горизонтали.

$$x := -a, \left(-a + 2 \cdot \frac{a}{10}\right) .. a \quad y := ym$$



x =

-3
-2.4
-1.8
-1.2
-0.6
0
0.6
1.2
1.8
2.4
3

m

y = 0.5 m

εy(x, y) =

-0.025
-0.013
-5.193 · 10 ⁻³
-1.407 · 10 ⁻³
-8.829 · 10 ⁻⁵
-4.286 · 10 ⁻⁶
7.971 · 10 ⁻⁵
1.398 · 10 ⁻³
5.185 · 10 ⁻³
0.013
0.025

γxy(x, y) =

8.11 · 10 ⁻³
5.221 · 10 ⁻³
2.975 · 10 ⁻³
1.37 · 10 ⁻³
4.076 · 10 ⁻⁴
8.667 · 10 ⁻⁵
4.076 · 10 ⁻⁴
1.37 · 10 ⁻³
2.975 · 10 ⁻³
5.221 · 10 ⁻³
8.11 · 10 ⁻³

Определяем перемещения в балке-стенке:

Функция перемещений и напряжений имеет вид:

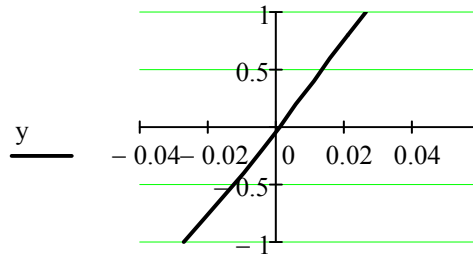
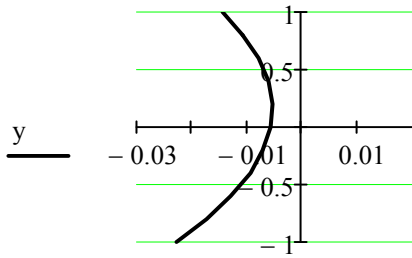
$$\omega(x, y) := B \cdot \frac{1}{4} \cdot x \cdot y \cdot (x^3 + y^3) + C \cdot \frac{1}{8} \cdot x^2 \cdot y^2 \cdot (y^2 - x^2) - D \cdot \frac{1}{2} \cdot x^2 \cdot y \cdot \left(\frac{1}{3} \cdot x^4 - y^4 \right)$$

$$u(x, y) := \left(\frac{1}{E} \right) \cdot \left[\frac{d}{dy} \left(\frac{d^2}{dy^2} \omega(x, y) - \nu \cdot \frac{d^2}{dx^2} \omega(x, y) \right) \right]$$

$$v(x, y) := \left(\frac{1}{E} \right) \cdot \left[\frac{d}{dx} \left(\frac{d^2}{dx^2} \omega(x, y) - \nu \cdot \frac{d^2}{dy^2} \omega(x, y) \right) \right]$$

Строим графики перемещений контура балки-стенки.

Грань K1-K2. $x := a$ $y := -b, \left(-b + 2 \cdot \frac{b}{10} \right) .. b$



$x = 3 \text{ m}$

$u(x, y)$

$v(x, y)$

$y =$

$u(x, y) =$

$v(x, y) =$

-1	m
-0.8	
-0.6	
-0.4	
-0.2	
0	
0.2	
0.4	
0.6	
0.8	
1	

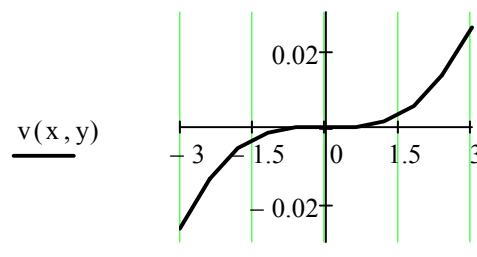
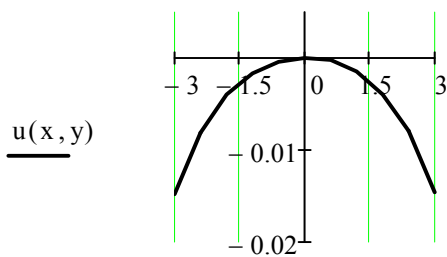
-0.023	m
-0.017	
-0.013	
$-9.516 \cdot 10^{-3}$	
$-7.158 \cdot 10^{-3}$	
$-5.824 \cdot 10^{-3}$	
$-5.519 \cdot 10^{-3}$	
$-6.243 \cdot 10^{-3}$	
$-7.993 \cdot 10^{-3}$	
-0.011	
-0.015	

-0.027	m
-0.021	
-0.015	
$-9.664 \cdot 10^{-3}$	
$-4.295 \cdot 10^{-3}$	
$9.257 \cdot 10^{-4}$	
$6.039 \cdot 10^{-3}$	
0.011	
0.016	
0.021	
0.026	

Грань К2-К3.

$$x := -a, \left(-a + 2 \cdot \frac{a}{10} \right) .. a$$

$y := b$



$x =$

$y = 1 \text{ m}$

$u(x, y) =$

$v(x, y) =$

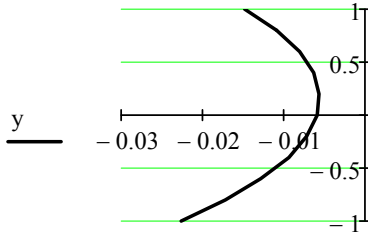
-3	m
-2.4	
-1.8	
-1.2	
-0.6	
0	
0.6	
1.2	
1.8	
2.4	
3	

-0.015	m
$-8.087 \cdot 10^{-3}$	
$-3.962 \cdot 10^{-3}$	
$-1.567 \cdot 10^{-3}$	
$-3.446 \cdot 10^{-4}$	
$3.714 \cdot 10^{-5}$	
$-3.103 \cdot 10^{-4}$	
$-1.498 \cdot 10^{-3}$	
$-3.86 \cdot 10^{-3}$	
$-7.95 \cdot 10^{-3}$	
-0.015	

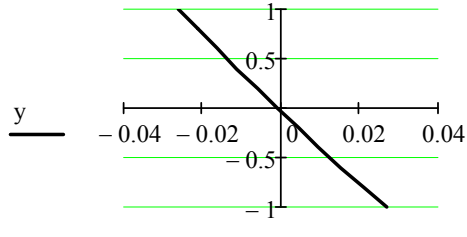
-0.026	m
-0.013	
$-5.522 \cdot 10^{-3}$	
$-1.552 \cdot 10^{-3}$	
$-1.385 \cdot 10^{-4}$	
$-4.286 \cdot 10^{-6}$	
$1.3 \cdot 10^{-4}$	
$1.543 \cdot 10^{-3}$	
$5.513 \cdot 10^{-3}$	
0.013	
0.026	

Грань К3-К4.

$$x := -a \quad y := -b, \left(-b + 2 \cdot \frac{b}{10}\right) .. b$$



$u(x, y)$



$v(x, y)$

$x = -3 \text{ m}$

$y =$

-1	m
-0.8	
-0.6	
-0.4	
-0.2	
0	
0.2	
0.4	
0.6	
0.8	
1	

$u(x, y) =$

-0.023	m
-0.017	
-0.013	
$-9.448 \cdot 10^{-3}$	
$-7.123 \cdot 10^{-3}$	
$-5.824 \cdot 10^{-3}$	
$-5.554 \cdot 10^{-3}$	
$-6.312 \cdot 10^{-3}$	
$-8.096 \cdot 10^{-3}$	
-0.011	
-0.015	

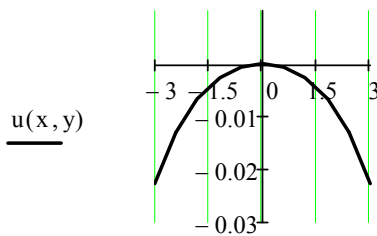
$v(x, y) =$

0.027	m
0.021	
0.015	
$9.662 \cdot 10^{-3}$	
$4.294 \cdot 10^{-3}$	
$-9.257 \cdot 10^{-4}$	
$-6.039 \cdot 10^{-3}$	
-0.011	
-0.016	
-0.021	
-0.026	

Грань К4-К1.

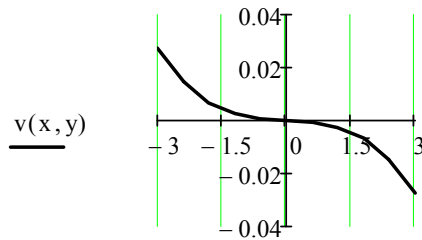
$$x := -a, \left(-a + 2 \cdot \frac{a}{10}\right) .. a$$

$y := -b$



$u(x, y)$

x



$v(x, y)$

x

$x =$

-3	m
-2.4	
-1.8	
-1.2	
-0.6	
0	
0.6	
1.2	
1.8	
2.4	
3	

$y = -1 \text{ m}$

$u(x, y) =$

-0.023	m
-0.013	
$-6.679 \cdot 10^{-3}$	
$-2.713 \cdot 10^{-3}$	
$-5.627 \cdot 10^{-4}$	
$1.057 \cdot 10^{-4}$	
$-5.97 \cdot 10^{-4}$	
$-2.782 \cdot 10^{-3}$	
$-6.782 \cdot 10^{-3}$	
-0.013	
-0.023	

$v(x, y) =$

0.027	m
0.015	
$6.718 \cdot 10^{-3}$	
$2.494 \cdot 10^{-3}$	
$6.5 \cdot 10^{-4}$	
$-4.286 \cdot 10^{-6}$	
$-6.586 \cdot 10^{-4}$	
$-2.503 \cdot 10^{-3}$	
$-6.727 \cdot 10^{-3}$	
-0.015	
-0.027	

Полученные массивы перемещений позволяют построить очертание балки-стенки в состоянии после деформации.

Контрольные вопросы

1. Сформулируйте основные задачи курса теории упругости.
2. Сформулируйте основные допущения, принятые в теории упругости.
3. Что называется напряжением в точке?
4. Какие бывают разновидности напряжений?
5. Объясните понятие “напряжённое состояние в точке”».
6. Какова связь между напряжениями на параллельных площадках?
7. Какие напряжения называются главными? Какова связь между главными напряжениями?
8. Сформулируйте закон парности касательных напряжений.
9. Какие уравнения устанавливают связь между компонентами напряжения? Запишите эти уравнения.
10. Какие виды деформаций могут возникать в произвольной точке упругого тела?
11. Что называется линейной деформацией?
12. Что называется угловой деформацией?
13. Объясните понятие “деформированное состояние в точке”.
14. Какие деформации называются главными? Какова связь между главными деформациями?
15. Какие перемещения возникают в произвольной точке упругого тела?
16. Какие уравнения устанавливают связь между перемещениями и деформациями? Запишите эти уравнения.
17. Дайте физическую интерпретацию уравнений неразрывности Сен-Венана.
18. Какие уравнения устанавливают связь между напряжениями и деформациями?
19. Что такое модуль упругости, модуль сдвига, коэффициент Пуассона?
20. Сформулируйте обобщённый закон Гука в прямой форме.
21. Сформулируйте закон Гука в форме Ламе.
22. Дайте понятие пространственной и плоской задачи теории упругости?
23. Какие группы уравнений включает общая система уравнений теории упругости?
24. Сформулируйте условия на границе деформированного тела в перемещениях.
25. Сформулируйте условия на границе деформированного тела в напряжениях.
26. Что такое “прямая задача теории упругости”?
27. Как решается прямая задача теории упругости в напряжениях?
28. Как решается прямая задача теории упругости в перемещениях?

29. Что такое “обратная задача теории упругости”?
30. Как решается обратная задача теории упругости?
31. Что называется плоской задачей теории упругости? Охарактеризуйте плоскую деформацию и обобщённое плоское напряжённое состояние.
32. Запишите уравнения равновесия для плоской задачи.
33. Запишите геометрические уравнения для плоской задачи.
34. Запишите уравнение неразрывности деформаций для плоской задачи.
35. Как формулируются физические уравнения для плоской задачи?
36. Сформулируйте граничные условия для плоской задачи в перемещениях, в напряжениях.
37. Какие существуют методы решения плоской задачи теории упругости?
38. Как решается плоская задача в перемещениях?
39. Как решается плоская задача в напряжениях?
40. Какие величины связывает уравнение Мориса-Леви?
41. Запишите бигармоническое уравнение.
42. Что такое функция напряжений?
43. В каких единицах измеряется функция напряжений?
44. Как при помощи функции напряжений найти напряжения?
45. Запишите граничные условия (условия на контуре балки-стенки) с использованием функции напряжений.
46. Какие существуют пути решения плоской задачи теории упругости в напряжениях?
47. Как решается плоская задача теории упругости в напряжениях при помощи целых полиномов?
48. Как проверить, может ли произвольная функция двух аргументов x и y быть принята в качестве функции напряжений?
49. Заданы функции: а) $f(x, y) = 6x^3 + 3x^2y + y^3$;
 б) $f(x, y) = \frac{1}{2}x^4 - 3x^2y^2$.
- Можно ли их принять в качестве функции напряжений?
50. Заданы функции напряжений: а) $\varphi(x, y) = xy + 2x^3$;
 б) $\varphi(x, y) = 2y^3 + xy^2$.
- Найдите напряжения.
51. Запишите функцию напряжений для решения Файлона.
52. Запишите функцию напряжений для решения Рибьера.
53. Поясните алгоритм решения плоской задачи теории упругости при помощи тригонометрических рядов Фурье.
54. В чём состоят недостатки решения плоской задачи теории упругости при помощи тригонометрических рядов Фурье?

55. Для чего нужны теории прочности?
56. Что называется эквивалентным напряжением?
57. Что называется расчётным сопротивлением материала?
58. Как определяется расчётное сопротивление для пластичных и хрупких материалов?
59. Какие эксперименты положены в основу построения классических теорий прочности?
60. Сформулируйте первую теорию прочности.
61. Сформулируйте вторую теорию прочности.
62. Сформулируйте третью теорию прочности.
63. Сформулируйте теорию прочности Губера – Мизеса – Генки.
64. Запишите критерий прочности Треска – Сен-Венана для плоской задачи теории упругости.
65. Запишите критерий прочности Губера – Мизеса – Генки для плоской задачи теории упругости.

§2. Расчёт прямоугольной пластины опёртой по контуру на изгиб

Приближённый метод расчёта пластин, то есть упругих тел, имеющих два размера намного больше третьего (рис. 12), работающих на изгиб, основан на следующих допущениях:

1. Точки пластины, лежащие до деформации на перпендикуляре (mn) к срединной плоскости, остаются и после деформации изгиба на перпендикуляре (m_1n_1) к срединной изогнутой поверхности пластины (гипотеза Кирхгофа – Лява).

2. Срединная плоскость пластины, изгибаемой силами, только перпендикулярными к ней, не деформируется в своей плоскости и является нейтральным слоем.

3. Слои пластины, параллельные срединной плоскости, не надавливают друг на друга.

4. Перемещения точек, лежащих на срединной плоскости пластины, считаются возможными только по перпендикулярному к ней направлению.

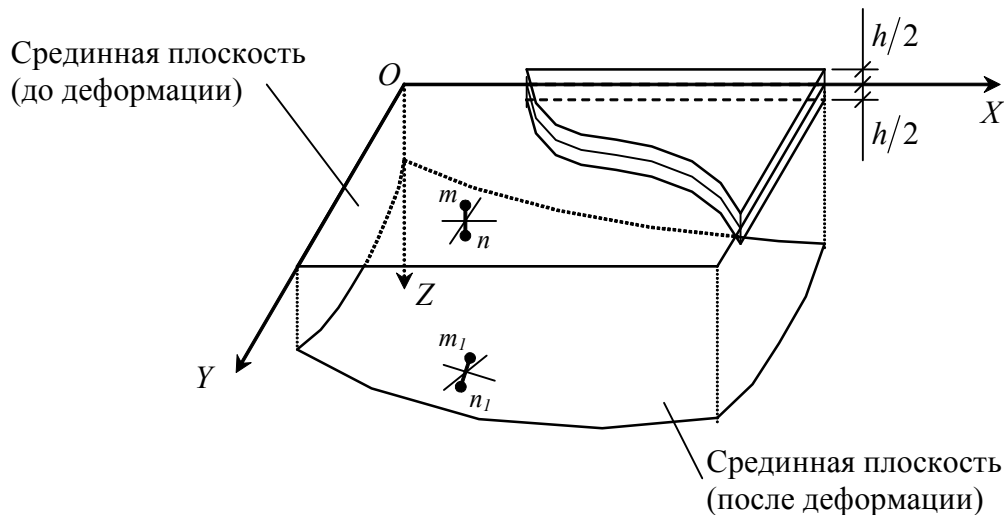


Рис. 12

Эти гипотезы позволяют выразить перемещения различных точек пластины, деформации и напряжения в них, а также внутренние усилия в пластине – изгибающие и крутящие моменты, поперечные силы - через перемещения $w(x, y)$ соответствующих точек срединной плоскости.

Так перемещения вдоль осей X и Y определяются соотношениями:

$$u(x, y) = -z \frac{\partial w(x, y)}{\partial x}; \quad v(x, y) = -z \frac{\partial w(x, y)}{\partial y}. \quad (35)$$

Линейные и угловые деформации равны:

$$\begin{aligned}\varepsilon_x(x, y) &= -z \frac{\partial^2 w(x, y)}{\partial x^2}; \quad \varepsilon_y(x, y) = -z \frac{\partial^2 w(x, y)}{\partial y^2}; \quad \varepsilon_z(x, y) = 0; \\ \gamma_{xy}(x, y) &= \gamma_{yx}(x, y) = -2z \frac{\partial^2 w(x, y)}{\partial x \partial y}; \\ \gamma_{yz}(x, y) &= \gamma_{zy}(x, y) = 0; \quad \gamma_{zx}(x, y) = \gamma_{xz}(x, y) = 0.\end{aligned}\tag{36}$$

В сечениях пластины (рис. 13), перпендикулярных её серединой плоскости, возникают следующие напряжения:

$$\begin{aligned}\sigma_x(x, y) &= -\frac{Ez}{1-\nu^2} \left[\frac{\partial^2 w(x, y)}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w(x, y)}{\partial y^2} \right]; \\ \sigma_y(x, y) &= -\frac{Ez}{1-\nu^2} \left[\frac{\partial^2 w(x, y)}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w(x, y)}{\partial x^2} \right]; \\ \sigma_z(x, y) &= 0; \\ \tau_{xy}(x, y) &= \tau_{yx}(x, y) = -\frac{Ez}{1+\nu} \frac{\partial^2 w(x, y)}{\partial x \partial y}; \\ \tau_{yz}(x, y) &= \tau_{zy}(x, y) = -\frac{E}{2(1-\nu^2)} \left(\frac{h^2}{4} - z^2 \right) \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{\partial^2 w(x, y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w(x, y)}{\partial y^2} \right]; \\ \tau_{zx}(x, y) &= \tau_{xz}(x, y) = -\frac{E}{2(1-\nu^2)} \left(\frac{h^2}{4} - z^2 \right) \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\partial^2 w(x, y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w(x, y)}{\partial y^2} \right].\end{aligned}\tag{37}$$

На рис. 13 показан примерный вид эпюр напряжений в пластине.

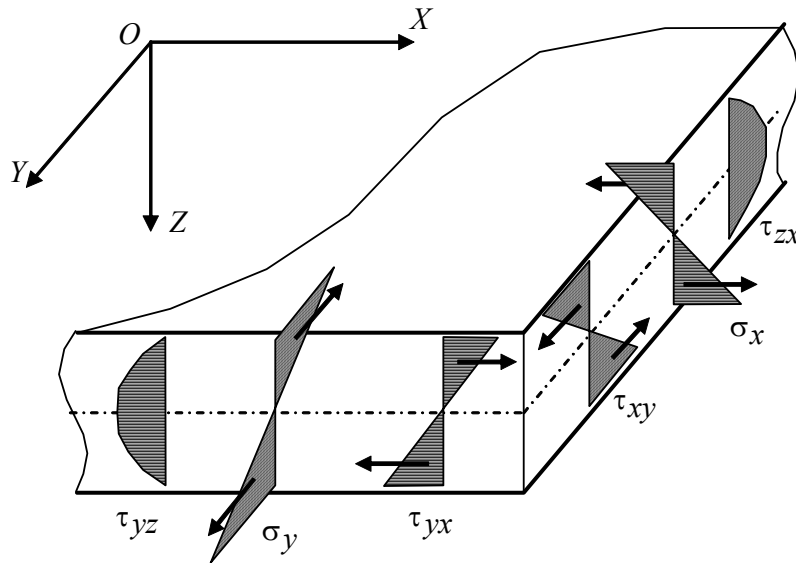


Рис. 13

Изгибающие M_x , M_y и крутящий M_{xy} моменты, а также поперечные силы Q_x , Q_y , приходящиеся на единицу длины пластины (рис. 14), определяются в соответствии с формулами:

$$\begin{aligned}
 M_x(x, y) &= -D \left[\frac{\partial^2 w(x, y)}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w(x, y)}{\partial y^2} \right]; \\
 M_y(x, y) &= -D \left[\frac{\partial^2 w(x, y)}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w(x, y)}{\partial x^2} \right]; \\
 M_{xy}(x, y) &= -D(1 - \nu) \frac{\partial^2 w(x, y)}{\partial x \partial y}; \\
 Q_x(x, y) &= -D \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{\partial^2 w(x, y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w(x, y)}{\partial y^2} \right]; \\
 Q_y(x, y) &= -D \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\partial^2 w(x, y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w(x, y)}{\partial y^2} \right].
 \end{aligned} \tag{38}$$

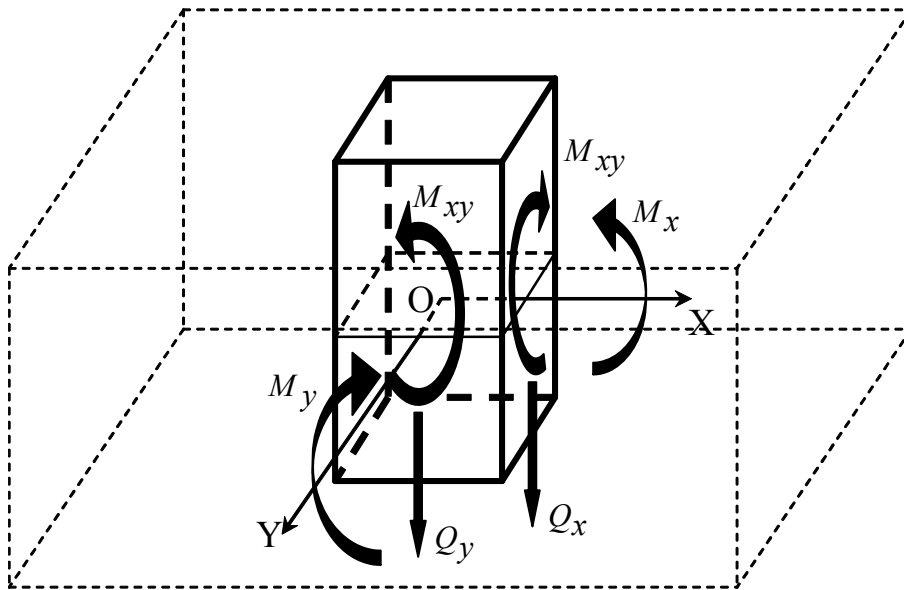


Рис. 14

Дифференциальное уравнение изогнутой срединной поверхности пластины (уравнение Софи Жермен), для внешней нагрузки, направленной в сторону положительного направления оси Z , то есть вниз, имеет вид:

$$D \left[\frac{\partial^4 w(x, y)}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w(x, y)}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w(x, y)}{\partial y^4} \right] = q(x, y). \tag{39}$$

Здесь, в соотношениях (35)-(39), $w(x, y)$ – уравнение изогнутой срединной поверхности пластины; $q(x, y)$ – интенсивность распределённой внешней нагрузки; $D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$ – цилиндрическая жёсткость пластины;

E и ν – модуль упругости и коэффициент Пуассона материала пластины.

Сопоставляя формулы (37) и (38), можно выразить напряжения, возникающие в сечениях пластины, перпендикулярных её срединной плоскости, через внутренние усилия. Соответствующие соотношения представлены ниже:

$$\begin{aligned}\sigma_x(x, y) &= \frac{12M_x(x, y)}{h^3}z; \\ \sigma_y(x, y) &= \frac{12M_y(x, y)}{h^3}z; \\ \tau_{xy}(x, y) &= \frac{12M_{xy}(x, y)}{h^3}z; \\ \tau_{yz}(x, y) &= \frac{6Q_y(x, y)}{h^3}\left(\frac{h^2}{4} - z^2\right); \\ \tau_{zx}(x, y) &= \frac{6Q_x(x, y)}{h^3}\left(\frac{h^2}{4} - z^2\right);\end{aligned}\tag{40}$$

Максимальные по абсолютной величине нормальные напряжения σ_x и σ_y , а также касательные напряжения τ_{xy} возникают при $z = \pm \frac{h}{2}$, то есть

$$\max \sigma_x = \pm \frac{M_x}{W}; \quad \max \sigma_y = \pm \frac{M_y}{W}; \quad \max \tau_{xy} = \pm \frac{M_{xy}}{W}.\tag{41}$$

При этом $\tau_{yz} = 0$ и $\tau_{zx} = 0$.

Здесь $W = \frac{h^2}{6}$ – момент сопротивления прямоугольного сечения высотой h и шириной, равной единице.

Максимальные по абсолютной величине касательные напряжения τ_{yz} и τ_{zx} возникают при $z = 0$, то есть

$$\max \tau_{yz} = \frac{3Q_y}{2h}; \quad \max \tau_{zx} = \frac{3Q_x}{2h}.\tag{42}$$

При этом $\sigma_x = 0$, $\sigma_y = 0$, $\tau_{xy} = 0$.

Таким образом, в верхних и нижних волокнах пластины имеем плоское напряжённое состояние.

Прочность пластины будет обеспечена в соответствии с выбранным критерием прочности, если в каждой её точке соответствующее условие прочности выполняется. Так, например, по теории прочности Губера – Мизеса – Генки, в каждой точке пластины должно выполняться соотношение:

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + \sigma_x^2 + \sigma_y^2 + 6(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2)} \leq R. \quad (43)$$

Расчет тонких пластин на действие поперечной нагрузки сводится к интегрированию дифференциального уравнения изогнутой срединной поверхности пластины (39) совместно с граничными условиями, определяемыми способом закрепления пластины (рис. 15).

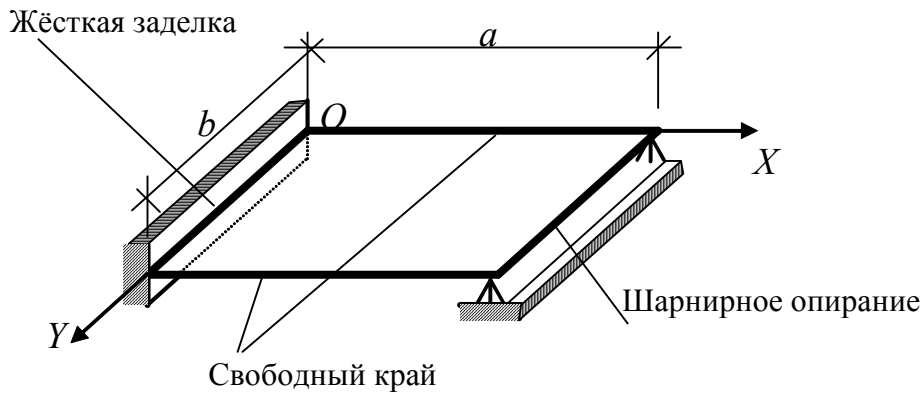


Рис. 15

1. Жёсткая заделка по всем четырём сторонам:

1) при $x = 0$ или $x = a$

$$w = 0 \text{ и } \frac{\partial w}{\partial x} = 0; \quad (44)$$

2) при $y = 0$ или $y = b$

$$w = 0 \text{ и } \frac{\partial w}{\partial y} = 0. \quad (45)$$

2. Шарнирное (неподатливое) опирание по всем четырём сторонам:

1) при $x = 0$ или $x = a$

$$w = 0 \text{ и } \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = \frac{\tilde{M}_x}{D}; \quad (46)$$

2) при $y = 0$ или $y = b$

$$w = 0 \text{ и } \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = -\frac{\tilde{M}_y}{D}; \quad (47)$$

Здесь \tilde{M}_x и \tilde{M}_y – внешние распределённые моментные нагрузки по соответствующим краям пластины.

3. Свободное опирание по всем четырём сторонам:

1) при $x = 0$ или $x = a$

$$\begin{aligned} M_x &= -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) = \tilde{M}_x; \\ V_x &= -D \left(\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + (2 - \nu) \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} \right) = \tilde{Q}_x; \end{aligned} \quad (48)$$

2) при $y = 0$ или $y = b$

$$\begin{aligned} M_y &= -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) = \tilde{M}_y; \\ V_y &= -D \left(\frac{\partial^3 w}{\partial y^3} + (2 - \nu) \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} \right) = \tilde{Q}_y. \end{aligned} \quad (49)$$

Здесь \tilde{Q}_x и \tilde{Q}_y – внешние распределённые поперечные нагрузки по соответствующим краям пластины; V_x и V_y – приведённые поперечные распределённые нагрузки, действующие по соответствующим краям пластины.

Граничные условия в углах пластины определяются граничными условиями примыкающих к углу сторон. Если угол образован двумя свободными сторонами, то необходимо выполнить для угла ещё дополнительное условие:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = 0. \quad (50)$$

Решение задачи о поперечном изгибе прямоугольной пластины, шарнирно опёртой по всему контуру, математически сводится к решению краевой задачи для дифференциального уравнения (39) совместно с краевыми условиями (46), (47) и строится в виде двойного тригонометрического ряда (ряда Фурье):

$$w(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} A_{mn} \cdot \sin \frac{m\pi x}{a} \cdot \sin \frac{n\pi y}{b}, \quad (51)$$

Данное решение, предложенное Навье, пригодно при действии произвольной поперечной нагрузки в случае, если все стороны прямоугольной пластины являются шарнирно опёртыми.

В развёрнутом виде ряд (51) записывается так:

$$w(x, y) = A_{11} \cdot \sin \frac{\pi x}{a} \cdot \sin \frac{\pi y}{b} + A_{12} \cdot \sin \frac{\pi x}{a} \cdot \sin \frac{2\pi y}{b} + A_{21} \cdot \sin \frac{2\pi x}{a} \cdot \sin \frac{\pi y}{b} + \\ + A_{22} \cdot \sin \frac{2\pi x}{a} \cdot \sin \frac{2\pi y}{b} + A_{13} \cdot \sin \frac{\pi x}{a} \cdot \sin \frac{3\pi y}{b} + \dots$$

Решение (51), при $\tilde{M}_x = 0$ и $\tilde{M}_y = 0$, удовлетворяет краевым условиям (46) и (47). Действительно:

$$\text{при } x = 0, \sin \frac{m\pi x}{a} = \sin 0^0 = 0, \text{ то есть } w(0, y) = 0;$$

$$\text{при } x = a, \sin \frac{m\pi a}{a} = \sin m\pi = 0 \quad (m = 1, 2, 3, \dots), \text{ то есть } w(0, y) = 0;$$

$$\text{при } y = 0, \sin \frac{n\pi y}{b} = \sin 0^0 = 0, \text{ то есть } w(0, y) = 0;$$

$$\text{при } x = b, \sin \frac{n\pi b}{b} = \sin n\pi = 0 \quad (n = 1, 2, 3, \dots), \text{ то есть } w(0, y) = 0.$$

Вторые производные функции прогибов

$$\frac{\partial^2 w(x, y)}{\partial x^2} = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} A_{mn} \cdot \left(\frac{m\pi}{a} \right)^2 \cdot \sin \frac{m\pi x}{a} \cdot \sin \frac{n\pi y}{b}, \\ \frac{\partial^2 w(x, y)}{\partial y^2} = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} A_{mn} \cdot \left(\frac{n\pi}{b} \right)^2 \cdot \sin \frac{m\pi x}{a} \cdot \sin \frac{n\pi y}{b}$$

содержат синусы тех же аргументов, что и сама функция. Поэтому и вторые производные на всех сторонах пластины обращаются в нуль. Следовательно, все граничные условия (46) и (47) выполняются.

Коэффициенты A_{mn} определяются из условия, что искомое решение (51) должно удовлетворять дифференциальному уравнению изогнутой срединной поверхности пластины (39). Подставляя (51) в (39), получим:

$$\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} A_{mn} \left(\frac{m\pi}{a} \right)^4 \cdot \sin \frac{m\pi x}{a} \cdot \sin \frac{n\pi y}{b} + \\ + \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} A_{mn} 2 \left(\frac{m\pi}{a} \right)^2 \left(\frac{n\pi}{b} \right)^2 \cdot \sin \frac{m\pi x}{a} \cdot \sin \frac{n\pi y}{b} + \\ + \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} A_{mn} \left(\frac{n\pi}{b} \right)^4 \cdot \sin \frac{m\pi x}{a} \cdot \sin \frac{n\pi y}{b} = \frac{q(x, y)}{D}. \quad (52)$$

Разложим внешнюю нагрузку в такой же двойной тригонометрический ряд:

$$q(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} C_{mn} \cdot \sin \frac{m\pi x}{a} \cdot \sin \frac{n\pi y}{b}. \quad (53)$$

Коэффициенты этого ряда определяются по формуле, известной из курса высшей математики:

$$C_{mn} = \frac{4}{ab} \int_0^a \int_0^b q(x, y) \cdot \sin \frac{m\pi x}{a} \cdot \sin \frac{n\pi y}{b} dx dy. \quad (54)$$

Теперь уравнение (52) можно записать так:

$$\begin{aligned} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} A_{mn} \left[\left(\frac{m\pi}{a} \right)^4 + 2 \left(\frac{m\pi}{a} \right)^2 \left(\frac{n\pi}{b} \right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b} \right)^4 \right] \cdot \sin \frac{m\pi x}{a} \cdot \sin \frac{n\pi y}{b} = \\ = \frac{1}{D} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} C_{mn} \cdot \sin \frac{m\pi x}{a} \cdot \sin \frac{n\pi y}{b}. \end{aligned} \quad (55)$$

Приравнявая коэффициенты при соответствующих тригонометрических функциях левой и правой части в формуле (55), будем иметь:

$$\begin{aligned} A_{mn} \left[\left(\frac{m\pi}{a} \right)^4 + 2 \left(\frac{m\pi}{a} \right)^2 \left(\frac{n\pi}{b} \right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b} \right)^4 \right] \cdot \sin \frac{m\pi x}{a} \cdot \sin \frac{n\pi y}{b} = \\ = \frac{C_{mn}}{D} \sin \frac{m\pi x}{a} \cdot \sin \frac{n\pi y}{b}, \end{aligned}$$

Отсюда получаем:

$$A_{mn} = \frac{C_{mn}}{\frac{D\pi^4}{a^4} \left[m^2 + n^2 \left(\frac{a}{b} \right)^2 \right]^2}. \quad (56)$$

Для равномерно распределенной нагрузки q , приложенной по площади прямоугольника $a_1 \leq x \leq a_2$, $b_1 \leq y \leq b_2$ формулу (54) можно представить в виде:

$$C_{mn} = \frac{4q}{ab} \int_{a_1}^{a_2} \sin \frac{m\pi x}{a} dx \int_{b_1}^{b_2} \sin \frac{n\pi y}{b} dy.$$

Произведя интегрирование, получим:

$$C_{mn} = \frac{4q}{ab} \left(\frac{a}{m\pi} \right) \left(\frac{b}{n\pi} \right) \left[\cos \frac{m\pi a_2}{a} - \cos \frac{m\pi a_1}{a} \right] \cdot \left[\cos \frac{n\pi b_2}{b} - \cos \frac{n\pi b_1}{b} \right]$$

или, после элементарных преобразований

$$C_{mn} = \frac{4q}{m\pi^2} \left[\cos \frac{m\pi a_2}{a} - \cos \frac{m\pi a_1}{a} \right] \cdot \left[\cos \frac{n\pi b_2}{b} - \cos \frac{n\pi b_1}{b} \right]. \quad (57)$$

Подставляя (57) в (56) получим окончательное выражение для коэффициентов A_{mn} :

$$A_{mn} = \frac{qa^4}{D} \cdot \frac{4}{\pi^6} \cdot \frac{1}{mn \left(m^2 + n^2 \left(\frac{a}{b} \right)^2 \right)^2} \left[\cos \frac{m\pi a_2}{a} - \cos \frac{m\pi a_1}{a} \right] \times \\ \times \left[\cos \frac{n\pi b_2}{b} - \cos \frac{n\pi b_1}{b} \right]. \quad (58)$$

Таким образом, расчёт пластины сводится к определению коэффициентов C_{mn} по формулам (54) от конкретно заданной нагрузки, после чего по формулам (56) определяются значения коэффициентов ряда A_{mn} , а по выражению (51) – значения прогибов пластины.

Далее, на основании формул (38) приведём выражения для изгибающих моментов

$$M_x = -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) = D \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} A_{mn} \pi^2 \left(\frac{m^2}{a^2} + \nu \frac{n^2}{b^2} \right) \cdot \sin \frac{m\pi x}{a} \cdot \sin \frac{n\pi y}{b}; \quad (59)$$

$$M_y = -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) = D \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} A_{mn} \pi^2 \left(\frac{n^2}{b^2} + \nu \frac{m^2}{a^2} \right) \cdot \sin \frac{m\pi x}{a} \cdot \sin \frac{n\pi y}{b};$$

крутящего момента

$$M_{xy} = -D(1-\nu) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = -D(1-\nu) \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} A_{mn} \pi^2 \frac{mn}{ab} \cdot \cos \frac{m\pi x}{a} \cdot \cos \frac{n\pi y}{b}; \quad (60)$$

и поперечных сил:

$$Q_x = -D \left(\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} \right) = D \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} A_{mn} \pi^3 \left(\frac{m^3}{a^3} + \frac{mn^2}{ab^2} \right) \cdot \cos \frac{m\pi x}{a} \cdot \sin \frac{n\pi y}{b}; \quad (61)$$

$$Q_y = -D \left(\frac{\partial^3 w}{\partial y^3} + \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} \right) = D \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} A_{mn} \pi^3 \left(\frac{n^3}{b^3} + \frac{nm^2}{ba^2} \right) \cdot \sin \frac{m\pi x}{a} \cdot \cos \frac{n\pi y}{b}.$$

Выражения для приведённых поперечных сил (опорных реакций) имеют следующий вид:

$$\begin{aligned}
 V_x &= Q_x + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} = -D \left(\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + (2-\nu) \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} \right) = \\
 &= D \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} A_{mn} \pi^3 \left[\frac{m^3}{a^3} + (2-\nu) \frac{mn^2}{ab^2} \right] \cdot \cos \frac{m\pi x}{a} \cdot \sin \frac{n\pi y}{b}; \\
 V_y &= Q_y + \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} = -D \left(\frac{\partial^3 w}{\partial y^3} + (2-\nu) \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} \right) = \\
 &= D \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} A_{mn} \pi^3 \left[\frac{n^3}{b^3} + (2-\nu) \frac{nm^2}{ba^2} \right] \cdot \sin \frac{m\pi x}{a} \cdot \cos \frac{n\pi y}{b}.
 \end{aligned} \tag{62}$$

Приведём ещё формулы для сосредоточенных реакций в углах пластины, положительные направления которых показаны на рис. 16. На рис. 16 показаны также положительные направления равнодействующих приведённых поперечных сил R_{x0} , R_{y0} , R_{xa} , R_{yb} . Поскольку

$$R = 2M_{xy} = -2D(1-\nu) \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} A_{mn} \pi^2 \frac{m}{a} \cdot \frac{n}{b} \cdot \cos \frac{m\pi x}{a} \cdot \cos \frac{n\pi y}{b},$$

то получаем:

1) угол при $x=0$, $y=0$

$$R_1 = -2D(1-\nu) \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} A_{mn} \pi^2 \frac{m}{a} \cdot \frac{n}{b}; \tag{63}$$

2) угол при $x=a$, $y=0$

$$R_2 = -2D(1-\nu) \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} A_{mn} \pi^2 \frac{m}{a} \cdot \frac{n}{b} \cdot \cos m\pi; \tag{64}$$

3) угол при $x=a$, $y=b$

$$R_3 = -2D(1-\nu) \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} A_{mn} \pi^2 \frac{m}{a} \cdot \frac{n}{b} \cdot \cos m\pi \cdot \cos n\pi; \tag{65}$$

4) угол при $x=0$, $y=b$

$$R_4 = -2D(1-\nu) \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} A_{mn} \pi^2 \frac{m}{a} \cdot \frac{n}{b} \cdot \cos n\pi; \tag{66}$$

Из сопоставления соотношений (59)-(66) следует, что если прогиб пластины $w(x, y)$ зависит от её цилиндрической жёсткости D , то внутренние

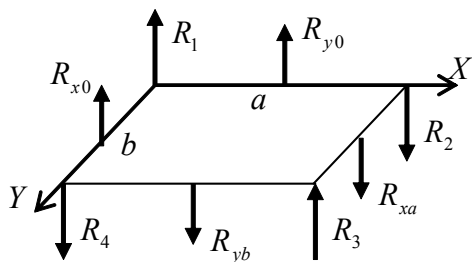


Рис. 16

усилия и опорные реакции от цилиндрической жёсткости D не зависят, поскольку коэффициенты A_{mn} множитель D содержит в знаменателе.

Задание

Требуется подобрать толщину прямоугольной пластины, изображённой на рис. 17, из условия прочности по теории Треска – Сен-Венана и по теории прочности Губера – Мизеса – Генки. Результаты сравнить.

Прямоугольная пластина, шарнирно опёртая по всему контуру, нагружена равномерно распределённой нагрузкой интенсивностью q по площади прямоугольника ABCD, испытывает поперечный изгиб.

Для определения внутренних усилий в пластине следует использовать метод двойных тригонометрических рядов Фурье (метод Навье). Приближённое уравнение изогнутой срединной поверхности пластины (51) представить в виде четырёх членов ряда:

$$w(x, y) = A_{11} \cdot \sin \frac{\pi x}{a} \cdot \sin \frac{\pi y}{b} + A_{12} \cdot \sin \frac{\pi x}{a} \cdot \sin \frac{2\pi y}{b} +$$

$$+ A_{21} \cdot \sin \frac{2\pi x}{a} \cdot \sin \frac{\pi y}{b} + A_{22} \cdot \sin \frac{2\pi x}{a} \cdot \sin \frac{2\pi y}{b}. \quad (a)$$

Порядок решения задачи

1. Вычисляем коэффициенты A_{11} , A_{12} , A_{21} , A_{22} по формулам (58).
2. Получаем приближённое уравнение изогнутой поверхности срединного слоя.
3. Определяем внутренние усилия: изгибающие моменты по соотношениям (59), крутящий момент – по соотношениям (60), поперечные силы – по соотношениям (61).
4. Строим эпюры прогибов и изгибающих моментов. Для сечения $x_m = 0,5a$ строим эпюры $w(x, y)$, $M_x(x, y)$; для сечения $y_m = 0,5b$ – эпюры $w(x, y)$, $M_y(x, y)$.
5. Подбираем толщину пластины.
6. Определяем распределённые опорные реакции по соотношениям (62) и строим их эпюры.

7. Определяем сосредоточенные опорные реакции в углах пластины по формулам (63)-(66).

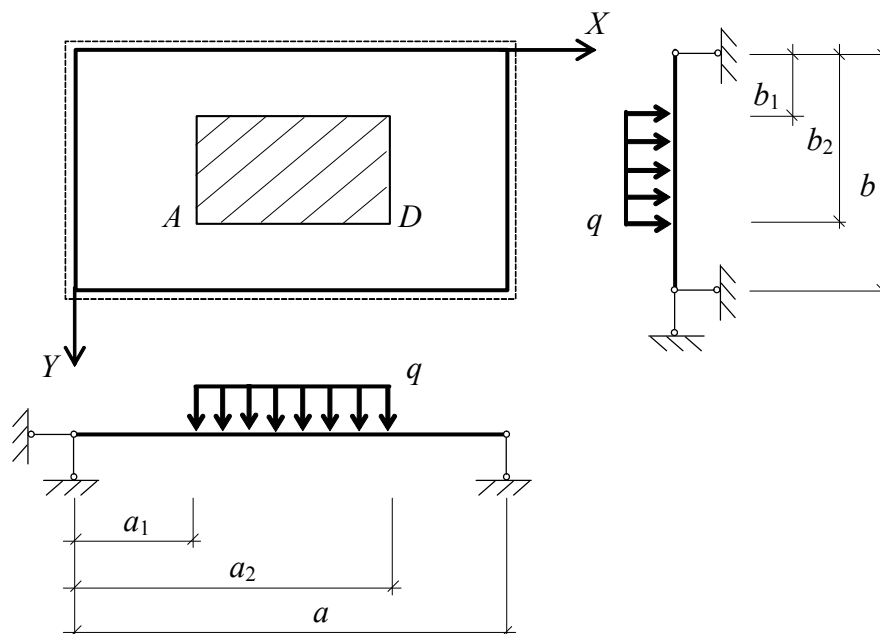


Рис. 17

Пример решения конкретной задачи.

Дано: $a = 3$ м, $b = 1$ м, $a_1 = 0,5$ м, $a_2 = 2,5$ м, $b_1 = 0,25$ м, $b_2 = 0,75$ м,

$q = 8 \cdot 10^5$ МПа, $\nu = 0,2$, $R = 2,1 \cdot 10^8$ МПа.

Решение

1. Вычисляем коэффициенты A_{11} , A_{12} , A_{21} , A_{22} . В соответствии с формулами (58), получаем:

$$A_{11} = \frac{8 \cdot 10^5 \cdot 3^4}{D} \cdot \frac{4}{\pi^6} \cdot \frac{1}{1 \cdot 1 \cdot \left[1^2 + 1^2 \cdot \left(\frac{3}{1} \right)^2 \right]^2} \left[\cos \frac{1 \cdot \pi \cdot 2,5}{3} - \cos \frac{1 \cdot \pi \cdot 0,5}{3} \right] \times$$

$$\times \left[\cos \frac{1 \cdot \pi \cdot 0,75}{1} - \cos \frac{1 \cdot \pi \cdot 0,25}{1} \right] = \frac{6,604 \cdot 10^3}{D} \text{ (Нм}^2\text{)} ;$$

$$A_{12} = \frac{8 \cdot 10^5 \cdot 3^4}{D} \cdot \frac{4}{\pi^6} \cdot \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot \left[1^2 + 2^2 \cdot \left(\frac{3}{1} \right)^2 \right]^2} \left[\cos \frac{1 \cdot \pi \cdot 2,5}{3} - \cos \frac{1 \cdot \pi \cdot 0,5}{3} \right] \times$$

$$\times \left[\cos \frac{2 \cdot \pi \cdot 0,75}{1} - \cos \frac{2 \cdot \pi \cdot 0,25}{1} \right] = \frac{0,00}{D} \text{ (Нм}^2\text{)} ;$$

$$\begin{aligned}
A_{21} &= \frac{8 \cdot 10^5 \cdot 3^4}{D} \cdot \frac{4}{\pi^6} \cdot \frac{1}{2 \cdot 1 \cdot \left[2^2 + 1^2 \cdot \left(\frac{3}{1} \right)^2 \right]^2} \left[\cos \frac{2 \cdot \pi \cdot 2,5}{3} - \cos \frac{2 \cdot \pi \cdot 0,5}{3} \right] \times \\
&\quad \times \left[\cos \frac{1 \cdot \pi \cdot 0,75}{1} - \cos \frac{1 \cdot \pi \cdot 0,25}{1} \right] = \frac{0,00}{D} \text{ (Нм}^2\text{)} ; \\
A_{22} &= \frac{8 \cdot 10^5 \cdot 3^4}{D} \cdot \frac{4}{\pi^6} \cdot \frac{1}{2 \cdot 2 \cdot \left[2^2 + 2^2 \cdot \left(\frac{3}{1} \right)^2 \right]^2} \left[\cos \frac{2 \cdot \pi \cdot 2,5}{3} - \cos \frac{2 \cdot \pi \cdot 0,5}{3} \right] \times \\
&\quad \times \left[\cos \frac{2 \cdot \pi \cdot 0,75}{1} - \cos \frac{2 \cdot \pi \cdot 0,25}{1} \right] = \frac{0,00}{D} \text{ (Нм}^2\text{)} .
\end{aligned}$$

2. Составляем приближённое уравнение изогнутой поверхности срединного слоя. Подставляя значения приведённых коэффициентов A_{mn} в выражение (а), будем иметь:

$$w(x, y) = \frac{6,604 \cdot 10^3}{D} \cdot \sin \frac{\pi x}{3} \cdot \sin \frac{\pi y}{1}. \quad (б)$$

3. Определяем внутренние усилия. На основании соотношений (59)–(61), находим:

$$\begin{aligned}
M_x &= 6,604 \cdot 10^3 \cdot \pi^2 \left(\frac{1^2}{3^2} + 0,2 \frac{1^2}{1^2} \right) \cdot \sin \frac{\pi x}{3} \cdot \sin \frac{\pi y}{1}; \\
M_y &= 6,604 \cdot 10^3 \cdot \pi^2 \left(\frac{1^2}{1^2} + 0,2 \frac{1^2}{3^2} \right) \cdot \sin \frac{\pi x}{3} \cdot \sin \frac{\pi y}{1}; \\
M_{xy} &= -(1 - 0,2) \cdot 6,604 \cdot 10^3 \cdot \pi^2 \frac{1}{3 \cdot 1} \cdot \cos \frac{\pi x}{3} \cdot \cos \frac{\pi y}{1}; \\
Q_x &= 6,604 \cdot 10^3 \cdot \pi^3 \left(\frac{1^3}{3^3} + \frac{1^2}{3 \cdot 1^2} \right) \cdot \cos \frac{\pi x}{3} \cdot \sin \frac{\pi y}{1}; \\
Q_y &= 6,604 \cdot 10^3 \cdot \pi^3 \left(\frac{1^3}{1^3} + \frac{1^2}{1 \cdot 3^2} \right) \cdot \sin \frac{\pi x}{3} \cdot \cos \frac{\pi y}{1}.
\end{aligned} \quad (в)$$

4. Строим эюры прогибов и изгибающих моментов по точкам в сечении $x_m = 0,5a$ и в сечении $y_m = 0,5b$. На основании соотношений (в), получим:

- сечение $x_m = 0,5a$:

$$w(1,5; y) = \frac{6,604 \cdot 10^3}{D} \cdot \sin \frac{\pi}{2} \cdot \sin \frac{\pi y}{1}.$$

$$M_x(1,5; y) = 6,604 \cdot 10^3 \cdot \pi^2 \left(\frac{1^2}{3^2} + 0,2 \frac{1^2}{1^2} \right) \cdot \sin \frac{\pi}{2} \cdot \sin \frac{\pi y}{1};$$

- сечение $y_m = 0,5b$:

$$w(x; 0,5) = \frac{6,604 \cdot 10^3}{D} \cdot \sin \frac{\pi x}{3} \cdot \sin \frac{\pi}{2}.$$

$$M_y(x; 0,5) = 6,604 \cdot 10^3 \cdot \pi^2 \left(\frac{1^2}{1^2} + 0,2 \frac{1^2}{3^2} \right) \cdot \sin \frac{\pi x}{3} \cdot \sin \frac{\pi}{2}.$$

Соответствующие графики представлены на рис. 18.

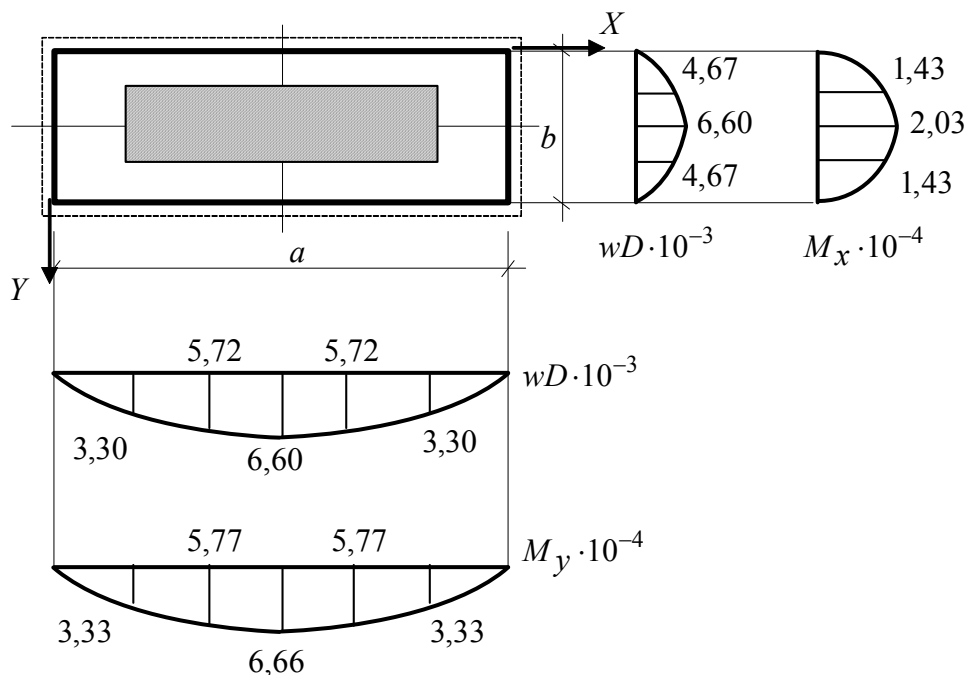


Рис. 18

Вычисления прогибов и изгибающих моментов сведены в табл. 12.

Т а б л и ц а 12

Сечение $xm=0,5a$			Сечение $ym=0,5b$		
$y, \text{ м}$	Прогиб, Нм·м	Момент $M_x, \text{ Н}$	$x, \text{ м}$	Прогиб, Нм·м	Момент $M_y, \text{ Н}$
0	0,00E+00	0,00E+00	0	0,00E+00	0,00E+00
0,25	4,67E+03	1,43E+04	0,5	3,30E+03	3,33E+04
0,5	6,60E+03	2,03E+04	1	5,72E+03	5,77E+04
0,75	4,67E+03	1,43E+04	1,5	6,60E+03	6,66E+04
1	0,00E+00	0,00E+00	2	5,72E+03	5,77E+04
			2,5	3,30E+03	3,33E+04
			3	0,00E+00	0,00E+00

5. *Подбираем толщину пластины.* Из эпюр изгибающих моментов следует, что самые большие моменты, а, следовательно, в соответствии с формулами (40) и самые большие нормальные напряжения σ_x и σ_y возникают в центре пластины ($x = x_m, y = y_m$) на верхней и нижней её поверхности.

В силу симметрии крутящий момент в центре пластины $M_{xy} = 0$ и, следовательно, $\tau_{xy} = 0$. Таким образом, в наиболее опасной точке (x_m, y_m) имеем плоское напряжённое состояние ($\sigma_z = 0, \tau_{zx} = 0, \tau_{zy} = 0$) и напряжения $\sigma_x(x_m, y_m, \pm h/2)$ и $\sigma_y(x_m, y_m, \pm h/2)$ являются главными нормальными напряжениями. Поскольку $M_x > 0$ и $M_y > 0$, то знак у напряжений σ_x и σ_y будет определяться знаком координаты z (см. формулы (40)), то есть на верхней грани пластины ($z = +\frac{h}{2}$) оба напряжения будут положительными, на нижней ($z = -\frac{h}{2}$) – отрицательными. Учитывая значение моментов M_x и M_y в точке (x_m, y_m), получаем: $\sigma_x = \sigma_2$ и $\sigma_y = \sigma_1$ поскольку, как известно, $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$ и для пластин $\sigma_3 = 0$.

В соответствии с теорией прочности Треска – Сен-Венана (14) $\sigma_1 - \sigma_3 \leq R$, толщина пластинки будет определяться по формуле

$$\sigma_1 = \frac{M_y(x_m, y_m)}{h^2} 6 \leq R. \quad (\text{г})$$

Отсюда находим минимальную толщину пластины:

$$h \geq \sqrt{\frac{6M_y(x_m, y_m)}{R}} = \sqrt{\frac{6 \cdot 6,663 \cdot 10^4}{2,1 \cdot 10^8}} = 4,363 \cdot 10^{-2} \text{ м} = 4,36 \text{ см}. \quad (\text{д})$$

В соответствии с теорией прочности Губера – Мизеса – Генки (16) $\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2} \leq R$, толщина пластины будет определяться по формуле

$h \geq \sqrt{\frac{6}{R} \sqrt{M_x(x_m, y_m)^2 - M_x(x_m, y_m) \cdot M_y(x_m, y_m) + M_y(x_m, y_m)^2}}$, и будет равна

$$h \geq 4,111 \cdot 10^{-2} \text{ м} = 4,111 \text{ см.} \quad (\text{е})$$

В качестве расчётной толщины плиты принимаем $h = 4,111 \text{ см}$.

6. *Определяем распределённые реакции.* На основании соотношений (62) получаем

1) $0 \leq x \leq a, \quad y = 0$

$$V_x = 6,604 \cdot 10^3 \cdot \left[\frac{1^3}{3^3} + (2 - 0,2) \frac{1 \cdot 1^2}{3 \cdot 1^2} \right] \cdot \cos \frac{1 \cdot \pi \cdot x}{3} \cdot \sin \frac{1 \cdot \pi \cdot y}{1} = 0;$$

$$\begin{aligned} V_y &= 6,604 \cdot 10^3 \cdot \left[\frac{1^3}{1^3} + (2 - 0,2) \frac{1 \cdot 1^2}{1 \cdot 3^2} \right] \cdot \sin \frac{1 \cdot \pi \cdot x}{3} \cdot \cos \frac{1 \cdot \pi \cdot y}{1} = \\ &= 6,604 \cdot 10^3 \cdot \left[\frac{1^3}{1^3} + (2 - 0,2) \frac{1 \cdot 1^2}{1 \cdot 3^2} \right] \cdot \sin \frac{1 \cdot \pi \cdot x}{3} = 7,925 \cdot 10^3 \cdot \sin \frac{\pi x}{3}. \end{aligned}$$

2) $0 \leq x \leq a, \quad y = b$

$$V_x = 6,604 \cdot 10^3 \cdot \left[\frac{1^3}{3^3} + (2 - 0,2) \frac{1 \cdot 1^2}{3 \cdot 1^2} \right] \cdot \cos \frac{1 \cdot \pi \cdot x}{3} \cdot \sin \frac{1 \cdot \pi \cdot y}{1} = 0;$$

$$\begin{aligned} V_y &= 6,604 \cdot 10^3 \cdot \left[\frac{1^3}{1^3} + (2 - 0,2) \frac{1 \cdot 1^2}{1 \cdot 3^2} \right] \cdot \sin \frac{1 \cdot \pi \cdot x}{3} \cdot \cos \frac{1 \cdot \pi \cdot y}{1} = \\ &= -6,604 \cdot 10^3 \cdot \left[\frac{1^3}{1^3} + (2 - 0,2) \frac{1 \cdot 1^2}{1 \cdot 3^2} \right] \cdot \sin \frac{1 \cdot \pi \cdot x}{3} = -7,925 \cdot 10^3 \cdot \sin \frac{\pi x}{3}. \end{aligned}$$

3) $x = 0, \quad 0 \leq y \leq b$

$$V_x = 6,604 \cdot 10^3 \cdot \left[\frac{1^3}{3^3} + (2 - 0,2) \frac{1 \cdot 1^2}{3 \cdot 1^2} \right] \cdot \cos \frac{1 \cdot \pi \cdot x}{3} \cdot \sin \frac{1 \cdot \pi \cdot y}{1} =$$

$$= 6,604 \cdot 10^3 \cdot \left[\frac{1^3}{3^3} + (2 - 0,2) \frac{1 \cdot 1^2}{3 \cdot 1^2} \right] \cdot \sin \frac{1 \cdot \pi \cdot y}{1} = 0,711 \cdot 10^3 \cdot \sin \pi y;$$

$$V_y = 6,604 \cdot 10^3 \cdot \left[\frac{1^3}{3^3} + (2 - 0,2) \frac{1 \cdot 1^2}{1 \cdot 3^2} \right] \cdot \sin \frac{1 \cdot \pi \cdot x}{3} \cdot \cos \frac{1 \cdot \pi \cdot y}{1} = 0.$$

4) $x = a, \quad 0 \leq y \leq b$

$$V_x = 6,604 \cdot 10^3 \cdot \left[\frac{1^3}{3^3} + (2 - 0,2) \frac{1 \cdot 1^2}{3 \cdot 1^2} \right] \cdot \cos \frac{1 \cdot \pi \cdot x}{3} \cdot \sin \frac{1 \cdot \pi \cdot y}{1} =$$

$$= -6,604 \cdot 10^3 \cdot \left[\frac{1^3}{3^3} + (2 - 0,2) \frac{1 \cdot 1^2}{3 \cdot 1^2} \right] \cdot \sin \frac{1 \cdot \pi \cdot y}{1} = -0,711 \cdot 10^3 \cdot \sin \pi y;$$

$$V_y = 6,604 \cdot 10^3 \cdot \left[\frac{1^3}{3^3} + (2 - 0,2) \frac{1 \cdot 1^2}{1 \cdot 3^2} \right] \cdot \sin \frac{1 \cdot \pi \cdot x}{3} \cdot \cos \frac{1 \cdot \pi \cdot y}{1} = 0.$$

7. *Строим эпюры распределённых реакций.* В соответствии с полученными формулами для приведённых поперечных сил V_x и V_y строим эпюры распределённых реакций по точкам (рис. 19). Вычисления показывают, что распределённые реакции вдоль контура пластины направлены вверх и одинаковы на противоположных сторонах пластины. Результаты вычислений сведены в табл. 13.

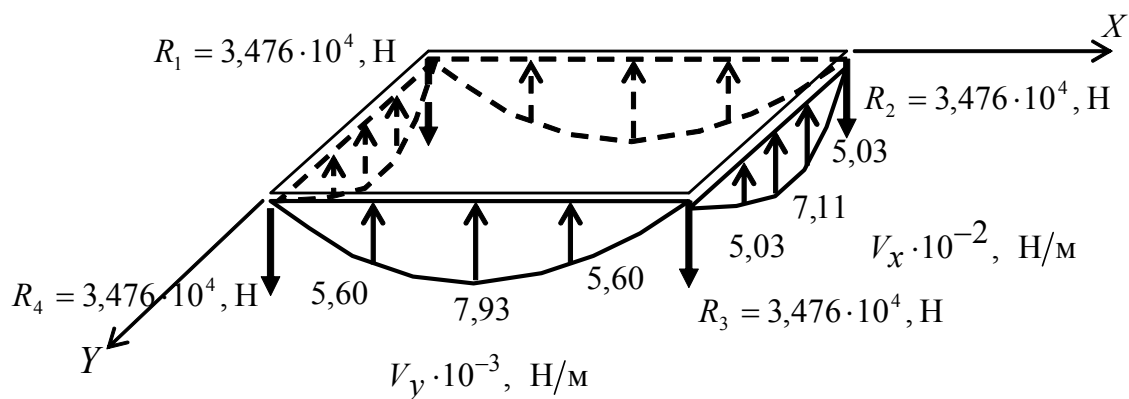


Рис. 19

Таблица 13

	$y=0, \text{ м}$	$y=1, \text{ м}$		$x=0, \text{ м}$	$x=3, \text{ м}$
$x, \text{ м}$	$V_y, \text{ Н/м}$	$V_y, \text{ Н/м}$	$y, \text{ м}$	$V_x, \text{ Н/м}$	$V_x, \text{ Н/м}$
0	0,00E+00	0,00E+00	0	0,00E+00	0,00E+00
0,75	5,60E+03	-5,60E+03	0,25	5,03E+02	-5,03E+02
1,5	7,93E+03	-7,93E+03	0,5	7,11E+02	-7,11E+02
2,25	5,60E+03	-5,60E+03	0,75	5,03E+02	-5,03E+02
3	0,00E+00	0,00E+00	1	0,00E+00	0,00E+00

8. Определяем сосредоточенные реакции в углах пластины. На основании формул (63)-(66), получаем:

$$R_1 = -2 \cdot (1 - 0,2) \cdot 6,604 \cdot 10^3 \cdot \pi^2 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{1} = -3,476 \cdot 10^4 \text{ Н};$$

$$R_2 = -2(1 - 0,2) \cdot 6,604 \cdot 10^3 \cdot \pi^2 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{1} \cdot \cos(1 \cdot \pi) = 3,476 \cdot 10^4 \text{ Н};$$

$$R_3 = -2(1 - 0,2) \cdot 6,604 \cdot 10^3 \cdot \pi^2 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{1} \cdot \cos(1 \cdot \pi) \cdot \cos(1 \cdot \pi) = -3,476 \cdot 10^4 \text{ Н};$$

$$R_4 = -2(1 - 0,2) \cdot 6,604 \cdot 10^3 \cdot \pi^2 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{1} \cdot \cos(1 \cdot \pi) = 3,476 \cdot 10^4 \text{ Н}.$$

Все четыре реакции направлены вниз (рис. 19), то есть в сторону действующей нагрузки. Это значит, что углы пластины стремятся сместиться вверх и их нужно специальным образом закреплять от подъёма.

Решение задачи с использованием математического пакета MathCAD

Ниже, в качестве иллюстративного примера, представлено решение задачи подбора толщины тонкой пластины в среде математического пакета MathCAD.

При решении задачи в среде математического пакета MathCAD следует иметь в виду, что, поскольку с самого начала значение цилиндрической жёсткости D неизвестно (так как неизвестна толщина пластины h), то весь расчёт строится в величинах, приведённых к цилиндрической жёсткости. Так, по формулам (58) вычисляются приведённые к цилиндрической жёсткости коэффициенты ряда Фурье: $A_{mn} \cdot D$. Единицей измерения полученных величин будет Нм^2 . В силу этого и прогибы, вычисляемые через приведённые к цилиндрической жёсткости коэффициенты ряда Фурье, то есть приведённые к цилиндрической жёсткости, в соответствии с выражением (51) будут измеряться в Нм^2 . Приведённые к цилиндрической жёсткости изгибающие $\frac{M_x}{D}$, $\frac{M_y}{D}$ и крутящий $\frac{M_{xy}}{D}$ моменты, также вычисляемые через приведённые к цилиндрической жёсткости коэффициенты ряда Фурье, в соответствии с формулами (59), (60), будут измеряться в *ньютонсах* (Н). Соответственно приведённые к цилиндрической жёсткости поперечные силы $\frac{Q_x}{D}$, $\frac{Q_y}{D}$ (формулы (61)) и распределённые реакции $\frac{V_x}{D}$, $\frac{V_y}{D}$ будут измеряться в Н/м. Сосредоточенные реакции в углах пластины (формулы (63)-(66)), приведённые к цилиндрической жёсткости, будут измеряться в *ньютонсах* (Н).

Решение задачи подбора толщины тонкой пластины с использованием возможностей математического пакета MathCAD представлено ниже.

■ **Изгиб тонких пластин.**

Система СИ.

Определяем пользовательские единицы измерений:

1 ньютон

$$N := 1N$$

1 ньютон / 1 метр

$$Nd_m := \frac{N}{m}$$

1 ньютон * 1 квадратный метр

$$Nm_2 := N \cdot m^2$$

1 паскаль = 1 ньютон / 1 квадратный метр

$$Pa := \frac{N}{m^2}$$

Исходные данные:

$$a := 3 \cdot m$$

$$b := 1 \cdot m$$

$$a1 := 0.5 \cdot m$$

$$a2 := 2.5 \cdot m$$

$$b1 := 0.25 \cdot m$$

$$b2 := 0.75 \cdot m$$

$$q := 8 \cdot 10^5 \cdot Pa$$

$$R := 2.1 \cdot 10^8 \cdot Pa$$

$$v := 0.2$$

$$x_m := \frac{a}{2}$$

$$y_m := \frac{b}{2}$$

Вычисляем приведённые к цилиндрической жёсткости коэффициенты ряда Фурье $A_{mn} \cdot D^4$:

$$AD1(m, n) := \frac{4 \cdot q \cdot a^4}{\pi^6} \cdot \frac{1}{m \cdot n \cdot \left[m^2 + n^2 \cdot \left(\frac{a}{b} \right)^2 \right]^2}$$

$$AD2(m, n) := \left(\cos\left(\frac{m \cdot \pi \cdot a2}{a}\right) - \cos\left(\frac{m \cdot \pi \cdot a1}{a}\right) \right) \cdot \left(\cos\left(\frac{n \cdot \pi \cdot b2}{b}\right) - \cos\left(\frac{n \cdot \pi \cdot b1}{b}\right) \right)$$

$$AD(m, n) := AD1(m, n) \cdot AD2(m, n)$$

$$A11D := AD(1, 1)$$

$$A11D = Nm_2$$

$$A12D := AD(1, 2)$$

$$A12D = Nm_2$$

$$A21D := AD(2, 1)$$

$$A21D = Nm_2$$

$$A22D := AD(2, 2)$$

$$A22D = Nm_2$$

Сконструируем приближённое, приведённое к цилиндрической жёсткости, уравнение $w \cdot D^4$ изогнутой поверхности срединного слоя:

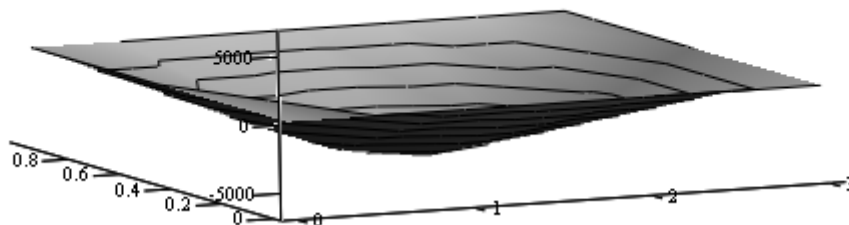
$$w1D(x, y) := A11D \cdot \sin\left(\frac{\pi \cdot x}{a}\right) \cdot \sin\left(\frac{\pi \cdot y}{b}\right) + A12D \cdot \sin\left(\frac{\pi \cdot x}{a}\right) \cdot \sin\left(\frac{2 \cdot \pi \cdot y}{b}\right)$$

$$w2D(x, y) := A21D \cdot \sin\left(\frac{2 \cdot \pi \cdot x}{a}\right) \cdot \sin\left(\frac{\pi \cdot y}{b}\right) + A22D \cdot \sin\left(\frac{2 \cdot \pi \cdot x}{a}\right) \cdot \sin\left(\frac{2 \cdot \pi \cdot y}{b}\right)$$

$$wD(x, y) := w1D(x, y) + w2D(x, y)$$

Построение изогнутой поверхности срединного слоя

$$\blacksquare \quad WD(x, y) := -wD(x, y)$$



WD

Максимальное значение относительного прогиба возникает в середине пластины и равно:

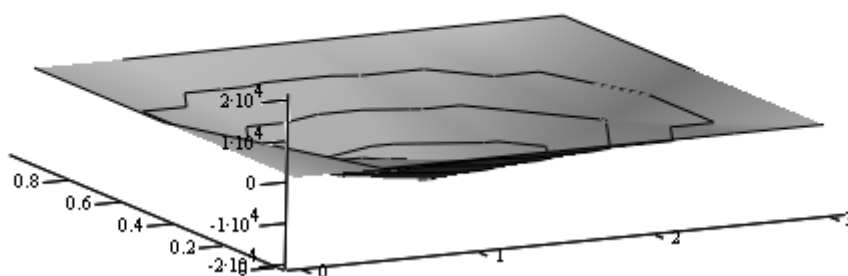
$$\max W_{xy} := wD(x_m, y_m) \qquad \max W_{xy} = 6.604E+003 \text{ Hm}^2$$

Определяем функции внутренних усилий:

Изгибающий момент $M_x(x, y)$ приведённый к цилиндрической жёсткости $\frac{M_x}{D}$:

$$M_x(x, y) := \sum_{m=1}^2 \sum_{n=1}^2 \left[AD(m, n) \cdot \pi^2 \cdot \left(\frac{m^2}{a^2} + \nu \cdot \frac{n^2}{b^2} \right) \cdot \sin\left(\frac{m \cdot \pi \cdot x}{a}\right) \cdot \sin\left(\frac{n \cdot \pi \cdot y}{b}\right) \right]$$

$$MM_x(x, y) := -M_x(x, y)$$



MM_x

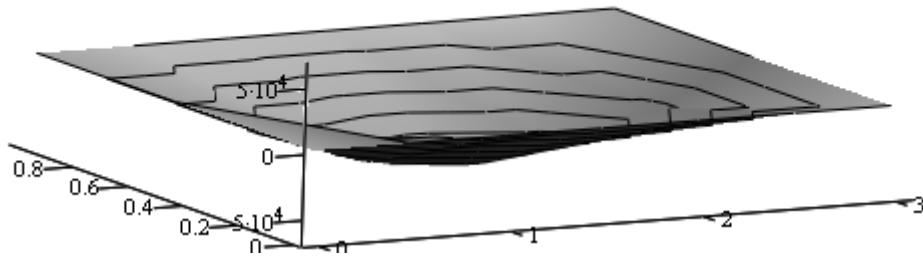
Максимальное значение приведённого изгибающего момента M_x возникает в середине пластины и равно:

$$\max M_x := M_x(x_m, y_m) \qquad \max M_x = 2.028E+004 \text{ H}$$

Изгибающий момент $M_y(x, y)$ приведённый к цилиндрической жёсткости $\frac{M_y}{D}$:

$$M_y(x, y) := \sum_{m=1}^2 \sum_{n=1}^2 \left[AD(m, n) \cdot \pi^2 \cdot \left(\frac{n^2}{b^2} + \nu \cdot \frac{m^2}{a^2} \right) \cdot \sin\left(\frac{m \cdot \pi \cdot x}{a}\right) \cdot \sin\left(\frac{n \cdot \pi \cdot y}{b}\right) \right]$$

$$MM_y(x, y) := -M_y(x, y)$$



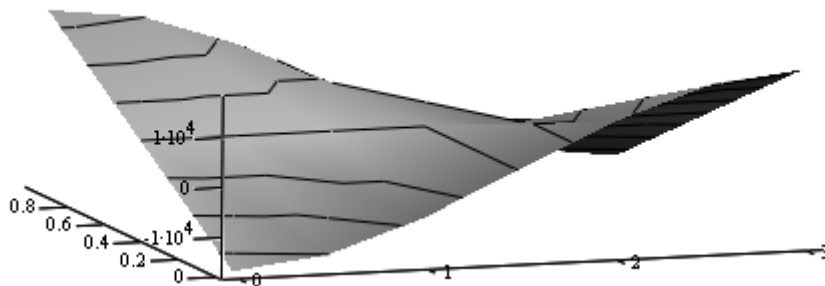
MM_y

Максимальное значение приведённого изгибающего момента M_y возникает в середине пролёта и равно:

$$\max M_y := M_y(x_m, y_m) \quad \max M_y = 6.663E+004 \text{ Н}$$

Крутящий момент $M_{xy}(x, y)$ приведённый к цилиндрической жёсткости $\frac{M_{xy}^2}{D}$:

$$M_{xy}(x, y) := -(1 - \nu) \cdot \left[\sum_{m=1}^2 \sum_{n=1}^2 \left(AD(m, n) \cdot \pi^2 \cdot \frac{m \cdot n}{a \cdot b} \cdot \cos\left(\frac{m \cdot \pi \cdot x}{a}\right) \cdot \cos\left(\frac{n \cdot \pi \cdot y}{b}\right) \right) \right]$$



M_{xy}

Экстремальные значения приведённого крутящего момента M_{xy} возникают в углах пластины и равны:

$$\begin{aligned} \max M_{xy00} &:= M_{xy}(0 \cdot m, 0 \cdot m) & \max M_{xy00} &= -1.738E+004 \text{ Н} \\ \max M_{xy31} &:= M_{xy}(3 \cdot m, 1 \cdot m) & \max M_{xy31} &= -1.738E+004 \text{ Н} \\ \max M_{xy01} &:= M_{xy}(0 \cdot m, 1 \cdot m) & \max M_{xy01} &= 1.738E+004 \text{ Н} \end{aligned}$$

$$\max M_{xy30} := M_{xy}(3 \cdot m, 0 \cdot m)$$

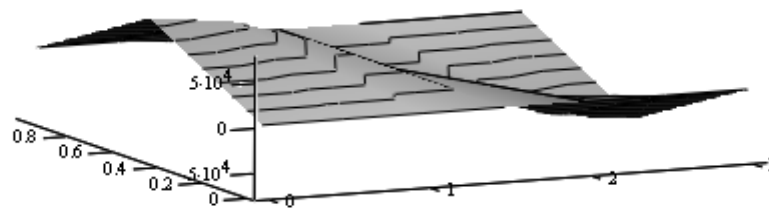
$$\max M_{xy30} = 1.738E+004 \text{ Н}$$

В середине пластины значение приведённого крутящего момента M_{xy} равно:

$$M_{xy}(x_m, y_m) = 0E+000 \text{ Н}$$

Поперечная сила $Q_x(x, y)$, приведённая к цилиндрической жёсткости и $\frac{Q_x}{D}$:

$$Q_x(x, y) := \sum_{m=1}^2 \sum_{n=1}^2 \left[AD(m, n) \cdot \pi^3 \cdot \left(\frac{m^3}{a^3} + \frac{m \cdot n^2}{a \cdot b^2} \right) \cdot \cos\left(\frac{m \cdot \pi \cdot x}{a}\right) \cdot \sin\left(\frac{n \cdot \pi \cdot y}{b}\right) \right]$$



Q_x

Экстремальные значения приведённой поперечной силы Q_x возникают в середине меньшей стороны пластины и равны:

$$\max Q_{x0} := Q_x(0 \cdot m, 0.5 \cdot m)$$

$$\max Q_{x0} = 7.584E+004 \text{ Ндм}$$

$$\max Q_{x3} := Q_x(3 \cdot m, 0.5 \cdot m)$$

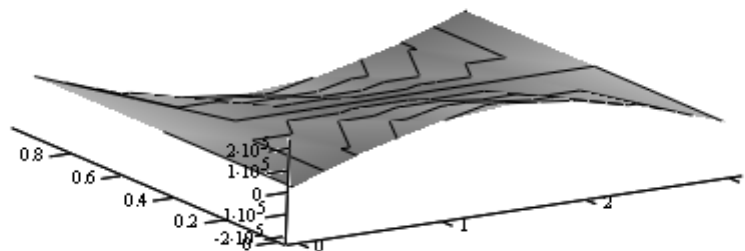
$$\max Q_{x3} = -7.584E+004 \text{ Ндм}$$

В центре пластины значение приведённой поперечной силы Q_x равно:

$$Q_x(x_m, y_m) = 4.644E-012 \text{ Ндм}$$

Поперечная сила $Q_y(x, y)$, приведённая к цилиндрической жёсткости и $\frac{Q_y}{D}$:

$$Q_y(x, y) := \sum_{m=1}^2 \sum_{n=1}^2 \left[AD(m, n) \cdot \pi^3 \cdot \left(\frac{n^3}{b^3} + \frac{n \cdot m^2}{b \cdot a^2} \right) \cdot \sin\left(\frac{m \cdot \pi \cdot x}{a}\right) \cdot \cos\left(\frac{n \cdot \pi \cdot y}{b}\right) \right]$$



Q_y

■ Экстремальные значения приведённой поперечной силы Q_y возникают в середине большей стороны пластины и равны :

$$\max Q_{y0} := Q_y(1.5 \cdot m, 0 \cdot m)$$

$$\max Q_{y0} = 2.275E+005 \text{ Hdm}$$

$$\max Q_{y1} := Q_y(1.5 \cdot m, 1 \cdot m)$$

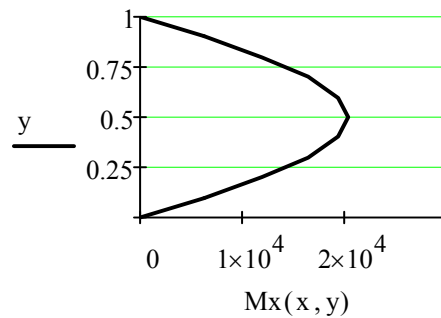
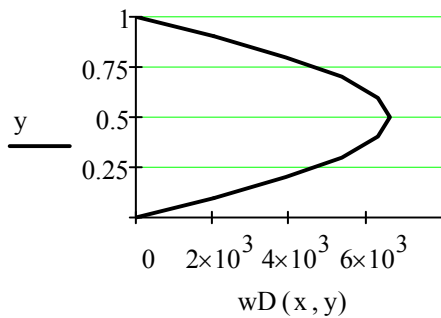
$$\max Q_{y1} = -2.275E+005 \text{ Hdm}$$

В центре пластины значение приведённой поперечной силы Q_y равно:

$$Q_y(x_m, y_m) = 3.282E-012 \text{ Hdm}$$

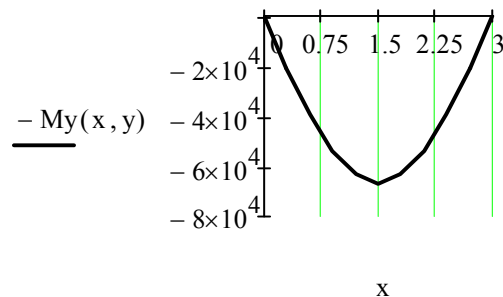
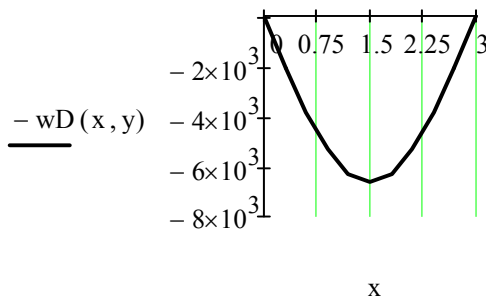
Построение эпюр приведённых прогибов и изгибающих моментов.

1. Сечение $x := x_m \quad y := 0, \left(\frac{b}{10}\right) \dots b$



2. Сечение $x := 0, \left(\frac{a}{10}\right) \dots a$

$y := y_m$



Вычисляем толщину плиты из условия прочности по теории Треска-Сен-Венана:

$$\max M_x = 2.028E+004 \text{ Н}$$

$$\max M_y = 6.663E+004 \text{ Н}$$

$$h := \sqrt{\frac{6 \cdot \max M_y}{R}}$$

$$h = 4.363E-002 \text{ м}$$

Толщина плиты на основе теории прочности Губера-Мизеса-Генки равна:

$$h := \sqrt{\left(\frac{6}{R}\right) \cdot \sqrt{\max M_x^2 - \max M_x \cdot \max M_y + \max M_y^2}}$$

$$h = 4.111E-002 \text{ м}$$

Вычисляем распределённые реакции на опорах, приведённые к цилиндрической

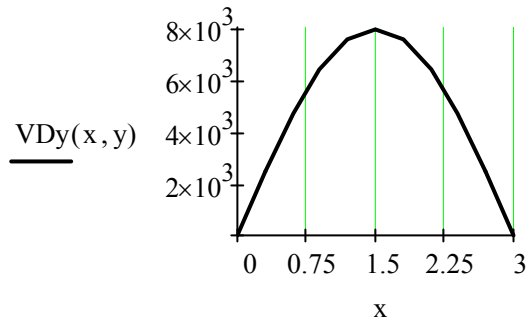
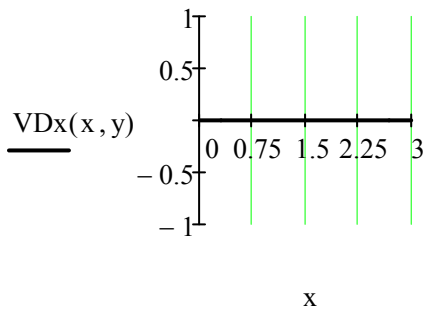
жёсткости $\frac{V_x}{D}$ и $\frac{V_y}{D}$.

$$VDx(x, y) := \sum_{m=1}^2 \sum_{n=1}^2 \left[AD(m, n) \cdot \left[\frac{m^3}{a^3} + (2 - \nu) \cdot \frac{m \cdot n^2}{a \cdot b^2} \right] \cdot \cos\left(\frac{m \cdot \pi \cdot x}{a}\right) \cdot \sin\left(\frac{n \cdot \pi \cdot y}{b}\right) \right]$$

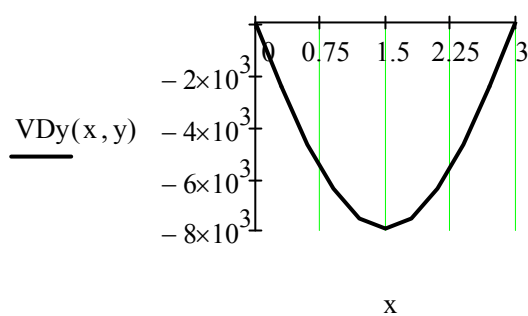
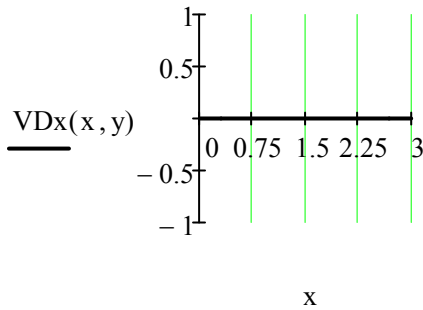
$$VDy(x, y) := \sum_{m=1}^2 \sum_{n=1}^2 \left[AD(m, n) \cdot \left[\frac{n^3}{b^3} + (2 - \nu) \cdot \frac{n \cdot m^2}{b \cdot a^2} \right] \cdot \sin\left(\frac{m \cdot \pi \cdot x}{a}\right) \cdot \cos\left(\frac{n \cdot \pi \cdot y}{b}\right) \right]$$

Построение эпюр приведённых реакций.

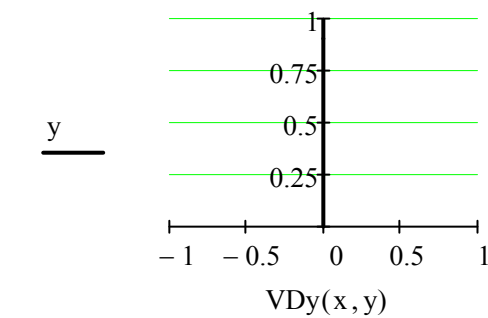
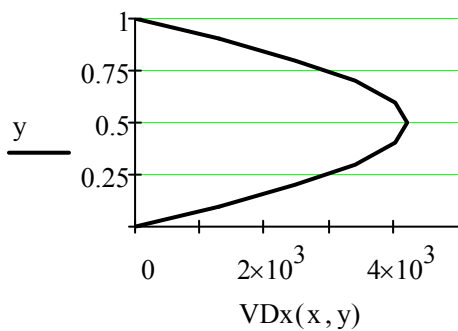
Опора $x := 0, \left(\frac{a}{10}\right) .. a$ $y := 0$



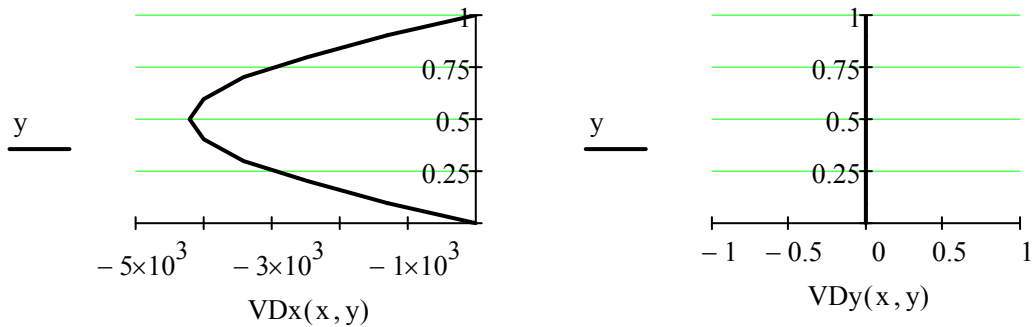
Опора $x := 0, \left(\frac{a}{10}\right) .. a$ $y := b$



Опора $x := 0$ $y := 0, \left(\frac{b}{10}\right) .. b$



Опора $x := a$ $y := 0, \left(\frac{b}{10}\right) .. b$



Вычисляем величину сосредоточенных реакций в углах пластины:

$$RD1 := -2 \cdot (1 - \nu) \cdot \sum_{m=1}^2 \sum_{n=1}^2 \left[AD(m, n) \cdot \pi^2 \cdot \left(\frac{m}{a}\right) \cdot \left(\frac{n}{b}\right) \right]$$

RD1 = -3.476E+004H

$$RD2 := -2 \cdot (1 - \nu) \cdot \sum_{m=1}^2 \sum_{n=1}^2 \left[AD(m, n) \cdot \pi^2 \cdot \left(\frac{m}{a}\right) \cdot \left(\frac{n}{b}\right) \cdot \cos(m \cdot \pi) \right]$$

RD2 = 3.476E+004H

$$RD3 := -2 \cdot (1 - \nu) \cdot \sum_{m=1}^2 \sum_{n=1}^2 \left[AD(m, n) \cdot \pi^2 \cdot \left(\frac{m}{a}\right) \cdot \left(\frac{n}{b}\right) \cdot \cos(m \cdot \pi) \cdot \cos(n \cdot \pi) \right]$$

RD3 = -3.476E+004H

$$RD4 := -2 \cdot (1 - \nu) \cdot \sum_{m=1}^2 \sum_{n=1}^2 \left[AD(m, n) \cdot \pi^2 \cdot \left(\frac{m}{a}\right) \cdot \left(\frac{n}{b}\right) \cdot \cos(n \cdot \pi) \right]$$

RD4 = 3.476E+004H

Все четыре реакции направлены вниз. Это значит, что все углы пластины необходимо специальным образом закреплять от подъёма.

Таким образом, подбор толщины пластины шарнирно опёртой по всем сторонам и нагруженной равномерно распределенной нагрузкой симметричной относительно осей, проходящих через центр пластины параллельно её сторонам, сводится к определению максимальных значений изгибающих моментов $M_x(x_0, y_0, \pm h/2)$ и $M_y(x_0, y_0, \pm h/2)$. В случае неравномерной нагрузки, несимметричной относительно её “центральных осей”, задача подбора толщины пластины значительно усложняется, поскольку, строго говоря, сводится к нахождению такой точки (x', y', z') , в которой нарушается принятое условие прочности. Несколько проще решить задачу проверки прочности пластины с заданными геометрическими размерами (длиной, шириной и высотой).

Ниже, в качестве примера, приводится задача проверки прочности пластины, реализованная в среде математического пакета MathCAD. Пластина имеет шарнирное опирание по всем сторонам и нагружена равномерно распределённой нагрузкой по площади $ABCD$, смещённой к левому верхнему углу пластины (рис. 20).

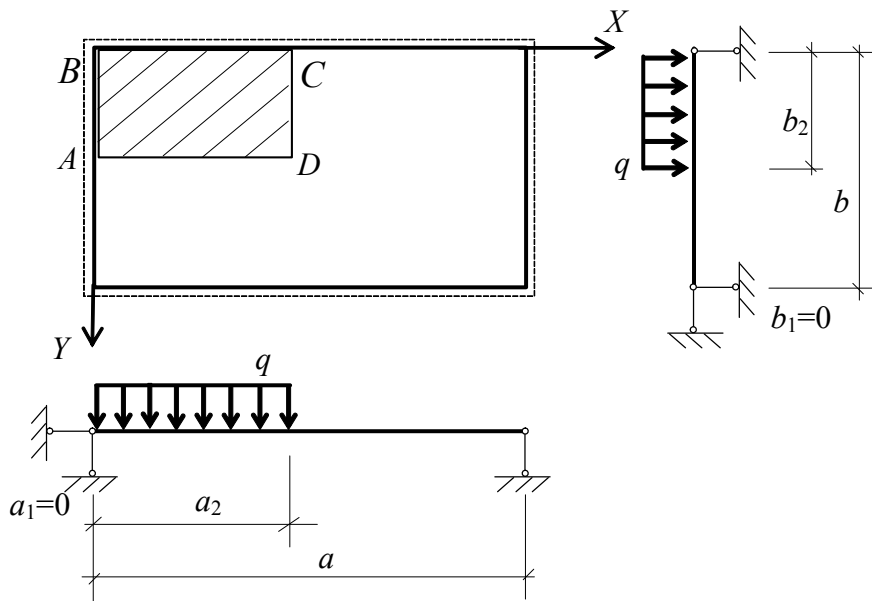


Рис. 20

■ Изгиб тонких пластин.

Система СИ.

Определяем пользовательские единицы измерений:

1 ньютон	$H := 1N$
1 ньютон * 1 метр	$Hm := H \cdot m$
1 ньютон / 1 метр	$Hdm := \frac{H}{m}$
1 ньютон * 1 квадратный метр	$Hm2 := H \cdot m^2$
1 паскаль = 1 ньютон / 1 квадратный метр	$Pa := \frac{H}{m^2}$

Исходные данные:

$a := 3 \cdot m$	$b := 1 \cdot m$	$h := 0.2 \cdot m$	
$a1 := 0 \cdot m$	$a2 := 1.5 \cdot m$	$b1 := 0 \cdot m$	$b2 := 0.5 \cdot m$
$q := 8 \cdot 10^5 \cdot Pa$	$R := 2.1 \cdot 10^8 \cdot Pa$	$\nu := 0.25$	$E := 2 \cdot 10^{11} \cdot Pa$

$$D := \frac{E \cdot h^3}{12 \cdot (1 - \nu^2)}$$

Вычисляем коэффициенты ряда Фурье

$$A1(m,n) := \frac{4 \cdot q \cdot a^4}{D \pi^6} \cdot \frac{1}{m \cdot n \cdot \left[m^2 + n^2 \cdot \left(\frac{a}{b} \right)^2 \right]^2}$$

$$A2(m,n) := \left(\cos\left(\frac{m \cdot \pi \cdot a2}{a}\right) - \cos\left(\frac{m \cdot \pi \cdot a1}{a}\right) \right) \cdot \left(\cos\left(\frac{n \cdot \pi \cdot b2}{b}\right) - \cos\left(\frac{n \cdot \pi \cdot b1}{b}\right) \right)$$

$$A(m,n) := A1(m,n) \cdot A2(m,n)$$

$$A11 := A(1,1) \quad A11 = m$$

$$A12 := A(1,2) \quad A12 = m$$

$$A21 := A(2,1) \quad A21 = m$$

$$A22 := A(2,2) \quad A22 = m$$

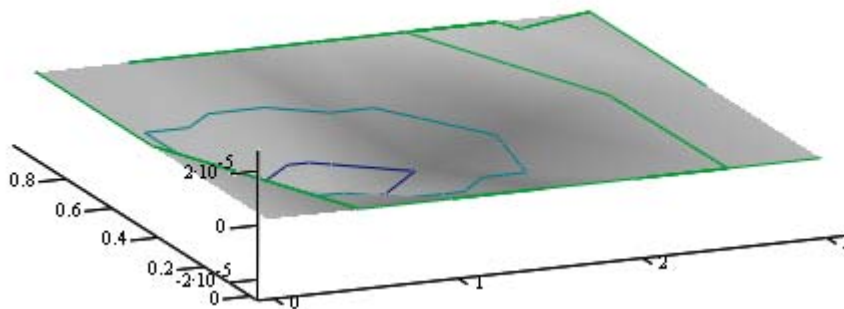
Сконструируем приближённое уравнение изогнутой поверхности срединного слоя:

$$w1(x,y) := A11 \cdot \sin\left(\frac{\pi \cdot x}{a}\right) \cdot \sin\left(\frac{\pi \cdot y}{b}\right) + A12 \cdot \sin\left(\frac{\pi \cdot x}{a}\right) \cdot \sin\left(\frac{2 \cdot \pi \cdot y}{b}\right)$$

$$w_2(x, y) := A_{21} \cdot \sin\left(\frac{2 \cdot \pi \cdot x}{a}\right) \cdot \sin\left(\frac{\pi \cdot y}{b}\right) + A_{22} \cdot \sin\left(\frac{2 \cdot \pi \cdot x}{a}\right) \cdot \sin\left(\frac{2 \cdot \pi \cdot y}{b}\right)$$

$$w(x, y) := w_1(x, y) + w_2(x, y)$$

Построение изогнутой поверхности срединного слоя: $\underline{W}(x, y) := -w(x, y)$



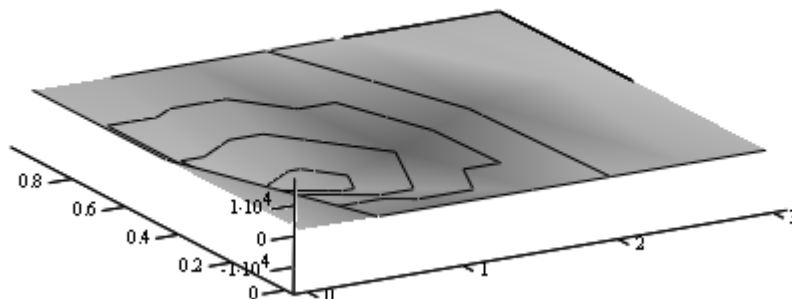
W

Определяем функции внутренних усилий:

Изгибающий момент $M_x(x, y)$

$$M_x(x, y) := D \cdot \left[\sum_{m=1}^2 \sum_{n=1}^2 \left[A(m, n) \cdot \pi^2 \cdot \left(\frac{m^2}{a^2} + \nu \cdot \frac{n^2}{b^2} \right) \cdot \sin\left(\frac{m \cdot \pi \cdot x}{a}\right) \cdot \sin\left(\frac{n \cdot \pi \cdot y}{b}\right) \right] \right]$$

$$MM_x(x, y) := -M_x(x, y)$$

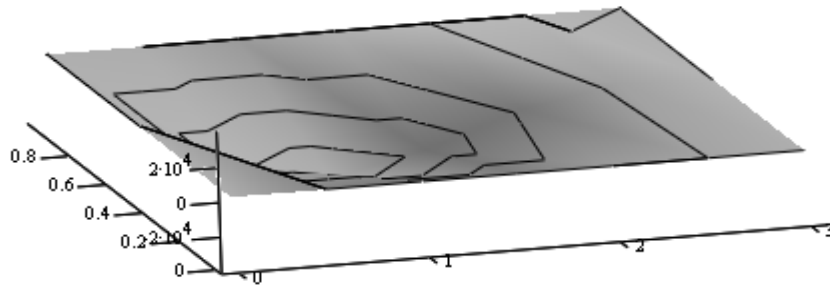


MMx

Изгибающий момент $M_y(x, y)$

$$M_y(x, y) := D \cdot \left[\sum_{m=1}^2 \sum_{n=1}^2 \left[A(m, n) \cdot \pi^2 \cdot \left(\frac{n^2}{b^2} + \nu \cdot \frac{m^2}{a^2} \right) \cdot \sin\left(\frac{m \cdot \pi \cdot x}{a}\right) \cdot \sin\left(\frac{n \cdot \pi \cdot y}{b}\right) \right] \right]$$

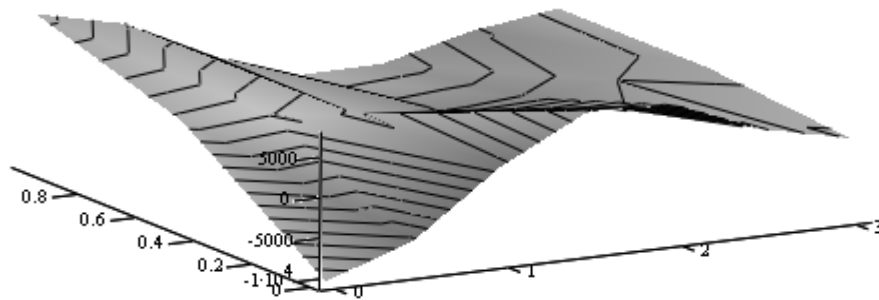
$$MM_y(x, y) := -M_y(x, y)$$



MM_y

Изгибающий момент $M_{xy}(x, y)$:

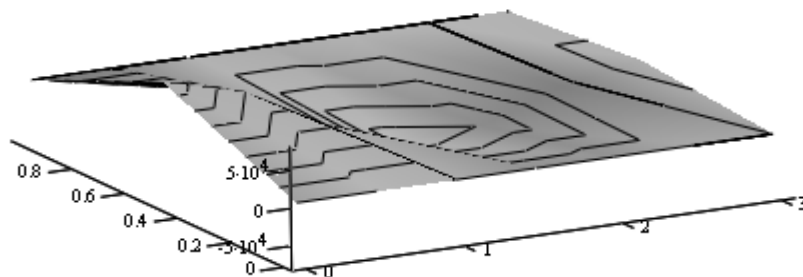
$$M_{xy}(x, y) := -D \cdot (1 - \nu) \cdot \left[\sum_{m=1}^2 \sum_{n=1}^2 \left(A(m, n) \cdot \frac{m \cdot n \cdot \pi \cdot 2}{a \cdot b} \cdot \cos\left(\frac{m \cdot \pi \cdot x}{a}\right) \cdot \cos\left(\frac{n \cdot \pi \cdot y}{b}\right) \right) \right]$$



M_{xy}

Поперечная сила $Q_x(x, y)$:

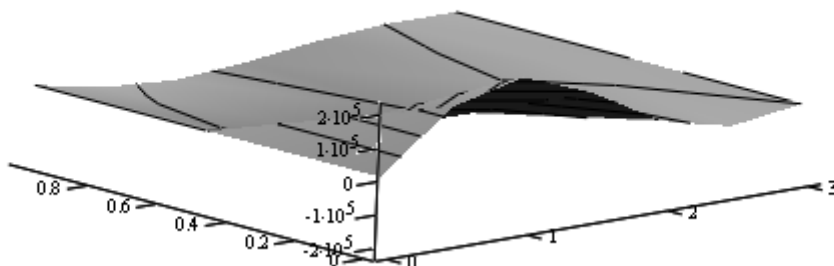
$$Q_x(x, y) := D \cdot \left[\sum_{m=1}^2 \sum_{n=1}^2 \left[A(m, n) \cdot \pi^3 \cdot \left(\frac{m^3}{a^3} + \frac{m \cdot n^2}{a \cdot b^2} \right) \cdot \cos\left(\frac{m \cdot \pi \cdot x}{a}\right) \cdot \sin\left(\frac{n \cdot \pi \cdot y}{b}\right) \right] \right]$$



Q_x

■ Поперечная сила $Q_y(x,y)$:

$$Q_y(x,y) := D \cdot \left[\sum_{m=1}^2 \sum_{n=1}^2 \left[A(m,n) \cdot \pi^3 \cdot \left(\frac{n^3}{b^3} + \frac{n \cdot m^2}{b \cdot a^2} \right) \cdot \sin\left(\frac{m \cdot \pi \cdot x}{a}\right) \cdot \cos\left(\frac{n \cdot \pi \cdot y}{b}\right) \right] \right]$$



Q_y

Вычисление напряжений:

$$\sigma_x(x,y,z) := \frac{12 \cdot M_x(x,y) \cdot z}{h^3}$$

$$\sigma_y(x,y,z) := \frac{12 \cdot M_y(x,y) \cdot z}{h^3}$$

$$\tau_{xy}(x,y,z) := \frac{12 \cdot M_{xy}(x,y) \cdot z}{h^3}$$

$$\tau_{yz}(x,y,z) := \left(\frac{6 \cdot Q_y(x,y)}{h^3} \right) \cdot \left(\frac{h^2}{4} - z^2 \right)$$

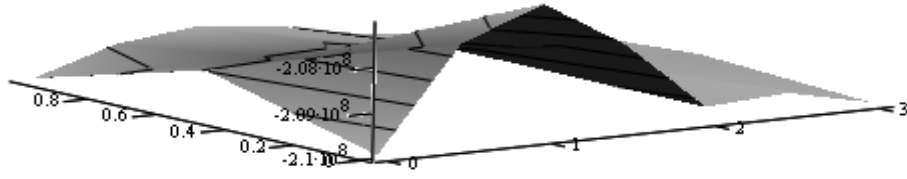
$$\tau_{zx}(x,y,z) := \left(\frac{6 \cdot Q_x(x,y)}{h^3} \right) \cdot \left(\frac{h^2}{4} - z^2 \right)$$

Построение поверхности прочности Губера-Мизеса-Генки для различных значений координаты z :

$$\sigma_{li}(x,y,z) := (\sigma_x(x,y,z) - \sigma_y(x,y,z))^2 + \sigma_y(x,y,z)^2 + \sigma_x(x,y,z)^2$$

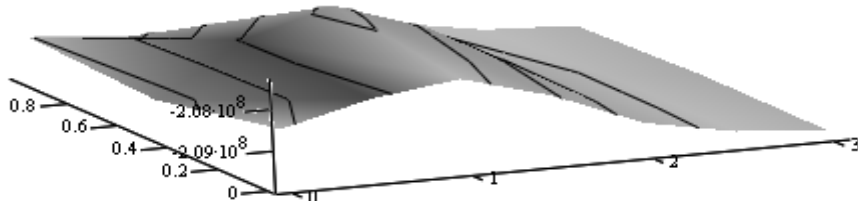
$$\sigma_i(x,y,z) := \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right) \cdot \sqrt{\sigma_{li}(x,y,z) + 6 \cdot (\tau_{xy}(x,y,z)^2 + \tau_{yz}(x,y,z)^2 + \tau_{zx}(x,y,z)^2)}$$

$$z := 0 \cdot m \quad \sigma_g(x,y) := \sigma_i(x,y,z) - R$$



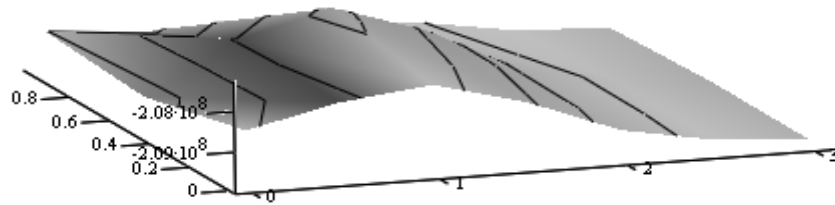
σ_g

$$z := \frac{h}{4} \quad \underline{\sigma_g}(x, y) := \sigma_i(x, y, z) - R$$



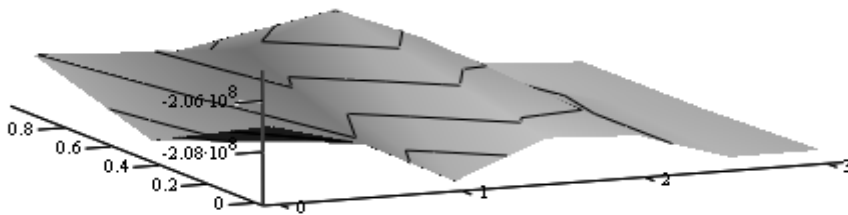
σ_g

$$z := \frac{-h}{4} \quad \underline{\sigma_g}(x, y) := \sigma_i(x, y, z) - R$$



σ_g

$$z := \frac{h}{2} \quad \underline{\sigma_g}(x, y) := \sigma_i(x, y, z) - R$$



σ_g

$$z := \frac{-h}{2} \quad \sigma_g(x, y) := \sigma_i(x, y, z) - R$$



σ_g

Как следует из представленных поверхностей прочности Губера-Мизеса-Генки все они расположены в отрицательной области вертикальной координаты.

Здесь $\sigma_i(x_i, y_i, z) < R$. Это значит, что условие прочности

Губера-Мизеса-Генки выполняется, то есть прочность пластины обеспечена.

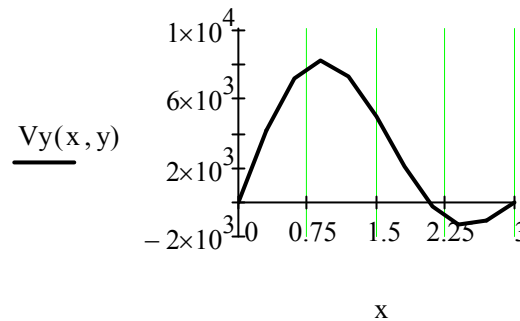
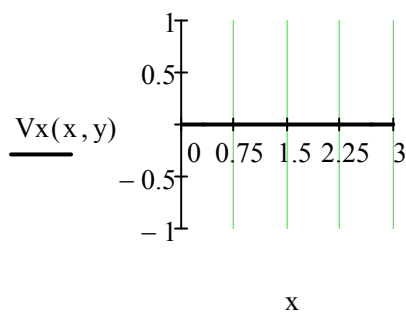
Вычисляем распределённые реакции на опорах:

$$V_x(x, y) := D \cdot \sum_{m=1}^2 \sum_{n=1}^2 \left[A(m, n) \cdot \left[\frac{m^3}{a^3} + (2 - \nu) \cdot \frac{m \cdot n^2}{a \cdot b^2} \right] \cdot \cos\left(\frac{m \cdot \pi \cdot x}{a}\right) \cdot \sin\left(\frac{n \cdot \pi \cdot y}{b}\right) \right]$$

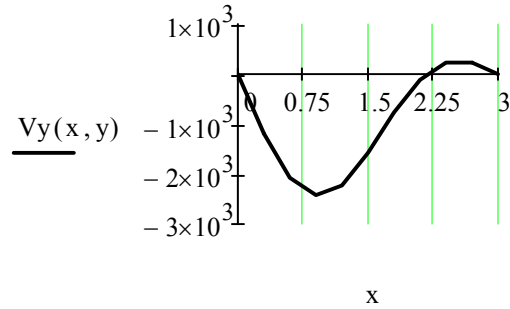
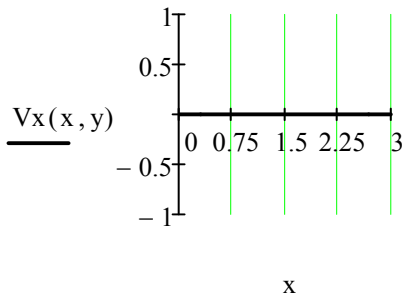
$$V_y(x, y) := D \cdot \sum_{m=1}^2 \sum_{n=1}^2 \left[A(m, n) \cdot \left[\frac{n^3}{b^3} + (2 - \nu) \cdot \frac{n \cdot m^2}{b \cdot a^2} \right] \cdot \sin\left(\frac{m \cdot \pi \cdot x}{a}\right) \cdot \cos\left(\frac{n \cdot \pi \cdot y}{b}\right) \right]$$

Построение эюр распределённых реакций.

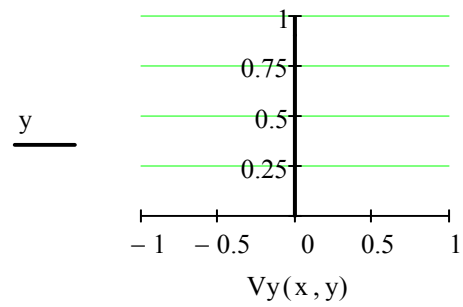
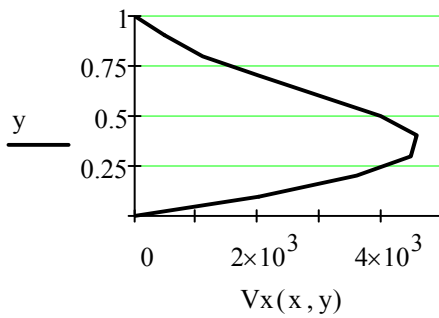
Опора $x := 0, \left(\frac{a}{10}\right) .. a \quad y := 0$



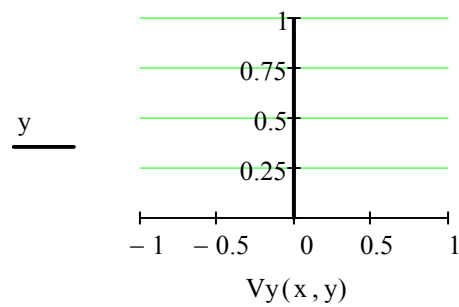
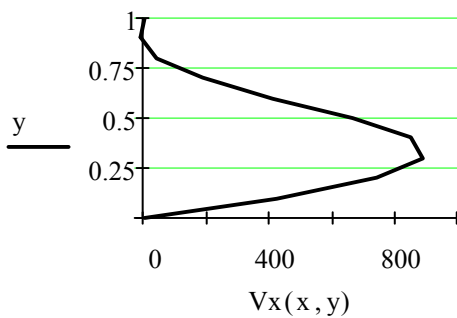
Опора $x := 0, \left(\frac{a}{10}\right) .. a \quad y := b$



Опора $x := 0$ $y := 0, \left(\frac{b}{10}\right) .. b$



Опора $x := a$ $y := 0, \left(\frac{b}{10}\right) .. b$



Вычисляем величину сосредоточенных реакций в углах пластины.

$$R1 := -2 \cdot D \cdot (1 - \nu) \cdot \sum_{m=1}^2 \sum_{n=1}^2 \left[A(m, n) \cdot \pi^2 \cdot \left(\frac{m}{a}\right) \cdot \left(\frac{n}{b}\right) \right]$$

$$R1 = -3.432E+004 \text{ H}$$

$$R2 := -2 \cdot D \cdot (1 - \nu) \cdot \sum_{m=1}^2 \sum_{n=1}^2 \left[A(m, n) \cdot \pi^2 \cdot \left(\frac{m}{a}\right) \cdot \left(\frac{n}{b}\right) \cdot \cos(m \cdot \pi) \right]$$

$$R2 = -3.823E+003 \text{ H}$$

$$R3 := -2 \cdot D \cdot (1 - \nu) \cdot \sum_{m=1}^2 \sum_{n=1}^2 \left[A(m, n) \cdot \pi^2 \cdot \left(\frac{m}{a}\right) \cdot \left(\frac{n}{b}\right) \cdot \cos(m \cdot \pi) \cdot \cos(n \cdot \pi) \right]$$

$$R3 = 1.058E+003 \text{ H}$$

$$R_4 := -2 \cdot D \cdot (1 - \nu) \cdot \sum_{m=1}^2 \sum_{n=1}^2 \left[A(m, n) \cdot \pi^2 \cdot \left(\frac{m}{a}\right) \cdot \left(\frac{n}{b}\right) \cdot \cos(n \cdot \pi) \right]$$

$$R_4 = H$$

Реакции R_1 и R_4 направлены вниз, а реакции R_2 и R_3 - вверх. Это значит, что углы 1 и 4 пластины надо закреплять от подъёма.

На рис. 21 показаны эпюры распределённых реакций, возникающие на шарнирных опорах пластины и сосредоточенные реакции в углах пластины, нагруженной равномерно распределённой нагрузкой в первой четверти площади (рис. 20).

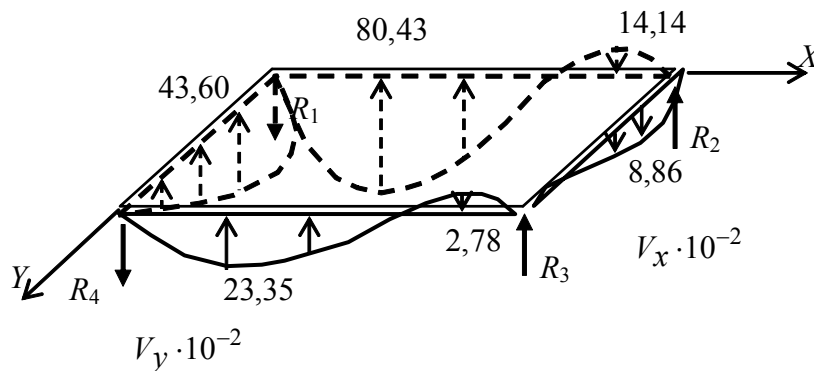


Рис. 21

Контрольные вопросы

1. Какие пластины называются тонкими?
2. Сформулируйте основные допущения, принятые в технической теории изгиба тонких пластин.
3. Что называется срединной плоскостью пластины при изгибе?
4. Чем отличается изгиб пластины от изгиба балки?
5. Какие внутренние усилия возникают в поперечных сечениях пластины при изгибе?
6. Что называется погонным усилием?
7. Какие напряжения возникают в поперечных сечениях пластины, и как они распределяются по высоте сечения? (Покажите эпюры напряжений.)
8. Как связаны между собой напряжения и прогибы срединной плоскости пластины при её изгибе?
9. Как найти напряжения в пластине по известным погонным внутренним усилиям?
10. Как определяются максимальные напряжения в пластине?

11. Какой вид напряжённого состояния имеет место в верхних и нижних волокнах пластины и почему?
12. Сформулируйте критерий прочности Губера – Мизеса – Генки для пластины.
13. Что такое погонный момент инерции?
14. Что такое погонный момент сопротивления?
15. Что такое цилиндрическая жёсткость?
16. Запишите дифференциальное уравнение изогнутой срединной поверхности пластины.
17. Что понимается под граничными условиями и зачем они нужны при расчёте пластин?
18. Как записываются граничные условия для пластины, жёстко заделанной по контуру?
19. Как записываются граничные условия для пластины с шарнирным опиранием по контуру?
20. Как записываются граничные условия для пластины со свободным опиранием по контуру?
21. Как записать граничные условия для пластины, у которой одна сторона имеет жёсткое опирание, противоположная – шарнирное опирание, а две другие – свободны от опор?
22. Как определяются приведённые поперечные силы (контурные опорные реакции) в пластине с шарнирным опиранием по всем четырём сторонам?
23. Как определяются опорные реакции в углах пластины с шарнирным опиранием по контуру?
24. Сформулируйте правило знаков для приведённых поперечных сил и опорных реакций в углах пластины?
25. Какие существуют методы расчёта пластин?
26. Какие пластины допустимо рассчитывать в двойных тригонометрических рядах (методом Навье)?
27. Как записывается приближённое уравнение изогнутой срединной поверхности пластины в виде двойного тригонометрического ряда?
28. Как записывается приближённое уравнение изогнутой срединной поверхности пластины в виде одинарного тригонометрического ряда?
29. Как раскладывается равномерно распределённая нагрузка в двойной тригонометрический ряд?
30. Из каких условий определяются коэффициенты ряда Фурье?
31. Как оценивается прочность пластины при изгибе?
32. Сформулируйте алгоритм расчёта пластины методом двойных тригонометрических рядов (методом Навье) с шарнирным опиранием по контуру.

§3. Расчёт плиты на упругом основании

Сплошным основанием для плит чаще всего является грунт или какое-либо сплошное тело, на которое плита опирается всей своей плоскостью. Реальное сплошное основание для расчёта плит заменяется моделью, наделённой главными свойствами заменяемого реального основания: основание рассматривается как сплошная однородная упругая среда, характеризующаяся модулем деформации E_0 и коэффициентом Пуассона ν_0 . При построении теории расчёта плит на упругом основании полагают, что соприкасающиеся точки подошвы плиты и основания получают одинаковые перемещения, то есть отрыв и сдвиг подошвы плиты относительно основания отсутствует.

Условие контактности плиты и сплошного основания обычно для простоты расчёта записывается только по равенству вертикальных перемещений срединной плоскости плиты и поверхности основания:

$$w(x, y) = w_0(x, y), \quad (67)$$

где $w(x, y)$ – поверхность вертикальных перемещений срединной плоскости плиты; $w_0(x, y)$ – поверхность вертикальных перемещений верхней границы основания.

Рассмотрим некоторые модели упругого основания.

Модель упругого основания Фусса – Винклера построена на следующих допущениях:

1. Основание считается упругим и двусторонним, в котором могут возникать вертикальные реакции обоих направлений.

2. Реакции основания на подошву плиты пропорциональны вертикальным перемещениям поверхности основания

$$r(x, y) = c_1 w_0(x, y), \quad (68)$$

где c_1 – коэффициент сопротивления упругого основания (коэффициент постели); представляет собой отпор основания, приходящийся на 1 м^2 площади при просадке, равной единице. Коэффициент c_1 измеряется в Кн/см^3 .

Модель упругого основания Фусса – Винклера может быть представлена бесконечным большим количеством вертикальных упругих пружин, не связанных между собой (рис. 22).

Характерной особенностью такого основания является то, что оно не учитывает распределительную способность грунтов, то есть способность основания деформироваться, как показывает опыт, не только под подошвой плиты, но и за её пределами.

Модель упругого основания в виде упругого полупространства. Согласно этой модели перемещения поверхности упругого основания определяются по формулам теории упругости. Это порождает в общем случае большие математические сложности, особенно при соблюдении условий непрерывности перемещений по подошве плиты и основания. Однако модель основания в виде упругого полупространства учитывает распределительную способность грунтов.

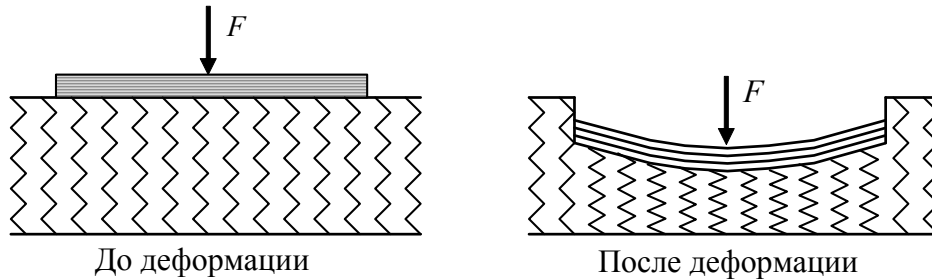


Рис. 22

Модель упругого основания с двумя коэффициентами постели. Согласно этой модели реакция основания определяется по формуле

$$r(x, y) = c_1 \cdot w(x, y) - c_2 \cdot \left(\frac{\partial^2 w(x, y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w(x, y)}{\partial y^2} \right). \quad (69)$$

Здесь c_1 (Кн/см³) – первый коэффициент постели

$$c_1 = \frac{(1 - \nu_0) \cdot E_0}{(1 + \nu_0) \cdot (1 - 2\nu_0) \cdot H}, \quad (70)$$

c_2 (Кн·см) – второй коэффициент постели

$$c_2 = \frac{E_0 \cdot H}{8(1 + \nu_0)}. \quad (71)$$

Здесь E_0 – модуль упругости основания, ν_0 – коэффициент Пуассона основания, H – глубина (мощность) сжимаемой толщи (рис. 23).

Модель упругого основания с двумя коэффициентами постели учитывает, вообще говоря, распределительную способность грунта и является обобщением модели Фусса – Винклера.

При расчёте плит на упругом основании с двумя коэффициентами постели следует иметь в виду, что на свободном крае плиты, благодаря резкому изменению угла наклона

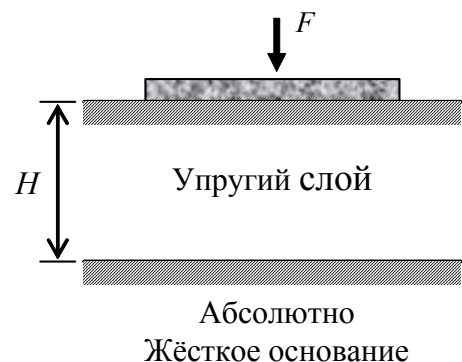


Рис. 23

касательной к деформированному основанию, возникает сосредоточенно-полосовая реакция, вносящая вполне ощутимые осложнения в расчёт.

Дифференциальное уравнение изогнутой срединной поверхности плиты на упругом основании с двумя коэффициентами постели (аналог уравнения Софи Жермен) имеет вид:

$$D \left[\frac{\partial^4 w(x, y)}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w(x, y)}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w(x, y)}{\partial y^4} \right] + c_1 w(x, y) - c_2 \left(\frac{\partial^2 w(x, y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w(x, y)}{\partial y^2} \right) = q(x, y). \quad (72)$$

Выражения для перемещений, деформаций, напряжений и внутренних усилий при расчёте плит на упругом основании, а также условия прочности и краевые условия, остаются такими же, как и при расчёте тонких пластин (формулы 35- 38, 40, 43, 44-50).

Решение задачи о поперечном изгибе прямоугольной плиты на сплошном упругом основании с двумя коэффициентами постели, шарнирно опёртой по всему контуру, математически сводится к решению краевой задачи для дифференциального уравнения (72) совместно с краевыми условиями (46), (47) и строится в виде двойного тригонометрического ряда (ряда Фурье):

$$w(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} A_{mn} \cdot \sin \frac{m\pi x}{a} \cdot \sin \frac{n\pi y}{b}, \quad (73)$$

Решение (73) удовлетворяет, как мы уже убедились ранее (см. §2), при $\tilde{M}_x = 0$ и $\tilde{M}_y = 0$ краевым условиям (46) и (47).

Принимая для внешней распределённой нагрузки $q(x, y)$ разложение в двойной тригонометрический ряд (53) и подставляя решение (73) в уравнение (72), получим

$$\begin{aligned} & \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} A_{mn} \left[\left(\frac{m\pi}{a} \right)^4 + 2 \left(\frac{m\pi}{a} \right)^2 \left(\frac{n\pi}{b} \right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b} \right)^4 + \right. \\ & \left. + \frac{c_1}{D} + \frac{c_2}{D} \left(\frac{m\pi}{a} \right)^2 + \frac{c_2}{D} \left(\frac{n\pi}{b} \right)^2 \right] \cdot \sin \frac{m\pi x}{a} \cdot \sin \frac{n\pi y}{b} = \\ & = \frac{1}{D} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} C_{mn} \cdot \sin \frac{m\pi x}{a} \cdot \sin \frac{n\pi y}{b}. \end{aligned} \quad (74)$$

Приравнивая коэффициенты при соответствующих тригонометрических функциях в слагаемых левой и правой части в формуле (74), будем иметь:

$$\begin{aligned}
 & A_{mn} \left[\left(\frac{m\pi}{a} \right)^4 + 2 \left(\frac{m\pi}{a} \right)^2 \left(\frac{n\pi}{b} \right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b} \right)^4 + \right. \\
 & \left. + \frac{c_1}{D} + \frac{c_2}{D} \left(\frac{m\pi}{a} \right)^2 + \frac{c_2}{D} \left(\frac{n\pi}{b} \right)^2 \right] \cdot \sin \frac{m\pi x}{a} \cdot \sin \frac{n\pi y}{b} = \\
 & = \frac{C_{mn}}{D} \sin \frac{m\pi x}{a} \cdot \sin \frac{n\pi y}{b}.
 \end{aligned} \tag{75}$$

Отсюда получаем:

$$A_{mn} = \frac{C_{mn}}{\frac{D\pi^4}{a^4} \left\{ \left[m^2 + n^2 \left(\frac{a}{b} \right)^2 \right]^2 + \frac{c_1 a^4}{\pi^4 D} + \frac{c_2 a^2}{\pi^2 D} \left[m^2 + n^2 \left(\frac{a}{b} \right)^2 \right] \right\}}, \tag{76}$$

где

$$C_{mn} = \frac{4}{ab} \int_0^a \int_0^b q(x, y) \cdot \sin \frac{m\pi x}{a} \cdot \sin \frac{n\pi y}{b} dx dy. \tag{77}$$

Таким образом, расчёт плиты на упругом основании с двумя коэффициентами постели сводится к определению коэффициентов C_{mn} по формулам (77) от конкретно заданной нагрузки, после чего по формулам (76) определяются значения коэффициентов ряда A_{mn} для плиты с заданными геометрическими размерами (длиной, шириной, толщиной), затем по выражению (73) вычисляются значения прогибов плиты. Для вычисления внутренних усилий – изгибающих и крутящего моментов, поперечных сил, распределённых реакций, сосредоточенных реакций в углах плиты – остаются справедливыми формулы (59)-(66).

Задание

Требуется, исходя из условия прочности Губера – Мизеса – Генки подобрать толщину прямоугольной плиты на упругом основании, изображённой на рис. 24.

Прямоугольная плита на упругом основании имеет шарнирное опирание по всему контуру, загружена равномерно распределённой нагрузкой интенсивностью q по площади прямоугольника ABCD, испытывает поперечный изгиб. Упругое основание описывается моделью с двумя коэффициентами постели.

Для определения внутренних усилий в плите следует использовать метод двойных тригонометрических рядов Фурье (метод Навье). Приближённое уравнение изогнутой срединной поверхности плиты (73) представить в виде четырёх членов ряда:

$$w(x, y) = A_{11} \cdot \sin \frac{\pi x}{a} \cdot \sin \frac{\pi y}{b} + A_{12} \cdot \sin \frac{\pi x}{a} \cdot \sin \frac{2\pi y}{b} + A_{21} \cdot \sin \frac{2\pi x}{a} \cdot \sin \frac{\pi y}{b} + A_{22} \cdot \sin \frac{2\pi x}{a} \cdot \sin \frac{2\pi y}{b}. \quad (\text{а})$$

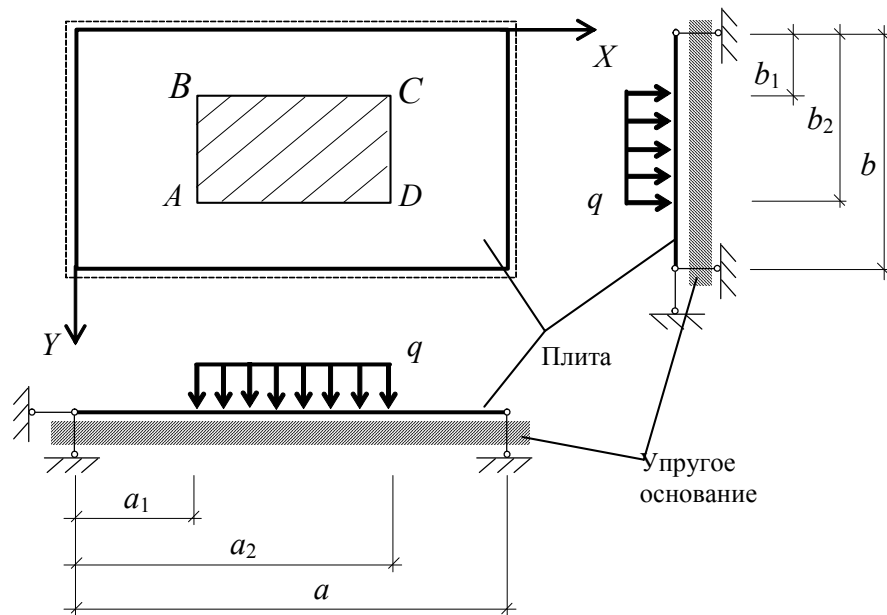


Рис. 24

Порядок решения задачи

1. Задаёмся толщиной плиты h .
2. Вычисляем коэффициенты постели c_1 и c_2 .
3. Вычисляем цилиндрическую жёсткость плиты.
4. Вычисляем коэффициенты A_{11} , A_{12} , A_{21} , A_{22} по формулам (76). Для равномерно распределенной нагрузки q , приложенной по площади прямоугольника $a_1 \leq x \leq a_2$, $b_1 \leq y \leq b_2$ формула (77) преобразуется к виду:

$$C_{mn} = \frac{4q}{m\pi^2} \left[\cos \frac{m\pi a_2}{a} - \cos \frac{m\pi a_1}{a} \right] \cdot \left[\cos \frac{n\pi b_2}{b} - \cos \frac{n\pi b_1}{b} \right]. \quad (\text{б})$$

5. Получаем приближённое уравнение изогнутой поверхности срединного слоя плиты.

6. Определяем внутренние усилия: изгибающие моменты по соотношениям (59), крутящий момент – по соотношениям (60), поперечные силы – по соотношениям (61).

7. Строим эпюры прогибов и изгибающих моментов. Для сечения $x_m = 0,5a$ строим эпюры $w(x, y)$, $M_x(x, y)$; для сечения $y_m = 0,5b$ – эпюры $w(x, y)$, $M_y(x, y)$.

8. Проверяем условие прочности по теории прочности Губера – Мизеса – Генки. Если условие прочности удовлетворяется и расхождение между левой и правой частями неравенства не превышает 5%, то заданную толщину плиты считаем расчётной; иначе, если условие прочности не выполняется или расхождение между левой и правой частями неравенства превышает 5%, то, изменив толщину плиты, выполняем перерасчёт, начиная с пункта 2.

9. Определяем распределённые реакции по соотношениям (62) и строим их эпюры.

10. Определяем сосредоточенные реакции в углах пластины по формулам (63)-(66).

Пример решения конкретной задачи

Дано: $a = 3$ м, $b = 1$ м, $a_1 = 0,5$ м, $a_2 = 2,5$ м, $b_1 = 0,25$ м, $b_2 = 0,75$ м,

$q = 31,5 \cdot 10^5$ Па, $E = 2 \cdot 10^{11}$ Па, $\nu = 0,2$, $R = 2,1 \cdot 10^8$ Па,

$E_0 = 4 \cdot 10^7$ Па, $\nu_0 = 0,3$, $H = 10$ м.

Решение

1. *Задаёмся толщиной плиты.* $h = 4$ см.

2. *Вычисляем коэффициенты постели.* В соответствии с формулами (67) и (77), получаем:

$$c_1 = \frac{(1 - \nu_0) \cdot E_0}{(1 + \nu_0) \cdot (1 - 2\nu_0) \cdot H} =$$

$$= \frac{(1 - 0,3) \cdot 4 \cdot 10^7}{(1 + 0,3) \cdot (1 - 2 \cdot 0,3) \cdot 10} = 5,385 \cdot 10^6 \text{ Н/м}^3, \quad (\text{в})$$

$$c_2 = \frac{E_0 \cdot H}{8(1 + \nu_0)} = \frac{4 \cdot 10^7 \cdot 10}{8 \cdot (1 + 0,3)} = 3,846 \cdot 10^7 \text{ Н/м}. \quad (\text{г})$$

3. *Определяем цилиндрическую жёсткость плиты.*

$$D = \frac{E \cdot h^3}{12 \cdot (1 - \nu^2)} = \frac{2 \cdot 10^{11} \cdot 0,04}{12 \cdot (1 - 0,3^2)} = 1,111 \cdot 10^6 \text{ Нм}. \quad (\text{д})$$

4. Вычисляем коэффициенты A_{11} , A_{12} , A_{21} , A_{22} .

$$A_{11} = \frac{4 \cdot 31,5 \cdot 10^5 \cdot 3^4}{1 \cdot 1 \cdot \pi^6 \cdot 1,111 \cdot 10^6} \cdot \left[\cos \frac{1 \cdot \pi \cdot 2,5}{3} - \cos \frac{1 \cdot \pi \cdot 0,5}{3} \right] \times$$

$$\times \left[\cos \frac{1 \cdot \pi \cdot 0,75}{1} - \cos \frac{1 \cdot \pi \cdot 0,25}{1} \right] \times$$

$$\times \left\{ \left[1^2 + 1^2 \cdot \left(\frac{3}{1} \right)^2 \right]^2 + \frac{5,385 \cdot 10^6 \cdot 3^4}{\pi^4 \cdot 1,111 \cdot 10^6} + \frac{3,846 \cdot 10^7 \cdot 3^2}{\pi^2 \cdot 1,111 \cdot 10^6} \cdot \left[1^2 + 1^2 \cdot \left(\frac{3}{1} \right)^2 \right] \right\}^{-1} =$$

$$= 5,576 \cdot 10^{-3} \text{ м,}$$

$$A_{12} = \frac{4 \cdot 31,5 \cdot 10^5 \cdot 3^4}{1 \cdot 2 \cdot \pi^6 \cdot 1,111 \cdot 10^6} \cdot \left[\cos \frac{1 \cdot \pi \cdot 2,5}{3} - \cos \frac{1 \cdot \pi \cdot 0,5}{3} \right] \times$$

$$\times \left[\cos \frac{2 \cdot \pi \cdot 0,75}{1} - \cos \frac{2 \cdot \pi \cdot 0,25}{1} \right] \times$$

$$\times \left\{ \left[1^2 + 2^2 \cdot \left(\frac{3}{1} \right)^2 \right]^2 + \frac{5,385 \cdot 10^6 \cdot 3^4}{\pi^4 \cdot 1,111 \cdot 10^6} + \frac{3,846 \cdot 10^7 \cdot 3^2}{\pi^2 \cdot 1,111 \cdot 10^6} \cdot \left[1^2 + 2^2 \cdot \left(\frac{3}{1} \right)^2 \right] \right\}^{-1} =$$

$$= 0,00 \text{ м,}$$

$$A_{21} = \frac{4 \cdot 31,5 \cdot 10^5 \cdot 3^4}{2 \cdot 1 \cdot \pi^6 \cdot 1,111 \cdot 10^6} \cdot \left[\cos \frac{2 \cdot \pi \cdot 2,5}{3} - \cos \frac{2 \cdot \pi \cdot 0,5}{3} \right] \times$$

$$\times \left[\cos \frac{1 \cdot \pi \cdot 0,75}{1} - \cos \frac{1 \cdot \pi \cdot 0,25}{1} \right] \times$$

$$\times \left\{ \left[2^2 + 1^2 \cdot \left(\frac{3}{1} \right)^2 \right]^2 + \frac{5,385 \cdot 10^6 \cdot 3^4}{\pi^4 \cdot 1,111 \cdot 10^6} + \frac{3,846 \cdot 10^7 \cdot 3^2}{\pi^2 \cdot 1,111 \cdot 10^6} \cdot \left[2^2 + 1^2 \cdot \left(\frac{3}{1} \right)^2 \right] \right\}^{-1} =$$

$$= 0,00 \text{ м,}$$

$$A_{22} = \frac{4 \cdot 31,5 \cdot 10^5 \cdot 3^4}{2 \cdot 2 \cdot \pi^6 \cdot 1,111 \cdot 10^6} \cdot \left[\cos \frac{2 \cdot \pi \cdot 2,5}{3} - \cos \frac{2 \cdot \pi \cdot 0,5}{3} \right] \times$$

$$\times \left[\cos \frac{2 \cdot \pi \cdot 0,75}{1} - \cos \frac{2 \cdot \pi \cdot 0,25}{1} \right] \times$$

$$\times \left\{ \left[2^2 + 2^2 \cdot \left(\frac{3}{1} \right)^2 \right]^2 + \frac{5,385 \cdot 10^6 \cdot 3^4}{\pi^4 \cdot 1,111 \cdot 10^6} + \frac{3,846 \cdot 10^7 \cdot 3^2}{\pi^2 \cdot 1,111 \cdot 10^6} \cdot \left[2^2 + 2^2 \cdot \left(\frac{3}{1} \right)^2 \right] \right\}^{-1} =$$

$$= 0,00 \text{ м.}$$

5. Составляем приближённое уравнение изогнутой поверхности срединного слоя. Подставляя значения коэффициентов A_{mn} в выражение (а), будем иметь:

$$w(x, y) = 5,576 \cdot 10^{-3} \cdot \sin \frac{\pi x}{3} \cdot \sin \frac{\pi y}{1}. \quad (\text{е})$$

6. Определяем внутренние усилия. На основании соотношений (59)–(61), находим:

$$\begin{aligned} M_x &= 1,111 \cdot 10^6 \cdot 5,576 \cdot 10^{-3} \cdot \pi^2 \left(\frac{1^2}{3^2} + 0,3 \frac{1^2}{1^2} \right) \cdot \sin \frac{\pi x}{3} \cdot \sin \frac{\pi y}{1} = \\ &= 2,547 \cdot 10^3 \cdot \pi^2 \cdot \sin \frac{\pi x}{3} \cdot \sin \pi y; \\ M_y &= 1,111 \cdot 10^6 \cdot 5,576 \cdot 10^{-3} \cdot \pi^2 \left(\frac{1^2}{1^2} + 0,3 \frac{1^2}{3^2} \right) \cdot \sin \frac{\pi x}{3} \cdot \sin \frac{\pi y}{1} = \\ &= 6,401 \cdot 10^3 \cdot \pi^2 \cdot \sin \frac{\pi x}{3} \cdot \sin \pi y; \\ M_{xy} &= -1,111 \cdot 10^6 \cdot (1 - 0,3) \cdot 5,576 \cdot 10^{-3} \cdot \pi^2 \frac{1 \cdot 1}{3 \cdot 1} \cdot \cos \frac{\pi x}{3} \cdot \cos \frac{\pi y}{1} \\ &= -1,445 \cdot 10^3 \cdot \pi^2 \cdot \cos \frac{\pi x}{3} \cdot \cos \pi y; \\ Q_x &= 1,111 \cdot 10^6 \cdot 5,576 \cdot 10^{-3} \cdot \pi^3 \left(\frac{1^3}{3^3} + \frac{1 \cdot 1^2}{3 \cdot 1^2} \right) \cdot \cos \frac{\pi x}{3} \cdot \sin \frac{\pi y}{1} = \\ &= 2,294 \cdot 10^3 \cdot \pi^3 \cdot \cos \frac{\pi x}{3} \cdot \sin \pi y; \\ Q_y &= 1,111 \cdot 10^6 \cdot 5,576 \cdot 10^{-3} \cdot \pi^3 \left(\frac{1^3}{1^3} + \frac{1 \cdot 1^2}{1 \cdot 3^2} \right) \cdot \sin \frac{\pi x}{3} \cdot \cos \frac{\pi y}{1} = \\ &= 6,883 \cdot 10^3 \cdot \pi^3 \cdot \sin \frac{\pi x}{3} \cdot \cos \pi y. \end{aligned} \quad (\text{ж})$$

7. Строим эпюры прогибов и изгибающих моментов по точкам в сечении $x_m = 0,5a$ и в сечении $y_m = 0,5b$. На основании соотношений (е) и (ж), получим:

- сечение $x_m = 0,5a$:

$$w(1,5; y) = 5,576 \cdot 10^{-3} \cdot \sin \frac{\pi}{2} \cdot \sin \frac{\pi y}{1} = 5,576 \cdot 10^{-3} \cdot \sin \pi y,$$

$$M_x(1,5; y) = 2,547 \cdot 10^3 \cdot \pi^2 \cdot \sin \frac{\pi}{2} \cdot \sin \frac{\pi y}{1} = 2,547 \cdot 10^3 \cdot \pi^2 \cdot \sin \pi y;$$

- сечение $y_m = 0,5b$:

$$w(x; 0,5) = 5,576 \cdot 10^{-3} \cdot \sin \frac{\pi x}{3} \cdot \sin \frac{\pi}{2} = 5,576 \cdot 10^{-3} \cdot \sin \frac{\pi x}{3},$$

$$M_y(x; 0,5) = 6,401 \cdot 10^3 \cdot \pi^2 \cdot \sin \frac{\pi x}{3} \cdot \sin \frac{\pi}{2} = 6,401 \cdot 10^3 \cdot \pi^2 \cdot \sin \frac{\pi x}{3}.$$

Результаты вычислений сведены в табл. 14. Соответствующие графики представлены на рис. 25.

Т а б л и ц а 14

Сечение $xm=1,5$ м			Сечение $ym=0,5$ м		
y , м	Прогиб, м	Изгибающий момент M_x , Н	x , м	Прогиб, м	Изгибающий момент M_y , Н
0	0,00E+00	0,00E+00	0	0,00E+00	0,00E+00
0,25	3,94E-03	1,78E+04	0,5	2,79E-03	3,16E+04
0,5	5,58E-03	2,51E+04	1	4,83E-03	5,47E+04
0,75	3,94E-03	1,78E+04	1,5	5,58E-03	6,32E+04
1	0,00E+00	0,00E+00	2	4,83E-03	5,47E+04
			2,5	2,79E-03	3,16E+04
			3	0,00E+00	0,00E+00

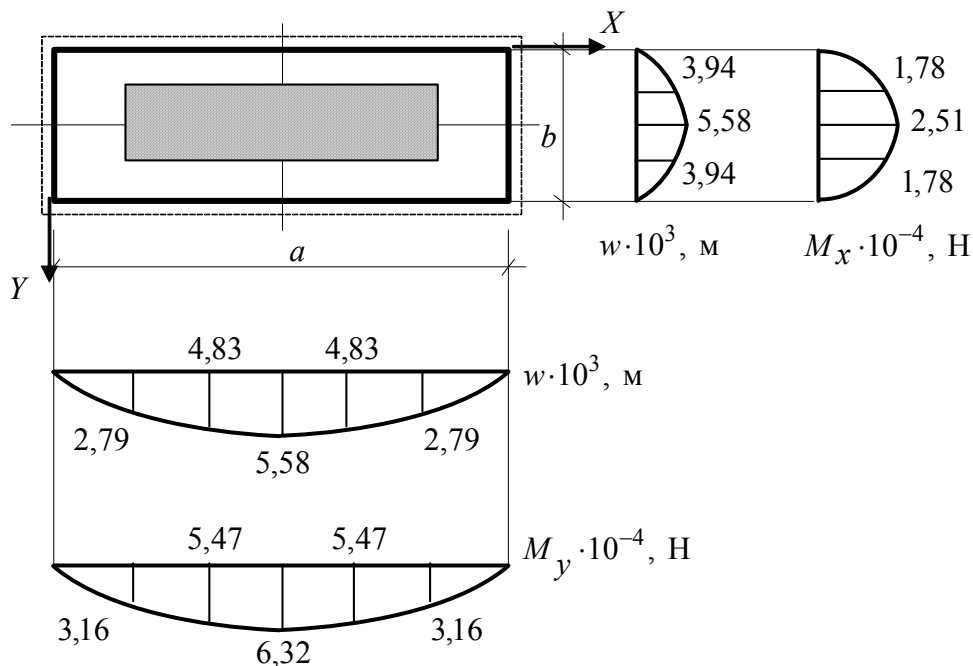


Рис. 25

8. Проверяем условие прочности Губера – Мизеса – Генки. Из эпюр изгибающих моментов следует, что самые большие моменты, а, следова-

тельно, и самые большие нормальные напряжения σ_x и σ_y возникают в центре пластины ($x = x_m, y = y_m$) на верхней и нижней её поверхности.

В силу симметрии крутящий момент в центре пластины $M_{xy} = 0$ и, следовательно, $\tau_{xy} = 0$. Таким образом, в наиболее опасной точке (x_m, y_m) имеем плоское напряженное состояние: $\sigma_z = 0, \tau_{zx} = 0, \tau_{zy} = 0$.

В соответствии с теорией прочности Губера – Мизеса – Генки (30) $\sqrt{\sigma_x^2 - \sigma_x \sigma_y + \sigma_y^2 + 3\tau_{xy}^2} \leq R$, прочность плиты будет обеспечена, если будет выполнено условие:

$$\sigma_{\text{экв}} = \frac{6}{h^2} \sqrt{\max M_x^2 - \max M_x \cdot \max M_y + \max M_y^2} \leq R. \quad (3)$$

Итак

$$\begin{aligned} \sigma_{\text{экв}} &= \frac{6}{0,04^2} \sqrt{(1,902 \cdot 10^4)^2 - 1,902 \cdot 10^4 \cdot 6,251 \cdot 10^4 + (6,251 \cdot 10^4)^2} = \\ &= 2,081 \cdot 10^8 \text{ Па} < R = 2,1 \cdot 10^8 \text{ Па}. \end{aligned}$$

Таким образом, прочность плиты обеспечена с погрешностью 0,9%.

З а м е ч а н и е. Рассматриваемая плита рассчитывалась как пластина без упругого основания шарнирно опертая по контуру в §2 контрольной работы. Её толщина по теории Губера – Мизеса – Генки получилась равной 4,11 см. при нагрузке в 800 Кн/м². Наша плита на упругом основании толщиной 4 см. выдерживает нагрузку 3150 Кн/м², то есть её грузоподъемность увеличилась в 3,9 раза.

9. *Определяем распределённые реакции.* На основании соотношений (62) получаем

$$1) 0 \leq x \leq a, \quad y = 0$$

$$V_x = 1,111 \cdot 10^6 \cdot 5,576 \cdot 10^{-3} \cdot \left[\frac{1^3}{3^3} + (2 - 0,3) \frac{1 \cdot 1^2}{3 \cdot 1^2} \right] \cdot \cos \frac{1 \cdot \pi \cdot x}{3} \cdot \sin \frac{1 \cdot \pi \cdot y}{1} = 0;$$

$$\begin{aligned} V_y &= 1,111 \cdot 10^6 \cdot 5,576 \cdot 10^{-3} \cdot \left[\frac{1^3}{1^3} + (2 - 0,3) \frac{1 \cdot 1^2}{1 \cdot 3^2} \right] \cdot \sin \frac{1 \cdot \pi \cdot x}{3} \cdot \cos \frac{1 \cdot \pi \cdot y}{1} = \\ &= 6,195 \cdot 10^3 \cdot \left[\frac{1^3}{1^3} + (2 - 0,3) \frac{1 \cdot 1^2}{1 \cdot 3^2} \right] \cdot \sin \frac{1 \cdot \pi \cdot x}{3} = 7,365 \cdot 10^3 \cdot \sin \frac{\pi x}{3}. \end{aligned}$$

$$2) 0 \leq x \leq a, \quad y = 1$$

$$V_x = 1,111 \cdot 10^6 \cdot 5,576 \cdot 10^{-3} \cdot \left[\frac{1^3}{3^3} + (2 - 0,3) \frac{1 \cdot 1^2}{3 \cdot 1^2} \right] \cdot \cos \frac{1 \cdot \pi \cdot x}{3} \cdot \sin \frac{1 \cdot \pi \cdot y}{1} = 0;$$

$$V_y = 1,111 \cdot 10^6 \cdot 5,576 \cdot 10^{-3} \cdot \left[\frac{1^3}{1^3} + (2 - 0,3) \frac{1 \cdot 1^2}{1 \cdot 3^2} \right] \cdot \sin \frac{1 \cdot \pi \cdot x}{3} \cdot \cos \frac{1 \cdot \pi \cdot y}{1} =$$

$$= -6,195 \cdot 10^3 \cdot \left[\frac{1^3}{1^3} + (2 - 0,3) \frac{1 \cdot 1^2}{1 \cdot 3^2} \right] \cdot \sin \frac{1 \cdot \pi \cdot x}{3} = -7,365 \cdot 10^3 \cdot \sin \frac{\pi x}{3}.$$

3) $x = 0, \quad 0 \leq y \leq b$

$$V_x = 1,111 \cdot 10^6 \cdot 5,576 \cdot 10^{-3} \cdot \left[\frac{1^3}{3^3} + (2 - 0,3) \frac{1 \cdot 1^2}{3 \cdot 1^2} \right] \cdot \cos \frac{1 \cdot \pi \cdot x}{3} \cdot \sin \frac{1 \cdot \pi \cdot y}{1} =$$

$$= 6,195 \cdot 10^3 \cdot \left[\frac{1^3}{3^3} + (2 - 0,3) \frac{1 \cdot 1^2}{3 \cdot 1^2} \right] \cdot \sin \frac{1 \cdot \pi \cdot y}{1} = 7,365 \cdot 10^3 \cdot \sin \pi y;$$

$$V_y = 1,111 \cdot 10^6 \cdot 5,576 \cdot 10^{-3} \cdot \left[\frac{1^3}{1^3} + (2 - 0,3) \frac{1 \cdot 1^2}{1 \cdot 3^2} \right] \cdot \sin \frac{1 \cdot \pi \cdot x}{3} \cdot \cos \frac{1 \cdot \pi \cdot y}{1} = 0.$$

4) $x = a, \quad 0 \leq y \leq b$

$$V_x = 1,111 \cdot 10^6 \cdot 5,576 \cdot 10^{-3} \cdot \left[\frac{1^3}{3^3} + (2 - 0,3) \frac{1 \cdot 1^2}{3 \cdot 1^2} \right] \cdot \cos \frac{1 \cdot \pi \cdot x}{3} \cdot \sin \frac{1 \cdot \pi \cdot y}{1} =$$

$$= -6,195 \cdot 10^3 \cdot \left[\frac{1^3}{3^3} + (2 - 0,3) \frac{1 \cdot 1^2}{3 \cdot 1^2} \right] \cdot \sin \frac{1 \cdot \pi \cdot y}{1} = -7,365 \cdot 10^3 \cdot \sin \pi y;$$

$$V_y = 1,111 \cdot 10^6 \cdot 5,576 \cdot 10^{-3} \cdot \left[\frac{1^3}{1^3} + (2 - 0,3) \frac{1 \cdot 1^2}{1 \cdot 3^2} \right] \cdot \sin \frac{1 \cdot \pi \cdot x}{3} \cdot \cos \frac{1 \cdot \pi \cdot y}{1} = 0.$$

10. *Строим эпюры распределённых реакций.* В соответствии с полученными формулами для распределённых поперечных сил на опорах V_x и V_y строим эпюры распределённых реакций по точкам (рис. 26). Результаты численных расчётов сведены в табл. 15. Вычисления показывают, что распределённые реакции вдоль контура пластины направлены вверх и одинаковы на противоположных сторонах пластины.

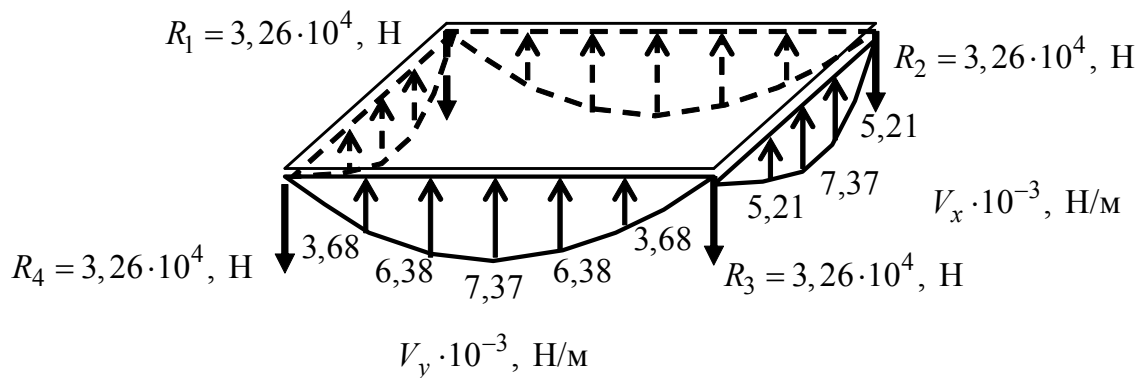


Рис. 26

Таблица 15

x, м	y=0, м	y=1, м	y, м	x=0, м	x=3, м
	V_y , Н/м	V_y , Н/м		V_x , Н/м	V_x , Н/м
0	0,00E+00	0,00E+00	0	0,00E+00	0,00E+00
0,5	3,68E+03	-3,68E+03	0,25	5,21E+03	-5,21E+03
1	6,38E+03	-6,38E+03	0,5	7,37E+03	-7,37E+03
1,5	7,37E+03	-7,37E+03	0,75	5,21E+03	-5,21E+03
2	6,38E+03	-6,38E+03	0	0,00E+00	0,00E+00
2,5	3,68E+03	-3,68E+03			
3	0,00E+00	0,00E+00			

11. Определяем сосредоточенные реакции в углах пластины.

$$R_1 = -2 \cdot 1,111 \cdot 10^6 \cdot (1 - 0,3) \cdot 5,576 \cdot 10^{-3} \cdot \pi^2 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{1} = -3,261 \cdot 10^4 \text{ Н}$$

$$R_2 = -2 \cdot 1,111 \cdot 10^6 \cdot (1 - 0,3) \cdot 5,576 \cdot 10^{-3} \cdot \pi^2 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{1} \cdot \cos(1 \cdot \pi) =$$

$$= 3,261 \cdot 10^4 \text{ Н}$$

$$R_3 = -2 \cdot 1,111 \cdot 10^6 \cdot (1 - 0,3) \cdot 5,576 \cdot 10^{-3} \cdot \pi^2 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{1} \cdot \cos(1 \cdot \pi) \cdot \cos(1 \cdot \pi) =$$

$$= -3,261 \cdot 10^4 \text{ Н}$$

$$R_4 = -2 \cdot 1,111 \cdot 10^6 \cdot (1 - 0,3) \cdot 5,576 \cdot 10^{-3} \cdot \pi^2 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{1} \cdot \cos(1 \cdot \pi) =$$

$$= 3,261 \cdot 10^4 \text{ Н}$$

Все четыре реакции направлены вниз (рис.26), то есть в сторону действующей нагрузки. Это значит, что углы пластины надо специальным образом закреплять от подъёма.

З а м е ч а н и е . Несмотря на то, что грузоподъёмность плиты на упругом основании по сравнению с пластиной без упругого основания увеличилась почти в четыре раза, распределённые опорные реакции и сосредоточенные реакции в углах плиты увеличились незначительно (до 10%). Это следует из сравнения числовых значений, представленных на рис. 21 и 26.

Решение задачи с использованием математического пакета MathCAD

Ниже, в качестве примера, представлено решение рассмотренной задачи об изгибе тонкой плиты на упругом основании с двумя коэффициентами постели с использованием математического пакета MathCAD.

Расчёт плиты на упругом основании.

Система СИ.

Определяем пользовательские единицы измерений:

1 ньютон	$H := 1N$
1 ньютон * 1 метр	$Hm := H \cdot m$
1 ньютон / 1 метр	$Hdm := \frac{H}{m}$
1 ньютон * 1 квадратный метр	$Hm2 := H \cdot m^2$
1 паскаль = 1 ньютон / 1 квадратный метр	$Pa := \frac{H}{m^2}$
1 ньютон / 1 метр в кубе	$Hdm3 := \frac{H}{m^3}$

Исходные данные:

$a := 3 \cdot m$	$b := 1 \cdot m$	$h := 0.04 \cdot m$
$a1 := 0.5 \cdot m$	$a2 := 2.5 \cdot m$	$b1 := 0.25 \cdot m$
$E := 2 \cdot 10^{11} \cdot Pa$	$R := 2.1 \cdot 10^8 \cdot Pa$	$v := 0.2$
$E0 := 4 \cdot 10^7 \cdot Pa$	$v0 := 0.3$	$q := 31.5 \cdot 10^5 \cdot Pa$
	$HT := 10 \cdot m$	$xm := \frac{a}{2}$
		$ym := \frac{b}{2}$

Вычисляем коэффициенты постели:

$$c1 := \frac{(1 - v0) \cdot E0}{(1 + v0) \cdot (1 - 2 \cdot v0) \cdot HT} \quad c1 = Hdm3$$

$$c2 := \frac{E0 \cdot HT}{8 \cdot (1 + v0)} \quad c2 = Hdm$$

Находим цилиндрическую жёсткость плиты

$$D := \frac{E \cdot h^3}{12 \cdot (1 - v^2)} \quad D = Hm$$

Определяем коэффициенты ряда Фурье :

$$A1(m, n) := \frac{4 \cdot q \cdot a^4}{m \cdot n \cdot \pi^6 \cdot D} \cdot \frac{1}{\left[m^2 + n^2 \cdot \left(\frac{a}{b} \right)^2 \right]^2 + \frac{(c1 \cdot a^4)}{\pi^4 \cdot D} + \left(\frac{c2 \cdot a^2}{\pi^2 \cdot D} \right) \cdot \left[m^2 + n^2 \cdot \left(\frac{a}{b} \right)^2 \right]}$$

$$A2(m, n) := \left(\cos\left(\frac{m \cdot \pi \cdot a2}{a} \right) - \cos\left(\frac{m \cdot \pi \cdot a1}{a} \right) \right) \cdot \left(\cos\left(\frac{n \cdot \pi \cdot b2}{b} \right) - \cos\left(\frac{n \cdot \pi \cdot b1}{b} \right) \right)$$

$$A(m, n) := A1(m, n) \cdot A2(m, n)$$

$$A11 := A(1, 1)$$

$$A11 = 5.576E-003 \text{ m}$$

$$A12 := A(1, 2)$$

$$A12 = 0E+000 \text{ m}$$

$$A21 := A(2, 1)$$

$$A21 = 0E+000 \text{ m}$$

$$A22 := A(2, 2)$$

$$A22 = 0E+000 \text{ m}$$

Сконструируем приближённое уравнение изогнутой поверхности срединного слоя:

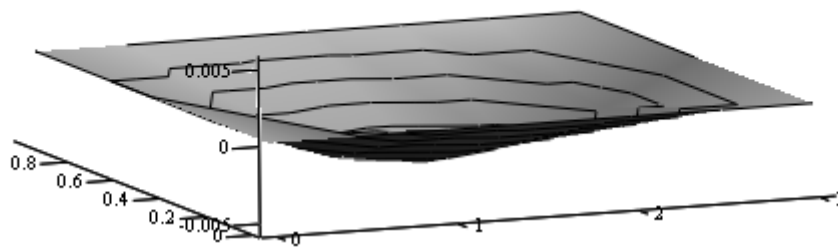
$$w1(x, y) := A11 \cdot \sin\left(\frac{\pi \cdot x}{a}\right) \cdot \sin\left(\frac{\pi \cdot y}{b}\right) + A12 \cdot \sin\left(\frac{\pi \cdot x}{a}\right) \cdot \sin\left(\frac{2 \cdot \pi \cdot y}{b}\right)$$

$$w2(x, y) := A21 \cdot \sin\left(\frac{2 \cdot \pi \cdot x}{a}\right) \cdot \sin\left(\frac{\pi \cdot y}{b}\right) + A22 \cdot \sin\left(\frac{2 \cdot \pi \cdot x}{a}\right) \cdot \sin\left(\frac{2 \cdot \pi \cdot y}{b}\right)$$

$$w(x, y) := w1(x, y) + w2(x, y)$$

Построение изогнутой поверхности срединного слоя:

$$W(x, y) := -w(x, y)$$



W

Максимальное значение относительного прогиба возникает в середине пластины и равно:

$$\max W_{xy} := w(x_m, y_m)$$

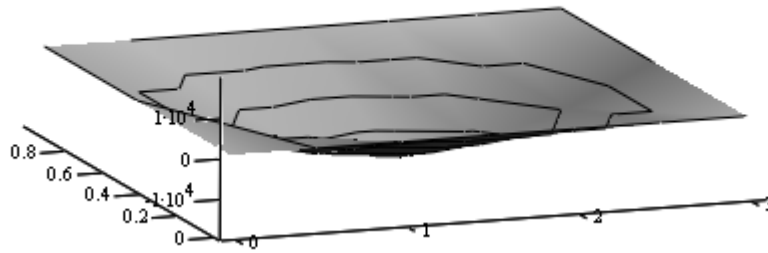
$$\max W_{xy} = 5.576E-003 \text{ m}$$

Определяем функции внутренних усилий:

Изгибающий момент $M_x(x, y)$

$$M_x(x, y) := D \cdot \sum_{m=1}^2 \sum_{n=1}^2 \left[A(m, n) \cdot \pi^2 \cdot \left(\frac{m^2}{a^2} + \nu \cdot \frac{n^2}{b^2} \right) \cdot \sin\left(\frac{m \cdot \pi \cdot x}{a}\right) \cdot \sin\left(\frac{n \cdot \pi \cdot y}{b}\right) \right]$$

$$MM_x(x, y) := -M_x(x, y)$$



MMx

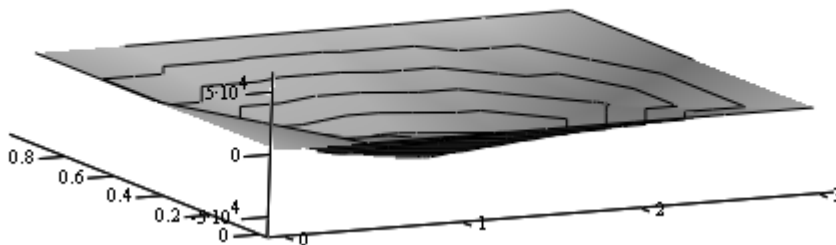
Максимальное значение изгибающего момента Mx возникает в середине пластины и равно:

$$\max M_x := M_x(x_m, y_m) \quad \max M_x = 1.902E+004H$$

Изгибающий момент My(x,y):

$$M_y(x, y) := D \cdot \sum_{m=1}^2 \sum_{n=1}^2 \left[A(m, n) \cdot \pi^2 \cdot \left(\frac{n^2}{b^2} + \nu \cdot \frac{m^2}{a^2} \right) \cdot \sin\left(\frac{m \cdot \pi \cdot x}{a}\right) \cdot \sin\left(\frac{n \cdot \pi \cdot y}{b}\right) \right]$$

$$MM_y(x, y) := -M_y(x, y)$$



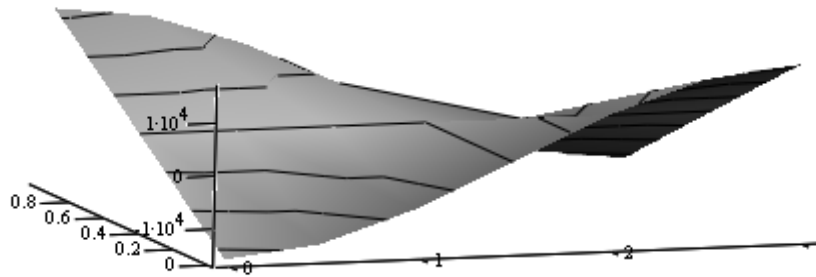
MMy

Максимальное значение изгибающего момента My возникает в середине пластины и равно:

$$\max M_y := M_y(x_m, y_m) \quad \max M_y = 6.251E+004H$$

Крутящий момент Mxy(x,y)

$$M_{xy}(x, y) := -D \cdot (1 - \nu) \cdot \left[\sum_{m=1}^2 \sum_{n=1}^2 \left(A(m, n) \cdot \pi^2 \cdot \frac{m \cdot n}{a \cdot b} \cdot \cos\left(\frac{m \cdot \pi \cdot x}{a}\right) \cdot \cos\left(\frac{n \cdot \pi \cdot y}{b}\right) \right) \right]$$



M_{xy}

Экстремальные значения крутящего момента M_{xy} возникают в углах пластины:

$$\max M_{xy00} := M_{xy}(0 \cdot m, 0 \cdot m)$$

$$\max M_{xy00} = -1.631E+004 \text{ Н}$$

$$\max M_{xy31} := M_{xy}(3 \cdot m, 1 \cdot m)$$

$$\max M_{xy31} = -1.631E+004 \text{ Н}$$

$$\max M_{xy01} := M_{xy}(0 \cdot m, 1 \cdot m)$$

$$\max M_{xy01} = 1.631E+004 \text{ Н}$$

$$\max M_{xy30} := M_{xy}(3 \cdot m, 0 \cdot m)$$

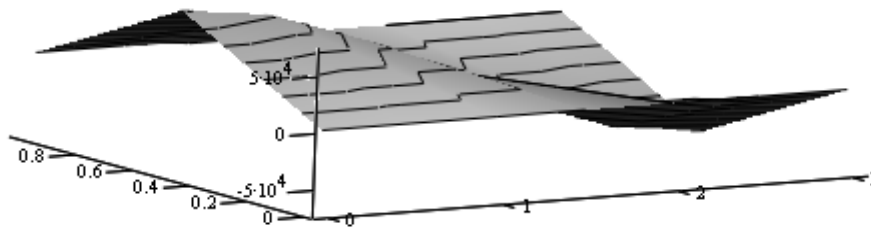
$$\max M_{xy30} = 1.631E+004 \text{ Н}$$

В середине пластины значение крутящего момента

$$M_{xy}(x_m, y_m) = 0E+000 \text{ Н}$$

Поперечная сила $Q_x(x, y)$:

$$Q_x(x, y) := D \cdot \sum_{m=1}^2 \sum_{n=1}^2 \left[A(m, n) \cdot \pi^3 \cdot \left(\frac{m^3}{a^3} + \frac{m \cdot n^2}{a \cdot b^2} \right) \cdot \cos\left(\frac{m \cdot \pi \cdot x}{a}\right) \cdot \sin\left(\frac{n \cdot \pi \cdot y}{b}\right) \right]$$



Q_x

Экстремальные значения поперечной силы Q_x возникают в середине меньшей стороны пластины и равны:

$$\max Q_{x0} := Q_x(0 \cdot m, 0.5 \cdot m)$$

$$\max Q_{x0} = 7.115E+004 \text{ Ндм}$$

$$\max Q_{x3} := Q_x(3 \cdot m, 0.5 \cdot m)$$

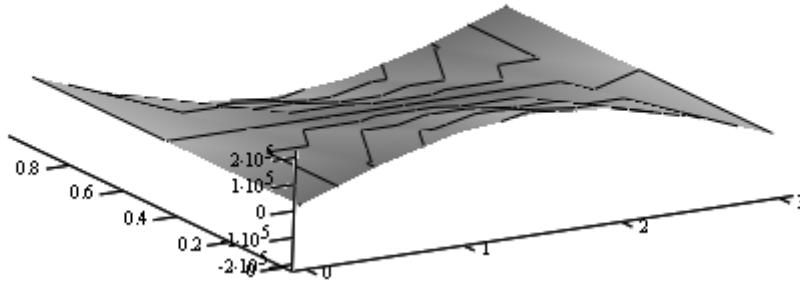
$$\max Q_{x3} = -7.115E+004 \text{ Ндм}$$

В центре пластины значение поперечной силы Q_x равно:

$$Q_x(x_m, y_m) = 4.357E-012 \text{ Ндм}$$

■ Поперечная сила $Q_y(x,y)$:

$$Q_y(x,y) := D \cdot \sum_{m=1}^2 \sum_{n=1}^2 \left[A(m,n) \cdot \pi^3 \cdot \left(\frac{n^3}{b^3} + \frac{n \cdot m^2}{b \cdot a^2} \right) \cdot \sin\left(\frac{m \cdot \pi \cdot x}{a}\right) \cdot \cos\left(\frac{n \cdot \pi \cdot y}{b}\right) \right]$$



Q_y

Экстремальные значения поперечной силы Q_y возникают в середине большей стороны пластины:

$$\max Q_{y0} := Q_y(1.5 \cdot m, 0 \cdot m)$$

$$\max Q_{y0} = 2.135E+005 Hdm$$

$$\max Q_{y1} := Q_y(1.5 \cdot m, 1 \cdot m)$$

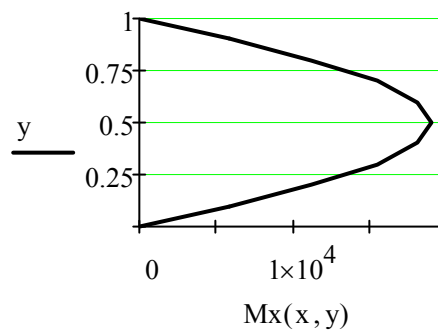
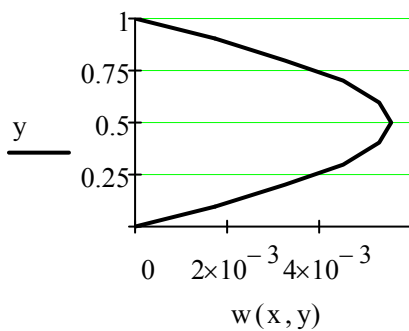
$$\max Q_{y1} = -2.135E+005 Hdm$$

В центре пластины поперечная сила

$$Q_y(x_m, y_m) = -9.522E-012 Hdm$$

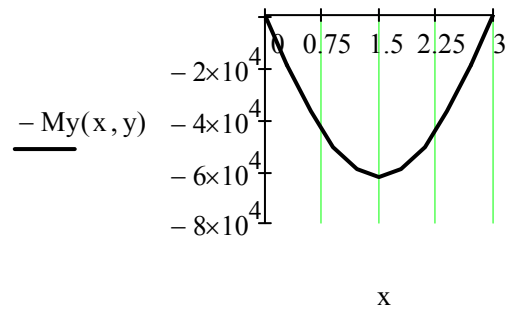
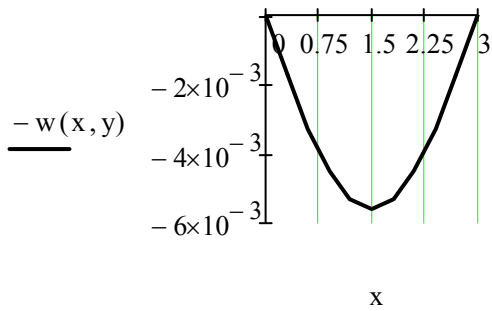
Построение эюр прогибов и изгибающих моментов.

1. Сечение $x := x_m \quad y := 0, \left(\frac{b}{10}\right) .. b$



2. Сечение $x := 0, \left(\frac{a}{10}\right) .. a$

$y := y_m$



Проверяем прочность плиты по теории прочности Губера-Мизеса-Генки:

$$\sigma_e := \left(\frac{6}{h^2} \right) \cdot \sqrt{\max M_x^2 - \max M_x \max M_y + \max M_y^2} \quad R = 2.1E+008 \text{ Pa}$$

$$\sigma_e = 2.081E+008 \text{ Pa}$$

$$\underline{\underline{L}} := \sigma_e \leq R \quad L = 1E+000$$

Прочность плиты обеспечена.

Погрешность по прочности составляет:

$$\frac{|\sigma_e - R|}{R} \cdot 100 = 8.925E+001\%$$

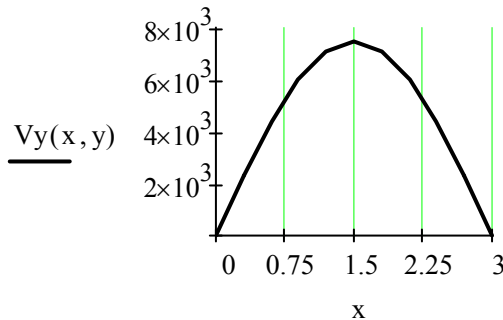
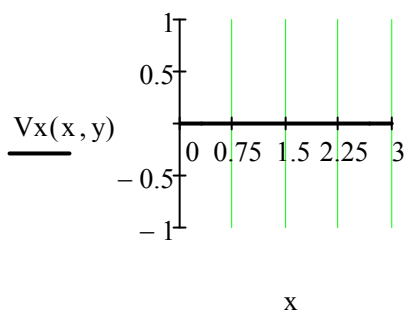
Вычисляем распределённые реакции на опорах:

$$V_x(x, y) := D \cdot \sum_{m=1}^2 \sum_{n=1}^2 \left[A(m, n) \cdot \left[\frac{m^3}{a^3} + (2 - \nu) \cdot \frac{m \cdot n^2}{a \cdot b^2} \right] \cdot \cos\left(\frac{m \cdot \pi \cdot x}{a}\right) \cdot \sin\left(\frac{n \cdot \pi \cdot y}{b}\right) \right]$$

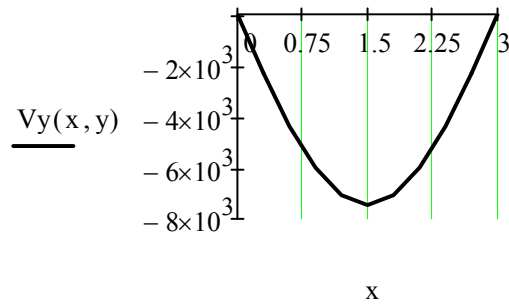
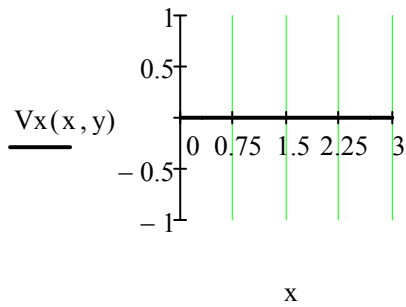
$$V_y(x, y) := D \cdot \sum_{m=1}^2 \sum_{n=1}^2 \left[A(m, n) \cdot \left[\frac{n^3}{b^3} + (2 - \nu) \cdot \frac{n \cdot m^2}{b \cdot a^2} \right] \cdot \sin\left(\frac{m \cdot \pi \cdot x}{a}\right) \cdot \cos\left(\frac{n \cdot \pi \cdot y}{b}\right) \right]$$

Построение эюр распределённых реакций.

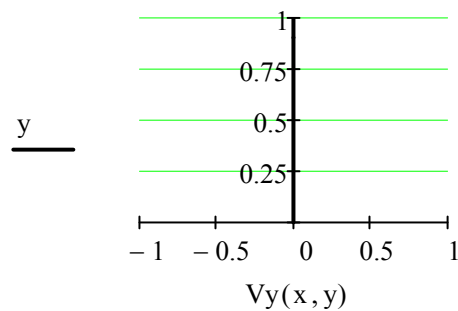
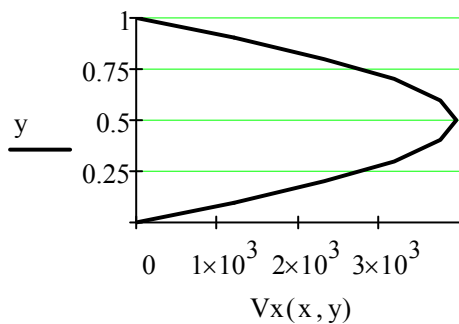
Опора $x := 0, \left(\frac{a}{10}\right) .. a$ $\underline{\underline{y}} := 0$



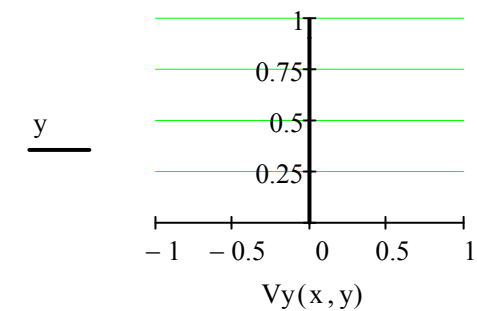
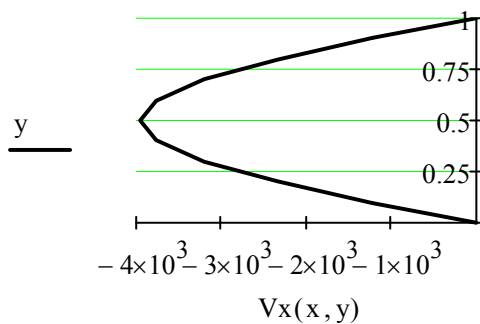
Опора $x := 0, \left(\frac{a}{10}\right) .. a$ $\underline{\underline{y}} := b$



Опора $x := 0$ $y := 0, \left(\frac{b}{10}\right) .. b$



Опора $x := a$ $y := 0, \left(\frac{b}{10}\right) .. b$



Вычисляем величину сосредоточенных реакций в углах пластины:

$$R1 := -2 \cdot D \cdot (1 - \nu) \cdot \sum_{m=1}^2 \sum_{n=1}^2 \left[A(m, n) \cdot \pi^2 \cdot \left(\frac{m}{a}\right) \cdot \left(\frac{n}{b}\right) \right]$$

$$R1 = -3.261E+004 \text{ H}$$

$$R2 := -2 \cdot D \cdot (1 - \nu) \cdot \sum_{m=1}^2 \sum_{n=1}^2 \left[A(m, n) \cdot \pi^2 \cdot \left(\frac{m}{a}\right) \cdot \left(\frac{n}{b}\right) \cdot \cos(m \cdot \pi) \right]$$

$$R2 = 3.261E+004 \text{ H}$$

$$R3 := -2 \cdot D \cdot (1 - \nu) \cdot \sum_{m=1}^2 \sum_{n=1}^2 \left[A(m, n) \cdot \pi^2 \cdot \left(\frac{m}{a}\right) \cdot \left(\frac{n}{b}\right) \cdot \cos(m \cdot \pi) \cdot \cos(n \cdot \pi) \right]$$

$$R3 = H$$

$$R4 := -2 \cdot D \cdot (1 - \nu) \cdot \sum_{m=1}^2 \sum_{n=1}^2 \left[A(m, n) \cdot \pi^2 \cdot \left(\frac{m}{a}\right) \cdot \left(\frac{n}{b}\right) \cdot \cos(n \cdot \pi) \right]$$

$$R4 = H$$

Все четыре реакции направлены вниз. Это значит, что углы пластины надо специальным образом закреплять от подъёма.

Контрольные вопросы.

1. Какие вы знаете модели упругого основания под строительные конструкции?
2. Чем отличается плита, опёртая по контуру от плиты на упругом основании?
3. Какие гипотезы положены в основу расчёта плит на упругом основании?
4. Как записывается условие контактности плиты и упругого основания?
5. Сформулируйте основные допущения, положенные в основу модели упругого основания Фусса – Винклера.
6. Дайте механическую трактовку модели упругого основания Фусса – Винклера.
7. Какими недостатками обладает модель упругого основания Фусса – Винклера?
8. Каковы достоинства модели упругого основания Фусса – Винклера?
9. Как определяется реакция основания в модели упругого основания Фусса – Винклера?
10. Что называется коэффициентом постели?
11. Охарактеризуйте модель упругого основания в виде упругого полупространства.
12. Сформулируйте основные допущения, положенные в основу модели упругого основания с двумя коэффициентами постели.
13. В чём отличие модели упругого полупространства с двумя коэффициентами постели от модели упругого основания Фусса – Винклера?
14. Как определяется реакция основания в модели упругого основания с двумя коэффициентами постели?
15. Как формулируются краевые условия для плиты на упругом основании?
16. Запишите приближённое дифференциальное уравнение изогнутой срединной поверхности плиты на упругом основании с двумя коэффициентами постели.

17. Как определяются внутренние усилия, напряжения, деформации, перемещения в плите на упругом основании?

18. Как определяются приведённые поперечные силы (контурные опорные реакции) и опорные реакции в углах плиты на упругом основании?

19. Какие существуют методы расчёта плит на упругом основании?

20. Сформулируйте алгоритм расчёта плиты на упругом основании с шарнирным опиранием по контуру методом двойных тригонометрических рядов (методом Навье).

21. Как записывается приближённое уравнение изогнутой поверхности плиты на упругом основании в виде двойного тригонометрического ряда?

22. Из каких условий определяются коэффициенты ряда Фурье?

23. В чём заключается отличие расчёта плиты на упругом основании от расчёта плиты опёртой по контуру?

Заключение

Содержание учебного пособия соответствует Федеральному государственному образовательному стандарту высшего образования по направлению подготовки 08.03.01 Строительство (уровень бакалавриата) 2013 г.

При изучении дисциплины “Теория упругости” студенты должны получить исчерпывающие сведения о предмете, задачах и возможностях теории упругости при расчёте элементов строительных конструкций. Освоить основные понятия теории упругости: напряжённое и деформированное состояние в точке, связь между напряжениями и деформациями, теории прочности. Иметь представление о задачах теории упругости: прямая задача – решение в напряжениях и перемещениях, обратная задача. Знать методы решения задач теории упругости: решение плоской задачи с использованием функции напряжений в виде целых полиномов и в виде тригонометрических рядов Фурье; решение плоской задачи методом конечных разностей и методом конечных элементов; расчёт тонких плит при помощи двойных и одинарных тригонометрических рядов, методом конечных разностей, методом конечных элементов. Получить практические навыки решения задач расчёта элементов строительных конструкций методами теории упругости.

Программа любого курса должна в целом отражать современное его состояние. Однако это не следует понимать в том смысле, что в программу надо включить максимальное количество информации, накопленное в данной области науки. Количество этой информации сейчас таково, что не только всю, но даже существенную часть ее ни в каком нормально построенном учебном курсе изложить не возможно. Поэтому, при разработке содержания данного учебного пособия, мы ограничились плоской задачей теории упругости и расчётом изгибаемых пластин и плит на упругом основании. Решение этих задач позволяет познакомиться в общих чертах с содержанием и математической и прикладной теорией упругости.

Конечно, наряду с рассмотренными методами решения задач теории упругости – это решение плоской задачи теории упругости в напряжениях при помощи целых полиномов, расчёт изгибаемых пластин при помощи двойных тригонометрических рядов – существуют и другие. Например, и решение плоской задачи теории упругости, и решение задачи на изгиб плиты можно выполнять при помощи одинарных тригонометрических рядов (решение Файлона или Рибьера для плоской задачи, решение Леви для расчёта плиты), либо методом конечных разностей, либо методом конечных элементов и так далее. Однако, цель, поставленная перед курсом теории упругости заключается не в том, чтобы дать студентам как можно больший объём информации, а в том, чтобы научить их видеть, понимать и чувствовать работу конструкции, ощущать её напряженно-деформированное состояние.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

I. Учебники по теории упругости

1. Александров, А.В. Основы теории упругости и пластичности [Текст] / А.В. Александров, В.Д. Потапов. – М.: Высшая школа, 1990. – 399 с.
2. Бакушев, С.В. Теория упругости: Руководство к выполнению контрольной работы [Текст] / С.В. Бакушев, В.В. Зернов, В.Д. Тихомиров. – Пенза: ПГУАС, 2004. – 128 с.
3. Безухов, Н.И. Основы теории упругости, пластичности и ползучести [Текст] / Н.И. Безухов. – М.: Высшая школа., 1968. – 512 с.
4. Вайнберг, Д.В. Расчёт пластин [Текст] / Д.В. Вайнберг, Е.Д. Вайнберг. – Киев, Будивельник, 1970.
5. Власов, В.З. Балки, плиты и оболочки на упругом основании [Текст] / В.З. Власов, Н.Н. Леонтьев. – М.: Физматгиз, 1960.
6. Гольденблат, И.И. Критерии прочности и пластичности конструкционных материалов [Текст] / И.И. Гольденблат, В.А. Копнов. – М.: Машиностроение, 1968. – 192 с.
7. Горбунов-Посадов, М.И. Балки и плиты на упругом основании [Текст] / М.И. Горбунов-Посадов. – М.: Стройиздат, 1949.
8. Горбунов-Посадов, М.И. Расчёт конструкций на упругом основании [Текст] / М.И. Горбунов-Посадов, Т.А. Маликова, В.И. Соломин. – 3-е изд. перераб. и доп. – М.: Стройиздат, 1984. – 679 с.
9. Жемочкин, Б.Н. Теория упругости [Текст] / Б.Н. Жемочкин. – М.: Госстройиздат, 1957. – 256 с.
10. Киселёв, В.А. Расчёт пластин [Текст] / В.А. Киселёв. – М., Стройиздат, 1973. – 152 с.
11. Киселёв, В.П. Плоская задача теории упругости [Текст]: учеб. пособие для вузов / В.П. Киселёв. – М., Высш. школа, 1976. – 151 с.
12. Огибалов, П.М. Оболочки и пластинки [Текст] / П.М. Огибалов, М.А. Колтунов. – М.: Изд-во МГУ, 1969. – 696 с.
13. Подгорный, А.Н. Основы и методы прикладной теории упругости [Текст]: учеб. пособие для вузов / А.Н. Подгорный, Г.А. Марченко, В.И. Пустынников. – Киев: Вища школа. Головное изд-во. 1981. – 328 с.
14. Тимошенко, С.П. Пластинки и оболочки [Текст] / С.П. Тимошенко, С. Войновский-Кригер. – М., Физматгиз, 1966. – 636 с.
15. Тимошенко, С.П. Теория упругости [Текст] / С.П. Тимошенко, Дж. Гудьер. – М.: Наука, 1975. – 575 с.
16. Филоненко-Бородич, М.М. Теория упругости [Текст] / М.М. Филоненко-Бородич. – М.: Физматгиз, 1959. – 364 с.
17. Филоненко-Бородич, М.М. Механические теории прочности [Текст] / М.М. Филоненко-Бородич. – М.: Изд-во Московского университета, 1961.

II. Учебники по сопротивлению материалов

1. Александров, А.В. Сопротивление материалов [Текст]: учебник для вузов / А.В. Александров, В.Д. Потапов, Б.П. Державин. – М.: Высшая школа, 1995. — 560 с.
2. Беляев, Н.М. Сопротивление материалов [Текст] / Н.М. Беляев. – М., Высшая школа, 1965.
3. Дарков, А.В. Сопротивление материалов [Текст] / А.В. Дарков, Г.С. Шапиро. – М.: Высшая школа, 1975. – 654с.
4. Сопротивление материалов [Текст]: учебник для вузов; под ред. А.Ф. Смирнова. –3-е изд., перераб. и доп. – М.: Высшая школа, 1975. – 480 с.
5. Феодосьев В.И. Сопротивление материалов [Текст]: учебник для вузов. – 10-е изд., перераб. и доп. – М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э.Баумана, 2000. – 592 с. (Сер. Механика в техническом университете; Т.2).

ПРИЛОЖЕНИЕ

Математический пакет MathCAD является, в некотором роде, уникальной системой для работы с числами, формулами, графикой и текстом и позволяет решать практически любую мыслимую математическую задачу численно или в символьном виде.

MathCAD допускает ввод переменных, формул и текста в любом месте рабочего документа; вычисляет арифметические выражения, предоставляя результат в удобной для пользователя форме; умеет обрабатывать размерности физических величин и производить вычисления с единицами измерений; позволяет определять переменные, функции и дискретные аргументы; строит графики кривых и поверхностей (множество типов графиков облегчают визуализацию и анализ данных); обрабатывает векторы и матрицы; обладает средствами для решения алгебраических уравнений и систем уравнений; позволяет решать краевые задачи для дифференциальных уравнений; имеет возможность выполнять символьные вычисления, преобразовывать и упрощать выражения; имеет встроенную систему программирования, а также многое, многое другое. MathCAD использует 32-разрядную модель памяти, что обеспечивает повышенную точность и быстродействие вычислений; поддерживает технологию OLE и DDE и полностью совместим с приложениями, работающими под управлением ОС Windows 95(98) и выше.

Опишем самый необходимый минимум возможностей пакета MathCAD.

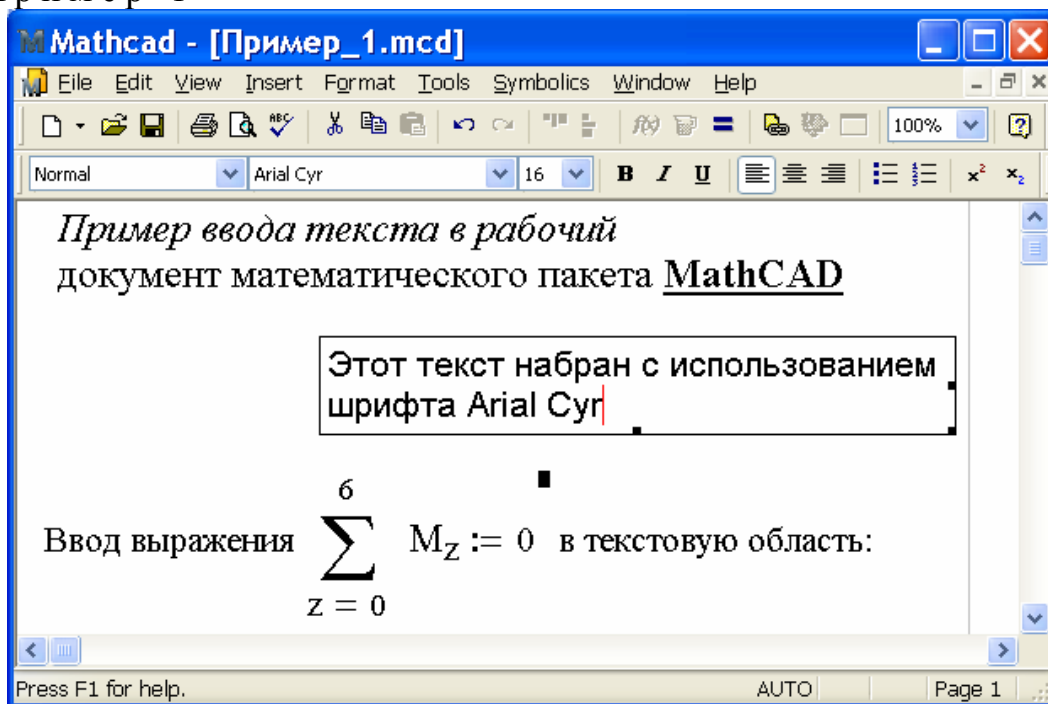
1. Для ввода текста в рабочий документ необходимо нажать клавишу с символом ". Для ввода русского текста следует установить русский регистр (в панели задач), затем выбрать русский шрифт (например, Times New Roman Cyr). Для выхода из режима ввода текста достаточно щёлкнуть мышкой в свободном поле рабочего документа.

В текстовую область можно вводить любые арифметические выражения, формулы. Для этого необходимо поместить маркер ввода внутри текстовой области в то место, где требуется разместить математическое выражение. Затем в пункте меню "Вставка" (Insert) следует выбрать подпункт "Математическая область" (Math Region). После этого необходимо ввести в текстовую область рабочего документа нужное арифметическое выражение.

Арифметическое выражение, вставленное в текстовую область, следует "отключить", то есть перевести в неактивное состояние. Для этого необходимо прежде всего выделить формулу, напечатанную в текстовой области. Затем в пункте меню "Формат" (Format) выбрать подпункт "Свойства" (Properties...) и на арифметической (Calculation) вкладке отметить галоч-

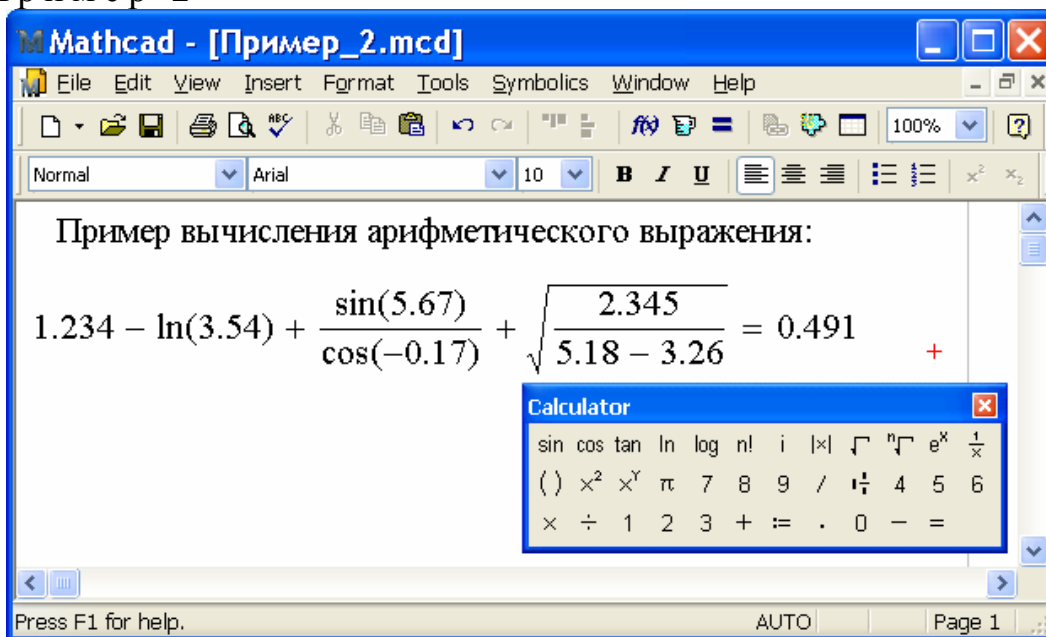
Продолжение приложения
 кой пункт "Отключить формулу" (Disable Evaluation). MathCAD отмечает неактивное уравнение небольшим прямоугольником справа.

Пример 1



2. Для вычисления *арифметического выражения* необходимо выполнить следующее: напечатать в любом месте рабочего документа нужное математическое выражение. Цифры, знаки арифметических действий, элементарные функции можно брать с арифметической (Calculator) панели. После набора знака = MathCAD вычисляет выражение и выводит результат.

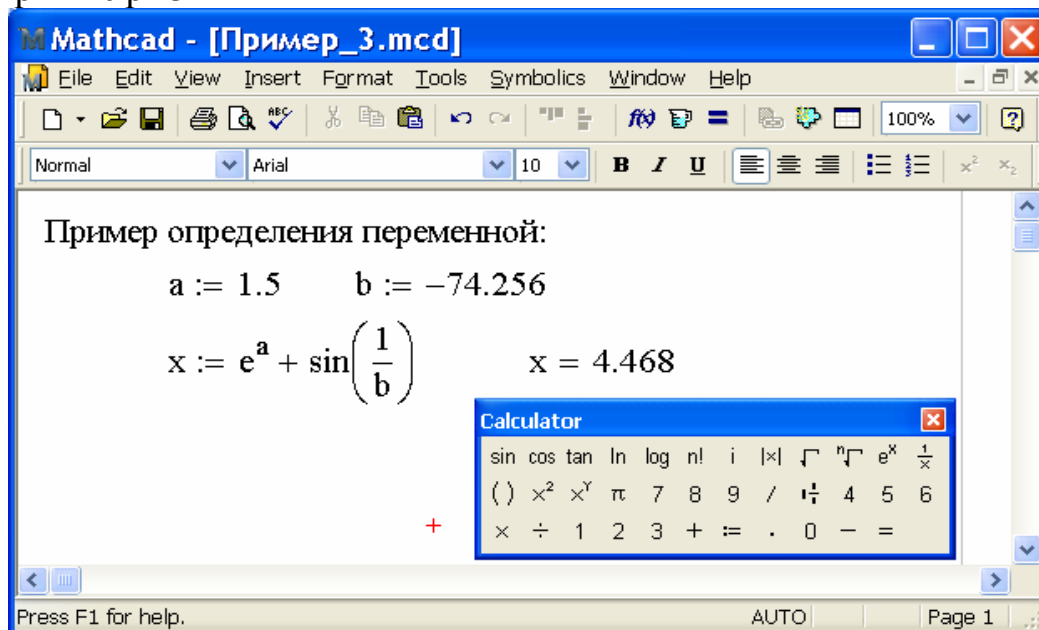
Пример 2



Продолжение приложения

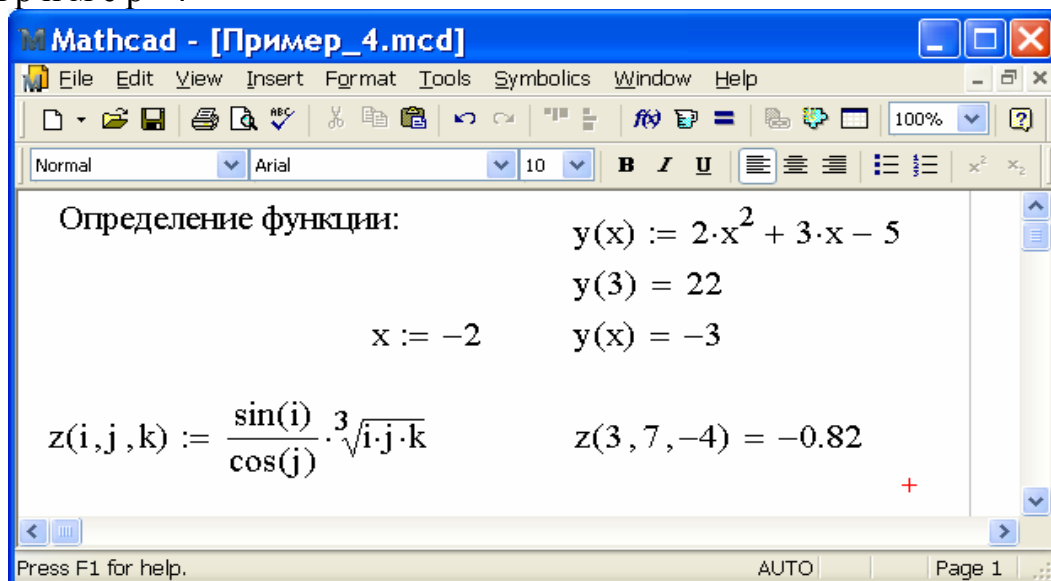
3. Для определения переменной нужно ввести имя переменной, сопровождаемое символом двоеточие (a:, b:, x:, ...). Затем после знака присваивания := следует ввести значение переменной (число или арифметическое выражение). Для просмотра значения переменной нужно набрать имя переменной и символ =.

Пример 3



4. Для определения функции нужно ввести имя функции со списком аргументов, взятых в круглые скобки. После знака присваивания следует ввести арифметическое выражение, вычисляющее значение функции. Для просмотра значения функции для заданного значения аргументов необходимо набрать имя функции со списком аргументов в скобках и нажать клавишу со знаком =.

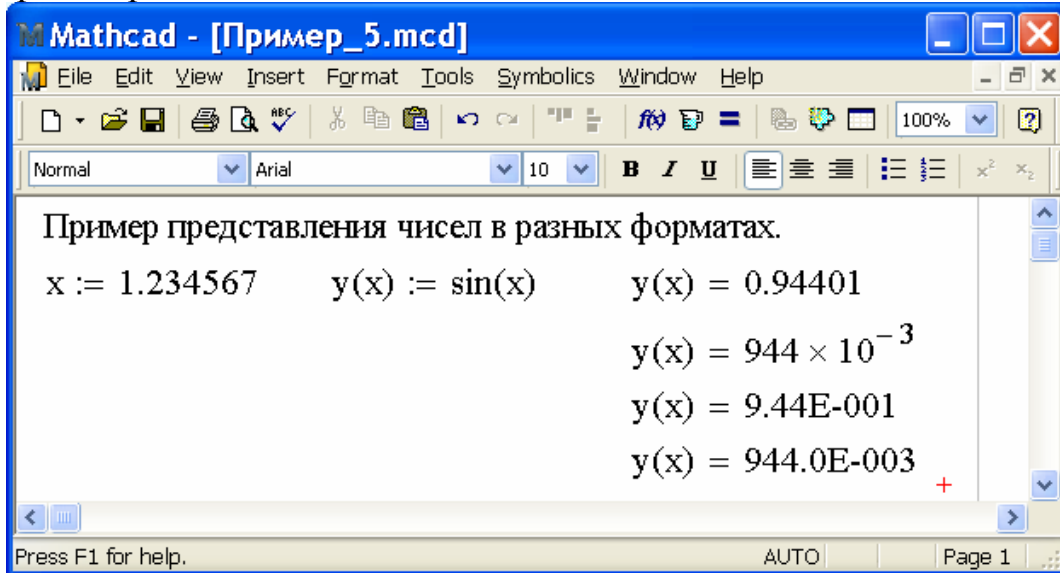
Пример 4



Продолжение приложения

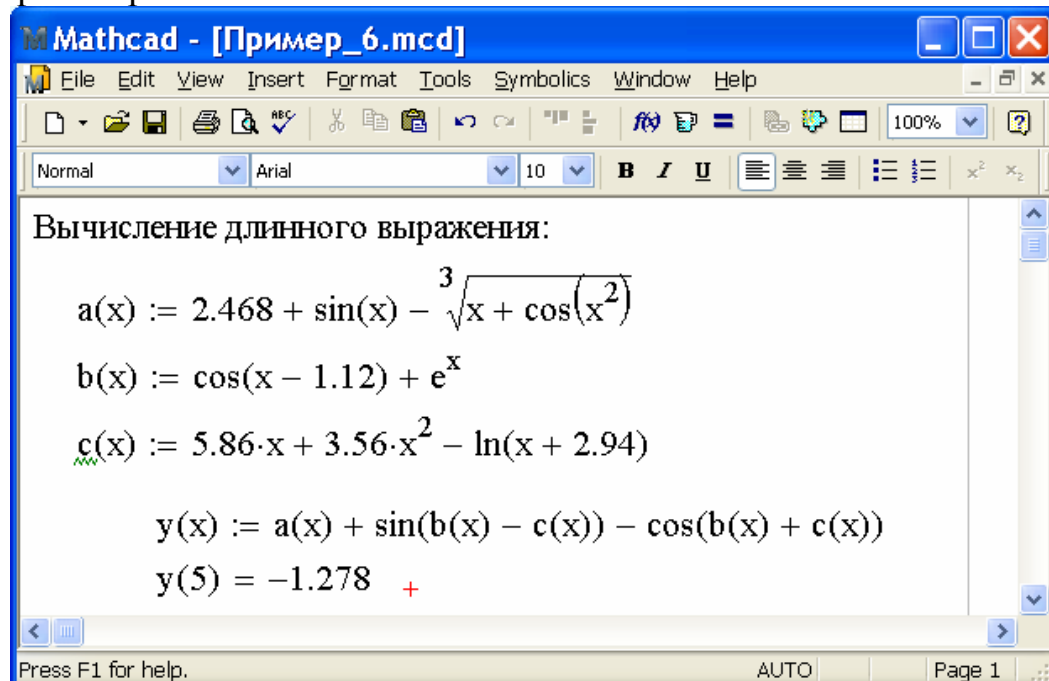
5. MathCAD может устанавливать формат вывода чисел, то есть изменять число выводимых десятичных знаков, менять экспоненциальный вид представления чисел на обычную запись с десятичной точкой и так далее. Для этого необходимо воспользоваться панелью “Формат результата” (Result Format) пункта меню “Формат” (Format).

Пример 5



6. Если при вычислении переменной или функции выражение, стоящее в правой части, достаточно длинное и не помещается на одной странице рабочего документа, его удобнее разбить на несколько частей (MathCAD не позволяет переносить запись выражения на другую строку методом продолжения строки):

Пример 6



Продолжение приложения

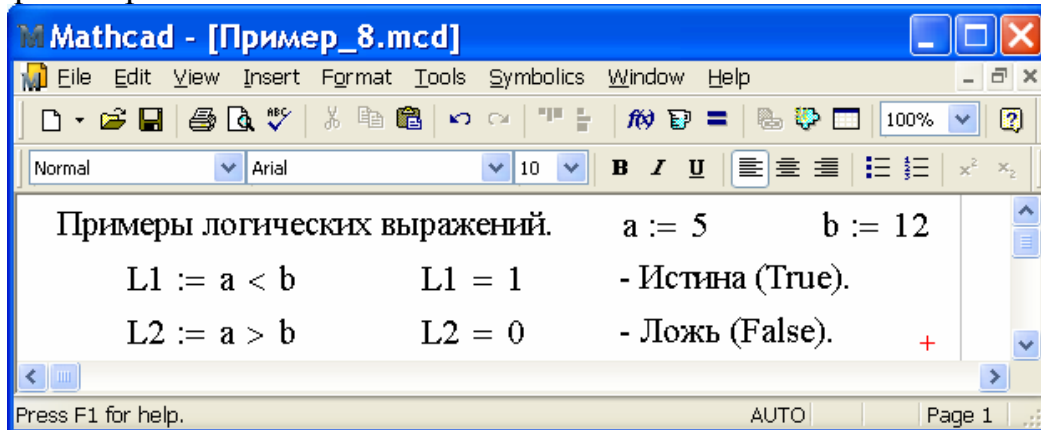
7. Для того чтобы вычислить выражение или значение функции для диапазона значений, сначала нужно определить *дискретный* аргумент. Делается это так: в правой части определения переменной задаётся начальное значение аргумента, затем через запятую – следующее значение аргумента и, наконец, через две точки (..) – последнее значение аргумента. При просмотре значений дискретного аргумента или соответствующей функции, зависящей от него, на экране отображаются таблицы. **З а м е ч а н и е**: для ввода символа (..) необходимо нажать на клавиатуре латинской раскладки клавишу с символом (;).

Пример 7

x =	y(x) =
-3	-80
-2	-27
-1	-4
0	1
1	0
2	5
3	28

8. MathCAD позволяет вычислять *логические выражения*. Логические выражения строятся из логических операндов, соединённых знаками логических операций (NOT – логическое отрицание "не", AND – логическое умножение "и", OR – логическое сложение "или"). Логическими операндами могут быть арифметические выражения, соединённые знаками операций отношения ($>$, $<$, \geq , \leq , $=$, \neq) и логические константы (True – истина, False – не истина (ложь)). При этом если значение логического выражения "Истина" (True), то MathCAD возвращает значение 1 (единица), если же значение логического выражения "Не истина" (False), то MathCAD возвращает значение 0 (ноль). Знаки логических операций и операций отношения следует брать с логической (Boolean) панели.

Пример 8



9. Вычисления с единицами измерений. Единицы измерений, хотя они и не требуются в выражениях MathCAD, могут помочь обнаружить ошибки и улучшить отображение результатов вычислений. Предоставляемые MathCAD возможности берут на себя заботу о работе, связанной с согласованием используемых единиц измерений и размерностей в научных исследованиях. Как только пользователем будут введены соответствующие определения, MathCAD автоматически выполнит преобразования единиц измерений и пометит неправильные и несогласованные по размерностям вычисления.

В MathCAD доступны системы единиц измерений СИ (SI), МКС (MKS), СГС (CGS), система единиц измерений США (U.S.). Можно отменить встроенные системы единиц измерения (None). После запуска MathCAD автоматически загружает систему единиц измерений СИ. Для смены системы единиц измерений нужно в пункте меню "Математика" (Math) выбрать подпункт "Опции" (Options...), открыть вкладку "Единицы измерений" (Unit System) и отметить радиокнопкой нужную систему единиц измерений.

MathCAD распознаёт большинство единиц измерения по их общим сокращениям. В табл.1 перечислены некоторые встроенные единицы измерений MathCAD.

Т а б л и ц а 1

Мера...	Единица
1	2
<i>длина</i>	<i>km, m, cm, mm</i>
<i>площадь</i>	<i>acre, hectare</i>
<i>объём</i>	<i>gal, liter, mL,</i>
<i>угол</i>	<i>deg, rad,</i>
<i>время</i>	<i>day, yr, min, sec, s</i>
<i>частота</i>	<i>MHz, KHz, Hz</i>

Продолжение приложения

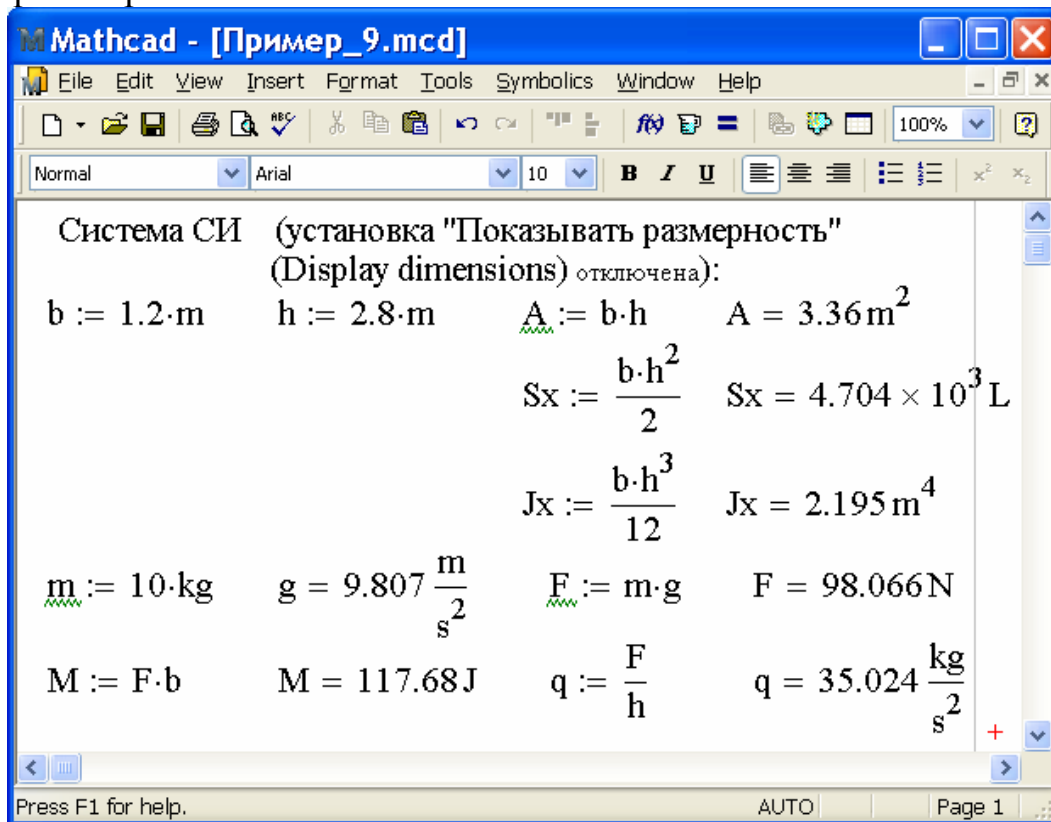
Окончание табл. 1

1	2
масса	<i>ton, kg, gm, mg</i>
сила	<i>dyne, kgf, Newton, N</i>
напряжение (давление)	<i>atm, Pa, psi, torr</i>
скорость	<i>c, kph, mph</i>
ускорение	<i>g</i>
энергия	<i>joule, cal, erg</i>

Работать с единицами измерений нужно как со встроенными переменными. Чтобы связать единицу измерений с числом, достаточно умножить число на её наименование. Производные единицы измерений будут отображаться на экране в терминах той системы единиц измерений, которая установлена во вкладке "Единицы измерений" (Unit System), если установка "Показывать размерность" (Display dimensions) во вкладке "Размерность" (Dimension) отключена.

В примере_9 показано решение задач с использованием единиц измерений в системе СИ.

Пример 9



Продолжение приложения

В примере_10 показано решение задач с использованием единиц измерений в системе СГС:

Пример 10

Mathcad - [Пример_10.mcd]

File Edit View Insert Format Tools Symbolics Window Help

Normal Arial 10 B I U

Система СГС (установка "Показывать размерность" (Display dimensions) отключена):

$$b := 1.2 \cdot m \quad h := 2.8 \cdot m \quad A := b \cdot h \quad A = 3.36 \times 10^4 \text{ cm}^2$$

$$S_x := \frac{b \cdot h^2}{2} \quad S_x = 4.704 \times 10^6 \text{ mL}$$

$$J_x := \frac{b \cdot h^3}{12} \quad J_x = 2.195 \times 10^8 \text{ cm}^4$$

$$m := 10 \cdot \text{kg} \quad g = 980.665 \frac{\text{cm}}{\text{sec}^2} \quad F := m \cdot g \quad F = 9.807 \times 10^6 \text{ dyne}$$

$$M := F \cdot b \quad M = 1.177 \times 10^9 \text{ erg} \quad q := \frac{F}{h} \quad q = 3.502 \times 10^4 \frac{\text{gm}}{\text{sec}^2}$$

Press F1 for help. AUTO Page 1

При выполнении вычислений с единицами измерений использование в арифметических выражениях безразмерных констант приводит к ошибкам, поскольку MathCAD согласовывает используемые единицы измерений. Для исключения подобных недоразумений все константы должны вводиться с указанием соответствующей единицы измерения. В примере_11 показан пример несогласованности единиц измерения при вычислении значения переменной y1.

Пример 11

Mathcad - [Пример_11.mcd]

File Edit View Insert Format Tools Symbolics Window Help

Normal Arial 10 B I U

Пример работы с константами: $x := 4 \cdot m$

$$y_1 := 2 \cdot x^2 - 3 \cdot x + 5 \quad y_1 = \text{Ошибка!}$$

$$y_2 := (2 \cdot m) \cdot x^2 - (3 \cdot m^2) \cdot x + 5 \cdot m^3 \quad y_2 = 25 \text{ m}^3$$

Press F1 for help. AUTO Page 1

Продолжение приложения

Если установка "Показывать размерность" (Display dimensions) во вкладке "Размерность" (Dimension) включена, то производные единицы измерений будут отображаться на экране в терминах фундаментальных физических размерностей *mass, length, time, ...*. Для изменения наименования размерностей следует в пункте меню "Математика" (Math) выбрать подпункт "Опции" (Options...), открыть вкладку "Размерность" (Dimension), включить установку "Показывать размерность" (Display dimensions) и отредактировать наименование, показанное в соответствующей текстовой рамке.

Отображение на экране единиц измерений в терминах встроенной системы единиц измерений (СИ, МКС, СГС, ...) не всегда удобно. Поэтому часто возникает необходимость в определении пользовательской единицы измерений. Пользовательские единицы измерений определяются через существующие так же, как определяются новые переменные через существующие переменные. При этом производные единицы измерений на экране всё равно будут отображаться в терминах той системы единиц измерений, которая установлена во вкладке "Единицы измерений" (Unit System). Для преобразования единиц измерений нужно впечатать пользовательскую единицу измерений непосредственно на месте чёрной метки после встроенной единицы измерений. (В примере_12 показана последовательность редактирования единицы измерения при вычислении изгибающего момента).

Пример 12

Система СИ.
Определяем пользовательские единицы измерений:

Сила (ньютон) -	$H := 1N$
Момент (ньютон-метр) -	$Hm := H \cdot m$
Нагрузка (ньютон на метр) -	$Hdm := \frac{H}{m}$

Дано: $b := 1.2 \cdot m$ $F := 4000 \cdot H$ $q := 2000 \cdot Hdm$ $Mo := 2400 \cdot Hm$

Найдём:

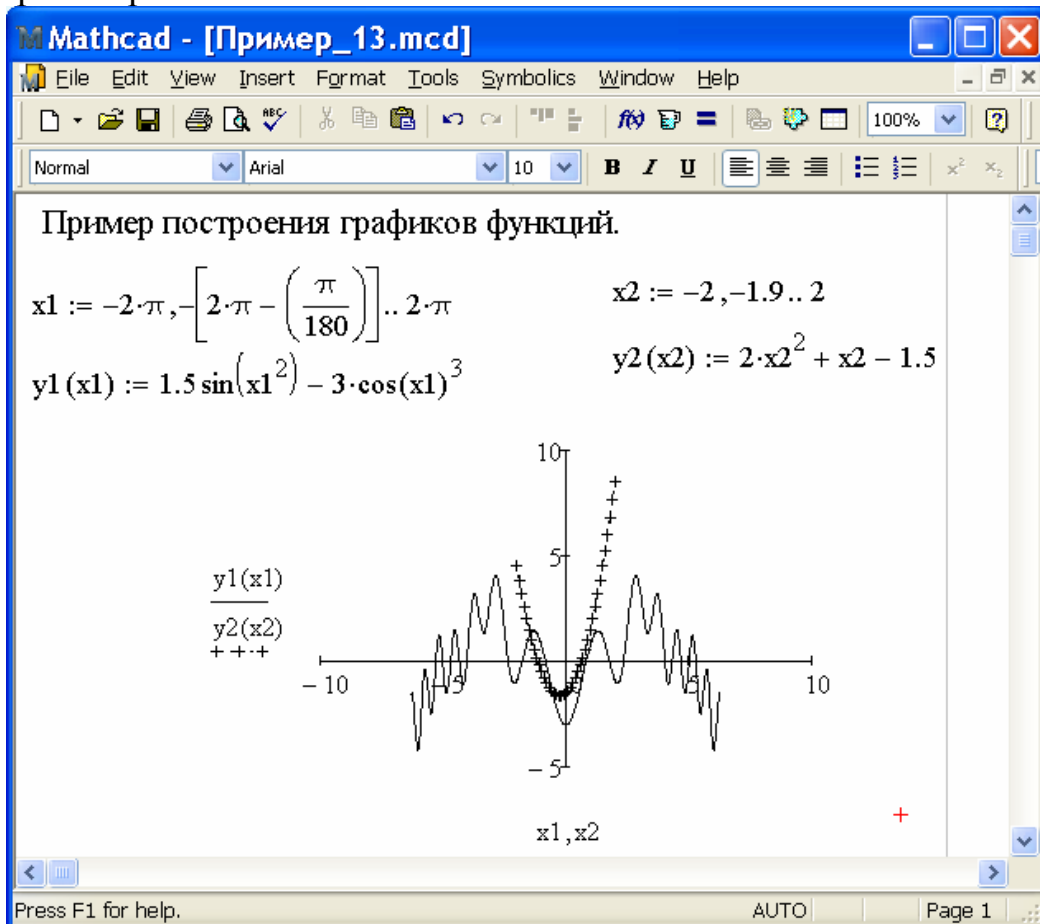
1). Изгибающий момент - $M := F \cdot b + Mo - q \cdot \frac{b^2}{2}$ $M = 5.76 \times 10^3 J$
 $M = 5.76 \times 10^3 Hm$

2). Поперечная сила - $Q := F + q \cdot b$ $Q = 6.4 \times 10^3 H +$

Продолжение приложения

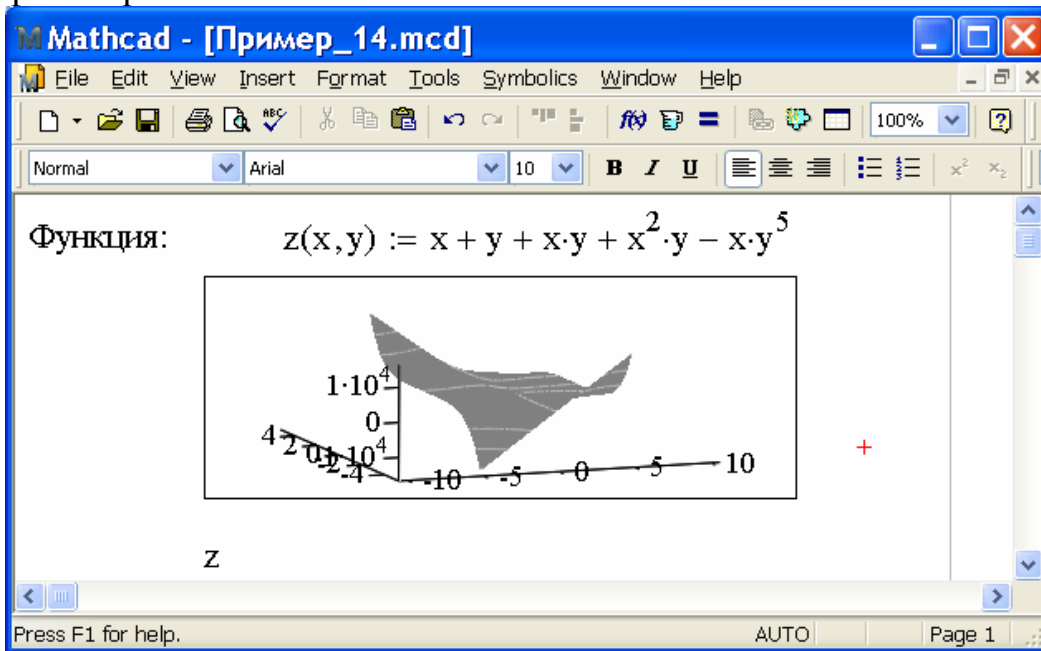
10. Построение графиков функций в MathCAD выполняется для заданных дискретных аргументов путём выбора соответствующего шаблона с панели "График" (Graph). В нижнем поле ввода следует ввести через запятую имена дискретных аргументов, а в левом – имена функций. Полученный график можно форматировать, то есть изменять размер графика, масштаб осей, их расположение, стиль и толщину кривых и так далее. Для этого нужно двойным щелчком левой кнопки мышки по графической области вызвать панель "Форматирование ..." (Formatting Currently Selected ...).

Пример 13



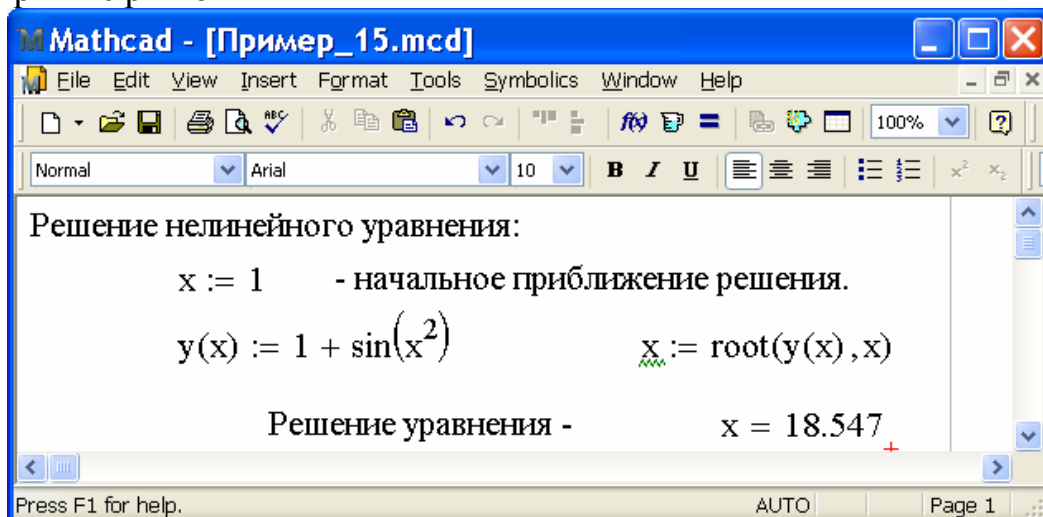
11. Чтобы создать поверхность необходимо из панели "График" (Graph) выбрать шаблон "График поверхности" (Surface Plot) и в поле ввода печатается название функции, для которой строится поверхность. После щелчка "мышкой" вне графической области, MathCAD выполнит построение графика поверхности. Полученный график поверхности можно форматировать. Для этого можно двойным щелчком "мышкой" по графической области вызвать панель "Формат 3D графика" (3-D Plot Format).

Пример 14



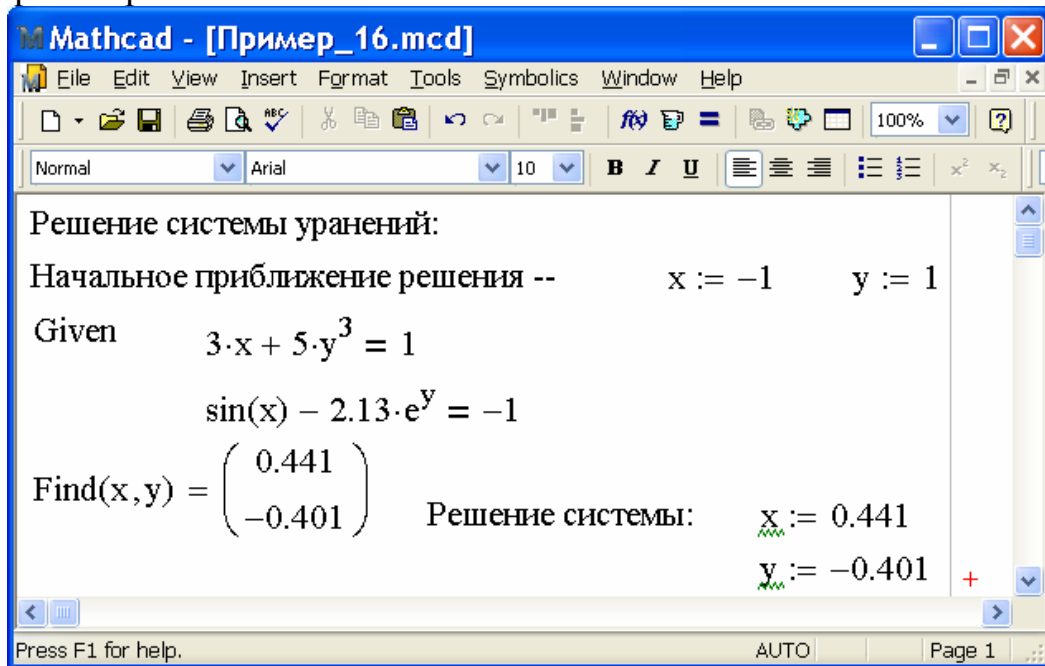
12. MathCAD позволяет решать алгебраические уравнения и системы уравнений. Можно решать как одно уравнение с одним неизвестным, используя функцию $root(y(x), x)$, так и системы уравнений с несколькими неизвестными, используя функцию $Find(x1, x2, \dots, xn)$. Функция $root(y(x), x)$ позволяет для заданного начального значения аргумента x определить один корень уравнения $y(x) = 0$. Для изменения точности, с которой функция $root(y(x), x)$ ищет корень уравнения, можно изменить значение встроенной переменной TOL.

Пример 15



Для решения системы уравнений необходимо выполнить следующую последовательность действий: задать начальное приближение решения; напечатать ключевое слово *Given*; ввести уравнения и неравенства в любом порядке ниже ключевого слова *Given* (между левыми и правыми частями уравнений должен стоять символ =, выделенный жирным шрифтом); напечатать функцию *Find(x1,x2,...,xn)*; получить решение. Для печати символа =, выделенного жирным шрифтом, следует использовать сочетание клавиш “[Ctrl] =”.

Пример 16



13. Наряду с численным решением математических задач MathCAD позволяет решать задачи в символьном виде, то есть получать результат не в виде числа, а в виде формулы. При этом возможно символьное упрощение выражений, разложение на множители, разложение на элементарные дроби, приведение подобных членов, разложение выражений в ряды и многое другое. MathCAD позволяет в символьном виде вычислять производные, интегралы и пределы, решать уравнения и системы уравнений, выполнять действия над матрицами в символьном виде (транспонировать матрицу, находить обратную, вычислять детерминант).

Для символьного вычисления необходимо после преобразуемого выражения ввести символьный знак равенства \rightarrow и нажать клавишу Enter. Символьный знак равенства вводится либо путем нажатия совокупности клавиш “[Ctrl].” (клавиша Ctrl, сопровождаемая точкой), либо из панели “Символика” (Symbolic).

Пример 17

Mathcad - [Пример_17.mcd]

File Edit View Insert Format Tools Symbolics Window Help

Normal Arial 10 B I U

Символьные вычисления.

$$y(x) := (\sin(x) + x)^2$$

$$\frac{d}{dx} y(x) \rightarrow 2 \cdot (\cos(x) + 1) \cdot (x + \sin(x))$$

$$\int y(x) dx \rightarrow \frac{x}{2} - \frac{\sin(2 \cdot x)}{8} + \sin(x) + \frac{x^3}{3} - x \cdot \cos(x)$$

Symbolic

→	↔	Modifiers	float
rectangular	assume	solve	simplify
substitute	factor	expand	coeffs
collect	series	parfrac	fourier
laplace	ztrans	invfourier	invlaplace
invztrans	n ⁺ →	n ⁻ →	n →
explicit	combine	confrac	rewrite

Press F1 for help. AUTO Page 1

ОГЛАВЛЕНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ	3
ВВЕДЕНИЕ	5
ОБЩИЕ МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ	14
§1. Выбор варианта задания и исходных данных	14
§2. Исходные данные	15
МЕТОДИКА ВЫПОЛНЕНИЯ РАБОТЫ	20
§1. Расчёт балки-стенки (плоская задача теории упругости)	20
§2. Расчёт прямоугольной пластины опёртой по контуру на изгиб	54
§3. Расчёт плиты на упругом основании.....	90
Заключение	111
БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК.....	112
ПРИЛОЖЕНИЕ.....	114

Учебное издание

Бакушев Сергей Васильевич
Зернов Владимир Викторович

ТЕОРИЯ УПРУГОСТИ.
РУКОВОДСТВО К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧ

Учебное пособие

В авторской редакции
Верстка Н.В. Кучина

Подписано в печать 19.11.2014. Формат 60x84/16.
Бумага офисная «Снегурочка». Печать на ризографе.
Усл.печ.л. 7,44. Уч.-изд.л. 8,0. Тираж 100 экз.
Заказ № 421.

Издательство ПГУАС.
440028, г. Пенза, ул. Германа Титова, 28

