

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«Пензенский государственный университет
архитектуры и строительства»

Г.А. Левова, О.В. Снежкина, С.Н. Ячинова

ПРИБЛИЖЕННЫЕ МЕТОДЫ ВЫЧИСЛЕНИЯ ИНТЕГРАЛОВ

Рекомендовано Редсоветом университета
в качестве учебного пособия для студентов,
обучающихся по направлению 270800 «Строительство»

Пенза 2013

УДК 518
ББК 22.19
Л34

Рецензенты: кандидат технических наук, доцент кафедры «Физика» О.А. Захаров (ПГУАС)
кандидат педагогических наук, доцент кафедры «Автоматизированные системы управления и программного обеспечения» О.В. Бочкарева (филиал Военного учебно-научного центра Сухопутных войск «Общевойсковая Академия ВС РФ» г. Пенза)

Левава Г.А.

Л34 Приближенные методы вычисления интегралов: учеб. пособие / Г.А. Левова, О.В. Снежкина, С.Н. Ячинова. – Пенза: ПГУАС, 2013. – 120 с.

Представляет собой руководство к решению задач по вычислительной математике, содержит краткие теоретические сведения, подробное решение типовых примеров и задачи для самостоятельного решения. Соответствует образовательным стандартам третьего поколения направления 270800 «Строительство» (квалификация бакалавр) и рекомендуется при изучении дисциплины «Математика» (код Б2, цикл математический, естественнонаучный и общетехнический.)

Пособие подготовлено на кафедре «Математика и математические моделирование» и предназначено для студентов вузов инженерных и экономических специальностей, желающих приобрести необходимые навыки в решении прикладных задач, а также может быть полезным аспирантам, инженерам-исследователям, работающим в области прикладных наук.

© Пензенский государственный университет
архитектуры и строительства, 2013

© Левова Г.А., Снежкина О.В.,
Ячинова С.Н., 2013

ПРЕДИСЛОВИЕ

Происходящий в настоящее время процесс бурного развития вычислительной техники способствует расширению области приложения современных разделов математики. Количественные методы внедряются практически во все сферы человеческой деятельности, при этом возрастает потребность в высококвалифицированных специалистах, владеющих методами вычислительной математики.

Разумное использование современной вычислительной техники невозможно без умелого применения приближенного и численного анализа. Этим объясняется чрезвычайно возросший интерес к методам приближенных вычислений и, соответственно, к литературе, посвященной этим вопросам. Особенно остро ощущается потребность в изданиях методической направленности. Предлагаемое пособие отвечает этим требованиям.

Учебное пособие имеет следующую структуру. В начале каждого раздела даются краткие теоретические сведения: постановка задачи, рабочие формулы, вычислительные схемы, сравнение отдельных методов с точки зрения их трудоемкости, достигаемой степени точности и т.п. Далее приводится подробное решение типовых примеров, иллюстрирующих соответствующие алгоритмы. В конце раздела предлагаются задачи для самостоятельной работы и пример решения типового варианта такой задачи.

Пособие рассчитано на читателя, который занимается не столько разработкой численных методов, сколько их применением при решении прикладных проблем. Причем в процессе работы над пособием читатель не только ознакомится с основными идеями построения вычислительных алгоритмов и с их обоснованием, но и приобретет знания, достаточные для разработки новых алгоритмов.

Таким образом пособие ориентировано в первую очередь для студентов высших учебных заведений, обучающихся по направлению “Строительство” и желающих приобрести необходимые навыки в решении прикладных задач.

ВВЕДЕНИЕ

В вычислительной математике можно выделить три основных направления. Первое связано с применением ЭВМ в различных областях научной и практической деятельности и включающее, в частности, численное решение различных математических задач; второе – с разработкой новых и совершенствованием существующих численных методов и алгоритмов; третье – с вопросами взаимодействия человека и ЭВМ. Настоящее пособие посвящено первому из указанных направлений, а именно применению численных методов к решению практических задач.

Данное пособие посвящено методам приближенного вычисления интегралов. Приводятся примеры построения простейших формул для приближенного вычисления интегралов по отрезку. Такие формулы называются квадратурными. В многомерном случае для вычисления интегралов показано применение кубатурных формул. Изучается вопрос о повышении точности вычисления интегралов за счет повышения порядка точности квадратур, за счет разбиения отрезка интегрирования на части, за счет сведения интегралов от функции “с особенностями” к интегралам от более гладких функций. На примере численного интегрирования иллюстрируются требования, предъявляемые к стандартным программам и алгоритмам, которые кладутся в их основу.

В пособии также рассматривается один из центральных моментов, относящийся к теории приближения функции. В процессе численной реализации этого подхода рассмотрено четыре основных вопроса: вопрос об имеющейся информации относительно функции f , т. е. о виде, в котором задана функция f ; вопрос о классе аппроксимирующих функций, т. е. о том, какими функциями φ будет аппроксимирована функция f ; вопрос о близости аппроксимируемой и аппроксимирующей функций, т.е. о выборе критерия согласия, которому должна удовлетворять функция φ ; вопрос о погрешности, т.е. об определении разности между точным и приближенным значениями.

1. ИНТЕРПОЛИРОВАНИЕ И ЭКСТРАПОЛИРОВАНИЕ

1.1. Функция и способы ее задания

В практической деятельности постоянно приходится сталкиваться с необходимостью выявления форм связи в процессах и явлениях и необходимостью их математического описания.

Рассмотрим формы связи, для которых некоторая величина y , характеризующая процесс, зависит от совокупности не связанных между собой величин (x_1, x_2, \dots, x_n) соответствует единственное значение величины y . Такое однозначное соответствие величины y совокупности независимых переменных x_1, x_2, \dots, x_n называется функциональной зависимостью, а сама переменная величина y – функцией переменных величин x_1, x_2, \dots, x_n , что формально записывается в виде

$$y = f(x_1, x_2, \dots, x_n).$$

Так, выражение $y = x_1^2 + 3\sqrt{x_2} + x_1x_3^2$ является функцией трех переменных.

Если величина y есть функция одной независимой переменной x , то эту связь можно представить соотношением следующего вида:

$$y = f(x).$$

Например, площадь круга S является функцией независимой переменной – радиуса круга R , т. е. $S = f(R)$; конкретный вид этой функции $S = \pi R^2$. Объем фигуры является уже функцией трех измерений: $V = f(x_1, x_2, x_3)$, и в зависимости от вида фигуры эта функциональная связь соответственно конкретизируется.

Из курса математического анализа известны три способа задания функциональных зависимостей: 1) аналитический; 2) графический; 3) табличный.

Наиболее удобным способом задания функциональной зависимости $y = f(x)$ является аналитический, так как он прямо указывает действия и последовательность их выполнения над независимой переменной x для получения соответствующего значений величины y .

Так, например, в результате математической обработки можно получить следующую аналитическую зависимость денежных кредитов в сельском хозяйстве под товарно-материальные ценности и сезонные затраты от затрат на крупный рогатый скот:

$$y = 51,0203 + 0,1059 x,$$

где y – кредиты под товарно-материальные ценности;

x – затраты на крупный рогатый скот.

Другой пример аналитической зависимости: путь и время при равноускоренном движении связаны соотношением

$$s = vt + 0,5at^2.$$

Преимуществом аналитического способа задания является возможность получать значения y для любого фиксированного аргумента x с любой точностью.

К недостаткам этого способа следует отнести то, что приходится производить всю последовательность вычислений; кроме того, аналитический метод не обладает наглядностью.

Указанные недостатки аналитического способа устраняются в случае графического способа задания функции $y=f(x)$.

Графиком данной функции $y=f(x)$ называется множество точек плоскости xOy , координаты которых удовлетворяют уравнению $y=f(x)$.

Табличный способ задания функций распространен в технике, физике, экономике, естествознании (и чаще всего возникает в результате эксперимента).

Пусть, например, в результате опыта получена зависимость омического сопротивления R медного стержня от температуры t° в виде следующей таблицы:

R	77,80	79,75	80,80	82,35	83,90	85,10
t°	25,0	30,1	36,0	40,0	45,1	50,0

В этом эксперименте значение омического сопротивления медного стержня меняется при колебаниях температуры и является зависимой переменной.

Преимущество табличного способа задания функции является то, что для каждого значения независимой переменной, помещенной в таблицу, можно сразу же, без всяких измерений и вычислений, найти соответствующее значение функции.

Недостаток табличного способа состоит в том, что нельзя задать всю функцию сплошь, т.е. всегда найдутся такие значения независимой переменной, которых нет в таблице.

1.2. Математические таблицы

Среди функций, постоянно встречающихся в математике, много таких, вычислений которых, несмотря на их простоту, довольно громоздко. Такие функции табулируют, т. е. представляют в виде математических таблиц.

Наиболее распространены таблицы функций одной переменной. К ним относятся таблицы обратных чисел, квадратов и кубов чисел, квадратных и кубических корней, таблицы логарифмов, таблицы тригонометрических функций, таблицы показательной и других элементарных функций. Составляют таблицы функций двух и большего числа переменных. Примером таблицы функции двух переменных может служить таблица произведений двух чисел.

Таблица представляет собой набор значений функции для последовательности значений аргументов $x_0, x_1, x_2, \dots, x_n$. Она должна содержать такой набор значений аргумента, чтобы для любых значений аргумента, отличных от $x_0, x_1, x_2, \dots, x_n$, можно было получить значение функции с необходимой степенью точности.

Основными характеристиками таблиц являются: 1) название функций, значения которых они выражают; 2) объем; 3) шаг; 4) количество знаков табулируемой функции; 5) количество входов.

Названием функции, численные значения которой даны в таблице, является аналитическое выражение этой функции, например $\sin x, \lg x, e^x$ и т.д.

Объем таблицы определяется начальным и конечным значениями аргумента. Так, например, объем таблицы $y = \sin x$ охватывает значения аргумента от 0° до 90° .

Почти для всех табулируемых функций значения аргумента в таблице образуют арифметическую прогрессию, разность которой h называется *шагом таблицы*. Таким образом,

$$h = x_i - x_{i-1} = \text{const}(i = 1, 2, \dots, n)$$

Тогда

$$x_i = x_0 + ih(i = 0, 1, \dots, n).$$

В качестве иллюстрации рассмотрим фрагмент таблицы перевода радианов в градусы и градусов в радианы (табл. 1.1).

Таблица 1.1

Радианы	Градусы	Радианы	Градусы	Градусы	Радианы
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)
0,20	11,495	0,70	40,107	20	0,34907
21	12,032	71	40,680	21	36652
22	12,605	72	41,253	22	38397
23	13,178	73	41,826	23	40143
24	13,751	74	42,399	24	41888

Окончание табл. 1.1

Градусы	Радианы	Минуты	Радианы	Минуты	Радианы
(7)	(8)	(9)	(10)	(11)	(12)
70	1,22175	20	0,00582	50	0,01454
71	23918	21	00621	51	01484
72	25662	22	00640	52	01513
73	27409	23	00669	53	02542
74	29151	24	00698	54	01571

В первых двух столбцах приведенной таблицы в качестве независимой переменной вступает радианная мера, а градусы рассматриваются как ее функция. То же справедливо и для 3-го и 4-го столбцов. В качестве шага таблицы здесь выбирается $h=0,01$ радиана.

Начиная с 5-го столбца рассматривается функция, обратная данной, где в качестве независимой переменной выбираются градусы (или минуты), а соответственно радианная мера является функцией градусов (или минут). Шаг этой части таблицы равен одному градусу (в 5-м и 7-м столбцах) и одной минуте (в 9-м и 11-м столбцах).

В справочных таблицах используется так же и сложный двухуровневый шаг. По вертикали в столбец откладывают значения аргумента с относительно крупным шагом $h^* : x_i = x_0 + ih^* (i = 0, 1, \dots, n)$. По горизонтали в первой строке помещают значения аргумента с более мелким шагом h , обычно равным десятой доли крупного шага: $h = 0,1h^*$. Во второй и последующих строках помещают значения функции для аргумента, равного сумме значений x_i , стоящих в той строке и том столбце, на пересечении которых записываются значения функции. Так, в табл. 1.2. приведен фрагмент таблицы кубических корней. Из приведенного фрагмента таблицы нетрудно определить крупный шаг по вертикали, равный $h^* = 1$, и мелкий шаг по горизонтали, равный $h = 0,1$.

Таблица 1.2

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
60	8,43433	43901	44369	48836	45303	45769	46235	46700	47165	47629
61	8,48093	48556	49018	49481	49942	50403	50954	51324	51784	52243
62	8,52702	53160	53618	54075	54542	54988	55444	55899	56354	56808
63	8,57262	57715	58168	58620	59062	59524	59975	60425	60875	61325
64	8,61774	62222	62670	63118	63566	64012	64459	64904	55350	65795

Обычно шаг таблицы выражается одной единицей какого-либо разряда (реже двумя или пятью единицами определенного разряда). Например, в таблицах квадратов, кубов, квадратных, кубических корней, в таблицах логарифмов крупный шаг $h^* = 1$, в таблицах натуральных логарифмов, таблицах обратных чисел крупный шаг h^* равен 0,1 (см. табл. 1.2).

Если рассмотреть таблицу синусов (табл. 1.3), то в ней в качестве крупного шага выбирают один градус, мелкий шаг равен шести минутам.

Таблица 1.3

	0'	6'	12'	18'	24'	30'	36'	42'	48'	54'		1'	2'	3'	4'	5'
65°	0,9063	9070	9078	9085	9092	9100	9107	9114	9121	9128		1	2	4	5	6
66°	0,9135	9143	9150	9157	9164	9171	9178	9184	9191	9198		1	2	3	5	6
67°	0,9205	9212	9219	9225	9232	9239	9245	9252	9259	9265		1	2	3	4	6
68°	0,9272	9278	9285	9291	9298	9304	9311	9317	9323	9330		1	2	3	4	5
69°	0,9336	9342	9348	9354	9361	9367	9383	9379	9385	9391		1	2	3	4	5

Следующей характеристикой таблиц является *количество знаков* табулируемой функции, так как значения функции $y=f(x)$ для табулированных значений аргумента в математических таблицах и результаты измерений в технических таблицах являются приближенными величинами.

Для практических ручных расчетов наиболее употребительными являются пособия: Б.И. Сегала и К.А. Семендяева «Пятизначные математические таблицы», И.Н. Бронштейна и К.А. Семендяева «Справочник по математике» и т.д.

В таблицы вносят только верные знаки числового значения функции: это означает, что погрешность не превышает пяти единиц первого отброшенного разряда. При этом значения функции для всех значений x , приводимых в таблице, определяются с одинаковой абсолютной погрешностью. Точность, с которой приведены в таблице значения функции, называется *точностью таблицы*. Иногда на разных участках таблицы точность бывает разной.

В некоторых случаях при работе с таблицами необходимо знать разности соседних приведенных в таблице значений функции: $y_{i+1} - y_i$. Эти разности называют *конечными разностями первого порядка* и иногда записывают в столбце функции в промежутке между теми ее значениями, которые участвуют в образовании соответствующей конечной разности. Разности записывают в единицах последнего разряда без нулей впереди значащих цифр и без запятой. Например, в таблице

x	$\sin x$
1,000	0,84147
	54
1,001	0,84201

Конечная разность $0,00054=0,84201-0,84147$ записана между соответствующими значениями функции.

Следующей важной характеристикой таблиц является *количество входов* в нее. Оно равнозначно числу аргументов функции. Так, таблицы для функциональных зависимостей $y=f(x)$ являются таблицами с одним входом. К ним относятся приведенные выше табл. 1.1, 1.2 и 1.3.

Табулирование функции двух переменных $z=f(x,y)$ приводит к таблице с двумя входами. Среди подобных таблиц широкое практическое применение находят умножения.

В табл. 1.4 трехразрядное множимое записано в левый столбец, одноразрядный множитель – в верхнюю строку таблицы. Шаг обоих входов в таблицу равен единице. Для получения произведения трехзначного числа на однозначное достаточно найти строку, в первом столбце которой записано множимое, и выбрать тот столбец, в котором расположен множитель.

На пересечении найденных строки и столбцов и находится искомое произведение.

Таблица 1.4

1	2	3	4	5	6	7	8	9
541	1082	1623	2164	2705	3246	3787	4328	4869
542	1084	1626	2168	2710	3252	3794	4336	4878
543	1085	1629	2172	2715	3258	3801	4344	4887
544	1088	1632	2176	2720	3260	3808	4352	4896
545	1090	1635	2180	2725	3270	3815	4360	4905

Пример 1. Пусть требуется умножить 543 на 8. В табл. 1.4 находим строку, содержащую 543, и столбец под номером 8. На их пересечении читаем число 4344, что и является искомым произведением.

Для умножения многозначных чисел множимое разбивают на части, содержащие не более трех цифр, и к каждой из этих частей применяют указанный способ.

Пример 2. Пусть требуется умножить 541 544 на 37. Разбиваем число 541 544 на две трехразрядные части 541 и 544. Последовательно умножаем каждую часть на 3 десятка и на 7 единиц, полученные частичные произведения складываем

$$\begin{array}{r}
 541 \times 30 = 16230 \quad 544 \times 30 = 16320 \\
 541 \times 7 = 3787 \quad 544 \times 7 = 3808 \\
 \hline
 20017 \qquad \qquad 20128
 \end{array}$$

Первое частичное произведение сносим на три разряда влево относительно второго и складываем :

$$\begin{array}{r}
 20017 \\
 + \quad 20128 \\
 \hline
 20037128
 \end{array}$$

Это и есть искомый результат.

При работе с таблицами следует помнить, что в их расположении бывают особенности. Поэтому, обращаясь к новому справочнику, необходимо ознакомиться с его описанием.

1.3. Основные понятия теории приближения функций

Теорией и практикой приближения, или, как еще говорят, *аппроксимации*, функций приходится пользоваться при решении многих практических задач.

Пусть, например, в процессе некоторого эксперимента в дискретные моменты времени x_0, x_1, \dots, x_N получены значения f_0, f_1, \dots, f_N некоторой величины $f(x)$. Требуется восстановить функцию $f(x)$ при других $x \neq x_i (i = 0, 1, \dots, N)$. Подобная же задача возникает при многократном вычислении на ЭВМ одной и той же сложной функции f в различных точках. Вместо этого часто бывает целесообразно вычислить функцию f в небольшом числе характерных точек x_i , а в остальных точках вычислить ее значения по некоторому более простому правилу, используя информацию об уже известных значениях $f_i = f(x_i)$.

Другими распространенными примерами аппроксимации функций являются задачи определения производной $f'(x)$ и интеграла $\int_a^b f(x)dx$ по заданным значениям f_i .

Наконец, при составлении алгоритмов стандартных программ для вычисления элементарных и специальных функций снова возникает задача приближения функций.

Классический подход к решению подобных задач заключается в том, чтобы, используя имеющуюся информацию о функции f , рассмотреть другую функцию φ , близкую в некотором смысле к f и позволяющую выполнить над ней соответствующую операцию и получить оценку погрешности такой «аналитической замены».

В процессе численной реализации этого подхода необходимо рассмотреть следующие четыре основных вопроса:

1. Вопрос об имеющейся информации относительно функции f , т.е. о виде, в котором задана функция f .
2. Вопрос о классе аппроксимирующих функций, т.е. о том, какими функциями φ будет аппроксимирована функция f .
3. Вопрос о близости аппроксимируемой и аппроксимирующей функций, т.е. о выборе критерия согласия, которому должна удовлетворять функция φ .
4. Вопрос о погрешности, т.е. об определении разности между точным и приближенными значениями.

В вопросе об информации относительно функции f различают два основных случая: либо функция задана аналитически, либо в виде таблицы.

Графический способ задания функции относят либо к первому, либо ко второму случаю в зависимости от конкретной задачи. В дальнейшем мы будем рассматривать на отрезке $[a, b]$ непрерывные вместе с достаточным количеством своих производных функции $f(x)$, определенные своими значениями $f_i = f(x_i)$ в узлах x_i заданной сетки

$$A_N : \{a \leq x_0 < x_1 < \dots < x_N \leq b\}. \quad (1.3.1)$$

В вопросе о классе аппроксимирующих функций следует руководствоваться двумя главными факторами. Во-первых, аппроксимирующая функция должна отражать характерные особенности аппроксимируемой, а во-вторых, быть достаточно удобной в обращении, т.е. при выполнении над ней необходимых операций.

В численном анализе широкое применение имеют три группы аппроксимирующих функций. Первая – это функции вида $1, x, \dots, x^n$, линейные комбинации которых порождают класс всех многочленов степени не выше n . Вторую группу образуют тригонометрические функции $\sin a_i x$ и $\cos a_i x$, порождающие ряды Фурье и интеграл Фурье. Наконец, третья группа состоит из экспоненциальных функций $e^{a_i x}$, определяющих явления типа распада и накопления, часто встречающиеся в реальных ситуациях.

Ниже мы остановимся более подробно на многочленной аппроксимации, т.е. будем принимать в качестве аппроксимирующей функции многочлен некоторой степени n .

В этом случае аппроксимирующая функция обычно обозначается $P_n(x)$ и имеет вид

$$\varphi(x) \equiv P_n(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k. \quad (1.3.2)$$

Вопрос о критерии согласия, по существу, заключается в том, чтобы определить некоторым образом «расстояние» между аппроксимируемой и аппроксимирующими функциями, а затем из всего класса аппроксимирующих функций выбрать ту, для которой это «расстояние» минимально.

Одним из распространенных критериев согласия является критерий Чебышева, основанный на понятии расстояния как максимальной величины отклонения функции от функции f в узлах

$$\rho_1 = \max_{0 \leq i \leq N} |f(x_i) - \varphi(x_i)|. \quad (1.3.3)$$

Наибольший интерес представляет частный случай, когда для аппроксимирующей функции расстояние $\rho_1=0$. Это означат, что для табулированной функции $y=f(x)$, заданной своими значениями $y_i = f_i = f(x_i)$:

x_0	x_1	\dots	x_N
y_0	y_1	\dots	y_N

требуется построить аппроксимирующую функцию $\varphi(x)$, совпадающую в узлах x_i со значениями заданной функции $y=f(x)$, т.е такую, что $\varphi(x_i) = y_i$.

Такой способ аппроксимации, основанный на критерии совпадения f и φ в узлах x_i , называется интерполированием (или интерполяцией). Если аргумент x , для которого определяется приближенное значение функции, принадлежит отрезку $[x_0, x_N]$, то задача определения значения функции в точке x называется *интерполированием в узком смысле*. Если же аргумент x находится вне отрезка $[x_0, x_N]$, то поставленная задача называется *экстраполированием*.

Геометрически задача интерполирования для функции одной переменной $y=f(x)$ означает построение на плоскости xOy кривой, проходящей через точки с координатами $(x_0; y_0), (x_1; y_1), \dots, (x_N; y_N)$ (рис.1.1).

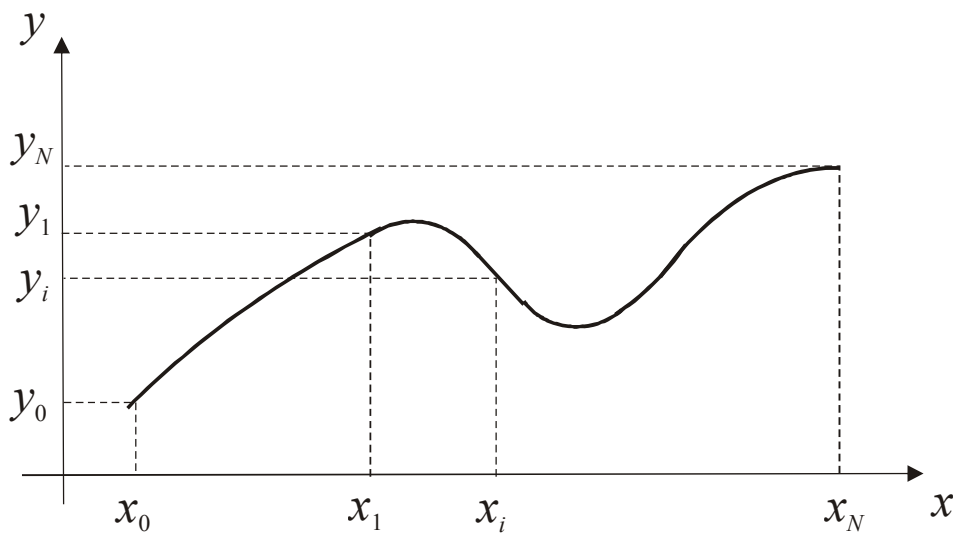


Рис. 1.1

Приведем еще один пример критерия согласия. Введем понятие расстояния между функциями f и φ как суммы квадратов их отклонений в узловых точках;

$$\rho = \sum_{i=0}^N [f(x_i) - \varphi(x_i)]^2. \quad (1.3.4)$$

Выберем теперь в качестве аппроксимирующей функции ту, для которой ρ минимально. Этот критерий целесообразно использовать в случае большого количества информации, заданной с невысокой точностью; метод аппроксимации, основанный на данном критерии, часто называют *методом наименьших квадратов*. К достоинствам этого метода следует отнести простоту и стройность его математической теории. Наконец, последний вопрос – о точности получаемого решения – во многих отношениях является основным. Действительно, в конечном итоге

качества метода определяется в первую очередь быстротой получения решения с требуемой точностью, или, как еще говорят, скоростью сходимости. Поэтому понятно, что выбор узловых точек, класса аппроксимирующих функций и критерия согласия должен быть подчинен одному вопросу – о требуемой точности.

На первый взгляд вопрос о точности получаемого решения кажется довольно простым: необходимо, чтобы приближенное решение отличалось от точного не более чем на заданное ε . Однако вопрос о возможности сколь угодно точного приближения функции f , зависящей от перечисленных выше «параметров» (узлы x_i , класс функций φ , критерий согласия f и φ), в общем случае остается открытым и подлежит исследованию для каждого конкретного аппроксимационного процесса.

1.4. Интерполирование с помощью многочленов

Рассмотрим более подробно задачу интерполирования функции f с помощью алгебраических многочленов.

В этом случае аппроксимирующая функция φ обычно обозначается $P_n(x)$ и имеет вид

$$\varphi(x) \equiv P_n(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^{n-k}. \quad (1.4.1)$$

Выбор конкретного значения n во многом определяется свойствами аппроксимируемой функции, требуемой точностью, а также узлами интерполирования. В дальнейшем мы увидим, что на выбор величины n существенное влияние оказывает и вычислительный процесс, приводящий в результат дополнительную погрешность.

В качестве критерия согласия, очевидно, принимается условие совпадения f и φ в узловых точках.

Естественно предположить, что для однозначного определения $n+1$ коэффициентов a_k многочлена P_n необходимо потребовать совпадения f и P_n в $n+1$ узловой точке:

$$f(x_i) = P_n(x_i) \quad (i=0, 1, \dots, n). \quad (1.4.2)$$

Многочлен $P_n(x)$ удовлетворяющий условиям (1.4.2), называется *интерполяционным многочленом*. Чтобы подчеркнуть зависимость этого многочлена от функции f , его часто обозначают $P_n(f, x)$.

Под *погрешностью интерполяции* Δ_1 в случае, когда необходимо вычислить значение функции $f(x)$ в одной точке x^* , мы будем понимать аб-

солютную величину разности между точным и приближенным значениями:

$$\Delta_1 = |f(x^*) - P_n(x^*)|. \quad (1.4.3)$$

В том же случае, когда интерполяция производится на все отрезке $[a, b]$, в качестве погрешности принимается максимальное отклонение многочлена P_n от функции f на рассматриваемом отрезке:

$$\Delta_1 = \max_{[a,b]} |f(x) - P_n(x)|.$$

Итак, рассмотрим следующую задачу интерполирования. На сетке $\Lambda_n : a \leq x_0 < x_1 < \dots < x_n \leq b$ в узлах x_i заданы значения $f_i = f(x_i) (i = 0, 1, \dots, n)$ функции f . Требуется построить интерполяционный многочлен P_n , совпадающий с f в узлах x_i , и оценить погрешность Δ_1 .

Существование и единственность интерполяционного многочлена вытекают из приведенной теоремы.

Теорема. Пусть 1) на отрезке $[a, b]$ задана сетка $\Lambda_n : a \leq x_0 < x_1 < \dots < x_n \leq b$; 2) заданы произвольные числа $c_i (i = 0, 1, \dots, n)$. Тогда существует и притом единственный многочлен P_n степени не выше n , принимающий в узлах x_i заданные значения c_i .

Из условия для определения неизвестных коэффициентов a_k многочлена P_n получаем систему алгебраических уравнений

$$a_0 x_i^n + a_1 x_i^{n-1} + \dots + a_n = c_i (i = 0, 1, \dots, n). \quad (1.4.4)$$

Определитель этой системы

$$W = \begin{vmatrix} x_0^n & x_0^{n-1} & \dots & x_0 & 1 \\ x_1^n & x_1^{n-1} & \dots & x_1 & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_n^n & x_n^{n-1} & \dots & x_n & 1 \end{vmatrix} \quad (1.4.5)$$

есть определитель Вандермонда, который, как известно из алгебры, отличен от нуля, если выполнено условие $x_i \neq x_j$ при $i \neq j$. Это условие, очевидно, выполняется для рассматриваемой сетки Λ_n . Следовательно, система (1.4.4) имеет единственное решение (единственный набор коэффициентов a_k).

Очевидно, что если в качестве чисел c_i задать значения f_i функции f в узлах x_i , то мы получаем утверждение о существовании и единственности интерполяционного многочлена $P_n(f, x)$.

Коэффициенты a_k интерполяционного многочлена (1.4.1) можно определить, положив в системе (1.4.4) $c_i = f_i$, и решив ее, например, по формулам Крамера:

$$a_k = \Delta_k l W. \quad (1.4.6)$$

Здесь Δ_k – определитель, получающий из W заменой столбца членов, содержащих $(n-k)$ -ю степень x_i ($i=0,1,\dots,n$), на столбец f_i свободных членов системы (1.4.4):

$$\Delta_k = \begin{vmatrix} x_0^n \dots x_0^{n-k+1} f_0 x_0^{n-k-1} \dots 1 \\ x_1^n \dots x_1^{n-k+1} f_1 x_1^{n-k-1} \dots 1 \\ \dots \dots \dots \\ x_n^n \dots x_n^{n-k+1} f_n x_n^{n-k-1} \dots 1 \end{vmatrix}. \quad (1.4.7)$$

Подставив полученные значения a_k в равенство (1.4.1), приходим к новой форме представления интерполяционного многочлена $P_n(f, x)$

$$\begin{vmatrix} P_n 1x \dots x^n \\ f_0 1x_0 \dots x_0^n \\ \dots \dots \dots \\ f_n 1x_n \dots x_n^n \end{vmatrix} = 0. \quad (1.4.8)$$

Отметим, что на практике обычно используются интерполяционные многочлены первой и второй степеней. При этом говорят о *линейной* и *квадратичной интерполяции*.

Пример. По узлам x_0, x_1, x_2 и соответствующим значениям функции f_0, f_1, f_2 построить интерполяционный многочлен, представив его в виде линейной комбинации значений f_i ($i = 0, 1, 2$).

Согласно формуле (1.4.8) имеем

$$\begin{vmatrix} P_2 1xx^2 \\ f_0 1x_0x_0^2 \\ f_1 1x_1x_1^2 \\ f_2 1x_2x_2^2 \end{vmatrix} = 0.$$

Разложив определитель по элементам 1-го столбца, получим

$$P_2 \begin{vmatrix} 1x_0x_0^2 \\ 1x_1x_1^2 \\ 1x_2x_2^2 \end{vmatrix} - f_0 \begin{vmatrix} 1xx^2 \\ 1x_1x_1^2 \\ 1x_2x_2^2 \end{vmatrix} + f_1 \begin{vmatrix} 1xx^2 \\ 1x_0x_0^2 \\ 1x_2x_2^2 \end{vmatrix} - f_2 \begin{vmatrix} 1xx^2 \\ 1x_0x_0^2 \\ 1x_1x_1^2 \end{vmatrix} = 0.$$

Учитывая, что

$$\begin{vmatrix} 1x_i x_i^2 \\ 1x_j x_j^2 \\ 1x_k x_k^2 \end{vmatrix} = (x_j - x_i)(x_k - x_i)(x_k - x_j),$$

окончательно находим

$$P_2(x) = f_0 \frac{(x - x_1)(x - x_2)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)} + f_1 \frac{(x - x_0)(x - x_2)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)} + f_2 \frac{(x - x_0)(x - x_1)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)}.$$

1.5. Погрешность интерполяционных процессов

Пусть функция f аппроксимируется интерполяционным многочленом, т.е.

$$f(x) = P_n(x) + R_n(x), \quad (1.5.1)$$

где $R_n(x)$ – остаточный член интерполяционной формулы

$$f(x) \approx P_n(x). \quad (1.5.2)$$

Остаточный член зависит от многих факторов – от свойства функции f , параметров интерполирования, положения точки интерполяции. Поэтому изучение $R_n(x)$ является сложной задачей. Прежде всего при этом необходимо ответить на вопрос о численной мере погрешности. Если точка интерполирования x^* фиксирована, то за меру погрешности естественно принять величину $\Delta_1 = |R_n(x^*)|$. Если же точка x^* заранее не известна, а интерполирование осуществляется на отрезке $[a, b]$, то за меру погрешности целесообразно принять величину

$$\Delta_1 = \max_{[a, b]} |R_n(x)|. \quad (1.5.3)$$

В зависимости от конкретной задачи могут быть выбраны и другие меры погрешности.

Оценка меры погрешности, как правило, производится не для отдельно взятой функции, а для целого класса функций, обладающих определенными общими свойствами.

Выведем явное выражение для оценки погрешности (1.5.3) интерполяционной формулы (1.5.2) для класса функций $C^{n+1}(a, b)$, имеющих на отрезке $[a, b]$ непрерывную производную порядка $n+1$.

С этой целью докажем следующую теорему.

Теорема. Пусть: 1) узлы $x_i (i = 0, 1, \dots, n)$ различны и вместе с x^* принадлежат отрезку $[a, b]$; 2) функция f имеет на $[a, b]$ непрерывную производную порядка $n+1$. Тогда существует такая точка $\xi \in (a, b)$, что

$$R_n(x^*) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \prod_{i=0}^n (x^* - x_i). \quad (1.5.4)$$

Заметим, что если x^* совпадает с одним из узлов, то соотношение (1.5.4) выполняется, так как его правая и левая части равны нулю. Поэтому далее будем считать, что $x^* \neq x_i (i = 0, 1, \dots, n)$. Рассмотрим вспомогательную функцию

$$\Psi(x) = f(x) - P_n(x) - k \prod_{i=0}^n (x - x_i), \quad (1.5.5)$$

где k – постоянная, выбранная так, чтобы функция Ψ обращалась в нуль при $x=x^*$, т.е.

$$\Psi(x^*) = 0 = f(x^*) - P_n(x^*) - k \prod_{i=0}^n (x^* - x_i).$$

Отсюда

$$k = \frac{f(x^*) - P_n(x^*)}{\prod_{i=0}^n (x^* - x_i)} = \frac{R_n(x^*)}{\prod_{i=0}^n (x^* - x_i)}. \quad (1.5.6)$$

В силу такого выбора k функция Ψ на отрезке $[a, b]$, по крайней мере, $n+2$ раза обращается в нуль в точках $x_0, x_1, \dots, x_n, x^*$. Тогда, используя теорему Роля, можно утверждать, что производная Ψ' на интервале (a, b) обращается в нуль, по крайней мере, $n+1$ раз, производная Ψ'' – по крайней мере, n раз и т.д. до производной $\Psi^{(n+1)}$, которая обратится в нуль, по крайней мере, в одной точке. Пусть это точка $\xi \in (a, b)$.

Дифференцируя теперь правую и левую части соотношения (1.5.5) $n+1$ раз по x и полагая затем $x = \xi$, в левой части получим нуль, так как $\Psi^{(n+1)}(\xi) = 0$. Первое слагаемое правой части дает значение производной в точке ξ : $f^{(n+1)}(\xi)$. Второе слагаемое правой части дает нуль, как производная $(n+1)$ -го порядка от многочлена степени не выше n . Третье слагаемое есть произведение постоянной k на многочлен $(n+1)$ -й степени со старшим коэффициентом 1; производная $(m+1)$ -го порядка от этого многочлена, как известно, равна $(n+1)!$. Таким образом, суммируя все сказанное, имеем

$$0 = f^{(n+1)}(\xi) - k(n+1)!$$

Подставляя сюда вместо k его выражение (1.5.6), получим требуемое соотношение (1.5.4).

Пусть теперь для определенности

$$|f^{(n+1)}(x)| \leq M_{n+1}; x \in [a, b]. \quad (1.5.7)$$

Используя это ограничение и только что доказанную теорему, приходим к следующей оценке погрешности для фиксированной точки x^* :

$$\Delta_1 = |R_n(x^*)| \leq \frac{M_{n+1}}{(n+1)!} \prod_{i=0}^n |x^* - x_i|. \quad (1.5.8)$$

Построение равномерной на всем отрезке $[a, b]$ оценки $|R_n|$ для фиксированной сетки Λ_n теперь не составляет труда. Именно

$$\Delta_1 = \max_{[a; b]} |R_n(x^*)| \leq \frac{M_{n+1}}{(n+1)!} \max_{[a; b]} |\omega_n(x)|, \quad (1.5.9)$$

где $\omega_n(x) = \prod_{i=0}^n (x - x_i)$.

Пример 1. На отрезке $[-1; 1]$ получить равномерную оценку отклонения функции $f = 1 - \cos(\pi x / 2)$ от ее интерполяционного многочлена, построенного по узлам $x_i = -1 + \frac{2i}{n}$ ($i = 0, 1, \dots, n; n = 2, 3, 4$).

Прежде всего заметим, что для рассматриваемой функции на заданном отрезке $M_{n+1} = (\pi / 2)^{n+1}$. Поэтому в силу оценки (1.5.9) решение задачи сводится к оценке величины $\max_{[-1; 1]} |\omega_n(x)|$, что можно выполнить с помощью обычных правил математического анализа.

1. Рассмотрим случай $n=2$. Тогда

$$\omega_2(x) = (x+1)x(x-1); \omega_2'(x) = 3x^2 - 1.$$

Корнями многочлена $\omega_2'(x)$ являются $x_{1,2} = \pm 1 / \sqrt{3} \approx \pm 0,5774$. Подставляя полученные значения в ω_2 , имеем

$$\max_{[-1; 1]} |\omega_2(x)| = |\omega_2(x_1)| = 2 / \sqrt{27} \approx 0,3849$$

и, следовательно.

$$\Delta_1 \leq \left(\frac{\pi}{2}\right)^3 \cdot \frac{1}{3!} \cdot \frac{2}{\sqrt{27}} \approx 0,25.$$

2. Пусть теперь $n=3$. В этом случае

$$\omega_3(x) = (x+1)\left(x + \frac{1}{3}\right)\left(x - \frac{1}{3}\right)(x-1); \omega'_3(x) = 4x^3 - \frac{20}{9}x.$$

Корнями многочлена $\omega'_3(x)$ служит $x_1=0; x_{2,3} \pm \sqrt{5/3} \approx \pm 0,7454$. Легко проверить, что максимальное значение $|\omega_3(x)|$ достигается в точках x_2, x_3 :

$$\max_{[-1;1]} |\omega_3(x)| = |\omega_3(x_2)| = 16/81 \approx 0,1975.$$

Поэтому

$$\Delta_1 \leq \left(\frac{\pi}{2}\right)^4 \cdot \frac{1}{4!} \cdot \frac{16}{81} \approx 0,05.$$

3. Для $n=4$ оценку

$$\omega_4(x) = (x+1)\left(x + \frac{1}{2}\right)x\left(x - \frac{1}{2}\right)(x-1).$$

Сведем к оценке, полученной в п. 1. Действительно, в силу нечетности $\omega_4(x)$ можно ограничиться нахождением максимального значения $|\omega_4(x)|$ на отрезке $[0,1]$. При этом

$$\max_{[0,1]} |\omega_4(x)| < 2 \cdot \frac{3}{2} \cdot \max_{[0,1]} \left| x \left(x - \frac{1}{2} \right) (x-1) \right|$$

Заменяя в правой части полученного неравенства переменную по формуле $x = \frac{1}{2}(y+1)$ и учитывая результаты п. 1, получим

$$3 \max_{[-1,1]} \left| x \left(x - \frac{1}{2} \right) (x-1) \right| = \frac{3}{8} \max_{[-1,1]} |(y+1)y(y-1)| = \frac{1}{\sqrt{48}} \approx 0,1443.$$

Таким образом,

$$\max_{[-1,1]} |\omega_4(x)| < 1/\sqrt{48} \approx 0,1443,$$

а искомая оценка

$$\Delta_1 < \left(\frac{\pi}{2}\right)^5 \cdot \frac{1}{5!} \cdot \frac{1}{\sqrt{48}} \approx 0,012.$$

Приведенный ниже пример, казалось бы, подтверждает предположение о том, что оценка (9) является практически подходящей и принимающей малые значения для большинства функций при достаточно больших n . Однако во многих случаях это не имеет места.

Дело в том, что лишь для ограниченного класса функций (например, для целых функций) производные достаточно высокого порядка малы. Для большинства же функций некоторые из производных высокого порядка имеют тенденцию расти как $n!$. Рассмотрим в качестве примера функцию $y = \ln x$. Для нее, очевидно, $y^{(n)} = (-1)^{n-1} \frac{(n-1)!}{x^n}$. Таким образом, даже вблизи точек, где кривая $y = \ln x$ выглядит гладкой, ее производные достаточно высоких порядков становятся очень большими и ведут себя как $n!$

Недостатком многочленной аппроксимации является отсутствие, как правило, физического смысла, обычно приводящего к полезным обобщениям.

С другой стороны Λ_n , простота и глубокое развитие теории многочленной аппроксимации в сочетании с минимумом вычислений делают этот вид приближения удобным инструментом при решении различных задач, тем более, что опыт практических расчетов приводит к получению хорошего результата от приближения многочленами, хотя остаточный член либо вообще трудно оценить, либо его оценка слишком завышена.

Итак, рассмотрена лишь одна сторона вопроса о погрешности – влияние свойств функции f на величину Δ_1 . Вопрос о зависимости погрешности от расположения узлов сетки тесно связан со свойствами многочлена Чебышева, и поэтому к детальному изучению этой проблемы следует вернуться после рассмотрения этих многочленов. Здесь же ограничимся одной из возможных оценок величины $|\omega_n(x)|$ на фиксированной сетке Λ_n . Пусть x находится между x_k и x_{k+1} . Положим $\max_{1 \leq i \leq n} (x_i - x_i - 1) = h$, тогда

$$|\omega_n(x)| = \prod_{i=0}^n |x - x_i| < (k+1)!(n-k)!h^{n+1} \leq n!h^{n+1}. \quad (1.5.10)$$

Поэтому неравенство (1.5.8) можно записать в виде

$$\Delta_1 = \max_{[a;b]} |R_n(x)| < \frac{M_{n+1}}{n+1} h^{n+1}. \quad (1.5.11)$$

Заметим, что оценка (1.5.10) довольно груба и ее без труда можно улучшить (это предлагается сделать самостоятельно в качестве упражнения).

Пример 2. С какой точностью можно вычислить $\sqrt{117}$ с помощью интерполяционного многочлена для функции $y = \sqrt{x}$, выбрав в качестве узлов интерполяции $x_0 = 100$, $x_2 = 144$?

Прежде всего определим $M_3 = \max_{[100;144]} |(\sqrt{x})'''|$. Для этого находим

$$y' = \frac{1}{2}x^{-1/2}; y'' = -\frac{1}{4}x^{-3/2}; y''' = \frac{3}{8}x^{-5/2}.$$

Отсюда $M_3 = \frac{3}{8} \cdot 100^{-5/2} = \frac{3}{8} \cdot 10^{-5}$. Поэтому на основании соотношения (1.5.8) имеем

$$\Delta_1 \leq \frac{3}{8} \cdot 10^{-5} \cdot \frac{1}{3!} |(117-100)(117-121)(117-144)| \approx 0,12 \cdot 10^{-2}.$$

1.6. Интерполяционный многочлен Лагранжа

Непосредственное определение коэффициентов a_k интерполяционного многочлена связано с некоторыми вычислительными трудностями. Поэтому при решении практических задач имеют дело со специальными видами интерполяционного многочлена.

В настоящем параграфе рассмотрим форму интерполяционного многочлена, которая называется формой Лагранжа и обычно обозначается $L_n(x)$. Для построения L_n сначала рассмотрим вспомогательные многочлены $l_i(x)$ степени n , обладающие следующими двумя свойствами:

$$l_i(x_i) = 1 \quad (i = 0, 1, \dots, n); \quad (1.6.1)$$

$$l_i(x_k) = 0 \quad (i \neq k; i, k = 0, 1, \dots, n). \quad (1.6.2)$$

Эти свойства означают, что, например, многочлен $l_0(x)$ принимает в точке x_0 значение, равное единице, а в остальных узлах обращается в нуль; многочлен $l_1(x)$ принимает в узле x_1 значение, равное единице, а в остальных узлах обращается в нуль и т.д. В общем случае многочлен $l_i(x)$ в узле x_i принимает значение равное единице, а в остальных узлах обращается в нуль. Таким образом, в силу свойства (1.6.2) и требования, чтобы многочлен $l_i(x)$ имел степень n , получаем

$$l_i(x) = c_i(x_i - x_0) \dots (x - x_{i-1})(x_i - x_{i+1}) \dots (x_i - x_n). \quad (1.6.3)$$

Далее, используя свойство (1.6.1), для определения постоянной c_i имеем уравнение

$$l_i(x_i) = c_i(x_i - x_0) \dots (x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1}) \dots (x_i - x_n) = 1.$$

Отсюда

$$c_i = \frac{1}{(x_i - x_0)\dots(x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1})\dots(x_i - x_n)}. \quad (1.6.4)$$

Поэтому явное выражение для $l_i(x)$ можно представить следующим образом:

$$l_i(x) = \frac{(x - x_0)\dots(x - x_{i-1})(x - x_{i+1})\dots(x - x_n)}{(x_i - x_0)\dots(x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1})\dots(x_i - x_n)}. \quad (1.6.5)$$

Составим теперь следующую линейную комбинацию многочленов l_i :

$$L_n(x) = \sum_{i=0}^n f_i l_i(x). \quad (1.6.6)$$

Выражение (1.6.6) есть многочлен степени не выше n . В узле x_i этот многочлен принимает значение f_i так как соответствующее слагаемое суммы $f_i l_i(x_i)$ равно f_i , а остальные слагаемые $f_i l_i(x_i)$ равны нулю. Таким образом, построен интерполяционный многочлен для функции $f(x)$. Эта форма и называется *интерполяционным многочленом Лагранжа*.

Учитывая, что

$$\omega_m(x) = (x - x_0)(x - x_1)\dots(x - x_n),$$

можно рассмотреть его производную в точке x_i :

$$\omega'_m(x_i) = (x_i - x_0)\dots(x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1})\dots(x_i - x_n)$$

и записать многочлен Лагранжа в виде

$$L_n(x) = \sum_{i=0}^n f_i \frac{\omega_n(x)}{(x - x_i)\omega'_n(x_i)}. \quad (1.6.7)$$

Величины $l_i(x)$ являются как бы весовыми многочленами соответствующих узлов и часто называются *множителями Лагранжа*. В дополнение к свойствам (1.6.1) и (1.6.2) приведем еще одно важное свойство этих множителей:

$$\sum_{i=0}^n l_i(x) = 1. \quad (1.6.8)$$

Действительно, пусть $f(x) \equiv 1$, тогда все $f_i = 1 (i = 0, 1, \dots, n)$. С другой стороны, $f^{(n+1)}(x) \equiv 0$ и, в силу теоремы (разд. 1.5) $L_n(x) = f(x) = 1$. Подставляя полученное выражение (1.6.6), приходим к равенству (1.6.8).

Пример 1. По узлам $x_0 = 0, x_1 = 1/3, x_2 = 1$ построить интерполяционный многочлен Лагранжа для функции $f = \sin(\pi x / 2)$ и получить равномерную оценку погрешности на отрезке $[0, 1]$.

Прежде всего, заметим, что $f(x_0) = 0, f(x_1) = 1/2, f(x_2) = 1$. Далее, используя выражение (1.6.7) при $n = 2$, построим требуемый интерполяционный многочлен.

$$L_2(x) = \frac{1}{2} \frac{x(x-1)}{\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}-1\right)} + 1 \cdot \frac{x\left(x-\frac{1}{3}\right)}{1\left(1-\frac{1}{3}\right)}.$$

Оценка погрешности легко получается из соотношения (1.6.8) при $n = 2$:

$$\Delta_1 \leq \frac{M_3}{3!} \max_{[0,1]} \left| x\left(x-\frac{1}{3}\right)(x-1) \right|$$

В данном случае, очевидно, $M_3 = (\pi/2)^3$, а $\max \left| x\left(x-\frac{1}{3}\right)(x-1) \right| = 0,079$ и определяется аналогично тому, как это было сделано в примере 1 подразд. 1.5. Поэтому окончательно имеем:

$$\Delta_1 \leq \left(\frac{\pi}{2}\right)^3 \cdot \frac{1}{3!} \cdot 0,079 \approx 0,05.$$

Пример 2. Функция $f(x)$ задана таблично:

x	0	1	2	6
y	-1	-3	3	1187

Пользуясь интерполяционным многочленом Лагранжа, определить ее значение в точке $x = 4$.

Подставляя в формулу (1.6.7) значения x_i и f_i при $n = 3$ и $x = 4$ получим:

$$\begin{aligned} L_3(4) &= -1 \cdot \frac{(4-1)(4-2)(4-6)}{(-1)(-2)(-6)} - 3 \cdot \frac{4(4-2)(4-6)}{1(1-2)(1-6)} + \\ &+ 3 \cdot \frac{4(4-1)(4-6)}{2(2-1)(2-6)} + 1187 \cdot \frac{4(4-1)(4-2)}{6(6-1)(6-2)} = 255. \end{aligned}$$

Если в рассмотренном примере добавить к таблице еще одну точку, то вычисление значения функции при $x = 4$ придется производить заново. Кроме того, из самого примера видно, что процесс получения приближенного значения функции по интерполяционной формуле Лагранжа связан с большими вычислениями. Это приводит к необходимости упрощения вычислительной работы.

Для удобства вычислений составим вспомогательную таблицу

$x - x_0$	$x_0 - x_1$	$x_0 - x_2$...	$x_0 - x_n$	k_0
$x_1 - x_0$	$x - x_1$	$x_1 - x_2$...	$x_1 - x_n$	k_1
$x_2 - x_0$	$x_2 - x_1$	$x - x_2$...	$x_2 - x_n$	k_2
...
$x_n - x_0$	$x_n - x_1$	$x_n - x_2$...	$x - x_n$	k_n

где x_0, x_1, \dots, x_n — узлы интерполяции;

a, x — значение аргумента, для которого определяется приближенное значение по интерполяционной формуле Лагранжа.

Обозначим произведение элементов первой строки через k_0 :

$$k_0 = (x - x_0)(x_0 - x_1) \dots (x_0 - x_n).$$

В общем виде произведение элементов i -й строки есть

$$k_i = (x_i - x_0) \dots (x_i - x_{i-1})(x - x_i)(x_i - x_{i+1}) \dots (x_i - x_n).$$

Числа k_0, k_1, \dots, k_i поместим в крайнем правом столбце таблицы. Дополнительно вычислим произведение элементов, расположенных на главной диагонали:

$$\omega_n(x) = (x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_n).$$

Тогда интерполяционный многочлен Лагранжа можно переписать в виде

$$L_n(x) = \omega_n(x) \sum_{i=1}^n \frac{y_i}{k_i} \quad (1.6.9)$$

Пользуясь формулой (1.6.9), решим снова пример 2, составим таблицу

4	-1	-2	-6	-48
1	4-1	1-2	1-6	15
2	2-1	4-2	2-6	-16
6	6-1	6-2	4-6	-240

и найдём $\omega_3(4) = -48$. Приближенное значение функции в точке $x=4$, т.е. $f(4) \approx L_3(4)$, определим по формуле

$$L_3(x) = \omega_3(x) \sum_{i=0}^3 \frac{y_i}{k_i}$$

или

$$L_3(4) = -48 \left[\frac{-1}{-48} + \frac{-3}{15} + \frac{3}{-16} + \frac{1187}{-240} \right] = 255.$$

Интерполяционная формула Лагранжа заметно упрощается, если узлы интерполяции *равноотстоящие*, т.е. $h = x_{i+1} - x_i = \text{const}$, где h -шаг интерполяции. Введём обозначения $t = (x - x_0) / h$. По формуле (1.6.5) имеем

$$l_i(x) = \frac{(x - x_0) \dots (x - x_{i-1})(x - x_{i+1}) \dots (x - x_n)}{(x_i - x_0) \dots (x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1}) \dots (x_i - x_n)}.$$

Так как

$$\begin{aligned} x - x_0 &= th, \\ x - x_1 &= th - h = h(t - 1), \\ &\dots \\ x - x_i &= th - ih = h(t - i), \\ &\dots \\ x - x_n &= th - nh = h(t - n), \end{aligned}$$

то

$$l_i = \frac{t(t-1)\dots(t-i+1)(t-i-1)\dots(t-n)h^n}{ih(i-1)h\dots 1h(-1)h\dots [-(n-i)h]} \tag{1.6.10}$$

Заметим, что часть произведения в знаменателе равна

$$ih(i-1)h\dots h = i!h^i,$$

а другая часть равна

$$(-h)\dots [-(n-i)h] = (-1)^{n-i} (n-i)! h^{n-i}.$$

Умножив числитель и знаменатель правой части равенства (1.6.10) на $(-1)^{n-i} (t-i)$, получим

$$l_i = \frac{t(t-1)\dots(t-n)}{(t-i)i!(n-i)!} (-1)^{n-i} = (-1)^{n-i} \frac{c_n^i}{t-i} \frac{t(t-1)\dots(t-1)}{n!},$$

где $C_n^i = \frac{n!}{i!(n-i)!}$.

Тогда интерполяционный многочлен Лагранжа для равноотстоящих узлов интерполяции можно записать в виде

$$L_n(x) = L_n(x_0 + ht) = \frac{t(t-1)\dots(t-n)}{n!} \sum_{i=0}^n (-1)^{n-i} \frac{C_n^i}{t-i} y_i. \quad (1.6.11)$$

Пример 3. Функция $y = \sin x$ задана в виде таблицы

x	0	$\pi/4$	$\pi/2$
y	0	0,707	1

Пользуясь интерполяционным многочленом Лагранжа определить ее значение в точке $x^* = \pi/6$. Оценить погрешность Δ_i .

Прежде всего, определим $t^* = \left(\frac{\pi}{6} - 0\right) \left(\frac{\pi}{4}\right)^{-1} = \frac{2}{3}$. Подставляя в формулу (1.6.11) полученное значение t^* и значения y_i при $n = 2$, имеем

$$L_2\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{(2/3)(2/3-1)(2/3-2)}{2!} \times \left(\frac{2}{2/3-0} \cdot 0 - \frac{2}{2/3-1} \cdot 0,707 + \frac{1}{2/3-2} \cdot 1 \right) = 0,517.$$

Для оценки погрешности воспользуемся формулой (1.5.8). Здесь $M_3 = \max_{[0, \pi/2]} |(\sin x)'''| = 1, x^* = \pi/6$; поэтому

$$\Delta_1 = \frac{1}{3!} \cdot \frac{\pi}{6} \cdot \frac{\pi}{12} \cdot \frac{\pi}{3} = 0,024.$$

Заметим, что при вычислении погрешности градусную меру следует перевести радианную.

Итак, округляя результат до двух знаков, получим

$$\sin(\pi/6) = 0.52 \pm 0.03.$$

1.7. Первый и второй интерполяционные многочлены Ньютона

Если точка интерполирования x^* находится в начале или в конце таблицы, то не всегда возможно выбрать достаточное количество узлов слева и справа от x^* для построения необходимых конечных разностей. В этом случае используются специальные формы интерполяционного многочлена.

Пусть точка x^* расположена вблизи первого узла сетки $x_0, x_1, \dots, x_k, \dots$. Рассмотрим переменную $t = \frac{x - x_0}{h}$, и построим интерполяционный многочлен в следующей форме:

$$P_k(x) = P_k(x_0 + th) = a_0 + \frac{a_1}{1!}t + \frac{a_2}{2!}t(t-1) + \dots + \frac{a_k}{k!}t(t-1)\dots(t-k+1). \quad (1.7.1)$$

Неизвестные коэффициенты a_i определим из условий совпадения многочлена P_k и функции f в узлах x_i . При этом напомним, что узлу x_i соответствует величина $t = i$. Таким образом, для определения коэффициентов a_i получаем систему линейных уравнений

$$P_k(x_0 + ih) = f_i \quad (i = 0, 1, \dots, k). \quad (1.7.2)$$

Структура этой системы такова, что a_0 определяется непосредственно из первого уравнения системы (1.7.2), a_1 – из второго при уже определенном a_0 и т.д. Действительно, полагая $i = 0$, из первого уравнения системы (1.7.2) находим

$$P_k(x_0) = a_0 = f_0,$$

из второго уравнения при $i = 1$ имеем

$$P_k(x_0 + h) = f_0 + \frac{a_1}{1!} \cdot 1 = f_1; \quad a_1 = \Delta f_0.$$

Продолжая этот процесс далее, в результате несложных преобразований получим следующие выражения для коэффициентов:

$$a_0 = f_0; \quad a_i = \Delta^i f_0 \quad (i = 1, 2, \dots, k). \quad (1.7.3)$$

подставляя найденные значения коэффициентов в равенство (1.7.1), получим *первый интерполяционный многочлен Ньютона*, обычно обозначаемый N_k^I :

$$N_k^I(t) = f_0 + \frac{\Delta f_0}{1!}t + \frac{\Delta^2 f_0}{2!}t(t-1) + \dots + \frac{\Delta^k f_0}{k!}t(t-1)\dots(t-k+1). \quad (1.7.4)$$

Остаточный член в силу формулы (1.5.4) относительно переменной t можно представить в виде

$$R_k = \frac{f^{(k+1)}(\xi)}{(k+1)!} h^{k+1} t(t-1)\dots(t-k); \quad \xi \in (x_0, x_k), \quad (1.7.5)$$

а оценку погрешности приближенного значения $N_k^I(t)$ (погрешности метода) – в виде

$$\Delta_1 = |f(x) - N_k^I(t)| \leq \frac{M_{k+1}}{(k+1)!} h^{k+1} |t(t-1)\dots(t-k)|, \quad (1.7.6)$$

где $M_{k+1} = \max_{[x_0, x_k]} |f^{(k+1)}(x)|$.

Пусть теперь точка x^* расположена вблизи последнего узла сетки $\dots x_{-k}, \dots, x_{-1}, x_0$. Для этой сетки, снова используя переменную t , построим интерполяционный многочлен в следующей форме:

$$P_k(x) = P_k(x_0 + th) = a_0 + \frac{a_1}{1!}t + \frac{a_2}{2!}t(t+1) + \dots + \frac{a_k}{k!}t(t+1)\dots(t+k-1). \quad (1.7.7)$$

Неизвестные коэффициенты a_i определим из условий совпадения многочлена P_k и функции f в узлах x_i . При этом заметим, что узлу x_{-i} соответствует значение $t = -i$. Таким образом, для определения коэффициентов получим систему линейных уравнений

$$P_k(x_0 - ih) = f_i \quad (i = 0, 1, \dots, k). \quad (1.7.8)$$

Структура этой системы такова, что a_0 определяется непосредственно из первого уравнения системы (1.7.8), a_1 – из второго при уже определенном a_0 и т.д. Действительно, полагая $i = 0$, из первого уравнения системы (1.7.8) находим

$$P_k(x) = a_0 = f_0,$$

из второго уравнения при $i = 1$ имеем

$$P_k(x_0 - h) = f_0 + \frac{a_1}{1!}1 = f_{-1}; \quad a_1 = \nabla f_0.$$

Продолжая этот процесс далее, в результате несложных преобразований получим следующие выражения для коэффициентов:

$$a_0 = f_0; \quad a_i = \nabla^i f_0 \quad (i = 1, 2, \dots, k). \quad (1.7.9)$$

Подставляя найденные значения коэффициентов в равенство (1.7.7), получим *второй интерполяционный многочлен Ньютона*, обычно обозначаемый N_k^{II} :

$$N_k^{\text{II}}(t) = f_0 + \frac{\nabla f_0}{1!}t + \frac{\nabla^2 f_0}{2!}t(t+1) + \dots + \frac{\nabla^k f_0}{k!}t(t+1)\dots(t+k-1) \quad (1.7.10)$$

с остаточным членом

$$R_k = \frac{f^{(k+1)}(\xi)}{(k+1)!}h^{k+1}t(t+1)\dots(t+k); \quad \xi \in (x_{-k}, x_0), \quad (1.7.11)$$

и оценкой погрешности приближенного значения

$$\Delta_1 = \left| f(x) - N_k^{\text{II}}(t) \right| \leq \frac{M_{k+1}}{(k+1)!}h^{k+1} |t(t+1)\dots(t+k)|, \quad (1.7.12)$$

где $M_{k+1} = \max_{[x_{-k}, x_0]} |f^{(k+1)}(x)|$.

Формулы (1.7.4) и (1.7.10) часто называют соответственно *интерполяционными формулами Ньютона для интерполирования вперед и назад*.

Пример. Составить соответствующие интерполяционные многочлены и вычислить в точках $x_1^* = 0,63$ и $x_2^* = 1,35$ значения функции $f = 3^x$, заданной в виде следующей таблицы, содержащей значения f_i с четырьмя верными в широком смысле знаками:

X	0,50	0,75	1,00	1,25	1,50
f	1,732	2,280	3,000	3,948	5,196

Оценить погрешность результата.

Дополним заданную таблицу значениями конечных разностей, поместив в последней строке значения погрешностей соответствующих конечных разностей.

Т а б л и ц а 1 . 5

x	f	f^1	f^2	f^3	f^4
0,50	1,732				
0,75	2,280	548			
1,00	3,000	720	172		
1,25	3,948	948	228	56	16
1,50	5,196	1248	300	72	
	0,001	2	4	8	16

Поскольку четвертая конечная разность совпадает со своей погрешностью, заданную функцию с точки зрения вычислительной погрешности нецелесообразно аппроксимировать многочленом степени выше третьей.

Далее, так как $x_1^* = 0,63$ расположено в начале таблицы, а $x_2^* = 1,35$ – в конце ее, то для вычисления $f_1^* = 3^{0,63}$ следует использовать первый, а для вычисления $f_2^* = 3^{1,35}$ – второй интерполяционный многочлен Ньютона.

Итак, полагая $x_0 = 0,5$, вычислим $t_1^* = (x_0^* - x_0) / h = (0,63 - 0,5) / 0,25 = 0,52$. Подставляя полученное значение t_1^* в выражение (1.7.4) для первого интерполяционного многочлена Ньютона и используя величины конечных разностей из табл. 5, имеем

$$N_3^1(0,52) = 1,732 + \frac{0,548}{1!} \cdot 0,52 + \frac{0,172}{2!} \cdot 0,52 \cdot (-0,48) + \frac{0,056}{3!} \cdot 0,52(-0,48)(-1,48) = 1,9989420.$$

Аналогично, полагая $x_0 = 1,50$, вычислим $t_2^* = (1,35 - 1,50) / 0,25 = -0,60$ и, используя выражение (1.7.10) для второго интерполяционного многочлена Ньютона, получим

$$N_3^{\text{II}}(-0,60) = 5,196 + \frac{1,248}{1!} \cdot (-0,60) + \frac{0,300}{2!} \cdot (-0,60) \cdot 0,40 + \\ + \frac{0,072}{3!} \cdot (-0,60) \cdot 0,40 \cdot 1,40 = 4,407168.$$

Оценим погрешность метода соответственно по формулам (1.7.6) и (1.7.12):

$$\Delta_1(N_3^{\text{I}}) < \frac{4 \ln^4 3}{4!} \cdot 0,25^4 \cdot 0,52 \cdot 0,48 \cdot 1,48 \cdot 2,48 = 0,0009;$$

$$\Delta_1(N_3^{\text{II}}) < \frac{5,2 \ln^4 3}{4!} \cdot 0,25^4 \cdot 0,60 \cdot 0,40 \cdot 1,40 \cdot 2,40 = 0,001.$$

Учитывая величины погрешностей f^k , приведенные в табл. 1.5, оценим вычислительные погрешности:

$$\Delta_2(N_3^{\text{I}}) < 0,001 + 0,0011 + 0,0005 + 0,0005 = 0,0031;$$

$$\Delta_2(N_3^{\text{II}}) < 0,001 + 0,0012 + 0,0005 + 0,0005 = 0,0032.$$

Округляя значения N_3^{I} (0,52) и N_3^{II} (-0,60) до четырех знаков, получаем следующие погрешности округления:

$$\Delta_3(N_3^{\text{I}}) = 0,06 \cdot 10^{-3}; \quad \Delta_3(N_3^{\text{II}}) = 0,2 \cdot 10^{-3}.$$

Объединяя все найденные погрешности, окончательно имеем

$$3^{0,63} = 1,999 \pm 0,005; \quad 3^{1,35} = 4,407 \pm 0,005.$$

1.8. Итерационно-интерполяционный метод Эйткена

В тех случаях, когда нет необходимости в получении приближенного аналитического выражения функции $f(x)$, заданной таблично, а требуется лишь определить значение этой функции в некоторой точке x^* – отличной от узлов интерполяции, целесообразно использовать *итерационно-интерполяционный метод Эйткена*. По существу, этот метод заключается в последовательной линейной интерполяции. Процесс вычисления $f(x^*)$ состоит в следующем. Пронумеруем узлы интерполяции, например, в порядке удаления их от x^* , и составим следующую таблицу:

Таблица 1.6

·	·				
·	·				
·	·				
x_4	P_0^4	P_1^{24}	P_2^{024}	P_3^{0124}	
x_2	P_0^2	P_1^{02}	P_2^{012}	P_3^{0123}	
x_0	P_0^0	P_1^{10}	P_2^{013}		...
x_1	P_0^1	P_1^{13}			
x_3	P_0^3				
·	·				
·	·				

Здесь:

$$P_0^k = f(x_k);$$

$$P_1^{ij}(x) = f_i \frac{x - x_j}{x_i - x_j} + f_j \frac{x - x_i}{x_j - x_i} = \frac{1}{x_j - x_i} \begin{vmatrix} x - x_i & P_0^i \\ x - x_j & P_0^j \end{vmatrix}$$

– интерполяционный многочлен степени не выше первой, построенный по узлам x_i и x_j ;

$$P_2^{ijk}(x) = \frac{1}{x_k - x_i} \begin{vmatrix} x - x_i & P_1^{ij} \\ x - x_k & P_1^{jk} \end{vmatrix}$$

– интерполяционный многочлен степени не выше второй, построенный по узлам x_i, x_j, x_k . Продолжая этот процесс, построим многочлен

$$P_n^{ij...km}(x) = \frac{1}{x_m - x_i} \begin{vmatrix} x - x_i & P_{n-1}^{ij...k}(x) \\ x - x_m & P_{n-1}^{j...km}(x) \end{vmatrix}. \quad (1.8.1)$$

Покажем, что если $P_{n-1}^{ij...k}(x)$ и $P_{n-1}^{j...km}(x)$ – интерполяционные многочлены, построенные соответственно по узлам x_i, x_j, \dots, x_k и x_j, \dots, x_k, x_m , то $P_n^{ij...km}(x)$ – интерполяционный многочлен, построенный по узлам $x_i, x_j, \dots, x_k, x_m$.

Действительно, во-первых, $P_n^{ij...km}(x)$ – многочлен степени не выше n , что очевидно из построения формулы (1.8.1). Во-вторых, во всех узлах x_p многочлен $P_n^{ij...km}(x)$ принимает соответствующие значения:

$$P_n^{ij...km}(x_i) = \frac{-(x_i - x_m)f_i}{x_m - x_i} = f_i \quad (x_p = x_i);$$

$$P_n^{ij\dots}(x_m) = \frac{(x_m - x_i)f_m}{x_m - x_i} = f_m \quad (x_p = x_m);$$

$$P_n^{ij\dots km}(x_p) = \frac{1}{x_m - x_i} ((x_p - x_i)f_p - (x_p - x_m)f_p) = f_p.$$

Вычисляя последовательно по формуле (1.8.1) значения $P_n^{01\dots n}(x^*)$, принимают их за последовательные приближения $f(x^*)$. Процесс вычисления практически заканчивают, когда абсолютная величина разности двух последовательных приближений становится достаточно малой.

Пример 1. Вычислить в точке $x^* = 6$ с точностью до $\varepsilon = 0,05$ значение функции $f = \ln x$, заданной в виде таблицы:

x	1	2	4	5	8	10
f	0,00	0,69	1,39	1,61	2,08	2,30

Пронумеруем узлы в следующем порядке: $x_0 = 5, x_1 = 8, x_2 = 4, x_3 = 10, x_4 = 2, x_5 = 1$. По формуле (1.8.1) вычисляем значения интерполяционных многочленов $P_n(6)$:

$$P_1^{01} = \frac{1}{8-5} \cdot \begin{vmatrix} 6-5 & 1,61 \\ 6-8 & 2,08 \end{vmatrix} = 1,77;$$

$$P_1^{02} = \frac{1}{5-4} \cdot \begin{vmatrix} 6-4 & 1,39 \\ 6-5 & 1,61 \end{vmatrix} = 1,83;$$

$$P_2^{012} = \frac{1}{8-4} \cdot \begin{vmatrix} 6-4 & 1,83 \\ 6-8 & 1,77 \end{vmatrix} = 1,80.$$

Поскольку $|P_1^{02} - P_2^{012}| = 0,03 < 0,05$, вычисления прекращаем и полагаем $\ln 6 = 1,80 \pm 0,03$.

Пример 2. Пользуясь схемой Эйткена, вычислить с точностью до $0,5 \cdot 10^{-4}$ значение $\sin 0,674$ для функции $y = \sin x$, заданной в виде таблицы:

$x_0 = 0,66$	$x_1 = 0,67$	$x_2 = 0,68$
$y_0 = 0,61312$	$y_1 = 0,62099$	$y_2 = 0,62879$

Согласно формуле (1.8.1) имеем

$$P_1^{01}(0,674) = \frac{\begin{vmatrix} 0,674 - 0,68 & 0,61312 \\ 0,674 - 0,67 & 0,62090 \end{vmatrix}}{0,67 - 0,66} = 0,625730;$$

$$P_1^{12} = \frac{1}{0,68 - 0,67} \cdot \begin{vmatrix} 0,674 - 0,67 & 0,62099 \\ 0,674 - 0,68 & 0,625643 \end{vmatrix} = 0,625643;$$

$$P_2^{012} = \frac{1}{0,68 - 0,67} \cdot \begin{vmatrix} 0,674 - 0,66 & 0,625730 \\ 0,674 - 0,68 & 0,625643 \end{vmatrix} = 0,625676.$$

Следовательно, $\sin 0,674 = 0,62568 + 0,00004$.

1.9. Оптимизация узлов интерполирования

Вернемся снова к оценке погрешности, выражаемой формулой (5.8). Предположим теперь, что в выборе сетки Λ_n ограничений нет. Поставим задачу о наилучшем выборе узлов интерполирования. На рассматриваемом классе функций $C^{n+1}([a,b])$ исходя из оценки (1.5.8) наилучшими узлами интерполирования следует признать те x_i , для которых выражение $\max|\omega_n(x)|$ минимально. Определение этих узлов фактически сводится к нахождению корней многочлена, наименее уклоняющегося от нуля на отрезке $[a,b]$. Такой многочлен, как известно из теории функции, порождается многочленами Чебышева первого рода, которые определяются следующими рекуррентными соотношениями:

$$T_0 = 1; T_1 = x; T_{n+1} = 2xT_n - T_{n-1}, n > 0. \quad (1.9.1)$$

Рассмотрим основные свойства многочленов Чебышева.

1. Старший член многочлена T_{n+1} получается из старшего члена многочлена T_n ($n = 1, 2, \dots$) умножением на $2x$

Имеем:

$$T_2 = 2x \cdot x - 1 = 2x^2 - 1,$$

$$T_3 = 2x(2x^2 - 1) - x = 4x^3 - 3x.$$

Поэтому старший член многочлена T_{n+1} таков:

$$T_{n+1} = 2^n x^{n+1} + \dots$$

2. Все многочлены $T_{2n}(x)$ являются четными функциями, а $T_{2n+1}(x)$ - нечетными функциями.

Для $n=0$ это очевидно. Пусть это справедливо для некоторого n . Тогда функция $2xT_{2n+1}(x)$ - четная, а значит, $T_{2n+2} = 2xT_{2n+1}(x) - T_{2n}(x)$ - также четная функция. Далее, функция $2xT_{2n+2}(x)$ - нечетная и поэтому $T_{2n+3}(x) = 2xT_{2n+2}(x) - T_{2n+1}(x)$ - также нечетная функция.

3. Если $x \in [-1,1]$, то многочлены Чебышева имеют следующее явное выражение:

$$T_{n+1}(x) = \cos[(n+1)\arccos x]; \quad n \geq -1. \quad (1.9.2)$$

Докажем, что правая часть равенства (1.9.2) удовлетворяет определению (1.9.1) многочленов Чебышева. Действительно,

$$\{\cos[(n+1)\arccos x]\}_{n=-1} = 1 = T^0,$$

$$\{\cos[(n+1)\arccos x]\}_{n=0} = x = T_1.$$

Для доказательства выполнения рекуррентной формулы рассмотрим очевидное тригонометрическое соотношение

$$\cos(n+1)\theta = 2\cos\theta\cos n\theta - \cos(n-1)\theta.$$

Полагая $\theta = \arccos x$, откуда $x = \cos\theta$, получим

$$\cos[(n+1)\arccos x] = 2x\cos[n\arccos x] - \cos[(n-1)\arccos x].$$

4. На отрезке $[-1,1]$ многочлены $T_{n+1}(x)$ имеют $n+1$ различных корней:

$$x_k = \cos \frac{2k+1}{2(n+1)}\pi \quad (k = 0, 1, \dots, n). \quad (1.9.3)$$

Используя выражение (1.9.2), для определения корней многочлена $T_{n+1}(x)$ получаем уравнение

$$(n+1)\arccos x_k = \frac{\pi}{2} + \pi k \quad (k = 0, 1, \dots, n).$$

Решая это уравнение относительно x_k , приходим к соотношению (1.9.3).

5. На отрезке $[-1,1]$ справедливо неравенство

$$|T_{n+1}(x)| \leq 1. \quad (1.9.4)$$

Это вытекает непосредственно из соотношения (1.9.2).

Из того же соотношения (1.9.2) определим все точки x_m , в которых многочлен $T_{n+1}(x)$ достигает своих экстремальных значений ± 1 . Для этого необходимо, чтобы

$$(n+1)\arccos x_m = \pi m \quad (m = 0, 1, \dots, n+1).$$

И, следовательно,

$$x_m = \cos \frac{m}{n+1} \pi \quad (m = 0, 1, \dots, n+1). \quad (1.9.5)$$

Подставляя эти значения в равенство (1.9.2), получаем

$$T_{n+1}(x_m) - \cos m\pi = (-1)^m. \quad (1.9.6)$$

Это означает, что точки, в которых $T_{n+1} = 1$ и $T_{n+1} = -1$, чередуются, начиная с $x_0 = 1$, где $T_{n+1}(1) = 1$. Отметим ещё раз, что неравенство (1.9.4) справедливо не для всех x . Если $|x| > 1$, то $\arccos x$ не существует на множестве действительных чисел.

Рассмотрим теперь многочлены

$$T_{n+1}(x) = 2^{-n} \bar{T}_{n+1}(x) = x^{n+1} + \dots. \quad (1.9.7)$$

Это многочлены наименее уклоняющиеся от нуля на отрезке $[-1, 1]$, что подтверждает следующая теорема.

Теорема. Пусть $P_{n+1}(x)$ – многочлен степени $n+1$ со старшим коэффициентом, равным 1. Тогда

$$\max_{[-1,1]} |P_{n+1}(x)| \geq \max_{[-1,1]} |\bar{T}_{n+1}(x)| = 2^{-n}. \quad (1.9.8)$$

Предложим, что неравенство (1.9.8) не выполняется. Тогда многочлен $Q_n(x) = \bar{T}_{n+1} - P_{n+1}$, степень которого не выше n , во всех n , во всех $n+2$ экстремальных точках x_m многочлена T_{n+1} совпадал бы с последним по знаку и, следовательно, поочередно принимал бы в этих точках то положительное, то отрицательное значение.

Поэтому $Q_n(x)$ должен иметь $n+1$ различных корней, что невозможно для многочлена степени не выше n . Полученное противоречие доказывает теорему.

Всякий отрезок $[a, b]$ можно получить из отрезка $[-1, 1]$ линейной заменой переменных

$$x' = \frac{b+a}{2} + \frac{b-a}{2} x. \quad (1.9.9)$$

При этом многочлен $\bar{T}_{n+1}(x)$ преобразуется в многочлен $\bar{T}_{n+1}\left(\frac{2x-(b+a)}{b-a}\right)$ со старшим коэффициентом $\left(\frac{2}{b-a}\right)^{n+1}$. Следовательно,

$$\bar{T}_{n+1}^{[a,b]}(x) = (b-a)^{n+1} 2^{-2n-1} T_{n+1}\left(\frac{2x-(b+a)}{b-a}\right). \quad (1.9.10)$$

Есть многочлен со старшим коэффициентом 1, наименее уклоняющийся от нуля на $[a, b]$, и для любого многочлена $P_{n+1}(x)$ степени $n+1$ со старшим коэффициентом 1 выполняется неравенство

$$\max_{[a,b]} |P_{n+1}(x)| \geq \max_{[a,b]} \left| \bar{T}_{n+1}^{[a,b]}(x) \right| = 2^{-n} \left(\frac{b-a}{2} \right)^{n+1}. \quad (1.9.11)$$

В силу линейной замены (1.9.9) корни многочлена $T_{n+1}(x)$ имеют вид:

$$x_k = \frac{b+a}{2} + \frac{b-a}{2} \cos \frac{2k+1}{2(n+1)} \pi \quad (k=0, \dots, n), \quad (1.9.12)$$

а экстремальные точки –

$$x_m = \frac{b+a}{2} + \frac{b-a}{2} \cos \frac{m}{n+1} \pi \quad (m=0, 1, \dots, n+1). \quad (1.9.13)$$

Вернемся теперь к задаче минимизации погрешности интерполирования Δ_1 на отрезке $[a, b]$ для произвольной сетки на классе $n+1$ раз непрерывно дифференцируемых функций, удовлетворяющих условию (5.7). Этот класс функций будем обозначать $C^{n+1}(M_{n+1,[a,b]})$. Для решения поставленной задачи в силу формулы (1.5.8) необходимо минимизировать величину $\max_{[a,b]} |\omega_n(x)|$. Так как $\omega_n(x)$ – многочлен $(n+1)$ -й степени со старшим коэффициентом 1, то, очевидно, что величина $\max_{[a,b]} |\omega_n(x)|$ до-

стигает своего минимального значения для многочленов Чебышева $\bar{T}_{n+1}^{[a,b]}(x)$. Следовательно, в качестве узлов интерполяции следует выбирать точки x_k определяемые выражением (1.9.12).

При этом

$$\max_{[a,b]} |\omega_n(x)| = \max_{[a,b]} \left| \bar{T}_{n+1}^{[a,b]}(x) \right| = 2^{-n} \left(\frac{b-a}{2} \right)^{n+1}, \quad (1.9.14)$$

а оценка (1.5.8) принимает вид

$$\Delta_1 \leq \frac{M_{n+1}}{(n+1)!} 2^{-n} \left(\frac{b-a}{2} \right)^{n+1}. \quad (1.9.15)$$

Это оценка – неулучшаемая, так как в ней имеет место знак равенства, если в качестве функции $f(x)$ выбрать следующий многочлен степени $n+1$:

$$f(x) = \frac{M_{n+1}}{(n+1)!} x^{n+1} + a_n x^n + \dots,$$

а в качестве узлов интерполяции – точки x_k , определяемые выражением (1.9.12).

Пример 1. На отрезке $[-1,1]$ получим равномерную оценку отклонения функции $f(x)=1 - \cos(\pi x/2)$ от ее интерполяционного многочлена, построенного по узлам Чебышева (1.9.3) для $n=2,3,4$.

Прежде всего заметим, что для рассматриваемой функции на заданном интервале $M_{n+1} = (n/2)^{n+1}$, $b-a=2$. Поэтому в силу оценки (1.9.15) имеем:

$$n=2, \Delta_1 \leq \left(\frac{\pi}{2} \right)^3 \frac{1}{3!} \left(\frac{1}{2} \right)^2 \approx 0,17;$$

$$n=3, \Delta_1 \leq \left(\frac{\pi}{2} \right)^4 \frac{1}{4!} \left(\frac{1}{2} \right)^3 \approx 0,032;$$

$$n=4, \Delta_1 \leq \left(\frac{\pi}{2} \right)^5 \frac{1}{5!} \left(\frac{1}{2} \right)^4 \approx 0,005.$$

Рекомендуем сравнить полученное решение с решением примера 1, подразд.1.5.

1.10. Интерполирование с кратными узлами

До сих пор мы рассматривали задачу, в которой параметры интерполирования – коэффициенты интерполяционного многочлена – определялись только значениями интерполируемой функции. Такую задачу часто называют задачей интерполирования по Лагранжу, а сам процесс построения интерполяционного полинома – процессом Лагранжа.

Рассмотрим теперь несколько более широкую задачу – задачу интерполирования по значениям функции и её производных или, как ещё говорят, задачу кратного интерполирования.

Пусть на сетке $\Lambda_m : a \leq x_0 < x_1 < \dots < x_m \leq b$ в узлах x_i заданы значения f_i некоторой функции f и ее производные $f_i^{(k)}$ ($i = 0, 1, \dots, m, k = 0, 1, \dots, \alpha_i - 1$) причем $\sum_{i=0}^m \alpha_i = n + 1$. Требуется построить многочлен H_n , значение которого и производные до порядка $\alpha_i - 1$ в узлах x_i ($i = 0, 1, \dots, m$) совпадают со значениями f и соответствующими ее производными, а также оценить погрешность.

Такой вид интерполирования называют интерполированием по Эрмиту, а соответствующий многочлен H_n – многочленом Эрмита. Числа α_i называются кратностями узлов x_i . При этом можно доказать, что многочлен Эрмита существует и единствен.

Остаточный член интерполяционной формулы $f(x) \approx H_n(x)$ можно представить в следующем виде:

$$R_n(x) = f(x) - H_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\zeta)}{(n+1)!} \prod_{i=0}^m (x - x_i)^{\alpha_i}; \zeta \in (a, b). \quad (1.10.1)$$

Пусть теперь для определенности

$$|f^{(n+1)}(x)| \leq M_{n+1}, x \in [a, b]. \quad (1.10.2)$$

Используя это ограничение и формулу получим оценку погрешности для фиксированной точки x :

$$\Delta_1 = |f(x) - H_n(x)| \leq \frac{M_{n+1}}{(n+1)!} \prod_{i=0}^m |x - x_i|. \quad (1.10.3)$$

Построение равномерной на всем отрезке $[a, b]$ оценки для фиксированной сетки Λ_m теперь не представляет труда.

Действительно,

$$\Delta_1 = \max_{[a, b]} \left| R_n(x) \right| \leq \frac{M_{n+1}}{(n+1)!} \max_{[a, b]} \left| \Omega_n(x) \right|, \quad (1.10.4)$$

где
$$\Omega_n(x) = \prod_{i=0}^m (x - x_i)^{\alpha_i}. \quad (1.10.5)$$

Пример. Построить интерполяционный многочлен Эрмита для функции $f = 1 - \cos(\pi x / 2)$ по узлам $x_0 = -1, x_1 = 0, x_2 = 1$ соответственно с кратностями $\alpha_0 = 1, \alpha_1 = 2, \alpha_2 = 1$. Получим равномерную оценку погрешности на отрезке $[-1, 1]$.

Вычислить в заданных узлах значения функции и ее производной:

$$f(x_0) = f(x_2) = 1; f(x_1) = f'(x_1) = 0.$$

Теперь построим многочлен Эрмита с учетом кратностей узлов:

$$H_3(x) = 1 \cdot \frac{x^2(x-1)}{-2} + 0 \cdot \frac{(x-1)(x+1)}{-1} + 1 \cdot \frac{(x+1)x^2}{2} = x^2.$$

Заметим, что вместо многочлена третьей степени мы получили многочлен второй степени, что является следствием симметрии исходной информации (но не функции f).

Найдем теперь оценку погрешности используя формулу (1.10.4) и учитывая, что для рассматриваемой функции $M_4 = (\pi/2)^4$, получим

$$\Delta_1 \leq \left(\frac{\pi}{2}\right)^4 \cdot \frac{1}{4!} \cdot \max_{[-1,1]} |(x+1)x^2(x-1)|.$$

Нетрудно показать, что $\max_{[-1,1]} |(x+1)x^2(x-1)| = 0,25$ поэтому окончательно имеем $\Delta_1 \leq 0,065$.

1.11. Математический аппарат тригонометрического интерполирования

В следующих параграфах мы рассмотрим задачу аппроксимации функций с помощью тригонометрического многочлена. Это означает, что в качестве аппроксимирующей функции принимается линейная комбинация тригонометрических функций $\sin nx$ и $\cos nx$.

Для формального обоснования выбора тригонометрических функций в качестве аппроксимирующих нам потребуются некоторые сведения из курса математического анализа, относящиеся к рядам Фурье. Ниже приведем эти сведения, опуская доказательства проводимых утверждений.

Последовательности. Ряды. Рассмотрим некоторую функцию $f(x)$. В качестве области определения этой функции возьмем множество натуральных чисел, т.е. аргумент x принимает значения $1, 2, \dots, n$. Такая функция называется последовательностью.

Последовательность записывается в виде

$$a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, a_n, a_{n+1}, \dots, \text{или } \{a_n\},$$

Причем a_n называют общим членом последовательности, a_{n-1} — членом, предшествующим a_n , a_{n+1} — членом, следующим за a_n .

Приведем примеры последовательностей.

1. Последовательность $1, 2, 3, \dots, n, \dots$, общий член которой $a_n = n$ называется натуральным рядом чисел.

2. Последовательность $a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, a_n, \dots$, для которой $a_n - a_{n-1} = d$, где d постоянная величина, называется арифметической прогрессией. Для задания арифметической прогрессии достаточно знать ее первый член a_1 и разность прогрессии d . Действительно, общий член выражается формулой

$$a_n = a_1 + d(n-1).$$

Так как по приведённой формуле можно найти любой член последовательности, представив значения $n=1, 2, 3, \dots$, то последовательность считается заданной.

3. Последовательность $b_1, b_2, \dots, b_{n-1}, b_n, \dots$, для которой $b_n = b_{n-1}q$, где q – постоянная величина, называется геометрической прогрессией. Для задания геометрической прогрессии достаточно знать ее первый член b_1 и знаменатель q . Общий член выражается формулой

$$b_n = b_1 q^{n-1}.$$

4. Последовательность $c_1, c_2, \dots, c_n, \dots$, для которой $c_n = c$, где c – постоянная величина, называется постоянной последовательностью.

5. Рассмотрим еще один пример последовательности. Будем вычислять число e последовательно с одним, двумя, тремя и т.д. знаками. Результаты вычислений можно представить в следующем виде:

$$2; 2,7; 2,71; 2,718; \dots;$$

$$(1); (2); (3); (4); \dots$$

Занумеровав полученные значения числами натурального ряда, как это показано в скобках, получим последовательность.

Кроме числовых последовательностей мы будем рассматривать и функциональные последовательности.

Приведем примеры функциональных последовательностей:

$$1) a_0, a_1x, a_2x^2, \dots, a_{n-1}x^{n-1}, \dots;$$

$$2) \sin x, \sin 2x; \sin 3x, \dots, \sin nx, \dots$$

Напомним определение предела числовой последовательности. Число A называется пределом последовательности $\{a_n\}$, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такой номер N , что при всех $n > N$ выполняется неравенство $|a_n - A| < \varepsilon$. В таком случае пишут $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = A$.

Последовательность, имеющая предел, называется сходящейся, в противном случае – расходящейся.

Пример 1. Показать что геометрическая прогрессия $b, bq, bq^2, \dots, bq^{n-1}, \dots$ при $|q| < 1$ представляет собой сходящуюся последовательность, а при $|q| \geq 1$ – расходящуюся.

1. Сначала рассмотрим случай, когда $|q| < 1$. Покажем, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} bq^{n-1} = 0,$$

т.е. по заданному $\varepsilon > 0$ найдем N такое, что при $n > N$ выполняется неравенство $|bq^{n-1} - 0| < \varepsilon$. Для этого разрешим неравенство относительно n .

Перепишем его в виде

$$|b||q|^{n-1} < \varepsilon, \text{ или } |q|^{n-1} < \varepsilon / |b|.$$

Прологарифмируем последнее неравенство

$$(n-1)\ln|q| < \ln(\varepsilon / |b|).$$

Разделив обе его части на отрицательное число $\ln|q|$, получим

$$n-1 > \frac{\ln(\varepsilon / |b|)}{\ln|q|}, \text{ т.е. } n > 1 + \frac{\ln(\varepsilon / |b|)}{\ln|q|}.$$

Очевидно, в качестве N достаточно взять

$$N = E\left(1 + \frac{\ln(\varepsilon / |b|)}{\ln|q|}\right),$$

где $E(x)$ означает наибольшее целое число, не превосходящее x .

2. Рассмотрим теперь случай, когда $q > 1$, $b > 0$. покажем, что последовательность является расходящейся. Для этого достаточно показать, что для любого как угодно большого M . Разрешая последнее неравенство относительно n , получим

$$n > 1 + \frac{\ln(M / b)}{\ln b}.$$

В качестве N берем

$$N > E\left(1 + \frac{\ln(M / b)}{\ln b}\right).$$

Заметим, что при $q=1$ последовательность является постоянной и $\lim_{n \rightarrow \infty} bq^{n-1} = b$.

Можно показать, что во всех остальных случаях последовательность расходится.

Пусть имеется последовательность $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ выражение вида

$$a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

называется рядом; здесь a_n есть n -й член ряда.

Сумма первых n членов ряда называется его n -й частичной суммой:

$$S_n = \sum_{i=1}^n a_i.$$

Суммой ряда называется предел последовательности его частичных сумм:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S.$$

Если ряд имеет сумму, то его называют сходящимся, в противном случае говорят, что ряд расходится.

Приведем примеры сходящихся и расходящихся рядов.

Пример 2. Рассмотрим ряд, получающихся из арифметической прогрессии, и запишем его n -ую частичную сумму

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n = \frac{2a_1 + d(n-1)}{2} \cdot n = \frac{d}{2}n^2 + \frac{2a_1 - d}{2}n.$$

Очевидно, при стремлении n к бесконечности эта частичная сумма неограниченно возрастает по абсолютной величине и, следовательно, данный ряд расходится.

Пример 3. рассмотрим ряд, образованный геометрической прогрессией при $|q| < 1$, и найдем его сумму. Воспользуемся формулой суммы n членов геометрической прогрессии:

$$S_n = \frac{b_1(1-q^n)}{1-q} = \frac{b_1}{1-q} - \frac{b_1}{1-q}q^n.$$

Ранее было доказано (см. пример 1) что $\lim_{n \rightarrow \infty} q^n = 0$ ($|q| < 1$) следовательно,

$$S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \frac{b_1}{1-q}.$$

Ряды, члены которых являются функциями, называются функциональными рядами. Таковы, например, ряды

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_{n-1}x^{n-1} + \dots,$$

$$b_0 + b_1 \cos x + b_2 \cos 2x + \dots + b_{n-1} \cos(n-1)x + \dots$$

Первый из них называют степенным рядом, а второй – тригонометрическим.

Рассмотрим функциональный ряд

$$u_1(x) + u_2(x) + \dots + u_n(x) + \dots,$$

где $u_n(x)$ – функции, определенные на отрезке $[a, b]$. Пусть $x_0 \in [a, b]$;

Тогда ряд

$$u_1(x_0) + u_2(x_0) + \dots + u_n(x_0) + \dots$$

Является числовым рядом и может оказаться сходящимся или расходящимся.

Совокупность всех значений $x \in [a, b]$, для которых сходится соответствующий числовой ряд, называется областью сходимости функциональности ряда.

Очевидно, что

$$S(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n(x),$$

где $S_n(x) = \sum_{i=1}^n \mu_i(x)$ зависит от выбора переменной x , т.е. сумма $S(x)$ функционального ряда является функцией точки x .

Пусть $\{S_n(x)\}$ – последовательность частичных сумм функционального ряда, определенных на одном и том же замкнутом интервале $[a, b]$. Функциональный ряд называется равномерно сходящимся к функции $S(x)$, определенный на $[a, b]$ если любому $\varepsilon > 0$ можно поставить в соответствие такой номер N , не зависящий от $x \in [a, b]$ что для любого $n > N$ выполняется неравенство $|S_n(x) - S(x)| < \varepsilon$.

Рассмотрим пример, иллюстрирующий различие между понятиями сходимости и равномерной сходимости ряда.

Пример 4. Для ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{(1+x)^n}$, где $0 \leq x \leq 1$, частичная сумма есть

$$S_n(x) = \sum_{i=1}^n \frac{x}{(1+x)^i} = 1 - \frac{1}{(1+x)^n}.$$

Покажем, что на рассматриваемом отрезке ряд сходится.

Действительно если $x = 0$ то $S_n(0) = S(0) = 0$. пусть теперь $x > 0$. Докажем, что в этом случае $S(x) = 1$, т.е. по заданному $\varepsilon > 0$. Докажем, что в

этом случае $S(x)=1$, т.е. по заданному $\varepsilon > 0$ найдем N такое, чтобы при $n > N$ выполнялось неравенство

$$\left| 1 - \frac{1}{(1+x)^n} - 1 \right| < \varepsilon.$$

Решая это неравенство, получим

$$N = E\left(-\frac{\ln \varepsilon}{\ln(1+x)}\right).$$

Из последнего равенства видно, что N , вообще говоря, зависит не только от ε , но и от x , причем для одного и того же ε при x , приближающемся к нулю, N неограниченно возрастает. Это означает, что по заданному ε мы не можем выбрать единственное N для всех $x \in [0,1]$ другими словами, ряд не является равномерно сходящимся на указанном отрезке.

Приведенный пример показывает, что последовательность непрерывных на некотором отрезке частичных сумм может сходить к разрывной на этом отрезке функции. Одна из причин, мотивирующих введение понятия равномерной сходимости ряда, заключается в том, что равномерно сходящийся ряд непрерывных функций имеет своей суммой также непрерывную функцию.

Разложение функций в ряд Фурье. Многие задачи науки и техники связаны с периодическими функциями, отражающими циклические процессы.

Функция $f(x)$ называется периодической с периодом $T > 0$, если она удовлетворяет равенству

$$f(x) = f(x + T). \quad (1.11.1)$$

Из практических соображений такие функции удобно представлять в виде тригонометрического ряда или его частичной суммы с достаточной степенью точности.

Функциональный ряд вида

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx). \quad (1.11.2)$$

Называется тригонометрическим, причем a_n и b_n – действительные числа, не зависящие от x .

Пусть этот ряд сходится для любого x из промежутка $[-\pi, \pi]$, тогда он определяет периодическую функцию $f(x)$ с периодом $T = 2\pi$.

Ряд вида (1.11.2) называется рядом Фурье для интегрируемой на отрезке $[-\pi, \pi]$ функции $f(x)$, если коэффициенты его вычисляются по следующим формулам:

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx, \quad (1.11.3)$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx \quad (n=1, 2, \dots), \quad (1.11.4)$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx \quad (n=1, 2, \dots). \quad (1.11.5)$$

Таким образом мы можем формально рассматривать ряд Фурье для заданной функции $f(x)$. Однако при этом возникают следующие вопросы: 1) сходится ли Фурье функции $f(x)$ и 2) если ряд сходится, то будет ли он иметь своей суммой $f(x)$? Ответы на поставленные вопросы дает теорема Дирихле. Прежде чем перейти к формулировке самой теоремы, напомним некоторые понятия.

Функция $f(x)$ называется монотонной на интервале, если для любых x_1 и x_2 принадлежащих этому интервалу и таких, что $x_1 < x_2$ выполняется только одно из неравенств $f(x_1) \leq f(x_2)$ или $f(x_1) \geq f(x_2)$.

Функция $f(x)$ называется кусочно-монотонной на интервале, если его можно разбить на конечное число открытых интервалов, в каждом из которых функция монотонна.

Функция $f(x)$ называется кусочно-непрерывной на интервале, если она имеет на нем конечное число точек разрыва.

Обозначим через $f(a+0)$ предел функции $f(x)$ при стремлении x к a справа (правый предел), соответственно через $f(a-0)$ – левый предел.

Теорема Дирихле. Если функция $f(x)$ заданная на отрезке $[-\pi, \pi]$, кусочно-монотонна и кусочно-непрерывна, то ряд Фурье этой функции сходится на всем отрезке $[-\pi, \pi]$ и сумма его равна:

- 1) $f(x)$ во всех точках непрерывности, принадлежащих $[-\pi, \pi]$;
- 2) $\frac{1}{2}[f(x-0) + f(x+0)]$ во всех точках разрыва, принадлежащих $[-\pi, \pi]$;
- 3) $\frac{1}{2}[f(-\pi+0) + f(\pi-0)]$ на концах отрезка, т.е. в точках $x = -\pi$ и $x = \pi$.

В дальнейшем мы будем писать, что

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx). \quad (1.11.6)$$

В смысле приведенной выше теоремы Дирихле.

Теорема Дирихле не утверждает равномерной сходимости ряда Фурье к функции $f(x)$.

Однако если усилить свойства, которым должна удовлетворять функция, т.е. потребовать от нее непрерывности на всем отрезке $[-\pi, \pi]$, кусочной монотонности на нем и выполнения равенства $f(-\pi) = f(\pi)$, то ряд Фурье для такой функции будет равномерно сходиться к функции $f(x)$ на всем отрезке $[-\pi, \pi]$.

Можно показать что для четной функции все коэффициенты b_n равны нулю, а соответствующий ряд Фурье не содержит минусов:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx, \quad (1.11.7)$$

где
$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \cos nx dx \quad (n=0,1,2,\dots) \quad (1.11.8)$$

Аналогично для нечетной функции все коэффициенты a_n равны нулю и соответствующий ряд Фурье не содержит косинусов:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx, \quad (1.11.9)$$

где
$$b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin nx dx \quad (n=1,2,\dots). \quad (1.11.10)$$

Пример 1. Разложим в ряд Фурье функцию

$$f(x) = \begin{cases} -x & \text{при } -\pi \leq x \leq 0 \\ 2x & \text{при } 0 < x \leq \pi \end{cases}$$

Определим коэффициенты Фурье функции $f(x)$. По формулам (1.11.3) и (1.11.4) находим коэффициенты a_0 и a_n .

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^0 (-x) dx + \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} 2x dx = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{\pi^2}{2} + \frac{1}{\pi} \cdot \pi^2 = \frac{3}{2} \pi,$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^0 (-x) \cos nx dx + \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} 2x \cos nx dx.$$

Интегрируя по частям, получим

$$\begin{aligned}
 a_n &= -\frac{1}{\pi} \left(\frac{1}{x} x \sin nx \Big|_{-\pi}^0 - \frac{1}{n} \int_{-\pi}^0 \sin nxdx - \frac{2}{n} x \sin nx \Big|_0^{\pi} + \frac{2}{n} \int_0^{\pi} \sin nxdx \right) = \\
 &= -\frac{1}{\pi n} \left(\frac{1}{n} \cos n\chi \Big|_{-\pi}^0 - \frac{2}{n} \cos nx \Big|_0^{\pi} \right) = -\frac{3}{\pi n^2} [1 - (-1)^n].
 \end{aligned}$$

Т.е.

$$a_{2k} = 0, \quad a_{2k-1} = -\frac{6}{\pi(2k-1)^2} \quad (k=1, 2, 3, \dots).$$

Коэффициенты b_n находим по формуле (1.11.5):

$$\begin{aligned}
 b_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^0 (-x) \sin nxdx + \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} 2x \sin nxdx = \\
 &= -\frac{1}{\pi} \left(-\frac{x}{n} \cos nx \Big|_{-\pi}^0 + \frac{1}{n} \int_{-\pi}^0 \cos nxdx + \frac{2x}{n} \cos nx \Big|_0^{\pi} - \frac{2}{n} \int_0^{\pi} \cos nxdx \right) = \\
 &= -\frac{1}{\pi} \left[-\frac{\pi}{n} (-1)^n + 2 \frac{\pi}{n} (-1)^n \right] = \frac{(-1)^{n+1}}{n}.
 \end{aligned}$$

Т.е.

$$b_{2k} = -\frac{1}{2k}, \quad b_{2k-1} = \frac{1}{2k-1} \quad (k=1, 2, 3, \dots).$$

Таким образом, ряд Фурье данной функции имеет вид

$$\begin{aligned}
 f(x) &= \frac{3}{4}\pi - \frac{6}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2} \cos(2k-1)x + \\
 &+ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2k-1} \sin(2k-1)x - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \sin 2kx.
 \end{aligned}$$

В интервале $(-\pi, \pi)$ ряд сходится к функции $f(x)$, а в точках $x = \pm\pi - k$ числу

$$\frac{1}{2} [f(-\pi+0) + f(\pi-0)] = \frac{3}{2}\pi.$$

Пример 2. разложить в ряд Фурье функцию

$$f(x) = \begin{cases} -\sin x & \text{при } -\pi \leq x \leq 0 \\ \sin x & \text{при } 0 < x \leq \pi \end{cases}$$

данная функция является четной, следовательно, все коэффициенты $b_n = 0$, а a_n находятся по формуле (1.11.8):

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \sin x \cos nx dx \quad (n=0,1,2\dots).$$

Отсюда

$$a_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \sin x dx = \frac{4}{\pi}.$$

Далее

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \sin x \cos nx dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} [\sin(n+1)x - \sin(n-1)x] dx = \\ &= \begin{cases} 0 & \text{при } n = 2k - 1 \\ -\frac{4}{\pi(n^2 - 1)} & \text{при } n = 2k \quad (k = 1, 2, 3\dots) \end{cases} \end{aligned}$$

Следовательно

$$f(x) = |\sin x| = \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{4k^2 - 1} \cos 2kx.$$

Отметим что полученный ряд сходится к функции $|\sin x|$ на всем отрезке $[-\pi, \pi]$.

Пример 3. Разложить в ряд Фурье функцию

$$f(x) = \begin{cases} -1 & \text{при } -\pi < x < 0 \\ 0 & \text{при } x = 0 \\ 1 & \text{при } 0 < x < \pi \end{cases}$$

Данная функция является нечетной, следовательно, все коэффициенты $a_n = 0$, а b_n находятся по формуле (1.11.10):

$$b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} 1 \cdot \sin nx dx = -\frac{2}{\pi n} \cos nx \Big|_0^{\pi} = \frac{2}{\pi n} [1 - (-1)^n].$$

Таким образом, все четные коэффициенты b_n равны нулю, а нечетные имеют вид $b_{2k-1} = \frac{4}{\pi(2k-1)}$. Следовательно,

$$f(x) = \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2k-1} \sin(2k-1)x.$$

Очевидно, что сумма ряда в точках $x = 0$ и $x = \pm\pi$ равна нулю.

Пример 4. Разложить в ряд Фурье функцию

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{при } 0 < x \leq 1 \\ 1 & \text{при } 1 < x < 2 \end{cases}$$

Поскольку функция задана в интервале, отличном от $(-\pi, \pi)$, произведем замену независимой переменной по формуле $x = (x' + \pi) / \pi$, или $x' = \pi(x - 1)$. таким образом получим следующую функцию :

$$f(x') = \begin{cases} \frac{1}{\pi}(x' + \pi) & \text{при } -\pi < x' \leq 0 \\ 1 & \text{при } 0 < x' < \pi \end{cases}$$

Так как эта функция определена на интервале $(-\pi, \pi)$, то для нее можно записать ряд Фурье. Вычислим коэффициенты этого ряда:

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^0 \frac{x' + \pi}{\pi} dx' + \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} 1 \cdot dx' = \frac{3}{2};$$

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^0 \frac{x' + \pi}{\pi} \cos nx' + \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} 1 \cdot \cos nx' dx' = \\ &= \frac{1}{n\pi^2} \int_{-\pi}^0 \sin nx' dx' = \frac{1}{\pi^2 n^2} [1 - (-1)^n]; \end{aligned}$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^0 \frac{x' + \pi}{\pi} \sin nx' dx' + \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} 1 \cdot \sin nx' dx' = \frac{1}{\pi^2} \int_{-\pi}^0 x' \sin nx' dx' = -\frac{(-1)^n}{\pi n}.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{3}{4} + \frac{2}{\pi^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2} \cos[(2k-1)\pi(x-1)] - \\ &\quad - \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} \sin[n\pi(x-1)]. \end{aligned}$$

Вычислим значения суммы ряда на концах интервала:

$$\frac{1}{2} [f(0+0) + f(2-0)] = \frac{0+1}{2} = \frac{1}{2}.$$

Полученный результат дает возможность найти сумму числового ряда

$$S = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2} = 1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \dots + \frac{1}{(2k-1)^2} + \dots$$

Действительно, на основании теоремы Дирихле при $x=0$ или $x=2$ имеет место равенство

$$\frac{1}{2} = \frac{3}{4} - \frac{2}{\pi^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2}.$$

Откуда

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2} = \frac{\pi^2}{8}.$$

В заключении заметим, что интеграл от функции $f(x)$ получается почленным интегрированием соответствующего ей ряда Фурье, а производная $f'(x)$ – почленным дифференцированием. При дифференцировании условие $f(-\pi) = f(\pi)$ является необходимым.

1.12. Тригонометрическое интерполирование

Операция представления функции $f(x)$ рядом Фурье называется гармоническим анализом. В практических расчетах мы вынуждены ограничиться только несколькими первыми членами ряда Фурье. В результате получается лишь приближенное аналитическое выражение для функции $f(x)$ в виде тригонометрического многочлена N -го порядка

$$Q_N(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^N (a_n \cos nx + b_n \sin nx) \quad (-\pi \leq x \leq \pi). \quad (1.12.1)$$

Кроме того, формулы (1.11.3)-(1.11.5) для вычисления коэффициентов Фурье пригодны лишь в случае аналитического задания функции. На практике, как правило, функция $f(x)$ задается в виде таблицы или графика. Поэтому возникает задача приближенного отыскания коэффициентов Фурье по конечному числу имеющихся значений функции.

Обобщая вышесказанное, сформулируем следующую задачу численного, или, как его часто называют, практического, гармонического анализа:

аппроксимировать на интервале $(0, T)$ тригонометрическим многочленом N -го порядка функции $y = f(x)$, для которой известны m ее значений $y_k = f(x_k)$ при $x_k = kT/m$ ($k = 0, 1, 2, \dots, m-1$).

Тригонометрический многочлен для функции, определенной на интервале $(0, T)$, имеет вид

$$Q_N(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^N \left(a_n \cos n \frac{2\pi}{T} x + b_n \sin n \frac{2\pi}{T} x \right). \quad (1.12.2)$$

Коэффициенты a_n и b_n определяются следующими соотношениями:

$$a_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(x) \cos n \frac{2\pi}{T} x dx, \quad (n=0, 1, 2, \dots, N) \quad (1.12.3)$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(x) \sin n \frac{2\pi}{T} x dx. \quad (1.12.4)$$

Применяя в соотношениях (1.12.3) и (1.12.4) формулу прямоугольников для вычисления интегралов по значениям подынтегральных выражений в точках

$$x_k = kT/m \quad (k = 0, 1, 2, \dots, m-1).$$

Имеем

$$a_n = \frac{2}{m} \sum_{k=0}^{m-1} y_k \cos n \frac{2\pi k}{m} \quad (n=0, 1, 2, \dots, N), \quad (1.12.5)$$

$$b_n = \frac{2}{m} \sum_{k=1}^{m-1} y_k \sin n \frac{2\pi k}{m}.$$

Таким образом, тригонометрический многочлен (1.12.2), коэффициенты a_n и b_n которого находятся по формулам (1.12.5) и (1.12.6), служит решением поставленной задачи.

Можно показать, что при $m > 2N$ многочлен (1.12.2) дает наилучшее приближение к функции $f(x)$ в смысле метода наименьших квадратов, если коэффициенты его вычисляются по формулам (1.12.5) и (1.12.6). Иными словами, коэффициенты (1.12.5) и (1.12.6) минимизируют сумму квадратов отклонений

$$\delta_N^2 = \sum_{k=0}^{m-1} [Q_N(x_k) - y_k]^2. \quad (1.12.7)$$

В частном случае при $m=2N$ коэффициенты a_n и b_n ($n=0, 1, 2, \dots, N-1$) определяются соотношениями (1.12.5) и (1.12.6), а коэффициенты a_N есть

$$a_N = \frac{1}{m} \sum_{k=0}^{m-1} (-1)^k y_k. \quad (1.12.8)$$

Сам же многочлен $Q_N(x)$ становится интерполяционным многочленом, так как в этом случае при любом b_N выполняются соотношения $Q_N(x_k) = y_k$ для всех $x_k = kT/m$ ($k = 0, 1, 2, \dots, m-1$).

Пример. исследуем динамику производства сахара из сахарной свеклы. Это производство носит периодический характер, обусловленный периодичностью выращивания и условиями хранения сырья. Поэтому в качестве функции, аппроксимирующей динамику производства сахара, можно принять тригонометрический многочлен (1.12.2)

При $m=12$ (это соответствует числу месяцев в годовом цикле и позволяет выявить специфическую особенность – сезонность производства) следовательно,

$$Q_N(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^N \left(a_n \cos n \frac{\pi}{6} x + b_n \sin n \frac{\pi}{6} x \right) \quad (0 \leq x \leq 11).$$

в экономических исследованиях для хорошей аппроксимации динамического периодического ряда обычно выбирают не более четырех гармоник.

Выражения для коэффициентов a_n и b_n следующий вид:

$$a_n = \frac{1}{6} \sum_{k=0}^{11} y_k \cos n \frac{\pi}{6} x_k, \quad b_n = \frac{1}{6} \sum_{k=0}^{11} y_k \sin n \frac{\pi}{6} x_k.$$

Вычислим эти коэффициенты для первых четырех гармоник многочлена $Q_N(x)$. Необходимые выкладки оформим в виде таблицы (табл. 1.7).

Из приведенной таблицы получаем, что $a_0=108$, $a_1=34,99$; $a_2=7,75$; $a_3 = -3$; $a_4 = -1,25$; $b_1 = -6,11$; $b_2 = -11,98$; $b_3 = -4$; $b_4 = 1,59$. Таким образом, имеем следующие четыре математические модели сезонности для производства сахара:

$$Q_1(x) = 54 + 34,99 \cos \frac{\pi}{6} x - 6,11 \sin \frac{\pi}{6} x;$$

$$Q_2(x) = 54 + 34,99 \cos \frac{\pi}{6} x - 6,11 \sin \frac{\pi}{6} x + 7,75 \cos \frac{\pi}{6} x - 11,98 \sin \frac{\pi}{6} x;$$

$$Q_3(x) = 54 + 34,99 \cos \frac{\pi}{6} x - 6,11 \sin \frac{\pi}{6} x + 7,75 \cos \frac{\pi}{6} x -$$

$$-11,98 \sin \frac{\pi}{6} x - 3 \cos \frac{\pi}{2} x - 4 \sin \frac{\pi}{2} x.$$

$$Q_4(x) = 54 + 34,99 \cos \frac{\pi}{6} x + 7,75 \cos \frac{\pi}{6} x - 11,98 \sin \frac{\pi}{6} x - 3 \cos \frac{\pi}{2} x -$$

$$-4 \sin \frac{\pi}{2} x - 1,25 \cos \frac{2\pi}{3} x + 1,59 \sin \frac{2\pi}{3} x.$$

Таблица 1.7

Месяцы	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX	X	XI	XII	$\frac{1}{6}\Sigma$
x_k	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	
Объем произ- водства в усл. ед	95	71	55	43	36	31	28	26	25	45	91	102	108
$\cos \frac{\pi}{6} x_k$	1	0.866	0.5	0	-0.5	-0.866	-1	-0.866	-0.5	0	0.5	0.866	
$\sin \frac{\pi}{6} x_k$	0	0.5	0.866	1	0.866	0.5	0	-0.5	-0.866	-1	-0.866	-0.5	
$\cos \frac{\pi}{3} x_k$	1	0.5	-0.5	-1	-0.5	0.5	1	0.5	-0.5	-1	-0.5	0.5	
$\sin \frac{\pi}{3} x_k$	0	0.866	0.866	0	-0.866	-0.866	0	0.866	0.866	0	-0.866	-0.866	
$\cos \frac{\pi}{2} x_k$	1	0	-1	0	1	0	-1	0	1	0	-1	0	
$\sin \frac{\pi}{2} x_k$	0	1	0	-1	0	1	0	-1	0	1	0	-1	
$\cos \frac{2\pi}{3} x_k$	1	-0.5	-0.5	1	-0.5	-0.5	1	-0.5	-0.5	1	-0.5	-0.5	
$\sin \frac{2\pi}{3} x_k$	0	0.866	-0.866	0	0.866	-0.866	0	-0.866	-0.866	0	0.866	-0.866	

Окончание табл. 1.7

Месяцы	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX	X	XI	XII	$\frac{1}{6}\Sigma$
x_k	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	
Объём производства в усл.ед.	95	71	55	43	36	31	28	26	25	45	91	102	108
$yk \cos \frac{\pi}{6} yk$	95	61,49	27,5	0	-18	-26,85	-28	-25,52	-12,5	0	45,5	83,33	34,99
$yk \sin \frac{\pi}{6} yk$	0	35,5	47,63	43	31,18	15,5	0	-13	21,65	-45	-78,81	-51	-6,11
$yk \cos \frac{\pi}{3} yk$	95	35,5	-27,5	-43	-18	15,5	28	13	-12,5	-45	-45,5	51	7,75
$yk \sin \frac{\pi}{3} yk$	0	61,49	47,63	0	31,18	-28,85	0	22,52	21,65	0	-78,81	-88,33	-11,98
$yk \cos \frac{\pi}{2} yk$	95	0	-55	0	36	0	-28	0	25	0	-91	0	-3
$yk \sin \frac{\pi}{2} yk$	0	71	0	-43	0	31	0	-26	0	45	0	-102	-4
$yk \cos \frac{2\pi}{3} yk$	95	-35,5	-27,5	43	-18	-15,5	28	-13	-12,5	45	-45,5	-51	-1,25
$yk \sin \frac{2\pi}{3} yk$	0	61,49	-47,63	0	31,18	-26,85	0	22,52	-21,65	0	78,81	-88,33	1,59

Сравнение $Q_i(xk)$ соответствующими значениями y_k показывает что уже первая гармоника дает в общем правильную модель динамики производства сахара, отражая ее сезонность.

Вычислим средние квадратические отклонения $\delta_i = \sqrt{\sum_{k=0}^1 [Q_i(xk) - y_k]^2}$ для всех $Q_i(x)$ находим $\delta_1=37.80$; $\delta_2=14.40$; $\delta_3=7,59$; $\delta_4=5,75$. как и следовало ожидать, значение δ_i монотонно убывают с ростом i причём δ_4 мало отличаются от δ_3 . Кроме того сами значения δ_3 и δ_4 мало отличается от δ_3 . Кроме того сами значения δ_3 и δ_4 достаточно малы, так что уже многочлен $Q_3(x)$ являются хорошей аппроксимацией ряда, характеризующего годовую динамику производства сахара.

1.13. Численные методы определения коэффициентов Фурье

Пусть задан ряд Фурье, сходящийся к периодической функции $f(x)$:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} (a_m \cos mx + b_m \sin mx), \quad (1.13.1)$$

где
$$a_m = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos mx dx \quad (m = 0, 1, 2, \dots), \quad (1.13.2)$$

$$b_m = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin mx dx \quad (m = 1, 2, 3). \quad (1.13.3)$$

В предыдущем параграфе мы сформулировали задачу аппроксимации функции $f(x)$ тригонометрическим многочленом $Q_N(x)$. Там же при вычислении коэффициентом a_m и b_m с помощью интегралов мы использовали формулу прямоугольников.

Будем предполагать что функция $f(x)$ является периодической с периодом 2π . Заметим что в место обычных пределов интегрирования от $-\pi$ до π при определении коэффициентов a_m и b_m можно рассматривать любой отрезок интегрирования длиной 2π . Для удобства вычислений мы возьмем отрезок от 0 до 2π так что

$$a_m = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos mx dx \quad (m = 0, 1, 2, \dots), \quad (1.13.4)$$

$$b_m = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \sin mx dx \quad (m = 1, 2, 3). \quad (1.13.5)$$

Разделив отрезок интерполирования $[0, 2\pi]$ на N равных частей в результате получим точки деления $0, 1 \cdot \frac{2\pi}{N}; 2 \cdot \frac{2\pi}{N}; \dots, (N-1) \frac{2\pi}{N}, 2\pi$.

Соответствующие значения функции $f(x)$ в точках деления обозначим через $y_0, y_1, y_2, \dots, y_{N-1}, y_N = y_0$. применяя формулу трапеции получаем следующие приближенные формулы для вычисления коэффициентов a_m и b_m :

$$\frac{N}{2} a_0 = \sum_{k=2}^{N-1} y_k = y_0 + y_1 + \dots + y_{N-1};$$

$$\frac{N}{2} a_m = \sum_{k=2}^{N-1} y_k \cos k \frac{2m\pi}{N} = y_0 + y_1 \cos \frac{2m\pi}{N} + y_{N-1} \cos(N-1) \frac{2m\pi}{N};$$

$$\frac{N}{2} b_m = \sum_{k=2}^{N-1} y_k \sin k \frac{2m\pi}{N} = y_0 + y_1 \sin \frac{2m\pi}{N} + y_{N-1} \sin(N-1) \frac{2m\pi}{N}.$$

Пусть $N=12$ т.е отрезок $[0, 2\pi]$ разбит на 12 равных частей так что используются значения аргумента $0, \pi/6, \pi/3, \dots, 11\pi/6$ им соответствуют значения функции $y_0, y_1, y_2, \dots, y_{11}$ а величины на которые умножаются эти значения таковы: $\pm 1; \pm \sin(\pi/6) = \pm 0,5; \pm \sin(\pi/3) = \pm 0,866$. От сюда опуская громоздкие выкладки получим:

$$6a_0 = y_0 + y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + y_5 + y_6 + y_7 + y_8 + y_9 + y_{10} + y_{11},$$

$$6a_1 = (y_2 + y_{10} - y_4 - y_8) \sin \frac{\pi}{6} + (y_1 + y_{11} - y_5 - y_7 + y_7) \sin \frac{\pi}{3} + (y_0 - y_6),$$

$$6a_2 = (y_1 + y_5 + y_7 + y_{11} - y_2 - y_4 - y_8 - y_{10}) \sin \frac{\pi}{6} + (y_0 + y_6 - y_3 - y_9),$$

$$6a_3 = y_0 + y_4 + y_8 - y_2 - y_6 - y_{10},$$

$$6a_1 = (y_1 + y_5 - y_7 - y_{11}) \sin \frac{\pi}{6} + (y_2 + y_4 - y_8 - y_{10}) \sin \frac{\pi}{3} + (y_3 - y_9),$$

$$6a_2 = (y_1 + y_5 + y_7 + y_8 - y_4 - y_5 - y_{10} - y_{11}) \sin \frac{\pi}{3},$$

$$6a_3 = y_1 + y_5 + y_9 - y_3 - y_7 - y_{11}.$$

Чтобы свести к минимуму число необходимых арифметических операций для получения значений a_m и b_m используют специальную вычислительную схему – схему Рунге.

I шаг. Выписывают значения функции $f(x)$ в следующем порядке:

$$y_0 + y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + y_5 + y_6,$$

$$y_7 + y_8 + y_9 + y_{10} + y_{11}.$$

II шаг. Подсчитывают суммы и разности каждой пары значений стоящих одно под другим. Полученные суммы и разности выписывают таким образом:

$$\frac{\begin{array}{c} y_0 y_1 y_2 y_3 y_4 y_5 y_6 \\ y_{11} y_{10} y_9 y_8 y_7 \end{array}}{\begin{array}{c} \text{суммы } u_0 u_1 u_2 u_3 u_4 u_5 u_6 \\ \text{разности } v_1 v_2 v_3 v_4 v_5 \end{array}}. \quad (1.13.6)$$

III шаг. Аналогичные операции производят над суммами и разностями (18.6)

$$\frac{\begin{array}{c} u_0 u_1 u_2 u_3 \\ u_6 u_5 u_4 \end{array}}{\begin{array}{c} \text{суммы } c_0 c_1 c_2 c_3 \\ \text{разности } d_0 d_1 d_2 \end{array}} \quad \frac{\begin{array}{c} v_1 v_2 v_3 \\ v_5 v_4 \end{array}}{\begin{array}{c} g_1 g_2 g_3 \\ h_1 h_2 \end{array}}$$

IV шаг. Вычисляют значения a_m и b_m по приближенным формулам

$$6a_0 = c_0 + c_1 + c_2 + c_3,$$

$$6a_1 = d_0 + 0,866d_1 + 0,5d_2,$$

$$6a_2 = (c_0 - c_3) + 0.5(c_1 - c_2),$$

$$6a_3 = d_0 - d_2,$$

$$6b_1 = 0,5g_1 + 0,866g_2 + g_3,$$

$$6b_2 = 0,866(h_1 - h_2),$$

$$6b_3 = g_1 - g_3$$

и т.д.

Для наглядного сравнения полученных по приближенным формулам коэффициентов a_m и b_m с точными их значениями приведем пример в котором функция задана аналитически.

Пример. Рассмотрим периодическую функцию

$$y f(x) \begin{cases} x / \pi & \text{при } 0 \leq x \leq \pi \\ 1 & \text{при } \pi < x < 2\pi \\ 0 & \text{при } x = 2\pi \end{cases}$$

Составим таблицу

x_k	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{11\pi}{6}$	2π
y_k	0	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{5}{6}$	1	1	1	1	1	1	0

Выпишем согласно схеме Рунге значения y_k и произведем указанные в ней сложения и вычитания (см. формулы (1.13.6)).

	0	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{5}{6}$	1
		1	1	1	1	1	
Суммы	0	$\frac{7}{6}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{5}{3}$	$\frac{11}{6}$	1
Разности		$-\frac{5}{6}$	$-\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{6}$	

Теперь произведем вычитания и сложения по отношению к найденным суммам и разностям (см. формулы (18.7)).

суммы

	0	$\frac{7}{6}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{3}{2}$
	1	$\frac{11}{6}$	$\frac{5}{3}$	
Суммы	1	3	3	$\frac{3}{2}$
Разности	-1	$-\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{3}$	

разности

	$-\frac{5}{6}$	$-\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{2}$
	$\frac{1}{6}$	$-\frac{2}{3}$	
Суммы	-1	-1	$-\frac{1}{2}$
Разности	$-\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{3}$	

Выпишем теперь выражения для a_m и b_m :

$$6a_0 = 1 + 3 + 3 + \frac{3}{2},$$

$$6a_1 = -1 - \frac{2}{3} \cdot 0.866 - 0.5 \cdot \frac{1}{3},$$

$$6a_2 = \left(1 - \frac{3}{2}\right) + 0.5(3 - 3),$$

$$6a_3 = -1 - \left(-\frac{1}{3}\right),$$

$$6b_1 = 0.5(-1) + 0.866(-1) - \frac{1}{2},$$

$$6b_2 = 0.866\left(-\frac{2}{3} - \frac{1}{3}\right),$$

$$6b_3 = -1 - \left(-\frac{1}{2}\right).$$

Отсюда

$$a_0 = 1,417; a_1 = -0,291; a_2 = -0,083; a_3 = -0,111,$$

$$b_1 = -0,311; b_2 = -0,144; b_3 = -0,083.$$

Для сравнения приведем точные значения коэффициентов

$$a_0 = 1,500; a_1 = -0,203; a_2 = -0,000; a_3 = -0,022,$$

$$b_1 = -0,318; b_2 = -0,159; b_3 = -0,106.$$

Чтобы получить значения коэффициентов по приближенным формулам с большей точностью, можно обратиться к схемам с большим числом ординат.

Следует отметить что практический гармонический анализ дает возможность получить аналитические выражения аппроксимирующие заданные функции с наименьшей средней квадратической ошибкой.

2. ЧИСЛЕННОЕ ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ И ИНТЕГРИРОВАНИЕ

2.1. Постановка задачи и простейшие формулы численного дифференцирования

При решении многих практических задач возникает необходимость получить значения производных различных порядков функции f , заданной в виде таблицы или сложного аналитического выражения. В этих случаях применить непосредственно методы дифференциального исчисления либо невозможно, либо затруднительно. Тогда используют приближенные методы численного дифференцирования.

Простейшие выражения для производных получаются в результате дифференцирования интерполяционных формул.

Итак, рассмотрим следующую задачу. На сетке $\alpha \leq x_0 < x_1 < \dots < x_n \leq b$ в узлах x_i заданы значения f_i функции f , непрерывно дифференцируемой $n+1+m$ раз. Требуется вычислить производную $f^{(m)}(x^*)$, $x^* \in [a, b]$ и оценить погрешность.

Один из возможных способов решения этой задачи заключается в следующем. Построим для функции f по узлам x_i ($i = 0, 1, \dots, n$) интерполяционный многочлен с остаточным членом R_n , так что

$$f(x) = P_n(x) + R_n(x). \quad (2.1.1)$$

Продифференцируем правую и левую части соотношения (1) m раз и положим $x = x^*$:

$$f^{(m)}(x^*) = P_n^{(m)}(x^*) + R_n^{(m)}(x^*). \quad (2.1.2)$$

Для достаточно гладких функций, т.е. для функций с ограниченными производными, достаточного количества узлов и достаточной точности вычислений, величина $R_n^{(m)}(x^*)$ мала и $P_n^{(m)}(x^*)$ является хорошим приближением для $f^{(m)}(x^*)$, так что можно положить

$$f^{(m)}(x^*) \approx P_n^{(m)}(x^*). \quad (2.1.3)$$

В практических расчетах численное дифференцирование оказывается весьма чувствительным к ошибкам в исходной информации, отбрасыванию членов ряда и к другим подобным операциям. Кроме того, высокая точность интерполирования [малость $R_n(x)$] совсем не гарантирует

высокой точности интерполяционной формулы для производных [малости $R_n^{(m)}(x)$].

Поэтому численное дифференцирование следует применять осторожно и, как правило, для небольших m .

Учитывая сказанное, а также то, что вычисление высших производных может быть сведено к последовательному вычислению низших, остановимся более подробно на получении расчетных формул для f' и f'' в узлах равномерной сетки. Для получения производных в узловых точках целесообразно использовать интерполяционный многочлен Стирлинга m его остаточный член (см. формулы (1.8.5) и (1.8.6)). Так, дифференцируя многочлен Стирлинга и его остаточный член по x и полагая $x^* = x_0 (t^* = 0)$, получим следующие выражения для производной:

$$f'(x_0) = \frac{1}{h} \mu f_0^1 \pm \frac{M_3}{6} h^2 (k=1), \quad (2.1.4)$$

$$f'(x_0) = \frac{1}{h} \left(\mu f_0^1 - \frac{\mu f_0^3}{6} \right) \pm \frac{M_5}{30} h^4 (k=2). \quad (2.1.5)$$

Дифференцируя многочлен Стирлинга два раза по x и вычисляя значение второй производной в точке $x^* = x_0$, имеем

$$f''(x_0) = \frac{1}{h^2} f_0^2 \pm \frac{M_4}{12} h^2 (k=1), \quad (2.1.6)$$

$$f''(x_0) = \frac{1}{h^2} \left(f_0^2 - \frac{1}{12} f_0^4 \right) \pm \frac{M_6}{90} h^4 (k=2). \quad (2.1.7)$$

Для вычисления производной точно в середине между узлами $x^* = x_0 + \frac{h}{2}$ применяют многочлен Бесселя. В этом случае соответствующие формулы для производной имеют вид

$$f' \left(x_0 + \frac{h}{2} \right) = \frac{1}{h} f_{1/2}^1 \pm \frac{M_3}{24} h^2 (k=1), \quad (2.1.8)$$

$$f \left(x_0 + \frac{h}{2} \right) = \frac{1}{h} \left(f_{1/2}^1 - \frac{1}{24} f_{1/2}^3 \right) \pm \frac{3M_5}{640} h^4 (k=2). \quad (2.1.9)$$

Практический интерес представляют также так называемые формулы одностороннего дифференцирования, позволяющие вычислить $f'(x_0)$ по узлам $x_i = x_0 + ih$ ($i=0, 1, \dots, k, \dots$ или $i=0, -1, \dots, -k, \dots$). Построение этих фор-

мул удобно провести с помощью первого и второго интерполяционных многочленов Ньютона.

Дифференцируя первый многочлен Ньютона по x и вычисляя значение производной в точке $x = x_0 (t = 0)$ для $k = 1$ и $k = 2$ получим соответственно следующие формулы:

$$f'(x_0) = \frac{1}{h} \Delta f_0 \pm \frac{1}{2} M_2 h, \quad (2.1.10)$$

$$f'(x_0) = \frac{1}{h} \left(\Delta f_0 - \frac{1}{2} \Delta^2 f_0 \right) \pm \frac{1}{3} M_3 h^2. \quad (2.1.11)$$

Аналогично, дифференцируя второй многочлен Ньютона, для $k = -1$ и $k = -2$ соответственно имеем

$$f'(x_0) = \frac{1}{h} \nabla f_0 \pm \frac{1}{2} M_2 h, \quad (2.1.12)$$

$$f'(x_0) = \frac{1}{h} \left(\nabla f_0 + \frac{1}{2} \nabla^2 f_0 \right) \pm \frac{1}{3} M_3 h^2. \quad (2.1.13)$$

2.2. Особенности численного дифференцирования

Приведем снова все формулы второго порядка, выразив входящие в них конечные разности непосредственно через значения функции f_i . Из соотношений (2.1.4), (2.1.6) и (2.1.8) имеем:

$$f'(x_0) = \frac{f_1 - f_{-1}}{2h} \pm \frac{M_3}{6} h^2, \quad (2.2.1)$$

$$f''(x_0) = \frac{f_1 - 2f_0 + f_{-1}}{h^2} \pm \frac{M_4}{12} h^2, \quad (2.2.2)$$

$$f' \left(x_0 + \frac{h}{2} \right) = \frac{f_1 - f_0}{h} \pm \frac{M_3}{24} h^2. \quad (2.2.3)$$

Соотношения (2.1.11) и (2.1.13) соответственно дают

$$f'(x_0) = \frac{1}{2h} (-3f_0 + 4f_1 - f_2) \pm \frac{M_3}{3} h^2, \quad (2.2.4)$$

$$f'(x_0) = \frac{1}{2h} (3f_0 - 4f_{-1} + f_{-2}) \pm \frac{M_3}{3} h^2. \quad (2.2.5)$$

Из приведенных выше формул видно, что с уменьшением шага сетки уменьшается и погрешность метода. Однако если значения функции f_i заданы приближенно, например с одинаковой абсолютной погрешностью ε , то при использовании формул численного дифференцирования суммарная погрешность будет содержать дополнительное слагаемое, обратно пропорциональное h^m (m – порядок производной). Поэтому уменьшение h разумно лишь в определенных пределах.

Иллюстрируя сказанное, рассмотрим правую часть формулы (2.2.3). Суммарная погрешность ее составляет

$$\Delta = \frac{M_3}{24} h^2 + \frac{2\varepsilon}{h}. \quad (2.2.6)$$

Приравняв $\Delta'(h)$ нулю, получаем точку экстремума функции $\Delta(h)$:

$$h_0 = 2\sqrt[3]{\frac{3\varepsilon}{M_3}} \approx 2,9\sqrt[3]{\frac{\varepsilon}{M_3}}. \quad (2.2.7)$$

Так как $\Delta''(h) > 0$, то h_0 – точка минимума $\Delta(h)$, причём

$$\Delta(h_0) = \frac{3}{2}\sqrt[3]{\frac{1}{3}M_3\varepsilon^2} \approx \sqrt[3]{M_3\varepsilon^2}. \quad (2.2.8)$$

Это соотношение, в частности, означает, что ни при каком h нельзя гарантировать, что погрешность результата является величиной $O(\varepsilon^{2/3})$.

Аналогично, из формулы (2.2.2) для оптимального шага получаем выражение

$$h_0 = 2\sqrt[4]{\frac{3\varepsilon}{M_4}} \approx 2,6\sqrt[4]{\frac{\varepsilon}{M_4}}, \quad (2.2.9)$$

а из формул (2.2.4) и (2.2.5) – выражение

$$h_0 = \sqrt[3]{\frac{6\varepsilon}{M_3}} \approx 1,8\sqrt[3]{\frac{\varepsilon}{M_3}}. \quad (2.2.10)$$

Таким образом, при вычислении производных предварительно следует определить оптимальный шаг исходной таблицы значений f_i .

Пример 1. Вычислить $f'(1.6)$ и $f''(1.4)$ для функции $f = \ln x$, заданной в виде следующей таблицы:

x	1,2	1,3	1,4	1,5	1,6
f	0,1823	0,2626	0,3364	0,4054	0,4700

Содержащей значения f_i со всеми верными в широком смысле знаками. Оценить погрешность результата.

Для вычисления требуемых производных применим соответственно формулы (2.2.5) и (2.2.2). Тогда, используя равенства (2.2.10) и (2.2.9), а также исходные данные, получим следующие значения для оптимального шага:

$$h_{01} = \sqrt[3]{\frac{6 \cdot 10^{-4}}{0,73}} \approx 0,1 \text{ при вычислении } f'(1,6);$$

$$h_{02} = \sqrt[4]{\frac{48 \cdot 10^{-4}}{2,1}} \approx 0,22 \text{ при вычислении } f''(1,4).$$

Так как табличные данные не позволяют выбрать в качестве шага 0,22, то за f_2 принимаем ближайшее возможное число 0,2. Следовательно,

$$f'(1,6) = \frac{1}{0,2} (3 \cdot 0,4700 - 4 \cdot 0,4054 + 0,3364) = 0,624.$$

Причем суммарная погрешность не превышает

$$\Delta = \frac{0,73}{3} \cdot 0,1^2 + \frac{4 \cdot 10^{-4}}{0,1} = 0,007,$$

$$f''(1,4) = \frac{1}{0,2^2} (0,4700 - 2 \cdot 0,3364 + 0,1823) = -0,512.$$

Причем суммарная погрешность не превышает

$$\Delta = \frac{2,9}{12} \cdot 0,2^2 + \frac{4 \cdot 10^{-4}}{0,2^2} = 0,02.$$

Приведенные оценки погрешности хотя и являются, как правило, слишком завышенными, но все-таки указывают на то, что операция нахождения второй производной является менее надежной, чем первой.

В некоторых практических случаях для определения производной задается только таблица значений функции. Тогда оценить погрешность, очевидно, невозможно. Приближенные значения производных вычисляются непосредственно по одной из формул (2.1.4)–(2.1.13) без учёта погрешности.

Пример 2. Вычислить $f'(1,3)$ $f''(1,4)$ для функции $f(x)$, заданной в виде следующей таблицы:

x	1,2	1,3	1,4	1,5	1,6
y	0,18	0,26	0,34	0,41	0,47

На основании формул (2.1.4) и (2.1.6) соответственно получаем:

$$f'(3.1) = \frac{1}{0,1} \cdot \frac{1}{2} (0,34 - 0,26 + 0,26 - 0,18) = 0,8,$$

$$f''(1,4) = \frac{1}{0,1^2} (0,41 - 0,34 - 0,34 + 0,26) = -1.$$

2.3. Постановка задачи численного интегрирования

Пусть требуется вычислить интеграл

$$I = \int_a^b f(x) dx. \quad (2.3.1)$$

Из курса математического анализа известно, что для непрерывной на отрезке $[a, b]$ функции f интеграл (1) существует и равен разности значений первообразной F для функции f в точках b и a :

$$I = \int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a). \quad (2.3.2)$$

Однако в подавляющем большинстве практических задач первообразную не удастся выразить через элементарные функции. Кроме того, функция f часто задается в виде таблицы ее значений для определенных значений аргумента. Все это порождает потребность в приближенных методах вычисления интеграла (2.3.1), которые можно условно подразделить на аналитические и численные. Первые, по существу, заключаются в приближенном построении первообразной и дальнейшем использовании формулы (2.3.2). Вторые же позволяют непосредственно найти числовое значение интеграла, основываясь на известных значениях подынтегральной функции (а иногда и ее производных) в заданных точках, называемых *узлами*. В настоящей главе мы остановимся лишь на численных методах интегрирования функции. Сам процесс численного определения интеграла называется *квadrатурой*, а соответствующие формулы – *квadrатурными формулами*.

В зависимости от способа задания подынтегральной функции будем рассматривать два различных в смысле из реализации случая численного интегрирования.

Задача I. На отрезке $[a, b]$ в узлах x_i заданы значения f_i некоторой функции f , принадлежащей определенному классу F . Требуется прибли-

женно вычислить интеграл (2.3.1) и оценить погрешность полученного значения.

Так обычно ставится задача численного интегрирования в том случае, когда подынтегральная функция задана в виде таблицы.

Задача II. На отрезке $[a, b]$ функция $f(x)$ задана в виде аналитического выражения. Требуется вычислить интеграл (2.3.1) с заданной предельно допустимой погрешностью ϵ .

Используемые в алгоритмах обеих задач квадратурные формулы строятся, как уже было сказано, на основании тех или иных критериев, определяющих положение узловых точек и величины весовых множителей. Такими критериями могут быть: представление интеграла в виде интегральной суммы; аппроксимация подынтегральной функции (например, многочленом)

И последующее интегрирование аппроксимирующей функции; требование, чтобы формула (2.3.3) была абсолютно точной для определенного класса функции, и др.

2.4. Простейшие квадратурные формулы

Формулы прямоугольников. Как известно, определенный интеграл в силу своего построения есть предел интегральных сумм:

$$\int_a^b f(x) \cdot dx = \lim_{\max h_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n h_i f(\xi_i), \quad (2.4.1)$$

каждая из которых соответствует некоторому разбиению D_n : $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ отрезка $[a, b]$ и произвольному набору точек $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$ для каждого разбиения; $h_i = x_i - x_{i-1}$.

Ограничиваясь конечным числом слагаемых в правой части равенства (2.4.1) и принимая в качестве набора ξ_i те или иные значения аргумента из отрезков $[x_{i-1}, x_i]$, можно получить различные формулы приближенного интегрирования. Так, принимая в качестве набора ξ_i значения левых или правых концов отрезков $[x_{i-1}, x_i]$, получим соответственно *формулу левых* или *правых прямоугольников* ($h_i = 1/n = \text{const}$):

$$I \equiv \int_a^b f(x) \cdot dx \approx (b - a) \sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{n} f_i \equiv 1_{II}, \quad (2.4.2)$$

$$I \equiv \int_a^b f(x) \cdot dx \approx (b - a) \sum_{i=0}^n \frac{1}{n} f_i \equiv 1_{II}. \quad (2.4.3)$$

Название этих формул связаны с их геометрической интерпретацией. Если в плоскости xOy построить кривую $y=f(x)$, разбить отрезок $[a,b]$ на n частей точками x_i сетки D_n , то формула левых прямоугольников в качестве приближенного значения интеграла даст суммарную площадь заштрихованных прямоугольников на рис. 2.1; а формула правых прямоугольников – суммарную площадь заштрихованных прямоугольников на рис. 2.2.

Пример 1. С помощью формул левых и правых прямоугольников вычислить $\int_1^9 \frac{dx}{x+2}$, полагая $n=4$.

Зная пределы интегрирования $a=1$ и $b=9$, находим шаг $h=(b-a)/n=2$; тогда точками разбиения служат $x_0=1, x_1=3, x_2=5, x_3=7, x_4=9$, а значения подынтегральной функции $f(x)=1/(x+2)$ в этих точках таковы:

$$y_0 = f(x_0) = 1/3; \quad y_1 = f(x_1) = 1/5; \quad y_2 = f(x_2) = 1/7;$$

$$y_3 = f(x_3) = 1/9; \quad y_4 = f(x_4) = 1/11.$$

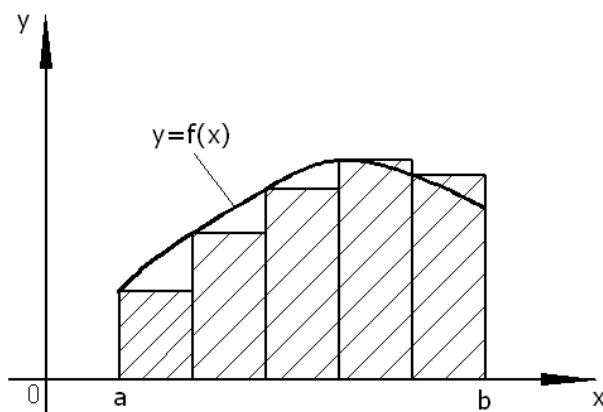


Рис. 2.1

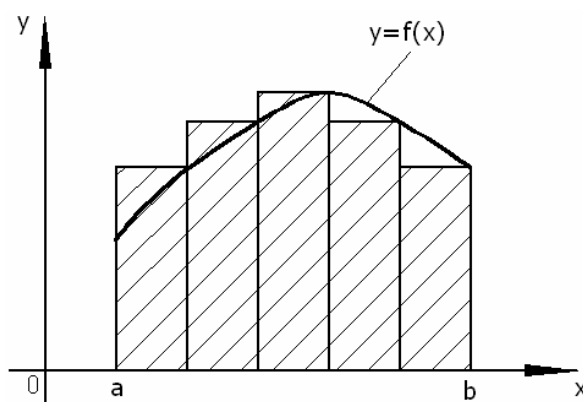


Рис. 2.2

Далее найдем числовое значение интеграла, пользуясь формулой (2.4.2):

$$I_{\text{I}} = \frac{b-a}{n}(y_0 + y_1 + y_2 + y_3) = 2 \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \frac{1}{9} \right) \approx 1,6024.$$

Если же вычисление определенного интеграла произвести по формуле (2.4.3), то получим:

$$I_{\text{II}} = \frac{b-a}{n}(y_1 + y_2 + y_3 + y_4) = 2 \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \frac{1}{9} + \frac{1}{11} \right) \approx 1,1053.$$

Наиболее часто используемой формулой, основанной на идее представления определенного интеграла в виде интегральной суммы, является *формула прямоугольников*, где в качестве ξ_i берут середины отрезков $[x_{i-1}, x_i]$. Для равномерной сетки ($h_i = h$) эта формула имеет следующий вид:

$$I \equiv \int_a^b f(x) \cdot dx \approx \frac{b-a}{n} \sum_{i=1}^n f_{i-1/2} \equiv I_n, \quad (2.4.4)$$

где $f_{i-1/2} = f\left(x_i - \frac{h}{2}\right)$; $x_0 = a$, $x_n = b$.

Найдем выражение для остаточного члена приближенной формулы (2.4.4). С этой целью представим интеграл, входящий в левую часть соотношения (2.4.4), в виде суммы:

$$\int_a^b f(x) \cdot dx = \sum_{i=1}^n \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x) \cdot dx. \quad (2.4.5)$$

Предполагая, что функция $f(x)$ дважды дифференцируема, т.е. $f \in C^2[a, b]$,

запишем для функции $f(x)$ на каждом из отрезков $[x_{i-1}, x_i]$ формулу Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа:

$$f(x) = f_{i-1/2} + \left(x - x_i + \frac{h}{2}\right) \cdot f'_{i-1/2} + \frac{\left(x - x_i + \frac{h}{2}\right)^2}{2} \cdot f''(\eta_i);$$

$$\eta_i \in (x_{i-1}, x_i). \quad (2.4.6)$$

Подставим в правую часть соотношения (2.4.5) вместо функции f ее представление (2.4.6) и выполним интегрирование, используя вторую теорему о среднем значении функции:

$$\int_a^b f(x) \cdot dx = (b-a) \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f_{i-1/2} + \frac{h^3}{24} \sum_{i=1}^n f''(\bar{\eta}_i);$$

$$\eta_i \in (x_{i-1}, x_i).$$

В силу непрерывности второй производной существует такая точка $\eta \in (a, b)$, что:

$$\sum_{i=1}^n f''(\bar{\eta}_i) = n f''(\eta) = \frac{b-a}{h} f''(\eta).$$

Используя это соотношение, окончательно имеем:

$$\int_a^b f(x) \cdot dx = (b-a) \sum_{i=1}^n \frac{1}{n} \cdot f_{i-1/2} + \frac{b-a}{24} h^2 f''(\eta). \quad (2.4.7)$$

Сравнивая формулы (2.4.4) и (2.4.7), получаем выражение для остаточного члена квадратурной формулы (2.4.4):

$$R_n[f] = I - I_n = \frac{b-a}{24} h^2 f''(\eta). \quad (2.4.8)$$

Таким образом, оценку погрешности квадратурной формулы (2.4.4) можно представить в следующем виде:

$$\Delta_1 = \left| \int_a^b f(x) \cdot dx - (b-a) \sum_{i=1}^n \frac{1}{n} f_{i-1/2} \right| \leq \frac{b-a}{24} h^2 M_2, \quad (2.4.9)$$

где $M_2 = \max_{[a,b]} |f''(x)|$.

Полученные выражения для остаточного члена (2.4.8) и погрешности (2.4.9) показывают, что формула (2.4.4) является точной для любой линейной функции, поскольку вторая производная такой функции равна нулю, а, следовательно, остаточный член и погрешность также равны нулю.

Покажем что полученная оценка не может быть улучшена, т.е. что существует функция, для которой погрешность вычисления интеграла по формуле (2.4.4) в точности равна правой части (2.4.9). Для этого в качестве интегрируемой функции рассмотрим $f=x^2$ и применим к ней формулу (2.4.4):

$$I_n = (b-a) \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left(a + \frac{2i-1}{2} h \right)^2.$$

Раскрыв скобки под знаком суммы, и выполнив необходимые суммирования, получим:

$$I_n = \frac{b^3 - a^3}{3} - (b-a) \frac{h^2}{12}.$$

С другой стороны, непосредственное интегрирование функции x^2 дает:

$$I = \int_a^b x^2 \cdot dx = \frac{b^3 - a^3}{3}.$$

Составив разность между точным значением интеграла и приближенным, для остаточного члена получим выражение:

$$I - I_n = (b - a) \frac{h^2}{12}.$$

Возвращаясь к оценке погрешности (2.4.9) и замечая, что для функции x^2 вторая производная (а следовательно, и M_2) равна 2, получаем для погрешности то же самое значение:

$$\Delta_1 = (b - a) \frac{h^2}{12},$$

т.е. оценка погрешности (2.4.9) достигается на параболе $y=x^2$. Этот результат можно распространить и на произвольную параболу в силу линейности операции интегрирования и того факта, что для линейных функций формула (2.4.4) является точной.

Оценка (2.4.9), очевидно, не учитывает погрешностей, связанных с вычислением I_n . Погрешность Δ_1 отражает различие между точной формулой Ньютона-Лейбница и приближенной формулой (2.4.4), т.е. является погрешностью метода.

Перейдем теперь к оценке погрешности приближенного значения \bar{I}_n . Если значения функции, используемые в квадратурной формуле, получены приближенно или же вычисления по каким-либо причинам не могут быть выполнены абсолютно точно, то это влечет за собой появление вычисленной погрешности и погрешностей округления. Пусть, например, значения $f_{i-1/2}$ в формуле (2.4.4) вычислены с одинаковой абсолютной погрешностью ε ; тогда суммарная вычислительная погрешность \bar{I}_n составит:

$$\Delta_2 = (b - a) \sum_{i=1}^n \frac{1}{n} \varepsilon = (b - a) \varepsilon. \quad (2.4.10)$$

Отметим характерную особенность этой погрешности: она не зависит от числа разбиений отрезка интегрирования, а пропорциональна только его длине.

Пример 2. Вычислить с помощью формулы прямоугольников интеграл $\int_0^1 \frac{dx}{1+x}$, полагая $n=4$. Оценить погрешность полученного приближенного значения.

Δ По заданным пределам интегрирования и числу разбиений n определим шаг: $h=(1-0)/4=0,25$. Далее, на основании формулы (2.4.4) имеем:

$$I_4 = 0,25 \left[f\left(\frac{1}{8}\right) + f\left(\frac{3}{8}\right) + f\left(\frac{5}{8}\right) + f\left(\frac{7}{8}\right) \right].$$

Вычислив необходимые значения функции с тремя верными в узком смысле знаками ($\varepsilon = 0,0005$), получим:

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+x} = 0,25(0,889 + 0,727 + 0,615 + 0,533) = 0,691.$$

Погрешность метода оценим по формуле (2.4.9), для чего предварительно найдем максимум абсолютной величины второй производной подынтегральной функции:

$$M_2 = \max_{[0,1]} \left| \left(\frac{1}{1+x} \right)'' \right| = \max_{[0,1]} \frac{2}{(1+x)^3} = 2.$$

Таким образом, погрешность метода есть:

$$\Delta_1 \leq (1/24) \cdot 0,25^2 \cdot 2 \approx 0,0053.$$

Пользуясь формулой (10), найдем вычисленную погрешность:

$$\Delta_2 \leq 1 \cdot 0,0005 \approx 0,0005.$$

Следовательно, за полную погрешность приближенного значения интеграла можно принять $\Delta = \Delta_1 + \Delta_2 = 0,006$, а окончательный ответ записать в виде

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+x} = 0,691 \pm 0,006.$$

Для сравнения приведем несколько знаков точного значения вычисленного интеграла: $\ln 2 = 0,693147\dots$

Пример 3. Вычислить с помощью формулы прямоугольников интеграл $\int_0^1 \frac{dx}{1+x}$ с точностью до 0,001.

Применяя алгоритм решения задачи II из подразд.2.3, представим суммарную погрешность в виде суммы трех слагаемых:

$$0,001 = 0,0009 + 0,00005 + 0,00005.$$

Далее выберем n из условия:

$$\Delta_1 = \frac{b-a}{24} h^2 M_2 = \frac{b-a}{24} \left(\frac{b-a}{n} \right)^2 M_2 \leq 0,0009.$$

Решая это неравенство относительно n , при $b-a=1$ и $M_2=2$ получим $n \geq 10$.

Составим таблицу значений функции $1/(x+1)$ с четырьмя верными знаками в узком смысле:

0,05	0,15	0,25	0,35	0,45	0,55	0,65	0,75	0,85	0,95
0,9254	0,8696	0,8000	0,7407	0,6897	0,6452	0,6061	0,5714	0,5405	0,5128

Используя формулу прямоугольников (2.4.4), получаем:

$$\bar{I}_{10} = 0,1(0,9524 + 0,8696 + 0,8000 + 0,7407 + 0,6897 + 0,6452 + \\ + 0,6061 + 0,5714 + 0,5405 + 0,05128) = 0,69284.$$

Округляя полученный результат, имеем $I = 0,6928 \pm 0,001$.

Формула трапеций. Перейдем теперь к другому способу построения квадратных формул, связанному с аппроксимацией подынтегральной функции интерполяционным многочленом. Рассмотрим простейший случай аппроксимации многочленом первой степени с узлами в точках a и b :

$$f(x) = f(a) + \frac{x-a}{b-a}[f(b) - f(a)] + (x-a)(x-b)\frac{f''(\bar{\eta})}{2}; \quad \bar{\eta} \in (a, b).$$

Интегрируя правую и левую части этого равенства и используя вторую теорему о среднем значении функции при интегрировании последнего слагаемого правой части, получаем:

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{b-a}{2}[f(a) + f(b)] - \frac{(b-a)^2}{12}f''(\eta); \quad \eta \in (a, b).$$

Таким образом, предполагая, что отрезок интегрирования мал, получаем квадратурную формулу, называемую *формулой трапеций*:

$$I \equiv \int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{2}[f(a) + f(b)] \equiv I_2 \quad (2.4.11)$$

с остаточным членом

$$R_2[f] = I - I_2 = -\frac{(b-a)^3}{12}f''(\bar{\eta}); \quad \bar{\eta} \in (a, b). \quad (2.4.12)$$

Используя выражение (2.4.12) для остаточного члена, оценку погрешности квадратурной формулы (2.4.11) можно представить в виде:

$$\Delta_1 = \left| \int_a^b f(x)dx - \frac{b-a}{2}(f(a) + f(b)) \right| \leq \frac{(b-a)^3}{12}M_2, \quad (2.4.13)$$

где $M_2 = \max_{[a,b]} |f''(x)|$.

Полученные выражения для остаточного члена (2.4.12) и погрешности (2.4.13) показывают, что квадратурная формула (2.4.11) является точной для всех линейных функций, поскольку вторая производная таких функций равна нулю а, следовательно, равны нулю остаточный член и погрешность.

Аналогично тому, как это было сделано для оценки (2.4.9), можно показать, что и оценки (2.4.13) – неулучшаемая, так как она достигается на произвольной параболе.

Оценка вычислительной погрешности при расчетах по формуле (2.4.11) для случая, когда значения функции вычислены с одинаковой точностью ε , имеет вид:

$$\Delta_2 \leq \frac{b-a}{2}(\varepsilon + \varepsilon) = (b-a)\varepsilon. \quad (2.4.14)$$

Отметим, что вычисленные погрешности квадратных формул (2.4.11) и (2.4.4) одинаковы.

Пример 4. Вычислить с помощью формулы трапеций интеграл $\int_0^1 \frac{dx}{1+x}$.

Оценить погрешность полученного приближенного значения.

На основании формулы (2.4.11) имеем $I_2 = 0,5[f(0) + f(1)]$. Вычислив необходимые значения функции, получим:

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+x} \approx 0,5(1 + 0,5) = 0,75.$$

Погрешность метода оценим по формуле (2.4.13), используя значение $M=2$, полученное в примере 2:

$$\Delta_1 \leq \frac{1^3}{12} \cdot 2 \approx 0,17.$$

Вычисленная погрешность, очевидно, равна нулю, так как значения функции и I_2 найдены абсолютно точно.

Итак, окончательно имеем $\int_0^1 \frac{dx}{1+x} = 0,75 + 0,17$.

Отметим, что в примере 4 получилось гораздо менее точное решение, чем в примере 2. Однако не следует делать поспешных выводов, так как использование в примере 4 формулы трапеций имеет и свои преимущества. Во-первых, если подынтегральная функция задана в виде таблицы её значений в узлах x_i , то для использования формулы прямоугольников необходимо определить значения этой функции еще и в точках $x_1 \pm h/2$, что вносит дополнительные трудности и дополнительную погрешность. Во-вторых, в примере 4 значения подынтегральной функции были вычислены всего лишь в двух точках, в то время как в примере 2 – в четырех точках, что, естественно, потребовало большего времени.

Приведенные рассуждения показывают, что ценность квадратурной формулы определяется не только формой ее остаточного члена (или погрешности), но и другими факторами, например временем счета.

Другие виды квадратурных формул. Рассмотрим еще один способ построения квадратных формул, состоящий в представлении интеграла как линейной комбинации значений подынтегральной функции и ее произ-

водных в некоторых узлах x_i с последующим определением неизвестных коэффициентов (весовых множителей).

Пусть, например, мы строим квадратурную формулу следующего вида:

$$\int_a^b f(x)dx \approx (b-a)[A_1 f(a) + A_2 f(b) + A_3 f'(a) + A_4 f'(b)]. \quad (2.4.15)$$

Определим весовые множители A_i ($i = 1, 2, 3, 4$) так, чтобы формула (2.4.15) была точной для произвольных многочленов нулевой, первой, второй и третьей степеней. В силу линейности операций интегрирования и дифференцирования это условие будет выполнено, если оно выполняется для многочленов $1, x, x^2, x^3$.

Подставляя эти многочлены вместо $f(x)$ в соотношение (2.4.15), при условии его точного выполнения получаем следующую систему линейных уравнений относительно A_i :

$$\begin{cases} A_1 + A_2 = 1, \\ aA_1 + bA_2 + A_3 + A_4 = \frac{1}{2}(a+b), \\ a^2 A_1 + b^2 A_2 + 2aA_3 + 2bA_4 = \frac{1}{3}(a^2 + ab + b^2), \\ a^3 A_1 + b^3 A_2 + 3a^2 A_3 + 3b^2 A_4 = \frac{1}{4}(a^3 + a^2 b + ab^2 + b^3). \end{cases}$$

Решая эту систему, находим

$$A_1 = A_2 = 1/2; A_3 = -A_4 = (b-a)/12.$$

Таким образом, искомая квадратурная формула имеет вид

$$I \equiv \int_a^b f(x)dx \approx (b-a) \left[\frac{f(a) + f(b)}{2} + (b-a) \frac{f(a) - f(b)}{12} \right] \equiv I_4. \quad (2.4.16)$$

Найдем выражение для остаточного члена этой формулы. Представим интегрируемую функцию в виде суммы интерполяционного многочлена Эрмита третьей степени с двумя двукратными узлами a и b и остаточного члена, а затем проинтегрируем правую и левую части этого представления на отрезке $[a, b]$:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b H_3(x)dx + \int_a^b \frac{(x-a)^2(x-b)^2}{4!} f^{IV}(\bar{\eta})dx; \bar{\eta} \in (a, b).$$

Первое слагаемое правой части дает правую часть квадратной формулы (2.4.16) в силу того, что эта формула является точной для всех многочленов третьей степени, а, следовательно, и для многочлена Эрмита $H_3(x)$. Второе слагаемое правой части дает выражение для остаточного члена

формулы (2.4.16). Используя вторую теорему о среднем значении функции и выполняя интегрирование, получим:

$$R_4[f] = I - I_4 = \frac{(b-a)^5}{720} f^{IV}(\eta); \eta \in (a, b). \quad (2.4.17)$$

Полученное выражение для остаточного члена позволяет описать оценку погрешности квадратурной формулы (2.4.16) в следующем виде:

$$\Delta_1 = |I - I_4| \leq \frac{(b-a)^5}{720} M_4, \quad (2.4.18)$$

где $M_4 = \max_{[a,b]} |f^{IV}(x)|$.

Оценка (2.4.18) – неулучшаемая, так как она достигается на произвольном многочлене четвертой степени, что нетрудно доказать аналогично тому, как это было сделано для оценки (2.4.9).

Для оценки вычислительной погрешности результата, полученного по формуле (2.4.16), предположим, что значения функции заданы с точностью ε_1 , а значения производных с точностью ε_2 . Тогда вычислительная погрешность составляет:

$$\Delta_2 \leq (b-a)\varepsilon_1 + \frac{(b-a)^2}{6}\varepsilon_2. \quad (2.4.19)$$

Пример 5. Вычислить с помощью квадратурной формулы (16) интеграл $\int_0^1 \frac{dx}{1+x}$. Оценить погрешность полученного приближенного значения.

Вычислив необходимые значения подынтегральной функции и ее производных по формуле (2.4.16), находим:

$$I_4 = \left(\frac{1+0,5}{2} + 1 \cdot \frac{-1+0,25}{12} \right) = 0,6875.$$

Погрешность метода оценим по формуле (2.4.18), для чего предварительно найдем максимум абсолютной величины четвертой производной подынтегральной функции $M_4=24$:

$$\Delta_1 \leq \frac{1^5}{720} \cdot 24 \approx 0,034.$$

Вычислительная погрешность, очевидно, равна нулю, так как значения функции и производных вычислены абсолютно точно.

Таким образом, округлая приближенные значения интеграла и погрешности, окончательно получаем $\int_0^1 \frac{dx}{1+x} = 0,69 \pm 0,04$.

До сих пор во всех рассмотренных квадратурных формулах узлы квадратуры были заранее фиксированы. Рассмотрим теперь случай, когда положение всех узлов, так же как и все весовые множители, считаются свободными параметрами. Чтобы последующие выкладки были не слишком сложными, но в то же время не слишком тривиальными, будем искать значения интеграла в виде:

$$\int_a^b f(x)dx = (b-a)[A_1f(x_1) + A_2f(x_2)]. \quad (2.4.20)$$

Для определения четырех свободных параметров A_1 , A_2 , x_1 и x_2 потребуем, чтобы формула (2.4.20) была абсолютно точной для всех многочленов нулевой, первой, второй и третьей степеней. В силу линейности операции интегрирования и правой части соотношения (2.4.20), для того чтобы квадратная формула (2.4.20) была точна для всех многочленов третьей степени, необходимо и достаточно, чтобы она была точна для функций $1, x, x^2, x^3$. Следовательно, должны выполняться соотношения:

$$\begin{cases} A_1 + A_2 = 1, \\ x_1A_1 + x_2A_2 = \frac{1}{2}(a+b), \\ x_1^2A_1 + x_2^2A_2 = \frac{1}{3}(a^2 + ab + b^2), \\ x_1^3A_1 + x_2^3A_2 = \frac{1}{4}(a^3 + a^2b + ab^2 + b^3). \end{cases}$$

представляющие собой нелинейную систему уравнений относительно параметров A_1, A_2, x_1 и x_2 .

Решение этой системы таково:

$$A_1 = A_2 = \frac{1}{2},$$

$$x_1 = \frac{b+a}{2} - \frac{b-a}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}}, \quad x_2 = \frac{b+a}{2} + \frac{b-a}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}}. \quad (2.4.21)$$

Итак, квадратурная формула (2.4.20) принимает следующий вид:

$$I \equiv \int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{2} \left[f\left(\frac{b+a}{2} - \frac{b-a}{2} \frac{1}{\sqrt{3}}\right) + f\left(\frac{b+a}{2} + \frac{b-a}{2} \frac{1}{\sqrt{3}}\right) \right] \equiv I_2. \quad (2.4.22)$$

Формулы такого типа, когда не только весовые множители, но и узлы заранее не фиксируются, называются *гауссовыми*.

Найдем выражение для остаточного члена формулы (2.4.22). Для этого представим интегрируемую функцию в виде суммы интерполяционного многочлена Эрмита третьей степени с двумя двукратными узлами x_1 и x_2 , определяемыми соотношениями (2.4.21), и остаточного члена. Проинтегрировав правую и левую части этого представления на отрезке $[a, b]$, получим:

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^b H_3(x) dx + \int_a^b \frac{(x-x_1)^2(x-x_2)^2}{4!} f(\bar{\eta}) dx; \quad \bar{\eta} \in (a, b).$$

Первое слагаемое правой части даст правую часть квадратурной формулы (2.4.22) в силу того, что эта формула является точной для всех многочленов третьей степени, а следовательно, и для $H_3(x)$. Второе слагаемое правой части даст остаточный член формулы (2.4.22). Используя вторую теорему о среднем значении функции и выполняя интегрирование, имеем:

$$R_2[f] = I - I_2 = \frac{(b-a)^5}{4320} f^{IV}(\eta); \quad \eta \in (a, b). \quad (2.4.23)$$

Следовательно, оценка погрешности выражается соотношением:

$$\Delta_1 = |I - I_2| \leq \frac{(b-a)^5}{4320} M_4, \quad (2.4.24)$$

где $M_4 = \max_{[a,b]} |f^{IV}(x)|$.

Полученная оценка – неулучшаемая, так как она достигается на произвольном многочлене четвертой степени, что нетрудно показать прямыми выкладками, как это было сделано для оценки (2.4.9).

Если в формуле (2.4.22) значения узлов определены практически точно, а значения функции – с абсолютной погрешностью ϵ , то для вычислительной погрешности при использовании формулы (2.4.2) получим то же выражение, что и для вычислительной погрешности при использовании формул (2.4.4) и (2.4.11):

$$\Delta_2 \leq (b-a)\epsilon. \quad (2.4.25)$$

Пример 6. Вычислить с помощью квадратурной формулы (2.4.22) интеграл $\int_0^1 \frac{dx}{1+x}$. Оценить погрешность полученного приближенного значения.

Прежде всего, определим узлы квадратурной формулы:

$$x_1 = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{3}} \right) = 1,2113249\dots;$$

$$x_2 = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{\sqrt{3}} \right) = 0,7886751\dots$$

Теперь, вычислив необходимые значения интегрируемой функции с точностью до трех верных знаков в узком смысле, воспользуемся формулой (2.4.22):

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+x} \approx \frac{1}{2} (0,826 + 0,559) = 0,6925.$$

Погрешность метода оценим по формуле (2.4.24), для чего используем найденное в примере 3 значение максимума абсолютной величины четвертой производной $M_4=24$:

$$\Delta_1 \leq \frac{1^5}{4320} \cdot 24 \approx 0,0056.$$

Вычислительную погрешность можно найти по формуле (2.4.24), учитывая, что точность вычисления значений интегрируемой функции равна 0,0005.

Таким образом, суммарная погрешность есть $\Delta = \Delta_1 + \Delta_2 = 0,0061$.

Наконец, округляя приближенное значение интеграла, окончательно имеем $\int_0^1 \frac{dx}{1+x} = 0,692 \pm 0,007$.

Основная цель настоящего параграфа – показать на простых примерах, как выводятся различные формулы численного интегрирования. Разумеется, мы рассмотрели не все способы построения формул. В то же время приведенные примеры являются характерными, так что, используя их, можно самостоятельно построить конкретную квадратурную формулу, наиболее соответствующую заданной практической задаче.

2.5. Квадратурные формулы Ньютона – Котеса

В настоящем параграфе мы приведем формулы численного интегрирования, имеющие более сложную структуру. Рассмотренные до сих пор методы численного интегрирования являлись интерполяционными, включая в определенном смысле и формулы прямоугольников. Это означает, что подынтегральная функция аппроксимировалась интерполяционным

многочленом. Если интегрируемая функция достаточно гладкая, а отрезок интегрирования конечен, то можно получить достаточно хорошие результаты. С другой стороны, трудно рассчитывать на хорошую аппроксимацию интегрируемой функции многочленом, если сама функция или ее производные невысоких порядков имеют особенности. В таких случаях подынтегральную функцию целесообразно представить в виде произведения двух сомножителей: $p(x) f(x)$, которые должны обладать следующими тремя свойствами. Во-первых, весовой множитель $p(x)$ должен отражать все особенности интегрируемой функции. Во-вторых, моменты

$$m_k = \int_a^b \rho(x) x^k dx \quad (k = 0, 1, \dots), \quad (2.5.1)$$

где $[a, b]$ – отрезок интегрирования, должны вычисляться аналитически.

В-третьих, погрешность аппроксимации функции $f(x)$ многочленом должна быть мала.

Перейдем теперь к построению самих квадратурных формул. Будем их строить в том же виде, что и раньше:

$$I \equiv \int_a^b \rho(x) f(x) dx \approx (b - a) \sum_{i=1}^n A_i f(x_i) \equiv I_n \quad (2.5.2)$$

В общем случае, как мы уже отмечали, формула (2.5.2) имеет $2n$ свободных параметров – это узлы квадратуры x_i и весовые множители A_i . Число n будем предполагать фиксированным. Выбор свободных параметров определяется теми требованиями, которые предъявляются к квадратурной формуле условиями практической задачи. Такими требованиями могут быть, например, максимально возможная точность, минимальная вычислительная погрешность, фиксирование некоторых (а возможно, и всех) весовых множителей или узлов квадратуры

Начнем с относительно простого случая, когда узлы определены заранее и можно варьировать лишь выбором весовых множителей A_i . Идея интерполяционных квадратур заключается в следующем. Аппроксимируем функцию f интерполяционным многочленом в форме Лагранжа степени $n - 1$ по n различным узлам x_i :

$$f(x) = L_{n-1}(x) + R_{n-1}(x).$$

Проинтегрируем правую и левую части этого равенства на отрезке $[a, b]$ предварительно умножив их на весовую функцию $\rho(y)$:

$$\int_a^b \rho(x) f(x) dx = \int_a^b \rho(x) L_{n-1}(x) dx + \int_a^b \rho(x) R_{n-1}(x) dx, \quad (2.5.3)$$

Преобразуем первое слагаемое правой части этого соотношения. Для этого подставим вместо L_{n-1} его явное выражение и поменяем местами операции интегрирования и суммирования:

$$\int_a^b \rho(x) f(x) dx = \sum_{i=1}^n \left(\int_a^b \rho(x) \frac{\omega_{n-1}(x)}{(x-x_i)\omega'_{n-1}(x_i)} dx \right) f_i, \quad (2.5.4)$$

Здесь $\omega_{n-1}(x) = \prod_{k=1}^n (x-x_k)$ Первый из множителей, входящих под знак суммы, является числовым коэффициентом, пропорциональным длине отрезка интегрирования и зависящим только от расположения узлов и свойств функции $\rho(x)$ (но не от функции f).

Предполагая теперь, что второе слагаемое правой части соотношения (2.5.3) мало, получаем приближенную квадратурную формулу (2.5.2) с заданными узлами x_i и коэффициентами A_i , определяемыми следующим образом:

$$A_i = \frac{1}{b-a} \int_a^b \rho(x) \frac{\omega_{n-1}(x)}{(x-x_i)\omega'_{n-1}(x_i)} dx \quad (i=1, 2, \dots, n). \quad (2.5.5)$$

Построенная таким образом квадратурная формула (2.5.2) называется *интерполяционной*.

Перейдем к оценке погрешности формулы (2.5.2) с коэффициентами (2.5.5). Для этого проинтегрируем остаточный член интерполяционной формулы

$$R_{n-1}(x) = \frac{\omega_{n-1}(x)}{n!} f^{(n)}(\bar{\eta}).$$

Подставляя приведенное выражение $R_{n-1}(x)$ во второе слагаемое равенства (2.5.3), получим

$$R_{n-1}[f] = I - I_n = \frac{1}{n!} \int_a^b \rho(x) \omega_{n-1}(x) f^{(n)}(\bar{\eta}) dx; \quad \bar{\eta} \in (a, b).$$

Если функция f имеет на отрезке интегрирования непрерывную производную порядка n , а произведение $\rho(x)\omega_n(x)$ сохраняет на том же отрезке свой знак, то для остаточного члена можно получить следующее выражение:

$$R_{n-1}[f] = \frac{f^{(n)}(\eta)}{n!} \int_a^b \rho(x) \omega_{n-1}(x) f^{(n)}(\bar{\eta}) dx; \quad \bar{\eta} \in (a, b) \quad (2.5.6)$$

и, следовательно, оценка погрешности квадратуры принимает вид

$$\Delta_1 \leq \frac{M_n}{n!} \left| \int_a^b \rho(x) \omega_{n-1}(x) dx \right|, \quad (2.5.7)$$

где $M_n = \max |f^n(x)|$.

Полученная оценка при указанных $[a, b]$ выше условиях является неулучшаемой.

Если же произведение $\rho(x)\omega_{n-1}(x)$ не сохраняет знак на отрезке интегрирования, то в этом случае получается лишь грубая оценка погрешности

$$\Delta_1 \leq \frac{M_n}{n!} \left| \int_a^b \rho(x) \omega_{n-1}(x) dx \right|,$$

которая может оказаться далекой от оптимальной. Поэтому в подобных случаях пользуются другими соображениями при построении явного выражения для остаточного члена и погрешности. Один из таких приемов рассмотрим ниже при изучении формулы Симпсона.

Пример 1. Построить квадратурную формулу (2.5.2) для отрезка $[-1, 1]$ с узлами $x_1 = -1, x_2 = 0, x_3 = 1$ и весовой функцией $\rho(x) = (1 - x^2)^{\frac{1}{2}}$.

По существу, необходимо определить коэффициенты A_i ($i = 1, 2, 3$) формулы (2.5.2). Используя выражение (2.5.5) для искомых коэффициентов, имеем

$$2A_1 = \int_{-1}^1 \frac{(x-0)(x-1)}{(-1-0)(-1-1)} * \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{\pi}{4};$$

$$2A_2 = \int_{-1}^1 \frac{(x+1)(x-1)}{(0+1)(0-1)} * \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{\pi}{2};$$

$$2A_3 = \int_{-1}^1 \frac{(x+1)(x-0)}{(1+1)(1-0)} * \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{\pi}{4};$$

Таким образом, искомая формула имеет вид

$$\int_{-1}^1 f(x) \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \approx \frac{\pi}{4} [f(-1) + 2f(0) + f(1)].$$

Пример 2. Построить квадратурную формулу (2.5.2) для отрезка $[0, 1]$ с узлами $x_1 = 0, x_2 = 0,5, x_3 = 1$ и весовой функцией $\rho(x) = Inx$.

Как и в предыдущем примере, пользуясь формулой (2.5.5), определим коэффициенты:

$$A_1 = \int_0^1 \ln x \frac{(x-0,5)(x-1)}{(0-0,5)(0-1)} dx = -\frac{17}{36};$$

$$A_2 = \int_0^1 \ln x \frac{(x-0)(x-1)}{(0,5-0)(0,5-1)} * dx = -\frac{20}{36};$$

$$A_3 = \int_0^1 \ln x \frac{(x-0)(x-0,5)}{(1-0)(1-0,5)} * dx = \frac{1}{36};$$

Итак,

$$\int_0^1 \ln x f(x) dx \approx -\frac{1}{36} [17f(0) + 20f(0,5) - f(1)].$$

Отметим характерные особенности рассмотренных примеров. В примере 1 симметрично расположенные узлы и четность весовой функции относительно середины отрезка привели к симметрии коэффициентов квадратурной формулы. В примере 2, несмотря на симметрию узлов, симметрия коэффициентов нарушена, что является следствием отсутствия симметрии (четности) у весовой функции.

В практических расчетах особый интерес представляет случай, когда узлы квадратурной формулы задаются в виде равноотстоящих точек отрезка $[a, b]$: $x_i = a + (i-1)h$ ($i = 1, 2, \dots, n$), а весовая функция $\rho(x)$ тождественно равна единице. При таких предположениях формулу (2.5.2) можно преобразовать в виду

$$\int_a^b f(x) dx \approx (b-a) \sum_{i=1}^n H_i f_i, \quad (2.5.8)$$

При различных n получаем различные *квадратурные формулы Ньютона–Котеса*. Коэффициенты H_i , называемые *коэффициентами Котеса*, определяются из соотношения (2.5.5):

$$H_i = A_i = \frac{(-1)^{ni}}{(n-1)(i-1)!(n-i)!} \int_t^n \frac{(t-1)\dots(t-n)}{t-i} dt; \quad (2.5.9)$$

$n > 1; i = 1, 2, \dots, n; 0! = 1$.

Эти коэффициенты обладают следующими полезными при их вычислении свойствами.

1. Симметричные коэффициенты (первый и n -й, второй и $(n-1)$ -й,....) равны между собой:

$$H_i = H_{n+1-i}. \quad (2.5.10)$$

Заменим в выражении (2.5.9) i на $n+1-i$:

$$H_{n+1-i} = \frac{(-1)^{i1}}{(n-1)(n-i)!(i-1)!} \int_1^n \frac{(t-1)\dots(t-n)}{t-n-1+i} dt.$$

Переходя под знаком интеграла к новой переменной $q = n+1-t$ и выполняя несложные преобразования, получим

$$H_{n+1-i} = \frac{(-1)^{ni}}{(n-1)(n-i)!(i-1)!} \int_1^n \frac{(q-n)\dots(q-1)}{q-i} dq,$$

что совпадает с выражением (2.5.9) для коэффициентов H_i .

2. Сумма всех коэффициентов равна единице:

$$\sum_{i=1}^n H_i = 1.$$

Справедливость этого свойства непосредственно вытекает из формулы (2.5.8), если положить $f(x) = 1$, поскольку остаточный член этой формулы, определяемый выражением (2.5.6), равен нулю при $f(x) = 1$.

В табл. 2.1 приведены значения коэффициентов Котеса для $n = 2, 3, 4, 5, 6$.

Т а б л и ц а 2 . 1

Значения коэффициентов Котеса

$n \backslash i$	1	2	3	4	5	6
2	1/2	1/2				
3	1/6	4/6	1/6			
4	1/8	3/8	3/8	1/8		
5	7/90	32/90	12/90	32/90	7/90	
6	19/288	75/288	50/288	50/288	75/288	19/288

Остановимся более детально на важном частном случае квадратурной формулы (2.5.8), получающемся при $n = 3$. Для построения этой формулы можно было бы воспользоваться данными табл. 2.1. Однако в качестве упражнения проведем соответствующие вычисления. Применяя формулу (2.5.9), получим

$$H_i = \frac{(-1)^2}{2 \cdot 1 \cdot 2} \cdot \int_1^3 (t-2)(t-3) dt = \frac{1}{6}.$$

Далее, используя равенства (2.5.10), найдем

$$H_3 = H_1 = \frac{1}{6}, \quad H_2 = 1 - (H_1 + H_3) = \frac{2}{3}.$$

Таким образом, искомая квадратурная формула, называемая формулой Симпсона, имеет вид

$$I = \int_a^b f(x) dx \approx \frac{b-a}{6} \left[f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b) \right] \equiv I_3. \quad (2.5.11)$$

Эта формула в силу своего построения (аппроксимации подынтегральной функции многочленом второй степени) является точной для всех многочленов нулевой, первой и второй степеней. Можно было бы попытаться получить выражение для остаточного члена, непосредственно используя соотношение (2.5.6). Однако формула Симпсона обладает так называемым свойством повышенной точности, которое заключается в том, что она является точной не только для многочленов второй степени, но и для многочленов третьей степени. В силу линейности операции интегрирования для доказательства этого утверждения достаточно установить точное равенство правой и левой частей формулы (2.5.11) для простейшего многочлена третьей степени x^3 . Действительно, вычисляя левую часть формулы (2.5.11) $f = x^3$, имеем

$$\int_a^b x^3 dx = \frac{b^4 - a^4}{4}.$$

С другой стороны, вычисляя правую часть формулы (2.5.11), получим

$$\frac{b-a}{6} \left[a^3 + 4\left(\frac{b+a}{2}\right)^2 + b^3 \right] = \frac{b^4 - a^4}{4}.$$

что и требовалось установить.

Воспользуемся доказанным утверждением для построения остаточного члена формулы Симпсона. Представим функцию f в виде суммы интерполяционного многочлена Эрмита с однократными узлами a и b , двукратным узлом $(a+b)/2$ и остаточного члена:

$$f(x) = H_3(x) + (x-a) \left(x - \frac{a+b}{2} \right)^2 (x-b) f^{IV}(\eta); \quad \eta \in (a, b).$$

Проинтегрируем правую и левую части этого равенства на отрезке $[a, b]$. Интеграл от многочлена Эрмита в силу только что доказанного даст правую часть формулы (2.5.11), а интеграл от второго слагаемого – ее остаточный член

$$R_3[f] = I - I_3 = \frac{(b-a)^5}{2880} f^{IV}(\eta); \quad \eta \in (a, b). \quad (2.5.12)$$

Следовательно, оценке погрешности можно придать вид

$$\Delta_1 \leq |I - I_3| \leq \frac{(b-a)^5}{2880} \cdot M_4, \quad (2.5.13)$$

где $M_4 = \max |f^{IV}(x)|$.

Эта оценка является неулучшаемой, $[a, b]$ поскольку она достигается, например, на функции $f=x^4$.

Пример 3. Вычислить с помощью формулы Симпсона интеграл

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+x}.$$

Оценить погрешность полученного приближенного значения.

Δ Вычислив необходимые значения подынтегральной функции в точках $x_1 = 0, x_2 = 0,5, x_3 = 1$, подставим их в формулу (2.5.11):

$$I_3 = \frac{1}{6}(1 + 4 \cdot 0,667 + 0,5) = 0,6947.$$

Учитывая, что $M_4 = \max \left| \left(\frac{1}{1+x} \right) \right|^{IV} = 24$, и используя формулу (2.5.13), для погрешности метода получим $\Delta_1 \leq 0,0084$. Найдем вычислительную погрешность

$$\Delta_2 \leq \frac{1}{6} \cdot (0 + 4 \cdot 0,0005 + 0) = 0,00034.$$

Складывая погрешности и округляя результат, окончательно получим

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+x} = 0,695 \pm 0,01.$$

Описанным выше свойством повышенной точности обладают все квадратурные формулы типа (2.5.8), построенные по нечетному числу узлов. Это свойство является прямым следствием «симметричности» квадратуры, т.е. равенства симметричных коэффициентов $H_i = H_{n+1-i}$, и линейности операций вычисления значения функции и интегрирования. Чтобы получить уточненную оценку остаточного члена такой формулы, необходимо аппроксимировать подынтегральную функцию интерполяционным многочленом Эрмита с двукратным центральным узлом.

Возвращаясь к квадратурной формуле (2.5.2), можно утверждать, что при симметричных коэффициентах ($A_i = A_{n+1-i}$) и четной весовой функции эта квадратура, построенная по $2k+1$ узлу, является точной для всех многочленов степени $2k+1$, поскольку она является точной для любой

функции f , нечетной относительно середины отрезка интегрирования.

Лействительно, с одной стороны, для таких функций $\int_a^b \rho(x)f(x)dx = 0$, а с

другой $\sum_{i=1}^{2k+1} A_i f_i = 0$ в силу симметрии A_i и нечетности f .

Пример 4. Используя квадратурную формулу, построенную примере 1,

вычислить интеграл $\int_{-1}^1 \frac{\cos x dx}{\sqrt{1-x^2}}$ и оценить погрешность.

Вычисляем необходимые значения функции

$$f = \cos x: \cos(-1) = 0,540; \cos 0 = 1; \cos 1 = 0,540.$$

Подставляя эти значения в квадратурную формулу, имеем

$$\int_{-1}^1 \frac{\cos x dx}{\sqrt{1-x^2}} \approx \frac{\pi}{4} (0,540 + 2 \cdot 1 + 0,540) = 2,419$$

Найдем теперь выражение для остаточного члена квадратурной формулы примера 1. В силу четности весовой функции и симметричного расположения и нечетности числа узлов эта формула обладает свойством повышенной точности, т.е. она является точной для всех многочленов третьей степени. Поэтому аналогично тому, как это было сделано для формулы Симпсона, используя интерполяционный многочлен Эрмита с двукратным центральным узлом $x_2 = 0$, получим следующее выражение для остаточного члена:

$$R_3[f] = \frac{f^{IV}(\eta)}{4!} \int_{-1}^1 \frac{(x+1)x^2(x-1)}{\sqrt{1-x^2}} dx = -\frac{\pi}{192} f^{IV}(\eta); \eta \in (-1,1).$$

Следовательно, погрешность метода составляет

$$\Delta_1 \leq \frac{\pi}{192} \max |\cos x| = 0,017.$$

Далее, так как первое и третье значения косинуса вычислены с погрешностью 0,0005, а второе — абсолютно точно, то для вычислительной погрешности получим

$$\Delta_2 \leq \frac{\pi}{4} (0,0005 + 2 \cdot 0 + 0,0005) = 0,0008.$$

Суммируя погрешности и производя необходимые округления, окончательно имеем

$$\int_{-1}^1 \frac{\cos x dx}{\sqrt{1-x^2}} = 2,42 \pm 0,02.$$

В заключение рассмотрим еще один способ определения коэффициентов A_i квадратурной формулы (2.5.2) с заданными узлами. Потребуем, чтобы формула (2.5.2) была точной для функций $1, x, x_2$ до возможно более высокой степени. В этом случае для определения коэффициентов A_i получим следующую систему уравнений:

$$m_k = (b-a) \sum_{i=1}^n x_i^k A_i \quad (k=0,1,\dots,N). \quad (2.5.14)$$

Если узлы x_i – несовпадающие, а $N = n-1$, то определитель системы (2.5.14) есть определитель Вандермонда и решение этой системы (набор коэффициентов A_i) существует и единственно.

Докажем, что такой способ определения квадратурных коэффициентов эквивалентен описанному выше, т.е. что формулы (2.5.5) дают те же значения для A_i , что и система (2.5.14). Для доказательства подставим выражения (2.5.5) для коэффициентов A_i в правые части уравнений (2.5.14) и поменяем местами операции суммирования и интегрирования:

$$m_k = \int_a^b \rho(x) \left[\sum_{i=1}^n \frac{\omega_{n-1}(x)}{(x-x_i)\omega'_{n-1}(x_i)} x_i^k \right] dx.$$

Выражение, стоящее в скобках, есть интерполяционный многочлен Лагранжа степени не выше $n-1$ для функции x^k ($k < n$). Остаточный член такого многочлена, очевидно, равен нулю ($\frac{d_n}{x_n}(x_k=0)$ при $k < n$) поэтому

$$m_k = \int_a^b \rho(x) x^k dx \quad (k=0,1,\dots,n-1).$$

Из полученных тождеств и единственности решения системы (2.5.14) вытекает эквивалентность обоих способов построения квадратурных формул (2.5.2).

В качестве примера построим квадратурную формулу вида

$$\int_a^b f(x) dx \approx (b-a) \left[(a) + A_2 f\left(\frac{a+b}{2}\right) + A_3 f'(b) \right].$$

Для построения искомой квадратурной формулы потребуем, чтобы она была точной для всех многочленов нулевой, первой и второй степеней. Для этого, в силу линейности операций интегрирования, вычисления значений функции и дифференцирования, достаточно потребовать, чтобы квадратурная формула была точной для $1, x, x_2$. Итак, пусть $f(x) = 1$ тогда $(b-a) = (b-a)(A_1 \cdot 0 + A_2 \cdot 1 + A_3 \cdot 0)$, т.е. $A_2 = 1$. Пусть теперь $f(x) = x$; тогда

$$\frac{b+a}{2} = A_1 \cdot 1 + 1 \cdot \frac{b+a}{2} + A_3 \cdot 1, \text{ т.е. } A_1 = -A_3.$$

Наконец, $f(x) = x^2$ полагая, получим уравнение

$$\frac{a^2 + ab + b^2}{3} = A_1 \cdot 2a + 1 \cdot \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 - A_1 \cdot 2b,$$

решая которое, находим $A_1 = -\frac{b-a}{24}$.

Таким образом, искомая формула имеет вид

$$I = \int_a^b f(x) dx \approx \frac{b-a}{24} \left[-\left(b - af'(a) + 24f\left(\frac{a+b}{2}\right) + (b-a) \right) f(b) \right] \equiv I_3.$$

Заметим, что эта формула также обладает свойством повышенной точности, как, например, формула Симпсона. Приведем без вывода выражение для остаточного члена полученной формулы:

$$R_3[f] = I - I_3 = -\frac{7}{5760}(b-a)^5 f^{IV}(\eta); \eta \in (a, b).$$

Доказательство последнего соотношения предлагаем провести самостоятельно в качестве упражнения.

2.6. Квадратурные формулы наивысшей алгебраической степени точности

Рассмотрим снова квадратурную формулу

$$I \equiv \int_a^b \rho(x) f(x) dx \approx (b-a) \sum_{i=1}^n A_i f(x_i) \equiv I_n. \quad (2.6.1)$$

Как мы уже отмечали, в общем случае не только коэффициенты A_i , но и узлы x_i являются произвольными параметрами, подлежащими определению в зависимости от тех требований, которым должно удовлетворять соотношение (2.6.1). Так как общее число свободных параметров равно $2n$, то можно ожидать, что наложив на соотношение (2.6.1) $2n$ условий, мы получим систему уравнений для определения этих параметров. Конечно, в общем случае невозможно сказать, имеет ли вообще такая система решение, а если да, то является ли оно единственным. Ответ на эти вопросы можно получить лишь при рассмотрении конкретных требований, которым должна удовлетворять квадратурная формула (2.6.1). Эти требования, по-видимому, целесообразно связать с величиной погрешности формулы (2.6.1), постараться выбрать узлы и коэффициенты так, чтобы

минимизировать в некотором смысле абсолютную величину остаточного члена. В предыдущем параграфе мы отмечали, что полученные оценки погрешности квадратурных формул достигались на многочленах, степень которых на единицу больше максимальной степени многочлена, для которого соответствующая квадратура была точной. Поэтому представляется естественным попытаться увеличить степень многочлена, для которого формула (2.6.2) была бы абсолютно точной. Такая постановка вопроса порождает следующую оптимизационную задачу.

Построить квадратурную формулу вида (2.6.1) с фиксированным n , точную для произвольного многочлена возможно более высокой степени r . Покажем, что сформулированная задача эквивалентна задаче построения квадратуры (2.6.1), точной для всех функций x^k ($k=0,1,\dots,r$). Действительно, пусть дан произвольный многочлен $P_r(x) = \sum_{k=0}^r a_k x^k$. Тогда

$$\begin{aligned} P_n[P_r] &= I[P_r] - I_n[P_r] = \\ &= \sum_{k=0}^r a_k \left(\int_a^b \rho(x) x^k dx - \sum_{i=0}^r A_i x_i^k \right) = \sum_{k=0}^r a_k R_n[x^k]. \end{aligned} \quad (2.6.2)$$

Отсюда в силу произвольности a_k (многочлен P_r произвольный) получаем, $P_n[P_r]=0=0$, что при необходимо $R_n[x^k]=0$ ($k=0,1,\dots,r$).. Достаточность является прямым следствием линейности остаточного члена формулы (2.6.1) относительно функции f и очевидна в силу того же соотношения (2.6.2).

Таким образом, мы приходим к системе $r+1$ уравнений относительно $2n$ неизвестных параметров A_i и x_i :

$$m_k = \int_a^b \rho(x) x^k dx = (b-a) \sum_{i=1}^m A_i x_i^k \quad (k=0,1,\dots,r). \quad (2.6.3)$$

Естественно попытаться решить эту систему, т.е. построить квадратурную формулу, при $r+1=2n$ (число уравнений равно числу неизвестных). Целесообразность такой попытки подтверждают приводимые ниже теоремы.

Сначала сформулируем без доказательства вспомогательную теорему, характеризующую свойства ортогональных многочленов.

Теорема I. Пусть: 1) $\rho(x) > 0$ почти всюду на $[a, b]$;

2) $P_{n-1}(x)$ — произвольный многочлен степени не выше $n-1$. Тогда существует и притом единственный многочлен

$$\psi_n(x) = (x-x_1)(x-x_2)\dots(x-x_n), \quad (2.6.4)$$

ортогональный с весом $\rho(x)$ к $P_{n-1}(x)$, т.е. такой, что

$$\int_a^b \rho(x) \psi(x) P_{n-1}(x) dx = 0, \quad (2.6.5)$$

причем все корни x_1, x_2, \dots, x_n многочлена $\psi_n(x)$ различны и лежат внутри отрезка $[a, b]$.

Перейдем теперь к теоремам, позволяющим непосредственно определить узлы и коэффициенты формулы (2.6.1), точной всех многочленов степени $r = 2n - 1$.

Теорема 2. Для того чтобы формула (2.6.1) была точной для многочленов степени $2n - 1$, необходимо и достаточно, чтобы: 1) узлы x_i являлись корнями многочлена ψ_n , определяемого соотношением (2.6.5); 2) весовые множители A_i определялись соотношениями (2.5.5).

Начнем с необходимости условия 2. Если формула (2.6.1) – точная для всех многочленов степени $2n - 1$, то она также точная и для многочленов любой низшей степени, в том числе и степени $n - 1$; тогда эта формула является интерполяционной и мы получим единственный набор коэффициентов A_i , определяемый формулой (2.5.5).

Рассмотрим теперь многочлен $Q_{2n-1} = \omega_{n-1}(x) P_{n-1}(x)$.

Используя тот факт, что для многочлена $Q_{2n-1}(x)$ формула (2.6.1) – точная, мы получаем условие 1:

$$\int_a^b \rho(x) \omega_{n-1}(x) P_{n-1}(x) dx = (b - a) \sum_{i=1}^n A_i Q_{2n-1}(x_i) = 0;$$

последнее соотношение вытекает из того, что $\omega_{n-1}(x_i) = 0$ для всех $i = 1, 2, \dots, n$;

Проверим достаточность условий 1 и 2. Произвольный многочлен $Q_{2n-1}(x)$ степени $2n - 1$ представим в виде

$$Q_{2n-1} = \psi_n P_{n-1}(x) + S_{n-1}(x),$$

где P_{n-1} и S_{n-1} – соответственно частное и остаток от деления многочлена Q_{2n-1} на многочлен ψ_n причем P_{n-1} – многочлен степени $n - 1$, а S_{n-1} – многочлен степени не выше $n - 1$. Далее, имеем

$$\int_a^b \rho(x) Q_{2n-1} dx = \int_a^b \rho(x) \psi_n P_{n-1} dx + \int_a^b \rho(x) S_{n-1} dx.$$

Первое слагаемое правой части равно нулю в силу ортогональности ψ_n и P_{n-1} (условие 1°), а для второго слагаемого формула (2.6.1) является точной в силу условия 2°. Поэтому, учитывая, что $Q_{2n-1}(x_i) = S_{n-1}(x_i)$, так как $\psi_n(x_i) = 0$, окончательно имеем

Поставим теперь вопрос: нельзя ли построить квадратурную формулу (2.6.1), точную для всех многочленов степени выше $2n - 1$? Ответ на него дает следующая теорема.

Теорема 3. Пусть $\rho(x) > 0$ почти всюду на $[a, b]$. Тогда не существует квадратурной формулы (2.6.1), точной для всех многочленов степени $2n$.

Рассмотрим $Q_{2n}(x) = (x - x_1)^2 \dots (x - x_n)^2 = \omega_{n-1}^2(x)$. Тогда левая часть равенства (2.6.1) $\int_a^b \rho(x) \cdot \omega_{n-1}^2(x) dx > 0$, в то время как его правая часть

$$\sum_{i=1}^n A_i \cdot \omega_{n-1}^2(x_i) = 0, \text{ что и доказывает теорему.}$$

Итак, квадратурная формула (2.6.1) с узлами x_i определенными соотношениями (2.6.5), и коэффициентами A_i , определяемыми соотношениями (2.5.5), является точной для любого многочлена степени не выше $2n - 1$. Она называется квадратурной формулой наивысшей алгебраической степени точности (или квадратурной формулой Гаусса).

Формула Гаусса обладает полезным с точки зрения вычислительной погрешности свойством: все коэффициенты A_i ($i = 1, 2, \dots, n$) для любого n положительны.

Для доказательства этого утверждения рассмотрим функцию $\left[\frac{\psi_n(x)}{x - x_p} \right]^2$, представляющую собой многочлен степени $2n - 2$ и обращающуюся в нуль во всех узлах $x_i \neq x_p$. Для этой функции квадратурная формула Гаусса является точной и поэтому

$$\int_a^b \rho(x) \frac{\omega_n^2(x)}{(x - x_p)^2} dx = (b - a) A_p \left[\psi_n'(x_p) \right]^2$$

Отсюда сразу следует, что $A_p > 0$. В силу произвольности ρ , очевидно, все квадратурные коэффициенты $A_i > 0$.

Перейдем теперь к оценке погрешности квадратурной формулы Гаусса.

Теорема 4. Пусть: 1) $\rho(x) > 0$ почти всюду на $[a, b]$;

2) $f(x) \in C^{2n}[a, b]$; 3°) x_i и A_i ($i = 1, 2, \dots, n$) – соответственно узлы и коэффициенты квадратурной формулы Гаусса. Тогда существует такая точка $\xi \in (a, b)$, что

$$R_3[f] = I - I_n = \frac{f^{(2n)}(\xi)}{(2n)!} \int_a^b \rho(x) \omega_n^2(x) dx.$$

Представим интегрируемую функцию в виде

$$f(x) = H_{2n-1}(x) + \frac{f^{(2n)}(\bar{\eta})}{(2n)!} \omega_{n-1}^2(x); \quad \bar{\eta} \in (a, b),$$

где $H_{2n-1}(x)$ – интерполяционный многочлен Эрмита степени не выше $2n-1$ с двукратными узлами x_i ($i = 1, 2, \dots, n$).

Очевидно, что для $H_{2n-1}(x)$ формула Гаусса является точной. Поэтому

$$I = I_n + \frac{1}{(2n)!} \int_a^b \rho(x) f^{(2n)}(\bar{\eta}) \omega_{n-1}^2(x) dx.$$

Применяя ко второму слагаемому правой части вторую теорему о среднем значении функции и перенося I_n , в левую часть получим требуемое соотношение (2.6.6).

Практически квадратуру Гаусса получают следующим образом. Сначала находят корни многочлена $\psi_n(x)$ ортогонального всем многочленам степени ниже n . Затем для коэффициентов A_i строят систему линейных уравнений, предполагая, что квадратурная формула верна для функций $1, x, \dots, x^{n-1}$

$$m_k \equiv \int_a^b \rho(x) x^k dx = \sum_{i=1}^n A_i x_i^k.$$

Решая эту систему, находят A_i .

Простейшей иллюстрацией квадратуры Гаусса является формула (2.4.22).

2.7. Составные квадратурные формулы

В настоящем параграфе рассмотрим наиболее часто встречающиеся составные формулы, построенные на основе приведенных ранее простейших квадратур.

Составная формула трапеций. Пусть требуется вычислить интеграл от функции f на отрезке $[a, b]$. Разобьем отрезок $[a, b]$ на m равных частей с граничными точками $a = x_0, x_1, \dots, x_m = b$ так, что длина каждой части равна $h = (b-a)/m$. Представим интеграл в виде суммы:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{x_0}^{x_1} f(x)dx + \int_{x_1}^{x_2} f(x)dx + \dots + \int_{x_{m-1}}^{x_m} f(x)dx. \quad (2.7.1)$$

К каждому слагаемому правой части этого равенства применим формулу трапеций с остаточным членом (см. соотношения (2.4.11) и (2.4.12)). Приводя подобные члены, получаем:

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{b-a}{m} \left(\frac{f_0 + f_m}{2} + \sum_{i=1}^{m-1} f_i \right) - \frac{(b-a)^3}{12m^3} \sum_{i=1}^m f''(\eta_i); \quad \eta_i \in (x_{i-1}, x_i). \quad (2.7.2)$$

Предполагая, что вторая производная интегрируемой функции на всем отрезке $[a, b]$ непрерывна, в силу теоремы Вейерштрасса имеем:

$$\sum_{i=1}^m f''(\eta_i) = mf''(\eta); \quad \eta \in (a, b).$$

Подставляя это выражение для суммы в соотношение (2.7.2), получаем *составную формулу трапеций*

$$I = \int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{m} \left(\frac{f_0 + f_m}{2} + \sum_{i=1}^{m-1} f_i \right) \equiv I_2^m \quad (2.7.3)$$

остаточным членом

$$R_2^m [f] = -\frac{(b-a)^3}{12m^2} f''(\eta). \quad (2.7.4)$$

Следовательно, оценку погрешности квадратуры (2.7.3) можно представить в виде

$$\Delta_1 = |I - I_2^m| \leq \frac{(b-a)^3}{12m^2} M_2, \quad (2.7.5)$$

где $M_2 = \max_{[a,b]} |f''(x)|$. Полученная оценка является не улучшаемой, поскольку она достигается, например, на параболе $f = x^2$, что легко показать

непосредственной проверкой. Заметим, что аналогичные выкладки мы уже выполняли при анализе квадратурной формулы (2.4.4). Покажем, как это делается для составной формулы (2.7.3).

Вычислим левую часть квадратурной формулы (2.7.3) при $f = x^2$:

$$I = \int_a^b x^2 dx = \frac{b^3 - a^3}{3}.$$

Вычислим сумму

$$I_2^m = \frac{b-a}{m} \left[\frac{a^2 + b^2}{2} + \sum_{i=1}^{m-1} \left(a + i \frac{b-a}{m} \right)^2 \right].$$

Преобразуя выражение, стоящее в скобках, и используя при этом следующие формулы суммирования:

$$\sum_{i=1}^{m-1} i = \frac{(m-1)m}{2}; \quad \sum_{i=1}^{m-1} i^2 = \frac{(m-1)m(2m-1)}{6},$$

получим искомую величину

$$I_2^m = \frac{b^3 - a^3}{3} + \frac{(b-a)^3}{6m^2}.$$

Таким образом, погрешность квадратурной формулы (2.7.3) для функции $f = x^2$ составляет

$$\Delta_1 = \left| I - I_2^m \right| = \frac{(b-a)^3}{6m^2}.$$

что в точности совпадает с правой частью оценки (2.7.5), поскольку $M_2 = 2$.

В силу линейности операций $I[f]$ и $I_2^m[f]$ и того, что формула (2.7.3) является точной для любой линейной функции, можно утверждать, что оценка (2.7.5) достигается на произвольной параболе второй степени.

Выражение (2.7.5) для погрешности метода Δ_1 квадратурной формулы (2.7.3) показывает, что $\lim_{m \rightarrow \infty} \Delta_1 = 0$, т.е. увеличивая m , мы можем обеспе-

чить любую наперед заданную точность I_2^m в смысле погрешности метода (при отсутствии вычислительной погрешности). В таких случаях говорят, что метод является *сходящимся*. Остается выяснить влияние погрешности исходных данных (значений функции f_i) на погрешность результата. В силу линейности правой части квадратурной формулы (2.7.3) относительно значений интегрируемой функции суммарная вычислительная погреш-

ность пропорциональна погрешности вычисления каждого значения функции (в случае их равенства). Поэтому можно ожидать, что при достаточно высокой точности исходных данных суммарная вычислительная погрешность будет достаточно мала.

Выведем конкретные формулы для числа разбиений m и допустимой погрешности каждого значения функции f_i , обеспечивающих требуемую точность ε при использовании квадратурной формулы (2.7.3) с погрешностью (2.7.5).

Прежде всего, используя алгоритм решения задачи II, приведенный в подразд. 2.3, представим ε в виде суммы: $\varepsilon = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3$ (если, например $\varepsilon = 10^{-k}$, то обычно полагают $\varepsilon_1 = 0,3 \cdot 10^{-k}$, $\varepsilon_2 = 0,2 \cdot 10^{-k}$, $\varepsilon_3 = 0,5 \cdot 10^{-k}$).

Далее выберем число разбиений m так, чтобы обеспечить выполнение неравенства $\Delta_1 \leq \varepsilon_1$. Для этого в силу (2.7.5) достаточно потребовать, чтобы

$$\frac{(b-a)^3}{12m^2} M_2 \leq \varepsilon_1.$$

Преобразуя это неравенство, получаем для разбиений формулу

$$m \geq (b-a) \sqrt{\frac{(b-a)M_2}{12\varepsilon_1}}. \quad (2.7.6)$$

Итак, погрешность метода Δ_1 не превзойдет ε_1 , если число разбиений m удовлетворяет неравенству (2.7.6).

Определим теперь, какова должна быть погрешность значений интегрируемой функции, чтобы суммарная погрешность вычисления I_2^m по формуле (2.7.3) не превосходила ε_2 . Пусть искомая погрешность есть $\Delta[f_i]$; тогда, используя формулу (2.7.3), имеем

$$\Delta[I_2^m] \leq \frac{b-a}{m} (\Delta[f_i] + (m-1)\Delta[f_i]) = (b-a)\Delta[f_i].$$

Следовательно, для выполнения неравенства $\Delta[I_2^m] \leq \varepsilon_2$ достаточно потребовать, чтобы

$$\Delta[f_i] \leq \varepsilon_2 / (b-a). \quad (2.7.7)$$

Пример 1. Используя составную формулу трапеций, вычислить интеграл $\int_0^1 \frac{dx}{1+x}$ с точностью до 0,01.

Пусть $\varepsilon_1 = 0,004$; $\varepsilon_2 = 0,001$; $\varepsilon_3 = 0,005$. Находим $M_2 = \max_{[0, 1]} \left| \left(\frac{1}{1+x} \right)'' \right| = 2$.

С помощью неравенства (2.7.6) определим необходимое число разбиений

$$m \geq (1-0) \cdot \sqrt{\frac{(1-0) \cdot 2}{12 \cdot 0,004}} = 6,4.$$

Принимаем $m = 7$. Неравенство (2.7.7) для допустимой погрешности значений подынтегральной функции дает значение $\Delta[f_i] = 0,001$. Составляем таблицу необходимых значений интегрируемой функции с тремя верными знаками.

X	0	1/7	2/7	3/7	4/7	5/7	6/7	1
$(1+x)^{-1}$	1	0,875	0,778	0,700	0,636	0,583	0,538	0,500

По формуле (2.7.3) находим

$$I_2^7 = \frac{1-0}{7} \left(\frac{1+0,5}{2} + 0,875 + 0,778 + 0,700 + 0,636 + 0,583 + 0,538 \right) = 0,694.$$

Округляя полученный результат, окончательно имеем

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+x} = 0,69 \pm 0,01.$$

Сравните полученное решение с решением примера 6 подразд. 2.4 и примера 3 подразд. 2.5.

Составная формула Симпсона. В этом случае отрезок интегрирования разобьем на четное число $2m$ равных частей с граничными точками $a = x_0, x_1, \dots, x_{2m} = b$, так что длина каждой части равна $h = (b-a)/(2m)$.

Представим интеграл в виде суммы:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{x_0}^{x_2} f(x)dx + \int_{x_2}^{x_4} f(x)dx + \dots + \int_{x_{2m-2}}^{x_{2m}} f(x)dx.$$

К каждому слагаемому правой части этого равенства применим формулу Симпсона с остаточным членом [см. соотношения (2.5.11) и (2.5.12)]. Приводя подобные члены, получим

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{b-a}{6m} (f_0 + f_{2m} + 4\sigma_1 + 2\sigma_2) - \frac{(b-a)^3}{2880m^5} \sum_{i=1}^m f^{1v}(\eta_i); \quad (2.7.8)$$

$$\eta_1 \in (x_{2i-2}, x_{2i});$$

$$\sigma_1 = f_1 + f_3 + \dots + f_{2m-1}; \quad \sigma_2 = f_2 + f_4 + \dots + f_{2m-2}.$$

Предполагая, что четвертая производная интегрируемой функции на всем отрезке $[a, b]$ непрерывна, в силу теоремы Вейерштрасса имеем

$$\sum_{i=1}^m f^{IV}(\eta_i) = m f^{IV}(\eta); \quad \eta \in (a, b).$$

Подставляя полученное выражение для суммы производных в соотношение (2.7.8), приходим к *составной формуле Симпсона*

$$I \equiv \int_a^b f(x) dx \approx \frac{b-a}{6m} (f_0 + f_{2m} + 4\sigma_1 + 2\sigma_2) \equiv I_3^m; \quad (2.7.9)$$

$$\sigma_1 = f_1 + f_3 + \dots + f_{2m-1}; \quad \sigma_2 = f_2 + f_4 + \dots + f_{2m-2}$$

с остаточным членом

$$R_3^m[f] = -\frac{(b-a)^5}{2880m^4} f^{IV}(\eta); \quad \eta \in (a, b). \quad (2.7.10)$$

Следовательно, оценку погрешности квадратурной формулы (9) можно представить в виде

$$\Delta_1 = |I - I_3^m| \leq \frac{(b-a)^5}{2880m^4} M_4, \quad (2.7.11)$$

где $M_4 = \max_{[a, b]} |f^{IV}(x)|$. Полученная оценка является не улучшаемой,

поскольку она достигается, например, на функции $f = x^4$.

Как и для формулы трапеций, аналогично получим конкретные формулы для числа разбиений m и допустимой погрешности каждого значения f_i , обеспечивающих требуемую точность ε при использовании квадратурной формулы (2.7.9) с погрешностью (2.7.11).

Пусть $\varepsilon = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3$, учитывая соотношение (2.7.11), для выполнения неравенства $\Delta_1 \leq \varepsilon_1$ потребуем, чтобы

$$\frac{(b-a)^5}{2880m^4} M_4 \leq \varepsilon_1.$$

Отсюда находим условие для числа разбиений $2m$, при котором погрешность метода не превзойдет ε_1 :

$$2m \geq (b-a) \sqrt[4]{\frac{(b-a)M_4}{180\varepsilon_1}}. \quad (2.7.12)$$

Определим теперь, какова должна быть погрешность значений подынтегральной функции, чтобы суммарная погрешность вычисления I_3^m по формуле (2.7.9) не превосходила ε_2 . Пусть искомая погрешность есть $\Delta[f_i]$; тогда, используя формулу (2.7.9), имеем

$$\Delta[I_3^m] \leq \frac{b-a}{6m} (2\Delta[f_i] + 4m[f_i] + 2(m-1)\Delta[f_i]) = (b-a)\Delta[f_i].$$

Следовательно, для выполнения неравенства $\Delta[I_3^m] \leq \varepsilon_2$ достаточно потребовать, чтобы

$$\Delta[f_i] \leq \varepsilon_2 / (b-a). \quad (2.7.13)$$

Как и следовало ожидать, получился тот же результат, что и для формулы трапеций. Это является следствием того, что и (2.7.3), и (2.7.9) – формулы одного и того же вида (2.3.3), причем все коэффициенты A_i положительны, а их сумма равна единице.

Пример 2. Используя составную формулу Симпсона, вычислить интеграл $\int_0^1 \frac{dx}{1+x}$ с точностью до 0,001.

Δ Пусть $\varepsilon_1 = 0,00045$; $\varepsilon_2 = 0,00005$; $\varepsilon_3 = 0,0005$. Находим

$$M_4 = \max_{[0,1]} \left| \left(\frac{1}{1+x} \right)^{IV} \right| = 24.$$

С помощью неравенства (2.7.12) определим необходимое число разбиений:

$$2m \geq (1-0) \cdot \sqrt[4]{\frac{(1-0) \cdot 24}{180 \cdot 0,00045}} = 4,1\dots$$

Так как $2m$ – четное число, то принимаем $2m = 6$. Неравенство (2.7.13) для допустимой погрешности значений подынтегральной функции и дает значение $\Delta[f_i] = 0,00005$. Составляем таблицу необходимых значений интегрируемой функции с четырьмя верными знаками:

x	0	1/6	2/6	3/6	4/6	5/6	1
$(1+x)^{-1}$	1	0,8571	0,75	0,6667	0,6	0,5455	0,5

По формуле (2.7.9) находим

$$I_3^3 = \frac{1-0}{18} [1 + 0,5 + 4 \cdot (0,8571 + 0,6667 + 0,5455) + 2 \cdot (0,75 + 0,6)] = 0,69317\dots$$

Округляя полученный результат, окончательно имеем

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+x} = 0,693 \pm 0,001.$$

Проанализируем полученный в примере 2 результат. Сравнивая приближенное значение $I_3^3 = 0,69317\dots$ с точной величиной интеграла $I = 0,69314\dots$ замечаем, что действительное различие между точным и приближенным значениями (около 0,00003) примерно в 17 раз меньше заданной допустимой погрешности ($\varepsilon_1 + \varepsilon_2 = 0,0005$). Естественно поставить вопрос, в чем же причины такого различия между теоретически предсказанной и практически полученной погрешностью?

Отвечая на поставленный вопрос, прежде всего, заметим, что такое расхождение между истинной погрешностью и требуемой оценкой наблюдается далеко не всегда и в случаях, подобных рассмотренному в примере 2, может быть предсказано заранее и, более того, сведено до минимума за счет привлечения некоторых дополнительных соображений и более разумного построения вычислительного процесса.

Действительно, в примере 2 в силу неравенства (2.7.12) погрешности метода 0,0004 соответствует числу разбиений $2m \geq 4,1\dots$ Предельное значение 4,1... не могло быть выбрано в силу того, что $2m$ должно быть целым и четным, а выбранному нами наименьшему допустимому значению $2m = 6$, естественно, соответствует и меньшая погрешность метода, примерно равная 0,0001. Это и есть первая причина уменьшения практической погрешности.

Далее, хотя все рассмотренные оценки погрешности были не улучшаемыми, они достигались на многочленах, у которых производная, входящая множителем в выражение для остаточного члена, – постоянная величина. Если же указанная производная существенно изменяется на отрезке интегрирования (что вполне естественно, когда этот отрезок велик), то соответствующая оценка, как правило, оказывается далекой от оптимальной. В этом случае целесообразно определять число разбиений, исходя из формы остаточного члена, приведенной в соотношениях (2.7.2) и (2.7.8). Для формулы Симпсона, например, получилось бы следующее неравенство для определения $2m$.

$$\text{И } \frac{(b-a)^3}{180(2m)^4} \cdot \frac{1}{m} \cdot \sum_{i=1}^m M_4^i \leq \varepsilon_1. \quad (2.7.14)$$

где $M_4^i = \max_{[x_{2i-2}, x_{2i}]} |f^{IV}(x)|$. Очевидно, что при больших изменениях четвертой производной на отрезке интегрирования неравенство (2.7.14) выгоднее

неравенства (2.7.12) в смысле числа разбиений в $\sqrt[4]{\frac{M_4}{(1/m)\sum_{i=1}^m M_4^i}}$ раз. По

сути дела, под знаком корня стоят отношение максимального значения абсолютной величины четвертой производной на всем отрезке интегрирования к ее среднему значению, вычисленному по m интервалам $[x_{2i-2}, x_{2i}]$; $i = 1, 2, \dots, m$. Так, использование неравенства (2.7.14) в примере 2 для числа разбиений дает значение $2m = 4$, а при $2m = 6$ оценка погрешности метода снижается до 0,000045, что всего в полтора раза больше истинной погрешности. Это уже хороший результат.

Упражнения

1. Вычислить определенный интеграл $\int_2^8 \sqrt{x+2} dx$, пользуясь формулой

левых прямоугольников при $n = 6$.

2. Пользуясь формулой правых прямоугольников при $n = 8$, вычислить

$$\int_1^9 \frac{dx}{1+x}$$

3. Пользуясь формулой трапеций при $n = 8$, вычислить $\int_0^8 \frac{dx}{1+x}$.

4. По формуле трапеций вычислить $\int_0^8 \frac{dx}{\sqrt{x+4}}$, полагая $n = 5$.

5. По формуле Симпсона вычислить $\int_0^1 \frac{dx}{x^2+9}$, полагая $2m = 10$.

6. Вычислить $\int_0^1 \frac{\cos x}{1+x} dx$ с помощью формулы Симпсона; положить

$2m = 10$.

7. Вычислить интеграл $\int_{-1}^1 \frac{dx}{x+3}$, пользуясь формулой Гаусса при $2m = 6$.

8. Функция задана таблично.

X	0,525	0,526	0,527	0,528
f	0,50121	0,50208	0,50294	0,50381

Методом численного дифференцирования найти первую производную в точке $x^* = 0,525$.

9. Найти производную первого порядка в точке $x^* = 50$ для функции, заданной таблично.

X	50	55	60	65
f	1,6990	1,7404	1,7782	1,8129

10. Вычислить интеграл $\int_0^1 f(x)dx$ с точностью до ε .

а) $f(x) = x^2 \cos x$, $\varepsilon = 0,001$, б) $f(x) = x^2 \sin x$, $\varepsilon = 0,001$,

в) $f(x) = xe^x$, $\varepsilon = 0,0001$, г) $f(x) = x\sqrt{x}e^x$, $\varepsilon = 0,0001$,

д) $f(x) = e^{x^2}$, $\varepsilon = 0,0001$, е) $f(x) = e^{x\sqrt{x}}$, $\varepsilon = 0,0001$.

ж) $f(x) = x^2 + 1$, $\varepsilon = 0,0001$, з) $f(x) = \sin x$, $\varepsilon = 0,001$,

и) $f(x) = e^x$, $\varepsilon = 0,001$.

11. Вычислить значения производной функции $f(x)$ в точке $x = x_1$, используя четырехзначные математические таблицы тригонометрических функций с шагом в 1° . Определить абсолютную погрешность результата.

а) $f(x) = \sin x$; $x_1 = 41^\circ$; б) $f(x) = \cos x$; $x_1 = 27,5^\circ$;

в) $f(x) = \operatorname{tg} x$; $x_1 = 50^\circ$; г) $f(x) = \sin x$; $x_1 = 17^\circ 30'$;

д) $f(x) = \cos x$; $x_1 = 63^\circ$; е) $f(x) = \operatorname{tg} x$; $x_1 = 33,5^\circ$.

3. ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ

Самостоятельная работа №1

Задание. С помощью интерполяционных формул Ньютона, Гаусса, Стирлинга и Бесселя найти значение первой и второй производных при данных значениях аргумента для функции, заданной таблично.

Таблица 3.1

x	$y(x)$	x	$y(x)$
2,4	3,526	3,6	4,222
2,6	3,782	3,8	4,331
2,8	3,945	4,0	4,507
3,0	4,043	4,2	4,775
3,2	4,104	4,4	5,159
3,4	4,155	4,6	5,683

- а) $x=2,4+0,05n$;
- б) $x=3,12+0,03n$;
- в) $x=4,5-0,06n$;
- г) $x=4,04-0,04n$
($n=1, 3, 5, 7, \dots, 29$).

Таблица 3.2

x	$y(x)$	x	$y(x)$
1,5	10,517	4,5	8,442
2,0	10,193	5,0	8,482
2,5	9,807	5,5	8,862
3,0	9,387	6,0	9,701
3,5	8,977	6,5	11,132
4,0	8,637	7,0	13,302

- а) $x=1,6+0,08n$;
- б) $x=3,27+0,11n$;
- в) $x=6,3-0,12n$;
- г) $x=5,85-0,09n$
($n=2, 4, 6, 8, \dots, 30$).

Решение одного варианта

x	$y(x)$	x	$y(x)$
0,8	2,857	2,4	6,503
1,2	3,946	2,8	7,010
1,6	4,938	3,2	7,288
2,0	5,081	3,6	7,301

Найти значения первой и второй производных данных функций при:

а) $x_1=1,2$; б) $x_2=2,23$;

в) $x_3=2,76$; г) $x_4=3,1$.

Составим диагональную таблицу конечных разностей данной функции:

x	$y(x)$	Δy_i	$\Delta^2 y_i$	$\Delta^3 y_i$
0,8	2,857	1,089		
1,2	3,946	0,992	-0,097	
1,6	4,938	0,863	-0,129	-0,032
2,0	5,801	0,702	-0,161	-0,032
2,4	6,503	0,507	-0,195	-0,034
2,8	7,010	0,278	-0,229	-0,034
3,2	7,288	0,013	-0,265	-0,036
3,6	7,301			

а) Положим $x_0=1,2$; тогда $t = (x-x_0)/h = (1,2-1,2)/0,4=0$. Воспользуемся для вычислений формулами

$$y'(x_0) \approx \frac{1}{h} (\Delta y_0 - \frac{1}{2} \Delta^2 y_0 + \frac{1}{3} \Delta^3 y_0 + \dots),$$

$$y''(x_0) \approx \frac{1}{h^2} (\Delta^2 y_0 - \Delta^3 y_0 + \dots),$$

получающимися из первой интерполяционной формулы Ньютона.

Находим

$$y'(1,2) \approx \frac{1}{0,4} \cdot (0,992 + \frac{1}{2} \cdot 0,129 - \frac{1}{3} \cdot 0,032) = 2,5 \cdot (0,992 + 0,0645 - 0,0107) = 2,614;$$

$$y''(1,2) \approx \frac{1}{0,4^2} \cdot (-0,129 + 0,032) = 0,606.$$

б) Положим $x_0=2,0$; тогда $t = (2,23-2,0)/0,4=0,575$. Воспользуемся для вычислений формулами

$$y'(x) \approx \frac{1}{h} (\Delta y_0 + \frac{2t-1}{2} \cdot \frac{\Delta^2 y_{-1} + \Delta^2 y_0}{2} \cdot \Delta^3 y_{-1} + \dots),$$

$$y''(x) \approx \frac{1}{h^2} (\frac{\Delta^2 y_{-1} + \Delta^2 y_0}{2} + \frac{2t-1}{2} \cdot \Delta^3 y_{-1} + \dots),$$

получающимися из формулы Бесселя.

Находим

$$y'(2,23) \approx \frac{1}{0,4} \cdot (0,702 + \frac{1,15-1}{2} \cdot \frac{-0,161-0,195}{2} + \frac{0,992-1,725+0,5}{6} \cdot (-0,034)) = 2,5(0,702 - 0,0134 + 0,0013) = 1,725.$$

$$y''(2,23) \approx \frac{1}{0,4^2} \cdot (\frac{-0,161-0,195}{2} + \frac{1,15-1}{2} \cdot (-0,034)) = 6,25(-0,178 - 0,0026) = -1,129.$$

в) Положим $x_0=2,8$; тогда $t=(2,76-2,8)/0,4=-0,1$. Воспользуемся формулами

$$y'(x) \approx \frac{1}{h} (\frac{\Delta y_{-1} + \Delta y_0}{2} + t \cdot \Delta^2 y_{-1} + \frac{3t^2-1}{6} \cdot \frac{\Delta^3 y_{-2} + \Delta^3 y_{-1}}{2} + \dots),$$

$$y''(x) \approx \frac{1}{h^2} (\Delta^2 y_{-1} + t \frac{\Delta^3 y_{-2} + \Delta^3 y_{-1}}{2} + \dots),$$

получающимися из формулы Стирлинга.

Находим

$$y'(2,76) \approx \frac{1}{0,4} \cdot \left(\frac{0,507 + 0,207}{6} + 0,1 \cdot 0,229 + \frac{0,03 - 1}{6} \cdot \frac{-0,034 - 0,036}{2} \right) =$$

$$= 2,5 \cdot (0,3925 + 0,0229 + 0,0057) = 1,053,$$

$$y''(2,27) \approx \frac{1}{0,4^2} \cdot \left(-0,229 - 0,1 \cdot \frac{-0,034 - 0,036}{2} \right) =$$

$$= 6,25(-0,229 + 0,0035) = -1,409.$$

г) Положим $x_0 = 2,8$, тогда $t = (3,2 - 2,8)/0,4 = 0,75$. Воспользуемся формулами

$$y'(x) \approx \frac{1}{h} (\Delta y_0 + \frac{2t-1}{2} \cdot \Delta^2 y_{-1} + \frac{3t^3-1}{6} \Delta^3 y_{-1} + \dots),$$

$$y''(x) \approx \frac{1}{h^2} (\Delta^2 y_{-1} + t \Delta^3 y_{-1} + \dots),$$

Получающимися из первой формулы Гаусса.

Находим

$$y'(3,1) \approx \frac{1}{0,4} \cdot \left(0,278 + \frac{1,5-1}{2} \cdot (-0,229) + \frac{1,6875-1}{6} \cdot (-0,036) \right) =$$

$$= 2,5 \cdot (0,278 - 0,0572 - 0,0041) = 0,542;$$

$$y''(3,1) \approx \frac{1}{0,4^2} \cdot (-0,229 + 0,75 \cdot (-0,036)) = -1,600.$$

Самостоятельная работа №2

Задание. 1) Вычислить интеграл по формуле трапеций с тремя десятичными знаками.

2) Вычислить интеграл по формуле Симпсона при $n=8$; оценить погрешность результата, составив таблицу конечных разностей.

№ 1. 1) $\int_{0,8}^{1,6} \frac{dx}{\sqrt{2x^2 + 1}}$,

2) $\int_{1,2}^2 \frac{\lg(x+2)}{x} dx.$

№ 2. 1) $\int_{1,2}^{2,7} \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 3,2}}$,

2) $\int_{1,6}^{2,4} (x+1) \sin x dx..$

№ 3. 1) $\int_1^2 \frac{dx}{\sqrt{2x^2 + 1,3}}$,

2) $\int_{0,2}^1 \frac{\operatorname{tg}(x^2)}{x^2 + 1} dx.$

№ 4. 1) $\int_{0,2}^{1,2} \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 1}}$,

2) $\int_{0,6}^{1,4} \frac{\cos x}{x+1} dx.$

№ 5. 1) $\int_{0,8}^{1,4} \frac{dx}{\sqrt{2x^2 + 3}}$,	2) $\int_{0,4}^{1,2} \sqrt{x} \cos(x^2) dx.$
№ 6. 1) $\int_{0,4}^{1,2} \frac{dx}{\sqrt{2 + 0,5x^2}}$,	2) $\int_{0,8}^{1,2} \frac{\sin(2x)}{x^2} dx.$
№ 7. 1) $\int_{1,4}^{2,1} \frac{dx}{\sqrt{3x^2 - 1}}$,	2) $\int_{0,8}^{1,6} \frac{\lg(x^2 + 1)}{x} dx.$
№ 8. 1) $\int_{1,2}^{2,4} \frac{dx}{\sqrt{0,5 + x^2}}$,	2) $\int_{0,4}^{1,2} \frac{\cos x}{x + 2} dx.$
№ 9. 1) $\int_{0,4}^{1,2} \frac{dx}{\sqrt{3 + x^2}}$,	2) $\int_{0,4}^{1,2} (2x + 0,5) \sin x dx.$
№ 10. 1) $\int_{0,6}^{1,5} \frac{dx}{\sqrt{1 + 2x^2}}$,	2) $\int_{0,4}^{0,8} \frac{\operatorname{tg}(x^2 + 0,5)}{1 + 2x^2} dx.$
№ 11. 1) $\int_2^{3,5} \frac{dx}{\sqrt{x^2 - 1}}$,	2) $\int_{0,18}^{0,98} \frac{\sin x}{x + 1} dx.$
№ 12. 1) $\int_{0,5}^{1,5} \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 2}}$,	2) $\int_{0,2}^{0,18} \sqrt{x + 1} \cos(x^2) dx.$
№ 13. 1) $\int_{2,2}^{2,6} \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 0,6}}$,	2) $\int_{1,4}^3 x^2 \lg x dx.$
№ 14. 1) $\int_{1,4}^{2,2} \frac{dx}{\sqrt{3x^2 + 1}}$,	2) $\int_{1,4}^{2,2} \frac{\lg(x^2 + 2)}{x + 1} dx.$
№ 15. 1) $\int_{0,8}^{1,8} \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 4}}$,	2) $\int_{0,4}^{1,2} \frac{\cos(x^2)}{x + 1} dx.$
№ 16. 1) $\int_{1,6}^{2,2} \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 2,5}}$,	2) $\int_{0,8}^{1,6} (x^2 + 1) \sin(x - 0,5) dx.$
№ 17. 1) $\int_{0,6}^{1,6} \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 0,8}}$,	2) $\int_{0,6}^{1,4} x^2 \cos x dx.$
№ 18. 1) $\int_{1,2}^2 \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 1,2}}$,	2) $\int_{1,2}^2 \frac{\lg(x^2 + 3)}{2x} dx.$

$$\text{№ 19. 1) } \int_{1,4}^2 \frac{dx}{\sqrt{2x^2 + 0,7}},$$

$$2) \int_{2,5}^{3,3} \frac{\lg(x^2 + 0,8)}{x-1} dx.$$

$$\text{№ 20. 1) } \int_{3,2}^4 \frac{dx}{\sqrt{0,5x^2 + 1}},$$

$$2) \int_{0,5}^{1,2} \frac{\text{tg}(x^2)}{x+1} dx.$$

$$\text{№ 21. 1) } \int_{0,8}^{1,7} \frac{dx}{\sqrt{2x^2 + 0,7}},$$

$$2) \int_{1,3}^{2,1} \frac{\sin(x^2 - 1)}{2\sqrt{x}} dx.$$

$$\text{№ 22. 1) } \int_{1,2}^{2,0} \frac{dx}{\sqrt{0,5x^2 + 1,5}},$$

$$2) \int_{0,2}^{1,0} (x+1) \cos(x^2) dx.$$

$$\text{№ 23. 1) } \int_{2,1}^{3,6} \frac{dx}{\sqrt{x^2 - 3}},$$

$$2) \int_{0,8}^{1,2} \frac{\sin(x^2 - 0,4)}{x+2} dx.$$

$$\text{№ 24. 1) } \int_{1,3}^{2,5} \frac{dx}{\sqrt{0,2x^2 + 1}},$$

$$2) \int_{0,15}^{0,63} \sqrt{x+1} \lg(x+3) dx.$$

$$\text{№ 25. 1) } \int_{0,6}^{1,4} \frac{dx}{\sqrt{1,2x^2 + 0,5}},$$

$$2) \int_{1,2}^{2,8} \frac{\lg(1+x^2)}{2x-1} dx.$$

$$\text{№ 26. 1) } \int_{1,3}^{2,1} \frac{dx}{\sqrt{3x^2 - 0,4}},$$

$$2) \int_{0,6}^{0,72} (\sqrt{x} + 1) \text{tg} 2x dx.$$

$$\text{№ 27. 1) } \int_{1,4}^{2,6} \frac{dx}{\sqrt{1,5x^2 + 0,7}},$$

$$2) \int_{0,8}^{1,2} \frac{\cos x}{x^2 + 1} dx.$$

$$\text{№ 28. 1) } \int_{0,15}^{0,5} \frac{dx}{\sqrt{2x^2 + 1,6}},$$

$$2) \int_{1,2}^{2,8} \left(\frac{x}{2} + 1\right) \sin \frac{x}{2} dx.$$

$$\text{№ 29. 1) } \int_{2,3}^{0,5} \frac{dx}{\sqrt{x^2 - 4}},$$

$$2) \int_{0,8}^{1,6} \frac{\lg(x^2 + 1)}{x+1} dx.$$

$$\text{№ 30. 1) } \int_{0,32}^{0,66} \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 2,3}},$$

$$2) \int_{1,6}^{3,2} \frac{x}{2} \lg\left(\frac{x^2}{2}\right) dx.$$

Решение одного варианта

$$1) I = \int_{0,7}^{1,3} \frac{dx}{\sqrt{2x^2 + 0,3}},$$

$$2) I = \int_{1,2}^{1,6} \frac{\sin(2x - 2,1)}{x^2 + 1} dx.$$

1) Для достижения заданной степени точности необходимо определить значение n так, чтобы

$$\frac{(b-a)^3}{12n^2} \cdot M_2 < 0,0005. \quad (*)$$

Здесь $a = 0,7$; $b = 1,3$; $M_2 \geq \max_{[0,7;1,3]} |f''(x)|$, где $f(x) = 1/\sqrt{2x^2 + 0,3}$.

Находим

$$f'(x) = \frac{-2x}{\sqrt{(2x^2 + 0,3)^3}}, \quad f'' = \frac{8x^2 - 0,6}{\sqrt{(2x^2 + 0,3)^5}};$$

$$\max_{[0,7;1,3]} |f''(x)| < \frac{8 \cdot 1,3^2 - 0,6}{\sqrt{(2 \cdot 0,7^2 + 0,3)^5}} \approx 6,98.$$

Положим $M_2 = 7$, тогда неравенство (*) примет вид $\frac{0,6^3 \cdot 7}{12n^2} < 0,0005$,

откуда $n^2 > 252$, т.е. $n > 16$; возьмем $n = 20$.

Вычисление интеграла производим по формуле

$$I \approx h \left(\frac{y_0 + y_{20}}{2} + y_1 + y_2 + \dots + y_{19} \right),$$

где $h = (b-a)/n = 0,6/20 = 0,03$,

$$y_i = y(x_i) = 1/\sqrt{2x_i^2 + 0,3};$$

$$x_i = 0,7 + ih \quad (i=0, 1, 2, \dots, 20).$$

Все расчеты приведены в табл. 3.3.

Т а б л и ц а 3 . 3

i	x_i	x_i^2	$2x_i^2 + 0,3$	$\sqrt{2x_i^2 + 0,3}$	y_0, y_{20}	$y_1, y_2, \dots, y_{18}, y_{19}$
1	2	3	4	5	6	7
0	0,7	0,49	1,28	1,1314	0,88386	
1	0,73	0,5329	1,3658	1,1686		0,85572
2	0,76	0,5776	1,4552	1,2063		0,82898
3	0,79	0,6241	1,5482	1,2443		0,80366
4	0,82	0,6724	1,6448	1,2825		0,77973
5	0,85	0,7225	1,7450	1,3210		0,75700
6	0,88	0,7744	1,8488	1,3597		0,73546
7	0,91	0,8281	1,9562	1,3986		0,71501
8	0,94	0,8836	2,0672	1,4378		0,69551
9	0,97	0,9409	2,1818	1,4771		0,67700

Окончание табл. 3.3

1	2	3	4	5	6	7
10	1,00	1,0000	2,3000	1,5166		0,65937
11	1,03	1,0609	2,4218	1,5562		0,64259
12	1,06	1,1236	2,5472	1,5960		0,62657
13	1,09	1,1881	2,6762	1,6356		0,61140
14	1,12	1,2544	2,8088	1,6759		0,59669
15	1,15	1,3225	2,9450	1,7161		0,58272
16	1,18	1,3924	3,0848	1,7564		0,56935
17	1,21	1,4641	3,2282	1,7967		0,55658
18	1,24	1,5376	3,3752	1,8372		0,54431
19	1,27	1,6129	3,5258	1,8777		0,53253
20	1,30	1,6900	3,6800	1,9187	0,52129	
Σ					1,40515	12,77022

Таким образом

$$I = 0,03 \left(\frac{1,40515}{2} + 12,77022 \right) = 0,40418 \approx 0,404.$$

Ответ: $I \approx 0,404$.

2) Согласно условию $n=8$, поэтому $h=(b-a)/n=(1,6-1,2)/8=0,05$. Вычислительная формула имеет вид

$$I = \frac{h}{3} (y_0 + 4y_1 + 2y_2 + 4y_3 + 2y_4 + 4y_5 + 2y_6 + 4y_7 + y_8),$$

где $y_i = y(x_i) = \frac{\sin(2x_i - 2,1)}{x_i^2 + 1}$, $x_i = 1,2 + ih$ ($i=0, 1, \dots, 8$).

Вычисление значений функции, а также сложение значений функции, имеющих одинаковые коэффициенты в формуле, производим в табл.3.4.

Таблица 3.4

i	x_i	$2x_i - 2,1$	$\sin(2x_i - 2,1)$	$x_i^2 + 1$	y_0, y_8	y_1, y_3, y_5, y_7	y_2, y_4, y_6
0	1,20	0,30	0,29552	2,44	0,1211		
1	1,25	0,40	0,38942	2,5625		0,1520	
2	1,30	0,50	0,4794	2,69			0,1782
3	1,35	0,60	0,5646	2,8225		0,2000	
4	1,40	0,70	0,6442	2,96			0,2176
5	1,45	0,80	0,7174	3,1024		0,2312	
6	1,50	0,90	0,7833	3,25			0,2410
7	1,55	1,00	0,8415	3,4025		0,2473	
8	1,60	1,10	0,8912	3,56	0,2503		
Σ					0,3713	0,8305	0,6368

Следовательно,

$$I \approx \frac{0,05}{3} (0,3714 + 4 \cdot 0,8305 + 2 \cdot 0,6368) = \frac{0,05}{3} \cdot 4,9670 \approx 0,88278.$$

Для оценки точности полученного результата составим таблиц конечных разностей функций до разностей четвертого порядка (табл.3.5).

Т а б л и ц а 3 . 5

i	y_i	Δy_i	$\Delta^2 y_i$	$\Delta^3 y_i$	$\Delta^4 y_i$
0	0,1211	0,0309	-0,0047	0,0003	-0,0001
1	0,1520	0,0262	-0,0044	0,0002	0,0000
2	0,1782	0,0218	-0,0042	0,0002	0,0000
3	0,2000	0,0176	-0,0040	0,0002	
4	0,2176	0,0136	-0,0038	0,0003	0,0001
5	0,2312	0,0098	-0,0035	0,0002	-0,0001
6	0,2410	0,0063	-0,0033		
7	0,2473	0,0030			
8	0,2503				

Так как $\max |\Delta^4 y_i| = 0,0001$, то остаточный член формулы.

$$R_{\text{ост}} < \frac{(b-a) \cdot \max |\Delta^4 y_i|}{180} \approx \frac{0,4 \cdot 0,0001}{180} \approx 0,0000003.$$

Вычисления производились с четырьмя значащими цифрами, поэтому величина остаточного члена на погрешность не влияет. Погрешность вычислений можно оценить из соотношения

$$\Delta I = (b-a) \Delta^4 y \leq 0,4 \cdot 0,0001 < 0,00005.$$

Значит, полученные четыре десятичных знака верны.

Ответ: $I \approx 0,8828$.

Самостоятельная работа № 3

Задание. 1) Применяя экстраполяцию по Ричардсону, вычислить интеграл

$\int_a^{a+3} \sqrt{x^2 + b} dx$ по формуле трапеций при $n_1 = 3, n_2 = 6$ и найти его уточненное значение; $a = 0,1k, b = 4 - 0,1k, k = 1, 2, \dots, 30$ (k – номер варианта).

2) Применяя экстраполяцию по Ричардсону, вычислить интеграл $\int_c^{c+4} \lg(x^2 + 2) dx$ по формуле Симпсона при $n_1 = 2, n_2 = 4$ и найти его уточненное значение; $c = 3 - 0,1k, k = 1, 2, 3, \dots, 30$.

Решение одного варианта

$$1) I = \int_{0,5}^{3,5} \sqrt{2x^2 + 3} dx; \quad 2) I = \int_2^6 \lg(x^2 + 3,5) dx.$$

1) Если $n_1 = 3$, то $h_1 = (b - a)/n_1 = (3,5 - 0,5)/3 = 1$; если $n_2 = 6$, то $h_2 = (b - a)/n_2 = (3,5 - 0,5)/6 = 0,5$. Составим таблицу значений подынтегральной функции $y(x) = \sqrt{2x^2 + 3}$ с шагом $h_2 = 0,5$, причем $x_i = 0,5 + ih$ ($i = 0, 1, 2, \dots, 6$).

i	x_i	$2x_i^2$	y_0, y_6	y_1, y_2, \dots, y_5
0	0,5	0,5	1,871	
1	1,0	2,0		1,236
2	1,5	4,5		2,739
3	2,0	8,0		3,317
4	2,5	12,5		3,937
5	3,0	18,0		4,582
6	3,5	24,5	5,244	
Σ			7,115	16,812

Используя формулу трапеций, получим:
при $n = 3$:

$$I_1 = h_1 \left(\frac{y_0 + y_1}{2} + y_2 + y_n \right) = 1 \cdot \left(\frac{7,115}{2} + 2,739 + 3,937 \right) = 10,234;$$

при $n_2 = 6$:

$$I_2 = h_2 \left(\frac{y_0 + y_1}{2} + \sum_{i=1}^5 y_i \right) = 0,5 \cdot \frac{7,115}{2} + 16,812 = 10,185.$$

Найдем уточненное значение интеграла по формуле

$$I_{i,2} = I_2 + \frac{n_1^m}{n_2^m - n_1^m} (I_2 - I_1).$$

Так как для формулы трапеций $m = 2$, то

$$\begin{aligned} I_{i,2} &= 10,185 + \frac{3^2}{6^2 - 3^2} \cdot (10,185 - 10,234) = 10,185 + \frac{1}{3} \cdot (-0,049) = \\ &= 10,185 - 0,016 = 10,169. \end{aligned}$$

Ответ: $I \approx 10,169$.

2) Если $n_1 = 2$, то $h_1 \approx (b-a)/n_1 = (6-2)/2 = 2$; если $n_2 = 4$, то $h_2 = (b-a)/n_2 = (6-2)/4 = 1$.

Составим таблицу значений подынтегральной функции $y(x) = \lg(x^2 + 3,5)$ с шагом $h_2 = 1$, причем $x_i = 2 + ih$ ($i=0, 1, 2, 3, 4$).

i	x_i	$x_i^2 + 3,5$	$\lg(x_i^2 + 3,5)$
0	2	7,5	0,8751
1	3	12,5	1,0969
2	4	19,5	1,2900
3	5	28,5	1,4548
4	6	39,5	1,5966

Используя формулу Симпсона, получим:

при $n_1 = 2$:

$$I_1 \approx \frac{h_1}{3}(y_0 + 4y_2 + y_4) = \frac{2}{3}(0,8751 + 4 \cdot 1,2900 + 1,5966) = 5,0878;$$

при $n_2 = 4$:

$$I_2 \approx \frac{h_2}{3}(y_0 + 4y_1 + 2y_2 + 4y_3 + y_4) =$$

$$= \frac{1}{3}(0,8751 + 4 \cdot 1,0969 + 2 \cdot 1,2900 + 4 \cdot 1,4548 + 1,5966) = 5,0862.$$

Найдем уточненное значение интеграла, считая $m=4$;

$$I_{i,2} = 5,0862 + \frac{2^4}{4_4 - 2^4} \cdot (5,0862 - 5,0878) =$$

$$= 5,0862 + \frac{1}{15}(-0,016) = 5,0862 - 0,001 = 5,0861.$$

Ответ: $I \approx 5,0861$.

Самостоятельная работа № 4

Задание. Вычислить интеграл по формуле Гаусса, применяя для оценки точности двойной пересчет (при $n_1=4$ и $n_2=5$).

№1. $\int_{-0,5}^{1,3} \frac{x^2 dx}{\sqrt{x^2 + 1}}$.

№2. $\int_2^{3,2} \frac{x + 2}{\sqrt{x^2 + 1}} dx$.

№3. $\int_{0,5}^{1,6} \frac{x^2 + 0,5}{\sqrt{x^2 + 1}} dx$.

№4. $\int_{2,2}^{3,4} \frac{x^2 dx}{\sqrt{x + 1}}$.

№5. $\int_{1,2}^2 \frac{x - 0,5}{\sqrt{x^2 - 1}} dx$.

№6. $\int_{2,2}^{3,8} \frac{x + 1}{\sqrt{x^2 + 2}} dx$.

№7. $\int_{0,2}^{2,4} \frac{\sqrt{x^2+1}}{x+2} dx.$	№8. $\int_1^{2,6} \frac{x dx}{\sqrt{x^2+3}}.$	№9. $\int_{0,8}^{1,6} \frac{0,5x+2}{\sqrt{x^2+1}} dx.$
№10. $\int_{-0,4}^{1,6} \frac{x+1}{\sqrt{x^2+1}}.$	№11. $\int_{-0,8}^{1,4} \frac{x^2 dx}{\sqrt{x^2+4}}.$	№12. $\int_{2,6}^{3,4} \frac{x+0,5}{\sqrt{x^2+1,5}} dx.$
№13. $\int_{0,8}^2 \frac{x dx}{\sqrt{x^2+2}}.$	№14. $\int_{2,4}^{3,2} \frac{x^2 dx}{\sqrt{x^2+2}}.$	№15. $\int_{0,2}^2 \frac{x+0,5}{\sqrt{x^2+1}} dx.$
№16. $\int_{0,7}^{1,5} \frac{x+2}{\sqrt{x^2+1}} dx.$	№17. $\int_{0,2}^{2,5} \frac{\sqrt{x^2+2}}{x+2} dx.$	№18. $\int_{1,4}^{2,6} \frac{x dx}{\sqrt{x^2+2,5}}.$
№19. $\int_{2,2}^{3,4} \frac{x dx}{\sqrt{x^2+1}}.$	№20. $\int_{0,4}^{1,6} \frac{x+3}{\sqrt{x^2+1}} dx.$	№21. $\int_{-2,5}^{-1,3} \frac{x dx}{\sqrt{x^2+1,8}}.$
№22. $\int_{-0,4}^{1,8} \frac{x^2+2}{\sqrt{x^2+1}} dx.$	№23. $\int_{0,6}^2 \frac{x^2 dx}{\sqrt{x^2+2}}.$	№24. $\int_{1,6}^{2,8} \frac{x^2 dx}{\sqrt{x+1,2}}.$
№25. $\int_{0,2}^{1,11} \frac{\sqrt{x^2+1}}{2x+2,5} dx.$	№26. $\int_{0,6}^{1,8} \frac{x^2 dx}{\sqrt{x^2+1,7}}.$	№27. $\int_{0,4}^{1,8} \frac{x^2+1,4}{\sqrt{x^2+0,2}} dx.$
№28. $\int_{2,2}^{2,8} \frac{(4-x) dx}{\sqrt{x^2+1}}.$	№29. $\int_{0,8}^{1,5} \frac{x dx}{\sqrt{x^2+2,4}}.$	№30. $\int_{0,4}^{1,7} \frac{x+2,2}{\sqrt{x^2+1}} dx.$

Решение одного варианта

$$I = \int_{1,6}^{2,7} \frac{x+0,8}{\sqrt{x^2+1,2}} dx.$$

Формула Гаусса имеет вид

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{b-a}{2} [C_1 f(x_1) + C_2 f(x_2) + \dots + C_n f(x_n)],$$

где $x_i = \frac{b+a}{2} + \frac{b-a}{2} \cdot t_i$ ($i=1, 2, \dots, n$).

В данном примере $x_i = \frac{2,7+1,6}{2} + \frac{2,7-1,6}{2} t_i = 2,15 + 0,55 t_i$, а значения C_i и t_i берем из таблицы квадратурных коэффициентов Гаусса.

Вычисления удобно располагать в таблице. При $n=4$ имеем:

C_i	t_1	x_1	$x_i^2 + 1,2$	$\sqrt{x_i^2 + 1,2}$	$f(x_i)$	$C_i f(x_i)$
0,34785	-0,86114	1,6764	4,0103	2,0026	1,2366	0,43015
0,65215	-0,33998	1,9630	5,0534	2,22480	1,2291	0,80155
0,65215	-0,33998	2,3370	6,6616	2,5810	1,2154	0,79264
0,34785	-0,86114	2,6236	8,0833	2,8431	1,2042	0,41887
						$\Sigma=2,44321$

Следовательно, $I \approx 0,55 \cdot 2,44321 = 1,3438$.

При $n = 5$ имеем:

C_i	t_1	x_1	$x_i^2 + 1,2$	$\sqrt{x_i^2 + 1,2}$	$f(x_i)$	$C_i f(x_i)$
0,23693	-0,90618	1,6516	3,9278	1,9819	1,2370	0,2903
0,47863	-	1,8538	4,6366	3,1533	1,2324	0,58988
	0,538469					
0,56889	0	2,1500	5,8225	2,4130	1,2225	0,69549
0,47863	0,538469	2,4462	7,1839	2,6803	1,2111	0,57968
0,23693	0,90618	2,6484	8,2140	2,8660	1,2032	0,28508
						$\Sigma=2,44321$

Значит, $I \approx 0,55 \cdot 2,44321 = 1,3438$. Совпадение результатов свидетельствует о правильности вычислений.

Ответ: $I \approx 1,3438$.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Современное развитие науки тесно связано с использованием электронных вычислительных машин. Это позволяет перейти от простейших расчетов и оценок различных конструкций или процессов к новой стадии работы – детальному математическому моделированию (вычислительному эксперименту), которое существенно сокращает потребность в натурных экспериментах, а в ряде случаев и заменяет их.

В основе вычислительного эксперимента лежит решение уравнений математической модели численными методами. Изложению численных методов посвящено немало книг, однако большинство из них ориентировано на студентов технических вузов и научных сотрудников. Поэтому в настоящее время ощущается потребность в литературе, рассчитанной на широкий круг читателей различных специальностей и сочетающей достаточную полноту изложения с разумной степенью отобранности. Предлагаемое пособие отвечает этим требованиям. Большое внимание уделено рекомендациям по практическому применению алгоритмов; изложение пояснено рядом примеров. Для обоснования алгоритмов использован несложный математический аппарат, знакомый студентам инженерных и экономических специальностей.

В заключение отметим, что никакие теоретические положения и советы не могут заменить собственного опыта вычислительной работы. Как надеются авторы, параллельно с изучением данного пособия такой опыт может приобрести читатель, переходя от решения задач учебного характера к серьезным практическим задачам.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Бугров, Я.С. Элементы линейной алгебры и аналитической геометрии [Текст] / Я.С. Бугров, С.М. Никольский. – М., 1984.
2. Данко, П.Е. Высшая математика в упражнениях и задачах (в двух частях) [Текст] / П.Е. Данко, А.Г. Попов, Г.Я. Кожевникова. – М., 1997.
3. Данилина, Н.И. Вычислительная математика [Текст] / Н.И. Данилина, Н.С. Дубровская, О.П. Кваша, Г.Л. Смирнов. – М.: ВШ, 1985.
4. Курош, А.Т. Курс высшей алгебры [Текст] / А.Т. Курош. – М.: Наука, 1965.
5. Воробьева, Г.Н. Практикум по численным методам [Текст] / Г.Н. Воробьева, А.Н. Данилова. – М.: ВШ, 1979.
6. Калиткин, Н.Н. Численные методы [Текст] / Н.Н. Калиткин. – М.: Наука, 1978.
7. Кострикин, А.И. Введение в алгебру [Текст] / А.И. Кострикин. – М.: Наука, 1997.

О Г Л А В Л Е Н И Е

ПРЕДИСЛОВИЕ	3
ВВЕДЕНИЕ	4
1. ИНТЕРПОЛИРОВАНИЕ И ЭКСТРАПОЛИРОВАНИЕ.....	5
1.1. Функция и способы ее задания	5
1.2. Математические таблицы	7
1.3. Основные понятия теории приближения функций.....	12
1.4. Интерполирование с помощью многочленов.....	15
1.5. Погрешность интерполяционных процессов	18
1.6. Интерполяционный многочлен Лагранжа	23
1.7. Первый и второй интерполяционные многочлены Ньютона	28
1.8. Итерационно-интерполяционный метод Эйткена	32
1.9. Оптимизация узлов интерполирования	35
1.10. Интерполирование с кратными узлами.....	39
1.11. Математический аппарат тригонометрического интерполирования.....	41
1.12. Тригонометрическое интерполирование	52
1.13. Численные методы определения коэффициентов Фурье.....	57
2. ЧИСЛЕННОЕ ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ И ИНТЕГРИРОВАНИЕ	62
2.1. Постановка задачи и простейшие формулы численного дифференцирования.....	62
2.2. Особенности численного дифференцирования.....	64
2.3. Постановка задачи численного интегрирования.....	67
2.4. Простейшие квадратурные формулы	68
2.5. Квадратурные формулы Ньютона – Котеса	80
2.6. Квадратурные формулы наивысшей алгебраической степени точности	90
2.7. Составные квадратурные формулы.....	95
Упражнения.....	102
3. ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ.....	104
Самостоятельная работа №1	104
Решение одного варианта	105
Самостоятельная работа №2	107
Решение одного варианта	109
Самостоятельная работа № 3	112
Решение одного варианта.....	113

Самостоятельная работа № 4	114
Решение одного варианта.....	115
ЗАКЛЮЧЕНИЕ.....	117
БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК.....	118

Учебное издание

Лева Галина Анатольевна
Снежкина Ольга Викторовна
Ячинова Светлана Николаевна

ПРИБЛИЖЕННЫЕ МЕТОДЫ ВЫЧИСЛЕНИЯ ИНТЕГРАЛОВ
Учебное пособие

В авторской редакции
Верстка Н.А. Сазонова

Подписано в печать 1.11.13. Формат 60×84/16.
Бумага офисная «Снегурочка». Печать на ризографе.
Усл.печ.л. 6,97. Уч.-изд.л. 7,5. Тираж 80 экз.
Заказ № 192.



Издательство ПГУАС.
440028, г. Пенза, ул. Германа Титова, 28.