МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«Пензенский государственный университет
архитектуры и строительства»

И.А. Гарькина, Е.И. Титова, С.Н. Ячинова

# МАТЕМАТИКА.
# ПОДГОТОВКА К ЕГЭ.
# ЧАСТЬ 2

Пенза 2013

УДК 511
ББК 22.11
Г20

Рецензенты: кандидат физико-математических наук, доцент кафедры геометрии Пензенского государственного университета О.В. Якунина;
кандидат педагогических наук, доцент кафедры математики и математического моделирования Пензенского государственного университета архитектуры и строительства Г.А. Левова

**Гарькина И.А.**

Г20 Математика. Подготовка к ЕГЭ. Ч. 2: учеб. пособие / И.А. Гарькина, Е.И. Титова, С.Н. Ячинова. – Пенза, ПГУАС, 2013. – 150 с.

Приведены основные теоретические сведения по темам «Тригонометрия», «Производная», «Элементы комбинаторики и теории вероятностей», «Планиметрия», «Стереометрия». Даны примеры решения заданий базового и повышенного уровня сложности, задания для самостоятельного решения и ответы к ним.

Учебное пособие подготовлено на кафедре математики и математического моделирования и предназначено для слушателей подготовительных курсов по направлению 270800 «Строительство», а также учащихся старших классов, абитуриентов.

# ПРЕДИСЛОВИЕ

Настоящее пособие является второй из двух частей учебно-методического комплекта, предназначенного для подготовки к ЕГЭ по математике. Пособие содержит:

1) теоретический материал по тригонометрии; производной и её приложений; комбинаторике и теории вероятностей; планиметрии и стереометрии;

2) методические рекомендации к решению различных типов задач по каждому теоретическому разделу;

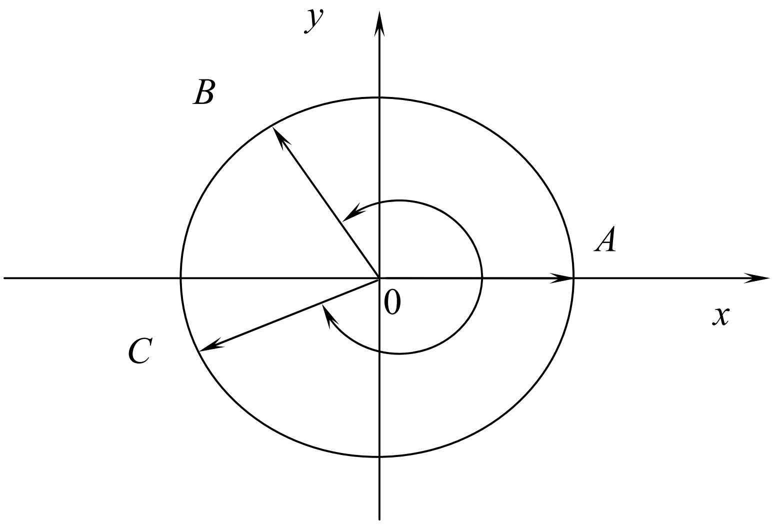
3) набор заданий для самостоятельного решения различных уровней сложности.

Данное пособие будет полезно учащимся старших классов, абитуриентам, готовящимся самостоятельно и под руководством преподавателя.

# Глава I
# ТРИГОНОМЕТРИЯ

## §1. Тригонометрические функции, их свойства и графики

Пусть луч, выходящий из точки 0, занимает исходное положение $0A$. Сделав некоторый поворот от этого исходного положения против или по часовой стрелке, он займет положение $0B$. Это новое положение вместе с исходным образует угол $A0B$, у которого $0A$ называется начальной, а $0B$ – конечной сторонами угла. Угол называется положительным, если он образован поворотом луча против часовой стрелки, и отрицательным – в противоположном случае.




Чтобы задать угол $A0B$, недостаточно знать его начальную и конечную стороны, а нужно указать еще тот поворот, который переводит луч из начального положения $0A$ в конечное $0B$. Этим и определяется угол в тригонометрии.

Как и в геометрии, углы в тригонометрии измеряются в градусах и радианах. На практике часто углы измеряют в градусах, принимая за единицу измерения $\frac{1}{360}$ часть полного оборота, называемую градусом. Для измерений, требующих большой точности, градус делится на 60 равных частей – минуты; минута делится на 60 равных частей – секунды.

Из геометрии известно, что при одном и том же центральном угле длины дуг двух окружностей относятся как длины их радиусов.

Радианной мерой угла называется отношение длины дуги окружности, для которой данный угол является центральным, к длине радиуса этой дуги.

При радианном измерении углов единицей измерения служит положительный центральный угол, опирающийся на дугу, равную по длине радиусу. Этот угол называется радианом.

Радианная мера полного оборота равна длине окружности, деленной на радиус:

$$\frac{2\pi R}{R} = 2\pi = 6,283185\ldots$$

Радианная мера 1° равна $\frac{2\pi}{360} = \frac{\pi}{180} = 0,017453...$

Если угол содержит $\alpha°$, то его радианная мера $a$ определяется следующим образом:

$$a = \frac{\pi\alpha}{180}.$$

Зная радиус окружности $R$ и радианную меру $a$ дуги, можно вычислить длину $l$ этой дуги. В самом деле, по определению радианной меры:

$$a = \frac{l}{R},$$

откуда $l = a \cdot R$.

Итак, *длина дуги окружности равна произведению ее радианной меры на радиус*.

Для удобства в тригонометрии используется так называемый тригонометрический круг – круг с центром в начале координат и радиусом, равным единице.

Горизонтальный радиус 0$A$ принимают за неподвижный и считают его начальной стороной всех углов окружности. Конечную сторону этих углов образует другой радиус 0$B$, который называют подвижным. Каждому действительному числу $a$ соответствует единственное положение точки В на окружности, образующее угол в $a$ радиан. Обратная связь неоднозначна – каждому положению подвижного радиуса 0$B$ (или точки $B$ на окружности) соответствует бесконечное множество действительных чисел $a$ – величины всех углов, определенных этим положением подвижного радиуса 0$B$. Все эти числа содержатся в формуле

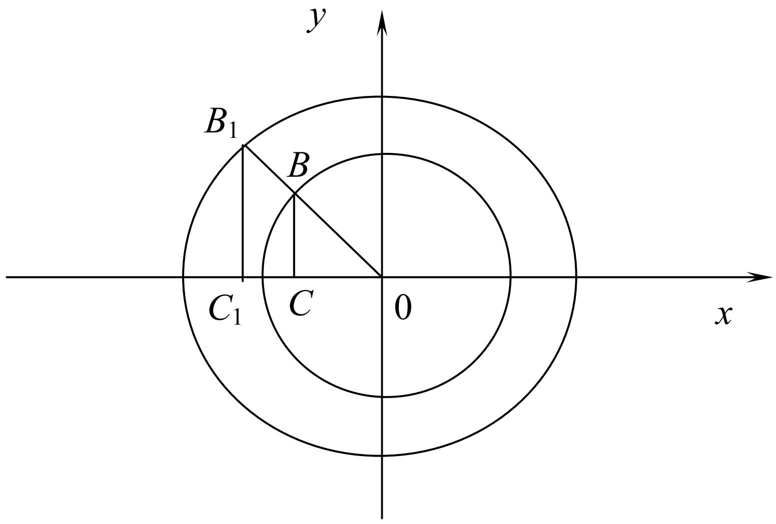
$$a + 2\pi k,$$

где $k =$ 0, ±1, ±2, ±3, …;

$a$ – одно из этих чисел.

Из геометрии известно, что отношение координат вектора к его длине не зависит от длины вектора и является характеристикой угла, который образует данный вектор с положительным направлением оси 0$x$, т.е.

$$\frac{x}{R}=\frac{x_1}{R},\quad \frac{y}{R}=\frac{y_1}{R},\quad \frac{y}{x}=\frac{y_1}{x_1},\quad \frac{x}{y}=\frac{x_1}{y_1}.$$




Все эти четыре отношения, зависящие только от угла α, называются тригонометрическими функциями этого угла, а именно:

1. *Синусом угла* α называется отношение ординаты конца подвижного радиуса, соответствующего α, к длине радиуса:

$$\sin\alpha=\frac{y}{R}.$$

2. *Косинусом угла* α называется отношение абсциссы конца подвижного радиуса, соответствующего α, к длине радиуса:

$$\cos\alpha=\frac{x}{R}.$$

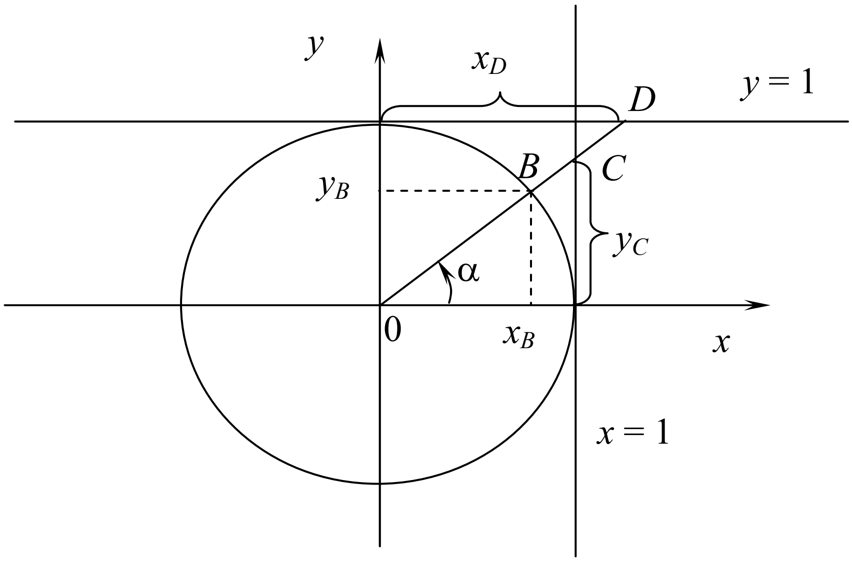
3. *Тангенсом угла* α называется отношение ординаты конца подвижного радиуса, соответствующего α, к его абсциссе:

$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{y}{x}.$$

4. *Котангенсом угла* α называется отношение абсциссы конца подвижного радиуса, соответствующего α, к его ординате:

$$\operatorname{ctg}\alpha=\frac{x}{y}.$$

Так как значения тригонометрических функций не зависят от длины подвижного радиуса, этот радиус всегда можно брать одной и той же длины. Обычно считают $R = 1$, тогда конец подвижного радиуса находится на тригонометрическом круге.




В этом случае синус угла равен ординате соответствующей точки на тригонометрическом круге, косинус угла – абсциссе соответствующей точки на тригонометрическом круге.

Прямая, заданная уравнением $x = 1$, называется осью тангенсов, а прямая, заданная уравнением $y = 1$, – осью котангенсов. Следовательно, тангенсом угла называется ордината соответствующей точки на оси тангенсов, котангенсом угла – абсцисса соответствующей точки на оси котангенсов.

Действительно,

$$\cos\alpha = \frac{x_B}{R} = \frac{x_B}{1} = x_B, \quad \sin\alpha = \frac{y_B}{R} = \frac{y_B}{1} = y_B,$$

$$\mathrm{tg}\alpha = \frac{y_C}{x_C} = \frac{y_C}{1} = y_C, \quad \mathrm{ctg}\alpha = \frac{x_D}{y_D} = \frac{x_D}{1} = x_D.$$

Если точка $B$ лежит на оси ординат, то соответствующая точка $C$ не существует, tgα также не существует, т.е. tgα определен для всех углов, кроме углов, равных $\frac{\pi}{2} + \pi k$ $(k = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots; k \in z)$.

Если точка $B$ лежит на оси абсцисс, то соответствующая точка $D$ не существует, ctgα также не существует, т.е. ctgα определен для всех углов, кроме углов, равных $\pi k$ $(k = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots\ldots; k \in z)$.

Рассмотрим свойства тригонометрических функций.

1. *Четность и нечетность*. Для любых двух аргументов α и -α, отличающихся только знаком, соответствующие им подвижные радиусы $0B$

и $0B_1$ симметричны относительно оси абсцисс. Поэтому $x_B = x_{B_1}$, $y_B = -y_{B_1}$.

$$\sin(-\alpha) = y_{B_1} = -y_B = -\sin\alpha,$$

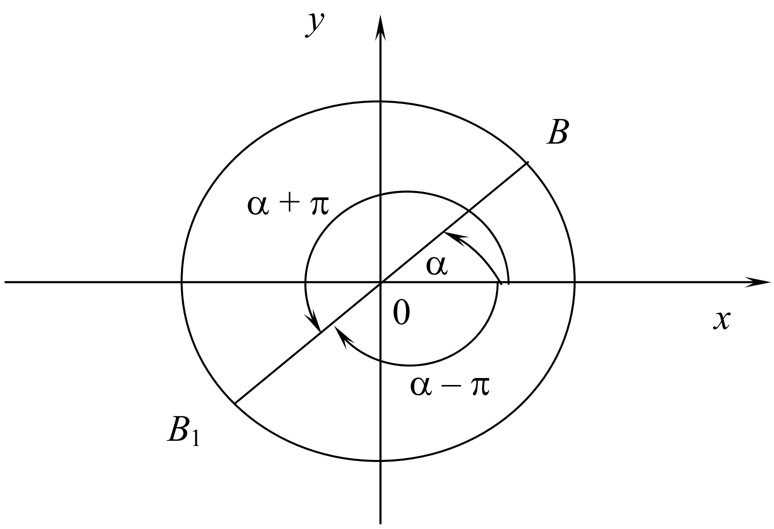
$$\cos(-\alpha) = x_{B_1} = x_B = \cos\alpha,$$

$$\operatorname{tg}(-\alpha) = \frac{\sin(-\alpha)}{\cos(-\alpha)} = \frac{-\sin\alpha}{\cos\alpha} = -\operatorname{tg}\alpha,$$

$$\operatorname{ctg}(-\alpha) = \frac{\cos(-\alpha)}{\sin(-\alpha)} = \frac{\cos\alpha}{-\sin\alpha} = -\operatorname{ctg}\alpha.$$

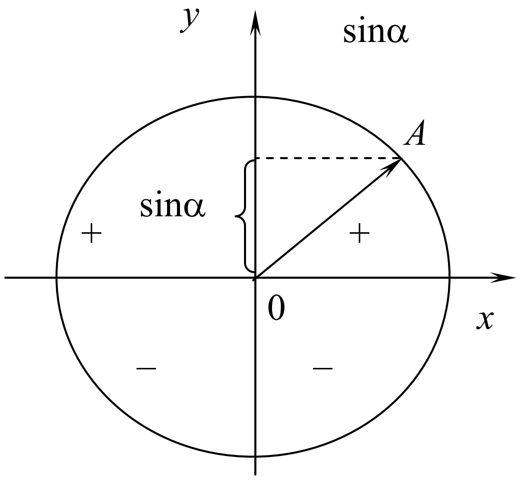
Согласно определению четной и нечетной функций отсюда вытекает, что функция cos$\alpha$ – четная, а функции sin$\alpha$, tg$\alpha$ и ctg$\alpha$ – нечетные.

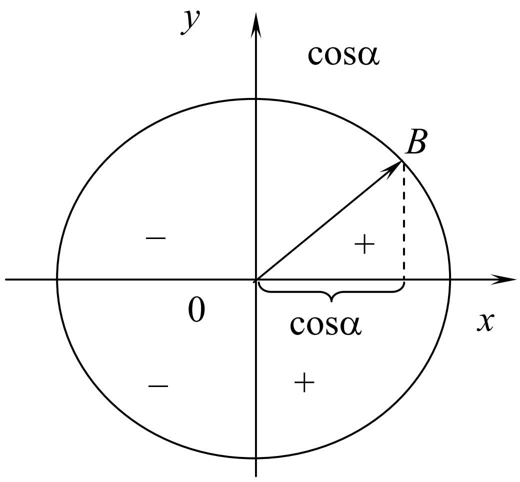
2. *Периодичность*. Значения тригонометрических функций определяются положением подвижного радиуса, которое не меняется, если его повернуть на полный угол по или против часовой стрелки. Это означает, что $\sin(\alpha \pm 2\pi) = \sin\alpha$ для любого $\alpha$; $\cos(\alpha \pm 2\pi) = \cos\alpha$ для любого $\alpha$. Что касается тангенса и котангенса, то $\operatorname{tg}(\alpha \pm \pi) = \operatorname{tg}\alpha$ для $\alpha \neq \frac{\pi}{2} + \pi k$, $\operatorname{ctg}(\alpha \pm \pi) = \operatorname{ctg}\alpha$ для $\alpha \neq \pi k$. В самом деле, точки $B(x, y)$ и $B_1(x_1, y_1)$ окружности, соответствующие аргументам $\alpha$ и $\alpha + \pi$, симметричны относительно начала координат, т.е. $x = -x_1$, $y = -y_1$. Отсюда следует, что $\operatorname{tg}(\alpha \pm \pi) = \operatorname{tg}\alpha$ и $\operatorname{ctg}(\alpha \pm \pi) = \operatorname{ctg}\alpha$. Таким образом, функции sin$\alpha$ и cos$\alpha$ периодические с периодом, равным $2\pi$, а функции tg$\alpha$ и ctg$\alpha$ периодические с периодом, равным $\pi$.



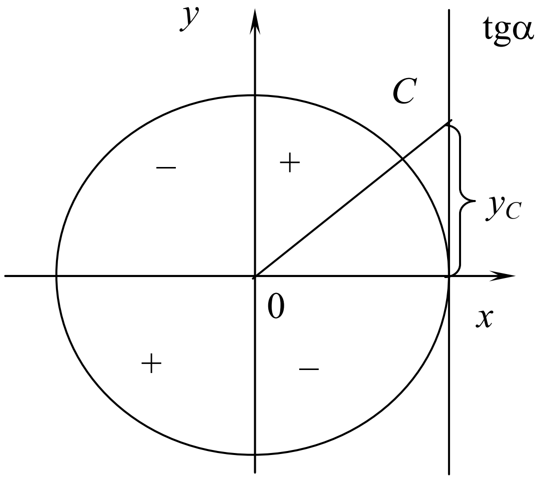
3. *Знаки тригонометрических функций*. Так как синус угла есть ордината соответствующей точки на тригонометрическом круге, то синусы углов, оканчивающихся в верхней полуплоскости (I и II четверти), положительны, а синусы углов, оканчивающихся в нижней полуплоскости (III и IV четверти), отрицательны.

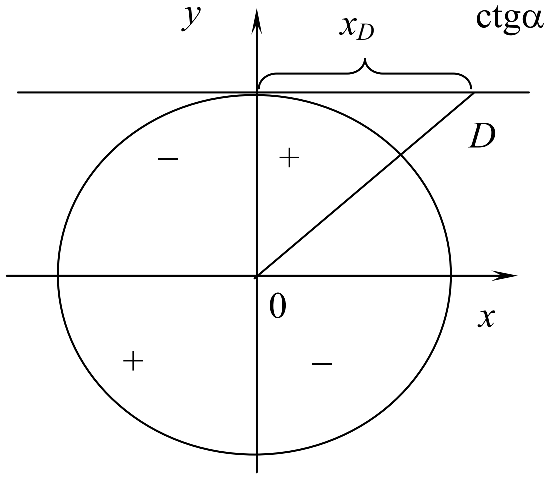
Так как косинус угла есть абсцисса соответствующей точки на тригонометрическом круге, то косинусы углов, оканчивающихся в правой полуплоскости (I и IV четверти), положительны, а косинусы углов, оканчивающихся в левой полуплоскости (II и III четверти), отрицательны.




Так как tgα и ctgα суть отношения $\mathrm{tg}\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$, $\mathrm{ctg}\alpha = \dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$, то значения тангенса и котангенса положительны там, где sinα и cosα имеют одинаковые знаки. Следовательно, тангенсы и котангенсы углов, оканчивающихся в I и III четвертях, положительны, а тангенсы и котангенсы углов, оканчивающихся в II и IV четвертях, отрицательны.



4. *Основные соотношения между тригонометрическими функциями одного и того же аргумента*. Пусть аргументу α соответствует подвижный радиус $0B$, и $x_B$, $y_B$ – координаты точки $B$. Имеем:

$$x_B^2 + y_B^2 = 1, \text{ так как } \left|\overrightarrow{0B}\right| = 1.$$

Таким образом, для любого α

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1. \qquad (1.1)$$

Для любого $\alpha \neq \dfrac{\pi}{2} + \pi k$ $(k = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots; k \in z)$

$$\mathrm{tg}\alpha = \frac{y_B}{x_B} = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}. \qquad (1.2)$$

Для любого $\alpha \neq \pi k$ $(k = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots; k \in z)$

$$\mathrm{ctg}\alpha = \frac{x_B}{y_B} = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}. \qquad (1.3)$$

Таким образом,

$$\mathrm{tg}\alpha \cdot \mathrm{ctg}\alpha = 1, \quad \alpha \neq \frac{\pi}{2}k \quad (k \in z). \qquad (1.4)$$

Из формул (1.1) и (1.2) следует, что

$$1 + \mathrm{tg}^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha}, \quad \alpha \neq \frac{\pi}{2} + \pi k, \quad k \in z. \qquad (1.5)$$

Из формул (1.1) и (1.3) следует, что

$$1 + \mathrm{ctg}^2\alpha = \frac{1}{\sin^2\alpha}, \quad \alpha \neq \pi k, \quad k \in z. \qquad (1.6)$$

С помощью основных тождеств можно каждую из тригонометрических функций выразить через любую другую тригонометрическую функцию.

$$\sin\alpha = \pm\sqrt{1 - \cos^2\alpha},$$

$$\cos\alpha = \pm\sqrt{1 - \sin^2\alpha},$$

$$\mathrm{tg}\alpha = \frac{\pm\sqrt{1 - \cos^2\alpha}}{\cos\alpha} = \frac{\sin\alpha}{\pm\sqrt{1 - \sin^2\alpha}},$$

$$\mathrm{ctg}\alpha = \pm\frac{\cos\alpha}{\sqrt{1 - \cos^2\alpha}} = \frac{\pm\sqrt{1 - \sin^2\alpha}}{\sin\alpha},$$

$$\mathrm{tg}\alpha = \frac{1}{\mathrm{ctg}\alpha},$$

$$\mathrm{ctg}\alpha = \frac{1}{\mathrm{tg}\alpha},$$

$$\cos\alpha = \pm\frac{\mathrm{ctg}\alpha}{\sqrt{1+\mathrm{ctg}^2\alpha}},$$

$$\sin\alpha = \pm\frac{1}{\sqrt{1+\mathrm{ctg}^2\alpha}},$$

$$\cos\alpha = \pm\frac{1}{\sqrt{1+\mathrm{tg}^2\alpha}},$$

$$\sin\alpha = \pm\frac{\mathrm{tg}\alpha}{\sqrt{1+\mathrm{tg}^2\alpha}}.$$

В формулах, содержащих радикалы, знаки «+» или «–» следует ставить в зависимости от того, в какой четверти оканчивается угол.

**П р и м е р 1.** Вычислить значение выражения

$$\frac{(\sin\alpha+\cos\alpha)^2-1}{\mathrm{ctg}\alpha-\sin\alpha\cdot\cos\alpha}\Big/\mathrm{tg}\alpha, \text{ если } \cos\alpha=-\frac{1}{\sqrt{37}},\quad \alpha\in\text{II ч}.$$

*Решение.* Преобразуем данное выражение согласно формулам (1.1)-(1.4):

$$\frac{\sin^2\alpha+2\sin\alpha\cos\alpha+\cos^2\alpha-1}{\dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}-\sin\alpha\cdot\cos\alpha}\cdot\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}=$$

$$=\frac{2\sin\alpha\cdot\cos\alpha\cdot\sin\alpha}{\cos\alpha\cdot\left(1-\sin^2\alpha\right)}\cdot\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}=2\mathrm{tg}\alpha.$$

Зная значение $\cos\alpha$, вычислим

$$2\mathrm{tg}\alpha=2\cdot\frac{\pm\sqrt{1-\cos^2\alpha}}{\cos\alpha}=\frac{-2\cdot\sqrt{1-\dfrac{1}{37}}}{\dfrac{1}{37}}=-12.$$

*Ответ*: –12.

5. *Графики тригонометрических функций.*

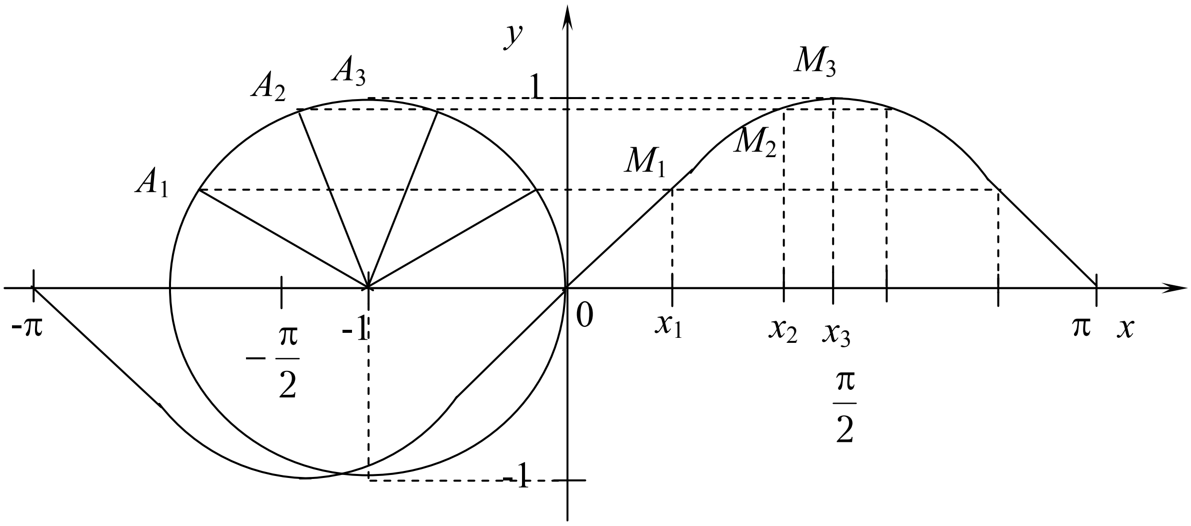
а) $y=\sin x$. Возьмем окружность единичного радиуса с центром в точке (-1, 0) и разделим на $m$ равных частей верхнюю полуокружность. На то же $m$ равных частей разделим отрезок $[0, \pi]$ оси абсцисс. Очевидно, что $\sin x_k$ равен ординате точки $A_k$ окружности. Поэтому ординаты соответствующих точек $x_k$ будут те же, что и ординаты точек $A_k$. Соединив полученные точки плавной кривой, получим график функции $y=\sin x$ на отрезке $[0, \pi]$. Используя свойства нечетности, а затем и периодичности синуса, строим график данной функции на всей числовой прямой. Полученная кривая называется *синусоидой*.

Видим, что функция $y = \sin x$:

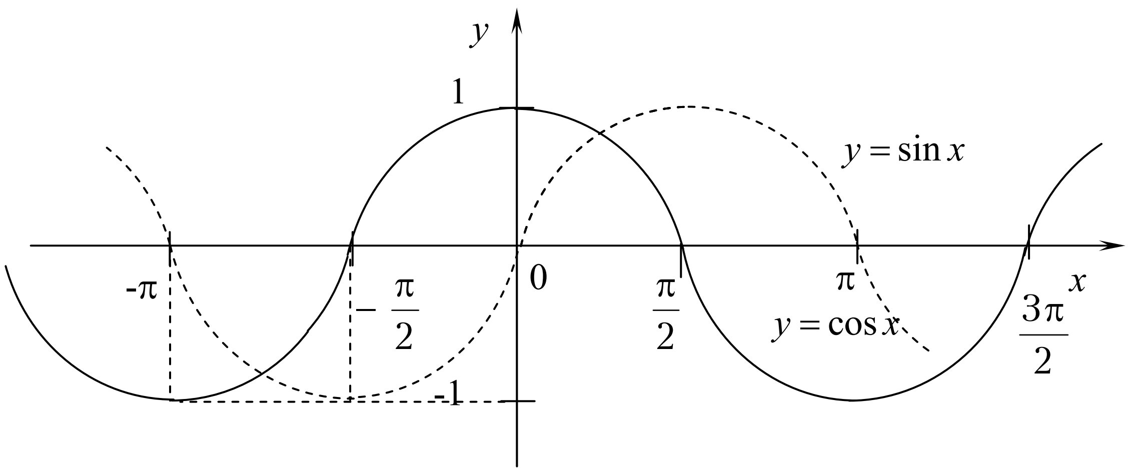
– монотонно возрастает от –1 до 1 на промежутках $\left[-\frac{\pi}{2} + 2\pi k, \frac{\pi}{2} + 2\pi k\right]$ и монотонно убывает от 1 до –1 на промежутках $\left[\frac{\pi}{2} + 2\pi k, \frac{3\pi}{2} + 2\pi k\right]$;

– принимает наибольшее значение, равное 1, при $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k$ и наименьшее значение, равное –1, при $x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k$;

– обращается в нуль при $x = \pi k$.




б) $y = \cos x$. Так как $\cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$, то график функции $y = \cos x$ получается сдвигом графика $y = \sin x$ на $\frac{\pi}{2}$ единиц влево вдоль оси 0*x*. Полученная кривая (косинусоида) симметрична относительно оси 0*y*.



Видим, что функция $y = \cos x$:

– монотонно возрастает от –1 до 1 на промежутках $[-\pi + 2\pi k, 2\pi k]$ и монотонно убывает от 1 до –1 на промежутках $[2\pi k, \pi + 2\pi k]$.

– принимает наибольшее значение, равное 1, при $x = 2\pi k$ и наименьшее значение, равное –1, при $x = \pi + 2\pi k$;

– обращается в нуль при $x = \dfrac{\pi}{2} + \pi k$.

в) $y = \mathrm{tg}x$. Проведем единичную окружность с центром в точке (-1, 0). Разделив дугу первой четверти на $m$ равных частей, получим точки $A_0$, $A_1$, …, $A_m$. Проведем радиусы и продолжим их до пересечения с осью 0$y$ в точках $C_0$, $C_1$, …, $C_{m-1}$. Одновременно разделим отрезок $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$ оси 0$x$ на $m$ равных частей точками $x_0$, $x_2$, …, $x_m$. Очевидно, значения тангенсов в точке $x_k$ численно равны длине отрезка $0C_k$. Точки $M_0$, $M_1$, …, $M_{m-1}$ соединяем плавной кривой и получаем график $y = \mathrm{tg}x$ на промежутке $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$.

Используя нечетность и периодичность тангенса, строим его график на всей числовой прямой.

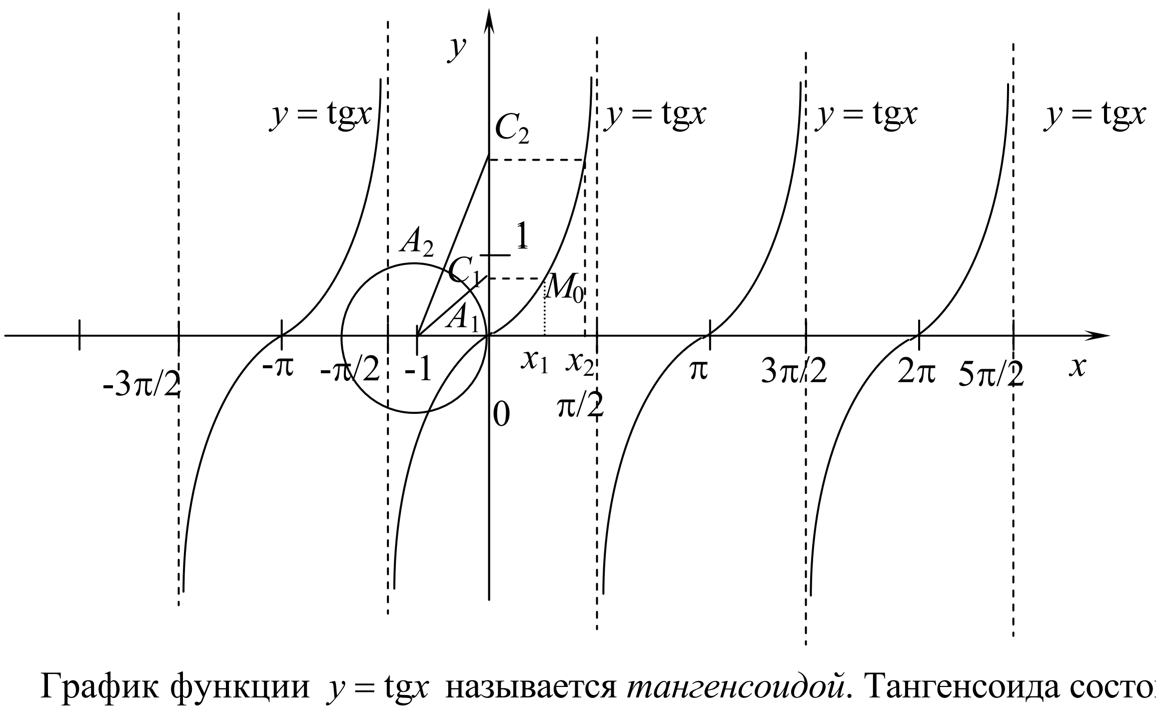



График функции $y = \mathrm{tg}x$ называется *тангенсоидой*. Тангенсоида состоит из ряда отдельных одинаковых ветвей, на которые она распадается при прохождении аргумента $x$ через точки $x = \dfrac{\pi}{2} + \pi k$. Поэтому достаточно рассмотреть одну из таких ветвей, например, на интервале $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$. На этом интервале $y = \mathrm{tg}x$ возрастает, принимая при этом все значения, как положительные, так и отрицательные. Когда аргумент приближается к правому концу интервала, функция $y = \mathrm{tg}x$ возрастает. Когда аргумент приближается к левому концу интервала, функция $y = \mathrm{tg}x$ неограниченно убывает. Прямые $x = \frac{\pi}{2} + \pi k$ являются вертикальными асимптотами тангенсоиды.

г) $y = \mathrm{ctg}x$. Так как $\mathrm{ctg}x = -\mathrm{tg}\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$, то график котангенса получается из графика тангенса путем двух преобразований: сначала сдвигаем тангенсоиду на $\frac{\pi}{2}$ единиц вправо вдоль оси $0x$, а затем полученный график отображаем симметрично относительно оси абсцисс.

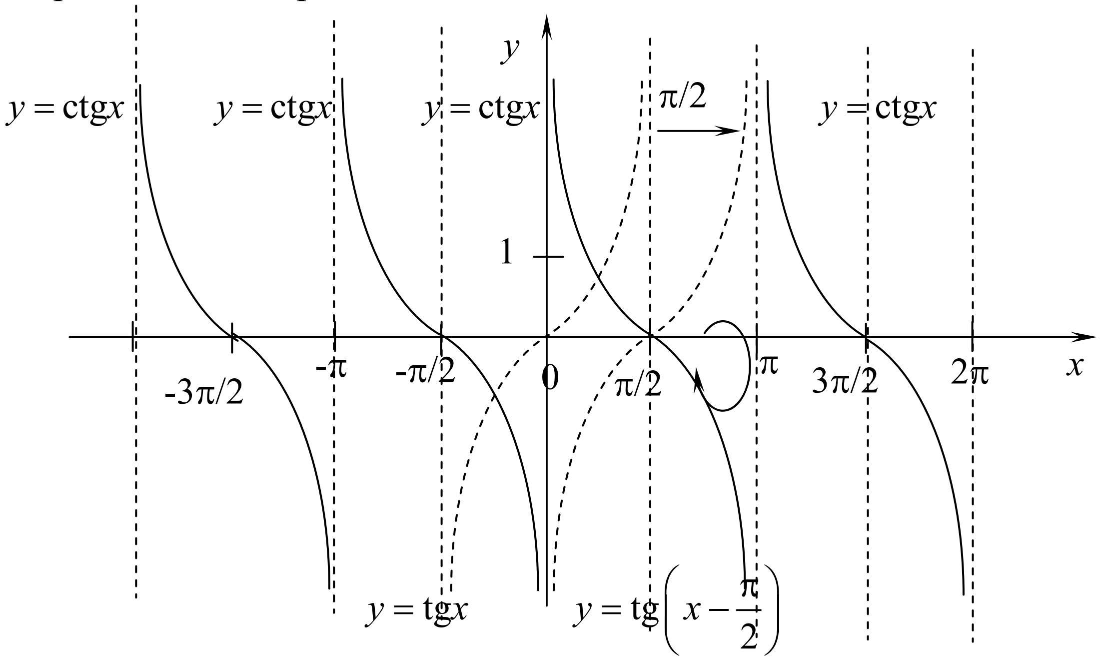



График функции $y = \mathrm{ctg}x$ называется *котангенсоидой*. Он состоит из одинаковых ветвей, соответствующих интервалам $\left(\pi k, \pi(k+1)\right)$. На каждом из этих интервалов функция монотонно убывает. Прямые $x = \pi k$ являются его вертикальными асимптотами.

**П р и м е р 2.** Построить график функции

$$y = 2\sin\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{3}\right).$$

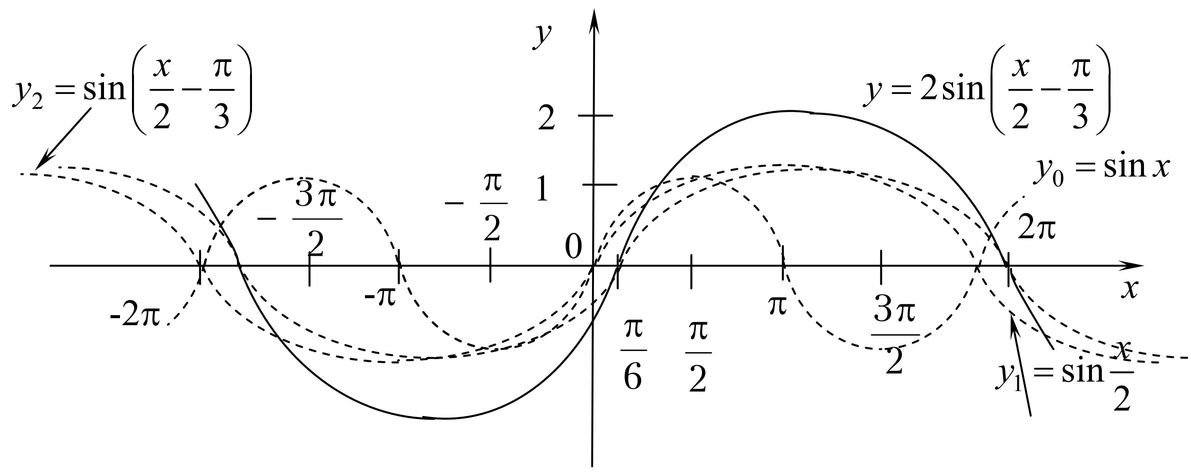
*Решение*. Периодом этой функции будет $T = 4\pi = \frac{2\pi}{\omega}$, где $\omega = \frac{1}{2}$. Следовательно, исходную кривую $y_0 = \sin x$ растягиваем вдоль оси $0x$ в 2 раза. Так как

$$y_2 = \sin\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{3}\right) = \sin\frac{1}{2}\left(x - \frac{\pi}{6}\right),$$

то для построения графика $y_2 = \sin\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{3}\right)$ необходимо полученную кривую перенести параллельно оси $0x$ на $\frac{\pi}{6}$ вправо. Так как

$$y = 2\sin\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{3}\right) = 2y_2,$$

растягиваем график функции $y_2$ вдоль оси $0y$ в 2 раза. Получим:




*Ответ*: график (см. рис.).

## §2. Теоремы сложения и их следствия

1. Будем рассматривать $\alpha$ и $\beta$ как углы в тригонометрическом круге. Пусть углу $\alpha$ соответствует радиус $0B_1$, а углу $\beta$ – радиус $0B_2$ (см. рис. 1.14).

Согласно формуле определения расстояния между двумя точками имеем:

$$|B_1B_2|^2 = (\cos\alpha - \cos\beta)^2 + (\sin\alpha - \sin\beta)^2 =$$
$$= 2 - 2(\cos\alpha \cdot \cos\beta + \sin\alpha \cdot \sin\beta).$$

Видим, что расстояние $B_1B_2$ зависит только от величин $\alpha$ и $\beta$ и не зависит от выбора их общей начальной стороны.

Если принять радиус $0B_2$ за начальную сторону угла $\alpha - \beta$, то $0B_1$ совпадает с его конечной стороной.

При повороте системы координат вокруг точки 0 (0, 0) на угол $\beta$ точки $B_1$ и $B_2$ будут иметь следующие координаты: $B_1\left(\cos(\alpha-\beta), \sin(\alpha-\beta)\right)$ и $B_2$ (1, 0).

Расстояние $B_1B_2$ определяем по формуле

$$|B_1B_2|^2 = (\cos(\alpha-\beta)-1)^2 + \sin^2(\alpha-\beta) = 2 - 2\cos(\alpha-\beta),$$

Окончательно получаем тождество

$$\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta, \tag{1.7}$$

справедливое для любых $\alpha$ и $\beta$.

Так как $\alpha + \beta = \alpha - (-\beta)$, то из формулы (1.7) вытекает, что

$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta. \tag{1.8}$$

Формула (1.8) также справедлива для любых $\alpha$ и $\beta$.

Полагая в выражении (1.7) $\alpha = \frac{\pi}{2}$ и учитывая, что $\cos\frac{\pi}{2} = 0$, $\sin\frac{\pi}{2} = 1$, получаем:

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \beta\right) = \sin\beta,$$

$$\cos\beta = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \left(\frac{\pi}{2} - \beta\right)\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \beta\right).$$

Используя эти равенства, имеем:

$$\sin(\alpha+\beta) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - (\alpha+\beta)\right) = \cos\left(\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) - \beta\right) =$$

$$= \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) \cdot \cos\beta + \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)\sin\beta,$$

т.е.

$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta. \tag{1.9}$$

Так как $\alpha - \beta = \alpha + (-\beta)$, то получаем

$$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta. \qquad (1.10)$$

Формулы (1.9) и (1.10) справедливы для любых $\alpha$ и $\beta$.

Пусть $\alpha+\beta\neq\frac{\pi}{2}+\pi k$, тогда

$$\operatorname{tg}(\alpha+\beta)=\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha+\beta)}=\frac{\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta}=\frac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}{1\text{-}\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}$$

при условии, что $\cos\alpha\cdot\cos\beta\neq 0$, т.е. $\alpha\neq\frac{\pi}{2}+\pi n$, $\beta\neq\frac{\pi}{2}+\pi m$.

Окончательно получаем формулу

$$\operatorname{tg}(\alpha+\beta)=\frac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}{1\text{-}\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta} \qquad (1.11)$$

для любых $\alpha$ и $\beta$, удовлетворяющих условию $\alpha\neq\frac{\pi}{2}+\pi n$, $\beta\neq\frac{\pi}{2}+\pi m$, $\alpha+\beta\neq\frac{\pi}{2}+\pi k$.

Замечая, что $\alpha - \beta = \alpha + (-\beta)$ и $\operatorname{tg}(-\beta)=-\operatorname{tg}\beta$, из формулы (1.11) получаем:

$$\operatorname{tg}(\alpha-\beta)=\frac{\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}\beta}{1\text{-}\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta} \qquad (1.12)$$

для любых $\alpha$ и $\beta$, удовлетворяющих условию $\alpha\neq\frac{\pi}{2}+\pi n$, $\beta\neq\frac{\pi}{2}+\pi m$, $\alpha-\beta\neq\frac{\pi}{2}+\pi k$.

2. Формулами приведения называются тождества, связывающие тригонометрические функции аргументов $\frac{\pi}{2}\pm\alpha$, $\pi\pm\alpha$, $\frac{3\pi}{2}\pm\alpha$ с функциями аргумента $\alpha$.

1) если $\alpha$ откладывается от горизонтального диаметра ($\pi \pm \alpha$), то наименование приводимой функции не меняется; если же $\alpha$ откладывается от вертикального диаметра $\left(\frac{\pi}{2}\pm\alpha, \frac{3\pi}{2}\pm\alpha\right)$, то наименование приводимой функции заменяется на сходное (синус на косинус, тангенс на котангенс и наоборот);

2) знак правой части совпадает со знаком приводимой функции для $0 \langle \alpha \langle \frac{\pi}{2}$. Например, составим формулу приведения для $\operatorname{tg}\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)$:

а) название тангенс меняем на котангенс (угол $\frac{3\pi}{2}+\alpha$);

б) если считать угол $\alpha$ острым, то $\frac{3\pi}{2}+\alpha$ будет оканчиваться в IV четверти, а там тангенс отрицателен. Поэтому пишем

$$\operatorname{tg}\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right) = -\operatorname{ctg}\alpha .$$

3. Полагая в формулах (1.8) и (1.9) β = α, получаем:

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha \cdot \cos\alpha , \qquad (1.13)$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha . \qquad (1.14)$$

Используя тождество $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ и формулу (1.14), находим другое представление

$$\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1. \qquad (1.15)$$

Формулы (1.13) и (1.14) справедливы для любого α.

Полагая в формуле (1.11) β = α, находим, что

$$\operatorname{tg}2\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1\text{-}\operatorname{tg}^2\alpha} . \qquad (1.16)$$

Далее имеем

$$\sin 3\alpha = \sin(2\alpha + \alpha) = \sin 2\alpha\cos\alpha + \cos 2\alpha\sin\alpha ,$$

откуда согласно выражениям (1.10) и (1.14) следует, что

$$\sin 3\alpha = 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha . \qquad (1.17)$$

Аналогично находим, что

$$\cos 3\alpha = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha . \qquad (1.18)$$

Разделив тождество (1.17) на тождество (1.18), находим

$$\operatorname{tg}3\alpha = \frac{3\sin\alpha\cos^2\alpha - \sin^3\alpha}{\cos^3\alpha - 3\sin^2\alpha\cos\alpha} .$$

Разделив теперь числитель и знаменатель дроби на $\cos^3\alpha$, получаем:

$$\operatorname{tg}3\alpha = \frac{3\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}^3\alpha}{1\text{-}3\operatorname{tg}^2\alpha} \quad \left(3\alpha \text{ и } \alpha \neq \frac{\pi}{2} + \pi k\right). \qquad (1.19)$$

4. Складывая и вычитая почленно равенства (1.7) и (1.8), получаем тождества

$$\cos\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}\left(\cos\left(\alpha-\beta\right)+\cos\left(\alpha+\beta\right)\right), \qquad (1.20)$$

$$\sin\alpha\sin\beta=\frac{1}{2}\left(\cos\left(\alpha-\beta\right)-\cos\left(\alpha+\beta\right)\right), \qquad (1.21)$$

которые справедливы для любых $\alpha$ и $\beta$. Аналогично, складывая и вычитая равенства (1.9) и (1.10), получаем тождество

$$\sin\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}\left(\sin\left(\alpha+\beta\right)+\sin\left(\alpha-\beta\right)\right), \qquad (1.21)$$

также справедливое для любых $\alpha$ и $\beta$.

Полагая в формулах (1.20) и (1.21) $\beta=\alpha$ и учитывая, что $\cos 0=1$, находим

$$\cos^2\alpha=\frac{1+\cos 2\alpha}{2}, \qquad (1.23)$$

$$\sin^2\alpha=\frac{1-\cos 2\alpha}{2}. \qquad (1.24)$$

5. Заменяя в равенствах (1.23) и (1.24) $\alpha$ на $\frac{\alpha}{2}$ и извлекая корень, получаем:

$$\cos\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}, \qquad (1.25)$$

$$\sin\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}, \qquad (1.26)$$

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}. \qquad (1.27)$$

Знак перед радикалом берется в зависимости от знака соответствующей функции аргумента $\frac{\alpha}{2}$ (а не $\alpha$).

Наряду с формулой (1.27), которая выражает $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$ через $\cos\alpha$ иррационально, имеют место два тождества, выражающие его через $\sin\alpha$ и $\cos\alpha$ рационально, а именно:

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=\frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}=\frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}. \qquad (1.28)$$

В некоторых случаях существенную пользу приносят формулы, выражающие тригонометрические функции аргумента $\alpha$ через $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$:

$$\sin\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}, \tag{1.29}$$

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{1-\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}, \tag{1.30}$$

$$\cos\alpha = \frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}. \tag{1.31}$$

Формулы (1.24-1.31) справедливы для любого $\frac{\alpha}{2} \neq \frac{\pi}{2} + \pi k$.

6. Представляя аргументы $\alpha$ и $\beta$ в виде

$$\alpha = \frac{\alpha+\beta}{2} + \frac{\alpha-\beta}{2}, \quad \beta = \frac{\alpha+\beta}{2} + \frac{\alpha-\beta}{2},$$

согласно тождествам (1.9) и (1.10) имеем:

$$\sin\alpha = \sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2} + \cos\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2},$$

$$\sin\beta = \sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2} - \cos\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}.$$

Складывая и вычитая эти равенства, получаем:

$$\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}, \tag{1.32}$$

$$\sin\alpha - \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}. \tag{1.33}$$

Используя аналогичные тождества (1.7) и (1.8), получаем:

$$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}, \tag{1.34}$$

$$\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}, \qquad (1.35)$$

$$\mathrm{tg}\alpha + \mathrm{tg}\beta = \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos\alpha\cos\beta} \quad \left(\alpha \text{ и } \beta \neq \frac{\pi}{2} + \pi k\right), \qquad (1.36)$$

$$\mathrm{tg}\alpha - \mathrm{tg}\beta = \frac{\sin(\alpha-\beta)}{\cos\alpha\cos\beta} \quad \left(\alpha \text{ и } \beta \neq \frac{\pi}{2} + \pi k\right). \qquad (1.37)$$

При решении задач будем ссылаться и на следующий ряд тождеств:

$$\mathrm{ctg}\alpha + \mathrm{tg}\alpha = \frac{2}{\sin 2\alpha}, \qquad (1.38)$$

$$\mathrm{ctg}\alpha - \mathrm{tg}\alpha = 2\mathrm{ctg}2\alpha, \quad \alpha \neq \frac{\pi}{2}k, \qquad (1.39)$$

$$\sin\alpha \pm \cos\alpha = \sqrt{2}\sin\left(\alpha \pm \frac{\pi}{4}\right). \qquad (1.40)$$

Вообще

$$a\sin\alpha \pm b\cos\alpha = \sqrt{a^2+b^2}\left(\sin(\alpha \pm \varphi)\right), \qquad (1.41)$$

где $\varphi$ – угол, для которого

$$\sin\varphi = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}, \quad \cos\varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}, \quad \mathrm{tg}\varphi = \frac{b}{a}.$$

## §3. Тождественные преобразования тригонометрических выражений

### Упрощение тригонометрических выражений

Умение преобразовать к простейшему виду то или иное тригонометрическое выражение играет основную роль в задачах тригонометрии (особенно при решении тригонометрических уравнений). Рассмотрим два случая.

1. *Функции числового аргумента*. Тригонометрическое выражение содержит тригонометрические функции числовых аргументов, и в общем случае следует перейти к тригонометрическим функциям острых углов, выраженных в градусах или радианах.

**П р и м е р 3.** Упростить выражение

$$A=\left(\frac{\cos^{-1}125^\circ\cdot\operatorname{ctg}305^\circ}{\cos^{-1}\left(-215^\circ\right)}+\sin\left(-35^\circ\right)\cdot\cos125^\circ\right)\Big/\sin^2 125^\circ .$$

*Решение*. Имеем

$$\cos^{-1}125^\circ=\frac{1}{\cos\left(90^\circ+35^\circ\right)}=-\frac{1}{\sin 35^\circ},$$

$$\operatorname{ctg}305^\circ=\operatorname{ctg}\left(270^\circ+35^\circ\right)=-\operatorname{tg}35^\circ,$$

$$\cos^{-1}\left(-215^\circ\right)=\frac{1}{\cos\left(-180^\circ-35^\circ\right)}=-\frac{1}{\cos 35^\circ},$$

$$\sin125^\circ=\cos35^\circ,$$

$$A=\frac{\left(-1+\sin^2 35^\circ\right)}{\cos^2 35^\circ}=-1.$$

*Ответ*: $A=-1$.

2. *Вычисление без таблиц*. Конечно, не всякое тригонометрическое выражение от числовых значений аргументов можно вычислить без таблиц. Однако в некоторых случаях удается преобразовать заданное тригонометрическое выражение или к числу, или к тригонометрическим функциям аргументов $\frac{\pi}{6}$, $\frac{\pi}{4}$, $\frac{\pi}{2}$ и т.д.

**П р и м е р 4.** Вычислить без таблиц

$$B=\operatorname{ctg}7{,}5^\circ+\operatorname{tg}67{,}5^\circ-\operatorname{tg}7{,}5^\circ-\operatorname{ctg}67{,}5^\circ .$$

*Решение*. Группируем тангенсы и котангенсы, получаем:

$$\left(\operatorname{ctg}7{,}5^\circ-\operatorname{ctg}67{,}5^\circ\right)+\left(\operatorname{tg}67{,}5^\circ-\operatorname{tg}7{,}5^\circ\right)=$$

$$=\frac{\sin 60^\circ}{\sin 7{,}5^\circ\cdot\sin 67{,}5^\circ}+\frac{\sin 60^\circ}{\cos 7{,}5^\circ\cdot\cos 67{,}5^\circ}=$$

$$=\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\cos\left(67{,}5^\circ-7{,}5^\circ\right)}{\sin 7{,}5^\circ\cdot\cos 7{,}5^\circ\cdot\sin 67{,}5^\circ\cdot\cos 67{,}5^\circ}=$$

$$=2\sqrt{3}\cdot\frac{\cos 60^\circ}{\sin 15^\circ\cdot\sin 45^\circ}=\frac{4\sqrt{6}}{\sqrt{6}-\sqrt{2}}=6+2\sqrt{3}.$$

*Ответ*: $B=6+2\sqrt{3}$.

**П р и м е р 5.** Вычислить без таблиц

$$C = \cos 12^\circ \cdot \cos 24^\circ \cdot \cos 36^\circ \cdot \cos 48^\circ \cdot \cos 60^\circ \cdot \cos 72^\circ \cdot \cos 84^\circ .$$

*Решение*. Замечая, что $\cos 84^\circ = -\cos 96^\circ$, разобьем данное произведение на два: $C = C_1 C_2 \cos 60^\circ$,

где $C_1 = -\cos 12^\circ \cdot \cos 24^\circ \cdot \cos 48^\circ \cdot \cos 96^\circ$,

$C_2 = \cos 36^\circ \cdot \cos 72^\circ$,

и вычислим каждое из них:

$$C_1 = -\frac{\cos 12^\circ \cdot \cos 24^\circ \cdot \cos 48^\circ \cdot \cos 96^\circ \cdot \sin 12^\circ}{\sin 12^\circ} =$$

$$= -\frac{\sin 24^\circ \cdot \cos 24^\circ \cdot \cos 48^\circ \cdot \cos 96^\circ}{2\sin 12^\circ} = -\frac{\sin 48^\circ \cdot \cos 48^\circ \cdot \cos 96^\circ}{4\sin 12^\circ} =$$

$$= -\frac{\sin 96^\circ \cdot \cos 96^\circ}{8\sin 12^\circ} = -\frac{\sin 192^\circ}{16\sin 12^\circ} = \frac{\sin 12^\circ}{16\sin 12^\circ} = \frac{1}{16},$$

$$C_2 = \frac{\sin 36^\circ \cdot \cos 36^\circ \cdot \cos 72^\circ}{\sin 36^\circ} = \frac{\sin 72^\circ \cdot \cos 72^\circ}{2\sin 36^\circ} = \frac{\sin 144^\circ}{4\sin 36^\circ} = \frac{1}{4}.$$

Окончательно получим: $C = \frac{1}{2^4} \cdot \frac{1}{2^2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{128}$.

*Ответ*: $C = \frac{1}{128}$.

Если аргументы, стоящие под знаком косинусов, не образуют геометрическую прогрессию, следует разложить произведение тригонометрических функций в сумму, заменяя при этом известные значения функции числами.

**П р и м е р 6.** Вычислить без таблиц

$$D = \cos 5^\circ \cdot \cos 55^\circ \cdot \cos 65^\circ .$$

*Решение*. Последовательно применяем формулу перехода от произведения к сумме:

$$D = \left(\cos 5^\circ \cdot \cos 55^\circ\right) \cdot \cos 65^\circ = \frac{1}{2} \cdot \left(\cos 60^\circ + \cos 50^\circ\right) \cdot \cos 65^\circ =$$

$$= \frac{1}{4}\cos 65^\circ + \frac{1}{2}\cos 50^\circ \cos 65^\circ = \frac{1}{4}\cos 65^\circ + \frac{1}{4}\left(\cos 115^\circ + \cos 15^\circ\right) =$$

$$= \frac{1}{4}\cos 65^\circ - \frac{1}{4}\cos 65^\circ + \frac{1}{4}\cos 15^\circ = \frac{1}{4}\cos 15^\circ = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{16}.$$

*Ответ*: $D = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{16}$.

3. *Вычисление значений тригонометрических выражений по известным значениям других тригонометрических выражений*. Эта задача состоит в том, чтобы вычислить значение заданного выражения, если известны значения одного или нескольких других выражений.

**П р и м е р 7.** Найти

$$\operatorname{tg}\left(45^\circ - \frac{\alpha}{2}\right), \text{ если } \sin\alpha = \frac{a-b}{a+b}, \ \alpha \in \text{II ч.}$$

*Решение*. Выразим $\operatorname{tg}\left(45^\circ - \frac{\alpha}{2}\right)$ через $\sin\alpha$. Имеем

$$\operatorname{tg}\left(45^\circ - \frac{\alpha}{2}\right) = \operatorname{tg}\left(\frac{90^\circ - \alpha}{2}\right) = \frac{\sin(90^\circ - \alpha)}{1+\cos(90^\circ - \alpha)} = \frac{\cos\alpha}{1+\sin\alpha} = -\frac{\sqrt{1-\sin^2\alpha}}{1+\sin\alpha}$$

(перед радикалом взят знак «–», так как $\alpha$ – угол второй четверти).

Замечая, что $1+\sin\alpha \rangle 0$, находим

$$\operatorname{tg}\left(45^\circ - \frac{\alpha}{2}\right) = -\sqrt{\frac{1-\sin^2\alpha}{(1+\sin\alpha)^2}} = -\sqrt{\frac{1-\sin\alpha}{1+\sin\alpha}} = -\sqrt{\frac{1-\frac{a-b}{a+b}}{1+\frac{a-b}{a+b}}} = -\sqrt{\frac{b}{a}}\,.$$

Исследуем, при каких значениях параметров $a$ и $b$ задача имеет решение. Так как $\alpha$ – угол второй четверти, то $0 \langle \frac{a-b}{a+b} \langle 1$. Это неравенство равносильно совокупности двух систем

$$\begin{cases} 0 \langle a-b \langle a+b, \\ a+b \rangle 0, \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} 0 \rangle a-b \rangle a+b, \\ a+b \langle 0. \end{cases}$$

Из первой системы следует, что $a \rangle b \rangle 0$, а из второй: $a \langle b \langle 0$. Итак, данная задача имеет решение для всех тех значений $a$ и $b$, которые удовлетворяют одному из условий: $a \rangle b \rangle 0$ или $a \langle b \langle 0$.

*Ответ*: $-\sqrt{\frac{b}{a}}$ при $a \rangle b \rangle 0$ или $a \langle b \langle 0$.

4. *Преобразование тригонометрических выражений в произведение.*

**П р и м е р 8**. Преобразовать в произведение выражение

$$A = \frac{\cos(\alpha - \beta)}{\cos 2\beta} - \frac{\cos\alpha}{\cos\beta}.$$

*Решение*. Приведем к общему знаменателю и каждое из слагаемых числителя представим в виде суммы

$$A=\frac{\cos(\alpha-\beta)\cdot\cos\beta-\cos2\beta\cdot\cos\alpha}{\cos2\beta\cdot\cos\beta}=$$

$$=\frac{\cos\alpha+\cos(\alpha-2\beta)-\cos(\alpha+2\beta)-\cos(\alpha-2\beta)}{2\cos2\beta\cos\beta}=.$$

$$=\frac{\cos\alpha-\cos(\alpha+2\beta)}{2\cos2\beta\cos\beta}.$$

Теперь числитель представим в виде произведения и окончательно получим:

$$A=\frac{\sin(\alpha+\beta)\cdot\sin\beta}{\cos2\beta\cos\beta}=\frac{\sin(\alpha+\beta)\cdot\mathrm{tg}\beta}{\cos2\beta},$$

где $\alpha\neq\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{2}n$ и $\beta\neq\frac{\pi}{2}+\pi n$.

*Ответ*: $A=\frac{\sin(\alpha+\beta)\cdot\mathrm{tg}\beta}{\cos2\beta}$ при $\alpha\neq\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{2}n$ и $\beta\neq\frac{\pi}{2}+\pi n$.

## Доказательство тождеств

Часто при доказательстве тождества преобразуют одну, более сложную часть к другой, более простой. При этом преобразовании выбирают такие формулы, которые приводят к функциям и аргументам, стоящим в другой части.

**Пример 9.** Доказать тождества:

1) $\frac{\cos^2 2\alpha-4\cos^2\alpha+3}{\cos^2 2\alpha+4\cos^2\alpha-1}=\mathrm{tg}^4\alpha$;

2) $1+\mathrm{tg}(35°+\alpha)\cdot\mathrm{tg}(25°-\alpha)=$

$=\frac{2\cos(10°+2\alpha)-1}{2\cos(10°+2\alpha)+1}+\sin2\alpha(\mathrm{tg}\alpha+\mathrm{ctg}2\alpha)$;

3) $\mathrm{tg}\alpha+2\mathrm{tg}2\alpha+4\mathrm{tg}4\alpha+8\mathrm{tg}8\alpha=\mathrm{ctg}\alpha$.

*Решение.*

1. Преобразуем левую часть данного тождества. Выражая $\cos^2 2\alpha$ и $\cos^2\alpha$ через $\mathrm{tg}\alpha$, имеем:

$$\frac{\cos^2 2\alpha - 4\cos^2\alpha + 3}{\cos^2 2\alpha + 4\cos^2\alpha - 1} = \frac{\left(\dfrac{1-\mathrm{tg}^2\alpha}{1+\mathrm{tg}^2\alpha}\right)^2 - \dfrac{4}{1+\mathrm{tg}^2\alpha} + 3}{\left(\dfrac{1-\mathrm{tg}^2\alpha}{1+\mathrm{tg}^2\alpha}\right)^2 + \dfrac{4}{1+\mathrm{tg}^2\alpha} - 1} = \mathrm{tg}^4\alpha .$$

Анализируя решение, замечаем, что это тождество справедливо для всех $\alpha \neq \dfrac{\pi}{2} + \pi n, \quad n \in Z$.

2. Множество допустимых значений произведений тангенсов состоит из всех углов α, для которых $(35° + \alpha)$ и $(25° - \alpha)$ не равны 90° + 180°·π. Преобразуя произведение тангенсов, которое обозначим через *A*, получаем:

$$A = \mathrm{tg}\left(35° + \alpha\right) \cdot \mathrm{tg}\left(25° - \alpha\right) = \frac{\sin\left(35° + \alpha\right)\sin\left(25° - \alpha\right)}{\cos\left(35° + \alpha\right)\cos\left(25° - \alpha\right)} =$$

$$= \frac{\cos\left(10° + 2\alpha\right) - \cos 60°}{\cos\left(10° + 2\alpha\right) + \cos 60°} = \frac{2\cos\left(10° + 2\alpha\right) - 1}{2\cos\left(10° + 2\alpha\right) + 1}.$$

Таким образом, *A* равно первому слагаемому правой части, остается только доказать, что второе слагаемое правой части (обозначим его через *B*) равно 1. В самом деле,

$$B = \sin 2\alpha \cdot \left(\mathrm{tg}\alpha + \mathrm{ctg}2\alpha\right) = \sin 2\alpha\left(\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} + \frac{\cos 2\alpha}{\sin 2\alpha}\right) =$$

$$= \frac{\sin 2\alpha \sin\alpha + \cos 2\alpha \cos\alpha}{\cos\alpha} = \frac{\cos\left(2\alpha - \alpha\right)}{\cos\alpha} = 1,$$

причем $\alpha \neq 90°k, \quad k \in Z$.

3. Доказательство данного тождества равносильно задаче о доказательстве тождества

$$\mathrm{ctg}\alpha - \mathrm{tg}\alpha - 2\mathrm{tg}2\alpha - 4\mathrm{tg}4\alpha = 8\mathrm{ctg}8\alpha .$$

Обозначая его левую часть через *A* и используя тождество (1.39), имеем

$$A = \left(\mathrm{ctg}\alpha - \mathrm{tg}\alpha\right) - 2\mathrm{tg}2\alpha - 4\mathrm{tg}4\alpha = 2\left(\mathrm{ctg}2\alpha - \mathrm{tg}2\alpha\right) - 4\mathrm{tg}4\alpha =$$

$$= 4\left(\mathrm{ctg}4\alpha - \mathrm{tg}4\alpha\right) = 8\mathrm{ctg}8\alpha,$$

причем $8\alpha \neq \dfrac{\pi}{2} + \pi k, \quad k \in Z$.

## §4. Обратные тригонометрические функции

Все тригонометрические функции, будучи периодическими, не являются монотонными во всей области своего существования. Отсюда следует, что функции, обратные тригонометрическим, рассмотренным во всей области их существования, многозначны. Чтобы получить однозначные ветви этих многозначных функций, нужно взять промежутки монотонности, на которых тригонометрическая функция либо возрастает, либо убывает, принимая при этом все возможные для нее значения.

Рассмотрим обратные функции для каждой из тригонометрических функций в отдельности.

### Арксинус

Функция $y = \sin x$ монотонна на каждом из промежутков $\left[-\frac{\pi}{2} + \pi k, \frac{\pi}{2} + \pi k\right]$, где $k \in Z$. Возьмем промежуток $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$. На нем $y = \sin x$ возрастает, принимая все свои значения от –1 до 1. Следовательно, существует обратная однозначная функция, определенная на отрезке $-1 \le y \le 1$ и монотонно возрастающая на нем от $-\frac{\pi}{2}$ до $\frac{\pi}{2}$. Эта обратная функция обозначается символом $y = \arcsin x$.

Арксинусом числа $a$ называется угол, лежащий на отрезке $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, синус которого равен $a$.

Взаимная обратность функций $\sin x$ и $\arcsin x$ хорошо видна из следующей записи:

$$\sin(\arcsin a) = a, \text{ если } |a| \le 1,$$

$$\arcsin(\sin x) = x, \text{ если } -\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{\pi}{2}.$$

Функция $y = \arcsin x$ нечетная, т.е.

$$\arcsin(-a) = -\arcsin a.$$

### Арккосинус

Эту функцию строят по той же схеме, что и арксинус. На промежутке $[0, \pi]$ функция $y = \cos x$ монотонно убывает от 1 до –1 и принимает при этом все промежуточные значения. Следовательно, существует обратная однозначная функция, определенная на отрезке -1 ≤ $y$ ≤ 1 и монотонно убывающая на нем от π до 0. Эта обратная функция обозначается символом $y = \arccos x$.

Арккосинусом числа $a$ называется угол, лежащий на отрезке [0, π], косинус которого равен $a$.

Из этого определения следует, что

$$\cos(\arccos a) = a, \text{ если } |a| \le 1,$$

$$\arccos(\cos x) = x, \text{ если } 0 \le x \le \pi.$$

Функция $y =$ $\arccos x$ не является ни четной, ни нечетной, т.е.

$$\arccos(-a) = \pi - \arccos a.$$

## Арктангенс и арккотангенс

В интервале $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ функция $y = \mathrm{tg} x$ монотонно возрастает от –∞ до +∞ и принимает при этом все действительные значения. Следовательно, существует обратная однозначная функция, определенная на всей числовой оси и монотонно возрастающая от $-\frac{\pi}{2}$ до $\frac{\pi}{2}$. Эта функция обозначается символом $y = \mathrm{arctg} x$.

Арктангенсом числа $a$ называется угол, лежащий на интервале $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, тангенс которого равен $a$.

Из этого определения следует, что

$$\mathrm{tg}(\mathrm{arctg} a) = a \text{ для любого действительного } a,$$

$$\mathrm{arctg}(\mathrm{tg} x) = x, \text{ если } x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right).$$

Функция $y$ = arctg$x$ является нечетной функцией, т.е.

$$\mathrm{arctg}(-a) = -\mathrm{arctg} a.$$

В интервале [0, π] функция $y = \mathrm{ctg} x$ монотонно убывает от –∞ до +∞ и принимает все действительные значения. Следовательно, существует обратная ей однозначная функция, определенная на всей числовой оси и монотонно убывающая от от π до 0. Эта функция обозначается символом $y = \mathrm{arcctg} x$.

Арккотангенсом числа $a$ называется угол, лежащий на интервале [0, π], котангенс которого равен $a$.

Из этого определения вытекает, что

$$\operatorname{ctg}(\operatorname{arcctg} a) = a \quad \text{для любого действительного } a,$$

$$\operatorname{arcctg}(\operatorname{ctg} x) = x, \quad \text{если} \quad x \in (0, \pi).$$

Функция $y = \operatorname{arcctg} x$ не является ни четной, ни нечетной функцией, т.е.

$$\operatorname{arcctg}(-a) = \pi - \operatorname{arcctg} a.$$

## 4.4. Основные тождества

При всех допустимых значениях аргумента $x$ справедливы тождества

$$\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}, \quad |x| \le 1,$$

$$\operatorname{arctg} x + \operatorname{arcctg} x = \frac{\pi}{2}.$$

**П р и м е р 10.** Найти область определения функции

$$y = \arcsin \frac{2x}{x-1}.$$

*Решение.* Арксинус определен для всех значений аргумента, не превосходящих по абсолютной величине единицы. Следовательно, область определения данной функции состоит из всех значений $x$, удовлетворяющих неравенству

$$-1 \le \frac{2x}{x-1} \le 1.$$

Решая его, находим $-1 \le x \le \dfrac{1}{3}$.

*Ответ*: $x \in \left[-1, \dfrac{1}{3}\right]$.

**П р и м е р 11.** Выразить $\arcsin \dfrac{7}{\sqrt{50}}$ через все остальные аркфункции.

*Решение.* Обозначая $\alpha = \arcsin \dfrac{7}{\sqrt{50}}$, имеем $\sin \alpha = \dfrac{7}{\sqrt{50}}$, причем $\alpha \in \left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$. Найдем остальные тригонометрические функции угла $\alpha$:

$$\cos \alpha = \sqrt{1 - \sin^2 \alpha} = \frac{1}{\sqrt{50}},$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = 7,$$

$$\operatorname{ctg}\alpha = \frac{1}{\operatorname{tg}\alpha} = \frac{1}{7}.$$

*Ответ*: $\arcsin\frac{7}{\sqrt{50}} = \arccos\frac{1}{\sqrt{50}} = \operatorname{arctg}7 = \operatorname{arcctg}\frac{1}{7}$.

**Пример 12.** Вычислить

$$\cos(\arccos x + 2\arccos x).$$

*Решение*. Обозначая $\alpha = \arcsin x$ и $\beta = \arccos x$, имеем $\sin\alpha = x$, $\cos\beta = x$, где $\beta \in [0, \pi]$, $\alpha \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$. Таким образом, задача сводится к отысканию $\cos(\alpha + 2\beta)$ по известным значениям $\sin\alpha$ и $\cos\beta$. Раскрывая косинус суммы, находим

$$\cos(\alpha + 2\beta) = \cos\alpha\cos 2\beta - \sin\alpha\sin 2\beta =$$
$$= \cos\alpha\cdot\left(2\cos^2\beta - 1\right) - 2\sin\alpha\sin\beta\cos\beta,$$

где $\cos\alpha = \sqrt{1-\sin^2\alpha} = \sqrt{1-x^2}$, $\sin\beta = \sqrt{1-\cos^2\beta} = \sqrt{1-x^2}$ (оба радикала берутся со знаком «+», так как $\cos\alpha \ge 0$, $\sin\beta \ge 0$)

Поэтому получаем:

$$\cos(\alpha + 2\beta) = \sqrt{1-x^2}\cdot\left(2x^2 - 1\right) - x\cdot 2x\cdot\sqrt{1-x^2} =$$
$$= \sqrt{1-x^2}\cdot\left(2x^2 - 1 - 2x^2\right) = -\sqrt{1-x^2}.$$

*Ответ*: $-\sqrt{1-x^2}$.

**Пример 13.** Доказать, что

$$\arcsin\sqrt{\frac{1+2x}{2}} + \operatorname{arcctg}\sqrt{\frac{1+2x}{1-2x}} = \frac{\pi}{2}.$$

*Решение*. Множество допустимых значений данного выражения состоит из всех действительных значений $x$, для которых

$$0 \le \frac{2x+1}{2} \le 1 \text{ и } \frac{2x+1}{1-2x} \ge 0, \text{ т.е. } -\frac{1}{2} \le x \le \frac{1}{2}.$$

Вместо данного будем доказывать равносильное ему равенство:

$$\arcsin\sqrt{\frac{1+2x}{2}} = \frac{\pi}{2}\text{-}\operatorname{arcctg}\sqrt{\frac{1+2x}{1-2x}}$$

или

$$\arcsin\sqrt{\frac{1+2x}{2}}=\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{1+2x}{1-2x}}\,.$$

Оба числа $\arcsin\sqrt{\frac{1+2x}{2}}$ и $\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{1+2x}{1-2x}}$ лежат в промежутке $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$, в котором тангенс изменяется монотонно. Поэтому достаточно доказать, что

$$\operatorname{tg}\left(\arcsin\sqrt{\frac{1+2x}{2}}\right)=\operatorname{tg}\left(\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{1+2x}{1-2x}}\right).$$

Последнее вытекает из равенства

$$\operatorname{tg}\left(\arcsin\sqrt{\frac{1+2x}{2}}\right)=\frac{\sin\left(\arcsin\sqrt{\frac{1+2x}{2}}\right)}{\sqrt{1-\sin^2\left(\arcsin\sqrt{\frac{1+2x}{2}}\right)}}=$$

$$=\frac{\sqrt{\frac{1+2x}{2}}}{\sqrt{1-\frac{1+2x}{2}}}=\sqrt{\frac{1+2x}{1-2x}}.$$

## Задания базового уровня сложности

Вычислите:

**1.** $\dfrac{1}{1-\cos^2\alpha}$, если $\operatorname{tg}\alpha=-2,\ \alpha\in\text{II ч}.$

**2.** $\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}\alpha\cdot\sin^2\alpha$, если $\cos\alpha=-\dfrac{4}{5},\ \alpha\in\text{III ч}.$

**3.** $\dfrac{2\sin2\alpha-3\cos2\alpha}{4\sin2\alpha+5\cos2\alpha}$, если $\operatorname{tg}\alpha=-3,\ \alpha\in\text{II ч}.$

**4.** $\operatorname{tg}^2\alpha+\operatorname{ctg}^2\alpha$, если $\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{ctg}\alpha=3$

**5.** $\operatorname{tg}(\alpha-\beta)$, если $\sin\alpha=\dfrac{3}{5},\ \alpha\in\text{II ч.},\ \cos\beta=0{,}8,\ \beta\in\text{II ч.}$

**6.** $\sin(\alpha+\beta)$, если $\cos\alpha=-0{,}6,\ \alpha\in\text{II ч.},\ \cos\beta=0{,}28,\ \beta\in\text{IV ч.}$

**7.** $\cos\beta$, если $\sin\alpha=\dfrac{3}{5},\ \alpha\in\text{I ч.},\ \cos(\alpha+\beta)=0,\ \beta\in\text{III ч.}$

**8.** $\sin(\alpha-\pi)$, если $\operatorname{ctg}\alpha=2\sqrt{6},\ \alpha\in\text{III ч}.$

**9.** $1+5\sin 2\alpha-\dfrac{3}{\cos 2\alpha}$, если $\operatorname{tg}\alpha=-2$

**10.** $2-13\cos 2\alpha+\dfrac{1}{\sin 2\alpha}$, если $\operatorname{ctg}\alpha=-\dfrac{1}{5}$

**11.** $\sin\alpha$, если $\cos 2\alpha=\dfrac{7}{8}$, $\alpha\in \text{IV ч}$.

**12.** $5\operatorname{tg}540^\circ+2\cos 1170^\circ+4\sin 990^\circ$

**13.** $\sin 25^\circ\cos 65^\circ+\sin^2 115^\circ\cos^2 245^\circ+\sin^2 295^\circ\cos^2 335^\circ$

**14.** $\dfrac{(\operatorname{ctg}44^\circ+\operatorname{tg}226^\circ)\cdot\cos 406^\circ}{\cos 316^\circ}-\operatorname{ctg}72^\circ\operatorname{ctg}18^\circ$

**15.** $\dfrac{1}{\operatorname{tg}368^\circ}+\dfrac{2\sin 2550^\circ\cos(-188^\circ)}{2\cos 638^\circ+\cos 98^\circ}$

**16.** $\dfrac{\sin 20^\circ\cos 10^\circ+\cos 160^\circ\cos 100^\circ}{\sin 21^\circ\cos 9^\circ+\cos 159^\circ\cos 99^\circ}$

**17.** $\dfrac{\cos 68^\circ\cos 8^\circ+\cos 82^\circ\cos 22^\circ}{\cos 69^\circ\cos 9^\circ+\cos 81^\circ\cos 21^\circ}$

**18.** $\dfrac{\cos 64^\circ\cos 4^\circ-\cos 86^\circ\cos 26^\circ}{\cos 71^\circ\cos 41^\circ-\cos 49^\circ\cos 19^\circ}$

**19.** $\dfrac{\sin 24^\circ\cos 6^\circ-\sin 6^\circ\sin 66^\circ}{\cos 21^\circ\cos 39^\circ+\sin 39^\circ\sin 21^\circ}$

**20.** $\dfrac{\cos 66^\circ\cos 6^\circ+\cos 84^\circ\cos 24^\circ}{\cos 65^\circ\cos 5^\circ+\cos 85^\circ\cos 25^\circ}$

**21.** $\arcsin\left(-\dfrac{1}{2}\right)-\operatorname{arctg}\sqrt{3}-\arccos(-1)$

**22.** $\dfrac{\cos\left(\arcsin\dfrac{1}{2}\right)}{\operatorname{tg}\left(\arccos\left(-\dfrac{1}{2}\right)\right)}$

**23.** $\operatorname{arcctg}\left(-\sqrt{3}\right)+\dfrac{1}{2}\arcsin\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$

**24.** $\operatorname{ctg}\left(\arcsin\left(-\dfrac{1}{2}\right)\right)+\cos\left(\operatorname{arctg}\left(-\sqrt{3}\right)\right)$

**25.** $\operatorname{tg}\left(\arcsin\dfrac{8}{17}\right)$

**26.** $\cos\left(\arcsin\left(-\dfrac{8}{17}\right)-\arccos\left(-\dfrac{3}{5}\right)\right)$

Упростите выражения:

**27.** $\sin(180^\circ+\alpha)-\cos(90^\circ+\alpha)+\mathrm{ctg}(360^\circ-\alpha)+\mathrm{tg}(270^\circ-\alpha)$

**28.** $\dfrac{1+\mathrm{ctg}2\alpha\mathrm{ctg}\alpha}{\mathrm{tg}\alpha+\mathrm{ctg}\alpha}$

**29.** $\mathrm{tg}(45^\circ+\alpha)-\dfrac{1+\mathrm{tg}\alpha}{1-\mathrm{tg}\alpha}$

**30.** $\dfrac{1+\sin 2\alpha}{\cos(2\alpha-2\pi)\mathrm{ctg}\left(\alpha-\dfrac{5\pi}{4}\right)}$

**31.** $\left(\mathrm{tg}^2\alpha-\sin^2\alpha\right)\mathrm{ctg}^2\alpha+\cos^2\alpha$

**32.** $(\sin\alpha+\cos\alpha)^2+(\sin\alpha-\cos\alpha)^2$

**33.** $\dfrac{\mathrm{tg}\alpha}{\mathrm{tg}\alpha+\mathrm{ctg}\alpha}+\cos^2\alpha$

**34.** $\dfrac{(\sin\alpha+\cos\alpha)^2-1}{\mathrm{ctg}\alpha-\sin\alpha\cos\alpha}-2\mathrm{tg}^2\alpha$

**35.** $\dfrac{1-\mathrm{ctg}^2\alpha}{\mathrm{tg}\alpha-1}-\mathrm{ctg}\alpha+1$

**36.** $\dfrac{\mathrm{tg}^2\alpha}{1+\mathrm{tg}^2\alpha}\cdot\dfrac{1+\mathrm{ctg}^2\alpha}{\mathrm{ctg}^2\alpha}-\dfrac{1+\mathrm{tg}^4\alpha}{\mathrm{tg}^2\alpha+\mathrm{ctg}^2\alpha}$

**37.** $\cos\dfrac{2\pi}{5}+\cos\dfrac{4\pi}{5}$

**38.** $\sin^4\dfrac{\pi}{16}+\sin^4\dfrac{3\pi}{16}+\sin^4\dfrac{5\pi}{16}+\sin^4\dfrac{7\pi}{16}$

**39.** $\sin\dfrac{3\pi}{10}-\sin\dfrac{\pi}{10}$

Докажите тождества:

**40.** $\dfrac{2\cos2\alpha-\sin4\alpha}{2\cos2\alpha+\sin4\alpha}=\mathrm{tg}^2(45^\circ-\alpha)$

**41.** $\mathrm{ctg}(\pi+\alpha)-\dfrac{\cos\left(\dfrac{3\pi}{2}-\alpha\right)}{1\text{-}\cos(\pi-\alpha)}=-\dfrac{1}{\sin\alpha}$

**42.** $\dfrac{\sin^2(\alpha-\pi)+\cos^2\left(\dfrac{3\pi}{2}-\alpha\right)\cdot\sin\left(\dfrac{\pi}{2}+\alpha\right)\cdot}{\mathrm{tg}^2\left(\dfrac{\pi}{2}-\alpha\right)\cdot\cos^2\left(\alpha-\dfrac{3\pi}{2}\right)\cdot\sin^2\left(\dfrac{\alpha}{2}-\dfrac{\pi}{2}\right)}=2\mathrm{tg}^2\alpha$

**43.** $\cos^2(\alpha+\beta)+\cos^2(\alpha-\beta)-\cos 2\alpha\cos 2\beta=1$

**44.** $\dfrac{\sin 3\alpha}{\sin\alpha}-\dfrac{\cos 3\alpha}{\cos\alpha}=2$

**45.** $\cos(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta)=\cos^2\alpha-\sin^2\beta$

**46.** $\dfrac{\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)-\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)}{\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)+\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)}=\sin 2\alpha$

**47.** $\sin 70^\circ\sin 50^\circ\sin 10^\circ=\dfrac{1}{8}$

**48.** $\cos 105^\circ-\sin 195^\circ+\sin(-135^\circ)=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

**49.** $16\sin 20^\circ\sin 40^\circ\sin 60^\circ\sin 80^\circ=3$

## ОТВЕТЫ

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| **1** | 1,25 | **14** | 0 | **27** | 1 |
| **2** | 0,48 | **15** | 1 | **28** | 0 |
| **3** | 7 | **16** | 1 | **29** | -1 |
| **4** | 0 | **17** | -1 | **30** | 1 |
| **5** | 0,8 | **18** | 1 | **31** | 2 |
| **6** | -0,8 | **19** | 1 | **32** | 1 |
| **7** | 0,2 | **20** | $-\dfrac{3\pi}{2}$ | **33** | 0 |
| **8** | 2 | **21** | -0,5 | **34** | 2 |
| **9** | 11,4 | **22** | $\dfrac{2\pi}{3}$ | **35** | 0 |
| **10** | -0,25 | **23** | $\dfrac{1}{2}-\sqrt{3}$ | **36** | 0 |
| **11** | -4 | **24** | $\dfrac{8}{15}$ | **37** | -0,5 |
| **12** | 1 | **2** | $-\dfrac{77}{85}$ | **38** | 1,5 |
| **13** | 1 | **26** | 0 | **39** | 0,5 |

## §5. Тригонометрические уравнения

### Простейшие тригонометрические уравнения

Простейшими тригонометрическими уравнениями называются уравнения вида:

1. $\sin x = a$.
2. $\cos x = b$.
3. $\mathrm{tg} x = c$.
4. $\mathrm{ctg} x = d$.

Решить уравнение $\sin x = a$ – это значит найти все числа $x$ (или углы), синус которых равен $a$. А все эти числа заключены в формуле

$$x = (-1)^k \cdot \arcsin a + \pi k,\ k \in Z.$$

Таким образом, при $|a| \le 1$ уравнение имеет бесчисленное множество решений и не имеет ни одного решения при $|a| \rangle 1$. Аналогично для уравнения $\cos x = b$. Все его решения заключены в формуле

$$x = \pm \arccos b + 2\pi n,\ n \in Z.$$

Уравнения $\mathrm{tg} x = c$ и $\mathrm{ctg} x = d$ имеют решения при любых действительных $c$ и $d$. Все эти решения заключены соответственно в формулах

$$x = \mathrm{arctg} c + \pi m,\ m \in Z,$$
$$x = \mathrm{arcctg} d + \pi l,\ l \in Z.$$

Рекомендуется помнить все эти формулы и их частные случаи, когда $a = \pm 1$, $a = 0$, $b = \pm 1$, $b = 0$:

если $\sin x = 1$, то $x = \dfrac{\pi}{2} + 2\pi n,\ n \in Z$;

если $\sin x = -1$, то $x = -\dfrac{\pi}{2} + 2\pi n,\ n \in Z$;

если $\sin x = 0$, то $x = \pi n,\ n \in Z$;

если $\cos x = 1$, то $x = 2\pi n,\ n \in Z$;

если $\cos x = -1$, то $x = \pi + 2\pi n,\ n \in Z$;

если $\cos x = 0$, то $x = \dfrac{\pi}{2} + \pi n,\ n \in Z$.

**П р и м е р 14.** Решить уравнение

$$\sin\left(\frac{5\pi}{3} \cdot \cos \pi x\right) = \frac{1}{2}.$$

*Решение*. Сразу находим, что $\frac{5\pi}{3}\cdot\cos\pi x=(-1)^k\frac{\pi}{6}+\pi k,\ k\in Z$, откуда $\cos\pi x=\frac{3}{5}\left((-1)^k\frac{1}{6}+k\right)$. Последнее уравнение имеет решения для тех значений $k$, для которых $\left|(-1)^k\cdot\frac{1}{6}+k\right|\le\frac{5}{3}$, т.е. для $k=0$ и $k=\pm1$. При этих значениях $n$ имеем три простейших уравнения:

1. $\cos\pi x=\frac{1}{10},\ \pi x_1=\pm\arccos\frac{1}{10}+2\pi n,\ n\in Z$;

$x_1=\pm\frac{1}{\pi}\arccos\frac{1}{10}+2n,\ n\in Z$.

2. $\cos\pi x=\frac{1}{2},\ \pi x_2=\pm\frac{\pi}{3}+2\pi k,\ k\in Z$;

$x_2=\pm\frac{1}{3}+2k,\ k\in Z$.

3. $\cos\pi x=-\frac{7}{10},\ \pi x_3=\pm\arccos\left(-\frac{7}{10}\right)+2\pi m,\ m\in Z$;

$x_3=\pm\frac{1}{\pi}\left(\pi-\arccos\frac{7}{10}\right)+2m,\ m\in Z$.

*Ответ*:

$\left\{\pm\frac{1}{\pi}\arccos\frac{1}{10}+2n, \pm\frac{1}{3}+2k, \pm\frac{1}{\pi}\left(\pi-\arccos\frac{7}{10}\right)+2m\right\},\ n,m,k\in Z$.

Отметим тригонометрические уравнения вида:

1. $\sin^2 x=a^2$.
2. $\cos^2 x=b^2$.
3. $\mathrm{tg}^2 x=c^2$.
4. $\mathrm{ctg}^2 x=d^2$.

Все решения уравнения $\sin^2 x=a^2$ содержатся в формуле

$$x=\pm\arcsin a+\pi n,\ n\in Z.$$

Все решения уравнения $\cos^2 x=b^2$ имеются в формуле

$$x=\pm\arccos b+\pi k,\ k\in Z.$$

Все решения уравнения $\mathrm{tg}^2 x=c^2$ содержатся в формуле

$$x=\pm\mathrm{arctg} c+\pi m,\ m\in Z,$$

а решения уравнения $\mathrm{ctg}^2 x=d^2$ – в формуле

$$x=\pm\mathrm{arcctg} d+\pi l,\ l\in Z.$$

Если уравнение не является простейшим, то с помощью тождественных преобразований его нужно свести к одному или нескольким простейшим. При этом по возможности нужно избегать тех преобразований, которые нарушают равносильность.

### Сведение тригонометрических уравнений к простейшим с помощью тождественных преобразований

**Пример 15.** Решить уравнение

$$\cos 10x - \cos 8x - \cos 6x + 1 = 0.$$

*Решение.* Сгруппируем первый член с третьим, второй с четвертым и каждую группу свернем в произведение. Имеем

$$(\cos 10x - \cos 6x) + (1 - \cos 8x) = 0,$$

$$-2\sin 8x \sin 2x + 2\sin^2 4x = 0.$$

Чтобы получить общий множитель, преобразуем $\sin 8x$ по формуле двойного аргумента

$$-4\sin 4x \cos 4x \sin 2x + 2\sin^2 4x = 0.$$

Один из множителей вычитаемого ($\sin 4x$) также развернем по формуле двойного аргумента

$$-4\sin 4x \cos 4x \sin 2x + 4\sin 2x \cos 2x \sin 4x = 0,$$

$$\sin 4x \sin 2x \cdot (\cos 2x - \cos 4x) = 0.$$

Последнее уравнение распадается на три уравнения

$$\sin 4x = 0, \quad \sin 2x = 0, \quad \cos 2x - \cos 4x = 0.$$

Решая каждое из них, находим

$$4x_1 = \pi n, \quad x_1 = \frac{\pi}{4} n, \ n \in Z,$$

$$2x_2 = \pi k, \quad x_2 = \frac{\pi}{2} k, \ k \in Z.$$

Так как

$$\cos 2x - \cos 4x = 2\sin x \sin 3x = 0,$$

то

$$x_3 = \pi m, \ m \in Z,$$

$$3x_4 = \pi l, \quad x_4 = \frac{\pi}{3} l, \ l \in Z.$$

Если решение тригонометрического уравнения получено в виде нескольких формул, то необходимо проверить, не повторяют ли эти формулы одни и те же значения $x$. Так, в нашем случае $x_2 = \frac{\pi}{2}k$ содержится в формуле $x_1 = \frac{\pi}{4}n$, а $x_3 = \pi m$ – в $x_1$ или в $x_4$. Значит, формулы $x_2$ и $x_3$ не дают ничего нового по сравнению с $x_1$ и $x_4$ (они входят в них). Поэтому лишние формулы отбрасываем, и окончательно получаем:

$$x_1 = \frac{\pi}{4}n,\ n \in Z, \quad x_4 = \frac{\pi}{3}l,\ l \in Z .$$

Ответ: $\left\{\frac{\pi}{4}n, \frac{\pi}{3}l\right\}$ $n, l \in Z$ .

**П р и м е р 16.** Решить уравнение

$$\cos 2x - \frac{\sqrt{3}}{2}(\cos x + \sin x) = \frac{1}{2}(\cos x + \sin x) .$$

*Решение*. Переходим от аргумента $2x$ к аргументу $x$ и вынося за скобки общий множитель $\cos x + \sin x$, имеем

$$(\cos x + \sin x) \cdot \left(\cos x - \sin x - \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}\right) = 0 .$$

Данное уравнение распадается на два

$$\cos x + \sin x = 0 \text{ или } \sqrt{2} \cdot \sin\left(\frac{\pi}{4} + x\right) = 0 .$$

$$\cos x - \sin x = \frac{\sqrt{3}+1}{2} \text{ или } \sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{4} + x\right) = \sqrt{2}\cos\frac{\pi}{12},$$

$$\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} = \cos\frac{\pi}{6} + \cos\frac{\pi}{3} = 2\cos\frac{\pi}{4} \cdot \cos\frac{\pi}{12} = \sqrt{2}\cos\frac{\pi}{12}\right).$$

Из уравнения $\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = 0$ находим $x_1 = -\frac{\pi}{4} + \pi n,\ n \in Z$ .

Из уравнения $\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \cos\frac{\pi}{12}$ следует, что

$$\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) - \cos\frac{\pi}{12} = 0,$$

$$-2\sin\frac{x + \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{12}}{2} \cdot \sin\frac{x + \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{12}}{2} = -2\sin\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{6}\right) \cdot \sin\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{12}\right),$$

$$\sin\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{6}\right)=0,\quad \frac{x}{2}+\frac{\pi}{6}=\pi k,\quad x_2=-\frac{\pi}{3}+2\pi k,\ k\in Z\ ,$$

$$\sin\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{12}\right)=0,\quad x_3=-\frac{\pi}{6}+2\pi m,\ m\in Z\ .$$

Итак, все решения данного уравнения содержатся в формулах

$$x_1=-\frac{\pi}{4}+\pi n,\ n\in Z\ ,\quad x_2=-\frac{\pi}{3}+2\pi k,\ k\in Z\ ,\quad x_3=-\frac{\pi}{6}+2\pi m,\ m\in Z\ .$$

*Ответ*: $\left\{-\frac{\pi}{4}+\pi n,-\frac{\pi}{3}+2\pi k,-\frac{\pi}{6}+2\pi m\right\},\ n,m,k\in Z$ .

**П р и м е р 17.** Решить уравнение

$$\mathrm{tg}x+\mathrm{tg}2x=\mathrm{tg}3x\ .$$

*Решение*. Уравнение содержит тангенсы углов, поэтому необходимо указать ОДЗ входящих в него функций

$$\cos x\neq 0,\quad \cos 2x\neq 0,\quad \cos 3x\neq 0,$$

т.е. $x\neq\frac{\pi}{2}+\pi k,\quad x\neq\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}k,\quad x\neq\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{3}k,\ k\in Z$ .

Преобразуя сумму тангенсов в произведение и перенося $\mathrm{tg}3x$ в левую часть уравнения, имеем

$$\frac{\sin 3x}{\cos x\cos 2x}-\frac{\sin 3x}{\cos 3x}=0\ .$$

После приведения к общему знаменателю получаем:

$$\sin 3x\cos 3x-\sin 3x\cos x\cos 2x=0\ .$$

Это уравнение равносильно совокупности двух уравнений

$$\sin 3x=0\ \text{ и }\ \cos 3x-\cos x\cos 2x\ =\ 0\ .$$

Решая первое из них, получаем $3x_1=\pi n,\ \ x_1=\frac{\pi}{3}n,\ n\in Z$. Во втором уравнении произведение $\cos x\cos 2x$ преобразуем в сумму. Получаем:

$$\frac{1}{2}\left(\cos 3x+\cos x\right)-\cos 3x=0\ \text{ или }\ \cos 3x=\cos x\ ,$$

$$-2\sin 2x\cdot\sin x=0\ ,$$

$$x_2=\pi m,\quad x_3=\frac{\pi}{2}l,\quad m,l\in Z\ .$$

Анализируя полученные формулы для $x_1$, $x_2$, $x_3$, замечаем, что $x_1$ и $x_2$ удовлетворяют данному уравнению при всех целых значениях $n$, а из $x_3$ нужно исключить углы $x_3' = \dfrac{\pi(2k+1)}{2} = \dfrac{\pi}{2} + \pi k$, для которых $\cos x_3' = 0 \ (n = 2k+1)$.

Если же $n = 2k$, то выражение $\dfrac{\pi \cdot 2k}{2} = \pi k$ входит в формулу для $x_2$. Таким образом, все решения данного уравнения содержатся в формуле $x = \dfrac{\pi}{3} n,\ n \in Z$.

*Ответ*: $\left\{ \dfrac{\pi}{3} n \right\},\ n \in Z$.

**П р и м е р 18.** Решить уравнение

$$4\sin(2x + 20°) - \cos(2x + 200°) = 3.$$

*Решение*. Замечая, что $\cos(2x + 200°) = -\cos(2x + 20°)$, имеем

$$4\sin(2x + 20°) + \cos(2x + 20°) = 3,$$

$$\sqrt{17}\sin(2x + 20° + \varphi) = 3,$$

где $\varphi = \arcsin\dfrac{1}{\sqrt{17}}$.

Итак, получаем простейшее уравнение

$$\sin(2x + 20° + \varphi) = \frac{3}{\sqrt{17}},$$

откуда находим, что

$$2x + 20° + \varphi = (-1)^m \arcsin\frac{3}{\sqrt{17}} + 180° \cdot m,\ m \in Z,$$

$$x = -\frac{180°}{18} - \frac{1}{2}\arcsin\frac{1}{\sqrt{17}} + \frac{1}{2}(-1)^m \arcsin\frac{3}{\sqrt{17}} + \frac{180°}{2} \cdot m,\ m \in Z.$$

*Ответ*:

$$\left\{ -\frac{180°}{18} - \frac{1}{2}\arcsin\frac{1}{\sqrt{17}} + \frac{1}{2}(-1)^m \arcsin\frac{3}{\sqrt{17}} + \frac{180°}{2} \cdot m \right\},\ m \in Z.$$

**П р и м е р 19.** Решить уравнение

$$2\cos^2(80° - x) + \cos 2x = 1 + \sin 20°.$$

*Решение*. Понижая вторую степень косинуса, имеем

$$1+\cos\left(160°-2x\right)+\cos 2x=1+\sin 20°.$$

Свертывая сумму косинусов в произведение, получаем:

$$2\cos 80°\cos\left(80°-2x\right)=\sin 20°$$

или

$$2\sin 10°\cos\left(80°-2x\right)=2\sin 10°\cdot\cos 10°.$$

Отсюда следует, что $\cos\left(80°-2x\right)=\cos 10°$, т.е.

$$\cos\left(80°-2x\right)-\cos 10°=0,$$

$$-2\sin\left(35°-x\right)\sin\left(45°-x\right)=0.$$

Итак, $x_1-35°=180°n,\ \ n\in Z;\quad x_2-45°=180°k,\ \ k\in Z.$

*Ответ*: $\left\{35°+180°n, 45°+180°k\right\},\ n,k\in Z$.

**П р и м е р  20.** Решить уравнение

$$\sin^6\frac{2x-3}{2}+\cos^6\frac{2x-3}{2}=\frac{7}{16}.$$

*Решение*. Используя тождество $a^3+b^3=\left(a+b\right)^3-3ab\left(a+b\right)$, где $a=\sin^2\frac{2x-3}{2}$, $b=\cos^2\frac{2x-3}{2}$, и учитывая, что $a+b=1$, имеем

$$1-3\sin^2\frac{2x-3}{2}\cdot\cos^2\frac{2x-3}{2}=\frac{7}{16}$$

или

$$\sin^2\left(2x-3\right)=\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2.$$

Решая последнее уравнение, находим

$$2x-3=\pm\arcsin\frac{\sqrt{3}}{2}+\pi n=\pm\frac{\pi}{3}+\pi n,\quad x=\frac{3}{2}\pm\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{2}n.$$

*Ответ*: $\left\{\frac{3}{2}\pm\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{2}n\right\},\ n\in Z$.

**П р и м е р  21.** Решить уравнение

$$\mathrm{tg}\left(40°+x\right)\cdot\mathrm{ctg}\left(5°-x\right)=\frac{2}{3}.$$

*Решение*. Множество допустимых значений данного уравнения состоит из всех действительных значений *x*, для которых

$$\sin(5^\circ - x) \neq 0, \quad \cos(40^\circ + x) \neq 0.$$

Переходя в левой части уравнения к функциям синус и косинус и преобразуя числитель и знаменатель в сумму, получаем уравнение

$$3\left(\sin 45^\circ + \sin(35^\circ + 2x)\right) = 2\left(\sin 45^\circ - \sin(35^\circ + 2x)\right),$$

равносильное данному на его множестве допустимых значений.

Последнее уравнение приводится к простейшему

$$\sin(35^\circ + 2x) = -\frac{\sqrt{2}}{10},$$

откуда находим, что

$$x = -\frac{7 \cdot 180^\circ}{72} + \frac{(-1)^{n+1}}{2}\arcsin\frac{\sqrt{2}}{10} + \frac{180^\circ}{2}n.$$

*Ответ*: $\left\{-\frac{7 \cdot 180^\circ}{72} + \frac{(-1)^{n+1}}{2}\arcsin\frac{\sqrt{2}}{10} + \frac{180^\circ}{2}n\right\},\ n \in Z.$

**Пример 22.** Решить уравнение

$$\sin\frac{x}{2} \cdot \cos 2x = 1.$$

*Решение*. Так как $\left|\sin\frac{x}{2}\right| \leq 1$ и $|\cos 2x| \leq 1$, то левая часть уравнения равна 1 тогда и только тогда, когда одновременно

либо а) $\begin{cases} \sin\frac{x}{2} = 1, \\ \cos 2x = 1, \end{cases}$ либо б) $\begin{cases} \sin\frac{x}{2} = -1, \\ \cos 2x = -1. \end{cases}$

В случае «а» из первого уравнения находим, что $\frac{x}{2} = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$, т.е. $x = \pi + 4\pi n$. Из этих значений *x* нужно выбрать такие, которые одновременно удовлетворяют и второму уравнению. Подставляя эти значения *x* в левую часть второго уравнения, получаем:

$$\cos 2(\pi + 4\pi n) = \cos 2\pi = 1.$$

Таким образом, значения $x = \pi + 4\pi n$ являются решением нашего уравнения.

В случае «б» из первого уравнения находим, что $\frac{x}{2} = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k$, откуда $x = -\pi + 4\pi k$. Подставляя эти значения в левую часть второго уравнения, имеем

$$\cos 2(-\pi + 4\pi n) = \cos 2\pi = 1.$$

Последнее означает, что $x = -\pi + 4\pi k$, $k \in Z$ не является решение системы «б», следовательно, и данного уравнения.

*Ответ*: $\{\pi + 4\pi n\}$, $n \in Z$.

## Сведение тригонометрического уравнения к рациональному уравнению с одним неизвестным

Пусть тригонометрическое уравнение приведено к одному аргументу, т.е. все тригонометрические функции, входящие в уравнение, содержат один и тот же аргумент $\alpha$. Тогда все тригонометрические функции могут быть выражены через какую-либо одну функцию, и получаем уравнение с одним неизвестным. Такой метод решения целесообразен в том случае, когда результатом всех преобразований является рациональное уравнение невысокой степени, равносильное данному.

**Пример 23.** Решить уравнение

$$3\sin x - 2\cos x = 2.$$

*Решение.* Предполагая, что $x \neq \pi + 2\pi n$, выразим $\sin x$ и $\cos x$ через $\operatorname{tg}\frac{x}{2}$. Получим уравнение

$$3 \cdot \frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2\frac{x}{2}} - 2 \cdot \frac{1 - \operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2\frac{x}{2}} = 2,$$

которое после приведения к общему знаменателю и дальнейших упрощений примет вид

$$\operatorname{tg}\frac{x}{2} = \frac{2}{3}.$$

Отсюда находим, что

$$x = 2\operatorname{arctg}\frac{2}{3} + 2\pi k.$$

Остается проверить, будут ли числа $x=\pi+2\pi n$ удовлетворять исходному уравнению. Подставляя их в левую часть этого уравнения

$$3\sin\left(\pi+2\pi n\right)-2\cos\left(\pi+2\pi n\right)=-2\cos\pi=2,$$

убеждаемся, что они также ему удовлетворяют.

*Ответ*: $\left\{2\operatorname{arctg}\frac{2}{3}+2\pi k,\, \pi+2\pi n\right\},\ n,k\in Z$.

Тригонометрическое уравнение вида

$$A_0\cos^n x+A_1\cos^{n-1}x\sin x+A_2\cos^{n-2}x\sin x^2+...+A_n\sin^n x=0 \qquad (1.42)$$

называется однородным уравнением относительно функций $\sin x$ и $\cos x$. Степень его однородности равна $n$.

Предположим, что коэффициенты $A_0 \neq 0$ и $A_n \neq 0$. В этом случае решениями уравнения не могут быть те значения $x$, для которых $\sin x = 0$ или $\cos x = 0$. А если это так, то, разделив уравнение на $\cos^n x$ или $\sin^n x$, получим уравнение

$$A_0\operatorname{tg}^n x+A_1\operatorname{tg}^{n-1}x+...+A_n=0 \qquad (1.43)$$

или

$$A_0+A_1\operatorname{ctg}x+A_2\operatorname{ctg}^2 x+...+A_n\operatorname{ctg}^n x=0, \qquad (1.44)$$

равносильное данному. Эти уравнения являются рациональными относительно $\operatorname{tg}x$ или $\operatorname{ctg}x$ соответственно.

В том случае, когда коэффициенты $A_0$ или $A_n$ обращаются в нуль, левая часть исходного уравнения раскладывается на множители. Приравнивая к нулю каждый из них, получаем два уравнения, из которых одно простейшее $\cos x = 0$ (или $\sin x = 0$), а другое – однородное, сводящееся к уравнениям (1.43) и (1.44).

**П р и м е р 24.** Решить уравнение

$$\sin^3 2x+\cos 2x\cos 4x=3\sin 2x\cos^2 2x-\cos 2x.$$

*Решение*. Переходя к аргументу $2x$, имеем уравнение

$$\sin^3 2x+\cos 2x=3\sin 2x\cos^2 2x-\cos 2x\cos 4x$$

или

$$2\cos^3 2x-3\sin 2x\cos^2 2x+\sin^3 2x=0,$$

которое равносильно уравнению

$$\operatorname{tg}^3 2x-3\operatorname{tg}x+2=0.$$

Последнее распадается на два:

$$\mathrm{tg}2x - 1 = 0 \ \text{ и } \ \mathrm{tg}2x + 2 = 0.$$

Решая их, находим

$$2x_1 = \frac{\pi}{4} + \pi n, \quad x_1 = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi}{2}n, \ n \in Z,$$

$$2x_2 = -\mathrm{arctg}2 + \pi k, \quad x_2 = -\frac{1}{2}\mathrm{arctg}2 + \frac{\pi}{2}k, \ k \in Z.$$

*Ответ*: $\left\{\frac{\pi}{8} + \frac{\pi}{2}n, -\frac{1}{2}\mathrm{arctg}2 + \frac{\pi}{2}k\right\}, \ n, k \in Z$.

**Пример 25.** Решить уравнение

$$\sin(x+5) + \cos(x-2) = \cos(x+7).$$

*Решение.* Это однородное уравнение относительно $\sin x$ и $\cos x$. Раскрывая синус и косинус суммы и разности и группируя члены, имеем

$$\sin x(\cos 5 + \sin 2 + \sin 7) + \cos x(\sin 5 + \cos 2 - \cos 7) = 0.$$

Так как $\cos 5 > 0$, $\sin 2 > 0$, $\sin 7 > 0$, то $\cos 5 + \sin 2 + \sin 7 > 0$ и последнее уравнение равносильно уравнению

$$\mathrm{tg}x = \frac{\cos 7 - \sin 5 - \cos 2}{\cos 5 + \sin 2 + \sin 7},$$

откуда получаем:

$$x = \mathrm{arctg}\frac{\cos 7 - \sin 5 - \cos 2}{\cos 5 + \sin 2 + \sin 7} + \pi n, \ n \in Z.$$

*Ответ*: $\left\{\mathrm{arctg}\frac{\cos 7 - \sin 5 - \cos 2}{\cos 5 + \sin 2 + \sin 7} + \pi n\right\}, \ n \in Z$.

## Решения уравнений, содержащих обратные тригонометрические функции

При решении уравнений, связанных с аркфункциями, используется свойство однозначности тригонометрических функций, заключающееся в том, что равным аргументам соответствуют равные значения одноименных тригонометрических функций, если они имеют смысл для этих аргументов.

Вычисляя эти функции от аргументов, заданных в виде аркфункций, получаем более простое уравнение (например, алгебраическое). Проверка корней необходима, так как из условия равенства одноименных тригонометрических функций не всегда следует равенство их аргументов.

**П р и м е р 26.** Решить уравнение

$$\arcsin\frac{3}{5}x + \arcsin\frac{4}{5}x = \arcsin x .$$

*Решение*. Область допустимых значений $|x| \le 1$. Приравнивая синусы правой и левой частей заданного уравнения и учитывая, что $\sin(\arcsin a) = a$ и $\cos\left(\arcsin a = \sqrt{1-a^2}\right)$ при любом $-1 \le a \le 1$, получаем:

$$\sin\left(\arcsin\frac{3}{5}x + \arcsin\frac{4}{5}x\right) = \sin(\arcsin x),$$

$$\sin\left(\arcsin\frac{3}{5}x\right)\cos\left(\arcsin\frac{4}{5}x\right) + \sin\left(\arccos\frac{4}{5}x\right)\cos\left(\arcsin\frac{3}{5}x\right) = x .$$

Таким образом, имеем

$$\frac{3}{5}x\sqrt{1-\frac{16}{25}x^2} + \frac{4}{5}x\sqrt{1-\frac{9}{25}x^2} = x .$$

Выделяя корень $x = 0$, после необходимых преобразований находим

$$25 - 9x^2 = 16, \quad x_1 = \pm 1.$$

Итак, получаем три корня $x_1=0$, $x_2=-1$, $x_3=1$. Непосредственной подстановкой их в исходное уравнение убеждаемся, что все они подходят.

*Ответ*: $\{-1, 0, 1\}$.

**П р и м е р 27.** Решить уравнение

$$2\arcsin x + \arccos(1-x) = 0 .$$

*Решение*. Область допустимых значений – множество всех $x$, удовлетворяющих неравенствам $|x| \le 1$ и $|1-x| \le 1$; отсюда следует, что $0 \le x \le 1$.

Так как $0 \le x \le 1$, то $0 \le 2\arcsin x \le \pi$ и $0 \le \arcsin x \le \frac{\pi}{2}$. Поэтому сумма этих выражений равна нулю в том и только в том случае, когда оба слагаемых обращаются в нуль одновременно, т.е.

$$2\arcsin x = 0 \text{ и } \arccos(1-x) = 0 .$$

Последнее выполняется только при $x = 0$.

*Ответ*: 0.

## Задания базового уровня сложности

Решите уравнения:

**1.** $\cos(45° - x) + \sin(45° + x) = 0$

**2.** $\cos\left(3x + \frac{\pi}{2}\right) = 1$

**3.** $\cos(360° + x) + 2\sin(270° + x) = 1$

**4.** $\cos 2x = 2\sin^2 x$

**5.** $\sin x + \cos x = 1$

**6.** $\cos^4 x - \cos^2 x = 0$

**7.** $\sin 2x = 2\sin x$

**8.** $(\mathrm{tg} x + 1) \cdot \cos x = 0$

**9.** $\mathrm{tg}^2 x + \mathrm{ctg}^2 x = 2$

**10.** $2\sin^2 x = 3\cos(360° - x)$

**11.** $\sin^2 x - 4\sin x \cos x + 3\cos^2 x = 0$

**12.** $\cos^2 x - 3\sin x \cos x + 1 = 0$

**13.** $2\cos^2 x - 3\sin x \cos x - 2\sin^2 x = 0$

**14.** $\cos 6x = \cos 8x$

**15.** $\cos 10x = \sin 5x$

**16.** $\sin x \sin 3x + \sin 4x \sin 8x = 0$

**17.** $\cos 6x \cos 12x = \cos 8x \cos 10x$

**18.** $\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + \sin x = -\sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right)$

**19.** $\sin^2 x - 3\cos^2 x = 0$

**20.** $3\sin^2 x - 5\sin x \cos x = 0$

## Задания повышенного уровня сложности

Решите уравнения

**C1.** $\sqrt{(3\sin x - 4)^2} + \sqrt{\sin^2 x - 6\sin x + 9} = 7 + 2\sqrt{3}$

**C2.** $\sqrt{(\cos 1,5x - 2)^2} + \sqrt{\cos^2 1,5x - 2\cos 1,5x + 1} = 2$

**C3.** $\sqrt{(2\sin 3x - 3)^2} + \sqrt{\sin^2 3x - 8\sin 3x + 16} = 7$

**C4.** $\sqrt{(\cos 0,25x - 5)^2} - \sqrt{4\cos^2 0,25x - 20\cos 0,25x + 25} = 1$

**C5.** $2\sin x \cdot \mathrm{tg} x + 2\,\mathrm{tg} x - \cos x = 0$

**C6.** $6\cos x \cdot \mathrm{ctg} x - 6\,\mathrm{ctg} x + \sin x = 0$

**C7.** $\sin x \cdot \mathrm{tg} x + \mathrm{tg} x - 3\cos x = 0$

**С8.** $11\cos x \cdot \mathrm{ctg}x - 11\mathrm{ctg}x + 5\sin x = 0$

**С9.** $\cos 7x = \left(\sqrt{1-x^2}\right)^2 + x^2$

**С10.** $\cos 9x = \left(\sqrt{0,25-x^2}\right)^2 + x^2 - 1,25$

**С11.** $\log_{\sin x}\left(2\sin 2x + 4\sin^2 x + 1\right) = 0$

**С12.** $\log_{\cos x}\left(\sin 2x + 3\cos^2 x\right) = 2$

**С13.** $\dfrac{\left(\mathrm{tg}x + \sqrt{3}\right)\log_{13}\left(2\sin^2 x\right)}{\log_{31}\left(\sqrt{2}\cos x\right)} = 0$

**С14.** $\dfrac{\log_5(-2\cos x)}{\sqrt{5\,\mathrm{tg}x}} = 0$

**С15.** $\dfrac{3\mathrm{ctg}^2 x + 4\mathrm{ctg}x}{5\cos^2 x - 4\cos x} = 0$

**С16.** Решите уравнение $3\sin^2 x + 5\sin x + 2 = 0$ и найдите корни, принадлежащие отрезку $\left[\dfrac{\pi}{2}; 2\pi\right]$.

**С17.** Решите уравнение $6\sin^2 x - 5\sin x - 4 = 0$ и найдите корни, принадлежащие отрезку $\left[-\dfrac{7\pi}{2}; -\dfrac{2\pi}{2}\right]$.

**С18.** Решите уравнение $\mathrm{tg}^2 x + 5\mathrm{tg}x + 6 = 0$ и найдите корни, принадлежащие отрезку $\left[-2\pi; -\dfrac{\pi}{2}\right]$.

**С19.** Решите уравнение $7\sin^2 x + 8\cos x - 8 = 0$ и найдите корни, принадлежащие отрезку $\left[-\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{\pi}{2}\right]$.

**С20.** Решите уравнение $5\cos^2 x - 12\cos x + 4 = 0$ и найдите корни, принадлежащие отрезку $\left[-\dfrac{5\pi}{2}; -\pi\right]$.

# ОТВЕТЫ

| Базовый уровень сложности | | Повышенный уровень сложности | |
|---|---|---|---|
| **1** | $135° + 180° n$ | **C1** | $(-1)^{n+1}\frac{\pi}{3} + \pi n,\ n \in Z$ |
| **2** | $-\frac{\pi}{6} + \frac{2\pi}{3}k$ | **C2** | $\pm\frac{2\pi}{9} + \frac{4}{3}\pi n,\ n \in Z$ |
| **3** | $\pi + 2\pi n$ | **C3** | $\frac{\pi n}{3},\ n \in Z$ |
| **4** | $\pm\frac{\pi}{6} + \pi n$ | **C4** | $8\pi n,\ n \in Z$ |
| **5** | $\left\{\frac{\pi}{2} + \pi k;\ 2\pi n\right\}$ | **C5** | $(-1)^n \arcsin\frac{1}{3} + \pi n,\ n \in Z$ |
| **6** | $\frac{\pi}{2}n$ | **C6** | $\pm\arccos\frac{1}{5} + 2\pi n,\ n \in Z$ |
| **7** | $\pi n$ | **C7** | $(-1)^n \arcsin\frac{3}{4} + \pi n,\ n \in Z$ |
| **8** | $\left\{-\frac{\pi}{4} + \pi n;\ \frac{\pi}{2} + \pi k\right\}$ | **C8** | $\pm\arccos\frac{5}{36} + 2\pi n,\ n \in Z$ |
| **9** | $\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}n$ | **C9** | $\pm\frac{2\pi}{7},\ 0$ |
| **10** | $\pm\frac{\pi}{3} + 2\pi n$ | **C10** | $\pm\frac{\pi}{9}$ |
| **11** | $\left\{\frac{\pi}{4} + \pi n;\ \mathrm{arctg}3 + \pi k\right\}$ | **C11** | $\frac{3\pi}{4} + 2\pi n,\ n \in Z$ |
| **12** | $\left\{-\frac{\pi}{4} + \pi n;\ -\mathrm{arctg}\frac{1}{2} + \pi k\right\}$ | **C12** | $-\frac{\pi}{4} + 2\pi n,\ n \in Z$ |
| **13** | $\left\{-\mathrm{arctg}\frac{1}{2} + \pi n;\ -\mathrm{arctg}2 + \pi k\right\}$ | **C13** | $-\frac{\pi}{3} + 2\pi n,\ n \in Z$ |
| **14** | $\frac{\pi}{7}k$ | **C14** | $-\frac{2\pi}{3} + 2\pi n,\ n \in Z$ |
| **15** | $\left\{-\frac{\pi}{10} + \frac{2\pi}{5}n;\ (-1)^k \cdot \frac{\pi}{30} + \frac{\pi}{5}k\right\}$ | **C15** | $\pi - \mathrm{arcctg}\frac{4}{3} + 2\pi n,\ n \in Z$ |

| | | | |
|---|---|---|---|
| **16** | $\left\{\frac{\pi}{7}k; \frac{\pi}{5}n\right\}$ | **C16** | $-\frac{\pi}{2}+2\pi n,\quad (-1)^{m+1}\arcsin\frac{2}{3}+\pi m$, $n,m\in Z$; $\frac{3\pi}{2}, 2\pi-\arcsin\frac{2}{3}$, $\pi+\arcsin\frac{2}{3}$ |
| **17** | $\frac{\pi}{4}k$ | **C17** | $(-1)^{n+1}\frac{\pi}{6}+\pi n$, $n\in Z$; $-\frac{17\pi}{6}, -\frac{13\pi}{6}$ |
| **18** | -arctg$2+\pi k$ | **C18** | $-\mathrm{arctg}2+\pi n$, $-\mathrm{arctg}3+\pi m$, $n,m\in Z$; $-\pi-\mathrm{arctg}2$, $-\pi-\mathrm{arctg}3$ |
| **19** | $\pm\frac{\pi}{3}+\pi n$ | **C19** | $2\pi n, \pm\arccos\frac{1}{7}+2\pi m, n,m\in Z$; $0, \pm\arccos\frac{1}{7}$ |
| **20** | $\left\{\pi n; \mathrm{arctg}\frac{5}{3}+\pi k\right\}$ | **C20** | $\pm\arccos\frac{2}{5}+2\pi n, n\in Z$; $-2\pi-\arccos\frac{2}{5}, -2\pi+\arccos\frac{2}{5}$ |

## §6. Тригонометрические неравенства

Простейшими тригонометрическими неравенствами называются неравенства следующего вида:

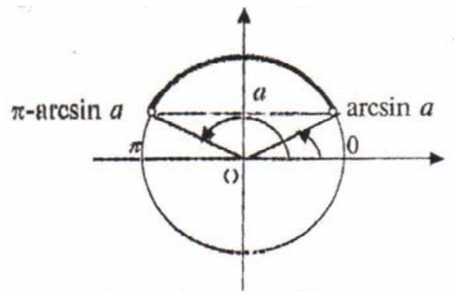
1. $a_1 < \sin\alpha < b_1$;
2. $a_2 < \cos\alpha < b_2$;
3. $a_3 < \mathrm{tg}\alpha < b_3$;
4. $a_4 < \mathrm{ctg}\alpha < b_4$;

где $a_1$, $b_1$, $a_2$, $b_2$, $a_3$, $b_3$, $a_4$, $b_4$ – заданные числа.

При решении этих неравенств удобно в качестве вспомогательного средства пользоваться графиками соответствующих тригонометрических функций или тригонометрическим кругом.

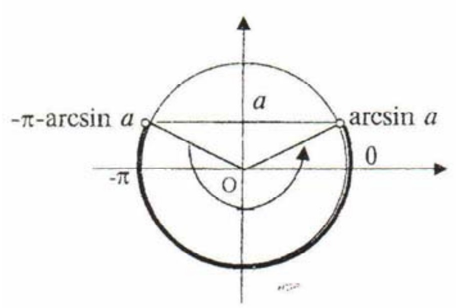
Рассмотри решение простейших тригонометрических неравенств.

Неравенству $\sin x > a$ $(|a| < 1)$ соответствуют все точки выделенной дуги единичной окружности. С учетом периода функции $\sin x$, равного $2\pi$, решение неравенства запишется в виде




$$x \in (\arcsin a + 2\pi n; \pi - \arcsin a + 2\pi n);\ n \in Z.$$

$$a \geq 1,\ x \in \varnothing; \qquad a < 1,\ x \in R; \qquad a = -1,\ x \in \left(-\frac{\pi}{2} + 2\pi n; \frac{3\pi}{2} + 2\pi n\right).$$

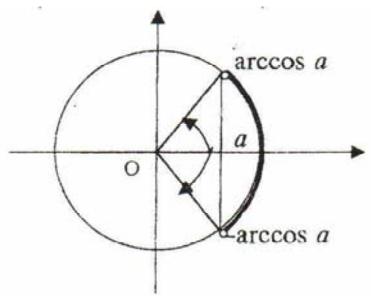



Неравенству $\sin x < a$ $(|a| < 1)$ соответствуют все точки выделенной дуги единичной окружности (направление обхода окружности – против часовой стрелки). С учетом периода функции $\sin x$, равного $2\pi$, решение неравенства запишется в виде

$$x \in (-\pi - \arcsin a + 2\pi n; \arcsin a + 2\pi n);\ n \in Z.$$

$$a \leq 1,\ x \in \varnothing; \qquad a > 1,\ x \in R; \qquad a = -1,\ x \in \left(-\frac{3\pi}{2} + 2\pi n; \frac{\pi}{2} + 2\pi n\right).$$

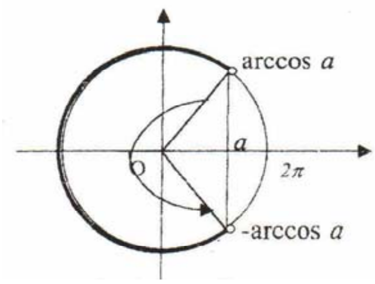
Неравенству $\cos x > a$ $(|a| < 1)$ соответствуют все точки выделенной дуги единичной окружности. С учетом периода функции $\cos x$, равного $2\pi$, решение неравенства запишется в виде




$$x \in (-\arccos a + 2\pi n; \arccos a + 2\pi n);\ n \in Z.$$

$$a \geq 1,\ x \in \varnothing; \qquad a < -1,\ x \in R; \qquad a = -1,\ x \in (-\pi + 2\pi n; \pi + 2\pi n).$$

Неравенству $\cos x < a \quad (|a| < 1)$ соответствуют все точки выделенной дуги единичной окружности. С учетом периода функции $\cos x$, равного $2\pi$, решение неравенства запишется в виде

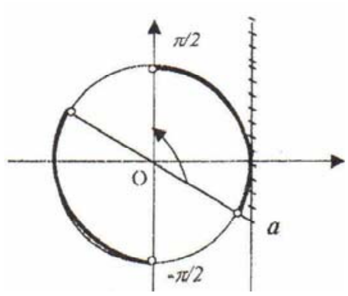



$$x \in \left(\arccos a + 2\pi n; 2\pi - \arccos a + 2\pi n\right);\ n \in Z.$$

$$a \le -1,\ x \in \varnothing; \qquad a > 1,\ x \in R; \qquad a = 1,$$
$$x \in \left(2\pi n; 2\pi + 2\pi n\right).$$

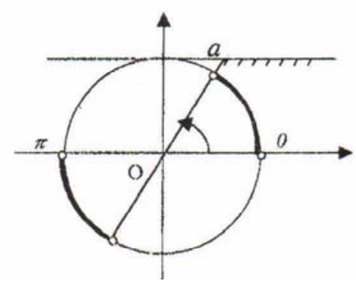
Неравенству $\operatorname{tg} x > a \quad (a \in R)$ соответствуют все точки выделенных дуг единичной окружности. С учетом периода функции $\operatorname{tg} x$, равного $\pi$, решение неравенства запишется в виде

$$x \in \left(\operatorname{arctg} x + \pi n; \frac{\pi}{2} + \pi n\right),\ n \in Z.$$




Неравенство $tg\, x < a \quad (a \in R)$ имеет решение

$$x \in \left(-\frac{\pi}{2} + \pi n; \operatorname{arctg} a + \pi n\right),\ n \in Z.$$




Неравенству $\operatorname{ctg} x > a \quad (a \in R)$ соответствуют все точки выделенных дуг единичной окружности. С учетом периода функции $\operatorname{ctg} x$, равного $\pi$, решение неравенства запишется в виде

$$x \in \left(\operatorname{arctg} x + \pi n;\ \frac{\pi}{2} + \pi n\right),\ n \in Z.$$

Неравенство $\operatorname{ctg} x < a \quad (a \in R)$ имеет решение

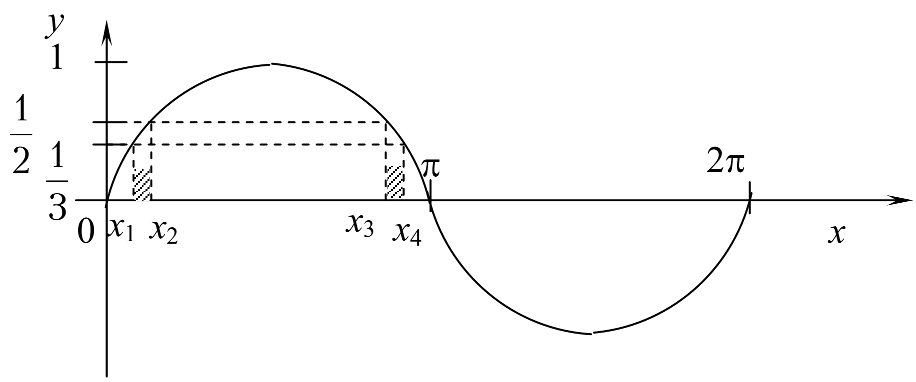
$$x \in \left(-\frac{\pi}{2} + \pi n; \operatorname{arctg} a + \pi n\right),\ n \in Z.$$

**П р и м е р 28.** Решить неравенство

$$\frac{1}{3} < \sin x < \frac{1}{2}.$$

*Решение*. Рассмотрим график функции $y = \sin x$ на отрезке (0, 2π) и отметим на нем значения $x_1 = \arcsin\frac{1}{3}$, $x_4 = \pi - \arcsin\frac{1}{3}$, синус которых равен $\frac{1}{3}$, а также $x_2 = \frac{\pi}{6}$ и $x_3 = \frac{5\pi}{6}$, синус которых равен $\frac{1}{2}$. Эти четыре точки разбивают весь промежуток $(0,\ 2\pi)$ на пять промежутков: $(0,\ x_1)$, $(x_1, x_2)$, $(x_2, x_3)$, $(x_3, x_4)$, $(x_4, 2\pi)$. Исследуя изменение $\sin x$ на каждом из этих промежутков, убеждаемся, что $\frac{1}{3} < \sin x < \frac{1}{2}$ на промежутках $(x_1,\ x_2)$ и $(x_3,\ x_4)$, т.е. на промежутках $\left(\arcsin\frac{1}{3}, \frac{\pi}{6}\right)$ и $\left(\frac{5\pi}{6}, \pi - \arcsin\frac{1}{3}\right)$. Переходя от промежутка $(0,\ 2\pi)$ на всю числовую ось и учитывая периодичность синуса, окончательно получаем: $\frac{1}{3} < \sin x < \frac{1}{2}$ на всех промежутках, т.е.

$$\left(\arcsin\frac{1}{3} + 2\pi n, \frac{\pi}{6} + 2\pi n\right) \text{ и } \left(\frac{5\pi}{6} + 2\pi n, \pi - \arcsin\frac{1}{3} + 2\pi n\right).$$




*Ответ*:

$$x \in \left(\arcsin\frac{1}{3} + 2\pi n,\ \frac{\pi}{6} + 2\pi n\right) \cup \left(\frac{5\pi}{6} + 2\pi n,\ \pi - \arcsin\frac{1}{3} + 2\pi n\right),\quad n \in Z$$

**П р и м е р 29.** Решить неравенство

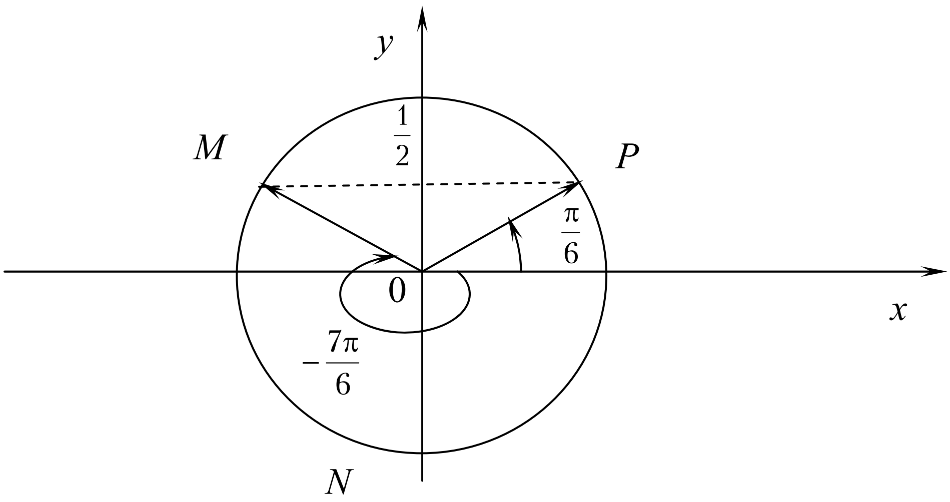
$$\cos^3 x \sin 3x + \sin^3 x \cos 3x < \frac{3}{8}.$$

*Решение*. Упрощая левую часть неравенства, получаем равносильное неравенство $\sin 4x < \frac{1}{2}$. Взяв вспомогательный тригонометрический круг, видим, что искомые значения $4x$ соответствуют точкам дуги $M\breve{N}P$, т.е.

$$-\frac{7\pi}{6} + 2\pi n < 4x < \frac{\pi}{6} + 2\pi n,$$

отсюда следует, что

$$-\frac{7\pi}{24}+\frac{\pi}{2}n<x<\frac{\pi}{24}+\frac{\pi}{2}n.$$




*Ответ*: $x\in\left(-\frac{7\pi}{24}+\frac{\pi}{2}n, \frac{\pi}{24}+\frac{\pi}{2}n\right),\ n\in Z$.

Неравенства, не являющиеся простейшими, с помощью тождественных преобразований можно свести к одному или системе простейших неравенств, равносильных данному.

**П р и м е р 30.** Решить неравенство

$$2\sin^4 x-3\sin^2 x+1\geq 0.$$

*Решение*. Переходим к аргументу 2*x*, получаем равносильное неравенство $\cos^2 2x+\cos 2x>0$, которое равносильно, в свою очередь, совокупности двух систем

$$\text{а)}\ \begin{cases}\cos 2x+1>0,\\ \cos 2x>0,\end{cases}\qquad \text{б)}\ \begin{cases}\cos 2x+1<0,\\ \cos 2x<0.\end{cases}$$

Первое неравенство системы «а» справедливо для всех *x*, кроме тех, для которых $\cos 2x=-1$, т.е. для $x\neq\frac{\pi}{2}+\pi n$. Из второго неравенства системы «а» следует, что $-\frac{\pi}{2}+2\pi n<2x<\frac{\pi}{2}+2\pi n$, т.е. $-\frac{\pi}{4}+\pi n<x<\frac{\pi}{4}+\pi n$, причем точки $x=\frac{\pi}{2}+\pi n$ не входят в эти промежутки ни при каком $n$. Итак, решением системы «а» являются промежутки $\left(-\frac{\pi}{4}+\pi n, \frac{\pi}{4}+\pi n\right)$.

Система «б» несовместна, так как первое неравенство системы «б» не имеет решений. Следовательно, решения системы «а» являются решениями данного неравенства.

*Ответ*: $x\in\left(-\frac{\pi}{4}+\pi n, \frac{\pi}{4}+\pi n\right)$, $n\in Z$.

**Пример 31.** Найти все значения $x$, лежащие в промежутке $\left(\frac{1}{6}, \frac{1}{4}\right)$ и удовлетворяющие неравенству $\operatorname{tg}\frac{1}{x}\geq 1$.

*Решение*. Решением неравенства $\operatorname{tg}\frac{1}{x}\geq 1$ будут все значения $x$, удовлетворяющие условию $\frac{\pi}{4}+\pi n<\frac{1}{x}<\frac{\pi}{2}+\pi n$. Так как по условию $4<\frac{1}{x}<6$, то нужно выбрать такие значения $n$, при которых промежутки $\left(\frac{\pi}{4}+\pi n, \frac{\pi}{2}+\pi n\right)$ попадают целиком или частично внутрь промежутка (4, 6). Очевидно, таким единственным значением будет $n$=1. Итак, $\frac{1}{x}<\frac{\pi}{2}+\pi n$. Следовательно, $\frac{2}{3\pi}<x<\frac{1}{4}$.

*Ответ*: $x\in\left(\frac{2}{3\pi}, \frac{1}{4}\right)$.

## Задания для самостоятельного решения

Решите неравенства:

**1.** $\sin x>\frac{1}{2}$

**2.** $\sin x<\frac{\sqrt{2}}{2}$

**3.** $\cos x\geq -\frac{1}{2}$

**4.** $-\frac{\sqrt{3}}{2}\leq \cos x\leq -\frac{1}{2}$

**5.** $\frac{1}{2}<\cos x<\frac{\sqrt{3}}{2}$

**6.** $\cos\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{3}\right)\geq\frac{1}{2}$

**7.** $-1 < \mathrm{tg}x < \frac{2}{3}$

**8.** $-\sqrt{3} \le \mathrm{tg}x < -1$

**9.** $\mathrm{ctg}x < 1$

**10.** $\sin 3x \cos x - \cos 3x \sin x > 0,5$

**11.** $\cos^2 x - 3\cos x - 10 \ge 0$

**12.** $2\cos^2\left(\frac{3x}{2} + \frac{\pi}{3}\right) + \cos\left(\frac{3x}{2} + \frac{\pi}{3}\right) - 1 > 0$

**13.** $\sin 2x - 4\cos^2 x + 1 \ge 0$

**14.** $\sin^2 3x - 4\sin 3x + 3 \le 0$

**15.** $\sin x \le \cos x$

**16.** $\sin 2x > \cos 2x$

**17.** $\sin\frac{x}{2} < \cos\frac{x}{2}$

**18.** $\sin x \cdot \cos x \le 0$

**19.** $\cos x\left(\sin x - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \ge 0$

**20.** $\sin x\left(\cos x + \frac{1}{2}\right) \ge 0$

**21.** $\mathrm{tg}\, x \cdot \mathrm{ctg}\, 2x \ge 0$

**22.** $6\sin^2 x + \sin^2 2x \le 6$

**23.** $4\sin x \sin 2x \sin 3x < \sin 4x$

**24.** $2\cos^2 x - \sin x + \sin 3x \le 1$

**25.** $2\sin^3 x - \cos 2x - \sin x \le 0$

**26.** $\sin^3 x + \sin 3x \le 0$

**27.** $\frac{\cos 2x}{1 + \mathrm{tg}x} \le 0$

**28.** $\mathrm{ctg}\, x - \mathrm{tg}\, x - 2\,\mathrm{tg}2x - 4\,\mathrm{tg}4x < \frac{8\sqrt{3}}{3}$

**29.** $4\sin^2 x - 5\cos x \sin x - 6\cos^2 x \ge 0$

**30.** $2\sin^2 x + \sqrt{3}\sin x - 3 > 0$

**31.** $\sin x \sin 2x + \cos x \cos 2x > \sin 2x$

**32.** $\cos 2x + 5\cos x + 3 \ge 0$

**33.** $\cos 2x + \sin x \cdot \cos x \le 1$

**34.** $6\cos^2\frac{x}{2} \cdot \mathrm{tg}^2 x \le 2\sin^2 x + 3\,\mathrm{tg}^2 x$

**35.** Найдите все действительные значения параметра $a$, при которых решениями неравенства $\left(a^2 - 1\right)\cos^2 x + 2\left(a - 1\right)\cos x + 1 > 0$ являются все действительные числа.

## ОТВЕТЫ

| | | | |
|---|---|---|---|
| **1** | $\left(\frac{\pi}{6}+2\pi n;\frac{5\pi}{6}+2\pi n\right), n\in Z$ | **19** | $\left[\frac{\pi}{3}+2\pi n;\frac{\pi}{2}+2\pi n\right]\cup$ $\cup\left[\frac{2\pi}{3}+2\pi n;\frac{3\pi}{2}+2\pi n\right], n\in Z$ |
| **2** | $\left(-\frac{5\pi}{4}+2\pi n;\frac{\pi}{4}+2\pi n\right), n\in Z$ | **20** | $\left[\frac{2\pi}{3}+2\pi n;\pi+2\pi n\right]\cup$ $\cup\left[\frac{4\pi}{3}+2\pi n;2\pi+2\pi n\right], n\in Z$ |
| **3** | $\left[-\frac{2\pi}{3}+2\pi n;\frac{2\pi}{3}+2\pi n\right], n\in Z$ | **21** | $\left[-\frac{\pi}{4}+\pi n;\frac{\pi}{4}+\pi n\right],\ n\in Z$ |
| **4** | $\left(\frac{2\pi}{3}+2\pi n;\ \frac{5\pi}{6}+2\pi n\right]\cup$ $\cup\left[-\frac{5\pi}{6}+2\pi n;-\frac{2\pi}{3}+2\pi n\right),$ $n\in Z$ | **22** | $(-\infty;+\infty)$ |
| **5** | $\left(-\frac{\pi}{3}+2\pi n;-\frac{\pi}{6}+2\pi n\right)\cup$ $\left(\frac{\pi}{6}+2\pi n;\frac{\pi}{3}+2\pi n\right),\ n\in Z$ | **23** | $\left(\pi n;\frac{\pi}{8}+\pi n\right)\cup\left(\frac{3\pi}{8}+\pi n;\frac{\pi}{2}+\pi n\right)\cup$ $\cup\left(\frac{5\pi}{8}+\pi n;\frac{7\pi}{8}+\pi n\right), n\in Z$ |
| **6** | $\left[-\frac{4\pi}{3}+4\pi n;4\pi n\right],\ n\in Z$ | **24** | $\left(-\frac{\pi}{4}+2\pi n;-\frac{\pi}{6}+2\pi n\right)\cup$ $\cup\left(\frac{\pi}{4}+2\pi n;\frac{3\pi}{4}+2\pi n\right)\cup$ $\cup\left(\frac{7\pi}{6}+2\pi n;\frac{5\pi}{4}+2\pi n\right), n\in Z$ |
| **7** | $\left(-\frac{\pi}{4}+\pi n;arctg\frac{2}{3}+\pi n\right), n\in Z$ | **25** | $\left[-\frac{\pi}{4}+\pi n;\frac{\pi}{4}+\pi n\right],\ n\in Z$ |

| | | | |
|---|---|---|---|
| **8** | $\left[-\frac{\pi}{3}+\pi n;-\frac{\pi}{4}+\pi n\right),\ n\in Z$ | **26** | $\left[-\frac{\pi}{3}+\frac{2\pi}{3}n;\ \frac{2\pi}{3}n\right],\ n\in Z$ |
| **9** | $\left(\frac{\pi}{4}+\pi n;\pi+\pi n\right),\ n\in Z$ | **27** | $\left[\frac{\pi}{4}+\pi n;\ \frac{\pi}{2}+\pi n\right],\ n\in Z$ |
| **10** | $\left(\frac{\pi}{12}+\pi n;\frac{5\pi}{12}+\pi n\right),\ n\in Z$ | **28** | $\left(\frac{\pi}{24}+\frac{\pi n}{8};\frac{\pi}{8}+\frac{\pi n}{8}\right),\ n\in Z$ |
| **11** | Ø | **29** | $\left[\operatorname{arctg}2+\pi n;\frac{\pi}{2}+\pi n\right)\cup$ $\cup\left(-\frac{\pi}{2}+\pi n;-\operatorname{arctg}\frac{3}{4}+\pi n\right],\ n\in Z$ |
| **12** | $\left(-\frac{4\pi}{9}+\frac{4\pi n}{3};\frac{4\pi n}{3}\right),\ n\in Z$ | **30** | $\left[\frac{\pi}{3}+2\pi n;\frac{2\pi}{3}+2\pi n\right],\ n\in Z$ |
| **13** | $\left(\frac{\pi}{4}+\pi n;\pi-\operatorname{arcctg}\frac{1}{3}+\pi n\right),\ n\in Z$ | **31** | $\left(-\frac{\pi}{2}+2\pi n;\frac{\pi}{6}+2\pi n\right)\cup$ $\cup\left(\frac{\pi}{2}+2\pi n;\ \frac{5\pi}{6}+2\pi n\right),\ n\in Z$ |
| **14** | $\frac{\pi}{6}+\frac{2\pi n}{3},\ n\in Z$ | **32** | $\left[-\frac{2\pi}{3}+2\pi n;\frac{2\pi}{3}+2\pi n\right],\ n\in Z$ |
| **15** | $\left[-\frac{3\pi}{4}+2\pi n;\ \frac{\pi}{4}+2\pi n\right],\ n\in Z$ | **33** | $\left[\frac{\pi}{4}+\pi n;\pi+\pi n\right),\ n\in Z$ |
| **16** | $\left(\frac{\pi}{8}+\pi n;\frac{5\pi}{8}+\pi n\right),\ n\in Z$ | **34** | $\left(\frac{\pi}{2}+2\pi n;\frac{3\pi}{2}+2\pi n\right)\cup\{2\pi n\},\ n\in Z$ |
| **17** | $\left(-\frac{3\pi}{2}+4\pi n;\frac{\pi}{2}+4\pi n\right),\ n\in Z$ | **35** | $[1;+\infty)$ |
| **18** | $\left[-\frac{\pi}{2}+\pi n;\ \pi n\right],\ n\in Z$ | | |

# Глава II
# ПРОИЗВОДНАЯ. ПРИЛОЖЕНИЯ ПРОИЗВОДНОЙ

## §1. Определение производной. Основные правила дифференцирования

Пусть функция $y = f(x)$ определена на некотором интервале ($a$; $b$), содержащем точку $x_0$. Для любой другой точки $x$ интервала ($a$; $b$) разность $x - x_0$ обозначается $\Delta x$ и называется приращением аргумента; соответствующая разность значений функции $f(x) - f(x_0)$ обозначается $\Delta f(x_0)$ и называется приращением функции. Из равенства $\Delta x = x - x_0$ следует $x = x_0 + \Delta x$ и $\Delta f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$.

Если $x \to x_0$, то, очевидно, $\Delta x \to 0$.

*Производной функции* $y = f(x)$ в точке $x_0$ называется предел отношения приращения функции к соответствующему приращению аргумента, когда последнее стремится к нулю. Производная функции $y = f(x)$ в точке $x_0$ обозначается $f'(x_0)$ или $y'(x_0)$. Таким образом, по определению

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}.$$

Функция, имеющая производную в точке $x_0$, называется *дифференцируемой* в этой точке; операция нахождения производной называется *дифференцированием*.

Укажем основные формулы и правила дифференцирования, с помощью которых можно при дифференцировании обойтись без непосредственного вычисления производной как предела отношения $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta f(x_0)}{\Delta x}$ при $\Delta x \to 0$.

Основные формулы лучше запомнить в виде:

1) $\left(u^n\right)' = n \cdot u^{n-1} \cdot u'$;

2) $\left(\sqrt{u}\right)' = \dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$;

3) $\left(\dfrac{-}{u}\right)' = -\dfrac{cu}{u^2}$;

4) $\left(e^u\right) = e^u u'$;

5) $\left(a^u\right)' = a^u \cdot \ln a \cdot u'$;

9) $\left(\cos u\right)' = -\sin u \cdot u'$;

10) $\left(\mathrm{tg} u\right)' = \dfrac{u'}{\cos^2 u}$;

11) $\left(\mathrm{ctg} u\right)' = \dfrac{-u'}{\sin^2 u}$;

12) $\left(\mathrm{arctg} u\right)' = \dfrac{u'}{1+u^2}$;

13) $\left(\mathrm{arctg} u\right)' = \dfrac{-u'}{1+u^2}$;

6) $\left(\ln u\right)' = \dfrac{u'}{u}$;

7) $\left(\log_a u\right)' = \dfrac{u'}{u \cdot \ln a}$;

8) $\left(\sin u\right)' = \cos u \cdot u'$;

14) $\left(\arcsin u\right)' = \dfrac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$;

15) $\left(\arccos u\right)' = \dfrac{-u'}{\sqrt{1-u^2}}$.

## Правила дифференцирования

Пусть $c$ – постоянная, $u(x)$, $v(x)$ – дифференцируемые на некотором интервале ($a$, $b$) функции, на этом же интервале справедливы формулы:

$$c' = 0,$$

$$\left(cu\right)' = cu',$$

$$\left(u \pm v\right)' = u' \pm v',$$

$$\left(u \cdot v\right)' = u'v + uv',$$

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}.$$

**П р и м е р 1.** Найти производные функций:

а) $y = x^2 + \dfrac{1}{x}$;

б) $y = x \cdot \ln x$.

в) $y = \dfrac{2x-1}{3+x}$.

*Решение.*

а) $y' = \left(x^2\right)' + \left(x^{-1}\right)' = 2x - 1 \cdot x^{-2} = 2x - \dfrac{1}{x^2}$;

б) $y' = \left(x\right)' \ln x + x\left(\ln x\right)' = \ln x + x \cdot \dfrac{1}{x} = \ln x + 1$;

в) $y' = \dfrac{\left(2x-1\right)'\left(3+x\right) - \left(2x-1\right)\left(3+x\right)'}{\left(3+x\right)^2} = \dfrac{2\left(3+x\right) - \left(2x-1\right)}{\left(3+x\right)^2} = \dfrac{7}{\left(3+x\right)^2}$;

## §2. Производная сложной функции

### Правило дифференцирования сложной функции

Пусть $y = F(u)$, где $u = u(x)$, т.е. $y = F(u(x))$ – сложная функция. Если функция $u(x)$ дифференцируема в точке $x_0$ и функция $F(u)$ дифференцируема в точке $u_0 = u(x_0)$, то сложная функция $y(x) = F(u(x))$ дифференцируема в точке $x_0$ и

$$y'(x_0) = F'(u_0) \cdot u'(x_0).$$

**Пример 2.** Найти производные функций:

а) $y = (\sin x + \cos x)^3$;

б) $y = \sqrt{x^2 - 2x}$;

в) $y = \sqrt[3]{x} \cdot e^{3x}$,

г) $y = \left(x \cdot e^{2x} + 5\right)^3$,

д) $y = \sin^2 x + \ln \operatorname{tg} \dfrac{x}{3}$,

*Решение.*

а) Полагаем $u(x) = \sin x + \cos x$ и $y = u^3$. По правилу дифференцирования сложной функции для любого $x$ получаем:

$$y'(x) = \left(u^3\right)' \cdot u'(x) = 3u^2 \cdot u'(x) = 3(\sin x + \cos x)^2 \cdot (\cos x - \sin x).$$

б) Полагая $u(x) = x^2 - 2x$, получаем $y(x) = \sqrt{u(x)}$.

Так как

$$y'(x) = \left(\sqrt{u(x)}\right)' \cdot u'(x) = \frac{1}{2\sqrt{u(x)}} \cdot u'(x),$$

то

$$y'(x) = \frac{2x - 2}{2\sqrt{x^2 - 2x}} = \frac{x - 1}{\sqrt{x^2 - 2x}}.$$

в) функцию удобно записать в виде $y = x^{\frac{1}{3}} \cdot e^{3x}$,

применим формулу $(u \cdot v)' = u'v + v'u \Rightarrow$

$$y' = \left(x^{\frac{1}{3}}\right)' \cdot e^{3x} + \left(e^{3x}\right)' \cdot x^{\frac{1}{3}} = \frac{1}{3} x^{\frac{1}{3} - 1} \cdot e^{3x} + e^{3x} \cdot (3x)' \cdot x^{\frac{1}{3}} =$$

$$= \frac{1}{3} x^{-\frac{2}{3}} \cdot e^{3x} + e^{3x} \cdot 3x^{\frac{1}{3}} = \frac{e^{3x}}{3\sqrt[3]{x^2}} + 3e^{3x}\sqrt[3]{x} = \frac{e^{3x}(1 + 3x)}{3\sqrt[3]{x^2}};$$

г)

$$y' = 3\left(x\cdot e^{2x}+5\right)^2\left(xe^{2x}+5\right)' = 3\left(x\cdot e^{2x}+5\right)^2\left(\left(x\cdot e^{2x}\right)'+5'\right) =$$

$$= 3\left(x\cdot e^{2x}+5\right)^2\left(x'\cdot e^{2x}+x\left(e^{2x}\right)'\right) = 3\left(x\cdot e^{2x}+5\right)^2\left(e^{2x}+e^{2x}\cdot 2x\right) =$$

$$= 3\left(x\cdot e^{2x}+5\right)^2 e^{2x}\left(1+2x\right);$$

д)

$$y' = \left(\sin^2 x\right)' + \left(\ln \operatorname{tg}\frac{x}{3}\right)' = 2\sin x\left(\sin x\right)' + \frac{1}{\operatorname{tg}\frac{x}{3}}\left(\operatorname{tg}\frac{x}{3}\right)' =$$

$$= 2\sin x\cos x + \frac{1}{\operatorname{tg}\frac{x}{3}}\cdot\frac{1}{\cos^2\frac{x}{3}}\left(\frac{x}{3}\right)' = 2\sin x\cos x + \frac{1}{\operatorname{tg}\frac{x}{3}}\cdot\frac{1}{\cos^2\frac{x}{3}}\cdot\frac{1}{3} =$$

$$= \sin 2x + \frac{1}{3\operatorname{tg}\frac{x}{3}\cdot\cos^2\frac{x}{3}}.$$

Из приведенных примеров видно, что формулы производных функций в чистом виде $\left(\sin x\right)'$, $\left(x^n\right)'$ и т.д. встречаются очень редко, чаще приходится иметь дело со сложными функциями вида $\left(\sin^3 x\right)'$, $\left(\ln \operatorname{tg}x\right)'$, $\left(\sqrt{x^3+5}\right)'$ и т.д. К функциям такого вида следует применять формулу $\left(f\left(u\left(x\right)\right)\right)' = f'_u\cdot u'_x$ – производная сложной функции.

Например, $y=\sin^3 x$. Сначала рассматриваем ее как степенную функцию $y=x^n$, $y'=n\cdot x^{n-1}$; затем – как $y=\sin x$, $y'=\cos x$.

Итак, $\left(\sin^3 x\right)' = 3\sin^2 x\left(\sin x\right)' = 3\sin^2 x\cdot\cos x.$

Например, $y=\ln\operatorname{tg}x$. Сначала применим формулу $y=\ln x$, $y'=\frac{1}{x}$; затем $y=\operatorname{tg}x$, $y'=\frac{1}{\cos^2 x}$.

Итак, $\left(\ln\operatorname{tg}x\right)' = \frac{1}{\operatorname{tg}x}\left(\operatorname{tg}x\right)' = \frac{1}{\operatorname{tg}x}\cdot\frac{1}{\cos^2 x} = \frac{1}{\operatorname{tg}x\cos^2 x}.$

Например, $y=\sqrt{x^3+5}$. Применим $y=\sqrt{x}$, $y'=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$,

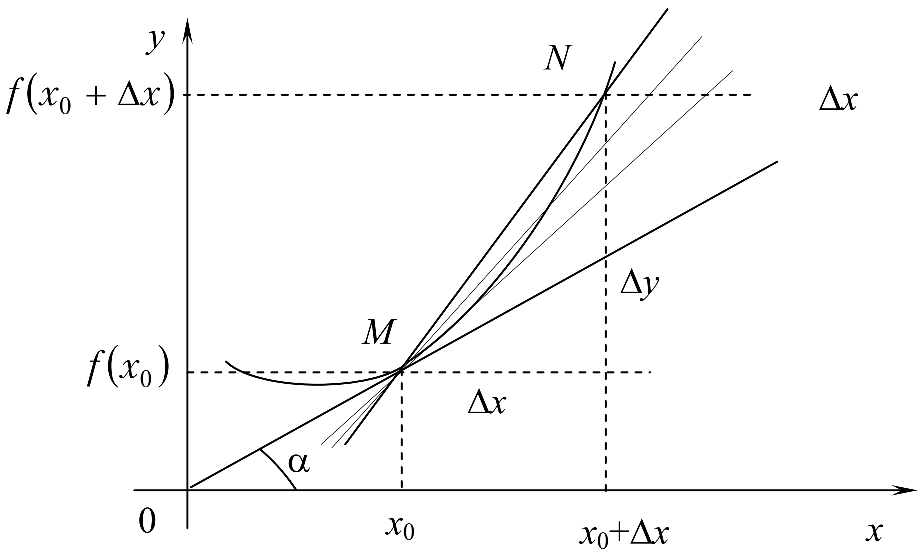
$$y'=\frac{1}{2\sqrt{x^3+5}}\left(x^3+5\right)'=\frac{3x^2}{2\sqrt{x^3+5}}.$$

## §3. Геометрический и физический смысл производной

*Геометрический смысл понятия производной* становится ясным из рассмотрения графика функции $y=f(x)$, определенной на некотором интервале ($a$, $b$). Для значения аргумента $x_0+\Delta x$ и $x_0$ из интервала ($a$, $b$) соответствующие ординаты графика функции равны $f(x_0+\Delta x)$ и $f(x_0)$, разность значений этих ординат есть $\Delta y(x_0)$:

$$\Delta y(x_0)=f(x_0+\Delta x)-f(x_0).$$

Отношение $\dfrac{\Delta y(x_0)}{\Delta x}$ равно угловому коэффициенту прямой, проходящей через точки графика $M\left(x_0, f(x_0)\right)$ и $N\left(x_0+\Delta x, f(x_0+\Delta x)\right)$. Прямая $MN$ называется секущей (рис. 6.4).




Пусть $\Delta x\to 0$, тогда точка $N$ стремится к точке $M$. Если существует производная $f'(x_0)$, т.е. предел отношения $\dfrac{\Delta y(x_0)}{\Delta x}$, то секущая $MN$ стремится к прямой, проходящей через точку $M$, с угловым коэффициентом

$f'(x_0)$. Предельное положение секущей $MN$ при стремлении $N$ к $M$ называется касательной к графику функции $y = f(x)$ в точке $M$. Угловой коэффициент касательной равен $f'(x_0)$, иначе $\operatorname{tg}\alpha = f'(x_0)$. Уравнение касательной, как уравнение прямой, проходящей через точку $M(x_0,\ y_0)$ с угловым коэффициентом $f'(x_0)$, может быть записано в виде

$$y - y_0 = f'(x_0)\cdot(x - x_0)$$

**Пример 3.** Найти уравнение касательной к параболе $y = x - x^2 + 6$ в точке с абсциссой $x_0 = 1$.

*Решение*. Определим производную функции $f(x) = x - x^2 + 6$:

$$f'(x) = 1 - 2x$$

и подставим в уравнение касательной значения $x_0 = 1$, $f(x_0) = 6$, $f'(x_0) = -1$. Получим уравнение касательной $y + x = 7$.

**Пример 4.** Напишите уравнение касательной и нормали к графику функции $y = e^{2x+1}x^{-2}$ в точке с абсциссой $x_0 = -0{,}5$.

*Решение.* Пусть $f(x) = e^{2x+1}\cdot x^{-2}$.

Уравнение касательной $y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$.

Найдем

$$f(x_0) = f(-0{,}5) = e^0\cdot(-0{,}5)^{-2} = 4,$$

$$f'(x) = 2e^{2x+1}\cdot x^{-2} - 2x^{-3}\cdot e^{2x+1},$$

$$0\ f'(-0{,}5) = 2e^0(-0{,}5)^{-2} - 2\cdot(-0{,}5)^{-3}\cdot 1 = 8 + 16 = 24.$$

Подставим найденные значения в уравнение касательной, имеем:

$$y = 4 + 24\cdot(x + 0{,}5); \quad 24x - y + 16 = 0.$$

Уравнение нормали $y = f(x_0) - \dfrac{1}{f'(x_0)}(x - x_0)$.

$$y = 4 - \frac{1}{24}\left(x + \frac{1}{2}\right);\ 2x + 48y - 191 = 0.$$

*Ответ*: $24x - y + 16 = 0$, $2x + 48y - 191 = 0$.

**П р и м е р 5.** Написать уравнения касательных к параболе $y = 4x - x^2$, проходящих через точку $M\left(\frac{5}{2};\ 6\right)$.

*Решение.* Так как точка $M\left(\frac{5}{2};\ 6\right)$ не лежит на параболе $y = 4x - x^2$, то касательная к параболе, проходящая через эту точку, касается параболы в некоторой точке $N(x_0;\ y_0)$. Уравнение прямой, касающейся в точке $N(x_0;\ y_0)$ параболы $y = 4x - x^2$, записывается в виде $y = f(x_0) + f'(x_0)\cdot(x - x_0)$, где $f(x_0) = 4x_0 - x_0^2$, $f'(x_0) = 4 - 2x_0$, то есть уравнение касательной имеет вид

$$y = 4x_0 - x_0^2 + (4 - 2x_0)(x - x_0).$$

Поскольку точка $M\left(\frac{5}{2};\ 6\right)$ лежит на этой прямой, то она удовлетворяет уравнению, то есть справедливо равенство

$$6 = 4x_0 - x_0^2 + (4 - x_0)\left(\frac{5}{2} - x_0\right).$$

Этому равенству удовлетворяют числа $x_0^{(1)} = 1$ и $x_0^{(2)} = 4$. Следовательно, есть две касательные, проходящие через точку $M\left(\frac{5}{2};\ 6\right)$; они касаются параболы в точках $N_1(1;\ 3)$ и $N_2(4;\ 0)$. Подставляя вместо $x_0$ в уравнение касательной значение $x_0^{(1)} = 1$, получим уравнение касательной к параболе $y = 4x - x^2$, проходящей через точку $N_1(1;\ 3)$:

$$y - 3 = 2(x - 1) \quad \text{или} \quad y = 2x + 1.$$

Подставляя в уравнение касательной вместо $x_0$ значение $x_0^{(2)} = 4$, получим уравнение второй касательной проходящей через точку $N_2(4;0)$: $y = -4(x - 4)$ или $y = -4x + 16$.

*Ответ*: $y = 2x + 1$ и $y = -4x + 16$.

**П р и м е р 6.** Найти уравнение общих касательных к параболам $y = x^2 + 4x + 12$ и $y = -x^2 + 2x - 29$.

*Решение.* Обозначим через $M_1\left(x_1; x_1^2+4x_1+12\right)$ точку на параболе $y=x^2+4x+12$, через которую проходит касательная, ее уравнение:

$$y=f\left(x_1\right)+f'\left(x_1\right)\cdot\left(x-x_1\right).$$

$$f\left(x_1\right)=x_1^2+4x+12;$$

$$f'\left(x_1\right)=2x_1+4;$$

$$y=x^2+4x+12+\left(2x_1+4\right)\left(x-x_1\right). \qquad (*)$$

Обозначим через $M_2\left(x_2;-x_2^2+2x_2-29\right)$ точку на параболе $y=-x^2+2x-29$, через которую проходит эта же касательная:

$$f\left(x_2\right)=-x_2^2+2x_2-29,$$

$$f'\left(x_2\right)=-2x_2+2,$$

$$y=-x_2^2+2x_2-29+\left(-2x_2+2\right)\left(x-x_2\right).$$

Так как касательная общая, то $f'\left(x_1\right)=f'\left(x_2\right)$

$$2x_1+4=-2x_2+2; \quad 2x_1+2x_2=-2; \quad x_1+x_2=-1,\ x_2=-1-x_1.$$

$M_2\left(x_2;-x_2^2+2x_2-29\right)$ лежит на касательной.

Подставим в уравнение (*) т. $M_2\left(x_2;-x_2^2+2x_2-29\right)$

$$-x_2^2+2x_2-29=x_1^2+4x_1+12+\left(2x_1+4\right)\left(x_2-x_1\right)$$

заменим $x_2=-1-x_1$.

$$-\left(-1-x_1\right)^2+2\left(-1-x_1\right)-29=x_1^2+4x_1+12+\left(2x_1+4\right)\left(-1-2x_1\right)\Rightarrow$$

$$x_1^2+x_1-20=0; \quad x_1=4, \quad M_1\left(4;44\right); \quad x_1'=-5, M_1'\left(-5;17\right);$$

1) $M_1\left(4;44\right)$ $f'\left(4\right)=2\cdot4+4=12$;

$y=44+12\left(x-4\right)$;

$y=12x-4$;

2) $M_1'\left(-5;17\right)$ $f'\left(-5\right)=2\left(-5\right)+4=-6$;

$y=17-6\left(x+5\right)$;

$y=-6x-13$.

Проверка. Точки на параболе $y=-x^2+2x-29$ через которые проходят касательные, $M_2(-5;-64)$ и $M_2'(4;-37)$.

Подставим в уравнения касательных

1) $y=12x-4$;

–64=–12 5-4;

–64=–64;

2) $y=-6x-13$;

–37=–24–13;

–37=–37.

*Ответ*: $y=12x-4$; $y=-6x-13$.

Вычислим скорость $v$ в случае прямолинейного движения точки. Положение точки определяется ее расстоянием $S$, отсчитываемым от некоторой начальной точки $O$, это расстояние называется пройденным путем. Время $t$ отсчитывается от некоторого начального момента. Движение считается вполне заданным, когда известно уравнение движения: $S=S(t)$, из которого положение точки определяется для любого момента времени.

Для определения скорости $v$ в данный момент $t$ пришлось бы, придать $t$ приращение $\Delta t$, этому отвечает увеличение пути $S$ на $\Delta S$.

Отношение $\dfrac{\Delta S}{\Delta t}$ выразит среднюю скорость $v_{\text{ср}}$ за промежуток $\Delta t$.

Истинная же скорость в момент $t$ получится отсюда предельным переходом:

$$v=\lim_{\Delta t\to 0} v_{\text{ср}}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta S}{\Delta t}.$$

Следовательно, с точки зрения физики *мгновенная скорость* есть производная от пути по времени, вычисленная в данный момент времени; ускорение есть производная от скорости по времени, т.е.

$$S'(t_0)=v(t_0),\quad v'(t_0)=a(t_0).$$

## §4. Приложения производной

Рассмотрим приложения производной к исследованию функций на примерах.

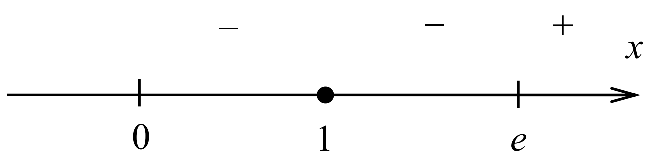
**П р и м е р 7.** Найти промежутки возрастания и убывания, а также точки максимума и минимума функции $y(x)=\dfrac{x}{\ln x}$.

*Решение.* Областью определения функции $y(x)=\dfrac{x}{\ln x}$ является $x\in(0,1)\cup(1,\infty)$. В любой точке области определения эта функция имеет производную

$$y'(x)=\left(\frac{x}{\ln x}\right)'=\frac{x'\cdot\ln x-x\cdot(\ln x)'}{\ln^2 x}=\frac{\ln x-1}{\ln^2 x}$$

$y'(x)=0$ при $\ln x-1=0$, $x=e$.

Отметим найденную критическую точку на координатной прямой.




В каждом из полученных промежутков функция $y'(x)$ в силу непрерывности сохраняет знак. Отметим эти знаки на рисунке. В любой точке промежутка (0, 1) $y'(x)$<0, и потому функция на этом промежутке убывает. Согласно теоремам о возрастании и убывании функции и с учетом непрерывности ее в точке $x=e$ заключаем, что *y* убывает на (1, *e*), так как $y'<0$ и возрастает на (*e*, $\infty$), так как $y'>0$, тогда имеем в точке $x=e$ минимум.

*Ответ*. Функция убывает на (0,1) $\cup$ (1, *e*), возрастает на (*e*, $\infty$) и $y_{\min}(e)=\dfrac{e}{\ln e}=e$.

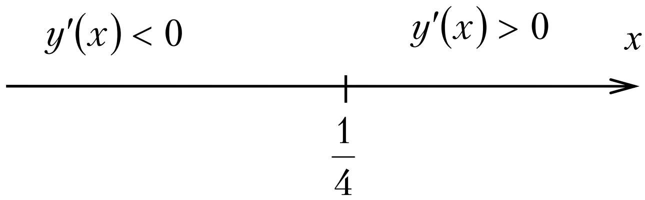
**П р и м е р 8.** Исследовать на экстремум функцию $y(x)=\sqrt{2x^2-x+2}$.

*Решение.* Поскольку дискриминант квадратного трехчлена $2x^2-x+2$ отрицателен ($D=-15$), то при любых *x* справедливо неравенство $2x^2-x+2>0$ и, значит, область определения функции $y(x)=\sqrt{2x^2-x+2}$ совпадает с множеством всех действительных чисел. Вычислим производную $y'(x)$:

$$y'(x)=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2x^2-x+2}}\cdot\left(2x^2-x+2\right)'=\frac{4x-1}{2\sqrt{2x^2-x+2}}.$$

Так как функция дифференцируема в каждой точке числовой прямой, то ее точка экстремума будет среди решений уравнения $y'(0)=0$.

Уравнение $\dfrac{4x-1}{2\sqrt{2x^2-x+2}}=0$ имеет единственное решение $x=\dfrac{1}{4}$. Докажем, что точка $x=\dfrac{1}{4}$ является точкой экстремума. На множестве $x<\dfrac{1}{4}$ справедливо $y'(x)<0$, а на множестве $x>\dfrac{1}{4}$ выполнено неравенство $y'(x)>0$.




Функция $y(x)$ непрерывна в точке $\dfrac{1}{4}$. Поэтому $x=\dfrac{1}{4}$ является точкой минимума. Значение функции $y(x)$ в этой точке $y\left(\dfrac{1}{4}\right)=\sqrt{\dfrac{15}{8}}$.

*Ответ*: $y_{\min}\left(\dfrac{1}{4}\right)=\sqrt{\dfrac{15}{8}}$.

**Пример 9.** Найти наибольшее и наименьшее значения функции $y(x)=\left|x^2+2x-3\right|+\dfrac{3}{2}\ln x$ на отрезке $\left[\dfrac{1}{2};4\right]$.

*Решение.* Квадратный трехчлен $x^2+2x-3$ имеет корни $x_1=-3$ и $x_2=1$. Из них только $x_2=1\in\left[\dfrac{1}{2};\ 4\right]$.Найдем наибольшее и наименьшее значения $y(x)$ на отрезках $\left[\dfrac{1}{2};1\right]$и $[1;\ 4]$. На множестве $\dfrac{1}{2}<x\le 1$ справедливо неравенство $x^2+2x-3\le 0$. Значит, $x^2+2x-3=-x^2-2x+3$ и $y(x)=-x^2-2x+3+\dfrac{3}{2}\ln x$. Функция $f(x)=-x^2-2x+3+\dfrac{3}{2}\ln x$ определена при $x$>0 и имеет производную в каждой точке этого отрезка

$$f'(x)=-2x-2+\frac{3}{2x}=-\frac{4x^2+4x-3}{2x}=-\frac{(2x-1)(2x+3)}{2x}.$$

Отсюда следует, что при $x>\dfrac{1}{2}$ выполняется $f'(x)<0$, то есть $f(x)$ монотонно убывает. Так как $f(x)$ непрерывна при $x=\dfrac{1}{2}$ и $x=1$, то она убывает на $\left[\frac{1}{2};\ 1\right]$. Поскольку $y(x)$ и $f(x)$ совпадают, то $y(x)$ монотонно убывает на $\left[\frac{1}{2};\ 1\right]$. Поэтому

$$\min_{x\in\left[\frac{1}{2};1\right]} y(x)=y(1)=0,\quad \max_{x\in\left[\frac{1}{2};1\right]} y(x)=y\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{7}{4}-\frac{3}{2}\ln 2.$$

На множестве $x\ge 1$ справедливо $x^2+2x-3\ge 0$. Значит, $\left|x^2+2x-3\right|=x^2+2x-3$ и $y(x)=x^2+2x-3+\frac{3}{2}\ln x$. Функция $q(x)=x^2+2x-3+\frac{3}{2}\ln x$ определена на $x>0$ и имеет производную

$$q(x)=2x+2+\frac{3}{2x}=\frac{4x^2+4x+3}{2x}=\frac{(2x+1)^2+2}{2x}.$$

Отсюда следует, что при $x>0$, $q'(x)>0$. Следовательно, $q(x)$ возрастает на $x>0$ и в $[1;\ 4]$. Так как $y(x)$ и $q(x)$ совпадают на этом отрезке, то $y(x)$ монотонно возрастает на $[1;\ 4]$. Поэтому $\min\limits_{x\in[1;4]} y(x)=y(1)=0,\quad \max\limits_{x\in[1;4]} y(x)=y(4)=21+3\ln 2$.

Итак, наибольшее значение $y(x)$ на $\left[\frac{1}{2};\ 4\right]$ равно большему из чисел $y\left(\frac{1}{2}\right)$ и $y(4)$, то есть $y(4)=21+3\ln 2$. Наименьшее значение функции $y(x)$ на отрезке $\left[\frac{1}{2};\ 4\right]$ равно $y(1)=0$.

*Ответ*: $\min\limits_{x\in\left[\frac{1}{2};4\right]} y(x)=0,\quad \max\limits_{x\in\left[\frac{1}{2};4\right]} y(x)=21+3\ln 2.$

**Пример 10.** Найдите точки максимума функции

$$f(x)=4{,}5x^2+4x^3-\frac{15-15\sin^2(\pi x)}{\cos^2(\pi x)}\cdot x^4.$$

*Решение.*

1) Область определения функции – все действительные числа *x*, в которых $\cos(\pi x)\ne 0$, т.е. $x\ne 0{,}5+n,\ n\in \mathrm{Z}$.

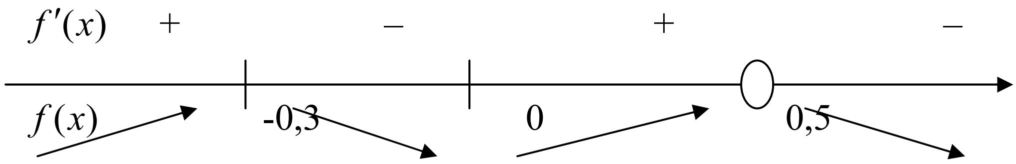
Если $x \neq 0{,}5+n, n \in \mathrm{Z}$, то

$$4{,}5x^2+4x^3-\frac{15-15\sin^2(\pi x)}{\cos^2(\pi x)}\cdot x^4=4{,}5x^2+4x^3-15x^4.$$

2) Найдем точки максимума функции $f(x)=-15x^4+4x^3+4{,}5x^2$, $x \neq 0{,}5+n, n \in \mathrm{Z}$.

$f'(x)=-60x^3+12x^2+9x$, $f'(x)=-3x\left(20x^2-4x-3\right)$.

$f'(x)=0$ при $x=0$, $x=-0{,}3$ ($x=0{,}5$ не входит в область определения функции).




Точка максимума $x=-0{,}3$.

*Ответ:* $-0{,}3$

**П р и м е р 11.** Найдите точки минимума функции

$$f(x)=3x^4+2x^3-18\cdot\frac{16-8x^2+x^4}{x^2-4}.$$

*Решение.*

1) Область определения функции – все действительные числа x, кроме $x=\pm 2$.

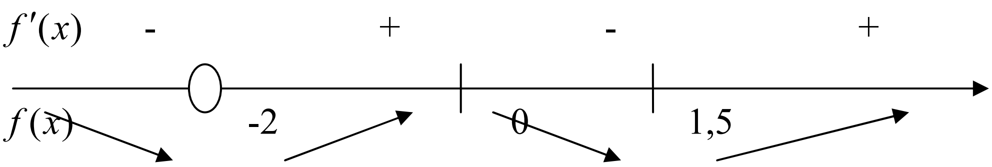
Если $x=\pm 2$, то

$$3x^4+2x^3-18\cdot\frac{16-8x^2+x^4}{x^2-4}=3x^4+2x^3-18\left(x^2-4\right)=3x^4+2x^3-18x^2+72.$$

2) Найдем точки минимума функции $f(x)=3x^4+2x^3-18x^2+72$, $x=\pm 2$.

$f'(x)=12x^3+6x^2-36x$, $f'(x)=6x\left(2x^2+x-6\right)$.

$f'(x)=0$ при $x=0$, $x=1{,}5$ ($x=-2$ не входит в область определения функции).




Точка минимума $x=1{,}5$.

*Ответ:* 1,5.

**П р и м е р  12.** Тело состоит из цилиндра и полушара, центр которого совпадает с центром основания цилиндра, а радиус равен радиусу основания цилиндра. Найти наименьшую возможную площадь полной поверхности такого тела, если его объем равен $\sqrt{3}$ см$^3$.

*Решение.* Площадь полной поверхности тела

$$S = \pi R^2 + 2\pi RH + 2\pi R^2 = 3\pi R^2 + 2\pi RH\,,$$

$R$ – радиус основания цилиндра и шара; $V = \pi R^2 H + \frac{2}{3}\pi R^3$ – объем тела. Так как $V = \sqrt{3}$, то

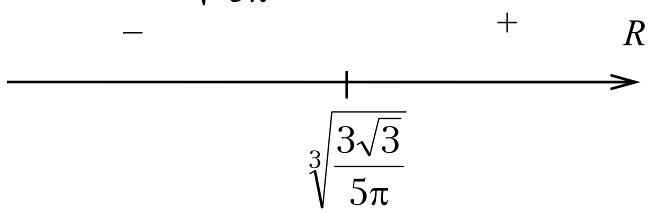
$$\pi R^2 H + \frac{2}{3}\pi R^3 = \sqrt{3} \Rightarrow H = \frac{\sqrt{3} - \frac{2}{3}\pi R^3}{\pi R^2},$$

$$S = 3\pi R^2 + \frac{2\left(\sqrt{3} - \frac{2}{3}\pi R^3\right)}{R} = 3\pi R^2 + \frac{2\sqrt{3}}{R} - \frac{4}{3}\pi R^2 = \frac{5\pi R^2}{3} + \frac{2\sqrt{3}}{R}$$

исследуем на min функцию $S(R)$.

$$S'(R) = \frac{10\pi R}{3} - \frac{2\sqrt{3}}{R^2} = \frac{10\pi R^3 - 6\sqrt{3}}{R^2};\ S'(R) = 0,$$

если $10\pi R^3 - 6\sqrt{3} = 0 \Rightarrow R = \sqrt[3]{\frac{3\sqrt{3}}{5\pi}} - \min$.

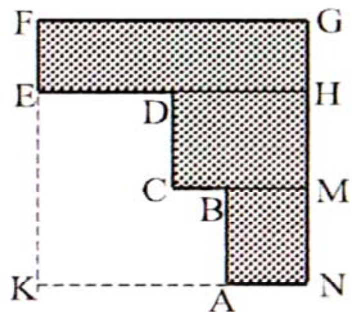



$$S_{\min} = \frac{5\pi}{3}\sqrt[3]{\left(\frac{3\sqrt{3}}{5\pi}\right)^2} + \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt[3]{\frac{3\sqrt{3}}{5\pi}}} = \frac{5\pi \cdot \frac{3\sqrt{3}}{5\pi} + 6\sqrt{3}}{3}\sqrt[3]{\frac{5\pi}{3\sqrt{3}}} =$$

$$3\sqrt{3} \cdot \sqrt[3]{\frac{5\pi}{3\sqrt{3}}} = 3\sqrt[3]{5\pi}\,.$$

*Ответ:* $3\sqrt[3]{5\pi}$ см$^2$.

**П р и м е р 13.** Требуется разметить на земле участок площадью 650 м$^2$, который состоит из трех прямоугольных частей и имеет форму многоугольника ABCDEFGN, изображенного на рисунке, где CD=DE=10 м, BC=5 м и AB$\geq$10 м. Найдите наименьшее значение периметра такого участка и какие-либо значения длин KF, KN и AB, при которых периметр является наименьшим.




*Решение.*

1) Площадь участка ABCDEFGN $S$=650, а его периметр равен периметру $P$ прямоугольника KFGN. Обозначим KF=$x$, KN=$y$ и AB = $z$. Тогда P=2($x$+$y$), $z \geq 10$ и

$$xy = \text{S+DE CD+(DE+DC)}\cdot z \geq 650 + 10\cdot 10 + 15\cdot 10 = 900.$$

Поэтому $y \geq \dfrac{900}{x}$ и $\text{P} \geq 2\left(x + \dfrac{900}{x}\right)$.

2) Исследуем функцию $f(x) = x + \dfrac{900}{x}$ при $x > 0$ с помощью производной:

$$f'(x) = 1 - \frac{900}{x^2} = \frac{x^2 - 30^2}{x^2};$$

$f'(x) = 0$ при $x = 30$, $f'(x) < 0$ при $0 < x < 30$, $f'(x) > 0$ при $x > 30$; поэтому наименьшее значение функции принимается в точке $x_0 = 30$ и равно

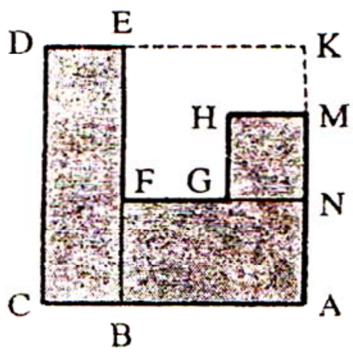
$f_{\text{наим}} = f(30) = 60$.

Следовательно, выполнена оценка $P \geq 2 f_{\text{наим}} = 120$.

3) Если участок ABCDEFGN таков, что $x = 30$ и $z = 10$, то $xy = 900$, $y = 30$ и для такого участка выполнено равенство $P$ = 120. Таким образом, $P_{\text{наим}}$ = 120.

*Ответ:* 120, 30, 30, 10.

**П р и м е р 14.** Требуется разметить на земле участок площадью 1900 м$^2$, который состоит из трех прямоугольных частей и имеет форму многоугольника ACDEFGHM, изображенного на рисунке, где HM=10 м, FG=25 м и EF=2GH$\geq$20 м. Найдите наименьшее значение периметра такого участка и какие-либо значения длин KA, KD и EF, при которых периметр является наименьшим.



*Решение.*

1. Площадь участка равна $S$=1900, а его периметр $P$ превышает периметр прямоугольника на величину 2GH. Обозначим KD = $x$, KA= $y$ и GH = $z$. Тогда P = 2( $x + y$ ) + 2$z$, $z \geq 10$ и

$$xy = \mathrm{S} + \mathrm{HM} \cdot (2z - z) + \mathrm{FG} \cdot 2z \geq 1900 + 10 \cdot 10 + 25 \cdot 20 = 2500.$$

Поэтому $y \geq \dfrac{2500}{x}$ и $\mathrm{P} \geq 2\left( x + \dfrac{2500}{x} \right) + 20$.

2. Исследуем функцию $f(x) = x + \dfrac{2500}{x}$ при $x > 0$ с помощью производной:

$$f'(x) = 1 - \frac{2500}{x^2} = \frac{x^2 - 50^2}{x^2};$$

$f'(x) = 0$ при $x = 50$, $f'(x) < 0$ при $0 < x < 50$, $f'(x) > 0$ при $x > 50$; поэтому наименьшее значение функции принимается в точке $x_0 = 50$ и равно $f_{\text{наим}} = f(50) = 100$.

Следовательно, выполнена оценка $\mathrm{P} \geq 2 f_{\text{наим}} + 20 = 220$.

3. Если участок таков, что $x = 50$ и $z = 10$, то $xy = 2500$, $y = 50$ и для такого участка выполнено равенство P = 220. Таким образом, $\mathrm{P}_{\text{наим}}$ = 220.

*Ответ:* 220 м, 50 м, 50 м, 20 м.

**Пример 15.** Найдите все значения $p$, при которых уравнение $4\sin x + 9 = p(1 + \mathrm{ctg}^2 x)$ имеет хотя бы один корень.

Решение.

1) $4\sin x + 9 = p(1 + \mathrm{ctg}^2 x)$; $4\sin x + 9 = p\left( 1 + \dfrac{\cos^2 x}{\sin^2 x} \right)$; $4\sin x + 9 = \dfrac{p}{\sin^2 x}$.

Последнее уравнений равносильно системе $\begin{cases} 4\sin^3 x + 9\sin^2 x = p, \\ \sin x \neq 0. \end{cases}$

2) Уравнение $4\sin^3 x + 9\sin^2 x = p$ имеет хотя бы один корень, если число $p$ принадлежит множеству значений выражения $4\sin^3 x + 9\sin^2 x$.

Найдем множество значений функции $y = 4\sin^3 x + 9\sin^2 x$ или $y = (4\sin x + 9)\sin^2 x$.

Так как $-1 \leq \sin x \leq 1$, то $0 \leq \sin^2 x \leq 1$ и $9 - 4 \leq 4\sin x + 9 \leq 4 + 9$, т.е.

$5 \leq 4\sin x + 9 \leq 13$. Значит, $0 \leq (4\sin x + 9)\sin^2 x \leq 13$. Следовательно, $0 \leq y \leq 13$.

3) Покажем, что функция $y$ принимает все значения от 0 до 13. При $\sin x = 0$ функция $y$ принимает значение 0, при $\sin x = 1$ – значение 13.

Поэтому 0 – её наименьшее, а 13 – её наибольшее значения. Так как синус – непрерывная функция, то и функция $y$ непрерывна и, значит, принимает все значения от 0 до 13. Поэтому $E(y) = [0;13]$.

4) Так как по условию $\sin x \neq 0$, то значение $p$ – любое число из промежутка $(0;13]$.

*Ответ:* $(0;13]$.

**Пример 16.** Найдите все значения $p$, при которых уравнение $\cos 2x + \dfrac{p}{\sin x} = -9$ имеет решения.

*Решение.*

1)
$$\cos 2x + \frac{p}{\sin x} = -9;$$
$$1 - 2\sin^2 x + \frac{p}{\sin x} = -9;$$
$$2\sin^2 x - 10 = \frac{2p}{\sin x};$$
$$\sin^2 x - 5 = \frac{p}{\sin x}.$$

Последнее уравнение равносильно системе $\begin{cases}(\sin^2 x - 5)\sin x = p, \\ \sin x \neq 0.\end{cases}$

2) Уравнение $(\sin^2 x - 5)\sin x = p$ имеет корни, только если число $p$ принадлежит множеству значений выражения $(\sin^2 x - 5)\sin x$. Значит, следует найти множество значений функции $y = \sin^3 x - 5\sin x$.

3) Пусть $\sin x = t$. Тогда $y = t^3 - 5t$ и $y' = 3t^2 - 5$, $-1 \le t \le 1$. Так как $-1 \le \sin x \le 1$, то $|t| \le 1$. Отсюда $0 \le t^2 \le 1$ и $3t^2 - 5 \le -2 < 0$. Поэтому $y'<0$ и функция $y$ убывает на отрезке $[-1;1]$. Следовательно, $y(-1) = 4$ – наибольшее, а $y(1) = -4$ – наименьшее значения функции $y$. Так синус – непрерывная функция, то и функция $y$ непрерывна. Поэтому она принимает все значения от наименьшего до наибольшего, т.е. $E(y) = [-4;4]$.

4) Так как по условию $\sin x \neq 0$, то $p \in [-4;0) \cup (0;4]$.

*Ответ:* $[-4;0) \cup (0;4]$.

**Пример 17.** Найдите все значения $p$, при которых уравнение $2\cos 2x + \dfrac{p}{\sin x} = -11$ **не имеет** корней.

*Решение.*

1)
$$2\cos 2x+\frac{p}{\sin x}=-11;$$
$$2(1-2\sin^2 x)+\frac{p}{\sin x}=-11;$$
$$4\sin^2 x-13=\frac{p}{\sin x}.$$

Последнее уравнение равносильно системе $\begin{cases}(4\sin^2 x-13)\sin x=p,\\ \sin x\neq 0.\end{cases}$

2) Найдем значения $p$, при которых эта система имеет решения.

Уравнение $(4\sin^2 x-13)\sin x=p$ имеет корни, только в том случае, когда число $p$ принадлежит множеству значений выражения $(4\sin^2 x-13)\sin x$. Значит, следует найти множество значений функции $y=4\sin^3 x-13\sin x$.

3) Пусть $\sin x=t$. Тогда $y=4t^3-13t$ и $y'=12t^2-13$, $-1\le t\le 1$. Так как $-1\le \sin x\le 1$, то $|t|\le 1$. Отсюда $0\le t^2\le 1$ и $12t^2-13\le -1<0$. Поэтому $y'<0$ и функция $y$ убывает на отрезке $[-1;1]$. Следовательно, $y(-1)=9$ – наибольшее, а $y(1)=-9$ – наименьшее значения функции $y$. Так синус – непрерывная функция, то и функция $y$ непрерывна. Поэтому она принимает все значения от наименьшего до наибольшего, т.е. $E(y)=[-9;9]$.

4) По условию $\sin x\neq 0$.

Значит, система $\begin{cases}(4\sin^2 x-13)\sin x=p,\\ \sin x\neq 0.\end{cases}$ имеет решения при $p\in[-9;0)\cup(0;9]$.

Следовательно, система **не имеет** решений при $p\in(-\infty;-9)\cup\{0\}\cup(9;+\infty)$.

*Ответ:* $(-\infty;-9)\cup\{0\}\cup(9;+\infty)$.

**П р и м е р 18.** Найдите все значения $p$, при которых уравнение $2^{3x+1}+8=3\cdot 2^{x+1}\left(3+2^x\right)+p$ или не имеет корней, или имеет единственный корень.

*Решение.*

1) Обозначим $2^x=t, t>0$. Относительно $t$ данное уравнение имеет вид
$$2t^3+8=6t\left(3+t\right)+p;$$
$$2t^3-6t^2-18t+8=p.$$

2) Рассмотрим функцию $y = 2t^3 - 6t^2 - 18t + 8$, $t > 0$. Для ее исследования найдем производную:

$y' = 6t^2 - 12t - 18$; $y' = 6\left(t^2 - 2t - 3\right)$; $y' = 6(t+1)(t-3)$.

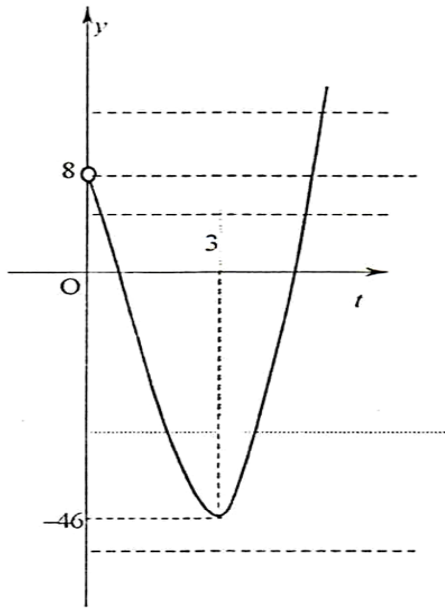
$y' = 0$ при $t = -1$ или $t = 3$. По условию $t > 0$.

Если $t \in (0;3)$, то $y' < 0$. Если $t \in (3;+\infty)$, то $y' > 0$. Значит, $y(3) = -46$ – минимум функции.

Если $t = 0$, то $y = 8$. Так как $t > 0$, то точка $(0;8)$ не принадлежит графику функции.

При неограниченном увеличении $t$ функция неограниченно возрастает и принимает все значения до $+\infty$.

Итак, при $t > 0$ график имеет вид:




3) Количество корней уравнения $2t^3 - 6t^2 - 18t + 8 = p$ при $t > 0$ равно количеству точек пересечения графика функции $y$ с прямой $y = p$. Если $p < -46$, то прямая $y = p$ не пересекает график. Если $p = -46$ или $p \geq 8$, то прямая $y = p$ пересекает график в единственной точке. Для остальных $p$ имеются две точки пересечения.

*Ответ:* $(-\infty; -46] \cup [8; +\infty)$.

## Задания базового уровня сложности

**1.** Найдите значение производной функции $f(x) = 3x - 1$ в точке $x_0 = -\sqrt{18}$.

**2.** Найдите значение производной функции $f(x) = 4x^2 - 5$ в точке $x_0 = 2$.

**3.** Найдите значение производной функции $f(x) = \dfrac{x^3}{5} - 1$ в точке $x_0 = 2$.

**4.** Найдите значение производной функции $f(x) = 6\sqrt{x} + 2x - 4$ в точке $x_0 = 25$.

**5.** Найдите значение производной функции $f(x) = \dfrac{\sqrt{x}}{3} - 5x^2 - \dfrac{x}{6} + 14$ в точке $x_0 = 1$.

**6.** Найдите значение производной функции $f(x) = -\frac{2}{x} + \frac{x}{8} + 1{,}4$ в точке $x_0 = -4$.

**7.** Найдите значение производной функции $f(x) = \frac{2x^2 - 18}{x - 3}$ в точке $x_0 = 1$.

**8.** Найдите значение производной функции $f(x) = \sin 3x - 1$ в точке $x_0 = \frac{\pi}{6}$.

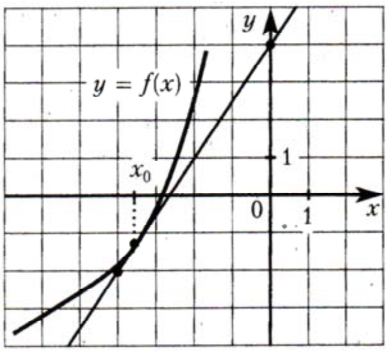
**9.** Найдите значение производной функции $f(x) = 2\cos\frac{x}{2} + 1$ в точке $x_0 = \pi$.

**10.** Найдите значение производной функции $f(x) = \frac{\mathrm{tg} 2x}{2} + 5$ в точке $x_0 = \pi$.

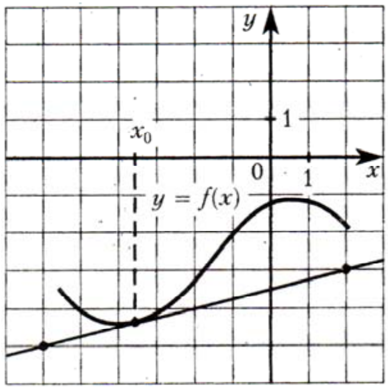
**11.** Найдите значение производной функции $f(x) = x \cdot e^x$ в точке $x_0 = 1$.

**12.** Найдите угловой коэффициент касательной, проведённой к графику функции $f(x) = -2x^2 + 5x - 17$ в точке с абсциссой $x_0 = \frac{3}{4}$.

**13.** В какой точке касательная к кривой $y = \ln(x-1)$ параллельна прямой $y = x$?

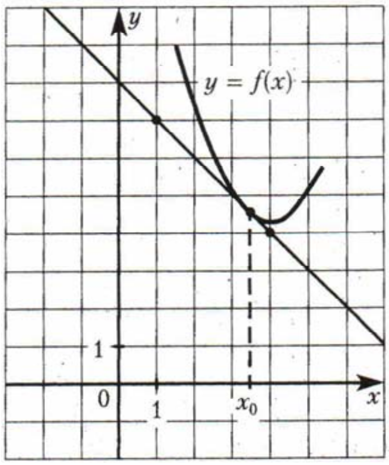


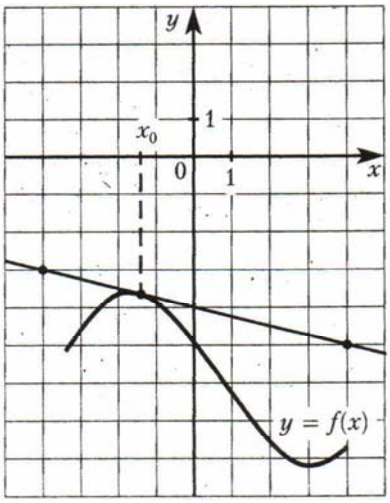

**14.** На рисунке изображен график функции $y = f(x)$ и касательная к нему в точке с абсциссой $x_0$. Найдите значение производной функции $f(x)$ в точке $x_0$.




**15.** На рисунке изображен график функции $y = f(x)$ и касательная к нему в точке с абсциссой $x_0$. Найдите значение производной функции $f(x)$ в точке $x_0$.

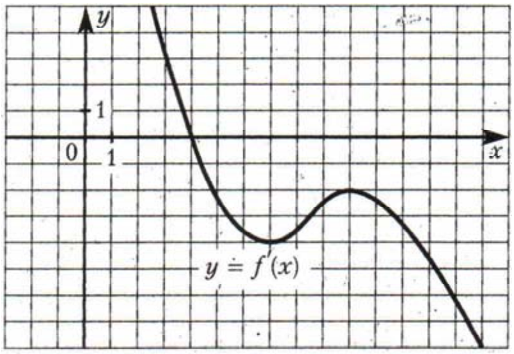
**16.** На рисунке изображен график функции $y = f(x)$ и касательная к нему в точке с абсциссой $x_0$. Найдите значение производной функции $f(x)$ в точке $x_0$.

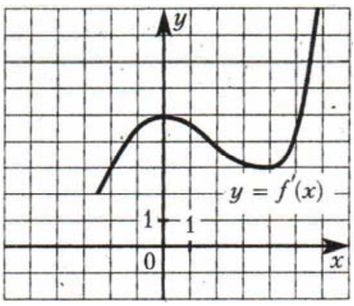


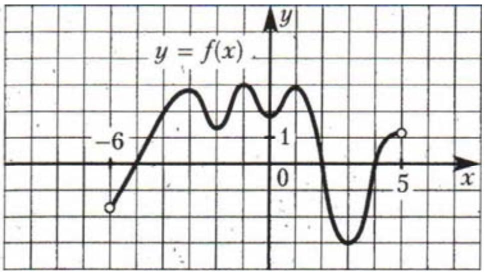

**17.** На рисунке изображен график функции $y = f(x)$ и касательная к нему в точке с абсциссой $x_0$. Найдите значение производной функции $f(x)$ в точке $x_0$.

**18.** На рисунке изображен график $y = f'(x)$ – производной функции $f(x)$. Найдите абсциссу точки, в которой касательная к графику $y = f(x)$ параллельна оси абсцисс или совпадает с ней.

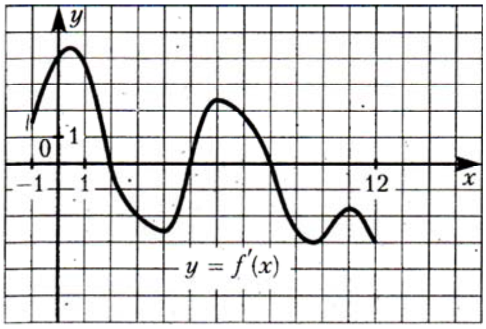



**19.** На рисунке изображен график $y = f'(x)$ - производной функции $f(x)$. Найдите абсциссу точки, в которой касательная к графику $y = f(x)$ параллельна прямой $y = 3x$ или совпадает с ней.

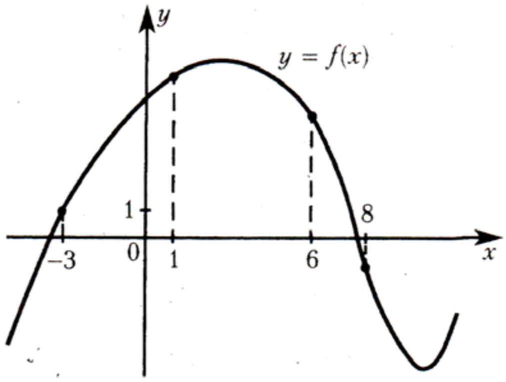



**20.** На рисунке изображен график функции $y = f(x)$, определенной на интервале $(-6;5)$. Найдите количество точек, в которых касательная к графику функции параллельна прямой $y = -8$.

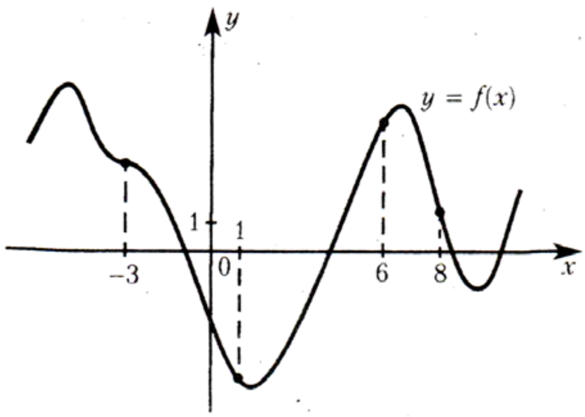



**21.** На рисунке изображен график функции $y = f'(x)$ – производной функции $f(x)$, определенной на интервале $(-1;12)$. Найдите количество точек, в которых касательная к графику функции $f(x)$ параллельна прямой $y = 2x - 15$ или совпадает с ней.

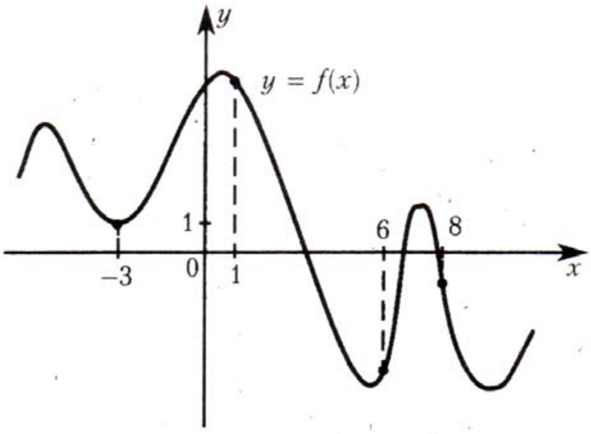
**22.** На рисунке изображен график функции $y = f(x)$ и отмечены точки $-3$, 1, 6, 8. В какой из этих точек значение производной наибольшее? В ответе укажите эту точку.



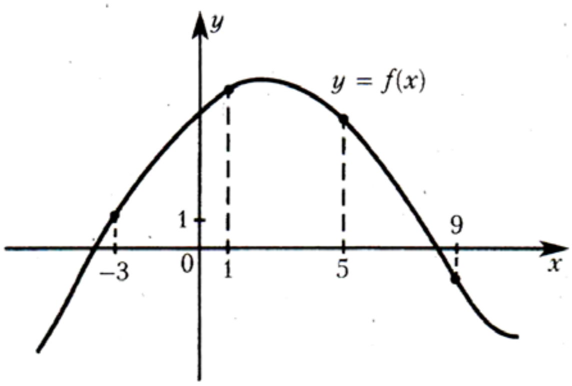

**23.** На рисунке изображен график функции $y = f(x)$ и отмечены точки $-3$, 1, 6, 8. В какой из этих точек значение производной наибольшее? В ответе укажите эту точку.



**24.** На рисунке изображен график функции $y = f(x)$ и отмечены точки $-3$, 1, 6, 8. В какой из этих точек значение производной наименьшее? В ответе укажите эту точку.




**25.** На рисунке изображен график функции $y = f(x)$ и отмечены точки $-3$, 1, 5, 9. В какой из этих точек значение производной наименьшее? В ответе укажите эту точку.




**26.** Материальная точка движется прямолинейно по закону $x(t) = -t^2 + 9t - 21$, где $x$ – расстояние от точки отсчета в метрах, $t$ – время в секундах, измеренное с начала движения. Найдите её скорость (в метрах в секунду) в момент времени $t = 3$ с.

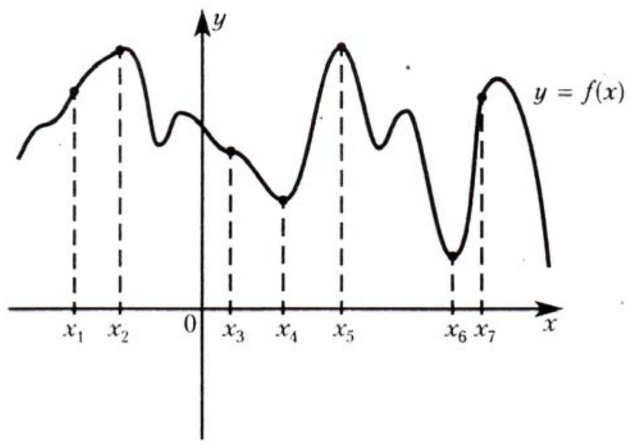
**27.** Материальная точка движется прямолинейно по закону $x(t) = \frac{1}{3}t^3 - t - 8$, где $x$ – расстояние от точки отсчета в метрах, $t$ – время в секундах, измеренное с начала движения. В какой момент времени (в секундах) ее скорость была равна 15 м/с?

**28.** Материальная точка движется прямолинейно по закону $x(t) = 0{,}5t^2 - 4t + 6$, где $x$ – расстояние от точки отсчета в метрах, $t$ – время в секундах, измеренное с начала движения. Через сколько секунд после начала движения материальная точка остановится?

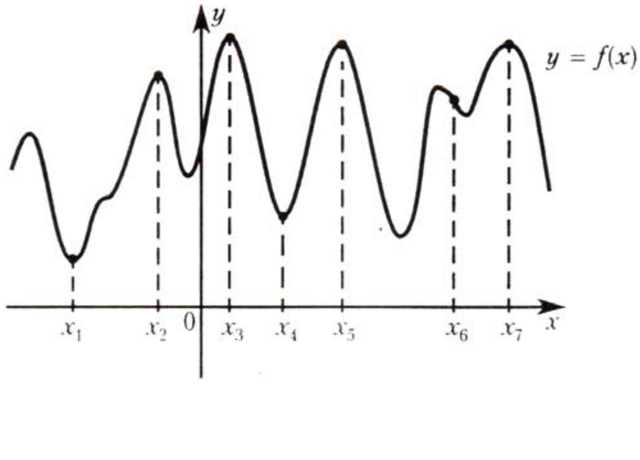
**29.** Материальная точка движется прямолинейно по закону $x(t)=\frac{1}{3}t^3-t^2+t-1$, где $x$ – расстояние от точки отсчета в метрах, $t$ – время в секундах, измеренное с начала движения. Найдите её скорость (в метрах в секунду) в момент времени $t=4$ с.

**30.** Материальная точка движется прямолинейно по закону $x(t)=t^2+2t+9$, где $x$ – расстояние от точки отсчета в метрах, $t$ – время в секундах, измеренное с начала движения. Через сколько секунд после начала движения её скорость будет равна 12 м/с?

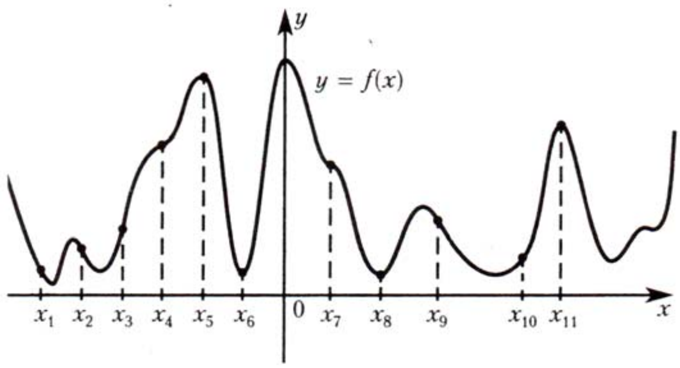
**31.** На рисунке изображен график функции $f(x)$ и семь точек на оси абсцисс: $x_1, x_2, x_3, ..., x_7$. В скольких из этих точек производная функции $f(x)$ положительна?



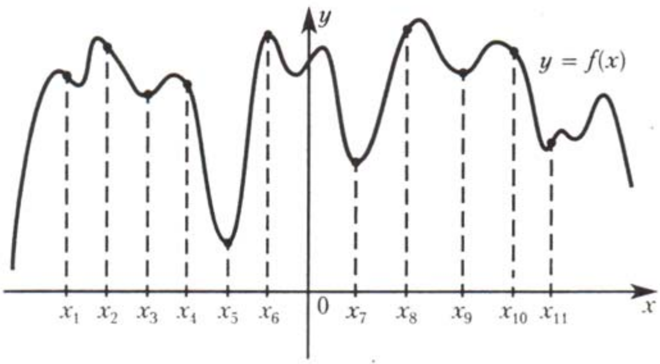

**32.** На рисунке изображен график функции $f(x)$ и семь точек на оси абсцисс: $x_1, x_2, x_3, ..., x_7$. Во скольких из этих точек производная функции $f(x)$ отрицательна?



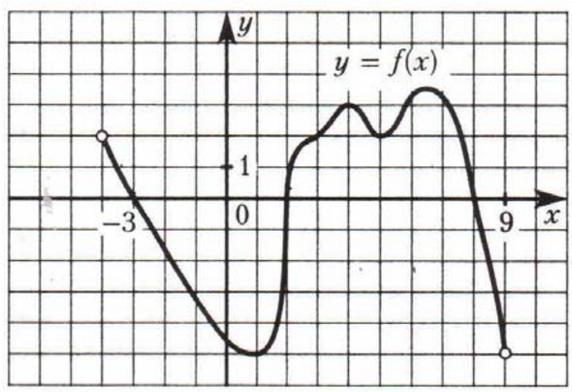
**33.** На рисунке изображен график функции $f(x)$ и семь точек на оси абсцисс: $x_1$, $x_2$, $x_3$, ..., $x_7$. Во скольких из этих точек производная функции $f(x)$ положительна?



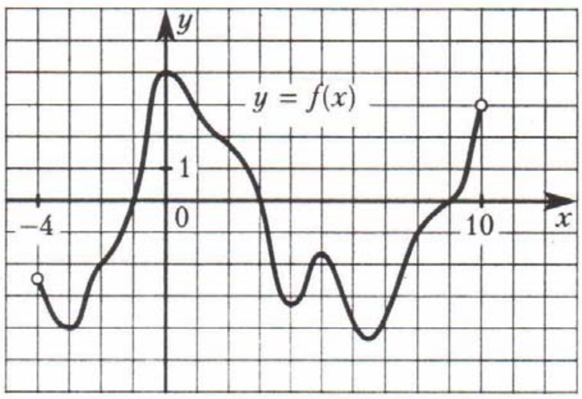

**34.** На рисунке изображен график функции $f(x)$ и семь точек на оси абсцисс: $x_1$, $x_2$, $x_3$, ..., $x_7$. Во скольких из этих точек производная функции $f(x)$ отрицательна?



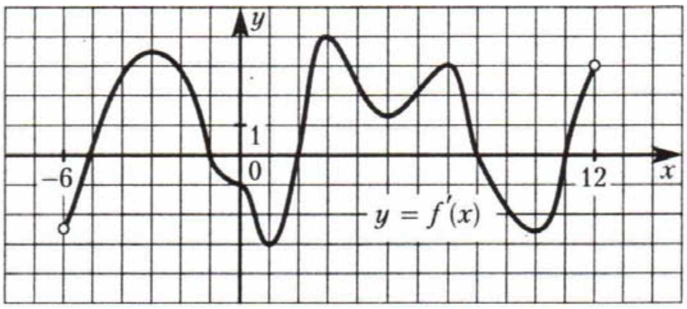

**35.** На рисунке изображен график функции $y = f(x)$, определенной на интервале $(-3;9)$. Определите количество целых точек, в которых производная функции $f(x)$ положительна.



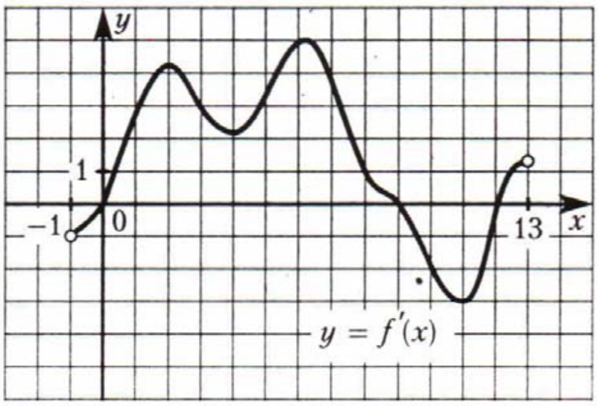
**36.** На рисунке изображен график функции $y = f(x)$, определенной на интервале $(-4;10)$. Определите количество целых точек, в которых производная функции $f(x)$ отрицательна.



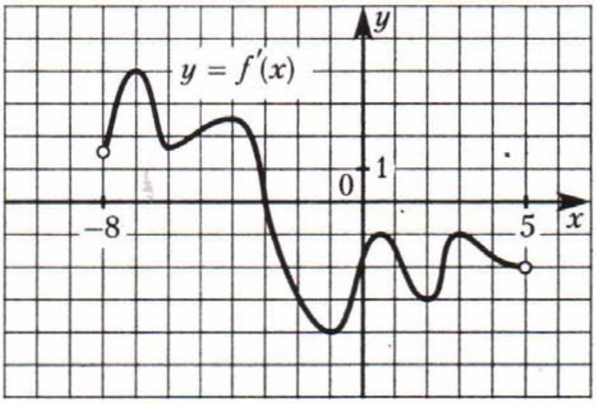

**37.** На рисунке изображен график $y = f'(x)$ – производной функции $f(x)$, определенной на интервале $(-6;12)$. Найдите промежутки возрастания функции $f(x)$. В ответе укажите длину наибольшего из них.



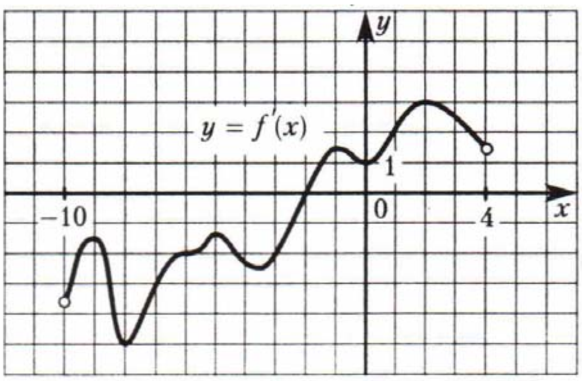

**38.** На рисунке изображен график $y = f'(x)$ – производной функции $f(x)$, определенной на интервале $(-1;13)$. Найдите промежутки убывания функции $f(x)$. В ответе укажите длину наибольшего из них.



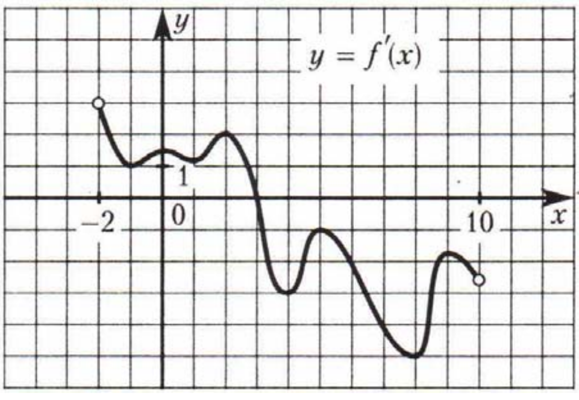
**39.** На рисунке изображен график $y = f'(x)$ – производной функции $f(x)$, определенной на интервале $(-8;5)$. В какой точке отрезка $[-3;2]$ функция $f(x)$ принимает наибольшее значение?



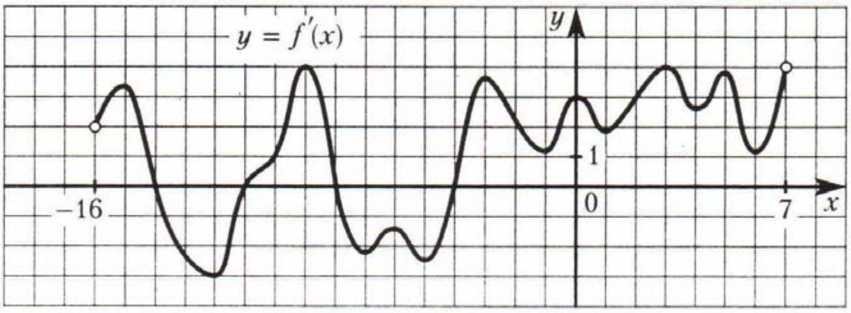

**40.** На рисунке изображен график $y = f'(x)$ – производной функции $f(x)$, определенной на интервале $(-10;3)$. В какой точке отрезка $[-8;-3]$ функция $f(x)$ принимает наименьшее значение?



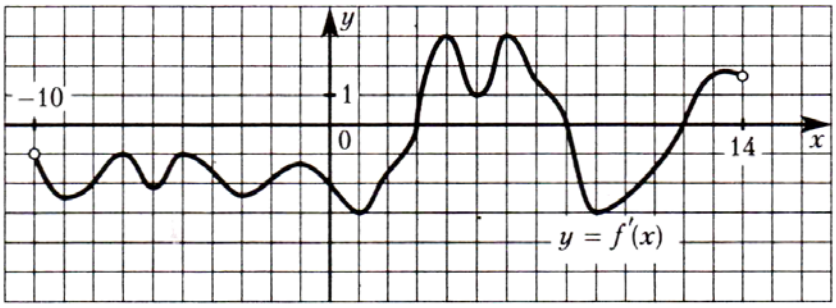

**41.** На рисунке изображен график $y = f'(x)$ – производной функции $f(x)$, определенной на интервале $(-2;10)$. Найдите точку экстремума функции $f(x)$ на интервале $(-1;9)$.



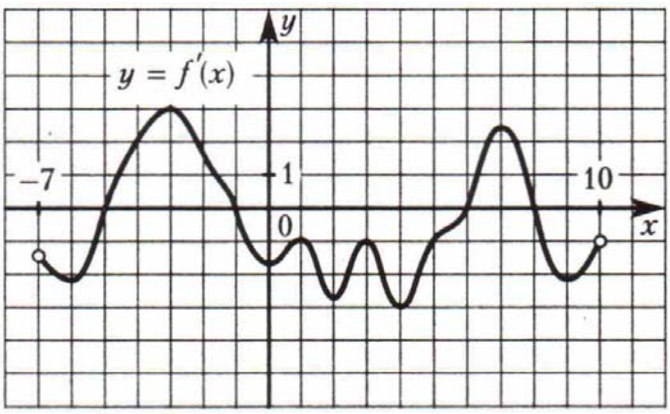
**42.** На рисунке изображен график $y = f'(x)$ – производной функции $f(x)$, определенной на интервале $(-16;7)$. Найдите количество точек экстремума функции $f(x)$, принадлежащих отрезку $[-15;6]$.




**43.** На рисунке изображен график $y = f'(x)$ – производной функции $f(x)$, определенной на интервале $(-10;14)$. Найдите количество точек экстремума максимума функции $f(x)$, принадлежащих отрезку $[-8;11]$.




**44.** На рисунке изображен график $y = f'(x)$ – производной функции $f(x)$, определенной на интервале $(-7;10)$. Найдите количество точек экстремума минимума функции $f(x)$, принадлежащих отрезку $[-4;5]$.



**45.** Найдите точку минимума функции $y = 19 + 4x - \frac{x^3}{3}$.

**46.** Найдите точку максимума функции $y = x^3 - 75x + 23$.

**47.** Найдите наименьшее значение функции $y = (x-12)e^{x-11}$ на отрезке $[10;12]$.

**48.** Найдите наибольшее значение функции $y = x^3 + 8x^2 + 16x + 23$ на отрезке $[-13;3]$.

**49.** Найдите наименьшее значение функции $y = (x+4)^2(x+10) + 9$ на отрезке $[-8;1]$.

**50.** Найдите наименьшее значение функции $y = 2\cos x - 16x + 9$ на отрезке $\left[-\frac{3\pi}{2};0\right]$.

**51.** Найдите наибольшее значение функции $y = 4tgx - 4x + 8$ на отрезке $\left[-\frac{\pi}{4};0\right]$.

**52.** Найдите наибольшее значение функции $y = \ln(x+6)^8 - 8x$ на отрезке $[-5,5;0]$.

## Задания повышенного уровня сложности

**С1.** Найдите точки максимума функции

$$f(x) = 4,5x^2 + 4x^3 - \frac{15 - 15\sin^2(\pi x)}{\cos^2(\pi x)} \cdot x^4.$$

**С2.** Найдите точки минимума функции

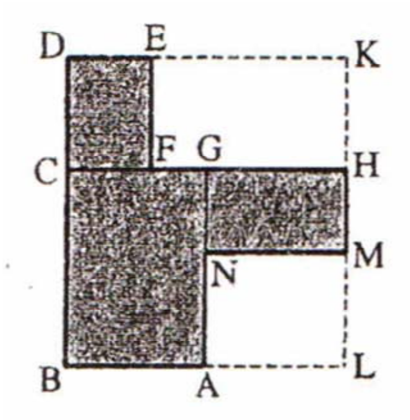
$$f(x) = 30x^4 - \frac{32 - 32\cos^2(\pi x)}{\sin^2(\pi x)} \cdot x^3 + 7,2x^2.$$

**С3.** Найдите точки минимума функции

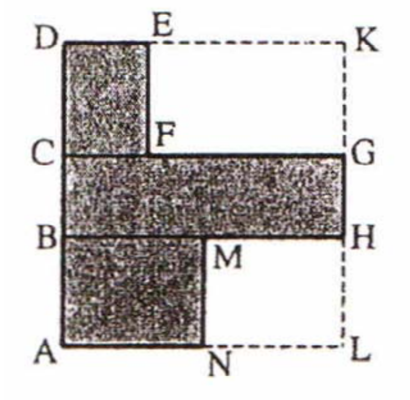
$$f(x) = 0,5x^4 - x^3 - \frac{16 - 8x^2 + x^4}{x^2 - 4}.$$

**С4.** Найдите точки максимума функции

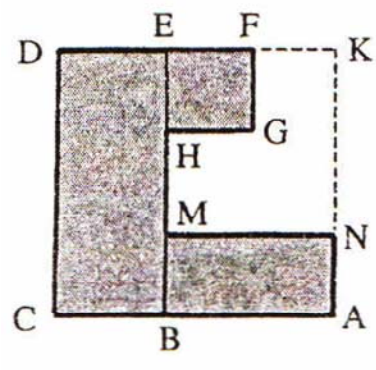
$$f(x) = 96x^2 - 8x^3 + 3x^2 \cdot \frac{x^4 - 256}{16 - x^2}.$$



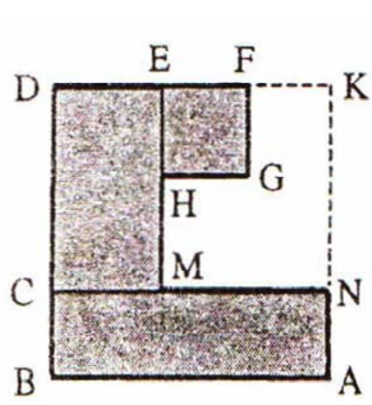

**С5.** Требуется разметить на земле участок ABDEFHMN площадью 2300 м$^2$, состоящий из трех прямоугольных частей и имеющий форму, изображенную на рисунке, где EF = MN = 20 м, FH = 35 м и AN $\geq$30 м. Найдите наименьшее значение периметра такого участка и какие-либо значения длин KL, BL и AN, при которых периметр является наименьшим.




**С6.** Требуется разметить на земле участок ADEFGHMN площадью 1100 м$^2$, состоящий из трех прямоугольных частей и имеющий форму, изображенную на рисунке, где EF = 30 м, FG = 40 м и MN $\geq$25 м. Найдите наименьшее значение периметра такого участка и какие-либо значения длин KL, AL и MN, при которых периметр является наименьшим.




**С7.** Требуется разметить на земле участок площадью 2300 м$^2$, который состоит из трех прямоугольных частей и имеет форму многоугольника ACDFGHMN, изображенного на рисунке, где FG=HM=20 м, KF=25 м и GH$\geq$15 м. Найдите наименьшее значение пери метра такого участка и какие-либо значения длин KA, KD и GH, при которых периметр является наименьшим.




**С8.** Требуется разметить на земле участок площадью 2100 м$^2$, который состоит из трех прямоугольных частей и имеет форму многоугольника ABDFGHMN, изображенного на рисунке, где FG=HM=25м, KF=20м и GH$\geq$20м. Найдите наименьшее значение периметра такого участка и какие-либо значения длин KA, KD и GH, при которых периметр является наименьшим.

**C9.** Найдите все значения $p$, при которых уравнение
$8\sin^3 x = p - 7\cos 2x$ не имеет корней.

**C10.** Найдите все значения $p$, при которых уравнение
$4\sin x - 7 = p(1 + ctg^2 x)$ имеет хотя бы один корень.

**C11.** Найдите все значения $p$, при которых уравнение
$2\sin x - 3 = p(1 + ctg^2 x)$ имеет хотя бы один корень.

**C12.** Найдите все значения $p$, при которых уравнение
$4\sin^3 x = p - 3\cos 2x$ не имеет корней.

**C13.** При каких значениях $p$ уравнение $\cos 2x + \dfrac{p}{\sin x} = -7$ не имеет решения?

**C14.** При каких значениях $p$ уравнение $\cos 2x - \dfrac{2p}{\cos x} = 7$ не имеет решения?

**C15.** При каких значениях $p$ уравнение не имеет решения? $\cos 2x + \dfrac{p}{\sin x} = -10$.

**C16.** Найдите все значения $p$, при которых уравнение
$2^{3x+1} - 2 = 3\cdot\left(4^x + 2^{x+2}\right) + p$ имеет единственный корень.

**C17.** Найдите все значения $p$, при которых уравнение
$2^{3x+1} + 8 = 3\cdot 2^{x+1}\left(3 + 2^x\right) + p$ имеет единственный корень.

**C18.** Найдите все значения $p$, при которых уравнение
$2^{4-3x} - 2 = 3\cdot\left(2^{3-x} + 4^{1-x}\right) + p$ не имеет корней.

**C19.** Найдите все значения $p$, при которых уравнение
$3^{3x+2} + p = 2\cdot 9^{x+1} - 3^{x+2} + 1$ имеет ровно три корня.

**C20.** Найдите все значения $p$, при которых уравнение
$3^x\cdot\left(3^{2(x+1)} - 7{,}5\cdot 3^{x+1}\right) = p - 3\cdot\left(4\cdot 3^x + 1\right)$ имеет ровно два корня.

**C21.** Найдите все значения $p$, при которых уравнение
$9\cdot 5^x\left(5^{2x} - 0{,}5\cdot 5^{x+1}\right) = p - 5\cdot\left(12\cdot 5^{x-1} + 1\right)$ имеет не менее двух корней.

**C22.** Найдите все значения $p$, при которых уравнение
$2\cdot 7^{3x} - 2 = 3\cdot\left(49^x + \dfrac{4}{49}\cdot 7^{x+2}\right) - p$ или не имеет корней, или имеет единственный корень.

# ОТВЕТЫ

| **Базовый уровень сложности** | | | | **Повышенный уровень сложности** | |
|---|---|---|---|---|---|
| **1** | 3 | **27** | 4 | **C1** | $-0{,}3$ |
| **2** | 16 | **28** | 4 | **C2** | 0,6 |
| **3** | 2,4 | **29** | 9 | **C3** | $-0{,}5$ |
| **4** | 2,6 | **30** | 5 | **C4** | 2 |
| **5** | $-10$ | **31** | 3 | **C5** | 240, 60, 60, 30 |
| **6** | 0,25 | **32** | 2 | **C6** | 240, 60, 60, 25 |
| **7** | 6,5 | **33** | 3 | **C7** | 270, 60, 60, 15 |
| **8** | 0 | **34** | 4 | **C8** | 280, 60, 60,20 |
| **9** | $-1$ | **35** | 3 | **C9** | $(-\infty;-15)\cup(7;\infty)$ |
| **10** | 1 | **36** | 4 | **C10** | $[-11;0)$ |
| **11** | $2e$ | **37** | 6 | **C11** | $[-5;0)$ |
| **12** | 2 | **38** | 3 | **C12** | $(-\infty;-7)\cup(3;\infty)$ |
| **13** | 2 | **39** | $-3$ | **C13** | $[-6;0)\cup(0;6]$ |
| **14** | 1,5 | **40** | $-3$ | **C14** | $[-3;0)\cup(0;3]$ |
| **15** | 0,25 | **41** | 3 | **C15** | $(-\infty;-9)\cup\{0\}\cup(9;+\infty)$ |
| **16** | $-1$ | **42** | 4 | **C16** | $\{-22\}\cup[-2;+\infty)$ |
| **17** | $-0{,}25$ | **43** | 1 | **C17** | $\{-46\}\cup[8;+\infty)$ |
| **18** | 4 | **44** | 0 | **C18** | $(-\infty;-22)$ |
| **19** | $-2$ | **45** | $-2$ | **C19** | $\left(-\frac{1}{3};1\right)$ |
| **20** | 6 | **46** | $-5$ | **C20** | $\left\{4\frac{5}{6}\right\}\cup\left(\frac{1}{3};3\right]$ |
| **21** | 4 | **47** | $-1$ | **C21** | $\left(2\frac{1}{3};6\frac{5}{6}\right]$ |
| **22** | $-3$ | **48** | 23 | **C22** | $(-\infty;2]\cup[22;+\infty)$ |
| **23** | 8 | **49** | 9 | | |
| **24** | 6 | **50** | 11 | | |
| **25** | 9 | **51** | 8 | | |
| **26** | 2 | **52** | 40 | | |

# Глава III
# ЭЛЕМЕНТЫ КОМБИНАТОРИКИ И ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

## §1. Классическое определение вероятности

Теория вероятностей изучает свойства случайных массовых событий, способных многократно повторяться при воспроизведении определенного комплекса условий. Основное свойство любого случайного события, независимо от его природы, – мера или вероятность его осуществления.

Теория вероятностей есть раздел математики, в котором изучаются только случайные явления (события) с устойчивой частостью и выявляются закономерности при массовом их повторении. Случайные события обозначаются A, B, C,… Событие называется достоверным, если в данном опыте оно обязательно наступит. Вероятность достоверного события 100% и равна 1. Событие называется невозможным, если в данном опыте оно наступить не может. Вероятность невозможного события равна 0.

Вероятностью случайного события A называется число P(A), около которого колеблется частота этого события в длинных сериях испытаний. Классическим определением вероятности считают: вероятность P(A) события A равняется отношению числа возможных результатов испытания, благоприятствующих событию A, к числу всех равновозможных результатов испытания. $P(A) = \frac{m}{n}$, где $m$ – число благоприятствующих исходов событию A, а $n$ – число всех равновозможных исходов опыта.

**П р и м е р 1.** В корзине 12 зеленых и 15 красных яблок. Наудачу извлекается одно яблоко, какова вероятность, что оно красное?

*Решение*. Число всех равновозможных исходов опыта $n$=12+15=27, а число, благоприятствующего нам события: достать красное яблоко равно $m$=15. Тогда искомая вероятность будет $P(A) = \frac{m}{n} = \frac{15}{27}$.

**П р и м е р 2.** Все натуральные числа от 1 до 30 записаны на одинаковых карточках и помещены в урну. После тщательного перемешивания карточек из урны извлекается одна карточка. Какова вероятность того, что число на взятой карточке окажется кратным 5?

*Решение.* Число всех равновозможных опытов $n$=30, а число всех благоприятствующих нам событий, т.е., чисел кратных 5, $m$=6 (числа 5, 10, 15, 20, 25, 30). Тогда искомая вероятность будет $P(A)=\frac{m}{n}=\frac{6}{30}=\frac{1}{5}=0,2$.

Вероятность события всегда характеризуется положительным чистом и лежит в интервале $0 \le P(A) \le 1$.

Суммой событий А и В называется событие А+В, которое наступает тогда и только тогда, когда наступает хотя бы одно из событий: А или В.

Произведением событий А и В называется событие АВ, которое наступает тогда и только тогда, когда наступают оба события: А и В.

Событием, противоположным событию А, называют событие $\overline{A}$, которое наступает тогда и только тогда, когда не наступает событие А.

## §2. Комбинаторика и вероятность

Комбинаторика изучает способы подсчета числа элементов в конечных множествах. Формулы комбинаторики используют при непосредственном вычислении вероятностей.

Множества элементов, состоящие из одних и тех же различных элементов и отличающиеся друг от друга только их порядком, называются *перестановками* этих элементов.

$$P_n = n!$$

Если среди n элементов есть $n_1$ элементов одного вида, $n_2$ элементов другого вида и т.д., то число перестановок с повторениями определяется формулой: $\overline{P_n}(n_1,n_2,...,n_k)=\frac{n!}{n_1!n_2!\cdot...\cdot n_k!}$, где $n_1+n_2+.....+n_k=n$.

**Пример 3.** Сколькими различными способами могут разместиться на скамейки 5 человек?

*Решение.* $P_5=5!=1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5=120$ способов.

*Размещениями* называют множества, составленные из $n$ различных элементов по $m$ элементов, которые отличаются либо составом элементов, либо их порядком. Число всех возможных размещений определяется формулой

$$A_n^m=\frac{n!}{(n-m)!}.$$

Число размещений по $m$ элементов с повторениями из $n$ элементов равно $\overline{A_n^m}=n^m$.

**П р и м е р 4.** Сколькими различными способами можно выбрать три лица на три различные должности из десяти кандидатов?

*Решение.* $A_{10}^{3}=\dfrac{10!}{(10-3)!}=\dfrac{10!}{7!}=8\cdot9\cdot10=720$ способов.

*Сочетаниями* из $n$ различных элементов по $m$ элементов из числа $n$ заданных, и которые отличаются хотя бы одним элементом. Число сочетаний из $n$ элементов по $m$ находится по формуле

$$C_n^m=\frac{n!}{m!(n-m)!}.$$

Число сочетаний с повторениями из $n$ элементов по $m$ элементов равно: $\overline{C_n^m}=C_{n+m-1}^m$.

**П р и м е р 5.** Сколькими различными способами можно собрать команду из 7 человек из 15 спортсменов?

*Решение.* $C_{15}^{7}=\dfrac{15!}{7!(15-7)!}=\dfrac{9\cdot10\cdot11\cdot12\cdot13\cdot14\cdot15}{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7}=6435$ способов.

При решении задач по вероятности, в том числе и с использованием комбинаторики используют следующие правила.

*Правило суммы*. Если некоторый объект А может быть выбран из множества объектов m способами, а другой объект В может быть выбран n способами, то выбрать либо А, либо В можно m+n способами.

*Правило произведения*. Если объект А можно выбрать из множества объектов m способами и после каждого такого выбора объект В можно выбрать n способами, то пара объектов в указанном порядке может быть выбран $m\cdot n$ способами.

**П р и м е р 6.** Спортсмен стреляет по мишени, разделенной на 3 сектора. Вероятность попадания в первый сектор равна 0,4, во второй – 0,3. Какова вероятность попадания либо в первый, либо во второй сектор?

*Решение.* События А – «попадание в первый сектор» и В – «попадание во второй сектор» несовместны (попадание в один сектор исключает попадание во второй, первый «или» второй), поэтому P(A+B)=P(A)+P(B)=0,4+0,3=0,7.

**П р и м е р 7.** Найти вероятность совместного появления цифры при одном подбрасывании двух монет.

*Решение.* Вероятность появления цифры на первой монете P(A)=0,5, вероятность появления цифры на второй монете P(B)=0,5. Цифра должна быть на первой монете «и» на второй монете:

$$P(AB)=P(A)P(B)=0{,}5\cdot0{,}5=0{,}25.$$

**П р и м е р 8.** Монета подброшена три раза. Какова вероятность того, что цифра выпадет ровно два раза?

*Решение.* $A_k$ – выпадение цифры при $k$-м подбрасывании монеты ($k$=1, 2, 3); $A$ – выпадение двух цифр при трех подбрасываниях, тогда $A = A_1 A_2 \overline{A_3} + A_1 \overline{A_2} A_3 + \overline{A_1} A_2 A_3$. Получаем

$$P(A) = P(A_1 A_2 \overline{A_3}) + P(A_1 \overline{A_2} A_3) + P(\overline{A_1} A_2 A_3).$$

Принимая независимость событий $A_k$ и зная, что вероятность каждого равна 0,5 получаем:

$$P(A) = P(A_1)P(A_2)P(\overline{A_3}) + P(A_1)P(\overline{A_2})P(A_3) + P(\overline{A_1})P(A_2)P(A_3) =$$
$$= 0,5 \cdot 0,5 \cdot 0,5 + 0,5 \cdot 0,5 \cdot 0,5 + 0,5 \cdot 0,5 \cdot 0,5 = 0,375.$$

## Задания для самостоятельного решения

**1.** В партии из 800 кирпичей есть 14 бракованных. Мальчик выбирает наугад один кирпич из этой партии и бросает его с восьмого этажа стройки. Какова вероятность, что брошенный кирпич окажется бракованным?

**2.** Экзаменационный сборник по физике для 11 класса состоит из 75 билетов. В 12 из них встречается вопрос о лазерах. Какова вероятность, что ученик Степа, выбирая билет наугад, наткнется на вопрос о лазерах?

**3.** На чемпионате по бегу на 100 м выступают 3 спортсмена из Италии, 5 спортсменов из Германии и 4 – из России. Номер дорожки для каждого спортсмена определяется жеребьевкой. Какова вероятность, что на второй дорожке будет стоять спортсмен из Италии?

**4.** В магазин завезли 1500 банок сока. Известно, что 9 из них – просроченные. Найти вероятность того, что девочка, выбирающая одну банку наугад, в итоге купит именно просроченную.

**5.** В городе работают 120 офисов различных банков. Бабуля выбирает один из этих банков наугад и открывает в нем вклад на 100000 рублей. Известно, что во время кризиса 36 банков разорились, и вкладчики этих банков потеряли все свои деньги. Какова вероятность того, что бабуля не потеряет свой вклад?

**6.** За одну 12-часовую смену рабочий изготавливает на станке с числовым программным управлением 600 деталей. Из-за дефекта режущего инструмента на станке получено 9 бракованных деталей. В конце рабочего дня мастер цеха берет одну деталь наугад и проверяет ее. Какова вероятность, что ему попадется именно бракованная деталь?

**7.** На Киевском вокзале в Москве работают 28 окон билетных касс, рядом с которыми толпятся 4000 пассажиров, желающих купить билеты на поезд. По статистике, 1680 из этих пассажиров неадекватны. Найти вероятность того, что кассиру, сидящему за 17-м окном, попадется неадекватный пассажир (учитывая, что пассажиры выбирают кассу наугад).

**8.** Банк «Русский стандарт» проводит лотерею для своих клиентов — держателей карт Visa Classic и Visa Gold. Будет разыграно 6 автомобилей

Opel Astra, 1 автомобиль Porsche Cayenne и 473 телефона iPhone 4. Известно, что менеджер Вася оформил карту Visa Classic и стал победителем лотереи. Какова вероятность, что он выиграет автомобиль Opel Astra, если приз выбирается наугад?

**9.** Во Владивостоке отремонтировали школу и поставили 1200 новых пластиковых окон. Ученик 11-го класса, который не хотел сдавать ЕГЭ по математике, нашел на газоне 45 булыжников и начал кидать их в окна наугад. В итоге, он разбил 45 окон. Найти вероятность того, что окно в кабинете директора окажется не разбитым.

**10.** На американский военный завод поступила партия из 9000 поддельных микросхем китайского производства. Эти микросхемы устанавливаются в электронные прицелы для винтовки М-16. Известно, что 8766 микросхем в указанной партии неисправны, и прицелы с такими микросхемами будут работать неправильно. Найти вероятность того, что наугад выбранный электронный прицел работает правильно.

**11.** Бабуля хранит на чердаке своего загородного дома 2400 банок с огурцами. Известно, что 870 из них давно протухли. Когда к бабуле приехал внучек, она подарила ему одну банку из своей коллекции, выбирая ее наугад. Какова вероятность того, что внучек получил банку с тухлыми огурцами?

**12.** Бригада из 7 строителей-мигрантов предлагает услуги по ремонту квартир. За летний сезон они выполнили 360 заказов, причем в 234 случаях не убрали строительный мусор из подъезда. Коммунальные службы выбирают одну квартиру наугад и проверяют качество ремонтных работ. Найти вероятность того, что сотрудники коммунальных служб не наткнутся при проверке на строительный мусор.

**13.** Новогодняя гирлянда состоит из 250 красных, 300 зеленых, 100 желтых и 150 синих лампочек. Одна из лампочек перегорела. Какова вероятность, что перегорела лампочка красного цвета?

**14.** Из слова «максимум» случайным образом выбирается одна буква. Какова вероятность, что будет выбрана буква, которая встречается в этом слове только один раз?

**15.** Маша загадала натуральное число, меньшее 1000 и делящееся на 39. Петя угадывает это число, называя на свое усмотрение три любых числа. Какова вероятность, что загаданное Машей число будет среди чисел, названных Петей?

**16.** Найти вероятность того, что в первые три подбрасывания монеты выпадет «орел».

**17.** Найти вероятность того, что при первых четырех подбрасываниях «орел» выпадет три раза.

**18.** Какова вероятность, что первая цифра регистрационного номера автомобиля, выбранного случайным образом, есть цифра 0, а оставшиеся две цифры образуют двузначное число, делящееся на 5? Если ответом является бесконечная десятичная дробь, после запятой укажите первые шесть знаков.

**19.** Из 800 поступивших в продажу аккумуляторных батарей в среднем 780 уже заряжены. Какова вероятность, что взятая наугад батарея будет не заряжена?

**20.** Стрелок производит один выстрел в мишень, состоящую из центрального круга и двух концентрических колец. Вероятность попадания в круг и кольца соответственно равны 0,35, 0,20, 0,15. Какова вероятность попадания в мишень?

**21.** В коробке лежат два черных и три белых шара. Из коробки наугад вынимают два шара. Какова вероятность, что оба вынутых шара окажутся черными?

**22.** В коробке лежат два черных и три белых шара. Из коробки наугад вынимают два шара. Какова вероятность, что вынутые шары окажутся разных цветов?

**23.** При подготовке к зачетам по двум предметам студент выучил по одному предмету 18 вопросов из 25, а по другому предмету – 16 вопросов из 20. Чтобы получить «зачет» по предмету, студенту необходимо ответить на один вопрос, случайным образом выбранный из списка вопросов по данному предмету. Какова вероятность, что студент получит «зачет» по обоим предметам?

**24.** Некоторый прибор состоит из трех блоков. Если в работе одного из блоков происходит сбой, прибор отключается. Вероятность сбоя в течении года для первого блока составляет 0,2, для второго блока – 0,3, а для третьего блока – 0,1. Какова вероятность, что в течении года произойдет хотя бы одно отключение данного прибора?

## Ответы к заданиям

| | | | |
|---|---|---|---|
| **1.** | 0,0175 | **13.** | 0,3125 |
| **2.** | 0,16 | **14.** | 0,625 |
| **3.** | 0,25 | **15.** | 0,12 |
| **4.** | 0,006 | **16.** | 0,125 |
| **5.** | 0,7 | **17.** | 0,25 |
| **6.** | 0,015 | **18.** | 0,018018 |
| **7.** | 0,42 | **19.** | 0,025 |
| **8.** | 0,0125 | **20.** | 0,7 |
| **9.** | 0,9625 | **21.** | 0,1 |
| **10** | 0,026 | **22.** | 0,6 |
| **11** | 0,3625 | **23.** | 0,576 |
| **12** | 0,35 | **24.** | 0,496 |

# Глава IV
# ПЛАНИМЕТРИЯ

## §1. Треугольники и четырехугольники

Рассмотрим формулировки некоторых теорем, которые часто используются при решении задач.

*Теоремы о точках пересечения медиан, биссектрис, высот треугольника:*

а) три медианы треугольника пересекаются в одной точке (ее называют центром тяжести или центроидом треугольника) и делятся в этой точке в отношении 2:1, считая от вершины;

б) три биссектрисы треугольника пересекаются в одной точке;

в) три высоты треугольника пересекаются в одной точке (ее называют ортоцентром треугольника).

*Свойство медианы в прямоугольном треугольнике:* в прямоугольном треугольнике медиана, проведенная к гипотенузе, равна ее половине.

*Верна и обратная теорема:* Если в треугольнике одна из медиан равна половине стороны, к которой она проведена, то этот треугольник прямоугольный.

Длина медианы треугольника выражается формулой

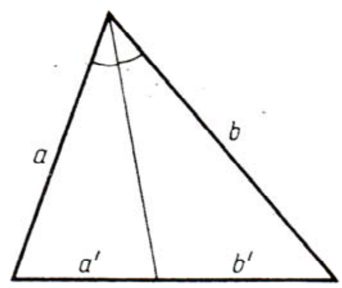
$$m_a = \frac{1}{2}\sqrt{2\left(b^2 + c^2\right) - a^2},$$

где $a, b, c$ – длины сторон треугольника; $m_a$ – медиана, проведенная к стороне $a$.

Длина стороны треугольника выражается формулой

$$a = \frac{2}{3}\sqrt{2\left(m_b^2 + m_c^2\right) - m_a^2},$$

где $m_a, m_b, m_c$ – длины медиан треугольника.




*Свойство биссектрисы внутреннего угла треугольника:* биссектриса внутреннего угла треугольника делит сторону, к которой она проведена, на части, пропорциональные прилежащим сторонам: $\frac{a}{b} = \frac{a'}{b'}$

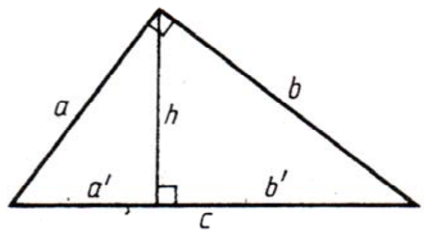
Длина биссектрисы треугольника выражается формулой

$$l_c = \sqrt{ab - a_1 b_1}.$$

Длина биссектрисы треугольника выражается через длины его сторон $a$, $b$ и $c$ по формуле

$$l_c = \frac{\sqrt{a\,b(a+b+c)(a+b-c)}}{a+b}.$$

*Метрические соотношения в прямоугольном треугольнике:* если $a$ и $b$ – катеты, $c$ – гипотенуза, $h$ – высота, $a'$ и $b'$ – проекции катетов на гипотенузу, то:




а) $h^2 = a'b'$;

б) $a^2 = ca'$;

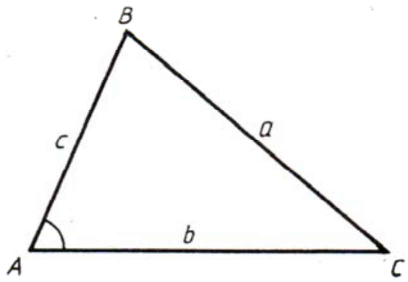
в) $b^2 = cb'$;

г) $a^2 + b^2 = c^2$;

д) $h = \dfrac{ab}{c}$.

*Теорема косинусов.* Квадрат любой стороны треугольника равен сумме квадратов двух других сторон без удвоенного произведения этих сторон на косинус угла между ними.

$$a^2 = b^2 + c^2 - b \cdot c \cdot \cos A.$$




*Теорема синусов.* Стороны треугольника пропорциональны синусам противолежащих углов.

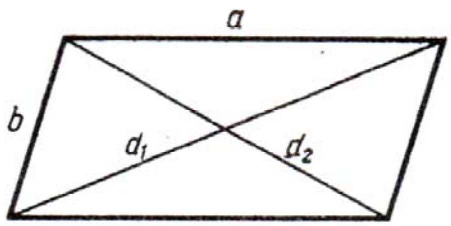
*Обобщенная теорема синусов.* Отношение стороны треугольника к синусу противолежащего угла равно диаметру описанной окружности.

*Определение вида треугольника по его сторонам:* пусть $a$, $b$, $c$ – стороны треугольника, причем $c$ – наибольшая сторона. Тогда:

а) если $c^2 < a^2 + b^2$, то треугольник остроугольный;

б) если $c^2 = a^2 + b^2$, то треугольник прямоугольный;

в) если $c^2 < a^2 + b^2$, то треугольник тупоугольный.




*Метрические соотношения в параллелограмме:* сумма квадратов диагоналей параллелограмма равна сумме квадратов всех его сторон

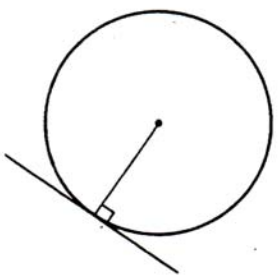
$$d_1^2 + d_2^2 = 2a^2 + 2b^2.$$

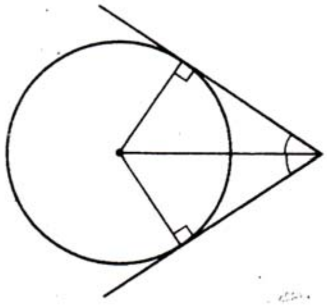
# §2. Окружность

Свойства касательных к окружности:

а) радиус, проведенный в точку касания, перпендикулярен касательной;

б) две касательные, проведенные к окружности из одной точки, равны, и центр окружности лежит на биссектрисе угла между ними.





Измерение углов, связанных с окружностью:

а) центральный угол, измеряется дугой, на которую он опирается;

б) вписанный угол измеряется половиной дуги, на которую он опирается;

в) угол между касательной и хордой измеряется половиной дуги, заключенной между касательной и хордой.

Теоремы об окружностях и треугольниках:

а) около всякого треугольника можно описать окружность; центром окружности служит точка пересечения перпендикуляров, проведенных к сторонам через их середины;

б) во всякий треугольник можно вписать окружность; центром окружности служит точка пересечения биссектрис.

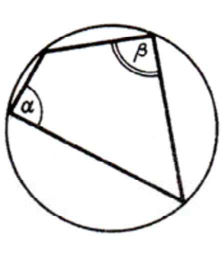
Для всякого треугольника зависимость между его высотами $h_a, h_b, h_c$ и радиусом $r$ вписанной окружности выражается формулой

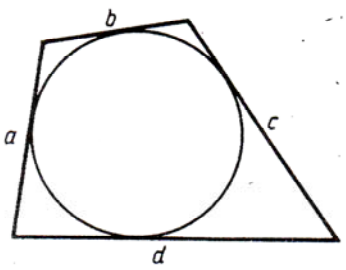
$$\frac{1}{h_a}+\frac{1}{h_b}+\frac{1}{h_c}=\frac{1}{r}.$$

Теоремы об окружностях и четырехугольниках:

а) для того, чтобы около четырехугольника можно было описать окружность, необходимо и достаточно, чтобы сумма противолежащих углов четырехугольника была равна 180°;

б) для того, чтобы в четырехугольник можно было вписать окружность, необходимо и достаточно, чтобы суммы противолежащих его сторон были равны $a+c=b+d$.



Высота равнобедренной трапеции, в которую можно вписать окружность, является средним геометрическим ее оснований, т.е

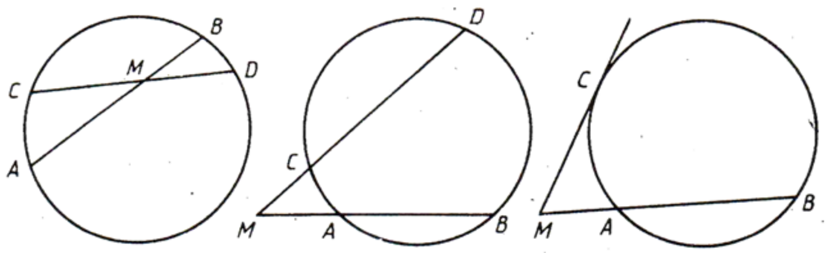
$$h^2 = a\,b\,.$$

Метрические соотношения в окружности:

а) если хорды AB и CD пересекаются в точке M, то $AM \cdot BM = CM \cdot DM$;

б) если из точки M к окружности проведены две секущие MAB и MCD, то $AM \cdot BM = CM \cdot DM$;

в) если из точки M к окружности проведены секущая MAB и касательная MC, то $AM \cdot BM = CM^2$.




Радиус вписанной окружности в прямоугольный треугольник равен

$$r = \frac{a+b-c}{2},$$

где $a$ и $b$ – катеты; $c$ – гипотенуза.

## §3. Площади плоских фигур

Отношение площадей подобных фигур равно квадрату коэффициента подобия.

Если у двух треугольников равны основания, то их площади относятся как высоты; если у двух треугольников равны высоты, то их площади относятся как основания.

Формулы для вычисления площади треугольника:

$$S = \frac{a\,h}{2},\; S = \frac{a\,b \sin C}{2},\; S = \frac{a\,b\,c}{4R},\; S = pr,$$

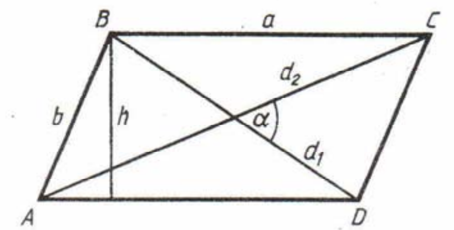
где $p = \dfrac{a+b+c}{2}$; $R$ – радиус описанной окружности; $r$ – радиус вписанной окружности,

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$ формула Герона

Формулы для вычисления площади параллелограмма:

$$S = ah, \qquad S = ab\sin C,$$

$$S = \frac{1}{2}d_1 d_2 \sin\alpha.$$




Формула площади трапеции: $S = \frac{1}{2}(a+b)h$.

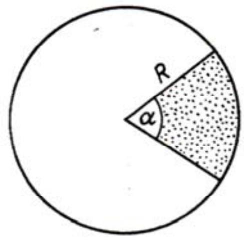
Площадь равнобедренной трапеции, диагонали которой взаимно перпендикулярны, равна квадрату ее высоты

$$S = h^2.$$

Длина окружности радиуса $R$: $l = 2\pi R$

Формула площади круга $S = \pi R^2$

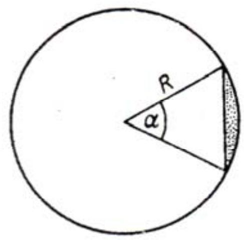
Формула площади кругового сектора:




$$S = \frac{1}{2}R^2\alpha,$$

где $\alpha$ – радианная мера центрального угла.

Формула площади кругового сегмента:



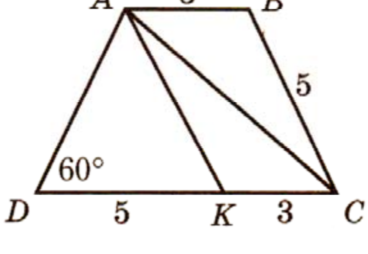

$$S = \frac{1}{2}R^2(\alpha - \sin\alpha).$$

## §4. Примеры решения задач

**П р и м е р 1.** Основания равнобедренной трапеции равны 3 м и 6 м, а угол при основании 60°. Найдите диагональ трапеции.

*Решение.*

Пусть в трапеции *ABCD* основания *AB* и *CD*, $\angle D = 60^\circ$ и *AD*=*BC*. Тогда по свойству равнобедренной трапеции




$$\angle C = \angle D = 60^\circ,$$

$$\angle A = \angle B = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ.$$

Проведем $AK \parallel BC$. Так как *AB*||*CD*, то *ABCK* – параллелограмм, в котором *KC*=*AB*=3 м, $DK = 8 - 3 = 5$ м и *BC*=*AK*=*AD*.

В треугольнике $ADK$ $AD=AK$, $\angle D = 60^\circ$, следовательно, и $\angle AKD = 60^\circ$, и $\angle DAK = 60^\circ$, поэтому треугольник $ADK$ равносторонний, в котором $AK=DK=BC=5$ м.

По теореме косинусов в треугольнике ABC

$$AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2AB \cdot BC \cdot \cos B,$$

$$AC^2 = 3^2 + 5^2 - 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \cos 120^\circ = 9 + 25 - 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) =$$

$$= 9 + 25 + 15 = 49.$$

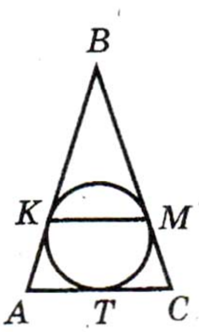
Значит, $AC = \sqrt{49} = 7$ м.

*Ответ:* 7.

**Пример 2.** Окружность, вписанная в равнобедренный треугольник $ABC$ с основанием $AC$, касается сторон $AB$ и $BC$ в точках $K$ и $M$ соответственно. Найдите $KM$, если $AK=6$ м, $BK=12$ м.

*Решение.*

По условию задачи $BC = AB = 6 + 12 = 18$ м.



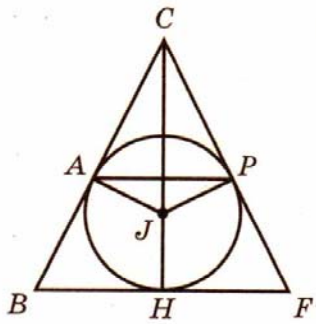

Известно, что отрезки касательных, проведенных из одной точки равны, поэтому $BM = BK = 12$ м и $CM = 18 - 12 = 6$ м.

Треугольники $KBM$ и $ABC$ подобны, так как $\angle B$ – общий, $\dfrac{BK}{AB} = \dfrac{BM}{BC}$, следовательно, $\dfrac{KM}{AC} = \dfrac{BK}{AB}$, т.е. $\dfrac{KM}{12} = \dfrac{12}{18}$, $KM = 12 \cdot 12 : 18 = 8$ м.

*Ответ:* 8.

**Пример 3.** Основание равнобедренного треугольника равно 36. Вписанная окружность касается его боковых сторон в точках $A$ и $P$, $AP=12$. Найдите периметр этого треугольника.

*Решение.*




Пусть $BCF$ равнобедренный треугольник с основанием $BF$. Проведем высоту $CH$. Тогда $BH=HF$ и $BF = 2BH = 36$. Следовательно, $FH = FP = 18$. Тогда по свойству касательных, проведенных к окружности из одной точки,

$$AB = BH = HF = FP = 18.$$

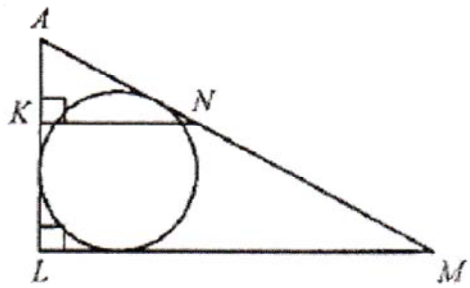
Поскольку $CH$ – ось симметрии треугольника $BCF$, то центр вписанной окружности лежит на $CH$, а $AB=FP$. Значит, точки $A$ и $P$ симметричны относительно прямой $CH$ и поэтому $AP \| BF$. Следовательно, треугольники

$ACP$ и $BCF$ подобны. Отсюда следует, что треугольник $ACP$ равнобедренный и $AC$=$CP$.

Пусть $AC = x$. Из подобия треугольников $ACP$ и $BCF$ следует: $\frac{AC}{BC} = \frac{AP}{BF}$. Отсюда получаем: $\frac{x}{x+18} = \frac{12}{36}$, значит, $x = 9$. Поэтому, $BC = CP = x + 18 = 27$. Искомый периметр треугольника $BCF$ равен $BF + 2DBC = 36 + 54 = 90$.

*Ответ:* 90.

**П р и м е р 4.** Боковые стороны $KL$ и $MN$ трапеции $KLMN$ равны 8 и 17 соответственно. Отрезок, соединяющий середины диагоналей, равен 7,5, средняя линия трапеции равна 17,5. прямые $KL$ и $MN$ пересекаются в точке $A$. Найдите радиус окружности, вписанной в треугольник $ALM$.




*Решение.*

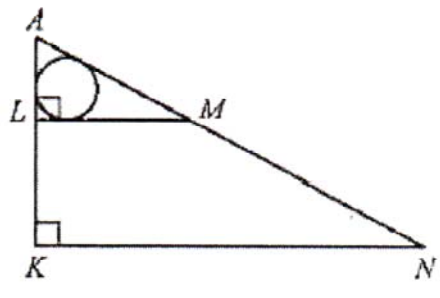
В любой трапеции отрезок, соединяющий середины диагоналей трапеции, равен полуразности оснований трапеции, а средняя линия – полусумме оснований трапеции. В нашем случае полуразность оснований равна 7,5, а полусумма оснований равна 17,5, поэтому основания трапеции равны 10 и 25.

Предположим, что $LM = 25$, $KN = 10$. Стороны $LM$ и $KN$ треугольников $ALM$ и $AKN$ параллельны, поэтому эти треугольники подобны с коэффициентом $k = \frac{2}{5}$. Значит,

$$AL = \frac{KL}{1-k} = \frac{40}{3}, \quad AM = \frac{MN}{1-k} = \frac{85}{3}.$$

Заметим, что $AL^2 + LM^2 = AM^2$, поэтому треугольник $ALM$ – прямоугольный с гипотенузой $AM$. Радиус его вписанной окружности равен:

$$r = \frac{AL + LM - AM}{2} = 5.$$

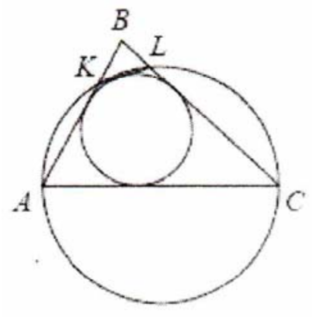



Пусть теперь $KN = 25$, $LM = 10$. Аналогично предыдущему случаю можно показать, что радиус вписанной окружности треугольника $AKN$ равен 5.

Треугольники $AKN$ и $ALM$ подобны с коэффициентом $k = \frac{2}{5}$. Значит, радиус вписанной окружности треугольника $ALM$ равен $r = 5k = 2$.

*Ответ*: 2; 5.

**П р и м е р 5.** В треугольнике $ABC$ известны стороны: $AB$=7, $BC$=8, $AC$=9. Окружность, проходящая через точки $A$ и $C$, пересекает прямые $BA$ и $BC$ соответственно в точках $K$ и $L$, отличных от вершин треугольника. Отрезок $KL$ касается окружности, вписанной в треугольник $ABC$. Найдите длину отрезка $KL$.




*Решение.*

Обе точки не могут лежать вне треугольника, поскольку в этом случае отрезок $KL$ не может касаться вписанной окружности. Значит, по крайней мере, одна из этих точек лежит на стороне треугольника.

Пусть обе точки $K$ и $L$ лежат на сторонах треугольника. Четырехугольник $AKLC$ – вписанный, следовательно,

$$\angle KAC = 180^\circ - \angle KLC = \angle BLK .$$

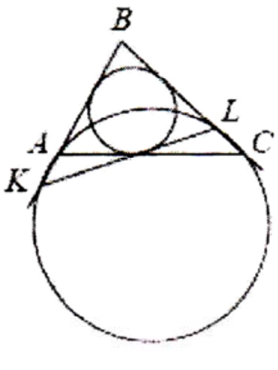
Значит, треугольник $ABC$ подобен треугольнику $LBK$, так как $\angle ABC$ – общий. Пусть коэффициент подобия равен $k$, тогда $BL = k\,AB$, $BK = k\,BC$, $KL = k\,AC$. Суммы противоположный сторон описанного четырехугольника $AKLC$ равны:

$$AK + LC + KL + AC\,;$$

$$AB\left(1-k\right) + BC\left(1-k\right) = AC\left(1+k\right);\;\; k = \frac{AB+BC-AC}{AC+AB+BC}.$$

Подставляя известные значения сторон, находим $k = \dfrac{7+8-9}{7+8+9} = \dfrac{1}{4}$.

Следовательно, $KL = \dfrac{1}{4}AC = \dfrac{9}{4}$.

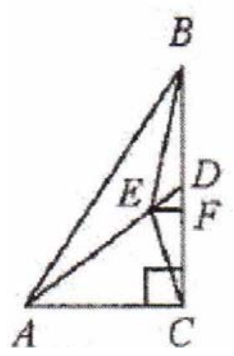



Пусть точка $K$ лежит на продолжении стороны $AB$. Углы $AKL$ и $ACL$ равны, так как опираются на одну дугу. Значит, треугольник $ABC$ подобен треугольнику $LBK$, так как угол $ABC$ - общий. Более того, они описаны около одной и той же окружности. Следовательно, коэффициент подобия равен 1, то есть треугольники $LBK$ и $ABC$ равны, поэтому $KL = AC = 9$. Заметим, что $BK = BC > AB$ и точка $K$ действительно лежит на продолжении стороны $AB$.

Если точка $L$ лежит на продолжении стороны $BC$, то $BL > BC$, аналогично предыдущему случаю получаем $BL = AB < BC$. Значит, этот случай не возможен.

*Ответ:* $\dfrac{9}{4}$, 9.

**П р и м е р  6.** На прямой, содержащей медиану $AD$, прямоугольного треугольника $ABC$ с прямым углом $C$, взята точка $E$, удаленная от вершины $A$ на расстояние, равное 4. Найдите площадь треугольника $BCE$, если $BC$=6, $AC$=4.




*Решение.*

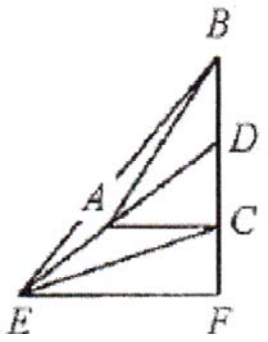
По теореме Пифагора $AD$=5. Тогда $ED$=1.

Пусть точка $E$ лежит на луче $AD$. Медиана $AD$ длиннее $AE$, и точка $E$ лежит внутри треугольника $ABC$.

Опустим из точки $E$ перпендикуляр $EF$ на прямую $BC$ и рассмотрим подобные прямоугольные треугольники $DEF$ и $DAC$. Из подобия этих треугольников находим:

$$EF = \frac{AC \cdot ED}{AD} = \frac{4}{5}.$$

Следовательно, $S_{BCE} = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot \frac{4}{5} = 2{,}4$.

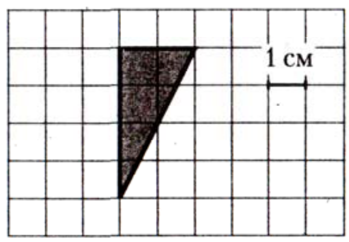



Пусть теперь точка $A$ лежит между $E$ и $D$. В этом случае $ED$=9 и $EF = \frac{AC \cdot ED}{AD} = \frac{36}{5}$. Тогда

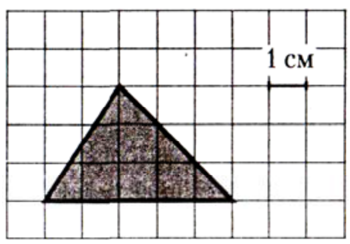
$$S_{BCE} = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot \frac{36}{5} = 21{,}6.$$

*Ответ:* 2,4; 21,6.

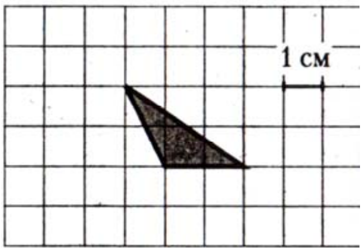
## Задачи базового уровня сложности



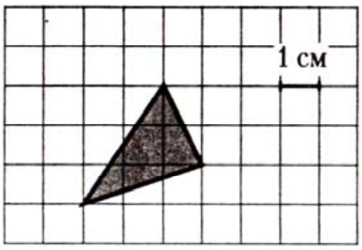

**1.** Найдите площадь треугольника, изображенного на клетчатой бумаге с размером клетки 1×1 см (см. рис.) Ответ дайте в квадратных сантиметрах.



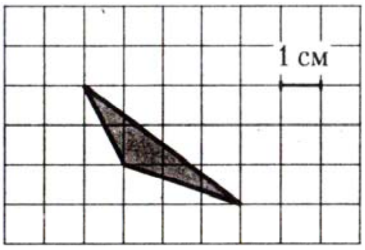

**2.** Найдите площадь треугольника, изображенного на клетчатой бумаге с размером клетки 1×1 см (см. рис.) Ответ дайте в квадратных сантиметрах.



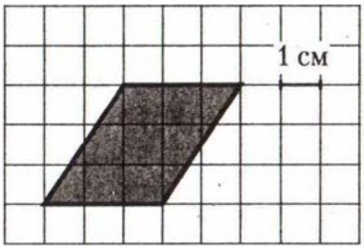
**3.** Найдите площадь треугольника, изображенного на клетчатой бумаге с размером клетки 1×1 см (см. рис.) Ответ дайте в квадратных сантиметрах.



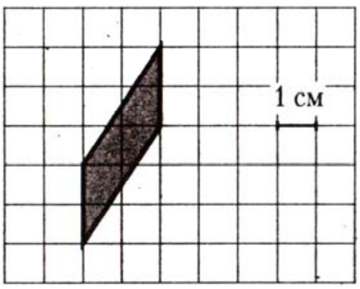
**4.** Найдите площадь треугольника, изображенного на клетчатой бумаге с размером клетки 1×1 см (см. рис.) Ответ дайте в квадратных сантиметрах.



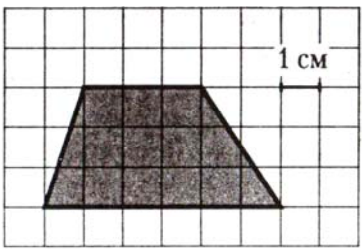
**5.** Найдите площадь треугольника, изображенного на клетчатой бумаге с размером клетки 1×1 см (см. рис.) Ответ дайте в квадратных сантиметрах.



**6.** Найдите площадь параллелограмма, изображенного на клетчатой бумаге с размером клетки 1×1 см (см. рис.) Ответ дайте в квадратных сантиметрах.

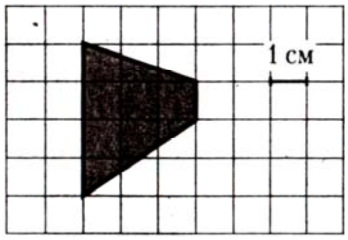


**7.** Найдите площадь параллелограмма, изображенного на клетчатой бумаге с размером клетки 1×1 см (см. рис.) Ответ дайте в квадратных сантиметрах.

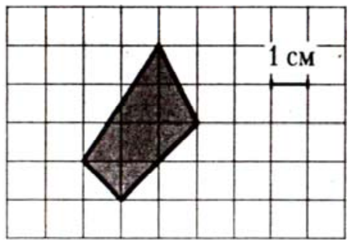


**8.** Найдите площадь трапеции, изображенной на клетчатой бумаге с размером клетки 1×1 см (см. рис.) Ответ дайте в квадратных сантиметрах.

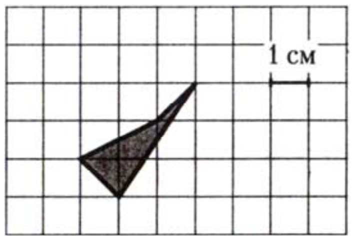
**9.** Найдите площадь трапеции, изображенной на клетчатой бумаге с размером клетки 1×1 см (см. рис.) Ответ дайте в квадратных сантиметрах.



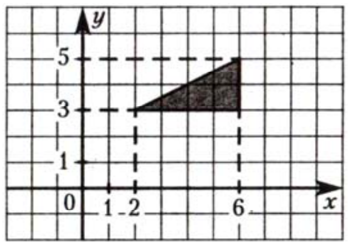

**10.** Найдите площадь четырехугольника, изображенного на клетчатой бумаге с размером клетки 1×1 см (см. рис.) Ответ дайте в квадратных сантиметрах.



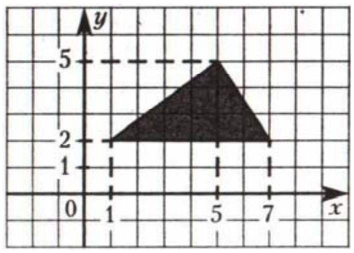

**11.** Найдите площадь четырехугольника, изображенного на клетчатой бумаге с размером клетки 1×1 см (см. рис.) Ответ дайте в квадратных сантиметрах.



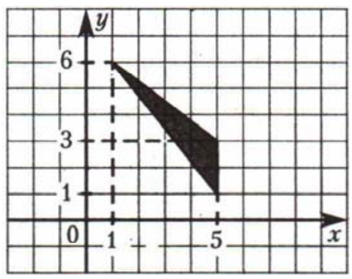

**12.** Найдите площадь треугольника, вершины которого имеют координаты (2; 3), (6; 3), (6, 5).

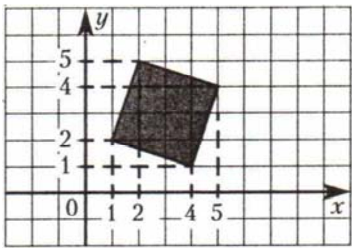



**13.** Найдите площадь треугольника, вершины которого имеют координаты (1; 2), (7; 2), (5, 5).

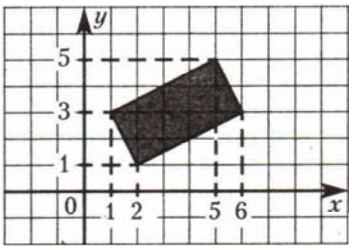



**14**. Найдите площадь треугольника, вершины которого имеют координаты (5; 1), (5; 3), (1, 6).

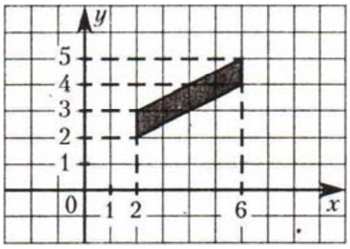




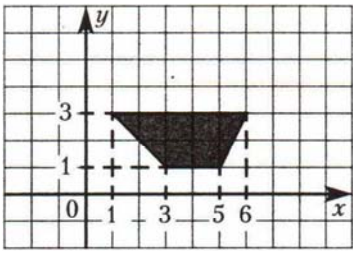

**15.** Найдите площадь квадрата, вершины которого имеют координаты (4; 1), (5; 4), (2, 5), (1; 2).



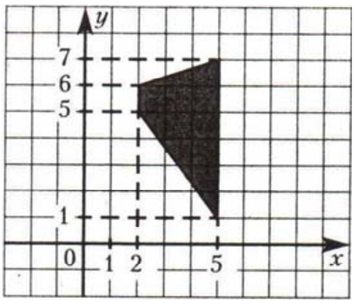

**16.** Найдите площадь прямоугольника, вершины которого имеют координаты (2; 1), (6; 3), (5, 5), (1; 3).




**17.** Найдите площадь параллелограмма, вершины которого имеют координаты (6; 4), (6; 5), (2, 3), (2; 2).




**18.** Найдите площадь трапеции, вершины которой имеют координаты (1; 3), (6; 3), (5, 1), (3; 1).




**19.** Найдите площадь трапеции, вершины которой имеют координаты (5; 1), (5; 7), (2, 6), (2; 5).

**20.** В треугольнике $ABC$ угол $A$ равен 60°, углы $B$ и $C$ – острые, высоты $BD$ и $CE$ пересекаются в точке $O$. Найдите угол $DOE$. Ответ дайте в градусах.

**21.** В треугольнике $ABC$ угол $C$ равен 90°, $\cos A = 0,48$. Найдите $\sin B$.

**22.** В треугольнике $ABC$ угол $C$ равен 90°, $AC$=12, $\cos A = \dfrac{\sqrt{51}}{10}$. Найдите высоту $CH$.

**23.** В треугольнике $ABC$ $AD$ – биссектриса, угол $C$ равен 53°, угол $CAD$ равен 39°. Найдите угол $B$. Ответ дайте в градусах.

**24.** В треугольнике $ABC$ угол $C$ равен 90°, $\sin A = \frac{11}{14}$, $AC = 10\sqrt{3}$. Найдите $AB$.

**25.** Найдите высоту прямоугольного треугольника, проведенную к гипотенузе, если биссектриса острого угла делит катет на отрезки, равные 2 и 4.

**26.** Найдите основание равнобедренного треугольника, если оно в 3 раза меньше боковой стороны, а медиана, проведенная к боковой стороне, равна $3\sqrt{11}$.

**27.** Точка $O$ лежит внутри равнобедренного треугольника $ABC$ с основанием $AC$ на расстоянии 6 от боковых сторон и на расстоянии $\sqrt{3}$ от основания. Найдите основание треугольника, если $\angle B = 120^\circ$.

**28.** В треугольнике $BCE$ медиана $BM$ равна 3, $CE = 4\sqrt{2}$, $BE = 5$. Найдите сторону $BC$.

**29.** В прямоугольный треугольник с катетами 1 и 3 вписан квадрат, имеющий с треугольником общий угол прямой угол. Найдите периметр квадрата.

**30.** В треугольнике ABC $AC = BC$, $AB = 6$, $\cos A = \frac{3}{5}$. Найдите высоту $AH$.

**31.** Точка, взятая на гипотенузе прямоугольного треугольника и одинаково удаленная от его катетов, делит гипотенузу на отрезки 30 и 40 см. Найдите катеты.

**32.** Медиана, проведенная к гипотенузе прямоугольного треугольника, делит прямой угол в отношении 1:2 и равна 4. Найдите стороны треугольника.

**33.** В прямоугольном треугольнике медианы, проведенные к катетам равны $\sqrt{52}$ и $\sqrt{73}$ см. Найти гипотенузу.

**34.** Основание равнобедренного треугольника равно $4\sqrt{2}$, медиана, проведенная к боковой стороне, равна 5. Найдите боковую сторону.

**35.** Найдите основание равнобедренного треугольника, если угол при основании равен 30°, а взятая внутри треугольника точка находится на одинаковом расстоянии, равном 3, от боковых сторон и на расстоянии $2\sqrt{3}$ от основания.

**36.** Боковая сторона равнобедренной трапеции равна $\sqrt{13}$, а основания равны 3 и 4. Найдите диагональ трапеции.

**37.** Большее основание равнобедренной трапеции равно 8, боковая сторона 9, а диагональ 11. найдите меньшее основание трапеции.

**38.** Боковая сторона равнобедренной трапеции равна $2\sqrt{15}$, а основания равны 5 и 8. Найдите диагональ трапеции.

**39.** Боковая сторона равнобедренной трапеции равна $2\sqrt{11}$, а основания равны 2 и 10. Найдите диагональ трапеции.

**40.** Основания трапеции равны 10 м и 31 м, а боковые стороны – 20 м и 13 м. Найдите высоту трапеции.

**41.** Боковая сторона равнобедренной трапеции равна 9, диагональ – 11, а большее основание – 10. найдите меньшее основание трапеции.

**42.** Меньшее основание равнобедренной трапеции равно 10, боковая сторона 18, а диагональ 22. Найдите большее основание трапеции.

**43.** В трапеции *ABCD* угол *A* – прямой, *BC* – меньшее основание. Найдите среднюю линию трапеции, если её острый угол равен 60°, $\angle ACB = 60^\circ$, $AB = 5\sqrt{3}$.

**44.** Средняя линия равнобедренной трапеции равна 16, а её диагональ перпендикулярна боковой стороне и равна 20. Найдите периметр трапеции.

**45.** В трапеции *ABCD* диагональ *AC* является биссектрисой угла *A*. Биссектриса угла *B* пересекает большее основание *AD* в точке *E*. Найдите высоту трапеции, если $AC = 8\sqrt{5}$, $BE = 4\sqrt{5}$.

**46.** В параллелограмме *ABCD* биссектриса угла *C* пересекает сторону *AD* в точке *M* и прямую *AB* в точке *K*. Найдите периметр треугольника *BCK*, если $DM = 12$, $CM = 15$, $AM = 16$.

**47.** В параллелограмме *ABCD* биссектриса угла *B* пересекает сторону *CD* в точке *T* и прямую *AD* в точке *M*. Найдите периметр треугольника *ABM*, если $BC = 15$, $BT = 18$, $TM = 12$.

**48.** В параллелограмме *ABCD* биссектриса угла *B* пересекает сторону *CD* в точке *T* и прямую *AD* в точке *M*. Найдите периметр треугольника *CBT*, если $AB = 21$, $BM = 35$, $MD = 9$.

**49.** Сторона ромба *ABCD* равна $4\sqrt{7}$, а косинус угла *A* равен 0,75. Высота *BH* пересекает диагональ *AC* в точке *M*. Найдите длину отрезка *BM*.

**50.** В четырехугольнике $ABCD$ известно, что $\angle A = \angle D = 60^\circ$, $AB = \sqrt{3}$, $BC = 3$, $CD = 2\sqrt{3}$. Найдите углы $B$ и $C$.

**51.** Площадь треугольника $MPK$ равна 21. Известно, что сторона $MP$ равна 7, медиана $PA = 3\sqrt{2}$, а в треугольнике $APM$ сторона $AM$ наименьшая. Найдите сторону $MK$.

**52.** Точка $M$ лежит на стороне $AB$ треугольника $ABC$. Известно, что $AM = 2$, $BM = 16$, $\angle A = 30^\circ$, $\angle ACM = \angle ABC$. Найдите площадь треугольника $AMC$.

**53.** Точка $H$ лежит на стороне $AO$ треугольника $AOM$. Известно, что $AH = 4$, $OH = 12$, $\angle A = 30^\circ$, $\angle AMH = \angle AOM$. Найдите площадь треугольника $AHM$.

**54.** В треугольнике $ABC$ проведена медиана $AM$. Найдите площадь треугольника $ABC$, если $AC = 3\sqrt{2}$, $BC = 10$, $\angle MAC = 45^\circ$.

**55.** Медиана $BK$ треугольника $ABC$ равна $2\sqrt{2}$, $BC = 2\sqrt{5}$, $\angle BKC = 45^\circ$. Найдите площадь треугольника $ABK$.

**56.** Найдите площадь треугольника КМР, если сторона $KP = 5$, медиана $PO = 3\sqrt{2}$, $\angle KOP = 135^\circ$.

**57.** Площадь треугольника $ABC$ равна $20\sqrt{3}$. Найдите $AC$, если сторона $AB$ равна 8 и она больше половины стороны $AC$, а медиана $BM = 5$.

**58.** В прямоугольном треугольнике $ABC$ с прямым углом $C$ проведена биссектриса $BM$, причем $AM = 5$, $MC = 3$. Найдите площадь треугольника $ABM$.

**59.** В прямоугольном треугольнике $ABC$ с прямым углом $C$ проведена биссектриса $BK$. Найдите площадь треугольника $CBK$, если площадь треугольника $ABC$ равна 18, а синус угла $A$ равен 0,8.

**60.** В прямоугольном треугольнике $ABC$ с прямым углом $C$ проведена биссектриса $AK$, причем $AC = 6$, $KC = 2$. Найдите площадь треугольника $ABK$.

**61.** В прямоугольном треугольнике $ABC$ с прямым углом $C$ проведена биссектриса $BM$. Найдите площадь треугольника $ABM$, если площадь треугольника $ABC$ равна 12, а синус угла $A$ равен $\frac{1}{3}$.

**62.** В равнобедренном треугольнике $ABC$ с основанием $AC$ высоты $BM$ и $AM$ пересекаются в точке $K$, причем $AK = 5$, $KM = 3$. Найдите площадь треугольника $ABK$.

**63.** В равнобедренном треугольнике *ABC* с основанием *AC* высоты *BD* и *AH* пересекаются в точке *T*, причем $AT = 10$, $TH = 8$. Найдите площадь треугольника *ABT*.

**64.** Площадь равнобедренного треугольника *ABC* равна 10, а боковая сторона равна 5. К основанию *AC* и стороне *BC* проведены высоты *BM* и *AM*, пересекающиеся в точке *K*. Найдите площадь треугольника *ABK*.

**65.** Площадь равнобедренного треугольника *ABC* равна 40. К основанию *AC* и стороне *AB* проведены высоты *BM* и *CH*, пересекающиеся в точке *K*. Найдите площадь треугольника *CBK*, если $CH = 8$.

**66.** Основание равнобедренного треугольника равно 30, а высота, проведенная из вершины основания равна 24. Найдите площадь треугольника.

**67.** Биссектриса угла *A* параллелограмма *ABCD* пересекает сторону *BC* в точке *K*. Найдите площадь параллелограмма, если $BK = KC = 5$, $AK = 8$.

**68.** Площадь параллелограмма *ABCD* равна $20\sqrt{3}$, диагональ $AC = 5$, $\angle DAC = 60^\circ$. Найдите сторону *AB*.

**69.** Найдите площадь параллелограмма *BDEF*, если его сторона $EF = 13$, а диагональ $BE = 5\sqrt{2}$, составляет со стороной *BF* угол равный 45°.

**70.** Точка *L* лежит на стороне *AB* параллелограмма *ABCD* так, что $AL : LB = 3 : 4$, прямая *CL* пересекает луч *DA* в точке *K*, а площадь треугольника *AKL* равна 36. Найдите площадь параллелограмма *ABCD*.

**71.** Точка *P* лежит на стороне *AD* параллелограмма *ABCD* так, что $AP : PD = 5$, прямая *BP* пересекает луч *CD* в точке *K*, а площадь треугольника *PKD* равна 18. Найдите площадь параллелограмма *ABCD*.

**72.** Из вершины *A* параллелограмма *ABCD* проведен луч, который пересекает строну *BC* в точке *P* и диагональ *BD* в точке *M*. Площадь треугольника *ABM* равна 10, а площадь треугольника *BMP* – 4. Найдите площадь параллелограмма.

**73.** Одна из диагоналей ромба равна 15, высота – 12. Найдите площадь ромба.

**74.** Найдите площадь равнобедренной трапеции, если ее высота в три раза больше средней линии, а диагональ равна $6\sqrt{10}$.

**75.** В равнобедренной трапеции диагональ перпендикулярна боковой стороне. Высота СК делит большее основание AD на отрезки АК=16 и DК=9. Найдите площадь трапеции.

**76.** Из внешней точки к окружности проведены секущая длиной 48 и касательная, длина которой составляет $\frac{2}{3}$ от внутреннего отрезка секущей. Найдите радиус окружности, если известно, что секущая удалена от центра на расстояние 24.

**77.** Из точки вне окружности проведены две секущие. Внутренний отрезок первой равен 47, а внешний 9; внутренний отрезок второй секущей на 72 больше внешнего ее отрезка. Определить длину второй секущей.

**78.** Внутри окружности, радиус которой равен 13, дана точка *M*, отстоящая от центра окружности на 5. Через точку *M* проведена хорда *AB*=25. Определить длину отрезков, на которые хорда *AB* делится точкой *M*.

**79.** Из точки А к окружности проведены касательные *AM* и *AK* (*M* и *K* – точки касания). Найдите радиус окружности, если хорда *MK*=24, а длина отрезка *AM*=15.

**80.** Дан равнобедренный треугольник *SPT* с основанием *ST* . Вписанная в него окружность касается стороны *PT* в точке *A*, причем *AT*=4*AP*. Найдите основание треугольника, если радиус окружности равен 8.

**81.** Точка *O* – центра окружности, вписанной в прямоугольный треугольник *CBE* с прямым углом *C*. Прямая *EO* пересекает сторону *BC* в точке *H*, причем $\angle BHE = 5\angle CEH$ . Найдите катет *CE*, если $BE = 12\sqrt{2}$ .

**82.** Одна из сторон равнобедренного треугольника равна 12, а периметр равен 60. Окружность, вписанная в треугольник, касается его боковых сторон в точках *O* и *T*. Найдите длину отрезка *OT*.

**83.** Окружность радиуса 4 вписана в равнобедренный треугольник *MHK* с основанием *MK* и касается стороны *MH* в точке *C*. Найдите боковую сторону треугольника, если она в 5 раз больше отрезка *CH*.

**84.** В равнобедренный треугольник *PMK* с основанием *MK* вписана окружность с радиусом $2\sqrt{3}$ . Высота *PH* делится точкой пересечения с окружностью с отношении 1:2, считая от вершины *P*. Найдите периметр треугольника *PMK*.

**85.** Около треугольника *ABC* описана окружность с центром в точке *O*, *CH* – его высота. Найдите градусную меру угла *OCH*, если $\angle A = 60^\circ$, $\angle B = 70^\circ$ .

**86.** Основание равнобедренного треугольника равно 36. Вписанная окружность касается его боковых сторон в точках *A* и *P*, *AP*=12. Найдите периметр этого треугольника.

**87.** Периметр прямоугольного треугольника равен 72 м, а радиус вписанной в него окружности – 6 м. Найдите диаметр описанной окружности.

**88.** Радиус окружности, вписанной в прямоугольный треугольник, равен 2 м, а радиус описанной окружности равен 5 м. Найдите больший катет треугольника.

**89.** Около равнобедренного треугольника с основанием $AC$ и углом при основании 75° описана окружность с центром $O$. Найдите ее радиус, если площадь треугольника $BOC$ равна 16.

**90.** Найдите радиус окружности, вписанной в остроугольный треугольник $ABC$, если высота $BH$ равна 12 и известно, что $\sin A = \frac{12}{13}, \sin C = \frac{4}{5}$.

**91.** Около треугольника $ABC$ описана окружность. Медиана треугольника $AM$ продлена до пересечения с окружностью в точке $K$. Найдите сторону $AC$, если $AM$=18, $MK$=8, $BK$=10.

**92.** Один из катетов прямоугольного треугольника равен 15, а проекция второго катета на гипотенузу равна 16. найдите диаметр окружности, описанной около этого треугольника.

**93.** Меньшее основание равнобедренной трапеции равно 6 м, большее – 12 м, угол при основании – 60°. Найдите радиус описанной около трапеции окружности.

**94.** Дан ромб $ABCD$. Окружность описанная около треугольника $AB$, пересекает большую диагональ ромба $AC$ в точке $E$. Найдите $CE$, если $AB = 8\sqrt{5}$, $BD$=16.

**95.** Найдите радиус окружности, вписанной в равнобедренную трапецию, у которой сумма оснований равна 20, а разность оснований равна 12.

**96.** Найдите периметр равнобедренной трапеции, описанной около окружности, если радиус окружности равен 3, а острый угол трапеции 30°.

**97.** Боковая сторона равнобедренной трапеции в 4 раза больше меньшего основания. В трапецию вписана окружность. Найти ее радиус, если площадь трапеции равна $28\sqrt{7}$.

**98.** Окружность, вписанная в ромб $ABCD$ касается стороны $CD$ в точке $K$, причем $CK$=16, $KD$=4. Найдите синус угла $ABC$.

**99.** Диагональ $AC$ ромба $ABCD$ равна $12\sqrt{10}$. Вписанная в ромб окружность касается стороны $AB$ в точке $M$, причем $AM$:$MB$=3:5. Найдите радиус окружности.

**100.** Угол $ACD$ равен 24°. Его сторона $CA$ касается окружности в точке $A$, сторона $CD$ содержит диаметр $BD$ окружности. Найдите градусную величину дуги $AD$ окружности, заключенной внутри этого угла.

## Задания повышенного уровня сложности

**С1.** В треугольнике ABC проведена биссектриса BD. Найдите BC, если известно, что $AC = b$, $AB = a$ и $AD = BD$.

**С2.** В равнобедренной трапеции диагональ перпендикулярна боковой стороне. Большее основание равно $a$, а меньшее в два раза больше боковой стороны. Найдите меньшее основание.

**С3.** Найдите длину отрезка общей касательной к двум окружностям, заключенного между точками касания, если радиусы окружностей равны 31 и 17, а расстояние между центрами окружностей равно 50.

**С4.** В окружности проведены хорды $AB$=2 и $AC$=3. Длина дуги $AC$ в 2 раза больше длины дуги $AB$. Найдите радиус окружности.

**С5.** Треугольник $ABC$ вписан в окружность радиуса 12. Известно, что $AB$=6 и $BC$=4. Найдите $AC$.

**С6.** В треугольнике $ABC$ $AB$=14, $BC$=6, $CA$=9. Точка $D$ лежат на прямой $BC$ так, что $BD$:$DC$=1:9. Окружности, вписанные в каждый из треугольников $ADC$ и $ADB$, касаются стороны $AD$ в точках $E$ и $F$. Найдите длину отрезка $EF$.

**С7.** Дана трапеция $ABCD$, основания которой $BC$=44, $AD$=100, $AB$=$CD$=35. Окружность, касающаяся прямых $AD$ и $AC$, касается стороны $CD$ в точке $K$. Найдите длину отрезка $CK$.

**С8.** Через середину стороны $AB$ квадрата $ABCD$ проведена прямая, пересекающая прямые $CD$ и $AD$ в точках $M$ и $T$ соответственно и образующая с прямой $AB$ угол $\alpha$, $\mathrm{tg}\alpha = 3$. Найдите площадь треугольника $BMT$, если сторона квадрата $ABCD$ равна 4.

**С9.** Дан параллелограмм $ABCD$, $AB$=2, $BC$=3, $\angle A = 60^\circ$. Окружность с центром в точке $O$ касается биссектрисы угла $D$ и двух сторон параллелограмма, исходящих из вершины одного его острого угла. Найдите площадь четырехугольника $ABOD$.

**С10.** В треугольнике $ABC$ на стороне $BC$ выбрана точка $D$ так, что $BD$:$DC$=1:2. Медиана $CE$ пересекает отрезок $AD$ в точке $F$. Какую часть площади треугольника $ABC$ составляет площадь треугольника $AEF$.

**С11.** В треугольнике ABC проведены биссектрисы AD и CE. Найдите длину отрезка DE, если AC=6, AE=2, CD=3.

## ОТВЕТЫ

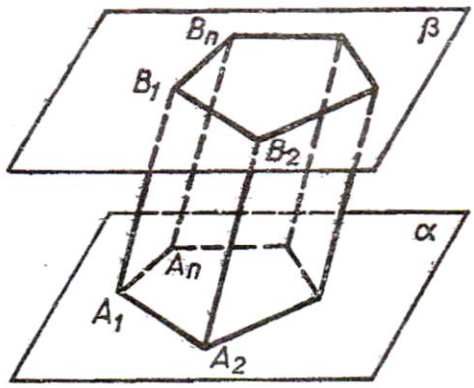
| Базовый уровень сложности | | | | | | | | Повышенный уровень сложности | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **1** | 4 | **26** | 6 | **51** | 10 | **76** | 30 | **С1** | $\sqrt{b(b+a)}$ |
| **2** | 7,5 | **27** | 30 | **52** | 3 | **77** | 84 | **С2** | $a\,(\sqrt{3}-1)$ |
| **3** | 2 | **28** | 3 | **53** | 8 | **78** | 9 и 16 | **С3** | 48 или 14 |
| **4** | 3,5 | **29** | 3 | **54** | 21 | **79** | 20 | **С4** | $\frac{4\sqrt{7}}{7}$ |
| **5** | 2,5 | **30** | 4,8 | **55** | 6 | **80** | 48 | **С5** | $\sqrt{35}\pm\sqrt{15}$ |
| **6** | 9 | **31** | 42 и 56 | **56** | 3 | **81** | 12 | **С6** | $\frac{11}{2}$ или $\frac{49}{10}$ |
| **7** | 4 | **32** | 4, $4\sqrt{3}$, 8 | **57** | 14 | **82** | 9 | **С7** | 5 или 30 |
| **8** | 4 | **33** | 10 | **58** | 15 | **83** | 15 | **С8** | 2 или 10 |
| **9** | 7,5 | **34** | 6 | **59** | 8 | **84** | 36 | **С9** | $\frac{5\sqrt{3}}{4}, \frac{13\sqrt{3}}{6}$ |
| **10** | 5,5 | **35** | 24 | **60** | 7,5 | **85** | 10 | **С10** | 0,1 |
| **11** | 2 | **36** | 5 | **61** | 9 | **86** | 90 | **С11** | $\sqrt{5{,}8}$ |
| **12** | 4 | **37** | 5 | **62** | 15 | **87** | 30 | | |
| **13** | 9 | **38** | 10 | **63** | 120 | **88** | 8 | | |
| **14** | 4 | **39** | 8 | **64** | 3,75 | **89** | 8 | | |
| **15** | 10 | **40** | 12 | **65** | 15 | **90** | 4 | | |
| **16** | 10 | **41** | 4 | **66** | 300 | **91** | 15 | | |
| **17** | 4 | **42** | 16 | **67** | 48 | **92** | 25 | | |
| **18** | 7 | **43** | 7,5 | **68** | 7 | **93** | 6 | | |
| **19** | 10,5 | **44** | 62 | **69** | 85 | **94** | 12 | | |
| **20** | 120 | **45** | 8 | **70** | 224 | **95** | 8 | | |
| **21** | 0,48 | **46** | 91 | **71** | 160 | **96** | 48 | | |
| **22** | 8,4 | **47** | 80 | **72** | 70 | **97** | 3,5 | | |
| **23** | 0,25 | **48** | 44 | **73** | 150 | **98** | 0,8 | | |
| **24** | 28 | **49** | 4 | **74** | 144 | **99** | 15 | | |
| **25** | 3 | **50** | 90, 150 | **75** | 192 | **100** | 114 | | |

# Глава V
# СТЕРЕОМЕТРИЯ

## §1. Многогранники

**1.1. Понятие многогранника.** Поверхность, составленную из многоугольников и ограничивающую некоторое геометрической тело, называют многогранной поверхностью или *многогранником*. Многоугольники, из которых составлен многогранник, называются его *гранями*. Стороны граней называются *ребрами*, а концы ребер – *вершинами* многогранника. Отрезок, соединяющий две вершины, не принадлежащие одной грани, называется диагональю многогранника.

**1.2. Призма.** Многогранник, составленный из двух равных многоугольников, расположенных в параллельных плоскостях, и всех отрезков, соединяющих соответствующие точки этих многоугольников, называется *призмой*. Многоугольники называются *основаниями призмы*, а отрезки, соединяющие соответствующие вершины – *боковыми ребрами призмы*. У призмы боковые ребра параллельны и равны.




Поверхность призмы состоит из оснований и боковой поверхности. Боковая поверхность состоит из параллелограммов.

*Высотой призмы* называется перпендикуляр, проведенный из какой-нибудь точки одного основания к плоскости другого основания.

Если боковые ребра перпендикулярны к основаниям, то призма называется *прямой*, иначе – *наклонной*. Высота прямой призмы равна ее боковому ребру.

Прямая призма называется *правильной*, если ее основания – правильные многоугольники. У такой призмы все боковые грани – равные прямоугольники.

*Площадью полной поверхности призмы* называется сумма площадей всех ее граней, а *площадью боковой поверхности призмы* – сумма площадей ее боковых граней.

$$S_{\text{полн}} = S_{\text{бок}} + 2S_{\text{осн}}.$$

**Т е о р е м а.** Площадь боковой поверхности прямой призмы равна произведению периметра основания на высоту призмы.

$$S_{\text{бок}} = P \cdot h.$$

Доказательство. Боковые грани прямой призмы – прямоугольники, основания которых – стороны основания призмы, а высоты равны высоте $h$ призмы.

Площадь боковой поверхности призмы равна сумме площадей указанных прямоугольников, т.е. равна сумме произведений сторон основания на высоту $h$. Вынося множитель $h$ за скобки, получим в скобках сумму сторон основания призмы, т.е. его периметр Р. Итак, $S_{\text{бок}} = P \cdot h$. Теорема доказана.

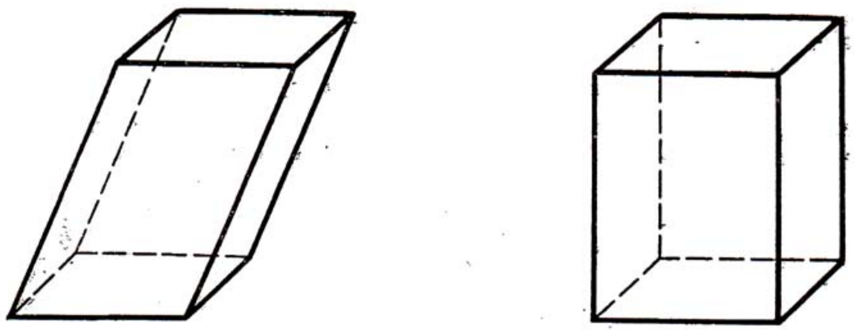
Объем любой призмы равен произведению площади ее основания на высоту.

$$V = S_{\text{осн}} \cdot h.$$

**1.3. Параллелепипед.** Если основание призмы – параллелограмм, то она называется *параллелепипедом*. У параллелепипеда все грани – параллелограммы.

У параллелепипеда противолежащие грани параллельны и равны. Диагонали параллелепипеда пересекаются в одной точке и точкой пересечения делятся пополам. Точка пересечения диагоналей параллелепипеда является его центром симметрии.

Параллелепипед может быть наклонным или прямым (а, б).



а) б)

Прямой параллелепипед, у которого основанием является прямоугольник, называется *прямоугольным параллелепипедом*. У прямоугольного параллелепипеда все грани – параллелограммы.

Прямоугольный параллелепипед, у которого все ребра равны, называется *кубом*.

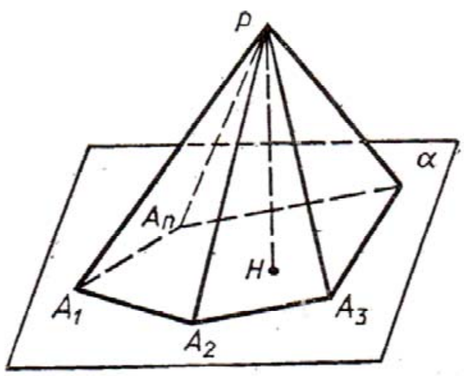
Длины непараллельных ребер прямоугольного параллелепипеда называются его *линейными размерами (измерениями)*. У прямоугольного параллелепипеда три измерения.

В прямоугольном параллелепипеде квадрат любой стороны равен сумме квадратов трех его измерений.

Объем прямоугольного параллелепипеда равен произведению трех его измерений.

$$V = abc.$$

**1.4. Пирамида.** *Пирамидой* называется многогранник, который состоит из плоского многоугольника – *основания пирамиды*, точки, не лежащей в плоскости основания, – *вершины пирамиды* и всех отрезков, соединяющих вершину пирамиды с точками основания.




Отрезки, соединяющие вершину пирамиды с вершинами основания, называются боковыми ребрами.

Поверхность пирамиды состоит из основания и боковых граней. Каждая грань – треугольник.

*Высотой пирамиды* называется перпендикуляр, проведенный из вершины пирамиды к плоскости основания.

Пирамида называется *n*-угольной, если ее основанием является *n*-угольник.

*Площадью полной поверхности пирамиды* называется сумма площадей всех ее граней (т.е. основания и боковых граней), а *площадью боковой поверхности* – сумма площадей ее боковых граней.

$$S_{\text{полн}} = S_{\text{бок}} + S_{\text{осн}}.$$

Пирамида называется *правильной*, если ее основание – правильный многоугольник, а отрезок, соединяющий вершину пирамиды с центром основания, является его высотой (центром правильного многоугольника называется центр вписанной в него (или описанной около него) окружности).

Треугольная пирамида, у которой все ребра равны, называется *тетраэдром*.

*Все боковые ребра правильной пирамиды равны, а боковые грани являются равными равнобедренными треугольниками*.

Высота боковой грани правильной пирамиды, проведенная из ее вершины, называется апофемой.

Площадь боковой поверхности правильной пирамиды равна половине произведения периметра основания на апофему.

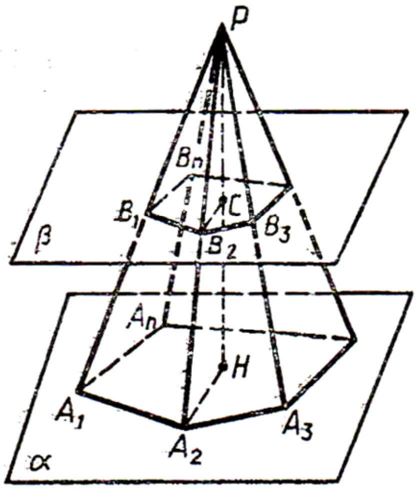
$$S_{\text{бок}} = \frac{1}{2} \cdot P \cdot l,$$

где $l$ – апофема.

Объем пирамиды равен одной трети произведения основания на высоту.

$$V = \frac{1}{3} S_{\text{осн}} \cdot h.$$

Многогранник, гранями которого являются $n$-угольники, расположенные в параллельных плоскостях (нижнее и верхнее основания), и $n$ четырехугольников (боковые грани), называется *усеченной пирамидой*.




Перпендикуляр, проведенный из какой-нибудь точки одного основания к плоскости другого основания, называется *высотой усеченной пирамиды*.

Боковые грани усеченной пирамиды – трапеции.

Усеченная пирамида называется *правильной*, если она получена сечением правильной пирамиды плоскостью, параллельной основанию. Основания правильной усеченной пирамиды – правильные многоугольники, а боковые грани – равнобедренные трапеции. Высоты этих трапеций называются апофемами.

*Площадью боковой поверхности усеченной пирамиды* называется сумма площадей ее боковых граней.

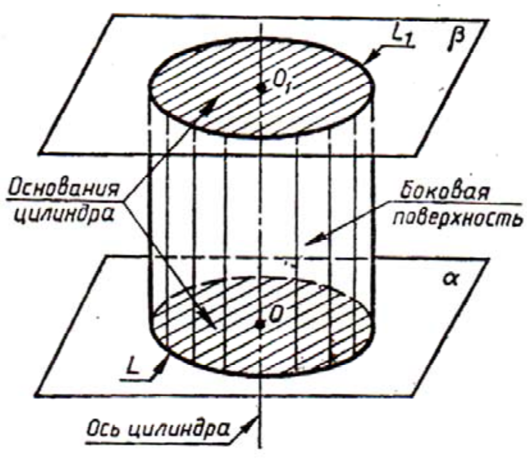
Площадь боковой поверхности правильной усеченной пирамиды равна произведению полусуммы периметров оснований на апофему.

Объем усеченной пирамиды, высота которой равна $h$, а площади оснований $S$ и $S_1$, вычисляется по формуле

$$V = \frac{1}{3}h\left(S + S_1 + \sqrt{S \cdot S_1}\right).$$

## §2. Тела вращения

**2.1. Цилиндр.** Цилиндром (точнее, круговым цилиндром) называется тело, которое состоит из двух кругов, не лежащих в одной плоскости и совмещаемых параллельным переносом, и всех отрезков, соединяющих соответствующие точки этих кругов. Круги называются основаниями цилиндра, а отрезки, соединяющие соответствующие точки окружностей кругов, – образующими цилиндра.




Все образующие цилиндра параллельны и равны друг другу как отрезки параллельных прямых, заключенные между параллельными плоскостями.

Длина образующей называется *высотой цилиндра*, а радиус основания – *радиусом цилиндра*. *Осью цилиндра* называется прямая, проходящая через центры оснований.

Цилиндр называется *прямым*, если его образующие перпендикулярны плоскостям оснований.

Рассмотрим сечения цилиндра различными плоскостями. Если секущая плоскость проходит через ось цилиндра, то сечение представляет собой *прямоугольник*, две стороны которого – образующие, а две другие – диаметры оснований цилиндра. Такое сечение называют *осевым*.

Если секущая плоскость перпендикулярна к оси цилиндра, то сечение является *кругом*.

Поверхность цилиндра состоит из оснований и боковой поверхности. Боковая поверхность составлена из образующих.

За *площадь боковой поверхности цилиндра* принимается площадь ее развертки, и она равна произведению длины окружности основания на высоту цилиндра.

$$S_{\text{бок}} = 2\pi r h .$$

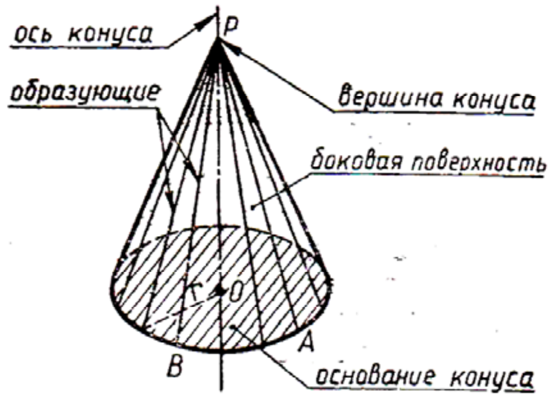
*Площадью полной поверхности цилиндра* называется сумма площадей боковой поверхности и двух оснований. Так как площадь каждого основания равна $\pi r^2$, то для вычисления площади полной поверхности цилиндра получаем формулу

$$S_{\text{цил}} = 2\pi r (r + h) .$$

Объем цилиндра равен произведению площади основания на высоту.

$$V = S_{\text{осн}} \cdot h = \pi r^2 h .$$

**2.2. Конус.** *Конусом* (точнее круговым конусом) называется тело, которое состоит из круга – *основания конуса*, точки, не лежащей в плоскости этого круга, – *вершины конуса* и всех отрезков, соединяющих вершину конуса с точками основания. Отрезки, соединяющие вершину конуса с точками окружности основания, называются *образующими конуса*. Поверхность конуса состоит из основания и боковой поверхности.




Конус называется *прямым*, если прямая, соединяющая вершину конуса с центром основания, перпендикулярна плоскости основания.

*Высотой конуса* называется перпендикуляр, опущенный его вершины на плоскость основания. У прямого конуса основание высоты совпадает с центром основания. *Осью прямого кругового конуса* называется прямая, содержащая его высоту.

Если секущая плоскость проходит через ось конуса, то сечение представляет собой *равнобедренный треугольник*, основание которого – диаметр основания конуса, а боковые стороны – образующие конуса. Это сечение называется *осевым*.

Если секущая плоскость перпендикулярна к оси конуса, то сечение конуса представляет собой *круг* с центром, расположенным на оси конуса.

*Площадь боковой поверхности конуса* равна произведению половины длины окружности основания на образующую.

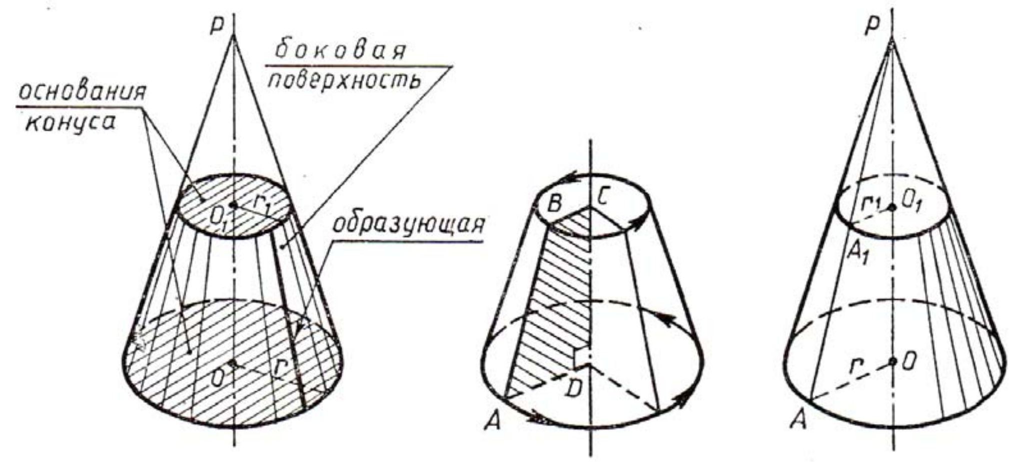
$$S_{\text{бок}} = \pi r l .$$

*Площадью полной поверхности конуса* называется сумма площадей боковой поверхности и основания. Для вычисления площади полной поверхности конуса получается формула

$$S_{\text{кон}} = \pi r (l + r) .$$

Объем конуса равен одной трети произведения площади основания на высоту.

$$V = \frac{1}{3} S_{\text{осн}} \cdot h .$$




Плоскость, параллельная основанию конуса и пересекающая конус, отсекает от него меньший конус. Оставшаяся часть называется усеченным конусом.

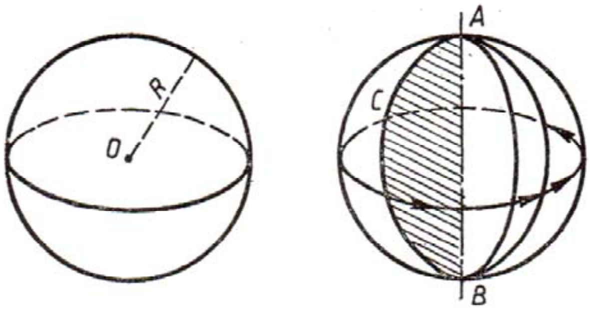
Площадь боковой поверхности усеченного конуса равна произведению полусуммы длин окружностей оснований на образующую.

$$S_{\text{бок}} = \pi (r + r_1) l .$$

Объем усеченного конуса, высота которого равна $h$, а площади оснований $S$ и $S_1$, вычисляется по формуле

$$V = \frac{1}{3}h\left(S + S_1 + \sqrt{S \cdot S_1}\right).$$

**2.3. Сфера.** *Сферой* называется поверхность, состоящая из всех точек пространства, расположенных на данном расстоянии от данной точки. Данная точка называется *центром сферы*, а данное расстояние – *радиусом сферы*.




Любой отрезок, соединяющий центр и какую-нибудь точку сферы, также называется радиусом сферы. Отрезок, соединяющий две точки сферы и проходящий через ее центр, называется *диаметром сферы*.

Тело, ограниченное сферой, называется *шаром*. Центр, радиус и диаметр сферы называются также *центром*, *радиусом* и *диаметром* шара.

Если расстояние от центра сферы до плоскости меньше радиуса сферы, то сечение сферы плоскостью есть о*кружность*.

Если секущая плоскость проходит через центр шара, то в сечении получается круг, радиус которого равен радиусу шара. Такой круг называется *большим кругом шара*.

Плоскость, имеющая со сферой только одну общую точку, называется *касательной плоскостью к сфере*, а их общая точка называется *точкой касания* плоскости и сферы.

Радиус сферы, проведенный в точку касания сферы и плоскости, перпендикулярен к касательной плоскости.

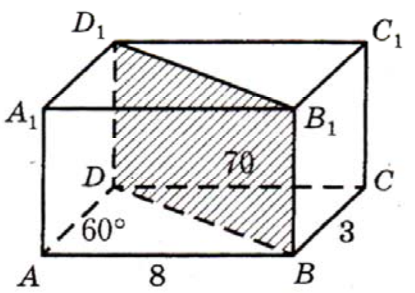
*Площадь сферы* вычисляется по формуле

$$S = 4\pi R^2.$$

*Объем шара* равен $\frac{4}{3}\pi R^3$.

## §3. Примеры решения задач

**П р и м е р 1 .** Основанием прямой призмы является параллелограмм, стороны которого равны 3 и 8, а угол между ними 60°. Найдите площадь боковой поверхности призмы, если известно, что площадь ее меньшего диагонального сечения равна 70.




*Решение.* 1) Пусть $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – прямая призма и ее основание параллелограмм $ABCD$, в котором $AB$=$CD$=8, $BC$=$AD$=3, $\angle BAD = 60^\circ$. Отсюда BD – меньшая диагональ основания и, значит, $BDD_1B_1$ – меньшее диагональное сечение, а его площадь $S = BD \cdot BB_1 = 70$.

2) По теореме косинусов в треугольнике $ABD$ имеем

$$BD^2 = AB^2 + AD^2 - 2 \cdot AB \cdot AD \cdot \cos(\angle BAD) = 64 + 9 - 2 \cdot 8 \cdot 3 \cdot \cos 60^\circ = 49.$$

Значит, $BD$=7 и $BB_1$=10.

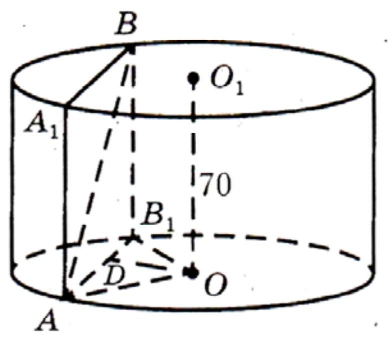
3) Площадь боковой поверхности призмы находим по формуле

$$S_{\text{бок}} = 2(AB + BC) \cdot BB_1.$$

Получим $S_{\text{бок}} = 2(8+3) \cdot 10 = 220$.

*Ответ*: 220.

**П р и м е р 2.** Концы отрезка $AB$ лежат на окружностях оснований цилиндра. Высота цилиндра равна $12\sqrt{3}$, радиус основания равен 10, а угол между прямой $AB$ и плоскостью основания цилиндра равен 60°. Найдите расстояние между осью цилиндра и параллельной ей плоскостью, проходящей через точки $A$ и $B$.




*Решение.* 1) Пусть $A_1$ и $B_1$ – проекции точек $A$ и $B$ на соответственно противоположные им основания, точки $O$ и $O_1$ – центры оснований. Тогда

$$AA_1 \parallel BB_1 \parallel OO_1, \quad AA_1 = BB_1.$$

Поэтому $AA_1BB_1$ – прямоугольник, угол $BAB_1$ – угол между прямой $AB$ и плоскостью основания цилиндра, а плоскость $ABB_1 \parallel OO_1$. По условию $\angle BAB_1 = 60^\circ$, $BB_1 = 12\sqrt{3}$. Отсюда $AB_1 = BB_1 \cdot \mathrm{ctg} 60^\circ = 12$.

2) Пусть $OD$ – высота треугольника $AOB_1$. Так как плоскость основания цилиндра перпендикулярна плоскости $ABB_1$, то $OD \perp ABB_1$ и, значит,

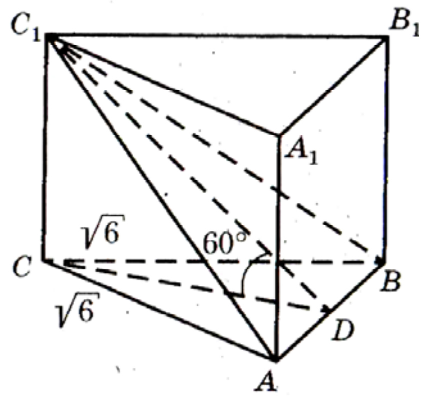
длина OD равна искомому расстоянию между осью цилиндра и плоскостью $ABB_1$.

3) Треугольник $AOB_1$ – равнобедренный. Поэтому $OD$ – медиана треугольника $AOB_1$ и $AD = \frac{1}{2} \cdot AB_1 = 6$. Так как АО – радиус окружности основания цилиндра, то $AO = 10$ и по теореме Пифагора

$$OD = \sqrt{OA^2 - AD^2} = \sqrt{100 - 36} = 8.$$

*Ответ*: 8.

**Пример 3.** В основании прямой призмы $ABCA_1B_1C_1$ лежит равнобедренный прямоугольный треугольник $ABC$, $AC = CB = \sqrt{6}$. Плоскость $ABC_1$ наклонена к плоскости основания под углом 60°. Найдите объем призмы.




*Решение.* 1) Пусть $CD$ – высота основания $ABC$. Так как $AC$=$CB$, то $CD$ – медиана. Значит, $C_1D$ – медиана треугольника $AC_1B$. Но треугольник $AC_1B$ равнобедренный, поскольку $CC_1 \perp ABC$ и проекции $CA$ и $CB$ наклонных $C_1A$ и $C_1B$ равны. Следовательно, $DC_1$ – высота треугольника $AC_1B$. Значит, угол $CDC_1$ – линейный угол двугранного угла с ребром $AB$, образованного плоскостями $AC_1B$ и $ACB$. Поэтому $\angle CDC_1 = 60^\circ$.

2) Треугольник $ACB$ – равнобедренный и прямоугольный. Поэтому его высота $CD = \frac{AC}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{2}} = \sqrt{3}$. Высоту $CC_1$ призмы найдем из прямоугольного треугольника $C_1CD$. Получим

$$CC_1 = CD \cdot \operatorname{tg}\angle CDC_1 = \sqrt{3} \cdot \operatorname{tg} 60^\circ = 3.$$

3) Площадь основания призмы вычисляем по формуле

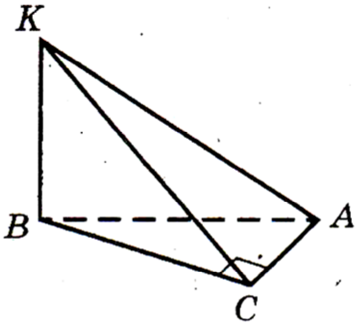
$$S = \frac{1}{2} AC \cdot CB.$$

Получаем $S = \frac{1}{2}\sqrt{6} \cdot \sqrt{6} = 3$. Тогда объем призмы $V = S \cdot CC_1 = 3 \cdot 3 = 9$.

*Ответ*: 9.

**Пример 4.** В пирамиде $KABC$ ребро $KB$ перпендикулярно плоскости основания. Угол между плоскостями $ACK$ и $ABC$ равен 45°, $\angle ACB = 90^\circ$, $AB$=13, $AC$=12. Найдите высоту пирамиды.

*Решение.* 1) $KB \perp ABC$, КС – наклонная, $BC$ – проекция $KC$. Так как $BC \perp AC$, то $KC \perp AC$ (теорем о трех перпендикулярах).



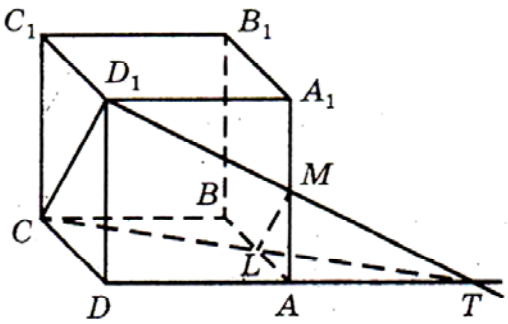

2) $BC \perp AC$ и $KC \perp AC$, следовательно, $\angle BCK$ – линейный угол двугранного угла при ребре $AC$, поэтому $\angle BCK = 45^\circ$.

3) В треугольнике ABC: $BC^2 = AB^2 - AC^2$ (по теореме Пифагора), $BC$=5.

4) $KB \perp ABC$, следовательно, $KB$ – высота пирамиды и $KB \perp BC$. Так как $\angle BCK = 45^\circ$, то $KB$=$BC$=5.

*Ответ*: 5.

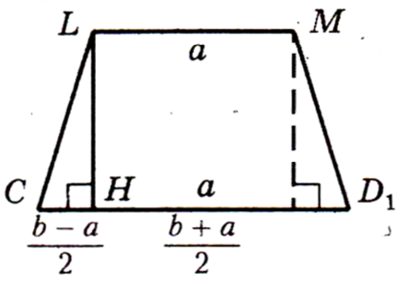
**П р и м е р 5.** Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Через точки $C$, $D_1$ и середину ребра $AA_1$ проведена секущая плоскость. Найдите площадь сечения, если ребро куба равно 4.




Решение. 1) Прямые $CD_1$ и $ML$ лежат как в плоскости сечения, так и в параллельных плоскостях противоположных граней куба, поэтому $CD_1 \| ML$. Так как $CD_1 \neq ML$, то сечение $MLCD_1$ – трапеция.

Треугольники $MA_1D_1$ и $MAT$ равны по катету и острому углу. Отсюда следует, что $AT = A_1D_1 = AD = 4$.

Так как $AL \| CD$ и точка $A$ – середина $DT$, то $AL = \frac{1}{2}CD = LB$. Значит, $\Delta CBL = \Delta D_1A_1M$. Из равенства этих треугольников следует, что $MLCD_1$ – равнобедренная трапеция.




При этом $CD_1 = 4\sqrt{2}$, $ML = 2\sqrt{2}$, $CL = MD_1 = 2\sqrt{5}$.

Таким образом, задача сводится к нахождению площади равнобедренной трапеции по известным ее сторонам:

$$S = \frac{LM + CD_1}{2} \cdot LH.$$

Для нахождения высоты трапеции, вычислим длину $CH$.

$$CH = \frac{b-a}{2} = \frac{4\sqrt{2} - 2\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}.$$

Из прямоугольного треугольника $CHL$ имеем

$$LH^2 = CL^2 - CH^2 = 20 - 2 = 18, \quad LH = 3\sqrt{2}.$$

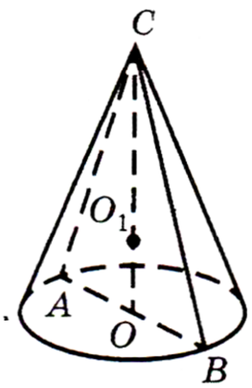
Тогда площадь равна:

$$S = \frac{2\sqrt{2} + 4\sqrt{2}}{2} \cdot 3\sqrt{2} = 18.$$

*Ответ*: 18.

**Пример 6.** Диаметр основания конуса равен 6 м, образующая наклонена к плоскости основания под углом 60°. Найдите площадь описанной около конуса сферы.

*Решение.* 1) Пусть $C$ – вершина конуса, $O$ – центр основания, $ACB$ – осевое сечение конуса. Поскольку образующая конуса наклонена к плоскости основания под углом 60° и $CO$ – высота конуса, то прямая $AB$ – проекция прямой $CA$ на плоскость основания конуса. Следовательно, $\angle CAB$ равен углу между образующей конуса и площадью его основания. Поэтому $\angle CAB = 60^\circ$ и равнобедренный треугольник $ABC$ – правильный. Отсюда следует, что $CA = AB = BC = 6$ м.




2) Найдем положение центра сферы, описанной около конуса. По определению такой сферы, окружность основания конуса – сечение описанной сферы и вершина конуса лежит на этой сфере. По свойству диаметра сферы, проходящего через центр любого ее сечения, прямая $CO$ перпендикулярна плоскости основания конуса и поэтому центр $O_1$ описанной сферы лежит на прямой $CO$. Отсюда следует, что центр $O_1$ сферы, описанной около конуса, есть центр окружности, описанной около его осевого сечения.

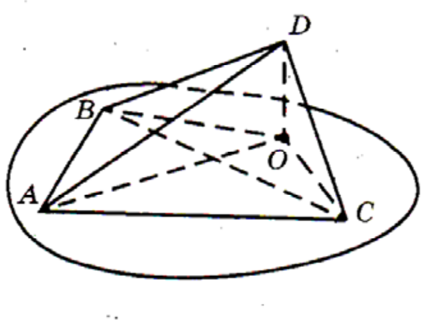
3) В правильном треугольнике $ABC$

$$R = O_1C = \frac{AB\sqrt{3}}{3} = \frac{6\sqrt{3}}{3} = 2\sqrt{3} \ \ (\text{м}).$$

4) Найдем площадь сферы: $S = 4\pi R^2 = 4\pi\left(2\sqrt{3}\right)^2 = 48\pi$ (м$^2$).

*Ответ*: $48\pi$.

**П р и м е р 7.** Основание пирамиды – равнобедренный треугольник, боковые стороны которого равны $\sqrt{2}$ и образуют угол 120°. Найдите объем пирамиды, если все боковые ребра равны $\sqrt{110}$.




*Решение.* 1) Пусть основание $ABC$ пирамиды $DABC$ есть равнобедренный треугольник, в котором $AB = AC = \sqrt{2}$, $\angle BAC = 120^\circ$. По условию $DA = DB = DC = \sqrt{110}$. Вычислим объем этой пирамиды.

2) Объем пирамиды находим по формуле $V = \frac{1}{3} S_{ABC} \cdot h$, где $h = DO$ – высота пирамиды.

Из условия задачи следует:

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot AC \cdot \sin A = \frac{1}{2}\sqrt{2} \cdot \sqrt{2} \cdot \sin 120^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Осталось найти высоту $DO$ пирамиды.

3) Так как $DA = DB = DC$, то проекции этих ребер на плоскость основания $ABC$ пирамиды равны. То есть $OA = OB = OC$. Следовательно, точка $O$ находится на одинаковых расстояниях от вершины треугольника $ABC$, т.е. является центром окружности, описанной около основания пирамиды.

Рассмотрим треугольник $ABC$. Требуется найти радиус описанной около треугольника окружности. Найдем его с помощью теоремы синусов.

В данном случае $\frac{AB}{\sin C} = 2R$. По условию $AB = \sqrt{2}$, $\angle A = 120^\circ$. Треугольник $ABC$ равнобедренный, поэтому $\angle B = \angle C = 30^\circ$.

Тогда $2R = \frac{\sqrt{2}}{\sin 30^0} = 2\sqrt{2}$, $R = \sqrt{2}$.

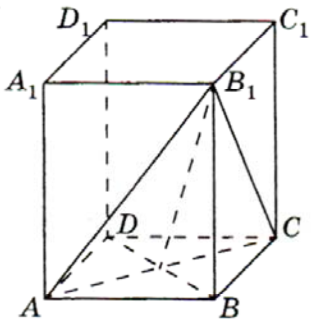
4) По теореме Пифагора из прямоугольного треугольника $DOA$ имеем: $DO^2 = DA^2 - AO^2 = 110 - 2 = 108$, $DO = \sqrt{108} = \sqrt{3 \cdot 36} = 6\sqrt{3}$.

5) Окончательно получаем $V = \frac{1}{3} S_{\text{осн}} \cdot h = \frac{1}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 6\sqrt{3} = 3$.

*Ответ*: 3.

**П р и м е р 8.** Сторона основания правильной призмы $ABCDA_1B_1C_1D_1$ равна 12, а боковое ребро $2\sqrt{6}$. Найдите градусную меру угла между плоскостями $AB_1C$ и $ABC$.

*Решение.* 1) Плоскость $AB_1C$ пересекает плоскость $ABC$ по прямой $AC$. Построим линейный угол двугранного угла $BACB_1$ .Для этого из точки $B$ проведем перпендикуляр к прямой $AC$. Так как призма $ABCDA_1B_1C_1D_1$ правильная, то ее основанием является правильный четырехугольник – квадрат. Диагонали квадрата взаимно перпендикулярны, следовательно, искомый перпендикуляр – отрезок $BO$ – половина диагонали $BD$, причем точка $O$ – середина отрезка $AC$. Поскольку призма правильная, то она прямая, значит, боковые ребра перпендикулярны плоскости основания.



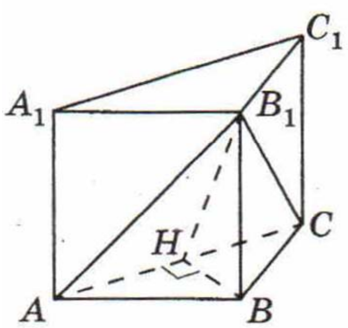

Следовательно, прямая $BO$ является проекцией наклонной $B_1O$. По теореме о трех перпендикулярах наклонная $B_1O$ перпендикулярна прямой $AC$. Тогда угол $BOB_1$ является линейным углом двугранного угла $BACB_1$ .

2) В квадрате ABCD $AB = 12$, $BD = 12\sqrt{2}$, $BO = \dfrac{1}{2}BD = \dfrac{1}{2}\cdot 12\sqrt{2} = 6\sqrt{2}$ .

3) Рассмотрим треугольник $BB_1O$. Так как призма правильная, то $BB_1 \perp ABC$. Из определения прямой, перпендикулярной плоскости, следует, что прямая $BB_1$ перпендикулярна любой прямой, лежащей в плоскости $ABC$. Поэтому треугольник $OBB_1$ прямоугольны, и значит, $\mathrm{tg}\,\alpha = \dfrac{2\sqrt{6}}{6\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$. Следовательно, $\angle BOB_1 = 30^\circ$.

*Ответ*: 30°.

**Пример 9.** В основании прямой призмы $ABCA_1B_1C_1$ лежит равнобедренный прямоугольный треугольник $ABC$ $(\angle B = 90^0)$. Объем призмы равен $54\sqrt{6}$ . Плоскость $AB_1C$ наклонена к плоскости основания под углом 60°. Найдите катет $AB$.




*Решение.* 1) Линейный угол между плоскостями $ABC$ и $AB_1C$ есть $\angle HBB_1$, где $BH$ – высота треугольника $ABC$. По теореме о трех перпендикулярах наклонная $B_1H$ – также перпендикулярна прямой $AC$, т.е. отрезок $B_1H$ – высота треугольника $AB_1C$.

2) По условию задачи треугольник ABC равнобедренный и прямоугольный.

Пусть $AB = x$, тогда $BH = \dfrac{1}{2}AC = \dfrac{x\sqrt{2}}{2}$.

3) Треугольник $BHB_1$ – прямоугольный, $\angle H = 60^\circ$, следовательно, $BB_1 = \frac{x\sqrt{6}}{2}$.

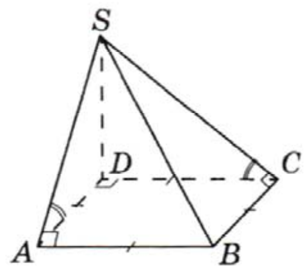
4) По условию задачи $V = S_{ABC} \cdot BB_1 = 54\sqrt{6}$. Выразим объем через $x$:

$$V = \frac{1}{2} \cdot x \cdot x \cdot \frac{x\sqrt{6}}{2}.$$

Тогда $\frac{1}{2} \cdot x \cdot x \cdot \frac{x\sqrt{6}}{2} = 54\sqrt{6}$, $x^3 = 216$, $x = 6$.

*Ответ*: 6.

**Пример 10.** В основании пирамиды $SABCD$ лежит квадрат $ABCD$ со стороной $2\sqrt{3}$. Боковое ребро $DS$ перпендикулярно плоскости основания, а грань$ABS$ наклонена к плоскости основания под углом 30°. Найдите объем пирамиды.




*Решение.* 1) Плоскости $ABS$ и $ABC$ пересекаются по прямой $AB$. Основание $ABCD$ пирамиды – квадрат, следовательно, $AD \perp AB$. По теореме о трех перпендикулярах $AS \perp AB$, (прямая $AD$ – проекция прямой $AS$ на плоскость основания), т.е. угол $SAD$ – линейный угол двугранного угла $SABD$, и значит, $\angle SAD = 30^\circ$.

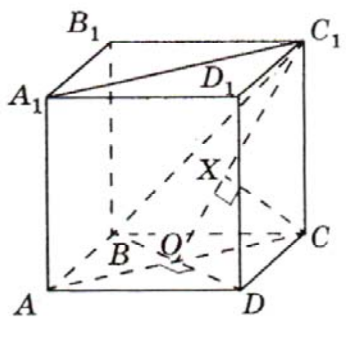
2) В прямоугольном треугольнике $ADS$ $\angle DAS = 30^\circ$, $AD = 2\sqrt{3}$, следовательно, $DS = 2$.

3) Объем пирамиды $V = \frac{1}{3} S_{осн} \cdot h = \frac{1}{3} \cdot \left(2\sqrt{3}\right)^2 \cdot 2 = 8$.

*Ответ*: 8.

**Пример 11.** Ребро куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ равно $2\sqrt{3}$. Найдите расстояние от вершины $C$ до плоскости $BDC_1$.

*Решение.* 1) Если провести перпендикуляр $CX$ к плоскости $BDC_1$, то его длина будет искомым расстоянием от точки $C$ до этой плоскости. Для построения $CX$ проведем через точку $C$ плоскость, перпендикулярную плоскости $BDC_1$, а затем в этой плоскости построим прямую, перпендикулярную линии пересечения плоскостей.



2) Пусть диагонали основания пересекаются в точке $O$, тогда

$$OC = \frac{1}{2}AC = \frac{1}{2}\cdot\sqrt{(2\sqrt{3})^2 + (2\sqrt{3})^2} = \frac{1}{2}\sqrt{24} = \sqrt{6}\,.$$

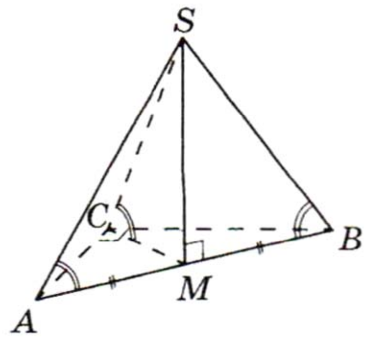
3) Диагонали квадрата взаимно перпендикулярны, поэтому $CO \perp BD$. По теореме о трех перпендикулярах $C_1O \perp BD$.

4) В прямоугольном треугольнике $OCC_1$: $CX \cdot C_1O = OC \cdot C_1C$, отсюда

$$CX = \frac{OC \cdot C_1C}{C_1O} = \frac{\sqrt{6}\cdot 2\sqrt{3}}{\sqrt{6+4\cdot 3}} = 2\,.$$

*Ответ*: 2.

**П р и м е р 12.** В основании пирамиды $SABC$ лежит прямоугольный треугольник $ABC$, в котором $\angle C = 90^\circ$, $BC = 3$, $AC = 4$. Все боковые ребра пирамиды наклонены к плоскости основания под одним углом, тангенс которого равен $\frac{4}{5}$. Найдите объем пирамиды.




*Решение.* 1) Поскольку все боковые ребра наклонены к плоскости основания под равными углами, то вершина пирамиды – точка $S$ – проектируется в центр описанной около пирамиды окружности.

Центром окружности, описанной около треугольника, служит точка пересечения серединных перпендикуляров к сторонам треугольника.

В прямоугольном треугольнике $ABC$ центр описанной окружности лежит на середине гипотенузы (точка $M$). Значит, $SM$ – высота пирамиды и $AM = MB = \frac{1}{2}AB$.

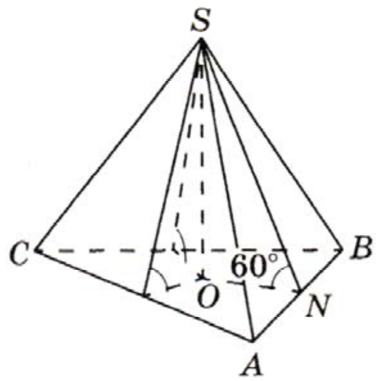
2) Треугольник $ABC$ прямоугольный, $BC = 3$, $AC = 4$, следовательно, по теореме Пифагора, $AB = 5$. Тогда $AM = MB = 2{,}5$.

3) В треугольнике $SMC$ $\operatorname{tg}\alpha = \frac{SM}{MB} = \frac{4}{5}$, значит, $SM = \frac{4}{5}MB = 2$.

4) Найдем объем пирамиды $V = \frac{1}{3}\cdot S_{\text{осн}}\cdot h = \frac{1}{3}\cdot\left(\frac{1}{2}\cdot 3\cdot 4\right)\cdot 2 = 4$.

*Ответ*: 4.

**П р и м е р 13.** Основание пирамиды *SABC* – равносторонний треугольник *ABC*, а все боковые грани наклонены к плоскости основания под углом 60°. Найдите объем пирамиды, если сторона основания равна $2\sqrt{3}$.




*Решение.* 1) Пусть *SO* – высота пирамиды. Так как все боковые грани пирамиды наклонены под одним углом к плоскости основания, то ее вершина проектируется в центр вписанной окружности. Поскольку центром вписанной в треугольник окружности является точка пересечения биссектрис, а в равностороннем треугольнике биссектрисы совпадают с медианами, то *SO* – высота пирамиды, а точка *O* является точкой пересечения медиан треугольника (центр масс треугольника).

2) Из определения прямой, перпендикулярной плоскости, следует, что треугольник *OSN* прямоугольный.

3) Высота правильного треугольника *ABC* равна $AB \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 3$. Медианы точкой пересечения делятся в отношении $2:1$, считая от вершины. Следовательно, $ON = \frac{1}{3} \cdot 3 = 1$.

4) В треугольнике *SON*: $\angle NOS = 90^\circ$, $\angle ONS = 60^\circ$, $ON = 1$, значит, $OS = \sqrt{3}$.

5) Вычислим объем пирамиды:

$$V = \frac{1}{3} S_{\text{осн}} \cdot h = \frac{1}{3} \cdot \left( \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{3} \cdot 3 \right) \cdot \sqrt{3} = 3.$$

*Ответ*: 3.

## Задачи базового уровня сложности

**1.** Ребро куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ равно $\sqrt{3}$. Найдите расстояние от вершины *C* до *BDC*.

**2.** Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$, через точки $B_1$, *D* и середину ребра $D_1C_1$ проведена секущая плоскость. Найдите площадь полной поверхности куба, если площадь сечения равна 144.

**3.** Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$, через точки $A_1$, $B$ и середину ребра $DD_1$ проведена секущая плоскость. Найдите ребро, если периметр сечения равен $3\sqrt{2}+2\sqrt{5}$.

**4.** Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$, через точки $C$, $D_1$ и середину ребра $AA_1$ проведена секущая плоскость. Найдите площадь сечения, если ребро куба равно 4.

**5.** Расстояние между серединами ребер $AB$ и $A_1D_1$ куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ равно 3. Найдите площадь поверхности куба.

**6.** Точки $M$ и $T$ – середины двух непараллельных ребер куба принадлежащих разным основаниям. Найдите объем куба, если $MT=2\sqrt{6}$

**7.** Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Найдите градусную меру угла между прямыми $AC_1$ и $CB_1$.

**8.** Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Через точки $A$, $B_1$ и середину ребра $CC_1$ проведена секущая плоскость. Найдите площадь полной поверхности куба, если площадь сечения равна 36.

**9.** Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Через точки $A$, $B_1$ и середину ребра $DD_1$ проведена секущая плоскость. Найдите ребро куба, если периметр сечения равен $3\sqrt{2}+2\sqrt{5}$.

**10.** Основание прямой призмы является параллелограмм, стороны которого соответственно равны 2 и $3\sqrt{2}$, а угол между ними 45°. Найдите объем призмы, если известно, что ее меньшая диагональ равна $\sqrt{26}$.

**11.** Основанием прямой призмы является прямоугольник. Отношение сторон которого равно 24:7. Диагональ основания относится к высоте призмы как 5:2, а площадь ее боковой поверхности равна 155. Найдите объем призмы.

**12.** Угол между основанием $KMP$ прямоугольной призмы $KMPK_1M_1P_1$ и плоскостью $KM_1P$ равен 45°. Диагонали граней $KMM_1K_1$ и $PMM_1P_1$ равны 6 и 8 соответственно, $KP$=10. Найдите объем призмы.

**13.** Основанием прямой призмы $KPTK_1P_1T_1$ является треугольник $KPT$, в котором $\angle P=30^\circ$, $K$P=$PT$. Высота призмы равна 6, а угол между плоскостями $KPT$ и $KPT_1$ равен 45°. Найдите объем призмы.

**14.** Высота прямой призмы $BCKB_1C_1K_1$ равна 4. Углы $B$ и C треугольника $BCK$ равны 75° и 30° соответственно, а угол между плоскостями $BCK$ и $BCK_1$ равен 45°. Найдите объем призмы.

**15.** Боковое ребро прямоугольного параллелепипеда в 3 раза меньше каждой из сторон основания. Расстояние между серединами двух непараллельных ребер, принадлежащих разным основаниям, равно $\sqrt{22}$. Найдите объем параллелепипеда.

**16.** Основанием прямой призмы $ABCA_1B_1C_1$ является треугольник $ABC$, в котором $\angle A = \angle B$, $AB$=28. На ребре $CC_1$ отмечена точка $K$ так, что $CK$:$KC_1$=1:3. Найдите синус угла между плоскостями $ABC$ и $ABK$, если расстояние между прямыми $AB$ и $B_1C_1$ равно 48, $AK$=50.

**17.** В сосуд, имеющий форму правильной треугольной призмы, налили 1200 см$^3$ воды и полностью погрузили в нее деталь. При этом уровень жидкости в сосуде поднялся с отметки 25 см до отметки 28 см. Чему равен объем детали? Ответ выразите в см$^3$.

**18.** В сосуд, имеющий форму правильной треугольной призмы, налили воду. Уровень воды достигает 36 см. На какой высоте будет находиться уровень воды, если ее перелить в другой такой же сосуд, у которого сторона основания в 3 раза больше, чем у первого? Ответ выразите в сантиметрах.

**19.** Основанием прямой призмы $ABCA_1B_1C_1$ является треугольник $ABC$, в котором $AC$=$BC$. На ребре $CC_1$ отмечена точка $D$ так, что $CD$:$DC_1$=1:2. Угол между плоскостями $ABC$ и $ADB$ равен 60°, $AB$=$AD$=12. Найдите расстояние между прямыми $AB$ и $A_1C_1$.

**20.** Основанием прямой призмы $CDEC_1D_1E_1$ является треугольник $CDE$, в котором $\angle DCE = \angle DEC = 30^\circ$, $CE$=24. Боковое ребро призмы равно $2\sqrt{6}$. Секущая плоскость проходит через вершину $D_1$ и середину ребер $DC$ и $DE$. Найдите площадь сечения.

**21.** Высота прямой призмы $ABCA_1B_1C_1$ равна 4. Основанием призмы является равнобедренный треугольник $ABC$, боковая сторона которого равна 10, а основание $AC$=16. Секущая плоскость параллельна прямой $AC$, проходит через вершину $B_1$ и середину ребра $AB$. Найдите площадь сечения.

**22.** Основанием прямой призмы $CDEC_1D_1E_1$ является треугольник $CDE$, в котором $CD$=$CE$=4. Боковое ребро призмы равно $2\sqrt{3}$. Секущая плоскость параллельна прямой $DE$, проходит через вершину $A$ и середину ребра $CE$. Найдите площадь сечения.

**23.** Основанием прямой призмы $BCDB_1C_1D_1$ является равнобедренный треугольник $BCD$, в котором $BC$=36, $\angle BDC = 120^\circ$. Боковое ребро призмы равно3. Секущая плоскость проходит через вершину $D$ и середины ребер $BD$ и $DC$. Найдите площадь сечения.

**24.** Боковое ребро правильной призмы $ABCA_1B_1C_1$ равно $\sqrt{2}$, точка $O$ – середина стороны $BC$ основания призмы, $BC$=2. Найдите синус угла между прямой $B_1O$ и плоскостью боковой грани $ABB_1A_1$.

**25.** Сторона основания правильной призмы $ABCA_1B_1C_1$ равна 2, боковое ребро равно $\sqrt{71}$. Найдите синус угла между прямой $A_1C$ и плоскостью боковой грани $ABB_1A_1$.

**26.** Высота прямой призмы $ABCA_1B_1C_1$ равна $\sqrt{39}$, угол $C$ основания $ABC$ равен 90°, $BC$=4, $AC$=3. Найдите градусную меру угла между прямыми $KM$ и $BC$, если $K$ и $M$ – середины ребер $AA_1$ и $AB$.

**27.** Найдите расстояние от вершины $C$ правильной четырехугольной призмы $ABCDA_1B_1C_1D_1$ до прямой $BD_1$, если $BC$=6 м, $CC_1=2\sqrt{7}$ м.

**28.** Высота прямой призмы $ABCA_1B_1C_1$ равна $\sqrt{39}$ м, угол $C$ основания $ABC$ равен 900, $BC$=4 м, $AC$=3 м. Найдите градусную меру угла между прямыми $KM$ и $BC$, если точки $K$ и $M$ – середины ребер $AA_1$ и $AB$.

**29.** Основанием прямой призмы $ABCDA_1B_1C_1D_1$ является ромб с диагоналями 6 и 8. Найдите площадь полной поверхности призмы, если известно, что диагональ её боковой грани равна 13.

**30.** Основание прямой призмы $ABCA_1B_1C_1$ – треугольник $ABC$, в котором $\angle C = 90^\circ$, $BC$=6, $AC$=8. Угол между плоскостями $ABC$ и $ABC_1$ равен 45°. Найдите площадь боковой поверхности призмы.

**31.** Основание прямой призмы $KMTK_1M_1T_1$ – треугольник $KMT$, в котором $KM=MT$=5, $KT$=6. Плоскость $KMT_1$ наклонена к плоскости основания под углом 45°. Найдите площадь боковой поверхности призмы.

**32.** Основание прямой призмы $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – параллелограмм $ABCD$, в котором $CD = 4\sqrt{3}$, $\angle BCD = 60^\circ$. Высота призмы равна 9. Найдите тангенс угла меду плоскостью основания призмы и плоскостью $B_1AD$.

**33.** Основание прямой призмы $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – параллелограмм $ABCD$, в котором $BC = 5$, $\angle BCD = 30^\circ$. Высота призмы равна 2. Найдите тангенс угла меду плоскостью основания призмы и плоскостью $ABD_1$.

**34.** Основание прямого параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – параллелограмм $ABCD$, в котором $AD = 3\sqrt{2}$, $\angle D = 135^\circ$. Тангенс угла меду плоскостью основания и плоскостью $B_1CD$ равен 0,5. Найдите боковое ребро параллелепипеда.

**35.** Основание прямой призмы $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – параллелограмм $ABCD$, в котором $AD = 4\sqrt{2}$, $\angle C = 135^\circ$. Тангенс угла меду плоскостью основания призмы и плоскостью $A_1DC$ равен 0,75. Найдите боковое ребро призмы.

**36.** Основание прямой призмы $ABCA_1B_1C_1$ – треугольник $ABC$, в котором $AB = BC = 5$, $AC = 6$. На ребре $BB_1$ отмечена точка $M$ так, что $BM$:$MB_1$=2:3. Угол между плоскостями $ABC$ и $AMC$ равен 450. Найдите расстояние между прямыми $AC$ и $B_1C_1$.

**37.** Высота прямой призмы $ABCA_1B_1C_1$ равна 21. Основание призмы – треугольник $ABC$, площадь которого равна 4,5, $BC = 6$. Найдите тангенс угла между плоскостями $A_1BC$ и $ABC$.

**38.** Боковое ребро прямой призмы $ABCA_1B_1C_1$ равно 6. Основание призмы – треугольник $ABC$, в котором $AC = 12$, синус угла $C$ равен 0,125. Найдите тангенс угла между плоскостью $A_1BC$ и плоскостью основания призмы.

**39.** Основанием пирамиды служит равнобедренный треугольник, у которого стороны равны 6 см, а основание равно 8 см. Боковые ребра равны между собой и равны 9 см. Найдите объем пирамиды.

**40.** Основанием пирамиды служит равнобедренный треугольник, у которого основание равно 30. Двугранные углы при основании равны между собой и каждый содержит 45°. Найдите объем пирамиды.

**41.** Основанием пирамиды служит треугольник со сторонами 39, 28, 17. Боковые ребра равны 22,9 см. Найдите объем пирамиды.

**42.** Основанием пирамиды является равнобедренный треугольник. Боковые стороны равны 7, а основание 6. Вершина пирамиды удалена от всех сторон основания на одинаковое расстояние, которое относится к высоте пирамиды как 5:4. Найдите объем пирамиды.

**43.** В основании пирамиды $SABC$ лежит прямоугольный треугольник, в котором $\angle C = 90^\circ$, $BC$=3, $AC$=4. Все боковые ребра пирамиды наклонены к плоскости основания под одним углом, тангенс которого равен $\frac{4}{5}$. Найдите объем пирамиды.

**44.** Основание и боковая грань пирамиды $DABC$ – правильные треугольники $ABC$ и $DAC$, плоскости которых взаимно перпендикулярны. Найдите $AC$, если объем пирамиды равен 1.

**45.** Основание пирамиды – квадрат, сторона которого равна 3. Каждая боковая грань наклонена к плоскости основания под углом, тангенс которого равен $\frac{4}{3}$. Найдите площадь боковой поверхности.

**46.** Основание пирамиды – квадрат со стороной, равной $6\sqrt{2}$, косинус угла наклона каждого ребра к плоскости основания равен $\frac{3}{5}$. Найдите объем пирамиды.

**47.** Угол между боковой гранью правильной четырехугольной пирамиды и плоскостью основания равен 60°. Найдите площадь полной поверхности пирамиды, если ее высота равна $2\sqrt{3}$.

**48.** В основании *SABCD* пирамиды лежит квадрат *ABCD* со стороной равной 5. Точка *M* делит ребро в отношении 2:3, считая от точки *S*. Через точку *M* проходит сечение параллельное основанию пирамиды. Найдите его площадь.

**49.** Боковое ребро *MC* пирамиды *MABC* перпендикулярно плоскости основания *ABC* и равно 4. Плоскость, параллельная основанию проходит через середину высоты пирамиды и пересекает боковые ребра в точках $A_1$, $B_1$, $C_1$. Найдите площадь боковой поверхности пирамиды $MA_1B_1C_1$, если $AC=BC=5$, а высота *CK* треугольника *ABC* равна 3.

**50.** Основанием пирамиды *SABC* служит правильный треугольник со стороной $2\sqrt{3}$. Боковое ребро *SB* перпендикулярно плоскости основания, а грань *ACS* наклонена к плоскости основания под углом 60°. Найдите объем пирамиды.

**51.** Апофема правильной четырехугольной пирамиды равна 6, а угол между плоскостями основания и боковой гранью равен 30°. Найдите объем пирамиды.

**52.** В правильной треугольной пирамиде площадь боковой грани относится к площади основания как 7:3. Определите отношение площади сечения, проходящего через вершину основания и высоту пирамиды, к площади основания.

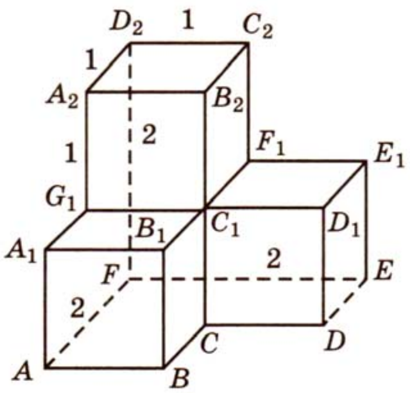
**53.** Основанием пирамиды служит прямоугольник, угол между диагоналями, которого равен 30°, а площадь равна 9. боковые ребра образуют с плоскостью основания углы в 45°. Найдите объем пирамиды.

**54.** Основание пирамиды *PABCD* прямоугольник *ABCD*, стороны которого равны 3 и $3\sqrt{2}$. Плоскости *PAB* и *PBC* перпендикулярны плоскости *ABC*, а плоскость *PAC* наклонена к ней под углом 30°. Найдите объем пирамиды.

**55.** В пирамиде *SABC* грани *SAB* и *SAC* перпендикулярны плоскости основания, ребро *BC*=10, а двугранный угол при ребре *BC* равен 45°. Найдите объем пирамиды, если площадь ее основания равна 30.

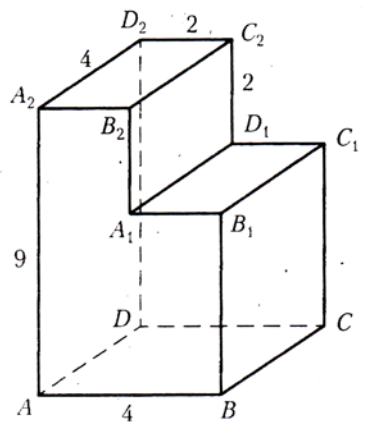
**56.** Вычислите объем правильной треугольной пирамиды, высота которой равна $2\sqrt{3}$, а все плоские углы при вершине прямые.

**57.** Основанием пирамиды является прямоугольный треугольник, катеты *CA* и *CB* которого равны 3 и 4 соответственно. Боковое ребро *CS* перпендикулярно плоскости основания пирамиды, а площадь грани *ASB* равна $6\sqrt{2}$. Найдите высоту пирамиды.




**58.** Найдите расстояние между вершинами $D$ и $D_2$ многогранника, изображенного на рисунке, все двугранные углы которого прямые.

**59.** Найдите расстояние между вершинами $D_2$ и $B_1$ многогранника, изображенного на рисунке, все двугранные углы которого прямые.




**60.** В правильной треугольной пирамиде *SABC* сторона основания равна $3\sqrt{3}$, а боковое ребро наклонено к плоскости основания *ABC* под углом, тангенс которого равен $\frac{4}{3}$. Найдите площадь треугольника *MSC*, точка *M* – середина AB.

**61.** Высота правильной четырехугольной пирамиды равна 6, апофема равна $2\sqrt{10}$. Секущая плоскость проходит через сторону основания и делит боковое ребро пополам. Найдите тангенс угла между плоскостями основания и сечения пирамиды.

**62.** Высота правильной четырехугольной пирамиды равна 18, а сторона основания – 12. Найдите тангенс угла между плоскостями основания пирамиды и сечения, проходящего через сторону основания и середину скрещивающегося с ней бокового ребра.

**63.** Секущая плоскость проходит через вершину $P$ правильной треугольной пирамиды $PABC$ параллельно $BC$ и пересекает ребро $AB$ в точке $K$ так, что $AK$:$KB$=2. Найдите площадь сечения, если высота пирамиды равна 6, а угол между плоскостью основания и апофемой пирамиды равен 30°.

**64.** Сторона основания правильной треугольной пирамиды равна 9, а боковая грань наклонена к плоскости основания под углом 30°. Секущая плоскость содержит высоту пирамиды и параллельна стороне основания. Найдите площадь сечения.

**65.** Сечение правильной треугольной пирамиды параллельно стороне основания и содержит высоту пирамиды. Найдите площадь сечения, если высота пирамиды равна 12, а угол между плоскостью основания и боковой гранью равен 30°.

**66.** Секущая плоскость проходит через высоту правильной треугольной пирамиды и параллельна стороне основания. Боковое ребро пирамиды наклонено к плоскости основания под углом 30° и равно 4. Найдите площадь сечения.

**67.** Через вершину правильной треугольной пирамиды и центр основания проведена плоскость, параллельная стороне основания. Угол между боковой гранью и основанием пирамиды равен 60°. Найдите площадь сечения, если апофема пирамиды равна 6.

**68.** Высота правильной треугольной пирамиды равна 3, боковое ребро наклонено к плоскости основания под углом, тангенс которого равен $2\sqrt{3}$. Секущая плоскость содержит высоту пирамиды и параллельна стороне основания. Найдите площадь сечения.

**69.** Через вершину правильной треугольной пирамиды и центр основания проведено сечение, параллельное стороне основания. Найдите площадь сечения, если угол между боковым ребром и плоскостью основания равен 30°, а сторона основания равна 12.

**70.** Боковое ребро правильной четырехугольной пирамиды равно $6\sqrt{2}$ м и образует с плоскостью основания 45°. Найдите объем пирамиды.

**71.** Стороны основания треугольной пирамиды равны 6 м, 8 м и 10 м, а боковые ребра наклонены к плоскости основания под углом 45°. Найдите объем пирамиды.

**72.** Высота правильной четырехугольной пирамиды равна 9 м, а двугранный угол при основании равен 60°. Найдите объем вписанного шара.

**73.** Высота правильной четырехугольной усеченной пирамиды равна 9 м, а стороны оснований 5 м и 7 м. Найдите объем пирамиды.

**74.** Основание пирамиды *SABC* – треугольник *ABC*, в котором $\angle C = 90^\circ$, *AB*=5, *AC*=3. Боковое ребро *SC* перпендикулярно плоскости основания и $SC = CB$. Точки *K* и *F* – середины сторон *AC* и *AB* соответственно. Найдите площадь сечения, параллельного прямой *SC* и проходящего через точки *K* и *F*.

**75.** В основании пирамиды лежит прямоугольный треугольник с катетами, равными 12 и 5. Все боковые грани наклонены к плоскости основания под углом 45°. Найдите объем пирамиды.

**76.** Боковая грань правильной четырехугольной пирамиды наклонена к плоскости основания под углом 30°, апофема равна 4. Найдите объем пирамиды.

**77.** В основании пирамиды лежит правильный шестиугольник *ABCDEF*. Боковое ребро *BS* перпендикулярно плоскости основания и равно ребру основания. Найдите градусную меру угла между боковым ребром FS и плоскостью основания.

**78.** Дан правильный тетраэдр *ABCD* с ребром $\sqrt{6}$. Найдите расстояние от вершины *AC* до плоскости *BDC*.

**79.** Основание треугольной пирамиды *MABC* является прямоугольный треугольник *ABC* с гипотенузой *AB*, равной 10, и катетом *AC*, равным 8. Боковые ребра пирамиды образуют с высотой пирамиды углы, равные 45°. Найдите объем пирамиды.

**80.** Основание пирамиды – треугольник, две стороны которого равны 1 и 2, а угол между ними равен 60°. Каждое боковое ребро равно $\sqrt{13}$. Найдите объем пирамиды.

**81.** В пирамиде *SABC* грани *SAB* и *SAC* перпендикулярны плоскости основания, ребро *BC* равно 10, а двугранный угол при ребре *BC* равен 45°. Найдите объем пирамиды, если площадь ее основания равна 30.

**82.** Основанием пирамиды служит прямоугольник, угол между диагоналями которого равен 30°, а площадь равна 9. Боковые ребра образуют с плоскостью основания углы, равные 45°. найдите объем пирамиды.

**83.** Основание пирамиды *MABCD* – квадрат, диагональ которого равна $\sqrt{6}$. Ребро *MB* перпендикулярно плоскости основания, а угол между плоскостями *ABC* и *AMD* равен 600. Найдите объем пирамиды.

**84.** Основание пирамиды *ABCD* – прямоугольный треугольник с гипотенузой АВ, равной $2\sqrt{30}$. *CD* – высота пирамиды, боковые ребра *AD* и *BD* наклонены к плоскости основания под углами 30° и 60° соответственно. Найдите объем пирамиды.

**85.** В основании пирамиды лежит равнобедренный треугольник с катетом, равным $2\sqrt{6}$. Боковые ребра пирамиды наклонены к плоскости основания под углом 60°. Вычислите объем пирамиды.

**86.** Радиус основания конуса равен 2. Объем конуса равен $12\sqrt{5}$. Найдите площадь боковой поверхности конуса.

**87.** Плоскость, проходящая через две взаимно перпендикулярных образующих конуса, наклонена к плоскости его основания под углом 45°. Найдите градусную меру угла, между образующей конуса и его высотой.

**88.** Объем конуса равен $\frac{32\pi}{3}$, а радиус его основания равен 4. Сечение проходящее через вершину конуса *M*, пересекает окружность его основания в точках *A* и *B*. Расстояние от центра основания конуса до плоскости сечения равно $\sqrt{3}$. Найдите градусную меру угла наклона плоскости сечения *MAB* к плоскости основания конуса.

**89.** Высота конуса равна $\sqrt{6}$, а образующая равна 4. Найдите градусную меру угла между плоскостью основания конуса и плоскостью, проходящей через две взаимно перпендикулярные образующие.

**90.** Сечение проходящее через вершину конуса пересекает окружность его основания в точках *A* и *B* и наклонена к плоскости основания конуса под углом 45°. Объем конуса равен $26\pi$, расстояние от центра основания конуса до прямой *AB*=6. Найдите длину образующей конуса.

**91.** Угол между высотой конуса и секущей плоскостью, проходящей через его вершину равен 45°, сечение – прямоугольный треугольник. Найдите площадь сечения, если высота конуса равна 5.

**92.** Плоскость проходит через две взаимно перпендикулярные образующие конуса. Расстояние между центром основания конуса и этой плоскостью равно 3. Найдите площадь сечения, если высота конуса равна 6.

**93.** Угол осевого сечения конуса равен 600, а радиус описанной около конуса сферы 6м. Найдите площадь боковой поверхности конуса.

**94.** Угол между образующими *CA* и *CB* конуса равен 60°, высота конуса равна 4, а радиус основания равен $\frac{4\sqrt{15}}{3}$. Найдите градусную меру угла между плоскостью *ABC* и плоскостью основания конуса.

**95.** Угол между образующими *CA* и *CB* конуса равен 90°, высота конуса равна 4, а радиус основания равен $\frac{4\sqrt{15}}{3}$. Найдите градусную меру угла между плоскостью *ABC* и плоскостью основания конуса.

**96.** В основании конуса проведена хорда. Через данную хорду и вершину конуса *C* проведена плоскость так, что угол при вершине *C* образовавшегося в сечении треугольника равен 60°. Найдите расстояние от центра основания конуса О до данной плоскости, если высота конуса равна 2, а образующая равна $\frac{8}{3}$.

**97.** Концы отрезка *AC* лежат на окружностях оснований цилиндра. Высота цилиндра равна радиусу его основания. Расстояние между осью цилиндра и параллельной ей плоскостью, проходящей через точки *A* и *C*, равно 3. найдите градусную меру угла между прямой *AC* и плоскостью основания цилиндра, если радиус основания равен 6.

**98.** Концы отрезка *AP* лежат на окружностях оснований цилиндра, радиус основания цилиндра равен 15, длина отрезка *AP*=48, а угол между прямой *AP* и плоскостью основания цилиндра равен 60°. Найдите расстояние между осью цилиндра и параллельной ей плоскостью, проходящей через точки *A* и *P*.

**99.** Через точки *A* и *D* лежащие на окружности оснований цилиндра, проведена плоскость параллельная его оси. Высота цилиндра равна $8\sqrt{3}$, угол между прямой *AD* и плоскостью основания равен 60°, расстояние между осью цилиндра и плоскостью, проходящей через точки *A* и *D*, равно 3. Найдите радиус основания цилиндра.

**100.** Концы отрезка *AK* лежат на окружностях двух оснований цилиндра. Секущая плоскость проходит через точку *A* и ось цилиндра. Угол между прямой *AK* и плоскостью основания цилиндра равен 30°, *AK*=16, площадь боковой поверхности цилиндра равна $80\pi$. Найдите периметр осевого сечения цилиндра.

**101.** Через образующую цилиндра проведены две плоскости, пересекающие основание цилиндра: одна – по диаметру *AM*, другая – по хорде

$AD$. Угол между этими плоскостями равен 60°. Площадь боковой поверхности цилиндра равна $60\pi$. Найдите площадь сечения цилиндра, проходящего через хорду $AD$.

**102.** Найдите высоту цилиндра наибольшего объема, который можно вписать в шар радиуса $2\sqrt{3}$ м.

**103.** Концы отрезка $KP$ лежат на окружностях оснований цилиндра. Высота цилиндра равна 16, радиус основания равен 10, а угол между прямой $KP$ и плоскостью основания цилиндра равен 45°. Найдите расстояние между осью цилиндра и параллельной ей плоскостью, проходящей через точки $K$ и $P$.

**104.** Концы отрезка $BP$ лежат на окружностях оснований цилиндра. Радиус основания цилиндра равен 25, длина отрезка $BP$ равна $14\sqrt{2}$, а угол между прямой $BP$ и плоскостью основания цилиндра равен 45°. Найдите расстояние между осью цилиндра и параллельной ей плоскостью, проходящей через точки $B$ и $P$.

**105.** Концы отрезка $AB$ лежат на окружностях оснований цилиндра. Радиус основания цилиндра равен 15, длина отрезка $AB$ равна $12\sqrt{3}$, а угол между прямой $AB$ и плоскостью основания цилиндра равен 30°. Найдите расстояние между осью цилиндра и параллельной ей плоскостью, проходящей через точки $A$ и $B$.

**106.** Высота цилиндра равна 16, радиус основания равен 10. Концы отрезка $KM$, не являющегося образующей цилиндра, лежат на окружностях его оснований. Расстояние между осью цилиндра и параллельной ей плоскостью, проходящей через точки $K$ и $M$, равно 6. Найдите угол (в градусах) между прямой $KM$ и плоскостью основания цилиндра.

**107.** Концы отрезка $AC$ лежат на окружностях оснований цилиндра. Высота цилиндра равна $6\sqrt{3}$, радиус основания 5, угол между прямой $AC$ и плоскостью основания равен 60°. Найдите расстояние между осью цилиндра и параллельной ей плоскостью, проходящей через точки $A$ и $C$.

**108.** Через точки $K$ и $P$, лежащие на окружностях оснований цилиндра, проведена плоскость, параллельная его оси. Высота цилиндра равна 16, угол между прямой $KP$ и плоскостью основания равен 45°, расстояние между осью цилиндра и плоскостью, проходящей через точки $K$ и $P$, равно 6. Найдите радиус основания цилиндра.

**109.** Прямая пересекает окружности оснований цилиндра в точках $B$ и $D$ и наклонена к плоскости основания под углом 30°. Плоскость, содержащая прямую $BD$, параллельна оси цилиндра и удалена от этой оси на расстояние 3. Найдите высоту цилиндра, если радиус его основания равен 6.

**110.** В цилиндрический сосуд налили 2000 см$^3$ воды. Уровень жидкости оказался равным 16 см. В воду полностью погрузили деталь. При этом уровень жидкости в сосуде поднялся на 12 см. Чему равен объем детали? Ответ выразите в см$^3$.

**111.** В цилиндрическом сосуде уровень жидкости достигает 20 см. На какой высоте будет находиться уровень жидкости, если ее перелить во второй цилиндрический сосуд, диаметр которого в 2 раза больше диаметра первого? Ответ выразите в сантиметрах.

**112.** Точки $K$ и $M$ лежат на окружностях двух оснований цилиндра. Синус угла наклона прямой $KM$ к плоскости основания цилиндра равен 0,6, $KM$=10, объем цилиндра равен $150\pi$. Найдите площадь осевого сечения цилиндра.

**113.** Объем первого цилиндра равен 72 см$^3$. У второго цилиндра высота в 3 раза больше, а радиус основания в 4 раза меньше, чем у первого. Найдите объем второго цилиндра. Ответ дайте в кубических сантиметрах.

**114.** Концы отрезка $MK$ лежат на окружностях двух оснований цилиндра. Угол между прямой $MK$ и плоскостью основания цилиндра равен 30°, $MK$=8, площадь боковой поверхности цилиндра равна $40\pi$. Найдите периметр осевого сечения цилиндра.

**115.** Радиус основания цилиндра равен 1, а высота равна $2\sqrt{6}$. Отрезки $AB$ и $CD$ – диаметры одного из оснований цилиндра, а отрезок $AA_1$ – его образующая. Известно, что $AD=\sqrt{3}$. Найдите косинус угла между прямыми $A_1C$ и $BD$.

**116.** Радиус основания цилиндра равен 5, а высота равна 2. Отрезки $AB$ и $CD$ – диаметры одного из оснований цилиндра, а отрезок $AA_1$ – его образующая. Известно, что $BC=2\sqrt{21}$. Найдите синус угла между прямыми $A_1C$ и $BD$.

**117.** Высота цилиндра равна 9, а радиус основания 4. На окружности основания отмечены точки $A$, $B$ и $C$ так, что $AB=4\sqrt{3}$, $CA=CB$ и $\angle ACB<90^\circ$. Отрезок $CC_1$ – образующая цилиндра. Найдите тангенс угла между плоскостью основания и плоскостью $ABC_1$.

**118.** Во сколько раз увеличится объем шара, если его радиус увеличить в четыре раза?

## Задачи повышенного уровня сложности

**1.** В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ найдите угол между плоскостью $AA_1C$ и прямой $A_1B$, если $AA_1 = 3$, $AB = 4$, $BC = 4$.

**2.** В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ найдите угол между плоскостью $A_1BC$ и прямой $BC_1$, если $AA_1 = 8$, $AB = 6$, $BC = 15$.

**3.** В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$, у которого $AB = 4$, $BC = 6$, $CC_1 = 4$, найдите тангенс угла между плоскостями $CDD_1$ и $BDA_1$.

**4.** В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$, у которого $AB = 6$, $BC = 6$, $CC_1 = 4$, найдите тангенс угла между плоскостями $ACD_1$ и $A_1B_1C_1$.

**5.** В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$, у которого $AA_1 = 4$, $A_1D_1 = 6$, $C_1D_1 = 6$, найдите тангенс угла между плоскостью $ADD_1$ и прямой $EF$, проходящей через середины ребер $AB$ и $B_1C_1$.

**6.** В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$, у которого $AB = 4$, $BC = 6$, $CC_1 = 4$, найдите тангенс угла между плоскостью $ABC$ и прямой $EF$, проходящей через середины ребер $AA_1$ и $C_1D_1$.

**7.** В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ все ребра равны 1. Найдите расстояние от точки $C$ до прямой $AD_1$.

**8.** В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ все ребра равны 1. Найдите расстояние от точки $C$ до прямой $BD_1$.

**9.** Сторона основания правильной треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ равна 2, а диагональ боковой грани равна $\sqrt{5}$. Найдите угол между плоскостью $A_1BC$ и плоскостью основания призмы.

**10.** В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$, все ребра которой равны 1, найдите косинус угла между прямыми $AB$ и $A_1C$.

**11.** В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$, все ребра которой равны 1, найдите косинус угла между прямыми $AB_1$ и $BC_1$.

**12.** Диаметр окружности основания цилиндра равен 20, образующая цилиндра равна 28. Плоскость пересекает его основания по хордам длины 12 и 16. Найдите тангенс угла между этой плоскостью и плоскостью основания цилиндра.

**13.** Диаметр окружности основания цилиндра равен 26, образующая цилиндра равна 21. Плоскость пересекает его основания по хордам длины 24 и 10. Найдите тангенс угла между этой плоскостью и плоскостью основания цилиндра.

**14.** В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ найдите тангенс угла между прямой $AA_1$ и плоскостью $BC_1D$.

**15.** В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ найдите тангенс угла между прямой $AC_1$ и плоскостью $BCC_1$.

**16.** В правильной четырехугольной пирамиде $SABCD$, все ребра которой равны 1, найдите косинус угла между прямой $AB$ и плоскостью $SAD$.

**17.** В правильной шестиугольной пирамиде $SABCDEF$, боковые ребра которой равны 2, а стороны основания – 1, найдите косинус угла между прямой $AC$ и плоскостью $SAF$.

**18.** Сторона основания правильной треугольной пирамиды равна 2, а двугранный угол при основании равен 45°. Найдите объем пирамиды.

**19.** Сторона основания правильной треугольной пирамиды равна 4, а двугранный угол при основании равен 45°. Найдите объем пирамиды.

**20.** Найдите площадь полной поверхности правильной треугольной пирамиды, если сторона ее основания равна $\sqrt{3}$, а двугранный угол при основании равен 60°.

**21.** Найдите площадь полной поверхности правильной треугольной пирамиды, если сторона ее основания равна 4, а двугранный угол при основании равен 60°.

**22**. Боковое ребро правильной треугольной пирамиды равно 5, а высота равна 3. Найдите объем пирамиды.

**23.** Боковое ребро правильной треугольной пирамиды равно 4, а высота равна $\sqrt{3}$. Найдите объем пирамиды.

# ОТВЕТЫ

| Базовый уровень сложности | | | | | | | | | | | | Повышенный уровень сложности | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **1** | 1 | **24** | 0,5 | **47** | 48 | **70** | 144 | **93** | $54\pi$ | **116** | 0,25 | **1** | $\arcsin\frac{2\sqrt{2}}{5}$ |
| **2** | 768 | **25** | 0,2 | **48** | 4 | **71** | 40 | **94** | 45 | **117** | 1,5 | **2** | $\arcsin\frac{24}{85}$ |
| **3** | 2 | **26** | 60 | **49** | 10 | **72** | $36\pi$ | **95** | 60 | **118** | 64 | **3** | $\frac{3\sqrt{2}}{2}$ |
| **4** | 18 | **27** | 4,8 | **50** | 9 | **73** | 327 | **96** | 1 | | | **4** | $\frac{2\sqrt{2}}{3}$ |
| **5** | 36 | **28** | 60 | **51** | 108 | **74** | 2 | **97** | 30 | | | **5** | $\frac{3}{5}$ |
| **6** | 64 | **29** | 288 | **52** | 2 | **75** | 20 | **98** | 9 | | | **6** | $\frac{\sqrt{10}}{10}$ |
| **7** | 90 | **30** | 115,2 | **53** | 9 | **76** | 32 | **99** | 5 | | | **7** | $\frac{\sqrt{6}}{2}$ |
| **8** | 192 | **31** | 76,8 | **54** | 6 | **77** | 30 | **100** | 36 | | | **8** | $\frac{\sqrt{6}}{3}$ |
| **9** | 2 | **32** | 1,5 | **55** | 60 | **78** | 2 | **101** | 30 | | | **9** | $30^0$ |
| **10** | 24 | **33** | 0,8 | **56** | 36 | **79** | 40 | **102** | 4 | | | **10** | $\frac{\sqrt{2}}{4}$ |
| **11** | 210 | **34** | 1,5 | **57** | 2,4 | **80** | 1 | **103** | 6 | | | **11** | $\frac{1}{4}$ |
| **12** | 57,6 | **35** | 3 | **58** | 3 | **81** | 60 | **104** | 24 | | | **12** | 2 или 14 |
| **13** | 216 | **36** | 10 | **59** | 6 | **82** | 9 | **105** | 12 | | | **13** | 2 или $\frac{21}{17}$ |
| **14** | 64 | **37** | 14 | **60** | 9 | **83** | 3 | **106** | 45 | | | **14** | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ |
| **15** | 72 | **38** | 4 | **61** | 1 | **84** | 36 | **107** | 4 | | | **15** | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ |
| **16** | 0,25 | **39** | 48 | **62** | 1 | **85** | 24 | **108** | 10 | | | **16** | $\frac{\sqrt{3}}{3}$ |
| **17** | 144 | **40** | 1800 | **63** | 72 | **86** | 42 | **109** | 6 | | | **17** | $\frac{\sqrt{5}}{5}$ |
| **18** | 4 | **41** | 420 | **64** | 4,5 | **87** | 60 | **110** | 1500 | | | **18** | 1/3 |
| **19** | 27 | **42** | 16 | **65** | 96 | **88** | 30 | **111** | 5 | | | **19** | 8/3 |
| **20** | 36 | **43** | 4 | **66** | 4 | **89** | 60 | **112** | 60 | | | **20** | $\frac{9\sqrt{3}}{4}$ |
| **21** | 20 | **44** | 2 | **67** | 18 | **90** | 7 | **113** | 13,5 | | | **21** | $12\sqrt{3}$ |
| **22** | 6 | **45** | 15 | **68** | 18 | **91** | 50 | **114** | 28 | | | **22** | $12\sqrt{3}$ |
| **23** | 54 | **46** | 192 | **69** | 16 | **92** | 48 | **115** | 0,2 | | | **23** | 9,75 |

# БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. ЕГЭ 2013 Математика. Типовые тестовые задания. 30 вариантов типовых тестовых заданий и 800 части С [Текст] / И.Р. Высоцкий, П.И. Захаров, В.С. Панферов. – М.: Изд-во «Экзамен». – 2013. – 216 с.

2. Литвиненко, В.Н. Задачник-практикум по математике. Алгебра. Тригонометрия [Текст]: Для поступающих в вузы / В.Н. Литвиненко, А.Г. Мордкович. – М.:ООО «Издательский дом «ОНИКС 21 век»»: ООО «Мир и образование». – 2005. – 464 с.

3. Литвиненко, В.Н. Практикум по элементарной математике: Геометрия [Текст]: учеб. пособие для студентов физ.-мат. спец. пед. ин-тов и учителей / В.Н. Литвиненко, А.Г. Мордкович. – М.: «ABF». – 1995. – 352 с.

4. Семенов, А.В. Оптимальный банк заданий для подготовки учащихся. Единый государственный экзамен 2012. Математика. [Текст]: учеб. пособие / А.В. Семенов, А.С. Трепалин, И.В. Ященко. – М.: Интеллект-Центр. – 2012. – 112 с.

## ОГЛАВЛЕНИЕ

Учебное издание

Гарькина Ирина Александровна
Титова Елена Ивановна
Ячинова Светлана Николаевна

МАТЕМАТИКА. ПОДГОТОВКА К ЕГЭ.
ЧАСТЬ 2

Учебное пособие

К о р р е к т о р Н.В. Кучина
В е р с т к а Н.В. Кучина

Подписано в печать 15.04.2013. Формат 60×84/16.
Бумага офсетная. Печать на ризографе.
Усл.печ.л. 8,72. Уч.-изд.л. 9,375. Тираж 80 экз.
Заказ № 87.

Издательство ПГУАС.
440028, г. Пенза, ул. Германа Титова, 28