МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«Пензенский государственный университет
архитектуры и строительства»

И.А.Гарькина, А.М.Данилов, А.Н.Круглова

МАТЕМАТИКА

Часть I. СПРАВОЧНЫЕ МАТЕРИАЛЫ И ТЕСТЫ ПО МОДУЛЯМ

Допущено УМО вузов РФ по образованию
в области транспортных машин и транспортно-технологических
комплексов в качестве учебного пособия для студентов вузов,
обучающихся по направлениям подготовки бакалавров
«Эксплуатация транспортных средств»
и «Эксплуатация транспортно-технологических машин и комплексов»

Пенза 2013

УДК 51 (07)
ББК 74.58:22.1я73
Г20

Рецензенты: кафедра высшей математики ФГБОУ ВПО «Пензенский государственный университет» (зав. кафедрой доктор физико-математических наук, профессор И.В. Бойков);
доктор физико-математических наук, профессор *О.А. Голованов* (Пензенский филиал военной академии материально-технического обеспечения)

Гарькина И.А.

Г20 Математика. Часть I. Справочные материалы и тесты по модулям: учеб. пособие / И.А. Гарькина, А.М. Данилов, А.Н. Круглова. – Пенза: ПГУАС, 2013. – 328 с.

ISBN 978-5-9282-0920-9 (Ч.1)
ISBN 978-5-9282-0918-6

Предлагаемое пособие подготовлено в соответствии с «Федеральным государственным образовательным стандартом высшего профессионального образования» по направлению подготовки 190600 –Эксплуатация транспортно-технологических машин и комплексов; квалификация (степень) – бакалавр.

Первая часть пособия содержит контрольные задания в виде тестов по каждому модулю с решениями примерных вариантов и справочные теоретические материалы. Оно может использоваться при планировании, организации и проведении рейтинговой оценки, текущего контроля успеваемости и промежуточной аттестации студентов по математике.

Пособие может полезным и для подготовки бакалавров по другим направлениям в технических вузах.

ISBN 978-5-9282-0920-9 (Ч.1)
ISBN 978-5-9282-0918-6

ПРЕДИСЛОВИЕ

Предлагаемое пособие подготовлено по инициативе профессора Домке Э.Р. (зав.кафедрой «Организация и безопасность движения» ПГУАС) в соответствии с «Федеральным государственным образовательным стандартом высшего профессионального образования» третьего поколения по направлению подготовки 190600 – Эксплуатация транспортно-технологических машин и комплексов (квалификация (степень) – бакалавр) и ориентировано на использование балльно-модульно-рейтинговой системы оценки качества освоения студентами основных образовательных программ.

При определении содержания пособия исходили из предпосылки, что общий курс математики является фундаментом математического образования и основой для успешного изучения общетеоретических и специальных дисциплин.

Пособие состоит из двух частей. Первая часть содержит контрольные задания в виде тестов по каждому модулю с решениями примерных вариантов и краткое (справочное) изложение теоретического материала. Вторая часть предназначается для итогового контроля усвоения студентами всего общего курса математики и может использоваться при подготовке к он-лайн тестированию на федеральном уровне.

Пособие может быть полезным и для подготовки бакалавров по другим направлениям в технических вузах.

Авторы благодарны рецензентам: д. ф.-м. н., проф. О.А.Голованову (Пензенский филиал военной академии материально-технического обеспечения); д.ф.-м.н., проф. И.В.Бойкову (зав. кафедрой «Высшая и прикладная математика» ФГБОУ ВПО «Пензенский государственный университет»); Первому заместителю председателя Учебно-методического объединения Минобразования России по образованию в области транспортных машин и транспортно-технологических комплексов, д.т.н., проф. В.В.Сильянову; Главному ученому секретарю международной ассоциации автомобильного и дорожного образования, профессору Ю.М.Ситникову, внимательно прочитавшим рукопись и сделавшим ряд ценных поправок.

ВВЕДЕНИЕ

Дисциплина «Математика» относится к математическому, естественнонаучному и общетехническому циклу (базовая часть) и является обязательной к изучению. Она должна вооружить бакалавра математическими знаниями, необходимыми для изучения ряда общенаучных дисциплин и дисциплин профессионального цикла, создать фундамент математического образования, необходимый для получения профессиональных компетенций бакалавра-строителя, воспитать математическую культуру и понимание роли математики в различных сферах профессиональной деятельности. Процесс изучения дисциплины направлен на формирование *компетенций:*

– владение культурой мышления, способностью к обобщению, анализу, восприятию информации, постановке и выбору путей ее достижения (ОК-1);

– умение логически верно, аргументировано и ясно строить устную и письменную речь (ОК-2);

– использование основных законов естественнонаучных дисциплин в профессиональной деятельности, применение методов математического анализа и моделирования, теоретического и экспериментального исследования (ОК-10);

– владение основными методами, способами и средствами получения, хранения, переработки информации, обладание навыками работы с компьютером как средством управления информацией (ОК-12);

– умение проводить технико-экономический анализ, комплексно обосновывать принимаемые и реализуемые решения (ПК-4);

– готовность к участию в составе коллектива исполнителей в разработке транспортно-технологических процессов, их элементов и технологической документации (ПК-7);

– способность к участию в составе коллектива исполнителей в проведении испытаний транспортно-технологических процессов и их элементов (ПК-9);

– умение выбирать материалы для применения при эксплуатации и ремонте транспортных машин и транспортно-технологических комплексов различного назначения с учетом влияния внешних факторов и требований безопасной и эффективной эксплуатации и стоимости (ПК-10).

Целью изучения дисциплины является знакомство бакалавров с местом и ролью математики в современном мире, мировой культуре и истории; формирование личности обучающихся, развитие их интеллекта и способностей к логическому и алгоритмическому мышлению; обучение основным математическим методам, необходимым для анализа и моделирования устройств, процессов и явлений при поиске оптимальных решений для осуществления научно-технического прогресса и выбора наилучших способов реализации этих решений, а также обучение методам обработки и анализа результатов экспериментальных данных.

Задачи изучения дисциплины: формирование целостного представления об основных этапах становления современной математики и ее структуре, обучение приемам и принципам построения математических моделей, освоение математических подходов к решению профессиональных задач.

В результате изучения дисциплины студент должен:

– **владеть знаниями** основных алгебраических структур, векторных пространств, линейных отображений;

– аналитической геометрии, дифференциальной геометрии кривых поверхностей, элементов топологий;

– дискретной математики: логических исчислений, графов, комбинаторики;

– основных понятий и методов математического анализа;

– теории вероятностей и математической статистики;

– **обладать умениями:** использовать математические методы и модели в технических приложениях.

Пособие позволяет в полной мере осуществить все виды организационно-методической работы по балльно-модульно-рейтинговой системе оценки качества освоения студентами программного материала по математике. Разбор задач и примеров по каждому из модулей, приводимых в пособии, систематическое тестирование по ним в течение всего курса, позволит студентам лучше подготовиться к итоговому контролю.

Авторы с благодарностью примут все замечания и пожелания по улучшению содержания книги.

КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ ДИСЦИПЛИНЫ ПО МОДУЛЯМ

Модуль 1
«Алгебраические структуры. Линейная алгебра и аналитическая геометрия»

Алгебраические структуры. Алгебраическая операция. Кольцо. Поле. Группы. Алгебра.

Определители второго и третьего порядка. Минор, алгебраическое дополнение. Разложение определителя по элементам строк и столбцов. Понятие определителя любого порядка (по индукции), его свойства и вычисление.

Системы линейных уравнений. Формулы Крамера. Системы линейных однородных уравнений, их нетривиальные решения. Линейные свойства решений систем линейных однородных уравнений

Матрицы, линейные операции над ними. Умножение матриц. Обратная матрица. Ранг матрицы. Теорема Кронекера – Капелли. Матричная запись и решение систем линейных уравнений. Решение систем линейных уравнений методом Гаусса, Жордана-Гаусса.

Векторы – отрезки, линейные операции над ними. Проекция вектора на ось. Размерность, базис. Координаты вектора как коэффициенты его разложения по базису и как проекции на координатные оси. Направляющие косинусы.

Скалярное произведение векторов, его свойства, выражение в координатах, применение. Координаты вектора как скалярные произведения вектора на координатные орты. Векторное и смешанное произведения. Их свойства, выражения в координатах, применение.

Понятие системы координат. Координаты точки как ее аналитический эквивалент. Прямоугольная декартова система координат. Полярная, сферическая, цилиндрическая системы координат. Преобразования координат.

Поверхность в пространстве, ее уравнение. Прямая в пространстве, ее уравнения. Параметрические уравнения линий.

Модуль 2
«Математический анализ. Дифференциальное исчисление функций одной и нескольких переменных»

Множество. Операции над множеством. Функция. Область ее определения. Сложные и обратные функции. График функции. Основные элементарные функции, их свойства и графики

Комплексные числа и действия над ними. Изображение комплексных чисел на плоскости. Модуль и аргумент комплексного числа.

Алгебраическая и тригонометрическая формы комплексного числа. Показательная форма комплексного числа. Формула Эйлера. Корни из комплексных чисел.

Предел последовательности. Предел функции. Бесконечно большие величины. Бесконечно малые величины. Сравнение бесконечно малых величин. Первый и второй замечательные пределы. Правила предельного перехода. Неопределенности.

Непрерывные функции. Точки разрыва

Производная функции. Геометрический смысл производной. Касательная и нормаль к линии. Дифференцирование функций. Правила дифференцирования. Производные сложной и обратной функций. Формулы дифференцирования основных элементарных функций.

Логарифмическое дифференцирование. Производные неявных функций. Параметрически заданные функции и их дифференцирование. Дифференциал, геометрический смысл, свойства. Производные и дифференциалы высших порядков

Применение дифференциального исчисления к исследованию функций.

Приращения функции. Предел функции. Непрерывность функции. Частные производные. Полный дифференциал и его связь с частными производными. Применение полного дифференциала к приближенным вычислениям.

Производные и дифференциалы высших порядков. Производная сложной функции.

Инвариантность формы полного дифференциала. Свойства дифференциала. Дифференциал высшего порядка. Дифференцирование неявной функции. Геометрические приложения дифференциального исчисления функций двух переменных. Уравнения касательной плоскости, нормали.

Экстремум функции нескольких переменных. Производная по направлению. Градиент. Линии уровня. Задачи о наибольших и наименьших значениях функции. Метод наименьших квадратов

Модуль 3

«Элементы теории функций комплексного переменного. Неопределенный и определенный интеграл. Кратные и криволинейные интегралы»

Элементы теории функций комплексного переменного.

Первообразная, основные свойства. Неопределенный интеграл, свойства. Таблица интегралов. Методы интегрирования. Непосредственное интегрирование. Метод замены переменной (подстановки). Интегрирование по частям.

Интегрирование рациональных функций путем разложения на простейшие дроби. Интегрирование выражений, содержащих тригонометрические функции. Универсальная тригонометрическая подстановка.

Интегрирование дробно-линейной и квадратичной иррациональных выражений.

Определенный интеграл. Задачи, приводящие к понятию определенного интеграла. Формула Ньютона-Лейбница. Вычисление определенного интеграла.

Приложения определенных интегралов.

Несобственные интегралы с бесконечными пределами. Несобственные интегралы от разрывных функций. Признаки сходимости несобственных интегралов.

Задача об объеме цилиндрического тела. Двойной интеграл, теорема существования, свойства. Теорема о среднем.

Вычисление двойных интегралов в декартовых и полярных координатах

Приложения двойных интегралов к задачам механики (масса, статические моменты, центр тяжести, моменты инерции плоской пластинки). Вычисление площади поверхности.

Масса неоднородного тела. Тройной интеграл. Вычисление тройных интегралов (при задании области интегрирования в декартовых, цилиндрических и сферических координатах). Применение тройных интегралов (вычисление статических моментов, моментов инерции пространственных тел, координат центра тяжести).

Криволинейный интеграл по длине (первого рода), вычисление. Масса кривой. Криволинейный интеграл по координатам (второго рода), физический смысл, вычисление.

Условие независимости интеграла от линии интегрирования. Формула Грина. Интегрирование полных дифференциалов. Первообразная функция. Формула Ньютона-Лейбница для криволинейных интегралов. Применение криволинейных интегралов второго рода (вычисление площади, вычисление работы в потенциальном силовом поле).

Модуль 4

«Обыкновенные дифференциальные уравнения.
Числовые и степенные ряды. Ряды Фурье»

Задачи, приводящие к дифференциальным уравнениям. Дифференциальные уравнения первого и второго порядков. Задача Коши. Теорема существования и единственности решения. Геометрическая интерпретация ДУ первого порядка. Интегрируемые типы дифференциальных уравнений первого порядка. ДУ с разделенными переменными, с разделяющимися переменными. Однородные уравнения. Уравнения, приводящиеся к однородным. Линейные уравнения. Уравнения в полных дифференциалах.

Дифференциальные уравнения высших порядков. Теорема существования и единственности решения задачи Коши. ДУ, удовлетворяющее краевым условиям. Некоторые типы ДУ, допускающих понижение порядка.

Линейные однородные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами. Характеристическое уравнение. Уравнения второго порядка. Виды решений.

Линейные неоднородные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами. Решения при некоторых видах правых частей. Осциллятор. Свободные и вынужденные колебания. Резонанс Системы дифференциальных уравнений первого порядка в нормальной форме. Общее решение. Частное решение. Фундаментальная система решений.

Числовые ряды. Сходимость и сумма ряда. Необходимое условие сходимости. Действия с рядами. Ряды с неотрицательными членами. Признаки сходимости.

Знакопеременные ряды, ряды с комплексными членами. Абсолютная и условная сходимости. Признак Лейбница. Свойства абсолютно сходящихся рядов.

Функциональные ряды. Область сходимости. Равномерная сходимость. Признак Вейерштрасса. Свойства равномерно сходящихся рядов: почленное дифференцирование и интегрирование. Степенные ряды. Теорема Абеля. Круг сходимости. Ряды Тейлора и Маклорена. Разложение функций в степенные ряды. Приложение рядов.

Разложение функций по ортогональной системе функций. Формулы Фурье. Тригонометрические ортогональные системы функций и разложение функций по этим системам. Теорема о возможности разложения функции в ряд Фурье. Разложение в ряд четных и нечетных функций, функций с произвольным периодом и заданных на половине периода

Модуль 5

«Элементы дискретной математики. Логические исчисления. Графы»

Множество, операции над множествами, свойства. Высказывания. Логические операции: отрицание, дизъюнкция, конъюнкция, импликация, эквивалентность. Логическая функция. Таблицы истинности. Правила преобразования логических выражений.

Графы, его элементы. Ориентированные и смешанные графы. Цепь в графе. Связные и несвязные графы. Некоторые приложения к решению транспортных задач.

Модуль 6

«Теория вероятностей и математическая статистика»

Элементы комбинаторики. Классическая вероятность. Статистическая вероятность. Методы вычисления вероятностей. Схема Бернулли. Теоремы Пуассона и Муавра-Лапласа.

Дискретные случайные величины. Функция распределения, свойства. Математическое ожидание и дисперсия. Свойства.

Непрерывные случайные величины. Функция распределения. Плотность вероятностей. Их взаимосвязь и свойства. Математическое ожидание и дисперсия. Нормальное распределение и его свойства. Закон больших чисел.

Статистическое описание результатов наблюдений. Генеральная совокупность и выборка. Вариационный ряд. Гистограмма, эмпирическая функция распределения, выборочная средняя и дисперсия.

Функциональная зависимость и регрессия. Кривые регрессии, их свойства. Коэффициент корреляции, корреляционное отношение, их свойства и оценки.

Понятие о критериях согласия. Проверка гипотез о равенстве долей и средних. Проверка гипотезы о значении параметров нормального распределения. Проверка гипотезы о виде распределения.

Модуль 1. АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ СТРУКТУРЫ. ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА И АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ

1.1. Алгебраические структуры

Пусть каждой упорядоченной паре (x,y) элементов x и y множества A по некоторому правилу поставлено в соответствие единственный для этой пары элемент $z \in A$. Говорят, что э элемент z есть результат *алгебраической операции*, примененной к паре (x,y). Обозначают $z = x * y$.

Для *задания алгебраической операции* необходимо выполнить два условия:

– определить правило, по которому любым двум элементам x и y множества A ставился бы в соответствие единственный элемент $z = x * y$ (именно в этом порядке: x, y),

– элемент $z = x * y$ должен принадлежать множеству A (множество A замкнуто относительно данной операции).

Алгебраическая операция называется *коммутативной*, если для любых двух элементов x и y множества A выполняется равенство: $x * y = y * x$.

Алгебраическая операция называется *ассоциативной*, если для любых трех элементов x и y множества A выполняется равенство: $(x * y) * z = x * (y * z)$. Сначала определяется результат операции в скобках, а затем еще раз применяется операция к оставшимся двум элементам.

Если на множестве A определены две алгебраические операции: $*$ и $\perp$, то говорят, что операция $*$ *дистрибутивна относительно операции* $\perp$, если $\forall x, y, z \notin A$ имеет место:

$$x * (y \perp z) = (x * y) \perp (x * z),$$

$$(x \perp y) * z = (x * z) \perp (y * z).$$

Для алгебраической операции *сложения* используется символ сложения "+" (говорят, что алгебраическая операция имеет *аддитивную* форму записи); для алгебраической операции *умножения* используют символ умножения (говорят, что алгебраическая операция имеет *мультипликативную* форму записи).

Множество A, вместе с одной или несколькими алгебраическими операциями, определенными на этом множестве называют *алгебраической структурой.*

Элемент $e \in A$ называется *нейтральным элементом относительно алгебраической операции* $*$, если $\forall x \in A$ выполняется равенство $x * e = e * x = x$. Если в множестве A существует нейтральный элемент, то он *единственный.*

Нейтральный элемент *относительно сложения* называется нулевым элементом или просто нулем и обозначается цифрой 0: $\forall x \in A$, $x + 0 = 0 + x = x$.

Нейтральный элемент *относительно умножения* называется единичным элементом или просто единицей и обозначается либо цифрой 1, либо буквой е: $\forall x \in A$, $x \cdot 1 = 1 \cdot x = x$ или $x \cdot e = e \cdot x = x$.

Элемент $x' \in A$ называется *симметричным* элементу $x \in A$ относительно алгебраической операции $*$, если. $x * x' = x' * x = e$.

Если каждый элемент $x \in A$ имеет симметричный ему $x' \in A$, тогда говорят, что множество A симметрично относительно операции $*$.

В алгебраической структуре с аддитивной формой записи элемент, симметричный элементу x, называется противоположным и обозначается $(-x)$: $x + (-x) = (-x) + x = 0$

В алгебраической структуре с мультипликативной формой записи элемент, симметричный элементу x, называется обратным и обозначается x^{-1}: $x \cdot x^{-1} = x^{-1} \cdot x = e$.

Если $(A,*)$ – алгебраическая структура с нейтральным элементом e и ассоциативной алгебраической операцией $*$, то, если элемент $x \in A$ имеет симметричный ему элемент $x' \in A$, то такой элемент единственный.

Системы всех комплексных, всех действительных и всех рациональных чисел, равно как и системы всех целых чисел, обладают тем общим свойством, что в каждой из них не только сложение и умножение можно выполнять, оставаясь *в пределах самой этой системы.* Это свойство приведенных числовых систем отличает их, например, от системы положительных целых или положительных действительных чисел.

Всякая система чисел комплексных или, в частности, действительных, содержащих сумму, разность ($x - y = x + (-y)$) и произведение любых двух своих чисел, называется *числовым кольцом.* При этом никакая система положительных чисел не будет кольцом, так как, если a и b – два различных положительных числа, то либо $a - b$, либо $b - a$ отрицательно. Не будет кольцом и никакая система отрицательных чисел, хотя бы потому, что произведение двух отрицательных чисел – положительно.

Числовое кольцо называется *числовым полем,* если оно содержит частное ($\frac{x}{y} = x \cdot y^{-1}$) любых двух своих чисел (делитель предполагается отличным от нуля). Таким образом, можно говорить о полях рациональных, действительных, комплексных чисел. Заметим, кольцо целых чисел полем не является.

Кольца и поля являются алгебраическими структурами *с двумя независимыми операциями*: сложением и умножением. Важнейшими алгебраическими структурами *с одной операцией* являются *группы.*

Группой называется множество G с одной алгебраической ассоциативной операцией (не обязательно коммутативной), для которой существует обратная операция.

Ввиду возможной не коммутативности групповой операции, выполнимость обратной операции означает следующее: для любых двух элементов a и b из G существуют в G такой однозначно определенный элемент x и такой однозначно определенный элемент y, что

$$ax = b, ya = b.$$

Если группа G состоит из конечного числа элементов, она называется *конечной группой* (число элементов – порядком группы). Если операция, определенная в группе G, коммутативна, то G называется *коммутативной* или *абелевой группой.*

Если операция в группе G является сложением, то единица группы называется нулем (обозначается: 0); обратный элемент называется противоположным и обозначается: $-a$. По сложению всякое кольцо является абелевой группой. По умножению никакое кольцо не является группой, так как обратная операция – деление – не всегда выполнимо.

Группу по умножению составляют все положительные действительные числа. Так же составляет группу относительно матричного умножения множество M невырожденных матриц порядка n.

Группы G и G' называются *изоморфными,* если между ними можно установить такое взаимно однозначное соответствие, при котором для любых элементов a и b из G и соответствующих им элементов a' и b' из G' произведению ab соответствует произведение $a'b'$. При изоморфном соответствии между группами G и G' единице группы G

соответствует единица группы G'. Если элементу a из G соответствует элемент a' из G', то элементу a^{-1} соответствует элемент $(a')^{-1}$.

Часть математики, занимающуюся изучением алгебраических операций, обычно называют алгеброй.

1.2. Линейная алгебра

Определители второго и третьего порядков

Пусть дана матрица первого порядка, то есть таблица $[a_{11}]$ из одного числа a_{11}. Определителем первого порядка, соответствующим этой матрице, называется само число a_{11}:

$$\Delta = |a_{11}| = a_{11}.$$

Определителем второго порядка, соответствующим матрице второго порядка $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$, называется число

$$\Delta = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}.$$

Определителем третьего порядка, соответствующим матрице третьего порядка $\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$, называется число

$$\Delta = a_{11} \cdot \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \cdot \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \cdot \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}.$$

Пусть введено понятие определителя $(n-1)$-го порядка. Пусть также дана квадратная матрица n-го порядка

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2n} \\ & & \dots & & \dots & \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{in} \\ & & \dots & & \dots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}.$$

Если в этой матрице вычеркнуть i-ю строку и j-й столбец, то останется матрица $(n-1)$-го порядка, определитель которой называется *минором* M_{ij} *элемента* a_{ij}. *Алгебраическим дополнением* элемента a_{ij} называется число $A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}$.

Определителем n-го порядка, соответствующим матрице n-го порядка, называется число

$$\Delta=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12}\ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}\cdots & a_{2n} \\ & \cdots & \\ a_{n1} & a_{n2}\ldots & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}+\cdots+a_{1n}A_{1n}.$$

Отметим, что столбцы (аналогично строки) определителя n-го порядка можно рассматривать как элементы n-мерного пространства R_n всех упорядоченных наборов из n чисел с поэлементным сложением и умножением на число.

Свойства определителей третьего порядка

1. *Разложение определителя по строке* (*столбцу*). Определитель равен сумме произведений элементов любой его строки или столбца на их алгебраические дополнения:

$$\Delta=a_{i1}A_{i1}+a_{i2}A_{i2}+a_{i3}A_{i3}, \quad \Delta=a_{1j}A_{1j}+a_{2j}A_{2j}+a_{3j}A_{3j}.$$

В частности, разлагая определитель по первой строке ($i=1$), получим:

$$\Delta=a_{11}\cdot\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}-a_{12}\cdot\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}+a_{13}\cdot\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}.$$

2. Определитель не изменится, если его строки заменить столбцами, а столбцы — соответствующими строками (*транспонировать матрицу*).

3. Общий множитель элементов какой-нибудь строки (или столбца) может быть вынесен за знак определителя.

4. Если элементы одной строки (столбца) определителя соответственно равны элементам другой строки (столбца), то определитель равен нулю.

5. При перестановке двух строк (столбцов) определитель меняет знак.

6. Определитель не изменится, если к элементам одной строки (столбца) прибавить соответствующие элементы другой строки (столбца), умноженные на одно и то же число.

Вычисление определителя удобно проводить, используя свойства 1, 3 и 6.

Все изложенные выше свойства определителей третьего порядка легко обобщаются на определители произвольного порядка.

Матрицы

Матрицей размера $m \times n$ называется прямоугольная таблица чисел, состоящая из m строк и n столбцов:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Числа a_{ij} называются *элементами матрицы*. Если $m=n$, матрица A называется *квадратной,* а число n – ее *порядком.*

Для каждой квадратной матрицы A можно вычислить ее определитель, обозначаемый $\det A$ (или $|A|$).

Матрица A называется *невырожденной*, если $|A| \neq 0$. Если же $|A|=0$, то матрица A – *вырожденная*.

Если элементы квадратной матрицы удовлетворяют условию $a_{mn} = a_{nm}$, то матрица называется *симметрической.*

Две матрицы считаются равными ($A=B$) тогда и только тогда, когда равны их соответственные элементы.

Суммой двух матриц A и B одинакового размера называется матрица, определяемая равенством:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & a_{13}+b_{13} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & a_{23}+b_{23} \\ a_{31}+b_{31} & a_{32}+b_{32} & a_{33}+b_{33} \end{pmatrix}.$$

Произведением числа λ на матрицу A называется матрица, определяемая равенством

$$\lambda \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} & \lambda a_{13} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} & \lambda a_{23} \\ \lambda a_{31} & \lambda a_{32} & \lambda a_{33} \end{pmatrix}.$$

Произведение матриц. Произведение матрицы A на матрицу B определено в том случае, когда число столбцов матрицы A равно числу строк матрицы B. В результате умножения получается матрица $C = AB$, у которой столько же строк, сколько их в матрице A, и столько же столбцов, сколько их в матрице B. Элемент c_{ij} матрицы-произведения, стоящий в i-й строке и j-м столбце, равен сумме произведений соответственных элементов i-й строки матрицы A и j-го столбца матрицы B:

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_{11} & b_{11} & \dots & b_{11} & \dots & b_{11} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2j} & \dots & b_{2k} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nj} & \dots & b_{nk} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1j} & \dots & c_{1k} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2j} & \dots & c_{2k} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{i1} & c_{i2} & \dots & c_{ij} & \dots & c_{ik} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{m1} & c_{m2} & \dots & c_{mj} & \dots & c_{mk} \end{pmatrix} = C,$$

где $c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \ldots + a_{in}b_{nj}$, $i = \overline{1,m}$; $j = \overline{1,k}$.

Важно отметить, что в общем случае $AB \neq BA$ (т.е. матрицы нельзя переставлять).

Определитель произведения двух квадратных матриц одинакового порядка равен произведению определителей этих матриц.

Нулевой матрицей называется матрица, все элементы которой равны нулю.

Единичной матрицей называется квадратная матрица вида:

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ & & \dots & \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

При умножении этой матрицы слева и справа на матрицу A получается матрица A:

$$E \cdot A = A \cdot E = A.$$

Всякая невырожденная квадратная матрица A имеет *обратную* матрицу. Матрица B называется обратной по отношению к матрице A, если произведение AB равно единичной матрице: $AB=E$. Матрица, обратная по отношению к A, обозначается A^{-1}. Она находится по формуле

$$A^{-1}=\frac{1}{|A|}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix},$$

где A_{ij} – алгебраические дополнения элемента a_{ij} определителя транспонированной матрицы A.

Рангом матрицы A (обозначается $\operatorname{rang} A$) называется *наибольший* порядок миноров этой матрицы, отличных от нуля. Если все элементы матрицы равны нулю, то ранг этой матрицы принимается равным нулю.

Ранг матрицы не меняется при следующих элементарных преобразованиях: замене строк столбцами, а столбцов – соответствующими строками; перестановке строк (столбцов) матрицы; умножении какой-либо строки (столбца) на число, отличное от нуля; вычеркивании строки (столбца), все элементы которой равны нулю; прибавлении к элементам одной строки (столбца) соответствующих элементов другой строки (столбца).

Системы линейных уравнений

Система линейных алгебраических уравнений имеет вид:

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n=b_m, \end{cases}$$

где $a_{11},a_{12},\ldots,a_{mn}$ – коэффициенты;
$b_1,b_2,\ldots,b_m$ – свободные члены;
$x_1,x_2\ldots,x_n$ – неизвестные величины.

Решением системы называется *совокупность* n чисел $\{x_1,x_2\ldots,x_n\}$, которые, будучи подставлены вместо неизвестных в уравнения системы, обращают эти уравнения в тождества. Система уравнений называется *совместной*, если она имеет хотя бы одно решение. Если же система не имеет ни одного решения, то она называется *несовместной*.

Совместная система называется *определенной,* если она имеет только одно решение, и *неопределенной,* если она имеет более одного решения.

Матрицы

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix},\quad A_1=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$$

называются соответственно *матрицей* и *расширенной матрицей* системы.

Для совместности системы алгебраических уравнений необходимо и достаточно, чтобы ранг матрицы этой системы был равен рангу расширенной матрицы: $\operatorname{rang} A = \operatorname{rang} A_1$ (*теорема Кронекера–Капелли.*)

Если $b_1 = b_2 = \ldots = b_m = 0$, то система линейных уравнений называется однородной. Однородная система уравнений всегда совместна.

Справедливы следующие **формулы Крамера**:

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta},\quad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta},\ldots,x_k = \frac{\Delta_k}{\Delta},\ \ldots,x_n = \frac{\Delta_n}{\Delta}.$$

Здесь $\Delta = \det A \neq 0$ – определитель системы, а Δ_k – определитель, полученный из определителя системы заменой его k-го столбца столбцом свободных членов матрицы $A_1, \left(k=\overline{1,n}\right)$; $m=n$.

Матричное решение системы. Система линейных уравнений может быть записана в матричной форме в виде:

$$AX = B,$$

где A – матрица системы;

$X = \left(x_1, x_2, \ldots, x_n\right)^{\text{т}}$ – матрица-столбец неизвестных (т – символ транспонирования);

$B = \left(b_1, b_2 \ldots b_n\right)^{\text{т}}$ – матрица-столбец свободных членов.

Если матрица A квадратная и невырожденная, то решение системы в матричной форме может быть записано в виде:

$$X = A^{-1}B.$$

Равносильные системы уравнений. Две системы линейных уравнений называются *равносильными,* если множества их решений совпадают. Нахождение решений системы линейных уравнений основано на переходе к равносильной системе, которая проще исходной. Укажем простейшие операции, которые приводят к равносильной системе:

1) перемена местами двух уравнений системы;

2) умножение какого-либо уравнения системы на действительное число (отличное от нуля);

3) прибавление к одному уравнению другого уравнения, умноженного на произвольное число.

Для решения совместной системы линейных алгебраических уравнений широко используется **метод Гаусса** последовательного исключения неизвестных. При $m = n$ с использованием операций 1-3 система приводится к треугольному виду (что при $\Delta \neq 0$ возможно):

$$\begin{cases} x_1 + \alpha_{12}x_2 + \alpha_{13}x_3 + \ldots + \alpha_{1n}x_{1n} = \beta_1, \\ \qquad x_2 + \alpha_{23}x_3 + \ldots + \alpha_{2n}x_n = \beta_2, \\ \qquad \ldots \\ \qquad x_n = \beta_n. \end{cases}$$

Подставляя x_n из последнего уравнения в предпоследнее, найдем x_{n-1}. Подставляя x_{n-1}, x_n в $(n-2)$-е уравнение, получим x_{n-2} и т.д.

Для решения произвольной совместной системы уравнений используется ниже приводимое правило.

Выберем $r = \text{rang}A$ линейно независимых строк в матрице $\mathbf{A}$ и оставим в системе лишь те уравнения, коэффициенты которых вошли в выбранные строки. Оставим в левых частях этих уравнений r неизвестных (основные, базовые неизвестные) так, чтобы определитель из коэффициентов при них был отличен от нуля. Остальные неизвестные (свободными) перенесем в правые части уравнений. Давая свободным неизвестным произвольные численные значения и вычисляя значения остальных неизвестных по правилу Крамера, получим все решения системы.

1.3. Аналитическая геометрия на плоскости

Если *на плоскости* задана *прямоугольная декартова система координат xOy*, то точку M этой плоскости, имеющую координаты x и y, обозначают $M(x,y)$.

Расстояние d между точками $M_1(x_1, y_1)$ и $M_2(x_2, y_2)$:

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}\,.$$

Координаты точки $C(\tilde{x},\tilde{y})$, делящей отрезок M_1M_2 в отношении λ:

$$\tilde{x}=\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda},\quad \tilde{y}=\frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda}.$$

В полярной системе координат точка M плоскости определяется полярным радиусом-вектором точки $r=\left|\overline{OM}\right|$ и полярным углом φ, образованным отрезком OM с полярной осью Ox (φ положителен при отсчете от полярной оси против часовой стрелки). Если точка M имеет полярные координаты $r>0$ и $0\le\varphi<2\pi$, то ей же отвечает и бесчисленное множество пар полярных координат $(r,\varphi+2k\pi)$, где $k\in Z$.

Если начало O декартовой прямоугольной системы координат совместить с полюсом, а ось Ox направить по полярной оси, то имеет место:

$$x=r\cos\varphi,\qquad y=r\sin\varphi;$$

$$r=\sqrt{x^2+y^2},\quad \operatorname{tg}\varphi=\frac{y}{x}.$$

Уравнение линии

Линии (множеству точек $M(x,y)$) на плоскости xOy соответствует уравнение, связывающее x и y. Координаты точки M линии удовлетворяют этому уравнению. Координаты любой другой точки не удовлетворяют уравнению линии. Например, точка $A(2,4)$ лежит, а $B(1,3)$ не лежит на параболе $y=x^2$.

Аналогично определяется уравнение линии в полярных координатах.

Часто линия определяется *параметрическими уравнениями* $x=x(t), y=y(t)$. Исключение (если оно возможно) параметра t из этой системы приведет к обычному уравнению линии вида $f(x,y)=0$.

Общее уравнение прямой на плоскости имеет вид:

$$Ax+By+D=0,$$

где A,B,D – постоянные коэффициенты, $A^2+B^2\neq 0$.

В частном случае при:

$D=0$ и $A,B\neq 0$ прямая проходит через начало координат;

$A=0,\quad B,D\neq 0$ – параллельна оси Ox,

$B=0,\quad A,D\neq 0$ – параллельна Oy,

$B,D=0,\quad A\neq 0$ – совпадает с осью Oy,

$A, D = 0, \quad B \neq 0$ – совпадает с осью Ox.

При $B \neq 0$, разрешив общее уравнение прямой относительно y, получим *уравнение прямой с угловым коэффициентом*

$$y = kx + b,$$

где $k = -\dfrac{A}{B} = \operatorname{tg}\alpha$ – угловой коэффициент;

α – угол между прямой и положительным направлением Ox;

$b = -\dfrac{D}{B}$ – ордината точки пересечения прямой с осью Oy.

При $D \neq 0$ уравнение прямой можно представить в виде *уравнения в отрезках*

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1.$$

Здесь $a = -\dfrac{D}{A}$, $b = -\dfrac{D}{B}$ есть соответственно абсцисса и ордината точек пересечения прямой с осями Ox и Oy.

Уравнение прямой, проходящей через $M_1(x_1, y_1)$ и $M_2(x_2, y_2)$, имеет вид:

$$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}$$

и угловой коэффициент этой прямой находится по формуле

$$k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}.$$

Если $x_1 = x_2$, то уравнение прямой, проходящей через точки M_1 и M_2, имеет вид $x = x_1$; при $y_1 = y_2$ соответствующее уравнение прямой: $y = y_1$.

Угол между прямыми. Пересечение прямых. Расстояние от точки до прямой

Углом между прямыми называется наименьший из двух смежных углов, образованных этими прямыми. Так что угол α между прямыми $y = k_1 x + b_1$ и $y = k_2 x + b_2$ определяется из

$$\operatorname{tg}\alpha = \left| \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2} \right|.$$

Условие параллельности прямых:

$$k_1 = k_2;$$

условие перпендикулярности:

$$k_1 = -\frac{1}{k_2}.$$

Если $\frac{A_1}{A_2} \neq \frac{B_1}{B_2}$ (при их равенстве прямые параллельны), координаты точки пересечения прямых $A_1x + B_1y + D_1 = 0$ и $A_2x + B_2y + D_2 = 0$ находятся путем совместного решения уравнений этих прямых.

Расстояние d от точки $M(x_0, y_0)$ до прямой $Ax + By + D = 0$ определяется по формуле

$$d = \frac{\left|Ax_0 + By_0 + D\right|}{\sqrt{A^2 + B^2}}.$$

Кривые второго порядка

Кривая второго порядка задается уравнением

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0.$$

Перечислим основные их виды.

Окружность как множество точек, равноудаленных от центра $C(a, b)$, описывается уравнением

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2,$$

где r – радиус окружности.

Эллипс определяется как множество всех точек плоскости, сумма расстояний которых до двух заданных точек (фокусов) есть величина постоянная, равная $2a$ и превышающая расстояния между фокусами. Если в прямоугольной системе координат в качестве фокусов выбраны точки $F_1(c, 0)$ и $F_2(-c, 0)$, то получится *каноническое* (*простейшее*) *уравнение эллипса:*

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

где a и b – полуоси эллипса.

Справедливо соотношение:

$$a^2 = b^2 + c^2.$$

Вид эллипса приводится на рис. 1.

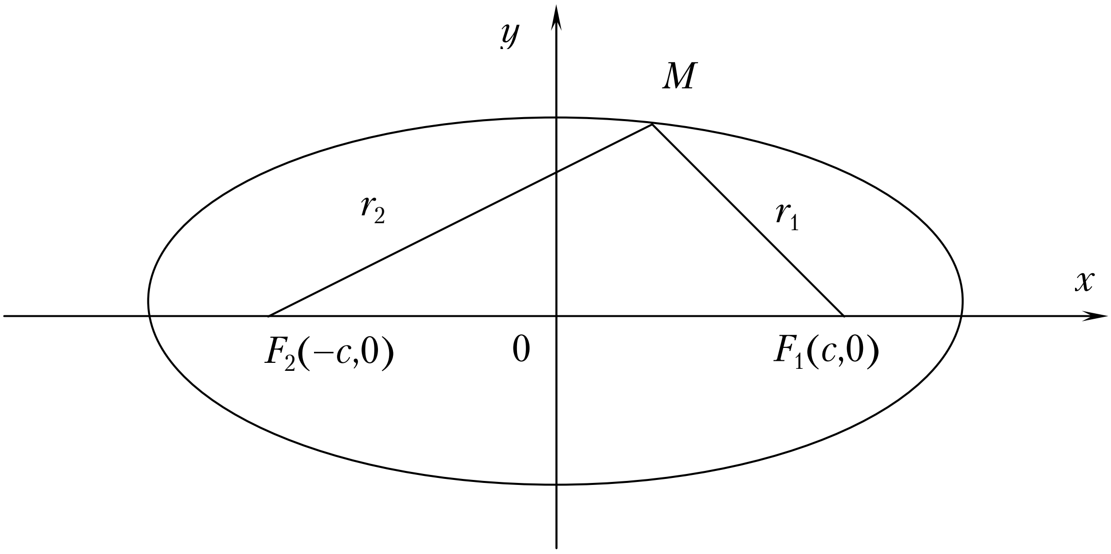


Рис. 1

Мера сжатия эллипса определяется его эксцентриситетом $\varepsilon = \frac{c}{a} < 1$.

Расстояния r_1 и r_2 точки M эллипса от его фокусов F_1 и F_2 называются фокальными радиусами-векторами этой точки, $r_1 + r_2 = 2a$.

При $a = b = r$ ($c = 0$, $\varepsilon = 0$) эллипс превращается в окружность

$$x^2 + y^2 = r^2.$$

Справедливо:

$$r_1 = a - \varepsilon x, \quad r_2 = a + \varepsilon x.$$

Гипербола определяется как множество всех точек плоскости, абсолютная величина разности расстояний которых до двух данных точек (фокусов) F_1 и F_2 есть величина постоянная, равная $2a$ и меньшая расстояния между фокусами. Если фокусы гиперболы есть точки $F_1(c,0)$ и $F_2(-c,0)$, то *каноническое уравнение гиперболы* имеет вид:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

где a и b – полуоси гиперболы.

Вид гиперболы приводится на рис. 2.

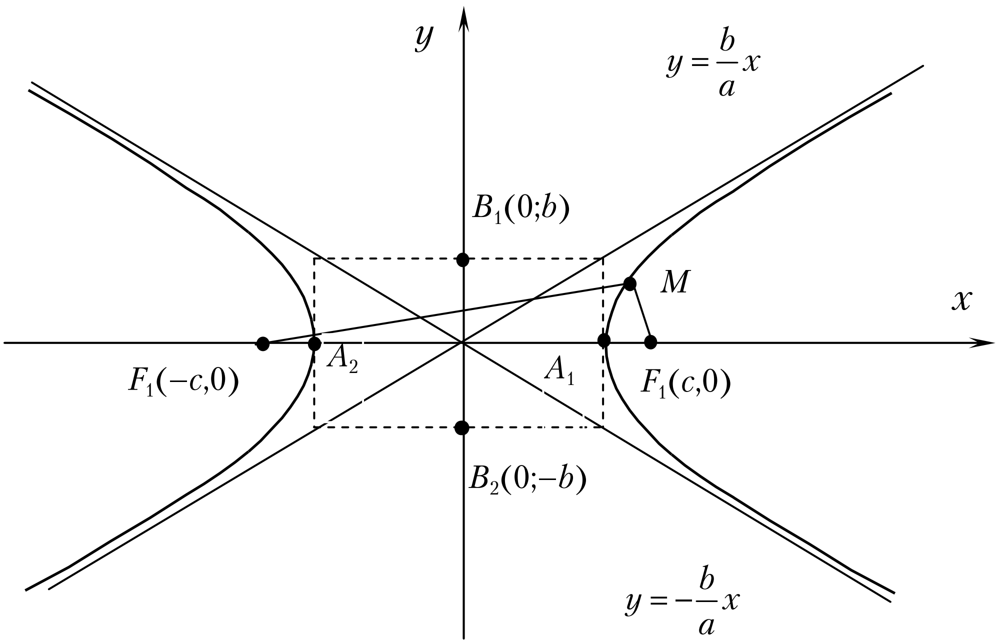


Рис. 2

На рисунке $A_1\left(a,0\right)$, $A_2\left(-a,0\right)$ – вершины гиперболы. Отрезок A_1A_2 ($\left|A_1A_2\right| = 2a$) называется действительной осью гиперболы, а отрезок B_1B_2 ($\left|B_1B_2\right| = 2b$) – ее мнимой осью. Прямые $y = \frac{b}{a}x$, $y = -\frac{b}{a}x$ – асимптоты гиперболы; $\varepsilon = \frac{c}{a} > 1$ – эксцентриситет гиперболы. Справедливо: $b^2 = c^2 - a^2$.

Гипербола симметрична относительно Ox и Oy.

Для правой ветви гиперболы фокальные радиусы-векторы равны:

$$r_1 = \varepsilon x - a, r_2 = \varepsilon x + a.$$

Для левой ветви:

$$r_1 = -\varepsilon x + a, r_2 = -\varepsilon x + a.$$

При $a = b$ получится равнобочная гипербола: $x^2 - y^2 = a^2$.

Две гиперболы называются сопряженными, если они имеют одни и те же полуоси и асимптоты, но действительная ось одной служит мнимой осью другой, и наоборот.

Парабола определяется как множество всех точек плоскости, равноудаленных от данной точки (фокуса) F и данной прямой (директрисы). *Каноническое уравнение параболы* получится, если директрисой является прямая $x=-\dfrac{p}{2}$, а фокусом – точка $F\left(\dfrac{p}{2},0\right)$, и будет иметь вид:

$$y^2=2px.$$

Вид этой параболы приводится на рис. 3.

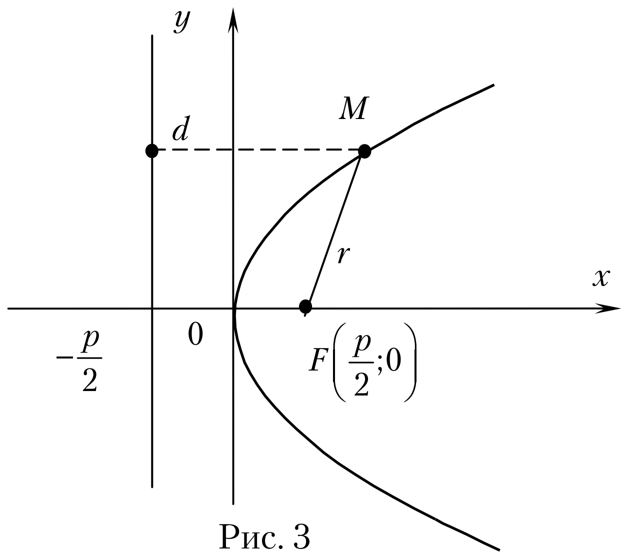


Рис. 3

Длина фокального радиуса-вектора определится в виде $r=x+\dfrac{p}{2}$ ($p>0$).

1.4. Аналитическая геометрия в пространстве

Расстояние между точками $A(x_1,y_1,z_1)$ и $B(x_2,y_2,z_2)$ вычисляется по формуле

$$d=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}.$$

Если отрезок с концами в точках $A(x_1,y_1,z_1)$ и $B(x_2,y_2,z_2)$ делится точкой $C(x,y,z)$ в отношении λ, то координаты точки C определяются по формулам

$$x=\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda},\quad y=\frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda},\quad z=\frac{z_1+\lambda z_2}{1+\lambda}.$$

Цилиндрические координаты. Положение точки $M(x,y,z)$ в пространстве можно определить ее аппликатой z и полярными координатами $r=|OP|$ и $\varphi=\angle xOP$ проекции P этой точки на координатную плоскость

xOy. Величины r, φ, z называются цилиндрическими координатами точки M. Декартовы прямоугольные и цилиндрические координаты точки связаны соотношениями $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$ (аппликаты в обеих системах одинаковы).

Сферическая система координат задает положение точки $M(x,y,z)$ следующими тремя величинами: расстоянием $r = OM$, углом $\theta = \angle zOM$ и углом φ между плоскостями zOx и zOM. Величины r, φ, θ называются сферическими координатами точки M. Прямоугольные и сферические координаты связаны соотношениями:

$$x = r\sin\theta\cos\varphi, \quad y = r\sin\theta\sin\varphi, \quad z = r\cos\theta.$$

Векторы

Вектором называется направленный отрезок AB, у которого точка A рассматривается как начало, а точка B — как конец.

Векторы, лежащие на одной прямой или на параллельных прямых, называются ***коллинеарными***.

Вектор $\bar{a}$ может быть единственным образом представлен в виде

$$\bar{a} = x\bar{i} + y\bar{j} + z\bar{k}$$

(разложение вектора $\bar{a}$ по осям координат или разложение по ортам). Здесь x,y,z – проекции вектора $\bar{a}$ на соответствующие оси координат (*координаты* вектора $\bar{a}$), $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$ – орты этих осей (единичные векторы, направления которых совпадают с положительными направлениями соответствующих осей).

Векторы $x\bar{i}$, $y\bar{j}$, $z\bar{k}$ называются составляющими (*компонентами*) вектора $\bar{a}$ по осям координат.

Длина (модуль) вектора $\bar{a}$ обозначается $|\bar{a}|$ и определяется по формуле $|\bar{a}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

Направление вектора $\bar{a}$ определяется по направляющим косинусам углов α, β, γ, образованных $\bar{a}$ с осями координат (направляющие косинусы)

$$\cos\alpha = \frac{x}{|\bar{a}|}, \quad \cos\beta = \frac{y}{|\bar{a}|}, \quad \cos\gamma = \frac{z}{|\bar{a}|};$$

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1.$$

Вектор $\bar{r} = \overline{OM}$ называется *радиусом-вектором* точки M. Координаты $\bar{r}$ совпадают с координатами точки M и разложение вектора $\bar{r}$ по ортам имеет вид

$$\bar{r} = x\bar{i} + y\bar{j} + z\bar{k}.$$

Для точек $A(x_1, y_1, z_1)$ и $B(x_2, y_2, z_2)$ разложение вектора $\overline{AB}$ по ортам имеет вид

$$\overline{AB} = (x_2 - x_1)\overline{i} + (y_2 - y_1)\overline{j} + (z_2 - z_1)\overline{k}.$$

Его длина совпадает с расстоянием между точками A и B

$$d = \left|\overline{AB}\right| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}.$$

Направление вектора $\overline{AB}$ определяется по направляющим косинусам

$$\cos\alpha = \frac{x_2 - x_1}{d}, \quad \cos\beta = \frac{y_2 - y_1}{d}, \quad \cos\gamma = \frac{z_2 - z_1}{d}.$$

Действия над векторами. Скалярное произведение. Произведение вектора на число. Сумма и разность векторов

Произведением вектора $\overline{a}$ *на число* λ называется вектор $\lambda\overline{a}$, коллинеарный вектору $\overline{a}$, имеющий модуль $|\lambda| \cdot |\overline{a}|$ и направленный одинаково с $\overline{a}$, если $\lambda > 0$, и противоположно $\overline{a}$ при $\lambda < 0$. Если $\overline{a} = (x, y, z)$, то $\lambda\overline{a} = (\lambda x, \lambda y, \lambda z)$.

Суммой векторов $\overline{a}$ и $\overline{b}$ называется вектор $\overline{a} + \overline{b}$, который строится следующим образом. Сначала с помощью параллельного переноса вектора $\overline{b}$ совмещают его начало с концом вектора $\overline{a}$ (рис. 4) Сумма векторов $\overline{a} + \overline{b}$ – «замыкающий» вектор, начало которого совпадает с началом вектора $\overline{a} + \overline{b}$, а конец — с концом вектора $\overline{b}$ (*правило треугольника*).

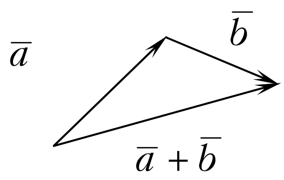


Рис. 4

Разность векторов $\overline{a} - \overline{b}$ определяется как сумма векторов $\overline{a}$ и $-\overline{b}$ (рис. 5). Если $\overline{a} = (x_1, y_1, z_1)$, $\overline{b} = (x_2, y_2, z_2)$, то

$$\overline{a} \pm \overline{b} = (x_1 \pm x_2, y_1 \pm y_2, z_1 \pm z_2).$$

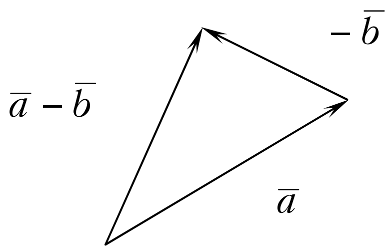


Рис. 5

Вектор, начало которого совпадает с его концом, называется ***нулевым*** и обозначается $\overline{0}$. Очевидно, $\overline{0}=(0{,}0{,}0)$ и $\overline{a}+\overline{0}=\overline{a}$ для любого вектора $\overline{a}$.

Линейные пространства

Множества всех плоских или пространственных векторов, в которых определены операции сложения векторов и умножения вектора на число, являются простейшими примерами векторных пространств.

При этом n-мерным вектором называется упорядоченная совокупность n действительных чисел, записываемых в виде $\overline{x}=(x_1,x_2,\ldots,x_n)$, где x_i – i-я координата вектора $\overline{x}$.

Два n-мерных вектора равны тогда и только тогда, когда равны их соответствующие координаты ($\overline{x}=\overline{y}$, если $x_i=y_i,\ i=\overline{1,n}$).

Суммой двух векторов одинаковой размерности n называется вектор $\overline{z}=\overline{x}+\overline{y}$, координаты которого равны сумме соответствующих координат слагаемых векторов ($z_i=x_i+y_i,\ i=\overline{1,n}$).

Произведением вектора $\overline{x}$ на действительное число λ называется вектор $\overline{u}=\lambda\overline{x}$, координаты u_i которого равны произведению λ на соответствующие координаты вектора $\overline{x}$ ($u_i=\lambda x_i,\ i=\overline{1,n}$).

Линейные операции над любыми векторами удовлетворяют следующим свойствам:

1) $\overline{x}+\overline{y}=\overline{y}+\overline{x}$ – коммутативное (переместительное) свойство суммы;

2) $(\overline{x}+\overline{y})+\overline{z}=\overline{x}+(\overline{y}+\overline{z})$ – ассоциативное (сочетательное) свойство суммы;

3) $\alpha(\beta\overline{x})=(\alpha\beta)\overline{x}$ – ассоциативное относительно числового множителя свойство;

4) $\alpha(\overline{x}+\overline{y})=\alpha\overline{x}+\beta\overline{y}$ – дистрибутивное (распределительное) относительно суммы векторов свойство;

5) $(\alpha+\beta)\overline{x}=\alpha\overline{x}+\beta\overline{x}$ – дистрибутивное свойство относительно суммы числовых множителей;

6) Существует нулевой вектор $\overline{0}=(0,0,\ldots,0)$, такой, что $\overline{x}+\overline{0}=\overline{x}$ для любого вектора $\overline{x}$;

7) Для любого вектора $\overline{x}$ существует противоположный вектор $(-\overline{x})$, такой, что $\overline{x}+(-\overline{x})=\overline{0}$;

8) $1\cdot\overline{x}=\overline{x}$ для любого вектора $\overline{x}$.

Множество векторов с действительными компонентами, в котором определены операции сложения векторов и умножения вектора на число, удовлетворяющее приведенным выше свойствам (**рассматриваемым как аксиомы**), называется **векторным пространством.**

Под $\overline{x},\overline{y},\overline{z}$ можно рассматривать не только векторы, но и элементы (объекты) любой природы, удовлетворяющие свойствам 1-8. В этом случае соответствующее множество R элементов называется **линейным пространством.**

Размерность и базис векторного пространства

Вектор $\overline{a}_m$ называется **линейной комбинацией** векторов $\overline{a}_1,\overline{a}_2,\ldots,\overline{a}_{m-1}$ векторного пространства R, если

$$\overline{a}_m=\lambda_1\overline{a}_1+\lambda_2\overline{a}_2+\cdots+\lambda_{m-1}\overline{a}_{m-1},$$

где λ_i – действительные числа $i=\overline{1,m-1}$.

Векторы $\overline{a}_1,\overline{a}_2,\ldots\overline{a}_m$ векторного пространства R называются **линейно зависимыми**, если существуют такие числа $\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_m$, **не равные одновременно нулю**, что

$$\lambda_1\overline{a}_1+\lambda_2\overline{a}_2+\cdots+\lambda_m\overline{a}_m=\overline{0}.$$

В противном случае векторы $\overline{a}_1,\overline{a}_2,\ldots,\overline{a}_m$ называются **линейно независимыми.**

Если векторы $\overline{a}_1,\overline{a}_2,\ldots,\overline{a}_m$ линейно зависимы, то по крайней мере один из них может быть представлен в виде линейной комбинации остальных векторов.

Линейное пространство R называется n-мерным, если в нем существуют n линейно независимых векторов, а **любые** $(n+1)$ векторов уже являются зависимыми. Число n называется **размерностью пространства *R*.**

Совокупность n линейно независимых векторов n-мерного пространства R называется **базисом**.

Т е о р е м а . Каждый вектор $\overline{x}$ линейного пространства R можно представить, и притом единственным способом, в виде линейной комбинации векторов базиса.

Так, если $\overline{e}_1,\overline{e}_2,\ldots,\overline{e}_n$ – базис n-мерного линейного пространства R, то любой вектор $\overline{x}\in R$ можно единственным образом представить в виде:

$$\overline{x}=\lambda_1\overline{e}_1+\lambda_2\overline{e}_2+\cdots+\lambda_n\overline{e}_n.$$

Таким образом, вектор $\overline{x}$ в базисе $\overline{e}_1,\overline{e}_2,\ldots,\overline{e}_n$ определяется единственным образом с помощью чисел $\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_n$. Эти числа называются *координатами* вектора $\overline{x}$ в этом базисе.

При определении размерности линейного пространства используют следующую теорему: «Если $\overline{e}_1,\overline{e}_2,\ldots,\overline{e}_n$ – система линейно независимых векторов пространства R, и любой вектор $\overline{x}$ линейно выражается через $\overline{e}_1,\overline{e}_2,\ldots,\overline{e}_n$, то пространство R является n-мерным, а векторы $\overline{e}_1,\overline{e}_2,\ldots,\overline{e}_n$ – его базисом».

Скалярным произведением векторов $\overline{a}=(x_1,y_1,z_1)$ и $\overline{b}=(x_2,y_2,z_2)$ называется число, равное произведению их модулей на косинус угла φ между ними: $(\overline{a},\overline{b})=|\overline{a}|\cdot|\overline{b}|\cdot\cos\varphi$.

Свойства скалярного произведения

$(\overline{a},\overline{b})=|\overline{a}||\overline{b}|\cos\varphi$; (при $\overline{a}=\overline{b}$ имеем: $(\overline{a},\overline{b})=(\overline{a},\overline{a})=|\overline{a}||\overline{a}|\cdot 1=|\overline{a}|^2$);

$(\overline{a},\overline{b})=0$, если $\overline{a}=0$, либо $\overline{b}=0$, либо $\overline{a}\perp\overline{b}$;

$(\overline{a},\overline{b})=(\overline{b},\overline{a})$ (переместительный закон);

$(\overline{a},(\overline{b}+\overline{c}))=(\overline{a},\overline{b})+(\overline{a},\overline{c})$ (распределительный закон);

$(\lambda\overline{a},\overline{b})=(\overline{a},\lambda\overline{b})=\lambda(\overline{a},\overline{b})$ (сочетательный закон по отношению к скалярному множителю).

Скалярные произведения ортов:

$$\overline{i}^2=\overline{j}^2=\overline{k}^2=1,\ \ (\overline{i},\overline{j})=(\overline{j},\overline{k})=(\overline{i},\overline{k})=0.$$

Если векторы заданы своими координатами $\overline{a}=x_1\overline{i}+y_1\overline{j}+z_1\overline{k}$, $\overline{b}=x_2\overline{i}+y_2\overline{j}+z_2\overline{k}$, то скалярное произведение этих векторов находится по формуле $(\overline{a},\overline{b})=x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2$.

Угол между векторами.
Угол между вектором и осями координат

Угол φ между векторами $\overline{a}$ и $\overline{b}$ определяется из соотношения

$$\cos\varphi = \frac{\left(\overline{a},\overline{b}\right)}{\left|\overline{a}\right| \cdot \left|\overline{b}\right|}.$$

Условие ортогональности двух векторов. Векторы $\overline{a}$ и $\overline{b}$ ортогональны тогда и только тогда, когда $\left(\overline{a},\overline{b}\right) = 0$.

Условие коллинеарности двух векторов. Векторы $\overline{a} = \left(x_1, y_1, z_1\right)$ и $\overline{b} = \left(x_2, y_2, z_2\right)$ коллинеарны тогда и только тогда, когда $\overline{a} = \lambda \cdot \overline{b}$ или $\frac{x_1}{x_2} = \frac{y_1}{y_2} = \frac{z_1}{z_2} = \lambda \ \left(x_2, y_2, z_2 \neq 0\right)$.

Проекция вектора $\overline{b}$ на направление вектора $\overline{a}$, равная $\left|\overline{b}\right| \cdot \cos\phi$, вычисляется по формуле

$$\text{Пр}_{\overline{a}}\overline{b} = \frac{\left(\overline{a},\overline{b}\right)}{\left|\overline{a}\right|}.$$

Векторное и смешанное произведения

Векторным произведением векторов $\overline{a}$ и $\overline{b}$ называется вектор $\overline{c} = \left[\overline{a},\overline{b}\right]$, определяемый условиями:

1) вектор $\overline{c}$ перпендикулярен векторам $\overline{a}$ и $\overline{b}$;

2) модуль вектора $\overline{c}$ равен площади параллелограмма, построенного на векторах $\overline{a}$ и $\overline{b}$ ($\left|\overline{c}\right| = \left|\overline{a}\right| \cdot \left|\overline{b}\right| \cdot \sin\phi$, где ϕ — угол между векторами $\overline{a}$ и $\overline{b}$);

3) $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}$ образуют правую тройку векторов, т.е. если начала векторов $\overline{a}$, $\overline{b}$ и $\overline{c}$ поместить в одну точку, то *кратчайший* поворот вектора $\overline{a}$ к $\overline{b}$ наблюдается с конца вектора $\overline{c}$ происходящим против часовой стрелки.

Векторные произведения координатных ортов:

$$\left[\overline{i},\overline{i}\right] = \left[\overline{j},\overline{j}\right] = \left[\overline{k},\overline{k}\right] = \overline{0},$$

$$\left[\overline{i},\overline{j}\right] = \overline{k},\ \left[\overline{j},\overline{i}\right] = -\overline{k},\ \left[\overline{j},\overline{k}\right] = \overline{i},\ \left[\overline{k},\overline{j}\right] = -\overline{i},\ \left[\overline{k},\overline{i}\right] = \overline{j}, \left[\overline{i},\overline{k}\right] = -\overline{j}.$$

Если векторы заданы своими координатами $\overline{a}=x_1\overline{i}+y_1\overline{j}+z_1\overline{k}$, $\overline{b}=x_2\overline{i}+y_2\overline{j}+z_2\overline{k}$, то векторное произведение этих векторов находится по формуле

$$\left[\overline{a},\overline{b}\right]=\begin{vmatrix}\overline{i} & \overline{j} & \overline{k}\\ x_1 & y_1 & z_1\\ x_2 & y_2 & z_2\end{vmatrix}=\overline{i}\cdot\begin{vmatrix}y_1 & z_1\\ y_2 & z_2\end{vmatrix}-\overline{j}\cdot\begin{vmatrix}x_1 & z_1\\ x_2 & z_2\end{vmatrix}+\overline{k}\cdot\begin{vmatrix}x_1 & y_1\\ x_2 & y_2\end{vmatrix}=$$

$$=\left(y_1z_2-z_1y_2,-x_1z_2+z_1x_2,x_1y_2-y_1x_2\right).$$

Свойства векторного произведения:

1. $\left[\overline{a},\overline{b}\right]=-\left[\overline{b},\overline{a}\right]$, то есть векторное произведение не обладает переместительным свойством.
2. $\left[\overline{a},\left(\overline{b}+\overline{c}\right)\right]=\left[\overline{a},\overline{b}\right]+\left[\overline{a},\overline{c}\right]$.
3. $\left[(\lambda\overline{a}),\overline{b}\right]=\left[\overline{a},\left(\lambda\overline{b}\right)\right]=\lambda\left[\overline{a},\overline{b}\right]$.
4. $\left[\overline{a},\overline{b}\right]=\overline{0}$, если $\overline{a}=\overline{0}$, либо $\overline{b}=\overline{0}$, либо векторы $\overline{a}$ и $\overline{b}$ коллинеарны.
5. Площадь S параллелограмма, построенного на векторах $\overline{a}$ и $\overline{b}$, равна модулю их векторного произведения $S=\left|\left[\overline{a},\overline{b}\right]\right|$.

Смешанным произведением векторов $\overline{a},\overline{b},\overline{c}$ называется число, равное скалярному произведению вектора $\left[\overline{a},\overline{b}\right]$ на вектор $\overline{c}$, т.е. $\left(\overline{a},\overline{b},\overline{c}\right)=\left(\left[\overline{a},\overline{b}\right],\overline{c}\right)$.

Свойства смешанного произведения:

1.Смешанное произведение не изменяется, если в нем поменять местами знаки векторного и скалярного умножения:

$$\left(\left[\overline{a},\overline{b}\right],\overline{c}\right)=\left(\overline{a},\left[\overline{b},\overline{c}\right]\right).$$

При перестановке любых двух векторов смешанное произведение изменяет только знак:

$$\left(\overline{a},\overline{b},\overline{c}\right)=-\left(\overline{b},\overline{a},\overline{c}\right),\ \left(\overline{a},\overline{b},\overline{c}\right)=-\left(\overline{a},\overline{c},\overline{b}\right),\ \left(\overline{a},\overline{b},\overline{c}\right)=-\left(\overline{c},\overline{b},\overline{a}\right).$$

2. Смешанное произведение не меняется при круговой перестановке векторов:

$$\left(\overline{a},\overline{b},\overline{c}\right)=\left(\overline{b},\overline{c},\overline{a}\right)=\left(\overline{c},\overline{a},\overline{b}\right).$$

3. Смешанное произведение трех векторов равно нулю, если они компланарны (параллельны одной и той же плоскости).

4. Модуль смешанного произведения численно равен объему параллелепипеда, построенного на этих векторах.

Если векторы заданы разложениями по ортам $\overline{a} = x_1\overline{i} + y_1\overline{j} + z_1\overline{k}$, $\overline{b} = x_2\overline{i} + y_2\overline{j} + z_2\overline{k}$, $\overline{c} = x_3\overline{i} + y_3\overline{j} + z_3\overline{k}$, то их смешанное произведение вычисляется как определитель третьего порядка:

$$\left(\overline{a},\overline{b},\overline{c}\right) = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}.$$

Плоскость в пространстве

Общим уравнением плоскости называется линейное уравнение

$$Ax + By + Cz + D = 0,$$

где $A^2 + B^2 + C^2 \neq 0$.

Частные случаи расположения плоскости, определяемой общим уравнением:

$A = 0$ параллельна оси Ox;
$B = 0$ параллельна оси Oy;
$C = 0$ параллельна оси Oz;
$D = 0$ проходит через начало координат;
$A = B = 0$ перпендикулярна оси Oz (параллельна плоскости xOy);
$A = C = 0$ перпендикулярна оси Oy (параллельна плоскости xOz);
$B = C = 0$ перпендикулярна оси Ox (параллельна плоскости yOz);
$A = D = 0$ проходит через ось Ox;
$B = D = 0$ проходит через ось Oy;
$C = D = 0$ проходит через ось Oz;
$A = B = D = 0$ совпадает с плоскостью xOy ($z = 0$);
$A = C = D = 0$ совпадает с плоскостью xOz ($y = 0$);
$B = C = D = 0$ совпадает с плоскостью yOz ($z = 0$).

Если в общем уравнении плоскости коэффициент $D \neq 0$, то, разделив все члены уравнения на $-D$, уравнение плоскости можно привести к виду:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1.$$

(Здесь $a = -\frac{D}{A}$, $b = -\frac{D}{B}$, $c = -\frac{D}{C}$). Это уравнение плоскости называется **уравнением в отрезках**: в нем *a, b, c* – соответственно абсцисса, ордината и аппликата точек пересечения плоскости с осями *Ox, Oy, Oz*.

Положение плоскости в пространстве полностью определяется точкой $M_0(x_0, y_0, z_0)$, лежащей на этой плоскости, и перпендикулярным ей вектором $\overline{n} = (A, B, C)$. Уравнение этой плоскости имеет вид:

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$$

и называется **уравнением плоскости с нормальным вектором** $\overline{n}$.

Уравнение плоскости в пространстве с направляющими векторами. Даны точка $M_0(x_0, y_0, z_0)$ и направляющие ненулевые векторы $\overline{p}(l, m, n)$ и $\overline{q}(l', m', n')$. Найдем уравнение плоскости, проходящей через M_0 с направляющими векторами $\overline{p}$ и $\overline{q}$. Для всех тех и только тех точек M, которые принадлежат плоскости, векторы $\overline{M_0M} = (x - x_0, y - y_0, z - z_0)$, $\overline{p}$ и $\overline{q}$ компланарны, то есть их смешанное произведение

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ l & m & n \\ l' & m' & n' \end{vmatrix} = 0.$$

Получили искомое уравнение плоскости.

Как следствие получим **уравнение плоскости, проходящей через три данные точки** $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$, $M_3(x_3, y_3, z_3)$,

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0.$$

Из компланарности $\overline{M_0M} = (x - x_0, y - y_0, z - z_0) = \overline{x} - \overline{x}_0, \overline{p}, \overline{q}$ следует их линейная зависимость:

$$\overline{x} - \overline{x}_0 = s\overline{p} + t\overline{q}.$$

Откуда получим **параметрические уравнения плоскости**

$$x - x_0 = sl + tl';$$

$$y - y_0 = sm + tm';$$

$$z - z_0 = sn + tn'.$$

Расстояние d от точки $M_0(x_0, y_0, z_0)$ до плоскости $Ax + By + Cz + D = 0$ вычисляется по формуле

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

Взаимное расположение двух плоскостей. Угол φ между двумя плоскостями $A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$ и $A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$ равен углу между их нормальными векторами $\overline{n}_1=(A_1,B_1,C_1)$ и $\overline{n}_2=(A_2,B_2,C_2)$ и определяется соотношением

$$\cos\varphi=\frac{(\overline{n}_1,\overline{n}_2)}{|\overline{n}_1|\cdot|\overline{n}_2|}=\frac{A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2}{\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}\cdot\sqrt{A_2^2+B_2^2+C_2^2}}.$$

Условия параллельности и перпендикулярности плоскостей вытекают из условий коллинеарности и ортогональности нормальных векторов $\overline{n}_1$ и $\overline{n}_2$.

Уравнение

$$A_1x+B_1y+C_1z+D_1+\lambda(A_2x+B_2y+C_2z+D_2)=0$$

при произвольном значении λ определяет некоторую плоскость, проходящую через прямую пересечения плоскостей $A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$ и $A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$, то есть некоторую плоскость, принадлежащую пучку плоскостей, проходящих через эту прямую (*уравнение пучка плоскостей*).

Прямая в пространстве

Каждая прямая в пространстве может быть задана системой двух линейных уравнений:

$$\begin{cases}A_1x+B_1y+C_1z=0,\\A_2x+B_2y+C_2z=0\end{cases}$$

(эти уравнения определяют две плоскости, пересечением которых и служит данная прямая).

Положение прямой полностью определяется какой-нибудь *ее точкой* $M_0(x_0,y_0,z_0)$ и *направляющим вектором* $\overline{a}=(l,m,n)$, параллельным прямой. Для всех тех и только тех точек *M*, которые принадлежат прямой, векторы $\overline{M_0M}$ и $\overline{a}$ коллинеарны, то есть их векторное произведение равно $\overline{0}$. Откуда получим следующие канонические уравнения прямой в пространстве

$$\begin{vmatrix}y-y_0 & z-z_0\\ m & n\end{vmatrix}=0,$$

$$\begin{vmatrix}z-z_0 & x-x_0\\ n & l\end{vmatrix}=0,$$

$$\begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 \\ l & m \end{vmatrix}=0.$$

При $l,m,n\neq 0$ получим

$$\frac{x-x_0}{l}=\frac{y-y_0}{m}=\frac{z-z_0}{n}.$$

Если одна из координат вектора $\bar{a}$ равна нулю, например, $l=0$, то будем иметь

$$x=x_0,$$

$$\frac{y-y_0}{m}=\frac{z-z_0}{n}.$$

Так что при $l=0$ прямая ортогональна Ox.

При $l=m=0$ прямая ортогональна плоскости xOy.

Аналогично и для других случаев.

Из предыдущего легко следуют **параметрические уравнения прямой:**

$$x-x_0=lt,$$

$$y-y_0=mt,$$

$$z-z_0=nt.$$

Прямая, проходящая через две данные точки $M_1(x_1,y_1,z_1)$ и $M_2(x_2,y_2,z_2)$, представляется уравнениями:

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{z-z_1}{z_2-z_1}.$$

Прямая и плоскость в пространстве

Угол φ между прямой с направляющим вектором $\bar{a}=(l,m,n)$ и плоскостью $Ax+By+Cz+D=0$ с нормальным вектором $\bar{n}=(A,B,C)$ определяется из соотношения

$$\sin\varphi=\frac{|Al+Bm+Cn|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\sqrt{l^2+m^2+n^2}}.$$

Условие параллельности прямой и плоскости (векторы $\bar{a}$ и $\bar{n}$ ортогональны): $Al+Bm+Cn=0$.

Условия перпендикулярности прямой и плоскости вытекают из условия коллинеарности векторов $\bar{a}$ и $\bar{n}$: $\bar{a}=\lambda\bar{n}$.

Уравнение плоскости, проходящей через точку $M_0(x_0,y_0,z_0)$ и перпендикулярной прямой с направляющим вектором $\bar{a}=(l,m,n)$, записывается в виде:

$$l(x-x_0)+m(y-y_0)+n(z-z_0)=0.$$

Для нахождения координат точки пересечения прямой и плоскости необходимо решить систему уравнений, состоящую из параметрических уравнений прямой и уравнения плоскости.

Поверхности второго порядка

Поверхностями второго порядка называются такие множества точек в пространстве, координаты которых удовлетворяют уравнению вида

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Dxy + Eyz + Fzx + Gx + Hy + Kz + L = 0.$$

При помощи поворотов и параллельного переноса осей координат это уравнение может быть преобразовано к простому каноническому виду. *Основные* канонические уравнения и названия соответствующих поверхностей (рис. 6):

а) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ – эллипсоид;

б) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$ – однополостный гиперболоид;

в) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1$ – двуполостный гиперболоид;

г) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0$ – конус второго порядка;

д) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=2z$ – эллиптический параболоид;

е) $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=2z$ – гиперболический параболоид;

ж) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ – эллиптический цилиндр;

з) $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ – гиперболический цилиндр;

и) $y^2=2px$ – параболический цилиндр;

к) $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=0$ – пара пересекающихся плоскостей;

л) $\frac{x^2}{a^2}=1$ – пара параллельных плоскостей;

м) $x^2=0$ – пара совпадающих плоскостей.

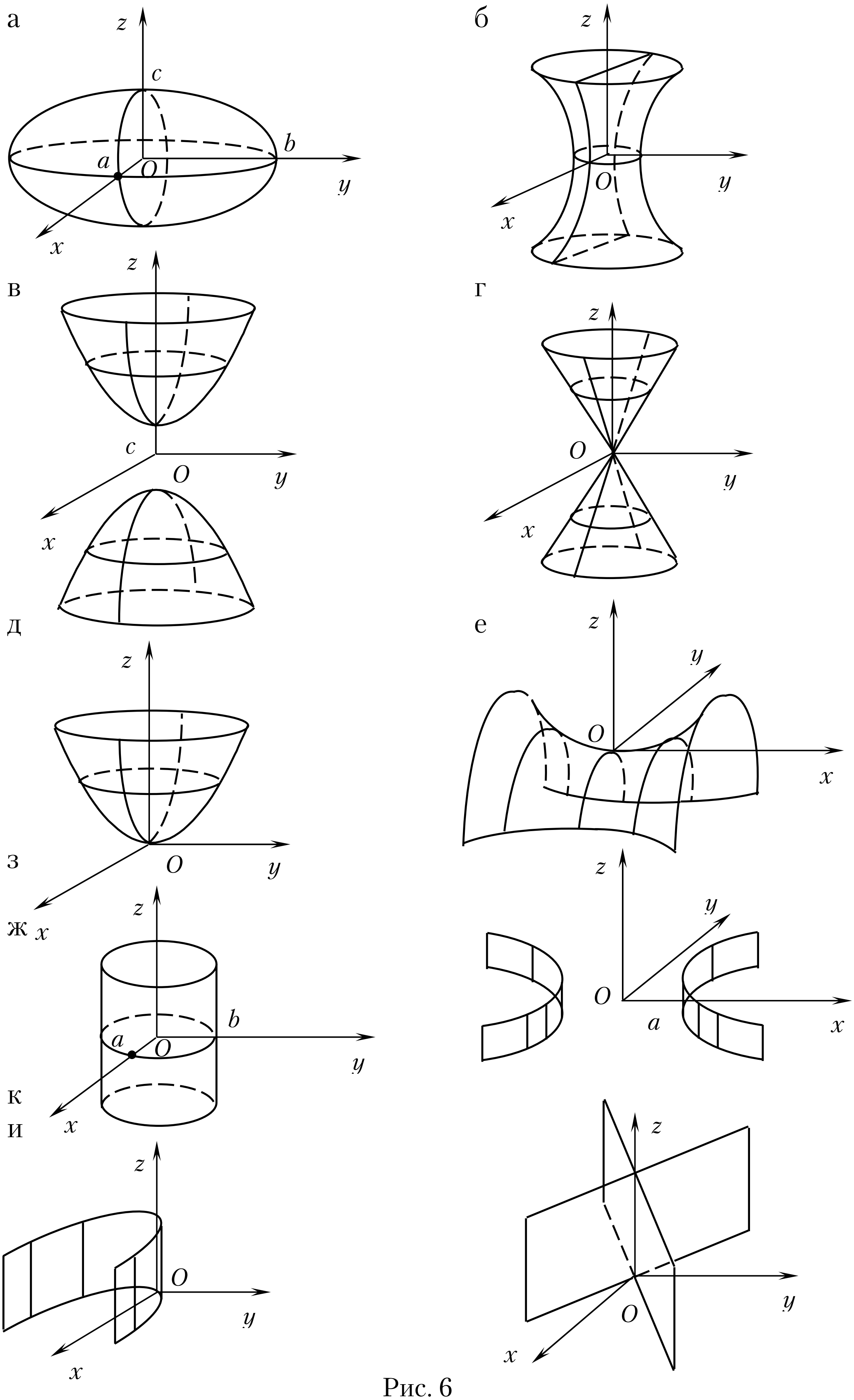

а
z
c
b
a
O
y
x
б
z
O
y
x
в
z
c
O
y
x
г
z
O
y
x
д
z
O
y
з
x
е
z
y
O
x
ж
z
b
a
O
y
x
z
y
O
a
x
к
и
z
O
y
x
z
O
y
x

Рис. 6

Варианты тестовых заданий по модулю 1

Вариант 1

1. Определитель $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 4 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 2 & -5 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}$ равен

1) – 6; 2) 6; 3) – 5; 4) 0.

2. Если $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$, то $3A - 4B^T$ равно

1) $\begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -15 & 4 \end{pmatrix}$; 2) $\begin{pmatrix} -1 & -6 \\ -11 & 4 \end{pmatrix}$; 3) $\begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -14 & 4 \end{pmatrix}$; 4) $\begin{pmatrix} -1 & -6 \\ -11 & 5 \end{pmatrix}$.

3. Если матрица $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, то матрица A^{-1}, обратная ей, равна

1) $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0{,}5 & 0{,}5 \end{pmatrix}$ 2) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$; 3) $\begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$; 4) $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.

4. Пусть вектор $\overline{a} = 2\overline{i} - 7\overline{j} + 3\overline{k}$ и вектор $\overline{b} = -\overline{i} + 10\overline{j} - 2\overline{k}$. Тогда вектор $\overline{c} = 2\overline{a} - 3\overline{b}$ равен:

1). $\overline{i} + 3\overline{j} + \overline{k}$; 2) $7\overline{i} - 44\overline{j} + 12\overline{k}$; 3) $3\overline{i} - 17\overline{j} + 5\overline{k}$; 4) $5\overline{i} - 44\overline{j} + 7\overline{k}$

5. Величины отрезков (с учетом знаков), отсекаемых прямой $2x - y - 8 = 0$ на осях координат, равны:

1) $a = 4 \quad b = 8$; 2) $a = -4, \quad b = -8$;

3) $a = 4, \quad b = -8$; 4) $a = 2, \quad b = -1$.

6. Если $\overline{a} = -3\overline{i} + 2\overline{j} - 4\overline{k}$, то $|\overline{a}|$ равен

1) -5; 2) -21; 3) 29; 4) $\sqrt{29}$.

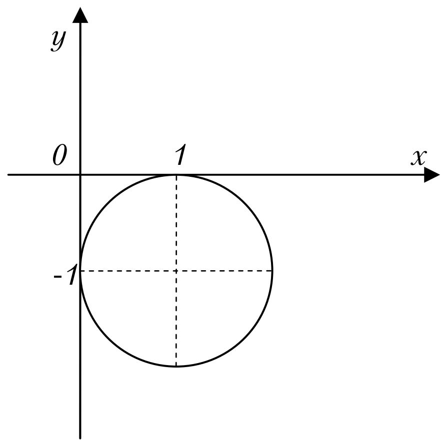
7. Из плоскостей $a)\, 4x + 5y - 3z + 1 = 0$; $b)\, 2x - y + 3 = 0$; $c)\, 2x - 5y + 3z = 0$; $d)\, 7x + 1 = 0$ параллельны оси OZ

1) a) и c); 2) b) и d); 3) только d); 4) ни одна.

8. Уравнение $3x^2+4y^2+12x-36=0$ определяет на плоскости

1)эллипс; 2) параболу; 3) гиперболу; 4) прямую.

9. Каноническое уравнение окружности, изображенной на рисунке, имеет вид:



1) $(x+1)^2+y^2=1$; 2) $(x-1)^2+(y-1)^2=1$;

3) $(x-1)^2+(y+1)^2=1$; 4) $x^2+(y+1)^2=1$.

10. Уравнение $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}-\frac{z^2}{5}=1$ определяет в пространстве...

1) эллипсоид;
2) однополостный гиперболоид;
3) двуполостный гиперболоид;
4) конус.

Вариант 2

1. Определитель $\begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 2 \end{vmatrix}$ равен

1) -5; 2) 5; 3) 4; 4) 0.

2. Если $A=\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$ и $B=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, то $3A-2B$ равно

1) $\begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 10 & 1 \end{pmatrix}$; 2) $\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -10 & 1 \end{pmatrix}$; 3) $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}$; 4) $\begin{pmatrix} -4 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

3. Если матрица $A=\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}$, то матрица A^{-1}, обратная ей, равна

1) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$; 2) $\begin{pmatrix} 0{,}5 & 0 \\ 1 & 0{,}5 \end{pmatrix}$ 3) $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$; 4) $\begin{pmatrix} 0{,}5 & 0 \\ -1 & 0{,}5 \end{pmatrix}$.

4. Косинус угла между векторами $\overline{a}=\overline{i}-3\overline{j}+\overline{k}$ и $\overline{b}=2\overline{i}-\overline{k}$ равен...

1) $\dfrac{2}{55}$; 2) $-\dfrac{2}{\sqrt{55}}$; 3) $\dfrac{2}{\sqrt{55}}$; 4) $\dfrac{1}{\sqrt{55}}$.

5. Величины отрезков, отсекаемых прямой $2x-y-8=0$ на осях координат, равны:

1) $a=4, \quad b=8$; 2) $a=4, \quad b=-8$; 3) $a=-4, \quad b=-8$; 4) $a=-4, \quad b=8$.

6. Если $\overline{a}=-2\overline{i}+3\overline{j}-\overline{k}$, то $|\overline{a}|$ равен

1) -7; 2) $\sqrt{6}$; 3) $\sqrt{14}$; 4) 0.

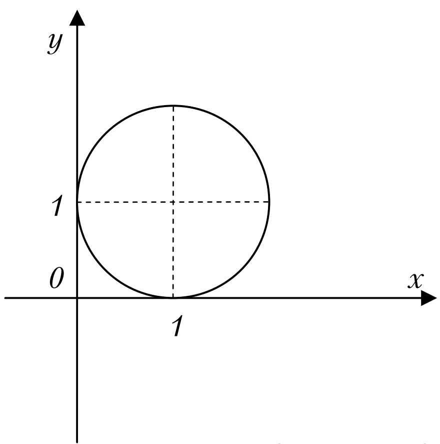
7. Из плоскостей $a)\ 2y-3z+1=0$; $b)\ x-3=0$; $c)\ 2x+2y+4z-1=0$; $d)\ x+y-5=0$ параллельны оси OX:

1) только $a)$; 2) $b)$ и $d)$; 3) только $d)$; 4)ни одна.

8. Уравнение $3y^2+5x+6y+13=0$ определяет на плоскости:

1) эллипс; 2) параболу; 3) гиперболу; 4) прямую.

9. Каноническое уравнение окружности, изображений на рисунке, имеет вид:



1) $(x+1)^2+y^2=1$; 2) $(x-1)^2+(y-1)^2=1$;

3) $(x+1)^2+(y+1)^2=1$; 4) $(x-1)^2+(y-1)^2=4$;

10. Уравнение $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}+\frac{z^2}{25}=1$ определяет в пространстве...

1) эллипсоид;

2) однополостный гиперболоид;

3) двуполостный гиперболоид;

4) конус.

Вариант 3

1. Определитель $\begin{vmatrix} 2 & 0 & 4 & 3 \\ 1 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & -3 & 2 \end{vmatrix}$ равен

1) -4; 2) 6; 3) 3; 4) 0.

2. Если $A=\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ и $B=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, то $3A+B$ равно

1) $\begin{pmatrix} 5 & 10 \\ 7 & -1 \end{pmatrix}$; 2) $\begin{pmatrix} -2 & -3 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$; 3) $\begin{pmatrix} -5 & 4 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$; 4) $\begin{pmatrix} -4 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

3. Если матрица $A=\begin{pmatrix} -2 & -4 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$, то матрица $4\,A^{-1}$ равна

1) $\begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$; 2) $\begin{pmatrix} -0{,}5 & -0{,}5 \\ 0 & 0{,}25 \end{pmatrix}$; 3) $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$; 4) $\begin{pmatrix} 0{,}5 & 0 \\ -1 & 0{,}5 \end{pmatrix}$.

4. При каком значении m векторы $\overline{a}=m\overline{i}-3\overline{j}+\overline{k}$ и $\overline{b}=\overline{i}+2\overline{j}+m\overline{k}$ взаимно перпендикулярны

1) 0; 2) 2; 3) -3; 4) 3.

5. Общее уравнение прямой, проходящей через т.А(2;1) и т.В(0;-3), будет следующим:

1) $4x+2y+10=0$; 2) $-2x-y+5=0$; 3) $3x+y-1=0$; 4) $2x-y-3=0$.

6. Скалярное произведение векторов $\overline{a}=3\overline{i}+2\overline{j}+\overline{k}$ и $\overline{b}=\overline{i}-2\overline{j}+4\overline{k}$ равно:

1) 3; 2) 2; 3) 1; 4) -2.

7. Из плоскостей $a)\ 3x - z + 2 = 0$; $b)\ 2x - 3 = 0$; $c)\ 4x + 2y = 0$; $d)\ 3x - 2y + z + 4 = 0$ параллельны оси Oy

1) $d)$ и $c)$; 2) $a)$ и $b)$; 3) только $b)$; 4) ни одна.

8. Найти радиус окружности $x^2 + y^2 - 4x + 8y - 16 = 0$

1) 3; 2) 4; 3) 6; 4) 1.

9. Найти координаты фокусов эллипса $\dfrac{x^2}{25} + \dfrac{y^2}{9} = 1$:

1) $(-4;0)$ и $(4;0)$ 2) $(-2{,}5;0)$ и $(2{,}5;0)$;

3) $(1;1)$ и $(-1;1)$; 4) $(-2;0)$ и $(2;0)$.

10. Уравнение $\dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{9} = 1$ определяет в пространстве...

1) эллипс;
2) эллиптический цилиндр;
3) эллиптический параболоид;
4) конус.

Вариант 4

1. Определитель $\begin{vmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 2 & 4 & -5 \\ -1 & 0 & 2 \end{vmatrix}$ равен

1) 2; 2) 28; 3) 0; 4) 30.

2. Если А = $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$ и В = $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, то матрица 3А – 5В равна

1) $\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 5 & -1 \end{pmatrix}$; 2) $\begin{pmatrix} 6 & -1 \\ 4 & 12 \end{pmatrix}$; 3) $\begin{pmatrix} 6 & -8 \\ 4 & 15 \end{pmatrix}$; 4) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

3. Объем параллелепипеда, построенного на векторах $\overline{a} = \overline{i} - 2\overline{j} + \overline{k}$, $\overline{b} = 2\overline{i} - 3\overline{j} + 3\overline{k}$, $\overline{c} = -\overline{j} - \overline{k}$ равен...

1) 3; 2) 12; 3) 0; 4) 6.

4. Уравнение $\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{4}+\frac{z^2}{5}=1$ определяет в пространстве...

1) эллипсоид;
2) однополостный гиперболоид;
3) двуполостный гиперболоид;
4) конус.

5. Величины отрезков, отсекаемых прямой $2x - 3y - 6 = 0$ на осях координат равны:

1) $a = 3, b = 2$; 2) $a = 2, b = -3$; 3) $a = 3, b = -2$; 4) $a = -2, b = -3$.

6. Если $\bar{a} = 3\bar{i} - 5\bar{j} + 7\bar{k}$, то $|\bar{a}|$ равен

1) 9; 2) $\sqrt{83}$; 3) $\sqrt{63}$; 4) 83.

7. Из плоскостей

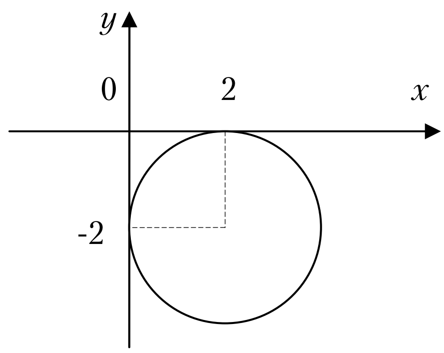
a) $2x + 3z - 2 = 0$; *b*) $y - 5 = 0$; *c*) $x + 13 = 0$; *d*) $z - 1 = 0$ перпендикулярны оси *ОУ*.

1) *a*) и *c*); 2) только *b*); 3) ни одна; 4) *a*) и *b*).

8. Уравнение $x^2 + y^2 - 6x + 8y - 11 = 0$ определяет на плоскости

1) параболу; 2) гиперболу; 3) окружность; 4) эллипс.

9. Каноническое уравнение окружности, изображенной на рисунке, имеет вид:



1) $(x - 2)^2 + (y + 2)^2 = 2$;
2) $(x + 2)^2 + (y - 2)^2 = 4$;
3) $(x - 2)^2 + (y + 2)^2 = 4$;
4) $(x + 2)^2 + (y + 2)^2 = 2$.

10. Уравнение $x^2 + y^2 = x$ в полярных координатах имеет вид...

1) $\rho\cos\varphi = \varphi$; 2) $\rho = \cos\varphi$; 3) $\rho^2 + \varphi = \rho$; 4) $\rho\sin\varphi = 1$.

Вариант 5

1. Определитель $\begin{vmatrix} 6 & 0 & 4 \\ 2 & 3 & -5 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix}$ равен

1) 30; 2) 6; 3) 0; 4) 18.

2. Если A = $\begin{pmatrix} 7 & 4 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$ и B = $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, то матрица 4A – 2B равна

1) $\begin{pmatrix} 26 & 14 \\ 10 & -1 \end{pmatrix}$; 2) $\begin{pmatrix} 26 & -1 \\ 10 & 12 \end{pmatrix}$; 3) $\begin{pmatrix} 26 & -14 \\ -10 & 15 \end{pmatrix}$; 4) $\begin{pmatrix} 26 & 14 \\ 10 & -12 \end{pmatrix}$.

3. Смешанное произведение векторов $\bar{a} = (-2; 4; 1)$, $\bar{b} = (-3; -5; 2)$, $\bar{c} = (1; 9; -1)$ равно...

1) 10; 2) 5; 3) 3; 4) 0.

4. Уравнение $x^2 + y^2 = 4$ в полярных координатах имеет вид...

1) $\rho\cos\varphi = 4$; 2) $\rho = \cos\varphi$; 3) $\rho^2 + \varphi^2 = 4$; 4) $\rho = 2$.

5. Уравнение $\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{4} - \frac{z^2}{5} = 1$ определяет в пространстве...

1) эллипсоид;
2) однополостный гиперболоид;
3) двуполостный гиперболоид;
4) Конус

6. Величины отрезков, отсекаемых прямой $2x - 3y - 6 = 0$ на осях координат равны:

1) $a = 3$, $b = 2$; 2) $a = 2$, $b = -3$; 3) $a = 3$, $b = -2$; 4) $a = -2$, $b = -3$.

7. Если $\bar{a} = 3\bar{i} - 5\bar{j} + 7\bar{k}$, то $|\bar{a}|$ равен

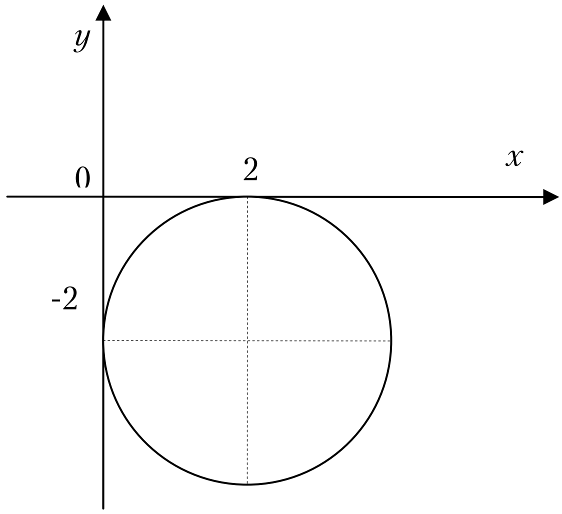
1) 9; 2) $\sqrt{83}$; 3) $\sqrt{63}$; 4) 83.

8. Из плоскостей *a*) $2x + 3z - 2 = 0$; *b*) $y - 5 = 0$; *c*) $x + 13 = 0$; *d*) $z - 1 = 0$ перпендикулярны оси *OY*:

1) *a*) и *c*) ; 2) только *b*); 3) ни одна; 4) *a*) и *b*).

9. Уравнение $x^2 + y^2 - 6x + 8y - 11 = 0$ определяет на плоскости
1) параболу; 2) гиперболу; 3) окружность; 4) эллипс.

10. Каноническое уравнение окружности, изображенной на рисунке, имеет вид:



1) $(x-2)^2 + (y+2)^2 = 1$;
2) $(x-2)^2 + (y+2)^2 = 2$;
3) $(x+2)^2 + (y-2)^2 = 4$;
4) $(x-2)^2+(y+2)^2=4$.

Вариант 6

1. Определитель $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 5 & 9 \\ 0 & 0 & 3 & 7 \\ -2 & -4 & -6 & 0 \end{vmatrix}$ равен ...

1) -48; 2) 9; 3) 12; 4)48.

2. Если $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -4 \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} -2 & 1 & -0 \\ -3 & 2 & 2 \end{pmatrix}$, то $3A + 2B$ равно

1) $\begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ -3 & 3 & -2 \end{pmatrix}$; 2) $\begin{pmatrix} -2 & 5 & -2 \\ -9 & 8 & -2 \end{pmatrix}$; 3) $\begin{pmatrix} 2 & 5 & -3 \\ -6 & 7 & -8 \end{pmatrix}$; 4) $\begin{pmatrix} 0 & 6 & -3 \\ -9 & 9 & -6 \end{pmatrix}$.

3. При каком значении α векторы $\vec{a}(\alpha, -3, 2)$ и $\vec{b}(1, 2, -\alpha)$ взаимно перпендикулярны?

1) 6; 2)-6; 3) 1; 4)-2.

4. Уравнение прямой, которая отсекает на осях координат равные отрезки $a = b = 3$

1) $x + y - 3 = 0$; 2) $x + y + 3 = 0$; 3) $3x + 3y - 1 = 0$; 4) $3x + 3y + 1 = 0$.

5. Даны координаты вершин треугольника $A(1, 2)$, $B(-5, -3)$, $C(7, -6)$. найти точку, делящую пополам медиану AD

1) $(-2; -0{,}5)$; 2) $(4; -2)$; 3) $(1; -4{,}5)$; 4) $\left(1; -\frac{5}{4}\right)$

6. Какие из данных плоскостей параллельны оси ординат

а) $5x + 3y + z = 0$, б) $2x + 5z + 7 = 0$, в) $2x + 3 = 0$, г) $x + y + z + 1 = 0$

1) ни одна; 2)только б) и в); 3) только б); 4) только а) и в).

7. Уравнение $4x^2 + 4y^2 - 4x - 8y - 11 = 0$ определяет на плоскости

1) прямую; 2)плоскость; 3)эллипс; 4)окружность.

8. Составить простейшее уравнение гиперболы, если ее фокусы лежат на оси абсцисс, и расстояние между ними равно 20. Действительная ось гиперболы равна 16.

1) $\frac{x^2}{8} - \frac{y^2}{10} = 1$; 2) $\frac{x^2}{36} - \frac{y^2}{64} = 1$; 3) $\frac{x^2}{64} - \frac{y^2}{36} = 1$; 4) $\frac{x^2}{10} - \frac{y^2}{8} = 1$.

9. Уравнение параболы имеет вид $y^2 = 12x$. Тогда директриса задается уравнением...

1) x=-3; 2) x=-6; 3) x=12; 4) x=3.

10. Уравнение $\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{4} - \frac{z^2}{5} = 0$ определяет в пространстве...

1) эллипсоид;
2) однополостный гиперболоид;
3) двуполостный гиперболоид;
4) конус второго порядка.

Вариант 7

1. Решите уравнение $\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 3x & x + 22 \end{vmatrix} = 0$.

1) $x = -2$; 2) $x = 11$; 3) $x = -1$; 4) $x = 2$.

2. Определитель $\begin{vmatrix} 1 & 5 & -4 & 1 \\ 0 & -2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -5 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{vmatrix}$ равен ...

1) 7; 2)10; 3) -10; 4)-7.

3. Результатом умножения матрицы $A = \begin{pmatrix} -4 & 2 & 7 \end{pmatrix}$ на матрицу $B = \begin{pmatrix} -4 & 1 & 3 \\ 2 & 5 & -1 \\ 2 & 5 & 7 \end{pmatrix}$ является

1) матрица порядка 3×3;
2)матрица порядка 3×1;
3) матрица порядка 1×3;
4) матрица порядка 4×3.

4. В прямоугольной декартовой системе координат даны точки $A(3, -4, 5)$ и $B(-1, 2, -2)$. Длина вектора $\overline{AB}$ равна

1) $\sqrt{101}$; 2) $\sqrt{111}$; 3) 10; 4) 11.

5. Дан вектор $\vec{a} = (3, -5)$. Укажите вектор, ортогональный данному:

1) $(10, -6)$; 2) $(10, 6)$; 3) $(-3, 5)$; 4) $(-5, 3)$.

6. Объем параллелепипеда, построенного на векторах $\vec{a}(-2, -1, -1)$, $\vec{b}(4, 3, 1)$ и $\vec{c}(1, 2, 3)$ равен...

1) 7; 2) -8; 3) 10; 4) 8.

7. Определите, какие из линий проходят через начало координат:
а) $2x + y = 0$; б) $x^2 + y^2 = 25$; в) $y = |x|$; г) $y - 2 = |x - 2|$.

1) только а); 2) только в); 3) все, кроме г); 4) а) и в).

8. Уравнение $x^2 + y^2 - 16x + 4y + 18 = 0$ представляет на координатной плоскости

1) эллипс; 2)окружность; 3) параболу; 4)гиперболу.

9. Площадь треугольника, отсекаемого прямой $\frac{x}{11}-\frac{y}{7}=1$ от координатного угла, равна...

1) 9; 2) 11/7; 3) 77/2; 4) 77.

10. Дана прямая $2x-3y+5=0$. Составьте уравнение прямой, проходящей через точку с координатами (4, -5), перпендикулярно данной прямой.

1) $3x+2y-2=0$; 2) $-3x+2y-2=0$;

3) $3x-2y-2=0$; 4) $5x+2y-2=0$.

Вариант 8

1. Определитель $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 & 1 \\ -1 & 3 & 5 & 0 \\ 2 & 4 & -2 & 2 \\ 3 & 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}$ равен

1) 50; 2) 0; 3) -50; 4) 15.

2. Если $A=\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 5 & -2 \end{pmatrix}$ и $B=\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, то $A\cdot B$ равно

1) $\begin{pmatrix} 2 & 7 \\ 10 & 18 \end{pmatrix}$; 2) $\begin{pmatrix} 7 & 2 \\ 18 & 10 \end{pmatrix}$; 3) $\begin{pmatrix} 5 & 20 \\ 8 & 3 \end{pmatrix}$; 4) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 20 & 3 \end{pmatrix}$.

3. Если R – радиус окружности $x^2-2x+y^2=0$, то её кривизна $\frac{1}{R}$ всюду равна...

1) 1; 2) $\frac{1}{2}$; 3) $\frac{1}{4}$; 4) 2.

4. Если матрица $A=\begin{pmatrix} -2 & -4 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, то матрица $2A^{-1}$ равна

1) $\begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$; 2) $\begin{pmatrix} -0{,}5 & -1 \\ 0 & 0{,}5 \end{pmatrix}$; 3) $\begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$; 4) $\begin{pmatrix} 0{,}5 & 0 \\ -1 & 0{,}5 \end{pmatrix}$.

5. Угол между прямыми заданными уравнениями y=2x-5 и y=-3x+4 равен:

1) 45°; 2) 60°; 3) 0°; 4) 90°.

6. Если $\overline{c}=10\overline{i}-5\overline{j}+8\overline{k}$, то $|\overline{c}|$ равен

1) 13; 2) 23; 3) 189; 4) $\sqrt{189}$.

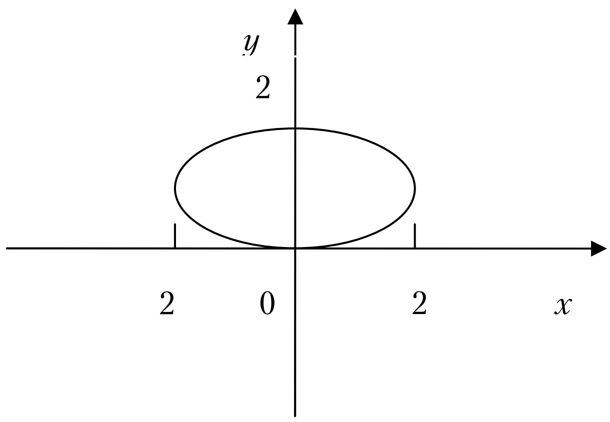
7. Расстояние от точки M_0(3;5;-8) до плоскости 6x-3y+2z-28=0 равно:

1) 0; 2) 16; 3) $\frac{41}{7}$; 4) $\sqrt{\frac{41}{7}}$.

8. Уравнение x^2+y^2-4x+3=0 определяет на плоскости :

1) прямую; 2) параболу; 3)гиперболу; 4) окружность.

9 Каноническое уравнение эллипса, изображенного на рисунке имеет вид



1) $\frac{x^2}{4}+\frac{(y-1)^2}{1}=1$; 2) $\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{1}=1$;

3) $\frac{x}{4}+\frac{y-1}{1}=1$; 4) $\frac{(x+2)^2}{4}+\frac{(y+1)^2}{1}=1$.

10. Уравнение $x^2+y^2=2x$ в полярных координатах имеет вид:

1) $\rho=2\cos\varphi$; 2) $\rho=2\sin\varphi$; 3) $\rho^2=2\cos\varphi$; 4) $\rho^2=2\sin\varphi$.

Вариант 9

1. Определитель $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 & 7 \\ 0 & -3 & 2 & 9 \\ 0 & 0 & 2 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{vmatrix}$ равен

1) 37; 2) 29; 3) 28; 4)24.

2. Найти линейную комбинацию матриц $2A+3B$, где
$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} -2 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

1) $\begin{pmatrix} -4 & 13 & 6 \\ 6 & 5 & 1 \end{pmatrix}$; 2) $\begin{pmatrix} -4 & 13 & 6 \\ 1 & 5 & 6 \end{pmatrix}$; 3) $\begin{pmatrix} -4 & 6 & 13 \\ 6 & 1 & 5 \end{pmatrix}$; 4) $\begin{pmatrix} -4 & 5 & 1 \\ 6 & 13 & 6 \end{pmatrix}$.

3. Уравнение плоскости, проходящей через три точки $A(0;3;2)$, $B(1;0;-1)$, $C(1;6;2)$ имеет вид

1) $3x-y+2z-1=0$; 2) $x-3y+z-2=0$;
3) $3x-y+5=0$; 4) $2z-7=0$

4. Точка пересечения плоскостей $Q_1: 7x-5y-31=0$, $Q_2: 4x+11z+43=0$ и $Q_3: 2x+3y+4z+20=0$ имеет координаты

1) (1;0;-3); 2) (1/2;1/3;1/7); 3) (3;-2;-5); 4) (2;-5;3).

5. Определить α, при котором векторы $\overline{a}=(-2\alpha;2;3)$ и $\overline{b}=(4;8;0)$ ортогональны

1) $\alpha=0$; 2) $\alpha=2$; 3) $\alpha=-2$; 4) $\alpha=10$.

6. Найти координаты начала вектора $\overline{AB}$ и его модуль, если известно, что $B(2;-3;0)$, $\overline{AB}=(0;-4;20)$

1) $A(-2;-1;20)$; $|\overline{AB}|=16$ 2) $A(2;-1;20)$; $|\overline{AB}|=24$ 3) $A(3;5;7)$; $|\overline{AB}|=4\sqrt{26}$ 4) $A(2;1;-20)$ $|\overline{AB}|=\sqrt{416}$

7. Уравнение $9x^2-16y^2+18x+32y-151=0$ определяет на плоскости

1) эллипс; 2) параболу; 3) гиперболу; 4) прямую.

8. Перейти к декартовым координатам, составить канонические уравнения и определить вид линии, заданной в полярных координатах $r = 2\cos\varphi + 2\sin\varphi$

1) окружность; $(x-1)^2+(y-1)^2=2$ 2) гипербола; $\frac{x^2}{2}-\frac{y^2}{2}=1$ 3) эллипс; $x^2+\frac{y^2}{2}=1$ 4) прямая $2x+2y=1$

9. Уравнение $\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{4}-\frac{z^2}{5}=2$ определяет в пространстве...

1) эллипсоид;
2) однополостный гиперболоид;
3) двуполостный гиперболоид;
4) конус второго порядка.

10. Если матрица $A=\begin{pmatrix}-3 & -9\\ 0 & 3\end{pmatrix}$, то матрица $3A^{-1}$ равна

1) $\begin{pmatrix}-2 & -2\\ 0 & 1\end{pmatrix}$; 2) $\begin{pmatrix}-1 & -3\\ 0 & 1\end{pmatrix}$; 3) $\begin{pmatrix}9 & 27\\ 0 & -9\end{pmatrix}$; 4) $\begin{pmatrix}0{,}3 & 0\\ -1 & 0{,}3\end{pmatrix}$.

Вариант 10

1. Определитель $\begin{vmatrix}0 & 5 & 2 & 0\\ 1 & 3 & 5 & 2\\ 4 & 2 & 4 & 1\\ 0 & 4 & 1 & 0\end{vmatrix}$ равен

1) 15; 2) 10; 3) 21; 4) -8.

2. Если $A=\begin{pmatrix}2 & 3\\ 1 & -1\end{pmatrix}$ и $B=\begin{pmatrix}-2 & 3\\ 2 & 1\end{pmatrix}$, то матрица $2A + 3B$ равна

1) $\begin{pmatrix}0 & 8\\ 1 & 4\end{pmatrix}$; 2) $\begin{pmatrix}3 & 4\\ 5 & 7\end{pmatrix}$; 3) $\begin{pmatrix}-2 & 15\\ 8 & 1\end{pmatrix}$; 4) $\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$.

3. Величины отрезков, отсекаемых прямой $2x + 3y - 12 = 0$ на осях координат равны:

1) $a = 5, b = 3$; 2) $a = 6, b = 4$; 3) $a = -6, b = 4$; 4) $a = 4, b = -6$.

4. Если $\overline{a} = 3\overline{i} - 4\overline{j} + \overline{k}$, то $|\overline{a}|$ равен

1) 23; 2) $\sqrt{26}$; 3) 15; 4) -5.

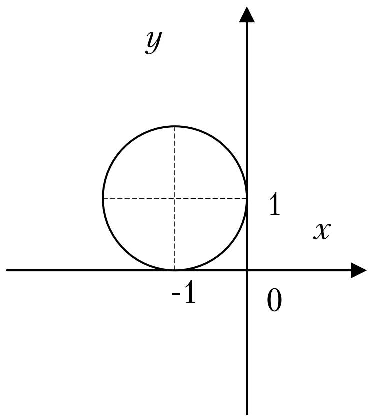
5. Из плоскостей a) $3x + y - 3z + 2 = 0$; b) $2x + y - 1 = 0$; c) $3x - 2y + 2z = 5$; d) $3z + 1 = 0$ параллельны оси OZ.

1) a) и c); 2) a) и d); 3) только b); 4) ни одна.

6. Уравнение $x^2 + y^2 - 4x + 8y - 16 = 0$ определяет на плоскости

1) эллипс; 2) параболу; 3) окружность; 4) прямую.

7. Каноническое уравнение окружности, изображенной на рисунке, имеет вид:



1) $(x - 1)^2 + (y - 1)^2 = 1$;

2) $(x + 1)^2 + (y + 1)^2 = 1$;

3) $(x+1)^2 + (y-1)^2 = 1$;

4) $(x-1)^2+(y+1)^2=1$.

8. Линейное отображение задано в стандартном базисе матрицей $A = \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$. Тогда координатами образа вектора $\bar{x} = \begin{pmatrix} -5 \\ 4 \end{pmatrix}$ являются...

1) $\begin{pmatrix} -22 \\ 21 \end{pmatrix}$; 2) $\begin{pmatrix} 13 \\ -22 \end{pmatrix}$; 3) $\begin{pmatrix} -15 \\ -4 \end{pmatrix}$; 4) $\begin{pmatrix} 21 \\ -22 \end{pmatrix}$.

9. Если R – радиус окружности $x^2 - 4x + y^2 = 0$, то её кривизна $\frac{1}{R}$ всюду равна...

1) 1; 2) $\frac{1}{2}$; 3) $\frac{1}{4}$; 4) 2.

10. Уравнение $\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{4}-\frac{z^2}{5}=5$ определяет в пространстве...

1) эллипсоид;
2) однополостный гиперболоид;
3) двуполостный гиперболоид;
4) конус второго порядка.

Решение примерного варианта

Задание 1.

Определитель $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 & -1 \\ 4 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 1 & -5 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}$ равен

1) 14; 2) 56; 3) – 56; 4) 0.

Решение.

Разложим данный определитель четвертого порядка по элементам второй строки, так как эта строка содержит наибольшее количество нулевых элементов.

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 & -1 \\ 4 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 1 & -5 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 4\cdot(-1)^{1+2}\cdot\begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 3 & 1 & -5 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -4\cdot 1\cdot(-1)^{1+3}\cdot\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 1 & -5 \end{vmatrix} =$$

$$= -4\big(3\cdot(-5)-1\cdot(-1)\big) = 56.$$

Ответ: 2) 56.

Задание 2.

Если $A=\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ и $B=\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$, то матрица $3A-4B^t$ равна

1) $\begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -15 & 4 \end{pmatrix}$; 2) $\begin{pmatrix} -10 & -15 \\ -5 & 4 \end{pmatrix}$; 3) $\begin{pmatrix} -10 & -21 \\ -5 & 3 \end{pmatrix}$; 4) $\begin{pmatrix} -10 & -21 \\ -5 & 4 \end{pmatrix}$.

Решение.

$$3A=3\cdot\begin{pmatrix}2 & -3\\ 1 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6 & -9\\ 3 & 0\end{pmatrix};\ B^t=\begin{pmatrix}4 & 3\\ 2 & -1\end{pmatrix};\ 4B^t=4\cdot\begin{pmatrix}4 & 3\\ 2 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}16 & 12\\ 8 & -4\end{pmatrix}$$

$$3A-4B^t=\begin{pmatrix}6 & -9\\ 3 & 0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}16 & 12\\ 8 & -4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-10 & -21\\ -5 & 4\end{pmatrix}.$$

Ответ : 4) $\begin{pmatrix}-10 & -21\\ -5 & 4\end{pmatrix}$.

Задание 3.

Если матрица $A=\begin{pmatrix}3 & 2\\ 1 & 1\end{pmatrix}$, то матрица A^{-1} равна

1) $\begin{pmatrix}1 & -2\\ -1 & 3\end{pmatrix}$; 2) $\begin{pmatrix}3 & 1\\ 2 & 1\end{pmatrix}$; 3) $\begin{pmatrix}2 & 0\\ 4 & 2\end{pmatrix}$; 4) $\begin{pmatrix}1 & 0\\ -1 & 0\end{pmatrix}$.

Решение.

Определитель матрицы A равен: $|A|=\begin{vmatrix}3 & 2\\ 1 & 1\end{vmatrix}=3\cdot1-2\cdot1=1\neq0$, значит матрица A^{-1} существует. Составим транспонированную матрицу $A^T=\begin{pmatrix}3 & 1\\ 2 & 1\end{pmatrix}$, а затем присоединенную матрицу

$$A^*=\begin{pmatrix}(-1)^{1+1}\cdot1 & (-1)^{1+2}\cdot2\\ (-1)^{2+1}\cdot1 & (-1)^{2+2}\cdot3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & -2\\ -1 & 3\end{pmatrix}.$$

Обратная матрица $A^{-1}=\dfrac{1}{|A|}\cdot A^*=\dfrac{1}{1}\cdot\begin{pmatrix}1 & -2\\ -1 & 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & -2\\ -1 & 3\end{pmatrix}$.

Ответ: 1) $\begin{pmatrix}1 & -2\\ -1 & 3\end{pmatrix}$.

Задание 4.

Пусть вектор $\overline{a}=3\overline{i}-2\overline{j}+\overline{k}$ и вектор $\overline{b}=-\overline{i}+3\overline{j}-7\overline{k}$. Тогда вектор $\overline{c}=2\overline{a}-3\overline{b}$ равен:

1) $9\overline{i}-13\overline{j}+23\overline{k}$; 2) $9\overline{i}-13\overline{j}+12\overline{k}$;

3) $9\overline{i}+13\overline{j}+23\overline{k}$; 4) $5\overline{i}-44\overline{j}+7\overline{k}$

Решение.

$2\overline{a} = 2\cdot\left(3\overline{i} - 2\overline{j} + \overline{k}\right) = 6\overline{i} - 4\overline{j} + 2\overline{k}$; $3\overline{b} = 3\left(-\overline{i} + 3\overline{j} - 7\overline{k}\right) = -3\overline{i} + 9\overline{j} - 21\overline{k}$;

Тогда вектор

$$\overline{c} = 2\overline{a} - 3\overline{b} = (6\overline{i} - 4\overline{j} + 2\overline{k}) - \left(-3\overline{i} + 9\overline{j} - 21\overline{k}\right) = 9\overline{i} - 13\overline{j} + 23\overline{k}.$$

Ответ: 1) $9\overline{i} - 13\overline{j} + 23\overline{k}$.

Задание 5.

Если $\overline{a} = \overline{i} + \overline{j} - 3\overline{k}$, то $|\overline{a}|$ равен

1) -1; 2) 1; 3) 11; 4) $\sqrt{11}$.

Решение.

Если вектор задан своими координатами $\overline{a} = \left(a_1, a_2, a_3\right)$ (разложен по единичным векторам), то его модуль или длина находятся по формуле: $|\overline{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$.

$$|\overline{a}| = \sqrt{1^2 + 1^2 + (-3)^2} = \sqrt{1+1+9} = \sqrt{11}.$$

Ответ: 4) $\sqrt{11}$.

Задание 6.

Величины отрезков (с учетом знаков), отсекаемых прямой $2x + y - 8 = 0$ на осях координат, равны:

1) $a = 4 \quad b = 8$; 2) $a = -4, \quad b = -8$; 3) $a = 4, \quad b = -8$; 4) $a = 2, \quad b = -1$.

Решение.

Перейдем от общего уравнения прямой к уравнению в отрезках:

$2x + y = 8; \Leftrightarrow \dfrac{2x}{8} + \dfrac{y}{8} = \dfrac{8}{8}; \Leftrightarrow \dfrac{x}{4} + \dfrac{y}{8} = 1$. Значит $a = 4,\ b = 8$.

Ответ: 1) $a = 4 \quad b = 8$.

Задание 7.

Какие из заданных плоскостей: $a)\ 4x + 5y - 3z + 1 = 0$; $b)\ 2y - z + 3 = 0$; $c)\ 2x - 5y + 3z = 0$; $d)\ 7z + 1 = 0$ параллельны оси OX:

1) $a)$ и $c)$; 2) $b)$ и $d)$; 3) только $d)$; 4) ни одна.

Решение.

Первая плоскость содержит все три переменные, поэтому пересекает все координатные оси.

В уравнении второй плоскости отсутствует переменная x, так что она параллельна оси Ox.

В уравнении третьей плоскости отсутствует свободное слагаемое; плоскость проходит через начало координат (не параллельна ни одной из осей).

В уравнении четвертой плоскости содержатся лишь одна переменная z и свободное слагаемое; плоскость проходит параллельно плоскости Oxy, а следовательно параллельна и оси Ox.

Ответ: 2) b) и d).

Задание 8.

Уравнение $x^2+4y^2+12x-36=0$ определяет на плоскости

1)эллипс; 2) параболу; 3) гиперболу; 4) прямую.

Решение.

Приведем уравнение кривой второго порядка к каноническому виду, выделив полные квадраты:

$$x^2+4y^2+12x-36=0;\Leftrightarrow x^2+12x+(36-36)+4y^2-36=0$$

$$\left[\ \left(x^2+12x+36\right)-36\ \right]+4y^2-36=0;\Leftrightarrow \left(x+6\right)^2+4y^2=72;\Leftrightarrow$$

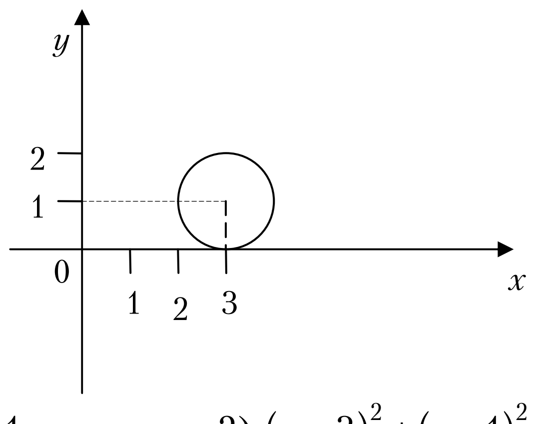
$$\frac{\left(x+6\right)^2}{72}+\frac{4y^2}{72}=1;\Leftrightarrow \frac{\left(x+6\right)^2}{72}+\frac{y^2}{18}=1;\frac{\left(x+6\right)^2}{\left(\sqrt{72}\right)^2}+\frac{y^2}{\left(\sqrt{18}\right)^2}=1$$

Последнее уравнение определяет на плоскости эллипс.

Ответ: 1) эллипс.

Задание 9.

Каноническое уравнение окружности, изображенной на рисунке, имеет вид:



1) $\left(x+3\right)^2+y^2=1$; 2) $\left(x-3\right)^2+\left(y-1\right)^2=1$;

3) $\left(x+3\right)^2+\left(y+1\right)^2=1$; 4) $x^2+\left(y+1\right)^2=1$.

Решение.

Окружность с центром в точке $C(x_0, y_0)$ и радиусом R задается уравнением: $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2$. На рисунке центр окружности находится в точке с координатами $(3;1)$, а её радиус равен 1. Тогда каноническое уравнение этой окружности имеет вид: $(x-3)^2 + (y-1)^2 = 1$.

Ответ: 2) $(x-3)^2 + (y-1)^2 = 1$.

Задание 10.

Уравнение линии $2x^2 + 2y^2 = 72$ в полярных координатах имеет вид...

1) $\rho\cos\varphi = 36$; 2) $\rho = 72$; 3) $\rho = 6$; 4) $\rho\sin\varphi = 36$.

Решение:

Перейдем к полярным координатам по формулам $x = \rho\cos\varphi$, $y = \rho\sin\varphi$. Тогда исходное уравнение примет вид:

$$2\rho^2\cos^2\varphi + 2\rho^2\sin^2\varphi = 72$$

$$2\rho^2\left(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi\right) = 72$$

$$2\rho^2 = 72$$

$$\rho^2 = 36.$$

Так как $\rho \geq 0$, то уравнение примет вид $\rho = 6$

Ответ: 3) $\rho = 6$.

Модуль 2. МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИЙ ОДНОЙ И НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ

2.1. Введение в анализ. Переменные и постоянные величины. Множества

Под **переменной величиной** понимается величина, которая в процессе изучения какого-либо явления принимает хотя бы два различных значения.

Величина, которая при исследовании данного явления принимает только одно значение, называется постоянной.

Множество – это совокупность, собрание каких-либо объектов произвольной природы.

Объекты, входящие в данное множество, называются элементами множества.

Обозначения

1. $x \in A$ – элемент x принадлежит множеству A;

2. $x \notin A$, $x \,\overline{\in}\, A$ – x не входит в множество A;

3. $A \subset B$ ($B \supset A$) – множество A включено в B, то есть, если $x \in A$, то $x \in B$;

A – подмножество множества B,

$\subset$, $\supset$ – знаки включения.

4. $\varnothing$ – пустое множество; $\varnothing \subset A$, где A – любое множество.

5. Для обозначения множеств широко употребляют фигурные скобки, внутри которых тем или иным способом описываются их элементы.

Например,

$N = \{1, 2, \ldots, n, \ldots\}$ – множество натуральных чисел;

$\{0, 1, 2, 3, \ldots\}$ – множество целых неотрицательных чисел;

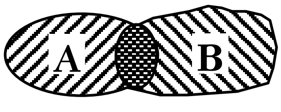
$Z = \{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\}$ – множество всех целых чисел;

$Q = \left\{\dfrac{m}{n}\right\}$, где m, $n \in Z$, $n \neq 0$ – множество рациональных чисел.

6. $A = B$ – множества A и B равны: $A \subset B$, $B \subset A$.

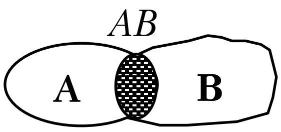
Операции над множествами

1. **Сумма** (объединение) множеств A и B – множество $C = A + B$ ($C = A \cup B$), состоящее из элементов множеств A и B ($A + A = A$).



$A \cup B$

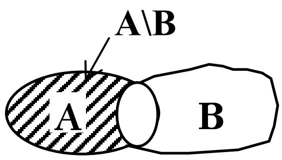
2. **Произведение** (пересечение) множеств A и B есть множество $C=A\cap B$ (или $C=AB$), состоящее из элементов, одновременно принадлежащих множеству A и множеству B ($A\cap A=A$).



Если $AB\neq\varnothing$, то A и B не пересекаются.

3. **Разность** множеств A и B есть множество $C=A\setminus B$, состоящее из элементов A, не содержащихся в B.

В общем случае $(A\setminus B)+B\neq A$.



1. $A+B=B+A$.
2. $(A+B)C=AC+BC$.
3. $(AB)C=\mathrm{A}(BC)$.
4. $(A+B)+C=A+(B+C)$.

Логические символы:

1. $\alpha\Rightarrow\beta$ – из предложения α следует предложение β.

2. $\alpha\Leftrightarrow\beta$ – предложения α и β эквивалентны: из α следует β, из β следует α.

3. $\forall x\in A$: α – для всякого элемента $x\in A$ имеет место предложение α ($\forall$ – квантор всеобщности).

Кванторы (от лат. quantum – сколько) – логические эквиваленты слов «все», каждый и т.п.

4. $\exists y\in B$: β – существует элемент $y\in B$, для которого имеет место предложение β ($\exists$ – квантор существования).

5. $\overline{\alpha}$ – не α; отрицание предложения α.

Отрезок, интервал, ограниченное множество

1. **Отрезок, сегмент** $[a,b]$ – множество чисел x, удовлетворяющих неравенствам: $a\le x\le b$.

2. **Интервал, открытый отрезок** (a,b): $a<x<b$.

3. **Полуоткрытые отрезки, полуинтервалы** $[a,b)$, $(a,b]$: $\begin{matrix} a\le x<b; \\ a<x\le b. \end{matrix}$.

4. **Окрестность точки** c – интервал (a,b): $a<c<b$.

5. **ε – окрестность точки *c***: $(c-\varepsilon, c+\varepsilon)$.

Неравенства для абсолютных величин:

1. $|a| < \varepsilon \Rightarrow -\varepsilon < a < \varepsilon$;

2. $|a-b| < \varepsilon \Rightarrow b-\varepsilon < a < b+\varepsilon$;

3. $|a+b| \le |a| + |b|$.

$|a-b| \ge \big||a| - |b|\big|$.

Предел последовательности. Сравнение величин

Пусть каждому n=1,2,3,... поставлено в соответствие число x_n. Этим определена **последовательность чисел**

$$\{x_n\} = \{x_1, x_2, x_3, \ldots\}.$$

Говорят, что переменная x_n пробегает значения последовательности $\{x_n\}$, x_n – элементы $\{x_n\}$.

Примеры

1. $\left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots\right\} = \left\{\frac{1}{n}\right\}$.

2. $\{1,-1,1,-1,\ldots\} = \{(-1)^{n+1}\}$.

3. $\left\{\frac{1}{2}, \frac{1}{2^2}, \frac{1}{2^3}, \ldots\right\} = \left\{\frac{1}{2^n}\right\}$.

4. $\{1,4,9,\ldots\} = \{n^2\}$.

В примерах 1, 2, 3 последовательности ограничены.

В примере 4 последовательность ограничена снизу, но не ограничена сверху.

Определение. Число a называется **пределом последовательности** $\{x_n\}$, если для всякого $\varepsilon>0$ найдется такое $n_0=n_0(\varepsilon)$, что при $n>n_0$ справедливо $|x_n-a|<\varepsilon$ ($\forall\varepsilon>0, \exists n_0 : n>n_0 \Rightarrow |x_n-a|<\varepsilon$).

Пишут $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim x_n = a$, или $x_n \to a$.

Если $x_n=a \, \forall n \in N$, то $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim a = a$ ($|a-a| < \varepsilon$ при любых n).

Заметим, если $\lim x_n = a$, то $\lim x_{n+1} = a$, и обратно.

Действительно, из $\lim x_n = a$ следует $|x_n - a| < \varepsilon$ при $n > n_0$.

Отсюда $|x_{n+1} - a| < \varepsilon$ при $n > n_0 - 1$. Верно и обратное.

Теорема 1. Если переменная x_n имеет предел, то он единственный.

Теорема 2. Если $\{x_n\}$ сходится, то она ограничена.

Теорема 3. Если последовательность действительных чисел не убывает (не возрастает) и ограничена сверху (снизу) числом M (соответственно m), то существует действительное число a, не превышающее M (не меньшее m), к которому эта последовательность стремится как к своему пределу:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a \le M$$

$$(\text{соответственно } \lim_{n\to\infty} x_n = a \ge m).$$

$$0 \le \lim_{n\to\infty} x_n \le 1.$$

Теорема 4. Если $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} y_n = a$ и $x_n \le z_n \le y_n$, $\forall n \in N$, то $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = a$.

Арифметические действия с переменными, имеющими предел

Если существуют конечные пределы $\{x_n\}$, $\{y_n\}$, то существуют и пределы последовательностей:

$$\{x_n + y_n\}, \{x_n - y_n\}, \{x_n \cdot y_n\}, \left\{\frac{x_n}{y_n}\right\}.$$

При этом

$$\lim(x_n \pm y_n) = \lim x_n \pm \lim y_n;$$

$$\lim(x_n \cdot y_n) = \lim x_n \cdot \lim y_n;$$

$$\lim\left(\frac{x_n}{y_n}\right) = \frac{\lim x_n}{\lim y_n}.$$

В последнем случае предполагается, что $\lim y_n \ne 0$.

Число *e* определяется как предел ограниченной и возрастающей последовательности

$$e = \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = 2{,}718281828\ldots$$

Функция

Пусть E – множество чисел. И пусть каждому $x \in E$ поставлено в соответствие одно число $y \in E_1$. Тогда говорят, что на E задана однозначная функция $y=f(x)$.

E – область задания $f(x)$;

E_1 – область значений $f(x)$ (образ множества E).

Пусть

$$E_1 = f(E);$$

$$E_2 = F(E_1).$$

Имеем

$$E_2 = F(f(E)).$$

Функция $z=F(f(x))$, $z \in E_2$, $y \in E_1$, $x \in E$ называется **сложной функцией** или **суперпозицией** f и F.

Если в образовании сложной функции участвует n функций, то

$$z = F_1(F_2(F_3\ (\ldots(F_n(x)\ldots)))).$$

Пример.

$$z = a^{\operatorname{tg} x^2} - 1.$$

Здесь $z = a^u - 1$, $w = a^u$, $u = \operatorname{tg} v$, $v = x^2$;

$z=F_1(F_2(F_3\ ((F_4(x)))))$; $v = F_4(x) = x^2$; $u = F_3(x) = \operatorname{tg} v$;

$w = F_2(u) = a^u$; $z = F_1(w) = w - 1$.

Способы задания функций

1. *Аналитически* (формулой)
2. *Графически*
3. *Таблично*
4. *Программой для ЭВМ.*

Функция называется **четной**, если $f(-x)= f(x)$ и **нечетной**, если $f(-x)= -f(x)$.

Произведение четной функции на нечетную есть нечетная функция.

Произведение двух четных или нечетных функций есть четная функция.

Если $f(x+T)=f(x)$ $(T \neq 0)$ $\forall x$ из ОДЗ, то функция называется **периодической**.

Если каждому $x \in E$ поставлено в соответствие множество нескольких чисел y, то говорят, что определена **многозначная** функция $y= f(x)$.

Функция одной переменной может быть задана **неявно** уравнением $F(x,y)=0$.Переход к явному заданию функции от неявного не всегда возможен.

Если $y= f(x)$ осуществляет взаимно однозначное отображение E в E_1, то и каждому $y\in E_1$ ставится в соответствие единственное $x\in E$ (определяется функция $y= \varphi(x)$). Функции $y= f(x)$ и $y= \varphi(x)$ называются **взаимно обратными**.

Способы определения взаимно обратных функций.

1. Если $y= f(x)$, то уравнение $y- f(x)= 0$ определяет x как неявную функцию от y. Чтобы получить ее явное выражение, надо (*если возможно*) разрешить это уравнение относительно x, то есть представить в виде $y= \varphi(x)$. Функции $y= f(x)$, $y= \varphi(x)$ будут взаимно обратными. Например:

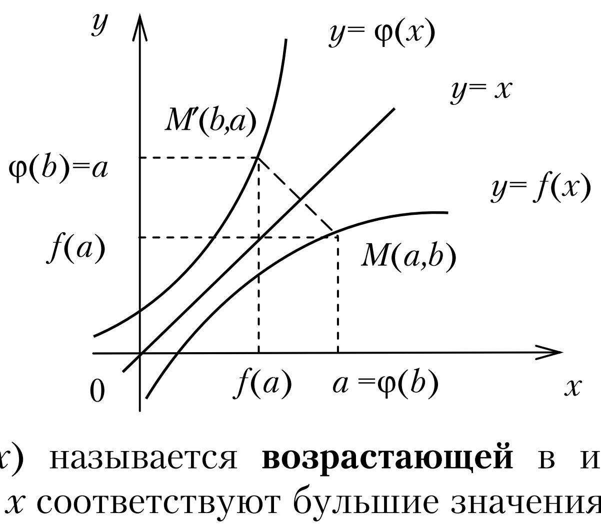
$$y = 10^x;\ y - 10^x = 0 \Rightarrow 10^x = y;\ x = \lg y.$$

2. Если функция сразу задана в неявном виде, то, разрешая это уравнение сначала относительно y, затем – x, найдем взаимно обратные функции $y= f(x)$, $y= \varphi(x)$. Например:

$$x + 2y + 1 = 0.$$

$$y = -\frac{1 + x}{2};\ x = -(2y + 1).$$

Графики функций $y= f(x)$, $y= \varphi(x)$ расположены симметрично относительно прямой $y= x$.



Функция $y= f(x)$ называется **возрастающей** в интервале, если большим значениям x соответствуют бульшие значения y. Аналогично определяется **убывающая функция**.

Интервалы возрастания и убывания функции называются интервалами **монотонности** функции.

Значение функции, большее (меньшее) всех других ее значений в некотором интервале, называется наибольшим (наименьшим) значением функции в этом интервале.

Предел функции

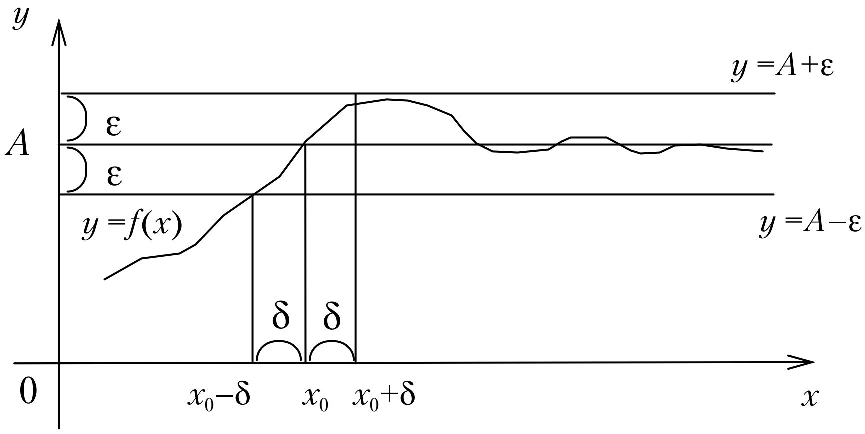
Число A называется **пределом $f(x)$ в точке x_0**, если она определена в некоторой окрестности точки x_0, *за исключением, быть может, самой точки* x_0, и если для всякого $\varepsilon>0$ найдется такая $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, что для всех

$$|x - x_0| < \delta$$

имеет место:

$$|f(x) - A| < \varepsilon.$$

Обозначают
$$\lim_{x\to x_0} f(x) = A,$$
или
$$f(x) \to A\,(x \to x_0).$$



Для всех точек, лежащих в δ-интервале, график $y = f(x)$ лежит внутри полосы шириной 2ε.

Заметим, что для существования $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ **не требуется**, чтобы функция была определена в **самой точке x_0**.

Число A_1 (A_2) называется **пределом функции** $f(x)$ в точке x_0 **слева (справа)**, если $f(x)\to A_1(A_2)$ при $x \to x_0$, и при этом x принимает лишь значения, меньшие (большие) x_0.

Можно доказать, что если существуют A_1 и A_2, где $A_1 = A_2 = A$, то

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = A.$$

И обратно: если существует

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = A,$$

то существуют пределы слева и справа, при этом

$$\lim_{x \to x_0 - 0} f(x) = A,$$

$$\lim_{x \to x_0 + 0} f(x) = A.$$

Предел функции в бесконечности

Число A называется пределом $y= f(x)$ при $x \to +\infty$, если для всех достаточно больших значений x соответствующие значения $f(x)$ как угодно мало отличаются от A ($\forall \varepsilon > 0, \exists x_0 > 0 : x > x_0 \Rightarrow \left| f(x) - A \right| < \varepsilon$).

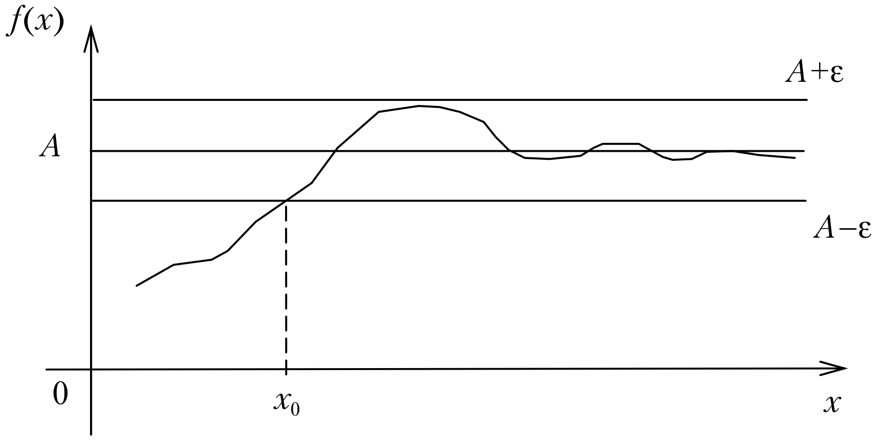
Пишут

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = A$$

или

$$f(x) \to A \ \ (x \to +\infty).$$

Аналогично определяется $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$.



При $x \to \infty$ $(x > x_0)$ график $y= f(x)$ будет находиться в полосе, ограниченной прямыми $y=A-\varepsilon$; $y=A+\varepsilon$.

Ограниченность функции, имеющей предел

Теорема. Если $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$, где A – конечное число, то на некоторой окрестности $u(x_0)$ точки x_0 функция $f(x)$ ограничена, то есть существует такое M >0, что $\left| f(x) \right| \le M \ \ \forall x \in u(x_0), \ \ x \ne x_0$.

Переход к пределу в неравенствах

Если $\lim\limits_{x \to x_0} f_1(x) = A_1$,

$\lim\limits_{x \to x_0} f_2(x) = A_2$

и на некоторой окрестности $u(x_0)$, $x \neq x_0$ имеет место

$$f_1(x) \leq f_2(x),$$

то $A_1 \leq A_2$.

Если $\lim\limits_{x \to x_0} f_1(x) = \lim\limits_{x \to x_0} f_2(x) = A$

и на некоторой окрестности $u(x_0)$, $x \neq x_0$

$$f_1(x) \leq \varphi(x) \leq f_2(x),$$

то

$$\lim_{x \to x_0} \varphi(x) = A.$$

Бесконечно большие величины

Определение. **Функция** $y=f(x)$ называется **бесконечно большой величиной** при $x \to x_0$, если для всех значений x, достаточно мало отличающихся от x_0, соответствующие значения $f(x)$ по абсолютной величине превосходят любое наперед заданное сколь угодно большое положительное число.

Пишут: $$\lim_{x \to x_0} f(x) = \infty.$$

Иначе говоря, какое бы большое число M не взяли, найдется такое $\delta > 0$, что при $|x - x_0| < \delta$ будем иметь $|f(x)| > M$.

Не смешивать бесконечно большое число с большим постоянным числом!

Бесконечно малые величины

Определение. **Функция** $y = f(x)$, стремящаяся к нулю при $x \to x_0$, называется **бесконечно малой величиной** при $x \to x_0$. Например:

$$y=x^2 \text{ при } x \to 0,\ y \to 0;$$

$$y=x-1 \text{ при } x \to 1,\ y \to 0.$$

Не смешивать постоянное очень малое число с бесконечно малой величиной! Единственным числом, которое рассматривается в качестве бесконечно малой величины, служит нуль (и то лишь потому, что предел постоянной величины равен ей самой).

Теорема. Если функция $f(x)$ – бесконечно большая величина, то $\dfrac{1}{f(x)}$ – бесконечно малая величина.

Если $\varphi(x) \neq 0$ – бесконечно малая величина, то $\dfrac{1}{\varphi(x)}$ – бесконечно большая величина.

Теорема (прямая). Если функция имеет предел, то ее можно представить как сумму постоянной, равной ее пределу, и бесконечно малой величины, то есть

$$f(x) = A+\alpha(x).$$

Теорема (обратная). Если функцию можно представить как сумму постоянной и бесконечно малой величины, то постоянное слагаемое есть предел функции, то есть из $f(x) = A+\alpha(x)$, следует $\lim\limits_{x\to x_0} \alpha(x) = 0$.

Правила предельного перехода

Теорема. Сумма конечного числа бесконечно малых величин есть бесконечно малая величина.

Следствия:

1. Предел суммы **конечного** числа слагаемых равен сумме пределов этих слагаемых, если существуют пределы слагаемых.

2. Произведение ограниченной функции на бесконечно малую величину есть бесконечно малая величина.

3. Предел произведения конечного числа множителей равен произведению пределов этих множителей, если существуют пределы сомножителей.

4. Частное от деления бесконечно малой величины α на функцию u, предел которой отличен от нуля, есть бесконечно малая величина.

4′. Предел частного равен частному от деления пределов, если существуют пределы числителя и знаменателя, и предел знаменателя не равен нулю.

Пример 1.

$$\lim_{x\to 1}\frac{3x+5}{4x-2}=\frac{\lim\limits_{x\to 1}(3x+5)}{\lim\limits_{x\to 1}(4x-2)}=\frac{\lim\limits_{x\to 1}3x+\lim\limits_{x\to 1}5}{\lim\limits_{x\to 1}4x-\lim\limits_{x\to 1}2}=$$

$$=\frac{3\lim\limits_{x\to 1}x+5}{4\lim\limits_{x\to 1}x-2}=\frac{3\cdot 1+5}{4\cdot 1-2}=\frac{8}{2}=4.$$

Пример 2. Найти

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x-2}.$$

Имеем неопределенность вида $\left[\frac{0}{0}\right]$:

$$\frac{x^2-4}{x-2}=\frac{(x+2)(x-2)}{x-2}=x+2.$$

Указанное преобразование справедливо при всех $x \neq 2$. Поэтому, по определению предела, где в самой точке x_0 функция может быть и не определена, будем иметь:

$$\lim_{x \to 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2} = \lim_{x \to 2}(x + 2) = 4.$$

Неопределенности вида $\frac{\infty}{\infty}$, $0 . \infty$, $\infty - \infty$

Нельзя определить пределы при $x \to x_0$ без специальных исследований, если:

– $u \to \infty$ $v \to \infty$ и требуется найти $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{u}{v}$

– $u \to 0$ $v \to \infty$ и требуется найти $\lim\limits_{x \to x_0} uv$;

– $u \to \infty$ $v \to \infty$ и требуется найти $\lim\limits_{x \to x_0} (u - v)$.

Если предел числителя u не равен нулю, а предел знаменателя v равен нулю, то величина $\frac{v}{u}$ бесконечно малая (так как $\lim\limits_{x \to x_0} u \neq 0$, $\lim\limits_{x \to x_0} v \neq 0$). Тогда предел обратной величины есть ∞ и $\frac{u}{v}$ есть бесконечно большая величина.

Пример 3.

Найти $$\lim_{x \to 1} \frac{1}{x - 1}.$$

При $x \to 1$

$$x - 1 \to 0,$$

а числитель $\to 1$.

Так что $$\lim_{x \to 1} \frac{x - 1}{1} = \frac{0}{1} = 0,$$

и $\frac{1}{x - 1} \to \infty$.

Пример 4. Найти $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{x + 1}{x - 1}$.

Это неопределенность вида $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$.

Имеем:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x+1}{x-1}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{x}{x}+\frac{1}{x}}{\frac{x}{x}-\frac{1}{x}}=\frac{1+\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x}}{1-\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x}}=\frac{1+0}{1-0}=1$$

(так как x – бесконечно большая величина, то $\frac{1}{x}$ – бесконечно малая величина).

Пример 5. $$\lim_{x\to\infty}\frac{a_0x^m+a_1x^{m-1}+\cdots+a_m}{b_0x^n+b_1x^{n-1}+\cdots+b_n}=\begin{cases}0,\text{ если } & m<n;\\ \infty,\text{ если } & m>n;\\ \frac{a_0}{b_0},\text{ если } & m=n.\end{cases}$$

Теорема. Если значения функции $f(x)$ заключены между соответствующими значениями функций $F(x)$ и $\Phi(x)$, стремящихся при $x\to x_0$ к одному и тому же пределу A, то $f(x)$ при $x\to x_0$ имеет предел, также равный A.

Замечательные пределы

Используя теорему легко получить важное предельное соотношение **(первый замечательный предел)**.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1.$$

Так же широко используется при определении пределов функций и **второй замечательный предел**

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e.$$

Сравнение бесконечно малых величин

Для того чтобы сравнить между собой две бесконечно малые величины $\alpha(x)$ и $\beta(x)$, берут предел их отношения $\frac{\alpha}{\beta}$ ($x\to x_0$ или $x\to\infty$).

Определение. Если отношение $\frac{\beta}{\alpha}$ имеет конечный предел

$$\lim\frac{\beta}{\alpha}=A\neq 0$$

$$\left(\lim \frac{\alpha}{\beta} = \frac{1}{A} \neq 0\right),$$

то бесконечно малые величины β и α называются бесконечно малыми **одного порядка**.

Определение. Если α и β – бесконечно малые величины одного порядка и

$$\lim \frac{\beta}{\alpha} = 1,$$

то α и β называют **эквивалентными** или **равносильными** бесконечно малыми и пишут $\alpha \sim \beta$. (Здесь $\lim \frac{\alpha}{\beta} = 1$).

Предел отношения бесконечно малых не изменится, если их заменить эквивалентными бесконечно малыми.

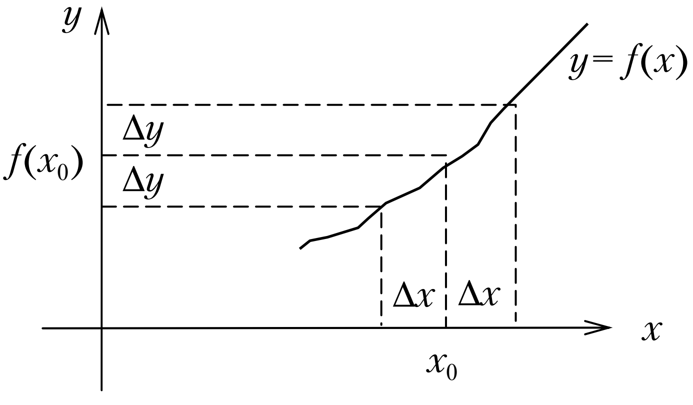
З а м е ч а н и е . Если отношение двух бесконечно малых величин не имеет предела и не стремится к ∞, то β и α *не сравнимы* между собой в указанном выше смысле.

Непрерывные функции

Определение. **Приращением** функции $y=f(x)$ в данной точке x_0 называется

$$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0),$$

где Δx – приращение аргумента.



Определение. Функция $y=f(x)$ называется непрерывной в точке x_0, если $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.

Эквивалентное этому другое *определение*: функция $y=f(x)$ называется непрерывной в точке x_0, если она определена в некоторой окрестности точки x_0 и если $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta y = 0$.

Пример.

$y=x^3$ непрерывна в любой точке x_0.

Действительно,

$$\lim_{x\to x_0} x^3 = \lim_{x\to x_0} x \cdot \lim_{x\to x_0} x \cdot \lim_{x\to x_0} x = x_0^3 = y(x_0).$$

Непрерывная функция изменяется постепенно (малые изменения аргумента влекут за собой малые изменения функции).

Если $f(x_0)\neq 0$ и в точке x_0 функция непрерывна, то значения функции $f(x)$ в некоторой окрестности точки x_0 имеют тот же знак, что и $f(x_0)$.

Функция **непрерывная в интервале** непрерывна в каждой его точке. График непрерывной функции представляет собой сплошную линию без разрывов. Все основные элементарные функции (x^n, a^x, $\log_a x$, тригонометрические функции, обратные тригонометрические функции) непрерывны в тех интервалах, в которых они определены.

Определение. Точка x_0, в которой функция имеет левый и правый пределы, не равные между собой, называется точкой разрыва **первого рода** функции $f(x)$. Все остальные точки разрыва называются точками разрыва **второго рода**.

Так, функция $f(x)=15^{\frac{1}{3-x}}$ в точке $x = 3$ не определена. Односторонние пределы в этой точке

$$\lim_{x\to 3-o} 15^{\frac{1}{3-x}} = 15^{+\infty} = +\infty;$$

$$x<3 \Rightarrow 3-x>0$$

$$\lim_{x\to 3+o} 15^{\frac{1}{3-x}} = 15^{-\infty} = \frac{1}{15^{+\infty}} = 0.$$

$$x>3 \Rightarrow 3-x<0$$

Точка $x_1 = 3$ – точка разрыва второго рода (рис. 7).

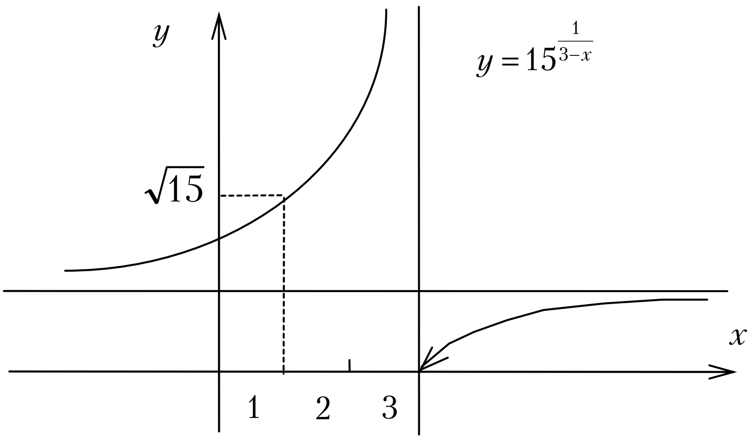


Рис.7

Примером точки разрыва первого рода (рис.8) является точка $x = -1$ для функции

$$f(x) = \begin{cases} x+2, & \text{если} \quad x \le -1; \\ x^2+1, & \text{если} \quad -1 < x \le 1; \\ -x+3, & \text{если} \quad x > 1. \end{cases}$$

Односторонние пределы:

$$\lim_{\substack{x \to -1-0 \\ x<-1}} f(x) = \lim_{x \to -1-0} (x+2) = -1+2 = -1;$$

$$\lim_{\substack{x \to -1+0 \\ x>-1}} f(x) = \lim_{x \to -1+0} \left(x^2+1\right) = 1+1 = 2;$$

$\lim\limits_{x \to -1-0} f(x) \ne \lim\limits_{x \to -1+0} f(x)$ -функция $f(x)$ в точке $x = -1$ терпит конечный разрыв; скачок функции в этой точке $\lim\limits_{x \to -1+0} f(x) - \lim\limits_{x \to -1-0} f(x) = 2-1 = 1$.
Из $\lim\limits_{x \to -1-0} f(x) = \lim\limits_{x \to -1+0} f(x) = 2$ следует, что функция $f(x)$ в точке $x = 1$ непрерывна.

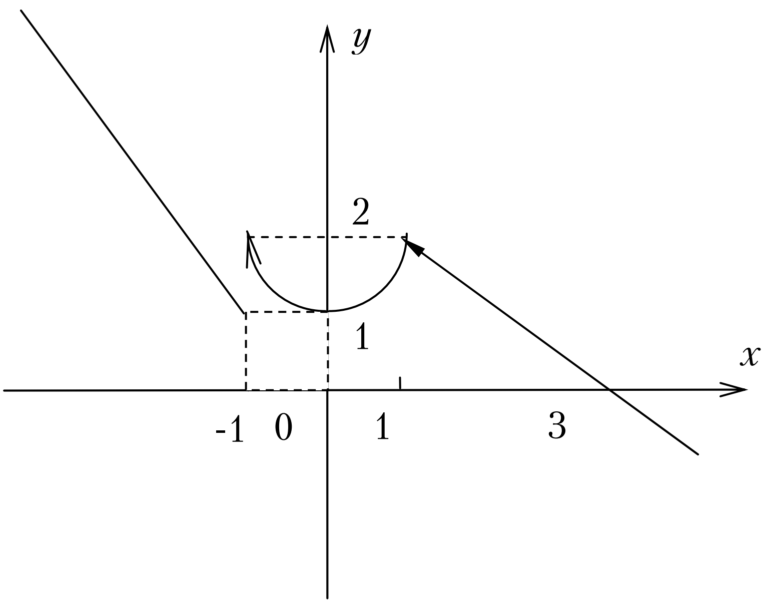


Рис.8

2.2. Дифференциальное исчисление функций одной переменной

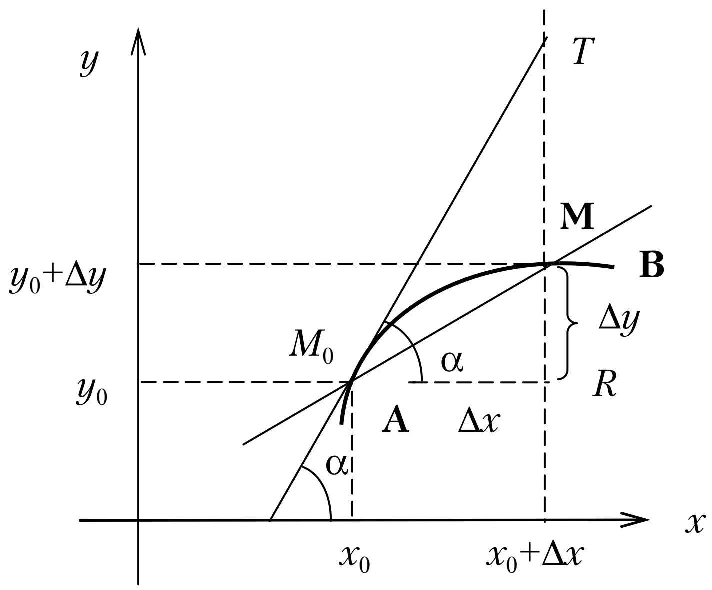
Определение. **Производной функции** $y = f(x)$ называется предел отношения приращения функции к приращению аргумента при произвольном стремлении этого приращения к нулю:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x},$$

обозначается $f'(x)$. Значение производной функции $f'(x)$ в точке x_0 обозначается $f'(x_0)$ или $y'|_{x=x_0}$ (подставляя в $f'(x)$ значение x_0 определяется $f'(x_0)$).

Геометрический смысл производной

Теорема. Если значение производной от функции $y = f(x)$ при $x=x_0$ равно $f'(x_0) \overset{\Delta}{=} y'|_{x=x_0}$, то прямая, проведенная через точку $M_0(x_0,y_0)$ с угловым коэффициентом, равным $f'(x_0)$, является касательной к графику функции в точке M_0.



Касательная и нормаль к линии

Уравнение касательной к линии в точке $M_0(x_0,y_0)$ определяется как уравнение прямой, проходящей через точку $M_0(x_0,y_0)$ с угловым коэффициентом, равным $f'(x_0)$:

$$y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0).$$

Уравнение нормали определяется как уравнение прямой, проходящей через точку $M_0(x_0,y_0)$ перпендикулярно касательной:

$$y - y_0 = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0).$$

Основные правила дифференцирования

Предполагается, что слагаемые, сомножители, делимое, делитель непрерывны и имеют производные при рассматриваемых значениях независимой переменной.

1) $c' = 0$;

2) $x' = 1$;

3) $(u \pm v) = u' \pm v'$;

4) $(cu)' = cu'$;

5) $(uv)' = u'v + uv'$;

6) $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$;

7) если $y=f(u)$, $u=u(x)$, то есть, если $y=f[u(x)]$, где $f(u)$ и $u(x)$ имеют производные, то

$$y'_x = y'_u u'_x,$$

8) если $y=f(x)$ и $x=\varphi(y)$ взаимно обратные функции, то

$$\varphi'(y) = \frac{1}{f'(x)}.$$

Формулы для дифференцирования основных функций

1) $\left(u^n\right)' = n \cdot u^{n-1} \cdot u'$;

2) $\left(\sqrt{u}\right)' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$;

3) $\left(\frac{-}{u}\right)' = -\frac{cu}{u^2}$;

4) $\left(e^u\right) = e^u u'$;

5) $\left(a^u\right)' = a^u \cdot \ln a \cdot u'$;

6) $(\ln u)' = \frac{u'}{u}$;

9) $(\cos u)' = -\sin u \cdot u'$;

10) $(\mathrm{tg} u)' = \frac{u'}{\cos^2 u}$;

11) $(\mathrm{ctg} u)' = \frac{-u'}{\sin^2 u}$;

12) $(\mathrm{arctg} u)' = \frac{u'}{1+u^2}$;

13) $(\mathrm{arctg} u)' = \frac{-u'}{1+u^2}$;

14) $(\arcsin u)' = \frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$;

7) $\left(\log_a u\right)' = \dfrac{u'}{u\cdot\ln a}$;

8) $\left(\sin u\right)' = \cos u \cdot u'$;

15) $\left(\arccos u\right)' = \dfrac{-u'}{\sqrt{1-u^2}}$.

Для нахождения производных степенно-показательных и некоторых других функций применяется *логарифмическое дифференцирование* (состоит в нахождении *логарифмической производной* $\left[\ln f(x)\right]' = \dfrac{f'(x)}{f(x)}$).

Так, из $y = x^x$ следует

$$\ln y = x\ln x.$$

Дифференцируя по x обе части. получим

$$\frac{1}{y}y'_x = x'\ln x + x\left(\ln x\right)' \Rightarrow$$

$$\frac{y'}{y} = 1\cdot\ln x + x\frac{1}{x} \Rightarrow$$

$$y' = y\left(\ln x + 1\right).$$

Откуда $\left(x^x\right)' = x^x\left(\ln x + 1\right)$.

Производные неявных функций

Если y задана уравнением, связывающим независимую переменную x с функцией y, не разрешенным относительно y, то производную от этой функции можно найти, дифференцируя по x обе части уравнения, с учетом того, что y есть функция от x, определяемая этим уравнением.

Например, для неявно заданной функции $y^2 = x + \ln\left(\dfrac{y}{x}\right)$ имеем

$$2yy' = 1 + \frac{1}{y/x}\frac{y'x - y}{x^2};$$

$$2xy^2y' = xy + y'x - y.$$

Разрешая относительно y', получим

$$y' = \frac{xy - y}{2xy^2 - x}.$$

Дифференцирование параметрически заданных функций

Если $x=\varphi(t)$; $y=\psi(t)$, то

$$y'_x=\frac{\psi'(t)}{\phi'(t)}.$$

Дифференциал

Если $f'(x)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}$ есть определенное число, то $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ отличается от $f'(x)$ на бесконечно малую:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=f'(x)+\alpha,$$

$$\Delta y=f'(x)\Delta x+\alpha\Delta x$$

($\alpha\to 0$ при $\Delta x\to 0$).

Первое слагаемое $f'(x)\Delta x$ – главная часть приращения, линейная относительно Δx (при $f'(x)\neq 0$); называется *дифференциалом функции* и обозначается dy или $df(x)$.

Для функции $y=x$ имеем:

$$y'_x=(x)'=1\Rightarrow dy=dx=1\cdot\Delta x.$$

Таким образом, *дифференциал dx независимого переменного x совпадает с его приращением* Δx.

Поэтому

$$dy=f'(x)dx\,.$$

Имеем $f'(x)=\frac{dy}{dx}$ (*производную* $f'(x)$ *можно рассматривать как отношение дифференциала функции к дифференциалу независимого переменного*)**.**

Из

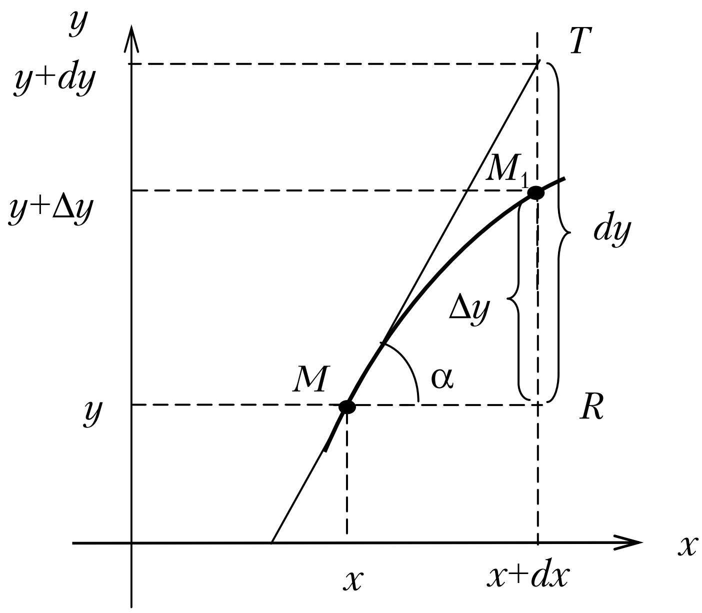
$$f(x+\Delta x)-f(x)\approx f'(x)dx$$

следует

$$f(x+\Delta x)-f(x)\approx f'(x)\Delta x,$$

Что позволяет вычислить $f(x+\Delta x)$ по $f(x)$, $f'(x)$, dx (ошибка вычисления равна $\alpha\Delta x$).

Геометрический смысл дифференциала



$RT = f'(x)dx = dy, M_1T = \Delta y - dy$; $M_1T \to 0$ при $dx \to 0$ и является бесконечно малой более высокого порядка, чем отрезок MR.

Свойства дифференциала

1. $d(u + v + \ldots + w)' = du + dv + \ldots + dw$.

2. $d(uv) = vdu + udv$; $d(cu) = cdu$.

3. $d\left(\dfrac{u}{v}\right) = \dfrac{vdu - udv}{v^2}, v \neq 0$.

4. Если $y=f(x)$, $u=\varphi(x)$ – непрерывные функции, имеющие производные f'_u и φ'_x, то $y' = f'_u \varphi'_x \Rightarrow \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{dy}{du}\dfrac{du}{dx}$; правая часть равенства получается из левой просто умножением и делением на du ($du \neq 0$). Выражение для дифференциала функции $y=f(u)$ сохраняет свой вид, независимо от того, является ли ее аргумент u независимой переменной или функцией от независимой переменной (*свойство инвариантности*).

5. Непосредственно из п.4 следует правило дифференцирования обратной функции:

$$y'_x = \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\dfrac{dx}{dy}} = \frac{1}{x'_y}.$$

Дифференцируемость функции

Определение. Функция $y=f(x)$ называется дифференцируемой в точке x, если $\Delta y = A\Delta x + 0(\Delta x)$.

Геометрически дифференцируемости функции соответствует существование у линии $y=f(x)$ касательной, не перпендикулярной к оси OX.

Из дифференцируемости $f(x)$ следует ее непрерывность:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x) \Rightarrow \Delta y = f'(x)\Delta x + \alpha$$

и $\Delta y \to 0$ при $\Delta x \to 0$, $\Rightarrow y=f(x)$ непрерывна в точке x.

Обратное не всегда верно.

Производные и дифференциалы высших порядков

Пусть $y=f(x)$ имеет производную $f'(x)$ в некотором интервале независимой переменной x. Тогда производная от $f'(x)$ называется производной второго порядка или второй производной функции $f(x)$:

$$f''(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f'(x+\Delta x) - f'(x)}{\Delta x}.$$

Производной n-го порядка $f^{(h)}(x)$ называется производная от производной $(n-1)$-го порядка:

$$f^{(n)}(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f^{(n-1)}(x+\Delta x) - f^{(n-1)}(x)}{\Delta x},$$

в частности, производная второго порядка или вторая производная функции $f(x)$:

$$f''(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f'(x+\Delta x) - f'(x)}{\Delta x}.$$

Функция $f''(x)$ в точке x определяет скорость изменения $f'(x)$, то есть $f''(x)$ – ускорение изменения функции $f(x)$ при данном x.

Производные $f(x)$ в данной точке могут существовать до определенного порядка, а производных высшего порядка функция в этой точке может и не иметь.

Однако всякая элементарная функция, за исключением, быть может, отдельных точек, имеет в своей области определения производные любых порядков.

Например, для $y = x^n$:

$$y' = nx^{n-1},$$

$$y'' = n(n-1)x^{n-2},$$

$$\ldots$$

$$y^{(n)} = n!,$$

$$y^{(n+1)} = y^{(n+2)} = \ldots = 0.$$

Производные неявных функций

Для отыскания высшей производной неявных функций надо соответствующее число раз продифференцировать заданное уравнение, связывающее x и y, помня, что y и все ее производные есть функции x.

Например,

$$x^2 + y^2 = 1.$$

$$2x + 2yy' = 0 \Rightarrow x + yy' = 0,\ y' = -\frac{x}{y};$$

$$1 + y'y' + yy'' = 0 \Rightarrow y'' = -\frac{1 + y'^2}{y} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y'' = -\frac{1 + \left(-\frac{x}{y}\right)^2}{y} = -\frac{y^2 + x^2}{y^3} = -\frac{1}{y^3} = -\frac{1}{\sqrt{\left(1 - x^2\right)^3}}.$$

Производные параметрически заданных функций

Из $x=\varphi(t)$, $y=f(t)$ следует:

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{f'(t)}{\varphi'(t)};$$

$$y'' = \frac{d\left(\frac{f'(t)}{\varphi'(t)}\right)}{dx} = \frac{d\left(\frac{f'(t)}{\varphi'(t)}\right)}{dt}\frac{dt}{dx} =$$

$$= \frac{f''(t)\varphi'(t) - \varphi''(t)f'(t)}{\left(\varphi'(t)\right)^2}\frac{1}{\varphi'(t)} = \frac{f''(t)\varphi'(t) - \varphi''(t)f'(t)}{\left(\varphi'(t)\right)^3}$$

$$\ldots\ .$$

Например, если $x=a\cos t$, $y=b\sin t$, то $y'(x)=\dfrac{b\cos t}{-a\sin t}=-\dfrac{b}{a}\mathrm{ctg}\,t$;

$$y''(x)=\frac{\left(y'(x)\right)'_t}{\left(a\cos t\right)'_t}=\frac{\left(-\frac{b}{a}ctgt\right)'_t}{-a\sin t}=-\frac{b}{a^2\sin^3 t}.$$

Дифференциалы высших порядков

Определение. Дифференциалом n-го порядка $d^n y$ называется дифференциал от дифференциала (n-1)-го порядка как функции x:

$$d^n y=d(d^{n-1}y).$$

В частности,

$$d^2y=d\left(dy\right)=\left(dy\right)'dx.$$

Замечая, что dx от x не зависит, получим:

$$d^2y=\left[f'(x)dx\right]'dx=\left(f''(x)dx\right)dx=f''(x)dx^2.$$

Аналогично

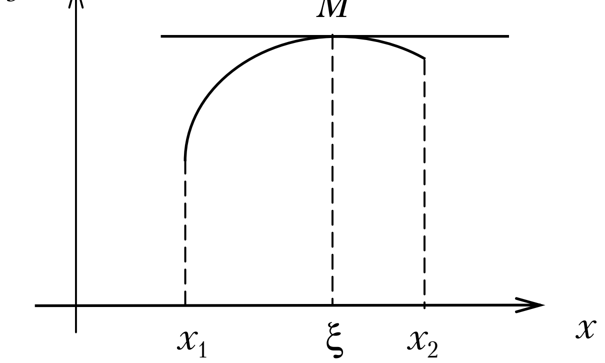
$$d^ny=f^{(n)}(x)dx^n.$$

Применение дифференциального исчисления к исследованию функций

Приведем несколько широко используемых теорем.

Теорема Ферма. Если $y=f(x)$, непрерывная в интервале $[x_1, x_2]$, принимает свое наибольшее (или наименьшее) значение во внутренней точке ξ этого интервала ($x_1<\xi<x_2$), то есть, если в точке ξ существует функция $f(x)$, то обязательно производная $f'(\xi)=0$ или не существует.

Геометрический смысл теоремы Ферма

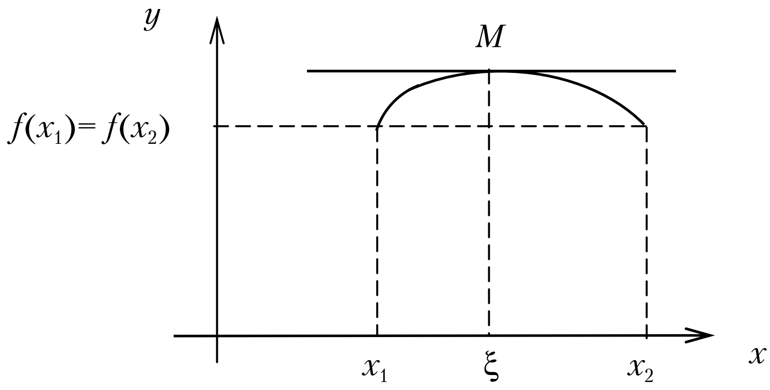


Касательная к графику функции в его наивысшей (наинизшей) точке параллельна оси абсцисс или не существует.

Теорема Ролля. Если функция $y=f(x)$: непрерывна в замкнутом интервале $[x_1, x_2]$, дифференцируема во всех его внутренних точках; имеет на концах интервала равные значения, то в интервале $[x_1, x_2]$ существует хотя бы одно значение $x=\xi$, для которого $f'(\xi)=0$.

Геометрический смысл теоремы Ролля

На линии $y=f(x)$, где $f(x)$ удовлетворяет условиям теоремы Ролля, найдется точка, в которой касательная параллельна оси абсцисс.



Теорема Лагранжа (о конечных приращениях).

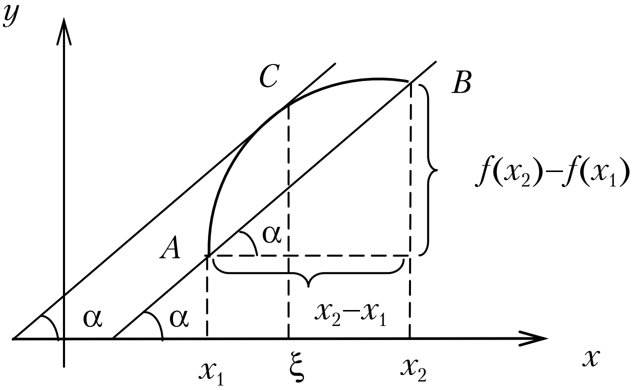
Если функция $f(x)$: непрерывна в замкнутом интервале $[x_1,x_2]$, дифференцируема во всех его внутренних точках, то в этом интервале существует хотя бы одно значение $x=\xi$, для которого

$$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}=f'(\xi).$$

Геометрический смысл теоремы Лагранжа

Теорема утверждает, что если во всех точках дуги AB существует касательная, то на этой дуге найдется точка C между A и B, в которой касательная параллельна хорде AB.

$$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}=\operatorname{tg}\alpha=f'(\xi).$$



Так как по теореме Лагранжа $f(x_2)-f(x_1)=f'(\xi)(x_2-x_1)$ (формула Лагранжа), то приращение функции на интервале равно произведению производной в некоторой промежуточной точке интервала на приращение независимой переменной.

Теорема Лопиталя.

Пусть функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ совместно стремятся к нулю или к ∞. Если отношение их производных имеет предел, то отношение самих функций также имеет предел, равный пределу отношения производных, т.е.

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{\varphi(x)}=\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}.$$

(часто используется для раскрытия неопределенностей вида $\frac{0}{0},\frac{\infty}{\infty}$).

Пример.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 3x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin 3x\cdot\cos 3x\cdot 3}{1}=3\cdot\lim_{x\to 0}\sin 6x=3\cdot 0=0.$$

Теорема справедлива и для $x\to\infty(-\infty)$.

Поведение функции в интервале

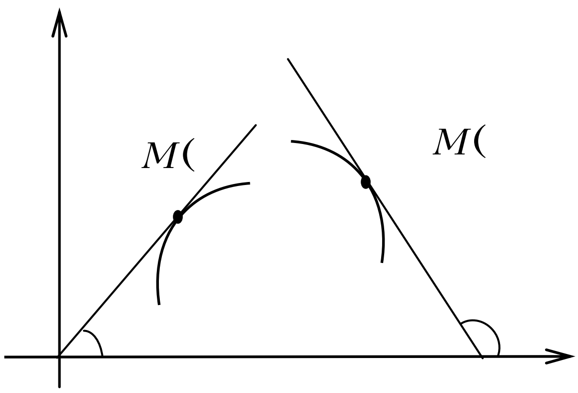
Необходимый признак монотонности определяет **теорема:**

– если функция $f(x)$ в интервале возрастает, то ее производная $f'(x)\geq 0$;

– если $f(x)$ в интервале убывает, то $f'(x)\leq 0$;

– если $f(x)$ в интервале не изменяется ($f(x)=\mathrm{const}$), то $f'(x)\equiv 0$.

Геометрический смысл теоремы: если точка $M(x,y)$ при движении по графику функции слева направо поднимается, то касательная к графику образует острый угол ($\mathrm{tg}\alpha>0$); если $M(x,y)$ опускается, то касательная образует тупой угол ($\mathrm{tg}\alpha<0$).



В интервале монотонности знак производной не может измениться на обратный.

Достаточный признак монотонности определяет **теорема**:

– если $f'(x)$ всюду в интервале >0, то $f(x)$ в этом интервале возрастает;

– если $f'(x)$ всюду в интервале <0, то $f(x)$ в этом интервале убывает;

– если $f'(x)$ всюду в интервале =0, то $f(x)$=const в этом интервале.

Значения x, в которых производные обращаются в нуль, называются *стационарными точками функции*.

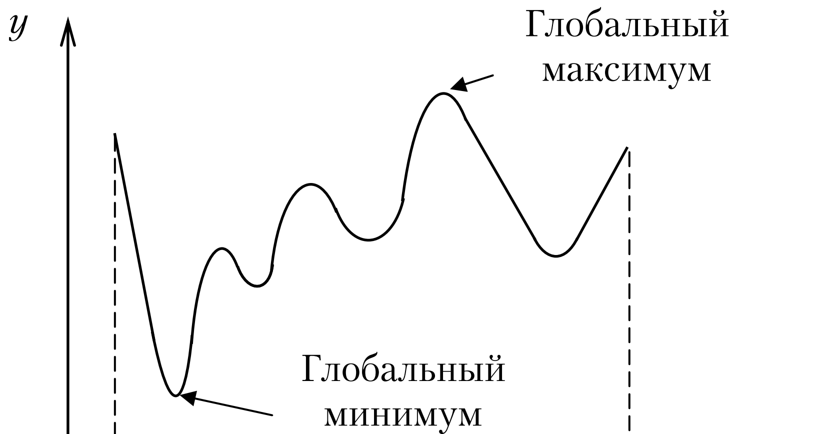
Экстремум функции

При исследовании функций особую роль играют те точки, которые отделяют интервалы возрастания и убывания (или убывания и возрастания). В этих точках функция меняет характер своего изменения.

Определение. Точка x_0 называется **точкой максимума (минимума)** функции $f(x)$, если $f(x_0)$ есть наибольшее (наименьшее) значение функции $f(x)$ (в некоторой **окрестности** точки x_0).

Точки максимума и минимума называются **точками экстремума**.

Функция на данном интервале может иметь несколько экстремумов, называемых **локальными** (местными).



Необходимый признак экстремума: если в точке x_0 функция $f(x)$ достигает экстремума, то ее производная в этой точке равна нулю либо не существует.

Равенство $f'(x_0)$=0 следует из теоремы Ферма.

Геометрически: в точке экстремума касательная к графику функции параллельна оси Ox.

Функция может иметь экстремумы и в отдельных точках, в которых она недифференцируема (рис. 9).

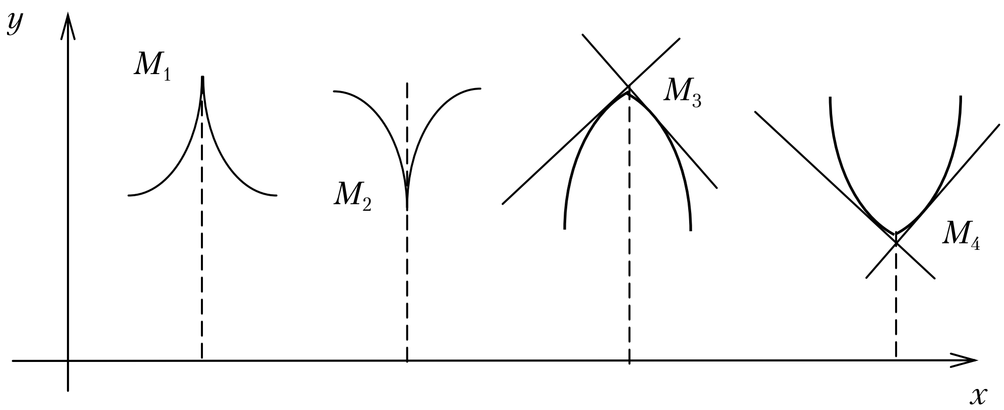


Рис.9

В точках M_1 и M_2 касательная перпендикулярна оси Ox (*точки возврата*).

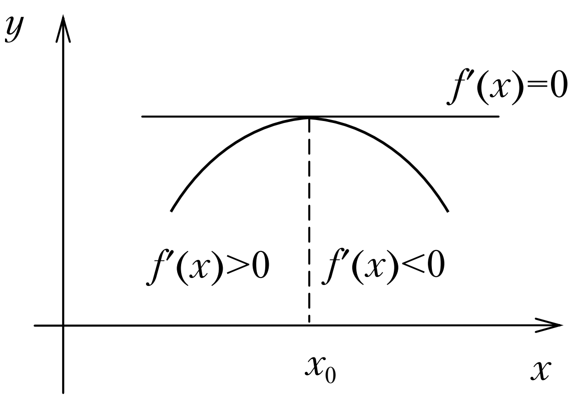
Здесь $\underset{x \to x_o +}{f'(x) \to} \pm\infty$,

$\underset{x \to x_o -}{f'(x) \to} \mp\infty$.

В точках M_3 и M_4 касательная внезапно переходит от одного наклона к другому, т.е. график в этих точках не имеет определенной касательной (*угловые точки*).

Необходимый признак не является достаточным. Так, для функции $y=x^3$ $y'(0)=0$, но $x=0$ не является точкой экстремума.

Первый достаточный признак экстремума



Точка x_0 является точкой экстремума $f(x)$, если $f'(x)$ при переходе x через x_0 меняет знак: при перемене знака с плюса на минус точка x_0 – точка максимума, при перемене с минуса на плюс точка x_0 – точка минимума.

Второй достаточный признак экстремума

Точка x_0 есть точка экстремума функции $f(x)$, если $f'(x_0)=0$, а $f''(x_0)\neq 0$: если: $f''(x_0)>0$, то x_0 – точка минимума; $f''(x_0)<0$, то x_0 – точка максимума.

Вторым признаком воспользоваться нельзя, если $f'(x_0)=0$, $f''(x_0)=0$ или $f'(x_0)$ не существует (надо обратиться к первому признаку).

Выпуклость и вогнутость линии. Точки перегиба

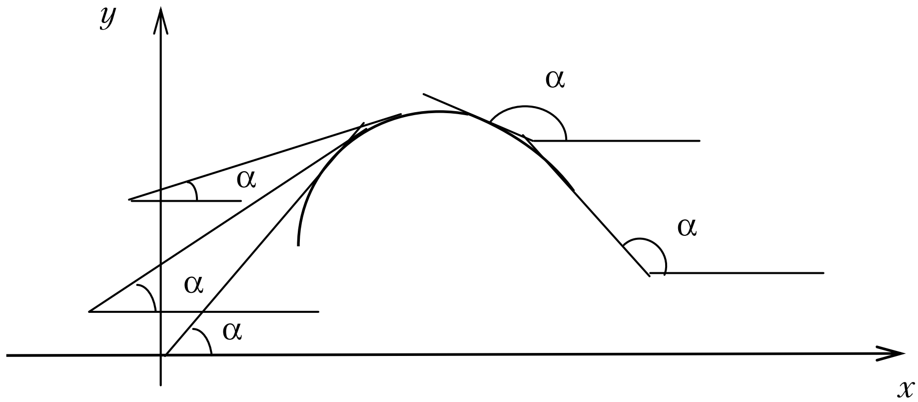
Определение. Дуга называется выпуклой, если она пересекается с любой своей секущей не более, чем в двух точках.

Если дуга выпуклая, то она целиком лежит по одну сторону от касательной, проведенной в любой ее точке.

Для *непрерывных функций* $y=f(x)$ линии, обращенные выпуклостью вверх, называются *выпуклыми*, а обращенные выпуклостью вниз – *вогнутыми*. Выпуклая линия лежит *под* своей любой касательной, вогнутая – *над* касательной.

Особую роль играют **точки перегиба**, отделяющие на линии выпуклую дугу от вогнутой. В точке перегиба касательная пересекает линию, в окрестности этой точки линия лежит по обе стороны от касательной.

Теорема. Если производная $f''(x)<0$ всюду в интервале, то дуга линии $y=f(x)$, соответствующая этому интервалу, выпуклая. Если $f''(x)>0$, то вогнутая.



При увеличении x здесь $\operatorname{tg}\alpha$ уменьшается, то есть $f'(x)$ убывает, и $f''(x)<0$, и наоборот, если $f''(x)<0$, то линия $y=f(x)$ выпукла.

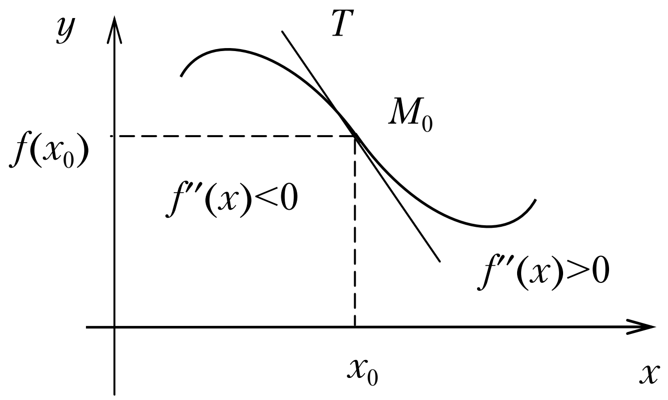
Аналогично для $f''(x)>0$.

Из этой теоремы особенно ясен смысл второго достаточного признака экстремума. Например, если $f'(x_0)>0$, $f''(x)<0$, то вершина кривой, соответствующая точке x_0, лежит на выпуклой части линии $y=f(x)$, то есть x_0 – точка максимума.

Признаки точки перегиба

Необходимый признак: если x_0 – абсцисса точки перегиба, то либо $f''(x)=0$, либо $f''(x)$ не существует (следует из того, что абсцисса точки перегиба разделяет два интервала монотонности $f'(x)$, т.е. является точкой экстремума).

Первый достаточный признак: точка (x_0,y_0) есть точка перегиба линии $y=f(x)$, если $f''(x)$ меняет знак при переходе x через x_0. При перемене знака с плюса на минус участок вогнутости сменяется участком выпуклости; при перемене знака с минуса на плюс участок выпуклости сменяется участком вогнутости.



Второй достаточный признак точки перегиба: точка (x_0,y_0) есть точка перегиба линии $y=f(x)$, если $f''(x_0)=0$, а $f'''(x_0)\neq 0$:

- при $f'''(x_0)>0$ выпуклость меняется на вогнутость;
- при $f'''(x_0)<0$ вогнутость меняется на выпуклость.

Асимптоты линий

Прямая линия называется асимптотой линии, если расстояние точки линии до прямой стремится к нулю при неограниченном удалении этой точки от начала координат.

Различают вертикальную и наклонную асимптоты.

Если $\lim\limits_{x\to a+0} f(x)=\infty$, или $\lim\limits_{x\to a-0} f(x)=\infty$, или $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\infty$, то прямая $x=a$ есть *вертикальная* асимптота кривой $y=f(x)$, и обратно, если $x=a$ есть асимптота, то выполняется одно из вышеприведенных равенств.

Если $y=kx+b$ *–наклонная* асимптота линии $y=f(x)$, то

$$k=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x};\;\; b=\lim_{x\to\infty}\left[f(x)-kx\right].$$

Общая схема исследования функций

Предлагаемая схема включает 4 раздела.

1. Исследование без использования производной.
   1.1. Область определения функции.
   1.2. Симметрия графика (четность, нечетность функции).
   1.3. Точки разрыва и интервалы непрерывности.

1.4. Поведение функции в окрестности точек разрыва; вертикальные асимптоты.
1.5. Точки пересечения графика с осями координат.
1.6. Периодичность графика.
2. Интервалы монотонности функции, точки экстремума и экстремальные значения.
3. Интервалы выпуклости и вогнутости, точки перегиба.
4. Поведение функции в бесконечности. Наклонные (в частности, горизонтальные) асимптоты.

2.3. Дифференциальное исчисление функций нескольких переменных

Если каждой рассматриваемой совокупности значений переменных $x, y, z, \ldots, u, t$ соответствует определенное значение переменной w, то будем называть w *функцией независимых переменных* $x, y, z, \ldots, u, t$ и писать:

$$w = f(x, y, z, \ldots u, t).$$

Совокупность $(x, y, z, \ldots, u, t)$, при которых определяется функция $w = f(x, y, z, \ldots u, t)$, **называется областью определения (существования)** этой функции.

Например, для функции двух переменных

$$z = x^2 - x \ln y.$$

она определяется неравенствами:

$$-\infty < x < \infty,$$
$$y > 0.$$

Приращения функции $z = f(x, y)$

$\Delta z = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y)$ - полное приращение;
$\Delta_x z = f(x + \Delta x, y) - f(x, y)$ – частное по x;
$\Delta_y z = f(x, y + \Delta y) - f(x, y)$ – частное по y.

Число A называется пределом функции $f(x,y)$ при стремлении точки $M(x,y)$ к точке $M_0(x_0,y_0)$, если для каждого числа $\varepsilon>0$ найдется такое число $r>0$, что для всех точек $M(x,y)$, для которых $\left|\overline{MM_0}\right| < r$, имеет место

$$\left|f(x, y) - A\right| < \varepsilon.$$

Пишут

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} f(x,y) = A.$$

Функция $z=f(x,y)$ называется **непрерывной** в точке $M_0(x_0,y_0)\in G$, если

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} f(x,y) = f(x_0, y_0),$$

$M(x,y)$ стремится к $M_0(x_0,y_0)$ произвольным образом, оставаясь в области определения G.

Функция, непрерывная в каждой точке области, называется непрерывной в области. Если $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} f(x,y) \neq f(x_0, y_0)$, или указанный предел не существует, то точка $N(x_0,y_0)$ называется точкой разрыва функции $f(x,y)$.

Свойства непрерывных функций

1. Если $f(x,y)$ определена и непрерывна в замкнутой и ограниченной области G, то в этой области найдется, по крайней мере, одна точка $N_0(x_0,y_0)$, такая, что для всех других точек области

$$f(x,y) \le f(x_0, y_0) = M,$$

и, по крайней мере, такая одна точка $N_0'(x_0',y_0')$, что для всех $(x,y)\in G$

$$f(x,y) \ge f(x_0', y_0') = m.$$

Здесь M, m – наибольшее и наименьшее значения функции в области G. Следовательно, непрерывная в замкнутой ограниченной области G функция достигает, по крайней мере, один раз наибольшего значения M и наименьшего – m.

2. Если $f(x,y)$ непрерывна в замкнутой и ограниченной области G, то для любого числа μ, такого, что

$$m < \mu < M,$$

найдется точка $(x_0, y_0)\in G$, что

$$f(x_0, y_0) = \mu.$$

Если $f(x,y)$ непрерывна в замкнутой и ограниченной области и принимает как положительные, так и отрицательные значения, то внутри G найдутся точки, в которых $f(x,y)=0$.

Частные производные

По определению частная производная по x функции $f(x,y)$ есть

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta_x z}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x}.$$

Частная производная по y:

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta_y z}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x, y + \Delta y) - f(x, y)}{\Delta y}.$$

Как видим, частная производная по x функции $f(x,y)$ есть производная $f(x,y)$ по x, вычисленная в предположении, что y – постоянная. Аналогично находится $\frac{\partial z}{\partial y}$.

Например, для $z = \sin y \cdot \ln x$ имеем:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \sin y \frac{\partial}{\partial x}(\ln x) = \sin y \cdot \frac{1}{x};$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}(\sin y) \ln x = \cos y \cdot \ln x.$$

Полный дифференциал и его связь с частными производными

Определение. Функция $z = f(x, y)$, для которой приращение $\Delta z(x, y)$ может быть представлено в виде суммы двух слагаемых: выражения, линейного относительно Δx и Δy, и бесконечно малой величины высшего порядка относительно $\Delta \rho$, называется *дифференцируемой в точке* (x,y), а линейная часть приращения

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} \Delta y = dz \ (= df)$$

называется *полным дифференциалом* функции $f(x,y)$ в точке (x,y).

Если $f(x,y)$ имеет непрерывные частные производные в точке (x,y), то она дифференцируема в этой точке и имеет полный дифференциал

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy;$$

где dx, dy – дифференциалы независимых переменных x и y .

Например, для $z = x^2 y$ имеем: $dz = 2xydx + x^2 dy$.

Теорема. Полный дифференциал функции $z = f(x, y)$ при $x=x_0$, $y=y_0$ изображается приращением аппликаты точки касательной плоскости, проведенной к поверхности $z = f(x, y)$ в ее точке $M_0(x_0, y_0, z_0)$.

При малых Δx и Δy справедливо:

$$f\left(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y\right) \approx f\left(x_0, y_0\right)+\frac{\partial f}{\partial x}\Big|_{\substack{x_0\\y_0}} \Delta x+\frac{\partial f}{\partial y}\Big|_{\substack{x_0\\y_0}} \Delta y .$$

Соотношение часто используется при *приближенных вычислениях значений функции* $z=f(x, y)$.

Производные и дифференциалы высших порядков

Если $z=f(x, y)$ имеет частные производные

$$\frac{\partial z}{\partial x}=f_x'(x, y),$$
$$\frac{\partial z}{\partial y}=f_y'(x, y).$$

которые в свою очередь имеют частные производные, то *они называются частными производными второго порядка* и:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right), \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right);$$
$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right), \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right).$$

Дифференцируя производные второго порядка, получим производные третьего порядка; *частная производная n-го порядка* есть первая производная от производной $(n-1)$-го порядка.

Так, производная третьего порядка $\dfrac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2}$ функции $z=x^2 y+y^3$ последовательно определится в виде:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=2 x y, \quad \frac{\partial z}{\partial y}=x^2+3 y^2 .$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=2 y, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=6 y ; \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=2 x, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)=2 x .$$

$$\frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\right)=\frac{\partial}{\partial y}(2 x)=0 .$$

Теорема. Если функция $z=f(x,y)$, ее частные производные $\frac{\partial z}{\partial x},\frac{\partial z}{\partial y}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y},\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}$ определены и непрерывны в точке $M(x,y)$ и *в некоторой окрестности этой точки*, то в этой точке

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}.$$

Непосредственно из теоремы следует, что если $\frac{\partial^n z}{\partial x^k\partial y^{n-k}}$ и $\frac{\partial^n z}{\partial y^{n-k}\partial x^k}$ непрерывны, то они равны между собой.

Аналогичная теорема справедлива для функций любого числа переменных.

Производная сложной функции

Для дифференцируемой функции $z=f(u,v)$, где $u=u(x)$, $v=v(x)$ – также дифференцируемые, имеем:

$$z=f\big(u(x),v(x)\big)=F(x),$$

$$\frac{dz}{dx}=\frac{dF}{dx}=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{du}{dx}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{dv}{dx}.$$

Производная $\frac{dz}{dx}$ называется полной производной (не путать с частной производной $\frac{\partial z}{\partial x}$!); приведенная формула является обобщением правила дифференцирования сложной функции одной переменной.

Если $z=f(u,v)$; $u=u(x,y)$; $v=v(x,y)$, то

$$z=F(x,y);$$

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial F}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial F}{\partial y}=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}.$$

Так, из $z=e^{xy}\sin(x+y)$ следует $z=e^u\sin v$; $u=xy$; $v=x+y$;

$$\frac{\partial z}{\partial x}=e^u\sin v\cdot y+e^u\cos v\cdot 1=e^{xy}[\sin(x+y)y+\cos(x+y)].$$

Аналогично определится $\frac{\partial z}{\partial y}$.

Инвариантность формы полного дифференциала

Теорема. Полный дифференциал функции $z = f(u,v)$ сохраняет один и тот же вид, независимо от того, являются ли ее аргументы *u,v* независимыми переменными или функциями от независимых переменных.

$$dz = \frac{\partial z}{\partial u}du + \frac{\partial z}{\partial v}dv.$$

Указанное свойство справедливо и для функций n независимых переменных.

Свойства дифференциала

Для любых двух функций u и v, имеющих непрерывные частные производные в точке x, справедливы следующие свойства:

1) $d(u \pm v) = du \pm dv$;
2) $d(uv) = udv + vdu$;
3) $d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{vdu - udv}{v^2}$, $v \neq 0$.

Предполагается, что частные производные от функций, стоящих в скобках (слева), непрерывны в точке x.

Дифференцирование неявных функций

Неявная функция одного переменного определяется уравнением $F(x,y)=0$ (в общем случае оно может и не определять функцию, например, уравнение $x^2 + y^2 + 5 = 0$).

Теорема. Если $F(x,y)$ непрерывна вместе со своими частными производными в окрестности точки $M_0(x_0,y_0)$; $F(x_0,y_0)=0$, $F'_y(x_0,y_0) \neq 0$, то уравнение $F(x,y)=0$ при значениях x, близких к x_0, имеет единственное непрерывно зависящее от x решение $y = \varphi(x)$ такое, что $\varphi(x_0) = y_0$.

Функция $y = \varphi(x)$ имеет также непрерывную производную.

Если $F(x,y)=0$ определяет неявную функцию $y=\varphi(x)$, то должны иметь:

$$F(x,\varphi(x))\equiv 0;$$

$$\frac{dF}{dx}=\frac{\partial F}{\partial x}\cdot 1+\frac{\partial F}{\partial y}\frac{dy}{dx}=0. \Rightarrow$$

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{F'_x}{F'_y}.$$

Здесь $\dfrac{dy}{dx}$ не существует при $F'_y=0$. Но при $F'_y=0$ не гарантируется и само существование неявной функции.

Пример.

$$x^2+y^2-1=0.$$

$$F(x,y)=x^2+y^2-1.$$

$$\frac{\partial F}{\partial x}=2x,\ \frac{\partial F}{\partial y}=2y.$$

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{2x}{2y}=-\frac{x}{y},\ \ (y\neq 0).$$

Если $F(x,y,z)=0$ определяет z как некоторую функцию

$$z=\varphi(x,y),$$

то аналогично

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F'_x}{F'_z};\ \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F'_y}{F'_z}.$$

Геометрические приложения дифференциального исчисления функций двух переменных

Уравнение касательной плоскости в точке $M_0(x_0,y_0,f(x_0,y_0))$

$$z-z_0=f'_x(x_0,y_0)(x-x_0)+f'_y(x_0,y_0)(y-y_0).$$

Нормальный вектор $\vec{N}=\left(f'_x,f'_y,-1\right)$.

Уравнение нормали определится как уравнение прямой, проходящей через точку $M_0(x_0,y_0,f(x_0,y_0))$ и имеющей направляющим вектором $\vec{a}=\vec{N}=\left(f'_x,f'_y,-1\right)$.

Пусть теперь поверхность задана не в виде $z = f(x, y)$, а *неявно уравнением*

$$F(x, y, z) = 0.$$

Если выполнены условия теоремы существования неявной функции в окрестности точки $M_0(x_0, y_0, z_0)$, то определяется неявная функция $z = f(x, y)$ и

$$f'_x(x_0, y_0) = -\frac{F'_x(x_0, y_0, z_0)}{F'_z(x_0, y_0, z_0)};$$

$$f'_y(x_0, y_0) = -\frac{F'_y(x_0, y_0, z_0)}{F'_z(x_0, y_0, z_0)}.$$

Тогда, подставляя значения $f'_x(x_0, y_0)$, $f'_y(x_0, y_0)$ в приведенные выше уравнения, получим:

– *уравнение касательной плоскости*

$$\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_0 (x - x_0) + \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)_0 (y - y_0) + \left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)_0 (z - z_0) = 0.$$

(индексы “0” обозначают, что производные вычислены в точке при $x = x_0$, $y = y_0$, $z = z_0$);

– *уравнение нормали*

$$\frac{x - x_0}{\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_0} = \frac{y - y_0}{\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)_0} = \frac{z - z_0}{\left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)_0}.$$

Например, напишем уравнения касательной плоскости и нормали в точке $M_0\left(1,1,\sqrt{2}\right)$ для сферы $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ $\left(z = \pm\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}\right)$:

$$\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_{\substack{x=1\\ y=1\\ z=\sqrt{2}}} = 2; \quad \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)_{\substack{x=1\\ y=1\\ z=\sqrt{2}}} = 2; \quad \left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)_{\substack{x=1\\ y=1\\ z=\sqrt{2}}} = 2\sqrt{2}.$$

Откуда:

– уравнение касательной плоскости:

$$2\left[(x-1)+(y-1)+\sqrt{2}\left(z-\sqrt{2}\right)\right] = 0,$$

– уравнения нормали:

$$\frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-\sqrt{2}}{\sqrt{2}}.$$

Производная по направлению

Пусть дана гладкая кривая Г

$$x = x(t);$$
$$y = y(t);$$
$$z = z(t).$$

($x(t), y(t), z(t)$ имеют производные в точке t).

Рассмотрим дифференцируемую в точке (x,y,z) функцию трех переменных $u = u(x, y, z)$. По правилу дифференцирования сложной функции

$$u = u(x(t), y(t), z(t)) = F(t)$$

будем иметь:

$$\frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial u}{\partial z}\frac{dz}{dt}.$$

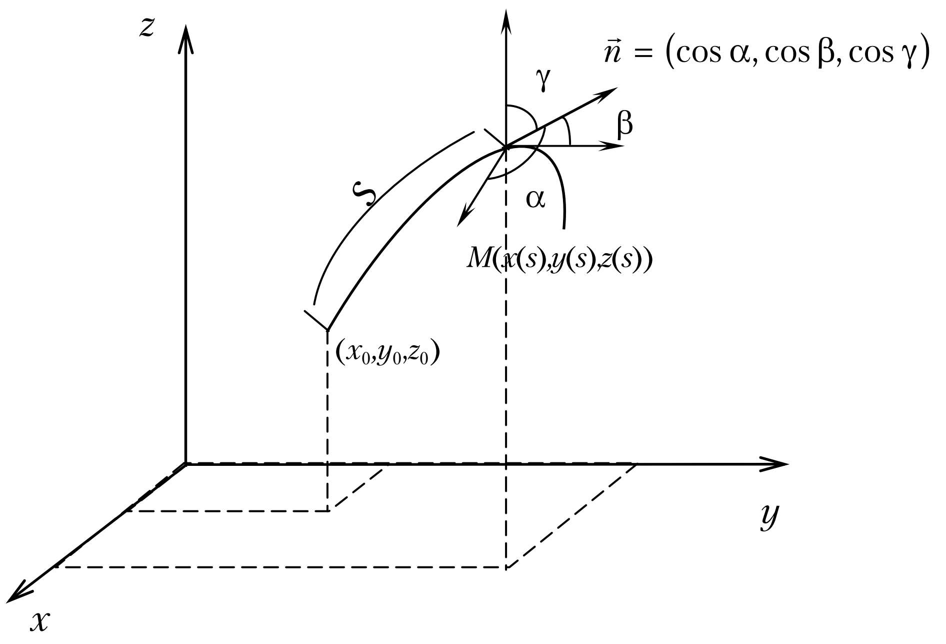
В частном случае, когда параметр t совпадает с длиной дуги s:

$$\frac{du}{ds} = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{dx}{ds} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{dy}{ds} + \frac{\partial u}{\partial z}\frac{dz}{ds}.$$

Из $ds = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}$ также следует:

$$\frac{dx}{ds} = \cos\alpha; \quad \frac{dy}{ds} = \cos\beta; \quad \frac{dz}{ds} = \cos\gamma,$$

где $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ – *направляющие косинусы направляющего вектора $\vec{n}$ касательной* к кривой Г в точке M.



Величина $\frac{du}{ds}=\frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta+\frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma$ называется *производной* функции $u(x,y,z)$ вдоль кривой Г или производной по направлению вектора $\vec{n}$.

Вектор

$$\overrightarrow{\mathrm{grad}\,u}=\left(\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial y},\frac{\partial u}{\partial z}\right),$$

называется *градиентом* функции $u(x,y,z)$.

Справедливо

$$\frac{du}{ds}=\left(\overline{\mathrm{grad}u},\vec{n}\right).$$

Экстремум функции нескольких переменных

Точка $P_0(x_0,y_0)$ называется *точкой экстремума* (максимума или минимума функции $z=f(x,y)$, если $f(x_0,y_0)$ есть соответственно наибольшее или наименьшее значение функции $f(x,y)$ в окрестности точки $P_0(x_0,y_0)$).

Значение $f(x_0,y_0)$ называется экстремальным значением.

По определению экстремума *точка экстремума лежит внутри области определения функции!*

Необходимый признак экстремума. Если в точке $P_0(x_0,y_0)$ функция имеет экстремум, то ее частные производные в этой точке равны нулю:

$$\frac{\partial z}{\partial x}\Big|_{\substack{x_0\\y_0}}=0;\quad \frac{\partial z}{\partial y}\Big|_{\substack{x_0\\y_0}}=0$$

или не существуют.

Точки, в которых $\frac{\partial z}{\partial x},\ \frac{\partial z}{\partial y}$ обращаются в нуль, называются *стационарными.*

Достаточные условия экстремума функции $z=f(x,y)$

Пусть $A=\left.\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right|_{\substack{x_0\\y_0}}$, $B=\left.\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\right|_{\substack{x_0\\y_0}}$, $C=\left.\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right|_{\substack{x_0\\y_0}}$.

Тогда, если $P_0(x_0,y_0)$ – стационарная точка, то при:

1. $B^2-AC<0$ точка P_0 – точка экстремума:

– максимум при A<0, C<0,

– минимум при $A>0$, $C>0$;

2. $B^2 - AC > 0$ точка P_0 не является точкой экстремума;
3. $B^2 - AC = 0$ никакого заключения о характере стационарной точки сделать нельзя (требуются дополнительные исследования).

Условный экстремум

На линии L, определяемой в плоскости xOy уравнением $\phi(x,y)=0$ (*уравнение связи*), найдем точку $P(x,y)$, в которой функция $z=f(x,y)$ принимает наибольшее или наименьшее значения по сравнению со значениями этой функции в точках линии L, находящихся вблизи точки P. Такие точки называются *точками условного экстремума* функции $f(x,y)$ на линии L.

Для определения точек условного экстремума часто используется *метод множителей Лагранжа*. Здесь отыскание условного экстремума сводится к исследованию на обычный экстремум так называемой функции Лагранжа $\Phi(x,y)=f(x,y)+\lambda\varphi(x,y)$, где λ – неопределенный постоянный множитель.

Возможные точки условного экстремума определятся из необходимых условий экстремума функции Лагранжа:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial\Phi}{\partial x} \equiv \dfrac{\partial f}{\partial x} + \lambda\dfrac{\partial\varphi}{\partial x} = 0, \\ \dfrac{\partial\Phi}{\partial y} \equiv \dfrac{\partial f}{\partial y} + \lambda\dfrac{\partial\varphi}{\partial y} = 0, \\ \varphi(x,y) = 0. \end{cases}$$

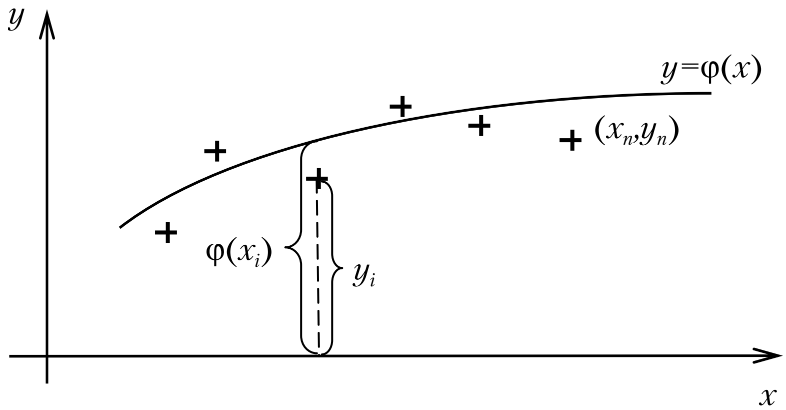
(достаточные условия не приводятся).

Задачи о наибольших и наименьших значениях функции

Для того чтобы найти наибольшее и наименьшее значения функции $z=f(x,y)$ в замкнутой области, нужно найти все максимумы или минимумы функции, достигаемые внутри этой области, а также наибольшее или наименьшее значения функции на границе области (наибольшее из всех этих чисел и будет искомым наибольшим значением, а наименьшее – наименьшим).

Метод наименьших квадратов

Метод наименьших квадратов (МНК) состоит в выборе функции $y = \varphi(x)$ из условия минимума $I = \sum_{i=1}^{n} \left[y_i - \varphi(x_i) \right]^2$ по точкам (x_i, y_i), где y_i – полученные экспериментально значения y в точке x_i.



Если по результатам наблюдений определяются наиболее вероятные значения коэффициентов полинома

$$y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_m x^m \quad \left(y = \varphi(x)\right),$$

$a_0, a_1, a_2, \ldots, a_m$ находятся из условия

$$\sum_{i=1}^{n} \left[y_i - \left(a_0 + a_1 x_i + a_2 x_i^2 + \ldots + a_m x_i^m \right) \right]^2 = \min,$$

то есть из условий минимума функции многих переменных

$$\Phi(a_0, \ldots, a_m) = \sum_{i=1}^{n} \left[y_i - \left(a_0 + a_1 x_i + a_2 x_i^2 + \ldots + a_m x_i^m \right) \right]^2,$$

зависящей от $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_m$ (x_i, y_i – известные числа).

Для определения стационарных точек этой функции следует приравнять частные производные относительно $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_m$ нулю:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \Phi}{\partial a_0} = \sum\limits_{i=1}^{n} 2\left[y_i - \left(a_0 + a_1 x_i + a_2 x_i^2 + \ldots + a_m x_i^m \right) \right](-1) = 0; \\ \dfrac{\partial \Phi}{\partial a_1} = \sum\limits_{i=1}^{n} 2\left[y_i - \left(a_0 + a_1 x_i + a_2 x_i^2 + \ldots + a_m x_i^m \right) \right](-x_i) = 0; \\ \dfrac{\partial \Phi}{\partial a_2} = \sum\limits_{i=1}^{n} 2\left[y_i - \left(a_0 + a_1 x_i + a_2 x_i^2 + \ldots + a_m x_i^m \right) \right](-x_i^2) = 0; \\ \ldots \\ \dfrac{\partial \Phi}{\partial a_m} = \sum\limits_{i=1}^{n} 2\left[y_i - \left(a_0 + a_1 x_i + a_2 x_i^2 + \ldots + a_m x_i^m \right) \right](-x_i^m) = 0. \end{cases} \Rightarrow$$

Откуда

$$\begin{cases} a_0 n + a_1 \sum_{i=1}^{n} x_i + a_2 \sum_{i=1}^{n} x_i^2 + \ldots + a_m \sum_{i=1}^{n} x_i^m = \sum_{i=1}^{n} y_i\,; \\ a_0 \sum_{i=1}^{n} x_i + a_1 \sum_{i=1}^{n} x_i^2 + a_2 \sum_{i=1}^{n} x_i^3 + \ldots + a_m \sum_{i=1}^{n} x_i^m = \sum_{i=1}^{n} y_i\, x_i; \\ \ldots \\ a_0 \sum_{i=1}^{n} x_i^m + a_1 \sum_{i=1}^{n} x_i^{m+1} + a_2 \sum_{i=1}^{n} x_i^{m+2} + \ldots + a_m \sum_{i=1}^{n} x_i^{2m} = \sum_{i=1}^{n} y_i\, x_i^m. \end{cases}$$

В частном случае при сглаживании полиномом

$$y = ax + b$$

(здесь $a_0 = b,\ a_1 = a,\ m = 1$) a_0, a_1 определятся из системы уравнений

$$a_0 n + a_1 \sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{i=1}^{n} y_i$$

$$a_0 \sum_{i=1}^{n} x_i + a_1 \sum_{i=1}^{n} x_i^2 = \sum_{i=1}^{n} y_i x_i.$$

Варианты тестовых заданий по модулю 2

Вариант 1

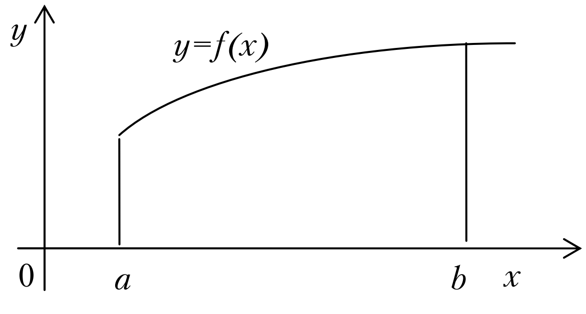
1. Дана функция $f(x) = x^2$. Найти множество $f\big([-1, 2]\big)$

1) $[0, 4]$; 2) $[1, 2]$; 3) $(0, 2]$; 4) $(1, 4]$.

2. Предел $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^4 - 16}{\sqrt{x} - \sqrt{2}}$ равен

1) 64; 2) $64\sqrt{2}$; 3) $48\sqrt{2}$; 4) 48.

3. График



задает на отрезке $[a,b]$ функцию, удовлетворяющую условиям

1) $y>0,\ y'>0,\ y''<0$; 2) $y>0,\ y'>0,\ y''>0$;

3) $y>0,\ y'<0,\ y''<0$; 4) $y>0,\ y'<0,\ y''>0$.

4. Число точек разрыва функции $f(x)=\dfrac{1}{x^2(x-1)(x+2)}$ равно:

1) 2; 2) 3; 3) 4; 4) 0.

5.Если $U=x^{y^2}+z^3$, то U'_x в точке $M(2,1,0)$ равна

1) -2; 2)2; 3) -1; 4) 1.

6. Сумма всех действительных корней многочлена $p(x)=x^3(x+4)(x+3)+(x+4)(x+3)$ равна...

1) 7; 2) -7; 3) -8; 4) 0.

7. Максимум функции $f(x)=2x^3+15x^2+36x$ равен ...

1) -3; 2) -27; 3) 0; 4) 36.

8. Какое из следующих равенств верно для функции $z=5x^2+6y^2-12xy+7$?

1) $\dfrac{\partial z}{\partial x}+\dfrac{\partial z}{\partial y}=-2x$; 2) $\dfrac{\partial z}{\partial x}+\dfrac{\partial z}{\partial y}=0$;

3) $\dfrac{\partial z}{\partial x}-\dfrac{\partial z}{\partial y}=-2x$; 4) $\dfrac{\partial z}{\partial x}+\dfrac{\partial z}{\partial y}=2x+3y$.

9. Установите соответствие между функцией и её областью определения...

1. $y=\operatorname{tg}x$	A) $(-\infty;\infty)$
2. $y=\sqrt[5]{x}$	B) $[-5;5]$
3. $y=\sqrt[4]{25-x^2}$	C) $x\neq\dfrac{\pi}{2}+\pi n, n\in Z$

10. Производная второго порядка функции $y=\dfrac{x+1}{x-6}$ равна...

1) $y=\dfrac{14}{(x-6)^3}$; 2) $y=-\dfrac{7}{(x-6)^2}$; 3) $y=\dfrac{7}{(x-6)^3}$; 4) $y=-\dfrac{14}{(x-6)^3}$.

Вариант 2

1. Функция $y = 3^x + 7$ отображает множества $[1;\quad 2]$ на множество

1) $[3;7]$; 2) $(3;7)$; 3) $[10;16]$; 4) (10:16).

2. Предел $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3n^2+5n+7}{4-6n^2}$ равен

1) 2; 2) -2; 3) 1; 4) -0.5.

3. График какой функции на всем отрезке $[a;b]$ одновременно удовлетворяет трем условиям: $y>0,\quad y'<0,\quad y''>0$?

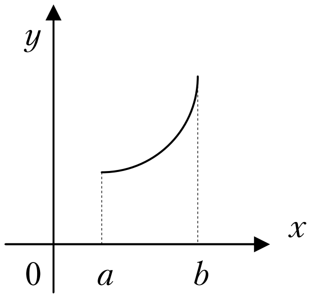


Рис.1

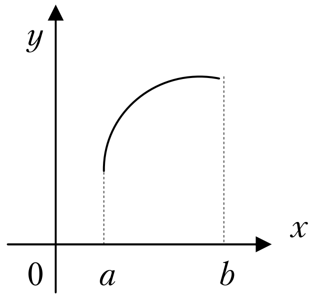


Рис.2

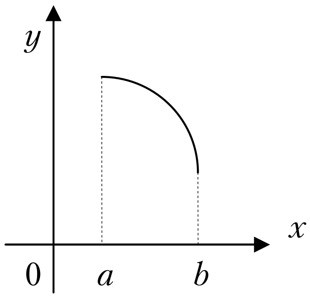


Рис.3

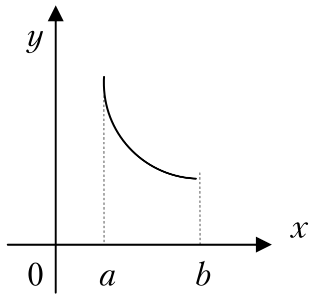


Рис.4

1)все графики; 2) 1 и 4; 3) 3; 4) 4.

4. Если $U = \mathrm{arctg}(x^2+y^2) + 2e^z$, то $U'y$ в точке $M(1;1;0)$ равна

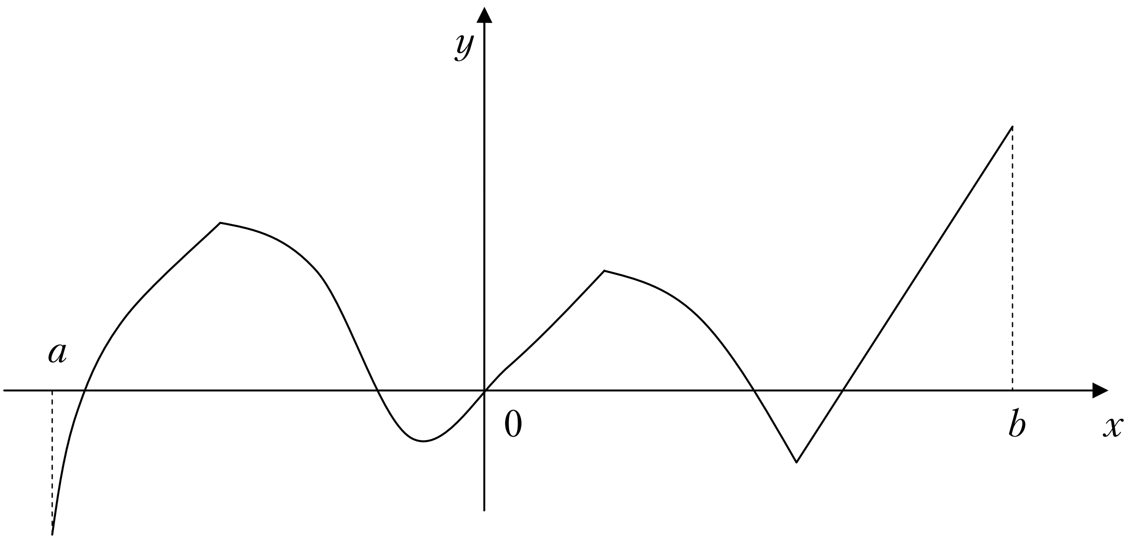
1) $\dfrac{2}{5}$; 2) $\dfrac{5}{2}$; 3) 2; 4) $\dfrac{4}{5}$.

5. Конечный предел при $x \to +\infty$ имеют следующие функции...

1) $f(x) = \dfrac{2x^2 + 7x - 4}{5 - 3x^2}$; 2) $f(x) = \dfrac{\sqrt{2x+1}}{1+\sqrt{x}}$;

3) $f(x) = \dfrac{4x^3 - 4}{15 - 3x^2}$; 4) $f(x) = \dfrac{\sqrt{x^6 + 8x - 5}}{4 - 3x}$.

6. Функция задана графически. Определите количество точек, принадлежащих интервалу $(a;\ b)$, в которых не существует производная этой функции.

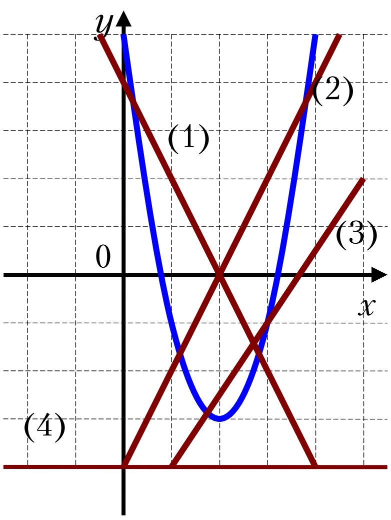


1) 5; 2) 2; 3) 4; 3) 3.

7. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin 4x}{2x}$ равен:

1) 1; 2) 2; 3) 3; 4) 4.

8. На рисунке изображен график функции $f(x) = ax^2 + bx + c$ и четыре прямые. Одна из этих прямых – график производной функции. Укажите номер этой прямой.



1) 1; 2) 2; 3) 3; 4) 4.

9. Для функции $z=4x^3-5y^2+6x^2y-7y+34$ укажите верное утверждение:

1) $\frac{\partial z}{\partial x}=12x^2$; 2) $\frac{\partial z}{\partial y}=-10y$;

3) $\frac{\partial z}{\partial x}-12xy=12x^2$; 4) $\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial y}=12x^2-10y$.

10. Точка минимума функции $f(x)=2x^3+15x^2+36x$ равна...

1) -3; 2) -2; 3) 0; 4) 36.

Вариант 3

1. Функция $y=2^x-5$ отображает множества $[1;\ \ 2]$ на множество

1) $[-4;-1]$; 2) $(-3;-1)$; 3) $[-3;-1]$; 4) $(-4;-1]$.

2. Предел $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n^2-5n+3}{2-n^2}$ равен

1) 2; 2) -2; 3) 1; 4) -1.

3. Если $U=\ln\left(2x-3y^2+5z^3\right)$, то $U'y$ в точке $M(1;-2;2)$ равна

1) 0,4; 2) $-\frac{6}{\ln 30}$; 3) $\frac{6}{\ln 30}$; 4) $\frac{12}{\ln 30}$.

4. Для функции $z=5x^3+4y^2-x^3y^2+4xy$ укажите верное утверждение:

1) $\frac{\partial z}{\partial x}=15x^2$; 2) $\frac{\partial z}{\partial y}=8y$;

3) $\frac{\partial z}{\partial x}+3x^2y^2=15x^2+4y$; 4) $\frac{\partial z}{\partial y}+2x^3y=12x^2-10y$.

5. Предел $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^2-3n^3+5}{n^3+4}$ равен

1) 1; 2) $\frac{5}{4}$; 3) -3; 4) 0.

6. График какой функции на всем отрезке $[a;b]$ одновременно удовлетворяет трем условиям: $y>0,\quad y'<0,\quad y''>0$?

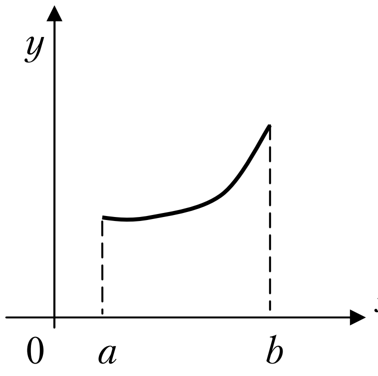


Рис. I

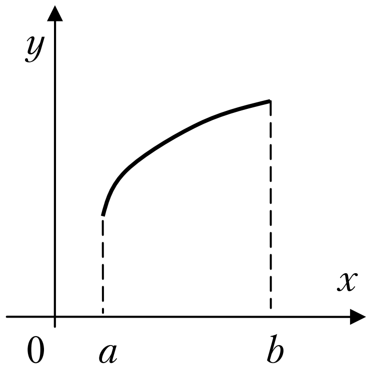


Рис. II

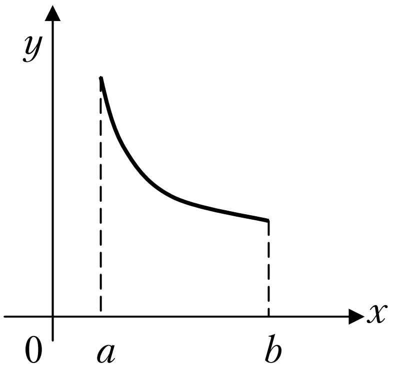


Рис. III

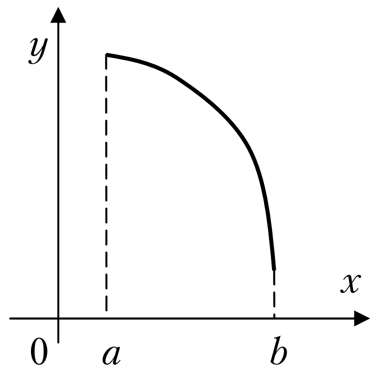


Рис. IV

1) только II и III; 2) только IV; 3) только III; 4) все графики.

7. Если $U=\sqrt{xy}\cdot\cos(z)$, то $U'x$ в точке $M\left(1;1;\frac{\Pi}{3}\right)$ равна

1) 2; 2) $\frac{1}{4}$; 3) П; 4) −2.

8. Число точек разрыва 2-го рода функции $y=\dfrac{x+5}{(x-6)^2(x+1)^3x}$ равно...

1) 1; 2) 2; 3) 6; 4) 3.

9. Точка максимума функции $f(x)=2x^3+15x^2+36x$ равна...

1) -3; 2) -27; 3) 0; 4) 36.

10. Горизонтальная асимптота графика функции $f\left(x\right)=\dfrac{3-4x-2x^2}{3x^2+x+5}$ задается уравнением вида...

1) $y=\dfrac{1}{2}x+3$; 2) $y=\dfrac{2}{3}$; 3) $y=1$; 4) $y=-\dfrac{2}{3}$.

Вариант 4

1. Функция $y = 3^x - 2$ отображает множество $\left[2;3\right]$ на множество

1) $(3;2)$; 2) $[3;2]$; 3) $[7;25]$; 4) $[9;24)$.

2. Предел $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3n^2-2n+1}{5n-n^2}$ равен

1) 2; 2) 3; 3) -3; 4) -1.

3. График какой функции на всем отрезке $\left[a;b\right]$ одновременно удовлетворяет трем условиям: $y > 0$, $y' > 0$, $y'' < 0$?

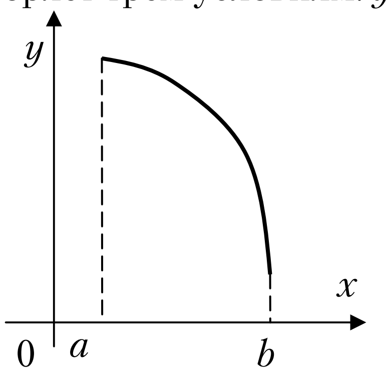


Рис.1

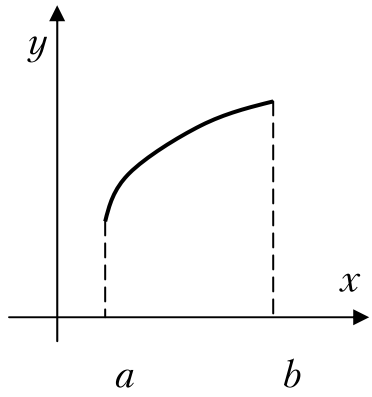


Рис.2

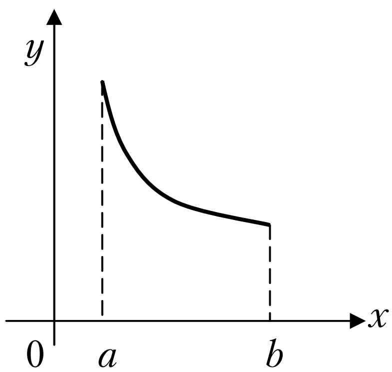


Рис.3

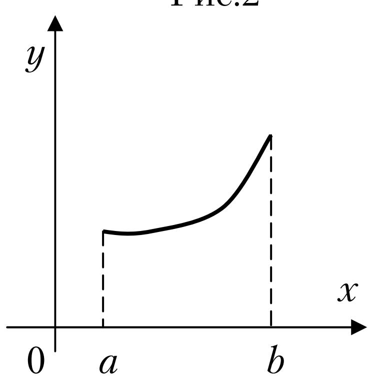


Рис.4

1) только 2; 2) 1 и 2; 3) все графики; 4) только 3.

4. Если $z = \operatorname{arctg}\dfrac{x}{y}$, то $z_x{}'$ в точке $M(-4;3)$ равна

1) 1; 2) π; 3) 0,12; 4) 1,2.

5. Для функции $z = 3y^3 + 5xy^2 - 7x + 8$ укажите верное утверждение:

1) $\dfrac{\partial z}{\partial y} = 9y^2$; 2) $\dfrac{\partial z}{\partial x} - \dfrac{\partial z}{\partial y} = 27y^2 - 7$;

3) $\dfrac{\partial z}{\partial x} = -7$; 4) $\dfrac{\partial z}{\partial y} = 9y^2 + 10xy$.

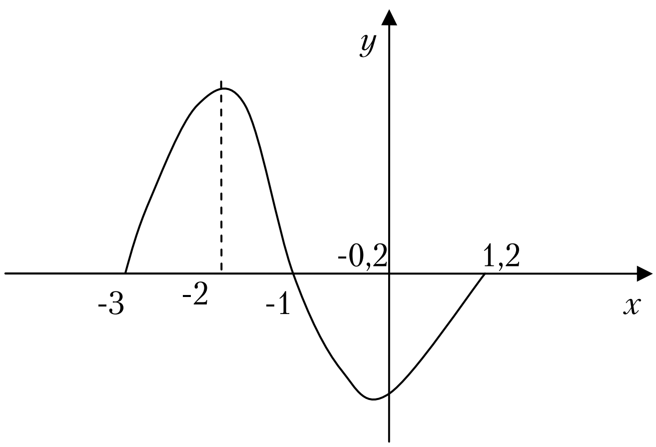
6. Сколько точек разрыва у функции $y = \dfrac{x-5}{(x-5)^2(x+1)^3 x}$?

1) 1; 2) 2; 3) 6; 4) 3.

7. Предел $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{7n^2+3n-1}{7-n^2}$ равен

1; 2) –7; 3) 7; 4) –1.

8. Функция $y = f(x)$ задана графиком на промежутке $[-3;1,2]$



Установите соответствие между заданными условиями и промежутками.

1) $y \ge 0, y' \ge 0, y'' \le 0$	A) $[-0,2, 1,2]$
2) $y \le 0, y' \ge 0, y'' \ge 0$	B) $[-1, -0,2]$
3) $y \le 0, y' \le 0, y'' \ge 0$	C) $[-3, -2]$

9. Если $U=\ln\left(2x-5y^2+2z^3\right)$, то $U'y$ в точке $M\left(1;0;5\right)$ равна

1) 0; 2) $\ln 252$; 3) $-\ln 252$; 4) 1.

10. Горизонтальная асимптота для графика функции $y=\dfrac{3-x^2}{4x^2+2x+3}$ имеет вид...

1) $x=-\dfrac{1}{4}$; 2) $y=-\dfrac{1}{4}$; 3) $y=-4$; 4) $y=\dfrac{3}{4}$.

Вариант 5

1. Функция $y = 3^x - 2$ отображает множество $\left[2;3\right]$ на множество

1) $\left(3;2\right)$; 2) $\left[3;2\right]$; 3) $\left[7;25\right]$; 4) $\left[9;24\right)$.

2. Предел $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3n^2-2n+1}{5n-n^2}$ равен

1) 2; 2) 3; 3) -3; 4) -1.

3. Предел $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg}2x}{\sin 3x}$ равен:

1) $\dfrac{2}{3}$; 2) $\dfrac{1}{6}$; 3) $\dfrac{3}{2}$; 4) 6.

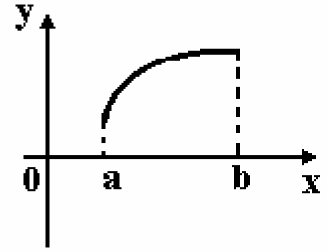
4. Производная функции $y=\cos(x^2-1)$ имеет вид:

1) $2x\sin(x^2-1)$; 2) $x\sin(x^2-1)$;

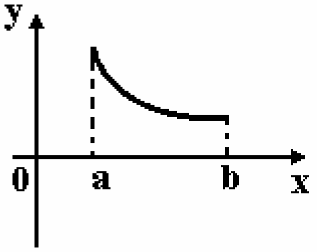
3) $-2x\sin(x^2-1)$; 4) $-\sin(x^2-1)$.

5. Укажите вид графика функции, для которой на всем отрезке [a;b] одновременно выполняются условия. $y>0, y'<0, y''<0$

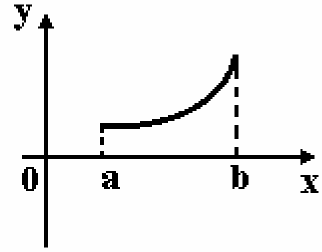
1)



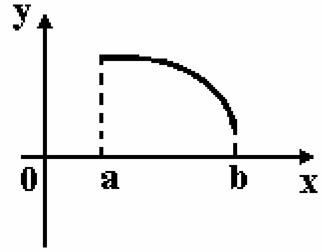
2)



3)



4)



6. Частная производная функции $z = x^4 \cos y$ по переменной y в точке $M\left(1; \frac{\pi}{2}\right)$ равна:

1) 1; 2) -1; 3) 0; 4) 4.

7. Градиент скалярного поля $u = x^2 - xz + yz$ в точке A(0; 1; 1) имеет вид:

1) $\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$; 2) $-\vec{i} + \vec{j} + 2\vec{k}$; 3) $-\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$; 4) $-\vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k}$.

8. Производная скалярного поля $u = x^2 + 2yx - 4y$ в точке C(-1;-1) в направлении единичного вектора $\vec{e}\,(1;0)$ равна:

1) 1; 2) -10; 3) -4; 4) -6.

9. Горизонтальная асимптота для графика функции $y = \dfrac{5 - 8x^2}{2x^2 + 2x + 3}$ имеет вид...

1) $x = -\dfrac{1}{4}$; 2) $y = -\dfrac{1}{4}$; 3) $y = -4$; 4) $y = \dfrac{3}{4}$.

10. Минимум функции $f(x) = 2x^3 + 15x^2 + 36x$ равен ...

1) -3; 2) -28; 3) 0; 4) -36.

Вариант 6

1. Вычислите предел $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^3 - x^2 + x - 1}{x^2 - 4x + 3}$

1)-1; 2)∞; 3)$-\dfrac{1}{3}$; 4) 1.

2. Вычислите предел $\lim\limits_{x\to 2}\left(\dfrac{4}{x^2-4}-\dfrac{1}{x-2}\right)$.

1) 0; 2) $-\dfrac{1}{4}$; 3) $\dfrac{1}{4}$; 4) $\dfrac{1}{2}$.

3. Для функции $y=\ln(x^2-4x+4)$ уравнение касательной в точке $x_0=3$ имеет вид:

1) $2x-y-6=0$; 2) $2x-y+3=0$; 3) $x-y-3=0$; 4) $2x+y+6=0$.

4. Дифференциал функции $y=x\ln x$ равен

1) $\dfrac{1}{x}dx$; 2) xdx; 3) $\ln xdx$; 4) $(\ln x+1)dx$.

5. Если $U=\ln\left(x+\dfrac{y}{2z}\right)$, то U'_x в точке $M_0(1, 2, 1)$

1) 1; 2) 0,25; 3) 0,5; 4) -0,5.

6. Частная производная $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ функции $z=2x^3y^2+5x-2y+3$ имеет вид...

1) $6x^2y^2+5$; 2) $2x^2y^2+5$; 3) $6x^2y^2-2$; 4) $12x^2y^2$.

7. Горизонтальная асимптота графика функции $f(x)=\dfrac{3-4x-2x^2}{3x^2+x+5}$ задается уравнением вида...

1) $y=\dfrac{1}{2}x+3$; 2) $y=\dfrac{2}{3}$; 3) $y=1$; 4) $y=-\dfrac{2}{3}$.

8. Найти производную функции $y=x^{\ln 2x}$

1) $y=\left(\ln 2x^2\right)x^{\ln 2x-1}$; 2) $y=(\ln x)x^{\ln 2x}$;

3) $y=x^{\ln 2x-1}(\ln 2+2\ln x)$; 4) $y=x^{\ln 2x}(\ln x+\ln 2x)$.

9. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $y=x^2-2x+3$ на отрезке $x\in[-1;2]$.

1) $\begin{cases} y_{\min}=0 \\ y_{\max}=6 \end{cases}$ 2) $\begin{cases} y_{\min}=2 \\ y_{\max}=6 \end{cases}$ 3) $\begin{cases} y_{\min}=0 \\ y_{\max}=3 \end{cases}$ 4) $\begin{cases} y_{\min}=3 \\ y_{\max}=3 \end{cases}$.

10. Точка максимума функции $f(x)=2x^3+15x^2+36x$ равна..

1) -3; 2) -2; 3) 0; 4) 36.

Вариант 7

1. Множеством значений функции $y=-2^x$ является промежуток

1) $(-\infty;\,2)$; 2) $(-\infty;\,\infty)$; 3) $(-\infty;\,0)$; 4) $(-\infty;\,0]$.

2. Предел $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{6n^2+2}{1-7n^2}$ равен...

1) $\dfrac{6}{7}$; 2) $-\infty$; 3) ∞; 4) $-\dfrac{6}{7}$

3. Производная функции $y=\cos^3 2x$ равна

1) $3\sin^2 2x$; 2) $-6\cos^2 2x\sin 2x$;

3) $6\cos^2 2x\sin 2x$; 4) $6\sin^2 2x$.

4. Найти экстремум функции $y=x\ln x$.

1) $\dfrac{1}{e}$; 2) e; 3) 1; 4) экстремума нет.

5. Точка максимума функции $f(x)=2x^3+15x^2+36x$ равна..

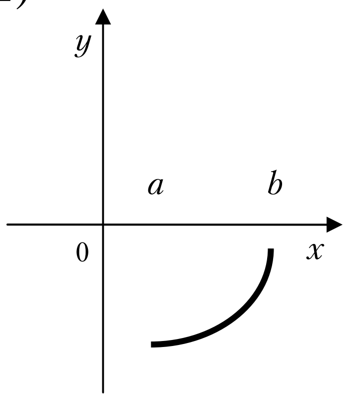
1) -3; 2) -2; 3) 0; 4) 36.

6. Предел $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1-3n^3}{4+n+n^2-3n^3}$ равен

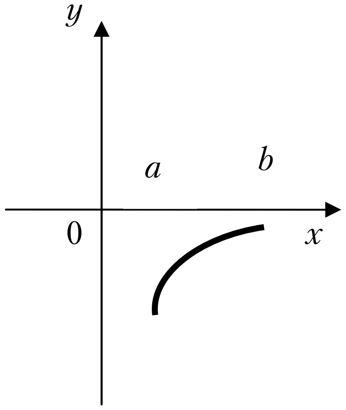
1) 2; 2) -1; 3) 1; 4) -3.

7. График какой функции на всем отрезке $[a;b]$ одновременно удовлетворяет трем условиям: $y<0,\quad y'<0,\quad y''>0$?

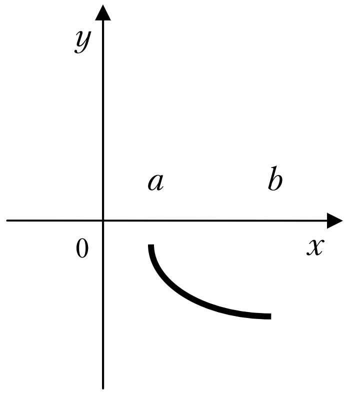
1)



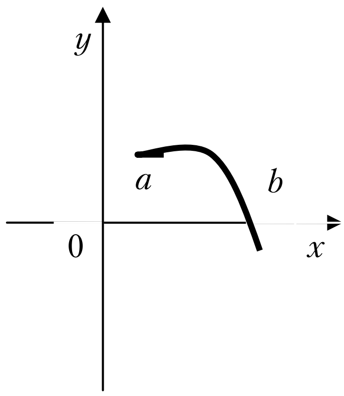
2)



3)



4)



1) только 1; 2) только 2; 3) только 3; 4) только 1 и 2.

8. Если $U=\ln\left(3x-y^2+2z^3\right)$, то $U'z$ в точке $M(1;0;1)$ равно

1) $\frac{1}{3}$; 2) 3; 3) 5; 4) $\frac{6}{5}$.

9. Если $z=x^2-5xy+2y^2-2$, тогда градиент z в точке $A(1;1)$ равен

1) $3\overline{i}+\overline{j}$; 2) $\overline{i}+\overline{j}$; 3) $-3\overline{i}-\overline{j}$; 4) -4.

10. Какое из следующих равенств верно для функции $z=5x^2+6y^2-12xy+7$?

1) $\frac{\partial z}{\partial x}-\frac{\partial z}{\partial y}=-2x$; 2) $\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial y}=0$;

3) $\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial y}=-2x$; 4) $\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial y}=2x+3y$.

Вариант 8

1. Предел $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-5x+4}{x^2-7x+6}$ равен

1) 0; 2) ∞; 3) 1; 4) $\dfrac{3}{5}$.

2. Предел $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2 x}{x^2}$ равен

1) 0; 2) ∞; 3) 1; 4) 2.

3. Угол наклона к оси Ox касательной к графику функции $y=e^{-\sin 3x}+\mathrm{tg}4x$ в точке $x=0$ равен:

1) 0°; 2) 45°; 3) 30°; 4) 90°.

4. Производная 3 порядка от функции $y=x\ln x$ равна:

1) $\ln x$; 2) x^2; 3) $x\ln x$; 4) $-\dfrac{1}{x^2}$.

5. Если $z=\ln(6x^2+2y\sqrt{y}+2)$, то $\dfrac{\partial z}{\partial y}$ в точке $A(2,4)$ равна

1) $\dfrac{1}{7}$; 2) 7; 3) 6; 4) 0.

6. Для функции $z=2x^3-4y^2+6x^2y-7y+28$ укажите верное утверждение:

1) $\dfrac{\partial z}{\partial x}=6x^2$; 2) $\dfrac{\partial z}{\partial x}-12xy=6x^2$;

3) $\dfrac{\partial z}{\partial x}+\dfrac{\partial z}{\partial y}=6x^2-8y$; 4) $\dfrac{\partial z}{\partial y}=-8y$.

7. Найти область определения функции $y=\dfrac{x}{x^2-3x-4}$

1) $(-\infty;-1)\cup(-1;4)\cup(4;\infty)$; 2) $(0;\infty)$;

3) $(-\infty;+\infty)$; 4) $(-\infty;0)\cup(0;\infty)$.

8. Предел $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x^2-5x+1}{3x+1}$ равен

1) $\dfrac{1}{3}$; 2) 0; 3) ∞; 4) -5.

9. Найти точки разрыва функции $y = e^{\frac{1}{x+1}}$

1) -1 ; 2) 0 ; 3) $-\frac{1}{2}$; 4) *функция непрерывна*.

10. Найти $y`$, если $y = \sin^3 x$

1) $3\sin^2 x \cdot \cos x$; 2) $3\sin x \cdot \cos x$; 3) $3\cos x$; 4) $-\sin x \cdot \cos x$.

Вариант 9

1. Предел $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{3x+2x^2+4+x^3}{3x^2+4x^3+2x+1}$ равен

1) 1; 2) $\frac{1}{2}$; 3) 2; 4) $\frac{1}{4}$.

2. Найти множество значений функции $f(x) = x^2 - 6x + 5$

1) $(-\infty;\infty)$; 2) $[-4;\infty)$; 3) $[0;\infty)$; 4) $[-4;4]$.

3. По параболе $y = (8-x)\cdot x$ движется точка так, что ее абсцисса изменяется в зависимости от времени t по закону $x = t\sqrt{t}$ (t – в секундах, x – в метрах). Какова скорость изменения ординаты в точке $M(1;7)$?

1) 8 м/с; 2) 9 м/с; 3) 1 м/с; 4) 3 м/с.

4. Для функции $z = 4x + 5y - x^2 + 2y^2 + 4xy^2$ укажите верное утверждение:

1) $\frac{\partial z}{\partial x} - 4y^2 = 0$; 2) $\frac{\partial z}{\partial y} = -4y + 5$;

3) $\frac{\partial z}{\partial x} - 4 + 2x = 4y^2$; 4) $\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} = 12x^2 - 10y$.

5. Точка минимума функции $f(x) = 2x^3 + 15x^2 + 36x$ равен...

1).-3; 2) -2; 3) 0; 4) 36.

6. Предел $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{2}{n}\right)^n$ равен

1) 2; 2) e; 3) e^2; 4) 1.

7. Производная функции $y=x\ln x$ в точке $x=e$ равна:

1) 1; 2) 0; 3) 2; 4) −1.

8. Частная производная функции $z = x^3 \sin y$ по переменной x в точке $M\left(1;\frac{\pi}{2}\right)$ равна:

1) 1; 2) -1; 3) 0; 4) 3.

9. Градиент скалярного поля $u = xy^2z$ в точке $M(1; 3; 2)$ имеет вид:

1) $(0,0,1)$; 2) $(18,12,9)$; 3) $(15,11,2)$; 4) $(18,6,9)$.

10. Точкой локального экстремума функции $f(x) = 3x^2 + 2y^2 - 12x + 8y + 7$ является

1) $(2;-2)$; 2) $(3;2)$; 3) $(0;2)$; 4) $(2;0)$.

Вариант 10

1. Функция $y = 2\sin^2 x$ отображает множество $[0;\pi/2]$ на множество

1) $[-2;2]$; 2) $[-1;1]$; 3) $[0;2]$; 4) $(0;1)$.

2. Предел $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3n^2-2n+1}{n^3-2n^2+1}$ равен

1) 2; 2) -2; 3) 0; 4) -1.

3. График какой функции на всем отрезке $[a;b]$ одновременно удовлетворяет трем условиям: $y > 0$, $y' > 0$, $y'' < 0$?

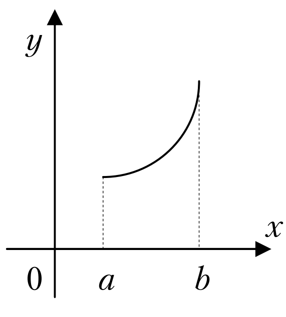


Рис.1

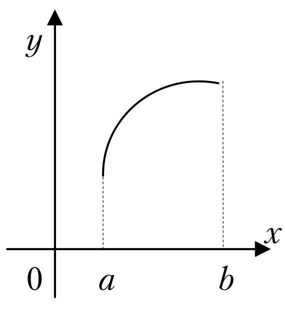


Рис.2

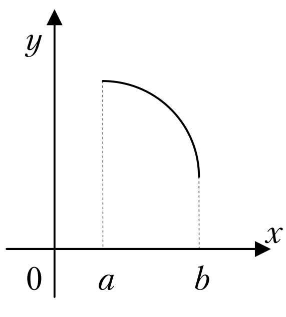


Рис.3

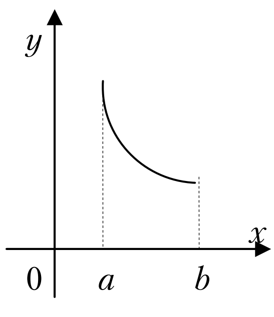


Рис.4

1) только 2; 2) 1 и 2; 3) все графики; 4) только 3.

4. Если $U = \sqrt{2x+3y^2+z^3}$, то $U_y{}'$ в точке $M(-1;1;2)$ равна

1) 1; 2) 4; 3) $\frac{2}{3}$; 4) $\frac{4}{3}$.

5. Для функции $z = 7x^4 - 3x^2y^2 + y^3 + 8x + 13$ укажите верное утверждение:

1) $\frac{\partial z}{\partial x} = 28x^3$; 2) $\frac{\partial z}{\partial y} = 3y^2$;

3) $\frac{\partial z}{\partial x} + 6xy^2 = 28x^3$; 4) $\frac{\partial z}{\partial y} + 6x^2y = 3y^2$.

6. Минимум функции $f(x) = 2x^3 + 15x^2 + 36x$ равен ...

1) -3; 2) -28; 3) 0; 4) -36.

7. Множеством значений функции $y = -2^x$ является промежуток

1) $(-\infty; 2)$; 2) $(-\infty; \infty)$; 3) $(-\infty; 0)$; 4) $(-\infty; 0]$.

8. Предел $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{6n^2+2}{1-7n^2}$ равен...

1) $\frac{6}{7}$; 2) $-\infty$; 3) ∞; 4) $-\frac{6}{7}$

9. Производная функции $y = \cos^3 2x$ равна

1) $3\sin^2 2x$; 2) $-6\cos^2 2x \sin 2x$;

3) $6\cos^2 2x \sin 2x$; 4) $6\sin^2 2x$.

10. Дано множество натуральных чисел. Укажите, какие из арифметических действий (сложение, вычитание, умножение, деление) всегда выполнимы на этом множестве:

1) умножение и деление 2) сложение и вычитание 3) сложение и умножение 4) умножение и вычитание

Решение задач примерного варианта

Задание 1.

Функция $y=2^x-4$ отображает множество $[3;\quad 4]$ на множество...

1) $[4;12)$; 2) $(4;12)$; 3) $[4;12]$; 4) $(4;12]$.

Решение.

Заданная функция ставит в соответствие каждой точке x_0 из данного отрезка значение функции $y(x_0)$, вычисленное в данной точке. Результатом отображения является отрезок, границы которого вычисляются как значения функции от границ отрезка-прообраза:

$y(3)=2^3-4=8-4=4$;

$y(4)=2^4-4=16-4=12$.

С учетом монотонного возрастания заданной функции на отрезке $[3;\quad 4]$, тогда следует, что образом данного отрезка является отрезок $[4;12]$.

Ответ: 3) $[4;12]$.

Задание 2.

Число точек разрыва функции $f(x)=\dfrac{1}{x(x+5)(x-3)}$ равно:

1) 2; 2) 3; 3) 4; 4) 0.

Решение.

Точками разрыва будут точки, в которых функция не существует, то есть нули знаменателя.

$x(x+5)(x-3)=0 \Leftrightarrow x=0$ или $x=-5$, или $x=3$

Ответ: 2) 3.

Задание 3.

Предел $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n^2-3n+4}{6-n^2}$ равен

1) – 2; 2) 2; 3) 0,8; 4) 1.

Решение.

Разделим числитель и знаменатель на n^2(наивысшая из степеней числителя и знаменателя):

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2n^2-3n+4}{6-n^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{\dfrac{2n^2}{n^2}-\dfrac{3n}{n^2}+\dfrac{4}{n^2}}{\dfrac{6}{n^2}-\dfrac{n^2}{n^2}}=\lim_{n\to\infty}\frac{2-\dfrac{3}{n}+\dfrac{4}{n^2}}{\dfrac{6}{n^2}-1}=\frac{2-0+0}{0-1}=-2.$$

Ответ: 1) – 2.

Задание 4.

Предел $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-6x+8}{x^2-4}$ равен

1) 1; 2) ∞; 3) -2; 4) -0,5.

Решение.

В данном пределе мы сталкиваемся с неопределенностью $\dfrac{0}{0}$. Для её устранения разложим числитель и знаменатель дроби на множители:

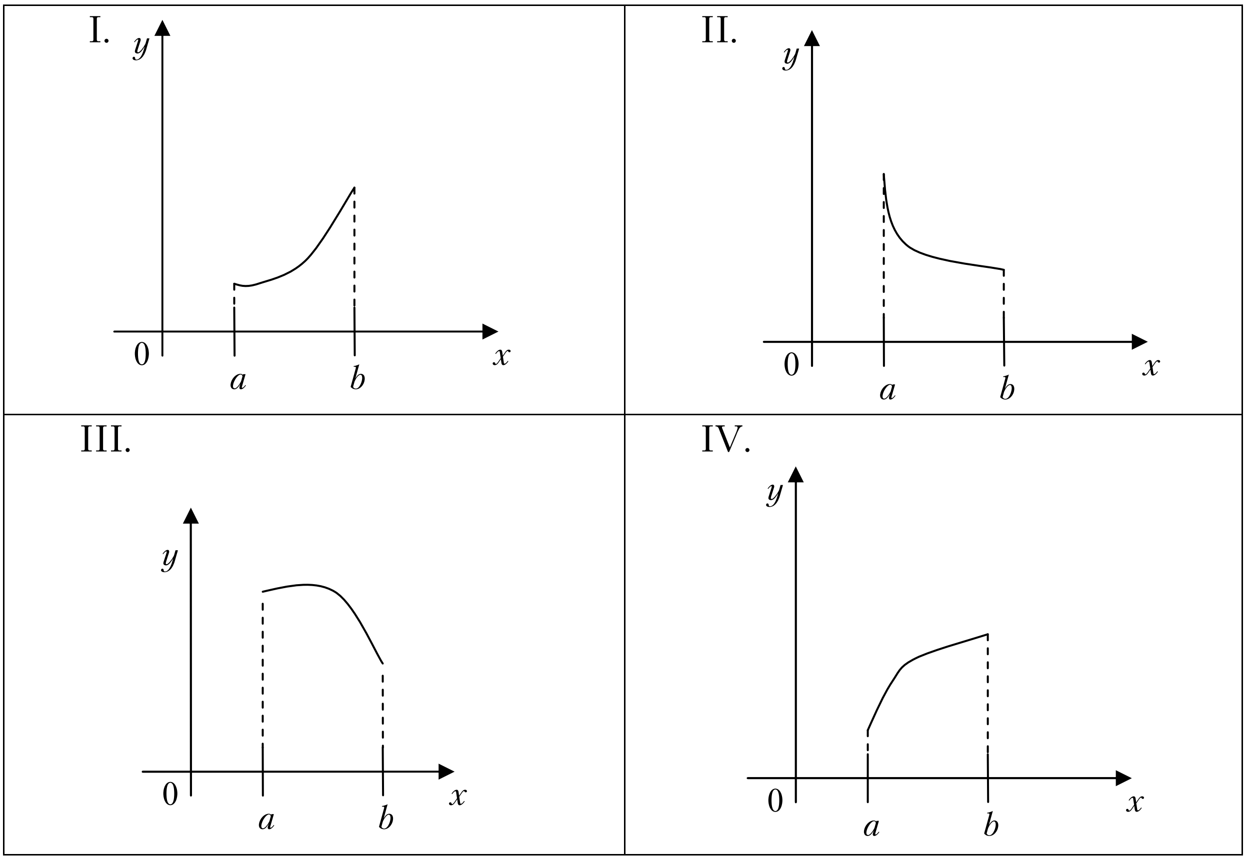
$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-6x+8}{x^2-4}=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x-4)}{(x-2)(x+2)}=\lim_{x\to 2}\frac{x-4}{x+2}=\frac{2-4}{2+2}=\frac{-2}{4}=-0,5.$$

Ответ: 4)-0,5.

Задание 5.

Графики каких из функций одновременно удовлетворяют трем условиям: $y>0,\quad y'>0,\quad y''<0$ на всем отрезке $[a;b]$?

1) Все графики; 2) Только IV; 3) Только III и IV; 4) Только II.



Решение.

Первое условие $(y > 0)$ определяет положение кривой относительно оси OY. По условию $y > 0$, следовательно, график функции y лежит выше оси OY.

Второе условие $(y'>0)$ показывает, возрастает или убывает функция на данном промежутке. По условию $y'>0$, следовательно, функция возрастает на интервале.

Третье условие $y''<0$ позволяет определить форму графика функции. По условию $y''<0$, следовательно, функция выпукла на данном интервале.

Всем трем условиям удовлетворяет только график на рис. IV.

Ответ: 2) только IV.

Задание 6.

Производная второго порядка функции $y = x\ln x$ равна

1) 0; 2) $-\frac{1}{x^2}$; 3) $\frac{1}{x}$; 4). $\frac{1}{x}+1$.

Решение.

Найдем производную первого порядка от данной функции, как производную произведения:

$$y' = (x)' \cdot \ln x + x \cdot (\ln x)' = \ln x + x \cdot \frac{1}{x} = \ln x + 1.$$

Производную второго порядка найдем как производную от производной первого порядка:

$$y'' = (y')' = (\ln x + 1)' = (\ln x)' + (1)' = \frac{1}{x}.$$

Ответ: 3) $\frac{1}{x}$.

Задание 7.

Если $u = \ln\left(4x - 3y^2 + z^3\right)$, то u'_y в точке $M(1;1;1)$ равна

1) -3; 2) $0{,}5$; 3) $\ln 2$; 4) 0.

Решение.

Частная производная от функции u по переменной y

$$u'_y = \frac{1}{4x-3y^2+z^3} \cdot \left(4x - 3y^2 + z^3\right)'_y = \frac{-6y}{4x-3y^2+z^3}.$$

Значение этой производной в точке $M(1;1;1)$ равно:

$$u'_y(1;1;1) = \frac{-6\cdot 1}{4\cdot 1 - 3\cdot 1^2 + 1^3} = \frac{-6}{2} = -3.$$

Ответ: 1) -3.

Модуль 3. ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ФУНКЦИЙ КОМПЛЕКСНОГО ПЕРЕМЕННОГО. НЕОПРЕДЕЛЕННЫЙ И ОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ. КРАТНЫЕ И КРИВОЛИНЕЙНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

3.1. Элементы теории функций комплексного переменного

Комплексным числом z называется упорядоченная пара чисел (x,y), $x=\operatorname{Re} z$ – действительная, $y=\operatorname{Im} z$ – мнимая части. Запись числа z в виде $z=x+iy$ называется *алгебраической формой* комплексного числа. Символ i называется *мнимой единицей* ($i^2=-1$).

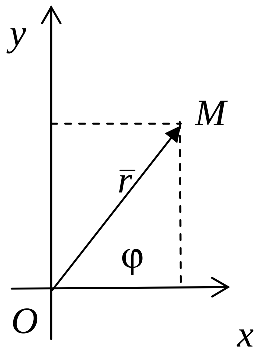
Если $x=0$, то число $0+iy=iy$ называется чисто мнимым, если $y=0$, то число $x+i\cdot 0=x$ отождествляется с действительным числом x. *Множество R действительных чисел является подмножеством множества C всех комплексных чисел* ($R\subset C$).

Два комплексных числа $z_1=x_1+iy_1$ и $z_2=x_2+iy_2$ называются равными тогда и только тогда, когда равны их действительные и мнимые части, то есть $z_1=z_2$ при $x_1=x_2$ и $y_1=y_2$. В частности, комплексное число $z=x+iy$ равно нулю тогда и только тогда, когда $x=y=0$. *Понятия «больше» и «меньше» для комплексных чисел не вводятся.*

Два комплексных числа $z=x+iy$ и $\overline{z}=x-iy$, отличающиеся только знаком мнимой части называются *сопряженными.*

Всякое комплексное число $z=x+iy$ можно изобразить точкой $M(x,y)$ плоскости xOy. Плоскость, на которой изображаются комплексные числа, называется комплексной плоскостью. *Ось абсцисс называется действительной осью, а ось ординат – мнимой.*

Комплексное число $z=x+iy$ можно изобразить и с помощью радиус-вектора $\overline{r}=\overline{OM}=(x,y)$.



Длина вектора $\bar{r}$ называется *модулем* комплексного числа z, обозначается $|z|$ или r; $r=|z|=\sqrt{x^2+y^2}$.

Величина угла между положительным направлением действительной оси и вектором $\bar{r}$, изображающим комплексное число, называется *аргументом* этого числа, обозначается $\operatorname{Arg} z$ или φ. Аргумент комплексного числа $z=0$ не определен. Аргумент комплексного числа $z\neq 0$ – величина многозначная и определяется с точностью до слагаемого $2\pi k$: $\operatorname{Arg} z=\arg z+2\pi k$, где $\arg z$ – *главное значение аргумента*, заключенное в промежутке $(-\pi,\pi)$.

Запись числа z в виде $z=r(\cos\varphi+i\sin\varphi)$ называется *тригонометрической формой* комплексного числа.

Аргумент φ определяется из формул $\cos\varphi=\dfrac{x}{r}, \sin\varphi=\dfrac{y}{r}, \operatorname{tg}\varphi=\dfrac{y}{x}$. Иногда в качестве главного значения аргумента берут величину, принадлежащую промежутку $[0,2\pi)$, тогда

$$\arg z=\begin{cases}\operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}, \text{ при } x>0, y>0 \text{ (для внутренних точек I четв.)};\\ \operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}+2\pi, \text{ при } x>0, y<0 \text{ (для внутренних точек IV четв.)};\\ \operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}+\pi, \text{ при } x<0 \text{ (для внутренних точек II,Ш четв.)}.\end{cases}$$

Используя формулу Эйлера $e^{i\varphi}=\cos\varphi+i\sin\varphi$, комплексное число z можно записать и, в так называемой, *показательной* (или экспоненциальной) форме: $z=r^{i\varphi}$, где $r=|z|$ – модуль комплексного числа, а угол $\varphi=\operatorname{Arg} z=\arg z+2\pi k$.

Суммой двух комплексных чисел $z_1=x_1+iy_1$ и $z_2=x_2+iy_2$ называется число, определяемое равенством

$$(x_1+iy_1)+(x_2+iy_2)=(x_1+x_2)+i(y_1+y_2).$$

Вычитание определяется как действие, обратное сложению:

$$(x_1+iy_1)-(x_2+iy_2)=(x_1-x_2)+i(y_1-y_2).$$

Произведением комплексных чисел $z_1=x_1+iy_1$ и $z_2=x_2+iy_2$ называется комплексное число, определяемое равенством:

$$(x_1+iy_1)\cdot(x_2+iy_2)=(x_1x_2-y_1y_2)+i(x_1y_2+y_1x_2).$$

Получается путем перемножения двучленов x_1+iy_1 и x_2+iy_2 с учетом $i^2=-1$:

$$\left(x_1+iy_1\right)\cdot\left(x_2+iy_2\right)=x_1x_2+iy_1x_2+iy_2x_1+i^2y_1y_2=\left(x_1x_2-y_1y_2\right)+i\left(x_1y_2+y_1x_2\right).$$

Частное двух комплексных чисел находят путем умножения числителя и знаменателя на число, сопряженное знаменателю (избавляются от мнимости в знаменателе):

$$\frac{x_1+iy_1}{x_2+iy_2}=\frac{\left(x_1+iy_1\right)\cdot\left(x_2-iy_2\right)}{\left(x_2+iy_2\right)\cdot\left(x_2-iy_2\right)}=\frac{x_1x_2+y_1y_1}{x_2^2+y_2^2}+i\frac{y_1x_2-x_1y_2}{x_2^2+y_2^2},\ \text{при}\ z_2\neq 0.$$

При *умножении* комплексных чисел $z_1=r_1\left(\cos\varphi_1+i\sin\varphi_1\right)$ и $z_2=r_2\left(\cos\varphi_2+i\sin\varphi_2\right)$, заданных в тригонометрической форме их *модули перемножаются, а аргументы складываются,* то есть

$$z_1\cdot z_2=r_1\left(\cos\varphi_1+i\sin\varphi_1\right)\cdot r_2\left(\cos\varphi_2+i\sin\varphi_2\right)=$$
$$=r_1\cdot r_2\left(\cos\left(\varphi_1+\varphi_2\right)+i\sin\left(\varphi_1+\varphi_2\right)\right).$$

Откуда следует *формула Муавра* для *возведения* комплексных чисел *в* натуральную *степень*:

$$z^n=\left(r\left(\cos\varphi\right)i\sin\varphi\right)^n=r^n\cdot\left(\cos n\varphi+i\sin n\varphi\right).$$

Деление комплексных чисел, заданных в тригонометрической форме осуществляется по формуле:

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{r_1}{r_2}\cdot(\cos\left(\varphi_1-\varphi_2\right)+i\sin\left(\varphi_1-\varphi_2\right)),$$

то есть, *модули делятся, а аргументы вычитаются.*

Корень n*-й степени* из комплексного числа z определяется как комплексное число w, удовлетворяющее равенству $w^n=z$:

$$\sqrt[n]{z}=w,$$

где $w^n=z$.

Если $z=r\left(\cos\varphi+i\sin\varphi\right)$, а $w=\rho\left(\cos\theta+i\sin\theta\right)$, то, по определению корня и формуле Муавра, получаем

$$z=w^n=\rho^n\left(\cos n\theta+i\sin n\theta\right)=r\left(\cos\varphi+i\sin\varphi\right).$$

Отсюда $\rho^n=r, n\theta=\varphi+2\pi k, k\in Z$. То есть $\theta=\dfrac{\varphi+2\pi k}{n}$ и $\rho=\sqrt[n]{r}$.

Поэтому равенство $\sqrt[n]{z} = w$ принимает вид:

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r(\cos\varphi + i\sin\varphi)} = \sqrt[n]{r} \cdot \left(\cos\frac{\varphi + 2\pi k}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2\pi k}{n}\right),$$

где $k = 0, 1, 2, \ldots, n-1$.

Любое комплексное число $z \neq 0$ *имеет ровно* n *различных корней* n*-й степени.*

Комплексные функции действительного переменного

Если каждому значению действительного параметра t соответствует определенное комплексное число

$$z(t) = x(t) + iy(t),$$

где $x(t)$ и $y(t)$ – функции, принимающие действительные значения, то $z(t)$ называется комплексной функцией действительного переменного.

Параметр t изменяется в некотором конечном или бесконечном интервале.

Годографом функции $z(t)$ называется линия с параметрическими уравнениями $x = x(t)$ и $y = y(t)$.

Непрерывность комплексной функции $z(t)$ эквивалентна непрерывность ее действительной и мнимой частей $x(t)$ и $y(t)$.

Производная комплексной функции действительного переменного определяется как предел отношения приращения функции $\Delta z = z(t + \Delta t) - z(t)$ к приращению независимой переменной Δt:

$$z'(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta z}{\Delta t}.$$

Производная $z'(t)$ является комплексной функцией. *Геометрически*, вектор, изображающий комплексное число $z'(t_0)$ параллелен касательной к годографу функции $z(t)$, проведенной в точке, соответствующей значению параметра t_0.

Справедливо $z'(t) = x'(t) + iy'(t)$, то есть комплексную функцию действительного переменного $z(t) = x(t) + iy(t)$ можно дифференцировать как обыкновенную сумму, считая i просто постоянным. Разумеется, это правило приобретает смысл только после введенных выше определений. Все правила дифференцирования действительных функций без всяких изменений переносятся на комплексные функции.

Показательная функция с мнимым показателем степени определяется как комплексная функция

$$e^{it} = \cos t + i \sin t,$$

где t может принимать любые действительные значения.

Приведенная формула носит название *формулы Эйлера*. Правая часть формулы представляет собой тригонометрическую форму записи комплексного числа с модулем, равным 1, и аргументом, равным t:

$$\left|e^{it}\right| = 1, \quad \operatorname{Arg} e^{it} = t.$$

Годографом функции $z = e^{it}$ служит единичная окружность.

Комплексная функция e^{it} дифференцируется так же, как если бы i было просто постоянным числом:

$$\left(e^{it}\right)' = -\sin t + i \cos t = i(\cos t + i \sin t) = ie^{it}.$$

Заменив в формуле Эйлера t на $-t$, получим

$$e^{-it} = \cos t - i \sin t$$

(e^{it} и e^{-it} – комплексно сопряженные выражения).

Тригонометрические функции $\cos t$ и $\sin t$ можно представить через показательные функции действительного переменного в виде

$$\cos t = \frac{e^{it} + e^{-it}}{2}, \quad \sin t = \frac{e^{it} - e^{-it}}{2i}.$$

Эти формулы также называются формулами Эйлера.

Решение уравнений

Уравнение $P_n(x) = 0$, где $P_n(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n$, называется *алгебраическим* уравнением n-ой степени; коэффициенты $a_0, a_1, \ldots, a_n$ – действительные или комплексные числа, $a_0 \neq 0$.

Основная теорема высшей алгебры. Всякое алгебраическое уравнение степени $n > 0$ имеет хотя бы один корень, действительный или комплексный.

Справедливо $P_n(x) = (x - \alpha) Q_{n-1}(x) + R$, где $Q_{n-1}(x)$ – многочлен $(n-1)$-й степени. Если α – корень многочлена $P_n(x)$, то $R = P(\alpha) = 0$ и $P_n(x) = (x - \alpha) Q_{n-1}(x)$.

Теорема Безу. Остаток от деления многочлена $P(x)$ на двучлен $(x-\alpha)$ равен значению этого многочлена при $x=\alpha$.

Из предыдущего следует разложение многочлена $P_n(x)$ на линейные множители:

$$P_n(x)=a_o(x-x_1)^{k_1}(x-x_2)^{k_2}\dots(x-x_r)^{k_r},$$

где $k_1,k_2,\dots,k_r$ – кратности корней $x_1,x_2,\dots,x_r$ соответственно;
r – число различных корней; $k_1+k_2+\ldots+k_r=n$.

Таким образом, *алгебраическое уравнение n-й степени имеет n корней*, если каждый корень считать столько раз какова его кратность.

Если все *коэффициенты* $a_0,a_1,\dots,a_n$ – *действительные числа*, то *комплексные корни* уравнения (если они есть) *попарно сопряжены.* Тогда *любой многочлен нечетной степени имеет хотя бы один действительный корень.* Для произведения комплексно сопряженных корней справедливо:

$$\left[x-(\alpha+i\beta)\right]\cdot\left[x-(\alpha-i\beta)\right]=x^2+px+q,$$

$$p=-2\alpha,\quad q=\alpha^2+\beta^2,\quad p^2-4q<0.$$

Откуда следует возможность разложения многочлена с действительными коэффициентами в виде:

$$P_n(x)=a_0(x-x_1)^{k_1}\dots(x-x_s)^{k_s}\left(x^2+p_1x+q_1\right)^{l_1}\dots\left(x^2+p_tx+q_t\right)^{l_t},$$

где $k_1+\ldots+k_s+2(l_1+\ldots+l_t)=n$, k_i – кратности действительных корней, l_j – кратности комплексно сопряженных корней.

Не существует формул, пользуясь которыми можно было бы при помощи конечного числа *алгебраических* действий выразить корни через коэффициенты таких уравнений (решить уравнение в радикалах), если степень $n\geq 5$. При $n=3$ и $n=4$ соответственно используются формулы Кардано и Феррари. При $n=1$ и $n=2$ получим соответственно линейное или квадратное уравнение.

3.2. Неопределенный и определенный интегралы

Неопределенный интеграл

Первообразной для функции $f(x)$ на данном интервале называется такая функция $F(x)$, производная которой равна $f(x)$ (для всех x из данного интервала):

$$F'(x) = f(x).$$

Непрерывная в интервале (a,b) функция $f(x)$ имеет бесконечное множество первообразных на (a,b). Если $F(x)$ – одна из них, то всякая другая имеет вид $F(x)+C$, где C – постоянная величина.

Неопределенным интегралом от функции $f(x)$ называется совокупность $F(x)+C$ всех ее первообразных:

$$\int f(x)dx = F(x)+C;$$

$f(x)dx$ называется подынтегральным выражением, $f(x)$ – подынтегральной функцией, дифференциал dx указывает на то, что интегрирование ведется по переменной x.

Правила интегрирования (свойства неопределенного интеграла)

1. $d\int f(x)dx = f(x)dx$.
2. $\int dF(x) = F(x)+C$.
3. $\left(\int f(x)dx\right)' = f(x)$.
4. $\int af(x)dx = a\int f(x)dx$, где a – постоянная.
5. $\int (f_1(x) \pm f_2(x))dx = \int f_1(x)dx \pm \int f_2(x)dx$.
6. Если $\int f(x)dx = F(x)+C$ и $u = \phi(x)$, то $\int f(u)du = F(u)+C$.

Таблица интегралов

1. $\int 0dx = C$.
2. $\int x^{\alpha}dx = \dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}+C \quad \forall\alpha \neq -1$.
3. $\int x^{-1}dx = \dfrac{dx}{x} = \ln|x|+C, \ \ x \neq 0; \ 0 \overline{\in} (a,b)$.

4. $\int a^x dx = \dfrac{a^x}{\ln a} + C,\ \ a > 0, a \neq 1.$

5. $\int e^x dx = e^x + C.$

6. $\int \sin x dx = -\cos x + C.$

7. $\int \cos x dx = \sin x + C.$

8. $\int \dfrac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C$ на (a,b), где $\dfrac{dx}{\cos^2 x}$ непрерывна.

9. $\int \dfrac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C$ на (a,b), где $\dfrac{dx}{\sin^2 x}$ непрерывна.

10. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \dfrac{x}{a} + C$.

11. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln\left| x + \sqrt{x^2 \pm a^2} \right| + C$.

12. $\int \dfrac{dx}{a^2 + x^2} = \dfrac{1}{a} \operatorname{arctg} \dfrac{x}{a} + C$.

13. $\int \dfrac{dx}{a^2 - x^2} = \dfrac{1}{2a} \ln\left| \dfrac{a+x}{a-x} \right| + C$.

Методы интегрирования

1. Непосредственное интегрирование

Пример.

$$\int \left(2x^2 - 3\sin x + 5\sqrt{x}\right)dx = \int 2x^2 dx - \int 3\sin x dx + \int 5\sqrt{x} dx =$$

$$= 2\int x^2 dx - 3\int \sin x dx + 5\int x^{\frac{1}{2}} dx =$$

$$= 2\frac{x^3}{3} - 3(-\cos x) + 5\left(\frac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1}\right) + C = \frac{2}{3}x^3 + 3\cos x + \frac{10}{3}x\sqrt{x} + C.$$

Преобразование интеграла к табличному при помощи внесения некоторой функции под знак дифференциала

Пример.

$$\int \sqrt{3x-1} dx = \int (3x-1)^{\frac{1}{2}} \frac{1}{3} d(3x-1) = \frac{2}{9}(3x-1)^{\frac{3}{2}} + C.$$

Интегралы вида $\int \frac{dx}{ax^2+bx+c}$, $\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$ вычисляются при помощи выделения полного квадрата:

$$ax^2+bx+c=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2}{4a}+c.$$

После этого, заменив dx на равный ему дифференциал $d\left(x+\frac{b}{2a}\right)$, используют одну из четырех последних формул, приведенных выше в таблице основных интегралов.

Пример. Вычислить $\int \frac{dx}{x^2-4x+13}$.

Так как $x^2-4x+13=(x-2)^2+9$, то, в силу $dx=d(x-2)$, имеем:

$$\int \frac{dx}{x^2-4x+13}=\int \frac{d(x-2)}{(x-2)^2+3^2}=\frac{1}{3}\operatorname{arctg}\frac{x-2}{3}+C.$$

2. Метод замены переменной (подстановки)

Замена переменной (иногда называемая также подстановкой) состоит в том, что вместо переменной x в подынтегральное выражение $f(x)dx$ вводится функция $x=\varphi(t)$:

$$\int f(x)dx=\int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt.$$

Функцию $\varphi(t)$ следует выбирать так, чтобы можно было вычислить неопределенный интеграл, стоящий в правой части последнего равенства.

Пример. Вычислить $\int x\sqrt{x-2}dx$.

Обозначим $\sqrt{x-2}=t$.

Тогда $x-2=t^2$, $x=t^2+2$, $dx=2tdt$. Далее имеем

$$\int x\sqrt{x-2}dx=\int \left(t^2+2\right)t2tdt=$$

$$=2\int \left(t^4+2t^2\right)dt=\frac{2}{5}t^5+\frac{4}{3}t^3+C=\frac{2}{5}(x-2)^{\frac{5}{2}}+\frac{4}{3}(x-2)^{\frac{3}{2}}+C.$$

3. Интегрирование по частям

Производится по формуле

$$\int u dv = uv - \int v du,$$

где $u(x)$, $v(x)$ – непрерывно дифференцируемые функции.

Подынтегральное выражение разбивается на две части, одну из которых принимают за u, а другую – за dv так, чтобы интеграл $\int v du$ вычислялся проще, чем исходный.

Метод позволяет вычислять интегралы видов:

I. $\int P(x)e^{\alpha x}dx$, $\int P(x)\cos(\alpha x)dx$, $\int P(x)\sin(\alpha x)dx$;

II. $\int P(x)\ln x dx$, $\int P(x)\arcsin x dx$, $\int P(x)\operatorname{arctg} x dx$,

где $P(x)$ – многочлен.

Для интегралов типа I в формуле интегрирования по частям принимается $P(x) = u$, а для интегралов типа II – $P(x)dx = dv$.

Пример. Вычислить $\int x \ln x dx$.

Введя $u = \ln x, dv = xdx$, получим $du = \frac{1}{x}dx, v = \int xdx = \frac{x^2}{2}$. Откуда $\int x \ln x dx = \frac{x^2}{2}\ln x - \frac{1}{2}\int \frac{x^2 dx}{x} = \frac{x^2}{2}\ln x - \frac{1}{4}x^2 + C$.

Интегрирование рациональных функций разложением на простейшие дроби

Рассмотрим отношение двух алгебраических многочленов (называется рациональной функцией или рациональной дробью)

$$f(x) = \frac{P_m(x)}{Q_n(x)},$$

$$P_m(x) = b_0 + b_1 x + \ldots + b_m x^m,$$

$$Q_n(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n,$$

где b_j, a_i – действительные числа, $i = \overline{0,n}$, $j = \overline{0,m}$;

$$b_m, a_n \neq 0,\ m \geq 0,\ n \geq 1.$$

Будем полагать $m < n$.

Теорема. Пусть знаменатель $Q_n(x)$ разложен в виде:

$$Q_n(x)=a_n(x-C_1)^{\mu_1}\cdots(x-C_r)^{\mu_r}\left(x^2+p_1x+q_1\right)^{\nu_1}\ldots\left(x^2+p_sx+q_s\right)^{\nu_s},$$

$$\mu_1+\cdots+\mu_r+2(\nu_1+\cdots+\nu_s)=n$$

Тогда $\dfrac{P_m(x)}{Q_n(x)}$ можно представить единственным образом в виде:

$$\frac{P_m(x)}{Q_n(x)}=\frac{A_{11}}{(x-C_1)^{\mu_1}}+\frac{A_{12}}{(x-C_1)^{\mu_1-1}}+\ldots+\frac{A_{1\mu_1}}{x-C_1}+\ldots$$

$$\ldots+\frac{A_{r_1}}{(x-C_r)^{\mu_r}}+\frac{A_{r_2}}{(x-C_2)^{\mu_r-1}}+\ldots+\frac{A_{r\mu_r}}{x-C_2}+$$

$$+\frac{B_{11}x+C_{11}}{\left(x^2+p_1x+q_1\right)^{\nu_1}}+\frac{B_{12}x+C_{12}}{\left(x^2+p_1x+q_1\right)^{\nu_1-1}}+\ldots+\frac{B_{1\nu_1}x+C_{1\nu_1}}{x^2+p_1x+q_1}+\ldots$$

$$\ldots+\frac{B_{s_1}x+C_{s_1}}{\left(x^2+p_sx+q_s\right)^{\nu_s}}+\frac{B_{s_2}x+C_{s_2}}{\left(x^2+p_sx+q_1\right)^{\nu_s-1}}+\ldots+\frac{B_{s\nu_s}x+C_{s\nu_s}}{x^2+p_sx+q_s},$$

где A,B,C с соответствующими индексами есть постоянные числа.

Пример.

$$\frac{x^2+2x+3}{(x-1)^2\left(x^2+x+1\right)}=\frac{A_1}{(x-1)^2}+\frac{A_2}{(x-1)}+\frac{Bx+C}{x^2+x+1}\Rightarrow$$

$$\frac{A_1x^2+A_1x+A_1+A_2x^3+A_2x^2+A_2x-A_2x^2-A_2x-A_2}{(x-1)^2\left(x^2+x+1\right)}+$$

$$+\frac{Bx^3-2Bx^2+Bx+Cx^2-2Cx}{(x-1)^2\left(x^2+x+1\right)}\Rightarrow$$

$$x^2+2x+3\equiv(A_2+B)x^3+(A_1+A_2-A_2-2B+C)x^2+$$

$$+(A_1+A_2-A_2+B-2C)x+(A_1-A_2+C)\Rightarrow$$

$$\begin{cases} A_2+B=0\Rightarrow B=-A_2 \\ A_1-2B+C=1 \\ A_1+B-2C=2 \\ A_1-A_2+C=3 \end{cases}\Rightarrow\quad \left.\begin{array}{l} A_1-A_2-2C=2 \\ A_1-A_2+C=3 \end{array}\right]\Rightarrow 3C=1$$

$$\boxed{C=\frac{1}{3}}$$

$$\left.\begin{aligned} A_1 - 2B &= \frac{2}{3} \\ A_1 + B &= \frac{8}{3} \end{aligned}\right] \Rightarrow 3B = \frac{6}{3} = 2 \Rightarrow \boxed{B = \frac{2}{3}}$$

$$\boxed{A_2 = -\frac{2}{3}}$$

$$A_1 = 1 + 2B - C = 1 + \frac{4}{3} - \frac{1}{3} = 2 \Rightarrow \boxed{A_1 = 2}$$

$$\frac{x^2 + 2x + 3}{(x-1)^2\left(x^2 + x + 1\right)} = \frac{2}{(x-1)^2} + \frac{-\frac{2}{3}}{(x-1)} + \frac{\frac{2}{3}x + \frac{1}{3}}{x^2 + x + 1}.$$

Теорема позволяет свести интегрирование рациональных функций к интегрированию *простейших дробей*, входящих как слагаемые в разложение $\dfrac{P_m(x)}{Q_n(x)}$.

Для предыдущего примера имеем:

$$\int \frac{x^2+2x+3}{(x-1)^2\left(x^2+x+1\right)}dx = \int \frac{2dx}{(x-1)^2} - \frac{2}{3}\int \frac{dx}{x-1} + \frac{1}{3}\int \frac{2x+1}{x^2+x+1}dx =$$

$$= 2\int (x-1)^{-2}\, d(x-1) - \frac{2}{3}\int \frac{d(x-1)}{x-1} + \frac{1}{3}\int \frac{d\left(x^2 + x + 1\right)}{x^2 + x + 1} =$$

$$= -\frac{2}{x-1} - \frac{2}{3}\ln|x-1| + \frac{1}{3}\ln\left|x^2 + x + 1\right| + C.$$

В случае $m \geq n$ следует предварительно выделить целую часть рациональной дроби и представить ее в виде

$$f(x) = N(x) + \frac{P_{m_1}(x)}{Q_n(x)},\ \ m_1 < n,$$

где $N(x)$ – многочлен.

Интегрирование тригонометрических функций

1. При вычислении интегралов вида $\int \sin\alpha x \cos\beta x dx$, $\int \cos\alpha x \cos\beta x dx$, $\int \sin\alpha x \sin\beta x dx$ используются формулы:

$$\sin\alpha x \cos\beta x = \frac{1}{2}\left[\sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta)\right],$$

$$\cos\alpha x\cos\beta x=\frac{1}{2}\left[\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)\right],$$

$$\sin\alpha x\sin\beta x=\frac{1}{2}\left[\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)\right].$$

2. При вычислении интегралов вида $\int\sin^m x\cos^n xdx$ (*m, n* – целые числа) при *нечетном m* используется замена $\cos x=t,\sin xdx=-dt$; при *нечетном n* – замена $\sin x=t,\cos xdx=dt$; если обе степени *m* и *n* – *четные и неотрицательные*, то используются формулы:

$$\sin^2 x=\frac{1}{2}(1-\cos 2x),\quad \cos^2 x=\frac{1}{2}(1+\cos 2x),\ \sin x\cos x=\frac{1}{2}\sin 2x.$$

Пример. Вычислить $\int\sin^3 x\cos^2 xdx$.

Имеем:

$$\int\sin^3 x\cos^2 xdx=\int\sin^2 x\cos^2 x\sin xdx=$$

$$=-\int\left(1-\cos^2 x\right)\cos^2 xd(\cos x)=$$

$$=-\int\left(1-t^2\right)t^2dt=-\frac{t^3}{3}+\frac{t^5}{5}+C=-\frac{\cos^3 x}{3}+\frac{\cos^5 x}{5}+C.$$

Использована замена $\cos x=t$.

3. Интегралы вида $\int R(\sin x,\cos x)dx$, где R – рациональная функция своих аргументов, сводится к интегралам от рациональных дробей с помощью универсальной тригонометрической подстановки:

$$t=\operatorname{tg}\frac{x}{2},\ dx=\frac{2dt}{1+t^2},\ \sin x=\frac{2t}{1+t^2},\ \cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2}.$$

Пример. Вычислить интеграл $\int\frac{dx}{2+\sin x}$.

Используя универсальную тригонометрическую подстановку, имеем:

$$\int\frac{dx}{2+\sin x}=\int\frac{2dt}{\left(1+t^2\right)\left(\frac{2t}{1+t^2}+2\right)}=\int\frac{dt}{t^2+t+1}=\int\frac{d\left(t+\frac{1}{2}\right)}{\left(t+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}=$$

$$=\frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2t+1}{\sqrt{3}}+C=\frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{tg}\frac{x}{2}+\frac{1}{\sqrt{3}}\right)+C.$$

Если подынтегральное выражение зависит от $\sin^2 x, \cos^2 x$ или от $\mathrm{tg}x$, применяется подстановка $t = \mathrm{tg}x$.

Интегрирование простейших иррациональностей

1. Если подынтегральное выражение содержит только линейную иррациональность $\sqrt[m]{ax+b}$ $(a \neq 0)$, то используется подстановка $t = \sqrt[m]{ax+b}$.

Интеграл от простейшей квадратичной иррациональности $\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$ после выделения полного квадрата в трехчлене ax^2+bx+c сводится к одному из двух интегралов $\int \frac{dx}{\sqrt{\alpha + x^2}}$ $(\alpha \neq 0)$, $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}}$ $(a > 0)$.

Используя *подстановку Эйлера* $\sqrt{x^2+\alpha} = t - x$, найдем

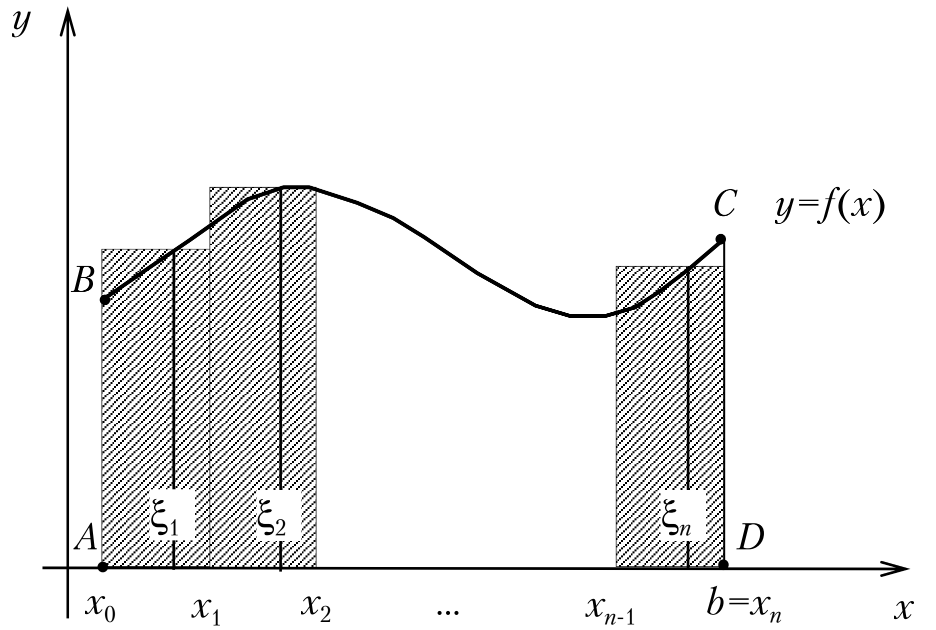
$$\int \frac{dx}{\sqrt{\alpha + x^2}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2+\alpha}\right| + C \ (\alpha \neq 0).$$

Второй интеграл $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \int \frac{d\left(\frac{x}{a}\right)}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2}} = \arcsin\frac{x}{a} + C$.

Определенный интеграл

Площадь криволинейной трапеции. Пусть на отрезке $[a,b]$ задана непрерывная функция $y = f(x) \geq 0$. Найдем площадь криволинейной трапеции *ABCDA*. Для этого разобьем отрезок $[a,b]$ на n частичных отрезков $[x_0,x_1],[x_1,x_2],\ldots,[x_{n-1},x_n]$. В каждом частичном отрезке $[x_{i-1},x_i]$, $i = \overline{1,n}$ возьмем произвольную точку ξ_i и вычислим $f(\xi_i)$. Значение $f(\xi_i)\Delta x_i$, $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ равно площади прямоугольника с основанием Δx_i и высотой $f(\xi_i)$. Тогда сумма $S_n = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$ равна площади ступенчатой фигуры и приближенно равна площади S криволинейной трапеции. При уменьшении *всех* величин Δx_i точность приближения увеличивается. Поэтому за точное значение S площади криволинейной трапеции принимается предел S, к которому стремится площадь S_n, когда n неограниченно возрастает так, что $\lambda = \max \Delta x_i \to 0$:

$$S = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{\substack{n\to\infty \\ (\lambda\to 0)}} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i .$$



О п р е д е л е н и е. Если при любых разбиениях отрезка $[a,b]$, таких, что $\max \Delta x_i \to 0$, и при любом выборе точек $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$ интегральная сумма

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$$

стремится к одному и тому же пределу, то этот предел называют *определенным интегралом* от функции $f(x)$ на отрезке $[a,b]$ и обозначают

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\max \Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i,$$

где a, b – нижний и верхний пределы интегрирования.

Определенный интеграл от *неотрицательной* функции численно равен площади S криволинейной трапеции.

Если для $f(x)$ существует предел интегральной суммы, то ее называют *интегрируемой на* $[a,b]$.

Если $f(x)$ интегрируема на $[a,b]$, то площадь криволинейной трапеции на $[a,b]$ равна $\int\limits_a^b f(x)dx$.

Теорема. Если функция $f(x)$ непрерывна на $[a,b]$, то она интегрируема на $[a,b]$.

Свойства определенного интеграла

1. $\int\limits_a^b cf(x)dx = c\int\limits_a^b f(x)dx,\ \ c = \text{const}$.

2. $\int\limits_a^b \left(f_1(x)+f_2(x)+\ldots+f_n(x)\right)dx = \sum\limits_{j=1}^{n}\int\limits_a^b f_j(x)dx$.

3. $\int\limits_a^b f(x)dx = -\int\limits_b^a f(x)dx$.

4. $\int\limits_a^a f(x)dx = 0$.

5. $\int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_a^b f(y)dy = \int\limits_a^b f(t)dt$.

6. Если на $[a,b]$, где $a<b$, функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ удовлетворяют условию $f(x) \le \varphi(x)$, то

$$\int\limits_a^b f(x)dx \le \int\limits_a^b \varphi(x)dx.$$

7. Если на $[a,b]$ имеют место неравенства $m \le f(x) \le M$, то

$$m(b-a) \le \int\limits_a^b f(x)dx \le M(b-a).$$

8. **Теорема о среднем.**
Если $f(x)$ непрерывна на $[a,b]$, то найдется такое $\xi \in [a,b]$, что

$$\int\limits_a^b f(x)dx = (b-a)f(\xi).$$

9. Для любых трех чисел a,b,c; $a< c< b$ справедливо

$$\int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_a^c f(x)dx + \int\limits_c^b f(x)dx,$$

если только все три интеграла существуют (аддитивное свойство интеграла).

10. $\left|\int\limits_a^b f(x)dx\right| \le \int\limits_a^b |f(x)|dx, \quad (a \le b).$

11. Интегрирование четных и нечетных функций по отрезку вида $[-a,a]$:

если $f(x)$ – четная функция, то $\int\limits_{-a}^{a} f(x)dx = 2\int\limits_0^a f(x)dx.$

если $f(x)$ – нечетная функция, то $\int\limits_{-a}^{a} f(x)dx = 0.$

12. Дифференцирование интеграла по переменному верхнему пределу.

Если $f(x)$ непрерывна на $[a,b]$, то функция $\Phi(x) = \int\limits_a^x f(t)dt$ дифференцируема на $[a,b]$, причем $\Phi'(x) = f(x)$, то есть

$$\left(\int\limits_a^x f(t)dt\right)' = f(x).$$

13. Формула Ньютона-Лейбница:

$$\int\limits_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a),$$

где $F(x)$ – какая-нибудь первообразная для функции $f(x)$ на $[a,b]$.

14. Интегрирование по частям

$$\int\limits_a^b udv = uv\Big|_a^b - \int\limits_a^b vdu.$$

15. Интегрирование подстановкой (заменой переменного)

Если $f(x)$ непрерывна на $[a,b]$, то, введя переменную t по формуле $x = \varphi(t)$, где $\varphi(\alpha) = a;\ \ \varphi(\beta) = b; \varphi'(t)$ непрерывна на $[\alpha,\beta]; f[\varphi(t)]$ определена и непрерывна на $[a,b]$, получим $\int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt.$

Вычисление определенного интеграла

Непосредственное вычисление

$$\int_0^{2\pi} \sin x dx = -\cos x\Big|_0^{2\pi} = -(\cos 2\pi - \cos 0) = -(1-1) = 0.$$

Интегрирование подстановкой (заменой переменного)

$$\int_a^b \sqrt{a^2-x^2}\,dx = \left| \begin{array}{l} x = a\sin t;\ dx = a\cos t dt. \\ x = 0 \Rightarrow t = 0 \\ x = a \Rightarrow t = \dfrac{\pi}{2} \end{array} \right| =$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{a^2 - a^2\sin^2 t}\; a\cos t dt = a^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t dt =$$

$$= a^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+\cos^2 t}{2} dt = a^2 \left[\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} dt + \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos 2t dt \right] =$$

$$= \frac{a^2}{2} t\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \frac{a^2}{4}\sin 2t\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi a^2}{4}.$$

Приближенное вычисление определенных интегралов

1. Формула прямоугольников

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{N}\sum_{k=0}^{N-1} f\left(\frac{x_k + x_{k+1}}{2}\right),$$

где x_k – точки разбиения отрезка $[a,b]$, N – число частичных отрезков.

Остаточный член квадратурной формулы (ошибка)

$$|R_n| \le \frac{M_1(b-a)^2}{4N},$$

где $|f'(x)| \le M_1\ \forall x \in [a,b]$.

2. Формула трапеций

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{b-a}{N}\left(\frac{f(x_0)+f(x_1)}{2} + \ldots + \frac{f(x_{N-1})+f(x_N)}{2} \right) =$$

$$= \frac{b-a}{N}\left(f(x_0)+2f(x_1)+2f(x_2)+\ldots+2f(x_{N-1})+f(x_N)\right).$$

$$|R_N| \le \frac{M_1(b-a)^2}{4N}.$$

Если $f(x)$ имеет ограниченную вторую производную $|f''(x)| \le M_2$ на $[a,b]$, то для формул трапеций и прямоугольников

$$|R_N| \le \frac{M_2(b-a)^3}{12N^2}.$$

3.Формула Симпсона

Если заменим график функции $y = f(x)$ на каждом отрезке $[x_{i-1}, x_i]$ не отрезками прямых, как в методах прямоугольников и трапеций, а дугами парабол, то получим более точную формулу для приближенного вычисления интеграла:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{h}{3}\left[y_0 + y_{2m} + 2(y_2 + y_4 + \ldots + y_{2m-2}) + 4(y_1 + y_3 + \ldots + y_{2m-1})\right],$$

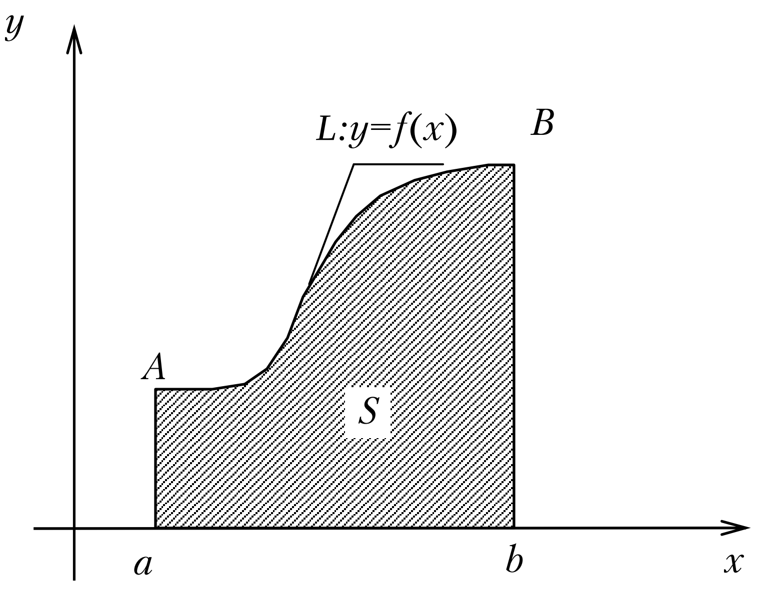
$$h = \frac{b-a}{2m}.$$

Приложения определенных интегралов

1. Вычисление площадей плоских фигур

1.1. Площадь фигуры, заданной в декартовых координатах.

Пусть $y=f(x)$ – уравнение линии, ограничивающей трапецию сверху.



Если $y \geq 0$, то

$$S = \int_a^b f(x)dx.$$

1.2. Площадь фигуры при задании линии L в параметрической форме

$$L: \begin{matrix} x = x(t), \\ y = y(t). \end{matrix}$$

$$S = \int_a^b y(x)dx = \left| \begin{matrix} x = x(t);\ dx = x'(t)dt \\ x = a \Rightarrow t = t_1 \\ x = b \Rightarrow t = t_2 \end{matrix} \right| \Rightarrow$$

$$S = \int_{t_1}^{t_2} y(t)x'(t)dt.$$

2. Вычисление объемов тел по площадям параллельных сечений

Если тело T расположено между $x = a$ и $x = b$, а непрерывная функция $S(x)$ – закон изменения площади его поперечного сечения, то объем V этого тела

$$V = \int_a^b S(x)dx.$$

Объем тела вращения

$$V = \int_a^b \pi \left[f(x) \right]^2 dx = \pi \int_a^b \left[f(x) \right]^2 dx.$$

3. Вычисление длины дуги кривой

Если кривая задана в виде $y = f(x)$, где $f(x)$ – непрерывная и имеет непрерывную производную $f'(x)$ на отрезке $[a,b]$, то длина дуги этой кривой

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + y'^2}dx.$$

Если кривая задана параметрически в виде $\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \end{cases}$ $t_1 \le t \le t_2$, то

$$L = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)}\,dt.$$

4. Площадь поверхности вращения

Если поверхность определяется вращением кривой $y = f(x)$ ($a \le x \le b$) вокруг оси Ox, где $f(x)$ и $f'(x)$ – непрерывны, то площадь указанной поверхности вращения:

$$P = 2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1 + f'^2(x)}\,dx.$$

5. Физические приложения определенных интегралов

5.1. Центр тяжести $C(x_c, y_c)$ однородной пластины постоянной толщины с поверхностной плотностью $\rho = \text{const}$, ограниченная кривой $y = f(x)$ и прямыми $y = 0$, $x = a$, $x = b$ определится в виде:

$$x_c = \frac{\int_a^b x f(x)\,dx}{\int_a^b f(x)\,dx};\; y_c = \frac{\frac{1}{2}\int_a^b f^2(x)\,dx}{\int_a^b f(x)\,dx}.$$

5.2. Работа переменной силы $X = f(x)$, действующей в направлении оси Ox при прямолинейном перемещении на отрезке $[x_0, x_1]$ вычисляется по формуле

$$A = \int_{x_0}^{x_1} f(x)\,dx.$$

5.3. Путь, пройденный точкой со скоростью $v(t)$:

$$S = \lim_{\max \Delta t_k \to 0} \sum_{k=0}^{n-1} v(\xi_k)\Delta t_k = \int_0^t v(t)\,dt.$$

Несобственные интегралы

1. *Несобственные интегралы с бесконечными пределами (несобственный интеграл I рода)*

Несобственный интеграл $\int\limits_a^{\infty} f(x)dx$ от функции $f(x)$, интегрируемой на любом отрезке $[a,b']$, $a < b' < \infty$, определяется в виде

$$\int\limits_a^{\infty} f(x)dx = \lim_{b'\to\infty}\int\limits_a^{b'} f(x)dx.$$

Аналогично определяется несобственный интеграл на интервале $(-\infty,b]$:

$$\int\limits_{-\infty}^{b} f(x)dx = \lim_{a'\to-\infty}\int\limits_{a'}^{b} f(x)dx.$$

Пример.

$$\int\limits_{-\infty}^{1}\frac{dx}{x^2} = \lim_{a'\to-\infty}\int\limits_{a'}^{1}\frac{dx}{x^2} = \lim_{a'\to-\infty}\left(-\frac{1}{x}\bigg|_{a'}^{1}\right) = \lim_{a'\to-\infty}\left(-1+\frac{1}{a'}\right) = -1.$$

2. *Интеграл от разрывной функции (несобственный интеграл II рода)*

Если непрерывная на промежутке $[a,b[$ функция $f(x)$ имеет бесконечный разрыв при $x = b$ и если существует конечный предел

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_a^{b-\varepsilon} f(x)dx,\ \varepsilon > 0,$$

то его называют несобственным интегралом второго рода и обозначают $\int\limits_a^{b} f(x)dx$. Если предел существует, то несобственный интеграл $\int\limits_a^{b} f(x)dx$ называется сходящимся, если предел не существует или бесконечен, то интеграл $\int\limits_a^{b} f(x)dx$ расходится.

Аналогично определяется несобственный интеграл, когда $f(x)$ терпит разрыв в точке a:

$$\int\limits_a^{b} f(x)dx = \lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_{a+\varepsilon}^{b} f(x)dx.$$

Если $f(x)$ терпит разрыв во внутренней точке c отрезка $[a,b]$, то несобственный интеграл второго рода определяется формулой:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx .$$

Интеграл слева называют сходящимся, если оба несобственных интеграла, стоящих справа, сходятся.

Примеры.

1. $\int\limits_0^a \frac{dx}{\sqrt{x}} = \lim\limits_{\delta\to 0} \int\limits_{0+\varepsilon}^a \frac{dx}{\sqrt{x}} = \lim\limits_{\varepsilon\to 0}\left(2\sqrt{x}\Big|_\varepsilon^a \right) = \lim\limits_{\varepsilon\to 0}\left(2\sqrt{a} - 2\sqrt{\varepsilon}\right) = 2\sqrt{a}.$

2. $\int\limits_1^\infty \frac{dx}{\sqrt{x}} = \lim\limits_{b'\to\infty} \int\limits_1^{b'} \frac{dx}{\sqrt{x}} = \lim\limits_{b'\to\infty}\left(\ln|x|\Big|_1^{b'}\right) = \lim\limits_{b'\to\infty}\left(\ln|b'| - \ln 1\right) = \lim\limits_{b'\to\infty} \ln b' = \infty$;

интеграл расходится.

3. $\int\limits_0^1 \frac{dx}{x^\alpha} = \lim\limits_{\substack{\varepsilon\to 0\\(\varepsilon>0)}} \int\limits_\varepsilon^1 \frac{dx}{x^\alpha} = \lim\limits_{\varepsilon\to 0}\begin{cases} \ln|x|\Big|_\varepsilon^1, \alpha = 1 \\ \left.\dfrac{x^{-\alpha+1}}{-\alpha+1}\right|_\varepsilon^1, \alpha \neq 1 \end{cases} =$

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\begin{cases} \ln 1 - \ln\varepsilon, \alpha = 1 \\ \dfrac{1}{1-\alpha} - \dfrac{\varepsilon^{(1-\alpha)}}{1-\alpha}, \alpha \neq 1 \end{cases} = \lim_{\varepsilon\to 0}\begin{cases} -\ln\varepsilon, \alpha = 1 \\ \dfrac{1}{1-\alpha}\left(1-\varepsilon^{1-\alpha}\right), \alpha \neq 1 \end{cases} =$$

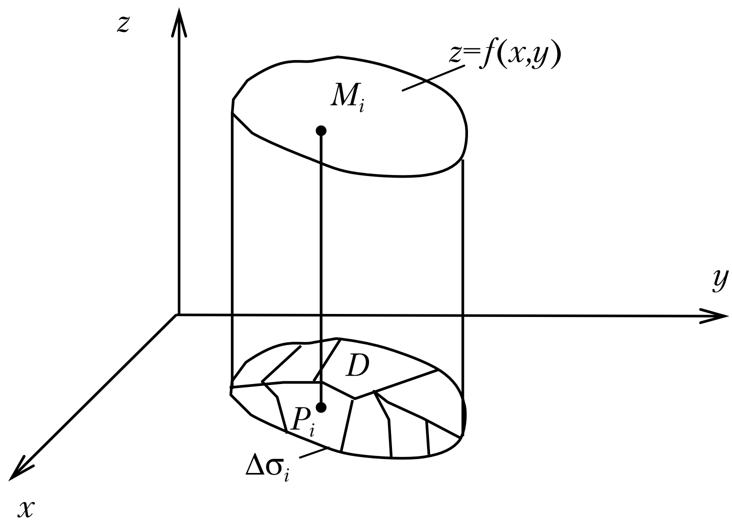
$$\lim_{\varepsilon\to 0}\begin{cases} -\ln\varepsilon, \alpha = 1 \\ \dfrac{1}{1-\alpha}\left(1 - \dfrac{1}{\varepsilon^{\alpha-1}}\right), \alpha > 1 \\ \dfrac{1}{1-\alpha}\left(1-\varepsilon^{1-\alpha}\right), \alpha < 1 \end{cases} = \begin{cases} \infty, \alpha = 1 - \text{расходится}, \\ \infty, \alpha > 1 - \text{расходится}, \\ \dfrac{1}{1\text{-}\alpha}, \alpha < 1 - \text{сходится}. \end{cases}$$

3.3. Кратные и криволинейные интегралы

Кратные интегралы

Объем цилиндрического тела. Двойной интеграл

Определим объем V цилиндрического тела, ограниченного плоскостью OXY, поверхностью $z = f(x,y)$ и цилиндрической поверхностью. Предполагается, что любая прямая, параллельная оси OZ, пересекает $z = f(x,y)$ не более чем в одной точке; образующая цилиндрической поверхности параллельна оси OZ. Функция $f(x,y)>0$ непрерывна в области D.



Разобьем основание цилиндрического тела – область D на n частичных областей произвольной формы с площадями $\Delta\sigma_i (i=1,2,...,n)$.Через границу каждой области проведем цилиндрическую поверхность с образующей, параллельной оси OZ. Данное цилиндрическое тело окажется разбитым на n кусков (тел), соответствующих n частичным областям. Выберем в каждой частичной области точку $P_i(x_i,y_i)$ и заменим соответствующее частичное цилиндрическое тело прямым цилиндром с тем же основанием и высотой $z_i=f(x_i, y_i)$. В результате получим ступенчатое тело, объем которого

$$V_n = \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i)\Delta\sigma_i .$$

Приближенно примем за объем V цилиндрического тела V_n, т.е. $V \approx V_n$. Переходя к пределу при $n\to\infty$ и, когда *все* размеры частичных областей стремятся к нулю, получим объем V данного цилиндрического тела:

$$V = \lim_{n\to\infty} V_n = \lim \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i)\Delta\sigma_i .$$

Рассмотрим вопрос в общем виде. Пусть $f(x,y)$ – функция двух переменных, непрерывная в области D. Разобьем область D на частичные области, в каждой из них выберем по произвольной точке $P_i(x_i,y_i)$ и составим сумму

$$I_n = \sum_{i=1}^{n} f\left(x_i, y_i\right)\Delta\sigma_i ,$$

где $f(x_i,y_i)$ – значение функции в точке P_i;
$\Delta\sigma_i$ – площадь частичной области.

Сумма называется n-й интегральной суммой для функции $f(x,y)$ в области D, соответствующей *данному разбиению* этой области на n частичных областей.

Определение. Двойным интегралом от функции $f(x,y)$ по области D называется предел, к которому стремится n-я интегральная сумма при стремлении к нулю *наибольшего* диаметра частичных областей (диаметром d_i области называется наибольшее расстояние между точками ее границы). Обозначается

$$\iint\limits_D f\left(x,y\right)d\sigma = \lim_{\substack{n\to\infty \\ \max d_i \to 0}} \sum_{i=1}^{n} f\left(x_i, y_i\right)\Delta\sigma_i .$$

Область D называется областью интегрирования. Таким образом, объем цилиндрического тела, ограниченного плоскостью OXY, поверхностью $z=f(x,y)$ ($f(x,y)>0$) и цилиндрической поверхностью с образующей, параллельной оси OZ, выражается двойным интегралом от функции $f(x,y)$, взятым по области, являющейся основанием цилиндрического тела:

$$V = \iint\limits_D f\left(x,y\right)d\sigma .$$

Теорема существования двойного интеграла. Если функция $f(x,y)$ непрерывна в области D, ограниченной замкнутой линией, то ее n-я интегральная сумма стремится к пределу при стремлении к нулю наибольшего диаметра частичных областей. Этот предел, т.е. двойной интеграл $\iint\limits_D f\left(x,y\right)d\sigma$, не зависит от способа разбиения области D на частичные области $\Delta\sigma_i$ и от выбора в них точек P_i.

Свойства двойных интегралов

1. $\iint\limits_D \left[f(x,y) + \varphi(x,y) + \ldots + \psi(x,y) \right] d\sigma = \iint\limits_D f(x,y) d\sigma + \ldots + \iint\limits_D \psi(x,y) d\sigma.$

2. $\iint\limits_D cf(x,y) d\sigma = c \iint\limits_D f(x,y) d\sigma$ (c=const).

3. Если $D = D_1 + D_2$, то $\iint\limits_D f(x,y) d\sigma = \iint\limits_{D_1} f(x,y) d\sigma + \iint\limits_{D_2} f(x,y) d\sigma$

Если во всех точках области D имеет место $f(x,y) \geq \varphi(x,y)$, то $\iint\limits_D f(x,y) d\sigma \geq \iint\limits_D \varphi(x,y) d\sigma$.

В частности, если $f(x,y)$ в области D не меняет знака, то $\iint\limits_D f(x,y) d\sigma$ – число того же знака, что и функция $f(x,y)$.

5. Если во всех точках области D $m \leq f(x,y) \leq M$, то

$$mS < \iint\limits_D f(x,y) d\sigma < MS,$$

где S – площадь области D.

6. $\iint\limits_D f(x,y) d\sigma = f(\xi,\eta) S,$

где (ξ,η) – некоторая точка области D.

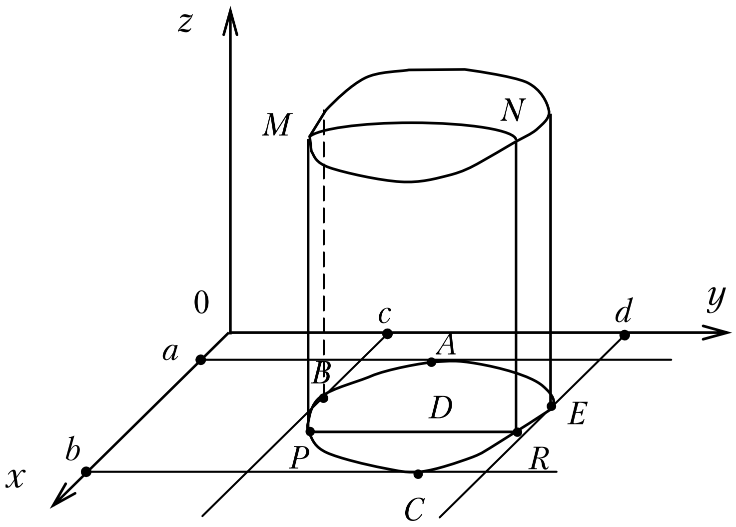
При этом $f(\xi,\eta)$ называется средним значением функции $f(x,y)$ в области D.

Вычисление двойных интегралов

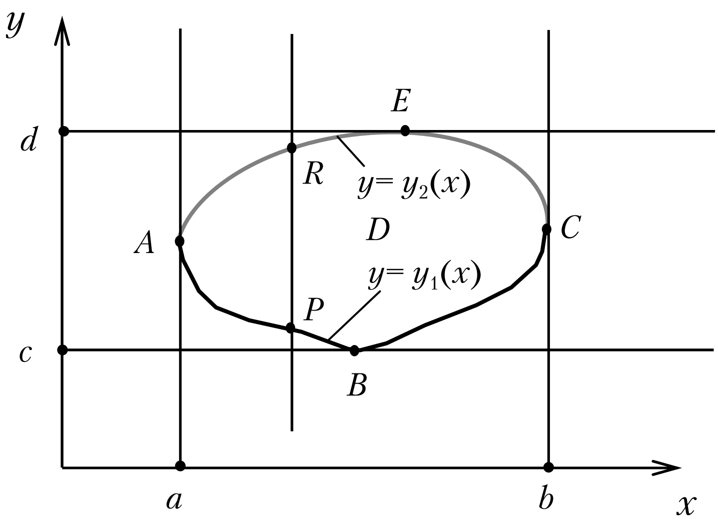
Пользуясь теоремой существования двойного интеграла, разобьем область D на частичные области координатными линиями x=const, y=const. Тогда площадь каждой частичной области $\Delta\sigma$ будет равна $\Delta x \cdot \Delta y$, $d\sigma = dxdy$. Следовательно,

$$\iint\limits_D f(x,y) d\sigma = \iint\limits_D f(x,y) dxdy.$$

При вычислении двойного интеграла будем опираться на тот факт, что он выражает объем V цилиндрического тела с основанием D, ограниченного поверхностью $z=f(x,y)$.



Пусть область D такова, что любая прямая, параллельная Ox или Oy, пересекает границу области D не более чем в двух точках.



Заключим область D внутрь прямоугольника $a \le x \le b$, $c \le y \le d$. В силу того, что граница области с любой прямой, параллельной оси OY, пересекается в одной точке, можно записать уравнения линий ABC и AEC в виде $y = y_1(x)$ и $y = y_2(x)$; $y_1(x)$, $y_2(x)$ – непрерывны; $y_1(x) \le y_2(x)$ для всех $x \in [a,b]$ (такая область называется *правильной в направлении оси* Oy). Аналогично, точками B и E граница разбивается на линии BAE и BCE, уравнения которых $x = x_1(y)$ и $x = x_2(y)$.

Рассечем рассматриваемое цилиндрическое тело произвольной плоскостью x=const ($a \le x \le b$), параллельной OYZ. В сечении получим криволинейную трапецию $PMNR$. В точках отрезка PR функция $f(x, y)$ будет функцией одной переменной y. Причем в точках P и R $y = y_1(x)$ и $y = y_2(x)$ (x – фиксированное значение).

Но тогда площадь сечения *PMNR* есть

$$S(x)=\int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)\,dy$$

(зависит от значения x). Однако ранее мы установили, что объем тела

$$V=\int\limits_a^b S(x)\,dx,$$

где $S(x)$ – площадь сечения данного тела плоскостью $x=\text{const}$ ($a \le x \le b$).

Тогда $V=\iint\limits_D f(x,y)\,dxdy=\int\limits_a^b\left(\int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)\,dy\right)dx$ или в более удобной форме:

$$\iint\limits_D f(x,y)\,dxdy=\int\limits_a^b dx\int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)\,dy.$$

Пределы внутреннего интеграла – переменные и указывают изменение y при $x=\text{const}$. Пределы внешнего интеграла постоянны и указывают границы изменения x. Меняя роли x и y и рассматривая сечения тела плоскостями, параллельными *OXZ*, получили бы

$$\iint\limits_D f(x,y)\,dxdy=\int\limits_c^d dy\int\limits_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x,y)\,dx.$$

Вычисление двойного интеграла сводится к последовательному вычислению двух обыкновенных определенных интегралов. При этом надо помнить, что во внутреннем интеграле одна из переменных при интегрировании принимается за const. Правые части называются повторными (двукратными) интегралами. Процесс расстановки пределов интегрирования называется приведением двойного интеграла к повторному. Если область D – прямоугольник со сторонами, параллельными осям OX и OY, то

$$\iint\limits_D f(x,y)\,d\sigma=\int\limits_a^b dx\int\limits_c^d f(x,y)\,dy=\int\limits_c^y dy\int\limits_a^b f(x,y)\,dx.$$

В других случаях для сведения двойного интеграла к повторному необходимо:

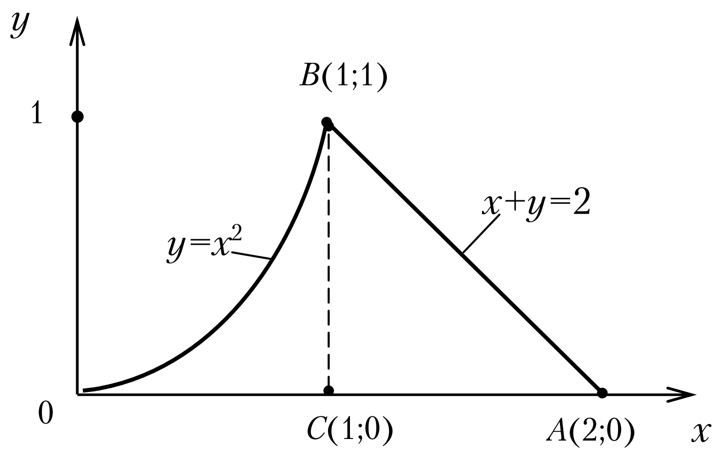
1) построить область интегрирования, т.е. изобразить ее в плоскости xOy;

2) установить порядок интегрирования, т.е. наметить, по какой переменной будет проводиться внутреннее интегрирование, а по какой – внешнее;

3) расставить пределы интегрирования.

Пример.

Привести к повторному двойной интеграл $\iint\limits_D f(x,y)\,dxdy$, если область D ограничена линиями $y = 0$, $y = x^2$, $x+y = 2$.



Здесь удобнее интегрировать сначала по x, затем по y.

$$\sqrt{y} \le x \le 2-y, \quad 0 \le y \le 1.$$

Откуда

$$\iint\limits_D f(x,y)\,dxdy = \int\limits_0^1 dy \int\limits_{\sqrt{y}}^{2-y} f(x,y)\,dx.$$

Если же сначала интегрировать по y, затем по x, то область D сначала надо разбить на две области OBC и CBA. Получим:

$$\iint\limits_D f(x,y)\,dxdy = \int\limits_0^1 dx \int\limits_0^{x^2} f(x,y)\,dy + \int\limits_1^2 dx \int\limits_0^{2-x} f(x,y)\,dy.$$

Двойной интеграл в полярных координатах

Если область D отнесена к полярным координатам, то

$$x = r\cos\varphi, \; y = r\sin\varphi,$$

а формула преобразования двойного интеграла в декартовых координатах к полярным имеет вид:

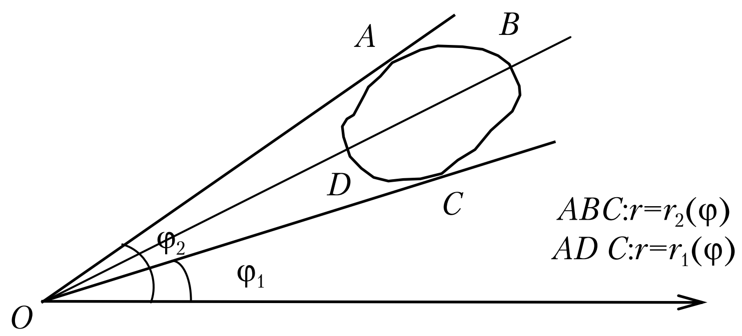
$$I=\iint_D f(x,y)\,dxdy=\iint_D f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\,rdrd\varphi,$$

где $rdrd\varphi$ – элемент площади в полярных координатах.

Вычисление двойного интеграла в полярной системе координат сводится к последовательному интегрированию по r и φ.

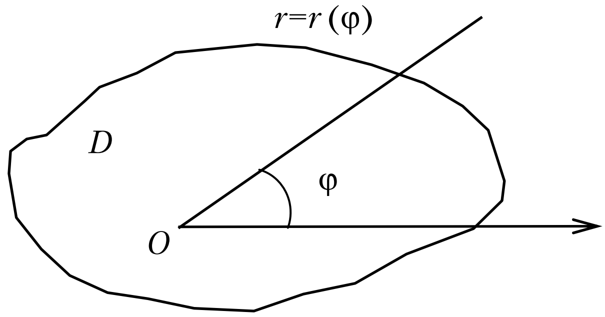
Если полюс не содержится внутри области D, заключенной между лучами $\varphi=\varphi_1$ и $\varphi=\varphi_2$, и координатные линии $\varphi=$ const встречают ее границу не более чем в двух точках, то

$$I=\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} d\varphi \int_{r_1(\varphi)}^{r_2(\varphi)} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\,rdrd\varphi.$$



Если полюс содержится внутри области D, и любой полярный радиус пересекает границу в одной точке, то

$$I=\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{r(\varphi)} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\,rdr.$$



Приложения двойных интегралов к задачам механики

1. Масса тонкой плоской пластинки, расположенной на плоскости *OXY* и занимающая область *D,* переменной плотности

$$m=\iint\limits_D \delta(x,y)\,d\sigma,$$

где $\delta=\delta(x,y)$ – поверхностная плотность в данной точке пластинки (предел отношения массы площадки к ее площади, когда площадка стягивается к данной точке); изменение плотности по толщине пластинки в силу ее малости не учитывается.

2. Статические моменты пластинки:

$$M_x=\iint\limits_D y\rho(x,y)\,d\sigma;$$

$$M_y=\iint\limits_D x\rho(x,y)\,d\sigma.$$

3. Координаты центра тяжести пластинки:

$$x_c=\frac{M_x}{m}=\frac{\iint\limits_D y\rho(x,y)\,d\sigma}{\iint\limits_D \rho(x,y)\,d\sigma};$$

$$y_c=\frac{M_y}{m}=\frac{\iint\limits_D x\rho(x,y)\,d\sigma}{\iint\limits_D \rho(x,y)\,d\sigma}.$$

3. Моменты инерции пластинки относительно осей *Ox* и *Oy*:

$$I_x=\iint\limits_D y^2\rho(x,y)\,d\sigma;\ I_y=\iint\limits_D x^2\rho(x,y)\,d\sigma.$$

4. Момент инерции пластины относительно начала координат:

$$I_0=I_x+I_y.$$

Геометрические приложения двойных интегралов

1. *Площадь плоской фигуры.* При $f(x,y)=1$ цилиндрическое тело будет прямым цилиндром с высотой $H=1$. Объем такого цилиндра численно равен площади *S* основания *D*. Так что

$$S=\iint\limits_D dxdy,$$

или в полярных координатах

$$S=\iint_D r dr d\varphi .$$

2. *Площадь поверхности.* Если гладкая поверхность заданна уравнением $z=f\left(x,y\right)$, то площадь поверхности определяется по формуле

$$S=\iint_D \sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\,dxdy ,$$

где D –проекция поверхности на плоскость xOy.

Если поверхность задана уравнением $x=f\left(y,z\right)$, то

$$S=\iint_D \sqrt{1+\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial x}{\partial z}\right)^2}\,dydz ,$$

где D – проекция поверхности на плоскость yOz.

Если поверхность задана уравнением $y=f\left(x,z\right)$, то

$$S=\iint_D \sqrt{1+\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)^2}\,dxdz ,$$

где D – проекция поверхности на плоскость xOz.

3. *Вычисление объемов.* Если область U трехмерного пространства задается условиями $\left\{\left(x,y\right)\in D,\ \ f\left(x,y\right)\le z\le q\left(x,y\right)\right\}$ (D – некоторая область на плоскости xOy), то ее объем равен:

$$V=\iint_D \left[f\left(x,y\right)-q\left(x,y\right)\right]dxdy .$$

Масса неоднородного тела. Тройной интеграл

Рассмотрим тело, занимающее пространственную область Ω. Предположим, что плотность распределения массы в теле есть непрерывная функция координат точек тела $\rho=\rho\left(x,y,z\right)$. Разобьем тело произвольным образом на n частей с объемами ΔV_i и в каждой из них выберем по произвольной точке $P_i\left(x_i,y_i,z_i\right)$. Полагая, что в каждой частичной области плотность постоянна и равна $\rho\left(x_i,y_i,z_i\right)$, получим приближенное значение массы $M_n=\sum_{i=1}^{n}\rho\left(x_i,y_i,z_i\right)\Delta V_i$. Предел этой суммы при $n \to \infty$, и когда частичные тела стягиваются в точку, даст массу тела

$$M = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \rho\left(x_i, y_i, z_i\right) \Delta V_i \stackrel{\Delta}{=} \iiint_{\Omega} \rho\left(x, y, z\right) dV.$$

В общем случае

$$\iiint_{\Omega} f\left(x, y, z\right) dV \stackrel{\Delta}{=} \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f\left(x_i, y_i, z_i\right) \Delta V_i,$$

где $f(x,y,z)$ – произвольная непрерывная функция в области Ω.

Свойства тройных интегралов аналогичны свойствам двойных интегралов.

Если $f(x,y,z)\equiv 1$, то $\iiint_{\Omega} dV = V$.

Вычисление тройного интеграла может производиться посредством ряда последовательных интегрирований, как и в случае двойного интеграла.

Тройной интеграл в декартовых координатах

Пусть тройной интеграл $I = \iiint_{V} f\left(x, y, z\right) dV$, где область V отнесена к системе декартовых координат. Разобьем область V плоскостями, параллельными координатным плоскостям. Тогда частичными областями будут параллелепипеды с гранями, параллельными координатным плоскостям. Элемент объема будет равен произведению дифференциалов переменных интегрировании:

$$dV = dxdydz.$$

Откуда

$$\iiint_{V} f\left(x, y, z\right) dV = \iiint_{V} f\left(x, y, z\right) dxdydz.$$

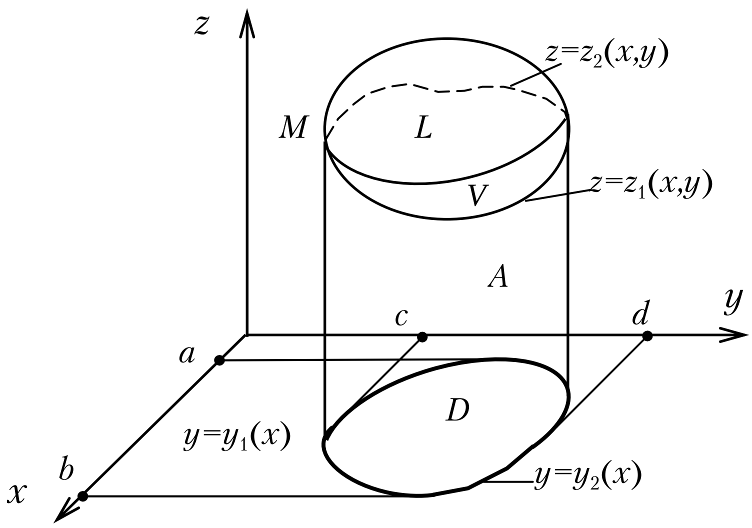
Приведем правило вычисления тройного интеграла сначала для пространственных областей V специального вида. А именно, когда область V ограничена замкнутой поверхностью S, обладающей следующими свойствами:

1) всякая прямая, параллельная оси Oz, проведенная через внутреннюю точку области V (не лежащую на границе S), пересекает поверхность S в двух точках;

2) вся область V проектируется на плоскость Oxy в правильную двухмерную область D;

3) всякая часть области V, отсеченная плоскостью, параллельной любой из координатных плоскостей, также обладает свойствами 1,2.

Область V, удовлетворяющая свойствам 1-3, называется *правильной* трехмерной областью (эллипсоид, прямоугольный параллелепипед, тетраэдр и т.д.).



Пусть поверхность, ограничивающая область V снизу, описывается уравнением $z = z_1(x,y)$, а поверхность, ограничивающая V сверху, – уравнением $z = z_2(x,y)$.

Пусть область D (проекция V на плоскость Oxy) ограничена линиями $x = a$, $x = b$, $y = y_1(x)$, $y = y_2(x)$. Тогда для любой непрерывной в области V функции $f(x, y, z)$ имеет место формула

$$\iiint\limits_V f(x,y,z)dV = \iint\limits_D \left(\int\limits_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)\,dz \right) dS,$$

(вычисление тройного интеграла сводится к вычислению двойного интеграла). Сначала вычисляется внутренний интеграл по переменной z при постоянных x и y в пределах изменения z. Результат вычисления этого интеграла есть функция двух переменных x и y. Переходя от двойного интеграла по области D к повторному, получим формулу

$$\iiint\limits_V f(x,y,z)\,dxdydz = \int\limits_a^b dx \int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)} dy \int\limits_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)\,dz,$$

по которой и вычисляется тройной интеграл в декартовых координатах.

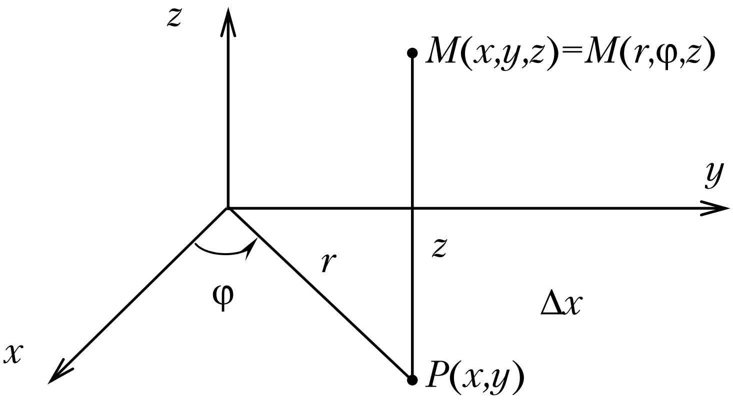
Если область V имеет более сложный вид, то ее надо разбить на части указанного вида и вычислить данный интеграл как сумму интегралов, взятых по составляющим областям.

Тройной интеграл в цилиндрических координатах

Если область V отнесена к цилиндрической системе координат (r,φ,z), то положение точки M определяется полярными координатами (r,φ) проекции точки M на плоскость Oxy и аппликатой z точки M.

При таком выборе расположения осей координат

$$x = r\cos\varphi,\ y = r\sin\varphi,\ z = z.$$



Разбивая V координатными поверхностями $r = \text{const}$, $\varphi = \text{const}$, $z = z$, получим

$$dV = r\,dr\,d\varphi.$$

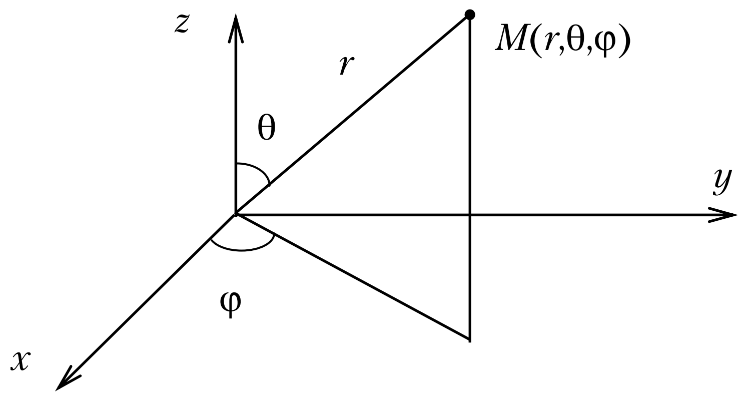
Справедливо:

$$\iiint\limits_V f(x,y,z)dxdydz = \iiint\limits_V f(r\cos\varphi, r\sin\varphi, z)rdrd\varphi dz.$$

Таким образом, вычисление тройного интеграла приводится к интегрированию по r, по φ и по z аналогично тому, как это делается в декартовых координатах.Переход к цилиндрическим координатам особенно удобен в случае, когда область интегрирования образована цилиндрической поверхностью.

Тройной интеграл в сферических координатах

Если область интегрирования к сферическим координатам (r,θ,φ), то положение точки M в пространстве определяется ее расстоянием r от начала координат O, углом θ между радиусом-вектором и осью Oz и углом φ между проекцией радиуса-вектора точки на плоскость *Oxy* и осью *Ox*; 0≤θ≤π, 0≤φ≤2π.



Связь между декартовыми и сферическими координатами:

$$x = r\sin\theta\cos\varphi,$$

$$y = r\sin\theta\sin\varphi.$$

Разбивая область V на частичные области V_i (координатными поверхностями r = const, φ = const, θ = const), вычислив элемент объема $dV = r^2 \sin\theta dr d\phi d\theta$, заменив в тройном интеграле $\iiint\limits_V f(x,y,z)dV$ переменные *x, y, z*, получим формулу перехода от декартовых координат к сферическим:

$$\iiint\limits_V f(x,y,z)dV = \iiint\limits_V f(r\sin\theta\cos\varphi, r\sin\theta\sin\varphi, r\cos\theta)r^2\sin\theta dr d\varphi d\theta.$$

Применение этой формулы особенно эффективно, когда область V – шар с центром в точке O.

Применение тройных интегралов

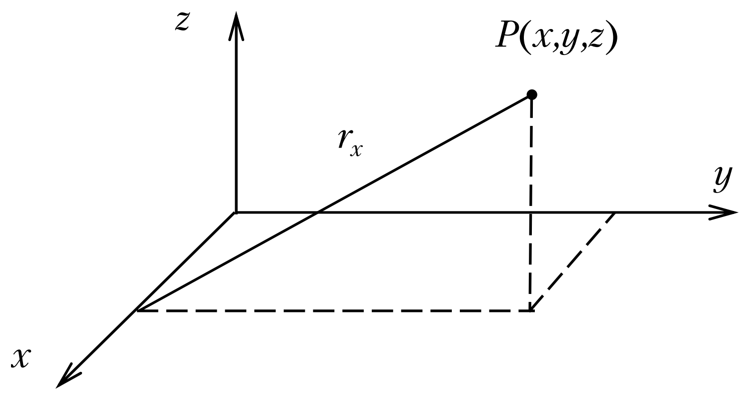
Тройные интегралы применяются для вычисления статических моментов и моментов инерции пространственных тел. Их применение основано на тех же принципах, что и применение двойных интегралов для вычисления соответствующих моментов плоских пластинок.

Так как квадраты расстояний от точки $P(x,y,z)$ до осей *Ox*, *Oy*, *Oz* соответственно равны $y^2+z^2, x^2+z^2, x^2+y^2$, то при $\delta(x,y,z) = 1$ будем иметь:

$$I_x = \iiint\limits_V \left(y^2+z^2\right)dV,$$

$$I_y = \iiint\limits_V \left(x^2 + z^2\right) dV,$$

$$I_z = \iiint\limits_V \left(x^2 + y^2\right) dV.$$



Центробежные моменты вычисляются по формулам

$$I_{xy} = \iiint\limits_V xy dV;$$

$$I_{yz} = \iiint\limits_V yz dV;$$

$$I_{xz} = \iiint\limits_V xz dV,$$

а полярный момент относительно точки O:

$$I_0 = \iiint\limits_V \left(x^2 + y^2 + z^2\right) dV.$$

Если тело неоднородное, то в каждой формуле под знаком интеграла будет находиться дополнительный множитель $\delta(x,y,z)$ – плотность в точке P.

Координаты центра тяжести тела выражаются формулами:

$$x_c = \frac{\iiint\limits_V x\delta\left(x, y, z\right) dxdydz}{\iiint\limits_V \delta\left(x, y, z\right) dxdydz} = \frac{M_{yz}}{M};$$

$$y_c = \frac{\iiint\limits_V y\delta\left(x, y, z\right) dxdydz}{\iiint\limits_V \delta\left(x, y, z\right) dxdydz} = \frac{M_{xz}}{M};$$

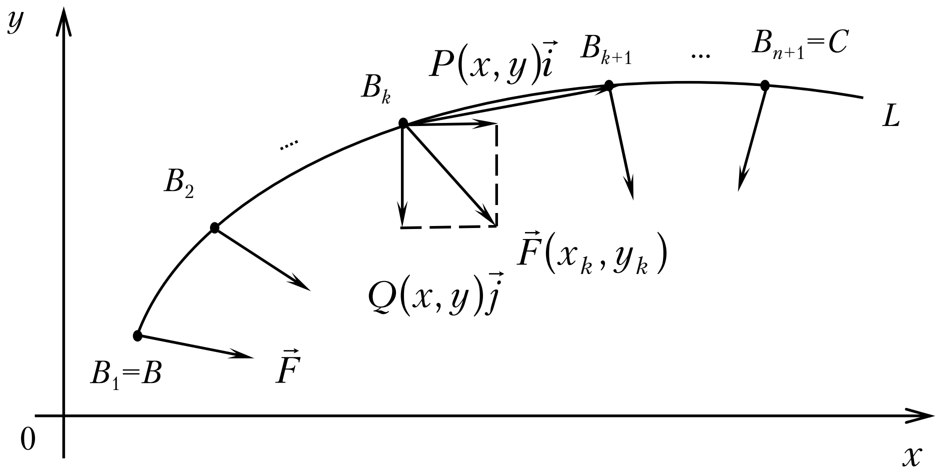
$$z_c = \frac{\iiint\limits_V z\delta(x,y,z)\,dxdydz}{\iiint\limits_V \delta(x,y,z)\,dxdydz} = \frac{M_{xy}}{M},$$

где M – масса тела;

M_{yz}, M_{xz}, M_{xy} – статические моменты соответственно относительно координатных плоскостей Oyz, Oxz, Oxy.

Криволинейные интегралы

Пример задачи, приводящей к понятию криволинейного интеграла по координатам (или второго рода). Определим работу, совершаемую силами поля $\vec{F} = \vec{F}(x,y) = P(x,y)\vec{i} + Q(x,y)\vec{j}$ ($P(x,y)$, $Q(x,y)$ – проекции на оси Ox и Oy), при перемещении материальной точки по некоторой линии L, расположенной в области D и соединяющей точки B и C.



Разобьем линию L на n частей точками $B_1, B_2, ..., B_{n+1}$.

Заменим криволинейные участки B_kB_{k+1} вектором перемещения $\overrightarrow{B_kB_{k+1}} = (x_{k+1} - x_k; y_{k+1} - y_k)$, а силу в пределах отрезка B_kB_{k+1} – постоянной силой, равной силе, приложенной в точке B_k:

$$\vec{F}_k = \vec{F}(x_k, y_k) = P(x_k, y_k)\vec{i} + Q(x_k, y_k)\vec{j}.$$

Тогда работа, совершаемая силами поля при перемещении из точки B_k в точку B_{k+1} (по прямолинейному отрезку), равна:

$$\Delta A_k = \left|\vec{F}_k\right|\left|\overrightarrow{B_kB_{k=1}}\right|\cos\left\langle \vec{F}_k, \overrightarrow{B_kB_{k=1}}\right\rangle = \left(\vec{F}_k, \overrightarrow{B_kB_{k=1}}\right) =$$
$$= P(x_k, y_k)(x_{k+1} - x_k) + Q(x_k, y_k)(y_{k+1} - y_k) =$$
$$= P(x_k, y_k)\Delta x_k + Q(x_k, y_k)\Delta y_k.$$

Вся работа при перемещении материальной точки из точки B в точку C будет:

$$A \approx A_n = \sum_{k=1}^{n} P\left(x_k, y_k\right)\Delta x_k + Q\left(x_k, y_k\right)\Delta y_k.$$

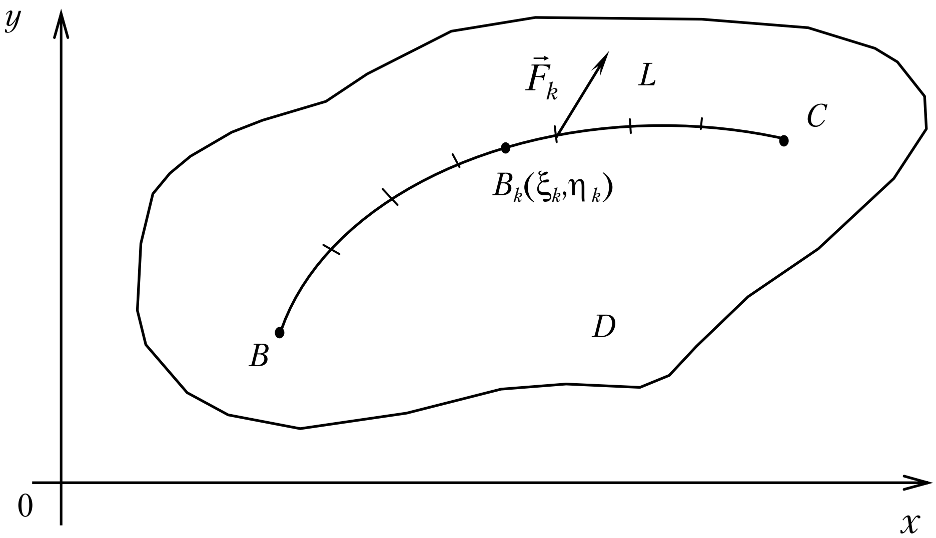
Переходя к пределу при $n \to \infty$ и полагая, что длина наибольшего отрезка стремится к нулю, получим истинную работу.

В общем случае предполагается, что $P(x,y)$, $Q\ (x,y)$ – функции двух переменных, непрерывные в некоторой области D; L – гладкая линия, целиком расположенная в этой области. Разбивая линию L на n участков точками $(x_k;y_k)$, $(x_{k+1};y_{k+1})$,..., $(x_{n+1};y_{n+1})$ и выбирая на каждом участке по произвольной точке $B_k(\xi_k,\eta_k)$ (они могут совпадать и с концами участков), составим сумму

$$\sum_{k=1}^{n} P\left(\xi_k, \eta_k\right)\Delta x_k + Q\left(\xi_k, \eta_k\right)\Delta y_k,$$

где $\Delta x_k = x_{k+1} - x_k$, $\Delta y_k = y_{k+1} - y_k$.

Эта сумма называется n-й интегральной суммой по линии L.



Определение. Криволинейным интегралом по координатам (или криволинейным интегралом II рода) от выражения $P\left(x,y\right)dx + Q\left(x,y\right)dy$ по *направленной* дуге BC называется предел n-й интегральной суммы при условии, что $\max\Delta x_k \to 0$, $\max\Delta y_k \to 0$.

Имеем

$$\int_{BC} P\left(x,y\right)dx + Q\left(x,y\right)dy = \int_{BC} P\left(x,y\right)dx + \int_{BC} Q\left(x,y\right)dy,$$

где $\int\limits_{BC} P(x,y)dx = \lim\limits_{\max\Delta x_k \to 0} \sum\limits_{k=1}^{n} P(\xi_k,\eta_k)\Delta x_k$ – *криволинейный интеграл по координате* x; $\int\limits_{BC} Q(x,y)dy = \lim\limits_{\max\Delta y_k \to 0} \sum\limits_{k=1}^{n} Q(\xi_k,\eta_k)\Delta y_k$ – криволинейный интеграл по координате y.

Линия L (BC) называется линией или путем интегрирования, точка B называется начальной, а C – конечной точками интегрирования.

Вычисление криволинейных интегралов

1. Если линия интегрирования дана в *параметрической форме*: $x = x(t)$, $y=y(t)$, то

$$\int\limits_{L} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \int\limits_{t_B}^{t_C} \Big[P\big(x(t),y(t)\big)x'(t) + Q\big(x(t),y(t)\big)y'(t)\Big]dt.$$

2. Если линия L задана в виде $y = y(x)$, то

$$\int\limits_{L} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \int\limits_{x_B}^{x_C} \Big[P\big(x,y(x)\big) + Q\big(x,y(x)\big)y'(x)\Big]dx,$$

где x_B, x_C – абсциссы точек B и C.

3. Если кривая L задана в виде $x=x(y)$, то

$$\int\limits_{L} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \int\limits_{y_B}^{y_C} \Big[P\big(x(y),y\big)x'(y) + Q\big(x(y),y\big)\Big]dy,$$

где y_B, y_C – ординаты точек B и C.

4. Если L – отрезок прямой, параллельной оси Ox ($y = y_0$, $dy=0$), то

$$\int\limits_{L} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \int\limits_{L} P(x,y)dx = \int\limits_{L} P(x,y_0)dx = \int\limits_{x_1}^{x_2} P(x,y_0)dx.$$

5. Если L – отрезок прямой, параллельной оси Oy ($x=x_0$, $dx = 0$), то

$$\int\limits_{L} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \int\limits_{L} Q(x_0,y)dy = \int\limits_{y_1}^{y_2} Q(x_0,y)dy.$$

Пример.

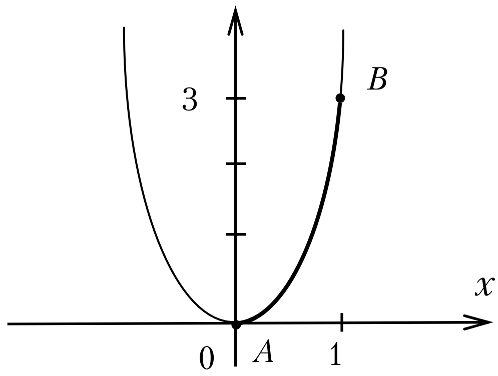
1. Найти $\int\limits_{AB} (4x - y)dx + 5x^2 y dy$,

где AB – дуга параболы $y=3x^2$ от точки $A(0;0)$ до точки $B(1;3)$.

Имеем:

$$y' = 6x,$$

точке A соответствует $x = 0$,
точке B соответствует $x = 1$.



Тогда

$$\int_{AB} (4x - y)dx + 5x^2 y dy = \int_0^1 \Big(\big(4x - 3x^2\big) + 5x^2 3x^2 6x \Big) dx =$$

$$= \int_0^1 \big(4x - 3x^2 + 90x^5\big) dx = \left(4\frac{x^2}{2} - 3\frac{x^3}{3} + 90\frac{x^6}{6} \right)\Bigg|_0^1 = 2 - 1 + 15 = 16.$$

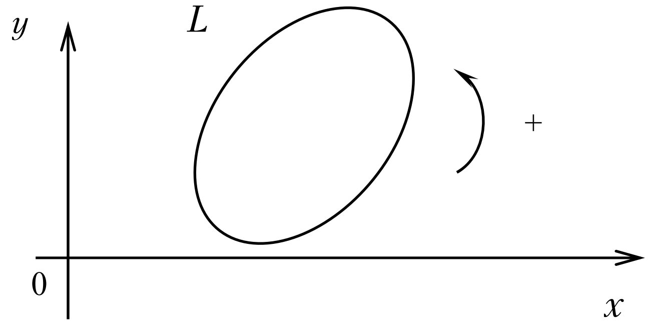
Это работа, совершаемая силами поля $\vec{F} = (4x - y)\vec{i} + \big(5x^2 y\big)\vec{j}$ при перемещении по дуге параболы $\overset{\cup}{AB}$ от точки A до точки B.

До сих пор мы рассматривали случаи, когда начальная и конечная точки интегрирования не совпадали, и заданием точек B и C определялось направление интегрирования. Ясно, что если изменить направление интегрирования на противоположное, то криволинейный интеграл изменит знак на противоположный.

Рассмотрим теперь случай, когда *контур замкнутый*. Здесь выбор начальной точки интегрирования (она же является и конечной) на контуре интегрирования никакой роли не играет.

В случае замкнутого контура на плоскости направление обхода, при котором область, ограниченная контуром, остается слева, называют положительным; перемещение в противоположном направлении называют отрицательным. Криволинейный интеграл по замкнутому контуру часто обозначают $\oint\limits_L$.

Если направление обхода положительное, то будем криволинейный интеграл обозначать $\int\limits_{+L} Pdx+Qdy$; если отрицательный, то – $\int\limits_{-L} Pdx+Qdy$. Эти интегралы отличаются только знаком.



Условия независимости интеграла от линии интегрирования

Криволинейный интеграл, вообще говоря, зависит не только от подынтегрального выражения, начальной и конечной точек пути интегрирования, но и от самого пути интегрирования. Для большого и важного класса подынтегральных выражений криволинейный интеграл $\int\limits_{L} Pdx+Qdy$ оказывается независящим от пути интегрирования.

Пусть D – часть плоскости, ограниченная одной замкнутой линией, не имеющей самопересечений. Тогда область D называется односвязной. Более строго: область называется односвязной, если любую принадлежащую к ней замкнутую кусочно-гладкую кривую γ можно стянуть в точку, принадлежащую D.

Теорема (основная). Если $P(x,y)$ и $Q(x,y)$ непрерывны вместе со своими частными производными в односвязной области D, тогда для того, чтобы криволинейный интеграл

$$\int\limits_{L} Pdx+Qdy$$

не зависел от линии интегрирования, необходимо и достаточно, чтобы во всех точках области D соблюдалось равенство

$$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x},$$

то есть, чтобы подынтегральное выражение $Pdx+Qdy$ было полным дифференциалом некоторой функции $u(x,y)$.

Справедлива формула Грина:

$$\iint\limits_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy = \int\limits_L Pdx + Qdy,$$

где $P(x,y)$, $Q(x,y)$ непрерывны вместе со своими частными производными первого порядка в области D, L – граница области D и интегрирование вдоль L производится в положительном направлении.

Если область D односвязна, и $P(x,y)$, $Q(x,y)$ вместе со своими производными непрерывны в этой области, то все четыре следующих утверждения равносильны, то есть если выполняется одно из них, то выполняются и все остальные:

1. $I = \oint Pdx + Qdy$, взятый по любому контуру, лежащему в области D, равен нулю.

2. $I = \int\limits_L Pdx + Qdy$ не зависит от линии интегрирования L.

3. Выражение $P(x,y) + Q(x,y)dy$ является полным дифференциалом некоторой функции $u(x,y)$.

4. Во всех точках области D имеет место $\dfrac{\partial Q}{\partial x} = \dfrac{\partial P}{\partial y}$.

Интегрирование полных дифференциалов. Первообразная функция

Если подынтегральное выражение в криволинейном интеграле $\int\limits_L Pdx + Qdy$ является полным дифференциалом, то при соблюдении условий основной теоремы величина этого интеграла зависит лишь от начальной и конечной точек линии интегрирования, но не зависит от пути. Поэтому интеграл $I(x,y) = \int\limits_L Pdx + Qdy$ записывается в виде:

$$\int\limits_{(x_0,y_0)}^{(x_1,y_1)} P(x,y)dx + Q(x,y)dy,$$

где (x_0, y_0) – начальная точка;

(x_1, y_1) – конечная точка.

Воспользуемся тем, что если линия интегрирования есть отрезок прямой, параллельной оси Ox ($y = y_0$), то:

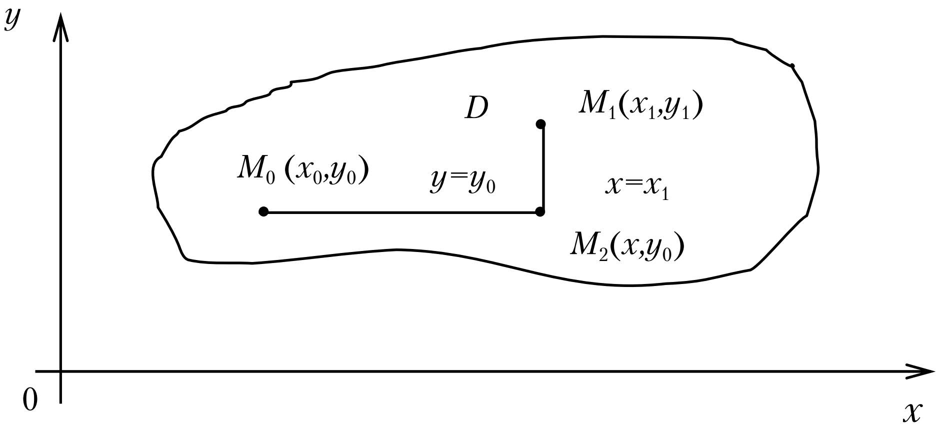
$$\int\limits_L P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \int\limits_{x_1}^{x_2} P(x,y_0)dx.$$

Если отрезок параллелен оси Oy, то:

$$\int_L P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \int_{y_1}^{y_2} Q(x_0,y)dy.$$

Тогда, интегрируя по ломаной, получим:

$$\int_{(x_0,y_0)}^{(x_1,y_1)} Pdx + Qdy = \int_{x_0}^{x_1} P(x,y_0)dx + \int_{y_0}^{y_1} Q(x_1,y)dy.$$



Если эта ломаная выходит за пределы области D, можно составить другую ломаную, состоящую из отрезков, параллельных осям координат.

Связь криволинейного интеграла $I(x,y)$ с функцией $u(x,y)$, для которой подынтегральное выражение является полным дифференциалом

$$du = P(x,y)dx + Q(x,y)dy$$

определяется *формулой Ньютона-Лейбница для криволинейных интегралов:*

$$I(x,y) = \int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} Pdx + Qdy = \int_{x_0}^{x} P(x,y)dx + \int_{y_0}^{y} Q(x_0,y)dy =$$
$$= u(x,y) - u(x_0,y_0),$$

Пример.

Найти первообразную $u(x,y)$ для полного дифференциала

$$\left(e^y + x\right)dx + \left(xe^y - 2y\right)dy.$$

В качестве начальной точки (x_0, y_0) выберем начало координат. Тогда

$$u(x,y)=\int_0^x P(x,0)dx+\int_0^y Q(x,y)dy+C=$$

$$=\int_0^x (1+x)dx+\int_0^y \left(xe^y-2y\right)dy+C=$$

$$=\left.\frac{(1+x)^2}{2}\right|_0^x+\left.xe^y\right|_0^y-2\left.\frac{y^2}{2}\right|_0^y+C=$$

$$=\frac{(1+x)^2}{2}+xe^y-x-y^2+C.$$

Площадь области, ограниченной кривой L, определяется в виде:

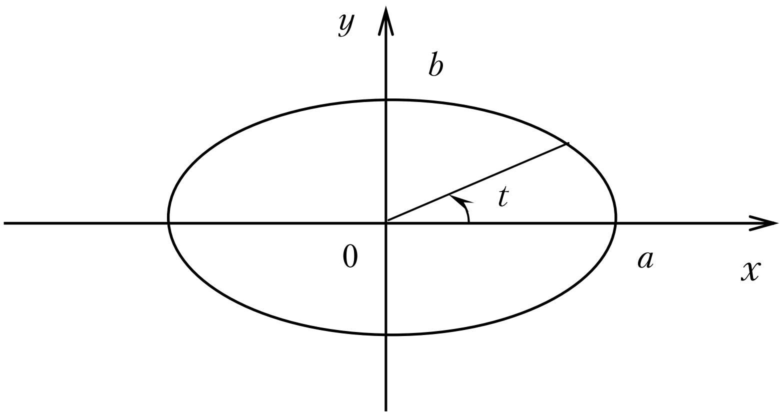
$$S=\frac{1}{2}\int_L xdy-ydx\,.$$

Формула справедлива и для областей, границы которых пересекаются координатными линиями более чем в двух точках.

Пример.

Вычислить площадь эллипса

$$x=a\cos t,$$
$$y=b\sin t.$$



Имеем:

$$S=\frac{1}{2}\int_L\left(a\cos t b\cos t-b\sin t(-a\sin t)\right)dt=$$

$$=\frac{1}{2}\int_L\left(ab\cos^2 t+ab\sin^2 t\right)dt=$$

$$=\frac{1}{2}\int_L abdt=\frac{ab}{2}\int_L dt=\frac{ab}{2}\int_0^{2\pi}dt=\frac{ab}{2}2\pi=\pi ab..$$

В рассматриваемом случае $P=x, Q=y, t_A=0, t_B=2\pi$, $dx=x'(t)dt$, $dy=y'(t)dt$.

Криволинейные интегралы по пространственным линиям

Если материальная точка находится под действием сил пространственного силового поля:

$$\vec{F}=P(x,y,z)\vec{i}+Q(x,y,z)\vec{j}+R(x,y,z)\vec{k},$$

то аналогично предыдущему получим, что работа, совершаемая силами поля при перемещении точки по пространственной кривой L, есть

$$\int_L P(x,y,z)dx+Q(x,y,z)dy+R(x,y,z)dz.$$

Интегралы $\int_L Pdx, \int_L Qdy, \int_L Rdz$ называются интегралами по координатам x, y, z.

Если линия L задана параметрическими уравнениями $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$, причем точке B соответствует $t = t_B$, точке C – $t = t_C$, то

$$\int_L Pdx+Qdy+Rdz=$$

$$=\int_{t_B}^{t_C}\Big(P\big(x(t),y(t),z(t)\big)x'(t)+Q\big(x(t),y(t),z(t)\big)+R\big(x(t),y(t),z(t)\big)z'(t)\Big)dt.$$

Здесь также имеет место основная теорема, а именно:

Если P, Q, R непрерывны вместе со своими частными производными в односвязной области D, то для того, чтобы криволинейный интеграл $\int_L Pdx+Qdy+Rdz$ не зависел от линии интегрирования, необходимо и достаточно, чтобы во всех точках области D соблюдались равенства

$$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x};\ \frac{\partial Q}{\partial z}=\frac{\partial R}{\partial y};\ \frac{\partial R}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial z}.$$

Криволинейный интеграл по длине дуги (первого рода)

Пусть функция $f(x,y)$ непрерывна в некоторой области D и L – линия, целиком расположенная в этой области.

Разобьем кривую L на n участков. Возьмем на каждом из участков произвольную точку (ξ_k, η_k) и построим интегральную сумму

$$\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k, \eta_k)\Delta L_k ,$$

где ΔL_k – длина соответствующего участка линии.

Отличие этой суммы от сумм, приводящих к криволинейным интегралам по координатам, состоит в том, что в этом случае значение функции умножается на длину участка разбиения, а в предыдущем – на проекцию этого участка на соответствующую ось координат. Эта интегральная сумма может рассматриваться как масса кривой L, если по ней непрерывно распределена масса с плотностью $f(x,y)$.

Определение. Криволинейным интегралом по длине дуги называется предел n-й интегральной суммы $\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k, \eta_k)\Delta L_k$ при условии, что длина наибольшего участка разбиения стремится к нулю и не зависит от способа разбиения L на частичные участки, т.е.

$$\lim_{\max\{\Delta L_k\}\to 0} \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k, \eta_k)\Delta L_k = \int_L f(x,y)\,dL .$$

Для того чтобы криволинейный интеграл $\int_L f(x,y)\,dL$, где кривая L задана уравнениями $x = x(t)$, $y = y(t)$, преобразовать в обыкновенный, нужно в подынтегральном выражении положить $x = x(t)$, $y = y(t)$, $dL = \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)}\,dt$ и взять интеграл по интервалу изменения t, соответствующему линии интегрирования:

$$\int_L f(x,y)\,dL = \int_{t_1}^{t_2} f\left[x(t), y(t)\right]\sqrt{\left(x'(t)\right)^2 + \left(y'(t)\right)^2}\,dt.$$

Аналогично определяется криволинейный интеграл для пространственной кривой:

$$\int_L f(x,y,z)\,dL = \int_{t_1}^{t_2} f\left[x(t), y(t), z(t)\right]\sqrt{\left(x'(t)\right)^2 + \left(y'(t)\right)^2 + \left(z'(t)\right)^2}\,dt.$$

В частности, если L задается в виде $y = y(x)$, $x \in [a.b]$, то с учетом $dL = \sqrt{1+(y'(x))^2}\,dx$ получим:

$$\int\limits_L f(x,y)\,dL = \int\limits_a^b f(x,y(x))\sqrt{1+(y'(x))^2}\,dx.$$

Работа в потенциальном силовом поле

Если для силового поля

$$\vec{F} = P(x,y,z)\vec{i} + Q(x,y,z)\vec{j} + R(x,y,z)\vec{k}$$

выполняются условия $\dfrac{\partial P}{\partial y} = \dfrac{\partial Q}{\partial x}$; $\dfrac{\partial Q}{\partial z} = \dfrac{\partial R}{\partial y}$; $\dfrac{\partial R}{\partial x} = \dfrac{\partial P}{\partial z}$, то $du=Pdx+Qdy+Rdz$ является полным дифференциалом некоторой функции. Тогда работа в этом силовом поле, выражаемая криволинейным интегралом $\int\limits_L Pdx + Qdy + Rdz$, не зависит от формы пути L. Такое силовое поле называется потенциальным или консервативным. При этом $u(x,y,z)$ называется потенциалом силового поля.

Имеем

$$\int\limits_L Pdx + Qdy + Rdz = \int\limits_{(x_0,y_0,z_0)}^{(x_1,y_1,z_1)} Pdx + Qdy + Rdz = u(x,y,z) - u(x_0,y_0,z_0),$$

то есть работа в потенциальном силовом поле равна разности потенциалов $u(x,y,z)$ и $u(x_0,y_0,z_0)$ в конце и начале пути.

Варианты тестовых заданий по модулю

Вариант 1

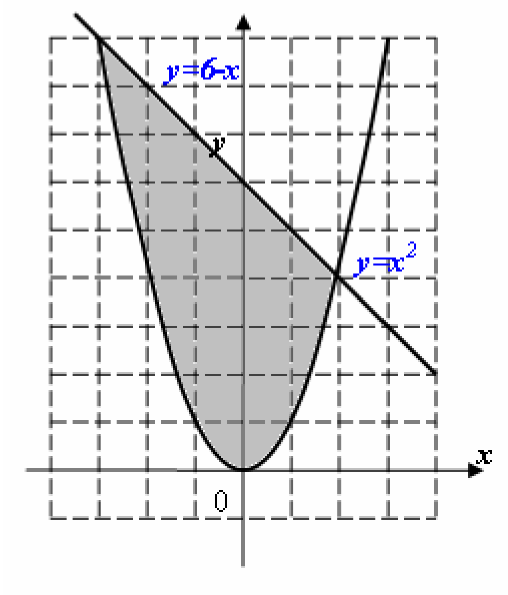
1. $2\overline{Z}$ для $Z = -3 - 4i$ равно

1) $-6+6i$; 2) $-6-8i$; 3) $-6+8i$; 4) $6-8i$.

2. Модуль комплексного числа $z = 3 - 4i$ равен

1) 3; 2) -5; 3) 0; 4) 5.

3. Площадь заштрихованной части фигуры, изображенной на чертеже, задана интегралом



1) $\int\limits_0^6 (1-x+x^2)dx$; 2) $\int\limits_0^2 (6-x-x^2)dx$;

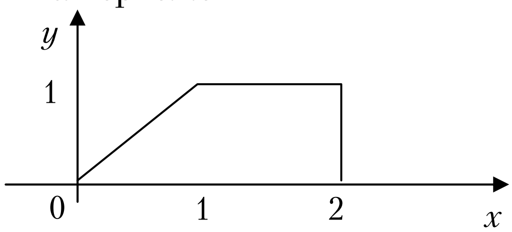
3) $\int\limits_{-3}^2 (6-x-x^2)dx$; 4) $\int\limits_0^2 (6-x^2)dx$.

4. Интеграл $\int \frac{xdx}{3x^2-2}$ равен

1) $\frac{1}{6}\ln\left|3x^2-2\right|$ + C; 2) $\frac{1}{3}\ln\left|3x^2-2\right|+C$;

3) $\frac{1}{6}\ln\left|3x^2+2\right|+C$; 4) $\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{x}{3}$ + C.

5. Расставить пределы интегрирования в двойном интеграле по области, изображенной на чертеже



1) $\int\limits_0^1 dy\int\limits_y^2 f(x,y)dx$; 2) $\int\limits_0^2 dx\int\limits_0^1 f(x,y)dy$;

3) $\int\limits_0^2 dy\int\limits_0^1 f(x,y)dx$; 4) $\int\limits_0^1 dy\int\limits_x^2 f(x,y)dx$.

Вариант 2

1. Если $z=-3+8i$, то $\bar{z}$ равно

1) $-3-8i$; 2) $3-8i$; 3) $3+8i$; 4) $\sqrt{73}$.

2. Если $z_1=-1+\frac{1}{2}i$ и $z_2=1+5i$, то модуль комплексного числа $2z_1-z_2$ равен

1)6; 2)5; 3)4; 4) 3.

3. Производная от функции $f(z)=2z^3+3i$ в точке $z_0=1-3i$ равна

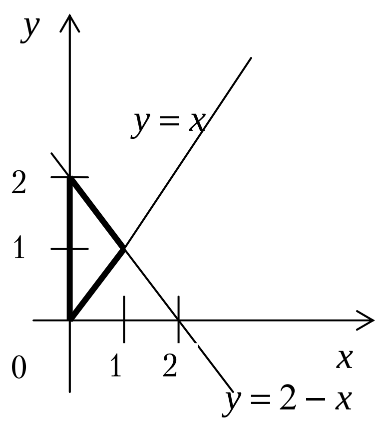
1) -48-36*i;* 2) 10-6*i*; 3) 60-36*i*; 4) 0.

4. Вычислить интеграл $\int\frac{xdx}{\sqrt{3x^2+4}}$.

1) $\frac{1}{3}\sqrt{3x^2+4}+C$; 2) $\frac{1}{3}\sqrt{3x^2+4}+C$;

3) $\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{3}x}{2}+C$; 4) $\ln\left|\sqrt{3}x+\sqrt{3x^2+4}\right|+C$.

5. Площадь треугольника, изображенного на чертеже, вычисляется с помощью интеграла



1) $\int\limits_0^1 dx\int\limits_x^{2-x} dy$; 2) $\int\limits_0^1 dx\int\limits_{2-x}^{x} dy$; 3) $\int\limits_0^2 dy\int\limits_0^x dx$; 4) $\int\limits_0^2 dy\int\limits_0^1 dx$.

Вариант 3

1. Даны комплексные числа $z_1 = 1 + i$ и $z_2 = 2 - i$. Найти их произведение.

1) $1 - i$; 2) $3 + i$; 3) $3 - i$; 4) $3 + 3i$.

2. Первообразной функции $y = e^{-3x}$ является функция

1) $3e^{-3x}$; 2) $-3e^{-3x}$; 3) $\frac{1}{3}e^{-3x}$; 4) $-\frac{1}{3}e^{-3x}$

3. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями: $y = x^2 + 1$, $y = 0$, $x = 0$, $x = 2$.

1) 10; 2) $\frac{10}{3}$; 3) $\frac{14}{3}$; 4) $-\frac{14}{3}$

4. Множество первообразных функции $f(x) = \frac{(x-1)^2}{x}$ имеет вид ...

1) $\frac{x^2}{2} - \ln|x| + C$; 2) $x - 2 + \frac{1}{x} + C$;

3) $\frac{x^2}{2} - 2x + \ln|x| + C$; 4) $x^2 - 2x + \ln|x|$.

5. Если интеграл $\int_0^1 f(x)dx = \sqrt{3}$, а $\int_0^1 g(x)dx = \sqrt{3} - 1$, то интеграл $\int_0^1 \left(\left(\sqrt{3}+2\right) f(x) + \left(\sqrt{3}-1\right) g(x)\ \right) dx$ равен...

1) $\sqrt{3}$; 2) 1; 3) 0; 4) 7.

Вариант 4

1. Если z=4+3i, u=7-2i , то 2z+6u равно

1) 50-6i; 2) 6-50i; 3) -50-6i; 4) 6i-50.

2. Модуль комплексного числа z=-6-5i равен

1) 11; 2) -11; 3) $\sqrt{61}$; 4) 61.

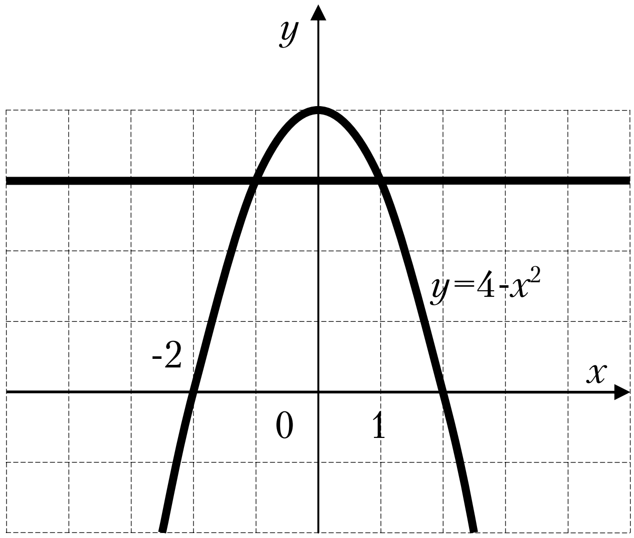
3. Интеграл $\int x\sin x dx$ равен

1) $x\cos x-\sin x+c$; 2) $-x\cos x+\sin x+c$; 3) $x\cos x$; 4) $\sin x+1$.

4. $\iint\limits_D (x+6y)dxdy$, если область ограничена линиями $y=x^2$, x=0, y=4, равен

1) -44,8; 2) 44,8; 3) 0; 4) 224.

5. Площадь области, ограниченной кривой $y=4-x^2$ и прямой $y=3$



выражается интегралом:

1) $\int\limits_{-2}^{2}\left(4-x^2\right)dx$; 2) $\int\limits_{-2}^{2}\left(4-x^2-x\right)dx$;

3) $\int\limits_{-1}^{1}\left(-1+x^2\right)dx$; 4) $\int\limits_{-1}^{1}\left(1-x^2\right)dx$.

Вариант6

1. Значение функции $f(z)=3z^2-2z$ в точке $z_0=1-2i$ равно:

1) $13-8i$; 2) $-11+8i$; 3) $-13+5i$; 4) $-11-8i$.

2. Заданы два комплексных числа z_1 и z_2. Найти $\frac{z_1}{z_2}$, если $z_1=1+i$, $z_2=1-i$

1) $-i$; 2) 1; 3) i; 4) -1.

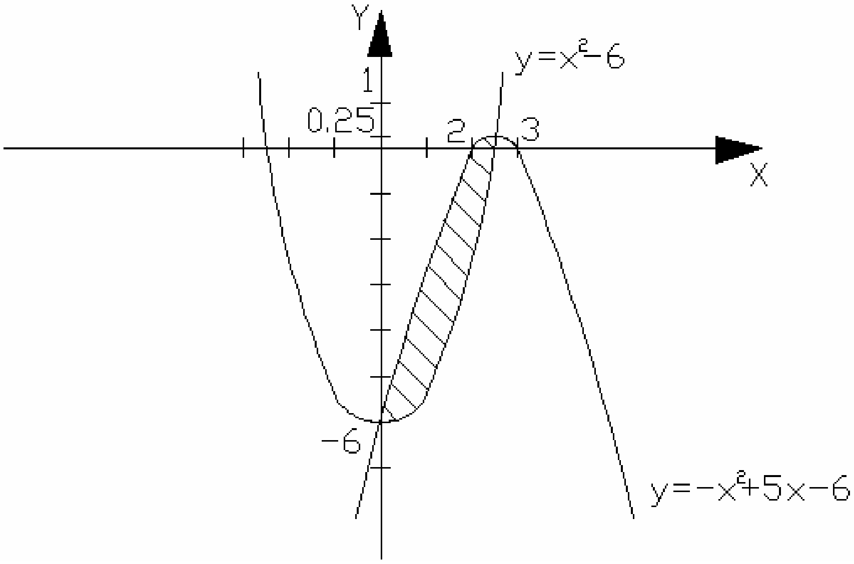
3. Указать на комплексной плоскости множество точек, удовлетворяющих соотношению $\operatorname{Re} z^2 = 1$

1) гипербола $x^2 - y^2 = 1$	2) окружность $x^2 + y^2 = 1$	3) гипербола $y^2 - x^2 = 1$	4) прямая $x - y = 1$

4. Значение производной функции $f(z) = 2z^2 - 2i$ в точке $z_0 = 1 + 3i$ равно...

1) $4 + 12i$; 2) $4 + 10i$; 3) $-4 + 5i$; 4) $-11 - 8i$.

5. Площадь заштрихованной части фигуры, изображенной на рисунке, задана интегралом



1) $\int\limits_0^{2,5} (-2x^2 + 5x)dx$; 2) $\int\limits_0^{3} (-x^2 + 5x - 6 - x^2 + 6)dx$;

3) $\int\limits_0^{3} (-x^2 + 5x - 6)dx$; 4) $\int\limits_0^{-6} (x^2 - 6)dx$.

Вариант 7

1. Число $\overline{Z}$, сопряженное к числу $Z = 5 + 3i$ равно

1) $5 - 3i$; 2) $3 + 5i$; 3) $5 - 4i$; 4) $-5 + 4i$.

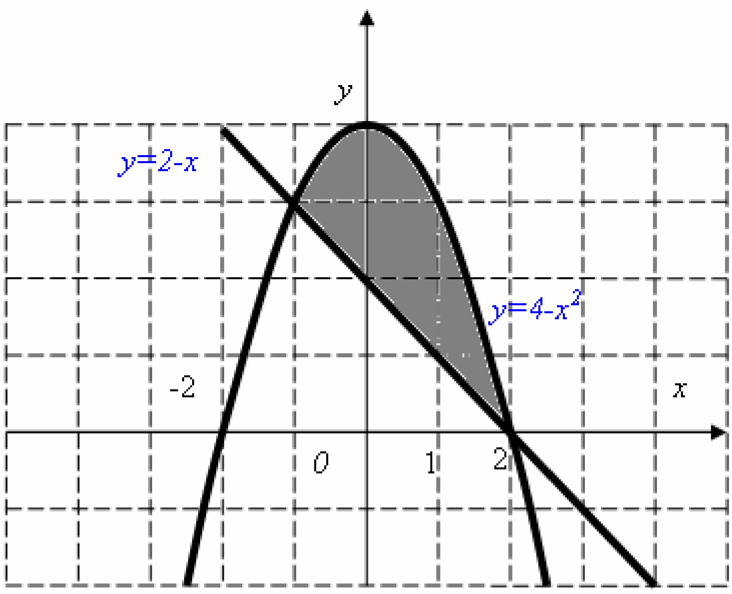
2. Значение функции $f(z) = 5i - 3z^2$ в точке $z_0 = 2 - 2i$ равно...

1) $29i$; 2) $29i - 24$; 3) $-29i - 24$; 4) $-19i$.

3. Модуль комплексного числа $z = 2 + 5i$ равен

1) 3; 2) 6; 3) $\sqrt{29}$; 4) 5.

4. Площадь заштрихованной части фигуры, изображенной на чертеже, задана интегралом



1) $\int_{-1}^{2}((2-x)-(4-x^2))dx$; 2) $\int_{-1}^{2}(2-x^2+x)dx$;

3) $\int_{0}^{2}((4-x^2)-(2-x))dx$; 4) $\int_{0}^{2}((4-x^2)+(2-x))dx$.

5. Интеграл $\int \cos 2x dx$ равен

1) $2\sin 2x + C$; 2) $\frac{1}{2}\sin 2x + C$; 3) $\cos 2x + C$; 4) $-\sin 2x + C$.

Вариант 8

1. В алгебраической форме комплексное число $z = 6e^{-\frac{\pi}{2}i}$ равно

1) $-6i$; 2) 6; 3) $6i$; 4) i.

2. Аргумент комплексного числа $z = -5 + 5i$ равен

1) -5; 2) 5; 3) $\frac{3\pi}{4}$; 4) $\frac{\pi}{4}$.

3. Значение функции $f(z) = z^2 - 2$ в точке $z_0 = 1 - 2i$ равно:

1) $3 + 4i$; 2) $3 - 4i$; 3) $3 + 5i$; 4) $-5 - 4i$.

4. Первообразной функции $y = e^{-3x}$ является функция

1) $3e^{-3x}$; 2) $-3e^{-3x}$; 3) $\frac{1}{3}e^{-3x}$; 4) $-\frac{1}{3}e^{-3x}$

5. Интеграл $\int_0^1 \frac{4\operatorname{arctg} x - x}{1 + x^2}$

1) $\frac{\pi}{4} - \ln 4$; 2) $\frac{\pi}{4} - \ln 2$; 3) $4\pi - \ln 2$; 4) $\frac{\pi^2}{8} - \ln\sqrt{2}$.

Вариант 9

1. Число $\bar{z}$, сопряженное к числу $z = -5 - i$ равно

1) $5 - i$; 2) $5 + i$; 3) $-5 + i$; 4) $-5 - i$.

2. Модуль комплексного числа $z = 2 + 5i$ равен

1) 7; 2) -3; 3) $\sqrt{29}$; 4) 3.

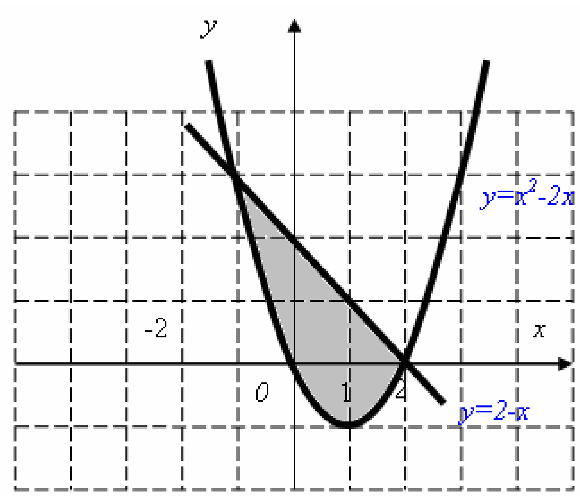
3. Площадь заштрихованной части фигуры, изображенной на чертеже, задана интегралом

1) $\int_0^2 \left(x^2 - 2x\right)dx$;

2) $\int_{-1}^2 \left(x^2 - 2x\right)dx$;

3) $\int_{-1}^2 \left(2 - x^2 + x\right)dx$;

4) $\int_{-1}^2 \left(x^2 - 3x + 2\right)dx$.



4. Интеграл $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{x^2+1}}$ равен

1) $(x^2+1)^{\frac{3}{2}}+c$;   2) $\frac{1}{2}\ln\left|x^2+1\right|+c$;   3) $\sqrt{x^2+1}+c$;   4) $\frac{1}{2}\sqrt{x^2+1}+c$.

5. Установите соответствие между интегралами и разложениями подынтегральных функций на элементарные дроби...

1. $\int \frac{x+5}{(x-1)^2(x+3)}dx$ A. $\frac{A}{(x-1)^2}+\frac{B}{x-1}+\frac{C}{x+3}$

2. $\int \frac{2}{(x-1)(x+3)}dx$ B. $\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x+3}$

3. $\int \frac{2}{(x-1)(x^2+3)}dx$ C. $\frac{A}{x-1}+\frac{Bx+C}{x^2+3}$

Вариант 10

1. Число $\overline{z}$ для $z=-2+3i$ равно
1) $2-3i$;   2) $-2-3i$;   3) $2+3i$;   4) $-2+3i$.

2. Модуль комплексного числа $z=4-3i$ равен
1) $\sqrt{7}$;   2) 5;   3) –5;   4) 1.

3. Значение производной функции $f(z)=-3z^2-2i$ в точке $z_0=1+i$ равно...
1) $4+12i$;   2) $-8i$;   3) $-6-8i$;   4) $-6-6i$.

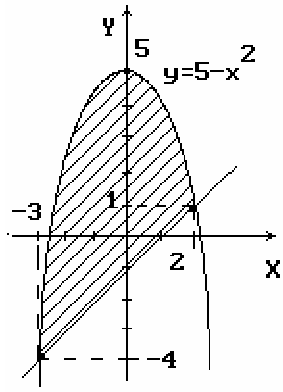
4. Площадь заштрихованной части фигуры, изображенной на чертеже, задана интегралом

1) $\int\limits_{-3}^{2}\left(6-x^2-x\right)dx$;

2) 5) $\int\limits_{-3}^{2}\left[\left(5-x^2\right)-(x+1)\right]dx$;

3) $2\int\limits_{0}^{2}\left(6-x^2-x\right)dx$;

4) $2\int\limits_{0}^{2}\left(5-x^2\right)dx$.



5. Установите соответствие между интегралами и разложениями подынтегральных функций на элементарные дроби...

1. $\int \frac{x+5}{(x-2)^2(x+6)}dx$	A. $\frac{A}{(x-2)^2}+\frac{B}{x-2}+\frac{C}{x+6}$
2. $\int \frac{2}{(x-2)(x+6)}dx$	B. $\frac{A}{x-2}+\frac{B}{x+6}$
3. $\int \frac{2}{(x-2)(x^2+6)}dx$	C. $\frac{A}{x-2}+\frac{Bx+C}{x^2+6}$

Решение примерного варианта

Задание 1.

$\overline{z}$ для $z=-5+2i$ равно

1) $-5-2i$; 2) $-5+2i$; 3) $5-2i$; 4) $5+2i$.

Решение.

Если комплексное число имеет вид $z=x+iy$, то сопряженное ему комплексное число $\overline{z}$ имеет вид: $\overline{z}=x-iy$. Значит $\overline{z}=-5-2i$.

Ответ: 1) $-5-2i$.

Задание 2.

Модуль комплексного числа $z=5-4i$ равен

1) 3; 2) -9; 3) $\sqrt{41}$; 4) 41.

Решение.

Если комплексное число имеет вид $z=x+yi$, то его модуль равен $|z|=\sqrt{x^2+y^2}$, тогда $|z|=\sqrt{5^2+(-4)^2}=\sqrt{25+16}=\sqrt{41}$.

Ответ: 3) $\sqrt{41}$.

Задание 3.

Значение функции $f(z)=3z^2$ в точке $z_0=2+3i$ равно

1) $15-36i$; 2) $6+9i$; 3) $-15+36i$; 4) $39+36i$.

Решение.

Подставим в функцию $f(z)=3z^2$ вместо переменной z число $z_0=2+3i$. Тогда

$$f(z_0)=3\cdot(2+3i)^2=3\cdot\left(4+12i+9i^2\right)=3\cdot(4+12i-9)=3\cdot(-5+12i)=-15+36i.$$

Ответ: 3) $-15+36i$.

Задание 4.

Значение производной функции $f(z) = 2 - z^3$ в точке $z_0 = i$ равно

1) 3; 2) -3; 3) $2-3i$; 4) $5i$.

Решение:

Найдем производную от данной функции: $f'(z) = -3z^2$;
значение производной в точке $z_0 = i$

$$f'(i) = -3i^2 = 3.$$

Ответ: 1) 3.

Задание 5.

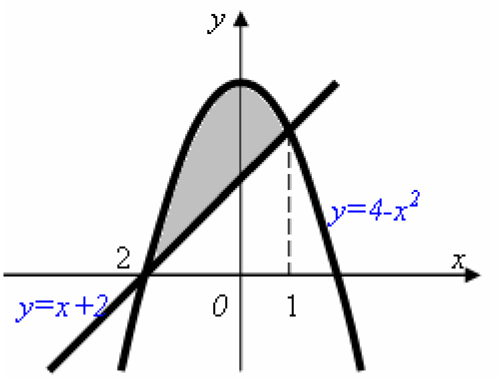
Площадь фигуры, ограниченной линиями $y = 4 - x^2$, $y = x + 2$, выражается интегралом

1) $\int\limits_{-2}^{0}\left(2 - x^2 - x\right)dx$; 2) $\int\limits_{-2}^{2}\left[\left(4 - x^2\right)(x+2)\right]dx$;

3) $2\int\limits_{0}^{1}\left(2 - x^2 - x\right)dx$; 4) $\int\limits_{-2}^{1}\left(2 - x^2 - x\right)dx$.

Решение.

Изобразим графики указанных кривых на координатной плоскости:



Фигура, площадь которой необходимо найти, заключена между кривыми $y = 4 - x^2$, $y = x + 2$. Абсциссы точек пересечения этих кривых равны -2 и 1. Площадь криволинейной трапеции найдем с помощью интеграла $S = \int\limits_{a}^{b}\left(f_1(x) - f_2(x)\right)dx$. Получим, что площадь данной области равна:

$$S = \int\limits_{-2}^{1}\left(\left(4 - x^2\right) - (x+2)\right)dx = \int\limits_{-2}^{1}\left(4 - x^2 - x - 2\right)dx = \int\limits_{-2}^{1}\left(2 - x^2 - x\right)dx.$$

Ответ: 4) $\int\limits_{-2}^{1}\left(2 - x^2 - x\right)dx$.

Задание 6.

Интеграл $2\int \frac{xdx}{5+x^2}$ равен

1) $\ln\left(5+x^2\right)+C$;   2) $\ln\left|x^2\right|+C$;   3) $2\ln\left(5+x^2\right)+C$;   4) $\frac{1}{2}\ln\left|x^2+5\right|+C$.

Решение.

Подведем выражение $5+x^2$ под знак дифференциала:

$$d\left(5+x^2\right)=\left(5+x^2\right)' dx=2xdx.$$

Тогда $2\int \frac{xdx}{5+x^2}=\int \frac{d\left(5+x^2\right)}{5+x^2}=\ln\left(5+x^2\right)+C$.

Ответ: 1) $\ln\left(5+x^2\right)+C$.

Модуль 4. ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ. ЧИСЛОВЫЕ И СТЕПЕННЫЕ РЯДЫ. РЯДЫ ФУРЬЕ

4.1. Обыкновенные дифференциальные уравнения

Обыкновенным дифференциальным уравнением (кратко ДУ) называется уравнение, связывающее независимую переменную x, неизвестную функцию $y(x)$ и ее производные:

$$F\left(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}\right) = 0.$$

Порядком ДУ называется порядок наивысшей производной, входящей в уравнение.

Решением ДУ называется функция $y(x)$, которая при подстановке в уравнение обращает его в тождество.

Интегралом ДУ называется соотношение $\Phi(x, y) = 0$, определяющее решение $y(x)$ неявно.

Теорема существования и единственности. Если функция $f(x, y)$ и ее частная производная $\dfrac{\partial f(x, y)}{\partial y}$ непрерывны в некоторой области D, содержащей точку (x_0, y_0), то существует единственное решение $y = \varphi(x)$ уравнения $y' = f(x, y)$, удовлетворяющее *начальному условию* $y(x_0) = y_0$.

Геометрический смысл сформулированной теоремы состоит в том, что существует единственная функция, которая удовлетворяет ДУ и график которой проходит через точку (x_0, y_0).

Задача отыскания решения, удовлетворяющего заданному начальному условию, называется задачей Коши.

Общим решением ДУ называется совокупность всех его решений. Как правило, общее решение удается записать в виде функции $y = \varphi(x, C)$, зависящей от одной произвольной *постоянной* C. При конкретных значениях C эта функция определяет конкретные решения уравнения (*частные решения*). *Общим интегралом* ДУ называется решение, заданное неявно соотношением $\Phi(x, y, C) = 0$. При конкретном значении постоянной $C = C_0$ получается соотношение $\Phi(x, y, C_0) = 0$, называемое *частным интегралом*.

При соответствующем выборе постоянной C из общего решения может быть получено любое *однозначно* определяемое начальными данными частное решение. Например, общим решением ДУ

$$xy' - y = 0$$

является функция $y = Cx$; при $C = 2$ получим частное решение $y = 2x$, удовлетворяющее начальному условию $y(1) = 2$.

Геометрически общее решение (общий интеграл) представляет собой семейство кривых на плоскости xOy, зависящее от одного параметра C. Эти кривые называются *интегральными кривыми ДУ*. Частному решению (частному интегралу) соответствует одна кривая семейства, проходящая через заданную точку плоскости.

Уравнение $y' = f(x, y)$ для каждой точки (x, y) определяет значение y', т.е. угловой коэффициент касательной к интегральной кривой, проходящей через эту точку (задает *поле направлений* на плоскости xOy). Задача решения ДУ первого порядка с геометрической точки зрения состоит в нахождении кривых, направление касательных к которым совпадает с направлением поля в соответствующих точках.

Дифференциальные уравнения, допускающие точное аналитическое решение

1. *Уравнение с разделенными переменными* $f(y)dy = g(x)dx$.

Общий интеграл этого уравнения имеет вид

$$\int f(y)dy = \int g(x)dx + C,$$

где C — произвольная постоянная.

Предполагается, $f(y)$, $g(x)$ непрерывны в рассматриваемых областях изменения своих аргументов.

Для выделения частного решения (интеграла), удовлетворяющего условию $y(x_0) = y_0$, можно использовать соотношение

$$\int_{y_0}^{y} f(y)dy = \int_{x_0}^{x} f(x)dx.$$

Пример. Решить уравнение $(y+1)dy = -xdx$.

Общий интеграл этого ДУ имеет вид $\int (y+1)dy = -\int xdx + C$ или $(y+1)^2 + x^2 = 2C$; для краткости часто вводят новую постоянную $C := 2C$.

2. *Уравнение с разделяющимися переменными:*

$$f_1(y)q_1(x)\frac{dy}{dx}=f_2(y)q_2(x).$$

Разделив обе части на $f_1(y)q_1(x)\neq 0$, получим уравнение с разделенными переменными. Его интегрирование дает:

$$\int\frac{f_1(y)}{f_2(y)}dy=\int\frac{q_2(x)}{q_1(x)}dx+C.$$

Пример. Решить уравнение $x\left(y^2-1\right)dx=\left(x^2+1\right)ydy$.

После деления обеих частей на $\left(y^2+1\right)\left(x^2+1\right)\neq 0$ получим уравнение с разделенными переменными:

$$\frac{xdx}{x^2+1}=\frac{ydy}{y^2+1}.$$

Интегрируя, найдем общий интеграл:

$$x^2+1=C\left(y^2+1\right).$$

3. *Однородное дифференциальное уравнение* приводится к виду $y'=f\left(\frac{y}{x}\right)$.

Введя неизвестную функцию $u=\frac{y}{x}$ $\left(y=ux,\quad y'=u'x+u\right)$, получим ДУ с разделяющимися переменными относительно переменной *u*. Решив его и заменив *u* на $\frac{y}{x}$, найдем общий интеграл исходного однородного *ДУ*.

Пример. Решить уравнение $y'=\frac{y}{x}+\sin\frac{y}{x}$.

Произведем подстановку $u=\frac{y}{x}$, откуда $y=ux$, $y'=\dot{u}x+u$. В результате получим $u'x+u=u+\sin u$; $\frac{du}{dx}x=\sin u$; $\frac{du}{\sin u}=\frac{dx}{x}$.

Интегрируя с использованием универсальной тригонометрической подстановки, получим $\ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{u}{2}\right)\right|=\ln|x|+\ln C$, то есть $u=2\operatorname{arctg}(Cx)$.

Произведя обратную замену $u=\dfrac{y}{x}$, найдем общее решение уравнения $y=2x\operatorname{arctg}(Cx)$.

4. *Линейное дифференциальное уравнение* $y'+p(x)y=q(x)$.

Если $q(x)\neq 0$, то уравнение называется линейным неоднородным, а если $q(x)=0$ – линейным однородным.

Для интегрирования линейных неоднородных дифференциальных уравнений первого порядка используется *метод Бернулли*. Исходное уравнение подстановкой $y=uv$, где u и v – две неизвестные функции, преобразуется к виду

$$u'v+uv'+p(x)uv=q(x),$$

или

$$u\left(v'+p(x)v\right)+vu'=q(x).$$

За v принимают частное решение уравнения $v'+p(x)v=0$ (например, $v=e^{-\int p(x)dx}$). Тогда будем иметь $vu'=q(x)$, то есть решение исходного уравнения сводится к решению двух уравнений с разделяющими переменными ($v'=-p(x)v$ и $u'=\dfrac{q(x)}{v}$).

Общее решение исходного уравнения находится умножением u на v:

$$y=e^{-\int p(x)dx}\left[\int q(x)e^{\int p(x)dx}dx+C\right].$$

Пример. Решить уравнение $y'+\operatorname{ctg}x\,y=2x\sin x$.

Сделав замену $y=uv$, $y'=u'v+uv'$, получим:

$$vu'+u\left(v'-\operatorname{ctg}x\,v\right)=2x\sin x.$$

Найдем v из условия

$$v'-\operatorname{ctg}x\,v=0.$$

Откуда $\dfrac{dv}{v}=\operatorname{ctg}x$.

Интегрируя, найдем $\ln|v|=\ln|\sin x|$ или $v=\sin x$.

Функцию u найдем из уравнения $vu'=2x\sin x$ или $u'=2x$. Интегрируя, получим:

$$u=\int 2xdx=x^2+C.$$

Общее решение исходного ДУ

$$y = uv = \left(x^2 + C\right)\sin x .$$

С использованием замены $z = y^{1-\alpha}$ к линейному уравнению $\frac{1}{1-\alpha}z' + p(x)z = q(x)$ приводится и *уравнение Бернулли,* имеющее вид:

$$y' + p(x)y = q(x)y^{\alpha},\ \alpha \neq 0, \alpha \neq 1.$$

Дифференциальные уравнения высших порядков

Дифференциальным уравнением n-го порядка называется уравнение вида

$$F\left(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}\right) = 0.$$

Общее решение дифференциального уравнения n-го порядка имеет вид

$$y = \varphi\left(x, C_1, C_2, \ldots, C_n\right),$$

где $C_1, C_2, \ldots, C_n$ – произвольные постоянные (число произвольных постоянных равно порядку уравнения).

Здесь задача Коши состоит в определении частного решения, удовлетворяющего начальным условиям:

$$y(x_0) = y_0,\ y'(x_0) = y_0', \ldots, y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}.$$

Теорема существования и единственности решения задачи Коши. Если в дифференциальном уравнении

$$y^{(n)} = f\left(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}\right)$$

функция $f\left(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}\right)$ и ее частные производные $\frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial y'}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial y^{(n-1)}}$ непрерывны в некоторой области, содержащей значения $x = x_0$, $y = y_0$, $y' = y_0', \ldots, y^{(n-1)} = y_0^{(n-1)}$, то существует и притом единственное решение $y = \phi(x)$, удовлетворяющее условиям

$$y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y_0', \ldots, y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}.$$

Интегрирование дифференциальных уравнений n-го порядка удается произвести только в некоторых частных случаях.

Простейшие дифференциальные уравнения, допускающие понижение порядка

1. *Уравнение вида*

$$y^{(n)} = f(x)$$

решается последовательным n-кратным интегрированием правой части, т е.

$$y^{(n-1)} = \int f(x)dx + C_1,$$

$$y^{(n-2)} = \int\left[f(x)dx + C_1\right]dx + C_2,$$

$$\ldots .$$

При каждом интегрировании возникает одна произвольная постоянная, а в окончательном результате – n произвольных постоянных.

Пример. Решить уравнение $y'' = 6x + \cos x$.

Последовательным интегрированием найдем:

$$y' = 3x^2 + \sin x + C_1,$$

$$y = x^3 - \cos x + C_1 x + C_2.$$

2. *Уравнение, не содержащие искомой функции y:*

$$F(x, y'.y'') = 0.$$

Замена $y' = z(x)$, $y'' = z'(x)$ приводит к ДУ первого порядка $F(x, z, z') = 0$. Решив его, найдем $z(x)$. Интегрируя равенство $y' = z(x)$, получим искомую функцию $y(x)$.

Пример. Решить уравнение $xy'' - y' = 0$.

Замена $y' = z(x)$ приводит к уравнению первого порядка: $xz' - z = 0$. Его общее решение

$$z(x) = C_1 x.$$

Откуда

$$y(x) = \int C_1 x dx + C_2 = \frac{1}{2}C_1 x^2 + C_2$$

есть общее решение исходного ДУ второго порядка.

Аналогичная замена используется и для решения уравнений более высокого порядка, не содержащих явно y.

3. *Уравнение, не содержащее независимой переменной x*:

$$F(y, y', y'') = 0.$$

Введем $p = y'$, $\quad p = p(y)$. С учетом $y'' = \frac{dp}{dx} = \frac{dp}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = \frac{dp}{dy} p$ заданное уравнение приведем к уравнению первого порядка:

$$F\left(y, p, \frac{dp}{dy} p\right) = 0.$$

Решив его, найдем $p = \varphi(y, C_1)$. Возвращаясь к искомой функции y, получим для нее ДУ с разделяющимися переменными:

$$y' = \varphi(y, C_1).$$

Пример. Решить уравнение $2y'y'' = (y')^2 + 1$.

Пусть $y' = p(y)$. Тогда $y'' = \frac{dp}{dy} p$. Исходное уравнение сведется к уравнению с разделяющимися переменными:

$$2ypp' = p^2 + 1,$$

$$\frac{2p\,dp}{p^2 + 1} = \frac{dy}{y},$$

$$\frac{d\left(p^2 + 1\right)}{p^2 + 1} = \frac{dy}{y}.$$

Интегрируя, получим:

$$\ln\left(p^2 + 1\right) = \ln|y| + \ln C_1,$$

$$p = \pm\sqrt{C_1 y - 1}.$$

Так как $p = y'$, то приходим к следующему уравнению относительно функции $y(x)$:

$$\pm\frac{dy}{\sqrt{C_1 y - 1}} = dx.$$

Интегрируя, получим:

$$\pm\sqrt{C_1 y - 1} = \frac{C_1}{2}(x + C_2),$$

$$C_1 y - 1 = \frac{C_1^2}{4}(x + C_2)^2.$$

Аналогичная замена используется для решения уравнений более высокого порядка, не содержащих явно x.

Линейные дифференциальные уравнения n-го порядка

Линейным дифференциальным уравнением n-го порядка называется уравнение вида

$$y^{(n)}+a_1(x)y^{n-1}+a_2(x)y^{(n-2)}+\ldots+a_{n-1}(x)y'+a_n(x)y=f(x).$$

Здесь функции $a_1(x),a_2(x),\ldots,a_n(x)$ и $f(x)$ заданы и непрерывны в некотором промежутке (a,b).

При $f(x)=0$ линейное уравнение называется *однородным,* в противном случае – *неоднородным,* или *уравнением с правой частью*.

Каждое линейное однородное дифференциальное уравнение n-го порядка имеет ровно n линейно независимых частных решений $y_1(x),y_2(x),\ldots,y_n(x)$, т.е. таких решений, что ни одно из них не может быть выражено в виде линейной комбинации остальных (*фундаментальная система решений*). Заметим, что в случае однородного уравнения второго порядка линейная независимость частных решений $y_1(x)$ и $y_2(x)$ равносильна условию $\dfrac{y_1(x)}{y_2(x)}\neq\text{const}$.

Достаточным условием линейной независимости n функций, непрерывных вместе со своими частными производными до $(n-1)$-го порядка в промежутке (a,b), является то, что *определитель Вронского*

$$W(y_1,y_2,\ldots,y_n)=\begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) & \cdots & y_n(x)\\ y_1'(x) & y_2'(x) & \cdots & y_n'(x)\\ & \cdots & & \\ y_1^{(n-1)}(x) & y_2^{(n-1)}(x) & \cdots & y_n^{(n-1)}(x)\end{vmatrix}\neq 0.$$

Если данные n функций являются частными решениями линейного однородного дифференциального уравнения n-го порядка, то не обращение в нуль определителя Вронского является не только достаточным, но и необходимым условием линейной независимости этих n решений.

Теорема о структуре общего решения линейного однородного дифференциального уравнения. Общее решение линейного однородного ДУ n-го порядка представляет собой линейную комбинацию его n линейно независимых частных решений:

$$y_0(x)=C_1y_1(x)+C_2y_2(x)+\cdots+C_ny_n(x),$$

где $C_1,C_2,\ldots,C_n$ – произвольные постоянные.

Теорема о структуре общего решения линейного неоднородного дифференциального уравнения. Общее решение линейного неоднородного ДУ *n*-го порядка равно сумме общего решения $y_0 = y_0(x)$ соответствующего однородного уравнения и какого-нибудь частного решения $\overline{y} = \overline{y}(x)$ данного неоднородного уравнения:

$$y = y_0 + \overline{y}.$$

Линейное однородное ДУ *n-го порядка с постоянными коэффициентами* имеет вид:

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + a_2 y^{(n-2)} + \cdots + a_{n-1} y' + a_n y = 0,$$

где $a_1, a_2, \ldots, a_n$ – некоторые действительные числа.

Будем искать частные решения $y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)$ в виде $y = e^{kx}$, тогда $y' = ke^{kx}$, $y'' = k^2 e^{kx}, \ldots, y^{(n)} = k^n e^{kx}$. После подстановки в исходное уравнение получим:

$$(k^n + a_1 k^{n-1} + a_2 k^{n-2} + \cdots + a_{n-1} k + a_n) e^{kx} \equiv 0.$$

Откуда в силу $e^{kx} \neq 0$ получим *характеристическое уравнение*:

$$k^n + a_1 k^{n-1} + a_2 k^{n-2} + \cdots + a_{n-1} k + a_n = 0.$$

Оно получается заменой производных искомой функции соответствующими степенями неизвестной *k*, причем сама функция заменяется единицей.

Общее решение дифференциального уравнения определяется в зависимости от характера корней характеристического уравнения.

Рассмотрим возможные случаи.

Все корни характеристического уравнения действительны и различны. В этом случае однородное ДУ имеет *n* линейно независимых частных решений $e^{k_1 x}, e^{k_2 x}, \ldots, e^{k_n x}$, так что его общее решение имеет вид:

$$y_0 = C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x} + \cdots + C_n e^{k_n x}.$$

Пример. Решить уравнение $y''' + 3y'' - 4y' = 0$.

Здесь корни характеристического уравнения $k^3 + 3k^2 - 4k = 0$ есть $k_1 = 0,\ k_2 = 1,\ k_3 = -4$. Общее решение исходного ДУ

$$y_0 = C_1 + C_2 e^x + C_3 x^{-4x}.$$

Некоторый действительный корень характеристического уравнения k имеет кратность m. Этому корню отвечают *m* линейно независимых частных решений. Их линейная комбинация вместе с остальными $n-m$ частными решениями дает общее решение однородного уравнения:

$$y_0=\left(C_1+C_2x+\cdots+C_mx^{m-1}\right)e^{kx}+\cdots+C_ne^{k_nx}.$$

Пример. Решить уравнение $y'''+y''-y'-y=0$.

Здесь характеристическое уравнение $k^3+k^2-k-1=0$ имеет корни $k_1=k_2=-1$ (двукратный корень), $k_3=1$. Поэтому общее решение исходного ДУ

$$y_0=\left(C_1+C_2x\right)e^{-x}+C_3e^{x}.$$

Характеристическое уравнение имеет пару комплексно сопряженных корней $\alpha\pm\beta i$. При построении общего решения этой паре отвечают два линейно независимых частных решения однородного уравнения $e^{\alpha x}\cos\beta x$, $e^{\alpha x}\sin\beta x$.

Пример. Решить уравнение $y'''-6y''+13y'=0$.

Характеристическое уравнение $k^3-6k^2+13k=0$ $k(k^2$~$6k+13)$ = 0 имеет корни $k_1=0,\quad k_{2,3}=3\pm 2i$. Общее решение исходного ДУ

$$y_0=C_1+C_2e^{3x}\cos 2x+C_3e^{3x}\sin 2x.$$

Некоторая пара комплексно сопряженных корней $\alpha\pm\beta i$ *имеет кратность m*. Такой паре отвечают $2m$ линейно независимых частных решений однородного уравнения:

$$e^{\alpha x}\cos\beta x, xe^{\alpha x}\cos\beta x,\ldots,x^{m-1}e^{\alpha x}\cos\beta x,$$

$$e^{\alpha x}\sin\beta x, xe^{\alpha x}\sin\beta x,\ldots,x^{m-1}e^{\alpha x}\sin\beta x.$$

Их линейная комбинация (вместе с остальными $n-2m$ частными решениями линейного однородного ДУ n-го порядка) дает общее решение исходного уравнения.

Линейные неоднородные уравнения n-го порядка

Структура общего решения линейного неоднородного уравнения (с правой частью)

$$y^{(n)}+a_1y^{(n-1)}+a_2y^{(n-2)}+\cdots+a_{n-1}y'+a_ny=f\left(x\right)$$

определяется приводимой ниже теоремой.

Теорема о суперпозиции частных решений. Если $\overline{y}=\overline{y}\left(x\right)$ – частное решение неоднородного уравнения, а $y_1,y_2,\ldots,y_n$ – фундаментальная система решений соответствующего однородного уравнения, то общее решение линейного неоднородного уравнения имеет вид:

$$y = \overline{y} + C_1 y_1 + C_2 y_2 + \ldots C_n y_n,$$

т.е. общее решение неоднородного уравнения равно сумме любого его частного решения и общего решения соответствующего однородного уравнения.

Рассмотрим два метода отыскания частного решения линейного неоднородного уравнения.

Метод вариации произвольных постоянных является общим методом для нахождения частного решения линейного неоднородного ДУ.

Проиллюстрируем на примере линейного неоднородного ДУ второго порядка:

$$y'' + a_1(x) y' + a_2(x) y = f(x).$$

Здесь общее решение соответствующего однородного уравнения представляется в виде

$$y_0 = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x),$$

где $y_1(x)$ и $y_2(x)$ – линейно независимые решения однородного ДУ, C_1 и C_2 – произвольные постоянные. Частное решение $\overline{y}$ неоднородного ДУ ищется в виде $\overline{y} = C_1(x) y_1(x) + C_2(x) y_2(x)$, то есть произвольные постоянные заменяются неизвестными функциями x.

Тогда $\overline{y}' = C_1(x) y_1'(x) + C_2(x) y_2'(x) + C_1'(x) y_1(x) + C_2'(x) y_2(x)$.

Подберем $C_1(x)$ и $C_2(x)$ из условия $C_1'(x) y_1(x) + C_2'(x) y_2(x) = 0$. Откуда

$$\overline{y}' = C_1(x) y_1'(x) + C_2(x) y_2'(x)$$

и

$$\overline{y}'' = C_1'(x) y_1'(x) + C_2'(x) y_2'(x) + C_1(x) y_1''(x) + C_2(x) y_2''(x).$$

После подстановки $\overline{y}, \overline{y}', \overline{y}''$ в исходное уравнение должны получить тождество. Откуда для определения $C_1'(x)$ и $C_2'(x)$ получим систему линейных алгебраических уравнений:

$$\begin{cases} C_1'(x) y_1(x) + C_2'(x) y_2(x) = 0, \\ C_1'(x) y_1'(x) + C_2'(x) y_2'(x) = f(x). \end{cases}$$

Так как определитель этой системы есть определитель Вронского для линейно независимых функций, то он не равен 0. Решив систему, найдем $C_1'(x)=\phi_1(x)$, $C_2'(x)=\phi_2(x)$. Интегрируя, найдем $C_1(x)$ и $C_2(x)$, а затем и искомое решение.

Пример. Найти общее решение уравнения $y''-2y'+y=\dfrac{e^x}{x}$.

Здесь общим решением однородного уравнения является функция $y_0=C_1e^x+C_2xe^x$. Частное решение неоднородного уравнения будем искать в виде

$$y=C_1(x)e^x+C_2(x)xe^x.$$

Для определения неизвестных функций $C_1(x)$ и $C_2(x)$ составим систему:

$$C_1'(x)e^x+C_2'(x)xe^x=0,$$

$$C_1'(x)e^x+C_2'(x)e^x+C_2'(x)xe^x=\frac{e^x}{x}.$$

Решив ее, найдем $C_1'(x)=-1, C_2'(x)=\dfrac{1}{x}$. Интегрируя, получим $C_1(x)=-x, C_2(x)=\ln|x|$.

Таким образом, искомое частное решение неоднородного ДУ

$$\overline{y}=-xe^x+\ln|x|x\,e^x,$$

а его общее решение имеет вид:

$$y=y_0+\overline{y}=C_1e^x+C_2xe^x-xe^x+\ln|x|x\,e^x.$$

Метод *подбора частного решения (метод неопределенных коэффициентов)* используется для интегрирования только линейных уравнений с постоянными коэффициентами, когда его правая часть имеет вид:

$$f(x)=e^{\alpha x}\left[P_n(x)\cos\beta x+Q_m(x)\sin\beta x\right]$$

(или является суммой функций такого вида). Здесь α и β – постоянные, $P_n(x)$ и $Q_m(x)$ – многочлены n-й и m-й степени соответственно.

В этом случае частное решение уравнения ищется в виде:

$$\overline{y}(x)=x^re^{\alpha x}\left[P_l(x)\cos\beta x+Q_l(x)\sin\beta x\right].$$

Здесь r – кратность корня $\alpha \pm \beta i$ характеристического уравнения $k^n + a_1 k^{n-1} + \cdots + a_n = 0$ (если характеристическое уравнение такого корня не имеет, то следует принять $r = 0$); $P_l(x)$ и $Q_l(x)$ – полные многочлены от x степени l с неопределенными коэффициентами (т.е. содержат все степени от нуля до l), причем l равно наибольшему из чисел n и m ($l = n \geq m, l = m \geq n$):

$$P_l(x) = A_0 x^l + A_1 x^{l-1} + \cdots + A_l; \quad Q_l(x) = B_0 x^l + B_1 x^{l-1} + \cdots + B_l.$$

Если в выражении функции $f(x)$ входит хотя бы одна из функций $\cos\beta x$ или $\sin\beta x$, то в $\overline{y}(x)$ нужно вводить обе функции.

Проиллюстрируем метод на конкретном примере.

Пример. Найти общее решение уравнения

$$y'' - 4y' + 5y = (x-5)\cos x.$$

Характеристическое уравнение $k^2 - 4k + 5 = 0$ имеет корни $2 \pm i$, поэтому общее решение однородного уравнения имеет вид:

$$y_0 = e^{2x}\left(C_1 \cos x + C_2 \sin x\right),$$

$$(l = 1).$$

Частное решение неоднородного уравнения будем искать в виде:

$$\overline{y} = (Ax + B)\cos x + (Cx + D)\sin x$$

Подставляя это выражение в исходное ДУ и приравнивая коэффициенты при $\cos x, x\cos x, \sin x, x\sin x$, получим линейную систему алгебраических уравнений относительно A, B, C, D. Решив ее, найдем значения неопределенных коэффициентов:

$$A = \frac{1}{8}, B = -\frac{1}{16}, C = -\frac{1}{8}, D = \frac{1}{2}.$$

Общее решение исходного уравнения будет иметь вид:

$$y = y_0 + \overline{y} = e^{2x}\left(C_1 \cos x + C_2 \sin x\right) + \left(\frac{1}{8}x - \frac{9}{16}\right)\cos x + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{8}x\right)\sin x.$$

Системы обыкновенных дифференциальных уравнений

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений в так называемой *нормальной форме*:

$$\frac{dy_1}{dx} = f_1(x, y_1, y_2, \ldots, y_n),$$
$$\frac{dy_2}{dx} = f_2(x, y_1, y_2, \ldots, y_n),$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\frac{dy_n}{dx} = f_n(x, y_1, y_2, \ldots, y_n).$$

Решением системы дифференциальных уравнений называется совокупность *n* функций $y_1, y_2, \ldots, y_n$, которые при подстановке в каждое из уравнений превращают его в тождество. Одно ДУ *n*-го порядка всегда можно представить в виде нормальной системы, введя вспомогательные неизвестные функции. *Часто* верно и обратное: нахождение решения системы можно свести к решению одного ДУ *n*-го порядка.

Пример. Решить систему ДУ:

$$\frac{dy_1}{dx} = y_1 - y_2 + \frac{3}{2}x^2,$$

$$\frac{dy_2}{dx} = -4y_1 - 2y_2 + 4x + 1.$$

Выразив из первого уравнения $y_2 = -\frac{dy_1}{dx} + y_1 + \frac{3}{2}x^2$ и подставив его во второе уравнение, получим линейное ДУ второго порядка для $y_1(x)$:

$$\frac{d^2y_1}{dx^2} + \frac{dy_1}{dx} - 8y_1 = 3x^2 - x - 1.$$

Общее решение этого уравнения имеет вид:

$$y_1(x) = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-3x} - \frac{1}{2}x^2.$$

Вторая неизвестная функция находится из полученного выше выражения для $y_2(x)$:

$$y_2(x) = -C_1 e^{2x} + 4C_2 e^{-3x} + x^2 + x.$$

Общее решение нормальной системы имеет вид:

$$y_1 = \varphi_1(x, C_1, C_2, \ldots, C_n),$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$y_n = \varphi_n(x, C_1, C_2, \ldots, C_n).$$

где $C_1, C_2, \ldots, C_n$ – произвольные постоянные.

Задача о нахождении частного решения системы ДУ, удовлетворяющего заданным начальным условиям, называется *задачей Коши*.

Как и в случае одного ДУ, для системы имеет место теорема, гарантирующая *существование и единственность частного решения* при непрерывности правых частей вместе с их частными производными.

Рассмотрим нормальную систему двух линейных уравнений с постоянными коэффициентами:

$$\frac{dy_1}{dx} = a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + f_1(x),$$

$$\frac{dy_2}{dx} = a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + f_2(x).$$

Если $f_1(x) = f_2(x) = 0$, то система называется *однородной*.

Общее решение неоднородной системы складывается из общего решения соответствующей однородной системы и какого-нибудь частного решения неоднородной системы.

Общее решение однородной системы определим *методом Эйлера*. Здесь сначала находят частное решение в виде

$$y_1(x) = \alpha_1 e^{kx},$$

$$y_2(x) = \alpha_2 e^{kx},$$

где k — собственное значение матрицы системы, т.е. корень характеристического уравнения

$$\begin{vmatrix} a_{11} - k & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - k \end{vmatrix} = (a_{11} - k) \cdot (a_{21} - k) - a_{12}a_{21} = 0.$$

Далее из системы линейных однородных алгебраических уравнений:

$$(a_{11} - k)\alpha_1 + a_{12}\alpha_2 = 0,$$

$$a_{21}\alpha_1 + (a_{22} - k)\alpha_2 = 0$$

находят значения α_1 и α_2 (практически здесь лишь одно линейно-независимое уравнение; задавая α_2, найдем α_1).

Общее решение однородной системы будет иметь различный вид в зависимости от корней характеристического уравнения.

Характеристическое уравнение имеет два действительных различных корня k_1 и k_2. Этим корням отвечают два собственных вектора с координатами (a_{11}, a_{21}) и (a_{12}, a_{22}). Общее решение исходной однородной системы *ДУ* определяется линейной комбинацией частных решений

$$y_1 = C_1\alpha_{11}e^{k_1x} + C_2\alpha_{21}e^{k_2x},\ y_2 = C_1\alpha_{12}e^{k_1x} + C_2\alpha_{22}e^{k_2x},$$

где C_1, C_2 – произвольные постоянные..

Характеристическое уравнение имеет один действительный двукратный корень $k = k_1 = k_2$. Полный анализ этого случая проводится методами линейной алгебры. На практике решение системы удобно искать методом неопределенных коэффициентов в виде:

$$y_1 = (\alpha + \beta x)e^{kx}, \quad y_2 = (\gamma + \delta x)e^{kx}.$$

Характеристическое уравнение имеет пару комплексно сопряженных корней $\alpha \pm \beta i$. В этом случае следует найти комплексное частное решение однородной системы ДУ. Отделяя затем действительную и мнимую части комплексного решения, получим два действительных линейно независимых частных решения, линейная комбинация которых даст общее решение однородной системы ДУ.

Пример. Найти общее решение системы дифференциальных уравнений:

$$\frac{dy_1}{dx} = 4y_1 + 6y_2,$$
$$\frac{dy_2}{dx} = 3y_1 + 7y_2.$$

Запишем характеристическое уравнение

$$\begin{vmatrix} 4-k & 6 \\ 3 & 7-k \end{vmatrix} = 0.$$

Корни этого уравнения $k_1 = 1, k_2 = 10$. При $k = 1$ получим одно уравнение для определения собственного вектора $\alpha_{11} + 2\alpha_{21} = 0$, откуда $\alpha_1 = (1;2)$. При $k = 10$ получим $\alpha_{12} - \alpha_{22} = 0$, т.е. $\alpha_2 = (1;-1)$.

Фундаментальная система решений имеет вид:

$$y_{11} = 2e^x, y_{21} = -e^x,$$

$$y_{12} = e^{10x}, y_{22} = e^{10x}.$$

Общее решение примет вид:

$$y_1 = 2C_1 e^x + C_2 e^{10x},$$

$$y_2 = -C_1 e^x + C_2 e^{10x}.$$

4.2. Числовые и степенные ряды

Числовым рядом называется выражение вида

$$u_1 + u_2 + \cdots + u_n + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} u_n,$$

числа u_n – *члены ряда*. Выражение u_n для произвольного числа n называется *общим членом ряда*.

Сумма конечного числа n первых членов ряда называется *n-й частичной суммой* ряда:

$$S_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n.$$

Если при $n \to \infty$ существует предел последовательности частичных сумм

$$\lim_{n\to\infty} S_n = S,$$

то ряд называется *сходящимся*, а число S – *суммой*.

Записывают:

$$S = u_1 + u_2 + \cdots + u_n + \cdots.$$

Если S_n не стремится к пределу при $n \to \infty$, то ряд называется *расходящимся*.

Пример. Рассмотрим ряд

$$a + aq + aq^2 + \cdots + aq^{n-1} + \cdots \quad (a \neq 0)$$

(членами ряда являются члены геометрической прогрессии со знаменателем q).

Известно, сумма

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} u_i = \sum_{i=1}^{n} aq^{i-1} = \frac{a - aq^n}{1-q}.$$

Возможны случаи:

1. $|q| < 1 \Rightarrow q^n \to 0$ при $n \to \infty \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} S_n = \dfrac{a}{1-q} = S$, т.е. ряд сходится.

2. $|q|>1 \Rightarrow |q^n| \to \infty$ при $n \to \infty \Rightarrow \dfrac{a-aq^n}{1-q} \to \pm\infty$ при $n \to \infty \Rightarrow$
$\lim S_n$ не существует, ряд расходится.

3. При $q=1$ ряд имеет вид:
$a+a+\cdots+a+\cdots$, $S_n=na$, $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \infty$.

Следовательно, ряд расходится.

4. При $q=-1$ ряд имеет вид:

$$a-a+\cdots+a+\cdots,$$

$$S_n = \begin{cases} 0 \text{ при } n \text{ четном;} \\ a \text{ при } n \text{ нечетном,} \end{cases} \Rightarrow$$

S_n предела не имеет, ряд расходится.

Теорема 1. Если сходится ряд, полученный из данного путем отбрасывания нескольких его членов, то сходится и сам ряд. И обратно, если сходится данный ряд, то сходится и ряд, полученный из данного отбрасыванием нескольких членов, т.е. *на сходимость ряда не влияет отбрасывание конечного числа его членов.*

Теорема 2. Если ряд

$$u_1+u_2+\cdots+u_n+\cdots$$

сходится и имеет сумму S, то ряд $\lambda u_1+\lambda u_2+\cdots+\lambda u_n+\cdots$ тоже сходится и его сумма равна λS. (Это следует из $\sigma_n=\lambda u_1+\lambda u_2+\cdots+\lambda u_n=\lambda S_n \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty}\sigma_n=\lambda S$.)

Теорема 3. Если сходятся ряды

$$S'=u_1+u_2+\cdots+u_n+\cdots,$$
$$S''=v_1+v_2+\cdots+v_n+\cdots,$$

то ряд $(u_1+v_1)+(u_2+v_2)+\cdots+(u_n+v_n)+\cdots$ сходится и его сумма

$$S=S'+S''$$

(что следует из теоремы о пределе суммы).

Непосредственно из теоремы следует, что ряд

$$(u_1+v_1)+(u_2+v_2)+\cdots+(u_n+v_n)+\cdots$$

сходится и его сумма $S=S'+S''$.

Необходимый признак сходимости ряда

Если ряд сходится, то его n-й член стремится к нулю при $n\to\infty$.

Достаточный признак расходимости ряда

Если u_n не стремится к нулю, то ряд расходится.

Рассмотрим гармонический ряд

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}+\cdots.$$

Здесь необходимый признак сходимости выполнен, так как $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$. Но ряд расходится.

Ряды с положительными членами. Достаточные признаки сходимости

1. Признаки сравнения.

Даны два ряда с положительными членами:

$$u_1+u_2+\cdots+u_n+\cdots, \tag{1}$$

$$v_1+v_2+\cdots+v_n+\cdots, \tag{2}$$

$$u_k>0,\, v_k>0;\, u_k\le v_k.$$

Тогда:

1. Если сходится ряд (2), то сходится и ряд (1).
2. Если расходится ряд (1), то расходится и ряд (2).

2. Признак Даламбера.

Дан ряд $u_1+u_2+\cdots+u_n+\cdots\ (u_n>0)$. Если при $n\to\infty$ существует $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\rho$, то при:

$\rho<1$ ряд сходится;

$\rho>1$ ряд расходится;

$\rho=1$ ряд может быть как сходящимся, так и расходящимся.

3. Интегральный признак Коши.

Пусть члены ряда и $u_1+u_2+\cdots+u_n+\cdots\ (u_n>0)$ являются значениями непрерывной функции $f(x)$ при целых значениях x_i, т.е.: $u_1=f(1), u_2=f(2),\ldots,u_n=f(n),\ldots$ и пусть $f(x)$ монотонно убывает в интервале $(1, \infty)$, тогда ряд сходится, если сходится несобственный интеграл $\int\limits_1^{\infty} f(x)dx$, и расходится, если этот интеграл расходится.

Знакочередующиеся ряды. Теорема Лейбница

Если в знакочередующемся ряде

$$u_1 - u_2 + u_3 - u_4 + \cdots \quad (u_n > 0)$$

а) $u_1 > u_2 > \ldots > u_n > \ldots$;

б) $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$,

то ряд сходится, его сумма положительна и не превосходит первый член ряда.

Знакопеременные ряды. Абсолютная и условная сходимость

Ряд называется *знакопеременным*, если среди его членов имеются как положительные, так и отрицательные.

Знакочередующиеся ряды есть частный случай знакопеременных.

Теорема 1. Если знакопеременный ряд

$$u_1 + u_2 + \cdots + u_n + \cdots \tag{1}$$

таков, что ряд

$$|u_1| + |u_2| + \cdots + |u_n| + \cdots \tag{2}$$

сходится, то и ряд (1) тоже сходится.

Знакопеременный ряд называется *абсолютно сходящимся*, если сходится сам ряд, а также ряд

$$|u_1| + |u_2| + \cdots + |u_n| + \cdots.$$

Если ряд

$$u_1 + u_2 + \cdots + u_n + \cdots$$

сходится, а ряд

$$|u_1| + |u_2| + \cdots + |u_n| + \cdots.$$

расходится, то данный знакопеременный ряд называется *условно сходящимся.*

Пример.

Ряд $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots$ сходится, но ряд $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots$ расходится. Ряд $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots$ – условно сходящийся.

Функциональные ряды

Ряд $u_1(x)+u_2(x)+\cdots+u_n(x)+\cdots$ называется функциональным. Его члены являются функциями от x. Давая x определенные числовые значения, получим различные числовые ряды. Совокупность значений x, при которых сходится функциональный ряд, называется *областью сходимости этого ряда*. В области сходимости его сумма S является функцией от x $(S = S(x))$.

Мажорируемые ряды

Функциональный ряд $u_1(x)+u_2(x)+\cdots+u_n(x)+\cdots$ называется *мажорируемым* в некоторой области изменения x, если существует такой сходящийся числовой ряд с положительными членами (мажорирующий ряд)

$$M_1+M_2+\ldots+M_n+\ldots,$$

что для всех x в данной области

$$|u_n(x)|\le M_n.$$

Пример.

Ряд $\frac{\cos x}{1}+\ldots+\frac{\cos nx}{n^2}+\ldots$ – мажорируемый при всех x, так как

$$\left|\frac{\cos nx}{n^2}\right|\le\frac{1}{n^2},$$

а ряд $1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\ldots$ сходится.

Интегрирование и дифференцирование рядов

Пусть ряд непрерывных функций, мажорируемый на отрезке $[a,b]$, и пусть $S(x)$ – сумма этого ряда. Тогда

$$\int_\alpha^x S(x)dx=\int_\alpha^x u_1(x)dx+\int_\alpha^x u_2(x)dx+\cdots+\int_\alpha^x u_n(x)dx+\ldots,$$

где $\alpha, x\in[a,b]$.

Если ряд непрерывных функций

$$u_1(x)+u_2(x)+\cdots+u_n(x)+\cdots$$

таков, что $u_n(x)$ имеют непрерывные производные на отрезке $[a,b]$, сходится на этом отрезке к сумме $S(x)$, а ряд

$$u_1'(x)+u_2'(x)+\cdots+u_n'(x)+\cdots$$

мажорируем на отрезке $[a,b]$, то

$$S'(x)=u_1'(x)+u_2'(x)+\cdots+u_n'(x)+\cdots.$$

Степенные ряды

Степенным рядом называется функциональный ряд

$$a_0+a_1(x-x_0)+a_2(x-x_0)^2+\ldots+a_n(x-x_0)^n+\ldots, \qquad (1)$$

где a_i – постоянные (коэффициенты ряда).

Теорема Абеля. Если степенной ряд

$$a_0+a_1x+\ldots+a_nx^n+\ldots \qquad (2)$$

1) сходится в точке $x_0\neq 0$, то он абсолютно сходится при всех x, удовлетворяющих условию $|x|<x_0$;

2) расходится при $x=x_0'$, то он расходится при всех x, удовлетворяющих условию $|x|>x_0'$.

Областью сходимости степенного ряда $a_0+a_1x+\ldots+a_nx^n+\ldots$ является интервал с центром в начале координат. Интервалом сходимости степенного ряда называется интервал $(-R,+R)$, что для всех $x\in(-R,R)$ ряд сходится абсолютно, для $x\notin(-R,R)$ – ряд расходится. R называется *радиусом сходимости.*

Свойства степенных рядов

1. Сумма степенного ряда есть функция, непрерывная в интервале сходимости $(-R,R)$.

2. Степенной ряд можно почленно дифференцировать в интервале сходимости

$$S'(x)=a_1+2a_2x+\ldots+na_nx^{n-1}+\ldots,\ \ x\in(-R,R).$$

3. Степенной ряд можно почленно интегрировать в интервале сходимости

$$\int_0^x S(x)dx=\int_0^x a_0dx+\int_0^x a_1xdx+\ldots+\int_0^x a_nx^ndx+\ldots,\ \ (-R<x<R).$$

Ряды Тейлора и Маклорена

Известна формула Тейлора

$$f(x)=f(a)+\frac{x-a}{1}f'(a)+\ldots+\frac{(x-a)^n}{n!}f^{(n)}(a)+R_n(x),$$

где остаточный член

$$R_n(x)=\frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}\left[a+\theta(x-a)\right],\ 0<\theta<1. \qquad (3)$$

Если $f(x)$ имеет производные всех порядков, то в формуле Тейлора n можно брать любым.

Если $\lim\limits_{n\to\infty}R_n=0$, то, переходя в формуле Тейлора к пределу при $n\to\infty$, получим бесконечный ряд

$$f(a)+\frac{x-a}{1}f'(a)+\ldots+\frac{(x-a)^n}{n!}f^{(n)}(a)+\ldots,$$

который называется рядом Тейлора.

При этом данный ряд сходится, и его сумма равна данной функции $f(x)$ тогда и только тогда, когда

$$\lim_{n\to\infty}R_n(x)=0.$$

При a=0 получим ряд Маклорена.

Справедлива теорема. Если в некотором интервале, содержащем точку x=a, $\left|f^{(n)}(x)\right|\le M$, где n – любое, M – положительное число, то функция $f(x)$ в этом интервале разлагается в ряд Тейлора.

Примеры разложения функций в ряды Тейлора и Маклорена

1. $e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}+R_n(x)$, где $R_n(x)=\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}e^{\theta x}$.

Радиус сходимости бесконечен.

2.Функция $\sin x$ при всех x разлагается в ряд Маклорена:

$$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{51}-\ldots+(1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}+\ldots$$

$$\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\ldots+(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n!)}+\ldots$$

(получили бы и почленным дифференцированием: $\cos x = (\sin x)'$).

Также имеют место:

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3} - \dots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + \dots, \quad -1 < x \le 1;$$

$$\operatorname{arctg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \dots + (-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{2n-1} + \dots, \quad -1 \le x \le 1;$$

$$(1+x)^m = 1 + \frac{m}{1!}x + \frac{m(m-1)}{2!}x^2 + \dots + \frac{m(m-1)\dots(m-n+2)}{(n-1)!}x^{n-1} + \dots.$$

Последнее разложение имеет место:
при $m \ge 0$, если $-1 \le x \le 1$;
при $-1 < m < 0$, если $-1 < x \le 1$;
при $m \le -1$, если $-1 < x < 1$.

Некоторые применения рядов Тейлора

1. Приближенное вычисление значений функций

Пусть функция $f(x)$ разлагается в ряд Тейлора в окрестности точки x_0. Тогда точное значение функции $f(x)$ в любой точке может быть вычислено по ряду Тейлора, а приближенное ее значение – по частичной сумме этого ряда.

Пример 1.

$$e^x \approx 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!}.$$

По формуле (3):

$$R_n(x) = \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}\left[a + \theta(x-a)\right].$$

Для $x \in [0, M]$, где M – любое число:

$$e^x < e^M,$$

в том числе

$$e^{0+\theta(x-0)} = e^{\theta x} < e^M,$$

$$R_n(x) < e^M \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}.$$

Пусть требуется вычислить e^x при $x \in [0,1]$ с точностью до 10^{-5}.

Должны иметь

$$R_n(x) < e\frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \approx \frac{3}{(n+1)!} < 10^{-5},$$

что выполняется при n=8.

С точностью до 10^{-5}:

$$e^x \approx 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^8}{8!}.$$

Пример 2.

Рассмотрим ряд

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ldots \ (-1 < x \le 1). \tag{4}$$

Пусть, например, надо подсчитать ln2 с точностью до 0,00001. Тогда по теореме Лейбница должно выполняться:

$$|R_n(x)| < \frac{x^n}{n} = \frac{1}{n} < 10^{-5};$$

$$n > 100000.$$

Такое суммирование 100000 членов затруднительно. Про такие ряды говорят, что они сходятся медленно.

В данном случае можно ускорить сходимость ряда. Действительно, заменив в выражении (4) x на $-x$, получим ряд

$$\ln(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \ldots \tag{5}$$

Вычитая из ряда (4) ряд (5), получим:

$$\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = \ln(1+x) - \ln(1-x) = 2\left(x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \ldots\right) \ (-1 < x < 1). \tag{6}$$

По формуле (6) можно теперь подсчитать логарифмы любых положительных чисел, так как, когда x меняется в интервале сходимости ряда (-1,1), непрерывная функция $\frac{1+x}{1-x}$ пробегает весь интервал $(0, \infty)$.

Вычислим, например, ln2 с точностью до 10^{-5}.

Из $\ln 2 = \ln\frac{1+x}{1-x}$ следует:

$$\frac{1+x}{1-x} = 2;$$
$$x = \frac{1}{3}.$$

Так что

$$\ln 2 = 2\left(\frac{1}{3} + \frac{\left(\frac{1}{3}\right)^3}{3} + \frac{\left(\frac{1}{3}\right)^5}{5} + \ldots\right) =$$

$$= \frac{2}{3} + 2\left(\frac{1}{3\cdot 3^3} + \frac{1}{5\cdot 3^5} + \ldots + \frac{1}{(2n+1)3^{(2n+1)}} + \ldots\right);$$

$$R_n(x) = 2\left(\frac{1}{(2n+3)3^{(2n+3)}} + \frac{1}{(2n+5)3^{(2n+5)}} + \ldots\right) <$$

$$< 2\left(\frac{1}{(2n+3)3^{(2n+3)}} + \frac{1}{(2n+3)3^{(2n+5)}} + \frac{1}{(2n+3)3^{(2n+7)}}\ldots\right) =$$

$$= \frac{2}{(2n+3)3^{(2n+3)}}\left(1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^4} + \ldots\right) =$$

$$= \frac{2}{(2n+3)3^{(2n+3)}}\cdot\frac{3^2}{8} = \frac{1}{4(2n+3)3^{(2n+1)}} < 10^{-5};$$

(члены ряда $1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^4} + \ldots$ – есть члены геометрической прогрессии, где b=1, $q = \frac{1}{3^2} = \frac{1}{9}$; $S = \frac{1}{1-\frac{1}{9}} = \frac{1}{\frac{8}{9}} = \frac{9}{8} = \frac{3^2}{8}$),

откуда следует:

$$4(2n+3)3^{2n+1} > 10^5$$

или $n > 4$.

Таким образом,

$$\ln 2 \approx 2\left(\frac{1}{3}\right) + 2\left(\frac{1}{3\cdot 3^3} + \frac{1}{5\cdot 3^5} + \frac{1}{7\cdot 3^7} + \frac{1}{9\cdot 3^9}\right) \approx 0{,}693144.$$

2. Интегрирование функций

В теории вероятностей важную роль играет интеграл вероятностей или функция Лапласа

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^x e^{-\frac{x^2}{2}}dx.$$

Этот интеграл нельзя вычислить в конечном виде, так как $\int e^{-\frac{x^2}{2}}dx$ не выражается в элементарных функциях. Разложим $e^{-\frac{x^2}{2}}$ в ряд, для чего в разложение e^x подставим вместо x величину $-\frac{x^2}{2}$:

$$e^{-x} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots;$$

$$e^{-\frac{x^2}{2}} = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{\left(\frac{x^2}{2!}\right)^2}{2!} + \frac{\left(-\frac{x^2}{2!}\right)^3}{3!} + \ldots$$

или

$$e^{-\frac{x^2}{2}} = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{2^2\cdot 2!} + \frac{x^6}{2^3 3!} + \ldots$$

Тогда

$$F(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^x e^{-\frac{x^2}{2}}dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(x - \frac{x^3}{2\cdot 3} + \frac{x^5}{2^2\cdot 2!5} - \ldots\right)\Bigg|_0^x =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(x - \frac{x^3}{2\cdot 3} + \frac{x^5}{2^2\cdot 2!5} - \ldots\right).$$

3**.** *Интегрирование дифференциальных уравнений*

Сначала рассмотрим так называемый метод последовательного дифференцирования *x*.

Пусть дано дифференциальное уравнение второго порядка

$$y'' = f\left(x, y, y'\right), \tag{7}$$

удовлетворяющее начальным условиям:

$$y\big|_{x=x_0} = y_0;$$

$$y'\big|_{x=x_0} = y'_0. \tag{8}$$

Допустим, что решение уравнения $y=f(x)$ существует и его можно представить в виде ряда Тейлора (при каких условиях это имеет место, рассматривать не будем):

$$y = f\left(x\right) = f\left(x_0\right) + \frac{x - x_0}{1} f'\left(x_0\right) + \frac{\left(x - x_0\right)^2}{2!} f''\left(x_0\right) + \ldots. \tag{9}$$

Для того чтобы написать решение в виде такого ряда, надо найти $f(x_0)$, $f'(x_0)$, $f''(x_0)$, ..., т.е. значения производных от частного решения при $x = x_0$.

Из условий (8) следует:

$$f\left(x_0\right) = y_0;$$
$$f'\left(x_0\right) = y'_0.$$

Из уравнения (7) следует:

$$f''\left(x_0\right) = y''\big|_{x=x_0} = F\left(x_0, y_0, y'_0\right).$$

Продифференцируем уравнение (9) по x:

$$y''' = F'_x + F'_y \cdot y + F'_{y'} \cdot y''.$$

Подставляя $x=x_0$, получим:

$$f'''\left(x_0\right) = F'_x\left(x_0, y_0, y'_0\right) + F'_y\left(x_0, y_0, y'_0\right) y'_0 + F'_{y'}\left(x_0, y_0, y'_0\right) y''_0.$$

Дифференцируя уравнение (7) еще раз, найдем $f^{IV}(x_0)$ и т.д.

Порядок уравнения не влияет на метод решения при помощи рядов.

Пример.

Пусть $y' = xy^2 + 1$ и требуется найти решение при $y\big|_{x=1} = 0$.

Здесь y будет представлен в виде ряда Тейлора:

$$y = a_0 + a_1\left(x - 1\right) + a_2\left(x - 1\right)^2 + \ldots$$

Дифференцируя заданное уравнение, получим:

$$y'' = y^2 + x2yy' = y^2 + 2xyy';$$

$$y''' = \left(2yy' + 2yy'\right) + 2x\left(y'\right)^2 + 2xyy'';$$

$$y^{\mathrm{IV}} = 4\left(y'\right)^2 + 4yy'' + 2\left(y'\right)^2 + 2x2y'y'' + 2yy'' + 2xy'y'' + 2x2yy'' =$$
$$= 6\left(y'\right)^2 + 6yy'' + 6xy'y'' + 2xyy'';$$

...

Подставляя x=1, получим:

$$f\left(x_0\right) = y\big|_{x_0} = 0;$$

$$f'\left(x_0\right) = y'\big|_{x_0} = 1\cdot 0^2 + 1 = 1;$$

$$f''\left(x_0\right) = y''\big|_{x_0} = 0^2 + 2\cdot 1\cdot 0\cdot 1 = 0;$$

$$f'''\left(x_0\right) = y'''\big|_{x_0} = 4\cdot 0\cdot 1 + 2\cdot 1\cdot 1^2 + 2\cdot 1\cdot 0\cdot 0 = 2;$$

$$f'''\left(x_0\right) = y'''\big|_{x_0} = 4\cdot 0\cdot 1 + 2\cdot 1\cdot 1^2 + 2\cdot 1\cdot 0\cdot 0 = 2;$$

$$f^{\mathrm{IV}}\left(x_0\right) = y^{\mathrm{IV}}\Big|_{x_0} = 6\cdot 1^2 + 6\cdot 0\cdot 0 + 6\cdot 1\cdot 1\cdot 0 + 2\cdot 1\cdot 0\cdot 0 = 6;$$

...

$$a_0 = f\left(x_0\right) = 0;$$

$$a_1 = \frac{f'\left(x_0\right)}{1!} = 1;$$

$$a_2 = \frac{1}{2!}f''\left(x_0\right) = 0;$$

$$a_3 = \frac{1}{3!}f'''\left(x_0\right) = \frac{2}{1\cdot 2\cdot 3} = \frac{1}{3};$$

$$a_4 = \frac{1}{4!}f^{\mathrm{IV}}\left(x_0\right) = \frac{6}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} = \frac{1}{4}.$$

Отсюда

$$y=(x-1)+\frac{(x-1)^3}{3}+\frac{(x-1)^4}{4}+\cdots$$

Рассмотрим также *метод неопределенных коэффициентов.*

Пусть решение уравнения в окрестности точки x_0, в которой заданы начальные условия, можно разложить в степенной ряд

$$y=a_0+a_1(x-x_0)+a_2(x-x_0)^2+\cdots$$

Продифференцируем этот ряд столько раз, каков порядок дифференциального уравнения. Подставляя затем в уравнение вместо y и ее производных соответствующие ряды, получим тождество, из которого определятся коэффициенты ряда. Первые коэффициенты ряда определятся не из этого тождества, а из начальных условий.

Пример. Дано линейное дифференциальное уравнение

$$y''-xy=0\,.$$

Начальные условия

$$y\big|_{x=0}=0;$$
$$y'\big|_{x=0}=1.$$

Решение будем искать в виде

$$y=a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+\cdots+a_4x^4+\cdots$$

По начальным условиям

$$y\big|_{x=0}=0=a_0;$$
$$y'\big|_{x=0}=1=a_1;$$

$$y''=2a_2+3\cdot 2a_3x+\ldots+n(n-1)a_nx^{n-2}+\ldots$$

Подставляя y, y'' в исходное уравнение, получим:

$$y''=2a_2+3\cdot 2a_3x+\ldots+n(n-1)a_nx^{n-2}+\ldots=$$
$$=x\left(a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots+a_nx^n+\ldots\right).$$

Тогда, приравнивая коэффициенты при соответствующих степенях x, получим:

$$a_2=0;$$

$$a_3=\frac{a_0}{3\cdot 2}=0;$$

$$4\cdot 3a_4 = a_1;$$

$$a_4 = \frac{1}{4\cdot 1}$$

и т.д.

Отсюда

$$y = x + \frac{1}{12}x^4 + \ldots$$

Достаточно сложный вопрос о сходимости ряда здесь оставляем без рассмотрения.

4.3. Ряды Фурье

Тригонометрическим рядом (рядом Фурье) называется функциональный ряд

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx\,.$$

Коэффициентами Фурье функции $f(x)$, заданной в интервале $(-\pi,\pi)$, для которой существует $\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)dx$, называются числа a_n и b_n, определяемые формулами:

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)dx;$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx dx;$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx dx\,.$$

Из периодичности функций $\cos nx$, $\sin nx$ с периодом 2π, следует, что, если ряд Фурье сходится в интервале $(-\pi,\pi)$, то он сходится при всех остальных значениях x, и его сумма $S(x)$ является периодической с периодом 2π.

Теорема Дирихле *(достаточные условия разложимости функции f(x) в ряд Фурье).* Пусть функция $f(x)$ является периодической с периодом 2π и на отрезке $[-\pi,\pi]$ удовлетворяет условиям:

1. $f(x)$ – кусочно-непрерывна, т.е. непрерывна или имеет конечное число точек разрыва первого рода;

2. $f(x)$ – кусочно-монотонна, т.е. монотонна на всем отрезке, либо этот отрезок можно разбить на конечное число интервалов так, что на каждом из них функция монотонна.

Тогда соответствующий функции ряд Фурье сходится на этом отрезке и при этом:

– в точках непрерывности функции сумма ряда $S(x)$ совпадает с самой функцией: $S(x)=f(x)$;

– в каждой точке x_0 разрыва функции сумма ряда равна

$$S(x_0)=\frac{f(x_0-0)+f(x_0+0)}{2};$$

– в точках $x=-\pi$ и $x=\pi$ сумма ряда равна

$$S(-\pi)=S(\pi)=\frac{f(-\pi+0)+f(\pi-0)}{2}.$$

Любая из функций, употребляемых в анализе и в его приложениях, удовлетворяет приведенным условиям.

Если функция разлагается в ряд Фурье, то можно получить достаточно хорошее ее приближение, взяв конечную сумму членов ряда Фурье – многочлен Фурье:

$$f(x)\approx\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{k}a_n\cos nx+b_n\sin nx.$$

Теория разложения функций в тригонометрические ряды называется *гармоническим анализом*.

Разложение в ряд Фурье четных функций

Пусть $f(x)$ – четная функция. Тогда $f(x)\sin kx$ будет нечетной и

$$\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin kx=0.$$

Откуда

$$b_k=0 \qquad \text{при всех } k.$$

Ряд Фурье для четной функции состоит из одних косинусов:

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos nx,$$

$$a_0=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)dx,\ a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)\cos nxdx,\ n\in N.$$

Ряд Фурье нечетных функций

Пусть $f(x)$ – нечетная функция, $\cos kx$ – четная. Тогда $f(x)\cos kx$ – нечетная функция и

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos kx = 0,$$

откуда

$$a_k = 0.$$

Следовательно, нечетная функция имеет ряд Фурье, состоящий из одних синусов $\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx$, $b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin nx dx$, $n \in N$.

Разложение в ряд Фурье функций с произвольным периодом

Пусть $f(x)$ задана на интервале $[-l, l]$, имеет период $2l$ ($f(x+2l) = f(x)$), где l – произвольное положительное число и удовлетворяет на этом отрезке условиям Дирихле.

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos\frac{n\pi x}{l} + b_n \sin\frac{n\pi x}{l}\right),$$

где

$$a_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}dx;$$

$$b_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx.$$

Здесь сумма ряда Фурье периодическая с периодом $T=2l$.

Справедливо: $\omega_n = \frac{\pi n}{l}$. Наименьшая частота $\omega_1 = \frac{\pi}{l}$. Имеем:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos\omega_n x + b_n \sin\omega_n x\right),\ \left(\omega_n = n\omega_1\right);$$

$$a_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\cos\omega_n x dx;$$

$$b_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\sin\omega_n x dx.$$

Варианты тестовых заданий по модулю

Вариант 1

1. Какие из данных рядов являются сходящимися

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3n^2+1}{2n+5}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{n!}$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n+1}{3n+2}\right)^n$; г) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n}{3n^2+2}$

1) а) и б); 2) б) и в); 3) а) и г); 4) в) и г).

2. Радиус сходимости степенного ряда $1+\frac{x^3}{125}+\frac{x^6}{125^2}+\frac{x^9}{125^3}+...+\frac{x^{3n}}{125^n}+...$ равен

1) 3; 2) 125; 3) 5; 4) 4.

3. Частное решение дифференциального уравнения $xy'=y^2+1$, если $y(1)=0$

1) $\operatorname{arctg} y=\ln x$; 2) $\operatorname{arctg} y+\ln x=0$;
3) $\operatorname{arctg} y=\ln 2x$; 4) $\arcsin y=\ln 2x$.

4. Общее решение дифференциального уравнения $y''+7y'+6y=0$

1) $e^{6x}(C_1+C_2x)$; 2) $C_1e^{6x}+C_2e^{6x}$;
3) $C_1+C_2e^{6x}$; 4) $C_1e^{-6x}+C_2e^{-x}$.

5. Для уборки снега используются снегоуборочные машины. Они работают в течение суток с постоянной скоростью уборки снега 400 м^3/ч. Изменение объема снега, выпадающего на улицы города в течение суток, можно описать уравнением $\frac{dS}{dt}=620-20t$, где $S(t)$ – объем снега (в м^3), выпавшего за время t (в часах), $0\le t\le 24$. В момент времени t=0 на улицах города лежит 1000 м^3 снега. Чему равен объем снега, лежащего на улицах, в момент времени $t=12$?

1) 2200; 2) 1960; 3) 2160; 4) 1900.

6. Общий член ряда $\frac{1}{2}+\frac{3}{4}+\frac{5}{8}+\frac{7}{16}+...$ имеет вид:

1) $u_n=\frac{n}{2^n}$; 2) $u_n=\frac{2n-1}{2n}$; 3) $u_n=\frac{3n-2}{2^n}$; 4) $u_n=\frac{2n-1}{2^n}$.

Вариант 2

1. Даны числовые ряды:

а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+3}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n+3}}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3+2}$; г) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n^2+3}$. Из них сходятся

1)только а); 2) а) и в); 3) все, кроме б); 4) б).

2. Уравнение $yy'-1=x$ является...

1) уравнением Бернулли;
2) однородным дифференциальным уравнением первого порядка;
3) уравнением с разделяющимися переменными;
4) линейным дифференциальным уравнением первого порядка.

3. Укажите общее решение дифференциального уравнения $(1+x)y'=2y$.

1) $y=(1+x)^2$; 2) $y=C(1+x)^2$;

3) $y=2C(1+x)$; 4) $y=\ln(C(1+x)^2)$.

4. Даны числовые ряды:

А) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2n+1}$; В) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}$. Тогда...

1) ряд А сходится, ряд В расходится;
2) ряд А расходится, ряд В расходится;
3) ряд А расходится, ряд В сходится;
4) ряд А сходится, ряд В сходится.

5. Общее решение линейного однородного дифференциального уравнения второго порядка $y''+4y'+3y=0$ имеет вид...

1) $y=C_1\cdot e^{x}+C_2\cdot e^{3x}$; 2) $y=C_1\cdot e^{-x}+C_2\cdot e^{3x}$;

3) $y=C_1\cdot e^{-x}+C_2\cdot e^{-3x}$; 4) $y=C_1\cdot e^{x}-C_2\cdot e^{3x}$.

6. Общий член ряда $1+\frac{1}{4}+\frac{1}{16}+\frac{1}{64}+\ldots$ имеет вид:

1) $u_n=\frac{1}{4^{n-1}}$; 2) $u_n=\frac{1}{4^n}$; 3) $u_n=\frac{1}{n^2}$; 4) $u_n=\left(\frac{1}{4}\right)^n$.

Вариант 3

1. Общий член ряда $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+...$ имеет вид:

1) $u_n=\frac{1}{2^{n-1}}$; 2) $u_n=\frac{1}{2^n}$; 3) $u_n=\frac{1}{n^2}$; 4) $u_n=\left(\frac{1}{2}\right)^n$.

2. Из рядов сходятся

$a)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2+2}{3n+1}$; $б)\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{n}\frac{\sin\pi}{n^2}$; $в)\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{n}{3^n}$.

1) только $a)$; 2) только $б)$;

3) только $б)$ и $в)$; 4) только $a)$ и $б)$.

3. Радиус сходимости степенного ряда $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{x^n}{n+2}$

1) 1; 2) 2; 3) $\frac{1}{2}$; 4) ∞.

4. Дифференциальное уравнение $(1+y)dx-(1-x)dy=0$ по виду

1) только однородное;
2) только с разделяющимися переменными;
3) только линейное;
4) в полных дифференциалах и с разделяющимися переменными.

5. Частное решение дифференциального уравнения $\operatorname{tg}x dx+\frac{1}{y}dy=0$, если $y\left(\frac{\pi}{3}\right)=-1$ имеет вид:

1) $-\cos x+5$; 2) $\cos x-x$; 3) $-\cos x$; 4) $-2\cos x$.

6. Общее решение дифференциального уравнения $2y''+5y'-7y=0$ имеет вид:

1) $C_1+C_2e^{7x}$; 2) $C_1e^x+C_2xe^{-\frac{7}{2}x}$; 3) $C_1e^x+C_2e^{-\frac{7}{2}x}$; 4) $C_1e^x+C_2xe^x$.

Вариант 4

1. Найдите из нижеприводимых рядов сходящиеся

$a)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^3}{(3n-2)^3};\qquad b)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n}{n^3};\quad c)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{3n+2}};\quad d)\ \sum_{n=1}^{\infty}\left(\operatorname{arctg}\frac{1}{n}\right)^n$

1) только $a)$; 2) только $b)$; 3) только $b)$ и $d)$; 4) $c)$.

2. Радиус сходимости степенного ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^2}{3^n\cdot n^2}$

1) 1; 2) 0; 3) $\frac{1}{3}$; 4) ∞.

3. Какое из следующих дифференциальных уравнений решается последовательным интегрированием

1) $y''+2y'+y=0$; 2) $y''=\cos x$;

3) $y''+2y(y')^2=0$; 4) $y''+y=e^x$.

4. Частное решение дифференциального уравнения $y''=e^x$, если $y(0)=0$ и $y'(0)=1$имеет вид:

1) $y=e^x$; 2) $y=e^x-1$; 3) $y=e^x+2x-1$; 4) $y=e^x+2x$.

5. Общее решение дифференциального уравнения $y''-4y'=0$ имеет вид:

1) $y=c_1+c_2e^{-4x}$; 2) $y=c_1e^{4x}+c_2e^{-4x}$;

3) $y=c_1e^x+c_2xe^{-4x}$; 4) $y=c_1x+c_2e^{-4x}$.

6. Общий член ряда $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}-\frac{1}{6}+\ldots$ имеет вид:

1) $u_n=\frac{(-1)^{n+1}}{2^{n-1}}$; 2) $u_n=\frac{(-1)^n}{2^{n-1}}$; 3) $u_n=\frac{1}{n^2}$; 4) $u_n=\left(\frac{1}{2}\right)^n$.

Вариант 5

1. Из рядов

$a)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3n-1};\quad b)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3n^2+2}{4n-2n^2};\qquad c)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3}$. сходятся:

1) только $a)$; 2) только $c)$; 3) только $b)$ и $c)$; 4)ни один.

2. Радиус сходимости степенного ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}$

1) 2; 2) 4; 3)1; 4) ∞.

3. Линейное неоднородное дифференциальное уравнение первого порядка имеет следующий вид:

1) $P(x,y)dx+Q(x,y)dy=0$; 2) $y'+p(x)\cdot y=q(x)$;

3) $y''=f(x)$; 4) $y=xy'+f(y')$.

4. Частное решение дифференциального уравнения $ydx+\text{ctg}(x)dy=0$, при $y\left(\frac{\pi}{3}\right)=1$ имеет вид:

1) $3\cos x+x$; 2) $\sin x$; 3) $2\cos x+2$; 4) $-2\cos x$.

5. Общее решение дифференциального уравнения $2y''-3y'+y=0$ имеет вид:

1) $c_1e^{\frac{1}{2}x}+c_2e^x$; 2) $c_1e^{-x}+c_2e^x$; 3) $e^x(c_1+c_2x)$; 4) $c_1e^{2x}+c_2e^{-x}$.

6. Общий член ряда $\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\frac{1}{27}+\frac{1}{81}+\ldots$ имеет вид:

1) $u_n=\frac{(-1)^n}{3}$; 2) $u_n=\frac{1}{3}$; 3) $u_n=\frac{1}{3^{n-1}}$; 4) $u_n=\frac{1}{3^n}$.

Вариант 6

1. Из рядов

а) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3n+2}{2n+1}\right)^n$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}}$ расходятся

1) только а); 2) а) и в); 3) все; 4) только в).

2. Радиус сходимости степенного ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n^2\cdot 3^n}$

1) 2; 2) 3; 3) 1; 4) 0.

3. Дифференциальное уравнение y' - y + 3 = 0 по виду

1) только однородное;

2) только линейное;

3) только с разделяющимися переменными;

4) линейное и с разделяющимися переменными.

4. Частное решение дифференциального уравнения $(1+x^2)\,y' =$ $=2x\,(4-y)$, если $y(0) = 1$, имеет вид:

1) $y = 4 - \frac{3}{1+x^2}$; 2) $y = \frac{4x^2-1}{x^2+1}$; 3) $y = 4 + \frac{1}{1+x^2}$; 4) $y = \frac{4x^2}{1+x^2}$.

5. Общее решение дифференциального уравнения $y'' - 4y' = 0$ имеет вид:

1) $y = C_1e^{4x} + C_2e^{-4x}$; 2) $y = C_1e^{-4x} + C_2xe^{-4x}$;
3) $y = C_1 + C_2\,e^{4x}$; 4) $y = C_1e^{4x} + C_2xe^{4x}$.

6. Общий член ряда $\frac{1}{3}-\frac{1}{9}+\frac{1}{27}-\frac{1}{81}+\ldots$ имеет вид:

1) $u_n = \frac{(-1)^n}{3}$; 2) $u_n = \left(-\frac{1}{3}\right)^n$; 3) $u_n = \frac{1}{3^{n-1}}$; 4) $u_n = \left(-\frac{1}{3}\right)^{n+1}$.

Вариант 7

1. Из рядов

а) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{5n-3}{2n+1}\right)^n$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}+1}$ расходятся

1) только а); 2) а) и в); 3) все; 4) только в).

2. Радиус сходимости степенного ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n^2\cdot 3^n}$

1) 2; 2) 3; 3) 1; 4) 0.

3. Дифференциальное уравнение $y' - 2y + 3 = 0$ по виду
1) только однородное;
2) только линейное;
3) только с разделяющимися переменными;
4) линейное и с разделяющимися переменными.

4. Частное решение дифференциального уравнения $(1+x^2)\,y' =$ $=2x\,(4-y)$, если $y(0) = 1$, имеет вид:

1) $y = 4 - \frac{3}{1+x^2}$; 2) $y = \frac{4x^2-1}{x^2+1}$; 3) $y = 4 + \frac{1}{1+x^2}$; 4) $y = \frac{4x^2}{1+x^2}$.

5. Общее решение дифференциального уравнения $y'' - 4y' = 0$ имеет вид:

1) $y = C_1e^{4x} + C_2e^{-4x}$; 2) $y = C_1e^{-4x} + C_2xe^{-4x}$;

3) $y = C_1 + C_2e^{4x}$; 4) $y = C_1e^{4x} + C_2xe^{4x}$.

6. Для уборки снега используются снегоуборочные машины. Они работают в течение суток с постоянной скоростью уборки снега 400 м^3/ч. Изменение объема снега, выпадающего на улицы города в течение суток, можно описать уравнением $\frac{dS}{dt} = 620 - 20t$, где $S(t)$ – объем снега (в м^3), выпавшего за время t (в часах), $0 \le t \le 24$. В момент времени t=0 на улицах города лежит 1000 м^3 снега. Чему равен объем снега, лежащего на улицах, в момент времени t=6?

1) 2200; 2) 1960; 3) 2160; 4) 1900.

Вариант 8

1. Какие из данных рядов являются сходящимися

а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3n^2+1}{2n+5}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{n!}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n+1}{3n+2}\right)^n$; г) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{3n^2+2}$

1) а) и б); 2) б) и в); 3) а) и г); 4) в) и г).

2. Радиус сходимости степенного ряда $1+\frac{x^3}{125}+\frac{x^6}{125^2}+\frac{x^9}{125^3}+...+\frac{x^{3n}}{125^n}+...$ равен

1) 3; 2) 125; 3) 5; 4) 4.

3. Частное решение дифференциального уравнения $xy' = y^2 + 1$, если $y(1) = 0$

1) $\operatorname{arctg} y = \ln x$; 2) $\operatorname{arctg} y + \ln x = 0$;

3) $\operatorname{arctg} y = \ln 2x$; 4) $\arcsin y = \ln 2x$.

4. Общее решение дифференциального уравнения $y'' - 7y' + 6y = 0$

1) $e^{6x}(C_1 + C_2x)$; 2) $C_1e^{6x} + C_2e^{6x}$;

3) $C_1 + C_2e^{6x}$; 4) $C_1e^{-6x} + C_2e^{-x}$.

5. Общий член ряда $\frac{5}{2}+\frac{7}{4}+\frac{9}{8}+\frac{11}{16}+...$ имеет вид:

1) $u_n = \frac{5n}{2^n}$; 2) $u_n = \frac{3n+2}{2n}$; 3) $u_n = \frac{2n+3}{2^n}$; 4) $u_n = \frac{2n+3}{2n}$.

6. Дифференциальное уравнение $xy' - \frac{7y}{x^2} = \ln x$ по виду

1) уравнение с разделяющимися переменными;
2) уравнение Бернулли;
3) линейное дифференциальное уравнение;
4) уравнение в полных дифференциалах.

Вариант 9

1. Общее решение линейного однородного дифференциального уравнения второго порядка $y'' + 4y' + 3y = 0$ имеет вид...

1) $y = C_1 \cdot e^{x} + C_2 \cdot e^{3x}$; 2) $y = C_1 \cdot e^{-x} + C_2 \cdot e^{3x}$;

3) $y = C_1 \cdot e^{-x} + C_2 \cdot e^{-3x}$; 4) $y = C_1 \cdot e^{x} - C_2 \cdot e^{3x}$.

2. Даны числовые ряды:

а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+3}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n+3}}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3+2}$; г) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^2+3}$. Из них сходятся

1) только а); 2) а) и в); 3) все, кроме б); 4) б).

3. Уравнение $yy' - 1 = x$ является...

1) уравнением Бернулли;
2) однородным дифференциальным уравнением первого порядка;
3) уравнением с разделяющимися переменными;
4) линейным дифференциальным уравнением первого порядка.

4. Укажите общее решение дифференциального уравнения $(1+x)y' = 2y$.

1) $y = (1+x)^2$; 2) $y = C(1+x)^2$;

3) $y = 2C(1+x)$; 4) $y = \ln(C(1+x)^2)$.

5. Даны числовые ряды:

А) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2n+1}$; В) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$. Тогда...

1) ряд А сходится, ряд В расходится;
2) ряд А расходится, ряд В расходится;
3) ряд А расходится, ряд В сходится;
4) ряд А сходится, ряд В сходится.

6. Общий член ряда $1+\frac{1}{4}+\frac{1}{16}+\frac{1}{64}+\ldots$ имеет вид:

1) $u_n=\frac{1}{4^{n-1}}$; 2) $u_n=\frac{1}{4^n}$; 3) $u_n=\frac{1}{n^2}$; 4) $u_n=\left(\frac{1}{4}\right)^n$.

Вариант 10

1. Выберите из нижеприведенных рядов сходящиеся:

а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(5n-1)^2}{n^2}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{n^3}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3n^2+6}{5n^2+10}\right)^n$

1) только б); 2) только а) и б); 3) только б) и в); 4) все.

2. Радиус сходимости степенного ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}$ равен

1) 0; 2) 1; 3) 2; 4) ∞.

3. Частное решение дифференциального уравнения $\frac{y}{y'}=\ln y$ при начальных условиях $y(2)=1$ равно:

1) $2x-4=y$; 2) $2x-4=\ln y$; 3) $2(x-2)=\ln^2 y$; 4) $y=\ln x$.

4. Общее решение дифференциального уравнения $y''-7y'+6y=0$ имеет вид:

1) $y=C_1e^{6x}+C_2e^{x}$; 2) $y=Ce^{6x}$;

3) $y=Ce^{x}$; 4) $y=C_1e^{6x}+C_2e^{x}-C_3e^{5x}$.

5. Общий член ряда $1-\frac{1}{4}+\frac{1}{16}-\frac{1}{64}+\ldots$ имеет вид:

1) $u_n=\frac{(-1)^n}{4^{n-1}}$; 2) $u_n=\left(-\frac{1}{4}\right)^{n-1}$; 3) $u_n=\frac{1}{n^2}$; 4) $u_n=\left(\frac{1}{4}\right)^n$.

6. Общее решение дифференциального уравнения $y'+\mathrm{tg}\,x\cdot y=\frac{1}{\cos x}$, имеет вид:

1) $C\sin x+\cos x$; 2) $C\cos x+\sin x$;

3) $(\mathrm{tg}\,x+C)\sin x$; 4) $\cos x-C\sin x$.

Решение примерного варианта

Задание 1.

Числитель общего члена последовательности $\frac{2}{3},\frac{5}{9},\frac{8}{27},\ldots$ является членом арифметической прогрессии с разностью d=3, а знаменатель – членом геометрической прогрессии со знаменателем q=3. Указать общий член заданной последовательности

1) $c_n=(-1)^{n+1}\frac{3n}{2n+1}$; 2) $c_n=(-1)^n\frac{n}{2n-1}$;

3) $c_n=\frac{3n-1}{3^n}$; 4) $c_n=\frac{2n}{6n-3}$.

Решение.

Общий член числителя

$a_n=a_1+d(n-1)=2+3(n-1)=3n-1$

Для общего члена знаменателя имеем $b_n=3\cdot 3^{n-1}=3^n$.

Таким образом, общий член всей последовательности равен $c_n=\frac{3n-1}{3^n}$.

Ответ: 3) $c_n=\frac{3n-1}{3^n}$.

Задание 2.

Из трех заданных рядов

$$а)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^3+2}{2n+1};\quad б)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|\sin n|}{n^3};\quad в)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^n}$$

являются сходящимися:

1) только $а)$; 2) только $б)$; 3) только $б)$ и $в)$; 4) только $а)$ и $б)$.

Решение:

Все три ряда – знакоположительные. Для выяснения их сходимости воспользуемся признаками сходимости знакоположительных рядов.

Общий член первого ряда равен $u_n=\frac{n^3+2}{2n+1}$. По необходимому признаку сходимости должны иметь:

$$\lim_{n\to\infty}u_n=\lim_{n\to\infty}\frac{n^3+2}{2n+1}=\infty\neq 0,$$

Необходимое условие сходимости не выполняется; ряд расходится.

Для членов второго ряда справедливо: $\dfrac{|\sin n|}{n^3} \le \dfrac{1}{n^3}$ Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^p}$ – сходится, если $p > 1$, так что по первому признаку сравнения ряд *б)* сходится (p=3>1).

Третий ряд, составленный из членов бесконечно убывающей геометрической прогрессии, так же сходящийся.

Ответ: 3) только *б*) и *в*) .

Задание 3.

Радиус сходимости степенного ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{x^n}{2n+1}$ равен:

1) 0; 2) 2; 3) $\dfrac{1}{2}$; 4) 1.

Решение:

Для отыскания радиуса сходимости степенного ряда воспользуемся формулой $R = \lim\limits_{n\to\infty} \left|\dfrac{a_n}{a_{n+1}}\right|$. В данном ряде $a_n = \dfrac{1}{2n+1}$, тогда

$$a_{n+1} = \frac{1}{2(n+1)+1} = \frac{1}{2n+3}.$$

Найдем радиус:

$$R = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{2n+1}\right) : \left(\frac{1}{2n+3}\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{2n+3}{2n+1} = 1.$$

Ответ: 4) 1.

Задание 4.

Общее решение дифференциального уравнения $y' - y = 0$ имеет вид...

1) $y = C + e^x, C \in R$; 2) $y = Ce^x, C \in R$;

3) $y = C - e^x, C \in R$; 4) $y = Cx, C \in R$.

Решение:

Данное уравнение является дифференциальным уравнением I-го порядка с разделяющимися переменными. Действительно, с учетом $y' = \dfrac{dy}{dx}$ получим

$$\frac{dy}{dx} - y = 0;\ \frac{dy}{dx} = y$$

Откуда

$$\frac{dy}{y} = dx,$$

$$\int \frac{dy}{y} = \int dx, \Rightarrow \ln|y| = x + C$$ или $y = e^{x+C}$ или $y = Ce^x$ (принято $C = e^C$).

Ответ: 2) $y = Ce^x, C \in R$.

Задание 5.

Общее решение дифференциального уравнения $y''' = \sin 3x$ имеет вид...

1) $y = \frac{1}{27}\cos 3x + C_1 x + C_3$; 2) $y = \frac{1}{27}\cos 3x + C_1\frac{x^2}{2} + C_2 x + C_3$;

3) $y = -\frac{1}{27}\cos 3x + C_1\frac{x^2}{2} + C_2 x + C_3$; 4) $y = \frac{1}{27}\cos 3x + C_1$.

Решение:

Заданное уравнение – третьего порядка. Будем постепенно понижать порядок, интегрируя обе части уравнения по x.

$$y'' = \int \sin 3x dx = -\frac{1}{3}\cos 3x + C_1;$$

$$y' = \int\left(-\frac{1}{3}\cos 3x + C_1\right)dx = -\frac{1}{9}\sin 3x + C_1 x + C_2, \textit{где } C_1, C_2 \in R;$$

$$y = \int\left(-\frac{1}{9}\sin 3x + C_1 x + C_2\right)dx = \frac{1}{27}\cos 3x + C_1\frac{x^2}{2} + C_2 x + C_3,$$

где $C_1, C_2, C_3 \in R$.

Ответ: 2) $y = \frac{1}{27}\cos 3x + C_1\frac{x^2}{2} + C_2 x + C_3$.

Задание 6.

Общее решение линейного однородного дифференциального уравнения второго порядка $y'' - 6y' + 5y = 0$ имеет вид...

1) $y = e^x + e^{5x}$; 2) $y = C_1 e^x e^{5x}$;

3) $y = C_1 x + C_2 5x$; 4) $y = C_1 e^x + C_2 e^{5x}$.

Решение:

Характеристическое уравнение имеет вид:

$$k^2 - 6k + 5 = 0.$$

Корни этого уравнения: $k_1 = 1, k_2 = 5$. Так что, общее решение дифференциального уравнения представляется в виде: $y = C_1 e^x + C_2 e^{5x}$.

Ответ: 4) $y = C_1 e^x + C_2 e^{5x}$.

Модуль 5. ЭЛЕМЕНТЫ ДИСКРЕТНОЙ МАТЕМАТИКИ. ЛОГИЧЕСКИЕ ИСЧИСЛЕНИЯ. ГРАФЫ

5.1. Элементы дискретной математики

Одним из центральных понятий математической логики является понятие множества. Множество считается заданным, если относительно любого объекта можно установить, является он элементом данного множества или нет. Множество из конечного числа элементов задается:

– *перечислением* всех своих элементов; порядок расположения элементов не существенен (так, множество корней уравнения $x^2 - 5x + 6 = 0$ есть множество $A = \{2,3\}$ или $A = \{3,2\}$).

– *указанием отличительных свойств,* которые выделяют элементы множества из элементов известного более широкого *основного* множества (например, $A = \{x \in R \mid x^2 - 7x + 8 = 0\}$ состоит из тех элементов x множества действительных чисел, для которых справедливо равенство $x^2 - 7x + 8 = 0$). Для задания бесконечных множеств используется только второй способ, ибо перечислить бесконечное число элементов невозможно.

Множество, не содержащее ни одного элемента, называется *пустым* множеством и обозначается 0. Например, множество A натуральных чисел, меньших, чем $1 / 2$, есть пустое множество; пишут $A = 0$.

Если все элементы множества A являются и элементами множества B, то множество A называется *подмножеством* множества B и говорят, что множество A содержится в множестве B. Обозначается: $A \subset B$ или $B \supset A$ (множество всех натуральных чисел N есть подмножество всех целых чисел Z: $N \subset Z$). Из определения следует, что само множество также является своим подмножеством, т. е. всегда $A \subset A$. Пустое множество является подмножеством любого множества.

Если $A \subset B$ и $B \subset A$, то множества A и B называют *равными;* обозначают: $A = B$.

Объединением произвольных множеств A и B называется множество C, состоящее из тех и только тех элементов, которые принадлежат хотя бы одному из множеств A или B; обозначают: $C = A \cup B$.

Пересечением множеств A и B называется множество C, состоящее из тех и только тех элементов, которые принадлежат и множеству A, и множеству B; обозначают: $C = A \cap B$.

Разностью множеств A и B называется множество C, состоящее только из тех элементов множества A, которые не являются элементами B; обозначается: $C=A \setminus B$. Аналогично определяется объединение и пересечение любого числа множеств.

Свойства операций объединения и пересечения

1. $A \cup B = B \cup A$
2. $A \cap B = B \cap A$
3. $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$
4. $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$
5. $A \cup A = A$
6. $A \cap A = A$
7. $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
8. $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
9. Если $B \subset A$, то $A \cup B = A$ и $A \cap B = B$

Для графического изображения множеств часто используются диаграммы Эйлера–Венна.

5.2. Элементы математической логики

В математической логике используется понятие «*высказывание*», под которым понимается утверждение, о котором можно говорить истинно оно или ложно. Новые высказывания можно образовывать на основе логических связок (операций): *отрицание, дизъюнкция, конъюнкция, импликация, эквивалентность*. Простые высказывания рассматриваются *логическими переменными;* обозначаются заглавными буквами латинского алфавита. Истинному высказыванию ставится в соответствие 1, ложному – 0. Рассмотрим основные логические операции над высказываниями, с помощью которых можно образовывать новые высказывания, а также проводить анализ их истинности или ложности:

Коньюнкция (*логическое умножение*) – это соединение двух простых высказываний A и B в новое высказывание C с использованием союза «и»; обозначается С$= A \cap B$ или $A \cdot B$ (если: A – «Отказал бензонасос», B – «Двигатель не заводится», то $A \cap B$ – «Отказал бензонасос, и двигатель не заводится»). Конъюнкция двух высказываний истинна только тогда, когда истинны оба входящих в неё высказывания (таблица истинности конъюнкции на рис. 10).

A	B	$A \cap B$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Рис. 10. Таблица истинности конъюнкции

Дизъюнкция (*логическое сложение*) – это соединение двух простых высказываний *A, B* в новое высказывание *C* с помощью союза «или»; обозначается С=$A \bigcup B$ или $A + B$(если *A* – «Отказал бензонасос», *B* – «Отказала система зажигания», то $A \bigcup B$ – «Отказал бензонасос, или отказала система зажигания»). Дизъюнкция двух высказываний ложна только тогда, когда ложны оба входящих в неё высказывания (таблица истинности дизъюнкции на рис. 11).

A	B	$A \bigcup B$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

Рис. 11. Таблица истинности дизъюнкции

Инверсия (*логическое отрицание*) определяется присоединением частицы «не» к сказуемому в данном простом высказывании А; обозначается: $\overline{A}$ (если *A* – «Тормозная система исправна», то $\overline{A}$ – «Тормозная система не исправна»

Инверсия истинна, если исходное высказывание ложно; ложна, если исходное высказывание истинно (таблица истинности инверсии на рис.12).

A	$\overline{A}$
0	1
1	0

Рис. 12. Таблица истинности инверсии

Импликация (*логическое следование*) соответствует обороту «если, то»; обозначается: $A \to B$ (*A* – «Все системы автомобиля исправны», *B* – «Автомобиль допускается к участию в дорожном движении»; $A \to B$ – «Если все системы автомобиля исправны, то автомобиль допускается к участию в дорожном движении»). Импликация ложна только в том случае, если условие *A* истинно, а следствие *B* ложно (таблица истинности импликации на рис. 13).

A	B	$A \to B$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

Рис. 13. Таблица истинности импликации

Эквивалентность (*равнозначность*) соответствует обороту речи: «тогда и только тогда»; обозначается: $A \leftrightarrow B$ или $A \sim B$ (если: A – «Автомобиль допускается к участию в дорожном движении», B – «Все системы автомобиля исправны», тогда $A \leftrightarrow B$ – «Автомобиль допускается к участию в дорожном движении тогда и только тогда, когда все системы автомобиля исправны»).Эквивалентность двух выражений истинна только тогда, когда оба высказывания одновременно истинны или одновременно ложны; таблица истинности на рис.14.

A	B	$A \leftrightarrow B$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Рис. 14. Таблица истинности эквивалентности.

Логическая функция – это функция, в которой переменные принимают только два значения: логические 1 или 0.

Истинность или ложность сложных суждений представляет собой *функцию истинности или ложности* простых; называют *булевой функцией суждений f* (*a*, *b*). Любая логическая функция может быть задана с помощью таблицы истинности, в левой части которой записывается набор аргументов, а в правой части – соответствующие значения логической функции. При построении таблицы истинности учитывается порядок выполнения логических операций.

При построении таблиц истинности для сложных выражений используется следующий алгоритм:

– определяется число строк (2^n + строка для заголовка, n – количество простых высказываний),

– определяется число столбцов (число переменных + число логических операций),

– в столбцах указываются результаты выполнения логических операций в обозначенной последовательности (с учетом таблиц истинности основных логических операций).

Пример: Составить таблицу истинности логического выражения: $D = \overline{A} \wedge (B \vee C)$

Решение:

1. Определим число строк: имеем три простых высказывания: ***A, B, C***. Здесь n=3, количество строк = $2^3 + 1 = 9$.

2. Определим количество столбцов. Здесь:

– ***A, B, C*** – простые выражения (переменные);

– промежуточные результаты (логические операции): $\overline{A}$ – инверсия; $B \vee C$ – операция дизъюнкции; а также искомое окончательное значение арифметического выражения ; конъюнкция $D = \overline{A} \wedge (B \vee C)$.

3. С учетом таблиц истинности логических операций получим таблицу:

A	B	C	$\overline{A}$	$B \vee C$	$D = \overline{A} \wedge (B \vee C)$
0	0	0	1	0	0
0	0	1	1	1	1
0	1	0	1	1	1
0	1	1	1	1	1
1	0	0	0	0	0
1	0	1	0	1	0
1	1	0	0	1	0
1	1	1	0	1	0

Для упрощения логических выражений используются приводимые ниже законы логики и правила преобразования логических выражений.

1. Закон двойного отрицания: $A = \overline{\overline{A}}$

2. Переместительный (коммутативный) закон:

– для логического сложения: $A \vee B = B \vee A$;

– для логического умножения: $A \wedge B = B \wedge A$.

3. Сочетательный (ассоциативный) закон:

– для логического сложения: $(A \vee B) \vee C = A \vee (B \vee C)$;

– для логического умножения: $(A \wedge B) \wedge C = A \wedge (B \wedge C)$

4. Распределительный (дистрибутивный) закон:

– для логического сложения: $(A \vee B) \wedge C = (A \wedge C) \vee (B \wedge C)$;

– для логического умножения: $(A \wedge B) \vee C = (A \vee C) \wedge (B \vee C)$.

5. Закон общей инверсии (законы де Моргана):

– для логического сложения: $\overline{A \vee B} = \overline{A} \wedge \overline{B}$;

– для логического умножения: $\overline{A \wedge B} = \overline{A} \vee \overline{B}$.

6. Закон идемпотентности (от латинских слов idem — тот же самый и potens — сильный; дословно — равносильный):

– для логического сложения: $A \vee A = A$;

– для логического умножения: $A \wedge A = A$.

7. Законы исключения констант:

– для логического сложения: $A \vee 1 = 1$, $A \vee 0 = A$;

– для логического умножения: $A \wedge 1 = A$, $A \wedge 0 = 0$.

8. Закон противоречия: $A \wedge \overline{A} = 0$.

9. Закон исключения третьего: $A \vee \overline{A} = 1$.

10. Закон поглощения:

– для логического сложения: $A \vee (A \wedge B) = A$;

– для логического умножения: $A \wedge (A \vee B) = A$.

Указанные законы позволяют упрощать сложные логические выражения; сложная логическая функция заменяется более простой, но равносильной ей. Нарушения законов логики приводят к логическим ошибкам и вытекающим из них противоречиям. При упрощении сложного логического выражения необходимо следовать порядку выполнения логических операций: инверсия; конъюнкция; дизъюнкция; импликация; эквивалентность. Для изменения указанного порядка выполнения операций используются скобки.

Пример. Упростить формулу $(A \vee B) \wedge (A \vee C)$.

Решение:

Имеем :

$$(A \vee B) \wedge (A \vee C) = A \wedge A \vee A \wedge C \vee B \wedge A \vee B \wedge C \ .$$

Откуда с учетом $A \wedge A = A$, получим:

$$\begin{aligned} &A \wedge A \vee A \wedge C \vee B \wedge A \vee B \wedge C = A \vee A \wedge C \vee B \wedge A \vee B \wedge C = \\ &= A \wedge (1 \vee C) \vee B \wedge A \vee B \wedge C \end{aligned} .$$

(в высказываниях A и $A \wedge C$ вынесли за скобки A). Из $A \vee 1 = 1$ далее получим

$$A \vee A \wedge C \vee B \wedge A \vee B \wedge C = A \wedge (1 \vee C) \vee B \wedge A \vee B \wedge C = A \vee B \wedge A \vee B \wedge C .$$

Аналогично предыдущему так же получим

$$A \vee B \wedge A \vee B \wedge C = A \wedge (1 \vee B) \vee B \wedge C = A \vee B \wedge C .$$

Отметим, всякую логическую формулу можно преобразовать так, чтобы в ней не было отрицаний сложных высказываний (все отрицания будут применяться только к простым высказываниям).

5.3. Элементы теории графов

Граф состоит из множества вершин и множества рёбер. Каждое ребро соединяет ровно две вершины.

Обыкновенным графом называется пара $G = (V, E)$, где V – конечное множество, E – множество неупорядоченных пар различных элементов из V. Элементы множества V называются вершинами графа, элементы множества E – его ребрами.

Граф называется конечным, если множество V конечно. Здесь ограничимся рассмотрением только конечных графов.

Вершина (узел)— это точка, где сходятся (выходят) рёбра. Множество вершин графа G обозначается $V(G)$.

Число вершин графа $G=(V, E)$ называется его порядком.

Две вершины, соединяемые ребром, называются смежными, и каждая из этих вершин называется инцидентной данному ребру.

Инцидентность — понятие, используемое только в отношении ребра и вершины: если v_1, v_2 — вершины, а $e=(v_1, v_2)$ — соединяющее их ребро, то вершина v_1 и ребро e инцидентны, вершина v_2 и ребро e тоже инцидентны. Две вершины (или два ребра) инцидентными быть не могут. Если два различных ребра инцидентны одной и той же вершине, то они называются смежными. Смежность — понятие, используемое в отношении только двух рёбер либо только двух вершин: Два ребра, инцидентные одной вершине, называются смежными; две вершины, инцидентные одному ребру, также называются смежными. Количество рёбер графа G, инцидентных вершине v_1 называется степенью вершины и обозначается $d(v_1)$; $\delta(G)$ – минимальная степень вершины графа G, $\Delta(G)$ – максимальная. Число вершин, смежных с данной вершиной v, называются степенью этой вершины. Если степень вершины равна нулю, то такая вершина называется изолированной.

Граф можно представить графически: каждая вершина представляется точкой или окружностью, а каждое ребро – линией, соединяющей две его любые вершины. Так на рис.5.6 представлен граф $G=(V,E)$; $V=\{v_1,v_2,v_3,v_4\}$; $E=\{(v_1,v_2), (v_1,v_4), (v_2,v_3), (v_2,v_4), (v_3,v_4)\}$ – соответственно его вершины и ребра.

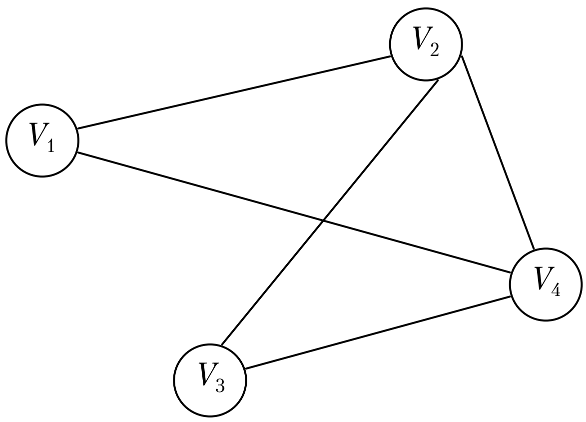


Рис. 15. Пример графа

Если в графе существуют несколько ребер, соединяющих одну и ту же пару вершин, то такие ребра называются кратными. При наличии кратных ребер граф называется мультиграф (рис. 16).

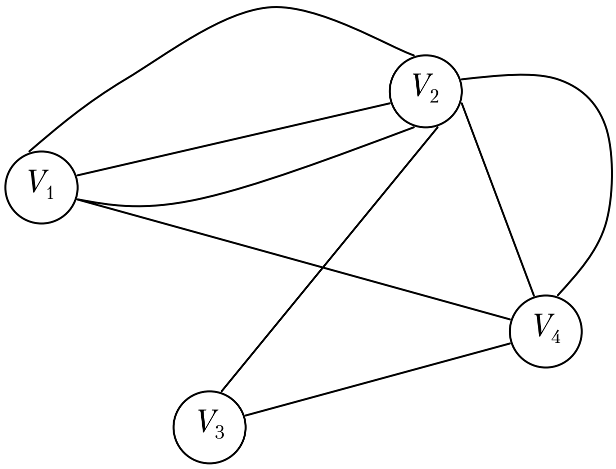


Рис. 16. Пример мультиграфа

Ребро, начало и конец которого находятся в одной и той же вершине называется петлей (соединяет вершину саму с собой). Граф с петлями называется псевдографом (рис. 17).

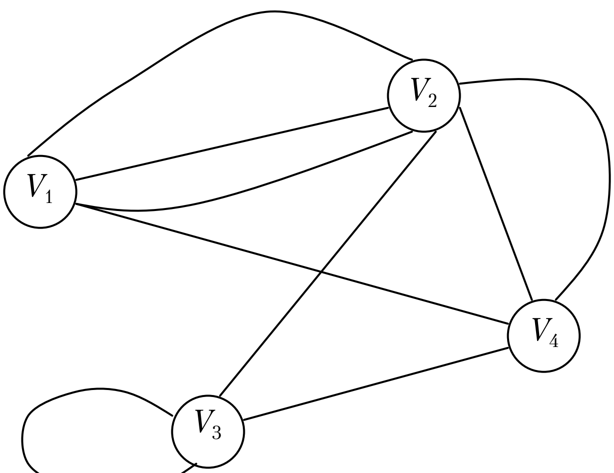


Рис. 17. Пример псевдографа

При отсутствии кратных рёбер и петель граф называется простым.

Пустой граф, не содержащий рёбер, называется нуль-графом.

Чередующаяся последовательность вершин и рёбер v_0, e_1, v_1, e_2, v_2, ..., e_n, v_n, в которой любые два соседних элемента инцидентны, называется маршрутом; при $v_0 = v_n$ – маршрут замкнут, при $v_0 \neq v_n$ – открыт.

Различают также ориентированные и смешанные графы.

Ориентированное ребро графа называется дугой. Для упорядоченной пары вершин (v_1, v_2), вершина v_1 — начало, а v_2 — конец дуги.

Можно сказать, что дуга $v_1 \to v_2$ ведет от вершины v_1 к вершине v_2, при этом вершина v_1 смежная с вершиной v_2. На рисунке дуги отмечаются стрелками, указывающими направление от начала к концу.

Ориентированным графом или орграфом называется пара множеств (V,E), где V — множество вершин (узлов), E — множество дуг (ориентированных рёбер). Пример орграфа на рис.18 ($G=(V,E)$, $V=\{v_1,v_2,v_3,v_4\}$, $E=\{(v_1,v_2), (v_1,v_4), (v_2,v_3), (v_2,v_4), (v_3,v_4)\}$).

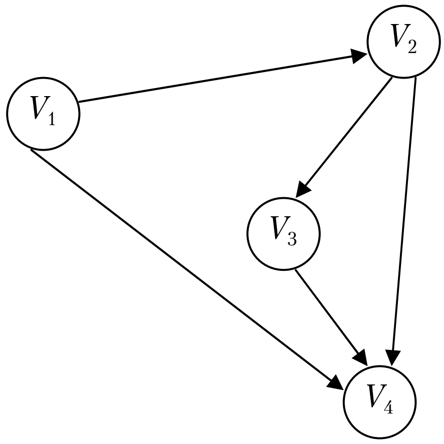


Рис. 18. Пример орграфа

Последовательность рёбер (в неориентированном графе) и/или дуг (в ориентированном графе), такая, что конец одной дуги (ребра) является началом другой дуги (ребра) называется путем (последовательность ребер $\{(v_0, v_1), (v_1, v_2), ..., (v_{n-1}, v_n)\}$ – путь, соединяющий v_0 и v_n). Число ребер в такой последовательности называется длиной пути. В частности, длина пути, соединяющего вершины 1 и 4 ($\pi=\{(1, 2), (2, 3), (3, 4)\}$) приведенного на рис. 19 графа равна 3.

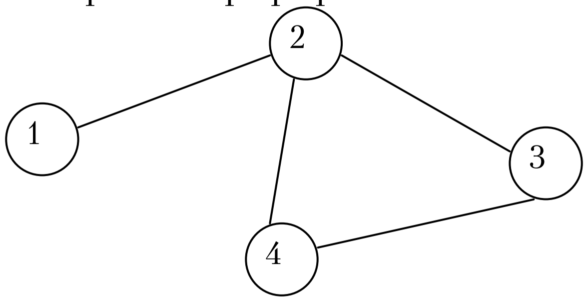


Рис. 19

Последовательность вершин $v_1, v_2, ..., v_n$, для которой существуют дуги $v_1 \to v_2, v_2 \to v_3, ..., v_{n-1} \to v_n$ называется путем в орграфе; начинается в вершине v_1, проходит через вершины $v_2, v_3, ..., v_{n-1}$, и заканчивается в вершине v_n. Замкнутый путь в орграфе называется контуром.

Путь, вершины которого, за исключением, быть может, первой и последней, различны, называется элементарным, простым (путь не проходит дважды через одну вершину). Если такой путь начинается и заканчивается в одной и той же вершине, то он называется циклом (элементарным циклом).

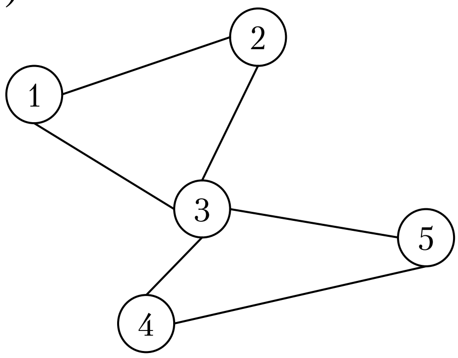


Рис. 20

На рисунке 20 представлены циклы:

1) (1, 2), (2, 3), (3, 1).

2) (5, 4), (4, 3), (3, 5).

3) (1, 3), (3, 4), (4, 5), (5, 3), (3, 2), (2, 1).

(1-й и 3-й циклы различаются только длиной пути)

Цепь в графе — маршрут, все рёбра которого различны. Если все вершины (а тем самым и рёбра) различны, то такая цепь называется простой (элементарной). В цепи v_0, e_1, v_1, e_2, v_2, ..., e_n, v_n вершины v_0 и v_n называются концами цепи. Цепь с концами u и v соединяет вершины u и v. Цепь, соединяющая вершины u и v обозначается $\langle u, v\rangle$.

Цикл называется простым, если он не проходит через одну и ту же вершину более одного раза (v_0, ..., $v_{n\text{-}1}$ – различные).

Граф называется связным, если для любых двух вершин существует в нем путь, соединяющий эти вершины (рис.21).

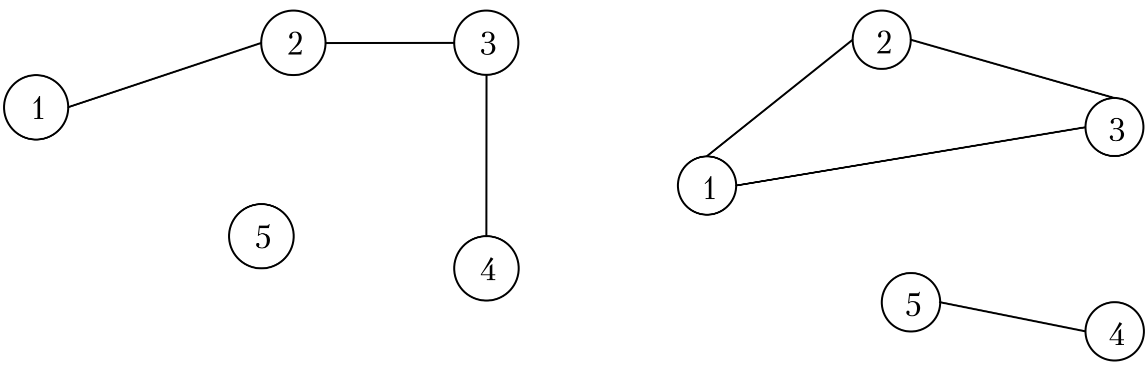


Рис. 21. Примеры несвязных графов

Справедливы утверждения:

1. Если в графе имеется путь, соединяющий вершины A и B, то в нем имеется простой путь, соединяющий эти вершины (например, в графе на рис.21 имеется путь (1, 2, 3, 4, 2, 5); путь (1, 2, 5) – простой).

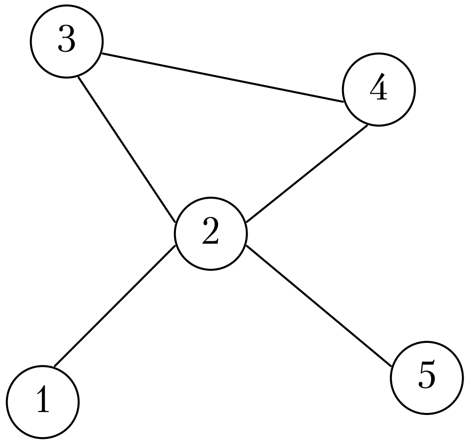


Рис.22

2. Если в графе имеется цикл, проходящий через ребро (A, B), в этом графе имеется и простой цикл, проходящий через ребро (A, B).

3. Если в графе степень каждой вершины не меньше 2, то в этом графе имеется цикл.

Длина кратчайшей цепи (в орграфе пути), соединяющей заданные вершины, называется расстоянием между вершинами (при отсутствии такой цепи расстояние принимается равным бесконечности).

Смешанные графы имеют как дуги, так и неориентированные рёбра (рис.23).

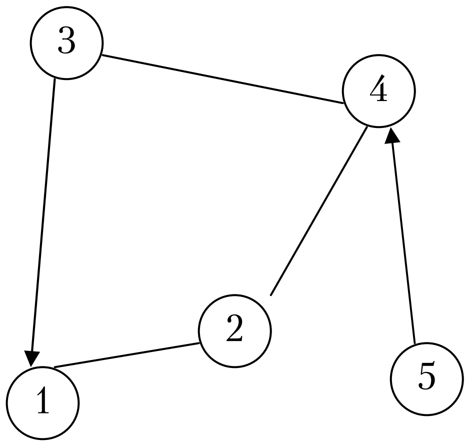


Рис. 23. Пример смешанного графа

Часто каждой дуге графа ставят в соответствие одно или несколько чисел. Такой граф называется взвешенным (или сетью).

Взвешенный граф — граф, каждому ребру которого поставлено в соответствие вещественное число (вес ребра).

Эйлеров граф — это граф, в котором существует цикл, содержащий все рёбра графа по одному разу (вершины могут повторяться).

Эйлерова цепь (или Эйлеров цикл) — это цепь (цикл), которая содержит все рёбра графа (вершины могут повторяться).

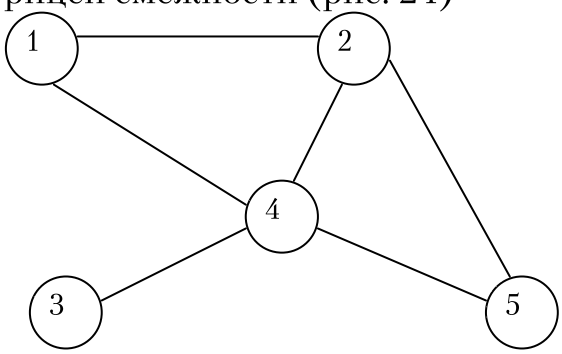
Существует три основных способа задания графа:

– задание списка вершин и ребер: $G = (V, E)$;

– графический способ;

– матричный.

Квадратная матрица $A=\|A_{ij}\|$, $A_{ij} = \begin{cases} 1, \text{если } v_i \text{ и } v_j \text{ смежные}, \\ 0, \text{если } v_i \text{ и } v_j \text{ несмежные} \end{cases}$; $i, j = \overline{1,n}$ для графа G=(V,E) с вершинами $V = \{1,2,\ldots,n\}$ называется матрицей смежности (рис. 24)



$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Рис. 5.24

Для обыкновенного графа на главной диагонали будут нули (отсутствие петель); матрица симметрична относительно главной диагонали (граф неориентированный).

Верно и обратное, каждой квадратной матрице порядка n, составленной из нулей и единиц и обладающей двумя указанными свойствами, соответствует обыкновенный граф с множеством вершин $\{1,2,\ldots,n\}$.

Матрица $I=\|I_{ij}\|$, $I_{ij} = \begin{cases} 1, \text{если } v_i \text{ инцидентно ребру } x_j, \\ 0, \text{если } v_i \text{ неинцидентно ребру } x_j \end{cases}$ $i = \overline{1,n},\ j = \overline{1,m}$

называется матрицей инцидентности.

Для ориентированного графа матрица инцидентности определяется несколько иначе: ее элемент I_{ij} равен 1, если вершина i является началом ребра j, он равен -1, если она является концом этого ребра, и он равен 0, если эта вершина и это ребро не инцидентны друг другу.

Теория графов широко используется при решении ряда практических задач:

– отыскание минимального по стоимости плана выполнения комплекса работ при заданной его продолжительности;

– организация снабжения;

– определение наиболее экономного строительства энергетических сетей, нефте- и газопроводов, железных и шоссейных дорог и др.;

– задачи об оптимальных назначениях;

При решении таких задач используется понятие сети.

Сеть – это конечный граф без циклов и петель, ориентированный в одном общем направлении от вершины I (исток) графа, к вершине S (сток) графа; в логистике сеть – система автомобильных дорог. Наибольшее число машин, проходящих через систему за единицу времени определяется как максимальная величина потока **Р**. Наибольшее число машин, проходящих через дугу, называется пропускной способностью дуги.

В качестве иллюстрации рассмотрим систему автомобильных дорог населенного пункта (рис.25; транспортная сеть с одним входом и одним выходом). Определим максимальный поток.

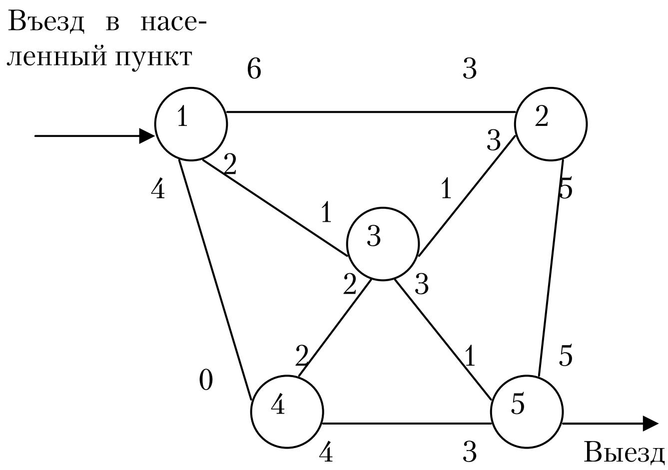


Рис. 25.Система автомобильных дорог населенного пункта

Сначала примем максимальный поток в системе равным нулю (Р=0)

1 шаг. Выберем путь от вершины 1 до вершины 5 (от въезда до выезда; например, **1-2-5)**. Наименьшее значение пропускной способности соединяющих эти вершины дуг равно 5: Р=min (6, 5)=5. Уменьшим на эту величину (на 5) пропускную способность потока от вершины 1 до вершины 5, а в обратном направлении (от вершины 5 к вершине 1) – увеличим на 5. Тогда общий поток станет равным Р=0+5=5. Система дорог преобразуется к виду, приведенному на рис.26, а:

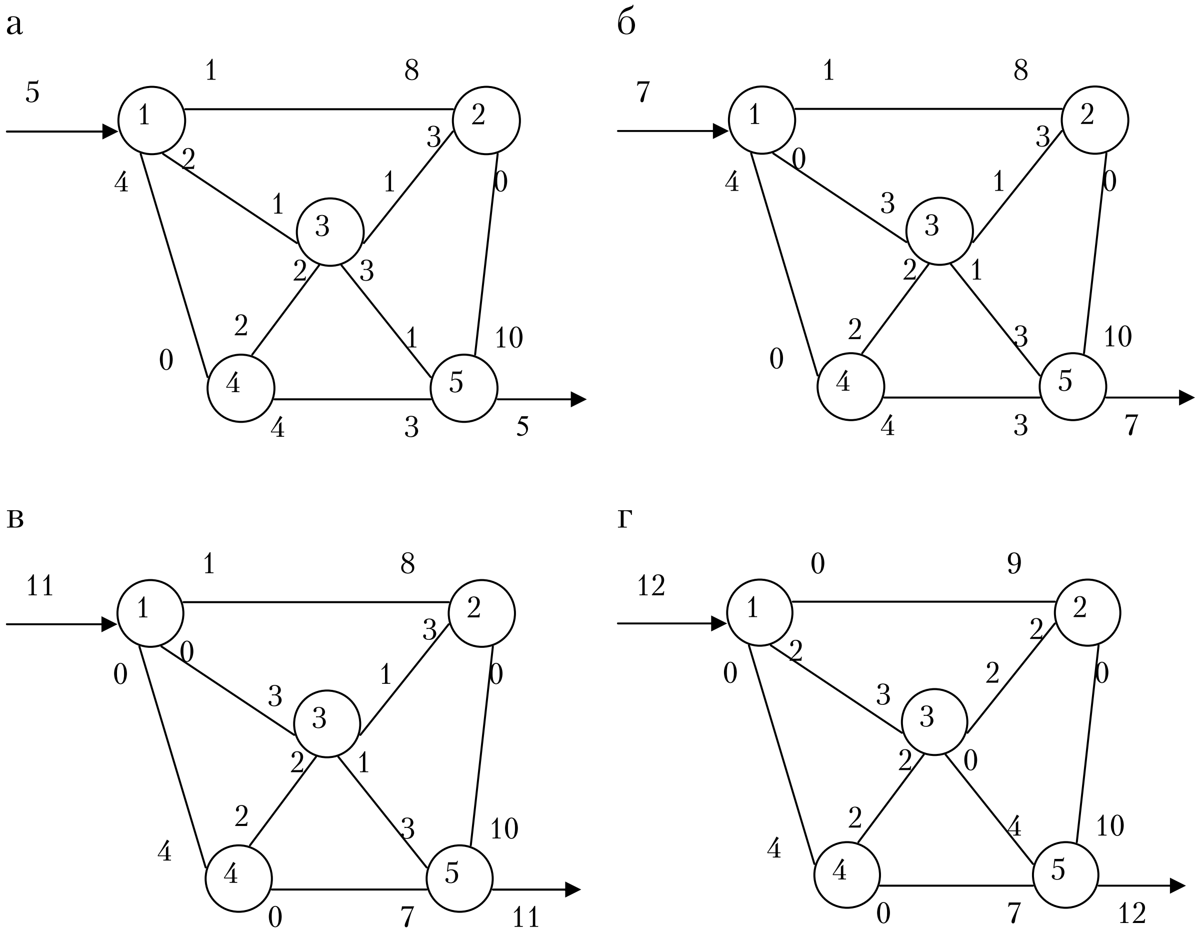


Рис. 26. Пошаговые преобразования графов:
а – первый шаг; б – второй; в – третий; г – четвертый шаг

2 шаг. Выберем другой путь от вершины 1 до вершины 5, например, ***1-3-5***. Наименьшее значение пропускной способности соединяющих эти вершины дуг P=min (2, 3)=2. Пропускную способность потока от 1 к 3 и от 3 к 5 уменьшим на 2, а в обратном направлении – увеличим на 2. Общий поток будет P=2+5=7. Система дорог преобразуется к виду, приведенному на рис.26,б:

3 шаг. Выберем новый путь от вершины 1 до вершины 5: ***1-4-5***. Наименьшее значение пропускной способности соединяющих эти вершины дуг равно 4: P=min (4, 4)=4. Пропускную способность потока от 1 к 4 и от 4 к 5 уменьшим на 4, а в обратном направлении – увеличим на 4. Тогда общий поток P=4+7=11. Система дорог преобразуется к виду, приведенному на рис.26,в.

4 шаг. Выберем новый путь ***1-2-3-5*** от вершины 1 до вершины 5. В этом случае наименьшее значение пропускной способности P=min (1, 3, 1)=1. Уменьшим пропускную способность потока от 1 к 2, от 2 к 3 и от 3 к 5 на 1, а в обратном направлении – увеличиваем на 1. Тогда общий поток станет равным P=11+1=12. Система дорог преобразуется к виду, приведенному на рис.26,г. Как видим, из вершины 1 до вершины 5 нет путей, на которых минимальное значение пропускной способности было бы большим нуля. Таким образом, максимальный поток через данную транспортную сеть равен P=12.

Заметим, можно определить как величину, так и направление потока на каждой дуге (конечная модель потоков, рис. 27). Величина потока (пропускная способность дуги) от 1 вершины до вершины 2 первоначально была равна 6 (рис.25), после преобразований – 0. Разность между первоначальной и конечной пропускной способностью дуги равна 6-0=6; т.е.величина потока на дуге 1-2 равна 6.

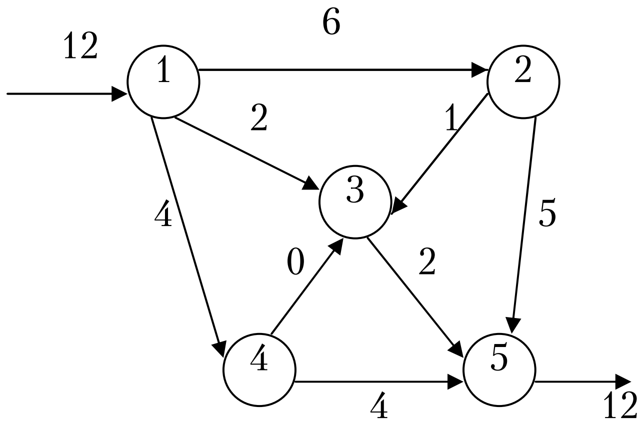


Рис. 5.18 Конечная модель потоков

Варианты тестовых заданий по модулю

Вариант 1

1. Укажите верную таблицу истинности для конъюнкции

1)

A	B	$A \cap B$
0	0	0
1	0	0
0	1	0
1	1	1

2)

A	B	$A \cap B$
0	0	0
1	0	1
0	1	1
1	1	0

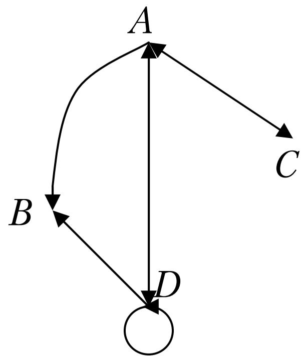
3)

A	B	$A \cap B$
0	0	0
1	0	1
0	1	1
1	1	1

4)

A	B	$A \cap B$
0	0	1
1	0	0
0	1	0
1	1	1

2. Матрица смежности для графа имеет вид:



1) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$; 2) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$;

3) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$; 4) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

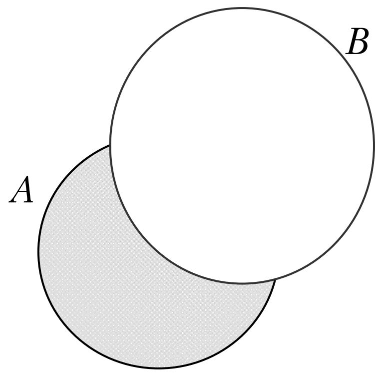
3. Пусть ***A*** – высказывание «Коля выучил все билеты», ***B*** – высказывание «Коля успешно сдал экзамен». Тогда высказывание «Коля выучил все билеты и успешно сдал экзамен» на языке формул логики имеет вид:

1) $A \cap B$; 2) $A \cup B$; 3) $\overline{A} \cup B$; 4) $A \to B$.

4. Какое из следующих предложений является высказыванием:
1) «Москва – столица нашей родины»;
2) «Фиолетовый карандаш»;
3) $\sqrt{7236}$;
4) $2x$-$37y$+$128z$.

5. Выберите из трех сложных высказываний только истинные:
А) 7+4=12 и 2*2=4;
Б) 7-7=0 или Париж – главный город России;
В) Если 4 – нечетное число, то 12 делится на 5
1) А и Б; 2) Б; 3) А; 4) Б и В.

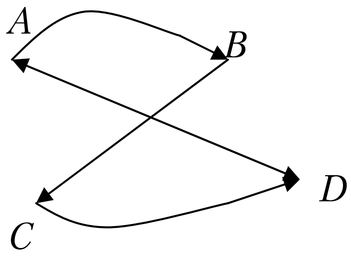
6. Операцией над множествами *A* и *B*, результат которой выделен на рисунке, является...



1) $A \cup \overline{B}$;
2) $A \setminus B$;
3) $B \setminus A$;
4) $A \cap B$.

Вариант 2

1. Матрица смежности для графа имеет вид:



1) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$; 2) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$;

3) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$; 4) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

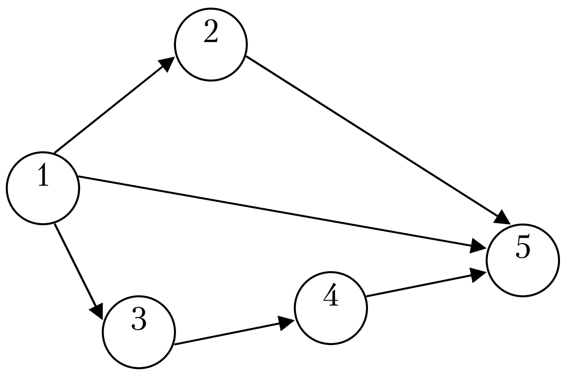
2. Пусть высказывание A – «$\sqrt[3]{125}=15$», высказывание B – «36 делится на 13». Тогда из высказываний

I) $\overline{A} \to B$; II) $A \vee B$; III) $A \to \overline{B}$; IV) $A \leftrightarrow \overline{B}$

являются истинными...

1) II и III; 2) II и IV; 3) II; 4) I, III и IV.

3. Укажите полный путь орграфа:



1) 1-3-5;
2) 1-2-5;
3) 2-3-5;
4) 1-5.

4. Пусть $\boldsymbol{A}$ – высказывание «Роман идет в кино», $\boldsymbol{B}$ – высказывание «Сергей готовится к экзаменам». Тогда высказывание «Роман идет в кино, или Сергей готовится к экзаменам» на языке формул логики имеет вид:

1) $A \cap B$; 2) $A \cup B$; 3) $\overline{A} \cup B$; 4) $A \to B$.

5. Какое из следующих предложений является высказыванием:

1) «Пенза – столица нашей родины»;
2) «Двигатель исправен?»;
3) $\sqrt{7236}$;
4) $5x$-$37y$+$14xy$.

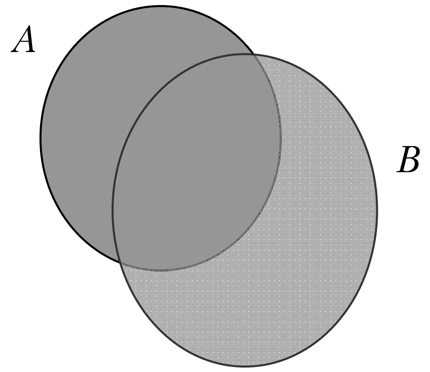
6. Операцией над множествами A и B, результат которой выделен на рисунке, является...

1) $A\cup\overline{B}$;

2). $A\cup B$;

3) $A\cap\overline{B}$;

4) $A\cap B$.



Вариант 3

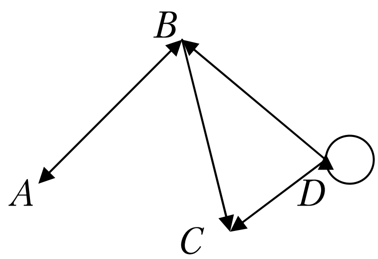
1. Пусть $\boldsymbol{A}$ – высказывание «Горит зеленый сигнал светофора», $\boldsymbol{B}$ – высказывание «Движение разрешено». Тогда высказывание «Горит зеленый сигнал светофора, и движение разрешено» на языке формул логики имеет вид:

1). $A\cap B$ 2). $A\cup B$ 3). $\overline{A}\cup B$ 4). $A\rightarrow B$

2. Матрица смежности для графа имеет вид:

1) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$; 2) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$;

3) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$; 4) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.



3. Какое из следующих предложений является высказыванием:

1) «Сена – река в России»;

2) «Пойдемте в школу»;

3) «Сколько времени?»;

4) $2x$-$37y$+$128z$.

4. Укажите верную таблицу истинности для импликации:

1)

A	B	$A \to B$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

2)

A	B	$A \to B$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

3)

A	B	$A \to B$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

4)

A	B	$A \to B$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

5. Выберите из трех сложных высказываний только ложные:

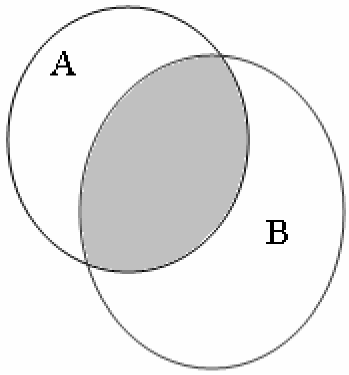
А) $\sqrt{169} = 13$ или $\pi < 3$;

Б) 13-4=9 и 2*2=5;

В) Если 4 – нечетное число, то 12 делится на 5.

1) А и Б; 2) А; 3) Б; 4) Б и В.

6. Операцией над множествами A и B, результат которой выделен на рисунке, является...



1) $A \cup \overline{B}$;
2) $A \cup B$;
3) $A \cap \overline{B}$;
4) $A \cap B$;

Вариант 4

1. Укажите верную таблицу истинности для конъюнкции

1)

A	B	$A \wedge B$
0	0	0
1	0	0
0	1	0
1	1	1

2)

A	B	$A \wedge B$
0	0	0
1	0	1
0	1	1
1	1	0

3)

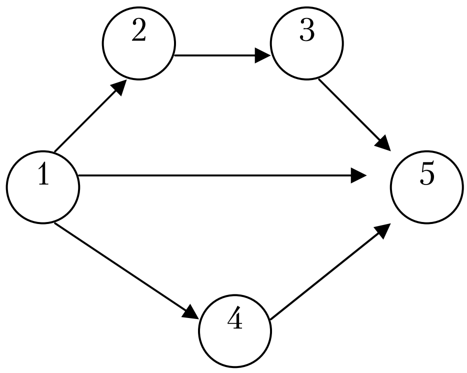
A	B	$A \wedge B$
0	0	0
1	0	1
0	1	1
1	1	1

4)

A	B	$A \wedge B$
0	0	1
1	0	0
0	1	0
1	1	1

2. Число $\sqrt{327}$ является:
1) рациональным;
2) целым;
3) натуральным;
4) иррациональным.

3. Укажите полный путь графа:
1) 1-3-5;
2) 1-2-5;
3) 2-3-5;
4) 1-5.



4. Какое из следующих предложений является высказыванием:
1) «Рига – столица Латвии»;
2) «Аккуратный пешеход»;
3) $\sqrt{7236}$.
4) $5x$-$3y$=z.

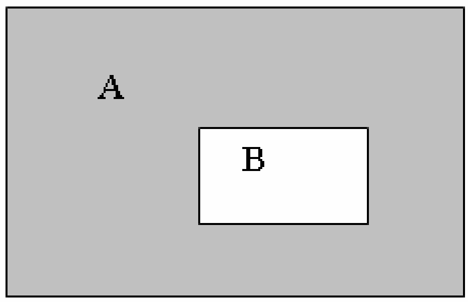
5. Пусть высказывание A – «3 – корень уравнения $x^2 - 9 = 0$«, высказывание B – «26 делится на 13». Тогда из высказываний

I) $A \wedge \overline{B}$; II) $A \vee B$; III) $B \leftrightarrow A$; IV) $A \to \overline{B}$.

являются истинными...

1) II и III; 2) II и IV; 3) II; 4) I, III и IV.

6. Операцией над множествами A и B, результат которой выделен на рисунке, является...
1) $A \cup \overline{B}$;
2) $A \setminus B$;
3) $A \setminus \overline{B}$;
4) $A \cap B$.



Вариант 5

1. Выберите из трех сложных высказываний только истинные:

А) 23 делится на 11 тогда и только тогда, когда 23 – простое число;

Б) $12^2 = 145$ или Москва – столица России;

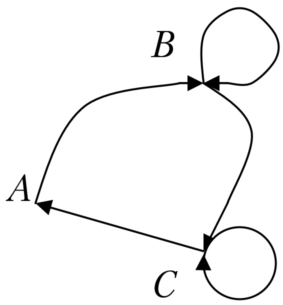
В) Если 4 – четное число, то 12 делится на 5.

1) А и Б; 2) Б; 3) А; 4) Б и В.

2. Число $-\sqrt[3]{1125}$ является элементом множества:

1) рациональных чисел;
2) целых чисел;
3) натуральных чисел;
4) действительных чисел.

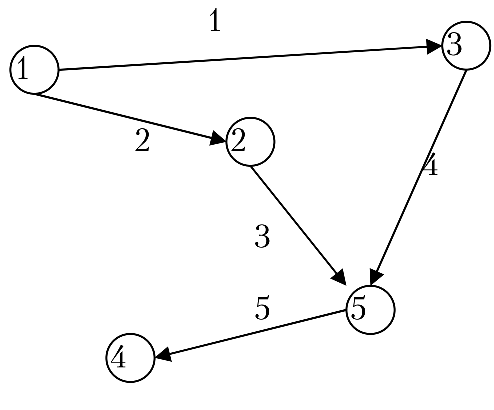
3. Матрица смежности для графа имеет вид:



1) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$; 2) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$;

3) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; 4) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

4. Матрица инцидентности орграфа имеет вид



1) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$;

2) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$;

3) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

5. Таблица истинности эквивалентности имеет вид

1)

A	B	$A \leftrightarrow B$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	0

2)

A	B	$A \leftrightarrow B$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

B, результат которой выделен на

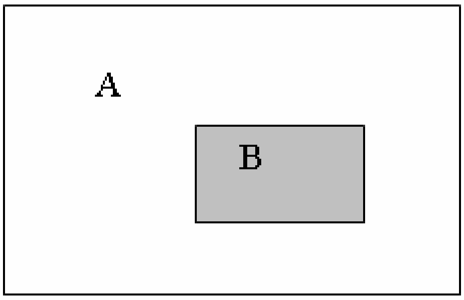
3).

A	B	$A \leftrightarrow B$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

4)

A	B	$A \leftrightarrow B$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

6. Операцией над множествами A и B, результат которой выделен на рисунке, является...



1) $A \cup \overline{B}$;
2) $A \cup B$;
3) $A \cap \overline{B}$;
4) $A \cap B$.

Вариант 6

1. Укажите верную таблицу истинности для дизъюнкции

1)

A	B	$A \bigcup B$
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	1

2)

A	B	$A \bigcup B$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

3)

A	B	$A \cup B$
0	0	0
0	1	0
1	0	1
1	1	1

4)

A	B	$A \cup B$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

2. Пусть высказывание A – «15 делится на 5», высказывание B – «25 делится на 13». Тогда из высказываний

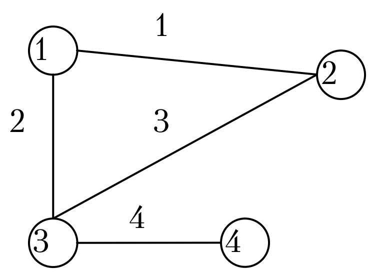
I) $A \wedge B$; II) $A \vee B$; III) $B \rightarrow A$; IV) $A \rightarrow \overline{B}$

являются истинными...

1) II и III; 2) II и IV; 3) II; 4) I, III и IV.

3. Матрица инцидентности графа имеет вид

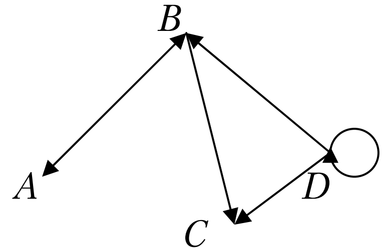
1) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; 2) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$;



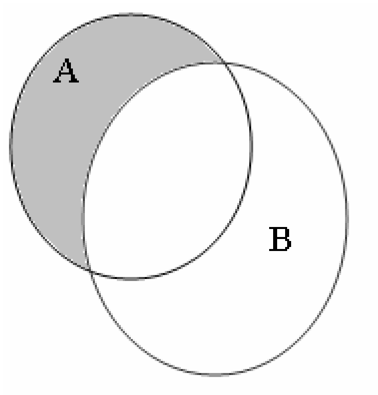
3) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

4. Какое из следующих предложений является высказыванием:
1) «Москва – столица нашей родины»;
2) «Закат над Сурой»4
3) $\sqrt{7236}$;
4) $2x$-$37y$+$128z$.

5. Граф G, представленный на рисунке является...
1) мультиграфом;
2) псевдографом;
3) орграфом;
4) смешанным графом.



6. Операцией над множествами A и B, результат которой выделен на рисунке, является...



1) $A \cup B$;

2) $A \setminus B$;

3) $B \setminus A$;

4) $A \cap B$.

Вариант 7

1. Выберите из трех сложных высказываний только ложные:

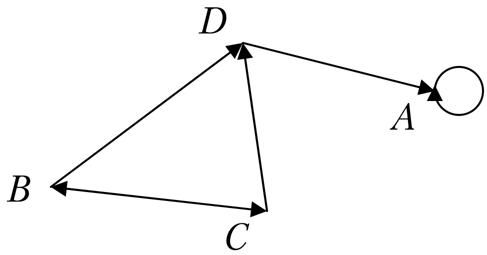
А) Если 18 делится на 6, то $5^3 = 225$;

Б) Пенза – столица России и 2*2=5;

В) Если 13 – нечетное число, то 8 делится на 2

1) А и Б; 2) А; 3) Б; 4) Б и В.

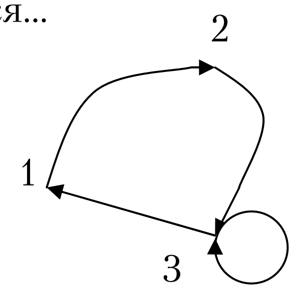
2. Матрица смежности для графа имеет вид:



1) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$; 2) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$;

3) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$; 4) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

3. Списком дуг ориентированного графа является...



1) $\{1, 2, 3\}$;

2) $\{(1, 2), (2,3), (3,1)\}$;

3) $\{(1, 2), (2,3), (3,1), (3,3)\}$;

4) $\{(1, 2), (2,1), (2,3), (3,1), (3,3)\}$.

4. Какое из следующих предложений является высказыванием:
1) «2*4=8»;
2) «Высшее образование»;
3) $\sqrt{36}$;
4) 21-37y+128z.

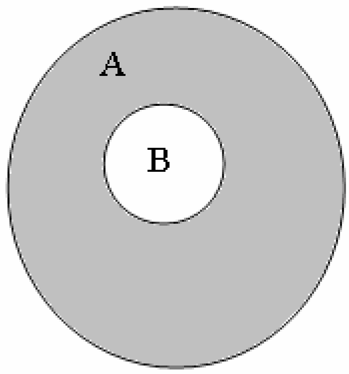
5. Пусть высказывание A – «$\sqrt[3]{36}=6$«, высказывание B – «39 делится на 13». Тогда из высказываний

I) $\overline{A}\to B$; II) $A\vee B$; III) $A\to\overline{B}$; IV) $A\leftrightarrow\overline{B}$

являются истинными...

1) II и III; 2) II и IV; 3) II; 4) I, II, III и IV.

6. Операцией над множествами A и B, результат которой выделен на рисунке, является...
1) $A\cup\overline{B}$;
2) A/B;
3) $A/\overline{B}$;
4) $A\cap B$.



Вариант 8

1. Укажите верную таблицу истинности для конъюнкции

1)

A	B	$A\wedge B$
0	0	0
1	0	0
0	1	0
1	1	1

2)

A	B	$A\wedge B$
0	0	0
1	0	1
0	1	1
1	1	0

3)

A	B	$A\wedge B$
0	0	0
1	0	1
0	1	1
1	1	1

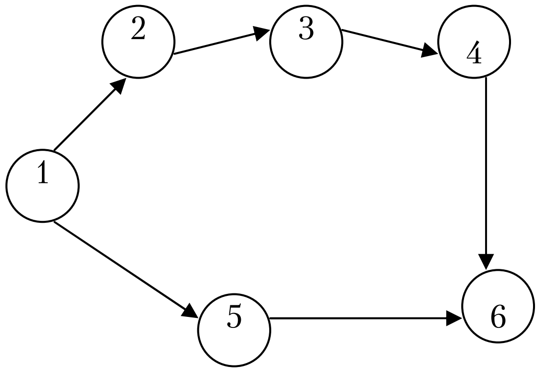
4)

A	B	$A\wedge B$
0	0	1
1	0	0
0	1	0
1	1	1

2. Пусть $\boldsymbol{A}$ – высказывание «Опять идет дождь», $\boldsymbol{B}$ – высказывание «Всё кажется серым». Тогда высказывание «Опять идет дождь, и всё кажется серым» на языке формул логики имеет вид:

1) $A\wedge B$; 2) $A\vee B$; 3) $\overline{A}\vee B$; 4) $A\to B$.

3. Для ориентированного графа, изображенного на рисунке, полный путь может иметь вид:



1) 1-2-3-4;
2) 1-5-6;
3) 1-6;
4) 1-5-6.

4. Какое из следующих предложений является высказыванием:
1) «МГУ – один из крупнейших вузов России»;
2) «Замок зажигания»;
3) $\sqrt{7236}$;
4) «Число 5 – корень уравнения».

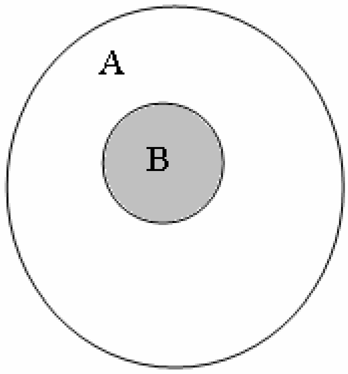
5. Пусть высказывание A – «26 делится на 13», высказывание B – «5 – корень уравнения $x^2-9=0$». Тогда из высказываний

I) $A \wedge \overline{B}$; II) $A \vee B$; III) $B \leftrightarrow A$; IV) $A \rightarrow \overline{B}$

являются истинными...

1) II и III; 2) II и IV; 3) I; 4) I, II и IV.

6. Операцией над множествами A и B, результат которой выделен на рисунке, является...



1) $A \cup \overline{B}$;
2) A / B;
3) $A / \overline{B}$;
4) $A \cap B$.

Вариант 9

1. Какое из следующих предложений является высказыванием:
1) «Двигатель внутреннего сгорания»;
2) «125 делится на 11»;
3) $x^2-9=0$;
4) $x+7y+z$.

2. Выберите из трех сложных высказываний только ложные:

А) $\sqrt{144}=12$ или $\sin\pi>2$;

Б) 13-4=9 и 2*2=5;

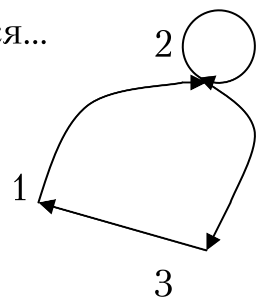
В) Если 4 – нечетное число, то 12 делится на 5

1) А и В; 2) А; 3) Б; 4) Б и В.

3. Число полных путей в ориентированном графе, представленном матрицей смежности $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ равно...

1) 1; 2) 2; 3) 3; 4) 4.

4. Списком дуг ориентированного графа является...



1) $\{1, 2, 3\}$;

2) $\{(1, 2), (2,3), (3,1)\}$;

3) $\{(1, 2), (2,3), (3,1), (3,3)\}$;

4) $\{(1, 2), (2,2), (2,3), (3,1)\}$.

5. Пусть высказывание A – «$\sqrt[3]{121}=11$», высказывание B – «25 делится на 15». Тогда из высказываний

I) $\overline{A}\to B$; II) $A\vee B$; III) $A\to\overline{B}$; IV) $A\leftrightarrow\overline{B}$

являются истинными...

1) II и III; 2) II и IV; 3) II; 4) I, III и IV.

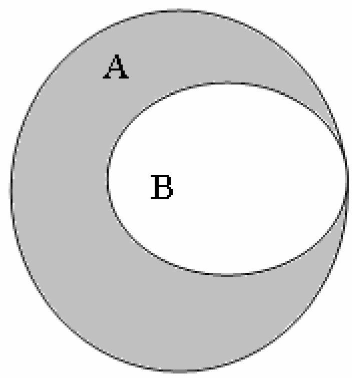
6. Операцией над множествами A и B, результат которой выделен на рисунке, является...

1) $A\cup\overline{B}$;

2) A/B;

3) $A/\overline{B}$;

4) $A\cap B$.



Вариант 10

1. Какое из следующих предложений является высказыванием:

1) «Равносторонний треугольник»;

2) «Число 3 – корень уравнения $x^2 - 4x + 3 = 0$»;

3) $x^2 - 16 = 0$;

4) $2x+7y+z$.

2. Выберите из трех сложных высказываний только ложные:

А) $\sqrt{625} = 15$ или $\sin \pi = 0$;

Б) 23-4=19 и $15 \cdot 4 = 50$;

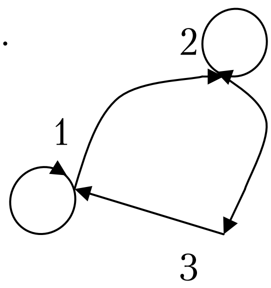
В) Если 12 делится на 5, то 4 – нечетное число

1) А и В; 2) А; 3) Б; 4) Б и В.

3. Число полных путей в ориентированном графе, представленном матрицей смежности $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ равно...

1) 1; 2) 2; 3) 3; 4) 4.

4. Списком дуг ориентированного графа является...



1) $\{1, 2, 3\}$;

2) $\{(1, 2), (2,3), (3,1)\}$;

3) $\{(1,1), (1, 2), (2,3), (3,1), (3,3)\}$;

4) $\{(1, 2), (2,2), (2,3), (3,1), (1,1)\}$.

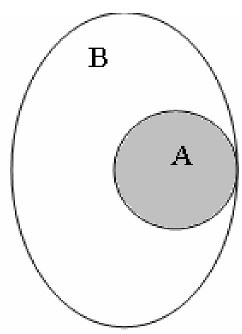
5. Пусть высказывание A – «$\cos 30° = \frac{1}{2}$», высказывание B – «25 делится на 15». Тогда из высказываний

I) $\overline{A} \to B$; II) $A \vee B$; III) $A \to \overline{B}$; IV) $A \leftrightarrow \overline{B}$

являются истинными...

1) II и III; 2) II и IV; 3) I и II; 4) I, III и IV.

6. Операцией над множествами A и B, результат которой выделен на рисунке, является...



1) $A \cup \overline{B}$;

2) A / B;

3) $A / \overline{B}$;

4) $A \cap B$.

Решения задач примерного варианта

Задача 1.

Какое из следующих предложений является высказыванием?

1) «Квадрат – частный случай ромба»;

2) «Число 10 – корень уравнения $x^2 - 5x + 12 = 0$»;

3) $x^2 - 3x = 0$;

4) $8x+4y+11z$.

Решение.

Как известно, высказывание – это утверждение, о котором можно говорить истинно оно или ложно. Первое повествовательное предложение истинно, значит, оно является высказыванием. Второе предложение – ложно, следовательно, также является высказыванием. Про истинность или ложность третьего и четвертого утверждений рассуждать не имеет смысла, значит они высказываниями не являются.

Ответ: 1) и 2).

Задача 2.

1. Выберите из трех сложных высказываний только истинные:

А) 45 делится на 15 тогда и только тогда, когда 121 делится на 11;

Б) $2^5 = 64$ или Москва – столица России;

В) Если 4 – четное число, то 12 делится на 5.

1) А и Б; 2) Б; 3) А; 4) Б и В.

Решение.

Высказывание А представляет собой эквивалентность двух простых высказываний: «45 делится на 15» и «121 делится на 11». Эквивалентность двух выражений истинна только тогда, когда оба высказывания одновременно истинны или одновременно ложны. Оба высказывания истинны, значит и сложное высказывание А – истинно.

Высказывание Б представляет собой дизъюнкцию двух простых высказываний: «$2^5 = 64$« и «Москва – столица России». Дизъюнкция двух высказываний ложна только тогда, когда ложны оба входящих в неё высказывания. Первое из простых высказываний – ложно, а второе – истинно, следовательно, их дизъюнкция – истинна.

Высказывание В представляет собой импликацию двух простых высказываний: «4 – четное число» и «12 делится на 5». Импликация ложна только в том случае, если условие истинно, а следствие ложно. Первое из простых высказываний (условие) – истинно, а второе (следствие) – ложно. Значит, высказывание В – ложно.

Ответ: 1) А и Б.

Задача 3.

Пусть высказывание A – «$\sin 60^\circ = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$», высказывание B – «Лондон – главный город Великобритании». Тогда из высказываний

I) $A \to B$; II) $A \wedge B$; III) $A \to \overline{B}$; IV) $A \leftrightarrow \overline{B}$

являются истинными...

1) II и III; 2) II и IV; 3) I и II; 4) I, III и IV.

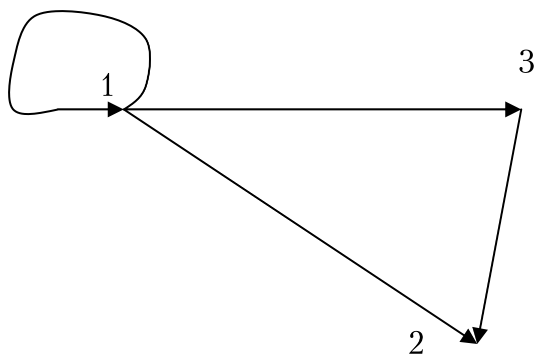
Решение.

Высказывания A и B – истинны. Тогда высказывание $A \to B$ (импликация) тоже истинно; высказывание $A \wedge B$ (конъюнкция) – истинно. Высказывание $\overline{B}$ (инверсия) – ложно, а значит сложное высказывание $A \to \overline{B}$ – ложно (из истины следует ложь). Сложное высказывание $A \leftrightarrow \overline{B}$ – ложно, поскольку высказывания имеют разные значения истинности.

Ответ: 3) I и II.

Задача 4.

Списком дуг ориентированного графа является...



1) $\{1, 1, 2, 3\}$;

2) $\{(1, 2), (2,3), (3,1)\}$;

3) $\{(1,1), (1, 2), (2,3), (3,1), (3,3)\}$;

4) $\{(1, 1), (1,2), (1,3), (3,2)\}$.

Решение.

Дуга – это ориентированное ребро. Дуга (1, 2) свидетельствует о том, что в орграфе есть путь от вершины 1 (начало) до вершины 2 (конец). В данном графе есть дуги, ведущие от вершины 1 к вершине 2 –

дуга (1, 2), от вершины 1 к вершине 3 – дуга (1, 3), от вершины 3 к вершине 2 – дуга (3, 2), а также дуга, соединяющая вершину 1 саму с собой – дуга (1, 1). Значит список дуг орграфа имеет вид: $\{(1,1),(1,2),(1,3),(3,2)\}$.

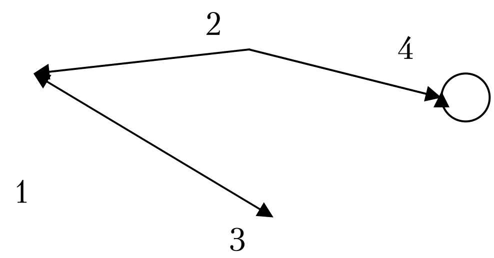
Ответ: 4) $\{(1,1),(1,2),(1,3),(3,2)\}$.

Задача 5.

Матрица смежности для графа имеет вид:

1) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$; 2) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$;

3) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$; 4) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.



Решение:

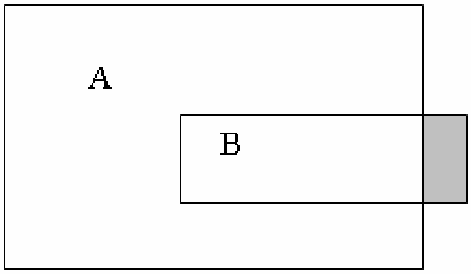
В матрице смежности A орграфа элемент $a_{ij} = 1$, если есть дуга, которая ведет от вершины i к вершине j, и равен нулю в противном случае. Граф имеет четыре вершины, значит его матрица смежности содержит четыре строки и четыре столбца. Вершина 1 является началом только одной дуги: от 1 к 3 , значит в первой строке матрицы только один элемент $a_{13} = 1$, а остальные равны нулю. Аналогично заполняются остальные три строки матрицы. Матрица смежности графа имеет вид:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ответ: 2) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Задача 6.

Операцией над множествами A и B, результат которой выделен на рисунке, является...



1) $A \cup \overline{B}$; 2) $B \backslash A$;

3) $A / \overline{B}$; 4) $A \cap B$.

Решение:

На рисунке выделены элементы множества B, которые не являются элементами множества A. По определению данному условию удовлетворяет разность множеств $B \backslash A$.

Ответ: 2) $B \backslash A$.

Модуль 6. ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА

6.1. Элементы теории вероятностей

Случайные события

Под *событием* понимается всякий факт, который в результате опыта может произойти или не произойти (например, зеленый, красный, желтый цвета светофора к моменту прибытия пешехода к перекрестку; выигрыш, проигрыш или ничья при игре в шахматы; поражение цели и промах при выстреле).

События A, B, C, ... называются *несовместными* (несовместимыми), если наступление одного из них исключает возможность наступления другого; *совместными* – если в данных условиях появление одного из них не исключает появление другого при том же испытании.

События A и $\overline{A}$ называются *противоположными*, если в условиях испытания они являются несовместными, являясь единственными исходами испытания (например, поражение мишени при выстреле – событие A, промах – $\overline{A}$).

Событие называется *достоверным*, если оно не может не произойти в условиях данного испытания (например, из партии стандартных деталей будет взята стандартная деталь); событие, которое не может произойти ни при одном испытании, называется *невозможным* (например, извлечение черного шара из ящика, в котором все шары белые).

Промежуточное положение между достоверным и невозможным событиями занимает *случайное событие*, которое в результате опыта может произойти, а может и не произойти.

События называют *единственно возможными*, если появление в результате испытания одного и только одного из них является достоверным событием.

События называют *равновозможными*, если имеются основания считать, что ни одно из этих событий не является более возможным, чем другие (например, появление того или иного числа очков на брошенной игральной кости; предполагается, что игральная кость изготовлена из однородного материала; имеет форму правильного многогранника).

Исход называется *благоприятствующим* событию A, если при этом исходе наступает событие A (например, если событие A состоит в появлении четного числа при бросании игральной кости, то благоприятствующими A исходами будут выпадения чисел 2, 4, 6).

Согласно классическому определению *вероятность события A равна отношению числа благоприятствующих этому событию исходов к общему числу всех несовместных, единственно возможных и равновозможных элементарных исходов испытания*:

$$P(A)=\frac{m}{n},$$

где $P(A)$ – вероятность события A;

m – число случаев, благоприятствующих событию A;

n – число всех возможных элементарных (единственно возможных, несовместных и равновозможных) случаев.

Приведенную формулу следует рассматривать *не как определение вероятности события, а как метод вычисления вероятностей* для испытаний, сводящихся к схеме случаев (используется при непосредственном подсчете вероятностей и пригодна тогда и только тогда, когда имеется симметрия возможных исходов).

Вероятность события – численная мера степени объективной возможности наступления события.

Вероятность достоверного события принимается равной единице, в невозможного – нулю. В общем случае *вероятность случайного события* есть положительное *число, заключенное между* 0 и 1, то есть $0 \le P(A) \le 1$.

Статистической вероятностью события A называется *относительная частота* (частость) появления этого события в n произведенных испытаниях, то есть

$$W(A)=\frac{M}{n},$$

где $W(A)$ – относительная частота (частость) события A;

M – число появлений события A;

n – общее число испытаний.

Заметим, в классическом определении вероятности не требуется, чтобы испытания проводились в действительности, а для определения относительной частоты – требуется (вероятность вычисляют до опыта, а относительную частоту – после опыта). Если опытным путем установлена *относительная частота*, то полученное число можно принять *за приближенное значение вероятности*.

Элементы комбинаторики

Комбинации из n элементов, которые отличаются только порядком расположения этих элементов, называются *перестановками* из n элементов. Число перестановок из n объектов равно

$$P_n = 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n = n!$$

(n – целое положительное число, $0!=1$).

Например, пусть для лечения заболевания применяются 4 лекарственных препарата и предполагается, что последовательность применения лекарств оказывает существенное влияние на результат лечения. Здесь число возможных последовательностей назначения лекарств:

$$P_4 = 4! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24.$$

Комбинации из n элементов по m, которые отличаются либо составом элементов, либо порядком их расположения (либо и тем, и другим) называются *размещениями* из n элементов по m и вычисляются по формуле:

$$A_n^m = \frac{n!}{(n-m)!}.$$

$$A_9^3 = \frac{9!}{(9\text{-}3)!} = \frac{9!}{6!} = 9 \cdot 8 \cdot 7 = 504.$$

Например, если расписание одного дня состоит из 5 уроков по различным дисциплинам, то число вариантов расписания при выборе из 11 дисциплин равно:

$$A_{11}^5 = \frac{11!}{(11\text{-}5)!} = \frac{11!}{6!} = 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 = 55440.$$

Комбинации из n объектов по m, которые отличаются только составом элементов, называются *сочетаниями* из n объектов по m и находятся по формуле:

$$C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}.$$

Например, число различных стартовых пятерок, образованных тренером из12 баскетболистов, равно:

$$C_{12}^5 = \frac{12!}{7! \cdot 5!} = \frac{8 \cdot 9 \cdot 10 \cdot 11 \cdot 12}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} = 8 \cdot 9 \cdot 11 = 792.$$

Основные теоремы теории вероятностей

Сумма нескольких событий – *это событие, состоящее в появлении хотя бы одного из них*.В частности, *сумма двух событий* A и B – это событие C, состоящее в выполнении события A или B, или обоих вместе (то есть выполнение хотя бы одного из событий A и B).

Теорема сложения вероятностей. Вероятность появления одного из двух несовместных событий (то есть суммы), безразлично какого, равна сумме вероятностей этих событий

$$P(A+B)=P(A)+P(B).$$

Теорема справедлива и для любого конечного числа несовместных событий: вероятность появления одного из нескольких попарно несовместных событий, безразлично какого, равна сумме вероятностей этих событий.

Несколько событий образуют *полную группу*, если они являются единственно возможными и несовместными исходами испытания (в результате испытания обязательно должно произойти одно и только одно из этих событий). Например, при бросании игральной кост и полная группа события состоит из событий $A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6$ (событие A_1 – появилось одно очко, A_2 –2 очка, ..., A_6 –6 очков).

Если $A_1, A_2, \ldots, A_n$ – *полная группа событий*, то

$$\sum_{i=1}^{n} P(A_i)=1.$$

Частным случаем событий, образующих полную группу, являются противоположные события A и $\overline{A}$. Откуда:

$$P(A)+P(\overline{A})=1.$$

Событие A называется *независимым* от B, если вероятность события A не зависит от того, произошло событие B или нет.

Событие A называется *зависимым* от B, если вероятность события A зависит от того, произошло событие B или нет.

Произведение двух событий A и B – это событие C, состоящее в совместном выполнении A и B (например, если A – появление туза, B – появление бубновой масти, то $C=AB$ – появление бубнового туза).

Произведение нескольких событий – это событие, состоящее в совместном их появлении.

Если при вычислении вероятности события не налагается никаких условий, то такая вероятность называется *безусловной*. Если налагаются дополнительные условия, то такая вероятность называется *условной*.

Условная вероятность события A – это вероятность A, вычисленная при условии, что имело место B; обозначается $P_B(A)$ или $P(A|B)$.

Теорема умножения вероятностей. Вероятность произведения двух событий равна произведению одного из них на условную вероятность другого, вычисленную при условии, что первое имело место:

$$P(AB) = P(A)P_A(B).$$

Теорема умножения вероятностей обобщается на случай произвольного числа событий:

$$P(A_1A_2\cdots A_n) = P(A_1)P_{A_1}(A_2)P_{A_1A_2}(A_3)\cdots P_{A_1A_2\ldots A_{n-1}}(A_n),$$

то *есть вероятность совместного появления нескольких зависимых событий равна произведению вероятности одного из них на условные вероятности остальных, причем вероятность каждого последующего события вычисляется в предположении, что все предыдущие события уже появились.*

Если A не зависит от B, то B не зависит от A. Два события называются независимыми, если появление одного из них не меняет вероятности наступления другого.

Для независимых событий *теорема умножения* вероятностей двух событий имеет вид:

$$P(AB) = P(A)P_A(B) = P(A)P(B),$$

то есть вероятность произведения двух *независимых событий* равна произведению вероятностей этих событий.

Вероятность произведения нескольких независимых событий равна произведению вероятностей этих событий.

В общем случае*, вероятность появления хотя бы одного из событий* $A_1, A_2, \ldots, A_n$, независимых в совокупности, равна разности между единицей и произведением вероятностей противоположных событий.

$$P(A) = 1 - q_1q_2\ldots q_n,$$

где $q_i = P(\bar{A}_i)$, $i = \overline{1,n}$.

Если события $A_1, A_2, \ldots, A_n$ имеют одинаковую вероятность, то вероятность появления хотя бы одного события равна

$$P(A) = 1 - q^n.$$

Вероятность появления только одного события. Вероятность появления каждого из независимых событий $A_1, A_2, \ldots, A_n$ равна $p_1, p_2, \ldots, p_n$. Вероятность наступления только первого события A_1 равносильно появлению события $B_1 = A_1 \cdot \overline{A}_2 \cdot \cdots \cdot \overline{A}_n$, только второго – $B_2 = \overline{A}_1 \cdot A_2 \cdot \cdots \cdot \overline{A}_n$, ..., только n-го – $B_n = \overline{A}_1 \cdot \overline{A}_2 \cdot \cdots \cdot A_n$.

$$P(B_1 + B_2 + \cdots + B_n) = P(B_1) + P(B_2) + \cdots + P(B_n) =$$

$$= P(A_1) \cdot P(\overline{A}_2) \cdot \cdots \cdot P(\overline{A}_n) + P(\overline{A}_1) \cdot P(A_2) \cdot \cdots \cdot P(\overline{A}_n) + \cdots +$$

$$+ P(\overline{A}_1) \cdot P(\overline{A}_2) \cdot \cdots \cdot P(A_n) =$$

$$= p_1 q_2 \cdots q_n + q_1 p_2 \cdots q_n + \cdots + q_1 q_2 \cdots p_n.$$

Для двух событий вероятность наступления только одного из них равна $p_1 q_2 + q_1 p_2$.

Пример. На стройплощадке работают два транспортера. Вероятность безотказной работы в течение месяца каждого из них равна 0,9. Транспортеры работают при подаче электроэнергии независимо. Найти вероятность того, что в течение месяца будут работать: а) хотя бы один транспортер; б) оба транспортера; в) ни один транспортер; г) только один транспортер.

Пусть событие A – безотказная работа первого транспортера, событие B – безотказная работа второго транспортера. События A и B совместны, так как работа одного не исключает работы второго и наоборот.

По определению сумма событий $A + B$ есть событие, состоящее в том, что работает хотя бы один транспортер. Имеем

$$P(A+B) = P(A) + P(B) - P(AB) = 0,9 + 0,9 - 0,9 \cdot 0,9 = 0,99.$$

Событие AB состоит в том, что работают оба транспортера:

$$P(AB) = P(A)P(B) = 0,9 \cdot 0,9 = 0,81.$$

Событие C (ни один транспортер не будет работать) состоит в совместном наступлении событий $\overline{A}$ и $\overline{B}$ (событие $\overline{A}\,\overline{B}$):

$$P(\overline{A}\,\overline{B}) = P(\overline{A}) \cdot P(\overline{B}) = 0,1 \cdot 0,1 = 0,01.$$

Событие D (будет работать только один транспортер) означает, что наступит или событие $A\overline{B}$, или событие $\overline{A}B$. События $A\overline{B}$ и $\overline{A}B$ несовместны, появление события $A\overline{B}$ исключает появление события $\overline{A}B$. Здесь имеет место событие $A\overline{B} + \overline{A}B$:

$$P(D) = P(A\overline{B}) + P(\overline{A}B) = P(A)P(\overline{B}) + P(\overline{A})P(B) =$$

$$= 0,9 \cdot 0,1 + 0,1 \cdot 0,9 = 0,18.$$

События называются *совместными*, если появление одного не исключает появление другого в одном и том же испытании.

Теорема сложения вероятностей совместных событий. Вероятность появления хотя бы одного из двух совместных событий равна сумме вероятностей этих событий без вероятности их совместного появления:

$$P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB).$$

Пример. На 30 одинаковых жетонах написаны номера чисел от 1 до 30. Жетоны помещены в пакет и тщательно перемешаны. Какова вероятность вынуть жетон с номером, кратным 2 или 3?

Обозначим события: A – извлечен жетон с четным номером, B – извлечен жетон с номером, кратным 3, AB – извлечен жетон с четным номером, кратным 3. Событию A благоприятствуют 15 элементарных исходов, событию B – 10 исходов, событию AB – 5 исходов. Найдем вероятность события $A + B$. Поскольку A и B – совместные события, то

$$P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB)=\frac{15}{30}+\frac{10}{30}-\frac{5}{30}=\frac{20}{30}=\frac{2}{3}.$$

Формула полной вероятности. Вероятность события A, которое может наступить лишь при условии появления одного из несовместных событий (гипотез) $H_1, H_2, \ldots, H_n$, равна сумме произведений вероятностей каждого из H_i на соответствующую условную вероятность события A, то есть

$$P(A)=\sum_{i=1}^{n}P(H_i)\cdot P\left(A|H_i\right).$$

Формула позволяет определить вероятность события A, которая может наступить при условии появления одного из несовместных событий $H_1, H_2, \ldots, H_n$, образующих полную группу несовместных событий.

Часто возникает и другая задача: определить вероятность события H_i при условии, что появилось событие A. Ответ дает приводимая ниже теорема гипотез, представляемая в виде *формулы Бейеса:*

$$P_A(H_i)=\frac{P(H_i)P_{H_i}(A)}{\sum\limits_{i=1}^{n}P(H_i)P_{H_i}(A)},\quad i=\overline{1,n}.$$

Пример. На склад поступает продукция трех фабрик, причем продукция первой фабрики составляет 20 %, второй – 46 % и третьей – 34 %. Известно, что средний процент нестандартных изделий для первой фабрики равен 3 %, для второй – 2 %, для третьей – 1 %. Найти вероятность того, что наудачу взятое нестандартное изделие произведено на первой фабрике.

Решение. Обозначим через A событие, состоящее в том, что взято нестандартное изделие, через H_1, H_2, H_3 – гипотезы, состоящие в том, что взято изделие, изготовленное соответственно на первой, на второй, на третьей фабрике.

Из условия задачи следует, что

$$P(H_1)=0{,}20;\quad P(H_2)=0{,}46;\quad P(H_3)=0{,}34;$$

$$P_{H_1}(A)=0{,}03;\ P_{H_2}(A)=0{,}02;\ P_{H_3}(A)=0{,}01.$$

Тогда *полная вероятность* будет равна

$$P(A)=P(H_1)P_{H_1}(A)+P(H_2)P_{H_2}(A)+P(H_3)P_{H_3}(A)=$$

$$=0{,}20\cdot 0{,}03+0{,}46\cdot 0{,}02+0{,}34\cdot 0{,}01=0{,}0186.$$

Имеем:

$$P_A(H_1)=\frac{P(H_1)P_{H_1}(A)}{P(A)}=\frac{0{,}20\cdot 0.03}{0{,}0186}\approx 0{,}322$$

Замечание. Аналогично находятся вероятности:

$$P_A(H_2)=\frac{P(H_2)P_{H_2}(A)}{P(A)}=\frac{0{,}46\cdot 0.02}{0{,}0186}\approx 0{,}495;$$

$$P_A(H_3)=\frac{P(H_3)P_{H_3}(A)}{P(A)}=\frac{0{,}34\cdot 0.01}{0{,}0186}\approx 0{,}183.$$

Заметим, $P_A(H_1)+P_A(H_2)+P_A(H_3)=0{,}322+0{,}495+0{,}183=1$, что подтверждает правильность вычислений.

Повторение испытаний. Формула Бернулли

Испытания называются независимыми относительно события A, если вероятность события A при каждом повторении испытания не зависит от исходов других испытаний (например, несколько последовательных бросаний монеты; несколько выстрелов, если каждый раз перед выстрелами производится прицеливание). Будем считать, что испытания происходят в одинаковых условиях и вероятность появления события А в каждом испытании одна и та же.

Вероятность появления события A в n независимых опытах ровно k раз определяется *формулой Бернулли*

$$P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} p^k q^{n-k}.$$

Например, если вероятность брака при изготовлении детали на автоматическом станке равна 0,2, то вероятность появления трех бракованных деталей среди 5 отобранных будет:

$$P_5(3) = C_5^3 0{,}2^3 0{,}8^2 = 0{,}0512.$$

Число k_0, которому при заданном n соответствует максимальная вероятность $P_n(k_0)$, называется *наивероятнейшим числом* появления события A и удовлетворяет двойному неравенству:

$$np - q \le k_0 \le np + p.$$

При большом числе повторных испытаний n ($n > 20$) непосредственное вычисление вероятности $P_n(k)$ появления события A по формуле Бернулли вызывает затруднение, так как формула требует выполнения действия над громадными числами. Поэтому для вычисления $P_n(k)$ при больших n применяют приближенные формулы, называемые асимптотическими и определяемые локальной и интегральной теоремами Муавра–Лапласа и теоремой Пуассона.

Локальная теорема Муавра–Лапласа. Если вероятность появления события A в каждом из n независимых испытаний равна одной и той же постоянной p ($0 < p < 1$), то вероятность $P_n(k)$ того, что во всех испытаниях событие A появится ровно k раз, приближенно выражается формулой

$$P_n(k) \approx \frac{1}{\sqrt{npq}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{x^2}{2}},$$

где $q = 1 - p$; $x = \dfrac{k - np}{\sqrt{npq}}$.

Введя функцию $\varphi(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$ (эта функция табулирована), можно записать:

$$P_n(k) \approx \frac{1}{\sqrt{npq}} \cdot \varphi(x).$$

Для упрощения расчетов, связанных с применением формулы $P_n(k)=\frac{1}{\sqrt{npq}}\cdot\varphi(x)$, составлена таблица значений функции $\varphi(x)$. При пользовании таблицей целесообразно использовать свойства функции $\varphi(x)$:

- функция $\varphi(x)$ – четная; $\varphi(-x)=\varphi(x)$;
- функция $\varphi(x)$ – монотонно убывающая при положительных значениях x, причем при $x\to\infty$ $\varphi(x)\to 0$; значениям $x>3{,}99$ соответствуют ничтожно малые значения $\varphi(x)$, что показывает на практическую невозможность события.

Чем больше n и чем ближе p к 0,5, асимптотическая формула дает более близкие к точному значению результаты

Интегральная теорема Муавра–Лапласа. Если вероятность появления события A в каждом из n независимых испытаний постоянна и равна p $(0<p<1)$, то вероятность $P_n(k_1,k_2)$ того, что событие A появится в n испытаниях от k_1 до k_2 раз, приближенно определяется формулой

$$P_n(k_1,k_2)\approx\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{x_1}^{x_2}e^{-\frac{x^2}{2}}dx,$$

где $x_1=\frac{k_1-np}{\sqrt{npq}}$; $x_2=\frac{k_2-np}{\sqrt{npq}}$.

Или

$$P_n(k_1,k_2)=\Phi(x_2)-\Phi(x_1),$$

где $\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}}dt$ – функция Лапласа.

Так как неопределенный интеграл $\int e^{-\frac{t^2}{2}}dt$ не выражается через элементарные функции, то при решении задач, требующих применения интегральной теоремы Лапласа, пользуются специальными таблицами. Целесообразно использование свойств функции $\Phi(x)$:

- функция $\Phi(x)$ – нечетная; $\Phi(-x)=-\Phi(x)$;

- функция $\Phi(x)$ – монотонно возрастающая (рис. 3) (следует из $\Phi'(x)=\varphi(x)>0$, причем $\Phi(x)\to 0{,}5$; при $x\to\infty$ (практически уже при $x>3$), с точностью до тысячных, можно принять $\Phi(x)$=0,500), а $\Phi(0)$=0).

Приближенными формулами Лапласа на практике пользуются при $npq \geq 20$. При $npq \leq 20$ формулы приводят к большим погрешностям.

Следствие из интегральной теоремы Муавра–Лапласа. Вероятность того, что при достаточно большом числе n независимых испытаний вероятность появления события A равна p (p_1), модуль отклонения частоты появления события от вероятности события не превышает положительного числа ε, приближенно равна удвоенному значению функции Лапласа:

$$P\left(\left|\frac{m}{n}-p\right|\leq\varepsilon\right)\approx 2\Phi\left(\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}\right).$$

Теорема (формула Пуассона). Если вероятность p наступления события A в каждом испытании стремится к нулю (p_1) при неограниченном увеличении числа n испытаний ($n\to\infty$), причем произведение np стремится к постоянному числу λ $(np\to\lambda)$, то вероятность $P_n(k)$ того, что событие A появится k раз в n независимых испытаниях удовлетворяет предельному равенству

$$\lim_{n\to\infty} P_n(k)=P_k(\lambda)=\frac{\lambda^k\cdot e^{-\lambda}}{k!}.$$

Формула Пуассона применяется, когда n является достаточно большим, а p – достаточно малым.

Случайные величины

Случайной величиной называется величина, которая в результате опыта может принять одно и только одно из возможных значений, наперед неизвестное и зависящее от случайных причин, которые заранее не могут быть учтены (например, число отказавших элементов в приборе, состоящем из 5 элементов – случайная величина; 0, 1, 2, 3, 4, 5 – ее возможные значения). Здесь случайная величина – *дискретная*, которая может принимать отдельные, изолированные значения с определенными вероятностями. *Непрерывной* называют случайную величину, которая может принимать все значения из некоторого конечного или бесконечного промежутка.

В результате опыта дискретная случайная величина X примет одно из возможных значений: произойдет одно событие из полной группы несовместных событий. Если вероятности этих событий соответственно равны

$$P(X = x_1) = p_1, P(X = x_2) = p_2, \ldots, P(X = x_n) = p_n,$$

то $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$ эта суммарная вероятность распределена между отдельными возможными значениями).

Законом распределения случайной величины называется всякое соответствие, устанавливающее связь между возможными значениями x_i и соответствующими им вероятностями p_i (говорят, что X подчиняется данному закону распределения). *Простейшей формой задания* этого *закона* является таблица, в которой перечислены в порядке возрастания все возможные значения случайной величины и соответствующие им вероятности, то есть таблица вида (ряд распределения дискретной случайной величины X):

X	x_1	x_2	...	x_n
p	p_1	p_2	...	p_n

Для наглядности закон распределения дискретной случайной величины изображают графически в прямоугольной декартовой системе: строят точки (x_i, p_i), которые последовательно соединяют отрезками прямых. Полученная ломаная называется *многоугольником* или *полигоном распределения вероятностей*.

Функцией распределения случайной величины X (или интегральной функцией распределения, или интегральным законом распределения) *называется функция* $F(x)$, определяющая для каждого значения x вероятность того, что случайная величина X примет значение, меньшее x, то есть

$$F(x) = P(X < x).$$

Геометрически $F(x)$ есть вероятность того, что случайная величина примет значение, лежащее левее точки x на числовой оси.

Свойства функции распределения:

1. Функция распределения случайной величины есть неотрицательная функция, заключенная между нулем и единицей.

2. Функция распределения случайной величины есть неубывающая функция на всей числовой оси, то есть $F(x_2) \geq F(x_1)$, если $x_2 > x_1$.

3. Если возможные значения случайной величины X принадлежат интервалу (a, b), то

$$F(x) = 0 \text{ при } x < a;$$

$$F(x) = 1 \text{ при } x > b.$$

4. *Если возможные значения случайной величины X принадлежат бесконечному интервалу $(-\infty, +\infty)$, то справедливы следующие предельные соотношения*:

$$\lim_{x \to -\infty} F(x) = 0; \quad \lim_{x \to \infty} F(x) = 1.$$

Функция распределения $F(x)$ для дискретной случайной величины X, которая может принимать значения $x_1, x_2, \ldots, x_n$ с соответствующими вероятностями, имеет вид

$$F(x) = \sum_{x_k < x} P(X = x_k),$$

где $x_k < x$ означает, что суммируются вероятности тех значений, которые меньше x.

Вероятность попадания случайной величины в интервал $[x_1, x_2[$ *(включая x_1)* равна приращению ее функции распределения на этом интервале, то есть:

$$P(x_1 \leq X < x_2) = F(x_2) - F(x_1).$$

Так, если случайная величина X задана функцией распределения:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x < -1; \\ \dfrac{1}{3}x + \dfrac{1}{3} & \text{при } -1 \leq x \leq 2; \\ 1 & \text{при } x > 2. \end{cases}$$

то вероятность того, что в результате испытания X примет значение, заключенное в интервале $(0,1)$, будет:

$$P(0 \leq X < 1) = F(1) - F(0) = \frac{2}{3} - \frac{1}{3} = \frac{1}{3}.$$

Для *непрерывной* случайной величины интегральная функция $F(x)$ непрерывна в любой точке и дифференцируема всюду кроме, быть может, отдельных точек.

Теорема. Вероятность любого отдельного значения непрерывной случайной величины равна нулю.

Следствие. Если X – непрерывная случайная величина, то вероятность попадания случайной величины в интервал (x_1, x_2) не зависит от того, является этот интервал открытым или закрытым, то есть

$$P(x_1 < X < x_2) = P(x_1 \le X < x_2) = P(x_1 < X \le x_2) = P(x_1 \le X \le x_2).$$

Плотностью вероятности (*плотностью распределения*) $f(x)$ непрерывной случайной величины X называется производная ее функции распределения $f(x) = F'(x)$; характеризует плотность, с которой распределяются значения случайной величины в данной точке.

Плотность вероятности $f(x)$, как и функция распределения $F(x)$, является одной из форм закона распределения, но в отличие от функции распределения *она существует только для непрерывных случайных величин.*

Плотность вероятности называют *дифференциальной функцией* или дифференциальным законом распределения.

Основные свойства плотности распределения

1. Плотность вероятности – неотрицательная функция, то есть $f(x) \ge 0$ (так как $F(x)$ – неубывающая функция).

2. Вероятность попадания непрерывной случайной величины в интервал $[a, b]$ равна определенному интегралу от ее плотности вероятности в пределах от a до b, то есть

$$P(a \le X \le b) = \int_a^b f(x)dx.$$

3. Функция распределения непрерывной случайной величины может быть выражена через плотность вероятности по формуле

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)dx.$$

4. Несобственный интеграл в бесконечных пределах от плотности непрерывной случайной величины равен единице:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 1.$$

В частности, если все возможные значения случайной величины принадлежат интервалу (a,b), то $\int_{a}^{b} f(x)\,dx = 1$.

Кривая, изображающая плотность распределения случайной величины, называется *кривой распределения*.

Пример. Плотность распределения случайной величины X задана функцией $f(x) = \dfrac{a}{1+x^2}$. Найти значение параметра а.

Так как $f(x) \ge 0$, то будем иметь $a \ge 0$. Плотность распределения должна также удовлетворять условию $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 1$, то есть должно выполняться равенство $\int_{-\infty}^{\infty} \dfrac{a}{1+x^2}dx = a\int_{-\infty}^{\infty} \dfrac{dx}{1+x^2} = 1$, откуда $a = \dfrac{1}{\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^2}}$.

Вычислим несобственный интеграл:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \int_{-\infty}^{0} \frac{dx}{1+x^2} + \int_{0}^{\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{a\to-\infty}\int_{a}^{0} \frac{dx}{1+x^2} + \lim_{b\to\infty}\int_{0}^{b} \frac{dx}{1+x^2} =$$

$$= \lim_{a\to-\infty} \operatorname{arctg} x \,\Big|_{a}^{0} + \lim_{b\to\infty} \operatorname{arctg} x \,\Big|_{0}^{b} =$$

$$\operatorname{arctg}0 - \operatorname{arctg}(-\infty) + \operatorname{arctg}(\infty) - \operatorname{arctg}0 = 0 - \left(-\frac{\pi}{2}\right) + \frac{\pi}{2} - 0 = \pi.$$

Следовательно, $a = \dfrac{1}{\pi}$; плотность распределения примет вид $f(x) = \dfrac{1}{\pi\left(1+x^2\right)}$.

Пример. Случайная величина X задана функцией распределения

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad x \le 0; \\ \dfrac{1-\cos x}{2} & \text{при} \quad 0 < x \le \pi; \\ 1 & \text{при} \quad x > \pi. \end{cases}$$

Найти плотность распределения величины X. Вычислить вероятность того, что случайная величина X примет значения из интервала $\left(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}\right)$.

Плотность вероятности $f(x)$ и функция распределения $F(x)$ случайной величины X связаны соотношением $F'(x)=f(x)$. Следовательно,

$$f(x)=\begin{cases} 0 & \text{при} \quad x \le 0; \\ \frac{\sin x}{2} & \text{при} \quad 0 < x \le \pi; \\ 0 & \text{при} \quad x > \pi. \end{cases}$$

Искомая вероятность:

$$P\left(\frac{\pi}{3} < x < \frac{\pi}{2}\right) = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x\, dx}{2} = -\frac{1}{2}\cos x \Big|_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} = -\frac{1}{2}\left(\cos\frac{\pi}{2} - \cos\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{4}.$$

Числовые характеристики случайных величин

При решении многих практических вопросов отсутствует возможность полного описания случайной величины; часто неизвестен и закон распределения. Приходится ограничиваться меньшими сведениями (иногда даже выгоднее пользоваться некоторыми числами для интегрального (суммарного) описания случайной величины). Такие числа называются *числовыми характеристиками случайной величины.*

Математическое ожидание. Для *дискретной* случайной величины определяется как сумма произведений всех возможных значений случайной величины на вероятности этих значений:

$$M[X] = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i .$$

Оно характеризует среднее взвешенное значение случайной величины с учетом различных значений вероятностей возможных значений.

Математическое ожидание числа появлений события А при одном испытании совпадает с вероятностью этого события.

Математическое ожидание дискретной случайной величины X определяет координату центра группирования значений x_i, принимаемых X, и, следовательно, дает среднее значение случайной величины.

Для *непрерывной* случайной величины математическое ожидание определяется в виде:

$$M[X]=\int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx,$$

где $f(x)$ – плотность распределения.

Свойства математического ожидания

1. Возможные значения математического ожидания расположены слева и справа от математического ожидания:

$$a \le M[X] \le b,$$

где a – наименьшее;
b – наибольшее значения величины X.

2. Математическое ожидание постоянной величины C равно самой постоянной:

$$M[C]=C.$$

3. Постоянный множитель можно вынести за знак математического ожидания:

$$M[CX]=CM[X].$$

4. Математическое ожидание алгебраической суммы конечного числа случайных величин равно сумме их математических ожиданий:

$$M[X \pm Y \pm \cdots \pm Z]=M[X] \pm M[Y] \pm \cdots M[Z]$$

5. Математическое ожидание произведения конечного числа *независимых* случайных величин равно произведению их математических ожиданий:

$$M[X_1 \cdot X_2 \cdot \cdots \cdot X_n]=M[X_1] \cdot M[X_2] \cdots M[X_n].$$

6. Если все значения случайной величины увеличить (уменьшить) на постоянную C, то на эту же постоянную C увеличится (уменьшится) математическое ожидание этой случайной величины:

$$M[X \pm C]=M[X] \pm C.$$

7. Математическое ожидание отклонения случайной величины от ее математического ожидания равно нулю:

$$M\left[X-M[X]\right]=M\left[\overset{\circ}{X}\right]=0/$$

Случайная величина $\overset{\circ}{X} = X - M[X]$ называется центрированной; центрирование случайной величины равносильно переносу начала координат в точку, абсцисса которой равна математическому ожиданию $M[X] = a$.

Например, математическое ожидание случайной величины $Z = 7X - 2Y + 3$ при $M[X] = 3, M[Y] = 2$ определится в виде:

$$M[Z] = M[7X - 2Y + 3] = 7M[X] - 2M[Y] + 3 = 3 \cdot 7 - 2 \cdot 2 + 3 = 20.$$

Дисперсия случайной величины X определяется как математическое ожидание квадрата отклонения случайной величины от ее математического ожидания:

$$D[X] = M\left[\left(X - M[X]\right)^2\right] = M\left[\overset{\circ}{X}\right]^2.$$

Она позволяет оценить рассеяние возможных значений случайной величины относительно ее математического ожидания (центра распределения).

Если случайная величина X – *дискретная* с конечным числом значений, то

$$D[X] = \sum_{i=1}^{n} \left(x_i - a\right)^2 p_i.$$

Дисперсия *непрерывной* случайной величины X, все значения которой принадлежат отрезку $[\alpha, \beta]$, определяется в виде:

$$D[X] = \int_{\alpha}^{\beta} (x - a)^2 f(x) dx,$$

где $f(x)$ – плотность распределения вероятностей X.

Дисперсия непрерывной случайной величины X, все значения которой принадлежат отрезку $(-\infty, \infty)$, определяется в виде:

$$D[X] = \int_{-\infty}^{\infty} (x - a)^2 f(x) dx;$$

предполагается, что несобственный интеграл сходится абсолютно.

Дисперсия имеет размерность квадрата случайной величины, что не всегда удобно. Поэтому в качестве показателя рассеяния часто используют величину $\sigma[X]=\sqrt{D[X]}$, размерность которой уже совпадает с размерностью самой случайной величины; $\sigma[X]$ *называется средним квадратическим отклонением*, или стандартным отклонением случайной величины X (часто используются обозначения $D_x = D[X]$, $\sigma_x = \sigma[X]$).

Свойства дисперсии

1. Дисперсия случайной величины равна разности между математическим ожиданием квадрата случайной величины и квадратом ее математического ожидания:

$$D[X]=M\left[\left(X-M[X]\right)^2\right].$$

Для непрерывной случайной величины справедливо

$$D[X]=\int\limits_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)dx-\left(M[X]\right)^2.$$

Так как вычисление, основанное на определении дисперсии, относительно громоздкое, то для упрощения расчетов удобнее пользоваться этим свойством.

2. Дисперсия постоянной величины равна нулю:

$$D[C]=0.$$

3. Постоянный множитель можно вынести за знак дисперсии, возведя его при этом в квадрат:

$$D[CX]=C^2D[X].$$

4. Дисперсия суммы двух *независимых* случайных величин равна сумме их дисперсий:

$$D[X+Y]=D[X]+D[Y].$$

5. Дисперсия разности двух независимых случайных величин равна сумме дисперсий этих величин:

$$D[X-Y]=D[X]+D[Y].$$

Следствие 1. Дисперсия суммы нескольких *взаимно-независимых* случайных величин равна сумме дисперсий этих величин.

Следствие 2. Дисперсия суммы постоянной и случайной величины равна дисперсии случайной величины:

$$D[C+X]=D[X].$$

Хотя X – *случайная* величина, но ее числовые характеристики – величины *неслучайные, постоянные*.

Например, дисперсия случайной величины $Z=3X-2Y+1$ в предположении независимости случайных величин X и Y и при $D[X]=5$, $D[Y]=4$ равна

$$D[Z]=3^2D[X]+2^2D[Y]+D[1]=9\cdot 5+4\cdot 4+0=61.$$

Пример. Закон распределения *дискретной* случайной величины задан таблицей:

X	0	1	2	3	4
p	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{6}{16}$	$\frac{4}{16}$	$\frac{1}{16}$

Определить математическое ожидание $M[X]$, дисперсию $D[X]$ и среднее квадратическое отклонение $\sigma[X]$.

Имеем:

$$M[X]=0\cdot\frac{1}{16}+1\cdot\frac{4}{16}+2\cdot\frac{6}{16}+3\cdot\frac{4}{16}+4\cdot\frac{1}{16}=2,$$

$$D[X]=\left(0^2\cdot\frac{1}{16}+1^2\cdot\frac{4}{16}+2^2\cdot\frac{6}{16}+3^2\cdot\frac{4}{16}+4^2\frac{1}{16}\right)-2^2=1,$$

воспользовались свойством 1 дисперсии; (тот же результат для дисперсии получили бы и по определению:

$$D[X]=(0-2)^2\cdot\frac{1}{16}+(1-2)^2\frac{4}{16}+(2-2)^2\cdot\frac{6}{16}+(3-2)^2\cdot\frac{4}{16}+(4-2)^2\cdot\frac{1}{16}=1),$$

$$\sigma[X]=\sqrt{D[X]}=1.$$

Пример. Найти числовые характеристики $M[X]$, $D[X]$ и $\sigma[X]$ *непрерывной* случайной величины X, заданной плотностью распределения

$$f(x)=\begin{cases}0 & \text{при} \quad x\le 2;\\ 0{,}5 & \text{при} \quad 2<x\le 4;\\ 0 & \text{при} \quad x>4.\end{cases}$$

Имеем:

$$M[X]=\int_2^4 x\cdot 0{,}5\,dx=\frac{x^2}{4}\Big|_2^4=\frac{1}{4}(16-4)=3;$$

$$D[X]=\int_2^4 x^2\cdot 0{,}5\,dx-3^2=\frac{1}{2}\int_2^4 x^2\,dx-9=$$

$$=\frac{x^3}{6}\Big|_2^4-9=\frac{1}{6}(64-8)-9=\frac{1}{3});$$

или по определению:

$$D[X]=\int_2^4 (x-3)^2\cdot 0{,}5\,dx=\frac{1}{2}\int_2^4 \left(x^2-6x+9\right)dx=$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{x^3}{3}-3x^2+9x\right)\Big|_2^4=\frac{1}{3},$$

$$\sigma[X]=\sqrt{D[X]}=\sqrt{\frac{1}{3}}\approx 0{,}58.$$

Некоторые виды законов распределения случайной величины

Закон биномиального распределения вероятностей

Рассмотрим случайную величину X, определяющую число появлений события A в n независимых испытаниях, в предположении, что вероятность появления события A в каждом испытании постоянна и равна p. Очевидно, X – *дискретная* случайная величина и может принимать значения: $x_0=0$; $x_1=1$; ...; $x_n=n$.

Вероятность появления события A ровно k раз в n независимых испытаниях определяется по *формуле Бернулли*:

$$P(X=k)=P_n(k)=C_n^k p^k q^{n-k}=\frac{n!}{k!(n-k)!}p^k q^{n-k}.$$

С учетом этого получим ряд (закон) распределения:

X	n	$n-1$	...	k	...	0
p	p^n	$np^{n-1}q$	...	$C_n^k p^k q^{n-k}$	...	q^n

Такой *закон* распределения случайной величины X называется *биномиальным*; представляет собой закон распределения числа $X = k$ наступлений события A в n независимых испытаниях, в каждом из которых оно может произойти с одной и той же вероятностью p.

Для случайной величины, распределенной по биномиальному закону,

$$M[X] = np, \ D[X] = npq.$$

Закон распределения Пуассона

Дискретная случайная величина X имеет *закон распределения Пуассона*, если она принимает бесконечное, но *счетное* множество значений с вероятностями

$$P(X = k) = \frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda} \quad (k = 0, 1, 2, \ldots).$$

Его ряд распределения имеет вид:

X	0	1	2	3	...	k	...
p	$e^{-\lambda}$	$\frac{\lambda}{1!}e^{-\lambda}$	$\frac{\lambda^2}{2!}e^{-\lambda}$	$\frac{\lambda^3}{3!}e^{-\lambda}$	...	$\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$	...

Математическое ожидание и дисперсия случайной величины, распределенной по закону Пуассона, совпадают и равны параметру λ распределения:

$$M[x] = \lambda, \ D[X] = \lambda.$$

Геометрическое распределение

Дискретная случайная величина $X = k$ имеет геометрическое распределение, если она принимает значения 1, 2, ..., m ... (бесконечное, но *счетное* множество значений) с вероятностями

$$P(X = k) = pq^{k-1},$$

где $0 < p < 1$; $q = 1 - p$, $\ldots k = 1, 2, \ldots$

Ряд геометрического распределения случайной величины имеет вид:

x_i	1	2	3	...	k	...
p_i	p	pq	pq^2	...	pq^{k-1}	...

Случайная величина $X = k$, имеющая геометрическое распределение, представляет собой число k испытаний, проведенных по схеме Бернулли, с вероятностью p наступления события в каждом испытании до первого положительного исхода.

Математическое ожидание и дисперсия случайной величины X, имеющей геометрическое распределение с параметром p, равны:

$$M[X] = \frac{1}{p}, \quad D[X] = \frac{q}{p^2}.$$

Закон равномерной плотности (равномерного распределения вероятностей)

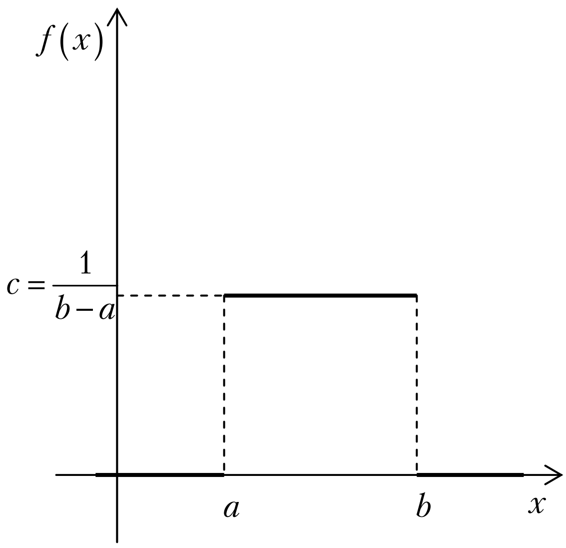
При равномерном распределении вероятностей на интервале, которому принадлежат все возможные значения *непрерывной* случайной величины X, дифференциальная функция (плотность распределения) имеет постоянное значение:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad x < a; \\ \dfrac{1}{b-a} & \text{при} \quad a \le x \le b; \\ 0 & \text{при} \quad x > b \end{cases}$$

при этом

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad x \le a; \\ \dfrac{x-a}{b-a} & \text{при} \quad a < x \le b; \\ 1 & \text{при} \quad x > b, \end{cases}$$

Их графики имеют вид



Кривая распределения $f(x)$ случайной величины X

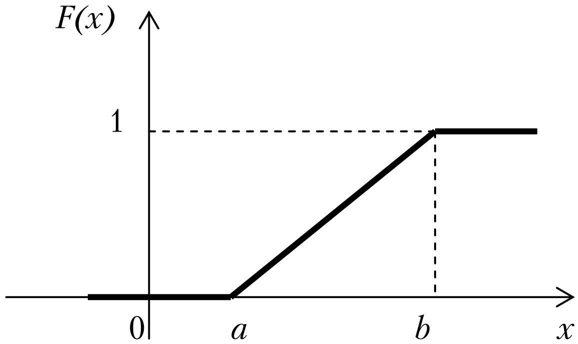


График функции распределения $F(x)$ случайной величины X

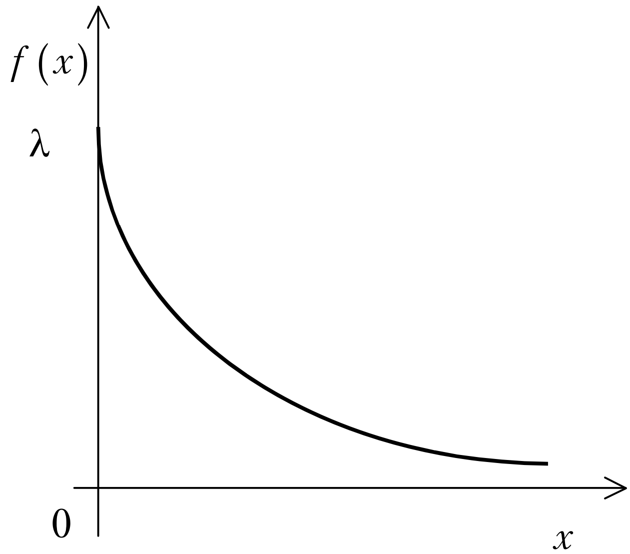
При этом распределении $M[X]=\frac{a+b}{2}$, $D[X]=\frac{(b-a)^2}{12}$.

Показательный (экспоненциальный) закон распределения

Показательным распределением называется распределение с плотностью вероятностей, определяемой функцией

$$f(x)=\begin{cases}0 & \text{при} \quad x<0;\\ \lambda e^{-\lambda x} & \text{при} \quad x\geq 0\,(\lambda>0).\end{cases}$$

Кривая распределения $f(x)$ имеет вид



Функция распределения случайной величины X, распределенной по показательному закону, есть

$$F(x)=\begin{cases}0 & \text{при} \quad x<0;\\ 1-e^{-\lambda x} & \text{при} \quad x\geq 0.\end{cases}$$

При таком распределении $M[X]=\frac{1}{\lambda}, D[X]=\frac{1}{\lambda^2}$, $\sigma[X]=\frac{1}{\lambda}$.

Закон нормального распределения вероятностей (Гаусса)

Нормальный закон распределения (закон Гаусса) играет исключительно важную роль в теории вероятностей и занимает среди других законов распределения особое положение. Это – наиболее часто встречающийся на практике закон распределения.

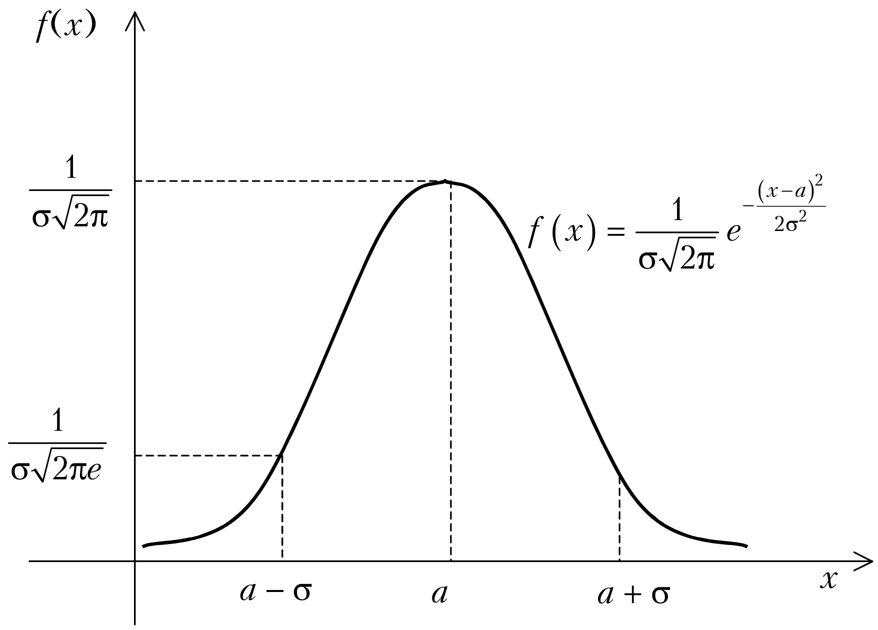
Главная особенность, выделяющая его среди других законов, состоит в том, что он является *предельным законом*, к которому приближаются другие законы распределения при весьма часто встречающихся типичных условиях.

Нормальный закон распределения характеризуется плотностью вероятности вида

$$f(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}},\ \ \sigma>0\,.$$

Параметры a и σ нормального распределения соответственно равны: $a=M[X]$, $\sigma=\sqrt{D[X]}$.

График дифференциальной функции $f(x)$ называют *нормальной кривой Гаусса*



Центр рассеивания a характеризует положение распределения на оси абсцисс; параметр σ характеризует форму кривой Гаусса.

Вероятность попадания случайной величины, подчиненной нормальному закону, на заданный участок:

$$P(\alpha<X<\beta)=\int_{\alpha}^{\beta}f(x)dx\ =\ \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{\alpha}^{\beta}e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}dx=\Phi\left(\frac{\beta-a}{\sigma}\right)-\Phi\left(\frac{\alpha-a}{\sigma}\right).$$

Для оценки диапазона возможных значений нормально распределенной случайной величины справедливо *«правило трех сигм»:* если X распределена по нормальному закону, то отклонение (по абсолютной величине) этой величины от математического ожидания не превосходит утроенного среднеквадратического отклонения, то есть $P(|X-a|<3\sigma)\approx 1$

(для приближенного определения σ максимально практически возможное отклонение от среднего следует разделить на три).

Закон больших чисел. Центральная предельная теорема

Физическое содержание закона больших чисел заключается в устойчивости среднего результата воздействия массы случайных явлений: при очень большом числе случайных явлений средний их результат практически перестает быть случайным и может быть предсказан с большой степенью определенности. Конкретные особенности каждого отдельного случайного явления почти не сказываются на среднем результате массы случайных явлений; случайные отклонения от среднего, неизбежные в каждом отдельном явлении, в массе взаимно погашаются, нивелируются, выравниваются.

Для практики очень важно знать условия, при выполнении которых совокупное действие многих случайных причин приводит к результату, почти не зависящему от случая, что позволяет предвидеть ход явлений. Эти условия и указываются в теоремах, носящих общее название *закона больших чисел*.

Наиболее общим законом больших чисел является *обобщенная теорема Л.П. Чебышева* (объясняет, почему о качестве большого количества однородного материала можно судить по небольшой пробе; на ней основан широко применяемый в статистике *выборочный метод*, когда по сравнительно небольшой выборке судят о всей совокупности исследуемых объектов), *простейшим* (следствием из теоремы Чебышева) – *теорема Бернулли* (объясняет, почему относительная частота при достаточно большом числе испытаний обладает свойством устойчивости и оправдывает статистическое определение вероятности).

Центральная предельная теорема определяет условия, при которых возникает нормальный закон распределения (является доминирующим во многих областях). Одна из общих форм центральной предельной теоремы доказана А.М. Ляпуновым в 1900 году: *если* $X_1, X_2, \ldots, X_n$ – *независимые случайные величины, у каждой из которых существует математическое ожидание* $M[X_i] = a$, *дисперсия* $D[X_i] = \sigma^2$, *абсолютный центральный момент третьего порядка* $M\left[\left|X_i - a\right|^3\right] = m_i$ *и*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i}{\left(\sum_{i=1}^{n} \sigma_i^2\right)^{\frac{3}{2}}} = 0,$$

то закон распределения суммы $Y_n = X_1 + X_2 + \dots + X_n$ *при* $n \to \infty$ *неограниченно приближается к нормальному с математическим ожиданием* $\sum_{i=1}^{n} a_i$ *и дисперсией* $\sum_{i=1}^{n} \sigma_i^2$.

Смысл условия теоремы состоит в том, чтобы в сумме $Y_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$ не было слагаемых, влияние которых на рассеяние Y_n подавляюще велико по сравнению с влиянием всех остальных, а также не должно быть большого числа слагаемых, влияние которых очень мало по сравнению с суммарным влиянием остальных, то есть *удельный вес каждого отдельного слагаемого должен стремиться к нулю при увеличении числа слагаемых.*

Системы случайных величин

В практических задачах часто результат опыта описывается не одной случайной величиной, а системой случайных величин. Случайные величины $X_1, X_2, \dots, X_n$, входящие в систему, могут быть как дискретными, так и непрерывными.

Двумерную случайную величину (X, Y) геометрически можно истолковать как случайную точку или случайный вектор на плоскости XOY.

Исчерпывающей характеристикой системы случайных величин является ее *закон распределения*. Как и для отдельных случайных величин могут быть различные формы задания системы случайных величин (функция распределения, плотность распределения, таблица вероятностей отдельных значений случайного вектора и т.д.).

Если рассматривается двумерная дискретная случайная величина (X,Y), то ее двумерное распределение можно представить в виде *таблицы (матрицы) распределения:*

X	x_1	x_2	...	x_i	...	x_n	$\sum_{i=1}^{n}$
y_1	p_{11}	p_{21}	...	p_{i1}	...	p_{n1}	p_1
...	...	...	...	...	...	...	...
y_j	p_{1j}	p_{2j}	...	p_{ij}	...	p_{nj}	p_j
...	...	...	...	...	...	...	...
y_m	p_{1m}	p_{2m}	...	p_{im}	...	p_{nm}	p_m
$\sum_{j=1}^{n}$	p_1	p_2	...	p_{1p_i}	...	p_n	1

где $x_1 < x_2 < \ldots < x_n, y_1 < y_2 < \ldots < y_m$, p_{ij} – вероятность события, заключающегося в одновременном выполнении равенств $X = x_i, Y = y_j$. При этом $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} p_{ij} = 1$. Таблица может содержать бесконечное множество строк и столбцов.

Пример 1. Двумерная дискретная величина (X,Y) задана законом распределения:

$X \backslash Y$	2	3	4
2	0,3	0,15	0,05
3	0,15	0,10	0,05
4	0,05	0,05	0,05
5	0,05	0	0

Найти законы распределения составляющих X и Y.

Решение. Сложив вероятности по столбцам, получим вероятности возможных значений X, то есть:

$$P(X = x_i) = p_i;$$

$$P(X = 2) = 0{,}3 + 0{,}15 + 0{,}05 + 0{,}05 = 0{,}55;$$

$$P(X = 3) = 0{,}15 + 0{,}10 + 0{,}05 + 0 = 0{,}3;$$

$$P(X = 4) = 0{,}05 + 0{,}05 + 0{,}05 + 0 = 0{,}15;$$

$$0{,}55 + 0{,}3 + 0{,}15 = 1.$$

Сложив вероятности по строкам, получим вероятности возможных значений Y:

$$P(Y = y_j) = p_j;$$

$$P(Y = 2) = 0{,}3 + 0{,}15 + 0{,}05 = 0{,}50;$$

$$P(Y = 3) = 0{,}15 + 0{,}10 + 0{,}05 = 0{,}30;$$

$$P(Y = 4) = 0{,}05 + 0{,}05 + 0{,}05 = 0{,}15;$$

$$P(Y = 5) = 0{,}05 + 0 + 0 = 0{,}05;$$

$$0{,}50 + 0{,}30 + 0{,}15 + 0{,}05 = 1.$$

Законы распределения X и Y имеют вид:

x_i	2	3	4
p_i	0,55	0,3	0,05

y_j	2	3	4	5
p_j	0,5	0,3	0,15	0,05

Функцией распределения двух случайных величин (X,Y) называется вероятность совместного выполнения двух неравенств $X < x$, $Y < y$:

$$F(x,y) = P(X < x, Y < y).$$

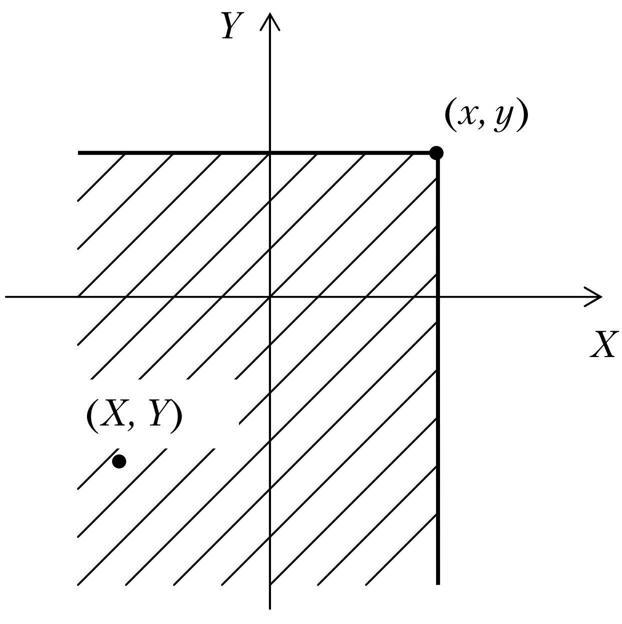
Пример 2. Задана функция распределения двумерной случайной величины (X,Y)

$$F(x,y) = \left(1 - e^{-x}\right)\left(1 - e^{-y}\right) \quad (x \geq 0, y \geq 0).$$

Найти вероятность того, что в результате испытания составляющие X и Y примут значения соответственно $X < 2, Y < 4$.

Решение. $P(X < 2, Y < 4) = F(2,4) = \left(1 - e^{-2}\right)\left(1 - e^{-4}\right) \approx 0{,}849$.

Геометрически $F(x,y)$ есть вероятность того, что случайная точка (X,Y) попадет в бесконечный квадрант с вершиной (x,y), расположенный левее и ниже этой точки. Правая и верхняя границы области в квадрант не включаются.



В случае *дискретной* двумерной случайной величины ее *функция распределения* определяется по формуле

$$F(x,y)=\sum_i \sum_j p_{ij},$$

где суммирование вероятностей распространяется на все i, для которых $x_i < x$, и все j, для которых $y_j < y$.

Укажем основные свойства функции распределения.

1. Функция распределения $F(x,y)$ есть *неотрицательная* функция, заключенная между нулем и единицей:

$$0 \le F(x,y) \le 1$$

(следует из определения $F(x,y)$ как вероятности).

2. Функция распределения $F(x,y)$ есть *неубывающая* функция по каждому из аргументов:

- при $x_2 > x_1$ $\quad F(x_2,y) \ge F(x_1,y)$;
- при $y_2 > y_1$ $\quad F(x,y_2) \ge F(x,y_1)$.

Действительно, пусть $x_2 > x_1$. Тогда, используя аксиому сложения вероятностей для несовместных событий, получим:

$$F(x_2,y)=P(X<x_2,Y<y)=P(X<x_1,Y<y)+$$
$$+\,P(x_1 \le X < x_2, Y<y) \ge P(X<x_1,Y<y)=F(x_1,y).$$

Аналогично, при $y_2 > y_1$ получили бы $F(x,y_2) \ge F(x,y_1)$.

3. При одном из аргументов, равным $+\infty$, функция распределения системы превращается в функцию распределения случайной величины, соответствующей другому аргументу:

$$F(x,+\infty)=F_1(x)=P(X<x);$$

$$F(+\infty,y)=F_2(y)=P(Y<y),$$

где $F_1(x)$, $F_2(y)$ – функции распределения случайных величин X и Y соответственно.

Действительно, $F(x,+\infty)=P(X<x,Y<+\infty)=P(X<x)=F_1(x)$, так как любое событие $\{X<x\}$, будучи умноженным на достоверное событие $\{Y<+\infty\}$, не меняется. Аналогично получили бы $F(+\infty,y)=F_2(y)$.

4. Если оба аргумента равны $+\infty$, то функция распределения равна единице:

$$F(+\infty,+\infty)=1$$

(совместное осуществление достоверных событий $\{X<+\infty\}$ и $\{Y<+\infty\}$ есть событие достоверное).

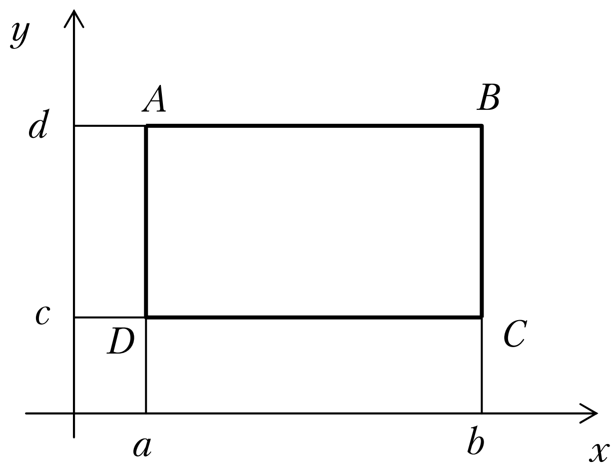
5. Если хотя бы один из аргументов равен $-\infty$, то функция распределения равна нулю:

$$F(x,-\infty)=F(-\infty,y)=F(-\infty,-\infty)=0$$

(так как события $\{X<-\infty\},\{Y<-\infty\}$ и их произведение являются невозможными событиями).

6. Вероятность попадания значений двумерной случайной величины (X,Y) *в прямоугольник* $ABCD$ можно найти с помощью ее функции распределения $F(x,y)$ по формуле

$$P(a\le X<b,c\le Y<d)=\left[F(b,d)-F(a,d)\right]-\left[F(b,c)-F(a,c)\right].$$



Двумерная *случайная величина* (X,Y) называется *непрерывной*, если ее функция распределения $F(x,y)$ – непрерывная функция, дифференцируемая по каждому из аргументов, у которой существует вторая смешанная производная $\dfrac{\partial^2 F(x,y)}{\partial x\partial y}$.

Обе составляющие X и Y представляют собой непрерывные случайные величины.

Плотность распределения системы двух случайных величин (X,Y) определяется как предел отношения вероятности попадания случайной точки (X,Y) в малый прямоугольник D к площади этого прямоугольника, когда оба его размера стремятся к нулю.

Плотностью распределения или совместной плотностью непрерывной двумерной случайной величины (X,Y) называется вторая смешанная частная производная ее функции распределения:

$$f(x,y)=\frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial x \partial y}=F''_{xy}(x,y).$$

С точностью до бесконечно малых более высоких порядков элемент вероятности $f(x,y)dxdy$ определяет вероятность попадания случайной точки (X,Y) в элементарный прямоугольник с размерами dx,dy, примыкающий к точке (x,y). Эта вероятность приближенно равна объему параллелепипеда с высотой $f(x,y)$, опирающегося на элементарный прямоугольник. Отсюда следует, что вероятность попадания случайной точки (X,Y) в область D плоскости XOY *геометрически* дает *объем тела*, ограниченного сверху поверхностью $z=f(x,y)$ и опирающегося на область D, так что

$$P\{(X,Y)\in D\}=\iint\limits_D f(x,y)dxdy.$$

В частности, если D есть прямоугольник $a\le X\le b,\ c\le Y\prec d$, то

$$P(a\le X\le b,\ c\le Y\le d)=\int\limits_a^b\int\limits_c^d f(x,y)dxdy.$$

Плотность вероятности $f(x,y)$ обладает свойствами, аналогичными свойствам плотности вероятности одномерной случайной величины.

Плотность вероятности двумерной случайной величины есть неотрицательная функция

$$f(x,y)\ge 0.$$

Двойной несобственный интеграл с бесконечными пределами от плотности вероятности равен единице

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dxdy=1.$$

Функция распределения непрерывной двумерной случайной величины может быть выражена через ее плотность вероятностей по формуле

$$F(x,y)=\int\limits_{-\infty}^{x}\int\limits_{-\infty}^{y} f(x,y)dxdy.$$

Зная плотность вероятности двумерной случайной величины (X,Y), можно найти функции распределения $F_1(x),F_2(y)$и плотности вероятностей $f_1(x),f_2(y)$ ее одномерных составляющих X и Y:

$$F_1(x)=\int\limits_{-\infty}^{x}\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dxdy,$$

$$f_1(x)=\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dy.$$

Аналогично:

$$F_2(y)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{y} f(x,y)dxdy;$$

$$f_2(y)=\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dx.$$

Зависимость между составляющими двумерной случайной величины характеризуется условным распределением.

Условным распределением дискретной случайной величины X при $Y=y_j$ называется множество значений $x_i, i=\overline{1,n}$ и условных вероятностей $p(x_1 | y_j)$, $p(x_2 | y_j)$, ..., $p(x_i | y_j)$, вычисленных в предположении, что событие $Y=y_j$ уже наступило.

Из определения условной вероятности имеем:

$$p_j(x_i)=\frac{p(X=x_i,Y=y_j)}{p(Y=y_j)}=\frac{p_{ij}}{p_j}.$$

Аналогично определяется условное распределение *дискретной* случайной величины Y при $X=x_i$:

$$p_i(y_j)=\frac{p(X=x_i,Y=y_j)}{p(X=x_i)}=\frac{p_{ij}}{p_i}.$$

Сумма вероятностей условного распределения равна единице.

Условным законом распределения одной из одномерных составляющих двумерной случайной величины (X,Y) называется закон ее распределения при условии, что другая составляющая приняла определенное значение (или попала в какой-то интервал).

В случае *непрерывных* случайных величин *условная плотность вероятности* одной из одномерных составляющих двумерной случайной величины равна *отношению ее совместной плотности к плотности вероятности другой составляющей*:

$$f_x(y)=\frac{f(x,y)}{f_1(x)}=\frac{f(x,y)}{\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dy};\quad f_y(x)=\frac{f(x,y)}{f_2(y)}=\frac{f(x,y)}{\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dx}.$$

Справедлива следующая *теорема умножения плотностей распределений*

$$f(x,y)=f_1(x)\cdot f_x(y)=f_2(y)\cdot f_y(x).$$

Условные плотности $f_x(y), f_y(x)$ обладают всеми свойствами безусловной.

Случайные величины X и Y будут *независимыми*, если закон распределения каждой из них не зависит от того, какое значение приняла другая.

Для *независимых* случайных величин

$$F(x,y)=F_1(x)\cdot F_2(y);$$

$$f(x,y)=f_1(x)\cdot f_2(y).$$

Верно и обратное.

При изучении двумерных случайных величин рассматриваются *числовые характеристики* одномерных составляющих X и Y: математические ожидания и дисперсии.

Для *дискретных* случайных величин X и Y

$$a_x=M[X]=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}x_i p_{ij};\quad a_y=M[Y]=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}y_j p_{ij};$$

$$D[X]=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}p_{ij}(x_i-a_x)^2;\quad D[Y]=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}p_{ij}(y_j-a_y)^2.$$

Для *непрерывных* случайных величин X и Y

$$a_x = M[X] = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x,y)\,dxdy;$$

$$a_y = M[Y] = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} y \cdot f(x,y)\,dxdy;$$

$$D[X] = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} (x - a_x)^2 \cdot f(x,y)\,dxdy;$$

$$D[Y] = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} (y - a_y)^2 \cdot f(x,y)\,dxdy.$$

Средние квадратические отклонения случайных величин X и Y определяются по формулам:

$$\sigma_x = \sqrt{D[X]}; \quad \sigma_y = \sqrt{D[Y]}.$$

Наряду с ними рассматриваются также числовые характеристики условных распределений: условные математические ожидания $M_x[Y]$ и $M_y[X]$ и условные дисперсии $D_x[Y]$ и $D_y[X]$. Эти характеристики находятся по обычным формулам математического ожидания и дисперсии, в которых вместо вероятностей событий или плотностей вероятности используются условные вероятности или условные плотности вероятности.

Условное математическое ожидание $M_x[Y]$ случайной величины Y при $X = x$, есть функция от x и называется *функцией регрессии* или просто *регрессией* Y по X; аналогично $M_y[X]$ называется функцией регрессии X по Y. Графики этих функций называются соответственно *линиями (кривыми) регрессии* Y по X и X по Y.

Однако математические ожидания и дисперсии случайных величин X и Y недостаточно полно характеризуют двумерную случайную величину (X,Y), так как не выражают степени зависимости ее составляющих X и Y. Поэтому пользуются и другими характеристиками, к числу которых относятся *корреляционный момент (ковариация) и коэффициент корреляции.*

Корреляционным моментом (*или моментом связи*) K_{xy} *случайных величин* X *и* Y *называют математическое ожидание произведения* *центрированных случайных величин* $\overset{\circ}{X} = \left(X - M[X]\right)$ *и* $\overset{\circ}{Y} = \left(Y - M[Y]\right)$, *то есть*

$$K_{xy} = M\left[\overset{\circ}{X}\overset{\circ}{Y}\right] = M\left[\left(X - M[X]\right)\cdot\left(Y - M[Y]\right)\right]$$

или

$$K_{xy} = \operatorname{cov}(X,Y) = M\left[\left(X - a_x\right)\cdot\left(Y - a_y\right)\right].$$

При *дискретных* X и Y для вычисления корреляционного момента пользуются формулой:

$$K_{xy} = \sum_i \sum_j \left(X_i - a_x\right)\left(Y_j - a_y\right) p_{ij}\,; \quad p_{ij} = P\left(X = x_i, Y = y_j\right).$$

Для *непрерывных* величин:

$$K_{xy} = \int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \left(X - a_x\right)\cdot\left(Y_i - a_y\right) f(x,y)\,dxdy\,.$$

В механической интерпретации, когда распределение вероятностей трактуется как распределение единичной массы на плоскости, точка $\left(a_x, a_y\right)$ есть центр массы распределения; $D[X], D[Y]$ – моменты инерции распределения масс относительно точки $\left(a_x, a_y\right)$; K_{xy} – центробежный момент инерции распределения масс.

Непосредственно из определения K_{xy} следует:

1. $K_{xy} = K_{yx}$.

2. *Корреляционный момент двух случайных величин равен математическому ожиданию их произведения минус произведение математических ожиданий*

$$K_{xy} = M[XY] - a_x a_y\,.$$

3. *Корреляционный момент двух независимых случайных величин равен нулю*.

Если X мало отличается от $M[X]$ (т.е. она почти не случайна), то корреляционный момент будет мал. Так что корреляционный момент характеризует не только зависимость величин, но и их рассеивание.

Корреляционный момент зависит от размерностей X и Y, так как размерность корреляционного момента равна произведению размерностей X и Y. Чтобы избавиться от этого недостатка, вводят безразмерную характеристику – *коэффициент корреляции:*

$$r_{xy} = \frac{K_{xy}}{\sigma_x \sigma_y},$$

где σ_x, σ_y – среднеквадратические отклонения X и Y.

Естественно, *для независимых величин* $r_{xy} = 0$ ($K_{xy} = 0$).

Случайные величины, для которых $r_{xy} = 0$, называются *некоррелированными* (несвязанными). *Из независимости следует некоррелированность.* Обратное не всегда верно.

Если $r_{xy} = 0$, то это означает только *отсутствие линейной связи* между случайными величинами. Любой другой вид связи может при этом присутствовать.

Если *коэффициент корреляции* двух случайных величин *равен* (по абсолютной величине) *единице,* то между этими случайными величинами *существует линейная функциональная зависимость.*

Для любых случайных величин X и Y коэффициент корреляции принимает значения на отрезке $[-1,1]$, то есть $|r_{xy}| \le 1$.

Пример 3. Система случайных величин (X,Y) подчинена закону распределения с плотностью

$$f(x,y) = \begin{cases} a\sin(x+y) & \text{в области D} \\ 0 & \text{вне этой области} \end{cases}.$$

Область D – квадрат, ограниченный прямыми $x = 0$, $x = \frac{\pi}{2}$, $y = 0$, $y = \frac{\pi}{2}$.

Найти:

1) коэффициент a; 2) математические ожидания a_x и a_y; 3) средние квадратичные отклонения σ_x, σ_y; 4) коэффициент корреляции r_{xy}.

Решение.

1. Коэффициент a найдем из условия

$$a \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(x+y)\,dxdy = 1.$$

Должны иметь

$$a \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(x+y)\,dxdy = -a \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(x+y)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} dx = a \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin x + \cos x)\,dx =$$

$$= a(\sin x + \cos x)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 2a.$$

Откуда $2a=1$ и $a=0{,}5$, то есть $f(x,y)=0{,}5\sin(x+y)$ в области D.

2. $a_x=0{,}5\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}x\sin(x+y)dxdy=0{,}5\int_0^{\frac{\pi}{2}}xdx\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin(x+y)dy=\frac{\pi}{4}$;

$$a_y=0{,}5\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}y\sin(x+y)dxdy=0{,}5\int_0^{\frac{\pi}{2}}ydy\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin(x+y)dx=\frac{\pi}{4}.$$

3. $D[X]=M\left[X^2\right]-\left(M[X]\right)^2=$

$$=0{,}5\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}x^2\sin(x+y)dxdy-\frac{\pi^2}{16}=\frac{\pi^2}{16}+\frac{\pi}{2}-2;$$

$$D[Y]=M\left[Y^2\right]-\left(M[Y]\right)^2=$$

$$=0{,}5\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}y^2\sin(x+y)dxdy-\frac{\pi^2}{16}=\frac{\pi^2}{16}+\frac{\pi}{2}-2;$$

$$\sigma_x=\sigma_y=\sqrt{\frac{\pi^2}{16}+\frac{\pi}{2}-2}=\sqrt{\frac{\pi^2+8\pi-32}{16}}.$$

4. Определим корреляционный момент

$$K_{xy}=M[XY]-a_xa_y=0{,}5\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}xy\sin(x+y)dxdy-\frac{\pi}{4}\cdot\frac{\pi}{4}=\frac{8\pi-16-\pi^2}{16}.$$

Отсюда коэффициент корреляции

$$r_{xy}=\frac{K_{xy}}{\sigma_x\sigma_y}=\frac{8\pi-16+\pi^2}{\pi^2+8\pi-32}\approx-0{,}2454.$$

Случайная величина (X,Y) называется распределенной *по двумерному нормальному закону*, если ее совместная плотность имеет вид:

$$f(x,y)=\frac{1}{2\pi\sigma_x\sigma_y\sqrt{1-r^2{}_{xy}}}\times$$

$$\times\exp\left[-\frac{1}{2\sqrt{1-r_{xy}^2}}\left(\frac{\left(x-a_x\right)^2}{\sigma_x^2}+\frac{\left(y-a_y\right)^2}{\sigma_y^2}-2r_{xy}\frac{x-a_x}{\sigma_x}\cdot\frac{y-a_y}{\sigma_t}\right)\right].$$

Нормальный закон на плоскости определяется пятью параметрами: $a_x, a_y, \sigma_x, \sigma_y, r_{xy}$.

Если случайные величины X,Y *подчиняются нормальному закону* на плоскости и при этом $r_{xy}=0$ (то есть X,Y – *некоррелированы*), то

$$f(x,y)=\frac{1}{2\pi\sigma_x\sigma_y}\exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{(x-a_x)^2}{\sigma_x^2}\right)-\frac{1}{2}\left(\frac{(y-a_y)^2}{\sigma_y^2}\right)\right]=$$

$$=\frac{1}{2\pi\sigma_x\sigma_y}e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{(x-a_x)^2}{\sigma_x^2}\right)}e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{(y-a_y)^2}{\sigma_y^2}\right)}=$$

$$=\frac{1}{\sigma_x\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-a_x)^2}{2\sigma_x^2}}\frac{1}{\sigma_y\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(y-a_y)^2}{2\sigma_y^2}}=f_1(x)\cdot f_2(x).$$

Как видим, здесь из некоррелированности составляющих X,Y следует их независимость (равносильны понятия независимости и некоррелированности).

6.2. Элементы математической статистики

Математическая статистика занимается разработкой методов сбора, регистрации и обработки результатов наблюдений (измерений) с целью познания закономерностей случайных массовых явлений. *Основные задачи математической статистики*:

– определение (приближенное) неизвестного закона распределения случайной величины;

– определение неизвестных параметров распределения (статистические оценки);

– проверка правдоподобия гипотез о распределении.

Результаты измерений (наблюдений) называют статистическими данными. Вся исследуемая совокупность однородных объектов называется *генеральной совокупностью*. Совокупность объектов, отобранных случайным образом из генеральной совокупности, называется *выборочной совокупностью* или *выборкой*. *Число объектов* в совокупности называют ее объемом. Так, если из 10000 деталей для обследования отбирается 100 деталей, то объем генеральной совокупности $N=10000$, а объем выборки $n=100$. *Метод,* основанный на том, что по данным исследования выборки делается заключение о всей генеральной совокупности, называется *выборочным методом*.

Два основных способа составления выборки:

– *повторная*, при которой отобранный объект (перед отбором следующего) возвращается в генеральную совокупность;

– *бесповторная*, при которой отобранный объект не возвращается в генеральную совокупность.

Объекты выборки должны правильно представлять свойства генеральной совокупности; говорят, выборка должна быть *репрезентативной* (по закону больших чисел выборка будет репрезентативной, если каждый объект генеральной совокупности имеет одинаковую возможность попасть в выборку).

Количественное значение признака X, наблюдаемое при отборе, – *случайная величина*; ее возможные значения $x_1, x_2, \ldots, x_k$ называются *вариантами.* Числа $n_i, i = \overline{1,k}$, показывающие, сколько раз встречаются варианты, называются *частотами*, а их отношение к общему числу наблюдений $W_i = \dfrac{n_i}{n}$ – *относительными частотами* или *частостями. Частоты и частости называются весами*; $\sum_i W_i = 1$.

Изучение выборки начинают с составления *статистического распределения (таблицы значений признака, расположенных в возрастающем порядке (вариационный ряд), и соответствующих им частот или относительных частот)*:

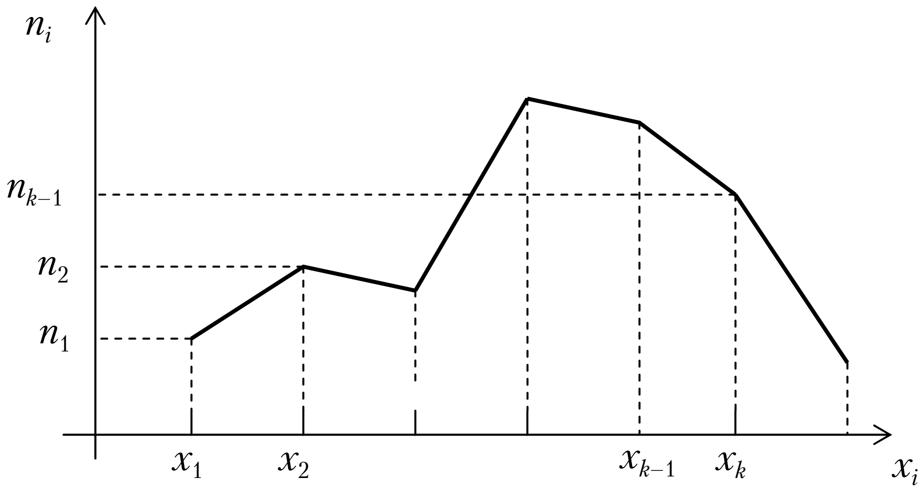
X	x_1	x_2, x_3	...	x_i	...	x_k
n_i	n_1	n_2	...	n_i	...	n_k

Если возможные значения признака изолированы друг от друга, то распределение называется *дискретным*; при непрерывном признаке - распределение *интервальное.* Составление статистического распределения начинают с определения наименьшего и наибольшего значений признака. Остальные значения записываются между ними в порядке возрастания. Далее подсчитываются частоты каждого значения признака.

Для непрерывно варьируемого количественного признака интервал его изменения разбивают на частичные интервалы *одинаковой* длины. Число интервалов m следует брать не очень большим, чтобы после группировки ряд не был громоздким, и не очень малым, чтобы не потерять особенности распределения признака (по Стерджесу рекомендуемое число интервалов $m = 1 + 3{,}221\lg n$, а длина частичного интервала $h = \dfrac{x_{\max} - x_{\min}}{1 + 3{,}221\lg n}$). Подсчитывается число количественных признаков в каждом интервале (обычно признак, находящийся на границе двух интервалов, относят к правой границе интервала).

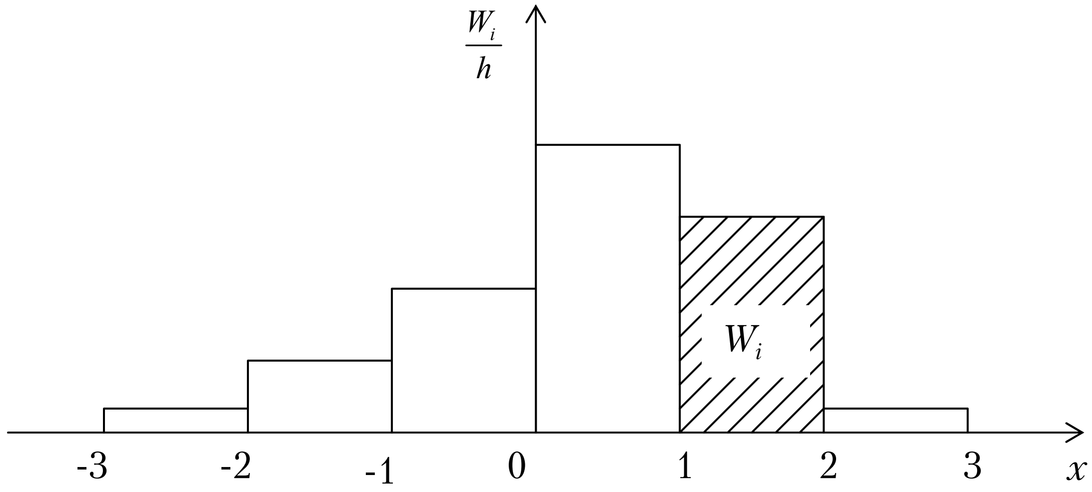
Наряду с понятием частоты нередко используется *накопленная частота* (число вариантов со значением признака, меньшим x); $W_{\text{нак}} = \dfrac{n_{\text{нак}}}{n}$ – накопленная относительная частота (для каждого интервала находятся последовательным суммированием частот (частостей) всех предшествующих интервалов, включая данный).

Статистическое распределение *дискретной* случайной величины наглядно иллюстрируется *полигоном распределения*; представляет собой *ломаную*, в которой концы отрезков имеют координаты (x_i, n_i).



Полигон частот

Для наглядности распределений широко используются *гистограммы*. Это ступенчатые фигуры, состоящие из прямоугольников с основаниями, равными длине частичного интервала h, и высотами, равными отношениям $\dfrac{W_i}{h}$ (относительная плотность частоты). Площадь частичного прямоугольника равна $\dfrac{W_i}{h} \cdot h = W_i$ – относительной частоте вариант, попавших в i-й частичный интервал. Площадь всей ступенчатой фигуры равна сумме всех прямоугольников; $S = \sum h \dfrac{W_i}{h} = \sum W_i = 1$.



Гистограмма относительных частот

Эмпирическая функции распределения $F^*(x)$ *определяет для каждого значения* X *относительную частоту события* $X < x$ *:*

$$F^*(x) = W(X < x) = \frac{n_x}{n},$$

где n_x – *число опытов, при которых наблюденные значения* X *были меньше* x*;*

n – *общее число наблюдений (опытов).*

Для данного x эмпирическая функция распределения представляет накопленную относительную частоту.

Различие между эмпирической функцией распределения $F^*(x)$ и теоретической функцией распределения $F(x)$ состоит в том, что $F(x)$ для заданного значения x определяет вероятность события $X < x$; а $F^*(x)$ – определяет относительную частоту этого события. По теореме, носящей название *теоремы Бернулли*, при $n \to \infty$ частота события $X < x$ стремится к $P(X < x)$. Это позволяет приближенно использовать $F^*(x)$ вместо $F(x)$.

Функция $F^*(x)$ обладает всеми свойствами функции $F(x)$:

1) значения эмпирической функции принадлежат отрезку $[0,1]$;

2) $F^*(x)$ – неубывающая функция;

3) если x_1 наименьшее наблюденное значение признака, а x_k – наибольшее, то $F^*(x_1) = 0$ при $x < x_1$ и $F^*(x_k) = 1$ при $x > x_k$.

Выборочной средней статистического распределения называется сумма произведений всех вариантов на соответствующие частоты, деленная на сумму частот:

$$\overline{x}_{\text{в}} = \frac{\sum_{i=1}^{m} x_i n_i}{n},$$

где x_i – варианты дискретного ряда или середины интервалов интервального вариационного ряда;

n_i – соответствующие им частоты, $n = \sum_{i=1}^{m} n_i$.

Если извлекать выборки одинакового объема из одной и той же генеральной совокупности, то *выборочная средняя* будет изменяться при переходе от одной выборки к другой (в силу случайного отбора она является *случайной величиной*).

Отметим основные свойства выборочной средней, аналогичные свойствам математического ожидания случайной величины:

1. Выборочная средняя постоянной равна самой постоянной.

2. Если все варианты увеличить (уменьшить) в одно и то же число раз, то выборочная средняя увеличится (уменьшится) во столько же раз.

$$\frac{\sum_{i=1}^{m} (kx_i) n_i}{n} = k\frac{\sum_{i=1}^{m} x_i n_i}{n}.$$

3. Если все варианты увеличить (уменьшить) на одно и то же число, то выборочная средняя увеличится (уменьшится) на то же число:

$$\frac{\sum_{i=1}^{m} (x_i + C) n_i}{n} = \frac{\sum_{i=1}^{m} x_i n_i}{n} + C.$$

4. Выборочная средняя отклонений вариантов от средней арифметической равно 0:

$$\sum_{i=1}^{m} (x_i - \overline{x}) n_i = 0.$$

5. Выборочная средняя алгебраической суммы нескольких признаков равна такой же сумме средних арифметических этих признаков:

$$\overline{x + y} = \overline{x} + \overline{y}.$$

6. Если ряд состоит из нескольких групп, общая средняя равна выборочной средней групповых средних, причем весами являются объемы групп:

$$\overline{x} = \frac{\sum_{i=1}^{l} \overline{\overline{x}}_i n_i}{n},$$

где $\overline{x}$ – общая средняя (средняя арифметическая всего ряда);

$\overline{\overline{x}}_i$ – групповая средняя i-й группы, объем которой равен n_i;

l – число групп.

Групповой средней *называется среднее арифметическое значение признаков, принадлежащих группе*.

Общей средней *называется среднее арифметическое значение признаков, принадлежащих всей совокупности*.

Медианой $\overline{\text{M}}\text{e}$ *вариационного ряда* называется значение признака, приходящееся на середину вариационного ряда наблюдений.

Для дискретного вариационного ряда с нечетным числом членов медиана равна серединному варианту, а для ряда с четным числом членов – полусумме двух серединных вариантов

(для ряда 2 5 7 **8** 10 14 17 – $\overline{\text{M}}\text{e} = 8$,

а для ряда 2 5 7 8 10 14 – $\overline{\text{M}}\text{e} = \dfrac{7+8}{2} = 7{,}5$).

Модой $\overline{\text{M}}\text{o}$ *вариационного ряда* называется вариант, которому соответствует наибольшая частота.

Вариационный размах R – разность между наибольшим и наименьшим вариантами ряда:

$$R = x_{\max} - x_{\min}.$$

Дисперсией $D_{\text{в}}$ называется среднее арифметическое значение квадратов отклонений вариантов от выборочной средней:

$$D_{\text{в}} = \frac{\sum_{i=1}^{m} \left(x_i - \overline{x}_{\text{в}}\right)^2 n_i}{n}$$

или

$$D_{\text{в}} = \sum_{i=1}^{m} \left(x_i - \overline{x}_{\text{в}}\right)^2 W_i.$$

Дисперсию $D_\text{в}$ часто называют эмпирической или выборочной, подчеркивая, что она находится по опытным данным (в отличие от дисперсии случайной величины σ^2).

Выборочная дисперсия имеет систематическую ошибку, приводящую к уменьшению дисперсии. Чтобы это устранить, вводят поправку, умножая $D_\text{в}$ на дробь $\frac{n}{n-1}$, называемую поправкой Бесселя. В результате получают исправленную дисперсию $S^2 = \frac{n}{n-1} D_\text{в}$. При малых выборках S^2 ощутимо отличается от $D_\text{в}$. С возрастанием n исправленная дисперсия $S^2 \to D_\text{в}$.

Среднее квадратическое отклонение $\sigma_\text{в} = \sqrt{\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{m}\left(x_i - \bar{x}_\text{в}\right)^2 n_i}{n}}$.

Исправленное выборочное среднее квадратическое отклонение

$$S = \sqrt{\frac{n}{n-1} D_\text{в}} = \sqrt{\frac{n}{n-1}}\sigma_\text{в}.$$

Коэффициент вариации равен процентному отношению среднего квадратического отклонения к выборочной средней:

$$V = \frac{\sigma_\text{в}}{\bar{x}_\text{в}} \cdot 100\,\%\left(\bar{x} \neq 0\right).$$

Начальный эмпирический момент ν_k k-го порядка определяется по формуле:

$$\nu_k = \frac{\sum\limits_{i=1}^{m} x_i^k n_i}{n}.$$

В частности, $\nu_1 = \dfrac{\sum\limits_{i=1}^{m} x_i n_i}{n} = \bar{x}_в$, то есть выборочная средняя является начальным эмпирическим моментом первого порядка.

Центральный эмпирический момент $\bar{\mu}_k$ k-го порядка определяется по формуле:

$$\bar{\mu}_k = \frac{\sum\limits_{i=1}^{m}\left(x_i - \bar{x}\right)^k n_i}{n}.$$

Очевидно, что центральный эмпирический момент первого порядка равен нулю ($\bar{\mu}_1 = 0$), а второго порядка является дисперсией ($\mu_2 = D_в$) и служит мерой рассеяния статистического распределения.

Коэффициентом асимметрии эмпирического распределения называется число $\bar{A} = \dfrac{\bar{\mu}_3}{\sigma_в^3}$.

Если $\bar{A} = 0$, то распределение имеет симметричную форму, то есть варианты, равноудаленные от $\bar{x}_в$, имеют одинаковую частоту. Если $\bar{A} > 0$ ($\bar{A} < 0$) говорят о положительной (правосторонней) или отрицательной (левосторонней) асимметрии.

Эксцессом вариационного ряда эмпирического распределения называется число $\bar{E} = \dfrac{\bar{\mu}^4}{\sigma_в^4} - 3$ (показатель «крутости» эмпирического распределения по сравнению с нормальным распределением; для нормально распределенной случайной величины он равен нулю).

Если $\bar{E} > 0 \left(\bar{E} < 0\right)$, то полигон эмпирического распределения имеет более крутую (пологую) вершину по сравнению с нормальной кривой.

Оценка параметров распределения

Статистической оценкой $\tilde{\theta}_n$ неизвестного параметра θ теоретического распределения называется его приближенное значение, зависящее от данных выборки (некоторая функция от наблюдаемых случайных величин).

Оценка $\tilde{\theta}_n$ (в отличие от оцениваемого параметра θ – величины неслучайной, детерминированной) является случайной величиной, зависящей от закона распределения случайной величины X и числа n.

В качестве статистических оценок параметров генеральной совокупности используются оценки, удовлетворяющие одновременно требованиям несмещенности, состоятельности и эффективности.

Оценка $\tilde{\theta}_n$ параметра θ называется *несмещенной*, если $M\left(\tilde{\theta}_n\right) = \theta$ (математическое ожидание $\tilde{\theta}_n$ равно оцениваемому параметру θ). В противном случае оценка называется *смещенной*. Требование несмещенности гарантирует отсутствие систематических ошибок при оценивании.

Оценка $\tilde{\theta}_n$ параметра θ называется *состоятельной*, если она *сходится по вероятности* к оцениваемому параметру:

$$\lim_{n \to \infty} P\left(\left|\tilde{\theta}_n - \theta\right| < \varepsilon\right) = 1$$

или

$$\tilde{\theta}_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \theta .$$

В случае использования состоятельных оценок оправдывается увеличение объема выборки, так как при этом становятся маловероятными значительные ошибки при оценивании. Поэтому практический смысл имеют только состоятельные оценки. Если оценка состоятельна, то $\tilde{\theta}_n \approx \theta$ при достаточно большом n .

Если оценка $\tilde{\theta}_n$ параметра θ является несмещенной, а ее дисперсия $\sigma^2_{\theta_n} \to 0$ при $n \to \infty$, то оценка $\tilde{\theta}_n$ является и состоятельной. Это непосредственно вытекает из неравенства Чебышева:

$$P\left(\left|\tilde{\theta}_n - \theta\right| < \varepsilon\right) \geq 1 - \frac{\sigma^2_{\tilde{\theta}_n}}{\varepsilon^2} .$$

Несмещенная оценка $\tilde{\theta}_n$ параметра θ называется *эффективной*, если она имеет наименьшую дисперсию среди всех возможных несмещенных оценок параметра θ, вычисленных по выборкам одного и того же объема n.

Эффективность оценки $\tilde{\theta}_n$ определяют отношением

$$e = \frac{\sigma^2_{\tilde{\theta}^{э}_n}}{\sigma^2_{\tilde{\theta}_m}} ,$$

где $\sigma^2_{\tilde{\theta}^{э}_n}$ и $\sigma^2_{\tilde{\theta}_m}$ – соответственно дисперсии эффективной и данной оценок.

Чем ближе e к единице, тем эффективнее оценка. Если $e \to 1$ при $n \to \infty$, то такая *оценка* называется *асимптотически эффективной*.

Справедливы следующие теоремы:

Теорема 1. Выборочная средняя $\overline{x}_{в}$ является несмещенной и состоятельной оценкой математического ожидания

Теорема 2. Исправленная выборочная дисперсия $S^2 = \dfrac{n}{n-1} D_{в}$ является несмещенной и состоятельной оценкой дисперсии $D[X]$.

Точечная оценка $\tilde{\theta}_n$ (*определяется одним числом*) является лишь приближенным значением неизвестного параметра θ и для выборки малого объема может существенно отличаться от θ. Чтобы получить представление о точности и надежности оценки $\tilde{\theta}_n$ параметра θ, используют *интервальную оценку* (числовой интервал) параметра. Если $\tilde{\theta}_n$ по данным выборки служит оценкой неизвестного параметра θ, то $\tilde{\theta}_n$ тем точнее определяет параметр θ, чем меньше абсолютная величина разности $\left|\theta-\tilde{\theta}_n\right|<\delta$. Положительное число δ характеризует *точность оценки*.

Статистические методы не позволяют категорически утверждать, что $\tilde{\theta}_n$ удовлетворяет неравенству $\left|\theta-\tilde{\theta}_n\right|<\delta$. Можно говорить лишь о вероятности γ, с которой это неравенство осуществляется. *Надежностью (доверительной вероятностью)* оценки θ по $\tilde{\theta}_n$ называется вероятность γ, с которой осуществляется неравенство $\left|\theta-\tilde{\theta}_n\right|<\delta$. Обычно надежность оценки задается наперед, причем в качестве γ берут число, близкое к единице (наиболее часто задают надежность, равную 0,95;0.99; и 0,999).

Если вероятность того, что $\left|\theta-\tilde{\theta}_n\right|<\delta$ равна γ, то вероятность того, что интервал $(\tilde{\theta}_n-\delta,\tilde{\theta}_n+\delta)$ заключает в себе неизвестный параметр θ, равна γ:

$$P(\tilde{\theta}_n-\delta<\theta<\tilde{\theta}_n+\delta)=\gamma .$$

Интервал $(\tilde{\theta}_n-\delta,\tilde{\theta}_n+\delta)$ называется *доверительным*; он накрывает неизвестный параметр с заданной надежностью γ. Величина доверительного интервала существенно зависит от объема выборки n (уменьшается с ростом n) и от значения доверительной вероятности γ (увеличивается с приближением γ к единице).

Часто необходимо решение и обратной задачи: по заданному доверительному интервалу определяется соответствующая надежность оценки. Пусть, например, $\gamma=0{,}95$; тогда число $\alpha=1-\gamma=0{,}05$ показывает, с какой вероятностью заключение о надежности оценки ошибочно. Число $\alpha=1-\gamma$ называется *уровнем значимости*, обычно принимается равным 0,05; 0,01; 0,001.

Если случайная величина распределена нормально, то *доверительный интервал для математического ожидания* определится из условия

$$P\left(\left|\bar{x}_{\text{в}}-a\right|<\delta\right)=\gamma .$$

Откуда

$$P\left(\left|\bar{x}_{\text{в}}-a\right|<\delta\right)=2\Phi\left(\frac{\delta\sqrt{n}}{\sigma[X]}\right)=2\Phi(t);\; t=\frac{\delta\sqrt{n}}{\sigma[X]}$$

или

$$P\left(\bar{x}_{\text{в}} - t\frac{\sigma}{\sqrt{n}} < a < \bar{x}_{\text{в}} + t\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = 2\Phi(t) = \gamma.$$

Таким образом, с надежностью γ можно утверждать, что *доверительный интервал* $(\bar{x}_{\text{в}} - t\frac{\sigma}{\sqrt{n}}; \bar{x}_{\text{в}} + t\frac{\sigma}{\sqrt{n}})$ содержит неизвестный параметр a; точность оценки равна $\delta = t\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$. Число t определяется из равенства $2\Phi(t) = \gamma$ или $\Phi(t) = \frac{\gamma}{2}$; по таблице функции Лапласа находят аргумент t, которому соответствует значение функции Лапласа, равное $\frac{\gamma}{2}$.

Для проведения выборочного наблюдения весьма важно правильно установить объем выборки n, который в значительной степени определяет необходимые при этом временные, трудовые и стоимостные затраты. *Для определения объема выборки необходимо задать надежность (доверительную вероятность) оценки* γ *и точность (предельную ошибку выборки)* δ*:*

$$n = \frac{t^2\sigma^2}{\delta^2}.$$

В большинстве случаев среднее квадратическое отклонение $\sigma[X]$ исследуемого признака неизвестно. Поэтому вместо $\sigma[X]$ при большой выборке $(n < 30)$ применяют исправленное выборочное среднее квадратическое отклонение $S = \sqrt{\frac{n}{n-1}}\sigma_{\text{в}}$. Доверительный интервал в этом случае будет иметь вид

$$\bar{x}_{\text{в}} - t\frac{S}{\sqrt{n}} < a < \bar{x}_{\text{в}} + t\frac{S}{\sqrt{n}}.$$

Но сделать большую выборку удается не всегда и это не всегда целесообразно. Из $\bar{x}_{\text{в}} - t\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$; $\bar{x}_{\text{в}} + t\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ видно, что чем меньше n, тем шире доверительный интервал, то есть он зависит от объема выборки.

При нормальном распределении признака X нормированная случайная величина

$$T = \sqrt{n}\frac{\bar{x}_{\text{в}} - a}{S}$$

зависит только от объема выборки и имеет вид

$$S(t,n)=B_n\left(1+\frac{t^2}{n-1}\right)^{-\frac{n}{2}};\ \ B_n=\frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{\sqrt{\pi(n-1)}\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)};$$

$\Gamma(x)=\int\limits_0^{\infty}t^{x-1}e^{-t}dt$ – гамма-функция; t – возможное значение T (распределение Стьюдента).

Доверительный интервал определяется из условия

$$P\left(\bar{x}_{\text{в}}-\frac{t_\gamma\cdot S}{\sqrt{n}}<a<\bar{x}_{\text{в}}+\frac{t_\gamma\cdot S}{\sqrt{n}}\right)=\gamma$$

где $t_\gamma=t(\gamma,n)$ – точность оценки (определяется по специальной таблице).

Доверительный интервал для дисперсии нормально распределенной случайной величины X определяется с использованием так называемого χ^2-распределения с $n-1$ степенями свободы, плотность которого определяется формулой

$$k_{n-1}(v)=\begin{cases}\dfrac{1}{2^{\frac{n-1}{2}}\Gamma\left(\dfrac{n-1}{2}\right)}\cdot v^{\left(\frac{n-1}{2}-1\right)}\cdot e^{-\frac{v}{2}}, & \text{при } v>0\\ 0, & \text{при } v<0\end{cases}$$

$$\left(\Gamma(x)=\int\limits_0^{\infty}u^{x-1}e^{-u}du;\quad \Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)=\int\limits_0^{\infty}u^{\frac{n-1}{2}}e^{-u}du\right).$$

Можно доказать, что случайная величина $\dfrac{(n-1)S^2}{\sigma^2}$ подчиняется приведенному χ^2-распределению, где $\sigma^2=\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i-\tilde{a})^2}{n-1}$ – несмещенная оценка дисперсии случайной величины.

Поэтому для заданной доверительной вероятности γ можно записать:

$$P\left(\chi_1^2<\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}<\chi_2^2\right)=\gamma.$$

Откуда доверительные вероятности для дисперсии и среднего квадратического отклонения определятся из условий:

$$P\left(\frac{(n-1)S^2}{\chi_1^2}<\sigma^2<\frac{(n-1)S^2}{\chi_2^2}\right)=\gamma,$$

$$P\left(\frac{\sqrt{n-1}\cdot S}{\chi_1}<\sigma<\frac{\sqrt{n-1}\cdot S}{\chi_2}\right)=\gamma.$$

Оценка вероятности по частоте. Пусть X – число появлений события A в n независимых опытах, X_i – число появлений события A в i-м опыте. X_i принимает два значения: 0, 1. Тогда $X=\sum_{i=1}^{n}X_i=M$ и по известной теореме $M[X]=np$.

Если в качестве оценки неизвестной вероятности p брать $p^*=\frac{M}{n}$, то:

– эта оценка по теореме Бернулли будет *состоятельной*;

– в силу $M\left[p^*\right]=\frac{1}{n}M\left[\sum_{i=1}^{n}X_i\right]=\frac{1}{n}np=p$ оценка $p*$ для p является *несмещенной*;

– $D\left(p^*\right)=D\left[\frac{\sum_{i=1}^{n}X_i}{n}\right]=\frac{1}{n^2}D\left[\sum_{i=1}^{n}X_i\right]=\frac{1}{n^2}npq=\frac{pq}{n}$

(можно показать, что $D\left(p^*\right)$ является минимально возможной, то есть оценка $p*$ для p является *эффективной).*

Таким образом, в качестве точечной оценки для неизвестной вероятности p целесообразно принимать частоту $p*$. Точность и надежность такой оценки можно производить построением доверительного интервала для вероятности p (это частный случай задачи о доверительном интервале для математического ожидания). Когда число опытов n сравнительно велико, а вероятность p не слишком велика и не слишком мала, можно считать, что частота события $p*$ есть случайная величина, распределение которой близко к нормальному (частота события при n опытах есть дискретная случайная величина и близость ее закона распределения к нормальному оценивается по виду функции распределения, а не плотности!).

Статистические гипотезы и общая схема их проверки

Статистическая гипотеза – любое предположение о виде или параметрах неизвестного закона распределения. Если она однозначно определяет закон распределения, ее называют *простой*, в противном случае – *сложной*.

Нулевой называют выдвинутую гипотезу H_0, которую необходимо проверить; *конкурирующей* (альтернативной) гипотезой H_1 – гипотезу, противоположную нулевой (нулевая и альтернативная гипотезы представляют собой две возможности выбора, осуществляемого в задачах проверки статистических гипотез). Правило, по которому гипотеза H_0 отвергается или принимается, называется *статистическим критерием*.

Вероятность α *отвергнуть* гипотезу H_0 (ошибка 1-го рода), когда она *верна*, называется *уровнем значимости критерия*; вероятность $(1-\alpha)$ не допустить ошибку первого рода (*принять* гипотезу H_0, когда она в*ерна*) называют и *оперативной характеристикой критерия*.

Вероятность принять гипотезу H_0 (ошибка 2-го рода), когда она неверна, обычно обозначают β; *вероятность* $(1-\beta)$ не допустить ошибку 2-го рода (отвергнуть гипотезу H_0, когда она неверна) называется *мощностью* (или функцией мощности) критерия.

Принятие гипотезы H_0 следует расценивать *лишь* как достаточно правдоподобное, не противоречащее опыту утверждение.

Между эмпирическим и теоретическим распределениями неизбежны расхождения. Естественно возникает вопрос: объясняются эти расхождения только случайными обстоятельствами, связанными с ограниченным числом наблюдений, или они являются существенными и связаны с тем, что теоретический закон распределения подобран неудачно. Для ответа на этот вопрос служат *критерии согласия*.

Пусть необходимо проверить нулевую гипотезу H_0 о том, что исследуемая случайная величина X подчиняется определенному закону распределения. В основе проверки гипотезы H_0 лежит выбор некоторой случайной величины U, характеризующей степень расхождения теоретического и эмпирического распределения, закон распределения которой при достаточно больших n известен и практически не зависит от закона распределения случайной величины X. Условия, при которых расхождение между эмпирическим и теоретическим распределениями несущественно, и гипотезу H_0 можно считать правдоподобной или, по крайней мере, не противоречащей опытным данным, в частности, определяются χ^2*-критерием Пирсона* и *критерием Колмогорова*.

Варианты тестовых заданий по модулю

Вариант 1

1. Найти p_2, если дискретная случайная величина X задана рядом распределения:

x_i	0	1	2	3
p_i	0,2	p_2	0,3	0,1

1) 0,2; 2) 0,4; 3) 0,3; 4) 0.

2. Дискретная случайная величина задана рядом распределения.

x_i	1	3	5
p_i	0,5	0,3	0,2

Найти математическое ожидание данной случайной величины

1) 2,4; 2) 1; 3) $\sqrt{2,4}$; 4) $2,4^2$.

3. В коробке находятся карточки с номерами от 1 до 8. Какова вероятность того, что номер вынутой наудачу карточки не превышает 8?

1) 0,5; 2) 0; 3) 1; 4) 0,8.

4. Сколько четырехзначных чисел можно составить из цифр 5, 6, 7, 8 с использованием всех указанных цифр в каждом числе?

1) 4; 2) 1; 3) 24; 4) 48.

5. Найдите дисперсию случайной величины X распределенной равномерно на интервале (1;5)

1) $\frac{1}{3}$; 2) 1; 3) $\frac{4}{3}$; 4) 4.

6. Имеются четыре урны, содержащие по 3 белых и 7 черных шаров, и шесть урн, содержащих по 8 белых и 2 черных шара. Из наудачу взятой урны вытаскивается один шар, который оказался белым. Тогда вероятность того, что этот шар был вынут из первой серии урн равна...

1) 0,40; 2) 0,72; 3) 0,20; 4) 0,80.

Вариант 2

1. Найти p_2, если дискретная случайная величина X задана рядом распределения

X	0	23,4	28	51,4
p	0,06	p_2	0,14	0,56

Тогда вероятность p_2 равна...

1) 0,15; 2) 0,11; 3) 0,27; 4) 0,24.

2. Из шести букв разрезной азбуки составлено слово АНАНАС. Ребенок, не умеющий читать, рассыпал эти буквы и затем собрал в произвольном порядке. Найти вероятность того, что у него снова получится слово АНАНАС.

1) $\frac{1}{25}$; 2) $\frac{1}{30}$; 3) $\frac{1}{35}$; 4) $\frac{1}{60}$.

3. Закон распределения дискретной случайной величины x

x_i	-2	-1	0	1	2	3
p_i	0,1	0,2	0,25	0,15	0,1	0,2

Найти математическое ожидание $M[X]$;

1) 0,53; 2) 0,45; 3) 0,55; 4) 0,38.

4. Если соблюдается график движения, то среднее время ожидания пассажиром трамвая равно 3,5 минуты. Известно, что время ожидания имеет равномерный закон распределения. Минимальное время ожидания равно 0. Найти вероятность того, что пассажир будет ожидать трамвай от двух до пяти минут.

1) $\frac{1}{7}$; 2) $\frac{3}{7}$; 3) $\frac{2}{7}$; 4) $\frac{5}{7}$.

5. Монету подбрасывают три раза. Требуется найти ряд распределения числа X выпавших “гербов”.

1)

X	0	1	2	3
p	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$

2)

X	0	1	2	3
p	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$

3)

X	0	1	2	3
p	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$

4)

X	0	1	2	3
p	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$

6. Мода вариационного ряда 5, 6, 7, 9, 9, 12, 13 равна ...

1) 13; 2) 5; 3) 7; 4) 9.

Вариант 3

1. Найти p_4, если дискретная случайная величина X задана рядом распределения

x_i	1	2	3	4
p_i	0,1	0,3	0,4	p_4

1) 0,1; 2) 0,2; 3) 0,3; 4) 0,4.

2. Случайная величина X задана рядом распределения

X	1	-2	3
p	0,4	0,3	0,3

Найти $M[X]$.

1) 0,7; 2) 1,9; 3) 3,5; 4) 2,4.

3. Непрерывная случайная величина подчинена нормальному закону распределения с функцией плотности $f(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{\pi}}e^{-\frac{(x-1)^2}{4}}$. Найти $D[3X-5]$.

1) 4; 2) 18; 3)2; 4) 1.

4. В магазине имеется 7 видов тортов. Сколькими способами можно составить набор, содержащий 3 торта?

1) 84; 2) 840; 3) 7!; 4) 7^3.

5. Непрерывная случайная величина X распределена равномерно на отрезке от 1 до 5. Чему равно математическое ожидание случайной величины $2X-1$?

1) 1; 2) 5; 3) 10; 4) 5/2.

6. В первой коробке 7 красных и 3 черных карандаша, а во второй коробке 5 черных и 5 красных карандаша. Из произвольной коробки наугад вынимают один карандаш. Какова вероятность того, что этот карандаш красный?

1) $\dfrac{1}{12}$; 2) $0,6$; 3) $0,5$; 4) $0,7$.

Вариант 4

1. Найти p_4, если дискретная случайная величина X задана рядом распределения

X	2	3	5	6
p_i	0,3	0,1	0,5	p_4

Тогда вероятность p_4 равна:

1) 0,2; 2) 0,5; 3) 0,1; 4) 0,4.

2. Случайная величина X задана рядом распределения

X	2	3	4
p	0,3	0,4	0,3

Найти $M[X]$.

1) 1; 2) 2,5; 3) 9; 4) 3.

3. Непрерывная случайная величина подчинена нормальному закону распределения с функцией плотности $f(x)=\frac{1}{2\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-3)^2}{8}}$. Найти $D[2X-3]$.

1) 36; 2) 16; 3)8; 4) 11.

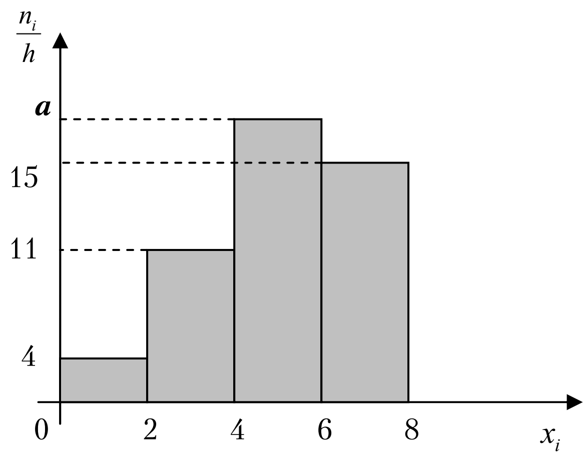
4. Сколькими способами можно поставить в очередь 7 покупателей в магазине?

1)7!; 2) 7; 3)70; 4) 10.

5. Непрерывная случайная величина X распределена равномерно на отрезке от 3 до 7. Чему равно математическое ожидание случайной величины $2X+3$?

1) 29; 2) 13; 3) 11; 4) 23.

6. Чему равно значение $\boldsymbol{a}$, если данная гистограмма частот построена по выборке объемом n=100?



1) 20; 2) 15; 3) 14; 4) 18.

Вариант 5

1. Найти p_2, если дискретная случайная величина X задана рядом распределения

X	1	2	3	4
p	0,3	p_2	0,4	0,1

Тогда вероятность p_3 равна...

1) 0,5; 2) 0,2; 3) 0,1; 4) 1.

2. Случайная величина X задана функцией распределения

$$F(x)=\begin{cases}0, \text{ при } x\le 0\\ \dfrac{x}{3}, \text{ при } 0<x\le 3\\ 1, \text{ при } x>3\end{cases}$$

Найти вероятность того, что в результате испытания величина X примет значение из интервала (2;3).

1) $\frac{1}{3}$; 2) $\frac{1}{4}$; 3) $\frac{1}{2}$; 4) $\frac{1}{6}$.

3.Сколькими различными способами можно выбрать три лица на три различные должности из десяти кандидатов?

1) 1100; 2) 850; 3) 720; 4) 640.

4. Подбрасываются 5 симметричных монет. Найти вероятность того, что выпало ровно два герба.

1) $\frac{7}{10}$; 2) $\frac{5}{16}$; 3) $\frac{2}{5}$; 4) $\frac{3}{11}$.

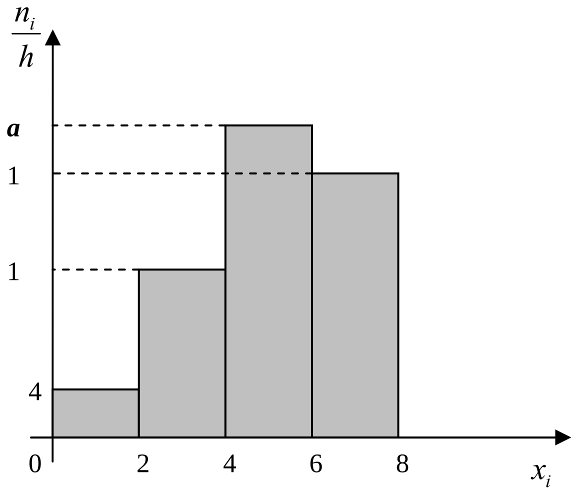
5. Плотность распределения вероятностей случайной величины X задана функцией

$$f(x)=\begin{cases}0, \text{ при } x\le 0\\ \dfrac{3x^2}{8}, \text{ при } 0<x\le 2\\ 0, \text{ при } x>2\end{cases}$$

Найти $M[X]$.

1) 2,5; 2) 4; 3) 2; 4) 1,5.

6. Чему равно значение ***a***, если данная гистограмма частот построена по выборке объемом n=100?



1) 20; 2) 18; 3) 17; 4) 19.

Вариант 6

1. Мода вариационного ряда 5, 6, 7, 7, 7, 9, 12, 13 равна ...
1) 13; 2) 5; 3) 7; 4) 9.

2. Найти p_3, если дан ряд распределения

X	3	6	12	24
p	0,2	0,1	p_3	0,5

1) 0,9; 2) 0,7; 3) 1; 4) 0,2.

3. Случайная величина X распределена по нормальному закону с параметрами a и σ. По результатам наблюдаемых значений 35, 15, 5, 25, 5 оценить параметр a.
1) 19; 2) 15; 3) 17; 4) 20.

4. Даны две случайные величины X и Y.

X	-1	0	1
p	0,2	0,3	0,5

Y	0	1	2	3
p	0,1	0,2	0,3	0,4

Тогда $M[Y-2X]$ равно
1) 1,4; 2) 0,8; 3) 1,7; 4) 3,2.

5. Случайная величина X задана плотностью распределения $f(x) = \frac{1}{3\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(x-2)^2}{18}}$. Тогда дисперсия $D[2X + 1]$ равна

1) 16; 2) 32; 3) 36; 4) 28.

6. Двусторонняя критическая область может определяться из соотношения...

1) $P(K > 2{,}5) = 0{,}05$;

2) $P(K < -2{,}5) + P(K > 2{,}5) = 0{,}05$;

3) $P(K < -2{,}5) = 0{,}05$;

4) $P(-2{,}5 < K < 2{,}5) = 0{,}95$.

Вариант 7

1. Найти p_2, если случайная величина X задана таблицей распределения

X	0	1	2	3	4
p	0,1	p_2	0,3	0,2	0,1

1) 0,3; 2) 0,2; 3) 0,1; 4)0.

2. Даны две независимые случайные величины, заданные своими таблицами распределений

X	-1	0	1	2
p	0,2	0,3	0,1	0,4

и

Y	0	1	2
p	0,3	0,3	0,4

Тогда $M[2X + Y]$ равно

1) 1,8; 2) 2,5; 3) 3,9; 4)2,3.

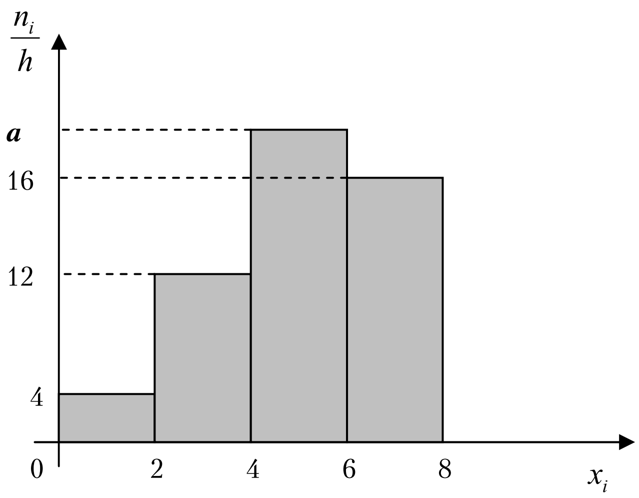
3. Непрерывная случайная величина подчинена нормальному закону распределения с функцией плотности $f(x) = \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-3)^2}{8}}$. Найти $D[5X - 2]$.

1) 100; 2) 20; 3)22; 4)18.

4. Два стрелка произвели по одному выстрелу по цели. Вероятность поражения цели каждым из стрелков равна 0,8. Найти вероятность того, что только один стрелок поразит мишень.

1) 0,32; 2) 0,64; 3) 0,16; 4) 0,36.

5. Чему равно значение ***a***, если данная гистограмма частот построена по выборке объемом n=100?



1) 18; 2) 19; 3) 17; 4) 20.

6. Основная гипотеза $H_0: \sigma^2 = 5$. Тогда конкурирующей может являться гипотеза...

1) $H_1: \sigma^2 < 6$; 2) $H_1: \sigma^2 \le 5$; 3) $H_1: \sigma^2 < 5$; 4) $H_1: \sigma^2 \ge 5$.

Вариант 8

1. Вероятность того, что студент сдаст первый экзамен, равна 0,9; второй – 0,8. Какова вероятность того, что хотя бы один экзамен будет сдан?

1) 0,9; 2) 0,72; 3) 0,98; 4)0,8.

2. Сколько четырехзначных нечетных чисел можно составить из цифр числа 3694, если каждую цифру можно использовать не более одного раза?

1) 48; 2) 24; 3) 2; 4) 12.

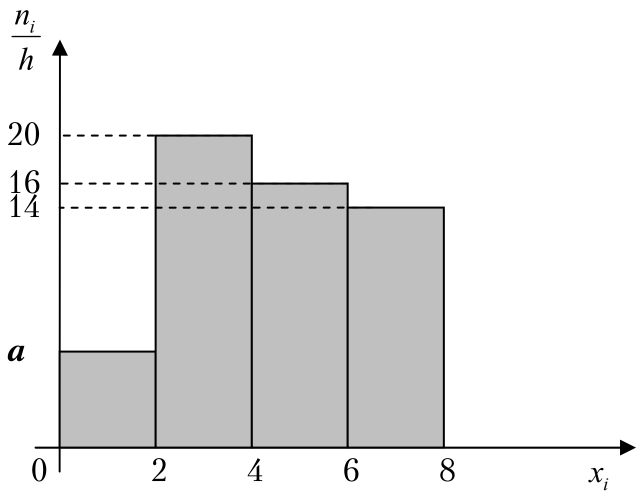
3. Вероятность поражения цели при каждом выстреле равна 0,2. Сколько нужно сделать выстрелов, чтобы можно было ожидать в среднем 5 попаданий в цель?

1) 25; 2) 10; 3)2; 4) 20.

4. Событие, состоящее из мгновенного сигнала. должно произойти между 13^{00} и 17^{00}. Время ожидания есть случайная величина, имеющая равномерное распределение. Какова вероятность того, что сигнал будет зафиксирован в течение 20 минут после 14^{00}?

1) 1/4; 2) 1/3; 3) 1/12; 4)1/15.

5. Чему равно значение ***a***, если данная гистограмма частот построена по выборке объемом n=110?



1) 6; 2) 5; 3) 10; 4) 8;

6. Выборочное уравнение прямой регрессии Y на X имеет вид $y = -3 + 2,2x$. Тогда выборочный коэффициент корреляции может быть равен...

1) 2,2; 2) -2,2; 3) -0,3; 4) 0,3.

Вариант 9

1. В коробке находятся карточки с номерами от1 до 8. Какова вероятность того, что номер вынутой наудачу карточки не превышает 8?

1) 0,5; 2) 0; 3) 1; 4) 0,8.

2. Сколько четырехзначных чисел можно составить из цифр 5, 6, 7, 8 с использованием всех указанных цифр в каждом числе?

1) 4; 2) 1; 3) 24; 4) 48.

3. Имеются четыре урны, содержащие по 3 белых и 7 черных шаров, и шесть урн, содержащих по 8 белых и 2 черных шара. Из наудачу взятой урны вытаскивается один шар, который оказался белым. Тогда вероятность того, что этот шар был вынут из первой серии урн равна...

1) 0,40; 2) 0,72; 3) 0,20; 4) 0,80.

4. Найти p_2, если дискретная случайная величина X задана рядом распределения:

x_i	0	1	2	3
p_i	0.2	p_2	0.3	0.1

1) 0,2; 2) 0,4; 3) 0,3; 4) 0.

5. Дискретная случайная величина задана рядом распределения.

x_i	1	3	5
p_i	0,5	0,3	0,2

Найти математическое ожидание данной случайной величины

1) 2,4; 2) 1; 3) $\sqrt{2,4}$; 4) $2,4^2$.

6. В партии из 8 деталей 3 бракованные. Наудачу отобраны две детали. Тогда вероятность того, что обе детали будут бракованными, равна...

1) $\frac{1}{2}$; 2) $\frac{1}{4}$; 3) $\frac{3}{8}$; 4) $\frac{3}{28}$.

Вариант 10

1. Игральная кость бросается один раз. Тогда вероятность того, что на верхней грани выпадет *не более пяти очков*, равна:

1) $\frac{1}{6}$; 2) $\frac{2}{3}$; 3) $\frac{5}{6}$; 4) 1.

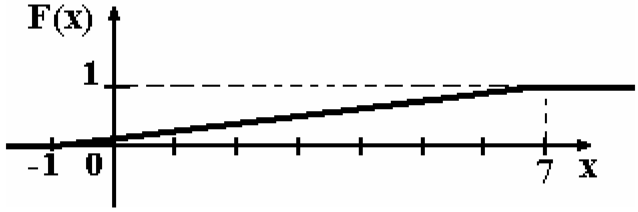
2. Дискретная случайная величина X задана законом распределения вероятностей:

X	-1	0	3
p	0,1	0,3	0,6

Тогда математическое ожидание случайной величины $Y = 3X$ равно:

1) 6; 2) 4,7; 3) 5,7; 4) 5,1.

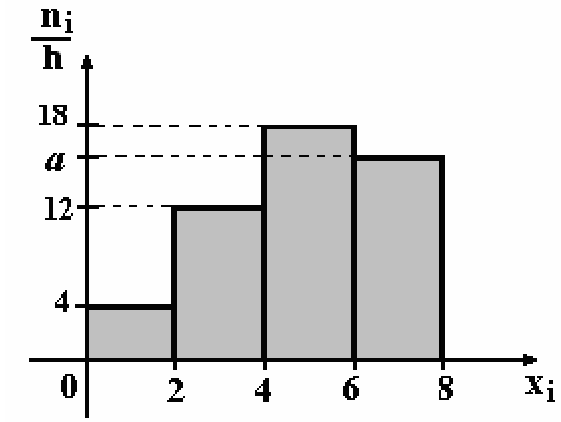
3. График функции распределения вероятностей непрерывной случайной величины X имеет вид:



Тогда математическое ожидание X равно:

1) 8; 2) 4; 3) 3; 4) 7.

4. По выборке объема n=100 построена гистограмма частот:



Тогда значение a равно:

1) 66; 2) 15; 3) 17; 4) 16.

5. Мода вариационного ряда 5, 6, 6, 7, 7, 7, 9, 12, 12, 13 равна ...

1) 13; 2) 5; 3) 7; 4) 9.

6. В первой коробке 7 красных и 3 черных карандаша, а во второй коробке 5 черных и 5 красных карандаша. Из произвольной коробки наугад вынимают один карандаш. Какова вероятность того, что этот карандаш красный?

1) $\frac{1}{12}$; 2) 0,6; 3) 0,5; 4) 0,7.

Решение примерного варианта

Задание 1.

Найти вероятность p_2, если дискретная случайная величина X задана рядом распределения

x_i	1	2	3	4
p_i	0,3	p_2	0,1	0,2

1) 0,1; 2) 0,2; 3) 0,3; 4) 0,4.

Решение:

Для дискретной случайной величины сумма вероятностей всех возможных значений равна единице. Поэтому

$$0,3+p_2+0,1+0,2=1.$$

Откуда $p_2=0,4$

Ответ: 4) 0,4.

Задание 2.

Случайная величина X задана рядом распределения

X	-1	0	1
p	0,2	0,3	0,5

Тогда дисперсия $D(X)$ равна...

1) 0,7; 2) 0,49; 3) 0,61; 4) 2,4.

Решение:

По известной формуле для дисперсии:

$$D(X)=M\left(X^2\right)-\left[M(X)\right]^2.$$

Математическое ожидание

$$M(X)=\sum_{i=1}^{n} x_i p_i=-1\cdot 0,2+0\cdot 0,3+1\cdot 0,5=0,3.$$

Математическое ожидание случайной величины X^2 определится в виде:

$$M\left(X^2\right)=\sum_{i=1}^{n} x_i^2 p_i=(-1)^2\cdot 0,2+0^2\cdot 0,3+1^2\cdot 0,5=0,7.$$

Тогда искомая дисперсия равна $D(X)=0,7-0,3^2=0,7-0,09=0,61$

Ответ: 3) 0,61

Задание 3.

В магазине формируются подарочные наборы из конфет 5 видов в коробках, по три разных коробки в каждом наборе. Сколькими способами это можно сделать?

1) 10; 2) 15; 3) 5!; 4) 5^3.

Решение:

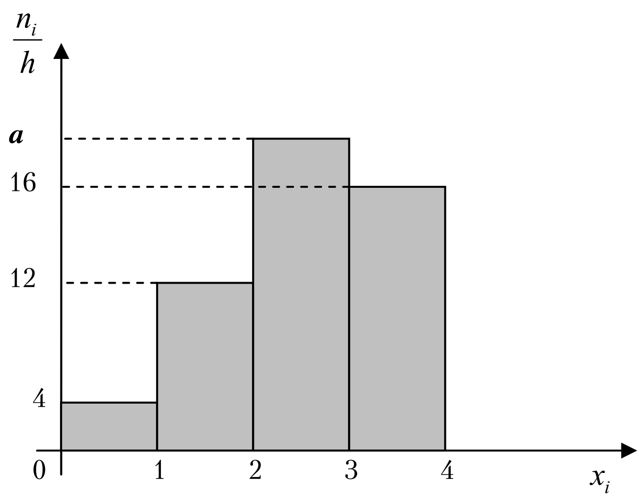
Здесь одна комбинация будет отличаться от другой только составом элементов, порядок расположения безразличен. Количество всех возможных комбинаций – это число сочетаний из пяти элементов по 3.

$$C_5^3 = \frac{5!}{3! \cdot (5-3)!} = \frac{4 \cdot 5}{2} = 10.$$

Ответ: 1) 10.

Задание 4.

Определить значение ***a***, если данная гистограмма частот построена по выборке объемом n=50?



1) 20; 2) 18; 3) 17; 4) 19.

Решение:

Так как шаг $h=1$, то на вертикальной оси гистограммы фактически отмечены частоты значений. Их сумма, как известно, должна быть равна объему выборки: $4+12+16+a=50$. Значит, ***a***=18.

Ответ: 2) 18.

Задание 5.

Мода вариационного ряда 2, 3, 4, 5, 5, 5, 6, 7, 7, 9, 12, 13 равна ...

1) 13; 2) 5; 3) 7; 4) 9.

Решение:

Мода – варианта с наибольшей частотой. Из всех вариант чаще всего в выборке встречается число 5.

Ответ: 2) 5.

Задание 6.

Имеются две урны, в первой – 5 белых и 5 черных шаров, во второй – 3 белых и 7 черных шаров. Из наудачу взятой урны вытаскивается один шар. Тогда вероятность того, что этот шар окажется белым равна...

1). 0,55 2). 0,11 3). 0,5 4). 0,4

Решение:

Обозначим события:

А – извлечение белого шара;

B_1 – выбор первой урны

B_2 – выбор второй урны

Найдем условные вероятности $P(A/B_1)=\frac{5}{10}$, $P(A/B_2)=\frac{3}{10}$. Выбор урн равновозможен, то есть $P(B_1)=P(B_2)=\frac{1}{2}$. Тогда по формуле полной вероятности:

$$P(A)=P(A/B_1)\cdot P(B_1)+P(A/B_2)\cdot P(B_2)=\frac{5}{10}\cdot\frac{1}{2}+\frac{3}{10}\cdot\frac{1}{2}=0,4.$$

Ответ: 4) 0,4.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Пособие подготовлено в соответствии с «Федеральным государственным образовательным стандартом высшего профессионального образования» третьего поколения по направлению подготовки 190600 – Эксплуатация транспортно-технологических машин и комплексов (квалификация (степень) - бакалавр). Его *первая часть* содержит контрольные задания в виде тестов по каждому модулю с решениями примерных вариантов и справочные теоретические материалы.

Пособие позволяет в полной мере осуществить все виды организационно-методической работы по балльно-модульно-рейтинговой системе оценки качества освоения студентами программного материала по математике; проведение рейтинговой оценки успеваемости, текущего контроля и промежуточной аттестации студентов по математике.

Разбор задач и примеров по каждому из модулей, приводимых в пособии, систематическое тестирование по ним в течение всего курса, позволит студентам лучше подготовиться к итоговому контролю.

Издание может использоваться и в системе открытого образования по различным направлениям подготовки в технических вузах.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

Основная литература

1. Бугров, Я.С. Высшая математика. Т. 1. Элементы линейной алгебры и аналитической геометрии [Текст] / Я.С. Бугров, С.М. Никольский. – М.: Дрофа, 2004. – 288 с.

2. Бугров, Я.С. Высшая математика. Т. 2. Дифференциальное и интегральное исчисление[Текст] / Я.С. Бугров, С.М. Никольский. – М.: Дрофа, 2004. – 512 с.

3. Бугров, Я.С. Высшая математика. Т. 3. Дифференциальные уравнения. Кратные интегралы. Ряды. Функции комплексного переменного [Текст] / Я.С. Бугров, С.М. Никольский. – М.: Дрофа, 2004. – 512 с.

4. Пискунов, Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисления [Текст]: учеб. пособие / Н.С. Пискунов. – Изд. стер. – М.: Интеграл-Пресс, 2008. – Т.1, 2. – 415 с.

5. Бермант, А.Ф. Краткий курс математического анализа [Текст]: учеб. пособие / А.Ф. Бермант, И.Г. Араманович. –15-е изд., стер. – СПб.: Лань, 2009. – 736 с.

6. Данко, П.Е. Высшая математика в упражнениях и задачах [Текст]: учеб. пособие для ВУЗов / П.Е. Данко, А.Г. Попов, Т.Я. Кожевникова. – М.: Оникс 21 век: Мир и образование, 2009. – Ч.1, 2. – 304 с. (416 с).

7. Вентцель, А.Д. Теория вероятностей [Текст]: учебник для ВУЗов / А.Д. Вентцель. – М.: Высшая школа, 2010. – 575 с.

Дополнительная литература

8. Автомеенко, Н.А. Сборник задач и упражнений по высшей математике [Текст] / Н.А. Автомеенко, В.К. Кириакиди, Л.И. Склярова, П.П. Сумец; под ред. А.И. Сумина. – Воронеж: Изд-во Воронежского ВВАИУ(ВИ), 2005. – 126 с.

9. Беклемишев, Д.В. Сборник задач по аналитической геометрии и линейной алгебре [Текст] / Д.В. Беклемишев, Л.А. Беклемишева, А.Ю. Петрович, И.А. Чурбанов. – СПб.: Лань, 2011. – 496 с.

10. Берман, Г.И. Сборник задач по курсу математического анализа. Решение типичных и трудных задач [Текст]: учеб. пособие / Г.И.Берман. – 3-е изд., стер. –СПб.: Лань, 2007. – 604 с.

11. Боревич, З.И. Определители и матрицы [Текст]: учеб. пособие / З.И. Боревич. – 5-е изд. стер. – СПб.: Лань, 2009. –184 с.

12. Бутузов, В.Ф. Линейная алгебра в вопросах и задачах [Текст] / В.Ф. Бутузов, Н.Ч. Крутицкая, А.А. Шишкин. – М.: Лань, 2010. – 256 с.

13. Бутузов, В.Ф. Математический анализ в вопросах и задачах [Текст] / В.Ф. Бутузов, Н.Ч. Крутицкая, А.А. Шишкин. – СПб.: Лань, 2010. – 480 с.

14. Вдовин, А.Ю. Сборник задач по высшей математике [Текст]: учебное пособие / А.Ю. Вдовин [и др.]. – Екатеринбург: Изд-во Уральского ГЛТУ, 2006. – 65 с.

15. Вентцель, А.Д. Теория вероятностей и ее инженерные приложения [Текст] / А.Д. Вентцель. – М.: Академия, 2010. – 464 с.

16. Владимирский, Б.М. Математика. Общий курс: учебник [Текст] / Б.М. Владимирский, А.Б. Горстко, Я.М. Ерусалимский. – 4-е изд. стер. – СПб.: Лань, 2008. – 957 с.

17. Воеводин, В.В. Линейная алгебра [Текст] / В.В. Воеводин. – СПб.: Лань, 2010. – 416 с.

18. Гарькина, И.А. Теория вероятностей и математическая статистика [Текст] / И.А. Гарькина, А.М. Данилов, Г.Д. Фадеева; под ред. проф. А.М. Данилова. – Пенза: ПГУАС, 2010. – 168 с.

19. Гмурман, В.Е. Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике [Текст]: учебное пособие / В.Е. Гмурман. – М.: Высшая школа, 2006 – 476 с.

20. Гужевенко, Е.И. Математика [Текст]: учебное пособие / Е.И. Гужевенко, Ю.А. Заяц, Л.Б. Михеева, Н.П. Приходько; под ред. Ю.А.Заяц. – Рязань: Изд-во Рязанского военного автомобильного института, 2010. – 638 с.

21. Данилов, А.М. Теория вероятностей и математическая статистика с инженерными приложениями [Текст]: учеб. пособие / А.М. Данилов, И.А. Гарькина. – Пенза: ПГУАС, 2010 г. – 228 с.

22. Демидович, Б.П. Дифференциальные уравнения [Текст] / Б.П. Демидович, В.П. Моденов. – СПб.: Лань, 2008. – 288 с.

23. Запорожец, Г.И. Руководство к решению задач по математическому анализу [Текст]: учеб. пособие / Г.И. Запорожец. – 6-е изд., стер. –СПб.: Лань,2010. – 460 с.

24. Зубков, А.М. Сборник задач по теории вероятностей [Текст] / А.М., Зубков Б.А. Севастьянов, В.П. Чистяков. – СПб.: Лань, 2009. – 320 с.

25. Медведько, М.А. Сборник задач по теории вероятностей [Текст]: учеб. пособие / М.А. Медведько, Л.Ю. Шипик. – Зерноград: Изд-во ФГОУ ВПО «АЧГАА», 2005. – 160 с.

26. Степунина, О.А. Основы теории случайных процессов [Текст]: учебно-практическое пособие / О.А. Степунина, Е.Б. Трофимова. – Бузулук: Изд-во БГТИ (филиала), ГОУ ОГУ, 2006. – 117 с.

27. Сумин, А.И. Математика: Сборник задач и упражнений по математическому анализу. Часть 1 [Текст]: учебное пособие / А.И. Сумин [и др.]; под ред. Л.И Скляровой. – Воронеж: Изд-во Воронежского ВВАИУ(ВИ), 2006. – 112 с.

28. Феофанова, Л.Н. Теория вероятностей. Стандартные задачи с основными положениями теории [Текст]: учеб. пособие / Л.Н. Феофанова, А.Е. Годенко, В.Н. Стяжин, Л.А. Исаева. – Волгоград: Изд-во ВолгГТУ, 2009. – 116 с.

29. Феофанова, Л.Н. Теория вероятностей: Задания для самостоятельной работы студентов [Текст]: учеб. пособие / Л.Н. Феофанова, А.Е. Годиенко, Л.А. Исаева, В.И. Кудряшов. – Волгоград: ИУНЛ ВолгГТУ, 2010. – 152 с.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Учебное издание

Гарькина Ирина Александровна
Данилов Александр Максимович
Круглова Альбина Николаевна

МАТЕМАТИКА.
Часть I. СПРАВОЧНЫЕ МАТЕРИАЛЫ И ТЕСТЫ ПО МОДУЛЯМ
Учебное пособие

В авторской редакции
Верстка Н.А. Сазонова

Подписано в печать 19.09.2013. Формат 60×84/16.
Бумага офисная «Снегурочка». Печать на ризографе.
Усл. печ. л. 19,07. Уч.-изд. л. 20,5. Тираж 300 экз. 1-й завод 100 экз.
Заказ №176.

Издательство ПГУАС.
440028, г.Пенза, ул. Германа Титова, 28.