МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«Пензенский государственный университет
архитектуры и строительства»
(ПГУАС)

В.А. Монахов

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА

Часть 2
КИНЕМАТИКА

Рекомендовано Учебно-методическим объединением вузов РФ
по образованию в области строительства в качестве учебного пособия
для студентов высших учебных заведений,
обучающихся по программе бакалавриата
по направлению 08.03.01 (270800) «Строительство»

Пенза 2014

УДК 531/534
ББК 22.21я73
М77

Рецензенты: кафедра теоретической и прикладной механики Пензенской государственной технологической академии (заведующий кафедрой кандидат технических наук, профессор А.Н. Бормотов);
зав. кафедрой «Теория и методика преподавания математики» Пензенского государственного университета, доктор педагогических наук, профессор М.А. Родионов

Монахов В.А.
М77 Теоретическая механика. Ч.2. Кинематика: учеб. пособие: в 3 ч. / В.А. Монахов. – Пенза: ПГУАС, 2014. – 124 с.
ISBN 978-5-9282-1094-6

Содержание лекций отражает материал, предусматриваемый программой курса теоретической механики для технических вузов. Изложение основных понятий кинематики, определение кинематических характеристик и свойств движений материальных точек и тел сочетаются с решением разнообразных задач теоретической механики. В отличие от других учебных пособий, изданных в последние годы, в лекциях большое внимание уделено приложению теории матричных преобразований систем координат при определении законов движения и других кинематических характеристик механических систем, что способствует эффективному применению средств современной вычислительной техники в теоретической механике.

Учебное пособие подготовлено на кафедре «Механика» и предназначено для студентов высших учебных заведений, обучающихся по программе бакалавриата по направлению 08.03.01 (270800) «Строительство».

ISBN 978-5-9282-1094-6

ПРЕДИСЛОВИЕ

Теоретическая механика относится к числу фундаментальных наук, методы исследования которых развивались в течение столетий. Основные понятия и законы механики приняли классическую форму. В большинстве учебников по теоретической механике определение понятий, вывод законов и следствий из них, как правило, осуществляются в векторном виде с привлечением методов дифференциального и интегрального исчисления.

Появление средств информационной техники в сфере образования стимулирует разработку новых современных подходов к обучению. Например, в связи с применением компьютеров в учебном процессе, появилась необходимость в переформулировке, переводе теорем о сложении скоростей и ускорений при сложном движении материальной точки на язык машин, каковыми являются матричные алгебра и анализ. Их использование для описания сложного движения частицы позволяет составить программы автоматизированных вычислений скоростей и ускорений точки. Синхронно с вычислительной процедурой решения задачи на ПЭВМ теперь имеется возможность демонстрировать компьютерный фильм о рассматриваемом движении. Это новшество может быть распространено и на другие, важные для практических целей виды движений тел и частиц.

Разработка подобных программ открывает широкие перспективы при изучении теоретической механики. Они могут носить как обучающий, так и контролирующий характер. С их помощью повышается эффективность освоения учебного материала, сокращается время, затрачиваемое на изучение предмета, на решение как учебных, так и практических задач в области механики.

Существенное отличие данного пособия от имеющихся книг состоит в том, что, наряду с общепринятым изложением основ теоретической механики, каждая тема содержит ещё и описание основных понятий и законов в матричной форме. В этой связи здесь вместо операций аналитического характера при прежнем выводе теорем кинематики основную роль играют операторы матричного (дискретного) дифференцирования и интегрирования.

Автор надеется, что впервые представленная в книге концепция изложения классической механики (в разделе кинематики) на основе теории матричных преобразований вызовет большой интерес и получит одобрение у читателей.

ВВЕДЕНИЕ

В этом разделе теоретической механики изучается движение материальных частиц и механических систем, в том числе твёрдых тел, в отрыве от причин, его вызывающих. Движение, как известно, это изменение положения тел в пространстве с течением времени. Поэтому в кинематике основное внимание обращается на способы описания характера движений тел, определение кинематических характеристик движения, их взаимосвязей и пр.

Фундамент классической механики составляют три закона, известные из физики. Один из них (второй), который записывается в виде

$$m\overline{a} = \overline{F} ,$$

где m – масса тела; $\overline{a}$ – его ускорение; $\overline{F}$ – равнодействующая сил, приложенных к телу, является *основным законом динамики.*

В проекциях на оси декартовой системы координат указанное соотношение принимает вид:

$$m\ddot{x} = \sum_{i=1}^{n} P_{ix} , \quad m\ddot{y} = \sum_{i=1}^{n} P_{iy} , \quad m\ddot{z} = \sum_{i=1}^{n} P_{iz} ,$$

где $\ddot{x}, \ddot{y}, \ddot{z}$ – проекции вектора ускорения $\overline{a}$; P_{ix}, P_{iy}, P_{iz} – проекции сил $\overline{P}_i$ (i=1,2,...,n), включая и реакции связей; точки над символом указывают, как это принято в механике, на дифференцирование по времени t, т.е. обозначают производные по времени, например $\dot{y} = dy/dt$ и $\ddot{y} = d^2y/dt^2$.

Отсюда вытекает необходимость определения законов движения* как в скалярной форме

$$x = x(t), \qquad y = y(t), \qquad z = z(t),$$

так и в векторном виде; здесь x, y ,z – координаты движущегося объекта, представленные как некоторые функции времени $x(t)$, $y(t)$,$z(t)$. С другой стороны, знание законов движения позволяет находить скорости и ускорения частиц или тел, благодаря чему можно установить характер действующих сил.

Внедрение средств вычислительной техники в учебный процесс способствовало разработке новых подходов к описанию движения, отвечающих современным взглядам на развитие теоретической механики. Возникла необходимость в описании законов движения тел и их кинематических характеристик в матричной форме.

В данном курсе лекций впервые в учебной литературе при описании основных свойств движения систематически применяется аппарат теории матричных преобразований систем координат, позволяющий сводить анализ движения тел к математическим операциям с матрицами*. Рассматриваемый метод даёт возможность решать многие практические задачи в автоматическом режиме с помощью компьютера.

---

* Понятие закона движения в кинематике, как, впрочем, и в динамике, используется здесь в более узком смысле, чем это принято в науке.

* Известный подход к описанию движения тел с помощью *псевдовекторов* [1], по мнению автора, не пригоден при первоначальном знакомстве с основами теоретической механики вследствие своей громоздкости.

Лекция 1. КИНЕМАТИКА МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ

1. Предмет кинематики. Основные характеристики движения тел и материальных частиц

В кинематике движение тел и материальных частиц рассматривается вне связи с причинами, вызывающими его. Вводится ряд основных понятий и определений, с помощью которых впоследствии устанавливаются важнейшие кинематические характеристики движения. К их числу относятся *понятия закона движения, траектории, скорости и ускорения*. В кинематике масса частицы или тела не играет существенной роли, так как движение фактически рассматривается с геометрической точки зрения.

Движение частиц и механических систем в пространстве можно задать как в общей векторной форме, так и в координатном и естественном виде в зависимости от постановки задачи. Оказывается, что на основе фундаментального понятия кинематики – закона движения* – базируется определение траектории, скорости и ускорения.

Кинематика, как это уже было подчёркнуто в предисловии, наряду со статикой является одним из разделов теоретической механики. Её изучение служит непременным условием глубокого усвоения механики.

2. Способы задания движения материальной точки. Законы движения

Движение материальной точки считается заданным, если известен способ, с помощью которого можно определить положение точки в любой момент времени.

Известны три способа описания движения:

• *Векторный способ*, когда движение характеризуется изменением радиуса-вектора $\overline{r}$ материальной точки m во времени (рис. 1.1).

$$\overline{r} = \overline{r}(t). \tag{1.1}$$

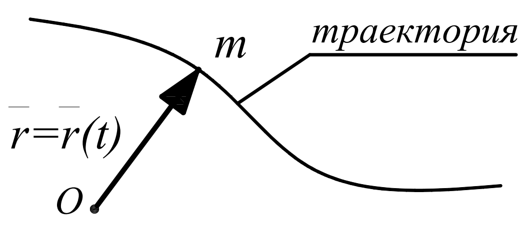


Рис. 1.1

* Необходимо заметить, что авторы некоторых пособий по механике [12] путают это понятие с уравнением движения. Подробнее об этом см. раздел 3 данной лекции.

• *Координатный* – в частности:

а) в декартовой системе координат (рис. 1.2),

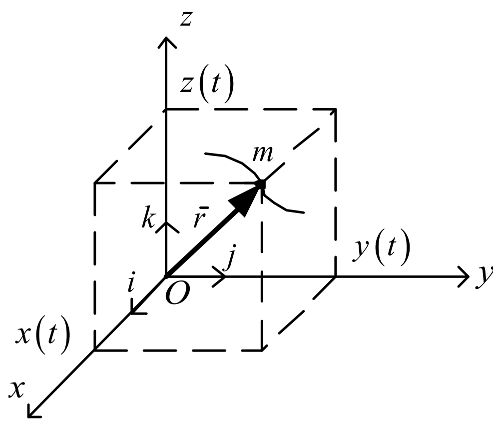


Рис. 1.2

когда заданы координаты движущейся точки *m* в виде функций времени

$$x = x(t),\quad y = y(t),\quad z = z(t). \tag{1.2,а}$$

• *Матричная форма* – подробнее о ней см. следующие лекции.

б) в полярной системе координат, когда заданы радиус-вектор ρ и дуговая координата φ точки *m* в виде функций времени (рис. 1.3)

$$\rho = \rho(t) \quad \text{и} \quad \varphi = \varphi(t). \tag{1.2,б}$$

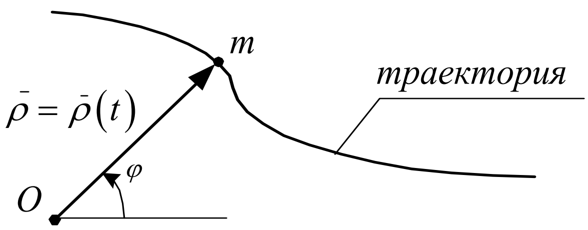


Рис. 1.3

• *Естественный способ* задания движения – заданы траектория движения и изменение дуговой координаты

$$s = s(t), \tag{1.3}$$

отсчитываемой от начальной точки О (рис. 1.4).

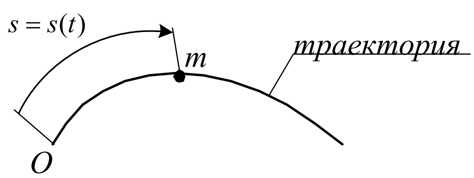


Рис. 1.4

О п р е д е л е н и е 1. *Зависимость, характеризующая изменение положения материальной точки при движении с течением времени, называется законом движения.*

Все перечисленные способы задания движения взаимосвязаны. Например, легко осуществляется переход от координатного способа к векторному

$$\overline{r}(t) = x(t)i + y(t)j + z(t)k$$

и наоборот (см. рис. 1.1 и рис. 1.2); переход от координатного к естественному способу основан на использовании известного дифференциального соотношения

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2},$$

связывающего элементарный отрезок дуги кривой ds траектории с её проекциями на оси координат, и определений производных

$$\dot{x} = \frac{dx}{dt},\ \dot{y} = \frac{dy}{dt},\ \dot{z} = \frac{dz}{dt},$$

откуда следует

$$dx = \dot{x}dt,\ dy = \dot{y}dt,\ dz = \dot{z}dt.$$

Подставляя последние выражения для dx, dy и dz в формулу для ds и интегрируя в последующем, выводят зависимость

$$s = \int_0^t \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}\ dt,$$

характеризующую связь законов движения точки в естественной и координатной формах.

О п р е д е л е н и е 2. *Траекторией движения точки называется линия в пространстве, которую описывает движущаяся точка.* Уравнение траектории при движении точки на плоскости xOy обычно записывают в явной или неявной формах:

$$y = f(x) \text{ или } F(x, y) = 0.$$

При движении точки в пространстве уравнение траектории немного сложнее, а именно: $z = f(x, y)$ или $F(x, y, z) = 0$.

3. Происхождение законов движения

Законы движения могут быть установлены различными способами, в том числе:

1. *Экспериментальным*, основанным на использовании ручной или автоматической записи значений координат движущейся точки как функций времени. Примером может служить, например, построение графика колебаний – виброграммы – с помощью вибрографа.

2. *Опытно-теоретическим,* связанным с простейшими логическими рассуждениями и вычислениями. Например, закон движения оси колеса автомобиля, движущегося с постоянной скоростью υ_0, устанавливается элементарно; он имеет вид $x = \upsilon_0 t$. Несколько сложнее находится закон движения произвольной точки колеса автомобиля (см. пример в конце лекции).

3. *Теоретическим методом*, основанным на интегрировании уравнений движения. Например, путем интегрирования *уравнения* колебаний $\ddot{x} + \omega^2 x = p$, приводящего к решению $x = A\sin\left(\omega t + \varphi\right)$, которое и является законом колебаний (см. лекцию 3 в [8]).

4. Скорость точки

а) Понятие (мгновенной) скорости точки вводится на основе *векторного способа* описания движения. Для этого на траектории рассматриваются два положения движущейся точки *M*, разделенные коротким конечным интервалом времени Δt (рис. 1.5). Перемещение точки в этом интервале оценивается приращением радиуса-вектора $\Delta\bar{r}$.

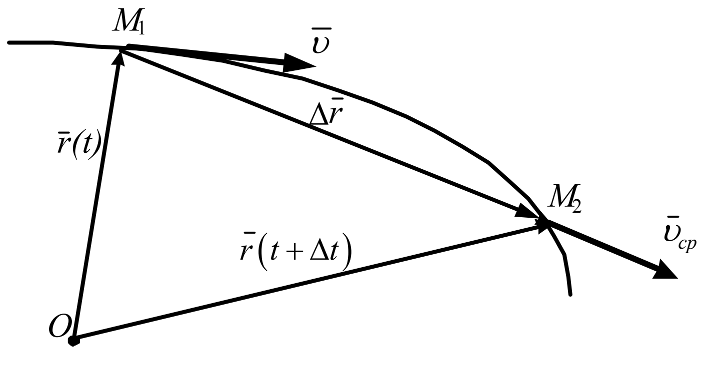


Рис. 1.5

О п р е д е л е н и е 3. *Средней скоростью движения точки на отрезке траектории $M_1 M_2$ называется отношение приращения радиуса-вектора $\Delta\overline{r}$ к интервалу времени Δt*:

$$\overline{\upsilon}_{cp} = \frac{\Delta\overline{r}}{\Delta t}.$$

О п р е д е л е н и е 4. *Скоростью* (мгновенной*) точки называется предел, к которому стремится величина средней скорости $\overline{\upsilon}_{cp}$ при стремлении интервала времени Δt к нулю*:

$$\overline{\upsilon} = \lim_{\Delta t\to 0}\overline{\upsilon}_{cp} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\overline{r}}{\Delta t} = \frac{d\overline{r}}{dt} = \overline{r}^{\bullet}.$$

Направление вектора скорости определяется направлением вектора средней скорости, стремящегося при уменьшении Δt к положению касательной к траектории в исходной точке M_1 (см. рис. 1.5).

б) При координатном способе описания движения точки:

1) в *декартовой системе* координат вектор скорости $\overline{\upsilon}$ может быть представлен с помощью его проекций вдоль соответствующих осей. Действительно, выполнив дифференцирование радиуса-вектора движущейся точки

$$\overline{r}(t) = x(t)i + y(t)j + z(t)k$$

по времени, получим:

$$\overline{\upsilon} = \frac{d\overline{r}(t)}{dt} = \frac{dx(t)}{dt}i + \frac{dy(t)}{dt}j + \frac{dz(t)}{dt}k.$$

Очевидно, проекции вектора $\overline{\upsilon}$ на оси координат равны производным $dx(t)/dt, dy(t)/dt$ и $dz(t)/dt$, т.е.

$$\upsilon_x = \frac{dx(t)}{dt} = \dot{x}(t),$$

$$\upsilon_y = \frac{dy(t)}{dt} = \dot{y}(t),$$

$$\upsilon_z = \frac{dz(t)}{dt} = \dot{z}(t).$$

Таким образом, вектор скорости $\overline{\upsilon}$ можно представить в виде

$$\overline{\upsilon} = \upsilon_x i + \upsilon_y j + \upsilon_z k.$$

Его модуль равен:

$$\upsilon = \sqrt{\upsilon_x^2 + \upsilon_y^2 + \upsilon_z^2} = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}.$$

Направление вектора $\bar{\upsilon}$ определяется направляющими косинусами:

$$\cos\alpha = \frac{\dot{x}}{\upsilon},\ \cos\beta\frac{\dot{y}}{\upsilon},\ \cos\gamma\frac{\dot{z}}{\upsilon},$$

где α, β и γ – углы, образованные вектором $\bar{\upsilon}$ с осями x, y и z (рис. 1.6).

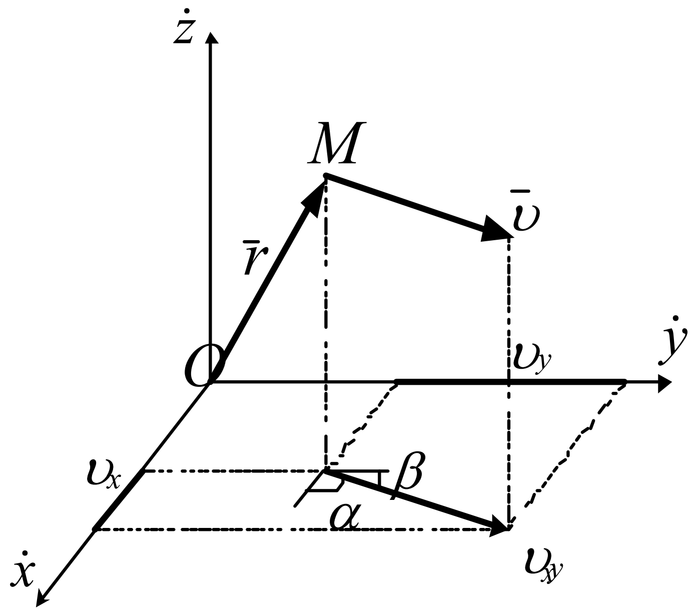


Рис. 1.6

в) *в полярной системе* координат вектор скорости может быть разложен в радиальном и поперечном направлениях (рис. 1.7).

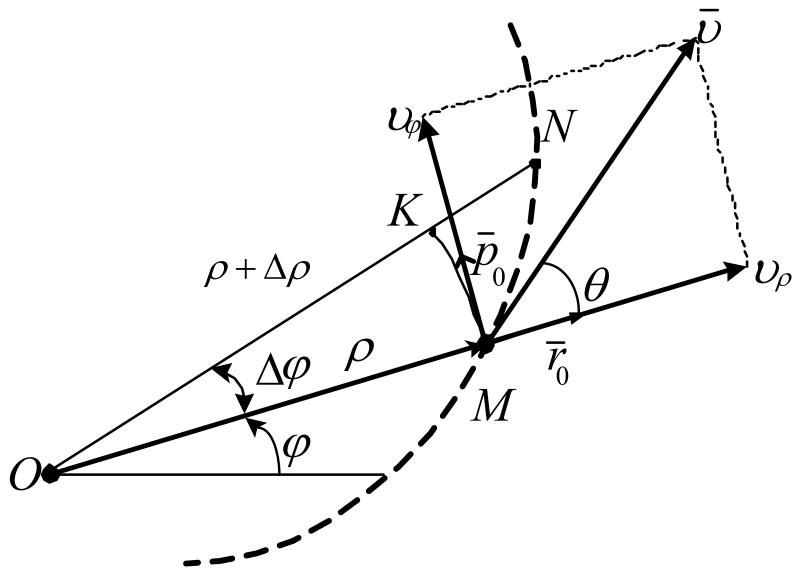


Рис. 1.7

Описание вектора $\bar{\upsilon}$ в полярной системе координат можно дать независимо от предыдущего его определения. Действительно, рассматривая два положения (*M* и *N*) движущейся точки*,* разделенных коротким интервалом времени Δt, на рисунке следует показать, во-первых, приращения дуговой координаты $\Delta\varphi$ и радиальной, характеризуемой отрезком *KN*=*ON*-*OK*=*ON*-*OM*=$\rho+\Delta\rho-\rho=\Delta\rho$ (рис. 1.7). Принимая, по определению, величину средней скорости движения в радиальном направлении, равной

$$\left(\upsilon_\rho\right)_{\text{ср}} = \frac{\Delta\rho}{\Delta t},$$

а в поперечном (трансверсальном) –

$$\left(\upsilon_\varphi\right)_{\text{ср}} = \rho\frac{\Delta\varphi}{\Delta t}$$

и переходя в этих выражениях к пределам (полагая Δt стремящимся к нулю), получаем:

$$\upsilon_\rho = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\rho}{\Delta t} = \frac{d\rho}{dt} = \dot{\rho}\,,$$

$$\upsilon_\varphi = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\varphi}{\Delta t} = \rho\frac{d\varphi}{dt} = \rho\dot{\varphi} = \omega\rho,$$

где введено обозначение угловой скорости $\omega=\dot{\varphi}$. Если воспользоваться орт-векторами $\overline{r}_0, \overline{p}_0$ радиального и конвенционального направлений, то вектор скорости можно будет записать в виде

$$\overline{\upsilon} = \upsilon_\rho\overline{r}_0 + \upsilon_\varphi\overline{p}_0.$$

Модуль скорости в полярных координатах равен:

$$\upsilon = \sqrt{\upsilon_\rho^2+\upsilon_\varphi^2} = \sqrt{\dot{\rho}^2+\rho^2\dot{\varphi}^2}.$$

Угол Θ, составленный вектором скорости $\overline{\upsilon}$ с радиальным направлением, определяется по формуле

$$\text{tg}\Theta = \frac{\rho\dot{\varphi}}{\dot{\rho}} = \rho\frac{d\varphi}{d\rho}.$$

в) *При естественном способе* задания движения, когда задано изменение дуговой координаты $s=s(t)$, радиус-вектор точки *M* является сложной функцией $\overline{r}=\overline{r}(s)=\overline{r}\left[s\left(t\right)\right]$ (рис. 1.8). Поэтому при определении скорости по формуле (1.1) следует воспользоваться правилом вычисления предела сложной функции, а именно:

$$\bar{\upsilon} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \bar{r}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \left[\frac{\Delta \bar{r}}{\Delta s} \cdot \frac{\Delta s}{\Delta t} \right] = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \bar{r}}{\Delta s} \cdot \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} \ .$$

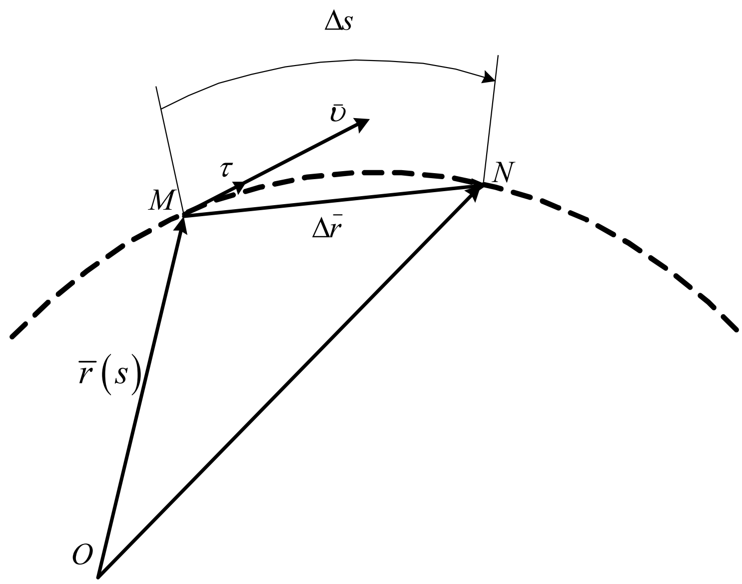


Рис. 1.8

Из дифференциальной геометрии [2] известно, что

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \bar{r}}{\Delta s} = \frac{d\bar{r}}{ds} = 1 \cdot \tau \,,$$

где τ – единичный вектор касательной к траектории. Следовательно, скорость точки определяется по формуле

$$\bar{\upsilon} = \upsilon_\tau \, \tau \,,$$

где $\upsilon_\tau = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{\Delta s}{\Delta t} = \dfrac{ds}{dt} = \dot{s}$ – модуль скорости.

5. Определение закона движения точки колеса при равномерном качении

Пусть колесо радиуса R катится равномерно со скоростью υ_0 (рис. 1.9). Рассматривая произвольную точку M обода колеса в некоторый момент времени t и изображая дополнительно пунктиром положение колеса в начальный момент времени, когда эта точка находилась в соприкосновении с основанием в точке O, можно установить, что

$$OK = MK. \qquad (*)$$

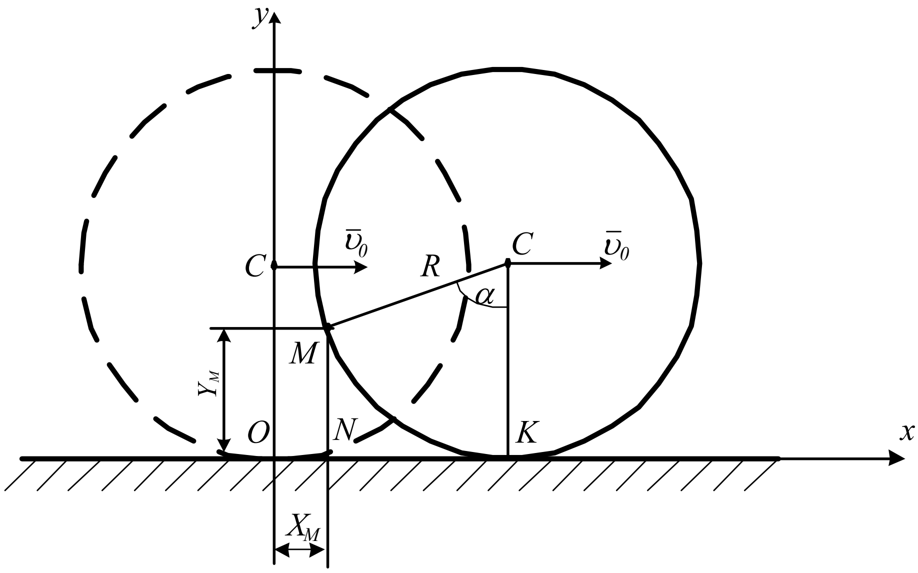


Рис. 1.9

Очевидно, при равномерном движении отрезок пути $OK = \upsilon_0 t$. Дуга $MK = \alpha R$. Из равенства (∗) следует, что

$$\upsilon_0 t = \alpha R.$$

Отсюда находится центральный угол $\alpha = \dfrac{\upsilon_0}{R} t.$

Координаты точки M в текущий момент времени в принятой системе отсчёта определяются по формулам:

$$X_{\text{м}} = OK - NK = \upsilon_0 t - R\sin\alpha = \upsilon_0 t - R\sin\frac{\upsilon_0}{R}t,$$

$$Y_{\text{м}} = MH = R - R\cos\alpha = R(1 - \cos\frac{\upsilon_0}{R}t).$$

Данные функции, очевидно, являются *законом движения точки M* в координатном виде. Одновременно они характеризуют уравнение траектории точки M – циклоиды, представленной в параметрической форме.

Контрольные вопросы

1. Перечислите основные формы задания движения точки.
2. Что называется законом движения точки ?
3. Дайте определение скорости точки. Каково направление вектора скорости?
4. Запишите выражение для вектора скорости точки при координатном способе описания движения.
5. Каким образом устанавливается закон движения точки колеса при его качении по прямой?

Лекция 2. УСКОРЕНИЕ МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ. КЛАССИФИКАЦИЯ ВИДОВ ДВИЖЕНИЯ ТОЧКИ

1. Ускорение точки

а) *При векторном способе задания движения*

Если на некотором малом отрезке траектории в двух ее точках известны значения скоростей $\bar{\upsilon}_1$ и $\bar{\upsilon}_2$ (рис. 2.1) через короткий интервал времени Δt,

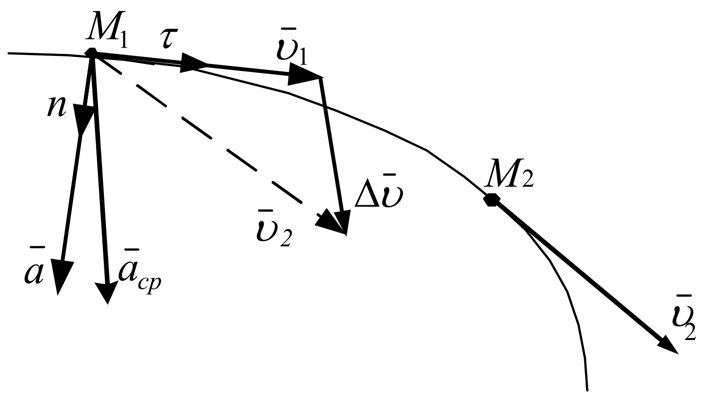


Рис. 2.1

то отношение их разности (приращения)

$$\Delta\bar{\upsilon} = \bar{\upsilon}_2 - \bar{\upsilon}_1$$

к интервалу времени Δt, в течение которого произошло это изменение, называется *средним ускорением*, т. е.

$$\bar{a}_{cp} = \frac{\Delta\bar{\upsilon}}{\Delta t}.$$

Графически оно изображается вектором, совпадающим с направлением вектора $\Delta\bar{\upsilon}$.

Определение 1. Ускорением (мгновенным) точки называется предел, к которому стремится величина среднего ускорения при уменьшении интервала Δt до бесконечно малого значения

$$\bar{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \bar{a}_{cp} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\bar{\upsilon}}{\Delta t} = \frac{d\bar{\upsilon}}{dt} = \bar{\upsilon}^{\bullet}.$$

Выполнив подстановку $\bar{\upsilon} = \bar{r}^{\bullet}$, получим:

$$\bar{a} = \bar{\upsilon}^{\bullet} = \bar{r}^{\bullet\bullet},$$

т.е. ускорение точки при векторном способе задания движения равно второй производной радиуса-вектора $\bar{r}(t)$ по времени.

б) *При координатном способе задания движения:*

1) в декартовых координатах

На основе формулы для скорости

$$\overline{\upsilon} = \upsilon_x i + \upsilon_y j + \upsilon_z k = \dot{x}(t) i + \dot{y}(t) j + \dot{z}(t) k$$

после ее дифференцирования по t при i, j, k, не изменяющих направлений при движении точки, находят ускорение

$$\overline{a} = \overline{\upsilon}^{\cdot} = \dot{\upsilon}_x i + \dot{\upsilon}_y j + \dot{\upsilon}_z k = \ddot{x}(t) i + \ddot{y}(t) j + \ddot{z}(t) k\ .$$

Обозначив $a_x = \ddot{x}(t)$, $a_y = \ddot{y}(t)$, $a_z = \ddot{z}(t)$ – компоненты вектора ускорения $\overline{a}$, получим $\overline{a} = a_x i + a_y j + a_z k$.

Модуль ускорения равен:

$$|\overline{a}| = a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}\,.$$

Направляющие косинусы вектора $\overline{a}$ равны:

$$\cos\alpha = \frac{a_x}{a},\ \ \cos\beta = \frac{a_y}{a},\ \ \cos\gamma = \frac{a_z}{a}.$$

2) в полярных координатах

В этом случае исходными соотношениями для вывода формулы ускорения являются формулы для проекций скорости в полярной системе координат (см. лекцию 1):

$$\upsilon_\rho = \dot{\rho},$$

$$\upsilon_\varphi = \rho\dot{\varphi},$$

$$\overline{\upsilon} = \upsilon_\rho \overline{r}_0 + \upsilon_\varphi \overline{p}_0\,,$$

где $\overline{r}_0$ и $\overline{p}_0$ – единичные векторы, направленные вдоль радиуса ρ и перпендикулярно к нему.

Дифференцируя последнее выражение по t, ускорение точки можно представить в виде разложения

$$\overline{a} = a_{\text{рад}} \overline{r}_0 + a_{\text{тр}} \overline{p}_0\,,$$

где

$$a_{\text{рад}} = \ddot{\rho} - \dot{\varphi}^2 \rho$$

- радиальная составляющая вектора,

$$a_{\text{тр}} = \rho\ddot{\varphi} + 2\dot{\varphi}\dot{\rho}$$

- поперечная (трансверсальная, переносная) составляющая (рис. 2.2).

Вывод этих формул приводится в лекции № 7, посвящённой сложному движению точки.

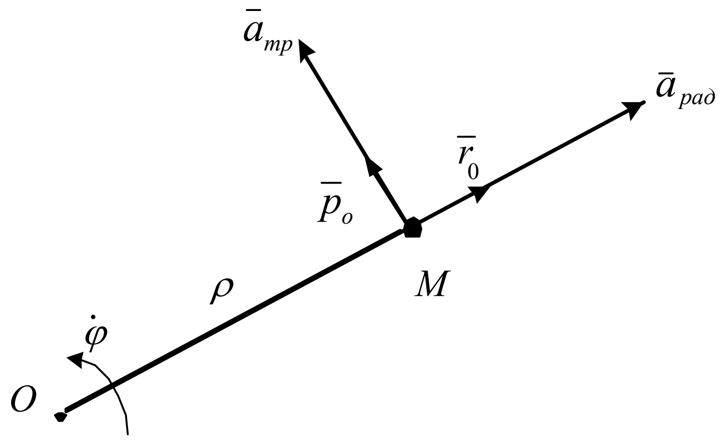


Рис. 2.2

в) *При естественном способе задания движения*

На основе формулы для скорости

$$\bar{\upsilon} = \upsilon_\tau \cdot \tau$$

в результате дифференцирования по времени находят

$$\bar{a} = \frac{d\bar{\upsilon}}{dt} = \frac{d\upsilon_\tau}{dt} \cdot \tau + \upsilon_\tau \cdot \frac{d\tau}{dt}.$$

Производная $d\tau / dt$ может быть переписана с использованием основной переменной в следующей форме:

$$\frac{d\tau}{dt} = \frac{d\tau}{ds} \cdot \frac{ds}{dt},$$

где, по-прежнему, $\dfrac{ds}{dt} = \upsilon_\tau$, а производная

$$\frac{d\tau}{ds} = \frac{1}{\rho} n$$

определяет кривизну траектории $\varkappa = \dfrac{1}{\rho}$, n – единичный вектор нормали в рассматриваемой точке, ρ – радиус кривизны траектории (рис. 2.3).

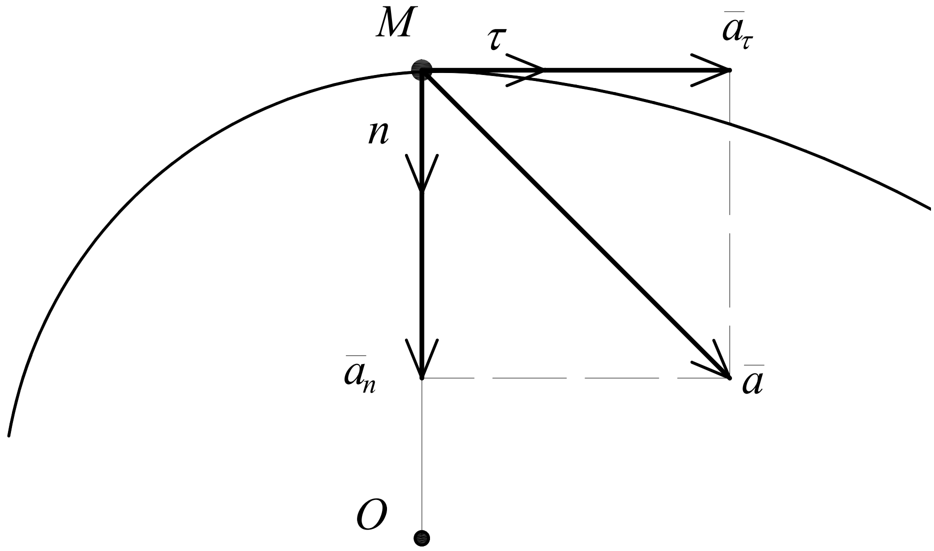


Рис. 2.3

Таким образом, вектор ускорения $\bar{a}$ определяется своими компонентами разложения по касательной и нормали к кривой

$$\bar{a} = a_\tau \tau + a_n n,$$

где величина

$$a_\tau = \frac{d\upsilon_\tau}{dt} = \ddot{s}$$

называется касательным ускорением, а

$$a_n = \frac{\upsilon_\tau^2}{\rho} = \frac{(\dot{s})^2}{\rho}$$

- нормальным*.

* Как орт касательной τ, так и орт нормали n, являющиеся векторами, в тексте лекций чертой не выделяются.

2. Классификация видов движения точки

а) по величине ускорения.

Определение 2. Движение точки называется *равномерным*, если $\upsilon = \text{const}$ или $\bar{a} \equiv 0$;

Определение 3. Движение точки называется *равнопеременным*, если

$$a = \text{const};$$

при

$$a \ > 0 \ – \textit{ ускоренным},$$

$$a \ < 0 \ – \textit{ замедленным движением}.$$

б) по виду траектории движение может быть:

1) *Прямолинейное, в частности, ускоренное движение*

Уравнение движения выводится на основе определения 2, т.е. полагают

$$a \ = \ddot{s} = a = \text{const},$$

$$\ddot{s} = \frac{d^2 s}{dt^2} = a.$$

Интегрируя по *t*, находят

$$\upsilon = \dot{s} = at + c_1.$$

Повторяя операцию, приходят к закону

$$s = \frac{at^2}{2} + c_1 t + c_2,$$

где c_1 и c_2 – постоянные интегрирования. Их можно установить на основе начальных условий – при $t = t_0$: $\upsilon = \upsilon_0$, $s = s_0$.

Подставив эти значения в формулы для υ и s:

$$\upsilon_0 = at_0 + c_1, \qquad s_0 = \frac{at_0^2}{2} + c_1 t_0 + c_2$$

и решив систему уравнений относительно c_1 и c_2:

$$c_1 = \upsilon_0 - at_0,$$

$$c_2 = s_0 - \frac{at_0^2}{2} - \left(\upsilon_0 - at_0\right) t_0,$$

находят закон движения точки при заданных начальных условиях и ее скорость в текущий момент времени:

$$s = \frac{a\left(t - t_0\right)^2}{2} + \upsilon_0\left(t - t_0\right) + s_0, \quad \upsilon = a\left(t - t_0\right) + \upsilon_0.$$

2) *Движение точки по окружности*

Воспользуемся естественным способом задания движения

$$s = M_1 M_2 = R\varphi(t),$$

где R – радиус окружности, $\varphi(t)$ – центральный угол дуги $\cup M_1 M_2$, переменный по времени (рис. 2.4).

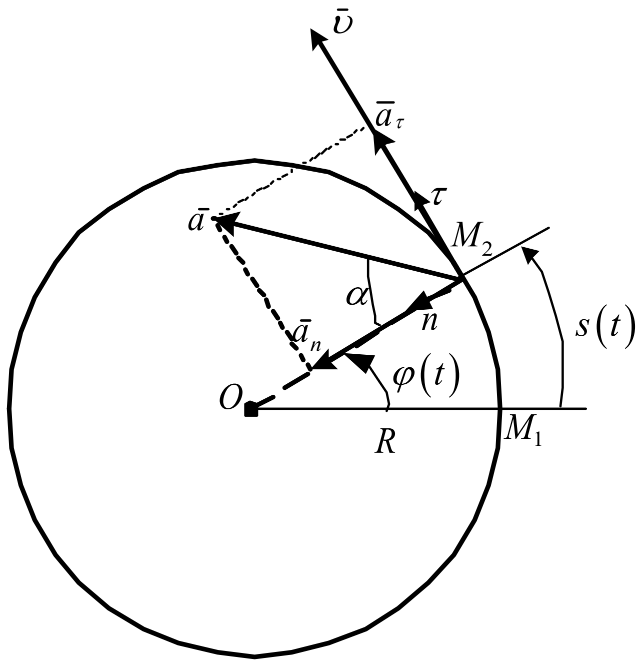


Рис. 2.4

Пользуясь определением скорости при естественном способе задания движения, можно вывести формулу скорости точки при движении по окружност:и

$$\upsilon = \upsilon_\tau = \frac{ds}{dt} = R\frac{d\varphi}{dt} = \omega R,$$

где $\omega = \dfrac{d\varphi}{dt}$

- угловая скорость.

Итак,

$$\upsilon = \omega R.$$

Направление вектора скорости определяется касательной в рассматриваемой точке.

Ускорение точки

$$\overline{a} = a_\tau \tau + a_n n,$$

где касательная составляющая вектора ускорения

$$a_\tau = \frac{d\upsilon}{dt} = R\frac{d\omega}{dt} = \varepsilon R;$$

$\varepsilon = \dfrac{d\omega}{dt}$ – угловое ускорение; нормальное ускорение

$$a_n = \frac{\upsilon^2}{R} = \frac{\omega^2 R^2}{R} = \omega^2 R.$$

Модуль ускорения

$$\left|\bar{a}\right| = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2} = R\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4};$$

его направление характеризуется углом α, определяемым соотношением

$$\mathrm{tg}\alpha = \frac{a_\tau}{a_n} = \frac{\varepsilon}{\omega^2}.$$

Если $\upsilon = \mathrm{const}$, то ускорение $\bar{a}$ направлено по нормали, т.к. $a_\tau = 0$.

3. Решение задач кинематики точки

На основе полученных формул легко решаются задачи, в которых рассматривается движение материальных частиц или твёрдых тел. Подобные задачи встречаются на экзаменах в школе или при поступлении в институт. Покажем на двух типичных примерах последовательность решения задач кинематики движения точки.

а) Какую угловую скорость приобретет катушка ниток, удерживаемая в левой руке, если правой резко дернуть конец нитки в течение 1 с, размотав при этом 50 см? Диаметр катушки равен 20 мм.

Очевидно, в данном случае движение конца нитки является ускоренным. Следовательно, для описания движения необходимо воспользоваться законом ускоренного прямолинейного движения точки и соответствующей формулой скорости:

$$s = \frac{at^2}{2} + \upsilon_0 t + s_0, \quad \upsilon = at + \upsilon_0,$$

приняв $s_0 = \upsilon_0 = 0$ в начальный момент времени (t=0.) Тогда указанные выражения упрощаются:

$$s = \frac{at^2}{2}, \quad \upsilon = at.$$

Далее к ним можно относиться как к системе двух уравнений относительно величин ускорения a и скорости υ. В рассматриваемом примере для получения решения достаточно определить a из первого соотношения и подставить её значение во второе. В результате можно найти скорость $\upsilon = \frac{2S}{t}$.

Величина угловой скорости по окончании процесса разматывания нитки вычисляется с помощью формулы Эйлера, т.е.

$$\omega = \frac{\upsilon}{R} = \frac{2S}{Rt} = \frac{2 \cdot 0{,}5}{0{,}1 \cdot 1} = 10 \ \text{с}^{-1}.$$

б) Пусть требуется найти траекторию, скорость и ускорение груза, сброшенного с самолета, летевшего на высоте 1 км со скоростью 720 км/ч.

В этой задаче предлагается более общий подход к решению. Рассматривая падающий груз в системе координат, начало которой (точка O) совпадает с положением самолета в момент сбрасывания (рис. 2.5,а), можно утверждать, что проекции ускорений груза на оси координат равны:

$$a_x = \frac{d^2x}{dt^2} = 0, \tag{2.1,а}$$

$$a_y = \frac{d^2y}{dt^2} = g, \tag{2.1,б}$$

где g=9,81 м/с^2 – ускорение свободного падения, x, y – координаты груза в текущий момент времени t.

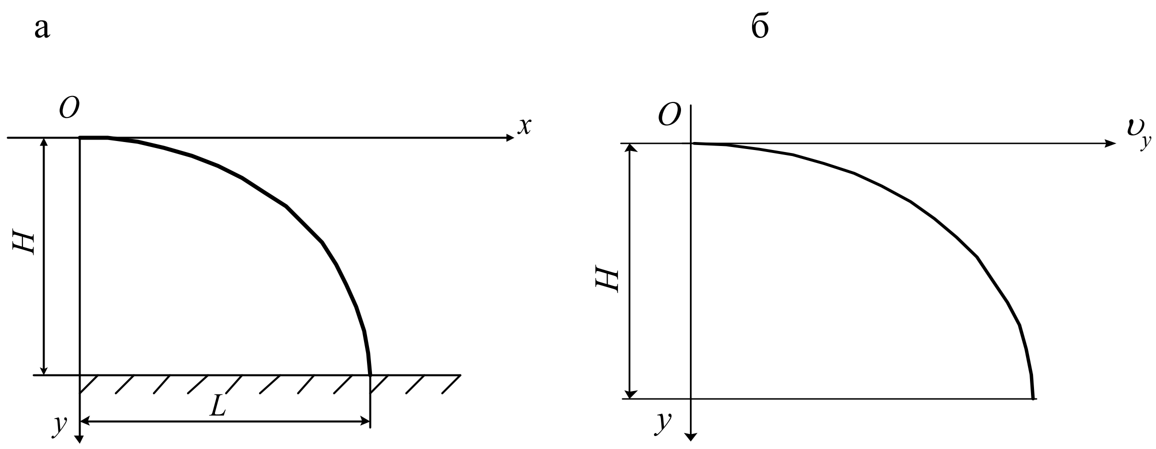


Рис. 2.5

Для обоснования формулы (2.1,б) можно опереться на опыты Галилея: все тела в поле тяготения Земли падают с постоянным ускорением *g*. Соотношение (2.1,а) можно объяснить на основе принципа Галилея. Впрочем, может быть лучше воспользоваться основным уравнением динамики, которое известно по школе.

Итак, к указанным соотношениям можно относиться не только как к определениям (ускорения), но и как к уравнениям движения. Очевидно, чтобы найти отсюда координаты *x,y* следует проинтегрировать эти уравнения.

Интегралы первого уравнения имеют вид:

$$\dot{x} = c_1, \tag{2.2,а}$$

$$x = c_1 t + c_2, \tag{2.2,б}$$

а второго –

$$\dot{y} = qt + c_3, \tag{2.3,а}$$

$$y = \frac{1}{2} q t^2 + c_3 t + c_4, \tag{2.3,б}$$

где c_1, c_2, c_3, c_4 – произвольные постоянные, определяемые из начальных условий: при $t = 0$ $x = y = 0$, $\dot{x} = \upsilon_x = \upsilon_0 = 200$ м/с; υ_0 – скорость самолета, она же начальная скорость груза в горизонтальном направлении; $\dot{y} = \upsilon_y = 0$. Подставив начальные значения координат и проекций скорости груза в общее решение (2.2,а), (2.2,б), найдем постоянные $c_1 = \upsilon_0$, $c_2 = c_3 = c_4 = 0$. Теперь закон падения груза принимает следующий вид:

$$x = \upsilon_0 t, \tag{2.4,а}$$

$$y = \frac{1}{2} g t^2. \tag{2.4,б}$$

После исключения времени *t* из закона движения найдем уравнение траектории

$$y = \frac{1}{2} \cdot \frac{g}{\upsilon_0^2} x^2,$$

являющееся уравнением параболы (см. рис. 2.5,а). Подставив сюда числовые значения g, υ_0, получим уравнение

$$y = \frac{1}{2} \cdot 1,25 \cdot 10^{-4} x^2,$$

на основе которого легко определить расстояние, на которое удалится груз от места сбрасывания. Действительно, приняв в последнем уравнении y=H=1000 м, придем к уравнению относительно абсциссы x

$$0,625 \cdot 10^{-4} x^2 = \text{H} ,$$

откуда вычислим значение

$$x = \sqrt{\frac{\text{H}}{0,625 \cdot 10^{-4}}} = \sqrt{\frac{1000}{0,625 \cdot 10^{-4}}} = 2828,4 \text{ м} = 2 \text{ км } 828 \text{ м},$$

т.е. груз, сброшенный с самолета в условиях данной задачи, приземлится на расстоянии около 3 км от места выброса.

Более полную информацию о падении груза можно получить, построив фазовую траекторию. С этой целью необходимо найти зависимость между ординатой y движущегося груза и компонентой

$$\upsilon_y = gt \qquad (2.5)$$

его скорости*, которая определяется путём дифференцирования выражения (2.4,б). Выразив t из равенства (2.5) и подставив его в затем в (2.4,б), после несложного преобразования получим уравнение фазовой траектории

$$y = \frac{1}{2g} \upsilon_y{}^2, \qquad (2.6)$$

графиком которой является парабола (рис. 2.5,б).

С другой стороны, по уравнению фазовой траектории нетрудно найти закон движения. Действительно, т.к., по определению, $\upsilon_y = dy/dt$, а в соответствии с формулой (2.6) проекция скорости

$$\upsilon_y = \sqrt{2gy},$$

то, очевидно, справедливо дифференциальное уравнение

$$\frac{dy}{dt} = \sqrt{2gy} .$$

Оно может быть проинтегрировано после разделения переменных

$$dt = \frac{dy}{\sqrt{2gy}} .$$

* Аналогичную зависимость абсциссы x от компоненты v_x находить не нужно, т.к. она, по существу, установлена ранее в процессе интегрирования – проекция скорости v_x постоянна при движении груза в горизонтальном направлении.

Взяв интегралы от обеих частей, найдем закон падения груза

$$y = \frac{gt^2}{2},$$

который уже известен нам по (2.4,б).

Таким образом, фазовая траектория является более общей характеристикой движения точки, т.к. в ней содержится ещё и закон движения. Совмещение на одном рисунке обычной и фазовой траекторий даёт полную информацию о характере движения.

Примечание. Решение большого класса задач по кинематике движения материальной точки можно выполнять в автоматическом режиме с привлечением компьютера. Автором разработан пакет программ для ПЭВМ, в которых на основе закона движения материальной точки, заданного в одной из известных форм, осуществляются построение траектории движения, определение скорости и ускорения точки в текущий момент времени, а также отыскивается преобразование от одного способа описания движения к другому с выводом уравнения фазовой траектории и построением её графика.* Очевидно, что данные программы могут быть использованы для проверки решений задач по кинематике движения материальной точки, выполненных каким- либо иным способом.

Контрольные вопросы

1. Что называется ускорением точки? Как оно направлено по отношению к траектории движения ?
2. Запишите выражение для ускорения при координатном способе описания движения.
3. Какое движение точки называется равнопеременным ? Каков закон этого движения?
4. Как определить направление вектора ускорения точки, движущейся по окружности ?
5. Чем отличается фазовая траектория от обычной траектории ?

* См. Методические указания по выполнению расчётно-графической работы «Кинематика материальной точки». Ред. Монахов В.А. – Пенза: ПГАСА, 2001. – 59 с.

Лекция №3. КИНЕМАТИКА ТВЕРДОГО ТЕЛА. ПРОСТЕЙШИЕ ДВИЖЕНИЯ ТВЕРДОГО ТЕЛА

1. Поступательное движение тела

Поступательное движение является, наряду с вращательным, простейшим движением, поскольку его кинематические характеристики легко находятся по формулам, известным из кинематики материальной точки.

Определение 1. *Движение твердого тела, при котором произвольная прямая, выделенная в нем, остается параллельной самой себе, называется поступательным*.

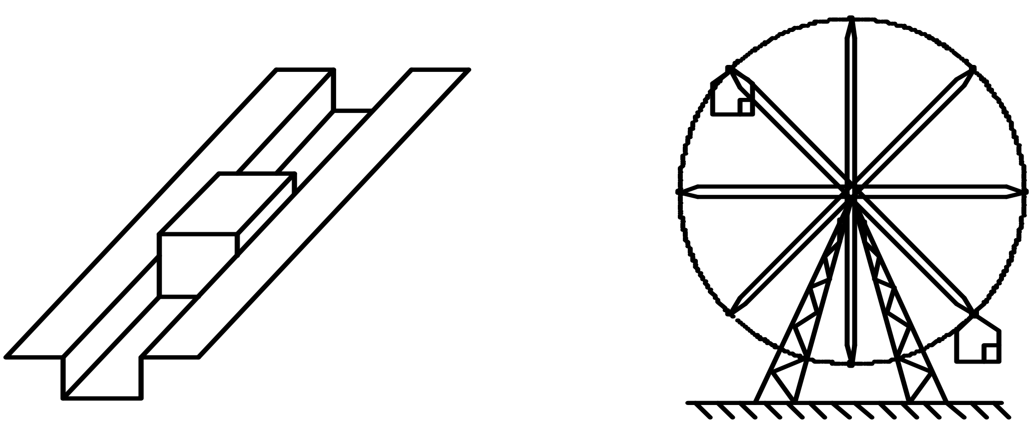


Рис. 3.1

Примерами такого движения служат скольжение кирпича по узкому наклонному желобу (рис. 3.1,а), движение подвесной люльки колеса обозрения (рис. 3.1,б) и др.

Движение тела можно описать

- *векторным способом*

$$\overline{\rho}_M(t) = \overline{\rho}_0(t) + \overline{r}\,. \qquad (3.1)$$

Здесь $\overline{\rho}_M(t)$ – радиус-вектор произвольной точки M тела; $\overline{\rho}_0(t)$ – радиус-вектор, характеризующий положение некоторой базовой точки O тела относительно неподвижной системы координат $P\eta\theta\zeta$ (рис. 3.2).

Таким образом, движение произвольной точки M твердого тела при поступательном движении задается через движение другой, базовой (основной) точки O, характеризуемой переменным во времени радиусом-вектором $\overline{\rho}_0(t)$ и неизменяемым отрезком OM – вектором $\overline{r}$, фиксированным в декартовой системе координат $Oxyz$, жёстко связанной с движущимся телом.

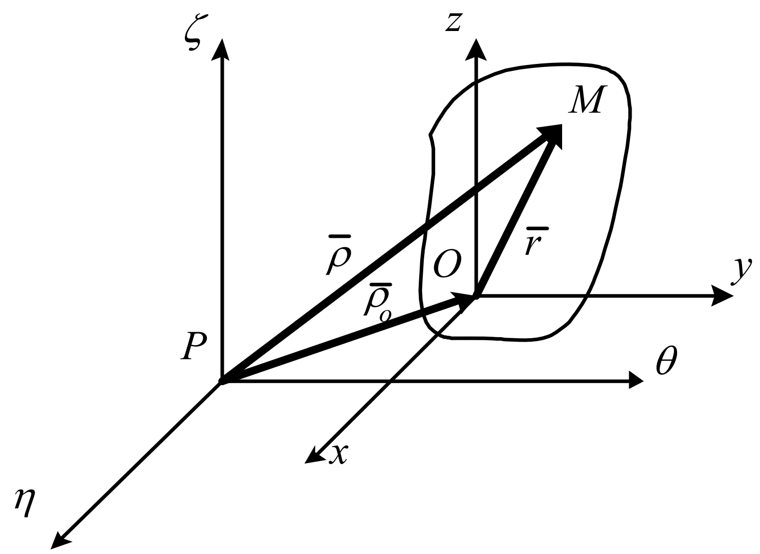


Рис. 3.2

- *Координатная форма* записи закона имеет вид

$$\eta_M = \eta_0 + (OM)_x,\ \ \theta_M = \theta_0 + (OM)_y,\ \ \zeta_M = \zeta_0 + (OM)_z, \tag{3.2}$$

где η_M, η_0, θ_M, θ_0, ζ_M, ζ_0 – декартовы координаты точек *M*, *O* в неподвижной системе координат $P\eta\theta\zeta$; $(OM)_x = x_M$, $(OM)_y = y_M$, $(OM)_z = z_M$ – проекции отрезка *OM* на оси системы координат $Oxyz$, присоединённой к движущемуся телу*.

Закон поступательного движения тела можно описать и

- в *матричном виде*

$$\overline{\rho} = [W]\overline{r},$$

если воспользоваться так называемой матрицей переноса или сдвига [9]

$$[W] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \eta_0 \\ 0 & 1 & 0 & \theta_0 \\ 0 & 0 & 1 & \zeta_0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \tag{3.3}$$

с помощью которой координаты точки *M*, представленные расширенным за счёт дополнительной компоненты (единицы) вектор-столбцом

*Подвижную систему некоторые авторы называют также *локальной*, а стационарную – *абсолютной* [1].

$\overline{\rho} = (\eta_M, \theta_M, \zeta_M,\ 1)^T$, оказывается возможным выразить через вектор-столбец $\overline{r} = \left(x_M, y_M, z_M,\ 1\right)^T$, характеризующий положение произвольной точки M тела в системе координат, движущейся вместе с телом (прил. 1).

2. Теорема о траекториях точек твердого тела при поступательном движении

При поступательном движении траектории всех точек тела совпадают, т.е. подобны.

Пусть движение тела задано векторным способом (рис. 3.3)

$$\overline{r}_M = \overline{r}_O + \overline{OM},$$

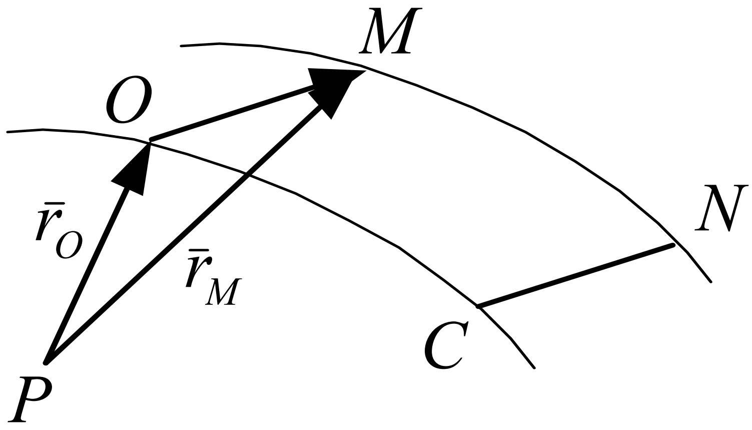


Рис. 3.3

Если при движении тела точка O описывает траекторию OC, то траектория точки M будет отстоять от линии OC на одинаковом расстоянии от нее, т.к. отрезок OM не изменяется по модулю и сохраняется параллельным самому себе. Таким образом, линия MN повторяет очертание линии OC и при наложении совпадает с ней.

3. Теорема о скоростях и ускорениях точки тела при поступательном движении

При поступательном движении тела скорости и ускорения всех точек тела имеют одинаковые значения.

Продифференцируем закон поступательного движения тела по времени

$$\frac{d\overline{r}_M}{dt} = \frac{d\overline{r}_O}{dt} + \frac{d\overline{OM}}{dt}.$$

Так как при поступательном движении отрезок OM остается неизменным по модулю и сохраняется параллельным, то производная

$$\frac{d\overline{OM}}{dt} \equiv 0.$$

Следовательно,

$$\frac{d\overline{r}_M}{dt} = \frac{d\overline{r}_O}{dt},$$

т.е. $\overline{\upsilon}_M = \overline{\upsilon}_O$,

что означает равенство скоростей любых точек тела.

Дифференцируя ещё раз, получим

$$\frac{d^2\overline{r}_M}{dt^2} = \frac{d^2\overline{r}_O}{dt^2}.$$

Следовательно, справедливо выражение

$$\overline{a}_M = \overline{a}_O,$$

указывающее на равенство ускорений всех точек тела при поступательном движении.

4. Вращательное движение тела

О п р е д е л е н и е 2**.** *Движение тела, при котором некоторая прямая, неизменно связанная с телом, остается неподвижной, называется вращательным*.

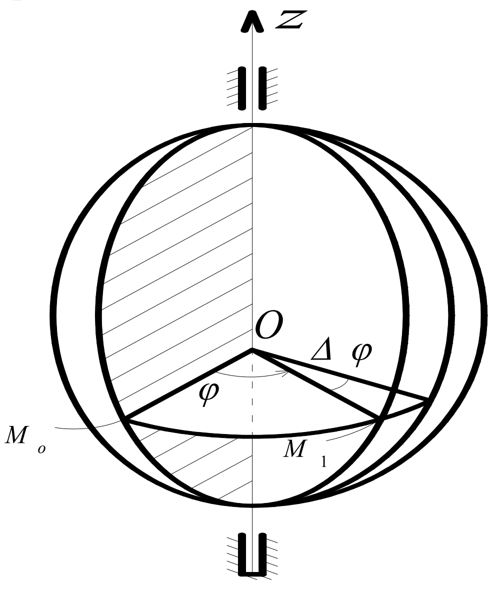


Рис. 3.4

Данная прямая называется *осью вращения*.

Вращательное движение задается функцией изменения двугранного угла $\varphi(t)$, образованного некоторой плоскостью, проходящей через ось в начальном положении, и той же плоскостью, находящейся в текущем состоянии (рис. 3.4).

Двугранный угол M_0OM_1 называется *углом поворота* φ тела. Зависимость величины угла поворота от времени $\varphi = \varphi(t)$ называется *законом вращения*.

Угол φ *считается положительным* $(\varphi > 0)$, *если наблюдатель, глядя со стороны острия оси Oz, видит тело вращающимся против хода часовой стрелки.*

5. Угловые скорости и ускорения тела

По определению, *угловой скоростью* тела называется величина

$$\omega = \lim_{\Delta \to 0} \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} = \frac{d\varphi}{dt} = \dot{\varphi} \quad \left(\frac{\text{рад}}{\text{с}}\right).$$

Угловая скорость положительна, если тело вращается против хода часовой стрелки для наблюдателя, смотрящего на острие оси *Oz*.

Угловым ускорением называется величина

$$\varepsilon = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \frac{d\omega}{dt} = \dot{\omega} = \ddot{\varphi} \quad \left(\frac{\text{рад}}{\text{с}^2}\right).$$

6. Закон равнопеременного вращения тела

По определению этого вида движения

$$\varepsilon = \text{const},$$

т.е.

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} = \varepsilon.$$

Общие интегралы этого уравнения имеют вид

$$\omega = \varepsilon t + c_1,$$

$$\varphi = \frac{\varepsilon t^2}{2} + c_1 t + c_2,$$

где c_1, c_2 – постоянные интегрирования. Они находятся из начальных условий – при $t = t_0 : \varphi = \varphi_0, \omega = \omega_0$. Используя последние, приходят к закону вращения тела в виде

$$\varphi = \frac{\varepsilon\left(t - t_0\right)^2}{2} + \omega_0\left(t - t_0\right) + \varphi_0.$$

Угловая скорость вращения равна:

$$\omega = \varepsilon\left(t - t_0\right) + \omega_0 .$$

Здесь отмечается полная аналогия с формулами, характеризующими закон и скорость равнопеременного прямолинейного движения материальной точки (см. лекцию №2).

7. Вектор скорости точки тела при вращении. Формула Эйлера

Пусть ось вращения тела совпадает с осью Oz декартовой системы координат. Причем, эта система жестко связана (спаяна) с вращающимся телом (рис.3.5).

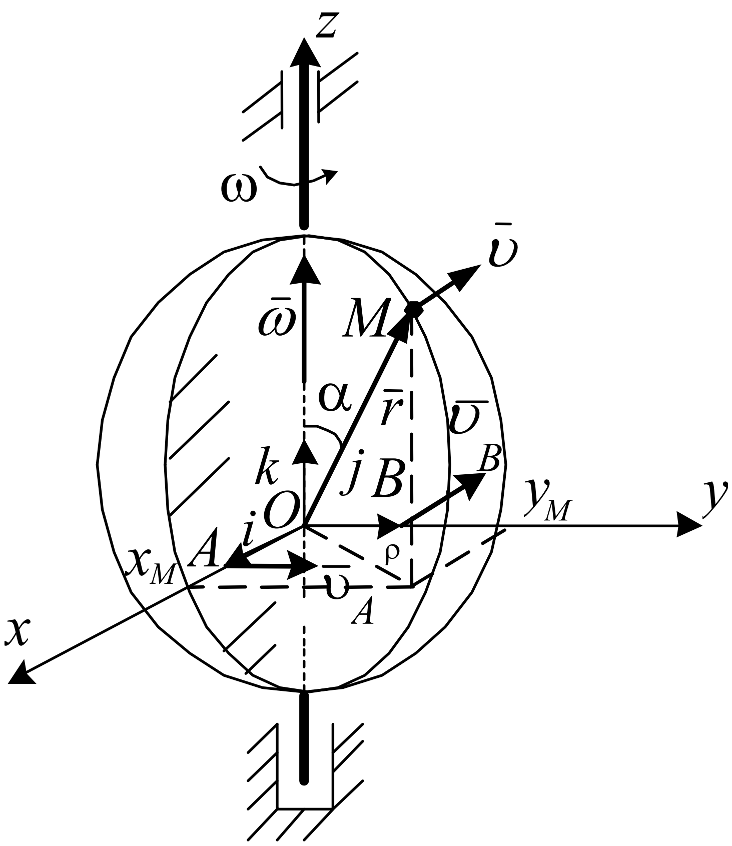


Рис. 3.5

Положение любой точки M тела можно описать радиусом-вектором $\overline{r}$

$$\overline{r} = xi + yj + zk.$$

Скорость точки определяется в результате дифференцирования $\overline{r}$ по времени

$$\overline{\upsilon} = \frac{d\overline{r}}{dt} = x\frac{di}{dt} + y\frac{dj}{dt} + z\frac{dk}{dt} .$$

При дифференцировании здесь принято во внимание, что координаты точки M в локальной системе не изменяются со временем. Производные di/dt, dj/dt определяют скорости точек A и B (концов соответствующих ортов):

$$\overline{\upsilon}_A = \frac{di}{dt} = \omega j \quad , \quad \overline{\upsilon}_B = \frac{dj}{dt} = -\omega i,$$

где ω – модуль угловой скорости тела. Производная $dk/dt \equiv 0$, т.к. ни модуль орта k, ни его направление не меняются во времени.

Тройка ортов i, j, k обладает следующими свойствами:

$$i = j \times k = -k \times j, \quad j = k \times i, \quad k \times k = 0.$$

Принимая во внимание эти соотношения, формулу для скорости можно переписать в виде

$$\overline{\upsilon} = x\omega k \times i + y\omega\, k \times j + 0 \cdot \omega k = \omega k \times \left(xi + yj + zk \right).$$

Следовательно,

$$\overline{\upsilon} = \omega k \times \overline{r}\,.$$

Определение 3. Вектор $\overline{\omega} = \omega k$ называется *вектором угловой скорости*. Его направление совпадает с направлением орта *к*.

Правило знаков. Вектор $\overline{\omega}$ *положителен* (совпадает с направлением оси *Oz*), если наблюдатель, глядя со стороны острия оси *Oz* (сверху), видит вращение тела против хода часовой стрелки.

Окончательно скорость любой точки вращающегося тела определяется по формуле

$$\overline{\upsilon} = \overline{\omega} \times \overline{r}\,, \tag{3.4}$$

носящей имя *Эйлера.*

Очевидно, линейная скорость $\overline{\upsilon}$ точки тела при вращении направлена перпендикулярно плоскости, образованной векторами $\overline{\omega}$ и $\overline{r}$. Как известно, векторное произведение можно представить через определитель

$$\overline{\upsilon} = \overline{\omega} \times \overline{r} = \begin{vmatrix} \overset{1}{i} & \overset{4}{j} & \overset{7}{k} \\ \overset{8}{0} & \overset{2}{0} & \overset{5}{\omega} \\ \overset{6}{x} & \overset{9}{y} & \overset{3}{z} \end{vmatrix} = x\omega j - y\omega i + 0^{*},$$

---

* Цифры над символами внутри определителя указывают на порядок умножения элементов при вычислении положительных членов определителя.

а его модуль равен:

$$\left|\overline{\upsilon}\right| = \omega r \sin\left(\overline{\omega}, \overline{r}\right) = \omega\rho,$$

где $\rho = r\sin\left(\overline{\omega}, \overline{r}\right)$ – проекция радиуса-вектора $\overline{r}$ на плоскость, перпендикулярную оси Oz.

8. Матричная формула скорости

К определению скорости тела при вращении можно подойти с иной точки зрения. Она состоит в изучении вращения тела с позиций теории преобразований систем координат (см. прил.).

Прежде всего, следует установить:

а) матричную форму закона вращения. С этой целью рассмотрим движение тела в двух системах координат: в неподвижной системе, оси которой обозначим греческими буквами $O\eta\theta$, и в подвижной, или локальной, – Oxy, связанной с вращающимся телом (рис. 3.6).

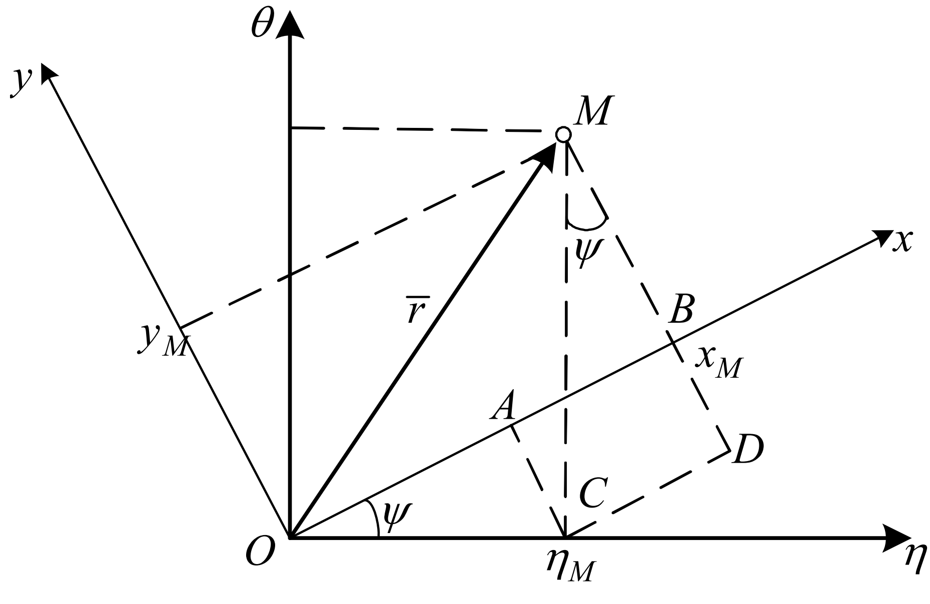


Рис. 3.6

В начальном состоянии оси координат обеих систем совпадают. Положение произвольной точки M тела характеризуется радиусом-вектором $\overline{r}$, фиксированным в локальной системе координат, и, одновременно, вектором $\overline{\rho}$ – в неподвижной (абсолютной). Вращение тела в абсолютной системе по ходу часовой стрелки можно рассматривать как движение в обратном направлении связанной системы координат (см. приложение). Координатами точки M в неподвижной системе координат являются η_M и θ_M. В локальной системе они обозначаются через x_M и y_M. Очевидно, что

$$x_M = OB = OA + AB,$$

где

$$OA = \eta_M \cos\psi,$$
$$AB = \theta_M \sin\psi.$$

Следовательно,

$$\underline{x_M = \eta_M \cos\psi + \theta_M \sin\psi.}$$

Аналогично,

$$y_M = BM = -BD + DM,$$
$$\underline{y_M = -\eta_M \sin\psi + \theta_M \cos\psi.}$$

Подчёркнутые зависимости можно объединить в одно соотношение, представив их в матричном виде*

$$\bar{r} = [\Psi]\bar{\rho}, \tag{3.5}$$

если ввести матрицу

$$[\Psi] = \begin{bmatrix} \cos\psi & \sin\psi \\ -\sin\psi & \cos\psi \end{bmatrix}, \tag{3.6}$$

характеризующую поворот системы координат *Oxy* на угол ψ против хода часовой стрелки, и вектор-столбцы радиусов-векторов**:

$$\bar{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = (x, y)^T,$$

$$\bar{\rho} = \begin{pmatrix} \eta \\ \theta \end{pmatrix} = (\eta, \theta)^T.$$

б) Скорость любой точки тела на основе преобразования поворота $[\Psi]$ определяется путём дифференцирования выражения (3.5):

$$\bar{\upsilon} = \frac{d\bar{r}}{dt} = \frac{d[\Psi]}{d\psi}\frac{d\psi}{dt}\bar{\rho} = \frac{d[\Psi]}{d\psi}\dot{\psi}\bar{\rho}.$$

* Данные преобразования подробно рассматриваются в математике [2].
** Индекс *M* в обозначениях компонент данных векторов опушен.

В соответствии с правилом дифференцирования матрицы $[\Psi]$ скорость произвольной точки тела при вращении можно представить в матричной форме

$$\overline{\upsilon} = [D][\Psi]\omega\overline{\rho}. \tag{3.7}$$

Здесь использован особый оператор $[D]$ дифференцирования матрицы вращения $[\Psi]$, обладающий структурой матрицы, а именно,

$$[D] = \frac{\partial[\Psi]}{\partial\psi} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

и принятое ранее обозначение угловой скорости $\omega = \dot{\psi}$ [10].

Формально умножение матрицы $[\Psi]$ слева на оператор $[D]$ эквивалентно перестановке строк матрицы $[\Psi]$ с последующим изменением знаков элементов первой строки на противоположные.

Усложнение формулы скорости, представленной в матричной форме

$$\overline{\upsilon} = [\Omega]\overline{\rho}, \tag{3.8}$$

где

$$[\Omega] = [D][\Psi]\omega$$

– матрица угловой скорости, компенсируется при решении практических задач возможностью вычисления скорости тела в автоматическом режиме с использованием компьютера.

9. Вектор ускорения точки вращающегося тела

Как известно, вектор скорости точки тела при его вращении определяется по формуле Эйлера

$$\overline{\upsilon} = \overline{\omega} \times \overline{r}.$$

Дифференцируя это выражение, находят ускорение

$$\overline{a} = \frac{d\overline{\upsilon}}{dt} = \frac{d\overline{\omega}}{dt} \times \overline{r} + \overline{\omega} \times \frac{d\overline{r}}{dt}.$$

Вектор углового ускорения тела равен:

$$\overline{\varepsilon} = \frac{d\overline{\omega}}{dt},$$

а производная

$$\overline{\upsilon} = \frac{d\overline{r}}{dt}$$

по-прежнему определяет (линейную) скорость точки *M*.

С учётом указанных определений вектор ускорения принимает вид

$$\overline{a} = \overline{\varepsilon} \times \overline{r} + \overline{\omega} \times \overline{\upsilon}.$$

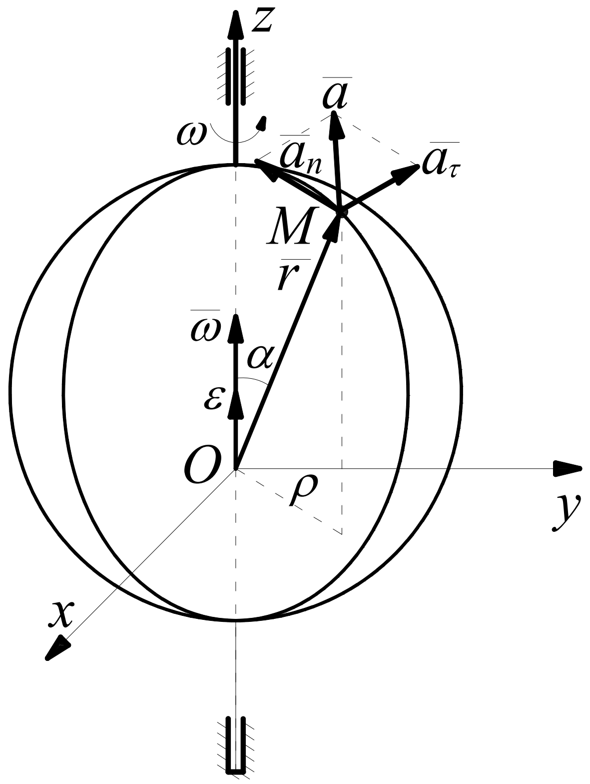


Рис. 3.7

Воспользовавшись ещё раз формулой Эйлера, ускорение можно переписать в форме

$$\overline{a} = \overline{\varepsilon} \times \overline{r} + \overline{\omega} \times \left(\overline{\omega} \times \overline{r}\right).$$

Вектор

$$\overline{a}_\tau = \overline{\varepsilon} \times \overline{r}$$

называется *касательным ускорением*,
а вектор

$$\overline{a}_n = \overline{\omega} \times \left(\overline{\omega} \times \overline{r}\right)$$

– *нормальным* (центростремительным) *ускорением*[*] (рис. 3.7). Модуль ускорения $\overline{a}_n$ с учётом определения двойного векторного произведения равен $a_n = -\omega^2 \rho$, где $\rho = r \sin\alpha$.

Таким образом, формулу для ускорения $\overline{a}$ можно представить в виде

$$\overline{a} = \overline{a}_\tau + \overline{a}_n.$$

[*]Вектор $\overline{a}_\tau$ направлен по касательной к окружности радиуса ρ, проходящей через точку *M*, а вектор $\overline{a}_n$ – по радиусу к оси вращения.

Контрольные вопросы

1. Какое движение тела называется поступательным?
2. Перечислите основные способы описания поступательного движения тела.
3. Сформулируйте теорему о скоростях точек при поступательном движении.
4. Дайте определение вращательного движения тела.
5. Запишите закон равнопеременного вращения тела.
6. Сформулируйте правило знаков для вектора угловой скорости.

Лекция № 4. ПЛОСКОПАРАЛЛЕЛЬНОЕ (ПЛОСКОЕ) ДВИЖЕНИЕ ТВЕРДОГО ТЕЛА

1. Примеры и определение плоского движения

Рассматривая движение сползающей лестницы, качение катка по земле, движение звена 2-3 механизма открывания двери (рис. 4.1), можно обнаружить общее свойство этих движений – любая точка каждого из этих тел движется в одной плоскости.

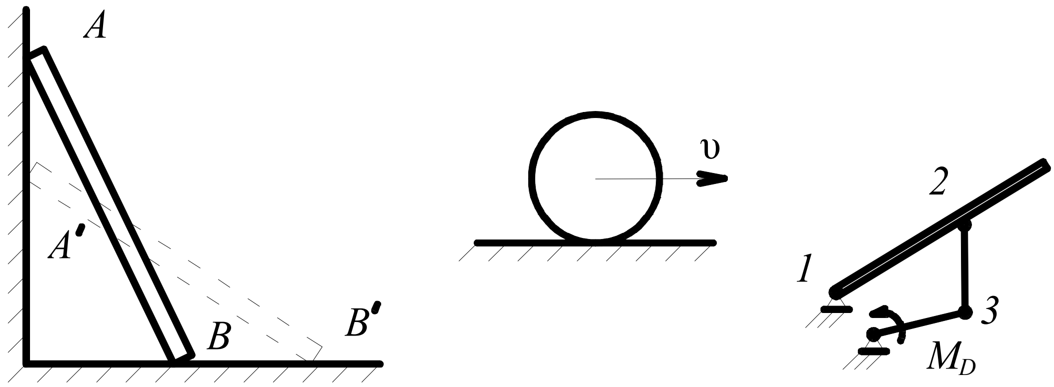


Рис. 4.1

О п р е д е л е н и е 1. *Движение тела, при котором любая точка тела перемещается в плоскости, параллельной некоторой неподвижной плоскости, называется плоскопараллельным* (*плоским*).

О плоском движении твердого тела V можно судить по движению плоской фигуры, полученной в результате пересечения тела плоскостью Q, параллельной неподвижной плоскости P (рис. 4.2,а). Действительно, возьмем любую точку a, лежащую в плоскости Q, и опустим из нее перпендикуляр aA на неподвижную плоскость. Прямая aA, ассоциированная с жестким стержнем, при плоском движении тела, очевидно, совершает поступательное движение. В соответствии с теоремами о равенстве скоростей и ускорений при поступательном движении тел и подобии траекторий, любая точка стержня aA обладает одной и той же скоростью и ускорением и движется по одинаковой траектории. Таким образом, ввиду произвольного выбора точки a плоское движение тела можно охарактеризовать параметрами движения плоского сечения Q или его следа S на неподвижной плоскости P (рис. 4.2,б).

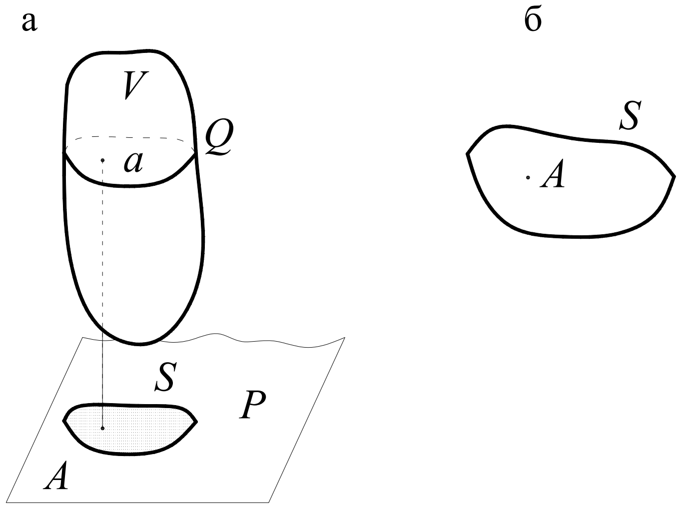


Рис. 4.2

2. Законы движения. Степень свободы плоской фигуры

Отныне будем изображать только плоскую фигуру – диск *S*, хотя речь, по существу, идет о теле *V*. Ее движение можно описать различными способами, в том числе:

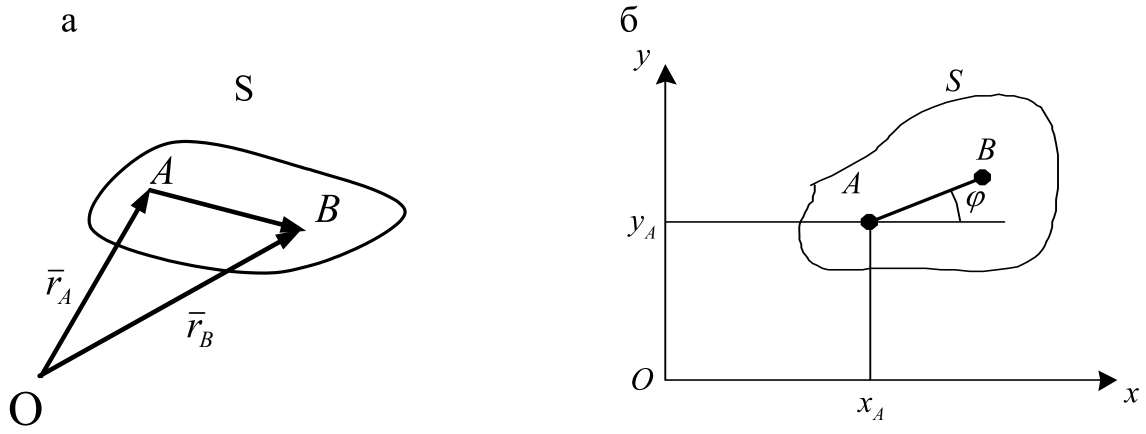


Рис. 4.3

а) *векторным* – в виде закона изменения радиуса-вектора произвольной точки *B* (рис. 4.3,а). При этом закон движения базовой точки *A* предполагается известным

$$\overline{r}_B(t) = \overline{r}_A(t) + \overline{AB};$$

б) *аналитическим,* указав закон в виде изменения координат двух разных точек диска (рис. 4.3,б). При этом достаточно лишь трёх зависимостей

$$\begin{cases} x_A = x_A(t), \\ y_A = y_A(t), \\ x_B = x_B(t), \end{cases}$$

или, как вариант, в виде

$$x_A = x_A(t),$$
$$y_A = y_A(t),$$
$$\varphi = \varphi(t).$$

Это нетрудно обосновать. Действительно, о движении плоской фигуры можно судить по движению произвольной прямой *AB*. Положение прямой, как известно, характеризуется координатами точек *A* и *B*. Расстояние между ними определяется по формуле

$$(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 = l_{AB}^2 = \text{const}.$$

Из четырёх координат x_A, x_B, y_A, y_B только три являются независимыми, т.к. четвертая может быть выражена через них из этого соотношения. Поэтому достаточно задать любые три координаты из входящих в соотношение, чтобы однозначно определить движение плоской фигуры *S*.

Определение 2. *Количество независимых геометрических параметров (координат), определяющих положение тела при движении, называется степенью свободы тела* (фигуры или диска) и обозначается *W*.

Очевидно, степень свободы тела при плоском движении равна трём (*W*=3).

в) *Движение тела можно задать и в матричном виде,* представив его как непрерывную последовательность двух мгновенных синхронных движений: линейного перемещения некоторой фиксированной точки *A*, принятой за базовую, и вращения тела вокруг этой же точки. Отчасти к этому выводу приводит векторная форма описания плоского движения. Данное высказывание становится более убедительным, когда переходят к рассмотрению скорости плоского движения (см. подразд. 3 данной лекции).

Обращаясь непосредственно к выводу закона движения, следует ввести две системы координат и, как принято в книге, координаты точек тела в неподвижной системе обозначать греческими буквами η, θ, а в локальной – латинскими *x*, *y*.

В рассматриваемом случае движение описывается изменением координат произвольной точки B тела относительно неподвижной системы $P\eta\theta$, которое складывается из функций линейных смещений точки A по направлениям осей системы координат $P\eta\theta$ и функции угла поворота ψ локальной системы вокруг точки A (рис. 4.4).

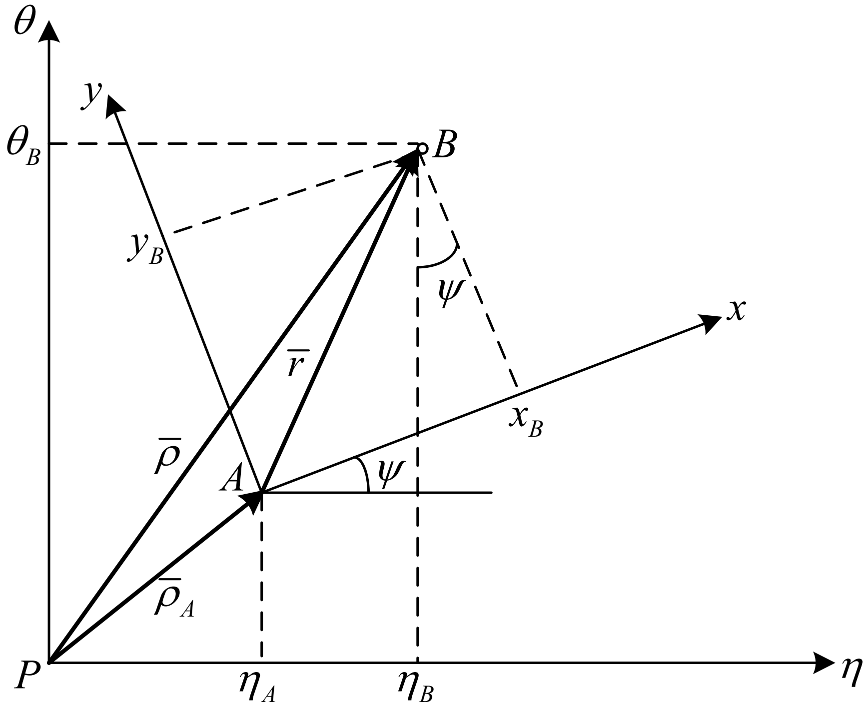


Рис. 4.4

Координаты точки B можно выразить через координаты базовой точки A и угол наклона ψ, т.е. записать закон движения в виде:

$$\eta_B = \eta_A + x_B \cos\psi - y_B \sin\psi,$$
$$\theta_B = \theta_A + x_B \sin\psi + y_B \cos\psi.$$

Легко заметить, что последние соотношения можно представить в матричной форме, воспользовавшись матрицей преобразования поворота $[\Psi]$ из лекции № 3, точнее, обратной к ней, и обозначениями вектор-столбцов $\overline{r} = (x_B, y_B)^T$ и $\overline{\rho}(t) = (\eta_B, \theta_B)^T$. Матричная форма закона плоского движения имеет вид

$$\overline{\rho}(t) = \overline{\rho}_A + [\psi]^{-1} \overline{r}(t).$$

Если ввести расширенные векторы перемещений, условившись считать последние компоненты векторов $\overline{r}$, $\overline{\rho}$ единичными, т.е. составить вектор-столбцы $\bar{\rho}(t)=(\eta_B,\theta_B,1)^T$ и $\bar{r}=(x_B,y_B,1)^T$ третьего порядка*, то приведенное равенство можно представить как произведение расширенной матрицы преобразования координат при плоском движении

$$[H]=\begin{bmatrix}\cos\psi & -\sin\psi & \eta_A\\ \sin\psi & \cos\psi & \theta_A\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix},$$

на вектор $\bar{r}$ в виде

$$\bar{\rho}\ (t)=[H]\bar{r}\,.$$

Подобные матрицы встречаются при описании свободного движения тела и в кинематике манипуляторов (см. лекции № 9, 10).

3. Поле скоростей тела при плоском движении

В этом разделе будут выведены формулы, по которым определяется скорость любой точки тела при различных формах задания движения.

Определение 3. *Полем скоростей называется совокупность значений скоростей в каждой точке тела плоской фигуры*. Поле скоростей можно представить в трех формах:

а) *в векторной*, когда движение тела задано в векторном виде (см. рис. 4.3)

$$\bar{r}_B(t)=\bar{r}_A(t)+\overline{AB}\ .$$

Дифференцируя это равенство по времени

$$\frac{d\bar{r}_B}{dt}=\frac{d\bar{r}_A}{dt}+\frac{d\,\overline{AB}}{dt}$$

и обозначая

$$\bar{\upsilon}_B=\frac{d\bar{r}_B}{dt},\ \ \bar{\upsilon}_A=\frac{d\bar{r}_A}{dt},\ \ \bar{\upsilon}_{BA}=\frac{d\,\overline{AB}}{dt}=\bar{\omega}\times\overline{AB},$$

находят:

$$\bar{\upsilon}_B=\bar{\upsilon}_A+\bar{\upsilon}_{BA}\,.$$

Модуль вектора скорости точки *B* при повороте тела относительно точки *A* равен:

$$|\bar{\upsilon}_{BA}|=\omega_A\cdot AB\sin\left(\bar{\omega}_A,\overline{AB}\right)=\omega_A\cdot AB,$$

* Индекс *B* в обозначениях проекций векторов $\bar{\rho}$ и $\bar{r}$ без искажения смысла можно опустить.

т.к. векторы $\overline{\omega}_A$ и $\overline{AB}$ взаимно перпендикулярны. Таким образом, формула для поля скоростей принимает вид

$$\overline{\upsilon}_B = \overline{\upsilon}_A + \overline{\omega}_A \times \overline{AB}.$$

На её основе плоское движение можно рассматривать как непрерывную последовательность двух мгновенных движений: поступательного – со скоростью υ_A и вращательного – с угловой скоростью ω_A (рис. 4.5)*.

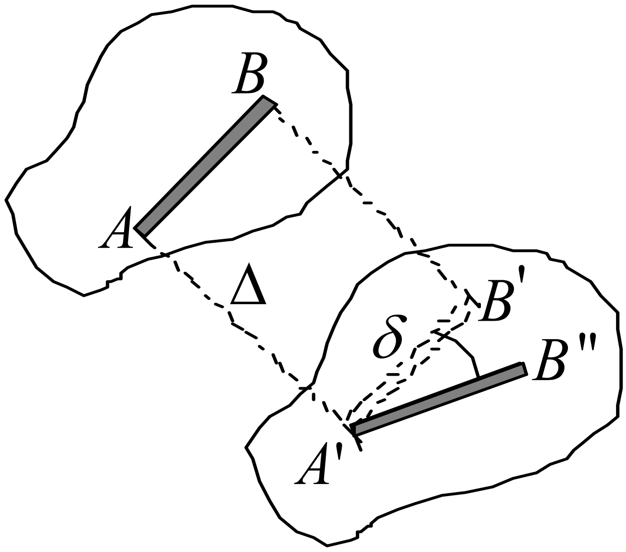


Рис. 4.5

б) *в аналитической форме*

На основе формулы для векторного поля скоростей плоского движения тела

$$\overline{\upsilon}_B = \overline{\upsilon}_A + \overline{\omega} \times \overline{AB},$$

с учетом принятых ранее обозначений для компонент скоростей точек A и B

$$\upsilon_A\left(\dot{x}_A, \dot{y}_A\right), \quad \upsilon_B\left(\dot{x}_B, \dot{y}_B\right),$$

а также проекций вектора $\overline{\mathrm{AB}}$: $(AB)_x$, $(AB)_y$ и векторного произведения

$$\overline{\omega} \times \overline{AB} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & 0 & \omega \\ (AB)_x & (AB)_y & 0 \end{vmatrix} = \omega \ (AB)_x j - \omega (AB)_y i = -\omega (AB)_y i + \omega (AB)_x j,$$

* На рис. 4.5 показаны соответствующие перемещения.

проекции вектора $\overline{\upsilon}_B$ на оси координат *x,y* можно записать в аналитической форме (рис. 4.6)[**]

$$\dot{x}_B = \dot{x}_A - \omega(AB)_y = \dot{x}_A - \omega\left(y_B - y_A\right),$$
$$\dot{y}_B = \dot{y}_A + \omega(AB)_x = \dot{y}_A + \omega\left(x_B - x_A\right).$$

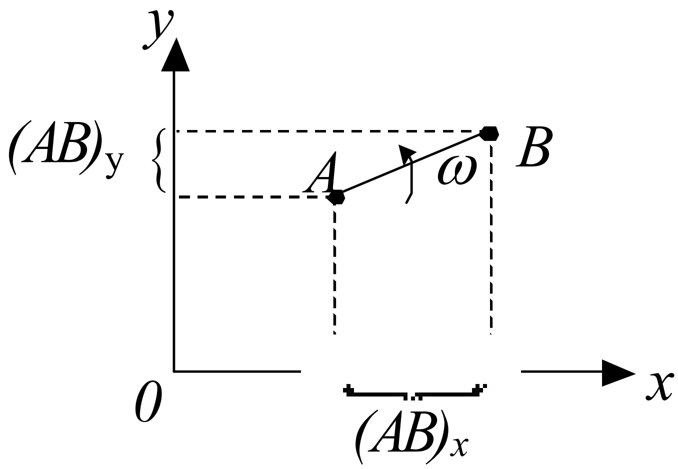


Рис. 4.6

в) *в матричной форме.*

Вывод формулы основан на законе плоского движения тела

$$\overline{\rho}_B\left(t\right) = \overline{\rho}_A + \left[\Psi\right]^{-1}\overline{r}\left(t\right),$$

дифференцируя который

$$\frac{d}{dt}(\overline{\rho}_B) = \frac{d}{dt}(\overline{\rho}_A) + \frac{d\left[\Psi\right]^{-1}}{d\psi}\frac{d\psi}{dt}\overline{r}\left(t\right),$$

нетрудно найти скорость

$$\overline{\upsilon}_B\left(t\right) = \overline{\upsilon}_A + \left[D\right]\left[\Psi\right]^{-1}\omega\overline{r}\left(t\right),$$

где сохранены обозначения для скоростей точек A и B, матрицы $\left[\Psi\right]$, оператора матричного дифференцирования $\left[D\right]$ и обычного – $\frac{d\psi}{dt} = \omega$, принятые ранее в лекции № 3. Обозначив произведение матриц через

$$\left[V\right] = \left[D\right]\left[\Psi\right]^{-1} = \begin{bmatrix} -\sin\psi & -\cos\psi \\ \cos\psi & -\sin\psi \end{bmatrix},$$

[**] Здесь при обозначении осей неподвижной системы координат использованы буквы *x* и *y*.

формулу скорости можно представить более компактно:

$$\upsilon_B(t) = \upsilon_A + [V]\omega\overline{r}(t).$$

В развёрнутом виде это выражение скорости тела получено в подразд. 2 настоящей лекции*, поскольку произведение $[V]\overline{r}(t)$ определяет проекции вектора AB на оси неподвижной системы координат

$$[V]\overline{r}(t) = \begin{bmatrix} -\sin\psi & -\cos\psi \\ \cos\psi & -\sin\psi \end{bmatrix}\begin{pmatrix} x_B \\ y_B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x_B\sin\psi - y_B\cos\psi \\ x_B\cos\psi - y_B\sin\psi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -(AB)_\theta \\ (AB)_\eta \end{pmatrix}.$$

Если пользоваться расширенными векторами перемещений, то дифференцирование матрицы $[H]$ (см. подразд. 2,в) следует осуществлять с привлечением операторов матричного дифференцирования вида:

$$[D_\psi] = \frac{\partial[H]}{\partial\psi} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad [D_\eta] = \frac{\partial[H]}{\partial\eta} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$[D_\theta] = \frac{\partial[H]}{\partial\theta} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Вычислив производную

$$\overline{\upsilon} = \frac{d\overline{\rho}}{dt} = \left(\frac{\partial[H]}{\partial\psi}\frac{\partial\psi}{\partial t} + \frac{\partial[H]}{\partial\eta}\frac{\partial\eta}{\partial t} + \frac{\partial[H]}{\partial\theta}\frac{\partial\theta}{\partial t}\right)\overline{r},$$

находят выражение скорости тела в матричной форме

$$\overline{\upsilon} = \frac{d\overline{\rho}}{dt} = \left([D_\psi][H]\omega + [D_\eta][H]\upsilon_\eta + [D_\theta][H]\upsilon_\theta\right)\overline{r},$$

где сохранено прежнее обозначение для угловой скорости $\omega = \dot{\psi}$ и введены обозначения для проекций скорости базовой точки: $\upsilon_\eta = \dot{\eta}_A$, $\upsilon_\theta = \dot{\theta}_A$.

Кроме того, сумма матриц, стоящая в скобках, также является матрицей

$$[\Omega] = [D_\psi][H]\omega + [D_\eta][H]\upsilon_\eta + [D_\theta][H]\upsilon_\theta.$$

* См. также формулы проекций скоростей (11.4) в книге [3].

Поэтому скорость тела при плоском движении можно определить по формуле

$$\overline{\upsilon} = [\Omega]\overline{r}\ ,$$

аналогичной формуле Эйлера при вращении тела; матрица $[\Omega]$ называется матрицей угловой скорости при плоском движения тела.

г) *Графическая форма поля скоростей* (см. лекцию №5)

4. Теоремы о скоростях

1-я теорема – *проекции линейных скоростей двух точек тела на ось, проходящую через эти точки, равны между собой*.

Рассмотрим поле скоростей при плоском движении тела (рис. 4.7). В векторной форме оно имеет следующий вид:

$$\overline{\upsilon}_B = \overline{\upsilon}_A + \overline{\upsilon}_{BA}\qquad .$$

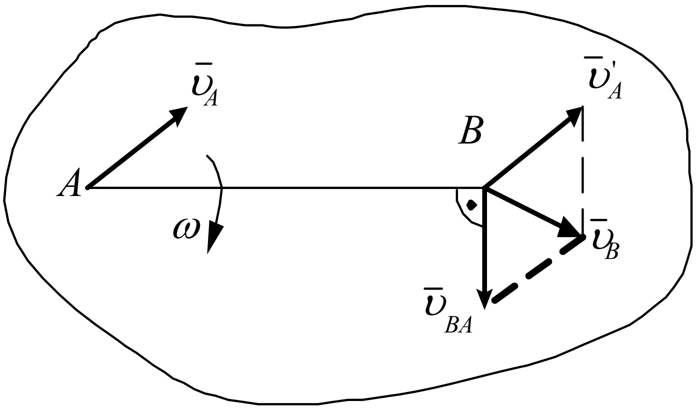


Рис. 4.7

Проектируя данное равенство на прямую (как на ось) AB, получаем

$$(\overline{\upsilon}_A)_{AB} = (\overline{\upsilon}_B)_{AB} + (\overline{\upsilon}_{BA})_{AB}\ .$$

Очевидно, последнее слагаемое $(\overline{\upsilon}_{BA})_{AB} = 0$, т.к. вектор $\overline{\upsilon}_{BA} \perp AB$. Следовательно,

$$(\overline{\upsilon}_A)_{AB} = (\overline{\upsilon}_B)_{AB}\ .$$

2-я теорема – *угловая скорость вращения тела не зависит от выбора полюса, т.е.* $\omega_A = \omega_B = \omega$.

Д о к а з а т е л ь с т в о

Пусть полюсу A соответствует угловая скорость ω_A, а полюсу B – ω_B. Запишем формулу для скоростей тела, приняв за полюс точку A, т.е.

$$\overline{\upsilon}_B = \overline{\upsilon}_A + \overline{\omega}_A \times \overline{AB} = \overline{\upsilon}_A + \overline{\omega}_A \times \overline{\rho}.$$

Если же принять точку B за полюс, то

$$\overline{\upsilon}_A = \overline{\upsilon}_B + \overline{\omega}_B \times \overline{BA} = \overline{\upsilon}_B + \overline{\omega}_B \times (-\overline{\rho}).$$

Здесь принято обозначение вектора $\overline{AB}$ через $\overline{\rho}$; при изменении направления вектора $\overline{AB}$ следует, что $\overline{BA} = -\overline{\rho}$.

Сложив полученные равенства, получим:

$$\overline{\upsilon}_B + \overline{\upsilon}_A = \overline{\upsilon}_A + \overline{\upsilon}_B + (\overline{\omega}_A - \overline{\omega}_B) \times \overline{\rho}.$$

После сокращения последнее соотношение принимает вид

$$(\overline{\omega}_A - \overline{\omega}_B) \times \overline{\rho} = 0.$$

Это означает, что вектор разности

$$\overline{\omega}_R = (\overline{\omega}_A - \overline{\omega}_B)$$

перпендикулярен плоскости фигуры и его модуль

$$\omega_R = 0.$$

Следовательно, $\omega_A = \omega_B = \omega$, что и требовалось доказать.

5. Мгновенный центр скоростей

Рассматривая плоское движение диска D, жестко свяжем с ним плоскость достаточно большой площади S (рис. 4.8). Оказывается, что при плоском движении существует некоторая точка диска или связанной с ним плоскости, которая имеет нулевую скорость.

О п р е д е л е н и е 4. *Точка тела или плоскости, линейная скорость которой в некоторый момент времени равна нулю, называется мгновенным центром скоростей* (в дальнейшем обозначается сокращенно – м.ц.с.).

В общем случае, скорость любой точки A диска определяется по формуле

$$\overline{\upsilon}_A = \overline{\upsilon}_P + \overline{\omega} \times \overline{AP},$$

Если точка P является м.ц.с., то $\overline{\upsilon}_P = 0$. Тогда

$$\overline{\upsilon}_A = \overline{\omega} \times \overline{AP},$$

и, поскольку векторы $\overline{\omega}$ и $\overline{AP}$ взаимно перпендикулярны, то

$$\upsilon_A = \omega \cdot AP.$$

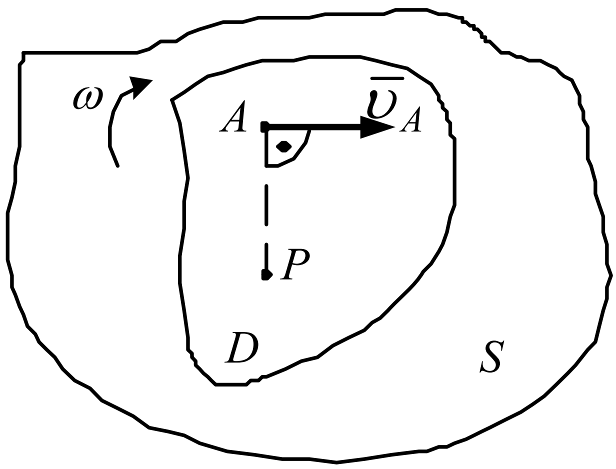


Рис. 4.8

Следовательно, любая точка *A* диска совершает мгновенный поворот относительно м.ц.с. Направление вектора скорости (точка *A*) определяется перпендикуляром к прямой, соединяющей точки *A* и *P*.

Теорема существования мгновенного центра скоростей. *Если угловая скорость диска* $\omega \neq 0$*, то м. ц. с. существует.*

Доказательство

Рассмотрим диск *S* при плоском движении. По условию, $\omega \neq 0$ (рис. 4.9).

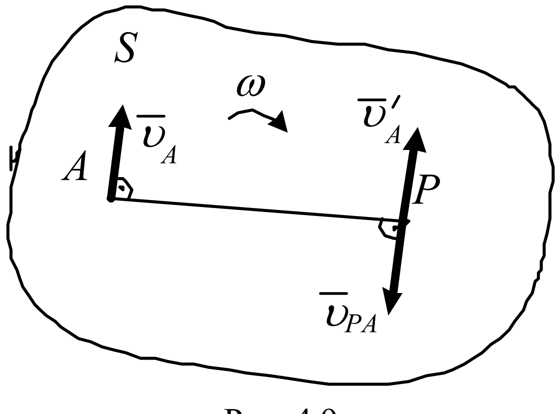


Рис. 4.9

Очевидно, что имеется точка *A* диска, скорость которой $\upsilon_A \neq 0$, иначе движение отсутствует вовсе. Скорость этой точки может быть выражена через скорость другой, например точки *P*:

$$\overline{\upsilon}_A = \overline{\upsilon}_P + \overline{\upsilon}_{AP}.$$

Отсюда

$$\bar{\upsilon}_P = \bar{\upsilon}_A - \bar{\upsilon}_{AP},$$

или

$$\bar{\upsilon}_P = \bar{\upsilon}_A - \bar{\omega} \times \overline{AP}, \qquad (*)$$

где

$$\upsilon_{AP} \perp AP.$$

Для доказательства существования точки *P*, скорость которой равна нулю, т.е. для доказательства существования м. ц. с. диска выполним следующее построение (см. рис. 4.9). Через точку *A* проведем перпендикуляр *AB* к вектору $\bar{\upsilon}_A$, поскольку построение связано со вторым слагаемым в выражении (∗). Возьмем на нем точку *P*, лежащую на расстоянии $AP = \dfrac{\upsilon_A}{\omega}$, и определим скорость этой точки по формуле (∗)

$$\upsilon_P = \upsilon_A - \omega \cdot AP = \upsilon_A - \omega \frac{\upsilon_A}{\omega} \equiv 0.$$

Осуществляя построение вектора υ_P по той же формуле, убедимся в том, что вектор $\bar{\upsilon}_P$ действительно равен нулю.

6. Способы определения мгновенного центра скоростей

1. В случае, если направления скоростей двух точек диска произвольны, то м.ц.с. находится на пересечении перпендикуляров к скоростям, восстановленных из рассматриваемых точек *A*, *B* (рис. 4.10).

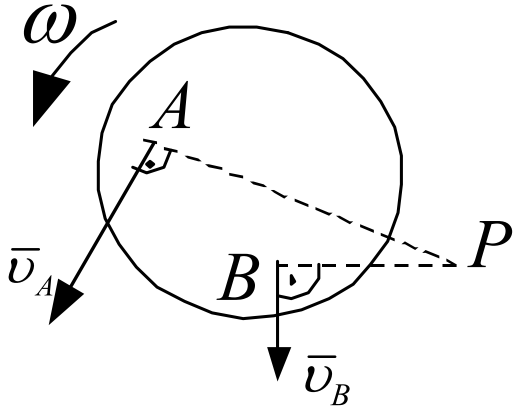


Рис. 4.10

2. Если векторы скоростей двух точек A и B параллельны, а прямая AB перпендикулярна к ним, то положение м.ц.с. находится на пересечении прямых, проведенные через начальные и конечные точки векторов (рис. 4.11).

Рис. 4.11

Основанием этого правила является пропорциональность модулей линейных скоростей расстояниям до м. ц. с.

П р и м е ч а н и е. Если скорости двух точек параллельны и прямая AB не перпендикулярна их направлениям, то м. ц. с. не существует (рис. 4.12).

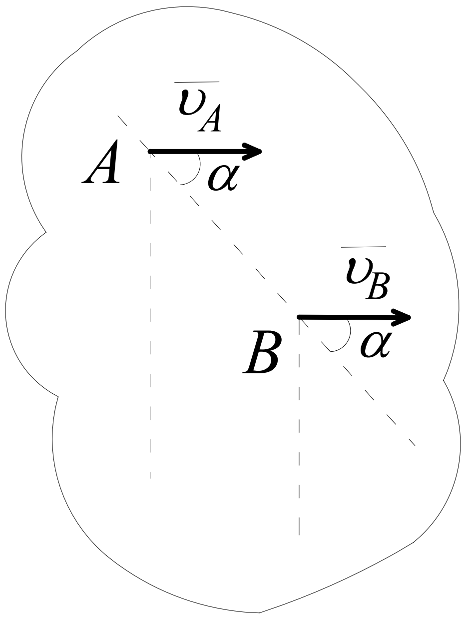


Рис. 4.12

Движение диска в этом случае будет поступательным, т.к. в соответствии с теоремой о равенстве проекций скорости $\upsilon_A = \upsilon_B$. Тогда равенство $\overline{\upsilon}_B = \overline{\upsilon}_A + \overline{\upsilon}_{BA}$ приводит к тому, что $\overline{\upsilon}_{BA} = 0$, и, следовательно, $\omega = 0$.

Контрольные вопросы

1. При каком условии движение тела относится к плоскому? Какими способами описывается плоское движение ?
2. Что называется степенью свободы тела ? Каков закон этого движения?
3. Запишите выражение для вектора скорости любой точки тела при плоском движении.
4. Что называется мгновенным центром скоростей ?
5. Как определяется положение мгновенного центра скоростей ?

Лекция № 5. ПЛОСКОЕ ДВИЖЕНИЕ ТВЕРДЫХ ТЕЛ. ГРАФИЧЕСКАЯ ФОРМА ПОЛЯ СКОРОСТЕЙ. ЦЕНТРОИДЫ

1. Графическая форма поля скоростей

Наряду с векторной

$$\bar{\upsilon}_B = \bar{\upsilon}_A + \bar{\upsilon}_{BA}$$

и аналитической формами полей скоростей существует и графическое представление поля. Рассмотрим его.

Пусть известны модуль и направление скорости какой-либо точки *A* диска. Известно также лишь направление скорости другой точки *B*, например горизонтальное (рис. 5.1). Модуль этой скорости можно найти графически, осуществив следующие действия.

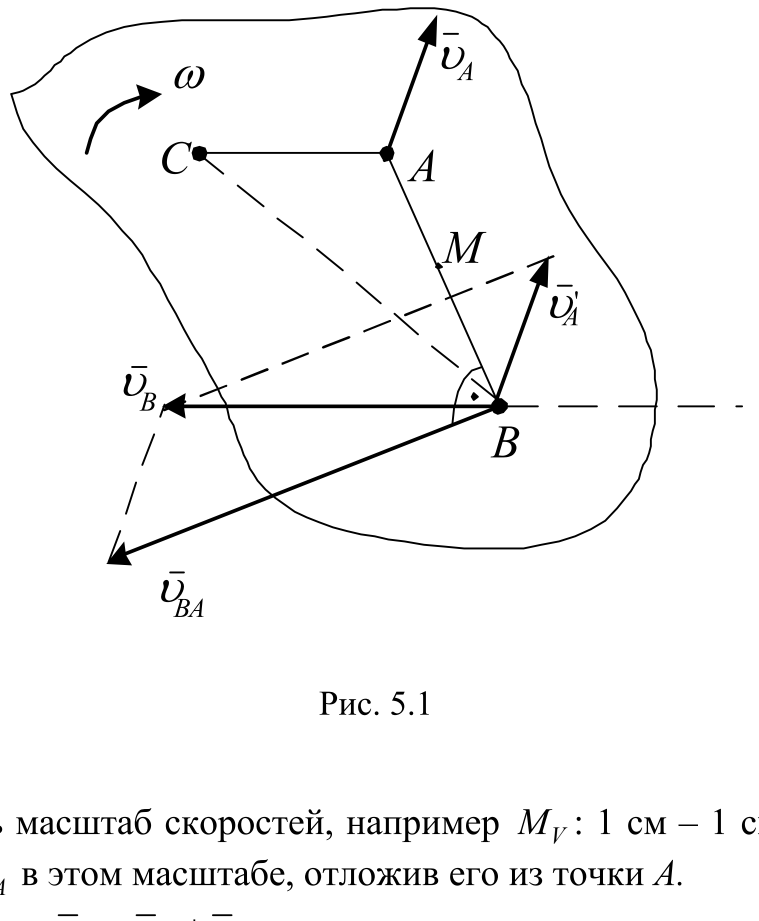


Рис. 5.1

- Выбрать масштаб скоростей, например M_V: 1 см – 1 см/с, и изобразить вектор $\bar{\upsilon}_A$ в этом масштабе, отложив его из точки *A*.
- Поскольку $\bar{\upsilon}_B = \bar{\upsilon}_A + \bar{\upsilon}_{BA}$, то для определения скорости $\bar{\upsilon}_B$ следует перенести в точку *B* вектор $\bar{\upsilon}_A$, обозначив его $\bar{\upsilon}'_A$, и отложить вектор $\bar{\upsilon}_{BA}$ в

точке B; направление вектора $\overline{\upsilon}_{BA}$, как известно, перпендикулярно отрезку AB.

• Затем через конец вектора $\overline{\upsilon}'_A$ провести прямую, параллельную направлению $\overline{\upsilon}_{BA}$ до пересечения с прямой, на которой расположен вектор $\overline{\upsilon}_B$. Очевидно, горизонтальный отрезок, исходящий из точки B до указанной точки пересечения, определяет модуль вектора $\overline{\upsilon}_B$. Действительно, полученная прямая, являясь диагональю параллелограмма, есть геометрическая сумма векторов $\overline{\upsilon}_A$ и $\overline{\upsilon}_{BA}$.

2. План скоростей

Формализуем рассматриваемую процедуру построения вектора $\overline{\upsilon}_B$ на отдельной схеме. Возьмем произвольную точку p на плоскости и примем ее за полюс (рис 5.2).

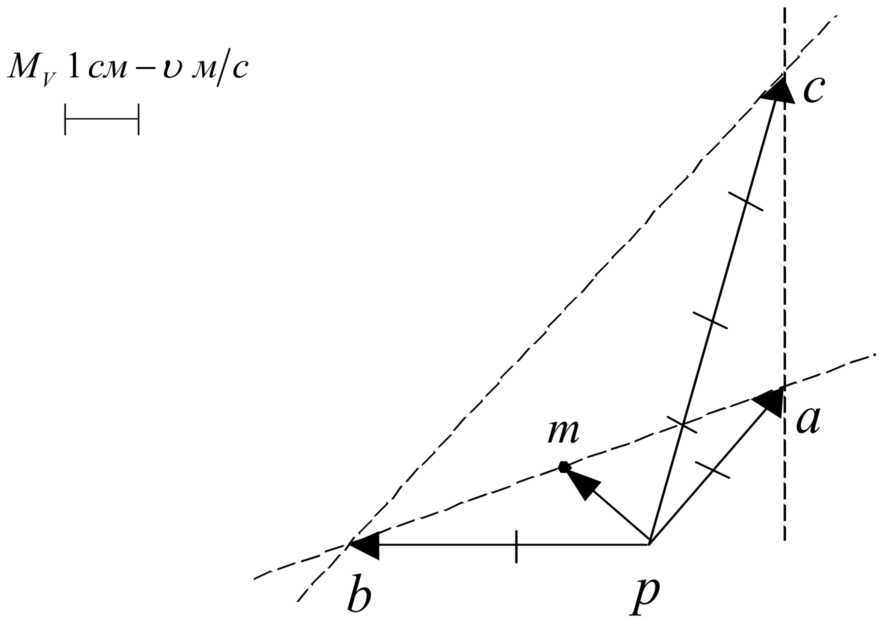


Рис. 5.2

• Выбрав масштаб скоростей M_V, покажем вектор $\overline{\upsilon}_A$ исходящим из точки p. Конец вектора обозначим прописной буквой "a", соответствующей индексу A вектора $\overline{\upsilon}_A$.

• Из точки a проведем прямую, перпендикулярную отрезку AB. Ее пересечение с прямой, проведенной из точки p параллельно направлению вектора $\overline{\upsilon}_B$, обозначим прописной буквой "*b*". Очевидно, отрезок *pb*, измеренный в принятом масштабе скоростей, определяет модуль вектора $\overline{\upsilon}_B$, а направление вектора $\overline{\upsilon}_B$ соответствует переходу от точки *p* к точке *b*.

- Вектор скорости любой другой точки *C* тела может быть найден без предварительного знания его направления. Действительно, поскольку

$$\overline{\upsilon}_C = \overline{\upsilon}_A + \overline{\upsilon}_{CA},$$

$$\overline{\upsilon}_C = \overline{\upsilon}_B + \overline{\upsilon}_{CB},$$

постольку

$$\overline{\upsilon}_C = \overline{\upsilon}_B + \overline{\upsilon}_{CB} = \overline{\upsilon}_A + \overline{\upsilon}_{CA}.$$

В соответствии с этим равенством, восстановив перпендикуляры к прямым *AC* и *BC* из точек *a* и *b* на рассматриваемой схеме и определив точку их пересечения, получим точку *c*. Соединив точки *p* и *c*, найдем направление и модуль вектора $\overline{\upsilon}_C$, измерив отрезок *pc* в принятом масштабе. Аналогично определяют скорости и других точек.

О п р е д е л е н и е 1. *Диаграмма, изображающая скорости определенных точек тела в графической форме, называется планом скоростей.*

Отрезки *pa*, *pb*, *pc*, измеренные в масштабе, дают значения модулей скоростей $\overline{\upsilon}_A$, $\overline{\upsilon}_B$, $\overline{\upsilon}_C$, а отрезки *ab*, *bc*, *ac* характеризуют значения скоростей $\overline{\upsilon}_{AB}$, $\overline{\upsilon}_{BC}$, $\overline{\upsilon}_{AC}$.

П р и м е ч а н и я:

1. Угловая скорость диска определяется по формуле

$$\omega = \frac{\upsilon_{BA}}{AB} = \frac{\upsilon_{BC}}{BC} = \frac{\upsilon_{CA}}{AC},$$

или

$$\omega = \frac{ab}{AB} = \frac{bc}{BC} = \frac{ac}{AC}.$$

Следовательно, справедлива пропорциональная зависимость

$$\frac{ab}{bc} = \frac{AB}{BC} \text{ и т.п.,}$$

где *ab*, *bc*, *ac* – отрезки на плане скоростей, измеренные в масштабе (скоростей).

2. Скорость точки *M*, расположенной на прямой *AB*, находится из пропорции

$$\frac{am}{ab} = \frac{AM}{AB},$$

откуда

$$am = \frac{AM}{AB} ab.$$

3. Пример определения скоростей механизма

Приведем пример расчёта кинематической схемы механизма щековой дробилки фирмы "*BLAC*" (США)*. Целью расчёта является определение скоростей и ускорений всех звеньев плоского механизма, показанного на рис. 5.3. Движение рабочего органа дробилки, так называемой щеки, предусматривается в двух вариантах: оно может быть вращательным или плоским; последнее изображено пунктиром. Механизм приводится в движение электродвигателем, установленным в точке *O*. Техническая частота двигателя равна n=1000 об/мин. Длина кривошипа *OE* составляет 10 см; отрезки *BC*, *CD* равны 40 см, *AB* – 60 см.

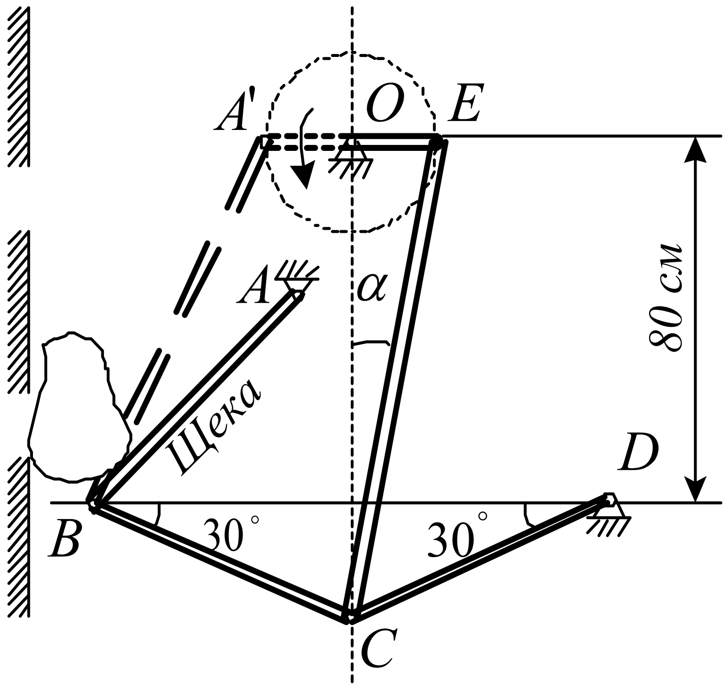


Рис. 5.3

При решении поставленной задачи можно воспользоваться любым из описанных способов определения скорости. Для разнообразия применим два подхода: один, основанный на использовании понятия мгновенного центра скоростей и другой – графический для проверки. Но прежде найдём скорость точки *E*. Она равна:

$$\upsilon_E = \omega \cdot OE = 105 \cdot 0{,}1 = 10{,}5 \text{ м/с},$$

* Полное описание конструкции дробилки см. в книге Ревнивцева К.Е. и Денисова В.А. "Вибрационная дезинтеграция твёрдых материалов". – М., 1992. – 433с.

где

$$\omega = \frac{\pi n}{30} = \frac{3{,}14 \cdot 1000}{30} = 105 \text{ с}^{-1}$$

– угловая частота вращения ротора электродвигателя.

Направления скоростей точек *C, D, E* механизма легко определимы – вследствие вращения звеньев *AB, CD* и *OE* они перпендикулярны указанным звеньям. Восстановив перпендикуляры к скоростям в точках *E* и *C*, найдём их пересечение – точку P_{CE}, являющуюся мгновенным центром скоростей звена *CE*, который совершает плоское движение (рис. 5.4,а).

Вычислив значение мгновенной угловой скорости звена *CE* $\omega_{CE} = \frac{\upsilon_E}{EP_{CE}} = \frac{10{,}5}{1{,}64} = 6{,}4 \text{ с}^{-1}$, нетрудно найти величину скорости точки *C*:

$$\upsilon_C = \frac{CP_{CE}}{EP_{CE}} \upsilon_E = \frac{2{,}00}{1{,}64} \cdot 10 = 12{,}2 \ \text{ м/с}.$$

Очевидно, что при определении этой скорости используется свойство любой точки тела совершать движение по окружности вокруг мгновенного центра скоростей при плоском движении. По аналогии легко определить и скорость точки *B*:

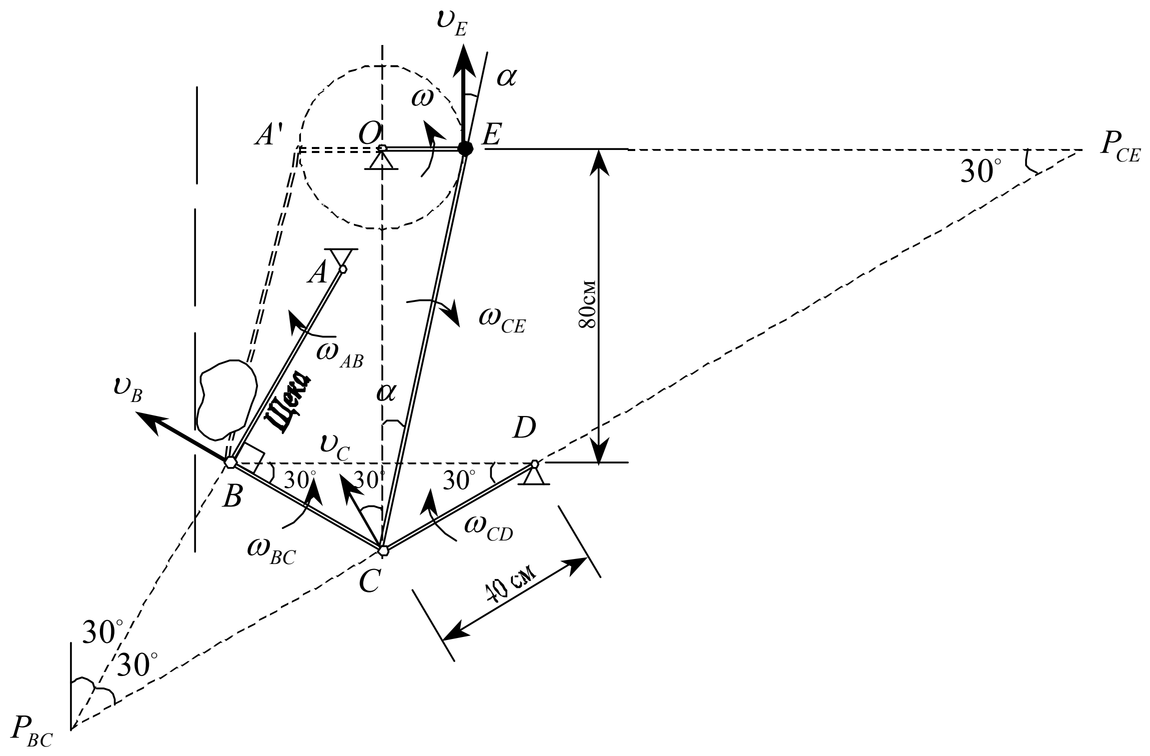
$$\upsilon_B = \frac{BP_{BC}}{CP_{BC}} \upsilon_C = \frac{0{,}68}{0{,}80} \cdot 12{,}2 = 10{,}37 \text{ м/с}.$$

Величина мгновенной угловой скорости щеки *AB* определяется по формуле

$$\omega_{AB} = \frac{\upsilon_B}{AB} = \frac{10{,}37}{0{,}6} = 17{,}28 \text{ с}^{-1}.$$

План скоростей для первого варианта крепления опоры *A* щеки показан на рис. 5.4,б; для второго – на рис. 5.4,в.

а



Планы скоростей

б в

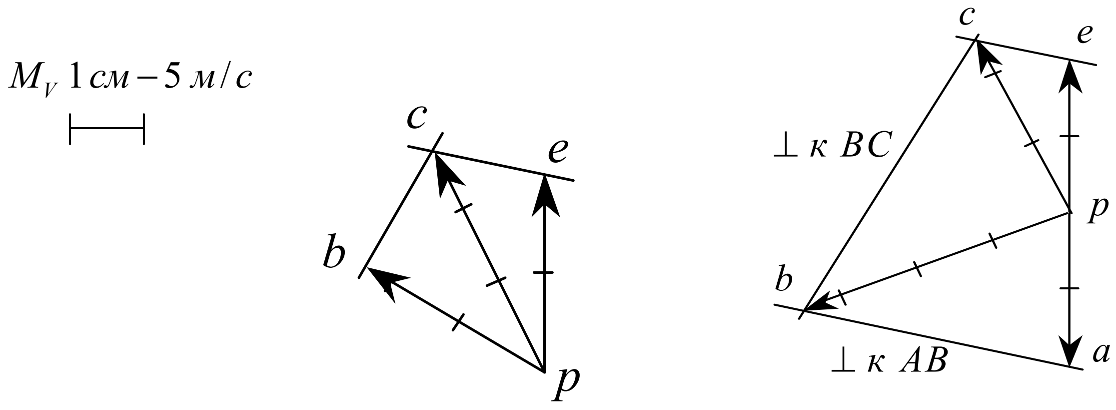


Рис. 5.4

Отрезки *pa*, *pb*, *pc*, *pe*, измеренные в масштабе скоростей, определяют модули скоростей точек *A*, *B*, *C*, *E* соответственно.

4. Понятие о центроидах

Очевидно, что при движении диска положение м.ц.с. изменяется. Например, при качении колеса (рис. 5.5) м.ц.с. находится в точке касания колеса с основанием, т.к. при отсутствии скольжения скорость этой точки $\upsilon_P = 0$.

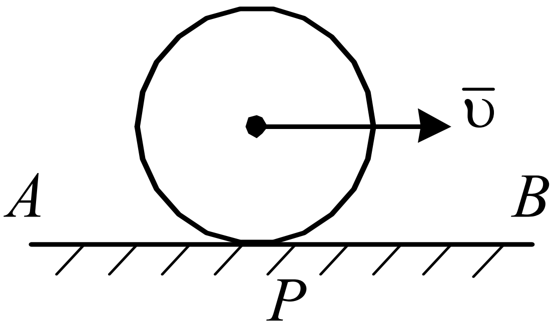


Рис. 5.5

В общем случае, если наклеить на фигуру лист бумаги больших размеров и через определённый интервал времени в процессе движения прокалывать иглой положение м.ц.с., то появится две серии отметок: одна – на неподвижной плоскости, другая – на листе, связанном с фигурой, т.е. с подвижной плоскостью.

Определение 2. *Неподвижной центроидой называется геометрическое место м.ц.с., отмеченных на неподвижной плоскости.*

В данном примере это прямая AB.

Определение 3. *Подвижной центроидой называется геометрическое место м.ц.с., отмеченных на плоскости, связанной с движущейся фигурой.* В этом примере – это окружность колеса.

На основе понятий о центроидах Пуансо сформулировал теорему:

плоское движение можно рассматривать как качение (без скольжения) подвижной центроиды по неподвижной.

Проиллюстрируем её ещё на одном примере. Рассмотрим карданово движение – скольжение бруса вдоль поверхностей стены и пола (рис. 5.6,а). Очевидно, при таком движении бруса направления векторов скоростей его концов известны (рис. 5.6,б).

Пусть в начальном состоянии брус занимает положение A_1B_1. М.ц.с. бруса находится на пересечении перпендикуляров к векторам скоростей (в точке P_1). С другой стороны, можно утверждать, что точка P_1 находится на окружности радиуса $r = \frac{l}{2}$, где l – длина бруса, или на окружности радиуса $r = l$ с центром в точке O. Рассматривая новое положение бруса A_2B_2, можно сделать аналогичные заключения о положении точки P_2, также являющейся м.ц.с., можно сделать общий вывод о том, что окружность радиуса $r = l$ является неподвижной центроидой, а подвижной будет окружность радиуса $r = \frac{l}{2}$.

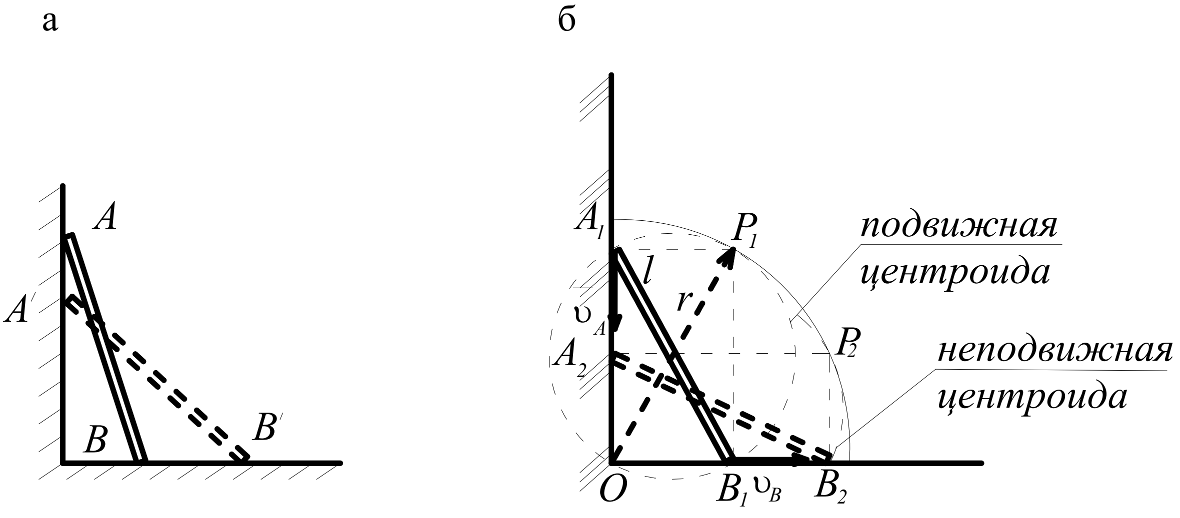


Рис. 5.6

Рассматривая обращенное движение, т.е. считая брус неподвижным, а основания (прямые OA и OB) принимая подвижными и образующими «жёсткий» угольник AOB (рис. 5.7), можно сделать вывод о том, что окружность, радиус которой $r = \frac{l}{2}$, является неподвижной центроидой, а окружность с радиусом $r = l$ – подвижной, т.е. центроиды также "обращаются".

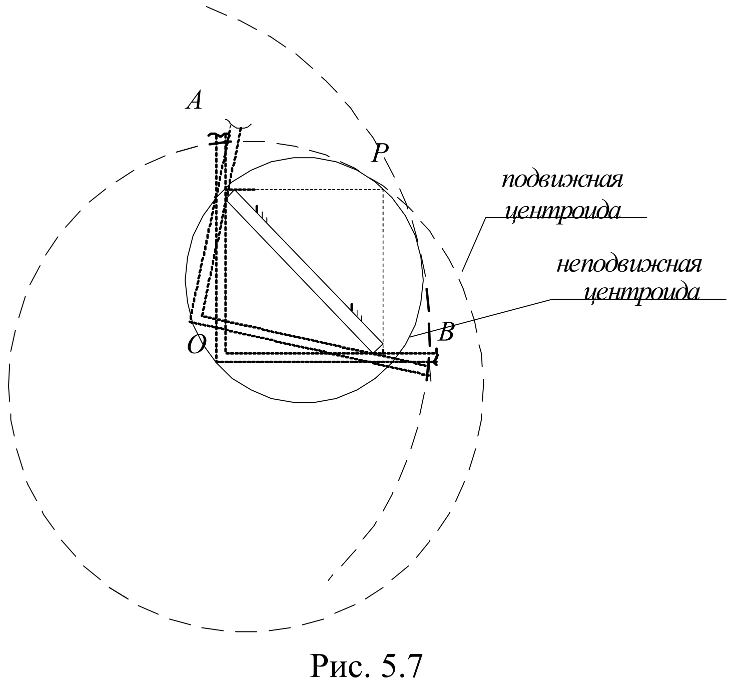


Рис. 5.7

Таким образом, карданово движение стержня можно рассматривать и как качение подвижной центроиды по неподвижной. Очевидно, такое качение легко представить в виде реального механизма, изображённого на рис. 5.8,а. В свою очередь, "обращённое" движение ассоциируется с качением стержня, очерченного по окружности радиуса l, вокруг неподвижного круга подобно движению обруча "хула-хуп" (рис. 5.8,б). Таким образом, решение какой-либо одной из перечисленных задач позволяет утверждать, что получено решения и других.

а б

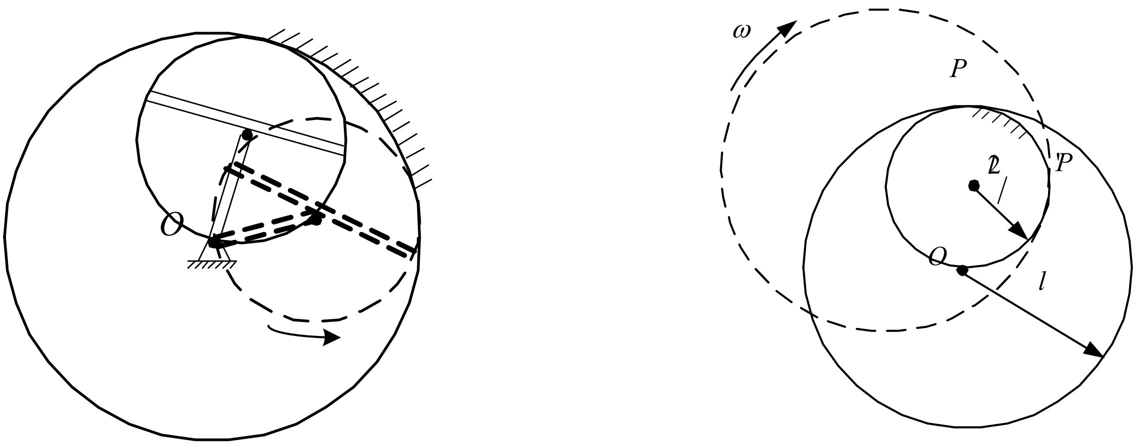


Рис. 5.8

Контрольные вопросы

1. Что называется планом скоростей?
2. Перечислите основные шаги при построении плана скоростей.
3. Что называется центроидой?
4. Дайте определение плоского движения с использованием понятия центроиды.

Лекция № 6. ПЛОСКОЕ ДВИЖЕНИЕ ТВЕРДЫХ ТЕЛ. ОПРЕДЕЛЕНИЕ УСКОРЕНИЙ ТЕЛ

1. Ускорение тела при плоском движении

В качестве исходной формулы при определении ускорения служит формула для скорости тела при плоском движении

$$\overline{\upsilon}_B = \overline{\upsilon}_A + \overline{\upsilon}_{BA} = \overline{\upsilon}_A + \overline{\omega} \times \overline{AB}.$$

Дифференцируя её по времени, находят ускорение точки B:

$$\overline{a}_B = \frac{d\overline{\upsilon}_B}{dt} = \frac{d\overline{\upsilon}_A}{dt} + \frac{d\overline{\upsilon}_{BA}}{dt} = \frac{d\overline{\upsilon}_B}{dt} + \frac{d\overline{\omega}}{dt} \times \overline{AB} + \frac{d\left(\overline{AB}\right)}{dt} \times \overline{\omega},$$

где

$$\overline{a}_A = \frac{d\overline{\upsilon}_A}{dt}$$

обозначает ускорение базовой точки A,

$$\overline{\varepsilon} = \frac{d\overline{\omega}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\dot{\varphi} k\right) = \ddot{\varphi} k$$

- угловое (мгновенное) ускорение тела.

Производная

$$\frac{d(\overline{AB})}{dt} = \overline{\omega} \times \overline{AB} = \overline{\upsilon}_{BA}$$

характеризует скорость точки B тела при повороте его относительно точки A, принятой за полюс.

С учетом данных обозначений

$$\overline{a}_B = \overline{a}_A + \overline{\varepsilon} \times \overline{AB} + \overline{\omega} \times \overline{\upsilon}_{BA}.$$

По аналогии с формулой для скорости запишем это выражение в следующей форме:

$$\overline{a}_B = \overline{a}_A + \overline{a}_{BA}, \qquad (6.1)$$

где

$$\overline{a}_{BA} = \overline{a}_{BA}^{\tau} + \overline{a}_{BA}^{n}$$

- ускорение точки B при повороте тела вокруг точки A (рис. 6.1).

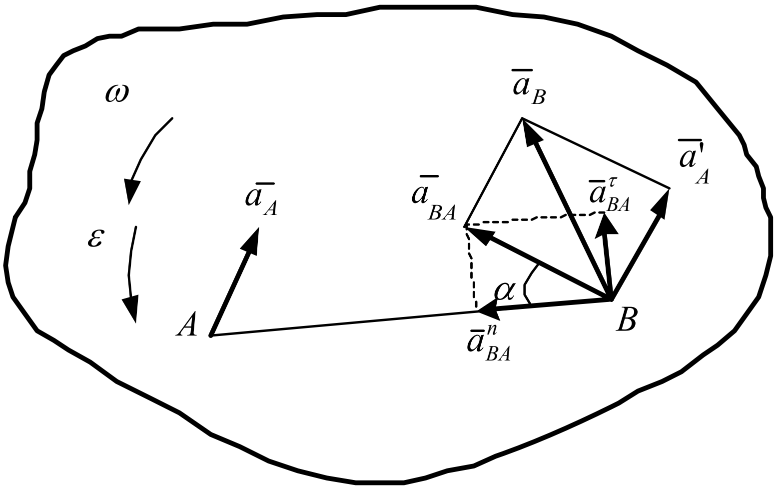


Рис. 6.1

Здесь

$$a^{\tau}_{BA} = \varepsilon \cdot AB \qquad (6.2,а)$$

- касательная составляющая ускорения точки *B* при повороте тела вокруг точки *A*; нормальная составляющая определяется по формуле

$$a^{n}_{BA} = \omega^2 AB, \qquad (6.2,б)$$

т.к. $\bar{\upsilon}_{BA} = \bar{\omega} \times \overline{AB}$,

$$\mathrm{tg}\alpha = \frac{a^{\text{вр}}_{BA}}{a^{\text{ос}}_{BA}} = \frac{\varepsilon}{\omega^2},$$

где угол α между направлениями $\bar{a}_{BA}$ и *AB* постоянен (не зависит от выбора полюса); модуль вектора

$$|a_{BA}| = AB\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}\ .$$

Очевидно, рис. 6.1 служит иллюстрацией к указанным соотношениям. В качестве базовой точки (полюса) выбрана та же точка *A*, что и на рис.5.1 при определении скоростей. Полагая известными величину и направление вектора ускорения $\bar{a}_A$, а также значение угловой скорости ω, в соответствии с (6.1) можно найти ускорение любой другой точки тела, например точки *B*. Для этого следует в точке *B* показать компоненты ускорения $\bar{a}^{\tau}_{BA}$, $\bar{a}^{n}_{BA}$. Ускорение $\bar{a}^{n}_{BA}$ из них откладывается в направлении к полюсу *A*, а $\bar{a}^{\tau}_{BA}$ – перпендикулярно к нему. Добавив к ним ещё и ускорение точки *A*, в результате сложения векторов по формуле (6.1) находят направление и модуль вектора ускорения точки *B*.

2. Мгновенный центр ускорений

По аналогии с мгновенным центром скоростей можно дать *определение мгновенного центра ускорени, как точки плоскости, связанной с движущимся телом, ускорение которой в данный момент времени равно нулю.*

Для построения мгновенного центра ускорений необходимо знать ускорения $\overline{a}_A$ и ε, причем их модули ε и a не должны быть равными нулю.

Пусть, по определению, точка Q является мгновенным центром ускорения, т.е. ускорение $a_Q = 0$. Выполним её построение (рис. 6.2).

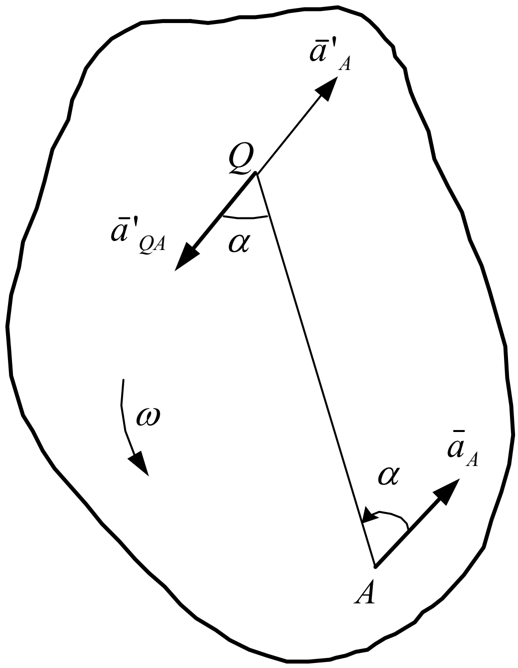


Рис. 6.2

Из точки A отложим угол $\alpha = \mathrm{arctg}\dfrac{\varepsilon}{\omega^2}$ от вектора $\overline{a}_A$ в сторону, противоположную ходу часовой стрелки (при $\omega > 0$), и в масштабе ускорений отрезок

$$AQ = \frac{a_A}{\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}}.$$

Очевидно, что точка Q – мгновенный центр ускорения, т.к. $\overline{a}_Q = \overline{a}_A + \overline{a}_{QA} = 0$ при условии, что точка A принята за полюс. Действительно, вычислив модуль вектора

$$\left|\overline{a}_{QA}\right| = AQ\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4} = \frac{a_A}{\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}} \cdot \sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4} = a_A$$

с учётом принятых при построении величины отрезка AQ и правила знаков угловой скорости при вращении, легко убедиться в том, что точка Q является мгновенным центром ускорения.

Если известен мгновенный центр ускорения, то ускорение любой точки может быть определено по формуле вращательного движения тела

$$\overline{a}_A = \overline{a}_Q + \overline{a}_{AQ} = \overline{a}_{AQ} = \overline{a}_{AQ}^{\text{вр}} + \overline{a}_{AQ}^{\text{ос}}.$$

Мгновенный центр ускорения в общем случае не совпадает с м.ц.с. Например, мгновенный центр ускорения катящегося с постоянной скоростью ($\overline{\upsilon}_0 = \text{const}$) колеса находится в центре колеса, в то время как м.ц.с. располагается в точке касания с основанием.

3. Определение ускорений механизма

Рассмотрим на примере механизма дробилки фирмы «*BLAC*» последовательность вычисления ускорений характерных точек (рис. 6.3).

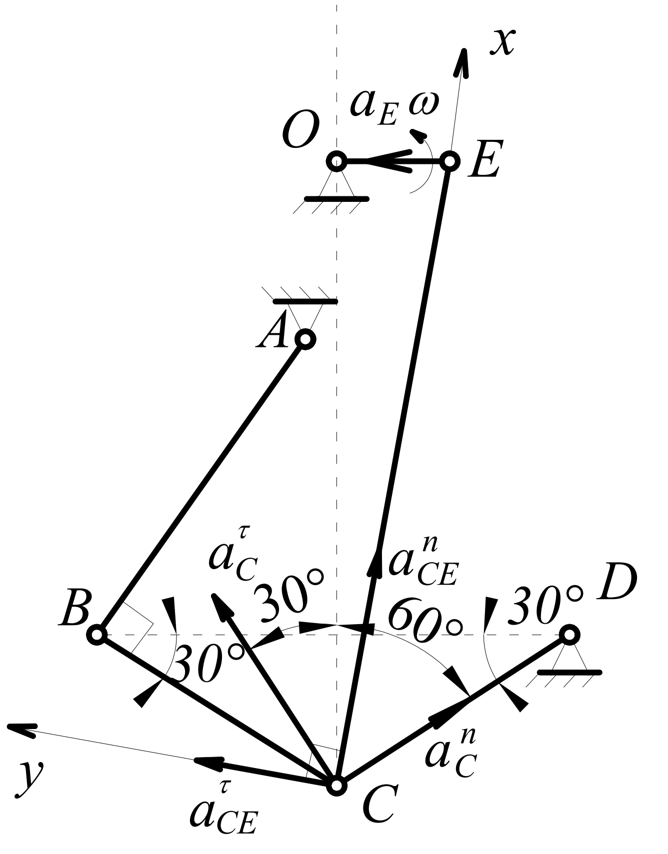


Рис. 6.3

Ускорение точки E направлено к центру O, поскольку привод дробилки осуществляется с постоянной угловой скоростью $(\omega > 0)$. Его величина равна $a_E = \omega^2 OE$. При определении ускорения точки C воспользуемся формулой (6.1), записанной с учётом зависимостей (6.2):

$$\overline{a}_C = \overline{a}_E + \overline{a}_{CE}^{\tau} + \overline{a}_{CE}^{n}, \tag{6.4}$$

и очевидным соотношением

$$\overline{a}_C = \overline{a}_{CD}^{\tau} + \overline{a}_{CD}^{n},$$

справедливым в условиях данной задачи. Приравнивая левые части приведенных выражений, составим векторное равенство:

$$\overline{a}_E + \overline{a}_{CE}^{\tau} + \overline{a}_{CE}^{n} = \overline{a}_{CD}^{\tau} + \overline{a}_{CD}^{n}. \tag{6.5}$$

Проектируя его на ось Cx, выведем уравнение

$$-a_E \sin\alpha + a_{CE}^{n} = a_C^{\tau}\cos(\alpha + 30^\circ) + a_C^{n}\cos(60^\circ - \alpha),$$

решением которого будет значение

$$a_C^{\tau} = \frac{-a_E \sin\alpha + a_{CE}^{n} - a_C^{n}\cos(60^\circ - \alpha)}{\cos(\alpha + 30^\circ)}.$$

С другой стороны, поскольку точка C движется по окружности радиуса CD, справедлива формула

$$a_C^{\tau} = \varepsilon_{CD} \cdot CD,$$

где ε_{CD} – угловое ускорение звена CD. Из последних равенств после приравнивания правых частей легко найти угловое ускорение:

$$\varepsilon_{CD} = \frac{-a_E \sin\alpha + a_{CE}^{n} - a_C^{n}\cos 60^\circ}{CD\cos(\alpha + 30^\circ)},$$

где $a_{CE}^{n} = \omega_{CE}^2 CE,\ \ a_C^{n} = \omega_{CD}^2 CD$.

Спроектировав равенство (6.5) на ось Cy, получим еще одно уравнение

$$a_E\cos\alpha + a_{CE}^{\tau} = a_C^{\tau}\sin(\alpha + 30^\circ) + a_C^{n}\sin(60^\circ - \alpha), \tag{6.6}$$

где в качестве неизвестного выступает величина ускорения

$$a_{CE}^{\tau} = \varepsilon_{CE} CE,$$

точнее, значение углового ускорения ε_{CE} звена CE. После подстановки этого выражения в уравнение (6.6) найдём угловое ускорение:

$$\varepsilon_{CE} = \frac{a_C^\tau \sin(\alpha + 30^\circ) + a_C^n \sin(60^\circ - \alpha) - a_E \cos\alpha}{CE}.$$

Возвращаясь к формуле (6.4), можно определить ускорение $\overline{a}_C$.

По аналогии с изложенным, можно найти ускорения и других точек механизма. Например, если взять в качестве полюса точку C, то ускорение точки B нетрудно определить по формуле

$$\overline{a}_B = \overline{a}_C + \overline{a}_{BC}^\tau + \overline{a}_{BC}^n,$$

подобной (6.4). Конечно, в данном случае следует принять во внимание и формулу

$$\overline{a}_B = \overline{a}_{AB}^\tau + \overline{a}_{AB}^n,$$

поскольку точка B совершает движение по окружности радиуса AB.

В заключение следует подчеркнуть, что к определению ускорений можно приступать после того, как найдены угловые скорости звеньев механизма*.

4. Три точки зрения на плоское движение

Резюмируя изложенное ранее о плоском движении тела, можно сформулировать три точки зрения:

1. Плоское движение тела есть непрерывная последовательность двух одновременных мгновенных движений: поступательного, характеризуемого смещением базовой точки A на отрезок Δ, и вращательного – на угол δ вокруг точки A (см. рис. 4.5).

2. Плоское движение представляется в виде последовательной серии чистых вращений тела относительно мгновенных центров скоростей, положение которых меняется с течением времени (рис. 6.4).

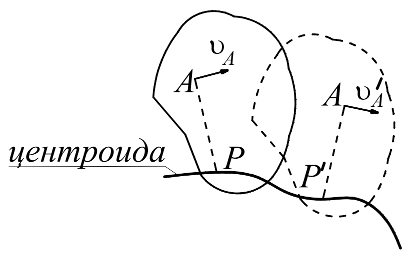


Рис. 6.4

* Другие способы определения скоростей и ускорений подробно рассматриваются в учебном пособии Левитский Н.И. Теория механизмов и машин. – М:. Наука, 1979.

3. Плоское движение может рассматриваться как качение (без проскальзывания) подвижной центроиды по неподвижной (теорема Пуансо) (см. рис. 5.6).

5. Краткий обзор способов определения поля скоростей при плоском движении

Так как при определении скорости тела при плоском движении говорят о скорости произвольной точки тела, то можно сделать вывод о том, что находят скорости всех точек тела и, следовательно, подразумевается определение поля скоростей.

Однозначное соответствие между координатами каждой точки тела и величиной скорости в ней называется полем скоростей.

Оно может быть представлено:

1) в векторной форме

$$\bar{\upsilon}_B = \bar{\upsilon}_A + \bar{\upsilon}_{BA};$$

2) в аналитическом виде

$$\dot{x}_B = \dot{x}_A - \omega\left(y_B - y_A\right),$$

$$\dot{y}_B = \dot{y}_A + \omega\left(x_B - x_A\right);$$

3) в матричной записи

$$\bar{\upsilon} = \left[\Omega\right]\bar{r},$$

аналогичной формуле Эйлера при вращении тела;

4) графически, как план скоростей.

Таким образом, для определения скоростей точек тела могут быть использованы следующие способы:

1) аналитический – на основе закона движения произвольной точки;
2) матричный – по формуле $\bar{\upsilon} = \left[\Omega\right]\bar{r}$;
3) графический – с помощью плана скоростей;
4) на основе теоремы о равенстве проекций скоростей;
5) с помощью мгновенного центра скоростей.

Контрольные вопросы

1. Запишите формулу вектора ускорения при плоском движении тела.
2. Что называется мгновенным центром ускорений ?
3. Как описать поле скоростей в аналитической и матричной формах ?
4. Приведите три точки зрения на плоское движение ?

Лекция № 7. СЛОЖНОЕ ДВИЖЕНИЕ МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ

1. Примеры сложного движения. Закон движения

Когда вы видите капли дождя, скользящие по стёклам движущегося автомобиля, в котором находитесь, или наблюдаете, как на стройке башенный кран, поворачиваясь вокруг своей оси, одновременно перемещает груз по стреле, знайте, что перед вами не простое движение капли или груза, а сложное (рис. 7.1,а). Стекание частиц грязи по канавкам протектора шины катящегося колеса автомобиля (рис. 7.1, б), течение жидкости в шланге, когда вы переносите его с места на место – тоже примеры сложного движения. Конструируя кран с оптимальными параметрами или разрабатывая рисунок протектора шины, инженер должен определить все характеристики движения с тем, чтобы обеспечить надёжную работу крана или безопасное движение автомобиля (очевидно, разлёт частиц грязи или камешков щебня дорожного покрытия при большой скорости машины зависит от рисунка протектора).

а б

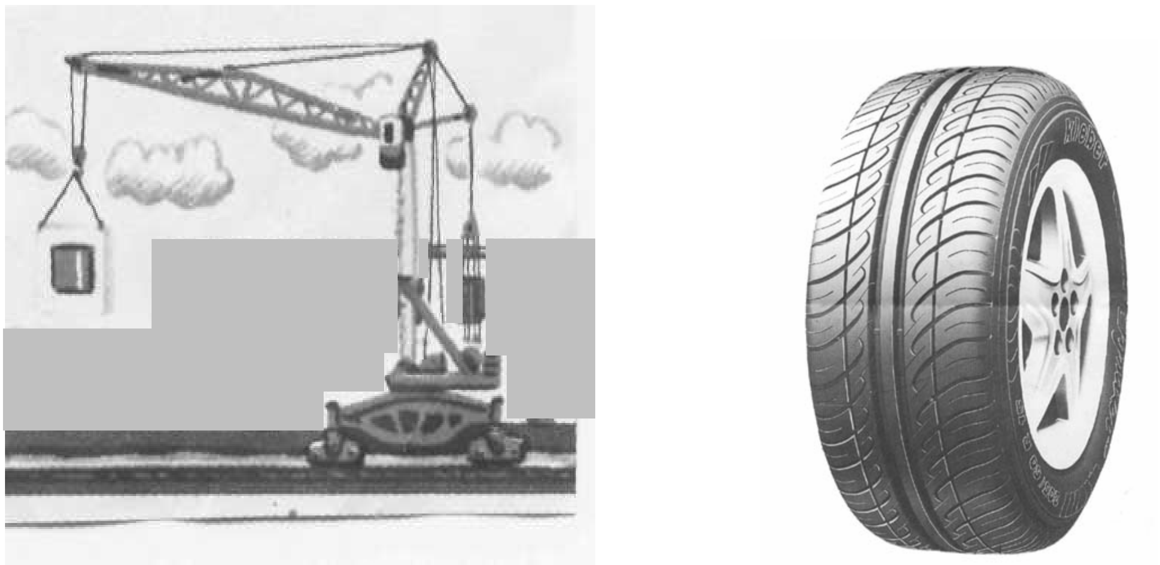


Рис. 7.1

Изучение движения материальной точки связано с выбором точки зрения или системы координат, в которой оно может быть описано. Например, за падением предмета, выпавшего из рук пассажира движущегося автобуса, можно следить из двух позиций и рассматривать его в двух системах отсчета: 1) в системе координат, связанной с автобусом; 2) в системе координат, связанной с наблюдателем, стоящим на обочине дороги.

Конечно, движение предмета по отношению к автобусу является простым, а вот его движение относительно неподвижной системы – сложным, которое можно разложить на два: первое – движение относительно автобуса и второе – падение предмета, "сносимое" автобусом при его движении.

О п р е д е л е н и е 1. *Сложным движением материальной точки называется движение точки, рассматриваемое в двух и более системах координат, хотя бы одна из которых подвижна.*

Покажем две системы координат: неподвижную, которую обозначим греческими буквами $\Omega\eta\ \theta\ \zeta$, и подвижную $Oxyz$. Рассмотрим движущуюся точку M, положение которой определим радиусами-векторами:

$\bar{r}(t)$ – в подвижной системе координат, $\bar{\rho}(t)$ – в неподвижной (рис. 7.2).

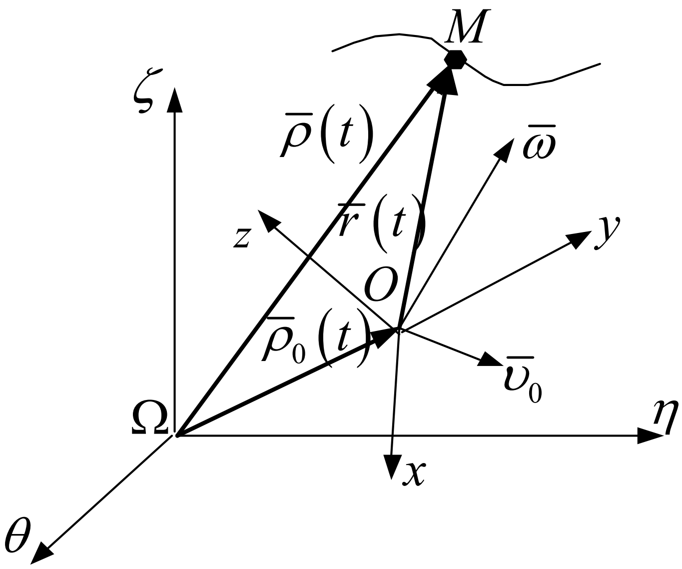


Рис. 7.2

Дополнительно введём и радиус-вектор начала подвижной системы координат $\bar{\rho}_0(t)$, который также изменяется со временем.

Очевидно, движение точки M можно описать векторным способом в виде

$$\bar{\rho}(t) = \bar{\rho}_0(t) + \bar{r}(t). \tag{7.1}$$

Оно и характеризует закон сложного движения.

О п р е д е л е н и е 2. *Движение точки M относительно подвижной системы координат Oxyz называется относительным.*

О п р е д е л е н и е 3. *Движение той точки подвижной системы координат, с которой в рассматриваемый момент времени совпадает положение точки M, по отношению к неподвижной системе, называется переносным.*

О п р е д е л е н и е 4. *Движение точки M по отношению к неподвижной системе координат* $\Omega\eta\theta\zeta$ *называется сложным или абсолютным.*

2. Производная радиуса-вектора $\overline{r}(t)$ в подвижной системе координат

Очевидно, в подвижной системе координат радиус-вектор точки *M* можно представить разложением

$$\overline{r}(t) = x(t)i + y(t)j + z(t)k .$$

Найдем производную $\overline{r}(t)$ по времени*

$$\frac{\tilde{d}(\overline{r})}{dt} = \frac{dx}{dt}i + \frac{dy}{dt}j + \frac{dz}{dt}k + x\frac{di}{dt} + y\frac{dj}{dt} + z\frac{dk}{dt}$$

[$\tilde{d}(\overline{r})$ – читается: дэ тильда эр]

и назовем ее *полной производной*.

Единичные орты *i, j, k* подвижной системы координат совершают повороты вокруг некоторой оси с одинаковой мгновенной угловой скоростью ω; поэтому по аналогии с формулой Эйлера

$$\overline{\upsilon} = \frac{d\overline{r}}{dt} = \overline{\omega}\times\overline{r}$$

справедливы равенства:

$$\begin{cases} \dfrac{di}{dt} = \overline{\omega}\times i, \\ \dfrac{dj}{dt} = \overline{\omega}\times j, \\ \dfrac{dk}{dt} = \overline{\omega}\times k. \end{cases}$$

С учетом последних формул полная производная принимает вид

$$\frac{\tilde{d}\overline{r}}{dt} = \frac{d\overline{r}}{dt} + x(\overline{\omega}\times i) + y(\overline{\omega}\times j) + z(\overline{\omega}\times k) = \frac{d\overline{r}}{dt} + \overline{\omega}\times(xi + yj + zk) = \frac{d\overline{r}}{dt} + \overline{\omega}\times\overline{r} .$$

---

* Поскольку говорится о новом виде производной, то её и следует обозначить индексом «тильда», т.е. $\dfrac{\tilde{d}\overline{r}}{dt}$.

Производная

$$\frac{d(\overline{r})}{dt}=\frac{dx}{dt}i+\frac{dy}{dt}j+\frac{dz}{dt}k$$

называется *локальной*; она характеризует изменение радиуса-вектора $\overline{r}$ в подвижной системе координат.

Произведение $\overline{\omega}\times\overline{r}$ называется *конвективной* частью полной производной радиуса-вектора $\overline{r}$.

Итак, полная производная вектора $\overline{r}$, заданного в подвижной системе координат, находится по формуле

$$\frac{\tilde{d}\overline{r}}{dt}=\frac{d\overline{r}}{dt}+\overline{\omega}\times\overline{r}.$$

2. Теорема о сложении скоростей

Выведем формулу скорости точки M при сложном движении (см. рис. 7.2). Основанием для вывода служит закон движения, представленный в форме (7.1):

$$\overline{\rho}(t)=\overline{\rho}_0(t)+\overline{r}(t).$$

Взяв *полную* производную от обеих частей этого выражения

$$\frac{\tilde{d}\overline{\rho}}{dt}=\frac{\tilde{d}\overline{\rho}_0}{dt}+\frac{\tilde{d}\overline{r}}{dt}=\frac{d\overline{\rho}_0}{dt}+\frac{d\overline{r}}{dt}+\overline{\omega}\times\overline{r}$$

и назвав затем

$$\overline{\upsilon}_r=\frac{d\overline{r}}{dt}$$

относительной скоростью, а

$$\overline{\upsilon}_e=\frac{d\overline{\rho}_0}{dt}+\overline{\omega}\times\overline{r}$$

переносной, находят величину скорости при *сложном движении* точки:

$$\overline{\upsilon}_a=\overline{\upsilon}_r+\overline{\upsilon}_e.$$

Таким образом, *скорость точки при сложном движении равна сумме скоростей относительного и переносного движений*.

4. Теорема о сложении ускорений (теорема Кориолиса)

Исходным соотношением для доказательства теоремы служит равенство

$$\overline{\upsilon}_a = \overline{\upsilon}_r + \overline{\upsilon}_e .$$

Вычислив полную производную от обеих частей этого равенства, можно установить, что

$$\frac{\tilde{d}\overline{\upsilon}_a}{dt} = \frac{\tilde{d}\overline{\upsilon}_r}{dt} + \frac{\tilde{d}\overline{\upsilon}_e}{dt} = \frac{\tilde{d}\overline{\upsilon}_r}{dt} + \frac{\tilde{d}}{dt}\left(\frac{d\overline{\rho}_0}{dt} + \overline{\omega}\times\overline{r}\right) = \frac{d\overline{\upsilon}_r}{dt} + \overline{\omega}\times\overline{\upsilon}_r + \frac{d^2\overline{\rho}_0}{dt^2} +$$

$$+\frac{\tilde{d}\overline{\omega}}{dt}\times\overline{r} + \overline{\omega}\times\frac{\tilde{d}\overline{r}}{dt}.$$

Оставляя без изменения три первых слагаемых*, следует продолжить вычисление производных в двух последних. В соответствии с правилом вычисления полной производной получим соотношение

$$\frac{\tilde{d}\overline{\omega}}{dt}\times\overline{r} + \overline{\omega}\times\frac{\tilde{d}\overline{r}}{dt} = \left(\frac{d\overline{\omega}}{dt} + \overline{\omega}\times\overline{\omega}\right)\times\overline{r} + \overline{\omega}\times\left(\frac{d\overline{r}}{dt} + \overline{\omega}\times\overline{r}\right) =$$

$$= \frac{d\overline{\omega}}{dt}\times\overline{r} + \overline{\omega}\times\frac{d\overline{r}}{dt} + \overline{\omega}\times\left(\overline{\omega}\times\overline{r}\right),$$

т.к. $\overline{\omega}\times\overline{\omega}\equiv 0$.

Вспомнив к тому же, что $\overline{\varepsilon} = \dfrac{d\overline{\omega}}{dt}$ обозначает угловое ускорение, а

$$\overline{\upsilon}_r = \frac{d\overline{r}}{dt}$$

- относительную скорость, последнюю сумму представим в виде

$$\overline{\varepsilon}\times\overline{r} + \overline{\omega}\times\overline{\upsilon}_r + \overline{\omega}\times\left(\overline{\omega}\times\overline{r}\right).$$

Таким образом, полная производная будет равна:

$$\frac{d\overline{\upsilon}_a}{dt} = \frac{d\overline{\upsilon}_r}{dt} + \overline{\omega}\times\overline{\upsilon}_r + \frac{d^2\overline{\rho}_0}{dt^2} + \overline{\varepsilon}\times\overline{r} + \overline{\omega}\times\overline{\upsilon}_r + \overline{\omega}\times\left(\overline{\omega}\times\overline{r}\right).$$

---

* Здесь принято во внимание тождество $\dfrac{\tilde{d}}{dt}\left(\dfrac{d\overline{\rho}_0}{dt}\right) = \dfrac{d^2\overline{\rho}_0}{dt^2}$, поскольку вектор $\overline{\rho}_0(t)$ задан в неподвижной системе координат.

Группируя слагаемые этой суммы и одновременно анализируя их смысл, можно установить, что

$$\overline{a}_a = \overline{a}_r + \overline{a}_e + \overline{a}_k,$$

где вектор

$$\overline{a}_r = \frac{d\overline{\upsilon}_r}{dt}$$

является *относительным* ускорением,

$$\overline{a}_e = \frac{d^2\overline{\rho}_0}{dt} + \overline{\varepsilon} \times \overline{r} + \overline{\omega} \times \left(\overline{\omega} \times \overline{r}\right)$$

- *переносным*,

$$\overline{a}_k = 2\overline{\omega} \times \overline{\upsilon}_r$$

- *поворотным* (*кориолисовым*) ускорением точки при ее сложном движении.

Это и является содержанием теоремы Кориолиса: *при сложном движении точки её ускорение складывается из трех частей: относительного, переносного и поворотного ускорений.*

5. Определение направления поворотного ускорения (по правилу Жуковского)

Вектор поворотного ускорения

$$\overline{a}_k = 2\overline{\omega} \times \overline{\upsilon}_r.$$

Его модуль

$$a_k = 2\omega \cdot \ \upsilon_r \cdot \sin\left(\overline{\omega}, \overline{\upsilon}_r\right)$$

подсказывает правило определения направления вектора $\overline{a}_k$. В правой системе декартовых координат, каковой является обычно изображаемая (без оговорки, что она правая) система, следует показать векторы скоростей $\overline{\omega}$, $\overline{\upsilon}_r$, угол между которыми можно обозначить через α (рис. 7.3).

Проектируя вектор $\overline{\upsilon}_r$ на плоскость *P*, перпендикулярную вектору $\overline{\omega}$, найдем

$$\upsilon_{rP} = \upsilon_r \cdot \sin\left(\overline{\omega}, \overline{\upsilon}_r\right) = \upsilon_r \sin\alpha.$$

Это произведение содержится в определении модуля вектора $\overline{a}_k$. Поскольку вектор $\overline{a}_k$ является векторным произведением векторов $\overline{\omega}$, $\overline{\upsilon}_r$, то он должен быть перпендикулярен плоскости, проведенной через векторы $\bar{\omega}$, $\bar{\upsilon}_r$. Следовательно, для определения направления вектора $\bar{a}_k$ необходимо проекцию υ_{rP}, лежащую в плоскости векторов $\bar{\omega}$, $\bar{\upsilon}_r$, повернуть на угол $\varphi = \dfrac{\pi}{2}$ в положительном направлении переносного вращения. Правило знаков для углов φ было сформулировано при определении знака $\bar{\omega}$ при вращательном движении тела.

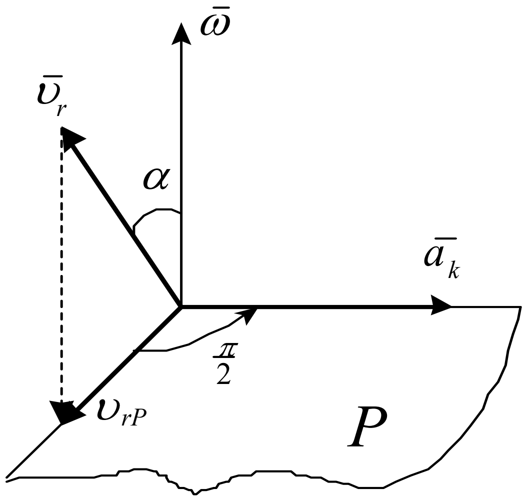


Рис. 7.3

Описанная процедура и составляет *правило Жуковского*:

Направление вектора кориолисового ускорения совпадает с направлением проекции вектора относительной скорости υ_{rP}*, повернутой на угол* $\dfrac{\pi}{2}$ *по направлению переносного вращения.*

Примечание. Величина кориолисова ускорения

$$a_k = 2\omega\upsilon_r \sin\alpha$$

равна нулю в тех случаях, когда:

1) переносное движение является поступательным $(\omega \equiv 0)$;

2) в те моменты движения точки, когда векторы $\bar{\omega}$ и $\bar{\upsilon}_r$ оказываются параллельными; при этом $\sin\alpha = 0$ $(\alpha = 0, \pi)$;

3) если в некоторые моменты времени, например при изменении направления относительного движения точки, υ_r =0.

6. Пример

Найти ускорение точки *M*, если ее движение задано в полярной системе координат (рис. 7.4,а) : $\rho = \rho\ (t)$, $\varphi = \varphi\ (t)$.

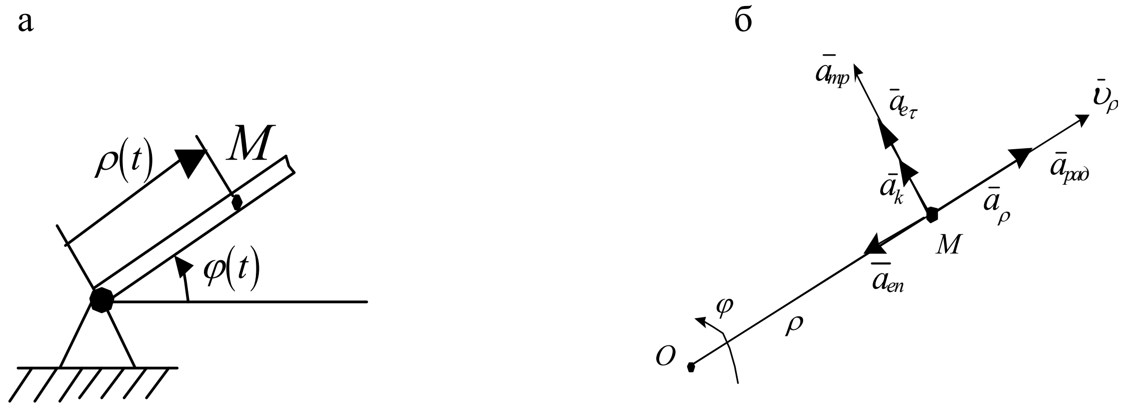


Рис. 7.4

Будем рассматривать движение точки *M* как сложное и ассоциировать его с перемещением шарика по трубке, вращающейся вокруг опоры. Очевидно, движение точки вдоль радиальной координаты – относительное. Его скорость обозначается через $\bar{\upsilon}_\rho$. Вращение самого радиуса (трубки) – переносное; угловую скорость переносного движения обозначим ω, ускорение – ε.

Ясно, что[*]

$$a_\rho = \ddot{\rho}(t),$$

$$a_{e\tau} = \varepsilon\rho = \ddot{\varphi}\rho,$$

$$a_{en} = \omega^2\rho = \dot{\varphi}^2\rho.$$

Модуль кориолисова ускорения находится по формуле

$$a_k = 2\ \upsilon_\rho\ \omega \sin\left(\bar{\omega}, \bar{\upsilon}_\rho\right) = 2\omega\upsilon_\rho = 2\dot{\varphi}\dot{\rho}.$$

В соответствии с теоремой Кориолиса полное ускорение равно

$$\bar{a}_a = \bar{a}_\rho + \bar{a}_{e\tau} + \bar{a}_{en} + \bar{a}_k.$$

Проектируя это равенство на направление радиуса-вектора и перпендикулярное к нему, получаем соответствующие компоненты ускорения

$$a_{\text{рад}} = \ddot{\rho} - \dot{\varphi}^2\rho,$$

[*] См. формулы ускорений при поступательном и вращательном движениях тела (лекция № 3).

$$a_{тр} = \ddot{\varphi}\rho + 2\dot{\varphi}\dot{\rho} = \frac{d}{\rho dt}\left(\rho^2\dot{\varphi}\right).$$

Первая из них называется *радиальной*, а вторая – *трансверсальной* проекцией ускорения. Модуль вектора ускорения точки при задании движения в полярной системе координат находится по формуле

$$a = \sqrt{a_{\text{рад}}^2 + a_{\text{тр}}^2}\,,$$

а его направление определяется в результате геометрического сложения указанных компонент (рис. 7.4,б).

7. Матричная формулировка теорем о сложении

Если бы лекции печатались в прошлом веке, то материалом предыдущих разделов можно было бы и ограничиться. Но наступил новый век – время компьютеризации, которое требует по-новому, на современном уровне подходить и к описанию сложного движения. Решение задач о сложном движении материальной точки следует автоматизировать для того, чтобы все кинематические характеристики можно было находить с помощью компьютера в автоматическом режиме. С этой целью необходимо переформулировать теоремы о сложении скоростей и ускорений в терминах матриц и векторов, поскольку операции с ними легко программируются*.

Ограничимся здесь случаем, когда движение точки происходит в одной плоскости (рис. 7.5).

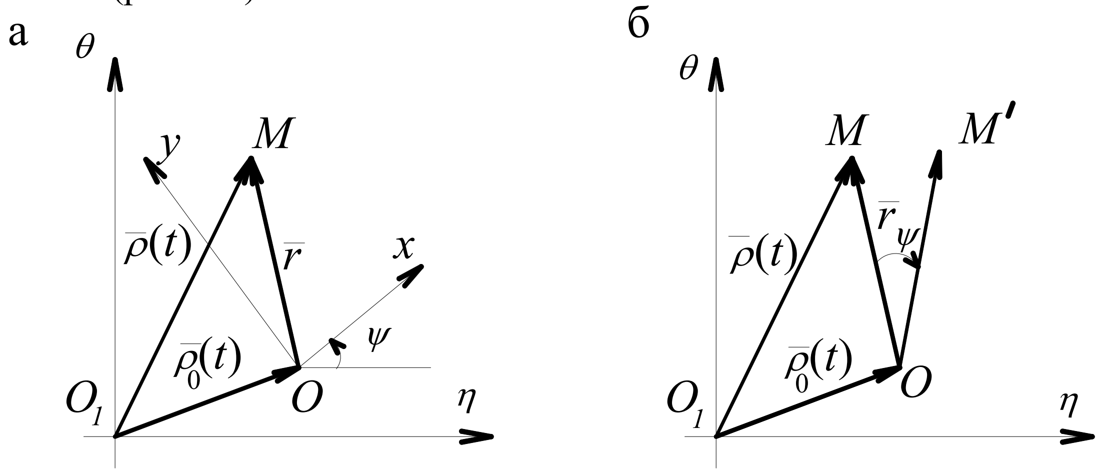


Рис. 7.5

* Иной, более сложный подход к автоматизации возможен с помощью понятия псевдовектора скорости [1].

Заведомо зная, что радиус-вектор $\overline{r}(t)$ может изменяться как по модулю, так и по направлению, второе слагаемое в законе сложного движения (7.1) точки можно записать в виде произведения $\left[\Psi\right]^{-1}\overline{r}(t)$, где матрица $\left[\Psi\right]^{-1}$ отвечает повороту вектора $\overline{r}(t)$ на угол ψ^{*}. Таким образом, закон сложного движения точки принимает новую форму

$$\overline{\rho}(t)=\overline{\rho}_0\left(t\right)+\left[\Psi\right]^{-1}\overline{r}\left(t\right), \qquad (7.1,\text{a})$$

где, как и ранее, $\overline{\rho}_0(t)$ – радиус-вектор начала подвижной системы координат *Oxy*; $\overline{r}(t)$ – закон движения точки *M*, заданный в подвижной системе.

П р и м е ч а н и е.

Матрица

$$\left[\Psi\right]=\begin{bmatrix}\cos\psi\sin\psi\\ -\sin\psi\cos\psi\end{bmatrix}$$

является матрицей преобразования координат при повороте осей на угол ψ против хода часовой стрелки (см. рис. 3.6, 7.5,а). С другой стороны, очевидно, что обратная матрица $\left[\Psi\right]^{-1}$ описывает поворот вектора $\overline{r}$ на угол ψ по ходу часовой стрелки относительно неподвижной системы координат $O_1\eta\theta$ (см. рис. 4,4, 7.5,б, приложение)[**].

Для вывода формулы скоростей следует продифференцировать закон движения (7.1,а) по времени

$$\overline{\upsilon}_a=\overline{\rho}_0^{\bullet}\left(t\right)+\frac{d\left[\Psi\right]^{-1}}{dt}\overline{r}+\left[\Psi\right]^{-1}\overline{r}^{\bullet}. \qquad (7.2)$$

Обозначив угловую скорость поворота $\omega=\dfrac{d\psi}{dt}$, найдём производную матрицы $\left[\Psi\right]^{-1}$ по времени, а именно:

$$\frac{d\left[\Psi\right]^{-1}}{dt}=\left[D\right]\left[\Psi\right]^{-1}\omega,$$

где

$$\left[D\right]=\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$$

- оператор дифференцирования матрицы $\left[\Psi\right]$ по переменной ψ [9].

---

[*] Близкое по духу изложение теорем о сложении имеется в книге Киттеля Ч., Найат Ч., Рудермана Механика. Берклеевский курс физики. - М.: Наука, 1975. – Т. 1. – 450 с.

[**] См. книгу Г. Голдстейна «Классическая механика». - М:. – «Наука». – 1975. – 415с.

Подставив производную $\dfrac{d\left[\Psi\right]^{-1}}{dt}$ в выражение (7.2), получим матричную форму для скорости сложного движения

$$\overline{\upsilon}_a = \overline{\rho}_0^{\bullet} + \left[\Psi\right]^{-1}\left(\overline{r}^{\bullet} + \left[D\right]\omega\overline{r}\right). \qquad (7.3)$$

Таким образом, зная, как изменяются компоненты радиуса-вектора $\overline{r}\left(t\right)$, а также закон переносного вращения $\psi = \psi\left(t\right)$, скорость абсолютного движения точки можно определить по известной формуле

$$\overline{\upsilon}_a = \overline{\upsilon}_r + \overline{\upsilon}_e.$$

Здесь по-прежнему используются понятия скорости относительного и переносного движений, но представленные теперь в матричной форме:

$$\overline{\upsilon}_r = \left[\Psi\right]^{-1}\overline{r}^{\bullet},$$

$$\overline{\upsilon}_e = \overline{\rho}_0^{\bullet} + \omega\left[D\right]\left[\Psi\right]^{-1}\overline{r}.$$

Для вывода формулы сложения ускорений следует продифференцировать выражение (7.3):

$$\overline{a}_a = \frac{d\overline{\upsilon}_a}{dt} = \frac{d\overline{\rho}_0^{\bullet}}{dt} + \frac{d\left[\Psi\right]^{-1}}{dt}\left(\overline{r}^{\bullet} + \left[D\right]\omega\overline{r}\right) + \left[\Psi\right]^{-1}\frac{d}{dt}\left(\overline{r}^{\bullet} + \left[D\right]\omega\overline{r}\right).$$

Производная последнего сомножителя равна:

$$\overline{r}^{\bullet\bullet} + \left[D\right]\omega\overline{r}^{\bullet} + \left[D\right]\varepsilon\overline{r}.$$

Сгруппировав слагаемые, абсолютное ускорение точки можно представить в прежнем виде

$$\overline{a}_a = \overline{a}_r + \overline{a}_e + \overline{a}_k,$$

но теперь относительное ускорение точки определяется по формуле

$$\overline{a}_r = \left[\Psi\right]^{-1}\overline{r}^{\bullet\bullet},$$

переносное –

$$\overline{a}_e = \overline{\rho}_0^{\bullet\bullet} + \left[D\right]\left[\Psi\right]^{-1}\left(\varepsilon + \omega^2\left[D\right]\right)\overline{r}$$

и поворотное (кориолисово) ускорение точки –

$$\overline{a}_k = 2\left[D\right]\left[\Psi\right]^{-1}\omega\,\overline{r}^{\bullet}.$$

Таким образом, абсолютное ускорение материальной точки можно определить в автоматическом режиме на основе простейших операций с матрицами*.

Контрольные вопросы

1. Чем отличается сложное движение точки от обычного ?
2. Дайте определение относительного и переносного движений точки.
3. По какой формуле находится производная радиуса-вектора в подвижной системе координат ?
4. Сформулируйте теорему о сложении скоростей точки при сложном движении.
5. Как найти модуль и направление вектора кориолисова ускорения ?

* Примеры вычисления скорости точки при сложном движении приводятся в методических указаниях к расчётно-графической работе (Монахов В.А. Кинематика сложного движения точки. – Пенза: ПГУАС, 2005. – 44 с.).

Лекция № 8. СФЕРИЧЕСКОЕ ДВИЖЕНИЕ ТВЁРДОГО ТЕЛА. «ПУТЕШЕСТВИЕ ИЗ ВАРЯГ В ГРЕКИ»

1. Определение и примеры сферического движения. Закон движения. Степень свободы сферического движения

Движение твердого тела, имеющего одну неподвижную точку, называется сферическим. Действительно, любая точка A тела при этом движется по сферической поверхности s радиуса $\overline{\rho} = OA$ (рис. 8.1). Отсюда и название движения.

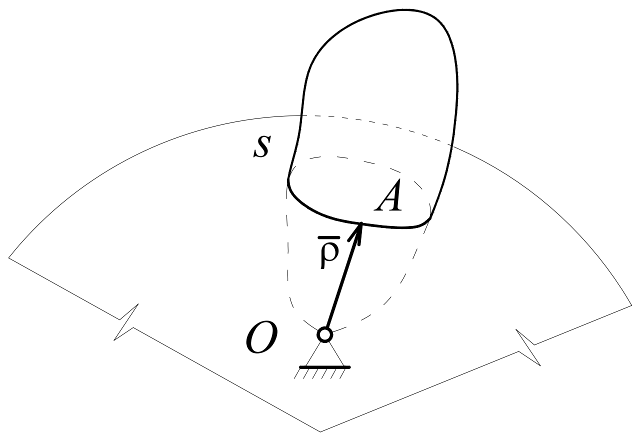


Рис. 8.1

Примерами такого движения являются вращение волчка (юлы) при сохранении неподвижной точки опоры, движение кисти руки относительно локтевого участка, движение рычага переключения скоростей автомобиля и др.

Положение твердого тела в пространстве можно определить координатами трех точек, не лежащих на одной прямой. А так как при сферическом движении одна из точек (точка O) остаётся неподвижной, то положение тела можно задать координатами лишь двух точек M, N, не лежащих на одной прямой с точкой O (рис. 8.2).

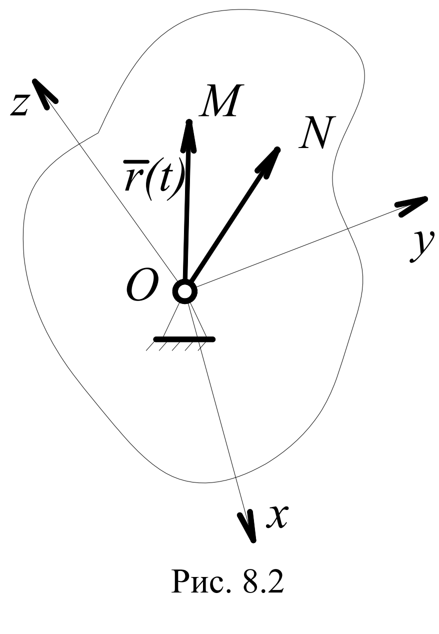


Рис. 8.2

Очевидно, для координат точек *M, N* справедливы следующие соотношения:

1. $$OM = \sqrt{x_M{}^2 + y_M^2 + z_M^2} = d_1 = \text{const},$$

2. $$ON = \sqrt{x_N{}^2 + y_N^2 + z_N^2} = d_2 = \text{const},$$

3. $$MN = \sqrt{\left(x_N - x_M\right)^2 + \left(y_N - y_M\right)^2 + \left(z_N - z_M\right)^2} = d_3 = \text{const},$$

где d_i $(i = 1,2,3)$ – длины отрезков *OM*, *ON*, *MN*, сохраняющие свои значения в процессе движения.

Характеристиками сферического движения тела могут служить законы движения точек *M* и *N*, представленные в виде функций времени:

$$x_M = x_M(t), \quad y_M = y_M(t), \ \ldots, \ z_N = z_N(t).$$

Всего их шесть. Однако из этих шести величин лишь три независимы вследствие наличия трех указанных соотношений. Следовательно, задание любых трех координат произвольной точки тела в виде функций времени однозначно характеризует сферическое движение, например, координат точки *M*:

$$x_M = x_M(t), \ \ y_M = y_M(t), \ \ z_M = z_M(t).$$

В качестве независимых параметров, характеризующих сферическое движение, можно взять также углы Эйлера (см. подразд. 2 лекции), корабельные углы Крылова (углы дифферента, рыскания, крена) и др. Очевидно, *степень свободы твердого тела при сферическом движении равна трём*.

2. Углы Эйлера. «Путешествие из варяг в греки»

Начнём «путешествие»! Начнем с того, что установим, осмотримся: «Где мы?». Пусть мы находимся у «греков»*. В стране, где системы координат обозначают, естественно, греческими буквами η, θ, ζ (рис. 8.3). Следовательно, координаты произвольной точки тела тоже обозначаются этими буквами. Будем считать эту систему координат неподвижной.

Для описания сферического движения понадобится ещё и подвижная система координат, которая жёстко связана с телом и в начальном положении совпадает с неподвижной.

* Это не соответствует объявлению в заголовке, но, по существу, не важно.

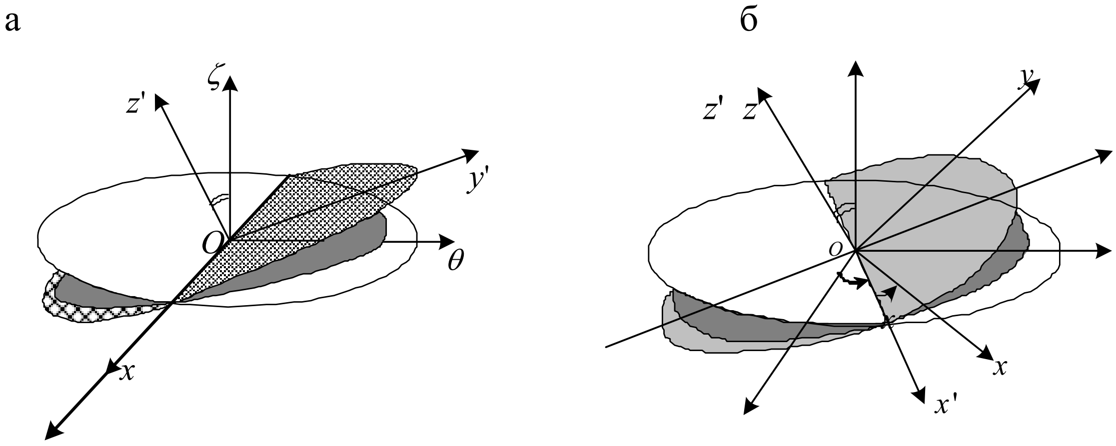
Наша цель – «страна варягов», т.е. то положение подвижной декартовой системы координат, которое она может занять при произвольном движении тела с одной неподвижной точкой *O*. И, конечно, в их стране системы координат называют «по-варяжски», латинскими буквами *x,y,z*. Быстро к ним не попасть и потому пойдем в три этапа:

I. Сначала осуществим наклон подвижной системы координат вокруг оси $O\eta$ или Ox на угол ϑ, который принято называть *углом нутации.* В результате ось Oz займёт положение Oz', а ось Oy – положение Oy' (рис. 8.3, а).

II. Теперь повернем систему координат вокруг оси $O\zeta$ на угол ψ и назовем его *углом прецессии*. Ось Ox перейдёт в новое положение Ox', которое называется *линией узлов* и обозначается чаще как $O\xi$ (рис. 8.3,б)**.

III. А в конце закрутим полученную систему координат вокруг оси Oz' на угол φ, так называемый *угол собственного или чистого вращения* (рис. 8.3,б).

Углы φ, ψ, ϑ, характеризующие положение тела при сферическом движении, называются *углами Эйлера*.



φ – *угол собственного вращения*,

ψ – *угол прецессии*,

ϑ – *угол нутации*.

Рис. 8.3

Итак, мы совершили «путешествие», но обратное тому, о котором объявлено в заглавии лекции. Автор надеется, что читатель, поняв суть изложенного, простит его за этот образный, но немного противоречивый приём.

** Начинать «путешествие» можно и со второго «пункта».

Закон сферического движения твердого тела в переменных Эйлера записывается в виде

$$\vartheta = \vartheta(t), \quad \psi = \psi(t), \quad \varphi = \varphi(t)\,.$$

3. Матрица преобразования координат при сферическом движении

Словесное описание этапов путешествия можно перевести на язык математики – язык формул; в данном случае на язык матричных преобразований. Материал настоящего раздела, да и всех лекций курса, демонстрирует огромные преимущества, открывающиеся в механике при использовании современной концепции описания движения материальных частиц и тел с позиций матричных преобразований систем координат.

Каждый из перечисленных в предыдущем разделе поворотов подвижной системы координат, а следовательно, и тела можно описать матрицей поворота или вращения. Действительно, повороту тела вокруг оси $O\zeta$ соответствует преобразование вида

$$\left[R\right] = \begin{bmatrix} \cos\psi & sin\psi & 0 \\ -\sin\psi & \cos\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

которое можно ассоциировать с «переходом в г. Ростов» – $\left[R\right]$ («из греков»). Очевидно, квадратная матрица третьего порядка, кроме поворота подвижной системы на угол ψ, характеризует также сохранение координаты вдоль оси $O\zeta$, т.е. $z = 1 \cdot \zeta$ *.

Повороту тела вокруг оси $O\eta$ или линии узлов $O\xi$ на угол ϑ соответствует матрица преобразования $\left[P\right]$ («теперь мы в Пензе!»)

$$\left[P\right] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\vartheta & \sin\vartheta \\ 0 & -\sin\vartheta & \cos\vartheta \end{bmatrix},$$

а вращению на угол φ вокруг оси Oz' - матрица

$$\left[L\right] = \begin{bmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi & 0 \\ -\sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

---

* Преобразование подобного вида рассмотрено ранее при изучении вращательного движения.

(«И мы уже в Ленинграде!» – уже вблизи варягов, благодаря "переходу" – преобразованию $[L]$).

Матрицей всего «пути» или произвольного сферического движения тела будет служить матрица $[\phi]$, являющаяся произведением перечисленных матриц*, т.е.

$$[\phi]=[L][P][R] \ .$$

Выполнив умножение матриц, получим:

$$[\phi]=\begin{bmatrix} \cos\psi\cos\varphi-\cos\vartheta\sin\psi\sin\varphi, & \cos\psi\sin\varphi+\cos\vartheta\cos\psi\cos\varphi, & \sin\varphi\sin\vartheta \\ -\sin\psi\sin\varphi-\cos\vartheta\sin\psi\sin\varphi, & -\sin\psi\sin\varphi+\cos\vartheta\cos\psi\cos\varphi, & \cos\varphi\sin\vartheta \\ \sin\theta\sin\psi & -\sin\theta\sin\psi & \cos\vartheta \end{bmatrix}.$$

Итак, новые координаты произвольной точки *M* тела можно выразить через старые с помощью матрицы преобразования $[\phi]$.

Пользуясь терминами «путешественников», можно говорить о том, что если у «греков» взять вектор (подразумевать можно и стержень) $\overline{\rho}$, то в результате «путешествия из *греков в варяги*» он преобразится в вектор $\overline{r}$ в соответствии с формулой

$$\overline{r}=[\phi]\overline{\rho},$$

где $\overline{r}=(x,y,z)^T$, а $\overline{\rho}=(\ \eta,\theta,\zeta\ )^T$, т.е. в «стране варягов» *проекции стержня* становятся иными, чем «у греков». Заметим, что модули векторов $\overline{r}$ и $\overline{\rho}$ (их длины) при преобразовании остаются без изменения.

С помощью преобразования, обратного $[\phi]$, можно осуществить переход от системы *Oxyz*, связанной с телом, к неподвижной системе координат $O\eta\theta\zeta$. Описывается данное преобразование зависимостью $\overline{\rho}=[\phi]^{-1}\overline{r}$, где $\overline{\rho}$ – радиус-вектор точки *M* в неподвижной системе координат, а $\overline{r}$ – его отражение в подвижной.

Для ортогональных матриц**, а таковой является матрица $[\phi]$, справедливо равенство $[\phi]^{-1}=[\phi]^T$. Таким образом, обратное преобразование можно описать той же матрицей $[\phi]$, поменяв в ней положение строк и столбцов в соответствии с операцией транспонирования.

---

* Здесь важна последовательность умножения матриц.

** Матрица $[\phi]$ ортогональна, если ее элементы удовлетворяют условиям ортогональности:

$$\sum_{i=1}^{3}\varphi_{ij}\varphi_{ik}=\delta_{jk} \quad (j,k=1,2,3),$$

где δ_{jk} – символ Кронекера ($\delta_{jk}=1$ при $k=j$ и $\delta_{jk}=0$ при $k\neq j$).

4. Мгновенная ось вращения. Теорема Эйлера – Даламбера

Допустим, что при сферическом движении тела в любой момент времени существует некая ось вращения, проходящая через неподвижный центр O. Но в отличие от оси вращательного движения тела эта прямая в процессе движения непрерывно меняет свое положение (рис. 8.4).

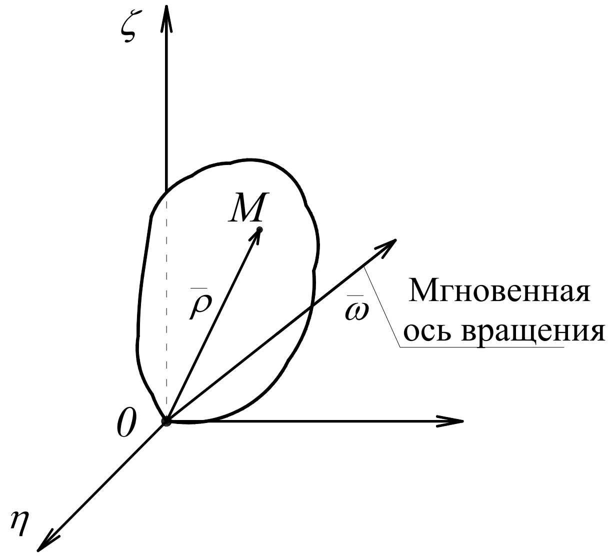


Рис. 8.4

Движение твердого тела около неподвижной точки можно рассматривать как непрерывную последовательность элементарных вращений. Согласно принятому, любое элементарное перемещение можно осуществить только одним поворотом на бесконечно малый угол вокруг некоторой оси, проходящей через неподвижную точку и называемой *мгновенной осью вращения.* Таким образом, *движение твердого тела около неподвижной точки можно рассматривать как непрерывную серию бесконечно малых поворотов вокруг мгновенных осей вращения, проходящих через эту точку*.

В этом заключается теорема Эйлера – Даламбера. Для её доказательства рассмотрим два смежных положения тела, характеризуемые двумя положениями дуг AB и CD (рис. 8.5). Соединим их концы и найдём середины дуг AC и BD, которые обозначим буквами H, Е. Проведём через эти точки «большие» круги с центром в точке O, перпендикулярные к предыдущим дугам. Указанные круги пересекаются в точке F. Так как сферические треугольники AFB и CFD равны, поскольку дуги AB и CD одинаковы по построению, а дуги AF и CF, BF и DF попарно равны как сферические наклонные, одинаково удалённые от оснований сферических перпендикуляров, то треугольник AFB может быть совмещён с треугольником CFD одним поворотом на угол AFC вокруг центра.

Отсюда следует, что и сферический отрезок AB совместится с отрезком CD. При таком повороте точки O и F остаются неподвижными. Следовательно, прямая OF тоже неподвижна. Она и будет осью вращения тела, что и доказывает теорему.

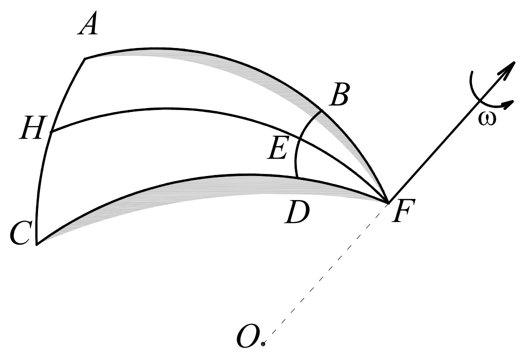


Рис. 8.5

5. Скорость тела при сферическом движении

а) Скорость (линейная) любой точки при сферическом движении может быть определена по формуле Эйлера

$$\overline{\upsilon} = \overline{\omega} \times \overline{r},$$

т.к. в любое мгновенье движение твердого тела является вращательным (вокруг мгновенной оси вращения). Вектор скорости $\overline{\upsilon}$ точки M направлен по нормали к плоскости, образованной радиусом-вектором $\overline{r}$ и вектором мгновенной угловой скорости $\overline{\omega}$ (рис. 8.6). Модуль скорости равен:

$$\upsilon = \omega r \sin\alpha = \omega h.$$

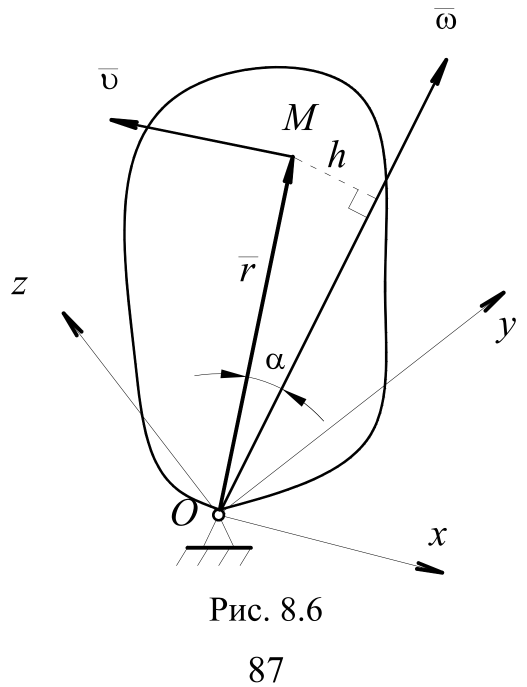


Рис. 8.6

Обозначив проекции вектора $\overline{\omega}$ на оси координат через $\omega_x, \omega_y, \omega_z$ и представив радиус-вектор $\overline{r}$ произвольной точки *M* в проекциях на оси *x,y,z*, на основе определения векторного произведения в виде

$$\overline{\upsilon} = \overline{\omega} \times \overline{r} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \omega_x & \omega_y & \omega_z \\ x & y & z \end{vmatrix}$$

после раскрытия определителя найдем проекции вектора скорости $\overline{\upsilon}$:

$$\begin{aligned} \upsilon_x &= \omega_y z - \omega_z y, \\ \upsilon_y &= \omega_z x - \omega_x z, \\ \upsilon_z &= \omega_x y - \omega_y x. \end{aligned} \tag{8.1}$$

Эти формулы также носят имя Эйлера. Они сохраняют свой вид независимо от того, в какой системе координат рассматривается движение – локальной или неподвижной.

Примечание. Формулу (8.1) можно записать и в матричном виде, если воспользоваться так называемым псевдовектором угловой скорости [1], [5]

$$[\Omega] = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_z & \omega_y \\ \omega_z & 0 & -\omega_x \\ -\omega_y & \omega_x & 0 \end{bmatrix},$$

поскольку

$$[\Omega]\overline{r} = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_z & \omega_y \\ \omega_z & 0 & -\omega_x \\ -\omega_y & \omega_x & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \omega_y z - \omega_z y \\ \omega_z x - \omega_x z \\ \omega_x y - \omega_y x \end{pmatrix}. \tag{8.2}$$

Сравнивая правые части равенств (8.1) и (8.2), можно вывести формулу

$$\overline{\upsilon} = [\Omega]\overline{r}\,, \tag{8.3}$$

где $\overline{\upsilon} = \left(\upsilon_x, \upsilon_y, \upsilon_z\right)^T$ – вектор-столбец скорости точки *M*.

Из определения мгновенной оси вращения следует, что линейные скорости точек мгновенной оси вращения равны нулю. Следовательно, проекции вектора скорости любой точки этой оси $\upsilon_x = \upsilon_y = \upsilon_z = 0$. С учетом определений (8.1) получим равенства:

$$\omega_x z - \omega_z y = 0, \quad \omega_z x - \omega_x z = 0, \quad \omega_x y - \omega_y x = 0\,,$$

откуда вытекает пропорция

$$\frac{x}{\omega_x} = \frac{y}{\omega_y} = \frac{z}{\omega_z}.$$

Это соотношение и есть уравнение оси вращения, относящейся к некоторому мгновению.

б) Матричная формула скорости.

В том случае, когда сферическое движение тела задано в переменных Эйлера, распределение скоростей можно найти путём дифференцирования преобразования $\bar{r} = [\phi]\bar{\rho}$ по времени. Оно несложно. По существу, в данном случае следует воспользоваться правилом дифференцирования сложной функции и матричным оператором дифференцирования.

Действительно, каждая из матриц, образующих преобразование $[\phi]$, является сложной функцией, поскольку её элементы зависят от времени. Но сами элементы – углы Эйлера – независимы. Следовательно, справедлива следующая формула дифференцирования:

$$\bar{\upsilon} = \frac{d\bar{r}}{dt} = \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial[\phi]}{\partial q_i} \dot{q}_i \cdot \bar{\rho}, \tag{8.4}$$

где обобщённая координата q_i $(i = 1,2,3)$ обозначает любой из углов Эйлера (см. рис. 8.3). В соответствии с правилом дифференцирования матриц скорость тела при сферическом движении можно представить в форме

$$\bar{\upsilon} = \left([D_\varphi][L][P][R]\dot{\varphi} + [L][D_\vartheta][P][R]\dot{\vartheta} + [L][P][D_\varphi][R]\dot{\psi} \right)\bar{\rho}.$$

Здесь использованы матричные операторы частного дифференцирования третьего порядка:

$$[D_\varphi] = \frac{\partial[L]}{\partial\varphi} = \frac{\partial[R]}{\partial\psi} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad [D_\vartheta] = \frac{\partial[P]}{\partial\vartheta} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

С учётом ранее принятых обозначений для угловых скоростей

$$\omega_\psi = \dot{\psi}, \quad \omega_\vartheta = \dot{\vartheta}, \; \omega_\varphi = \dot{\varphi},$$

в результате перемножения матриц с последующим сложением скорость любой точки тела при сферическом движении находится по формуле

$$\bar{\upsilon} = [V]\bar{\rho}, \tag{8.5}$$

где матрица

$$\left[V\right]=\left[D_{\varphi}\right]\left[L\right]\left[P\right]\left[R\right]\dot{\varphi}+\left[L\right]\left[D_{\vartheta}\right]\left[P\right]\left[R\right]\dot{\vartheta}+\left[L\right]\left[P\right]\left[D_{\varphi}\right]\left[R\right]\dot{\psi} \qquad (8.6,а)$$

называется матрицей скорости сферического движения тела. Благодаря ей легко найти распределение скоростей при сферическом движении тела в неподвижной системе координат в автоматическом режиме программным способом*.

Сравнивая выражения для скорости (8.4) и (8.5), можно убедиться, что матрица $\left[V\right]$ находится по формуле

$$\left[V\right]=\sum_{i=1}^{3}\frac{\partial\left[\phi\right]}{\partial q_i}\dot{q}_i\,, \qquad (8.6,б)$$

где $\left[\phi\right]$ является матрицей преобразования координат при сферическом движении (см. подразд. 3).

П р и м е ч а н и е. Аналогом полученной формулы может служить выражение (3.1) из книги [1], в которой матрица скорости $[V]$ представлена в виде произведения

$$\left[V\right]=\left[\Omega\right]\left[\phi\right],$$

где матрица

$$\left[\Omega\right]=\begin{bmatrix}0 & -\omega_z & \omega_y\\ \omega_z & 0 & -\omega_x\\ -\omega_y & \omega_x & 0\end{bmatrix}$$

может рассматриваться как некий оператор дифференцирования, имеющий вид

$$\left[\Omega\right]=\begin{bmatrix}0 & -\omega_z & \omega_y\\ \omega_z & 0 & -\omega_x\\ -\omega_y & \omega_x & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -1\\ 0 & 1 & 0\end{bmatrix}\omega_x+\begin{bmatrix}0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0\\ -1 & 0 & 0\end{bmatrix}\omega_y+\begin{bmatrix}0 & -1 & 0\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}\omega_z$$

или

$$\left[\Omega\right]=\left[D_x\right]\omega_x+\left[D_y\right]\omega_y+\left[D_z\right]\omega_z$$

6. Теорема Эйлера

Материал, изложенный в подразд. 2 данной лекции, в некоторых учебных пособиях по механике формулируется (по аналогии с теоремой Эйлера – Даламбера) в виде теоремы под именем одного Эйлера:

* Очевидно, полученное выражение скорости является обобщением формулы (8.1) и кинематических уравнений Эйлера (см. подразд. 7). Матрица $[V]$ в развёрнутом виде здесь не приводится из-за громоздкости.

Произвольное перемещение твердого тела вокруг неподвижной точки можно осуществить тремя последовательными вращениями тела вокруг трех осей, проходящих через неподвижную точку О.

7. Кинематические уравнения Эйлера

Кинематические уравнения устанавливают зависимость между проекциями вектора угловой скорости $\overline{\omega}$ и углами Эйлера. Для отыскания указанной зависимости в подвижной системе координат воспользуемся тем, что бесконечно малый поворот тела вокруг мгновенной оси вращения можно рассматривать как совокупность трех бесконечно малых поворотов с угловыми скоростями

$$\omega_\psi = \dot{\psi}, \quad \omega_\vartheta = \dot{\vartheta}, \ \omega_\varphi = \dot{\varphi}.$$

Вектор $\overline{\omega}_\psi$ направлен вдоль оси ζ; вектор $\overline{\omega}_\vartheta$ - по линии узлов ξ, а $\overline{\omega}_\varphi$ – по оси *Oz* (рис. 8.7). Компоненты этих векторов в любой системе координат можно получить с помощью преобразований вращения. Найдем сначала разложение вектора $\overline{\omega}_\vartheta$ в подвижной системе координат *Oxyz*.

Очевидно, что проекции вектора $\overline{\omega}_\vartheta$ на оси, связанные с телом, могут быть определены посредством преобразования

$$\begin{bmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi & 0 \\ -\sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

характеризующего поворот вокруг оси *Oz* на угол φ (рис. 8.7). В соответствии с ним компоненты угловой скорости будут равны:

$$(\omega_\vartheta)_x = \dot{\vartheta}\cos\varphi,$$
$$(\omega_\vartheta)_y = \dot{\vartheta}\sin\varphi,$$
$$(\omega_\vartheta)_z = 0.$$

Чтобы убедиться в этом, вспомните преобразование координат на плоскости при повороте на угол ψ. Вектор $\overline{\omega}_\vartheta$ может быть ассоциирован с проекцией η_M точки *M* из преобразования поворота (см. подразд. 8 лекции № 3).

Компоненты:

$$(\omega_\psi)_x = \dot\psi \sin\vartheta \sin\varphi,$$
$$(\omega_\psi)_y = \dot\psi \sin\vartheta \cos\varphi,$$
$$(\omega_\psi)_z = \dot\psi \cos\vartheta,$$

вектора $\overline{\omega}_\psi$, параллельного неподвижной оси $O\zeta$, определяются последним столбцом матрицы полного ортогонального преобразования

$$[\phi] = [L][P][R].$$

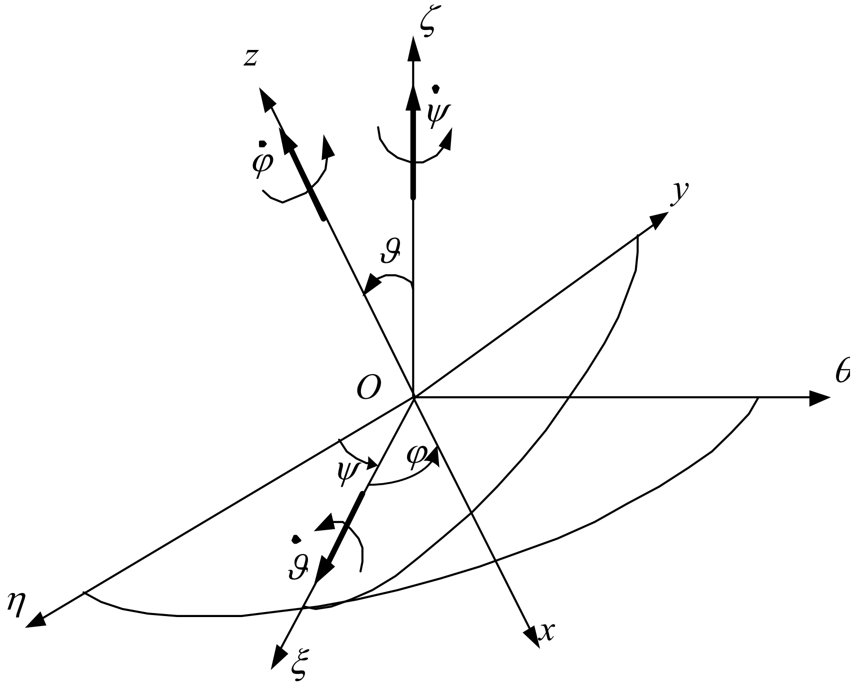


Рис. 8.7

Проекции вектора $\overline{\omega}_\varphi$ вовсе не требуют преобразований, т.к. этот вектор направлен вдоль оси *Oz*.

Складывая соответствующие составляющие отдельных угловых скоростей, получим разложение вектора $\overline{\omega}$ по осям, связанным с телом*, т.е.

$$\omega_x = \dot\psi \sin\vartheta \sin\varphi + \dot\vartheta \cos\varphi,$$
$$\omega_y = \dot\psi \sin\vartheta \cos\varphi - \dot\vartheta \sin\varphi,$$
$$\omega_z = \dot\psi \cos\vartheta + \dot\varphi.$$

* В неявном виде данное разложение содержится в формуле (8.5). Поэтому вывод полученных здесь выражений можно рассматривать как геометрическое доказательство матричного соотношения (8.5).

Этот же прием позволяет выразить через углы Эйлера и проекции вектора $\overline{\omega}$ на неподвижные оси:

$$\omega_\eta = \dot{\vartheta}\cos\psi + \dot{\varphi}\sin\psi\sin\vartheta,$$

$$\omega_\theta = \dot{\vartheta}\sin\psi - \dot{\varphi}\cos\psi\sin\vartheta,$$

$$\omega_\zeta = \dot{\psi} + \dot{\varphi}\cos\vartheta \quad .$$

Модуль мгновенной угловой скорости $\overline{\omega}$ при сферическом движении находится по формуле

$$\left|\overline{\omega}\right| = \sqrt{\omega_\eta^2 + \omega_\theta^2 + \omega_\zeta^2} = \sqrt{\dot{\psi}^2 + \dot{\varphi}^2 + \dot{\vartheta}^2 + 2\dot{\psi}\dot{\varphi}\cos\vartheta} \, .$$

Контрольные вопросы

1. Дайте определение углов Эйлера при описании сферического движения тела.
2. Запишите матрицу поворота тела вокруг вертикальной оси *Oz* на угол рси.
3. Как описывается сферическое движение тела в матричной форме?
4. Сформулируйте теорему Эйлера – Даламбера о сферическом движении тела.
5. По какой формуле находится скорость точки тела при сферическом движении?

Лекция № 9. СВОБОДНОЕ ДВИЖЕНИЕ ТВЕРДОГО ТЕЛА

1. Свободное движение тела. Закон движения

Движение тела при отсутствии каких-либо связей называется свободным. Бросив предмет, мы замечаем, что в полёте он изменяет своё положение в пространстве, совершая движение по некоторой траектории и одновременно «кувыркаясь», меняя ориентацию относительно «собственных осей». Собственно осей может и не быть – их вводят искусственно, например, путём прикрепления декартовой системы координат к предмету. В связи с этим, возникает необходимость изучения свободного движения тела в двух системах отсчёта: *неподвижной, или абсолютной*, установленной, в частности, на месте, где стоит человек, и *подвижной, или локальной*, жёстко связанной с рассматриваемым объектом (в данном случае с предметом) (рис. 9.1).

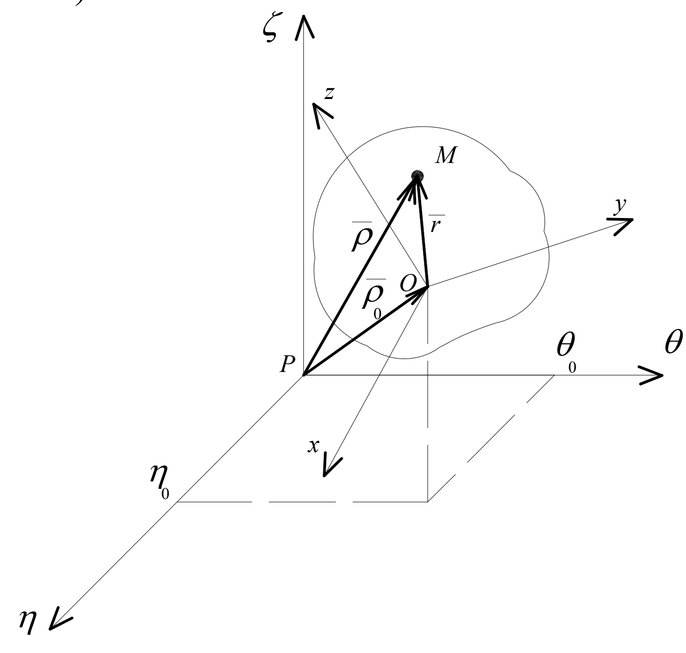


Рис. 9.1

а) *Векторная форма задания движения*

Движение тела относительно неподвижной системы координат можно описать с помощью радиуса-вектора $\overline{\rho}_0(t)$ произвольной точки тела O и радиуса-вектора $\overline{r}(t)$, характеризующего ориентацию тела в текущий момент времени. Модуль вектора $\overline{r}(t)$ при движении сохраняется постоянным (рис.9.1,а). Следовательно, закон свободного движения тела, или, что то же, закон движения произвольной точки M тела, записывается в виде

$$\overline{\rho}(t)=\overline{\rho}_0(t)+\overline{r}(t),$$

совпадающем по форме с законом сложного движения точки (лекция № 7).

б) *Координатная форма*

Очевидно, задание радиуса-вектора точки O эквивалентно знанию его координат в текущий момент времени относительно неподвижной системы (рис. 9.1,б):

$$\eta_O = \eta_O(t), \quad \theta_O = \theta_O(t), \quad \zeta_O = \zeta_O(t).$$

Ориентация радиуса-вектора $\overline{r}(t)$ характеризуется, в частности, углами Эйлера в подвижной системе координат с началом в точке O. Следовательно, с помощью шести функций, три из которых описывают изменение координат точки O, а оставшиеся – изменение углов Эйлера:

$$\psi = \psi(t), \quad \vartheta = \vartheta(t), \quad \varphi = \varphi(t),$$

оказывается возможным задать *закон свободного движения тела в аналитической координатной форме*.

Очевидно, степень свободы твёрдого тела равна шести (W=6).

в) *Матричная форма задания движения*

Закон свободного движения тела можно представить и в матричной форме. С этой целью необходимо рассмотреть преобразования систем координат более общего вида по сравнению с преобразованиями, представленными в лекции № 8.

Связав с движущимся телом декартову систему координат $Oxyz$, начало которой помещается в произвольной точке тела O, свободное движение тела следует описать в неподвижной системе координат $P\eta\theta\zeta$ (рис. 9.1,б).

Для этого вводится матричное преобразование, порядок которого на единицу выше, чем порядок матрицы $[\phi]$ из лекции № 8

$$[\phi] = \begin{bmatrix} \cos\psi\cos\varphi - \cos\vartheta\sin\psi\sin\varphi, & \cos\psi\sin\varphi + \cos\vartheta\cos\psi\cos\varphi, & \sin\varphi\sin\vartheta, & 0 \\ -\sin\psi\sin\varphi - \cos\vartheta\sin\psi\sin\varphi, & -\sin\psi\sin\varphi + \cos\vartheta\cos\psi\cos\varphi, & \cos\varphi\sin\vartheta, & 0 \\ \sin\vartheta\sin\psi & \sin\vartheta\sin\psi & \cos\vartheta, & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Очевидно, данная матрица характеризует вращение тела вокруг некоторой оси, проходящей через точку O, в переменных Эйлера.

Дальнейшее обобщение достигается с помощью матрицы сдвига или переноса (см. лекцию №3, подразд. 1)

$$[W] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \eta_0 \\ 0 & 1 & 0 & \theta_0 \\ 0 & 0 & 1 & \zeta_0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

где $\eta_0, \theta_0, \zeta_0$ – координаты точки O относительно неподвижной системы.

Свободное движение тела в пространстве по аналогии с плоским движением можно представить в виде непрерывной последовательности двух синхронных движений: поворота вокруг мгновенной оси вращения, описываемого матрицей преобразования $[\phi]$, и мгновенного сдвига – поступательного движения, характеризуемого матрицей $[W]$. При их наложении матрицей преобразования будет матрица $[Z]=[\phi][W]$. При этом, вследствие некоммутативности операции умножения матриц, следует обращать внимание на последовательность размещения матриц в произведении.

Для иллюстрации на рис. 9.2 показано движение винта вдоль оси $O\zeta$ с одновременным вращением вокруг неё, которому в технике соответствует завёртывание винта.

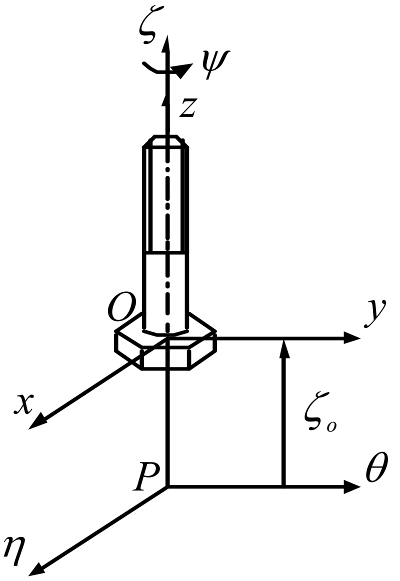


Рис. 9.2

Матрицей сдвига в рассматриваемом случае является матрица

$$[\zeta]=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&\zeta_0\\0&0&0&1\end{bmatrix},$$

а матрицей поворота – матрица

$$[\Psi]=\begin{bmatrix}\cos\psi&\sin\psi&0&0\\-\sin\psi&\cos\psi&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix},$$

где ζ_0 – перемещение винта вдоль оси $O\zeta$; ψ – угол поворота винта вокруг оси $O\zeta$. Их произведение – матрица композиции

$$[W]=[\Psi][\ \zeta\ ]=\begin{bmatrix} \cos\psi & \sin\psi & 0 & 0 \\ -\sin\psi & \cos\psi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \zeta_0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

и характеризует винтовое движение.

2. Скорость тела при свободном движении

Вывод формулы скорости произвольной точки тела *в векторной форме* очень прост. Для этого достаточно обратиться к закону свободного движения тела в виде

$$\overline{\rho}(t)=\overline{\rho}_0(t)+\overline{r}(t).$$

Выполнив дифференцирование закона движения по времени, скорость точки M свободного тела можно представить в виде

$$\frac{d\overline{\rho}}{dt}=\frac{d\overline{\rho}_0}{dt}+\overline{\omega}\times\overline{r},$$

где $\overline{\omega}$ – вектор угловой скорости тела. Очевидно, второе слагаемое описывает единственно возможное движение тела в подвижной системе координат, а именно его вращение относительно некоторой оси, т.к. расстояние между точками M и O при движении фиксированно и не зависит от времени. Последнее замечание даёт основание при дифференцировании вектора $\overline{r}(t)$ ограничится определением только локальной производной.

Обозначив

$$\overline{\upsilon}=\frac{d\overline{\rho}}{dt},$$

$$\overline{\upsilon}_0=\frac{d\overline{\rho}_0}{dt},$$

$$\overline{\upsilon}_r=\overline{\omega}\times\overline{r},$$

формулу скорости можно записать в векторной форме

$$\overline{\upsilon}=\overline{\upsilon}_0+\overline{\upsilon}_r.$$

3. Матричная формула скорости

Ниже приводится матричная формула скорости. Для её вывода достаточно выполнить дифференцирование матричного преобразования

$$\overline{r} = [Z]\overline{\rho},$$

по времени. Здесь $\overline{r}, \overline{\rho}$ – радиусы-векторы произвольной точки M тела в локальной и абсолютной системах координат; $[Z] = [\phi][W]$ – само преобразование. Матрицу вращения $[\phi]$ необходимо представить в виде произведения известных матриц $[L][P][R]$, при этом расширив их, как и матрицу $[\phi]$, до четвёртого порядка. Векторы $\overline{r}, \overline{\rho}$ также дополняют четвёртыми компонентами, равными единице, т.е. принимают с расширением $\overline{r}(x, y, z, 1,)$, $\overline{\rho} = (\eta, \theta, \zeta, 1)$.

Разложив матрицу сдвига $[W]$ на составляющие*:

$$[F] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \eta \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad [G] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \theta \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad [K] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \zeta \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

матрицу свободного движения можно будет записать в расширенном виде

$$[Z] = [F][G][K][L][P][R].$$

Скорость тела определяется по формуле

$$\overline{\upsilon} = \frac{d\overline{r}}{dt} = \sum_{i=1}^{6} \frac{\partial [Z]}{\partial q_i} \dot{q}_i \cdot \overline{\rho},$$

где обобщённая координата q_i $(i = 1, 2, ..., 6)$ обозначает любую из независимых координат: углов $\psi = \psi(t)$, $\vartheta = \vartheta(t)$, $\varphi = \varphi(t)$ или компонент линейных перемещений η, θ, ζ (см. рис 9.1,б).

В рассматриваемом случае дифференцирование матрицы $[Z]$ осуществляется с помощью матричных операторов дифференцирования расширенного вида:

---

* Индекс 0 в записи компонент смещений η, θ, ζ опущен.

$$\left[D_\eta\right] = \frac{\partial[Z]}{\partial\eta} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \left[D_\theta\right] = \frac{\partial[Z]}{\partial\theta} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\left[D_\zeta\right] = \frac{\partial[Z]}{\partial\zeta} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

которые указывают на дифференцирование по направлениям осей координат (например, $q_1 = \eta$), и ещё двух:

$$\left[D_\psi\right] = \frac{\partial[Z]}{\partial\psi} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \left[D_\vartheta\right] = \frac{\partial[Z]}{\partial\vartheta} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix},$$

относящихся к дифференцированию по угловым координатам (в частности, $q_4 = \psi$). В результате выражение для скорости принимает вид

$$\bar{\upsilon} = \Big(\left[D_\eta\right][F][G][K][L][P][R]\dot{\eta} +$$

$$+[F][D_\theta][G][K][L][P][R]\dot{\theta} + [F][G]\left[D_\zeta\right][K][L][P][R]\dot{\zeta}\Big)\bar{\rho} +$$

$$+\Big([F][G][K]\left[D_\varphi\right][L][P][R]\dot{\psi} +$$

$$[F][G][K][L][D_\theta][P][R]\dot{\vartheta} + [F][G][K][L][P]\left[D_\varphi\right][R]\dot{\varphi}\Big)\bar{\rho}.$$

Обозначив сумму матриц, стоящих в круглых скобках, символом $[\Omega]$, формулу скорости можно представить кратко, как[*]

$$\bar{\upsilon} = [\Omega]\bar{\rho}.$$

Полученное соотношение подобно формуле Эйлера; поэтому матрица $[\Omega]$ называется *матрицей скорости свободного движения тела*.

[*] Приложение рассматриваемого способа определения скорости дано в лекции № 10, посвящённой кинематике манипуляторов.

4. Определение ускорения

Ускорение тела в матричной форме при свободном движении можно найти по аналогии с определением скорости. Но особой необходимости в этом нет. В общем случае ускорение нужно при составлении уравнений движения тел. Однако уравнения движения можно вывести и на основе уравнений Лагранжа II рода, в которых используется выражение кинетической энергии. Формула кинетической энергии, как известно, содержит квадрат скорости. Поэтому имеет смысл вывести формулу для кинетической энергии, представленную в матричной записи, что и будет сделано в динамике для некоторых механических систем.

5. Сложение движений свободного твёрдого тела

В отличие от известных подходов к изложению данной темы [3], [6], методы матричной механики существенно упрощают вывод основных соотношений, характеризующих движение тела, участвующего в двух и более движениях. Следуя традиции, далее рассмотрим типичные случаи сложения движений, причём излагать будем с позиций теории матричных преобразований систем координат. Преимущества нового подхода несомненны, т.к. все сложности вывода законов при сложении движений преодолеваются общей методикой их определения.

- Например, если тело совершает *движение, состоящее из двух поступательных*, происходящих вдоль осей η, θ и характеризуемых матрицами преобразований:

$$[F]=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \eta \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad [G]=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \theta \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

то результирующее движение будет их суммой, определяемой тем не менее как произведение матриц, т.е.

$$[S]=[G][F]=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \eta \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \theta \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \eta \\ 0 & 1 & 0 & \theta \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Очевидно, полученный результат подтверждает изложенное в подразд. 1 настоящей лекции.

• Примером *сложения поступательного и вращательного движений* является винтовое движение, о котором говорилось в подразд. 1. По существу, основная часть лекции посвящена рассмотрению данного случая. Плоское движение тела также представляет сумму, точнее, непрерывную последовательность двух мгновенных движений – поступательного и вращательного (см. лекцию №4).

• В учебной литературе особое внимание уделяется вопросам *суммирования двух вращательных движений* в случаях*:

а) *вращения тела вокруг параллельных осей*

Рассматривая движение тела, совершающего вращение вокруг собственной оси (пусть это будет вертикальная ось Oz локальной системы координат), и одновременно вращение вокруг неподвижной оси $P\zeta$, удалённой на расстояние d от оси Oz (рис. 9.3), в соответствии с систематически применяемой здесь теорией преобразований (см. лекции № 3, 4, 7, 8) следует выполнить следующие действия:

1. поворот в целом локальной системы $Oxyz$ на угол ψ вокруг оси $P\zeta$, характеризуемый матрицей

$$[\Psi]=\begin{bmatrix} \cos\psi & \sin\psi & 0 & 0 \\ -\sin\psi & \cos\psi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

2. перенос той же системы вдоль оси $O\eta$ на отрезок d, которому соответствует матрица

$$[\Delta]=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -d \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

3. вращение локальной системы вокруг собственной оси Oz, описываемое матрицей

$$[\phi]=\begin{bmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi & 0 & 0 \\ -\sin\varphi & \cos\varphi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

где $\varphi=\varphi(t)$ –закон собственного вращения тела.

* При использовании теории матричных преобразований необходимость в этом делении отпадает.

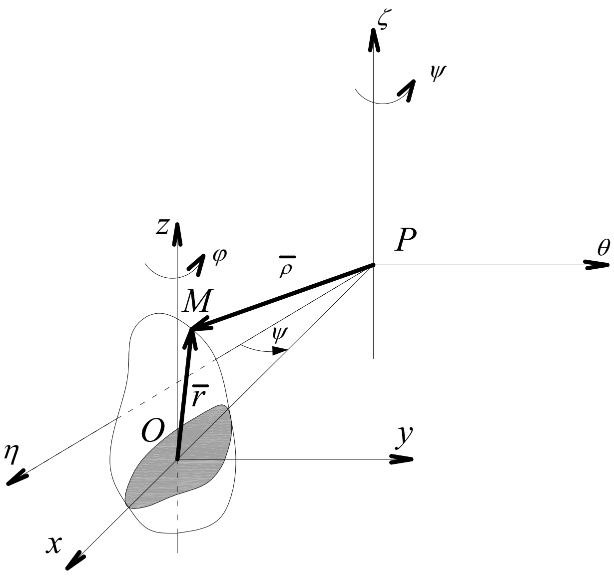


Рис. 9.3

Указанные преобразования сводят изучение сложного движения тела или, что то же, движения его произвольной точки M к рассмотрению комбинации матричных операций. Описание самих движений точки сведено к описанию соответствующих преобразований координат.

В результате перемножения матриц можно установить закон суммарного вращения тела вокруг параллельных осей

$$\overline{\rho} = [\Sigma]\overline{r},$$

где

$$[\Sigma] = [\Psi][\Lambda][\phi] = \begin{bmatrix} \cos(\varphi+\psi) & \sin(\varphi+\psi) & 0 & d\cos\psi \\ -\sin(\varphi+\psi) & \cos(\varphi+\psi) & 0 & -d\sin\psi \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

– матрица результирующего вращения*. Очевидно, данная матрица описывает *плоское движение* тела (см. лекцию № 4). В частности, если направление собственного вращения противоположно вращению тела вокруг неподвижной оси $P\zeta$, то $\varphi = -\psi$. Следовательно, в этом случае структура матрицы

* Порядок умножения матриц подчиняется следующему правилу: если локальная система координат совершает поворот или сдвиг относительно своей оси, то матрицу предыдущего результирующего преобразования следует умножить справа на соответствующую матрицу поворота или сдвига; если движение локальной системы происходит относительно неподвижной системы, то умножение выполняется слева.

$$[\sigma]=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & d\cos\psi\\ 0 & 1 & 0 & -d\sin\psi\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

указывает на то, что суммарное движение тела будет *поступательным*.

Величина скорости определяется путём дифференцирования полученного закона вращения по времени по известным правилам (см. подразд. 3).

б) *Сложение вращений тела вокруг пересекающихся осей*.

Вопрос полностью исчерпан описанием сферического движения тела в матричной форме (см. лекцию № 8).

Контрольные вопросы

1. Какими способами можно описать свободное движение тела?
2. Составьте закон движения винта.
3. Как определяется скорость точки тела при свободном движении в векторной форме?
4. Каков результат сложения двух вращательных движений тела вокруг параллельных осей?
5. Какое движение совершает тело при сложении двух вращательных движений тела вокруг пересекающихся осей?

Лекция № 10. КИНЕМАТИКА ПРОСТРАНСТВЕННЫХ МАНИПУЛЯТОРОВ

Манипуляторы являются важнейшей частью роботов. Часто робототехническое устройство состоит только из одного манипулятора – многозвенного механизма, способного автоматически осуществлять многофункциональные программируемые действия (манипуляции), аналогичные движениям руки человека. Изучение движения роботов полезно любому студенту – будущему инженеру – независимо от его специализации. К тому же изложение темы ведётся на основе современных представлений механики систем твёрдых тел, широко использующих матричные формы описания движения.

1. Структура манипуляторов

Манипулятор (МП) – многозвенный механизм, состоящий из твердых тел, связанных между собой (рис. 10.1).

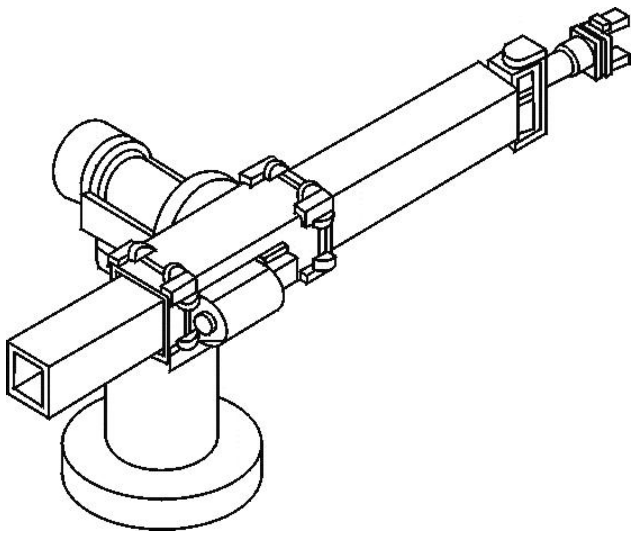


Рис. 10.1

Манипулятор обычно снабжён системой управления, исполнительными и сенсорными устройствами. Связи называются сочленениями, а сами тела – звеньями. Сочленения могут быть вращательными и поступательными (рис. 10.2, а,б). Как сочленения, так и звенья могут обладать самыми разными свойствами – упругостью, вязкостью и др. Внутренние усилия, возникающие в сочленениях, могут быть ограничены предельными значениями – в этом случае можно говорить о «пластичности» сочленений.

По типу осуществляемого движения сочленения делятся на вращательные и поступательные (рис. 10.2,а, б).

а б

Рис. 10.2

Сочленение в сочетании с соседними звеньями образует кинематическую пару. Совокупность последовательно связанных пар составляет кинематическую цепь манипулятора. Схематическое изображение кинематической цепи называется кинематической схемой манипулятора (рис. 10.3).

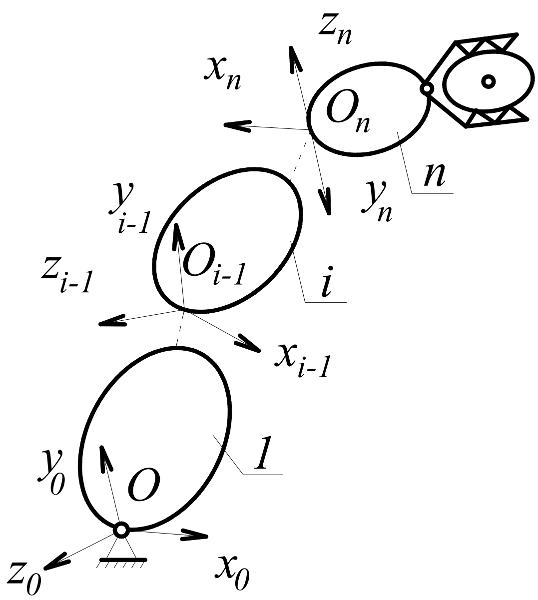


Рис. 10.3

Звенья МП обеспечиваются локальными, связанными системами координат $O_i x_i y_i z_i$ (рис. 10.3, 10.4). Ориентация осей декартовых систем координат должна удовлетворять следующим требованиям:

- Ось $O_i z_i$ совпадает с направлением оси вращения $(i+1)$-го сочленения (оси вращения или линейного перемещения $(i+1)$-го звена).

• Начало системы координат, связанной с i-м звеном, находится на минимальном расстоянии d_i от оси вращения $(i+1)$-го звена. Очевидно, длина перпендикуляра между осями $O_i z_i$ и $O_{i-1} z_{i-1}$ должна быть минимальной.

• Ось $O_i x_i$ перпендикулярна осям $O_i z_i$ и $O_{i-1} z_{i-1}$ и направлена от оси $O_{i-1} z_{i-1}$ так, чтобы образовать правостороннюю систему координат .

• Ось $O_i z_i$ должна соответствовать правосторонней системе координат $O_i x_i y_i z_i$.

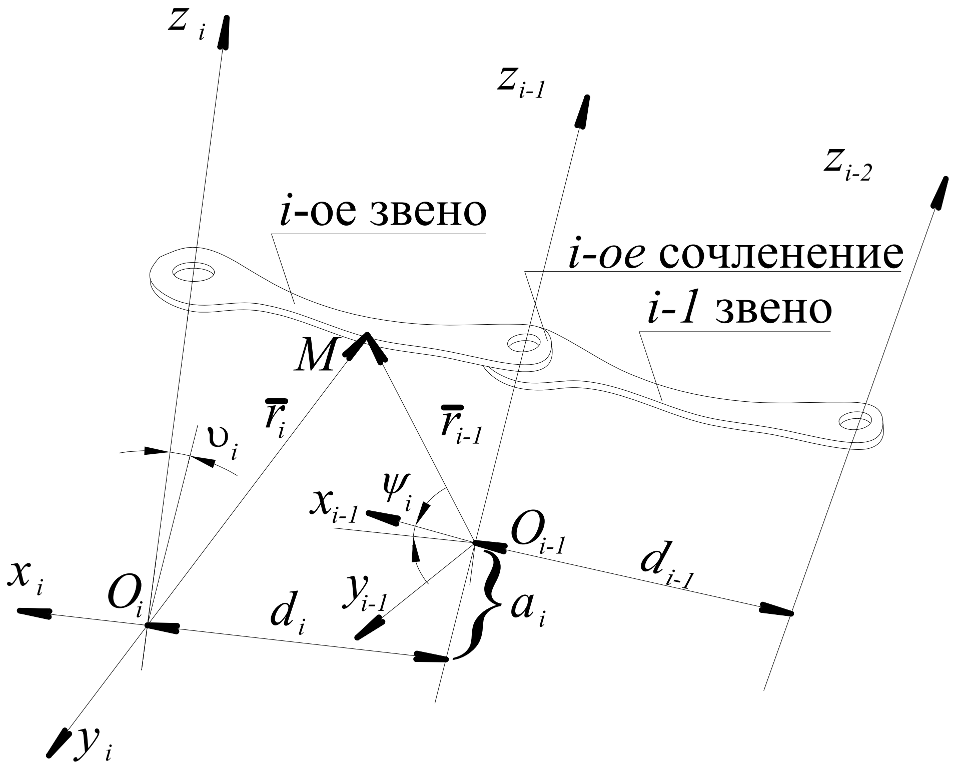


Рис. 10.4

Взаимное расположение локальных систем координат кинематической пары характеризуют четыре геометрических параметра, а именно:

• Угол поворота ψ_i – угол между осями $O_i x_i$ и $O_{i-1} x_{i-1}$.

• Угол наклона ϑ_i – угол между осями $O_i z_i$ и $O_{i-1} z_{i-1}$[*].

• Длина перпендикуляра d_i – минимальное расстояние между осями $O_i z_i$ и $O_{i-1} z_{i-1}$.

• Звенное расстояние a_i – расстояние между основаниями перпендикуляров d_i и d_{i-1}.

[*] В кинематике сферического движения ему соответствует угол нутации (см. лекцию № 8).

2. Матрица манипулятора

а) *Матрица кинематической пары* (матрица Денавита – Хартенберга)

Взаимное расположение двух смежных звеньев манипулятора, объединенных i-м сочленением (см. рис. 10.4), характеризуется параметрами, отражающими зависимости между системами связанных координат.

Полного совмещения одноимённых осей смежных локальных систем координат можно добиться, выполнив последовательно следующие действия:

- Поворот вокруг оси $O_{i-1}z_{i-1}$ на угол ψ_i для создания параллельности осей $O_i x_i$ и $O_{i-1}x_{i-1}$. Указанному вращению соответствует преобразование*

$$[\Psi]=\begin{bmatrix} \cos\psi_i & -\sin\psi_i & 0 & 0 \\ \sin\psi_i & \cos\psi_i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

- Сдвиг вдоль оси $O_{i-1}z_{i-1}$ на отрезок a_i до совмещения начал систем координат, характеризуемый матрицей**

$$[A]=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & a_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

- Перенос вдоль оси $O_i x_i$ на отрезок d_i (также для совмещения начал систем координат), которому соответствует матрица

$$[\Delta]=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & d_i \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

- Вращение вокруг оси $O_i x_i$ на угол ϑ_i, характеризуемое матрицей

$$[\Theta]=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\vartheta_i & -\sin\vartheta_i & 0 \\ 0 & \sin\vartheta_i & \cos\vartheta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

---

* Знаки элементов матрицы соответствуют принятому в лекции №3 правилу знаков углов поворота и введённой здесь системе координат.

** Совершение двух перечисленных действий аналогично винтовому движению, рассмотренному в лекции № 9.

в результате чего достигается полное совпадение систем координат смежных звеньев.

Взаимное положение звеньев кинематической пары описывается матрицей преобразования $\left[H\right]=\left[A\right]\left[\Psi\right]\left[\Delta\right]\left[\Theta\right]$, полученной в результате перемножения матриц перехода. Матрица преобразования кинематической пары

$$\left[H\right]=\begin{bmatrix} c\vartheta_i & -c\psi_i s\vartheta_i & s\psi_i s\vartheta_i & d_i c\vartheta_i \\ s\vartheta_i & c\psi_i c\vartheta_i & -s\psi_i c\vartheta_i & d_i s\vartheta_i \\ 0 & s\psi_i & c\psi_i & a_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

где приняты сокращения $c\vartheta_i=\cos\vartheta_i$, $c\psi_i=\cos\psi_i$ и $s\vartheta_i=\sin\vartheta_i$, $s\psi_i=\sin\psi_i$, носит имя матрицы Денавита – Хартенберга [11].

б) *Матрица манипулятора*

Матрица геометрической структуры всего манипулятора может быть получена на основе матриц типа $\left[H\right]$ для отдельных пар*. При формировании матрицы манипулятора необходимо:

• Провести нумерацию звеньев и соответствующих локальных систем координат. Нуль присваивается системе, установленной на неподвижном основании (рис. 10.5). Начало этой системы считается нулевым сочленением. Ось O_0z_0 совмещается с осью первого сочленения звена – осью вращения или направлением сдвига первого сочленения.

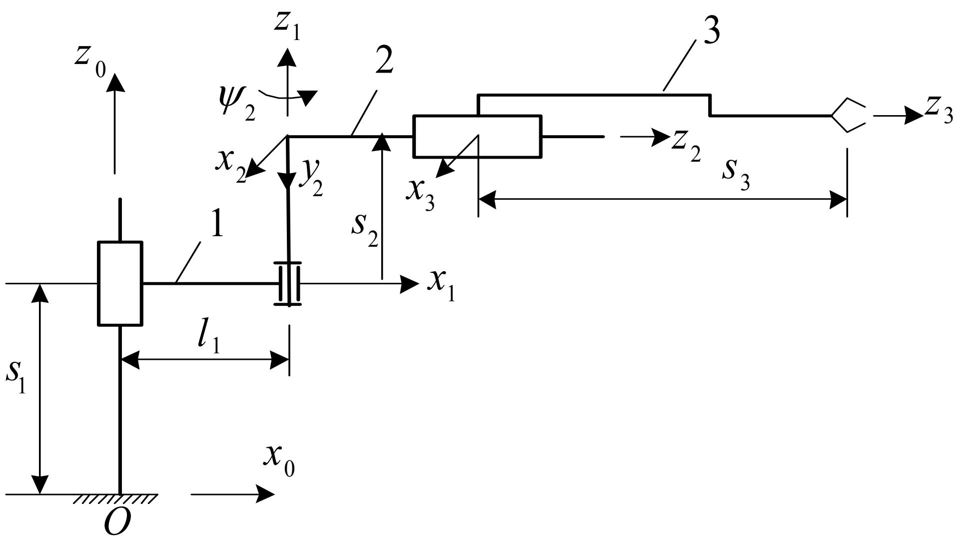


Рис. 10.5

* Далее при обозначении матриц квадратные скобки опускаются; символ матрицы снабжается двумя индексами: верхний относится к i-му звену и соответствующей системе координат, нижний – к той системе координат, относительно которой рассматривается преобразование.

• Показать все другие системы координат с их номерами, строго придерживаясь обозначений, принятых в подразд. 1.

• Составить таблицу параметров $a_i, d_i, \vartheta_i, \psi_i$ всех звеньев.

№ звеньев	Тип сочленения	a_i	d_i	ψ_i	ϑ_i
0-1	поступательное	s_1	l_1	0	0
1-2	вращательное	s_2	0	ψ_2	$-\pi/2$
2-3	поступательное	s_3	0	0	0

• Сформировать матрицы Денавита – Хартенберга для каждой кинематической пары, обозначив матрицу j-го сочленения через H_i^j, где нижний индекс относится к системе координат предыдущего звена. Очевидно, общее число матриц равно количеству сочленений манипулятора.

$$H_0^1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & l_1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & s_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; \quad H_1^2 = \begin{bmatrix} \cos\psi_2 & 0 & -\sin\psi_2 & 0 \\ \sin\psi_2 & 0 & \cos\psi_2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & s_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix};$$

$$H_2^3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & s_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

• Найти суперпозицию матриц Денавита – Хартенберга, т.е. определить матрицу всего манипулятора, характеризующую положение и ориентацию n-ой системы координат относительно базовой (с номером 0)

$$H_0^n = H_0^1 \cdot H_1^2 \cdot \ldots \cdot H_{n-2}^{n-1} \cdot H_{n-1}^n .$$

В рассматриваемом случае при n=3

$$H_0^3 = \begin{bmatrix} \cos\psi_2 & 0 & -\sin\psi_2 & l_1 + s_3\sin\psi_2 \\ \sin\psi_2 & 0 & \cos\psi_2 & s_3\cos\psi_2 \\ 0 & -1 & 0 & s_1 + s_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Если начало n-й системы не совпадает с рабочим органом манипулятора, то следует ввести дополнительную матрицу вида

$$H_n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \lambda_x \\ 0 & 1 & 0 & \lambda_y \\ 0 & 0 & 1 & \lambda_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

учитывающую смещение точки схвата, конца сварочного электрода или других видов рабочих органов ($\lambda_x, \lambda_y, \lambda_z$ – компоненты смещения характерной точки рабочего органа в n-й системе координат). С учётом этого матрица манипулятора принимает окончательную форму

$$T = H_0^1 \cdot H_1^2 \cdot \ldots \cdot H_{n-1}^n \cdot H_n .$$

3. Основные задачи кинематики манипуляторов

Полученная матрица T составлена в пространстве обобщённых координат s_i или q_i $(i = 1, 2, ..., n)$. Движение или положение рабочего органа МР задаётся в пространстве внешних координат, т.е. в базовой системе.

Прямая задача кинематики МП заключается в формировании такой матрицы МП, на основе которой путём варьирования параметрами МП осуществляется попадание рабочего органа в заданное положение, указанное в базовой системе координат. Решение прямой задачи содержится в наддиагональных элементах матрицы МП. В общем виде его можно записать следующим образом:

$$\overline{r} = \begin{bmatrix} T(1,4) \\ T(2,4) \\ T(3,4) \\ \arccos[T(1,2)] \\ \arccos[T(1,3)] \\ \arccos[T(2,3)] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x(q_1, q_2, ..., q_n) \\ y(q_1, q_2, ..., q_n) \\ z(q_1, q_2, ..., q_n) \\ \alpha(q_1, q_2, ..., q_n) \\ \beta(q_1, q_2, ..., q_n) \\ \gamma(q_1, q_2, ..., q_n) \end{bmatrix}.$$

Здесь x, y, z – координаты некоторой точки M рабочего органа МП; α, β, γ – углы наклона осей декартовой системы координат, связанной с рабочим органом, по отношению к осям базовой системы.

С другой стороны, возникает вопрос: как определить матрицу МП, соответствующую проектируемому движению рабочего органа МП? В этом состоит *обратная задача кинематики* МП. Формально она сводится к поиску вектора обобщённых координат $\overline{q} = (q_1, q_2, ..., q_n)$ как функции координат $x, y, z, \alpha, \beta, \gamma$ характерной точки рабочего органа.

4. Методы решения задач кинематики МП

- Решение *прямой задачи кинематики МП* выполняется в соответствии с последовательностью операций, описанных в подразд. 2. Она легко программируется и может осуществляться на компьютере.
- Решение *обратной задачи* найти значительно сложнее, т.к. нет единого подхода к его выполнению. Известен ряд частных приёмов решения задачи, среди которых наиболее перспективным является метод обратных матричных преобразований, на основе которого процедура решения задачи может быть автоматизирована.

Для манипуляторов с небольшим числом звеньев применяется геометрический способ; разработаны также численные методы решения обратной задачи, такие, например, как градиентный, итераций, Ньютона и др. [10].

5. Определение скорости звена манипулятора

Радиус-вектор произвольной точки M i-го звена далее обозначается иначе, чем принято в основной части лекции. Принимается новое обозначение – $r_i^i = (x_i, y_i, z_i)^T$, характеризующее координаты точки или компоненты вектора, взятого на i-м звене в локальной системе координат $O_i x_i y_i z_i$.

Координаты того же вектора, но в базовой системе $O_0 x_0 y_0 z_0$ определяются с помощью преобразования

$$r_0^i = H_0^i \cdot r_i^i .$$

Скорость произвольной точки M i-го звена в базовой системе координат находят по формуле

$$\upsilon_0^i = \frac{dr_0^i}{dt} = \frac{d}{dt}\left(H_0^i \cdot r_i^i\right).$$

Подставив сюда выражение для матрицы H_0^i и выполнив затем дифференцирование произведения, стоящего в скобках, можно записать

$$\upsilon_0^i = \dot{H}_0^1 \cdot H_1^2 \cdot \ldots \cdot H_{i-1}^i \cdot r_i^i + H_0^1 \cdot \dot{H}_1^2 \ldots H_{i-1}^i \cdot r_i^i \ldots + H_0^1 \cdot H_1^2 \cdots \dot{H}_{i-1}^i \cdot r_i^i + \ldots +$$
$$+ H_0^1 \cdot H_1^2 \cdots H_{i-1}^i \dot{r}_i^i .$$

Поскольку точка M движется вместе со звеном, постольку производная $\dot{r}_i^i = 0$. Следовательно, скорость произвольной точки i-го звена определяется по формуле

$$\upsilon_0^i = \dot{H}_0^1 \cdot H_1^2 \cdot \ldots \cdot H_{i-1}^i \cdot r_i^i + H_0^1 \cdot \dot{H}_1^2 \ldots \cdot H_{i-2}^i \cdot H_{i-1}^i \cdot r_i^i \ldots + H_0^1 \cdot H_1^2 \cdot \ldots \cdot \dot{H}_{i-1}^i \cdot r_i^i .$$

Так как каждая матрица H_{i-1}^i является функцией только одного из двух типов параметров Денавита – Хартенберга, который в общем случае обозначают символом q_j, то полученное выражение можно записать в сокращённой форме

$$\upsilon_0^i = \sum_{j=1}^{i} \frac{\partial H_0^i}{\partial q_j} \dot{q}_j \cdot r_i^i .$$

Оператором дифференцирования матрицы вращательного сочленения служит матрица

$$D_\psi = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

а поступательного – матрица

$$D_\delta = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Используя их, нетрудно вывести формулу дифференцирования матрицы

$$\frac{\partial H_{i-1}^i}{\partial q_i} = D H_{i-1}^i .$$

Здесь индекс матрицы D опущен, т.к. он устанавливается формой матрицы преобразования H_{i-1}^i, следующей за ней. Таким образом, вычисление частной производной матрицы H_{i-1}^i осуществляется путём её умножения слева на один из операторов D.

Применение матриц D позволяет представить любое слагаемое, содержащееся в формуле скорости, в виде произведения матриц:

$$\frac{\partial H_{i-1}^{i}}{\partial q_i}=\begin{cases} H_0^1 H_1^2 ... H_{j-2}^{j-1} D H_{j-1}^{j} ... H_{i-1}^{i}, & j<i, \\ 0, & j>i. \end{cases}$$

Если ввести ещё одно сокращение, обозначив произведения матриц, содержащих операторы дифференцирования, т.е. принять символ

$$Q_{ij}=\begin{cases} H_0^{j-1} D H_{j-1}^{j} ... H_{i-1}^{i}, & j\le i, \\ 0 & j>i, \end{cases}$$

то формула скорости становится более обозримой

$$\upsilon_0^i=\left(\sum_{j=1}^{i} Q_{ij}\,\dot{q}_j\right)\cdot r_i^i .$$

Выражение, заключённое в скобках, также является матрицей. Следовательно, как скорость точки схвата МП (при $i=n$), так и скорость произвольной точки любого звена определяется по формуле

$$\upsilon_0^i=\omega_{ij}\cdot r_i^i ,$$

которую можно записать и в матричной форме

$$\overline{\upsilon}=[\Omega]\overline{r} , \qquad (*)$$

где элементы матрицы скорости манипулятора $[\Omega]$ находятся по формуле

$$\omega_{ij}=\sum_{j=1}^{i} Q_{ij}\,\dot{q}_j .$$

Таким образом, как и в случае вращательного, плоского или сферического движения тела, скорость произвольной точки МП может быть представлена в матричной форме (*).

Контрольные вопросы

1. Назовите основные элементы манипулятора.
2. Что характеризует матрица кинематической пары (матрица Денавита – Хартенберга ?
3. Запишите формулу матрицы манипулятора.
4. Какова цель прямой задачи кинематики манипулятора?
5. Как определяется скорость точки любого звена манипулятора матричной форме ?

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Изучение кинематических характеристик движения материальных частиц и тел, к числу относятся *закон движения, траектория, скорость и ускорение*, является необходимым условием для успешного освоения другого раздела теоретической механики - динамики.

Внедрение средств вычислительной техники в учебный процесс требует разработки новых подходов к описанию кинематических параметров движения. Один из возможных путей решения проблемы предложен в данном пособии. Автором впервые в учебной литературе рекомендуется при изложении основных свойств движений материальных частиц и твёрдых тел систематически применять теорию матричных преобразований систем координат. Это позволяет решать многие задачи теоретической и прикладной механики в автоматическом режиме при помощи компьютера.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Алдошкин, Ю.Г. Введение в механику твёрдого тела [Текст] / Ю.Г. Алдошкин. –М.: Мир, 2003. – 304 с.

2. Александров, А.П. Лекции по аналитической геометрии [Текст] / А.П. Александров. – М.: Наука, 1968. – 912 с.

3. Бутенин ,Н.В. Курс теоретической механики. Т. I. Статика и кинематика [Текст] / Н.В. Бутенин, Я.Л. Лунц, Д.Р. Меркин. – М.: Наука, 1970. – 240 с.

4. Бухгольц, Н.Н. Основной курс теоретической механики. Ч. I. Кинематика, статика, динамика материальной точки [Текст] / Н.Н. Бухгольц. – М.: Наука, 1965. – 467 с.

5. Виттенбург, Й. Динамика систем твёрдых тел [Текст] / Й. Виттенбург. – М.: Наука, 1980. – 388 с.

6. Грязнов, А.А. Вопросы философии [Текст] / А.А. Грязнов. – М.: Наука, 2002. – С. 34-44.

7. Кильчевский, Н.А. Курс теоретической механики. Т. I [Текст] / Н.А. Кильчевский. – М.: Наука, 1972. – 456 с.

8. Монахов, В.А. Динамика упругопластических систем в фазовом пространстве [Текст] / В.А. Монахов. – Пенза: ПГУАС, 2004. – 352 с.

9. Монахов, В.А. Статика. Лекции по теоретической механике. Ч. 1 [Текст] / В.А. Монахов. – Пенза: ПГУАС, 2009. – 124 с.

10. Монахов, В.А. Динамика. Лекции по теоретической механике. Ч. 3 [Текст] / В.А. Монахов. – Пенза: ПГУАС, 2006. – 246 с.

11. Порев, В.Н. Компьютерная графика [Текст] / В.Н. Порев. – М., СПб., Киев: Изд-во ВХВ-Петербург, 2004. – 428 с.

12. Фролов, К.В. Механика промышленных роботов. Кн. 1. Кинематика и динамика [Текст] / К.В. Фролов, Е.И. Воробьев. – М:. Высшая школа, 1988. – 304 с.

13. Фу, К. Робототехника [Текст] / К. Фу, Р. Гонсалес, К. Ли. – М.: Мир, 1989. – 621 с.

14. Яблонский, А.А. Курс теоретической механики [Текст] / А.А. Яблонский, В.А. Никифоров. – СПб.: Лань, 2004. – 687 с.

ИМЕННОЙ УКАЗАТЕЛЬ

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

Приложение

ФОРМЫ ОПИСАНИЯ ЗАКОНОВ ДВИЖЕНИЯ ТЕЛ

1. Принцип относительности

В теоретической механике изучается движение тел, вызванное действием сил или иных причин. Движение тел происходит во времени и в пространстве. В классической механике принято, что *течение времени и измерения пространства в любых направлениях не связаны с движением тел*, т.е. не зависят от кинематических параметров движущегося тела. Время считается равномерно текущим в любом месте пространства (так называемое *абсолютное время*). За пространство, в котором происходит движение тел, принимают «обычное» евклидово трехмерное пространство, метрические свойства которого одинаковы во всех направлениях; другими словами, пространство однородно и изотропно. Для его описания используют различные системы координат.

В классической механике постулируют законы Ньютона, справедливость которых проверена многовековой практикой*. Законы Ньютона проявляют себя не во всех системах отсчета. Предполагается наличие хотя бы одной такой системы координат, т.н. *инерциальной* системы отсчета, по отношению к которой при отсутствии каких-либо воздействий на рассматриваемый объект он движется равномерно и прямолинейно, т.е. по инерции.

Если рассмотреть ещё одну систему координат, совершающую равномерное и прямолинейное движение относительно первой, то законы свободного движения тела в этой новой системе будут теми же, что и по отношению к первой. Обобщая высказанное, можно утверждать, что

ОСНОВНЫЕ ЗАКОНЫ МЕХАНИКИ ОДИНАКОВО ФОРМУЛИРУЮТСЯ ВО ВСЕХ СИСТЕМАХ ОТСЧЁТА, КОТОРЫЕ ДВИГАЮТСЯ С ПОСТОЯННОЙ СКОРОСТЬЮ ОТНОСИТЕЛЬНО ДРУГ ДРУГА.

В этом заключается *принцип относительности* (*Галилея*).

* Некоторые учёные полагают, что законы Ньютона носят априорный характер, т. е. они не выводимы из опыта, а заложены в человеческом рассудке [2].

2. Описание движения с позиций теории преобразования систем координат

При решении такой задачи кинематики, как установление взаимосвязи между законами движения материальной частицы *M* в двух системах координат, одна из которых, обозначаемая латинскими буквами *Oxyz*, движется в некотором направлении с постоянной скоростью *V* относительно другой (неподвижной $\Omega\eta\theta\zeta$) (см. рисунок), следует воспользоваться зависимостью

$$\bar{\rho}\,(t) = \bar{\rho}_O(t) + \bar{r}(\tau) = Vt + \bar{r}(\tau). \qquad (*)$$

Здесь $\bar{\rho}\,(t)$ – закон движения точки *M*, заданный в неподвижной системе координат $\Omega\eta\theta\zeta$, $\bar{r}(\tau)$ – то же, при описании движения в подвижной; $\bar{\rho}_O(t) = Vt$ – закон равномерного движения начала *O* подвижной системы координат относительно неподвижной (см. лекцию №2).

При этом, как уже было отмечено в п. 1, ход времени в той и другой системах отсчёта одинаков

$$t = \tau,$$

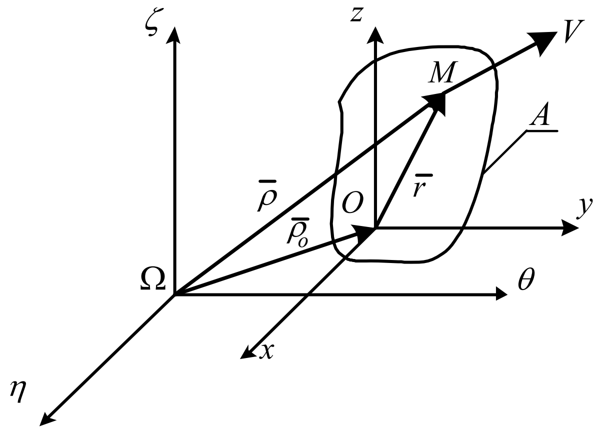
несмотря на то, что одна из них покоится, а другая находится в движении. Здесь t – измерение времени в неподвижной системе координат, а τ – его течение в движущейся. В этом суть постулата об *абсолютности времени*, принятого в классической механике.

Если теперь, воспользовавшись зависимостью (*), выразить из неё закон движения точки в подвижной системе, т.е. найти $\bar{r}(\tau)$, то можно увидеть картину, похожую на прежнюю запись, а именно

$$\bar{r}(\tau) = -V \cdot \tau + \bar{\rho}(\tau). \qquad (**)$$

Она отличается от выражения (*) взаимной переменой мест величин $\bar{r}$, $\bar{\rho}$, иным обозначением текущего времени, а также знаком, стоящим перед первым слагаемым.

Связь между соотношениями (*), (**) нетрудно понять. Для этого, в первую очередь, следует с подвижной системой отсчёта жестко связать тело *A* (см. рисунок).



Тогда движение тела относительно неподвижной системы координат $\Omega\eta\theta\zeta$ можно охарактеризовать двумя способами. Один из них совершенно очевиден – он заключён в форме закона, представленного в первоначальной записи (*). Здесь положение тела *A* характеризуется изменением радиуса-вектора $\overline{\rho}(t)$ точки *M* тела в неподвижной системе координат при положительном направлении скорости *V*.

Очевидно, выражение (**) также является формулировкой закона движения рассматриваемого тела. Но, в отличие от прежней формулировки, сейчас движение рассматривается с иной позиции. Оно видится теперь с точки зрения наблюдателя, находящегося в подвижной системе координат *Oxyz*. Отсюда он наблюдает, как неподвижная система координат или тело, связанное с ней, постепенно удаляется в направлении, противоположном вектору скорости *V*, о чём свидетельствует отрицательный знак в выражении (**). Все испытали хотя бы однажды ощущением кажущегося движения здания вокзала при взгляде на него из окна вагона в тот момент, когда поезд плавно трогается со станции. Это и наводит на мысль описания движения тела не как собственно физического, а абстрактно, в форме преобразований, происходящих с системами координат, принятыми при изучении движения. *Действительному равномерному прямолинейному движению тела в каком-либо направлении соответствует формальное перемещение неподвижной системы координат в противоположном.*

Преобразования систем координат при различных линейных перемещениях и вращениях, изменениях масштабов измерения пространств и т. п. подробно изучены в математике и компьютерной графике. Как правило, они формулируются в матричном виде, а потому пригодны при выполнении расчётов с применением ПЭВМ. В данном пособии рассматриваемый абстрактный подход к описанию движения материальных частиц или тел принят в качестве основного, т.к. с его помощью оказывается возможным полностью формализовать все процедуры вычислений кинематических характеристик движущихся тел и осуществлять их в автоматическом режиме на компьютере.

О Г Л А В Л Е Н И Е

Учебное издание

Монахов Владимир Андреевич

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА
Часть 2. КИНЕМАТИКА
Учебное пособие

Редактор М.А. Сухова
Верстка Н.В. Кучина

Подписано в печать 16.06.2014. Формат 60х84/16.
Бумага офисная «Снегурочка». Печать на ризографе.
Усл.печ.л. 7,2. Уч.-изд.л. 7,75. Тираж 100 экз.
Заказ № 192.

РЕГИСТР ИСО 9001

Издательство ПГУАС.
440028, г. Пенза, ул. Германа Титова, 28