

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

---

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение  
высшего профессионального образования  
«Пензенский государственный университет  
архитектуры и строительства»  
(ПГУАС)

А.И. Шеин, О.Г. Земцова

**МОДЕЛИРОВАНИЕ  
И ИССЛЕДОВАНИЕ ДИНАМИКИ  
ЖЕЛЕЗОБЕТОННЫХ БАЛОК  
В УСЛОВИЯХ ТРЕЩИНООБРАЗОВАНИЯ**

Пенза 2014

УДК 624.042:539.3:534.1

ББК 38.112:22.251

ШЗ9

Рецензенты: кандидат технических наук, доцент,  
главный конструктор ООО «Гражданпроект» В.В. Викторов;  
доктор технических наук, профессор,  
зав. кафедрой «Строительные конструкции» Н.Н. Ласьков (ПГУАС)

**Шеин А.И.**

ШЗ9 Моделирование и исследование динамики железобетонных балок в условиях трещинообразования: моногр. / А.И. Шеин, О.Г. Земцова. – Пенза: ПГУАС, 2014. – 123 с.  
**ISBN 978-5-9282-1127-1**

Рассматривается математическое моделирование динамики железобетонных балок с гасителями колебаний под действием гармонической нагрузки. Представлен обзор основных подходов к моделированию физических свойств железобетона. Дается краткая характеристика принципов гашения колебаний. Рассмотрена разработка метода математического моделирования системы «железобетонная балка – гаситель», учитывающего влияние появления и развития трещин на работу конструкции.

Показана реализация разработанного метода динамического моделирования в виде программы на языке Fortran. Описаны численные эксперименты по исследованию динамики железобетонной балки с учетом трещинообразования.

Монография подготовлена на кафедре «Механика» и предназначена для аспирантов, научных работников, занимающихся вопросами моделирования и исследования динамики железобетонных балок, инженеров-проектировщиков, а также студентов, обучающихся по направлению 08.03.01, 08.03.01 «Строительство».

**ISBN 978-5-9282-1127-1**

© Пензенский государственный университет  
архитектуры и строительства, 2014

© Шеин А.И., Земцова О.Г., 2014

## ВВЕДЕНИЕ

Научная новизна работы состоит в создании математической модели динамики систем с переменной в процессе колебаний жесткостью.

Обследования эксплуатируемых конструкций показывают, что в их материале всегда присутствуют дефекты типа пустот или трещин. Эти трещины могут как измеряться микрометрами, так и иметь макроразмеры, измеряемые сантиметрами и даже десятками сантиметров, в зависимости от масштаба конструкции. Возникает вопрос о том, насколько они опасны в отношении разрушения конструкции. Инженерная практика имеет примеры многих аварий, происшедших, на первый взгляд, по непонятным причинам, поскольку разрушение хрупкого типа происходило при достаточно низком уровне напряжений. Во многих странах, особенно в США, были проведены многочисленные исследования, позволившие установить, что ответственными за внезапные хрупкие разрушения являются дефекты типа трещин. В то же время обследования показывают, что трещины могут длительное время существовать в конструкции, оставаясь стабильными и не проявляя тенденции к росту.

Поэтому необходима методика, которая позволит не только изучать вопросы появления и развития трещин в элементах конструкций в зависимости от уровня нагружения и других условий в процессе эксплуатации, но и даст возможность учитывать влияние трещин на работу конструкций.

# 1. ОБЗОР ИССЛЕДОВАНИЙ В ОБЛАСТИ ДИНАМИКИ НЕЛИНЕЙНЫХ СТЕРЖНЕВЫХ СИСТЕМ

## 1.1. Предпосылки к построению расчетной модели железобетонной балки

Железобетонные балки – это стержневые конструкции, изготовленные из физически нелинейных материалов. Прежде всего сформулируем основные положения, которым должна отвечать современная математическая модель гетерогенной стержневой системы. Важнейшим требованием к математической модели является её адекватность изучаемому реальному объекту относительно выбранной системы характеристик. Это прежде всего правильное качественное и количественное описание объекта по выбранным характеристикам. В связи с этим остановимся кратко на физических характеристиках железобетона и строительных сталей как основных материалов конструкций железобетонных балок.

Железобетон можно рассматривать как двухкомпонентный материал, состоящий из бетона и арматуры. Диаграмма работы бетона  $\sigma$ – $\epsilon$  – это кривая линия, имеющая в сжатой зоне ниспадающий участок. Т.е. бетон – ярко выраженный физически нелинейный материал. Кроме того, бетон плохо работает на растяжение и даже при незначительных плюсовых деформациях в нем появляются трещины. Ниспадающая ветвь в сжатой зоне также, как правило, ограничена предельными деформациями. В результате в сжатой зоне возможно дробление бетона. Таким образом, в процессе работы железобетонных элементов в них могут появляться зоны трещин и дроблений. Это приводит к изменению геометрии сечений по длине элементов, что необходимо учитывать в математической модели, описывающей поведение конструкции. Современные арматурные стали Ат-III, А-IV, А-V, А-VI, А-VII – это материалы, в которых практически отсутствует площадка текучести. Диаграмма работы такого вида арматуры – плавная кривая с небольшим ниспадающим участком. То есть здесь также наблюдается ярко выраженная физическая нелинейность.

Диаграмма работы низколегированной стали, используемой для стальных каркасов зданий, как правило, представляет собой плавную кривую. В случае применения углеродистой стали обыкновенного качества, диаграмма имеет горизонтальный участок, или зону текучести, т.е. здесь зависимость между нагрузкой и перемещениями также нелинейна. Кроме того, для идеально упругопластических конструкций переменность геометрии сечений реализуется в различном распределении упругих и пластических зон по длине элементов.

Таким образом, математическая модель должна опираться на соотношения, описывающие поведение физически нелинейных материалов под нагрузкой. Весьма важно, чтобы математическая модель базировалась на явных аналитических зависимостях. Это касается в первую очередь учета физической нелинейности, которая может быть описана в функциональном виде. Это относится и к геометрической нелинейности, которая входит, с одной стороны, в качестве нелинейных составляющих деформаций, а с другой – в качестве учета влияния продольных усилий на моменты внешних сил в элементах конструкций и сооружений. Таким образом, необходимо, чтобы уравнения математической модели содержали соотношения, позволяющие в явном виде учитывать физическую и геометрическую нелинейности.

При записи дифференциальных уравнений равновесия следует считаться с изменением геометрии конструкции и положения в пространстве сечений её элементов под воздействием внешних сил. Традиционно принято уравнения равновесия в части, касающейся внутренних сил, составлять относительно недеформированного состояния. Пренебрежение фактом непоступательного смещения сечений в процессе деформирования может исказить фактическое равновесие системы. Сферическое движение сечений под нагрузкой и количественно, и качественно изменяет картину равновесия внешних и внутренних сил, так как она в значительной мере зависит от направления внутренних усилий. Сравнительная иллюстрация этого факта приведена на рис. 1.1 и 1.2. Положение расчётного сечения следует принимать с учётом деформированного состояния элемента.

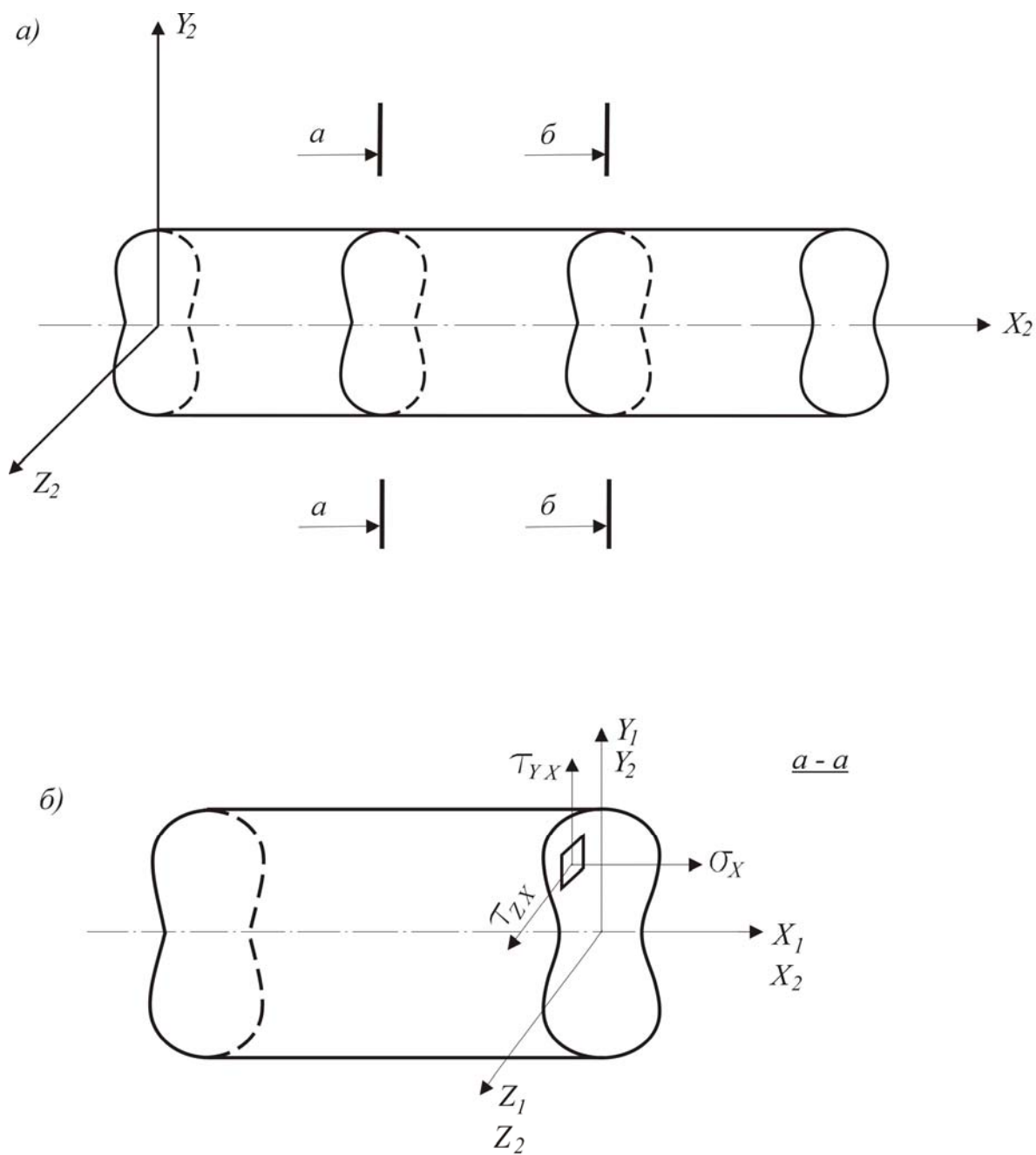


Рис. 1.1. Внутренние усилия для недеформированного состояния элементов: а – недеформированное состояние элемента; б – напряжения на элементарной площадке для недеформированного состояния

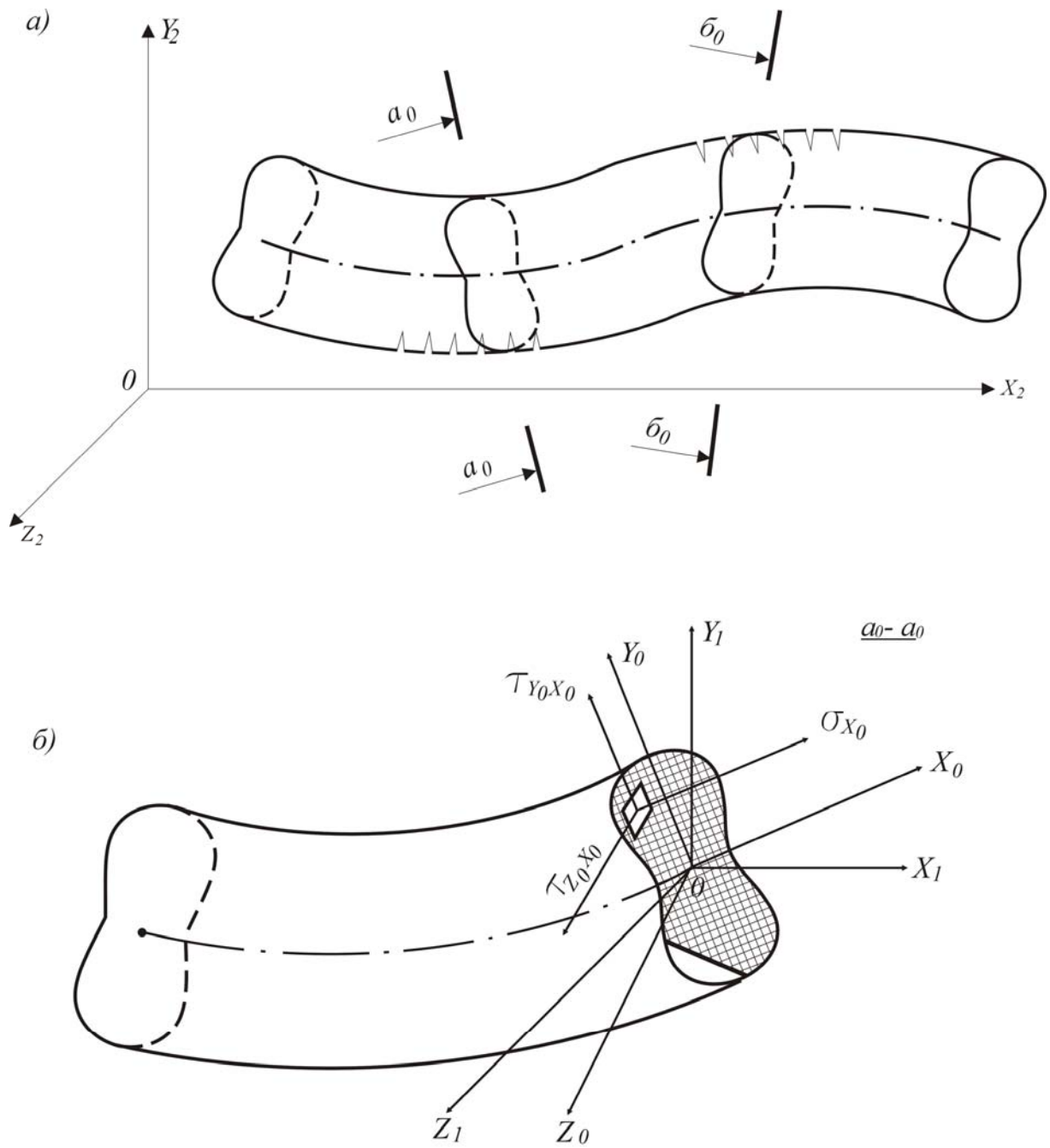


Рис. 1.2. Внутренние усилия для деформированного состояния элементов: а – деформированное состояние элемента; б – напряжения на элементарной площадке для деформированного состояния

Для железобетонных элементов каркаса характерны местные (локальные) изменения расчетных сечений (см. рис. 1.2). Уравнения состояния должны автоматически описывать деформированную ось и напряжения в сечениях с учётом «плавающей» нейтральной оси, смены положений сжатых и растянутых зон по длине элемента, изменение по длине эффективной части бетонного сечения и зон с трещинами и дроблением. Для железобетона важно отслеживать и знак деформаций вблизи предельной области ввиду их необратимости. Для стальных элементов характерно изменение пластических зон по длине. Следовательно, математическая модель должна учитывать возможность изменения геометрических и физических параметров по длине элементов.

Пространственная работа стержней каркаса включает в себя и деформации кручения. При этом крутильная жесткость также должна определяться с учетом изменения геометрии сечений вследствие появления зон растрескивания и дробления.

Если элементы каркаса содержат достаточно высокие балки ( $h/l \geq 1/12$ ), то целесообразным становится учет и сдвиговых деформаций при определении положения осевых линий в деформированном состоянии.

Наружные колонны каркаса могут находиться в условиях неравномерного температурного воздействия по высоте сечения. Это приводит к появлению температурных деформаций и напряжений, т.е. математическая модель должна включать соотношения, позволяющие учитывать напряжённо-деформированное состояние (НДС), вызванное температурным воздействием.

Многие нагрузки на сооружение имеют переменный во времени, в частном случае периодический характер. При достаточно высоких скоростях изменения нагрузок необходимо выполнять динамический расчет конструкций или сооружений, расчетная модель которых должна содержать соотношения, позволяющие оценивать НДС при переменных во времени нагрузках или кинематических возмущениях деформированных равновесных состояний.

В процессе нагружения конструкции могут возникнуть ситуации, когда любое малое кинематическое воздействие приведет либо к необратимым нарастающим деформациям, либо к колебательному процессу очень низкой частоты. Первая ситуация свидетельствует о потере устойчивости НДС, вторая является признаком плохой устой-



чивости сооружения по отношению к возможным возмущениям НДС. Математическая модель стержневых систем должна учитывать подобные ситуации.

Решение линейных задач расчёта практически любых стержневых систем в настоящее время не представляет затруднений. Поэтому для начального приближения, или некоторой отправной точки, весьма удобно и целесообразно использовать результаты линейного решения. Обычный прием линеаризации функций в уравнениях путем замены их двумя первыми членами ряда Тейлора в задачах, содержащих произведения функций нескольких параметров, неэффективен. Следовательно, непосредственно физические и геометрические соотношения задачи должны редуцироваться к линейному виду. Линейное решение особенно важно в связи с получением предварительных сведений об искомых параметрах вообще.

Разумеется, можно заменить физически нелинейные зависимости кусочно-линейными после разбиения диапазона изменения напряжений на части. Однако в этом случае одно точное уравнение, по сути дела, заменяется несколькими приближенными и возникает проблема непрерывности на границах диапазонов. При необходимости проведения оптимизационных процедур такой подход становится фактически непреодолимым барьером. А наиболее эффективная расчётная модель должна давать возможность проведения оптимизационных процедур путём простого освобождения достаточного числа параметров и поиска наилучшей их величины и сочетаний.

Итак, построение современной математической расчётной модели гетерогенных стержневых систем должно быть подчинено цели возможно более точного определения напряжённо-деформированного состояния физически и геометрически нелинейных стержневых систем с переменными (в процессе деформирования) геометрическими и физическими характеристиками элементов. Рассмотрим существующие подходы к решению подобных задач.

Со времен Ж.Л. Лагранжа применение уравнений по вычислению работ сил прочно вошло в механику. В строительной механике, особенно при решении статических задач, развитие основных методов расчета произошло именно на основе аналитической механики. По сути дела, на энергетической основе возник и развился метод конечных элементов – самый популярный в настоящее время метод расчета

конструкций. Кроме того, во многих случаях энергетические функционалы строились и для получения дифференциальных уравнений равновесия, хотя последнее можно было сделать и прямым путем. Ведь фундаментом механики все же является второй закон Ньютона и построенные на его основе уравнения движения.

Рассмотрим сложившуюся методику расчетов применительно к стержневым системам. Исторически сложилось так, что развитие методов расчета сооружений как систем элементов основывалось на энергетических принципах. Именно на этой основе были сформулированы метод сил, метод перемещений и смешанный метод для расчета стержневых систем. Затем путем использования вариационного подхода, метода Ритца и сплайн-аппроксимации сложился метод конечных элементов, применяемый для расчета практически любых конструкций.

Пик использования сеточных методов для решения дифференциальных уравнений пришелся как раз на период внедрения МКЭ в расчетную практику. При этом методом сеток рассчитывались, как правило, отдельные элементы. С течением времени МКЭ, или вариационно-сеточный метод, занял доминирующую роль в области расчета сооружений. Хотя, как подчеркивается крупнейшими специалистами МКЭ Зенкевичем О. и Морганом К., «все процессы аппроксимации, используемые при решении описываемых дифференциальными уравнениями задач, по существу, составляют единое целое» и нужно иметь «простор для выбора оптимальной аппроксимации» [2].

Когда задачи практики требовали вычисления перемещений лишь в конкретных точках конструкции по фиксированным направлениям, как это было в случае однородных линейно-упругих конструкций, можно было воспользоваться методом, предложенным в 1874 г. немецким ученым О.Мором и в дальнейшем развитым на общий случай деформаций стержневой системы. Этот метод основывается на принципе возможных перемещений и, по сути, является энергетическим. Метод Мора позволяет определять перемещения через деформации не напрямую, а через внутренние силы. То есть по известному распределению внутренних сил от нагрузки и  $i$ -го единичного воздействия определяется перемещение по  $i$ -му направлению в произвольной системе. Задача определения перемещений точек здесь сводится к вычислению интегралов Мора. Именно на основе этого

способа вычисления перемещений разработаны основные методы расчета стержневых систем – метод сил и метод перемещений. Впоследствии, как уже отмечалось, к этим методам свелись и расчеты двух- и трехмерных тел в результате деления их и соответствующих энергетических функционалов на элементы, использования локальных координатных функций и метода Ритца для решения вариационных задач.

Таким образом, сложился метод конечных элементов. Он исключительно эффективен при квадратичных энергетических функционалах. Однако для получения уравнений равновесия нелинейных задач, особенно при сильной физической нелинейности или при одновременном учете физической и геометрической нелинейностей, необходимо интегрировать степенные или тригонометрические зависимости от, в свою очередь, взаимных произведений сплайн-функций. Это весьма трудоёмкая и не всегда реализуемая в замкнутом виде процедура. Полностью же доверять численному решению задачи в инкрементальном виде, не имея опоры на действительные уравнения равновесия конечно нельзя. Некоторые неудобства вносит и необходимость узлового приложения нагрузок в МКЭ. Это относится прежде всего к железобетонным конструкциям, так как зоны растрескиваний (и армирования) зависят и от величины, и от знака кривизны. Кроме того, всегда полезно иметь второй метод расчёта, базирующийся на другой концепции, хотя бы для того, чтобы можно было выполнить сравнительный анализ результатов для повышения их надёжности.

В качестве альтернативного может быть рассмотрен метод конечно-разностной аппроксимации функций и их производных, описывающих поведение системы в дифференциальных уравнениях равновесия. Метод конечных разностей, или метод сеток, – это такой метод аппроксимации дифференциальных уравнений, при котором нахождение функций сводится к решению системы алгебраических уравнений для отыскания значений функций в узловых точках.

Метод конечных элементов и метод сеток идентичны в том смысле, что сводят решение систем дифференциальных уравнений к решению систем алгебраических уравнений. Основные математические достоинства и недостатки конечно-разностного и вариационного подходов известны. Разностный метод имеет более универсальный характер по сравнению с вариационными, так как не требует предварительного аналитического

выражения кинематических функций. Использование его в расчётах систем элементов сдерживалось, по-видимому, наличием так называемых законтурных точек, количество которых тем больше, чем выше порядок производных дифференциальных уравнений. Однако законы классической механики и геометрия деформированных элементов не содержат производных выше второго порядка. А при аппроксимации дифференциальных уравнений второго порядка можно использовать только внутренние и граничные точки.

Чирас А.А. называет два основных преимущества МКЭ над МКР: «Во-первых, это то, что применение матрично-операторной формы позволяет получить удобный алгоритм расчета для реализации его на ЭВМ. Во-вторых, в отличие от метода конечных разностей, более высокая степень однородности заданных функций необходима лишь в пределах элемента, поэтому при решении сложных систем конструкция может быть составлена из различных конечных элементов». Действительно, в настоящее время матричная форма всесторонне проработана для МКЭ. Однако при составлении рабочей расчётной программы сложнее и важнее оказывается описание процедур раскрытия нелинейностей, нежели описание поведения элементов. При этом немаловажно, если в уравнениях ясно видна их физическая сущность.

Пределный переход уравнений МКЭ и МКР в дифференциальные уравнения, очевидно, одинаково возможен. Однако важным преимуществом МКР является то, что уравнения равновесия могут составляться для элемента с любым изменением геометрии сечений (так же, как строится эпюра усилий в статически определимой основной системе метода сил).

При решении идеально линейно-упругих задач, когда распределение внутренних усилий по элементам пропорционально параметру внешней нагрузки, жесткостные характеристики неизменны по длине элементов и необходимо знать перемещения ограниченного числа точек, рассмотренный выше энергетический подход был, конечно, вполне оправдан.

Кроме того, ранее и задачи рационального подбора сечений решались только с помощью одного – двух пересчетов систем со скорректированными параметрами. Развитие теории нелинейного программирования сделало возможным направленный поиск оптималь-

ных параметров в области непрерывных функций. Однако эффективная оптимизация элементов возможна лишь при аналитическом, функциональном представлении связей «нагрузка – геометрия – поведение конструкций».

Практика решения таких прикладных задач, как расчет железобетонных или стальных рамных каркасов, показывает необходимость учета в первом случае переменной геометрии сечений, а во втором – переменных по высоте зон пластичности. То есть совершенно очевидна необходимость учета в математической модели переменных по длине характеристик сечения. В то же время весьма важно сохранить стержневую модель элементов конструкций, т.к. переход к малым пространственным конечным элементам в условиях трещинообразования и переменного армирования приводит к необходимости учета, при расчёте достаточно сложных сооружений, десятков тысяч неизвестных. Конечно-элементная (в том числе и стержневая) модель имеет еще один серьезный недостаток – для физически и геометрически нелинейных задач практически невозможно представить в аналитическом виде матрицу жёсткости. Численные же шаговые или итерационные построения не гарантируют невозможности отклонения от истинной равновесной кривой.

Суммируя вышеперечисленные требования к современной математической модели гетерогенной стержневой системы, отметим, что основное желательное качество – это базирование конечных уравнений на аналитических зависимостях и возможность учёта переменной (в процессе деформирования) геометрии сечений. Это делает расчетную модель достаточно гибкой и контролируемой на любом этапе. Для проведения оптимизационных расчетов здесь достаточно введения критерия оптимальности и освобождения тех или иных параметров.

Если положить в основу построения модели идею формирования системы дифференциальных уравнений движения механической системы и непосредственного численного дифференцирования, придём к необходимости построения конечно-разностных, или сеточных, схем.

## 1.2. Математическое описание физической нелинейности железобетона

Для строительных материалов характерна нелинейная связь между напряжениями и деформациями. Для описания этой связи в математической модели в первую очередь сделаем анализ диаграмм работы бетонов и сталей, как материалов, преобладающих в строительстве, и выберем удобные аппроксимирующие зависимости.

Железобетон по своему составу представляет собой сложный строительный материал, состоящий из стального каркаса и бетона. Последний, в свою очередь, состоит из каменных заполнителей и песка (или инертных), вяжущего (обычно цементов различных видов), воды и добавок. В строительстве применяют широкий спектр бетонов. Однако основные несущие элементы рамных каркасов и других несущих стержневых конструкций (фермы, арки и т.д.) изготавливаются из тяжелых бетонов с щебеночным заполнителем. С точки зрения строительной механики железобетон целесообразно рассматривать как двухкомпонентный материал, состоящий из бетона и арматуры.

В силу неоднородности структуры бетона поле его деформаций является сложным и неоднородным и существенно зависит от скорости нагружения. Остановимся отдельно на диаграммах статического и динамического нагружения. Существует множество способов обработки экспериментальных диаграмм «напряжение – деформация»  $\sigma$ – $\varepsilon$ . Рассмотрим среднестатистическую кривую зависимости  $\sigma$ – $\varepsilon$  бетона при кратковременном нагружении с постоянной скоростью. При этом на диаграмме обнаруживается нисходящий участок. При выборе и построении аппроксимирующих зависимостей воспользуемся понятиями предельной сжимаемости  $[\varepsilon^-]$  и предельной растяжимости бетона  $[\varepsilon^+]$  (рис. 1.3), т.е. деформациями бетона в момент разрушения. Для расчета при так называемом кратковременном нагружении можно принять предельную сжимаемость  $[\varepsilon^-] \approx 2,0 \cdot 10^{-3}$ , предельную растяжимость при осевом растяжении  $[\varepsilon^+] \approx (1,5 \div 3) \cdot 10^{-4}$ , при изгибе и внецентренном сжатии  $[\varepsilon^-] \approx 3,5 \cdot 10^{-3}$ . Предельная растяжимость при изгибе существенно выше, и краевые удлинения в этом случае могут вдвое превышать предельную растяжимость.

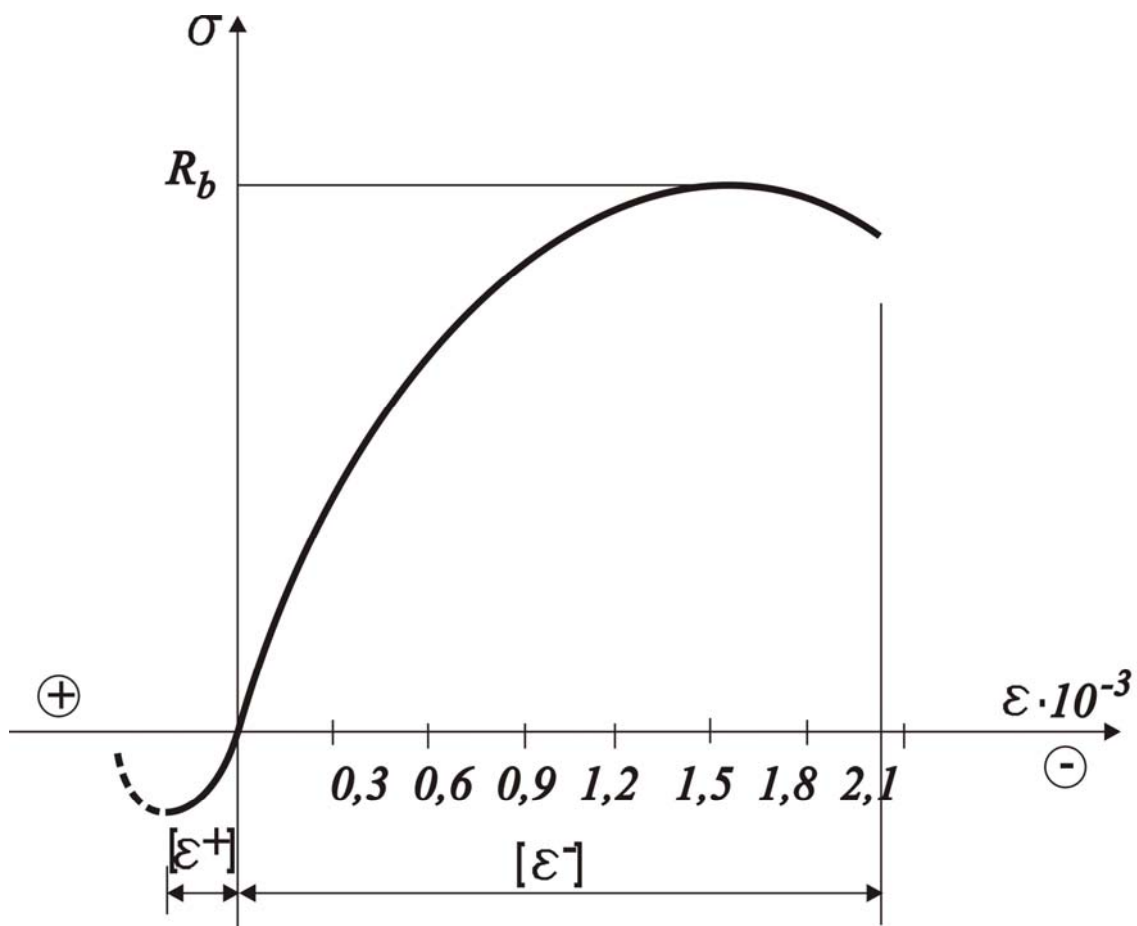


Рис. 1.3. Диаграмма деформаций бетона [3]

Арматурные стали подразделяются на мягкие (А-I, А-II) – с развитой площадкой текучести, и твердые, низколегированные стали, которые нормируются по пределу прочности (А-III, А-IV, А-V, А-VI, А-VII). В качестве рабочей арматуры колонн и ригелей обычно используют твердые стали. Диаграммы растяжения арматурных сталей приведены на рис. 1.4. Учитывая, что сталь примерно одинаково работает на растяжение и сжатие, полную диаграмму «напряжение – деформация» можно представить схемой, изображенной на рис. 1.5, где  $\sigma_{\text{пл}}$  – предел временного сопротивления материала.

$\sigma$  кг/см<sup>2</sup>

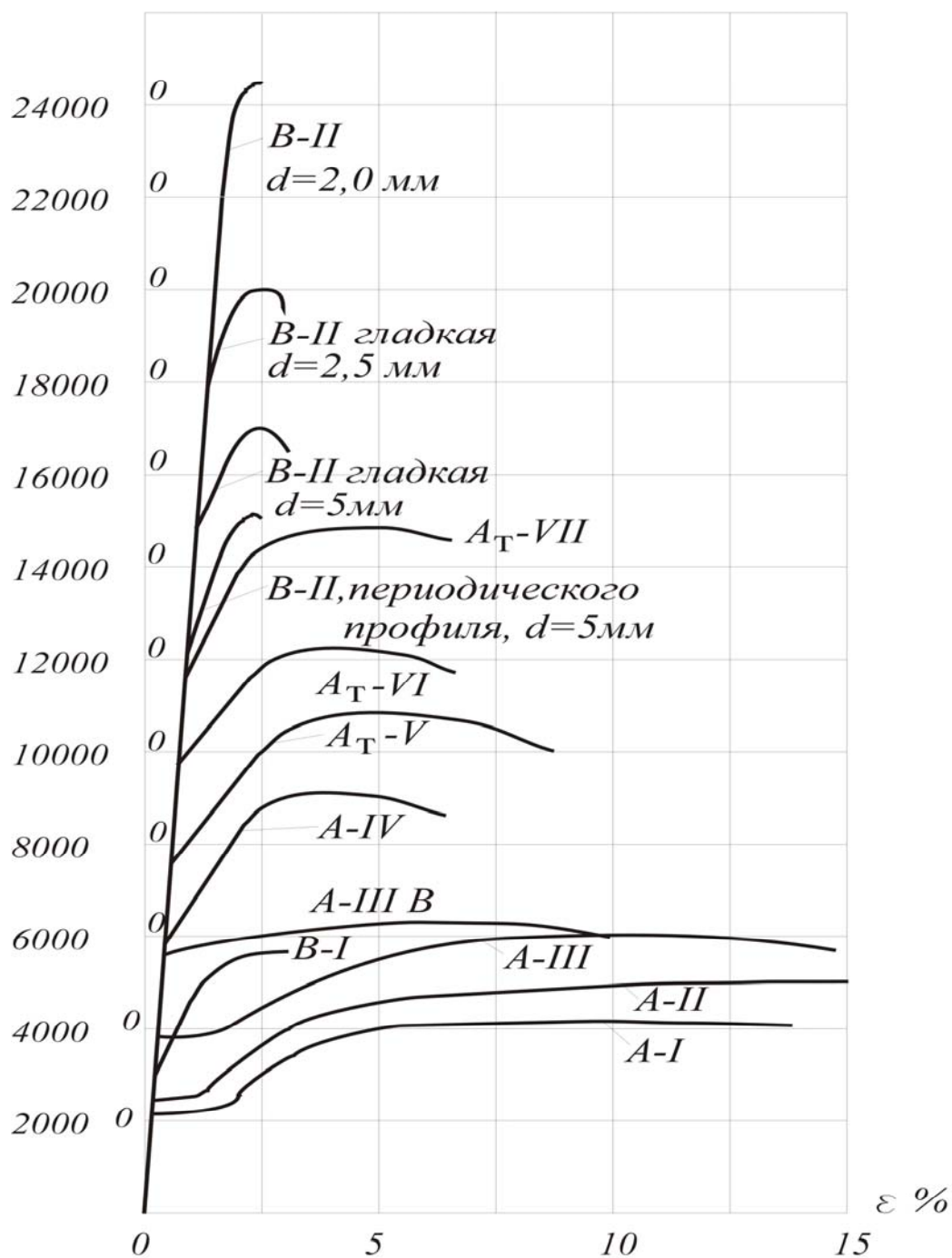


Рис. 1.4. Диаграммы растяжения арматурных сталей [4]



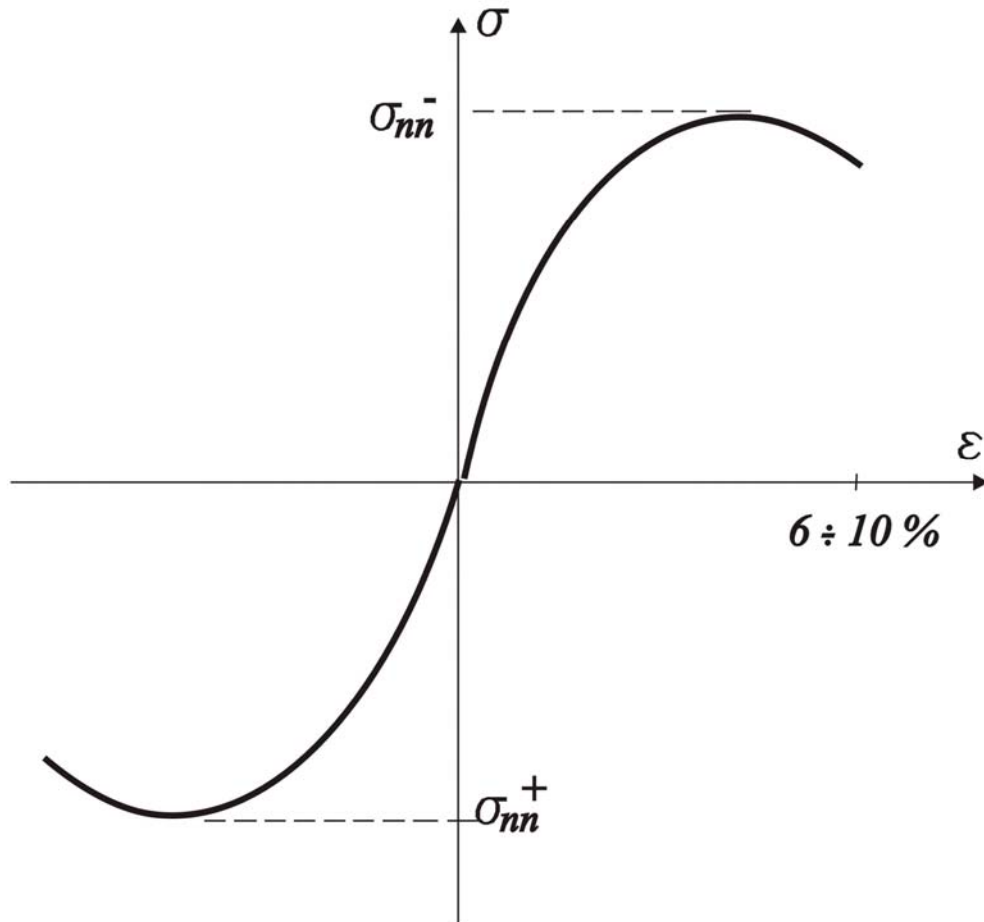


Рис. 1.5. Диаграмма «напряжение – деформация» для низколегированных сталей

Таким образом, для аналитического выражения зависимости между напряжениями и деформациями необходимо подобрать функции, описывающие кривые, изображенные на рис. 1.2 и 1.5. Множество авторов (например, М.М. Филоненко-Бородич [5], Н. Хофф [6], П.Лукаш [7]) отмечали удобство использования в расчетах простейшего нелинейного соотношения «напряжение – деформация», приближенно отвечающего действительному поведению материала и описываемого степенной функцией:

$$\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0} = \left( \frac{\sigma}{\sigma_0} \right)^n, \quad (1.1)$$

где  $n > 1$ .

Это первая после закона Гука форма связи  $\sigma$ – $\varepsilon$  предложена в 1729 г. Г.Б. Бюльфингером. Часто это соотношение записывается в виде

$$\sigma = A \cdot \varepsilon^k. \quad (1.2)$$

Если  $n$  – четное число, то растягивающие и сжимающие напряжения надо рассматривать отдельно. Если  $n$  – нечетное число, то уравнение (1.1) справедливо как при сжатии, так и при растяжении. Зависимость Бюльфингера удобна простотой записи и достаточной универсальностью: при  $k=1$  из выражения (1.2) следует закон Гука, а при  $k=0$  – закон для жесткопластического тела. Однако при малых деформациях кривые, описываемые соотношениями (1.1) и (1.2), значительно отличаются от экспериментальных диаграмм для строительных материалов, так как все они, за исключением кривой, соответствующей  $n=1$ , имеют при  $\sigma=0$  вертикальную касательную (или по (1.2) при  $\varepsilon=0$ , модуль упругости  $E=\infty$ ). К тому же функция (1.2) не имеет максимума при  $\sigma = \sigma_{\text{пп}}$ , в то время как экспериментальные диаграммы часто имеют нисходящую ветвь.

Онищик Л.И. ввёл для диаграммы деформирования бетона зависимости вида:

$$\sigma = 1,1 \cdot R_{\text{пр}} (1 - e^{-0,9\alpha\varepsilon}), \quad (1.3)$$

где  $R_{\text{пр}}$  – призменная прочность бетона.

В нормах США для бетона принята аналитическая зависимость, состоящая из двух участков [8]. При этом на первом участке (рис. 1.6) зависимость  $\sigma$ – $\varepsilon$  является параболической, а на втором – линейной:

$$\sigma_1 = \sigma_6 \left[ 2 \frac{\varepsilon_6}{\varepsilon_M} - \left( \frac{\varepsilon_6}{\varepsilon_M} \right)^2 \right],$$

$$\sigma_2 = \sigma_{\bar{\sigma}, \text{макс}} \left( 1 - 0,15 \frac{\varepsilon_6 - \varepsilon_M}{\varepsilon_K - \varepsilon_M} \right). \quad (1.4)$$

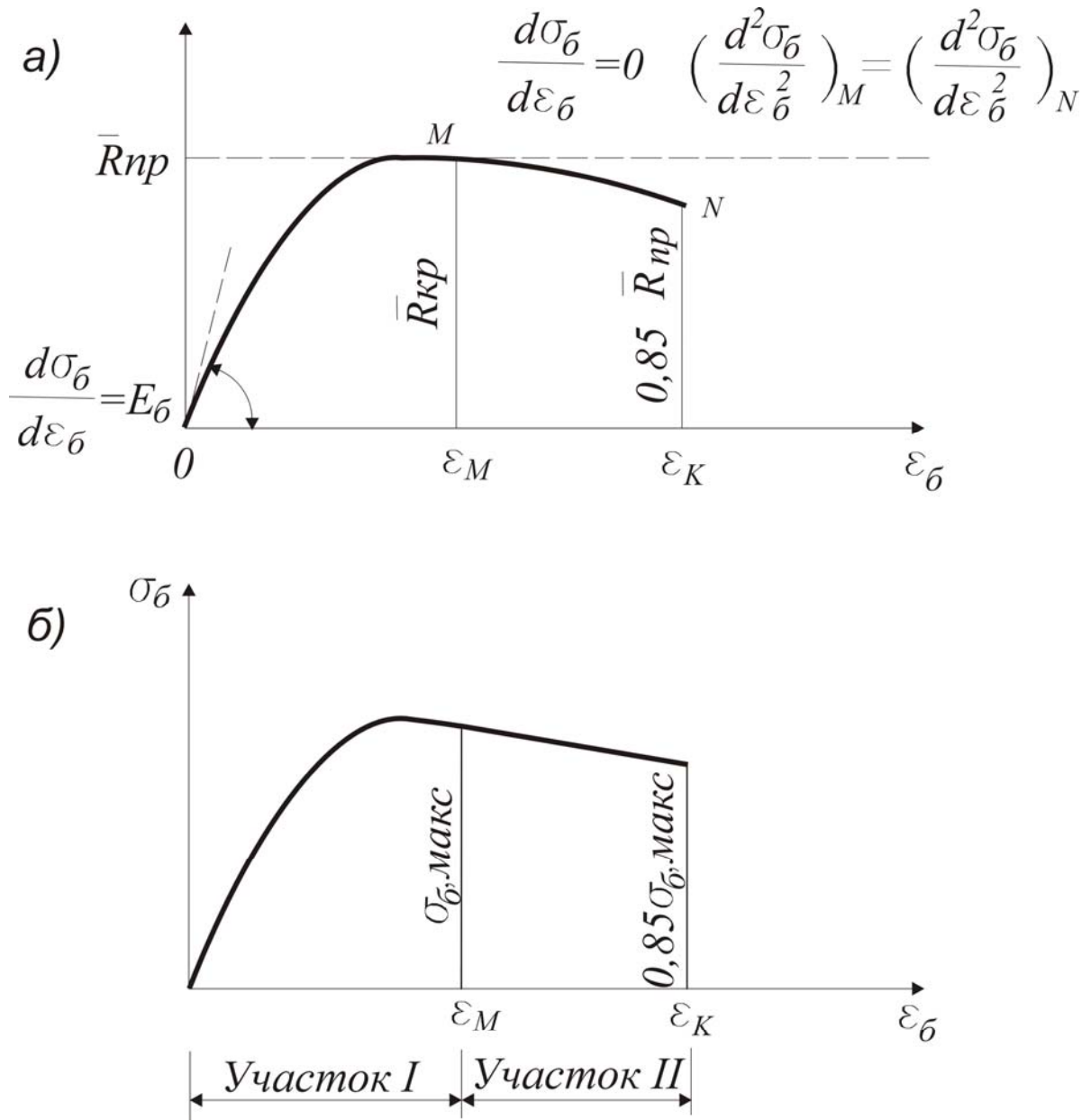


Рис. 1.6. Расчётные диаграммы  $\sigma$ – $\varepsilon$  с ниспадающим участком для бетона:  
 а – нормирующие показатели диаграммы с ниспадающим участком;  
 б – нормативная диаграмма

Хорошее совпадение между приближенным решением и экспериментом можно получить, если выбрать зависимость в виде полинома. Рамберг и Осгуд, Н. Хофф [6], Г.Е. Бельский [9] предлагали использовать зависимость

$$\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0} = \frac{\sigma}{\sigma_0} + a \cdot \left( \frac{\sigma}{\sigma_0} \right)^n \quad (1.5)$$

для всех перечисленных конструкционных материалов. В частности, для армированного бетона Г.Е. Бельским получено на основе (1.5) выражение

$$\frac{\varepsilon}{0,00075} = \frac{\sigma}{180} + 4,27 \left( \frac{\sigma}{180} \right)^{7,94} \quad (1.6)$$

при  $\sigma=180 \text{ кг/см}^2$ ,  $\varepsilon_{\text{max}}=0,00395$ .

Однако при записи уравнений равновесия удобнее пользоваться зависимостями вида

$$\sigma = f(\varepsilon). \quad (1.7)$$

В достаточно общем виде такую зависимость (1.7) можно записать следующим образом [10, 11, 7, 12]:

$$\sigma = \sum_{i=1}^n A_i \varepsilon^{k_i} = A_1 \cdot \varepsilon^{k_1} + A_2 \cdot \varepsilon^{k_2} + A_3 \cdot \varepsilon^{k_3} + \dots + A_n \cdot \varepsilon^{k_n}, \quad (1.8)$$

где  $A_i$  – некоторые физические константы, имеющие размерность напряжений;  $k_i$  – безразмерные показатели, которые могут быть любым положительным числом (целым, дробным).

Подбирая соответствующие значения  $A_i$ ,  $k_i$  и число членов  $n$ , можно с необходимой точностью аппроксимировать любую экспериментальную диаграмму.

В 1831 г. Ф.И. Герстнером была предложена зависимость  $\sigma$ – $\varepsilon$  в виде квадратной параболы [7]:

$$\sigma = A_1 \cdot \varepsilon - A_2 \cdot \varepsilon^2. \quad (1.9)$$

Подобной же зависимостью описывается аналитическое представление диаграммы по рекомендации ЕКБ (Европейского комитета по бетону):

$$\sigma_b = -1000 \cdot R_b (250 \cdot \varepsilon_b^2 - \varepsilon_b). \quad (1.9^*)$$

Кривые, построенные на основе данной зависимости, приведены на рис. 1.7.

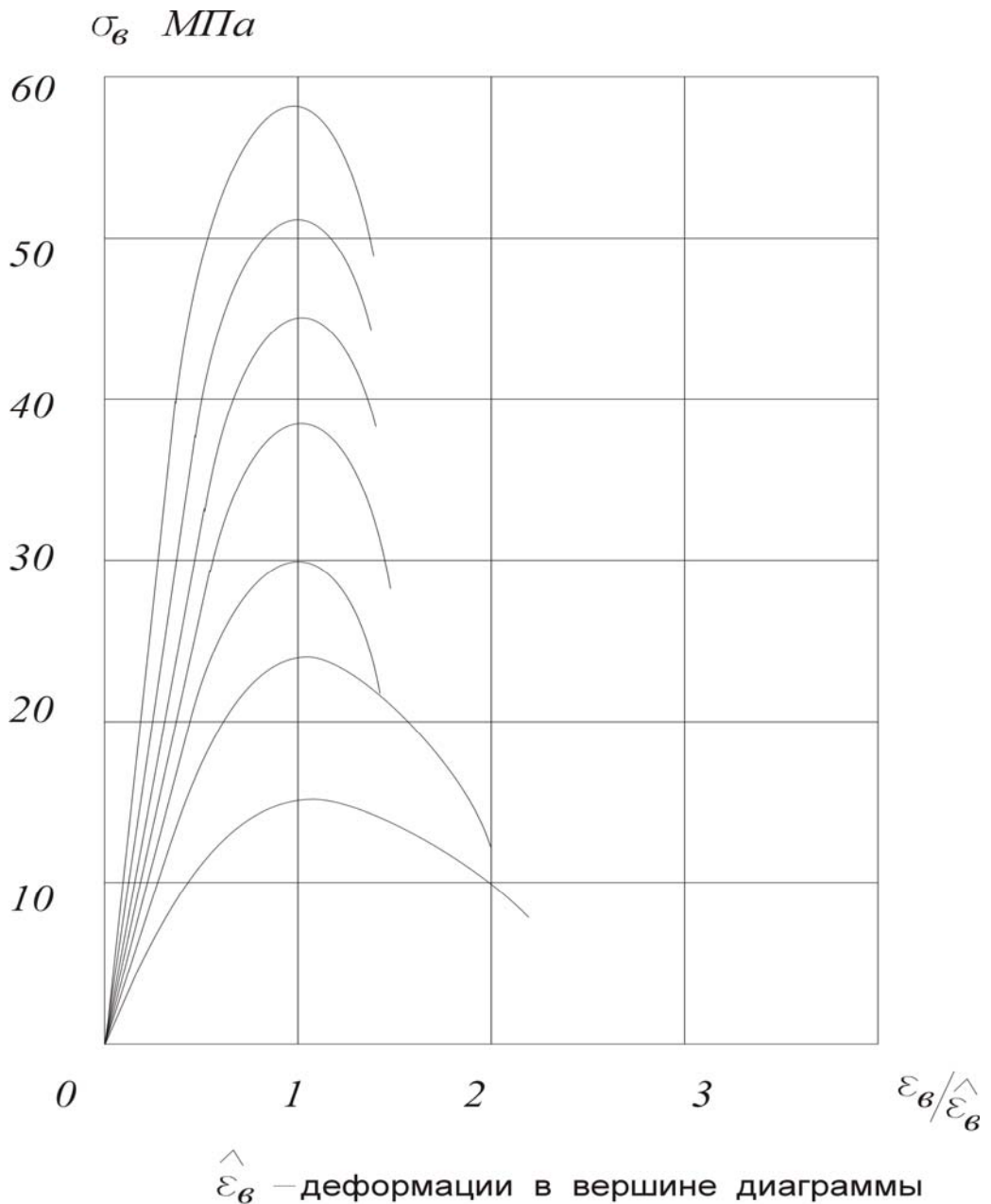


Рис. 1.7. Диаграммы, рекомендуемые ЕКБ

Существенным недостатком аналитической зависимости (1.9) является несимметричность кривой относительно растяжения-сжатия. Поэтому, если при деформации конструкции возникают напряжения разных знаков, то формальное применение закона (1.9) может привести к ошибкам. Гораздо более удобна аппроксимация зависимости  $\sigma$ – $\varepsilon$  с помощью полинома с целыми нечетными показателями, например кубическая зависимость [7], обеспечивающая симметричность диаграммы относительно растяжения-сжатия

$$\sigma = E \cdot \varepsilon - A_3 \cdot \varepsilon^3, \quad (1.10)$$

где  $E$  – начальный модуль упругости материала;

$$A_3 = \frac{4}{27} \frac{E^3}{\sigma_{\text{пл}}^2}. \quad (1.11)$$

Формула (1.10) одинаково удобна при аппроксимации зависимостей  $\sigma$ – $\varepsilon$  как для бетона, так и для стали.

Уравнение (1.8) в виде полинома пятого порядка использовали в расчетах железобетонных конструкций В.Н. Байков, Р.С. Санжаровский [11], Д.О. Астафьев [10] и др.

Существенное влияние на диаграмму сжатия (растяжения) оказывает скорость нагружения. Рассмотрим нагружение образца с постоянной скоростью деформирования [13]. Полученная в этом случае диаграмма полных деформаций сжатия с нисходящим участком для конкретного режима нагружения может быть описана с помощью тригонометрического ряда [7, 13]:

$$\frac{\sigma}{\sigma_{\text{max}}} = \alpha_1 \sin \frac{\pi \varepsilon}{2\varepsilon_1} + \alpha_1 \sin \frac{\pi \varepsilon}{\varepsilon_1} + \alpha_3 \sin \frac{3\pi \varepsilon}{2\varepsilon_1}, \quad (1.12)$$

где  $\varepsilon_1$  – деформация бетона, соответствующая  $\sigma_{\text{max}}$ ;  $\alpha_i$  – безразмерные константы.

С достаточной степенью точности можно ограничиться тремя членами ряда. Для этого случая предложена зависимость

$$\frac{\sigma}{\sigma_{\max}} = \left( \frac{\varepsilon_1}{8\pi\varepsilon_0} + \frac{3}{4} \right) \sin \frac{\pi\varepsilon}{2\varepsilon_1} + \left( \frac{\varepsilon_1}{8\pi\varepsilon_0} - \frac{1}{4} \right) \sin \frac{3\pi\varepsilon}{2\varepsilon_1}, \quad (1.13)$$

где  $\varepsilon_0$  – относительная упругая деформация бетона, соответствующая  $0,25\sigma_{\max}$ .

Данная зависимость весьма точно аппроксимирует опытные диаграммы (рис. 1.8).

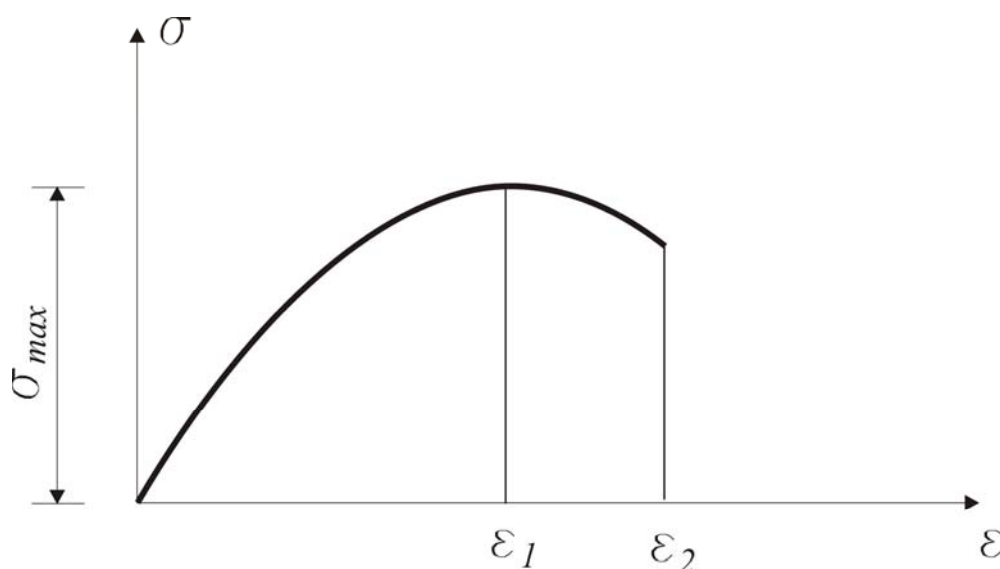


Рис. 1.8. Диаграмма  $\sigma$ – $\varepsilon$ , полученная на основе тригонометрического ряда с нисходящим участком

Обрабатывать диаграммы  $\sigma$ – $\varepsilon$  с помощью гармонического анализа и использовать при получении выражения для  $\sigma$  в виде ряда Фурье предлагал Г.А. Гениев [14]. Для аппроксимации диаграмм могут быть использованы также тригонометрические функции и сплайн-функции [15]. В последнем случае предложена зависимость вида

$$\sigma = \sigma_i + \sum_{n=1}^3 \min(\varepsilon - \varepsilon_i)^n, \quad (1.14)$$

где  $i$  – характерные точки диаграмм.

Хабель А. при разработке теории устойчивости железобетонных стержней с параболической диаграммой  $\sigma$ - $\varepsilon$  для бетона, имеющего ограниченную величину сжимаемости  $\varepsilon_0$ , использовал для бетона зависимость (рис. 1.9):

$$\sigma = \frac{R_{пр} \varepsilon}{(2Q-1)\varepsilon_0^2} (2a\varepsilon_0 - \varepsilon), \quad (1.15)$$

где  $Q$  – экспериментальный коэффициент. При этом арматура считалась следующей диаграмме Прандтля.

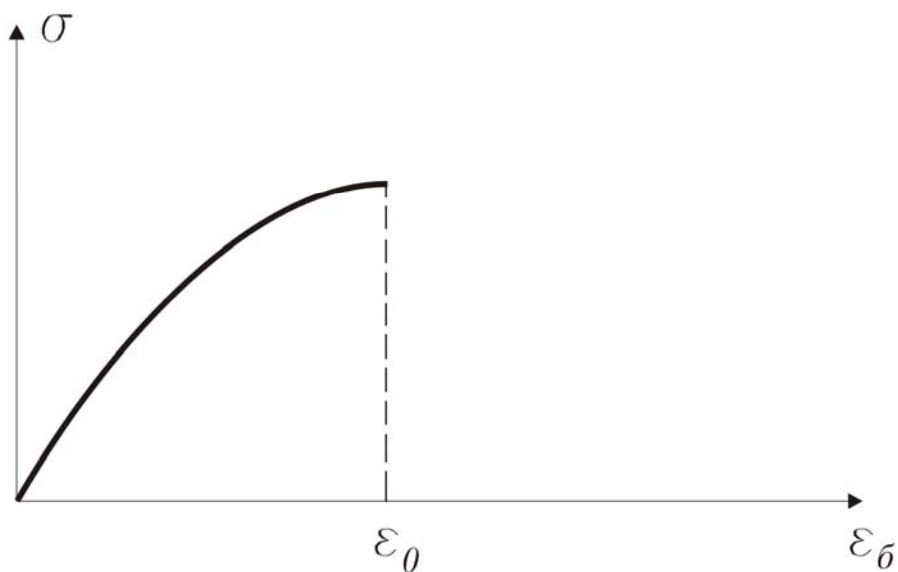


Рис. 1.9. Диаграмма  $\sigma$ - $\varepsilon$  на основе зависимости А.Хабеля

Для низколегированных сталей (или обработанных термически или вытяжкой) – А-IV, А-V, А-VI, А-VII и высокопрочных проволочных сталей удобно применять диаграммы, аналитически выраженные степенными функциями, многочленами вида

$$\sigma = \sum_{k=1,3,5\dots}^n E_k \varepsilon^k = E_1 \varepsilon \pm E_3 \varepsilon^3 \pm E_5 \varepsilon^5 \pm \dots \pm E_n \varepsilon^n. \quad (1.16)$$



Для большинства практических расчетов можно ограничиться двумя членами этого ряда:

$$\sigma = \sum_{k=1,3}^3 E_k \varepsilon^k = E\varepsilon - E_3\varepsilon^3.$$

Будем различать понятия статической и динамической жесткости элементов каркаса [16, 17, 18]. Под «статической» понимается жесткость, определенная при медленных процессах деформирования конструкций, а под «динамической» – жесткость, определенная при достаточно быстрых циклических процессах деформирования конструкций (обычно по частотам собственных колебаний).

При назначении статической жесткости исходят из диаграмм напряжения-деформации материалов, из которых состоит конструкция. При этом расчетным значениям соответствуют верхние пределы статических напряжений или деформаций материалов. Динамическую жесткость принимают, как правило, выше статической, но назначение абсолютной величины здесь связано с учетом влияния многих факторов.

Для большинства строительных материалов вид диаграммы  $\sigma$ – $\varepsilon$  при разгрузке принимается по линейному закону. При нагружении вид диаграммы зависит от скорости возрастания нагрузки, однако сам характер деформирования при любой быстроте нагружения примерно сохраняется. Это дает возможность использовать и в динамических расчетах диаграммы, аналогичные статическим, но с корректировкой основных параметров, например предела прочности для бетона или предела временного сопротивления для низколегированной стали. Кроме того, при колебательных движениях конструкций происходят внутренние и внешние процессы, вызывающие переменное сопротивление движению. Выражение для коэффициента затухания, пропорционального прогибу, при исследовании движения было предложено В.В. Болотиным в следующем виде:

$$R(f, f') = -2(\varepsilon + \varepsilon_1 f^2 + \varepsilon_2 f^4 + \dots) f', \quad (1.17)$$

где  $\varepsilon, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots$  – опытные константы.

Давиденков И.Н. [19] связал величину внутреннего трения с явлением упругого гистерезиса. Для описания прямого и обратного хода диаграммы  $\sigma=\sigma(\varepsilon)$  им предложено выражение

$$\sigma = E \left\{ \varepsilon \pm \frac{\eta}{n} (\varepsilon_0 \pm \varepsilon)^n - 2^{n-1} \varepsilon_0^n \right\}; \quad (1.18)$$

здесь  $\eta$  и  $n$  – константы материала;  $\varepsilon_0$  – амплитудное значение деформации (рис. 1.10).

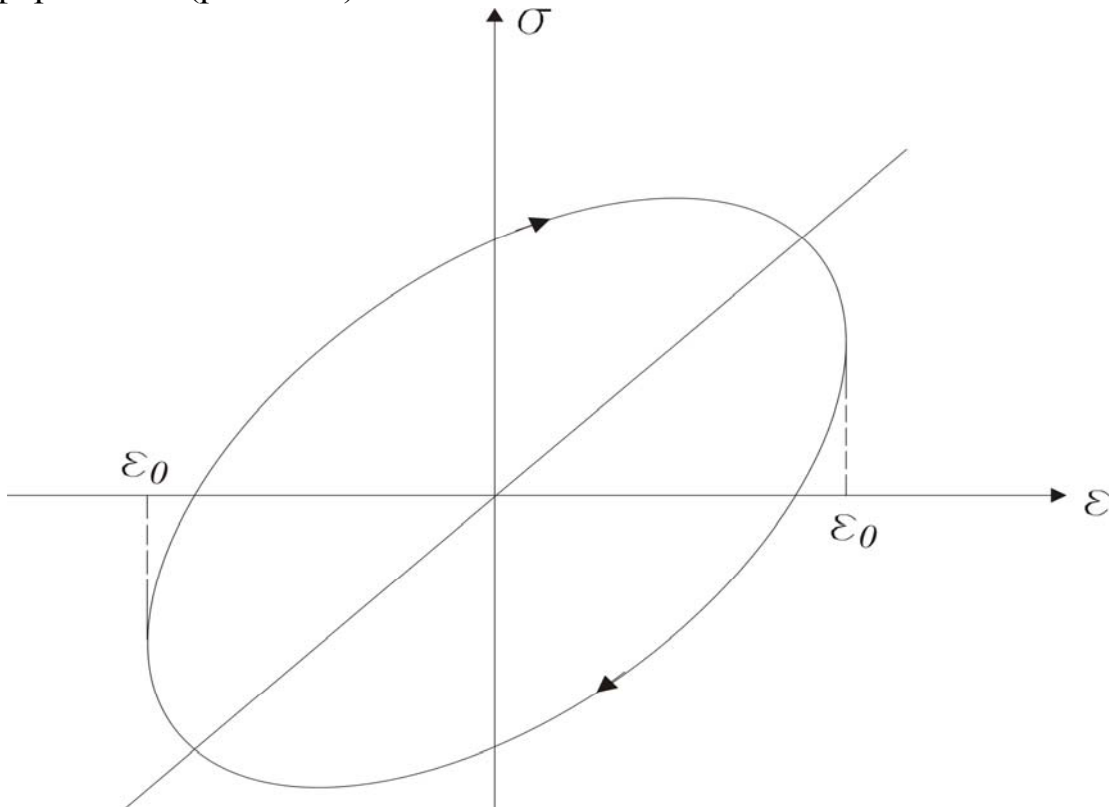


Рис. 1.10. Диаграмма  $\sigma$ – $\varepsilon$  с учётом упругого гистерезиса на основе зависимости И.Н. Давиденкова

В настоящее время не существует единой теории, одинаково пригодной для учета всех видов внутреннего сопротивления. Наиболее простой и хорошо экспериментально проверенный закон вязкоупругости можно записать в виде

$$\sigma = E(\varepsilon + \chi \dot{\varepsilon}), \quad (1.19)$$

где последнее слагаемое учитывает внутреннее сопротивление движению, а условный коэффициент вязкости  $\chi$  соответствует мо-

дернизованной гипотезе В.Фойгта [18], т.е. зависит от частоты колебаний.

Для малоуглеродистых сталей (А-I, А-II, А-III) расчетные диаграммы обычно идеально упругопластические или жесткопластические либо те и другие с упрочнением.

Проанализируем все вышесказанное с целью выбора зависимостей для аналитического описания напряжений в бетоне и арматуре. Будем руководствоваться критериями точности аппроксимации диаграмм сжатия-растяжения, простоты и наглядности записи. Этим критериям лучше всего отвечает запись напряжений в виде (1.10):

$$\sigma_a = E_a \varepsilon - A_3^a \varepsilon^3, \quad (1.20)$$

$$\sigma_b = E_b \varepsilon - A_3^b \varepsilon^3. \quad (1.21)$$

Коэффициенты  $A_3^a$  и  $A_3^b$  определяются по формулам:

$$A_3^a = \frac{4}{27} \cdot \frac{E_a^3}{\sigma_{\text{пн}(a)}^2}, \quad (1.22)$$

$$A_3^b = \frac{4}{27} \cdot \frac{E_b^3}{R_b^2}, \quad (1.23)$$

где  $E_a$  – модуль упругости стали;  $E_b$  – начальный модуль упругости бетона;  $R_b$  – расчетная прочность бетона,  $R_b = \sigma_{\text{пн}(b)}$ .

Учет сопротивления движению удобно проводить на основе гипотезы Фойгта по формуле (1.19).

### 1.3. Механика хрупкого разрушения тел при наличии трещин

Обследования эксплуатируемых конструкций показывают, что в их материале всегда присутствуют дефекты типа пустот или трещин. Эти трещины могут измеряться как микрометрами, так и иметь макро-размеры, измеряемые сантиметрами и даже десятками сантиметров, в зависимости от масштаба конструкции. Возникает вопрос о том,

насколько они опасны в отношении разрушения конструкции. Инженерная практика имеет примеры многих аварий, происшедших, на первый взгляд, по непонятным причинам, поскольку разрушение хрупкого типа происходило при достаточно низком уровне напряжений. Во многих странах, особенно в США, были проведены многочисленные исследования, позволившие установить, что ответственными за внезапные хрупкие разрушения являются дефекты типа трещин. В то же время обследования показывают, что трещины могут длительное время существовать в конструкции, оставаясь стабильными и не проявляя тенденции к росту. В последние 25...30 лет сформировалось новое направление в вопросах прочности, получившее наименование «механика разрушения». В нем изучаются вопросы роста и устойчивости трещин в элементах конструкций в зависимости от уровня нагружения и других условий в процессе эксплуатации.

В 1920 г. была опубликована статья А.А. Гриффитса «Явление разрушения и течения в твердых телах», в которой был предложен энергетический подход к решению задачи об устойчивости трещины. Она стала основополагающей в механике разрушения, хотя практическое применение и развитие основных положений этой статьи началось лишь в 30-х годах прошлого века, в частности в работах И. Орлова, Г. Ирвина и др. Рассмотрим основные положения подхода Гриффитса.

Для продвижения острия трещины необходимо разрушить внутренние связи, на что должна быть затрачена работа  $dA$ . В пластине с фиксированными закреплениями эта работа может быть затрачена лишь силами упругости. Как следствие, потенциальная энергия деформации пластины уменьшится на  $dU$  и энергетическое условие продвижения трещины по Гриффитсу запишется в виде равенства

$$dA=dU. \quad (1.24)$$

Для пластины толщиной  $t=1$  Гриффитс представил работу  $dA$  в виде

$$dA = 2\gamma dl \cdot 1, \quad (1.25)$$

где  $\gamma$  – так называемая плотность энергии образования свободной поверхности тела. Для идеально хрупкого и линейно-упругого материала, рассматривавшегося Гриффитсом,  $\gamma$  – это константа материала, харак-

теризующая удельную работу разрушения межатомных связей при отрыве; величина  $2 dl \cdot 1$  – площадь добавочной свободной поверхности у двух берегов подросшей трещины.

Снятие напряжений  $\sigma_y$  на участке  $dl$  переводит трещину из состояния 1 в состояние 2. Поэтому выделение энергии деформации  $dU$  можно подсчитать как работу «упругих» напряжений  $\sigma_y$  на перемещениях у берегов трещины, что для плоской деформации дает

$$dU = 2 \int_0^{dl} \frac{1}{2} \nu \sigma_y dr = \frac{(1-\mu^2)K_I^2}{E} dl. \quad (1.26)$$

Условие (1.24) получает вид

$$2\gamma dl = \frac{(1-\mu^2)K_I^2}{E} dl,$$

откуда можно найти критическое значение коэффициента интенсивности напряжений:

$$K_{IC} = \sqrt{\frac{2\gamma E}{1-\mu^2}}. \quad (1.27)$$

Значение  $K_{IC}$ , при котором возможно малое продвижение трещины, поскольку высвобождаемая энергия деформации у конца трещины равна требуемой работе разрушения, называется критическим коэффициентом интенсивности напряжений.

В работах Орована и Ирвина было показано, что модель Гриффитса распространения трещины справедлива и при наличии малой зоны пластических деформаций. Это имеет место для толстых пластин при плоской деформации. Тогда константа  $\gamma$  должна включать работу на создание пластических деформаций  $\gamma = \gamma_{хр} + \gamma_{пл}$ , причем работа, затрачиваемая на хрупкое разрушение межатомных связей, значительно меньше работы пластической деформации:  $\gamma_{хр} \approx 10^{-2} \gamma_{пл}$ . В этом случае продвижение трещины называют квазихрупким разрушением (слово «квази» означает «как бы»).

Коэффициент  $K_{IC}$  выражает способность материала к сопротивлению росту трещин и иногда называется вязкостью разрушения. Чем больше

$K_{IC}$ , тем выше трещиностойкость материала. Величины  $K_{IC}$  определяются экспериментально в соответствии с ГОСТами (см. ГОСТ 21.4506–85).

Условие устойчивости трещины теперь можно записать в виде неравенства

$$K_I \leq K_{IC}, \quad (1.28)$$

где  $K_I$  – коэффициент интенсивности напряжений у острия данной трещины в рассматриваемом элементе конструкции. Для случая поперечной трещины в бесконечно широкой растянутой полосе

$$K_I = \sigma\sqrt{\pi l}.$$

Тогда

$$\sigma\sqrt{\pi l} \leq K_{IC},$$

откуда найдем связь между критическим напряжением  $\sigma_{кр}$  и критическим размером трещины  $l_{кр}$ :

$$\sigma_{кр} = \frac{K_{IC}}{\sqrt{\pi l_{кр}}}. \quad (1.29)$$

Формула (1.29) называется формулой Гриффитса.

Кривая  $\sigma_{кр}=f(l_{кр})$  называется кривой критического разрушения. Если при данной длине трещины  $l=l_0$  и напряжении  $\sigma=\sigma_0$  соответствующая точка  $A_0 (l_0, \sigma_0)$  лежит ниже упомянутой кривой, то рост трещины энергетически невозможен. Как только трещина подросла до  $l_0+\Delta l$  (например, за счет коррозии или за счет циклического во времени нагружения конструкции), а напряжения возросли до  $\sigma_0+\Delta\sigma$  и точка  $A_0$  перешла в положение  $A$ , так трещина становится неустойчивой. Малейшее её продвижение приводит к выделению энергии деформации  $dU$ , большей, чем требуется на работу разрушения, вследствие чего быстро формируется динамический процесс распространения трещины. Например, в стали скорость этого процесса равна скорости распространения волн деформаций (скорость звука)  $c=5600$  м/с, что создает эффект мгновенного распространения трещины и хрупкого разрушения конструкции. Выделение энергии деформации в короткий промежуток времени создает впечатление взрывоподобного разрушения.

При многоцикловом усталостном разрушении материал деформируется упруго. Разрушение начинается в местах концентрации напряжений как результат развития зародившейся трещины и носит хрупкий характер (без появления заметных пластических деформаций). Другим видом усталости является малоцикловая усталость, под которой понимается разрушение при повторных упругопластических деформациях, она отличается от многоциклового усталостного разрушения наличием макроскопической пластической деформации в зоне излома.

Строгой границы между многоцикловой и малоцикловой усталостями провести нельзя. В СНиП II-23-81 отмечается, что проверку стальных конструкций на малоцикловую прочность следует выполнять при числе циклов, меньшем  $10^5$ . Характер разрушения при малоцикловой усталости зависит от способности материала к накоплению пластических деформаций при циклическом деформировании.

Материалы называют циклически стабильными, если остаточная деформация не меняется во всех циклах.

Для циклически разупрочняющихся материалов характерны увеличение остаточных деформаций и рост суммарной пластической деформации. Если остаточная деформация уменьшается от цикла к циклу, а суммарная пластическая деформация стремится к некоторому предельному значению, то такой материал называется циклически упрочняющимся.

Расчет на малоцикловую прочность связан с большими трудностями, которые в значительной степени объясняются недостатком экспериментальных данных. В некоторых случаях единственным выходом из этого положения является проведение испытаний натуральных узлов или их моделей.

Одним из способов повышения сопротивления элементов конструкций малоцикловому усталостному разрушению является изготовление их из циклически упрочняющихся материалов.

## 1.4. Переход к системе с конечным числом степеней свободы

Числом степеней свободы механической системы называют число параметров, полностью определяющих положение всех точек системы. В динамике число степеней свободы напрямую зависит от количества сосредоточенных масс системы и от количества независимых перемещений этих масс (рис. 1.11).

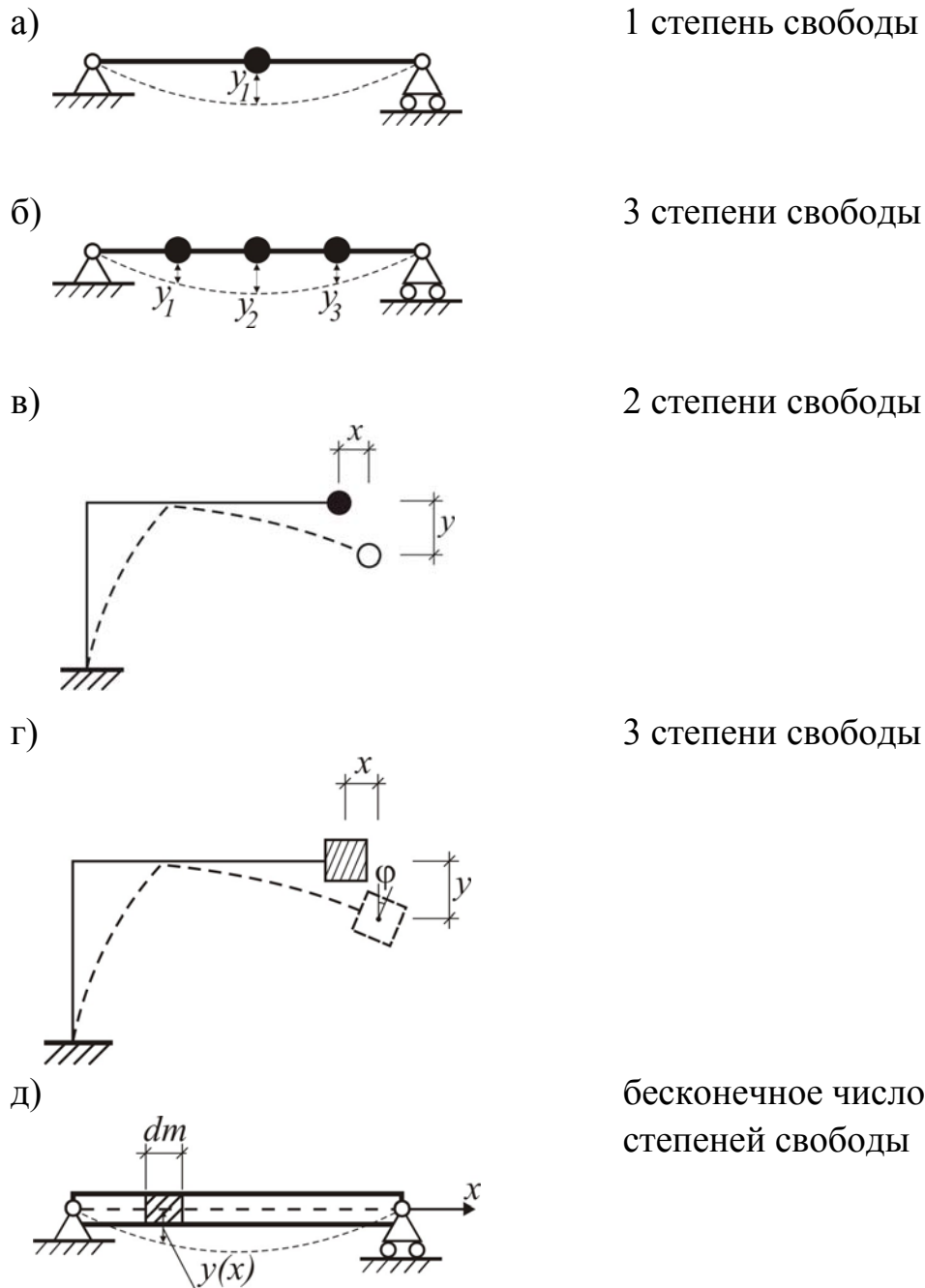


Рис. 1.11. Число степеней свободы механической системы



Системы с бесконечным числом степеней свободы можно приводить к системам с конечным числом степеней свободы. Например, балку с распределенной массой можно привести к системе с одной, тремя и т.д. степенями свободы (рис. 1.12).

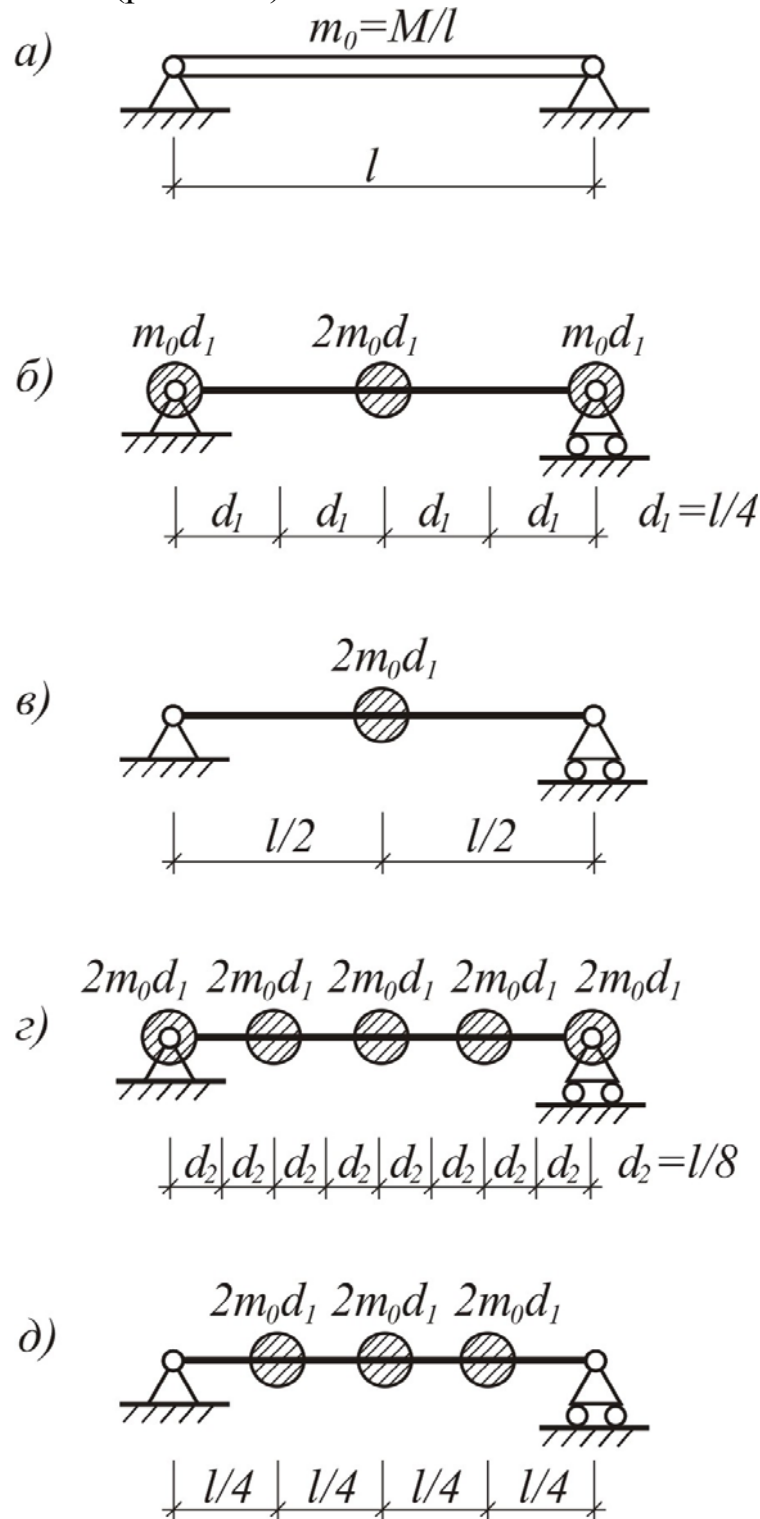


Рис. 1.12. Переход к системе с конечным числом степеней свободы

Вопрос о количестве масс решается в каждом случае отдельно. От этого в некоторой степени зависит точность динамического расчета.

В дальнейшем будем рассматривать системы с конечным числом степеней свободы.

## 1.5. Методы решения задач динамики

### 1.5.1. Метод конечных элементов

Широкое использование в расчетах строительной механики получил метод конечных элементов (МКЭ). Несмотря на сравнительно короткий срок «эксплуатации» этого метода, достаточно оснований рассматривать его в качестве одного из наиболее эффективных численных методов.

Широкое применение МКЭ в значительной мере объясняется наличием машинных программ, обладающих высокой степенью автоматизации трудоемких операций составления и решения систем алгебраических уравнений, автоматизации сеточного представления области, минимумом требований к исходной информации и оптимальной формой выдачи результатов.

Большим достоинством МКЭ является также его исключительная индифферентность в отношении характера закрепления рассматриваемой конструкции, закона изменения внешней нагрузки и т.д. Тогда как в «классической» строительной механике, где поведение рассматриваемого упругого тела в общем случае определяется некоторой совокупностью дифференциальных зависимостей, геометрия тела, характер граничных условий, закон изменения жесткостных свойств материала по объему тела и т.д. существенно влияют на выбор «подходящего метода» и на трудоемкость расчета в целом. В самом деле, с позиций классических методов элементарная задача изгиба свободно опертой прямоугольной пластины при введении точечных закреплений по опорному контуру переходит в разряд исключительно трудных задач. При использовании же МКЭ переход к другим граничным условиям по контуру пластины требует лишь соответствующего изменения исходных данных задачи. Учет температурного

влияния и упругопластической работы материала не вносит принципиальных затруднений при использовании МКЭ.

Важно также подчеркнуть, что для метода конечных элементов тип дифференциального уравнения не имеет особого значения. Он лишь определяет характер и содержание краевых условий.

При применении метода конечных элементов для решения задач динамики область рассчитываемой конструкции покрывается сеткой и в качестве обобщенных координат ( $q_i$ ) используются перемещения узлов ( $Z_i$ ) и производные от них. Уравнения Лагранжа с учетом рассеяния энергии при этом имеют вид

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{Z}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial Z_i} + \frac{\partial \Phi}{\partial \dot{Z}_i} + \frac{\partial U}{\partial Z_i} = R_i(t), \quad (1.30)$$

где  $i=1, 2, \dots, n$ ,  $n$  – число степеней свободы;  $T$  – кинетическая энергия системы;  $U$  – потенциальная энергия системы;  $\Phi$  – диссипативная функция Релея;  $R_i(t)$  – обобщенная сила;  $Z_i$  – перемещения узлов или производные от них.

Потенциальная энергия, кинетическая энергия и диссипативная функция Релея являются квадратичными формами от  $\vec{Z}$  и  $\dot{\vec{Z}}$ :

$$U = \frac{1}{2} \vec{Z}^T R \vec{Z}; \quad (1.31)$$

$$T = \frac{1}{2} \dot{\vec{Z}}^T M \dot{\vec{Z}}; \quad (1.32)$$

$$\Phi = \frac{1}{2} \dot{\vec{Z}}^T C \dot{\vec{Z}}, \quad (1.33)$$

где  $R$  – матрица реакций;  $M$  – матрица масс;  $C$  – матрица демпфирования.

Учитывая, что

$$\frac{\partial U}{\partial \vec{Z}} = R \vec{Z}, \quad (1.34)$$

получаем:

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{\vec{Z}}} = M\dot{\vec{Z}}; \quad (1.35)$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \dot{\vec{Z}}} = C\dot{\vec{Z}}. \quad (1.36)$$

Подставив (1.34), (1.35), (1.36) в (1.30) и учитывая, что  $\frac{\partial T}{\partial Z_i} = 0$ ,

получим:

$$M\ddot{\vec{Z}} + C\dot{\vec{Z}} + R\vec{Z} = \vec{R}(t). \quad (1.37)$$

Уравнения (1.37) есть уравнения равновесия и могут пониматься как уравнения динамического равновесия в момент времени  $t$ . Каждое уравнение системы (1.37) соответствует динамической степени свободы

$$\vec{F}_1(t) + \vec{F}_d(t) + \vec{F}_E(t) = \vec{R}(t), \quad (1.38)$$

где  $\vec{F}_1(t) = M\ddot{\vec{Z}}$  – вектор сил инерции;  $\vec{F}_d(t) = C\dot{\vec{Z}}$  – вектор сил демпфирования;  $\vec{F}_E(t) = R\vec{Z}$  – вектор сил упругости;  $\vec{R}(t)$  – вектор внешних сил.

При этом все векторы зависят в общем случае от времени.

Трудоемкость решения системы дифференциальных уравнений движения (1.37) зависит от выбора базиса (координатных функций). Одним из наиболее распространенных методов решения в случае, когда матрица демпфирования  $C$  пропорциональна матрице масс, является метод разложения по собственным формам колебаний. По существу, это есть построение такого базиса, в котором все матрицы являются диагональными.

Метод разложения по собственным формам колебаний является одним из основных методов решения динамических задач. При его применении необходимо уметь определять частоты и формы собственных колебаний. При использовании МКЭ в перемещениях матрицей системы алгебраических уравнений является матрица жесткости (реакций). При определении частот и форм колебаний часто

рационально использовать матрицу, обратную к матрице жесткости, – матрицу податливости (перемещений). Метод разложения по собственным частотам широко применяется для исследования длительных динамических процессов, обязательным условием для него является пропорциональность матрицы масс  $M$  и матрицы демпфирования  $C$ , т.е. каждой частоте соответствует свой коэффициент демпфирования.

## 1.5.2. Метод сил

### 1.5.2.1. Уравнение движения (динамического равновесия) для системы с одной степенью свободы

Составим уравнения динамического равновесия массы на основе принципа Даламбера. Силу инерции, действующую на массу, обозначим

$$J = m\ddot{y} \quad (1.39)$$

Составим выражение, определяющее перемещение сосредоточенной массы на балке, изображенной на рис. 1.13:

$$y = \Delta_{1p}(t) - \delta_{11}J, \quad (1.40)$$

где  $\Delta_{1p}$  – перемещение точки 1 по направлению рассматриваемого перемещения от силы  $P(t)$ ;  $\delta_{11}$  – единичное перемещение точки 1.

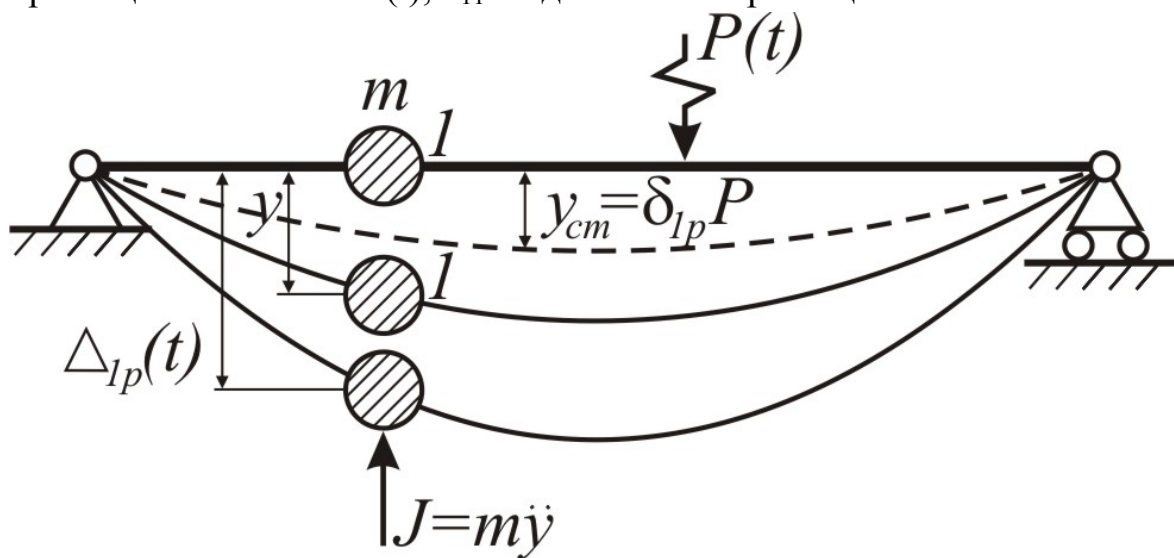


Рис. 1.13. Балка с сосредоточенной массой

Подставив (1.39) в (1.40), получим:

$$\delta_{11} m \ddot{y} + y = \Delta_{1p}(t). \quad (1.41)$$

Введем обозначение

$$\omega^2 = \frac{1}{m \delta_{11}}. \quad (1.42)$$

Получим:

$$\ddot{y} + \omega^2 y = \omega^2 \Delta_{1p}(t) = \omega^2 \delta_{1p} P(t). \quad (1.43)$$

При правой части, равной нулю, имеем случай свободных колебаний с решением

$$y = C \sin(\omega t + \beta). \quad (1.44)$$

### 1.5.2.2. Уравнение движения (динамического равновесия) для системы с конечным числом степеней свободы

На рис. 1.14 показана система с  $n$  степенями свободы, т.к. в данном случае каждая точечная масса здесь обладает одной степенью свободы.

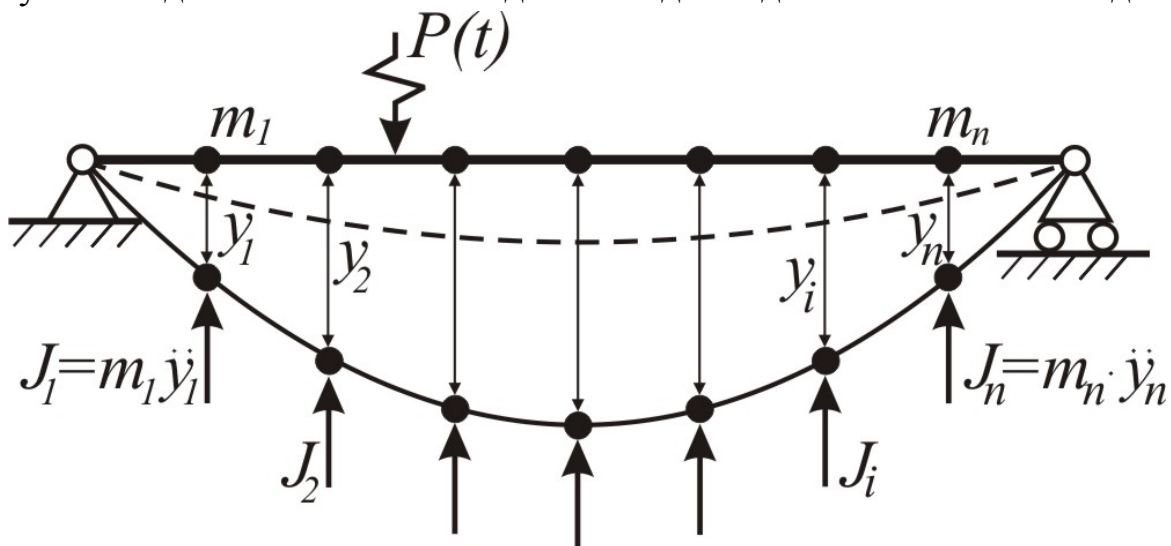


Рис. 1.14. Система с  $n$  степенями свободы

Согласно принципу суперпозиции перемещение  $i$ -й массы можно определить следующим образом:

$$y_i = -\delta_{i1}J_1 - \delta_{i2}J_2 - \dots - \delta_{ii}J_i - \dots - \delta_{in}J_n + \delta_{ip} \cdot P(t), \quad (1.45)$$

где  $i=1, 2, \dots, n$ ;  $\delta_{ij}$  – единичное перемещение  $i$ -й массы по своему направлению от  $j$ -й силы инерции, равной единице;  $\delta_{ip}$  – единичное перемещение от внешней нагрузки, равной единице.

Данное уравнение можно переписать в виде:

$$\delta_{i1}J_1 + \delta_{i2}J_2 + \dots + \delta_{ii}J_i + \dots + \delta_{in}J_n + y_i - \delta_{ip} \cdot P(t) = 0. \quad (1.46)$$

Эти уравнения можно рассматривать как уравнения метода сил с неизвестными силами инерции.

Как известно,

$$J_i = m_i \ddot{y}_i, \quad (1.47)$$

$$\Delta_{ip}(t) = \delta_{ip} \cdot P(t). \quad (1.48)$$

Подставив (1.47) и (1.48) в (1.46), получим::

$$\delta_{i1}m_1\ddot{y}_1 + \delta_{i2}m_2\ddot{y}_2 + \dots + \delta_{ii}m_i\ddot{y}_i + \dots + \delta_{in}m_n\ddot{y}_n + y_i - \Delta_{ip}(t) = 0. \quad (1.49)$$

Это и есть система дифференциальных уравнений динамического равновесия механической системы с  $n$  степенями свободы.

Если возмущающая нагрузка действует по гармоническому закону и частота действующей нагрузки  $\theta$  совпадает с любой частотой свободных колебаний  $\omega_i$ , то в этом случае имеет место резонанс.

В системе с  $n$  степенями свободы при вибрационной нагрузке в общем случае может быть  $n$  резонансов, когда частота нагрузки  $\theta$  (при  $D_i \neq 0$ ) будет совпадать с частотой собственных колебаний  $\omega_i$ . В тех случаях, когда  $\theta \neq \omega_i$ , формула (1.47) определяет инерционную силу любой массы  $m_i$  в любой момент времени в конечном виде.

Все инерционные силы будут следовать закону нагрузки, т.е.  $\sin\theta t$ .

Перемещения  $y_i(t)$  определяются по формуле

$$y_i(t) = \frac{J_i^*}{m_i \theta^2}. \quad (1.50)$$

Матричная форма уравнения (1.49)

$$(MD - \lambda E) \cdot J^* + M \Delta_p = 0, \quad (1.51)$$

где

$$J^* = \left\{ J_1^*, J_2^*, \dots, J_n^* \right\} \quad (1.52)$$

– матрица-столбец искомых инерционных сил;

$$\Delta_p = \left\{ \Delta_{1p}, \Delta_{2p}, \dots, \Delta_{np} \right\} \sin \theta t \quad (1.53)$$

– матрица-столбец свободных членов;

$$D = \begin{vmatrix} \delta_{11} & \delta_{12} & \dots & \delta_{1n} \\ \delta_{21} & \delta_{22} & \dots & \delta_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \delta_{n1} & \delta_{n2} & \dots & \delta_{nn} \end{vmatrix} \quad (1.54)$$

– матрица коэффициентов  $\delta_{km}$ ;  $M$  – диагональная матрица масс.

Подставляя (1.50) в уравнение (1.49), будем иметь

$$\delta_{k1} m_1 \theta^2 y_1 + \delta_{k2} m_2 \theta^2 y_2 + \dots + \delta_{kn} m_n \theta^2 y_n - y_k + \Delta_{kp} \sin \theta t = 0. \quad (1.55)$$

В развернутом виде получаем:

$$\left. \begin{aligned} (m_1 \delta_{11} \theta^2 - 1) y_1 + m_2 \delta_{12} \theta^2 y_2 + \dots + m_n \delta_{1n} \theta^2 y_n + \Delta_{1p} \sin \theta t &= 0; \\ m_1 \delta_{21} \theta^2 y_1 + (m_2 \delta_{22} \theta^2 - 1) y_2 + \dots + m_n \delta_{2n} \theta^2 y_n + \Delta_{2p} \sin \theta t &= 0; \\ \dots & \dots \\ m_1 \delta_{n1} \theta^2 y_1 + m_2 \delta_{n2} \theta^2 y_2 + \dots + (m_n \delta_{nn} \theta^2 - 1) y_n + \Delta_{np} \sin \theta t &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (1.56)$$



Из (1.56) находим

$$y_i = D_i / D, \quad (1.57)$$

где

$$D = \begin{vmatrix} (m_1 \delta_{11} \theta^2 - 1) & m_2 \delta_{12} \theta^2 & \dots & m_n \delta_{1n} \theta^2 \\ m_1 \delta_{21} \theta^2 & (m_2 \delta_{22} \theta^2 - 1) & \dots & m_n \delta_{2n} \theta^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ m_1 \delta_{n1} \theta^2 & m_2 \delta_{n2} \theta^2 & \dots & (m_n \delta_{nn} \theta^2 - 1) \end{vmatrix}; \quad (1.58)$$

$$D_i = - \begin{vmatrix} (m_1 \delta_{11} \theta^2 - 1) & m_2 \delta_{12} \theta^2 & \vdots \Delta_{1p} \sin \theta t \vdots & m_n \delta_{1n} \theta^2 \\ m_1 \delta_{21} \theta^2 & (m_2 \delta_{22} \theta^2 - 1) & \vdots \Delta_{2p} \sin \theta t \vdots & m_n \delta_{2n} \theta^2 \\ \dots & \dots & \vdots \dots \vdots & \dots \\ m_1 \delta_{n1} \theta^2 & m_2 \delta_{n2} \theta^2 & \vdots \Delta_{np} \sin \theta t \vdots & (m_n \delta_{nn} \theta^2 - 1) \end{vmatrix}. \quad (1.59)$$

Перемещения будут также изменяться по закону  $\sin \theta t$ .

И в этом случае при совпадении частоты действующей нагрузки  $\theta$  с любой частотой собственных колебаний  $\omega_i$ , когда  $D_i$  по (1.59) отлично от нуля, будет резонанс.

Уравнение (1.56) в матричной форме

$$(DM - \lambda E) \cdot Y + \lambda \Delta_p = 0, \quad (1.60)$$

где

$$Y = \{Y_1, Y_2, \dots, Y_n\}$$

– матрица-столбец искомых перемещений;

$$\Delta_p = \{ \Delta_{1p}, \Delta_{2p}, \dots, \Delta_{np} \} \sin \theta t$$

– матрица-столбец свободных членов;

$$\lambda = 1/\theta^2.$$

Определитель уравнений (1.60)

$$D = |DM - \lambda E|. \quad (1.61)$$

Однако, если вибрационная нагрузка соответствует какой-либо главной форме собственных колебаний, то совпадение частоты действующей нагрузки с частотой собственных колебаний иной главной формы теоретически не вызывает резонанса.

Иными словами, резонанс теоретически может возникнуть при совпадении частоты действующей нагрузки  $\theta$  только с той частотой собственных колебаний, по главной форме которой имеется составляющая заданной нагрузки, разложенной по главным формам.

Этот вывод справедлив при любой частоте действующей нагрузки.

В то же время, учитывая всегда существующие несовершенства системы и нагрузки, практически следует считать, что резонанс наступает при совпадении частоты всякой действующей нагрузки с любой частотой собственных колебаний.

Канонические уравнения метода одинаково применимы к любой системе с  $n$  степенями свободы, независимо от того, будет ли система статически определима или статически неопределима. Разница состоит лишь в определении перемещений  $\delta_{km}$ , которые в статически определимых системах обычно находятся проще, чем в статически неопределимых.

Определение инерционных сил из канонических уравнений позволяет вычислять внутренние силы в системе, общее выражение которых можно записать в такой же форме, как для статически неопределимых систем:

$$S = \bar{S}_1 J_1^* + \bar{S}_2 J_2^* + \dots + \bar{S}_n J_n^* + S_p, \quad (1.62)$$

где  $\bar{S}_i$  – усилие от  $J_i^* = 1$ , а  $S_p$  – усилие от нагрузки.

Поскольку чаще всего расчет в первую очередь сводится к определению внутренних сил, то форма канонических уравнений (1.46) более удобна.

### 1.5.3. Метод перемещений

Канонические уравнения метода перемещений

$$\left. \begin{aligned} r_{11}y_1(t) + r_{12}y_2(t) + \dots + r_{1n}y_n(t) + m_1\ddot{y}_1(t) + R_{1p} \sin \theta t &= 0; \\ r_{21}y_1(t) + r_{22}y_2(t) + \dots + r_{2n}y_n(t) + m_2\ddot{y}_2(t) + R_{2p} \sin \theta t &= 0; \\ \dots & \\ r_{n1}y_1(t) + r_{n2}y_2(t) + \dots + r_{nn}y_n(t) + m_n\ddot{y}_n(t) + R_{np} \sin \theta t &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (1.63)$$

Частные решения будем искать в той же форме  $y_i(t) = C_i \sin \theta t$ , в результате чего получим уравнения

$$\left. \begin{aligned} (r_{11} - m_1\theta^2)y_1(t) + r_{12}y_2(t) + \dots + r_{1n}y_n(t) + R_{1p} \sin \theta t &= 0; \\ r_{21}y_1(t) + (r_{22} - m_2\theta^2)y_2(t) + \dots + r_{2n}y_n(t) + R_{2p} \sin \theta t &= 0; \\ \dots & \\ r_{n1}y_1(t) + r_{n2}y_2(t) + \dots + (r_{nn} - m_n\theta^2)y_n(t) + R_{np} \sin \theta t &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (1.64)$$

Отсюда

$$y_i(t) = D_i / D, \quad (1.65)$$

где

$$D = \begin{vmatrix} (r_{11} - m_1\theta^2) & r_{12} & \dots & r_{1n} \\ r_{21} & (r_{22} - m_2\theta^2) & \dots & r_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ r_{n1} & r_{n2} & \dots & (r_{nn} - m_n\theta^2) \end{vmatrix}; \quad (1.66)$$

$i$ -й столбец

$$D_i = - \begin{vmatrix} (r_{11} - m_1\theta^2) & r_{12} & \vdots R_{1p} \sin \theta t \vdots & r_{1n} \\ r_{21} & (r_{22} - m_2\theta^2) & \vdots R_{2p} \sin \theta t \vdots & r_{2n} \\ \dots & \dots & \vdots \dots \vdots & \dots \\ r_{n1} & r_{n2} & \vdots R_{np} \sin \theta t \vdots & (r_{nn} - m_n\theta^2) \end{vmatrix}. \quad (1.67)$$

При  $\theta = \omega_i$ ,  $D \neq 0$  и  $y_i = \infty$  имеет место резонанс. Инерционные силы определяются из (1.50), а внутренние – по (1.62).

Матричная форма уравнения (1.64)

$$(R - \theta^2 M)Y + R_p = 0, \quad (1.68)$$

где

$$R_p = \left\{ R_{1p}, R_{2p}, \dots, R_{np} \right\} \sin \theta t \quad (1.69)$$

– матрица грузовых реакций.

Определитель уравнения (1.64)

$$D = |R - \theta^2 M|.$$

#### 1.5.4. Шаговое интегрирование уравнений колебаний

Как отмечалось Р. Клафом и Дж. Пензиеном [20], самая эффективная методика неупругого анализа – шаговое интегрирование уравнений колебаний. При таком подходе реакция сооружения вычисляется для последовательных интервалов времени  $\Delta t$ , которые выбираются исходя из удобства вычислительного процесса. Процесс вычислений является шаговым и может продолжаться от начального момента приложения нагрузки до любого момента времени.

Шаговое решение необходимо прежде всего потому, что физические (геометрические) характеристики сооружений в процессе динамической работы не могут считаться постоянными. Вследствие физической нелинейности жесткость сечений изменяется с течением времени. Изменяется и геометрия сечений, и сама конструкция.

Особенно эффективен метод шагового интегрирования при расчетах сложных систем для случаев кратковременного импульсного нагружения, когда одновременно возбуждается много форм колебаний, но необходимо определить параметры реакции сооружения только для небольшого промежутка времени. При этом отметим, что формы свободных колебаний позволяют разделить уравнение колебаний только

для интервалов времени, в течение которых матрица жесткостей остается неизменной для рассматриваемых состояний системы.

Развитие вычислительной техники привело к широкому использованию для решения задач динамики методов численного интегрирования уравнений движения. Здесь выделяются два направления численного интегрирования:

- методы Рунге – Кутта;
- прямые методы решения задач динамики.

#### 1.5.4.1. Методы Рунге – Кутта

Дифференциальные уравнения движения (уравнения динамического равновесия), имеющие второй порядок:

$$M\ddot{\mathbf{u}} + c\dot{\mathbf{u}} + r(\mathbf{u}) \cdot \mathbf{u} = \mathbf{p} \quad (1.70)$$

преобразуются в уравнения первого порядка:

$$\left. \begin{aligned} \dot{\mathbf{u}}_1 &= \mathbf{u}_2; \\ M\dot{\mathbf{u}}_2 + c\mathbf{u}_2 + r(\mathbf{u}_1) \cdot \mathbf{u}_1 &= \mathbf{p} \end{aligned} \right\} \quad (1.71)$$

на основе соотношений:

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{u} &= \mathbf{u}_1; \\ \dot{\mathbf{u}}_1 &= \mathbf{u}_2; \\ \ddot{\mathbf{u}} &= \dot{\mathbf{u}}_2. \end{aligned} \right\} \quad (1.72)$$

Метод Рунге – Кутта является методом численного решения дифференциальных уравнений первого порядка:

$$\dot{u} = F(t, u) \quad (1.73)$$

с начальными условиями

$$t = 0, \quad u(0) = u_0. \quad (1.74)$$

Суть метода можно проиллюстрировать графически (рис. 1.15).

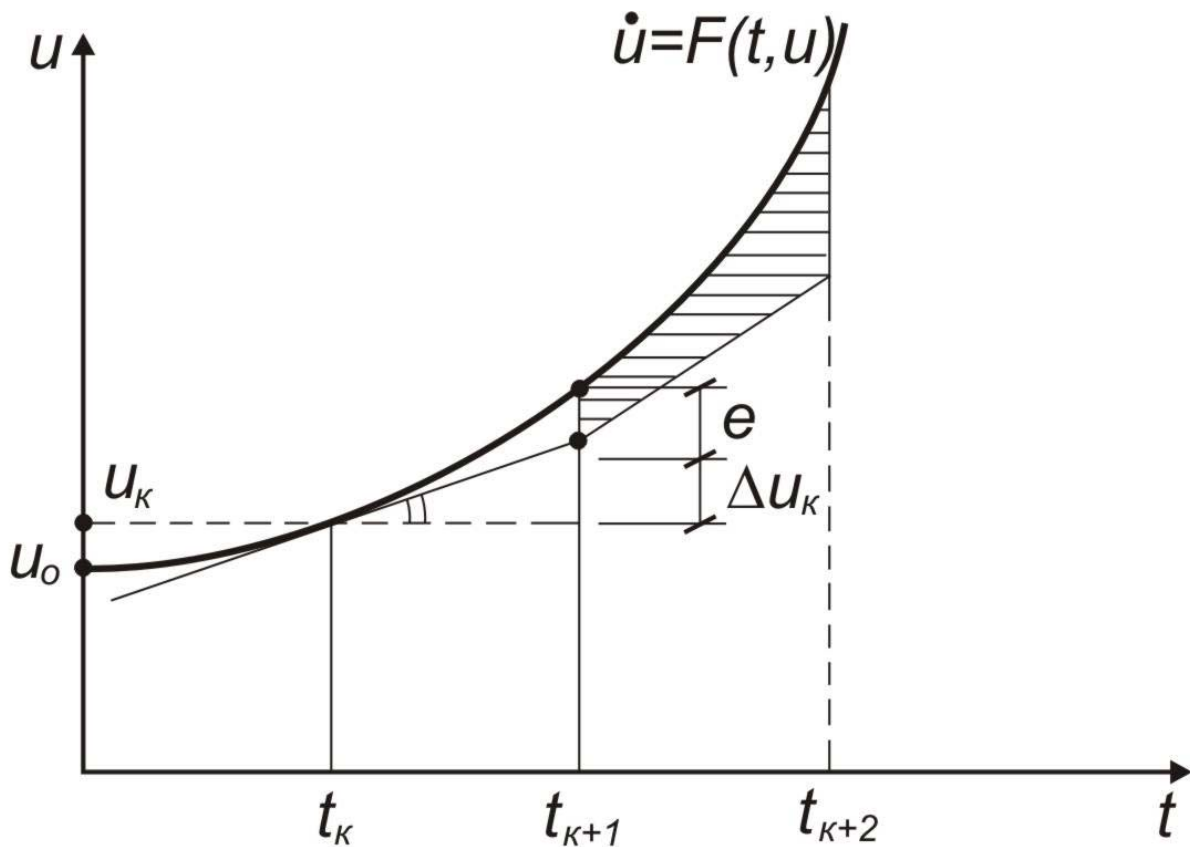


Рис. 1.15. Графическая иллюстрация метода Рунге – Кутты

Из точки  $(t_k, u_k)$  в соседнюю точку  $(t_k + \Delta t, u_k + \Delta u_k)$  можно перейти с помощью соотношения

$$u_{k+1} \approx u_k + \Delta u_k, \quad (1.75)$$

где

$$\Delta u_k = \Delta t \cdot \dot{u}_k. \quad (1.76)$$

Недостаток метода очевиден. Он заключается в погрешности  $e$ , которая накапливается с каждым шагом. Для уменьшения этой

погрешности используют так называемый метод Рунге – Кутты четвертого порядка, согласно которому переход от  $t_k$  к  $t_{k+1}$  выполняется по формулам [21]:

$$\left. \begin{aligned} \bar{u}_{k+1} &= \bar{u}_k + \Delta t \cdot \bar{f} \\ \bar{f} &= \frac{1}{6} \cdot (\bar{f}_1 + 2\bar{f}_2 + 2\bar{f}_3 + \bar{f}_4), \end{aligned} \right\} \quad (1.77)$$

где

$$\begin{aligned} \bar{f}_1 &= \bar{F}(t_k; u_k); \\ \bar{f}_2 &= \bar{F}(t_k + 0,5\Delta t; u_k + 0,5\Delta t \cdot f_1); \\ \bar{f}_3 &= \bar{F}(t_k + 0,5\Delta t; u_k + 0,5\Delta t \cdot f_2); \\ \bar{f}_4 &= \bar{F}(t_k + \Delta t; u_k + \Delta t \cdot f_3). \end{aligned} \quad (1.78)$$

При этом требуется четырехкратное вычисление функции  $F$ .

Геометрически формула (1.77) выражает переход от точки  $k$  к точке  $k+1$  с помощью секущей, проведенной с некоторой крутизной  $f$  (тангенсом угла наклона), обеспечивающей достаточно малую погрешность  $e_4 \ll e$  (рис. 1.16, а). При этом крутизна  $f$  определяется как средневзвешенная величина из четырех величин –  $f_1, f_2, f_3, f_4$ , последовательно вычисляемых с помощью правой части дифференциального уравнения в четырех точках (рис. 1.16, б). При этом общая погрешность вычислений, естественно, зависит от величины шага  $\Delta t$ .

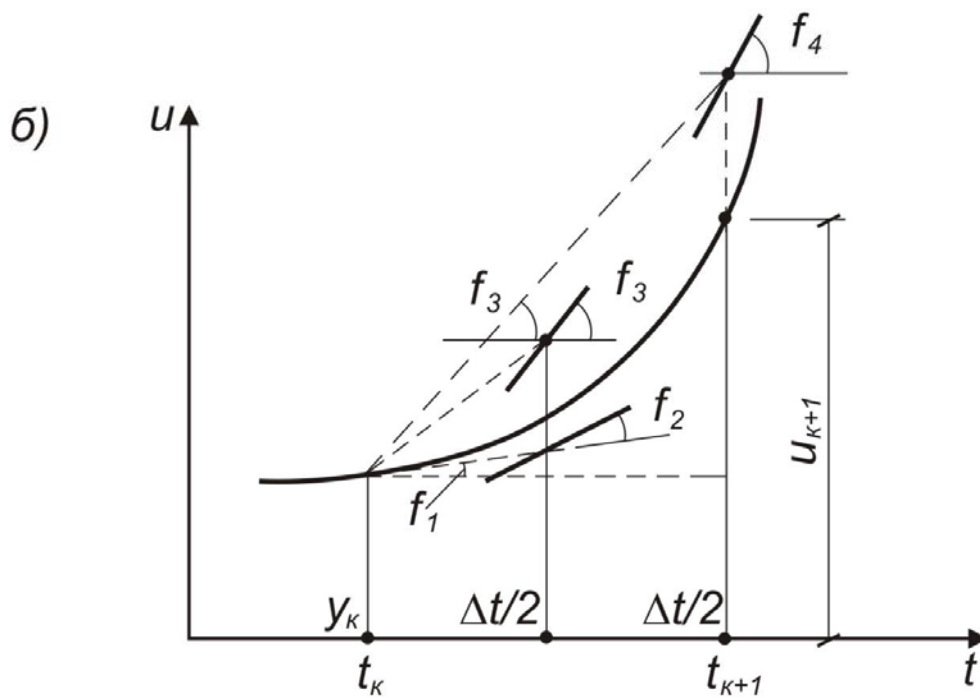
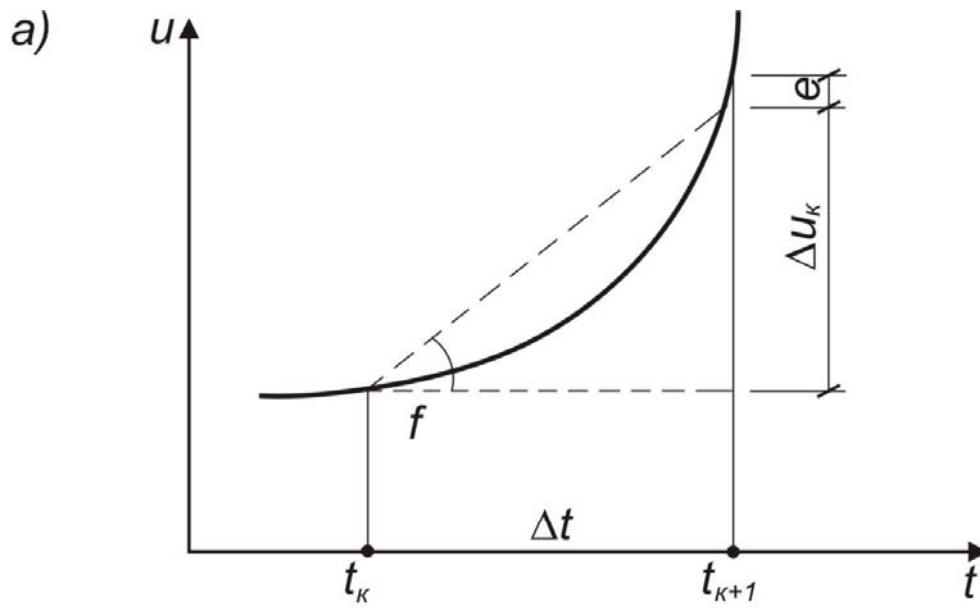


Рис. 1.16. К иллюстрации метода Рунге – Кутты четвертого порядка:  
 а – погрешность  $e_k$ ; б – определение средневзвешенной величины  $f_1 \div f_4$



#### 1.5.4.2. Прямые методы решения задач динамики

Во временной области задача динамики сводится к решению системы обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$M\ddot{\mathbf{u}} + c\dot{\mathbf{u}} + r(\mathbf{u}) \cdot \mathbf{u} = \mathbf{p} \quad (1.79)$$

при начальных условиях

$$\mathbf{u}(t_0) = \mathbf{u}_0; \quad \dot{\mathbf{u}}(t_0) = \dot{\mathbf{u}}_0. \quad (1.80)$$

Для решения задачи динамики созданы специальные, так называемые прямые методы, так как при их использовании не производится никаких преобразований уравнений. Решение с помощью этих методов ведется по шагам, поэтому они носят также название шаговых методов.

В отличие от статической задачи уравнения динамического равновесия решаются многократно для всех дискретных точек, на которые разбит временной интервал. При применении прямых методов шаг по времени принимается единым для всех дифференциальных уравнений и должен составлять долю от наименьшего периода.

Наиболее известными и хорошо проверенными шаговыми методами являются:

- метод центральных разностей;
- метод постоянного ускорения (Ньюмарка);
- метод линейного ускорения и его модификация (метод Вилсона).

Рассмотрим особенности этих методов.

#### Метод центральных разностей [22, 18]

При использовании данного метода предполагается, что перемещения  $\mathbf{u}(\tau)$  изменяются по квадратной параболе, проходящей через точки  $\mathbf{u}(t - \Delta t)$ ,  $\mathbf{u}(t)$  и  $\mathbf{u}(t + \Delta t)$  (рис. 1.17).

Построим параболическую функцию перемещений, проходящую через указанные точки, используя полиномы Лагранжа. Она описывается выражением

$$\mathbf{u}(t + \tau) = \mathbf{u}(t - \Delta t) \frac{\tau^2 - \Delta t \cdot \tau}{2(\Delta t)^2} + \mathbf{u}(t) \frac{-\tau^2 + \Delta t^2}{(\Delta t)^2} + \mathbf{u}(t + \Delta t) \frac{\tau^2 + \Delta t \cdot \tau}{2(\Delta t)^2}. \quad (1.81)$$

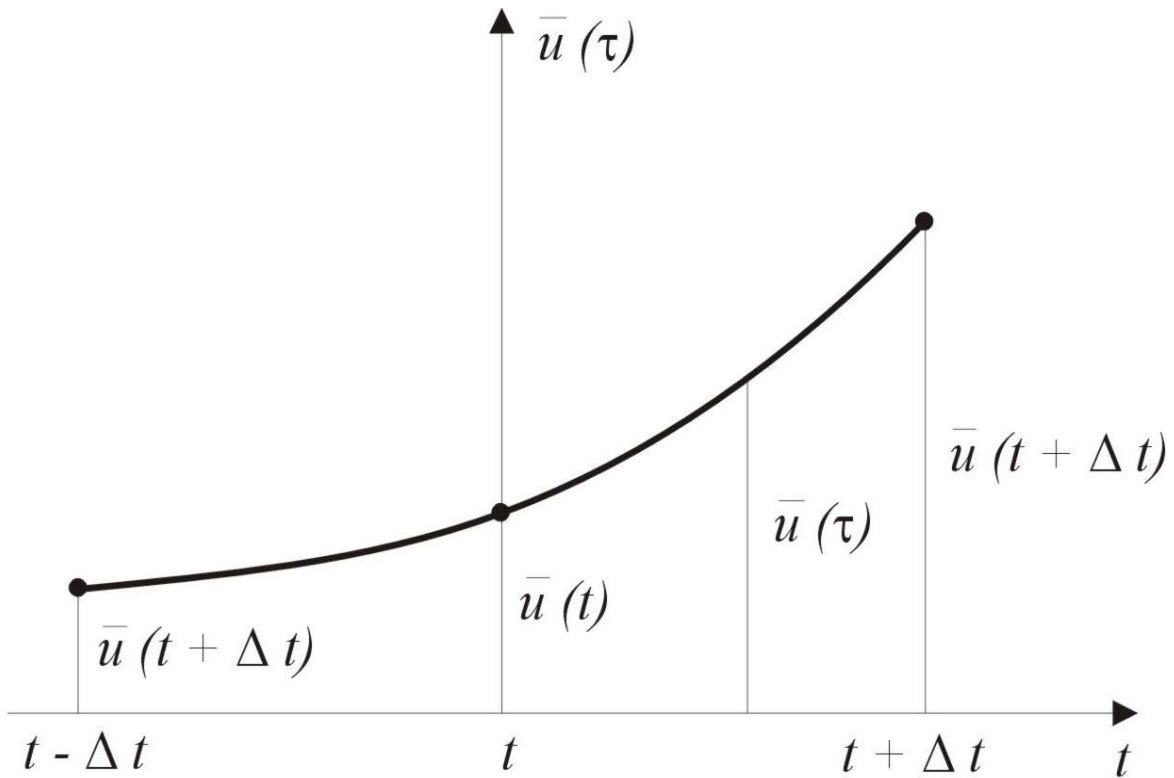


Рис. 1.17. К иллюстрации метода центральных разностей

Дифференцируя (1.81) по времени  $\tau$ , найдем выражение для скоростей и ускорений:

$$\dot{\mathbf{u}}(t + \tau) = \mathbf{u}(t - \Delta t) \frac{2\tau - \Delta t}{2(\Delta t)^2} - \mathbf{u}(t) \frac{2\tau}{(\Delta t)^2} + \mathbf{u}(t + \Delta t) \frac{2\tau + \Delta t}{2(\Delta t)^2} \quad (1.82)$$

$$\ddot{\mathbf{u}}(t + \tau) = \frac{\mathbf{u}(t - \Delta t) - 2\mathbf{u}(t) + \mathbf{u}(t + \Delta t)}{(\Delta t)^2} = \text{const.} \quad (1.83)$$

При  $\tau=0$  получим:

$$\dot{\mathbf{u}}(t) = \frac{1}{2 \cdot \Delta t} [\mathbf{u}(t + \Delta t) - \mathbf{u}(t - \Delta t)] \quad (1.84)$$

$$\ddot{\mathbf{u}}(t) = \frac{1}{(\Delta t)^2} [\mathbf{u}(t - \Delta t) - 2\mathbf{u}(t) + \mathbf{u}(t + \Delta t)] \quad (1.85)$$

Последнее соотношение представляет собой центрально-разностное выражение для второй производной (отсюда следует название метода).

При использовании метода предполагается, что  $\mathbf{u}(t - \Delta t)$  и  $\mathbf{u}(t)$  известны. Для определения  $\mathbf{u}(t + \Delta t)$  выражения для  $\dot{\mathbf{u}}(t)$  и  $\ddot{\mathbf{u}}(t)$  подставляются в исходное уравнение движения для момента времени  $t$ . Из полученного уравнения определяется  $\mathbf{u}(t + \Delta t)$ .

Для запуска метода необходимо знать  $\mathbf{u}(0 - \Delta t)$ . Подставив начальные условия  $\mathbf{u}_0$  и  $\dot{\mathbf{u}}_0$  в исходное дифференциальное уравнение движения, получим:

$$\ddot{\mathbf{u}}_0 = M^{-1} [\mathbf{p}_0 - c\dot{\mathbf{u}}_0 - r(\mathbf{u}) \cdot \mathbf{u}_0]. \quad (1.86)$$

Таким образом, в точке  $t=0$  известны функции перемещений  $\mathbf{u}_0$  и их производные  $\dot{\mathbf{u}}_0$  и  $\ddot{\mathbf{u}}_0$ , при этом функция изменяется во времени по квадратной параболе.

По формуле Тейлора для начального момента времени  $t=0$  получим:

$$\mathbf{u}(\tau) = \mathbf{u}_0 + \dot{\mathbf{u}}_0\tau + \ddot{\mathbf{u}}_0(\tau^2 / 2). \quad (1.87)$$

Откуда для  $\tau = 0 - \Delta t$  имеем:

$$\mathbf{u}(t - \Delta t) = \mathbf{u}_0 - \dot{\mathbf{u}}_0 \cdot \Delta t + \ddot{\mathbf{u}}_0(\Delta t^2 / 2). \quad (1.88)$$

Дальнейший расчет производится только в разностном виде, с определением на каждом шаге  $\mathbf{u}(t + \Delta t)$ . Значения  $\mathbf{u}(t - \Delta t)$  и  $\mathbf{u}(t)$  принимаются с предыдущего шага.

Метод центральных разностей является устойчивым при  $k \cdot \Delta t \leq 2$  или  $\sqrt{\frac{c}{m}} \cdot \Delta t \leq 2$ .

### **Метод постоянного ускорения (метод Ньюмарка) [18]**

В данном методе предполагается, что ускорение в пределах шага  $\Delta t$  остается постоянным (рис. 1.18), т.е.

$$\ddot{\mathbf{u}}(t + \tau) = [\ddot{\mathbf{u}}(t + \Delta t) + \ddot{\mathbf{u}}(t)] / 2 = \text{const} \quad (1.89)$$

Интегрируя выражение (1.89), получим:

$$\dot{\mathbf{u}}(t + \tau) = \dot{\mathbf{u}}(t) + \left\{ \left[ \ddot{\mathbf{u}}(t + \Delta t) + \ddot{\mathbf{u}}(t) \right] / 2 \right\} \tau, \quad (1.90)$$

$$\mathbf{u}(t + \tau) = \mathbf{u}(t) + \dot{\mathbf{u}}(t) \cdot \tau + \left\{ \left[ \ddot{\mathbf{u}}(t + \Delta t) + \ddot{\mathbf{u}}(t) \right] / 4 \right\} \tau^2. \quad (1.91)$$

Графики функций скорости и перемещения имеют линейный вид и вид квадратной параболы, соответственно (рис. 1.18). Используя полученные соотношения, найдем скорость и ускорение в конце промежутка времени  $\Delta t$ :

$$\dot{\mathbf{u}}(t + \Delta t) = \dot{\mathbf{u}}(t) + \left\{ \left[ \ddot{\mathbf{u}}(t + \Delta t) + \ddot{\mathbf{u}}(t) \right] / 2 \right\} \Delta t, \quad (1.92)$$

$$\mathbf{u}(t + \Delta t) = \mathbf{u}(t) + \dot{\mathbf{u}}(t) \cdot \Delta t + \left\{ \left[ \ddot{\mathbf{u}}(t + \Delta t) + \ddot{\mathbf{u}}(t) \right] / 4 \right\} \Delta t^2. \quad (1.93)$$

Выражая из последнего соотношения

$$\ddot{\mathbf{u}}(t + \Delta t) = \left\{ \left[ 4\mathbf{u}(t + \Delta t) - 4\mathbf{u}(t) - 4\dot{\mathbf{u}}(t) \cdot \Delta t \right] / \Delta t^2 \right\} - \ddot{\mathbf{u}}(t) \quad (1.94)$$

и подставив (1.94) в выражение для скорости (1.92), получим:

$$\dot{\mathbf{u}}(t + \Delta t) = \left[ 2\mathbf{u}(t + \Delta t) - 2\mathbf{u}(t) - \dot{\mathbf{u}}(t) \cdot \Delta t \right] / \Delta t. \quad (1.95)$$

Два последних соотношения и уравнения динамического равновесия

$$M\ddot{\mathbf{u}}(t + \Delta t) + c\dot{\mathbf{u}}(t + \Delta t) + r(\mathbf{u}) \cdot \mathbf{u}(t + \Delta t) = \mathbf{p}(t + \Delta t), \quad (1.96)$$

составленные для момента времени  $t + \Delta t$ , образуют систему трех матричных уравнений относительно трех групп неизвестных:  $\ddot{\mathbf{u}}(t + \Delta t)$ ,  $\dot{\mathbf{u}}(t + \Delta t)$  и  $\mathbf{u}(t + \Delta t)$ .

Отметим, что величины  $\mathbf{u}(t)$ ,  $\dot{\mathbf{u}}(t)$  и  $\ddot{\mathbf{u}}(t)$  известны с предыдущего шага вычислений. Стартовая процедура метода заключается в определении ускорений  $\ddot{\mathbf{u}}_0$  по известным перемещениям  $\mathbf{u}_0$  и скоростям  $\dot{\mathbf{u}}_0$  для момента времени  $t_0=0$  из уравнения:

$$M\ddot{\mathbf{u}}_0 + c\dot{\mathbf{u}}_0 + r(\mathbf{u}_0) \cdot \mathbf{u}_0 = \mathbf{p}_0. \quad (1.97)$$

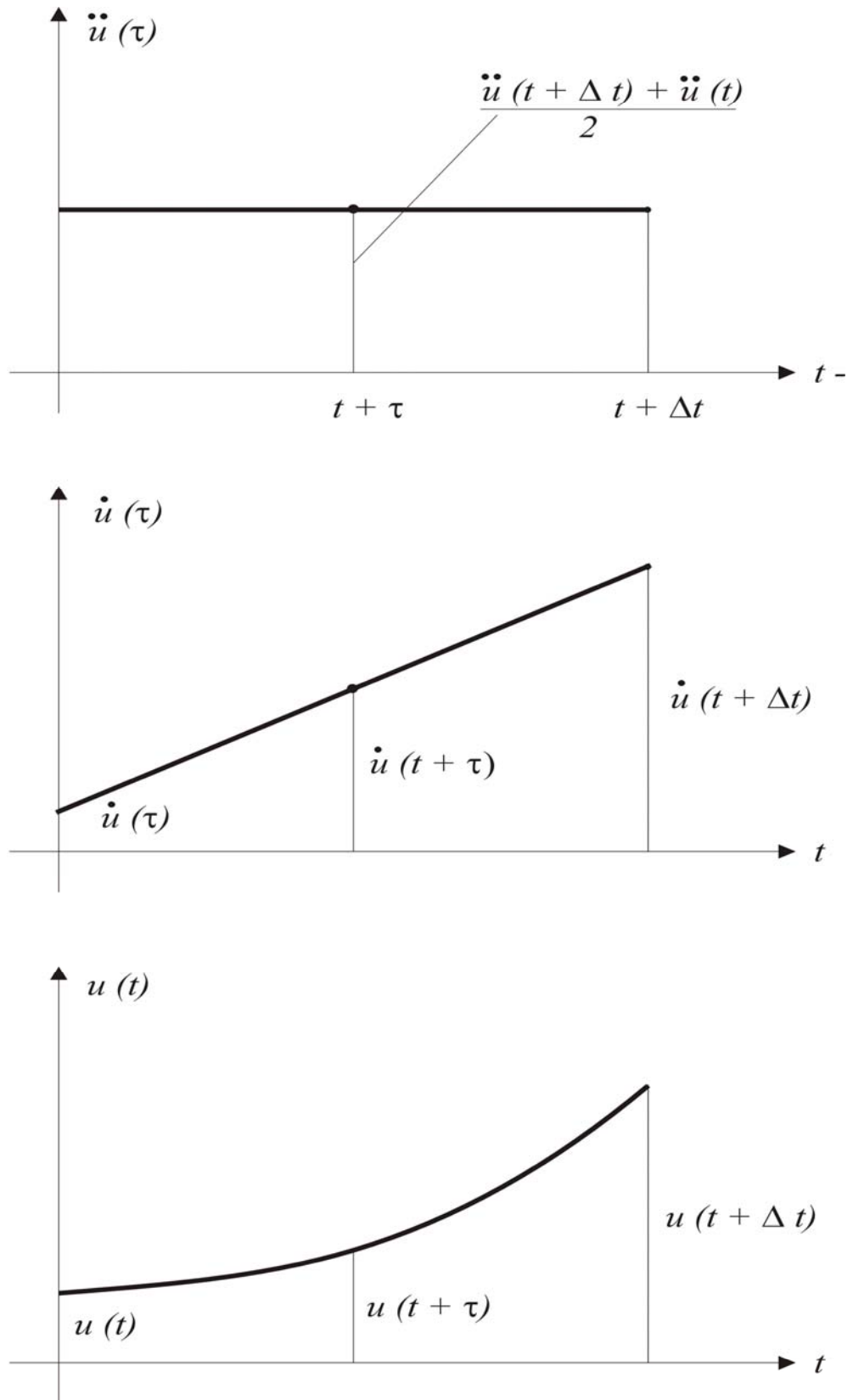


Рис. 1.18. К иллюстрации изменения ускорения, скорости и координаты в методе Ньюмарка на одном временном интервале

Исследования устойчивости метода Ньюмарка показали, что он сходится при любой величине шага  $\Delta t$ , т.е. является абсолютно устойчивым.

### Метод линейного ускорения и его модификация – метод Вилсона [20, 18]

В отличие от предыдущего метода, здесь константой будет третья производная от перемещения:

$$\ddot{\mathbf{u}}(t + \tau) = [\ddot{\mathbf{u}}(t + \Delta t) + \ddot{\mathbf{u}}(t)]/2 = \text{const} . \quad (1.98)$$

При этом ускорение изменяется по линейному закону, а скорость и перемещения – по закону квадратной и кубической парабол, соответственно (рис. 1.19).

В случае нелинейных дифференциальных уравнений движения (1.98) задачу удобно решать в приращениях. Для этого запишем дифференциальные уравнения для момента времени  $t + \Delta t$ :

$$M\ddot{\mathbf{u}}(t + \Delta t) + c\dot{\mathbf{u}}(t + \Delta t) + r(\mathbf{u}) \cdot \mathbf{u}(t + \Delta t) = \mathbf{p}(t + \Delta t) . \quad (1.99)$$

Вычитая из (1.99) уравнение для момента времени  $t$ , получаем:

$$M\ddot{\mathbf{u}} + c\dot{\mathbf{u}} + r \cdot \Delta \mathbf{u} = \Delta \mathbf{p} . \quad (1.100)$$

Последнее уравнение определяет малое приращение  $\Delta \mathbf{u}$  за время  $\Delta t$ ;  $r$  – касательная или мгновенная жесткость системы в момент времени  $t$ . Если принять, что при  $t = t_k$  известны величины  $\mathbf{u}_k$ ,  $\dot{\mathbf{u}}_k$  и  $\ddot{\mathbf{u}}_k$ , то для момента времени  $t + \tau$  можно записать:

$$\left. \begin{aligned} \ddot{\mathbf{u}}(t + \tau) &= \ddot{\mathbf{u}}(t) + \ddot{\mathbf{u}}(t) \cdot \tau, \\ \dot{\mathbf{u}}(t + \tau) &= \dot{\mathbf{u}}(t) + \ddot{\mathbf{u}}(t) \cdot \tau + \ddot{\mathbf{u}}(t) \cdot \frac{\tau^2}{2}, \\ \mathbf{u}(t + \tau) &= \mathbf{u}(t) + \dot{\mathbf{u}}(t) \cdot \tau + \ddot{\mathbf{u}}(t) \cdot \frac{\tau^2}{2} + \ddot{\mathbf{u}}(t) \frac{\tau^3}{6}. \end{aligned} \right\} \quad (1.101)$$

Из этих соотношений выразим приращения перемещений, скоростей и ускорений:

$$\left. \begin{aligned} \Delta \mathbf{u} &= \dot{\mathbf{u}}(t) \cdot \tau + \ddot{\mathbf{u}}(t) \cdot \frac{\tau^2}{2} + \Delta \ddot{\mathbf{u}} \cdot \frac{\tau^2}{6}, \\ \Delta \dot{\mathbf{u}} &= \frac{3\Delta \mathbf{u}}{\tau} - 3\dot{\mathbf{u}}(t) - \ddot{\mathbf{u}}(t) \cdot \frac{\tau}{2}, \\ \Delta \ddot{\mathbf{u}} &= \frac{6\Delta \mathbf{u}}{\tau^2} - \frac{6\dot{\mathbf{u}}(t)}{\tau} - 3\ddot{\mathbf{u}}(t). \end{aligned} \right\} \quad (1.102)$$

Здесь

$$\Delta \ddot{\mathbf{u}} = [\ddot{\mathbf{u}}(t + \tau) - \ddot{\mathbf{u}}(t)] / \tau.$$

Полагая  $\tau = \Delta t$ , линеаризованное уравнение движения (1.100) можно переписать в виде:

$$\begin{aligned} M \left[ \frac{6}{(\Delta t)^2} \Delta \mathbf{u}(t) - \frac{6}{\Delta t} \dot{\mathbf{u}}(t) - 3\ddot{\mathbf{u}}(t) \right] + c(t) \left[ \frac{3}{\Delta t} \cdot \Delta \mathbf{u}(t) - 3\dot{\mathbf{u}}(t) - \frac{\Delta t}{2} \ddot{\mathbf{u}}(t) \right] + \\ + \mathbf{R}(t) \cdot \Delta \mathbf{u}(t) = \Delta \mathbf{p}(t). \end{aligned} \quad (1.103)$$

Расчет начинается с определения начального ускорения  $\ddot{\mathbf{u}}(t)$  из уравнения (1.103) с помощью подстановки в него начальных условий:  $t = 0$ ,  $\mathbf{u} = \mathbf{u}(t)$ ,  $\dot{\mathbf{u}} = \dot{\mathbf{u}}(t)$ :

$$\ddot{\mathbf{u}}(t) = M^{-1}[\mathbf{p}(t) - c \cdot \dot{\mathbf{u}}(t) - r \cdot \mathbf{u}(t)]. \quad (1.104)$$

Далее, давая аргументу  $t$  приращения  $\Delta t$ , определяем из (1.102)  $\Delta \mathbf{u}(t)$ . Затем находим из (1.101) скорость и перемещение для момента времени  $t + \Delta t$ :

$$\dot{\mathbf{u}}(t + \Delta t) = \dot{\mathbf{u}}(t) + \Delta \dot{\mathbf{u}}(t), \quad (1.105)$$

$$\mathbf{u}(t + \Delta t) = \mathbf{u}(t) + \Delta \mathbf{u}(t). \quad (1.106)$$

После этого цикл вычислений повторяется для следующего интервала времени  $\Delta t$ .

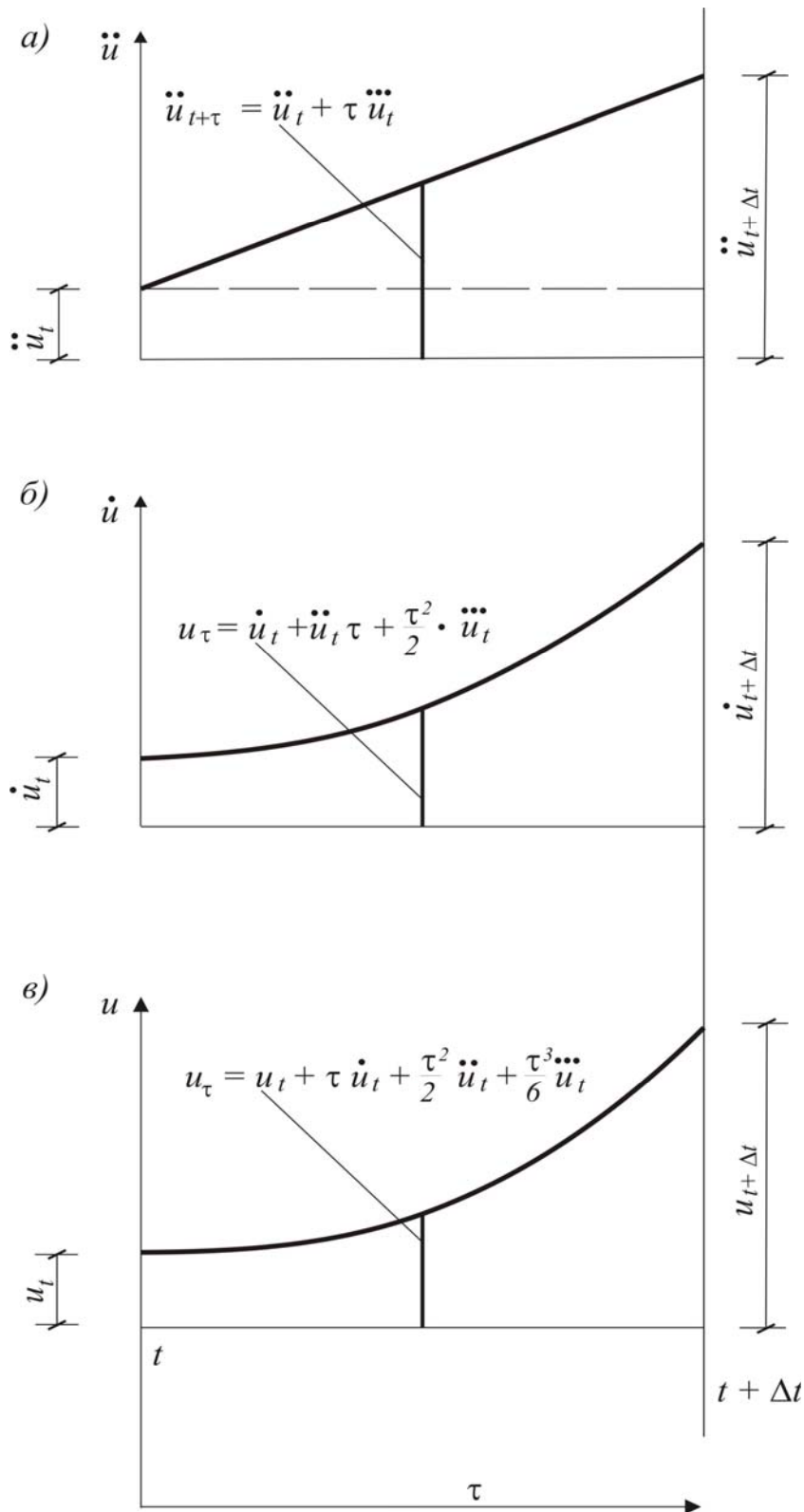


Рис. 1.19. К иллюстрации изменения кинематических характеристик на основе метода линейного ускорения:  
 а – линейное изменение ускорения; б – изменение скорости по закону квадратной параболы; в – изменение перемещений по закону кубической параболы



Рассмотренный метод решения дифференциального уравнения в приращениях предполагает два существенных допущения:

- 1) ускорение изменяется линейно;
- 2) затухание и жесткость остаются постоянными в течение шага интегрирования.

Разумеется, ни одна из этих предпосылок не является полностью справедливой, хотя возникающие при этом ошибки малы, если шаг интегрирования принят достаточно малым. Поэтому погрешности, заложенные в условиях равновесия при приращении параметров, могут накапливаться от шага к шагу. Такого накопления ошибок можно избежать, рассчитывая полное уравнение равновесия на каждом шаге анализа.

Из трёх последних методов меньше ограничений (постоянные на длине шага) накладывается в методе линейного ускорения. В связи с этим здесь длина шага может быть значительной, поэтому последний метод предпочтителен, если сама задача исследования движения требует очень малого шага. Такая ситуация может возникнуть, например, при одновременном учёте продольных и поперечных колебаний в элементах системы. Это связано с тем, что период продольных колебаний, как правило, значительно меньше периода поперечных колебаний и поэтому здесь требуется весьма короткий шаг по времени.

Метод линейного ускорения является условно устойчивым и при недостаточно малом шаге вычислений может приводить к неточному результату.

Наиболее простая и лучшая модификация этого метода –  $\theta$ -метод Вилсона – даёт безусловно устойчивые результаты путем элементарного усовершенствования классического метода линейного ускорения. Он основан на том, что ускорение линейно изменяется в пределах расширенного интервала времени вычислительного процесса:

$$\tau = \theta \cdot \Delta t, \text{ где } \theta > 1,37. \quad (1.107)$$

После нахождения кинематических характеристик на расширенном интервале времени  $\tau$  линейной интерполяцией определяют приращение ускорения для нормального шага интегрирования  $\Delta t$ :

$$\Delta \ddot{u}(t) = \frac{1}{\theta} \Delta \ddot{u}(\tau). \quad (1.108)$$

Затем определяются соответствующие приращения векторов скоростей и перемещений, записанных уже для момента времени  $\Delta t$ . Затем весь процесс повторяется необходимое число шагов.

#### 1.5.4.3. Анализ методов решения

Точность любого из рассмотренных методов зависит от длины интервала времени  $\Delta t$ , при выборе которого необходимо учитывать три фактора: скорость изменения внешней нагрузки  $P(t)$ , сложность нелинейных характеристик затухания и жесткости и период  $T$  собственных колебаний системы. Шаг интегрирования должен быть достаточно малым, чтобы обеспечить надежное определение всех указанных величин, последняя из которых связана со свободными колебаниями сооружения. Как правило [20], изменчивость характеристик конструкции не является определяющим фактором. Динамические особенности приложенных нагрузок также могут быть без особых затруднений учтены при выборе интервала времени.

Таким образом, если функция нагружения достаточно проста, выбор шага интегрирования определяется в основном периодом собственных колебаний сооружения. Даже при использовании безусловно устойчивых методов интегрирования желательно для повышения точности результатов придерживаться эмпирически проверенного шага  $\Delta t \approx T/10$ .

Если возникают сомнения в адекватности полученного решения, необходимо провести анализ влияния интервала интегрирования.

### 1.6. Устройства для гашения колебаний

Наиболее распространенными устройствами для гашения колебаний, применяемыми в строительстве, являются виброизоляция, динамические и ударные гасители колебаний, демпферы и ограничители колебаний. Условимся всю группу устройств для гашения колебаний, за исключением виброизоляции, называть гасителями колебаний.

Гасители применяют для уменьшения колебаний различных видов: поперечных, продольных, крутильных, возникающих в рабочем или

пускоостановочном режиме работы машины – источника колебаний, а также колебаний, вызванных ветром или другими воздействиями. Условимся объект, на котором установлен гаситель колебаний, называть системой.

При работе динамического или ударного гасителя энергия колебаний системы передается гасителю, настроенному на частоту колебаний системы который благодаря этому колеблется с повышенной амплитудой. Динамические и ударные гасители применяют для уменьшения колебаний сооружений башенного типа (дымовые трубы, мачты, башни), высоких промышленных зданий, элементов сооружений (балки, плиты, провода линий электропередач и т.п.) и виброизолированных машин в рабочем, пускоостановочном или в том и другом режимах.

Работа демпферов (устройств повышенного сопротивления) основана на том, что энергия колебаний системы рассеивается в результате сухого трения прижатых одна к другой поверхностей, трения поверхностей, погруженных в вязкие среды, или вязкого трения, возникающего при прохождении жидкости или воздуха по перепускным каналам либо при взаимодействии магнитного поля с полем вихревых токов, возбуждающихся движением системы. Демпферы применяют в случаях, когда необходимо уменьшить амплитуды колебаний виброизолированной машины или перевести колебательный процесс в аperiodическое движение системы.

Действие ограничителей колебаний основано на изменении упругих или упруговязких свойств системы, в результате чего уменьшаются амплитуды колебаний и изменяется частота собственных колебаний системы. Энергия системы частично рассеивается при ударе об ограничитель, но большая часть сил передается через ограничитель. Ограничители колебаний применяют для ограничения амплитуд колебаний виброизолированных машин и приборов.

Гасители колебаний в строительстве используют сравнительно давно. Ударные гасители на дымовых трубах появились в 1950-1953 гг. Позднее был применен динамический гаситель на телевизионной башне. В этот же период времени и несколько позже опубликованы первые работы по описанию конструкции и теории гасителей колебаний [23, 24, 25]. В последнее время появились новые работы по теории гасителей колебаний. Рассмотрены задачи о колебаниях башенных сооружений и

строительных конструкций с динамическими гасителями при детерминированных [26, 27], случайных [28, 29, 22, 30, 31, 32] и сейсмических [33] воздействиях, при автоколебаниях [34, 35]. Исследован вопрос об установке расстроенной группы динамических гасителей без затухания, эквивалентных одиночному гасителю с оптимальным затуханием [24, 30, 36, 37, 38, 39]. Получила дальнейшее развитие теория ударных гасителей для системы с одной степенью свободы [40, 41, 42], для невесомого стержня с двумя массами [43] и для системы с бесконечным числом степеней свободы [44]. Выпущен нормативный документ по расчету и проектированию динамических и ударных гасителей колебаний в строительстве [45].

Ниже рассмотрена работа виброизоляции, динамических и ударных гасителей, демпферов и ограничителей колебаний, установленных на системе с одной степенью свободы, при гармоническом воздействии.

### 1.6.1. Виброизоляция

Виброизоляцией называется способ уменьшения колебаний какой-либо механической системы, основанный на значительном ослаблении ее связей с другими системами. Если источник возбуждения колебаний находится внутри системы, то виброизоляция, используемая с целью уменьшения его воздействия на основание, называется силовой. Виброизоляция называется кинематической, если виброизолируемый объект требуется защитить от колебаний поддерживающих его конструкций.

На рис. 1.20 показаны некоторые конструктивные схемы виброизоляции.

Виброизоляция – весьма эффективный способ борьбы с вибрацией. Необходимыми условиями, обеспечивающими эффективность ее работы, являются правильный расчет и конструирование, строгое выполнение проектных требований.

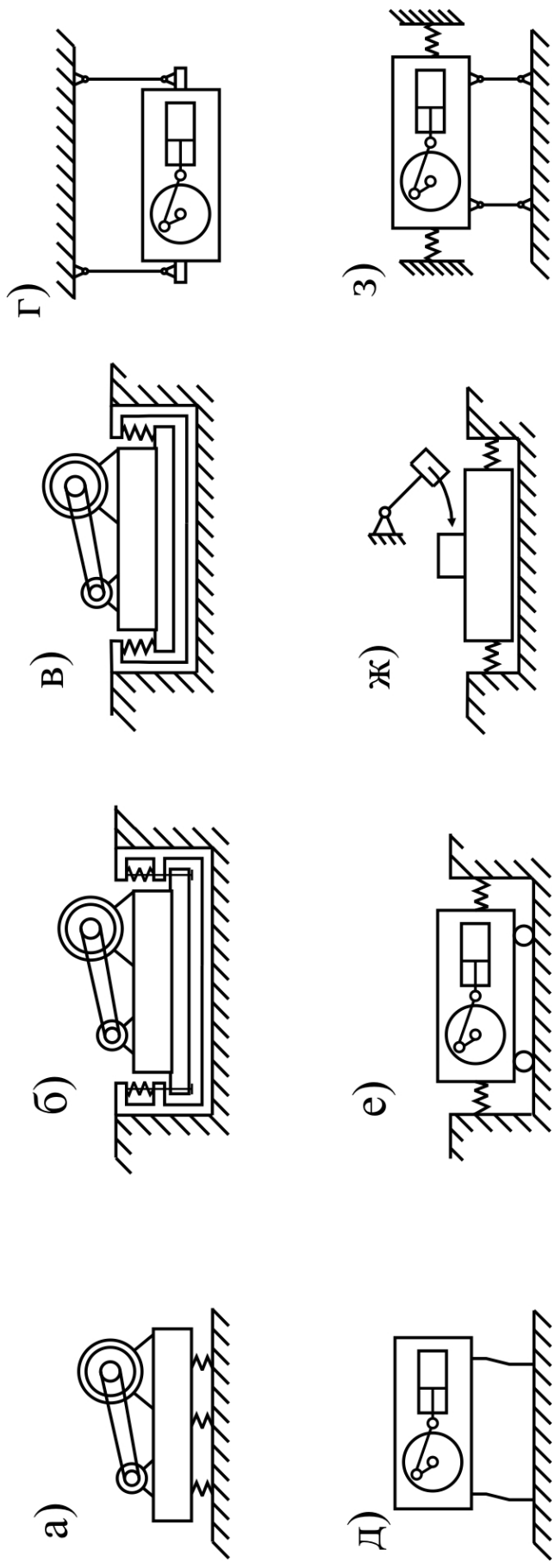


Рис. 1.20. Конструктивные схемы виброизоляции:  
 а – опорный вариант; б – подвесной вариант с пружинами, работающими на сжатие;  
 в – то же, на растяжение; г – подвесной вариант с шарнирными стержнями;  
 д – опорный вариант со стержнями, работающими на изгиб;  
 е – вариант с применением катков; ж – вариант с использованием  
 слоя смазки; з – схема астатического маятника

Наиболее простым представляется рассмотрение виброизолированного объекта как системы с одной степенью свободы при гармонических колебаниях самого объекта или его основания. Эффективность виброизоляции в этом случае можно оценивать коэффициентом передачи  $\mu$ , который при силовой виброизоляции равен отношению амплитуды силы, передающейся через податливые пружины (виброизоляторы) на основание, к амплитуде силы, действующей на виброизолированный объект, а при кинематической виброизоляции - отношению амплитуды перемещений виброизолированного объекта к амплитуде перемещений основания. В обоих случаях его величина равна

$$\mu = 1/\alpha^2 - 1, \quad (1.109)$$

где  $\alpha=f_0/f$  есть отношение частоты  $f_0$  вынужденных колебаний к частоте  $f$  собственных колебаний виброизолированного объекта. Очевидно, при достаточно большом значении  $\alpha$  коэффициент  $\mu$  очень мал.

Широкое практическое применение имеет линейная теория виброизоляции при возмущениях детерминированного характера. Возмущения считаются либо гармоническими, либо квазигармоническими (с медленно меняющимися амплитудой и частотой), либо импульсивными. В основу теории виброизоляции положен так называемый метод динамических жесткостей.

### 1.6.2. Динамические гасители

Рассматривается система (рис. 1.21), имеющая массу  $M$  и жесткость  $k$ . На системе установлен динамический гаситель колебаний, имеющий массу  $M_\Gamma$ , жесткость  $k_\Gamma$  и коэффициент демпфирования  $c_\Gamma$ . Система приводится в колебательное движение возмущающей силой  $P\sin\omega t$  [46].

Дифференциальные уравнения колебаний системы с гасителем имеют вид:

$$\left. \begin{aligned} \ddot{x} + 2n(\dot{x} - \dot{y}) + (p^2 + v_\Gamma^2)x - v_\Gamma^2 y &= \frac{P}{M} \sin \omega t; \\ \ddot{y} + 2n_\Gamma(\dot{y} - \dot{x}) + p_\Gamma^2(y - x) &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (1.110)$$

где

$$\begin{aligned} 2n &= c_{\Gamma} / M; \quad p^2 = k / M; \quad v_{\Gamma}^2 = k_{\Gamma} / M; \\ 2n_{\Gamma} &= c_{\Gamma} / M_{\Gamma}; \quad p_{\Gamma}^2 = k_{\Gamma} / M_{\Gamma}. \end{aligned} \quad (1.111)$$

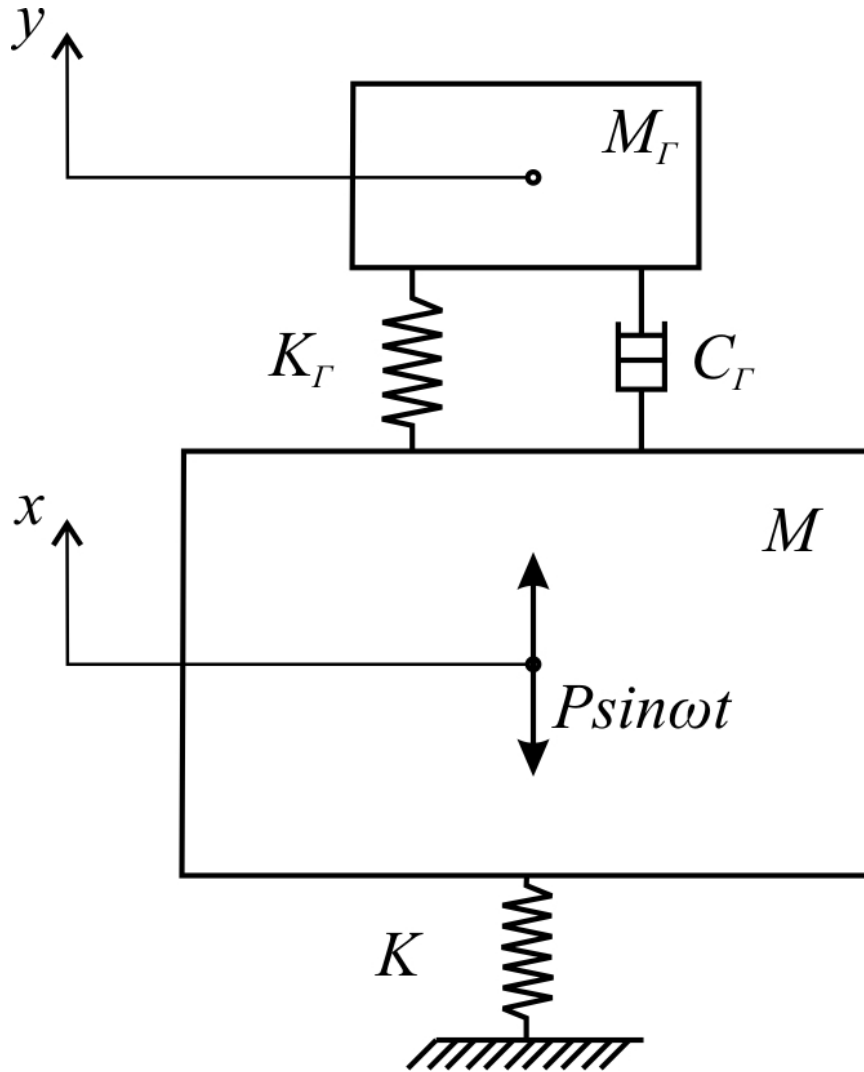


Рис. 1.21. Схема динамического гасителя колебаний с затуханием

Решение, соответствующее установившимся колебаниям, имеет вид

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{1}{A} \sqrt{(f^2 - g^2)^2 + 4h^2 g^2} \sin \omega t; \\ \beta &= \frac{1}{A} \sqrt{f^2 + 4h^2 g^2} \sin \omega t. \end{aligned} \quad (1.112)$$

где

$$A^2 = \left[ (f^2 - g^2)(1 - g^2) - \mu f^2 g^2 \right]^2 + 4h^2 g^2 (1 - g^2 - \mu g^2)^2;$$

$$\alpha = x/x_{ст}; \beta = y/x_{ст}; x_{ст} = P/Mp^2; f = p_{\Gamma}/p;$$

$$g = \omega/p; \mu = M_{\Gamma}/M; h = c_{\Gamma}/c_K; c_K = 2M_{\Gamma}p;$$
(1.113)

здесь  $p$  и  $p_{\Gamma}$  – круговые частоты собственных колебаний соответственно системы (при отсутствии гасителя) и гасителя (при неподвижной массе  $M$ );  $c_K$  – коэффициент критического затухания.

### 1.6.2.1. Динамический гаситель без затухания

Если затухание в гасителе настолько мало, что может не учитываться в расчете, то принимают  $c_{\Gamma}=0$ . Главная масса  $M$  не будет колебаться в случае, если  $f=g$ , т.е. круговая собственная частота  $p_{\Gamma}$  присоединенного гасителя будет равна круговой частоте  $\omega$  изменения возмущающей силы. В этом случае

$$\beta = 1/\mu f^2 = k/k_{\Gamma} \text{ или } \mu k_{\Gamma} = P, \quad (1.114)$$

т.е. упругая сила гасителя во всякий момент времени будет уравновешивать возмущающую силу. Это справедливо для любого значения отношения  $g$ .

Поскольку применение гасителя особенно эффективно в случае, если система находится в состоянии резонанса или, по крайней мере, близка к нему, то полагаем  $p=p_{\Gamma}$ , откуда  $k_{\Gamma}/k=M_{\Gamma}/M=\mu$ . Значение  $\mu$  должно быть таким, чтобы амплитуда колебаний массы  $M_{\Gamma}$  гасителя, равная  $P/M_{\Gamma}\omega^2$ , была в пределах, допускаемых прочностью пружины гасителя.

Частотное уравнение системы с гасителем как системы с двумя степенями свободы при  $f=1$  будет

$$g^4 - (2 + \mu)g^2 + 1 = 0. \quad (1.115)$$

Корни этого уравнения

$$g_{1,2}^2 = 1 + \frac{\mu}{2} \pm \sqrt{\mu \left( 1 + \frac{\mu}{4} \right)}. \quad (1.116)$$



При небольших значениях  $\mu$  частоты собственных колебаний системы с гасителем мало отличаются одна от другой и от расчетного значения  $\omega = p$  – круговой частоты возмущающей силы, равной круговой частоте собственных колебаний системы. Поэтому применение динамического гасителя без затухания связано с требованием строгого постоянства частоты возмущающей силы.

### 1.6.2.2. Динамический гаситель с затуханием

Часто затухание оказывается полезным для работы гасителя и поэтому его вводят, снабжая гаситель специальными устройствами. Тогда возникает вопрос о рациональном подборе параметров затухания.

При резонансе, т.е. при  $f=1$ , как в случае очень малого затухания ( $c_{\Gamma} \rightarrow 0$ ), так и в случае очень большого затухания, когда обе массы оказываются жестко взаимосвязанными ( $c_{\Gamma} \rightarrow \infty$ ), амплитуды колебаний системы неограниченно возрастают. Между этими предельными значениями  $c_{\Gamma}$  имеется такое его значение, при котором резонансная амплитуда минимальна.

Имеются определенные значения  $g$ , при которых можно так настроить гаситель, что амплитуда колебаний системы не будет зависеть от затухания в гасителе. Такой гаситель называется гасителем с наилучшей настройкой. В этом случае для настройки на любую величину массы гасителя должно выполняться условие

$$f = 1/(1 + \mu), \quad (1.117)$$

при этом амплитуда колебаний системы будет

$$\alpha = \sqrt{1 + 2/\mu}. \quad (1.118)$$

Если гаситель колебаний имеет постоянную настройку  $f=1$ , то

$$g^2 = 1 - \sqrt{\mu/(2 + \mu)}; \quad (1.119)$$

$$\alpha = 1 / \left[ (1 + \mu) \sqrt{[\mu/(2 + \mu)] - \mu} \right]. \quad (1.120)$$

В этом случае гаситель называется настроенным на частоту системы. Затухание, удовлетворяющее условию наилучшего действия гасителя, может быть определено с помощью специальных графиков.

Амплитуду относительного движения масс  $M$  и  $M_{\Gamma}$ , определяющую напряжение в пружине гасителя, вычисляют по формуле

$$(|\beta - \alpha|)^2 = \alpha / 2\mu gh. \quad (1.121)$$

### 1.6.3. Ударные гасители

Рассмотрим маятниковые, пружинные и плавающие гасители (рис. 1.22), установленные на системе, имеющей массу  $M$ , жесткость  $k$  и коэффициент затухания  $c$ . Система приводится в колебательное движение возмущающей силой  $P\sin\omega t$ . Введем следующие обозначения:  $M_{\Gamma}$  – масса гасителя;  $\delta(t-RT)$  – дельта-функция,  $r$  – коэффициент восстановления скорости при ударе;  $T$  – период соударений.

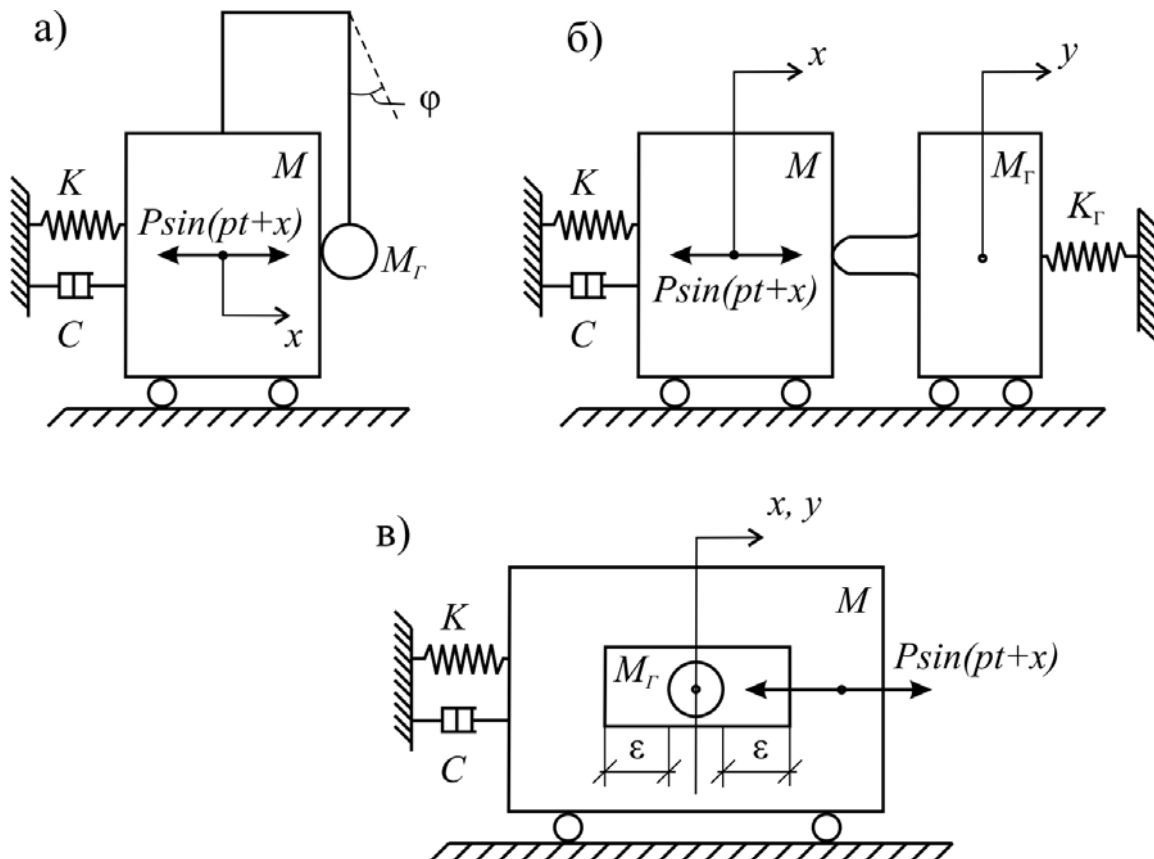


Рис. 1.22. Схемы ударных гасителей колебаний

### 1.6.3.1. Маятниковый ударный гаситель

Дифференциальные уравнения установившихся колебаний системы и присоединенного к ней маятникового гасителя (рис. 1.22, а) длиной  $l$  имеют вид:

$$\begin{aligned} \ddot{x} + 2n\dot{x} + p^2x &= \frac{P}{M_0} \sin(\omega t + \chi) - \frac{S}{M_0} \sum_{R=0}^{\infty} \delta(t - RT); \\ \ddot{\varphi} + p_{\Gamma}^2\varphi &= -\frac{x}{l} + \frac{S}{M_{\Gamma}l} \sum_{R=0}^{\infty} \delta(t - RT), \end{aligned} \quad (1.122)$$

где

$$\left. \begin{aligned} 2n &= c / M_0; p^2 = k / M_0; \\ p_{\Gamma}^2 &= g / l; M_0 = M + M_{\Gamma}; \\ S &= -(1+r) \frac{M_0 M_{\Gamma}}{M_0 + M_{\Gamma}} l \varphi(T). \end{aligned} \right\} \quad (1.123)$$

Резонансные колебания системы и гасителя для интервала времени  $(0, T)$  при выполнении условий настройки

$$\omega T = 2\pi; 2p_{\Gamma} = \omega \quad (1.124)$$

и условия равенства нулю отклонения системы и гасителя во время соударения имеют вид:

а) если затухание в системе не учитывается, т. е.  $n=0$ , то

$$\left. \begin{aligned} \alpha &= \frac{1}{2} \left\{ \left[ \frac{3\pi}{4d(\mu, r)} - \pi + pt \right] \sin pt - \frac{2}{3} \cos pt \right\}; \\ \beta &= \frac{2}{3} \left\{ \frac{\pi}{2} \cdot \frac{3+2\mu}{\mu} \sin \frac{pt}{2} - \left[ \frac{3\pi}{4d(\mu, r)} - \pi + pt \right] \sin pt \right\}; \end{aligned} \right\} \quad (1.125)$$

б) если затухание в системе учитывается, то

$$\begin{aligned}
 \alpha &= \frac{1}{C_\gamma \sqrt{\gamma^2 + 4}} \left\{ 2[2(1+2\mu) - (1+r)(1+\mu - \mu\Omega) - \right. \\
 &\quad \left. - \frac{8\mu(1+r)}{3(e^{2\pi\gamma} - 1)} e^{\gamma(2\pi - \lambda t)} \right] \sin \lambda t + \mu(1+r)\Lambda \cos \lambda t \Big\}; \\
 \beta &= \frac{4}{3C_\gamma \sqrt{\gamma^2 + 4}} \left\{ \mu(1+r) \left[ \frac{4(1+\mu)}{\mu} - \frac{3/4 + \gamma^2}{(3/4 + \gamma^2)^2 + \gamma^2} \right] \sin \frac{\lambda t}{2} + \right. \\
 &\quad + \frac{\mu(1+r)\gamma}{(3/4 + \gamma^2)^2 - \gamma^2} \cos \frac{\lambda t}{2} - 2[2(1+2\mu) - (1+r)(1+\mu - \mu\Omega) - \\
 &\quad \left. - \mu(1+r) \frac{(1-\gamma^2)(3/4 - \gamma^2) + 4\gamma^2}{(3/4 + \gamma^2)^2 + \gamma^2} \cdot \frac{2e^{\gamma(2\pi - \lambda t)}}{e^{2\pi\gamma} - 1} \right] \sin \lambda t - \\
 &\quad \left. \frac{\mu(1+r)\gamma [e^{2\pi\gamma} (2e^{-\gamma\lambda t} - 1) - 1]}{\left[ (3/4 + \gamma^2)^2 + \gamma^2 \right] (e^{2\pi\gamma} - 1)} \cos \lambda t \right\},
 \end{aligned} \tag{1.126}$$

где

$$\begin{aligned}
 \alpha &= \frac{x}{x_{\text{cr}}}; \beta = \frac{l\varphi}{x_{\text{cr}}}; x_{\text{cr}} = \frac{P}{M_0 p}; \mu = \frac{M_\Gamma}{M_0}; \\
 d(\mu, r) &= \frac{\mu(1+r)}{(1+\mu)(1-r)}; \lambda^2 = p^2 - n^2; \\
 \gamma &= \frac{n}{\lambda}; C^2 = 4[2(1+2\mu) - (1+r)(1+\mu - \mu\Omega)]^2 + [\mu(1+r)\Lambda]^2; \\
 \Lambda &= \frac{\gamma}{(3/4 + \gamma^2)^2 + \gamma^2} \cdot \frac{e^{2\pi\gamma} + 1}{e^{2\pi\gamma} - 1}; \\
 \Omega &= \frac{1}{(3/4 + \gamma^2)^2 + \gamma^2} \left[ \frac{1}{4} \left( \frac{3}{4} + \gamma^2 \right) + \frac{2(1-\gamma^2)(3/4 - \gamma^2) + 9\gamma^2}{e^{2\pi\gamma} - 1} \right].
 \end{aligned} \tag{1.127}$$

### 1.6.3.2. Пружинный ударный гаситель

Дифференциальные уравнения установившихся колебаний системы и пружинного ударного гасителя (рис. 1.22, б), имеющего жесткость  $k_{\Gamma}$ :

$$\left. \begin{aligned} \ddot{x} + 2n\dot{x} + p^2x &= \frac{P}{M} \sin(\omega t + \chi) - \frac{S}{M} \sum_{R=0}^{\infty} \delta(t - RT); \\ \ddot{y} + p_{\Gamma}^2 y &= \frac{S}{M_0} \sum_{R=0}^{\infty} \delta(t - RT), \end{aligned} \right\} \quad (1.128)$$

где

$$\left. \begin{aligned} 2n &= \frac{c}{M}; \quad p^2 = \frac{k}{M}; \quad p_{\Gamma}^2 = \frac{k_{\Gamma}}{M_{\Gamma}}; \\ S &= (1+r) \frac{MM_{\Gamma}}{M + M_{\Gamma}} [\dot{x}(T) - \dot{y}(T)]. \end{aligned} \right\} \quad (1.129)$$

Резонансные колебания системы и гасителя для интервала времени  $(0, T)$  при выполнении условий настройки (1.124) и условия равенства нулю отклонения системы и гасителя во время соударения описываются формулами:

а) если затухание в системе не учитывается, т.е.  $n=0$ , то

$$\left. \begin{aligned} \alpha &= \frac{1}{2} \left[ \frac{\pi}{d(\mu, r)} - \pi + pt \right] \sin pt; \\ \beta &= \frac{\pi}{\mu} \sin \frac{pt}{2}; \end{aligned} \right\} \quad (1.130)$$

б) если затухание в системе учитывается, то

$$\left. \begin{aligned} \alpha &= \frac{1}{\gamma \sqrt{\gamma^2 + 4}} \left[ 1 - \frac{\mu(1+r)}{1+\mu - (1+r)N} \cdot \frac{e^{\gamma(2\pi - \lambda t)}}{e^{2\pi\gamma} - 1} \right] \sin \lambda t; \\ \beta &= \frac{1}{2\gamma \sqrt{\gamma^2 + 4}} \cdot \frac{1+r}{1+\mu - (1+r)N} \sin \frac{\lambda t}{2}, \end{aligned} \right\} \quad (1.131)$$

где

$$\left. \begin{aligned} \alpha &= \frac{x}{x_{\text{ст}}}; \beta = \frac{y}{x_{\text{ст}}}; x_{\text{ст}} = \frac{P}{Mp^2}; \mu = \frac{M_{\Gamma}}{M}; d(\mu, r) = \frac{\mu(1+r)}{(1+\mu)(1-r)}; \\ \lambda^2 &= p^2 - n^2; \gamma = \frac{n}{\lambda}; N = 1/2 - \mu/(e^{\pi\gamma} - 1). \end{aligned} \right\} \quad (1.132)$$

### 1.6.3.3. Плавающий ударный гаситель

Дифференциальные уравнения установившихся колебаний системы и плавающего ударного гасителя (рис. 1.22, в), встроенного с зазорами  $\varepsilon$ , имеют вид:

$$\left. \begin{aligned} \ddot{x} + 2n\dot{x} + p^2x &= \frac{P}{M} \sin(\omega t + \chi) - \frac{S}{M} \sum_{R=0}^{\infty} (-1)^R \delta(t - RT); \\ \ddot{y} &= \frac{S}{M_0} \sum_{R=0}^{\infty} (-1)^R \delta(t - RT), \end{aligned} \right\} \quad (1.133)$$

где

$$\left. \begin{aligned} 2n &= \frac{c}{M}; p^2 = \frac{k}{M}; \\ S &= -(1+r) \frac{MM_{\Gamma}}{M+M_{\Gamma}} [\dot{x}(T) - \dot{y}(T)] \quad \text{при } (0 < t < T), \\ S &= (1+r) \frac{MM_{\Gamma}}{M+M_{\Gamma}} [\dot{x}(2T) - \dot{y}(2T)] \quad \text{при } (T < t < 2T). \end{aligned} \right\} \quad (1.134)$$

Резонансные колебания системы и гасителя для интервала времени  $(0, 2T)$  при выполнении условия настройки

$$\omega T = \pi \quad (1.135)$$

и условий равенства нулю отклонения системы и равенства величине  $\varepsilon$  перемещения гасителя описываются формулами:

а) если затухание в системе не учитывается, т.е.  $n=0$ , то

$$\left. \begin{aligned} \alpha &= \frac{1}{2} \left[ \frac{\pi}{d(\mu, r)} - \frac{\pi}{2} + pt \right] \sin pt; \beta = \frac{\pi}{4\mu} \left( pt - \frac{\pi}{2} \right) \quad (0 < pt < \pi); \\ \alpha &= \frac{1}{2} \left[ \frac{\pi}{2d(\mu, r)} - \frac{3\pi}{2} + pt \right] \sin pt; \beta = -\frac{\pi}{4\mu} \left( pt - \frac{3\pi}{2} \right) \quad (\pi < pt < 2\pi); \\ b &= \pi^2 / 8\mu; \end{aligned} \right\} (1.136)$$

б) если затухание в системе учитывается, то

$$\left. \begin{aligned} \alpha &= \frac{1}{\gamma\sqrt{\gamma^2 + 4}} \left[ 1 - \frac{\mu(1+r)}{1+\mu - (1+r)N} \cdot \frac{e^{-\gamma(\lambda t - \pi)}}{e^{\pi\gamma} - 1} \right] \sin \lambda t; \\ \beta &= \frac{1+r}{2\gamma\sqrt{\gamma^2 + 4} [1+\mu - (1+r)N]} \left( \lambda t - \frac{\pi}{2} \right) \quad (0 < \lambda t < \pi); \\ \alpha &= \frac{1}{\gamma\sqrt{\gamma^2 + 4}} \left[ 1 - \frac{\mu(1+r)}{1+\mu - (1+r)N} \cdot \frac{e^{-\gamma(\lambda t - 2\pi)}}{e^{\pi\gamma} - 1} \right] \sin \lambda t; \\ \beta &= -\frac{1+r}{2\gamma\sqrt{\gamma^2 + 4} [1+\mu - (1+r)N]} \left( \lambda t - \frac{3\pi}{2} \right) \quad (\pi < \lambda t < 2\pi); \\ b &= \frac{(1+r)\pi}{4\gamma\sqrt{\gamma^2 + 4} [1+\mu - (1+r)N]}, \end{aligned} \right\} (1.137)$$

где  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $x_{ст}$ ,  $\mu$ ,  $d(\mu, r)$ ,  $\lambda$ ,  $\gamma$  и  $N$  определяют по формулам (1.132), а

$$b = \varepsilon / x_{ст}. \quad (1.138)$$

## 1.6.4. Демпферы

### 1.6.4.1. Демпфер сухого трения

Рассмотрим демпфер сухого трения, имеющий массу  $M_{\Gamma}$  и коэффициент трения скольжения  $f$  между массой  $M_{\Gamma}$  и прижимающимися к ней с силой  $Q$  поверхностями, установленный на системе с одной

степенью свободы (рис. 1.23), имеющей массу  $M$  и жесткость  $k$ . Система приводится в колебательное движение возмущающей силой  $P\sin\omega t$ .

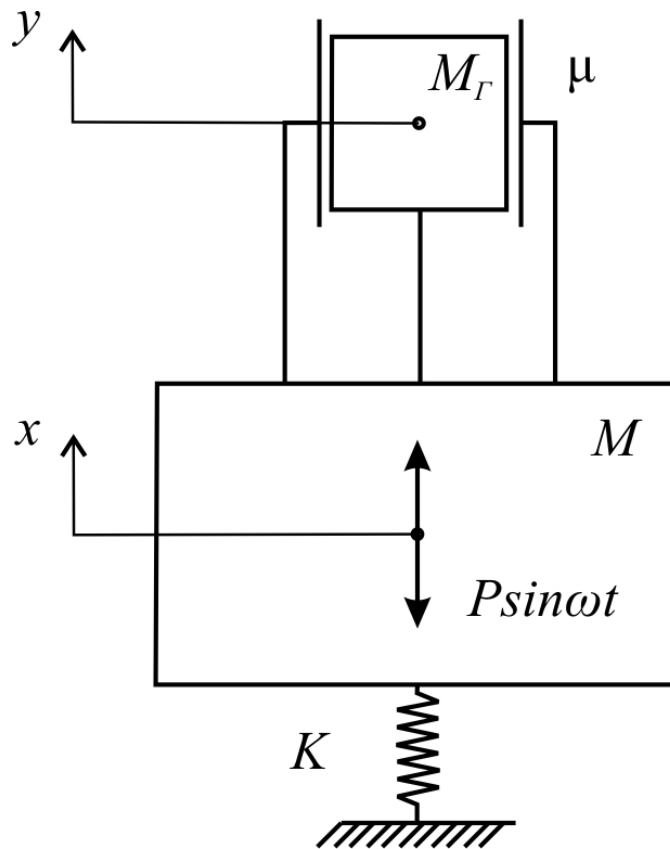


Рис. 1.23. Схема демпфера сухого трения

Модуль максимальной силы трения

$$F_T = 2fQ. \quad (1.139)$$

Опытами установлено, что при удельном давлении  $q \geq 20 \text{ Н/см}^2$ , даже при обильной смазке, трение можно считать кулоновым (сухим), т.е. что коэффициент трения  $f$  не зависит от скорости. При отсутствии смазки или при малой смазке удельное давление может быть уменьшено. При удельном давлении  $q \leq 4 \text{ Н/см}^2$  трение приближается к вязкому. Этими данными следует пользоваться при конструктивной разработке демпферов.

Сила инерции демпфера

$$J_T = M_T \ddot{y}. \quad (1.140)$$



Движение демпфера зависит от соотношения между силой инерции и максимальной силой трения. Если ускорение  $\ddot{x}$  таково, что  $J_{\Gamma} < F_{\Gamma}$ , то демпфер будет двигаться вместе с системой как одно целое. Если  $J_{\Gamma} \geq F_{\Gamma}$ , то демпфер оторвется от системы и будет двигаться с постоянным ускорением, отвечающим условию отрыва  $J_{\Gamma} = F_{\Gamma}$ . Это ускорение

$$\ddot{y} = F_{\Gamma} / M_{\Gamma}. \quad (1.141)$$

После отрыва демпфера от системы сила будет совершать работу, определяемую как ее значением, так и относительным проскальзыванием демпфера по отношению к системе. Под работой трения будем подразумевать работу, которую совершает сила трения за один полный цикл колебаний.

Если  $F_{\Gamma} = 0$ , то демпфер будет иметь наибольшее проскальзывание, но работа трения будет равна нулю. С увеличением силы трения проскальзывание уменьшается, а работа силы трения растет. Когда сила трения возрастает до такой величины, что  $F_{\Gamma} > M_{\Gamma} \ddot{y}$ , проскальзывание станет равно нулю и работа силы трения также будет равна нулю. Очевидно, оптимальным будет значение силы трения, при которой работа ее будет наибольшей, так как при этом рассеивание энергии будет наибольшим, а следовательно, амплитуды колебаний системы наименьшими.

Допустим, что движение демпфера происходит без заедания. Работа внешней силы при резонансном режиме

$$W_{\text{в}} = \pi P A, \quad (1.142)$$

где  $A$  – амплитуда колебаний системы.

Работа сил трения демпфера

$$W_{\Gamma} = 4F_{\Gamma}A \sqrt{1 - \frac{\pi^2}{4} \left( \frac{F_{\Gamma}}{M_{\Gamma}A\omega^2} \right)^2}. \quad (1.143)$$

Оптимальное значение силы трения

$$F_{\Gamma} = (\sqrt{2} / \pi) M_{\Gamma} \omega^2 A \quad (1.144)$$

и соответствующая ей максимальная работа

$$W_{\Gamma} = (4/\pi)M_{\Gamma}\omega^2 A^2. \quad (1.145)$$

Недостатками демпфера сухого трения являются износ его трущихся поверхностей, что влечет за собой изменение сил трения и приводит к его расстройке, а также возможные перекосы и заедания, выключающие демпфер из работы.

#### 1.6.4.2. Демпфер вязкого трения

Параметры демпфера вязкого трения, присоединяемого к системе с одной степенью свободы (рис. 1.24) и имеющего коэффициент сопротивления  $c$ , подбирают следующим образом.

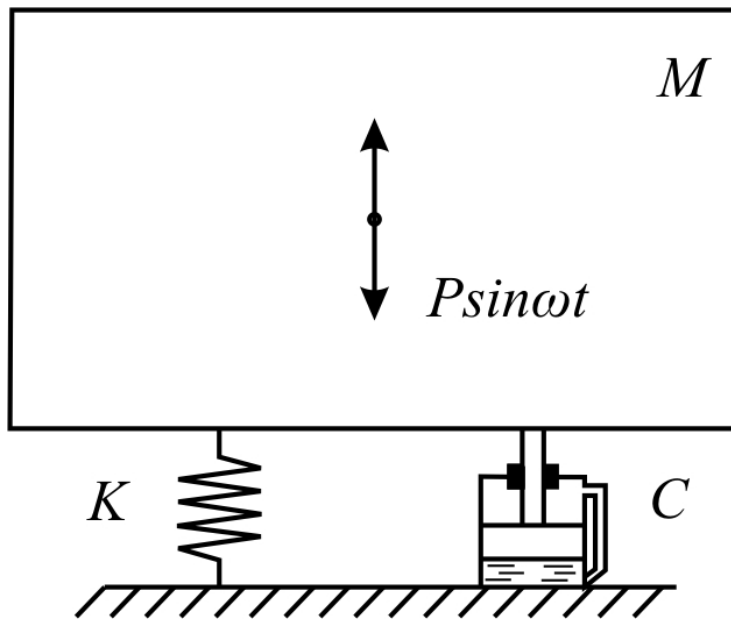


Рис. 1.24. Схема демпфера вязкого трения

Площадь сечения перепускного канала определяют по формуле

$$f = \alpha\sqrt{p}, \quad (1.146)$$

где

$$\alpha = \frac{F^2\sqrt{\gamma}}{c\varepsilon\sqrt{20g}}; \quad (1.147)$$

$p$  – давление жидкости под поршнем;  $F$  – площадь сечения поршня;  $\varepsilon$  – коэффициент расхода (для отверстий с округлыми краями и односторонним движением жидкости  $\varepsilon=0,8-0,95$ ; для отверстий с открытыми краями и переменным направлением движения жидкости  $\varepsilon=0,63$ );  $\gamma$  – плотность жидкости.

Из формулы (1.146) следует, что рабочий клапан демпфера должен быть устроен таким образом, чтобы его проходное сечение изменялось пропорционально корню квадратному из давления в цилиндре демпфера.

Площадь поршня демпфера

$$F = c v_{\text{макс}}^{\Pi} / p_{\text{макс}}, \quad (1.148)$$

где  $v_{\text{макс}}^{\Pi}$  – максимальная скорость перемещения поршня;  $p_{\text{макс}}$  – максимальное давление жидкости.

Коэффициент сопротивления демпфера в данном случае

$$c = 2M\omega. \quad (1.149)$$

Максимальное проходное сечение перепускного канала

$$f_{\text{макс}} = \frac{F v_{\text{макс}}^{\Pi}}{\varepsilon} \sqrt{\frac{\gamma}{20 g p_{\text{макс}}}}. \quad (1.150)$$

Коэффициент  $c$  можно менять в широких пределах, варьируя значения  $f$  и  $p$ , что достигается с помощью обычного перепускного вентиля.

Недостатком большинства демпферов вязкого трения является непостоянство вязких свойств масел в связи с изменением температуры, что приводит к расстройке демпфера. Исключение составляют демпферы, в которых в качестве вязкой жидкости применен силикон, вязкие свойства которого не зависят от температуры.

### 1.6.5. Ограничители

Результаты исследования свободных и вынужденных колебаний систем с одной степенью свободы, имеющих ограничители, приводятся в работах [46, 47 и др.], в которых рассмотрены колебания нелинейных систем с характеристиками, составленными из нескольких прямолинейных отрезков, находящихся под действием синусоидальной возмущающей силы.

Дифференциальное уравнение колебаний системы с одной степенью свободы

$$\ddot{x} + F(x) = \varepsilon f_1(\dot{x}) + \varepsilon E \sin \omega t, \quad (1.151)$$

где  $F(x)$  – функция, выражающая зависимость нелинейной восстанавливающей силы от смещения и являющаяся нечетной функцией  $x$  (случай симметричной нелинейной характеристики) (рис. 1.25, а-г);  $f_1(x)$  – функция, характеризующая нелинейное трение;  $E \sin \omega t$  – функция, обуславливающая существование колебательного режима;  $\varepsilon$  – малый положительный параметр ( $\varepsilon \ll 1$ ), придающий функциям  $f_1(x)$  и  $E \sin \omega t$  слабое возмущение.

Предположим, что

$$F(x) = c''x + \varepsilon f(x), \quad (1.152)$$

тогда вместо уравнения (1.151) можно рассматривать уравнение

$$\ddot{x} + c''x = -\varepsilon f(x) + \varepsilon f_1(\dot{x}) + \varepsilon E \sin \omega t. \quad (1.153)$$

Обозначим  $c'' = p^2$ . В первом приближении можно положить

$$x = a \cos(\omega t + \theta), \quad (1.154)$$

где  $a$  и  $\theta$  определяются системой уравнений

$$\left. \begin{aligned} \dot{a} &= -\frac{\varepsilon}{2\pi p} \int_0^{2\pi} f_1(-ap \sin \psi) \sin \psi d\psi - \frac{\varepsilon E}{p + \omega} \cos \theta; \\ \dot{\theta} &= p - \omega + \frac{\varepsilon}{2\pi p a} \int_0^{2\pi} f(a \cos \psi) \cos \psi d\psi + \frac{\varepsilon E}{a(p + \omega)} \sin \theta. \end{aligned} \right\} \quad (1.155)$$

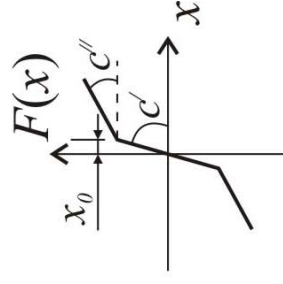
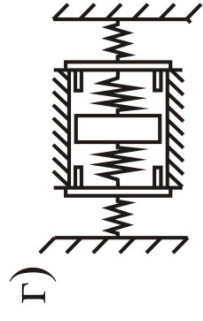
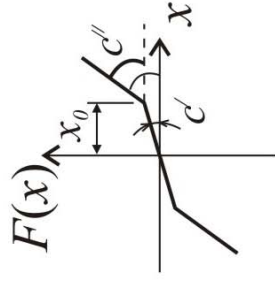
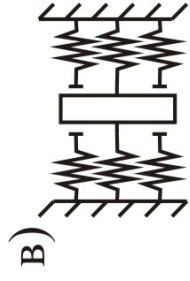
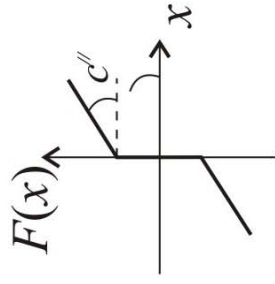
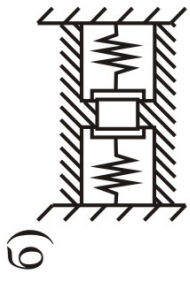
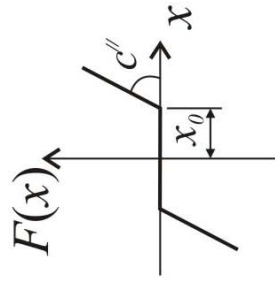
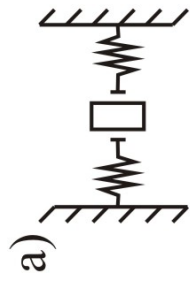


Рис. 1.25. Характеристики нелинейной восстанавливающей силы

Зависимость между  $a$  и  $\omega$  для стационарного режима

$$a^2 \left[ (\omega_e^2(a) - \omega^2)^2 + 4\omega^2 \sigma_e^2(a) \right] = \varepsilon^2 E^2, \quad (1.156)$$

где

$$\left. \begin{aligned} \sigma_e(a) &= \frac{\varepsilon}{2\pi p a} \int_0^{2\pi} f_1(-ap \sin \psi) \sin \psi d\psi; \\ \omega_e^2(a) &= \frac{1}{\pi a} \int_0^{2\pi} F(a \cos \psi) \cos \psi d\psi. \end{aligned} \right\} \quad (1.157)$$

Если пренебречь трением, то вместо (1.156) получим:

$$a \left[ \omega_e^2(a) - \omega^2 \right] = \pm \varepsilon E, \quad (1.158)$$

при этом в правой части следует брать «+» для  $a > 0$  и «-» для  $a < 0$ .

Второе приближение (пренебрегая трением)

$$x = a \cos(\omega t + \theta) + \varepsilon u_1(a, \omega t, \omega t + \theta), \quad (1.159)$$

где

$$u_1(a, \omega t, \omega t + \theta) = \frac{1}{\pi} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\cos n(\omega t + \theta)}{p^2(1-n^2)} \int_0^{2\pi} f(a \cos \psi) \cos \psi d\psi \quad (1.160)$$

и амплитуда стационарных колебаний определяется соотношением

$$a \left[ \omega_e^2(a) - \omega^2 \right] + \frac{\varepsilon}{2} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{f_n(a) \left[ f_{n+1}^{(1)}(a) + f_{n-1}^{(1)}(a) \right]}{p^2(1-n^2)} = \pm \varepsilon E, \quad (1.161)$$

где

$$\left. \begin{aligned} f_n(a) &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(a \cos \psi) \cos n\psi d\psi; \\ f_n^{(1)}(a) &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f_a(a \cos \psi) \cos n\psi d\psi. \end{aligned} \right\} \quad (1.162)$$

Для примера приведем зависимость между амплитудой стационарных колебаний и частотой внешней силы для характеристики нелинейной восстанавливающей силы, изображенной на рис. 1.25, при отсутствии трения.

Согласно формуле (1.158), получим:

$$A(c'' - \omega^2) + \frac{2}{\pi}(c' - c'') \left[ \sqrt{1 - \frac{1}{A^2}} + \arcsin \frac{1}{A} \right] = \pm \frac{\varepsilon E}{x_0}, \quad (1.163)$$

где  $A = |a/x_0|$ .

Построение зависимостей между  $a/x_0$  и  $\omega/p$  по (1.163) и по формуле для второго приближения, полученной по (1.161), показывает, что для практических целей достаточно выполнить вычисление резонансных кривых в первом приближении.

## 1.7. Методы решения нелинейных задач

Если математическая модель исследования конструкции включает зависимости, содержащие нелинейные члены относительно некоторых неизвестных величин, то необходимо воспользоваться каким-либо методом, применяемым для решения нелинейных задач. Разрешающая система нелинейных алгебраических уравнений может быть представлена, например, в форме следующего матричного уравнения:

$$[K(\mathbf{u})] \cdot \{\mathbf{u}\} = \{\mathbf{p}\}, \quad (1.164)$$

где  $\{\mathbf{u}\}$  – вектор неизвестных величин;  $\{\mathbf{p}\}$  – вектор, характеризующий заданное внешнее воздействие на конструкцию;  $[K(\mathbf{u})]$  – квадратная матрица, размер которой соответствует количеству неизвестных задачи, а элементы зависят не только от свойств материала конструкции, но и от напряженно-деформированного состояния, выраженного через вектор перемещений.

Существующие методы решения нелинейных уравнений типа (1.164) можно классифицировать по различным признакам. В статье [48]

для их классификации используется понятие невязки. Если обозначить невязку  $\{\Delta \mathbf{p}\}$ , то ее величина

$$\{\Delta \mathbf{p}\} = [K(\mathbf{u})] \cdot \{\mathbf{u}\} - \{\mathbf{p}\} \quad (1.165)$$

будет служить оценкой отклонения положения системы от ее действительного состояния. При этом методы решения можно подразделить на три типа.

К первому типу относятся методы ликвидации невязки:

$$\{\Delta \mathbf{p}\} = \{0\}. \quad (1.166)$$

Сюда относятся следующие итерационные методы: метод последовательных приближений (или переменных жесткостей) И.А. Биргера, метод упругих решений А.А. Ильюшина, метод Ньютона – Рафсона, метод начальных напряжений и деформаций.

Ко второму типу относятся методы, в которых равновесное состояние системы определяется из условия минимума вектора невязки  $\{\Delta \mathbf{p}\}$  по параметру нагружения  $\lambda$ :

$$\left\{ \frac{d(\Delta \mathbf{p})}{d\lambda} \right\} = \{0\} \quad \text{или} \quad \{\Delta \dot{\mathbf{p}}\} = 0. \quad (1.167)$$

Сюда относятся различные шаговые методы.

К третьему классу относятся самокорректирующиеся методы первого и второго порядков, удовлетворяющие соответственно уравнениям:

$$\{\Delta \dot{\mathbf{p}}\} + z \{\Delta \mathbf{p}\} = 0 \quad (1.168)$$

и

$$\{\Delta \ddot{\mathbf{p}}\} + c \{\Delta \dot{\mathbf{p}}\} + z \{\Delta \mathbf{p}\} = 0. \quad (1.169)$$

Отметим, что сходимость итерационных методов существенно зависит от точности начального приближения. При выборе начального приближения в нелинейных задачах практически можно ориентироваться лишь на линейное приближение той же задачи. И если влияние нелинейности мало, то начальное приближение оказывается достаточно





где начальное приближение  $\bar{x}^{(0)} \approx \bar{x}^*$ . Заметим, что если процесс итерации (1.172) сходится, то предельное значение

$$\bar{\xi} = \lim_{p \rightarrow \infty} \bar{x}^{(p)} \quad (1.173)$$

обязательно является корнем уравнения (1.171). Действительно, предполагая, что соотношение (1.173) выполнено, и переходя к пределу в равенстве (1.172) при  $p \rightarrow \infty$ , в силу непрерывности функции  $\bar{\varphi}(\bar{x})$  будем иметь

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \bar{x}^{(p+1)} = \bar{\varphi} \left( \lim_{p \rightarrow \infty} \bar{x}^{(p)} \right),$$

т.е.

$$\bar{\xi} = \bar{\varphi}(\bar{\xi}).$$

Таким образом,  $\bar{\xi}$  есть корень векторного уравнения (1.171).

Если, сверх того, все приближения  $\bar{x}^{(p)}$  ( $p = 0, 1, 2, \dots$ ) принадлежат области  $\omega$  и  $\bar{x}^*$  – единственный корень системы (1.171) в  $\omega$ , то, очевидно,

$$\bar{\xi} = \bar{x}^*.$$

Метод итерации может быть применен также к общей системе

$$\bar{f}(\bar{x}) = 0, \quad (1.174)$$

где  $\bar{f}(\bar{x})$  – вектор-функция, определенная и непрерывная в окрестности  $\omega$  изолированного вектор-корня  $\bar{x}^*$ . Например, перепишем эту систему в следующем виде:

$$\bar{x} = \bar{x} + \Lambda \bar{f}(\bar{x}),$$

где  $\Lambda$  – неособенная матрица. Введя обозначение

$$\bar{x} + \Lambda \bar{f}(\bar{x}) = \bar{\varphi}(\bar{x}), \quad (1.175)$$

будем иметь

$$\bar{x} = \bar{\varphi}(\bar{x}). \quad (1.176)$$





Из формул (1.180) и (1.180<sup>\*</sup>) вытекает, что под производной  $f'(\bar{x})$  следует понимать матрицу Якоби системы функций  $f_1, f_2, \dots, f_n$  относительно переменных  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , т.е.

$$f'(\bar{x}) = W(\bar{x}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{bmatrix},$$

или в краткой записи

$$f'(\bar{x}) = W(\bar{x}) = \left[ \frac{\partial f_i}{\partial x_j} \right] \quad (i, j = 1, 2, \dots, n).$$

Система (1.180<sup>\*</sup>) представляет собой линейную систему относительно поправок  $\varepsilon_i^{(p)}$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) с матрицей  $W(\bar{x})$ ; поэтому формула (1.180) может быть записана в следующем виде:

$$\bar{f}(\bar{x}^{(p)}) + W(\bar{x}^{(p)})\bar{\varepsilon}^{(p)} = 0.$$

Отсюда, предполагая, что матрица  $W(\bar{x}^{(p)})$  неособенная, получим:

$$\bar{\varepsilon}^{(p)} = -W^{-1}(\bar{x}^{(p)})\bar{f}(\bar{x}^{(p)}).$$

Следовательно,

$$\bar{x}^{(p+1)} = \bar{x}^{(p)} - W^{-1}(\bar{x}^{(p)})\bar{f}(\bar{x}^{(p)}) \quad (p = 0, 1, 2, \dots) \quad (1.181)$$

В полученном выражении и заключается метод Ньютона.

За нулевое приближение  $\bar{x}^{(0)}$  можно взять грубое значение искомого корня.

Использование метода Ньютона резко уменьшает число итераций. Недостатком метода является необходимость уточнения и обращения матрицы жесткости на каждом шагу.

## 2. ПОСТРОЕНИЕ МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ

### 2.1. Построение статической математической модели решения задачи изгиба железобетонной балки

Напряжения в бетоне и арматуре описываются зависимостями

$$\sigma_{\text{б}} = E_{\text{б}}\varepsilon - A_3^{\text{б}}\varepsilon^3. \quad (2.1)$$

$$\sigma_{\text{а}} = E_{\text{а}}\varepsilon - A_3^{\text{а}}\varepsilon^3. \quad (2.2)$$

Коэффициенты  $A_3^{\text{а}}$  и  $A_3^{\text{б}}$  определяются по формулам:

$$A_3^{\text{б}} = \frac{4}{27} \cdot \frac{E_{\text{б}}^3}{R_{\text{б}}^2}, \quad (2.3)$$

$$A_3^{\text{а}} = \frac{4}{27} \cdot \frac{E_{\text{а}}^3}{\sigma_{\text{пн(а)}}^2}, \quad (2.4)$$

где  $E_{\text{а}}$  – модуль упругости стали;  $E_{\text{б}}$  – начальный модуль упругости бетона;  $\sigma_{\text{пн(а)}}$  – предел временного сопротивления стали;  $R_{\text{б}}$  – расчетная прочность бетона,  $R_{\text{б}} = \sigma_{\text{пн(б)}}$ .

Деформация  $\varepsilon$  определяется с использованием гипотезы плоских сечений (рис. 2.1):

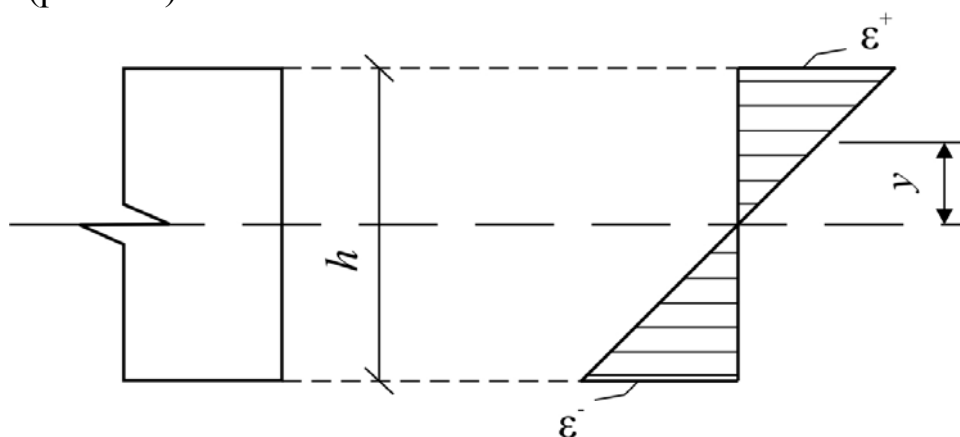


Рис. 2.1. Гипотеза плоских сечений

$$\varepsilon_x = -y\ddot{v} + \frac{1}{2}\dot{v}^2, \quad (2.5)$$

где  $y$  – геометрическая координата;  $v$  – вертикальное перемещение (прогиб).

Второе слагаемое в формуле (2.5) настолько мало, что может не учитываться в расчете:

$$\varepsilon_x = -y\ddot{v}. \quad (2.6)$$

Дифференциальное уравнение равновесия балки получим в результате ряда преобразований:

$$\sum M_{\text{внеш}} = \sum M_{\text{внут}}, \quad (2.7)$$

$$\sum M_{\sigma} + \sum M_a - \sum M_{\text{внеш}} = 0. \quad (2.8)$$

Учет внутренних усилий в бетоне (рис. 2.2):

$$\sum M_{\sigma} = \int_A \sigma_x y dA = b \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_x y dy = b \int_0^{h/2} \sigma_x y dy + b \int_{-h/2}^0 \sigma_x y dy. \quad (2.9)$$

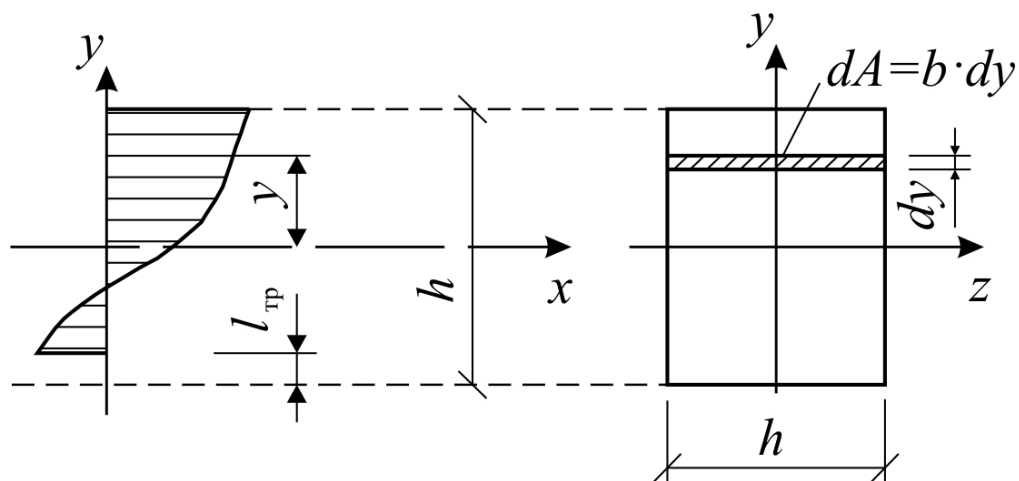


Рис. 2.2. Учет внутренних усилий в бетоне

Полагая, что дробление сжатой зоны при продольном изгибе не наступит, для быстроты вычисления момент в бетоне от изгиба можно вычислить с помощью интеграла:

$$\begin{aligned}
 b \int_0^{h/2} \sigma_x y dy &= b \int_0^{h/2} (E_6 \varepsilon_x - A_3^6 \varepsilon_x^3) y dy = \\
 &= b E_6 \int_0^{h/2} (-y \ddot{v}) y dy - b A_3^6 \int_0^{h/2} (-y \ddot{v})^3 y dy = \\
 &= -\ddot{v} E_6 b \int_0^{h/2} y^2 dy + \ddot{v}^3 A_3^6 b \int_0^{h/2} y^4 dy = -\ddot{v} E_6 \frac{bh^3}{24} + \ddot{v}^3 A_3^6 \frac{bh^5}{160}.
 \end{aligned} \tag{2.10}$$

Обозначим

$$E_6 \frac{bh^3}{24} = k_1, \tag{2.11}$$

$$A_3^6 \frac{bh^5}{160} = k_2. \tag{2.12}$$

Тогда первое слагаемое в формуле (2.9) примет вид:

$$b \int_0^{h/2} \sigma_x y dy = -\ddot{v} k_1 + \ddot{v}^3 k_2. \tag{2.13}$$

Для определения момента в бетоне растянутой зоны, где возможно образование трещин, численное интегрирование заменяем суммированием. Для этого делим площадь сечения балки в случае плоского изгиба на  $\beta$  участков-полос (для практического расчета  $\beta=100$ ) шириной  $d$  (рис. 2.3).

$$\begin{aligned}
 b \int_{-h/2}^0 \sigma_x y dy &\approx b \sum_{j=1}^{\beta/2} db \sigma_j \left( jd - \frac{d}{2} \right) = \\
 &= db^2 \sum_{j=1}^{\beta/2} \sigma_j \left( jd - \frac{d}{2} \right) = db^2 \sum_{j=1}^{\beta/2} (-E_6 y \ddot{v} + \\
 &+ A_3^6 y^3 \ddot{v}^3) \left( jd - \frac{d}{2} \right) = -db^2 \sum_{j=1}^{\beta/2} \left( E_6 \ddot{v} - A_3^6 \left( jd - \frac{d}{2} \right)^2 \ddot{v}^3 \right) \left( jd - \frac{d}{2} \right)^2
 \end{aligned} \tag{2.14}$$



Формула (2.9) приобретает вид:

$$\sum M_6 = -\dot{v}k_1 + \dot{v}^3k_2 - db^2 \sum_{j=1}^{\beta/2} \left( E_6 \ddot{v} - A_3^6 \left( jd - \frac{d}{2} \right)^2 \dot{v}^3 \right) \left( jd - \frac{d}{2} \right)^2. \quad (2.15)$$

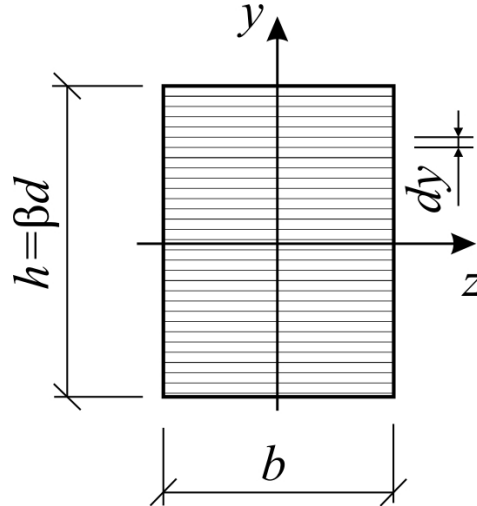


Рис. 2.3. Замена численного интегрирования суммированием

Учет внутренних усилий в арматуре (рис. 2.4):

$$\sum M_a = 2N'_s h_1 + 2N_s h_2 \quad (2.16)$$

$$N'_s = \sigma'_a A'_s, \quad (2.17)$$

$$N_s = \sigma_a A_s, \quad (2.18)$$

$$\sigma_a = E_a \varepsilon - A_3^a \varepsilon^3. \quad (2.19)$$

Тогда

$$\sum M_a = 2 \left[ E_a (-h_1^2 \ddot{v}) - A_3^a (-h_1^2 \ddot{v})^3 \right] A'_s + 2 \left[ E_a (h_2^2 \ddot{v}) - A_3^a (h_2^2 \ddot{v})^3 \right] A_s. \quad (2.20)$$

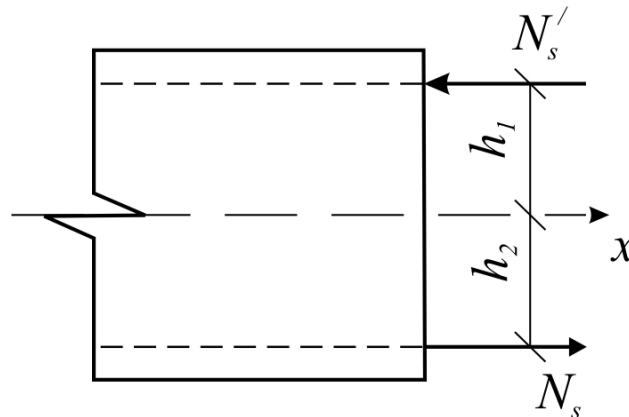


Рис. 2.4. Учет внутренних усилий в арматуре

Дифференциальное уравнение равновесия балки имеет вид:

$$\begin{aligned}
 & -\ddot{v}k_1 + \ddot{v}^3k_2 - db^2 \sum_{j=1}^{\beta/2} \left( E_6 \ddot{v} - A_3^6 \left( jd - \frac{d}{2} \right)^2 \ddot{v}^3 \right) \left( jd - \frac{d}{2} \right)^2 + \\
 & + 2 \left[ E_a (-h_1^2 \ddot{v}) - A_3^a (-h_1^2 \ddot{v})^3 \right] A'_s + \\
 & + 2 \left[ E_a (h_2^2 \ddot{v}) - A_3^a (h_2^2 \ddot{v})^3 \right] A_s - \sum M_{\text{внеш}} = 0.
 \end{aligned} \tag{2.21}$$

Для решения дифференциального уравнения используем конечно-разностную аппроксимацию производных; для этого делим балку на  $n$  участков (для практического расчета  $n=6$ ) длиной  $\Delta$  (рис. 2.5):

$$\ddot{v} = \frac{v_{i-1} - 2v_i + v_{i+1}}{\Delta^2}. \tag{2.22}$$

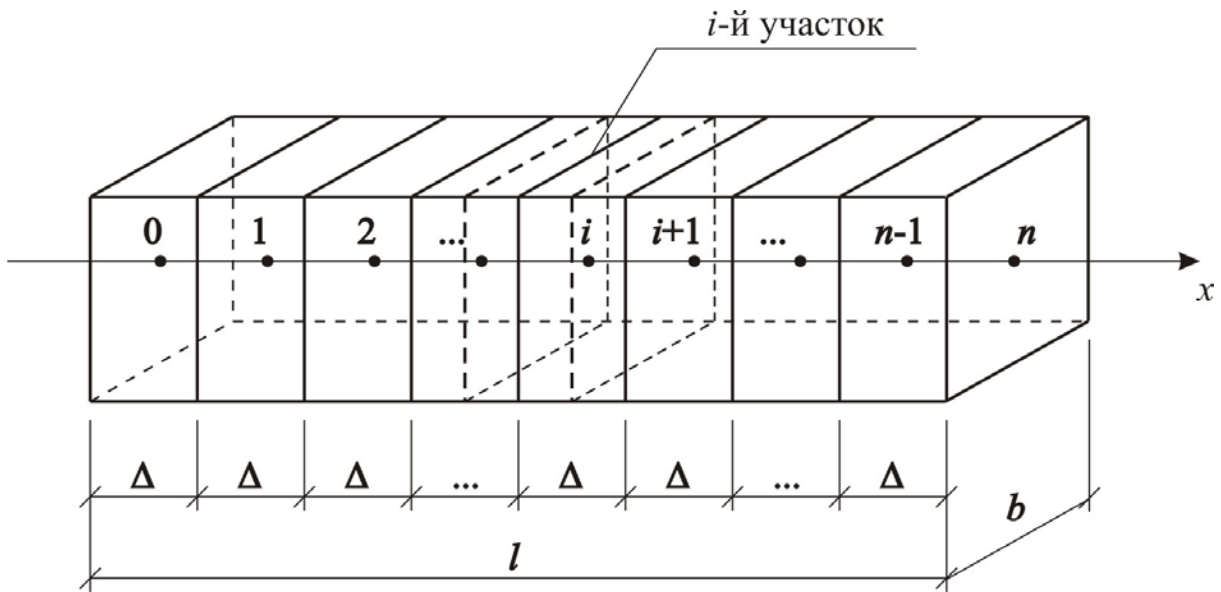


Рис. 2.5. Деление балки на  $n$  участков

Дифференциальное уравнение (2.21) заменяем системой нелинейных уравнений:

$$\begin{aligned}
& -\frac{v_{i-1} - 2v_i + v_{i+1}}{\Delta^2} k_1 + \left( \frac{v_{i-1} - 2v_i + v_{i+1}}{\Delta^2} \right)^3 k_2 - \\
& - db^2 \sum_{j=1}^{B/2} \left( E_6 \frac{v_{i-1} - 2v_i + v_{i+1}}{\Delta^2} - A_3^6 \left( jd - \frac{d}{2} \right)^2 \left( \frac{v_{i-1} - 2v_i + v_{i+1}}{\Delta^2} \right)^3 \right) \left( jd - \frac{d}{2} \right)^2 + \\
& + 2 \left[ E_a \left( -h_1^2 \frac{v_{i-1} - 2v_i + v_{i+1}}{\Delta^2} \right) - A_3^a \left( -h_1^2 \frac{v_{i-1} - 2v_i + v_{i+1}}{\Delta^2} \right)^3 \right] A'_s + \\
& + 2 \left[ E_a \left( h_2^2 \frac{v_{i-1} - 2v_i + v_{i+1}}{\Delta^2} \right) - A_3^a \left( h_2^2 \frac{v_{i-1} - 2v_i + v_{i+1}}{\Delta^2} \right)^3 \right] A_s - \sum M_{\text{внеш}} = 0.
\end{aligned} \tag{2.23}$$

Хрупкое разрушение связано с образованием и развитием трещин. В дальнейшем будем рассматривать трещины нормального отрыва. В задачах динамики высоконагруженных систем в отличие от усталостного трещинообразования трещинообразование вызывается величиной нагрузки, а развивается вследствие ее переменного воздействия. Эту задачу можно рассматривать как задачу малоциклового усталости.

До достижения в крайних волокнах растягивающими напряжениями (или деформациями) некоторых предельных значений внутреннюю статическую неопределимость будем раскрывать на основе обычной гипотезы плоских сечений и условий равновесия твердого нелинейно деформируемого композита.

После достижения в некотором сечении деформаций, равных предельным, в растянутых волокнах образуется трещина, которая может быстро развиваться. Сдерживающее влияние при этом оказывает в основном растянутая стальная арматура.

Для учета трещинообразования используется соотношение

$$\varepsilon^+ \leq [\varepsilon^+], \tag{2.24}$$

где  $[\varepsilon^+]$  – нормативное значение деформации при растяжении.

Учет возможного дробления сжатой зоны балки можно проводить по неравенству

$$|\varepsilon^-| \leq [\varepsilon^-], \quad (2.25)$$

где  $[\varepsilon^-]$  – нормативное значение деформации при сжатии по абсолютной величине.

При невыполнении условия (2.24) участок-полоса (или участки) исключается из расчетной части бетонного сечения (рис. 2.6).

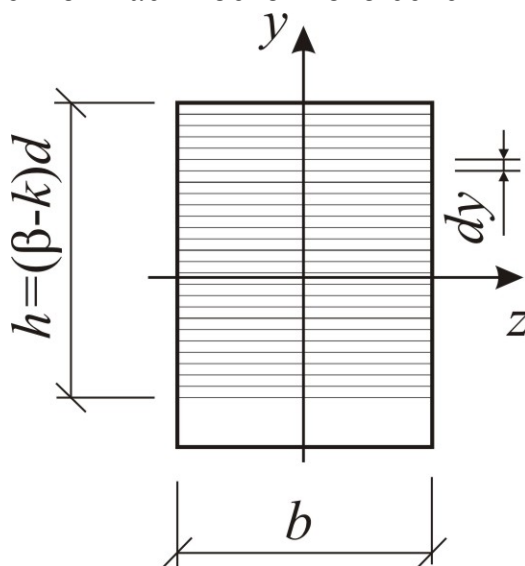


Рис. 2.6. Исключение части сечения из расчета

Полученная система нелинейных уравнений (2.23) и система ограничений (2.24-2.25) используются для определения напряженно-деформированного состояния при действии статической нагрузки.

Математическая модель в общем виде представляет собой систему из уравнений напряженно-деформированного состояния и двух условий равновесия балки как твердого тела:

$$\left. \begin{aligned} \sum_{i=1}^n M_{i, \text{внут}} - \sum_{i=1}^n M_{i, \text{внеш}} &= 0; \\ \sum F_{ky} &= 0; \\ \sum M_A &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (2.26)$$

$$\varepsilon \leq [\varepsilon]$$

или, в развернутом виде:

$$\left. \begin{aligned}
 & - \frac{v_{i-1} - 2v_i + v_{i+1}}{\Delta^2} k_1 + \left( \frac{v_{i-1} - 2v_i + v_{i+1}}{\Delta^2} \right)^3 k_2 - \\
 & - db^2 \sum_{j=1}^{\beta/2} \left( E_6 \frac{v_{i-1} - 2v_i + v_{i+1}}{\Delta^2} - A_3^6 \left( jd - \frac{d}{2} \right)^2 \left( \frac{v_{i-1} - 2v_i + v_{i+1}}{\Delta^2} \right)^3 \right) \left( jd - \frac{d}{2} \right)^2 + \\
 & + 2 \left[ E_a \left( -h_1^2 \frac{v_{i-1} - 2v_i + v_{i+1}}{\Delta^2} \right) - A_3^a \left( -h_1^2 \frac{v_{i-1} - 2v_i + v_{i+1}}{\Delta^2} \right)^3 \right] A'_s + \\
 & + 2 \left[ E_a \left( h_2^2 \frac{v_{i-1} - 2v_i + v_{i+1}}{\Delta^2} \right) - A_3^a \left( h_2^2 \frac{v_{i-1} - 2v_i + v_{i+1}}{\Delta^2} \right)^3 \right] A_s - \sum M_{\text{внеш}} = 0.; \\
 & R_A + R_B - \sum P - ql = 0; \\
 & R_B l - M_P - \frac{ql^2}{2} = 0. \\
 & \varepsilon \leq [\varepsilon].
 \end{aligned} \right\} (2.27)$$

## 2.2. Построение динамической модели колебаний железобетонной балки

Вынужденные колебания балки могут быть вызваны либо кинематическим возбуждением в виде движения одного или нескольких сечений, либо возмущающей силой. Возмущающие силы могут быть гармонического характера ( $F_i = F_0 \sin \omega_i t$ ), оставаться постоянными, изменять свое положение ( $x=vt$ ) и т.д. Так как в дальнейшем будет использоваться прямой метод решения задач динамики – шаговый метод по времени, то можно учесть любой характер изменения нагрузки (рис. 2.7).

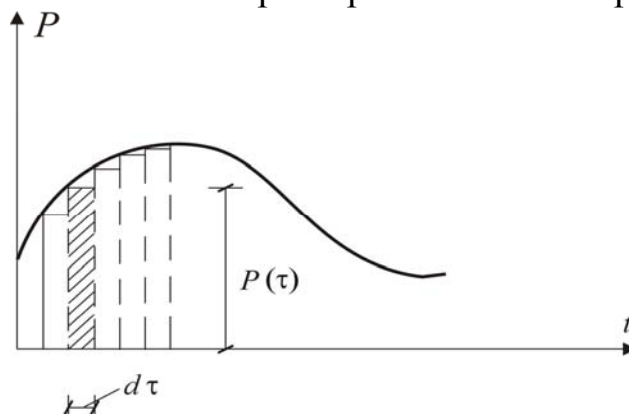


Рис. 2.7. Нагружение как последовательность кратковременных постоянных силовых воздействий

От балки с распределенной массой переходим к системе с конечным числом степеней свободы – балке с сосредоточенными массами (рис. 2.8).

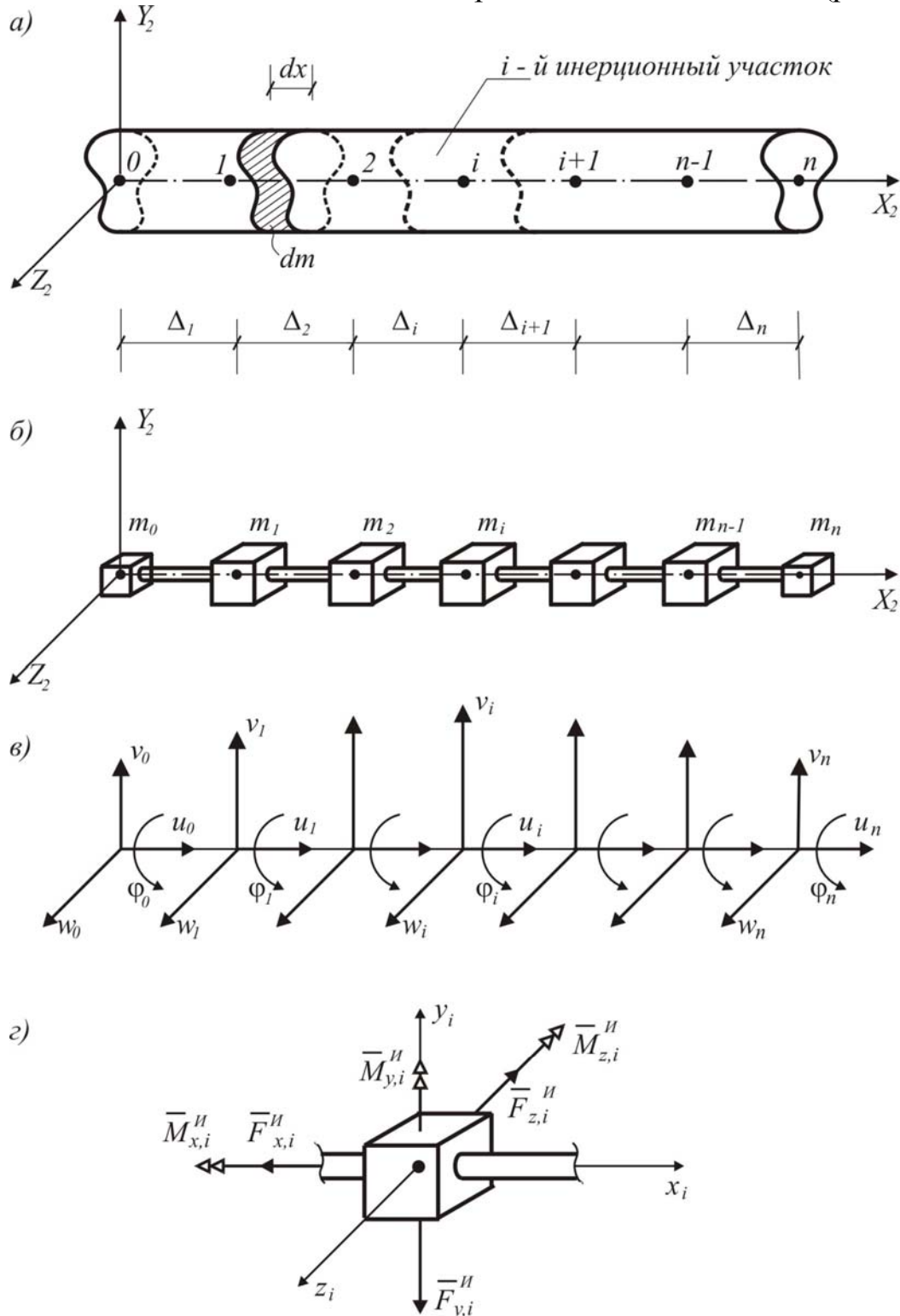


Рис. 2.8. Замена континуальной модели балки дискретной моделью:  
 а – балка с распределенной массой; б – невесомая балка с массами, расположенными в узловых точках; в – инерционные воздействия на  $i$ -ю массу для средних сечений и для крайних сечений

Уравнение динамического равновесия имеет вид

$$\sum M_{\text{внеш}} = \sum M_{\text{внут}},$$

где в момент внешних сил кроме действия возмущающих сил добавляются силы инерции.

В процессе движения на каждую массу действует сила инерции

$$F_i^{\text{и}} = m_i \ddot{v}_i. \quad (2.28)$$

Аппроксимация по геометрической координате остается прежней (2.22), а по временной координате – представляется соотношением

$$\ddot{v}_{i,t} = \frac{v_{i,t-1} - 2v_{i,t} + v_{i,t+1}}{(\Delta t)^2}. \quad (2.29)$$

Уравнение (2.28) с учетом аппроксимации (2.29) принимает вид:

$$F_{i,t}^{\text{и}} = m_i \frac{v_{i,t-1} - 2v_{i,t} + v_{i,t+1}}{(\Delta t)^2}. \quad (2.30)$$

Момент внутренних сил  $i$ -го сечения в момент времени  $t$  определяется соотношением

$$\begin{aligned} \sum M_{it,\text{внут}} = & -\frac{v_{i-1,t} - 2v_{i,t} + v_{i+1,t}}{\Delta^2} k_1 + \left( \frac{v_{i-1,t} - 2v_{i,t} + v_{i+1,t}}{\Delta^2} \right)^3 k_2 - \\ & - db^2 \sum_{j=1}^{\beta/2} \left( E_6 \frac{v_{i-1,t} - 2v_{i,t} + v_{i+1,t}}{\Delta^2} - A_3^6 \left( jd - \frac{d}{2} \right)^2 \left( \frac{v_{i-1,t} - 2v_{i,t} + v_{i+1,t}}{\Delta^2} \right)^3 \right) \left( jd - \frac{d}{2} \right)^2 + \\ & + 2 \left[ E_a \left( -h_1^2 \frac{v_{i-1,t} - 2v_{i,t} + v_{i+1,t}}{\Delta^2} \right) - A_3^a \left( -h_1^2 \frac{v_{i-1,t} - 2v_{i,t} + v_{i+1,t}}{\Delta^2} \right)^3 \right] A'_s + \\ & + 2 \left[ E_a \left( h_2^2 \frac{v_{i-1,t} - 2v_{i,t} + v_{i+1,t}}{\Delta^2} \right) - A_3^a \left( h_2^2 \frac{v_{i-1,t} - 2v_{i,t} + v_{i+1,t}}{\Delta^2} \right)^3 \right] A_s. \end{aligned} \quad (2.31)$$

Момент внешних сил  $i$ -го сечения в момент времени  $t$

$$\sum_{i=1}^n M_{it,\text{внеш}} = \sum_{k=1}^{i-1} M_{kt,\text{ст}} + \sum_{k=1}^{i-1} M_{kt,\text{воз}} + \sum_{k=1}^{i-1} M_{kt,\text{ин}}, \quad (2.32)$$

где  $\sum_{k=1}^{i-1} M_{kt,ст}$  – момент статических сил;  $\sum_{k=1}^{i-1} M_{kt,воз}$  – момент возмущающих сил;  $\sum_{k=1}^{i-1} M_{kt,ин}$  – момент сил инерции.

На каждом временном шаге решаем статическую задачу, основываясь на принципе Даламбера.

Математическая модель в общем виде представляет собой систему из уравнений напряженно-деформированного состояния  $i$ -го сечения в момент времени  $t$  и двух условий равновесия балки как твердого тела:

$$\left. \begin{aligned} \sum_{i=1}^n M_{it,внут} - \sum_{i=1}^n M_{it,внеш} &= 0; \\ \sum F_{ky} &= 0; \\ \sum M_A &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (2.33)$$

или, в развернутом виде:

$$\left. \begin{aligned} &-\frac{v_{i-1,t} - 2v_{i,t} + v_{i+1,t}}{\Delta^2} k_1 + \left( \frac{v_{i-1,t} - 2v_{i,t} + v_{i+1,t}}{\Delta^2} \right)^3 k_2 - \\ &- db^2 \sum_{j=1}^{\beta/2} \left( E_6 \frac{v_{i-1,t} - 2v_{i,t} + v_{i+1,t}}{\Delta^2} - \right. \\ &- A_3^6 \left( jd - \frac{d}{2} \right)^2 \left( \frac{v_{i-1,t} - 2v_{i,t} + v_{i+1,t}}{\Delta^2} \right)^3 \left. \right) \left( jd - \frac{d}{2} \right)^2 + \\ &+ 2 \left[ E_a \left( -h_1^2 \frac{v_{i-1,t} - 2v_{i,t} + v_{i+1,t}}{\Delta^2} \right) - A_3^a \left( -h_1^2 \frac{v_{i-1,t} - 2v_{i,t} + v_{i+1,t}}{\Delta^2} \right)^3 \right] A'_s + \\ &+ 2 \left[ E_a \left( h_2^2 \frac{v_{i-1,t} - 2v_{i,t} + v_{i+1,t}}{\Delta^2} \right) - A_3^a \left( h_2^2 \frac{v_{i-1,t} - 2v_{i,t} + v_{i+1,t}}{\Delta^2} \right)^3 \right] A_s - \\ &-\sum_{k=1}^{i-1} M_{kt,ст} - \sum_{k=1}^{i-1} M_{kt,воз} - \sum_{k=1}^{i-1} M_{kt,ин} = 0; \\ &R_{A,t} + R_{B,t} - \sum P_t - \sum F_{t,ин} - ql = 0; \\ &R_{B,t} l - \sum M_{P_t} - \sum M_{F_{ин,t}} - \frac{ql^2}{2} = 0. \end{aligned} \right\} \quad (2.34)$$



### 2.3. Построение динамической модели колебаний железобетонной балки с гасителем

Для учета работы гасителя используется уравнение

$$m_{\Gamma} \ddot{v}_{\Gamma}(t) + c_{\Gamma} [y_{\Gamma}(t) - y_0(t)] = 0, \quad (2.35)$$

где  $m_{\Gamma}$  – масса гасителя;  $c_{\Gamma}$  – жесткость упругой связи гасителя,  $v_{\Gamma}(t)$  – динамический прогиб балки;  $y_{\Gamma}(t)$  и  $y_0(t)$  – координаты точки подвеса и массы гасителя, отсчитываемые от положения их статического равновесия.

Математическая модель в общем виде представляет собой систему из уравнений напряженно-деформированного состояния  $i$ -го сечения в момент времени  $t$  и двух условий равновесия балки как твердого тела:

$$\left. \begin{aligned} \sum_{i=1}^n M_{it, \text{внут}} - \sum_{i=1}^n M_{it, \text{внеш}} &= 0; \\ m_{\Gamma} \ddot{v}_{\Gamma}(t) + c_{\Gamma} [y_{\Gamma}(t) - y_0(t)] &= 0; \\ \sum F_{ky} &= 0; \\ \sum M_A &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (2.36)$$

или, в развернутом виде:

$$\begin{aligned}
& -\frac{v_{i-1,t} - 2v_{i,t} + v_{i+1,t}}{\Delta^2} k_1 + \left( \frac{v_{i-1,t} - 2v_{i,t} + v_{i+1,t}}{\Delta^2} \right)^3 k_2 - \\
& -db^2 \sum_{j=1}^{\beta/2} \left( E_6 \frac{v_{i-1,t} - 2v_{i,t} + v_{i+1,t}}{\Delta^2} - \right. \\
& \left. -A_3^6 \left( jd - \frac{d}{2} \right)^2 \left( \frac{v_{i-1,t} - 2v_{i,t} + v_{i+1,t}}{\Delta^2} \right)^3 \right) \left( jd - \frac{d}{2} \right)^2 + \\
& +2 \left[ E_a \left( -h_1^2 \frac{v_{i-1,t} - 2v_{i,t} + v_{i+1,t}}{\Delta^2} \right) - A_3^a \left( -h_1^2 \frac{v_{i-1,t} - 2v_{i,t} + v_{i+1,t}}{\Delta^2} \right)^3 \right] A'_s + \\
& +2 \left[ E_a \left( h_2^2 \frac{v_{i-1,t} - 2v_{i,t} + v_{i+1,t}}{\Delta^2} \right) - A_3^a \left( h_2^2 \frac{v_{i-1,t} - 2v_{i,t} + v_{i+1,t}}{\Delta^2} \right)^3 \right] A_s - \\
& - \sum_{k=1}^{i-1} M_{kt,CT} - \sum_{k=1}^{i-1} M_{kt,BO3} - \sum_{k=1}^{i-1} M_{kt,HH} = 0; \\
& m_\Gamma \ddot{y}_\Gamma(t) + c_\Gamma [y_\Gamma(t) - y_0(t)] = 0; \\
& R_{A,t} + R_{B,t} - \sum P_t - \sum F_{t,HH} - ql = 0; \\
& R_{B,t} l - \sum M_{P_t} - \sum M_{F_{HH,t}} - \frac{ql^2}{2} = 0.
\end{aligned} \tag{2.37}$$

### 3. ЧИСЛЕННЫЕ ЭКСПЕРИМЕНТЫ

Разработанная математическая модель динамики железобетонной балки с учетом трещинообразования использовалась при проведении численных экспериментов. Для их выполнения была составлена программа на языке программирования высокого уровня Microsoft FORTRAN 95.

Выбор программной среды был обусловлен рядом преимуществ Fortran. Одно из основных – это богатая коллекция написанных на нем подпрограмм и библиотек, прежде всего математических. Большинство таких библиотек доступны в исходных кодах, хорошо документированы, отлажены и весьма эффективны. Благодаря этому Fortran широко используется в первую очередь для научных и инженерных вычислений. Кроме того, сильной стороной языка является высокая степень переносимости исходного кода между различными платформами. К плюсам можно также отнести простые конструкции алгоритмов и компилятор.

#### 3.1 Программа расчета железобетонной балки на динамические воздействия (Microsoft FORTRAN 95)

```
program Balka_dyn  
! x(i)- неизвестные  
! xguess(n)-начальные значения неизвестных  
  
    use msimsl  
    integer itmax,n,i,koeff  
    real errrel,time,delt,tt  
    parameter (n=8)  
    integer nout  
    real fnorm,x(8),xguess(8),V(8),W(8)  
    common time,delt,tt,koeff,V,W  
  
    external FCN  
  
! Решение системы нелинейных уравнений
```

```
data xguess/-1.612,-2.757,-3.169,-2.757,-1.612,0,6,6/
```

```
koeff=0  
delt=0.001  
time=0.1
```

```
errrel=0.001d0  
itmax=200
```

```
5 call UMACH (2, nout)  
call NEQNF (FCN,errrel,n,itmax,xguess,x,fnorm)
```

```
if (koeff<1000) then  
  write(10,*) (x(i), i=1,n)  
  else  
  goto 55  
end if
```

```
do 1 i=1,n  
xguess(i)=x(i)  
1 continue
```

```
do 8 i=1,n  
V(i)=W(i)  
W(i)=x(i)  
8 continue
```

```
write (*,*) (koeff)  
write (*,*)(x(i), i=1,n)  
koeff=koeff+1  
tt=koeff*delt
```

```
errrel=0.001d0  
itmax=200
```

```
goto 5
```

55 end

! Подпрограмма

```
subroutine FCN (x,F,n)

common time,delt,tt,koeff,V,W
integer n,i,j,jj
real l,b,h,delta,As,hs,d,tt
real q,Qm
real Eb,Es,A3b,A3s,k1,k2,sigppb,sigpps,gammab,gammas
real epsil,epsild
real Mb1,Nss,Nsr,sumP,sumFi,sumMi,momP,momFi
real x(8),F(8),Mb(5),Ms(5),Fi(6),Mi(5),Mex(5)
real mas(5),In(5),epsi(5),usk(6),P(5),V(8),W(8)
real masgas,cgas,Fup(5),sumFup,momFup

l=600
delta=l/6
b=15
h=20
hs=5
Eb=2600
Es=20000
gammab=24E-4
gammas=78E-4
sigppb=3.4
sigpps=21
As=0.8
q=0.02
epsild=0.0002
A3b=4/27*Eb**3/sigppb**2
A3s=4/27*Es**3/sigpps**2
k1=A3b*b*h**5/160
k2=b*h**3*Eb/24
d=h/100
Qm=-q*l
sumP=0
```

```

sumFi=0
sumMi=0
momP=0
momFi=0
sumFup=0
momFup=0

do 3 j=1,n-2
  if (j<=5) then

    if (j==1) then
Mb(j)=((-2*x(j)+x(j+1))/delta**2)**3*k1-(-2*x(j)+x(j+1))/delta**2*k2
    end if
    if (j==n-3) then
Mb(j)=((x(j-1)-2*x(j))/delta**2)**3*k1-(x(j-1)-2*x(j))/delta**2*k2
    end if
    if (j>1) then
      if (j<n-3) then
Mb(j)=((x(j-1)-2*x(j)+x(j+1))/delta**2)**3*k1-(x(j-1)-
-2*x(j)+x(j+1))/delta**2*k2
      end if
    end if

    do 4 i=50,1,-1

      if (j==1) then
epsil=(i*d-d/2)*(-2*x(j)+x(j+1))/delta**2
      end if
      if (j==n-3) then
epsil=(i*d-d/2)*(x(j-1)-2*x(j))/delta**2
      end if
      if (j>1) then
        if (j<n-3) then
epsil=(i*d-d/2)*(x(j-1)-2*x(j)+x(j+1))/delta**2
        end if
      end if
    end if
  end if
end do

```

!Проверка условия трещинообразования

```

if (epsil<epsild) then
Mb1=b*d*(Eb*epsil-A3b*epsil**3)*(i*d-d/2)
Mb(j)=Mb(j)+Mb1
end if

```

```

4      continue

```

```

      if (j==1) then
Nsr=(Es*(hs*(-2*x(j)+x(j+1))/delta**2)-A3s*(hs*
*(-2*x(j)+x(j+1))/delta**2)**3)*As
end if
      if (j==n-3) then
Nss=(Es*(-hs*(x(j-1)-2*x(j))/delta**2)-A3s*(-hs*(x(j-1)-
-2*x(j))/delta**2)**3)*As
Nsr=(Es*(hs*(x(j-1)-2*x(j))/delta**2)-A3s*(hs*(x(j-1)-
-2*x(j))/delta**2)**3)*As
end if
if (j>1) then
      if (j<n-3) then
Nss=(Es*(-hs*(x(j-1)-2*x(j)+x(j+1))/delta**2)-A3s*(-hs*(x(j-1)-
-2*x(j)+x(j+1))/delta**2)**3)*As
Nsr=(Es*(hs*(x(j-1)-2*x(j)+x(j+1))/delta**2)-A3s*(hs*(x(j-1)-
-2*x(j)+x(j+1))/delta**2)**3)*As
end if
end if
Ms(j)=2*hs*(Nss+Nsr)
mas(j)=delta*b*h*gammab+4*As*delta*gammas
end if

```

```

      masgas=(1*b*h*gammab+4*As*1*gammas)/12
      cgas=masgas*(0.95*36.32)**2

```

```

      Fup(1)=0
      Fup(2)=0
      Fup(3)=cgas*(x(6)-x(3))/(10**5)
      Fup(4)=0
      Fup(5)=0

```

$P(1)=0$   
 $P(2)=0$   
 $P(3)=\sin(0.95*36.32*tt)$   
 $P(4)=0$   
 $P(5)=0$

if (tt==0) then  
 $W(1)=-1.612$   
 $W(2)=-2.757$   
 $W(3)=-3.169$   
 $W(4)=W(2)$   
 $W(5)=W(1)$   
 $W(6)=0$   
 $V(j)=W(j)$   
 if (j==n-2) then  
 goto 10  
 end if  
 $V(j+1)=W(j+1)$   
 end if

10

$usk(j)=(V(j)-2*W(j)+x(j))/(delt*delt)$   
 if (j==n-2) then  
 goto 9  
 end if  
 $usk(j+1)=(V(j+1)-2*W(j+1)+x(j+1))/(delt*delt)$

9

if (j==6) then  
 $Fi(j)=(masgas*usk(j))/(10**5)$   
 end if

if (j<=5) then

$Fi(j)=(mas(j)*usk(j))/(10**5)$

$In(j)=mas(j)*(delta*delta+h*h)/100$

if (j==1) then  
 $epsi(j)=usk(j+1)/(2*delta)$



```

        goto 6
    end if
    if (j==n-3) then
        epsi(j)=-usk(j-1)/(2*delta)
        goto 6
    end if

        epsi(j)=(usk(j+1)-usk(j-1))/(2*delta)

6      Mi(j)=(ln(j)*epsi(j))/(10**5)

        sumP=sumP-P(j)
        sumFi=sumFi-Fi(j)
        sumMi=sumMi-Mi(j)
        momP=momP-P(j)*j*delta
        momFi=momFi-Fi(j)*j*delta
        sumFup=sumFup+Fup(j)
        momFup=momFup+Fup(j)*j*delta

        Mex(j)=-X(7)*j*delta-Mi(j)+q/2*(j*delta)**2

        do 7 jj=1,j-1
            Mex(j)=Mex(j)+Fi(jj)*(j-jj)*delta+P(jj)*(j-jj)*delta-Mi(jj)+Fup(jj)*(j-
jj)
7      continue

        end if
3      continue

        do 2 i=1,n-3
            F(i)=Mb(i)+Ms(i)-Mex(i)
2      continue
        F(6)=Fi(6)+cgas*(x(6)-x(3))/(10**5)
        F(7)=x(7)+x(8)+sumFup+Qm+sumP+sumFi
        F(8)=x(8)*1+momFup+momP+momFi+Qm*(1/2)+sumMi

        return
    end

```

### 3.2. Результаты численных экспериментов

Численный эксперимент начинался с определения свободных колебаний балки с заданными начальными условиями. Из этого расчета определялся диапазон периода свободных колебаний и диапазон собственных частот, соответствующих начальным условиям. Графики, построенные по результатам расчета, приведены на рис. 3.1 и 3.2.

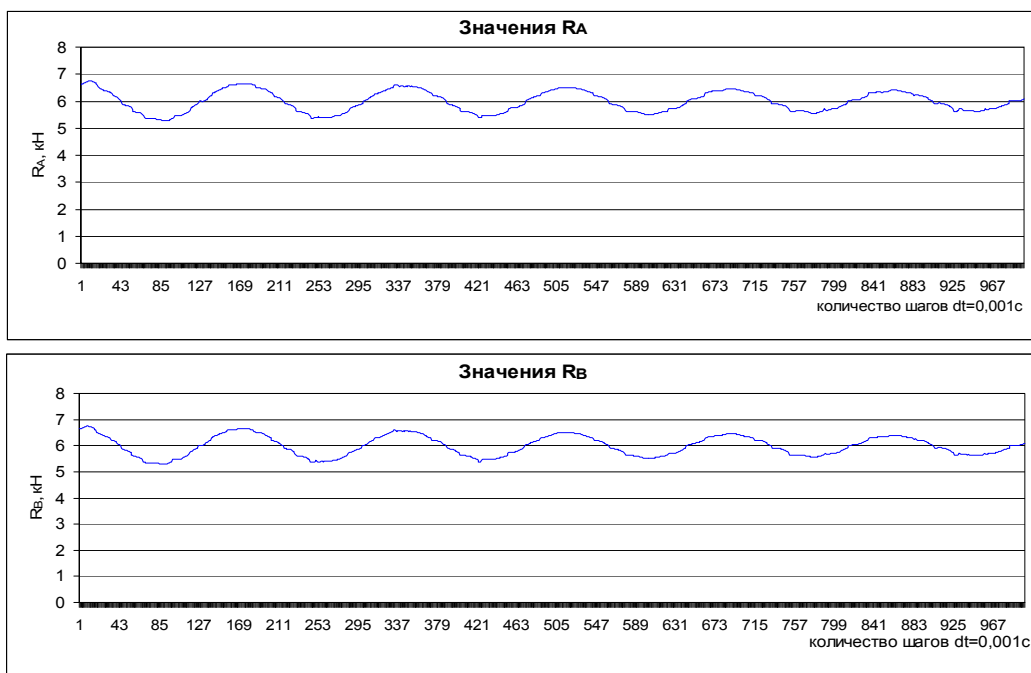


Рис. 3.1. Графики изменения величин опорных реакций при свободных колебаниях балки

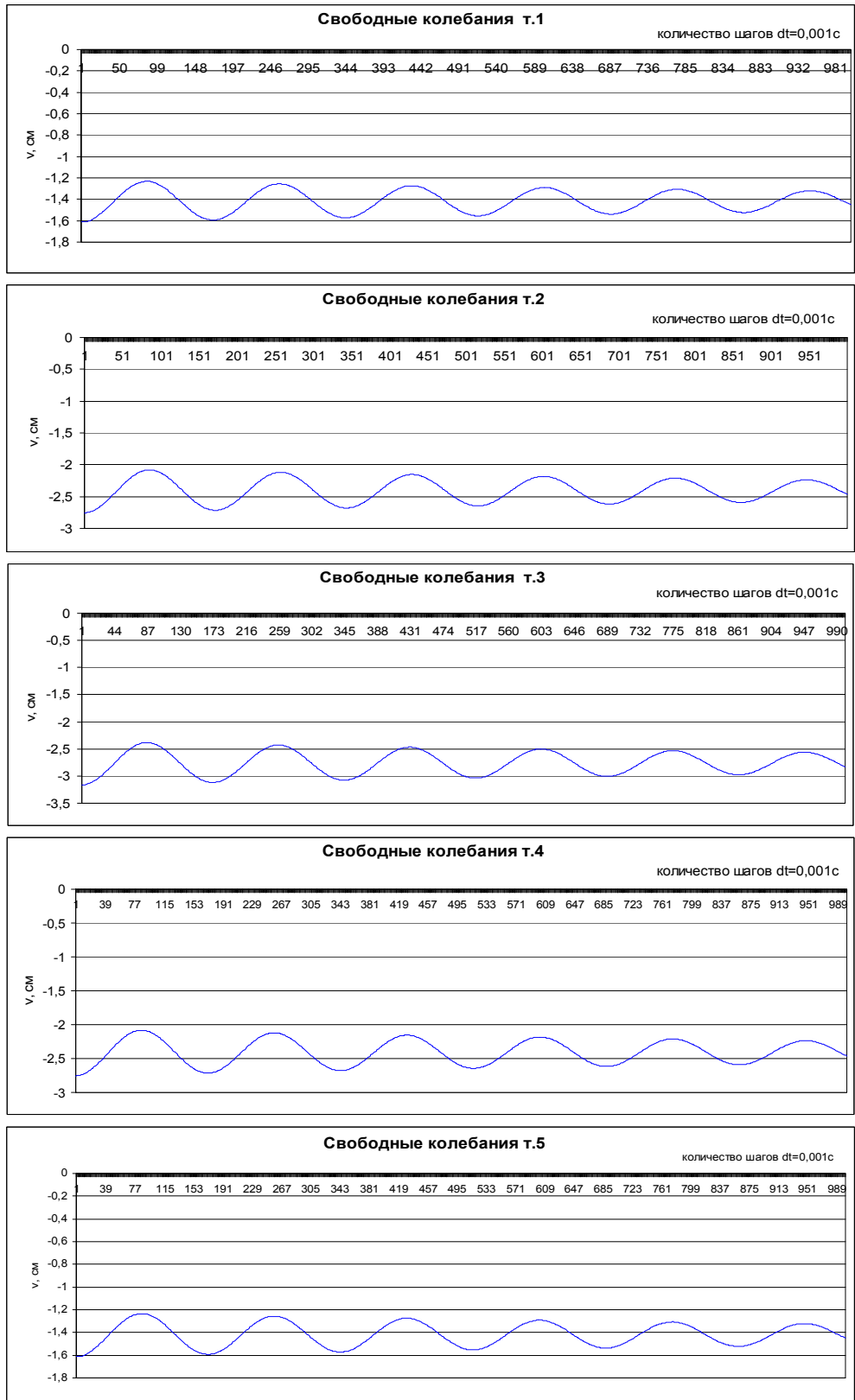


Рис. 3.2. Графики перемещений точек балки при свободных колебаниях

Далее производился расчет вынужденных колебаний балки. При этом частота возмущающей нагрузки принималась близкой к частоте собственных колебаний, т.е. имитировалось явление резонанса. Графики резонансных колебаний балки показаны на рис. 3.3 и 3.4.

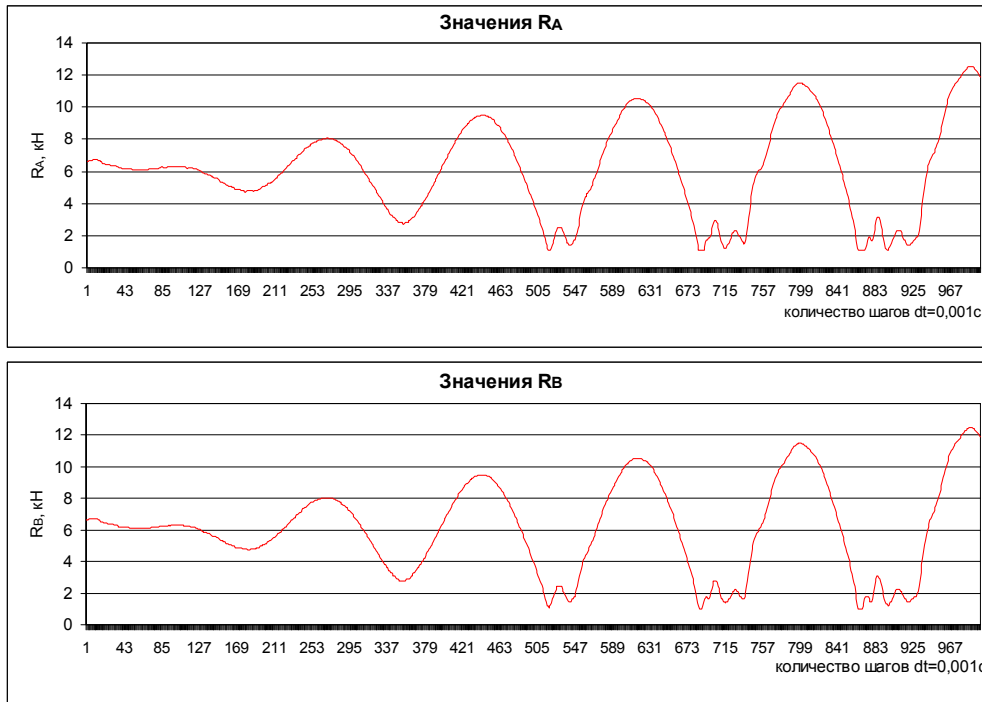


Рис. 3.3. Графики изменения величин опорных реакций при вынужденных колебаниях балки

График развития трещины построен для наиболее невыгодной точки (середина пролета) при отношении частоты возмущающей силы к собственной частоте балки, равном  $\rho/\omega=0,95$  (рис. 3.5).

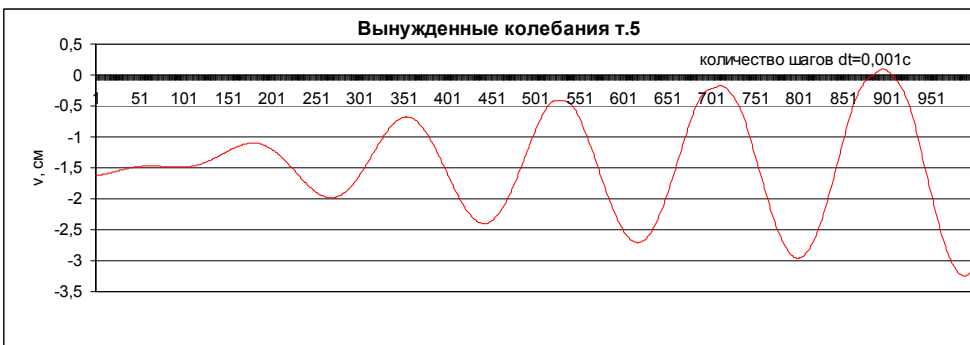
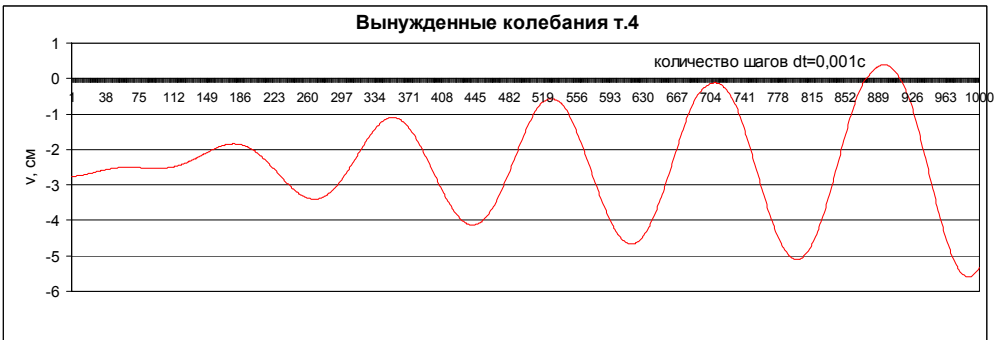


Рис. 3.4. Графики перемещений точек балки при вынужденных колебаниях

### Трещинообразование ( $\rho=0,95w$ )

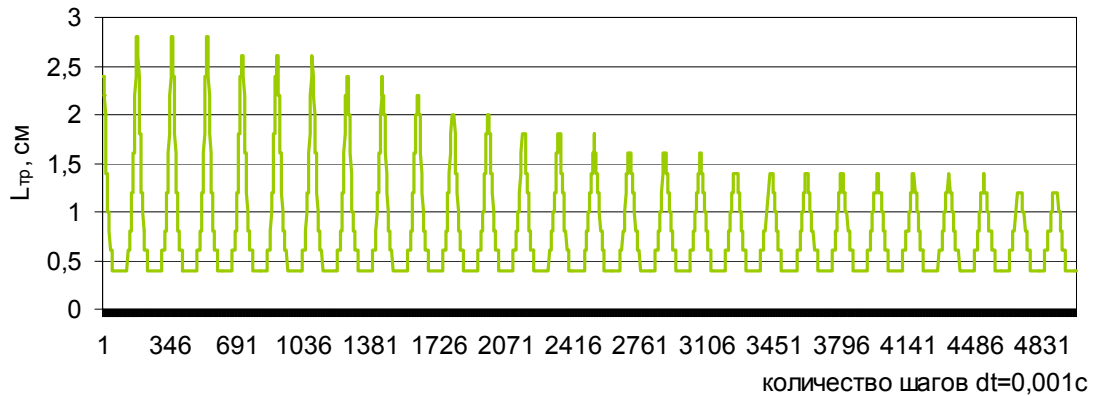


Рис. 3.5. График развития трещины

Для того чтобы избежать явления высокоамплитудных колебаний и образования нормальных трещин большой длины, использовался динамический гаситель колебаний без затухания. Результаты расчетов (рис. 3.6, 3.7) показывают, что применение гасителя дает резкое снижение амплитуды колебаний.

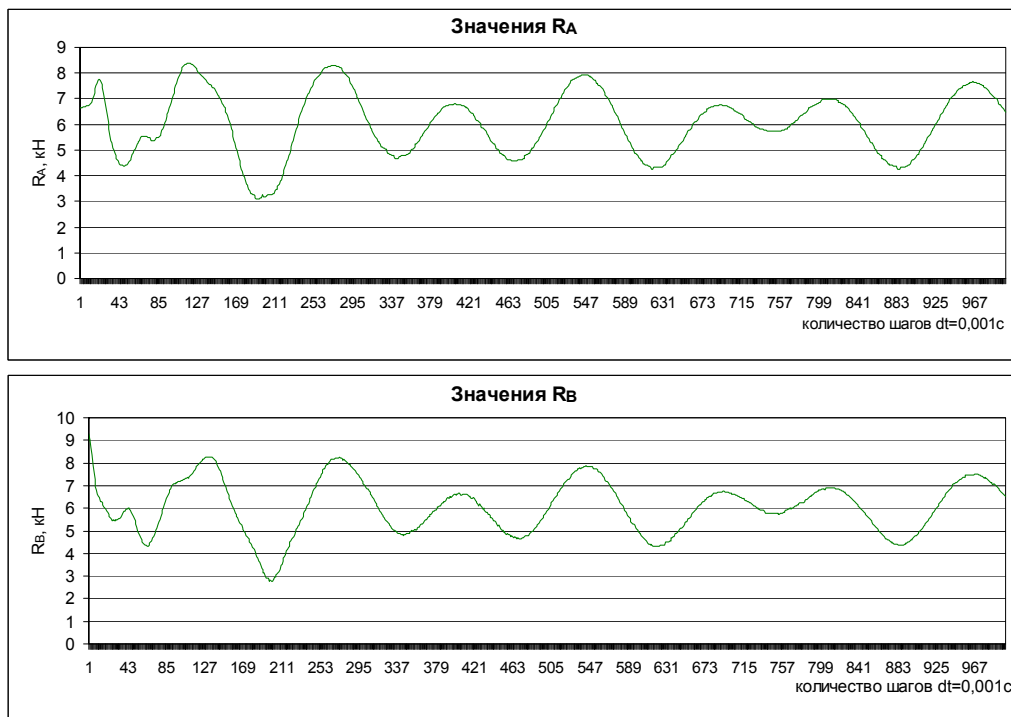


Рис. 3.6. Графики изменения величин опорных реакций при вынужденных колебаниях балки с гасителем

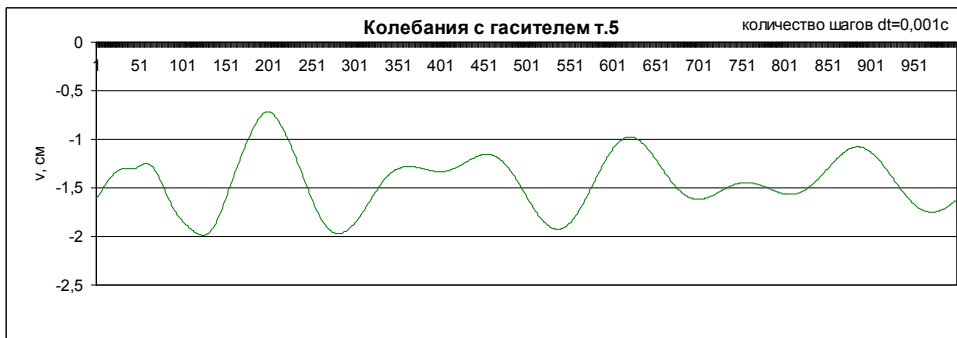


Рис. 3.7. Графики перемещений точек балки при вынужденных колебаниях балки с гасителем

На рис. 3.8 приведены сравнительные графики движения балки при всех видах колебаний.

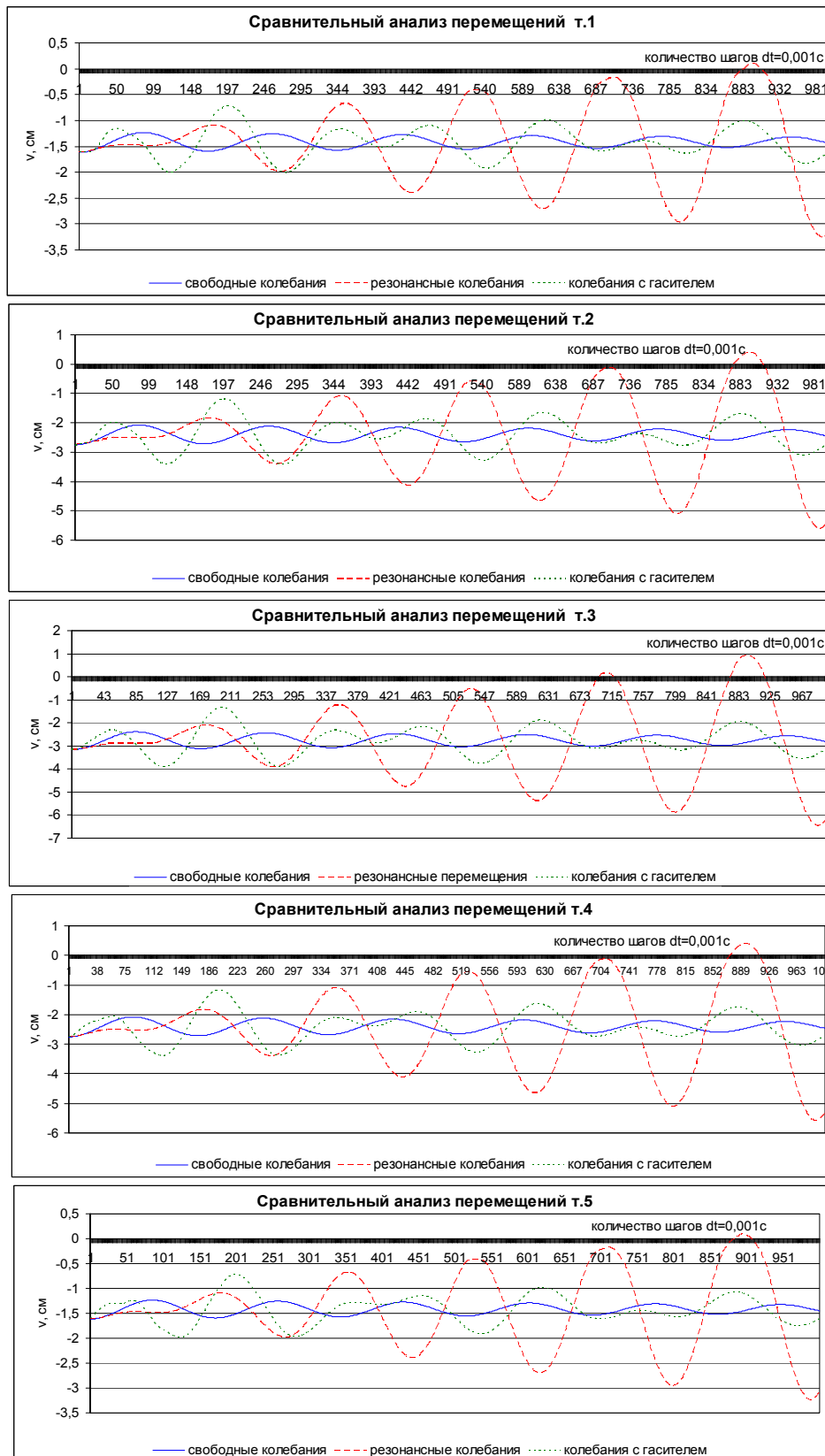


Рис. 3.8. Сравнительные графики перемещений точек балки при всех видах колебаний



Анализ результатов и построенных на их основе графиков показывает эффективность применения динамического гасителя колебаний для балки, находящейся под воздействием внешней гармонической нагрузки. Кроме того, качественное соответствие результатов проведенных исследований и численных экспериментов на основе разработанной математической модели позволяет рекомендовать предложенную методику расчетов для исследования динамики гетерогенных систем с переменной в процессе колебаний жесткостью.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Для железобетонных конструкций в виде балок характерна физически нелинейная работа компонентов композита, т.е. бетона и арматуры. В связи с этим на первом этапе исследований был проведен анализ диаграмм зависимостей напряжений от деформаций бетонов и сталей, а также математических зависимостей, описывающих эти диаграммы с целью выбора формул, наиболее адекватно отражающих работу этих материалов. Для дальнейшего расчета были приняты зависимости в виде кубических полиномов, которые хорошо описывают диаграммы бетона и низколегированных сталей.

В связи с тем, что большое количество железобетонных конструкций работают в условиях высокого уровня напряжений и деформаций, в них возникают и могут развиваться трещины. Авторами был проведен анализ основных положений механики разрушений и выделены две модели трещинообразования:

1) образование трещин в бетоне при превышении деформациями в растянутых волокнах предельных значений. После достижения в некотором сечении деформаций, равных предельным, в растянутых волокнах образуется трещина, которая может быстро развиваться. Сдерживающее влияние при этом оказывает в основном растянутая стальная арматура;

2) введение в расчет коэффициента концентрации кривизны. Процесс движения трещины можно рассматривать как процесс постепенного разделения элемента на две части. При этом происходит постепенный переход от движения, связанного с деформациями, к движению, обусловленному поворотами двух твердых тел. Этот переходный процесс можно рассматривать как локальное изменение кривизны балки в сечении с трещиной.

Расчетная модель балки представлена как невесомый стержень с массами, расположенными в узловых точках. При этом каждая масса обладает двумя степенями свободы: вертикальным перемещением и поворотом. В расчетах конечно-разностная аппроксимация применялась дважды: при аппроксимации кривизны (вторая производная от прогибов по длине стержня) и ускорения (вторая производная от перемещения по времени). При моделировании колебаний учитывалось, что берега трещин удаляются, сходятся и даже взаимодействуют друг с другом, т.е.

в определенный момент времени часть бетонного сечения снова включается в работу.

Для того чтобы избежать явления высокоамплитудных колебаний и образования нормальных трещин большой длины, использовался динамический гаситель колебаний без затухания. Результаты расчетов показывают, что применение гасителя дает резкое снижение амплитуды колебаний. Таким образом, применение динамических гасителей колебаний может существенным образом способствовать продлению срока эксплуатации конструкции, подверженной динамическим нагрузкам, т.к. резко снижается амплитуда вынужденных колебаний.

Модель для решения задач динамики отличается наличием действующих на каждую массу инерционных сил и сил упругости гасителя, дополнительных дифференциальных уравнений движения гасителя, которые после конечно-разностной аппроксимации представляются в виде линейных алгебраических уравнений.

Таким образом, были разработаны математические методы решения задач статического деформирования балок с учетом трещинообразования и физической нелинейности железобетонных балок, математические модели свободных колебаний этих балок, вынужденных колебаний балок при действии произвольных внешних возмущающих нагрузок и исследованы вынужденные колебания балок с устройствами виброзащиты в виде динамических гасителей колебаний.

На основании этих моделей была составлена программа расчета железобетонных балок с гасителями на динамические нагрузки на языке программирования Microsoft FORTRAN 95. Проведен ряд численных экспериментов, по результатам которых были построены сравнительные графики свободных и вынужденных колебаний, график развития трещины для наиболее невыгодной точки.

Разработанная и описанная авторами математическая модель позволяет рассчитывать железобетонные балки с учетом развития трещин на динамические нагрузки.

## БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Шеин, А.И. Метод сеточной аппроксимации элементов в задачах строительной механики нелинейных стержневых систем [Текст] / А.И. Шеин. – Пенза: ПГУАС, 2005. – 248 с.
2. Зенкевич, О. Конечные элементы и аппроксимация [Текст] / О. Зенкевич, Е. Морган. – М.: Мир, 1986. – 318 с.
3. Попов, Н.Н. Железобетонные и каменные конструкции [Текст] / Н.Н. Попов, М. Чарыев. – М.: Высш. шк., 1996. – 256 с.
4. Панарин, Н.Я. Железобетонные конструкции [Текст] / Н.Я. Панарин. – М.: Высш. шк., 1971. – 544 с.
5. Филоненко-Бородич, М.М. Курс сопротивления материалов [Текст] / М.М. Филоненко-Бородич [и др.]. – М.: Гостехиздат, 1956. – Ч. II. – 540 с.
6. Хофф, Н. Продольный прогиб и устойчивость [Текст] / Н. Хофф. – М.: Изд-во иностранной литературы, 1955. – 154 с.
7. Лукаш, П.А. Основы нелинейной строительной механики [Текст] / П.А. Лукаш. – М.: Стройиздат, 1978. – 208 с.
8. Бондаренко, С.В. Усиление железобетонных конструкций при реконструкции зданий [Текст] / С.В. Бондаренко, Р.С. Санжаровский. – М.: Стройиздат, 1990. – 352 с.
9. Геммерлинг, А.В. Несущая способность рам в упругопластической стадии [Текст] / А.В. Геммерлинг, Г.Е. Бельский // Расчет конструкций, работающих в упругопластической стадии: сб. тр. – М.: Госстройиздат, 1961. – 336 с.
10. Астафьев, Д.О. Расчет реконструируемых железобетонных конструкций [Текст] / Д.О. Астафьев. – СПб.: ГАСУ, 1995. – 48 с.
11. Бондаренко, В.М. О методе расчета железобетонных колонн [Текст] / В.М. Бондаренко, Р.С. Санжаровский // СМиРС. – 1984. – №3. – С.74-76.
12. Расчет конструкций, работающих в упруго-пластической стадии [Текст] / под ред. А.В. Геммерлинга // Сб. тр. ЦНИИСК. – 1961. – Вып.7. – 336 с.
13. Яшин, А.В. Прочность и деформация бетона при кратковременной и длительной нагрузках [Текст] / А.В. Яшин // Структура и строительные-технические свойства гидротехнического бетона: сб. тр.

Координационного совещания по гидротехнике. – 1972. – Вып.73. – С.148-152.

14.Гениев, Г.А. Некоторые задачи расчета стержней при общей нелинейной зависимости напряжений от деформации [Текст] / Г.А. Гениев. – Сб. ст. ЦНИИП. – М., 1956.

15.Митасов, В.М. Аналитическое представление диаграмм работы материалов за пределами упругости [Текст] / В.М. Митасов, Д.А. Федоров // СМиРС. – 1987. – №4. – С.19-21.

16.Попов, В.Н. Вопросы динамического расчета железобетонных конструкций [Текст] / В.Н. Попов, О.Г. Кумпяк, В.С. Плевков. – Томск: Изд-во ун-та, 1990. – 286 с.

17.Рябов, Н.С. Учет искривления плоских сечений в теории движения балок [Текст] / Н.С. Рябов // СМиРС. – 1984. – №3. – С.50-55.

18.Смирнов, А.Ф. Статическая и динамическая устойчивость сооружений [Текст] / А.Ф. Смирнов. – М.: Трансжелдориздат, 1947. – 308 с.

19.Филиппов, А.П. Колебания деформируемых систем [Текст] / А.П. Филиппов. – М.: Машиностроение, 1970. – 734 с.

20.Клаф, Р. Динамика сооружений [Текст] / Р. Клаф, Д. Пензиен; пер. с англ. – М.: Стройиздат, 1980. – 320 с.

21.Мак-Кракен, Д. Численные методы и программирование на Фортране [Текст] / Д. Мак-Кракен, У. Дорн; пер. с англ. – М.: Мир, 1977. – 584 с.

22.Габбасов, Р.Ф. Численное решение некоторых динамических задач строительной механики [Текст] / Р.Ф. Габбасов, Д.Н. Низонов // СМиРС. – 1985. – №6. – С.51-55.

23.Коренев, Б.Г. О мерах уменьшения вибраций при прохождении через резонанс во время пуска и остановки оборудования [Текст] / Б.Г. Коренев, Н.А. Пикулев, И.С. Шейнин // Колебания зданий и сооружений. – М.: Госстройиздат, 1963. – С. 74-97.

24.Манапов, А.З. Оптимальные параметры группы виброгасителей при нестабильной частоте гармонического воздействия [Текст] / А.З. Манапов, Н.А. Пикулев // Строительная механика и расчет сооружений. – 1975. – №1. – С. 33-35.

25.Сысоев, В.И. Маятниковый гаситель колебаний сооружений башенного типа [Текст] / В.И.Сысоев // Исследования по динамике сооружений. – М.: Госстройиздат, 1957. – С. 61-82.

26. Коренев, Б.Г. О колебаниях башенных сооружений, оборудованных динамическими гасителями [Текст] / Б.Г. Коренев, Л.М. Резников // Строительная механика и расчет сооружений. – 1968. – №2. – С. 27-31.

27. Коренев, Б.Г. Вынужденные колебания круглой и квадратной пластинки с динамическим гасителем при гармонических воздействиях [Текст] / Б.Г. Коренев, Л.М. Резников // Динамика сооружений. – М.: Стройиздат, 1971. – С. 90-104.

28. Коренев, Б.Г. О колебаниях конструкций с динамическими гасителями при стационарных случайных воздействиях [Текст] / Б.Г. Коренев, Л.М. Резников // Строительная механика и расчет сооружений. – 1969. – №4. – С. 33-39.

29. Коренев, Б.Г. Динамические гасители колебаний [Текст] / Б.Г. Коренев, Л.М. Резников. – М.: Наука, 1988. – 304 с.

30. Манапов, А.З. О колебаниях одномассовой системы с группой виброгасителей при стационарном случайном воздействии [Текст] / А.З. Манапов // Исследования, расчет и испытание пространственных металлических конструкций. – Л., 1975.

31. Сейрет, А. Метод приближенных нормальных форм колебаний для демпфированных систем с сосредоточенными параметрами [Текст] / А. Сейрет, Л. Хауард // Конструирование и технология машиностроения. – Вып.89. – 1967. – №4.

32. Alten, J. Curtis. Response of two-degree of freedom to white noise base excitation / J. Curtis Alten, R. Boykin Thomas. – “J. Acoust. Soc. Am.” 33. – 1961. – №5.

33. Коренев, Б.Г. Гашение колебаний башенных сооружений при сейсмических воздействиях [Текст] / Б.Г. Коренев, Л.М. Резников // Строительная механика и расчет сооружений. – 1971. – №5. – С. 21-25.

34. Беспрозванная, И.М. О применении демпфирующих устройств для гашения автоколебаний высоких сооружений башенного типа [Текст] / И.М. Беспрозванная, В.С. Гвоздев, А.Н. Луговцов, Г.М. Фомин // Строительная механика и расчет сооружений. – 1972. – №6. – С. 40-43.

35. Коренев, Б.Г. О гашении автоколебаний башенных сооружений при действии ветра [Текст] / Б.Г. Коренев, Л.М. Резников // Строительная механика и расчет сооружений. – 1971. – №6. – С. 47-51.

36. Пикулев, Н.А. Теория динамического гасителя колебаний при расстройках [Текст] / Н.А.Пикулев // Борьба с шумом и вибрациями: тр. Всесоюзной конф. – М.: Стройиздат, 1966.

37. Пикулев, Н.А. К вопросу проектирования группы виброгасителей с учетом расстроек [Текст] / Н.А. Пикулев, А.Н. Эрделевский // Строительная механика и расчет сооружений. – 1971. – №5. – С. 4-9.

38. Пикулев, Н.А. Сравнительная оценка группы виброгасителей и одиночного гасителя с суммарной массой [Текст] / Н.А. Пикулев, А.З. Манапов // Исследования, расчет и испытание пространственных металлических конструкций – Л., 1975.

39. Пикулев, Н.А. Применение группы гасителей для уменьшения колебаний высотного здания со стальным каркасом [Текст] / Н.А. Пикулев, А.З. Манапов, А.В. Захаров // Исследования, расчет и испытание пространственных металлических конструкций – Л., 1975.

40. Сысоев, В.И. Вынужденные колебания систем с одной степенью свободы, снабженных ударными гасителями колебаний [Текст] / В.И. Сысоев // Науч. тр. ЦНИИСК. – Вып.17. Исследования по динамике сооружений. – М., 1971.

41. Сысоев, В.И. Вынужденные колебания системы с одной степенью свободы, снабженной ударным гасителем колебаний с возбудителем [Текст] / В.И. Сысоев // Науч. тр. ЦНИИСК. – Вып.43. Динамика сооружений. – М., 1975.

42. Сысоев, В.И. Вынужденные колебания системы с одной степенью свободы, снабженной плавающим ударным гасителем колебаний. Теоретические и экспериментальные исследования в области динамики сооружений [Текст] / В.И. Сысоев // Науч. тр. ЦНИИСК. – М.: Стройиздат, 1977.

43. Сысоев, В.И. Вынужденные колебания невесомого стержня с двумя сосредоточенными массами, снабженного ударными гасителями колебаний [Текст] / В.И. Сысоев // Науч. тр. ЦНИИСК. – Вып.34. Исследования по динамике сооружений. – М., 1974.

44. Зевин, А.А. Вынужденные колебания пластины с ударным гасителем колебаний [Текст] / А.А. Зевин // Науч. тр. ЦНИИСК. – Вып.17. Исследования по динамике сооружений. – М.: Стройиздат, 1974.

45. Рекомендации по проектированию гасителей колебаний для защиты зданий и сооружений, подверженных горизонтальным динамическим воздействиям от технологического оборудования и ветра [Текст]. – М.: Стройиздат, 1978.

46. Гопп, Ю.А. Демпферы крутильных колебаний коленчатых валов быстроходных двигателей [Текст] / Ю.А. Гопп. – Харьков, 1938.

47. Александров, А.В. Соппротивление материалов: учеб. для вузов [Текст] / А.В. Александров, В.Д. Потапов, Б.П. Державин; под ред. А.В. Александрова. – 4-е изд., испр. – М.: Высш. шк., 2004. – 560 с.

48. Стриклин, Дж. Оценка методов решения задач строительной механики, нелинейность которых связана со свойствами материала и/или геометрией [Текст] / Дж. Стриклин, В. Хейслер, В. Риземан // Ракетная техника и космонавтика / Ин-т аэронавтики и космонавтики. – 1973. – Т. II, Вып.3. – С.45-46.

49. Динамический расчет зданий и сооружений (Справочник проектировщика) [Текст] / М.Ф. Барштейн [и др.]; под ред. Б.Г. Коренева, И.М. Рабиновича. – 2-е изд., перераб. и доп. – М.: Стройиздат, 1984. – 303 с.

50. Динамический расчет специальных инженерных сооружений и конструкций (Справочник проектировщика) [Текст] / Ю.К. Амбриашвили [и др.]; под ред. Б.Г. Коренева, А.Ф. Смирнова. – М.: Стройиздат, 1986. – 461 с.

51. Демидович, Б.П. Основы вычислительной математики [Текст] / Б.П. Демидович, И.А. Марон. – 4-е изд, испр. – М.: Наука, 1970. – 664 с.

52. Рябенский, В.С. Введение в вычислительную математику: учеб. пособие для вузов [Текст] / В.С. Рябенский. – М.: Физматлит, 1994 – 336 с.

53. Постнов, В.А. Численные методы расчета судовых конструкций [Текст] / В.А. Постнов. – Л.: Судостроение, 1977. – 273 с.

54. Караманский, Т.Д. Численные методы строительной механики [Текст] / под ред. Г.К. Клейна; пер. с болг. Т.Д. Караманского. – М.: Стройиздат, 1981. – 436 с.

55. Киселев, В.А. Строительная механика: Спец. курс. Динамика и устойчивость сооружений: учебник для вузов [Текст] / В.А. Киселев. – 3-е изд., испр. и доп. – М.: Стройиздат, 1980. – 616 с.

56. Строительная механика. Динамика и устойчивость сооружений: учебник для вузов [Текст] / А.Ф. Смирнов, А.В. Александров, Б.Я. Лашеников, Н.Н. Шапошников; под ред. А.Ф. Смирнова. – М.: Стройиздат, 1984. – 416 с.

57. Основы строительной механики стержневых систем: учебник [Текст] / Н.Н. Леонтьев [и др.]. – М.: Изд-во АСВ, 1996. – 541 с.

58. Дарков, А.В. Строительная механика: учебник [Текст] / А.В. Дарков, Н.Н. Шапошников. – 10-е изд., стер. – СПб.: Изд-во «Лань», 2005. – 656 с.



# ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ .....	3
1. ОБЗОР ИССЛЕДОВАНИЙ В ОБЛАСТИ ДИНАМИКИ НЕЛИНЕЙНЫХ СТЕРЖНЕВЫХ СИСТЕМ .....	4
1.1. Предпосылки к построению расчетной модели железобетонной балки.....	4
1.2. Математическое описание физической нелинейности железобетона	14
1.3. Механика хрупкого разрушения тел при наличии трещин .....	27
1.4. Переход к системе с конечным числом степеней свободы.....	32
1.5. Методы решения задач динамики .....	34
1.5.1. Метод конечных элементов.....	34
1.5.2. Метод сил .....	37
1.5.2.1. Уравнение движения (динамического равновесия) для системы с одной степенью свободы.....	37
1.5.2.2. Уравнение движения (динамического равновесия) для системы с конечным числом степеней свободы .....	38
1.5.3. Метод перемещений.....	43
1.5.4. Шаговое интегрирование уравнений колебаний.....	44
1.5.4.1. Методы Рунге – Кутты .....	45
1.5.4.2. Прямые методы решения задач динамики.....	49
1.5.4.3. Анализ методов решения.....	58
1.6. Устройства для гашения колебаний .....	58
1.6.1. Виброизоляция.....	60
1.6.2. Динамические гасители .....	62
1.6.2.1. Динамический гаситель без затухания.....	64
1.6.2.2. Динамический гаситель с затуханием.....	65
1.6.3. Ударные гасители .....	66
1.6.3.1. Маятниковый ударный гаситель.....	67
1.6.3.2. Пружинный ударный гаситель.....	69
1.6.3.3. Плавающий ударный гаситель .....	70
1.6.4. Демпферы .....	71
1.6.4.1. Демпфер сухого трения .....	71
1.6.4.2. Демпфер вязкого трения.....	74
1.6.5. Ограничители.....	76
1.7. Методы решения нелинейных задач .....	79
1.7.1. Метод итерации .....	81
1.7.2. Метод Ньютона.....	83
2. ПОСТРОЕНИЕ МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ.....	86

2.1. Построение статической математической модели решения задачи изгиба железобетонной балки .....	86
2.2. Построение динамической модели колебаний железобетонной балки.....	93
2.3. Построение динамической модели колебаний железобетонной балки с гасителем.....	97
3. ЧИСЛЕННЫЕ ЭКСПЕРИМЕНТЫ .....	99
3.1 Программа расчета железобетонной балки на динамические воздействия (Microsoft FORTRAN 95) .....	99
3.2. Результаты численных экспериментов .....	106
ЗАКЛЮЧЕНИЕ .....	114
БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК .....	116

Научное издание

Шеин Александр Иванович  
Земцова Ольга Григорьевна

МОДЕЛИРОВАНИЕ И ИССЛЕДОВАНИЕ ДИНАМИКИ  
ЖЕЛЕЗОБЕТОННЫХ БАЛОК  
В УСЛОВИЯХ ТРЕЩИНООБРАЗОВАНИЯ

Монография

Редактор        М.А. Сухова  
Верстка         Н.В. Кучина

---

Подписано в печать 22.08.2014. Формат 60×84/16.

Бумага офисная «Снегурочка». Печать на ризографе.

Усл.печ.л.    7,15. Уч.-изд.л.    7,7. Тираж 500 экз. 1-й завод 100 экз.

Заказ № 278.

---

Издательство ПГУАС.  
440028, г. Пенза, ул. Германа Титова, 28.