МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«Пензенский государственный университет
архитектуры и строительства»

(ПГУАС)

А.И. Шеин, М.Б. Зайцев,
М.В. Кочеткова, И.Ф. Стародымов

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА

Сборник заданий для выполнения расчетно-графических работ

Рекомендовано Редсоветом университета
в качестве учебного пособия для студентов, обучающихся
по направлению 08.03.01 «Строительство»

Пенза 2014

УДК 531.8 (075.8)
ББК 2.21я73
Т33

Рецензенты: кафедра теоретической механики и высшей математики ПГСХА (зав. кафедрой доктор технических наук, профессор В.А. Мачнев);
доктор технических наук, профессор В.В. Смогунов (ПГУ)

Т33 **Теоретическая** механика. Сборник заданий для выполнения расчетно-графических работ: учеб. пособие / А.И. Шеин, М.Б. Зайцев, М.В.Кочеткова, И.Ф. Стародымов. – Пенза: ПГУАС, 2014. – 142 с.

Приведены задания по статике, кинематике, динамике и примеры их выполнения.

Учебное пособие подготовлено на кафедре строительной и теоретической механики ПГУАС и предназначено для студентов, обучающихся по направлению 08.03.01 «Строительство».

ПРЕДИСЛОВИЕ

В настоящем учебном издании содержатся задания для расчётно-графических работ по трем разделам теоретической механики: статике, кинематике и динамике.

Задания составлены в соответствии с утверждённой программой курса «Теоретическая механика». Каждое задание содержит 30 вариантов. Номер варианта студенту определяет преподаватель. Приведены примеры выполнения заданий, а также указания по их выполнению для того, чтобы студент самостоятельно мог решить задачу из данного сборника.

Предлагаемые задачи дадут возможность студентам приобрести необходимые для них навыки в применении теоретических знаний для решения конкретных задач.

Авторы весьма признательны Т.В. Конаковой, И.В. Сурковой за большую работу в плане технического оформления сборника заданий.

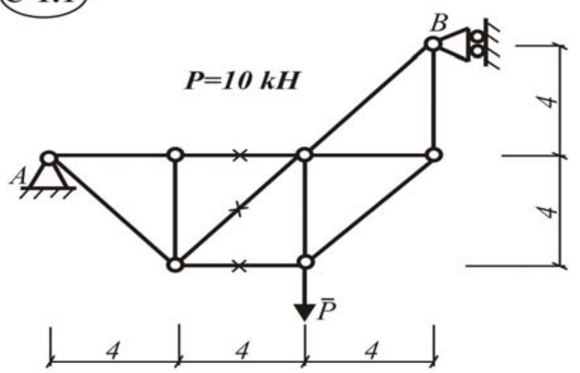
РАЗДЕЛ I. СТАТИКА

1. Плоская система сходящихся сил

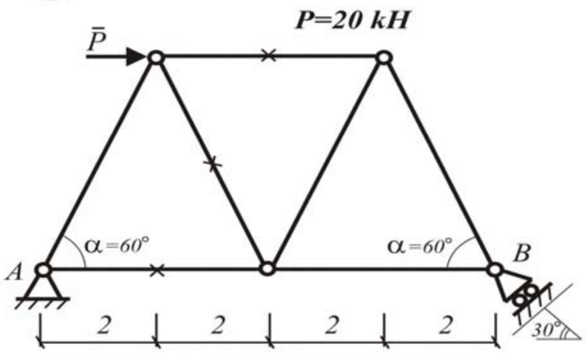
Задание С-1. Расчет плоских ферм

Статически определимая ферма (С-1.1–С-1.30) закреплена в точках A и B. Опора A – шарнирно-неподвижная, опора B – шарнирно-подвижная. К одному из ее узлов приложена сила $\overline{P}$.

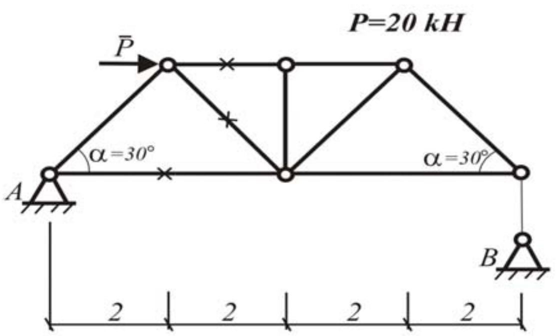
С-1.1



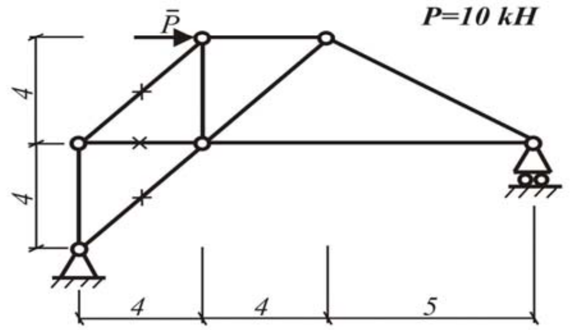
С-1.2



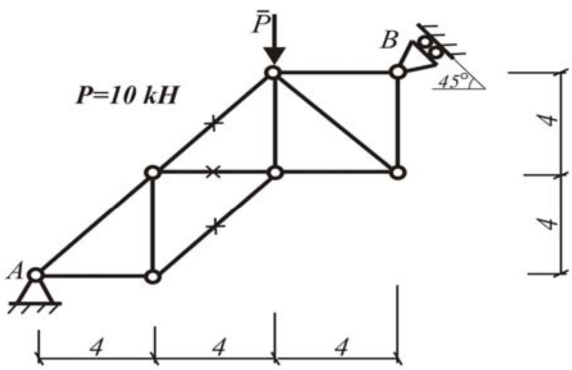
С-1.3



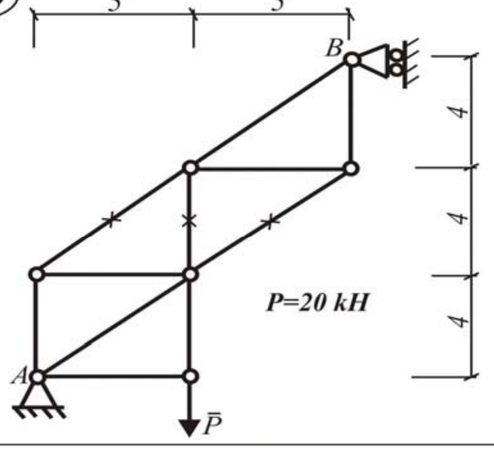
С-1.4



С-1.5

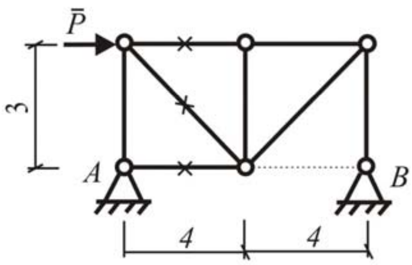


С-1.6



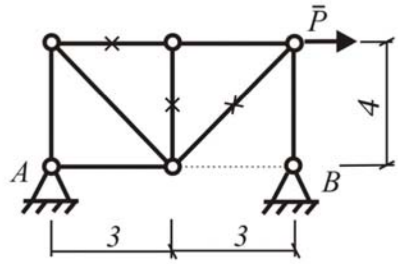
C-1.7

P=20 kH



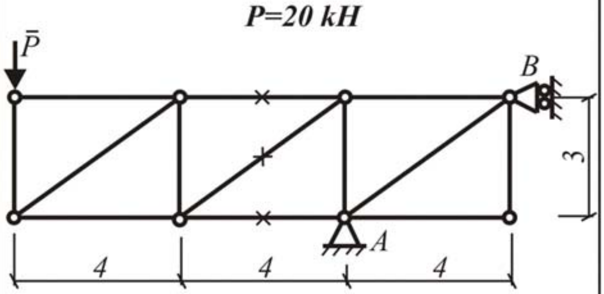
C-1.8

P=20 kH



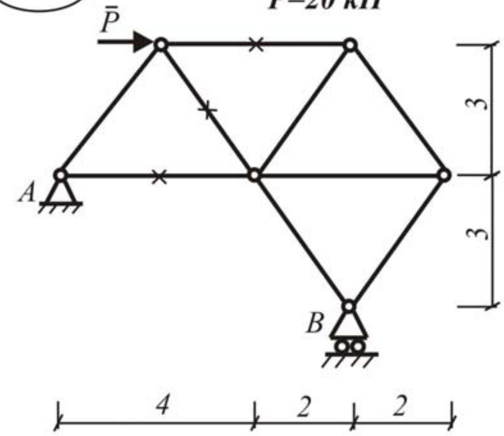
C-1.9

P=20 kH



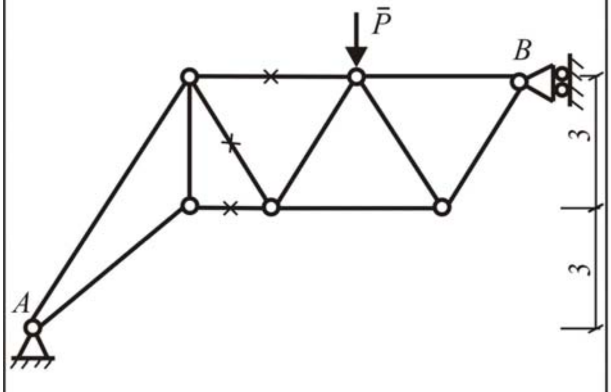
C-1.10

P=20 kH



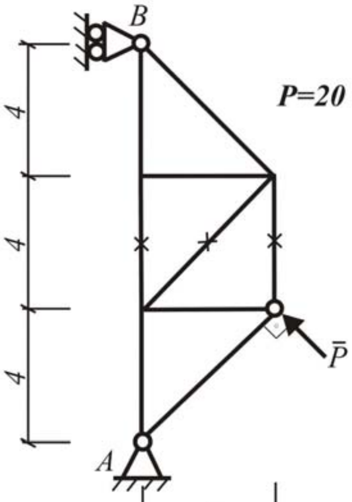
C-1.11

$\bar{P}$=20 kH

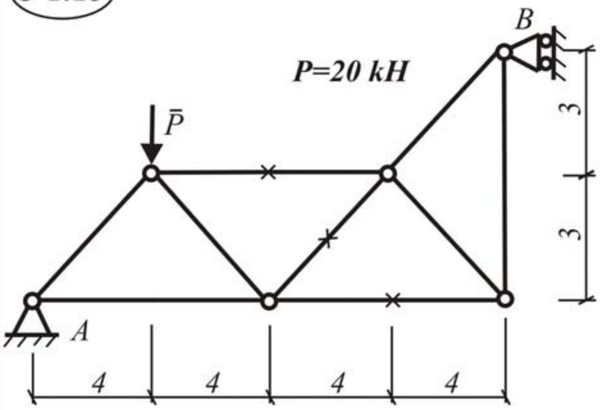


C-1.12

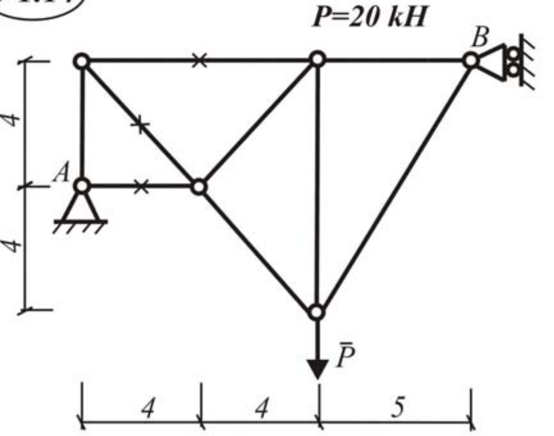
P=20 kH



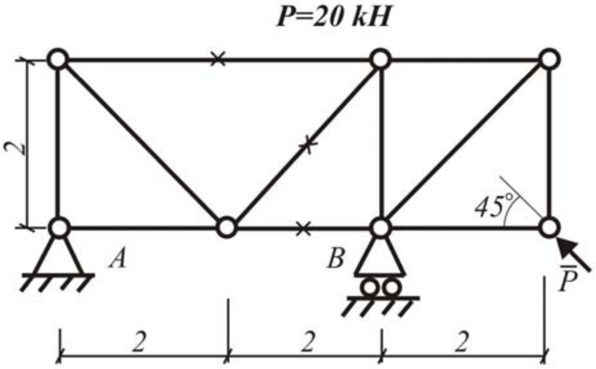
C-1.13



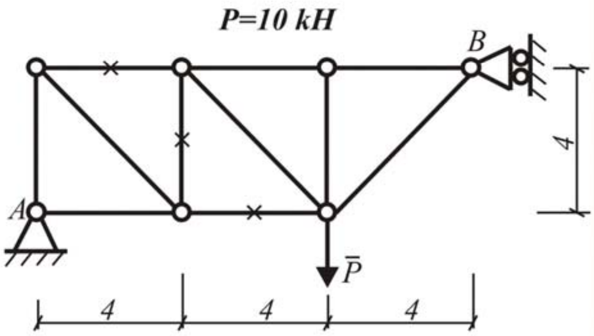
C-1.14



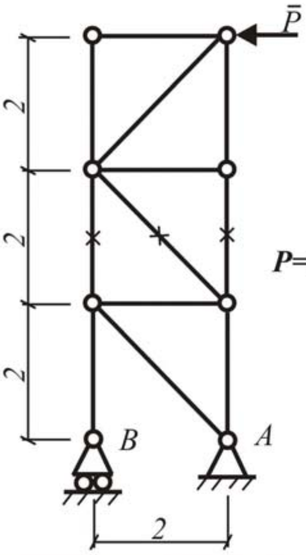
C-1.15



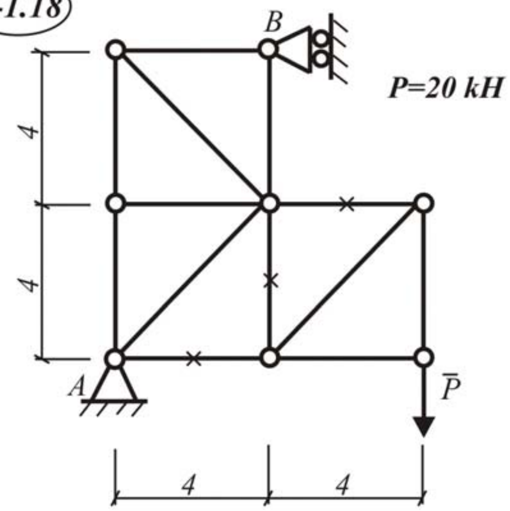
C-1.16



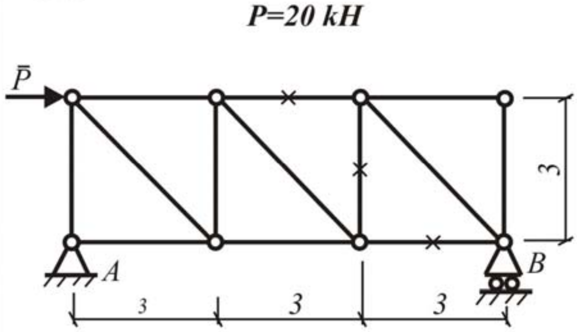
C-1.17



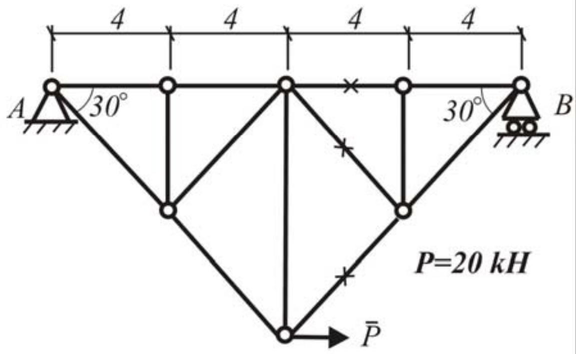
C-1.18



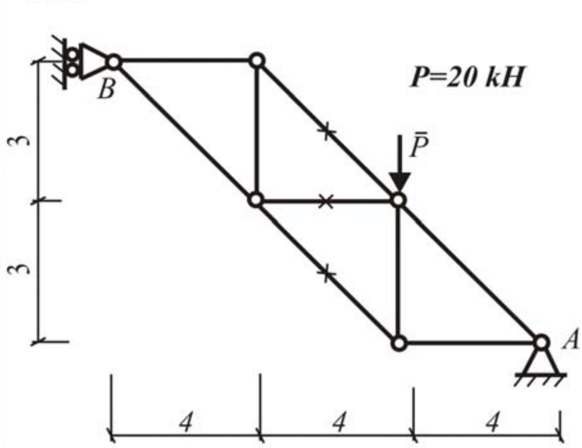
C-1.19



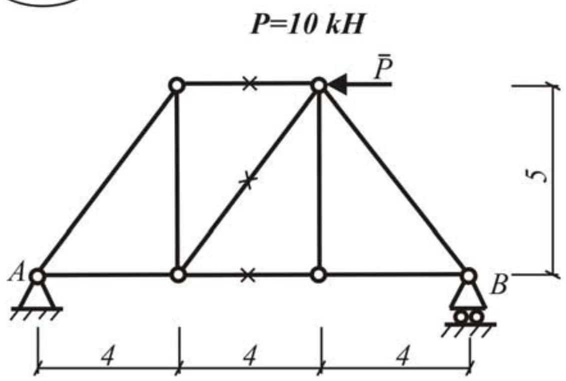
C-1.20



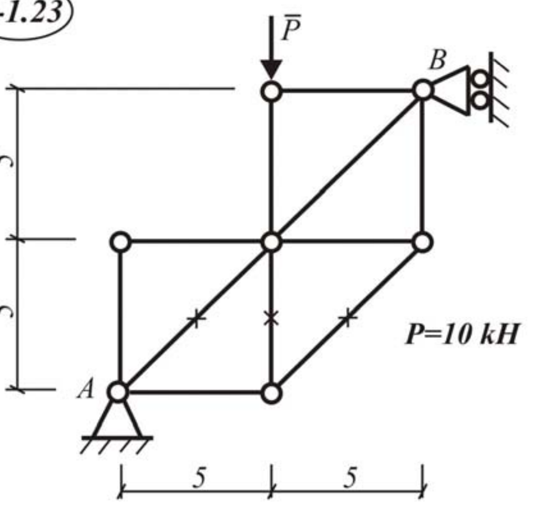
C-1.21



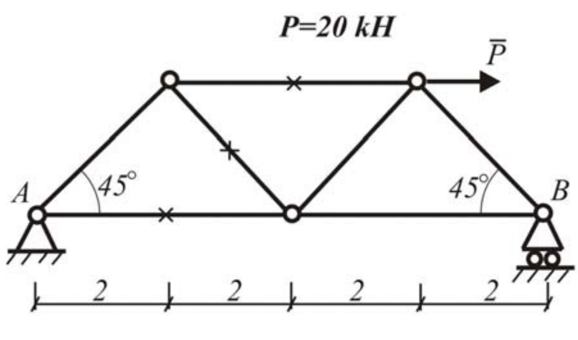
C-1.22



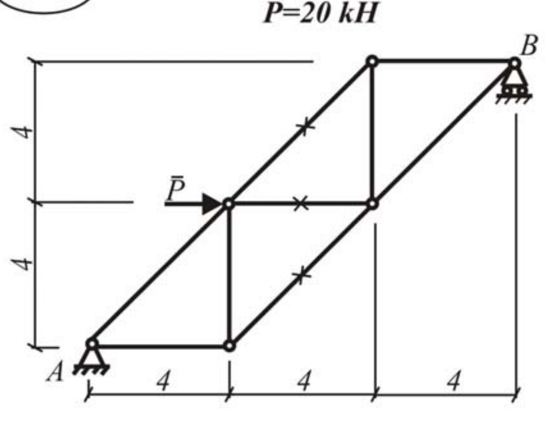
C-1.23



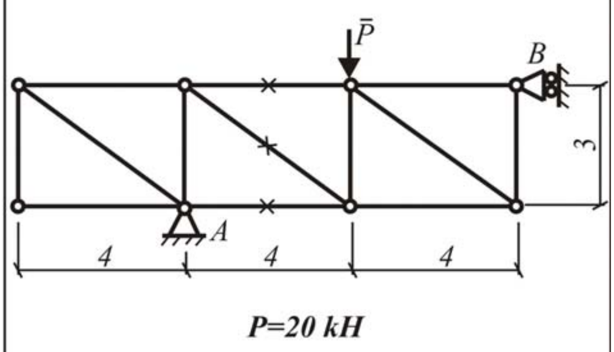
C-1.24



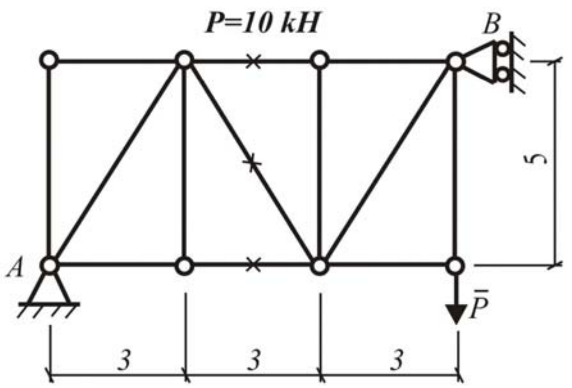
C-1.25



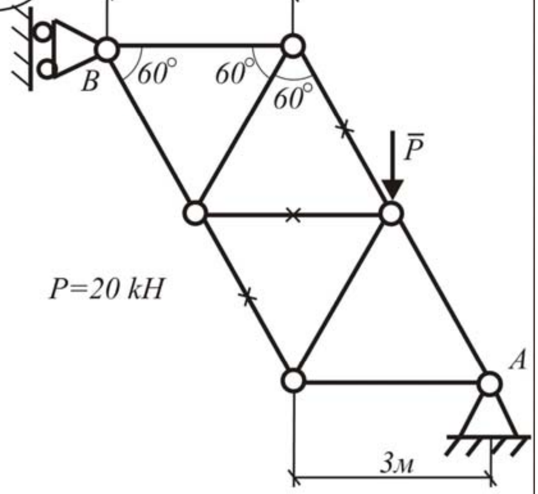
C-1.26



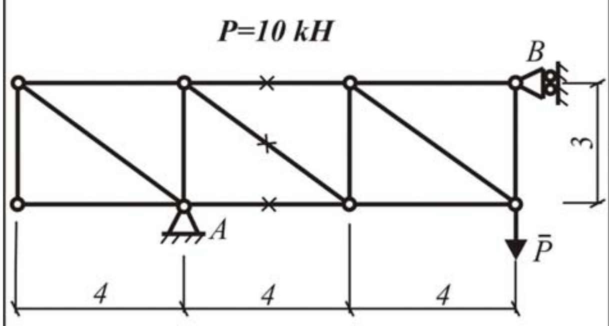
C-1.27



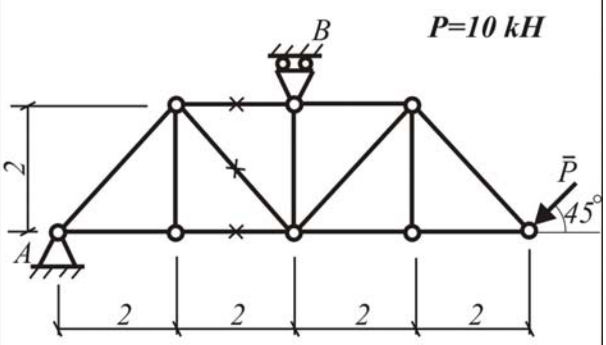
C-1.22



C-1.29



C-1.30



Найти:

1. Реакции в опорах A и B с применением теоремы о трех силах.

2. Усилия во всех стержнях фермы методом вырезания узлов;

3. Реакции в опорах A и B при помощи трех уравнений равновесия для произвольной плоской системы сил.

4. Усилия в трех стержнях фермы, отмеченных на схемах крестиками методом Риттера.

Результаты расчета свести в таблицу.

Пример С-1

Дано: $P = 10$ кН.

Найти: реакции в опорах A и B и усилия в стержнях фермы (рис. I.1.1).

Решение:

1. Определим реакции в опорах A и B с применением теоремы о трех силах. При определении реакций в опорах A и B рассмотрим ферму как одно абсолютно твердое тело (рис. I.1.2а). Реакцию в шарнирно-подвижной опоре $\overline{R}_B$ направим перпендикулярно площадке, поддерживающей эту опору. Затем найдем точку пересечения (т. O) линий действия заданной силы $\overline{P}$ и реакции $\overline{R}_B$. На основании теоремы о трех силах линия действия реакции $\overline{R}_A$ совпадает с прямой OA.

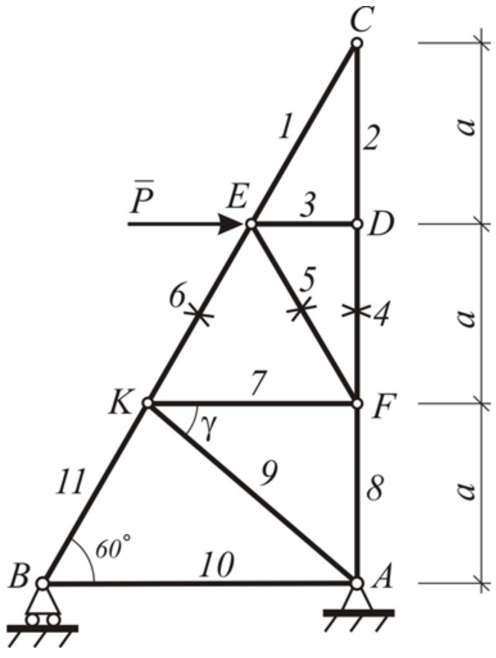


Рис. I.1.1

Для определения модулей и истинных направлений реакций $\overline{R}_A$ и $\overline{R}_B$ воспользуемся геометрическим, графоаналитическим и аналитическим способами.

а) Графический способ.

Выбираем масштаб сил, например 1 см соответствует 2 кН. Далее в выбранном масштабе изображаем заданную силу $\overline{P}$ в виде направленного отрезка $\overline{ab}$ и по известному правилу строим силовой треугольник abc (рис. I.1.2б). Пользуясь масштабом сил, находим

$$R_A = bc = 15{,}3 \text{ кН},$$
$$R_B = ca = 11{,}5 \text{ кН}.$$

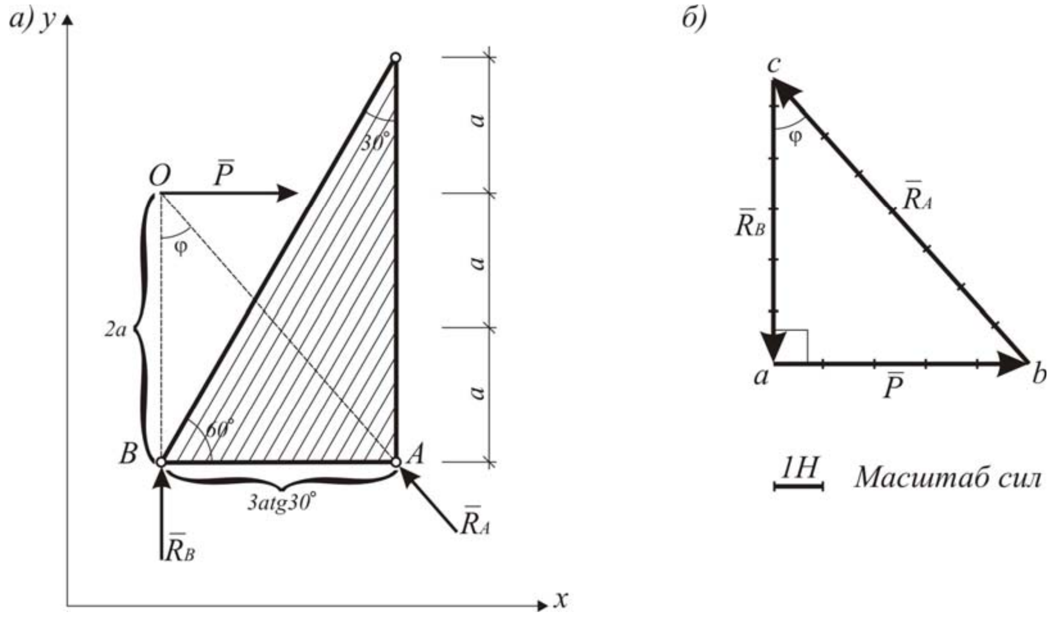


Рис. I.1.2

б) Графоаналитический способ.

Из рис. I.1.2а видно, что

$$AB = 3a\text{tg}30°\text{, тогда}$$

$$\text{tg}\varphi = \frac{3a\text{tg}30°}{2a} = 1,5 \cdot 0,577 = 0,8655;$$

$$\varphi = 40°88'; \ \sin\varphi = 0,654; \cos\varphi = 0,756.$$

Треугольники *OAB* и *abc* подобные, так как их соответствующие стороны параллельны. Поэтому угол $acb = \varphi$. Тогда из прямоугольного силового треугольника acb найдем

$$R_B = \frac{P}{\text{tg}\varphi} = \frac{10}{0,865} = 11,56 \text{ кН},$$

$$R_A = \frac{P}{\sin\varphi} = \frac{10}{0,654} = 15,29 \text{ кН}.$$

в) Аналитический способ.

Для определения $\overline{R}_A$ и $\overline{R}_B$ аналитическим способом выберем направление осей декартовой системы координат *x* и *y* (см. рис. I.1.2а) и составим уравнения равновесия для плоской системы сходящихся сил:

$$\sum F_x = 0; P - R_A \sin\varphi = 0;$$

$$\sum F_y = 0; R_B + R_A \cos\varphi = 0;$$

$$R_A = \frac{P}{\sin\varphi} = \frac{10}{0,654} = 15,69 \text{ кН};$$

$$R_B = -R_A \cos\varphi = -15,69 \cdot 0,756 = -11,56 \text{ кН}.$$

В ответе знак (–) показывает, что истинное направление реакции $\overline{R}_B$ противоположно тому, которое показано на рис. I.1.2а.

2. Определение усилий в стержнях фермы методом вырезания узлов.

При расчете фермы таким способом будем рассматривать равновесие каждого узла в определенной последовательности, а именно, чтобы число неизвестных усилий, приложенных к узлу, не превышало двух. А также предположим, что все стержни растянуты, усилия в них направлены от узлов и считаются со знаком (+).

До составления уравнений равновесия оси координат x и y целесообразнее направить так, чтобы большинство неизвестных усилий в стержнях фермы проектировались в истинную величину.

<u>Узел С</u>

$$\left.\begin{aligned}&\sum F_x = 0; -S_1 \cdot \sin 30° = 0;\ S_1 = 0;\\&\sum F_y = 0;\ -S_2 - S_1 \cdot \cos 30° = 0;\ S_2 = 0.\end{aligned}\right\}$$

Первый и второй стержни не напряжены.

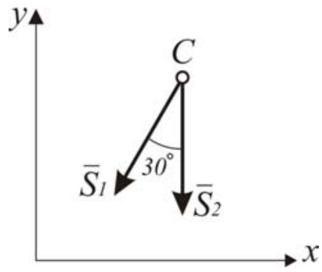


Рис. I.1.3

<u>Узел Д</u>

$$\left.\begin{aligned}&\sum F_x = 0; -S_3 = 0;\ S_3 = 0;\\&\sum F_y = 0;\ S_2 - S_4 = 0;\ S_4 = 0.\end{aligned}\right\}$$

Третий и четвертый стержни не напряжены.

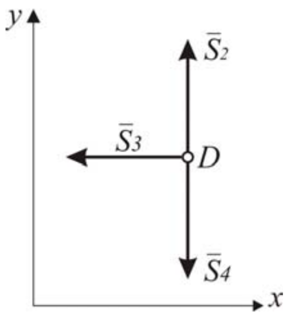


Рис. I.1.4

<u>Узел Е</u>

$$\sum F_{kx} = 0;\ P \cdot \cos 30° + S_5 \cdot \cos 30° + S_3 \cos 30° = 0;$$

$$\sum F_{ky} = 0;\ P \cdot \sin 30° - S_5 \cdot \sin 30° + S_3 \cdot \sin 30° + S_1 - S_6 = 0.$$

$$S_5 = -P = -10 \text{ кН}, S_6 = 2P \sin 30° = 10 \text{ кН}.$$

Пятый стержень сжат, шестой – растянут.

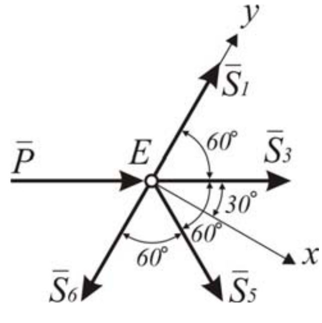


Рис. I.1.5

Узел F

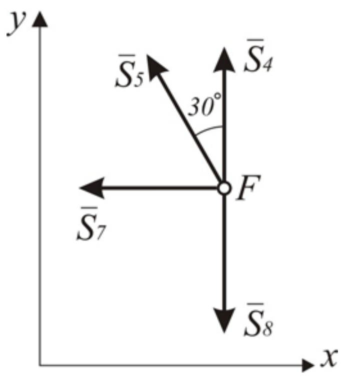


Рис. I.1.6

$$\sum F_{kx} = 0; -S_7 + S_5 \sin 30° = 0;$$

$$\sum F_{ky} = 0; S_4 + S_5 \cos 30° - S_8 = 0.$$

$$S_7 = -S_5 \sin 30° = 5 \text{ кН}.$$

$$S_8 = -8,66 \text{ кН}.$$

Седьмой стержень растянут, восьмой – сжат.

Узел К

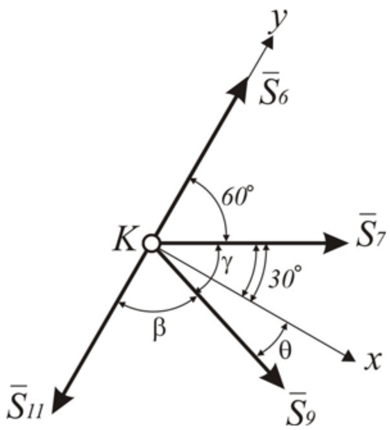


Рис. I.1.7

$$\text{tg}\gamma = \frac{a}{2a\text{tg}30°} = \frac{1}{2 \cdot 0,577} = 0,867;$$

$$\gamma = 40,91°; \sin\gamma = 0,655; \cos\gamma = 0,766.$$

$$\beta = 79,09°; \sin\beta = 0,982; \cos\beta = 0,189.$$

$$\theta = \gamma - 30° = 40.91^0 - 30° = 10,91°.$$

$$\sum F_{kx} = 0; S_7 \cdot \cos 30° + S_9 \cos 10,91° = 0;$$

$$\sum F_{ky} = 0; S_6 - S_{11} + S_7 \cdot \sin 30° - S_9 \cdot \sin 10,91° = 0.$$

$$S_9 = -\frac{5 \cdot 0,866}{0,982} = -4,41 \text{ кН};$$

$$S_{11} = 10 + 5 \cdot 0,5 - 4,41 \cdot 0,189 = 13,339 \text{ кН}.$$

Девятый стержень сжат, одиннадцатый – растянут.

Узел А

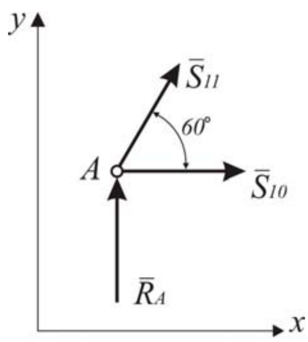


Рис. I.1.8

$$\sum F_{kx} = 0; S_{10} + S_{11} \cdot \cos 60° = 0;$$

$$\sum F_{ky} = 0; R_A + S_{11} \cdot \sin 60° =$$

$$= 11,56 + 13,333 \cdot 0,866 = -0,02.$$

$$S_{10} = -S_{11} \cdot \cos 60° = -6,65 \text{ кН}.$$

Относительная ошибка:

$$\Delta\,\% = \frac{-0,02 \cdot 100\,\%}{11,54} < 1\,\%.$$

Узел В

Уравнения, составленные для узла B, являются проверочными:

$$\sum F_{kx} = 0;$$

$$\sum F_{ky} = 0;$$

$$-S_{10} - S_9 \cos\gamma - R_B \sin\varphi =$$

$$= 6{,}665 + 4{,}41 \cdot 0{,}756 - 15{,}29 \cdot 0{,}654 = 9{,}99 - 9{,}99 = 0;$$

$$S_9 \sin\gamma + S_8 + R_B \cos\varphi =$$

$$= -4{,}41 \cdot 0{,}655 - 8{,}66 + 15{,}29 \cdot 0{,}756 = -11{,}47 + 11{,}47 = 0.$$

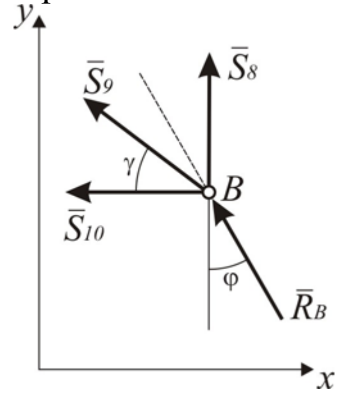


Рис. I.1.9

Расчет фермы методом вырезания узлов выполнен верно.

3. Определение реакций в опорах A и B при помощи 3-х уравнений равновесия для произвольной плоской системы сил.

Реакцию в шарнирно – неподвижной опоре A представим в виде двух составляющих сил, направленных параллельно координатным осям, приложенных к точке A. (рис. I.1.10).

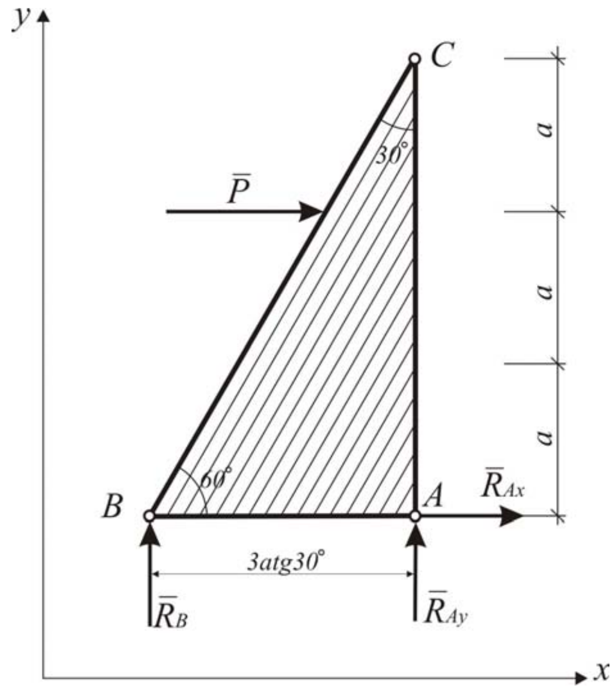


Рис. I.1.10

Составим уравнения равновесия сил, приложенных к ферме:

$$\sum F_x = 0;\ P + R_{AX} = 0;$$

$$\sum m_A(\bar{F}_k) = 0; - R_B \cdot 3a\mathrm{tg}30^\circ - P \cdot 2a = 0;$$

$$\sum m_B(\bar{F}_k) = 0;\ R_{AY} \cdot 3a\mathrm{tg}30^\circ - P \cdot 2a = 0.$$

Подставляя исходные данные в эти три уравнения и решая их относительно искомых неизвестных, получим:

$$R_{AX} = -10 \text{ Н},$$

$$R_B = -11,56 \text{ Н},$$

$$R_{Ay} = 11,56 \text{ Н}.$$

$$R_A = \sqrt{(R_{AX})^2 + (R_{Ay})^2} = \sqrt{(-10)^2 + (11,56)^2} = 15,29 \text{ Н}.$$

Результаты по нахождению $\overline{R}_A$ различными способами совпадают.

4. Определение усилий в стержнях 4, 5, 6 фермы методом Риттера.

Эффективность способа Риттера состоит в том, усилие в каждом стержне определяется из отдельного уравнения и не приходится его выражать через неизвестные усилия в других стержнях.

Такого эффекта можно достичь, решая задачу в следующей последовательности:

а) Разрезаем ферму так, чтобы в сечение I-I входило не более трех неизвестных усилий в стержнях (рис. I.1.11).

б) Отбрасываем одну из частей фермы, например, нижнюю.

в) Заменяем действие отброшенной части фермы на рассматриваемую (верхнюю) усилиями в рассеченных стержнях $\overline{S}_4, \overline{S}_5, \overline{S}_6$ (рис. I.1.12).

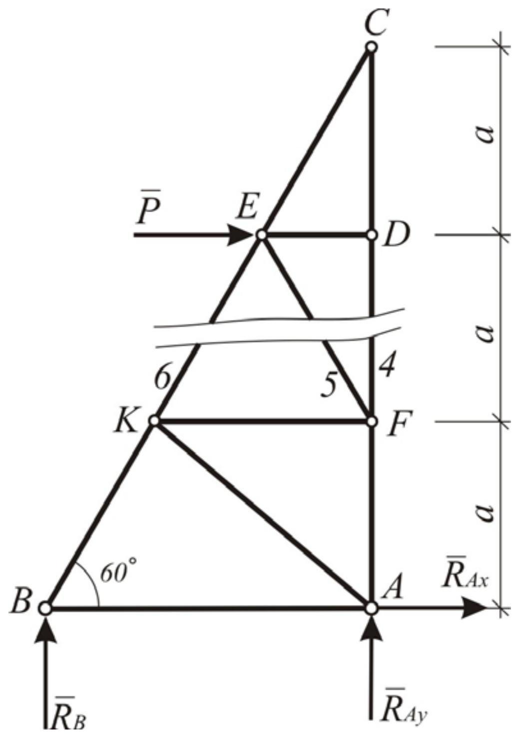


Рис. I.1.11

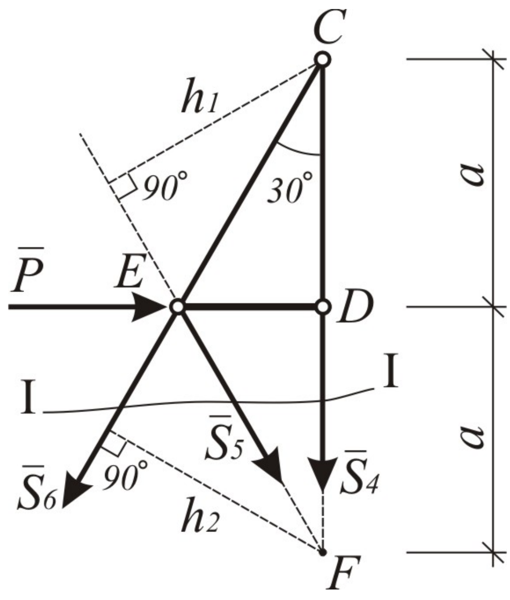


Рис. I.1.12

По прежнему условно предполагаем, все стержни растянутыми. Знак (–) в ответе будет указывать на то, что стержень сжат.

Находим точки Риттера *E, C, F*, то есть точки пересечения линий действия неизвестных усилий. Затем составляем уравнения равновесия в виде суммы моментов всех сил относительно точек *E, C, F*:

$$\sum m_E(\bar{F}) = 0; -S_4 \cdot ED = 0;$$
$$\sum m_C(\bar{F}) = 0; P \cdot a + S_5 \cdot h_1 = 0;$$
$$\sum m_F(\bar{F}) = 0; -P \cdot a + S_6 \cdot h_2 = 0.$$

Подставляя исходные данные в эти уравнения, получим:

$$S_4 = 0;\ S_5 = -10\ \text{кН};\ S_6 = 10\ \text{кН}.$$

Если два неизвестных усилия (вектора) будут параллельны между собой, то в этом случае пришлось бы составить уравнение в виде суммы проекций всех сил на ось, перпендикулярной к этим усилиям (векторам).

Результаты расчета сведем в табл. I.1.1.

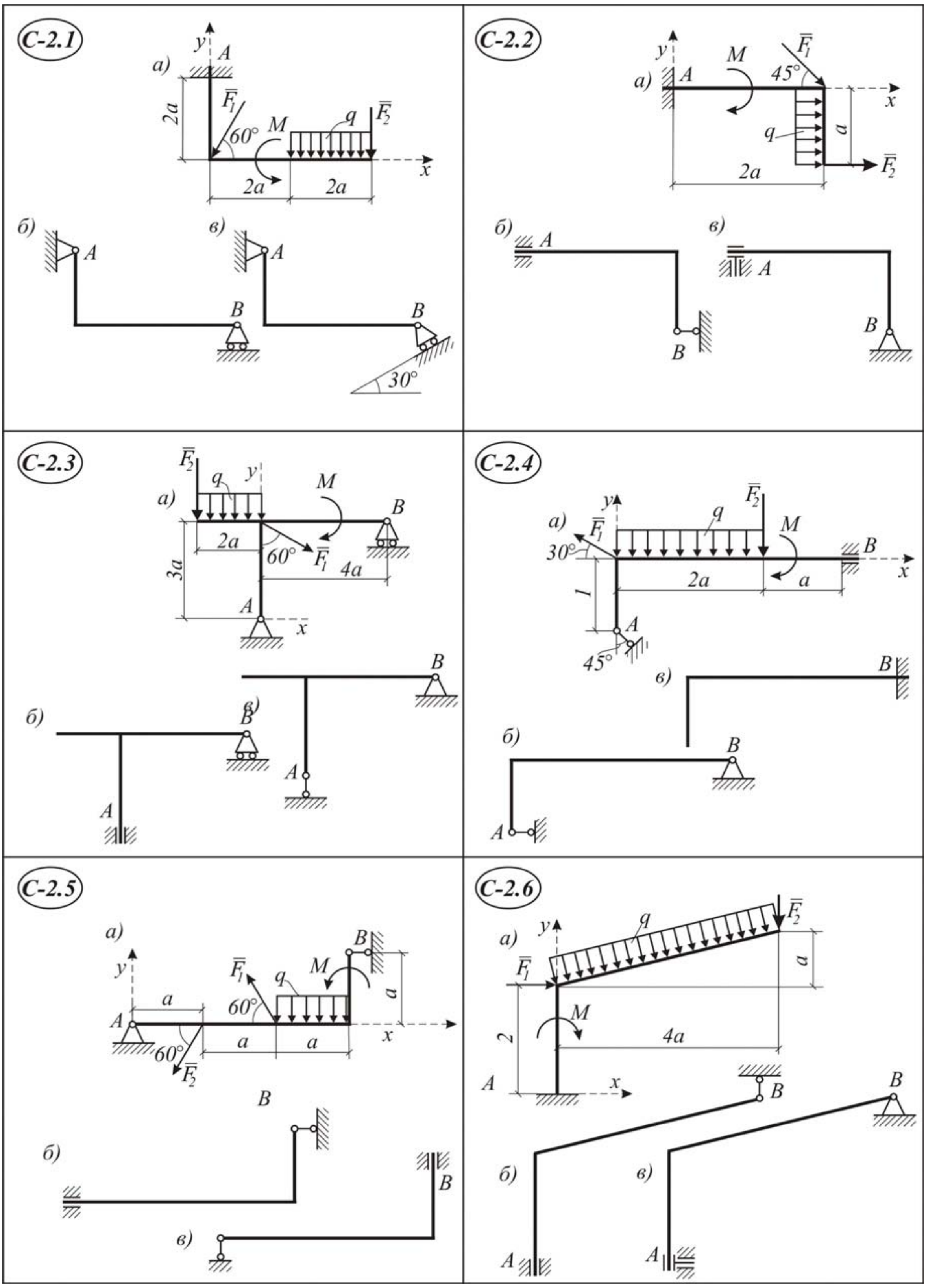
Таблица I.1.1

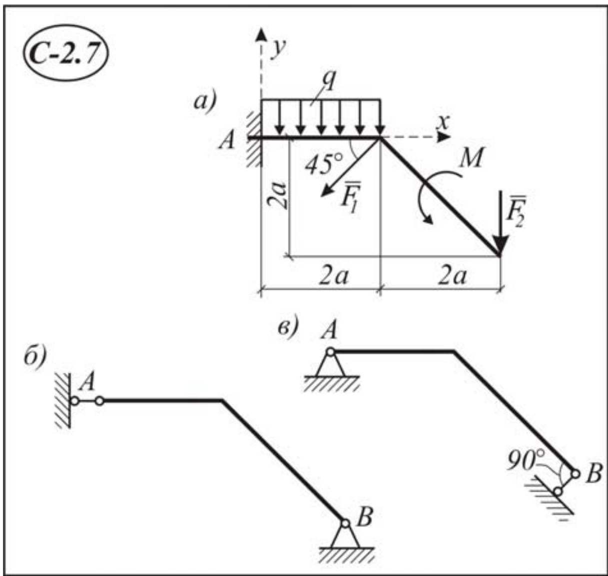
№ стержня	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
Знак усилия					–	+	–	–	–	–	+
По методу вырезания узлов, кН	0	0	0	0	10	10	5	8,66	4,41	6,65	13,339
По методу Риттера, кН					10	10					

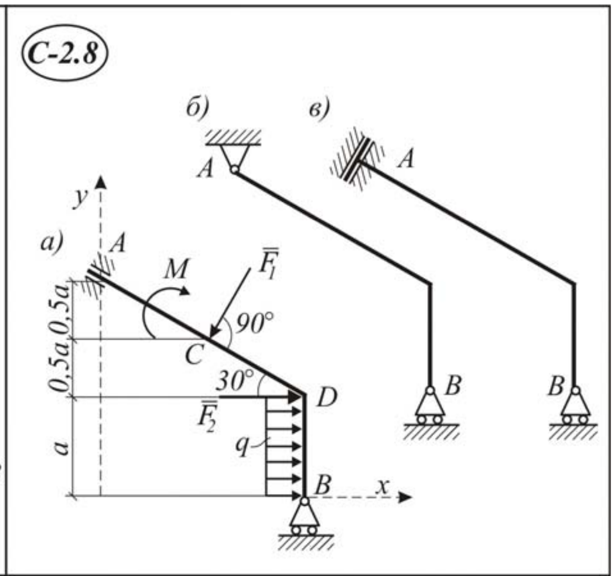
2. Произвольная плоская система сил

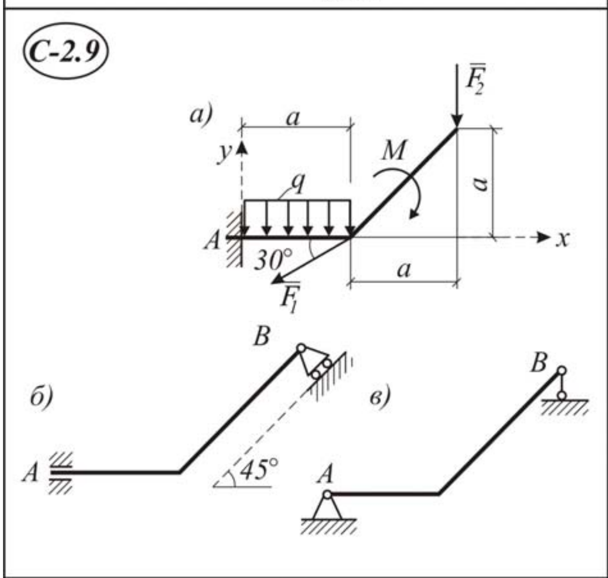
Задание С-2. Определение опор твердого тела

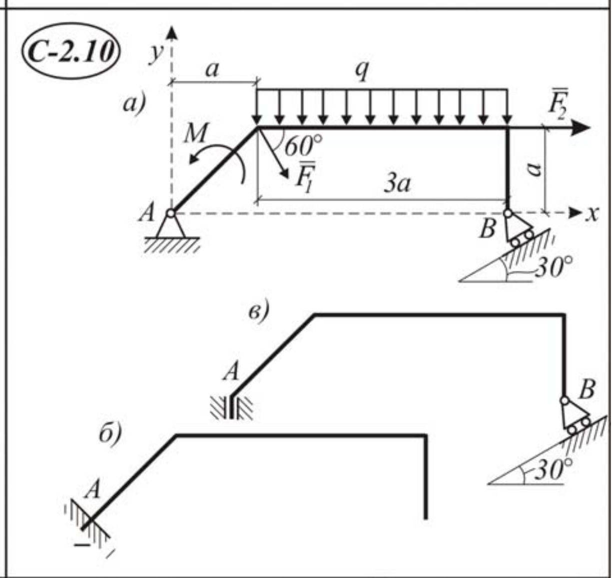
На схемах С-2.1–С-2.30 показаны три способа закрепления бруса с ломаной осью.

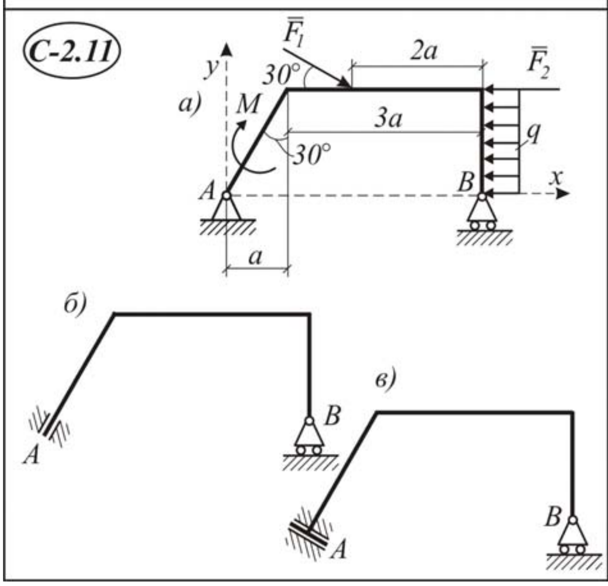


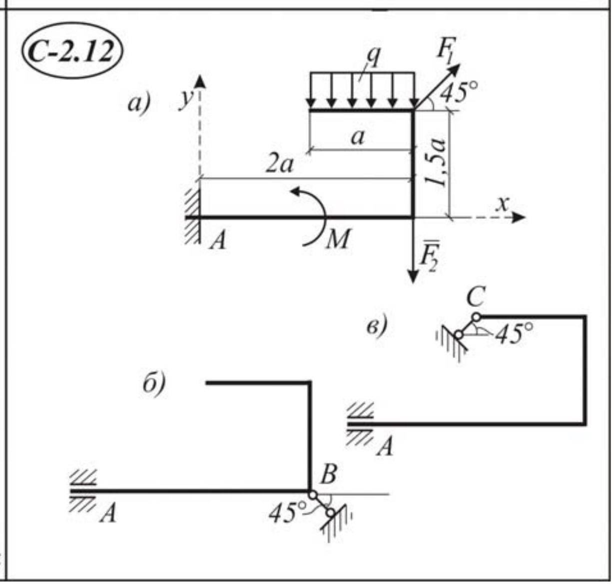

С-2.7
а)
б)
в)
q
y
x
A
B
M
45°
90°
2a
$\overline{F}_1$
$\overline{F}_2$

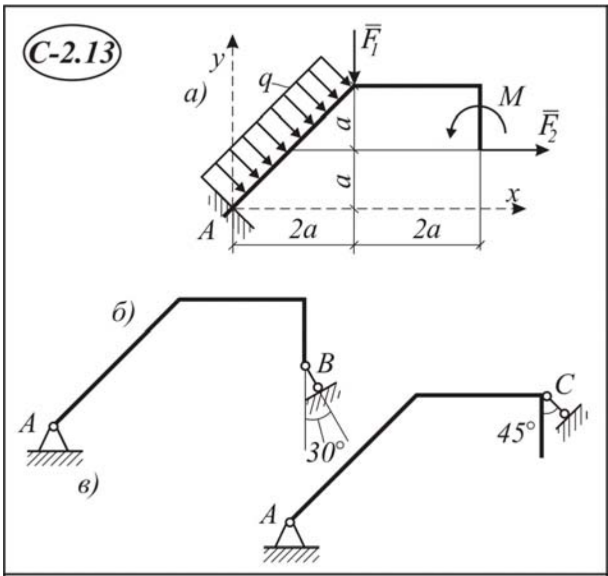

С-2.8
а)
б)
в)
A
B
C
D
M
q
y
x
90°
30°
0,5a
a
$\overline{F}_1$
$\overline{F}_2$

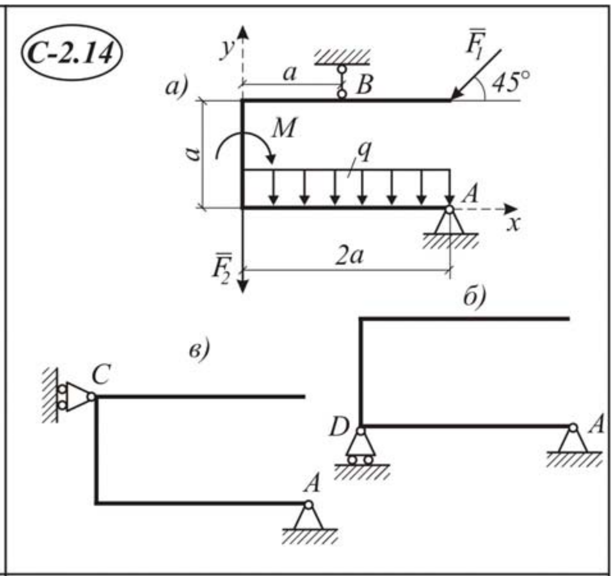

С-2.9
а)
б)
в)
A
B
M
q
y
x
a
30°
45°
$\overline{F}_1$
$\overline{F}_2$

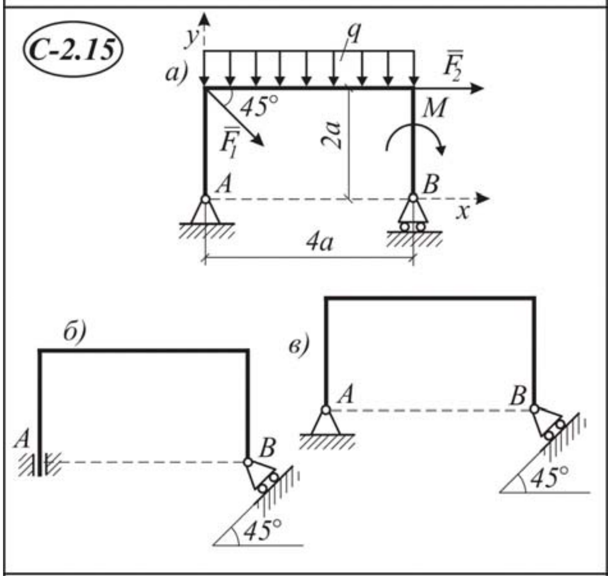

С-2.10
а)
б)
в)
A
B
M
q
y
x
a
3a
60°
30°
$\overline{F}_1$
$\overline{F}_2$

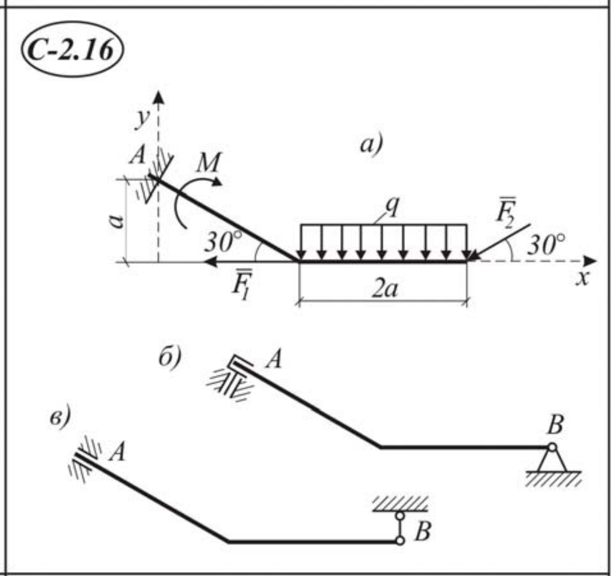

С-2.11
а)
б)
в)
A
B
M
q
y
x
a
2a
3a
30°
$\overline{F}_1$
$\overline{F}_2$

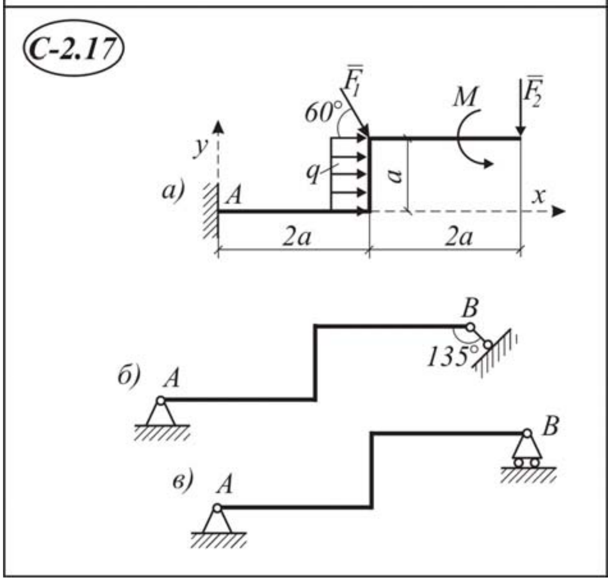

С-2.12
а)
б)
в)
A
B
C
M
q
y
x
a
2a
1,5a
45°
$\overline{F}_1$
$\overline{F}_2$

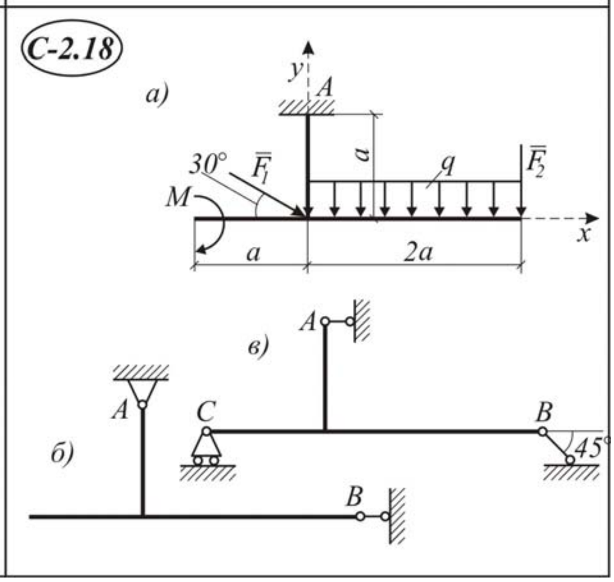

С-2.13
а)
б)
в)
30°
45°
2a
a

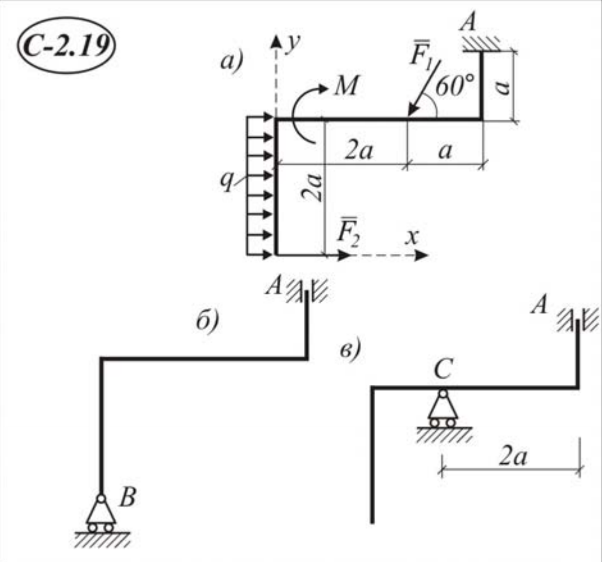

С-2.14
а)
б)
в)
45°
2a
a

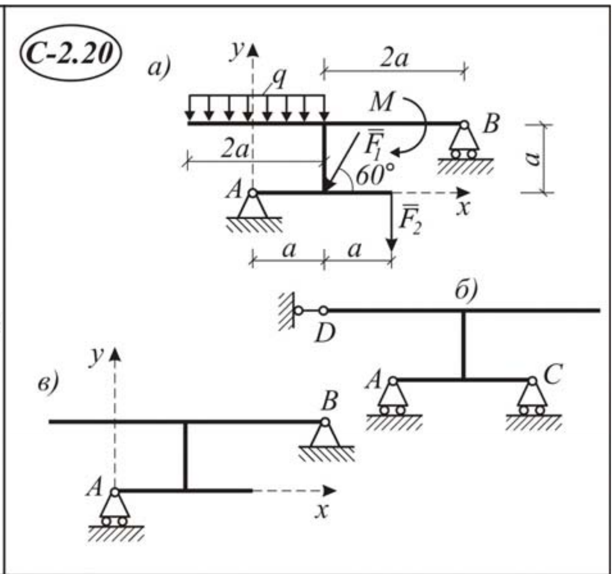

С-2.15
а)
б)
в)
45°
2a
4a

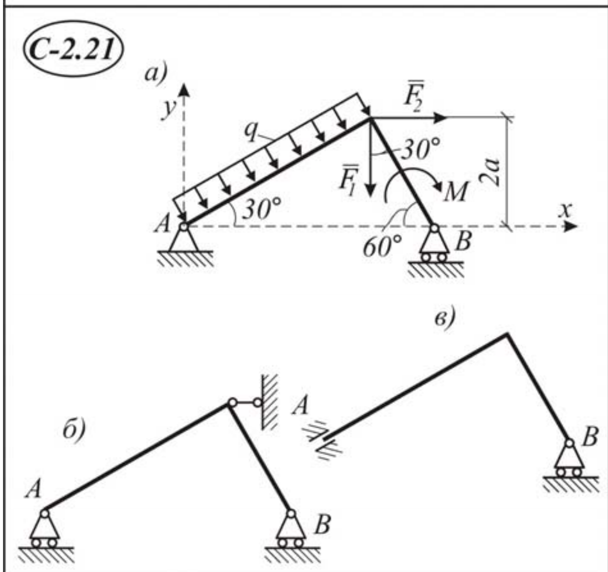

С-2.16
а)
б)
в)
30°
2a
a

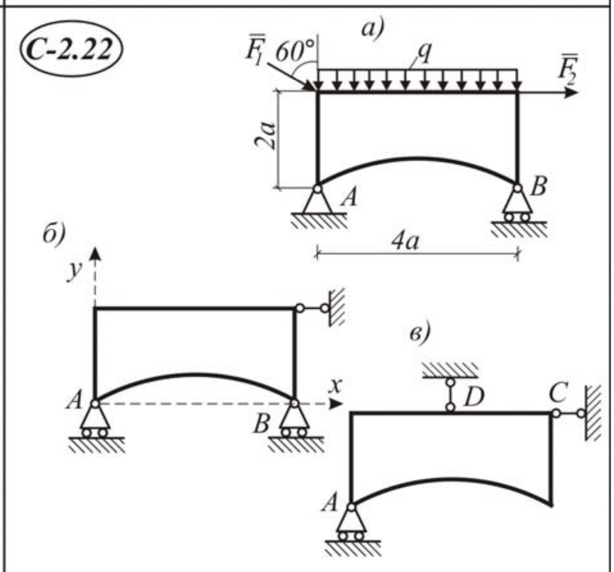

С-2.17
а)
б)
в)
60°
135°
2a
a

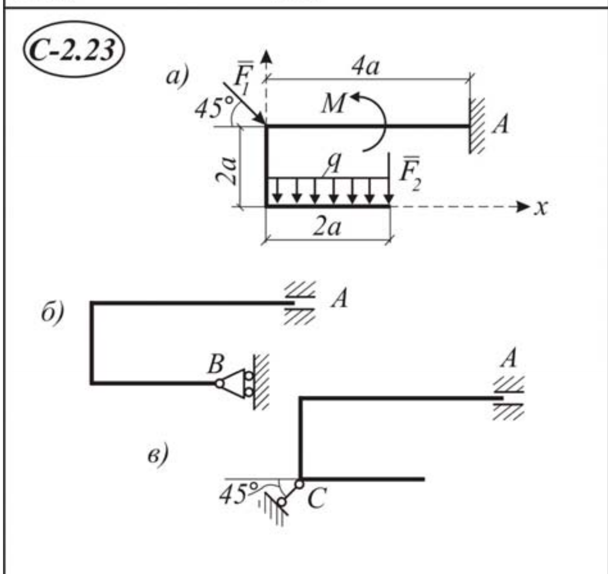

С-2.18
а)
б)
в)
30°
45°
2a
a

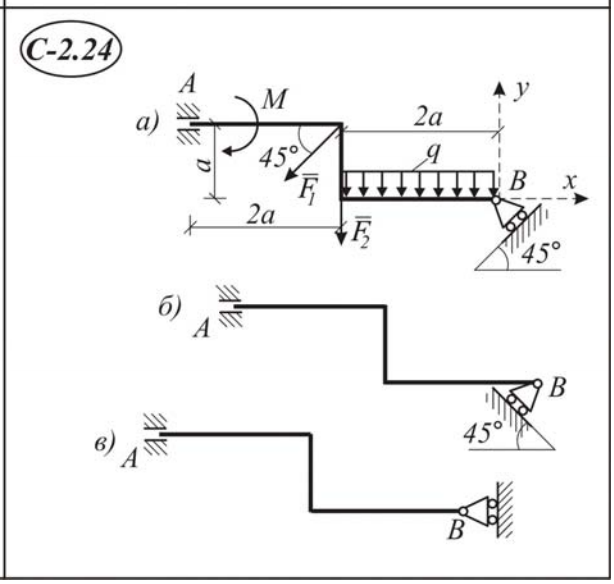

C-2.19
а)
б)
в)
2a
a
60°
M
q
A
B
C
x
y

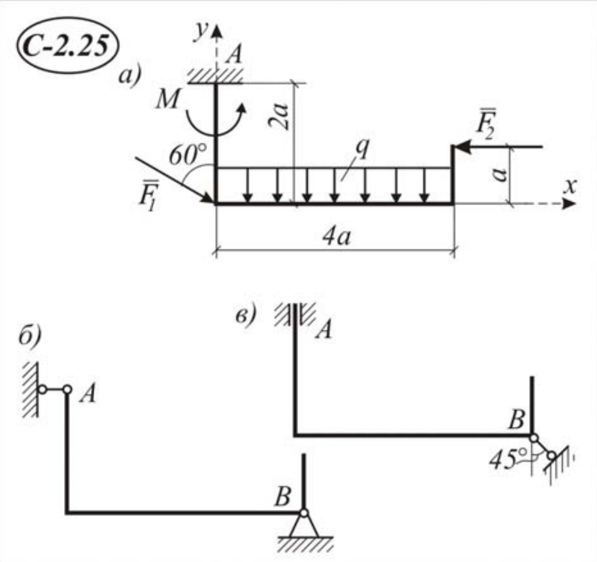

C-2.20
а)
б)
в)
2a
a
60°
M
q
A
B
C
D
x
y

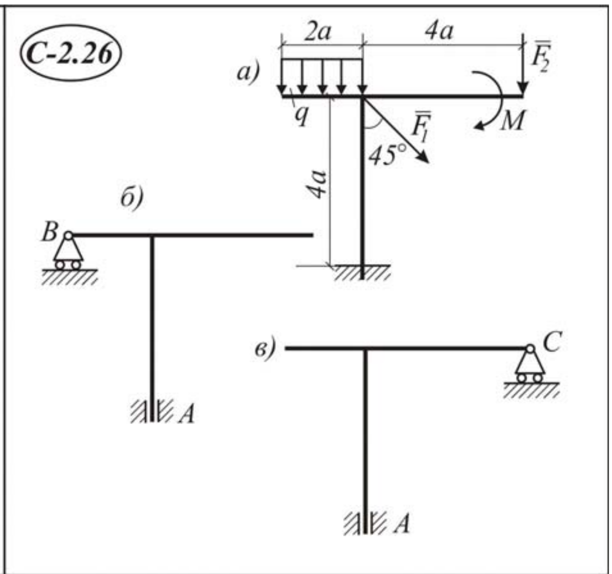

C-2.21
а)
б)
в)
30°
60°
2a
M
q
A
B
x
y

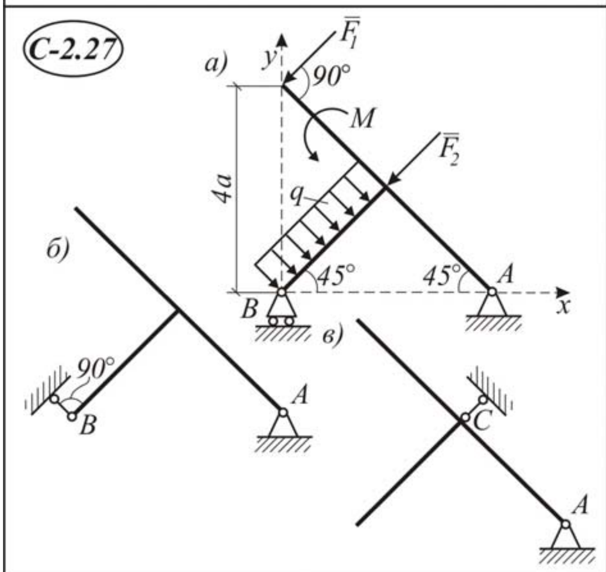

C-2.22
а)
б)
в)
60°
2a
4a
q
A
B
C
D
x
y

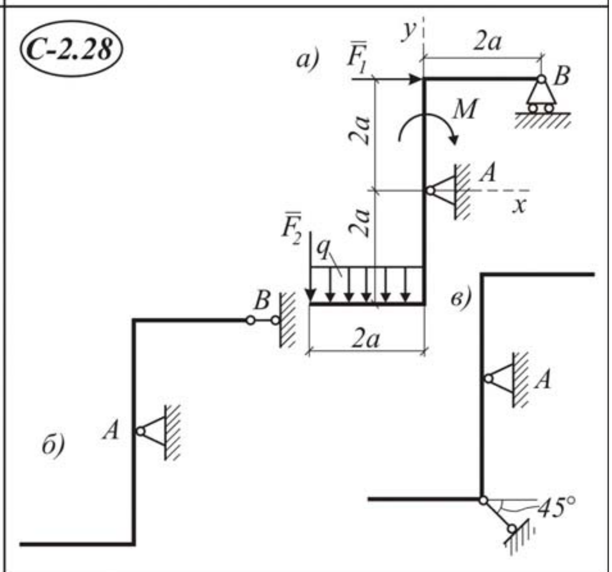

C-2.23
а)
б)
в)
45°
4a
2a
M
q
A
B
C
x

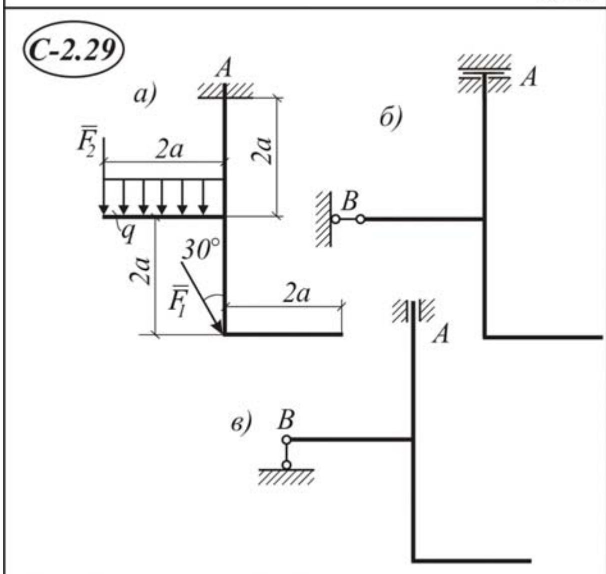

C-2.24
а)
б)
в)
45°
2a
a
M
q
A
B
x
y

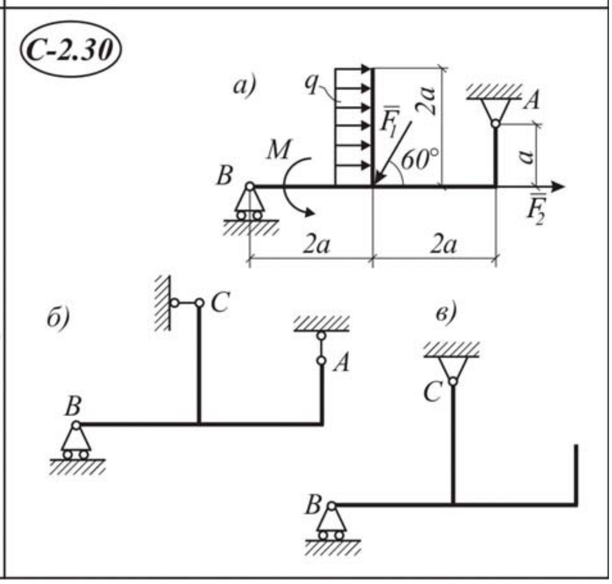

C-2.25
а)
y
A
M
2a
60°
q
$\overline{F}_2$
a
x
$\overline{F}_1$
4a
б)
A
B
в)
A
B
45°


C-2.26
2a
4a
$\overline{F}_2$
а)
q
$\overline{F}_1$
M
45°
б)
4a
B
A
в)
C
A


C-2.27
$\overline{F}_1$
а)
y
90°
M
$\overline{F}_2$
4a
q
б)
45°
45°
A
B
x
в)
90°
B
A
C
A


C-2.28
y
2a
а)
$\overline{F}_1$
B
2a
M
A
x
2a
$\overline{F}_2$
q
B
в)
2a
A
A
б)
45°


C-2.29
A
A
а)
б)
$\overline{F}_2$
2a
2a
B
q
30°
2a
$\overline{F}_1$
2a
A
в)
B


C-2.30
а)
q
A
$\overline{F}_1$
2a
a
M
60°
B
$\overline{F}_2$
2a
2a
б)
C
в)
A
C
B
B

Для всех трех случаев заданная нагрузка (табл. I.2.1) и размеры одинаковы.

Таблица I.2.1

Номер варианта	F_1, кН	F_2, кН	M, кНм	q кН/м	Исслед. реакция	Номер варианта	F_1, кН	F_2, кН	M, кНм	q, кН/м	Исслед. реакция
1	2	3	4	5	6	1	2	3	4	5	6
1	18	14	19	1,8	Y_A	16	21	17	19	2,1	M_A
2	16	12	17	1,6	M_A	17	35	31	14	3,5	Y_A
3	14	10	15	1,4	Y_B	18	20	16	18	2,0	X_A
4	22	18	23	2,2	Y_B	19	15	11	12	1,5	M_A
5	28	24	12	2,8	X_B	20	10	14	18	1,0	Y_A
6	30	26	24	3,0	M_A	21	30	26	16	3,0	Y_B
7	12	16	14	1,2	X_A	22	18	14	12	1,8	Y_A
8	8	12	15	1,8	R_B	23	24	20	19	2,4	M_A
9	14	18	11	1,4	Y_A	24	32	28	16	3,2	Y_A
10	30	26	24	1,9	X_A	25	26	22	14	2,6	X_A
11	25	21	21	2,5	R_B	26	14	10	16	14	M_A
12	15	11	18	1,5	Y_A	27	21	17	19	2,1	X_A
13	32	28	8	32	Y_A	28	30	26	22	3,0	Y_A
14	28	24	12	2,8	Y_A	29	34	30	15	3,4	M_A
15	17	19	11	1,7	X_A	30	20	16	21	2,0	R_B

Найти реакции опор для такого способа закрепления бруса, при котором реакция, указанная в табл. I.2.1, имеет наименьший модуль. При расчете принять a=1 м.

Пример С-2

Дано: схемы закрепления бруса (рис. I.2.1а,б,в,); F=10 кН; q = 3 кН/м; M = 6 кН·м; a = 1 м.

Найти реакции опор для того способа закрепления, при котором момент M_A в опоре A имеет наименьшее числовое значение.

Решение:

1. Действие связей на конструкцию заменяем их реакциями: в схеме *а* – $M_A, \overline{X}_A, \overline{Y}_A$; в схеме *б* – $\overline{Y}'_A$, M'_A и R_B; в схеме *в* – M_A, X_B, Y_B.

Рассмотрим систему уравновешивающихся сил, приложенных к конструкции с различными вариантами закрепления (рис. I.2.2 а,б,в).

Равномерно распределенную нагрузку заменим равнодействующей силой:

$$Q = g \cdot 2 = 6 \text{ кН}.$$

Силу $\overline{F}$ разложим на две составляющие

$$F_x = F \cdot \cos 45° = 10 \cdot 0,707 = 7,07 \text{ кН};$$

$$F_y = F \cdot \sin 45° = 10 \cdot 0,707 = 7,07 \text{ кН}.$$

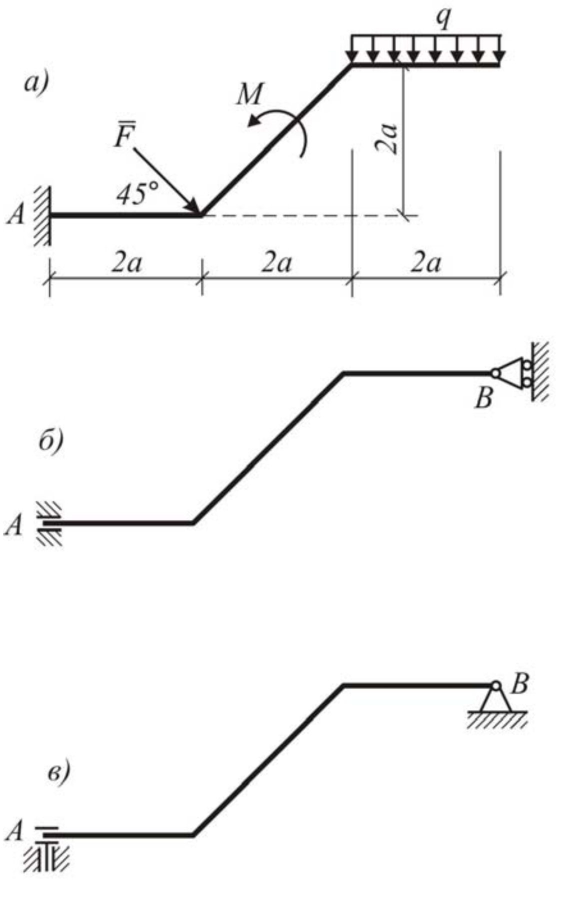


Рис. I.2.1

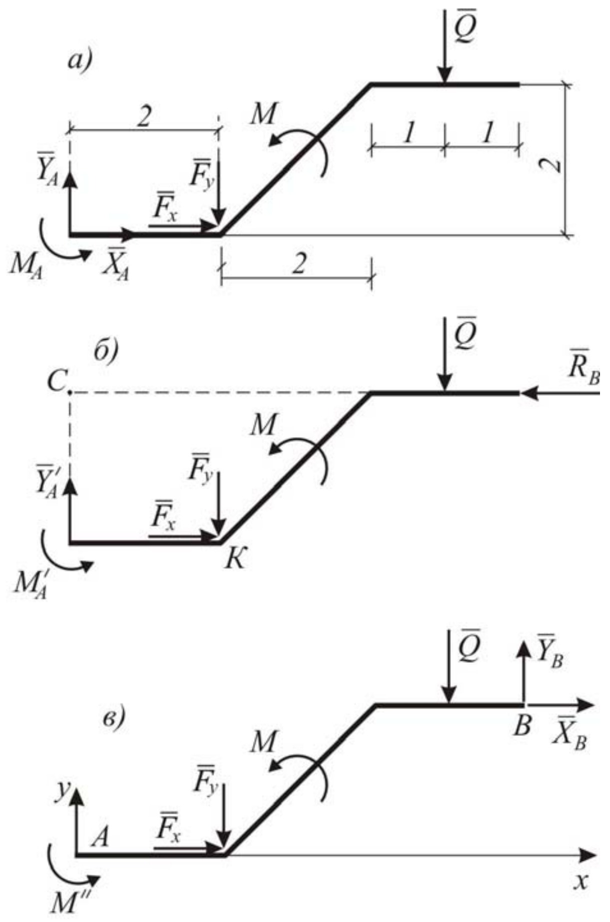


Рис. I.2.2

Чтобы выяснить, в каком случае момент, в опоре A является наименьшим, найдем его для всех трех схем (см. рис. I.2.2 а,б,в), не определяя пока остальных реакций.

Для схемы – *«а»*

$$\sum m_A(\overline{F}_к)=0;\ M_A+M-Q\cdot 5-F_y\cdot 2=0;\ M_A=38{,}4\ \text{кН}\cdot\text{м}$$

Для схемы – «*б»*

$$\sum m_c(\overline{F}_к)=0;\ M'_A+F_x\cdot 2+M-F_y\cdot 2-Q\cdot 5=0;\ M'_A=24{,}00\ \text{кН}\cdot\text{м};$$

Для схемы – «в»

$$\sum m_B(\overline{F}_к)=0;\ M''_A+F_x\cdot 2+F_y\cdot 4+M+Q\cdot 1=0;\ M''_A=-54{,}42\ \text{кН}\cdot\text{м}.$$

Таким образом, наименьший момент в заделке получается при закреплении бруса по схеме «*б»*. Определим остальные реакции для этой схемы.

$$\sum F_x=0;\ F_x-R_B=0;\ \text{откуда}\ R_B=3{,}54\ \text{кН};$$

$$\sum F_y=0;\ Y'_A-F_y-Q=0;\ \text{откуда}\ Y'_A=5{,}94\ \text{кН}.$$

Проверка

Для проверки правильности вычислений реакций R_B, Y'_A и M'_A, составим сумму моментов всех сил приложенных к ломанному брусу по схеме *б* относительно любой другой точки, например точки *K*.

$$\sum m_к(F)=0;\ M'_A-Y'_A\cdot 2+M-Q\cdot 3+R_B\cdot 2=0;$$

$$24-13{,}07\cdot 2+6-18+7{,}07\cdot 2=0;$$
$$0=0$$

Результаты проверки приведены в табл. I.2.2

Таблица I.2.2

Схемы	Моменты M_A, M'_A, M''_A, кН·м	Силы, кН	
		Y'_A	R_B
а	38,4	–	–
б	24,00	13,07	7,07
в	–54,42	–	–

Задание С-3. Равновесие системы двух тел

Конструкция состоит из двух тел (схемы С 3.1–С3.30), которые в т.C соединены друг с другом шарнирно. Внешними связями являются или шарнирно-неподвижная опора или жесткая заделка в точке A; в точке B – или шарнирно-неподвижная или шарнирно-подвижная.

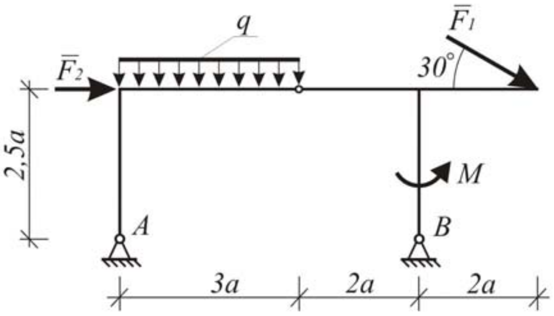
На конструкцию действуют: пара сил с моментом M, равномерно распределенная нагрузка с интенсивностью q и еще две силы $\overline{F}_1$ и $\overline{F}_2$.

Определить реакции связей в точках A, B, C, вызванные заданными нагрузками при исходных данных, приведенных в табл. I.3.1. Во всех вариантах принять a = 1 м.

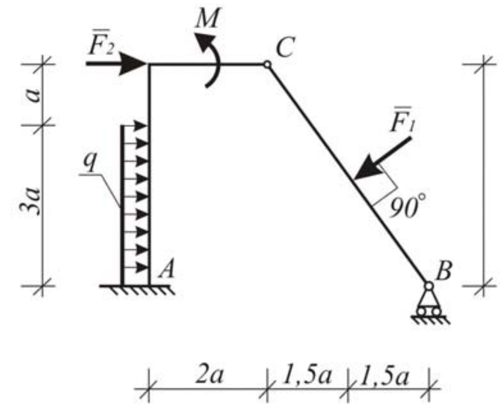
Таблица I.3.1

Номер варианта	F_1, кН	F_2, кН	M, кН·м	q, кН/м	Номер варианта	F_1, кН	F_2, кН	M, кН·м	q, кН/м
1	2	3	4	5	1	2	3	4	5
1	18	14	19	1,8	16	21	17	19	2,1
2	16	12	17	1,6	17	35	31	14	3,5
3	14	10	15	1,4	18	20	16	18	2,0
4	22	18	23	2,2	19	15	11	12	1,5
5	28	24	12	2,8	20	10	14	18	1,0
6	30	26	24	3,0	21	30	26	16	3,0
7	12	16	14	1,2	22	18	14	12	1,8
8	8	12	15	1,8	23	24	20	19	2,4
9	14	18	11	1,4	24	32	28	16	3,2
10	30	26	24	1,9	25	26	22	14	2,6
11	25	21	21	2,5	26	14	10	16	1,4
12	15	11	18	1,5	27	21	17	19	2,1
13	32	28	8	3,2	28	30	26	22	3,0
14	28	24	12	2,8	29	34	30	15	3,4
15	17	19	11	1,7	30	20	16	21	2,0

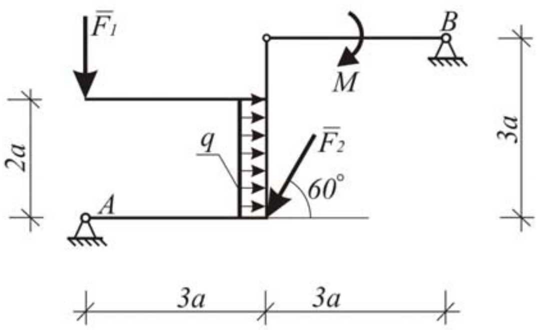
C-3.1



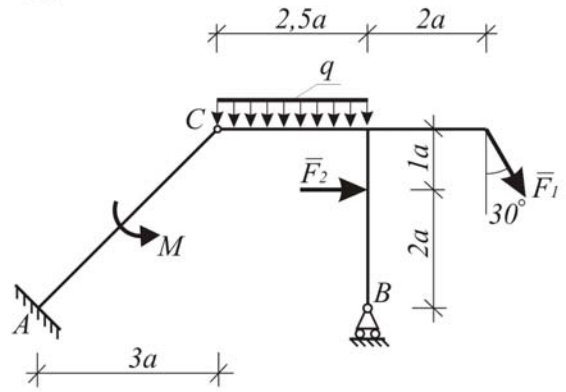
C-3.2



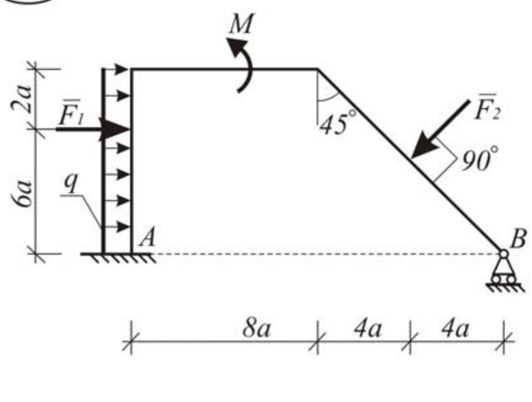
C-3.3



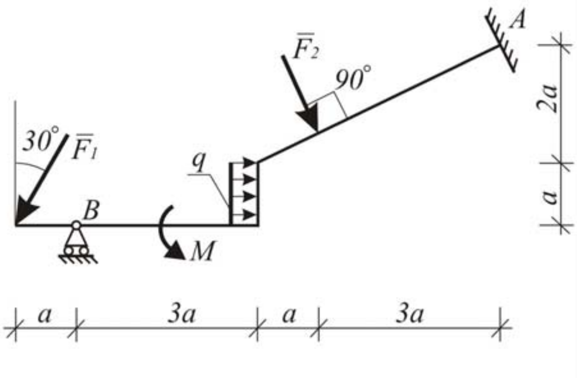
C-3.4



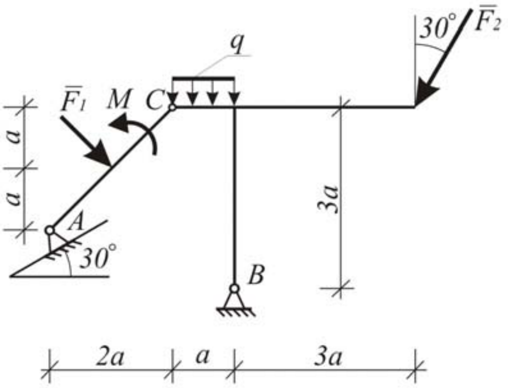
C-3.5



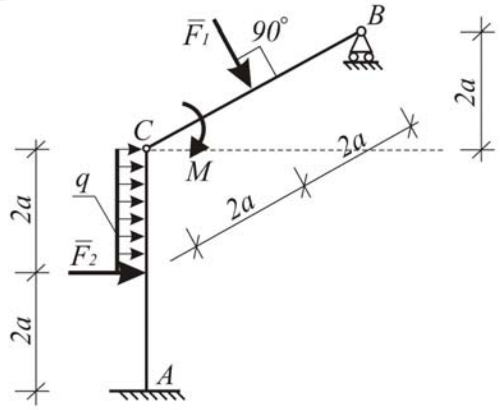
C-3.6



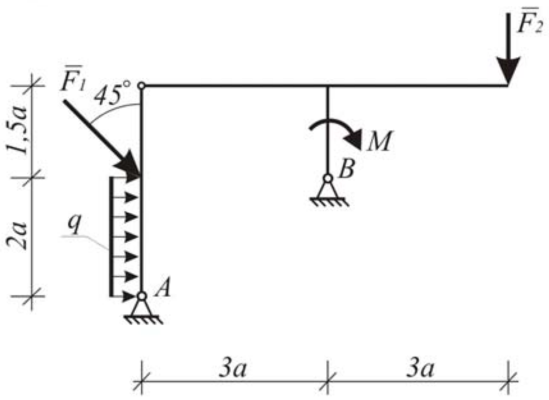
C-3.7



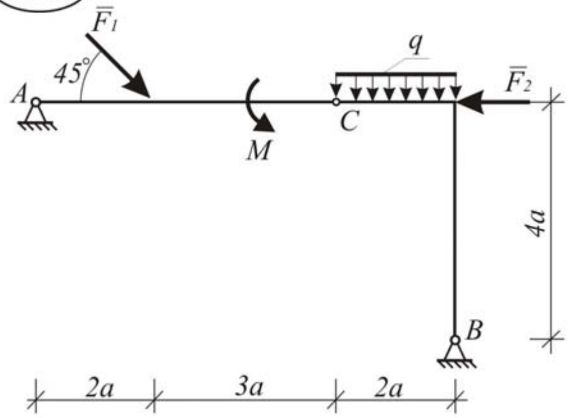
C-3.8



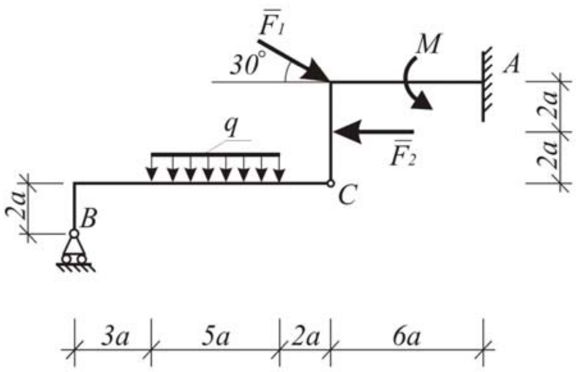
C-3.9



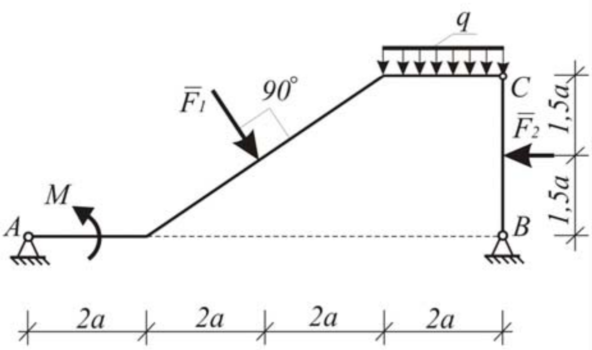
C-3.10



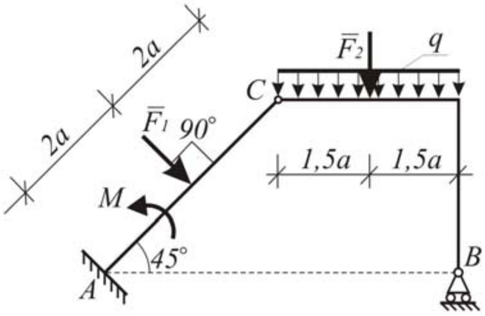
C-3.11



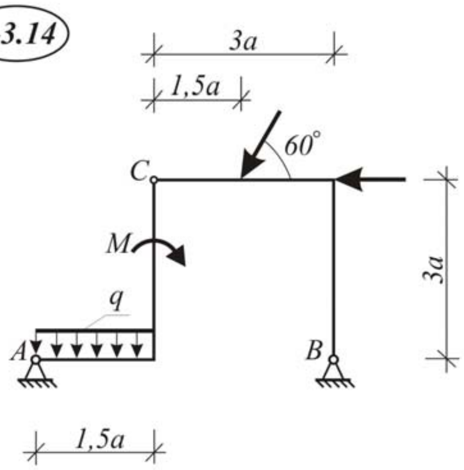
C-3.12



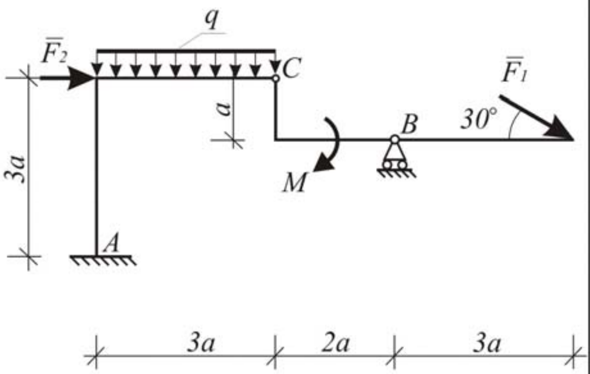
C-3.13



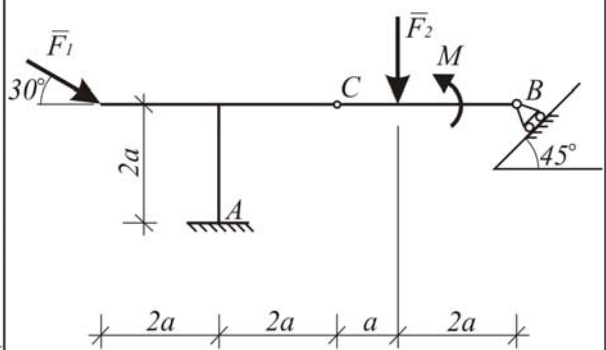
C-3.14



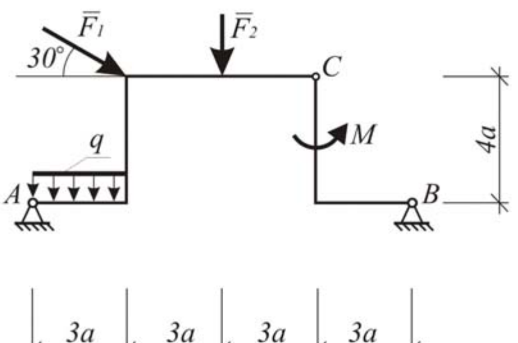
C-3.15



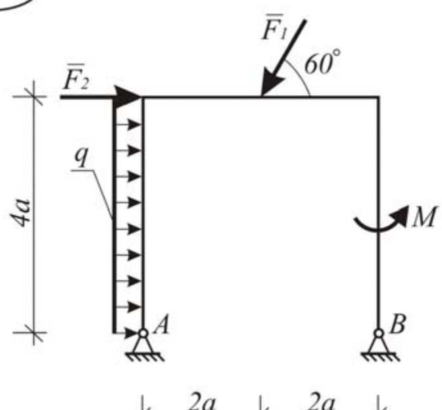
C-3.16



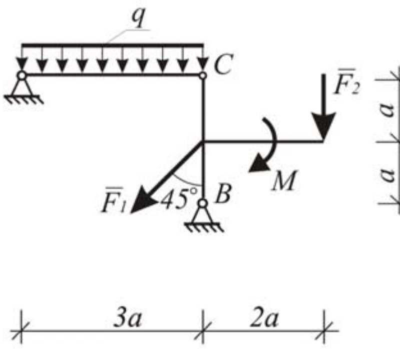
C-3.17



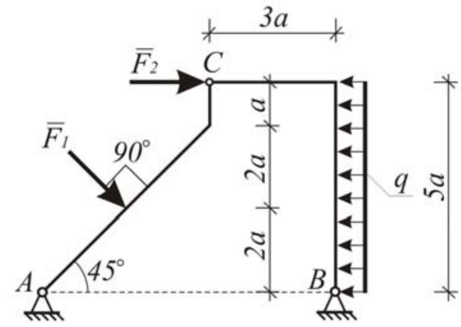
C-3.18



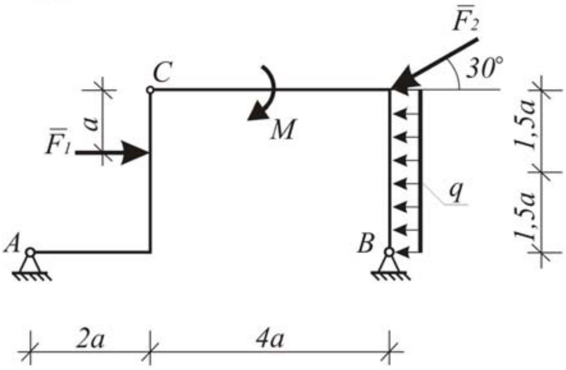
C-3.19



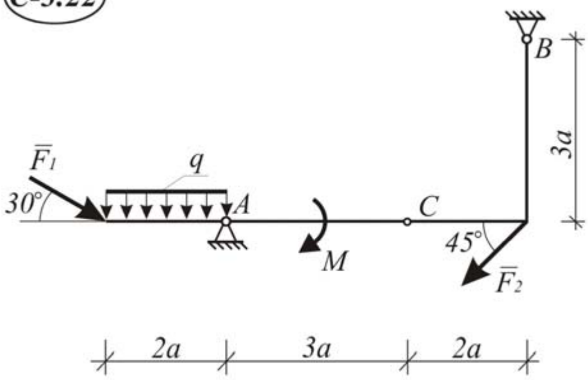
C-3.20



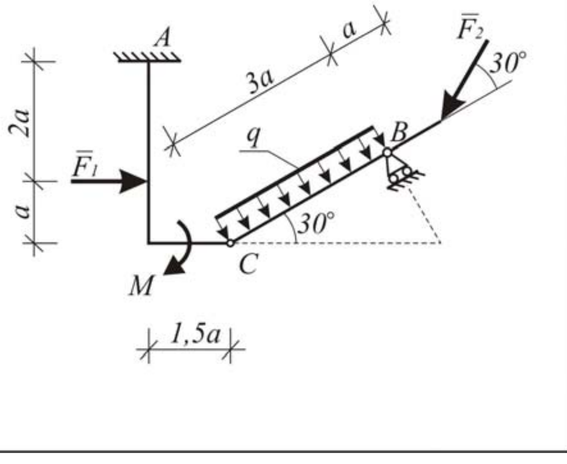
C-3.21



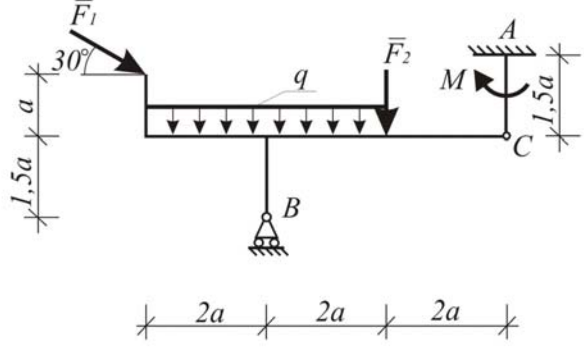
C-3.22



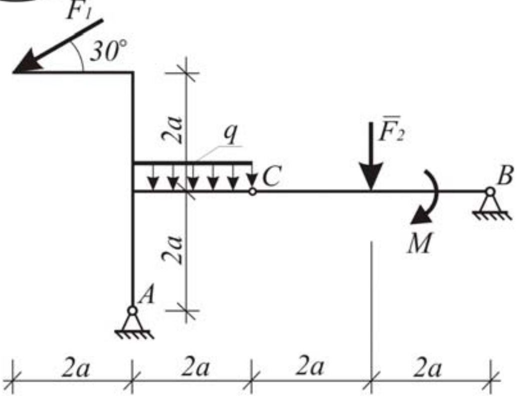
C-3.23



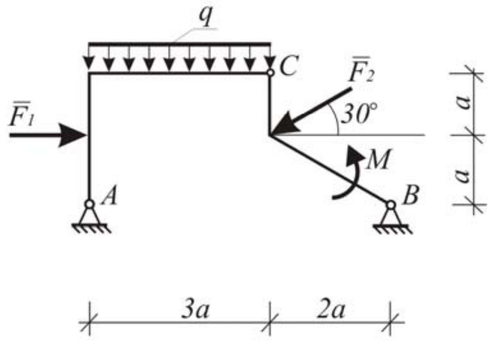
C-3.24



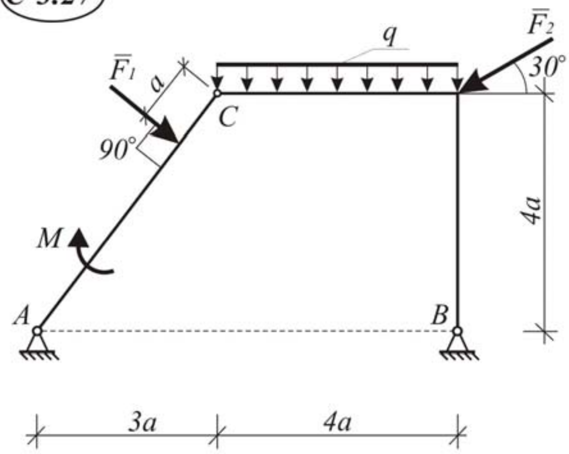
C-3.25



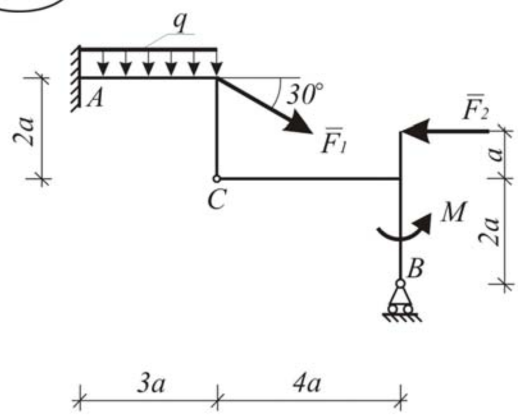
C-3.26



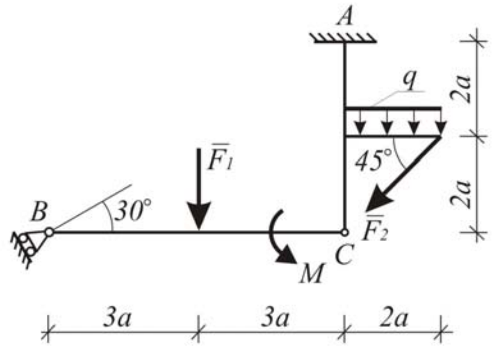
C-3.27



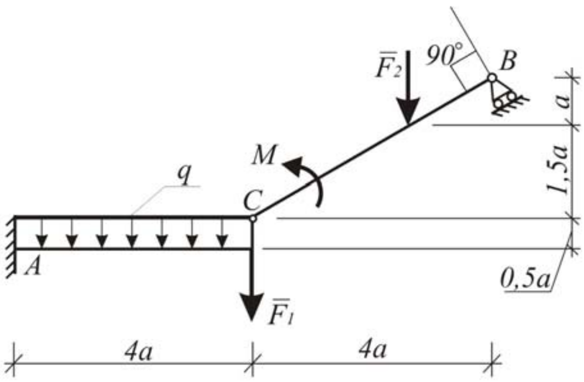
C-3.28



C-3.29



C-3.30



Пример решения С-3

Д а н о : $F_1 = 10$ кН; $F_2 = 12$ кН; $q = 1{,}6$ кН / м; $m = 17$ кН · м; $a = 1$ м.

Н а й т и : реакции в опорах *A* и *B* и давление в шарнире *C* (рис. I.3.1).

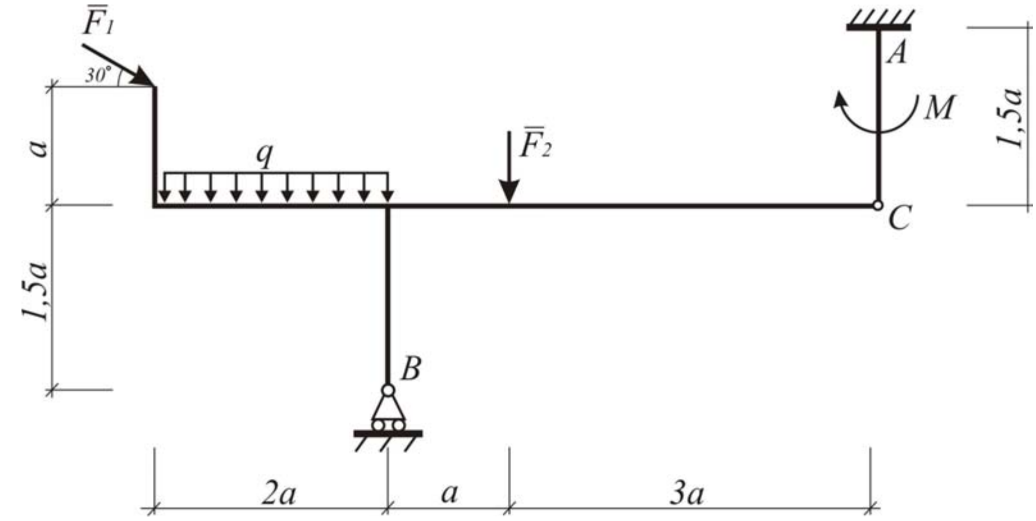


Рис. I.3.1

Решение:

1. Опора *A* – жесткая заделка, реакцию в этой опоре представим двумя неизвестными по величине и направлению силами $\overline{X}_A$ и $\overline{Y}_A$, и парой сил, с моментом *M*, который тоже неизвестен. Силы $\overline{X}_A$ и $\overline{Y}_A$ направим в произвольном направлении, но для удобства, параллельно координатным осям *x* и *y*.

Опора *B* – шарнирно-подвижная, реакцию $\overline{R}_B$ направим перпендикулярно площадке, которая поддерживает эту опору.

Равномерно-распределенную нагрузку заменим одной сосредоточенной силой.

$$Q = q \cdot 2a = 1{,}6 \cdot 2 \cdot 1 = 3{,}2 \text{ кН}.$$

Для того, чтобы легче составлять уравнения равновесия, силу $\overline{F}_1$ разложим на составляющие, параллельные координатным осям, сохраняя при этом точку ее приложения:

$$F_{1,x} = F_1 \cdot \cos 30° = 10 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 8{,}66 \text{ кН};$$

$$F_{1,y} = F_1 \cdot \sin 30° = 10 \cdot \frac{1}{2} = 5 \text{ кН}.$$

Задачу решим методом «расчленения», то есть разрезаем конструкцию по шарниру *C* на две части и рассматриваем равновесие каждой в отдельности с учетом закона равенства действия и противодействия $\overline{X}_C = -\overline{X}'_C$ и

$\overline{Y}_C = -\overline{Y}'_C$ (рис. I.3.2 и I.3.3); где $\overline{X}_C$ и $\overline{Y}_C$ – составляющие реакции в шарнире *C*, приложенные к левой части конструкций.

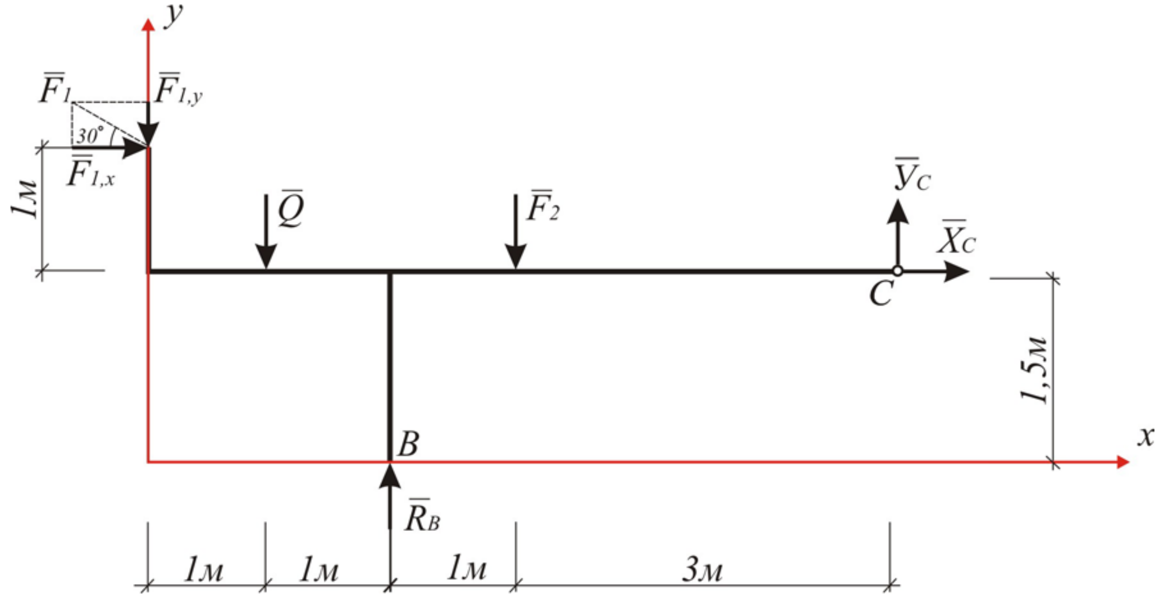


Рис. I.3.2

2. Сначала рассмотрим систему уравновешивающихся сил, приложенных к телу *BC* (см. рис. I.3.2).

Систему уравнений равновесия для сил, изображенных на рис. I.3.2 запишем в виде:

$$\sum F_{kx} = 0;\ F_{1,x} + X_c = 0; \tag{I.3.1}$$

$$\sum F_{ky} = 0;\ -F_{1,y} - Q - F_2 + Y_c + R_B = 0; \tag{I.3.2}$$

$$\sum m_C(F_k) = 0;\ -R_B \cdot 4 + F_2 \cdot 3 + Q \cdot 5 + F_{1,y} \cdot 6 - F_{1,x} \cdot 1 = 0 \tag{I.3.3}$$

Подставляя исходные данные в уравнения (I.3.1–I.3.3) получим искомые неизвестные.

$$X_C = -8{,}66\ \text{кН};\ Y_C = 1{,}9\ \text{кН};\ R_B = 18{,}3\ \text{кН}.$$

3. Теперь рассмотрим систему сил $\overline{X}'_C$, $\overline{Y}'_C$, $\overline{X}'_A$, $\overline{Y}'_A$ и пары сил с моментами M_A и M, действующих на тело *AC*.

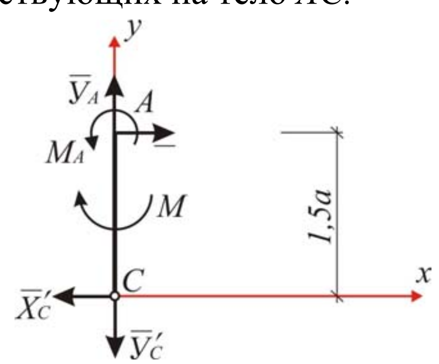


Рис. I.3.3

Запишем уравнения равновесия для произвольной плоской системы сил (рис. I.3.3), приложенных к телу AC.

$$\sum F_{kx}=0;\ X_A-X'_C=0; \tag{I.3.4}$$

$$\sum F_{ky}=0;\ Y_A-Y'_C=0; \tag{I.3.5}$$

$$\sum m_A(F)=0;\ M_A-M-X'_C\cdot 1{,}5=0. \tag{I.3.6}$$

После подстановки исходных данных в уравнения (3.4–3.6) получим:

$$X_C=-8{,}66\text{ кН};\ Y_A=+1{,}9\text{ кН};\ M_A=4\text{ кН}\cdot\text{м}$$

4. Для проверки правильности следует убедиться, что соблюдаются уравнения равновесия сил, приложенных ко всей конструкции (рис. I.3.4).

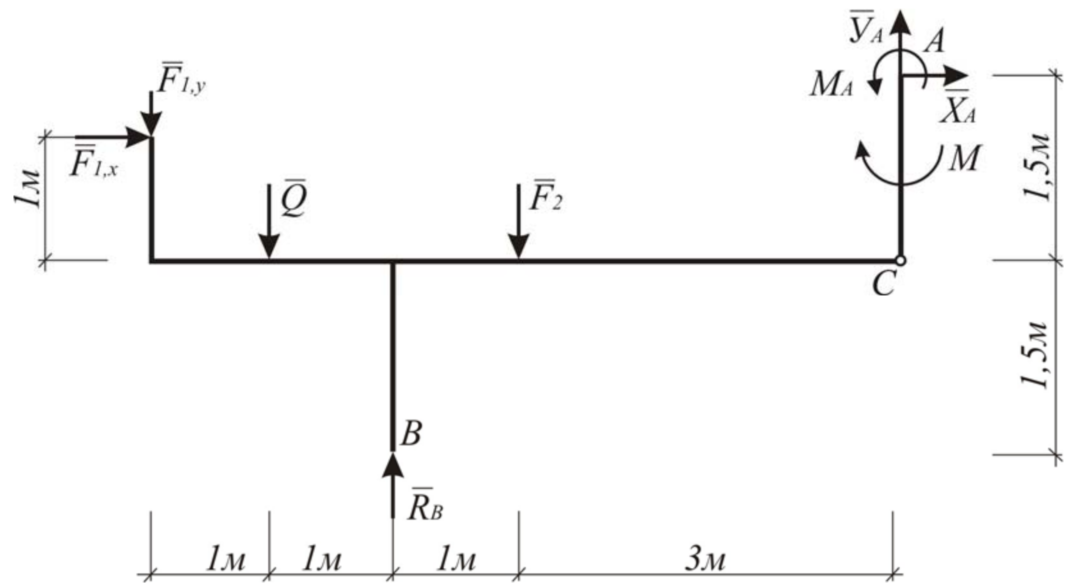


Рис. I.3.4

$$\sum m_B(\bar{F})=0;$$

$$-F_{1,x}\cdot 2{,}5+F_{1,y}\cdot 2+Q\cdot 1-F_2\cdot 1-X_A\cdot 3+Y_A\cdot 4+M_A-M=0;$$

$$-8{,}66\cdot 2{,}5+5\cdot 2+3{,}2\cdot 1-12\cdot 1+8{,}66\cdot 3+1{,}9\cdot 4+4-17=0;$$

$$0=0$$

Задача решена верно.

В ответе знак (–) показывает, что реакции $\bar{X}_A, \bar{X}_C$ направлены противоположно тем направлениям, которые показаны на рисунках.

3. Произвольная пространственная система сил

Задание С-4. Определение положения центра тяжести и реакций опор пространственной конструкции

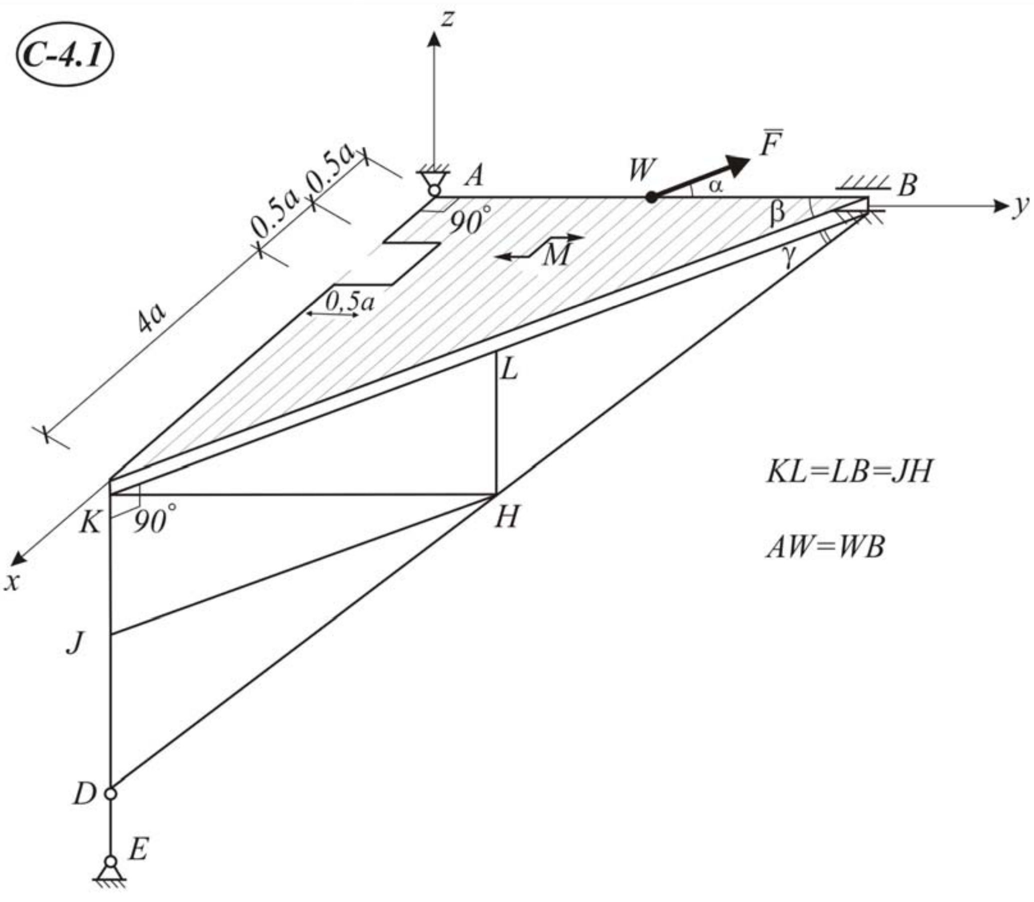
Конструкция, состоящая из плиты весом P_n и фермы весом $P_ф$, закреплена сферическим шарниром в точке A, цилиндрическим шарниром (подшипником) в точке B и невесомым стержнем DE. Плита и ферма жестко соединены между собой под прямым углом. На плиту в плоскости xy, действует сила F, расположенная под углом α к оси y или ей параллельной и пары сил с моментом M (Схемы С 4.1–С4.30).

Найти центр тяжести всей конструкции, а также реакции в опорах при исходных данных, приведенных в табл. I.4.1. В расчетах принять $a = 1$ м.

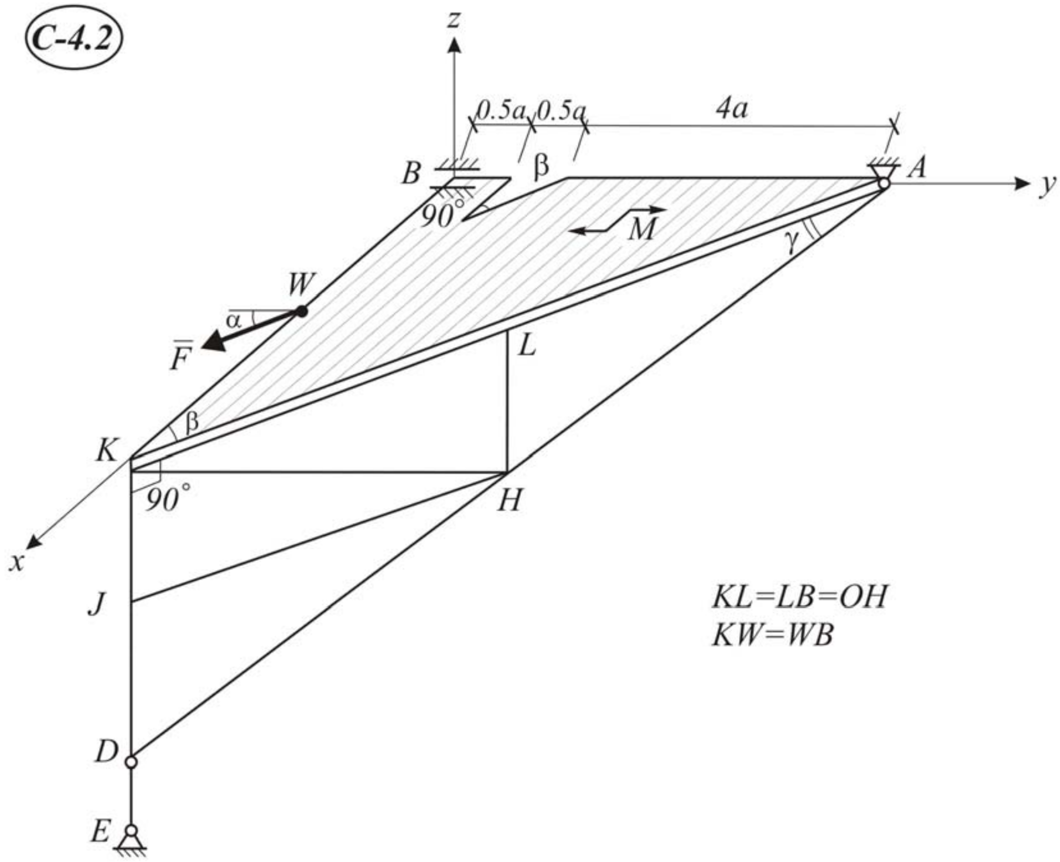
Таблица I.4.1

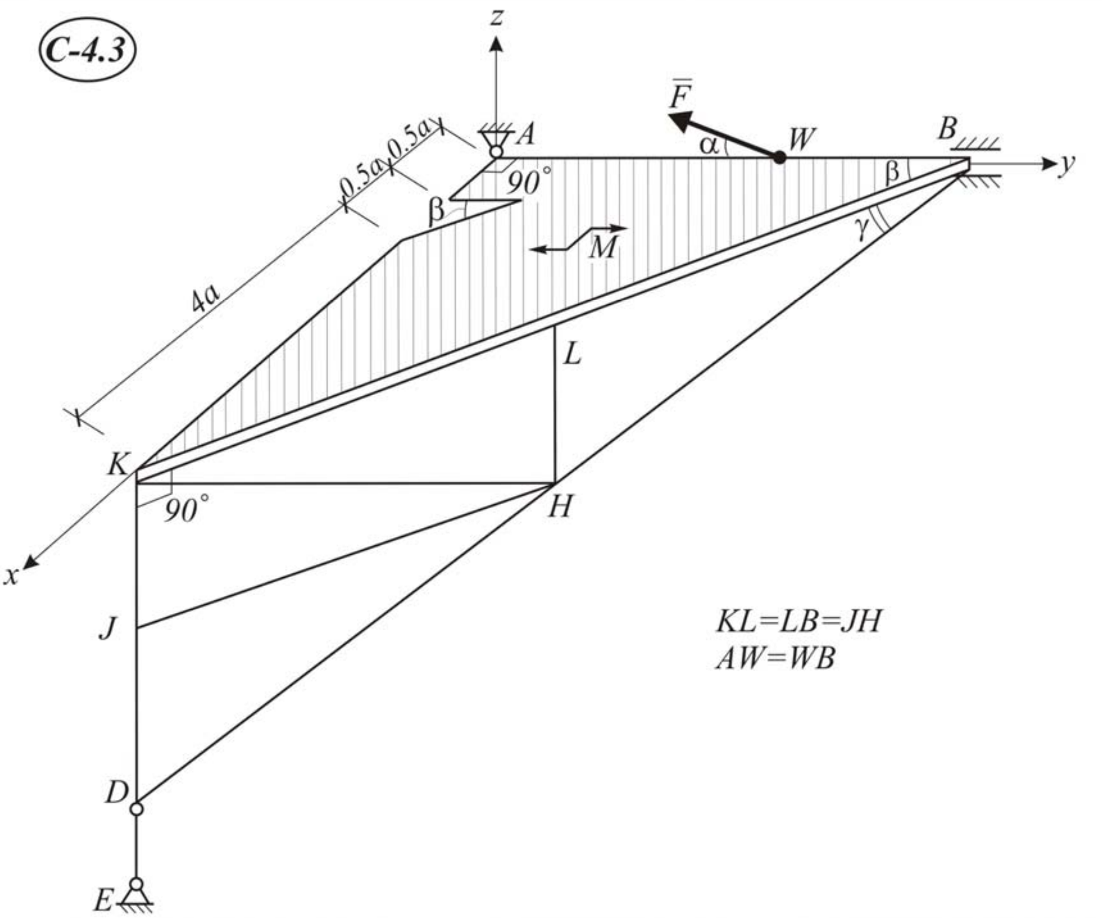
Номер варианта	P_n, кН	$P_ф$, кН	M, кН·м	F, кН	α, град	β, град	γ, град
1	2	3	4	5	6	7	8
1	10	6	7	6	30	30	30
2	15	8	10	9	60	60	60
3	20	9	6	5	45	45	45
4	18	10	5	4	30	45	60
5	17	11	4	3	60	30	45
6	11	10	12	11	45	45	60
7	9	6	14	13	30	60	30
8	25	11	9	8	60	30	60
9	30	18	7	6	45	60	30
10	19	10	11	10	30	60	60
11	16	7	14	13	90	30	60
12	14	6	7	6	90	30	60
13	23	5	10	9	90	60	60
14	26	4	6	5	90	30	45
15	27	3	5	4	45	60	60
16	8	8	4	7	30	30	30
17	9	12	12	11	30	45	60
18	11	11	14	13	45	30	60
19	14	13	9	8	60	45	60
20	17	14	7	6	30	60	60
21	29	9	11	10	60	30	30
22	15	10	14	13	45	60	30
23	17	6	7	6	90	30	30
24	21	7	10	9	90	60	45
25	25	8	6	5	90	30	45
26	12	10	5	4	90	60	30
27	18	3	4	3	90	45	45
28	20	5	12	11	90	30	60
29	22	8	14	13	90	-	45
30	24	12	9	8	60	-	45

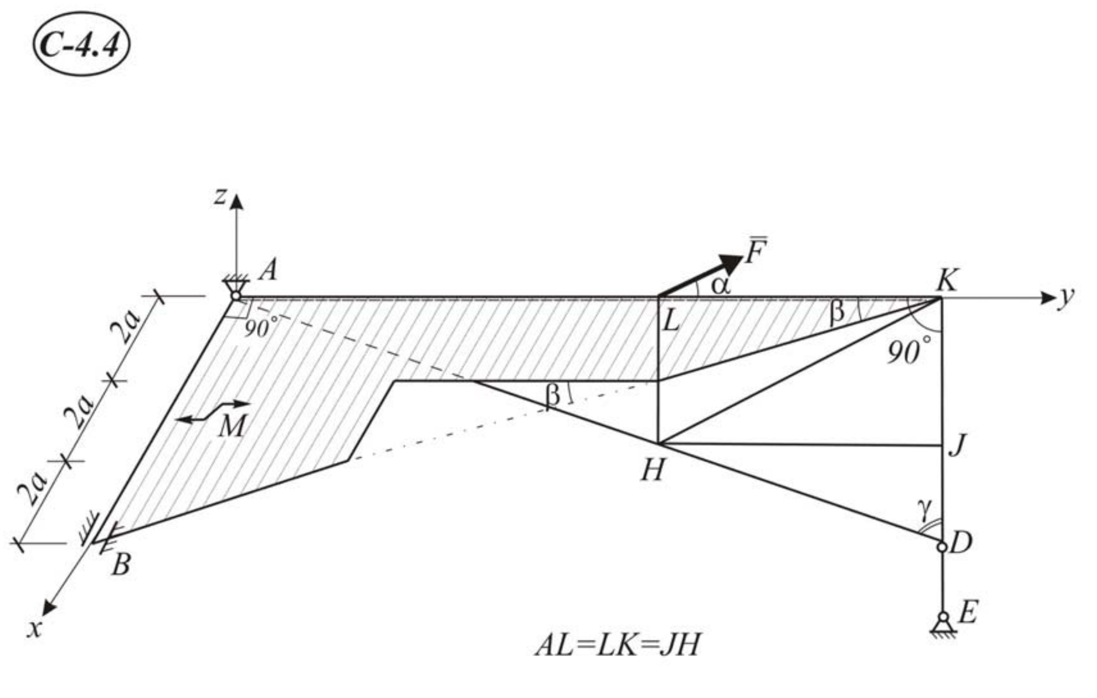
C-4.1

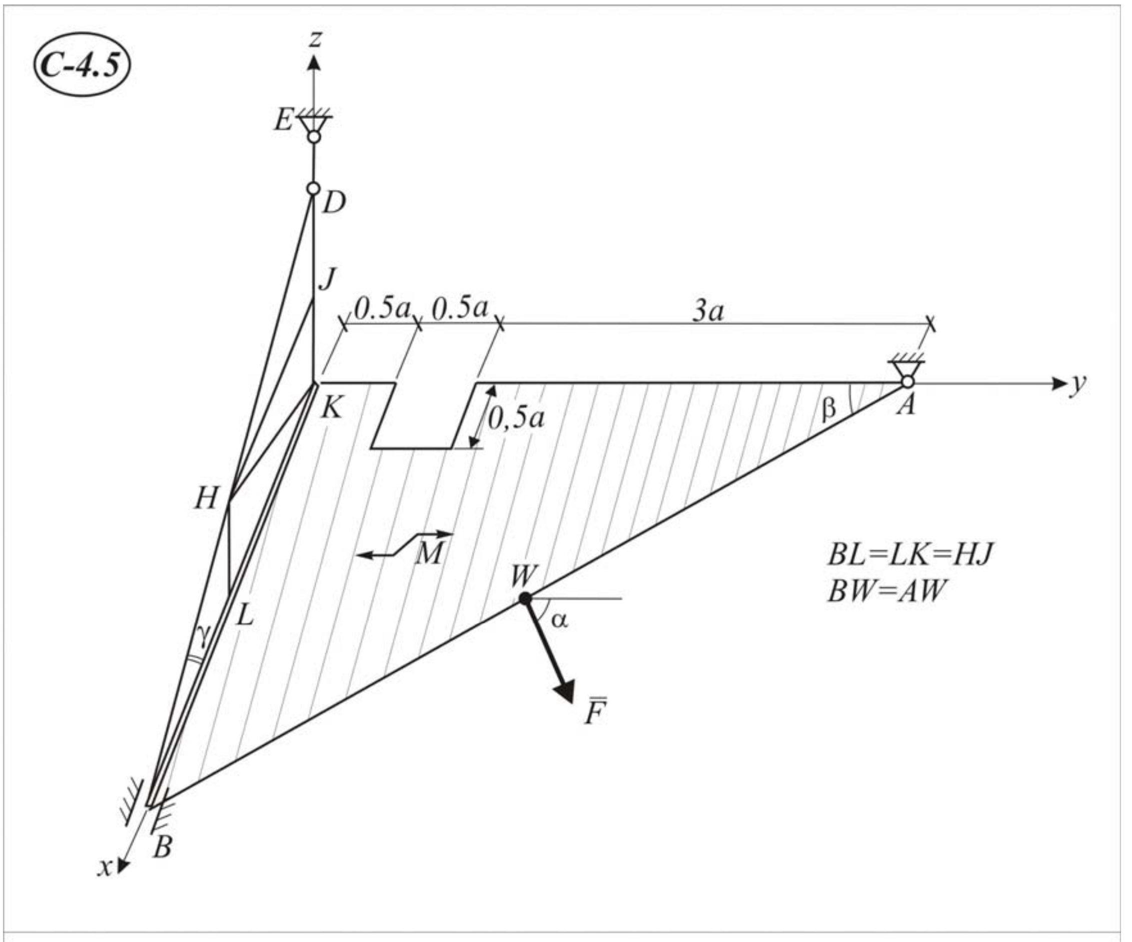

z
A
W
F
α
B
y
0.5a
0.5a
0.5a
90°
β
M
γ
0,5a
4a
L
KL=LB=JH
AW=WB
K
90°
H
x
J
D
E

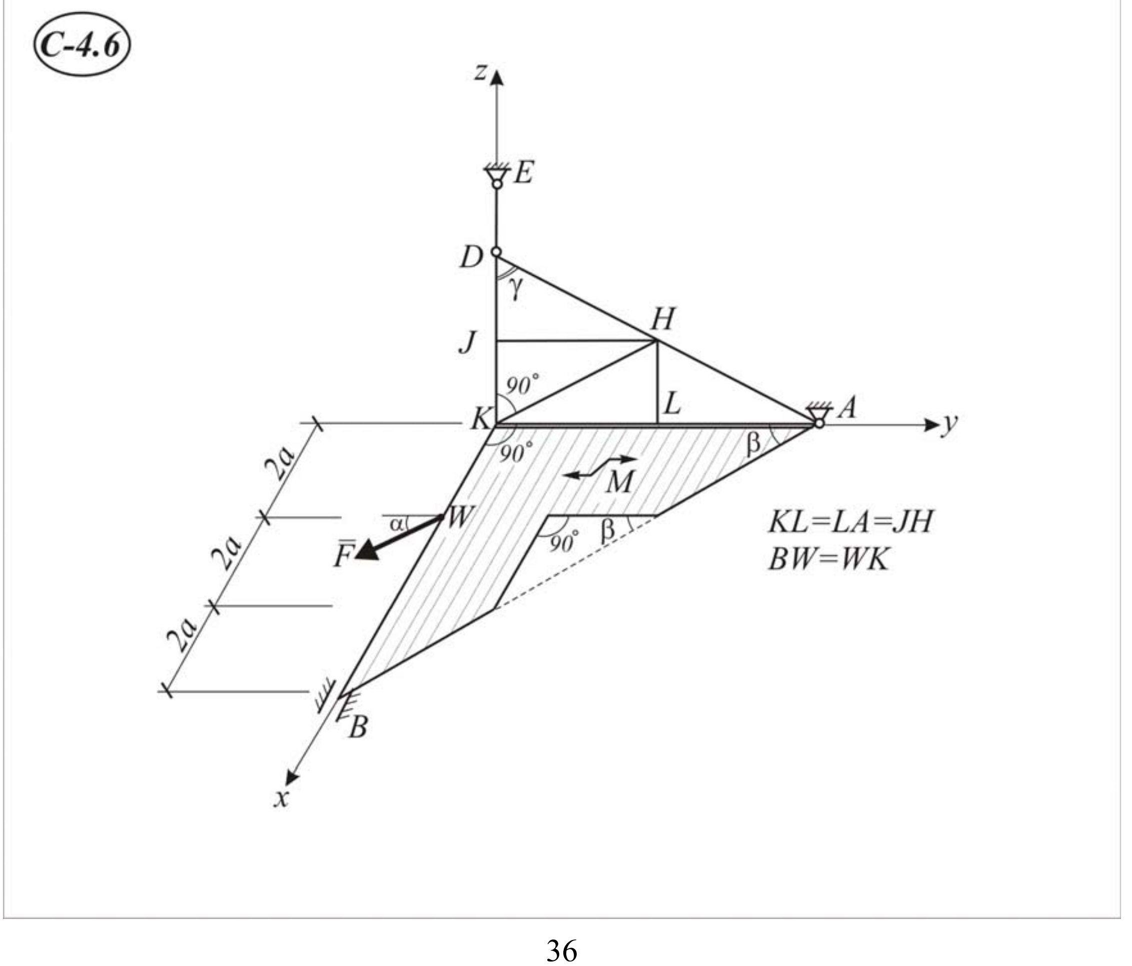
C-4.2


z
0.5a
0.5a
4a
B
β
A
y
90°
M
γ
W
α
F
L
K
β
90°
H
x
J
KL=LB=OH
KW=WB
D
E

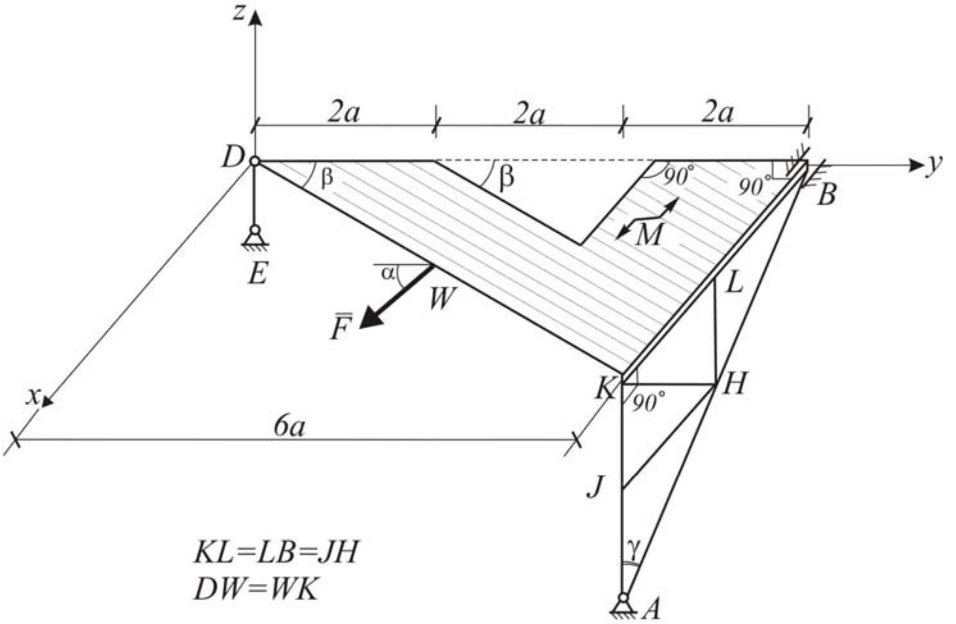

C-4.3
z
A
0.5a
0.5a
90°
β
F
α
W
B
β
y
γ
M
4a
L
K
90°
H
x
J
KL=LB=JH
AW=WB
D
E


C-4.4
z
A
F
α
K
y
2a
90°
L
β
90°
2a
β
M
J
2a
H
γ
B
D
x
E
AL=LK=JH


C-4.5
z
E
D
J
0.5a
0.5a
3a
K
0,5a
β
A
y
H
M
W
BL=LK=HJ
BW=AW
γ
L
α
F
B
x

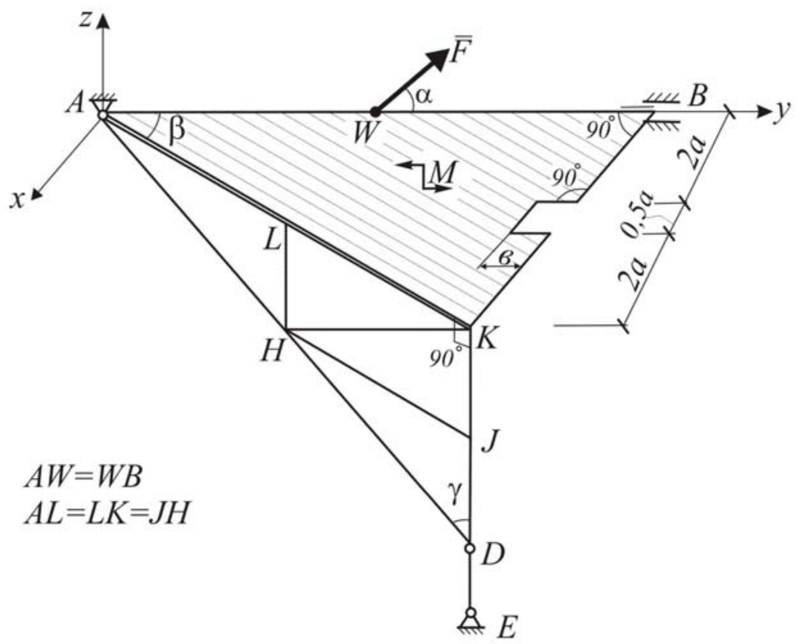

C-4.6
z
E
D
γ
H
J
90°
L
K
A
y
90°
β
2a
M
α
W
90°
β
KL=LA=JH
BW=WK
F
2a
2a
B
x

C-4.7

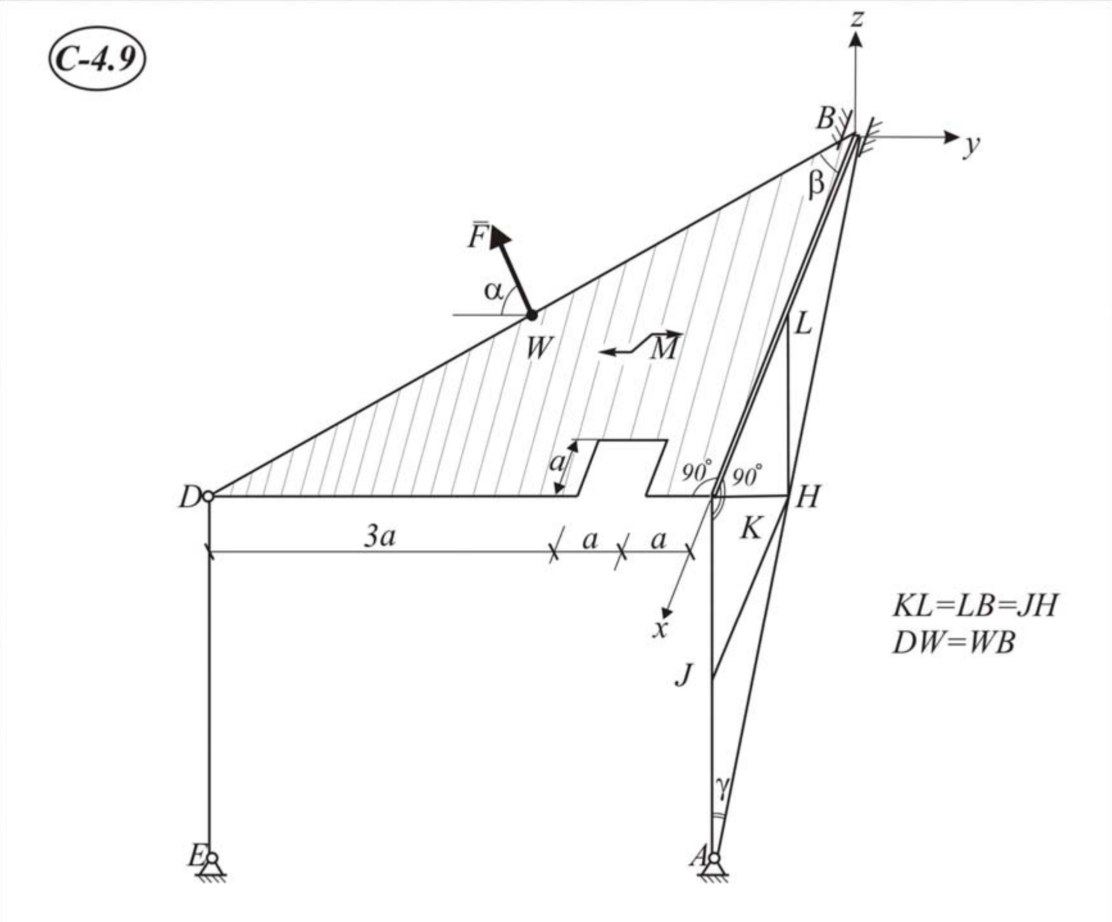


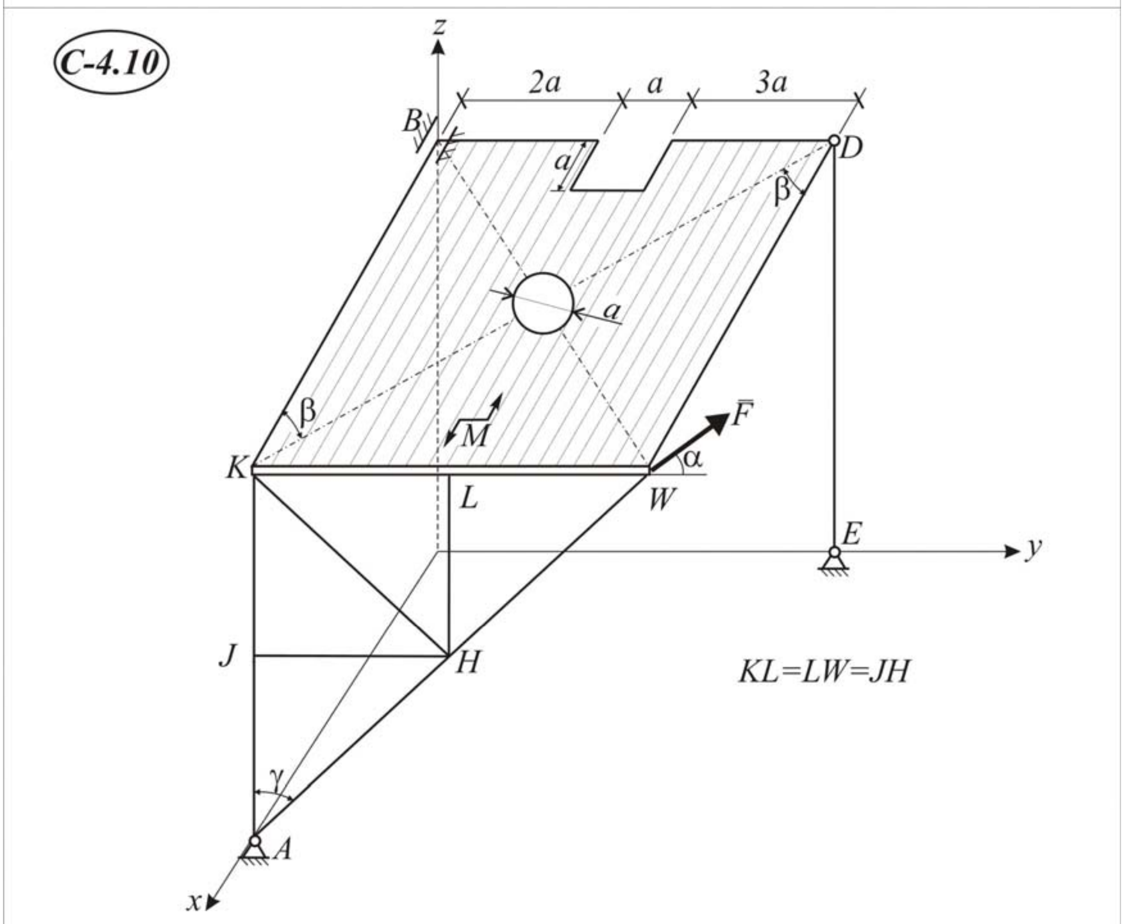
$KL = LB = JH$
$DW = WK$

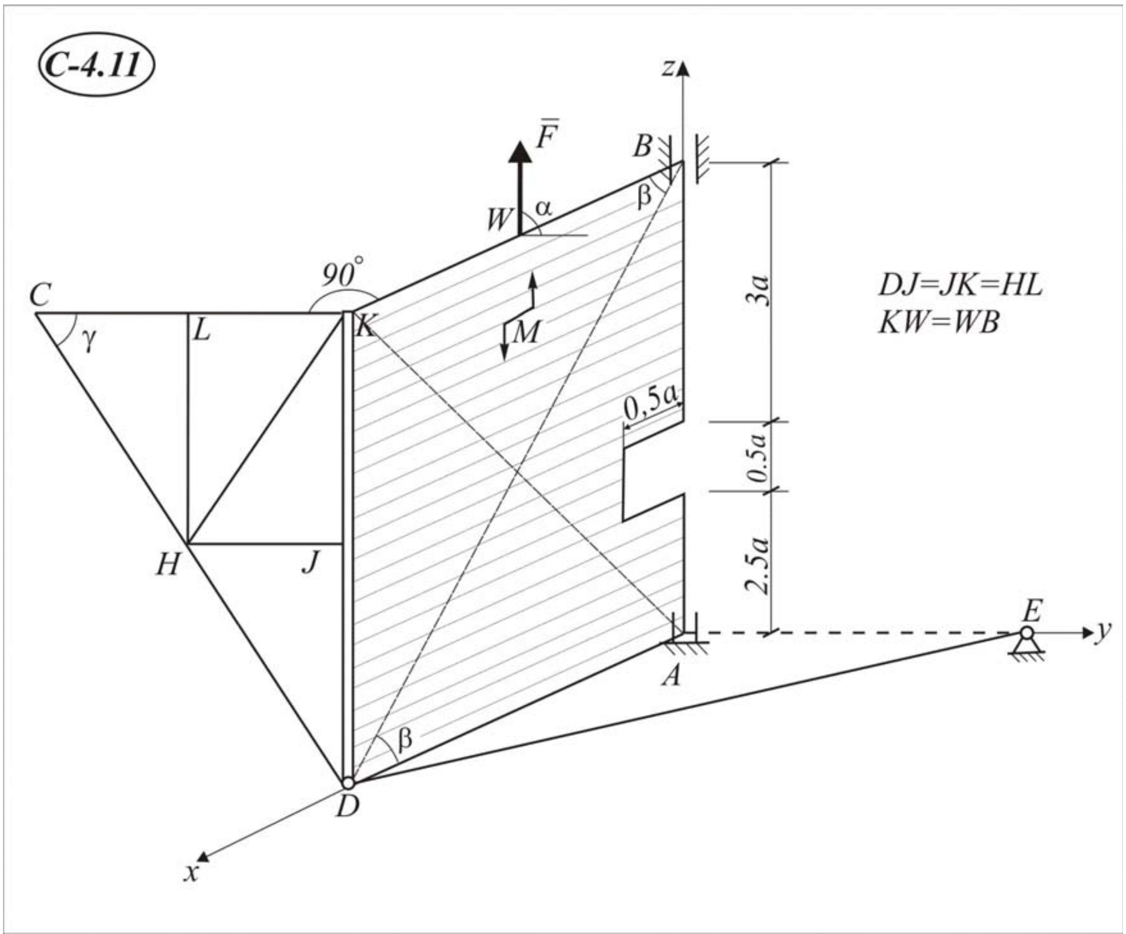
C-4.8

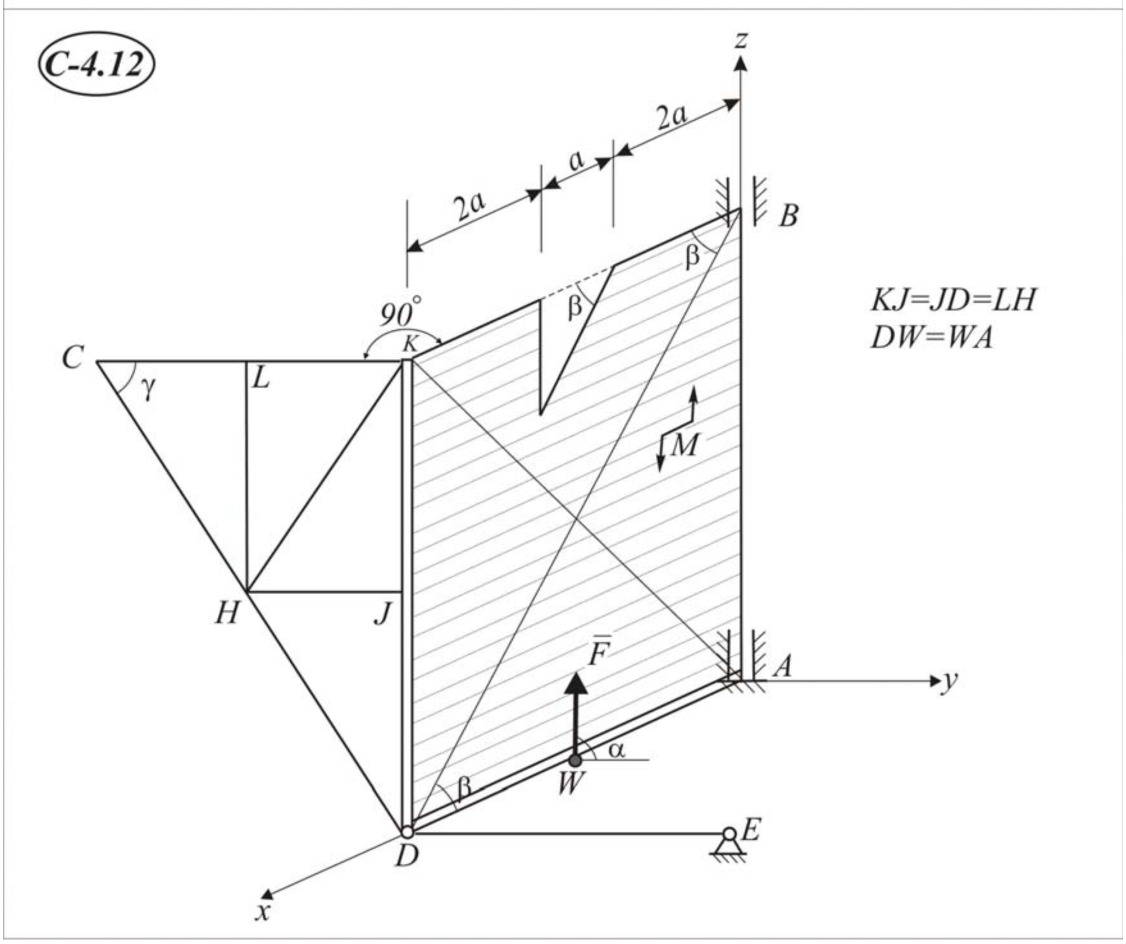


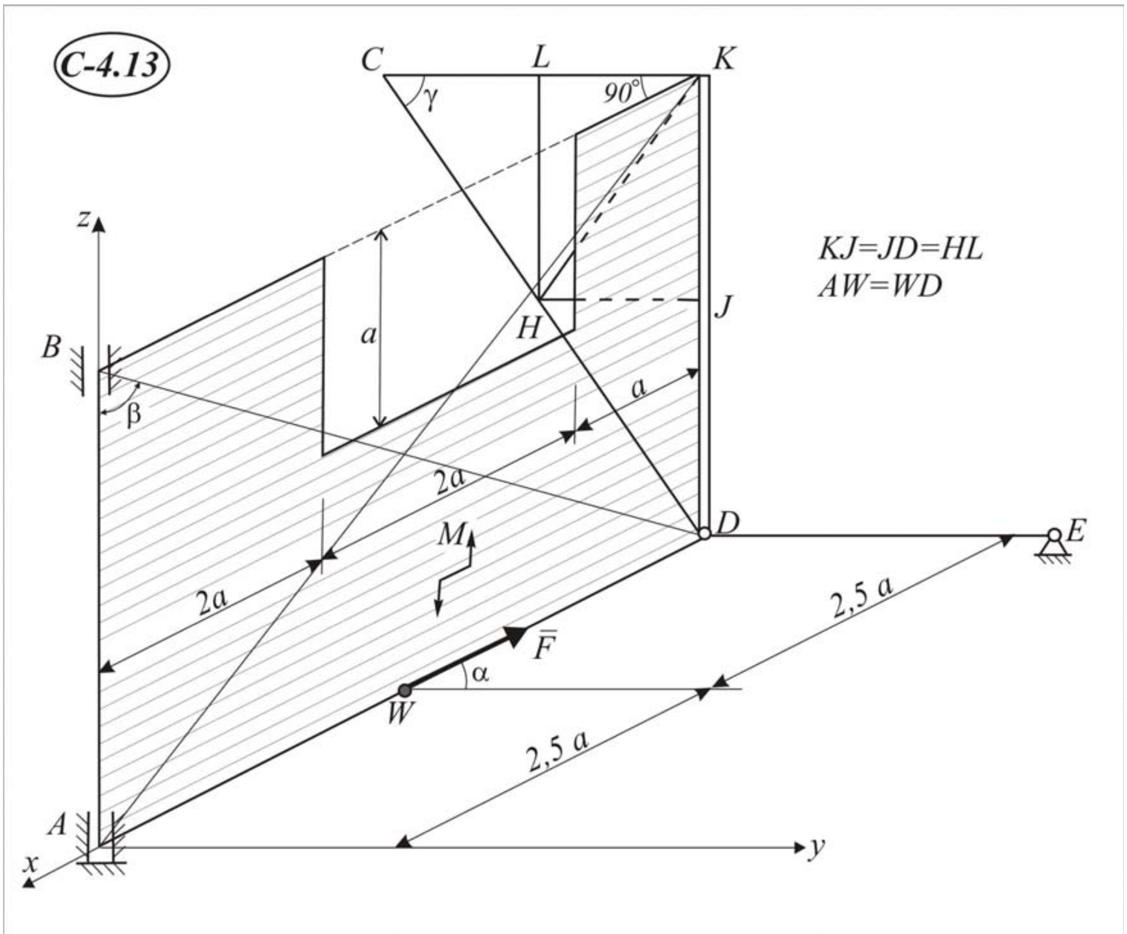
$AW = WB$
$AL = LK = JH$

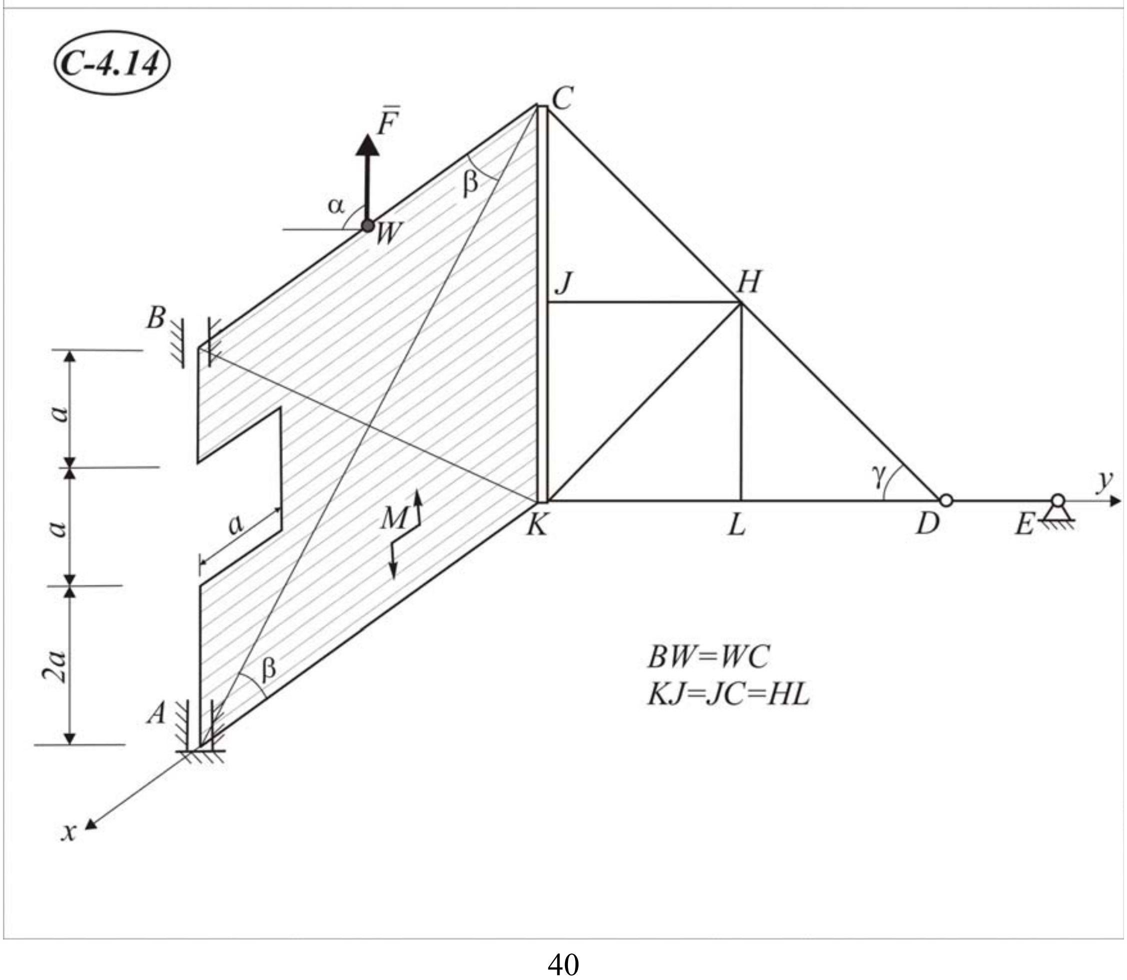

C-4.9
z
y
B
β
F
α
W
M
L
a
90°
90°
D
H
K
3a
a
a
x
KL=LB=JH
DW=WB
J
γ
E
A

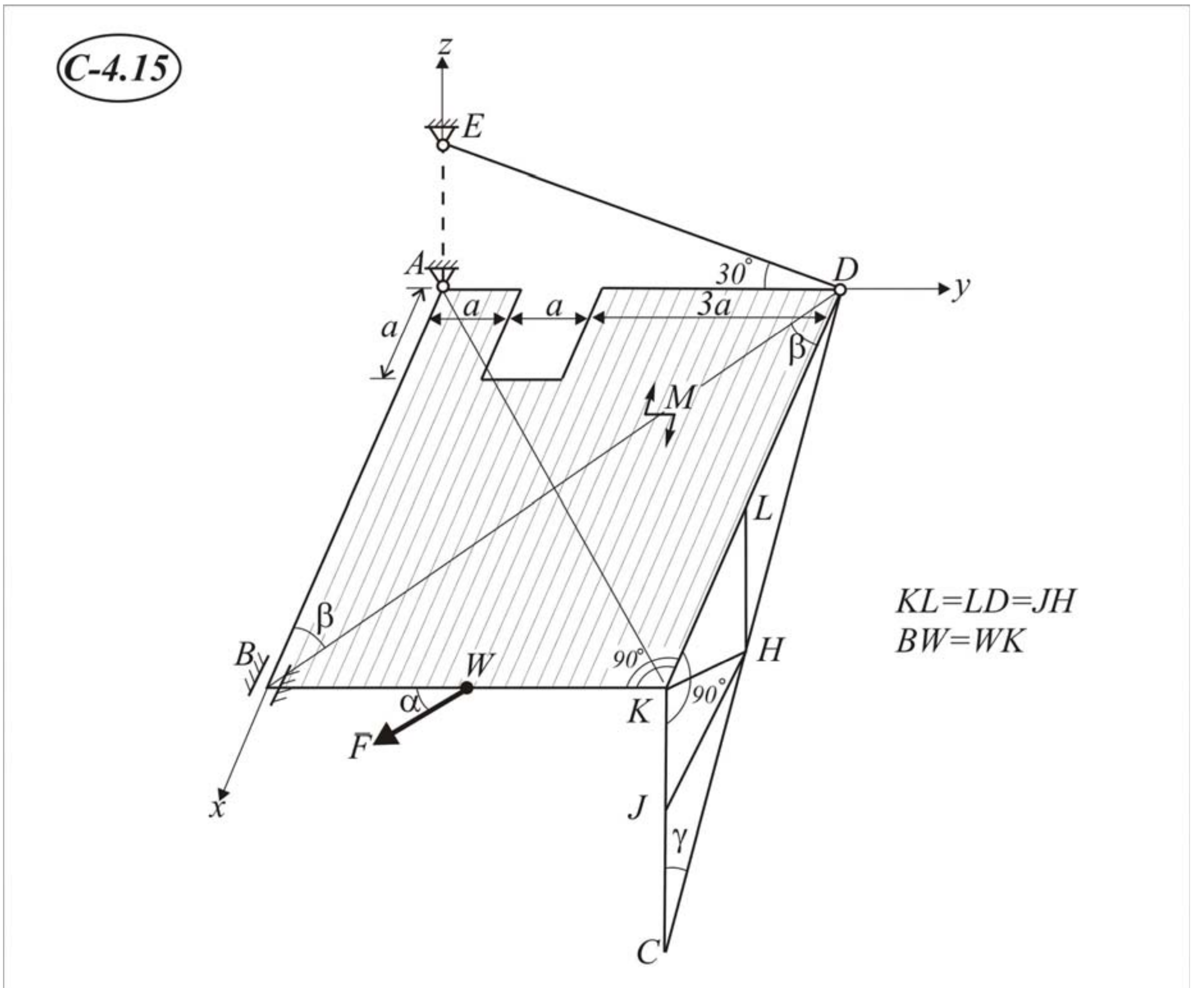

C-4.10
z
2a
a
3a
B
a
D
β
a
β
M
F
K
α
L
W
E
y
J
H
KL=LW=JH
γ
A
x

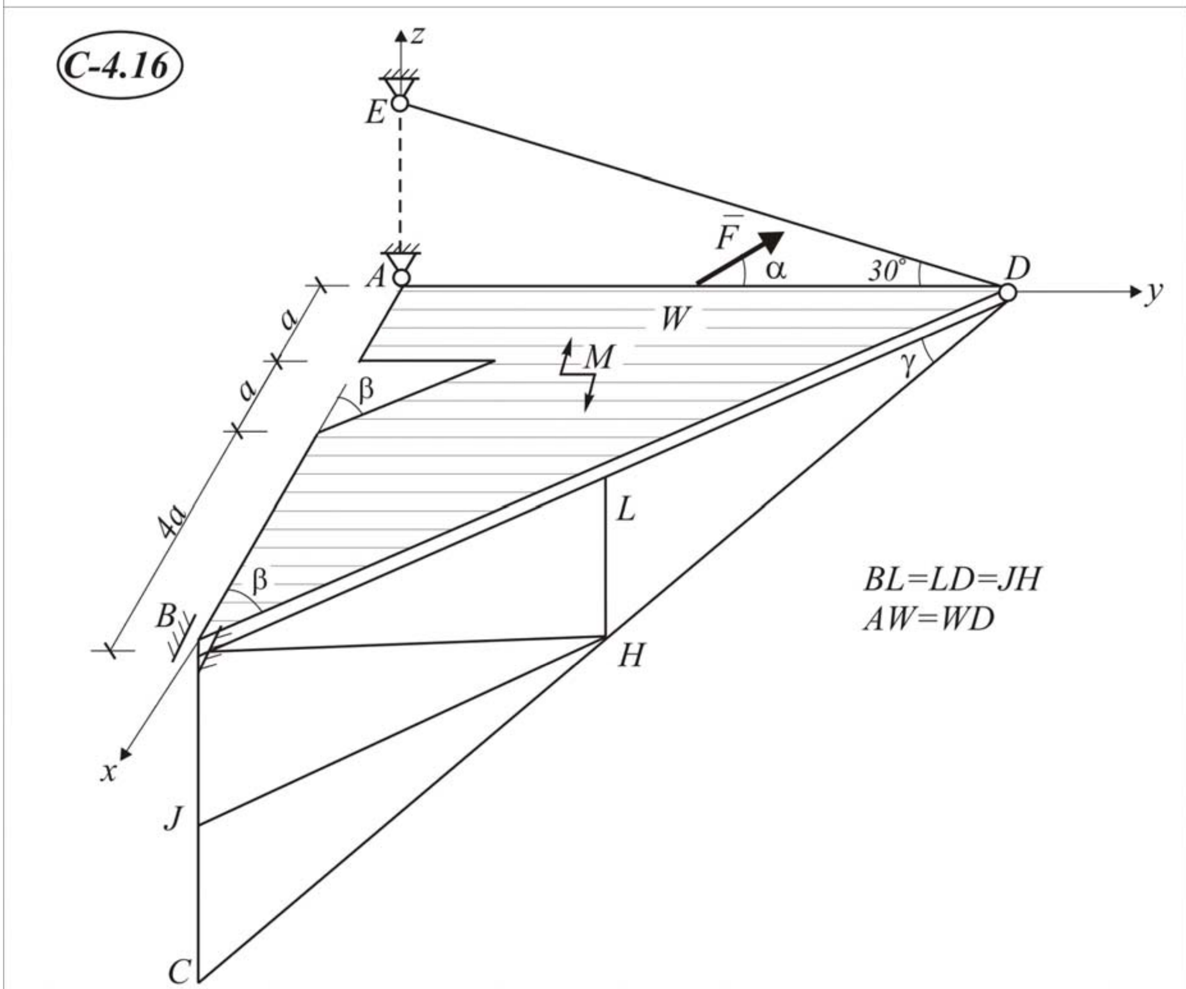

C-4.11
z
F
B
W
α
β
90°
C
K
L
γ
M
DJ=JK=HL
KW=WB
3a
0,5a
0.5a
2.5a
H
J
E
y
A
β
D
x


C-4.12
z
2a
a
2a
B
β
β
90°
K
KJ=JD=LH
DW=WA
C
γ
L
M
H
J
F
A
y
α
W
β
D
E
x

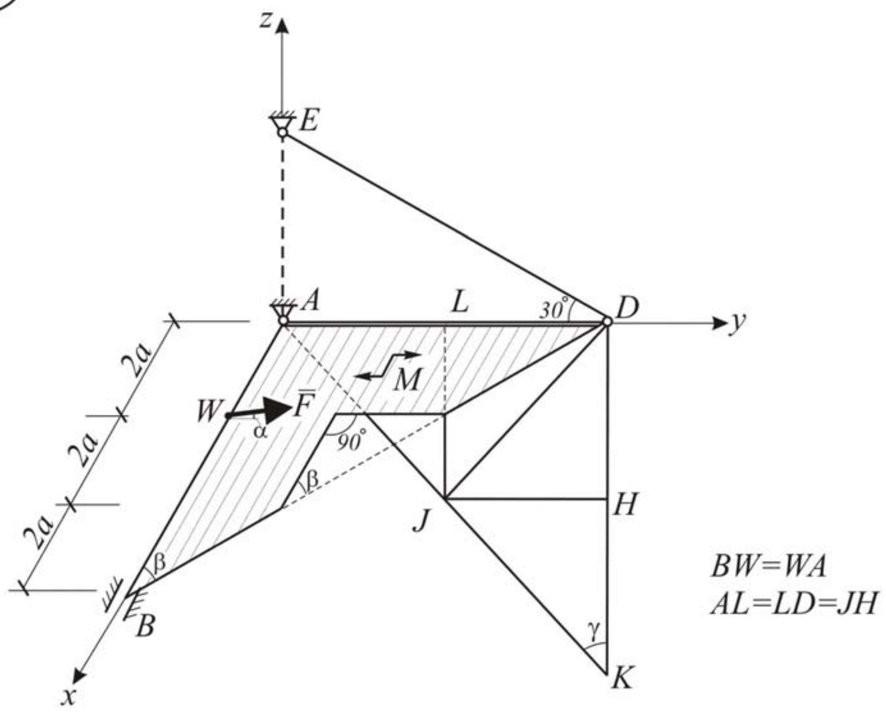

C-4.13
C
L
K
γ
90°
z
KJ=JD=HL
AW=WD
B
a
H
J
β
a
2a
D
E
M
2a
2,5 a
F
α
W
2,5 a
A
x
y


C-4.14
C
F
β
α
W
J
H
B
a
γ
y
a
a
M
K
L
D
E
2a
β
A
BW=WC
KJ=JC=HL
x

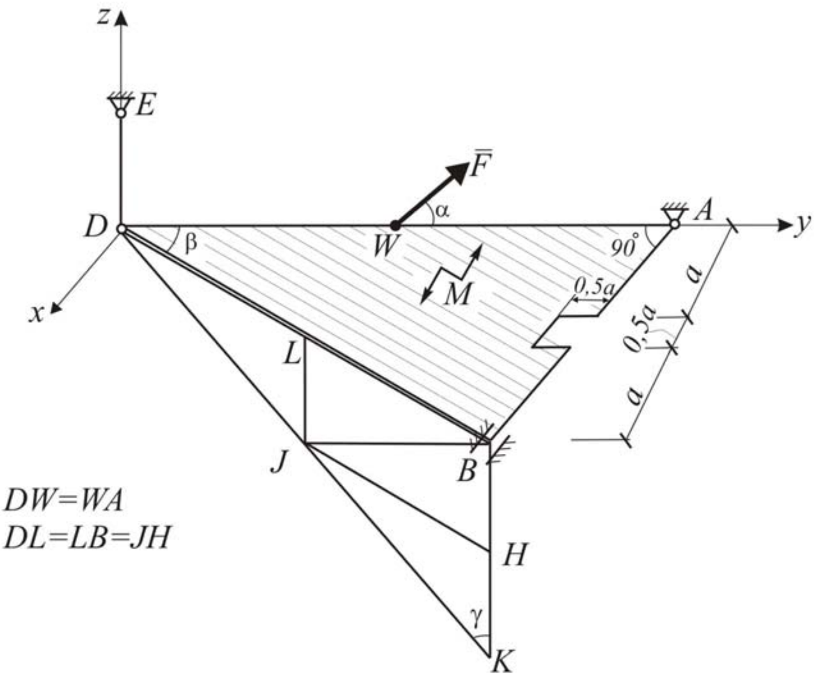

C-4.15
z
E
A
D
y
30°
a
a
a
3a
β
M
L
KL=LD=JH
BW=WK
β
B
W
90°
H
α
90°
K
F
x
J
γ
C

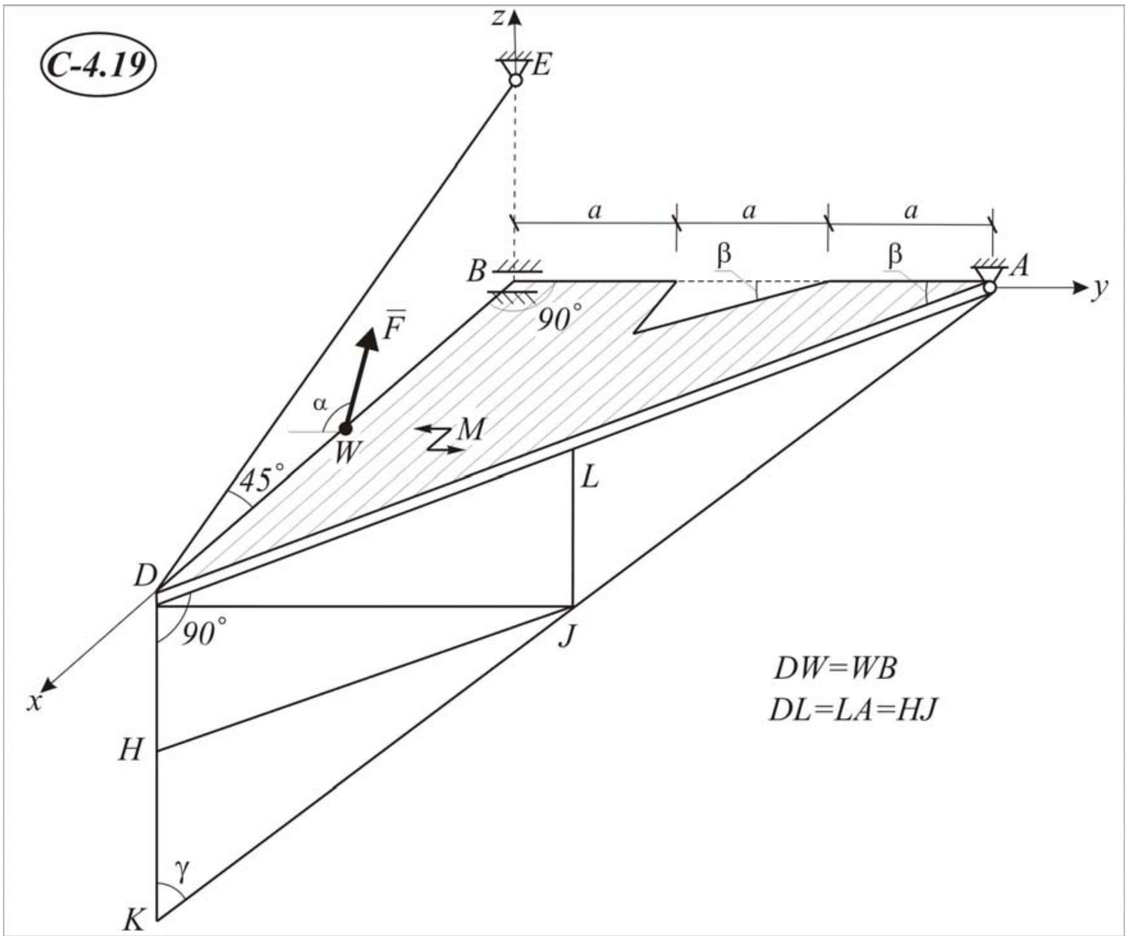

C-4.16
z
E
F
A
α
30°
D
y
a
W
a
M
a
β
γ
4a
L
β
BL=LD=JH
AW=WD
B
H
x
J
C

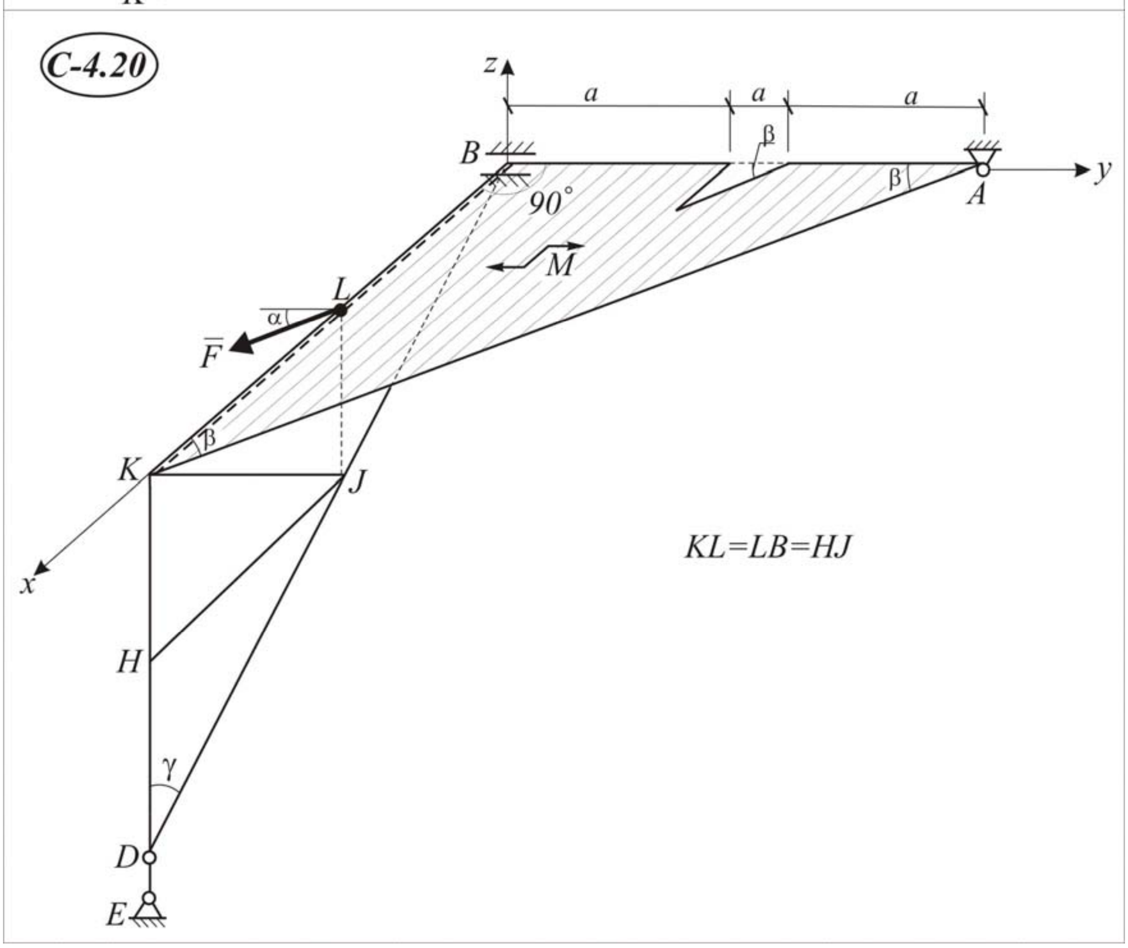
C-4.17

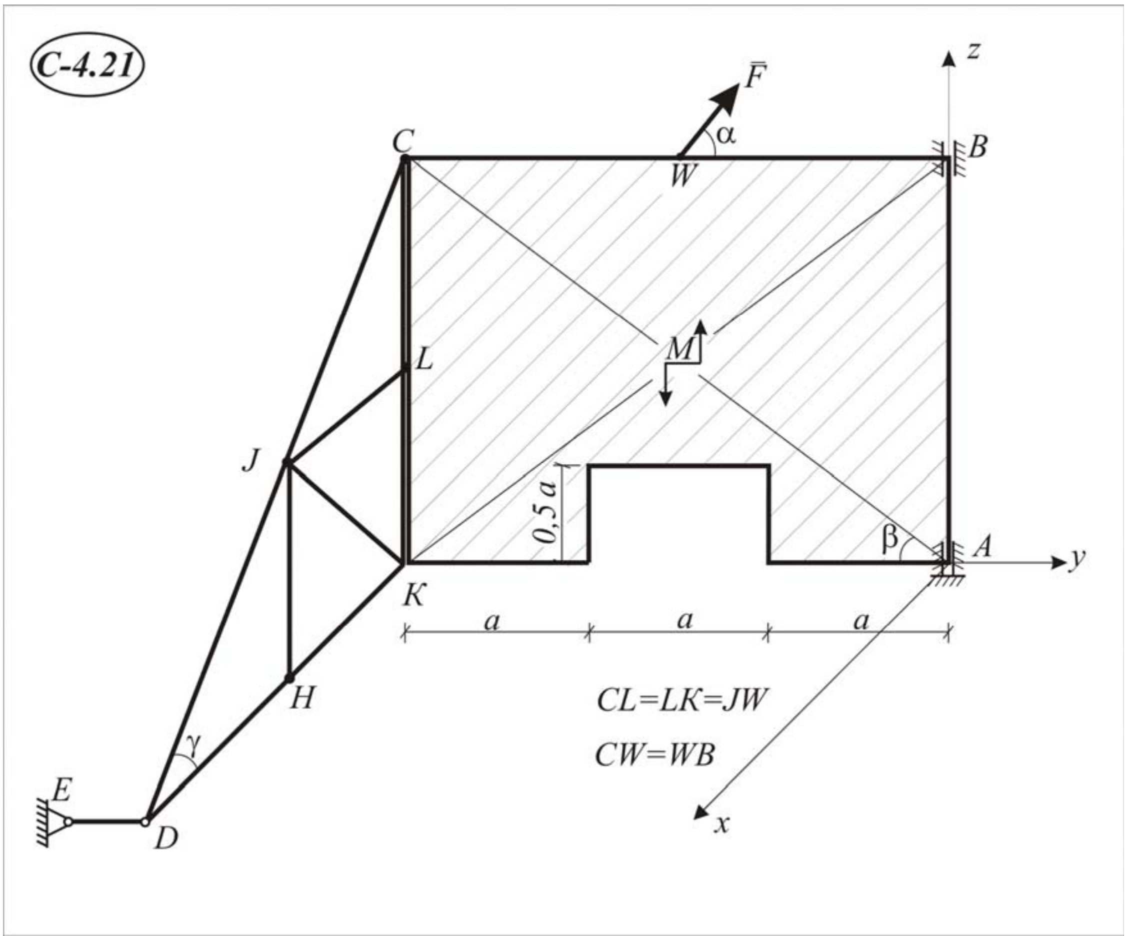

z
E
A
L
30°
D
y
2a
2a
2a
W
$\overline{F}$
α
M
90°
β
β
J
H
B
x
γ
K
BW=WA
AL=LD=JH

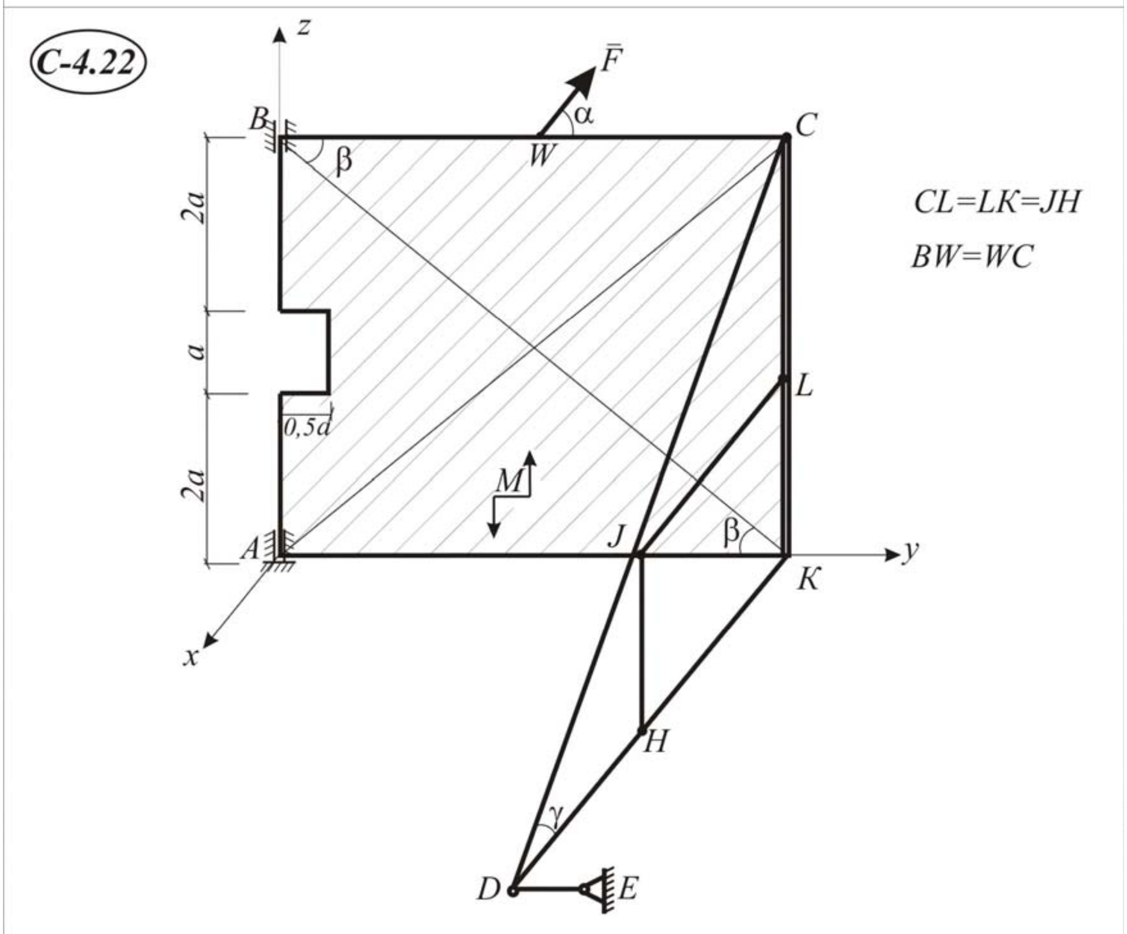
C-4.18

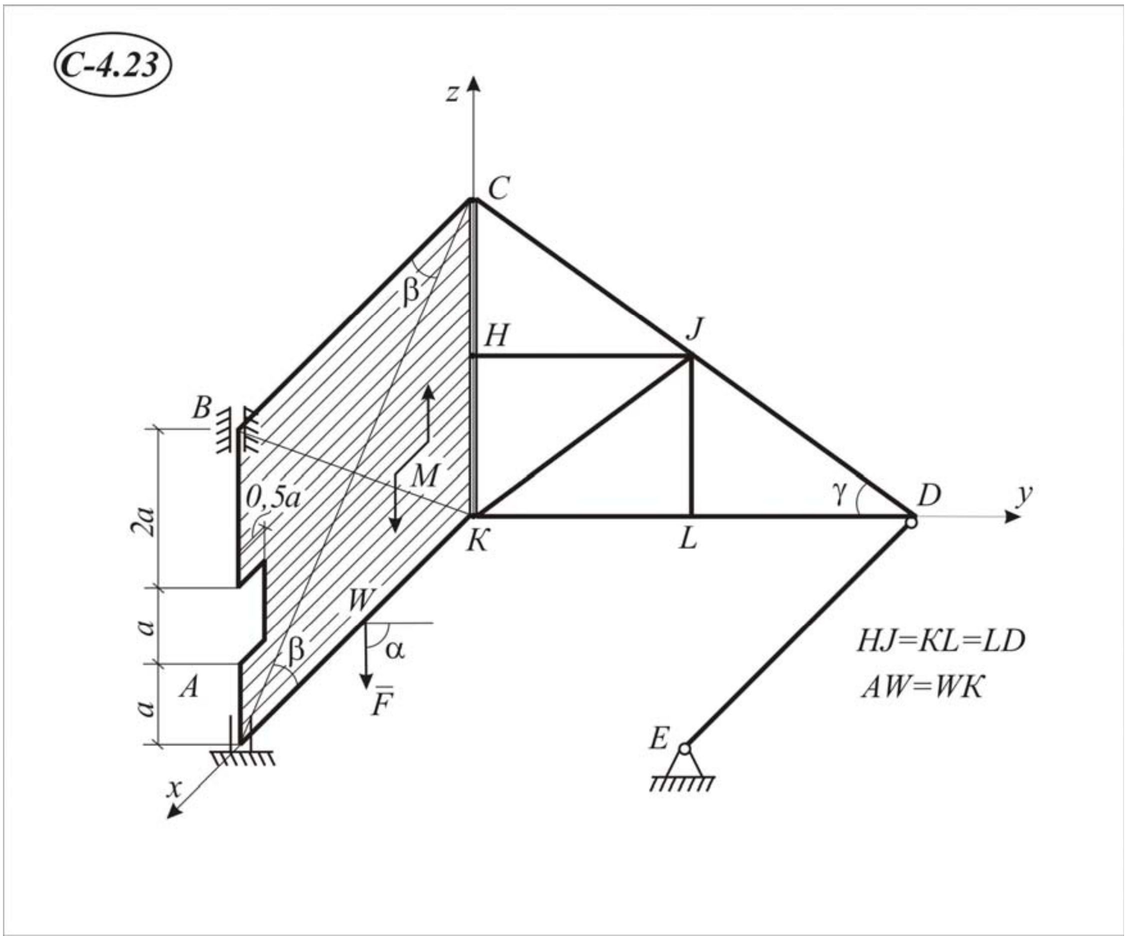

z
E
$\overline{F}$
D
β
W
α
90°
A
y
x
M
0,5a
a
0,5a
a
L
J
B
H
γ
K
DW=WA
DL=LB=JH

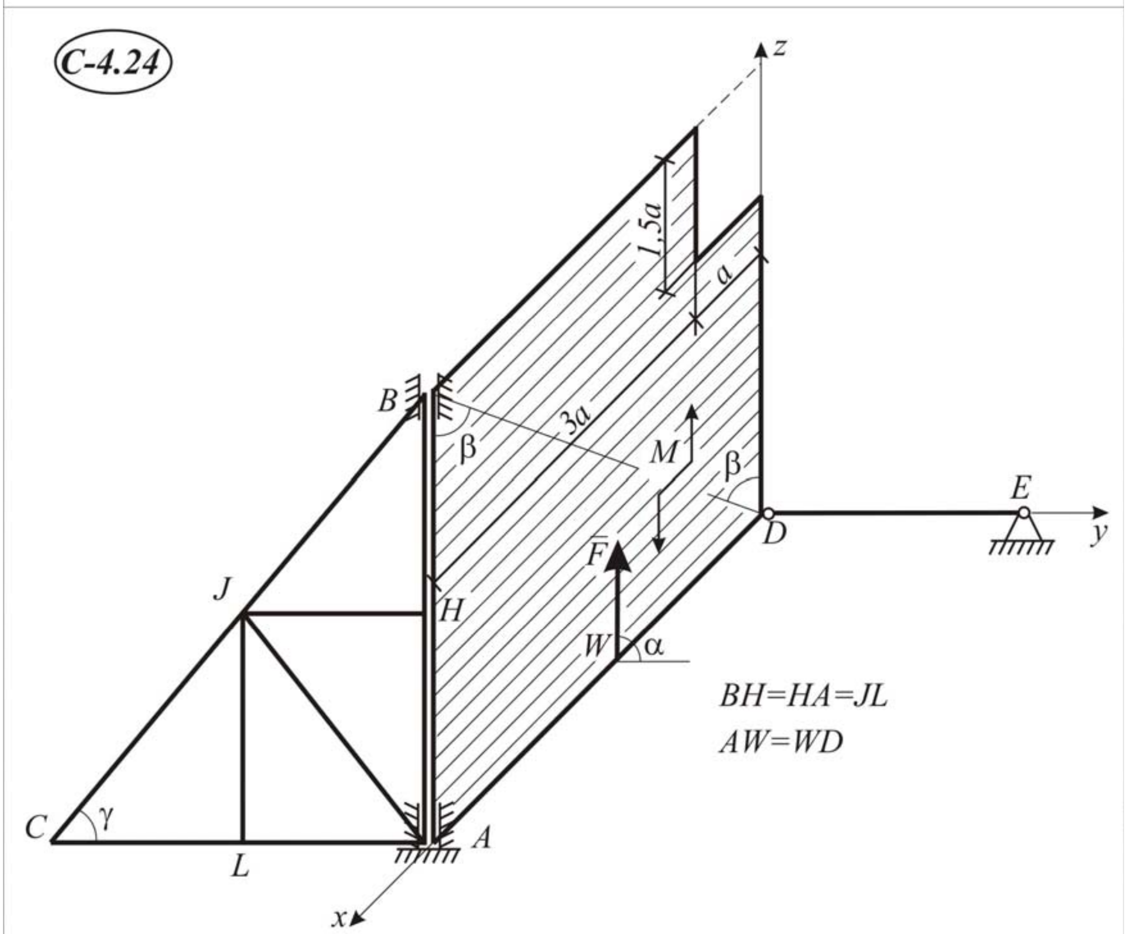

C-4.19
z
E
a
a
a
β
β
B
A
y
90°
F
α
W
M
45°
L
D
90°
J
x
DW=WB
DL=LA=HJ
H
γ
K

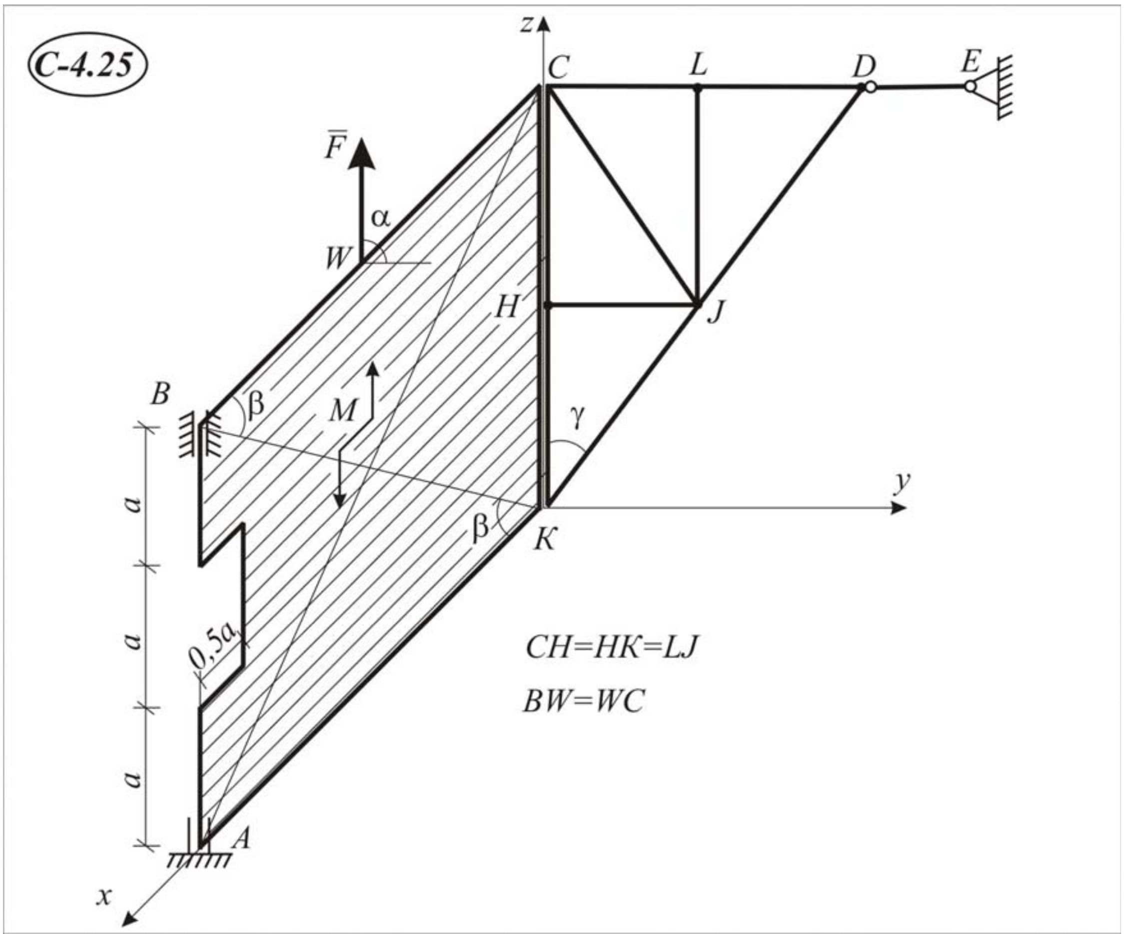

C-4.20
z
a
a
a
β
B
A
y
β
90°
M
L
α
F
β
K
J
KL=LB=HJ
x
H
γ
D
E

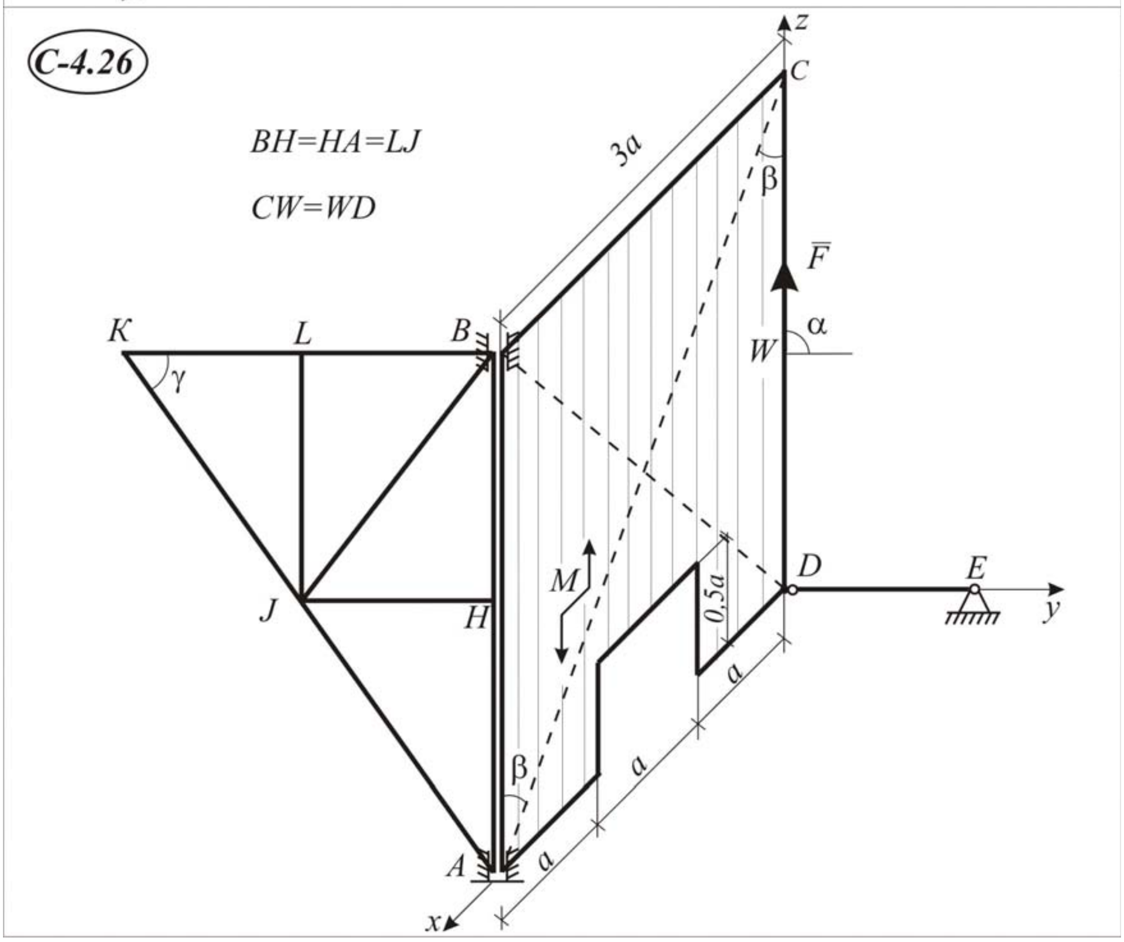

C-4.21
z
F
α
C
W
B
M
L
J
0,5 a
β
A
y
K
a
a
a
H
CL=LK=JW
CW=WB
γ
E
D
x

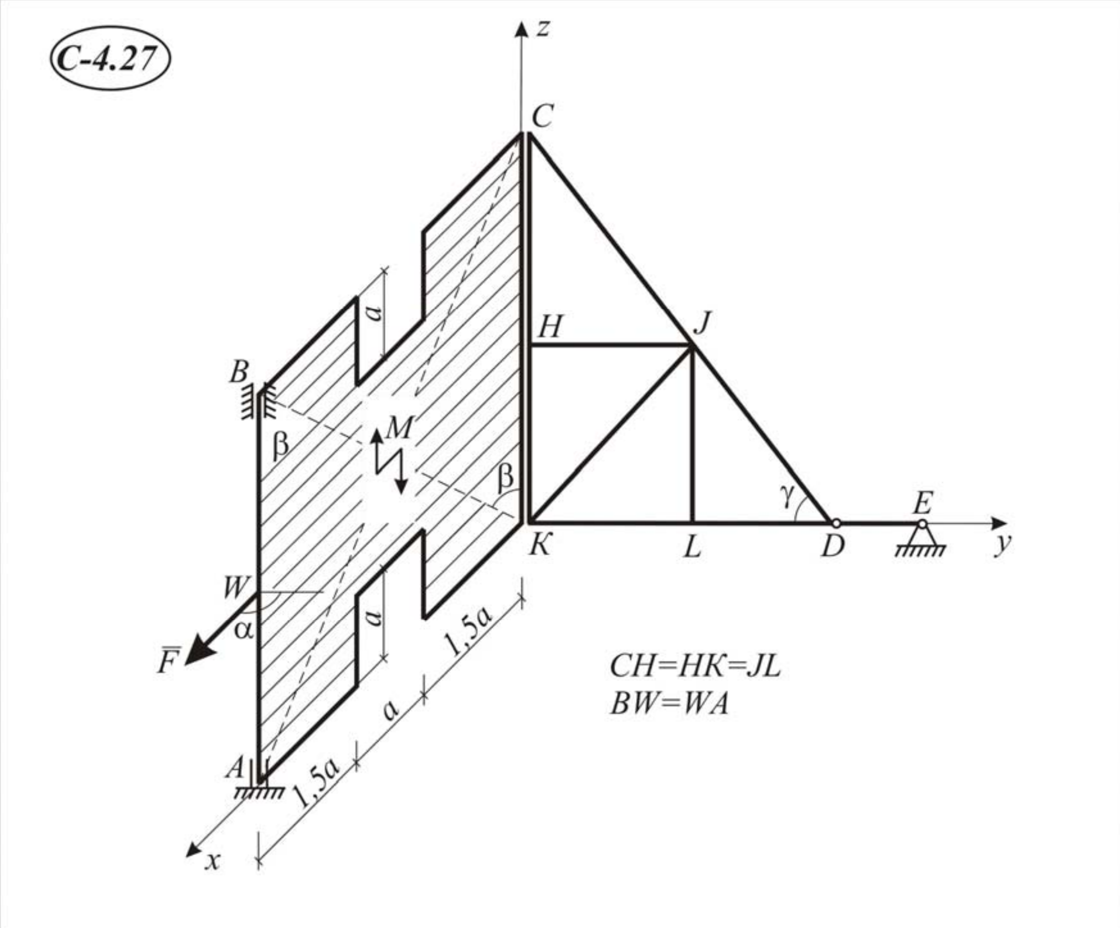

C-4.22
z
F
B
α
W
C
β
2a
CL=LK=JH
BW=WC
a
L
0,5a
2a
M
J
β
A
y
K
x
H
γ
D
E


C-4.23
z
C
β
H
J
B
M
0,5a
γ
D
y
2a
K
L
W
a
α
HJ=KL=LD
β
A
F
AW=WK
a
E
x

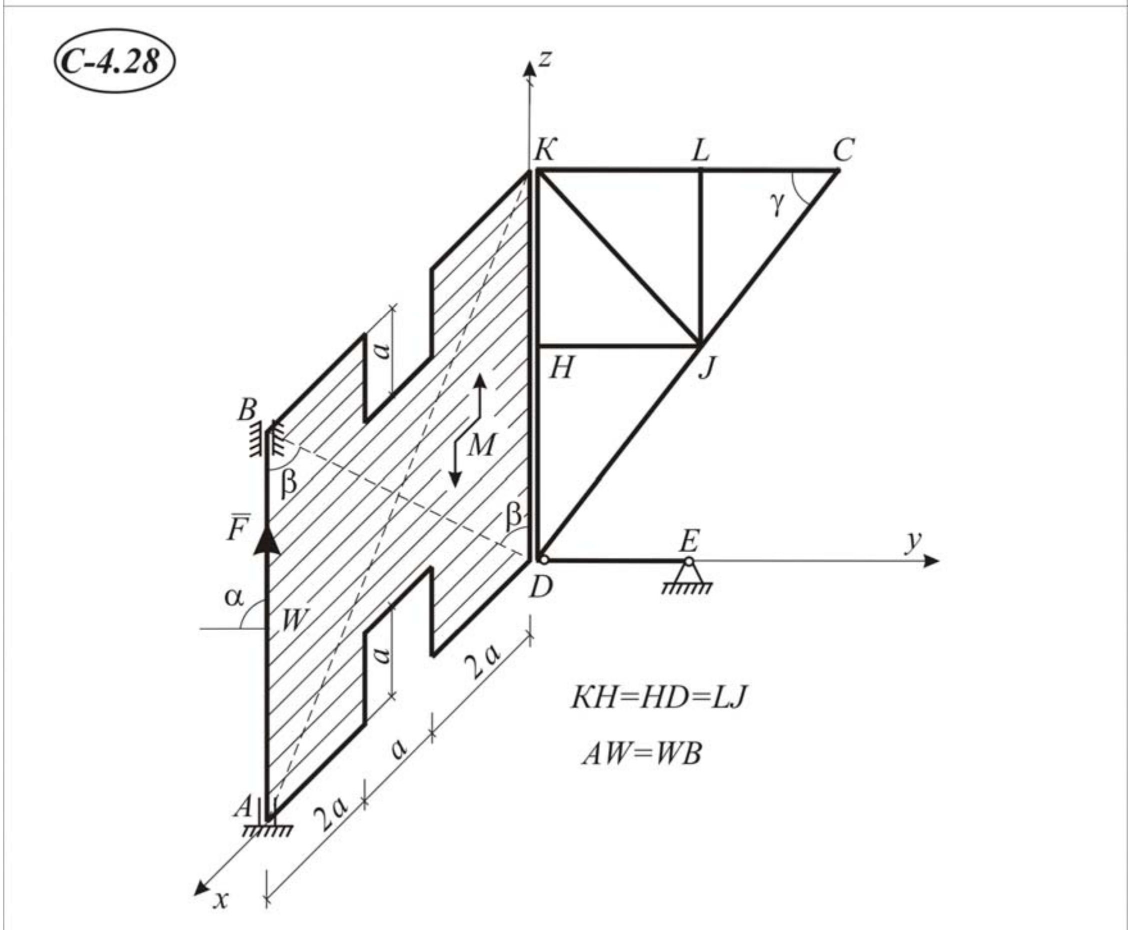

C-4.24
z
1,5a
a
B
3a
β
M
β
E
D
y
F
J
H
W
α
BH=HA=JL
AW=WD
C
γ
A
L
x


C-4.25
z
C
L
D
E
F
α
W
H
J
B
β
M
γ
y
a
β
K
a
0,5a
CH=HK=LJ
BW=WC
a
A
x

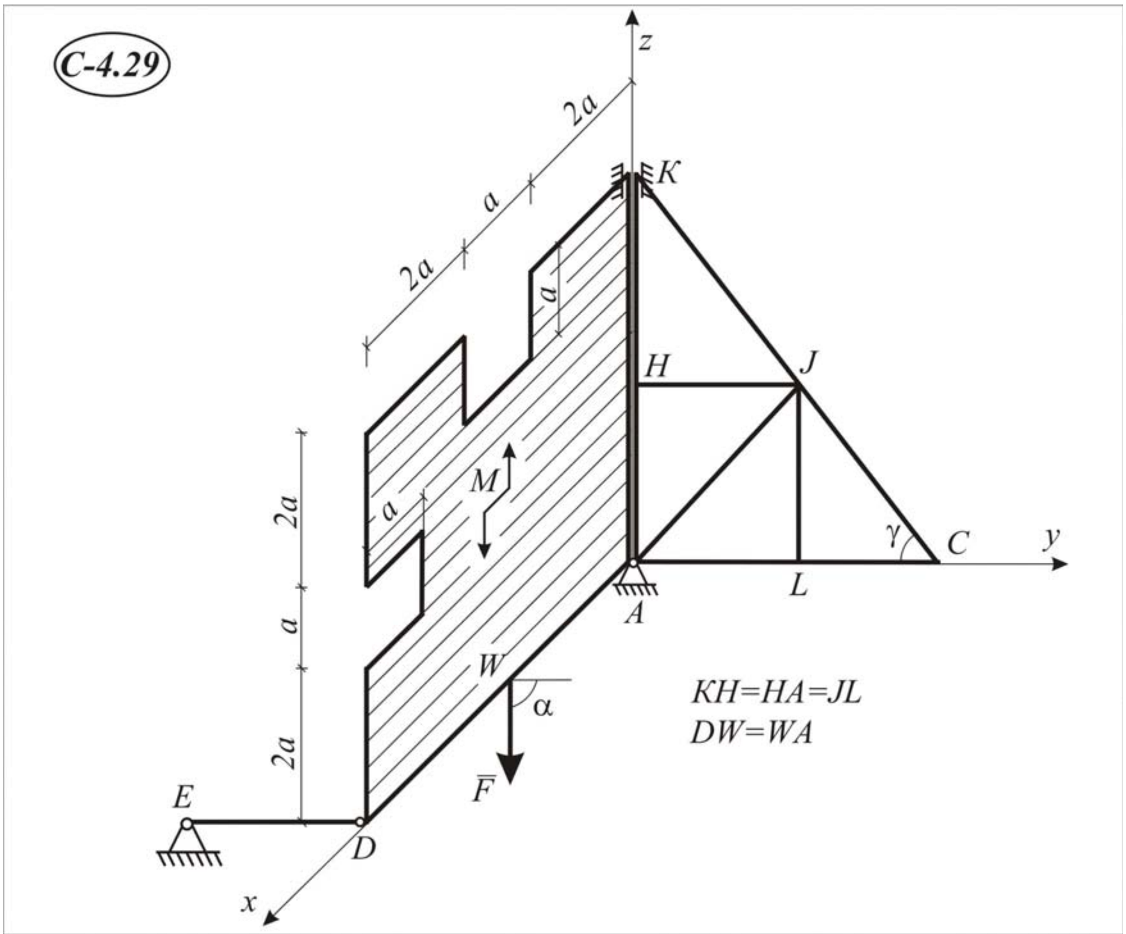

C-4.26
z
C
BH=HA=LJ
3a
β
CW=WD
F
K
L
B
α
W
M
D
E
0,5a
J
H
y
a
β
a
A
a
x

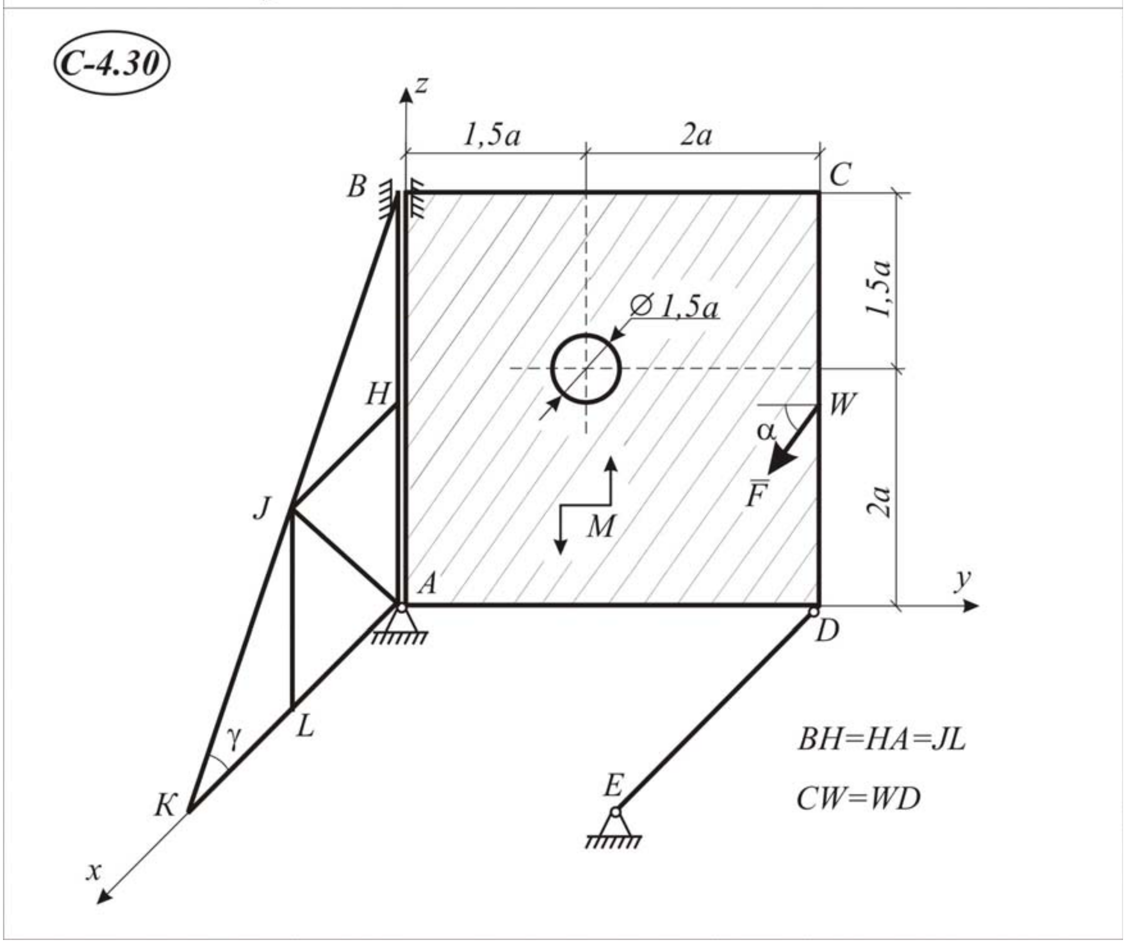


C-4.27
z
C
H
J
a
B
M
β
β
γ
E
K
L
D
y
W
α
a
1,5a
F
CH=HK=JL
BW=WA
a
A
1,5a
x



C-4.28
z
K
L
C
γ
a
H
J
B
M
β
F
β
E
y
D
α
W
a
2a
KH=HD=LJ
a
AW=WB
A
2a
x


C-4.29
z
2a
K
a
2a
a
H
J
M
2a
a
γ
C
y
A
L
a
W
α
KH=HA=JL
DW=WA
2a
F
E
D
x


C-4.30
z
1,5a
2a
B
C
1,5a
∅1,5a
H
W
α
F
J
M
2a
A
y
D
L
γ
BH=HA=JL
E
K
CW=WD
x

Пример выполнения С-4

Д а н о : P_n = 10 кН; $P_ф$ = 5 кН; F=8 кН; M = 12 кН м; α = 45°; a = 1 м; АИ = ИВ; AL = LD = ЖН (рис. I.4.1).

О п р е д е л и т ь : реакции опор A, B и невесомого стержня DE, а также координаты центра тяжести всей конструкции.

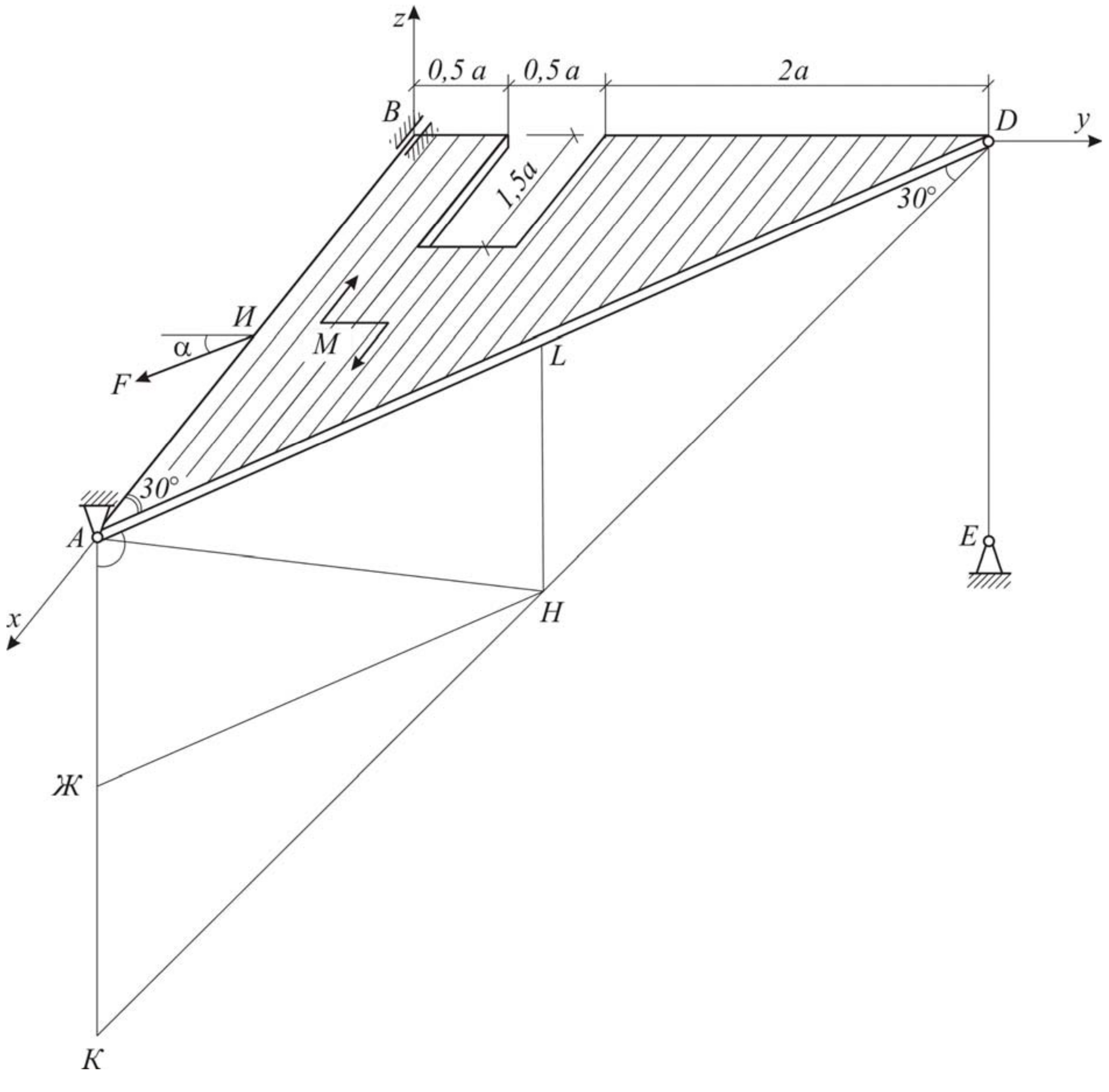


Рис. I.4.1

Решение:

1. Прежде, чем найти реакции в опорах нужно определить координаты точек приложения сил тяжести плиты и фермы, состоящей из девяти стержней.

а) Определение положения центра тяжести плиты.

Координаты центра тяжести тонкой плиты ABD определяем по формулам:

$$x_{Cn} = \frac{\Sigma A_i x_i}{A}; \; y_{Cn} = \frac{\Sigma A_i y_i}{A}; \qquad (I.4.1)$$

где x_i, y_i – координаты центра тяжести i-й части плиты площадью A_i;

A – площадь всей плиты.

Так как положение центра тяжести тела (точка Cn) не зависит от выбора осей координат, то проведем их на рис. I.4.2 произвольно, например по взаимно перпендикулярным сторонам AB и BD.

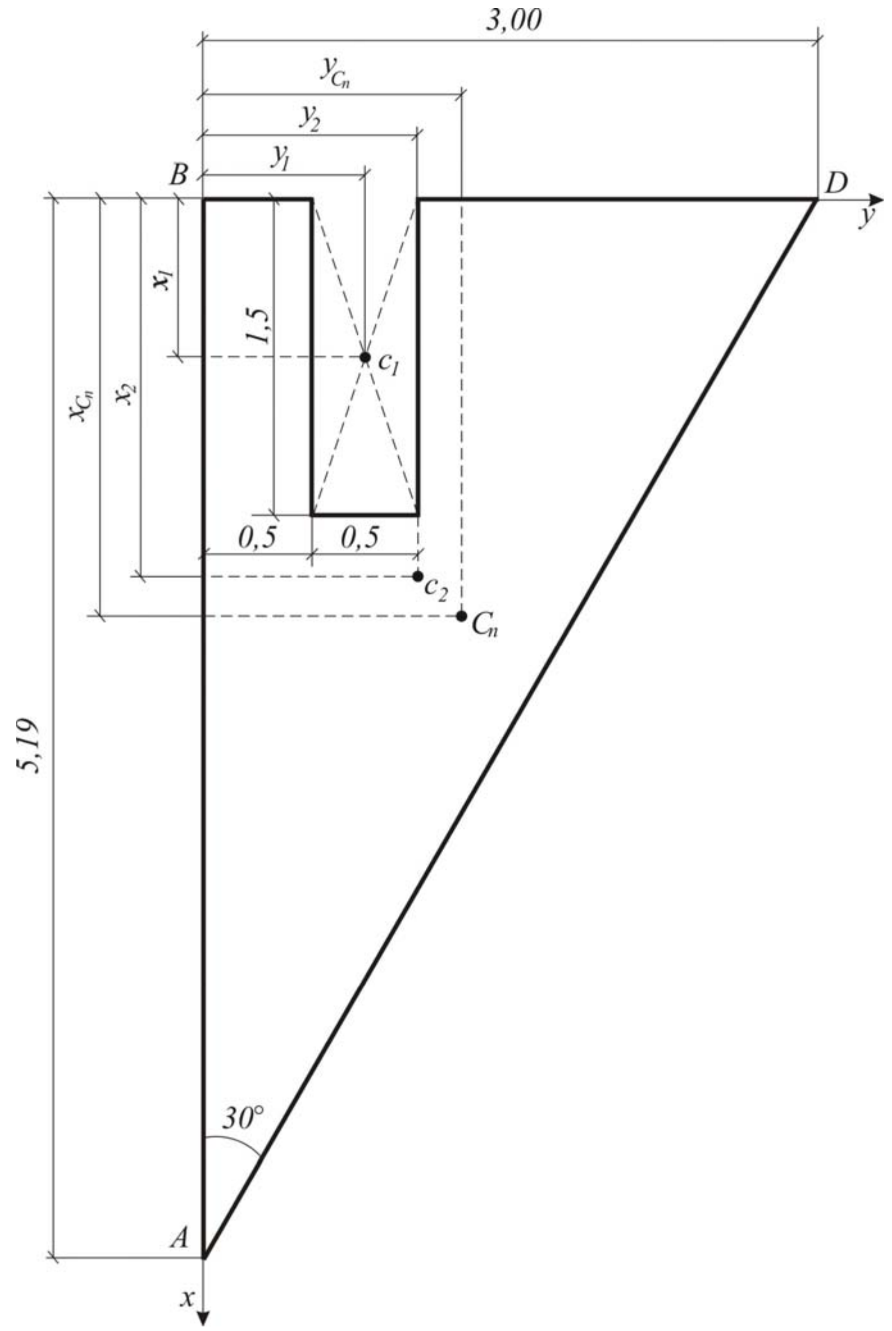


Рис. I.4.2

Чтобы воспользоваться формулами (I.4.1) площадь плиты делим на отдельные части, положения центров тяжести которых известны. В данном случае такими частями являются: треугольник *ABD* и прямоугольник.

Площадь прямоугольника, вырезанного из плиты, считаем отрицательной.

Из прямоугольного треугольника *ABD* определяем

$$AB = BD \cdot \mathrm{ctg}30° = 3 \cdot \sqrt{3} = 5{,}19 \text{ м}.$$

Площадь прямоугольника.

$$A_1 = -0{,}5 \cdot 1{,}5 = -0{,}75 \text{ м}^2.$$

Площадь треугольника *ABD*

$$A_2 = \frac{1}{2} 5{,}19 \cdot 3 = 7{,}785 \text{ м}^2.$$

Центры тяжести рассматриваемых частей плиты c_1 и c_2 имеют следующие координаты:

для прямоугольника

$$x_1 = 0{,}75 \text{ м}; \quad y_1 = 0{,}5 + \frac{1}{2} 0{,}5 = 0{,}75 \text{ м};$$

для треугольника

$$x_2 = \frac{1}{3} AB = \frac{1}{3} 5{,}19 = 1{,}73 \text{ м}; \quad y_2 = \frac{1}{3} BD = \frac{1}{3} 3 = 1 \text{ м}.$$

По формулам (I.4.1) вычисляем координаты центра тяжести плиты.

$$x_{Cn} = \frac{-A_1 \cdot x_1 + A_2 \cdot x_2}{-A_1 + A_2} = \frac{-0{,}75 \cdot 0{,}75 + 7{,}785 \cdot 1{,}73}{-0{,}75 + 7{,}785} = \frac{12 \cdot 905}{7{,}035} = 1{,}83 \text{ м};$$

$$y_{Cn} = \frac{-A_1 \cdot y_1 + A_2 \cdot y_2}{-A_1 + A_2} = \frac{-0{,}75 \cdot 0{,}75 + 7{,}785 \cdot 1}{-0{,}75 + 7{,}785} = \frac{7{,}222}{7{,}035} = 1{,}03 \text{ м}.$$

Центр тяжести плиты C_n указан на рис. I.4.2.

б) Определение положения центра тяжести фермы (рис. I.4.3).

По условию задачи *LH* – средняя линия прямоугольного треугольника *AKD*, поэтому

$$l_6 = l_8 = l_5.$$

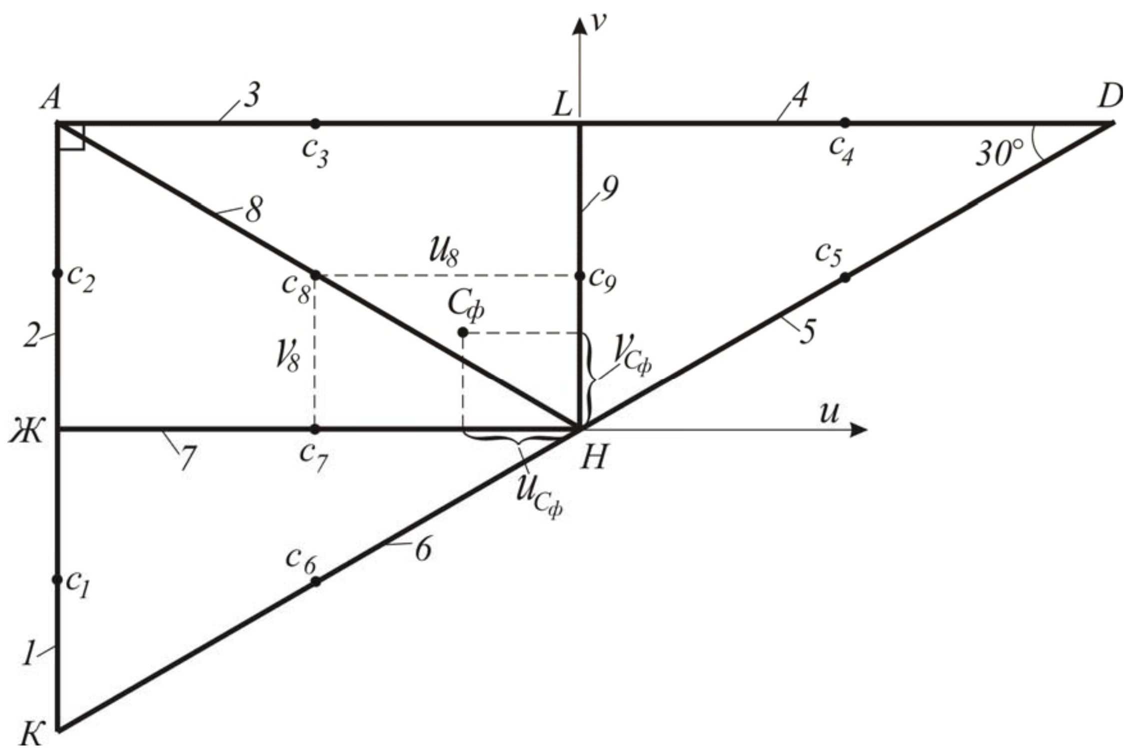


Рис. I.4.3

Координаты центра тяжести фермы (точка $C_ф$) относительно осей u и ν, проведенных произвольным образом на рис. I.4.3 определяется по следующим формулам:

$$u_{Cф} = \frac{\Sigma l_i \cdot u_i}{\Sigma l_i}; \;\; \nu_{Cф} = \frac{\Sigma l_i \cdot \nu_i}{\Sigma l_i};$$

где l_i – длина i-го стержня;

u_i; ν_i – координаты центра тяжести i-го стержня;

Σl_i – сумма длин всех стержней фермы.

Найдем стороны треугольника *ADK*.

Из рис. 4.32 видно, что:

$$AD = AB / \cos 30° = 5{,}19 / 0{,}866 = 6 \text{ м}.$$

Катет и гипотенуза прямоугольного треугольника *ADK* (см. рис. I.4.3) определяются

$$AK = AD \cdot \mathrm{tg} 30° = 6\frac{1}{\sqrt{3}} = 3{,}464 \text{ м};$$

$$KD = \frac{AD}{\cos 30°} = \frac{6}{0{,}866} = 6{,}928 \text{ м}.$$

Длины и координаты центров тяжести стержней сведены в табл. I.4.2

Т а б л и ц а I . 4 . 2

Номер стержня	l_i	u_i	ν_i	$l_i \cdot u_i$	$l_i \cdot \nu_i$
1	1,732	–3	–0,866	–5,2	–1,5
2	1,732	–3	+0,866	–5,2	+1,5
3	3	–1,5	+1,732	–4,5	+5,2
4	3	+1,5	+1,732	+4,5	+5,2
5	3,5464	+1,5	+0,866	+5,2	+3
6	3,464	–1,5	–0,866	–5,2	–3
7	3	–1,5	0	–4,5	0
8	3,464	–1,5	+0,866	–5,2	+3
9	1,732	0	+0,866	0	+1,5
Σ=	**24,588**			**–20,1**	**+14,9**

По формулам (4.2) определяем координаты центра тяжести фермы:

$$u_{сф} = \frac{-20{,}1}{24{,}588} = -0{,}817 \text{ м};$$

$$\nu_{сф} = \frac{14{,}9}{24{,}588} = 0{,}606 \text{ м}.$$

2. Определение реакции в опорах A, B и невесомом стержне DE.

а) Рассмотрим равновесие плиты с фермой (рис. I.4.4). На эту конструкцию действуют заданные силы $\overline{F}, P_n, P_{cp}$ и пара сил с моментом M, а также реакции связей. Реакцию сферического шарнира разложим на три составляющие $\overline{X}_A, \overline{Y}_A, \overline{Z}_A$, цилиндрического (подшипника)– на две составляющие $\overline{Y}_B, \overline{Z}_B$ (в плоскости, перпендикулярной оси подшипника); реакцию опор N стержня направляем вдоль стержня от D к E, предполагая, что он растянут.

При решении задачи заданную силу $\overline{F}$ целесообразно разложить на две составляющие силы $\overline{F}_x$ и $\overline{F}_y$ параллельные соответствующим осям координат.

$$\overline{F}_x = F \cdot \cos 45° = 8 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 5{,}656 \text{ кН};$$

$$\overline{F}_y = F \cdot \sin 45° = 8 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 5{,}656 \text{ кН}.$$

На рис. I.4.4 показаны точки приложения сил тяжести плиты и фермы. Координаты этих точек равны:

$$X_{C_n} = 1{,}83\ \text{м};\ Y_{C_n} = 1{,}03\ \text{м};\ Z_{C_n} = 0\ \text{м};$$

$$X_{C\text{ф}} = AB - A3 \cdot \cos 30^\circ = AB - (AL - u_{C\text{ф}}) \cos 30^\circ =$$

$$= 5{,}19 - (3 - 0{,}817) \cdot 0{,}866 = 3{,}3\ \text{м};$$

$$Y_{C\text{ф}} = A3 \cdot \sin 30^\circ = (AL - u_{C\text{ф}}) \sin 30^\circ = (3 - 0{,}817) \cdot 0{,}5 = 1{,}09\ \text{м};$$

$$Z_{C\text{ф}} = -(HL - \nu_{C\text{ф}}) = -(1{,}732 - 0{,}606) = -1{,}126\ \text{м}.$$

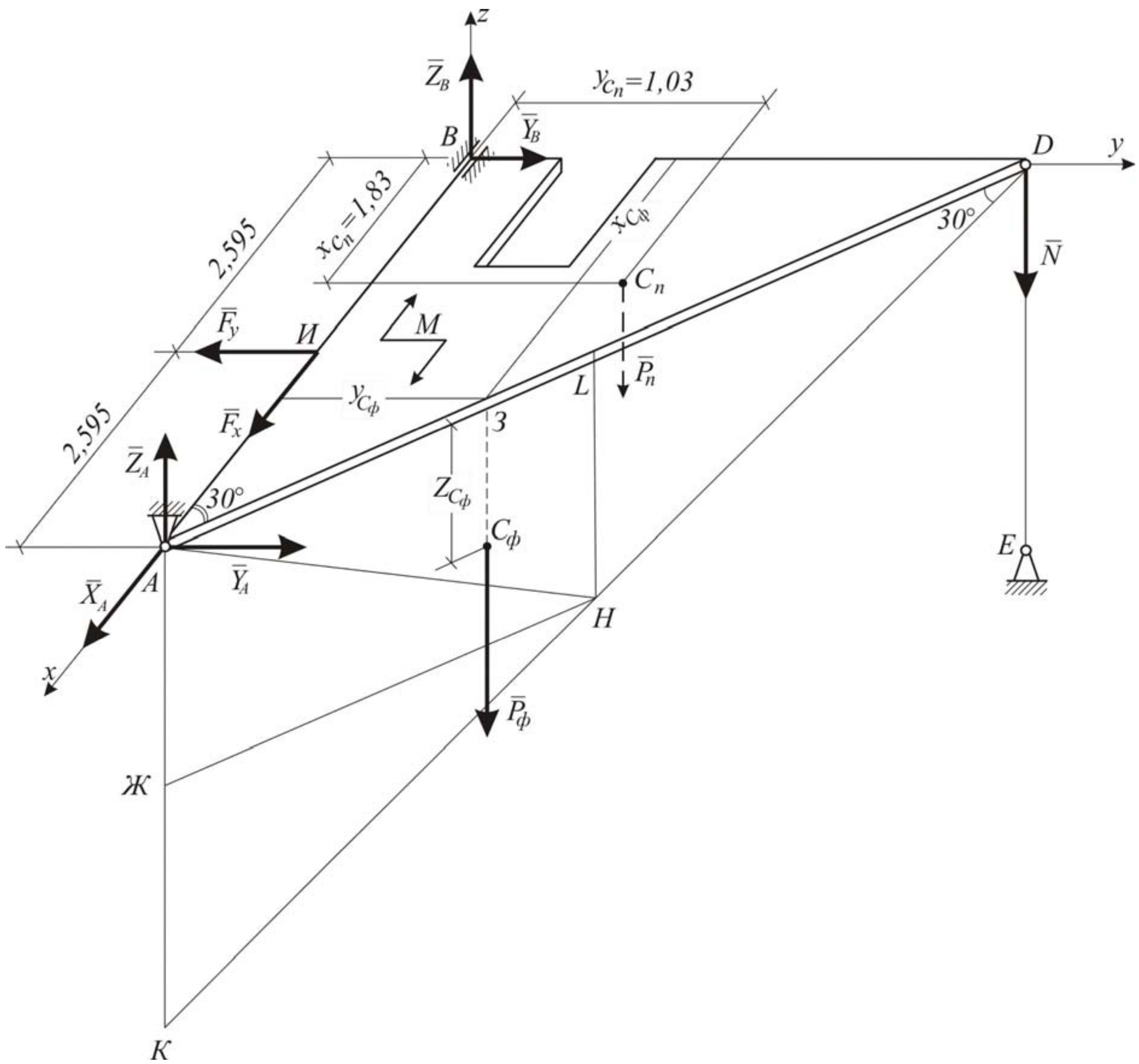


Рис. I.4.4

б) Для определения шести неизвестных реакций составляем шесть уравнений равновесия действующей на конструкцию пространственной системы сил действующей на конструкцию (плита + ферма):

$$\Sigma F_x = 0;\ X_A + F_x = 0; \tag{I.4.3}$$

$$\Sigma F_y = 0;\ Y_A + Y_B + F_y = 0; \tag{I.4.4}$$

$$\Sigma F_z = 0;\ Z_A + Z_B - N - P_{\text{ф}} - P_n = 0; \tag{I.4.5}$$

$$\Sigma M_x(\overline{F}_k) = 0;\ -P_{\text{ф}} \cdot Y_{C\text{ф}} - P_n \cdot 1{,}03 - N \cdot BD = 0; \tag{I.4.6}$$

$$\Sigma M_y(\overline{F}_k) = 0;\ +P_n \cdot 1{,}83 + P_{\text{ф}} \cdot X_{C\text{ф}} - Z_A \cdot AB = 0; \tag{I.4.7}$$

$$\Sigma M_z(\overline{F}_k) = 0;\ -M - F_y \cdot 2{,}595 + Y_A \cdot AB = 0. \tag{I.4.8}$$

Подставив в составленные уравнения (I.4.3)–(I.4.8) числовые значения всех заданных величин и решив эти уравнения, найдем искомые реакции.

Ответ: $X_A = -5{,}656$ кН;

$$Y_A = +5{,}14 \text{ кН};\quad Z_A = +6{,}705 \text{ кН};$$

$$Y_B = +0{,}516 \text{ кН};\quad Z_B = +3{,}032 \text{ кН};$$

$$N = -5{,}263 \text{ кН}.$$

Знак (–) в ответе указывает, что реакции $\overline{X}_A$, и $\overline{N}$ направлены противоположно тем направлениям, которые показаны на рис. I.4.4.

3. Определение координат центра тяжести всей конструкции.

Для определения положения центра тяжести всей конструкции воспользуемся следующими формулами:

$$X_C = \frac{\sum P_i \cdot x_i}{\sum P_i} = \frac{P_n \cdot x_{Cn} + P_{\text{ф}} \cdot x_{C\text{ф}}}{P_n + P_{\text{ф}}} = \frac{10 \cdot 1{,}83 + 5 \cdot 3{,}3}{10 + 5} = 2{,}32 \text{ м}; \tag{I.4.9}$$

$$Y_C = \frac{\sum P_i \cdot y_i}{\sum P_i} = \frac{P_n \cdot y_{Cn} + P_{\text{ф}} \cdot y_{C\text{ф}}}{P_n + P_{\text{ф}}} = \frac{10 \cdot 1{,}03 + 5 \cdot 1{,}09}{10 + 5} = 1{,}05 \text{ м}; \tag{I.4.10}$$

$$Z_C = \frac{\sum P_i \cdot z_i}{\sum P_i} = \frac{P_n \cdot z_{Cn} + P_{\text{ф}} \cdot z_{C\text{ф}}}{P_n + P_{\text{ф}}} = \frac{10 \cdot 0 + 5 \cdot (-1{,}126)}{10 + 5} = -0{,}375 \text{ м}, \tag{I.4.11}$$

где P_i – вес i-й части конструкции;

x_i, y_i, z_i – координаты центра тяжести;

ΣP_i – вес всей конструкции.

РАЗДЕЛ II. КИНЕМАТИКА

1. Определение скорости и ускорения точки по заданному закону движения

По данной теме предлагается решить две задачи: К1а и К1б.

Задачи относятся к кинематике точки и решаются с помощью формул, по которым определяются скорость и ускорение точки в декартовых координатах (координатный способ задания движения), а также формул, по которым определяются скорость, касательное и нормальное ускорения точки при естественном способе задания её движения.

Задача К1а. Определение скорости и ускорения точки, если закон движения точки задан координатным способом

Точка движется в плоскости xy. Закон движения точки задан уравнениями: $x = f(t)$, $y = f(t)$, где x и y выражены в сантиметрах, t – в секундах.

Найти уравнение траектории точки; для момента времени t_1 найти положение точки на траектории, её скорость, полное, касательное и нормальное ускорения, а также радиус кривизны в соответствующей точке траектории.

Необходимые для решения данные приведены в табл. II.1.1.

Таблица II.1.1

Номер варианта	Закон движения		t, с
	$x = f(t)$, см	$y = f(t)$, см	
1	2	3	4
1	$-2t^2+3$	$-5t$	½
2	$4\cos^2(\pi t/3)+2$	$4\sin^2(\pi t/3)$	1
3	$-\cos(\pi t^2/3)+3$	$\sin(\pi t^2/3)-1$	1
4	$4t+4$	$-4/(t+1)$	2
5	$2\sin(\pi t/3)$	$-3\cos(\pi t/3)+4$	1
6	$3t^2+2$	$-4t$	½
7	$3t^2-t+1$	$5t^2-5t/3-2$	1
8	$7\sin(\pi t^2/6)+3$	$2-7\cos(\pi t^2/6)$	1
9	$-3/(t+2)$	$3t+6$	2
10	$-4\cos(\pi t/3)$	$-2\sin(\pi t/3)-3$	1
11	$4t^2+1$	$-3t$	½
12	$5\sin^2(\pi t/6)$	$-5\cos^2(\pi t/6)-3$	1
13	$5\cos(\pi t^2/3)$	$-5\sin(\pi t^2/3)$	1
14	$-2t-2$	$-2/(t+1)$	2

Окончание табл. II.1.1

1	2	3	4
15	$4\cos(\pi t/3)$	$-3\sin(\pi t/3)$	1
16	$3t$	$4t^2+1$	½
17	$7\sin^2(\pi t/6)-5$	$-7\cos^2(\pi t/6)$	1
18	$1+3\cos(\pi t^2/3)$	$3\sin(\pi t^2/3)+3$	1
19	$-5t^2-4$	$3t$	1
20	$2-3t-6t^2$	$3-3t/2-3t^2$	0
21	$6\sin(\pi t^2/6)+3$	$6\cos(\pi t^2/6)+3$	1
22	$7t^2-3$	$5t$	¼
23	$3-3t^2+t$	$4-5t^2+5t/3$	1
24	$-4\cos(\pi t/3)-1$	$-4\sin(\pi t/3)$	1
25	$-6t$	$-2t^2-4$	1
26	$8\cos^2(\pi t/6)+2$	$-8\sin^2(\pi t/6)-7$	1
27	$-3-9\sin(\pi t^2/6)$	$-9\cos(\pi t^2/6)+5$	1
28	$-4t^2+1$	$-3t$	1
29	$5t^2+5t/3-3$	$3t^2+t+3$	1
30	$2\cos(\pi t^2/3)-2$	$-2\sin(\pi t^2/3)+3$	1

Пример К1а. Определение скорости и ускорения точки, если закон движения точки задан координатным способом

Задан закон движения точки двумя уравнениями:

$$x = -2\cos\left(\frac{\pi}{4}t\right) + 3, y = 2\sin\left(\frac{\pi}{8}t\right) - 1$$

(x, y – в сантиметрах, t – в секундах).

Определить уравнение траектории точки; для момента времени t_1=1 с, найти скорость и ускорение точки, а также ее касательное и нормальное ускорения, и радиус кривизны в соответствующей точке траектории.

Решение:

1. Для определения уравнения траектории точки исключим из заданных уравнений движения время t. Поскольку t входит в аргументы тригонометрических функций, где один аргумент вдвое больше другого, используем формулу

$$\cos 2a = 1 - 2\sin^2\alpha \quad \text{или} \quad \cos\left(\frac{\pi}{4}t\right) = 1 - 2\sin^2\left(\frac{\pi}{8}t\right). \qquad (II.1.1)$$

Из уравнений движения находим выражение соответствующих функций и подставляем в равенство (II.1.1). Получим

$$\cos\left(\frac{\pi}{4}t\right)=\frac{3-x}{2},\sin\left(\frac{\pi}{8}t\right)=\frac{y+1}{2},$$

следовательно,

$$\frac{3-x}{2}=1-2\frac{(y+1)^2}{4}.$$

Отсюда окончательно находим следующее уравнение траектории точки (параболы, рис. II.1.1):

$$x=(y+1)^2+1. \qquad \text{(II.1.2)}$$

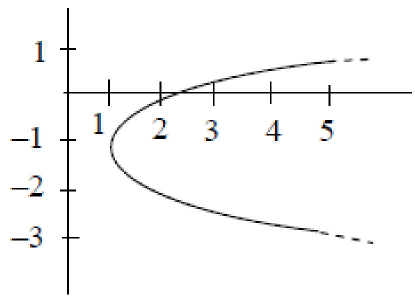


Рис. II.1.1 Траектория движения точки

2. Скорость точки найдем по ее проекциям на координатные оси:

$$v_x=\frac{dx}{dt}=\frac{\pi}{2}\sin\left(\frac{\pi}{4}t\right),$$

$$v_y=\frac{dy}{dt}=\frac{\pi}{4}\cos\left(\frac{\pi}{8}t\right);$$

$$v=\sqrt{v_x^2+v_y^2}$$

и при $t_1 = 1$ с

$$v_{1x} = 1{,}11 \text{ см/с},\ v_{1y} = 0{,}73 \text{ см/с},\ v_1 = 1{,}33 \text{ см/с}. \qquad \text{(II.1.3)}$$

3. Аналогично найдем ускорение точки:

$$a_x=\frac{dv_x}{dt}=\frac{\pi^2}{8}\cos\left(\frac{\pi}{4}t\right),\quad a_y=\frac{dv_y}{dt}=-\frac{\pi}{32}\sin\left(\frac{\pi}{8}t\right);$$

$$a=\sqrt{a_x^2+a_y^2}$$

и при $t_1 = 1$ с

$$a_{1x} = 0{,}87 \text{ см / с}^2,\ a_{1y} = -\,0{,}12 \text{ см / с}^2,\ a_1 = 0{,}88 \text{ см/с}^2. \qquad \text{(II.1.4)}$$

4. Касательное ускорение вычислим, дифференцируя по времени равенство $v^2 = v_x^2 + v_y^2$. Получим

$$2v\frac{dv}{dt} = 2v_x\frac{dv_x}{dt} + 2v_y\frac{dv_y}{dt},$$

откуда

$$a_\tau = \frac{dv}{dt} = \frac{v_x a_x + v_y a_y}{v}. \qquad \text{(II.1.5)}$$

Числовые значения всех величин, входящих в правую часть выражения (II.1.5), определены и даются равенствами (II.1.3) и (II.1.4). Подставив в (II.1.5) эти числа, найдем сразу, что при $t_1 = 1$ с $a_{1\tau} = 0{,}66$ см/с^2.

5. Нормальное ускорение точки $a_n = \sqrt{a^2 - a_\tau^2}$. Подставляя сюда найденные числовые значения a_1 и a_τ, получим, что при $t_1 = 1$ с $a_{1n} = 0{,}58$ см/с^2.

6. Радиус кривизны траектории $\rho = v^2/a_n$. Подставляя сюда числовые значения v_1 и a_{1n}, найдем, что при $t_1 = 1$ с $\rho_1 = 3{,}05$ см.

Ответ: $v_1 = 1{,}33$ см/с, $a_1 = 0{,}88$ см/с^2, $a_{1\tau} = 0{,}66$ см/с^2, $a_{1n} = 0{,}58$ см/с^2, $\rho_1 = 3{,}05$ см.

На рис. II.1.2 показано положение точки M:

– в начале движения (при $t = 0$) – это M_0 с координатами (1; –1);

– в заданный момент времени (при $t = 1$ с) – это M_1 с координатами (1,58; –0,23). Вектор $\overline{v}$ строим по составляющим v_x и v_y, причём этот вектор должен по направлению совпадать с касательной к траектории. Вектор $\overline{a}$ строим по составляющим a_x и a_y, а затем раскладываем на составляющие $\overline{a}_\tau$ и $\overline{a}_n$. При правильном решении составляющие вектора $\overline{a}$, найденные графически, должны совпадать со значениями, вычисленными по формулам.

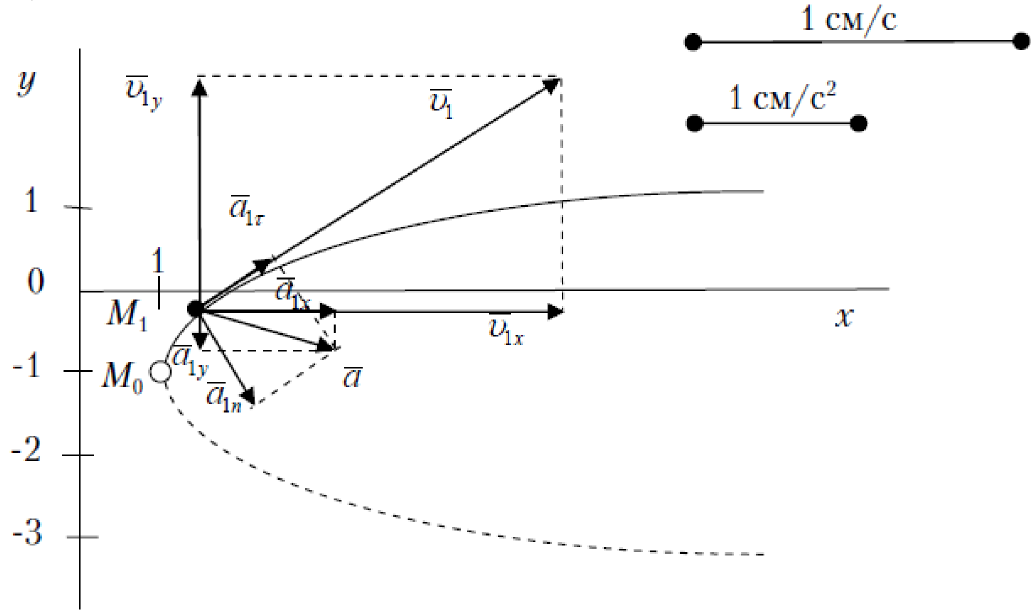


Рис. II.1.2. Кинематические характеристики точек в момент времени t_1

Задача К1б. Определение скорости и ускорения точки, если закон движения точки задан естественным способом

Точка движется по дуге окружности радиуса $R = 2$ м по закону $S = f(t)$, заданному в табл. II.1.2 (S – в метрах, t – в секундах), где $S = A\breve{M}$ – расстояние от некоторого начала A до точки M, измеренное вдоль дуги окружности. Определить скорость и ускорение точки в момент времени $t_1 = 1$ с. Изобразить на рисунке векторы $\overline{v}$ и $\overline{a}$, считая, что точка в этот момент находится в положении M_1, а положительное направление отсчета S – от A к M.

Таблица II.1.2

Номер условия	$S = f(t)$	Номер условия	$S = f(t)$
1	2	3	4
1	$12\sin\left(\frac{\pi}{6}t\right)$	16	$4\cos\left(\frac{\pi}{6}t\right)$
2	$-6\cos\left(\frac{\pi}{3}t\right)$	17	$6\cos^2\left(\frac{\pi}{6}t\right)$
3	$-3\sin^2\left(\frac{\pi}{6}t\right)$	18	$4\cos\left(\frac{\pi}{3}t\right)$
4	$9\sin\left(\frac{\pi}{6}t\right)$	19	$10\cos\left(\frac{\pi}{6}t\right)$
5	$3\cos\left(\frac{\pi}{3}t\right)$	20	$-4\cos^2\left(\frac{\pi}{6}t\right)$
6	$10\sin\left(\frac{\pi}{6}t\right)$	21	$12\cos\left(\frac{\pi}{3}t\right)$
7	$6\sin^2\left(\frac{\pi}{6}t\right)$	22	$-3\cos\left(\frac{\pi}{6}t\right)$
8	$-2\sin\left(\frac{\pi}{6}t\right)$	23	$-8\cos\left(\frac{\pi}{3}t\right)$
9	$9\cos\left(\frac{\pi}{3}t\right)$	24	$9\cos\left(\frac{\pi}{6}t\right)$
10	$-8\sin\left(\frac{\pi}{6}t\right)$	25	$-6\cos\left(\frac{\pi}{3}t\right)$
11	$2t^2 + 2$	26	$3t^2 - 10t$

Окончание Табл. II.1.2

1	2	3	4
12	$8\sin\left(\frac{\pi}{4}t\right)$	27	$2\sin\left(\frac{\pi}{3}t\right)$
13	$2-3t^2$	28	$6t-2t^2$
14	$2t^3$	29	$-2\sin\left(\frac{\pi}{6}t\right)$
15	$2\cos\left(\frac{\pi}{4}t\right)$	30	$2-t^2$

Пример К1б. Определение скорости и ускорения точки , если закон движения точки задан естественным способом

Точка движется по дуге окружности , радиус которой R = 2 м. Закон движения точки $S=2\sin\frac{\pi t}{4}$, где S – расстояние от точки A до точки M вдоль дуги окружности (в метрах) , t – время (в секундах).

Определить скорость и ускорение точки в момент времени t_1 = 1 с.

Решение

Определяем скорость точки:

$$v=\frac{dS}{dt}=\frac{\pi}{2}\cos\frac{\pi t}{4}.$$

При t_1 = 1с получим $\upsilon_1=\frac{3{,}14}{2}\cos\frac{\pi}{4}=1{,}11$ м/с.

Ускорение находим по его касательной и нормальной составляющим:

$$a_\tau=\frac{dv}{dt}=-\frac{\pi^2}{8}\sin\frac{\pi t}{4},$$

$$a_n=\frac{v^2}{\rho}=\frac{v^2}{R}.$$

При t = 1 с и R=2 м , получим:

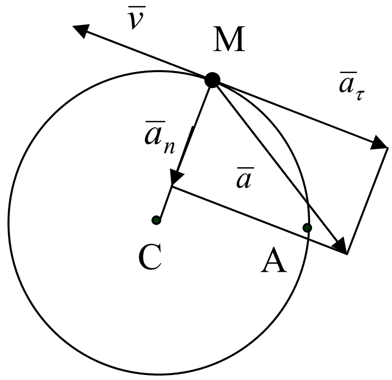
$$a_{1\tau}=-\frac{\pi^2}{8}\sin\frac{\pi}{4}=-\frac{3{,}14^2}{8}0{,}707=-0{,}87 \ \text{м/с}^2,$$

$$a_{1n}=\frac{v_1^2}{2}=\frac{1{,}11^2}{2}=0{,}62 \ \text{м/с}^2.$$

Тогда ускорение точки при t = 1 с:

$$a_1 = \sqrt{a_{1\tau}^2 + a_{1n}^2} = 1{,}07 \text{ м/с}^2.$$

Изобразим на рисунке векторы $\bar{v}_1$ и $\bar{a}_1$, учитывая знаки v_1 и $a_{1\tau}$, и считая положительным направление от A к M.



$$\angle ACM = \frac{S_1}{R}.$$

При t_1 = 1 с $S_1 = 2\sin\frac{\pi}{4} = 14{,}14 \text{ м}$,

следовательно,

$$\angle ACM = \frac{14{,}14}{2} = 0{,}707 \text{ рад} = 40{,}5°.$$

Рис. II.1.3. Скорость и ускорение точки M в момент времени t_1

2. Поступательное и вращательное движения твёрдого тела

Задание К.2. Определение скоростей и ускорений точек твёрдого тела при поступательном и вращательном движениях

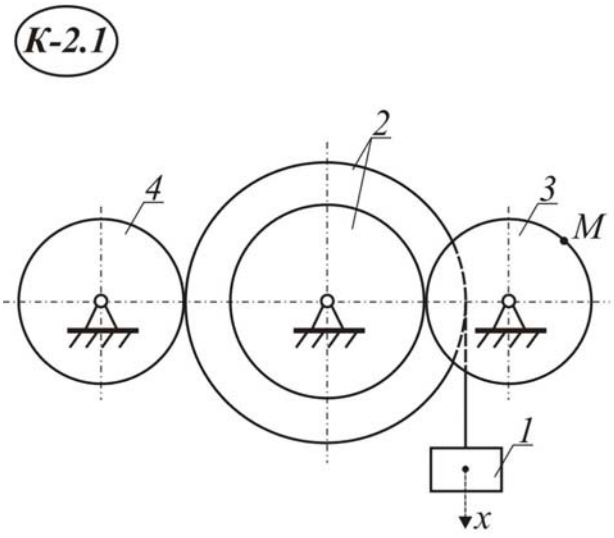
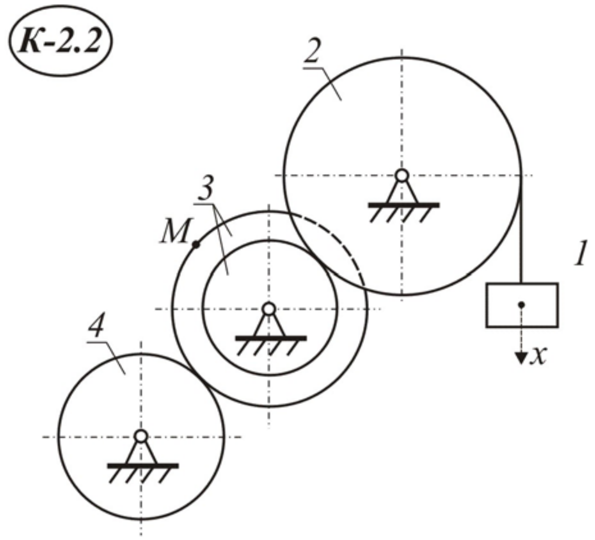
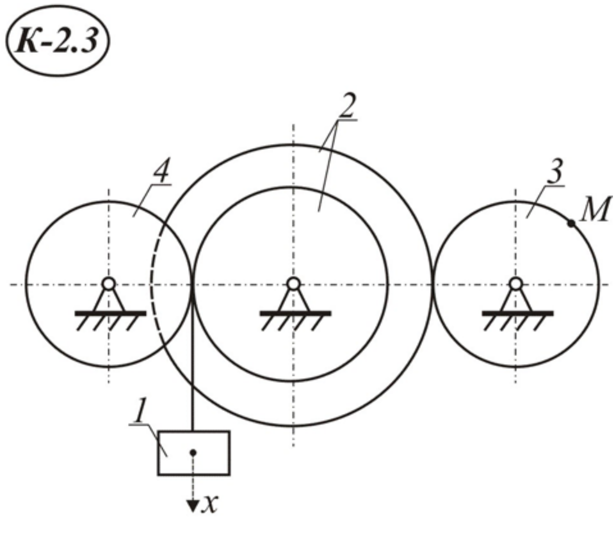
Дано. Механизм состоит из нескольких колёс, находящихся в зацеплении или связанных ременной передачей, и груза 1, привязанного к концу нити, намотанной на одно из колёс. Движение груза 1 описывается уравнением $x = \frac{at^2}{2} + v_0 t + x_0$, где t – время, a – ускорение груза, v_0 – скорость груза в начальный момент времени, x_0 – координата груза в начальный момент времени. При $t = t_2$ координата груза равна x_2.

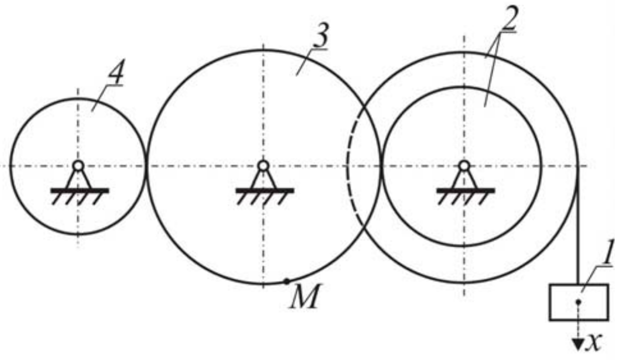
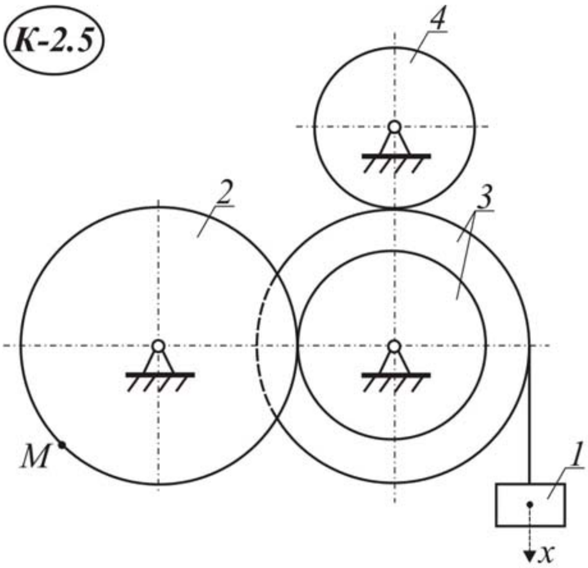
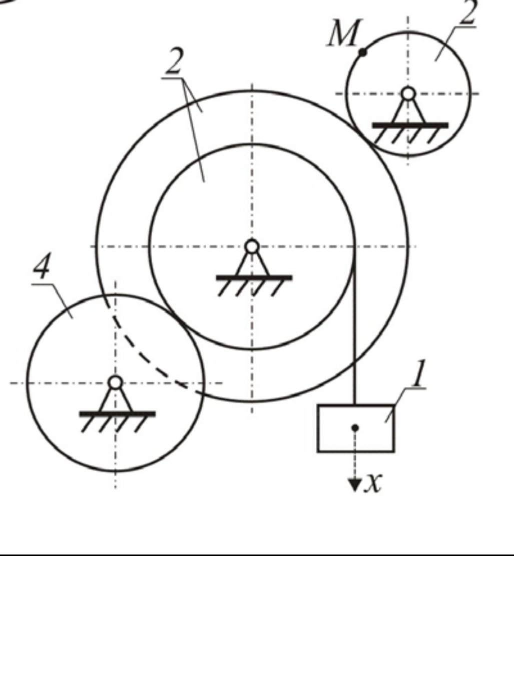
Определить в момент времени $t=t_1$ скорость и ускорение груза; скорость и ускорение точки M одного из колёс механизма, угловые скорости и ускорения всех колёс механизма.

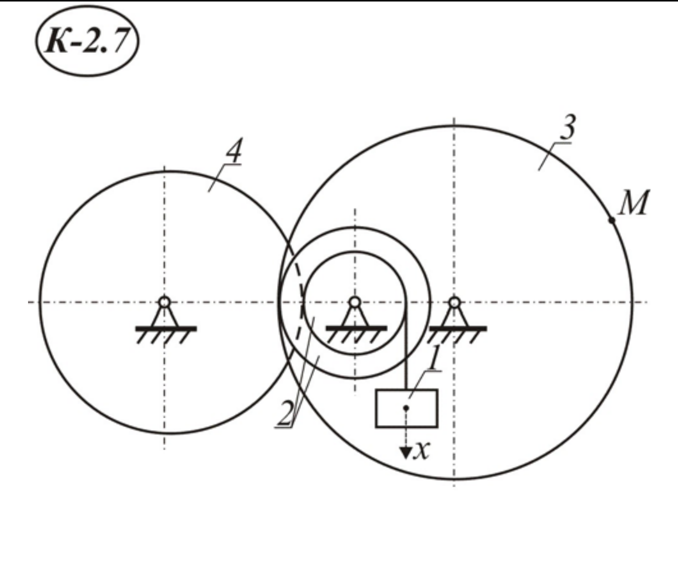
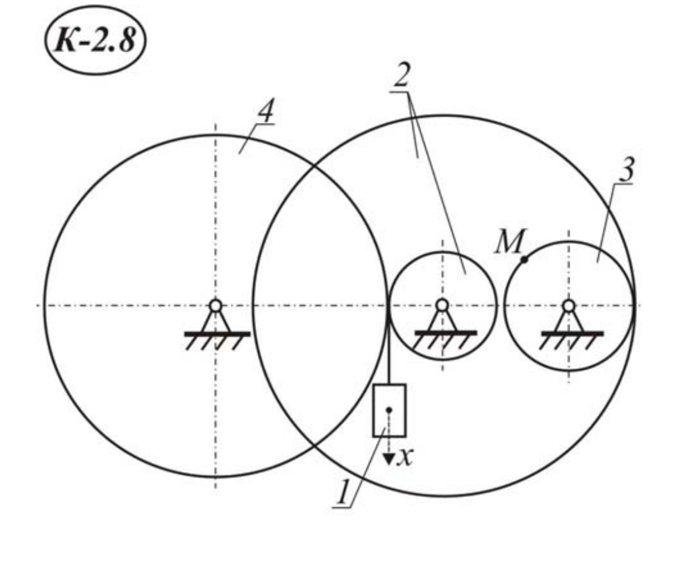
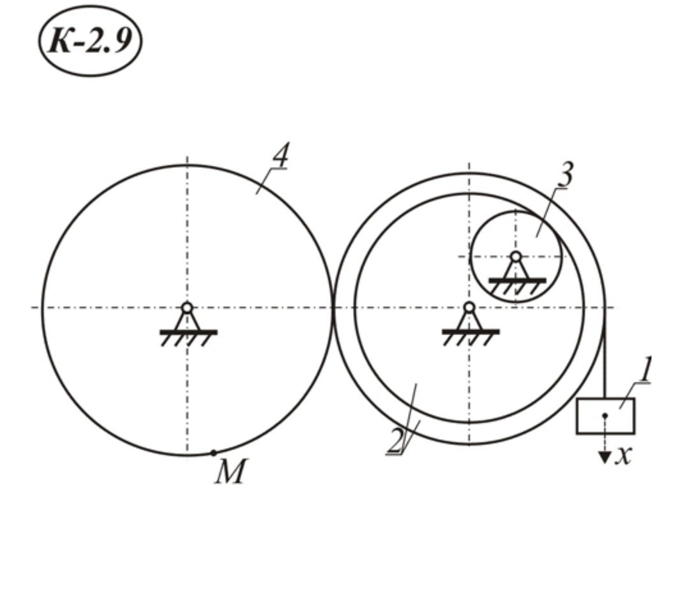
Схемы механизмов и необходимые данные приведены в табл. II.2.1.

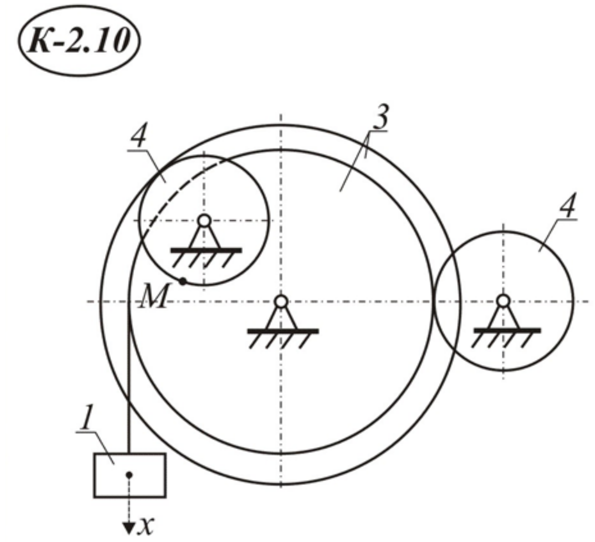
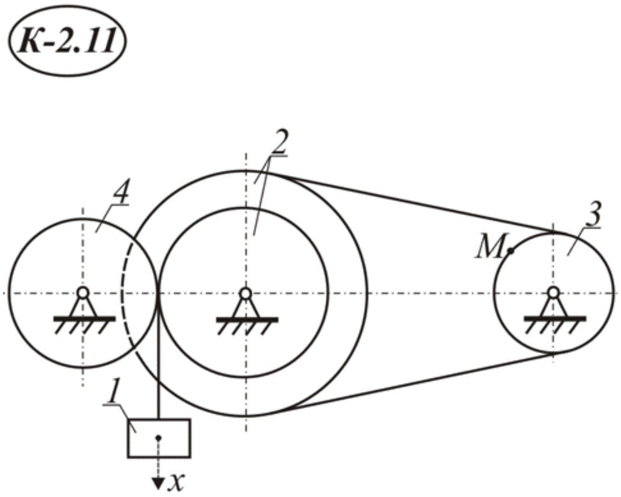
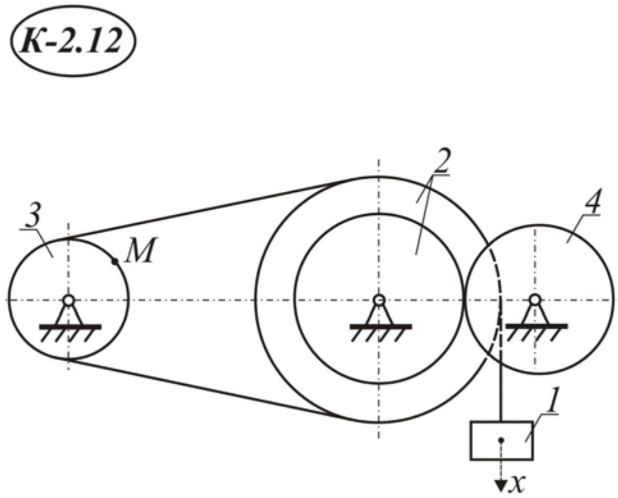
Указания. При решении задачи учесть, что когда два колеса находятся в зацеплении, скорость точки зацепления каждого колеса одна и та же. Когда два колеса связаны ременной передачей, то скорости всех точек ремня и, следовательно, точек, лежащих на ободе каждого из этих колёс, в данный момент времени численно одинаковы; при этом считается, что ремень по ободу колеса не скользит.

Таблица II.2.1

<table>
<tr>
<td></td>
<td>Радиусы:
R_2=60 см
r_2=45 см
R_3=36 см
R_4=36 см
При t=0 x_0=2 см, v_0 =12 см/с
При t=t_2 x_2=173 см
Расчётные моменты времени:
t_2=3 с, t_1=2 с.
Закон движения груза 1:
$$x = \frac{at^2}{2} + v_0 t + x_0$$</td>
</tr>
<tr>
<td></td>
<td>Радиусы :
R_2=80 см
r_3=45 см
R_3=60 см
R_4=40 см
При t=0: x_0=5 см, v_0 =10 см/с
При t=t_2 x_2=41 см
Расчётные моменты времени:
t_2=2 с, t_1=1 с.
Закон движения груза 1:
$$x = \frac{at^2}{2} + v_0 t + x_0$$</td>
</tr>
<tr>
<td></td>
<td>Радиусы:
R_2=100 см
r_2=60 см
R_3=75 см
R_4=40 см
При t=0 x_0=8 см, v_0 =6 см/с
При t=t_2 x_2=40 см
Расчётные моменты времени:
t_2=4 с, t_1=2 с.
Закон движения груза 1:
$$x = \frac{at^2}{2} + v_0 t + x_0$$</td>
</tr>
</table>

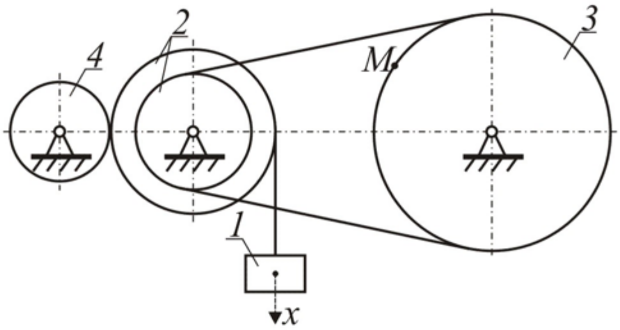
К-2.4 	Радиусы: R_2=58 см r_2=45 см R_3=60 см R_4=40 см При t=0 x_0=4 см, v_0=4 см/с При t=t_2 x_2=172 см *Расчётные моменты времени:* t_2=4 с, t_1=3 с. Закон движения груза 1: $x = \dfrac{at^2}{2} + v_0 t + x_0$
К-2.5 	Радиусы: R_2=80 см r_3=30 см R_3=45 см R_4=40 см При t=0 x_0=3 см, v_0=15 см/с При t=t_2 x_2=102 см *Расчётные моменты времени:* t_2=3 с, t_1=2 с. Закон движения груза 1: $x = \dfrac{at^2}{2} + v_0 t + x_0$
К-2.6 	Радиусы: R_2=100 см r_2=60 см R_3=20 см R_4=40 см При t=0 x_0=7 см, v_0=16 см/с При $t = t_2$ x_2=215 см *Расчётные моменты времени:* t_2=4 с, t_1=2 с. Закон движения груза 1: $x = \dfrac{at^2}{2} + v_0 t + x_0$

	Радиусы: R_2=45 см r_2=35 см R_3=105 см R_4=60 см При t=0 x_0=8 см, v_0=5 см/с При $t=t_2$ x_2=124 см *Расчётные моменты времени:* t_2=4 с, t_1=3 с. Закон движения груза 1: $x = \frac{at^2}{2} + v_0 t + x_0$
	Радиусы: R_2=35 см r_2=10 см R_3=15 см R_4=30 см При t=0 x_0=6 см, v_0=2 см/с При $t=t_2$ x_2=111 см *Расчётные моменты времени:* t_2=3 с, t_1=2 с. Закон движения груза 1: $x = \frac{at^2}{2} + v_0 t + x_0$
	Радиусы: R_2=40 см r_2=30 см R_3=15 см R_4=50 см При t=0: x_0=10 см, v_0=7 см/с При $t=t_{2:}$ x_2=48 см *Расчётные моменты времени:* t_2=2 с, t_1=1 с. Закон движения груза 1: $x = \frac{at^2}{2} + v_0 t + x_0$

	Радиусы: R_2=15 см r_3=35 см R_3=40 см R_4=20 см При t=0 x_0=5 см, v_0=3 см/с При t=t_2 x_2=129 см *Расчётные моменты времени:* t_2=4 с, t_1=3 с. Закон движения груза 1: $x = \frac{at^2}{2} + v_0 t + x_0$
	Радиусы: R_2=40 см r_2=25 см R_3=20 см R_4=30 см При t=0 x_0=9 см, v_0=8 см/с При t=t_2: x_2=65 см *Расчётные моменты времени:* t_2=2 с, t_1=1 с. Закон движения груза 1: $x = \frac{at^2}{2} + v_0 t + x_0$
	Радиусы: R_2=20 см r_2=15 см R_3=10 см R_4=10 см При t=0 x_0=5 см, v_0=10 см/с При t=t_2 x_2=179 см *Расчётные моменты времени:* t_2=3 с, t_1=2 с. Закон движения груза 1: $x = \frac{at^2}{2} + v_0 t + x_0$

<table>
<tr>
<td>

К-2.13

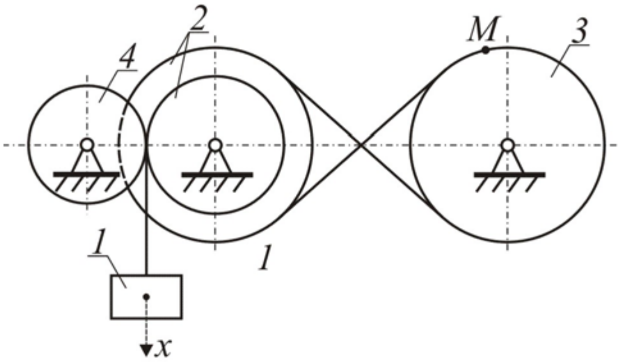


</td>
<td>

Радиусы:
R_2=30 см
r_2=20 см
R_3=40 см
R_4=10 см
При t=0 x_0=7 см, v_0=0 см/с
При t=t_2 x_2=557 см
Расчётные моменты времени:
t_2=5 с, t_1=2 с.
Закон движения груза 1:
$x = \frac{at^2}{2} + v_0 t + x_0$

</td>
</tr>
<tr>
<td>

К-2.14

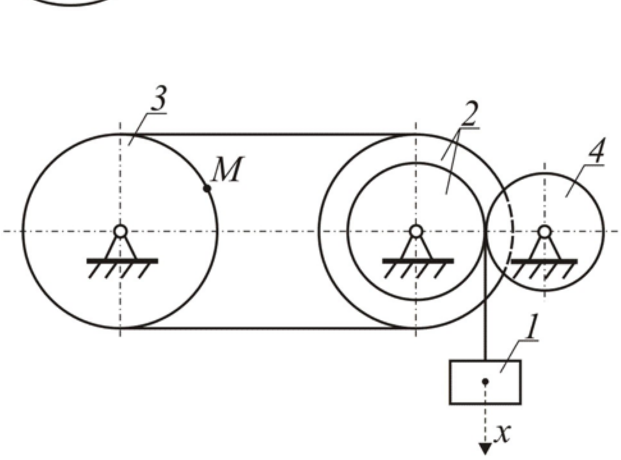


</td>
<td>

Радиусы:
R_2=15 см
r_2=10 см
R_3=15 см
R_4=5 см
При t=0 x_0=6 см, v_0=3 см/с
При t=t_2 x_2=80 см
Расчётные моменты времени:
t_2=2 с, t_1=1 с.
Закон движения груза 1:
$x = \frac{at^2}{2} + v_0 t + x_0$

</td>
</tr>
<tr>
<td>

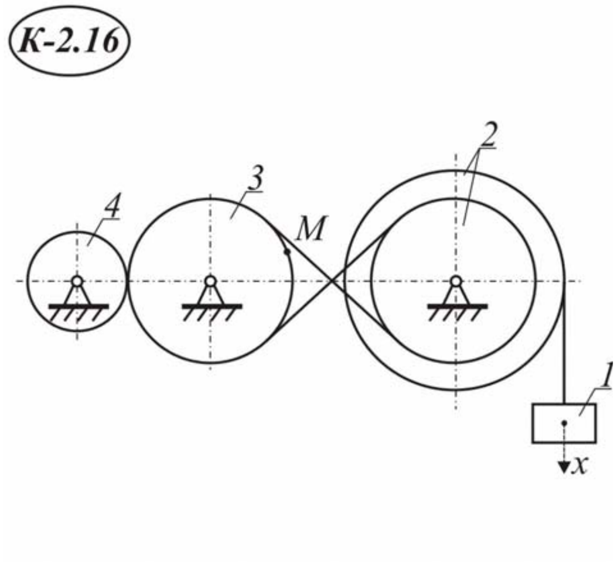
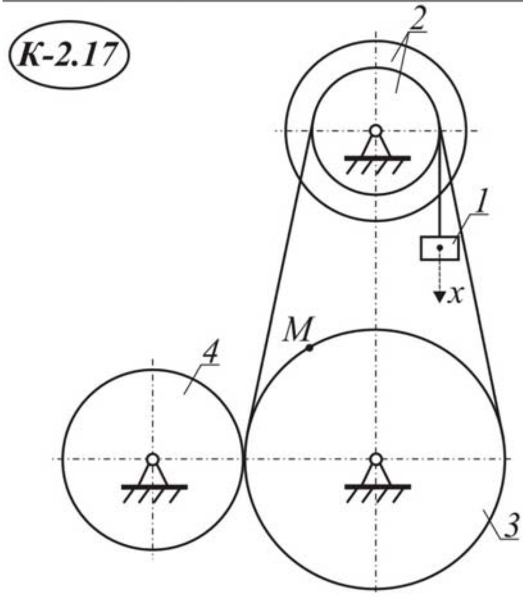
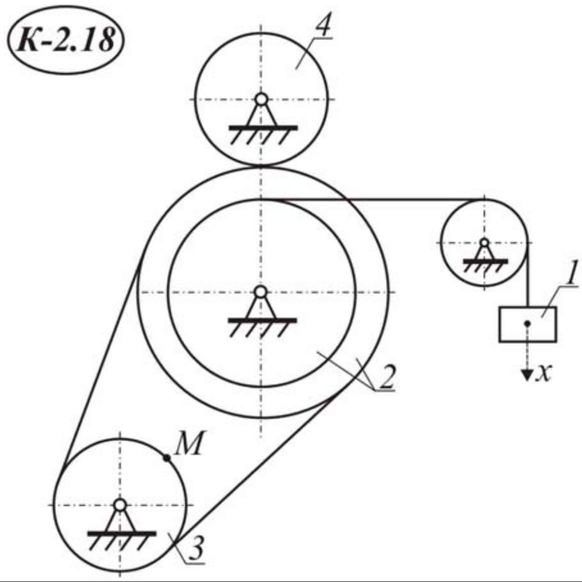
К-2.15

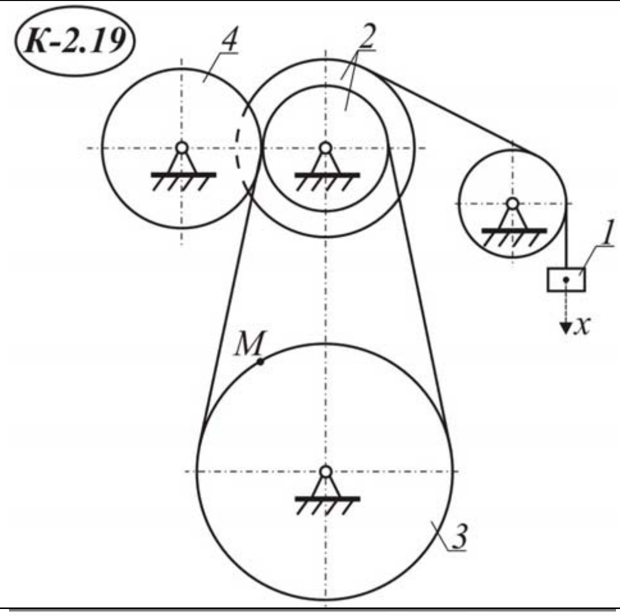
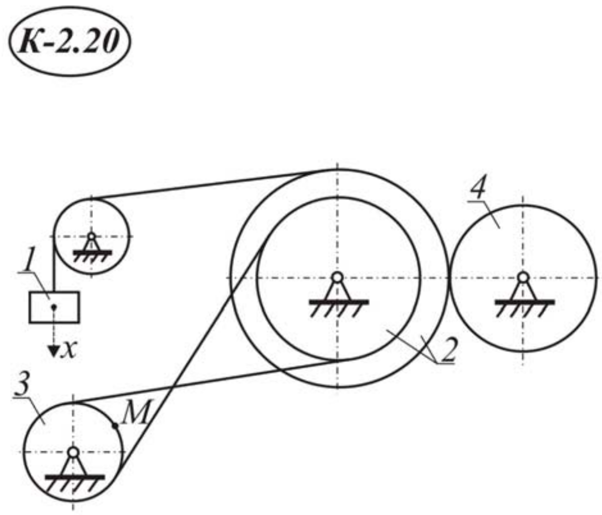
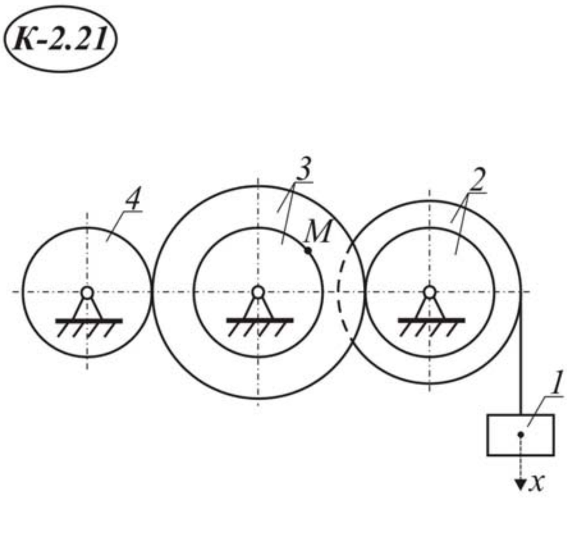


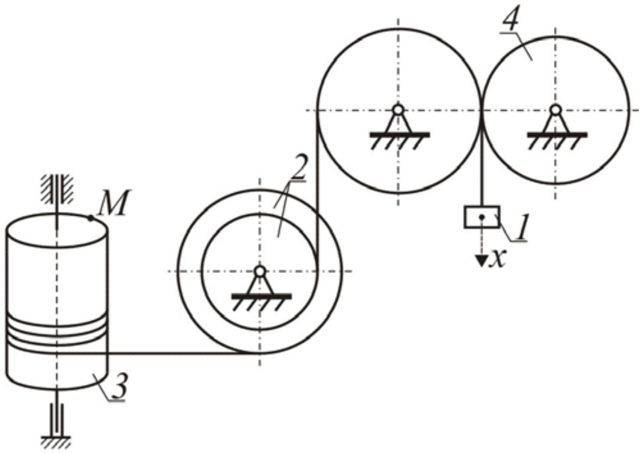
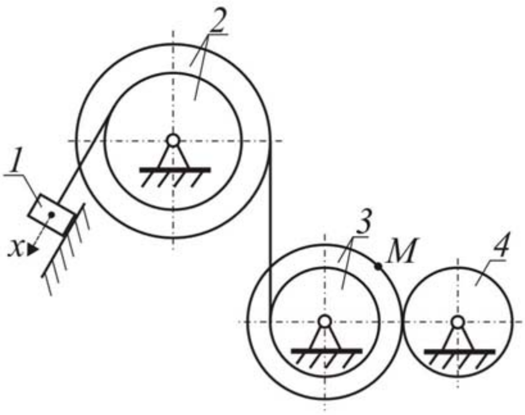
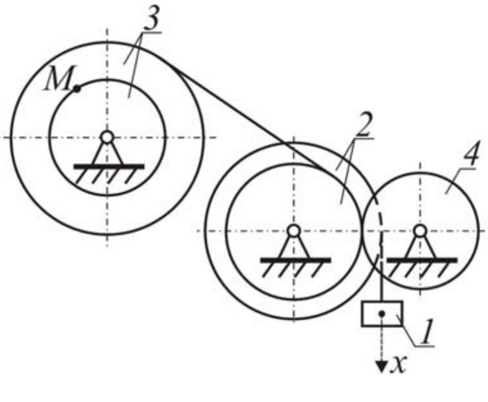
</td>
<td>

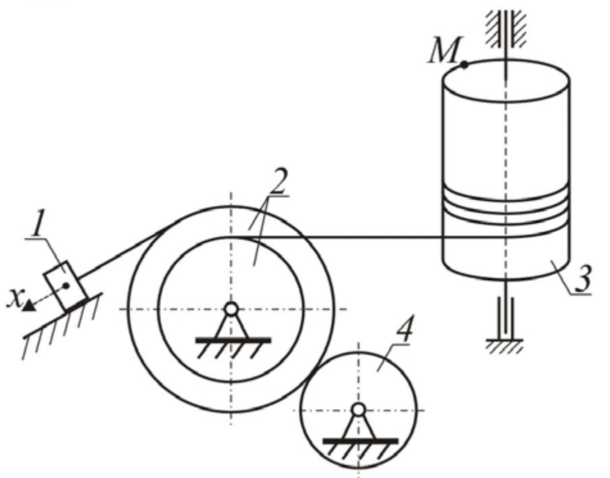
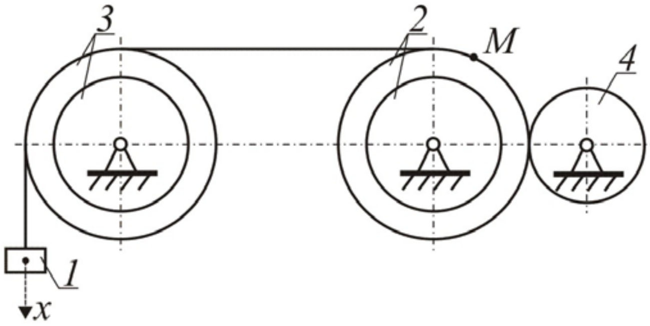
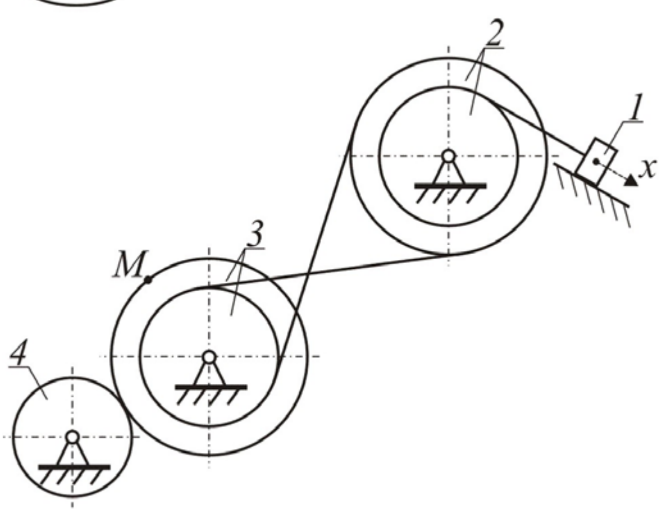
Радиусы:
R_2=20 см
r_2=15 см
R_3=20 см
R_4=10 см
При t=0 x_0=5 см, v_0=2 см/с
При t=t_2 x_2=189 см
Расчётные моменты времени:
t_2=4 с, t_1=2 с.
Закон движения груза 1:
$x = \frac{at^2}{2} + v_0 t + x_0$

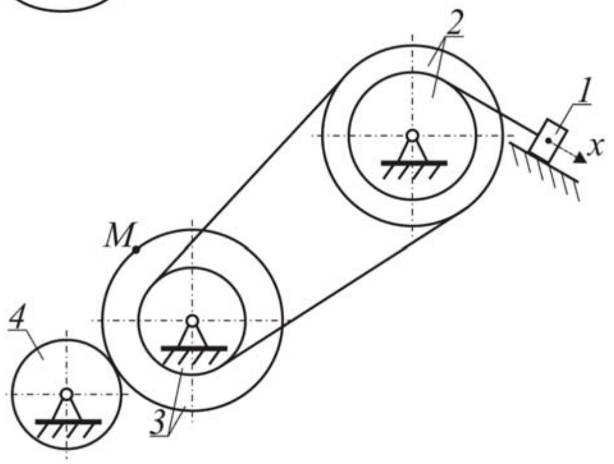
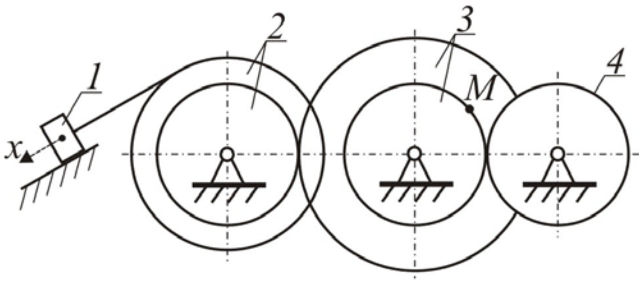
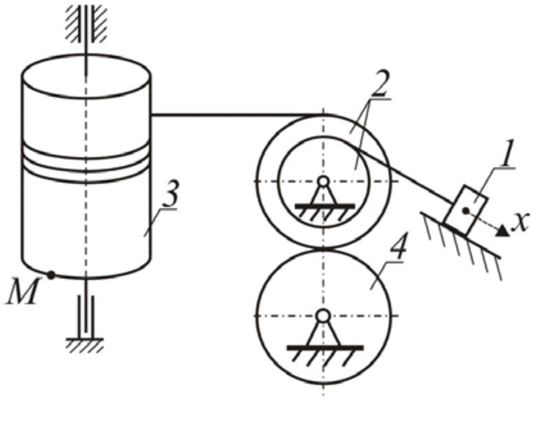
</td>
</tr>
</table>

	Радиусы: R_2=20 см r_2=15 см R_3=15 см R_4=10 см При t=0 x_0=4 см, v_0=6 см/с При t=t_2 x_2=220 см *Расчётные моменты времени:* t_2=4 с, t_1=3 с. Закон движения груза 1: $x = \frac{at^2}{2} + v_0 t + x_0$
	Радиусы: R_2=15 см r_2=10 см R_3=20 см R_4=10 см При t=0 x_0=8 см, v_0=4 см/с При t=t_2 x_2=44 см *Расчётные моменты времени:* t_2=2с, t_1=1с. Закон движения груза 1: $x = \frac{at^2}{2} + v_0 t + x_0$
	Радиусы: R_2=20 см r_2=15 см R_3=10 см R_4=10 см При t=0 x_0=3 см, v_0=12 см/с При t=t_2 x_2=211 см *Расчётные моменты времени:* t_2=4 с, t_1=1 с. Закон движения груза 1: $x = \frac{at^2}{2} + v_0 t + x_0$

	Радиусы: R_2=15 см r_2=10 см R_3=20 см R_4=15 см При t=0 x_0=5 см, v_0=10 см/с При t=t_2 x_2=505 см *Расчётные моменты времени:* t_2=5 с, t_1=3 с. Закон движения груза 1: $x = \frac{at^2}{2} + v_0t + x_0$
	Радиусы: R_2=25 см r_2=15 см R_3=10 см R_4=10 см При t=0 x_0=10 см, v_0=8 см/с При t=t_2 x_2=277 см *Расчётные моменты времени:* t_2=3 с, t_1=1 с. Закон движения груза 1: $x = \frac{at^2}{2} + v_0t + x_0$
	Радиусы: R_2=20 см r_2=10 см R_3=30 см r_3=10см R_4=10 см При t=0 x_0=6 см, v_0=5 см/с При t=t_2 x_2=356 см *Расчётные моменты времени:* t_2=5 с, t_1=2 с. Закон движения груза 1: $x = \frac{at^2}{2} + v_0t + x_0$

К-2.22  	Радиусы: R_2=40 см r_2=20 см R_3=35 см R_4=10 см При t=0 x_0=7 см, v_0=6 см/с При t=t_2 x_2=103 см *Расчётные моменты времени:* t_2=2с, t_1=1с. Закон движения груза 1: $x = \dfrac{at^2}{2} + v_0t + x_0$
К-2.23  	Радиусы: R_2=40 см r_2=30 см R_3=30 см r_3=15см R_4=10 см При t=0 x_0=5 см, v_0=9 см/с При t=t_2 x_2=194 см *Расчётные моменты времени:* t_2=3 с, t_1=2 с. Закон движения груза 1: $x = \dfrac{at^2}{2} + v_0t + x_0$
К-2.24  	Радиусы: R_2=30 см r_2=15 см R_3=40 см R_4=10 см При t=0 x_0=9 см, v_0=8 см/с При t=t_2 x_2=105 см *Расчётные моменты времени:* t_2=4 с, t_1=2 с. Закон движения груза 1: $x = \dfrac{at^2}{2} + v_0t + x_0$

К-2.22 	Радиусы: R_2=50 см r_2=20 см R_3=60 см R_4=10 см При t=0 x_0=8 см, v_0=4 см/с При $t=t_2$: x_2=119 см *Расчётные моменты времени:* t_2=3с, t_1=2с. Закон движения груза 1: $x=\dfrac{at^2}{2}+v_0t+x_0$
К-2.23 	Радиусы: R_2=32 см r_2=16 см R_3=32 см r_3=16см R_4=10 см При t=0 x_0=6 см, v_0=14 см/с При $t=t_2$ x_2=862 см *Расчётные моменты времени:* t_2=4 с, t_1=2 с. Закон движения груза 1: $x=\dfrac{at^2}{2}+v_0t+x_0$
К-2.24 	Радиусы: R_2=40 см r_2=18 см R_3=40 см r_3=18см R_4=10 см При t=0 x_0=5 см, v_0=10 см/с При $t=t_2$ x_2=193 см *Расчётные моменты времени:* t_2=2 с, t_1=1 с. Закон движения груза 1: $x=\dfrac{at^2}{2}+v_0t+x_0$

К-2.28 	Радиусы: R_2=40 см r_2=20 см R_3=40 см r_3=15см R_4=20 см При t=0 x_0=8 см, v_0=5 см/с При t=t_2 x_2=347 см *Расчётные моменты времени:* t_2=3 с, t_1=2 с. Закон движения груза 1: $x = \frac{at^2}{2} + v_0 t + x_0$
К-2.29 	Радиусы: R_2=25 см r_2=20 см R_3=50 см r_3=25см R_4=20 см При t=0 x_0=4 см, v_0=6 см/с При t=t_2 x_2=32 см *Расчётные моменты времени:* t_2=2 с, t_1=1 с. Закон движения груза 1: $x = \frac{at^2}{2} + v_0 t + x_0$
К-2.30 	Радиусы: R_2=30 см r_2=15 см R_3=20 см $R_4 = 25$ *см.* При t=0 x_0=10 см, v_0=7 см/с При t=t_2 x_2=128 см *Расчётные моменты времени:* t_2=2 с, t_1=1 с. Закон движения груза 1: $x = \frac{at^2}{2} + v_0 t + x_0$

Пример выполнения задания К-2

Д а н о : схема механизма (рис. II.2.1).

$$R_2 = 16 \text{ см}, \quad r_2 = 8 \text{ см}, \quad R_3 = 14 \text{ см}, \quad r_3 = 10 \text{ см},$$

$$R_4 = 8 \text{ см}, \quad x_0 = 2 \text{ см}, \quad v_0 = 4 \text{ см/с}, \quad x_2 = 320 \text{ см},$$

$$t_2 = 5 \text{ с}.$$

Закон движения груза

$$x = \frac{at^2}{2} + V_0 t + x_0.$$

Определить в момент времени $t_1 = 2$ с скорость и ускорение груза, скорость и ускорение точки M одного из колес механизма, угловые скорости и ускорения всех колес механизма.

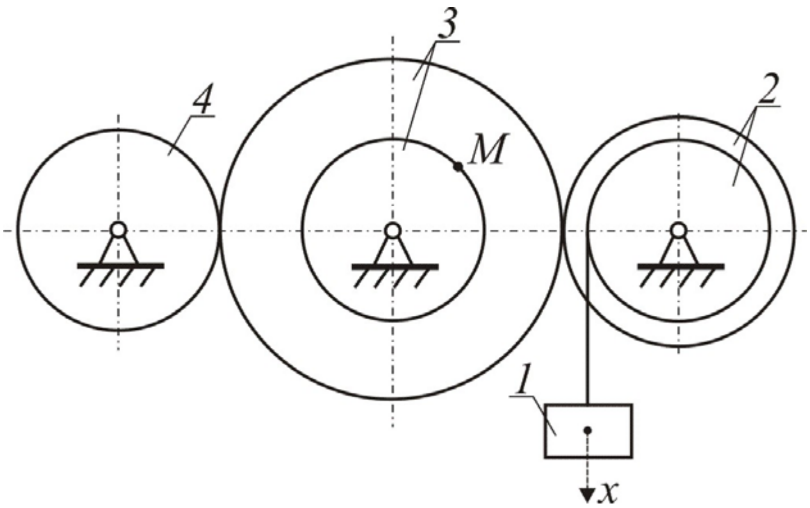


Рис. II.2.1 Заданная схема механизма

Решение:

1. По закону движения груза найдем ускорение груза a.

При $t_2 = 5$ с

$$320 = \frac{a \cdot 5^2}{2} + 4 \cdot 5 + 2 \quad \Rightarrow \quad a = 23{,}84 \text{ см/с}^2$$

Скорость груза

$$v = \frac{dx}{dt} = \dot{x}.$$

Так как

$$x = \frac{at^2}{2} + v_0 t + x_0 = 11.92 t^2 + 4t + 2,$$

то $v = 23{,}84 t + 4$.

При $t_1 = 2$ с

$$v = 23,84 \cdot 2 + 4 = 51,68 \text{ см / с}; \quad a = \text{const} = 23,84 \text{ см / с}^2.$$

2. Определяем угловые скорости и ускорения всех колес.

$$\omega_2 = \frac{v}{r_2} = \frac{23,84t + 4}{8} = 2,98t + 0,5.$$

При $t_1 = 2$ с

$$\omega_2 = 6,46 \text{рад/с}.$$

Для определения угловой скорости третьего колеса запишем уравнение, связывающее искомую величину с известной угловой скоростью второго колеса:

$$R_2\omega_2 = R_3\omega_3,$$

следовательно,

$$\omega_3 = \frac{R_2\omega_2}{R_3} = \frac{16(2,98t + 0,5)}{14} = 3,4t + 0,57.$$

При $t_1 = 2$ с

$$\omega_3 = 7,37 \text{ рад / с}.$$

Угловую скорость четвертого колеса найдём, зная, что при зацеплении колёс угловые скорости ω обратно пропорциональны радиусам R:

$$\frac{\omega_4}{\omega_3} = \frac{R_3}{R_4} = \frac{14}{8} = 1,75, \quad \omega_4 = 1,75(3,4t + 0,57) = 5,95t + 1.$$

При $t_1 = 2$ с

$$\omega_4 = 12,9 \text{ рад/с}.$$

Так как значение углового ускорения тела в данный момент времени равно первой производной от угловой скорости, то

$$\varepsilon_2 = \dot{\omega}_2 = 2,98 \text{ рад / с}^2;$$

$$\varepsilon_3 = \dot{\omega}_3 = 3,4 \text{ рад/с}^2;$$

$$\varepsilon_4 = \dot{\omega}_4 = 5,95 \text{ рад/с}^2.$$

3. Скорость и ускорение точки M при $t_1 = 2$ с

$$v_M = r_3\omega_3 = 10 \cdot 7,37 = 73,7 \text{см/с};$$

$$a_M^\tau = r_3 \cdot \varepsilon_3 = 10 \cdot 3,4 = 34 \text{ см/с}^2;$$

$$a_M^n = r_3 \cdot \omega_3^2 = 10 \cdot 7,37^2 = 543,17 \text{ см/с}^2.$$

$$a_M = \sqrt{\left(a_M^\tau\right)^2 + \left(a_M^n\right)^2} = 544,23 \text{ см/с}^2$$

Покажем найденные величины на рис. II.2.2

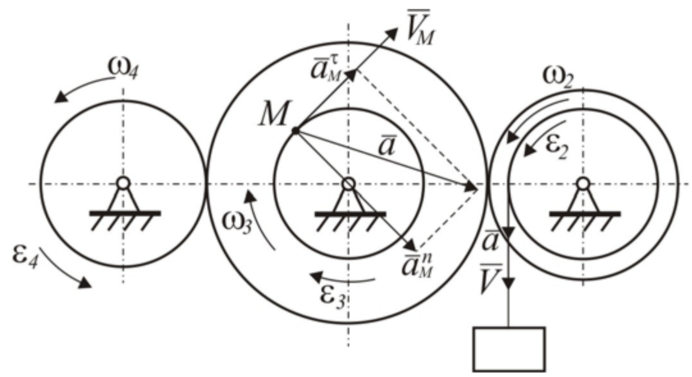


Рис. II.2.2. Кинематические характеристики шкивов и точки M в момент времени t_1

3. Плоское движение твёрдого тела

Задание К-3. Определение скоростей и ускорений точек многозвенного механизма

Плоский механизм состоит из стержней 1, 2, 3, 4 и ползуна B или E, соединённых друг с другом и с неподвижными опорами O_1, O_2 шарнирами.

Определить для заданного положения механизма скорости точек A, B, $Д$, E, угловые скорости всех звеньев, ускорения точек A и B, угловое ускорение звена AB.

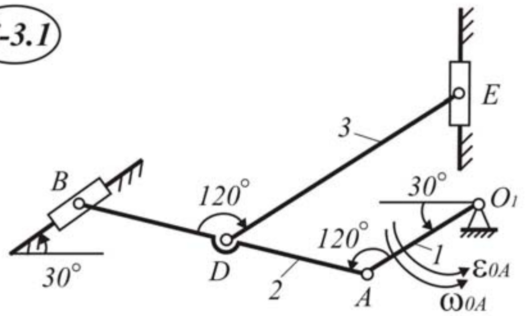
Схемы механизмов и необходимые для расчёта данные показаны в табл. II.3.1.

Указания. Определить скорости точек механизма можно с помощью мгновенного центра скоростей или по теореме о проекциях скоростей двух точек тела.

Для определения ускорений точек механизма следует воспользоваться теоремой об ускорениях точек плоской фигуры: $\vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{a}_{BA}^\tau + \vec{a}_{BA}^n$. При непрямолинейном движении ускорения точки ($\overline{a}_A$ или $\overline{a}_B$) надо представлять в виде двух составляющих – тангенциальной и нормальной

Таблица II.3.1

К-3.1



$\omega_{0A}=3\frac{1}{c}$

$\varepsilon_{0A}=2\frac{1}{c^2}$

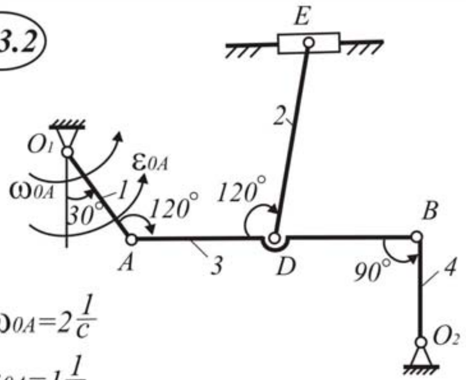
$l_1=0{,}4$ *м*

$l_2=0{,}6$ *м*

$l_3=0{,}7$ *м*

Найти:
1) скорости всех точек
2) ускорения точек A и B

К-3.2



$\omega_{0A}=2\frac{1}{c}$

$\varepsilon_{0A}=1\frac{1}{c^2}$

$l_1=0{,}4$ *м*

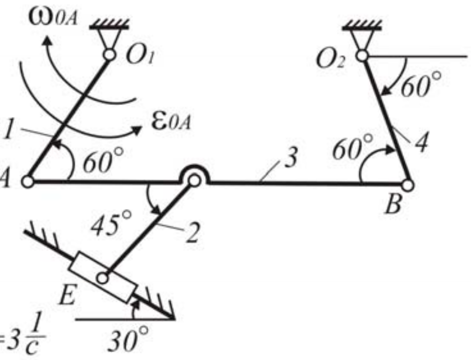
$l_2=0{,}6$ *м*

$l_3=0{,}7$ *м*

$l_4=0{,}3$ *м*

Найти:
1) скорости всех точек
2) ускорения точек A и B

К-3.3



$\omega_{0A}=3\frac{1}{c}$

$\varepsilon_{0A}=1\frac{1}{c^2}$

$l_1=0{,}4$ *м*

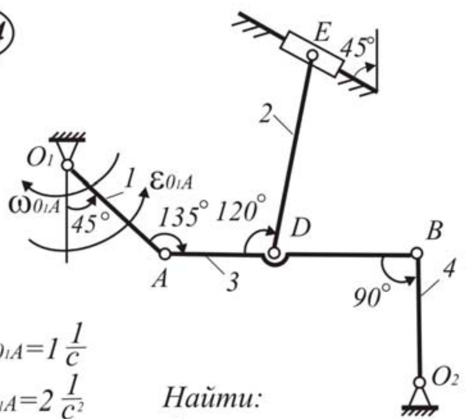
$l_2=0{,}6$ *м*

$l_3=0{,}7$ *м*

$l_4=0{,}3$ *м*

Найти:
1) скорости всех точек
2) ускорения точек A и B

К-3.4



$\omega_{01A}=1\frac{1}{c}$

$\varepsilon_{01A}=2\frac{1}{c^2}$

$l_1=0{,}4$ *м*

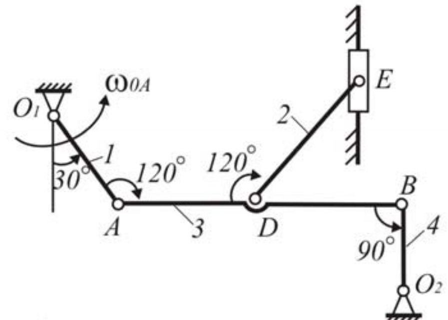
$l_2=0{,}6$ *м*

$l_3=1{,}2$ *м*

$l_4=0{,}6$ *м*

Найти:
1) скорости всех точек
2) ускорения точек A и B

К-3.5



$\omega_{0A}=2\frac{1}{c}=const$

$l_1=0{,}4$ *м*

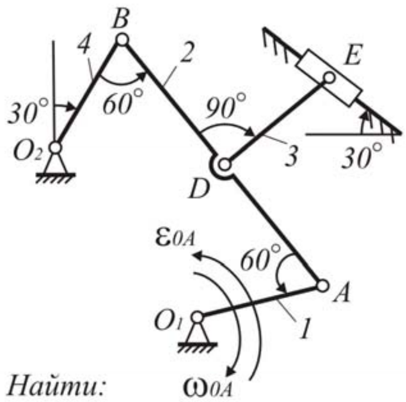
$l_2=0{,}6$ *м*

$l_3=0{,}7$ *м*

$l_4=0{,}3$ *м*

Найти:
1) скорости всех точек
2) ускорения точек A и B

К-3.6



$\omega_{0A}=2\frac{1}{c}$

$\varepsilon_{0A}=2\frac{1}{c^2}$

$l_1=0{,}3$ *м*

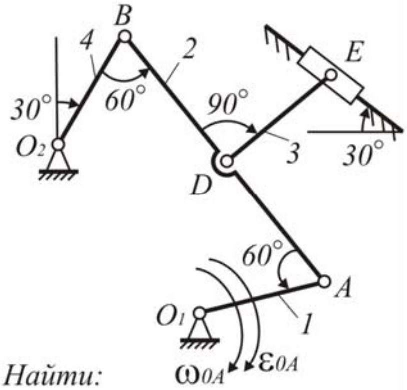
$l_2=0{,}6$ *м*

$l_3=0{,}7$ *м*

$l_4=0{,}3$ *м*

Найти:
1) скорости всех точек
2) ускорения точек A и B

К-3.7



$\varepsilon_{0A}=2\,\frac{1}{c}$

$\omega_{0A}=2\,\frac{1}{c^2}$

$l_1=0,4$ м

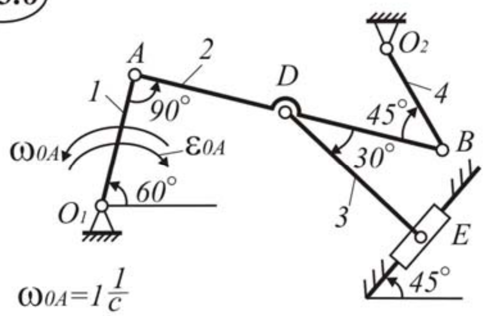
$l_2=0,6$ м

$l_3=0,7$ м

$l_4=0,3$ м

Найти:
1) скорости всех точек
2) ускорения точек A и B

К-3.8



$\omega_{0A}=1\,\frac{1}{c}$

$\varepsilon_{0A}=2\,\frac{1}{c^2}$

$l_1=0,4$ м

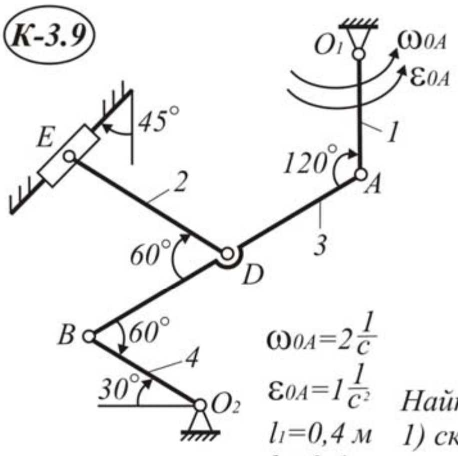
$l_2=0,6$ м

$l_3=0,8$ м

$l_4=0,4$ м

Найти:
1) скорости всех точек
2) ускорения точек A и B

К-3.9



$\omega_{0A}=2\,\frac{1}{c}$

$\varepsilon_{0A}=1\,\frac{1}{c^2}$

$l_1=0,4$ м

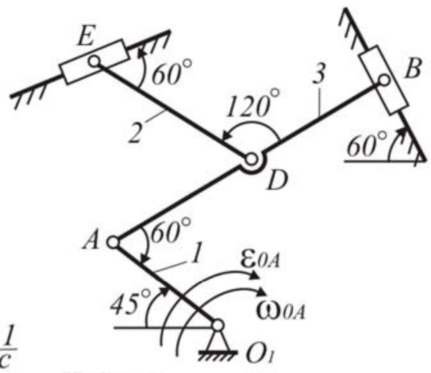
$l_2=0,6$ м

$l_3=0,7$ м

$l_4=0,3$ м

Найти:
1) скорости всех точек
2) ускорения точек A и B

К-3.10



$\omega_{0A}=3\,\frac{1}{c}$

$\varepsilon_{0A}=2\,\frac{1}{c^2}$

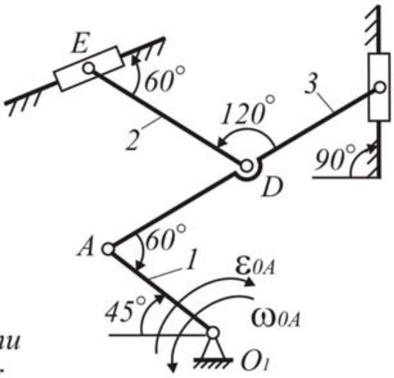
$l_1=0,4$ м

$l_2=0,6$ м

$l_3=0,7$ м

Найти:
1) скорости всех точек
2) ускорения точек A и B

К-3.11



$\varepsilon_{0A}=2\,\frac{1}{c^2}$

$\omega_{0A}=4\,\frac{1}{c}$

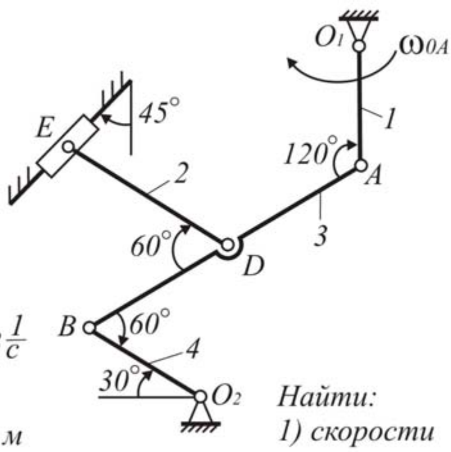
$l_1=0,4$ м

$l_2=0,6$ м

$l_3=0,7$ м

Найти:
1) скорости всех точек
2) ускорения точек A и B

К-3.12



$\omega_{0A}=3\,\frac{1}{c}$

$\varepsilon_{0A}=0$

$l_1=0,4$ м

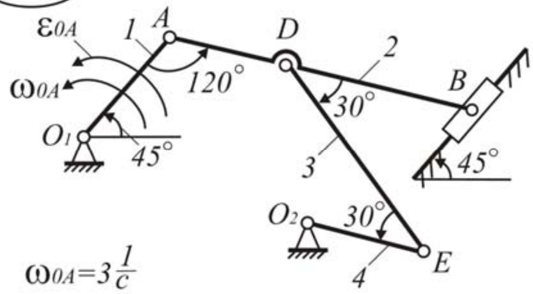
$l_2=0,6$ м

$l_3=0,7$ м

$l_4=0,3$ м

Найти:
1) скорости всех точек
2) ускорения точек A и B

К-3.13



$\omega_{0A}=3\frac{1}{c}$

$\varepsilon_{0A}=1\frac{1}{c^2}$

$l_1=0{,}4$ м

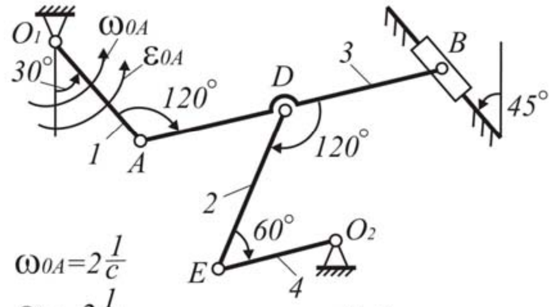
$l_2=0{,}6$ м

$l_3=0{,}7$ м

$l_4=0{,}3$ м

Найти:
1) скорости всех точек
2) ускорения точек A и B

К-3.14



$\omega_{0A}=2\frac{1}{c}$

$\varepsilon_{0A}=2\frac{1}{c^2}$

$l_1=0{,}4$ м

$l_2=0{,}6$ м

$l_3=0{,}7$ м

$l_4=0{,}3$ м

Найти:
1) скорости всех точек
2) ускорения точек A и B

К-3.15

$\varepsilon_{0A}=2\frac{1}{c^2}$

$\omega_{0A}=2\frac{1}{c}$

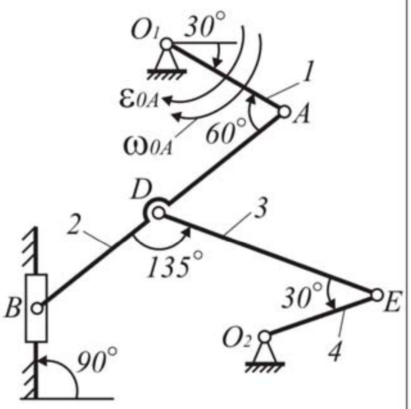
$l_1=0{,}4$ м

$l_2=0{,}6$ м

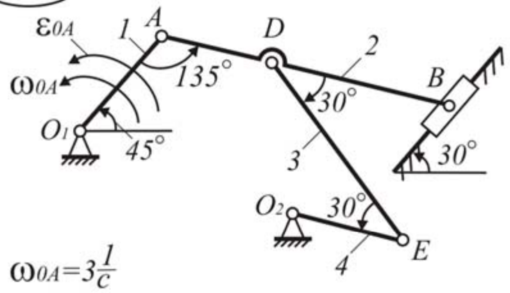
$l_3=0{,}7$ м

$l_4=0{,}3$ м

Найти:
1) скорости всех точек
2) ускорения точек A и B



К-3.16



$\omega_{0A}=3\frac{1}{c}$

$\varepsilon_{0A}=1\frac{1}{c^2}$

$l_1=0{,}4$ м

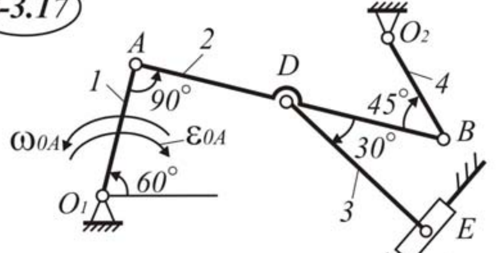
$l_2=0{,}6$ м

$l_3=0{,}7$ м

$l_4=0{,}3$ м

Найти:
1) скорости всех точек
2) ускорения точек A и B

К-3.17



$\omega_{0A}=3\frac{1}{c}$

$\varepsilon_{0A}=3\frac{1}{c^2}$

$l_1=0{,}4$ м

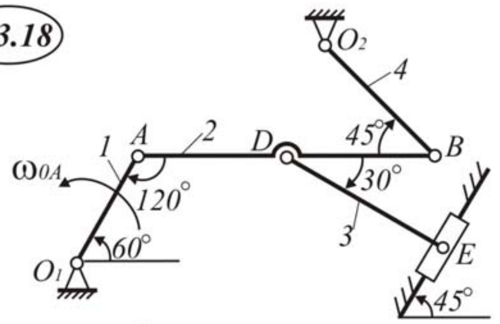
$l_2=0{,}6$ м

$l_3=0{,}7$ м

$l_4=0{,}3$ м

Найти:
1) скорости всех точек
2) ускорения точек A и B

К-3.18



$\omega_{0A}=2\frac{1}{c}$

$\varepsilon_{0A}=0$

$l_1=0{,}4$ м

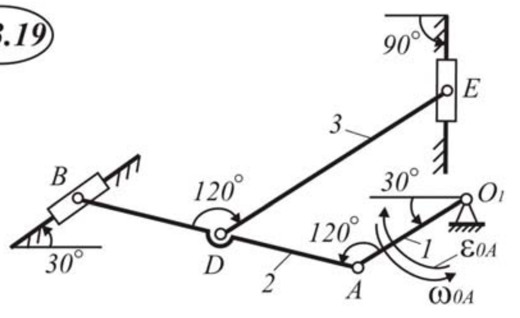
$l_2=0{,}6$ м

$l_3=0{,}7$ м

$l_4=0{,}3$ м

Найти:
1) скорости всех точек
2) ускорения точек A и B

К-3.19



$\omega_{0A}=1\frac{1}{c}$

$\varepsilon_{0A}=1\frac{1}{c^2}$

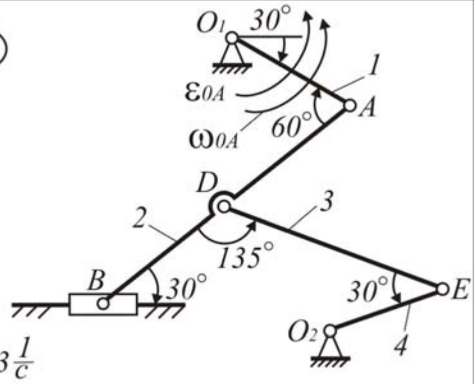
$l_1=0{,}4$ м

$l_2=0{,}6$ м

$l_3=0{,}7$ м

Найти:
1) скорости всех точек
2) ускорения точек A и B

К-3.20



$\omega_{0A}=3\frac{1}{c}$

$\varepsilon_{0A}=2\frac{1}{c^2}$

$l_1=0{,}4$ м

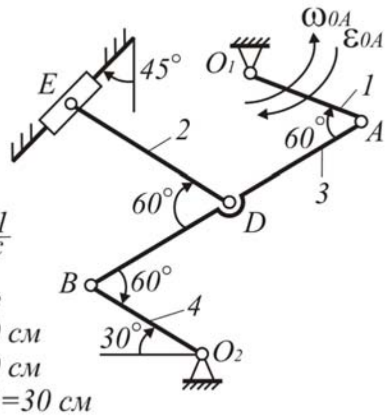
$l_2=0{,}6$ м

$l_3=0{,}7$ м

$l_4=0{,}3$ м

Найти:
1) скорости всех точек
2) ускорения точек A и B

К-3.21



$\omega_{0A}=1\frac{1}{c}$

$\varepsilon_{0A}=1\frac{1}{c^2}$

$O_1A=30$ см

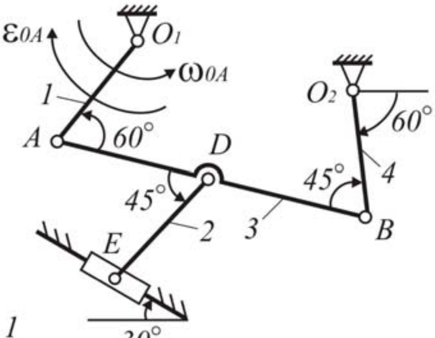
$O_2B=20$ см

$AD=DB=30$ см

$DE=40$ см

Определить скорости всех точек
Определить a_A и a_B

К-3.22



$\omega_{0A}=1\frac{1}{c}$

$\varepsilon_{0A}=2\frac{1}{c^2}$

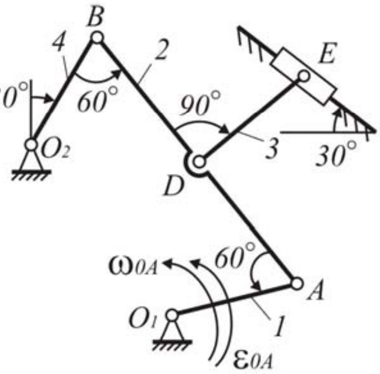
$O_1A=30$ см

$O_2B=20$ см

$AD=DB=30$ см

Найти:
1) скорости всех точек
2) ускорения точек A и B

К-3.23



$\varepsilon_{0A}=2\frac{1}{c}$

$\omega_{0A}=2\frac{1}{c^2}$

$l_1=0{,}2$ м

$l_2=0{,}6$ м

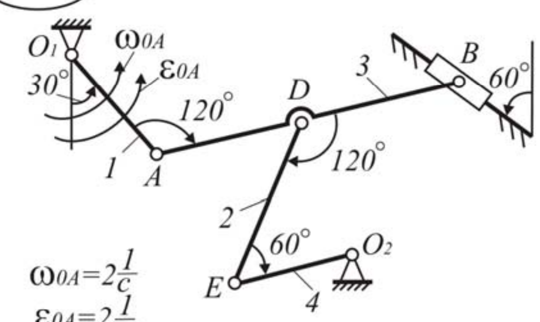
$l_3=1{,}7$ м

$l_4=0{,}3$ м

$BD=AD$

Найти скорости всех точек;
$\bar{a}_A$ и $\bar{a}_B$

К-3.24



$\omega_{0A}=2\frac{1}{c}$

$\varepsilon_{0A}=2\frac{1}{c^2}$

$O_1A=20$ см

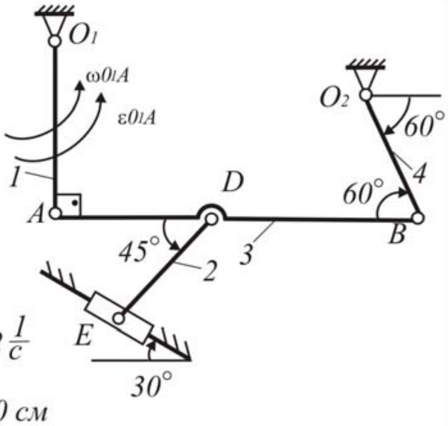
$O_2E=20$ см

$AD=DB=20$ см

$DE=40$ см

Определить скорости всех точек
Определить a_A и a_B

К-3.25



$\omega_{O_1A}=2\,\frac{1}{c}$

$\varepsilon_{O_1A}=0$

$O_1A=30$ см

$O_2B=20$ см

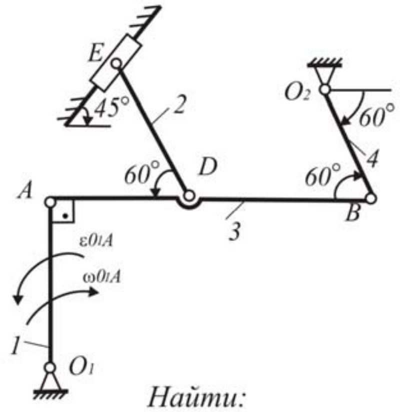
$AB=60$ см

$DE=40$ см

$AD=DB$

Найти: 1) скорости всех точек
2) ускорения точек a_A и a_B

К-3.26



$\omega_{0A}=3\,\frac{1}{c}$

$\varepsilon_{0A}=1\,\frac{1}{c^2}$

$l_1=0{,}4$ м

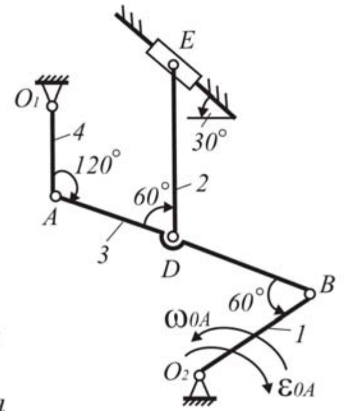
$l_2=0{,}6$ м

$l_3=0{,}7$ м

$l_4=0{,}3$ м

Найти:
1) скорости всех точек
2) ускорения точек A и B

К-3.27



$\omega_{0A}=1\,\frac{1}{c}$

$\varepsilon_{0A}=2\frac{1}{c^2}$

$l_1=0{,}4$ м

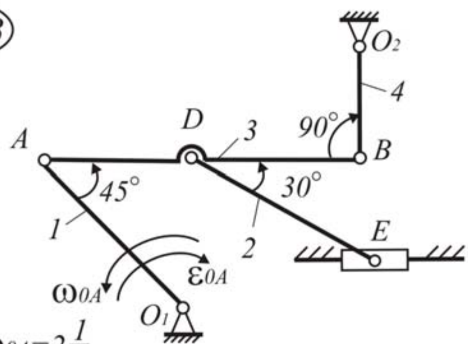
$l_2=0{,}6$ м

$l_3=0{,}7$ м

$l_4=0{,}3$ м

Найти:
1) скорости всех точек
2) ускорения точек A и B

К-3.28



$\omega_{0A}=2\frac{1}{c}$

$\varepsilon_{0A}=2\frac{1}{c^2}$

$l_1=0{,}4$ м

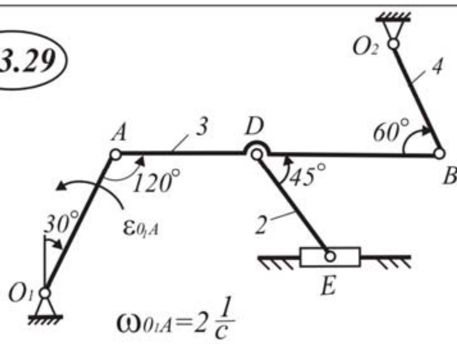
$l_2=0{,}6$ м

$l_3=0{,}7$ м

$l_4=0{,}3$ м

Найти:
1) скорости всех точек
2) ускорения точек A и B

К-3.29



$\omega_{O_1A}=2\,\frac{1}{c}$

$\varepsilon_{O_1A}=1\frac{1}{c^2}$

$O_1A=30$ см

$O_2B=20$ см

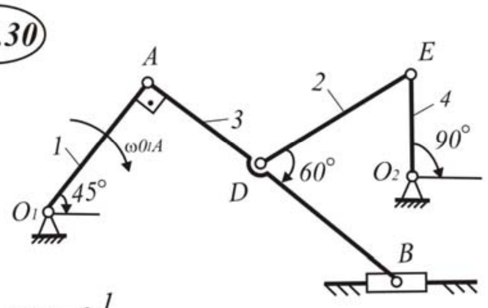
$AB=60$ см

$DE=40$ см

$AD=DB$

Определить скорости всех точек
Определить a_A и a_B

К-3.30



$\omega_{0A}=3\,\frac{1}{c}$

$\varepsilon_{0A}=0$

$l_1=0{,}4$ м

$l_2=0{,}6$ м

$l_3=0{,}7$ м

$l_4=0{,}3$ м

Найти:
1) скорости всех точек
2) ускорения точек A и B

Пример выполнения задания К-3

Д а н о : схема многозвенного механизма (рис. II.3.1);

$AD = DB$; длины звеньев O_1A, AB, ED, O_2B:

$l_1 = 0,4$ м, $l_2 = 1,2$ м, $l_3 = 1,4$ м, $l_4 = 0,6$ м;

угловая скорость звена ОА: $\omega_{O_1A} = 6\ \text{с}^{-1}$.

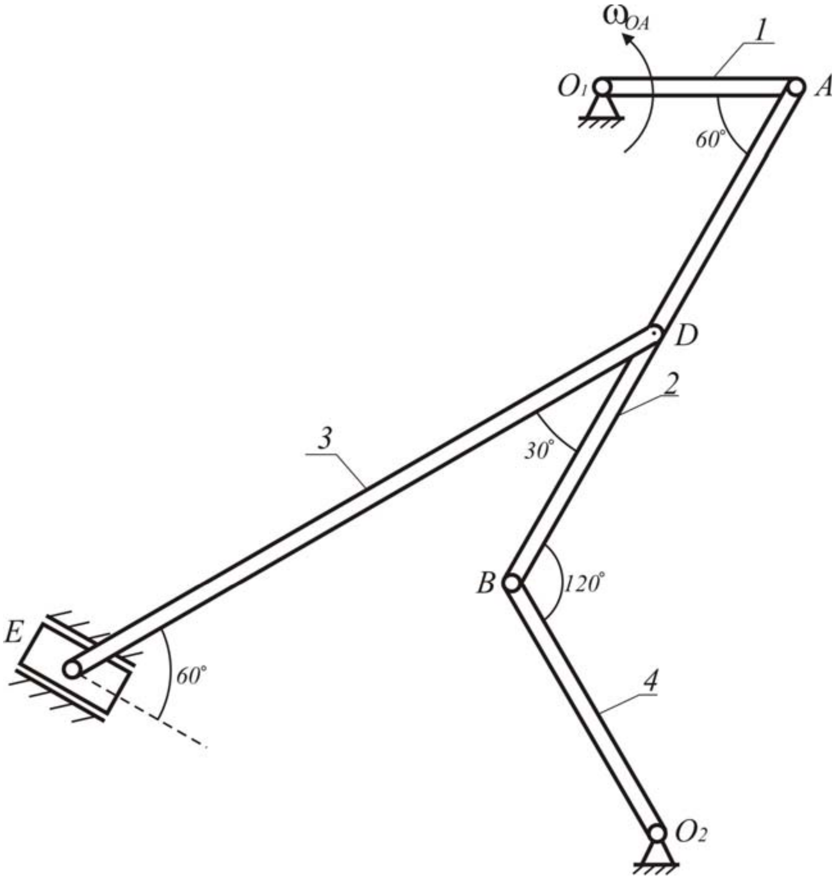


Рис. II.3.1. Схема многозвенного механизма в момент времени t_1.

Н а й т и : скорости точек A, B, $Д$, E – v_A, v_B, v_D, v_E; угловые скорости звеньев AB, O_2B, ED – ω_{AB}, ω_{BO_2}, ω_{ED}; ускорения точек A, B – a_A, a_B; угловое ускорение звена AB – ε_{AB}.

Решение:

1. Скорость точки A.

Точка А описывает окружность радиуса O_1A, следовательно,

$$v_A = \omega_{O_1A} \cdot O_1A = 6 \cdot 0,4 = 2,4\ \text{м/с};$$

$$\bar{v}_A \perp O_1A.$$

2. Угловая скорость звена АВ:

$$\omega_{AB} = \frac{v_A}{AP_{AB}} = \frac{2,4}{1,2} = 2\ \text{с}^{-1}.$$

3. Для определения величины скорости v_B найдём мгновенный центр скоростей звена AB – точку P_{AB}. Она находится на пересечении перпендикуляров к скоростям $\bar{v}_A$ и $\bar{v}_B$. Так как расстояния от точек A и B до мгновенного центра скоростей одинаковы, то

$$v_B = v_A = 2{,}4 \text{ м/с},$$

или $v_B = \omega_{AB} \cdot AP_{AB} = 2 \cdot 1{,}2 = 2{,}4$ м/с.

Можно также воспользоваться теоремой о проекциях скоростей двух точек тела. Для этого $\bar{v}_B$ и $\bar{v}_A$ спроектируем на прямую AB:

$$v_B \cdot \cos 30° = v_A \cdot \cos 30°;$$

следовательно, $v_B = v_A = 2{,}4$ м/с.

4. Угловая скорость звена O_2B:

$$\omega_{BO_2} = \frac{v_B}{BO_2} = \frac{2{,}4}{0{,}6} = 4 \text{ с}^{-1}$$

5. Скорость точки D.

Точка D принадлежит звену AB, следовательно, направление скорости: $\bar{v}_D \perp DP_{AB}$, модуль скорости можно определить по теореме о проекциях скоростей двух точек тела:

$$(v_D)_{BD} = (v_B)_{BD}.$$

Это условие дает:

$$v_D = v_B \cdot \cos 30° = 2{,}4 \cdot 0{,}866 = 2{,}0784 \text{ м/с}$$

6. Для определения скорости v_E найдём мгновенный центр скоростей звена DE – точку P_{DE}. Она находится на пересечении перпендикуляров к скоростям $\bar{v}_D$ и $\bar{v}_E$. Треугольник $P_{DE}DE$ – прямоугольный.

$$P_{DE}E = 1{,}4 \cdot \cos 30° = 1{,}212 \text{ м}, \; P_{DE}D = 1{,}4 \cdot \sin 30° = 0{,}7 \text{ м}.$$

$$\frac{v_E}{P_{DE}E} = \frac{v_D}{P_{DE}D}.$$

или

$$v_E = v_D \cdot \frac{EP_{DE}}{P_{DE}D} = 2{,}0784 \cdot \frac{0{,}7}{1{,}212} = 1{,}2 \text{ м/с}$$

.

7. Угловая скорость звена DE:

$$\omega_{DE} = \frac{v_D}{P_{DE}D} = \frac{2{,}0784}{0{,}7} = 2{,}969 \text{ м/с}.$$

Векторы всех скоростей показаны на рис. II.3.2.

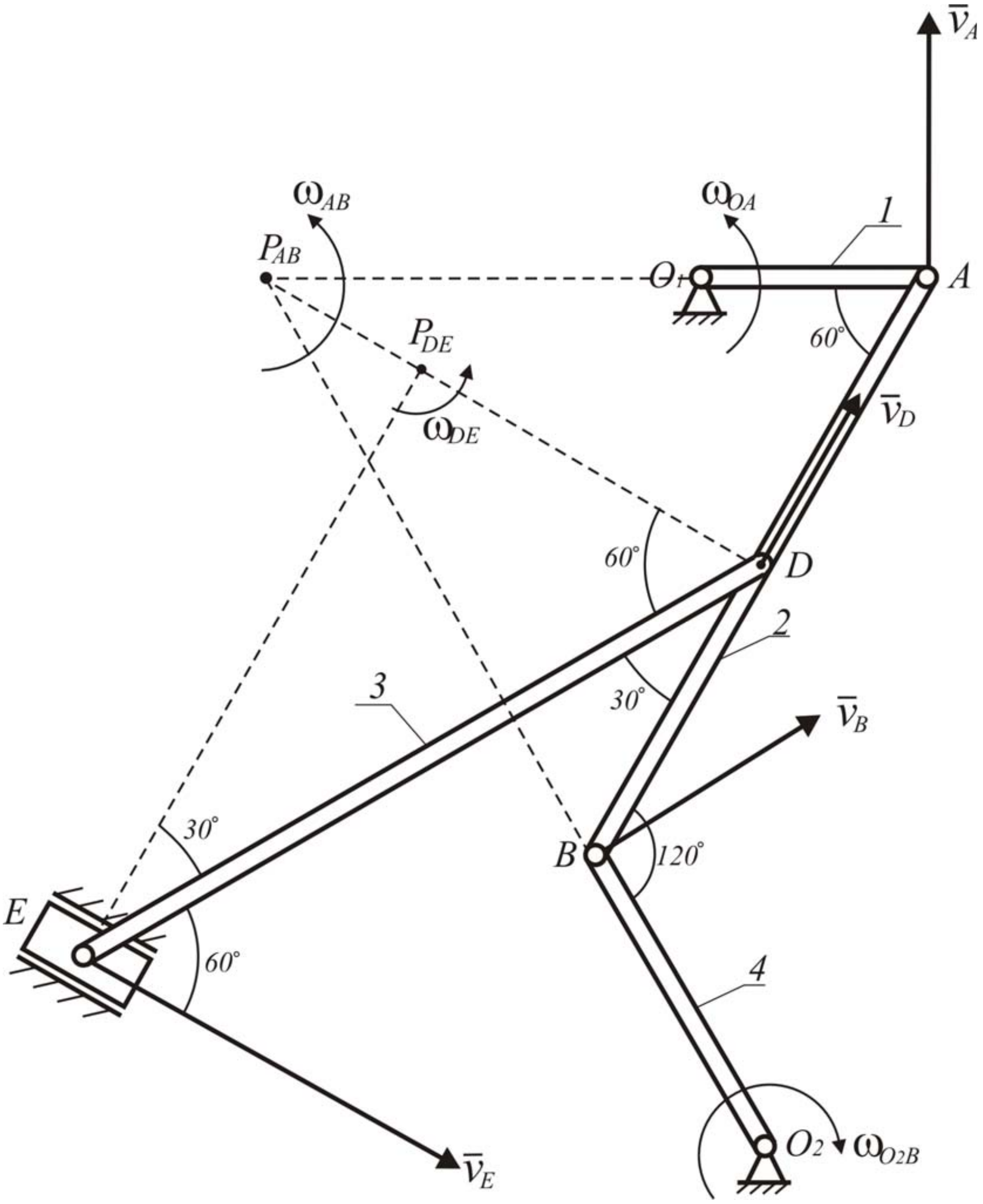


Рис.II.3.2. Определение скоростей узловых точек механизма и угловых скоростей звеньев

8. Ускорение точки A.
Так как точка A движется по окружности равномерно, то

$$a_A = a_A^n = \omega_1^2 \cdot O_1A = 36 \cdot 0,4 = 14,4 \text{ м/с}^2 .$$

9. Ускорение точки B $\overline{a}_B$ и угловое ускорение звена AB ε_{AB}.

Точка В принадлежит звену AB. Чтобы найти $\overline{a}_B$, надо знать ускорение какой-нибудь другой точки звена AB (удобно воспользоваться ускорением $\overline{a}_A$) и траекторию точки В. Тогда

$$\overline{a}_B^n + \overline{a}_B^\tau = \overline{a}_A + \overline{a}_{BA}^n + \overline{a}_{BA}^\tau . \tag{*}$$

Рассмотрим, какие величины, входящие в уравнение (*) нам известны или могут быть вычислены по данным к задаче.

$$a_A = 14,4 \text{ м/с}^2,$$

$$a_{BA}^n = \omega_{AB}^2 \cdot AB = 4 \cdot 1,2 = 4,8 \text{ м/с}^2,$$

$$a_B^n = \omega_{O_2B}^2 \cdot O_2B = 4^2 \cdot 0,6 = 16 \cdot 0,6 = 9,6 \text{ м/с}^2.$$

Таким образом, в векторном уравнении (*) неизвестны числовые значения двух величин $\overline{a}_B^\tau$ и $\overline{a}_{BA}^\tau$, которые можно найти двумя способами.

а) *Аналитический способ* (метод проекций)

Векторное уравнение (*) надо спроектировать на две координатные оси и получить два линейных алгебраических уравнения для нахождения a_B^τ и a_{BA}^τ. Каждое уравнение должно содержать одно неизвестное, это достигается путём рационального выбора системы координат.

Спроектируем обе части равенства (*) на оси x, y:

на ось x

$$-a_B^n \cdot \cos 60° + a_B^\tau \cdot \cos 30° = -a_A \cdot \cos 60° + a_{BA}^n,$$

$$a_B^\tau = \frac{9,6 \cdot 0,5 - 14,4 \cdot 0,5 + 4,8}{0,866} = 2,77 \text{м/с}^2;$$

на ось y

$$-a_B^n \cdot \sin 60° - a_B^\tau \cdot \sin 30° = a_A \cdot \sin 60° - a_{BA}^\tau,$$

$$a_{BA}^\tau = 9,6 \cdot 0,866 + 2,77 \cdot 0,5 + 14,4 \cdot 0,866 = 22,17 \text{ м/с}^2.$$

Модуль ускорения a_B:

$$a_B = \sqrt{(a_B^\tau)^2 + (a_B^n)^2} = 10 \text{ м/с}^2.$$

Ускорения точки показаны на рис. II.3.3.

Угловое ускорение ε_{AB} определяем по вектору $\overline{a}_{BA}^\tau$:

$$\varepsilon_{AB} = a_{BA}^\tau / AB = 22,17 / 1,2 = 18,47 \text{ с}^{-2}.$$

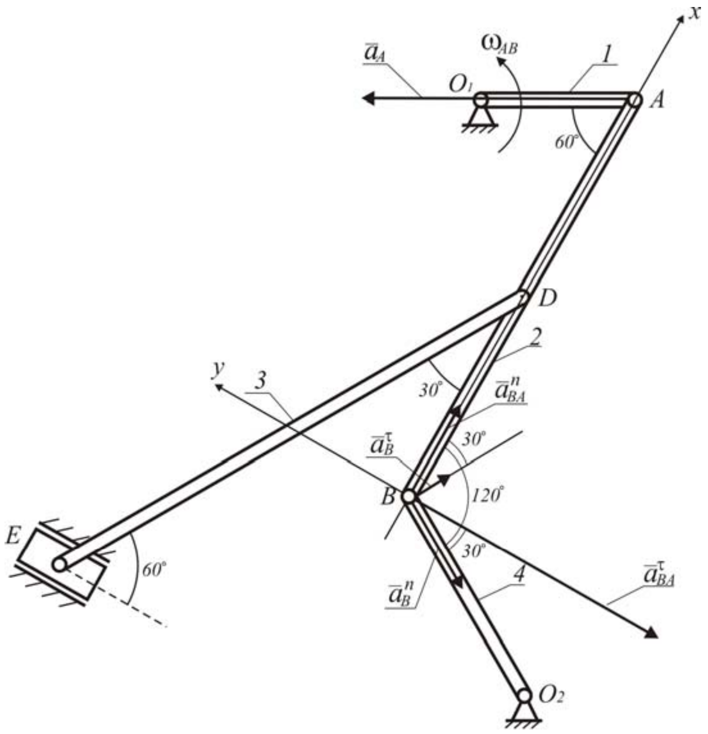


Рис. II.3.3. Определение ускорений точек *A* и *B* и углового ускорения звена *AB*

б) Геометрический способ.

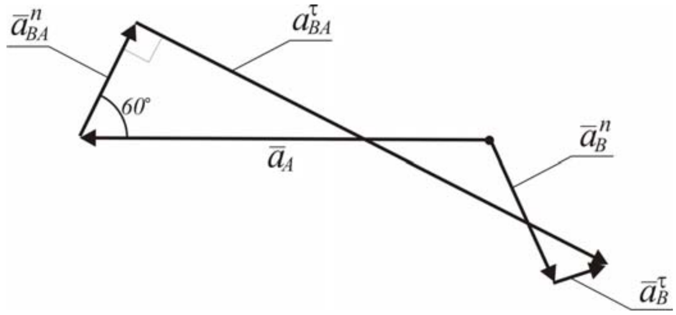


Рис. II.3.4. Графическое определение ускорения точки *B*

4. Сложное движение точки

Задание К-4. Определение абсолютной скорости и абсолютного ускорения

Точка *M* движется относительно тела *D*. По заданным уравнениям относительного движения точки *M* и движения тела *D* определить в момент времени $t=t_1$ абсолютную скорость и абсолютное ускорение точки *M*.

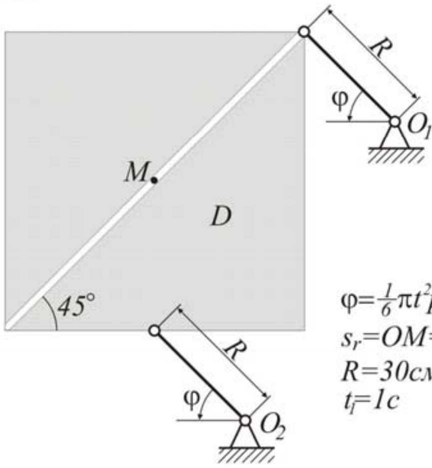
Схемы механизмов и необходимые для расчёта данные приведены в табл. II.4.1.

У к а з а н и я. Для решения задачи надо воспользоваться теоремами о сложении скоростей и сложении ускорений. В начале расчёта следует определить положение точки *M* в заданный момент времени и изобразить точку именно в этом положении (на рисунках к задаче положение точки показано произвольно).

П р и м е ч а н и е. Для каждого варианта положение точки *M* на схеме соответствует положительному значению s_r.

Таблица II.4.1

К-4.1



$\varphi=\frac{1}{6}\pi t^2$ *рад*

$s_r=OM=3t^3$ *см*

$R=30$ *см*

$t_1=1$ *с*

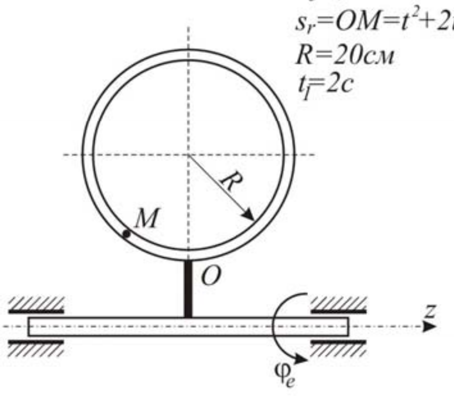
К-4.2

$\varphi_e=\frac{1}{8}\pi t^2$ *рад*

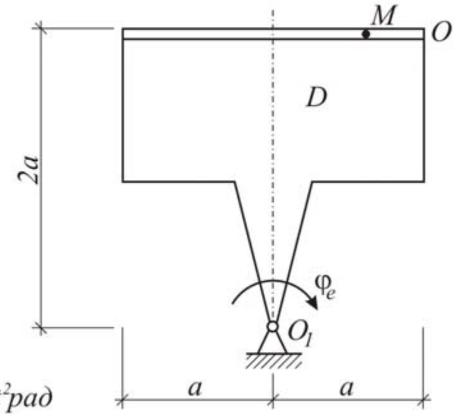
$s_r=OM=t^2+2t$ *см*

$R=20$ *см*

$t_1=2$ *с*



К-4.3



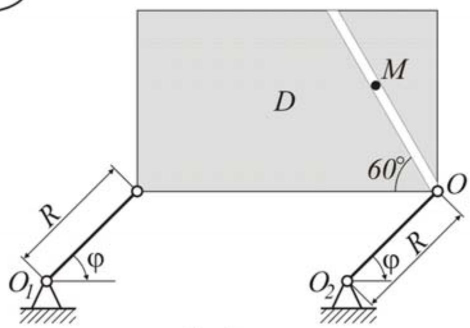
$\varphi_e=\frac{1}{12}\pi t^2$ *рад*

$OM=3t^2+3$ *см*

$a=30$ *см*

$t_1=2$ *с*

К-4.4



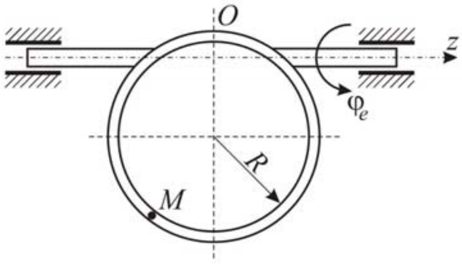
$\varphi_e=\frac{1}{12}\pi t^2$ *рад*

$S=t^3+2t$ *см*

$R=35$ *см*

$t_1=2$ *с*

К-4.5



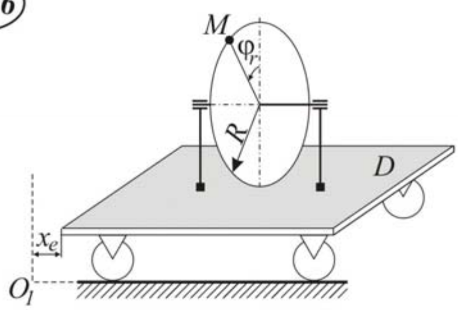
$\varphi_e=\frac{1}{6}\pi t^2$ *рад*

$OM=\frac{\pi}{6}t^2$

$R=15$ *см*

$t_1=1$ *с*

К-4.6



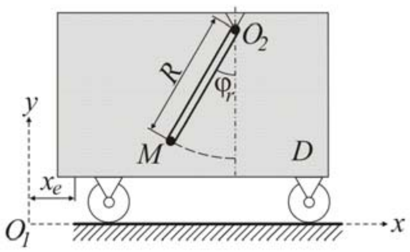
$x_e=4t^2+5t$ *см*

$\varphi_r=\frac{\pi}{6}t^2$ *рад*

$R=10$ *см*

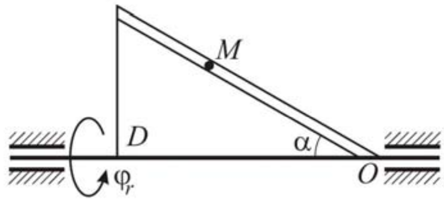
$t_1=2$ *с*

К-4.7



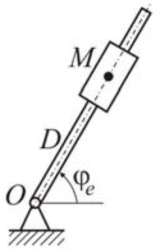
$x_e = 20t^2 + 15t$ см
$\varphi_r = \frac{1}{3}\pi \cos 2\pi t$ рад
$R = 15$см
$t_1 = \frac{1}{6}$с

К-4.8



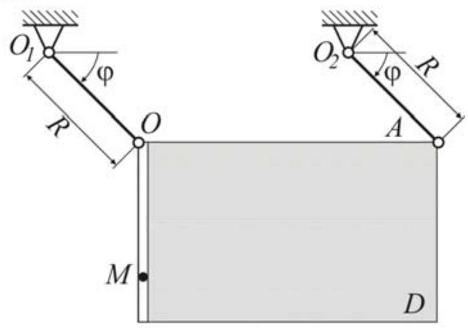
$\varphi_e = \frac{1}{12}\pi t^3$рад
$OM = 2t^2 + 4$ см
$\alpha = 20^\circ$
$t_1 = 2$с

К-4.9



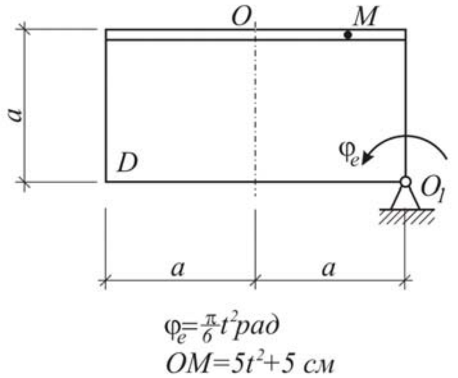
$\varphi_e = \frac{1}{18}t^3$рад
$OM = 2t^2 + 4$ см
$t_1 = 2$с

К-4.10



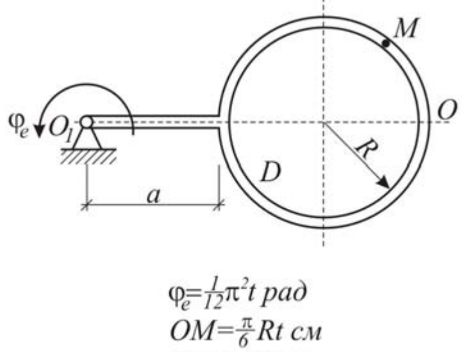
$\varphi_e = \frac{\pi}{6}t$ рад
$OM = 3t^2 + 3$ см
$R = 20$см
$t_1 = 1$с

К-4.11



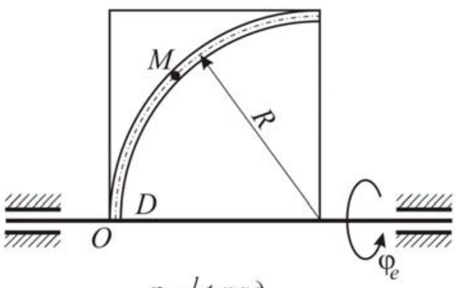
$\varphi_e = \frac{\pi}{6}t^2$рад
$OM = 5t^2 + 5$ см
$a = 20$см
$t_1 = 1$с

К-4.12



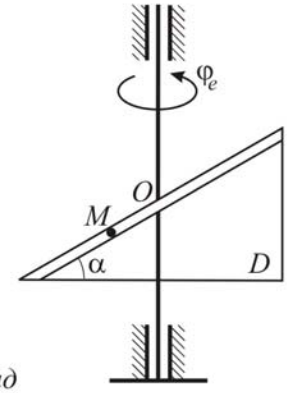
$\varphi_e = \frac{1}{12}\pi^2 t$ рад
$OM = \frac{\pi}{6}Rt$ см
$R = a = 15$см
$t_1 = 2$с

К-4.13



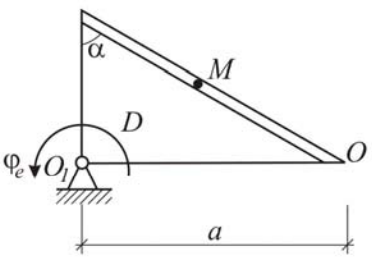
$\varphi_e=\frac{1}{10}t$ *рад*
$OM=4t+5$ *см*
$R=20$*см*
$t_1=2$*с*

К-4.14



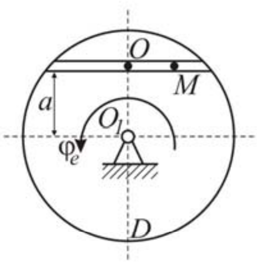
$\varphi_e=\frac{1}{12}\pi t$ *рад*
$OM=3t$ *см*
$\alpha=30^\circ$
$t_1=2$*с*

К-4.15



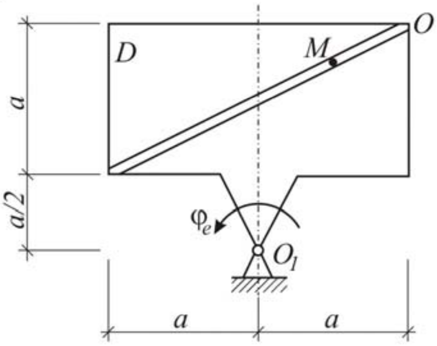
$\varphi_e=\frac{\pi}{6}t^2$*рад*
$OM=4t^2+1$ *см*
$\alpha=45^\circ$
$t_1=2$*с*

К-4.16



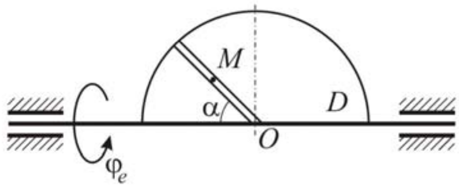
$\varphi_e=\frac{\pi}{6}t^2$*рад*
$R=2a=18$ *см*
$OM=4t^2$*см*
$t_1=1$*с*

К-4.17



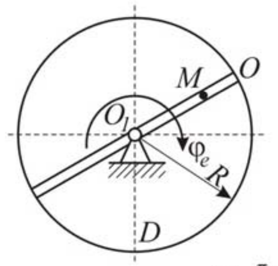
$\varphi_e=\frac{\pi}{6}t$ *рад*
$a=20$ *см*
$OM=10t^2$*см*
$t_1=\frac{1}{2}$*с*

К-4.18



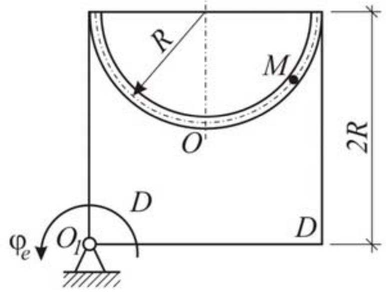
$\varphi_e=\frac{\pi}{12}t^2$*рад*
$OM=4t^2+3$*см*
$R=20$ *см*
$\alpha=45^\circ$

К-4.19



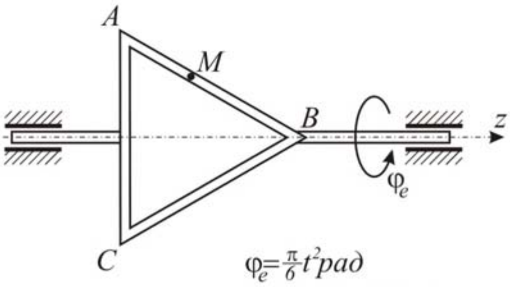
$\varphi_e=\frac{\pi}{12}t^2$ рад
$OM=5/3t^2$
$R=20$ см
$t_1=2$с

К-4.20



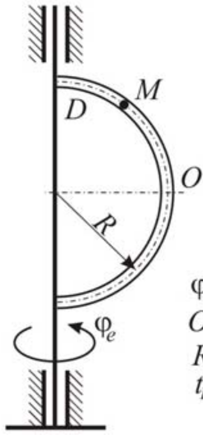
$\varphi_e=\frac{\pi}{6}t^2$ рад
$OM=3t$ см
$R=10$ см
$t_1=2$с

К-4.21



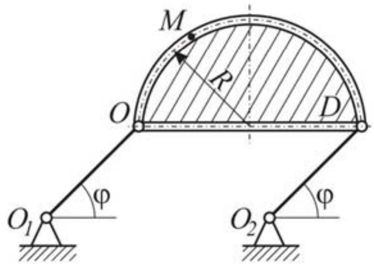
$\varphi_e=\frac{\pi}{6}t^2$ рад
$AB=BC=AC=25$ см
$s_r=AM=\frac{1}{3}t^2+6$см
$t_1=1$с

К-4.22



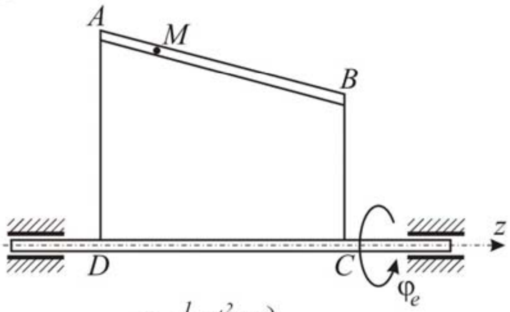
$\varphi_e=\frac{\pi}{18}t^3$ рад
$OM=3t^2+3$ см
$R=25$ см
$t_1=2$с

К-4.23



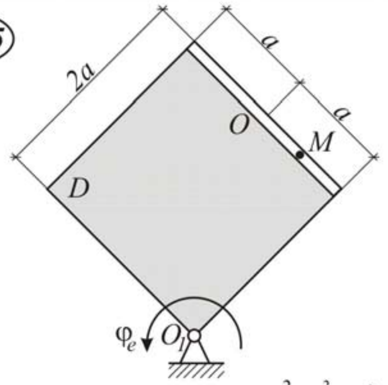
$\varphi_e=\frac{\pi}{6}t^3$ рад
$R=10$ см
$OM=4t^2+2$ см
$t_1=12$с
$O_1O=O_2A=2R$

К-4.24



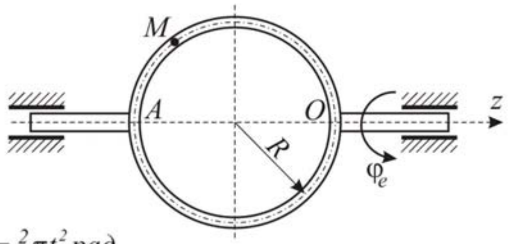
$\varphi_e=\frac{1}{6}\pi t^2$ рад
$AM=s_r=\frac{1}{4}t^2+8$ см
$t_1=1$с
$AD=30$ см
$BC=20$ см

K-4.25



$\varphi_e = \frac{2}{3}\pi t^2$ *рад*
$a = 20$ *см*
$s_r = 1{,}5t + 10 = OM$
$t_1 = \frac{1}{2}$ *с*

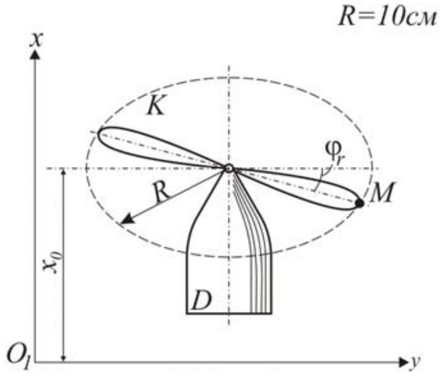
K-4.26



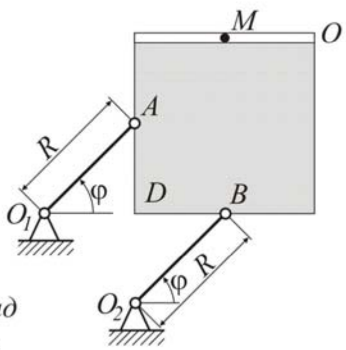
$\varphi_e = \frac{2}{3}\pi t^2$ *рад*
$R = 20$ *см*
$OM = s_r = 4t^3 + 9t$ *см*
$t_1 = \frac{1}{2}$ *с*

K-4.27

$x_e = 3t^2 + 3$ *см*
$\varphi_r = \frac{4\pi}{3} t^2$ *см*
$R = 10$ *см*



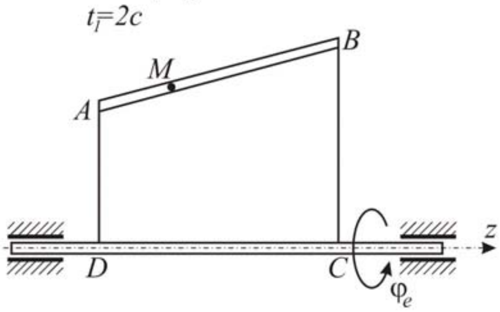
K-4.28



$\varphi_e = \frac{\pi}{12} t$ *рад*
$R = 10$ *см*
$OM = 4t^2 + 2$ *см*
$t_1 = 2$ *с*

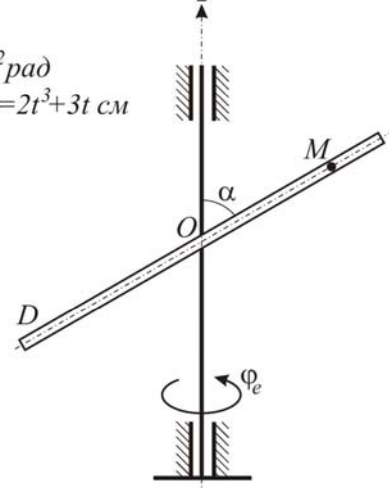
K-4.29

$\varphi_e = \frac{1}{12}\pi t^2$ *рад*
$AD = 15$ *см*
$BC = 25$ *см*
$AM = s_r = \frac{1}{12} t^2 + 2$ *см*
$t_1 = 2$ *с*



K-4.30

$\varphi_e = \frac{1}{24}\pi t^2$ *рад*
$OM = s_r = 2t^3 + 3t$ *см*
$\alpha = 45^\circ$
$t_1 = 2$ *с*



Пример выполнения К-4

Равнобедренный прямоугольный треугольник ABC вращается вокруг катета *AB* с постоянным угловым ускорением $\varepsilon = 0{,}5\ \text{c}^{-1}$. Начальная угловая скорость треугольника равна нулю. По гипотенузе треугольника от вершины *B* к *C* движется точка *M* по закону $s = BM = 20t$ см.

Определить абсолютную скорость и абсолютное ускорение точки в момент времени $t = 2$ с.

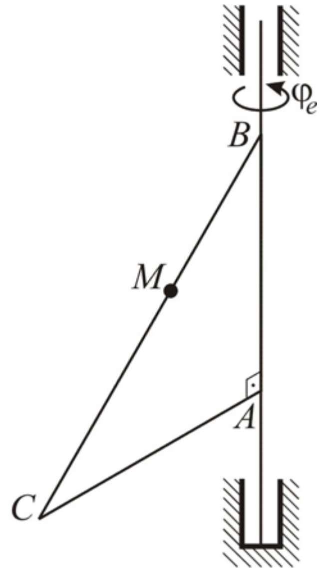


Рис. II.4.1 Схема движения звена *ABC* и точки *M*

Решение:

Точка *M* совершает сложное движение, которое можно разложить на два более простых: относительное движение – скольжение точки *M* по *BC* и переносное движение – вращение точки *M* (без учёта движения по *BC*) вместе с треугольником. Неподвижная система координат связана с осью вращения, подвижная система координат жестко связана с треугольником *ABC*.

1. Относительное движение точки.

Сначала установим, где будет находиться точка *M* в момент времени $t = 2$ с:

$$s = BM = 20 \cdot 2 = 40\,\text{см}.$$

Скорость в этом движении равна:

$$v_{\text{отн}} = \frac{ds}{dt} = 20\ \text{см/с} = \text{const},$$

значит $a_{\text{отн}} = 0$.

2. Переносное движение.

Так как $\varepsilon = \text{const}$, то $\omega = \varepsilon t$.

В момент времени $t = 2$ с

$$\omega = 0{,}5 \cdot 2 = 1\ \text{рад/с}.$$

Скорость точки M в переносном движении

$$v_{\text{пер}} = \omega \cdot MN .$$

Переносное ускорение точки M раскладывается на касательное и нормальное

$$a^n_{\text{пер}} = \omega^2 \cdot MN,$$

$$a^\tau_{\text{пер}} = \varepsilon \cdot MN,$$

где $MN = BM \sin 45 = 40 \cdot 0,707 = 28,2$ см.

Вычислим значения, которые все выше записанные величины имеют в момент времени $t = 2$ с

$$v_{\text{пер}} = 1 \cdot 28,2 = 28,2 \text{ см/с},$$

$$a^n_{\text{пер}} = 1^2 \cdot 28,2 = 28,2 \text{ см/с}^2,$$

$$a^\tau_{\text{пер}} = 0,5 \cdot 28,2 = 14,1 \text{ см/с}^2.$$

3. Ускорение Кориолиса.

$$\overline{a}_{\text{кор}} = 2\overline{\omega} \times \overline{v}_{\text{отн}};$$

$$a_{\text{кор}} = 2\omega \cdot v_{\text{отн}} \cdot \sin(\widehat{\overline{\omega}, \overline{v}_{\text{отн}}}) = 2 \cdot 0,5 \cdot 2 \cdot 20 \cdot \sin(180° - 45°) =$$

$$= 40 \sin 45° = 28,2 \text{ см/с}^2.$$

Направлено кориолисово ускорение перпендикулярно плоскости $\overline{v}_{\text{отн}} - \overline{\omega}$ в сторону переносного вращения, т.е. направлено в данном случае также как $a^\tau_{\text{пер}}$.

4. Скорость в абсолютном движении.

Так как $\overline{v}_{\text{абс}} = \overline{v}_{\text{отн}} + \overline{v}_{\text{пер}}$, а векторы $\overline{v}_{\text{отн}}$ и $\overline{v}_{\text{пер}}$ взаимно перпендикулярны, то

$$v_{\text{абс}} = \sqrt{v^2_{\text{отн}} + v^2_{\text{пер}}}.$$

В момент времени $t = 2$ с

$$v_{\text{абс}} = \sqrt{20^2 + 28,2^2} = 34,57 \text{ см/с}.$$

5. Ускорение в абсолютном движении.

По теореме о сложении ускорений $\overline{a}_{\text{абс}} = \overline{a}_{\text{отн}} + \overline{a}_{\text{пер}} + \overline{a}_{\text{кор}}$, следовательно,

$$a_a = \sqrt{\left(a^\tau_{\text{пер}} + a_{\text{kop}}\right)^2 + \left(a^n_{\text{пер}}\right)^2} = 50,9 \text{ см/с}^2.$$

В общем случае абсолютное ускорение определяется через проекции на координатные оси

$$a_a = \sqrt{a_{ax}^2 + a_{ay}^2 + a_{az}^2}\ ).$$

Найденные величины покажем на рис. II.4.2.

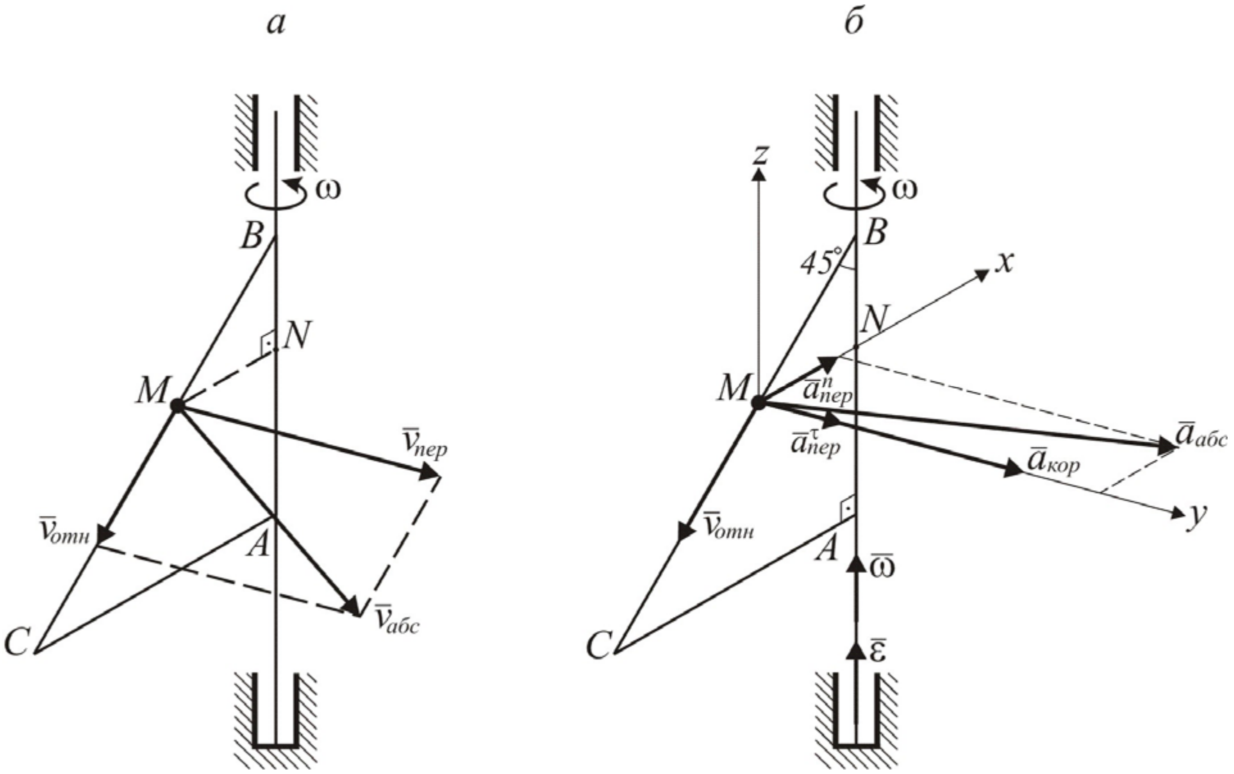


Рис. II.4.2.
а – определение абсолютной скорости точки *M*;
б – определение абсолютного ускорения точки *M*.

РАЗДЕЛ III. ДИНАМИКА

Задание Д1. Интегрирование дифференциальных уравнений движения материальной точки, находящейся под действием постоянных сил

Варианты 1–5 (схема Д 1.1-5). Тело движется из точки A по участку AB (длиной l) наклонной плоскости, составляющей угол α с горизонтом, в течение τ, с. Его начальная скорость v_A. Коэффициент трения скольжения тела по плоскости равен f.

В точке B тело покидает плоскость со скоростью v_B, находясь в воздухе T, с, и попадает со скоростью v_C в точку C плоскости BD, наклоненной под углом β к горизонту, .

При решении задачи тело принять за материальную точку; сопротивление воздуха не учитывать.

Вариант 1. Дано: $\alpha = 30°$; $v_A = 0$; $f = 0{,}2$; $l = 10$ м; $\beta = 60°$.

Определить τ и h.

Вариант 2. Дано: $\alpha = 15°$; $v_A = 2$ м/с; $f = 0{,}2$; $h = 4$ м; $\beta = 45°$.

Определить l и уравнение траектории точки на участке BC.

Вариант 3. Дано: $\alpha = 30°$; $v_A = 2{,}5$ м/с; $f \neq 0$; $l = 8$ м; $d = 10$ м; $\beta = 60°$.

Определить v_B и τ.

Вариант 4. Дано: $v_A = 0$; $\tau = 2$ с; $f = 0$; $l = 9{,}8$ м; $\beta = 60°$.

Определить α и T.

Вариант 5. Дано: $\alpha = 30°$; $v_A = 0$; $l = 9{,}8$ м; $\tau = 3$ с; $\beta = 45°$.

Определить f и v_C.

Варианты 6–10 (схема Д 1.6-10). На участке AB тело движется по гладкой поверхности дуговой окружности радиуса R. Его начальная скорость v_A. В точке B тело покидает поверхность скольжения и падает в течение T, с, без сопротивления воздуха в точку C.

Вариант 6. $s = AB = 20$ м, $R = 5$ м, $v_A = 10$ м/с, $h = 20$ м, $\varphi_1 = 30°$.

Определить d, v_B.

Вариант 7. $s = AB = 30$ м, $R = 6$ м, $v_A = 15$ м/с, $d = 40$, $\varphi_1 = 45°$.

Определить h, v_B.

Вариант 8. $s = AB = 40$ м, $R = 6$ м, $v_A = 7$ м/с, $T = 0.5$ с, $\varphi_1 = 60°$.

Определить h, d, v_B.

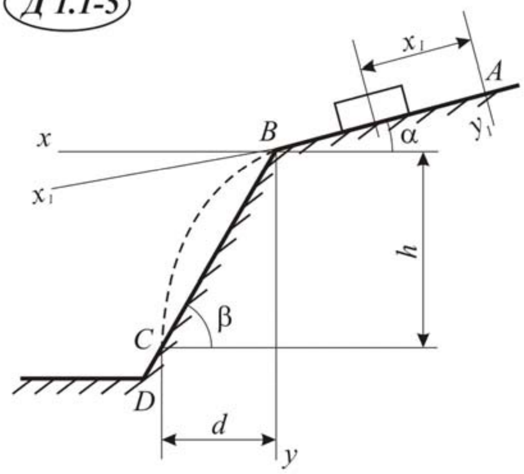
Вариант 9. $s = AB = 35$ м, $R = 8$ м, $v_A = 10$ м/с, $d = 35$ м, $\varphi_1 = 45°$.

Определить: h, v_B.

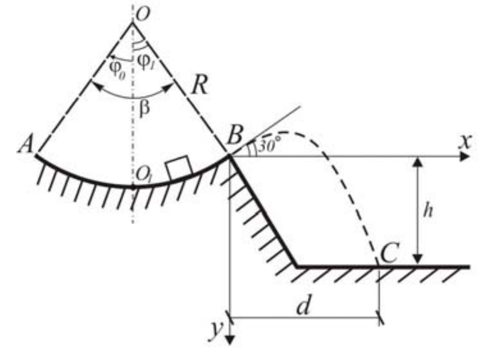
Вариант 10. $s = AB = 26$ м, $R = 9$ м, $v_A = 15$ м/с, $h = 35$ м, $\varphi_1 = 30°$.

Определить d, v_B.

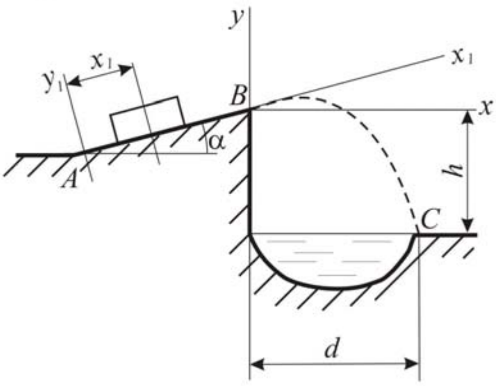
Д 1.1-5



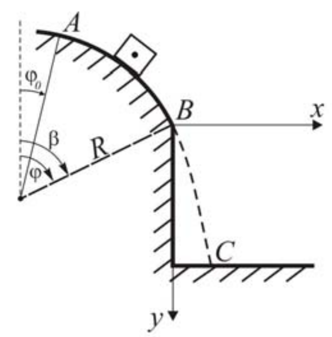
Д 1.6-10



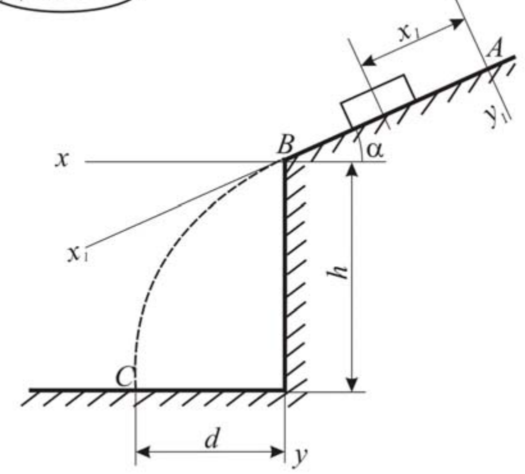
Д 1.11-15



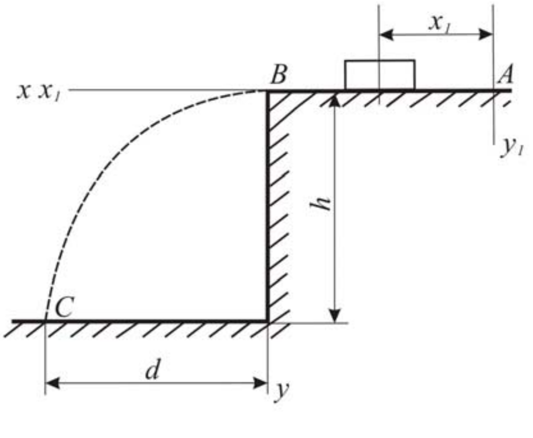
Д 1.16-20



Д 1.21-25



Д 1.26-30



Варианты 11–15 (схема Д 1.11-15). Имея в точке A скорость v_A, мотоцикл поднимается τ, с, по участку AB длиной l, составляющему с горизонтом угол α. При постоянной на всем участке AB движущей силе P мотоцикл в точке B приобретает скорость v_B и перелетает через ров шириной d, находясь в воздухе T, с, и приземляясь в точке C со скоростью v_C. Масса мотоцикла с мотоциклистом равна m.

При решении задачи считать мотоцикл с мотоциклистом материальной точкой и не учитывать силы сопротивления движению.

Вариант 11. Дано: $\alpha = 30°$; $P \neq 0$; $l = 40$ м; $v_A = 0$; $v_B = 4{,}5$ м/с; $d = 3$ м.

Определить τ и h.

Вариант 12. Дано: $\alpha = 30°$; $P = 0$; $l = 40$ м; $v_B = 4{,}5$ м/с; $h = 1{,}5$ м.

Определить v_A и d.

Вариант 13. Дано: $\alpha = 30°$; $m = 400$ кг; $v_A = 0$; $\tau = 20$ с; $d = 3$ м, $h = 1{,}5$ *м*.

Определить P и l.

Вариант 14. Дано: $\alpha = 30°$; $m = 400$ кг; $P = 2{,}2$ кН; $v_A = 0$; $l = 40$ м; $d = 5$ *м*.

Определить v_B и v_C.

Вариант 15. Дано: $\alpha = 30°$; $v_A = 0$; $P = 2$ кН; $l = 50$ м; $h = 2$ м; $d = 4$ *м*.

Определить T и m.

Варианты 16-20 (схема Д 1.16-20). На участке AB тело скользит по гладкой поверхности окружности радиуса R. Его начальная скорость равна v_A. В точке B тело покидает поверхность скольжения и падает в течение T, с, без сопротивления воздуха в точку C.

Вариант 16. $s = AB = 22$ м, $R = 7$ м, $v_A = 12$ м/с, $h = 22$ м, $\varphi_1 = 30°$.

Определить d, v_B.

Вариант 17. $s = AB = 32$ м, $R = 8$ м, $v_A = 17$ м/с, $d = 42$, $\varphi_1 = 45°$.

Определить h, v_B.

Вариант 18. $s = AB = 42$ м, $R = 8$ м, $v_A = 9$ м/с, $T = 0.7$ с, $\varphi_1 = 60°$.

Определить h, d, v_B.

Вариант 19. $s = AB = 37$ м, $R = 6$ м, $v_A = 12$ м/с, $d = 33$ м, $\varphi_1 = 45°$.

Определить h, v_B.

В а р и а н т 2 0 . $s = AB = 28$ м, $R = 11$ м, $v_A = 13$ м/с, $h = 35$ м, $\varphi_1 = 30°$.

Определить d, v_B.

Варианты 21-25 (схема Д 1.21-25). Камень скользит в течение τ, с, по участку *AB* откоса, составляющему угол α с горизонтом и имеющему длину *l*. Его начальная скорость v_A. Коэффициент трения скольжения камня по откосу равен *f*. Имея в точке *B* скорость v_B, камень через *T*, с, ударяется в точке *C* о вертикальную защитную стену. При решении задачи принять камень за материальную точку, сопротивление воздуха не учитывать.

В а р и а н т 2 1 . Дано: $\alpha = 30°$; $l = 3$ м; $v_A = 1$ м / с; $f = 0{,}2$; $d = 2{,}5$ м.

Определить *h* и *T*.

В а р и а н т 2 2 .Дано: $\alpha = 45°$; $l = 6$ м; $v_B = 2v_A$; $\tau = 1$ с; $h = 6$ м.

Определить *d* и *f*.

В а р и а н т 2 3 .Дано: $\alpha = 30°$; $l = 2$ м; $v_A = 0$; $f = 0{,}1$; $d = 3$ м.

Определить *h* и τ.

В а р и а н т 2 4 . Дано: $\alpha = 15°$; $l = 3$ м; $v_B = 3$ м / с; $f \neq 0$; $\tau = 1{,}5$ с; $d = 2$ м.

Определить v_A и *h*.

В а р и а н т 2 5 .Дано: $\alpha = 45°$; $v_A = 0$; $= -g\sin\varphi$; $d = 2$ м; $h = 4$ м.

Определить *l* и τ.

Варианты 26–30 (схема Д 1.26-30). Имея в точке *A* скорость v_A, тело движется по горизонтальному участку *AB* длиной *l* в течение τ, с. Коэффициент трения скольжения тела по плоскости равен *f*. Со скоростью v_B тело в точке *B* покидает плоскость и попадает в точку *C* со скоростью v_C, находясь в воздухе в течение *T*, с. При решении задачи принять тело за материальную точку; сопротивление воздуха не учитывать.

В а р и а н т 2 6 . Дано: $\mathrm{v}_A = 7$ м/с; f=0,2; $l = 8$ м; $h = 20$ м.

Определить *d* и v_C.

В а р и а н т 2 7 . Дано: $\mathrm{v}_A = 4$ м/с; f=0,1; $\tau = 2$ с; $d = 2$ м.

Определить v_B и *h*.

В а р и а н т 2 8 . Дано: $v_B = 3$ м/с; $f = 0{,}3$; $l = 3$м; $h = 5$ м.

Определить v_A и *T*.

В а р и а н т 2 9 . Дано: $v_A = 3$ м/с; $v_B = 1$ м/с; $l = 2{,}5$м; $h = 20$ м.

Определить *f* и *d*.

В а р и а н т 3 0 . Дано: $f = 0{,}25$; $l = 4$м; $d = 3$ м; $h = 5$ м.

Определить v_A и τ.

Примеры выполнения задания

а) Тело на участке AB движется по гладкой поверхности дуговой окружности радиуса R. В точке B тело покидает поверхность скольжения и падает без сопротивления воздуха в точку C (рис. III.1.1).

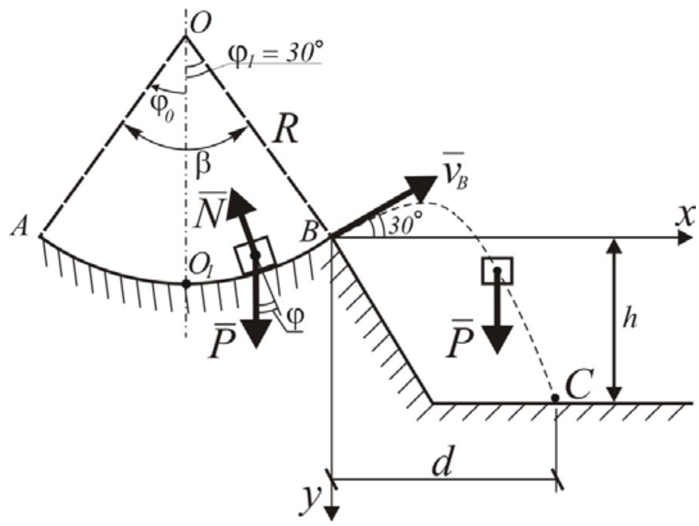


Рис. III.1.1

Д а н о : $s = AB = 10$ м, $R = 8$ м, $v_A = 20$ м/с, $d = 60$ м, $\varphi_1 = 30°$.

Н а й т и : h; v_B.

Решение:

$$\beta = \frac{s}{R} = \frac{10}{8} = 1{,}25 \text{ рад;}$$

$$\varphi_0 = \beta - 30° = 1{,}25 - 3{,}14/6 = 0{,}727 \text{ рад.}$$

Участок AB:

$$ma_\tau = \sum F_{k\tau} \cdot \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{d\varphi} \cdot \frac{d\varphi}{ds} \cdot \frac{ds}{dt} = \frac{vdv}{Rd\varphi} = -g\sin\varphi$$

или
$$vdv = Rg\sin\varphi d\varphi.$$

Интегрируя, получаем:

$$\frac{v_B^2 - v_A^2}{2} = Rg(\cos\varphi_1 - \cos\varphi_0).$$

Откуда

$$v_B = \sqrt{v_A^2 + 2Rg(\cos\varphi_1 - \cos\varphi_0)} =$$
$$= \sqrt{20^2 + 2 \cdot 8 \cdot 9{,}81(0{,}87 - 0{,}73)} = 20{,}477 \text{ м/с.}$$

Участок BC:

$$\left.\begin{aligned} m\ddot{x} &= \sum F_{kx}; \\ m\ddot{y} &= \sum F_{ky}. \end{aligned}\right\} \qquad \left.\begin{aligned} m\ddot{x} &= 0; \\ m\ddot{y} &= mg. \end{aligned}\right\} \quad \left.\begin{aligned} \ddot{x} &= 0; \\ \ddot{y} &= g. \end{aligned}\right\}$$

Интегрируя первое уравнение последней системы, получаем:

$$\left.\begin{aligned} \dot{x} &= C_1; \\ x &= C_1 t + C_2. \end{aligned}\right\}$$

Подставим вместо $\dot{x}$ и x их значения в начальный момент падения. Получим:

$$v_B \cdot \cos 30° = C_1;$$
$$C_2 = 0.$$

Следовательно,

$$x = v_B \cdot t \cdot \cos 30°.$$

При $t = T$

$$T = \frac{d}{v_B \cos 30°} = \frac{60}{20{,}477 \cdot 0{,}87} = 3{,}37\,\text{с}.$$

Проинтегрируем второе уравнение (выражение для $\ddot{y}$):

$$\left.\begin{aligned} \dot{y} &= gt + C_3; \\ y &= \frac{gt^2}{2} + C_3 t + C_4. \end{aligned}\right\}$$

При $t = 0$

$$\dot{y} = -v_B \cdot \sin 30°; \quad y = 0.$$

Следовательно, постоянные интегрирования равны:

$$C_3 = -v_B \cdot \sin 30°; \qquad C_4 = 0;$$

$$y = \frac{gt^2}{2} - v_B t \cdot \sin 30°.$$

При $t = T$

$$h = \frac{gT^2}{2} - v_B \cdot T \cdot \sin 30° = \frac{9{,}81 \cdot 3{,}37^2}{2} - 20{,}477 \cdot 3{,}37 \cdot 0{,}5 = 21{,}2 \text{ м}.$$

б) Тело, имеющее начальную скорость v_A, движется вниз по шероховатой наклонной плоскости. В точке B тело покидает наклонную плоскость и падает(рис. III.1.2).

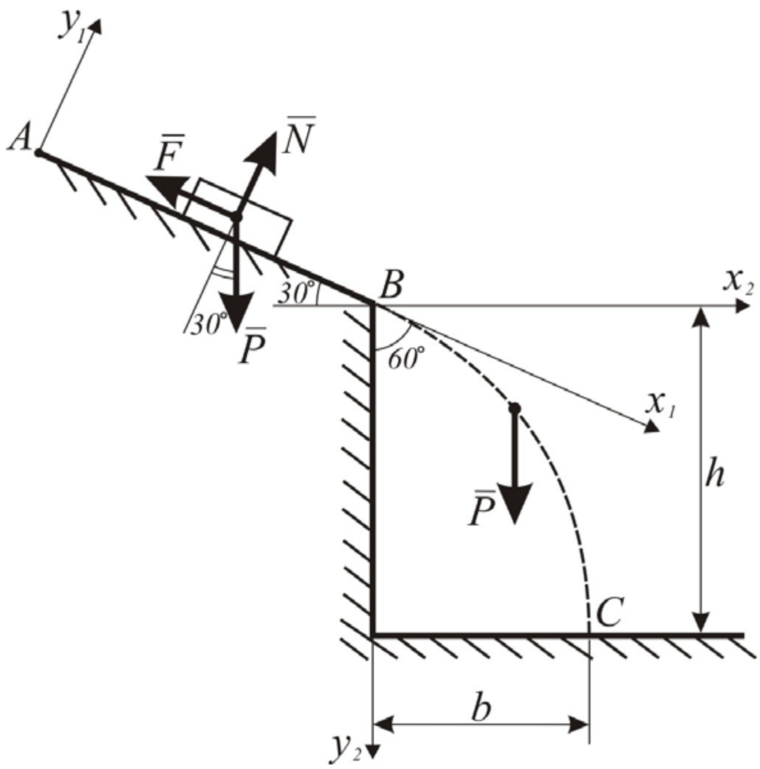


Рис. III.1.2

Д а н о : $\alpha = 30°$; $l = 2{,}4$ м; $\tau = 0{,}5$ с; $f \neq 0$; $h = 2$ м; $b = 2$ м.

Здесь l – длина участка AB; τ – время движения по участку AB; f – коэффициент трения скольжения.

Н а й т и v_A.

Решение:

Участок AB:

$$\left.\begin{aligned} m\ddot{x} &= \sum F_{kx}, \\ m\ddot{y} &= \sum F_{ky}. \end{aligned}\right\}$$

Или в развернутом виде

$$\left.\begin{aligned} m\ddot{x} &= P \cdot \sin 30° - F, \\ 0 &= N - P\cos 30°. \end{aligned}\right\}$$

Второе уравнение дает возможность выразить силу трения F через силу тяжести:

$$N = P\cos 30°;$$

$$F = Nf = Pf\cos 30° = mgf\cos 30°.$$

Подставляя F в уравнение движения вдоль оси *x,* получаем:

$$m\ddot{x} = mg \cdot \sin 30° - mg \cdot f \cdot \cos 30°;$$

$$\ddot{x} = 10 \cdot 0{,}5 - 8{,}66 f;$$

$$\ddot{x} = 5 - 8{,}66 f.$$

Интегрируя, получаем:

$$\left.\begin{aligned} \dot{x} &= (5 - 8{,}66 f)t + c_1, \\ x &= (5 - 8{,}66 f)\frac{t^2}{2} + c_1 t + c_2. \end{aligned}\right\} \qquad (*)$$

При $t = 0$

$$x = 0, \ \ \dot{x} = v_A.$$

Подставляя начальные условия в уравнения (*), получаем:

$$c_1 = v_A;$$

$$c_2 = 0;$$

$$\left.\begin{aligned} \dot{x} &= (5 - 8{,}66 f)t + v_A, \\ x &= (5 - 8{,}66 f)\frac{t^2}{2} + v_A t. \end{aligned}\right\}$$

При $t = \tau$

$$x = l, \ \ \dot{x} = v_B.$$

$$\begin{cases} v_B = (5 - 8{,}66 f)\tau + v_A, \\ l = (5 - 8{,}66 f)\dfrac{\tau^2}{2} + v_A \cdot \tau. \end{cases}$$

Два уравнения – три неизвестных v_A, v_B и f.

Участок *BC*:

$$\left.\begin{aligned} m\ddot{x} &= \sum F_{kx}, \\ m\ddot{y} &= \sum F_{ky}. \end{aligned}\right\}$$

$$\left.\begin{aligned} m\ddot{x} &= 0, \\ m\ddot{y} &= P. \end{aligned}\right\}$$

$$\left.\begin{aligned} \ddot{x} &= 0, \\ \ddot{y} &= g. \end{aligned}\right\} \qquad (**)$$

Интегрируем первое уравнение системы (**):

$$\ddot{x} = 0.$$

$$\dot{x} = c_3,$$

$$x = c_3 t + c_4.$$

$$c_4 = 0.$$

$$v_B \cdot \cos 30° = c_3.$$

$$\dot{x} = v_B \cos 30°,$$

$$x = v_B \cdot t \cdot \cos 30°.$$

При $t = T$ (здесь $T -$ время падения):

$$b = v_B T \cos 30°;$$

$$T = \frac{b}{0,866 v_B}.$$

Интегрируем второе уравнение системы (**):

$$\ddot{y} = g\,.$$

$$\begin{cases} \dot{y} = gt + \dot{c}_5; \\ y = \dfrac{gt^2}{2} + c_5 t + c_6. \end{cases}$$

Начальные условия: при $t = 0$ $y = 0,$ $\dot{y} = v_B \sin 30°.$ Подставляя начальные условия в уравнения движения, находим постоянные интегрирования c_5 и c_6:

$$c_5 = v_B \cdot \sin 60 = 0,5 v_B\,.$$

$$c_6 = 0.$$

Уравнения движения вдоль оси y принимают вид

$$\begin{cases} \dot{y} = gt + 0,5 v_B; \\ y = \dfrac{gt^2}{2} + 0,5 t v_B. \end{cases}$$

При $t = T$

$$y = h,\ \dot{y} = \dot{y}_c\,.$$

$$h = 5T^2 + 0,5 T v_B;$$

$$2 = 5\frac{2^2}{(0,866)^2 v_B^2} + \frac{0,5 \cdot 2}{0,866};$$

$$0,12675 v_B^2 = 4;$$

$$v_B = 5,618 \text{ м/с}.$$

Возвращаемся к уравнениям первого участка:

$$\left.\begin{aligned} 5{,}618 &= (5-0{,}866\cdot f)\cdot 0{,}5 + v_A, \\ 2{,}4 &= (5-8{,}66\cdot f)\cdot \frac{0{,}5^2}{2} + v_A\cdot 0{,}5. \end{aligned}\right\}$$

Перенеся v_A в левые части обоих уравнений и поделив второе уравнение на первое, получим:

$$\frac{2{,}4 - v_A\cdot 0{,}5}{5{,}618 - v_A} = \frac{0{,}5}{2}.$$

Отсюда находим:

$$v_A = 3{,}984 \text{ м/с}.$$

Задание Д2. Исследование колебательного движения материальной точки

Варианты 1–5 (Схемы Д 2.1-5). Найти уравнение движения груза D массой m_D (варианты 2 и 4) или системы грузов D и E массами m_D и m_E (варианты 1, 3, 5), отнеся их движение к оси x; начало отсчета совместить с положением покоя груза D или соответственно системы грузов D и E (при статической деформации пружин). Стержень, соединяющий грузы считать невесомым и недеформируемым.

В а р и а н т 1. Груз D (m_D = 2 кг) прикреплен к бруску AB, подвешенному к двум одинаковым параллельным пружинам, коэффициент жесткости каждой из которых C = 3 Н/см. Точка прикрепления груза D находится на равных расстояниях от осей пружин.

В некоторые моменты времени к грузу D подвешивают груз E (m_E = 1 кг). Сопротивление движению системы двух грузов пропорционально скорости: $R = 12v$, Н, где v – скорость, м/с.

Массой абсолютно жесткого бруска AB и массой части демпфера, прикрепленной к бруску, пренебречь.

В а р и а н т 2. В момент времени, когда стержень, соединяющий грузы D (m_D = 1 кг) и E (m_E = 2 кг), перерезают, точка B (верхний конец последовательно соединенных пружин) начинает совершать движение по закону $\xi = 1{,}5\sin 18t$ (см) (ось ξ направлена вертикально вниз). Коэффициенты жесткости пружин C_1 = 12 Н/см, C_2 = 36 Н/см.

В а р и а н т 3. Груз D (m_D = 2 кг) висит на пружине, прикрепленной к точке F бруска AB и имеющей коэффициент жесткости C_1 = 10 Н/см. Брусок подвешен к двум параллельным пружинам, коэффициенты жесткости которых $C_2 = 4$ Н/см и $C_3 = 6$ Н/см; точка F находится на расстояниях a и b от осей этих пружин: $a/b = C_3/C_2$.

В некоторый момент времени к грузу D подвешивают груз E ($m_E = 1{,}2$ кг). В этот же момент системе грузов сообщают скорость $v_0 = 0{,}2$ м/с, направленную вниз. Массой абсолютно жесткого бруска AB пренебречь.

Вариант 4. Статическая деформация двух одинаковых параллельных пружин под действием грузов D ($m_D = 0{,}5$ кг) и E ($m_E = 1{,}5$ кг) $f_{\text{ст}} = 4$ см. Грузы подвешены к пружинам с помощью абсолютно жесткого бруска AB.

В некоторый момент времени стержень, соединяющий грузы, перерезают. Сопротивление движению груза D пропорционально скорости: $R = 6v$, где v – скорость. Массой бруска и массой прикрепленной к бруску части демпфера пренебречь.

Вариант 5. Одновременно с подвешиванием к грузу D ($m_D = 1{,}6$ кг), висящему на пружине, коэффициент жесткости которой $C = 4$ Н/см, груза E ($m_E = 2{,}4$ кг) точка B (верхний конец пружины) начинает совершать движение по закону $\xi = 2\sin 5t$ (ось ξ направлена вертикально вниз).

Варианты 6–10 (Схемы Д 2.6-10). Найти уравнение движения груза D массой m по гладкой наклонной плоскости, составляющей с горизонтом угол α, с момента соприкасания груза с пружиной или с системой пружин, предполагая, что дальнейшем движении груз от пружин не отделяется. Движение груза отнести к оси x, приняв за начало отсчета положение покоя груза (при статической деформации пружин).

Вариант 6. Пройдя без начальной скорости по наклонной плоскости ($\alpha = 30°$) расстояние $s = 0{,}1$ м, груз D ($m = 4$ кг) ударяется о недеформированные, последовательно соединенные пружины, имеющие коэффициенты жесткости $C_1 = 48$ Н/см и $C_2 = 24$ Н/см.

Вариант 7. В некоторый момент времени груз D ($m = 2$ кг) присоединяют без начальной скорости к концу A недеформированных последовательно соединенных пружин, имеющих коэффициенты жесткости $C_1 = 12$ Н/см, $C_2 = 6$ Н/см. В тот же момент времени ($t = 0$) другой конец пружин B начинает совершать движение вдоль наклонной плоскости ($\alpha = 45°$) по закону $\xi = 0{,}02\sin 20t$ (м) (ось ξ направлена вдоль наклонной плоскости вниз).

Вариант 8. Две параллельные пружины 1 и 2, имеющие коэффициенты жесткости $C_1 = 4$ Н/см, соединены абсолютно жестким бруском AB, к точке K которого прикреплена пружина 3 с коэффициентом жесткости $C_3 = 15$ Н/см.

Точка K находится на расстояниях a и b от осей пружин 1 и 2: $a/b = C_2/C_1$.

Пружины 1, 2 и 3 не деформированы. Груз *B* массой 1,5 кг присоединяют к концу *N* пружины 3; в тот же момент грузу *B* сообщают скорость v_0 = 0,5 м/с, направленную вниз параллельно наклонной плоскости ($\alpha = 45°$).

Массой бруска *AB* пренебречь.

Вариант 9. Груз *D* (m = 1,2 кг), пройдя без начальной скорости по наклонной плоскости ($\alpha = 30°$) расстояние S = 0,2 м, ударяется о недеформируемую пружину, коэффициент жесткости которой C = 4,8 Н/см.

В этот же момент (t = 0) точка *B* (нижний конец пружины) начинает совершать вдоль наклонной плоскости движение по закону $\xi = 0{,}03\sin 12t$ (м) (ось ξ направлена вдоль наклонной плоскости вниз).

Вариант 10. Груз *D* (m = 1 кг) прикрепляют в середине абсолютно жесткого бруска *AB*, соединяющего концы двух одинаковых параллельных пружин, не сообщая начальной скорости; пружины не деформированы. Коэффициенты жесткости пружин C = 1,5 Н/см. Сопротивление движению груза пропорционально скорости: $R = 8v$, где v – скорость, $\alpha = 60°$. Массой бруска *AB* и массой прикрепленной к бруску части демпфера пренебречь.

Варианты 11–15 (Схемы Д 2.11-15) Груз *D* массой m укреплен на конце невесомого стержня, который может вращаться в горизонтальной плоскости вокруг оси *E*. Груз соединен с пружиной или с системой пружин; положение покоя стержня, показанное на схемах Д 2.11-15, соответствует недеформированным пружинам. Считая, что груз *D*, принимаемый за материальную точку, движется по прямой, определить уравнение движения этого груза (трением скольжения груза по плоскости пренебречь). Движение отнести к оси x, за начало отсчета принять точку, соответствующую положению покоя груза.

Вариант 11. Груз *D* (m = 2,4 кг) соединен с точкой *F* бруска *AB*, связывающего концы двух параллельных пружин, коэффициенты жесткости которых C_1 = 1 Н/см и C_2 = 1,4 Н/см. Точка *F* находится на расстояниях a и b от осей пружин: $a/b = C_2/C_1$.

Груз *D* отклоняют на величину $\lambda = 2$ см влево от положения, показанного на схеме Д 2.11, и отпускают без начальной скорости. Сопротивление движению груза пропорционально скорости: $R = 6v$, где v – скорость.

Массой абсолютно жесткого бруска *AB* и массой демпфера пренебречь.

Вариант 12. В некоторый момент времени груз *D* (m = 3 кг), Удерживаемый в положении, при котором пружина сжата на величину $\lambda = 2$ см, отпускают без начальной скорости. Коэффициент жесткости пружины c = 9 Н/см. Одновременно (t = 0) точка *B* (правый конец пружины) начинает совершать движение по закону $\xi = 1{,}2\sin 8t$ (м) (ось ξ направлена влево).

Вариант 13. Груз *D* (m = 1 кг) прикреплен к концу пружины, имеющей коэффициент жесткости C_1 = 12 Н/см и соединенной другим концом с точкой F бруска AB. Брусок AB связывает концы двух параллельных пружин, коэффициент жесткости каждой из которых C = 3 Н/см. Точка F находится на равных расстояниях от осей параллельных пружин. Грузу в положении стержня, показанном на схеме Д 2.13, сообщают скорость v_0 = 0,5 м/с, направленную вправо.

Сопротивление движению груза пропорционально скорости: $R = 12v$, где v – скорость.

Шток демпфера пропущен через отверстие в невесомом брусе AB и соединен с грузом D.

Вариант 14. Груз D (m = 1,5 кг) прикреплен одной стороной к концу пружины, имеющей коэффициент жесткости C_1 = 4,4 Н/см, а другой стороной – к концу двух последовательно соединенных пружин, коэффициенты жесткости которых C_2 = 2 Н/см, C_3 = 8 Н/см.

Груз отклоняют на величину $\lambda = 2{,}5\text{см}$ влево от его положения и отпускают, одновременно сообщая грузу начальную скорость v_0 = 0,5 м/с, направленную вправо.

Вариант 15. Груз D (m = 1 кг) прикреплен к концу A последовательно соединенных пружин. Другой конец B пружин движется по закону $\xi = 1{,}8\sin 12t$ (см) (ось ξ направлена влево). Коэффициенты жесткости пружин C_1 = 4 Н/см, C_2 = 12 Н/см. При t = 0 груз находится в положении покоя, соответствующем недеформированным пружинам.

Варианты 16-20 (схемы Д 2.16-20). Найти уравнение движения груза D массой m_D (варианты 17 и 19) или системы грузов D и E массами m_D и m_E (варианты 16, 18, 20), отнеся движение к оси x; начало отсчета совместить с положением покоя груза D или соответственно системы грузов D и E (при статической деформации пружин). Предполагается, что грузы D и E при совместном движении не отделяются.

Вариант 16. Пружина l, на которой покоится груз D (m_D = 10 кг), опирается в точке F на брусок AB, соединяющий концы двух параллельных пружин 2 и 3. Коэффициенты жесткости (Н/см) пружин 1, 2 и 3: C_1 = 200, C_2 = 160, C_3 = 140.

Точка F находится на расстояниях a и b от осей пружин 2 и 3: $a/b = C_3/C_2$.

В некоторый момент времени на груз D устанавливают груз E (m_E = 20 кг); одновременно системе грузов сообщают скорость v_0 = 0,4 м/с, направленную вниз. Массой абсолютно жесткого бруска AB пренебречь.

Вариант 17. В некоторый момент времени груз E снимают с груза D (оба груза находятся в состоянии покоя, соответствующем статической деформации пружины). Циклическая частота собственных колебаний системы грузов D и E на пружине k = 20 рад/с, отношение масс m_D/m_E = 2/3.

В а р и а н т 1 8 . Статическая деформация каждой из двух одинаковых параллельных пружин под действием груза D (m_D = 20 кг) равна $f_{\text{ст}D}$ = 2 см. В некоторый момент времени на груз D устанавливают груз E (m_E = 10 кг). Сопротивление движению грузов пропорционально скорости: $R = 60\sqrt{3}v$, где v – скорость. Массой абсолютно жесткого бруска AB и части демпфера, связанной с ним, пренебречь.

В а р и а н т 1 9 . Два груза D и E (m_D = 15 кг, m_E = 25 кг) покоятся на последовательно соединенных пружинах, имеющих коэффициенты жесткости C_1 = 250 Н/см, C_2 = 375 Н/см. В момент, когда снимают груз E, точка B опирания пружин начинает совершать движение по закону $\xi = 0{,}5\sin 30t$ (ось ξ направлена вертикально вниз).

В а р и а н т 2 0 . На груз D, находящийся в состоянии покоя, соответствующем статической деформации пружины, в некоторый момент времени устанавливают груз E. В этот же момент времени системе двух грузов сообщают скорость v_0 = 0,3 м/с, направленную вниз. Циклическая частота собственных колебаний груза D на пружине k_D = 24 рад/с, отношение масс m_E/m_D = 3.

Варианты 21–25 (схемы Д 2.21-25) Найти уравнение движения груза D массой m по гладкой наклонной плоскости, составляющей с горизонтом угол α, отнеся движение к оси x; за начало отсчета принять положение покоя груза (при статической деформации пружин).

В а р и а н т 2 1 . В некоторый момент времени груз D (m = 2 кг) прикрепляют к концам недеформированных пружин, имеющих коэффициенты жесткости C_1 = 7 Н/см, C_2 = 3 Н/см; одновременно грузу сообщают скорость v_0 = 0,4 м/с, направленную вдоль наклонной плоскости ($\alpha = 45°$) вниз.

В а р и а н т 2 2 . Груз D находится на наклонной плоскости ($\alpha = 30°$) в состоянии покоя, соответствующем статической деформации пружины $f_{\text{ст}}$ = 2 см. В некоторый момент времени (t = 0) точка B (верхний конец пружины) начинает совершать движение по закону $\xi = 0{,}01\sin 10t$ (м) (ось ξ направлена вдоль наклонной плоскости вниз).

В а р и а н т 2 3 . Груз D (m = 3 кг) прикрепляют к точке F бруска AB, соединяющего концы двух недеформированных параллельных пружин, и отпускают без начальной скорости. Коэффициенты жесткости пружин C_1 = 2 Н/см, C_2 = 34 Н/см. Точка F находится на расстояниях a и b от осей пружины: $a/b = C_2/C_1$; $\alpha = 60°$.

Сопротивление движению груза пропорционально скорости: $R = 12v$, где v – скорость. Массой бруска AB и массой демпфера пренебречь.

В а р и а н т 2 4 . В некоторый момент времени груз D (m = 1 кг) прикрепляют к концу A недеформированных последовательно соединенных пружин, имеющих коэффициенты жесткости C_1 = 12 Н/см, C_2 = 4 Н/см, и отпускают без начальной скорости.

Одновременно ($t = 0$) другой конец пружин B начинает совершать движение по закону $\xi = 1{,}5\sin 10t$ (см). Ось ξ направлена вдоль наклонной плоскости вниз ($\alpha = 30°$).

Вариант 25. Концы двух одинаковых пружин соединены бруском AB. Статическая деформация каждой из пружин под действием груза D (m = 1,5 кг), находящегося на наклонной плоскости ($\alpha = 30°$), $f_{ст}$ = 4,9 см. В некоторый момент грузу D сообщают скорость v_0 = 0,3 м/с, направленную вверх вдоль наклонной плоскости. Сопротивление движению груза пропорционально скорости груза: $R = 6v$, где v – скорость.

Массой абсолютно жесткого бруска AB и массой демпфера, связанного с бруском, пренебречь.

Варианты 26–30 (схемы Д 2.26-30). Пренебрегая массой плиты и считая ее абсолютно жесткой, найти уравнение движения груза D массой m с момента соприкасания его с плитой, предполагая, что при дальнейшем движении груз от плиты не отделяется.

Движение груза отнести к оси x, приняв за начало отсчета положение покоя этого груза (при статической деформации пружин).

Вариант 26. Плита лежит на двух параллельных пружинах, имеющих коэффициенты жесткости C_1 = 600 Н/см, C_2 = 400 Н/см. Груз D (m = 50 кг) падает без начальной скорости с высоты h = 0,1 м в точку F плиты, находящуюся на расстояниях a и b от осей пружины: $a/b = C_2/C_1$.

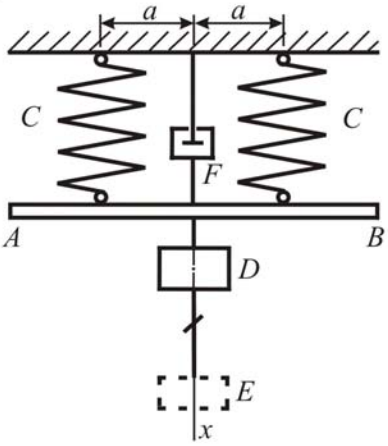
Вариант 27. Коэффициент жесткости каждой из двух параллельных пружин, на которых лежит плита, C_1 = 130 Н/см. Груз D (m = 40 кг) устанавливают на середину плиты и отпускают без начальной скорости при недеформированных пружинах. Сопротивление движению груза пропорционально скорости: $R = 400v$, где v – скорость. Массой плиты и демпфера пренебречь.

Вариант 28. Груз D падает на плиту с высоты h = 5 см. Статический прогиб пружины под действием этого груза $f_{ст}$ = 1 см.

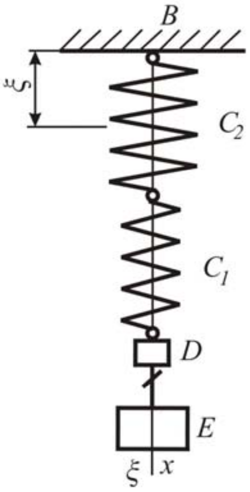
Вариант 29. Плита лежит на двух одинаковых параллельных пружинах 1 и 2, коэффициенты жесткости которых $C_1 = C_2 = C$ = 400 Н/см. В некоторый момент времени груз D (m = 200 кг) устанавливают на середину плиты и одновременно прикрепляют к недеформированной пружине 3, имеющей коэффициент жесткости C_3 = 200 Н/см. В тот же момент времени (при недеформированных пружинах) грузу сообщают скорость v_0 = 0,6 м/с, направленную вниз.

Вариант 30. В некоторый момент времени груз D (m = 100 кг) устанавливают на плиту и отпускают (при недеформированной пружине) без начальной скорости. В этот же момент времени точка B (нижний конец пружины) начинает совершать движение по вертикали согласно закону $\xi = 0{,}5\sin 20t$ (см) (ось ξ направлена вниз). Коэффициент жесткости пружины C = 2000 Н/см.

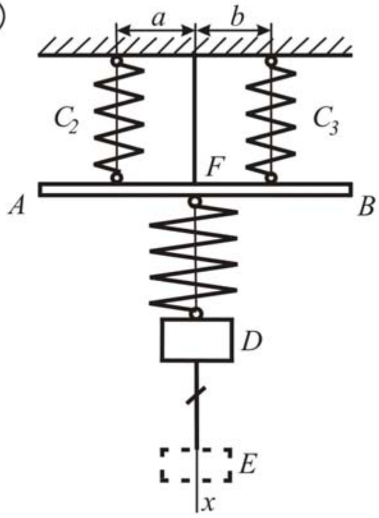
Д-2.1



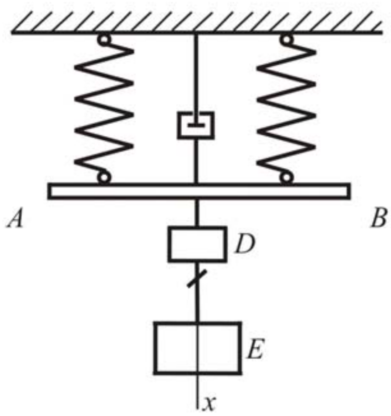
Д-2.2



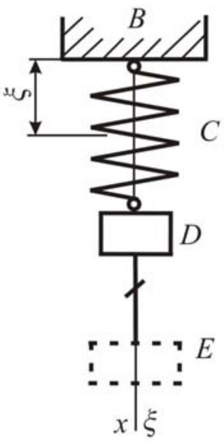
Д-2.3



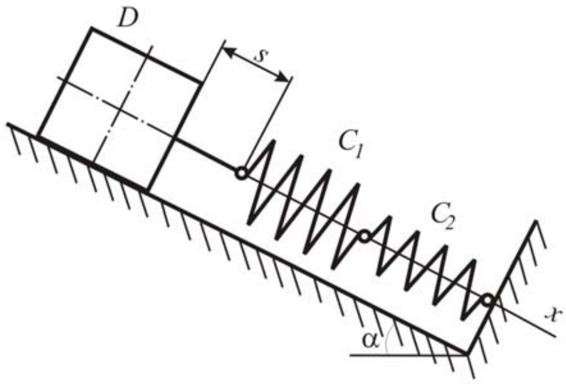
Д-2.4

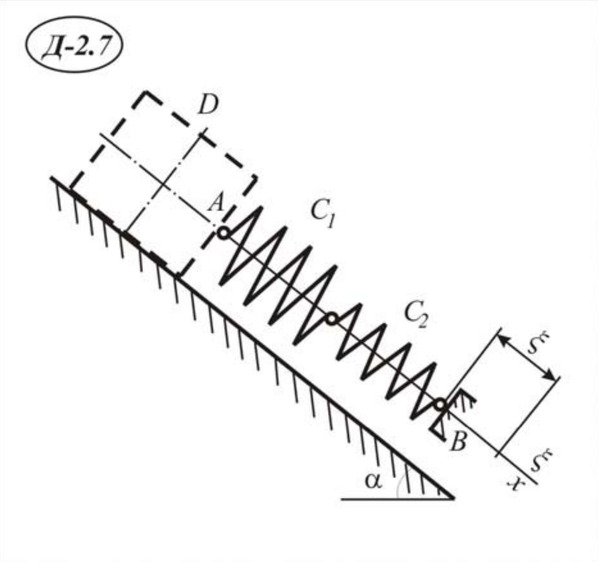


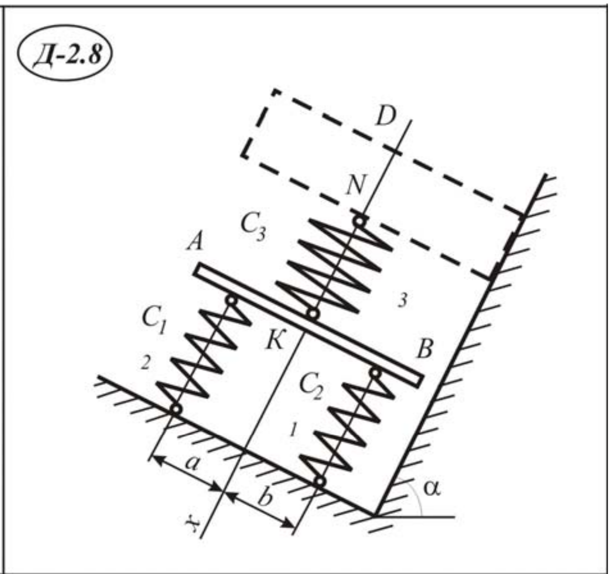
Д-2.5

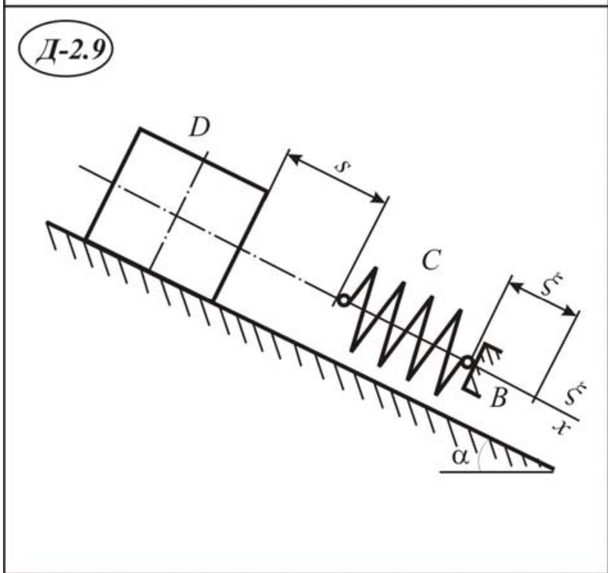


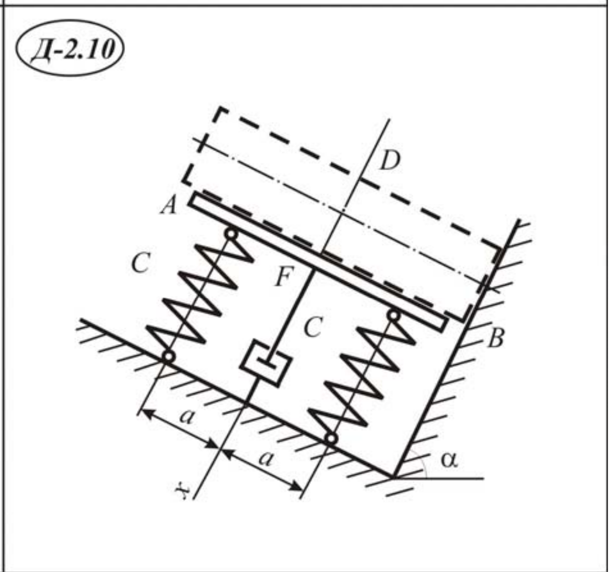
Д-2.6

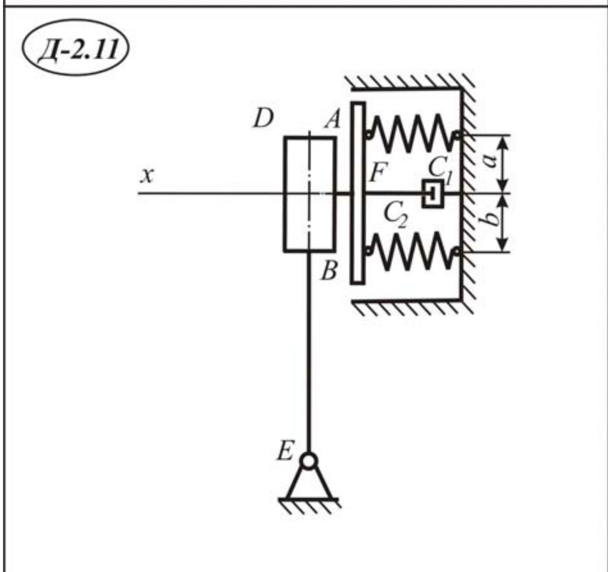


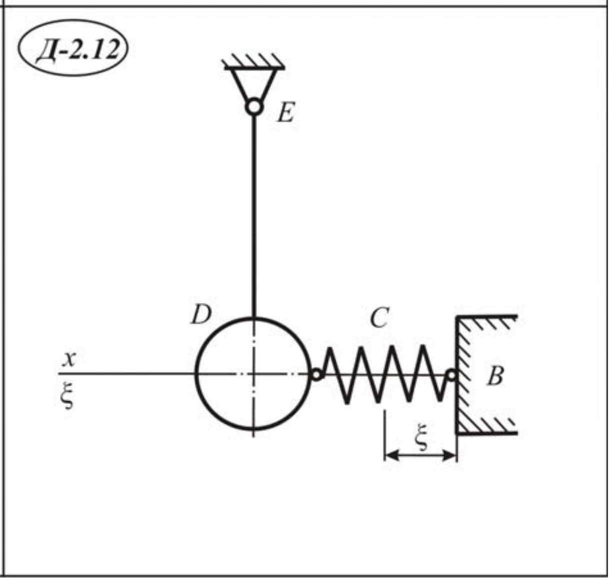

Д-2.7
D
A
C_1
C_2
ξ
B
ξ
x
α


Д-2.8
D
N
C_3
A
3
C_1
K
B
2
C_2
1
a
b
x
α

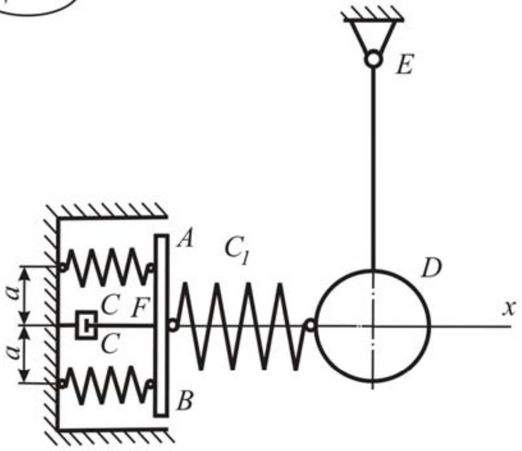

Д-2.9
D
s
C
ξ
B
ξ
x
α


Д-2.10
D
A
C
F
C
B
a
a
x
α

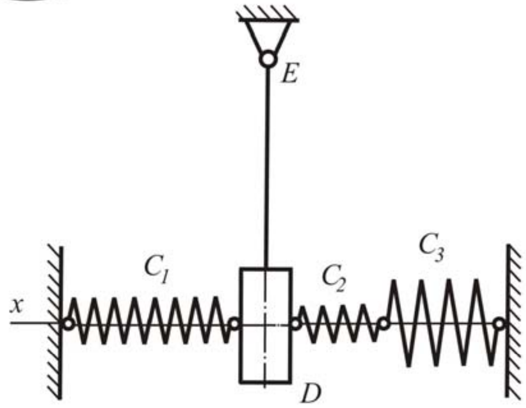

Д-2.11
D
A
x
F
C_1
a
C_2
b
B
E


Д-2.12
E
D
C
x
ξ
B
ξ

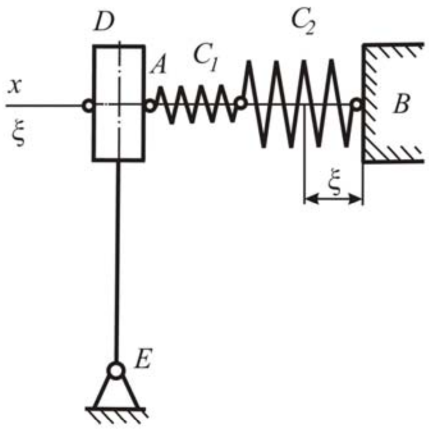
Д-2.13



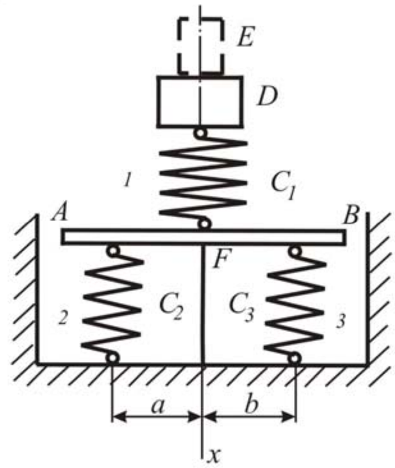
Д-2.14



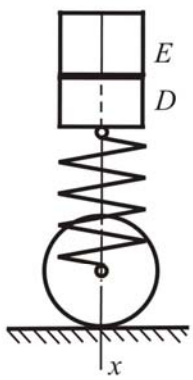
Д-2.15



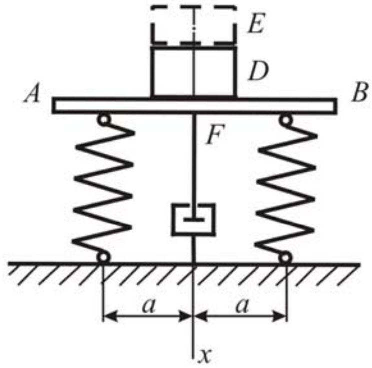
Д-2.16



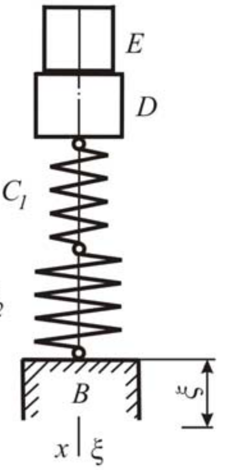
Д-2.17



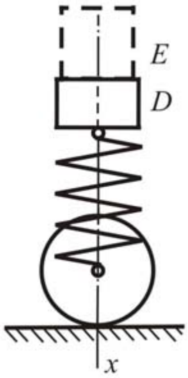
Д-2.18



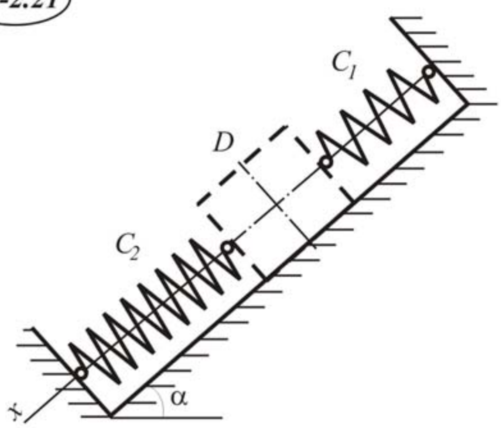
Д-2.19



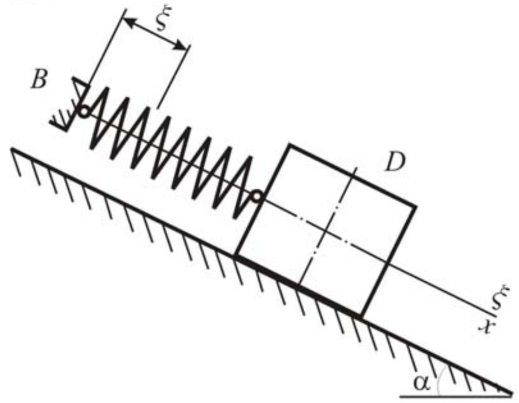
Д-2.20



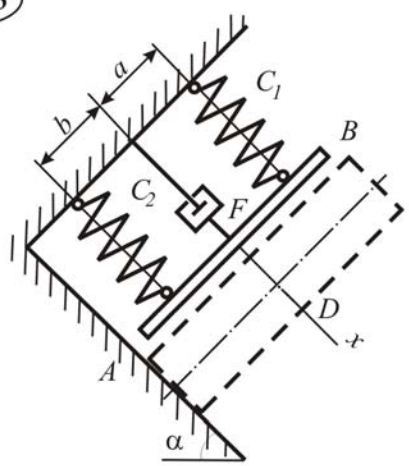
Д-2.21



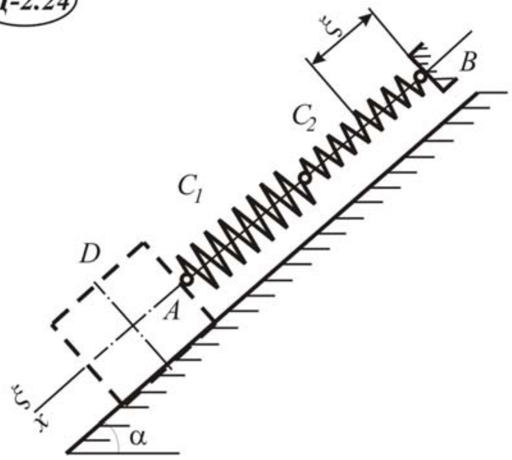
Д-2.22



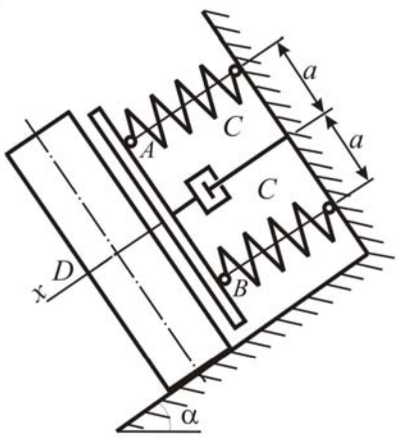
Д-2.23



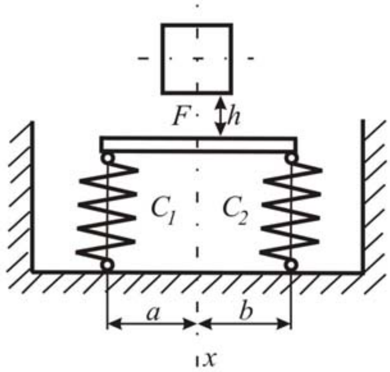
Д-2.24



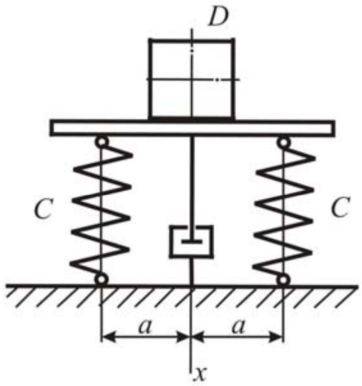
Д-2.25



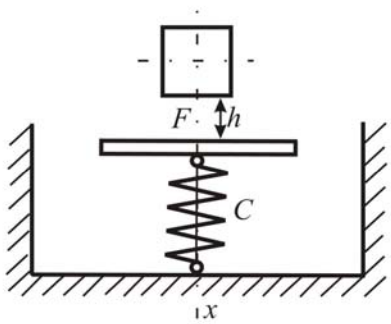
Д-2.26



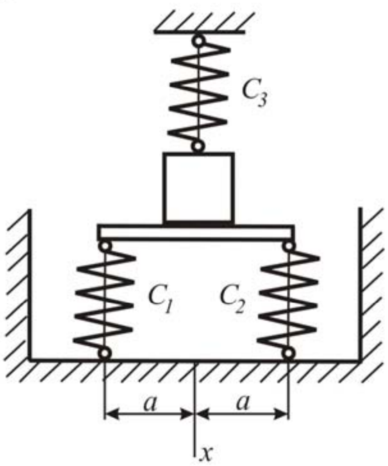
Д-2.27



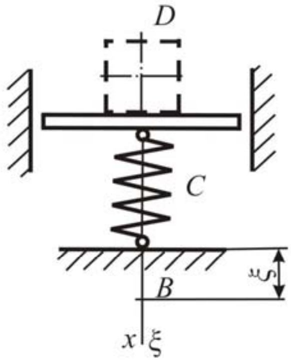
Д-2.28



Д-2.29



Д-2.30



Пример выполнения задания Д-2

На горизонтальном столе лежат две последовательно соединённые пружины с жесткостями C_1 = 4 Н/см и C_2 = 12 Н/см (рис. III.2.1). Они колеблются по закону $\xi = d \sin pt$, где $d = 4$ см, $p = 8\, c^{-1}$. К ним прикреплен груз с массой m = 1 кг. Колебание происходит в сторону положительного направления оси *x*. Начальная скорость $v_0 = 0$.

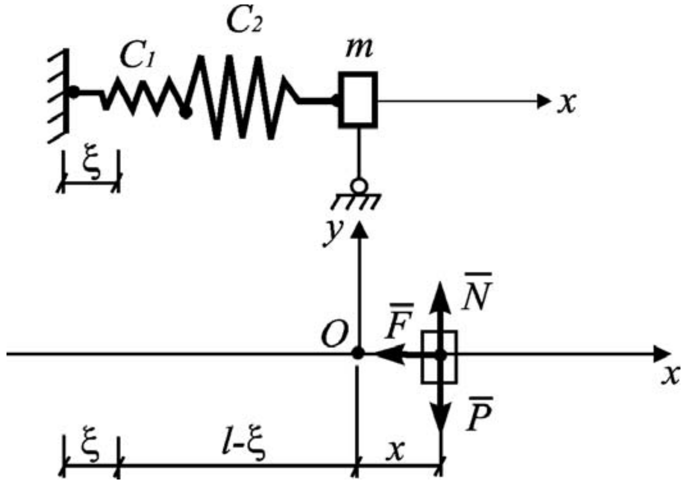


Рис. III.2.1

Решение:

При последовательном соединении пружин:

$$C = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2} = \frac{4 \cdot 12}{4+12} = 3 \text{ Н/см} = 300 \text{ Н/м}.$$

Сила тяжести mg и реакция N представляет собой уравновешенную систему сил.

$$(m\overline{g}, \overline{N}) \equiv 0.$$

$$m\ddot{x} = -F_{\text{упр}}; \quad F_{\text{упр}} = C\Delta, \; \Delta = x - \xi;$$

$$m\ddot{x} = -C(x - \xi),$$

где C – жесткость пружины;
$(x - \xi)$ – деформация пружины.

$$m\ddot{x} + Cx = d \sin pt / m;$$

$$\ddot{x} + C/mx = \frac{cd}{n} \sin pt.$$

Обозначим: $C/m = k^2 = 300$ м/с^2; $\dfrac{Cd}{m} = n = \dfrac{300 \cdot 0{,}04}{1} = 12$ м/с^2.

Получим: $\ddot{x}+k^2x=n\sin pt$ – неоднородное дифференциальное уравнение II порядка. Решение этого уравнения:

$$x=x_0+x_1,$$

где $x_0=c_1\cos kt+c_2\sin kt=A\sin(kt+\alpha)$ – решение однородного дифференциального уравнения (c_1, c_2 – постоянные интегрирования);

$x_1=B\sin pt$ – частное решение неоднородного дифференциального уравнения;

$x=A\sin(kt+\alpha)+B\sin pt$ – решение неоднородного дифференциального уравнения.

Продифференцируем дважды:

$$\dot{x}_1=Bp\cos pt;\quad \ddot{x}_2=-Bp^2\sin pt;$$

$$-p^2B\sin pt+k^2B\sin pt=n\sin pt.$$

$B(k^2-p^2)=n\Rightarrow B=\dfrac{n}{k^2p^2}=\dfrac{12}{300\cdot 64}=0{,}051$ – амплитуда вынужденных колебаний.

При $t=0$

$$x_0=0;\quad \dot{x}_0=0.$$

$$x=c_1\cos kt+c_2\sin kt+B\sin pt;$$

$$0=c_1+0+0;$$

$$c_1=0.$$

$$\dot{x}=-k\sin kt+kc_2\cos kt+pB\cos pt;$$

$$0=kc_2+pB\Rightarrow c_2=\frac{-pB}{k}=\frac{-8\cdot 0{,}051}{\sqrt{300}}=-0{,}023\text{ м};$$

$$x=0{,}05\sin 8t-0{,}023\sin 17{,}32t.$$

$A=\mu\Delta_0$ – амплитуда вынужденных колебаний, где μ – коэффициент динамичности.

$$\Delta_0=d.$$

$$\mu=\frac{1}{1-p^2/k^2}=\frac{1}{1-8^2/17{,}3^2}=1{,}27.$$

$$A=0{,}04\cdot 1{,}27=0{,}0508\text{ м}.$$

$$T_{\text{св}}=2\pi/k=2\cdot 3{,}14/\sqrt{300}=0{,}363\text{ с}.$$

$$T_{\text{вын}}=2\pi/p=2\cdot 3{,}14/8=0{,}785\text{ с}.$$

$x=5\sin 8t-2{,}3\sin 17{,}32t$ см – закон колебаний груза.

График колебаний представлен на рис. III.2.2.

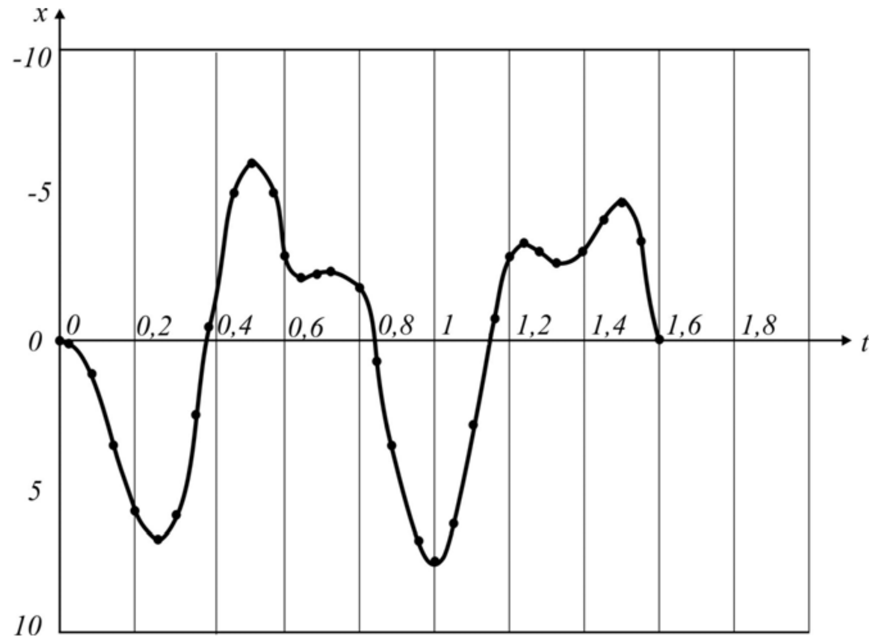


Рис. III.2.2

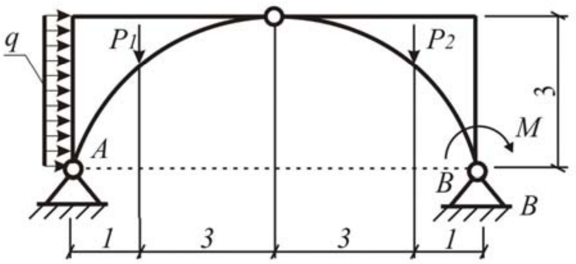
Задание Д3. Применение принципа возможных перемещений для определения реакций опор составных конструкций

Применяя принцип возможных перемещений, определить реакции опор составной конструкции. Схемы Д 3.1-30. Исходные данные приведены в табл. III. 3.1.

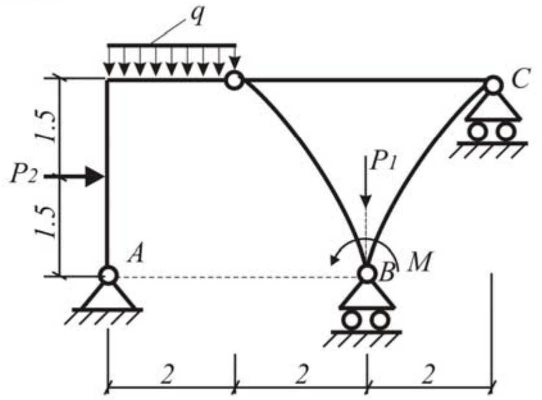
Таблица III.3.1

Номер варианта	Нагрузка				Номер варианта	Нагрузка			
	P_1, кН	P_2, кН	q, кН/м	M, кНм		P_1, кН	P_2, кН	Q, кН/м	M, кНм
1	15	14	3	10	16	3	10	2	10
2	13	12	2	6	17	1	8	1	8
3	11	10	1	5	18	3	6	3	6
4	9	8	3	14	19	5	4	2	7
5	7	6	2	12	20	7	2	1	5
6	8	5	1	4	21	10	9	2	4
7	7	4	2	10	22	8	7	1	7
8	6	6	1	7	23	6	5	2	8
9	5	8	3	8	24	4	3	1	3
10	4	10	2	6	25	2	1	2	2
11	12	11	1	12	26	7	1	2	7
12	10	6	2	10	27	6	2	1	5
13	9	5	1	6	28	5	3	2	10
14	7	10	2	13	29	4	4	1	5
15	6	8	1	5	30	3	5	2	10

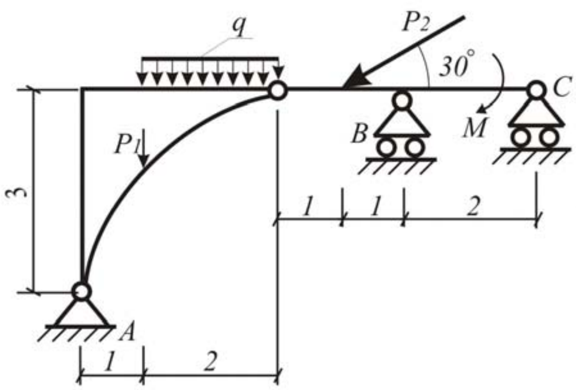
Д-3.1



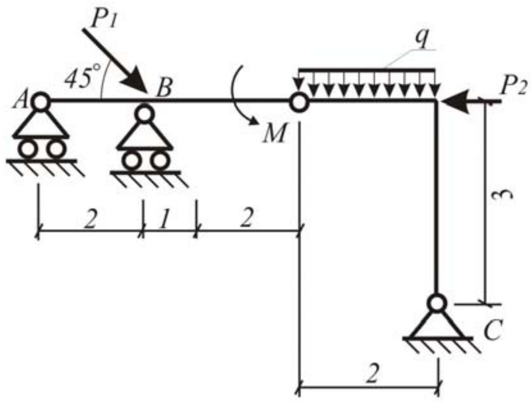
Д-3.2



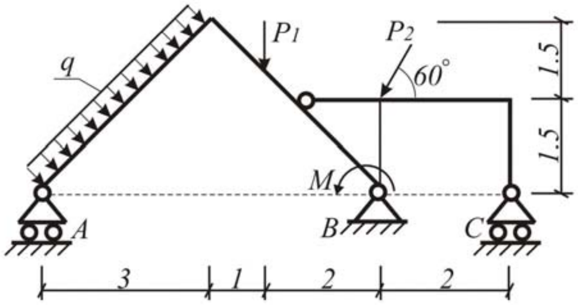
Д-3.3



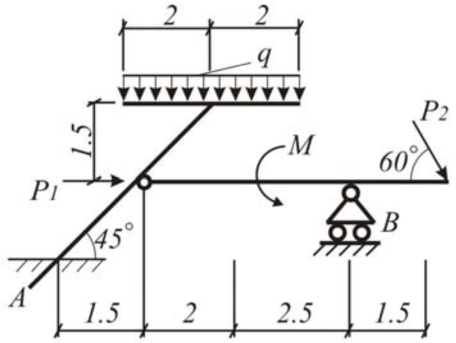
Д-3.4



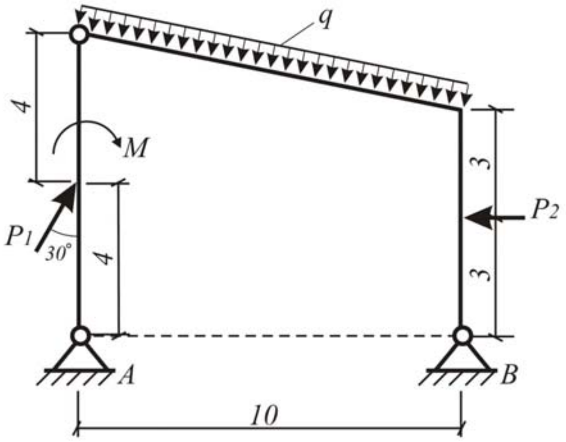
Д-3.5



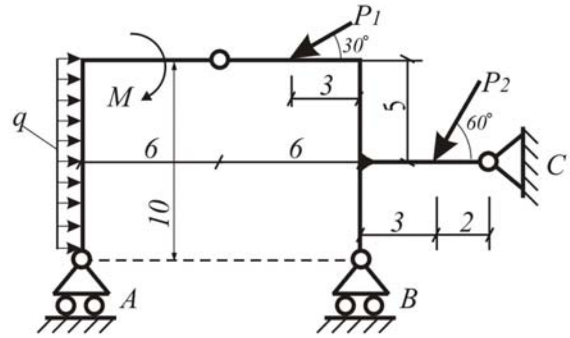
Д-3.6



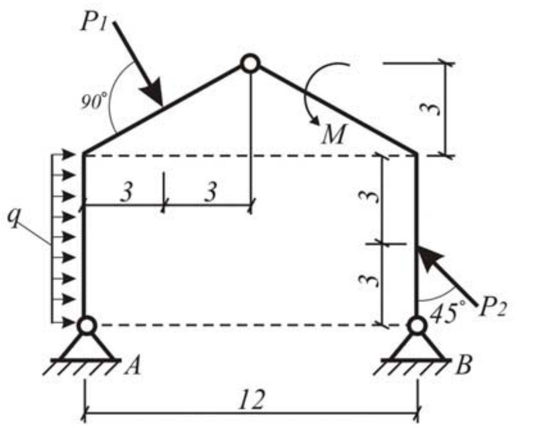
Д-3.7



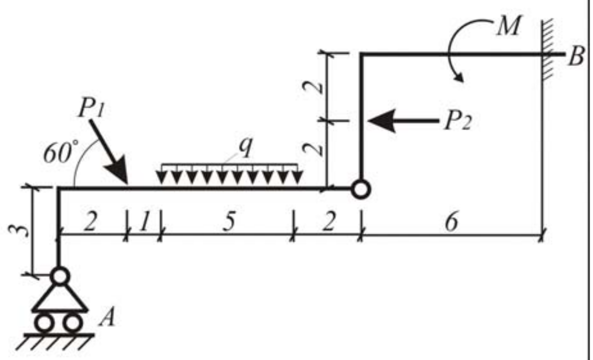
Д-3.8



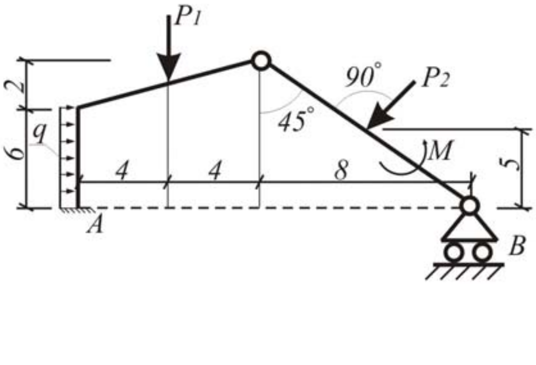
Д-3.9



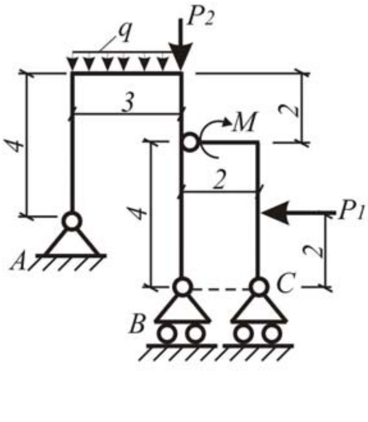
Д-3.10



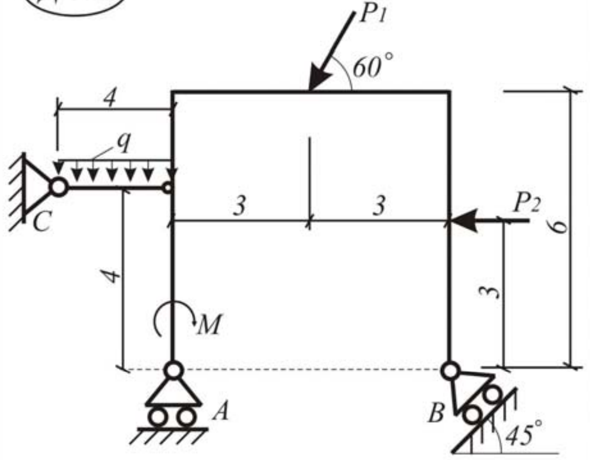
Д-3.11



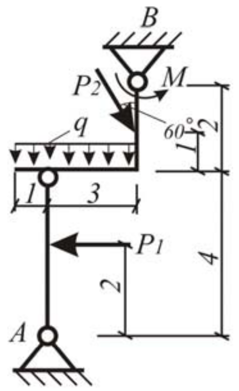
Д-3.12



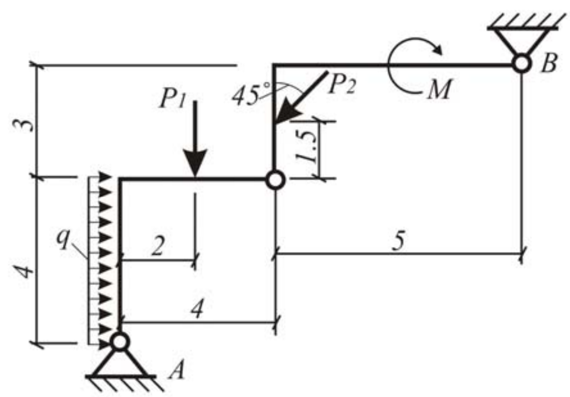
Д-3.13



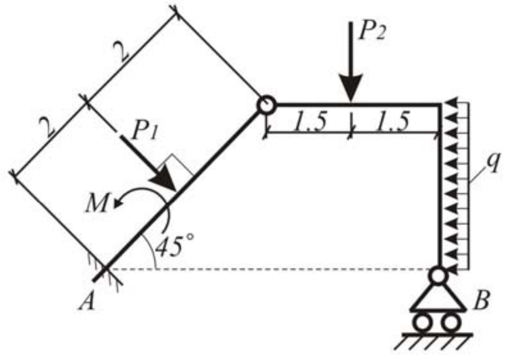
Д-3.14



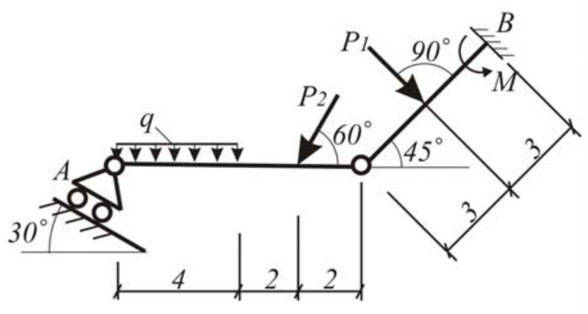
Д-3.15



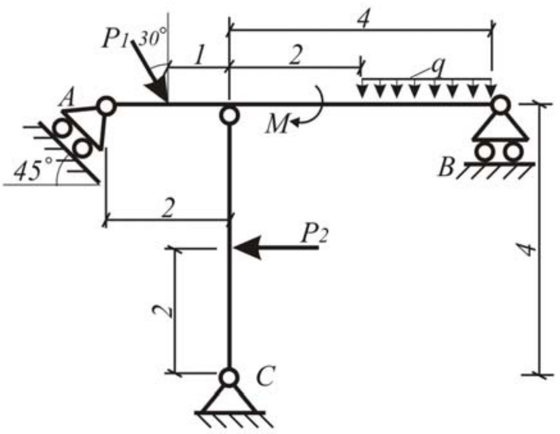
Д-3.16



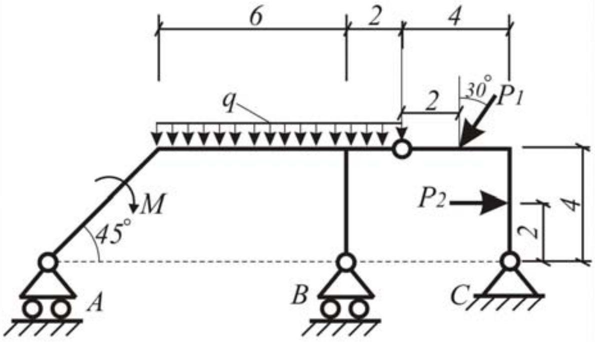
Д-3.17



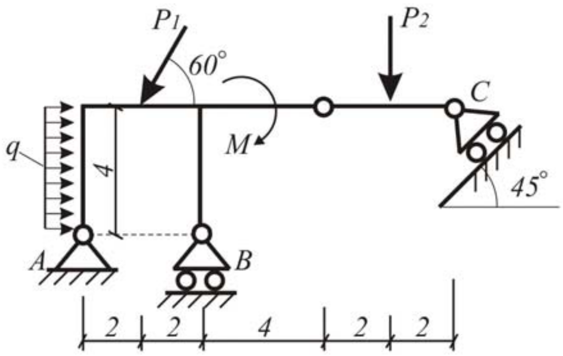
Д-3.18



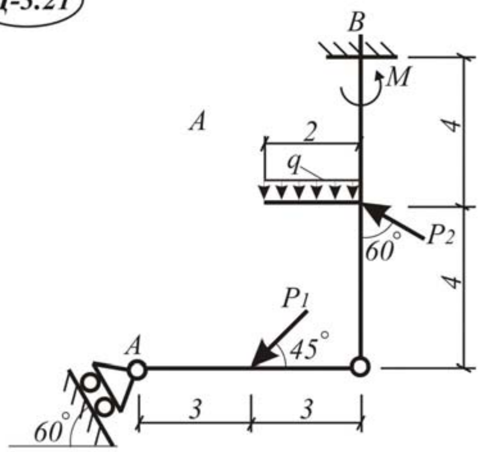
Д-3.19



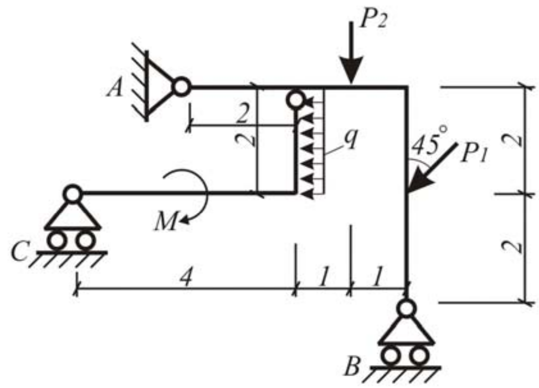
Д-3.20



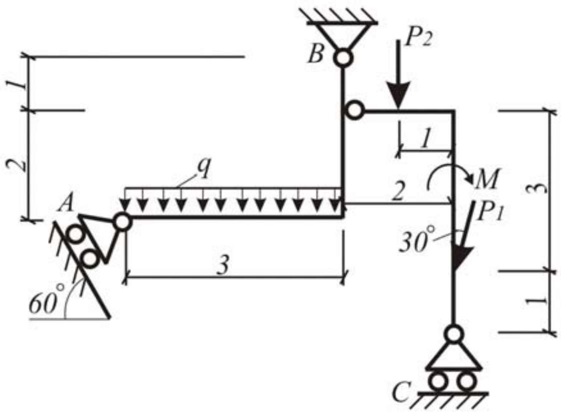
Д-3.21



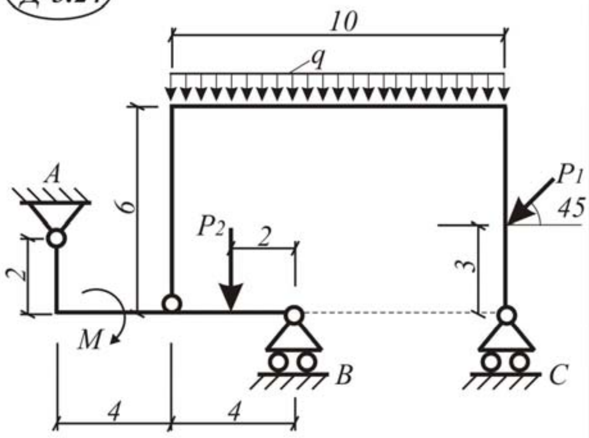
Д-3.22



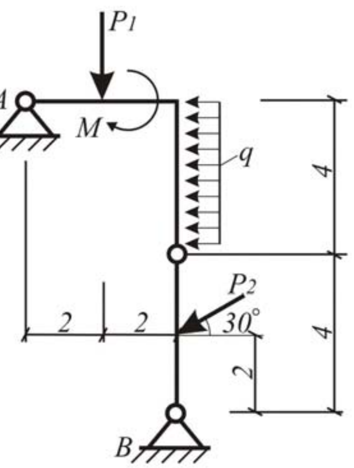
Д-3.23



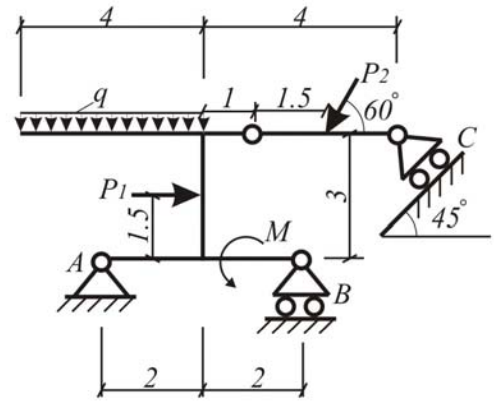
Д-3.24



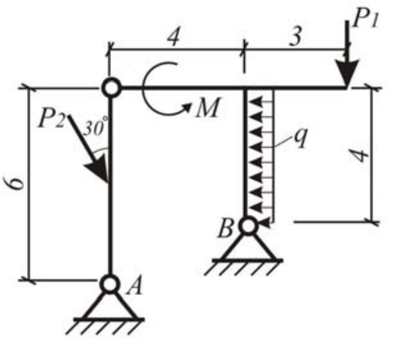
Д-3.25



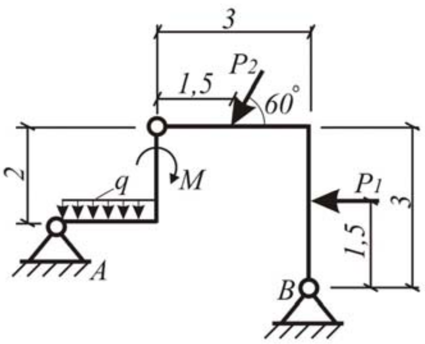
Д-3.26



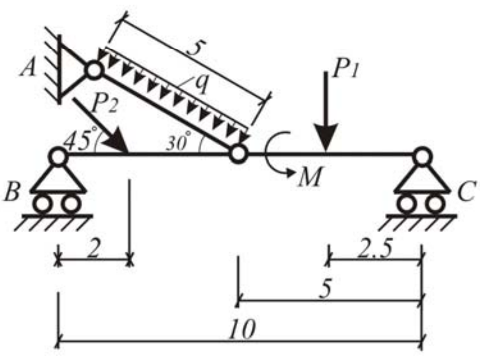
Д-3.27



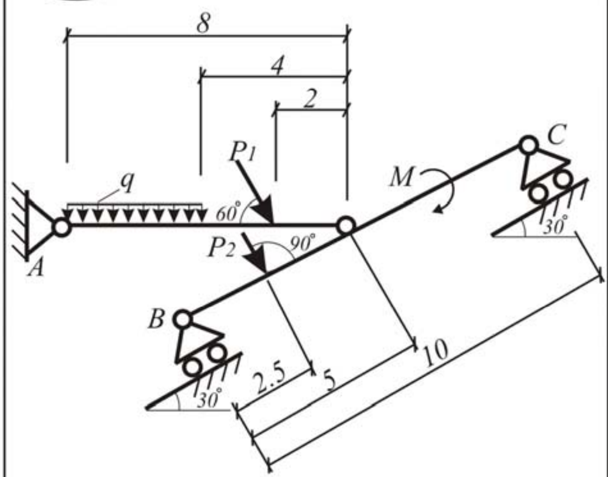
Д-3.28



Д-3.29



Д-3.30



Пример выполнения задания Д-3

Дано: составная конструкция (рис. III.3.1); $P_1 = 3$ кН, $P_2 = 5$ кН, $q = 2$ кН/м, $M = 10$ кН·м.

Определить реакции опор.

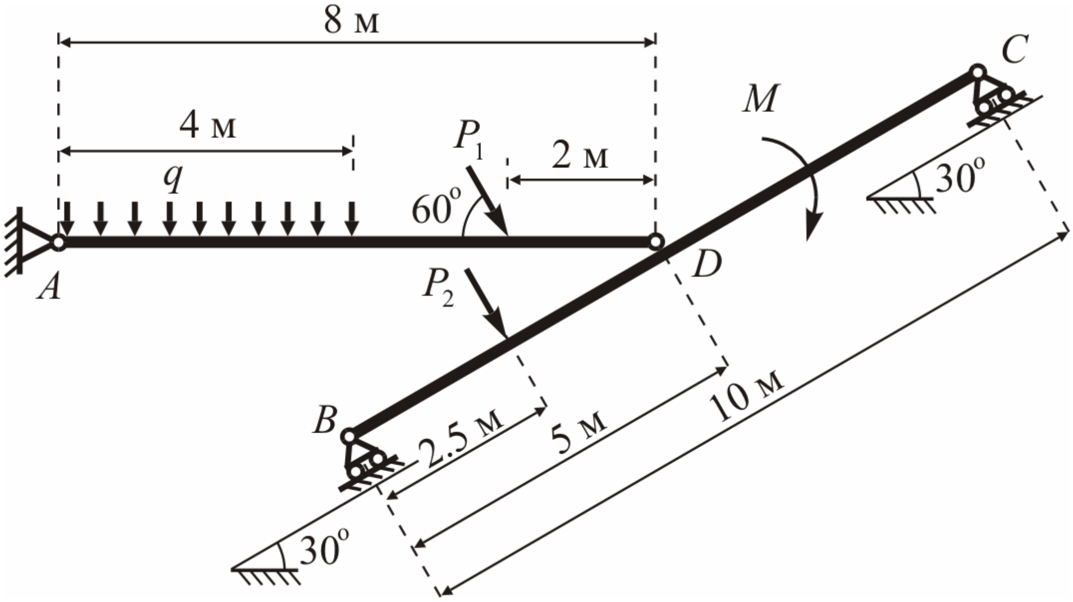


Рис. III.3.1

Решение: Заменим равномерно распределенную нагрузку сосредоточенной силой $Q = 2 \cdot 4 = 8$ кН, приложенной в середине загруженного участка.

Определим реакцию шарнирно-подвижной опоры C, для чего отбросим эту связь, заменив ее действие реакцией (рис. III.3.2).

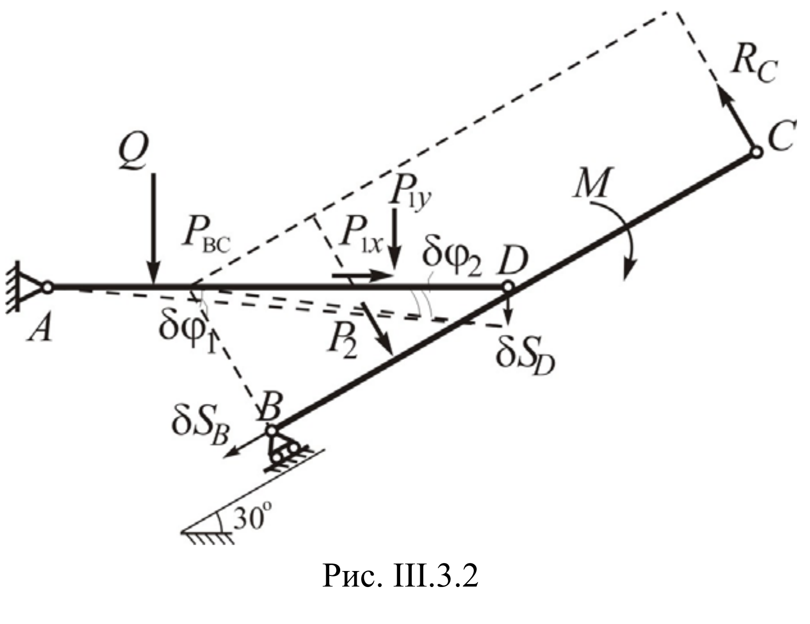


Рис. III.3.2

Возможным перемещением звена AD является его поворот вокруг точки A на угол $\delta\varphi_1$. Звено BC поворачивается вокруг мгновенного центра вращения P_{BC} на угол $\delta\varphi_2$. Составим уравнение работ, выражающее принцип возможных перемещений:

$$Q \cdot 2 \cdot \delta\varphi_1 + P_{1y} \cdot 6 \cdot \delta\varphi_1 - R_C \cdot h_1 \cdot \delta\varphi_2 + M \cdot \delta\varphi_2 + P_2 \cdot h_2 \cdot \delta\varphi_2 = 0,$$

где h_1 – плечо реакции R_C;

h_2 – плечо силы P_2 относительно центра P_{BC}.

Найдем зависимость между $\delta\varphi_1$ и $\delta\varphi_2$. Для этого определим возможное перемещение δS_D:

$$\delta S_D = AD \cdot \delta\varphi_1; \quad \delta S_D = \frac{BD}{\cos 30} \cdot \delta\varphi_2,$$

тогда

$$AD \cdot \delta\varphi_1 \cdot \cos 30^{\circ} = BD \cdot \delta\varphi_2.$$

Отсюда $\delta\varphi_2 = 1{,}39 \cdot \delta\varphi_1$.

Подставляя это значение в уравнение работ, получаем:

$$Q \cdot 2 \cdot \delta\varphi_1 + P_{1y} \cdot 6 \cdot \delta\varphi_1 - R_C \cdot 10 \cdot 1.39 \cdot \delta\varphi_1 +$$
$$+ M \cdot 1{,}39 \cdot \delta\varphi_1 + P_2 \cdot 2{,}5 \cdot 1.39 \cdot \delta\varphi_1 = 0;$$

$$R_C = \frac{Q \cdot 2 + P_{1y} \cdot 6 + M \cdot 1{,}39 + P_2 \cdot 2{,}5 \cdot 1{,}39}{10 \cdot 1{,}39} =$$
$$= \frac{8 \cdot 2 + 3 \cdot 0{,}87 \cdot 6 + 10 \cdot 1{,}39 + 5 \cdot 2{,}5 \cdot 1{,}39}{10 \cdot 1{,}39} = 4{,}53 \text{ кН}.$$

Подобным образом определим реакцию R_B (рис. III.3.3).

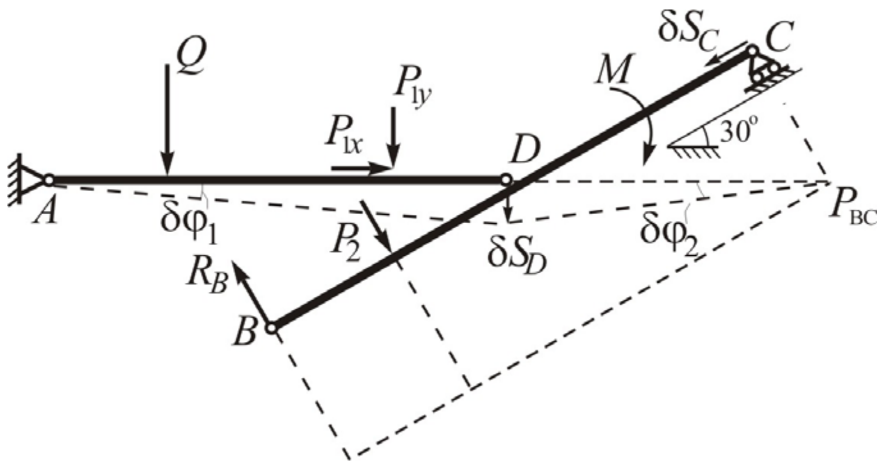


Рис. III.3.3

Уравнение работ имеет вид:

$$Q \cdot 2 \cdot \delta\varphi_1 + P_{1y} \cdot 6 \cdot \delta\varphi_1 - R_B \cdot h_1 \cdot \delta\varphi_2 - M \cdot \delta\varphi_2 + P_2 \cdot h_2 \cdot \delta\varphi_2 = 0,$$

где h_1 – плечо реакции R_B;

h_2 – плечо силы P_2 относительно центра P_{BC}.

$$\delta S_D = AD \cdot \delta\varphi_1; \quad \delta S_D = \frac{CD}{\cos 30} \cdot \delta\varphi_2.$$

Тогда

$$AD \cdot \delta\varphi_1 \cdot \cos 30^{\circ} = CD \cdot \delta\varphi_2, \quad \delta\varphi_2 = 1{,}39 \cdot \delta\varphi_1.$$

$$Q \cdot 2 \cdot \delta\varphi_1 + P_{1y} \cdot 6 \cdot \delta\varphi_1 - R_B \cdot 10 \cdot 1{,}39 \cdot \delta\varphi_1 -$$

$$- M \cdot 1{,}39 \cdot \delta\varphi_1 + P_2 \cdot 7{,}5 \cdot 1{,}39 \cdot \delta\varphi_1 = 0.$$

Отсюда

$$R_B = \frac{Q \cdot 2 + P_{1y} \cdot 6 - M \cdot 1{,}39 + P_2 \cdot 7{,}5 \cdot 1{,}39}{10 \cdot 1{,}39 \cdot \delta\varphi_1} =$$

$$= \frac{8 \cdot 2 + 3 \cdot 0{,}87 \cdot 6 - 10 \cdot 1{,}39 + 5 \cdot 7{,}5 \cdot 1{,}39}{10 \cdot 1{,}39} = 5{,}03 \text{ кН}.$$

Найдем горизонтальную реакцию опоры *A*. Мысленно отбросим связь, препятствующую горизонтальному перемещению точки *A*, заменив шарнирно-неподвижную опору шарнирно-подвижной. Действие отброшенной связи заменим горизонтальной реакцией X_A (рис. III.3.4).

Возможным перемещением звена *AD* является поворот вокруг мгновенного центра вращения этого звена *P*.

Составим уравнение работ:

$$Q \cdot 2 \cdot \delta\varphi_1 + P_{1y} \cdot 6 \cdot \delta\varphi_1 + X_A \cdot \delta S_A - P_{1X} \cdot \delta S_A = 0,$$

где δS_A – возможное перемещение точки *A*.

$$\delta S_A = AP \cdot \delta\varphi_1; \quad AP = AD \cdot \text{tg} 60.$$

Подставим эти значения в уравнение работ:

$$Q \cdot 2 \cdot \delta\varphi_1 + P_{1y} \cdot 6 \cdot \delta\varphi_1 + X_A \cdot AD \cdot \text{tg}60 \cdot \delta\varphi_1 - P_{1X} \cdot AD \cdot \text{tg}60 \cdot \delta\varphi_1 = 0.$$

Отсюда

$$X_A = \frac{-Q \cdot 2 - P_{1y} \cdot 6 + P_{1x} \cdot AD \cdot \text{tg}60 \cdot \delta\varphi_1}{AD \cdot \text{tg}60} =$$

$$= \frac{-8 \cdot 2 - 3 \cdot 0{,}87 \cdot 6 + 3 \cdot 0{,}5 \cdot 8 \cdot 1{,}73}{8 \cdot 1{,}73} = -0{,}79 \text{ кН}.$$

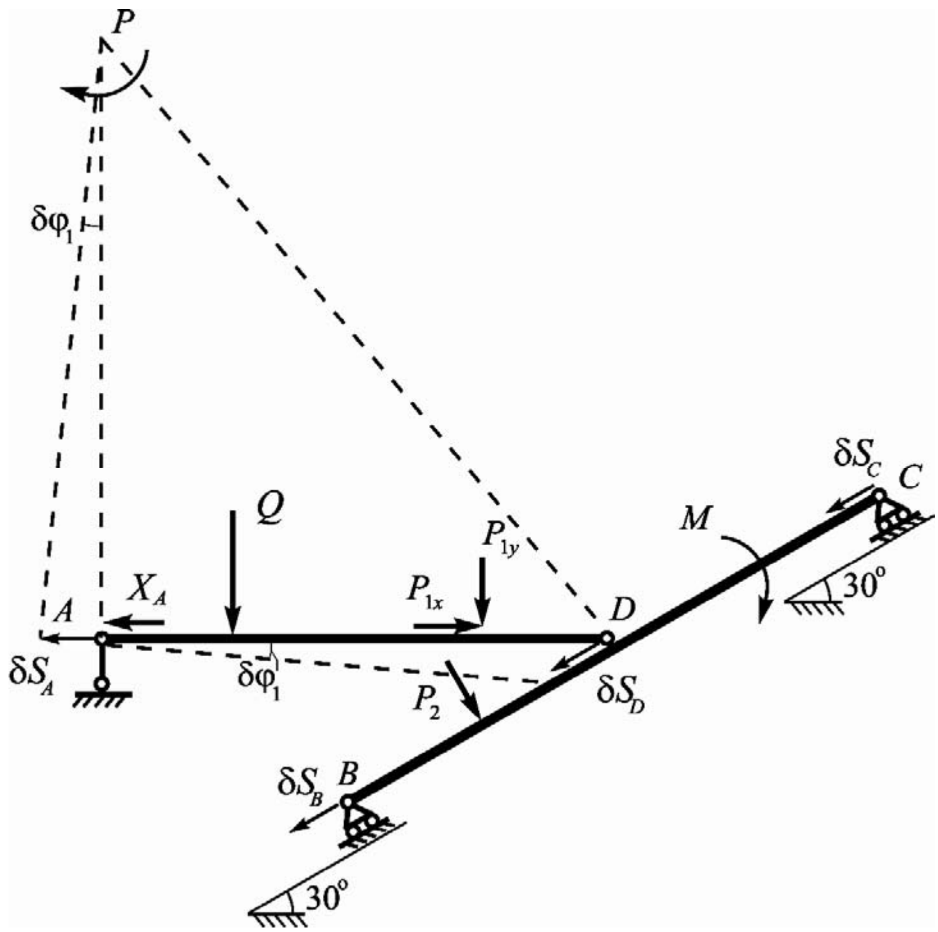


Рис. III.3.4

Знак минус показывает, что реакция X_A направлена в другую сторону.

Определим реакцию Y_A. Отбросим связь, препятствующую вертикальному перемещению точки *A*, а ее действие заменим соответствующей реакцией (рис. III.3.5)

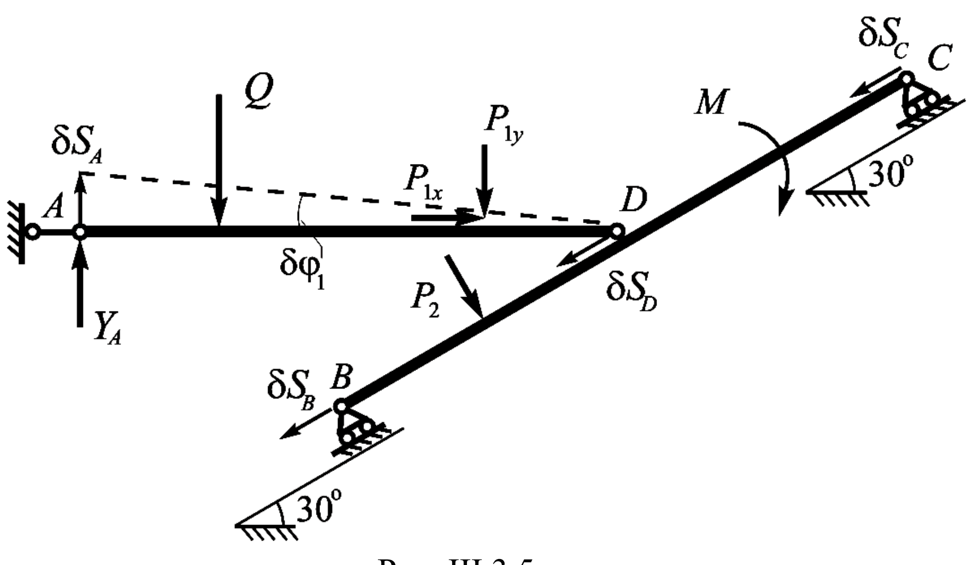


Рис. III.3.5

Возможным перемещением звена AD является поворот вокруг точки D. Составим уравнение работ:

$$-Q \cdot 6 \cdot \delta\varphi_1 - P_{1y} \cdot 2 \cdot \delta\varphi_1 + Y_A \cdot 8 \cdot \delta\varphi_1 = 0 .$$

Отсюда

$$Y_A = \frac{Q \cdot 6 + P_{1y} \cdot 2}{8} = \frac{8 \cdot 6 + 3 \cdot 0{,}87 \cdot 2}{8} = 6{,}65 \text{ кН} .$$

Для проверки используем уравнения проекций всех сил (включая опорные реакции) на оси координат.

$\sum F_{kx} = 0$:

$$-X_A + P_{1x} + P_2 \cdot \cos 60 - R_c \cdot \cos 60 - R_B \cdot \cos 60 =$$
$$= 0{,}79 + 1{,}5 + 2{,}5 - 2{,}27 - 2{,}52 = 0.$$

$\sum F_{ky} = 0$:

$$Y_A - Q - P_{1y} - P_2 \cdot \sin 60 + R_c \cdot \sin 60 + R_B \cdot \sin 60 =$$
$$= 6{,}65 - 8 - 2{,}598 - 4{,}33 + 3{,}92 + 4{,}36 = 0.$$

Опорные реакции определены **верно**.

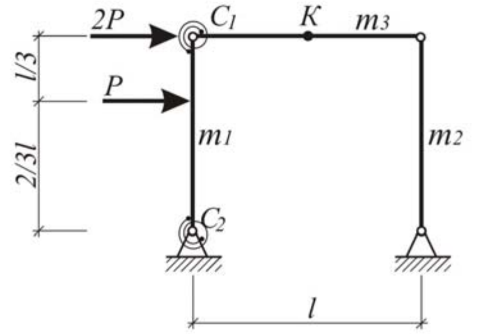
Задание Д4. Применение общего уравнения динамики к исследованию движения механической системы с одной степенью свободы

Используя общее уравнение динамики, определить ускорение точки K одного из элементов механической системы и динамические реакции опор от внезапно приложенной силы P, схемы Д 4.1-30. Исходные данные приведены в табл. III.4.1.

Таблица III.4.1

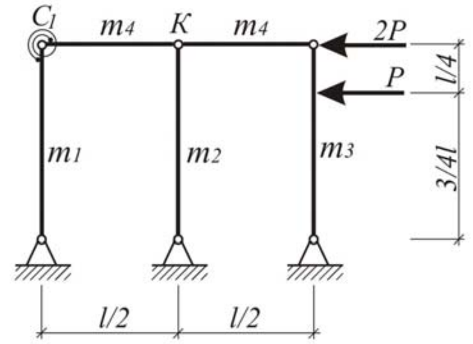
P, кН	C_1, кН·м	C_2, кН·м	C_3, кН·м	C_4, кН·м
1	500	700	650	800

Д-4.1



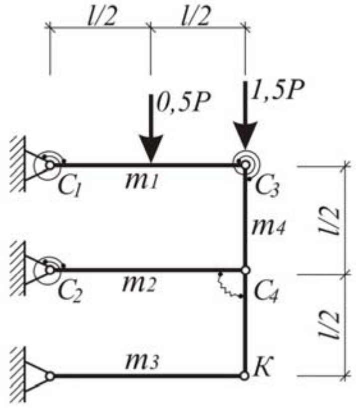
$l=3м,\ m_1=1000кг,\ m_2=2000кг,\ m_3=5000кг$

Д-4.2



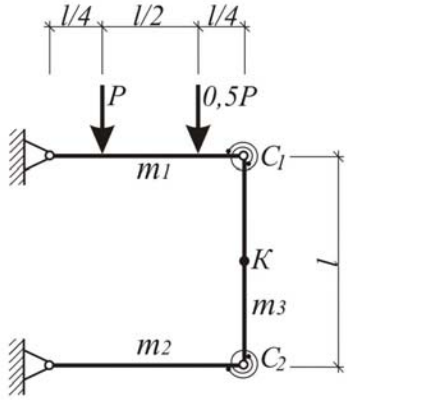
$l=4м,\ m_1=2000кг,\ m_2=1000кг,$
$m_3=4000кг,\ m_4=3000кг$

Д-4.3



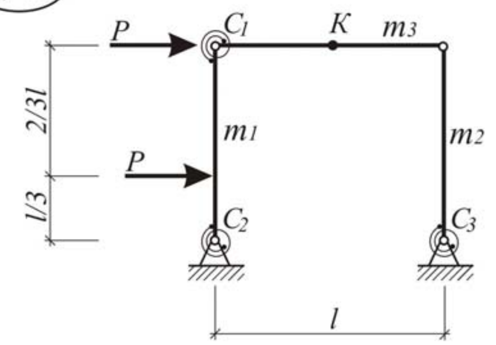
$l=4м,\ m_1=3000кг,\ m_2=1500кг,$
$m_3=4000кг,\ m_4=2000кг$

Д-4.4



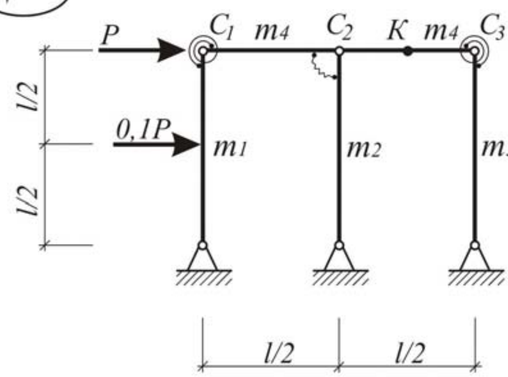
$l=4м,\ m_1=3000кг,\ m_2=5000кг,\ m_3=2500кг$

Д-4.5



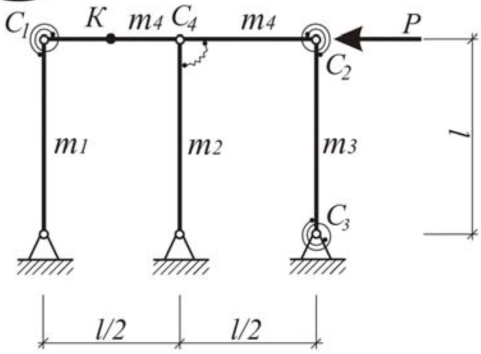
$l=3м,\ m_1=1500кг,\ m_2=2000кг,\ m_3=1000кг$

Д-4.6



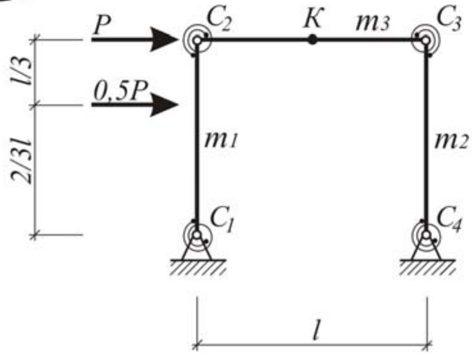
$l=4м,\ m_1=3000кг,\ m_2=1500кг,$
$m_3=4000кг,\ m_4=2000кг$

Д-4.7



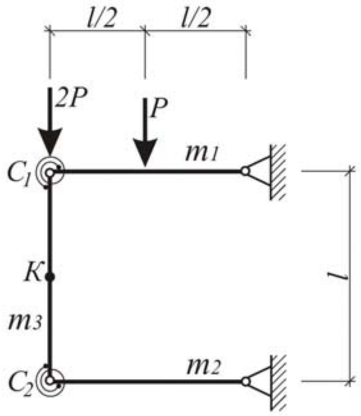
$l=3,5м$, $m_1=1000кг$, $m_2=3000кг$,
$m_3=2500кг$, $m_4=1500кг$

Д-4.8



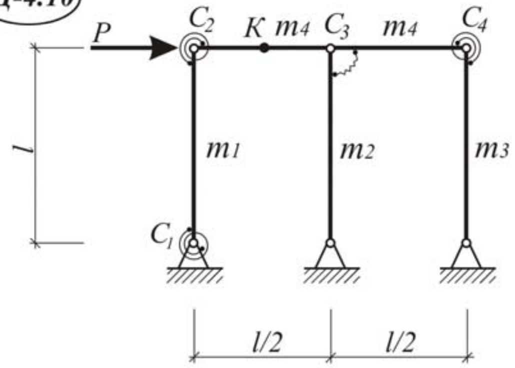
$l=4м$, $m_1=3000кг$, $m_2=2000кг$, $m_3=4000кг$

Д-4.9



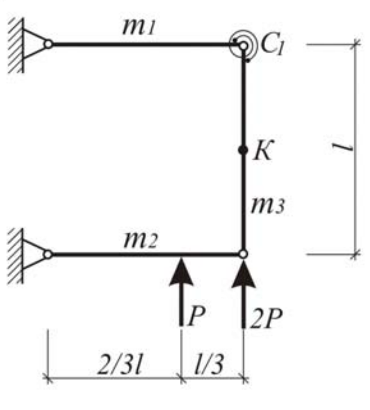
$l=4м$, $m_1=2000кг$, $m_2=2500кг$, $m_3=3000кг$

Д-4.10



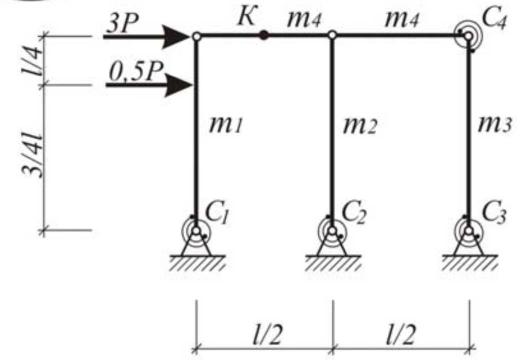
$l=2,5м$, $m_1=1500кг$, $m_2=1000кг$,
$m_3=2000кг$, $m_4=2500кг$

Д-4.11



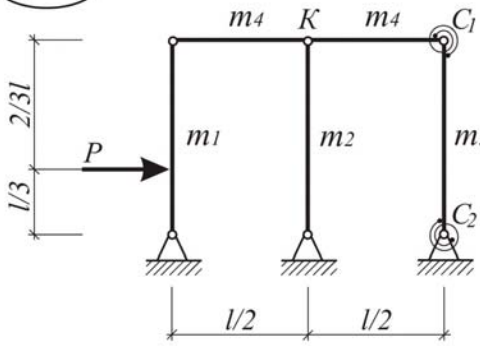
$l=3м$, $m_1=500кг$, $m_2=1500кг$, $m_3=2500кг$

Д-4.12



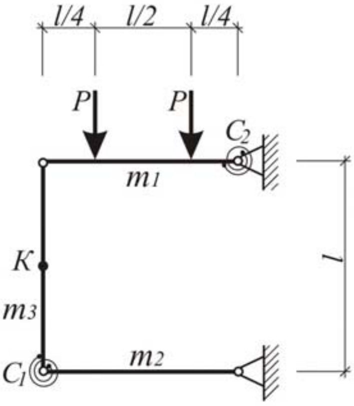
$l=4м$, $m_1=5000кг$, $m_2=3500кг$,
$m_3=2500кг$, $m_4=2000кг$

Д-4.13



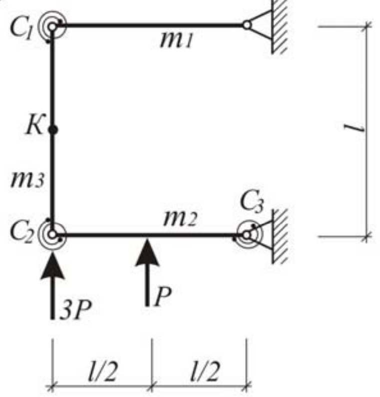
$l=4м$, $m_1=2500кг$, $m_2=3500кг$, $m_3=2000кг$, $m_4=1000кг$

Д-4.14



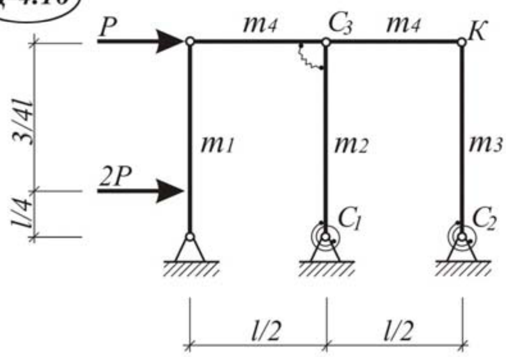
$l=6м$, $m_1=500кг$, $m_2=2500кг$, $m_3=1000кг$

Д-4.15



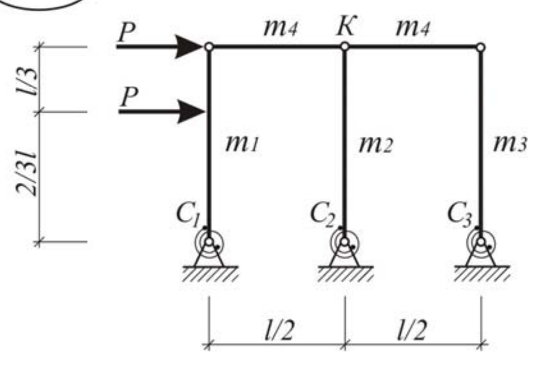
$l=4м$, $m_1=1500кг$, $m_2=500кг$, $m_3=3000кг$

Д-4.16



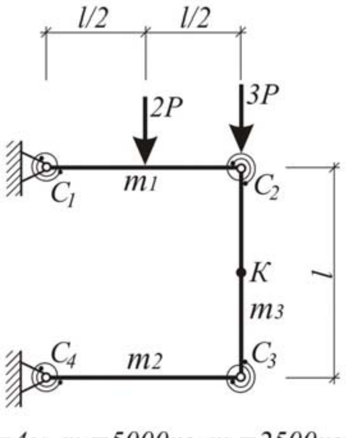
$l=6м$, $m_1=1000кг$, $m_2=2000кг$, $m_3=1500кг$, $m_4=4000кг$

Д-4.17



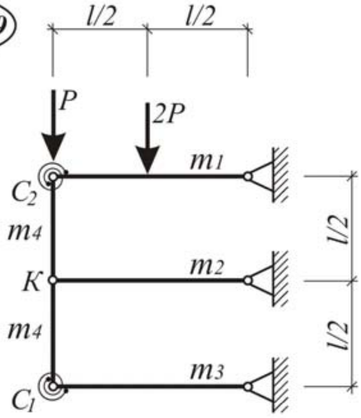
$l=6м$, $m_1=3000кг$, $m_2=2000кг$, $m_3=1500кг$, $m_4=1000кг$

Д-4.18



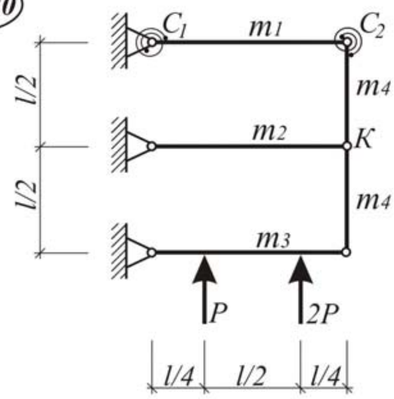
$l=4м$, $m_1=5000кг$, $m_2=2500кг$, $m_3=2000кг$

Д-4.19



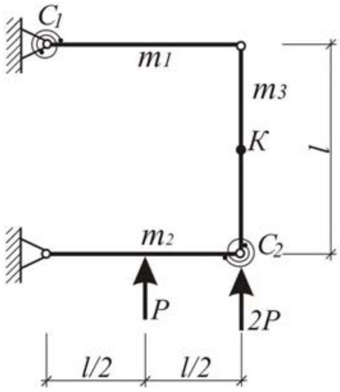
l=3м, m_1=2500кг, m_2=4000кг, m_3=3000кг, m_4=1500кг

Д-4.20



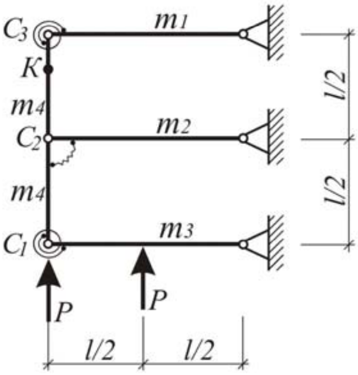
l=4м, m_1=2000кг, m_2=5000кг, m_3=3500кг, m_4=1500кг

Д-4.21



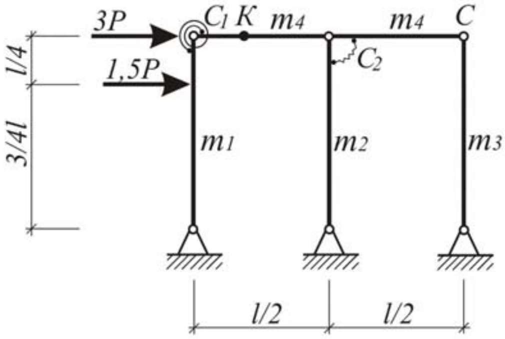
l=6м, m_1=2000кг, m_2=3000кг, m_3=4000кг

Д-4.22



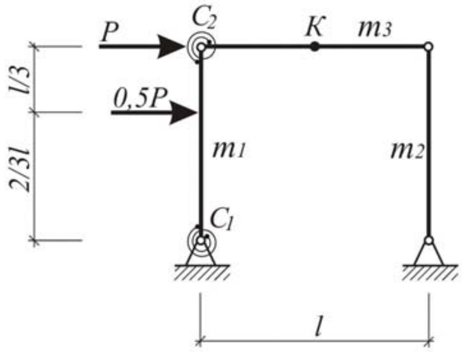
l=4м, m_1=5000кг, m_2=4000кг, m_3=2500кг, m_4=3000кг

Д-4.23



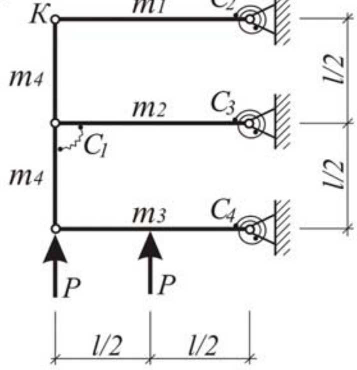
l=6м, m_1=500кг, m_2=1500кг, m_3=2000кг, m_4=1500кг

Д-4.24



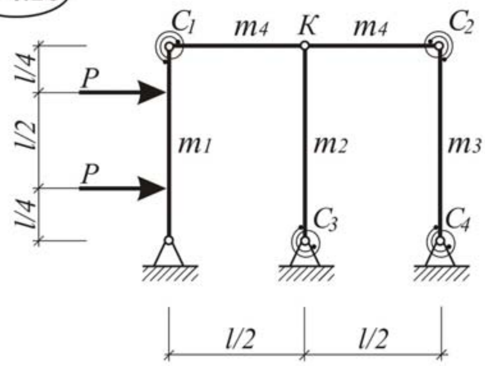
l=6м, m_1=2000кг, m_2=1000кг, m_3=1500кг

Д-4.25



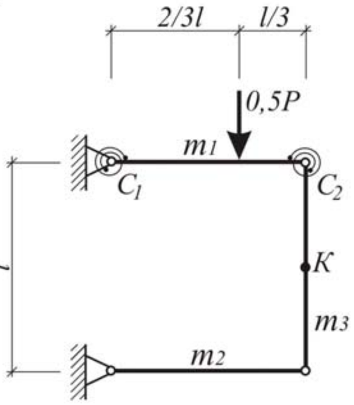
l=6м, m_1=500кг, m_2=2500кг, m_3=2500кг, m_4=3000кг

Д-4.26



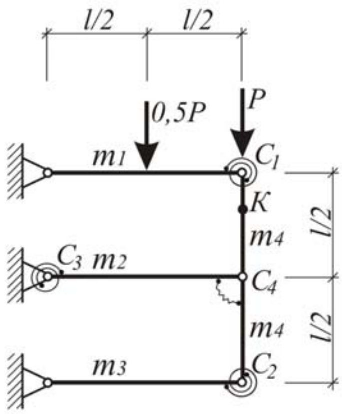
l=6м, m_1=2000кг, m_2=3000кг, m_3=2000кг, m_4=1000кг

Д-4.27



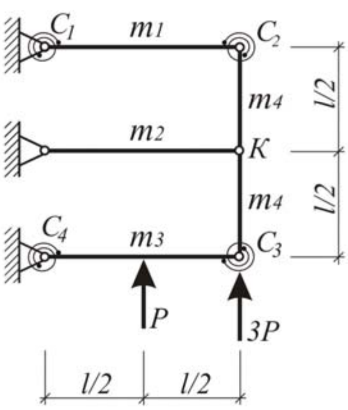
l=6м, m_1=2500кг, m_2=2000кг, m_3=1500кг

Д-4.28



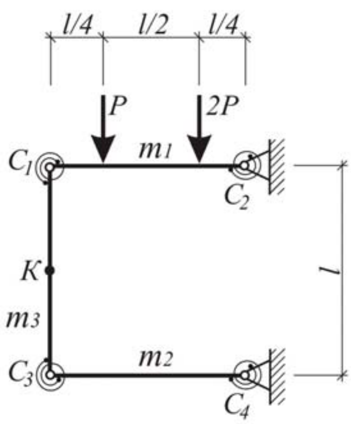
l=6м, m_1=3500кг, m_2=3000кг, m_3=2000кг, m_4=1500кг

Д-4.29



l=4м, m_1=500кг, m_2=2000кг, m_3=3000кг, m_4=1500кг

Д-4.30



l=6м, m_1=2000кг, m_2=2500кг, m_3=3000кг

Пример выполнения задания Д-4

Механическая система состоит из стержней конечной массы m_1, m_2, m_3 (рис. III.4.1, а). Элементы системы соединены упругими связями. Узлы D и E рамы получили начальное перемещение от внезапно приложенной силы $P\Delta_{нач} = \Delta_{дин} = 2\Delta_{ст}$, где $\Delta_{ст}$ – горизонтальное отклонение рамы под действием статически приложенной силы P (рис. III.4.1, б). Затем рама начинает движение без начальной скорости под действием моментов в упругих связях. Коэффициенты жесткости упругих связей C_1 и C_2.

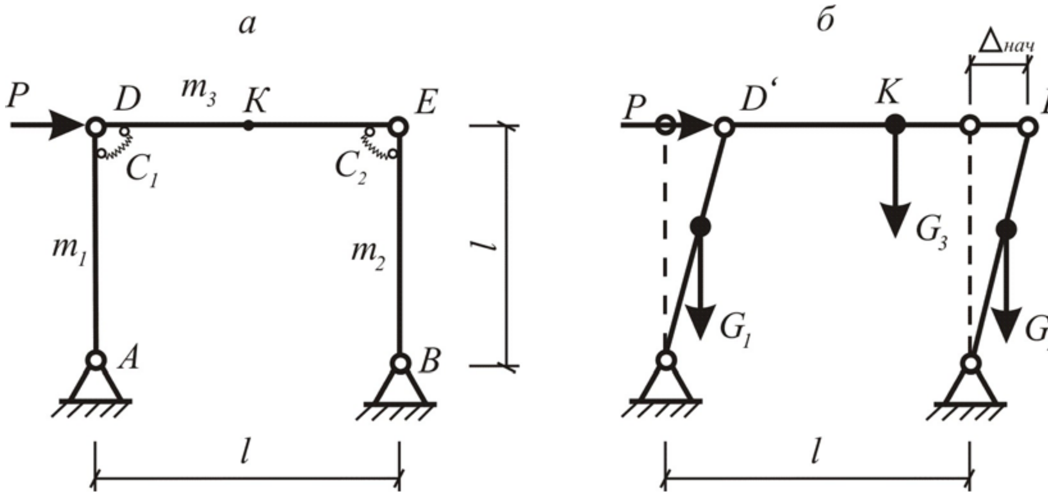


Рис. III.4.1

Требуется определить:

1. Ускорение точки K одного из звеньев механической системы в момент начала движения.
2. Динамические реакции опор от внезапно приложенной силы P.

Д а н о : m_1 = 2000 кг, m_2 = 3000 кг, m_3 = 5000 кг; l = 4 м;
C_1 = 500 кН·м; C_2 = 700 кН·м; P = 1 кН; g = 10 м/с^2.

Решение. Определим величину отклонения системы $\Delta_{ст}$ от приложения статической нагрузки. Воспользуемся принципом возможных перемещений.

Мысленно отклоним систему от положения статического равновесия на величину δS (рис. III.4.2). Согласно принципу возможных перемещений $\sum \delta A^a = 0$, где $\sum \delta A^a$ – сумма элементарных работ всех внешних сил на возможном перемещении δS, получим:

$$P\delta S \cdot \cos\alpha + G_1 \frac{\delta S}{2} \cdot \sin\alpha + G_2 \frac{\delta S}{2} \cdot \sin\alpha + G_{32} \frac{\delta S}{2} \cdot \sin\alpha -$$

$$-M_1^{упр} \cdot \delta\varphi - M_2^{упр} \cdot \delta\varphi = 0; M_1^{упр} = C_1 \cdot \frac{\Delta_{ст}}{l};\ M_2^{упр} = C_2 \cdot \frac{\Delta_{ст}}{l},$$

где $M_1^{упр}, M_2^{упр}$ – моменты, возникающие в упругих шарнирах вследствие поворота звеньев.

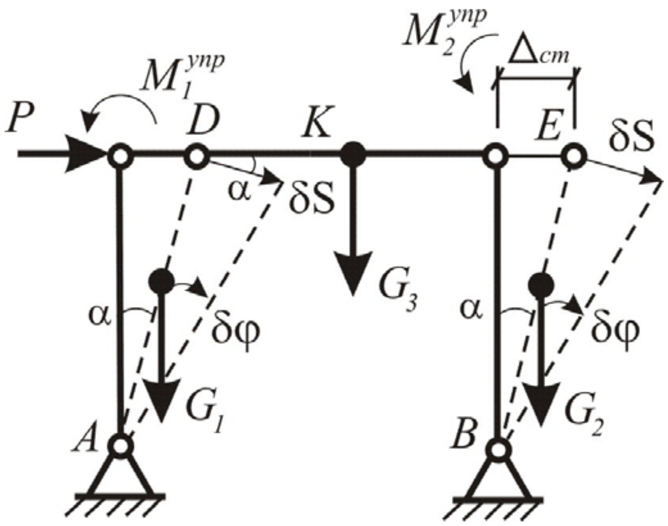


Рис. III.4.2

Выразим возможный угол поворота $\delta\varphi$ через возможное перемещение δS:

$$\delta\varphi = \frac{\delta S}{l}; \quad \alpha \approx \frac{\Delta_{\text{ст}}}{l}; \quad \sin\alpha \approx \alpha; \quad \cos\alpha \approx 1,$$

и получим следующее уравнение

$$P \cdot \delta S + \frac{\Delta_{\text{ст}}}{l}\left(\frac{G_1}{2} + \frac{G_1}{2} + G_2\right) \cdot \delta S - M_1^{\text{упр}} \cdot \frac{\delta S}{l} - M_2^{\text{упр}} \cdot \frac{\delta S}{l} = 0\,.$$

Сократим полученное выражение на δS:

$$P + \frac{\Delta_{\text{ст}}}{l} \cdot G - \frac{C_1 \cdot \Delta_{\text{ст}}}{l^2} - \frac{C_2 \cdot \Delta_{\text{ст}}}{l^2} = 0,$$

где
$$G = \left(\frac{G_1}{2} + \frac{G_2}{2} + G_3\right).$$

Отсюда

$$\Delta_{\text{ст}} = \frac{P \cdot l^2}{\left(C_1 + C_2 - G \cdot l\right)} = \frac{1 \cdot 4^2}{500 + 700 - 75 \cdot 4} = 0{,}018\,\text{м} = 1{,}8\ \text{см}\,.$$

Определим значения моментов в упругих шарнирах:

$$M_1^{\text{упр}} = \frac{C_1 \cdot \Delta_{\text{ст}}}{l^2} = \frac{500 \cdot 0.018}{4} = 2{,}25\,\text{кН} \cdot \text{м};$$

$$M_2^{\text{упр}} = \frac{C_2 \cdot \Delta_{\text{ст}}}{l^2} = \frac{700 \cdot 0.018}{4} = 3{,}15\,\text{кН} \cdot \text{м}.$$

Для определения статических реакций y_A и y_B составим следующие уравнения равновесия (рис. III.4.3, *а*):

$\sum M_B = 0$:

$$-y_A \cdot l - P \cdot l + G_1 \cdot \left(l - \frac{\Delta_{\text{ст}}}{2} \right) - G_2 \cdot \frac{\Delta_{\text{ст}}}{2} + G_3 \cdot \left(\frac{l}{2} - \Delta_{\text{ст}} \right) = 0. \qquad \text{(III.4.1)}$$

$\sum M_A = 0$:

$$y_B \cdot l - P \cdot l - G_1 \cdot \left(\frac{\Delta_{\text{ст}}}{2} \right) - G_2 \cdot \left(l + \frac{\Delta_{\text{ст}}}{2} \right) - G_3 \cdot \left(\frac{l}{2} + \Delta_{\text{ст}} \right) = 0. \qquad \text{(III.4.2)}$$

Из уравнения (III.4.1):

$$y_A = \frac{\left[-P \cdot l + G_1 \cdot \left(l - \frac{\Delta_{\text{ст}}}{2} \right) - G_2 \cdot \frac{\Delta_{\text{ст}}}{2} + G_3 \cdot \left(\frac{l}{2} - \Delta_{\text{ст}} \right) \right]}{l} =$$

$$= \frac{-4 + 79{,}82 - 0{,}27 + 99{,}1}{4} = 43{,}66 \text{ кН}.$$

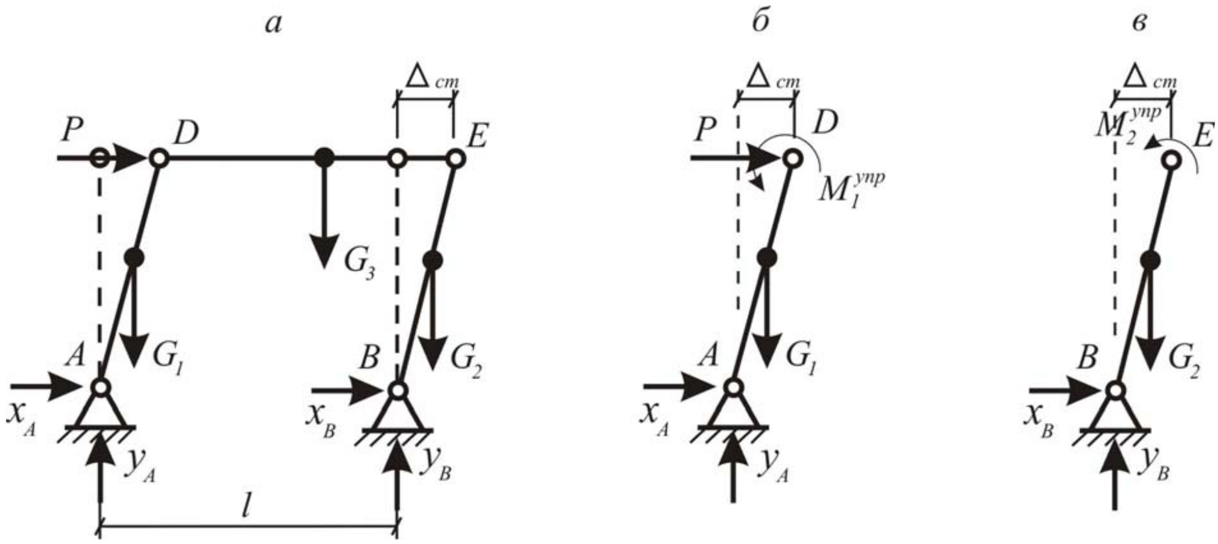


Рис. III.4.3

Из уравнения (III.4.2):

$$y_B = \frac{\left[P \cdot l + G_1 \cdot \left(\frac{\Delta_{\text{ст}}}{2} \right) + G_2 \cdot \left(l + \frac{\Delta_{\text{ст}}}{2} \right) + G_3 \cdot \left(\frac{l}{2} + \Delta_{\text{ст}} \right) \right]}{l} =$$

$$= \frac{4 + 0{,}18 + 120{,}27 + 100{,}9}{4} = 56{,}34 \text{ кН}.$$

Для определения горизонтальных реакций рассмотрим равновесие отдельно элементов *AD* и *BE* механической системы (см. рис. III.4.3 *б, в*):

$\sum M_D^{\text{лев}} = 0:$

$$x_A \cdot l - y_A \cdot \Delta_{\text{ст}} + G_1 \cdot \frac{\Delta_{\text{ст}}}{2} + M_1^{\text{упр}} = 0;$$

$$x_A = \frac{y_A \cdot \Delta_{\text{ст}} - G_1 \cdot \frac{\Delta_{\text{ст}}}{2} - M_1^{\text{упр}}}{l} = \frac{0,79 - 0,18 - 2,25}{4} = -0,41 \text{ кН};$$

$\sum M_E^{\text{прав}} = 0:$

$$x_B \cdot l - y_B \cdot \Delta_{\text{ст}} + G_2 \cdot \frac{\Delta_{\text{ст}}}{2} + M_2^{\text{упр}} = 0;$$

$$x_B = \frac{y_B \cdot \Delta_{\text{ст}} - G_2 \cdot \frac{\Delta_{\text{ст}}}{2} - M_2^{\text{упр}}}{l} = \frac{1,01 - 0,27 - 3,15}{4} = -0,6 \text{ кН}.$$

От внезапно приложенной силы *P* конструкция отклонится на величину $\Delta_{\text{дин}} = 2\Delta_{\text{ст}}$.

$$\Delta_{\text{дин}} = 1,8 \cdot 2 = 3,6 \text{ см}.$$

Для определения динамических реакций опор применим общее уравнение динамики для движения из отклоненного положения:

$$\sum \delta A_i^{\text{а}} + \sum \delta A_i^{\text{ф}} = 0.$$

Приложим к элементам системы силы инерции (рис. III.4.4).

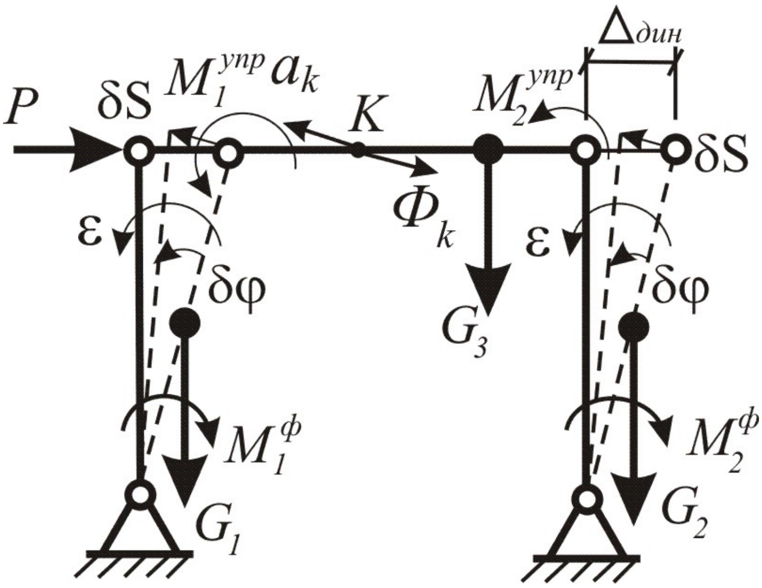


Рис. III.4.4

Сила инерции стержня, вращающегося вокруг точки A, приводится к паре, момент которой

$$M_1^{\text{ф}} = J_A \cdot \varepsilon = \frac{m_1 l^2}{3} \cdot \varepsilon,$$

где J_A – момент инерции стержня относительно вращения;

ε – угловое ускорение вращения.

Сила инерции стержня, который вращается вокруг точки B, также приводится к паре с моментом

$$M_2^{\text{ф}} = J_B \cdot \varepsilon = \frac{m_2 l^2}{3} \cdot \varepsilon.$$

Сила инерции стержня, движущегося поступательно с ускорением a_k, определяется вектором

$$\bar{\Phi}_k = -m_3 \cdot \bar{a}_k,$$

приложенным в центре масс этого стержня.

Сообщим системе возможное перемещение в направлении ее движения (см. рис. III.4.3) и составим общее уравнение динамики:

$$-P \cdot \delta S \cdot \cos\alpha - \Phi_k \cdot \delta S \cdot \cos\alpha - G_1 \frac{\delta S}{2} \cdot \sin\alpha - G_2 \frac{\delta S}{2} \cdot \sin\alpha -$$

$$-G_3 \cdot \delta S \cdot \sin\alpha + M_1^{\text{упр}} \cdot \delta\varphi + M_2^{\text{упр}} \cdot \delta\varphi - M_1^{\text{ф}} \cdot \delta\varphi - M_2^{\text{ф}} \cdot \delta\varphi = 0.$$

Найдем зависимости между возможными перемещениями механической системы и выразим через один параметр:

$$\delta\varphi = \frac{\delta S}{l},$$

тогда

$$-P \cdot \delta S - \Phi_k \cdot \delta S - G \cdot \frac{\Delta_{\text{дин}}}{l} \cdot \delta S + M_1^{\text{упр}} \cdot \frac{\delta S}{l} + M_2^{\text{упр}} \cdot \frac{\delta S}{l} -$$

$$-M_1^{\text{ф}} \cdot \frac{\delta S}{l} - M_2^{\text{ф}} \cdot \frac{\delta S}{l} = 0.$$

С учетом того, что

$$M_1^{\text{упр}} = C_1 \cdot \frac{\Delta_{\text{дин}}}{l}; \quad M_2^{\text{упр}} = C_2 \cdot \frac{\Delta_{\text{дин}}}{l}; \quad \Phi_k = m_3 \cdot a_k = m_3 \cdot \varepsilon \cdot l,$$

деля обе части равенства на δS, получаем:

$$-P - m_3 \cdot l \cdot \varepsilon + \frac{C_1 \Delta_{\text{дин}}}{l^2} + \frac{C_2 \Delta_{\text{дин}}}{l^2} - G \cdot \frac{\Delta_{\text{дин}}}{l} - \frac{m_1 l^2}{3l} \cdot \varepsilon - \frac{m_2 l^2}{3l} \cdot \varepsilon = 0,$$

где $G = \left(\frac{G_1}{2} + \frac{G_2}{2} + G_3 \right)$.

Отсюда

$$-m_3 \cdot l \cdot \varepsilon - \frac{m_1 l^2}{3l}\varepsilon - \frac{m_2 l^2}{3l}\varepsilon = P - \frac{\Delta_{\text{дин}}}{l^2}(C_1 + C_2 - G \cdot l)$$

и угловое ускорение поворота стоек рамы равно

$$\varepsilon = \frac{Pl^2 - \Delta_{\text{дин}}(C_1 + C_2 - G \cdot l)}{-l^3\left(m_3 + \frac{m_1}{3} + \frac{m_2}{3}\right)} =$$

$$= \frac{10^3 \cdot 4^2 - 3.6 \cdot 10^{-2}\left(500 \cdot 10^3 + 700 \cdot 10^3 - 75 \cdot 4 \cdot 10^3\right)}{-4^3\left(5 \cdot 10^3 + \frac{2 \cdot 10^3}{3} + \frac{3 \cdot 10^3}{3}\right)} = 0{,}0384 \text{ с}^{-2}.$$

Звено *DKE* движется поступательно, т.е. $\overline{a}_D = \overline{a}_k$.

Ускорение точки *D* равно касательному ускорению, т.к. начальная скорость равна нулю, а следовательно, равно нулю нормальное ускорение. Итак, ускорение точки *K:*

$$a_k = \varepsilon \cdot l = 0{,}0384 \cdot 4 = 0{,}15 \text{ м}/\text{с}^2 .$$

Найдем значение инерционной силы и моментов:

$$\Phi_k = m_3 \cdot a_k = 5000 \cdot 0{,}15 = 0{,}75 \text{ кН};$$

$$M_1^{\text{ф}} = \frac{m_1 l^2}{3} \cdot \varepsilon = \frac{2 \cdot 10^3 \cdot 4^2}{3} \cdot 0{,}0384 = 0{,}41 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

$$M_2^{\text{ф}} = \frac{m_2 l^2}{3} \cdot \varepsilon = \frac{3 \cdot 10^3 \cdot 4^2}{3} \cdot 0{,}0384 = 0{,}61 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

Определим значение моментов в упругих шарнирах:

$$M_1^{\text{упр}} = \frac{C_1 \Delta_{\text{дин}}}{l} = \frac{500 \cdot 10^3 \cdot 3.6 \cdot 10^{-2}}{4} = 4{,}5 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

$$M_2^{\text{упр}} = \frac{C_2 \Delta_{\text{дин}}}{l} = \frac{700 \cdot 10^3 \cdot 3.6 \cdot 10^{-2}}{4} = 6{,}3 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

Для определения динамических реакций опор *A* и *B* отбросим эти связи, а их действие заменим реакциями (рис. III.4.5,*а*).

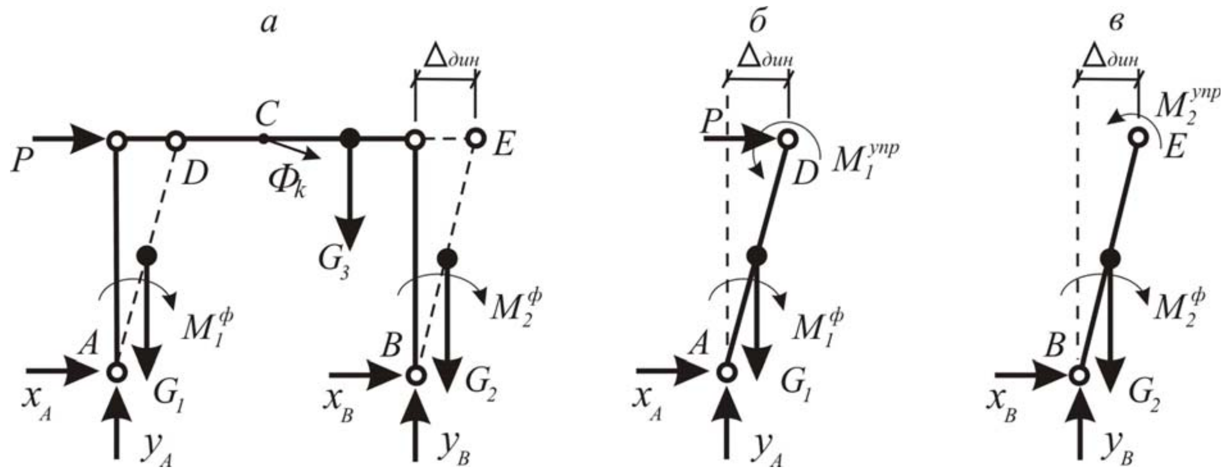


Рис. III.4.5

Приложим к системе заданную силу, силы тяжести стержней и силы инерции.

Для определения реакций y_A и y_B составим следующие уравнения равновесия (рис. III.4.5 *а*):

$\sum M_B = 0$:

$$-y_A \cdot l - P \cdot l - \Phi_k \cdot l + G_1 \cdot \left(l - \frac{\Delta_{\text{дин}}}{2} \right) - G_2 \cdot \frac{\Delta_{\text{дин}}}{2} + \\ + G_3 \cdot \left(\frac{l}{2} - \Delta_{\text{дин}} \right) - M_1^{\text{ф}} - M_2^{\text{ф}} = 0. \qquad \text{(III.4.3)}$$

$\sum M_A = 0$:

$$y_B \cdot l - P \cdot l - \Phi_k \cdot l - G_1 \cdot \left(\frac{\Delta_{\text{дин}}}{2} \right) - G_2 \cdot \left(l + \frac{\Delta_{\text{дин}}}{2} \right) - \\ - G_3 \cdot \left(\frac{l}{2} + \Delta_{\text{дин}} \right) - M_1^{\text{ф}} - M_2^{\text{ф}} = 0. \qquad \text{(III.4.4)}$$

Из уравнения (III.4.3):

$$y_A = \frac{\left[-P \cdot l - \Phi_k \cdot l + G_1 \cdot \left(l - \frac{\Delta_{дин}}{2} \right) - G_2 \cdot \frac{\Delta_{\text{дин}}}{2} + G_3 \cdot \left(\frac{l}{2} - \Delta_{\text{дин}} \right) - M_1^{\text{ф}} - M_2^{\text{ф}} \right]}{l} =$$

$$= \frac{-4 - 3 + 79{,}64 - 0{,}54 + 98{,}2 - 0{,}41 - 0{,}61}{4} = 42{,}32 \text{ кН}.$$

Из уравнения (III.4.4):

$$y_B = \frac{\left[P \cdot l + \Phi_k \cdot l + G_1 \cdot \left(\frac{\Delta_{\text{дин}}}{2}\right) + G_2 \cdot \left(l + \frac{\Delta_{\text{дин}}}{2}\right) + G_3 \cdot \left(\frac{l}{2} + \Delta_{\text{дин}}\right) + M_1^{\text{ф}} + M_2^{\text{ф}}\right]}{l} =$$

$$= \frac{4 + 3 + 0,36 + 120,54 + 101,8 + 0,41 + 0,61}{4} = 57,68 \text{ кН}.$$

Для определения горизонтальных реакций рассмотрим равновесие отдельно элементов *AD* и *BE* механической системы (рис. III.4.5 б, в):

$\sum M_D^{\text{лев}} = 0$:

$$x_A \cdot l - y_A \cdot \Delta_{\text{дин}} + G_1 \cdot \frac{\Delta_{\text{дин}}}{2} - M_1^{\text{ф}} + M_1^{\text{упр}} = 0;$$

$$x_A = \frac{M_1^{\text{ф}} + y_A \cdot \Delta_{\text{дин}} - G_1 \cdot \frac{\Delta_{\text{дин}}}{2} - M_1^{\text{упр}}}{l} =$$

$$= \frac{0,41 + 1,52 - 0,36 - 4,5}{4} = -0,73 \text{ кН}.$$

$\sum M_E^{\text{прав}} = 0$:

$$x_B \cdot l - y_B \cdot \Delta_{\text{дин}} + G_2 \cdot \frac{\Delta_{\text{дин}}}{2} - M_2^{\text{ф}} + M_2^{\text{упр}} = 0;$$

$$x_B = \frac{M_2^{\text{ф}} + y_B \cdot \Delta_{\text{дин}} - G_2 \cdot \frac{\Delta_{\text{дин}}}{2} - M_2^{\text{упр}}}{l} =$$

$$= \frac{0,61 + 2,08 - 0,61 - 6,3}{4} = -1,06 \text{ кН}.$$

Сопоставим статические и динамические реакции, значения которых приведены в табл. III.4.2

Таблица III.4.2

Реакция	Статически приложенная нагрузка	Внезапно приложенная нагрузка
X_A, кН	–0,41	–0,73
Y_A, кН	43,66	42,32
X_B, кН	–0,6	–1,06
Y_B, кН	56,34	57,68

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Тарг, С.М. Краткий курс теоретической механики [Текст] / С.М. Тарг. – М., 1995.

2. Яблонский, А.А. Курс теоретической механики [Текст]: ч.1 / А.А. Яблонский, В.М. Никифорова. – М., 1984.

3. Сборник заданий для курсовых работ по теоретической механике [Текст]: учеб. пособие /под ред. А.А. Яблонского. – М.: Наука,1998.

4. Бутенин, Н.В. Курс теоретической механики [Текст] / Н.В. Бутенин, Я.Л. Луниц, Д.Р. Меркин. – Т. 1. М., 1985.

5. Добронравов, В.В. Курс теоретической механики [Текст] / В.В. Добронравов, Н.Н. Никитин. – М., 1983.

6. Старженский, В.М. Теоретическая механика [Текст] / В.М. Старженский. – М., 1980.

7. Мещерский, И.В. Сборник задач по теоретической механике [Текст] / И.В. Мещерский. – М., 1986.

8. Сборник задач по теоретической механике [Текст] / под ред. К.С. Колесникова. – М., 1983.

9. Бать, М.И. Теоретическая механика в примерах и задачах [Текст]: ч.1/ М.И. Бать, Г.Ю. Джанелидзе, А.С. Кельзон. –. М., 1984.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Учебное издание

Шеин Александр Иванович
Зайцев Михаил Борисович
Кочеткова Майя Владимировна
Стародымов Иван Федорович

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА
Сборник заданий для выполнения расчетно-графических работ

Учебное пособие

В авторской редакции
Верстка Т.А. Лильп

Подписано в печать 10.11.14. Формат 60×84/16.
Бумага офисная «Снегурочка». Печать на ризографе.
Усл.печ.л. 8,25. Уч.-изд.л. 8,88. Тираж 80 экз.
Заказ №398.

Издательство ПГУАС.
440028, г. Пенза, ул. Германа Титова, 28.