МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«Пензенский государственный университет
архитектуры и строительства»
(ПГУАС)

И.А. Гарькина, А.М. Данилов

СБОРНИК ЗАДАЧ типовых расчетов и контрольных работ по математике для студентов-заочников технических вузов

Рекомендовано Учебно-методическим объединением вузов РФ по образованию
в области строительства в качестве учебного пособия
для студентов высших учебных заведений,
обучающихся по программе бакалавриата
по направлению 08.03.01 (270800) – «Строительство»

Пенза 2014

УДК 51 (07)
ББК 74.58:22.1я73
Г20

Рецензенты: кафедра высшей и прикладной математики ФГБОУ ВПО «Пензенский государственный университет» (зав. кафедрой – доктор физико-математических наук, профессор *И.В. Бойков*);
доктор физико-математических наук, профессор *О.А. Голованов* (Пензенский артиллерийский инженерный институт)

Гарькина И.А.
Г20 Сборник задач типовых расчетов и контрольных работ по математике для студентов-заочников технических вузов: учебное пособие для студентов- заочников / И.А. Гарькина, А.М. Данилов. – Пенза: ПГУАС, 2014. – 252 с.
ISBN 978-5-9282-1040-3

Содержит программу общего курса математики, примеры решения типовых задач, варианты заданий для контрольных работ, контрольные вопросы и тесты для самопроверки уровня теоретических и практических знаний, а также необходимые библиографические сведения.

Пособие подготовлено с учетом требований Федерального государственного образовательного стандарта третьего поколения на кафедре «Математика и математическое моделирование» и предназначено студентам-заочникам (квалификация выпускника – бакалавр) технических ВУЗов, обучающихся по направлению 08.03.01 (270800) *«Строительство»*).

ISBN 978-5-9282-1040-3

ПРЕДИСЛОВИЕ

Дисциплина «Математика» должна вооружить бакалавра математическими знаниями, необходимыми для изучения ряда общенаучных дисциплин и дисциплин профессионального цикла, создать фундамент математического образования, необходимый для получения профессиональных компетенций бакалавра-строителя, воспитать математическую культуру и понимание роли математики в различных сферах профессиональной деятельности; относится к математическому, естественнонаучному и общетехническому циклу (базовая часть).

Процесс изучения дисциплины направлен на формирование *компетенций:*

– владение культурой мышления, способность к обобщению, анализу, восприятие информации, постановка целей и выбор путей ее достижения (ОК-1);

– умение логически верно, аргументированно и ясно строить устную и письменную речь (ОК-2);

– использование основных законов естественнонаучных дисциплин в профессиональной деятельности, применение методов математического анализа и моделирования, теоретического и экспериментального исследования. (ПК-1);

– способность выявлять естественнонаучную сущность проблем, возникающих в ходе профессиональной деятельности, привлекать для их решения соответствующий математический аппарат (ПК – 2);

– владение основными законами геометрического формирования, построения и взаимного пересечения моделей плоскости и пространства, необходимыми для выполнения и чтения чертежей зданий, сооружений, конструкций, составления конструкторской документации и деталей (ПК-3);

– владение основными методами, способами и средствами получения, хранения, переработки информации, навыками работы с компьютером как средством управления информацией (ПК-5).

В результате изучения дисциплины студент должен:

– **знать**: *фундаментальные основы высшей математики, включая алгебру, геометрию, математический анализ, теорию вероятностей и основы математической статистики;*

– **уметь**: *самостоятельно использовать математический аппарат, содержащийся в литературе по строительным наукам, использовать* *математику при изучении других дисциплин, расширять свои математические познания;*

– **владеть:** *первичными навыками и основными методами решения математических задач из общеинженерных и специальных дисциплин.*

Настоящее пособие может служить практическим руководством для изучения общего курса математики студентами-заочниками, обучающимися по направлению – 08.03.01 (270800) *«Строительство»* с учетом требований Федерального государственного образовательного стандарта третьего поколения. Оно содержит программу общего курса математики, общие рекомендации студенту-заочнику по работе над курсом, контрольные задания (30 вариантов) с примерами решения, примерные вопросы к зачету и экзамену, рекомендуемый список литературы.

Авторы благодарны рецензентам: доктору физико-математических наук, профессору О.А. Голованову (Пензенский артиллерийский инженерный институт); доктору физико-математических наук, профессору И.В.Бойкову (зав. кафедрой «Высшая и прикладная математика» ФГБОУ ВПО «Пензенский государственный университет»), внимательно прочитавшим рукопись и сделавшим ряд ценных замечаний.

1. ОБЩИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ СТУДЕНТУ-ЗАОЧНИКУ ПО РАБОТЕ НАД КУРСОМ МАТЕМАТИКИ

Основной формой обучения студента-заочника является самостоятельная работа над учебным материалом, которая состоит из следующих элементов: изучение материала по учебникам, решение задач, выполнение контрольных работ. В помощь заочникам университет организует чтение лекций, практические занятия и лабораторные работы. Кроме того, студент может обращаться к преподавателю с вопросами для получения письменной или устной консультации (по графику деканата). Указания студенту по текущей работе даются и в процессе рецензирования контрольных работ. Однако студент должен помнить, что только при систематической и упорной самостоятельной работе помощь университета окажется достаточно эффективной. Завершающим этапом изучения отдельных частей курса математики является сдача экзамена и зачета в соответствии с учебным планом.

Лекции и практические занятия

Учебными планами предусматривается чтение лекций и проведение практических занятий, которые носят преимущественно обзорный характер. На них обращается внимание на общую схему построения отдельных разделов курса, указываются главные практические приложения теоретического материала, более подробно рассматриваются те вопросы программы, которые не достаточно полно отражены в рекомендуемых пособиях.

Для студентов, занимающихся в группах по вечерней системе, лекции и практические занятия имеют более систематический характер (занятия по математике проводятся ежедневно в течение 2-3 недель), но и они призваны оказывать только помощь студенту в его самостоятельной работе.

Работа над литературой

1. Изучение учебного материала рекомендуется осуществлять последовательно переходя от одного вопроса к другому после правильного понимания предыдущего (производя вычисления на бумаге).

2. Особое внимание следует обращать на основные понятия и определения; подробно разбирать примеры, поясняющие определения; научиться строить самостоятельно аналогичные примеры.

3. Научиться составлять схемы доказательств теорем с установлением необходимости предположений теоремы, и в каком месте доказательства используется данное предположение.

4. Письменное оформление работы должно быть аккуратным и в определенном порядке, чтобы избежать ошибок вследствие небрежных записей.

Контрольные работы

1. В процессе изучения курса математики в соответствии с учебным планом студент должен выполнить 3 контрольные работы. Рецензии на контрольные работы позволяют студенту судить о степени усвоения им соответствующего раздела курса, указывают на имеющиеся у него пробелы, помогают сформулировать вопросы для их постановки перед преподавателем.

2. Не рекомендуется присылать одновременно для проверки несколько контрольных работ: это не дает возможности рецензенту своевременно указать студенту на допущенные им ошибки и удлиняет срок рецензирования работ.

3. Прорецензированные контрольные работы вместе со всеми исправлениями и дополнениями, выполненными по требованию рецензента, следует сохранять. Без предъявления прорецензированных контрольных работ студент не допускается к сдаче зачета и экзамена.

4. Распределение контрольных работ устанавливается в соответствии с распределением материала по учебным годам и сообщается студентам дополнительно.

5. Прием контрольных работ преподавателями осуществляется по результатам индивидуальной защиты, в том числе *дистанционно* по электронной сети университета.

Решение задач

1. При решении задач необходимо обосновать каждый этап решения, исходя из теоретических положений курса.

2. Решение задач и примеров следует излагать подробно, вычисления располагать в строгом порядке, отделяя вспомогательные вычисления от основных.

3. Решение каждой задачи должно доводиться до ответа, требуемого условием, и по возможности в общем виде с выводом формулы. Затем в полученную формулу подставляют числовые значения (если они даны). В промежуточные вычисления не следует вводить приближенные значения корней, числа π и т.п.

4. Полученный ответ следует проверять способами, вытекающими из существа данной задачи.

Самопроверка

1. После изучения каждой темы следует воспроизводить по памяти определения, формулировки и доказательства теорем.

2. Приводимые в пособии вопросы для самопроверки необходимо использовать для проверки усвоения изученного материала. В случае необходимости надо дополнительно разобраться в учебном материале с решением задач.

3. Правильное решение задачи состоит не в применении механически заученных формул: умение решать задачи является необходимым, но не достаточным условием хорошего знания теории.

Консультации

1. Если в процессе работы над изучением теоретического материала или при решении задач у студента возникают вопросы, разрешить которые самостоятельно не удается (неясность терминов, формулировок теорем, отдельных задач и др.), то он может обратиться к преподавателю для получения от него письменной или устной консультации, в том числе *дистанционно*.

2. При возникновении вопросов студент должен точно указать, в чем он испытывает затруднения. Если он не разобрался в теоретических объяснениях, или в доказательстве теоремы, или в выводе формулы по учебнику, то нужно указать, какой это учебник, год его издания и страницу, где рассмотрен затрудняющий его вопрос. Если студент испытывает затруднение при решении задачи, то следует указать характер этого затруднения, привести предполагаемый план решения.

Правила выполнения и оформления контрольных работ

При выполнении контрольных работ необходимо строго придерживаться указанных ниже правил. Работы, выполненные без соблюдения этих правил, не зачитываются и возвращаются студенту для переработки.

1. Каждая контрольная работа должна быть выполнена в отдельной тетради в клетку чернилами любого цвета, кроме красного. Необходимо оставлять поля шириной 4-5 см для замечаний рецензента.

2. В заголовке работы на обложке тетради должны быть ясно написаны фамилия студента, его инициалы, учебный номер (шифр), название дисциплины, номер контрольной работы; здесь же следует указать название учебного заведения, дату отсылки в университет и адрес студента. В конце работы следует поставить дату ее выполнения и подпись студента.

3. В работу должны быть включены все задачи, указанные в задании, строго по предложенному варианту. Контрольные работы, содержащие не все задачи задания, а также задачи не своего варианта, не зачитываются.

4. Решения задач надо располагать в порядке возрастания их номеров, указанных в заданиях, сохраняя номера задач.

5. Перед решением каждой задачи надо полностью выписать ее условие. В том случае, если несколько задач, из которых студент выбирает задачи своего варианта, имеют общую формулировку, следует,

переписывая условие задачи, заменить общие данные конкретными, взятыми из соответствующего номера.

6. Решение задач следует излагать подробно и аккуратно, объясняя и мотивируя все действия по ходу решения и делая необходимые чертежи.

7. После получения прорецензированной работы студент должен исправить все отмеченные рецензентом ошибки и недочеты и выполнить все рекомендации рецензента.

Если рецензент предлагает внести в решения задач те или иные исправления или дополнения и прислать их для повторной проверки, то это следует сделать в короткий срок.

В случае незачета работы и отсутствия прямого указания рецензента о том, что студент может ограничиться представлением исправленных решений отдельных задач, вся работа должна быть выполнена заново.

При высылаемых исправлениях должна обязательно находиться прорецензированная работа и рецензия на нее. Поэтому рекомендуется при выполнении контрольной работы оставлять в конце тетради несколько чистых листов для всех дополнений и исправлений в соответствии с указаниями рецензента. Вносить исправления в сам текст работы после ее рецензирования запрещается.

8. Защита контрольных работ осуществляется в период сессии при представлении рецензии на каждую контрольную работу.

9. Возможна дистанционная защита контрольных работ.

Контрольные задания

Ниже приведены задания на предусмотренные учебным планом 3 контрольные работы (30 вариантов).

Номер варианта контрольного задания совпадает с порядковым номером фамилии в списке студентов группы.

В случае изменения учебного плана, предусматривающего другое число контрольных работ или в случае другого распределения материала, кафедра сообщает студентам об этих изменениях и дает соответствующие указания о порядке выполнения работ.

Зачеты и экзамены

Целью экзаменов и зачетов является выяснение усвоения вопросов программы и умения применять полученные знания к решению задач.

Предполагается точная формулировка определений, теорем и правил.

Рекомендуется подготовка к экзаменам и зачетам с использованием конспектов, основной и дополнительной литературы.

2. СОДЕРЖАНИЕ И ПРИМЕРНАЯ ПРОГРАММА БАЗОВОГО КУРСА

Линейная алгебра и элементы аналитической геометрии

Определители. Системы линейных уравнений. Формулы Крамера.

Матрицы, линейные операции над ними. Умножение матриц. Обратная матрица. Матричная запись и решение систем линейных уравнений.

Методы Гаусса, Жордана-Гаусса. Системы линейных уравнений общего вида. Теорема Кронекера-Капелли.

Векторы – отрезки, линейные операции над ними. Скалярное произведение векторов, его свойства. Векторное и смешанное произведения. Их свойства, выражения в координатах, применение.

Линия на плоскости, ее уравнение. Кривые второго порядка.

Прямая в пространстве, ее уравнения. Плоскость в пространстве, ее уравнения. Поверхность в пространстве. Поверхности второго порядка.

Математический анализ.
Дифференциальное исчисление функций одной переменной

Функция. Области ее определения и значений. Сложные и обратные функции. Основные элементарные функции, их свойства и графики.

Комплексные числа и действия над ними. Изображение комплексных чисел на плоскости. Модуль и аргумент комплексного числа. Алгебраическая и тригонометрическая формы комплексного числа. Показательная форма комплексного числа. Формула Эйлера. Корни из комплексных чисел.

Предел последовательности. Предел функции. Бесконечно малые величины. Бесконечно большие величины. Сравнение бесконечно малых величин. Первый и второй замечательные пределы. Правила предельного перехода. Раскрытие неопределенностей.

Непрерывные функции. Точки разрыва и их виды.

Производная функции. Геометрический смысл производной. Касательная и нормаль к линии. Дифференцирование функций. Правила дифференцирования. Производные сложной и обратной функций. Формулы дифференцирования основных элементарных функций. Логарифмическое дифференцирование. Производные неявных функций. Параметрически заданные функции и их дифференцирование. Дифференциал, геометрический смысл, свойства. Производные и дифференциалы высших порядков.

Применение дифференциального исчисления к исследованию функций.

Дифференциальное исчисление функций нескольких переменных

Частные производные. Полный дифференциал и его связь с частными производными. Применение полного дифференциала к приближенным вычислениям. Производные и дифференциалы высших порядков. Неявные функции. Теорема существования неявной функции. Дифференцирование неявной функции. Производная по направлению. Градиент. Линии уровня. Экстремум функции нескольких переменных. Метод наименьших квадратов.

Неопределенный и определенный интегралы. Несобственные интегралы

Первообразная, основные свойства. Неопределенный интеграл, свойства. Таблица интегралов. Методы интегрирования. Непосредственное интегрирование. Метод замены переменной (подстановки). Интегрирование по частям. Интегрирование рациональных функций путем разложения на простейшие дроби. Интегрирование выражений, содержащих тригонометрические функции. Универсальная тригонометрическая подстановка. Интегрирование иррациональных выражений.

Определенный интеграл. Задачи, приводящие к понятию определенного интеграла. Формула Ньютона-Лейбница. Вычисление определенного интеграла. Приложения определенных интегралов.

Несобственные интегралы. Свойства.

Кратные и криволинейные интегралы

Задача об объеме цилиндрического тела. Двойной интеграл, теорема существования, свойства. Теорема о среднем.

Вычисление двойных интегралов в декартовых и полярных координатах

Приложения двойных интегралов к задачам механики (масса, статические моменты, центр тяжести, моменты инерции плоской пластинки). Вычисление площади поверхности.

Масса неоднородного тела. Тройной интеграл. Вычисление тройных интегралов (при задании области интегрирования в декартовых, цилиндрических и сферических координатах). Применение тройных интегралов (вычисление статических моментов, моментов инерции пространственных тел, координат центра тяжести).

Криволинейный интеграл по длине дуги (первого рода), вычисление.

Масса кривой. Криволинейный интеграл по координатам (второго рода), физический смысл, вычисление. Формула Грина.

Условие независимости интеграла от линии интегрирования. Интегрирование полных дифференциалов. Формула Ньютона-Лейбница для криволинейных интегралов.

Применение криволинейных интегралов второго рода (вычисление площади, вычисление работы в потенциальном силовом поле).

Обыкновенные дифференциальные уравнения

Задачи, приводящие к дифференциальным уравнениям. Дифференциальные уравнения первого и второго порядков. Задача Коши. Теорема существования и единственности решения. Геометрическая интерпретация ДУ первого порядка.

Линейные дифференциальные уравнения высших порядков (однородные и неоднородные). Осциллятор.

Системы обыкновенных дифференциальных уравнений. Методы решения.

Числовые и функциональные ряды

Числовые ряды. Сумма ряда и сходимость. Необходимое условие сходимости. Действия с рядами. Ряды с неотрицательными членами. Достаточные признаки сходимости.

Знакопеременные ряды, ряды с комплексными членами. Абсолютная и условная сходимости. Признак Лейбница. Свойства абсолютно сходящихся рядов.

Функциональные ряды. Область сходимости. Равномерная сходимость. Признак Вейерштрасса. Свойства равномерно сходящихся рядов. Дифференцирование и интегрирование рядов.

Степенные ряды. Теорема Абеля. Круг сходимости. Ряды Тейлора и Маклорена. Разложение функций в степенные ряды. Приложения рядов.

Ряды Фурье. Элементы теории уравнений математической физики

Разложение функций по ортогональной системе функций. Формулы Фурье. Тригонометрические ортогональные системы функций и разложение функций по этим системам. Теорема о возможности разложения функции в ряд Фурье.

Элементы теории математической физики. Уравнение теплопроводности; волновое уравнение. Методы решения. Метод Фурье.

Теория вероятностей и основы математической статистики

Элементы комбинаторики. Классическая вероятность. Статистическая вероятность. Методы вычисления вероятностей. Схема Бернулли. Теоремы Пуассона и Муавра-Лапласа.

Дискретные случайные величины. Функция распределения, свойства. Математическое ожидание и дисперсия. Свойства.

Непрерывные случайные величины. Функция распределения. Плотность вероятностей. Их взаимосвязь и свойства. Математическое ожидание и дисперсия. Нормальное распределение и его свойства. Закон больших чисел.

Статистическое описание результатов наблюдений. Генеральная совокупность и выборка. Вариационный ряд. Гистограмма, эмпирическая функция распределения, выборочная средняя и дисперсия.

Точечные и интервальные оценки. Несмещенные, эффективные, состоятельные оценки. Погрешность оценки; доверительная вероятность и доверительный интервал. Определение необходимого объема выборки. Принцип максимального правдоподобия.

Функциональная зависимость и регрессия. Кривые регрессии, их свойства. Коэффициент корреляции, корреляционное отношение, их свойства и оценки.

Понятие о критериях согласия. Проверка гипотез. Проверка гипотезы о значении параметров нормального распределения.

3. РЕКОМЕНДУЕМАЯ ЛИТЕРАТУРА

Основная литература

1. Бугров Я.С., Никольский С.М. Высшая математика. Т.1. Элементы линейной алгебры и аналитической геометрии. – М.: Дрофа, 2004. – 288 с.
2. Бугров Я.С., Никольский С.М. Высшая математика. Т.2. Дифференциальное и интегральное исчисление. – М.: Дрофа, 2004. – 512 с.
3. Бугров Я.С., Никольский С.М. Высшая математика. Т.3. Дифференциальные уравнения. Кратные интегралы. Ряды. Функции комплексного переменного. – М.: Дрофа, 2004. – 512с.
4. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисления: учеб.пособие. Т.1, 2. – Изд.стер. –М.: Интеграл-Пресс, 2008. – 415 с.
5. Бермант А.Ф., Араманович И.Г. Краткий курс математического анализа: учеб. Пособие. –15-е изд., стер. – СПб.: Лань, 2009. – 736 с.
6. Данко П.Е., Попов А.Г., Кожевникова Т.Я. Высшая математика в упражнениях и задачах: учебное пособие для ВУЗов. Ч.1, 2. – М.: Оникс 21 век: Мир и образование, 2009. – 304 с (416 с).
7. Вентцель А.Д. Теория вероятностей: учебник для ВУЗов. – М.: Высшая школа, 2010. – 575 с.

Дополнительная литература

1. Воеводин В.В. Линейная алгебра. – СПб.: Лань, 2010. – 416 с.
2. Беклемишев Д.В., Беклемишева Л.А., Петрович А.Ю., Чурбанов И.А. Сборник задач по аналитической геометрии и линейной алгебре. – СПб.: Лань, 2011. – 496 с.
3. Бутузов В.Ф., Крутицкая Н.Ч., Шишкин А.А. Линейная алгебра в вопросах и задачах. М., Лань, 2010. – 256 с.
4. Бутузов В.Ф., Крутицкая Н.Ч., Медведев Г.Н., Шишкин А.А. Математический анализ в вопросах и задачах. – СПб.: Лань, 2010. – 480 с.
5. Берман Г.И. Сборник задач по курсу математического анализа. Решение типичных и трудных задач: учеб. пособие / Г.И.Берман. – Изд.3-е,стер. –СПб.: Лань, 2007. – 604 с.
6. Запорожец Г.И. Руководство к решению задач по математическому анализу: учеб. пособие. – Изд.6-е,стер. –СПб.: Лань, 2010. – 460 с.
7. Демидович Б.П., Моденов В.П. Дифференциальные уравнения. – СПб.: Лань, 2008. – 288 с.

8. Владимирский Б.М. Математика. Общий курс: учебник / Б.М. Владимирский, А.Б. Горстко, Я.М. Ерусалимский. –4-е изд., стер. – СПб.: Лань, 2008. – 957с.

9. Вентцель А.Д. Теория вероятностей и ее инженерные приложения. – М.: Академия, 2010. – 464 с.

10. Гмурман В.Е. Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике: учеб. пособие. – М.: Высшая школа, 2006 – 476 с.

11. Чистяков В.П. Курс теории вероятностей. – Спб.: Лань, 2003. – 269 с.

12. Зубков А.М., Севастьянов Б.А., Чистяков В.П. Сборник задач по теории вероятностей. – СПб.: Лань, 2009. – 320 с.

4. ВОПРОСЫ ДЛЯ САМОПРОВЕРКИ

Матрицы, определители, операции над ними

1. Что называется матрицей? Как определяются линейные операции над матрицами и каковы их свойства?
2. Что называется определителем? Каковы основные его свойства?
3. Что называется минором и алгебраическим дополнением?
4. Указать способы вычисления определителей.
5. Дать определение ранга матриц.
6. Что называется произведением двух матриц? Укажите условия существования произведения двух матриц. Вычислите произведение двух прямоугольных матриц.
7. Какая матрица называется единичной?
8. Какая матрица называется обратной для данной матрицы? Всегда ли существует обратная матрица? Определите обратную матрицу для данной матрицы третьего порядка.

Системы линейных алгебраических уравнений и методы их решения

1. Что называется матрицей и расширенной матрицей системы линейных уравнений?
2. Что называется решением системы линейных уравнений? Какие системы называются совместными, а какие – несовместными?
3. Сформулируйте теорему Кронекера-Капелли.
4. Приведите формулы Крамера. В каком случае они применимы?
5. При каком условии система линейных уравнений имеет единственное решение?
6. Опишите метод Гаусса решения и исследования систем линейных уравнений.
7. Какие неизвестные в системе линейных уравнений и в каком случае называют свободными, а какие базисными? Что называется общим решением системы линейных уравнений?
8. В чем состоит матричный способ решения систем линейных уравнений?

Линейное векторное пространство; размерность, базис.
Евклидово пространство.
Скалярное, векторное, смешанное произведения

1. Как определяется линейное (векторное) пространство?
2. Какие векторы называются коллинеарными, компланарными, равными?

3. Какие операции над векторами называются линейными и укажите свойства этих операций?

4. Дайте определения линейной зависимости и независимости векторов.

5. Что называется размерностью линейного пространства?

6. Что называется базисом линейного пространства?

7. Что называется вектором и модулем вектора?

8. Какой базис называется ортонормированным?

9. Как определяется базис на прямой, плоскости и в пространстве?

10. Дайте определение декартовой системы координат.

11. Что называется евклидовым пространством?

12. Как выражаются координаты вектора через координаты его начальной и конечной точек?

13. Приведите формулы деления отрезка в данном отношении.

14. Что называется скалярным произведением двух векторов? Укажите его свойства. Приведите формулу для определения скалярного произведения через координаты векторов-сомножителей в ортонормированном базисе.

15. Приведите формулы для вычисления длины вектора, угла между двумя векторами и расстояния между двумя точками в декартовой прямоугольной системе координат.

16. Дайте определения векторного произведения двух векторов. Укажите его основные свойства. Приведите формулу для определения векторного произведения через координаты векторов-сомножителей в ортонормированном базисе. Укажите геометрический смысл векторного произведения.

17. Что называется смешанным произведением трех векторов, каковы его свойства и как оно выражается через координаты векторов-сомножителей в ортонормированном базисе? Укажите геометрический смысл смешанного произведения.

18. Какому условию должны удовлетворять координаты трех векторов, чтобы их можно было принять за базис пространства?

19. Приведите формулы преобразования декартовых прямоугольных координат на плоскости.

20. Опишите полярную, цилиндрическую и сферическую системы координат.

Аналитическая геометрия на плоскости и в пространстве

1. Как в аналитической геометрии определяются точка, множества точек, линии, поверхности?

2. Как можно найти точку пересечения двух линий на плоскости, трех поверхностей, линии и поверхности?

3. Укажите характерную особенность уравнения цилиндрической поверхности с образующими, параллельными одной из координатных осей.

4. Как записываются параметрические уравнения прямой и плоскости?

5. Какие поверхности и линии называются алгебраическими. Что называется порядком алгебраической линии и алгебраической поверхности?

6. Что называется направляющим вектором прямой и направляющими векторами плоскости?

7. Что называется угловым коэффициентом прямой на плоскости и каков его геометрический смысл в декартовой прямоугольной системе координат?

8. Как записываются уравнения прямой, проходящей через две точки, в пространстве и на плоскости?

9. Как записываются уравнения плоскости, проходящей через три заданные точки?

10. Как вычисляются углы между двумя прямыми (на плоскости и в пространстве), между двумя плоскостями, между плоскостью и прямой?

11. Укажите условия параллельности и перпендикулярности двух прямых (на плоскости и в пространстве), двух плоскостей, прямой и плоскости.

12. Каков геометрический смыл неравенства первой степени с двумя и тремя переменными (на плоскости и в пространстве)?

13. Приведите канонические уравнения эллипса, гиперболы и параболы?

14. Дать определение фокуса, эксцентриситета, директрисы для эллипса, гиперболы и параболы. Какие прямые называются асимптотами гиперболы?

15. Укажите геометрический смысл эллипса, гиперболы и параболы.

16. Приведите канонические уравнения поверхностей второго порядка и их геометрическую иллюстрацию.

Линейные преобразования и операторы. Квадратичные формы

1. Что называется преобразованием пространства? Какие преобразования называются линейными?

2. Однородные и неоднородные преобразования.

3. Как определить матрицу для произведения двух линейных преобразований по их известным матрицам?

4. Дайте определение собственным значениям и собственным векторам линейного преобразования?

5. Что называется квадратичной формой и ее матрицей?

6. Как применяется теория квадратичных форм для приведения уравнения линии второго порядка к каноническому виду?

Комплексные числа

1. Приведите примеры комплексных чисел и укажите их действительные и мнимые части.

2. Дайте определение модуля и аргумента комплексного числа.

3. Запишите комплексное число в алгебраической, тригонометрической и показательной формах.

4. Приведите пример двух сопряженных комплексных чисел.

5. Укажите правила арифметических действий над комплексными числами.

6. Запишите формулу Муавра.

Введение в математический анализ

1. Изобразите числа на числовой оси.

2. Дайте определение переменной величины и области ее изменения на числовой оси.

3. Приведите определения предельных относительной и абсолютной погрешностей.

4. Приведите правило арифметических действий с приближенными числами.

5. Дайте определение функции, области ее определения и области значений.

6. Приведите способы задания функции.

7. Укажите примеры периодической, сложной, неявно заданной функций.

8. Приведите примеры элементарных функций.

9. Укажите способы преобразований графиков функций.

Предел и непрерывность

1. Дайте определения пределов последовательности, функции в точке и бесконечности.

2. Укажите связь предела функции в точке с понятиями пределов слева и справа.

3. Дайте определение бесконечно малой функции. Укажите ее основные свойства.

4. Укажите связь бесконечно малой и бесконечно большой функций.

5. Сформулируйте основные теоремы о пределах функций.

6. Приведите формулы для первого второго замечательных пределов.

7. Дайте определения непрерывности функции в точке.

8. Укажите виды точек разрыва функции.

9. Приведите основные свойства функций, непрерывных на отрезке.

10. Дайте определения порядка бесконечно малой и эквивалентных бесконечно малых.

Производная и дифференциал

1. Приведите определение производной; укажите ее геометрический и механический смысл.

2. Покажите на примере использование таблицы производных и формул производных суммы, произведения и частного.

3. Приведите правила дифференцирования сложных и неявных функций.

4. Проиллюстрируйте логарифмическое дифференцирование на примере.

5. Покажите на примере определение производной обратной функции.

6. Дайте определение дифференциала функции.

7. Покажите на графике связь между дифференциалом и производной.

8. Приведите определения производных и дифференциалов высших порядков.

9. Проиллюстрируйте приложения дифференциала к приближенным вычислениям.

10. Дайте геометрическую иллюстрацию теорем Ролля, Коши, Лагранжа.

11. Приведите правила раскрытия неопределенностей. Проиллюстрируйте использование правила Лопиталя.

12. Напишите формулу Тейлора. На примере покажите определение остаточного члена.

Приложения дифференциального исчисления к исследованию функций

1. На примере укажите области возрастания и убывания функции.

2. Приведите два правила определения точек экстремума функции.

3. Дайте геометрическую иллюстрацию недостаточности обращения в нуль производной в некоторой точке для того, чтобы эта точка была точкой экстремума.

4. Как определить наибольшее и наименьшее значения функции, дифференцируемой на отрезке?

5. На примере укажите интервалы выпуклости и вогнутости, точки перегиба функции.

6. Как определить поведение функции в бесконечности?

7. Приведите правила определения параметров асимптот.

8. На примере квадратичной функции приведите схему исследования и построения графика функции.

Интерполяция

1. Приведите интерполяционные формулы Лагранжа и Ньютона.

2. Проиллюстрируйте применение интерполяционных полиномов Ньютона для численного дифференцирования.

Функции нескольких переменных

1. На простейшем примере дайте геометрическую иллюстрацию частных производных, дифференциала, приращения функции двух переменных в некоторой точке.

2. На примере укажите линии равного уровня функции двух переменных. Приведите правило определения вектора-градиента.

3. Укажите связь вектора-градиента с производной по направлению.

4. Приведите правило применения полного дифференциала для вычисления приближенного значения функции.

5. Напишите формулу вычисления полной производной $\frac{dz}{dx}$ сложной функции $z = f(u.v); u = u(x), v = v(x)$.

6. Приведите формулу дифференцирования неявной функции.

7. Приведите необходимые и достаточные условия экстремума функции двух переменных.

8. Дайте определения безусловного и условного экстремумов.

9. Приведите правило определения наибольшего и наименьшего значений функции двух переменных в замкнутой области.

10. Дайте геометрический и аналитический смысл метода наименьших квадратов.

Неопределенный и определенный интегралы. Несобственные интегралы

1. Дайте определение первообразной функции.

2. Укажите геометрический смысл совокупности первообразных функций.

3. Приведите определение неопределенного интеграла.

4. Напишите таблицу основных интегралов.

5. Приведите простейшие свойства неопределенного интеграла.

6. Напишите формулу интегрирования по частям. Укажите типы интегралов, вычисление которых целесообразно производить с помощью интегрирования по частям.

7. Приведите пример интегрирования с помощью замены переменной.

8. Приведите правило разложения рациональной дроби на простейшие.

9. Укажите методы интегрирования простейших рациональных дробей I, II, III и IV типов.

10. Изложите методы нахождения интегралов, содержащих тригонометрические функции.

11. Дайте определение определенного интеграла и укажите его геометрический смысл.

12. Приведите основные свойства определенного интеграла.

13. Приведите формулу Ньютона-Лейбница для вычисления определенного интеграла.

14. Укажите формулу интегрирования по частям в определенном интеграле. Приведите пример замены переменной в определенном интеграле.

15. Приведите формулы для приближенного вычисления определенного интеграла.

16. Укажите формулы для вычисления длины дуги кривой.

17. Приведите формулу для вычисления объема тела по известным площадям поперечных сечений.

18. Приведите формулы для вычисления объема и поверхности тела вращения.

19. Дайте определение несобственного интеграла первого рода. Укажите его геометрический смысл, когда подынтегральная функция неотрицательна. Приведите примеры сходящегося и расходящегося интегралов первого рода.

20. Дайте определение несобственного интеграла второго рода. Укажите его геометрический смысл, когда подынтегральная функция неотрицательна. Приведите примеры сходящегося и расходящегося интегралов второго рода.

Обыкновенные дифференциальные уравнения. Системы дифференциальных уравнений

1. Дайте определения общего и частного решения дифференциального уравнения первого порядка. Сформулируйте задачу Коши и укажите ее геометрический смысл.

2. Укажите структуру дифференциального уравнения с разделяющимися переменными. Приведите метод нахождения его общего решения.

3. Укажите структуру однородного дифференциального уравнения первого порядка. Приведите метод нахождения его общего решения.

4. Укажите структуру линейного дифференциального уравнения первого порядка. Приведите метод нахождения его общего решения.

5. Приведите пример дифференциального уравнения в полных дифференциалах. Укажите метод нахождения его общего решения.

6. Какое решение дифференциального уравнения первого порядка называется особым?

7. Приведите методы решения дифференциальных уравнений вида: $y^n = f(x)$; $y'' = f(x, y')$; $y'' = f(y, y')$.

8. Приведите примеры линейного дифференциального уравнения n-порядка (однородного и неоднородного).

9. Приведите основные свойства частных решений линейного однородного дифференциального уравнения.

10. Дайте определение линейно зависимых и линейно независимых функций.

11. Приведите вид определителя Вронского. Чему он равен для линейно зависимых функций?

12. Приведите формулы для общего решения линейного однородного уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами для различных случаев корней характеристического уравнения.

13. Приведите теорему об общем решении линейного неоднородного дифференциального уравнения второго порядка.

14. Изложите правила нахождения частного решения линейного дифференциального уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами и правой частью специального вида.

15. Сформулируйте краевую задачу для дифференциального уравнения.

16. Приведите вид нормальной системы дифференциальных уравнений первого порядка. Сформулируйте задачу Коши.

17. Как свести нормальную систему дифференциальных уравнений первого порядка к одному дифференциальному уравнению?

18. Проиллюстрируйте на примере метод нахождения общего решения нормальной системы двух линейных однородных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами в случае простых корней характеристического уравнения.

19. Приведите пример решения нормальной системы двух однородных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами матричным способом.

20. Какое решение нормальной системы двух дифференциальных уравнений первого порядка называется устойчивым по Ляпунову?

21. Сформулируйте общее условие устойчивости решения системы.

Кратные и криволинейные интегралы

1. Что называется двойным интегралом от функции $f(x,y)$ по области D? Укажите его геометрический смысл.

2. Приведите основные свойства двойного интеграла.

3. Приведите формулы вычисления объема цилиндрического тела и площади плоской фигуры с помощью двойных интегралов.

4. Приведите формулу для вычисления двойного интеграла в полярных координатах.

5. Что называется тройным интегралом от функции $f(x,y,z)$ по пространственной области V? Укажите его механический смысл.

6. Как свести вычисление тройного интеграла к трехкратному.

7. Приведите формулы для вычисления тройного интеграла в цилиндрических и сферических координатах.

8. Приведите формулы для вычисления координат центра тяжести тела V с объемной плотностью $\gamma = \gamma(x,y,z)$.

9. Укажите геометрический смысл криволинейного интеграла по длине дуги плоской кривой.

10. Укажите механический смысл криволинейным интегралом по координатам.

11. Сформулируйте свойства криволинейного интеграла.

12. Запишите формулу Грина.

13. Укажите условия независимости криволинейного интеграла от пути интегрирования.

Ряды

1. Приведите необходимый признак сходимости.
2. Приведите достаточные признаки сходимости положительных рядов.
3. Сформулируйте теорему Лейбница для знакочередующихся рядов.
4. Приведите примеры абсолютно и условно сходящихся рядов.
5. Приведите примеры абсолютно и условно сходящихся рядов. Сформулируйте свойства абсолютно сходящихся рядов.
6. Дайте определение области сходимости функционального ряда.
7. Какой ряд называется равномерно сходящимся?
8. Сформулируйте признак Вейерштрасса абсолютной и равномерной сходимости ряда.
9. Приведите основные свойства равномерно сходящихся рядов.
10. Приведите теорему Абеля о сходимости степенных рядов.
11. Укажите формулу для вычисления радиуса сходимости степенного ряда.
12. Приведите условия разложимости функции в ряд Тейлора.
13. Сформулируйте теоремы об интегрировании и дифференцировании степенных рядов.
14. Как оценить точность вычисления суммы знакочередующегося ряда?
15. Как оценить точность вычисления приближенных значений функции по остаточному члену Тейлора в форме Лагранжа?
16. Изложите методы приближенного интегрирования дифференциальных уравнений с помощью степенных рядов.
17. Укажите примеры задач, приводящих к разложению функций в ряды Фурье.
18. Сформулируйте достаточные условия разложимости функции в ряд Фурье.
19. Приведите формулы вычисления коэффициентов ряда Фурье.
20. Приведите формулы вычисления коэффициентов ряда Фурье для четных и нечетных функций.
21. Представьте ряд Фурье в комплексной форме.
22. Какова связь между рядом Фурье и интегралом Фурье?

Дифференциальные уравнения с частными производными

1. Приведите пример дифференциального уравнения второго порядка с частными производными. Что является его решением?

2. Приведите основные типы уравнений математической физики.

3. Сформулируйте краевую задачу о колебаниях струны, закрепленной на концах.

4. Изложите метод Фурье нахождения решения краевой задачи о колебаниях струны, закрепленной на концах.

5. Приведите физический смысл уравнения теплопроводности. Изложите метод Фурье на нахождения решения уравнения теплопроводности.

6. Изложите метод сеток для нахождения решения краевой задачи для уравнений Лапласа.

Элементы теории вероятностей и математической статистики

1. Дайте классическое определение вероятности. В чем состоит различие между вероятностью и относительной частотой?

2. Дайте определение условной вероятности. Какие события называются независимыми?

3. Дайте определение произведения событий. Приведите теоремы умножения.

4. Приведите формулы полной вероятности и Бейеса.

5. Изложите схему Бернулли.

6. Приведите примеры использования локальной и интегральной теорем Муавра-Лапласа, теоремы Пуассона.

7. Дайте определение случайной (дискретной и непрерывной) величины. Приведите примеры.

8. Дайте определение функции распределения случайной величины и приведите ее свойства.

9. Дайте определение плотности распределения вероятностей и приведите ее свойства.

10. Как определяется математическое ожидание случайной величины? Укажите его свойства.

11. Дайте определение дисперсии случайной величины и укажите ее свойства.

12. Укажите связь между средне-квадратическим отклонением случайной величины и дисперсией.

13. Для какой случайной величины: непрерывной или дискретной рассматриваются биномиальное распределение или распределение Пуассона?

14. Приведите формулы плотности распределений для нормального, показательного и равномерного законов.

15. Как можно определить вероятность попадания случайной величины в заданный интервал при его распределении по нормальному закону?

16. Приведите примеры систем случайных величин.

17. Дайте определение многомерной функции распределения случайного вектора.

18. Проиллюстрируйте геометрически определение вероятности попадания пары случайных величин в заданный прямоугольник.

19. Что такое ковариации двух случайных величин?

20. Как вычисляется коэффициент корреляции? Укажите его основные свойства.

21. Сформулируйте центральную предельную теорему и теорему Ляпунова.

22. Укажите роль теоремы и неравенства Чебышева при оценке математического ожидания и вероятности случайной величины по выборке.

23. Что называется выборкой? Как определяется выборочная средняя?

24. Какие оценки называют точечными? Дайте определения несмещенной, состоятельной и эффективной оценок.

25. Какие оценки называются интервальными?

26. В каких случаях следует использовать точечную или интервальную оценку?

27. Для чего служит метод наибольшего правдоподобия? Как им пользоваться для дискретных и непрерывных случайных величин?

28. Как найти доверительные интервалы для оценки математического ожидания нормального распределения?

29. Приведите примеры задач, для решения которых используются статистические гипотезы.

30. Приведите примеры случайных процессов.

5. ВАРИАНТЫ КОНТРОЛЬНЫХ РАБОТ

5.1. Контрольная работа № 1

Задача 1. Даны векторы $\overline{a}$= (2,1,0); $\overline{b}$ =(1,–1,2); $\overline{c}$= (2, 2, 1); $\overline{d}$ =(3, 7, –7) в некотором базисе. Показать, что векторы $\overline{a},\overline{b},\overline{c}$ образуют базис трехмерного пространства, и найти координаты вектора $\overline{d}$ в этом базисе.

1.$\overline{a}=(1,2,3)$, $\overline{b}=(-1,3,2)$, $\overline{c}=(7,3,5)$, $\overline{d}=(6,10,7)$

2. $\overline{a}=(4,7,8)$, $\overline{b}=(9,1,3)$, $\overline{c}=(2,-4,1)$, $\overline{d}=(1,-13,-13)$

3. $\overline{a}=(8,2,3)$, $\overline{b}=(4,6,10)$, $\overline{c}=(3,2,1)$, $\overline{d}=(7,4,11)$

4. $\overline{a}=(10,3,1)$, $\overline{b}=(1,4,2)$, $\overline{c}=(3,9,2)$, $\overline{d}=(19,30,7)$

5. $\overline{a}=(2,4,1)$, $\overline{b}=(1,3,6)$, $\overline{c}=(5,3,1)$, $\overline{d}=(24,20,6)$

6. $\overline{a}=(1,7,3)$, $\overline{b}=(3,4,2)$, $\overline{c}=(4,8,5)$, $\overline{d}=(7,32,14)$

7. $\overline{a}=(1,-2,3)$, $\overline{b}=(4,7,2)$, $\overline{c}=(6,4,2)$, $\overline{d}=(14,18,6)$

8. $\overline{a}=(1,4,3)$, $\overline{b}=(6,8,5)$, $\overline{c}=(3,1,4)$, $\overline{d}=(21,18,33)$

9. $\overline{a}=(2,7,3)$, $\overline{b}=(3,1,8)$, $\overline{c}=(2,-7,4)$, $\overline{d}=(16,14,27)$

10. $\overline{a}=(7,2,1)$, $\overline{b}=(4,3,5)$, $\overline{c}=(3,4,-2)$, $\overline{d}=(2,-5,-13)$

11. $\overline{a}=(7,-3,5)$, $\overline{b}=(-1,3,2)$, $\overline{c}=(1,2,3)$, $\overline{d}=(6,10,17)$

12. $\overline{a}=(9,1,3)$, $\overline{b}=(4,7,8)$, $\overline{c}=(2,-4,1)$, $\overline{d}=(1,-13,-13)$

13. $\overline{a}=(4,6,10)$, $\overline{b}=(8,2,3)$, $\overline{c}=(3,-2,1)$, $\overline{d}=(7,4,11)$

14. $\overline{a}=(1,4,2)$, $\overline{b}=(10,3,1)$, $\overline{c}=(3,9,2)$, $\overline{d}=(19,30,7)$

15. $\overline{a}=(8,2,3)$, $\overline{b}=(4,6,10)$, $\overline{c}=(3,2,1)$, $\overline{d}=(7,4,11)$

16. $\overline{a}=(3,4,2)$, $\overline{b}=(1,7,3)$, $\overline{c}=(4,8,5)$, $\overline{d}=(7,32,14)$

17. $\overline{a}=(4,7,2)$, $\overline{b}=(1,-2,3)$, $\overline{c}=(6,4,2)$, $\overline{d}=(14,18,6)$

18. $\overline{a}=(6,8,5)$, $\overline{b}=(1,4,3)$, $\overline{c}=(3,1,4)$, $\overline{d}=(21,18,33)$

19. $\overline{a}=(3,1,8)$, $\overline{b}=(2,7,3)$, $\overline{c}=(2,-7,4)$, $\overline{d}=(16,14,27)$

20. $\overline{a}=(4,3,5)$, $\overline{b}=(7,2,1)$, $\overline{c}=(3,4,-2)$, $\overline{d}=(2,-5,-13)$

21. $\overline{a}=(-1,3,2)$, $\overline{b}=(1,2,3)$, $\overline{c}=(7,-3,5)$, $\overline{d}=(6,10,17)$

22. $\overline{a}=(4,7,8)$, $\overline{b}=(2,-4,-1)$, $\overline{c}=(4,7,8)$, $\overline{d}=(2,-13,-13)$

23. $\overline{a}=(3,-2,1)$, $\overline{b}=(4,6,10)$, $\overline{c}=(8,2,3)$, $\overline{d}=(7,4,11)$

24. $\overline{a}=(3,9,2)$, $\overline{b}=(1,4,2)$, $\overline{c}=(10,3,1)$, $\overline{d}=(19,30,7)$

25. $\overline{a}=(5,3,1)$, $\overline{b}=(1,3,6)$, $\overline{c}=(2,4,1)$, $\overline{d}=(24,20,6)$

26. $\overline{a}=(4,8,5)$, $\overline{b}=(3,4,2)$, $\overline{c}=(1,7,3)$, $\overline{d}=(1,32,14)$

27. $\overline{a}=(-1,2,4)$, $\overline{b}=(0,1,2)$, $\overline{c}=(1,0,3)$, $\overline{d}=(-2,4,7)$

28. $\overline{a}=(0,-1,2)$, $\overline{b}=(1,3,0)$, $\overline{c}=(2,-1,1)$, $\overline{d}=(6,12,-1)$

29. $\overline{a}=(1,-1,1)$, $\overline{b}=(2,1,-1)$, $\overline{c}=(0,3,2)$, $\overline{d}=(1,-4,4)$

30. $\overline{a}=(4,1,1)$, $\overline{b}=(2,0,-3)$, $\overline{c}=(-1,0,1)$, $\overline{d}=(-9,5,5)$

Задача 2

Дана система линейных уравнений. Доказать ее совместность и решить двумя способами:

1) методом Гаусса; 2) средствами матричного исчисления.

$-2x+z=-3$
1. $x-y+2z=4$
$2x+4y-3z=1$

$-2x+2z=0$
2. $x-y+2z=6$
$2x+4y-3z=-2$

$-2x+3z=5$
3. $x-y+2z=8$
$2x+4y-3z=-5$

$-2x+4z=12$
4. $x-y+2z=10$
$x+4y-3z=-10$

$-2x+5z=21$
5. $x-y+2z=12$
$2x+4y-3z=-11$

$-2x+6z=32$
6. $x-y+2z=14$
$2x+4y-3z=-14$

$-2x-y=-5$
10. $x-y+2z=1$
$2x+4y-3z=8$

$-2x-y+z=-4$
11. $x-y+2z=3$
$2x+4y-3z=5$

$-2x-y+2z=-1$
12. $x-y+2z=5$
$2x+4y-3z=2$

$-2x-y+3z=4$
13. $x-y+2z=7$
$2x+4y-3z=-1$

$-2x-y+4z=11$
14. $x-y+2z=9$
$2x+4y-3z=-4$

$-2x-y+5z=20$
15. $x-y+2z=11$
$2x+4y-3z=-7$

$-2x+7z=45$
7. $x-y+2z=16$
$2x+4y-3z=-17$

$-2x+8z=60$
8. $x-y+2z=18$
$2x+4y-3z=-20$

$-2x+9z=77$
9. $x-y+2z=20$
$2x+4y-3z=-23$

$-2x-y+6z=31$
16. $x-y+2z=13$
$2x+4y-3z=-10$

$-2x-y+7z=44$
17. $x-y+2z=15$
$2x+4y-3z=-13$

$-2x-y+8z=59$
18. $x-y+2z=17$
$2x+4y-3z=-16$

$-2x-y+9z=76$
19. $x-y+2z=19$
$2x+4y-3z=-19$

$-2x-2y=-8$
20. $x-y+2z=0$
$2x+4y-3z=12$

$-2x-2y+z=-7$
21. $x-y+2z=2$
$2x+4y-3z=9$

$-2x-2y+2z=-4$
22. $x-y+2z=4$
$2x+4y-3z=6$

$-2x-2y+3z=1$
23. $x-y+2z=6$
$2x+4y-3z=3$
$-2x-2y+4z=8$
24. $x-y+2z=8$
$2x+4y-3z=0$

$-2x-2y+5z=17$
25. $x-y+2z=10$
$2x+4y-3z=-3$

$-2x-2y+6z=28$
26. $x-y+2z=12$
$2x+4y-3z=-6$

$-2x-2y+7z=41$
27. $x-y+2z=14$
$2x+4y-3z=-9$

$-2x-2y+8z=56$
28. $x-y+2z=16$
$2x+4y-3z=-12$

$-2x-3y+9z=71$
29. $x-y+2z=18$
$2x+4y-3z=-15$
$-2x-3y=-13$
30. $x-y+2z=-1$
$2x+4y-3z=16$

Задача 3

1. Даны координаты вершин пирамиды $A_1A_2A_3A_4$.

Найти: 1) длины ребер A_1A_2, A_1A_3, A_1A_4; 2) угол между ребрами A_1A_2 и A_1A_4; 3) площадь грани $A_1A_2A_3$; 4) уравнения прямой A_1A_2; 5) уравнение плоскости $A_1A_2A_3$; 6) уравнения высоты, опущенной из вершин A_4 на грань $A_1A_2A_3$; 7) угол между ребром A_1A_4 и гранью $A_1A_2A_3$; 8) объем пирамиды (двумя способами). Сделать чертеж.

1. $A_1(1, 3, 6), A_2(2, 2, 1), A_3(-1, 0, 1), A_4(-4, 6, -3)$.
2. $A_1(-4, 2, 6), A_2(2, -3, 0), A_3(-10, 5, 8), A_4(-5, 2, -4)$.
3. $A_1(7, 2, 4), A_2(7, -1, -2), A_3(3, 3, 1), A_4(-4, 2, 1)$.
4. $A_1(2, 1, 4), A_2(-1, 5, -2), A_3(-7, -3, 2), A_4(-6, -3, 6)$.
5. $A_1(-1, -5, 2), A_2(-6, 0, -3), A_3(3, 6, -3), A_4(-10, 6, 7)$.
6. $A_1(0, -1, -1), A_2(-2, 3, 5), A_3(1, -5, -9), A_4(-1, -6, 3)$.
7. $A_1(5, 2, 0), A_2(2, 5, 0), A_3(1, 2, 4), A_4(-1, 1, 1)$.
8. $A_1(2, -1, -2), A_2(1, 2, 1), A_3(5, 0, -6), A_4(-10, 9, -7)$.
9. $A_1(-2, 0, -4), A_2(-1, 7, 1), A_3(4, -8, -4), A_4(1, -4, 6)$.
10. $A_1(14, 4, 5), A_2(-5, -3, 2), A_3(-2, -6, -3), A_4(-2, 2, -1)$.
11. $A_1(1, 2, 0), A_2(3, 0, -3), A_3(5, 2, 6), A_4(8, 4, -9)$.
12. $A_1(2, -1, 2), A_2(1, 2, -1), A_3(3, 2, 1), A_4(-4, 2, 5)$.
13. $A_1(1, 1, 2), A_2(-1, 1, 3), A_3(2, -2, 4), A_4(-1, 0, -2)$.
14. $A_1(2, 3, 1), A_2(4, 1, -2), A_3(6, 3, 7), A_4(7, 5, -3)$.
15. $A_1(1, 1, -1), A_2(2, 3, 1), A_3(3, 2, 1), A_4(5, 9, -8)$.
16. $A_1(1, 5, -7), A_2(-3, 6, 3), A_3(-2, 7, 3), A_4(-4, 8, -12)$.
17. $A_1(-3, 4, -7), A_2(1, 5, -4), A_3(-5, -2, 0), A_4(2, 5, 4)$.
18. $A_1(-1, 2, -3), A_2(4, -1, 0), A_3(2, 1, -2), A_4(3, 4, 5)$.
19. $A_1(4, -1, 3), A_2(-2, 1, 0), A_3(0, -5, 1), A_4(3, 2, -6)$.
20. $A_1(1, -1, 1), A_2(-2, 0, 3), A_3(2, 1, -1), A_4(2, -2, -4)$.
21. $A_1(1, 2, 0), A_2(1, -1, 2), A_3(0, 1, -1), A_4(-3, 0, 1)$.
22. $A_1(1, 0, 2), A_2(1, 2, -1), A_3(2, -2, 1), A_4(2, 1, 0)$.
23. $A_1(1, 2, -3), A_2(1, 0, 1), A_3(-2, -1, 6), A_4(0, -5, -4)$.
24. $A_1(3, 10, -1), A_2(-2, 3, -5), A_3(-6, 0, -3), A_4(1, -1, 2)$.
25. $A_1(-1, 2, 4), A_2(-1, -2, -4), A_3(3, 0, -1), A_4(7, -3, 1)$.
26. $A_1(0, -3, 1), A_2(-4, 1, 2), A_3(2, -1, 5), A_4(3, 1, -4)$.
27. $A_1(1, 3, 0), A_2(4, -1, 2), A_3(3, 0, 1), A_4(-4, 3, 5)$.
28. $A_1(-2, -1, -1), A_2(0, 3, 2), A_3(3, 1, -4), A_4(-4, 7, 3)$.
29. $A_1(-3, -5, 6), A_2(-1, 1, 3), A_3(2, -2, 4), A_4(-1, 0, -2)$.
30. $A_1(2, -4, -3), A_2(5, -6, 0), A_3(-1, 3, -3), A_4(-10, -8, 7)$.

Задача 4. Установить вид кривых, заданных уравнениями. Привести уравнения кривых к каноническому виду и изобразить их на чертеже

1
а) $10x^2 + 9y^2 - 90 = 0$;
б) $16x^2 - 9y^2 - 144 = 0$;
в) $x^2 + 2y^2 + 1 = 0$;
г) $y^2 - 10x + 10 = 0$;
д) $x^2 + y^2 + 2x + 1 = 0$;
е) $6y^2 - 7x - 84 = 0$.

2
а) $16x^2 - 9y^2 + 144 = 0$;
б) $2x^2 + 3y^2 - 18 = 0$;
в) $2x^2 + 2x + 3y + 5 = 0$;
г) $x^2 + y^2 - 2x - 6y + 10 = 0$;
д) $x^2 + y^2 + 2x - 1 = 0$;
е) $y^2 - 6y + x = 0$.

3
а) $2x^2 + 2y = 2(x - 1)^2 + y^2$;
б) $5x^2 - 4y^2 - 20 = 0$;
в) $x^2 + 5y^2 = 0$;
г) $9x^2 + 8y^2 - 72 = 0$;
д) $x^2 - 6x - 8y - 15 = 0$;
е) $x^2 + 2y^2 - 6x + 4y + 14 = 0$.

4
а) $x^2 + y^2 + 2x + 2 = 0$;
б) $25x^2 + 16y^2 = 0$;
в) $x^2 + y^2 - 6y + 6 = 0$;
г) $7x^2 + 4y^2 - 28 = 0$;
д) $9x^2 - 4y^2 + 8y - 40 = 0$;
е) $x^2 - x - y = 0$.

5
а) $2x^2 + 3y^2 + 4x + 8 = 0$;
б) $x^2 - 2y^2 - 4y - 2 = 0$;
в) $8x^2 - 9y + 11 = 0$;
г) $48y^2 - 72y - 30x + 107 = 0$;
д) $x^2 - y^2 - 4 = 0$;
е) $x^2 + y^2 - 16 = 0$.

6
а) $x^2 - y^2 - x + y = 0$;
б) $3x^2 + y^2 - 3 = 0$;
в) $x^2 + y^2 - 2x - 6y - 6 = 0$;
г) $x^2 + y^2 + 2x + 10y + 26 = 0$;
д) $x^2 + 2x + 3y = 0$;
е) $3x^2 + 10y^2 + 2 = 0$.

7
а) $x^2 + 2x + 2y = 0$;
б) $x^2 - y^2 + 4x - 13 = 0$;
в) $x^2 + y^2 - 6y = 0$;
г) $8x^2 + 9y^2 - 36y - 36 = 0$;
д) $x^2 + y^2 - 6y + 9 = 0$;
е) $y^2 - 4y + x = 0$.

8
а) $10x^2 + 9y^2 + 20x - 71 = 0$;
б) $9x^2 - 7y^2 - 54x + 70y - 157 = 0$;
в) $x^2 + y^2 + 4x - 6y - 12 = 0$;
г) $x^2 + y^2 + 4x + 6y + 13 = 0$;
д) $x^2 + y^2 - 6x + 12 = 0$;
е) $8y^2 + 2x + 4y = 0$.

9
а) $2y^2 + 3x + 3 = 0$;
б) $3x^2 + 12y^2 - 108 = 0$;
в) $9x^2 - 4y^2 + 36 = 0$;
г) $x^2 - y^2 + 2x = 0$;
д) $x^2 + y^2 - 2x - 4y + 5 = 0$;
е) $x^2 + y^2 - 6x - 10y + 19 = 0$.

10

а) $x^2 + y^2 - 9 = 0$;
б) $x^2 + y^2 + 9 = 0$;
в) $3x^2 + 5y^2 = 0$;
г) $y^2 - x^2 + 6y + 5 = 0$;
д) $x^2 + 3y^2 + 2x = 0$;
е) $3x^2 + 45y - 90 = 0$.

2.11

а) $x^2 - y^2 - x + y = 0$;
б) $3x^2 + y^2 - 3 = 0$;
в) $x^2 + y^2 - 2x - 6y - 6 = 0$;
г) $x^2 + y^2 + 2x + 10y + 26 = 0$;
д) $x^2 + 2x + 3y = 0$;
е) $3x^2 + 10y^2 + 2 = 0$.

12

а) $x^2 - y^2 + 8 = 0$;
б) $49x^2 + 25y^2 - 50y + 1200 = 0$;
в) $x^2 + y^2 - 8x - 10y + 25 = 0$;
г) $7x^2 + 5y^2 = 0$;
д) $x^2 + 14x - 9y = 0$;
е) $3x^2 + 3y^2 + 7 = 0$.

13

а) $x^2 - x - y + 2 = 0$;
б) $x^2 - y^2 + 2x - 6y - 8 = 0$;
в) $16x^2 - 4y^2 + 80y - 164 = 0$;
г) $16x^2 + 9y^2 + 90y + 81 = 0$;
д) $x^2 + y^2 - 2x + 4y = 0$;
е) $3x^2 + y^2 - 12y + 46 = 0$.

14

а) $y^2 - 2x - 2y + 7 = 0$;
б) $x^2 - 2y^2 - 8x - 2y + 16 = 0$;
в) $36x^2 + 4y^2 - 72y - 40x - 41 = 0$;
г) $x^2 + 2y^2 + 4x + 5 = 0$;
д) $16x^2 - 9y^2 - 144 = 0$;
е) $16x^2 + 9y^2 +144 = 0$.

15

а) $x^2 + 4y^2 - 6x - 391 = 0$;
б) $x^2 - y^2 - 4x - 6y - 6 = 0$;
в) $x^2 - 3y^2 - 2x = 0$;
г) $3x^2 + 3x + 2y = 0$;
д) $x^2 + y^2 + 10y + 20 = 0$;
е) $y^2 - 16y + 8x = 0$.

16

а) $x^2 - 6x - 8y + 49 = 0$;
б) $x^2 + y^2 - 16x - 18y + 129 = 0$;
в) $x^2 - 4y^2 - 16x + 32y + 2 = 0$;
г) $x^2 + y^2 - 6x + 4y + 9 = 0$;
д) $x^2 + y^2 + 2y + 2 = 0$;
е) $4x^2 + y^2 - 64x + 4y + 259 = 0$.

17 x

а) $9x^2 - y^2 - 144x + 6y + 531 = 0$;
б) $x^2 + y^2 + 16x + 12y + 100 = 0$;
в) $9x^2 + y^2 + 18x + 6y - 18 = 0$;
г) $x^2 + y^2 - 2x + 4y - 11 = 0$;
д) $x^2 + 2x - 2y = 0$;
е) $x^2 + y^2 + 2x + 2y + 3 = 0$.

18

а) $x^2 + y^2 - 2x - 4y - 20 = 0$;
б) $x^2 + y^2 - 6y - 3 = 0$;
в) $3x^2 - y^2 - 6x - 4y - 10 = 0$;
г) $5x^2 + y^2 - 10x + 4y - 16 = 0$;
д) $x^2 + x - y = 0$;
е) $y^2 + 2x - 2 = 0$.

19

а) $x^2 + y^2 - 6 = 0$;
б) $3x^2 - 2y^2 - 8y - 20 = 0$;
в) $x^2 + y^2 - 2y - 3 = 0$;
г) $x^2 + 2y^2 + 4x + 4y = 0$;
д) $x^2 - x - y - 1 = 0$;
е) $2y^2 + x + 4y + 3 = 0$.

20

а) $x^2 + x + 3y + 5 = 0$; б) $9x^2 - 4y^2 - 54x + 45 = 0$;
в) $2x + y - y^2 = 0$; г) $9x^2 + 4y^2 - 54x + 45 = 0$;
д) $x^2 + y^2 - 6x + 9 = 0$; е) $x^2 + y^2 + 20y + 84 = 0$.

21

а) $x^2 + y^2 + 6y + 9 = 0$; б) $x^2 + 2x + 6y + 9 = 0$;
в) $x^2 + y^2 + 5 = 0$; г) $x^2 + 4y^2 - 10x - 24y + 57 = 0$;
д) $x + 4y - y^2 - 4 = 0$; е) $y^2 - x^2 - 25 = 0$.

22

а) $x + x^2 - y = 0$; б) $x^2 - y^2 + 2x + 2y + 1 = 0$;
в) $2y - y^2 + 3x - 1 = 0$; г) $9x^2 - 18x + 4y^2 - 16y - 11 = 0$;
д) $x^2 + y^2 - 6y + 5 = 0$; е) $x^2 + y^2 + 3 = 0$.

23

а) $4x^2 + y^2 - 16x - 6y + 21 = 0$; б) $x^2 + y^2 + 10x - 56 = 0$;
в) $x^2 - y^2 + 10x - 56 = 0$; г) $x + y - 18y^2 + 5 = 0$;
д) $2x^2 - 4x + 3y = 0$; е) $x^2 + 10y^2 + 2x + 20y + 11 = 0$.

24

а) $x + 2y - x^2 + 3 = 0$; б) $2x^2 + 3y^2 - 8x + 6y + 5 = 0$;
в) $y^2 - 3x + 4y = 0$; г) $x^2 + y^2 - 6x + 6y + 27 = 0$;
д) $4x^2 - 9y^2 + 8x + 36y + 4 = 0$; е) $x^2 + (y +1)^2 = 0$.

25

а) $x^2 + 2y^2 + 4x + 4y = 0$; б) $9x^2 - 4y^2 - 8y - 40 = 0$;
в) $x^2 + y^2 + 20x = 0$; г) $x^2 - y^2 + 6y - 73 = 0$;
д) $x^2 - 2x - 2y = 0$; е) $9x^2 + 4y^2 - 18x - 16y + 61 = 0$.

26

а) $x^2 + y^2 - 2x - 6y + 11 = 0$; б) $x^2 + 4x + y^2 + 6y + 12 = 0$;
в) $x^2 - 8x - y + 15 = 0$; г) $x^2 - 4y^2 - 2x - 24y - 39 = 0$;
д) $4x^2 + 9y^2 + 40x + 108y + 388 = 0$; е) $x^2 + y^2 + 2x + 1 = 0$.

27

а) $x^2 + y^2 + 2y - 1 = 0$; б) $x^2 - 4x + y = 0$;
в) $3x^2 + 4y^2 - 6x + 15 = 0$; г) $5x^2 + 6y^2 + 10x - 12y - 19 = 0$;
д) $x^2 - 2y^2 - 4 = 0$; е) $2x - y^2 - 4y = 0$.

28

а) $x^2 + 4y^2 + 4x + 1 = 0$; б) $x^2 - y^2 - 2x - 4y = 0$;
в) $y^2 + y - x + 5 = 0$; г) $x^2 + 2x - y- 2 = 0$;
д) $x^2 + y^2 - 2y +5 = 0$; е) $x^2 - 2y^2 - 4x - 1 = 0$.

29

а) $y^2 - 2x - 1 = 0$; б) $x^2 + y^2 - 2x + 4y + 5 = 0$;
в) $x^2 - y^2 + 2x + 2y - 5 = 0$; г) $8x^2 - 2x + y^2 = 0$;
д) $x^2 + 3x - y +1 = 0$; е) $x^2 + y^2 - 6x + 2y + 6 = 0$.

30

а) $x^2 + y^2 + 3x + y = 0$;
б) $x^2 + 2y^2 - 4y = 0$;
в) $x^2 - 4y^2 - 8y - 4 = 0$;
г) $x^2 - y^2 + 2y + 1 = 0$;
д) $5x^2 + 4y^2 + 30x - 8y + 49 = 0$;
е) $2x^2 + 3y^2 - 8x + 6y + 17 = 0$.

Задача 5. Перейти к полярным координатам и построить линии

1. $(x^2 + y^2)^2 = 2a^2(x^2 - y^2)$
2. $\frac{x^2}{64} + \frac{y^2}{48} = 1$
3. $(x^2 + y^2)^2 = 18xy$
4. $x^2 + y^2 = 2ax$
5. $y^2 = \frac{2}{3}x$
6. $x^2 + y^2 = 4y$
7. $y^2 = 4ax$
8. $(x^2 + y^2)^3 = 4a^2x^2y^2$
9. $x^2 + y^2 + x + y = 0$
10. $(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2)$
11. $x^2 + y^2 = 8x$
12. $x^2 - y^2 = a^2$
13. $x^2 + y^2 = a^2$
14. $x^2 + y^2 = ay$
15. $y = x$
16. $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$
17. $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$
18. $y^2 = 6x$
19. $x^2 + y^2 = x$
20. $x^2 + y^2 = 5y$
21. $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$
22. $\frac{x^2}{4} - y^2 = 1$
23. $y^2 = x$
24. $\frac{x^2}{64} - \frac{y^2}{80} = 1$
25. $x^2 + y^2 = x + y$
26. $x^2 + y^2 + x - y = 0$

27. $x^2 + y^2 + 4y = 0$
28. $x^2 + y^2 - x + y = 0$
29. $x^2 + y^2 = -3x$
30. $x^2 + y^2 = -y$

Задача 6. Вычислить пределы, не пользуясь правилом Лопиталя

Вариант 1.

1) $\lim\limits_{x\to1}\frac{5x^2-3x-7}{4x^2-2x+8}$

2) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x^3+7x^2-2}{4x^3-4x+3}$

3) $\lim\limits_{x\to3}\frac{x^2-x-6}{2x^2+x-21}$

4) $\lim\limits_{x\to3}\frac{x^2+x-12}{\sqrt{x-2}-\sqrt{4-x}}$

5) $\lim\limits_{x\to1}\frac{\sqrt{1+3x^2}-2}{x^2-x}$

6) $\lim\limits_{x\to0}\frac{\mathrm{tg}^2\frac{x}{4}}{x^2}$

7) $\lim\limits_{x\to0}\frac{1-\cos3x}{x^2}$

8) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\mathrm{arctg}\frac{1}{x}}{3\sin\frac{1}{x}}$

9) $\lim\limits_{x\to1}\ln(3-2x)^{\frac{x}{1-x}}$

10) $\lim\limits_{x\to\infty}(1-x)\left(\sqrt{4+x^2}-x\right)$

Вариант 2.

1) $\lim\limits_{x\to1}\frac{3x^2+5x-1}{x^2+x+1}$

2) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{5x^6+5x^2-1}{4x^7+4x+5}$

3) $\lim\limits_{x\to7}\frac{x^2-49}{2x^2-18x+28}$

4) $\lim\limits_{x\to8}\frac{8+7x-x^2}{x^2-9x+8}$

5) $\lim\limits_{x\to4}\frac{\sqrt{3x+4}-4}{x^2-6x+8}$

6) $\lim\limits_{x\to6}\frac{x^2-9x+18}{\sqrt{3x-2}-4}$

7) $\lim\limits_{x\to0}\frac{\mathrm{arctg}^2x}{x\sin2x}$

8) $\lim\limits_{x\to0}\frac{5\sin^2\frac{x}{2}}{1-\cos x}$

9) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x-4}{x+5}\right)^{\frac{x}{2}}$

10) $\lim\limits_{x\to\infty}x\left(\ln(x+1)-\ln x\right)$

Вариант 3.

1) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3x^5-4x^2+1}{2x^5+3x^2-x}$

2) $\lim\limits_{x\to-1}\frac{2x^2+9x-3}{7x^2-2x-4}$

3) $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{3x^2+x-2}{3x^2+4x+1}$

4) $\lim\limits_{x\to4}\dfrac{\sqrt{2x+1}-3}{\sqrt{x-1}-\sqrt{3}}$

5) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{4+3x}-\sqrt{4-3x}}{7x}$

6) $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{1}{\sin x}-\dfrac{1}{\mathrm{tg}x}\right)$

7) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\mathrm{arctg}3x}{\sin 5x}$

8) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\cos 3x-1}{x\mathrm{tg}2x}$

9) $\lim\limits_{x\to0}\ln\left(\dfrac{3x-10}{3x+2}\right)^{2x-5}$

10) $\lim\limits_{x\to3}(2x-5)^{\frac{2x}{x-3}}$

Вариант 4.

1) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2+(x+3)^2}{2x^2+6}$

2) $\lim\limits_{x\to5}\dfrac{x^2+x-5}{x-3}$

3) $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{4x^2-4}{4+3x-x^2}$

4) $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{x^2+x-12}{x^2-3x}$

5) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{x+1}-1}{x^2+x}$

6) $\lim\limits_{x\to5}\dfrac{x^2-8x+15}{\sqrt{2x-1}-3}$

7) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos 4x}{\arcsin^2 x}$

8) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{3x\cdot\sin 2x}{\mathrm{tg}^2 3x}$

9) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{3n-1}{3n+1}\right)^n$

10) $\lim\limits_{x\to\infty}2x\left(\ln(x-2)-\ln x\right)$

Вариант 5.

1) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^4-3x^5+1}{2-4x^2+6x}$

2) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^3+\left(n+2)^3\right)}{n^3+4}$

3) $\lim\limits_{x\to5}\dfrac{2x^2-8x-10}{x^2-25}$

4) $\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{x^2+x-2}{x^2-x-6}$

5) $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x^2-3x+2}{\sqrt{5-x}-\sqrt{x+1}}$

6) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^{5x}-1}{\sin 3x}$

7) $\lim\limits_{x\to6}\dfrac{\sqrt{x-5}-\sqrt{7-x}}{x-6}$

8) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\mathrm{arctg}^3 8x}{x^3+4x}$

9) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos 8x}{1-\cos 4x}$

10) $\lim\limits_{x\to1}(3x-2))^{\frac{x}{x-1}}$

Вариант 6.

1) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^4-3x}{4x^3-2x-7}$ 2) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{5x^2-3x}{4x^3+2x^2}$

3) $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{2x^2-11x+5}{x^2-7x+10}$ 4) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{6x-x^2-5}$

5) $\lim\limits_{x\to -4}\dfrac{\sqrt{2x+9}-1}{x^2+2x-8}$ 6) $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{\sqrt{x+10}-\sqrt{4-x}}{2x^2-x-21}$

7) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 3x}{\arcsin^2 x}$ 8) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^3\dfrac{x}{2}}{2x^3}$

9) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+5}{x+4}\right)^{x+2}$ 10) $\lim\limits_{x\to\infty}2x\left(\ln(x+3)-\ln\left(x+4\right)\right)$

Вариант 7.

1) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\left(x+1\right)^3-x^3}{\left(x-1\right)^3+x^3}$ 2) $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{2x^2-3x+5}{3x^2+2x-5}$

3) $\lim\limits_{x\to -4}\dfrac{2x^2+9x+4}{x^2-x-20}$ 4) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x-3}{\sqrt{4x-3}-3}$

5) $\lim\limits_{x\to 9}\dfrac{\sqrt{x}-3}{\sqrt{2x-2}-4}$ 6) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 4x}{x\sin 3x}$

7) $\lim\limits_{x\to 0}x\cdot\sin 2x\,\mathrm{ctg}^2 5x$ 8) $\lim\limits_{x\to\infty}(x-4)\ln\dfrac{x+2}{x-4}$

9) $\lim\limits_{x\to 2}\left(2x-3\right)^{\frac{x}{x-2}}$ 10) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x\left(x+2\right)}-x\right)$

Вариант 8.

1) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{21+100n^2}{1+n^2+4n^3}$ 2) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{4x^2-x-1}{x^2+3x-5}$

3) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{3x^2-5x+2}{x^2-4x+3}$ 4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{9+x}-3}{x^2+x}$

5) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x^2+9}-3}{\sqrt{x^2+25}-5}$ 6) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 5x}{x\mathrm{tg}2x}$

7) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\mathrm{arctg}3x}{\sin 5x}$ 8) $\lim\limits_{x\to -10}\left(x+11\right)^{\frac{x+9}{x+10}}$

9) $\lim\limits_{x\to -\infty}\left(2-3x\right)\left[\ln\left(1-3x\right)-\ln\left(2-3x\right)\right]$

10) $\lim\limits_{x\to+\infty}(3x-4)\left(\sqrt{x^2-6}-x\right)$

Вариант 9.

1) $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{5x^2+3x+1}{x^2-7x-5}$

2) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5x^2+1}{(2x+1)^2}$

3) $\lim\limits_{x\to-6}\dfrac{2x^2+7x-30}{3x^2+20x+12}$

4) $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x-2}{\sqrt{4x+1}-3}$

5) $\lim\limits_{x\to5}\dfrac{\sqrt{x-1}-2}{\sqrt{2x-1}-3}$

6) $\lim\limits_{x\to0}\sin5x\cdot\mathrm{ctg}3x$

7) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin5x}{\mathrm{arctg}6x}$

8) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos3x}{x\mathrm{tg}3x}$

9) $\lim\limits_{x\to\infty}x\ln\dfrac{2x-5}{2x+5}$

10) $\lim\limits_{x\to1}(3-2x)^{\frac{2x}{x-1}}$

Вариант 10.

1) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1000x^3+3x^2}{0{,}001x^4-10x^3+1}$

2) $\lim\limits_{x\to7}\dfrac{x^2-3x-8}{x^2+2x+7}$

3) $\lim\limits_{x\to-4}\dfrac{3x^2+10x-8}{4x^2+15x-4}$

4) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{3-x}-\sqrt{3+x}}{5x}$

5) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\sqrt{5x+4}-3}{\sqrt{2x-1}-1}$

6) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin^2 3x\cdot\mathrm{ctg}2x}{x}$

7) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin12x}{\mathrm{arctg}3x}$

8) $\lim\limits_{x\to-2}(4x+9)^{\frac{3x+5}{x+2}}$

9) $\lim\limits_{x\to\infty}(3x+2)\left[\ln(x+3)-\ln(x+4)\right]$

10) $\lim\limits_{x\to+\infty}x\left(\sqrt{3+x^2}-x\right)$

Вариант 11.

1) $\lim\limits_{x\to5}\dfrac{2x^2-3x+5}{3x^2+2x-5}$

2) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+1)^3-n^3}{(n-1)^3+n^3}$

3) $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{3x^2-5x+2}{x^2-4x+3}$

4) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{9+x}-3}{x^e+x}$

5) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{x^e+9}-3}{\sqrt{x^e+25}-5}$

6) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos5x}{x\cdot\mathrm{tg}2x}$

7) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\arcsin3x}{5x}$

8) $\lim\limits_{x\to-10}(x+11)^{\frac{x+9}{x+10}}$

9) $\lim\limits_{x\to\infty}(2-3x)\left[\ln(1-3x)-\ln(2-3x)\right]$

10) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{\sin 2x}-\dfrac{1}{\mathrm{tg}2x}\right)$

Вариант 12.

1) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^3-5x^2+2}{2x^3+5x^2-x}$

2) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{3x^3-2x+1}{5x^2-x+2}$

3) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{2x^2+3x+1}{2x^2+5x+3}$

4) $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{3x^2-14x-5}{x^2-2x-15}$

5) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt{2x+3}-3}{\sqrt{x-2}-1}$

6) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{3x-2}-2}{\sqrt{2x+5}-3}$

7) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2\mathrm{ctg}5x}{\sin 2x}$

8) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\mathrm{arctg}7x}{4x}$

9) $\lim\limits_{x\to\infty}(2x+1)\left[\ln(x+3)-\ln x\right]$

10) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+2}{x+4}\right)^{x+4}$

Вариант 13.

1) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{5x^2-3x+1}{4x^2+2x-9}$

2) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3n^2+15n}{4n^3+n^2+1}$

3) $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{x^2-14x+45}{x^2-6x+5}$

4) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt{5x+1}-4}{x-3}$

5) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{2-\sqrt{x}}{\sqrt{6x+1}-5}$

6) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{1-x}-\dfrac{3}{1-x^3}\right)$

7) $\lim\limits_{x\to 0}x\cdot\mathrm{ctg}5x$

8) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 2x}{x\cdot\mathrm{tg}3x}$

9) $\lim\limits_{x\to\infty}(x+3)\left[\ln(x+1)-\ln(x-2)\right]$

10) $\lim\limits_{x\to -1}(5+4x)^{\frac{x}{x+1}}$

Вариант 14.

1) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^4+5x^2-3}{3x^3-2x+1}$

2) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2+3x-1}{3x^2+x-5}$

3) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^2+7x+10}{2x^2+9x+10}$

4) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{\sqrt{3+2x}-\sqrt{x+4}}{3x^2-4x+1}$

5) $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{1-\sqrt{x-4}}{2-\sqrt{2x-6}}$

6) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos^3 x-\cos^5 x}{x^2}$

7) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x}{\arcsin 3x}$

8) $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{x(x+2)}-x)$

9) $\lim\limits_{x\to\infty}(x-5)\left[\ln(x-3)-\ln x\right]$

10) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+4}{x}\right)^{5x+1}$

Вариант 15.

1) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{5x^2-3x-7}{4x^2-2x+8}$

2) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2n^3-7n^2-2}{6n^3-4n+3}$

3) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-x-6}{2x^2+x-21}$

4) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2+x-12}{\sqrt{x-2}-\sqrt{4-x}}$

5) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{1+3x^2}-2}{x^2-x}$

6) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\mathrm{tg}^2\,\dfrac{x}{4}}{x^2}$

7) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 3x}{x^2}$

8) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x}{1+x}\right)^{x}$

9) $\lim\limits_{x\to 1}\ln(3-2x)^{\frac{x}{1-x}}$

10) $\lim\limits_{x\to\infty}(1-x)(\sqrt{4+x^2}-x)$

Вариант 16.

1) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{4x^3-2x+1}{2x^3+3x^2-2}$

2) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3-7x+x^2}{2+2x+x^3}$

3) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{2x^2-7x-4}{2x^2-13x+20}$

4) $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{x^2+10x+21}{x^2+8x+15}$

5) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{3-\sqrt{x+11}}{2-\sqrt{x+6}}$

6) $\lim\limits_{x\to -5}\dfrac{\sqrt{9+x}-2}{\sqrt{4-x}-3}$

7) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 6x}{1-\cos 2x}$

8) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 4x}{2x\,\mathrm{tg}x}$

9) $\lim\limits_{x\to\infty}(3x+5)\left[\ln(x+5)-\ln x\right]$

10) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x-1}{2x+1}\right)^{2x}$

Вариант 17.

1) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^3+7x^2-2}{6x^3-4x+3}$

2) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{3x^2-5x+1}{6x^2+3x-4}$

3) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2+2x-15}{x^2-2x-3}$

4) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^2+x-2}{x^2-x-6}$

5) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2+x-12}{\sqrt{x-2}-\sqrt{1-x}}$

6) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt{x+1}-2}{\sqrt{x-2}-1}$

7) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x^2\,\dfrac{x}{9}}{x^2}$ 8) $\lim\limits_{x\to 0} x\cdot\sin 3x\cdot\mathrm{ctg}^2 2x$

9) $\lim\limits_{x\to 1}(3-2x)^{\frac{x}{1-x}}$ 10) $\lim\limits_{x\to\infty}(3x-2)\left[\ln(x-1)-\ln(x+1)\right]$

Вариант 18.

1) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{9x^5+4x^4+2}{3x^5+2x-1}$ 2) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^4-3x^2+2}{5x^4-x^3-3x}$

3) $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{2x^2-11x+5}{x^2-7x+10}$ 4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{9+x}-3}{x^2+x}$

5) $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{\sqrt{x-1}-2}{\sqrt{2x-1}-3}$ 6) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 10x}{x\cdot\mathrm{tg}2x}$

7) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin 7x}{5x}$ 8) $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1})$

9) $\lim\limits_{x\to 2}(2x-3)^{\frac{x}{x-2}}$ 10) $\lim\limits_{x\to\infty}(x+5)\left[\ln(2x-3)-\ln(2x+3)\right]$

Вариант 19.

1) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1+4x-x^2}{x+3x^2+2x^4}$ 2) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2+4x-5}{6x^2-2x+1}$

3) $\lim\limits_{x\to -4}\dfrac{x^2+x-12}{x^2+2x-8}$ 4) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-3x+2}{2x^2-5x+2}$

5) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x^2+4}-2}{\sqrt{x^2+16}-4}$ 6) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3x}{\sqrt{5+x}-\sqrt{5-x}}$

7) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\sin 2x}{1-\cos x}$ 8) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin 5x}{10x}$

9) $\lim\limits_{x\to 5}\left(\dfrac{x}{x-5}-\dfrac{2x^2}{x^2-25}\right)$ 10) $\lim\limits_{x\to\infty}(2x+3)\left[\ln(x+2)-\ln x\right]$

Вариант 20.

1) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2+2x-9}{2x^2-5x+6}$ 2) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-x-2}{x^2+x-6}$

3) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1-4n-n^4}{n+3n^2+2n^4}$ 4) $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{\sqrt{x+10}-\sqrt{4-x}}{2x^2-x-21}$

5) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^2-4}{\sqrt{1-4x}-3}$

6) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x-\cos^5 x}{x^2}$

7) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\mathrm{arctg}2x}{5x}$

8) $\lim\limits_{x\to 3}(10-3x)^{\frac{2x}{x-3}}$

9) $\lim\limits_{x\to \infty}(x+2)\left[\ln(2x-3)-\ln(2x+1)\right]$

10) $\lim\limits_{x\to 3}\left(\dfrac{1}{x-3}-\dfrac{6}{x^2-9}\right)$

Вариант 21.

1) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{5x^2+3x+1}{x^2-7x+5}$

2) $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{5n^2+1}{(2n+1)^2}$

3) $\lim\limits_{x\to -6}\dfrac{2x^2+7x-30}{3x^2+20x++12}$

4) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x-2}{\sqrt{4x+1}-3}$

5) $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{\sqrt{x-1}-2}{\sqrt{2x-1}-3}$

6) $\lim\limits_{x\to 0}\sin 5x\cdot\mathrm{ctg}3x$

7) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{5x}{\mathrm{arctg}6x}$

8) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x}\left(\dfrac{1}{\sin 3x}-\dfrac{1}{\mathrm{tg}3x}\right)$

9) $\lim\limits_{x\to \infty}x\left[\ln(2x-5)-\ln(2x+5)\right]$

10) $\lim\limits_{x\to 1}(3-2x)^{\frac{2x}{x-1}}$

Вариант 22.

1) $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{10x^5-2x^2+5}{5x^2+2x-1}$

2) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{4x^3-2x+3}{x+5}$

3) $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{x^2-6x+5}{x^2-4x-5}$

4) $\lim\limits_{x\to 6}\dfrac{x^2-4x-12}{x^2-8x+12}$

5) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{\sqrt{2x+3}-1}{\sqrt{5+x}-2}$

6) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\,\mathrm{tg}5x}{1-\cos 4x}$

7) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x(1-\cos 4x)}{x^2}$

8) $\lim\limits_{x\to \infty}\left(\dfrac{x^3}{x^2-1}-x\right)$

9) $\lim\limits_{x\to \infty}\left[x\left(\ln(x+2)-\ln x\right)\right]$

10) $\lim\limits_{x\to 2}(3-x)^{\frac{x}{2-x}}$

Вариант 23.

1) $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{3n^5-4n^2+1}{2n^5+3n^2-n}$

2) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{3x^2+x-2}{3x^2+4x+1}$

3) $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{2x^2+9x-3}{7x^2-2x+4}$

4) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{4+3x}-\sqrt{4-3x}}{7x}$

5) $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{1}{\sin x}-\dfrac{1}{\operatorname{tg}x}\right)$

6) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\operatorname{arctg}3x}{5x}$

7) $\lim\limits_{x\to\infty}(2x-5)\left[\ln(3x-10)-\ln(2+3x)\right]$

8) $\lim\limits_{x\to3}(2x-5)^{\frac{2x}{x-3}}$

9) $\lim\limits_{x\to4}\dfrac{\sqrt{2x+1}-3}{\sqrt{x-1}-\sqrt{3}}$

10) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\cos3x-1}{x\cdot\operatorname{tg}2x}$

Вариант 24.

1) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{3x^2+4x+1}{x^3-2x-1}$

2) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{9x^3-4x^2+1}{6x^2+3x+2}$

3) $\lim\limits_{x\to6}\dfrac{2x^2-9x-18}{x^2-7x+6}$

4) $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{3x^2-8x-3}{x^2-x-6}$

5) $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{\sqrt{3x+10}-4}{x-2}$

6) $\lim\limits_{x\to0}\sin5x\cdot\operatorname{ctg}15x$

7) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sin\frac{1}{x}}{\operatorname{tg}\frac{1}{3}x}$

8) $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{x+4}-\sqrt{x})$

9) $\lim\limits_{x\to\infty}(x+4)\left[\ln(x+7)-\ln(x-3)\right]$

10) $\lim\limits_{x\to1}(3x-2)^{\frac{5x}{x-1}}$

Вариант 25.

1) $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{1+2x-x^2}{x+3}$

2) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2-4x+2}{6x^2+2x-4}$

3) $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x^2-x-2}{x^2-5x+6}$

4) $\lim\limits_{x\to4}\dfrac{x^2-3x-4}{x^2-2x-8}$

5) $\lim\limits_{x\to-4}\dfrac{\sqrt{x+12}-\sqrt{4-x}}{x^2+2x-8}$

6) $\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{\sqrt{2-x}-\sqrt{x+6}}{x^2-x-6}$

7) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x^2}{1-\cos6x}$

8) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\operatorname{arctg}11x}{7x}$

9) $\lim\limits_{x\to\infty}(2x+3)\left[\ln(x+2)-\ln x\right]$

10) $\lim\limits_{x\to2}(2x-3)^{\frac{3x}{x-2}}$

Вариант 26.

1) $\lim\limits_{x\to -4}\dfrac{x^2+7x+9}{2x^2-5x-3}$

2) $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{(n+1)^3-2n^4}{(n+1)^3+n^4}$

3) $\lim\limits_{x\to -5}\dfrac{x^2+2x-15}{x^2+7x+10}$

4) $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{\sqrt{5x}-x}{x-5}$

5) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x^2+4}-2}{\sqrt{x^2+16}-4}$

6) $\lim\limits_{x\to 0}x\sin 2x\cdot \mathrm{ctg}^2 3x$

7) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin 5x}{3x}$

8) $\lim\limits_{x\to -2}(3x+7)^{\frac{5x}{4-x^2}}$

9) $\lim\limits_{x\to \infty}(x+2)\left[\ln(3-2x)-\ln(4-2x)\right]$

10) $\lim\limits_{x\to \infty}(\sqrt{x^2+1}-x)$

Вариант 27.

1) $\lim\limits_{x\to 7}\dfrac{x^2-3x-8}{x^2+2x+7}$

2) $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{100n^3+3n^2}{0{,}001n^4-100n^3+1}$

3) $\lim\limits_{x\to -4}\dfrac{3x^2+10x-8}{4x^2+15x-4}$

4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{3-x}-\sqrt{3+x}}{5x}$

5) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{5x+4}-3}{\sqrt{2x-1}-1}$

6) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2 3x\cdot \mathrm{ctg} 2x}{x}$

7) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{5x}{\mathrm{arctg} 3x}$

8) $\lim\limits_{x\to \infty}(x\sqrt{3+x^2}-x)$

9) $\lim\limits_{x\to -2}(4x+9)^{\frac{3x+5}{x+2}}$

10) $\lim\limits_{x\to \infty}(3x+2)\left[\ln(x+3)-\ln(x+4)\right]$

Вариант 28.

1) $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{4x^5-3x^2+8}{2x^6+x^3-x}$

2) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{8x^3-4x^2+11}{2x^3+2x-5}$

3) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{3x^2-4x+1}{x^2-3x+2}$

4) $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{x^2-2x-15}{2x^2-7x-15}$

5) $\lim\limits_{x\to 9}\dfrac{\sqrt{2x+7}-5}{3-\sqrt{x}}$

6) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{2-\sqrt{x}}{\sqrt{6x+1}-5}$

7) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x-\cos^3 x}{x\sin 2x}$

8) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\mathrm{arctg} 6x}{5x}$

9) $\lim\limits_{x\to \infty}(3x-2)\left[\ln(x-2)-\ln(x+1)\right]$

10) $\lim\limits_{x\to 3}(2x-5)^{\frac{3x}{x-3}}$

Вариант 29.

1) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{3x^3+8x-2}{x^3-2x^2+1}$ 2) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{7x^3-4x^2+3}{x^4+1}$

3) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{3x^2-x-2}{3x^2-4x+1}$ 4) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2x^2+5x-7}{3x^2-x-2}$

5) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+3x}-\sqrt{1-2x}}{x+x^2}$ 6) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x-3}{\sqrt{3x}-3}$

7) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 8x}{1-\cos 4x}$ 8) $\lim\limits_{x\to 0}x\,\mathrm{ctg}5x$

9) $\lim\limits_{x\to\infty}(3-x)\left[\ln(1-x)-\ln(2-x)\right]$ 10) $\lim\limits_{x\to 1}(3x-2)^{\frac{5x}{x-1}}$

Вариант 30.

1) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{4x^5-3x^2+1}{2x^5-2x+3}$ 2) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^3+7x^2-2}{6x^3-4x+3}$

3) $\lim\limits_{x\to 7}\dfrac{3x^2-17x-28}{x^2-9x+14}$ 4) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x-3}{\sqrt{4x-3}-3}$

5) $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{\sqrt{5x}-x}{x-5}$ 6) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos\dfrac{x}{2}}{x^2}$

7) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{16x}{\mathrm{arctg}2x}$ 8) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{2}{1-x}-\dfrac{4}{1-x^2}\right)$

9) $\lim\limits_{x\to\infty}(x-2)\left[\ln(x-1)-\ln(x+1)\right]$ 10) $\lim\limits_{x\to 1}(3x-2)^{\frac{x}{x-1}}$

Задача 7. Задана функция $y=f(x)$ и два значения аргумента x_1и x_2. Требуется: 1) установить, является ли данная функция непрерывной или разрывной для каждого из данных значений; 2) в случае разрыва найти ее односторонние пределы в точке разрыва; 3) сделать схематический чертеж.

1. $y=\dfrac{4x}{x-1};\ x_1=1,\ x_2=3.$ **2.** $y=\dfrac{4x}{x-2};\ x_1=2,\ x_2=5.$

3. $y=\dfrac{4x}{x-3};\ x_1=3,\ x_2=-2.$ **4.** $y=\dfrac{4x}{x-4};\ x_1=-2,\ x_2=4.$

5. $y=\dfrac{4x}{x-5};\ x_1=-1,\ x_2=5.$ **6.** $y=\dfrac{4x}{x+1};\ x_1=-1,\ x_2=3.$

7. $y=\dfrac{4x}{x+2};\ x_1=-2,\ x_2=2.$

8. $y=\dfrac{4x}{x+3};\ x_1=1,\ x_2=-3.$

9. $y=\dfrac{4x}{x+4};\ x_1=-4,\ x_2=4.$

10. $y=\dfrac{4x}{x+5};\ x_1=-5,\ x_2=5.$

11. $y=4^{\frac{1}{x-5}};\ x_1=5,\ x_2=7.$

12. $y=3^{\frac{1}{x-2}};\ x_1=2,\ x_2=3.$

13. $y=7^{\frac{1}{x-4}};\ x_1=4,\ x_2=5.$

14. $y=8^{\frac{1}{x-3}};\ x_1=3,\ x_2=6.$

15. $y=9^{\frac{1}{x-7}};\ x_1=7,\ x_2=9.$

16. $y=16^{\frac{1}{x-2}};\ x_1=2,\ x_2=6.$

17. $y=3^{\frac{1}{x-4}};\ x_1=4,\ x_2=6.$

18. $y=9^{\frac{1}{x-6}};\ x_1=6,\ x_2=8.$

19. $y=7^{\frac{1}{x-3}};\ x_1=3,\ x_2=5.$

20. $y=8^{\frac{1}{x-2}};\ x_1=2,\ x_2=5.$

21. $y=9^{\frac{1}{2-x}};\ x_1=0,\quad x_2=2$

22. $y=4^{\frac{1}{3-x}};\quad x_1=1,\quad x_2=3$

23. $y=12^{\frac{1}{x}};\quad x_1=0,\quad x_2=2.$

24. $y=3^{\frac{1}{4-x}};\quad x_1=2,\quad x_2=4$

25. $y=8^{\frac{1}{5-x}};\quad x_1=3,\quad x_2=5.$

26. $y=10^{\frac{1}{7-x}};\quad x_1=5,\quad x_2=7$

27. $y=14^{\frac{1}{6-x}};\quad x_1=4,\quad x_2=6$

28. $y=15^{\frac{1}{8-x}};\quad x_1=6,\quad x_2=8$

29. $y=11^{\frac{1}{4+x}};\quad x_1=-4,\quad x_2=-2.$

30. $y=13^{\frac{1}{5+x}};\quad x_1=-5,\quad x_2=-3$

Задача 8. Задана функция $y=f(x)$ различными аналитическими выражениями для различных областей изменения независимой переменной. Требуется найти точки разрыва функции, если они существуют. Сделать чертеж.

$$1.\ f(x)=\begin{cases} x^2-1, & \text{если } x\le 0;\\ x, & \text{если } 0<x\le 2;\\ 2x-2, & \text{если } x>2.\end{cases}$$

$$16.\ f(x)=\begin{cases} x+2, & \text{если } x<-2,\\ 4-x^2, & \text{если } -2\le x\le 1,\\ 3-2x, & \text{если } x>1.\end{cases}$$

$$2.\ f(x)=\begin{cases} -3x, & \text{если } x<0;\\ \operatorname{tg}x, & \text{если } 0<x\le\dfrac{\pi}{4};\\ 2, & \text{если } x>\dfrac{\pi}{4}.\end{cases}$$

$$17.\ f(x)=\begin{cases} -2x, & \text{если } x\le 0,\\ x^2+1, & \text{если } 0<x\le 1,\\ 2, & \text{если } x>1.\end{cases}$$

3. $$f(x)=\begin{cases}\sin x, & \text{если} \quad x\le 0;\\ 2x, & \text{если} \quad 0<x\le 1;\\ x, & \text{если} \quad x>1.\end{cases}$$

4. $$f(x)=\begin{cases}\cos x, & \text{если} \quad x\le 0;\\ x^2+1, & \text{если} \quad 0<x\le 1;\\ x, & \text{если} \quad x>1.\end{cases}$$

5. $$f(x)=\begin{cases}\sqrt{1-x}, & \text{если} \quad x\le 0;\\ \mathrm{tg}x, & \text{если} \quad 0\le x<\dfrac{\pi}{4};\\ 1, & \text{если} \quad x\ge\dfrac{\pi}{4}.\end{cases}$$

6. $$f(x)=\begin{cases}-3x, & \text{если} \quad x\le 1,\\ x^2-4, & \text{если} \quad 1<x<3,\\ 2x-5, & \text{если} \quad x\ge 3.\end{cases}$$

7. $$f(x)=\begin{cases}-3-x, \text{если } x<-2,\\ x^2-5, \text{если} -2\le x\le 3,\\ 7-2x, \text{если } x>3.\end{cases}$$

8. $$f(x)=\begin{cases}2x+1, & \text{если} \quad x<-1,\\ x^2, & \text{если} \quad -1\le x\le 2,\\ 6-x, & \text{если} \quad x>2.\end{cases}$$

9. $$f(x)=\begin{cases}2-x, & \text{если} \quad x<0,\\ \sin x, & \text{если} \quad 0\le x<\pi,\\ x-\pi, & \text{если} \quad x\ge\pi.\end{cases}$$

10. $$f(x)=\begin{cases}2x, & \text{если } x<0,\\ \sin x, & \text{если } 0\le x\le\pi,\\ -3, & \text{если } x>\pi.\end{cases}$$

18. $$f(x)=\begin{cases}-2x, & \text{если} \quad x\le 0,\\ \sqrt{x}, & \text{если} \quad 0<x<4,\\ 1, & \text{если} \quad x\ge 4.\end{cases}$$

19. $$f(x)=\begin{cases}-x^2, & \text{если} \quad x\le 0,\\ \mathit{tgx}, & \text{если} \quad 0<x\le\dfrac{\pi}{4},\\ 2, & \textit{если} \quad x>\dfrac{\pi}{4}.\end{cases}$$

20. $$f(x)=\begin{cases}-(x+1), & \text{если} \quad x\le -1,\\ (x+1)^2, & \text{если} \quad -1<x\le 0,\\ x, & \text{если} \quad x>0.\end{cases}$$

21. $$f(x)=\begin{cases}x+2, & \text{если} \quad x\le -2,\\ x^2-4, & \text{если} \quad -2<x\le 1,\\ 4-2x, & \text{если} \quad x\ge 1.\end{cases}$$

22. $$f(x)=\begin{cases}-x, & \text{если} \quad x\le 0,\\ \sin x, & \text{если} \quad 0<x\le\pi,\\ x-2, & \text{если} \quad x>\pi.\end{cases}$$

23. $$f(x)=\begin{cases}x+2, & \text{если} \quad x<-1,\\ x^2+1, & \text{если} \quad -1\le x\le 1,\\ 3-x, & \text{если} \quad x>1.\end{cases}$$

24. $$f(x)=\begin{cases}x+1, & \text{если} \quad x\le 0,\\ \cos x, & \text{если} \quad 0<x<\pi/2,\\ 2, & \text{если} \quad x\ge\pi/2.\end{cases}$$

25. $$f(x)=\begin{cases}x^2-1, & \text{если } x<0,\\ \cos x, & \text{если } 0\le x\le\pi/2,\\ x-\pi/2, & \text{если } x>\pi/2.\end{cases}$$

11. $f(x)=\begin{cases} x^2, & \text{если} \quad x \le 0; \\ \cos x, & \text{если} \quad 0 < x < \pi; \\ -1, & \text{если} \quad x \ge \pi. \end{cases}$ 26. $f(x)=\begin{cases} x+4, & \text{если} \quad x < -1, \\ x^2+2, & \text{если} \quad -1 \le x \le 1, \\ 2x, & \text{если} \quad x > 1. \end{cases}$

12. $f(x)=\begin{cases} -x, & \text{если } x \le 0, \\ -(x-1)^2, & \text{если } 0 < x < 2, \\ x-3, & \text{если } x \ge 2. \end{cases}$ 27. $f(x)=\begin{cases} -x, & \text{если} \quad x \le 0, \\ x^2, & \text{если} \quad 0 < x < 2, \\ x+1, & \text{если} \quad x \ge 2. \end{cases}$

13. $f(x)=\begin{cases} 2x^2, & \text{если} \quad x \le 0; \\ \cos x, & \text{если} \quad 0 < x \le \dfrac{\pi}{2}; \\ x-\dfrac{\pi}{2}, & \text{если} \quad x > \dfrac{\pi}{2}. \end{cases}$ 28. $f(x)=\begin{cases} -2x, & \text{если} \quad x < -1, \\ x^2+1, & \text{если} \quad -1 \le x \le 2, \\ x-1, & \text{если} \quad x > 2. \end{cases}$

14. $f(x)=\begin{cases} 3x+1, & \text{если} \quad x \le 0; \\ x^2+1, & \text{если} \quad 0 < x \le 1; \\ 1, & \text{если } x > 1. \end{cases}$ 29. $f(x)=\begin{cases} -x, & \text{если} \quad x \le 0; \\ x^2, & \text{если } 0 < x \le 2; \\ x+1, & \text{если} \quad x > 2. \end{cases}$

15. $f(x)=\begin{cases} -\dfrac{x}{3}, & \text{если } x \le 0; \\ \sin x, & \text{если} \quad 0 < x \le \dfrac{\pi}{2}; \\ x-\dfrac{\pi}{2}, & \text{если } x > \dfrac{\pi}{2}. \end{cases}$ 30. $f(x)=\begin{cases} x^2+1, & \text{если } x \le 0; \\ 1, & \text{если } 0 < x \le 2; \\ x-2, & \text{если } x > 2. \end{cases}$

Задача 9. Найти производные $\dfrac{dy}{dx}$ функций:

1. а) $y=\dfrac{2(3x^3+4x^2-x-2)}{15\sqrt{1+x}}$; б) $y=\sin\sqrt{3}+\dfrac{1}{3}\dfrac{\sin^3 3x}{\cos 6x}$;

в) $y=(\operatorname{arctg}x)^{\frac{1}{2}\ln\operatorname{arctg}x}$; г) $xy=\ln(e^x+e^y)$.

2. а) $y=\dfrac{(2x^2-1)\sqrt{1+x^2}}{3x^3}$; б) $y=\operatorname{tg}\lg\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{4}\dfrac{\sin^2 4x}{\cos 8x}$;

в) $y=(\sin x)^{5e^x}$; г) $x^3+y^3-x^2y=0$.

3. а) $y=\sqrt[3]{x^4+5x}-\sqrt[4]{(5x-1)^3}$ б) $y=\dfrac{1+\mathrm{tg}x}{1\text{-}\mathrm{tg}x}$

в) $y=x^{\frac{2}{x}}$ г) $x\cdot\sin y-y\cdot\cos x=0$

4. а) $y=\sqrt{\dfrac{1+x^2}{1-x^2}}$ б) $y=\mathrm{arctg}\dfrac{1}{x}$

в) $y=x^{\arcsin x}$ г) $y\cdot\sin x+\cos(x-y)=\cos y$

5. а) $y=x+\dfrac{1}{x+\sqrt{x^2+1}}$ б) $y=\sin\sqrt{1+x^2}$

в) $y=x^{\frac{1}{x^2}}$ г) $x\cdot e^y+ye^x=xy$

6. а) $y=x\cdot\sqrt[3]{\dfrac{2}{1+x}}$ б) $y=\dfrac{1+\sin 3x}{1-\sin 3x}$

в) $y=(\ln x)^x$ г) $xy+\ln y-2\ln x=0$

7. а) $y=\sqrt{\dfrac{x+\sqrt{x}}{x-\sqrt{x}}}$ б) $y=x\cdot\arcsin\dfrac{2x+1}{3}$

в) $y=(\mathrm{arctg2x})^{\sin 3x}$ г) $(x+y)^2=(x+2y)^3$

8. а) $y=x\cdot\sqrt{\dfrac{1+x^2}{1-x}}$ б) $y=\dfrac{1}{\mathrm{tg}^2 2x}$

в) $y=x^{\ln x}$ г) $y\cdot\sin x=\cos(x-y)$

9. а) $y=\dfrac{x}{\sqrt{5-x^2}}$ б) $y=\dfrac{\sin^2 x}{2+3\cos^2 x}$

в) $y=(\ln x)^x$ г) $(e^x-1)(e^y-1)-1=0$

10. а) $y=\sqrt{\dfrac{1+x^2}{1-x^2}}$ б) $y=\dfrac{1}{2}\mathrm{tg}^2x+\ln\cos x$

в) $y=(x+x^2)^x$ г) $x-y+x\cdot\sin y=0$

11. а) $y=5\cdot\sqrt[5]{\dfrac{x^2+x+1}{x}}$ б) $y=2^x\cdot e^{-x}$

в) $y=(\cos x)^x$ г) $\ln y=\mathrm{arctg}\,x/y$

12. а) $y=\sqrt[3]{\frac{x+3}{3x-5}}$ б) $y=\left(1+\mathrm{ctg}^2 3x\right)e^{-x}$

в) $y=\left(\arcsin\frac{x}{\sqrt{x}}\right)^x$ г) $\left(x+y\right)^2+\left(x-3y\right)^2=0$

13. а) $y=\frac{x^2}{2\sqrt{1-3x^2}}$; б) $y=\cos\mathrm{ctg}2-\frac{1}{16}\frac{\cos^2 8x}{\sin 16x}$

в) $y=x^{\arcsin x}$; г) $xy+\arcsin(x+y)=0.$

14. а) $y=\frac{x^2}{2\sqrt{1-3x^2}}$; б) $y=\cos\mathrm{ctg}2-\frac{1}{16}\frac{\cos^2 8x}{\sin 16x}$

в) $y=x^{\arcsin x}$; г) $xy+\arcsin(x+y)=0.$

15. а) $y=\frac{(x^2-6)\sqrt{(1+x^2)^3}}{120x^5}$; б) $y=\frac{\cos\ln 7\sin^2 7x}{7\cos 14x}$;

в) $y=(\mathrm{ctg}3x)^{2e^x}$; г) $\cos\frac{x}{y}=\frac{y}{x}.$

16. а) $y=\frac{(x^2-8)\sqrt{x^2-8}}{6x^2}$; б) $y=\cos\mathrm{ctg}2-\frac{\cos^2 8x}{16\sin 16x}$;

в) $y=x^{e^{\mathrm{tg}x}}$; г) $(x+y)^2+(x-3y)^3=0.$

17. а) $y=\frac{4+3x^3}{x\sqrt[3]{(2+x^3)^2}}$; б) $y=\mathrm{ctg}\cos 2+\frac{\sin^2 6x}{6\cos 12x}$;

в) $y=(tgx)^{4e^x}$; г) $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=1;$

18. а) $y=\sqrt[3]{\frac{(1+x^{\frac{3}{4}})^2}{x^{\frac{3}{2}}}}$; б) $y=\sqrt[3]{ctg2}-\frac{1}{20}\frac{\cos^2 10x}{\sin 20x}$;

в) $y=(\cos 5x)^{e^x}$; г) $4xy+4x-4y+4=0.$

19. а) $y=\frac{(x^2-2)\sqrt{4+x^2}}{24x^3}$; б) $y=\ln\sin\frac{1}{2}-\frac{\cos^2 12x}{24\sin 24x}$;

в) $y=(x-5)^{chx}$; г) $xe^y+ye^x=xy.$

20. а) $y=\frac{x^6+x^3-2}{\sqrt{1-x^3}}$; б) $y=\frac{1}{3}\cos\mathrm{tg}\frac{1}{2}+\frac{\sin^2 10x}{10\cos 20x}$;

в) $y=(x\sin)^{\ln(x\sin x)}$; г) $y+x+\mathrm{arctg}3x+\arcsin 2y=0.$

21. а) $y=\frac{1+x^2}{2\sqrt{1+2x^2}}$; б) $y=8\sin\mathrm{ctg}3+\frac{1}{5}\frac{\sin^2 5x}{\cos 10x}$;

в) $y=(x^3+4)^{\mathrm{tg}x}$; г) $xy=\ln(e^x+e^y)$.

22. а) $y=\frac{\sqrt{x-1}(3x+2)}{4x^2}$; б) $y=\frac{\cos\mathrm{ctg}3\cos^2 14x}{28\sin 28x}$;

в) $y=x^{\sin^3}$; г) $\cos(x-y)-2x+4y=0$.

23. а) $y=\frac{\sqrt{(1+x^2)^3}}{3x^3}$; б) $y=\frac{\cos\mathrm{tg}(\frac{1}{3}x)\sin^2 15x}{15\cos 30x}$;

в) $y=(x^2-1)^{\mathrm{sh}x}$; г) $y=\cos(x+y)$.

24. а) $y=\frac{x^6+8x^3-128}{\sqrt{8-x^3}}$; б) $y=\frac{\sin\mathrm{tg}\left(\frac{1}{7}\right)\cos^2 16x}{32\sin 32x}$;

в) $y=(x^4+5)^{\mathrm{ctg}x}$; г) $xe^y+ye^x=xy$.

25. а) $y=\frac{\sqrt{2x+3}(x-2)}{x^2}$; б) $y=\frac{\mathrm{ctg}\sin\left(\frac{1}{3}\right)\sin 17x}{17\cos 34x}$;

в) $y=(\sin x)^{\frac{5x}{2}}$; г) $\cos xy=\frac{y}{x}$.

26. а) $y=(1-x^2)\sqrt[5]{x^3+\frac{1}{x}}$; б) $y=\frac{\sqrt[5]{\mathrm{ctg}2}\cos^2 18x}{36\sin 36x}$;

в) $y=(x^2+1)^{\cos x}$; г) $(x+2y)^2+(x-3y)^3=0$.

27. а) $y=\frac{(2x^2+3)\sqrt{x^2-3}}{9x^3}$; б) $y=\frac{\mathrm{tg}\ln 2\sin^2 19x}{19\cos 38x}$;

в) $y=19^{x^{19}}x^{19}$; г) $y\ln x+x\ln y=\ln(xy)$.

28. а) $y=\frac{x-1}{(x^2+5)\sqrt{x^2+5}}$; б) $y=\mathrm{ctg}\cos 5-\frac{\cos^2 20x}{40\sin 40x}$;

в) $y=x^{3x}2^x$; г) $(x+y)^2=(x-2y)^3$.

29. а) $y=3\frac{\sqrt[3]{x^2+x+1}}{x+1}$; б) $y=\mathrm{ctg}\sin\frac{1}{13}-\frac{1}{48}\frac{\cos^2 24x}{\sin 48x}$;

в) $y=x^{2x}5^x$; г) $x-y^2+\mathrm{ctg}\frac{x}{y}=0$.

30. а) $y=3\sqrt[3]{\frac{(x+1)}{(x-1)^2}}$; б) $y=\sin\ln\frac{1}{2}+\frac{\sin^2 25x}{25\cos 50x}$;

в) $y=x^{e^{\sin x}}$; г) $y\sin x=\cos(xy)$.

Задача 10. Найти $\frac{dy}{dx}$ и $\frac{d^2y}{dx^2}$ для заданных функций:

1. а) $y=\frac{7x+1}{17(4x+3)}$; б) $\begin{cases}x=\cos t+\sin t,\\ y=\sin 2t.\end{cases}$

2. а) $y=\frac{1+x}{1-x}$; б) $\begin{cases}x=\frac{1}{t^2},\\ y=\frac{1}{t^2+1}.\end{cases}$

3. а) $y=\log_3(x+5)$; б) $\begin{cases}x=\sin t-t\cos t,\\ y=\cos t+t\sin t.\end{cases}$

4. а) $y=\frac{x}{x+1}$; б) $\begin{cases}x=2(t-\sin t),\\ y=4(2\cos t).\end{cases}$

5. а) $y=2^{5x}$; б) $\begin{cases}x=\mathrm{arctg}t,\\ y=\frac{t^2}{2}.\end{cases}$

6. а) $y=\frac{11+12x}{6x+5}$; б) $\begin{cases}x=\cos t,\\ y=\sin^4\frac{t}{2}.\end{cases}$

7. а) $y=\sin(3x+1)+\cos 5x$; б) $\begin{cases}x=\cos t+t\sin t,\\ y=\sin t-t\cos t.\end{cases}$

8. а) $y=a^{2x+3}$; б) $\begin{cases}x=\cos t,\\ y=\ln\sin t.\end{cases}$

9. а) $y=\frac{4}{x}$; б) $\begin{cases}x=t+\sin t,\\ y=2+\cos t.\end{cases}$

10. а) $y=\frac{5x+1}{13(2x+3)}$; б) $\begin{cases}x=t-\sin t,\\ y=2-\cos t.\end{cases}$

11. а) $y=\mathrm{arctg}\left(x^2\right)$ б) $\begin{cases}y=\sin^3 t\\ x=2t-\sin 2t\end{cases}$

12. а) $y=\frac{x-1}{x+1}e^{-x}$ б) $\begin{cases} y=t-\sin t \\ x=t+\cos t \end{cases}$

13. а) $y=xe^{-x^2}$ б) $\begin{cases} x=\ln t \\ y=\frac{1}{2}\left(t+\frac{1}{t}\right) \end{cases}$

14. а) $y=x\cdot\sqrt{1+x^2}$ б) $\begin{cases} x=t-\ln\sin t \\ y=t+\ln\cos t \end{cases}$

15. а) $y=e^{-x}\cdot\sin x$ б) $\begin{cases} x=3\cos t \\ y=4\sin^2 t \end{cases}$

16. а) $y=\operatorname{arctg}\sqrt{x}$ б) $\begin{cases} x=3\cos^2 t \\ y=2\sin^3 t \end{cases}$

17. а) $y=x^3\ln x$ б) $\begin{cases} x=\cos\frac{t}{2} \\ y=t-\cos t \end{cases}$

18. а) $y=\ln\operatorname{ctg}2x$ б) $\begin{cases} x=\cos\frac{t}{2} \\ y=t-\sin t \end{cases}$

19. а) $y=\ln\ln x$ б) $\begin{cases} x=2\cos^3 2t \\ y=\sin^3 2t \end{cases}$

20. а) $y=xe^{-x}$ б) $\begin{cases} x=\operatorname{ctg}t \\ y=\frac{1}{\cos^2 t} \end{cases}$

21.а) $y=a^{3x}$; б) $\begin{cases} x=\frac{1}{t}, \\ y=\frac{1}{1+t^2}. \end{cases}$

22. а) $y=\lg(5x+2)$; б) $\begin{cases} x=e^t\cos t, \\ y=e^t\sin t. \end{cases}$

23. а) $y=\frac{x}{2(3x+2)}$; б) $\begin{cases} x=\sqrt{t} \\ y=\frac{1}{\sqrt{1-t}}. \end{cases}$

24. а) $y=\lg(x+4)$ б) $\begin{cases} x=\sin t \\ y=\sec t. \end{cases}$

25. а) $y=\dfrac{4}{x}$; б) $\begin{cases} x=t+\sin t, \\ y=2+\cos t. \end{cases}$

26. а) $y=\dfrac{x}{9(4x+9)}$; б) $\begin{cases} x=\sqrt{t-3}, \\ y=\ln(t-2). \end{cases}$

27. а) $y=\lg(1+x)$; б) $\begin{cases} x=\sin t, \\ y=\ln\cos t. \end{cases}$

28. а) $y=7^{5x}$; б) $\begin{cases} x=\cos^2 t, \\ y=\mathrm{tg}^2 t. \end{cases}$

29. а) $y=\lg(3x+1)$; б) $\begin{cases} x=\sqrt{t-1}, \\ y=\dfrac{1}{\sqrt{t}}. \end{cases}$

30. а) $y=\sqrt[5]{7x-1}$; б) $\begin{cases} x=\sqrt{1-t^2} \\ y=\dfrac{1}{t} \end{cases}$

Задача 11. Исследовать методами дифференциального исчисления функцию и построить ее график:

1. $y=\dfrac{x^2-5}{x-3}$ $\qquad$ $y=\ln(25-9x^2)$
2. $y=\dfrac{x^2}{x-1}$ $\qquad$ $y=\dfrac{1}{xe^x}$
3. $y=\dfrac{x^3}{x^3-1}$ $\qquad$ $y=\ln\dfrac{x+1}{x+2}$
4. $y=\dfrac{1-x^3}{x^2}$ $\qquad$ $y=(e^{2x}-1)^{-1}$
5. $y=\dfrac{x^2}{x^2-1}$ $\qquad$ $y=\dfrac{\ln x}{x}$
6. $y=\dfrac{x^3+1}{x^2}$ $\qquad$ $y=\dfrac{x}{\ln x}$
7. $y=\left(\dfrac{x-1}{x+1}\right)^3$ $\qquad$ $y=\dfrac{\ln x}{\sqrt{x}}$
8. $y=\dfrac{x^3}{x^2-9}$ $\qquad$ $y=x^2\cdot e^x$

9. $y=\frac{1}{2}\frac{(x-1)^3}{(x+1)^2}$ $\qquad$ $y=6x^2\cdot e^{-x^2}$

10. $y=\frac{x^2-1}{x^4}$ $\qquad$ $y=2x^2-\ln x$

11. $y=\left(\frac{2x-1}{x-1}\right)^2$ $\qquad$ $y=\ln(2x^2+3)$

12. $y=\frac{x}{(x-1)^2}$ $\qquad$ $y=\frac{e^x}{x}$

13. $y=\frac{2x-1}{(x-1)^2}$ $\qquad$ $y=x^3\cdot e^x$

14. $y=\frac{x^3}{2(x+1)^2}$ $\qquad$ $y=x-\ln(x+1)$

15. $y=\frac{x^2+1}{x}$ $\qquad$ $y=\ln\frac{1+x}{1-x}$

16. $y=\frac{1}{1+x^2}$ $\qquad$ $y=x\cdot e^{-x}$

17. $y=\frac{(x-1)^2}{x^2+1}$ $\qquad$ $y=e^{\frac{1}{x}}$

18. $y=\frac{x}{3-x^2}$ $\qquad$ $y=x\cdot\ln x$

19. $y=\frac{1}{1-x^2}$ $\qquad$ $y=\ln(x^2-4)$

20. $y=\frac{x}{x^2+1}$ $\qquad$ $y=\frac{1}{e^x-1}$

21. $y=\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^2$ $\qquad$ $y=e^{\frac{1}{x+2}}$

22. $y=\left(\frac{x+2}{x-1}\right)^2$ $\qquad$ $y=x^2\ln x$

23. $y=\frac{x^3-8}{2x^2}$ $\qquad$ $y=x^2e^{-x}$

24. $y=\frac{4x}{4+x^2}$ $\qquad$ $y=\ln\frac{x}{x-1}$

25. $y=\frac{x^2-1}{x^4}$ $\qquad$ $y=2x^2-\ln x$

26. $y=\dfrac{x^2-4}{x^2-9}$ $\qquad$ $y=x+\ln(x^2-4)$

27. $y=\dfrac{x^3}{x^2+2x+3}$ $\qquad$ $y=\ln(1+x^2)$

28. $y=\dfrac{x^3}{x^2+1}$ $\qquad$ $y=e^{\frac{1}{2-x}}$

29. $y=\dfrac{4x^3+5}{x}$ $\qquad$ $y=\ln\dfrac{x-1}{x-2}$

30. $y=\dfrac{1-2x}{x^2-x-2}$ $\qquad$ $y=xe^{2x-1}$

Задача 12. Проверить, удовлетворяет ли указанному уравнению данная функция u.

1. $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\dfrac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}$; $\quad z=\sin^2\left(2x+3y\right)$

2. $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\dfrac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}$; $\quad z=x\cdot e^{\frac{y}{x}}$

3. $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\dfrac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}$; $\quad z=\operatorname{arctg}\dfrac{y}{x^2}$

4. $\dfrac{\partial^3 z}{\partial y^2\partial x}=\dfrac{\partial^3 z}{\partial x\partial y^2}$; $z=\operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}$

5. $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$; $\quad z=\ln\left(x^2+y^2+2x+1\right)$

6. $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$; $\quad z=\ln\left(x^2+\left(y+1\right)^2\right)$

7. $a^2\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}$; $z=\sin^2\left(x-ay\right)$

8. $x^2\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}-y^2\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$; $\quad z=y\sqrt{\dfrac{y}{x}}$

9. $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 z}{\partial y}=0$; $\quad z=\ln\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$

10. $a^2\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}$; $z=e^{-\cos(x+ay)}$

11. $9\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}-\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0;\ \ z=e^{-(x+3y)}\cdot\sin\left(x+3y\right)$

12. $\dfrac{\partial^3 z}{\partial x^2\partial y}-\dfrac{\partial^3 z}{\partial y\partial x^2}=0\,;\ z=\ln\left(x+e^{-y}\right)$

13. $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0;\ \ z=\operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}$

14. $x\dfrac{\partial z}{\partial x}+y\dfrac{\partial z}{\partial y}=0;\ \ z=\arcsin\dfrac{x}{x+y}$

15. $\left(x-y\right)\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\dfrac{\partial z}{\partial x};\quad z=\cos y+\left(y-x\,\cdot\right)\sin y$

16. $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\dfrac{\partial^2 z}{\partial y\partial x};\quad z=\arcsin\sqrt{\dfrac{x-y}{x}}$

17. $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\dfrac{\partial^2 z}{\partial y\partial x};\quad z=\sin^2 x+\sin^2 y$

18. $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\dfrac{\partial^2 z}{\partial y\partial x};\quad z=\ln\left(x+\sqrt{x^2+y^2}\right)$

19. $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=9\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2};\quad z=\sin\left(x+3y\right)$

20. $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\dfrac{\partial^2 z}{\partial y\partial x};\quad z=\dfrac{1}{2\left(x^2+y^2\right)}$

21. $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\dfrac{\partial^2 z}{\partial y\partial x};\quad z=\sin^2\left(2x+3y\right)$

22. $\dfrac{\partial z}{\partial x}\cdot\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}-\dfrac{\partial z}{\partial y}\cdot\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}=0;\quad z=\ln\left(x+e^{-y}\right)$

23. $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\dfrac{\partial^2 z}{\partial y\partial x};\quad z=x\cdot\sin y$

24. $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\dfrac{\partial^2 z}{\partial y\partial x};\quad z=\dfrac{1}{3}\sqrt{\left(x^2+y^2\right)^3}$

25. $\dfrac{\partial^3 z}{\partial y^2\partial x}=\dfrac{\partial^{32} z}{\partial y\partial x\partial y};\quad z=x^3+xy^2-5xy^3+y^5$

26. $x\cdot\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}-\dfrac{\partial z}{\partial y};\quad z=\dfrac{x}{y}$

27. $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\dfrac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}$; $z=\ln\left(\operatorname{tg}\dfrac{x}{y}\right)$

28. $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\dfrac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}$; $z=\operatorname{arctg}\dfrac{x+y}{1-xy}$

29. $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\dfrac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}$; $z=x^2y+y^3$

30. $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\dfrac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}$; $z=xy^2+yx^2$

Задача 13. Найти производную и градиент скалярного поля $u(x,y,z)$ в точке M по направлению вектора $\overline{l}$.

1. $u=\left(x^2+y^2+z^2\right)^{\frac{3}{2}}$,
$\mathbf{l}=\mathbf{i}-\mathbf{j}+\mathbf{k}$,
$M(1,1,1)$

2. $u=x+\ln\left(z^2+y^2\right)$,
$\mathbf{l}=-2\mathbf{i}+\mathbf{j}-\mathbf{k}$,
$M(2,1,1)$

3. $u=x^2y-\sqrt{xy+z^2}$,
$\mathbf{l}=2\mathbf{j}-2\mathbf{k}$,
$M(1,5,-2)$

4. $u=y\ln\left(1+x^2\right)-\operatorname{arctg}z$,
$\mathbf{l}=2\mathbf{i}-3\mathbf{j}-2\mathbf{k}$,
$M(0,1,1)$

5. $u=x(\ln y-\operatorname{arctg}z)$,
$\mathbf{l}=8\mathbf{i}+4\mathbf{j}+8\mathbf{k}$,
$M(-2,1,-1)$

6. $u=\ln\left(3-x^2\right)-xy^2z$,
$\mathbf{l}=-\mathbf{i}+2\mathbf{j}-2\mathbf{k}$,
$M(1,3,2)$

7. $u=\sin(x+2y)+\sqrt{xyz}$,
$\mathbf{l}=4\mathbf{i}+3\mathbf{j}$,
$M(\pi/2,\ 3\pi/2,3)$

8. $u=x^2y^2z-\ln(z-1)$,
$\mathbf{l}=5\mathbf{i}-6\mathbf{j}+\sqrt{5}\mathbf{k}$,
$M(1,1,2)$

9. $u=\sqrt{xy}+\sqrt{9-z^2}$,
$\mathbf{l}=-2\mathbf{i}-2\mathbf{j}-\mathbf{k}$,
$M(1,1,0)$

10. $u=\dfrac{\sqrt{x}}{y}-\dfrac{yz}{x+\sqrt{y}}$,
$\mathbf{l}=2\mathbf{i}+\mathbf{k}$,
$M(4,1,-2)$

11. $u=x^3+\sqrt{y^2+z^2}$,
$\mathbf{l}=\mathbf{j}-\mathbf{k}$,
$M(1,-3,4)$

12. $u=2\sqrt{x+y}+y\operatorname{arctg}z$,
$\mathbf{l}=4\mathbf{i}-3\mathbf{k}$,
$M(3,2,-1)$

13. $u=z^2+2\operatorname{arctrg}(x-y)$,
$\mathbf{l}=\mathbf{i}+2\mathbf{j}-2\mathbf{k}$,
$M(1,2,-1)$

14. $u=\ln\left(x^2+y^2\right)+xyz$,
$\mathbf{l}=\mathbf{i}-\mathbf{j}+5\mathbf{k}$,
$M(1,-1,2)$

15. $u = xy - \frac{x}{z}$,
$\mathbf{l} = 5\,\mathbf{i} + \mathbf{j} - \mathbf{k}$,
$M(-4,3,-1)$.

16. $u = \ln\left(x + \sqrt{y^2 + z^2}\right)$,
$\mathbf{l} = -\,2\,\mathbf{i} - \mathbf{j} + \mathbf{k}$,
$M(1,-3,4)$.

17. $u = x^2 - \operatorname{arctg}(y + z)$,
$\mathbf{l} = 3\,\mathbf{i} - 4\,\mathbf{k}$,
$M(2,1,1)$.

18. $u = 4\ln\left(3 + x^2\right) - 8xyz$,
$\mathbf{l} = 2\,\mathbf{i} - 2\,\mathbf{j} + 2\,\mathbf{k}$,
$M(1,1,1)$.

19. $u = x\sqrt{y} + y\sqrt{x}$,
$\mathbf{l} = 4\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 4\mathbf{k}$,
$M(2,4,11)$.

20. $u = -2\ln\left(x^2 - 5\right) - 4xyz$,
$\mathbf{l} = 2\mathbf{i} + 4\mathbf{j} - 4\mathbf{k}$,
$M(1,1,1)$.

21. $u = \frac{1}{4}x^2y - \sqrt{x^2 + 5z^2}$,
$\mathbf{l} = 2\mathbf{i} + 8\mathbf{j}$,
$M\left(-2,\frac{1}{2},1\right)$.

22. $u = xz^2 - \sqrt{x^3y}$,
$\mathbf{l} = 2\mathbf{i} - 2\mathbf{j} - 3\mathbf{k}$,
$M(2,2,4)$.

23. $u = x\sqrt{y} - yz^2$,
$\mathbf{l} = 2\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - 4\mathbf{k}$,
$M(2,1,-1)$.

24. $u = 7\ln\left(\frac{1}{13} + x^2\right) - 4xyz$,
$\mathbf{l} = 14\mathbf{i} - 8\mathbf{j} + 8\mathbf{k}$,
$M(1,1,1)$.

25. $u = -\operatorname{arctg}\frac{y}{x} - 8xyz$,
$\mathbf{l} = 2\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - 2\mathbf{k}$,
$M(2,2,-1)$.

26. $u = \ln\left(1 + x^2\right) - xy\sqrt{z}$,
$\mathbf{l} = 8\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$,
$M(1,-2,4)$.

27. $u = \sqrt{x^2 + y^2} - z$,
$\mathbf{l} = 2\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - 4\mathbf{k}$,
$M(3,4,1)$.

28. $u = x\sqrt{y} - (z = y)\sqrt{x}$,
$\mathbf{l} = 2\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$,
$M(1,1,-2)$.

29. $u = \sqrt{xy} - \sqrt{4 - z^2}$,
$\mathbf{l} = 2\mathbf{i} - 2\mathbf{j} - \mathbf{k}$,
$M(1,1,0)$.

30. $u = \left(x^2 + y^2 + z^2\right)^{\frac{3}{2}}$,
$\mathbf{l} = 4\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$,
$M(0,-3,4)$.

Задача 14. По данным опыта найти формулу вида $y = ax + b$ методом наименьших квадратов.

1.

x	1	2	3	4	5
y	3,2	4,1	2,8	0,6	1,3

2.

x	1	2	3	4	5
y	3,5	4,6	3,2	1,4	1,5

3.

x	1	2	3	4	5
y	3,3	4,5	3,0	1,0	1,3

4.

x	1	2	3	4	5
y	3,9	4,6	3,5	1,4	1,9

5.

x	1	2	3	4	5
y	4,1	5,2	3,6	1,8	2,2

6.

x	1	2	3	4	5
y	3,0	3,8	2,6	0,8	0,6

7.

x	1	2	3	4	5
y	4,2	5,4	3,8	1,8	2,4

8.

x	1	2	3	4	5
y	4,2	5,1	3,8	2,0	2,6

9.

x	1	2	3	4	5
y	4,4	5,6	3,8	1,6	2,8

10.

x	1	2	3	4	5
y	4,6	5,4	4,2	2,4	3,0

11.

x	1	2	3	4	5
y	3,9	4,9	3,4	1,4	1,9

12.

x	1	2	3	4	5
y	4,7	5,7	4,4	2,4	2,9

13.

x	1	2	3	4	5
y	3,5	4,5	3,0	1,0	1,5

14.

x	1	2	3	4	5
y	5,7	6,7	5,2	3,2	3,7

15.

x	1	2	3	4	5
y	5,6	6,6	5,3	3,3	3,8

16.

x	1	2	3	4	5
y	4,6	5,6	4,1	2,1	2,6

17.

x	1	2	3	4	5
y	5,3	6,3	4,8	2,8	3,3

18.

x	1	2	3	4	5
y	4,1	5,1	3,6	1,6	2,1

19.

x	1	2	3	4	5
y	4,8	5,8	4,3	2,3	2,8

20.

x	1	2	3	4	5
y	2,3	3,3	1,8	0,8	1,3

21.

x	1	2	3	4	5
y	5,2	6,2	4,7	2,47	3,2

22.

x	1	2	3	4	5
y	3,7	4,7	3,2	1,2	1,7

23.

x	1	2	3	4	5
y	2,5	3,5	2,0	1,0	1,5

24.

x	1	2	3	4	5
y	5,5	6,5	5,0	3,0	3,5

25.

x	1	2	3	4	5
y	4,3	5,3	3,8	1,8	2,3

26.

x	1	2	3	4	5
y	2,7	3,7	2,2	1,2	1,7

27.

x	1	2	3	4	5
y	4,67	5,7	4,2	2,2	2,7

28.

x	1	2	3	4	5
y	5,1	6,1	4,6	2,6	3,1

29.

x	1	2	3	4	5
y	5,4	6,4	4,9	2,9	3,4

30.

x	1	2	3	4	5
y	4,5	5,5	4,0	2,0	2,5

Решение примерного варианта контрольной работы №1

Задача 1. Даны векторы $\overline{a}$ = (2, 1, 0); $\overline{b}$ = (1, –1, 2); $\overline{c}$ = (2, 2, 1); $\overline{d}$ = (3, 7, -7) в некотором базисе. Показать, что векторы $\overline{a},\overline{b},\overline{c}$ образуют базис трехмерного пространства, и найти координаты вектора $\overline{x}$ в этом базисе.

Решение

Базис *n*-мерного линейного векторного пространства составляют ровно *n* линейно независимых векторов. Следовательно, надо показать, что векторы $\overline{a},\overline{b},\overline{c}$ линейно независимы, то есть нулевая линейная комбинация этих векторов

$$\alpha\overline{a}+\beta\overline{b}+\gamma\overline{c}=\overline{0}$$

возможна только при нулевых коэффициентах $\alpha=\beta=\gamma=0$.

Запишем матричное уравнение

$$\alpha\cdot\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}+\beta\cdot\begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix}+\gamma\begin{pmatrix}2\\2\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

и перейдем к системе уравнений

$$\begin{cases}2\cdot\alpha+\beta+2\gamma=0\\1\cdot\alpha-\beta+2\gamma=0\\0\cdot\alpha+2\beta-\gamma=0.\end{cases}$$

Вычислим определитель этой системы:

$$\Delta=\begin{vmatrix}2&1&2\\1&-1&2\\0&2&-1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}-1&2\\2&-1\end{vmatrix}\cdot2-\cdot\begin{vmatrix}1&2\\2&-1\end{vmatrix}=(2-4)\cdot2-(-1-4)=-1.$$

Определитель $\Delta\neq0$, следовательно, имеется единственное решение $\alpha=\beta=\gamma=0$, а векторы $\overline{a},\overline{b},\overline{c}$ линейно независимы и образуют базис. Найдем координаты вектора $\overline{d}=(x_1,x_2,x_3)$ в базисе векторов $\overline{a},\overline{b},\overline{c}$. Координаты вектора – это коэффициенты при базисных векторах в его разложении по базису.

Тогда

$$\overline{d}=x_1\cdot\overline{a}+x_2\overline{b}+x_3\cdot\overline{c}$$

или

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} x_1 + \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} x_2 + \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} x_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \\ -7 \end{pmatrix}.$$

Перейдем к системе уравнений

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 2x_3 = 3 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 = 7 \\ \quad 2x_2 - x_3 = -7. \end{cases}$$

Решим систему по формулам Крамера:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 7 & -1 & 2 \\ -7 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 3 \cdot \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} - 1 \cdot \begin{vmatrix} 7 & 2 \\ -7 & -1 \end{vmatrix} + 2 \cdot \begin{vmatrix} 7 & -1 \\ -7 & 2 \end{vmatrix} =$$

$$= 3(1-4) - 1(-7+14) + 2(14-7) = -9 - 7 + 14 = -2;$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 1 & 7 & 2 \\ 0 & -7 & -1 \end{vmatrix} = 2 \cdot \begin{vmatrix} 7 & 2 \\ -7 & -1 \end{vmatrix} - 1 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ -7 & -1 \end{vmatrix} =$$

$$= 2(-7+14) - 1(-3+14) = -14 - 11 = 3;$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 7 \\ 0 & 2 & -7 \end{vmatrix} = 2 \cdot \begin{vmatrix} -1 & 7 \\ 2 & -7 \end{vmatrix} - 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -7 \end{vmatrix} =$$

$$= 2(7-14) - 1(-7-6) = -14 + 13 = -1;$$

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{-2}{-1} = 1;$$

$$x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{3}{-1} = -3;$$

$$x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{-1}{-1} = 1.$$

Следовательно, в базисе $\{\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}\}$ $\vec{d}$ = (1, -3, 1).

Задача 2. Дана система линейных уравнений

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 6 \\ 2x_1 + 3x_2 - 4x_3 = 20 \\ 3x_1 - 2x_2 - 5x_3 = 6 \end{cases}$$

Доказать ее совместность и решить двумя способами:
1) методом Гаусса; 2) средствами матричного исчисления.

Решение

Вычислим определитель системы

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 3 & -4 \\ 3 & -2 & -5 \end{vmatrix} = -58 \neq 0.$$

Следовательно, система совместна.
1) Решение системы методом Гаусса

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & 6 \\ 2 & 3 & -4 & 20 \\ 3 & -2 & -5 & 6 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & 6 \\ 0 & 7 & -10 & 8 \\ 0 & 4 & -14 & -12 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & 6 \\ 0 & 1 & -10/7 & 8/7 \\ 0 & 0 & -58/7 & -116/7 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & 6 \\ 0 & 1 & -10/7 & 8/7 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{array}\right).$$

Откуда

$$x_3 = 2;$$

$$x_2 - 10/7x_3 = 8/7, \qquad x_2 = 8/7 + 10/7 \cdot 2 = 4;$$

$$x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 6, \qquad x_1 = 6 + 2 \cdot 4 - 3 \cdot 2 - 3 \cdot 2 = 8.$$

Ответ: $x_1 = 8,\ x_2 = 4,\ x_3 = 2..$

2) Решение системы средствами матричного исчисления.
Запишем систему в виде матричного уравнения, введя три матрицы:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 3 & -4 \\ 3 & -2 & -5 \end{pmatrix}; \ B = \begin{pmatrix} 6 \\ 20 \\ 6 \end{pmatrix}; \ x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

$$A \cdot x = B \Rightarrow x = A^{-1} \cdot B.$$

Найдем обратную матрицу A^{-1}.

Определитель матрицы A:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 3 & -4 \\ 3 & -2 & -5 \end{vmatrix} = -58 \neq 0.$$

Следовательно, матрица A невырожденная и обратная матрица A^{-1} существует:

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot A^{*},$$

где A^* – присоединенная матрица.

Запишем транспонированную матрицу

$$A^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 3 & -2 \\ 3 & -4 & -5 \end{pmatrix}$$

и каждый ее элемент заменим его алгебраическим дополнением.

Получим присоединенную матрицу:

$$A^{*} = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ -4 & -5 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} -2 & -2 \\ 3 & -5 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 3 & -4 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -4 & -5 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & -5 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -4 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -2 & -2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -23 & -16 & -1 \\ -2 & -14 & 10 \\ -13 & -4 & 7 \end{pmatrix}.$$

$$A^{-1} = -\frac{1}{58} \begin{pmatrix} -23 & -16 & -1 \\ -2 & -14 & 10 \\ -13 & -4 & 7 \end{pmatrix}.$$

Найдем матрицу X:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = -\frac{1}{58} \begin{pmatrix} -23 & -16 & -1 \\ -2 & -14 & 10 \\ -13 & -4 & 7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ 20 \\ 6 \end{pmatrix} = -\frac{1}{58} \begin{pmatrix} -138 & -320 & -6 \\ -12 & -280 & +60 \\ -78 & -80 & +42 \end{pmatrix} =$$

$$= -\frac{1}{58} \begin{pmatrix} -464 \\ -232 \\ -116 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Откуда $x_1 = 8,\ x_2 = 4, x_3 = 2.$

Задача 3. Даны координаты вершин пирамиды A_1 (10, 6, 6); A_2 (–2, 8, 2); A_3(6, 8, 9); A_4 (7, 10, 3).

Найти: 1) длины ребер A_1A_2, A_1A_3, A_1A_4; 2) косинус угла между ребрами A_1A_2 и A_1A_4; 3) площадь грани $A_1A_2A_3$; 4) уравнения прямой A_1A_2;

5) уравнение плоскости $A_1A_2A_3$; 6) уравнения высоты, опущенной из вершины A_4 на грань $A_1A_2A_3$; 7) угол между ребром A_1A_4 и гранью $A_1A_2A_3$; 8) объем пирамиды (двумя способами). Сделать чертеж.

Решение

1) Имеем:

$$\overline{A_1A_2} = (-12, 2, -4);\ \overline{A_1A_3} = (-4, 2, 3);\ \overline{A_1A_4} = (-3, 4, -3),$$

$$\left|\overline{A_1A_2}\right| = \sqrt{(-12)^2 + 2^2 + (-4)^2} = \sqrt{144+4+16} = \sqrt{164} = 2\sqrt{41},$$

$$\left|\overline{A_1A_3}\right| = \sqrt{(-4)^2 + 2^2 + 3^2} = \sqrt{16+4+9} = \sqrt{29},$$

$$\left|\overline{A_1A_4}\right| = \sqrt{(-3)^2 + 4^2 + (-3)^2} = \sqrt{9+16+9} = \sqrt{34}.$$

2) $\left(\overline{A_1A_2}, \overline{A_1A_4}\right) = -12\cdot(-3) + 2\cdot 4 + (-4)\cdot(-3) = 36 + 8 + 12 = 56$.

Угол между α ребрами равен углу между векторами:

$$\alpha = \left\langle \overline{A_1A_2}, \overline{A_1A_4} \right\rangle.$$

Тогда

$$\cos\alpha = \frac{\left(\overline{A_1A_2}, \overline{A_1A_4}\right)}{\left|A_1A_2\right|\cdot\left|A_1A_4\right|}\frac{56}{2\sqrt{41}\cdot\sqrt{34}} = \frac{28}{\sqrt{1394}} \approx 0{,}7499.$$

3) Площадь грани $A_1A_2A_3$ равна площади треугольника, построенного на векторах $\overline{A_1A_2}$ и $\overline{A_1A_3}$:

$$S_{\Delta A_1A_2A_3} = \frac{1}{2}\left|\left[\overline{A_1A_2}, \overline{A_1A_3}\right]\right|.$$

Найдем векторное произведение $\left[\overline{A_1A_2}, \overline{A_1A_3}\right]$:

$$\left[\overline{A_1A_2}, \overline{A_1A_3}\right] = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ -12 & 2 & -4 \\ -4 & 2 & 3 \end{vmatrix} = \bar{i}\cdot\begin{vmatrix} 2 & -4 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} - \bar{j}\begin{vmatrix} -12 & -4 \\ -4 & 3 \end{vmatrix} + \bar{k}\begin{vmatrix} -12 & 2 \\ -4 & 2 \end{vmatrix} =$$

$$= (6+8)\bar{i} - (-36-16)\bar{j} + (-24+8)\bar{k} = 14\bar{i} + 52\bar{j} - 16\bar{k} = (14, 52, -16).$$

Модуль векторного произведения:

$$\left|\left[\overline{A_1A_2}, A_1A_3\right]\right| = \sqrt{14^2+52^2+(-16)^2} = \sqrt{196+2704+256} =$$

$$= \sqrt{3156} = 2\sqrt{789}.$$

Откуда искомая площадь:

$$S_{\Delta A_1A_2A_3} = \frac{1}{2}\cdot 2\cdot\sqrt{789} = \sqrt{789} \approx 28{,}089 \left(\text{ед.}^2\right).$$

4) Уравнения прямой A_1A_2 определяется как уравнения прямой, проходящей через две данные точки :

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1} = \frac{y-y_1}{y_2-y_1} = \frac{z-z_1}{z_2-z_1},$$

$$\frac{x-10}{-2-10} = \frac{y-6}{8-6} = \frac{z-6}{2-6},$$

$$\frac{x-10}{-12} = \frac{y-6}{2} = \frac{z-6}{-4},$$

или

$$\frac{x-10}{-6} = \frac{y-6}{1} = \frac{z-6}{-2},$$

5) Уравнение плоскости $A_1A_2A_3$ запишем как уравнение плоскости, проходящей через три данные точки:

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix} = 0;$$

$$\begin{vmatrix} x-10 & y-6 & z-6 \\ -2-10 & 8-6 & 2-6 \\ 6-10 & 8-6 & 9-6 \end{vmatrix} = 0; \quad \begin{vmatrix} x-10 & y-6 & z-6 \\ -12 & 2 & -4 \\ -4 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 0;$$

$$(x-10)\cdot\begin{vmatrix} 2 & -4 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} - (y-6)\cdot\begin{vmatrix} -12 & -4 \\ -4 & 3 \end{vmatrix} + (z-6)\cdot\begin{vmatrix} -12 & 2 \\ -4 & 2 \end{vmatrix} = 0;$$

$$(x-10)(6+8)-(y-6)(-36-16)+(z-6)(-24+8)=0;$$

$$14(x-10)+52(y-6)-16(z-6)=0;$$

$$14x+52y-16z-356=0;$$

Следовательно, искомое уравнение плоскости $A_1A_2A_3$:

$$7x+26y-8z-178=0$$

6) Уравнения высоты из точки A_4 на грань $A_1A_2A_3$ определится как уравнения прямой, проходящей через точку A_4 перпендикулярно плоскости $A_1A_2A_3$:

$$\frac{x-x_0}{l}=\frac{y-y_0}{m}=\frac{z-z_0}{n}.$$

За направляющий вектор $\bar{a}=(l,m,n)$ примем нормальный вектор плоскости $A_1A_2A_3$:

$$\bar{n}=(7,26,-8).$$

Тогда уравнения высоты запишутся в виде:

$$\frac{x-7}{7}=\frac{y-10}{26}=\frac{z-3}{-8}.$$

7) Угол β между ребром A_1A_4 и гранью $A_1A_2A_3$ – это угол между прямой и плоскостью, составляющий в сумме с углом между направляющим вектором прямой и нормальным вектором плоскости прямой угол.

Следовательно,

$$\sin\beta=\frac{(\bar{a},\bar{n})}{|\bar{a}|\cdot|\bar{n}|}.$$

$$\bar{a}=\overline{A_1A_4}=(-3,4,-3),\quad |\bar{a}|=\sqrt{34},$$

$$\bar{n}=(7,\,26,-8),\ |\bar{n}|=\sqrt{7^2+26^2+(-8)^2}=\sqrt{49+676+64}=\sqrt{789};$$

$$(\bar{a},\bar{n})=-3\cdot7+4\cdot26+(-3)\cdot(-8)=-21+104+24=107.$$

Откуда

$$\sin\beta=\frac{107}{\sqrt{34}\cdot\sqrt{789}}=\frac{107}{\sqrt{26826}}\approx0{,}6533\ \ (\ \beta\approx\arcsin0{,}6533\approx39°20'\ ).$$

8) Объем пирамиды $A_1A_2A_3A_4$ равен, с одной стороны, одной шестой модуля смешанного произведения векторов $\overline{A_1A_2}$, $\overline{A_1A_3}$, $\overline{A_1A_4}$, с другой стороны – одной третьей произведения площади S основания $A_1A_2A_3$ на высоту H, опущенную на основание из вершины A_4.

Так что:

$$V_{\text{пир}}=\frac{1}{6}\left\|\begin{matrix}x_1 & y_1 & z_1\\ x_2 & y_2 & z_2\\ x_3 & y_3 & z_3\end{matrix}\right\|=\frac{1}{6}\cdot\begin{vmatrix}-12 & 2 & -4\\ -4 & 2 & 3\\ -3 & 4 & -3\end{vmatrix}=$$

$$=\frac{1}{6}\left(-12\cdot\begin{vmatrix}2 & 3\\ 4 & -3\end{vmatrix}-2\cdot\begin{vmatrix}-4 & 3\\ -3 & -3\end{vmatrix}-4\cdot\begin{vmatrix}-4 & 2\\ -3 & 4\end{vmatrix}\right)=$$

$$=\frac{1}{6}\left(-12\cdot(-18)-2\cdot 21-4\cdot(-10)\right)=\frac{107}{3}=35\frac{2}{3}\ \left(\text{ед.}^3\right)$$

Или $V_{\text{пир}}=\frac{1}{3}S_{\Delta A_1A_2A_3}\cdot H$.

Высоту H найдем как расстояние от точки A_4 (7, 10, 3) до плоскости $A_1A_2A_3$:

$$H=d=\left|\frac{Ax_0+By_0+Cz_0+D}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}\right|=$$

$$=\frac{7\cdot 7+26\cdot 10-8\cdot 3-178}{\sqrt{7^2+26^2+(-8)^2}}=\frac{49+260-24-178}{\sqrt{789}}=\frac{107}{789},$$

$$V_{\text{пир}}=\frac{1}{3}\sqrt{789}\cdot\frac{107}{789}=\frac{107}{3}=35\frac{2}{3}\ \left(\text{ед.}^3\right).$$

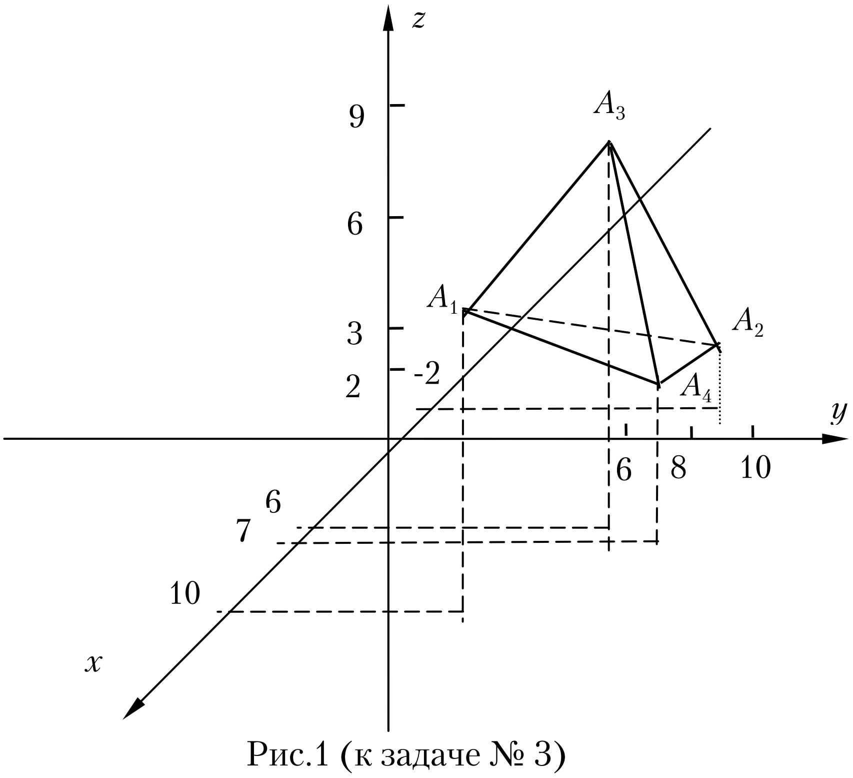


Рис.1 (к задаче № 3)

Задача 4. Установить вид кривых, заданных уравнениями. Привести уравнения кривых к каноническому виду и изобразить их на чертеже

а) $x^2 - 16y + 48 = 0$; б) $x^2 + y^2 - 4 = 0$;

в) $9x^2 + 4y^2 - 36 = 0$; г) $x^2 + 2y^2 + 1 = 0$;

д) $x^2 - y^2 + 2y = 0$; е) $x^2 + y^2 + 2y + 1 = 0$.

Решение

а) $x^2 - 16y + 48 = 0 \Rightarrow x^2 = 16(y - 3)$ – парабола;

б) $x^2 + y^2 - 4 = 0 \Rightarrow x^2 + y^2 = 4$ – окружность (1);

в) $9x^2 + 4y^2 - 36 = 0 \Rightarrow 9x^2 + 4y^2 = 36 \Rightarrow \dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{9} = 1$ – эллипс ;

г) $x^2 + 2y^2 + 1 = 0 \Rightarrow x^2 + 2y^2 = -1 \Rightarrow \dfrac{x^2}{1} + \dfrac{y^2}{\frac{1}{2}} = -1$ – мнимый эллипс;

д) $x^2 - y^2 + 2y = 0 \Rightarrow x^2 - (y^2 - 2y + 1) + 1 = 0 \Rightarrow (y - 1)^2 - x^2 = 1$ – гипербола;

е) $x^2 + y^2 + 2y + 1 = 0 \Rightarrow x^2 + (y + 1)^2 = 0$ – точка.

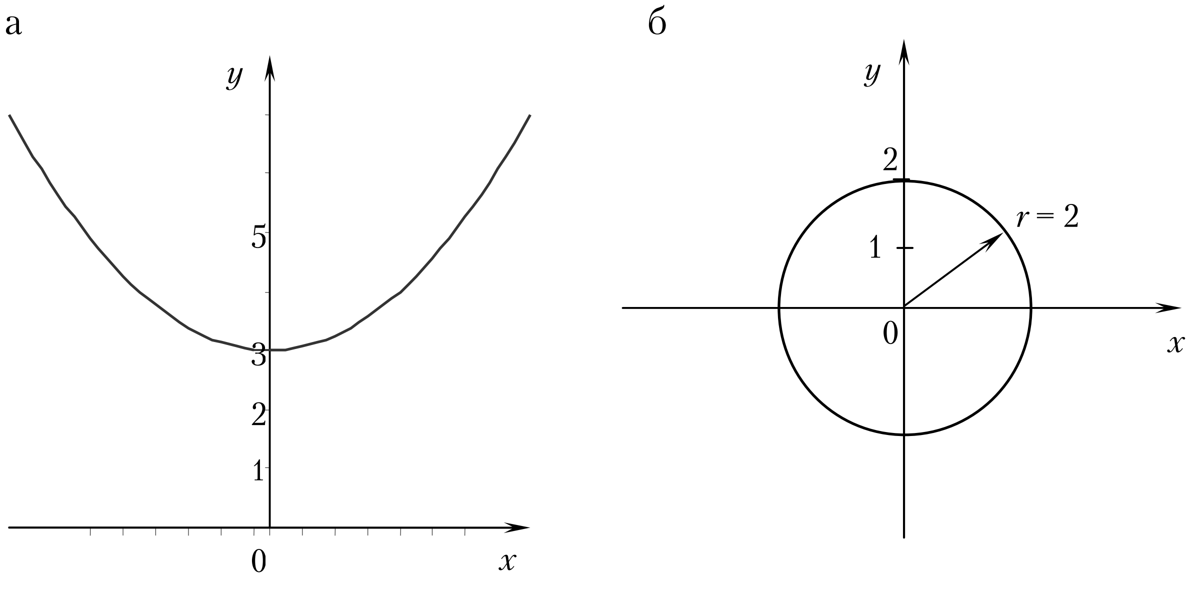


Рис. 2 (начало)

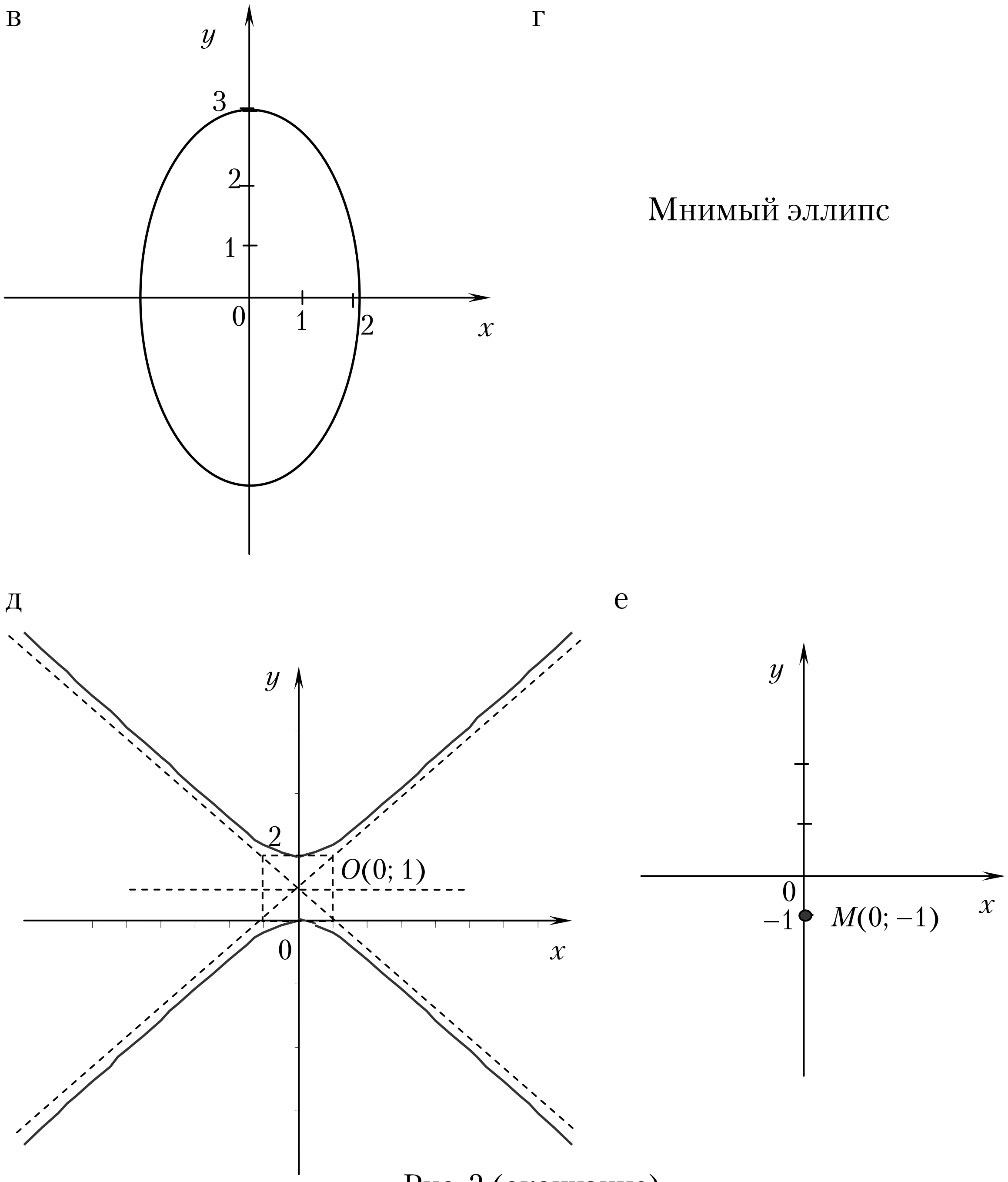


Рис. 2 (окончание)

Задача 5. Изобразить линию, заданную уравнением

$$\left(x^2+y^2\right)^2=2ax^3 \quad (\text{a}>0).$$

Решение. Введем полярные координаты по формулам $x=\rho\cos\varphi$, $y=\rho\sin\varphi$, будем иметь

$$\rho^4\left(\cos^2\varphi+\sin^2\varphi\right)^2=2a\rho^3\cos^3\varphi,$$

$$\rho^4=2a\rho^3\cos^3\varphi,$$

$$\rho = 2a\cos^3\varphi,$$

так как $\rho > 0$, то $\cos^3\varphi > 0$, т.е. $\cos\varphi > 0$, т.е. $\varphi \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$.

Функция $\cos\varphi$ – четная, поэтому построим ее график при $\varphi \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$, используя таблицу

φ	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
ρ	$2a$	$\frac{3\sqrt{3}}{4}a$	$\frac{\sqrt{2}}{2}a$	$\frac{1}{2}a$	a

и отобразим его относительно оси x. Получим линию, изображенную на рис. 3.

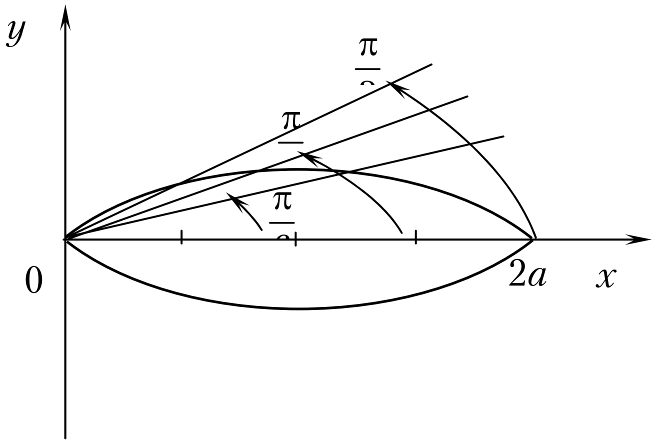


Рис. 3

Задача 6. Найти указанные пределы, не пользуясь правилом Лопиталя.

1) Найти $\lim\limits_{x\to 2}\frac{4x^3+3x^2-1}{3x^3-3x+1}$.

Точка $x = 2$ принадлежит области определения функции.

Воспользуемся тем, что для всех основных элементарных функций в любой точке их области определения имеет место равенство $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f\left(\lim\limits_{x\to x_0} x\right)$:

$$\lim_{x\to 2}\frac{4x^3+3x^2-1}{3x^2-3x+1} = \frac{4\cdot 8+3\cdot 4-1}{3\cdot 4-3\cdot 2+1} = \frac{43}{7}.$$

2) Найти $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^6-3x^2-2}{2x^6+4x+5}$.

В данном случае имеем неопределенность $\dfrac{\infty}{\infty}$. В подобного рода примерах пользуются утверждением: многочлен при $x\to\infty$ эквивалентен своему старшему члену

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^6-3x^2-2}{2x^6+4x+5}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^6}{2x^6}=\frac{1}{2}.$$

3) Найти $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{2x^2-3x-2}{x^2-3x+2}$.

При подстановке предельного значения аргумента получим неопределенность $\dfrac{0}{0}$, которая разрешается сокращением дроби на разность $x-2$. Для чего квадратные трехчлены, стоящие в числителе и в знаменателе, разложим по формуле

$$ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2),$$

где x_1 и x_2 – корни квадратного трехчлена:

$$\lim_{x\to 2}\frac{2x^2-3x-2}{x^2-3x+2}=\lim_{x\to 2}\frac{2(x-2)\left(x+\frac{1}{2}\right)}{(x-2)(x-1)}=\lim_{x\to 2}\frac{2x+1}{x-1}=$$

$$=\frac{2\cdot 2+1}{2-1}=5.$$

4) Найти $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{3x^2-10x+3}{x^2-9}$.

Предел находится аналогично предыдущему:

$$\lim_{x\to 3}\frac{3x^2-10x+3}{x^2-9}=\lim_{x\to 3}\frac{3(x-3)\left(x-\frac{1}{3}\right)}{(x-3)(x+3)}=\lim_{x\to 3}\frac{3x-1}{x+3}=$$

$$=\frac{3\cdot 3-1}{3+3}=\frac{8}{6}=\frac{4}{3}.$$

5) Найти $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{4+3x}-\sqrt{4-3x}}{7x}$.

Здесь также имеем неопределенность $\frac{0}{0}$. Чтобы ее раскрыть, умножим числитель и знаменатель дроби на выражение, сопряженное числителю $\left(\sqrt{4+3x}+\sqrt{4-3x}\right)$. После этого можно сократить дробь на x:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{4+3x}-\sqrt{4-3x}}{7x}=\lim_{x\to 0}\frac{4+3x-(4-3x)}{7x\left(\sqrt{4+3x}+\sqrt{4-3x}\right)}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{6x}{7x\left(\sqrt{4+3x}+\sqrt{4-3x}\right)}=\lim_{x\to 0}\frac{6}{7\left(\sqrt{4+3x}+\sqrt{4-3x}\right)}=$$

$$=\frac{6}{7\left(\sqrt{4}+\sqrt{4}\right)}=\frac{3}{14}.$$

6) Найти $\lim\limits_{x\to 4}\frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{2x+1}-3}$.

Неопределенность $\frac{0}{0}$ разрешается умножением числителя и знаменателя дроби на произведение выражений $\left(\sqrt{x}+2\right)\left(\sqrt{2x+1}+3\right)$, одно из которых сопряженное числителю, другое – знаменателю. После этого сократим дробь на двучлен $(x-4)$:

$$\lim_{x\to 4}\frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{2x+1}-3}=\lim_{x\to 4}\frac{(x-4)\left(\sqrt{2x+1}+3\right)}{\left(\left(\sqrt{2x+1}\right)^2-9\right)\left(\sqrt{x}+2\right)}=$$

$$=\lim_{x\to 4}\frac{(x-4)\left(\sqrt{2x+1}+3\right)}{2(x-4)\left(\sqrt{x}+2\right)}=\frac{1}{2}\lim_{x\to 4}\frac{\sqrt{2x+1}+3}{\sqrt{x}+2}=$$

$$=\frac{1}{2}\frac{\sqrt{2\cdot 4+1}+3}{\sqrt{4}+2}=\frac{3}{4}.$$

7) Найти $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos 4x}{x\sin 2x}$.

Используем формулу $2\sin^2 x=1-\cos 2x$, а затем – эквивалентность величин $\sin 2x\sim 2x$ при $x\to 0$:

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 4x}{x\sin 2x}=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2 2x}{2x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{(2x)^2}{x^2}=4.$$

8) Найти $\lim\limits_{x\to 0}x\cdot\sin 5x\cdot\operatorname{ctg}^2 2x$.

Заменим эквивалентные величины $\sin 5x \sim 5x$ и $\mathrm{tg} 2x \sim 2x$ при $x \to 0$:

$$\lim_{x\to 0} x \cdot \sin 5x \cdot \mathrm{ctg}^2 2x = \lim_{x\to 0} \frac{x \sin 5x}{\mathrm{tg}^2 2x} = \lim_{x\to 0} \frac{5x^2}{(2x)^2} = \frac{5}{4}.$$

9) $\lim\limits_{x\to 2} (3x-5)^{\frac{x}{x-2}}$.

Сделаем предварительно замену переменной. Обозначим $y = x-2$; $y \to 0$ при $x \to 2$. Тогда

$$\lim_{x\to 2} (3x-5)^{\frac{x}{x-2}} = \lim_{y\to 0} \left(3(y+2)-5\right)^{\frac{y+2}{y}} =$$

$$= \lim_{y\to 0} (3y+1)^{\frac{2}{y}+1} = e^{3\cdot 2} = e^6.$$

Приведем и другой способ вычисления. А именно, при вычислении пределов выражений вида u^v, где $u(x) \to 1$ и $v(x) \to \infty$ при данном предельном переходе, удобно пользоваться формулой $\lim u^v = e^{\lim v \ln u}$.

Так как в данном случае $u = 3x-5$ и $v = \dfrac{x}{x-2} \to \infty$ при $x \to 2$, то, пользуясь последней формулой, получим:

$$\lim_{x\to 2} (3x-5)^{\frac{x}{x-2}} = e^{\lim\limits_{x\to 2} \frac{x}{x-2} \cdot \ln(3x-5)} = e^{\lim\limits_{y\to 0} \frac{y+2}{y} \ln(3y+1)} =$$

$$= e^{\lim\limits_{y\to 0} \frac{y+2}{y} \cdot 3y} = e^{\lim\limits_{y\to 0} 3(y+2)} = e^6.$$

10) $\lim\limits_{x\to\infty} (x+3)\left(\ln(x+5) - \ln(x+2)\right)$.

Запишем разность логарифмов как логарифм частного и, выделив целую часть дроби, заменим эквивалентные величины:

$$\ln(1+\alpha) \sim \alpha \text{ при } \alpha \to 0.$$

Откуда

$$\lim_{x\to\infty} (x+3)\left(\ln(x+5) - \ln(x+3)\right) = \lim_{x\to\infty} (x+3) \ln \frac{x+5}{x+3} =$$

$$= \lim_{x\to\infty} (x+3) \ln\left(1 + \frac{2}{x+3}\right) = \lim_{x\to\infty} (x+3) \frac{2}{x+3} = 2.$$

Задача 7. Дана функция $f(x)=15^{\frac{1}{3-x}}$ и два значения аргумента $x_1 = 3$ и $x_2 = 1$. Требуется: 1)найти предел функции при приближении к каждому из заданных значений слева и справа; 2) установить, является ли данная функция непрерывной или разрывной для каждого из заданных значений x; 3) сделать чертеж.

Решение

Функция $f(x)=15^{\frac{1}{3-x}}$ в точке $x = 3$ неопределена. Найдем в этой точке левый и правый односторонние пределы.

$$\lim_{x\to 3-o} 15^{\frac{1}{3-x}} = 15^{+\infty} = +\infty;$$

$$x<3 \Rightarrow 3-x>0$$

$$\lim_{x\to 3+o} 15^{\frac{1}{3-x}} = 15^{-\infty} = \frac{1}{15^{+\infty}} = 0.$$

$$x>3 \Rightarrow 3-x<0$$

В точке $x_1 = 3$ функция терпит бесконечный разрыв.

В точке $x_2 = 1$ функция непрерывна: $\lim\limits_{x\to 1} 15^{\frac{1}{3-x}} = 15^{\frac{1}{2}} = \sqrt{15}$.

Сделаем схематический чертеж (рис.3).

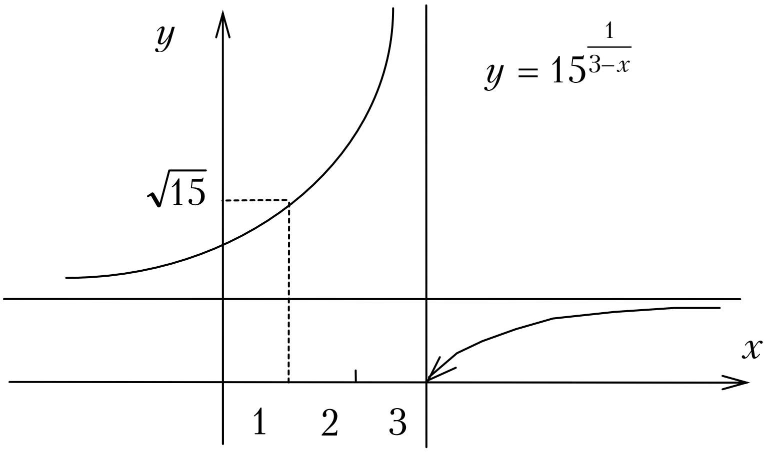


Рис.3

Задача 8. Функция задается различными аналитическими выражениями для различных областей изменения независимой переменной

$$f(x)=\begin{cases} x+2, \text{ при } x\le -1; \\ x^2+1, \text{ при } -1<x\le 1; \\ -x+3, \text{ при } x>1. \end{cases}$$

Требуется:

1) найти точки разрыва функции, если они существуют;
2) найти скачок функции в каждой точке разрыва;
3) сделать схематический чертеж.

Решение

Данная функция определена при всех значениях x. Разрыв она может иметь в точках $x = -1$ и $x = 1$. Найдем односторонние пределы в этих точках.

$$\lim_{\substack{x\to -1-0\\ x<-1}} f(x)=\lim_{x\to -1-0}(x+2)=-1+2=-1;$$

$$\lim_{\substack{x\to -1+0\\ x>-1}} f(x)=\lim_{x\to -1+0}\left(x^2+1\right)=1+1=2.$$

Так как $\lim\limits_{x\to -1-0} f(x)\neq \lim\limits_{x\to -1+0} f(x)$, то функция $f(x)$ в точке $x = -1$ терпит конечный разрыв.

Скачок функции в этой точке равен

$$\lim_{x\to -1+0} f(x)-\lim_{x\to -1-0} f(x)=2-1=1;$$

Найдем односторонние пределы функции в точке $x = 1$.

$$\lim_{\substack{x\to -1-0\\ x<1}} f(x)=\lim_{x\to -1-0} f\left(x^2+1\right)=1+1=2;$$

$$\lim_{\substack{x\to -1+0\\ x>1}} f(x)=\lim_{x\to -1+0} f(-x+3)=-1+3=2.$$

Так как $\lim\limits_{x\to -1-0} f(x)=\lim\limits_{x\to -1+0} f(x)=2$, то функция $f(x)$ в точке $x = 1$ непрерывна.

Сделаем схематический чертеж (рис.4).

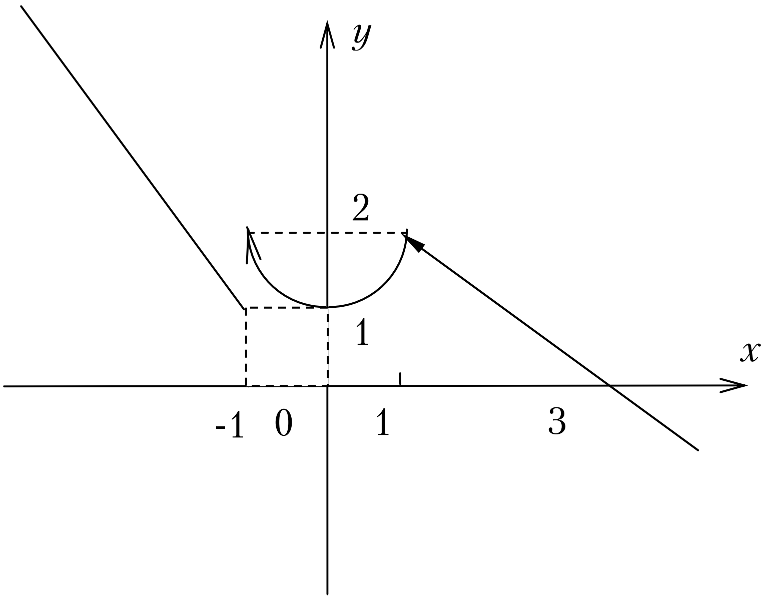


Рис.4

Задача 9. Найти производные $\frac{dy}{dx}$ данных функций:

а) $y=\frac{2x^2-x-1}{3\sqrt{2+4x}}$; б) $y=(x+5)^2\cdot\arccos^3 5x^4$;

в) $y=(\sin 3x)^{\operatorname{arcctg}x}$; г) $y^2=x+\ln\left(\frac{y}{x}\right)$.

Решение

При решении указанных примеров используются следующие правила дифференцирования:

1) $c'=0, c=\text{const}$.

2) $x'=1$, x – независимая переменная.

3) $(u+v)'=u'+v'$, где $u=u(x)$; $v=v(x)$.

4) $(u\cdot v)'=u'v+v'u$.

5) $(c\cdot u)'=c\cdot u'$.

6) $\left(\frac{u}{v}\right)'=\frac{u'v-v'u}{v^2}$ $(v\neq 0)$.

7) Если $y=f(u)$, $u=u(x)$, то есть $y=f(u(x))$ – сложная функция, составленная из дифференцируемых функций, то $u'_x=y'_u\cdot u'_x$ или

$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}$. Кроме этого используется таблица производных элементарных функций:

1) $\left(u^{\alpha}\right)'=\alpha u^{\alpha-1}\cdot u'$.

2) $\left(a^{u}\right)'=a^{u}\cdot\ln a\cdot u'$.

3) $\left(e^{u}\right)'=e^{u}\cdot u'$.

4) $\left(\log_{a}u\right)'=\frac{u'}{u\cdot\ln a}$.

5) $\left(\ln u\right)'=\frac{u'}{u}$.

6) $\left(\sin u'\right)=\cos u\cdot u'$.

7) $\left(\cos u\right)'=-\sin u\cdot u'$.

8) $\left(\mathrm{tg}u\right)'=\frac{u'}{\cos^{2}u}$.

9) $\left(\mathrm{ctg}u\right)'=-\frac{u'}{\sin^{2}u}$.

10) $\left(\arcsin u\right)'=\frac{u'}{\sqrt{1-u^{2}}}$.

11) $\left(\arccos u\right)'=-\frac{u'}{\sqrt{1-u^{2}}}$.

12) $\left(\mathrm{arctg}u\right)'=\frac{u'}{1+u^{2}}$.

13) $\left(\mathrm{acctg}u\right)'=-\frac{u'}{1+u^{2}}$.

а) $y=\frac{2x^{2}-x-1}{3\sqrt{2+4x}}$

Воспользуемся правилом дифференцирования дроби:

$$\left(\frac{U}{V}\right)'=\frac{U'V-UV'}{V^{2}},\ V\neq 0.$$

Для всех $2+4x>0; \quad x>-\frac{1}{2}$ имеем:

$$y'=\frac{(4x-1)3\sqrt{2+4x}-(2x^2-x-1)3\frac{1}{2\sqrt{2+4x}}4}{9(2+4x)}=$$

$$=\frac{(4x-1)3(2+4x)-(2x^2-x-1)6}{9(2+4x)\sqrt{2+4x}}=$$

$$=\frac{3(16x^2+4x-2-4x^2+2x+2)}{9(2+4x)\sqrt{2+4x}}=\frac{9x(4x+2)}{9(2+4x)\sqrt{2+4x}}=\frac{x}{\sqrt{2+4x}}.$$

б) $y=\left(x+5\right)^2\arccos^3 5x^4$

$$y'=2\left(x+5\right)\arccos^3 5x^4+\left(x+5\right)^2 3\arccos^2 5x^4\frac{-20x^3}{\sqrt{1-25x^8}}=$$

$$=2\left(x+5\right)\arccos^3 5x^4-\frac{60x^3\left(x+5\right)^2\arccos^2 5x^4}{\sqrt{1-25x^8}}.$$

в) $y=\left(\sin 3x\right)^{\mathrm{arcctg}x}$.

Это показательно-степенная функция. Прологарифмируем ее:

$$\ln y=\mathrm{arcctg}x\ln\left(\sin 3x\right)$$

и затем продифференцируем обе части полученного равенства:

$$\frac{y'}{y}=-\frac{\ln\left(\sin 3x\right)}{1+x^2}+\frac{\mathrm{arcctg}\,x\cos 3x\cdot 3}{\sin 3x}=-\frac{\ln\left(\sin 3x\right)}{1+x^2}+3\,\mathrm{ctg}\,3x\,\mathrm{arcctg}\,x.$$

Отсюда выразим y':

$$y'=(\sin 3x)^{\mathrm{arcctg}x}\left(3\mathrm{ctg}3x\mathrm{arcctg}x-\frac{3\ln(\sin 3x)}{1+x^2}\right).$$

г) $y^2 = x + \ln\left(\dfrac{y}{x}\right)$.

Это неявно заданная функция. Продифференцируем по x обе части уравнения:

$$2yy' = 1 + \frac{1}{y/x}\frac{y'x - y}{x^2};$$

$$2xy^2y' = xy + y'x - y.$$

Разрешим полученное равенство относительно производной y':

$$y'\left(2xy^2 - x\right) = xy - y;$$

$$y' = \frac{xy - y}{2xy^2 - x}.$$

Задача 10. Найти вторые производные от функций:

а) $y = \dfrac{4x+7}{2x+3}$

$$y' = \frac{4(2x+3) - 2(4x+7)}{(2x+2)^2} = \frac{8x + 12 - 8x - 14}{(2x+2)^2} = -\frac{2}{(2x+3)^2};$$

$$y'' = \frac{2}{(2x+3)^4}2(2x+3)2 = \frac{8}{(2x+3)^3};$$

б) $\begin{cases} x = \sin^2 t, \\ y = \dfrac{1}{\cos^2 t} \end{cases}$ (параметрически заданная функция)

Здесь

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t},$$

$$y'_t = -\frac{1}{\cos^4 t}2\cos t(-\sin t) = \frac{2\sin t}{\cos^3 t},$$

$$x'_t = 2\sin t\cos t,$$

$$y'_x = \frac{2\sin t}{\cos^3 t 2\sin t\cos t} = \frac{1}{\cos^4 t};$$

$$y''_x = \frac{(y'_x)'_t}{x'_t},$$

$$(y'_x)'_t = -\frac{1}{\cos^8 t}(4\cos^3 t(-\sin t)) = \frac{4\sin t}{\cos^5 t},$$

$$y''_{xx} = \frac{4\sin t}{\cos^5 t 2\sin t\cos t} = \frac{2}{\cos^6 t}.$$

Задача 11.

а) Исследовать методами дифференциального исчисления функцию $f(x) = \frac{x^3}{x^2-1}$ и построить ее график.

Решение

Исследуем функцию по следующей схеме:

1) Область определения. Точки разрыва. Вертикальные асимптоты.

Функция теряет смысл, если знаменатель обращается в нуль ($x^2-1=0$). Следовательно, $x=\pm1$ – точки бесконечного разрыва.

$$\lim_{\substack{x\to-1-0\\x<-1}} \frac{x^3}{x^2-1} = \lim_{\substack{x\to-1-0\\x+1<0}} \frac{x^3}{(x-1)(x+1)} = -\infty;$$

$$\lim_{\substack{x\to-1+0\\x>-1}} \frac{x^3}{x^2-1} = \lim_{\substack{x\to-1+0\\x+1>0}} \frac{x^3}{(x-1)(x+1)} = +\infty;$$

$$\lim_{\substack{x\to1-0\\x<1}} \frac{x^3}{x^2-1} = \lim_{\substack{x\to1-0\\x-1<0}} \frac{x^3}{(x-1)(x+1)} = -\infty;$$

$$\lim_{\substack{x\to1+0\\x>1}} \frac{x^3}{x^2-1} = \lim_{\substack{x\to1+0\\x-1>0}} \frac{x^3}{(x-1)(x+1)} = +\infty;$$

Данная кривая имеет две вертикальные асимптоты: $x = -1$ и $x = 1$.

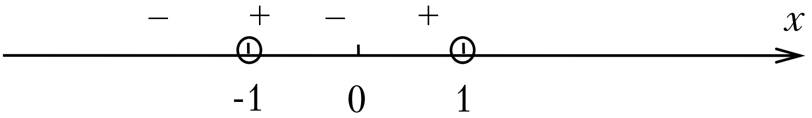
2) Корни функции. Интервалы знакопостоянства. Четность, нечетность.

Найдем точки, в которых функция обращается в нуль:

$$f(x) = \frac{x^3}{x^2-1} = 0$$

при $x = 0$. Точка пересечения с осью абсцисс 0 (0, 0). Укажем интервалы знакопостоянства функции.

Знак $f(x)$



$$f(-x)=\frac{-x^3}{(-x)^2-1}=-\frac{x^3}{x^2-1}=-f(x).$$

Следовательно, функция нечетная и ее график симметричен относительно начала координат 0 (0, 0).

3) Интервалы возрастания, убывания. Экстремумы.

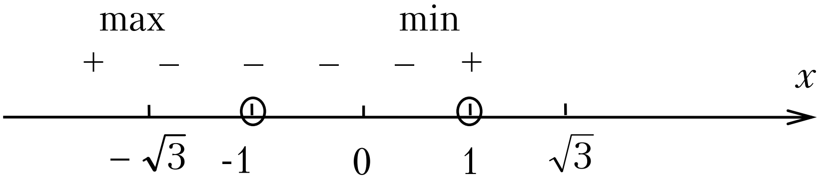
Найдем первую производную и приравняем ее к нулю:

$$f'(x)=\frac{3x^2\left(x^2-1\right)-x^3\cdot 2x}{\left(x^2-1\right)^2}=\frac{x^2\left(3x^2-3-2x^2\right)}{\left(x^2-1\right)^2}=\frac{x^2\left(x^2-3\right)}{\left(x^2-1\right)^2}=0;$$

$x_1=0,\ x_2=-\sqrt{3},\ x_3=\sqrt{3}$ – стационарные точки.

Определим вид экстремума и интервалы возрастания и убывания функции.

Знак $f'(x)$



Вычислим функцию в точках экстремума

$$f\left(-\sqrt{3}\right)=\frac{-3\sqrt{3}}{3-1}=-\frac{3}{2}\sqrt{3}\approx-2{,}55,\ f\left(\sqrt{3}\right)=\frac{3\sqrt{3}}{3-1}=\frac{3}{2}\sqrt{3}\approx 2{,}55.$$

Точка $A\left(-\sqrt{3};-\frac{3}{2}\sqrt{3}\right)$ – точка максимума.

Точка $B\left(\sqrt{3};\frac{3}{2}\sqrt{3}\right)$ – точка минимума (рис. 5).

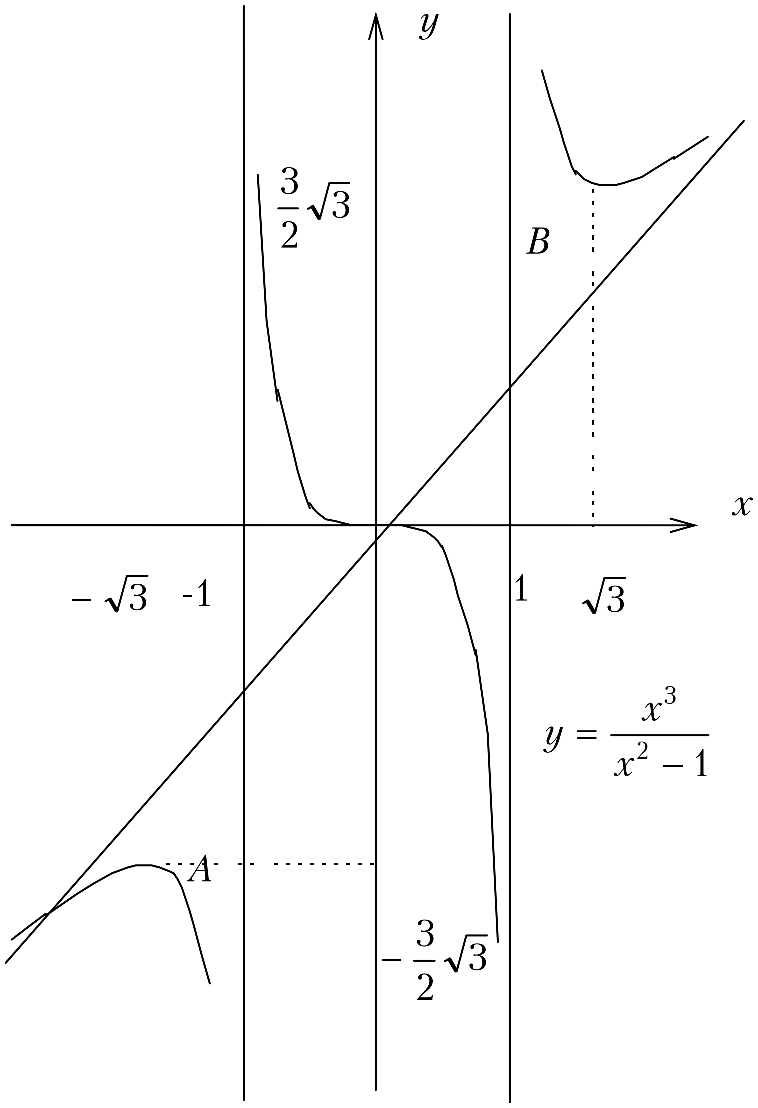


Рис.5

Функция возрастает на интервалах $(-\infty;-\sqrt{3})$ и $(\sqrt{3};\infty)$ и убывает на интервалах $\left(-\sqrt{3};-1\right), \left(-1;1\right)$ и $(1;\sqrt{3})$.

4) Интервалы выпуклости, вогнутости. Точки перегиба.

Найдем вторую производную и приравняем ее к нулю:

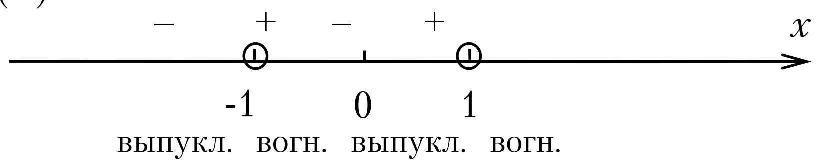
$$f''(x)=\left(\frac{x^4-3x^2}{\left(x^2-1\right)^2}\right)'=\frac{\left(4x^3-6x\right)\left(x^2-1\right)^2-2\left(x^2-1\right)\cdot 2x\left(x^4-3x^2\right)}{\left(x^2-1\right)^4}=$$

$$=\frac{2x\left(x^2-1\right)\left(\left(2x^2-3\right)\left(x^2-1\right)-2\left(x^4-3x^2\right)\right)}{\left(x^2-1\right)^4}=\frac{2x\left(x^2+3\right)}{\left(x^2-1\right)^3}=0.$$

Следовательно, $x = 0$ – возможная точка перегиба.

Укажем интервалы выпуклости и вогнутости.

Знак $f''(x)$



Точка 0 (0, 0) – точка перегиба графика функции.

Интервалы выпуклости: $(-\infty;1)$ и $(0,1)$.

Интервалы вогнутости: $(-1, 0)$ и $(1, +\infty)$.

5) Наклонные асимптоты.

Найдем

$$k = \lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^2}{x^2-1} = 1,$$

$$b = \lim_{x\to\pm\infty}\left(f(x)-kx\right) = \lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{x^3}{x^2-1}-x\right) = \lim_{x\to\pm\infty}\frac{x}{x^2-1} = 0$$

Таким образом, у данной кривой существует одна наклонная асимптота $y = x$.

График функции приводится на рис.5.

б) Исследовать методами дифференциального исчисления функцию $f(x)=\dfrac{2\ln x}{\sqrt{x}}$ и построить ее график.

Решение

1) Область определения. Точки разрыва. Вертикальные асимптоты.

Функция существует в интервале $(0;\infty)$, так как в этом интервале существуют функции $\ln x$ и $\sqrt{x}$ и, кроме того, знаменатель в этом интервале не обращается в нуль.

Вычислим правый односторонний предел в точке $x = 0$:

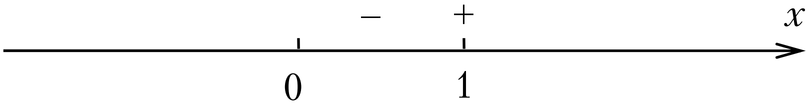
$$\lim_{x\to 0+0}\frac{2\ln x}{\sqrt{x}} = -\infty$$

Из этого следует, что прямая $x = 0$ является вертикальной асимптотой.

2) Корни функции. Интервалы знакопостоянства. Четность, нечетность.

С осью ординат график функции не пересекается, так как при $x = 0$ функция не определена. Положим $y = 0$, $\frac{2\ln x}{\sqrt{x}} = 0$ при $x = 1$. График функции пересекает ось абсцисс в точке $A\ (1,\ 0)$. Укажем интервалы знакопостоянства функции.

Знак $f(x)$



Функция $f(x) < 0$ при $x \in (0,\ 1)$ и $f(x) > 0$ при $x \in (1; +\infty)$.

Функция $f(x)$ – ни четная, ни нечетная, так как при $x < 0$ не существует. Ее график не обладает свойством симметрии.

3) Интервалы возрастания, убывания. Экстремумы функции.

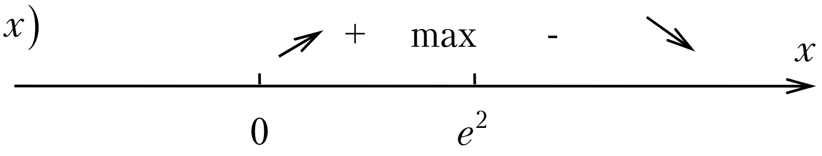
Определим критические точки:

$$f'(x) = 2\frac{\frac{1}{x}\sqrt{x} - \frac{1}{2\sqrt{x}}\ln x}{x} = \frac{2 - \ln x}{x\sqrt{x}} = 0,$$

$\ln x = 2;\ x = e^2$ – критическая точка.

Исследуем ее.

Знак $f'(x)$



Функция достигает максимального значения в точке $B\left(e^2; \frac{4}{e}\right)$; ее интервал возрастания $(0; e^2)$, интервал убывания $(e^2, +\infty)$.

4) Интервалы выпуклости, вогнутости. Точки перегиба.

Найдем вторую производную:

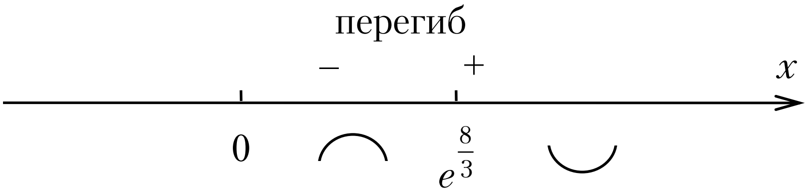
$$f''(x) = \left(\frac{2 - \ln x}{x\sqrt{x}}\right)' = \frac{-\frac{1}{x}x\sqrt{x} - (2 - \ln x)\cdot\frac{3}{2}\sqrt{x}}{x^3} =$$

$$= \frac{-\sqrt{x}\left(1 + 3 - \frac{3}{2}\ln x\right)}{x^3} = \frac{-\sqrt{x}\left(4 - \frac{3}{2}\ln x\right)}{x^3} = 0.$$

$$4 - \frac{3}{2}\ln x = 0;\quad \ln x = \frac{8}{3};\quad x = e^{\frac{8}{3}} = \sqrt[3]{e^8}.$$

Исследуем точку $x=\sqrt[3]{e^8}$ на перегиб.

Знак $f''(x)$



В точке $x=e^{8/3}$ график функции имеет перегиб

$$f\left(e^{8/3}\right)=\frac{2\ln e^{8/3}}{\sqrt{e^{8/3}}}=\frac{16/3}{e^{4/3}}=\frac{16}{3e^{4/3}}.$$

На интервале $(0;e^{8/3})$ график функции выпуклый, на интервале $(e^{8/3};+\infty)$ – вогнутый.

5) Наклонные асимптоты будем искать в виде $y=kx+b$:

$$k=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{2\ln x}{x\sqrt{x}}=\lim_{x\to\infty}\frac{2(\ln x)'}{\left(x^{3/2}\right)'}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{2}{x}}{\frac{3}{2}\sqrt{x}}=\lim_{x\to\infty}\frac{4}{3x\sqrt{x}}=0;$$

$$b=\lim_{x\to\infty}\left(f(x)-kx\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{2\ln x}{\sqrt{x}}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{2}{x}}{\frac{1}{2\sqrt{x}}}=\lim_{x\to\infty}\frac{4}{\sqrt{x}}=0.$$

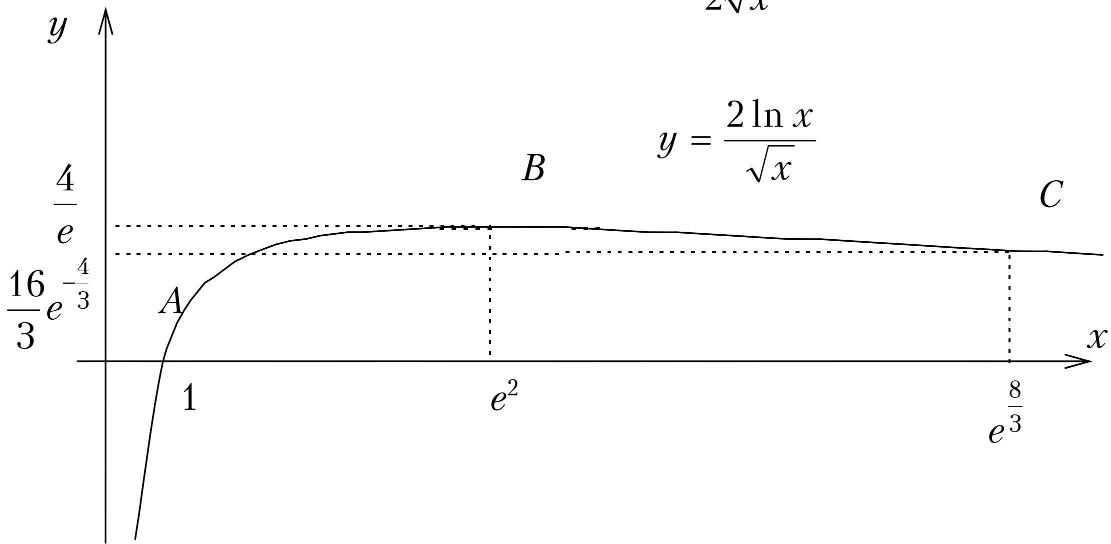


Рис. 6

Ось абсцисс $y = 0$ является горизонтальной асимптотой графика функции (см. рис. 6).

Задача 12. Проверить, удовлетворяет ли уравнению

$$x^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+2xy\frac{\partial^2 u}{\partial xdy}+y^2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$$

функция $u=xe^{y/x}$.

Решение

Найдем все производные второго порядка от функции $u=xe^{y/x}$:

$$\frac{\partial u}{\partial x}=e^{y/x}+xe^{y/x}\left(-\frac{y}{x^2}\right)=e^{y/x}\left(1-\frac{y}{x}\right)=e^{y/x}\frac{x-y}{x};$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=xe^{y/x}\cdot\frac{1}{x}=e^{y/x};$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=e^{y/x}\left(-\frac{y}{x^2}\right)\cdot\frac{x-y}{x}+e^{y/x}\cdot\frac{x-(x-y)}{x^2}=e^{y/x}\frac{y^2}{x^3};$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=e^{y/x}\frac{1}{x}=\frac{e^{y/x}}{x};\quad \frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=e^{y/x}\left(-\frac{y}{x^2}\right)=-\frac{ye^{y/x}}{x^2}.$$

Подставим найденные производные в уравнение

$$x^2e^{y/x}\frac{y^2}{x^2}+2xy\left(-\frac{ye^{y/x}}{x^2}\right)+y^2\frac{e^{y/x}}{x}=$$

$$=\frac{e^{y/x}}{x}\left(y^2-2y^2+y^2\right)=0.$$

Получили тождество и, следовательно, функция удовлетворяет уравнению.

Задача 13. Найти производную и градиент скалярного поля $u=x^2y^2z-\ln(z-1)$ в точке M (1; 1; 2) по направлению вектора $\bar{l}=5\bar{i}-6\bar{j}+2\sqrt{5}\bar{k}$.

Решение

Производная скалярного поля $u(x,y,z)$ по направлению вектора $\bar{l}=l_1\bar{i}+l_2\bar{j}+l_3\bar{k}$ вычисляем по формуле

$$\frac{\partial u}{\partial l}=\frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta+\frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma,$$

где $\cos\alpha=\frac{l_1}{|l|}$; $\cos\beta=\frac{l_2}{|l|}$; $\cos\gamma=\frac{l_3}{|l|}$ являются координатами единичного вектора $\overline{l_0}$, а $|\bar{l}|=\sqrt{l_1^2+l_2^2+l_3^2}$.

Найдем длину вектора $\bar{l}$.

$$|\bar{l}|=\sqrt{5^2+6^2+\left(2\sqrt{5}\right)^2}=\sqrt{25+36+20}=\sqrt{81}=9.$$

Тогда $\cos\alpha=\frac{5}{9}$; $\cos\beta=-\frac{2}{3}$; $\cos\gamma=\frac{2\sqrt{5}}{9}$.

Частные производные функции $u(x,y,z)$ в точке M (1; 1; 2) имеют значения:

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_M=\left.\left(2xy^2z\right)\right|_M=2\cdot1\cdot1\cdot2=4;$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_M=\left.\left(2x^2yz\right)\right|_M=2\cdot1\cdot1\cdot2=4;$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_M=\left.\left(x^2y^2-\frac{1}{z-1}\right)\right|_M=1\cdot1\cdot\frac{1}{2-1}=0.$$

Подставляя в формулу, найдем:

$$\left.\frac{\partial u}{\partial l}\right|_M=4\cdot\frac{5}{9}+4\cdot\left(-\frac{2}{3}\right)+0\frac{2\sqrt{5}}{9}=4\left(\frac{5}{9}-\frac{2}{3}\right)=-\frac{4}{9}.$$

Градиент скалярного поля $u(x,y,z)$ есть вектор $\overline{\text{grad}u}$, направленный по нормали к поверхности уровня в сторону возрастания поля. Вычисляем по формуле

$$\overline{\text{grad}u}=\frac{\partial u}{\partial x}\bar{i}+\frac{\partial u}{\partial y}\bar{j}+\frac{\partial u}{\partial z}\bar{k}$$

Подставляя значения частных производных в последнюю формулу, получим:

$$\overline{\text{grad}u}=4\bar{i}+4\bar{j}.$$

Задача 14. Найти формулу вида $y=ax+b$ методом наименьших квадратов по данным таблицы:

x	1	2	3	4	5
y	5,9	6,9	5,4	3,4	3,9

Решение

Найдем коэффициенты *a* и *b* путем минимизации суммы

$$S(a,b)=\sum_{i=1}^{\infty}\left(y_i-(ax_i+b)\right)^2.$$

По данным таблицы составим систему двух линейных уравнений:

$$\begin{cases}\sum\limits_{i=1}^{\infty}y_ix_i-a\sum\limits_{i=1}^{\infty}x_i^{\ 2}-b\sum\limits_{i=1}^{\infty}x_i=0\\ \sum\limits_{i=1}^{\infty}y_i-a\sum\limits_{i=1}^{\infty}x_i-bn=0,\end{cases}$$

решив которую найдем параметры *a* и *b*.

Предварительно вычислим суммы:

$$\sum_{i=1}^{5}x_iy_i=5{,}9+13{,}8+16{,}2+13{,}6+19{,}5=69;$$

$$\sum_{i=1}^{5}x_i^{\ 2}=1+4+9+16+25=55;$$

$$\sum_{i=1}^{5}x_i=1+2+3+4+5=15;$$

$$\sum_{i=1}^{5}y_i=5{,}9+6{,}9+5{,}4+3{,}4+3{,}9=25{,}5.$$

Составим систему уравнений:

$$\begin{cases}55a+15b=69\\ 3a+b=5{,}1\Rightarrow b=5{,}1-3a,\end{cases}$$

$$55a+76{,}5-45a=69,$$

$$10a=-7{,}5\Rightarrow a=-0{,}75,$$

$$b=5{,}1+2{,}25=7{,}35.$$

Искомая формула имеет вид:

$$y=-0{,}75x+7{,}35.$$

График искомой зависимости приводится на рис. 7.

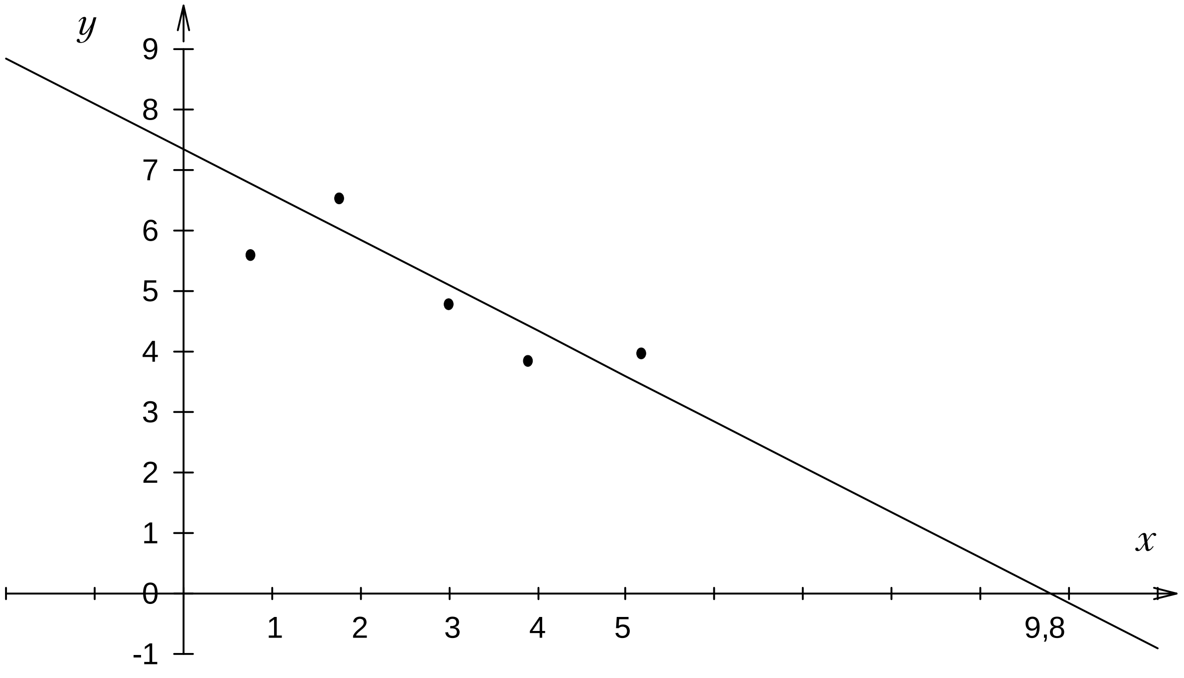


Рис. 7

5.2. Контрольная работа №2

Задача 15. Найти решения уравнений в комплексной области

1. $z^2-4z+20=0$
2. $z^2-z+5=0$
3. $z^2+8z+41=0$
4. $z^2+3z+4=0$
5. $z^2+2z+5=0$
6. $z^2-5z+7=0$
7. $z^2-6z+10=0$
8. $z^2-7z+13=0$
9. $z^2-2z+7=0$
10. $z^2+4z+5=0$
11. $z^2-10z+26=0$
12. $z^2+z+2=0$
13. $z^2-3z+5=0$
14. $z^2+2z+6=0$
15. $z^2+5z+8=0$
16. $z^2+6z+11=0$
17. $z^2-4z+6=0$
18. $z^2+10z+30=0$
19. $z^2+12z+38=0$
20. $z^2-3z+3=0$
21. $z^2-11z+40=0$
22. $z^2-3z+1=0$
23. $z^2-5z+9=0$
24. $z^2-6z+12=0$
25. $z^2+20z+105=0$
26. $z^2-20z+110=0$
27. $z^2-8z+41=0$
28. $z^2+6z+10=0$
29. $z^2-5z+9=0$
30. $z^2-2z+5=0$

Задача 16. Даны комплексные числа z_1, z_2, z_3.

1. Найти модуль и аргумент комплексных чисел z_1, z_2, z_3 и изобразить их на чертеже.

2. Записать комплексные числа z_1 и z_2 в тригонометрической форме и выполнить следующие действия: $z_1 \cdot z_2$; $\frac{z_1}{z_2}$, z_2^5, $\sqrt[4]{z_2}$.

3. Записать комплексные числа z_1 и z_2 в показательной форме и выполнить следующие действия: $z_1 \cdot z_2$; $\frac{z_2}{z_1}$, z_2^5, $\sqrt[4]{z_1}$.

4. Записать комплексное число z_3 в арифметической форме и выполнить следующие действия: $z_1 + 2z_3$; $z_2 - 2z_3$; $z_1 \cdot z_3$; $\frac{z_2}{z_3}$.

1. $z_1 = 1 + i, z_2 = 1 - \sqrt{3}i, \quad z_3 = -3\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$

2. $z_1 = 1 - i, z_2 = -1 + \sqrt{3}i, \quad z_3 = 2\left(\cos\frac{\pi}{4} - i\sin\frac{\pi}{4}\right)$

3. $z_1 = -2 + 2i, z_2 = -\sqrt{3} - \sqrt{3}i, \quad z_3 = -\left(\cos\frac{2\pi}{3} - i\sin\frac{2\pi}{3}\right)$

4. $z_1 = -2 + 2i, z_2 = -\sqrt{3} - \sqrt{3}i, \quad z_3 = -\left(\cos\frac{2\pi}{3} - i\sin\frac{2\pi}{3}\right)$

5. $z_1 = \sqrt{7} + \sqrt{21}i, z_2 = 4 - 4i, \quad z_3 = \cos\left(\pi + \frac{\pi}{4}\right) - i\sin\left(\pi + \frac{\pi}{4}\right)$

6. $z_1 = -\sqrt{2} - \sqrt{6}i, z_2 = \sqrt{2} + \sqrt{6}i, \quad z_3 = \sin\left(\frac{3\pi}{2} + \frac{\pi}{4}\right) + i\cos\left(\frac{3\pi}{2} + \frac{\pi}{4}\right)$

7. $z_1 = \sqrt{2} - \sqrt{6}i, z_2 = -\sqrt{6} + \sqrt{2}i, \quad z_3 = -5\left(\cos\frac{\pi}{6} - i\sin\frac{\pi}{6}\right)$

8. $z_1 = -\sqrt{2} + \sqrt{7}i, z_2 = \sqrt{7} - \sqrt{7}i, \quad z_3 = -\left(\cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6}\right)$

9. $z_1 = 2 + 2\sqrt{3}i, z_2 = 3 - 3i, \quad z_3 = \cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}$

10. $z_1 = -3 - 3i, z_2 = 2\sqrt{3} - 2i, \quad z_3 = \cos\frac{\pi}{3} + i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)$

11. $z_1 = -1 + i, z_2 = \sqrt{3} - i, \quad z_3 = -\sqrt{3}\left(\cos\left(\pi + \frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right)\right)$

12. $z_1 = 1 + i, z_2 = -3\sqrt{3} + 3i, \quad z_3 = -\sqrt{3}\left(\sin\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{3}\right) + i\cos\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{3}\right)\right)$

13. $z_1 = -2 - 2i, z_2 = 1 + \sqrt{3}i, \quad z_3 = \sqrt{2}\left(\sin\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4}\right) - i\cos\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right)$

14. $z_1 = \sqrt{3} + i, z_2 = 5 - 5i, \quad z_3 = \frac{2}{\sqrt{2}}\left(\cos\left(2\pi + \frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(2\pi + \frac{\pi}{4}\right)\right)$

15. $z_1 = 2\sqrt{2} + 2\sqrt{6}i, z_2 = -10 - 10i, \ z_3 = -2\left(\cos\left(4\pi + \frac{\pi}{6}\right) - i\sin\left(4\pi + \frac{\pi}{6}\right)\right)$

16. $z_1 = \sqrt{10} + \sqrt{30}i, z_2 = 7 - 7i, \ z_3 = 2\left(\cos\frac{5\pi}{2} - i\sin\frac{5\pi}{2}\right)$

17. $z_1 = -7 - 7i, \ z_2 = \sqrt{10} - \sqrt{30}i, \ z_3 = -\left(\cos 9\pi + i\sin(-9\pi)\right)$

18. $z_1 = \sqrt{7} - \sqrt{21}i, z_2 = 3 + 3i, \ z_3 = -7\left(\cos\left(\frac{5\pi}{2} + \frac{5\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{5\pi}{2} + \frac{5\pi}{3}\right)\right)$

19. $z_1 = -\sqrt{10} + \sqrt{30}i, z_2 = 9 + 9i, \ z_3 = 7\left(\sin\left(\frac{5\pi}{2} + \frac{5\pi}{3}\right) + i\cos\left(\frac{5\pi}{2} + \frac{5\pi}{3}\right)\right)$

20. $z_1 = -\sqrt{5} + \sqrt{5}i, \ z_2 = -\sqrt{10} - \sqrt{30}i, \ z_3 = -2\left(\sin 4\pi + i\cos 4\pi\right)$

21. $z_1 = -\sqrt{7} + \sqrt{21}i, z_2 = -7 + 7i, \ z_3 = 4\left(\cos\frac{7\pi}{2} + i\sin\frac{7\pi}{2}\right)$

22. $z_1 = -\sqrt{7} - \sqrt{21}i, z_2 = \sqrt{13} + \sqrt{13}i, \ z_3 = -4\left(\cos\frac{7\pi}{2} - i\sin\frac{7\pi}{2}\right)$

23. $z_1 = 7 + 7i, z_2 = \sqrt{21} + \sqrt{7}i, \ z_3 = \cos\frac{10\pi}{4} + i\sin\frac{10\pi}{4}$

24. $z_1 = -\sqrt{21} - \sqrt{7}i, z_2 = \sqrt{10} - \sqrt{30}i, \ z_3 = \cos\left(-\frac{10\pi}{4}\right) + i\sin\frac{10\pi}{4}$

25. $z_1 = -3 + 3i, \ z_2 = -\sqrt{21} - \sqrt{7}i, \ z_3 = \sin\left(\frac{7\pi}{2} + \frac{\pi}{6}\right) + i\cos\left(\frac{7\pi}{2} + \frac{\pi}{6}\right)$

26. $z_1 = -7 - 7i, \ z_2 = -\sqrt{21} - \sqrt{7}i, \ z_3 = -4\left(\cos\frac{7\pi}{2} - i\sin\frac{7\pi}{2}\right)$

27. $z_1 = 1 - \sqrt{3}i, \ z_2 = 1 + i, \quad z_3 = -3\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$

28. $z_1 = \sqrt{7} - \sqrt{7}i, z_2 = -\sqrt{2} + \sqrt{7}i, \quad z_3 = -\left(\cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6}\right)$

29. $z_1 = 1 - \sqrt{3}i, z_2 = 1 + i, \quad z_3 = -3\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$

30. $z_1 = 2\sqrt{3} - 2i, z_2 = -3 - 3i, \quad z_3 = \cos\frac{\pi}{3} + i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)$

Задача 17. Найти неопределенные интегралы:

1. а) $\int \frac{x+\sqrt{x}}{x\sqrt{x}}dx$ б) $\int \frac{\sin^3 x}{\cos^2 x}dx$

в) $\int \frac{8x+18}{\left(x^2+5\right)(x-3)}dx$ г) $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{x}+\sqrt{x}}$

2. а) $\int x^5\left(1-x^6\right)^7 dx$ б) $\int \frac{\cos^3 x}{\sin^4 x}dx$

в) $\int (3x-2)e^{-2x}dx$ г) $\int \frac{(x+1)^2}{\left(x^2+1\right)^2}dx$

3. а) $\int \frac{x^3dx}{\sqrt[3]{2+x^4}}$ б) $\int \mathrm{tg}^3 x dx$

в) $\int x^2 \sin 2x dx$ г) $\int \frac{4x-2}{x^4+2x^2}dx$

4. а) $\int \frac{dx}{x\sqrt{1-\ln^2 x}}$ б) $\int \sin 7x \cos x dx$

в) $\int \frac{\sqrt{x}dx}{\sqrt{x}+1}$ г) $\int \frac{x^2+x-1}{(3x-2)(2x-1)^2}dx$

5. а) $\int \frac{x\sqrt{2}}{\left(1+2x^2\right)^3}dx$ б) $\int \mathrm{ctg}^3 2x dx$

в) $\int (2x+1)\cos x dx$ г) $\int \frac{6dx}{x^3-9x}$

6. а) $\int \frac{\sin x}{1+5\cos x}dx$ б) $\int \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}dx$

в) $\int \frac{x^4dx}{1-x^{10}}$ г) $\int \frac{3x^2+5x+6}{\left(x^2+6\right)\left(x^2+4x+16\right)}$

7. а) $\int \frac{xe^{\sqrt{1-x^2}}}{\sqrt{1-x^2}}dx$ б) $\int \sin^2 3x \cos^3 2x dx$

в) $\int \frac{x-1}{\sqrt{2x-1}}dx$ г) $\int \frac{(6x-17)dx}{(x-4)\left(x^2+x-6\right)}$

8. а) $\int 12^{\sin x}\cos x dx$

б) $\int \sin^5 4x dx$

в) $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{3x+1}-1}$

г) $\int \frac{x^2 dx}{(x+1)^3}$

9. а) $\int \frac{3^{\ln x}}{x} dx$

б) $\int \frac{\sec^2 x}{\sqrt{4-\operatorname{tg}^2 x}} dx$

в) $\int \frac{dx}{x+\sqrt[3]{x}}$

г) $\int \frac{(2x+10)dx}{(x^2+5)(x^2+2x+5)}$

10. а) $\int \frac{\sin\ln x+3}{x} dx$

б) $\int \sqrt{1+5\cos^2 x}\sin 2x dx$

в) $\int \frac{dx}{\sqrt{x}-2\sqrt{x}}$

г) $\int \frac{x^3+2x^2-x+\frac{1}{2}}{(x+2)^2(x^2+1)} dx$

11. а) $\int \left(\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2 dx$

б) $\int x^4\cos(x^5+1)dx$

в) $\int \frac{\sqrt{1+x}}{x} dx$

г) $\int \frac{(x^2+12x+14)dx}{(x+1)^2(x+4)}$

12. а) $\int 8^x \cdot 16^{\frac{x}{2}} dx$

б) $\int \frac{\cos x dx}{\sqrt[7]{\sin^3 x}}$

в) $\int \frac{\sqrt{x}dx}{x+4}$

г) $\int \frac{10dx}{(x^2-1)(x^2+9)}$

13. а) $\int \frac{1-x}{1+x^2} dx$

б) $\int e^{\cos^2 x}\sin 2x dx$

в) $\int \frac{dx}{x\sqrt{2x+9}}$

г) $\int \frac{(4x+29)dx}{(2x-3)(x^2+x+5)}$

14. а) $\int x\cdot 4^{2x^2+7} dx$

б) $\int \frac{\sin x\cos x dx}{\sqrt{3-\sin^4 x}}$

в) $\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1} dx$

г) $\int \frac{2x^2+7x+2}{x^3-8} dx$

15. а) $\int \frac{\sqrt[x]{e}}{x^2} dx$

б) $\int \sin\frac{4x}{5}\cos\frac{x}{5} dx$

в) $\int\frac{\left(\sqrt{x}-2\right)dx}{x\left(\sqrt[3]{x}+1\right)}$ г) $\int\frac{3x^2-4x+10}{(2x+1)\left(x^2+4\right)}dx$

16. а) $\int\frac{\left(e^{\arcsin x}-1\right)dx}{\sqrt{1-x^2}}$ б) $\int\sin^3 x\sqrt[3]{\cos x}dx$

в) $\int\frac{\sqrt{x+9}}{x}dx$ г) $\int\frac{(11x+25)dx}{(x-1)\left(x^2+5x+6\right)}$

17. а) $\int\frac{xdx}{1+x^4}$ б) $\int\sin^3\frac{x}{4}\cos^5\frac{x}{4}dx$

в) $\int\frac{1+\sqrt[4]{x}}{x+\sqrt{x}}dx$ г) $\int\frac{-2xdx}{(x+1)\left(x^2+1\right)}$

18.а) $\int\frac{x^3dx}{x^8+5}$ б) $\int(\cos 5x\cos 4x)dx$

в) $\int\frac{dx}{\left(6+\sqrt[3]{x}\right)^4\sqrt[3]{x^2}}$ г) $\int\frac{x^2-7{,}5x-2{,}5}{\left(x^2+x\right)(x-5)}dx$

19. а) $\int\frac{\sqrt[3]{1+\ln x}+2}{x}dx$ б) $\int\cos^2 4xdx$

в) $\int\frac{dx}{1+\sqrt{x+5}}$ г) $\int\frac{4-4x}{x^3+8}dx$

20. а) $\int\frac{3-\sqrt{2+3x^2}}{2+3x^2}dx$ б) $\int\frac{1}{x^2}\cos\frac{9}{x}dx$

в) $\int\frac{x+1}{\sqrt[3]{3x+1}}dx$ г) $\int\frac{4x^2+3x+45}{x^3-3x^2+9x-27}dx$

21. а) $\int\frac{\arccos\frac{x}{2}}{\sqrt{4-x^2}}dx$ б) $\int\frac{\sin 4x}{1+\cos^2 2x}dx$

в) $\int\frac{xdx}{\sqrt{2x+1}+1}$ г) $\int\frac{\left(x^2+5x+7\right)dx}{(x-2)\left(x^2+x+1\right)}$

22. а) $\int\frac{\sqrt{x}+\ln x}{x}dx$ б) $\int\sin 3x\sin 7xdx$

в) $\int\frac{dx}{\sqrt[3]{x^2}+2\sqrt{x}}$ г) $\int\frac{4xdx}{3x^4-3}$

23. а) $\int e^{x+x^2}(1+2x)dx$ б) $\int \sin^2 x\sin 3xdx$

в) $\int \frac{\left(8-\sqrt{x}\right)^3}{\sqrt{x}}dx$ г) $\int \frac{dx}{8x^3(2x-1)}$

24. а) $\int \frac{e^{6x}}{3+e^{6x}}dx$ б) $\int \frac{\sqrt{2+\mathrm{tg}^3 x}\sin^2 x}{\cos^4 x}dx$

в) $\int \frac{\left(\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}\right)dx}{\sqrt[4]{x^5}-\sqrt[6]{x^7}}$ г) $\int \frac{x^3+x^2-18x-17}{x^2-16}dx$

25. а) $\int \frac{dx}{\left(1+x^2\right)\mathrm{arctg}x}$ б) $\int \sqrt{1+\cos^3 x}\cdot\sin 2x\cos xdx$

в) $\int \frac{\sqrt{2x+3}}{\sqrt[3]{2x+3}+1}dx$ г) $\int \frac{x^3+2x^2-2x}{x^2+2x+1}dx$

26. а) $\int e^{2x^2+\ln x}dx$ б) $\int \frac{\sin 4x}{\sin^4 x+\cos^4 x}dx$

в) $\int \frac{\sqrt{1+x}}{x}dx$ г) $\int \frac{4x+3}{\left(x^2+3\right)\left(2x^2-4x+3\right)}dx$

27. а) $\int \frac{xdx}{\sqrt{2}x^2-5}$ б) $\int \sin\frac{x}{4}\cdot\sin\frac{3x}{4}dx$

в) $\int \frac{(2x+3)dx}{\sqrt{x^2+2x+5}}$ г) $\int \frac{x^2dx}{x^3+5x^2+8x+4}$

28. а) $\int \frac{dx}{x\sqrt{4-\ln^2 x}}$ б) $\int \frac{\sin^3 x}{\cos^6 x}dx$

в) $\int \frac{2x+2}{\sqrt{x^2+8x+1}}dx$ г) $\int \frac{x^4+1}{x^3-x^2+x-1}dx$

29. а) $\int 4^{\sin x}\cdot\cos xdx$ б) $\int (2x+3)\sin xdx$

в) $\int \frac{(2x-2)dx}{\sqrt{x^2-6x+11}}$ г) $\int \frac{(2x-3)dx}{\left(x^2-3x+2\right)(x-4)}$

30. а) $\int \frac{dx}{x(3-\ln x)}$ б) $\int \sin^{10} x\cdot\cos^3 xdx$

в) $\int \frac{(2x+9)dx}{\sqrt{x^2-8x+7}}$ г) $\int \frac{3x+1}{x^3-7x^2+12x}dx$

Задача 18. Вычислить определенные интегралы:

1\. а) $\int\limits_0^3\left(x^3-\frac{x^2}{2}+5x\right)dx$, б) $\int\limits_0^1\frac{dx}{4x^2+4x+5}$

в) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}x\cdot\cos x\,dx$, г) $\int\limits_3^6\frac{\sqrt{x^2-9}}{x^4}dx$

2\. а) $\int\limits_1^2\left(x^2+\frac{1}{x^4}-2x\right)dx$, б) $\int\limits_2^9\sqrt[3]{x-1}\,dx$

в) $\int\limits_0^1\ln(x+1)dx$, г) $\int\limits_0^2\frac{dx}{\sqrt{\left(16-x^2\right)^3}}$

3\. а) $\int\limits_1^2\left(x^4-\frac{2}{x^3}+\frac{x^2}{3}-1\right)dx$, б) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x\cdot\cos^2 x dx$

в) $\int\limits_0^1 x\cdot e^{-x}dx$, г) $\int\limits_0^5 x^2\cdot\sqrt{25-x^2}dx$

4\. а) $\int\limits_1^2\left(x^3+\frac{x^2}{3}-\frac{3}{x^2}+1\right)dx$ б) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 x\,dx$

в) $\int\limits_0^{e-1}\ln(x+1)dx$ г) $\int\limits_0^4 x^2\cdot\sqrt{16-x^2}dx$

5\. а) $\int\limits_1^2\left(3x^3+\frac{2}{x^2}-7x+3\right)dx$ б) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}\mathrm{tg}x\,dx$

в) $\int\limits_0^1 x\cdot e^x\,dx$ г) $\int\limits_3^6\frac{\sqrt{x^2-9}}{x^4}dx$

6\. а) $\int\limits_1^2\left(x\sqrt{x}-\frac{1}{\sqrt{x}}+x^3\right)dx$ б) $\int\limits_0^1\frac{e^x dx}{1+e^{2x}}$

в) $\int\limits_1^e x\cdot\ln x\,dx$ г) $\int\limits_0^5\frac{dx}{2x+\sqrt{3x+1}}$

7. а) $\int\limits_{1}^{2}\left(x^2-\frac{3}{x^2}+\frac{5}{\sqrt{x}}\right)dx$ б) $\int\limits_{\frac{\pi}{8}}^{\frac{\pi}{6}1}\frac{dx}{\cos^2 2x}$

в) $\int\limits_{1}^{e}\ln x\,dx$ г) $\int\limits_{0}^{3}x^2\sqrt{9-x^2}\,dx$

8. а) $\int\limits_{1}^{3}\left(\frac{1}{x}-x^2+\frac{5}{\sqrt{x}}\right)dx$ б) $\int\limits_{0}^{\sqrt{3}}\frac{xdx}{\sqrt{4-x^2}}$

в) $\int\limits_{0}^{1}x\cdot\mathrm{arctg}x\,dx$ г) $\int\limits_{-1}^{1}\frac{xdx}{\sqrt{5-4x}}$

9. а) $\int\limits_{0}^{1}\left(x^4-\frac{x^5}{3}+2x\right)dx$ б) $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}}\sin^4 x\,dx$

в) $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{4}}x^2\cdot\cos 2x\,dx$ г) $\int\limits_{1}^{5}\frac{dx}{x+\sqrt{2x-1}}$

10. а) $\int\limits_{2}^{3}\left(\sqrt{x}-\frac{1}{\sqrt{x}}+x^2\right)dx$ б) $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 x\,dx$

в) $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}}e^x\cdot\cos x\,dx$ г) $\int\limits_{-2}^{2}\frac{dx}{\left(4+x^2\right)^2}$

11. а) $\int\limits_{1}^{3}\left(x^2-\frac{5}{x^3}+2x-1\right)dx$ б) $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}}\cos^5 x\cdot\sin x\,dx$

в) $\int\limits_{0}^{1}x\cdot e^{2x}\,dx$ г) $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}}\frac{dx}{3-2\cos x}$

12. а) $\int\limits_{1}^{2}\left(x^4+\frac{2}{x^4}-\frac{3}{\sqrt{x}}\right)dx$ б) $\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{dx}{1+\cos x}$

в) $\int\limits_{0}^{1}\left(x+1\right)\cdot e^{-x}\,dx$ г) $\int\limits_{1}^{6}\frac{dx}{1+\sqrt{3x-2}}$

13. а) $\int\limits_{1}^{3}\left(\frac{1}{x^{3}}-x^{3}+\sqrt{x}\right)dx$ б) $\int\limits_{-0,5}^{1}\frac{dx}{\sqrt{8+2x-x^{2}}}$

в) $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{4}}x\cdot\cos 2x\,dx$ г) $\int\limits_{0}^{2}\frac{dx}{\sqrt{x+1}+\sqrt{(x+1)^{3}}}$

14. а) $\int\limits_{1}^{2}\left(x^{2}-\frac{7}{x^{4}}+\frac{2}{\sqrt{x}}-1\right)dx$ б) $\int\limits_{1}^{2}\frac{dx}{x+x^{3}}$

в) $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{4}}x\cdot\sin x\,dx$ г) $\int\limits_{1}^{2}\frac{\sqrt{x^{2}-1}}{x}dx$

15. а) $\int\limits_{1}^{2}\left(1-3x+\frac{x^{2}}{7}-\frac{7}{x^{2}}\right)dx$ б) $\int\limits^{1}\frac{dx}{x^{2}+4x+5}$

в) $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}}x\cdot\sin x\,dx$ г) $\int\limits_{0}^{1}x^{2}\sqrt{1-x^{2}}\,dx$

16. а) $\int\limits_{1}^{2}\left(3-2x-\frac{x^{2}}{5}+\frac{5}{x^{2}}\right)dx$ б) $\int\limits_{1}^{e}\frac{dx}{x\sqrt{1-(\ln x)^{2}}}$

в) $\int\limits_{0}^{2}x\cdot 3^{x}\,dx$ г) $\int\limits_{0}^{1}\frac{xdx}{1+\sqrt{x}}$

17. а) $\int\limits_{1}^{2}\left(2+\frac{3}{\sqrt{x}}-\frac{4}{x^{2}}+x^{3}\right)dx$ б) $\int\limits_{1}^{2}\frac{1}{x^{2}}\cdot e^{\frac{1}{x}}dx$

в) $\int\limits_{1}^{2}x\cdot\ln\left(x^{2}+1\right)dx$ г) $\int\limits_{3}^{8}\frac{xdx}{\sqrt{1+x}}$

18. а) $\int\limits_{1}^{2}\left(3-\frac{5}{2x}-\frac{1}{\sqrt{x}}-x^{3}\right)dx$ б) $\int\limits_{1}^{e}\frac{1+\ln x}{x}dx$

в) $\int\limits_{4}^{9}\frac{\sqrt{x}dx}{\sqrt{x}-1}$ г) $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{8}}x^{2}\cdot\sin 4x\,dx$

19. а) $\int\limits_{1}^{2}\left(x^{4}+\frac{4}{x}-\frac{3}{\sqrt{x}}+1\right)dx$ б) $\int\limits_{1}^{e^{3}}\frac{dx}{x\sqrt{1+\ln x}}$

в) $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{4}}x\cdot\cos x\,dx$ г) $\int\limits_{0}^{1}\frac{\sqrt{x}}{1+x}dx$

20. а) $\int\limits_1^2\left(2+\frac{3}{\sqrt{x}}-\frac{4}{x^2}+x^3\right)dx$ б) $\int\limits_{-0,5}^{1}\frac{dx}{\sqrt{8+2x-x^2}}$

в) $\int\limits_0^1 x\cdot e^{-x}dx$ г) $\int\limits_2^4\frac{\sqrt{x^2-4}}{x^4}dx$

21. а) $\int\limits_1^2\left(x^4-\frac{1}{x^4}+2x-3\right)dx$ б) $\int\limits_{-2}^{-1}\frac{dx}{(11+5x)^2}$

в) $\int\limits_0^1\frac{x^2dx}{\sqrt{4-x^2}}$ г) $\int\limits_1^e x^2\ln x\,dx$

22. а) $\int\limits_1^2\left(x^3-\frac{5}{x^3}+\frac{1}{\sqrt{x}}-1\right)dx$ б) $\int\limits_0^1\frac{dx}{\sqrt{4-x^2}}$

в) $\int\limits_0^1 x\cdot e^{3x}\,dx$ г) $\int\limits_0^4\frac{dx}{1+\sqrt{2x+1}}$

23. а) $\int\limits_1^2\left(x^2-\frac{3}{x^2}+2x-4\right)dx$ б) $\int\limits_0^1\frac{dx}{\sqrt{x^2+1}}$

в) $\int\limits_4^9\frac{dx}{\sqrt{x}-1}$ г) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{8}} x\cos 4x\,dx$

24. а) $\int\limits_1^2\left(x^5-\frac{3}{x^5}+\frac{2}{\sqrt{x}}-7\right)dx$ б) $\int\limits_a^{a\sqrt{3}}\frac{dx}{a^2+x^2}$

в) $\int\limits_1^e\ln^2 x\,dx$ г) $\int\limits_2^4\frac{\sqrt{x^2-4}}{x^4}dx$

25. а) $\int\limits_1^2\left(x-\frac{x^3}{2}+\frac{4}{x^2}+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)dx$ б) $\int\limits_4^9\left(\sqrt{x}-1\right)dx$

в) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{8}}(x+1)\cdot\sin 4x\,dx$ г) $\int\limits_2^{2\sqrt{3}}\frac{dx}{4+x^2}$

26. а) $\int\limits_1^2\left(x^3-\frac{5}{x^3}+\frac{1}{\sqrt{x}}-1\right)dx$ б) $\int\limits_1^{e^3}\frac{dx}{x\sqrt{1+\ln x}}$

в) $\int\limits_0^1 x\cdot e^{-x}dx$ г) $\int\limits_3^6\frac{\sqrt{x^2-9}}{x^4}dx$

27. а) $\int\limits_1^2 \left(3-2x-\frac{x^2}{5}+\frac{5}{x^2}\right)dx$ б) $\int\limits_1^2 \frac{dx}{x+x^3}$

в) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} x\cdot\sin x\,dx$ г) $\int\limits_3^8 \frac{xdx}{\sqrt{1+x}}$

28. а) $\int\limits_1^2 \left(2+\frac{3}{\sqrt{x}}-\frac{4}{x^2}+x^3\right)dx$ б) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 x\,dx$

в) $\int\limits_0^1 (x+1)\cdot e^{-x}\,dx$ г) $\int\limits_0^2 \frac{x^2}{\sqrt{16-x^2}}dx$

29. а) $\int\limits_1^2 \left(x^4-\frac{1}{x^4}+2x-3\right)dx$ б) $\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{1+\cos x}$

в) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} x\cdot\cos 2x\,dx$ г) $\int\limits_0^1 \frac{\sqrt{x}}{1+x}dx$

30. а) $\int\limits_1^2 \left(x^2-\frac{7}{x^4}+\frac{2}{\sqrt{x}}-1\right)dx$ б) $\int\limits_{-2}^{-1} \frac{dx}{(11+5x)^2}$

в) $\int\limits_0^1 x\cdot\mathrm{arctg}x\,dx$ г) $\int\limits_3^6 \frac{\sqrt{x^2-9}}{x^4}dx$

Задача 19. Вычислить несобственный интеграл или установить его расходимость

1. $\int\limits_1^\infty \frac{x^2dx}{1+x^4}$ 2. $\int\limits_{-2}^\infty \frac{dx}{x^2+4x+9}$

3. $\int\limits_0^\infty \frac{x^3dx}{9+x^4}$ 4. $\int\limits_1^\infty \frac{\ln(x^2+1)}{x^2}dx$

5. $\int\limits_3^\infty \frac{dx}{(1+x)\sqrt{x}}$ 6. $\int\limits_{e^2}^\infty \frac{dx}{x\ln^3 x}$

7. $\int\limits_{-\infty}^\infty \frac{dx}{x^2-6x+10}$ 8. $\int\limits_4^\infty \frac{dx}{x\ln^2\sqrt{x}}$

9. $\int\limits_0^\infty x\cdot e^{-\frac{x^2}{2}}dx$ 10. $\int\limits_2^\infty \frac{dx}{x\sqrt{x-1}}$

11. $\int\limits_1^{\infty}\frac{dx}{(2x-1)^3}$

12. $\int\limits_2^{\infty}\frac{xdx}{\sqrt{\left(x^2-3\right)^3}}$

13. $\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{x^2+2x+5}$

14. $\int\limits_1^{\infty}\frac{dx}{x+x^3}$

15. $\int\limits_0^{\infty}\frac{xdx}{\sqrt{\left(4x^2+1\right)^3}}$

16. $\int\limits_{-1}^{\infty}\frac{xdx}{\left(1+x^2\right)^2}$

17. $\int\limits_1^{\infty}x\cdot e^{-x}dx$

18. $\int\limits_1^{\infty}\frac{\sqrt{x}}{1+x}dx$

19. $\int\limits_0^{\infty}\frac{x^2dx}{\sqrt{\left(x^3+1\right)^3}}$

20. $\int\limits_2^{\infty}\frac{dx}{x^2+x-2}$

21. $\int\limits_{\sqrt{5}}^{\infty}\frac{xdx}{\sqrt[3]{\left(x^2-4\right)^5}}$

22. $\int\limits_1^{\infty}\frac{\sqrt[3]{\ln x}}{x}dx$

23. $\int\limits_1^{\infty}\frac{\ln(x+1)}{x^2}dx$

24. $\int\limits_{-\infty}^{0}\frac{dx}{4x^2+4x+3}$

25. $\int\limits_0^{\infty}\frac{dx}{25x^2-10x+2}$

26. $\int\limits_{100}^{\infty}\frac{dx}{x\sqrt{\lg^3 x}}$

27. $\int\limits_{-\infty}^{0}\frac{dx}{1+x^2}$

28. $\int\limits_a^{\infty}\frac{dx}{x\cdot\ln x}$

29. $\int\limits_1^{\infty}\frac{\mathrm{arctg}x}{1+x^2}dx$

30. $\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{xdx}{x^2-1}$

Задача 20. Изменить порядок интегрирования.

1. $\int\limits_0^1 dx\int\limits_x^{2-x}f(x,y)dy$

2. $\int\limits_0^1 dx\int\limits_{-x^2}^{x^2}f(x,y)dy$

3. $\int\limits_0^1 dx\int\limits_{-x}^{x}f(x,y)dy$

4. $\int\limits_0^3 dx\int\limits_0^{\sqrt{25-x^2}}f(x,y)dy$

5. $\int\limits_0^3 dx\int\limits_0^{\sqrt{4-x}}f(x,y)dy$

6. $\int\limits_0^2 dx\int\limits_{x^2}^{x+2}f(x,y)dy$

7. $\int\limits_{0}^{1} dx \int\limits_{2x+1}^{4-x^2} f(x,y)dy$

8. $\int\limits_{0}^{2} dx \int\limits_{\frac{1}{4}x^2}^{2\sqrt{x}} f(x,y)dy$

9. $\int\limits_{0}^{4} dx \int\limits_{\frac{x}{2}+1}^{7-x} f(x,y)dy$

10. $\int\limits_{0}^{1} dx \int\limits_{-\sqrt{1-x^2}}^{1-x} f(x,y)dy$

11. $\int\limits_{0}^{1} dx \int\limits_{2x^2}^{3-x} f(x,y)dy$

12. $\int\limits_{0}^{\frac{3}{2}} dy \int\limits_{2y^2}^{y+3} f(x,y)dx$

13. $\int\limits_{-1}^{0} dx \int\limits_{2x^2}^{x+3} f(x,y)dy$

14. $\int\limits_{0}^{1} dy \int\limits_{2y^2}^{3-y} f(x,y)dx$

15. $\int\limits_{-\frac{3}{2}}^{0} dx \int\limits_{2x^2}^{3-x} f(x,y)dy$

16. $\int\limits_{0}^{4} dy \int\limits_{\frac{5}{4}y}^{\sqrt{9+y^2}} f(x,y)dx$

17. $\int\limits_{0}^{4} dx \int\limits_{\frac{3}{4}x}^{\sqrt{25-x^2}} f(x,y)dy$

18. $\int\limits_{-4}^{0} dy \int\limits_{-\sqrt{9+y^2}}^{\frac{5}{4}y} f(x,y)dx$

19. $\int\limits_{0}^{1} dx \int\limits_{-1}^{x^2+1} f(x,y)dy$

20. $\int\limits_{0}^{4} dy \int\limits_{\frac{3}{4}y}^{\sqrt{25-y^2}} f(x,y)dx$

21. $\int\limits_{0}^{4} dx \int\limits_{\frac{x}{2}+1}^{7-x} f(x,y)dy$

22. $\int\limits_{0}^{4} dy \int\limits_{\frac{5}{4}y}^{\sqrt{9+y^2}} f(x,y)dx$

23. $\int\limits_{0}^{1} dy \int\limits_{\sqrt{y}}^{3-2y} f(x,y)dx$

24. $\int\limits_{0}^{2} dx \int\limits_{x^2}^{x+2} f(x,y)dy$

25. $\int\limits_{0}^{1} dx \int\limits_{2x+1}^{4-x^2} f(x,y)dy$

26. $\int\limits_{0}^{2} dx \int\limits_{\frac{1}{4}x^2}^{2\sqrt{x}} f(x,y)dy$

27. $\int\limits_{0}^{3} dx \int\limits_{\frac{1}{3}x^2}^{3\sqrt{x}} f(x,y)dy$

28. $\int\limits_{0}^{2} dx \int\limits_{x^2}^{x+2} f(x,y)dy$

29. $\int\limits_{0}^{1} dx \int\limits_{2x^2}^{3-x} f(x,y)dy$

30. $\int\limits_{0}^{1} dx \int\limits_{2x^2}^{3-x} f(x,y)dy$

Задача 21. Вычислить площадь плоской пластинки, ограниченной данными линиями:

1. а) $y=\dfrac{3}{x},\ y=4e^{x},\ y=3,\ y=4.$

б) $y^2-2y+x^2=0,$
$y^2-4y+x^2=0,$
$y=x/\sqrt{3},\ y=\sqrt{3}\,x.$

в) $\left(x^2+y^2\right)^3=a^2\left(x^4+y^4\right)\ (a>0).$

2. а) $x=\sqrt{36-y^2},\ \ x=6-\sqrt{36-y^2}.$

б) $x^2-4x+y^2=0,$
$x^2-8x+y^2=0,$
$y=0,\ y=x/\sqrt{3}.$

в) $\left(x^2+y^2\right)^2=a^2\left(3x^2+2y^2\right)\ (a>0).$

3. а) $x^2+y^2=72,\ 6y=-x^2\ (y\le 0).$

б) $y^2-6y+x^2=0,$
$y^2-8x+x^2=0,$
$y=x/\sqrt{3},\ y=\sqrt{3}\,x.$

в) $\left(x^2+y^2\right)^3=a^2x^2\left(4x^2+3y^2\right)\ (a>0).$

4. а) $x=8-y^2,\ x=-2y.$

б) $x^2-2x+y^2=0,$
$x^2-4x+y^2=0,$
$y=0,\ y=x.$

в) $\left(x^2+y^2\right)^2=4ay^3\ (a>0).$

5. а) $y=\dfrac{3}{x},\ y=8e^{x},\ y=3,\ y=8.$

б) $y^2-8y+x^2=0,$
$y^2-10y+x^2=0,$
$y=x/\sqrt{3},\ y=\sqrt{3}\,x.$

в) $\left(x^2+y^2\right)^3=a^2x^4\ (a>0).$

6. а) $y=\dfrac{\sqrt{x}}{2},\ y=\dfrac{1}{2x},\ x=16.$

б) $y^2-4y+x^2=0,$
$y^2-6y+x^2=0,$
$y=x,\ x=0.$

в) $\left(x^2+y^2\right)^2=a^2\left(4x^2+y^2\right)(a>0).$

7. а) $x=5-y^2,\ x=-4y.$

б) $x^2-2x+y^2=0,$
$x^2-10x+y^2=0,$
$y=0,\ x=\sqrt{3}x.$

в) $\left(x^2+y^2\right)^2=a^2\left(4x^2+y^2\right)(a>0).$

8. а) $x^2+y^2=12,\ -\sqrt{6y}=x^2\ (y\le 0).$

б) $y^2-6x+x^2=0,$
$y^2-10y+x^2=0,$

в) $\left(x^2+y^2\right)^2=a^2\left(4x^2+5y^2\right)(a>0).$

9. а) $\sqrt{12-x^2}, y=2\sqrt{3}-\sqrt{12-x^2},$
$x=0 \quad (x\geq 0)$

б) $x^2-4x+y^2=0,$
$x^2-8x+y^2=0,$

10. а) $y=\frac{3}{2}\sqrt{x}, y=\frac{3}{2x}, x=9.$

в) $x^4=a^2\left(x^2-3y^2\right) \quad (a>0)$

б) $x^2-2x+y^2=0,$
$x^2-4x+y^2=0,$
$y=x/\sqrt{3}, y=\sqrt{3}\,x.$

11. а) $y=\sqrt{24-x^2}, 2\sqrt{3}y=x^2, x=0.$
$(x\geq 0).$

в) $\left(x^2+y^2\right)^5=a^6xy^3 \quad (a>0)$

б) $y^2-2y+x^2=0,$
$y^2-4y+x^2=0,$
$y=\sqrt{3}x, \quad x=0.$

12. а) $y=\sin x,\ y=\cos x,\ x=0, (x\geq 0).$

в) $\left(x^2+y^2\right)^5=a^4x^4y^2 \quad (a>0)$

б) $x^2-2x+y^2=0,$
$x^2-6x+y^2=0,$
$y=x/\sqrt{3}, y=\sqrt{3}x.$

13. а) $y=\sin x,\ y=\cos x,\ x=0, (x\geq 0).$

в) $\left(x^2+y^2\right)^3=a^4x^2 \quad (a>0)$

б) $y^2-4y+x^2=0,$
$y^2-6y+x^2=0,$
$y=\sqrt{3}x, y=0.$

14. а) $y=\sqrt{18-x^2},\ y=3\sqrt{2}-\sqrt{18-x^2}.$

в) $\left(x^2+y^2\right)^3=a^4y^2 \quad (a>0).$

б) $x^2-4x+y^2=0,$
$x^2-8x+y^2=0,$
$y=x/\sqrt{3}, y=\sqrt{3}x.$

15. а) $y=32-x^2,\ y=-4x.$

в) $\left(x^2+y^2\right)^2=a^2\left(2x^2+y^2\right) \quad (a>0).$

б) $y^2-2y+x^2=0,$
$y^2-6y+x^2=0,$
$y=x/\sqrt{3}, y=0.$

16. а) $y=2/x,\ y=5e^x,\ y=2, y=5.$

в) $\left(x^2+y^2\right)^7=a^8x^4y^2 \quad (a>0).$

б) $x^2-2x+y^2=0,$
$x^2-4x+y^2=0,$
$y=0,\ y=x/\sqrt{3}.$

17. а) $x^2+y^2=36, 3\sqrt{2}y=x^2 \ \left(y\ge 0\right).$

в) $\left(x^2+y^2\right)^5=a^6x^3y \quad \left(a>0\right).$

б) $y^2-2y+x^2=0,$

$y^2-10y+x^2=0,$

$y=x/\sqrt{3},\ y=\sqrt{3}x\ .$

18. а) $y=3\sqrt{x},\ y=3/x,\ x=4.$

в) $\left(x^2+y^2\right)^2=a^2\left(x^2+2y^2\right) \quad \left(a>0\right).$

б) $x^2-2x+y^2=0,$

$x^2-6x+y^2=0,$

$y=0,\ y=x/\sqrt{3}\ .$

19. а) $y=6-\sqrt{36-x^2},\ y=\sqrt{36-x^2},$

$x=0 \quad \left(x\ge 0\right).$

в) $\left(x^2+y^2\right)^3=a^2x^3y \quad \left(a>0\right).$

б) $y^2-4y+x^2=0,$

$y^2-10y+x^2=0,$

$y=x/\sqrt{3},\ y=\sqrt{3}x.$

20. а) $y=25/4-x^2,\ y=x-5/2$

в) $\left(x^2+y^2\right)^3=a^2x^2y^2 \quad \left(a>0\right).$

б) $x^2-2x+y^2=0,$

$x^2-6x+y^2=0,$

$y=0,\ y=x.$

21. а) $y=\sqrt{x},\ y=1/x,\ x=16.$

в) $\left(x^2+y^2\right)^2=a^2\left(3x^2+2y^2\right) \quad \left(a>0\right).$

б) $y^2-2y+x^2=0,$

$y^2-4y+x^2=0,$

$y=x,\ x=0.$

22. а) $y=2/x,\ y=7e^x,\ y=2,\ y=7.$

в) $\left(x^2+y^2\right)^3=a^4y^2 \quad \left(a>0\right).$

б) $x^2-2x+y^2=0,$

$x^2-4x+y^2=0,$

$y=0,\ y=\sqrt{3}x.$

23. а) $y=27-y^2,\ x=-6y.$

в) $3\left(x^2+y^2\right)^3=a^2\left(x^4+y^4\right) \quad \left(a>0\right).$

б) $y^2-6y+x^2=0,$

$y^2-8y+x^2=0,$

$y=x,\ x=0.$

24. а) $y=\sqrt{72-y^2},\ 6x=y^2,$

$y=0 \ \left(y\ge 0\right).$

в) $\left(x^2+y^2\right)^2=a^2\left(4x^2+5y^2\right) \quad \left(a>0\right).$

б) $x^2-4x+y^2=0,$

$x^2-8x+y^2=0,$

$y=0,\ y=\sqrt{3}x.$

25. а) $y=\sqrt{6-x^2},\ y=\sqrt{6}-\sqrt{6-x^2}.$

в) $x^4=a^2\left(x^2-3y^2\right)\quad (a>0).$

б) $y^2-4y+x^2=0,$
$y^2-8y+x^2=0,$
$y=x,\ x=0.$

26. а) $y=\frac{3}{2}\sqrt{x},\ y=\frac{3}{2x},\ x=4.$

в) $\left(x^2+y^2\right)^3=a^4y^2\quad (a>0).$

б) $x^2-4x+y^2=0,$
$x^2-8x+y^2=0,$
$y=x/\sqrt{3},\ y=\sqrt{3}x.$

27. а) $y=\sin x,\ y=\cos x,\ x=0,\left(x\geq 0\right)$

в) $\left(x^2+y^2\right)^2=a^2\left(4x^2+5y^2\right)\quad (a>0).$

б) $y^2-4y+x^2=0,$
$y^2-8y+x^2=0,$
$y=\sqrt{3}x,\quad x=0.$

28. а) $y=\frac{1}{x},\ y=6e^x,\ y=1,\ y=6.$

в) $\left(x^2+y^2\right)^5=a^6xy^3\quad (a>0).$

б) $x^2-4x+y^2=0,$
$x^2-6x+y^2=0,$
$y=x/\sqrt{3}x, y=\sqrt{3}x.$

29. а) $y=3\sqrt{x},\ y=3/x,\ x=4.$

в) $\left(x^2+y^2\right)^3=a^2x^2\left(4x^2+3y^2\right)(a>0).$

б) $y^2-2y+x^2=0,$
$y^2-10y+x^2=0,$
$y=x/\sqrt{3}, y=0.$

30. а) $y=11-x^2,\ y=-10x.$

в) $\left(x^2+y^2\right)^3=a^2\left(x^4+y^4\right)\quad (a>0).$

б) $x^2-6x+y^2=0,$
$x^2-10x+y^2=0,$

Задача 22. Найти объем тела, заданного ограничивающими его поверхностями.

1. $z=\frac{1}{4}y^2, 2x-y=0,\quad x+y=9,\quad z=0$
2. $z-2-x,\quad z=0, y=2\sqrt{x},\quad y=\frac{1}{4}x^2$
3. $z=y,\quad z=0,\quad x=0,\quad x=4,\quad y=\sqrt{25-x^2}$
4. $x^2+y^2=4,\quad z=0,\quad z=4-x-y$

5. $x^2+y^2=4, \quad y+z=2, \quad z=0$

6. $y^2-x^2=z, \quad y=4, \quad z=0$

7. $z=4\sqrt{y}, \quad x+y=4, \quad x=0$

8. $z=x^2+y^2, \quad x^2+y^2=2y, \quad z=0$

9. $x^2+y^2=12-2z, \quad x^2+y^2=z$

10. $z=x^2+y^2, \quad 2z-4=x^2+y^2$

11. $z=0, z=x, \quad y=0, \quad y=3, \quad x=\sqrt{9-y^2}, \quad x=\sqrt{25-y^2}$

12. $z=0, z=x, \quad y=0, \qquad x=\sqrt{9-y^2}, \quad x=\sqrt{25-y^2}$

13. $z=0, \quad z=\frac{1}{3}y^2, \quad 5x+3y-30=0, \quad 5x-2y-5=0$

14. $y=x^2, \quad y=1, \quad x+y+z=4, \quad z=0$

15. $z=9-y^2, \quad 3x+4y=13\,(y\geq 0), \quad x=0,\ y=0,\ z=0$

16. $z=0, \quad z=1-y, \quad y=x^2$

17. $z=0, \quad z=2-x, \quad x=1, \quad y^2=x$

18. $x=0, \quad y=0, \quad z=0, \quad x+y=1, \quad z=x^2+3y^2$

19. $x=0, y=0, z=0, \quad x=1, \quad x+y=2, \quad z=x^2+\frac{1}{2}y^2$

20. $x=0, \quad y=0, \quad z=0, \quad y+z=1, \quad x=y^2+1$

21. $z=0, \quad z=y^2, \quad y=2x, \quad x=1$

22. $x=1-z_2,\ y=x, \quad y=-x$

23. $z^2=4-y, \quad x^2+y^2=4y$

24. $z=0, \quad y=\sqrt{1-z}, \quad y=x^2$

25. $z=0, z=x^2+y^2, \quad x=0, \quad y=0, \quad x+y=1$

26. $z=0, \quad z=y^2, \quad 2x+y=2, \quad x=0$

27. $z=4\sqrt{y}, \quad x+y=4, \quad x=0$

28. $x=19\sqrt{2y}, \quad x=4\sqrt{2y}, \quad z=0, \quad z+y=2$

29. $x=16\sqrt{2y}, \quad x=\sqrt{2y}, \quad z=0, \quad z+y=2$

30. $x=20\sqrt{2y}, \quad x=5\sqrt{2y}, \quad z=0, \quad z+y=\frac{1}{2}$

Задача 23.

1. Найти координаты центра тяжести однородного тела, ограниченного конусом $z=\sqrt{x^2+y^2}$ и плоскостью $z=2$.

2. Найти координаты центра тяжести однородного тела, ограниченного поверхностями $x^2+y^2=4-z, \quad z=0$.

3. Найти координаты центра тяжести однородного тела, ограниченного частью эллипсоида $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{4}+\frac{z^2}{1}=1$ и плоскостью z=0.

4. Найти координаты центра тяжести однородного тела, ограниченного $z=x^2+y^2$ и плоскостью $z=9$.

5. Найти массу тела, ограниченного конусом $z=\sqrt{x^2+y^2}$ и плоскостью $z=4$, если плотность равна аппликате в каждой точке $\gamma=z$.

6. Найти массу тела, ограниченного плоскостями $x+y+z=2$, $x=0, \quad y=0, \quad z=0$, если плотность $\gamma=yz$.

7. Найти массу тела, ограниченного плоскостями $2x+3y+2z=6$, $x=0, \quad y=0, \quad z=0$, если плотность $\gamma=y$.

8. Найти массу пирамиды с вершинами $A(0{,}0{,}1)$, $B(1{,}0{,}0)$, $C(0{,}1{,}0)$, $D(0{,}0{,}0)$ плотностью $\gamma=(x+y+z)^{-3}$.

9. Найти координаты центра тяжести однородного тела, ограниченного $x=y^2+z^2$ и плоскостью $x=2$.

10. Найти массу куба $0\le x\le a, \quad 0\le y\le a, \quad 0\le z\le a$ плотностью $\gamma=x+y+z$.

11. Найти координаты центра тяжести однородного тела, ограниченного $2y=yx^2+z^2$ и плоскостью $y=2$.

12. Найти статический момент M_{xoy} относительно плоскости XOY однородного тела, ограниченного конусом $z=\sqrt{x^2+y^2}$ и плоскостью $z=2$.

13. Найти статический момент M_{xoy} относительно плоскости XOY однородного тела, ограниченного поверхностью $x^2+y^2=4-z$, и плоскостью $z=0$.

14. Найти массу однородного тела, ограниченного поверхностью $x^2+y^2=2pz$ и плоскостью $z=h$.

15. Найти массу однородного тела, ограниченного поверхностями $x^2+y^2=R^2,\quad z=x^2+y^2$ и плоскостью $z=0$.

16. Найти координаты центра тяжести однородного тела, ограниченного поверхностями $x^2+y^2=R^2,\quad z=\frac{H}{R}\sqrt{x^2+y^2}$ и плоскостью $z=0$.

17. Найти массу тела, ограниченного поверхностями $x^2+y^2=R^2,\quad z=\sqrt{x^2+y^2}$, если плотность $\gamma=\sqrt{x^2+y^2}$.

18. Найти координаты центра тяжести однородной плоской фигуры, ограниченной параболами $y^2=20x,\quad x^2=20y$.

19. Найти координаты центра тяжести однородного тела, ограниченного поверхностью $x=y^2+z^2$ и плоскостью $x=4$.

20. Найти координаты центра тяжести однородной плоской фигуры, ограниченной параболой $x^2+4y-16=0$ и осью OX.

21 Найти координаты центра тяжести однородной плоской фигуры, ограниченной параболой $x^2=ay\quad (a>0)$ и прямой $y=2$.

22. Найти массу однородного тела, ограниченного конусом $z=\sqrt{x^2+y^2}$ и плоскостью $z=0$.

23. Найти массу пирамиды с вершинами $A(0,0,2)$, $B(2,0,0)$, $C(0,2,0)$, $D(0,0,0)$ плотностью $\gamma=(x+y+z+1)^{-2}$.

24. Найти массу куба $0\le x\le 3,\ 0\le y\le 3,\ 0\le z\le 3$ плотностью $\gamma=x+y+z$.

25. Найти координаты центра тяжести однородного тела, ограниченного поверхностью $4x=y^2+z^2$ и плоскостью $x=1$.

26. Найти массу однородного тела, ограниченного поверхностью $x^2+y^2=2z$ и плоскостью $z=1$.

27.Найти массу куба $0\le x\le 2,\ 0\le y\le 2,\ 0\le z\le 2$ плотностью $\gamma=x+y+z$.

28. Найти координаты центра тяжести однородной плоской фигуры, ограниченной параболами $y^2=4x+4,\quad y^2=-2x+4$.

29. Найти координаты центра тяжести однородного тела, ограниченного поверхностью $x=y^2+z^2$ и плоскостью $x=3$.

30. Найти координаты центра тяжести однородной плоской фигуры, ограниченной параболами $y^2=10x,\quad x^2=10y$.

Задача 24. Вычислить криволинейные интегралы I рода

1. $\int\limits_C y^2 ds$, где C – арка циклоиды

$x = 2(t - \sin t), y = 2(1 - \cos t), 0 \le t \le 2\pi$.

2. $\int\limits_C \sqrt{x^2 + y^2} ds$, где C – окружность $x^2 + y^2 = 2x$.

3. $\int\limits_C \frac{ds}{\sqrt{x^2 + y^2 + 4}}$, где C – отрезок прямой, соединяющей точки $O(0, 0), A(1, 2)$.

4. $\int\limits_C \left(x^2 + y^2\right) dS$, C – кривая $\begin{cases} x = \cos t + t\sin t \\ y = \sin t - t\cos t \end{cases}$, $0 \le t \le 2\pi$.

5. $\int\limits_C y^2 dS$, где C – арка циклоиды $\begin{cases} x = t - \sin t \\ y = 1 - \cos t \end{cases}$, $0 \le t \le 2\pi$.

6. $\int\limits_C xydS$ вдоль окружности $\begin{cases} x = 2\cos t, \\ y = 2\sin t. \end{cases}$.

7. $\int\limits_C \sqrt{x^2 + y^2} dS$, где C – окружность $x^2 + y^2 = 6x$.

8. $\int\limits_C (y - x) dS$, где C – дуга параболы $y = x^3$ от точки $A(1, 1)$ до точки $B(2, 8)$.

9. $\int\limits_C xydS$, где C – дуга окружности $\begin{cases} x = 3\cos t, \\ y = 3\sin t. \end{cases}$

10. $\int\limits_C \left(4\sqrt[3]{x} - 3\sqrt{y}\right) dS$ вдоль прямой, соединяющей точки $A(-1, 0)$ и $B(0, 1)$.

11. $\int\limits_C y^2 dS$, где C – арка циклоиды $\begin{cases} x = 4\left(t - \sin t\right), \\ y = 4\left(1 - \cos t\right) \end{cases}$ $0 \le t \le 2\pi$.

12. $\int\limits_C \left(x^2 + y^2\right) dS$, где C – окружность $x^2 + y^2 = 4$.

13. $\int\limits_C \sqrt{x^2 + y^2} dS$, где C – окружность $x^2 + y^2 = 4x$.

14. $\int\limits_C \frac{dS}{\sqrt{x^2+y^2}}$ по отрезку прямой, соединяющей точки $A(0,-2)$ и точки $B(4,0)$.

15. $\int\limits_C \frac{dS}{\sqrt{x^2+y^2}}$ вдоль отрезка прямой, соединяющей точки $A(0,-2)$ и $B(8,2)$.

16. $\int\limits_C \frac{dS}{\sqrt{x^2+y^2}}$ по отрезку прямой, соединяющей точки $A(2,-1)$ и $B(6,1)$.

17. $\int\limits_C y^2 dS$, где C – арка циклоиды $\left.\begin{array}{l} x=3(t-\sin t) \\ y=3(1-\cos t) \end{array}\right\}$, $0 \le t \le 2\pi$.

18. $\int\limits_C x^2 y dS$, где C – часть окружности $x^2+y^2=R^2$, лежащая в I четверти.

19. $\int\limits_C \left(x^2+y^2\right)^3 dS$ вдоль окружности $x^2+y^2=9$.

20. $\int\limits_C \left(x^2+y^2\right)^5 dS$, вдоль окружности $x^2+y^2=25$.

21. $\int\limits_C \sqrt{x^2+y^2} dS$, где C – окружность $x^2+y^2=8x$.

22. $\int\limits_C \left(x^2+y^2\right)^4 dS$, где C – окружность $x^2+y^2=16$.

23. $\int\limits_L x dS$, где L – часть параболы $y=\frac{3}{8}x^2$, расположенной на $0 \le x \le 4$.

24. $\int\limits_L \frac{dS}{x-y}$, где L – отрезок прямой $y=\frac{1}{2}x-2$, заключённой между точками $A(0,2)$ и $B(4,0)$.

25. $\int\limits_C (y-x) dS$, где C – дуга параболы $y=x^3$ от точки $A(1,1)$ до точки $B(2,8)$.

26. $\int\limits_C y^2 dS$, где C – арка циклоиды $\begin{matrix} x = t - \sin t \\ y = 1 - \cos t \end{matrix}$, $0 \le t \le 2\pi$.

27. $\int\limits_C \sqrt{x^2 + y^2}\, dS$, где C – окружность $x^2 + y^2 = 2x$.

28. $\int\limits_C \left(x^2 + y^2\right) dS$, где C – окружность $x^2 + y^2 = 4$.

29. $\int\limits_L \frac{dS}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ по отрезку прямой, соединяющей точки $A(0, -2)$ и $B(4, 0)$.

30. $\int\limits_C y^2 dS$, где C – арка циклоиды $\begin{cases} x = 4(t - \sin t), \\ y = 4(1 - \cos t) \end{cases}$ $0 \le t \le 2\pi$.

Задача 25. Вычислить криволинейные интегралы II рода

1. $\int\limits_L \left(x^2 - y\right) dx - \left(x - y^2\right) dy$, L: дуга окружности $x = \cos t,\ y = \sin t$.

2. $\int\limits_L (x + y)\, dx - (x - y)\, dy$ вдоль ломаной $L=OAB$: $O(0, 0), A(2, 0), B(4, 5)$.

3. $\oint \frac{y dx - x dy}{x^2 + y^2}$ вдоль границы треугольника ABC ($A(1, 0)$, $B(1 ,1)$, $C(0, 1)$), обходя его против часовой стрелки.

4. $\int\limits_L \left(x^2 - 2y\right) dx + \left(y^2 - 2xy\right) dy$ вдоль дуги параболы L: $y = x^2$ от точки $A(-1, 1)$ до точки $B(1, 1)$.

5. $\int\limits_L \left(x^2 y - 3x\right) dx + \left(y^2 x + 2y\right) dy$ вдоль верхней половины эллипса $x = 3\cos t,\ y = 2\sin t,\quad 0 \le t \le \pi$.

6. $\int\limits_L \left(x^2 + y\right) dx - \left(y^2 + x\right) dy$ вдоль ломаной $L=ABC$: $A(1, 2), B(1, 5), C(3, 5)$.

7. $\int\limits_L y dx + \frac{x}{y} dy$, $L: y = e^{-x}$ от точки $A(0, 1)$ до точки $B(-1, e)$.

8. $\int\limits_L \frac{y^2 + 1}{y} dx - \frac{x}{y^2} dy$, L – прямая от точки $A(1, 2)$ до точки $B(2, 4)$.

9. $\int\limits_L \left(xy - x^2\right) dx - x dy$ вдоль дуги параболы L: $y = 2x^2$ от точки $A(0, 0)$ до точки $B(1, 2)$.

10. $\int\limits_L \frac{y}{x}dx + xdy$ вдоль дуги $L: y = \ln x$ от точки $A(1, 0)$ до точки $B(e, 1)$.

11. $\int\limits_L \left(x^2 + y^2\right)dx + \left(x^2 - y^2\right)dy$ вдоль прямой $L: y = x$ от точки $A(0; 0)$ до точки $B(2, 2)$.

12. $\int\limits_L xdy - ydx$ вдоль циклоиды $L: x = a\left(t - \sin t\right),\ y = a\left(1 - \cos t\right)$ от точки $A\left(2\pi a, 0\right)$ до точки $B(0, 0)$.

13. $\int\limits_L (x + y)dx + (x - y)dy$ вдоль окружности $L: x = 4\cos t,\quad y = 4\sin t$, обходя ее против хода часовой стрелки.

14. $\int\limits_L \left(x^2 + y\right)dx + \left(y^2 + x\right)dy$ вдоль ломаной $L = ABC: A\left(1,2\right), B\left(1,5\right), C\left(3,5\right)$.

15. $\int\limits_L xdy - ydx$ вдоль контура треугольника $L = ABC: A\left(-2,0\right), B\left(2,0\right), C\left(0,2\right)$, обходя его против часовой стрелки.

16. $\int\limits_L xe^{x^3}dy + ydx$ вдоль параболы $L: y = x^2$ от точки $A(0, 0)$ до точки $B(1, 1)$.

17. $\int\limits_L 2xydx - x^2dy$ вдоль параболы $L: x = 2y^2$ от точки $A(0, 0)$ до точки $B(2, 1)$.

18. $\int\limits_L \frac{x^2dy - y^2dx}{x^{\frac{5}{3}} + y^{\frac{5}{3}}}$ вдоль астроиды $L: x = 8\cos^3 t,\ y = 8\sin^3 t$ от точки $A(8, 0)$ до точки $B(0, 8)$.

19. $\int\limits_L \left(x^2 - y^2\right)dx + xydy$ вдоль прямой L, соединяющей точки $A(1, 1)$ и $B(3, 4)$.

20. $\int\limits_L (x - y)^2 dx + (x + y)^2 dy$ вдоль ломаной $L = ABC: A\left(0,0\right), B\left(2,0\right), C\left(4,2\right)$.

21. $\int\limits_L \left(x^2 + y^2\right)dx + \left(x^2 - y^2\right)dy$ вдоль прямой $L: y = -x$ от точки $A(-1, 1)$ до точки $B(0, 0)$.

22. $\int\limits_{AB} \frac{ydx - xdy}{x^2 + y^2}$, где AB – верхняя часть окружности $x = R\cos t,\ y = R\sin t$.

23. $\int\limits_L (x+y)dx+(x-y)dy$ вдоль окружности $L: x=4\cos t,\quad y=4\sin t$ от точки $A(4,0)$ до точки $B(0,4)$.

24. $\int\limits_L \left(x^2+y\right)dx+\left(y^2+x\right)dy$ вдоль прямой $L=AB$ от точки $A(1,\ 2)$ до точки $B(3,5)$.

25. $\int\limits_L xdy-ydx$ вдоль контура треугольника $L=ABC{:}A(-2{,}0),B(3{,}0),C(0{,}4)$, обходя его против часовой стрелки.

26. $\int\limits_L xe^{x^{21}}dx+ydy$ вдоль гиперболы $L: y=x^3$ от точки $A(0,\ 0)$ до точки $B(1{,}1)$.

27. $\int\limits_L 2xydx-x^2dy$ вдоль параболы $L: x=2y^2$ от точки $A(0,\ 0)$ до точки $B(8,2)$.

28. $\int\limits_{OAB} (x-y)^2\,dx+(x+y)^2\,dy$ вдоль ломаной OAB, где $O(0,\ 0)$, $A(2,\ 0)$, $B(4,2)$.

29. $\int\limits_{AB} \left(x^2-2xy\right)dx+\left(y^2-2xy\right)dy$ вдоль параболы $y=x^2$от точки $A(-1,1)$ до точки $B(1,1)$.

30. $\int\limits_{AB} \left(x^2+y^2\right)dx+\left(x^2-y^2\right)dy$ вдоль линии $y=|x|$ от точки $A(-1,\ 1)$ до точки $B(2,2)$.

Задача 26. Проверить, является ли выражение полным дифференциалом некоторой функции *U(x, y)*. В случае положительного ответа найти *U(x, y)*.

1. $\left(\dfrac{2x}{x^2+y}+y\cdot\cos xy\right)dx+\left(\dfrac{1}{x^2+y}+x\cdot\cos xy\right)dy.$

2. $\left(\dfrac{3x^2}{2\sqrt{x^3+2y}}-\sin(x+y)\right)dx+\left(\dfrac{1}{\sqrt{x^3+2y}}-\sin(x+y)\right)dy.$

3. $\left(3x^2-3y-1\right)dx+(-3x-8y)dy.$

4. $\dfrac{xdx}{\sqrt{x^2+y^2-1}}+\dfrac{ydy}{\sqrt{x^2+y^2-1}}.$

5. $\dfrac{dx}{\sqrt{1-x^2-y^2-2xy}}+\dfrac{dy}{\sqrt{1-x^2-y^2-2xy}}$.

6. $\dfrac{dy}{y-x}-\dfrac{dx}{y-x}$.

7. $e^{3x^2+2y^2-xy}\cdot(6x-y)dx+e^{3x^2+2y^2-xy}\cdot(4y-x)dy$.

8. $\dfrac{2x}{x^2+y^2}dx+\dfrac{2y}{x^2+y^2}dy$.

9. $\dfrac{1}{x}\operatorname{ctg}\dfrac{y}{x}dy-\dfrac{y}{x^2}\operatorname{ctg}\dfrac{y}{x}dx$.

10. $y\cdot x^{y-1}dx+x^y\ln x dy$.

11. $2x\cdot\cos\left(x^2+y^2\right)dx+2y\cdot\cos\left(x^2+y^2\right)dy$.

12. $\dfrac{2xdx}{\sqrt{1-x^2-y^2}}-\dfrac{2ydy}{\sqrt{1-x^2-y^2}}$.

13. $\left(y+\cos(x+y)\right)dx+\left(x+\cos(x+y)\right)dy$.

14. $(2x-2y)dx+(2y-2x)dx$.

15. $\left(x^2-2xy^2+3\right)dx+\left(y^2-2x^2y+3\right)dy$.

16. $\left(1-e^{x-y}+\cos x\right)dx+\left(e^{x-y}+\cos y\right)dy$.

17. $\left(x^3+2xy^2+4\right)dx+\left(y^3+2x^2y+4\right)dy$.

18. $\left(2x-3xy^2+2y\right)dx+\left(2x-3x^2y+2y\right)dy$.

19. $\left(x^4+3y+4\right)dx+\left(y^5+3x+5\right)dy$.

20. $\left(\dfrac{2x}{\cos^2\left(x^2+y\right)}+y\right)dx+\left(\dfrac{1}{\cos^2\left(x^2+y\right)}+x\right)dy$.

21. $\left(\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y}}+ye^{xy}\right)dx+\left(\dfrac{1}{2\sqrt{x^2+y}}+xe^{xy}\right)dy$.

22. $\left(x\cos\left(x^2+y\right)+\dfrac{y}{\sqrt{xy+5}}\right)dx+\left(\dfrac{1}{2}\cos\left(x^2+y\right)+\dfrac{x}{\sqrt{xy+5}}\right)dy$.

23. $\left(2xy+\cos\left(x+y^2\right)\right)dx+\left(x^2+2y\cos\left(xy^2\right)\right)dy$.

24. $\left(x^5+y\cos xy\right)dx+\left(y^2+x\cos xy\right)dy$.

25. $\left(1-e^{x-y}-\cos x\right)dx+\left(e^{x-y}+\cos y\right)dy$.

26. $\left(\sin x - e^{x+y}\right)dx + \left(1 - e^{x+y} + \sin y\right)dy$.

27. $\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right)dx + \left(\frac{2y - x}{y^2}\right)dy$

28. $\frac{x}{(x+y)^2}dx + \frac{2x+y}{(x+y)^2}dy$.

29. $\left(2xy^2 + 3x^2 + \frac{1}{x^2} + \frac{2x}{y^2}\right)dx + \left(2x^2y + 3y^2 + \frac{1}{y^2} - \frac{2x^2}{y^3}\right)dy$.

30. $(1 - \sin 2x)dy - (3 + 2y\cos 2x)dx$.

Решение примерного варианта контрольной работы № 2

Задача 15. Найти решения уравнения $z^2 - 20z + 110 = 0$ в комплексной области.

Решение:

$$D = b^2 - 4ac = 20^2 - 4\cdot 110 = 100 - 440 = -40 = (-1)\cdot 40 = i^2 \cdot 40,$$

$$z_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} = \frac{20 \pm \sqrt{i^2 \cdot 40}}{2} = 10 \pm \sqrt{10}i.$$

Задача 16. Даны комплексные числа $z_1 = \sqrt{5} - \sqrt{5}i$, $z_2 = -1 - \sqrt{3}i$, $z_3 = \left(\sin\left(\frac{9\pi}{2} + \frac{\pi}{4}\right) - i\cos\left(\frac{9\pi}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right)$.

1. Найти модуль и аргумент комплексных чисел z_1, z_2, z_3 и изобразить их на чертеже.

2. Записать комплексные числа z_1 и z_2 в тригонометрической форме и выполнить следующие действия: $z_1 \cdot z_2$; $\frac{z_1}{z_2}$, z_1^3, $\sqrt[4]{z_2}$.

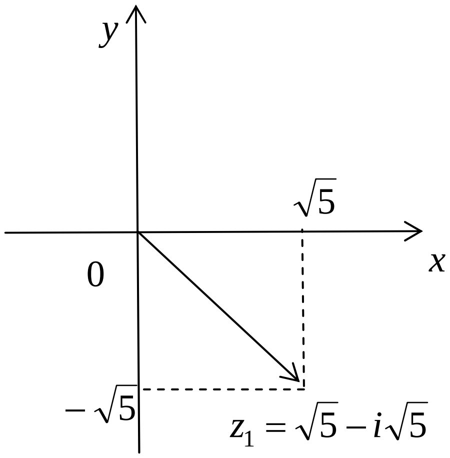
3. Записать комплексные числа z_1 и z_2 в показательной форме и выполнить следующие действия: $z_1 \cdot z_2$; $\frac{z_2}{z_1}$, z_2^5, $\sqrt[4]{z_1}$.

4. Записать комплексное число z_3 в арифметической форме и выполнить следующие действия: $z_1 + 2z_3$; $z_2 - 2z_3$; $z_1 \cdot z_3$; $\frac{z_2}{z_3}$.

Решение:

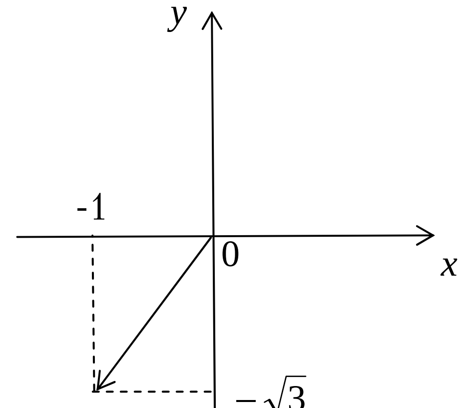
1. Для комплексного числа $z_1 = \sqrt{5} - \sqrt{5}i$ имеем $x_1 = \sqrt{5} > 0$, $y_1 = -\sqrt{5} < 0$. Тогда $|z_1| = r_1 = \sqrt{\left(\sqrt{5}\right)^2 + \left(-\sqrt{5}\right)^2} = \sqrt{10}$.

$$\varphi_1 = \arg z_1 = \operatorname{arctg}\frac{-\sqrt{5}}{\sqrt{5}} + 2\pi = \operatorname{arctg}(-1) + 2\pi = -\frac{\pi}{4} + 2\pi = \frac{7\pi}{4}.$$



Для комплексного числа $z_2 = -1 - \sqrt{3}i$ имеем $x_1 = -1 < 0$, $y_1 = -\sqrt{3} < 0$. Тогда $|z_2| = r_2 = \sqrt{(-1)^2 + \left(-\sqrt{3}\right)^2} = \sqrt{4} = 2$.

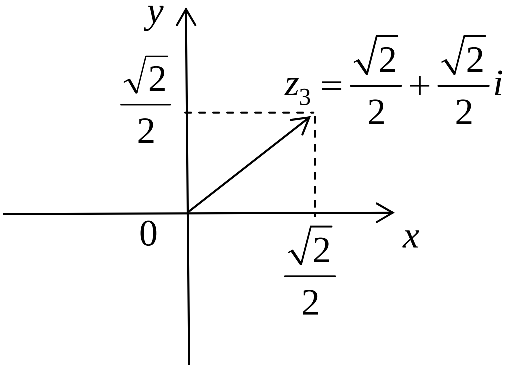
$$\varphi_2 = \arg z_2 = \operatorname{arctg}\frac{-\sqrt{3}}{-1} + \pi = \operatorname{arctg}\left(\sqrt{3}\right) + \pi = \frac{\pi}{3} + \pi = \frac{4\pi}{3}.$$



Запись $z_3 = \left(\sin\left(\frac{9\pi}{2} + \frac{\pi}{4}\right) - i\cos\left(\frac{9\pi}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right)$ не является тригонометрической формой записи комплексного числа. Перепишем z_3 в виде $z_3 = \cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}$, так как $\sin\left(\frac{9\pi}{2} + \frac{\pi}{4}\right) = \cos\frac{\pi}{4}$, а $\cos\left(\frac{9\pi}{2} + \frac{\pi}{4}\right) = -\sin\frac{\pi}{4}$.

Следовательно, $\left|z_3\right| = 1, \varphi_3 = \dfrac{\pi}{4}$.

Алгебраическая форма этого числа имеет вил: $z_3 = \dfrac{\sqrt{2}}{2} + \dfrac{\sqrt{2}}{2} i$.



2. Тригонометрические формы комплексных чисел z_1 и z_2 имеют соответственно вид:

$$z_1 = \sqrt{10} \cdot \left(\cos\frac{7\pi}{4} + i \sin\frac{7\pi}{4} \right);\ z_2 = 2 \cdot \left(\cos\frac{4\pi}{3} + i \sin\frac{4\pi}{3} \right).$$

$$z_1 \cdot z_2 = r_1 \cdot r_2 \left(\cos\left(\varphi_1 + \varphi_2\right) + i \sin\left(\varphi_1 + \varphi_2\right) \right) =$$

$$= 2\sqrt{10} \cdot \left(\cos\frac{7\pi}{4} + \frac{4\pi}{3} \right) + i \sin\left(\cos\frac{7\pi}{4} + \frac{4\pi}{3} \right) =$$

$$= 2\sqrt{10}\left(\cos\frac{37\pi}{12} + i \sin\frac{37\pi}{12} \right) = 2\sqrt{10}\left(\cos\frac{13\pi}{12} + i \sin\frac{13\pi}{12} \right).$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} \cdot (\cos\left(\varphi_1 - \varphi_2\right) + i \sin\left(\varphi_1 - \varphi_2\right)) =$$

$$= \frac{\sqrt{10}}{2}\left(\cos\left(\frac{7\pi}{4} - \frac{4\pi}{3} \right) + i \sin\left(\frac{7\pi}{4} - \frac{4\pi}{3} \right) \right) = \frac{\sqrt{10}}{2}\left(\cos\left(\frac{5\pi}{12} \right) + i \sin\left(\frac{5\pi}{12} \right) \right).$$

$$z_1^3 = \left(\sqrt{10}\right)^3 \left(\cos 3 \cdot \frac{7\pi}{4} + i \sin 3 \cdot \frac{7\pi}{4} \right) = 10\sqrt{10}\left(\cos\frac{21\pi}{4} + i \sin\frac{21\pi}{4} \right) =$$

$$= 10\sqrt{10}\left(\cos\frac{5\pi}{4} + i \sin\frac{5\pi}{4} \right).$$

$\sqrt[4]{z_2}$:

$$k = 0, z = \sqrt[4]{2}\left(\cos\frac{4\pi}{3 \cdot 4} + i \sin\frac{4\pi}{3 \cdot 4} \right) = \sqrt[4]{2}\left(\cos\frac{\pi}{3} + i \sin\frac{\pi}{3} \right);$$

$$k = 1, z = \sqrt[4]{2}\left(\cos\frac{\frac{4\pi}{3} + 2\pi}{4} + i \sin\frac{\frac{4\pi}{3} + 2\pi}{4} \right) = \sqrt[4]{2}\left(\cos\frac{10\pi}{12} + i \sin\frac{10\pi}{12} \right);$$

$$k=2,\ z=\sqrt[4]{2}\left(\cos\frac{\frac{4\pi}{3}+4\pi}{4}+i\sin\frac{\frac{4\pi}{3}+4\pi}{4}\right)=\sqrt[4]{2}\left(\cos\frac{16\pi}{12}+i\sin\frac{16\pi}{12}\right);$$

$$k=3,\ z=\sqrt[4]{2}\left(\cos\frac{\frac{4\pi}{3}+6\pi}{4}+i\sin\frac{\frac{4\pi}{3}+6\pi}{4}\right)=\sqrt[4]{2}\left(\cos\frac{22\pi}{12}+i\sin\frac{22\pi}{12}\right).$$

3. Показательные формы комплексных чисел z_1 и z_2 имеют соответственно вид $z_1=\sqrt{10}e^{i\frac{7\pi}{4}}$ и $z_2=2e^{i\frac{4\pi}{3}}$.

$$z_1\cdot z_2=2\sqrt{10}e^{i\left(\frac{7\pi}{4}+\frac{4\pi}{3}\right)}=2\sqrt{10}e^{i\frac{13\pi}{12}};$$

$$\frac{z_2}{z_1}=\frac{2}{\sqrt{10}}e^{i\left(\frac{4\pi}{3}-\frac{7\pi}{4}\right)}=\frac{2}{\sqrt{10}}e^{-\frac{5\pi}{12}i};$$

$$z_2^5=2^5e^{5\cdot\frac{4\pi}{3}i}=32e^{\frac{20\pi}{3}i};$$

$$\sqrt[4]{z_1}:$$

$$k=0;\ z=\sqrt[8]{10}e^{\frac{7\pi}{4\cdot4}i}=\sqrt[8]{10}e^{\frac{7\pi}{16}i};$$

$$k=1;\ z=\sqrt[8]{10}e^{\frac{\frac{7\pi}{4}+2\pi}{4}i}=\sqrt[8]{10}e^{\frac{15\pi}{16}i};$$

$$k=2;\ z=\sqrt[8]{10}e^{\frac{\frac{7\pi}{4}+4\pi}{4}i}=\sqrt[8]{10}e^{\frac{23\pi}{16}i};$$

$$k=3;\ z=\sqrt[8]{10}e^{\frac{\frac{7\pi}{4}+6\pi}{4}i}=\sqrt[8]{10}e^{\frac{31\pi}{16}i}.$$

4. Арифметическая форма комплексного числа z_3 имеет вид $z_3=\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i$.

$$z_1+2z_3=\sqrt{5}-\sqrt{5}i+2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i\right)=\left(\sqrt{5}+\sqrt{2}\right)+\left(\sqrt{2}-\sqrt{5}\right)i;$$

$$z_2-2z_3=-1-\sqrt{3}i+2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i\right)=\left(-1-\sqrt{2}\right)+\left(-\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)i;$$

$$z_1\cdot z_3=\left(\sqrt{5}-\sqrt{5}i\right)\cdot\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i\right)=\frac{\sqrt{10}}{2}-\frac{\sqrt{10}}{2}i+\frac{\sqrt{10}}{2}i-\frac{\sqrt{10}}{2}i^2=\sqrt{10};$$

$$\frac{z_2}{z_3}=\frac{-1-\sqrt{3}i}{\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i}=\frac{\left(-1-\sqrt{3}i\right)\cdot\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}i\right)}{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i\right)\cdot\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}i\right)}=\frac{-\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{6}}{2}i+\frac{\sqrt{2}}{2}i+\frac{\sqrt{6}}{2}i^2}{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2-\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2\cdot i^2}=$$

$$=-\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{6}}{2}\right)+\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{6}}{2}\right)i.$$

Задача 17. Найти неопределенные интегралы:

а) $\int\frac{\cos x}{\sqrt{9-\sin^2 x}}dx$.

Сделаем подстановку $\sin x=t$, тогда $\cos xdx=dt$, следовательно, $d\left(\sin x\right)=\cos xdx$. Согласно формуле $\int\frac{dU}{\sqrt{a^2-U^2}}=\arcsin\frac{U}{a}+C$, находим:

$$\int\frac{\cos x}{\sqrt{9-\sin^2 x}}dx=\int\frac{d\left(\sin x\right)}{\sqrt{3^2-\left(\sin x\right)^2}}=\arcsin\frac{\sin x}{3}+C.$$

б) $\int\cos\frac{7x}{2}\cdot\cos\frac{4x}{5}dx$.

Применяя формулу $\cos\alpha\cdot\cos\beta=\frac{1}{2}\left[\cos\left(\alpha+\beta\right)+\cos\left(\alpha-\beta\right)\right]$, будем иметь:

$$\int=\frac{1}{2}\int\left[\cos\left(\frac{7x}{2}+\frac{4x}{5}\right)+\cos\left(\frac{7x}{2}-\frac{4x}{5}\right)\right]dx=$$

$$=\frac{1}{2}\int\left(\cos\frac{43x}{10}+\cos\frac{28}{10}x\right)dx=\frac{1}{2}\int\cos\frac{43x}{10}dx+\frac{1}{2}\int\cos\frac{28x}{10}dx=$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{10}{43}\sin\frac{43x}{10}+\frac{1}{2}\cdot\frac{10}{28}\cdot\sin\frac{28x}{10}+C=\frac{5}{43}\sin\frac{43x}{10}+\frac{5}{28}\sin\frac{28x}{10}+C.$$

в) $\int\left(x-1\right)\sin 2xdx$.

Примем $U=x-1$, $dV=\sin 2xdx$, тогда $dU=dx$, $V=-\frac{1}{2}\cos 2x$.

Используя формулу интегрирования по частям $\int UdV = UV - \int VdU$, получим:

$$\int (x-1)\sin 2xdx = \begin{vmatrix} U = x-1 & dU = dx \\ dV = \sin 2xdx & V = -\frac{1}{2}\cos 2x \end{vmatrix} =$$

$$= -\frac{x-1}{2}\cos 2x + \frac{1}{2}\int \cos 2xdx = \frac{1-x}{2}\cos 2x + \frac{1}{4}\sin 2x + C.$$

г) $\int (1-2x)e^{3x}dx$.

Примем $U = 1-2x$, $dV = e^{3x}dx$, тогда $dU = -2dx$, $V = \frac{1}{3}e^{3x}$.

Используя формулу интегрирования по частям $\int UdV = UV - \int VdU$, получим:

$$\int (1-2x)e^{3x}dx = \begin{vmatrix} U = 1-2x & dU = -2dx \\ dV = e^{3x}dx & V = \frac{1}{3}e^{3x} \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{1-2x}{3}e^{3x} + \frac{2}{3}\int e^{3x}dx = \frac{1-2x}{3}e^{3x} + \frac{2}{9}e^{3x} + C.$$

д) $\int \frac{(2x-1)dx}{\sqrt{x^2+2x+3}}$.

Выделим в числителе производную подкоренного выражения и разложим полученный интеграл на разность двух интегралов. Применяя формулы $\int \frac{dU}{\sqrt{U}} = 2\sqrt{U} + C$ и $\int \frac{dU}{\sqrt{U^2+a^2}} \ln\left|U + \sqrt{U^2+a^2}\right| + C$, получим:

$$\int \frac{(2x-1)dx}{\sqrt{x^2+2x+3}} = \int \frac{(2x+2)-3}{\sqrt{x^2+2x+3}}dx = \int \frac{(2x+2)dx}{\sqrt{x^2+2x+3}} - 3\int \frac{dx}{\sqrt{(x+1)^2+2}} =$$

$$= 2\sqrt{{}^2+2x+3} - 3\ln\left|x+1+\sqrt{x^2+2x+3}\right| + C.$$

е) $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{4+x^2}}$.

Применяя подстановку $x = 2\mathrm{tg}t$, $dx = \frac{2dt}{\cos^2 t}$,

$$\mathrm{tg}t = \frac{x}{2} \Rightarrow \frac{\sin t}{\cos t} = \frac{x}{2} \Rightarrow \frac{\sin t}{\sqrt{1-\sin^2 t}} = \frac{x}{2} \Rightarrow \frac{\sin^2 t}{1-\sin^2 t} = \frac{x^2}{4} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sin^2 t = \frac{x^2}{4} - \frac{x^2}{4}\sin^2 t \Rightarrow \sin^2 t\left(1 + \frac{x^2}{4}\right) = \frac{x^2}{4} \Rightarrow \sin^2 t = \frac{\frac{x^2}{4}}{1+\frac{x^2}{4}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sin^2 t = \frac{x^2}{4+x^2} \Rightarrow \sin t = \sqrt{\frac{x^2}{4+x^2}},\text{ получим:}$$

$$\int \frac{dx}{x^2\sqrt{4+x^2}} = \int \frac{2dt}{\cos^2 t \cdot 4\mathrm{tg}^2 t\sqrt{4+4\mathrm{tg}^2 t}} = \frac{1}{4}\int \frac{dt}{\sin^2 t\sqrt{1+\mathrm{tg}^2 t}} =$$

$$= \frac{1}{4}\int \frac{dt}{\sin^2 t\sqrt{\frac{\cos^2 t + \sin^2 t}{\cos^2 t}}} = \frac{1}{4}\int \frac{\cos dt}{\sin^2 t} = \frac{1}{4}\int \frac{d(\sin t)}{\sin^2 t} = -\frac{1}{4}(\sin t)^{-1} + C =$$

$$= -\frac{1}{4\sin t} + C = -\frac{1}{4\sqrt{\frac{x^2}{4+x^2}}} + C.$$

ж) $\int \frac{16xdx}{\left(2x^2 - x\right)(x+1)}$.

Разложим знаменатель на произведение линейных множителей и представим рациональную дробь в виде суммы простейших дробей:

$$\frac{16x}{x(2x-1)(x+1)} = \frac{16}{(2x-1)(x+1)} = \frac{A}{2x-1} + \frac{B}{x+1}.$$

Должны иметь $16 = Ax + A + 2Bx - B$ или $16 = (A+2B)x + A - B$.

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x, получим систему уравнений:

$$\begin{cases} A + 2B = 0 \\ A - B = 16 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = -2B \\ -2B - B = 16. \end{cases}$$

Решив систему, найдем $A = \frac{32}{3}$ и $B = -\frac{16}{3}$.

Интеграл представляется разностью двух интегралов:

$$\int \frac{16xdx}{\left(2x^2 - x\right)(x+1)} = \int \frac{\frac{32}{3}}{2x-1}dx - \int \frac{\frac{16}{3}}{x+1}dx =$$

$$= \frac{32}{3}\cdot\frac{1}{2}\ln|2x-1| - \frac{16}{3}\ln|x+1| + C =$$

$$= \frac{16}{3}\left(\ln|2x-1| - \ln|x+1|\right) + C = \frac{16}{3}\ln\left|\frac{2x-1}{x+1}\right| + C.$$

Задача 18. Вычислить определенные интегралы:

а) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2a}} (x+3)\sin ax dx$.

$$\int\limits_0^{\frac{\pi}{2a}} (x+3)\sin ax dx = \left| \begin{matrix} U = x+3 \\ dV = \sin ax dx \end{matrix} \right| \quad \begin{matrix} du = dx \\ V = -\frac{1}{a}\cos ax \end{matrix} \right| =$$

$$= -\frac{x+3}{a}\cos ax \Bigg|_0^{\frac{\pi}{2a}} + \frac{1}{a}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2a}} \cos ax dx = -\frac{x+3}{a}\cos ax \Bigg|_0^{\frac{\pi}{2a}} + \frac{1}{a^2}\sin ax \Bigg|_0^{\frac{\pi}{2a}} =$$

$$= -\frac{\frac{\pi}{2a}+3}{a}\cos\left(a\cdot\frac{\pi}{2a}\right) + \frac{0+3}{a}\cos 0° + \frac{1}{a^2}\sin\left(a\cdot\frac{\pi}{2a}\right) - \frac{1}{a}\sin 0 =$$

$$= \frac{3}{a} + \frac{1}{a^2} = \frac{3a+1}{a^2}.$$

б) $\int\limits_0^5 \frac{xdx}{\sqrt{1+3x}}$.

Примем $\sqrt{1+3x} = t$. Найдем пределы интегрирования для t:
если x=0, то t=1;
если x=5, то t=4.

Выразим x: $1+3x = t^2$, $x = \frac{t^2-1}{3}$ и найдем дифференциал обеих частей выражения $dx = \frac{2tdt}{3}$. Подставив x, dx и найденные пределы интегрирования в интеграл, получим:

$$\int\limits_0^5 \frac{xdx}{\sqrt{1+3x}} = \left| \begin{matrix} \sqrt{1+3x} = t, \quad dx = \frac{2tdt}{3} \\ x = 0, t = 1 \\ x = 5, t = 4 \end{matrix} \right| =$$

$$= \int\limits_1^4 \frac{(t^2-1)}{3\cdot t}\frac{2t}{3}dt = \frac{2}{9}\int\limits_1^4 \left(t^2-1\right)dt = \frac{2}{9}\int\limits_1^4 \left(t^2-1\right)dt =$$

$$= \frac{2}{9}\left(\frac{t^3}{3} - t\right)\Bigg|_1^4 = \frac{2}{9}\left(\frac{64}{3} - 4 - \frac{1}{3} + 1\right) = \frac{2}{9}\left(\frac{63}{3} - 3\right) = \frac{2}{9}\cdot 18^2 = 4.$$

Задача 19. Вычислить несобственный интеграл или установить его расходимость $\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{x^2+1}$.

Рассмотрим предел:

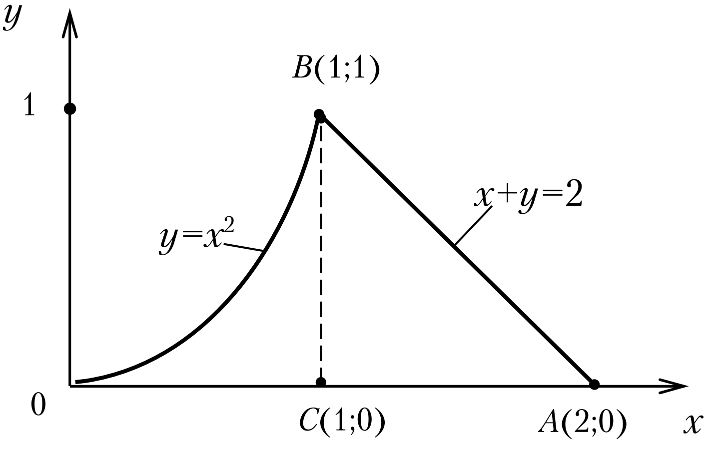
$$\lim_{\alpha\to-\infty}\int\limits_{\alpha}^{0}\frac{dx}{x^2+1}+\lim_{\beta\to\infty}\int\limits_{0}^{\beta}\frac{dx}{x^2+1}=\lim_{\alpha\to-\infty}\operatorname{arctg}x\Big|_{\alpha}^{0}+\lim_{\beta\to\infty}\operatorname{arctg}x\Big|_{0}^{\beta}=$$

$=-\operatorname{arctg}(-\infty)+\operatorname{arctg}(+\infty)=-\left(-\frac{\pi}{2}\right)+\frac{\pi}{2}=\pi$. $\Rightarrow$ Несобственный интеграл $\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{x^2+1}$ сходится.

Задача 20. Изменить порядок интегрирования в интеграле $\int\limits_{0}^{1}dy\int\limits_{\sqrt{y}}^{2-y}f(x,y)dx$.

Решение:

Область интегрирования D ограничена линиями: $y = 0$, $x=\sqrt{y}$, $x=2-y$.



Если же сначала интегрировать по y, затем по x, то область D сначала надо разбить на две области OBC и CBA. Получим:

$$\int\limits_{0}^{1}dy\int\limits_{\sqrt{y}}^{2-y}f(x,y)dx=\int\limits_{0}^{1}dx\int\limits_{0}^{x^2}f(x,y)dy+\int\limits_{1}^{2}dx\int\limits_{0}^{2-x}f(x,y)dy.$$

Задача 21.

а) Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y=(x+1)^2$, $y=5-x$ и осью OX (рис.8).

Решение:

По уравнениям границы области D построим данную фигуру. Линии, ограничивающие ее, пересекаются в точке M (1; 4). Должны иметь $y=(x+1)^2$ и $y=5-x$.

Откуда $(x+1)^2=5-x$;

$$x^2+3x-4=0,\ M_1(-4;9)\notin D,$$

$$x_1=-4,\ x_2=1;\ y_1=9,\ y_2=4,\ M_2(1;4)\in D.$$

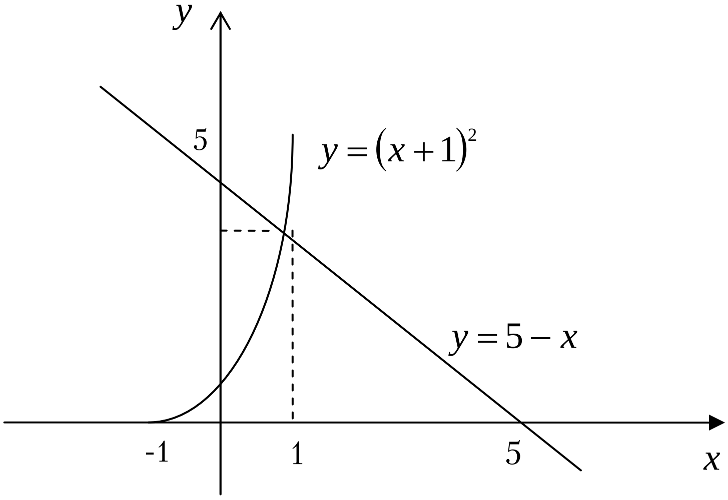


Рис. 8

Для области D справедливы неравенства

$$0\le y\le 4,\ \sqrt{y}-1\le x\le 5-y.$$

Искомая площадь

$$S=\iint_D dxdy=\int_c^d dy\int_{\varphi_1(y)}^{\varphi_2(y)}dx=\int_0^4 dy\int_{\sqrt{y}-1}^{5-y}dx=\int_0^4\left(5-y-\sqrt{y}+1\right)dy=$$

$$=\int_0^4\left(6-y-\sqrt{y}\right)dy=\left(6y-\frac{y^2}{2}-\frac{2}{3}y^{3/2}\right)\Bigg|_0^4=24-8-\frac{2\cdot 8}{3}=\frac{32}{3}.$$

б) Вычислить площадь фигуры, ограниченной линией $\rho^2=a^2\sin 2\varphi$ (рис.9).

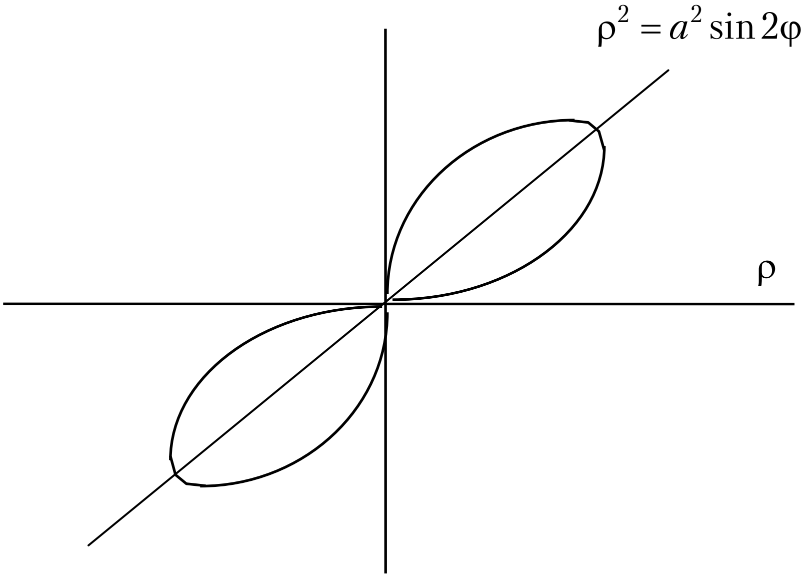


Рис. 9

Решение:

Построив кривую и замечая, что она симметрична относительно полюса и что при изменении φ от 0 до $\frac{\pi}{2}$ текущая точка (φ, ρ) отсечет половину кривой, расположенную выше полярной оси, будем иметь:

$$S = \iint_D \rho d\rho d\varphi = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{a\sqrt{\sin 2\varphi}} \rho d\rho = a^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2\varphi d\varphi = -\frac{a^2}{2}\cos 2\varphi \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = a^2.$$

Задача 22. Найти объем тела, ограниченного данными поверхностями $x+y+z=4$, $x=3$, $y=2$, $x=o$, $y=0$, $z=0$ (рис.10, 11).

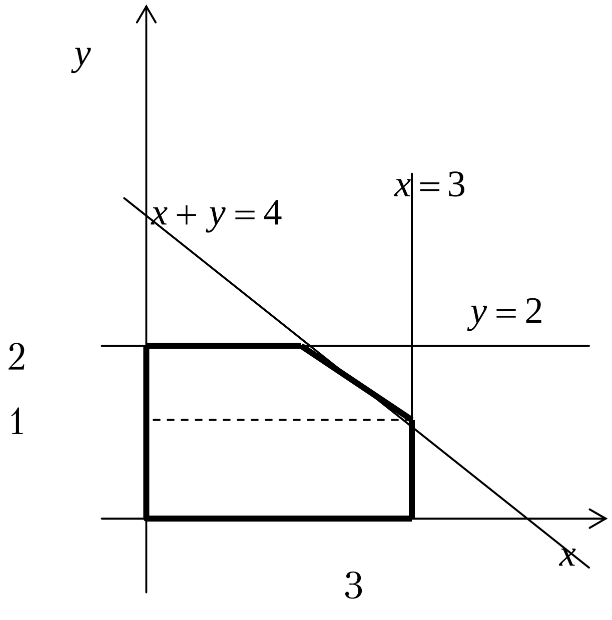


Рис. 10

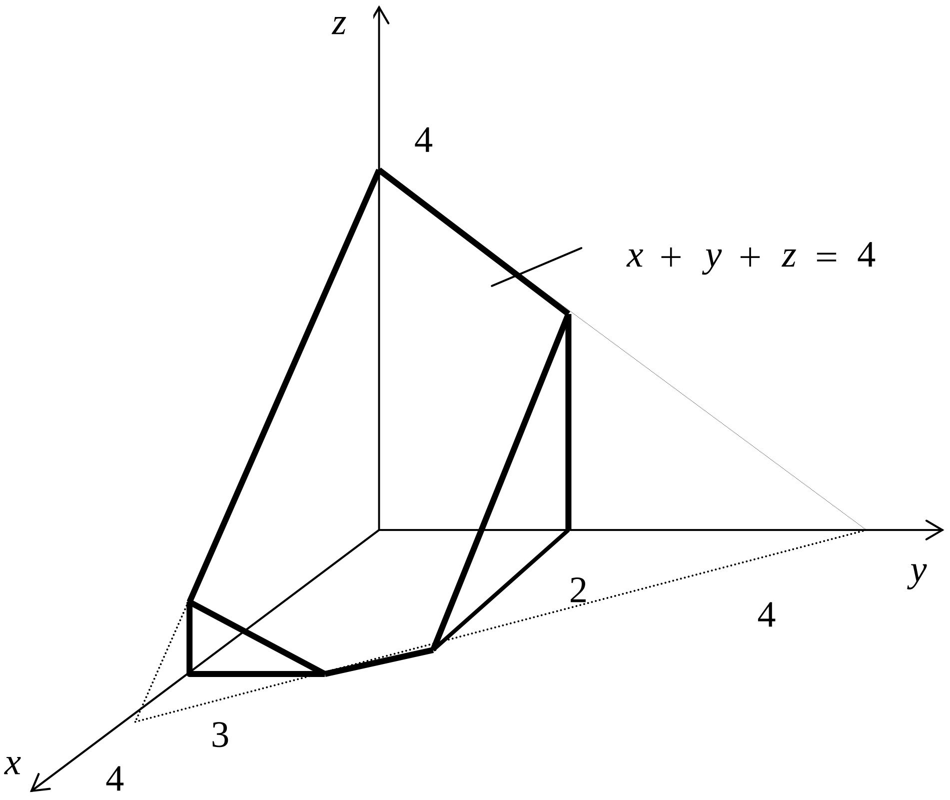


Рис.11

$$V=\int_0^1 dy\int_0^3 dx\int_0^{4-x-y} dz+\int_1^2 dy\int_0^{4-y} dx\int_0^{4-x-y} dz=$$

$$=\int_0^1 dy\int_0^3 (4-x-y)dx+\int_1^2 dy\int_0^{4-y} (4-x-y)dx=$$

$$=\int_0^1\left(4x-\frac{x^2}{2}-yx\right)\Big|_0^3 dy+\int_1^2\left(4x-\frac{x^2}{2}-yx\right)\Big|_0^{4-y} dy=$$

$$=\int_0^1(12-\frac{9}{2}-3y)dy+\int_1^2\left(4(4-y)-\frac{(4-y)^2}{2}-y(4-y)\right)dy=$$

$$=\int_0^1\left(\frac{15}{2}-3y\right)dy+\int_1^2\left(16-4y-8+4y-\frac{y^2}{2}-4y+y^2\right)dy=$$

$$=\int_0^1\left(\frac{15}{2}-3y\right)dy+\int_1^2\left(8-4y+\frac{y^2}{2}\right)dy=\left(\frac{15}{2}y-\frac{3y^2}{2}\right)\Big|_0^1+\left(8y-2y^2+\frac{y^3}{6}\right)\Big|_1^2=\frac{55}{6}\text{ кв.ед.}$$

Задача 23. Найти центр тяжести однородного тела, ограниченного конической поверхностью $z=\sqrt{x^2+y^2}$ и плоскостью $z=3$ (рис.12, 13).

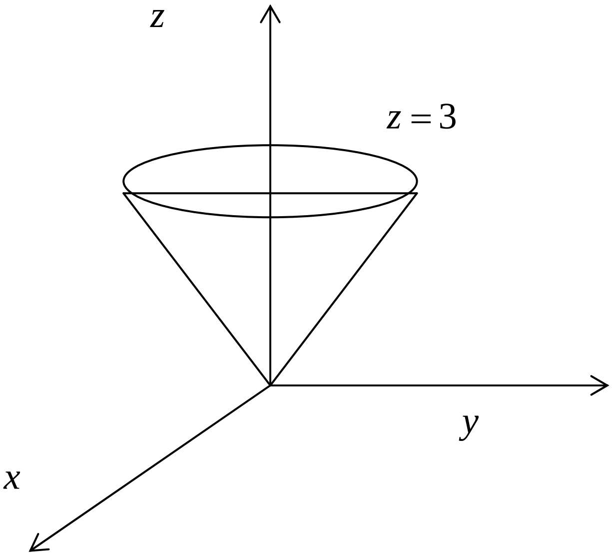


Рис.12

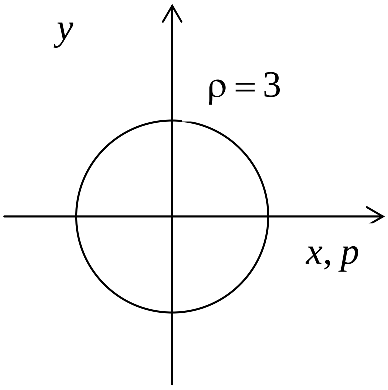


Рис.13

$$M_{yz}=M_{xz}=0$$

$$M_{xy}=\iint\limits_D dxdy\int\limits_{\sqrt{x^2+y^2}}^{3} z\,dz=\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^3\rho\,d\rho\int\limits_\rho^3 z\,dz=\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^3\rho\frac{z^2}{2}\Big|_\rho^3 d\rho=$$

$$=\frac{1}{2}\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^3\left(9\rho-\rho^3\right)d\rho=\frac{1}{2}\int\limits_0^{2\pi}\left(\frac{9\rho^2}{2}-\frac{\rho^4}{4}\right)\Big|_0^3 d\varphi=\frac{1}{2}\int\limits_9^{2\pi}\left(\frac{81}{2}-\frac{81}{4}\right)d\varphi=$$

$$=\frac{81}{8}\varphi\Big|_0^{2\pi}==\frac{81}{4}\pi$$

$$m=\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^3\rho\,d\rho\int\limits_\rho^3 dz=\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^3\rho\left(3-\rho\right)d\rho=\int\limits_0^{2\pi}\left(\frac{3\rho^2}{2}-\frac{\rho^3}{3}\right)\Big|_0^3 d\varphi=$$

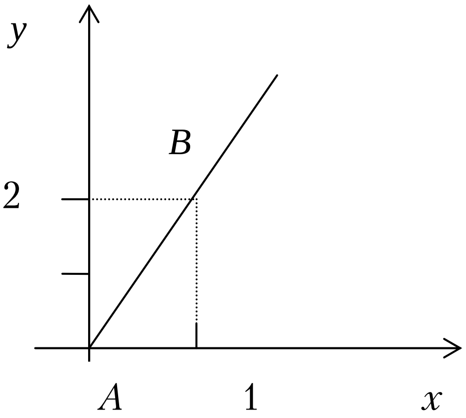
$$=\int\limits_0^{2\pi}\left(\frac{27}{2}-\frac{27}{3}\right)d\varphi=9\pi$$

$$\overline{z}=\frac{81}{4}\pi\,/\,9\pi=\frac{9}{4}$$

$$C\,(\,0{,}0,\frac{9}{4}\,).$$

Задача 24. Вычислить $\int\limits_{AB}\frac{dL}{\sqrt{x^2+y^2+4}}$, где AB – отрезок прямой, соединяющий точки $A(0,2)$ и $B(1,2)$.

Решение:



Уравнение прямой, проходящей через две заданные точки имеет вид:

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}.$$

Тогда уравнение данной прямой: $y=2x$.

Дифференциал дуги: $dL=\sqrt{1+(2x)'^2}dx=\sqrt{1+4}dx=\sqrt{5}dx$.

$$\int\limits_{AB}\frac{dL}{\sqrt{x^2+y^2+4}}=$$

$$=\int\limits_0^1\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{x^2+(2x)^2+4}}dx=\int\limits_0^1\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5x^2+4}}dx=\int\limits_0^1\frac{dx}{\sqrt{x^2+\frac{4}{5}}}=\ln\left|x+\sqrt{x^2+\frac{4}{5}}\right|\Big|_0^1=$$

$$=\ln\left|1+\sqrt{\frac{9}{5}}\right|-\ln\left|1+\sqrt{\frac{4}{5}}\right|=\ln\frac{3+\sqrt{5}}{2}.$$

Задача 25. Вычислить $J=\int\limits_L xydx+\left(x^2+y\right)dy$, если линия L – дуга параболы $y=x^2$, расположенная между точками A (0, 0) и B (2, 4).

Решение

Из $y = x^2$ следует $dy = 2xdx,\ x \in [0,2]$. Откуда

$$\int_L P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \int_a^b \Big(P\big(x, f(x)\big) + Q\big(x, f(x)\big) f'(x)\Big)dx =$$

$$= \int_0^2 \Big(x \cdot x^2 + \big(x^2 + x^2\big) \cdot 2x\Big)dx = \int_0^2 5x^3 dx = \frac{5}{4}x^4\Big|_0^2 = 20.$$

Задача 26. Проверить, является ли заданное выражение $4x\left(x^2 - y^2\right)dx - 4y\left(x^2 - y^2\right)dy$ полным дифференциалом функции $u(x,y)$, и найти $u(x,y)$. Сделать проверку.

Решение

Имеем: $P = 4x\left(x^2 - y^2\right),\ Q = -4y\left(x^2 - y^2\right)$.

Выполняется равенство

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} = -8xy.$$

Следовательно, данное выражение действительно является полным дифференциалом некоторой функции

Справедливо:

$$u(x,y) = L\int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} Pdx + Qdy + C = L\int_{x_0,y_0}^{x,y} 4x\left(x^2 - y^2\right)dx - 4y\left(x^2 - y^2\right)dy + C,$$

где криволинейный интеграл в правой части равенства можно брать по любому пути L.

Выберем в качестве пути интегрирования L ломаную, состоящую из двух звеньев L_1, L_2 параллельных осям координат (рис.14).

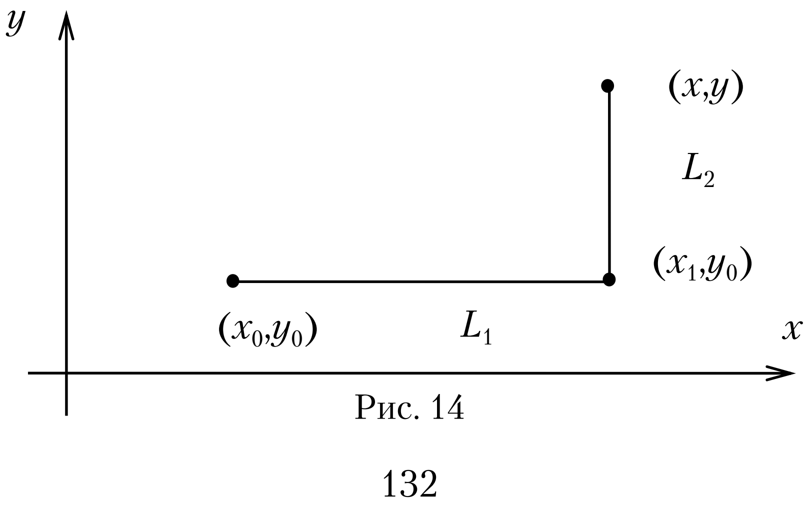


Рис. 14

Тогда

$$u(x,y)=(L_1)\int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} 4x\left(x^2-y\right)dx-4y\left(x^2-y^2\right)dy+$$

$$+(L_2)\int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} 4x\left(x^2-y^2\right)dx-4y\left(x^2-y^2\right)dy.$$

Но на L_1 $y=y_0=\mathrm{const}$, $dy=0$;
на L_2 $x=\mathrm{const}$, $dx=0$.

Следовательно,

$$u(x,y)=\int_{x_0}^{x} 4\left(x^2-y_0^2\right)xdx-\int_{y_0}^{y} 4\left(x^2-y^2\right)ydy+c.$$

5.3. Контрольная работа №3

Задача 27. Найти общее решение дифференциального уравнения.

1. $\left(xy+x^3y\right)y'=1+y^2$
2. $y-xy'=2\left(1+x^2y'\right)$
3. $y'+2y=y^2e^x$
4. $(x+1)y'+y=x^3+x^2$
5. $\left(x+xy^2\right)dy+ydx-y^2dx=0$
6. $y'+y=x\sqrt{y}$
7. $\left(2e^y-x\right)y'=1$
8. $y'=y^4\cos x+y\,\mathrm{tg}x$
9. $xy'+(x+1)y=3x^2e^{-x}$
10. $y'x^3\sin y=xy'-2y$
11. $y'+y=e^{-x}$
12. $\left(1+e^x\right)y\cdot y'=e^x$
13. $y'-y\cdot\mathrm{tg}x=\sec x$
14. $y'=\dfrac{4y}{x}+x\sqrt{y}$
15. $y'=\dfrac{1+y^2}{xy\cdot\left(1+x^2\right)}$
16. $y'-2xy=2xe^{x^2}$
17. $y'+\sqrt{\dfrac{1-y^2}{1-x^2}}=0$
18. $2xy'-y=3x^2$
19. $y'+y\cdot\cos x=\sin x\cdot\cos x$
20. $\left(4-x^2\right)\cdot y'-xy=4$
21. $y'\cdot\sin x-y\cdot\cos x=1$
22. $y'-\dfrac{y}{x\ln x}=x\ln x$
23. $y'+\dfrac{y}{1+x^2}=0$
24. $y'\cdot\sqrt{1-x^2}+y=\arcsin x$

25. $\left(1+e^{2x}\right)\cdot y'=\dfrac{e^{x}}{y^{2}}$

26. $y'+3y\cdot\operatorname{tg}3x=\sin 6x$

27. $y'\cdot\ln y\cdot\cos x=y$

28. $y'=10^{x+y}$

29. $x\sqrt{1+y^{2}}+y\cdot y'\cdot\sqrt{1+x^{2}}=0$

30. $\left(x+1\right)\cdot y'-2y=e^{x}\left(x+1\right)^{3}$

Задача 28. Найти общее решение дифференциального уравнения

1. $y'''=\sin x$

2. $y'''=x+5$

3. $y'''=x^{2}+e^{x}$

4. $y'''=\dfrac{x}{2}-3$

5. $y'''=2x+1$

6. $y'''=3x-e^{-x}$

7. $y'''=\sin\dfrac{x}{2}$

8. $y'''=\cos\dfrac{x}{3}$

9. $y'''=\cos\left(2x-1\right)$

10. $y'''=\sin\left(3x-2\right)$

11. $y'''=\cos\left(3x-2\right)$

12. $y'''=\sin\left(2x+3\right)$

13. $y'''=\sin 3x$

14. $y'''=\sin\dfrac{2x}{3}$

15. $y'''=x+\cos x$

16. $y'''=x-\sin x$

17. $y'''=x+\sin 2x$

18. $y'''=x-\cos 2x$

19. $y'''=x+\sin\tfrac{x}{2}$

20. $y'''=x-\cos\dfrac{x}{3}$

21. $y'''=x^{2}+e^{x}$

22. $y'''=x+e^{2x}$

23. $y'''=x^{2}-\cos\dfrac{x}{2}$

24. $y'''=\dfrac{x}{5}+e^{3x}$

25. $y'''=\dfrac{x}{2}+e^{4x}$

26. $y'''=\dfrac{x}{5}+e^{2x}$

27. $y'''=\dfrac{x}{3}-e^{2x}$

28. $y'''=x+e^{\frac{x}{2}}$

29. $y'''=x-e^{\frac{x}{4}}$

30. $y'''=x+\sin\dfrac{x}{3}$

Задача 29. Найти частное решение дифференциального уравнения

1. $xy''=y'$ при $y\left(1\right)=2, y'\left(1\right)=4$

2. $xy''+y'-x-1=0$ при $y\left(1\right)=\dfrac{5}{4}, y'\left(1\right)=\dfrac{3}{2}$

3. $y''+\dfrac{y'}{x}=\dfrac{x}{y'}$ при $y\left(2\right)=0, y'\left(2\right)=4$

4. $xy''+x\left(y'\right)^2-y'=0$ при $y\left(2\right)=2, y'\left(2\right)=1$

5. $y''\left(x^2+1\right)=2xy'$ при $y\left(0\right)=1, y'\left(0\right)=3$

6. $y''=\frac{y'}{x}+x$ при $y\left(1\right)=\frac{4}{3}, y'\left(1\right)=1$

7. $2xy''=y'$ при $y\left(1\right)=\frac{1}{3}, y'\left(1\right)=2$

8. $xy''\ln x=y'$ при $y\left(e\right)=1, y'\left(e\right)=2$

9. $xy''+y'=x^3$ при $y\left(1\right)=0, y'\left(1\right)=\frac{1}{4}$

10. $2xy'y''=1+\left(y'\right)^2$ при $y\left(1\right)=\frac{1}{3}, y'\left(1\right)=1$

11. $x^3y''+x^2y'=1$ при $y\left(1\right)=2, y'\left(1\right)=1$

12. $y''-2\text{ctg}xy'=\sin^3 x$ при $y\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{2}{3}, y'\left(\frac{\pi}{2}\right)=0$

13. $y''+2y'\text{ctg}x=\sin x$ при $y\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{1}{3}, y'\left(\frac{\pi}{2}\right)=0$

14. $y''\text{tg}x=1+y'$ при $y\left(\frac{\pi}{2}\right)=-\frac{\pi}{2}, y'\left(\frac{\pi}{2}\right)=0$

15. $y''+2x\left(y'\right)^2=0$ при $y\left(0\right)=3, y'\left(0\right)=1$

16. $xy''-y'=x^2e^x$ при $y\left(1\right)=0, y'\left(1\right)=e$

17. $y''-2y'\cdot\text{tg}x=\sin x$ при $y\left(0\right)=5, y'\left(0\right)=-\frac{1}{3}$

18. $y''+\frac{1}{x}y'=x^2$ при $y\left(1\right)=\frac{17}{16}, y'\left(1\right)=\frac{1}{4}$

19. $xy''+2y'=x^3$ при $y\left(1\right)=\frac{21}{20}, y'\left(1\right)=\frac{1}{5}$

20. $y''+y'\text{tg}x=\sin 2x$ при $y\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\pi}{2}, y'\left(\frac{\pi}{4}\right)=2$

21. $\left(1+x^2\right)y''-2xy'=0$ при $y\left(0\right)=3, y'\left(0\right)=1$

22. $\left(1+x^2\right)y''-=xy'$ при $y\left(0\right)=0, y'\left(0\right)=1$

23. $\left(x-1\right)y''-2y'=\frac{x+1}{x^2}$ при $y\left(2\right)=\ln 2, y'\left(2\right)=\frac{5}{2}$

24. $5xy''=y'$ при $y\left(1\right)=\frac{5}{6}, y'\left(1\right)=1$

25. $x\cdot(y')^2=(y')^2-xy''$ при $y(2)=2, y'(2)=1$

26. $xy''-y'=x^2e^x$ при $y(1)=0, y'(1)=e$

27. $y''(x^2+1)=2xy'$ при $y(0)=1, y'(0)=3$

28. $xy''=y'$ при $y(1)=2, y'(1)=4$

29. $x\cdot(y')^2=(y')^2-xy''$ при $y(2)=2, y'(2)=1$

30. $xy''+x(y')^2-y'=0$ при $y(2)=2,\ y'(2)=1$

Задача 30. Найти частное решение дифференциального уравнения $y''+py'+gy=f(x)$, удовлетворяющее начальным условиям $y(0)$=$y(0)$; $y'(0)=y'(0)$.

1. $y''-2y'+y=-12\cos 2x-9\sin 2x;\ y(0)=-2;\ y'(0)=0$.

2. $y''-6y'+9y=9x^2-39x+65;\ y(0)=-1;\ y'(0)=1$.

3. $y''+2y'+2y=2x^2+8x+6;\ y(0)=1;\ y'(0)=4$.

4. $y''-6y'+25y=9\sin 4x-24\cos 4x;\ y(0)=2;\ y'(0)=-2$.

5. $y''-4y'+20y=16xe^{2x};\ y(0)=1;\ y'(0)=2$.

6. $y''-y=(14-6x)e^{-x};\ y(0)=0;\ y'(0)=-1$.

7. $y''+10y'+34y=-9e^{-5x};\ y(0)=0;\ y'(0)=6$.

8. $y''-10y'+25y=e^{5x};\ y(0)=1;\ y'(0)=0$.

9. $y''-2y'+5y=5x^2+6x-12;\ y(0)=0;\ y'(0)=2$.

10. $y''+2y'=6x^2+2x+1;\quad y(0)=2;\quad y'(0)=2$.

11. $y''-2y'+y=6e^x,\quad y(0)=5,\quad y'(0)=4$.

12. $y''+2y'+y=e^{-x},\quad y(0)=1,\quad y'(0)=3$.

13. $y''+4y'+4y=(2-x)e^{3x},\quad y(0)=7,\quad y'(0)=0$.

14. $y''-4y'+y=3e^{2x},\quad y(0)=2,\quad y'(0)=-1$.

15. $y''-6y'+9y=4e^{3x},\quad y(0)=2,\quad y'(0)=2$.

16. $y''+6y'+9y=2e^{3x},\quad y(0)=1,\quad y'(0)=2$.

17. $y''+8y'+16y=2e^{-4x},\quad y(0)=-1,\quad y'(0)=-1$.

18. $y''-8y'+16y=xe^{x},\quad y(0)=3,\quad y'(0)=3$.

19. $y''+10y'+25y=e^{-5x},\quad y(0)=3,\quad y'(0)=1$.

20. $y''-10y'+25y=5e^{5x}, \quad y(0)=3, \quad y'(0)=3.$

21. $9y''-6y'+y=(x+1)e^{x}, \quad y(0)=0, \quad y'(0)=1.$

22. $4y''+4y'+y=(x-4)e^{2x}, \quad y(0)=1, \quad y'(0)=1.$

23. $4y''-4y'+y=e^{0{,}5x}, \quad y(0)=2, \quad y'(0)=2.$

24. $9y''-12y'+4y=4e^{x}, \quad y(0)=1, \quad y'(0)=4.$

25. $4y''-20y'+25y=(1-4x)e^{x}, \quad y(0)=0, \quad y'(0)=0.$

26. $9y''+6y'+y=e^{-\frac{1}{3}x}, \quad y(0)=1, \quad y'(0)=1.$

27. $25y''-10y'+y=e^{3x}, \quad y(0)=2, \quad y'(0)=3.$

28. $4y''+12y'+9y=xe^{x}, \quad y(0)=0, \quad y'(0)=1.$

29. $y''-14y'+49y=(1-x)e^{x}, \quad y(0)=1, \quad y'(0)=1.$

30. $y''-y=9xe^{2x}, \quad y(0)=0, \quad y'(0)=-5.$

Задача 31. Дана система линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами $\frac{dx}{dt}=a_{11}x+a_{12}y; \quad \frac{dy}{dt}=a_{21}x+a_{22}y.$ Требуется найти общее решение системы.

1. $\begin{cases} \frac{dx}{dt}=2x+y \\ \frac{dy}{dt}=3x+4y \end{cases}$

2. $\begin{cases} \frac{dx}{dt}=x-y \\ \frac{dy}{dt}=-4x+y \end{cases}$

3. $\begin{cases} \frac{dx}{dt}=-x+8y \\ \frac{dy}{dt}=x+y \end{cases}$

4. $\begin{cases} \frac{dx}{dt}=2x+3y \\ \frac{dy}{dt}=5x+4y \end{cases}$

5. $\begin{cases} \frac{dx}{dt}=x-y \\ \frac{dy}{dt}=-4x+4y \end{cases}$

6. $\begin{cases} \frac{dx}{dt}=-2x+y \\ \frac{dy}{dt}=-3x+2y \end{cases}$

7. $\begin{cases} \frac{dx}{dt}=6x-y \\ \frac{dy}{dt}=3x+2y \end{cases}$

8. $\begin{cases} \frac{dx}{dt}=2x+y \\ \frac{dy}{dt}=-6x-3y \end{cases}$

9. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 3x + y \\ \dfrac{dy}{dt} = x + 3y \end{cases}$

10. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -x - 2y \\ \dfrac{dy}{dt} = 3x + 4y \end{cases}$

11. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 5x + 8y \\ \dfrac{dy}{dt} = 3x + 3y \end{cases}$

12. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x + 4y \\ \dfrac{dy}{dt} = 2x + 3y \end{cases}$

13. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 2x + y \\ \dfrac{dy}{dt} = x + 2y \end{cases}$

14. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x + 5y \\ \dfrac{dy}{dt} = -x - 3y \end{cases}$

15. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 4x - y \\ \dfrac{dy}{dt} = x + 2y \end{cases}$

16. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 5x + 4y \\ \dfrac{dy}{dt} = 2x + 3y \end{cases}$

17. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x - y \\ \dfrac{dy}{dt} = x + 3y \end{cases}$

18. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 4x - y \\ \dfrac{dy}{dt} = x + 2y \end{cases}$

19. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x + 6y \\ \dfrac{dy}{dt} = -2x + 9y \end{cases}$

20. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 5x + y \\ \dfrac{dy}{dt} = -3x + 9y \end{cases}$

21. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x - 3y \\ \dfrac{dy}{dt} = 3x + y \end{cases}$

22. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x - 2y \\ \dfrac{dy}{dt} = 3x + 6y \end{cases}$

23. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x + 4y \\ \dfrac{dy}{dt} = x + y \end{cases}$

24. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -3x + 2y \\ \dfrac{dy}{dt} = -2x + y \end{cases}$

25. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 2x + 3y \\ \dfrac{dy}{dt} = x + 4y \end{cases}$

26. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x + 5y \\ \dfrac{dy}{dt} = 7x + 3y \end{cases}$

27. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 4x + 6y \\ \dfrac{dy}{dt} = 4x + 2y \end{cases}$

28. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 5x + 4y \\ \dfrac{dy}{dt} = -2x + 11y \end{cases}$

29. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x + 4y \\ \dfrac{dy}{dt} = 2x + 3y \end{cases}$

30. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 3x + y \\ \dfrac{dy}{dt} = 8x + y \end{cases}$

Задача 32. Исследовать сходимость числовых рядов

1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{(2n-1)2^{2n-1}}$

2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\dfrac{1+n^2}{1+n^3} \right)^2$

3. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n^2}{3+n^3}$

4. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{\sqrt{\mathrm{n}^2+2n}}$

5. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{(n+1)(n+4)}$

6. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\dfrac{2n^2+n+1}{3n^2-1} \right)^n$

7. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\dfrac{2n+1}{3n+1} \right)^n$

8. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{2^n}{3^n \cdot n!}$

9. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sqrt{\dfrac{n}{n^4+1}}$

10. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{6^n \left(n^2-1 \right)}{n!}$

17. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{7^n (n+1)^2}{5^n}$

18. $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \dfrac{1}{n \ln n}$

19. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1+n}{1+n^2}$

20. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{5^n \cdot \sqrt[3]{n^2}}{(n+1)!}$

21. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n+1}{(n+2)n}$

22. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\dfrac{n+1}{n+3} \right)^{n^2}$

23. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{3^n}{(n+1)! \cdot 4^n}$

24. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^2-4n+5}$

25. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n^2}{2^n}$

26. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{2 \cdot n!}{\sqrt{2^n+3}}$

11. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{(n+1)!}$

12. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)\ln^2(n+1)}$

13. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3n+1}{\sqrt{n\cdot 3^n}}$

14. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}\frac{1}{4^n}$

15. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sqrt[3]{\left(\frac{1}{2n-1}\right)^2}$

16. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{5^n}{3^n(2n+1)}$

27. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(n+1)!}{10^n\cdot n^2}$

28. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(n-1)^3}{n^4+3n^2+2}$

29. $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln^2 n}$

30. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)\ln^2(n+1)}$

Задача 33. Исследовать сходимость знакочередующихся рядов

1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\cdot\frac{1}{n}$

2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)2^n}$

3. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{n+2}{3n+5}\right)^n$

4. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n n^2}{n^3+2n^2+1}$

5. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}n}{6n-5}$

6. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{\sqrt{n+3}}$

16. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}3^n}{(2n+1)^n}$

17. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}(2n+1)}{n(n+1)}$

18. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(n+1)!}$

19. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}\cdot(n^2+1)}{3n^2}$

20. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{n}{2n+1}\right)^n$

21. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{(2n-1)^2}$

7. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)\cdot 2^n}$

8. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n}}{(2n+3)\cdot 2^{2n+3}}$

9. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\left(\frac{n+1}{2n+3}\right)^n$

10. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n}}{n(2n+1)}$

11. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}\cdot 3^n}{(5n-1)^n}$

12. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}\cdot(n+1)}{\sqrt{n^3+2n^2-3}}$

13. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n}}{(n+1)!}$

14. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{(5n-1)^2}$

15. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\left(\frac{2n-1}{2n+1}\right)^n$

22. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^2}$

23. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}\cdot(2n+1)}{n\sqrt{n}}$

24. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n}n}{\sqrt[3]{n+2}}$

25. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{(n+2)\cdot 3^n}$

26. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}\cdot(2n^2+1)}{n^2\sqrt{n}}$

27. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\left(\frac{n+1}{n^2+5n+3}\right)^n$

28. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{\ln(n+1)}$

29. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n}}{n^2+\sin^2 n}$

30. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{\ln(n+2)}$

Задача 34. Найти область сходимости ряда.

1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(n-2)^3\cdot(x+3)^{2n}}{2n+3}$

2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n}\cdot(x-3)^n}{(n+1)\cdot 5^n}$

3. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(x-1)^{2n}}{n\cdot 9^n}$

15. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\cdot 9^n\cdot(x-1)^{2n}}$

16. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}3^{n^2}\cdot x^{n^2}$

17. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(x+2)^{n^2}}{n^n}$

4. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2n+3}{(n+1)^5\cdot x^{2n}}$

5. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\cdot\frac{(x-2)^{2n}}{2n}$

6. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(x-5)^{2n+1}}{3n+8}$

7. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^3+1}{3^n\cdot(x-2)^n}$

8. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{x^n}$

9. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(x+5)^{2n-3}}{4^n\cdot(2n-1)}$

10. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(x-7)^{2n-1}}{\left(2n^2-5n\right)\cdot 4^n}$

11. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(x-2)^n}{(3n+1)\cdot 2^n}$

12. $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{3n\cdot(x-2)^{3n}}{(5n-8)^3}$

13. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(x+5)^n\cdot\operatorname{tg}\frac{1}{3^n}$

14. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sin\frac{\sqrt{n}}{n^2+1}\cdot(x-2)^n$

18. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^5}{(n+1)!}\cdot(x+5)^{2n+1}$

19. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(3n-2)\cdot(x-3)^n}{(n+1)^3\cdot 2^{n+1}}$

20. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(x-5)^n}{(n+4)\cdot\ln(n+4)}$

21. $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(n+2)\cdot\ln(n+2)\cdot(x-3)^{2n}}$

22. $\sum\limits_{n=5}^{\infty}\frac{1}{2^n\cdot n^2\cdot(x+2)^n}$

23. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(x-4)^{n^2}}{n^{n+1}}$

24. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^5}{x^n}$

25. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n+1}}{3^n\cdot(x+3)^n}$

26. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{4^n\cdot(x+1)^{2n}}{n}$

27. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3n+5}{(2n+9)^5\cdot(x+2)^{2n}}$

28. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^2+1}{5^n\cdot(x+4)^n}$

29. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(x+2)^n}{(2n+1)\cdot 3^n}$

30. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^2\cdot(x-3)^n}{\left(n^4+1\right)^2}$

Задача 35. С помощью рядов вычислить приближенное значение интеграла с точностью до 0,001.

1. $\int\limits_0^{0,1} e^{-6x^2}dx$

2. $\int\limits_0^{0,1} \sin\left(100x^2\right)dx$

3. $\int\limits_0^{1} \cos x^2 dx$

4. $\int\limits_0^{0,5} \frac{dx}{\sqrt[4]{1+x^4}}$

5. $\int\limits_0^{0,1} \frac{1-e^{-2x}}{x}dx$

6. $\int\limits_0^{1} \frac{\ln\left(1+\frac{x}{5}\right)}{x}dx$

7. $\int\limits_0^{1,5} \frac{dx}{\sqrt[3]{27+x^3}}$

8. $\int\limits_0^{0,2} e^{-3x^2}dx$

9. $\int\limits_0^{0,2} \sin\left(25x^2\right)dx$

10. $\int\limits_0^{0,5} \cos\left(4x^2\right)dx$

11. $\int\limits_0^{1} \frac{dx}{\sqrt[4]{16+x^4}}$

12. $\int\limits_0^{0,2} \frac{1-e^{-x}}{x}dx$

16. $\int\limits_0^{0,4} \sin\left(\frac{5x}{2}\right)^2 dx$

17. $\int\limits_0^{0,2} \cos\left(25x^2\right)dx$

18. $\int\limits_0^{1,5} \frac{dx}{\sqrt[4]{81+x^4}}$

19. $\int\limits_0^{0,4} \frac{1-e^{-\frac{x}{2}}}{x}dx$

20. $\int\limits_0^{0,1} \frac{\ln(1+2x)}{x}dx$

21. $\int\limits_0^{2,5} \frac{dx}{\sqrt[3]{125+x^3}}$

22. $\int\limits_0^{0,4} e^{-\frac{3x^2}{4}}dx$

23. $\int\limits_0^{0,5} \sin\left(4x^2\right)dx$

24. $\int\limits_0^{0,4} \cos\left(\frac{5x}{2}\right)^2 dx$

25. $\int\limits_0^{2} \frac{dx}{\sqrt[4]{256+x^4}}$

26. $\int\limits_0^{0,5} \frac{dx}{\sqrt[3]{1+x^3}}$

27. $\int\limits_0^{2,5} \frac{dx}{\sqrt[4]{625+x^4}}$

13. $\int\limits_0^{0,4} \frac{\ln\left(1+\frac{x}{2}\right)}{x}dx$

14. $\int\limits_0^{2} \frac{dx}{\sqrt[3]{64+x^3}}$

15. $\int\limits_0^{0,3} e^{-2x^2}dx$

16. $\int\limits_0^{0,4} \sin\left(\frac{5x}{2}\right)^2 dx$

28. $\int\limits_0^{1} \frac{dx}{\sqrt[3]{8+x^3}}$

29. $\int\limits_0^{0,5} e^{-\frac{3x^2}{25}}dx$

30. $\int\limits_0^{1} \sin x^2 dx$

Задача 36. Разложить в ряд Фурье функцию $f(x)$, заданную в промежутке от – π до π.

1. $f(x)=x+\frac{1}{6}, \quad -\pi \langle\, x \,\langle\, \pi$

2. $f(x)=\begin{cases} 3, & -\pi \langle\, x \le 0, \\ x, & 0 \,\langle\, x \,\langle\, \pi \end{cases}$

3. $f(x)=\begin{cases} -2x, & -\pi \langle\, x \,\langle\, 0, \\ 3, & 0 \le x \,\langle\, \pi \end{cases}$

4. $f(x)=\begin{cases} 1-2x, & -\pi \langle\, x \,\langle\, 0, \\ 0, & 0 \le x \,\langle\, \pi \end{cases}$

5. $f(x)=\begin{cases} \frac{2x}{5}, & -\pi \langle\, x \,\langle\, 0, \\ 0, & 0 \le x \,\langle\, \pi \end{cases}$

6. $f(x)=\begin{cases} 2, & -\pi \langle\, x \,\langle\, 0, \\ 1-x, & 0 \le x \,\langle\, \pi \end{cases}$

7. $f(x)=x+\frac{1}{2}, \quad -\pi \langle\, x \,\langle\, \pi$

8. $f(x)=\frac{5}{2}-x, \quad -\pi \langle\, x \,\langle\, \pi$

9. $f(x)=\frac{x}{3}-2, \quad -\pi \langle\, x \,\langle\, \pi$

10. $f(x)=\frac{3}{2}-3x,\quad -\pi \langle\, x \,\langle\, \pi$

11. $f(x)=\begin{cases} x, & -\pi \langle\, x \le 0, \\ \frac{2}{5}, & 0 \,\langle\, x \,\langle\, \pi \end{cases}$

12. $f(x)=\begin{cases} \frac{3}{4}, & -\pi \langle\, x \,\langle\, 0, \\ x+1, & 0 \,\langle\, x \,\langle\, \pi \end{cases}$

13. $f(x)=x+\frac{6}{5},\quad -\pi \langle\, x \,\langle\, \pi$

14. $f(x)=4x+\frac{2}{5},\quad -\pi \langle\, x \,\langle\, \pi$

15. $f(x)=\begin{cases} 2, & -\pi \langle\, x \le 0, \\ 2x, & 0 < x \,\langle\, \pi \end{cases}$

16. $f(x)=x+\frac{2}{5},\quad -\pi \langle\, x \,\langle\, \pi$

17. $f(x)=2x-\frac{1}{4},\quad -\pi \langle\, x \,\langle\, \pi$

18. $f(x)=\begin{cases} x, & -\pi \langle\, x \,\langle\, 0, \\ -1, & 0 \,\langle\, x \,\langle\, \pi \end{cases}$

19. $f(x)=\begin{cases} -2, & -\pi \langle\, x \,\langle\, 0, \\ \frac{x}{2}, & 0 \le x \,\langle\, \pi \end{cases}$

20. $f(x)=\begin{cases} 1-x, & -\pi \langle\, x \le 0, \\ \pi, & 0 \,\langle\, x \,\langle\, \pi \end{cases}$

21. $f(x)=\begin{cases} \pi, & -\pi \langle\, x \,\langle\, 0, \\ \frac{\pi-x}{2}, & 0 \le x \,\langle\, \pi \end{cases}$

22. $f(x)=\begin{cases} 1, & -\pi \langle\, x \,\langle\, 0, \\ x, & 0 \le x \,\langle\, \pi \end{cases}$

23. $f(x)=\begin{cases}2, & -\pi \langle x \langle 0,\\ x+3, & 0\le x \langle \pi\end{cases}$

24. $f(x)=\begin{cases}-10, & -\pi \langle x \langle 0,\\ x, & 0\le x \langle \pi\end{cases}$

25. $f(x)=x-10, \ -\pi \langle x \langle \pi$

26. $f(x)=x+\frac{1}{5}, \ -\pi \langle x \langle \pi$

27. $f(x)=\begin{cases}-3, & -\pi \langle x \langle 0,\\ x, & 0\le x \langle \pi\end{cases}$

28. $f(x)=\begin{cases}3, & -\pi \langle x \langle 0,\\ x, & 0\le x \langle \pi\end{cases}$

29. $f(x)=\begin{cases}3-x, & -\pi \langle x\le 0,\\ \pi, & 0 \langle x \langle \pi\end{cases}$

30. $f(x)=\begin{cases}3, & -\pi \langle x \langle 0,\\ \frac{x}{5}, & 0\le x \langle \pi\end{cases}$

Задача 37. Решить задачи по теории вероятностей и математической статистике

ВАРИАНТ 1

1. Студент знает 25 вопросов из 30 вопросов в программе. Найти вероятность того, что студент знает 3 вопроса, предложенные ему экзаменатором.

2. Из трех орудий произвели залп по цели. Вероятность попадания в цель при одном выстреле из первого орудия равна 0,8, для второго и третьего орудий эти вероятности соответственно равны 0, 7 и 0, 9. Найти вероятность того, что: а) только один снаряд попадет в цель; б) только два снаряда попадут в цель; в) все три снаряда попадут в цель; г) хотя бы один стрелок поразит цель.

3. В магазин изделия поставляются тремя фирмами в соотношении 5:8:7. Среди продукции первой фирмы стандартные изделия составляют 90%, второй – 85%, третьей – 75 %. Найти вероятность того, что приобретенное изделие окажется нестандартным.

4. В зимнее время вероятность своевременного прибытия поезда на станцию принимается 0,8. Определить вероятность того, что из четырех ожидаемых поездов прибудут своевременно: а) не менее трех поездов; б) хотя бы один поезд.

5. Дискретная случайная величина X может принимать только два значения x_1 и x_2, причем $x_1 < x_2$. Известны вероятность $p_1 = 0,9$, математическое ожидание $M[X] = 4,1$ и дисперсия $D[X] = 0,09$. Найти закон распределения случайной величины X.

6. Дана функция распределения случайной величины X:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad x < -1 \\ \frac{1}{2}(x+1) & \text{при} \quad -1 \le x \le 1 \\ 1 & \text{при} \quad x > 1 \end{cases}$$

Найти плотность вероятности $f(x)$, построить графики $f(x)$ и $F(x)$, вычислить математическое ожидание $M[X]$ и дисперсию $D[X]$.

7. Найти доверительный интервал для оценки математического ожидания a нормального распределения с надежностью $\gamma = 0,95$, зная выборочную среднюю $\bar{x}_{\text{в}} = 45,17$, объем выборки $n = 36$ и среднее квадратическое отклонение $\sigma = 6$.

ВАРИАНТ 2

1. В коробке смешаны электролампы одинакового размера и формы: по 100 Вт – 7 штук, по 75 Вт – 13 штук. Вынуты наудачу 3 лампы. Какова вероятность того, что они одинаковой мощности?

2. Три стрелка произвели залп по цели. Вероятность поражения цели первым стрелком равна 0,7; для второго и третьего стрелков эти вероятности соответственно равны 0,8 и 0,9. Найти вероятность того, что: а) только один из стрелков поразит цель; б) только два стрелка поразят цель; в) все три стрелка поразят цель; г) хотя бы один стрелок поразит цель.

3. В двух одинаковых коробках находятся карандаши. Известно, что 1/3 карандашей в первой коробке и j карандашей во второй – характеризуются твердостью ТМ. Наугад выбирается одна коробка и из нее наугад извлекается один карандаш. Он оказался твердости ТМ. Какова вероятность того, что он извлечен из первой коробки?

4. Испытываются 25 двигателей. Вероятность безотказной работы каждого двигателя равна 0,9. Определить вероятность того, что безотказно будет работать: а) ровно 21 двигатель; б) от 18 до 24 двигателей.

5. Дискретная случайная величина X может принимать только два значения x_1 и x_2, причем $x_1 < x_2$. Известны вероятность p_1=0,7, математическое ожидание $M[X]$=3,3 и дисперсия $D[X]$=0,21. Найти закон распределения случайной величины X.

6. Дана функция распределения случайной величины X:

$$F(x)=\begin{cases} 0 & \text{при} \quad x<1 \\ \frac{1}{2}(x-1) & \text{при} \quad 1 \le x \le 3 \\ 1 & \text{при} \quad x>3 \end{cases}$$

Найти плотность вероятности $f(x)$, построить графики $f(x)$ и $F(x)$, вычислить математическое ожидание $M[X]$ и дисперсию $D[X]$.

7. Найти доверительный интервал для оценки математического ожидания a нормального распределения с надежностью γ=0,95, зная выборочную среднюю $\bar{x}_{\text{в}}$=45,15, объем выборки n=64 и среднее квадратическое отклонение σ=8.

ВАРИАНТ 3

1. В группе 12 студентов, среди которых 8 отличников. По списку наудачу отобрали 9 студентов. Найти вероятность того, что среди отобранных студентов 5 отличников.

2. Ткачиха обслуживает три ткацких станка. Вероятность того, что в течение часа работа станка не потребует внимания ткачихи, равна для первого станка 0,75% для второго – 0,8; для третьего – 0,65. Какова вероятность того, что: а) только один станок потребует внимания ткачихи; б) только два станка потребуют внимания; в) все три станка потребуют внимания ткачихи.

3. Противник применяет самолеты трех типов. Известно, что самолетов каждого типа равное число. Вероятности вывести самолет из строя соответственно равны: 0,7; 0,8; 0,6. Самолет противника был сбит. Чему равна вероятность того, что это самолет второго типа?

4. Шесть процентов строительных блоков не соответствуют стандарту. Какова вероятность того, что среди пяти выбранных блоков не соответствуют стандарту: а) не менее трех; б) более двух блоков.

5. Дискретная случайная величина X может принимать только два значения x_1 и x_2, причем $x_1 < x_2$. Известны вероятность p_1=0,1, математическое ожидание $M[X]$=5,8 и дисперсия $D[X]$=0,36. Найти закон распределения случайной величины X.

6. Дана функция распределения случайной величины X:

$$F(x)=\begin{cases} 0 & \text{при} \quad x<0 \\ x^2 & \text{при} \quad 0 \le x \le 1 \\ 1 & \text{при} \quad x>1 \end{cases}$$

Найти плотность вероятности $f(x)$, построить графики $f(x)$ и $F(x)$, вычислить математическое ожидание $M[X]$ и дисперсию $D[X]$.

7. Найти доверительный интервал для оценки математического ожидания a нормального распределения с надежностью γ=0,95, зная выборочную среднюю $\overline{x}_\text{в}$=45,14, объем выборки n=81 и среднее квадратическое отклонение σ=9.

ВАРИАНТ 4

1. В ящике 15 деталей, среди которых 10 деталей окрашены. Наудачу извлекают 3 детали. Найти вероятность того, что все извлеченные детали окрашены.

2. Экспедиция издательства отправила газеты в два почтовых отделения. Вероятность своевременной доставки газет в каждое из почтовых отделений равна 0,9. Найти вероятность того, что: а) оба почтовых отделения получат газеты вовремя; б) оба почтовых отделения получат газеты с опозданием; в) только одно почтовое отделение получит газеты вовремя; г) хотя бы одно почтовое отделение получит газет вовремя.

3. На общий конвейер поступают детали с двух станков. Вероятность получения стандартной детали с первого станка равна 0,8, со второго 0,9. На втором станке деталей производится в два раза больше, чем на первом. Найти вероятность того, что наугад взятая с конвейера деталь стандартная.

4. Известно, что на склад магазина поступило 80: изделий первого сорта. Найти вероятность того, что из ста наудачу взятых изделий первого сорта окажется: а) ровно 78 изделий; б) от 72 до 84 изделий.

5. Дискретная случайная величина X может принимать только два значения x_1 и x_2, причем $x_1 < x_2$. Известны вероятность p_1=0,6, мате-

матическое ожидание $M\left[X\right]$=3,4 и дисперсия $D\left[X\right]$=0,24. Найти закон распределения случайной величины X.

6. Дана функция распределения случайной величины X:

$$F\left(x\right)=\begin{cases}0 & \text{при} \quad x<0\\ \frac{1}{3}x & \text{при} \quad 0\leq x\leq 3\\ 1 & \text{при} \quad x>3\end{cases}$$

Найти плотность вероятности $f\left(x\right)$, построить графики $f\left(x\right)$ и $F\left(x\right)$, вычислить математическое ожидание $M\left[X\right]$ и дисперсию $D\left[X\right]$.

7. Найти доверительный интервал для оценки математического ожидания a нормального распределения с надежностью γ=0,95, зная выборочную среднюю $\bar{x}_{\text{в}}$=45,13, объем выборки n=100 и среднее квадратическое отклонение σ=10.

ВАРИАНТ 5

1. В отделе работает 7 мужчин и 3 женщины. По табельным номерам наудачу выбрали 3 человека. Найти вероятность того, что все выбранные лица оказались мужчинами.

2. Экспедиция издательства отправила газеты в три почтовых отделения. Вероятность своевременной доставки газет в первое отделение равна 0,95, во второе отделение- 0,9, в третье – 0,8. Найти вероятность того, что: а) только одно отделение получит газеты вовремя; б) все три отделения получат газеты с опозданием; в) хотя бы одно почтовое отделение получит газеты вовремя.

3. Вероятность взять для данного измерения первый прибор равна 0,2, второй – 0, 3 и третий – 0, 5. Вероятность неисправности в первом приборе равна 0,1, во втором – 0,3, а в третьем – 0,4. Какова вероятность получить неверный отсчет?

4. Вероятность появления бракованной детали, изготовленной станком-автоматом, равна 0,01. Найти вероятность того, что среди 200 деталей, изготовленных этим автоматом, будет: а) два бракованных; б) не менее четырех бракованных.

5. Дискретная случайная величина X может принимать только два значения x_1 и x_2, причем $x_1<x_2$. Известны вероятность p_1=0,5, математическое ожидание $M\left[X\right]$=3,5 и дисперсия $D\left[X\right]$=0,25. Найти закон распределения случайной величины X.

6. Дана функция распределения случайной величины X:

$$F(x)=\begin{cases}0 & \text{при} \quad x<0 \\ \frac{1}{4}x & \text{при} \quad 0\le x\le 4 \\ 1 & \text{при} \quad x>4\end{cases}$$

Найти плотность вероятности $f(x)$, построить графики $f(x)$ и $F(x)$, вычислить математическое ожидание $M[X]$ и дисперсию $D[X]$.

7. Найти доверительный интервал для оценки математического ожидания a нормального распределения с надежностью γ=0,95, зная выборочную среднюю $\overline{x}_{\text{в}}$=45,12, объем выборки n=121 и среднее квадратическое отклонение σ=11.

ВАРИАНТ 6

1. Студент знает 50 из 60 вопросов программы. Найти вероятность того, что студент знает 2 вопроса, содержащиеся в экзаменационном билете.

2. Рабочий обслуживает 3 станка. Известно, что вероятность бесперебойной работы на протяжении одного часа после наладки равна для первого станка – 0,9, для второго – 0,8, для третьего – 0,7. Найти вероятность того, что: а) за этот час лишь один станок потребует вмешательства рабочего; б) за этот час только два станка потребуют вмешательства рабочего; в) все три станка потребуют вмешательства рабочего.

3. Из семи винтовок пристреляны только две. Вероятность попадания из пристреленной винтовки – 0,95; из не пристреленной – 0,25. Цель поражена из наудачу взятой винтовки. Найти вероятность того, что взята не пристреленная винтовка.

4. Сто станков в цехе работают независимо друг от друга. Вероятность бесперебойной работы каждого из них в течение смены равна 0,8. Найти вероятность того, что в течение смены бесперебойно проработают: а) ровно 76 станков; б) от 70 до 82 станков.

5. Дискретная случайная величина X может принимать только два значения x_1 и x_2, причем $x_1<x_2$. Известны вероятность p_1=0,4, математическое ожидание $M[X]$=3,6 и дисперсия $D[X]$=0,24. Найти закон распределения случайной величины X.

6. Дана функция распределения случайной величины X:

$$F(x)=\begin{cases} 0 & \text{при} \quad x<0 \\ \dfrac{1}{16}x^2 & \text{при} \quad 0 \le x \le 4 \\ 1 & \text{при} \quad x>4 \end{cases}$$

Найти плотность вероятности $f(x)$, построить графики $f(x)$ и $F(x)$, вычислить математическое ожидание $M[X]$ и дисперсию $D[X]$.

7. Найти доверительный интервал для оценки математического ожидания a нормального распределения с надежностью $\gamma=0{,}95$, зная выборочную среднюю $\bar{x}_{\text{в}}=45{,}11$, объем выборки $n=144$ и среднее квадратическое отклонение $\sigma=12$.

ВАРИАНТ 7

1. В читальном зале имеется 12 учебников по теории вероятностей, из которых 8 в твердом переплете. Найти вероятность того, что среди 4 книг, отобранных студентом для подготовки к занятию, 3 учебника будут в твердом переплете.

2. По прогнозу метеорологов вероятность дождя – 0,4; вероятность ветра – 0,7; вероятность повышения атмосферного давления – 0,3. Найти вероятность того, что будет или дождь или ветер.

3. Среди 100 изделий 50 первого сорта, 30 – второго сорта и 20 – третьего сорта. Вероятность брака для изделий первого сорта равна 0,01: для второго – 0,02; третьего – 0,04. Наудачу извлекается исправное изделие. Определить вероятность того, что это изделие второго сорта.

4. Для прядения смешаны поровну белый и окрашенный хлопок. Какова вероятность среди 8 случайно отобранных нитей обнаружить: а) ровно 3 окрашенных; б) менее трех окрашенных?

5. Дискретная случайная величина X может принимать только два значения x_1 и x_2, причем $x_1<x_2$. Известны вероятность $p_1=0{,}3$, математическое ожидание $M[X]=3{,}7$ и дисперсия $D[X]=0{,}21$. Найти закон распределения случайной величины X.

6. Дана функция распределения случайной величины X:

$$F(x)=\begin{cases} 0 & \text{при} \quad x<\frac{3}{2}\pi \\ \cos x & \text{при} \quad \frac{3}{2}\pi\le x\le 2\pi \\ 1 & \text{при} \quad x>2\pi \end{cases}$$

Найти плотность вероятности $f(x)$, построить графики $f(x)$ и $F(x)$, вычислить математическое ожидание $M[X]$ и дисперсию $D[X]$.

7. Найти доверительный интервал для оценки математического ожидания a нормального распределения с надежностью γ=0,95, зная выборочную среднюю $\overline{x}_{\text{в}}$=45,10, объем выборки n=169 и среднее квадратическое отклонение σ=13.

ВАРИАНТ 8

1. В партии, состоящей из 20 изделий, 3 детали дефектные. Для контроля вынимаются 7 изделий. Найти вероятность того, что из них ровно 2 детали окажутся дефектными.

2. Три спортсмена участвуют в отборочных соревнованиях. Вероятность зачисления в сборную команду для первого спортсмена – 0,7, второго – 0,8, третьего – 0,6. Найти вероятность того, что: а) только один из них попадет в сборную; б) только два из них попадут в сборную, в) все три спортсмена попадут в сборную.

3. При передаче сообщения сигналами «точка» и «тире» эти сигналы встречаются в отношении 5:3. Статистические свойства помех таковы, что они искажают в среднем 0,4 сообщений «точка» и 0,3 сообщений «тире». Найти вероятность того, что произвольно принятый сигнал не искажен.

4. Пусть вероятность поражения мишени стрелком при каждом выстреле постоянна и равна 0,8. Вычислить вероятность того, что при пяти выстрелах будет: а) не более двух промахов; б) три попадания.

5.Дискретная случайная величина X может принимать только два значения x_1 и x_2, причем $x_1<x_2$. Известны вероятность p_1=0,2, математическое ожидание $M[X]$=3,8 и дисперсия $D[X]$=0,16. Найти закон распределения случайной величины X.

6. Дана функция распределения случайной величины X:

$$F(x)=\begin{cases} 0 & \text{при} \quad x<-\frac{\pi}{2} \\ \cos x & \text{при} \quad -\frac{\pi}{2}\le x\le 0 \\ 1 & \text{при} \quad x>0 \end{cases}$$

Найти плотность вероятности $f(x)$, построить графики $f(x)$ и $F(x)$, вычислить математическое ожидание $M[X]$ и дисперсию $D[X]$.

7. Найти доверительный интервал для оценки математического ожидания a нормального распределения с надежностью γ=0,95, зная выборочную среднюю $\overline{x}_{\text{в}}$=45,09, объем выборки n=196 и среднее квадратическое отклонение σ=14.

ВАРИАНТ 9

1. Две команды по 10 спортсменов производят жеребьевку для присвоения номеров участникам соревнований. Два брата входят в состав различных команд. Найти вероятность того, что оба брата будут участвовать в соревновании под номером 5.

2. Для проверки собранной схемы последовательно посланы три единичных импульса. Вероятность прохождения каждого из них соответственно равны: 0,5; 0,6;0,8. Найти вероятность того, что: а) пройдет только один импульс; б) пройдут только два импульса; в) пройдут все три импульса.

3. Болванки изготавливаются на трех прессах. Первый пресс вырабатывает 50% всех болванок, второй – 30%, третий 20%. При этом вероятность получения нестандартных болванок с первого пресса равна 0,02, со второго – 0,025; с третьего – 0,015. Найти вероятность того, что наудачу взятая со склада болванка нестандартная.

4. Установлено, что в среднем 5% мужчин страдают дальтонизмом. Вычислить вероятность того, что среди пяти мужчин: не будет ни одного дальтоника; б) не более одного дальтоника.

5. Дискретная случайная величина X может принимать только два значения x_1 и x_2, причем $x_1<x_2$. Известны вероятность p_1=0,1, математическое ожидание $M[X]$=3,9 и дисперсия$D[X]$=0,09. Найти закон распределения случайной величины X.

6. Дана функция распределения случайной величины X:

$$F(x)=\begin{cases} 0 & \text{при} \quad x<0 \\ \frac{1}{4}x^2 & \text{при} \quad 0 \le x \le 2 \\ 1 & \text{при} \quad x>2 \end{cases}$$

Найти плотность вероятности $f(x)$, построить графики $f(x)$ и $F(x)$, вычислить математическое ожидание $M[X]$ и дисперсию $D[X]$.

7. Найти доверительный интервал для оценки математического ожидания a нормального распределения с надежностью γ=0,95, зная выборочную среднюю $\overline{x}_{\text{в}}$=45,08, объем выборки n=225 и среднее квадратическое отклонение σ=15.

ВАРИАНТ 10

1. В урне 4 белых и 7 черных шаров. Извлекают сразу 3 шара. Найти вероятность того, что два их них белые.

2. Вероятность сдачи студентом во время экзаменационной сессии экзамена по химии равна 0,8, по математике – 0,7, по истории – 0,9. Найти вероятность того, что студент сдаст: а) только один экзамен; б) только два экзамена; в) все три экзамена.

3. На сборку попадают детали с трех автоматов. Известно, что первый автомат дает 0,3% брака, второй – 0,2%, и третий – 0, 4%. Найти вероятность попадания на сборку бракованной детали, если с первого автомата поступило 1000, со второго – 20000 и с третьего – 2500.

4. По данным магазина, установлено, что в среднем 20% телевизоров выходят из строя в течение гарантийного срока. Какова вероятность того, что среди 225 проданных телевизоров будут работать исправно в течение гарантийного срока: а) 184 телевизора; б) от 172 до 182 телевизоров?

5. Дискретная случайная величина X может принимать только два значения x_1 и x_2, причем $x_1 < x_2$. Известны вероятность p_1=0,9, математическое ожидание $M[X]$=2,2 и дисперсия $D[X]$=0,36. Найти закон распределения случайной величины X.

6. Дана функция распределения случайной величины X:

$$F(x)=\begin{cases} 0 & \text{при} \quad x<0 \\ \frac{1}{9}x^2 & \text{при} \quad 0 \le x \le 3 \\ 1 & \text{при} \quad x>3 \end{cases}$$

Найти плотность вероятности $f(x)$, построить графики $f(x)$ и $F(x)$, вычислить математическое ожидание $M[X]$ и дисперсию $D[X]$.

7. Найти доверительный интервал для оценки математического ожидания a нормального распределения с надежностью γ=0,99, зная выборочную среднюю $\bar{x}_{\text{в}}$=112,04, объем выборки n=49 и среднее квадратическое отклонение σ=7.

ВАРИАНТ 11

1. В группе 25 студентов, среди них 10 девушек. Какова вероятность того, что среди назначенных на дежурство трех человек будут два юноши?

2. Студент может найти нужный учебник в трех библиотеках. Вероятность того, что он найдет его в первой библиотеке, равна 0,3; во второй – 0,5 и в третьей – 0,4. Найти вероятность того, что студент найдет нужный учебник: а) только в одной библиотеке; б) только в двух библиотеках; в) во всех трех библиотеках.

3. Детали обрабатываются на двух станках, из которых первый производит деталей в 3 раза больше, чем второй. При этом вероятность брака для первого станка равна 0,1, для второго – 0,15. Одна наудачу взятая деталь оказалась стандартной. Найти вероятность того, что она обработана на первом станке.

4. Установлено, что фирма выполняет в срок в среднем 60% заказов. Какова вероятность того, что из 150 заказов, принятых в течение некоторого времени, будут выполнены в срок: а) ровно 90 заказов; б) от 93 от 107 заказов?

5. Дискретная случайная величина X может принимать только два значения x_1 и x_2, причем $x_1 < x_2$. Известны вероятность p_1=0,9, математическое ожидание $M[X]$=3,1 и дисперсия $D[X]$=0,09. Найти закон распределения случайной величины X.

6. Дана функция распределения случайной величины X:

$$F(x)=\begin{cases}0 & \text{при} \quad x<0\\ x^2 & \text{при} \quad 0\le x\le 1\\ 1 & \text{при} \quad x>1\end{cases}$$

Найти плотность вероятности $f(x)$, построить графики $f(x)$ и $F(x)$, вычислить математическое ожидание $M[X]$ и дисперсию $D[X]$.

7. Найти доверительный интервал для оценки математического ожидания a нормального распределения с надежностью γ=0,99, зная выборочную среднюю $\overline{x}_{\text{в}}$=113,2, объем выборки n=64 и среднее квадратическое отклонение σ=8.

ВАРИАНТ 12

1. В бригаде работает 20 человек, из них 7 женщин. Какова вероятность того, что среди наудачу отобранных десяти человек окажутся 4 женщины?

2. Нужная для студента формула может находиться в трех справочниках с вероятностями соответственно: 0,7; 0,8; 0,9. Найти вероятность того, что нужная формула содержится: а) только в одном справочнике; б) только в двух справочниках; в) во всех трех справочниках.

3. Имеются 5 винтовок, из которых 3 с оптическим прицелом. Вероятность попадания в цель при одном выстреле из винтовки с оптическим прицелом составляет для данного стрелка 0,95; без оптического прицела – 0,8. Найти вероятность попадания в цель, если стрелок сделает один выстрел из наудачу взятой винтовки.

4. Известно, что в данном технологическом процессе 10% изделий имеют дефект. Какова вероятность того, что в партии из 400 изделий: а) не будут иметь дефекта 378 изделий; б) будут иметь дефект от 25 до 43 изделий?

5. Дискретная случайная величина X может принимать только два значения x_1 и x_2, причем $x_1<x_2$. Известны вероятность p_1=0,8, математическое ожидание $M[X]$=3,2 и дисперсия $D[X]$=0,16. Найти закон распределения случайной величины X.

6. Дана функция распределения случайной величины *X*:

$$F(x)=\begin{cases} 0 & \text{при} \quad x<0 \\ 3x^2+2x & \text{при} \quad 0\le x\le \dfrac{1}{3} \\ 1 & \text{при} \quad x>\dfrac{1}{3} \end{cases}$$

Найти плотность вероятности $f(x)$, построить графики $f(x)$ и $F(x)$, вычислить математическое ожидание $M[X]$ и дисперсию $D[X]$.

7. Найти доверительный интервал для оценки математического ожидания a нормального распределения с надежностью γ=0,99, зная выборочную среднюю $\bar{x}_{\text{в}}$=114,36, объем выборки n=81 и среднее квадратическое отклонение σ=9.

ВАРИАНТ 13

1. В ящике 10 стандартных и 5 нестандартных деталей. Наудачу извлекаются три детали. Найти вероятность того, что они стандартные.

2. Деталь проходит три операции обработки. Все операции производятся независимы друг от друга. Вероятность получения брака для первой операции 0,02; для второй – 0,01; для третьей – 0,03. Найти вероятность того, что деталь окажется без брака.

3. В водоеме обитают особи рыб двух близких видов. Причем, особи первого вида составляют 7-% всей популяции, а особи второго вида 30%. На каждые 100 особей первого вида приходится в среднем 65 самцов, на 100 особей второго вида – 55. какова вероятность того, что первая рыба, выловленная из этого водоема, окажется самцом?

4. Известно, что в среднем 64% студентов потока выполняют типовые расчеты в срок. Какова вероятность того, что из 100 студентов потока задержат представление типовых расчетов: а) 30 студентов; б) от 30 до 48 студентов?

5. Дискретная случайная величина *X* может принимать только два значения x_1 и x_2, причем $x_1<x_2$. Известны вероятность p_1=0,7, математическое ожидание $M[X]$=3,3 и дисперсия $D[X]$=0,21. Найти закон распределения случайной величины X.

6. Дана функция распределения случайной величины X:

$$F(x)=\begin{cases}0 & \text{при} \quad x<2\\ \frac{1}{2}x-1 & \text{при} \quad 2\le x\le 4\\ 1 & \text{при} \quad x>4\end{cases}$$

Найти плотность вероятности $f(x)$, построить графики $f(x)$ и $F(x)$, вычислить математическое ожидание $M[X]$ и дисперсию $D[X]$.

7. Найти доверительный интервал для оценки математического ожидания a нормального распределения с надежностью $\gamma=0{,}99$, зная выборочную среднюю $\overline{x}_{\text{в}}=115{,}52$, объем выборки $n=100$ и среднее квадратическое отклонение $\sigma=10$.

ВАРИАНТ 14

1. Из 15 билетов выигрышными являются четыре. Какова вероятность того, что среди шести билетов взятых наудачу, будет два выигрышных?

2. Вероятность того, что нужная сборщику деталь находится в первом, втором, третьем и четвертом ящиках, соответственно равны 0,6; 0,7; 0,8 и 0,9. Найти вероятность того, что деталь окажется: а) только в одном ящике; б) только в двух ящиках; в) во всех четырех ящиках.

3. В группе 20 лыжников, 6 велосипедистов и 4 бегуна. Вероятность выполнить квалификационную норму такова: для лыжника – 0,9; для велосипедиста – 0,8 и для бегуна – 0,75. Найти вероятность того, что спортсмен, выбранный наудачу, выполнит норму.

4. Полагая вероятность рождения девочки 0,49, найти наивероятнейшее число девочек среди 204 новорожденных и вычислить соответствующую этому числу вероятность.

5. Дискретная случайная величина X может принимать только два значения x_1 и x_2, причем $x_1<x_2$. Известны вероятность $p_1=0{,}2$, математическое ожидание $M[X]=2{,}6$ и дисперсия $D[X]=0{,}64$. Найти закон распределения случайной величины X.

6. Дана функция распределения случайной величины *X*:

$$F(x)=\begin{cases}0 & \text{при} \quad x<0\\ \dfrac{1}{25}x^2 & \text{при} \quad 0\le x\le 25\\ 1 & \text{при} \quad x>5\end{cases}$$

Найти плотность вероятности $f(x)$, построить графики $f(x)$ и $F(x)$, вычислить математическое ожидание $M[X]$ и дисперсию $D[X]$.

7. Найти доверительный интервал для оценки математического ожидания a нормального распределения с надежностью γ=0,99, зная выборочную среднюю $\bar{x}_\text{в}$=117,84, объем выборки n=25 и среднее квадратическое отклонение σ=5.

ВАРИАНТ 15

1. В корзине 15 зеленых и 5 красных яблок. Найти вероятность того, что из трех выбранных яблок два окажутся зелеными.

2. Прибор состоит из трех узлов, каждый из которых независимо друг от друга может отказать в течение часа. Отказ хотя бы одного узла приводит к отказу прибора в целом. Вероятность безотказной работы первого узла – 0,7; второго – 0,8, третьего – 0,9. Найти вероятность безотказной работы прибора в целом.

3. В специализированную больницу поступают в среднем 50% больных с заболеванием *K*, 30% – с заболеванием *L*, 20% – с заболеванием *M*. Вероятность полного излечения *K* равна 0,7; для болезней *L* и *M* эти вероятности равны 0,8 и 0,9. Найти вероятность того, что больной, поступивший в больницу, будет выписан здоровым.

4. Работниками магазина установлено, что среднем 55% пылесосов не требует дополнительной регулировки при продаже. Найти наивероятнейшее число пылесосов, не требующих дополнительной регулировки, в партии из 110 пылесосов.

5. Дискретная случайная величина *X* может принимать только два значения x_1 и x_2, причем $x_1<x_2$. Известны вероятность p_1=0,2, математическое ожидание $M[X]$=1,9 и дисперсия $D[X]$=0,09. Найти закон распределения случайной величины X.

6. Дана функция распределения случайной величины X:

$$F(x)=\begin{cases}0 & \text{при} \quad x<0 \\ \dfrac{1}{36}x^2 & \text{при} \quad 0\le x\le 36 \\ 1 & \text{при} \quad x>6\end{cases}$$

Найти плотность вероятности $f(x)$, построить графики $f(x)$ и $F(x)$, вычислить математическое ожидание $M[X]$ и дисперсию $D[X]$.

7. Найти доверительный интервал для оценки математического ожидания a нормального распределения с надежностью $\gamma=0{,}99$, зная выборочную среднюю $\overline{x}_\text{в}=119{,}04$, объем выборки $n=144$ и среднее квадратическое отклонение $\sigma=12$.

ВАРИАНТ 16

1. В коробке 10 черных и 5 синих карандашей. Найти вероятность того, что из трех выбранных карандашей два окажутся черными.

2. На наблюдательном пункте 3 радиолокатора. Вероятность обнаружить цель с помощью первого локатора равна 0,85; с помощью второго – 0, 95; третьего – 0,9. Наблюдатель включает один из локаторов. Какова вероятность обнаружить цель?

3. Все продукция цеха проверяется двумя контролерами, причем первый котроллер проверяет 55% изделий, а второй – остальные. Вероятность того, что первый контролер пропустит нестандартное изделие, рана 0,01, второй – 0,02. Взятое наудачу изделие, маркированное как стандартное, оказалось нестандартным. Найти вероятность того, что изделие проверялось вторым контролером.

4. Установлено, что третья часть покупателей желает приобрести модную одежду. Магазин посещает в среднем 800 человек в месяц. Найти наивероятнейшее число покупателей, желающих приобрести модную одежду и вычислить соответствующую этому событию вероятность.

5. Дискретная случайная величина X может принимать только два значения x_1 и x_2, причем $x_1<x_2$. Известны вероятность $p_1=0{,}1$, математическое ожидание $M[X]=5{,}5$ и дисперсия $D[X]=2{,}25$. Найти закон распределения случайной величины X.

6. Дана функция распределения случайной величины *X*:

$$F(x)=\begin{cases}0 & \text{при} \quad x<0\\ \dfrac{1}{7}x & \text{при} \quad 0\le x\le 7\\ 1 & \text{при} \quad x>7\end{cases}$$

Найти плотность вероятности $f(x)$, построить графики $f(x)$ и $F(x)$, вычислить математическое ожидание $M[X]$ и дисперсию $D[X]$.

7. Найти доверительный интервал для оценки математического ожидания a нормального распределения с надежностью γ=0,95, зная выборочную среднюю $\overline{x}_{\text{в}}$=120,20, объем выборки n=64 и среднее квадратическое отклонение σ=8.

ВАРИАНТ 17

1. В группе 25 студентов, среди них 10 девушек. Какова вероятность того, что среди трех студентов, выбранных в совет факультета, будут два юноши?

2. Вероятность своевременного выполнения студентом контрольного задания по каждой из трех дисциплин равна соответственно 0,6; 0,5 и 0,8. Найти вероятность своевременного выполнения контрольного задания студентом: а) по двум дисциплинам; б) по все трем дисциплинам.

3. Число грузовых автомашин, проезжающих по шоссе, на котором стоит бензоколонка, относится к числу легковых, проезжающих по тому же шоссе как 3:2. Вероятность того, что будет заправляться грузовая машина, равна 0,1, для легковой машины эта вероятность равна 0,2. К бензоколонке подъехала для заправки автомашина. Найти вероятность того, что это грузовая машина.

4. Вероятность того, что пассажир опоздает к отправлению поезда, равна 0,01. Найти наиболее вероятное число опоздавших из 800 пассажиров и вероятность такого числа опоздавших.

5. Дискретная случайная величина X может принимать только два значения x_1 и x_2, причем $x_1<x_2$. Известны вероятность p_1=0,2, математическое ожидание $M[X]$=5,8 и дисперсия $D[X]$=5,76. Найти закон распределения случайной величины X.

6. Дана функция распределения случайной величины X:

$$F(x)=\begin{cases} 0 & \text{при} \quad x<-1 \\ \frac{3}{4}x+\frac{3}{4} & \text{при} \quad -1\le x<\frac{1}{3} \\ 1 & \text{при} \quad x>\frac{1}{3} \end{cases}$$

Найти плотность вероятности $f(x)$, построить графики $f(x)$ и $F(x)$, вычислить математическое ожидание $M[X]$ и дисперсию $D[X]$.

7. Найти доверительный интервал для оценки математического ожидания a нормального распределения с надежностью γ=0,99, зная выборочную среднюю $\overline{x}_{\text{в}}$=121,31, объем выборки n=49 и среднее квадратическое отклонение σ=7.

ВАРИАНТ 18

1. В партии, состоящей из 15 изделий, 3 изделия дефектные. Из партии вынимаются для контроля 5 изделий. Найти вероятность того, что из них 2 детали окажутся дефектными.

2. В ящике 10 красных и 6 синих пуговиц. Вынимаются наудачу 2 пуговицы. Какова вероятность того, что обе пуговицы будут одного цвета?

3. Вероятности того, что во время работы цифровой электронной машина произойдет сбой в арифметическом устройстве, в операционной памяти, в остальных устройствах относятся как 3:2:5. Вероятности обнаружения сбоя в арифметическом устройстве, в операционной памяти, в остальных устройствах соответственно равны 0,9; 0,8 и 0,9. Найти вероятность того, что возникший в машине сбой будет обнаружен.

4. При оценке качества продукции было установлено, что в среднем третья часть выпускаемой фабрикой обуви имеет различные дефекты отделки. Какова вероятность того, что в партии из 200 пар, поступившей в магазин: а) будут иметь дефекты 60 ар; б) не будет иметь дефектов отделки от 120 до 148 пар.

5. Дискретная случайная величина X может принимать только два значения x_1 и x_2, причем $x_1<x_2$. Известны вероятность p_1=0,3, математическое ожидание $M[X]$=6,6 и дисперсия $D[X]$=13,44. Найти закон распределения случайной величины X.

6. Дана функция распределения случайной величины X:

$$F(x)=\begin{cases} 0 & \text{при} \quad x\le 2 \\ \frac{1}{2}x-1 & \text{при} \quad 2\le x\le 4 \\ 1 & \text{при} \quad x>4 \end{cases}$$

Найти плотность вероятности $f(x)$, построить графики $f(x)$ и $F(x)$, вычислить математическое ожидание $M[X]$ и дисперсию $D[X]$.

7. Найти доверительный интервал для оценки математического ожидания a нормального распределения с надежностью γ=0,99, зная выборочную среднюю $\overline{x}_в$=125,13, объем выборки n=196 и среднее квадратическое отклонение σ=14.

ВАРИАНТ 19

1. Из 20 сбербанков 10 расположены за чертой города. Какова вероятность того, что среди 5 сбербанков отобранных случайным образом для обследования 3 сбербанка окажется в черте города?

2. Два стрелка произвели по одному выстрелу по мишени. Вероятность поражения мишени каждым из стрелков равна 0,8. Найти вероятность того. Что: а) оба стрелка поразят мишень; б) оба стрелка промахнутся; в) только один стрелок поразит мишень; г) хотя бы один стрелок поразит мишень.

3. На сборку поступают детали с трех станков. Первый станок дает 0,3 % брака, второй 0,2%, третий 0, 4. Найти вероятность попадания на сборку бракованной детали, если с первого станка поступает 100 деталей, со второго – 200, а с третьего – 250 деталей.

4. Сколько нужно взять деталей, чтобы наивероятнейшее число годных деталей было равно 50, если вероятность того, что наудачу взятая деталь будет бракованной равна 0,1?

5. Дискретная случайная величина X может принимать только два значения x_1 и x_2, причем $x_1<x_2$. Известны вероятность p_1=0,4, математическое ожидание $M[X]$=4,4 и дисперсия $D[X]$=3,84. Найти закон распределения случайной величины X.

6. Дана функция распределения случайной величины X:

$$F(x)=\begin{cases} 0 & \text{при} \quad x<2\pi \\ \sin x & \text{при} \quad 2\pi \le x \le \frac{5}{2}\pi \\ 1 & \text{при} \quad x>\frac{5}{2}\pi \end{cases}$$

Найти плотность вероятности $f(x)$, построить графики $f(x)$ и $F(x)$, вычислить математическое ожидание $M[X]$ и дисперсию $D[X]$.

7. Найти доверительный интервал для оценки математического ожидания a нормального распределения с надежностью γ=0,99, зная выборочную среднюю $\overline{x}_{\text{в}}$=182,01, объем выборки n=25 и среднее квадратическое отклонение σ=5.

ВАРИАНТ 20

1. В мастерскую для ремонта поступили 15 телевизоров. Известно, что шест из них нуждаются в общей регулировке. Мастер берет первые попавшиеся пять телевизоров. Вероятность того, что два из них нуждаются в общей регулировке.

2. Каждый поступающий в институт должен сдать 3 экзамена. Вероятность успешной сдачи первого экзамена 0,9, второго – 0,8, третьего – 0,7. Найти вероятность того, что абитуриент сдаст успешно: а) только один экзамен; б) только два экзамена; в) все три экзамена.

3. В цехе работают 20 станков. Из них 10 марки A, 6 марки B и 4 марки C. Вероятность того, что качество детали, изготовленной на одном из этих станков, окажется отличным, для этих станков соответственно равны 0,9, 0,8 и 0,7. Найти вероятность того, что наудачу выбранная деталь окажется отличного качества.

4. В среднем пятая часть поступающих в продажу автомобилей некомплектны. Найти вероятность того, что среди десяти автомобилей имеют некомплектность: а) три автомобиля; б) менее трех.

5. Дискретная случайная величина X может принимать только два значения x_1 и x_2, причем $x_1<x_2$. Известны вероятность p_1=0,5, математическое ожидание $M[X]$=4 и дисперсия $D[X]$=4. Найти закон распределения случайной величины X.

6. Дана функция распределения случайной величины X:

$$F(x)=\begin{cases} 0 & \text{при} \quad x<-1 \\ \frac{1}{2}x+\frac{1}{2} & \text{при} \quad -1\le x\le 1 \\ 1 & \text{при} \quad x>1 \end{cases}$$

Найти плотность вероятности $f(x)$, построить графики $f(x)$ и $F(x)$, вычислить математическое ожидание $M[X]$ и дисперсию $D[X]$.

7. Найти доверительный интервал для оценки математического ожидания a нормального распределения с надежностью γ=0,99, зная выборочную среднюю $\bar{x}_\text{в}$=183,13, объем выборки n=36 и среднее квадратическое отклонение σ=6.

ВАРИАНТ 21

1. На сборку передано 20 деталей, из них 18 высокого качества. Найти вероятность того, что среди трех выбранных деталей 2 окажутся высокого качества.

2. Два спортсмена участвуют в отборочных соревнованиях. Вероятность зачисления в сборную команду для первого спортсмена – 0,7, второго – 0,8. Найти вероятность того, что: а) только один из них попадет в сборную; б) оба спортсмена попадут в сборную.

3. Два автомата производят одинаковые детали, которые поступают на общий конвейер. Производительность первого автомата двое больше производительности второго, первый автомат производит в среднем 60% деталей отличного качества, а второй – 84%. Наудачу взятая с конвейера деталь оказалась отличного качества. Найти вероятность того, что эта деталь произведена первым автоматом.

4. Учебник издан тиражом 10000 экземпляров. Вероятность того, что экземпляр учебника сброшюрован неправильно, равна 0,0001. Найти вероятность того, что тираж содержит 5 бракованных книг.

5. Дискретная случайная величина X может принимать только два значения x_1 и x_2, причем $x_1<x_2$. Известны вероятность p_1=0,6, математическое ожидание $M[X]$=4 и дисперсия $D[X]$=6. Найти закон распределения случайной величины X.

6. Дана функция распределения случайной величины X:

$$F(x)=\begin{cases} 0 & \text{при} \quad x<1 \\ \frac{1}{2}(x-1) & \text{при} \quad 1\le x\le 3 \\ 1 & \text{при} \quad x>3 \end{cases}$$

Найти плотность вероятности $f(x)$, построить графики $f(x)$ и $F(x)$, вычислить математическое ожидание $M[X]$ и дисперсию $D[X]$.

7. Найти доверительный интервал для оценки математического ожидания a нормального распределения с надежностью γ=0,99, зная выборочную среднюю $\bar{x}_\text{в}$=185,15, объем выборки n=81 и среднее квадратическое отклонение σ=9.

ВАРИАНТ 22

1. Для некоторой местности число пасмурных дней в июле равно 6. Найти вероятность того, что первого и второго июля будет ясная погода.

2. Вероятность того, что нужная сборщику деталь находится в первом ящике, равна 0,8, а во втором – 0,9. Найти вероятность того, что деталь окажется: а) только в одном ящике; б) в двух ящиках.

3. В двух коробках находятся радиолампы. В первой коробке – 12 радиоламп, из них 2 нестандартные. Во второй коробке – 10 радиоламп, из которых одна нестандартная. Найти вероятность того, что наудачу взятая из этих коробок лампа окажется стандартной.

4. Предполагается, то 10% открывающихся новых малых предприятий прекращают свою деятельность в течение года. Какова вероятность того, что из шести малых предприятия не более двух в течение года прекратят свою деятельность?

5. Дискретная случайная величина X может принимать только два значения x_1 и x_2, причем $x_1<x_2$. Известны вероятность p_1=0,7, математическое ожидание $M[X]$=3,8 и дисперсия $D[X]$7,56. Найти закон распределения случайной величины X.

6. Дана функция распределения случайной величины X:

$$F(x)=\begin{cases} 0 & \text{при} \quad x<-\dfrac{\pi}{2} \\ \cos x & \text{при} \quad -\dfrac{\pi}{2}\le x\le 0 \\ 1 & \text{при} \quad x>0 \end{cases}$$

Найти плотность вероятности $f(x)$, построить графики $f(x)$ и $F(x)$, вычислить математическое ожидание $M[X]$ и дисперсию $D[X]$.

7. Найти доверительный интервал для оценки математического ожидания a нормального распределения с надежностью γ=0,99, зная выборочную среднюю $\overline{x}_{\text{в}}$=187,10, объем выборки n=121 и среднее квадратическое отклонение σ=11.

ВАРИАНТ 23

1. Студент знает 15 вопросов из 20. Какова вероятность того, что он знает один вопрос из двух предложенных ему для ответа.

2. Рабочий обслуживает два станка. Известно, что вероятность бесперебойной работы на протяжении одного часа после наладки равна для первого станка – 0,9, для второго – 0,8. Найти вероятность того, что: а) за этот час лишь один станок потребует вмешательства рабочего; б) оба станка потребуют вмешательства рабочего.

3. В магазин поступила обувь от двух поставщиков. Количество обуви, поступившей от первого поставщика, в два раза больше, чем от второго. Известно, что в среднем 20% обуви от первого поставщика и 35% обуви от второго поставщика имеют различные дефекты отделки. Из общей массы наугад отбирают одну пару обуви. Оказалось, что она не имеет дефектов. Какова вероятность того, что ее изготовил первый поставщик?

4. В банк отправлено 4000 пакетов денежных знаков. Вероятность того, что пакет содержит недостаточное или избыточное число денежных знаков, равна 0,0001. Найти вероятность того, что при проверке будет обнаружено: а) два ошибочно укомплектованных пакета; б) не более двух пакетов.

5. Дискретная случайная величина X может принимать только два значения x_1 и x_2, причем $x_1<x_2$. Известны вероятность p_1=0,8, мате-

матическое ожидание $M\left[X\right]$=3,4 и дисперсия $D\left[X\right]$=7,84. Найти закон распределения случайной величины X.

6. Дана функция распределения случайной величины X:

$$F(x)=\begin{cases}0 & \text{при} \quad x<0\\ \dfrac{x^2}{100} & \text{при} \quad 0\le x\le 10\\ 1 & \text{при} \quad x>10\end{cases}$$

Найти плотность вероятности $f(x)$, построить графики $f(x)$ и $F(x)$, вычислить математическое ожидание $M\left[X\right]$ и дисперсию $D\left[X\right]$.

7. Найти доверительный интервал для оценки математического ожидания a нормального распределения с надежностью γ=0,99, зная выборочную среднюю $\overline{x}_{\text{в}}$=189,07, объем выборки n=144 и среднее квадратическое отклонение σ=12.

ВАРИАНТ 24

1. В магазине имеются 30 телевизоров, причем 20 из них импортных. Найти вероятность того, что среди 5 проданных в течение дня телевизоров окажется 3 импортных телевизоров, предполагая, что вероятности покупки телевизоров разных марок одинаковы.

2. Деталь проходит четыре операции обработки. Все операции производятся независимы друг от друга. Вероятность получения брака для первой операции 0,02; для второй – 0,01; для третьей – 0,03; для четвертой – 0,02. Найти вероятность того, что деталь окажется без брака.

3. Пассажир может приобрести билет в одной из двух касс. Вероятность обращения в первую кассу составляет 0, 2, а во вторую – 0,8. вероятность того, что к моменту прихода пассажира нужные ему билета будут распроданы, равна 0,25 для первой кассы и 0,6 – для второй кассы. Пассажир посетил одну из касс и приобрел билет. Какова вероятность того, что он приобрел билет во второй кассе?

4. Строительная фирма, занимающаяся установкой дачных домиков, раскладывает рекламные листки по почтовым ящикам. Прежний опыт работы компании показывает, что примерно в одном случае из двух тысяч следует заказ. Найти вероятность того, что при размещении 100 000 листков число заказов будет равно 50.

5. Дискретная случайная величина X может принимать только два значения x_1 и x_2, причем $x_1 < x_2$. Известны вероятность p_1=0,9, математическое ожидание $M\left[X\right]$=2,8 и дисперсия $D\left[X\right]$=5,76. Найти закон распределения случайной величины X.

6. Дана функция распределения случайной величины X:

$$F\left(x\right)=\begin{cases} 0 & \text{при} \quad x<0 \\ \dfrac{x^2}{81} & \text{при} \quad 0\le x\le 9 \\ 1 & \text{при} \quad x>9 \end{cases}$$

Найти плотность вероятности $f\left(x\right)$, построить графики $f\left(x\right)$ и $F\left(x\right)$, вычислить математическое ожидание $M\left[X\right]$ и дисперсию $D\left[X\right]$.

7. Найти доверительный интервал для оценки математического ожидания a нормального распределения с надежностью γ=0,99, зная выборочную среднюю $\overline{x}_{\text{в}}$=186,10, объем выборки n=100 и среднее квадратическое отклонение σ=10.

ВАРИАНТ 25

1. На полке лежат 12 учебников, из которых 5 по математике. Студент берет наудачу 3 учебника. Какова вероятность того, что среди них 2 учебника по математике?

2. Вероятность своевременного выполнения студентом контрольного задания по каждой из четырех дисциплин равна соответственно 0,6; 0,5; 0,7 и 0,8. Найти вероятность своевременного выполнения контрольного задания студентом: а) только по трем дисциплинам; б) по всем дисциплинам.

3. В магазин поступил одноименный товар, изготовленный двумя предприятиями. С первого предприятия поступило 150 единиц, из них 30 единиц первого сорта, а со второго предприятия – 200 единиц, из них 50 – первого сорта. Из общей массы товара наугад извлекается одна единица. Она оказалась первого сорта. Какова вероятность того, что она изготовлена на первом предприятии?

4. Чему равна вероятность того, что среди 100 случайных прохожих окажутся 32 женщины (предполагаем, что количество мужчин в городе равно количеству женщин)?

5. Дискретная случайная величина X может принимать только два значения x_1 и x_2, причем $x_1 < x_2$. Известны вероятность p_1=0,1, математическое ожидание $M[X]$=3,9 и дисперсия $D[X]$=0,09. Найти закон распределения случайной величины X.

6. Дана функция распределения случайной величины X:

$$F(x)=\begin{cases} 0 & \text{при} \quad x<0 \\ \dfrac{x}{7} & \text{при} \quad 0 \le x \le 7 \\ 1 & \text{при} \quad x>7 \end{cases}$$

Найти плотность вероятности $f(x)$, построить графики $f(x)$ и $F(x)$, вычислить математическое ожидание $M[X]$ и дисперсию $D[X]$.

7. Найти доверительный интервал для оценки математического ожидания a нормального распределения с надежностью γ=0,99, зная выборочную среднюю $\overline{x}_{\text{в}}$=189,15, объем выборки n=36 и среднее квадратическое отклонение σ=6.

ВАРИАНТ 26

1. По прогнозу метеорологов вероятность дождя – 0,3; вероятность ветра – 0,6; вероятность повышения атмосферного давления – 0,4. Найти вероятность того, что будет или дождь или ветер.

2. Из трех орудий произвели залп по цели. Вероятность попадания в цель при одном выстреле из первого орудия равна 0,9, для второго и третьего орудий эти вероятности соответственно равны 0, 7 и 0, 8. Найти вероятность того, что: а) только один снаряд попадет в цель; б) только два снаряда попадут в цель; в) все три снаряда попадут в цель; г) хотя бы один стрелок поразит цель.

3. На общий конвейер поступают детали с двух станков. Вероятность получения стандартной детали с первого станка равна 0,85, со второго 0,8. На втором станке деталей производится в три раза больше, чем на первом. Найти вероятность того, что наугад взятая с конвейера деталь стандартная.

4. Вероятность своевременного прибытия поезда на станцию принимается 0,9. Определить вероятность того, что из четырех ожидаемых поездов прибудут своевременно: а) не менее трех поездов; б) хотя бы один поезд.

5. Дискретная случайная величина X может принимать только два значения x_1 и x_2, причем $x_1 < x_2$. Известны вероятность p_1=0,1, математическое ожидание $M\left[X\right]$=3,9 и дисперсия $D\left[X\right]$=0,09. Найти закон распределения случайной величины X.

6.Дана функция распределения случайной величины X:

$$F\left(x\right)=\begin{cases}0 & \text{при} \quad x<0\\ \dfrac{x}{5} & \text{при} \quad 0\le x\le 5\\ 1 & \text{при} \quad x>5\end{cases}$$

Найти плотность вероятности $f\left(x\right)$, построить графики $f\left(x\right)$ и $F\left(x\right)$, вычислить математическое ожидание $M\left[X\right]$ и дисперсию $D\left[X\right]$.

7. Найти доверительный интервал для оценки математического ожидания a нормального распределения с надежностью γ=0,95, зная выборочную среднюю $\bar{x}_{\text{в}}$=127,25, объем выборки n=81 и среднее квадратическое отклонение σ=9.

ВАРИАНТ 27

1. Студент знает 25 вопросов из 30 вопросов в программе. Найти вероятность того, что студент знает 2 вопроса, предложенные ему экзаменатором.

2.Рабочий обслуживает два станка. Известно, что вероятность бесперебойной работы на протяжении одного часа после наладки равна для первого станка – 0,8, для второго – 0,7. Найти вероятность того, что: а) за этот час лишь один станок потребует вмешательства рабочего; б) оба станка потребуют вмешательства рабочего.

3. Вероятность взять для данного измерения первый прибор равна 0,3, второй – 0,3 и третий – 0,4. Вероятность неисправности в первом приборе равна 0,2, во втором – 0,1, а в третьем – 0,3. Какова вероятность получить неверный отсчет?

4. Сто станков в цехе работают независимо друг от друга. Вероятность бесперебойной работы каждого из них в течение смены равна 0,9. Найти вероятность того, что в течение смены бесперебойно проработают: а) ровно 70 станков; б) от 60 до 80 станков.

5. Дискретная случайная величина X может принимать только два значения x_1 и x_2, причем $x_1 < x_2$. Известны вероятность p_1=0,5, математическое ожидание $M[X]$=3,5 и дисперсия $D[X]$=0,25.

6. Найти закон распределения случайной величины X.

$$F(x)=\begin{cases} 0 & \text{при} \quad x<-\frac{3}{2}\pi \\ \cos x & \text{при} \quad -\frac{3}{2}\pi \le x \le 0 \\ 1 & \text{при} \quad x>0 \end{cases}$$

Найти плотность вероятности $f(x)$, построить графики $f(x)$ и $F(x)$, вычислить математическое ожидание $M[X]$ и дисперсию $D[X]$.

7. Найти доверительный интервал для оценки математического ожидания a нормального распределения с надежностью γ=0,95, зная выборочную среднюю $\bar{x}_{в}$=189,23, объем выборки n=256 и среднее квадратическое отклонение σ=16.

ВАРИАНТ28

1. В коробке смешаны электролампы одинакового размера и формы: по 100 Вт – 14 штук, по 75 Вт – 16 штук. Вынуты наудачу 2 лампы. Какова вероятность того, что они одинаковой мощности?

2. Каждый поступающий в институт должен сдать 3 экзамена. Вероятность успешной сдачи первого экзамена 0,8, второго – 0,9, третьего – 0,7. Найти вероятность того, что абитуриент сдаст успешно: а) только один экзамен; б) только два экзамена; в) все три экзамена.

3. На общий конвейер поступают детали с двух станков. Вероятность получения стандартной детали с первого станка равна 0,9, со второго 0,7. На втором станке деталей производится в два раза меньше, чем на первом. Найти вероятность того, что наугад взятая с конвейера деталь стандартная.

4. Испытываются 20 двигателей. Вероятность безотказной работы каждого двигателя равна 0,85. Определить вероятность того, что безотказно будет работать: а) ровно 18 двигатель; б) от 14 до 19 двигателей.

5. Дискретная случайная величина X может принимать только два значения x_1 и x_2, причем $x_1 < x_2$. Известны вероятность p_1=0,4, математическое ожидание $M[X]$=3,6 и дисперсия $D[X]$=0,24.

6. Найти закон распределения случайной величины X.

$$F(x)=\begin{cases} 0 & \text{при} \quad x<0 \\ \dfrac{1}{16}x^2 & \text{при} \quad 0 \le x \le 4 \\ 1 & \text{при} \quad x>4 \end{cases}$$

Найти плотность вероятности $f(x)$, построить графики $f(x)$ и $F(x)$, вычислить математическое ожидание $M[X]$ и дисперсию $D[X]$.

7. Найти доверительный интервал для оценки математического ожидания a нормального распределения с надежностью γ=0,95, зная выборочную среднюю $\bar{x}_в$=125,12, объем выборки n=196 и среднее квадратическое отклонение σ=14.

ВАРИАНТ 29

1. В ящике 20 деталей, среди которых 15 деталей окрашены. Наудачу извлекают 3 детали. Найти вероятность того, что все извлеченные детали окрашены.

2. Прибор состоит из трех узлов, каждый из которых независимо друг от друга может отказать в течение часа. Отказ хотя бы одного узла приводит к отказу прибора в целом. Вероятность безотказной работы первого узла – 0,8; второго – 0,9, третьего – 0,7. Найти вероятность безотказной работы прибора в целом.

3. В цехе работают 20 станков. Из них 8 марки *A*, 7 марки *B* и 5 марки *C*. Вероятность того, что качество детали, изготовленной на одном из этих станков, окажется отличным, для этих станков соответственно равны 0,7, 0,8 и 0,7. Найти вероятность того, что наудачу выбранная деталь окажется отличного качества.

4. Пять процентов строительных блоков не соответствуют стандарту. Какова вероятность того, что среди четырех выбранных блоков не соответствуют стандарту: а) не менее трех; б) более двух блоков.

5. Дискретная случайная величина X может принимать только два значения x_1 и x_2, причем $x_1 < x_2$. Известны вероятность p_1=0,3, мате-

матическое ожидание $M[X]$=3,7 и дисперсия $D[X]$=0,21. Найти закон распределения случайной величины X.

6. Дана функция распределения случайной величины X:

$$F(x)=\begin{cases} 0 & \text{при} \quad x<0 \\ \frac{1}{3}x & \text{при} \quad 0 \le x \le 3 \\ 1 & \text{при} \quad x>3 \end{cases}$$

Найти плотность вероятности $f(x)$, построить графики $f(x)$ и $F(x)$, вычислить математическое ожидание $M[X]$ и дисперсию $D[X]$.

7. Найти доверительный интервал для оценки математического ожидания a нормального распределения с надежностью γ=0,95, зная выборочную среднюю $\bar{x}_в$=169,13, объем выборки n=121 и среднее квадратическое отклонение σ=11.

ВАРИАНТ 30

1. Для некоторой местности число пасмурных дней в мае равно 10. Найти вероятность того, что первого и второго мая будет ясная погода.

2. Два спортсмена участвуют в отборочных соревнованиях. Вероятность зачисления в сборную команду для первого спортсмена – 0,8, второго – 0,9. Найти вероятность того, что: а) только один из них попадет в сборную; б) оба спортсмена попадут в сборную.

3. В цехе работают 20 станков. Из них 7 марки A, 8 марки B и 5 марки C. Вероятность того, что качество детали, изготовленной на одном из этих станков, окажется отличным, для этих станков соответственно равны 0,8, 0,7 и 0,9. Найти вероятность того, что наудачу выбранная деталь окажется отличного качества.

4. В среднем пятая часть поступающих в продажу автомобилей некомплектны. Найти вероятность того, что среди десяти автомобилей имеют некомплектность: а) два автомобиля; б) менее двух.

5. Дискретная случайная величина X может принимать только два значения x_1 и x_2, причем $x_1 < x_2$. Известны вероятность p_1=0,2, математическое ожидание $M[X]$=3,8 и дисперсия $D[X]$=0,16. Найти закон распределения случайной величины X.

6. Дана функция распределения случайной величины *X*:

$$F(x)=\begin{cases}0 & \text{при} \quad x<0\\ \sin x & \text{при} \quad 0\le x\le\dfrac{\pi}{2}\\ 1 & \text{при} \quad x>\dfrac{\pi}{2}\end{cases}$$

Найти плотность вероятности $f(x)$, построить графики $f(x)$ и $F(x)$, вычислить математическое ожидание $M[X]$ и дисперсию $D[X]$.

7. Найти доверительный интервал для оценки математического ожидания a нормального распределения с надежностью $\gamma=0{,}95$, зная выборочную среднюю $\bar{x}_{\text{в}}=139{,}15$, объем выборки $n=144$ и среднее квадратическое отклонение $\sigma=12$.

Решение примерного варианта контрольной работы № 3

Задача 27. Найти общее решение дифференциального уравнения.

а) $y^2\ln x dx-(y-1)xdy=0.$

Имеем $y^2\ln x dx=(y-1)xdx.$

Это уравнение с разделяющимися переменными. Разделив переменные, получим:

$$\frac{y-1}{y^2}dy=\frac{\ln x}{x}dx.$$

$$\left(\frac{1}{y}-\frac{1}{y^2}\right)dy=\frac{\ln x}{x}dx\,.$$

Интегрируя обе части последнего равенства, получим общее решение исходного уравнения

$$\frac{1}{y}+\ln y=c+\frac{\ln^2 x}{2}.$$

б) $\left(x^2-1\right)y'-xy=x^3-x.$

Данное уравнение линейное, так как y и y' входят в него в первой степени. Для нахождения общего решения линейного дифференциального уравнения первого порядка вводятся вместо одной неизвестной функции y – две неизвестные функции u и v: $y=uv$ для того, чтобы одной из них распорядиться по своему усмотрению. Подставим $y=uv$ и $y'=u'v+v'u$ в данное уравнение, предварительно разделив все уравнения на $\left(x^2-1\right)\neq 0$:

$$u'v+v'u-\frac{x}{x^2-1}uv=\frac{x\left(x^2-1\right)}{x^2-1}.$$

Вынесем из двух последних слагаемых левой части последнего уравнения общий множитель:

$$u'v+u\left(v'-\frac{x}{x^2-1}v\right)=x.\ (\,*\,)$$

Выражение в скобках зависит только от v и x.
Приравняем это выражение нулю (по своему усмотрению):

$$v'-\frac{x}{x^2-1}v=0.$$

Получим дифференциальное уравнение первого порядка с разделяющимися переменными относительно неизвестной функции v. Разделим переменные: $\frac{dv}{dx}=\frac{x}{x^2-1}v;\ \frac{dv}{v}=\frac{x}{x^2-1}dx.$

Откуда $\ln|v|=\frac{1}{2}\ln\left|x^2-1\right|+c.$

В частности, можно принять $v=\sqrt{x^2-1}.$

Подставляя v в (*), получим дифференциальное уравнение с разделяющимися переменными относительно u и x:

$$u'\sqrt{x^2-1}=x.$$

Разделив переменные, будем иметь $\frac{du}{dx}\sqrt{x^2-1}=x;$

$$du=\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}dx.$$

Интегрируя, найдем: $u=\sqrt{x^2-1}+c.$

Подставив u и v в $y=uv$, получим общее решение:

$$y=\sqrt{x^2-1}\left(\sqrt{x^2-1}+c\right)=x^2-1+c\sqrt{x^2-1}.$$

Задача 28. Найти общее решение уравнения $y''' = \frac{1}{x}$.

Последовательно интегрируя, получим:

$$y'' = \int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C_1,$$

$$y' = \int (\ln|x| + C_1) dx = \int \ln|x| dx + C_1 \int dx = \left| \begin{matrix} u = \ln|x| & du = \frac{dx}{x} \\ dv = dx & v = \int dx = x \end{matrix} \right| =$$

$$= x \cdot \ln|x| - \int x \cdot \frac{dx}{x} + C_1 \int dx = x \cdot \ln|x| - x + C_1 x + C_2.$$

$$y = \int (x \cdot \ln|x| - x + C_1 x + C_2) dx = \int x \cdot \ln|x| dx + C_1 \int x dx + C_2 \int dx =$$

$$= \left| \begin{matrix} u = \ln|x| & du = \frac{dx}{x} \\ dv = x dx & v = \int x dx = \frac{x^2}{2} \end{matrix} \right| =$$

$$= \frac{x^2}{2} \ln|x| - \frac{1}{2} \int \frac{x^2 dx}{x} + C_1 \int x dx + C_2 \int dx =$$

$$= \frac{x^2}{2} \ln|x| - \frac{x^2}{4} + C_1 \frac{x_2}{2} + C_2 x + C_3.$$

Задача 29. Найти частное решение уравнения $y'' - \frac{y'}{x-1} = x(x-1)$ при $y(2) = 1, y'(2) = -1$.

Введем $y' = p \Rightarrow p' - \frac{p}{x-1} = x(x-1)$,

$$\frac{dp}{dx} - \frac{p}{x-1} = x(x-1)$$

или

$$\frac{dp}{dx} - \frac{1}{x-1} p = x(x-1).$$

Это линейное уравнение.

Введем

$$p = uv \Rightarrow \frac{dp}{dx} = v\frac{du}{dx} + u\frac{dv}{dx} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow v\frac{du}{dx}+u\frac{dv}{dx}-\frac{1}{x-1}uv=x(x-1),$$

$$\frac{dv}{v}=\frac{dx}{x},\ \ln|v|=\ln|x-1|.$$

Откуда $v=x-1$.

Исходное уравнение будет иметь вид:

$$(x-1)\frac{du}{dx}=x(x-1), x\neq 1.$$

Откуда

$$\frac{du}{dx}=x,\ u=\frac{x^2}{2}+C_1.$$

Тогда

$$y'=p=\left(\frac{x^2}{2}+C_1\right)(x-1)=\frac{x^3}{2}-\frac{x^2}{2}+C_1x-C_1.$$

Интегрируя, получим:

$$y=\frac{x^4}{8}-\frac{x^3}{6}+\frac{C_1}{2}x^2+C_1x+C_2.$$

Из начальных условий

$$y(2)=1,$$
$$y'(2)=-1$$

следует

$$C_1=-3, C_2=\frac{1}{3}.$$

Откуда

$$y=\frac{1}{24}\left(3x^4-4x^3-36x^2+72x+8\right).$$

Задача 30. Найти частное решение дифференциального уравнения, удовлетворяющее данным начальным условиям:

$$y''-4y=8e^{2x};\ y(0)=1;\ y'(0)=-8.$$

Общее решение состоит из суммы какого-либо частного решения $\overline{y}$ данного уравнения и общего решения y_0 соответствующего однородного уравнения: $y''-4y=0$, т.е. $y=y_0+\overline{y}$

Характеристическое уравнение

$$k^2 - 4 = 0$$

имеет корни $k_{1,2} = \pm 2$.

Им соответствуют два линейно независимых решения однородного дифференциального уравнения $y_1 = e^{2x}$; $y_2 = e^{-2x}$. Тогда общее решение однородного уравнения имеет вид:

$$y_0 = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-2x}.$$

Найдем частное решение $\overline{y}$ неоднородного уравнения. Так как правая часть *ДУ* равна $f(x) = 8e^{2x}$, то и $\overline{y}$ будем искать в виде

$$Ae^{\alpha x} \cdot x^s,$$

где A – неизвестный коэффициент, который надо найти, s – число корней характеристического уравнения, совпадающих с коэффициентом α в показателе степени функции $e^{\alpha x}$, стоящей в правой части уравнения. В рассматриваемом случае $k_1 = \alpha = 2$; $k_2 = -2 \neq \alpha$. Число совпадений α с k_1 и k_2 равно единице: s = 1. Итак, окончательно:

$$\overline{y} = Ae^{2x} x.$$

Найдем коэффициент A.

Для этого возьмем производные

$$\begin{array}{r|l} -4 & \overline{y} = Ae^{2x} \\ 0 & \overline{y}' = 2Ae^{2x}x + Ae^{2x} \\ 1 & \overline{y}'' = 4Ae^{2x}x + 4Ae^{2x} \end{array}$$

Умножая $\overline{y}, \overline{y}', \overline{y}''$ на их коэффициенты в уравнении (т.е. соответственно на –4; 0; 1) и сложив, получим левую часть неоднородного уравнения, которая должна быть тождественно равна правой, т.е.

$$4Ae^{2x}x + 4Ae^{2x} - 4Ae^{2x}x = 8e^{2x}$$

или

$$4Ae^{2x} = 8e^{2x} \Rightarrow 4A = 8 \Rightarrow A = 2.$$

Подставив A в $\overline{y}$, получим:

$$\overline{y} = 2xe^{2x}.$$

Общее решение уравнения будет иметь вид:

$$y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-2x} + 2xe^{2x}.$$

Найдем частное решение уравнения, удовлетворяющее начальным условиям $y(0) = 1;\ y'(0) = 8$. Для этого в общее решение и в

$$y' = 2C_1 e^{2x} - 2C_2 e^{-2x} + 4xe^{2x} + 2e^{2x}.$$

подставим начальные условия. Получим линейную систему уравнений относительно неизвестных c_1 и c_2:

$$\begin{cases} 1 = C_1 + C_2 \\ -8 = 2C_1 - 2C_2 + 2. \end{cases}$$

Решив, найдем: $C_1 = -2;\ C_2 = 3.$

После подстановки C_1, C_2 в общее решение получим частное решение уравнения

$$y = -2e^{2x} + 3e^{-2x} + 2xe^{2x},$$

удовлетворяющее начальным условиям.

Задача 31. Найти общее решение системы дифференциальных уравнений

$$\frac{dx}{dt} = x + 5y,$$

$$\frac{dy}{dt} = -x - 3y.$$

Продифференцируем второе уравнение системы по t:

$$\frac{d^2y}{dt^2} = -\frac{dx}{dt} - 3\frac{dy}{dt}.$$

Подставим $\frac{dx}{dt} = x + 5y$ (см. первое уравнение) в $\frac{d^2y}{dt^2}$:

$$\frac{d^2y}{dt^2} + 2\frac{dy}{dt} + 2y = 0.$$

Характеристическое уравнение имеет вид:

$$k^2 + 2k + 2 = 0.$$

Корни этого уравнения $k_{1,2} = -1 \pm i\ (\alpha = -1, \beta = 1)$.

Тогда

$$y = C_1 e^{-t}\cos t + C_2 e^{-t}\sin t.$$

Откуда

$$\frac{dy}{dt} = -C_1 e^{-t}\cos t - C_1 e^{-t}\sin t - C_2 e^{-t}\sin t + C_2 e^{-t}\cos t.$$

Выразим из второго уравнения $x = -\frac{dy}{dt} - 3y$.

Откуда

$$x = e^{-t}\left[\left(C_2 - 2C_1\right)\cos t + \left(C_1 - 2C_2\right)\sin t\right].$$

Общее решение исходной системы примет вид:

$$x = e^{-t}\left[\left(C_2 - 2C_1\right)\cos t + \left(C_1 - 2C_2\right)\sin t\right],$$

$$y = C_1 e^{-t}\cos t + C_2 e^{-t}\sin t.$$

Задача 32. Исследовать сходимость числовых рядов:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n\cdot 4^n}{(2n-1)!}.$$

Это числовой ряд с положительными членами.

Воспользуемся признаком Даламбера. Имеем:

$$l = \lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)\cdot 4^{n+1}\cdot(2n-1)!}{(2n+1)!\cdot n\cdot 4^n} =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n}\lim_{n\to\infty}\frac{4\cdot 1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot(2n-1)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot(2n-1)\cdot 2n(2n+1)} = 0.$$

Так как $l < 1$, ряд сходится;

Задача 33. Исследовать сходимость знакочередующегося ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\cdot\frac{2n+3}{5n^2-4}.$$

Условия теоремы Лейбница выполняются:

$$\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty}\frac{2n+3}{5n^2-4} = \lim_{n\to\infty}\frac{2+\frac{3}{n}}{5n-\frac{4}{n}} = 0,$$

$$u_n - u_{n+1} = \frac{2n+3}{5n^2-4} - \frac{2(n+1)+3}{5(n+1)^2-4} =$$

$$= \frac{(2n+3)\left(5n^2+10n+1\right)+(2n+5)\left(5n^2-4\right)}{\left(5n^2-4\right)\left(5n^2+10n+1\right)} =$$

$$= \frac{10n^2+40n+23}{\left(5n^2-4\right)\left(5n^2+10n+1\right)} > 0;$$

$$u_n > u_{n+1} \qquad \forall\, n \in N.$$

Так что ряд сходящийся.

Рассмотрим ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ из абсолютных величин членов данного ряда и сравним его с расходящимся гармоническим рядом $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$.

Имеем $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{u_n}{v_n} = \frac{2}{5} \neq 0$, так что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ расходится. Следовательно, ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1}\left(\frac{2n+3}{5n^2-4}\right)$ сходится условно.

Задача 34. Найти интервал сходимости степенного ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+9)^n}{n^2 \cdot 6^n}.$$

Воспользуемся признаком Даламбера для ряда из абсолютных величин.

Имеем:

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(x+9)^{n+1}\cdot n^2 \cdot 6^n}{(n+1)^2 \cdot 6^{n+1} \cdot (x+9)^n}\right| = \left|\frac{x+9}{6}\right|.$$

Ряд сходится, если $\frac{|x+9|}{6} < 1$, т.е. $|x+9| < 6$, $-6 < x+9 < 6$, $-15 < x < -3$.

В указанном промежутке данный ряд абсолютно сходится.

Проверим граничные точки.

1) $x = -15$: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-15+9)^n}{6^n \cdot n^2} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-6)^n}{n^2 \cdot 6^n} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$.

Составив ряд из абсолютных величин членов знакочередующегося ряда, получим: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$, который сходится, как обобщенный гармонический ряд вида $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$ при $p = 2$.

Следовательно, ряд $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\cdot\frac{1}{n^2}$ абсолютно сходится.

2) $x = -3$: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{6^n}{n^2\cdot 6^n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$.

Полученный ряд сходится.

Итак, областью сходимости ряда является $[-15, -3]$.

Задача 35. Вычислить определенный интеграл $\int\limits_0^{0,25}\sqrt[4]{1+2x^2}\cdot dx$ с точностью до 0,001, разложив подынтегральную функцию в ряд и почленно его проинтегрировав. Подынтегральная функция может быть представлена в виде биномиального ряда

$$(1+x)^m=1+mx+\frac{m(m-1)}{2!}x^2+\frac{m(m-1)(m-2)}{3!}x^3+\ldots$$

при замене в нем x на $2x^2$ и $m=\frac{1}{4}$.

$$\sqrt[4]{1+2x^2}=\left(1+2x^2\right)^{\frac{1}{4}}=1+\frac{1}{2}x^2+\frac{\frac{1}{4}\left(-\frac{3}{4}\right)\cdot 2^2}{2!}x^4+\frac{\frac{1}{4}\cdot\left(-\frac{3}{4}\right)\cdot\left(-\frac{7}{4}\right)}{3!}\cdot 2^3\cdot x^6+\ldots=$$

$$=1+\frac{1}{2}x^2-\frac{3}{8}x^4+\frac{7}{16}x^6-\ldots.$$

Проинтегрируем этот ряд.

$$\int\limits_0^{\frac{1}{4}}\left(1+\frac{1}{2}x^2-\frac{3}{8}x^4+\frac{7}{16}x^6-\ldots\right)dx=$$

$$=\left(x+\frac{x^3}{6}-\frac{3x^5}{40}+\frac{7x^7}{112}-\ldots\right)\Bigg|_0^{\frac{1}{4}}=\frac{1}{4}+\frac{1}{6\cdot 4^3}-\frac{3}{40\cdot 4^5}+\frac{1}{16\cdot 4^7}\ldots=$$

$$=\frac{1}{4}+\frac{1}{384}-\frac{3}{40960}+\ldots.$$

По теореме Лейбница, отбросив члены последнего ряда, начиная с члена $\frac{3}{40960}$, допустим ошибку, не превосходящую абсолютной величины этого члена, то есть меньшую 0,001.

Окончательно:

$$\int_{0}^{0,25} \sqrt[4]{1+2x^2} \cdot dx \approx \frac{1}{4} + \frac{1}{384} \approx 0,2526 \approx 0,253.$$

Задача 36. Разложить данную функцию $f(x) = x^2 + 2$ в интервале $(-\pi; \pi)$ в ряд Фурье.

Так как функция $f(x) = x^2 + 2$ четная, то ряд Фурье и коэффициенты Фурье имеют вид:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot \cos nx,$$

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cdot dx; a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cdot \cos nx \cdot dx \Rightarrow$$

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\left(x^2+2\right)dx = \frac{2}{\pi}\left(\frac{x^3}{3}+2x\right)\Bigg(_0^{\pi} = \frac{2}{\pi}\left(\frac{\pi^3}{3}+2\pi\right) = \frac{2}{3}\pi^2 + 4.$$

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\left(x^2+2\right)\cdot \cos nxdx = \left|\begin{matrix} u = x^2+2 \\ dv = \cos nxdx \end{matrix}\right|\begin{matrix} du = 2xdx \\ v = \frac{1}{n}\sin nx \end{matrix}\right| =$$

$$= \frac{2}{\pi}\left(\frac{x^2+2}{n}\cdot \sin nx\Big|_0^{\pi} - \frac{2}{n}\int_0^{\pi} x \cdot \sin nxdx\right) =$$

$$= -\frac{4}{n\pi}\int_0^{\pi} x \cdot \sin nxdx = \left|\begin{matrix} u = x \\ dv = \sin nxdx \end{matrix}\right|\begin{matrix} du = dx \\ v = -\frac{1}{n}\cos nx \end{matrix}\right| =$$

$$= -\frac{4}{n\pi}\left(-\frac{x}{n}\cdot \cos nx\Big|_0^{\pi} + \frac{1}{n}\int_0^{\pi} \cos nxdx\right) =$$

$$= \frac{4}{n^2\pi}\left(\pi \cdot \cos n\pi\right) - \frac{4}{n^2\pi}\cdot\frac{1}{n}\sin nx\Big|_0^{\pi} = \frac{4\cos n\pi}{n^2}.$$

Так как $\cos n\pi = (-1)^n$, получим: $a_n = (-1)^n \cdot \dfrac{4}{n^2}$.

Окончательно: $x^2 + 2 = \dfrac{\pi^2}{3} + 2 + \sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot \dfrac{4}{n^2} \cdot \cos nx.$

Решение задач по теории вероятностей и математической статистике

1. У сборщика имеется 3 конусных и 7 эллиптических валиков. Сборщик наудачу взял один валик, а затем второй. Найти вероятность того, что первых взятый валик – конусный, а второй эллиптический.

Решение. Вероятность того, что первый взятый валик окажется конусным (событие A), равна

$$P(A) = \frac{3}{10}.$$

Вероятность того, что второй валик окажется эллиптическим (событие B), вычисленная в предположении, что первый валик – конусный, то есть исковая вероятность равна

$$P_A(B) = \frac{7}{9}.$$

Искомая вероятность по теореме умножения вероятностей зависимых событий равна

$$P(AB) = P(A) \cdot P_A(B) = \frac{3}{10} \cdot \frac{7}{9} = \frac{7}{30}.$$

2. Из 30 студентов 10 имеют спортивные разряды. Какова вероятность того, что выбранные наудачу 3 студента – разрядники?

Решение. Пусть событие A – 3 выбранные наудачу студента – разрядники. Общее число случаев набора 3 студентов из 30 равно

$$n = C_{30}^3 = \frac{30!}{3! \cdot 27!} = \frac{28 \cdot 29 \cdot 30}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 28 \cdot 29 \cdot 5 = 4060,$$

так как комбинации из 30 студентов по 3 представляют собой сочетания (отличаются только составом студентов). Число случаев, благоприятствующих событию A, равно

$$m = C_{10}^3 = \frac{10!}{3! \cdot 7!} = \frac{8 \cdot 9 \cdot 10}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 8 \cdot 3 \cdot 5 = 120.$$

Тогда

$$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{120}{4060} \approx 0{,}030.$$

3. По условиям лотереи «Спортлото 6 из 45» участник, угадавший только 4 вида спорта из отобранных при случайном розыгрыше 6 видов спорта из 45, получает минимальный денежный приз. Найти вероятность того, что участник лотереи угадает 4 цифры.

Решение. Пусть событие A – получение минимального денежного приза (угадывание только 4 видов спорта из 6 выигравших). Найдем число способов, какими можно выбрать 4 вида спорта из 6, то есть C_6^4. К каждой комбинации четырех выигравших видов спорта из шести следует присоединить комбинацию двух невыигравших видов из 45-6=39 – C_{39}^2. По правилу произведения общее число случаев, благоприятствующих событию A, равно $m = C_6^4 \cdot C_{39}^2$.

Общее число случаев, то есть всех вариантов заполнения карточек спортлото, есть C_{45}^6, так как каждый вариант заполнения отличается только составом видов спорта.

Тогда

$$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{C_6^4 \cdot C_{39}^2}{C_{45}^6} = 0{,}00136.$$

4. Вероятность того, что студент сдаст первый экзамен, равна 0,9; второй – 0,9; третий – 0,8. Найти вероятность того, что студентом будут сданы: а) только один экзамен; б) только два экзамена; в) три экзамена.

Решение. а) Пусть событие B – студент сдаст один экзамен из трех; A_i – студент сдаст i-й экзамен ($i = \overline{1,3}$). Событие B произойдет, если студент сдаст только первый экзамен из трех, или только второй, или только третий, то есть

$$P(B) = P\left(A_1\overline{A}_2\overline{A}_3 + \overline{A}_1 A_2 \overline{A}_3 + \overline{A}_1\overline{A}_2 A_3\right) =$$
$$= 0{,}9 \cdot 0{,}1 \cdot 0{,}2 + 0{,}1 \cdot 0{,}9 \cdot 0{,}2 + 0{,}1 \cdot 0{,}1 \cdot 0{,}8 = 0{,}044.$$

б) Пусть событие C – студент сдаст только два экзамена. Событие C означает сдачу любых двух экзаменов из трех, то есть

$$P(C) = P\left(A_1 A_2 \overline{A}_3 + A_1 \overline{A}_2 A_3 + \overline{A}_1 A_2 A_3\right) =$$
$$= 0{,}9 \cdot 0{,}9 \cdot 0{,}2 + 0{,}9 \cdot 0{,}1 \cdot 0{,}8 + 0{,}1 \cdot 0{,}9 \cdot 0{,}8 = 0{,}306.$$

в) Пусть событие D – студент сдаст все три экзамена, то есть $D = A_1 A_2 A_3$. Тогда

$$P(D) = P(A_1 A_2 A_3) = 0{,}9 \cdot 0{,}9 \cdot 0{,}8 = 0{,}648.$$

5. Имеется два набора деталей. Первый набор содержит 10 деталей, а второй 15. Вероятность того, что деталь первого набора стандартна, равна 0,8; а второго – 0,9. Найти вероятность того, что взятая наудачу деталь – стандартна.

Решение. Пусть событие A – извлеченная деталь стандартная, B_1 – деталь извлечена из первого набора, B_2 – деталь извлечена из второго набора.

Тогда $P(B_1)=\frac{10}{25}=\frac{2}{5}$, $P(B_2)=\frac{15}{25}=\frac{3}{5}$.

Условная вероятность того, что из первого набора будет извлечена стандартная деталь, по условию равна $P_{B_1}(A)=0{,}8$, а из второго – $P_{B_2}(A)=0{,}9$.

Искомая вероятность того, что извлеченная наудачу деталь – стандартная, по формуле полной вероятности равна

$$P(A)=P(B_1)P_{B_1}(A)+P(B_{21})P_{B_{21}}(A)=0{,}4\cdot 0{,}8+0{,}6\cdot 0{,}9=0{,}86.$$

6. Вероятность прорастания семян данного сорта растений равна 0,75.Посеяно 300 семян. Найти наивероятнейшее число всходов.

Решение. По условию задачи $p=0{,}75; q=1-0{,}75=0{,}25; n=300$. Наивероятнейшее число наступлений события определяется с помощью двойного неравенства

$$np-q\le k_0\le np+p.$$

Тогда

$$300\cdot 0{,}75-0{,}25\le k_0\le 300\cdot 0{,}75+0{,}75,$$

$$224{,}75\le k_0\le 225{,}75.$$

Так как k_0 – целое число, то k_0=225.

7. Вероятность нормального расхода электроэнергии на продолжении каждых из 6 суток постоянна и равна $p=0{,}75$. Найти вероятность того, что в течение ближайших 4 суток расход электроэнергии не превысит нормы.

Решение. По условию задачи имеем: $p=0{,}75$; $q=1-0{,}75=0{,}25$; $n=6$, $k=4$. Искомая вероятность по формуле Бернулли равна:

$$P_6(4)=C_6^4p^4q^{6-4}=\frac{6!}{4!2!}0{,}75^4 0{,}25^2=0{,}30.$$

8. Вероятность того, что деталь не прошла проверку ОТК, равна $p = 0,2$. Найти вероятность того, что среди 400 случайно отобранных деталей окажется непроверенных от 70 до 100 деталей.

Решение. По условию $p = 0,2; q = 1 - 0,2 = 0,8; n = 400; k_1 = 70; k_2 = 100$.

Воспользуемся интегральной теоремой Лапласа:

$$P_{400}(70,100) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{x'}^{x''} e^{-\frac{x^2}{2}} dz = \Phi(x'') - \Phi(x').$$

Вычислим нижний и верхний пределы интегрирования:

$$x' = \frac{k_1 - np}{\sqrt{npq}} = \frac{70 - 400 \cdot 0,2}{\sqrt{400 \cdot 0,2 \cdot 0,8}} = -1,25; \; x'' = \frac{k_2 - np}{\sqrt{npq}} = \frac{100 - 400 \cdot 0,2}{\sqrt{400 \cdot 0,2 \cdot 0,8}} = 2,5.$$

Таким образом, имеем

$$P_{400}(70,100) = \Phi(2,5) - \Phi(-1,25) = \Phi(2,5) + \Phi(1,25).$$

По таблице формула Лапласа находим

$$\Phi(1,25) = 0,3944; \Phi(2,5) = 0,4838.$$

Искомая вероятность равна

$$P_{400}(70,100) = 0,4938 + 0,3944 = 0,8882.$$

9. Завод отправил на базу 5000 доброкачественных изделий. Вероятность того, что в пути изделие повредится, равна 0,0002. Найти вероятность того, что на базу прибудут три негодных изделия.

Решение. По условию $n = 5000, p = 0,0002, k = 3$. Найдем λ:

$$\lambda = np = 5000 \cdot 0,0002 = 1.$$

Искомая вероятность по формуле Пуассона приближенно равна

$$P_{5000}(3) = \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!} = \frac{e^{-1}}{3!} = \frac{1}{6e} \approx 0,06.$$

10. На телефонной станции неправильное соединение происходит с вероятностью $\frac{1}{200}$. Найти вероятность того, что среди 200 соединений произойдет:

а) точно 1 неправильное соединение;

б) меньше чем 3 неправильных соединения;

в) больше чем 2 неправильных соединения.

Решение. Здесь вероятность события мала, поэтому используем формулу Пуассона:

$$P_n(k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda},$$

где $\lambda = np$.

а) $n = 200$; $p = \dfrac{1}{200}$; $k = 1$. Найти $P_{200}(1)$.

$$\lambda = 200 \cdot \frac{1}{200} = 1.$$

По таблице (распределение Пуассона $P_k = \dfrac{\lambda_k}{k!} e^{-\lambda}$) $P_{200}(1) = 0,3679$.

б) $n = 200$; $P = \dfrac{1}{200}$; $k < 3$. Найти $P_{200}(k < 3)$

$$\lambda = 1,\ P_{200}(k<3) = P_{200}(0) + P_{200}(1) + P_{200}(2) =$$
$$= 0,3679 + 0,3679 + 0,1839 = 0,997.$$

в) $n = 200$; $P = \dfrac{1}{200}$; $k > 2$. Найти $P_{200}(k > 2)$

$$\lambda = 1;\ P_{200}(k>2) = 1 - P_{200}(k \le 2) == 1 - P_{200}(k<3) =$$
$$= 1 - 0,9197 = 0,0803.$$

11. Дискретная случайная величина X может принимать только два значения x_1 и x_2, причем $x_1 < x_2$. Известны вероятность $p_1 = 0,3$, математическое ожидание $M[X] = 3,1$ и дисперсия $D[X] = 1,89$. Найти закон распределения случайной величины X.

Решение. Поскольку $p_1 + p_2 = 1$, то $p_2 = 0,7$; $M[X] = 0,3x_1 + 0,7x_2 = 3,1$ или $3x_1 + 7x_2 = 31$; $D[X] = 0,3x_1^2 + 0,7x_2^2 - 3,1^2 = 1,89$ или $3x_1^2 + 7x_2^2 = 115$. Из системы уравнений

$$\begin{cases} 3x_1 + 7x_2 = 31 \\ 3x_1^2 + 7x_2^2 = 115 \end{cases}$$

с учетом условия $x_1 < x_2$, получим $x_1 = 1, x_2 = 4$. Следовательно, $P(X=1) = 0,3; P(X=4) = 0,7$.

12. Дана функция распределения случайной величины X:

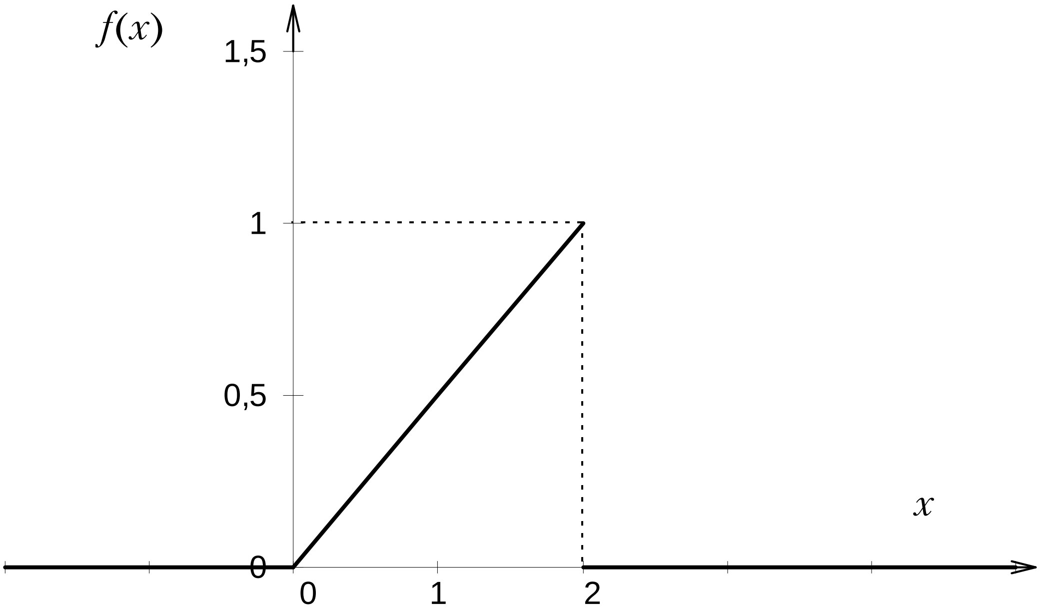
$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \le 0, \\ \dfrac{x^2}{4} & \text{при } 0 < x \le 2, \\ 1 & \text{при } x > 2. \end{cases}$$

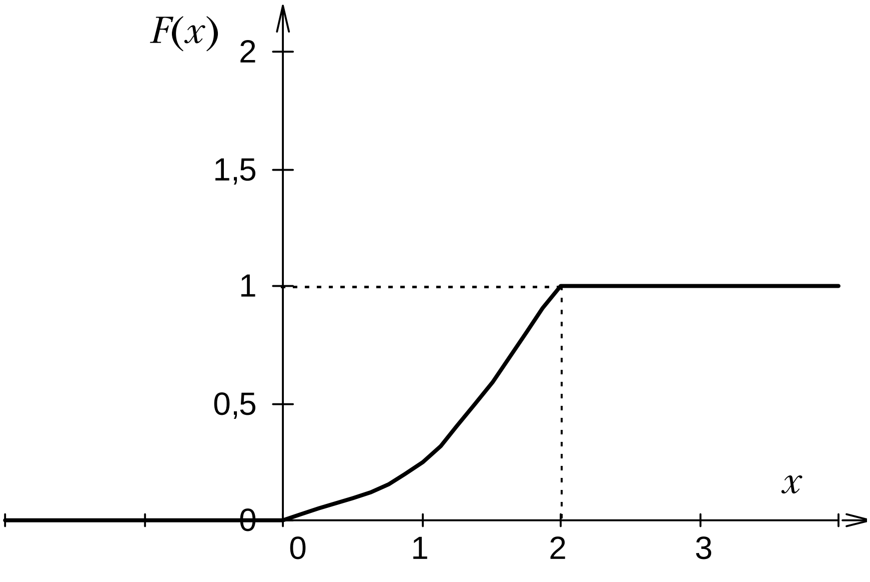
Найти плотность вероятности $f(x)$, построить графики $f(x)$ и $F(x)$, найти вероятность $P(1 \le X < 2)$, вычислить математическое ожидание $M[X]$ и дисперсию $D[X]$.

Решение. Плотность вероятности

$$f(x) = F'(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \le 0, \\ \dfrac{x}{2} & \text{при } 0 < x \le 2, \\ 0 & \text{при } x > 2. \end{cases}$$

Построим графики функции $f(x)$ и $F(x)$





Вероятность $P(1 \le X < 2)$ попадания случайной величины в интервал $[1{,}2)$ равна приращению ее функции распределения на этом интервале, то есть

$$P(1 \le X < 2) = F(2) - F(1) = \frac{2^2}{4} - \frac{1^2}{4} = \frac{3}{4}$$

или через плотность вероятности $f(x)$:

$$P(1 \le X < 2) = \int_1^2 \frac{x}{2} dx = \frac{x^2}{4} \Big|_1^2 = \frac{3}{4}.$$

Математическое ожидание

$$M[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x) dx = \int_{-\infty}^{0} x \cdot 0 \cdot dx + \int_0^2 x \cdot \frac{x}{2} dx + \int_2^{\infty} x \cdot 0 dx = 0 + \frac{x^3}{6} \Big|_0^2 + 0 = \frac{4}{3}.$$

Дисперсия

$$D[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \cdot f(x) dx - (M[X])^2 = \int_{-\infty}^{0} x^2 \cdot 0 \cdot dx + \int_0^2 x^2 \cdot \frac{x}{2} dx + \int_2^{\infty} x^2 \cdot 0 dx - \left(\frac{4}{3}\right)^2 =$$

$$= \frac{x^4}{8} \Big|_0^2 - \frac{16}{9} = 2 - \frac{16}{9} = \frac{2}{9}.$$

13. Найти доверительный интервал для оценки математического ожидания a нормального распределения с надежностью $\gamma = 0{,}95$, зная выборочную среднюю $\bar{x}_в = 75{,}15$, объем выборки $n = 64$ и среднее квадратическое отклонение $\sigma = 8$.

Решение. По условию $n = 64$, $\bar{x}_в = 75{,}15$, $\sigma = 8, \gamma = 0{,}95$. Поскольку параметр σ известен, интервальную оценку найдем согласно формуле

$$P\left(\bar{x}_в - t\frac{\sigma}{\sqrt{n}} < a < \bar{x}_в + t\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = 2\Phi(t) = \gamma.$$

По таблице интегральной функции Лапласа $\Phi(t)$ из условия $\gamma = 0{,}95$ найдем $t = 1{,}96$.

Тогда точность оценки равна

$$\delta = t\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1{,}96 \cdot \frac{8}{\sqrt{64}} = 1{,}96.$$

Отсюда доверительный интервал имеет вид

$$75{,}15\text{-}1{,}96 \le a \le 75{,}15 + 1{,}96$$

и окончательно

$$73{,}19 \le a \le 77{,}11.$$

6. ПРИМЕРНЫЕ ВОПРОСЫ, ВЫНОСИМЫЕ НА ЗАЧЕТ И ЭКЗАМЕН

1. Определители второго и третьего порядка. Минор, алгебраическое дополнение. Разложение определителя по элементам строк и столбцов. Понятие определителя любого порядка (по индукции), его свойства и вычисление.

2. Системы линейных уравнений. Формулы Крамера. Системы линейных однородных уравнений, их нетривиальные решения.

3. Векторы – отрезки, линейные операции над ними. Проекция вектора на ось. Размерность, базис. Координаты вектора как коэффициенты его разложения по базису и как проекции на координатные оси. Направляющие косинусы.

4. Скалярное произведение векторов, его свойства, выражение в координатах, применение. Координаты вектора как скалярные произведения вектора на координатные орты.

5. Векторное и смешанное произведения. Их свойства, выражения в координатах, применение.

6. Матрицы, линейные операции над ними. Умножение матриц. Обратная матрица.

7. Матричная запись и решение систем линейных уравнений. Ранг матрицы. Решение систем линейных уравнений методом Гаусса, Жордана-Гаусса.Теорема Кронекера – Капелли.

8. Понятие линейного векторного пространства. Примеры. Понятие линейного оператора. Евклидовы пространства. Ортогональный и ортонормированный базис.

9. Понятие системы координат. Координаты точки как ее аналитический эквивалент. Прямоугольная декартова система координат. Полярная, сферическая, цилиндрическая системы координат. Преобразования координат.

10. Линия на плоскости, ее уравнение. Поверхность в пространстве, ее уравнение. Линия в пространстве, ее уравнения. Параметрические уравнения линий. Уравнения (системы уравнений) линий и поверхностей как их аналитический эквивалент. Второй принцип соответствия.

11. Области на прямой, плоскости в пространстве. Их аналитический эквивалент — системы неравенств.

12. Переменные и постоянные величины. Множества. Операции над множествами. Логические символы. Отрезок, интервал, ограниченное множество. Неравенства для абсолютных величин.

13. Предел последовательности. Сравнение величин. Арифметические действия с переменными, имеющими предел. Число е.

14. Функция. Взаимно-обратные функции. Графики взаимнообратных функций. Рост функции в данном интервале.

15. Предел функции. Предел функции в бесконечности. Ограниченность функции, имеющей предел.

16. Бесконечно малые величины. Сравнение бесконечно малых величин. Бесконечно большие величины. Первый замечательный предел. Правила предельного перехода

17. Непрерывные функции. Точки разрыва и их виды.

18. Геометрический смысл производной. Касательная и нормаль к линии Дифференцирование функций. Правила дифференцирования. Производные сложной и обратной функций. Формулы дифференцирования основных элементарных функций. Логарифмическое дифференцирование. Производные неявных функций. Параметрически заданные функции и их дифференцирование.

19. Дифференциал, геометрический смысл, свойства. Дифференциалы основных элементарных функций. Дифференциал сложной функции. Свойство инвариантности. Дифференцируемость функции.

20. Производные и дифференциалы высших порядков

21. Теоремы Ферма, Ролля, Лагранжа и Коши. Правило Лопиталя. Поведение функции в интервале.

22. Экстремум функции. Необходимый признак экстремума. Первый достаточный признак экстремума. Второй достаточный признак экстремума. Выпуклость и вогнутость линии. Точки перегиба. Признаки точки перегиба. Асимптоты линий. Общая схема исследования функций.

23. Приращения функции двух переменных. Предел функции. Непрерывность функции. Свойства непрерывных функций.

24. Частные производные. Полный дифференциал и его связь с частными производными. Применение полного дифференциала к приближенным вычислениям.

25. Производные и дифференциалы высших порядков. Производная сложной функции.

26. Неявные функции. Теорема существования неявной функции. Дифференцирование неявной функции.

27. Геометрические приложения дифференциального исчисления функций двух переменных. Уравнения касательной плоскости, нормали.

28. Производная по направлению. Градиент. Линии уровня

29. Экстремум функции нескольких переменных. Необходимый признак экстремума. Достаточные условия. Условный экстремум. Метод множителей Лагранжа.

30. Задачи о наибольших и наименьших значениях функции

31. Метод наименьших квадратов

32. Арифметические действия над комплексными числами. Алгебраическая, тригонометрическая, показательная формы комплексного числа. Формулы Эйлера, Муавра.

33. Теорема Безу. Основная теорема алгебры. Следствие из основной теоремы. Действительный многочлен n-й степени.

34. Первообразная, основные свойства. Неопределенный интеграл, свойства. Таблица интегралов.

35. Методы интегрирования. Непосредственное интегрирование. Метод замены переменной (подстановки). Интегрирование по частям.

36. Интегрирование рациональных функций путем разложения на простейшие дроби.

37. Интегрирование выражений, содержащих тригонометрические функции. Универсальная тригонометрическая подстановка.

38. Интегрирование дробно-линейной и квадратичной иррациональных выражений. Подстановки Эйлера.

39. Задачи, приводящие к понятию определенного интеграла. Определенный интеграл, свойства. Теорема о среднем. Интеграл с переменным верхним пределом. Производная интеграла по верхнему пределу. Формула Ньютона-Лейбница.

40. Вычисление определенного интеграла. Непосредственное вычисление. Интегрирование по частям. Интегрирование подстановкой (заменой переменной).

41. Приближенные методы вычисления определенного интеграла. Формулы прямоугольников, трапеций, Симпсона.

42. Приложения определенных интегралов.

43. Вычисление площадей плоских фигур. Вычисление объемов тел. Вычисление длины дуги кривой. Площадь поверхности вращения.

44. Центр тяжести криволинейной трапеции. Работа переменной силы. Путь.

45. Несобственные интегралы с бесконечными пределами. Несобственные интегралы от разрывных функций. Признаки сходимости несобственных интегралов.

46. Физические задачи, приводящие к дифференциальным уравнениям. Основные понятия теории ДУ. Обыкновенные дифференциальные уравнения. Порядок ДУ. Решение (интеграл) ДУ. Интегральная кривая.

47. Дифференциальные уравнения первого порядка. Задача Коши. Теорема существования и единственности решения. Геометрическая интерпретация ДУ первого порядка. Интегрируемые типы дифференциальных уравнений первого порядка. ДУ с разделенными переменными, с разделяющимися переменными. Однородные уравнения. Уравнения, приводящиеся к однородным. Линейные уравнения. Уравнения в полных дифференциалах. Особые решения.

48. Дифференциальные уравнения высших порядков. Теорема существования и единственности решения задачи Коши. Задачи с краевыми условиями. Некоторые типы ДУ, допускающих понижение порядка.

49. Линейные дифференциальные уравнения высших порядков. Однородные уравнения. Фундаментальная система решений. Определитель Вронского. Теорема о структуре решения однородного линейного ДУ. Теорема о структуре решения неоднородного линейного ДУ. Метод Лагранжа вариации произвольных постоянных.

50. Линейные однородные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами. Характеристическое уравнение.

51. Линейные неоднородные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами. Решения при некоторых видах правых частей.

52. Однородные линейные системы с постоянными коэффициентами.

53. Задача об объеме цилиндрического тела. Двойной интеграл, теорема существования, свойства. Теорема о среднем.

54. Вычисление двойных интегралов.

55. Приложения двойных интегралов к задачам механики (масса, статические моменты, центр тяжести, моменты инерции плоской пластинки). Вычисление площади поверхности. Вычисление интегралов, зависящих от параметра.

56. Масса неоднородного тела. Тройной интеграл.

57. Вычисление тройных интегралов (при задании области интегрирования в декартовых, цилиндрических и сферических координатах).

58. Общая замена переменных в двойном и тройном интегралах. Якобиан.

59. Применение тройных интегралов (вычисление статических моментов, моментов инерции пространственных тел, координат центра тяжести).

60. Криволинейный интеграл по длине (первого рода), вычисление. Масса кривой.

61. Криволинейный интеграл по координатам (второго рода), физический смысл, вычисление.

62. Условие независимости интеграла от линии интегрирования. Формула Грина. Интегрирование полных дифференциалов. Первообразная функция. Формула Ньютона-Лейбница для криволинейных интегралов.

63. Применение криволинейных интегралов второго рода (вычисление площади, вычисление работы в потенциальном силовом поле).

64. Сумма ряда. Сходимость. Гармонический ряд. Необходимый признак сходимости. Ряды с положительными членами. Достаточные признаки сходимости (признаки сравнения, Даламбера, интегральный признак Коши, радикальный признак).

65. Знакочередующиеся ряды. Теорема Лейбница. Знакопеременные ряды. Абсолютная и условная сходимость. Свойства абсолютно сходящихся рядов.

66. Область сходимости функционального ряда. Равномерная сходимость. Непрерывность суммы равномерно сходящегося ряда из непрерывных функций. Почленное дифференцирование и интегрирование функциональных рядов. Признак Вейерштрасса равномерной сходимости.

67. Степенной ряд. Теорема Абеля. Интервал и радиус сходимости.

68. Ряды Тейлора и Маклорена. Примеры разложения функций в ряды Тейлора и Маклорена. Применение степенных рядов. Приближенное вычисление значений функций. Интегрирование функций. Интегрирование дифференциальных уравнений (методы последовательного дифференцирования и неопределенных коэффициентов).

69. Разложение по ортогональной системе функций. Формулы Фурье. Тригонометрические ортогональные системы функций и разложение функций по этим системам. Теорема о возможности разложения функции в ряд Фурье. Разложение в ряд четных и нечетных функций, функций с произвольным периодом и заданных на половине периода.

70. Физические задачи, приводящие к дифференциальным уравнениям в частных производных.

71. Классификация линейных уравнений в частных производных второго порядка, приведение к каноническому виду. Постановка основных задач: задача Коши, краевые задачи, смешанные задачи, корректность постановки задач.

72. Основные уравнения математической физики.

73. Метод Фурье решения краевых задач для уравнения теплопроводности.

74. Задача Коши для уравнения теплопроводности. Интеграл Пуассона.

75. Элементы комбинаторики.

76. Элементарная теория вероятностей. Классическая вероятность. Статистическая вероятность. Методы вычисления вероятностей.

77. Пространство элементарных событий. Алгебра событий. Понятие случайного события. Вероятность. Аксиоматическое построение теории вероятностей.

78. Правила сложения и умножения вероятностей.

79. Условная вероятность. Формула полной вероятности. Теорема Байеса.

80. Схема Бернулли. Теоремы Пуассона и Муавра-Лапласа.

81. Дискретные случайные величины. Функция распределения, свойства. Математическое ожидание и дисперсия. Свойства.

82. Непрерывные случайные величины. Функция распределения. Плотность вероятностей. Их взаимосвязь и свойства. Математическое ожидание и дисперсия.

83. Нормальное распределение и его свойства.

84. Закон больших чисел. Предельные теоремы теории вероятностей. Теорема Чебышева. Теорема Бернулли. Центральная предельная теорема.

85. Случайные векторы. Функция распределения системы двух случайных величин. Совместная плотность распределения.

86. Независимые и зависимые случайные величины. Условный закон распределения. Условные математические ожидания. Ковариационная матрица. Коэффициенты корреляции.

87. Генеральная совокупность и выборка. Вариационный ряд. Гистограмма, эмпирическая функция распределения, выборочная средняя и дисперсия.

88. Точечные оценки: несмещенные, состоятельные, эффективные; оценки для математического ожидания и дисперсии. Интервальные оценки; доверительные вероятности, доверительные интервалы. Определение доверительного интервала для математического ожидания и дисперсии. Принцип максимального правдоподобия.

89. Статистические методы обработки экспериментальных данных.

90. Понятие о критериях согласия. Проверка гипотезы о значениях параметров нормального распределения. Проверка гипотезы о виде распределения.

91. Функциональная зависимость и регрессия. Кривые регрессии, свойства. Коэффициент корреляции, свойства.

7. ВАРИАНТЫ ТЕСТОВ К ЗАЧЕТУ

Вариант 1

1. Если A = $\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 4 & -5 \end{bmatrix}$ и B = $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$, то матрица C=2A + B имеет вид:

1) $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 8 & -8 \end{bmatrix}$; 2) $\begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 8 & -8 \end{bmatrix}$; 3) $\begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 8 & -8 \end{bmatrix}$; 4) $\begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 4 & -3 \end{bmatrix}$.

2. Определитель $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \end{vmatrix}$ равен:

1) -1; 2) 5; 3) -5; 4) 1.

3. Прямая проходит через точки $O(0;0)$ и $B(5;-15)$. Тогда ее угловой коэффициент равен:

1) -5; 2) 3; 3) 5; 4) -3.

4. Если уравнение гиперболы имеет вид $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{9}=1$, то длина её действительной полуоси равна:

1) 2; 2) 4; 3) 9 ; 4) 3.

5. Нормальный вектор плоскости $x+2y+z-15=0$ имеет координаты:

1) $(2;1;-15)$; 2) $(1;1;-15)$; 3) $(1;2;1)$; 4) $(1;2;-15)$.

6. Предел $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg}2x}{\sin 3x}$ равен:

1) $\frac{2}{3}$; 2) $\frac{1}{6}$; 3) $\frac{3}{2}$; 4) 6.

7. В пространстве имеется отрезок, соединяющий две точки с абсциссами одинаковых знаков. Тогда этот отрезок не может пересекать...

1) плоскость *Oxy;* 2) плоскость *Ozy;* 3) плоскость *Oxz;* 4) прямую *Ox.*

8. Производная функции $y=\cos(x^2-1)$ имеет вид:

1) $2x\sin(x^2-1)$; 2) $x\sin(x^2-1)$;

3) $-2x\sin(x^2-1)$; 4) $-\sin(x^2-1)$.

9. Горизонтальная асимптота для графика функции $y=\dfrac{5-8x^2}{2x^2+2x+3}$ имеет вид...

1) $x=-\dfrac{1}{4}$; 2) $y=-\dfrac{1}{4}$; 3) $y=-4$; 4) $y=\dfrac{3}{4}$.

10. Частная производная функции $z=x^4\cos y$ по переменной y в точке $M\left(1;\dfrac{\pi}{2}\right)$ равна:

1) 1; 2) -1; 3) 0; 4) 4.

11. Множество первообразных функции $f(x)=e^{6x+2}$ имеет вид:

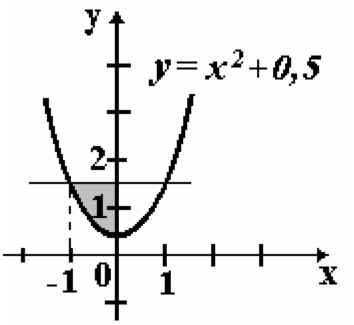
1) $6e^{6x+2}+C$; 2) $e^{6x+2}+C$;

3) $-6e^{6x+2}+C$; 4) $\dfrac{1}{6}e^{6x+2}+C$.

12. Градиент скалярного поля $u=x^2-xz+yz$ в точке $A(0;\ 1;\ 1)$ имеет вид:

1) $\overline{i}+\overline{j}+\overline{k}$; 2) $-\overline{i}+\overline{j}+2\overline{k}$; 3) $-\overline{i}+\overline{j}+\overline{k}$; 4) $-\overline{i}-\overline{j}+2\overline{k}$.

13. Площадь фигуры, изображенной на рисунке, определяется интегралом:



1) $\int\limits_{-1}^{0}\left(x^2-1\right)dx$; 2) $\int\limits_{-1}^{0}\left(x^2+0,5\right)dx$;

3) $\int\limits_{0}^{2}\left(1,5-x^2\right)dx$; 4) $\int\limits_{-1}^{0}\left(1-x^2\right)dx$.

14. Если $z_1=1-i,\quad z_2=2+i$, то $z_1\cdot z_2$ равно:

1) $U=\ln\left(3x-y^2+2z^3\right)$; 2) $3-i$; 3) $3+3i$; 4) $2-3i$.

15. Модуль комплексного числа $z=2-3i$ равен

1) $\sqrt{13}$; 2) $-\sqrt{13}$; 3) -5; 4) 1.

Вариант 2

1. Определитель $\begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 2 \end{vmatrix}$ равен

1) -5; 2) 5; 3) 4; 4) 0.

2. Если $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, то $3A-2B$ равно

1) $\begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 10 & 1 \end{pmatrix}$; 2) $\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -10 & 1 \end{pmatrix}$; 3) $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}$; 4) $\begin{pmatrix} -4 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

3. Если $\overline{a} = -2\overline{i} + 3\overline{j} - \overline{k}$, то $|\overline{a}|$ равен

1) -7; 2) $\sqrt{6}$; 3) $\sqrt{14}$; 4) 0.

4. Величины отрезков, отсекаемых прямой $2x - y - 8 = 0$ на осях координат, равны:

1) $a = 4, \quad b = 8$; 2) $a = 4, \quad b = -8$;

3) $a = -4, \quad b = -8$; 4) $a = -4, \quad b = 8$.

5. Из плоскостей $a)\, 2y - 3z + 1 = 0$; $b)\, x - 3 = 0$; $c)\, 2z + 2y + 4z - 1 = 0$; $d)\, x + y - 5 = 0$ параллельны оси OX:

1) только $a)$; 2) $b)$ и $d)$; только $d)$; ни одна.

6. Уравнение $3y^2 + 5x + 6y + 13 = 0$ определяет на плоскости:

1)эллипс; 2) параболу; 3) гиперболу; 4) прямую.

7. Уравнение $x^2 + y^2 = 4$ в полярных координатах имеет вид...

1) $\rho\cos\varphi = 4$; 2) $\rho = 2$; 3) $\rho = 4$; 4) $\rho\sin\varphi = 2$.

8. Число точек разрыва функции $y = \dfrac{2x+5}{(x-3)^2(x+6)(x^2+1)}$ равно

1) 5; 2) 3; 3) 2; 4) 0.

9. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 4x}{2x}$ равен:

1) 1; 2) 2; 3) 3; 4) 4.

10. Значение производной второго порядка для функции $y=\cos 8x+12x$ в точке $x_0=\dfrac{\pi}{16}$ равно...

1) 0; 2) 1; 3) $-1-\dfrac{3\pi}{4}$; 4) -13.

11. Точка максимума функции $f(x)=2x^3+15x^2+36x$ равна...

1) -3; 2) -2; 3) 0; 4) 36.

12. Если $U=\sqrt{2x-3y^2+4z}$, то $\dfrac{\partial U}{\partial y}$ в точке $M(2;1;0)$ равна:

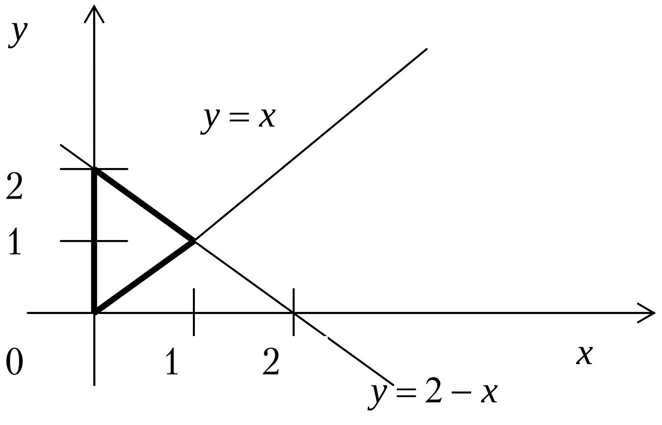
1) 0; 2) -6; 3) 3; 4) -3.

13. Интеграл $\int\dfrac{xdx}{1-2x^2}$ равен

1) $-\dfrac{1}{4}\ln\left|1-2x^2\right|+c$; 2) $\dfrac{1}{4}\ln\left|1-2x^2\right|+c$;

3) $4\ln\left|1-2x^2\right|+c$; 4) $\ln\left|1-2x^2\right|+c$.

14. Площадь треугольника, изображенного на чертеже, вычисляется с помощью интеграла



1) $\int\limits_0^1 dx\int\limits_x^{2-x} dy$; 2) $\int\limits_0^1 dx\int\limits_{2-x}^{x} dy$;

3) $\int\limits_0^2 dy\int\limits_0^x dx$; 4) $\int\limits_0^2 dy\int\limits_0^1 dx$.

15. Число $\overline{z}$ – сопряженное к числу $z=-3+2i$ равно

1) $2-3i$; 2) $-3-2i$; 3) $3+2i$; 4) $-3+2i$.

Вариант 3

1. Решите уравнение $\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 3x & x+22 \end{vmatrix} = 0$.

1) $x=-2$; 2) $x=11$; 3) $x=-1$; 4) $x=2$.

2. Определитель $\begin{vmatrix} 1 & 5 & -4 & 1 \\ 0 & -2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -5 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{vmatrix}$ равен ...

1) 7; 2)10; 3) -10; 4) -7.

3. Результатом умножения матрицы $A = \begin{pmatrix} -4 & 2 & 7 \end{pmatrix}$ на матрицу $B = \begin{pmatrix} -4 & 1 & 3 \\ 2 & 5 & -1 \\ 2 & 5 & 7 \end{pmatrix}$ является

1) матрица порядка 3×3; 2) матрица порядка 3×1;
3) матрица порядка 1×3; 4) матрица порядка 4×3.

4. В прямоугольной декартовой системе координат даны точки $A(3,-4,5)$ и $B(-1,2,-2)$. Длина вектора AB равна

1) $\sqrt{101}$; 2)$\sqrt{111}$; 3) 10; 4) 11.

5. Дан вектор $\vec{a} = (3,\ -5)$. Укажите вектор, ортогональный данному:

1) $(10,\ -6)$; 2) $(10,\ 6)$; 3) $(-3,\ 5)$; 4) $(-5, 3)$.

6. Уравнение $x^2+y^2-16x+4y+18=0$ представляет в координатной плоскости

1) эллипс; 2)окружность; 3) параболу; 4) гиперболу.

7. Сумма всех действительных корней многочлена $p(x) = x^3(x+4)(x+3)+(x+4)(x+3)$ равна...

1) 7; 2) -7; 3) -8; 4) 0.

8. Предел $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{6n^2+2}{1-7n^2}$ равен...

1) $\dfrac{6}{7}$; 2) $-\infty$; 3) ∞; 4) $-\dfrac{6}{7}$.

9. Производная функции $y=\cos^3 2x$ равна

1) $3\sin^2 2x$; 2) $-6\cos^2 2x\sin 2x$; 3) $6\cos^2 2x\sin 2x$; 4) $6\sin^2 2x$.

10. Точка движется по закону $S(t)=-\dfrac{1}{9}t^3+2t^2+12t$ (S измеряется в метрах, t – в секундах). Скорость движения точки в момент времени $t=0$ равна

1) 12 м/с; 2) 2 м/с; 3) 6 м/с; 4) 5,5 м/с.

11. Укажите полный дифференциал данной функции двух переменных: $U=x^3-5y^3+4xy$.

1) $\left(3x^2+4y\right)dx+\left(-15y^2+4x\right)dy$; 2) $\left(-15y^2+4x\right)dx+\left(3x^2+4y\right)dy$;

3) $\left(3x^2+4x\right)dx+\left(-15y^2+4y\right)dy$; 4) $\left(3x^2+4y\right)dx+\left(15y^2+4x\right)dy$.

12. Первообразной функции $y=e^{-3x}$ является функция

1) $3e^{-3x}$; 2) $-3e^{-3x}$; 3) $\dfrac{1}{3}e^{-3x}$; 4) $-\dfrac{1}{3}e^{-3x}$.

13. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями: $y=x^2+1$, $y=0$, $x=0$, $x=2$.

1) 10; 2) $\dfrac{10}{3}$; 3) $\dfrac{14}{3}$; 4) $-\dfrac{14}{3}$.

14. В алгебраической форме комплексное число $z=6e^{-\frac{\pi}{2}i}$ равно

1) $-6i$; 2) 6; 3) $6i$; 4) i.

15. Аргумент комплексного числа $z=-5+5i$ равен

1) –5; 2) 5; 3) $\dfrac{3\pi}{4}$; 4) $\dfrac{\pi}{4}$.

Вариант 4

1. Определитель $\begin{vmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 2 & 4 & -5 \\ -1 & 0 & 2 \end{vmatrix}$ равен

1) 2; 2) 28; 3) 0; 4) 30.

2. Если A = $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$ и B = $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, то матрица 3A – 5B равна

1) $\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 5 & -1 \end{pmatrix}$; 2) $\begin{pmatrix} 6 & -1 \\ 4 & 12 \end{pmatrix}$; 3) $\begin{pmatrix} 6 & -8 \\ 4 & 15 \end{pmatrix}$; 4) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

3. Если $\overline{a} = 3\overline{i} - 5\overline{j} + 7\overline{k}$, то $|a|$ равен

1) 9; 2) $\sqrt{83}$; 3) $\sqrt{63}$; 4) 83.

4. Величины отрезков, отсекаемых прямой $2x - 3y - 6 = 0$ на осях координат равны:

1) $a = 3, b = 2$; 2) $a = 2, b = -3$; 3) $a = 3, b = -2$; 4) $a = -2, b = -3$.

5. Уравнение $x^2 + y^2 - 6x + 8y - 11 = 0$ определяет на плоскости

1) параболу; 2) гиперболу; 3) окружность; 4) эллипс.

6. Уравнение $x^2 + y^2 = x$ в полярных координатах имеет вид...

1) $\rho\cos\varphi = \varphi$; 2) $\rho = \cos\varphi$; 3) $\rho^2 + \varphi^2 = \rho$; 4) $\rho\sin\varphi = 1$.

7.Сколько точек разрыва у функции $y = \dfrac{x-5}{(x-5)^2(x+1)^3 x}$?

1) 1; 2) 2; 3) 6; 4) 3.

8. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{3n^2 - 2n + 1}{5n - n^2}$ равен

1)2; 2) 3; 3) -3; 4) -1.

9. График какой функции на всем отрезке $[a;b]$ одновременно удовлетворяет трем условиям: $y > 0,\ y' > 0, y'' < 0$?

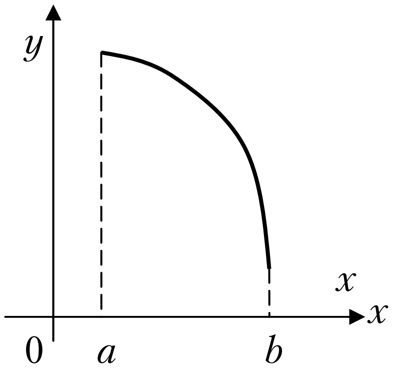


Рис.1

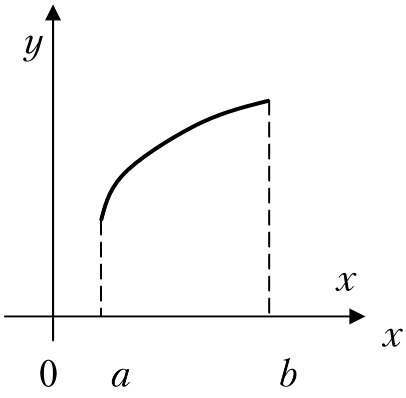


Рис.2

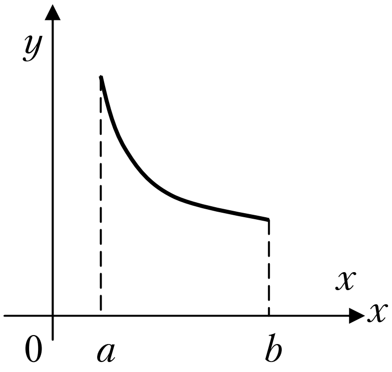


Рис.3

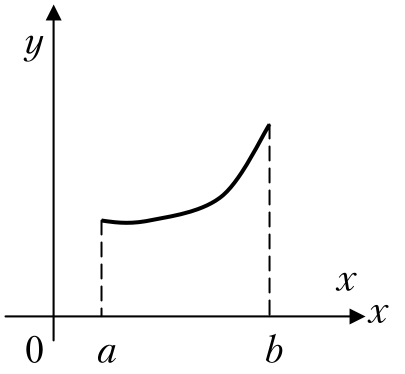


Рис.4

1) только 2; 2) 1 и 2; 3) все графики; 4) только 3.

10. Если $z = \text{arctg}\dfrac{x}{y}$, то $z_x{}'$ в точке M(-4;3) равна

1) 1; 2) π; 3)0,12; 4)1,2.

11. Для функции $z = 3y^3 + 5xy^2 - 7x + 8$ укажите верное утверждение:

1) $\dfrac{\partial z}{\partial y} = 9y^2$; 2) $\dfrac{\partial z}{\partial x} - \dfrac{\partial z}{\partial y} = 27y^2 - 7$;

3) $\dfrac{\partial z}{\partial x} = -7$; 4) $\dfrac{\partial z}{\partial y} = 9y^2 + 10xy$.

12. $\overline{z}$ для $z = -5 - 4i$ равно

1) -5 – 2*i*; 2) 2 + 4*i*; 3) 5 –4*i*; 4) -5 + 4 *i*.

13. Число $7 - 2i$ является...

1) комплексным; 2) целым;

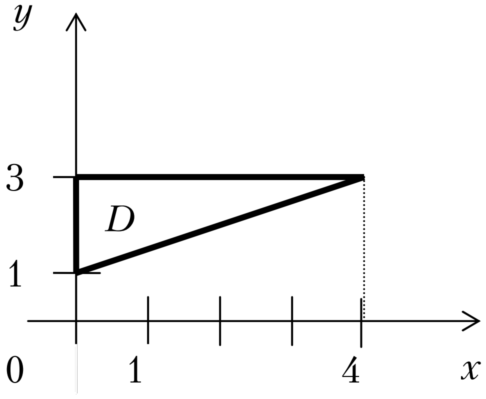
3) рациональным; 4) иррациональным.

14. Интеграл $\int \frac{xdx}{3x^2-2}$ равен

1) $\frac{1}{6}\ln\left|3x^2-2\right|$ + C; 2) $\frac{1}{3}\ln\left|3x^2-2\right|+C$;

3) $\frac{1}{6}\ln\left|3x^2+2\right|+C$; 4) $\frac{1}{2}\mathrm{arctg}\frac{x}{3}$ + C.

15. Расставить пределы интегрирования в двойном интеграле $\iint\limits_D f(x,y)\,dxdy$ по области D, изображенной на чертеже.



1) $\int\limits_0^4 dx \int\limits_{x+1}^{3} f(x,y)dy$; 2) $\int\limits_0^4 dx\int\limits_1^3 f(x,y)dy$;

3) $\int\limits_0^4 dx \int\limits_{\frac{1}{2}x+1}^{3} f(x,y)dy$; 4) $\int\limits_1^3 dy\int\limits_0^4 f(x,y)dx$.

Вариант 5

1. Определитель $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 5 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -2 & 2 & -4 & 3 \end{vmatrix}$ равен ...

1) -30; 2) 8;) 12; 4) 30.

2. Если $A = \begin{pmatrix} 7 & -1 \\ 5 & -6 \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, то матрица A - 3B равна

1) $\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 5 & -1 \end{pmatrix}$; 2) $\begin{pmatrix} 7 & -4 \\ 2 & -6 \end{pmatrix}$; 3) $\begin{pmatrix} 6 & -8 \\ 4 & 15 \end{pmatrix}$; 4) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

3. При каком значении α векторы $\overline{a}(5,\alpha,-3)$ и $\overline{b}(2,-1,-\alpha)$ взаимно перпендикулярны?

1) 5; 2) -5; 3) 1; 4) -2.

4. Даны координаты вершин треугольника $A(3,4)$, $B(-5,-2)$, $C(7,-6)$. Найти точку, делящую пополам медиану AD

1)$(2;-0{,}5)$; 2)$(4;-2)$; 3) $(1;-2{,}5)$; 4)$(2;0)$.

5. Величины отрезков, отсекаемых прямой $2x + 3y - 12 = 0$ на осях координат равны:

1) $a = 5, b = 3$; 2) $a = 6, b = 4$; 3) $a = -6, b = 4$; 4) $a = 4, b = -6$.

6. Уравнение $x^2 + y^2 - 4x + 6y - 62 = 0$ определяет на плоскости

1)параболу; 2) гиперболу; 3) окружность; 4) эллипс.

7. Предел $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1-6n^3}{4+n+n^2+3n^3}$ равен

1) 2; 2) -1; 3) 1; 4) -2.

8. Точка движется по закону $S(t) = -\dfrac{2}{3}t^3 + 4t^2 + 6t$ (S измеряется в метрах, t – в секундах). Скорость движения точки в момент времени $t = 0$ равна

1) 12 м/с; 2) 2 м/с; 3) 6 м/с; 4) 5,5 м/с.

9. Производная функции $y = \cos^4 3x$ равна

1) $4\sin^3 3x$; 2)$-12\cos^3 3x \sin 3x$;

3) $12\cos^3 3x \sin 3x$; 4) $4\cos^3 3x$.

10. Горизонтальная асимптота графика функции $f\left(x\right)=\dfrac{2-3x-8x^2}{4x^2-2x+7}$ задается уравнением вида...

1) $y=\dfrac{1}{2}x+3$; 2) $y=-2$; 3) $y=1$; 4) $y=2$.

11. Модуль комплексного числа $z=-3-4i$ равен

1) $\sqrt{7}$; 2) 5; 3) –5; 4) 1.

12. Значение производной функции $f\left(z\right)=-2z^2-i$ в точке $z_0=1+2i$ равно...

1) $4+12i$; 2) $-4-8i$; 3) $4-8i$; 4) $4+8i$.

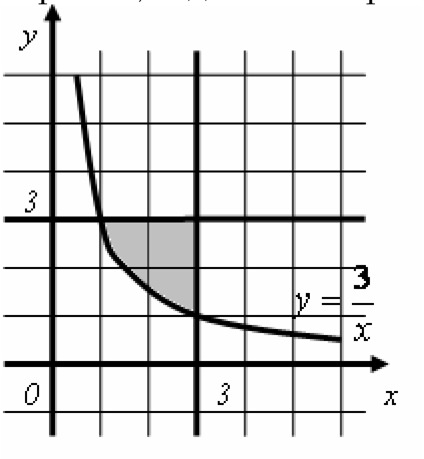
13. Частная производная функции $z=x^2\sin 3y$ по переменной x в точке $M\left(-2;\dfrac{\pi}{2}\right)$ равна:

1) 4; 2) -4; 3) 0; 4) 3.

14. Интеграл $\displaystyle\int\frac{3x^2dx}{2-x^3}$ равен

1) $\ln\left|2-x^3\right|+C$; 2) $-\ln\left|x^3\right|+C$; 3) $3\ln\left|2-x^3\right|+C$; 4) $-\ln\left|2-x^3\right|+C$.

15. Площадь заштрихованной части фигуры, изображенной на чертеже, задана интегралом



1) $\displaystyle\int_0^3\frac{3}{x}dx$; 2) $\displaystyle\int_1^3(3-\frac{1}{x})dx$;

3) $\displaystyle\int_1^3(3-\frac{3}{x})dx$; 4) $\displaystyle\int_1^3\left(\frac{3}{x}-3\right)dx$.

Вариант 6

5. Определитель $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 5 & 9 \\ 0 & 0 & 3 & 7 \\ -2 & -4 & -6 & 0 \end{vmatrix}$ равен ...

1) -48; 2) 9; 3) 12; 4) 48.

6. Если $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -4 \end{pmatrix}$ и $B=\begin{pmatrix} -2 & 1 & -0 \\ -3 & 2 & 2 \end{pmatrix}$, то $3A+2B$ равно

1) $\begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ -3 & 3 & -2 \end{pmatrix}$; 2) $\begin{pmatrix} -2 & 5 & -2 \\ -9 & 8 & -2 \end{pmatrix}$;

3) $\begin{pmatrix} 2 & 5 & -3 \\ -6 & 7 & -8 \end{pmatrix}$; 4) $\begin{pmatrix} 0 & 6 & -3 \\ -9 & 9 & -6 \end{pmatrix}$.

7. При каком значении α векторы $\overline{a}(\alpha, -3, 2)$ и $\overline{b}(1, 2, -\alpha)$ взаимно перпендикулярны?

1) 6; 2) -6; 3) 1; 4) -2.

8. Даны координаты вершин треугольника $A(1, 2)$, $B(-5,-3)$, $C(7, -6)$. Найти точку, делящую пополам медиану AD

1) $(-2; -0{,}5)$; 2) $(4; -2)$; 3) $(1; -4{,}5)$; 4) $\left(1; -\frac{5}{4}\right)$.

9. Уравнение $4x^2+4y^2-4x-8y-11=0$ определяет на плоскости

1) прямую; 2) плоскость; 3) эллипс; 4) окружность.

10. Вычислите предел $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^3-x^2+x-1}{x^2-4x+3}$

1) -1; 2) ∞; 3) $-\frac{1}{3}$; 4) 1.

7. Для функции $y=\ln(x^2-4x+4)$ уравнение касательной в точке $x_0=3$

1) $2x-y-6=0$; 2) $2x-y+3=0$; 3) $x-y-3=0$; 4) $2x+y+6=0$.

8. Дифференциал функции $y = x\ln x$ равен

1) $\frac{1}{x}dx$;　　2) xdx;　　3) $\ln xdx$;　　4) $(\ln x+1)dx$.

9. Горизонтальная асимптота графика функции $f(x)=\frac{3-4x-2x^2}{3x^2+x+5}$ задается уравнением вида...

1) $y=\frac{1}{2}x+3$;　　2) $y=\frac{2}{3}$;　　3) $y=1$;　　4) $y=-\frac{2}{3}$.

10. Если $z=5x^3+4y^2-x^3y^2+4xy$ и $z_2=1+5i$, то модуль комплексного числа $2z_1-z_2$ равен

1) 6;　　2) 5;　　3) 4;　　4) 3.

11. Производная от функции $f(z)=2z^3+3i$ в точке $z_0=1-3i$ равна

1) -48-6*i;*　　2) 10-6*i;*　　3) 60-36*i;*　　4) 0.

12. Если $U=\ln\left(x+\frac{y}{2z}\right)$, то U'_x в точке $M_0(1, 2, 1)$

1) 1;　　2) 0,25;　　3) 0,5;　　4) -0,5.

13. Частная производная $\frac{\partial z}{\partial x}$ функции $z=2x^3y^2+5x-2y+3$ имеет вид...

1) $6x^2y^2+5$;　　2) $2x^2y^2+5$;　　3) $6x^2y^2-2$;　　4) $12x^2y^2$.

14.Вычислить интеграл $\int\frac{xdx}{\sqrt{3x^2+4}}$.

1) $\frac{1}{3}\sqrt{3x^2+4}+C$;　　2) $\frac{1}{3}\sqrt{3x^2+4}+C$;

3) $\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{3}x}{2}+C$;　　4) $\ln\left|\sqrt{3}x+\sqrt{3x^2+4}\right|+C$.

15. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями: $y=4x-x^2$, $y=0$.

1) 16;　　2) $\frac{32}{3}$;　　3) 32;　　4) 4.

Вариант 7

1. Определитель $\begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 2 \end{vmatrix}$ равен

1) -4; 2) 4; 3) 5; 4) 0.

2. Если $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$ и $B=\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$, то $2A-3B^{\text{т}}$ равно

1) $\begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$; 2) $\begin{pmatrix} -4 & -3 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}$; 3) $\begin{pmatrix} -5 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$; 4) $\begin{pmatrix} -4 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

3. Величины отрезков, отсекаемых прямой $x-3y-9=0$ на осях координат равны:

1) $a=9,\ \ b=3$; 2) $a=9,\ \ b=-3$;

3) $a=-9,\ \ b=-3$; 4) $a=1,\ \ b=3$.

4. Если $\bar{a}=-5\bar{i}+3\bar{j}-7\bar{k}$, то $|\bar{a}|$ равен

1) -9; 2) $\sqrt{83}$; 3) 83; 4) $\sqrt{65}$.

5. Уравнение $x^2-4y^2-2x+8y-7=0$ определяет на плоскости

1) эллипс; 2) параболу; 3) гиперболу; 4) прямую.

6. Расстояние от точки M_0(3;5;-8) до плоскости $6x$-$3y$+$2z$-28=0 равно:

1) 0, 2) 16, 3) $\frac{41}{7}$, 4) $\sqrt{\frac{41}{7}}$.

7. Число точек разрыва 2-го рода функции $y=\dfrac{x+5}{(x+6)^2(x+1)^3x}$ равно...

1) 1; 2) 2; 3) 6; 4) 3.

8. Предел $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n^2-5n+3}{2-n^2}$ равен

1) 2; 2) -2; 3) 1; 4) -1.

9. График какой функции на всем отрезке $\left[a;b\right]$ одновременно удовлетворяет трем условиям: $y>0$, $y'>0$, $y''<0$?

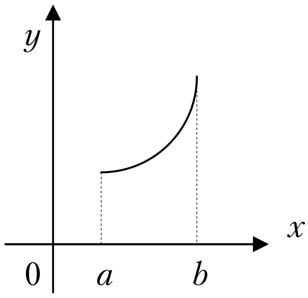


Рис.1

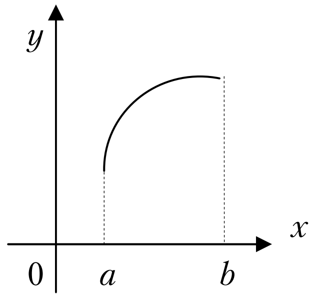


Рис.2

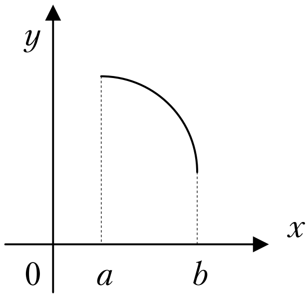


Рис.3

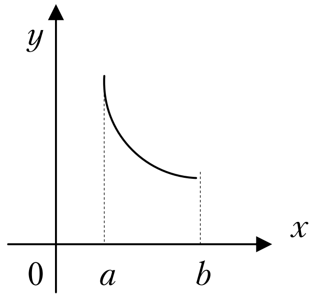


Рис.4

1) все графики; 2) только I и IV;

3) только II и III; 4) только II.

10. Угол наклона к оси Ox касательной к графику функции $y=e^{\sin 3x}+\operatorname{tg}4x$ в точке x=0 равен:

1) 0°; 2) 45°; 3) 30°; 4) 90°.

11. Если $U=\ln\left(2x-3y^2+5z^3\right)$, то $U'y$ в точке $M\left(1;-2;2\right)$ равна

1) $-\dfrac{12}{\ln 30}$; 2) $-\dfrac{6}{\ln 30}$; 3) $\dfrac{6}{\ln 30}$; 4) $\sqrt{73}$

12. Для функции $z=5x^3+4y^2-x^3y^2+4xy$ укажите верное утверждение:

1) $\dfrac{\partial z}{\partial x}=15x^2$; 2) $\dfrac{\partial z}{\partial y}=8y$;

3) $\dfrac{\partial z}{\partial x}+3x^2y^2=15x^2+4y$; 4) $\dfrac{\partial z}{\partial y}+2x^3y=12x^2-10y$.

13. Модуль комплексного числа $z = 4 - 3i$ равен

1) $\sqrt{7}$; 2) 5; 3) –5; 4) 1.

14. Значение производной функции $f(z) = -3z^2 - 2i$в точке $z_0 = 1 + i$ равно...

1) $4 + 12i$; 2) $-8i$; 3) $-6 - 8i$; 4) $-6 - 6i$.

15. Интеграл $\int \cos 2x dx$ равен

1) 2sin2x + C; 2) $\frac{1}{2}\sin 2x + C$;

3) cos2x + C; 4)-sin2x + C.

Вариант 8

1. Определитель $\begin{vmatrix} 2 & -3 & 2 & 2 \\ 3 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 4 & 1 \end{vmatrix}$ равен.....

1) 16; 2) 8; 3) 0; 4) −16;.

2. Если $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$ и $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, то 2$A$ – B = ...

1) $\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}$; 2) $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$; 3) $\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -3 \end{bmatrix}$; 4) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}$

3. Скалярное произведение векторов $\overline{a}$ = {–1; 0; 1; 2; 3} и $\overline{b}$ = {0; 1; 2; 3; –1}, заданных в ортонормированном базисе, равно......

1) –1; 2) 3; 3) 0; 4) 2.

4. Величины отрезков, отсекаемых прямой 2x – 3y – 6 = 0 на осях координат равны:

1) a = 3, b = 2; 2) a = 2, b = -3; 3) a = 3, b = -2; 4) a = -2, b = -3.

5. Уравнение $x^2 + y^2 - 16x + 4y + 18 = 0$ представляет в координатной плоскости

1) эллипс; 2) окружность; 3) параболу; 4) гиперболу.

6. Дана прямая $2x-3y+5=0$. Составьте уравнение прямой, проходящей через точку с координатами (4, -5), перпендикулярно данной прямой.

1) $3x+2y-2=0$;	2) $-3x+2y-2=0$;
3) $3x-2y-2=0$;	4) $5x+2y-2=0$.

7. Канонические уравнения прямой, проходящей через точку $M_0(1; 2; 3)$ параллельно вектору $\vec{a}\,(2; 0; -3)$, имеют вид:

1) $\frac{x-1}{2}=\frac{y-2}{0}=\frac{z-3}{-3}$;	2) $\frac{x-2}{1}=\frac{y-0}{2}=\frac{z-3}{3}$,
3) $\frac{x-1}{1}=\frac{y-2}{-2}=\frac{z-3}{-6}$;	4) $\frac{x-2}{2}=\frac{y-0}{0}=\frac{z-3}{-3}$.

8. Предел $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{6n^2+2}{1-7n^2}$ равен...

1) $\frac{6}{7}$;	2) $-\infty$;	3) ∞;	4) $-\frac{6}{7}$.

9. Производная функции $y=\cos^3 2x$ равна

1) $3\sin^2 2x$;	2) $-6\cos^2 2x\sin 2x$;	3) $6\cos^2 2x\sin 2x$;	4) $6\sin^2 2x$.

10. Производная функции $y = x\ln x$ в точке $x = e$ равна:

1) 1;	2) 0;	3) 2;	4) –1.

11. Если $z=-3+8i$, то $\overline{z}$ равно

1) $-3+8i$;	2) $3-8i$;	3) $3+8i$;	4) $\sqrt{73}$.

12. Интеграл $\int\frac{xdx}{3x^2-2}$ равен

1) $\frac{1}{6}\ln\left|3x^2-2\right| + C$;	2) $\frac{1}{3}\ln\left|3x^2-2\right|+C$;
3) $\frac{1}{6}\ln\left|3x^2+2\right|+C$;	4) $\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{x}{3}$ + C.

13. Установите соответствие между интегралами и разложениями подынтегральных функций на элементарные дроби...

1. $\int\frac{x+5}{(x-1)^2(x+3)}dx$	А. $\frac{A}{(x-1)^2}+\frac{B}{x-1}+\frac{C}{x+3}$

2. $\int \frac{2}{(x-1)(x+3)}dx$ B. $\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x+3}$

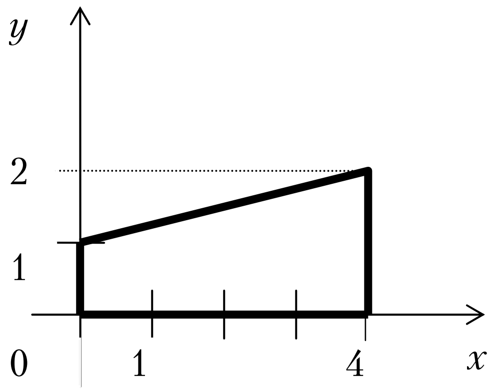
3. $\int \frac{2}{(x-1)\left(x^2+3\right)}dx$ C. $\frac{A}{x-1}+\frac{Bx+C}{x^2+3}$

14. Для функции $z=2x^3-4y^2+6x^2y-7y+28$ укажите верное утверждение:

1). $\frac{\partial z}{\partial x}=6x^2$; 2). $\frac{\partial z}{\partial x}-12xy=6x^2$

3). $\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial y}=6x^2-8y$; 4). $\frac{\partial z}{\partial y}=-8y$.

15. Расставить пределы интегрирования в двойном интеграле $\iint\limits_D f(x,y)dxdy$ по области D, изображенной на чертеже.



1) $\int\limits_0^4 dx \int\limits_0^{1+\frac{x}{4}} f(x,y)dy$; 2) $\int\limits_0^4 dx \int\limits_0^{\frac{x}{4}} f(x,y)dy$;

3) $\int\limits_0^4 dx \int\limits_0^{\frac{x}{4}} f(x,y)dy$; 4) $\int\limits_1^3 dy \int\limits_0^4 f(x,y)dx$.

Вариант 9

1. Имеет ли матрица А= $\begin{bmatrix} -1 & 5 & 3 \\ 2 & 0 & 4 \\ 3 & 4 & 10 \end{bmatrix}$ обратную?

1) да; 2) нет.

2. Какие из векторов $\bar{a} = \bar{i} - 2\bar{j} + \bar{k}$; $\bar{b} = 2\bar{i} - 4\bar{j} + \bar{k}$; $\bar{c} = -2\bar{i} + 4\bar{j} - 2\bar{k}$; $\bar{d} = \bar{i} + 2\bar{j} + \bar{k}$ коллинеарны?

1) $\bar{a}$ и $\bar{c}$; 2) $\bar{c}$ и $\bar{d}$; 3) $\bar{a}$ и $\bar{b}$; 4) $\bar{b}, \bar{c}$ и $\bar{d}$; 5) $\bar{a}$ и $\bar{d}$.

3. Если $\bar{a} = 3\bar{i} - 5\bar{j} + 7\bar{k}$, то $|a|$ равен

1) 9; 2) $\sqrt{83}$; 3) $\sqrt{63}$; 4) 83.

4. Канонические уравнения прямой, проходящей через точку $M_1(2; 0; -3)$ и $M_2(2; -3; 5)$, имеют вид:

1) $\frac{x-2}{0} = \frac{y-0}{-3} = \frac{z+3}{8}$; 2) $\frac{x-2}{2} = \frac{y-0}{-3} = \frac{z+3}{5}$;

3) $\frac{x-2}{2} = \frac{y-0}{0} = \frac{z+3}{-3}$; 4) $\frac{x-2}{4} = \frac{y-0}{-3} = \frac{z+3}{2}$.

5. Острый угол между прямыми $\frac{x-3}{1} = \frac{y+2}{-1} = \frac{z}{\sqrt{2}}$ и $\frac{x+2}{1} = \frac{y-3}{1} = \frac{z+5}{\sqrt{2}}$ равен:

1) $\frac{\pi}{6}$; 2) $\frac{\pi}{3}$; 3) $\frac{\pi}{4}$; 4) $\frac{\pi}{2}$.

6. Уравнение плоскости, проходящей через точки $A(-3; -2; -4)$, $B(-4; 2; -7)$, $C(5; 0; 3)$, имеет вид:

1) $\frac{x+3}{2} = \frac{y+2}{-1} = \frac{z+4}{-2}$; 2) $2x - y - 2z + 12 = 0$;

3) $2x - y - 2z - 4 = 0$; 4) $3x - 2y - z - 1 = 0$.

7. Уравнение $x^2 + y^2 - 6x + 8y - 11 = 0$ определяет на плоскости

1) параболу; 2) гиперболу; 3) окружность; 4) эллипс.

8. Если точка $x_0 = 8$, тогда её ε-окрестность может иметь вид...

1) $[-1; 8]$; 2) $[1; 8]$; 3) $[7{,}8; 8{,}2]$; 4) $[2; 10]$.

9. Предел $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{5x^6 + 5x^2 - 1}{4x^7 + 4x + 5}$ равен:

1) $\dfrac{1}{5}$; 2) $\dfrac{5}{4}$; 3) 0; 4) 1.

10. Производная функции $y = xe^x$ в точке $x = 1$ равна:

1) 1; 2) 2; 3) $2e$; 4) $\dfrac{1}{e}$.

11. Для функции $z = 4x^3 - 5y^2 + 6x^2y - 7y + 34$ укажите верное утверждение:

1) $\dfrac{\partial z}{\partial x} = 12x^2$; 2) $\dfrac{\partial z}{\partial y} = -10y$;

3) $\dfrac{\partial z}{\partial x} - 12xy = 12x^2$; 4) $\dfrac{\partial z}{\partial x} + \dfrac{\partial z}{\partial y} = 12x^2 - 10y$.

12. Модуль комплексного числа $z = 3 + 4i$ равен

1) 3; 2) -5; 3) 0; 4) 5.

13. Установите соответствие между интегралами и разложениями подынтегральных функций на элементарные дроби...

1. $\displaystyle\int \frac{x+5}{(x-2)^2(x+6)}dx$ A. $\dfrac{A}{(x-2)^2} + \dfrac{B}{x-2} + \dfrac{C}{x+6}$

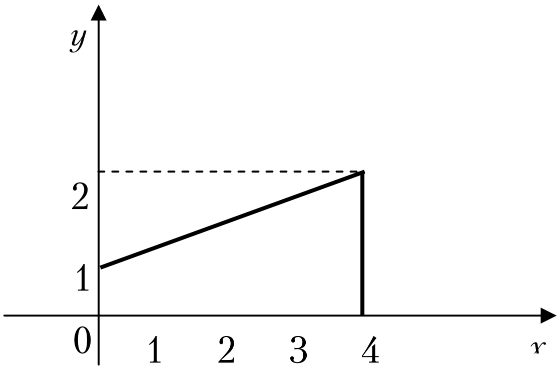
2. $\displaystyle\int \frac{2}{(x-2)(x+6)}dx$ B. $\dfrac{A}{x-2} + \dfrac{B}{x+6}$

3. $\displaystyle\int \frac{2}{(x-2)(x^2+6)}dx$ C. $\dfrac{A}{x-2} + \dfrac{Bx+C}{x^2+6}$

14. Интеграл $\displaystyle\int \frac{\ln^3 dx}{x}$ равен

1) $\dfrac{\ln^4 x}{4} + C$; 2) $\ln^4 x + C$; 3) $4\ln^4 x + C$; 4) $3\ln^2 x + C$.

15. Расставить пределы интегрирования в двойном интеграле $\iint f(x,y)\,dxdy$ по области D, изображенной на чертеже



1) $\int\limits_0^4 dx \int\limits_0^{1+\frac{x}{4}} f(x,y)dy;$ 2) $\int\limits_0^4 dx \int\limits_0^{\frac{x}{4}} f(x,y)dy;$

3) $\int\limits_0^4 dx \int\limits_{\frac{x}{4}+1}^{2} f(x,y)dy;$ 4) $\int\limits_0^4 dx \int\limits_{\frac{x}{4}-1}^{2} f(x,y)dy.$

Вариант 10

1. Определитель $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$ равен......

1) 2; 2) 4; 3) –4; 4) 0.

2. Если $A = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ и $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$, то $A - 2B =$ ....

1) $\begin{bmatrix} 1 & -4 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$; 2) $\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$; 3) $\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -4 & 2 \end{bmatrix}$; 4) $\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -4 & 3 \end{bmatrix}$.

3. калярное произведение векторов $\overline{a} = \{-1;\ 1;\ 0;\ 2;\ -1\}$ и $\overline{b} = \{0;\ 2;\ 1;\ 2;\ 1\}$, заданных в ортонормированном базисе, равно...

1) 3; 2) 6; 3) –1; 4) 5.

4. Если $\overline{a} = -5\overline{i} + 3\overline{j} - 7\overline{k}$, то $|\overline{a}|$ авен

1) –9; 2) $\sqrt{83}$; 3) 83; 4) $\sqrt{65}$.

5. Величины отрезков, отсекаемых прямой $x-3y-9=0$ на осях координат равны:

1) $a=9,\quad b=3$; 2) $a=9,\quad b=-3$; 3) $a=-9,\quad b=-3$; 4) $a=1,\quad b=3$.

6. Уравнение плоскости, проходящей через точку $M_0(1;\ -1;\ -1)$ перпендикулярно прямой $\dfrac{x+3}{2}=\dfrac{y-1}{-3}=\dfrac{z+2}{4}$, имеет вид:

1) $3x-2y+5z-10=0$; 2) $x-y-z+1=0$;

3) $2x+3y-4z+1=0$; 4) $2x-3y+4z-1=0$.

7. Угол между плоскостями $+2y+2z-3=0$ и $6x+12y-15z-1=0$ равен:

1) $\arccos\dfrac{1}{15}$; 2) $\arccos\dfrac{12}{17}$; 3) $\arccos\dfrac{2}{15}$; 4) $\arccos\dfrac{1}{2}$.

8. Уравнение $3y^2+5x+6y+13=0$ определяет на плоскости:

1) эллипс; 2) параболу; 3) гиперболу; 4) прямую.

9. Если точка $x_0=10$, тогда её ε – окрестность может иметь вид...

1) $[-1{,}5;10]$; 2) $[1{,}5;10]$; 3) $[9{,}8;10{,}2]$; 4) $[7{,}5;10{,}5]$.

10. Предел $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^3+7x^2-2}{4x^3-4x+3}$ равен:

1) 2; 2) 4; 3) $\dfrac{1}{2}$; 4) $-\dfrac{2}{3}$.

11. Производная функции $y=\sqrt{\ln x}$ в точке $x=e$ равна:

1) $\dfrac{1}{2e}$; 2) $\dfrac{e}{2}$; 3) $\dfrac{1}{2}$; 4) e.

12. Для функции $z=2x^3-4y^2+6x^2y-7y+28$ укажите верное утверждение:

1) $\dfrac{\partial z}{\partial x}=6x^2$; 2) $\dfrac{\partial z}{\partial x}-12xy=6x^2$;

3) $\dfrac{\partial z}{\partial x}+\dfrac{\partial z}{\partial y}=6x^2-8y$; 4) $\dfrac{\partial z}{\partial y}=-8y$.

13. Модуль комплексного числа $z = 4 + 3i$ равен

1) 3; 2) -5; 3) 0; 4) 5.

14. Интеграл $\int \frac{xdx}{1-2x^2}$ равен

1) $-\frac{1}{4}\ln\left|1-2x^2\right|+c$; 2) $\frac{1}{4}\ln\left|1-2x^2\right|+c$;

3) $4\ln\left|1-2x^2\right|+c$; 4) $\ln\left|1-2x^2\right|+c$.

15. Изменить порядок интегрирования $\int\limits_0^2 dx \int\limits_{y=x^2}^{y=4} f(x,y)dy$.

1) $\int\limits_0^4 dy \int\limits_{x=0}^{x=\sqrt{y}} f(x,y)dx$; 2) $\int\limits_{y=x^2}^{y=4} dy \int\limits_0^2 f(x,y)dx$;

3) $\int\limits_0^4 dy \int\limits_0^2 f(x,y)dx$; 4) $\int\limits_0^2 dy \int\limits_{x=y^2}^{x=4} f(x,y)dx$.

8. ВАРИАНТЫ ТЕСТОВ К ЭКЗАМЕНУ

Вариант 1

1. Дифференциальное уравнение $y'-\frac{3}{x}y=x$ является:

1) однородным дифференциальным уравнением;

2) линейным неоднородным дифференциальным уравнением;

3) дифференциальным уравнением с разделяющимися переменными;

4) уравнением Бернулли.

2. Дано дифференциальное уравнение $y'=\left(3k-1\right)x^2$, тогда функция $y=\frac{2}{3}x^3$ является его решением при *k*, равным:

1) 1; 2) 2; 3) 0; 4) 3.

3. Дано линейное однородное дифференциальное уравнение $y''-4y'+3y=0$, тогда его общее решение имеет вид:

1) $C_1e^x+C_2e^{3x}$; 2) $C_1e^x+C_2e^{-3x}$;

3) $C_1e^{-x}+C_2e^{-3x}$; 4) $C_1e^{-x}+C_2e^{3x}$.

4. Общий член последовательности $1,\frac{2}{3},\frac{3}{5},\frac{4}{7},\ldots$ имеет вид:

1) $a_n=(-1)^{n+1}\frac{n}{2n+1}$; 2) $a_n=(-1)^n\frac{n}{2n-1}$;

3) $a_n=\frac{n}{2n-1}$; 4) $a_n=\frac{n}{2n+1}$.

5. Укажите правильное утверждение относительно сходимости числовых рядов

$$\text{А) } \sum_{n=1}^{\infty}\frac{3}{4^n} \text{ и В) } \sum_{n=1}^{\infty}\frac{5}{\sqrt{n+2}}$$

1) А – расходится, В – сходится;

2) А и В сходятся;

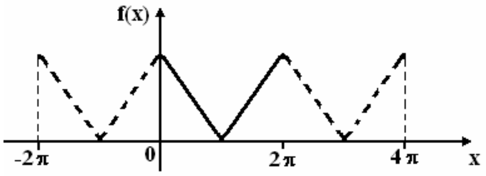
3) А – сходится, В – расходится;

4) А и В расходятся.

6. Радиус сходимости степенного ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^{3n}}{125^{n}}$

1) 2; 2) $\frac{1}{5}$; 3) 5; 4) ∞.

7. Функция $f(x)$ при $x\in[0;2\pi]$ и её периодическое продолжение заданы на рисунке.



Тогда ряд Фурье для этой функции имеет вид:

1) $\frac{a_0}{2}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n\cos nx$; 2) $\frac{a_0}{2}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n\sin nx$;

3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n\sin nx$; 4) $\frac{a_0}{2}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n\cos nx+b_n\sin nx$.

8. Дана функция $f(x)=3x$, $x\in[-\pi;\pi]$. Тогда коэффициент a_4 разложения $f(x)$ в ряд Фурье равен:

1) $\frac{3}{\pi}$; 2) 0; 3) π; 4) $\frac{3\pi}{2}$.

9. Несовместные события A, B, C образуют полную группу, если...

1) $P(A)=\frac{1}{3}$, $P(B)=\frac{1}{4}$, $P(C)=\frac{5}{12}$

2) $P(A)=\frac{1}{3}$, $P(B)=\frac{1}{3}$, $P(C)=\frac{1}{3}$

3) $P(A)=\frac{5}{14}$, $P(B)=\frac{1}{2}$, $P(C)=\frac{2}{14}$

4) $P(A)=\frac{1}{8}$, $P(B)=\frac{1}{4}$, $P(C)=\frac{1}{8}$

10. Игральная кость бросается один раз. Тогда вероятность того, что на верхней грани выпадет *не более пяти очков*, равна:

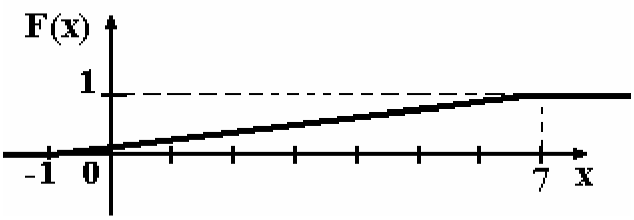
1) $\frac{1}{6}$; 2) $\frac{2}{3}$; 3) $\frac{5}{6}$; 4) 1.

11. Дискретная случайная величина X задана законом распределения вероятностей:

X	-1	0	3
p_i	0,1	0,3	0,6

Тогда математическое ожидание случайной величины $Y = 3X$ равно:
1) 6; 2) 4,7; 3) 5,7; 4) 5,1.

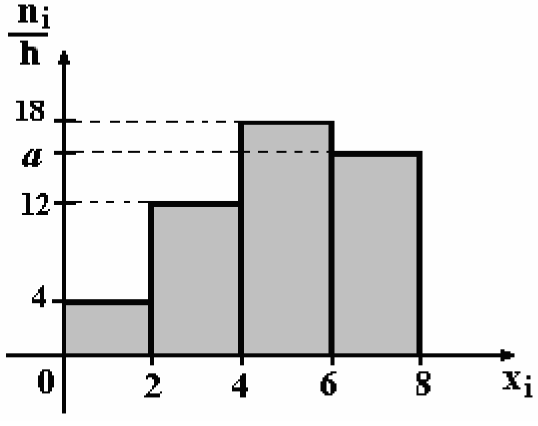
12. График функции распределения вероятностей непрерывной случайной величины X имеет вид:



Тогда математическое ожидание X равно:
1) 8; 2) 4; 3) 3; 4) 7.

13. Непрерывная случайная величина подчинена нормальному закону распределения с функцией плотности $f(x)=\frac{1}{2\sqrt{\pi}}e^{-\frac{(x-1)^2}{4}}$. Найти $D[3X-5]$.
1) 4; 2) 18; 3) 2; 4) 1.

14. По выборке объема n=100 построена гистограмма частот:



Тогда значение a равно:
1) 66; 2) 15; 3) 17; 4) 16.

15. Мода вариационного ряда 5, 6, 7, 9, 9, 12, 13 равна ...
1) 13; 2) 5; 3) 7; 4) 9.

Вариант 2

1. Какое из следующих дифференциальных уравнений решается последовательным интегрированием

1) $y''+2y'+y=0$; 2) $y''=\cos x$; 3) $y''+2y\left(y'\right)^2=0$; 4) $y''+y=e^x$.

2. Частное решение дифференциального уравнения $y''=e^x$, если $y(0)=0$ и $y'(0)=1$имеет вид:

1) $y=e^x$; 2) $y=e^x-1$; 3) $y=e^x+2x-1$; 4) $y=e^x+2x$.

3. Общее решение дифференциального уравнения $y''-4y'=0$ имеет вид:

1) $y=c_1+c_2e^{-4x}$; 2) $y=c_1e^{4x}+c_2e^{-4x}$;

3) $y=c_1e^x+c_2xe^{-4x}$; 4) $y=c_1x+c_2e^{-4x}$.

4. Общий член ряда $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}-\frac{1}{6}+\ldots$ имеет вид:

1) $u_n=\frac{(-1)^{n+1}}{2^{n-1}}$; 2) $u_n=\frac{(-1)^n}{2^{n-1}}$; 3)$u_n=\frac{1}{n^2}$; 4)$u_n=\left(\frac{1}{2}\right)^n$;

5. Найдите из нижеприводимых рядов сходящиеся

$a)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^3}{(3n-2)^3}$; $b)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n}{n^3}$; $c)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{3n+2}}$; $d)\ \sum_{n=1}^{\infty}\left(arctg\frac{1}{n}\right)^n$

1) только $a)$; 2) только $b)$; 3) только $b)$ и $d)$; 4) $c)$.

6. Радиус сходимости степенного ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^2}{3^n\cdot n^2}$

1) 1; 2) 0; 3) $\frac{1}{3}$; 4) ∞.

7. Сколькими способами можно поставить в очередь 7 покупателей в магазине?

1) 7!; 2) 7; 3) 70; 4) 10.

8. В первой коробке 7 красных и 3 черных карандаша, а во второй коробке 5 черных и 5 красных карандаша. Из произвольной коробки наугад вынимают один карандаш. Какова вероятность того, что этот карандаш красный?

1) $\frac{1}{12}$; 2) $0{,}6$; 3) $0{,}5$; 4) $0{,}7$.

9.Найти p_4, если дискретная случайная величина X задана рядом распределения

X	2	3	5	6
p_i	0,3	0,1	0,5	p_4

Тогда вероятность p_4 равна:

1) 0,2; 2) 0,5; 3) 0,1; 4) 0,4.

10. Случайная величина X задана рядом распределения

X	2	3	4
p_i	0,3	0,4	0,3

Найти $M[X]$.

1) 1; 2) 2,5; 3) 9; 4) 3.

11. Непрерывная случайная величина подчинена нормальному закону распределения с функцией плотности $f(x)=\frac{1}{2\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-3)^2}{8}}$. Найти $D[2X-3]$.

1) 36; 2) 16; 3)8; 4) 11.

12. Даны две независимые случайные величины, заданные своими таблицами распределений

X	0	2
P	0,7	0,3

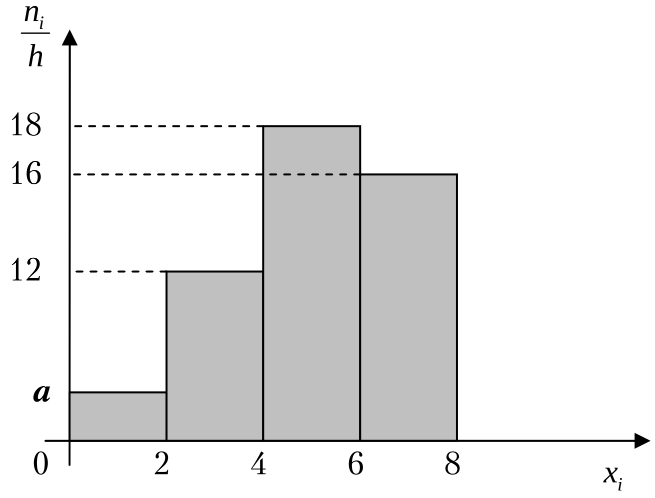
и

Y	1	3
P	0,4	0,6

Тогда $M[X+Y]$

1) 1,5; 2) 2,5; 3) 2,8; 4) 2,3.

13. Чему равно значение ***a***, если данная гистограмма частот построена по выборке объемом n=100?



1) 7; 2) 5; 3) 4; 4) 3.

14. Мода вариационного ряда 2, 4, 7, 7, 10,12, 13 равна ...
1) 13; 2) 5; 3) 7; 4) 9.

15. Основная гипотеза $H_0 : \sigma^2 = 5$. Тогда конкурирующей может являться гипотеза...

1) $H_1 : \sigma^2 < 6$; 2) $H_1 : \sigma^2 \le 5$; 3) $H_1 : \sigma^2 < 5$; 4) $H_1 : \sigma^2 \ge 5$.

Вариант 3

1. Уравнение $yy' - 1 = x$ является...

1) уравнением Бернулли;
2) однородным дифференциальным уравнением первого порядка;
3) уравнением с разделяющимися переменными;
4).линейным дифференциальным уравнением первого порядка.

2. Укажите общее решение дифференциального уравнения $(1+x)y' = 2y$.

1) $y = (1+x)^2$; 2) $y = C(1+x)^2$;

3) $y = 2C(1+x)$; 4) $y = \ln(C(1+x)^2)$.

3. Частное решение дифференциального уравнения $(x^2+y^2)dx - xydy = 0$, при условии, что $y(1)=1$, имеет вид

1) $\ln|x| - \frac{y^2}{2x^2} + \frac{1}{2} = 0$; 2) $\ln|x| - \frac{y^2}{2x^2} - \frac{1}{2} = 0$;

3) $\ln\left|x^2+y^2\right| - \ln|x| + \frac{1}{2} = 0$; 4) $\ln\left|x^2+y^2\right| - \ln|xy| - 1 = 0$.

4. Общее решение линейного однородного дифференциального уравнения второго порядка $y'' + 4y' + 3y = 0$ имеет вид...

1) $y = C_1 \cdot e^{x} + C_2 \cdot e^{3x}$; 2) $y = C_1 \cdot e^{-x} + C_2 \cdot e^{3x}$;

3) $y = C_1 \cdot e^{-x} + C_2 \cdot e^{-3x}$; 4) $y = C_1 \cdot e^{x} - C_2 \cdot e^{3x}$.

5. Общий член ряда $1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{64} + \ldots$ имеет вид:

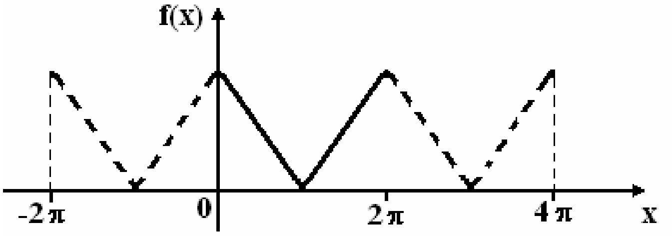
1) $u_n = \frac{1}{4^{n-1}}$; 2) $u_n = \frac{1}{4^n}$; 3) $u_n = \frac{1}{n^2}$; 4) $u_n = \left(\frac{1}{4}\right)^n$.

6. Даны числовые ряды:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+3}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n+3}}$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3+2}$; г) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^2+3}$. Из них сходятся

1)только а); 2) а) и в); 3) все, кроме б); 4) б).

7. Функция $f(x)$ при $x \in [0;2\pi]$ и её периодическое продолжение заданы на рисунке.



Тогда ряд Фурье для этой функции имеет вид:

1) $\frac{a_0}{2} + \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx$; 2) $\frac{a_0}{2} + \sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx$;

3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx$; 4) $\frac{a_0}{2} + \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx$.

8. Дана функция $f(x)=3x$, $x\in[-\pi;\pi]$. Тогда коэффициент a_4 разложения $f(x)$ в ряд Фурье равен:

1) $\frac{3}{\pi}$; 2) 0; 3) π; 4) $\frac{3\pi}{2}$.

9.Сколько четырехзначных нечетных чисел можно составить из цифр числа 3694, если каждую цифру можно использовать не более одного раза?

1) 48; 2) 24; 3) 2; 4) 12.

10. Бросают два кубика. События А – «на первом кубике выпала четверка» и В – «на втором кубике выпала тройка» являются:

1) несовместными и независимыми;
2) независимыми и совместными;
3) совместными и зависимыми;
4) зависимыми и несовместными

11. Вероятность того, что студент сдаст первый экзамен, равна 0,9; второй – 0,8. Какова вероятность того, что хотя бы один экзамен будет сдан?

1) 0,9; 2) 0,72; 3) 0,98; 4) 0,8.

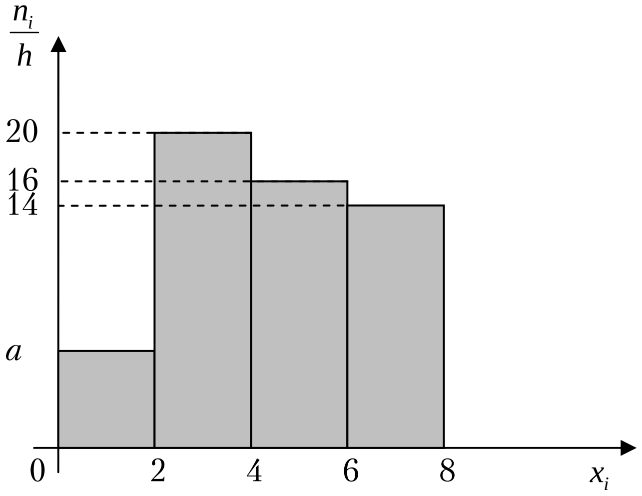
12 Вероятность поражения цели при каждом выстреле равна 0,2. Сколько нужно сделать выстрелов, чтобы можно было ожидать в среднем 5 попаданий в цель?

1) 25; 2) 10; 3) 2; 4) 20.

13. Найдите дисперсию случайной величины X распределенной равномерно на интервале (1;5)

1) $\frac{1}{3}$; 2) 1; 3) $\frac{4}{3}$; 4) 4.

14. Чему равно значение ***a***, если данная гистограмма частот построена по выборке объемом n=110?



1) 6; 2)5; 3)10; 4)8.

15. Выборочное уравнение прямой регрессии Y на X имеет вид $y=5-3{,}2x$. Тогда выборочный коэффициент корреляции может быть равен...

1) 2,2; 2)-2,2; 3) -0,3; 4) 0,3.

Вариант 4

1. Дифференциальное уравнение $y' - y + 3 = 0$ по виду
1) только однородное;
2) только линейное;
3) только с разделяющимися переменными;
4) линейное и с разделяющимися переменными.

2. Частное решение дифференциального уравнения $(1+x^2)\,y' = 2x\,(4-y)$, если y(0) = 1, имеет вид:

1) $y = 4 - \dfrac{3}{1+x^2}$; 2) $y = \dfrac{4x^2-1}{x^2+1}$; 3) $y = 4 + \dfrac{1}{1+x^2}$; 4) $y = \dfrac{4x^2}{1+x^2}$.

3. Общее решение дифференциального уравнения $y'' - 4y' = 0$ имеет вид:

1) $y = C_1e^{4x} + C_2e^{-4x}$; 2) $y = C_1e^{-4x} + C_2xe^{-4x}$;
3) $y = C_1 + C_2\,e^{4x}$; 4) $y = C_1e^{4x} + C_2xe^{4x}$.

4. Общий член ряда $\frac{1}{3}-\frac{1}{9}+\frac{1}{27}-\frac{1}{81}+\ldots$ имеет вид:

1) $u_n=\frac{(-1)^n}{3}$. 2) $u_n=\left(-\frac{1}{3}\right)^n$; 3) $u_n=\frac{1}{3^{n-1}}$; 4) $u_n=\left(-\frac{1}{3}\right)^{n+1}$.

5. Из рядов а) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3n+2}{2n+1}\right)^n$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}}$ расходятся

1) только а); 2) а) и в); 3) все; 4) только в).

6. Радиус сходимости степенного ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n^2\cdot 3^n}$

1) 2; 2) 3; 3) 1; 4) 0.

7. В первой коробке 7 стандартных и 3 бракованных детали, а во второй коробке 5 стандартных и 5 бракованных деталей. Из произвольной коробки наугад вынимают одну деталь. Какова вероятность того, что эта деталь стандартная?

1) $\frac{1}{12}$; 2) $0{,}6$; 3) $0{,}5$; 4) $0{,}7$.

8. Найти p_3, если дан ряд распределения

X	3	6	12	24
p_i	0,2	0,1	p_3	0,5

1) 0,9; 2) 0,7; 3) 1; 4) 0,2.

9. Даны две случайные величины X и Y.

X	-1	0	1
P_i	0,2	0,3	0,5

Y	0	1	2	3
p_i	0,1	0,2	0,3	0,4

Тогда $M[Y-2X]$ равно

1) 1,4; 2) 0,8; 3) 1,7; 4) 3,2.

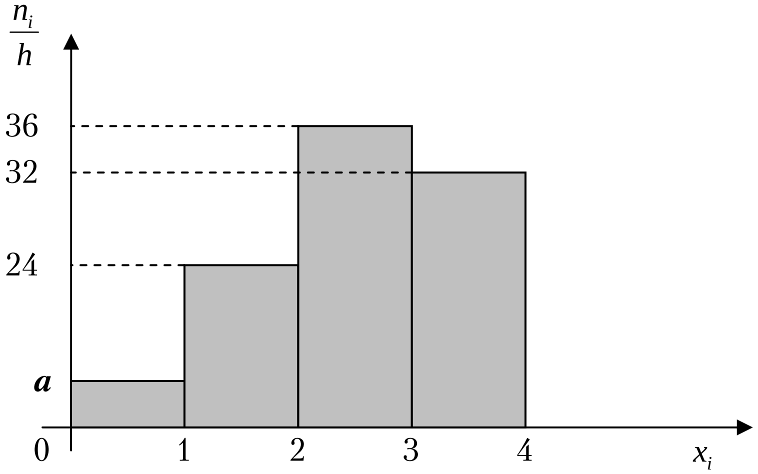
10. Случайная величина X задана плотностью распределения $f(x)=\frac{1}{3\sqrt{2\pi}}\cdot e^{-\frac{(x-2)^2}{18}}$. Тогда $D[2X+1]$ равна

1) 16; 2) 32; 3) 36; 4) 28.

11. Случайная величина X распределена по нормальному закону с параметрами а и σ. По результатам наблюдаемых значений 35, 15, 5, 25, 5 оценить параметр а.

1) 19; 2) 15; 3) 17; 4) 20.

12. Чему равно значение ***a***, если данная гистограмма частот построена по выборке объемом n=100?



1) 10; 2) 8; 3) 6; 4) 7.

13. Мода вариационного ряда 5, 5, 5, 5, 6, 7, 7, 7, 9, 12, 12, 13 равна ...

1) 13; 2) 5; 3) 7; 4) 9.

14. Выборочное уравнение прямой регрессии Y на X имеет вид $y = 4 - 2{,}3x$. Тогда выборочный коэффициент корреляции может быть равен...

1) 2,2; 2) -2,2; 3) -0,3; 4) 0,3.

15. Основная гипотеза $H_0 : \sigma^2 = 25$. Тогда конкурирующей может являться гипотеза...

1) $H_1 : \sigma^2 < 26$; 2) $H_1 : \sigma^2 \leq 25$; 3) $H_1 : \sigma^2 < 25$; 4) $H_1 : \sigma^2 \geq 25$.

Вариант 5

1. Уравнение $yy' - 1 = x$ является...

1) уравнением Бернулли;
2) однородным дифференциальным уравнением первого порядка;
3) уравнением с разделяющимися переменными;
4) линейным дифференциальным уравнением первого порядка.

2. Частное решение дифференциального уравнения $xy' = y^2 + 1$, если $y(1) = 0$

1) $\operatorname{arctg} y = \ln x$; 2) $\operatorname{arctg} y + \ln x = 0$;

3) $\operatorname{arctg} y = \ln 2x$; 4) $\arcsin y = \ln 2x$.

3. Общее решение дифференциального уравнения $y' + \operatorname{tg} x \cdot y = \frac{1}{\cos x}$, имеет вид:

1) $C \sin x + \cos x$; 2) $C \cos x + \sin x$;

3) $(\operatorname{tg} x + C) \sin x$; 4) $\cos x - C \sin x$.

4. Общее решение дифференциального уравнения $y'' - 7y' + 6y = 0$

1) $e^{6x}(C_1 + C_2 x)$; 2) $C_1 e^{6x} + C_2 e^{6x}$;

3) $C_1 + C_2 e^{6x}$; 4) $C_1 e^{-6x} + C_2 e^{-x}$.

5. Общий член ряда $1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{64} + \ldots$ имеет вид:

1) $u_n = \frac{1}{4^{n-1}}$; 2) $u_n = \frac{1}{4^n}$; 3) $u_n = \frac{1}{n^2}$; 4) $u_n = \left(\frac{1}{4}\right)^n$.

6. Какие из данных рядов являются сходящимися а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{3n^2 + 1}{2n + 5}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n!}$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n+1}{3n+2}\right)^n$; г) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n}{3n^2 + 2}$

1) а) и б); 2) б) и в); 3) а) и г); 4) в) и г).

7. Радиус сходимости степенного ряда $1 + \frac{x^3}{125} + \frac{x^6}{125^2} + \frac{x^9}{125^3} + \ldots + \frac{x^{3n}}{125^n} + \ldots$ равен

1) 3; 2) 125; 3) 5; 4) 4.

8. Сколько четырехзначных нечетных чисел можно составить из цифр числа 3694, если каждую цифру можно использовать не более одного раза?

1) 48; 2) 24; 3) 2; 4) 12.

9. Бросают два кубика. Событие А – «на первом кубике выпала тройка» и событие В – «на втором кубике выпала шестерка» являются :

1) несовместными и независимыми;
2) независимыми и совместными;
3) совместными и зависимыми;
4) зависимыми и несовместными.

10. Найти p_2, если случайная величина X задана таблицей распределения

X	0	1	2	3	4
P	0,1	p_2	0,3	0,2	0,1

1) 0,3; 2) 0,2; 3) 0,1; 4) 0.

11. Даны две независимые случайные величины, заданные своими таблицами распределений

X	-1	0	1	2
P	0,2	0,3	0,1	0,4

и

Y	0	1	2
P	0,3	0,3	0,4

Тогда $M[2X+Y]$ равно

1) 1,8; 2) 2,5; 3) 3,9; 4) 2,3.

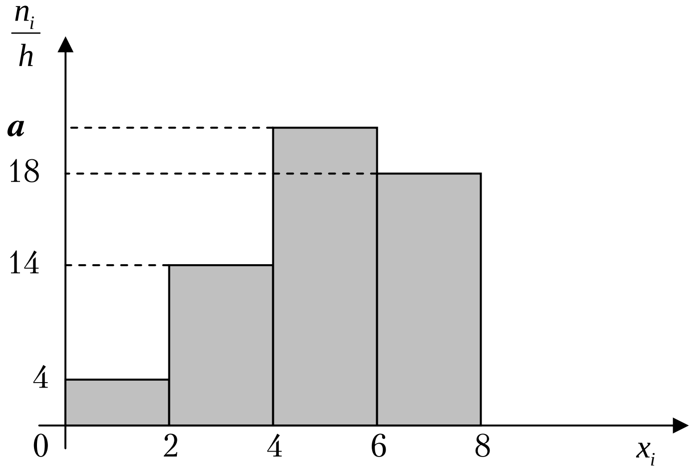
12. Непрерывная случайная величина подчинена нормальному закону распределения с функцией плотности $f(x)=\frac{1}{2\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-3)^2}{8}}$. Найти $D[5X-2]$.

1) 100; 2) 20; 3) 22; 4) 18.

13. Два стрелка произвели по одному выстрелу по цели. Вероятность поражения цели каждым из стрелков равна 0,8. Найти вероятность того, что только один стрелок поразит мишень.

1) 0,32; 2) 0,64; 3) 0,16; 4) 0,36.

14. Чему равно значение ***a***, если данная гистограмма частот построена по выборке объемом n=100?



1) 28; 2) 19; 3) 14; 4) 20.

15. Основная гипотеза $H_0:\sigma^2=15$. Тогда конкурирующей может являться гипотеза...

1) $H_1:\sigma^2<16$; 2) $H_1:\sigma^2\le 15$; 3) $H_1:\sigma^2<15$; 4) $H_1:\sigma^2\ge 15$.

Вариант 6

1. Линейное неоднородное дифференциальное уравнение первого порядка имеет следующий вид:

1) $P(x,y)dx+Q(x,y)dy=0$; 2) $y'+p(x)\cdot y=q(x)$;

3) $y''=f(x)$; 4) $y=xy'+f(y')$.

2. Частное решение дифференциального уравнения $ydx+\text{ctg}(x)dy=0$, при $y\left(\frac{\pi}{3}\right)=1$ имеет вид:

1) $3\cos x+x$; 2) $\sin x$; 3) $2\cos x+2$; 4) $-2\cos x$.

3. Общее решение дифференциального уравнения $2y''-3y'+y=0$ имеет вид:

1) $c_1e^{\frac{1}{2}x}+c_2e^x$; 2) $c_1e^{-x}+c_2e^x$; 3) $e^x(c_1+c_2x)$; 4) $c_1e^{2x}+c_2e^{-x}$.

4. Общий член ряда $\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\frac{1}{27}+\frac{1}{81}+\dots$ имеет вид:

1) $u_n=\frac{(-1)^n}{3}$; 2) $u_n=\frac{1}{3}$; 3) $u_n=\frac{1}{3^{n-1}}$; 4) $u_n=\frac{1}{3^n}$.

5. Из рядов а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n-2}{2n+1}\right)^n$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sin\frac{1}{n}}{n^2}$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{5^n(n+1)^2}{3^n}$; сходятся

1) только в); 2) только а) и б); 3) все; 4) только б) и в).

6. Радиус сходимости степенного ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}$

1) 2; 2) 4; 3)1; 4) ∞.

7. Дана функция $f(x)=5x$, $x\in[-\pi;\pi]$. Тогда коэффициент a_4 разложения $f(x)$ в ряд Фурье равен:

1) $\frac{3}{\pi}$; 2) 0; 3) π; 4) $\frac{3\pi}{2}$.

8. Несовместные события А, В, С не образуют полную группу, если...

1) $P(A)=\frac{1}{3}$, $P(B)=\frac{1}{4}$, $P(C)=\frac{5}{12}$

2) $P(A)=\frac{1}{3}$, $P(B)=\frac{1}{3}$, $P(C)=\frac{1}{3}$

3) $P(A)=\frac{5}{14}$, $P(B)=\frac{1}{2}$, $P(C)=\frac{2}{14}$

4) $P(A)=\frac{1}{8}$, $P(B)=\frac{1}{4}$, $P(C)=\frac{1}{8}$

9. Сколькими различными способами можно выбрать три лица на три различные должности из десяти кандидатов?

1) 1100; 2) 850; 3) 720; 4) 640.

10. Событие А может наступить лишь при условии появления одного из двух несовместных событий B_1 и B_2, образующих полную группу. Известно, что вероятность $P(B_1)=\frac{1}{3}$ и условные вероятности $P(A/B_1)=\frac{3}{7}$, $P(A/B_2)=\frac{6}{11}$. Тогда вероятность *P(A)* равна...

1) $\frac{39}{77}$; 2) $\frac{75}{77}$; 3) $\frac{75}{231}$; 4) $\frac{39}{177}$.

11. Найти p_2, если дискретная случайная величина x задана рядом распределения

X	1	2	3	4
p_i	0,3	p_2	0,4	0,1

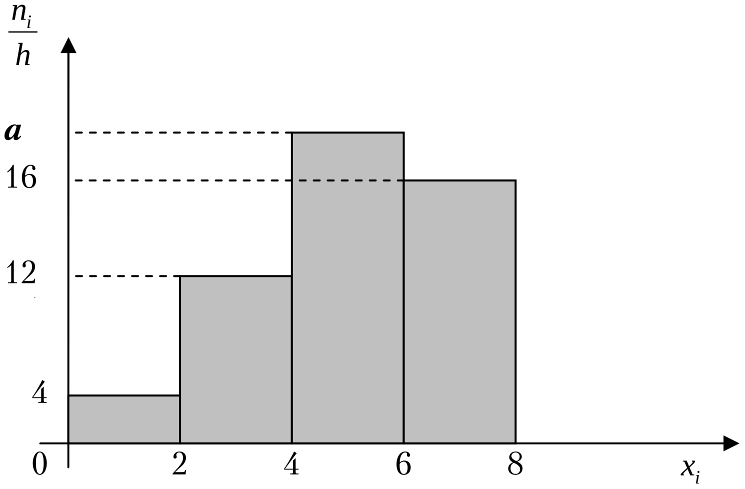
Тогда вероятность p_3 равна...

1) 0,5; 2) 0,2; 3) 0,1; 4) 1.

12. Непрерывная случайная величина подчинена нормальному закону распределения с функцией плотности $f(x)=\frac{1}{2\sqrt{\pi}}e^{-\frac{(x-1)^2}{4}}$. Найти $D[3X-5]$.

1) 4; 2) 18; 3)2; 4) 1.

13. Чему равно значение ***a***, если данная гистограмма частот построена по выборке объемом n=100?



1) 18; 2) 19; 3) 17; 4) 20.

14. Выборочное уравнение прямой регрессии Y на X имеет вид $y=4-2,2x$. Тогда выборочный коэффициент корреляции может быть равен...

1) 2,2; 2) -2,2; 3) -0,3; 4) 0,3.

15. Мода вариационного ряда 1,2, 3, 3,4, 6, 7, 8, 10 равна...

1) 7,5; 2) 10; 3) 7; 4) 3.

Вариант 7

1. Общее решение дифференциального уравнения $xyy''=1-x^2$ равно:

1) $x^2+y^2=\ln Cx^2$; 2) $x^2-y^2=\ln Cx^2$;

3) $-x^2-y^2=\ln Cx^2$; 4) $-x^2+y^2=\ln Cx^2$

2. Общее решение дифференциального уравнения $y'=\frac{y^2}{x^2}-2$ равно:

1) $y+2x=Cx^3(y-x)$; 2) $y+2x=Cx^3(y+x)$;

3) $y-2x=Cx^3(y+x)$; 4) $y-2x=Cx^3(y-x)$.

3. Общее решение дифференциального уравнения второго порядка $y''=x+\sin x$ равно:

1) $y=\frac{x^3}{6}-\sin x+C_1x+C_2$; 2) $y=\frac{x^3}{6}+\cos x+C_1x+C_2$;

3) $y=\frac{x^3}{6}+\sin x-C_1x$; 4) $y=\frac{x^3}{6}-\cos x+C_1x+C_2$.

4. Общее решение дифференциального уравнения $y''+y'-2y=0$ имеет вид:

1) $c_1e^{\frac{1}{2}x}+c_2e^x$; 2) $c_1e^{-2x}+c_2e^x$; 3) $e^x(c_1+c_2x)$; 4) $c_1e^{2x}+c_2e^{-x}$.

5. Написать первые пять членов ряда по заданному его общему члену $U_n=\frac{1}{(2n-1)\cdot 2^{n-1}}$.

1) $1+\frac{1}{6}+\frac{1}{20}+\frac{1}{56}+\frac{1}{144}+\cdots$; 2) $\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\frac{1}{9}+\frac{1}{11}+\cdots$;

3) $1-\frac{1}{6}+\frac{1}{20}-\frac{1}{56}-\frac{1}{144}+\cdots$; 4) $1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\frac{1}{9}+\cdots$.

6. Какой признак следует применить для исследования ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n^3-n}}$ на сходимость?

1) сравнения; 2) Даламбера;

3) радикальный Коши; 4) интегральный Коши.

7. Укажите какие из рядов сходятся.

I. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4}{7n+2}$; II. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5}{2n^2}$; III. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{5^n}$.

1) только II; 2) только II и III;

3) только I и Ш; 4) только III.

8. Исследовать ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{3^n}$ на абсолютную и условную сходимость.

1) абсолютно сходится; 2) условно сходится; 3) расходится.

9. В вазе стоят 6 красных и 3 розовые гвоздики. Наугад берут два цветка. Найти вероятность того, что взяли красные гвоздики.

1) $\frac{1}{3}$; 2) $\frac{6}{9}$; 3) $\frac{2}{9}$; 4) $\frac{5}{12}$.

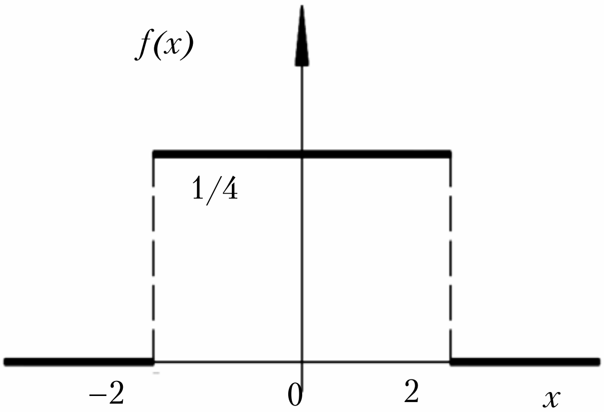
10. ОТК проверяет партию из 10 деталей. Вероятность того, что деталь стандартная равна 0,75. Найти наивероятнейшее число деталей, которые будут признаны стандартными.

1) 7; 2) 8; 3) 9; 4) 7,5.

11. Некто, заблудившись в лесу, вышел на поляну, откуда вело 5 дорог. Известно, что вероятности выхода из леса за час для различных дорог равны соответственно 0,6; 0,3; 0,2; 0,1; 0,1. Чему равна вероятность того, что заблудившейся пошел по первой дороге, если известно, что он вышел из леса через час?

1) $\frac{5}{13}$; 2) $\frac{8}{13}$; 3) $\frac{6}{13}$; 4) $\frac{9}{13}$.

12. Графики плотности распределения вероятностей случайной величины X имеет вид представленный на рисунке. Найти $D[3X+2]$.



1) $\frac{16}{3}$; 2) 0; 3) 1,5; 4) $\frac{1}{3}$.

13. Даны две случайные величины X и Y.

X	−1	0	1
p_i	0,2	0,4	0,4

Y	0	1	2
p_i	0,1	0,2	0,3

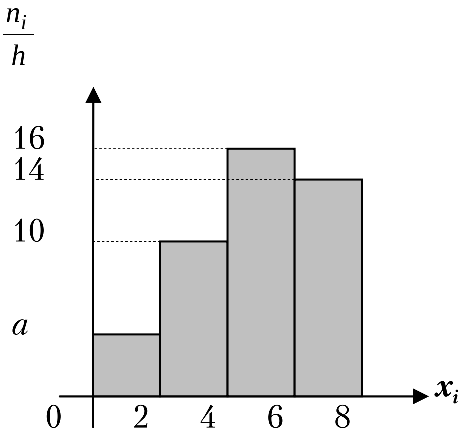
Найти $M\left[X-4\right]$.

1) −1,1; 2) 0,4; 3) −1,5; 4) 1,5.

14. Случайная величина X распределена по нормальному закону с параметрами a и σ. По результатам наблюдаемых значений 12, 13, 20, 22, 28 найти параметр a.

1) 19; 2) 20; 3) 28; 4) 12.

15. По выборке объема $n=100$ построена гистограмма частот:



Тогда значение ***a*** равно...

1) 6; 2) 20; 3) 60; 4) 10.

Вариант 8

1. Общее решение дифференциального уравнения $(xy^2+x)dx+(y-x^2y)dy=0$ равно:

1) $y^2-1=C(1-x^2)$; 2) $y^2-1=C(1+x^2)$;

3) $y^2+1=C(1-x^2)$; 4) $y^2+1=C(1+x^2)$.

2. Общее решение дифференциального уравнения $y'+2xy=xe^{-x^2}$ равно:

1) $y=e^{-x^2}(C+\frac{x^2}{2})$; 2) $y=e^{x^2}(C-\frac{x^2}{2})$; 3) $y=e^{x^2}\frac{x^2}{2}$; 4) $y=e^{x}(C-x)$.

3. Общее решение дифференциального уравнения второго порядка $y'' = y' + x$ равно:

1) $y = C_1 e^x + C_2 + x + \frac{x^2}{2}$; 2) $y = C_1 e^x + C_2 - x - \frac{x^2}{2}$;

3) $y = C_1 e^x + C_2 + \frac{x^2}{2}$; 4) $y = C_1 e^x + C_2 e^x + \frac{x^2}{2}$.

4. Общее решение дифференциального уравнения $y'' - 9y = 0$ имеет вид:

1) $c_1 e^{3x} - c_2 e^{3x}$; 2) $c_1 e^{-3x} + c_2 e^{3x}$;

3) $e^{3x}(c_1 + c_2 x)$; 4) $e^{-3x}(c_1 + c_2 x)$.

5. Написать первые пять членов ряда по заданному его общему члену $U_n = \frac{1}{(n+1) \cdot 2^n}$.

1) $1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \frac{3}{32} + \frac{1}{20} + \cdots$; 2) $\frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \frac{1}{9} + \frac{1}{11} + \cdots$;

3) $\frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \frac{1}{32} + \frac{1}{80} + \frac{5}{192} + \cdots$; 4) $-\frac{1}{4} - \frac{1}{6} - \frac{3}{32} - \frac{1}{20} - \frac{5}{192} + \cdots$.

6. Какой признак следует применить для исследования ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n!}$ на сходимость?

1) сравнения; 2) Даламбера;

3) радикальный Коши; 4) интегральный Коши.

7. Исследовать ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^3}$ на абсолютную и условную сходимость.

1) абсолютно сходится; 2) условно сходится; 3) расходится.

8. Найти интервал сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty} x^n \cdot n!$.

1) $(-\infty, +\infty)$; 2) $x = 0$; 3) $(-3; 3)$; 4) $[-3; 3)$.

9. Коэффициент a_6 разложения функции $f(x) = 1 - 2x + 3x^3 - 2x^5$ в ряд Тейлора в окрестности точки $x = 1$ равен:

1) 1; 2) 3; 3) 5; 4) 0.

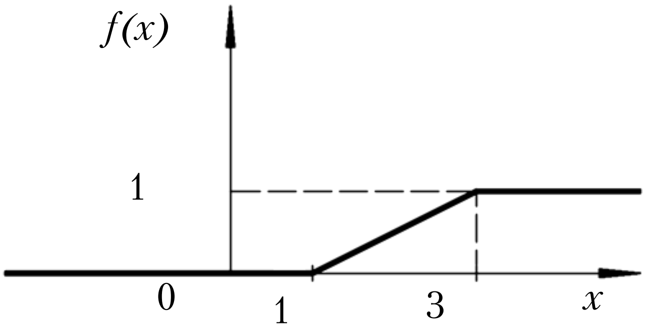
10. На полке стоят 6 справочников по математике и 3 словаря. Студент наудачу берет 2 книги. Найти вероятность того, что студент взял 2 словаря.

1) $\frac{2}{3}$; 2) $\frac{1}{4}$; 3) 1; 4) $\frac{1}{12}$.

11. В телеателье имеются 4 кинескопа. Вероятности того, что кинескопы выдержат гарантийный срок, соответственно равны: 0,8; 0,85; 0,9; 0,95. Найти вероятность того, что наудачу взятый кинескоп выдержит гарантийный срок.

1) 0,785; 2) 0,875; 3) 0,675; 4) 0,925.

12. График функции распределения случайной величины X имеет вид, представленный на рисунке. Найти $M[2X-1]$.



1) $\frac{1}{2}$; 2) 1; 3) 3; 4) 0.

13. Даны две случайные величины X и Y.

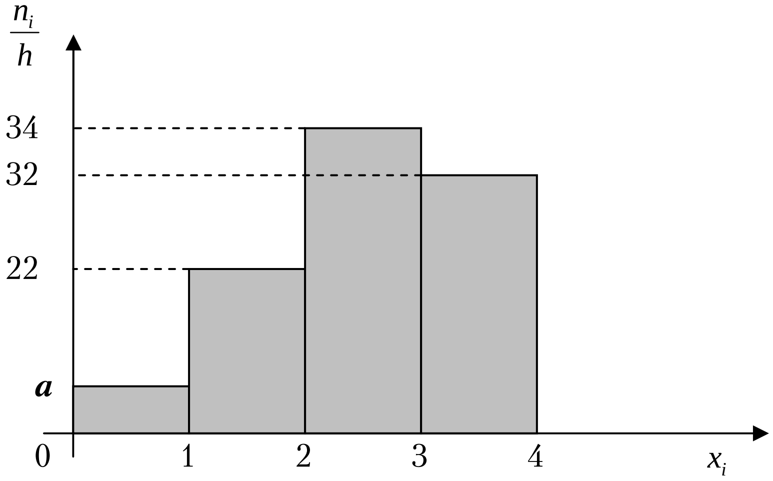
X_i	−1	0	1
p_i	0,2	0,3	0,5

Y_i	0	1	2
p_i	0,2	0,2	0,1

Найти $M[Y-2X]$.

1) 1,4; 2) 0,8; 3) 1,7; 4) 2,6.

14. Чему равно значение ***a***, если данная гистограмма частот построена по выборке объемом n=100?



1) 10; 2) 6; 3) 12; 4) 7.

15. Мода вариационного ряда 2, 3, 4, 4, 4, 6, 7, 8, 10 равна...
1) 7,5; 2) 10; 3) 4; 4) 3.

Вариант 9

1. Общее решение дифференциального уравнения $yy' = \frac{1-2x}{y}$ равно:

1) $y = \sqrt[3]{C - 3x^2}$; 2) $y = \sqrt[3]{C + 3x - 3x^2}$;
3) $y = \sqrt[3]{C - 3x + 3x^2}$; 4) $y = \sqrt[3]{C + 3x^2}$.

2. Общее решение дифференциального уравнения $y' + \frac{1-2x}{x^2} y = 1$ равно:

1) $y = Cx^2 e^{\frac{1}{x}} - x^2$; 2) $y = Cx^2 e^{\frac{1}{x}} + x^2$; 3) $y = Cx^2 e^{\frac{1}{x}}$; 4) $y = Cxe^{\frac{1}{x}} + x$.

3. Частное решение уравнения $\frac{y - xy'}{x + yy'} = 2$, удовлетворяющее начальному условию $y(1) = 1$ равно:

1) $\frac{\pi}{2} - \ln 2$; 2) $\frac{\pi}{4} + \ln 2$; 3) $\frac{\pi}{4} - \ln 2$; 4) $\frac{\pi}{2} + \ln 2$.

4. Общее решение дифференциального уравнения $y'' - 4y' = 0$ имеет вид:

1) $c_1 e^{2x} + c_2 e^{-2x}$; 2) $c_1 + c_2 e^{4x}$;

3) $e^{4x}(c_1 + c_2 x)$; 4) $e^{-4x}(c_1 + c_2 x)$.

5. Найти формулу для общего члена $1 + \frac{4}{2} + \frac{9}{6} + \frac{16}{24} + \frac{25}{120} + \cdots$

1) $U_n = \frac{1}{n+1}$; 2) $U_n = \frac{n^2}{n!}$; 3) $U_n = \frac{n}{n!}$; 4) $U_n = \frac{n+3}{3n+2}$.

6. Какой признак следует применить для исследования ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n} \left(\frac{n}{n+2} \right)^n$ на сходимость?

1) сравнения; 2) Даламбера;

3) радикальный Коши; 4) интегральный Коши.

7. Исследовать ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\ln n}$ на абсолютную и условную сходимость.

1) абсолютно сходится; 2) условно сходится; 3) расходится.

8. Коэффициент a_5 разложения функции $f(x) = x^3 + 3x^2 + x - 1$ в ряд Тейлора в окрестности точки $x = 2$ равен:

1) 1; 2) 3; 3) 5; 4) 0.

9. Сколькими способами можно рассадить 10 студентов на 10 стульях?

1) 10!; 2) 1; 3) 10; 4) 10^{10}.

10. В цехе работает 5 мужчин и 6 женщин. По табелям отобраны 3 человека. Найти вероятность того, что все отобранные лица окажутся мужчинами.

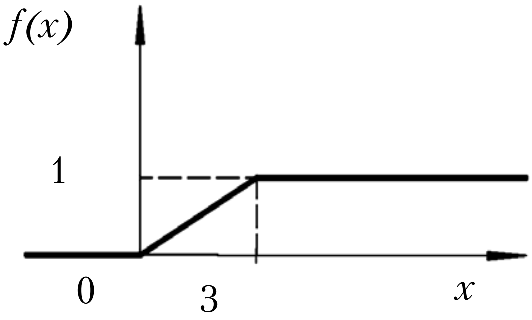
1) $\frac{8}{11}$; 2) $\frac{3}{11}$; 3) $\frac{5}{11}$; 4) $\frac{2}{33}$.

11. На складе имеется 12 дверных блоков, 20 оконных блоков, 18 встроенных шкафов. Вероятность того, что дверной блок отличного качества, равна 0,9; для оконного блока – 0,8; для встроенного шкафа –

0,7. Найти вероятность того, что наудачу взятое столярное изделие окажется отличного качества.

1) 0,788; 2) 0,048; 3) 0,572; 4) 0,536.

12. График функции распределения случайной величины X имеет вид, представленный на рисунке. Найти $M\left[2X+3\right]$.



1) $\frac{3}{2}$; 2) $\frac{1}{3}$; 3) 6; 4) 0.

13. Даны две случайные величины X и Y.

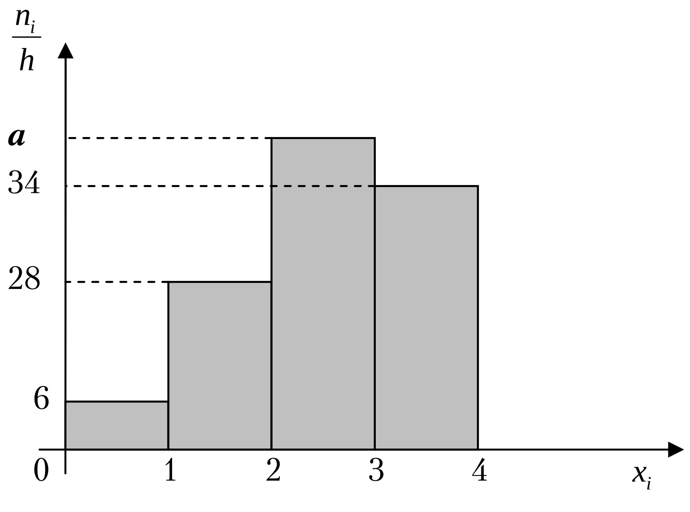
X_i	−2	0	1
p_i	0,2	0,3	0,5

Y_i	0	1	2	4
p_i	0,1	0,4	0,3	0,2

Найти $M\left[X+2Y\right]$.

1) 2; 2) 3,7; 3) 3,8; 4) 1,9.

14. Чему равно значение ***a***, если данная гистограмма частот построена по выборке объемом n=80?



1) 10; 2) 12; 3) 6; 4) 7.

15. Случайная величина X распределена по нормальному закону с параметрами a и σ. По результатам наблюдаемых значений 12, 14, 22, 24, 28 найти параметр a.

1) 19; 2) 20; 3) 28; 4) 12.

Вариант 10

1. Уравнение $yy'+3=x^2$ является...

1) уравнением Бернулли;

2) однородным дифференциальным уравнением первого порядка;

3) уравнением с разделяющимися переменными;

4) линейным дифференциальным уравнением первого порядка.

2. Общее решение дифференциального уравнения $xy'+y=y^2$ равно:

1) $Cx=\frac{y-1}{y}$; 2) $Cx=\frac{y+1}{y}$; 3) $Cx=\frac{1-y}{y}$; 4) $Cx=\frac{1-y}{y^2}$.

3. Общее решение дифференциального уравнения $y'''=\sin 3x$ равно:

1) $y=\frac{1}{27}\cos 3x+C_1\frac{x^2}{2}+C_2x+C_3$; 2) $y=\frac{1}{27}\sin 3x+C_1\frac{x^2}{2}+C_2x+C_3$;

3) $y=-\frac{1}{27}\cos 3x+C_1\frac{x^2}{2}+C_2x+C_3$; 4) $y=-\frac{1}{27}\sin 3x+C_1\frac{x^2}{2}+C_2x+C_3$.

4. Общее решение дифференциального уравнения $3y''-2y'-8y=0$ имеет вид:

1) $c_1e^{2x}+c_2e^{-\frac{4}{3}x}$; 2) $c_1e^{-2x}+c_2e^{\frac{4}{3}x}$; 3) $e^{2x}(c_1+c_2x)$; 4) $e^{-\frac{4}{3}x}(c_1+c_2x)$.

5. Найти формулу для общего члена $\frac{1}{3}+\frac{1}{6}+\frac{1}{11}+\frac{1}{20}+\frac{1}{37}+\cdots$

1) $U_n=\frac{1}{n+1}$; 2) $U_n=\frac{1}{2^n}$; 3) $U_n=\frac{1}{2n+1}$; 4) $U_n=\frac{1}{2^n+n}$.

6. Какой признак следует применить для исследования ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n+1}{n+3}\right)^{n^2}$ на сходимость?

1) сравнения; 2) Даламбера; 3) радикальный Коши;

4) интегральный Коши.

1) только II; 2) только II и III; 3) только I и Ш; 4) только III.

7. Исследовать ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}\sqrt{n}}{2+n}$ на абсолютную и условную сходимость.

1) абсолютно сходится; 2) условно сходится; 3) расходится.

8. Найти интервал сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n-1}}{3^{n-1}}$.

1) $(-3, 3)$; 2) $\left[-\frac{1}{3}; \frac{1}{3}\right]$; 3) $\left(-\frac{1}{3}; \frac{1}{3}\right)$; 4) $[-3;\ 3)$.

9. В цехе работает 5 мужчин и 6 женщин. По табелям отобраны 2 человека. Найти вероятность того, что все отобранные лица окажутся женщинами.

1) $\frac{6}{11}$; 2) $\frac{5}{11}$; 3) $\frac{3}{11}$; 4) 1.

10. Шесть машин привозят кирпич на строительные объекты. Вероятность прибытия каждой их них вовремя равна 0,6. Найти наивероятнейшее число машин, приходящих на стройку вовремя.

1) 3; 2) 4; 3) 5; 4) 3,6.

11. Случайная величина X задана плотностью распределения $f(x)=\frac{1}{3\cdot\sqrt{2\pi}}\cdot e^{-\frac{(x-2)^2}{18}}$. Найти $M[2X+1]$.

1) 1; 2) 2; 3) 5; 4) 0.

12. Даны две случайные величины X и Y.

X_i	-1	0	1
p_i	0,2	0,4	0,4

Y_i	0	1	2
p_i	0,3	0,2	0,1

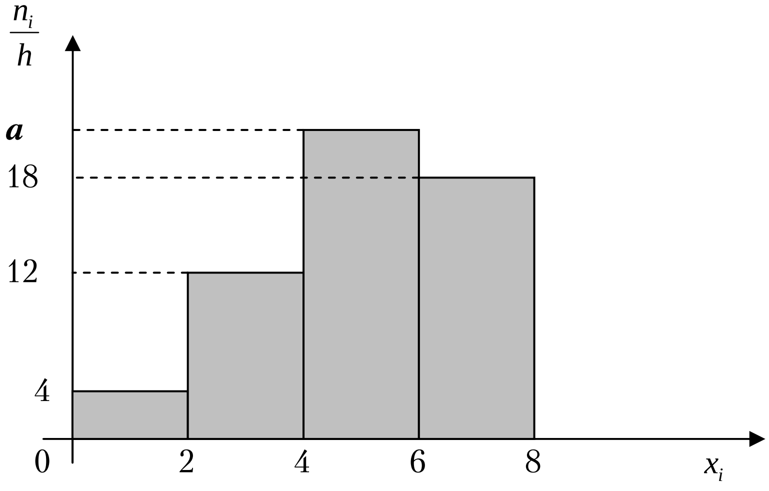
Найти $M[Y-X]$.

1) $-1{,}8$; 2) 1,8; 3) 1,4; 4) 3.

13. Основная гипотеза $H_0:\sigma^2=7$. Тогда конкурирующей может являться гипотеза...

1) $H_1:\sigma^2<7$; 2) $H_1:\sigma^2\le 7$; 3) $H_1:\sigma^2<7$; 4) $H_1:\sigma^2\ge 7$.

14. Чему равно значение ***a***, если данная гистограмма частот построена по выборке объемом n=80?



1) 18; 2) 12; 3) 6; 4) 46.

15. Мода вариационного ряда 3, 4, 6, 7, 8, 9, 9, 9, 10, 10, 12 равна...
1) 10; 2) 9; 3) 12; 4) 3.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Пособие предназначено студентам-заочникам (квалификация выпускника – бакалавр) технических ВУЗов, обучающихся по направлению «Строительство» и написано с учетом требований Федерального государственного образовательного стандарта третьего поколения. Содержит общие рекомендации по изучению курса математики, примерную программу общего курса, варианты заданий для контрольных работ с решениями задач типовых вариантов, контрольные вопросы для самопроверки уровня теоретических знаний, варианты тестов к зачету и экзамену, список рекомендуемой литературы.

Издание может использоваться в системе открытого образования и по ряду других специальностей технических вузов.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Учебное издание

Гарькина Ирина Александровна
Данилов Александр Максимович

СБОРНИК ЗАДАЧ
типовых расчетов и контрольных работ по математике для студентов-заочников технических вузов

Учебное пособие

В авторской редакции
Верстка Н.А. Сазонова

Подписано в печать 12.03.2014. Формат 60×84/16.
Бумага офисная «Снегурочка». Печать на ризографе.
Усл. печ. л. 14,65. Уч.-изд. л. 15,75. Тираж 100 экз.
Заказ №77.

Издательство ПГУАС.
440028, г.Пенза, ул. Германа Титова, 28.