МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«Пензенский государственный университет
архитектуры и строительства»
(ПГУАС)

О.В. Снежкина, Е.И. Куимова, С.Н. Ячинова

МАТЕМАТИКА: ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ

Рекомендовано Редсоветом университета
в качестве учебного пособия для студентов,
обучающихся по направлению 21.03.02 «Землеустройство и кадастры»

Пенза 2014

УДК 517(075.8)
ББК 22.16я73
С53

Рецензенты: кандидат технических наук, доцент кафедры «Механика» М.Б. Зайцев (ПГУАС);
кандидат педагогических наук, доцент кафедры «Автоматизированных систем управления и программного обеспечения» О.В. Бочкарева (ПАИИ)

Снежкина О.В.

С53 Математика: дифференциальное исчисление: учеб. пособие / О.В. Снежкина, И.Е. Куимова, С.Н. Ячинова. – Пенза: ПГУАС, 2014. – 140 с.

Учебное пособие представляет собой руководство к решению задач по одному из ключевых разделов математики – дифференциальному исчислению. Содержит краткие теоретические сведения, подробное решение типовых примеров, а также задачи для самостоятельного решения.

Данное учебное пособие соответствует Федеральным государственным образовательным стандартам третьего поколения направления 21.03.02 «Землеустройство и кадастры» (квалификация бакалавр) и рекомендуется при изучении дисциплины «Математика» (код Б2.Б1.)

Подготовлено на кафедре «Математика и математическое моделирование» и предназначено для студентов, обучающихся по направлению 21.03.02 «Землеустройство и кадастры», а также других инженерных специальностей, желающих приобрести необходимые навыки в решении прикладных задач. Может оказаться полезным аспирантам, инженерам-исследователям, работающим в области прикладных наук.

ПРЕДИСЛОВИЕ

Основой высшей математики является математический анализ, охватывающий те разделы математики, которые опираются на понятие функции и на идеи исчисления бесконечно малых величин. Этот раздел математики тесно переплетается со всеми инженерно-техническими дисциплинами, изучаемыми в техническом вузе. Данная работа посвящена одному из разделов математического анализа – дифференциальному исчислению функции одной и нескольких независимых переменных.

Пособие имеет следующую структуру изложения. В первом разделе содержатся основные положения по введению в анализ. Во втором и третьем разделах пособия изложены основные положения по дифференциальному исчислению функции одной и нескольких независимых переменных. Четвертый раздел содержит задачи для самостоятельной работы студентов.

Пособие ориентировано в первую очередь для студентов высших учебных заведений, обучающихся по направлению 21.03.02 «Землеустройство и кадастры» и особенно для тех, кто самостоятельно изучает математический анализ и желает приобрести необходимые навыки в решении практических задач.

Содержание пособия полностью отвечает требованиям Федерального Государственного образовательного стандарта по указанному направлению и может быть рекомендовано для всех форм обучения.

1. ВВЕДЕНИЕ В АНАЛИЗ

1.1. Функции. Основные понятия

Если каждому значению переменной величины x, принадлежащему некоторой области, по определенному правилу (закону) ставится в соответствие одно и только одно определенное значение другой переменной величины y, то говорят, что y является функцией от x и обозначают так: $y = f(x)$, причем x называют независимой переменной или аргументом, а y называют зависимой переменной или функцией. Символ f указывает вид зависимости y от x. Иногда пишут и так $y = y(x)$.

Область определения обозначается через $D(f)$, а множество значений – через $E(f)$.

Функции могут зависеть от одного, двух, трех и более аргументов. Например, площадь круга зависит только от величины радиуса, площадь прямоугольника от двух переменных – длины и ширины, объем параллелепипеда – от трех переменных: длины, ширины, высоты, цена продукта – от многих переменных.

Основные способы задания функции: *табличный, графический и аналитический (в виде формулы)*.

Различают следующие *основные элементарные функции:*

$y = x^n, n \in R$ – степенная;

$y = a^x, (a > 0)$ – показательная;

$y = \log_a x, (a > 0, a \neq 1)$ – логарифмическая;

$y = \sin x, \cos x, \operatorname{tg} x, \operatorname{ctg} x$ – тригонометрические;

$y = \arcsin x, \arccos x, \operatorname{arctg} x, \operatorname{arcctg} x$ – обратные тригонометрические.

Из этих функций при помощи арифметических операций можно составить множество элементарных функций. Например, $y = \left(2x^3 - \sqrt{x}\right)\lg x$, $y = \dfrac{2^x - 1}{4 + \cos x}$, $y = 3x^4 - 2x^2 + 5$ и т.д.

Функция от функции вида $y = f(\varphi(x))$ называется *сложной функцией,* где φ является промежуточным аргументом.

Функция $y = f(x)$ называется *ограниченной* в данной области изменения аргумента, если существует такое положительное число M, что для всех значений x из данной области выполняется неравенство $|f(x)| < M$.

Выражение функциональной зависимости между несколькими переменными через вспомогательную переменную – параметр, называется *па-*

раметрической функцией: $x=\varphi(t)$, $y=\psi(t)$, где t – параметр. Например, $x=a\cos t$, $y=b\sin t$, $(0\le t\le 2\pi)$ – параметрическое уравнение эллипса.

Графиком функции $y=f(x)$ называется множество точек плоскости xOy с координатами $(x;f(x))$, где $x\in D(f)$.

Функция $f(x)$, область определения которой симметрична относительно нуля, называется *чётной,* если $f(-x)=f(x)$ для $x\in D(f)$ и *нечётной,* если $f(-x)=-f(x)$, $x\in D(f)$.

Произведение двух нечетных функций является четной функцией.

Функция $f(x)$ называется *периодической,* если существует положительное число T такое, что при $x\in D(f)$ и $x+T\in D(f)$ выполняется равенство $f(x)=f(x+T)$.

Пример 1. Найти область определения функции $y=\sqrt{4-x^2}+\dfrac{1}{x}$.

Решение. Данная функция определена, если $4-x^2\ge 0$ и $x\ne 0$. Решим эту систему:

$$\begin{cases}(2-x)(2+x)\ge 0\\ x\ne 0\end{cases}$$

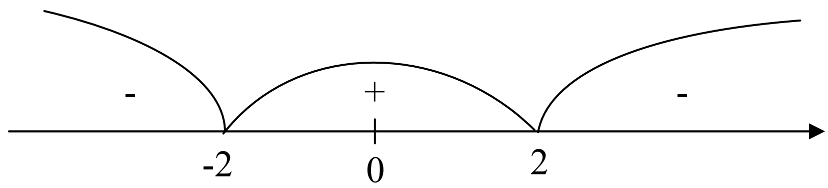


Рис.1.1

Ясно, что искомое неравенство имеет место при $x\in[-2;0)\cup(0;2]$, таким образом, полученное множество есть область определения данной функции.

Пример 2. Установить чётность или нечётность функции $f(x)=x^3\sin 5x$.

Решение. Для данной функции область определения симметрична относительно нуля: $D(f)=]-\infty;+\infty[$.

Заменяя x на $-x$, получим $f(-x)=(-x)^3\sin 5(-x)=x^3\sin 5=f(x)$, т.е. $f(-x)=f(x)$. Итак, данная функция чётная.

Пример 3. Найти основной период функции $f(x)=-2\cos\left(\dfrac{x}{3}\right)+1$.

Решение. Так как основной период функции $\cos x$ есть 2π, то основной период функции $f(x) = -2\cos\frac{x}{3} + 1$ есть $2\pi \cdot 3 = 6\pi$, т.е. 6π.

Задания

1) Найти область определения функции:

а) $y = \frac{1}{\sqrt{-x^2 + x + 2}} + \ell g(x-1)$;   б) $y = \arcsin\frac{x}{1+x}$;

в) $y = \frac{\sin}{x^2 + 4x + 4}$;   г) $y = \arccos\left(\ell g x\right)$.

2) Какая из функций является чётной, какая нечётной:

а) $y = \cos x + x\sin x$;   б) $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x - 2^x$;

г) $y = \ell g \cos 2x$;   д) $y = \frac{x^2}{\cos x} - \sin x^2$.

3) Найти периоды функций:

а) $y = \sin 3x + \cos x$;   б) $y = \cos^2 3x$.

1.2. Предел числовой последовательности

Если каждому натуральному числу n поставлено в соответствие число x_n, то говорят, задана последовательность:

$$\{ x_n \} = x_1, x_2, ..., x_n ...$$

Числа $x_1, x_2, ..., x_n$ называются членами последовательности, а число x_n – общим или n-м членом последовательности.

Последовательность $\{ x_n \}$ называется:

• *ограниченной* сверху (снизу), если существует число $M > 0$, что для любого номера n выполняется неравенство $x_n < M$ $(x_n > M)$ (последовательности, одновременно ограниченные сверху и снизу, называются ограниченными);

• *возрастающей*, если при всяком n $x_{n+1} > x_n$, т.е. каждый следующий член последовательности больше предыдущего;

• *убывающей*, если при всяком n $x_{n+1} < x_n$, т.е. если каждый следующий член последовательности меньше предыдущего.

Только возрастающая или только убывающая последовательность называется *монотонной*.

Последовательность можно изображать точками на числовой оси.

Рассмотрим последовательность

$$1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \ldots, (-1)^{n+1}/n, \ldots$$

Возьмем отрезок [-1,1] (рис. 1.2). В него попали все члены последовательности. В отрезок [-1/2; 1/2] попали все члены, кроме 1. В отрезок [-1/4; 1/4] попали все, кроме трех членов: 1; -1/2; 1/3.

Какой бы малый промежуток мы ни взяли, в него попадут все члены (бесчисленное число членов), кроме конечного числа членов.

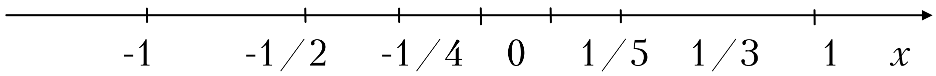


Рис. 1.2

Определение. Число a называется *пределом числовой последовательности* $\{x_n\}$, если для любого, даже сколь угодно малого, числа $\varepsilon>0$, найдется такой номер N (зависящий от ε, $N=N(\varepsilon)$), что для всех членов последовательности с номерами $n>N$ выполняется неравенство:

$$|x_n - a| < \varepsilon.$$

Предел числовой последовательности обозначается $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ или $x_n \to a$ при $n \to \infty$ или x_n сходится к a.

Геометрический смысл. Число a есть *предел числовой последовательности* $\{x_n\}$, если какова бы ни была мала ε – окрестность точки a, в нее попадут все члены последовательности, кроме конечного числа членов, начиная с некоторого номера N ($n>N$), рис. 1.3.

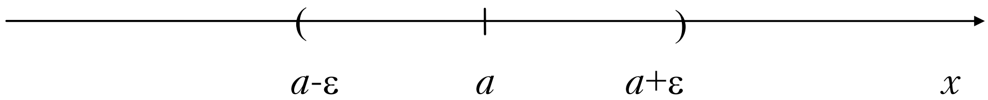


Рис. 1.3

Последовательность, имеющая предел, называется *сходящейся*, в противном случае – *расходящейся.*

Отметим следующие важные свойства пределов последовательностей:

1. Последовательность, имеющая предел, ограничена.
2. Последовательность может иметь только один предел.
3. Любая неубывающая (невозрастающая) и ограниченная сверху (снизу) числовая последовательность имеет предел.

Пример 1. Пусть $x_n = \frac{1}{n}$. Доказать, что $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n} = 0$.

<u>*Решение*</u>. В самом деле, зададим произвольное $\varepsilon > 0$ и решим неравенство $\left|\frac{1}{n} - 0\right| = \frac{1}{n} < \varepsilon$ или $\frac{1}{\varepsilon} < n$. Следовательно, для всякого $\varepsilon > 0$ $\exists$ $n_0 = n_0(\varepsilon) = 1/\varepsilon$ такое, что неравенство $\left|\frac{1}{n} - 0\right| = \frac{1}{n} < \varepsilon$ – выполняется для всех $n>n_0$, ч.т.д.

Пример 2. Если $|q| < 1$, то $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = 0$.

Доказательство. Пусть пока $\varepsilon \neq 0$. Неравенство $|q^n - 0| = |q|^n < \varepsilon$ верно, если $n\lg|q| < \lg\varepsilon$, т.е. если $n > \frac{\lg\varepsilon}{\lg|q|} = n_0(\varepsilon)$. Таким образом, мы доказали, что $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = 0$ при $0 < |q| < 1$.

Пример 3. Пусть $x_n = 1 + q + ... + q^n$, $\quad |q| < 1$.

Доказать, что $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \frac{1}{1-q}$.

Доказательство. Имеем $x_n = \frac{1-q^{n+1}}{1-q} = \frac{1}{1-q} - \frac{q^{n+1}}{1-q}$. Так как $\lim\limits_{n\to\infty} q^{n+1} = 0$ при $|q| < 1$. (см. пример 2), то, применяя формулы (2) и (3), получим:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} = \frac{1}{1-q} - \frac{1}{1-q}\lim_{n\to\infty} q^{n+1} = \frac{1}{1-q} - \frac{1}{1-q}\cdot 0 = \frac{1}{1-q}.$$

Пример 4. Показать, что при $n \to \infty$ последовательность $\left\{\frac{2n+1}{3n-1}\right\}$. Имеет пределом $\frac{2}{3}$.

Решение. Здесь $x_n - \frac{2}{3} = \frac{2n+1}{3n-1} - \frac{2}{3} = \frac{5}{3(3n-1)}$. Определим при каком n выполняется неравенство $\frac{5}{3(3n-1)} < \varepsilon$. Так как $3(3n-1) > \frac{5}{\varepsilon}$, то $n > \frac{1}{3}\left(\frac{5}{\varepsilon} + 3\right)$.

Итак, если $n > \frac{5}{3\varepsilon} + 1$, то $\left|x_n - \frac{2}{3}\right| < \varepsilon$, т.е. $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \frac{2}{3}$.

1.3.Число *e*. Натуральные логарифмы

Рассмотрим числовую последовательность

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n.$$

Теорема. Переменная величина $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ при $n\to\infty$ имеет предел, заключенный между числами 2 и 3.

Доказательство. По формуле бинома Ньютона

$$\begin{aligned}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n &= 1+n\cdot\frac{1}{n}+\frac{n\cdot(n-1)}{1\cdot 2}\cdot\left(\frac{1}{n}\right)^2+\frac{n\cdot(n-1)\cdot(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3}\cdot\left(\frac{1}{n}\right)^3+\\ &+\frac{n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot\ldots\cdot(n-(n-1))}{1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot n}\cdot\left(\frac{1}{n}\right)^n=\\ &=1+1+\frac{1}{1\cdot 2}\cdot\frac{n-1}{n}+\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}\cdot\frac{n-1}{n}\cdot\frac{n-2}{n}+\ldots\\ &+\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot n}\cdot\frac{n-1}{n}\cdot\frac{n-2}{n}\cdot\ldots\cdot\frac{n-(n-1)}{n}=\\ &=2+\frac{1}{1\cdot 2}\left(1-\frac{1}{n}\right)+\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}\left(1-\frac{1}{n}\right)\cdot\left(1-\frac{2}{n}\right)+\ldots\\ &+\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot n}\cdot\left(1-\frac{1}{n}\right)\cdot\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1-\frac{n-1}{n}\right).\end{aligned} \tag{1.1}$$

Из этого преобразования видно, что при переходе от значения n к значению $n+1$ каждое слагаемое последней суммы возрастает

$$\frac{1}{1\cdot 2}\cdot\left(1-\frac{1}{n}\right)\langle\,\frac{1}{1\cdot 2}\cdot\left(1-\frac{1}{n+1}\right) \text{ и т.д.}$$

и добавляется еще один член.

Все члены разложения положительные. Отсюда следует, что переменная величина $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ – возрастающая переменная при возрастании n.

Покажем, что переменная величина $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ ограничена.

$$\left(1-\frac{1}{n}\right)\langle\,1 \text{ и } \left(1-\frac{1}{n}\right)\cdot\left(1-\frac{2}{n}\right)\langle\,1 \text{ и т.д.}$$

Из выражения (1.1) получим неравенство

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \langle\, 2\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}+\ldots+\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot n}\,.$$

Учитывая, что

$$\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}\,\langle\,\frac{1}{2^2},\ \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}\,\langle\,\frac{1}{2^3},\ \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot n}\,\langle\,\frac{1}{2^n}$$

можем записать неравенство

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \langle\, 1+1+\frac{1}{2^2}+\ldots+\frac{1}{2^{n-1}}=1+\underbrace{\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\ldots+\frac{1}{2^{n-1}}\right)}_{\substack{\text{геометрическая прогрессия}\\ s_n=\frac{a-aq^n}{1-q}}}=$$

$$=1+\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1-\frac{1}{2}}=1+\left[2-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right]\langle\, 3.$$

Следовательно, для всех n получаем:

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \langle\, 3\,.$$

Из равенства (1.1) следует

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \rangle\, 2\,.$$

Таким образом, получаем неравенства

$$2<\left(1+\frac{1}{n}\right)^n<3\,.$$

Этим установлено, что переменная величина $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ ограничена.

Итак, переменная величина $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$, как возрастающая и ограниченная, имеет предел. Этот предел обозначается буквой e (второй замечательный предел):

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=\mathrm{e}\,.$$

Число *e* – иррациональное число. Его значение с десятью верными знаками после запятой *e* = 2,7182818284…

Логарифмы с основанием *e* = 2,71828… называются натуральными ($y = \log_e x$ заменяют $y = \ln x$) или *неперовыми* логарифмами по имени одного из первых изобретателей логарифмических таблиц математика Непера (1550-1617).

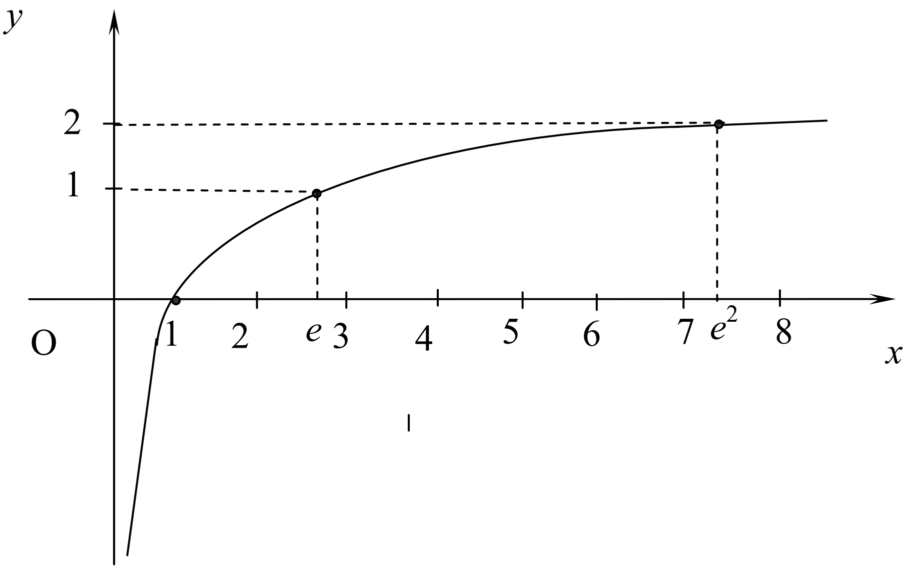


Рис. 1.4. График $y = \ln x$

Переход от натуральных логарифмов к десятичным:

$$\lg x = \frac{\ln x}{\ln 10} \approx 0,434294 \cdot \ln x .$$

Переход от десятичных логарифмов к натуральным:

$$\ln x = \frac{\lg x}{\lg \mathrm{e}} \approx 2,302585 \cdot \lg x .$$

Еще одним приложением числа *e* является показательная функция с основанием *e* – *экспонента*:

$$y = e^x = \exp(x) .$$

Функции $y = \ln x$ и $y = e^x$ *табулированы*, то есть существуют их таблицы.

1.4. Предел функции

Выше рассмотрено понятие предела для частного вида функций – числовых последовательностей. Обобщим его на произвольные функции.

Пусть $f(x)$ определена в окрестности точки a, за исключением, быть может точки a.

Определение. Число A называется *пределом функции* $y = f(x)$ при $x \to a$ (или в точке a), если для каждого числа $\varepsilon > 0$ можно найти такое число $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, что $|f(x) - A|$ будет меньше ε, когда $|x - a| < \delta$, при $x \neq a$.

Обозначают это так: $\lim\limits_{x \to a} f(x) = A$ или $f(x) \to A$ при $x \to a$.

Это определение можно проиллюстрировать геометрически (рис. 1.5). Возьмем ε – окрестность точки A по оси OY (A-ε< $f(x)$<A+ε) и будем рассматривать все значения x из окрестности точки a, для которых соответствующие значения функции не выходят из ε – окрестности точки A (δ зависит от ε). Видно, что для всех x, отстоящих от a не более, чем на δ, соответствующая точка М графика функции лежит внутри полосы шириною 2ε.

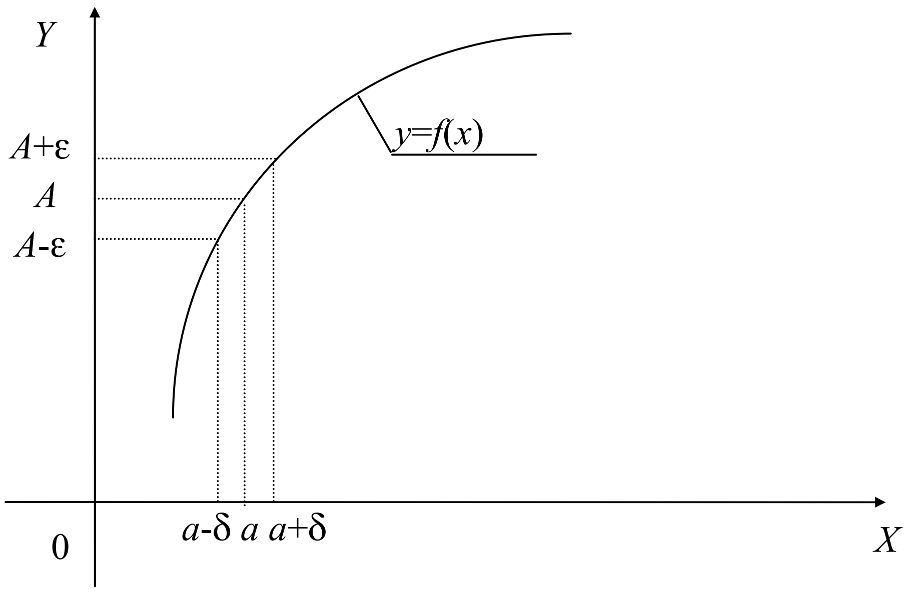


Рис. 1.5

При изучении свойств функций приходится рассматривать и предел функции при стремлении аргумента x к бесконечности.

Определение. Число A называется *пределом функции* $y = f(x)$ при $x \to \infty$ (или в бесконечности), если для каждого числа $\varepsilon > 0$ можно найти такое число $N = N(\varepsilon)$, что для всех х, удовлетворяющих условию $|x| > N$, имеет место неравенство $|f(x) - A| < \varepsilon$. При этом пишут $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = A$ или $f(x) \to A$ при $x \to \infty$.

Теорема Для того, чтобы число A было пределом функции $f(x)$ при $x \to a$, необходимо и достаточно, чтобы эта функция была представлена в виде $f(x) = A + \alpha(x)$, где $\alpha(x)$ - бесконечно малая.

1.5. Бесконечно малые величины и их свойства

При изучении свойств пределов функций особую роль играют функции, предел которых при стремлении аргумента к какой-либо точке равен нулю.

Определение. Числовая последовательность x_n называется бесконечно малой, если ее предел равен нулю: $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$.

Понятие бесконечно малой последовательности можно перенести на функции.

Функция $\alpha = \alpha\,(x)$ называется *бесконечно малой величиной* при $x \to a$ (или $x \to \infty$), если ее предел равен нулю: $\lim\limits_{x\to a} \alpha(x) = 0$ ($\lim\limits_{x\to\infty} \alpha(x) = 0$).

Справедливы нижеприведенные свойства:

- алгебраическая сумма двух бесконечно малых есть величина бесконечно малая (это свойство справедливо для любого конечного числа слагаемых);
- произведение бесконечно малой величины на величину ограниченную есть величина бесконечно малая;
- произведение бесконечно малой величины на величину постоянную есть бесконечно малая величина;
- произведение двух бесконечно малых величин есть величина бесконечно малая.

1.6.Сравнение бесконечно малых величин

Пусть несколько бесконечно малых α, β, γ, … являются функциями одного и того же аргумента х и стремятся к нулю при $x \to a$ (или $x \to \infty$). Будем рассматривать их отношения, пользуясь следующими определениями:

- если отношение α/β двух бесконечно малых стремится к нулю, то α называется бесконечно малой величиной более высокого порядка, чем β;
- если $(\alpha/\beta) \to a \neq 0$, то α и β бесконечно малые величины одного порядка;
- если α и β бесконечно малые величины одного порядка, причем $(\alpha/\beta) \to 1$, то они называются эквивалентными или равносильными $\alpha \sim \beta$.

Приведем примеры эквивалентных бесконечно малых величин при $x \to 0$:

$\sin x \sim x$, $\arcsin x \sim x$, $\operatorname{tg} x \sim x$, $\ln(x+1) \sim x$, $\log(x+1) \sim x \log_a e$,

$$e^x - 1 \sim x, \quad a^x - 1 \sim x \ln a, \quad 1 - \cos x \sim \frac{x^2}{2}, \quad arctgx \sim x, \quad \arcsin x \sim \alpha x.$$

1.7. Бесконечно большие величины и их свойства

Определение. Числовая последовательность x_n называется бесконечно большой, если как бы велико ни было положительное число E, найдется такой номер N, что для всех $n > N$, $|x_n| > E$. В этом случае пишут: $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = \infty$.

В силу своего определения бесконечно большая величина не может иметь постоянного предела.

Понятие бесконечно большой последовательности можно перенести на функции.

Функцию $y = f(x)$ называют *бесконечно большой величиной* при $x \to a$, если для всякого числа M>0 существует зависящее от M число δ, такое, что $|f(x)| > M$ при всех x удовлетворяющих неравенству $0 < |x - a| < \delta$. Обозначается это так: $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \infty$ или $f(x) \to \infty$ при $x \to a$.

Аналогично определяются бесконечно большие величины при $x \to \infty$.

Различают частные случаи бесконечно больших величин, когда, начиная с некоторого момента, бесконечно большая величина, возрастая, принимает только положительные значения или, убывая, принимает только отрицательные значения:

$$\lim_{n \to \infty} x_n = +\infty;$$

$$\lim_{n \to \infty} x_n = -\infty.$$

Справедливы нижеприведенные свойства:

- сумма бесконечно больших величин только в том случае бесконечно большая величина, если они одного знака;
- произведение бесконечно большой величины на:

- величину, имеющую предел неравный нулю;
- величину постоянную, неравную нулю;
- величину ограниченную

есть величина *бесконечно большая;*

- произведение любого числа бесконечно больших величин есть величина *бесконечно большая;*
- величина, обратная бесконечно большой, есть величина *бесконечно малая*.

1.8. Основные теоремы о действиях с пределами

Будем рассматривать функции u_1, u_2, …, которые зависят от одного и того же аргумента x, при этом аргумент $x \to a$ или $x \to \infty$.

Теорема 1. Предел постоянной равен этой же постоянной $\lim C = C$, *где* $C = const$.

Теорема 2. Предел алгебраической суммы конечного числа переменных равен алгебраической сумме пределов этих переменных

$$\lim(u_1 + u_2 + ... + u_n) = \lim u_1 + \lim u_2 + ... + \lim u_n.$$

Доказательство. Проведем доказательство для двух слагаемых, так как для любого числа слагаемых оно проводится так же.

Пусть $\lim u_1 = a_1$, $\lim u_2 = a_2$. Тогда на основании теоремы 1 предыдущего параграфа можем записать

$$u_1 = a_1 + \alpha, \quad u_2 = a_2 + \beta,$$

где α, β – бесконечно малые, следовательно

$$u_1 + u_2 = (a_1 + a_2) + (\alpha + \beta).$$

Так как $(a_1 + a_2)$ – постоянная, а $(\alpha + \beta)$ – бесконечно малая, то по теореме 2 $\lim(u_1 + u_2) = a_1 + a_2$ или $\lim(u_1 + u_2) = \lim u_1 + \lim u_2$.

Следующие теоремы 3 и 4 доказываются аналогично.

Теорема 3. Предел произведения конечного числа переменных равен произведению пределов сомножителей $\lim u_1 u_2 ... u_n = \lim u_1 \lim u_2 ... \lim u_n$.

Следствие. Постоянный множитель можно выносить за знак предела

$$\lim C u_1 = \lim C \lim u_1 = C \lim u_1.$$

Пример 1. $\lim\limits_{x \to 3} 5x^2 = 5 \lim\limits_{x \to 3} x^2 = 5 \cdot 9 = 45$.

Теорема 4. Предел частного двух переменных равен частному пределов этих переменных, если предел знаменателя не равен нулю

$$\lim \frac{u}{v} = \frac{\lim u}{\lim v}.$$

Пример 2. $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{4x+2}{3x-1} = \dfrac{\lim\limits_{x \to 1}(4x+2)}{\lim\limits_{x \to 1}(3x-1)} = \dfrac{6}{2} = 3$.

Если же предел знаменателя равен нулю или пределы числителя и знаменателя оба равны нулю, то применять теорему 4 нельзя. О том как быть в этих случаях речь пойдет ниже.

Теорема 5. Если u, v, w *– функции, имеющие пределы, причем* $u < v < w$, *и если* $\lim u = \lim w = b$, *то и* $\lim v = b$.

В теории пределов приходится решать две самостоятельные задачи:

1) вычислять предел;

2) доказывать, что предел переменной существует и устанавливать границы, внутри которых предел находится. Иногда эта вторая задача решается с помощью следующей важной теоремы.

Теорема 6. Если переменная величина v возрастающая, то есть каждое ее последующее значение больше предыдущего, и если она ограничена, то есть $v < M = const$, то эта переменная величина имеет предел $\lim v = a$, причем $a \le M$.

1.9. Два замечательных предела

Первый замечательный предел:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1.$$

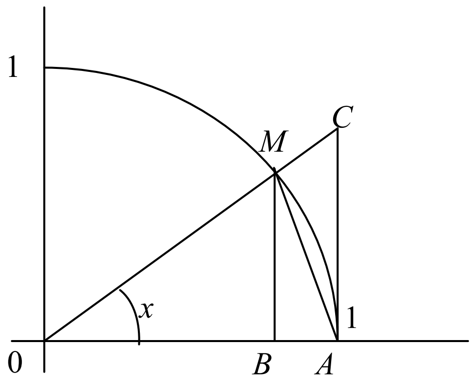


Рис. 1.6

Функция $y = \frac{\sin x}{x}$ не определена при $x = 0$, так как числитель и знаменатель дроби обращается в нуль. Такое выражение называют неопределенностью вида $\left(\frac{0}{0}\right)$. Найдем предел этой функции при $x \to 0$. Рассмотрим окружность радиуса 1 (рис. 1.6). Обозначим центральный угол МОА через x, где $0 < x < \frac{\pi}{2}$. Непосредственно из рис. 1.6 видно, что площадь сектора МОА заключена между площадями треугольников МОА и СОА:

пл. ΔМОА < пл. сект. МОА < пл. ΔСОА

или $\frac{1}{2}\cdot 1\cdot \sin x < \frac{1}{2}\cdot 1\cdot x < \frac{1}{2}\cdot 1\cdot \mathrm{tg}\, x$, или после сокращения на $\frac{1}{2}$, $\sin x < x < \mathrm{tg}\, x$.

Разделив почленно на $\sin x$, получим $1 < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x}$ или $1 > \frac{\sin x}{x} > \cos x$. Переходя к пределу при $x \to 0$ и учитывая, что $\lim\limits_{x\to 0} 1 = 1$, и $\lim\limits_{x\to 0}\cos x = 1$, видим, что переменная $\frac{\sin x}{x}$ заключена между величинами, имеющими один и тот же предел 1. Тогда, на основании теоремы 5 о действиях с пределами имеем

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1.$$

Отсюда следует, что $\sin x \sim x$ ($\sin x$ эквивалентен x) при $x \to 0$.

Пример 1. Найти пределы: а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x}{x}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 2x}{x^2}$.

Решение. а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x}{3x}\cdot 3=3$;

$$\text{б) } \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 2x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2 x}{x^2}=2\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2=2.$$

***Второй замечательный предел*:**

$$\lim_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})^x=\lim_{\alpha\to 0}(1+\alpha)^{\frac{!}{\alpha}}=e\approx 2{,}71828...$$

Пример 1. Найти пределы: а) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{2}{x}\right)^{2x}$, б) $\lim\limits_{x\to 0}\left(1+3x\right)^{\frac{1}{x}}$.

Решение. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{2}{x}\right)^{2x}=\lim\limits_{x\to\infty}\left(\left(1+\dfrac{2}{x}\right)^{\frac{x}{2}}\right)^4=e^4$;

$$\text{б) } \lim_{x\to 0}\left(1+3x\right)^{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to 0}\left[\left(1+3x\right)^{\frac{1}{3x}}\right]^3=e^3.$$

Рассмотрим

$$\lim_{x\to a}\left[f(x)\right]^{g(x)}=\left\{1^\infty\right\}=\lim_{x\to a}\left[1+\left[f(x)-1\right]\right]^{\frac{1}{f(x)-1}(f(x)-1)g(x)}=e^{\lim\limits_{x\to a}(f(x)-1)g(x)}$$

$$(\lim_{x\to a}f(x)=1,\ \lim_{x\to a}\varphi(x)=\infty).$$

Рабочая формула:

$$\lim_{x\to a}\left[f(x)\right]^{g(x)}=\left(1^\infty\right)=e^{\lim\limits_{x\to a}(f(x)-1)g(x)}.$$

1.10. Некоторые приемы раскрытия неопределенностей при вычислении пределов функции

Неопределенность вида $\left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)$

Основной прием раскрытия неопределенностей вида $\left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)$, получаемых при нахождении пределов отношения многочленов, если $x \to \infty$, состоит в почленном делении числителя и знаменателя на самую старшую степень переменной.

Пример 1. Найти пределы: а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^3+7x-2}{5x^3-3x+1}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2-4x+x^4}{3+5x+3x^3}$;

в) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4x^3-x+2}{2x^4-5}$.

Решение. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^3+7x-2}{5x^3-3x+1}$. Непосредственная подстановка приводит к неопределенности вида $\left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)$ (этот символ означает, что при $x \to \infty$ неограниченно возрастают $(\to\infty)$ и числитель и знаменатель). Разделим почленно на x^3 числитель и знаменатель дроби и найдем предел:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3+\dfrac{7}{x^2}-\dfrac{2}{x^3}}{5-\dfrac{3}{x^2}+\dfrac{1}{x^3}}=\frac{3}{5}.$$

Здесь и во всех других случаях пределы дробей с постоянным (или ограниченным числителем) и бесконечно возрастающим знаменателем равны нулю: $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{7}{x^2}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2}{x^3}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3}{x^2}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x^3}=0$.

Если показатель старшей степени многочлена в числителе выше, чем в знаменателе, то тот же прием приводит в пределе к выражению вида $\dfrac{C}{0}=\infty$, где $C-$постоянная.

б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2-4x+x^4}{3+5x+3x^3}$. Разделив почленно на x^4, получим:

$$\lim\frac{\dfrac{2}{x^4}-\dfrac{4}{x^3}+1}{\dfrac{3}{x^4}+\dfrac{5}{x^3}+\dfrac{3}{x}}=\frac{1}{0}=\infty.$$

Если показатель старшей степени многочлена в числителе ниже, чем в знаменателе, то такой прием приводит в пределе к выражению вида $\frac{0}{C}=0$.

в) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{4x^3-x+2}{2x^4-5}$. Разделив почленно числитель и знаменатель на x^4, получим:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{4}{x}-\frac{1}{x^3}+\frac{2}{x^4}}{2-\frac{5}{x^4}}=\frac{0}{2}=0.$$

Вывод:

Если старшая степень числителя равна старшей степени знаменателя, то предел отношения равен отношению коэффициентов при старших степенях.

Если старшая степень числителя ниже старшей степени знаменателя, то предел отношения равен нулю.

Если старшая степень числителя выше старшей степени знаменателя, то предел отношения равен бесконечности.

Неопределенность вида $\left(\frac{0}{0}\right)$

Пусть требуется найти предел функции $f(x)=\frac{\varphi(x)}{Q(x)}$ при $x\to a$, где числитель и знаменатель – многочлены, которые при $x=a$ оба равны нулю. Приходим к неопределенности $\lim\limits_{x\to a}\frac{\varphi(x)}{Q(x)}=\frac{0}{0}$, которую можно раскрыть, воспользовавшись теоремой Безу: если многочлен при $x=a$ обращается в нуль, он делится на двучлен $x-a$. Следовательно, числитель и знаменатель дроби можно разложить на множители:

$$\varphi(x)=(x-a)\cdot\varphi_1(x),$$

$$Q(x)=(x-a)\cdot Q_1(x).$$

После сокращения дроби на $x-a$ придем к пределу $\lim\limits_{x\to a}\frac{\varphi_1(x)}{Q_1(x)}$.

Если при $x=a$ и этот предел приведет к неопределенности $\left(\frac{0}{0}\right)$, разложение на множители повторяют. В итоге неопределенность раскрывается.

Пример 2. Найти пределы: а) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-4}{x^2-2x}$; б) $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{x^3-125}{x^3-10x^2-25x}$; в) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{2x^2-x-6}{x^2-3x+2}$.

Решение. а) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-4}{x^2-2x}$, здесь числитель и знаменатель дроби при $x\to 2$ стремится к нулю (неопределённость вида $\dfrac{0}{0}$).

Имеем $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-4}{x^2-2x}=\left(\dfrac{0}{0}\right)=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{(x-2)(x+2)}{x(x-2)}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x+2}{x}=\dfrac{2+2}{2}=2$.

Итак, $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-4}{x^2-2x}=2$.

б) $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{x^3-125}{x^3-10x^2-25x}=\left(\dfrac{0}{0}\right)=\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{(x-5)\cdot\left(x^2+5x+25\right)}{x(x-5)^2}=\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{x^2+5x+25}{x(x-5)}$; числитель дроби стремится к 75, а знаменатель стремится к нулю, т.е. является бесконечно малой величиной, следовательно, рассматриваемая дробь – бесконечно большая величина и $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{x^2-125}{x^3-10x^2-25x}=\infty$.

в) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{2x^2-x-6}{x^2-3x+2}$. Так как при $x=2$ числитель $\varphi(2)=2\cdot 2^2-2-6=0$ и знаменатель $Q(2)=2^2-3\cdot 2+2=0$, то оба эти квадратные трехчлена можно разложить на множители, один из которых будет $(x-2)$. Разложение можно выполнить путем деления многочленов на двучлен $x-2$:

$$\lim_{x\to 2}\frac{2x^2-x-6}{x^2-3x+2}=\lim_{x\to 2}\frac{2(x-2)(x+1,5)}{(x-2)(x-1)}=2\lim_{x\to 2}\frac{x+1,5}{x-1}=2\cdot\frac{3,5}{1}=7.$$

В функциях, содержащих радикалы, применяют умножение на сопряженные выражения.

Пример 3. Найти пределы: а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x+x^2}-1}{x}$; б) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{5-x}-\sqrt{3+x}}{1-x}$.

Решение.

а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x+x^2}-1}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\left(\sqrt{1+x+x^2}-1\right)\left(\sqrt{1+x+x^2}+1\right)}{x\left(\sqrt{1+x+x^2}+1\right)}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1+x+x^2-1}{x\left(\sqrt{1+x+x^2}+1\right)}=$

$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x(1+x)}{x\left(\sqrt{1+x+x^2}+1\right)}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1+x}{\sqrt{1+x+x^2}+1}=\dfrac{1}{2}$.

б) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{5-x}-\sqrt{3+x}}{1-x}$. Подставляя $x=1$, придем к неопределенности вида $\left(\dfrac{0}{0}\right)$. Умножим числитель и знаменатель дроби на сумму $\sqrt{5-x}+\sqrt{3+x}$ с таким расчетом, чтобы избавиться от иррациональности в числителе и устранить неопределенность. Поскольку

$\left(\sqrt{5-x}-\sqrt{3+x}\right)\left(\sqrt{5-x}+\sqrt{3+x}\right)=5-x-\left(3+x\right)=2-2x=2\left(1-x\right)$, то

$$\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{5-x}-\sqrt{3+x}}{1-x}=\lim_{x\to 1}\frac{\left(\sqrt{5-x}-\sqrt{3+x}\right)\left(\sqrt{5-x}+\sqrt{3+x}\right)}{\left(1-x\right)\left(\sqrt{5-x}+\sqrt{3+x}\right)}=$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{2\left(1-x\right)}{\left(1-x\right)\left(\sqrt{5-x}+\sqrt{3+x}\right)}=\lim_{x\to 1}\frac{2}{\sqrt{5-x}+\sqrt{3+x}}=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}.$$

Сравнение бесконечно малых. Отметим, что предел отношения бесконечно малых не изменится при замене их (или одной из них) эквивалентными бесконечно малыми. Это позволяет упростить решение многих задач теории пределов.

Пример 4. Найти пределы: а) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{\arcsin(x+2)}{x^2+2x}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+\sin x)}{tgx}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\sin 2x}{(arctg5x)^2}$.

Решение.

а) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{\arcsin(x+2)}{x^2+2x}=\left(\dfrac{0}{0}\right)=\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x+2}{x^2+2x}=-\dfrac{1}{2}$.

б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+\sin x)}{tgx}=\left(\dfrac{0}{0}\right)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$.

в) $\lim\limits_{x\to)}\dfrac{x\sin 2x}{(arctg5x)^2}=\left(\dfrac{0}{0}\right)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\cdot 2x}{(5x)^2}=\dfrac{2}{25}$.

Существенно упрощает решение задач использование двух важных соотношений теории пределов, называемых *первым* ($\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$) и *вторым* ($\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to\infty}(1+\dfrac{1}{x})^x=e$) *замечательными пределами*

Пример 5. Найти пределы: а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 4x}{x}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2\frac{x}{3}}{x^2}$.

Решение.

а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 4x}{x}\left(\dfrac{0}{0}\right)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{4\sin 4x}{4x}=\lim\limits_{x\to 0}4\cdot\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 4x}{4x}=4\cdot 1=4.$

б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2\frac{x}{3}}{x^2}\left(\dfrac{0}{0}\right)=\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\sin\frac{x}{3}}{x}\right)^2=\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\frac{1}{3}\sin\frac{x}{3}}{\frac{x}{3}}\right)^2=$

$\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{3}\right)^2\cdot\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\sin\frac{x}{3}}{\frac{x}{3}}\right)^2=\dfrac{1}{9}\cdot 1^2=\dfrac{1}{9}.$

Неопределенность вида $\left(1^{\infty}\right)$

Пример 6. Найти пределы: а) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{2}{x}\right)^{2x}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\left(1+3x\right)^{\frac{1}{x}}$;

в) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{k}{mx}\right)^{px}$.

Решение. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{2}{x}\right)^{2x}=\left(1^{\infty}\right)=\lim\limits_{x\to\infty}\left(\left(1+\dfrac{2}{x}\right)^{\frac{x}{2}}\right)^4=e^4;$

б) $\lim\limits_{x\to 0}\left(1+3x\right)^{\frac{1}{x}}=\left(1^{\infty}\right)=\lim\limits_{x\to 0}\left[\left(1+3x\right)^{\frac{1}{3x}}\right]^3=e^3;$

в) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{k}{mx}\right)^{px}=\left(1^{\infty}\right)=e^{\frac{kp}{m}}$, где $k, p, m\in R$.

Пример 7. Найти пределы: а) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+3}{x-4}\right)^{x}$; в) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x+1}{2x-1}\right)^{3x}$;

г) $\lim\limits_{x\to 0}\left(1-4x\right)^{\frac{1-x}{x}}$.

Решение. Воспользуемся рабочей формулой

$$\lim_{x\to a}\left[f(x)\right]^{g(x)}=\left(1^{\infty}\right)=e^{\lim\limits_{x\to a}(f(x)-1)g(x)}:$$

а) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+3}{x-4}\right)^x = e^{\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+3}{x-4}-1\right)x} = e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{7x}{x-4}} = e^7$;

б) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x+1}{2x-1}\right)^{3x} = e^{\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{2x+1}{2x-1}-1\right)3x} = e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{6x}{2x-1}} = e^3$;

г) $\lim\limits_{x\to0}(1-4x)^{\frac{1-x}{x}} = e^{\lim\limits_{x\to0}(1-4x-1)\frac{1-x}{x}} = e^{\lim\limits_{x\to0}\frac{-4x(1-x)}{x}} = e^{-4}$.

Следует заметить, что неопределённости вида $1^\infty, 0\cdot\infty, 0^0, \infty^0, \infty-\infty$ сводятся различными приёмами к неопределённости вида $\dfrac{0}{0}$ или $\dfrac{\infty}{\infty}$, раскрытие которых мы уже рассматривали в ряде простых случаев.

Пример 8. Вычислить: а) $\lim\limits_{x\to2}\left(\dfrac{1}{x-2}-\dfrac{4}{x^2-4}\right)$; б) $\lim\limits_{x\to0}\left[x\left(\ln(1+x)-\ln x\right)\right]$.

а) $\lim\limits_{x\to2}\left(\dfrac{1}{x-2}-\dfrac{4}{x^2-4}\right)$, при подстановке x=2, получаем $\left(\dfrac{1}{x-2}\to\infty \text{ и } \dfrac{1}{x^2-4}\to\infty\right)$ неопределённость вида ($\infty-\infty$). Преобразуем исходное выражение:

$$\lim_{x\to2}\left(\frac{1}{x-2}-\frac{4}{x^2-4}\right)=\lim_{x\to2}\frac{x+2-4}{x^2-4}=\lim_{x\to2}\frac{(x-2)}{(x-2)(x+2)}=\lim_{x\to2}\frac{1}{x+2}=\frac{1}{4}.$$

б) $\lim\limits_{x\to0}\left[x\left(\ln(1+x)-\ln x\right)\right]$, при $x\to0$, $\ln(1+x)\to0$, $\ln x\to-\infty$ и мы имеем дело с неопределённостью вида ($0\cdot\infty$).

Преобразуем: $\lim\limits_{x\to0}\left[x\left(\ln(1+x)-\ln x\right)\right]=\lim\limits_{x\to0}\left[x\ln\dfrac{1+x}{x}\right]=\lim\limits_{x\to0}\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x$ (напомним, что $\lim\limits_{x\to a}F(f(x))=F(\lim\limits_{x\to a}f(x))$, если $f(x)$ (и $F(f(x))$) непрерывны в окрестности точки a) $=\ln\lim\limits_{x\to0}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x=\ln e=1$.

Задания

1. Вычислить пределы:

а) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{tgx}{x}$; б) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin3x}{\sqrt{x+2}-\sqrt{2}}$; в) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3x-2}{3x+1}\right)^{2x}$; г) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{e^{-3x}-1}{x}$.

2.Найти пределы последовательностей:

а) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^2-2n}{n-\sqrt{n}}$; б) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{8}+...+\dfrac{1}{2^n}\right)$; в) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{2n+3}-\sqrt{n-1}\right)$

3. Пользуясь методом замены бесконечно малых эквивалентными вычислить следующие пределы:

а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x}{e^{3x}-e^{2x}}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2}{\ln(1+5\sin x)}$.

1.11. Непрерывность функции

Функция $f(x)$ называется *непрерывной* в точке a, если:

1) эта функция определена в некоторой окрестности точки a;

2) существует $\lim\limits_{x\to a} f(x)$;

3) этот предел равен значению функции в точке a, т.е. $\lim\limits_{x\to a} f(x)$,

Обозначая $x-a=\Delta x$ (*приращение аргумента*) и $f(x)-f(a)=\Delta y$, (*приращение функции*), условие непрерывности можно записать так: $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta y=0$, т.е. функция $f(x)$ непрерывна в точке a тогда и только тогда, тогда в этой точке бесконечно малому приращению аргумента соответствует бесконечно малое приращение функции.

Если функция непрерывна в каждой точке некоторой области (интервала, сегмента и т.п.), то она называется непрерывной в этой области.

Функция f называется *непрерывной* в точке a *справа*, если выполняется условие $\lim\limits_{x\to a+0} f(x)=f(a)$ (когда x стремится к a справа, оставаясь больше a).

Если $\lim\limits_{x\to a-0} f(x)=f(a)$, то говорят, что функция f *непрерывна слева* (когда x стремится к a слева, оставаясь меньше a).

Если f непрерывна в точке a слева и справа, то она непрерывна в этой точке.

Функция f имеет *разрыв* в точке a, если она определена в сколь угодно близких точках к a, но в самой точке a нарушается хотя бы одно из условий непрерывности функции.

Конечным разрывом или *разрывом первого рода* называется разрыв функции f в точке a, если существуют конечные односторонние пределы

$f(a-0)$ и $f(a+0)$.

Скачком функции f в точке a называется разность его односторонних пределов $\lim\limits_{x\to a+} f(x)-\lim\limits_{x\to a-} f(x)$, если они различны.

Если $f(a-0)=f(a+0)$, то точка a называется *точкой устранимого разрыва.*

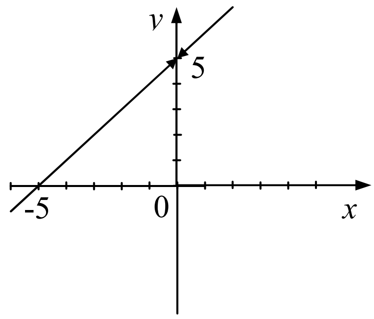
Все другие случаи разрыва функции называются разрывами 2-го рода.

Если хотя бы один из указанных односторонних пределов окажется бесконечным, то разрыв функции называется бесконечным.

Пример 1.

Исследовать функцию на непрерывность; непрерывность справа и слева и установить характер точек разрыва, где

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-25}{x-5}, & \text{при } x\neq 5\\ 1 & \text{, при } x=5\end{cases}$$



Решение. При $x\neq 5$ можно сократить на $x-5$. Следовательно, $f(x)=x+5$ при $x\neq 5$. Легко видеть, что $\lim\limits_{x\to 5-} f(x)=\lim\limits_{x\to 5+}=10$. Значит, при $x=5$ функция будет разрывной, так как предел функции не равен значению функции в этой точке.

Пример 2. Исследовать на непрерывность функцию

$$f(x)=\begin{cases}e^{\frac{1}{x-1}}, & \text{при } x\neq 1\\ 0 & \text{, при } x=1\end{cases}$$

Решение. Найдем односторонние пределы в точке $x=1$, т.е.

$$\lim_{x\to 1-} f(x)=\lim_{x\to 1-} e^{\frac{1}{x-1}}=0,$$

$$\lim_{x\to 1+} f(x)=\lim_{x\to 1+} e^{\frac{1}{x-1}}=\infty.$$

В точке $x=1$ функция $f(x)$ имеет разрыв 2 рода. Так как предел слева в точке $x=1$ равен значению функции в этой точке, то функция непрерывна слева в точке $x=1$. При остальных значениях x функция непрерывна (по теореме непрерывности суперпозиции функций).

Пример 3. Доказать непрерывность функции $f(x)=\sin 2x$.

Решение. Пусть x_0 – произвольное значение на числовой прямой.

Найдем $f(x_0)=\sin 2x_0$ и составим разность

$$\left|\sin 2x-\sin 2x_0\right|=\left|2\cos(x+x_0)\cdot\sin(x-x_0)\right|.$$

Оценим полученное выражение в правой части по абсолютной величине

$$\left|\cos(x+x_0)\right|\leq 1,$$

$$\left|\sin(x-x_0)\right|<\left|x-x_0\right|.$$

Итак, отмечаем, что

$$\lim_{x \to x_0} \sin x - \sin x_0 = 0.$$

Задания

1. Показать, что при $x = 4$ функция $y = \operatorname{arctg} \dfrac{1}{x-4}$ имеет разрыв.

2. Найти точки разрыва функции $y = \dfrac{1}{(x-1)(x-5)}$.

3. Каков характер разрыва функции $y = \dfrac{1}{1 - e^{\frac{1}{-x}}}$ в точке $x = 1$.

4. Исследовать на непрерывность функции

а) $y = \cos(3x - 2)$; б) $y = \sqrt{x^2 + 1}$.

2. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИИ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

2.1. Задачи, приводящие к понятию производной

Задача о скорости движения. Рассмотрим понятие мгновенной скорости прямолинейного движения точки.

Пусть вдоль некоторой прямой движется точка, причем неравномерно, с переменной скоростью по закону $S = S(t)$, где S – пройденный путь; t – время (рис. 2.1). Так как скорость переменная, то отношение пройденного пути к истекшему времени определяет среднюю скорость, т.е. за промежуток Δt средняя скорость $\upsilon_{\text{ср}} = \dfrac{\Delta S}{\Delta t}$. Мгновенная же скорость движения в момент t получается как предел средней скорости в процессе безграничного уменьшения промежутка времени Δt

$$\upsilon_{\text{мгн}} = \lim_{\Delta t \to 0} \upsilon_{\text{ср}} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta S}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{f(t + \Delta t) - f(t)}{\Delta t}. \qquad (2.1)$$

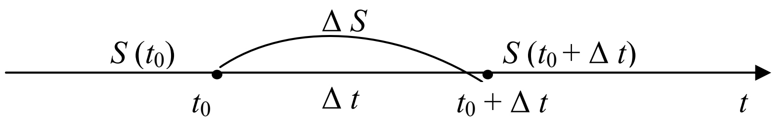


Рис. 2.1

Задача о касательной. Пусть функция $y = f(x)$ определена на промежутке X. Возьмем точку $x_0 \in X$ и дадим значению x_0 приращение $\Delta x \neq 0$ (рис. 2.2), тогда функция получит приращение $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$.

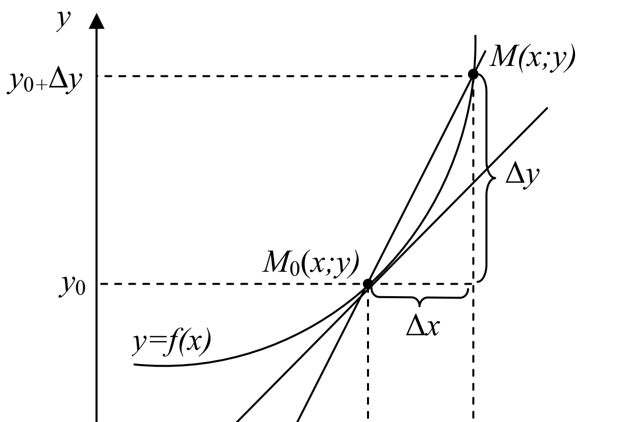


Рис. 2.2

Видно, что $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \operatorname{tg}\varphi$, т.е. это отношение равно угловому коэффициенту секущей M_0M. Если $\Delta x \to 0$, то секущая, поворачиваясь вокруг точки M_0, в пределе переходит в касательную. Таким образом, под касательной к кривой $y = f(x)$ в точке M_0 $(x_0; y_0)$ следует понимать предельное положение секущей $M_0 M$ при приближении точки M к точке M_0, т.е. при $\Delta x \to 0$ (рис. 2.2).

Уравнение касательной к кривой $y = f(x)$ в точке x_0, проходящей через точку M_0 имеет вид:

$$y - y_0 = k(x - x_0),$$

где угловой коэффициент касательной

$$k = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \operatorname{tg}\alpha. \qquad (2.2)$$

2.2. Определение производной

Выражения (2.1), (2.2) в рассмотренных примерах с математической точки зрения имеют одинаковую структуру и характеризуют скорость изменения функции. Таким образом, *производной функции* $y = f(x)$ называется предел отношения приращения функции к приращению независимой переменной при стремлении последнего к нулю (если этот предел существует):

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}.$$

Нахождение производной функции называется дифференцированием этой функции.

Производная функции имеет несколько обозначений. Обозначения $\frac{dy}{dx}$ и $\frac{df(x)}{dx}$, были введены Лейбницем, а обозначения со штрихами y' и $f'(x)$ – Лагранжем. Сам термин «производная» также введен Лагранжем на рубеже XVIII и XIX веков и не зависимо от него Арбогастом. Термин «дифференциал» введен Лейбницем по предложению его ученика И. Бернулли.

Существуют и другие обозначения. Например, в механике и в теории колебаний, когда независимой переменной является время, И. Ньютон применял обозначение $\dot{y}$ («игрек с точкой»).

Геометрический смысл производной. Производная $f'(x_0)$ есть угловой коэффициент (тангенс угла наклона) касательной, проведенной к кривой $y = f(x)$ в точке x_0 (см. рис. 2.2):

$$\operatorname{tg}\alpha = f'(x_0).$$

Механический смысл производной. Производная пути по времени $S'(t_0)$ есть скорость точки в момент t_0 (см. рис. 2.1):

$$\upsilon(t_0) = S'(t_0).$$

2.3. Зависимость между непрерывностью функции и дифференцируемостью

Терема. Если $y = f(x)$ дифференцируема в точке x_0, то она непрерывна в этой точке.

Доказательство. Т.к.

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x_0),$$

то на основании теоремы о связи бесконечно малых с пределами функций

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x_0) + \alpha,$$

где α – бесконечно малая величина, или

$$\Delta y = f'(x_0)\Delta x + \alpha \Delta x.$$

При $\Delta x \to 0$ $\Delta y \to 0$ и, следовательно, функция $y=f(x)$ в точке x_0 является непрерывной.

2.4. Правило вычисления производной

1. Дать аргументу х приращение $\Delta x \neq 0$.
2. Вычислить приращение функции $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$.
3. Составить приращение функции к приращению аргумента $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$.
4. Вычислить предел этого отношения (если этот предел существует) при $\Delta x \to 0$, т.е.

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

Пример 1. Исходя из определения производной, найти производную функции а) $y=\sqrt{x}$; б) $y=\operatorname{tg} x$.

Решение. а) $y=\sqrt{x}$. Зададим приращение Δx , такое, что $x+\Delta x \geq 0$.

Тогда

$$\Delta y=\sqrt{x+\Delta x}-\sqrt{x} .$$

Поэтому

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\sqrt{x+\Delta x}-\sqrt{x}}{\Delta x} .$$

Переходим к пределу при $\Delta x \to 0$:

$$y'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sqrt{x+\Delta x}-\sqrt{x}}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta x}{\Delta x(\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x})}=\frac{1}{2\sqrt{x}} ;$$

т.е. $(\sqrt{x})'=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$.

б) $y=\operatorname{tg} x$. Находим

$$\Delta y=tg(x+\Delta x)-tgx=\frac{\sin(x+\Delta x)}{\cos(x+\Delta x)}-\frac{\sin x}{\cos x}=\frac{\sin(x+\Delta x)\cos x-\sin x\cos(x+\Delta x)}{\cos(x+\Delta x)\cdot\cos x}=$$

$$=\frac{\sin(x+\Delta x-x)}{\cos(x+\Delta x)\cdot\cos x}=\frac{\sin\Delta x}{\cos(x+\Delta x)\cdot\cos x}.$$

Откуда

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\dfrac{\sin\Delta x}{\Delta x}}{\cos(x+\Delta x)\cdot\cos x}$$

и, следовательно

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\dfrac{\sin\Delta x}{\Delta x}}{\cos(x+\Delta x)\cdot\cos x}=\frac{1}{\cos^2 x} .$$

Итак, $(\operatorname{tg} x)'=\dfrac{1}{\cos^2 x}$.

2.5. Свойства производной

1. Производная постоянной равна нулю, т.е.

$$(C)'=0,$$

$$y=c,\ \Delta y=0,\ \frac{\Delta y}{\Delta x}=0,\ \ y'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=0,\ (C)'=0.$$

2. Производная независимой переменной равна 1, т.е.

$$(x)'=1,$$

$$y=x, \Delta y=\Delta x, y'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=1, (x)'=1.$$

3. Производная алгебраической суммы дифференцируемых функций равна сумме производных этих функций, т.е.

$$(u\pm \upsilon)'=u'\pm \upsilon',$$

$$y=u+\upsilon,\ \Delta y=(u+\Delta u)+(\upsilon+\Delta\upsilon)-(u+\upsilon)=\Delta u+\Delta\upsilon,$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\Delta u+\Delta v}{\Delta x}=\frac{\Delta u}{\Delta x}+\frac{\Delta v}{\Delta x};$$

$$y'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u+\Delta\upsilon}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\left(\frac{\Delta u}{\Delta x}+\frac{\Delta\upsilon}{\Delta x}\right)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x}+\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta v}{\Delta x}=u'+v'.$$

Следствие. Формула справедлива для любого конечного числа дифференцируемых функций.

4. Производная произведения двух дифференцируемых функций равна произведению производной первого сомножителя на второй плюс произведение первого сомножителя на производную второго, т.е.

$$(uv)'=u'v+v'u,$$

$$y=u\cdot\upsilon, \Delta(u\upsilon)=(u+\Delta u)(\upsilon+\Delta\upsilon)-(u\cdot\upsilon)=\Delta u\upsilon+\upsilon\Delta u+\Delta u\Delta\upsilon,$$

$$y'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta(u\upsilon)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x}\upsilon+\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta\upsilon}{\Delta x}u+\underbrace{\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x}\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\Delta\upsilon}_{=0,\,т.к.\,\Delta\upsilon\to 0}=u'\upsilon+\upsilon'u.$$

Следствие 1.Формула справедлива для любого конечного числа множителей, например:

$$y=u\upsilon\omega, (u\upsilon\omega)'=(u\upsilon)'\omega+(u\upsilon)\omega'=(u'\upsilon+u\upsilon')\omega+u\upsilon\omega'=u'\upsilon\omega+\upsilon'u\omega+\omega'u\upsilon,$$

$$(u\upsilon\omega)'=u'\upsilon\omega+\upsilon'u\omega+\omega'u\upsilon.$$

Следствие 2. Постоянный множитель можно выносить за знак производной:

$$(cu)'=c'u+cu'=0+cu'=c'u,$$

$$(cu)'=cu'.$$

5. Производная частного двух функций:

$$\left(\frac{u}{\upsilon}\right)^{/}=\frac{u^{/}\upsilon-\upsilon^{/}u}{\upsilon^{2}}.$$

$$y=\frac{u}{\upsilon},\ \Delta y=\frac{u+\Delta u}{\upsilon+\Delta\upsilon}-\frac{u}{\upsilon}=\frac{u\upsilon+\upsilon\Delta u-u\upsilon-u\Delta\upsilon}{(\upsilon+\Delta\upsilon)\upsilon},$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{u\upsilon+\upsilon\Delta u-u\upsilon-u\Delta\upsilon}{\Delta x(\upsilon+\Delta\upsilon)\upsilon}=\frac{\upsilon\cdot\dfrac{\Delta u}{\Delta x}-u\cdot\dfrac{\Delta\upsilon}{\Delta x}}{\upsilon(\upsilon+\Delta\upsilon)}.$$

Т.к. в силу непрерывности функции $\Delta\upsilon\to 0$ при $\Delta x\to 0$, получим:

$$y'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\upsilon\dfrac{\Delta u}{\Delta x}-u\dfrac{\Delta\upsilon}{\Delta x}}{\upsilon(\upsilon+\Delta v)}=\frac{u^{/}\upsilon-\upsilon^{/}u}{\upsilon^{2}}.$$

Следствие. Производная от дроби с постоянным числителем

$$\left(\frac{c}{u}\right)^{/}=\frac{c^{/}u-cu^{/}}{\upsilon^{2}}=-\frac{c}{u^{2}}\cdot u^{/}.$$

6. Производная сложной функции. Производная сложной функции равна произведению производной данной функции по промежуточному аргументу u на производную самого промежуточного аргумента по независимой переменной x, т.е.:

$$\left[f\left(u\left(x\right)\right)\right]^{/}=f_{u}^{/}\cdot u_{x}^{/}.$$

Пусть $y=f(u)$, $u=\varphi(x)$, т.е. y является сложной функцией. Дадим приращение независимой переменной x, равное $\Delta\text{x}\neq 0$. Тогда u получит приращение Δu, а y получит приращение Δy.

По условию

$$\lim_{\Delta u\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta u}=y_{u}^{/}.$$

По определению предела, при $\Delta u\neq 0$ получим

$$\frac{\Delta y}{\Delta u}=y_{u}^{/}+\alpha,$$

где $\alpha\to 0$ при $\Delta u\to 0$. Тогда

$$\Delta y=y_{u}^{/}\Delta u+\alpha\Delta u.$$

Разделим все члены равенства на Δx:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=y_{u}^{/}\frac{\Delta u}{\Delta x}+\alpha\frac{\Delta u}{\Delta x}.$$

По условию

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} = u'_x, \text{ а } \lim_{\Delta x \to 0} \alpha = 0.$$

Тогда, переходя к пределу при $\Delta x \to 0$, получим:

$$y'_x = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = y'_u u'_x.$$

7. Производная обратной функции. Производная от переменной y как функции от x равна обратной величине производной от переменной x как функции от y:

$$y'_x = \frac{1}{x'_y}.$$

Пусть $y=f(x)$ – дифференцируемая функция на некотором промежутке X. Если переменную y рассматривать как аргумент, а переменную x как функцию, то новая функция $x=\varphi(y)$ является обратной к данной и непрерывной на промежутке Y.

Т.к.

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{\frac{\Delta x}{\Delta y}},$$

откуда при $\Delta x \to 0$ и $\Delta y \to 0$

$$y'_x = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{\lim\limits_{\substack{\lim \\ \Delta x \to 0}} \frac{\Delta x}{\Delta y}} = \frac{1}{x'_y}.$$

8. Производная неявной функции.

Если задана неявная функция в виде $F(x,y)=0$, то для нахождения производной y'_x нужно найти производные от левой и правой частей заданного соотношения, имея при этом в виду, что y есть функция x, обращающая это соотношение в тождество. Затем из полученного соотношения выразить y'_x.

Пример 2. Найти производную функции $y^2+3x^2+2xy+5=0$.

Решение. Для нахождения производной y'_x найдем производную от левой и правой частей заданного соотношения, имея при этом в виду, что y есть функция, зависящая от x:

$$2yy'+6x+2y+2xy'=0,$$

$$y'(2y+2x) = -6x - 2y,$$

$$y'_x = -\frac{3x+y}{x+y}.$$

9. Производная сложной функции:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dU}\cdot\frac{dU}{dx};$$

здесь $y=f(U)=f\left[\varphi(x)\right]$ – сложная функция; $U=\varphi(x)-$ промежуточный аргумент.

2.6. Производные основных элементарных функций

2.6.1. Дифференцирование тригонометрических функций

1. $$y=\sin x.$$

$$\Delta y=\sin(x+\Delta x)-\sin x;$$

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sin(x+\Delta x)-\sin x}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{2\cdot\sin\frac{\Delta x}{2}\cdot\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)}{\Delta x}=$$

$$=\underbrace{\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}}_{=1}\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)}{1}=\cos x;$$

$$(\sin x)'=\cos x;\ (\cos u)'=\cos u\cdot u';$$

2. $$y=\cos x=\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right).$$

$$(\cos x)'=\left[\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\right]'=\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\cdot\left(\frac{\pi}{2}-x\right)'=-\sin x;$$

$$(\cos x)'=-\sin x;\ (\cos u)'=-\sin u\cdot u';$$

3. $$y=\operatorname{tg} x.$$

$$(\operatorname{tg} x)'=\left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)'=\frac{\sin' x\cdot\cos x-\cos' x\cdot\sin x}{\cos^2 x}=\frac{1}{\cos^2 x};$$

$$(\operatorname{tg} x)'=\frac{1}{\cos^2 x};\ (\operatorname{tg} u)'=\frac{1}{\cos^2 u}\cdot u';$$

4. $$y=\operatorname{ctg} x.$$

$$(\operatorname{ctg} x)'=-\frac{1}{\sin^2 x};\ (\operatorname{ctg} u)'=-\frac{1}{\sin^2 u}\cdot u'.$$

2.6.2. Дифференцирование логарифмической функции

$$y = \log_a x.$$

$$\Delta y = \log_a \left(x + \Delta x \right) - \log_a x$$

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\log_a \left(x + \Delta x \right) - \log_a x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\log_a \left(\dfrac{\Delta x + x}{x} \right)}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \log_a \left(1 + \frac{\Delta x}{x} \right)^{\frac{1}{\Delta x}} == \log_a \lim_{\Delta x \to 0} \left[\left(1 + \frac{\Delta x}{x} \right)^{\frac{x}{\Delta x}} \right]^{\frac{1}{x}} =$$

$$= \log_a e^{\frac{1}{x}} = \frac{1}{x} \cdot \log_a e = \frac{1}{x \cdot \ln a};$$

$$\left(\log_a x \right)' = \frac{1}{x \cdot \ln a}; \ \left(\log_a u \right)' = \frac{1}{u \cdot \ln a} \cdot u';$$

$$y = \ln u, \ \left(\ln u \right)' = \frac{1}{u} \cdot u'.$$

2.6.3 Дифференцирование степенной функции с любым показателем

$$y = u^{\alpha}.$$

$$\ln y = \alpha \cdot \ln u;$$

$$(\ln y)' = (\alpha \cdot \ln u)';$$

$$\frac{1}{y} \cdot y' = \alpha \cdot \frac{1}{u} \cdot u';$$

$$y' = y \cdot \alpha \cdot \frac{1}{u} \cdot u' = \alpha \cdot u^{\alpha - 1} \cdot u';$$

$$(u^{\alpha})' = \alpha \cdot u^{\alpha - 1} \cdot u'.$$

2.6.4. Дифференцирование показательной функции

$$y = a^u.$$

$$\ln y = u \cdot \ln a;$$

$$(\ln y)' = (u \cdot \ln a)';$$

;

$$y' = y \cdot u' \cdot \ln a = a^u \cdot u' \cdot \ln a;$$

$$\left(a^u \right)' = a^u \cdot u' \cdot \ln a.$$

2.6.5. Дифференцирование показательно-степенной функции

$$y = u^v .$$

$$\ln y = v \cdot \ln u ;$$

$$\frac{1}{y} \cdot y' = v' \cdot \ln u + v \cdot \frac{1}{u} \cdot u' ;$$

$$y' = u^v \cdot v' \cdot \ln u + v \cdot u^{v-1} \cdot u' ;$$

$$(u^v)' = u^v \cdot \ln u \cdot v' + v \cdot u^{v-1} \cdot u' .$$

2.6.6. Дифференцирование обратных тригонометрических функций

1. $$y = \arcsin x \Rightarrow x = \sin y ;$$

$$y'_x = \frac{1}{x'_y} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} ;$$

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} ; \ \left(\arcsin u\right)' = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u' ;$$

2. $$y = \arccos x ;$$

$$\left(\arccos x\right)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} ; \ \left(\arccos u\right)' = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u' ;$$

3. $$y = \operatorname{arctg} x \Rightarrow x = \operatorname{tg} y ;$$

$$y'_x = \frac{1}{x'_y} = \frac{1}{\dfrac{1}{\cos^2 y}} = \frac{1}{1+\operatorname{tg}^2 y} = \frac{1}{1+x^2} ;$$

$$\left(\operatorname{arctg} x\right)' = \frac{1}{1+x^2} ; \ \left(\operatorname{arctg} u\right)' = \frac{1}{1+u^2} \cdot u' ;$$

4. $$y = \operatorname{arctg} x ;$$

$$\left(\operatorname{arctg} x\right)' = \frac{1}{1+x^2} ; \ \left(\operatorname{arctg} u\right)' = -\frac{1}{1+u^2} \cdot u' .$$

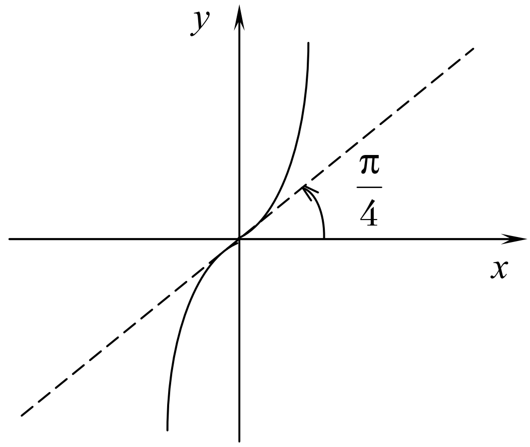
2.6.7. Гиперболические функции и производные гиперболических функций

1. Гиперболический синус

$$\operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2};$$

$$(\operatorname{sh} x)' = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \operatorname{ch} x;$$

$$(\operatorname{sh} u)' = \operatorname{ch} u \cdot u'.$$

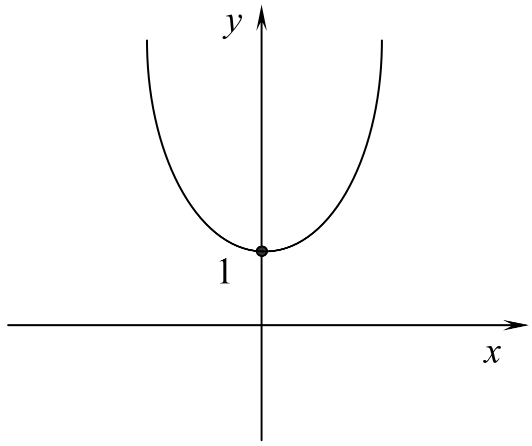


2. Гиперболический косинус

$$\operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2};$$

$$(\operatorname{ch} x)' = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \operatorname{sh} x;$$

$$(\operatorname{ch} u)' = \operatorname{sh} u \cdot u';$$

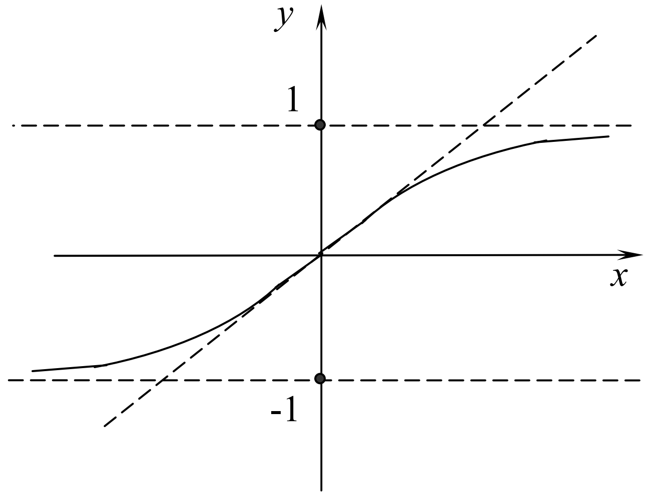


3. Гиперболический тангенс

$$\operatorname{th} x = \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}};$$

$$(\operatorname{th} x)' = \frac{\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x}{\operatorname{ch}^2 x} = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x};$$

$$(\operatorname{th} u)' = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 u} \cdot u';$$



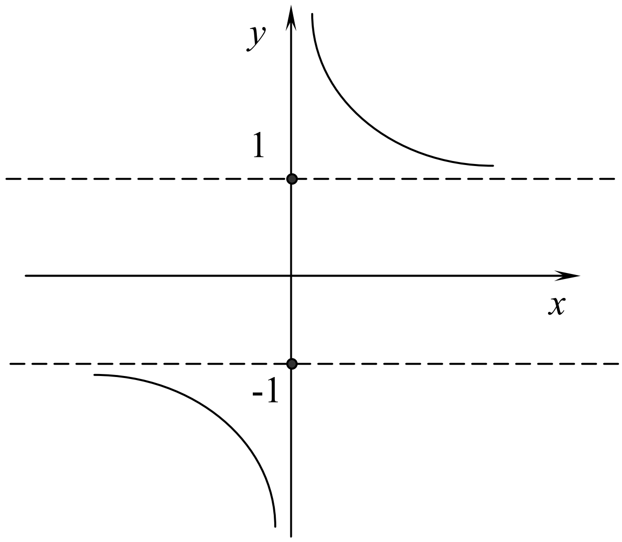
4. Гиперболический котангенс

$$\operatorname{cth} x = \frac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{sh} x} = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$$

$$(\operatorname{cth} x)' = \frac{\operatorname{sh}^2 x - \operatorname{ch}^2 x}{\operatorname{sh}^2 x} = -\frac{1}{\operatorname{sh}^2 x}$$

;

$$(\operatorname{cth} u)' = -\frac{1}{\operatorname{sh}^2 u} \cdot u'.$$



2.6.8. Формулы дифференцирования основных элементарных функций

1. $(u^m)' = mu^{m-1}u'$;

2. $\left(\sqrt{u}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{u}}u'$;

3. $\left(\frac{1}{u}\right)' = \frac{1}{u^2}u'$;

4. $(e^u)' = e^u u'$;

5. $(a^u)' = a^u u' \ln a$;

6. $(\ln u)' = \frac{1}{u}u'$;

7. $(\log_a u)' = \frac{1}{u \ln a}u'$;

8. $(\sin u)' = \cos u \cdot u'$;

9. $(\cos u)' = -\sin u \cdot u'$;

10. $(\operatorname{tg} u)' = \frac{1}{\cos^2 u} \cdot u' = \sec^2 u \cdot u'$.

11. $(\operatorname{ctg} u)' = -\frac{1}{\sin^2 u} = -\cos ec^2 u$;

12. $(\arcsin \mathrm{u})' = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}}$;

13. $(\arccos\ u)' = -\frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u'$;

14. $(\operatorname{arctg} u)' = \frac{1}{1+u^2} \cdot u'$;

15. $(\operatorname{arcctg} u)' = -\frac{1}{1+u^2} \cdot u'$;

16. $(\operatorname{sh} u)' = \left(\frac{e^u - e^{-u}}{2}\right)' = \operatorname{ch} u \cdot u'$;

17. $(\operatorname{ch} u)' = \left(\frac{e^u + e^{-u}}{2}\right)' = \operatorname{sh} u \cdot u'$;

18. $(\operatorname{th} u)' = \left(\frac{\operatorname{sh} u}{\operatorname{ch} u}\right)' = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 u} \cdot u'$;

19. $(\operatorname{cth} u)' = \left(\frac{\operatorname{ch} u}{\operatorname{sh} u}\right)' = \frac{1}{\operatorname{sh}^2 u} \cdot u'$ **.**

Пример 3. Найти производную функции $y = x^3 \operatorname{arctg} x$.

Решение.

$$y' = (x^3)' \operatorname{arctg} x + x^3 (\operatorname{arctg} x)' = 3x^2 \operatorname{arctg} x + \frac{x^3}{1+x^2}.$$

Пример 4. Найти производную функции $y = \dfrac{\arcsin x}{x^3}$.

Решение:

$$y' = \frac{\left(\arcsin x\right)' \cdot x^3 - \arcsin x \cdot \left(x^3\right)'}{\left(x^3\right)^2} = \frac{\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \cdot x^3 - \arcsin x \cdot 3x^2}{x^6} =$$

$$= \frac{x - 3\arcsin x \cdot \sqrt{1-x^2}}{x^4\sqrt{1-x^2}}.$$

Пример 5. Найти производную функции $y = \sin\left(x^4 + 2\right)$.

Решение. Полагая $x^4 + 2 = U$, получим:

$$y' = \cos\left(x^4+2\right) \cdot \left(x^4+2\right)' = 4x^3 \cdot \cos\left(x^4+2\right).$$

Пример 6. Найти y', если $y = tg^3\left(x^2+1\right)$.

Решение:

$$y' = \left[\operatorname{tg}^3\left(x^2+1\right)\right]' = 3\operatorname{tg}^2\left(x^2+1\right) \cdot \left[\operatorname{tg}\left(x^2+1\right)\right]' =$$

$$= 3\operatorname{tg}^2\left(x^2+1\right) \cdot \frac{1}{\cos^2\left(x^2+1\right)} \cdot \left(x^2+1\right)' =$$

$$= 3\operatorname{tg}^2\left(x^2+1\right) \cdot \frac{2x}{\cos^2\left(x^2+1\right)} = \frac{6x \cdot \operatorname{tg}^2\left(x^2+1\right)}{\cos^2\left(x^2+1\right)}.$$

Пример 7. Найти производную $y = \ln \operatorname{tg} \dfrac{2x+1}{4}$.

Решение. Берем производную от y как от сложной функции

$$y = \ln\left(u(v(x))\right), \text{ где } u = \operatorname{tg} v,\ v = \frac{2x+1}{4}.$$

$$y' = \frac{1}{u(v(x))} \cdot u'_{\upsilon} \cdot v'_x, \text{ где } u(v(x)) = \operatorname{tg}\frac{2x+1}{4},$$

$$u'_{\upsilon} = \frac{1}{\cos^2 v}; \; v'_x = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}.$$

Итак,

$$y' = \frac{1}{\operatorname{tg}\frac{2x+1}{4}} \cdot \frac{1}{\cos^2 \frac{2x+1}{4}} \cdot \frac{1}{2}.$$

Пример 8. Найти производную функции $y = (\sin x)^{\operatorname{tg} x}$.

Решение. Имеем $\ln y = \operatorname{tg} x \ln \sin x$, откуда

$$\frac{y'}{y} = \frac{1}{\cos^2 x} \ln(\sin x) + \operatorname{tg} x \cdot \frac{1}{\sin x} \cos x = \frac{\ln(\sin x)}{\cos^2 x} + 1,$$

$$y' = y \cdot \left(\frac{\ln(\sin x)}{\cos^2 x} + 1 \right) = (\sin x)^{\operatorname{tg} x} \left(\frac{\ln(\sin x)}{\cos^2 x} + 1 \right).$$

2.7. Дифференциал функции

Пусть имеем в точке x конечную производную $f'(x) \neq 0$, тогда

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x),$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x) + \alpha,$$

где $\alpha \to 0$ при $\Delta x \to 0$.

$$\Delta y = \underbrace{f'(x)\Delta x}_{\text{1 слагаемое}} + \underbrace{\alpha \Delta x}_{\text{2 слагаемое}}.$$

Таким образом, приращение функции Δy состоит из двух слагаемых (1-е слагаемое линейно относительно Δx). При $\Delta x \to 0$ и 1-е и 2-е слагаемые стремятся к нулю, но 2-е быстрее, так как бесконечно малая величина $\alpha \Delta x$ более высокого порядка, чем Δx ($\lim\limits_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \alpha \to 0}} \frac{\alpha \Delta x}{\Delta x} = \lim\limits_{\alpha \to 0} \alpha = 0$).

Поэтому решающее значение имеет 1-ое слагаемое.

Определение. Дифференциалом функции называется главная, линейная относительно Δx часть приращения функции, равная произведению производной на приращение независимой переменной и обозначается

$$dy = f'(x)\Delta x.$$

Пример. Найти дифференциал функции $y = x$.

Решение. Т.к. $dy = x'\Delta x = \Delta x$ и $dy = dx$ то $dx = \Delta x$. Т.е. дифференциал независимой переменной равен приращению этой переменной. Таким образом

$$dy = f'(x)dx \Rightarrow f'(x) = \frac{dy}{dx}.$$

Поэтому на производную можно смотреть как на частное от деления дифференциала функции и дифференциала аргумента.

2.7.1. Геометрический смысл дифференциала

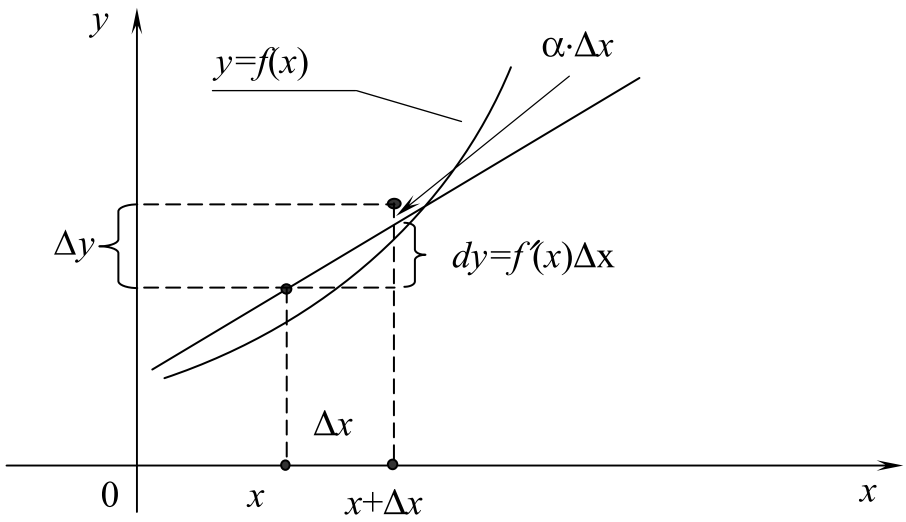


Рис. 2.3

Дифференциал – это приращение ординаты касательной, проведенной к графику функции $y = f(x)$ в данной точке, когда x получает приращение Δx. Заметим, что Δy может быть больше dy (рис. 2.3), а может быть и меньше dy.

2.7.2. Дифференциал сложной функции. Инвариантность формы дифференциала сложной функции

Рассмотрим функцию $y = f(x)$,где $u = \varphi(x)$, т.е. $y = f(\varphi(x))$ – сложная функция.

$$y'_x = f'_u \cdot u'_x;$$
$$\frac{dy}{dx} = f'_u \frac{du}{dx};$$

$$dy = f'_u \cdot \underbrace{\frac{du}{dx} \cdot dx}_{du};$$

$$dy = f'_u du. \tag{2.3}$$

Для функции $y = f(x)$ с независимой переменной x

$$dy = f'(x)dx. \tag{2.4}$$

Сходство формул (2.3) и (2.4) означает, что формула дифференциала не изменится, если вместо функции от независимой переменной x рассматривать функцию от зависимой переменной u. В этом состоит инвариантность (сохранение формы) дифференциала. Различие в формулах состоит в том, что $dx - \mathrm{const}$, а du – переменная, т.е. $dx=\Delta x$, $du \approx \Delta u$.

2.7.3. Применение дифференциала в приближенных вычислениях

Т.к. $\Delta y = dy + \alpha\Delta x$, т.е. приращение функции Δy отличается от ее дифференциала dy на бесконечно малую величину более высокого порядка, чем $dy=f'(x)\Delta x$. Поэтому при $\Delta x \to 0$ $\Delta y \approx dy$, т.е. $\underbrace{f(x+\Delta x) - f(x)}_{\Delta y} \approx \underbrace{f'(x)\Delta x}_{dy}$,

откуда

$$f(x+\Delta x) \approx f(x) + f'(x)\Delta x.$$

Пример. Вычислить приближенно $\arcsin 0,51$.

Решение. Полагая $f(x) = \arcsin x$, x=0,5, Δx=0,01 вычислим

$$f(x+\Delta x) \approx f(x) + f'(x)\Delta x,$$

где $f(x+\Delta x) = \arcsin(x+\Delta x)$, $f'(x) = (\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

Таким образом, $\arcsin(x+\Delta x) \approx \arcsin x + \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}\Delta x$, т.е.

$$\arcsin(0,51) = \arcsin(0,5+0,01) \approx \arcsin 0,5 + \frac{1}{\sqrt{1-(0,5)^2}}0,01 \approx \frac{\pi}{6} + 0,01 \approx 0,53.$$

Пример. Вычислить приближенно $\sqrt[4]{85}$.

Решение. Будем рассматривать функцию $y = \sqrt[4]{x} = x^{\frac{1}{4}}$. Найдем ее производную $y' = \dfrac{1}{4}x^{-\frac{3}{4}} = \dfrac{1}{4\sqrt[4]{x^3}}$. Подставим $\sqrt[4]{85} = \sqrt[4]{81+4}$. Положим в подкоренном выражении $x = 81$ (ближайшее целое число, точный корень 4-й степени из которого извлекается и равен 3); $\Delta x = 4$. Тогда, по формуле $f(x+\Delta x) \approx f(x) + f^{/}(x)\Delta x$ будем иметь:

$$\sqrt[4]{85} = \sqrt[4]{81+4} \approx \sqrt[4]{81} + \frac{4}{4\sqrt[4]{81^3}} = 3 + \frac{1}{\sqrt[4]{3^{12}}} = 3 + \frac{1}{3^3} = 3,(037).$$

2.8. Производные и дифференциалы высших порядков

Производную от производной 1-го порядка будем называть производной 2-го порядка:

$$\frac{d\left(\frac{dy}{dx}\right)}{dx} = \frac{d^2 y}{dx^2} = y'' = f''(x).$$

Аналогично определяются производные 3-го, 4-го и т.д. порядка. С точки зрения механики 2-ая производная пути по времени $S''(t_0) = (S'(t_0))' = \upsilon'(t_0)$ есть скорость изменения скорости или ускорение точки в момент t_0:

$$a = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \upsilon}{\Delta t} = \upsilon'(t_0) = S''(t_0).$$

Например, для случая падения тел имеем

$$S = \frac{gt^2}{2} + \upsilon_0 t + S_0,$$

$$S' = gt + \upsilon_0,$$

$$S'' = g.$$

Пример. Найти производные до n-го порядка следующих функций: а) $y = a^x$; б) $y = \sin x$.

Решение.

а) $y = a^x$. $\quad y' = a^x \ln a,$

$$y'' = a^x (\ln a)^2,$$

$$y^{(n)} = a^x (\ln a)^n.$$

б) $y = \sin x$. $\quad y' = \cos x = \sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right),$

$$y'' = -\sin x = -\sin\left(\frac{\pi}{2} \cdot 2 + x\right)$$

$$y''' = -\cos x = \sin\left(\frac{\pi}{2}\cdot 3 + x\right),$$

$$y^{(n)} = \sin\left(\frac{\pi}{2}\cdot n + x\right).$$

Дифференциалом 2-го порядка (или вторым дифференциалом) d^2y функции $y = f(x)$ называется дифференциал от дифференциала первого порядка, т.е.

$$d^2y = d\left(dy\right) = f''\left(x\right)dx^2.$$

Аналогично определяются дифференциалы 3$^{\text{его}}$, 4$^{\text{го}}$ и т.д. порядка.

Дифференциалом (n-1)-го порядка (или *n*-м дифференциалом) d^ny называется дифференциал от (*n*-1)-го порядка дифференциала этой функции:

$$d^ny = d(d^{n-1}y),$$

или

$$d^{(n)}y = f^{(n)}\left(x\right)dx^n,$$

т.е. дифференциал *n*-го порядка равен произведению производной *n*-го порядка на *n*-ю степень дифференциала независимой переменной.

Пример. Дана функция $y = \ln x$. Найти ее дифференциалы до третьего порядка включительно.

Решение. $dy = (\ln x)'dx = \frac{1}{x}dx$,

$$d^2y = \left(\frac{1}{x}\right)' dx^2 = -\frac{1}{x^2}dx^2,$$

$$d^3y = \left(-\frac{1}{x^2}\right)' dx^3 = -\frac{2}{x^3}dx^3.$$

2.9. Дифференцирование параметрически заданных функций

Параметрическое задание кривых широко применяется в механике. Если в плоскости $0xy$ движется некоторая материальная точка и нам известны законы движения проекций этой точки на оси координат

$$\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t), \end{cases}$$

где параметр t есть время, то эти уравнения являются параметрическими уравнениями траектории движущейся точки.

Так уравнение окружности $x^2 + y^2 = r^2$ в параметрической форме имеет вид:

$$\begin{cases} x = r\cos t, \\ y = r\sin t, \end{cases}$$

при $0 \le t \le 2\pi$.

Уравнений эллипса $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$:

$$\begin{cases} x = a\cos t, \\ y = b\sin t, \end{cases}$$

при $0 \le t \le 2\pi$.

Уравнение гиперболы $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$:

$$\begin{cases} x = a \cdot cht, \\ y = a \cdot sht, \end{cases}$$

при $0 \le t \le 2\pi$(отсюда следует название гиперболических функций).

Уравнение циклоиды (рис.):

$$\begin{cases} x = a(t - \sin t), \\ y = a(t - \cos t), \end{cases}$$

при $0 \le t \le 2\pi$.

Циклоида – это кривая, которую описывает точка, лежащая на окружности, если окружность катится по прямой без скольжения.

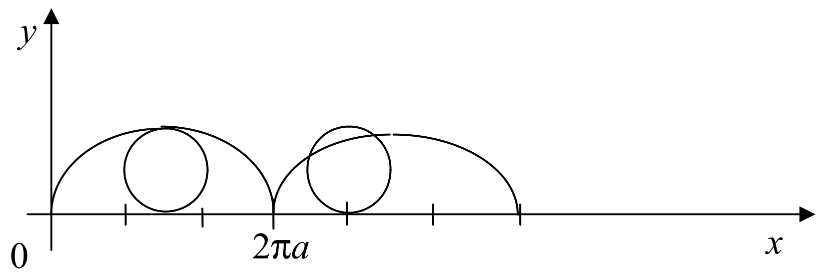


Рис. 2.4

Если функция y от переменной x задана через посредство вспомогательной переменной (параметра) t:

$$\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t), \end{cases}$$

то первая производная от y по x определяется формулой:

$$y'_x=\frac{dy}{dx}=\frac{d\big(\psi(t)\big)}{d\big(\varphi(t)\big)}=\frac{\psi'(t)dt}{\varphi'(t)dt}=\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}=\frac{y'_t}{x'_t},$$

$$y'_x=\frac{y'_t}{x'_t}.$$

Найдем вторую производную. Обозначим $y'_x=F(t)$, тогда

$$y''_x=F'_x=\frac{dF}{dx}=\frac{F'_t dt}{x'_t dt}=\frac{(y'_x)'_t}{x'_t}$$

Производная n-1 го порядка определяется по формуле:

$$y_x^{(n)}=\frac{\left(y_x^{n-1}\right)'_t}{x'_t}.$$

Пример. Найти y'_x, y''_x для функции $\begin{cases} x=a\big(t-\sin t\big), \\ y=a(1-\cos t). \end{cases}$

Решение. Т.к.

$$x=a\big(t-\sin t\big),\to\ x'_t=a\big(1-\cos t\big),$$
$$y=a(1-\cos t),\to\ y'_t=a\sin t,$$

То

$$y'_x=\frac{a\sin t}{a\big(1-\cos t\big)}=\frac{2\sin\frac{t}{2}\cdot\cos\frac{t}{2}}{2\sin^2\frac{t}{2}}=ctg\,\frac{t}{2},$$

$$y''_x=\frac{\left(ctg\,\frac{t}{2}\right)'}{2a\sin^2\frac{t}{2}}=-\frac{1}{2a\sin^4\frac{t}{2}}\cdot\frac{1}{2}=-\frac{1}{4a\sin^4\frac{t}{2}}.$$

Задания

1. Пользуясь определением производной вычислить производные следующих функций:

1) $y=x^3+2x^2+x-1$;

2) $y=\sin x-x$.

2. Найти производные и дифференциалы следующих функций

$y=tg^5 x$; $\quad y=\sin x+\dfrac{1}{x+\cos x}$; $\quad y=\ln x+(x^2+1)$; $y=\ln(x+\sqrt{x^3})$;

$y=\dfrac{3}{4}x\cdot\sqrt[3]{x}$; $\quad y=\dfrac{2}{7}x\cdot\sqrt[3]{x}-\dfrac{4}{11}x\cdot\sqrt[5]{x}+\dfrac{2}{15}x\cdot\sqrt[7]{x}$; $\quad y=x\arcsin x$;

$y = \ln x$; $y = \dfrac{x^3 + 3^x}{e^{2x}}$.

3. Найти производные функций:

1) $y = \left(\dfrac{\sin x}{1+\cos x}\right)^2$;

2) $y = \log 2(x^2 - 2\cos 3x)$;

3) $y = \arcsin e^{3x-2}$;

4) $y = \sqrt{x^2 + 5x + 1} + \dfrac{\sqrt{x+1}}{\sin(x+1)}$.

4. Найти $y' = \dfrac{dy}{dx}$,

1) если $x = e^{-t}\sin t$, $y = e^{-t}\cos t$;

2) если $x = t^2 + 2t + 1$, $y = t^3 + t - 1$;

3) если $x = 3\operatorname{ch} t$, $y = 3\operatorname{sh} t$.

5. Вычислить с помощью дифференциала приближенные значения $\operatorname{arctg}(-0,05)$, $y = \arccos 0,03$, $\sqrt[3]{1,04}$, $\ln\sqrt{1,02}$.

6. Найти производные

1) обратных тригонометрических функций
$y = \arccos x$; $y = \operatorname{arctg} x$; $y = \operatorname{arcctg} x$; $y = \operatorname{arcsh} x$; $y = \operatorname{arcch} x$.

2) $x = \log_a y$ обратную к a^x.

7. Найти y', y'', y''',…, $y^{(n)}$ для функций:

1) $y = x^3 + 5x^2 + 4x + 1$; 2) $y = 3^{x-1}$; 3) $y = \cos x$; 4) $y = \dfrac{1}{x+1}$.

2.10. Приложения производной

Угол между кривыми

Если две кривые пересекаются в какой-нибудь точке, их направление в этой точке определяется направлением касательных, которые характеризуются угловыми коэффициентами k_1 и k_2. Если кривые заданы уравнениями $y = \varphi(x)$ и $y = \psi(x)$, то, решая их совместно как систему, можно найти координаты точек пересечения кривых $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$,…

Производные функций $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ в точке $x = x_1$ численно равны угловым коэффициентам касательных, то есть $k_1(A) = \varphi'(x_1)$ и $k_2(A) = \psi'(x_1)$.

Вычисление угла между кривыми сводится к вычислению угла между касательными в точке пересечения: $\operatorname{tg}\theta = \left|\dfrac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2}\right|$.

Пример 1. Под каким углом пересекаются парабола $y^2 = x$ и окружность $(x-2)^2 + y^2 = 4$.

Решение: 1. Найдем точки пересечения кривых, решив систему уравнений

$$\begin{cases} y^2 = x \\ (x-2)^2 + y^2 = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y^2 = x \\ x^2 - 4x + 4 + y^2 = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y^2 = x \\ x^2 + y^2 - 4x = 0 \end{cases}$$

откуда $x^2 - 3x = 0$ и $x_1 = 0$, $x_2 = 3$.

Подставляя значения этих корней в первое уравнение системы находим:

$$y_1 = y_2 = 0;\ y_3 = -\sqrt{3};\quad y_4 = \sqrt{3}.$$

Ввиду симметричного расположения кривых относительно оси Oy, угол между кривыми в точках $\left(3; -\sqrt{3}\right)$ и $\left(3; \sqrt{3}\right)$ будет одинаков.

Определим угол между кривыми в точках $O(0;0)$ и $A\left(3;\sqrt{3}\right)$.

2. Продифференцируем уравнения кривых, как неявные функции. Получим $2y \cdot y' = 1$, откуда $y' = \dfrac{1}{2y} = k_1$ и $2(x-2) + 2y \cdot y' = 0$, откуда $y' = -\dfrac{x-2}{y} = k_2$.

В точке О оба угловых коэффициента обращаются в бесконечность:

$$k_1(0) = \frac{1}{2 \cdot 0} = \infty;\ k_2(0) = -\frac{0-2}{0} = \infty;$$

это значит, что касательные к обеим кривым в точке O перпендикулярны оси Ox и угол между ними равен нулю.

В точке A: $k_1(A) = \dfrac{1}{2\sqrt{3}}$; $k_2(A) = -\dfrac{3-2}{\sqrt{3}} = -\dfrac{1}{\sqrt{3}}$.

Угол между кривыми в точке A:

$$\operatorname{tg}\theta = \left|\frac{-\frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{2\sqrt{3}}}{1 - \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{3}}}\right| = 1{,}0392,\ \theta = \operatorname{arctg}(1{,}0392) = 46^\circ 06'.$$

Уравнение касательной и нормали

Пример 2. Составить уравнение касательной и нормали к кривой $y=\frac{1}{3}x^2$ в точке $x=2$.

Решение: Найдем ординату точки касания: $y(2)=\frac{4}{3}$.Для составления уравнений касательной и нормали найдем угловой коэффициент

$$k=f'(x)=\left(\frac{1}{3}x^2\right)=\frac{2}{3}x.$$

В точке N $$k(N)=f'(2)=\frac{2}{3}\cdot 2=\frac{4}{3}.$$

Напомним уравнение касательной $y-y_0=f'(x_0)(x-x_0)$

Откуда $y-\frac{4}{3}=\frac{4}{3}(x-2)$ или $4x-3y-4=0$

и уравнение нормали: $y-y_0=-\frac{1}{f'(x_0)}(x-x_0)$

откуда $y-\frac{4}{3}=-\frac{1}{\frac{4}{8}}(x-2)$ или $9x+12y-34=0$

Приложения производной к задачам механики

Механический смысл первой производной – скорость движения материальной точки:

$$f'(x)=\frac{dy}{dx}=\upsilon;$$

механический смысл второй производной – ускорение:

$$f''(x)=\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{dv}{dx}=a.$$

Пример 3. Точка движется по прямой и ее расстояние от начального пункта через t равно $S=0,25t^4-4t^3+16t^2$.

а) В какие моменты точка была в начальной точке?

б) В какие моменты ее скорость равна нулю?

Решение: а) Пребывание в начальной точке означает, что путь равен нулю $(S=0)$, т.е.

$$0,25t^4-4t^3+16t^2=0\Rightarrow t^2\left(0,25t^2-4t+16\right)=0,$$

откуда $t_{1,2}=0$, $t_{3,4}=8$.

Т.о. точка находится в начальной точке в моменты времени $t=0c$ и $t=8c$.

б) Найдем производную $S' = \frac{ds}{dt} = \upsilon$:

$$\upsilon = t^3 - 12t^2 + 32t.$$

Определяя, в какие моменты времени $\upsilon = 0$ приходим к уравнению

$$t^3 - 12t^2 + 32t = 0 \Rightarrow t\left(t^2 - 12t + 32\right) = 0, \text{ откуда } t_1 = 0;\ t_2 = 4;\ t_3 = 8.$$

Следовательно, скорость точки равна нулю при $t_1 = 0c$, $t_2 = 4c$, $t_3 = 8c$.

Пример 4. Круглый металлический диск расширяется от нагревания так, что его радиус равномерно увеличивается на $0{,}01 \frac{\text{см}}{\text{с}}$. С какой скоростью увеличивается его площадь, если радиус равен 20 см?

Решение: пусть радиус диска равен x, а площадь y. Тогда $y = \pi x^2$, где x и y – функции от времени t. Дифференцируя по t обе переменные x и y, получим две связанные следующим уравнением скорости

$$\frac{dy}{dt} = 2\pi x\ \frac{dx}{dt}.$$

Подставляя $x = 20\text{ см}$ и $\frac{dx}{dt} = 0{,}01\frac{см}{c}$, найдем скорость увеличения площади диска $\frac{dy}{dt} = 2\pi \cdot 20 \cdot 0{,}01 \approx 1{,}3\frac{см^2}{c}$.

2.11. Свойства производной

Теорема 1 (Больцано-Коши). Если функция $y = f\left(x\right)$ определена и непрерывна на $[a,b]$ и на концах отрезка принимает значения разных знаков, то между точками a и b найдется такая точка c, в которой функция обращается в нуль, т.е. $f\left(c\right) = 0$.

Геометрически это означает, что функция хотя бы один раз пересекает ось OX.

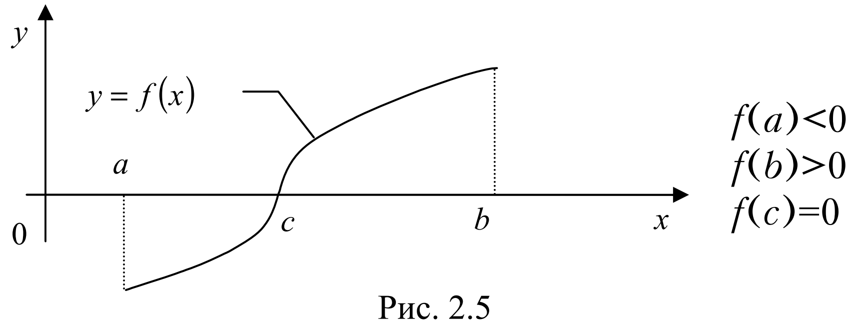


Рис. 2.5

Теорема 2 (Больцано-Коши).Обобщенная теорема о промежуточном значении.

Если $y = f(x)$ определена и непрерывна в замкнутом промежутке [a,b] и на концах принимает разные значения $f(a) = A$, $f(b) = B$, то каково бы ни было число c, лежащее между A и B, найдется такая точка C, что $f(c) = C$.

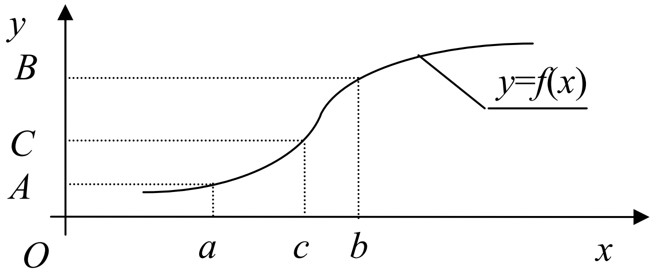


Рис. 2.6

Бернард Больцано (1781-1848).Чешский математик, философ и богослов. Автор труда «Учение о функциях», опубликованного в 1930г через 100 лет после написания.

Огюст Луи Коши (1789-1857).Французский математик. Работы в области анализа и математической физики.

Следствие. Если $y = f(x)$ определена и непрерывна на [a,b], то принимаемые ею значения тек же заполняют сплошь некоторый промежуток.

Теорема Вейерштрасса 1. Функция $y = f(x)$ непрерывная на отрезке [a,b], ограничена на нем, т.е. $|f(x)| \leq M$

Геометрически это означает, что дугу AB можно заключить внутри полосы $y = -M$, $y = M$.

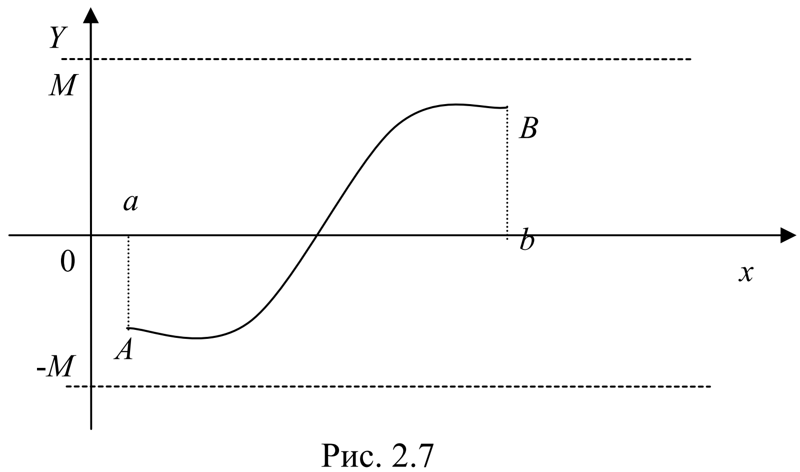


Рис. 2.7

Теорема Вейерштрасса 2. Непрерывная на отрезке функция принимает на нем свое наименьшее и наибольшее значение.

Теорема Вейерштрасса (объединенная). Функция $y = f(x)$ непрерывная на $[a,b]$:

1. ограничена на этом отрезке;
2. достигает на нем свое наименьшее и наибольшее значение $m \le f(x) \le M$.

Карл Теодор Вильгельм Вейерштрасс (1815-1897) немецкий математик, занимался математическим анализом, теорией аналитических функций, вариационным исчислением, дифференцированием, геометрией, линейной алгеброй.

Точкой экстремума называется точка, в которой функция принимает наименьшее или наибольшее значение по сравнению со значениями в других точках достаточно малой двухсторонней окрестности.

Говорят, что функция достигает в точке x_0 *max* (*min*), для всех точек которой выполняется неравенство $f(x) \le f(x_0)$ ($f(x) \ge f(x_0)$).

Понятие экстремума носит локальный (местный) характер, т.е. значения функции в x_0 сравнивается со значениями функции только в близлежащих точках и *min* может быть больше *max*.

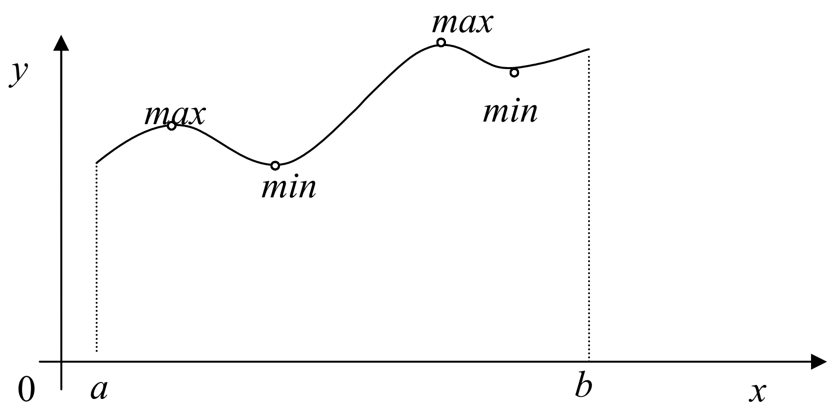


Рис. 2.8

Теорема Ферма. Если в точке экстремума существует конечная производная, то она обязательно равна нулю.

Доказательство: $f(x_0) - \max,\ f(x_0) > f(x_0 + \Delta x),$

$$f(x_0) - f(x_0 - \Delta x) > 0,$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0) - f(x + \Delta x)}{\Delta x} = f'(x_0) \ge 0 \text{ при } \Delta x > 0,$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0) - f(x + \Delta x)}{\Delta x} = f'(x_0) \le 0 \text{ при } \Delta x < 0,$$

а т.к. $f'(x_0)$ существует и конечно, то $f'(x_0)=0$.

Геометрически эта теорема означает, что касательная в точке экстремума параллельна оси *Ox*.

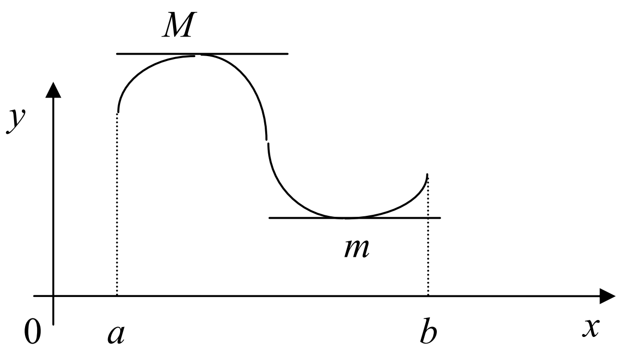


Рис. 2.9

Пьер Ферма (1601-1665) Французский математик, по профессии юрист. Большинство работ издано после смерти его сыном.

Теорема Ролля. Если $y=f(x)$:

– непрерывна на [*a*,*b*];

– дифференцируема в каждой точке внутри отрезка;

– принимает равные значения на концах отрезка, то внутри отрезка найдется такая точка *x* = *c*, в которой $f'(c)=0$.

Доказательство. Рассмотрим два случая.

1.Если на всем отрезке $f(x)=f(a)=f(b)$, то $f'(x)=0$, т.к. $f(x)$ – постоянная величина.

2. Если функция изменяется, то, будучи непрерывной в замкнутом интервале, она принимает свое наибольшее и наименьшее значения, причем внутри отрезка есть точка *x*, где $f(x)>f(a)=f(b)$, то среди этих точек найдется экстремальная точка *x* = *c,* в которой $f'(c)=0$ по теореме Ферма.

Мишель Ролль (1652-1719)Французский математик.

Теорема Лагранжа. Если функция $y=f(x)$ непрерывна и дифференцируема во всех внутренних точках отрезка [*a,b*], то внутри отрезка найдется такая точка ξ, что $f'(\xi)=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$ или $f(b)-f(a)=(b-a)\cdot f'(\xi)$

Доказательство. Это равенство называется формулой Лагранжа. Или формулой конечных приращений. ξ – это точка, в которой касательная параллельна хорде, стягивающей концы кривой на отрезке $M\left(a,f(a)\right)$, $N\left(b,f(b)\right)$.

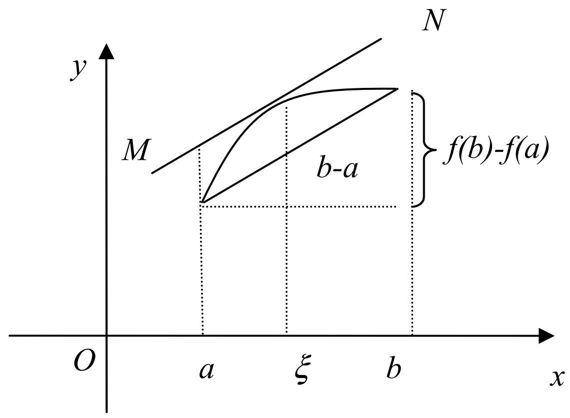


Рис. 2.10

$F(x)$ – удовлетворяет условиям теоремы Ролля, поэтому внутри отрезка найдется $x = \xi$, в которой $F'(\xi) = 0$.

$$f'(\xi) - f'(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(\xi - a) = 0,$$

$$F'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a},$$

$$F'(\xi) = f'(\xi) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = 0 \quad \Rightarrow \quad f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}, \text{ что и т.д.}$$

Жозеф Луи Лагранж (1736-1813).Французский математик. Его работы относятся ко многим разделам математики и механики, а именно: вариационному исчислению, теории чисел, алгебре, дифференциальным уравнениям, математическому анализу, дифференциальной геометрии, аналитической и теоретической механике, небесной механике и астрологии.

Теорема Лопиталя Пусть функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ определены и непрерывны в окрестности точки x_0 и при $x \to x_0$ (или $x \to \infty$) одновременно стремятся к нулю (или к ∞). Если отношение их производных имеет предел, то отношение самих функций так же имеет предел, равный отношению производных, т.е.

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \lim \frac{f'(x)}{\varphi'(x)}. \tag{2.5}$$

Доказательство:

1. Пусть $x \to x_0$ и $f(x_0) = 0,\ \varphi(x) = 0,\ \varphi'(x_0) \neq 0$.

$$\frac{f(x)}{\varphi(x)} = \frac{f(x) - f(x_0)}{\varphi(x) - \varphi(x_0)} = \frac{\dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}}{\dfrac{\varphi(x) - \varphi(x_0)}{x - x_0}}.$$

Рассмотрим предел $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{\varphi(x)}=\dfrac{\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}}{\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\varphi(x)-\varphi(x_0)}{x-x_0}}=\dfrac{f'(x)}{\varphi'(x)}$,

т.к. $f'(x)$ и $\varphi'(x)$ непрерывны по условию, то

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{\varphi(x)}=\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}.$$

2. Эта формула справедлива при $x\to\infty$. Полагая $x=\dfrac{1}{z}$ получим

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{\varphi(x)}=\lim_{z\to 0}\frac{f\left(\frac{1}{z}\right)}{\varphi\left(\frac{1}{z}\right)}=\lim_{x\to\infty}\frac{f'\left(\frac{1}{z}\right)\left(-\frac{1}{z^2}\right)}{\varphi'\left(\frac{1}{z}\right)\left(-\frac{1}{z^2}\right)}=\lim_{x\to\infty}\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}.$$

Гийом Франсуа Лопиталь (1661-1704) г. Французский математик, автор одного печатного учебника по математическому анализу «Анализ бесконечно малых».

Применение правила Лопиталя к раскрытию неопределенностей.

1 22	$\left\{\frac{0}{0}\right\}$ $\left\{\frac{\infty}{\infty}\right\}$	Непосредственно применяем правило Лопиталя Непосредственно применяем правило Лопиталя
3	$\{0\cdot\infty\}$	Преобразуем $f(x)\cdot\varphi(x)=\dfrac{f(x)}{\frac{1}{\varphi(x)}}=\dfrac{\varphi(x)}{\frac{1}{f(x)}}$ Получаем №1 или №2
4	$\{\infty-\infty\}$	Преобразовать к дробному виду
5 6 7	$\{0^0\}$ $\{\infty^0\}$ $\{1^\infty\}$	Логарифмируем и сводим к №3 Логарифмируем и сводим к №3 Логарифмируем и сводим к №3

Пример 1. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-1}{\ln x}$

Решение:

Подстановка предельного значения $x=1$ приводит к неопределенности вида $\left(\dfrac{0}{0}\right)$, т.к. $\lim\limits_{x\to 1}\left(x^3-1\right)=0$ и $\lim\limits_{x\to 1}\ln x=0$,

$\left(x^3-1\right)'=3x^2$, $\left(\ln x\right)'=\dfrac{1}{x}$ и $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-1}{\ln x}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\left(x^3-1\right)'}{\left(\ln x\right)'}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{3x^2}{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to 1}\left(3x^3\right)=3$.

Пример 2. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\frac{\pi}{2}-\operatorname{arctg}x}{\ln\left(1+\frac{1}{x^3}\right)}$.

Решение:

Напомним, что $\lim\limits_{x\to+\infty}\operatorname{arctg}x=\dfrac{\pi}{2}$, т.е. имеем неопределенность вида $\left(\dfrac{0}{0}\right)$. Находим предел с помощью формулы (1):

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{\pi}{2}-\operatorname{arctg}x}{\ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\frac{\pi}{2}-\operatorname{arctg}x\right)'}{\left[\ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right)\right]'}=\lim_{x\to+\infty}\frac{-\frac{1}{1+x^2}}{\frac{1}{1+\frac{1}{x^2}}\cdot\left(-\frac{2}{x^3}\right)}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{1+x^2}\cdot\frac{x^3+1}{x^2}\cdot\frac{x^3+1}{x^2}\cdot\frac{x^3}{2}=+\infty.$$

Пример 3. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2}{e^x}$.

Решение. Здесь числитель и знаменатель одновременно стремятся к бесконечности, т.е. имеем неопределенность вида $\left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)$. Кроме того, $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x^2\right)'=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(2x\right)=+\infty$ и $\lim\limits_{x\to+\infty}e^x=+\infty$, т.е. необходимо применить правило Лопиталя два раза.

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{e^x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(x^2\right)'}{\left(e^x\right)'}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x}{e^x}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(2x\right)'}{\left(e^x\right)'}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2}{e^x}=\frac{2}{+\infty}=0.$$

Неопределенности видов $0 \cdot \infty$; $\infty - \infty$, 0°, ∞°, 1^{∞} с помощью алгебраических преобразований можно привести к виду $\frac{0}{0}$ $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$ и применить правило Лопиталя.

Неопределенности вида $(0 \cdot \infty)$ и $(\infty - \infty)$.

Если $f(x) \to 0$ и $\varphi(x) \to \infty$ при $x \to a$, то отыскание предела $\lim\limits_{x \to a} f(x) \cdot \varphi(x)$ может быть сведено к одному из рассмотренных случаев, $\left(\frac{0}{0}\right)$ или $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$ с помощью тождественных преобразований: $f(x) \cdot \varphi(x) = \dfrac{f(x)}{\dfrac{1}{\varphi(x)}}$, или

$$f(x) \cdot \varphi(x) = \frac{\varphi(x)}{\dfrac{1}{f(x)}}. \tag{2.6}$$

Если $f(x) \to \infty$ и $\varphi(x) \to \infty$ при $x \to a$, то отыскание предела $\lim\limits_{x \to a} \left[f(x) - \varphi(x) \right]$ (неопределенность вида $\infty - \infty$) может быть сведено к раскрытию неопределенности вида $0 \cdot \infty$ путем тождественного преобразования разности функций в произведение

$$f(x) - \varphi(x) = f(x) \cdot \varphi(x) \cdot \left[\frac{1}{\varphi(x)} - \frac{1}{f(x)} \right]. \tag{2.7}$$

Иногда удобно пользоваться и другими преобразованиями:

$$f(x) - \varphi(x) = f(x) \cdot \left[1 - \frac{\varphi(x)}{f(x)} \right], \text{ или } f(x) - \varphi(x) = \varphi(x) \cdot \left[\frac{f(x)}{\varphi(x)} - 1 \right]. \tag{2.8}$$

Неопределенности вида $\left(0^0\right)$, $\left(\infty^0\right)$, $\left(1^{\infty}\right)$.

При отыскании предела функции $f(x)^{\varphi(x)}$ могут представиться случаи:

1. $\lim\limits_{x \to a} f(x) = 0$, $\lim\limits_{x \to a} \varphi(x) = 0$, т.е. $\left(0^0\right)$;
2. $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \infty$, $\lim\limits_{x \to a} \varphi(x) = 0$, т.е. $\left(\infty^0\right)$;
3. $\lim\limits_{x \to a} f(x) = 1$, $\lim\limits_{x \to a} \varphi(x) = \infty$, т.е. $\left(1^{\infty}\right)$.

Вычисление предела функции в этих случаях сводится к раскрытию неопределенности вида $(0\cdot\infty)$ с помощью следующего преобразования:

$$f(x)^{\varphi(x)}=e^{\ln f(x)^{\varphi(x)}}=e^{\varphi(x)\cdot\ln f(x)}.$$

В силу непрерывности показательной функции, получим

$$\lim_{x\to a}f(x)^{\varphi(x)}=e^{\lim\limits_{x\to a}\varphi(x)\cdot\ln f(x)}. \qquad (2.9)$$

или к раскрытию неопределенностей $\left(\frac{0}{0}\right)$, $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$ с помощью логарифмирования данной функции.

Пример 4. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}-0}\left(\sec x-tgx\right).$

Решение.

Если $x\to\frac{\pi}{2}-0$, то $\sec=\frac{1}{\cos x}\to+\infty$ и $\operatorname{tg}x\to+\infty$ и имеем неопределенность вида $(\infty-\infty)$. Преобразуем данную функцию по формуле (2.7)

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}-0}(\sec x-tgx)=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}-0}\left(\frac{1}{\cos x}-\frac{\sin x}{\cos x}\right)=(\infty-\infty)=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}-0}\frac{1-\sin x}{\cos x}=\left(\frac{0}{0}\right)=$$

$$=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}-0}\frac{(1-\sin x)'}{\cos x'}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}-0}\frac{-\cos x}{-\sin x}=\frac{0}{1}=0.$$

Пример 5. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(x-\frac{\pi}{2}\right)\cdot\operatorname{tg}x.$

Решение:

Неопределенность вида $(0\cdot\infty)$. Преобразуем данную функцию по формуле (2.6) $\left(x-\frac{\pi}{2}\right)\cdot\operatorname{tg}x=\left(x-\frac{\pi}{2}\right):\operatorname{ctg}x=\left(x-\frac{\pi}{2}\right):\operatorname{ctg}x$, в результате получим неопределенность вида $\left(\frac{0}{0}\right)$ при $x\to\frac{\pi}{2}$, что дает возможность применить правило Лопиталя.

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(x-\frac{\pi}{2}\right)\cdot\operatorname{tg}x=(0\cdot\infty)=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{x-\frac{\pi}{2}}{\operatorname{ctg}x}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\left(x-\frac{\pi}{2}\right)'}{(\operatorname{ctg}x)'}=$$

$$=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{1}{-\frac{1}{\sin^2 x}}=-\lim\left(\sin^2\frac{\pi}{2}\right)=-1.$$

Пример 6. $\lim\limits_{x\to 0} x^{\operatorname{tg} x}$.

Решение:

Неопределенность вида 0^0, т.к. $\lim\limits_{x\to 0} x = 0$ и $\lim\limits_{x\to 0} \operatorname{tg} x = 0$. Преобразуем функцию по формуле (2.9) и применим к показателю степени правило Лопиталя:

$$\lim_{x\to 0} x^{\operatorname{tg} x} = e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{(\ln x)'}{(\operatorname{ctg} x)'}} = e^{\lim\limits_{x\to 0+}\frac{\frac{1}{x}}{\frac{-1}{\sin^2 x}}} = e^{-\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin^2 x}{x}} = e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\cdot\lim\limits_{x\to 0}(-\sin x)} = e^{1\cdot 0} = e^0 = 1.$$

Пример 7. $\lim\limits_{x\to 0+}\left(\ln\dfrac{1}{x}\right)^x$.

Решение:

Неопределенность вида $\left(\infty^0\right)$. Преобразуем функцию по формуле (2.9):

$$\lim_{x\to 0}\left(\ln\frac{1}{x}\right)^x = e^{\lim\limits_{x\to 0} x\cdot\ln\ln\frac{1}{x}} = e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln\ln\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}}} = e^{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}.$$

Заменим переменную, положив $\dfrac{1}{x} = t$. При $x \to 0$ имеем $t \to +\infty$ и находим предел в показателе:

$$\lim_{t\to+\infty}\frac{\ln\ln t}{t} = \frac{\infty}{\infty} = \lim_{t\to+\infty}\frac{(\ln\ln t)'}{t'} = \lim_{t\to+\infty}\frac{\frac{1}{\ln t}\cdot\frac{1}{t}}{1} = \lim_{t\to+\infty}\frac{1}{t\ln t} = \frac{1}{\infty} = 0.$$

Окончательно, $\lim\limits_{x\to 0}\left(\ln\dfrac{1}{x}\right)^x = e^0 = 1$.

Пример 8. $\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{\operatorname{ctg}^2 x}$.

Решение:

Неопределенность вида $\left(1^\infty\right)$. По формуле (2.9)

$$\lim_{x\to 0}(\cos x)^{ctg^2 x} = e^{\lim\limits_{x\to 0}\operatorname{ctg}^2 x\cdot\ln\cos x} = e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos^2 x}{\sin^2 x}\cdot\ln\cos x} = e^{\lim\limits_{x\to 0}\cos^2 x\cdot\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln\cos x}{\sin^2 x}} = e^{1\cdot\lim\limits_{x\to 0}\frac{(\ln\cos x)'}{(\sin^2 x)'}} =$$

$$= e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{1\cdot(-\sin x)}{\cos\cdot 2\sin\cos}} = e^{-\frac{1}{2}\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{\cos^2 x}} = e^{-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\cos 0}} = e^{-\frac{1}{2}}$$

Пример 9: $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+x^2\right)^{\frac{1}{2}}$

Решение: Неопределенность вида (∞^0). Обозначив $y=\left(1+x^2\right)^{\frac{1}{x}}$, прологарифмируем функцию и найдем предел логарифма:

$$\lim_{x\to\infty}\ln y=\lim_{x\to\infty}\frac{\ln\left(1+x^2\right)}{x}=\frac{\infty}{\infty}=\lim_{x\to\infty}\frac{\left[\ln\left(1+x^2\right)\right]'}{x'}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{2x}{1+x^2}}{1}=2\lim_{x\to\infty}\frac{x}{1+x^2}=$$
$$=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=2\lim_{x\to\infty}\frac{1}{2x}=0,$$

т.е. $\ln y=0$, т.к. $y-$непрерывная функция

$$\lim_{x\to\infty}\ln y=\ln\lim_{x\to\infty}y=0 \text{ и } \lim_{x\to\infty}y=e^0=1 \text{ т.е. } \lim_{x\to\infty}\left(1+x^2\right)^{\frac{1}{x}}=1.$$

Задания

1. Вычислить пределы, применяя правила Лопиталя:

1) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\ln(x-1)}{\operatorname{ctg}\pi x}$; 2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^3-3x^2+2}{x^3-4x^2+3}$;

3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{arctg}x-x}{x^3}$; 4) $\lim\limits_{x\to 0}\arcsin x\operatorname{ctg}x$.

2.12. Формула Тейлора и её приложения

Пусть функция $y=f\left(x\right)$ имеет в точке a и некоторой её окрестности все производные до $\left(n+1\right)$-го порядка включительно. Пусть $x-$ любое значение аргумента из указанной окрестности $x\neq a$. Тогда между точками a и x найдется такая точка *c*, что справедлива следующая формула:

$$f(x)=f(a)+\frac{f'(a)}{1!}(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+...+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n+R_n(x).$$

Эта формула называется *формулой Тейлора.*

Выражение

$$R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}\left[a+\theta(x-a)\right]}{(n+1)!}(x-a)^{n+1},\ 0<\theta<1$$

называется *остаточным членом в форме Лагранжа.*

Формулой Маклорена называют формулу Тейлора, когда $a=0$.

$$f(x)=f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+...+\frac{f^n(0)}{n!}x^n+R_n(x),$$

где остаточный член, записанный в форме Лагранжа, имеет вид:

$$R_n(x)=\frac{f^{(n)}(\theta\, x)}{(n+1)!}x^{n+1},\quad 0<\theta<1.$$

Разложение некоторых функций по формуле Маклорена

1) $e^x=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+...+\frac{x^n}{n!}+R_n(x);$

$R_n(x)=\frac{e^{\theta x}}{(n+1)!}\cdot x^{n+1};\ 0<\theta<1.$

1. $\sin x=\frac{x}{1!}-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-...+\frac{(-1)^{m+1}x^{2m-1}}{(2m-1)!}+R_{2m}(x);$

$R_{2m}(x)=(-1)^m\cdot\cos\theta(x)\frac{x^{2m+1}}{(2m+1)!};\ 0<\theta<1.$

2. $\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+...+\frac{(-1)^m x^{2m}}{(2m)!}+R_{2m+1}(x);$

$R_{2m+1}(x)=(-1)^{m+1}\cos\theta x\frac{x^{2m+2}}{(2m+2)!};\ 0<\theta<1.$

3. $(1+x)^m=1+\frac{m}{1!}x+\frac{m(m-1)}{2!}x^2+...+\frac{m(m-1)(m-2)...[m-(n-1)]}{n!}x^n+R_n(x);$

$R_n(x)=\frac{m(m-1)(m-2)...(m-n)}{(n+1)!}x^{n+1}(1+\theta x)^{m-n-1};\ 0<\theta<1.$

4. $\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+...(-1)^{n+1}\cdot\frac{x^n}{n}+R_n(x);$

$R_n(x)=\frac{(-1)^{n+1}\cdot x^{n+1}}{(n+1)(1+\theta x)^{n+1}};\ n\begin{matrix}0<\theta<1\\ -1\le x\le 1\end{matrix}.$

Приложение формулы Маклорена

Формула Маклорена дает возможность заменить функцию $y=f(x)$ многочленом $P_n(x)$ с контролируемой погрешностью, что позволяет использовать ее в приближенных вычислениях.

Пример 1. Найти приближенное значение $\sqrt[3]{29}$ с точностью до 10^{-3}.

Решение. Представим заданный корень так:

$$\sqrt[3]{29}=\sqrt[3]{27+2}=3(1+\frac{2}{27})^{\frac{1}{3}}.$$

Воспользуемся биномиальным разложением

$$(1+x)^m=1+\frac{m}{1!}x+\frac{m(m-1)}{2!}x^2+...+\frac{m(m-1)...(m-n+1)}{n!}x^n$$

погрешность которого

$$R_n(x)=\frac{m(n-1)...(m-n)}{(n+1)!}x^{n+1}\cdot(1+\theta x)^{m-n-1}$$

может быть сделана как угодно малой при $|x|<1$ и достаточно большом n.

Пусть $x=\frac{2}{27}$ и $m=\frac{1}{3}$, тогда

$$\sqrt[3]{29}=3(1+\frac{2}{81}-\frac{2\cdot 2}{81\cdot 81}+\frac{2\cdot 2\cdot 2\cdot 5}{81^3}-\frac{2^5\cdot 5}{81^4}+...R_n).$$

Оценивая величины последовательных ошибок вычисления $3|R_n|$, находим

$$3|R_1|<\frac{3\cdot 2\cdot 2}{81^2}<0{,}002,\qquad 3|R_2|<\frac{3\cdot 2\cdot 2\cdot 2\cdot 5}{81^3}\le 0{,}0003.$$

Следовательно, для вычисления с заданной точностью достаточно взять три члена, которые предшествуют остатку R_2, т.е.

Пример 2. Разложить функцию $f(x)=\ln(3x+4)$ по формуле Тейлора в окрестности точки $x=-1$.

Решение. Представим, данную функцию в виде

$$f(x)=\ln(3x+4)=\ln 3+\ln(\frac{3x}{4}+1).$$

Далее воспользуемся формулой

$$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+.....+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}+o(x^{n+1}).$$

Будем иметь

$$\ln(3x+4)=\ln 3+\ln(\frac{3x}{4}+1)=\ln 3+\frac{3}{4}x-\frac{3^2}{4^2\cdot 3}x^2+....+(-1)^{n-1}\frac{3^n}{4^n n}x^n+o(x^{n+1}).$$

Пример 3. Вычислить предел, используя разложение по формуле Тейлора

$$\lim_{x\to 0}\frac{6\ln(1+x)-6x-2x^3}{e^{-x}+x-1}.$$

Решение. Так как

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3) \text{ и } e^{-x} = 1 - \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + o(x^3),$$

то получим

$$\lim_{x\to 0}\frac{6\ln(1+x) - 6x - 3x^2}{2e^{-x} + x - 1} = \lim_{x\to 0}\frac{6(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3)) - 6x - 3x^2}{2(1 - \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + o(x^3)) + 2x - 2 - x^2} =$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{2x^3 + o(x^3)}{-\frac{x^3}{3} + o(x^3)} = -6.$$

1. Разложить функцию $f(x) = \sin\ (3x-1)$ по формуле Тейлора в окрестности точки $x = 1$.

2. Найти пределы, используя разложение по формуле Тейлора

а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1-x^2} + \ln(1+2x) - 1 - 2x}{x^2}$;

б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^3}{\frac{x^2}{2} + \sin x + \ln(1-x)}$.

2.13. Исследование функций

2.13.1. Асимптоты графика функции

Определение. Прямая называется асимптотой кривой, если точки кривой приближаются к прямой при неограниченном их удалении от начала координат.

Вертикальные асимптоты графика функции. Если существует число a – такое что, $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \pm\infty$, то $x = a$ - вертикальная асимптота.

Наклонные асимптота графика функции. Из определения следует, что если $Y = kx + b$ – наклонная асимптота функции $y = f(x)$, то $Y - y = \delta$, $\delta \to 0$, $x \to \pm\infty$.

$$kx + b - f(x) = \delta,$$

$$k + \frac{b}{x} - \frac{f(x)}{x} = \frac{\delta}{x}$$

при $x \to \infty$, $\quad \frac{b}{x} \to 0, \quad \delta \cdot \frac{1}{x} \to 0, \quad k - \frac{f(x)}{x} \to 0$

$$k = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x} \tag{2.10}$$

$$kx + b - f(x) = \delta,$$

$$\lim_{x \to \pm\infty} \left(kx + b - f(x)\right) = 0,$$

$$b = \lim_{x \to \pm\infty} \left(f(x) - kx\right). \tag{2.11}$$

Итак, для того, чтобы $y = f(x)$ имела асимптоту $y = kx + b$ необходимо, чтобы существовали пределы (2.10) и (2.11).

Асимптота может быть односторонней и двусторонней, правосторонней и левосторонней.

Пример 1: Найти асимптоты графика функции $y = \frac{x^3}{x^2 - 1}$.

Решение: Определим вертикальные асимптоты.

$x = \pm 1$ – точки разрыва, т.к.

$$\lim_{x \to -1-0} \frac{x^3}{x^2 - 1} = \frac{-1}{+б.м.} = -\infty, \qquad \lim_{x \to 1-0} \frac{x^3}{x^2 - 1} = \frac{1}{-б.м.} = -\infty,$$

$$\lim_{x \to -1+0} \frac{x^3}{x^2 - 1} = \frac{-1}{-б.м.} = +\infty, \qquad \lim_{x \to 1+0} \frac{x^3}{x^2 - 1} = \frac{1}{+б.м.} = +\infty,$$

то $x = \pm 1$ – вертикальные асимптоты.

Определим наклонные асимптоты ($y = kx + b$). Т.к.

$$k = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{x^3}{\left(x^2 - 1\right)x} = 1,$$

$$b = \lim_{x \to \pm\infty} \left(f(x) - kx\right) = \lim_{x \to \pm\infty} \left(\frac{x^3}{x^2 - 1} - x\right) =$$

$$= \lim_{x \to \pm\infty} \frac{x^3 - x^3 + x}{x^2 - 1} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{x}{x^2 - 1} = 0,$$

то $y = x$ – наклонная асимптота.

Построим график функции.

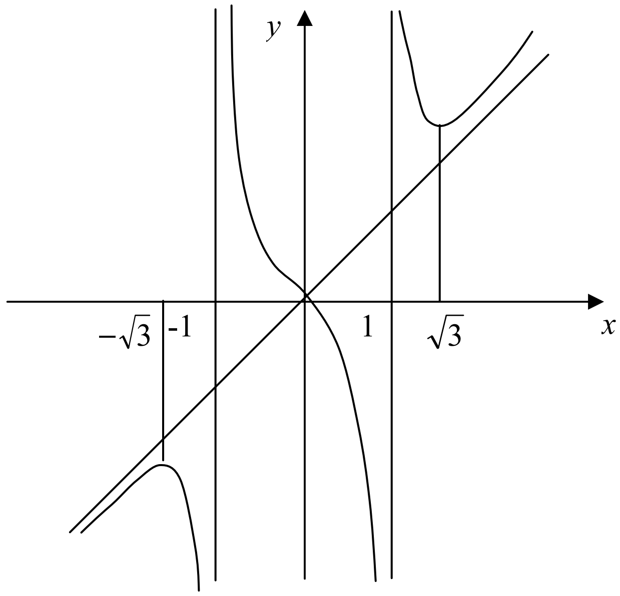


Рис. 2.11

2.13.2. Возрастание и убывание функции. Экстремум

Теорема 1. Если функция $y = f(x)$, имеющая производную на отрезке $[a,b]$, возрастает на нем, то $f'(x) > 0$ и, если убывает, то $f'(x) < 0$.

Доказательство: если $y = f(x)$ – возрастает, т.е. $f(x+\Delta x) - f(x) > 0$, при $\Delta x > 0$, то $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = f'(x) > 0$; если $y = f(x)$ – убывает, т.е. $f(x+\Delta x) - f(x) < 0$, при $\Delta x < 0$, то $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = f'(x) < 0$.

Теорема 2. Обратная. Если $y = f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$ и дифференцируема на нем, причем, при $f'(x) > 0$ $f(x)$ возрастает на $[a,b]$, а при $f'(x) < 0$ $f(x)$ убывает на $[a,b]$.

Доказательство: $f'(x) > 0$ для всех x из $[a,b]$. По теореме Лагранжа:

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(\xi)(x_2 - x_1), \quad \text{где } x_2 - x_1 > 0,$$

$$f'(\xi) > 0 \Rightarrow f(x_2) - f(x_1) > 0,$$

т.е. $f(x)$ – возрастает.

Аналогично доказывается, что функция $y = f(x)$ убывает на $[a,b]$ при $f'(x) < 0$.

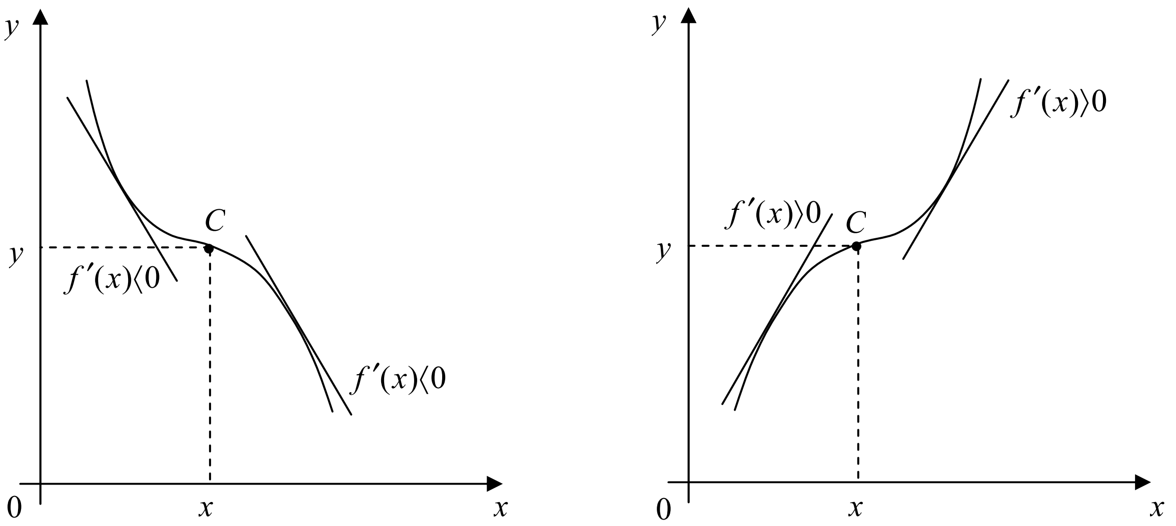


Рис. 2.12

Экстремум

Определение 1. Точка x_0 называется точкой максимума функции $f(x)$, если в некоторой окрестности точки x_0 выполняется неравенство $f(x) \le f(x_0)$.

Определение 2. Точка x_0 называется точкой минимума функции $f(x)$, если в некоторой окрестности точки x_0 выполняется неравенство $f(x) \ge f(x_0)$.

Для того, чтобы функция $y = f(x)$ имела экстремум в точке x_0 необходимо, чтобы ее производная в этой точке равнялась нулю ($f'(x) = 0$) или не существовала. Точки, в которых выполнено необходимое условие экстремума, называются *критическими* (или *стационарными*).

Теорема. 1-е достаточное условие экстремума. Если при переходе через критическую точку производная $f'(x)$ меняет знак с «-» на «+», то в этой точке $f(x)$ имеет *min*, если с «+» на «-», то *max*, если не меняет знак, то экстремума нет.

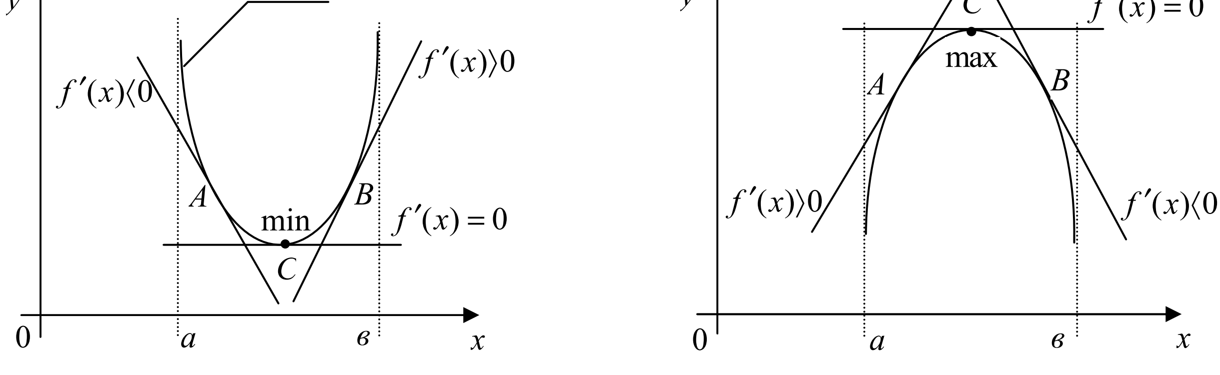


Рис. 2.13

Правило отыскания экстремума

1. Найти первую производную функции.

2. Отыскать критические точки в области определения функции (в которых $f'(x)=0$ и $f'(x)$ не существует).

3. Разбить этими точками область определения функции на интервалы монотонности, в каждом из которых $f'(x)$ сохраняет знак. Исследовать знак $f'(x)$ при переходе через критические точки и сделать вывод о наличии экстремумов функции.

4. Найти значения функции в точках экстремума.

Теорема. II–е достаточное условие экстремума. Если x_0 – критическая точка и $f''(x_0)>0$, то x_0 – min, если $f''(x_0)<0$, то x_0 – max.

Пример: Найти точки экстремума графика функции $y=\dfrac{x^3}{x^2-1}$.

Решение:

1. Найдем первую производную функции:

$$y'=\frac{3x^2(x^2-1)-x^3 2x}{(x^2-1)^2}=\frac{x^2(x^2-3)}{(x^2-1)^2}.$$

2. Определим критические точки функции, в которых $f'(x)=0$ и $f'(x)$ не существует: $x=0$, $x=\pm\sqrt{3}$, $x\neq\pm1$.

3. Разобьем этими точками область определения функции на интервалы монотонности, в каждом из которых $f'(x)$ сохраняет знак.

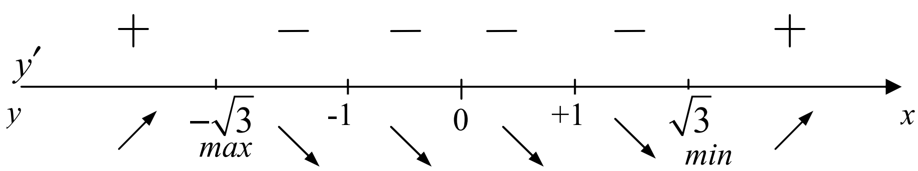


Рис. 2.14

4. Найдем значения функции в точках экстремума:

$$y_{\max}\left(-\sqrt{3}\right)=\frac{-3\sqrt{3}}{2},\quad y_{\min}\left(\sqrt{3}\right)=\frac{3\sqrt{3}}{2}.$$

2.13.3. Наибольшее и наименьшее значения функции на отрезке

Для отыскания наибольшего и наименьшего значений функции на отрезке рекомендуется пользоваться следующей схемой:

1. Найти первую производную функции.

2. Отыскать критические точки в области определения функции (в которых $f'(x)=0$ и $f'(x)$ не существует).

3. Найти значения функции в критических точках и на концах отрезка и выбрать из них наибольшее или наименьшее значения.

Пример. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $y = x^3 - 3x^2 + 1$ на отрезке $[-1;4]$.

Решение.

1. Найдем первую производную функции: $y' = 3x^2 - 6x = 3x(x-2)$

2. Найдем критические точки функции, лежащие внутри отрезка $[-1;4]$: $y' = 0$ при $x = 0$ и $x = 2$.Эти точки лежат внутри отрезка $[-1;4]$.

3. Вычислим значения функции на концах отрезка $[-1;4]$: $y(-1) = -3$, $y(4) = 17$ и в критических точках: $y(0) = 1$, $y(2) = -3$.

Сравнивая все вычисленные значения функции во внутренних критических точках и на концах отрезка, заключаем: наибольшее значение функции $y = x^3 - 3x^2 + 1$ на отрезке $[-1;4]$ $y_{\text{наиб}} = y(4) = 17$, а наименьшее $y_{\text{наим}} = y(-1) = y(0) = -3$. Итак, наибольшее значение при $-1 \le x \le 4$ функция принимает на правом конце отрезка при $x = 4$, а наименьшее значение достигается в двух точках, в точке минимума функции и на левой границе отрезка, при $x = -1$.

2.13.4. Выпуклость и вогнутость. Точки перегиба кривой

Определение 1. Кривая $y = f(x)$ называется выпуклой в промежутке $[a,b]$, если все точки кривой лежат ниже ее касательной в этом промежутке.

Определение 2. Кривая $y = f(x)$называется вогнутой в промежутке $[a,b]$, если все точки кривой лежат выше ее касательной в этом промежутке.

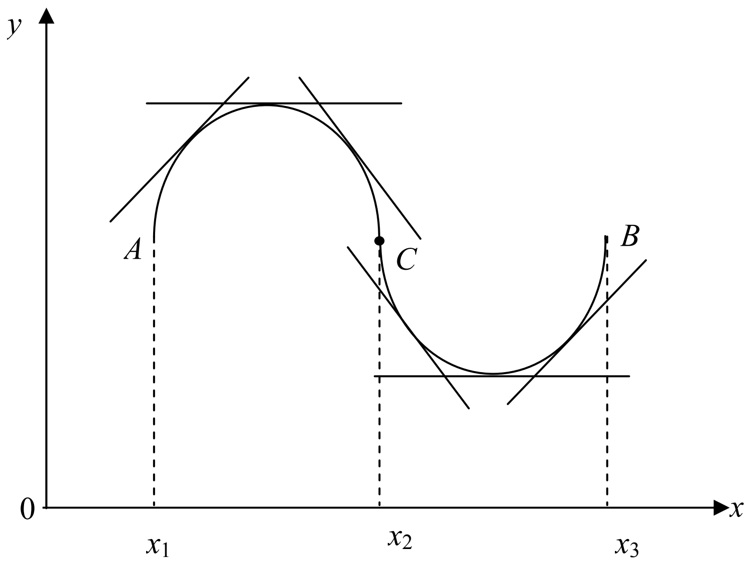


Рис. 2.15

Теорема. Если во всех точках отрезка $[a,b]$ вторая производная дважды дифференцируемой функции $f''(x)<0$, то кривая в этом интервале выпуклая (если $f''(x)>0$, то кривая вогнутая).

Геометрический смысл теоремы. Пусть $f''(x)>0$, то $f'(x)$ – возрастает. Т.е. угловой коэффициент возрастает. Пусть $f''(x)<0$, то $f'(x)$ – убывает. Т.е. угловой коэффициент, (угол наклона касательной) убывает.

Промежутки выпуклости от промежутков вогнутости отделяются точками перегиба.

Теорема. В точках перегиба конечная вторая производная дважды дифференцируемой функции равна нулю.

Теорема. Достаточное условие перегиба. Достаточным условием существования перегиба является перемена знака конечной второй производной при переходе через точку, в которой она обращается в ноль.

Правило отыскания точек перегиба

1. Найти вторую производную функции.
2. Найти точки, в которых $f''(x)=0$ или не существует.
3. Исследовать знак при переходе через эти точки и сделать вывод об интервалах выпуклости и вогнутости (если $f''(x)$ меняет знак с «+» на «-», то вогнутость переходит в выпуклость, а если с «-» на «+», то выпуклость переходит в вогнутость).
4. Найти значения функции в точках перегиба.

Пример: Найти точки перегиба графика функции $y=\dfrac{x^3}{x^2-1}$.

Решение: 1. Найдем вторую производную функции:

$$y''=\left(\frac{x^2(x^2-3)}{(x^2-1)^2}\right)'=\frac{(4x^3-6x)(x^2-1)^2-(x^4-3x^2)2(x^2-1)2x}{(x^2-1)^4}=$$

$$=\frac{2x(2x^2-3)(x^2-1)-2x(2x^4-6x^2)}{(x^2-1)^3}=\frac{2x(2x^4-2x^2-3x^2+3-2x^4+6x^2)}{(x^2-1)^3}=$$

$$=\frac{2x(x^2+3)}{(x^2-1)^3}.$$

2. Найдем точки, в которых $f''(x)=0$ или не существует:

$$x=0,\quad x\neq\pm1.$$

3. Исследуем знак при переходе через эти точки и сделаем вывод об интервалах выпуклости и вогнутости:

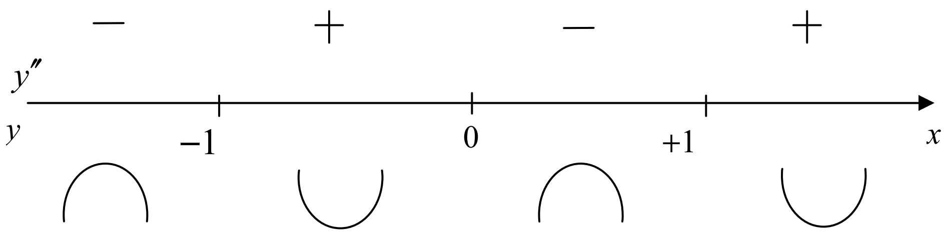


Рис. 2.16

4. Найдем значение функции в точке перегиба: $y(0)=0$.

(0;0) – точка перегиба (перегиб с $\cup$ на$\cap$, рис.).

2.13.5. Общая схема исследования функции

1. Область определения.
2. Вертикальные и наклонные асимптоты.
3. Симметрия. Периодичность.
4. Точки пересечения графика с осями.
5. Точки экстремума. Интервалы монотонности.
6. Точки перегиба. Интервалы выпуклости и вогнутости.
7. Дополнительные точки на графике, график.

Пример. Исследовать функцию $y = \dfrac{x^3}{3 - x^2}$ и построить ее график.

Решение:

1. Область определения (- ∞; -$\sqrt{3}$ 3) $\cup$ (-$\sqrt{3}$; +$\sqrt{3}$) $\cup$ (+$\sqrt{3}$; +∞).

2. Вертикальные и наклонные асимптоты.

$x = \pm\sqrt{3}$ – точки разрыва, т.к.

$$\lim_{x \to -\sqrt{3}-0} \frac{x^3}{3 - x^2} = \frac{\left(-\sqrt{3}\right)^3}{-б.м.} = +\infty \qquad \lim_{x \to \sqrt{3}-0} \frac{x^3}{3 - x^2} = \frac{\left(\sqrt{3}\right)^3}{+б.м.} = +\infty$$

$$\lim_{x \to -\sqrt{3}+0} \frac{x^3}{3 - x^2} = \frac{\left(-\sqrt{3}\right)^3}{+б.м.} = -\infty \qquad \lim_{x \to \sqrt{3}+0} \frac{x^3}{3 - x^2} = \frac{\left(\sqrt{3}\right)^3}{-б.м.} = -\infty$$

$x = -\sqrt{3}, \quad x = \sqrt{3}$ – вертикальные асимптоты;

$y = kx + b$, $k = \lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{x^3}{\left(3 - x^2\right)} = -1$, $b = \lim\limits_{x \to \pm\infty} \left(\dfrac{x^3}{3 - x^2} + x \right) = 0$

$y = -x$ – наклонная асимптота.

3. Симметрия. Периодичность.

$f(-x)=\dfrac{-x^3}{3-x^2}=-f(x)$ (нечетная функция). График симметричен относительно начала координат.

4. Точки пересечения графика с осями.

$x=0,\quad y=0$ – пересечение с осями координат.

5.Точки экстремума. Интервалы монотонности.

$$y'=\frac{3x^2\left(3-x^2\right)+2x\cdot x^3}{\left(3-x^2\right)^2}=\frac{9x^2-x^4}{\left(3-x^2\right)^2}=0;\ 9x^2-x^4=0;$$

$$x^2\left(9-x^2\right)=0;\qquad x=0,\qquad x=\pm 3,\ x\neq\pm\sqrt{3}.$$

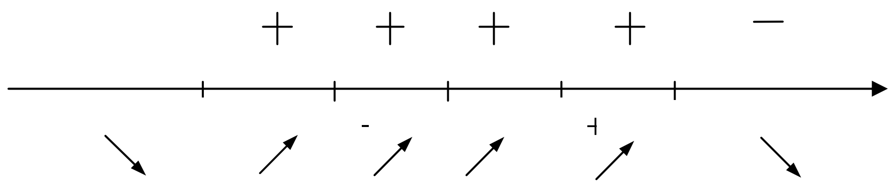


Рис. 2.17

$y_{\min}(-3)=\dfrac{-27}{3-9}=\dfrac{9}{2};\ y_{\max}(3)=-\dfrac{9}{2}.$

6.Точки перегиба. Интервалы выпуклости и вогнутости.

$$y''=\frac{6x\left(9+x^2\right)}{\left(3-x^2\right)^3}=0,\ x=0,\ x\neq\pm\sqrt{3}.$$

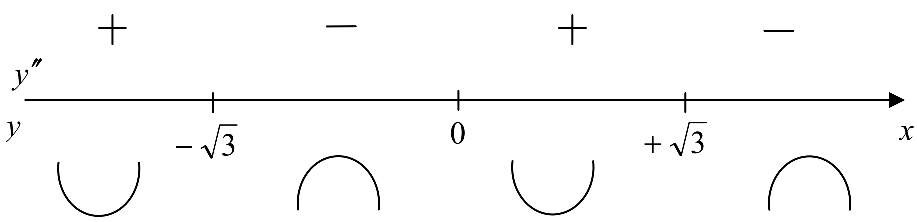


Рис. 2.18

(0;0) – точка перегиба (перегиб с $\cap$ на $\cup$).

7. График функции.

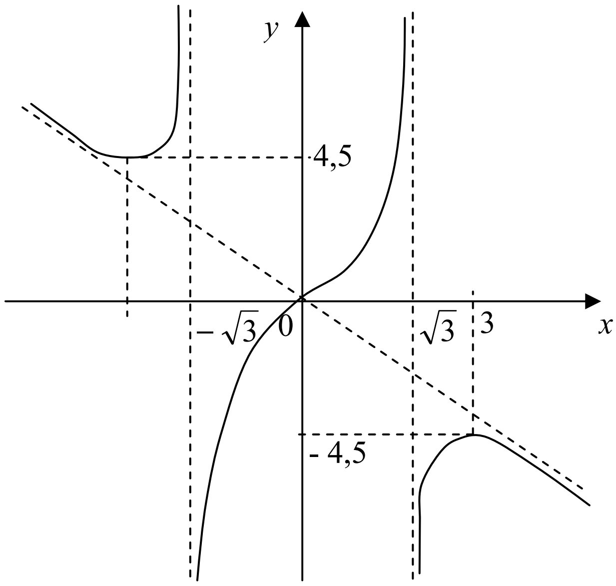


Рис. 2.19

3.ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИИ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ

3.1. Функция нескольких переменных. Область определения

Переменные x, y называют независимыми, если каждая из них может принимать любые значения независимо от того, какие значения принимает другая.

Если каждой паре значений независимых x и y из некоторой области их изменения D соответствует определенное значение величины Z, то Z есть функция двух независимых переменных x, y, определенная в области D.

Обозначение: $z = f(x;y)$

Пример 1. Объем кругового цилиндра есть функция от радиуса R его основания и от высоты H, зависимость между этими переменными дается формулой: $V = \pi R^2 H$.

Решение. Совокупность пар значений x, y, при которых определяется функция $z = f(x, y)$, называется областью определения D этой функции.

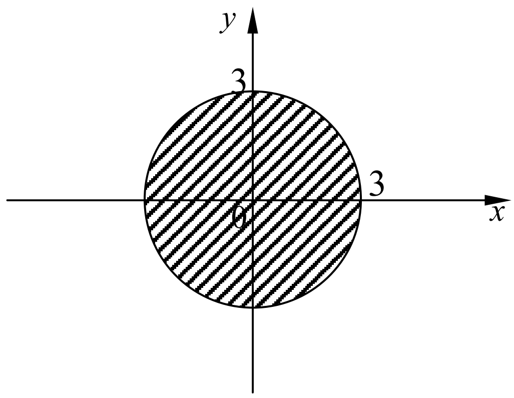


Рис. 3.1

Каждой паре значений $(x;y)$ соответствует точка плоскости xOy и D является плоской областью в плоскости xOy.

Пример 2. найти область определения функции $z = \sqrt{9 - x^2 - y^2}$.

Решение. Функция определена для значений x, y, удовлетворяющих неравенству $9 - x^2 - y^2 \geq 0$ или $x^2 + y^2 \leq 9$.

Это означает, что функция определена в точках, *лежащих внутри* окружности $x^2 + y^2 = 9$ и *на ее границе* (рис. 3.1). Такую область определения называют *замкнутой.*

Пример 3. Найти область определения функции $z = \ln\left(9 - x^2 - y^2\right)$.

Решение. Функция определена лишь для тех x, y, которые удовлетворяют неравенству: $9 - x^2 - y^2 > 0$ или $x^2 + y^2 < 9$.

Геометрически область определения представляет собой *внутренность* круга (рис. 3.2).

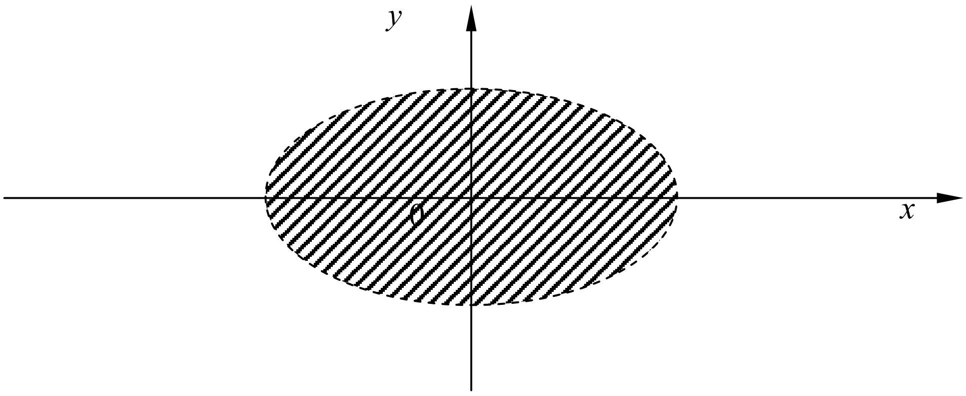


Рис. 3.2

Если совокупности значений независимых переменных ($x_1, x_2, ..., x_n$), взятых из некоторой области, соответствует определенное значение переменной W, то говорят, что W является функцией n независимых переменных $x_1, x_2, ..., x_n$ и пишут $W = f(x_1, x_2, ..., x_n)$; так же как для функции двух переменных вводится понятие области определения функции любого числа переменных.

Для функции трех переменных область определения есть совокупность троек чисел (x, y, z). Каждой тройке чисел соответствует некоторая точка пространства и область определения функции трех переменных есть некоторая пространственная область.

Пример 4. Объем V усеченного конуса является функцией от трех независимых переменных – радиусов R и r обоих его оснований и высот H.

Решение. $V = \frac{1}{3}\pi H\left(R^2 + Rr + r^2\right)$. Изучая физическое состояние какого-нибудь тела, наблюдают изменение его свойств от точки к точке (например плотность, температура тела). Эти величины – функции координат (x, y, z) точки – функции трех переменных. Если физическое состояние тела меняется во времени, то к этим независимым переменным присоединяется еще и время t. Получаем функцию четырех независимых переменных

3.2. Частные производные. Дифференциалы

Если приращение функции $z = f(x, y)$ получено за счет приращения независимой переменной *x при неизменном значении другой независимой переменной y,* то приращение функции Z называется *частным приращением функции* $z = f(x, y)$ *по переменной* x и обозначается: $\Delta_x z = f(x + \Delta x, y) - f(x, y)$

Аналогично вводится понятие частного приращения функции по переменной y: $\Delta_y z = f(x, y + \Delta y) - f(x, y)$.

Полным называется приращение функции, получаемое за счет приращения обеих независимых переменных *x, y* и обозначаемое

$$\Delta z = f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x,y).$$

Частной производной по x от функции $z = f(x,y)$ называется предел отношения $\Delta_x z$ к приращению Δx при стремлении Δx к нулю.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta_x z}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x, y) - f(x,y)}{\Delta x},$$

обозначаемый одним из символов: $z'_x, f'_x(x,y), \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial x}$.

Аналогично определяется частная производная по *y:*

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta_y z}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x, y+\Delta y) - f(x,y)}{\Delta y},$$

обозначаемый $z'_y,\ f'_y(x,y),\ \frac{\partial z}{\partial y},\ \frac{\partial f}{\partial y}$.

Частная производная по x вычисляется в предложении, что y – постоянная; частная производная по y вычисляется в предложении, что x – постоянная. Правила вычисления частных производных совпадают с правилами дифференцирования функции одного переменного.

Пример 1. Найти частные производные функции $z = 5x^4 - 6x^2y^3 + y^5$.

Решение. Полагая *y* постоянной, находим

$$z'_x = (5x^4 - 6x^2y^3 + y^5)'_x = 20x^3 - 12xy^3$$

(производная по *x* от y^5 равна нулю, как производная от постоянной).

При отыскании z'_y переменная *x* рассматривается как величина постоянная, а потому

$$z'_y = -18x^2y^2 + 5y^4.$$

Пример 2. Найти частные производные функции $z = x^{y^5}$.

Решение. Полагая при определении z'_x величину *y* постоянной, получим, что *z* – есть степенная функция: $z'_x = y^5 x^{y^5-1}$

При нахождении z'_y, полагая *x* постоянной, получим, что *z* является показательной $z'_y = x^{y^5} \cdot \ln x \cdot (y^5)'_y = 5y^4 x^{y^5} \ln x$.

Пример 3. Показать, что функция $z = x^3 + 7x^2y - 3y^3$ удовлетворяет уравнению $xz'_x + yz'_y = 3z$.

Решение. Найдем частные производные $z'_x = 3x^2 + 14xy$; $z'_y = 7x^2 - 9y^2$.

Затем первую из них умножим на x, вторую – на y и результаты сложим:

$$x(3x^2+14xy)+y(7x^2-9y^2)=3(x^3-7x^2y-3y^3)=3z,$$

что и требовалось доказать.

Пример 4. Вычислить частные производные функции

$z=\ln(x^2+4y^5)$ в точке $x=2, y=1$. $\dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{2x}{x^2+4y^5}, \dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{20y^4}{x^2+4y^5}$.

Решение. Полагая $x=2, y=1$, вычисляем значение производных в указанной точке

$$z'_x(2{,}1)=0.5, z'_y(2{,}1)=2{,}5.$$

Частные производные функции любого числа переменных определяются аналогично. Так, если $z=f(x_1,x_2,...,x_n)$, то

$$\frac{\partial z}{\partial x_1}=\lim_{\Delta x_1\to 0}\frac{\Delta x_1 z}{\Delta x_1}; \frac{\partial z}{\partial x_2}=\lim_{\Delta x_2\to 0}\frac{\Delta x_2 z}{\Delta x_2} \text{ и так далее.}$$

Пример 5. Найти частные производные функции $U=\dfrac{x}{x^2+y^2+z^2}$

Решение. Частные производные имеют вид:

$$\frac{\partial U}{\partial x}=\frac{(x^2+y^2+z^2)-x(x^2+y^2-z^2)'_x}{(x^2+y^2+z^2)^2}=\frac{y^2+z^2-x^2}{(x^2+y^2+z^2)^2},$$

$$\frac{\partial U}{\partial y}=\frac{-2xy}{(x^2+y^2+z^2)^2};$$

$$\frac{\partial U}{\partial z}=\frac{-2xy}{(x^2+y^2+z^2)^2}.$$

3.3. Частные производные высших порядков.

Если задана функция $z=f(x,y)$, то ее частные производные z'_x и z'_y также являются функциями независимых переменных x и y и от каждой из них можно вычислить производные по x и y.

Частной производной второго порядка функции $z=f(x,y)$ называется частная производная от частной производной первого порядка.

Каждую из частных производных первого порядка можно продифференцировать по каждой из двух независимых переменных и функция двух переменных имеет четыре частные производные второго порядка. Они обозначаются:

$z''_{xx} = \dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} = f''_{xx}(x, y)$ (*f* дифференцируется последовательно два раза по *x*);

$z''_{xy} = \dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = f''_{xy}(x, y)$ (*f* дифференцируется по *y*, а потом результат дифференцируется по *x*);

$z''_{xy} = \dfrac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = f''_{yx}(x, y)$ (*f* дифференцируется сначала по *x*, а потом результат дифференцируется по *y*);

$z''_{yy} = \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} = f''_{yy}(x, y)$ (*f* дифференцируется последовательно два раза по *y*).

Производные второго порядка можно снова дифференцировать как по *x*, так и по *y*. Получим частные производные более высокого порядка.

Частная производная высшего порядка, взятая по различным переменным, называется смешанной частной производной.

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} (f''_{xy} = f''_{yx}).$$

Если функция $z = f(x, y)$ *и ее частные производные* $f'_x, f'_y, f''_{xy}, f''_{yx}$ *определены и непрерывны в точке M (x, y) и ее окрестности, то*

$$z''_{xy} = z''_{yx} \qquad (f''_{xy} = f''_{yx}),$$

т.е. результат дифференцирования функции нескольких переменных не зависят от порядка дифференцирования.

Пример 6. Найти частные производные второго порядка функции

$$z = x^4 + 8x^2 y^3.$$

Решение. Сначала находим частные производные первого порядка

$$z'_x = 4x^3 + 16xy^3, \; z'_y = 24x^2 y^2.$$

Затем искомые частные производные

$$z''_{xx} = 12x^2 + 16y^3, \; z''_{xy} = z''_{yx} = 48xy^2, \; z''_{yy} = 48x^2 y.$$

Пример 7. $z = x\ln(xy)$. Показать, что $x^2 z''_x = yz'_y$.

Решение. Найдем: $z'_x = \ln(xy) + x\cdot\frac{1}{xy}\cdot(xy)'_x = \ln(xy)+1$,

$$z'_y = x\cdot\frac{1}{xy}\cdot(xy)'_y = \frac{x^2}{xy} = \frac{x}{y} \text{ и } z''_{xx} = \left[\ln(xy)+1\right]'_x = \frac{1}{xy}\cdot y = \frac{1}{x}.$$

Левая и правая части данного равенства равны

$$x^2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = x^2\cdot\frac{1}{x} = x,\ y\cdot\frac{\partial z}{\partial y} = y\cdot\frac{x}{y} = x$$

и данное равенство справедливо.

3.4. Дифференциал функции двух переменных и его приложение для приближенных вычислений

Полным дифференциалом функции $z = f(x,y)$ *называется главная часть ее полного приращения линейная относительно приращений* $\Delta x, \Delta y$ (или, что то же, дифференциалов dx, dy). Полный дифференциал функции $z = f(x,y)$ обозначается символом dz и вычисляется по формуле $dz = z'_x dx + z'_y dy$

При достаточно малых приращениях аргументов полное приращение функции можно с малой относительной погрешностью заменять ее полным дифференциалом, т.е.

$$\Delta z \approx z'_x dx + z'_y dy, \text{ откуда } f(x+\Delta x, y+\Delta y) \approx f(x,y) + z'_x dx + z'_y dy.$$

Это приближенное равенство тем точнее, чем меньше величины dx, dy.

Пример 8. Вычислить приближенно $(0{,}98)^{3{,}05}$.

Решение. Рассмотрим функцию вида $z = x^y$. В точке (1;3) $(x=1; y=3)$ $z=1$.

Положим $\Delta x = -0{,}02$ и $\Delta y = 005$ (попадаем в точку $x = 0{,}98$ и $y = 3{,}05$). Тогда

$$(0{,}98)^{3{,}05} \approx 1^3 + f'_x\cdot\Delta x + f'_y\cdot\Delta y \qquad f'_x = yx^{y-1}; f'_y = x^y\ln x$$

и в точке (1;3) $f'_x = 3\cdot 1^{3-1}; f'_{(y)} = 1^3\ln 1 = 0$ и $(0{,}98)^{3{,}05} \approx 1 + 3\cdot(-0{,}02) \approx 0{,}94$.

3.5. Производная по направлению. Градиент

Предел $\lim\limits_{M \to M_0} \dfrac{f(M) - f(M_0)}{M_0M}$ *если он существует, называется производной функции f в точке* M_0 *по направлению вектора* $\vec{l} = \overrightarrow{M_0M}$ *и обозначается* $\left(\dfrac{\partial f}{\partial l}\right)$. Если функция *f* дифференцируема в точке M_0, то

$$\left(\frac{\partial f}{\partial l}\right)_{M_0} = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{M_0} \cos\alpha + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_{M_0} \cos\beta + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)_{M_0} \cos\gamma .$$

Вектор

$$gradf = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{M_0} \vec{i} + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_{M_0} \vec{j} + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)_{M_0} \vec{k}$$

называется градиентом функции f (M) в точке M_0*.*

Производная в данной точке по направлению вектора $\vec{l}$ *имеет наибольшее значение, если направление вектора* $\vec{l}$ *совпадает с направлением градиента; это наибольшее значение производной равно* $|gradf|$.

Пример .9. Найти $gradz$ функции $z = x^2 + xy$ в точке $A(-2;3)$.

Решение. Найдем градиент в произвольной точке

$$\mathrm{grad}\, z = \frac{\partial z}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial z}{\partial y}\vec{j} = (2x + y)\vec{i} + x\vec{j} .$$

Значение градиента в точке $A(-2,3)$ $\left(\mathrm{grad}\, z\right)_A = \vec{i} - 2\vec{j}$.

Пример 10. Найти производную по направлению вектора $\vec{a} = \overrightarrow{2i} + \overrightarrow{3j}$ в точке $A = (2;3)$ от функции $Z = x^2y - xy^3$.

Решение. Найдем $\cos\alpha = \dfrac{a_x}{a} = \dfrac{2}{\sqrt{13}}$; $\cos\beta = \dfrac{a_y}{a} = \dfrac{3}{\sqrt{13}}$

$$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{\substack{x=2\\y=3}} = \left.(2xy - y^3)\right|_{\substack{x=2\\y=3}} = -15 ; \quad \left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{\substack{x=2\\y=3}} = \left.(x^2 - 3xy^2)\right|_{\substack{x=2\\y=3}} = -50 .$$

Получим:

$$\left.\frac{\partial z}{\partial l}\right|_A = -15 \cdot \frac{2}{\sqrt{13}} - 50 \cdot \frac{3}{\sqrt{13}} = -\frac{180}{\sqrt{13}} = -\frac{180\sqrt{13}}{13} .$$

3.6. Экстремум функции двух независимых переменных

Точка $M_0(x_0, y_0)$ *называется точкой локального максимума (минимума), если для всех точек M из некоторой окрестности точки* M_0 *и отличных от неё выполняется неравенство* $f(M) < f(M_0)$, $[f(M) > f(M_0)]$.

Если функция $Z = f(x;y)$ *достигает экстремума в точке* $M_0(x_0, y_0)$, *то каждая частная производная первого порядка от Z или обращается в нуль в этой точке, или не существует.* $\left(\frac{dz}{dx}\right)_{M_0} = 0$, $\left(\frac{dz}{dy}\right)_{M_0} = 0$. *(Необходимое условие экстремума).*

Точки, удовлетворяющие ему, называются критическими.

Обозначим: $A = \left(\frac{d^2x}{dx^2}\right)_{M_0}$; $B = \left(\frac{d^2z}{dxdy}\right)_{M_0}$; $C = \left(\frac{d^2z}{dy^2}\right)_{M_0}$.

Если в некоторой окрестности критической точки $M_0(x_0, y_0)$, *функция* $Z = f(x, y)$ *имеет непрерывные частные производные до третьего порядка включительно,* то в точке $M_0(x_0, y_0)$

а) $f(x, y)$ имеет максимум, если $AC - B^2 > 0$ и $A < 0$;

б) $f(x, y)$ имеет минимум, если $AC - B^2 > 0$ и $A > 0$;

в) $f(x, y)$ не имеет экстремума, если $AC - B^2 < 0$.

(Достаточное условие экстремума)

Если $AC - B^2 = 0$, то признак не даёт ответа на вопрос о существовании экстремума в точке M_0.

Пример 11. Найти точки экстремума функции $z = x^2 + y^2 - 2y + 1$

Решение. Найдём критические точки функции: $\frac{dz}{dx} = 2x$, $\frac{dz}{dy} = 2y - 2$.

Из условия $z'_x = 0$, $z'_y = 0$ получим систему $\begin{cases} 2x = 0 \\ 2y - 2 = 0 \end{cases}$

Решение: $x = 0$, $y = 1$. Следовательно, критическая точка $M_0(0;1)$.

С помощью достаточного признака исследуем найденную критическую точку $M_0(0;1)$. Для этого найдем частные производные второго порядка:

$$A = \left.\frac{d^2z}{dx^2}\right|_{\text{м}} = 2,\ B = \left.\frac{d^2z}{dxdy}\right|_{\text{м}} = 0,\ C = \left.\frac{d^2z}{dy^2}\right|_{\text{м}} = 2.$$

Таким образом $AC - B^2 = 4 > 0;\ A = 2 > 0$.

Следовательно, точка $M_0(0;1)$ является точкой минимума функции.

4. ЗАДАНИЯ К ТИПОВЫМ РАСЧЕТАМ

4.1. Введение в анализ. Пределы

Контрольная работа № 1. Вычисление пределов

Вариант 1

I

$$\lim_{n\to\infty}\frac{3n^2-2n^3+7}{7n+4n^3-3} \qquad \lim_{n\to\infty}\frac{2n^3-n^4+5}{9n^3+n^2+8}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(2n+3)^3-n^3}{10n^2-2n^3} \qquad \lim_{n\to\infty}\frac{5n^4-3n^2-n^3}{4n^3+n^4+10}$$

II

$$\lim_{x\to5}\frac{3x^2-6x-45}{x^3-25x} \qquad \lim_{x\to-5}\frac{x^3+5x^2}{3x^2+6x-45}$$

$$\lim_{x\to2}\frac{3x^2-12x+12}{(x^3-8)\cdot3} \qquad \lim_{x\to6}\frac{(x^2-6x)^2}{x^3-36x}$$

III

$$\lim_{x\to3}\frac{\sqrt{2x-2}-\sqrt{x+1}}{x^3-2x^2-3x} \qquad \lim_{x\to-2}\frac{\sqrt{2-x}+x}{x^3+8}$$

$$\lim_{x\to1}\frac{\sqrt{3x+1}-2}{x^2-6x+5} \qquad \lim_{x\to\sqrt{2}}\frac{\sqrt{x^2+2}-x^2}{x^3-2x}$$

IV

$$\lim_{x\to0}\frac{x\cdot\arcsin3x}{12x^2-\mathrm{tg}2x} \qquad \lim_{x\to0}\frac{x^2\cdot\cos3x}{1-\cos4x}$$

$$\lim_{x\to0}\frac{2x^3-x\cdot\sin3x}{x^2\sin2x+\mathrm{tg}^2 3x} \qquad \lim_{x\to0}\frac{2\cdot\mathrm{tg}3x-x^2}{x\cdot\mathrm{arctg}2x}$$

V

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n-3}\right)^{n+5} \qquad \lim_{n\to\infty}\left(\frac{5-3n}{2-3n}\right)^{\frac{n^2}{n-3}}$$

$$\lim_{x\to0}\left(\frac{3-4x}{3x+3}\right)^{\frac{3x+2}{x}} \qquad \lim_{x\to3}(2x-5)^{\frac{3x}{x-3}}$$

VI

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{3n^2+1}{5-n}+3n\right) \qquad \lim_{n\to\infty}n\cdot\ln\left(\frac{n+2}{n}\right)$$

$$\lim_{x\to0}x^2\cdot\mathrm{ctg}^2 5x \qquad \lim_{x\to0}\frac{3+x}{x}\cdot\ln\left(\frac{2-3x}{2+7x}\right)$$

Вариант 2

I

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^2-6n^5+13}{2n^4+n^3+5} \qquad \lim_{n\to\infty}\frac{n^3-2n^4+n^2}{3n^4+n+10}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{5n^4-6n^7+1}{12n^5+7n^6+n^7} \qquad \lim_{n\to\infty}\frac{12n^9+4n^8+3}{3n^5-10n^{10}}$$

II

$$\lim_{x\to 3}\frac{2x^2-8x+6}{6x^3-54x} \qquad \lim_{x\to -2}\frac{6x^3+12x^2}{2x^2+18x+28}$$

$$\lim_{x\to 2}\frac{3x^2+6x-24}{4x\cdot(x^2-4)} \qquad \lim_{x\to -5}\frac{x^2+10x+25}{(x+\sqrt{5})\cdot(x+5)}$$

III

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-1}{3x^2+4x} \qquad \lim_{x\to -1}\frac{\sqrt{6+2x}-\sqrt{3-x}}{4x\cdot(x^2-1)}$$

$$\lim_{x\to 4}\frac{x^2-6x+8}{\sqrt{x}-2} \qquad \lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{\sqrt{1+2x}-1}$$

IV

$$\lim_{x\to 0}\frac{3x-\arcsin 2x}{4x^2-8x} \qquad \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 6x}{x\cdot \operatorname{arctg} 5x}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{(2x-3)\cdot\sin 4x}{(x^2-9)\cdot x-\cos^3 x} \qquad \lim_{x\to 0}\frac{13x^2-x\cdot\arcsin 4x}{\operatorname{tg}^2 5x}$$

V

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+2}{n+3}\right)^{n-4} \qquad \lim_{n\to\infty}\left(\frac{2n+5}{2n-10}\right)^{\frac{n^2}{n+1}}$$

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{4x+5}{5-6x}\right)^{\frac{4-x}{x}} \qquad \lim_{x\to -3}(4x+13)^{\frac{2x}{x-3}}$$

VI

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{3n-2n^2}{n+1}-2n+3\right) \qquad \lim_{n\to\infty} n^2\cdot\ln\left(\frac{n^2-1}{n^2}\right)$$

$$\lim_{x\to 0}(1+\sin 2x)^{\frac{2+3x}{x}} \qquad \lim_{x\to 0}\left(\frac{2-3x}{5x}\right)^{\operatorname{ctg} 2x}$$

Вариант 3

I

$$\lim_{n\to\infty}\frac{4n^4-625}{3n^3+5n^4}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{0,001n^5-2n^4}{3n^4+4n^3+10^7}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2n^6-5n^7+18}{2+3n^5-4n^8}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(2n-3)^2-4n^2}{18n+1000}$$

II

$$\lim_{x\to2}\frac{3x^2-9x+6}{2x^3-8x}$$

$$\lim_{x\to-\frac{3}{4}}\frac{\left(2x+3\right)^2-4x^2}{16x^2-8x-15}$$

$$\lim_{x\to1}\frac{x^3-1}{x^3-x}$$

$$\lim_{x\to-2}\frac{3x^2+18x+24}{x^3+8}$$

III

$$\lim_{x\to-3}\frac{\sqrt{4+x}+x+2}{x^3-9x}$$

$$\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{4+3x}-2+x}{\mathrm{tg}5x}$$

$$\lim_{x\to5}\frac{\sqrt{4+x}-\sqrt{2x-1}}{5x-x^2}$$

$$\lim_{x\to\frac{1}{2}}\frac{(-2x+1)^2}{\sqrt{3+2x}-4x}$$

IV

$$\lim_{x\to\frac{3}{2}}\frac{\sin\left(2x-3\right)}{6x^2-9x}$$

$$\lim_{x\to-1}\frac{x^3+1}{\mathrm{tg}\left(x+1\right)}$$

$$\lim_{x\to0}\frac{x^2-3x\cdot\arcsin 2x}{2x^3+5x^2}$$

$$\lim_{x\to\frac{2}{3}}\frac{\sin\left(3x-2\right)}{10x-15x^2}$$

V

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x-2}{x+3}\right)^{2x-3}$$

$$\lim_{x\to\frac{3}{4}}\left(3x-3\right)^{\frac{x}{4-3x}}$$

$$\lim_{x\to0}\left(\frac{3x+1}{1-2x}\right)^{\frac{5-2x}{x}}$$

$$\lim_{x\to2}\left(\frac{x^2-x}{3}\right)^{\frac{2x}{x-2}}$$

VI

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^3}{3}\cdot\lg\left(\frac{n^2+3}{n^2-5}\right)$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^2+1}{n+4}-n+2\right)$$

$$\lim_{x\to2}\left(5-2x\right)^{\frac{3x^2+4}{3x}}$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x+3}{3x-2}\right)^{x-6}$$

Вариант 4

I

$$\lim_{n\to\infty}\frac{10^7-n^3}{2n^3-3n+1}\qquad \lim_{n\to\infty}\frac{4n^2-7n^5+10}{6n^5+3n^2-1}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{5n^4+3n^2+2}{7n^3+10n^2}\qquad \lim_{n\to\infty}\frac{(2n-3)^3-2n^3}{21+3n^2-6n^3}$$

II

$$\lim_{x\to3}\frac{5x^2-10x-15}{2x^3-18x}\qquad \lim_{x\to\frac{-3}{2}}\frac{2x^3+3x^2}{4x^2+12x+9}$$

$$\lim_{x\to-2}\frac{5x^2+20x+20}{(3x^2+6x)\cdot\cos(x+2)}\qquad \lim_{x\to0,2}\frac{100x^2-10x-2}{10x^3-2x^2}$$

III

$$\lim_{x\to5}\frac{\sqrt{4+x}-\sqrt{x^2-16}}{x^3-25x}\qquad \lim_{x\to0}\frac{\sqrt{4+3x}-2+x}{\mathrm{tg}5x}$$

$$\lim_{x\to\frac{-3}{4}}\frac{16x^2+8x-3}{\sqrt{4x+7}+4x+1}\qquad \lim_{x\to-1}\frac{4x^2+8x+4}{\sqrt{3-x}+2x}$$

IV

$$\lim_{x\to0}\frac{2x^3-x\cdot\mathrm{tg}5x}{4x^2-3x^3-x}\qquad \lim_{x\to0}\frac{\arcsin3x}{5x^2-4x}$$

$$\lim_{x\to0}\frac{4x^3\cdot\sin2x+6}{x^3+3x^2}\qquad \lim_{x\to\frac{-1}{2}}\frac{12x^2+10x+2}{(2-x)\cdot\mathrm{tg}(1+2x)}$$

V

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2n-3}{2n+4}\right)^n\qquad \lim_{x\to3}(4x-11)^{\frac{x+2}{x-3}}$$

$$\lim_{x\to0}\left(\frac{2x+4}{4-5x}\right)^{\frac{x^2-5}{x}}\qquad \lim_{x\to-2}\left(3x^2-11\right)^{\frac{2x-3}{x+2}}$$

VI

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2+3x^2}{2x-1}-\frac{3x^2}{2x+1}\right)\qquad \lim_{x\to2}\left(x^2-1\right)^{\frac{x-2}{x}}$$

$$\lim_{x\to0}(1+2\mathrm{tg}3x)^{\frac{x+|5}{x}}\qquad \lim_{n\to\infty}n\cdot\big(\ln(n+3)-\ln(n-3)\big)$$

Вариант 5

I

$$\lim_{n\to\infty}\frac{5n^2-6n^4+10^7}{3n^4+2n-13}$$ $$\lim_{x\to\infty}\frac{2x^8-x^6+10^5}{10^9-x^7+6x}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2n^5-3n^{10}+10^{-9}}{3n^7+10n^6+12}$$ $$\lim_{x\to\infty}\frac{4x^4-6x^5+10^6}{4x^5+x^6-20}$$

II

$$\lim_{x\to\frac{2}{5}}\frac{25x^2-5x-2}{25x^3-4x}$$ $$\lim_{x\to-1}\frac{10x^3-10x}{x^2-12x-15}$$

$$\lim_{x\to3}\frac{2x^3-16}{2x^3-27x}$$ $$\lim_{x\to12}\frac{x^3-144x}{2x^2+10x-24}$$

III

$$\lim_{x\to-2}\frac{\sqrt{5+2x}+1}{3x^2+12x+12}$$ $$\lim_{x\to1}\frac{3x^2-6x+3}{\sqrt{5x+4}-3x}$$

$$\lim_{x\to\frac{3}{5}}\frac{\sqrt{5x+6}-\sqrt{15x}}{15x^2-25x^3}$$ $$\lim_{x\to0}\frac{3\cdot\mathrm{arctg}2x}{\sqrt{4+3x}-\sqrt{4-x}}$$

IV

$$\lim_{x\to0}\frac{x\cdot\mathrm{tg}5x-3x^2}{\arcsin4x}$$ $$\lim_{x\to0}\frac{5x^3-\mathrm{arctg}2x}{\arcsin5x}$$

$$\lim_{x\to-2}\frac{2x-\mathrm{arctg}(x+2)}{3x^2+6x}$$ $$\lim_{x\to-\frac{4}{3}}\frac{5\mathrm{tg}^2(3x+4)}{9x^2+24x+16x}$$

V

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{3n+5}{3n-10}\right)^{2n-1}$$ $$\lim_{x\to3}\left(x^2-8\right)^{\frac{2x}{x-3}}$$

$$\lim_{x\to0}\left(\frac{5+4x}{5-x}\right)^{\frac{2x-3}{x}}$$ $$\lim_{x\to0}\left(1-\sin5x\right)^{\frac{2x-1}{x}}$$

VI

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{5x^2}{x+1}-\frac{10x^2+1}{2x-3}\right)$$ $$\lim_{n\to\infty}n^2\cdot\lg\left(\frac{3n+1}{3n-1}\right)$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2n+5}{n+1}\right)^{\frac{3n-1}{n+10}}$$ $$\lim_{x\to1,5}\left(5x-7\right)^{\frac{4x^2}{2x-3}}$$

Вариант 6

I

$$\lim_{n\to\infty}\frac{3n^2-6n^5+10^7}{10n^5+2n^4+9}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{3n^6-4n^5+13}{n^3+2n^4+4n^5}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\left(3n^2+1\right)^2-6n^3}{2n^2-10n^4-5}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\left(n+2\right)^3-n^3}{2n+3n^3-7}$$

II

$$\lim_{x\to\frac{1}{2}}\frac{12x^2+8x-7}{(12x+3)^2-16}$$

$$\lim_{x\to-2}\frac{(3x+5)-2}{(3x^2-12)\cdot x}$$

$$\lim_{x\to\frac{5}{2}}\frac{\left(2x-3\right)^2-4x+6}{12x^2-4x-65}$$

$$\lim_{x\to0}\frac{4x\cdot\sin\left(\frac{x}{2}\right)}{(5x+1)-10x-1}$$

III

$$\lim_{x\to0,5}\frac{\sqrt{5-2x}+4x}{4x^2-10x-6}$$

$$\lim_{x\to\frac{3}{4}}\frac{\left(2x-3\right)^2-4x^2}{\sqrt{16x^2-8}-1}$$

$$\lim_{x\to\frac{2}{3}}\frac{\sqrt{3x+2}-\sqrt{6x}}{9x^2-4}$$

$$\lim_{x\to0}\frac{\frac{3}{4}\cdot\arcsin 8x}{\sqrt{1-5x^3}-\sqrt{3x+1}}$$

IV

$$\lim_{x\to0}\frac{3x^2-\mathrm{tg}5x}{5x-\arcsin 2x}$$

$$\lim_{x\to-1}\frac{3x\cdot\mathrm{arctg}\left(x+2\right)}{\left(2x+2\right)\cdot\sin\left(\frac{\pi x}{2}\right)}$$

$$\lim_{x\to2}\frac{(3x-6)^2\cdot\cos(x-2)}{\sin\left(\frac{x-2}{3}\right)\cdot(2-x)}$$

$$\lim_{x\to0}\frac{2x-\mathrm{arctg}8x}{\left(x^2-4\right)\cdot\sin 5x}$$

V

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+2}{n-3}\right)^{\frac{n^2}{n+1}}$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x-3}{2x+5}\right)^{x-6}$$

$$\lim_{x\to-3}\left(2x+7\right)^{\frac{3x+1}{x+3}}$$

$$\lim_{x\to0}\left(\frac{3-2x}{3+5x}\right)^{\frac{4-x}{x}}$$

VI

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x^3-3}{x^2}-\frac{6x^2+10}{3x}\right)$$

$$\lim_{x\to4}\left(x-2\right)^{\frac{3x-4}{x}}$$

$$\lim_{x\to0}\frac{3}{x}\cdot\lg\left(\frac{2+3x}{2-x}\right)$$

$$\lim_{x\to-1}(4+3x)^{\frac{2x+5}{x-2}}$$

Вариант 7

I

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(n+3)^3-n^3}{2n^3-3n^2+1} \qquad \lim_{n\to\infty}\frac{4n^5-3n^4-9}{10^7+5n^3+n^5}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(2n+3)^3+5n^3}{4n^2-10n^3+3} \qquad \lim_{n\to\infty}\frac{\left(3n^2+1\right)+4n^3}{\left(2n+1\right)^3-4n^3}$$

II

$$\lim_{x\to-2}\frac{10x^2+15x-10}{4x^2+8x} \qquad \lim_{x\to3}\frac{3x^2-9x+\left(x-3^2\right)}{x^3-9x}$$

$$\lim_{x\to\frac{4}{3}}\frac{3x^2-6x-8}{9x^2-16} \qquad \lim_{x\to0}\frac{x-\sin 5x}{2x^2-3x}$$

III

$$\lim_{x\to\frac{1}{3}}\frac{\sqrt{3x+8}-3}{18x^2-2} \qquad \lim_{x\to-2}\frac{5x^2+6x-8}{\sqrt{6+x}+x}$$

$$\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{1+3x}-1}{5x^3-10x} \qquad \lim_{x\to0}\frac{\operatorname{tg}\left(\frac{2x}{3}\right)}{\sqrt{2+3x}-\sqrt{2-x}}$$

IV

$$\lim_{x\to0}\frac{3x+\arcsin 2x}{4x^2-3x} \qquad \lim_{x\to0}\frac{x\cdot\operatorname{tg}3x-4x}{\sin\left(\frac{3x}{2}\right)}$$

$$\lim_{x\to0,5}\frac{x\cdot\operatorname{arctg}(2x-1)}{24x^2-6} \qquad \lim_{x\to-3}\frac{\left(x+3\right)\cdot\operatorname{tg}\left(x+3\right)}{2x^2+12x+18}$$

V

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2n+1}{2n-3}\right)^n \qquad \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+5}{x}\right)^{\frac{3+x^2}{x}}$$

$$\lim_{x\to-5}\left(x+6\right)^{\frac{3x}{x+5}} \qquad \lim_{x\to0}\left(\frac{2-3x}{2+5x}\right)^{\frac{4+2x}{x}}$$

VI

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{3x^2-x}{x+2}-\frac{12x^2+1}{4x-1}\right) \qquad \lim_{x\to2}\left(3x-4\right)^{\frac{x^2+3}{x}}$$

$$\lim_{n\to\infty}n^2\cdot\lg\left(\frac{n+2}{n}\right) \qquad \lim_{x\to0}\left(1+\sin x\right)^{\frac{2-3x}{4x}}$$

Вариант 8

I

$$\lim_{n\to\infty}\frac{4n^2-3n^3+100}{5n^3+10n-13} \qquad \lim_{n\to\infty}\frac{4\cdot(n+5)^3}{3n^4-n^3}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2n^3-3n^4+10}{\left(n-10\right)^3} \qquad \lim_{n\to\infty}\frac{n^2-(n+2)^2}{4n+100}$$

II

$$\lim_{x\to1}\frac{3x^2-4x+10}{2x-x^2} \qquad \lim_{x\to2}\frac{16-6x-x^2}{6x-3x^2}$$

$$\lim_{x\to1}4\frac{12x-10-2x^2}{2\left(x^2-x\right)} \qquad \lim_{x\to-1}\frac{6x^3+6x^2}{3x^2+12x+9}$$

III

$$\lim_{x\to-2}\frac{\sqrt{5-2x}+x-1}{3x^2+6x} \qquad \lim_{x\to1}\frac{x^3+2x^2-3x}{\sqrt{3x+1}-2x}$$

$$\lim_{x\to0}\frac{2x^3-3x}{\sqrt{4+2x}-\sqrt{4-x}} \qquad \lim_{x\to\frac{3}{2}}\frac{4x^2-16x+15}{\sqrt{2x+6}-2x}$$

IV

$$\lim_{x\to0}\frac{\mathrm{tg}5x-8x^2}{\arcsin2x-3x} \qquad \lim_{x\to0}\frac{3x^2-x\cdot\mathrm{tg}2x}{2x^3\text{-}\arcsin5x}$$

$$\lim_{x\to0}\frac{2x\cdot\sin3x}{4x^2-5x^3} \qquad \lim_{x\to0}\frac{3x-x\cdot\sin2x}{2x^2\text{-}\mathrm{arctg}x}$$

V

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+2}{n+4}\right)^{n-2} \qquad \lim_{n\to\infty}\left(\frac{2n-3}{2n+5}\right)^{\frac{n}{3}}$$

$$\lim_{x\to0}\left(\frac{4x+3}{3-5x}\right)^{\frac{2-x}{x}} \qquad \lim_{x\to-3}\left(2x+7\right)^{\frac{2x}{x-3}}$$

VI

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{3n^2-1}{2n+3}-\frac{6n^3+2n}{6n^2-1}\right) \qquad \lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x+1}{2x-5}\right)^{\frac{4x}{x+2}}$$

$$\lim_{x\to0}\left(1+\mathrm{tg}2x\right)^{\frac{x-3}{x}} \qquad \lim_{n\to\infty}n\cdot\lg\left(\frac{n-1}{n+2}\right)$$

Вариант 9

I

$$\lim_{n\to\infty}\frac{5n-4n^2+1}{2n^2+3n^3-9} \qquad \lim_{n\to\infty}\frac{4\cdot(n-8)^3}{3n^2-4n^3+2}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(n+4)^2-2n^2}{3n+5n^2-3} \qquad \lim_{n\to\infty}\frac{4n^2-5n+1}{(n-3)^2-n^2}$$

II

$$\lim_{x\to-2}\frac{12-3x+3x^2}{5+10x^2-5x} \qquad \lim_{x\to5}\frac{2x^2-12x+10}{2x^2-10x}$$

$$\lim_{x\to-1}\frac{3x^2+3x^3}{x^2+6x+5} \qquad \lim_{x\to-3}\frac{4x^2+12x}{3x^2+12x+9}$$

III

$$\lim_{x\to0}\frac{\sin(3x)}{\sqrt{4-2x}-\sqrt{x+4}} \qquad \lim_{x\to-1}\frac{\sqrt{5+4x}+x}{2x^2+6x+4}$$

$$\lim_{x\to\frac{2}{3}}\frac{\sqrt{3x+10}-\sqrt{6x+8}}{9x^2-18x+4} \qquad \lim_{x\to3}\frac{2x^3-18x}{\sqrt{x+6}-x}$$

IV

$$\lim_{x\to0}\frac{3x^2-\operatorname{arctg}2x}{4x-5x^2} \qquad \lim_{x\to0}\frac{x\cdot\arcsin4x}{\operatorname{tg}^2 5x}$$

$$\lim_{x\to0}\frac{8x^2-x\cdot\arcsin5x}{1-\cos(2x)} \qquad \lim_{x\to0}\frac{x\cdot\arcsin4x}{\operatorname{tg}^2 5x}$$

V

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n+2}\right)^{n-4} \qquad \lim_{n\to\infty}\left(\frac{2n-3}{2n-5}\right)^{\frac{n}{2}}$$

$$\lim_{x\to0}\left(\frac{3x+2}{2-x}\right)^{\frac{4+x}{x}} \qquad \lim_{x\to2}(3x-5)^{\frac{3x}{x-2}}$$

VI

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x-3}{x+1}\right)^{\frac{1-x^2}{x}} \qquad \lim_{n\to\infty}\left(\frac{2n^2}{n+1}-\frac{6n^3}{3n^2-5}\right)$$

$$\lim_{x\to2}(x-2)\cdot\operatorname{ctg}(2-x) \qquad \lim_{n\to\infty}n^2\cdot\lg\left(\frac{n}{n+1}\right)$$

Вариант 10

I

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2n^4-15n^3+9}{7n+3n^5-4} \qquad \lim_{n\to\infty}\frac{2n^2-3n^4+1}{5n^4-6n^2}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{3n^5-6n^4-8}{4n^3+5n^4+6} \qquad \lim_{n\to\infty}\frac{(n+4)^3-3n^3}{4n^2+6n^3-2}$$

II

$$\lim_{x\to-2}\frac{x^2-4x-12}{3x^3+6x^2} \qquad \lim_{x\to-1}\frac{5x^3-5x}{3x^2+6x+3}$$

$$\lim_{x\to3}\frac{\left(x^3-9x\right)\cdot\sqrt{x}}{x^2+6x-27} \qquad \lim_{x\to4}\frac{\left(x^2-6x+8\right)^2}{\sqrt{x}\cdot\left(3x-12\right)}$$

III

$$\lim_{x\to3}\frac{\sqrt{x+6}-\sqrt{3+2x}}{9x-x^3} \qquad \lim_{x\to4}\frac{x^2-4x}{\sqrt{x}-\sqrt{8-x}}$$

$$\lim_{x\to-2}\frac{\sqrt{6+x}+x}{3x^2+6x} \qquad \lim_{x\to-1}\frac{\sqrt{5+4x}+2x}{x^3+1}$$

IV

$$\lim_{x\to0}\frac{x\cdot\mathrm{tg}2x-3x^2}{4x\cdot\arcsin3x} \qquad \lim_{x\to0}6\frac{2x\cdot\sin^2 3x}{2x^3-3x^2}$$

$$\lim_{x\to0}\frac{3x^3-3\cdot\mathrm{arctg}2x}{x\cdot\cos2x-3x^2} \qquad \lim_{x\to0}\frac{x^3\text{-}\mathrm{tg}^2 3x}{x\cdot\arcsin2x-3x^2}$$

V

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+2}\right)^{3-n} \qquad \lim_{n\to\infty}\left(\frac{2n-5}{2n+7}\right)^{\frac{n^2}{n+2}}$$

$$\lim_{x\to0}\left(\frac{2x+5}{5-3x}\right)^{\frac{2x-3}{x}} \qquad \lim_{x\to-4}\left(2x+9\right)^{\frac{2x+1}{x+4}}$$

VI

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2n^2+5n}{3n+4}-\frac{4n^3}{6n^2+5}\right) \qquad \lim_{n\to\infty}\left(2n-\frac{6n^2}{3n-2}\right)$$

$$\lim_{x\to0}x\cdot\mathrm{ctg}3x \qquad \lim_{x\to0}\frac{3}{x}\cdot\ln\left(\frac{2x+3}{3-5x}\right)$$

Вариант 11

I

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^2-(2n-3)^2}{n+5} \qquad \lim_{n\to\infty}\frac{n^4+3n^3+4}{2n^4+6n^2+7}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^5+6n+5}{3n^4+7n+3} \qquad \lim_{n\to\infty}\frac{3n^2+5n+6}{6n^3+4n+1}$$

II

$$\lim_{x\to4}\frac{x^2-3x-4}{x^2-4x} \qquad \lim_{x\to-4}\frac{16-x^2}{x^2+2x-8}$$

$$\lim_{x\to5}\frac{2x^2-8x-10}{x^2-6x+5} \qquad \lim_{x\to2}\frac{x^2+x-6}{x^3-8}$$

III

$$\lim_{x\to-6}\frac{\sqrt{2x+16}-2}{x^2+3x-18} \qquad \lim_{x\to3}\frac{x^2-7x}{\sqrt{2x+2}-4}$$

$$\lim_{x\to4}\frac{2x^2-9x+4}{\sqrt{5x-4}-\sqrt{x+12}} \qquad \lim_{x\to-4}\frac{\sqrt{3x+16}-2}{x^2-x-20}$$

IV

$$\lim_{x\to0}\frac{2x^3-\arcsin 5x}{3x^2-x\cdot\sin x} \qquad \lim_{x\to0}\frac{\operatorname{tg}x-x^2}{\sin 2x}$$

$$\lim_{x\to0}\frac{\cos 2x-\cos^3 2x}{3x^2} \qquad \lim_{x\to0}\frac{3x\cdot\sin x}{\operatorname{tg}^2 x}$$

V

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+3}{n-4}\right)^{n+1} \qquad \lim_{n\to\infty}\left(\frac{3n+1}{3n-4}\right)^{\frac{n}{3}}$$

$$\lim_{x\to-2}(3x+7)^{\frac{3x}{x+2}} \qquad \lim_{x\to0}\left(\frac{2x+4}{3x+4}\right)^{\frac{x+3}{x}}$$

VI

$$\lim_{x\to\infty}2x\cdot\left(\ln(x+2)-\ln(x+1)\right) \qquad \lim_{x\to2}\left(\frac{1}{x-2}-\frac{1}{x^2-4}\right)$$

$$\lim_{x\to\infty}x\cdot\left(\ln(3x+1)-\ln(3x+2)\right) \qquad \lim_{x\to\infty}\frac{-x}{(3x+2)}$$

Вариант 12

I

$$\lim_{n\to\infty}\frac{5n^6+7n^3+4}{2n^6+3n^2+6}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^2+(n+3)^2}{2n^2+6}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^2-(n-1)^2}{n^2+2n-3}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n-7n^8+5}{3n^6+4n+1}$$

II

$$\lim_{x\to-1}\frac{4x^2-4}{4+3x-x^2}$$

$$\lim_{x\to5}\frac{6x-x^2-5}{x^2-4x-5}$$

$$\lim_{x\to2}\frac{4x^2+4x-24}{x^2+2x-8}$$

$$\lim_{x\to3}\frac{x^2+x-12}{x^2-3x}$$

III

$$\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{x+1}-1}{x^2+x}$$

$$\lim_{x\to-3}\frac{\sqrt{3x+10}-1}{x^2-4x-21}$$

$$\lim_{x\to1}\frac{\sqrt{3+2x}-\sqrt{x+4}}{3x^2-4x-1}$$

$$\lim_{x\to5}\frac{x^2-8x+15}{\sqrt{2x-1}-3}$$

IV

$$\lim_{x\to0}\frac{x^2-\operatorname{arctg}2x}{\sin3x}$$

$$\lim_{x\to0}\frac{6x\cdot\operatorname{tg}x}{x^2+\sin^2x}$$

$$\lim_{x\to0}\frac{3x\cdot\sin2x}{\operatorname{tg}^2 3x}$$

$$\lim_{x\to0}\frac{1-\cos4x}{\arcsin^2x}$$

V

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n-1}{n+2}\right)^{n+3}$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{3n-1}{3n+1}\right)^{n}$$

$$\lim_{x\to-2}(4x+9)^{\frac{2x}{x+2}}$$

$$\lim_{x\to0}\left(\frac{5x+2}{2-3x}\right)^{\frac{1-x}{x}}$$

VI

$$\lim_{x\to\infty}2x\cdot\left(\ln(x-2)-\ln(x+3)\right)$$

$$\lim_{x\to4}\left(\frac{2}{x-4}-\frac{3}{x^2-16}\right)$$

$$\lim_{x\to\infty}3x\cdot\left(\ln(2x+1)-\ln(2x-3)\right)$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{12x}{(2x-3)}$$

Вариант 13

I

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n-5n^4+3}{n^3+3n+1} \qquad \lim_{n\to\infty}\frac{25-n^2}{3n+2n^2}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^3-(n+1)^3}{2n^2+5n+1} \qquad \lim_{n\to\infty}\frac{n^4+5n^3+4}{3n^4+6n+3}$$

II

$$\lim_{x\to 1}\frac{1-x^2}{x^3-1} \qquad \lim_{x\to -3}\frac{x^2+3x}{x^2+7x+12}$$

$$\lim_{x\to -1}\frac{2x^2-6x-8}{x^2-1} \qquad \lim_{x\to 4}\frac{x^2-3x-4}{2x^2-32}$$

III

$$\lim_{x\to 3}\frac{\sqrt{3x-5}-2}{x^2+x-12} \qquad \lim_{x\to 3}\frac{x^2+x-12}{\sqrt{9x-2}-5}$$

$$\lim_{x\to 4}\frac{\sqrt{5-x}-\sqrt{x-3}}{2x^2-9x+4} \qquad \lim_{x\to -3}\frac{2x^3-x-21}{\sqrt{x+10}-\sqrt{4-x}}$$

IV

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^3-\mathrm{arctg}x}{\sin 3x} \qquad \lim_{x\to 0}\frac{5x^2+\mathrm{tg}x}{x^2+\sin^2 x}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{2x\cdot\sin x}{\mathrm{tg}^2 3x} \qquad \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 3x}{2x^2}$$

V

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+4}{n+5}\right)^{n+2} \qquad \lim_{n\to\infty}\left(\frac{2n+1}{2n+2}\right)^{n}$$

$$\lim_{x\to -1}\left(2x+3\right)^{\frac{x}{x+1}} \qquad \lim_{x\to 0}\left(\frac{3x+1}{1-4x}\right)^{\frac{2-x}{x}}$$

VI

$$\lim_{x\to\infty}3x\cdot\left(\ln\left(x-1\right)-\ln\left(x-2\right)\right) \qquad \lim_{x\to 3}\left(\frac{4}{x-3}-\frac{5}{x^2-9}\right)$$

$$\lim_{x\to\infty}x\cdot\left(\ln\left(2x+1\right)-\ln\left(2x-1\right)\right) \qquad \lim_{x\to\infty}\frac{2x}{\left(2x-1\right)}$$

Вариант 14

I

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^3-(n-1)^3}{n^2+2n-5}$$ $$\lim_{n\to\infty}\frac{4-n^3}{2n^3+3n}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^4-3n^5+1}{2-4n^2+6n}$$ $$\lim_{n\to\infty}\frac{n^3+(n+2)^3}{n^4+4}$$

II

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{6x-x^2-5}$$ $$\lim_{x\to 3}\frac{12-x-x^2}{x^2-3x}$$

$$\lim_{x\to -3}\frac{6-x-x^2}{2x^2+14x+24}$$ $$\lim_{x\to 5}\frac{2x^2-8x-10}{x^2-25}$$

III

$$\lim_{x\to -4}\frac{\sqrt{2x+9}-1}{x^2+2x-3}$$ $$\lim_{x\to -3}\frac{\sqrt{x+10}-\sqrt{4-x}}{2x^2-x-21}$$

$$\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{2x-1}-1}{x^2-5x+4}$$ $$\lim_{x\to 6}\frac{\sqrt{3x-2}-4}{6x^2-8x+12}$$

IV

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin^3\left(\frac{x}{2}\right)}{2x^3}$$ $$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 3x}{\arcsin^2 x}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2-3x^3}{\mathrm{tg}^2 2x}$$ $$\lim_{x\to 0}\frac{3x^2-x\cdot\mathrm{arctg}x}{\sin^2 x}$$

V

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+5}{n+4}\right)^{n+2}$$ $$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{3n-1}{3n+2}\right)^{\frac{n}{4}}$$

$$\lim_{x\to 3}(3x+10)^{\frac{x}{x+3}}$$ $$\lim_{x\to 0}\left(\frac{4x+5}{5x-3}\right)^{\frac{2+x}{x}}$$

VI

$$\lim_{x\to 4}\left(\frac{2}{x-4}-\frac{3}{x^2-16}\right)$$ $$\lim_{x\to\infty}2x\cdot\left(\ln(x+3)-\ln(x+4)\right)$$

$$\lim_{x\to\infty}x\cdot\left(\ln(3x+1)-\ln(3x-2)\right)$$ $$\lim_{x\to\infty}\frac{3x}{(3x-2)}$$

Вариант 15

I

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^3+6n+5}{3n^4+5n^2+7}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n-(n-1)^5}{3n^5+6}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{5n^5+6n^2+7}{3n^3+5n+8}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^3-(n+2)^3}{n^2+2n+5}$$

II

$$\lim_{x\to3}\frac{x^2-3x}{2x^2+2x-24}$$

$$\lim_{x\to2}\frac{x^2+2x-8}{2x^2+2x-12}$$

$$\lim_{x\to4}\frac{x^2-7x+12}{2x^2-6x-8}$$

$$\lim_{x\to1}\frac{2x^2-12x+10}{x^2-1}$$

III

$$\lim_{x\to3}\frac{2x^3+2x-24}{\sqrt{x-2}-\sqrt{4-x}}$$

$$\lim_{x\to3}\frac{\sqrt{2x+3}-3}{x^2-9x+18}$$

$$\lim_{x\to8}\frac{\sqrt{x+1}-3}{8x^2-9x+8}$$

$$\lim_{x\to10}\frac{\sqrt{x-1}-3}{x^2-12x+20}$$

IV

$$\lim_{x\to0}\frac{7x^2-\mathrm{tg}5x}{2x-\arcsin x}$$

$$\lim_{x\to0}\frac{\cos x-\cos^5 x}{x^2}$$

$$\lim_{x\to0}\frac{\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}{x^2}$$

$$\lim_{x\to0}\frac{2x-x\cdot\sin x}{3x^2-\mathrm{arctg}x}$$

V

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+4}{n+1}\right)^{n+3}$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2n-2}{2n-3}\right)^{\frac{n}{3}}$$

$$\lim_{x\to-1}\left(2x+3\right)^{\frac{x}{x+1}}$$

$$\lim_{x\to0}\left(\frac{3x-1}{4x-1}\right)^{\frac{x+2}{x}}$$

VI

$$\lim_{x\to3}\left(\frac{1}{x-3}-\frac{1}{x^2-9}\right)$$

$$\lim_{x\to\infty}x\cdot\left(\ln\left(x+5\right)-\ln\left(x-4\right)\right)$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x}{2}\cdot\left(\ln\left(2x+1\right)-\ln\left(2x-1\right)\right)$$

Вариант 16

I

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^3+5n^2+7}{3+n-3n^3} \qquad \lim_{n\to\infty}\frac{n^2+5n+1}{4n^3+3}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^3-(n-1)^3}{3n^2+5} \qquad \lim_{n\to\infty}\frac{4-5n^4}{3n^2+1}$$

II

$$\lim_{x\to-1}\frac{x^2-4x-5}{1-x^2} \qquad \lim_{x\to5}\frac{6x-x^2-5}{x^2-4x-5}$$

$$\lim_{x\to-4}\frac{24-2x-2x^2}{x^2+2x-8} \qquad \lim_{x\to0}\frac{4x-x^2}{x^2-3x}$$

III

$$\lim_{x\to5}\frac{\sqrt{5x-9}-4}{x^2-8x+15} \qquad \lim_{x\to2}\frac{x^2-6x+8}{\sqrt{3x+3}-3}$$

$$\lim_{x\to-1}\frac{3x^2+4x+1}{\sqrt{x+3}-\sqrt{5+3x}} \qquad \lim_{x\to1}\frac{\sqrt{3x+6}-3}{x^2-6x+5}$$

IV

$$\lim_{x\to0}\frac{\cos3x-\cos^2 3x}{\sin^2 x} \qquad \lim_{x\to0}\frac{\sin^3\left(\frac{x}{2}\right)}{8x^3}$$

$$\lim_{x\to0}\frac{6x^2-x}{3x\cdot\sin5x} \qquad \lim_{x\to0}\frac{x\cdot\mathrm{tg}x}{x^2-x^3}$$

V

$$\lim_{x\to-3}\left(3x+10\right)^{\frac{x}{x+3}} \qquad \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n-3}{n+4}\right)^n$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2n+1}{2n+2}\right)^{\frac{n}{2}} \qquad \lim_{x\to0}\frac{x+3}{2x}\cdot\ln\left(\frac{2x+4}{3x+4}\right)$$

VI

$$\lim_{x\to-5}\left(\frac{1}{x+5}-\frac{1}{x^2-25}\right) \qquad \lim_{x\to\infty}x\cdot\left(\ln\left(x-1\right)-\ln\left(x+2\right)\right)$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2-4}-\sqrt{x-4}\right)$$

Вариант 17

I

$$\lim_{n\to\infty}\frac{3n^4+5n^3+7}{5n^4+6n^2+8} \qquad \lim_{n\to\infty}\frac{n-3n^3}{n^2-5n}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{5n^2-6n^3-8}{n-1} \qquad \lim_{n\to\infty}\frac{n^2+5n+6}{3n^3+6n+7}$$

II

$$\lim_{x\to2}\frac{x^2-9x+14}{x^3-8} \qquad \lim_{x\to3}\frac{x^2+4x-21}{2x^2+4x-24}$$

$$\lim_{x\to-1}\frac{x^2-7x-8}{2x^2-2} \qquad \lim_{x\to4}\frac{x^2+x-20}{4+3x-x^2}$$

III

$$\lim_{x\to-2}\frac{\sqrt{2-x}-\sqrt{x+6}}{2x^2-2x+12} \qquad \lim_{x\to-2}\frac{x^2-x-6}{\sqrt{3x+10}-2}$$

$$\lim_{x\to1}\frac{\sqrt{3x+1}-2}{x^2-3x+2} \qquad \lim_{x\to9}\frac{x^2-12x+27}{\sqrt{x+7}-4}$$

IV

$$\lim_{x\to0}\frac{1-\cos^3 x}{x^2} \qquad \lim_{x\to0}\frac{3x\cdot\sin^2 2x}{x^3-3x^5}$$

$$\lim_{x\to0}\frac{\mathrm{tg}^2 3x}{x^2} \qquad \lim_{x\to0}\frac{x-\mathrm{arctg}2x}{3x}$$

V

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n-4}{n-5}\right)^{n-2} \qquad \lim_{n\to\infty}\left(\frac{3n-1}{3n+1}\right)^{n}$$

$$\lim_{x\to-2}\left(2x+5\right)^{\frac{x}{x+2}} \qquad \lim_{x\to0}\frac{x+2}{2x}\cdot\ln\left(\frac{3x-1}{4x-1}\right)$$

VI

$$\lim_{x\to\infty}4x\cdot\left(\ln\left(x+1\right)-\ln\left(x+2\right)\right) \qquad \lim_{x\to\infty}x\cdot\left(\ln\left(2x-1\right)-\ln\left(2x+3\right)\right)$$

$$\lim_{x\to2}\left(\frac{3}{x-2}-\frac{4}{x^2-4}\right)$$

Вариант 18

I

$$\lim_{n\to\infty}\frac{3-4n^5+6n}{2+3n^2+7n} \qquad \lim_{n\to\infty}\frac{n^3+(n-3)^3}{3n^3+5}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{5n^2+3n+6}{n^2-4n+1} \qquad \lim_{n\to\infty}\frac{n^2+(3-n)^2}{5+n^3}$$

II

$$\lim_{x\to4}\frac{8+6x-2x^2}{x^2-7x+12} \qquad \lim_{x\to1}\frac{x^2+x-6}{18x-15-3x^2}$$

$$\lim_{x\to-4}\frac{x^2+x-12}{16-4x-2x^2} \qquad \lim_{x\to0}\frac{x^2-4x}{3x-x^2}$$

III

$$\lim_{x\to1}\frac{\sqrt{6x+3}-3}{x^2-6x+5} \qquad \lim_{x\to3}3\frac{x^2+x-12}{\sqrt{x-2}-\sqrt{4-x}}$$

$$\lim_{x\to5}\frac{\sqrt{2x+1}-\sqrt{x+6}}{2x^2-7x-15} \qquad \lim_{x\to7}\frac{\sqrt{2x+2}-4}{x^2-9x+14}$$

IV

$$\lim_{x\to0}\frac{5x^2-x\cdot\operatorname{tg}2x}{x^2} \qquad \lim_{x\to0}\frac{x^2-2x}{\sin3x}$$

$$\lim_{x\to0}\frac{3x^2-\operatorname{arctg}^2x}{\sin^2x} \qquad \lim_{x\to0}\frac{x^2-3x^3}{1-\cos2x}$$

V

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+4}{n-5}\right)^{n-1} \qquad \lim_{n\to\infty}\left(\frac{3n-1}{3n+2}\right)^{\frac{n}{3}}$$

$$\lim_{x\to-3}\left(2x+7\right)^{\frac{x}{x+3}} \qquad \lim_{x\to0}\frac{3+x}{2x}\cdot\ln\left(\frac{4x+5}{5-3x}\right)$$

VI

$$\lim_{x\to4}\left(\frac{5}{x-4}-\frac{6}{x^2-16}\right) \qquad \lim_{x\to\infty}\frac{2\cdot3x}{\left(2x+1\right)}$$

$$\lim_{x\to\infty}3x\cdot\left(\ln\left(2x+1\right)-\ln\left(2x-1\right)\right) \qquad \lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{2x+1}-\sqrt{2x-1}\right)$$

Вариант 19

I

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^2-(2n-1)^2}{3n+5}$$ $$\lim_{n\to\infty}\frac{n^5+6n+1}{3n^4+2}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{3n^2+5n+6}{4n^3+3n+1}$$ $$\lim_{n\to\infty}\frac{n-3n^3+1}{2n^3+2}$$

II

$$\lim_{x\to7}\frac{x^2-49}{2x^2-18x+28}$$ $$\lim_{x\to-7}\frac{7x+x^2}{21-4x-x^2}$$

$$\lim_{x\to8}\frac{8+7x-x^2}{x^2-9x+8}$$ $$\lim_{x\to3}\frac{x^3+125}{20-x-x^2}$$

III

$$\lim_{x\to4}\frac{\sqrt{3x+4}-4}{x^2+2x-8}$$ $$\lim_{x\to-2}\frac{\sqrt{2-x}-\sqrt{x+6}}{x^2-x-6}$$

$$\lim_{x\to-4}\frac{\sqrt{x+12}-\sqrt{4-x}}{x^2+2x-8}$$ $$\lim_{x\to6}\frac{x^2-9x+18}{\sqrt{3x-2}-4}$$

IV

$$\lim_{x\to0}\frac{4x^2-x\cdot\operatorname{tg}3x}{x-\arcsin 2x}$$ $$\lim_{x\to0}\frac{5\cdot\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}{1-\cos x}$$

$$\lim_{x\to0}\frac{4x^2-x\cdot\sin 2x}{2x-\operatorname{arctg}x}$$ $$\lim_{x\to0}\frac{x^2-x}{\sin 2x}$$

V

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2n+3}{n+5}\right)^{n+6}$$ $$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2n-4}{2n+5}\right)^{\frac{n}{2}}$$

$$\lim_{x\to-2}(3x+7)^{\frac{2x}{x+2}}$$ $$\lim_{x\to0}\frac{3-x}{x}\cdot\ln\left(\frac{3x+1}{1-4x}\right)$$

VI

$$\lim_{x\to1}\left(\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x^2-1}\right)$$ $$\lim_{x\to\infty}x\cdot\left(\ln(x+1)-\ln(x)\right)$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x+1}\right)$$ $$\lim_{x\to\infty}2x\cdot\left(\ln(2x-1)-\ln(2x+2)\right)$$

Вариант 20

I

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^2+(n+1)^2}{n^2+6}$$ $$\lim_{n\to\infty}\frac{6n^7+2n^3+3}{3+5n^5+4n}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^2-(n-1)^2}{2n^2+6}$$ $$\lim_{n\to\infty}\frac{n^3+4n^2+2}{5n^3+3n^2+1}$$

II

$$\lim_{x\to-1}\frac{5+4x-x^2}{x^2-1}$$ $$\lim_{x\to0}\frac{12-x-x^2}{x^2-8x+15}$$

$$\lim_{x\to2}\frac{8-2x-x^2}{x^2+x-6}$$ $$\lim_{x\to0}\frac{x^2-3x}{4x-x^2}$$

III

$$\lim_{x\to1}\frac{\sqrt{17x-1}-4}{x-1}$$ $$\lim_{x\to-1}\frac{\sqrt{2x+3}-1}{x^2+3x+2}$$

$$\lim_{x\to0}\frac{2x^2-2x}{\sqrt{2x+1}-1}$$ $$\lim_{x\to-2}\frac{\sqrt{4x+9}-1}{2x^2-2x-12}$$

IV

$$\lim_{x\to0}\frac{\operatorname{tg}6x-7x^2}{2x-\arcsin x}$$ $$\lim_{x\to0}\frac{1-\cos 2x}{\sin^2 x}$$

$$\lim_{x\to0}\frac{3x\cdot\sin 5x}{5x^2-x^3}$$ $$\lim_{x\to0}\frac{x\cdot\operatorname{tg}x-2x}{\sin x}$$

V

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n-1}{n-4}\right)^{n+2}$$ $$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{3n-1}{3n-2}\right)^{\frac{n}{2}}$$

$$\lim_{x\to-4}\left(2x+9\right)^{\frac{x}{x+4}}$$ $$\lim_{x\to0}\frac{1-2x}{x}\cdot\ln\left(\frac{5x+2}{2-3x}\right)$$

VI

$$\lim_{x\to4}\left(\frac{1}{x-4}-\frac{1}{x^2-16}\right)$$ $$\lim_{x\to\infty}x\cdot\left(\ln\left(x+3\right)-\ln\left(x+2\right)\right)$$

$$\lim_{x\to\infty}2x\cdot\left(\ln\left(3x+1\right)-\ln\left(3x-1\right)\right)$$

Вариант 21

I

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x^3+7x^2-2}{3x^3-4x+3} \qquad \lim_{x\to\infty}\frac{1+4x-x^4}{x+3x^2+2x^4}$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3x^5-4x^2+1}{2x^3+3x^2-x} \qquad \lim_{x\to\infty}\frac{x^3-(x-1)^3}{(x+1)^4+x^4}$$

II

$$\lim_{x\to3}\frac{x^2-x-6}{2x^2+x-21} \qquad \lim_{x\to2}\frac{x^2-x-2}{x^2+x-6}$$

$$\lim_{x\to-1}\frac{3x^2+x-2}{3x^2+4x+1} \qquad \lim_{x\to-1}\frac{2x^2-5x-7}{3x^2+x-2}$$

III

$$\lim_{x\to-3}\frac{\sqrt{x+10}-\sqrt{4-x}}{2x^2-x-21} \qquad \lim_{x\to3}\frac{x^2+x-12}{\sqrt{x-2}-\sqrt{4-x}}$$

$$\lim_{x\to1}\frac{\sqrt{1+3x^2}-2}{x^2-x} \qquad \lim_{x\to-2}\frac{x^2-4}{\sqrt{1-4x}-3}$$

IV

$$\lim_{x\to0}\frac{\mathrm{tg}^2\left(\dfrac{x}{4}\right)}{x^2-3x^4} \qquad \lim_{x\to0}\frac{\cos x-\cos^5 x}{5x^3+x^2}$$

$$\lim_{x\to0}\frac{1-\cos3x}{x^2+5x^3} \qquad \lim_{x\to0}\frac{\mathrm{arctg}2x}{5x-3x^2}$$

V

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+3}{n-2}\right)^{2n+4} \qquad \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x}{x+1}\right)^{x}$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{3x-10}{2+3x}\right)^{2x-5} \qquad \lim_{x\to1}(3-2x)^{\frac{x}{1-x}}$$

VI

$$\lim_{x\to\infty}(2x+3)\cdot\left(\ln(x+2)-\ln(x)\right) \qquad \lim_{x\to1}\frac{x}{1-x}\cdot\ln(3-2x)$$

$$\lim_{x\to\infty}(x+2)\cdot\left(\ln(2x-3)-\ln(2x+1)\right)$$

Вариант 22

I

$$\lim_{x\to\infty}\frac{(x+1)^3+(x-1)^3}{(x+1)^2-(x-1)^2}$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{-4x^4-x-1}{x^2+3x-5}$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3x^3-5x^2+2}{2x^3+5x^2-x}$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3x^3+4x+6}{3x^5+6x+4}$$

II

$$\lim_{x\to-5}\frac{x^2+2x-15}{2x^2+7x-15}$$

$$\lim_{x\to1}\frac{3x^2-5x+2}{x^2-4x+3}$$

$$\lim_{x\to-4}\frac{2x^2+9x+4}{x^2-x-20}$$

$$\lim_{x\to-2}\frac{x^2+3x+2}{2x^2+5x+2}$$

III

$$\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{4+3x}-\sqrt{4-3x}}{7x}$$

$$\lim_{x\to5}\frac{\sqrt{5x}-x}{x-5}$$

$$\lim_{x\to3}\frac{\sqrt{5x+1}-4}{x-3}$$

$$\lim_{x\to0}\frac{3x}{\sqrt{5+x}-\sqrt{5-x}}$$

IV

$$\lim_{x\to0}\frac{\mathrm{arctg}\,3x}{5x-x^2}$$

$$\lim_{x\to0}\frac{1-\cos 2x}{x\cdot\mathrm{tg}3x-3x^4}$$

$$\lim_{x\to0}\frac{\cos 3x-1}{x\cdot\mathrm{tg}2x}$$

$$\lim_{x\to0}\frac{\arcsin 2x}{3x-4x^2}$$

V

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n-4}{n-2}\right)^{3n+3}$$

$$\lim_{x\to\infty}\left[\frac{1+\frac{1}{x}}{1-\frac{2}{x}}\right]^{x+3}$$

$$\lim_{x\to0}\left(\frac{2+3x}{2+5x}\right)^{\frac{1}{x}}$$

$$\lim_{x\to1}(2-x)^{\frac{2}{1-x}}$$

VI

$$\lim_{x\to\infty}(3x-2)\cdot\left(\ln(2x-1)-\ln(2x+1)\right)$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x\cdot(x+2)}-x\right)$$

$$\lim_{x\to\infty}x^2\cdot\left(\ln\left(x^2+5\right)-\ln\left(x^2-5\right)\right)$$

Вариант 23

I

$$\lim_{x\to\infty}\frac{(x+1)^3+(x-1)^3}{x^3-3x}$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3x^3-3x+5}{3x^2+2x-4}$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x^4+5x^2-3}{5x^4-2x^2-4x}$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{4x^4+2x^2-5}{5x^5+x-3}$$

II

$$\lim_{x\to 4}\frac{x^2-x-12}{x^2-2x-8}$$

$$\lim_{x\to 1}\frac{2x^2+x-3}{x^2+x-2}$$

$$\lim_{x\to -3}\frac{x^2-x-12}{x^2+5x+6}$$

$$\lim_{x\to 3}\frac{3x^2-10x+3}{x^2-2x-3}$$

III

$$\lim_{x\to 3}\frac{x-3}{\sqrt{4x-3}-3}$$

$$\lim_{x\to 2}\frac{x-2}{\sqrt{4x+1}-3}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{9+x}-3}{x^2+x}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{3-x}-\sqrt{3+x}}{5x}$$

IV

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-\cos^3 x}{x\cdot \operatorname{tg}2x-x^2}$$

$$\lim_{x\to 0} x\cdot\sin 2x\cdot \operatorname{ctg}^2 3x$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg}^2 4x-7x^3}{x\cdot\sin 3x}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 4x}{x\cdot\sin 3x-3x^3}$$

V

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+5}{n-5}\right)^{2n-1}$$

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x+1}\right)^{\frac{1}{3x}}$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2n+3}{2n-10}\right)^{n-2}$$

$$\lim_{x\to 1}(2x-1)^{\frac{3x}{x-1}}$$

VI

$$\lim_{x\to\infty}(x+2)\cdot\left(\ln(2x+3)-\ln(2x-4)\right)$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2-1}-x\right)$$

$$\lim_{x\to\infty}(2x+1)\cdot\left(\ln(x+3)-\ln(x-2)\right)$$

Вариант 24

I

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^3+(n-1)^3}{n^3+1}\qquad \lim_{x\to\infty}\frac{x^7+7x^5+9x}{2x^2-5x-3}$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3x^2-2x+1}{5x^2-x+2}\qquad \lim_{x\to\infty}\frac{6x^3+2x-3}{8x^4+5x-7}$$

II

$$\lim_{x\to2}\frac{2x^2-3x-2}{x^2-3x+2}\qquad \lim_{x\to3}\frac{x^2+x-12}{x^2-5x+6}$$

$$\lim_{x\to3}\frac{3x^2-10x+3}{x^2-2x-3}\qquad \lim_{x\to-4}\frac{x^2+x-12}{x^2+2x-8}$$

III

$$\lim_{x\to2}\frac{\sqrt{3x+10}-4}{x-2}\qquad \lim_{x\to0}\frac{\sqrt{1+3x}-\sqrt{1-2x}}{x+x^2}$$

$$\lim_{x\to7}\frac{x-7}{\sqrt{2x+11}-5}\qquad \lim_{x\to3}\frac{x-3}{\sqrt{3x}-x}$$

IV

$$\lim_{x\to0}x\cdot\sin2x\cdot\operatorname{ctg}^2 5x\qquad \lim_{x\to0}\frac{5x-x^2}{\arcsin3x}$$

$$\lim_{x\to0}\frac{1-\cos5x}{x\cdot\operatorname{tg}2x}\qquad \lim_{x\to0}\frac{\sin^2 3x\cdot\operatorname{ctg}2x}{x-x^2}$$

V

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+6}{n+2}\right)^{3n-5}\qquad \lim_{x\to3}(10-3x)^{\frac{2x}{x-3}}$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+2}{x+4}\right)^{x+4}\qquad \lim_{x\to1}(3x-2)^{\frac{5x}{x^2-1}}$$

VI

$$\lim_{x\to\infty}(3-x)\cdot\left(\ln(1-x)-\ln(2-x)\right)\qquad \lim_{x\to1}\left(\frac{1}{1-x}-\frac{3}{1-x^3}\right)$$

$$\lim_{x\to\infty}3x\cdot\left(\ln(x)-\ln(2+x)\right)$$

Вариант 25

I

$$\lim_{x\to\infty}\frac{(2x+1)^2-(x+1)^2}{x^2+x+1}$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{5x^3-x-1}{3x^2+2x+5}$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{5x^5-3x^2+1}{3x^5+x^3-5x}$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{5x^6+5x^2-1}{4x^7+4x+5}$$

II

$$\lim_{x\to5}\frac{3x^2-14x-5}{x^2-6x+5}$$

$$\lim_{x\to1}\frac{3x^2-4x+1}{x^2-3x+2}$$

$$\lim_{x\to2}\frac{x^2-3x+2}{2x^2-5x+2}$$

$$\lim_{x\to4}\frac{2x^2-9x+4}{x^2+x-20}$$

III

$$\lim_{x\to-4}\frac{\sqrt{x+12}-\sqrt{4-x}}{x^2+2x-8}$$

$$\lim_{x\to1}\frac{\sqrt{x}-1}{x^2-1}$$

$$\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{1-2x+x^2}-(1+x)}{x}$$

$$\lim_{x\to3}\frac{\sqrt{x+13}-2\cdot\sqrt{x+1}}{x^2-9}$$

IV

$$\lim_{x\to0}\sin5x\cdot\mathrm{ctg}3x$$

$$\lim_{x\to0}\frac{1-\cos4x}{x\cdot\sin2x}$$

$$\lim_{x\to0}\frac{5x-7x^3}{\mathrm{arctg}6x}$$

$$\lim_{x\to0}\frac{1-\cos10x}{x\cdot\mathrm{tg}2x-x^3}$$

V

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n-4}{n-5}\right)^{9n-6}$$

$$\lim_{x\to3}(2x-5)^{\frac{2x}{x-3}}$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+4}{x}\right)^{5x+1}$$

$$\lim_{x\to1}(7-6x)^{\frac{x}{3x-3}}$$

VI

$$\lim_{x\to\infty}(x-4)\cdot(\ln(2-3x)-\ln(5-3x))$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{4+x^2}-2\right)\cdot(1-x)$$

$$\lim_{x\to3}\left(\frac{1}{x-3}-\frac{6}{x^2-9}\right)$$

Вариант 26

I

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(n+2)^2-(n-2)^2}{(n+3)^2}$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{4x^3-2x+1}{3x^2-2x^3-2}$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2+9x-3}{7x^2-2x-4}$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{6x^5-3x^2-1}{2x^6+x+3}$$

II

$$\lim_{x\to3}\frac{2x^2-5x-3}{x^2-5x+6}$$

$$\lim_{x\to5}\frac{x^2-2x-15}{2x^2-7x-15}$$

$$\lim_{x\to1}\frac{2x^2+5x-7}{3x^2-x-2}$$

$$\lim_{x\to1}\frac{3x^2-x-2}{3x^2-4x+1}$$

III

$$\lim_{x\to-2}\frac{\sqrt{2-x}-\sqrt{x+6}}{x^2-x-6}$$

$$\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{1+3x^2}-1}{x^3+x^2}$$

$$\lim_{x\to10}\frac{\sqrt{x-8}-\sqrt{12-x}}{x-10}$$

$$\lim_{x\to2}\frac{\sqrt{x+5}-\sqrt{9-x}}{x-2}$$

IV

$$\lim_{x\to0}\frac{5x-4x^2}{\operatorname{arctg}3x}$$

$$\lim_{x\to0}\frac{\sin\left(\frac{1}{x}\right)}{\operatorname{tg}\left(\frac{1}{3x}\right)}$$

$$\lim_{x\to0}x\cdot\sin5x\cdot\operatorname{ctg}^2 2x$$

$$\lim_{x\to0}\frac{x-\sin2x}{1-\cos^2x}$$

V

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n-3}{n+5}\right)^{3n+2}$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x-1}{2x+1}\right)^{2x}$$

$$\lim_{x\to-1}(5+4x)^{\frac{x}{x+1}}$$

$$\lim_{x\to3}(3x-8)^{\frac{2}{x-3}}$$

VI

$$\lim_{x\to\infty}(x-2)\cdot\left(\ln(x-1)-\ln(x+1)\right)$$

$$\lim_{x\to0}\frac{1}{2x}\cdot\left(\ln(1+x)-\ln(1-x)\right)$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{4x^2-7x+4}-2x\right)$$

Вариант 27

I

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(3-n)^2+(3+n)^2}{(3+n)^2-(3+n)^2} \qquad \lim_{x\to\infty}\frac{4-7x^2+5x^3}{2+2x-x^3}$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{5x^2-3x+2}{4x^3+2x^2-9} \qquad \lim_{x\to\infty}\frac{2x^4-3x}{4x^3-2x-7}$$

II

$$\lim_{x\to5}\frac{2x^2-11x+5}{x^2-7x+10} \qquad \lim_{x\to-2}\frac{x^2+x-2}{x^2-x-6}$$

$$\lim_{x\to-3}\frac{x^2+x-6}{x^2-x-12} \qquad \lim_{x\to4}\frac{2x^2-7x-4}{2x^2-13x+20}$$

III

$$\lim_{x\to2}\frac{x^2-3x+2}{\sqrt{5-x}-\sqrt{x+1}} \qquad \lim_{x\to-2}\frac{\sqrt{x+6}-\sqrt{2-x}}{x+2}$$

$$\lim_{x\to3}\frac{x-3}{\sqrt{x+1}-\sqrt{7-x}} \qquad \lim_{x\to6}\frac{x-6}{\sqrt{x-5}-\sqrt{7-x}}$$

IV

$$\lim_{x\to0}x\cdot\mathrm{ctg}10x \qquad \lim_{x\to0}\frac{\mathrm{arctg}8x}{x^3+4x}$$

$$\lim_{x\to0}\frac{\cos x-\cos^3 x}{x\cdot\sin 2x} \qquad \lim_{x\to0}\frac{1-\cos 8x}{1-\cos 4x}$$

V

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n-7}{n+5}\right)^{-3n} \qquad \lim_{n\to\infty}\left(\frac{3-2n}{4-2n}\right)^{n+2}$$

$$\lim_{x\to-2}(3x+7)^{\frac{5}{4-x^2}} \qquad \lim_{x\to1}(3x-2)^{\frac{x}{x-1}}$$

VI

$$\lim_{x\to\infty}(x+4)\cdot\left(\ln(2x+7)-\ln(2x-3)\right) \qquad \lim_{x\to\infty}x^{\frac{2}{3}}\cdot\left(\sqrt{x^3+2}-\sqrt{x^3-2}\right)$$

$$\lim_{x\to\infty}x^2\cdot\left(\ln\left(x^2+1\right)-\ln\left(x^2-1\right)\right)$$

Вариант 28

I

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(6-n)^2+(6+n)^2}{(6+n)^2-(1-n)^2}\qquad \lim_{x\to\infty}\frac{4+5x^2-3x^5}{8-6x-x^5}$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^5+2x^3-9x}{2x^2-5x+6}\qquad \lim_{x\to\infty}\frac{2x^2+2x-5}{4x^4+3x+6}$$

II

$$\lim_{x\to 6}\frac{2x^2-9x-18}{x^2-7x+6}\qquad \lim_{x\to -3}\frac{x^2+10x+21}{x^2+8x+15}$$

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2+x-2}{2x^2-x-1}\qquad \lim_{x\to -1}\frac{2x^2-3x+1}{2x^2+5x+3}$$

III

$$\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{3+2x}-\sqrt{x+4}}{3x^2-4x+1}\qquad \lim_{x\to 4}\frac{x-4}{\sqrt{5x+5}-5}$$

$$\lim_{x\to 2}\frac{x-2}{\sqrt{2x}-2}\qquad \lim_{x\to 3}\frac{\sqrt{x-1}-\sqrt{5-x}}{x-3}$$

IV

$$\lim_{x\to 0}\sin^2\frac{\left(\frac{x}{2}\right)}{x^2+4x^3}\qquad \lim_{x\to 0}\frac{x^2-7x^3}{1-\cos 6x}$$

$$\lim_{x\to 0}x\cdot\sin 3x\cdot\operatorname{ctg}^2 2x\qquad \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 4x}{1-\cos 8x}$$

V

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n-3}{n-2}\right)^{-n+5}\qquad \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+2}{n-4}\right)^{n+4}$$

$$\lim_{x\to -10}(x+11)^{\frac{x+9}{x+10}}\qquad \lim_{x\to 2}(2x-3)^{\frac{x^2}{x-2}}$$

VI

$$\lim_{x\to\infty}(x+5)\cdot\left(\ln(2x-3)-\ln(2x+3)\right)\qquad \lim_{x\to\infty}(3x-4)\left(\sqrt{x^2-6}-x\right)\cdot$$

$$\lim_{x\to\infty}(x+3)\cdot\left(\ln(x+2)-\ln(x+3)\right)$$

Вариант 29

I

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3-4x}{(x-3)^3-(x+3)^3} \qquad \lim_{x\to\infty}\frac{3x^4-2x^2-7}{9x^4+3x+5}$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{5x^3-3x-7}{4x^2-2x+8} \qquad \lim_{x\to\infty}\frac{2x^5-7x^4}{3x^6+6x^2-1}$$

II

$$\lim_{x\to7}\frac{3x^2-17x-28}{x^2-9x+14} \qquad \lim_{x\to-2}\frac{x^2+7x+10}{2x^2+9x+10}$$

$$\lim_{x\to5}\frac{3x^2-14x-5}{x^2-2x-15} \qquad \lim_{x\to5}\frac{x^2-6x+5}{x^2-4x-5}$$

III

$$\lim_{x\to5}\frac{\sqrt{1+3x}-\sqrt{6+2x}}{2\cdot(x-5)} \qquad \lim_{x\to0}\frac{\sqrt{3-x}-\sqrt{3+x}}{5x}$$

$$\lim_{x\to1}\frac{x-1}{\sqrt{x+2}-\sqrt{4-x}} \qquad \lim_{x\to6}\frac{\sqrt{x-5}-\sqrt{7-x}}{x-6}$$

IV

$$\lim_{x\to0}\frac{\operatorname{arctg}11x-2x^2}{7x-x^3} \qquad \lim_{x\to0}\frac{x\cdot\sin\left(\frac{x}{2}\right)}{1-\cos x}$$

$$\lim_{x\to0}\frac{x\cdot\operatorname{tg}5x}{1-\cos4x} \qquad \lim_{x\to0}\frac{\cos x-\cos^5 x}{x^2-x^5}$$

V

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n-6}{n-3}\right)^{n+4} \qquad \lim_{n\to\infty}\left(\frac{3n+2}{3n+1}\right)^{3n+2}$$

$$\lim_{x\to3}(2x-5)^{\frac{3x}{x-3}} \qquad \lim_{x\to2}(3x-5)^{\frac{x^2}{x-2}}$$

VI

$$\lim_{x\to\infty}(x+3)\cdot\left(\ln(2-4x)-\ln(1-4x)\right) \qquad \lim_{x\to\infty}x\cdot\left(\sqrt{3+x^2}-x\right)\cdot$$

$$\lim_{x\to\infty}(3x-2)\cdot\left(\ln(x-2)-\ln(x+1)\right)$$

Вариант 30

I

$$\lim_{x\to\infty}\frac{(x+2)^3+(x-2)^3}{x^4+2x^2-1} \qquad \lim_{x\to\infty}\frac{x-2x^2+5x^4}{2+3x^2-x^4}$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3x+14x^3}{1+2x+7x^2} \qquad \lim_{x\to\infty}\frac{3x^2+7x^3}{4x^3+10x^4+x^5}$$

II

$$\lim_{x\to 7}\frac{2x^2-13x-7}{x^2-9x+14} \qquad \lim_{x\to 3}\frac{3x^2-8x-3}{x^2-x-6}$$

$$\lim_{x\to 6}\frac{x^2-4x-12}{x^2-8x+12} \qquad \lim_{x\to -6}\frac{2x^2+7x-30}{3x^2+20x+12}$$

III

$$\lim_{x\to -1}\frac{3x^2+4x+1}{\sqrt{x+3}-\sqrt{5+3x}} \qquad \lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{1+3x^2}-2}{x^2-x}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sqrt{x+7}-\sqrt{7-x}} \qquad \lim_{x\to 4}\frac{\sqrt{x-3}-\sqrt{5-x}}{x-4}$$

IV

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos 3x-\cos 5x}{x^2-6x^3} \qquad \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 4x}{2x\cdot \operatorname{tg} x}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2\cdot \operatorname{ctg} 5x}{\sin 2x} \qquad \lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x-7x^3}{\arcsin 3x}$$

V

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n-7}{n+1}\right)^{-5n+3} \qquad \lim_{n\to\infty}\left(\frac{2n-5}{2n+5}\right)^{n}$$

$$\lim_{x\to -2}(4x+9)^{\frac{3x+5}{x+2}} \qquad \lim_{x\to 2}(7-3x)^{\frac{1}{2x-4}}$$

VI

$$\lim_{x\to\infty}(2x+3)\cdot\left(\ln(x+2)-\ln(x+3)\right) \qquad \lim_{x\to\infty}x\cdot\left(\ln(x+3)-\ln(x+4)\right)$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^3}{2x^2-1}-\frac{x^2}{2x+1}\right)$$

4.2. Дифференциальное исчисление функции одной переменной

Контрольная работа № 2. Вычисление производной

Задание

1) В примерах № 1,2,3 найти y'_x.
2) В примерах № 4,5,6 найти dy.
3) В примерах № 7,8 найти y'_x.
4) В примерах № 9,10 найти $\frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx}$.
5) В примере № 11 вычислить приближенно значение функции с помощью дифференциала.

№ 1

1. $y = \sqrt[3]{x^4 + 5x} - \sqrt[4]{(5x-1)^3}$
2. $y = \frac{1+tgx}{1-tgx}$
3. $y = arctg\sqrt{x} - \sqrt{x}$
4. $y = x^{\frac{2}{x}}$
5. $x\sin y - y\cos x = 0$
6. $y = \frac{x-1}{x+1} \cdot e^{-x}$
7. $y\sin x - \cos(x-y) = 0$
8. $y = \sqrt[3]{\frac{x-5}{\sqrt[5]{x^2+4}}}$
9. $\begin{cases} x = at\cos t \\ y = at\sin t \end{cases}$
10. $\begin{cases} x = t + \ln\cos t \\ y = t - \ln\sin t \end{cases}$
11. $\arcsin 0,49$

№ 2

1. $y = \frac{3x}{\sqrt[3]{2+x}} - 6\sqrt[3]{2+x}$
2. $y = \sin^3 2x$
3. $y = x\arcsin x + \sqrt{1-x^2}$
4. $y = x^3 \ln x$
5. $y = \ln\cos\operatorname{arctg}\frac{e^x - e^{-x}}{2}$
6. $y = x^{e^x}$
7. $e^{xy} - x^2 + y^2 = 0$
8. $y = x + \operatorname{arctg} y$
9. $\begin{cases} x = 2t - \sin t \\ y = \sin^3 t \end{cases}$
10. $\begin{cases} x = \arcsin t \\ y = \ln(1-t^2) \end{cases}$
11. $\operatorname{arctg} 0,97$

№ 3

1. $y=\sqrt{\dfrac{1+x^2}{1-x^2}}$
2. $y=e^{1+\ln^2 x}$
3. $y=\operatorname{arctg}\dfrac{1}{x}$
4. $y=x^2\ln x$
5. $y=\dfrac{x\cdot e^x\cdot \operatorname{arctg} x}{\ln^5 x}$
6. $y=x^{\arcsin x}$
7. $y\sin x+\cos(x-y)=\cos y$
8. $x^y=y^x$
9. $\begin{cases} x=t+\dfrac{1}{2}\sin 2t \\ y=\cos^3 t \end{cases}$
10. $\begin{cases} x=\ln t \\ y=t^2-1 \end{cases}$
11. $\arcsin 0{,}48$

№ 4

1. $y=x\cdot\sqrt{\dfrac{1+x^2}{1-x}}$
2. $y=\operatorname{tg}\ln\sqrt{x}$
3. $y=3^{\cos^2 x}$
4. $y=\dfrac{x}{e^x}$
5. $y=\cos\arcsin\dfrac{x}{2}$
6. $y=(x^2+1)^{\sin x}$
7. $\cos(x-y)-2x+4y=0$
8. $y=1+xe^y$
9. $\begin{cases} x=t^5+2t \\ y=t^3+8t-1 \end{cases}$
10. $\begin{cases} x=a\cos^3 t \\ y=a\sin^3 t \end{cases}$
11. $\operatorname{arctg} 0{,}96$

№ 5

1. $y = x + \dfrac{1}{x + \sqrt{x^2 + 1}}$

2. $y = \sin\sqrt{1 + x^2}$

3. $y = \ln \operatorname{ctg} \sqrt[3]{x}$

4. $y = \dfrac{\sin 3x}{2\sin^2 x \cdot \cos x}$

5. $y = x^{\frac{1}{x^2}}$

6. $y = \arccos\sqrt{1 - 3x}$

7. $xe^y + ye^x = xy$

8. $y = \cos(x + y)$

9. $\begin{cases} x = at^2 \\ y = bt^3 \end{cases}$

10. $\begin{cases} x = a\cos^3 t \\ y = a\sin^3 t \end{cases}$

11. $\sqrt{30}$

№ 6

1. $y = \sqrt{\dfrac{1 + x^2}{1 - x^2}}$

2. $y = e^{1 + \ln^2 x}$

3. $y = \operatorname{arctg}\dfrac{1}{x}$

4. $y = \operatorname{tg}(\ln\sqrt{x})$

5. $y = 3^{\cos^2 x}$

6. $y = x^{\arcsin x}$

7. $y\sin x + \cos(x - y) = \cos y$

8. $\cos(x - y) - 2x + 4y = 0$

9. $\begin{cases} x = t + \dfrac{1}{2}\sin 2t \\ y = \cos^3 t \end{cases}$

10. $\begin{cases} x = t^5 + 2t \\ y = t^3 + 8t - 1 \end{cases}$

11. $y = \sqrt[3]{x}, x = 27{,}54$

№ 7

1. $y = x \cdot \sqrt[3]{\dfrac{2}{1+x}}$
2. $y = \dfrac{1+\sin 3x}{1-\sin 3x}$
3. $y = \sin^3 2x$
4. $y = x \cdot \arcsin x + \sqrt{1-x^2}$
5. $y = \dfrac{3x}{\sqrt[3]{2+x}} - 6\sqrt[3]{2+x}$
6. $y = x^{e^x}$
7. $e^{xy} - x^2 + y^2 = 0$
8. $x \cdot \sin y - y \cdot \cos x = 0$
9. $\begin{cases} x = t + \ln\cos t \\ y = t - \ln\sin t \end{cases}$
10. $\begin{cases} x = 2t - \sin 2t \\ y = \sin^3 t \end{cases}$
11. Вычислить

    $y = \sqrt[3]{x^3 + 7x}, x = 1{,}012$

№ 8

1. $y = \sqrt[3]{1 + x\sqrt{x+3}}$
2. $y = \sqrt{1 + \ln^2 x}$
3. $y = e^{\frac{1}{x^2}}$
4. $y = 2^{\frac{1-x}{1+x}}$
5. $y = \operatorname{arctg}^3 \dfrac{x}{3} + \sqrt{1-x}$
6. $y = (\sqrt{x})^{\sin x}$
7. $xy + \ln y - 2\ln x = 0$
8. $y \cdot \sin(x+y) - x = 0$
9. $\begin{cases} x = t^2 + t + 1 \\ y = t^3 + t \end{cases}$
10. $\begin{cases} x = 3\cos^2 t \\ y = 3\sin^2 t \end{cases}$
11. Вычислить

    $y = \sqrt[3]{3x + \cos x}, x = 0{,}01$

№ 9

1. $y = xe^{-x}$

2. $y = \sqrt{\dfrac{x+\sqrt{x}}{x-\sqrt{x}}}$

3. $y = x \cdot \arcsin\dfrac{2x+1}{3}$

4. $y = e^{-\cos^4 5x}$

5. $y = \dfrac{11}{\sqrt{1+e^{-\sqrt{x}}}}$

6. $y = (\mathrm{arctg}\, 2x)^{\sin x}$

7. $\sin(xy) + \cos(xy) = \mathrm{tg}(x+y)$

8. $(x+y)^2 = (x-2y)^3$

9. $\begin{cases} x = \dfrac{2-t}{2+t^2} \\ y = \dfrac{t^2}{2+t^2} \end{cases}$

10. $\begin{cases} x = e^t \sin t \\ y = e^t \cos t \end{cases}$

11. $\arcsin 0{,}48$

№ 10

1. $y = \ln \cdot \ln^2 x$

2. $y = \dfrac{\sqrt{1+3x^2}}{2+3x^2}$

3. $y = e^{-x^2} \cdot \cos^2(2x+3)$

4. $y = \sqrt[5]{(1+xe^{\sqrt{x}})^3}$

5. $y = x \cdot \mathrm{arctg}^3 5x + \ln \mathrm{tg}\, x$

6. $y = (\sin 3x)^{\sqrt{x}}$

7. $y \ln x - x \ln y = x + y$

8. $x^4 + y^4 = x^2 y^2$

9. $\begin{cases} x = 2\cos^3 2t \\ y = \sin^3 2t \end{cases}$

10. $\begin{cases} x = \ln(1+t^2) \\ y = t - \mathrm{arctg}\, t \end{cases}$

11. $\mathrm{arctg}\, 0{,}95$

№ 11

1. $y=\sqrt[3]{x^4+5x}-\sqrt[4]{(5x-1)^3}$
2. $y=\dfrac{1+\operatorname{tg} x}{1-\operatorname{tg} x}$
3. $y=arctg\sqrt{x}-\sqrt{x}$
4. $y=\sqrt[3]{\dfrac{x-5}{\sqrt[5]{x^2+4}}}$
5. $y=\dfrac{x-1}{x+1}\cdot e^{-x}$
6. $y=x^{\frac{2}{x}}$
7. $y\sin x-\cos(x-y)=0$
8. $x\sin y-y\cos x=0$
9. $\begin{cases} x=at\cos t \\ y=at\sin t \end{cases}$
10. $\begin{cases} x=t+\ln\cos t \\ y=t-\ln\sin t \end{cases}$
11. $\arcsin 0{,}49$

№ 12

1. $y=\dfrac{3x}{\sqrt[3]{2+x}}-6\sqrt[3]{2+x}$
2. $y=\sin^3 2x$
3. $y=x\arcsin x+\sqrt{1-x^2}$
4. $y=x^2\ln x$
5. $y=\ln\cos\operatorname{arctg}\dfrac{e^x-e^{-x}}{2}$
6. $y=x^{e^x}$
7. $e^{xy}-x^2+y^2=0$
8. $y=x+\operatorname{arctg} y$
9. $\begin{cases} x=2t-\sin t \\ y=\sin^3 t \end{cases}$
10. $\begin{cases} x=\arcsin t \\ y=\ln(1-t^2) \end{cases}$
11. $\operatorname{arctg} 0{,}97$

№ 13

1. $y = x\sqrt{\dfrac{1+x^2}{1-x^2}}$

2. $y = e^{1+\ln^2 x}$

3. $y = \operatorname{arctg}\dfrac{1}{x}$

4. $y = x^2 \ln x$

5. $y = \dfrac{x \cdot e^x \cdot \operatorname{arctg} x}{\ln^5 x}$

6. $y = x^{\arcsin x}$

7. $y\sin x + \cos(x-y) = \cos y$

8. $x^y = y^x$

9. $\begin{cases} x = t + \dfrac{1}{2}\sin 2t \\ y = \cos^3 t \end{cases}$

10. $\begin{cases} x = \ln t \\ y = t^2 - 1 \end{cases}$

11. $\operatorname{arctg} 0,48$

№ 14

1. $y = x \cdot \sqrt{\dfrac{1+x^2}{1-x}}$

2. $y = \operatorname{tg}\ln\sqrt{x}$

3. $y = 3^{\cos^2 x}$

4. $y = \dfrac{x}{e^x}$

5. $y = \arcsin\cos\dfrac{x}{2}$

6. $y = (1+x^2)^{\sin x}$

7. $\cos(x-y) - 2x + 4y = 0$

8. $y = 1 + xe^y$

9. $\begin{cases} x = t^5 + 2t \\ y = t^3 + 8t - 1 \end{cases}$

10. $\begin{cases} x = a\cos^3 t \\ y = a\sin^3 t \end{cases}$

11. $\operatorname{arctg} 0,96$

№ 15

1. $y = x + \dfrac{1}{x + \sqrt{x^2 + 1}}$

2. $y = \sin\sqrt{1 + x^2}$

3. $y = \ln ctg\sqrt[3]{x}$

4. $y = \dfrac{\sin 3x}{2\sin^2 x \cdot \cos x}$

5. $y = x^{\frac{1}{x^2}}$

6. $y = \arccos\sqrt{1 - 3x}$

7. $xe^y + ye^x = xy$

8. $y = \cos(x + y)$

9. $\begin{cases} x = at^2 \\ y = bt^3 \end{cases}$

10. $\begin{cases} x = a\cos^3 t \\ y = a\sin^3 t \end{cases}$

11. $\sqrt{30}$

№ 16

1. $y = \dfrac{1}{\sqrt[3]{2x - 1}} + \dfrac{5}{\sqrt[4]{(x^3 + 2)^3}}$

2. $y = \cos\ln^2 x$

3. $y = (e^{\sin x} - 1)^2$

4. $y = \ln ctg 4x$

5. $y = \sqrt[3]{(1 - x)^2}$

6. $y = 2x^{\sqrt{x}}$

7. $\cos xy = \dfrac{y}{x}$

8. $x - y = \arcsin x - \arcsin y$

9. $\begin{cases} x = \arcsin(t^2 - 1) \\ y = \arccos 2t \end{cases}$

10. $\begin{cases} x = a(t - \sin t) \\ y = a(1 - \cos t) \end{cases}$

11. $\sqrt{40}$

№ 17

1. $y = x \cdot \sqrt[3]{\dfrac{2}{1+x}}$

2. $y = \dfrac{1+\sin 3x}{1-\sin 3x}$

3. $y = 2^{\frac{1-x}{1+x}}$

4. $y = \cos^2 x$

5. $y = \dfrac{1}{m\sqrt{ab}} \operatorname{arctg}(e^{mx}\sqrt{\dfrac{a}{b}})$

6. $y = (\ln x)^x$

7. $xy + \ln y - 2\ln x = 0$

8. $2y\ln y = x$

9. $\begin{cases} x = t^2 + t + 1 \\ y = t^3 + t \end{cases}$

10. $\begin{cases} x = a\cos t \\ y = a\sin t \end{cases}$

11. $\sqrt{52}$

№ 18

1. $y = \sqrt[3]{1 + x\sqrt{x+3}}$

2. $y = \sqrt{1 + \ln^2 x}$

3. $y = e^{\frac{1}{x^2}}$

4. $y = x\sqrt{1+x^2} \cdot \sin x$

5. $y = \dfrac{1}{\sqrt{x}} \cdot e^{x^2 - \operatorname{arctg} x + \frac{1}{2}\ln x + 1}$

6. $y = (\sin x)^{\cos x}$

7. $e^{x+y} = \sin\dfrac{y}{x}$

8. $y^2 \cdot \cos x = a^2 \sin 3x$

9. $\begin{cases} x = \cos t \\ y = t + 2\sin t \end{cases}$

10. $\begin{cases} x = \operatorname{ctg} t \\ y = \dfrac{1}{\cos^2 t} \end{cases}$

11. $\sqrt[3]{130}$

№ 19

1. $y=5\cdot\sqrt[5]{\frac{x^2+x+1}{x}}$
2. $y=2^x\cdot e^{-x}$
3. $y=\frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}$
4. $y=\sin^2 3x+tg^3 2x$
5. $y=x^2\operatorname{arctg}^3 6x+\ln\operatorname{ctg}x$
6. $y=(\cos 2x)^{x^2}$
7. $\ln y=arctg\frac{x}{y}$
8. $tg(x+y)-xy=0$
9. $\begin{cases}x=t+\ln(\cos t)\\ y=t-\ln(\sin t)\end{cases}$
10. $\begin{cases}x=3\cos^3 2t\\ y=\sin^3 2t\end{cases}$
11. $\sqrt[3]{8,36}$

№ 20

1. $y=\ln\cdot\ln^2 x$
2. $y=\frac{\sqrt{1+3x^2}}{2+3x^2}$
3. $y=e^{-x^2}\cdot\cos^2(2x+3)$
4. $y=\sqrt[5]{(1+xe^{\sqrt{x}})^3}$
5. $y=x\cdot\operatorname{arctg}^3 5x+\ln\operatorname{tg}x$
6. $y=(\sin 3x)^{\sqrt{x}}$
7. $y\ln x-x\ln y=x+y$
8. $x^4+y^4=x^2y^2$
9. $\begin{cases}x=2\cos^3 2t\\ y=\sin^3 2t\end{cases}$
10. $\begin{cases}x=\ln(1+t^2)\\ y=t-\operatorname{arctg}t\end{cases}$
11. $\operatorname{arctg}0,95$

№ 21

1. $y=\sqrt[3]{x^4+5x}-\sqrt[4]{(5x-1)^3}$

2. $y=\dfrac{1+\operatorname{tg}x}{1-\operatorname{tg}x}$

3. $y=\operatorname{arctg}\sqrt{x}-\sqrt{x}$

4. $y=\sqrt[3]{\dfrac{x-5}{\sqrt[5]{x^2+4}}}$

5. $y=\dfrac{x-1}{x+1}\cdot e^{-x}$

6. $y=x^{\frac{2}{x}}$

7. $y\sin x-\cos(x-y)=0$

8. $x\sin y-y\cos x=0$

9. $\begin{cases} x=at\cos t \\ y=at\sin t \end{cases}$

10. $\begin{cases} x=t+\ln\cos t \\ y=t-\ln\sin t \end{cases}$

11. $\arcsin 0,49$

№ 22

1. $y=\dfrac{3x}{\sqrt[3]{2+x}}-6\sqrt[3]{2+x}$

2. $y=\sin^3 2x$

3. $y=x\arcsin x+\sqrt{1-x^2}$

4. $y=x^2\ln x$

5. $y=\ln\cos\operatorname{arctg}\dfrac{e^x-e^{-x}}{2}$

6. $y=x^{e^x}$

7. $e^{xy}-x^2+y^2=0$

8. $y=x+\operatorname{arctg}y$

9. $\begin{cases} x=2t-\sin t \\ y=\sin^3 t \end{cases}$

10. $\begin{cases} x=\arcsin t \\ y=\ln(1-t^2) \end{cases}$

11. $\operatorname{arctg}0,97$

№ 23

1. $y=\sqrt{\dfrac{1+x^2}{1-x^2}}$

2. $y=e^{1+\ln^2 x}$

3. $y=\operatorname{arctg}\dfrac{1}{x}$

4. $y=x^2\ln x$

5. $y=\dfrac{x\cdot e^x\cdot\operatorname{arctg}x}{\ln^5 x}$

6. $y=x^{\arcsin x}$

7. $y\sin x+\cos(x-y)=\cos y$

8. $x^y=y^x$

9. $\begin{cases} x=t+\dfrac{1}{2}\sin 2t \\ y=\cos^3 t \end{cases}$

10. $\begin{cases} x=\ln t \\ y=t^2-1 \end{cases}$

11. $\arcsin 0,48$

№ 24

1. $y=x\cdot\sqrt{\dfrac{1+x^2}{1-x}}$

2. $y=\operatorname{tg}\ln\sqrt{x}$

3. $y=3^{\cos^2 x}$

4. $y=\dfrac{x}{e^x}$

5. $y=\arcsin(\cos\dfrac{x}{2})$

6. $y=(1+x^2)^{\sin x}$

7. $\cos(x-y)-2x+4y=0$

8. $y=1+xe^y$

9. $\begin{cases} x=t^5+2t \\ y=t^3+8t-1 \end{cases}$

10. $\begin{cases} x=a\cos^2 t \\ y=a\sin^2 t \end{cases}$

11. $\operatorname{arctg}0,96$

№ 25

1. $y = x + \dfrac{1}{x + \sqrt{x^2 + 1}}$

2. $y = \sin\sqrt{1 + x^2}$

3. $y = \ln \operatorname{ctg} \sqrt[3]{x}$

4. $y = \dfrac{\sin 3x}{2\sin^2 x \cdot \cos x}$

5. $y = x^{\frac{1}{x^2}}$

6. $y = \arccos\sqrt{1 - 3x}$

7. $xe^y + ye^x = xy$

8. $y = \cos(x + y)$

9. $\begin{cases} x = at^2 \\ y = bt^3 \end{cases}$

10. $\begin{cases} x = a\cos^3 t \\ y = a\sin^3 t \end{cases}$

11. $\sqrt{30}$

№ 26

1. $y = \dfrac{1}{\sqrt[3]{2x - 1}} + \dfrac{5}{\sqrt[4]{(x^3 + 2)^3}}$

2. $y = \cos \ln^2 x$

3. $y = (e^{\sin x} - 1)^2$

4. $y = \ln \operatorname{ctg} 4x$

5. $y = \sqrt[3]{(1 - x)^2}$

6. $y = 2x^{\sqrt{x}}$

7. $\cos xy = \dfrac{y}{x}$

8. $x - y = \arcsin x - \arcsin y$

9. $\begin{cases} x = \arcsin(t^2 - 1) \\ y = \arccos 2t \end{cases}$

10. $\begin{cases} x = a(t - \sin t) \\ y = a(1 - \cos t) \end{cases}$

11. $\sqrt{40}$

№ 27

1. $y=\sqrt{\dfrac{x+\sqrt{x}}{x-\sqrt{x}}}$

2. $y=x\cdot\arcsin\dfrac{2x+1}{3}$

3. $y=e^{-\cos^4 5x}$

4. $y=(1+ctg^3 3x)\cdot e^{-x}$

5. $y=\ln(\mathrm{arctg}\dfrac{x}{2}+\cos^2 4x)$

6. $y=(\mathrm{arctg}\,2x)^{\sin 3x}$

7. $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=1$

8. $(x+y)^2+(x-3y)^3=0$

9. $\begin{cases} x=t-\sin t \\ y=t+\cos t \end{cases}$

10. $\begin{cases} x=\sin^3 t \\ y=2t-\sin 2t \end{cases}$

11. $y=\sqrt{4x-3}, x=1,78$

№ 28

1. $y=\dfrac{\sqrt{1+3x^2}}{2+3x^2}$

2. $y=e^{-x^2}\cdot\cos^3(2x+3)$

3. $y=\ln(x^2+\sqrt{x^4+1})$

4. $y=\dfrac{e^{-\sqrt{x}}}{1+e^{2x}}$

5. $y=x\cdot\arcsin 2x+\mathrm{arctg}^3\,3x$

6. $y=(\mathrm{tg}\,2x)^{\sin 3x}$

7. $y\ln x+x\ln y=\ln(xy)$

8. $x+y+\mathrm{arctg}\,3x+\arcsin 2y=0$

9. $\begin{cases} x=\cos^3 t \\ x=t+\dfrac{1}{2}\sin 2t \end{cases}$

10. $\begin{cases} x=t^3+t \\ y=t^2+t+1 \end{cases}$

11. $y=\sqrt{x^3}, x=0,98$

№ 29

1. $y = xe^{-x}$

2. $y = \sqrt{\dfrac{x+\sqrt{x}}{x-\sqrt{x}}}$

3. $y = x\arcsin\dfrac{2x+1}{3}$

4. $y = e^{-\cos^4 5x}$

5. $y = \dfrac{11}{\sqrt{1+e^{-\sqrt{x}}}}$

6. $y = (\operatorname{arctg} 2x)^{\sin x}$

7. $\sin(xy) + \cos(xy) = \operatorname{tg}(x+y)$

8. $(x+y)^2 = (x-2y)^3$

9. $\begin{cases} x = \dfrac{2-t}{2+t^2} \\ y = \dfrac{t^2}{2+t^2} \end{cases}$

10. $\begin{cases} x = e^t \cdot \sin t \\ y = e^t \cdot \cos t \end{cases}$

11. $\arcsin 0{,}48$

№ 30

1. $y = x + \dfrac{1}{x+\sqrt{x^2+1}}$

2. $y = \sin\sqrt{1+x^2}$

3. $y = \ln(\operatorname{ctg}\sqrt[3]{x})$

4. $y = (e^{\sin x} - 1)^2$

5. $y = \cos(\ln^2 x)$

6. $y = 2x^{\sqrt{x}}$

7. $\cos(xy) = \dfrac{y}{x}$

8. $xe^y + ye^x = xy$

9. $\begin{cases} x = \dfrac{1}{3}t^3 + \dfrac{1}{2}t^2 + t \\ y = \dfrac{1}{2}t^2 + \dfrac{1}{t} \end{cases}$

10. $\begin{cases} x = \arcsin(t^2-1) \\ y = \arccos 2t \end{cases}$

11. $y = \sqrt[3]{x^2+2x+5}, x = 0{,}97$

Контрольная работа №3.
Исследование функций с помощью производных

Вариант 1: 1) $y=\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)^2$ 2) $y=\ln(2x^2+3)$

Вариант 2: 1) $y=\dfrac{x}{(x-1)^2}$ 2) $y=\dfrac{e^x}{x}$

Вариант 3: 1) $y=\dfrac{2x-1}{(x-1)^2}$ 2) $y=x^3e^{-x}$

Вариант 4: 1) $y=\dfrac{x^3}{2(x+1)^2}$ 2) $y=x-\ln(x+1)$

Вариант 5: 1) $y=\dfrac{x^2+1}{x}$ 2) $y=\ln\dfrac{1+x}{1-x}$

Вариант 6: 1) $y=\dfrac{1}{1+x^2}$ 2) $y=xe^{-x}$

Вариант 7: 1) $y=\dfrac{(x-1)^2}{x^2+1}$ 2) $y=e^{\frac{1}{x}}$

Вариант 8: 1) $y=\dfrac{x}{3-x^2}$ 2) $y=x\ln x$

Вариант 9: 1) $y=\dfrac{1}{1-x^2}$ 2) $y=\ln(x^2-4)$

Вариант 10: 1) $y=\dfrac{x}{x^2+1}$ 2) $y=\dfrac{1}{e^x-1}$

Вариант 11: 1) $y=e^{\frac{1}{x+2}}$ 2) $y=\left(\dfrac{x+2}{x-1}\right)^2$

Вариант 12: 1) $y=\dfrac{x^3+16}{x}$ 2) $y=x^2\ln x$

Вариант 13: 1) $y=\dfrac{x^3-8}{2x^2}$ 2) $y=x^2e^{-x}$

Вариант 14: 1) $y=\dfrac{4x}{4+x^2}$ 2) $y=\ln\dfrac{x}{x-1}$

Вариант 15: 1) $y=\left(\dfrac{x-1}{x}\right)^2$ 2) $y=xe^{-x^2}$

Вариант 16: 1) $y=\dfrac{1}{x^2+2x}$ 2) $y=(x+4)e^{2x}$

Вариант 17: 1) $y = \dfrac{x^2 - 1}{x^2 + 2}$ 2) $y = \ln(x^2 + 2x + 2)$

Вариант 18: 1) $y = \dfrac{1 - 2x}{x^2 - x - 2}$ 2) $y = xe^{2x-1}$

Вариант 19: 1) $y = \dfrac{4x^3 + 5}{x}$ 2) $y = \ln \dfrac{x - 1}{x - 2}$

Вариант 20: 1) $y = \dfrac{(x-5)(3+x)}{(x+2)^2}$ 2) $y = e^{\frac{1}{2-x}}$

Вариант 21: 1) $y = \dfrac{3x^2 - 7x - 16}{x^2 - x - 6}$ 2) $y = \ln(1 + x^2)$

Вариант 22: 1) $y = \dfrac{(x-2)(6+x)}{(x-1)^2}$ 2) $y = \ln(x^2 - 4)$

Вариант 23: 1) $y = \dfrac{x^2 - 4}{x^2 - 9}$ 2) $y = \dfrac{x}{\ln x}$

Вариант 24: 1) $y = \dfrac{x^2 - 1}{x^4}$ 2) $y = 6x^2 e^{-x^2}$

Вариант 25: 1) $y = \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{(x-3)^2}{(x+1)^2}$ 2) $y = x^2 e^{\frac{1}{x}}$

Вариант 26: 1) $y = \dfrac{x^3}{x^2 - 9}$ 2) $y = \dfrac{\ln x}{\sqrt{x}}$

Вариант 27: 1) $y = \dfrac{x^2 - 5}{x - 3}$ 2) $y = \dfrac{x}{\ln x}$

Вариант 28: 1) $y = \dfrac{x^2 - 1}{x^2 + 2}$ 2) $y = e^{\frac{1}{2-x}}$

Вариант 29: 1) $y = \dfrac{(x-1)^2}{x^2 + 1}$ 2) $y = xe^{-x^2}$

Вариант 30: 1) $y = \dfrac{1}{x^2 + 2x}$ 2) $y = x^2 \ln x$

4.3. Дифференциальное исчисление функции нескольких переменных

Контрольная работа № 4. Функции нескольких переменных

Задание

1. Найти $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}, \partial z.$

2. Найти для неявно заданной функции $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}, \partial z.$

3. Дана функция $z = f(x, y)$. Показать, что имеет место указанное равенство.

4. Найти производную функции $z = f(x, y)$, по направлению вектора $\overline{a}$ и градиент этой функции в данной точке $A(x_0, y_0)$.

5. Найти точки экстремума функции $z = f(x, y)$.

6. Дана поверхность $F(x, y, z) = 0$ и точка $A(x_0, y_0, z_0)$. Составить уравнение касательной к плоскости и уравнение нормали к данной поверхности.

7. Вычислить приближённо $z = f(x, y)$ в точке $A(x, y)$. Вычисление вести с двумя знаками после запятой.

8. Экспериментально получены 5 значений искомой функции $y = y(x)$ при пяти значениях аргумента, которые записаны в таблице. Методом наименьших квадратов найти функцию $y = y(x)$ в виде $y = ax + b$. Начертить график полученной функции и отметить заданные точки

№1

1. $z = (5x^2 y - y^3 + 7)^3$
2. $e^z - xyz = 0$
3. $z = e^x(\cos y + x \cdot \sin y)$

   $\frac{d^2 z}{dx \cdot dy} = \frac{d^{2z}}{dy \cdot dx}.$
4. $z = x^3 + 2x^2 y + y^2, \overline{a}(4; -3), A(1; 2)$
5. $z = x^2 + xy + y^2 - 3x - 6y$
6. $x^2 - yz - 7 = 0, A(1; 2; 3)$
7. $z = \ln(\sqrt[3]{x} + \sqrt[4]{y}), A(1,03; 098)$
8.

x	1	2	3	4	5
y	5,5	6,5	5	3	3,5

№2

1. $z = x\sqrt{y} + \frac{y}{\sqrt[3]{x}}$
2. $x^2 - 2y^2 + z^2 - 4x + 2z - 5 = 0$
3. $x = \ln(x + \sqrt{x^2 + y^2}), \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$
4. $z = x^2 + 2xy + y^2, \overline{a}(5; 12), A(1; -3)$
5. $z = x^3 + y^3 - 15xy$
6. $2x^2 + y^2 + 5z^2 - 22 = 0, A(2; -3; 1)$
7. $z = \sqrt{x^y + \ln x}, A(1,03; 1,99)$
8.

x	1	2	3	4	5
y	5,2	6,2	4,7	2,7	3,2

№3

1. $z=\ln(x+\sqrt{x^2+y^2})$
2. $z^3+3xyz=a^2$
3. $z=\operatorname{arctg}\dfrac{y}{x},\dfrac{\partial^3 z}{\partial y^2\partial z}=\dfrac{\partial^3 z}{\partial x\partial y^2}$
4. $z=x^2+y^2+2xy^2,\overline{a}(-1;1),A(3;1)$
5. $z=(x-1)^2+2y^2$
6. $3x^2-2y^2+3z+8=0,A(1;-2;-1)$
7. $z=2y^2+9xy+y,A(2,94;1,07)$
8.

x	1	2	3	4	5
y	3,9	4,9	3,4	1,4	1,9

№4

1. $z=\operatorname{arctg}\dfrac{x}{y}$
2. $x^3+2y^3+z^3+3xy^2-2y+3=0$
3. $z=\dfrac{1}{3}\sqrt{(x^2+y^2)^3},\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\dfrac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}$
4. $z=\ln(5x^2+4y^2),\overline{a}(2;1),A(1;1)$
5. $z=(x+1)-2y^2$
6. $z=y+\ln\dfrac{z}{x},A(1;1;1)$
7. $z=2x^2+2y^2+3y,A(2,03;-2,04)$
8.

x	1	2	3	4	5
y	5,1	6,1	4,6	2,6	3,1

№5

1. $z=\dfrac{3}{\operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}}$
2. $x\cdot\cos y+y\cos z+z\cos x=1$
3. $z=\sin^2(2x+3y)\ \dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\dfrac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}$
4. $z=4x^3+x^2y^3,\overline{a}(12;-5),A(\dfrac{1}{2};1)$
5. $z=x^2-2y^2+2x+1$
6. $z=x^2+3y^2,A(2;1;7)$
7. $z=\sqrt{\sin^2 x+8e^y},A(1,55;0;015)$
8.

x	1	2	3	4	5
y	4,7	5,7	4,4	2,4	2,9

№ 6

1. $z=\ln\operatorname{tg}\dfrac{x}{y}$
2. $2x^2+2y^2+z^2-8xz-z+8=0$
3. $z=\operatorname{arctg}\dfrac{x+y}{1-xy},\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\dfrac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}$
4. $z=2x^3-xy^2,\overline{a}(3;4),A(-1;1)$
5. $z=x^2+xy+y^2-2x-y$
6. $z=xy-2,A(2;1;0)$
7. $z=x^2+y^2-4x+2y,A(2,98;2,05)$
8.

x	1	2	3	4	5
y	4,7	5,7	4,2	2,2	2,7

№ 7

1. $z=\operatorname{arctg}\dfrac{x+y}{x-y}$
2. $\ln z=x+y+z-1$
3. $z=\ln(x^2+y^2+2x+1),\dfrac{d^2z}{dx^2}+\dfrac{d^2z}{dy^2}=0$
4. $z=\operatorname{arctg}(x^2y),\overline{a}(1;\sqrt{8}),A(1;-2)$
5. $z=2(x-3)^2+3y^2$
6. $z=x^2+2y^2,A(2;-1;-6)$
7. $z=x^2+y^2-2x+2y,A(1,08;1,94)$
8.

x	1	2	3	4	5
y	4,5	5,5	4	2	2,5

№ 8

1. $z=\ln(x+\ln y)$
2. $x+y+z=e^z$
3. $z=e^{xy},x^2\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}-2xy\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}+y^2\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}+2xyz=0$
4. $z=\operatorname{arctg}(xy),\overline{a}(2;7),A(2;1)$
5. $z=(x+2)^2+5(y-3)^2$
6. $z=3x^2+y^2,A(-1;1;4)$
7. $z=2xy-2x+y,A(1,93;1,05)$
8.

x	1	2	3	4	5
y	4,3	5,3	3,8	1,8	2,3

№9

1. $z=\sin\frac{x}{y}\cdot\cos\frac{y}{x}$
2. $x-z\cdot\ln\frac{z}{y}=0$
3. $z=\ln(x+e^{-y}),\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}-\frac{\partial x}{\partial y}\cdot\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=0$
4. $z=x^3e^y,\overline{a}(3;4),A(-1;0)$
5. $z=e^{2x}(x+2y+y^2)$
6. $z=\mathrm{arctg}\frac{x}{y},A(2;2;\frac{\pi}{2})$
7. $z=xy+2y^2-2x,A(0,97;2,03)$
8.

x	1	2	3	4	5
y	4,3	5,3	3,8	1,8	2,3

№10

1. $z=xy\ln(x+y)$
2. $z\sin y+y\sin x+z\sin x=5$
3. $z=\frac{x}{y},x\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}-\frac{\partial z}{\partial y}=0$
4. $z=xe^y,\overline{a}(5;12),A(2;0)$
5. $z=4(x-y)-x^2-y^2$
6. $x^2-3y^2-2z^2-xz-1=0,A(2;-10)$
7. $z=\sqrt{x^y+\ln x},A(1,04;1,98)$
8.

x	1	2	3	4	5
y	3,3	4,3	2,8	1,2	1,7

№11

1. $z=\frac{2}{\sqrt{x^2+y^2}}$
2. $xy+xz+yz=1$
3. $z=xe^{\frac{y}{x}},\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}$
4. $z=3x^2+2xy,\overline{a}(4;3),A(1;2)$
5. $z=x^2+xy+y^2+x-y+1$
6. $x^2+2y^2+3z^2=27,A(4;-2;1)$
7. $z=x^2+y^2+2x+y-1,A(1,98;3,91)$
8.

x	1	2	3	4	5
y	3,5	4,5	3,0	1,0	1,5

№12

1. $z=\mathrm{arctg}\sqrt{xy^3}$
2. $ze^x+ye^x+xe^y=3$
3. $z=\sin(x+3y)^2,\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=9\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$
4. $z=\ln(x^2+3y^2),\overline{a}(3;2),A(1;1)$
5. $z=x^3+y^3-3xy$
6. $z=\mathrm{arctg}\frac{y}{x},A(1;\sqrt{3};\frac{\pi}{3})$
7. $z=x^2+2xy+y^2,A(-2,94;4,05)$
8.

x	1	2	3	4	5
y	3,7	4,7	3,2	1,2	1,7

№13

1. $z=e^{x(x^2+y^2)}$
2. $z-x-\mathrm{arctg}\frac{y}{z-x}=0$
3. $z=\cos y+(y-x)\cdot\sin y,(x-y)\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial z}{\partial y}$
4. $z=\ln(x^2y^2),a(-2;5),A(1;-4)$
5. $z=3x^2-x^3+3y^2+6y$
6. $z=\arcsin\frac{x}{y},A(0;1;0)$
7. $z=x^y,A(1,02;4,05)$
8.

x	1	2	3	4	5
y	4,1	5,1	3,6	1,6	2,1

№14

1. $z=\sin\sqrt{x^2+y^2}$
2. $x^2+2xz^2+y^2-4x+2z-2=0$
3. $z=x^3+xy^2-5xy^3+y^5,\frac{\partial^3 z}{\partial y^2\partial x}=\frac{\partial^3 z}{\partial y\partial x\partial y}$
4. $z=\mathrm{arctg}\frac{y}{x},\overline{a}(4;3),A(1;2)$
5. $z=x^2+y^2-2\ln x-18\ln y$
6. $z=\sin\frac{x}{y},A(\pi;1;0)$
7. $z=y^x,A(3,01;1,03)$
8.

x	1	2	3	4	5
y	5,4	6,4	4,9	2,9	3,4

№15

1. $z = x + y - \sqrt{x^2 + y^2}$
2. $z^3 - 4xz + y^2 - 4 = 0$
3. $z = \ln(x^2 + y^2)$, найти $\dfrac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2}$
4. $z = \sin\dfrac{x}{y}, \bar{a}(2;1), A(0;1)$
5. $z = x^3 + 3xy^2 - 15x - 12y$
6. $z = xy, A(1;\sqrt{3};\sqrt{3})$
7. $z = \sqrt{e^x + y^3}, A(0.02;2,01)$
8.

x	1	2	3	4	5
y	5,3	6,3	4,8	2,8	3,3

№16

1. $z = \ln(x + \dfrac{y}{2x})$
2. $z \cdot \ln(x+y) - \dfrac{xy}{z} = 0$
3. $z = \sin(xy)$. Найти $\dfrac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2}$
4. $z = \ln(4x^2 + 3y^2), \bar{a}(-3;-4), A(1;-1)$
5. $z = 3x^2 - 2y^2 - 4y - 2$
6. $z = 1 - x^2 - y^2, A(-1;-2;-4)$
7. $z = x^2 + 2xy + 3y^2, A(1,96;1,04)$
8.

x	1	2	3	4	5
y	5,4	6,4	4,9	2,9	3,4

№17

1. $z = \arcsin\dfrac{x+y}{xy}$
2. $xyz = x + y + z$
3. $z = e^{xy^2}$. Найти $\dfrac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial z}$
4. $z = \ln(2x^2 + y^2), \bar{a}(-5;12), A(1;3)$
5. $z = x^2 + y^2 - 2y + 1$
6. $x^2 + y^2 + z^2 - xy - 5 = 0, A(0;2;1)$
7. $z = \sqrt{x^y + \ln x}, A(1,01;1,98)$
8.

x	1	2	3	4	5
y	4	4,5	3	1,5	2

№18

1. $z = \ln\dfrac{1 - \sqrt{x^2 + y^2}}{1 + \sqrt{x^2 + y^2}}$
2. $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} - \dfrac{z^2}{c^2} = 1$
3. $z = \ln\dfrac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$
4. $z = \ln(3x^2 + 4y^2), \bar{a}(5;-12), A(-1;-2)$
5. $z = x^2 - y^2 + 6x + 2y + 8$
6. $x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 21, A(-1;2;-2)$
7. $z = x^y, A(1,04;2,02)$
8.

x	1	2	3	4	5
y	2,9	3,9	2,4	1,4	1,9

№19

1. $z = x\cos y - y\cos x$
2. $\ln(xyz) - e^{x+y+z} = 0$
3. $z = x\sin^2 y, \dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \dfrac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$
4. $z = x^2 \cdot e^y, \bar{a}(2;-7), A(1;0)$
5. $z = x^2 + 2y^2 + 6x - 4y + 11$
6. $2^{\frac{x}{z}} + 2^{\frac{-y}{x}} = 8, A(2;2;1)$
7. $z = y^x, A(3,02;1,01)$
8.

x	1	2	3	4	5
y	2,7	3,7	2,2	1,2	1,7

№20

1. $z = \sqrt{\sin^2 x + \sin^2 y}$
2. $x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 6y - 3z = 0$
3. $z = \dfrac{1}{2(x^2 + y^2)}, \dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \dfrac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$
4. $z = \operatorname{arctg}\dfrac{x}{y}, \bar{a}(-1;-2), A(2;-2)$
5. $z = x^2 + xy + y^2 - 4\ln x - 10\ln y$
6. $z = y + \ln\dfrac{x}{z}, A(1;1;1)$
7. $z = \sqrt{x^y + \ln x}, A(1,02;2,02)$
8.

x	1	2	3	4	5
y	2,5	3,5	2,0	1,0	1,5

№21

1. $z=\dfrac{xy}{x^2+y^2}$
2. $x^4+3y^2z^2-2xz^4=0$
3. $z=\sin^2 x+\sin^2 y, \dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\dfrac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}$
4. $z=x^3-2x^2y+xy^2+1, \bar{a}(3;4), A(1;2)$
5. $z=2x^2+3y^2-4x+5-6y$
6. $2x^2+3y^2+4z^2=9, A(1;1;-1)$
7. $z=\sqrt{y^3+e^x}, A(0,03;2,02)$
8.

x	1	2	3	4	5
y	2,3	3,3	1,8	0,8	1,3

№22

1. $z=\sqrt[3]{x+y^2}$
2. $xyz-\sin(xyz)=0$
3. $z=\ln tg(x\cdot y)$. Найти $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$
4. $z=\mathrm{arctg}(x^2y^2), \bar{a}(5;-12), A(1;-1)$
5. $z=3x^2+5y^2-6x+3$
6. $z=\mathrm{arctg}\dfrac{y}{x}, A(1;1;\dfrac{\pi}{4})$
7. $z=\sqrt{3^y+e^x}, A(0,01;1,03)$
8.

x	1	2	3	4	5
y	5,6	6,6	5,3	3,3	3,8

№23

1. $z=\sqrt{\ln(xy)}$
2. $x^2-xy=0$
3. $z=\ln(tg\dfrac{x}{y})$. Найти $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$
4. $z=x^3+y^3-3xy, \bar{a}(3;4), A(2;1)$
5. $z=x^3+y^3-3x-12y+5$
6. $x^2+y^2+z^2=169, A(3;4;12)$
7. $z=x^2+3y^2+xy, A(1,98;-3,05)$
8.

x	1	2	3	4	5
y	4,6	5,6	4,1	2,1	2,6

№24

1. $z=\mathrm{arctg}\dfrac{x+y}{1-xy}$
2. $z-x\ln\dfrac{z}{y}=0$
3. $z=\arcsin\sqrt{\dfrac{x-y}{x}}, \dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\dfrac{\partial^2 x}{\partial y\partial x}$
4. $z=2x^2+3xy+y^2, \bar{a}=3\bar{i}-4\bar{j}, A(2;1)$
5. $z=x^4+y^4+2x^2+4xy-2y^2$
6. $z=x^2+y^2, A(1;2;5)$
7. $z=x^2+y^2-xy, A(2,03;0,98)$
8.

x	1	2	3	4	5
y	4,8	5,8	4,3	2,3	2,8

№25

1. $z=(3x^2y^3-y^2+1)^2$
2. $e^z+x^2yz=0$
3. $z=\mathrm{arctg}\dfrac{y}{x^2}, \dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\dfrac{\partial^2 x}{\partial y\partial x}$
4. $z=x^3+3y^3-5xy, \bar{a}(1;-1), A(1;2)$
5. $z=x^2+y^2-4x+4y$
6. $x^2+y^2+z^2-2x-2=0, A(0;1;-1)$
7. $z=x^2+5y^2, A(-1,97;1,04)$
8.

x	1	2	3	4	5
y	5,7	6,7	5,2	3,2	3,7

№26

1. $z=(5x^2y-y^2+7)^3$
2. $x^2-2y^2+z^2-4x+2z-5=0$
3. $z=\mathrm{arctg}\dfrac{y}{x}, \dfrac{\partial^3 z}{\partial y^2\partial z}=\dfrac{\partial^3 z}{\partial x\partial y^2}$
4. $z=\ln(5x^2+4y^2), \bar{a}(2;1), A(1;1)$
5. $z=x^2-2y^2+2x+1$
6. $z=xy-2, A(2;1;0)$
7. $z=x^2+y^2-2x+2y, A(1,08;1,94)$
8.

x	1	2	3	4	5
y	4,3	5,3	3,8	1,8	2,3

№27

1. $z = \sin\frac{x}{y} \cdot \cos\frac{y}{x}$
2. $x + y + z = e^z$
3. $z = \ln(x + e^{-y}), \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} - \frac{\partial x}{\partial y} \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 0$
4. $z = \ln(x^2 + 3y^2), \overline{a}(3;2), A(1;1)$
5. $z = 4(x - y) - x^2 - y^2$
6. $x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 27, A(4;-2;1)$
7. $z = 2xy - 2x + y, A(1,93;1,05)$
8.

x	1	2	3	4	5
y	5,4	6,4	4,9	2,9	3,4

№28

1. $z = (3x^2 y^3 - y^2 + 1)^2$
2. $xyz - \sin(xyz) = 0$
3. $z = \ln(z + \sqrt{x^2 + y^2})$
4. $z = \sin\frac{x}{y}, \overline{a}(2;1), A(0;1)$
5. $z = x^2 + y^2 - 2\ln x - 18\ln y$
6. $z = xy - 2, A(2;1;0)$
7. $z = x^2 + y^2 - 4x + 2y, A(2,98;2,05)$
8.

x	1	2	3	4	5
y	4,5	5,5	4,0	2,0	2,5

№29

1. $z = \arcsin\frac{x + y}{xy}$
2. $xyz = x + y + z$
3. $z = x\sin^3 y, \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$
4. $z = \operatorname{arctg}\frac{x}{y}, \overline{a}(-1;-2), A(2;-2)$
5. $z = 2x^2 + 3y^2 - 4x + 5 - 6y$
6. $2x^2 + 3y^2 + 4z^2 = 9, A(1;1;-1)$
7. $z = x^2 + 3y^2 + xy, A(1,98;-3,03)$
8.

x	1	2	3	4	5
y	4,8	5,8	4,3	2,3	2,8

№30

1. $z = \ln(x + \ln y)$
2. $x - z\ln\frac{z}{y} = 0$
3. $z = \frac{x}{y}, x\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} - \frac{\partial z}{\partial y} = 0$
4. $z = x^3 + y^3 - 3xy, \overline{a}(3;4), A(2;1)$
5. $z = x^2 + xy + y^2 + x - y + 1$
6. $z = x^2 + y^2, A(1;2;5)$
7. $z = x^2 + 2xy + y^2, A(-2,94;4,05)$
8.

x	1	2	3	4	5
y	4,1	5,1	3,6	1,6	2,1

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В основу пособия положены лекции, читаемые авторами на протяжении ряда лет по курсу «Математика: дифференциальное исчисление». Весь теоретический материал изложен в доступной форме, сопровожден большим количеством примеров, рисунков. В пособии в большом количестве разобраны примеры решения задач, имеющих прикладную направленность. Также даны методические указания, необходимые для решения последующих задач, представленных для самостоятельной работы студентов.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Данко, П.Е. Высшая математика в упражнениях и задачах [Текст] / П.Е. Данко, А.Г. Попов, Т.Я. Кожевникова. – Изд. 5-е, испр. – М.: Высшая школа, 1999. Ч. 1. – 304 с.

2. Палица, Г.Ф. Приложения производной [Текст]: учебное пособие / Г.Ф. Палица, О.В. Снежкина. – Пенза: ПГУАС, 2004. – 64 с.

3. Палица, Г.Ф. Теория пределов [Текст]: учебное пособие / Г.Ф. Палица, О.В. Снежкина, Н.Н. Туманова. – Пенза: ПГАСА, 2001. 54 с.

4. Лысенко, В.И. Высшая математика [Текст]: лекции для студентов высших учебных заведений, обучающихся заочно по экономическим специальностям / В. И. Лысенко, В.Г. Гофман. – М., МГУТУ, 2008. Ч.I. – 56 с.

5. Алборова, М.С. Высшая математика [Текст]: учебное пособие для студентов технологических и механических специальностей, всех форм обучения / М.С. Алборова. – МГУТУ, 2006. – 48 с.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Учебное издание

Снежкина Ольга Викторовна
Куимова Елена Ивановна
Ячинова Светлана Николаевна

МАТЕМАТИКА: ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ
Учебное пособие

В авторской редакции
Верстка Н.А. Сазонова

Подписано в печать 10.10.14. Формат 60×84/16.
Бумага офисная «Снегурочка». Печать на ризографе.
Усл.печ.л. 8,14. Уч.-изд.л. 8,75. Тираж 80 экз.
Заказ № 366.

Издательство ПГУАС.
440028, г. Пенза, ул. Германа Титова, 28.