

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«Пензенский государственный университет
архитектуры и строительства»
(ПГУАС)

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ:

ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ОЦЕНОК И ПРОВЕРКИ СТАТИСТИЧЕСКИХ ГИПОТЕЗ

Методические указания
по выполнению практических занятий

Под общей редакцией доктора технических наук,
профессора Ю.П. Скачкова

Пенза 2014

УДК 517
ББК 22-161.1
М34

*Методические указания подготовлены в рамках проекта
«ПГУАС – региональный центр повышения качества подготовки
высококвалифицированных кадров для строительной отрасли»
(конкурс Министерства образования и науки Российской Федерации –
«Кадры для регионов»)*

Рецензент: доктор химических наук, профессор
кафедры «Информационно-вычислительные системы» А.Н. Кошев
(ПГУАС)

Математическое моделирование: элементы теории оценок
М34 и проверки статистических гипотез: метод. указания к
практическим занятиям / А.М. Данилов, И.А. Гарькина; под
общ. ред. д-ра техн. наук, проф. Ю.П. Скачкова. – Пенза:
ПГУАС, 2014. – 24 с.

Рассматриваются вопросы математического моделирования, имеющие приоритетное прикладное значение. Приводятся методы определения числовых значений характеристик и законов распределения наблюдаемых случайных переменных на основании ограниченного числа испытаний. Содержит контрольные вопросы и задания для самостоятельной работы.

Направлены на формирование способности демонстрировать знания фундаментальных и прикладных дисциплин ООП магистратуры; способности и готовности проводить научные эксперименты, оценивать результаты исследований; способности разрабатывать физические и математические модели явлений и объектов, относящихся к профилю деятельности.

Подготовлены на кафедре «Математика и математическое моделирование» и базовой кафедре ПГУАС при ЗАО «Спецстроймеханика» и предназначены для магистрантов, обучающихся по направлению 08.04.01 «Строительство», для выполнения практических занятий по дисциплине «Математическое моделирование».

© Пензенский государственный университет
архитектуры и строительства, 2014
© Данилов А.М., Гарькина И.А., 2014

1. ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ОЦЕНОК

Пусть $X = \{x\}$ – одномерная случайная величина. Рассмотрим n -мерную случайную величину

$$(X_1, X_2, \dots, X_n), \quad (1)$$

где $X_i, i = \overline{1, n}$ являются независимыми случайными величинами с одинаковыми функциями распределения вероятностей, совпадающими с функцией распределения X .

Функция распределения вероятностей такой многомерной величины определится как произведение функций распределения вероятностей ее компонентов.

Случайные величины X_i удобно рассматривать как результаты некоторого эксперимента. При этом многомерная случайная величина (1) может рассматриваться или как результат последовательного проведения n независимых экспериментов на одной и той же экспериментальной установке, или как результат проведения одновременных экспериментов на n однотипных экспериментальных установках.

Поскольку всегда имеется теоретическая возможность проводить неограниченное число экспериментов, то можно говорить о бесконечном наборе случайных чисел x_i с одинаковыми функциями распределения вероятностей.

Каждый конкретный результат эксперимента, а, следовательно, каждое X_i из конечного набора (1) может рассматриваться как выбор одного из чисел бесконечной совокупности. Набор $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ представляет собой n таких выборов и называется *случайной выборкой*.

Основной задачей математической статистики является определение независимых параметров распределения бесконечной совокупности по известной конечной выборке. При этом речь может идти или об определении самой функции распределения, или отдельных параметров функции распределения, таких как математическое ожидание, дисперсия, наименьшее или наибольшее значения случайной величины и т.п.

Поскольку элементы конечной выборки являются случайными величинами, то случайным будет и значение параметра, определенное с помощью этой выборки. В частности, если имеется несколько выборок одного и того же объема из одной и той же бесконечной совокупности, то каждая из них даст свое значение интересующего параметра. Поэтому по конечной выборке нельзя судить о значении параметра, а можно лишь более или менее оценить этот параметр. Численные значения от-

дельных параметров, определенных из конечной выборки, называются *оценками параметров бесконечной совокупности*.

В общем случае из одной и той же совокупности можно получить различные оценки $\tilde{a}$ параметров a . Какая же оценка при этом будет *предпочтительней*? На этот вопрос можно ответить, если потребовать, чтобы оценка удовлетворяла некоторым требованиям.

Прежде всего, оценка должна быть *состоятельной*, т.е. с увеличением числа испытаний (объема выборки) должна сходиться по вероятности к a , т.е. при $n \rightarrow \infty$ и любом $\varepsilon > 0$ должно выполняться

$$P(|\tilde{a}_n - a| < \varepsilon) \rightarrow 1$$

где $\tilde{a}_n$ – оценка параметра a , полученная по выборке объема n .

Оценка должна быть *несмещенной*, т.е. она не должна содержать систематической ошибки, преувеличивающей или преуменьшающей значение параметра для выборок. Это означает, что

$$M[\tilde{a}] = a.$$

Наконец, оценка должна быть *эффективной*, т.е. в среднем иметь минимальный разброс.

$$D[\tilde{a}] = \min.$$

Из всех несмещенных и состоятельных оценок, таким образом, отдается предпочтение той, которая оказывается наиболее близкой к оцениваемому параметру, т.е. при которой большие отклонения при использовании различных выборок встречались бы как можно реже.

Различают два вида оценок: ***точечные и интервальные***.

В первом случае интересуются одним значением (точкой), во втором – интервалом значений, т.е. при интервальных оценках стараются определить вероятность того, что отклонение оценки параметра от истинного значения будет меньше заданного значения. Для определения близости оценки к оцениваемому параметру вводят *доверительный интервал* близости ε , а саму близость оценивают по величине вероятности, которую называют *доверительной вероятностью* β , и задают заранее $p = \beta$. Таким образом, задача оценки состоит в том, чтобы найти по экспериментальным данным несмещенную оценку $\tilde{a}_n$, удовлетворяющую

$$P(|\tilde{a}_n - a| < \varepsilon) = \beta.$$

Здесь интервал $I_\beta = (\tilde{a}_n - \varepsilon, \tilde{a}_n + \varepsilon)$ – доверительный.

1.1. Точечные оценки математического ожидания и дисперсии

Пусть $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ – выборка из совокупности с математическим ожиданием m и дисперсией $D = \sigma^2$. Необходимо определить состоятельные оценки $\tilde{m}, \tilde{D}$ соответственно для m и D .

Обычно за оценку m берут среднееарифметическое значение выборки

$$\tilde{m} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i, \quad (2)$$

называемое *выборочным средним*.

Из закона больших чисел

$$\left(P \left(\left| \sum_{i=1}^n \frac{x_i}{n} - m \right| < \varepsilon \right) \rightarrow 1 \text{ при } n \rightarrow \infty \text{ и любом } \varepsilon > 0 \right)$$

следует, что такая оценка является состоятельной.

Оценка (2) является и несмещенной. Действительно, выборочное среднее $\tilde{m}$ представляет собой сумму *случайных величин* $\frac{x_i}{n}$, поэтому оно само будет случайной величиной. Тогда можно говорить о законе распределения выборочного среднего, его математическом ожидании и дисперсии.

Используя свойство математического ожидания, получим

$$M[\tilde{m}] = M \left[\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \right] = \frac{1}{n} M \left[\sum_{i=1}^n x_i \right] = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n M[x_i] = \frac{1}{n} nm = m. \quad (3)$$

Таким образом, оценка $\tilde{m}$ является несмещенной.

Определим дисперсию $D[\tilde{m}]$.

Пользуясь независимостью x_i и свойствами дисперсии, получим

$$D[\tilde{m}] = D \left[\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \right] = \frac{1}{n^2} D \left[\sum_{i=1}^n x_i \right] = \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n D[x_i] = \frac{1}{n^2} nD = \frac{D}{n} = \frac{\sigma^2}{n}. \quad (4)$$

Если выборка взята из совокупности с нормальным распределением, то $\tilde{m}$, как сумма нормально распределенных случайных величин с учетом (3) и (4), также будет иметь нормальное распределение с плотностью вероятностей

$$f(\tilde{m}) = \frac{1}{\sqrt{\frac{D}{n}} \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(\tilde{m}-m)^2}{2 \frac{D}{n}}}.$$

Можно показать, что при этом $D[\tilde{m}] = \frac{\sigma^2}{n}$ будет минимальной, следовательно, оценка (2) будет эффективной в смысле минимума дисперсии.

Перейдем к оценке дисперсии. Покажем, что оценки вида

$$\tilde{D} = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \tilde{m})^2 \quad (5)$$

является несмещенной оценкой дисперсии.

Действительно,

$$\begin{aligned} \tilde{D} &= \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \tilde{m})^2 = \frac{n}{n-1} \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \tilde{m})^2}{n} = \frac{n}{n-1} \left(\frac{\sum_i x_i^2}{n} - 2\tilde{m} \frac{\sum_i x_i}{n} + \frac{n\tilde{m}^2}{n} \right) \\ &= \frac{n}{n-1} \left(\frac{\sum_i x_i^2}{n} - 2\tilde{m}^2 + \tilde{m}^2 \right) = \frac{n}{n-1} \left(\frac{\sum_i x_i^2}{n} - \tilde{m}^2 \right) = \frac{n}{n-1} \left(\frac{\sum_i x_i^2}{n} - \left(\frac{\sum_i x_i}{n} \right)^2 \right) \\ &= \frac{n}{n-1} \left(\frac{\sum_i x_i^2}{n} - \frac{\sum_i x_i^2}{n^2} - 2 \frac{\sum_{i < j} x_i x_j}{n^2} \right) = \frac{n}{n-1} \left(\frac{n-1}{n^2} \sum_{i=1}^n x_i^2 - \frac{2}{n^2} \sum_{i < j} x_i x_j \right). \end{aligned} \quad (6)$$

Найдем математическое ожидание этой оценки

$$M[\tilde{D}] = \frac{n}{n-1} \left(\frac{n-1}{n^2} \sum_i M[x_i^2] - \frac{2}{n^2} \sum_{i < j} M[x_i x_j] \right). \quad (7)$$

Выберем начало отсчета x_i в точке m . Тогда $x_i = \overset{\circ}{x}_i$

$$\begin{aligned} M[x_i^2] &= M\left[\overset{\circ}{x}_i^2\right] = D, \\ M[x_i x_j] &= M\left[\overset{\circ}{x}_i \overset{\circ}{x}_j\right] = 0, \end{aligned} \quad (8)$$

где знак $\circ$ над x означает центрирование. Последнее равенство справедливо в силу независимости опытов.

Подставим (8) в (7), получим

$$M[\tilde{D}] = \frac{n}{n-1} \frac{n-1}{n^2} nD = D.$$

Таким образом, оценка (5) является несмещенной.
Из (5) следует

$$\tilde{D} = \frac{n}{n-1} \left(\frac{\sum_i x_i^2}{n} - \tilde{m}^2 \right).$$

Величина $\tilde{m}^2$ сходится по вероятности к m^2 . А $\sum_i \frac{x_i^2}{n}$ есть среднее арифметическое n наблюдаемых значений случайной величины x^2 . Поэтому $\sum_i \frac{x_i^2}{n}$ по вероятности сходится к $M[x^2] = \alpha_2[x]$. Тогда $\sum_i \frac{x_i^2}{n - \tilde{m}^2}$ сходится по вероятности к $\alpha_2[x] - m^2 = D$.

Так как множитель $\frac{n}{n-1} \rightarrow 1$ при $n \rightarrow \infty$, то $\tilde{D}$ также сходится по вероятности к D , то есть оценка $\tilde{D}$ является состоятельной.

Отметим, что оценка $\tilde{D}$ для дисперсии не является эффективной. Однако в случае нормального распределения она является асимптотически эффективной.

1.2. Оценка параметров по методу доверительных интервалов

Ниже рассматриваются точные методы оценки параметров случайной величины, подчиненной *нормальному закону* распределения. Основная идея этих методов состоит в том, что от исходной величины переходят к некоторой другой величине, распределение которой не зависит от параметров исходной случайной величины, а зависит только от вида ее закона распределения и числа измерений (объема выборки) n .

1.2.1. Определение доверительного интервала для дисперсии D

Воспользуемся известной из теории вероятностей теоремой: если x_i – независимые случайные величины, подчиняющиеся стандартному нормальному распределению ($M[x_i] = 0, D[x_i] = 1$), то случайная величина

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^n x_i^2 \tag{9}$$

подчиняется распределению χ^2 с n степенями свободы (n – число независимых случайных величин в сумме (9)).

Плотность распределения случайной величины χ^2 по закону с n степенями свободы определяется формулой

$$K_n(v) = \begin{cases} A_n v^{\frac{n}{2}-1} e^{-\frac{v}{2}} & \text{при } v > 0, \\ 0 & \text{при } v < 0, \end{cases} \quad (10)$$

где

$$A_n = 1 / 2^{\frac{n}{2}} \Gamma\left(\frac{n}{2}\right), \quad \Gamma(x) = \int_0^{\infty} u^{x-1} e^{-u} du$$

(для гамма-функции $\Gamma(x)$ имеются таблицы)

Можно показать, что для случайной величины, распределенной по закону χ^2 с n степенями свободы, справедливо:

$$M[v] = n, \quad D[v] = 2n. \quad (11)$$

Пусть x_i – нормально распределенные случайные величины и

$$\tilde{D} = \sigma^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \tilde{m})$$

несмещенная оценка дисперсии. Рассмотрим случайную величину

$$V = \frac{(n-1)\tilde{D}}{D} = \frac{(n-1)\tilde{\sigma}^2}{\sigma^2} = \frac{1}{\sigma^2} \sum_i (x_i - m)^2 = \sum_{i=1}^n \left(\frac{x_i - \tilde{m}}{\sigma} \right)^2.$$

Таким образом, V представляет собой сумму квадратов случайных величин $\frac{(x_i - \tilde{m})}{\sigma}$, распределенных по нормальному закону. При этом

$$M\left[\frac{x_i - \tilde{m}}{\sigma}\right] = \frac{1}{\sigma} (M[x_i] - M[\tilde{m}]) = \frac{1}{\sigma} (m - m) = 0,$$

$$D\left[\frac{x_i - \tilde{m}}{\sigma}\right] = \frac{1}{\sigma^2} D[x_i - \tilde{m}] = \frac{1}{\sigma^2} \sigma^2 = 1.$$

Однако среди этих n случайных величин независимых только $n-1$, так как

$$\sum_i \frac{x_i - \tilde{m}}{\sigma} = \frac{1}{\sigma} \sum_{i=1}^n (x_i - \tilde{m}) = \frac{1}{\sigma} \sum_{i=1}^n x_i - \frac{1}{\sigma} n\tilde{m} = \frac{1}{\sigma} \left(\sum_{i=1}^n x_i - n \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n} \right) = 0.$$

Поэтому случайная величина V представляет собой сумму квадратов $n-1$ случайных величин, удовлетворяющих условиям приведенной выше теоремы, и плотность ее распределения есть распределение χ^2 с $n-1$ степенями свободы.

Поэтому в соответствии с (11)

$$M\left[\frac{(n-1)\tilde{D}}{D}\right] = n-1,$$

а закон распределения V в соответствии с (10) имеет вид:

$$K_{n-1}(v) = \begin{cases} A_{n-1} v^{\frac{n-1}{2}-1} e^{-\frac{v}{2}}, & \text{при } v > 0, \\ 0 & \text{при } v < 0, \end{cases}$$

где

$$A_{n-1} = \frac{1}{2^{\frac{n-1}{2}}} \Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right).$$

Попутно отметим, что на этом примере очень четко иллюстрируется понятие числа степеней свободы. Группа законов распределения, таких как χ^2 -распределение, распределение Стьюдента и др., связана с понятием n независимых случайных величин. Если они зависимы, то к ним не применима выше рассмотренная теорема и на первый взгляд не подчиняются этим законам распределения. Но если можно точно выявить связь (как в вышерассмотренном примере), то всегда за счет уменьшения числа величин можно добиться их независимости. Для этого при наличии l связей следует выразить любые l случайных величин через остальные $n-l$. Тогда исходная величина может быть представлена не как сумма n зависимых, а как сумма $r=n-l$ независимых случайных величин, к которой можно применять теоремы, справедливые только для суммы *независимых* случайных величин.

Поскольку закон распределения V известен, то можно всегда найти доверительный интервал, в который попадает эта величина с вероятностью β . Трудности в построении этого интервала состоят в том, что χ^2 -распределение несимметрично (рис.1).

Поэтому условимся выбирать доверительный интервал I_β для V при равенстве вероятностей выхода V влево и вправо за этот интервал (это означает равенство заштрихованных на рис.1 площадей величине $\alpha = \frac{1-\beta}{2}$). Заметим, 2α – вероятность непопадания V в интервал I_β .

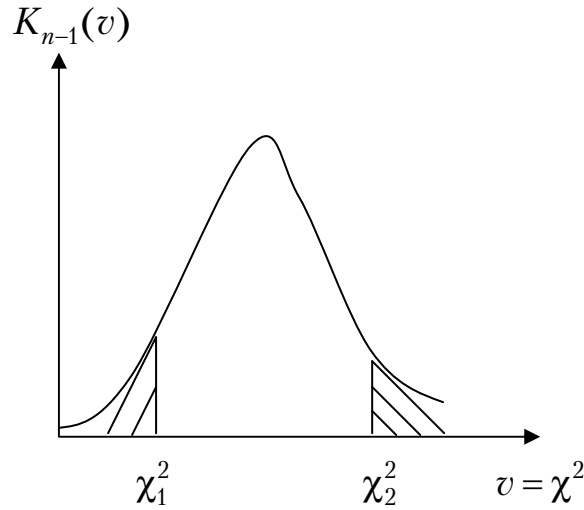


Рис. 1

Обычно в таблицах для случайных величин, распределенных по χ^2 -распределению, приводятся значения вероятности

$$p = P(V > \chi^2) = F(\chi^2).$$

Фрагмент такой таблицы приводится в приложении 1.

Для доверительного интервала $(v_1, v_2) = (\chi_1^2, \chi_2^2)$ должны иметь:

$$P(V < v_1) = \alpha,$$

$$P(V > v_2) = \alpha.$$

Но $P(V > v_1) = 1 - P(V < v_1)$.

Поэтому $v_1 = \chi_1^2$ и $v_2 = \chi_2^2$ определяется из условий:

$$1 - F(\chi_1^2) = \alpha,$$

$$F(\chi_2^2) = \alpha.$$

Доверительный интервал для $V = \frac{(n-1)\tilde{D}}{D}$ есть интервал

$$\chi_1^2 < V < \chi_2^2.$$

Откуда

$$\chi_1^2 < \frac{(n-1)\tilde{D}}{D} < \chi_2^2,$$

или

$$\frac{1}{\chi_2^2} < \frac{D}{(n-1)\tilde{D}} < \frac{1}{\chi_1^2},$$

или

$$\frac{\tilde{D}(n-1)}{\chi_2^2} < D < \frac{\tilde{D}(n-1)}{\chi_1^2}.$$

Таким образом, доверительный интервал для дисперсии D есть интервал

$$I_\beta = \left(\frac{\tilde{D}(n-1)}{\chi_2^2}, \frac{\tilde{D}(n-1)}{\chi_1^2} \right).$$

1.2.2. Определение доверительного интервала для математического ожидания m

Сначала рассмотрим случай, когда выборка объема n взята из совокупности с *нормальным распределением с известной дисперсией* $D = \sigma^2$.

Введем случайную величину

$$T = \frac{\tilde{m} - m}{\sigma / \sqrt{n}} \quad (12)$$

Для нее

$$M[T] = \frac{1}{\sigma / \sqrt{n}} (M[\tilde{m}] - m) = \frac{1}{\sigma \sqrt{n}} (m - m) = 0,$$

$$D[T] = \frac{1}{(\sigma / \sqrt{n})^2} (D[\tilde{m} - m]) = \frac{1}{(\sigma \sqrt{n})^2} \frac{\sigma^2}{n} = 1.$$

Таким образом, случайная величина T распределена по нормальному закону с нулевым математическим ожиданием и единичной дисперсией, то есть по стандартному нормальному распределению:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{t^2}{2}}.$$

Доверительный интервал для T определяется из условия

$$P(-t_\beta < T < t_\beta) = \beta, \quad (13)$$

или

$$P\left(-t_\beta < \frac{\tilde{m} - m}{\sigma / \sqrt{n}} < t_\beta\right) = \beta \quad (14)$$

Из (14) следует:

$$P\left(\tilde{m} - t_{\beta} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} < m < \tilde{m} + t_{\beta} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = \beta.$$

Но вероятность попадания нормально распределенной случайной величины T в интервал

$$-t_{\beta} < T < t_{\beta}$$

определяется по формуле

$$P(-t_{\beta} < T < t_{\beta}) = \Phi(t_{\beta}) - \Phi(-t_{\beta}) = 2\Phi(t_{\beta}).$$

Таким образом, в соответствии с (13) должны иметь

$$\beta = 2\Phi(t_{\beta}).$$

По этому соотношению, используя таблицы нормальной функции распределения $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt$ при заданном β , можно определить t_{β} и, наконец, доверительный интервал для математического ожидания m

$$I_{\beta} = \left(\tilde{m} - t_{\beta} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \tilde{m} + t_{\beta} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right). \quad (15)$$

Обычно полагают $\beta=0,95$. Этому значению β соответствует $t_{\beta} = 1,96$.

Таким образом, вычисление по выборке объема n из совокупности с нормальным распределением и известной дисперсией σ^2 выборочное среднее $\tilde{m}$ дает возможность с вероятностью 0,95 утверждать, что математическое ожидание совокупности будет лежать в интервале

$$\tilde{m} - 1,96 \frac{\sigma}{\sqrt{n}} < m < \tilde{m} + 1,96 \frac{\sigma}{\sqrt{n}}.$$

Рассмотрим далее случай, когда распределение случайной величины нормальное, но *дисперсия неизвестна*. В этом случае вместо σ^2 приходится использовать оценку дисперсии $\tilde{\sigma}^2$. Однако при этом величина

$$T = \frac{\tilde{m} - m}{\tilde{\sigma} / \sqrt{n}}$$

(сравни с (12)) уже не будет распределена по нормальному закону, а будет подчиняться закону распределения Стьюдента с $n-1$ степенями свободы.

Распределение Стьюдента задается дифференциальной функцией распределения

$$S_n(t) = B_n \left(1 + \frac{t^2}{n} \right)^{-\frac{n+1}{2}},$$

где

$$B_n = \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right) \sqrt{n\pi}}.$$

В соответствии с изложенным выше, случайная величина

$$T = \frac{\tilde{m} - m}{\tilde{\sigma} / \sqrt{n}}$$

подчиняется закону:

$$S_{n-1}(t) = B_{n-1} \left(1 + \frac{t^2}{n-1} \right)^{-\frac{n}{2}},$$

где

$$B_{n-1} = \frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{\sqrt{(n-1)\pi} \Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)}.$$

Эта функция симметричная и при $n \rightarrow \infty$ стремится к нормальному закону с нулевым математическим ожиданием и единичной дисперсией.

Доверительный интервал для $\tilde{m}$ должен удовлетворять условию

$$P(|\tilde{m} - m| < \varepsilon_\beta) = \beta.$$

Откуда

$$P\left(\frac{|\tilde{m} - m|}{\tilde{\sigma} / \sqrt{n}} < \frac{\varepsilon_\beta}{\tilde{\sigma} / \sqrt{n}}\right) = \beta,$$

или

$$P\left(|T| < \frac{\varepsilon_\beta}{\tilde{\sigma} / \sqrt{n}}\right) = \beta.$$

Введем

$$t_{\beta} = \frac{\varepsilon_{\beta}}{\tilde{\sigma}\sqrt{n}}.$$

Тогда доверительный интервал для T определяется из условия

$$P(|T| < t_{\beta}) = \beta = \int_{-t_{\beta}}^{t_{\beta}} S_{n-1}(t) dt.$$

В силу четности $S_{n-1}(t)$

$$\beta = 2 \int_0^{t_{\beta}} S_{n-1}(t) dt = \psi(t_{\beta}).$$

Если составить таблицу для функции, обратной к $\psi(x)$, то по значению β определяется t_{β} . Фрагмент этой таблицы приводится в прил. 2.

По найденному значению t_{β} определяется

$$\varepsilon_{\beta} = t_{\beta} \frac{\tilde{\sigma}}{\sqrt{n}}$$

и доверительный интервал для m

$$I_{\beta} = \left(\tilde{m} - t_{\beta} \frac{\tilde{\sigma}}{\sqrt{n}}, \tilde{m} + t_{\beta} \frac{\tilde{\sigma}}{\sqrt{n}} \right). \quad (16)$$

Пример. Чтобы решить вопрос о качестве нового ружья, проводится его пристрелка в тире, причем качество оценивается по величине дисперсии случайной величины X – расстояния от центра мишени до точки попадания. Распределение величины X близко к нормальному. По 20 выстрелам определены оценки $\tilde{m} = 0,1$ см и $\tilde{D} = 0,64$ см². Определить доверительные интервалы для m и D при доверительной вероятности 0,95.

Решение: $n=20$, $n-1=19$ и $\beta=0,95$ из таблиц распределения Стьюдента находим $t_{\beta} = 2,09$, откуда

$$\varepsilon_{\beta} = t_{\beta} \frac{\tilde{\sigma}}{\sqrt{n}} = 2,09 \frac{\sqrt{0,64}}{\sqrt{20}} \approx 0,37.$$

Доверительный интервал для m будет

$$I_{\beta}(\tilde{m} - \varepsilon_{\beta}, \tilde{m} + \varepsilon_{\beta}) = (-0,27; 0,47).$$

По таблице для χ^2 -распределения при $r=n-1=19$ находим:
для

$$F(\chi_2^2) = \alpha = \frac{1-0,95}{2} = 0,025 \quad \chi_2^2 = 33,1;$$

для

$$1 - F(\chi_1^2) = \alpha = 0,025 \quad \chi_1^2 = 8,83.$$

Доверительный интервал для D будет

$$I_\beta = \left(\frac{\tilde{D}(n-1)}{\chi_2^2}, \frac{\tilde{D}(n-1)}{\chi_1^2} \right) = (0,37; 1,38).$$

2. ПРОВЕРКА СТАТИСТИЧЕСКИХ ГИПОТЕЗ

Теория оценок имеет дело с числовыми оценками. Но не менее важно *определение законов распределения случайных величин*. Этим вопросом занимается другой раздел *математической статистики*, называемый *проверкой статистических гипотез*.

Под *статистической гипотезой* понимается любое предложение о законе распределения наблюдаемых случайных величин или о параметрах известных распределений. Теория проверки статистических гипотез устанавливает количественные параметры оценки точности данной гипотезы и предлагает методы и правила (называемые *критериями проверки статистических гипотез*) выбора *наилучшей в определенном смысле гипотезы*. По существу здесь рассматриваются *правила оптимального поведения и управления в условиях статистической неопределенности*. Так, например, при исследовании строительных и иных конструкций широкое распространение получили методы неразрушающего контроля, которые с какой-то вероятностью позволяют судить об их качестве. Здесь возможны *два рода ошибок*. Если некачественное изделие будет признано качественным, то такая ошибка (*первого рода*) нанесет больший ущерб, чем признание качественного изделия некачественным (*ошибка второго рода*). Или в радиолокации обнаружение и распознавание сигнала, отраженного от истинной цели, не может быть выполнено точно из-за наличия шумов в приемном устройстве, радиопомех и ложных целей, организуемых противником. Возникает необходимость выработать правила, которые бы оптимальным образом позволили определять наличие цели, при определенных

гипотезах о законах распределения истинных сигналов цели и помех. Если истинная цель классифицируется как шум (или как ложная цель), то вес такой ошибки (первого рода) велик, и ее вероятность следует свести к минимуму. Если же ложная цель или помеха принимается за истинную цель, то такая ошибка (второго рода) обычно приносит меньший вред и обладает меньшим весом.

Часто встречается задача, в которой требуется ответить на вопрос: *влияет или не влияет некоторый фактор на характер случайной величины X* . К такому типу задач относятся задачи по оценке эффективности новой технологии производства строительных материалов, уменьшения процента брака при изменении в технологии и т.д.

Указанные задачи решаются методами теории проверки статистических гипотез. Остановимся лишь на рассмотрении так называемых *критериев согласия*, с помощью которых определяют *качество согласования гипотетического теоретического закона распределения случайной величины с экспериментальными данными*.

Пусть данное статистическое распределение выровнено с помощью некоторой теоретической кривой $f(x)$. Возникает вопрос: чем объясняются расхождения между $f(x)$ и статистическим распределением? Объясняются ли эти расхождения только случайными обстоятельствами, связанными с ограниченным числом наблюдений, или они являются существенными и связаны с тем, что подобранная кривая $f(x)$ плохо выравнивает данное статистическое распределение?

Возникает также вопрос, каким способом следует выбирать *меру расхождения между гипотетической теоретической и статистической распределениями*.

Рассмотрим наиболее часто применяемый критерий согласия, так называемый «*критерий χ^2* » К.Пирсона.

Здесь в качестве *меры расхождения между теоретическим и статистическим распределениями* применяется

$$U = \sum_{i=1}^k c_i (\hat{p}_i - p_i)^2,$$

где $\hat{p}_i$ – статистическая вероятность попадания случайной величины в интервал $[x_i, x_{i+1}]$; k – количество разрядов (интервалов); p_i – вероятность попадания в i -й разряд случайной величины, распределенной по гипотетическому теоретическому закону; c_i – весовые коэффициенты. Коэффициенты c_i вводятся в связи с тем, что в общем случае откло-

нения $(\dot{p}_i - p_i)$, относящиеся к различным разрядам, обладают неодинаковой значимостью (одно и тоже по модулю отклонение $(\dot{p}_i - p_i)$ может быть мало значительным, если сама вероятность велика, и очень заметным, если она мала). Естественно c_i принять обратно пропорциональными вероятностям разрядов p_i , например,

$$c_i = \frac{n}{p_i},$$

где n – число наблюдаемых значений случайной величины X .

При таком выборе c_i

$$U = n \sum_{i=1}^k \frac{(\dot{p}_i - p_i)^2}{p_i}.$$

В различных опытах U принимает различные, заранее не известные значения, то есть является случайной величиной. Можно показать, что при $n \rightarrow \infty$ она подчиняется χ^2 -распределению с $r = k - 1 - s$ степенями свободы (s – число параметров предполагаемого распределения, которые оценены по данным выборки; если предполагаемое распределение – нормальное, то оцениваются два параметра: математическое ожидание и среднее квадратическое отклонение и $r = k - 1 - 2 = k - 3$).

Пусть значение U , вычисленное по экспериментальным значениям $\dot{p}_i$, а также значениям p_i , рассчитанным по теоретическому распределению $f(x)$, равно χ_1^2 , и $p = P(U > \chi_1^2)$. – вероятность того, что случайная величина U превзойдет это значение.

Пусть X действительно распределена по закону $f(x)$. Вероятность p есть вероятность того, что за счет чисто случайных причин мера расхождения теоретического и статистического распределений будет не меньше, чем фактически наблюдаемое в данной серии опытов значение χ_1^2 . Если эта вероятность достаточно велика, то результат опыта можно считать не противоречащим гипотезе о том, что закон распределения величины X есть $f(x)$ (это не является доказательством справедливости распределения X по закону $f(x)$).

Таким образом, схема применения критерия согласия К.Пирсона к оценке согласованности теоретического и статистического распределений сводится к следующему:

- определяется значение $U = \chi_1^2$;

- определяется число степеней свободы r ;
- по r и χ_1^2 определяется $p = P(\chi^2 > \chi_1^2)$.

Если p мала, то гипотеза о распределении X по закону $f(x)$ отбрасывается как неправдоподобная. Если p велика, то эту гипотезу можно признать не противоречащей опытными данным.

На практике рекомендуется иметь в каждом разряде не менее 5-10 наблюдений, количество разрядов также не должно быть меньше 5-10.

Пример. Результаты измерений отклонения X контролируемого размера изделия от номинала сведены в статистический ряд.

I_i	(-4;-3)	(-3;-2)	(-2;-)	(-1;0)	(0;1)	(1;2)	(2;3)	(3;4)
m_i	6	23	72	133	120	88	46	10
$\hat{p}_i$	0,012	0,050	0,144	0,266	0,240	0,176	0,092	0,020

Определим закон распределения X (I_i – интервалы значений ошибки в десятых долях мм; m_i – число наблюдений в данном интервале; $\hat{p}_i$ – соответствующие частоты).

Известно, что отклонения размеров изделий от номинала при постоянной технологии их изготовления, как правило, подчиняются нормальному закону распределения. Поэтому в качестве гипотетического распределения примем нормальное.

Нормальный закон определяется значениями m и σ . Выберем эти параметры так, чтобы выполнялись условия

$$m = \hat{m}; \quad \sigma^2 = \hat{D},$$

где $\hat{m}$ – статистическое среднее (за представителя каждого разряда примем его середину $\tilde{x}_i$); $\hat{D}$ – статистическая дисперсия.

$$\hat{m} = -3,5 \cdot 0,012 - 2,5 \cdot 0,050 - 1,5 \cdot 0,144 - 0,5 \cdot 0,266 + 0,5 \cdot 0,240 + 1,5 \cdot 0,176 + 2,5 \cdot 0,092 + 3,5 \cdot 0,020 = 0,168$$

Имеем

$$\hat{D} = \sum_{i=1}^k (\tilde{x}_i - \hat{m})^2 p_i = 2,098; \quad \sigma = 1,448.$$

Таким образом, гипотетический нормальный закон имеет вид

$$f(x) = \frac{1}{1,448\sqrt{2\pi}} e^{-(x-0,168)^2/2,448^2}.$$

С целью проверки согласованности теоретического и статистического распределений используем χ^2 – критерий К.Пирсона.

Определим теоретические вероятности попадания X в разряды

$$P_i = \Phi\left(\frac{x_{i+1} - m}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{x_i - m}{\sigma}\right),$$

где x_i, x_{i+1} – границы i -го разряда.

Результаты занесем в таблицу

I_i	(-4;-3)	(-3;-2)	(-2;-1)	(-1;0)	(0;1)	(1;2)	(2;3)	(3;4)
p_i	0,012	0,052	0,142	0,244	0,264	0,181	0,076	0,021
$\acute{p}_i$	0,012	0,050	0,144	0,266	0,240	0,176	0,092	0,020

Определим меру расхождения

$$\chi^2_1 = \sum_{i=1}^8 \frac{(\acute{p}_i - p_i)^2}{p_i} = 3,94,$$

число степеней свободы

$$r = 8 - 3 = 5.$$

По таблице для $r=5$ найдем

$$P(\chi^2 > 3) = 0,70,$$

$$P(\chi^2 > 4,35) = 0,50.$$

Тогда

$$p = P(\chi^2 > 3,94) \approx 0,70 - \frac{0,70 - 0,50}{4,35 - 3} \cdot (3,94 - 3) \approx 0,56.$$

Эта вероятность не является малой, поэтому гипотезу о том, что X распределена по нормальному закону, можно считать правдоподобной.

3. ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ

Задача 1. Произведено 20 испытаний на прочность железобетонного изделия. Результаты испытаний приводятся в таблице:

Номер опыта	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
R_{np}^n , кг/см ²	190	210	201	195	200	201	215	198	199	213
Номер опыта	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
R_{np}^n , кг/см ²	198	201	199	205	199	210	207	218	200	200

Требуется найти оценку $\tilde{m}$, $\tilde{D}$ для математического ожидания m и дисперсии D величины R_{np}^n и построить для них доверительные интервалы, соответствующие доверительной вероятности $\beta = 0,95$.

Предполагается, что R_{np}^n распределена по закону, близкому к нормальному.

Задача 2. Испытания деталей на срок их службы (в циклах) дали результаты, приведенные в таблице:

Срок службы	(30;40)	(40;50)	(50;60)	(60;70)	(70;80)	(80;90)	(90;100)	(100;110)
m_i	1	8	18	33	40	52	29	14

Требуется:

1. Установить теоретический закон распределения срока службы и найти его параметры.

2. Написать выражения для плотности вероятности.

3. Пользуясь χ^2 -критерием, установить, согласуются ли данные испытаний с гипотезой распределении случайной величины по избранному теоретическому закону.

Задача 3. Ошибки 500 результатов измерений дальности (м) до цели радиодальномером приведены в таблице:

I_i	(-25;-15)	(-15;-5)	(-5;5)	(5;15)	(15;25)
m_i	50	130	200	100	20

Требуется:

1. Построить гистограмму.
2. Аппроксимировать выборочное распределение с помощью нормального закона.
3. Пользуясь критерием согласия χ^2 с уровнем значимости $\alpha = 0,01$, проверить согласованность теоретического и эмпирического распределений.

Задача 4. Проведено 10 независимых измерений случайной величины X , подчиненной нормальному закону с неизвестными параметрами m, σ . Результаты измерений представлены в таблице:

Номер измерения	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Результат измерения	2,5	2	-2,3	1,9	-2,1	2,4	2,3	-2,5	1,5	-1,7

Найти оценку $\hat{m}$ для математического ожидания и построить доверительный интервал, соответствующий доверительной вероятности $\beta = 0,95$.

Задача 5. Произведена выборка объемом $n = 100$ из большой партии однотипных деталей. Средний срок службы детали оказался 50 лет. С надежностью 0,95 найти доверительный интервал для среднего срока службы детали во всей партии, если среднее квадратическое отклонение срока службы составляет 1,5 года.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Вентцель, Е.С. Теория вероятностей и ее инженерные приложения [Текст] / Е.С. Вентцель. – М.: Академия, 2010. – 464 с.
2. Данилов, А.М. Теория вероятностей и математическая статистика с инженерными приложениями [Текст] / А.М. Данилов, И.А. Гарькина. – Пенза: ПГУАС, 2010. – 228 с.
3. Гарькина, И.А. Теория вероятностей и математическая статистика [Текст]: учеб. пособие / И.А. Гарькина, А.М. Данилов, Г.Д. Фадеева. – 2-е изд., стер. – Пенза: ПГУАС, 2010. – 176 с.
4. Данилов, А.М. Математическое и компьютерное моделирование сложных систем [Текст] / А.М. Данилов, И.А. Гарькина, Э.Р. Домке. – Пенза: ПГУАС, 2011. – 296 с.
5. Чашкин, Ю.Р. Математическая статистика. Анализ и обработка данных [Текст] / Ю.Р. Чашкин. – М.: Феникс, 2010. – 240 с.

Приложение 1

Значения χ^2 в зависимости от r и $p = P(V < \chi^2)$

	1	3	5	10	15	20	25	30
0,98	0,001	0,185	0,752	3,06	5,98	9,24	12,7	16,3
0,95	0,004	0,352	1,145	3,94	7,26	10,85	14,61	18,49
0,05	3,84	7,82	11,07	18,31	25,0	31,4	17,7	43,8
0,02	5,41	9,84	13,39	21,2	28,3	35,0	41,7	48,0

Приложение 2

Значения t_β , удовлетворяющие равенству $2 \int_0^{t_\beta} S_{n-1}(t) dt = \beta = 0,95$ в зависимости от $n-1$

$n-1$	1	3	5	10	15	20	25	30	40	∞
t_β	12,71	3,18	2,57	2,23	2,13	2,09	2,06	2,04	2,02	1,98

ОГЛАВЛЕНИЕ

1. ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ОЦЕНОК	3
1.1. Точечные оценки математического ожидания и дисперсии.....	5
1.2. Оценка параметров по методу доверительных интервалов.....	7
1.2.1. Определение доверительного интервала для дисперсии D	7
1.2.2. Определение доверительного интервала для математического ожидания m	11
2. ПРОВЕРКА СТАТИСТИЧЕСКИХ ГИПОТЕЗ	15
3. ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ.....	20
БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК	22
Приложение 1.....	23
Приложение 2.....	23

Учебное издание

Данилов Александр Максимович

Гарькина Ирина Александровна

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ:

ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ОЦЕНОК
И ПРОВЕРКИ СТАТИСТИЧЕСКИХ ГИПОТЕЗ

Методические указания
по выполнению практических занятий

Под общ. ред. д-ра техн. наук, проф. Ю.П. Скачкова

Редактор М.А. Сухова

Верстка Н.А. Сазонова

Подписано в печать 2.07.14. Формат 60×84/16.

Бумага офисная «Снегурочка». Печать на ризографе.

Усл. печ.л. 1,4. Уч.-изд.л. 1,5. Тираж 80 экз.

Заказ № 239.

Издательство ПГУАС.

440028, г.Пенза, ул. Германа Титова, 28.