МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«Пензенский государственный университет
архитектуры и строительства»
(ПГУАС)

М.Б. Зайцев

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА
Сборник олимпиадных задач
Часть II. Кинематика

Рекомендовано Учебно-методическим объединением
вузов РФ по образованию в области строительства
в качестве учебного пособия для студентов,
обучающихся по программе бакалавриата
по направлению 08.03.01 (270800) «Строительство»

Пенза 2015

УДК 531.1 (075.8)
ББК 22.21 я73
З-17

Рецензенты: кафедра теоретической и прикладной механики Пензенского государственного университета (зав. кафедрой доктор технических наук, профессор В.В. Смогунов);
доктор технических наук, профессор И.А. Прошин (ПГТУ)

Зайцев М.Б.
З-17 Теоретическая механика. Сборник олимпиадных задач. Ч.II. Кинематика: учеб. пособие / М.Б. Зайцев. – Пенза: ПГУАС, 2015. – 92 с.
ISBN 978-5-9282-1302-2

Содержатся задачи по теоретической механике по разделу «Кинематика». Приводятся ответы к их решению.

Учебное пособие подготовлено на кафедре механики ПГУАС и предназначено для студентов, обучающихся по программе бакалавриата по направлению 08.03.01 (270800) «Строительство», углубленно изучающих теоретическую механику. Данное пособие можно использовать при подготовке к олимпиадам по теоретической механике различного уровня.

ISBN 978-5-9282-1302-2

ПРЕДИСЛОВИЕ

На кафедре «Механика» Пензенского государственного университета архитектуры и строительства из года в год ведется работа по подготовке студенческих команд для участия в предметных олимпиадах различного уровня. На внутривузовских олимпиадах выявляются наиболее способные и талантливые студенты, обычно призеры университетских конкурсов, с которыми в дальнейшем проводятся дополнительные занятия по решению задач повышенной трудности.

Участникам олимпиад предлагаются обычно нестандартные задачи, для решения которых требуются не только твердые знания, но и оригинальность мышления.

Олимпиадное движение в деле организации научно-исследовательской работы студентов, несомненно, является одним из ключевых компонентов.

Участие студентов в предметных олимпиадах способствует более глубокому усвоению дисциплин и формирует способность их к творческому освоению.

В данном учебном пособии содержится более 180 задач по теоретической механике раздела «Кинематика». Многие из этих задач выдавались студентам в качестве конкурсных на различных университетских и региональных олимпиадах. Отдельные задачи заимствованы из работ, приведенных в списке литературы, часть из них составлена автором.

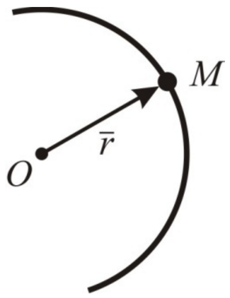
Настоящее пособие предназначено для студентов, углубленно изучающих теоретическую механику. Оно является тренировочным материалом для подготовки к олимпиадам по теоретической механике различного уровня.

Автор признателен ведущему инженеру-программисту Компьютерного центра ИСИ Раевской Г.А. за помощь в оформлении данного пособия.

1. КИНЕМАТИКА ТОЧКИ

1.1. Задачи о движении точки

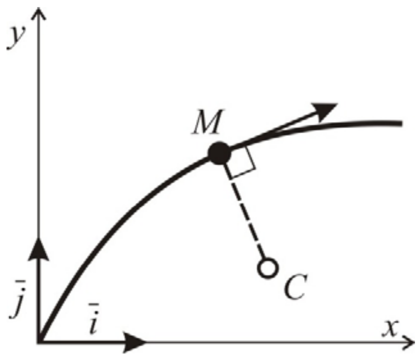
Задача К1



Точка движется в плоскости таким образом, что составляющая ее скорости, перпендикулярная к радиусу-вектору OM, обратно пропорциональна величине этого вектора. Доказать, что ускорение точки M направлено вдоль OM.

Задача К2

Тело движется со скоростью $\bar{v} = 2t\bar{i} + 3\bar{j}$, где $\bar{i}$ и $\bar{j}$ – орты координатных осей. Найти скорость и ускорение центра кривизны траектории движущейся точки по отношению к указанной системе координат.



Задача К3

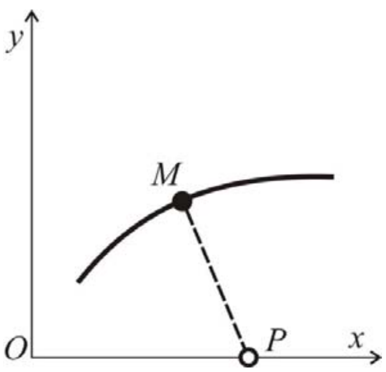
Точка движется в соответствии с уравнениями:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -2y; \\ \dfrac{dy}{dt} = 8x. \end{cases}$$

При t=0 координаты точки x_0=0; y_0=4 см.

Определить зависимости скорости и ускорения точки от времени.

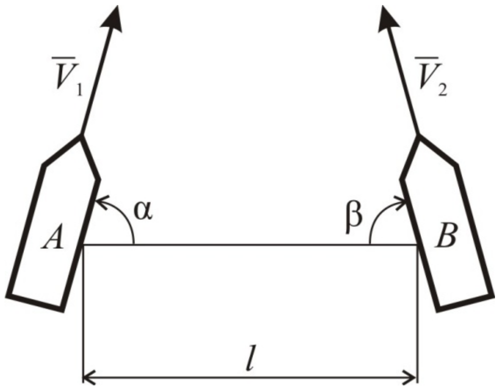
Задача К4



Движение точки M задано уравнениями $x = t - \sin t$, $y = 1 - \cos t$. Найти радиус кривизны траектории точки и доказать, что ρ=2 PM, если OP=t.

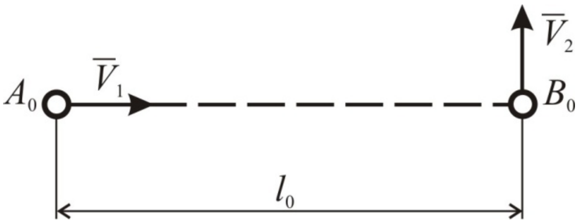
Задача К5

Два судна A и B, расстояние между которыми в начальный момент времени равно l, движутся пересекающимися курсами с постоянными скоростями V_1 и V_2 соответственно. Направления скоростей составляют углы α и β с прямой AB, на которой находятся суда в начальный момент времени. Найти наименьшее расстояние между судами при их движении.



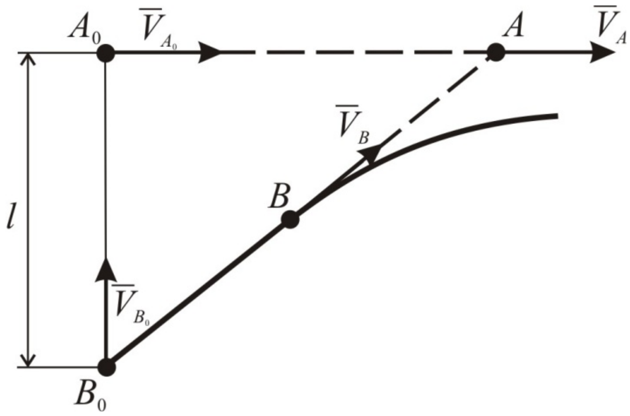
Задача К6

Две точки A и B движутся по прямым, расположенным в одной плоскости, с постоянным скоростями V_1 и V_2. В начальный момент времени расстояние между точками равно l_0, направления скоростей указаны на чертеже. Определить кратчайшее расстояние между точками A и B.

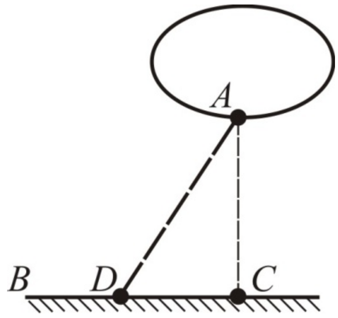


Задача К7

Точки A и B движутся в плоскости рисунка с постоянными скоростями V и $2V$, соответственно. Точка A движется прямолинейно, а скорость точки B в каждый момент времени направлена в точку A. Определить путь, пройденный точкой A до встречи с точкой B, если в начальный момент времени расстояние $A_0B_0=l$, а скорости V_A и V_B взаимно перпендикулярны.



Задача К8

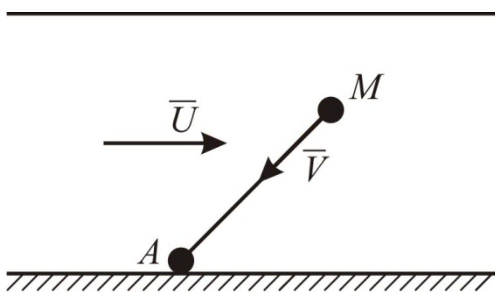


Человек получил задание в кратчайшее время добраться из пункта A, находящегося на острове, в пункт B на берегу, причем остров находится на расстоянии $10\sqrt{3}$ км от берега. В каком месте C человек должен пересесть с катера в автомобиль, если скорость автомобиля 72 км/ч, а катера 36 км/ч?

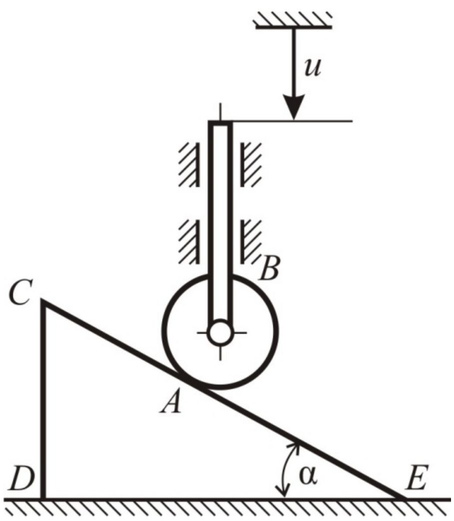
Задача К9

Лодку, уносимую течением реки, подтягивают к берегу веревкой с постоянной скоростью V. Определить уравнение траектории лодки, принимая ее за материальную точку, если скорость течения реки U, длина веревки была перпендикулярна к берегу.

Указание: при решении задачи удобно использовать полярную систему координат.



Задача К10

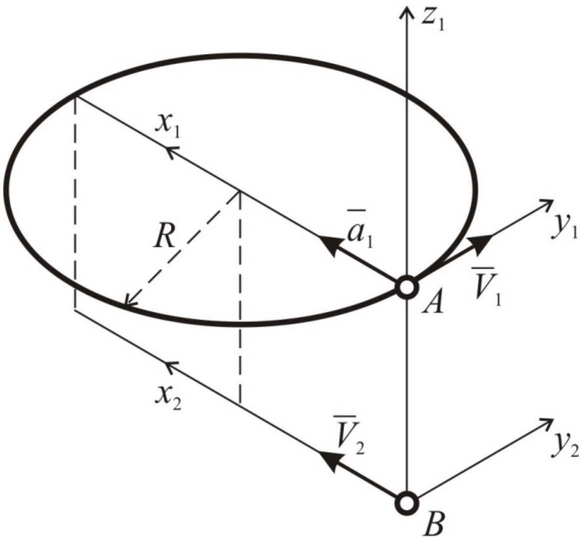


Стержень B движется в вертикальных направляющих по закону $u(t)=bt^3$ и надавливает нижним концом на призму CDE. Найти скорость и ускорение призмы, если угол CED равен α. В начальный момент времени ($t=0$) $CA=AE$. Нижний ролик стержня B считать пренебрежимо малым.

Задача К11

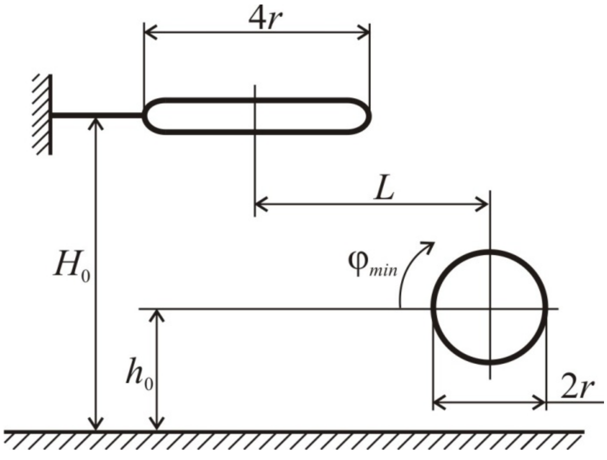
Автомобиль A двигается с постоянной скоростью V_1 по кольцевой дороге радиусом R. Другой автомобиль B движется по радиальной автотрассе с постоянным ускорением a_2. В тот момент, когда автомобиль A проезжает над шоссе, под ним проезжает автомобиль B со скоростью V_2.

Определить, каковы в этот момент относительные скорости и ускорения автомобилей (относительно подвижных систем координат $Ax_1y_1z_1$ и $Bx_2y_2z_2$).



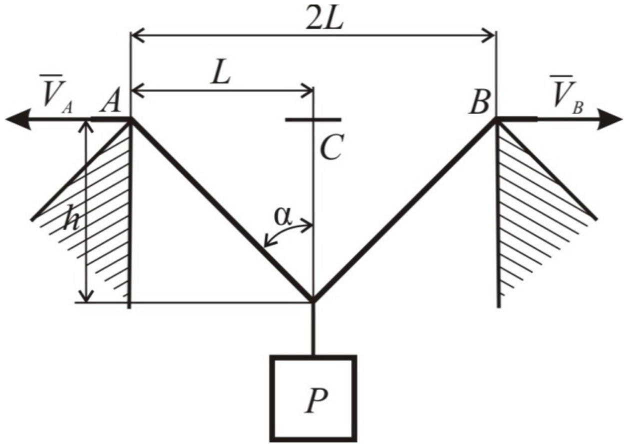
Задача К12

Под каким наименьшим углом к горизонту φ_{min} следует бросить баскетбольный мяч, чтобы он пролетел сверху сквозь кольцо, не ударившись в него. Толщиной кольца, изменением скорости мяча за время пролета через кольцо и сопротивлением воздуха пренебречь.



Задача К13

Груз P поднимается с помощью двух тросов, движущихся в противоположных направлениях с одинаковыми скоростями $(\overline{V}_A = -\overline{V}_B)$. Определить скорость и ускорение груза.



1.2. Примеры решения задач к гл. 1

Решение задачи К2

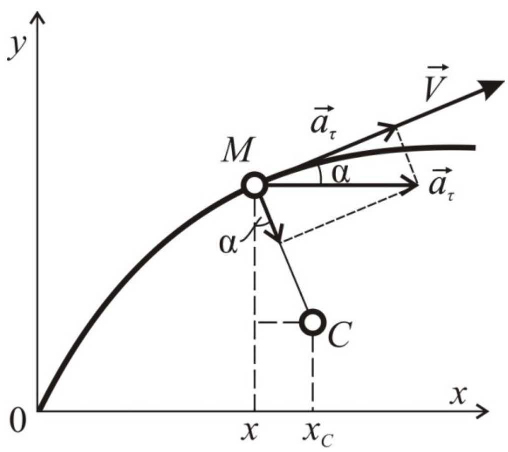
$\dot{x} = 2t;\ \dot{y} = 3;$

$x = t^2 + C_1;\ y = 3t + C_2,$

при t=0 x_0=0, y_0=0, тогда C_1=0, C_2=0 и окончательно $x=t^2$; $y=3t$, траектория $y = \pm 3\sqrt{x}$ есть парабола.

Модуль скорости $V = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} = \sqrt{4t^2 + 9}$ (м/с).

Ускорения $\ddot{x} = 2,\ \ddot{y} = 0,\ a = \sqrt{\ddot{x}^2 + \ddot{y}^2} = 2$ (м/с^2);



$$a_\tau = \frac{dV}{dt} = \frac{4t}{\sqrt{4t^2 + 9}};$$

$$a_n^2 = a^2 - a_\tau^2 = \frac{36}{4t^2 + 9};$$

$$a_n = \frac{6}{\sqrt{4t^2 + 9}}.$$

Радиус кривизны

$$\rho = \frac{V^2}{a_n} = \frac{1}{6}(4t^2 + 9)^{3/2}.$$

Из рисунка: $x_C = x + \rho\sin\alpha,\ y_C = y - \rho\cos\alpha,\ \sin\alpha = \dfrac{a_n}{a},\ \cos\alpha = \dfrac{a_\tau}{a}.$

Тогда $x_C = t^2 + \dfrac{1}{2}(4t^2+9),\ y_C = 3t - \dfrac{t}{3}(4t^2+9);$

$\dot{x}_C = 2t + 4t = 6t,\ \dot{y}_C = -4t^2;\ V_C = \sqrt{\dot{x}_C^2 + \dot{y}_C^2} = 2t\sqrt{4t^2+9};$

$\ddot{x}_C = 6,\ \ddot{y}_C = -8t;\ a_C = \sqrt{\ddot{x}_C^2 + \ddot{y}_C^2} = 2\sqrt{16t^2+9}.$

Ответ:

$V_C = 2t\sqrt{4t^2+9},\ a_C = 2\sqrt{16t^2+9}.$

Решение задачи К3

Продифференцируем уравнение заданной системы:

$\dfrac{d^2x}{dt^2} = -2\dfrac{dy}{dt},\ \dfrac{d^2y}{dt^2} = 8\dfrac{dx}{dt}.$

Т.к. $\dfrac{dy}{dt} = 8x$, то $\dfrac{d^2x}{dt^2} = -16x;$

Т.к. $\dfrac{dx}{dt} = -2y$, то $\dfrac{d^2y}{dt^2} = -16y.$

Окончательно получим:

$$\left.\begin{aligned} \frac{d^2x}{dt^2} + 16x = 0 \\ \frac{d^2y}{dt^2} + 16y = 0 \end{aligned}\right\} \qquad (*)$$

Решение 1-го уравнения системы (*) имеет вид:

$$C_1\sin 4t + C_2\cos 4t;$$

$$V_x = \frac{dx}{dt} = 4C_1\cos 4t - 4C_2\sin 4t.$$

При $t = 0 \quad x = x_0 \Rightarrow C_2 = 0;$

$$V_x = 4C_1 = -2y_0 = -8;\ \Rightarrow C_1 = -2;$$

$$V_x = -8\cos 4t;\quad a_x = \frac{dV_x}{dt} = 32\sin 4t;$$

Решение 2-го уравнения системы (*) имеет вид:

$$y = C_3 \sin 4t + C_4 \cos 4t;$$

$$V_y = \frac{dy}{dt} = 4C_3 \cos 4t - 4C_4 \sin 4t.$$

При $t = 0 \quad y = y_0 = 4 \Rightarrow C_4 = 4;\ V_y = 4C_3 = 0 \Rightarrow C_3 = 0;$

$$V_y = -16 \sin 4t; \quad a_y = \frac{dV_y}{dt} = -64 \cos 4t;$$

$$V = \sqrt{64 \cos^2 4t + 256 \sin^2 4t} = 8\sqrt{\cos^2 4t + 4 \sin^2 4t};$$

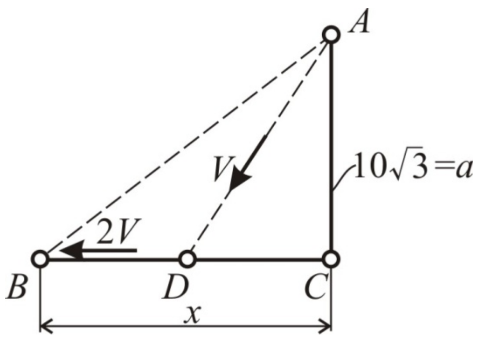
$$a = \sqrt{1024 \sin^2 4t + 4096 \cos^2 4t} = 32\sqrt{\sin^2 4t + 4 \cos^2 4t};$$

Ответ:

$V = 8\sqrt{\cos^2 4t + 4 \sin^2 4t}; \quad a = 32\sqrt{\sin^2 4t + 4\cos^2 4t}.$

Решение задачи К8

Обозначим $\begin{cases} BC = x \\ \dfrac{DC}{BC} = \xi \end{cases}$, $DC = \xi \cdot x \quad \xi - ?$



Тогда $\begin{cases} AD = \sqrt{a^2 + (\xi\, x)^2} \\ BD = x \cdot (1 - \xi) \end{cases}$,

следовательно, $t = t_1 + t_2 = \dfrac{AD}{V} + \dfrac{BD}{2V}$.

$$t = \frac{1}{V} \cdot \left(\left(a^2 + (\xi\, x)^2 \right)^{1/2} + \frac{x}{2}(1 - \xi) \right).$$

Т.к. $t = t(\xi)$, то $t = t_{\min}$ при $t'_\xi = 0$

$$t'_\xi = \frac{1}{V} \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{a^2 + (\xi\, x)^2}} \cdot (0 + 2(\xi\, x) + \frac{x}{2}(0 - 1) \right) = 0$$

$$\frac{2\xi \cdot x^2}{\sqrt{a^2 + (\xi\, x)}} - x = 0,\ 2\xi\, x = \sqrt{a^2 + (\xi\, x)^2}, \quad 4(\xi\, x)^2 = a^2 + (\xi\, x)^2,\ 3(\xi\, x)^2 = a^2,$$

$$\xi\, x = \frac{a}{\sqrt{3}}, \quad \xi = \frac{1}{x} \cdot \frac{10\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{10}{x}.$$

Ответ: $DC = \xi\, x = 10$ км.

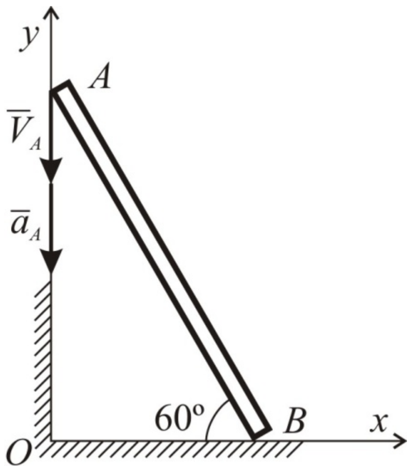
2. ПЛОСКОЕ ДВИЖЕНИЕ

2.1. Плоское движение стержневых систем

Задача К14

Найти ускорение середины стержня AB, если известны величины ускорений его концов a_A =10 см/с^2, a_B = 20 см/с^2 и углы, образованные ускорениями с прямой AB, α= 10°; β= 70°.

Задача К15

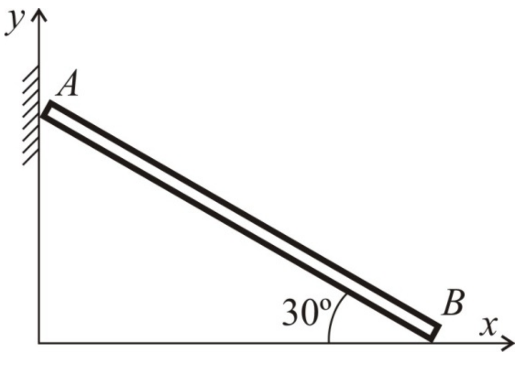


Конец A стержня AB длины l скользит по оси y, а конец B – по оси x. В положении, указанном на рисунке, скорость и ускорение конца A равны $V_A = u,\ a_A = 2u^2\sqrt{3}\,/\,l$.

Определить для этого положения точку M на стержне, ускорение которой будет наименьшим. Определить ускорение этой точки.

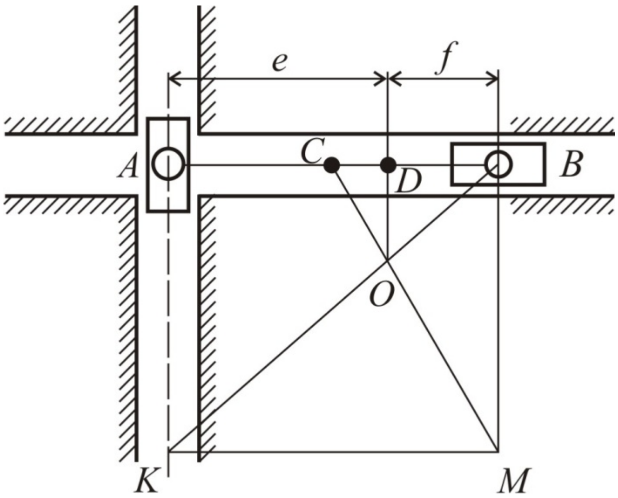
Задача К16

Конец A стержня AB скользит по оси y, а конец B – по оси x. В момент, когда $\angle OBA$=30°, ускорение середины стержня направлено вдоль стержня и равно a. Определить для этого момента времени ускорение концов стержня a_A и a_B.



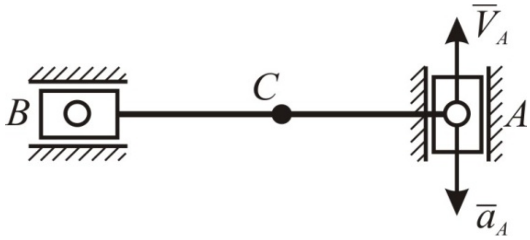
Задача К17

В плоском механизме, называемом линейкой эллипсографа, ползуны A и B перемещаются по взаимно перпендикулярным направляющим пазам. В частном положении механизма из центров ползунов откладываются произвольные отрезки BM=AK и проводятся остальные линии, как показано на рисунке. Доказать, что точка C является центром кривизны эллипса, описываемого точкой D в положении, показанном на рисунке. Отрезок AB делится точкой D на неравные отрезки e и f.



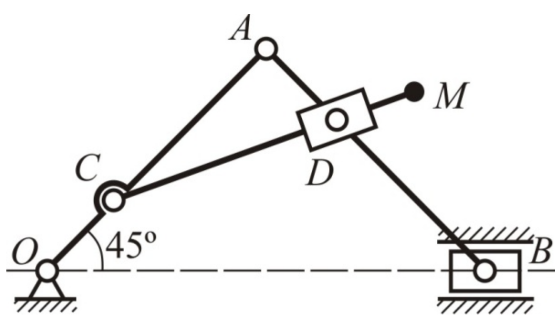
Задача К18

Стержень AB шарнирно соединен с ползунами A и B, которые в свою очередь могут перемещаться в горизонтальной и вертикальной направляющих. Длина стержня l=2 м, а точка C находится в его середине. Найти в указанном положении механизма нормальное ускорение точки C, если известны V_A=1м/с; a_A=2м/с.



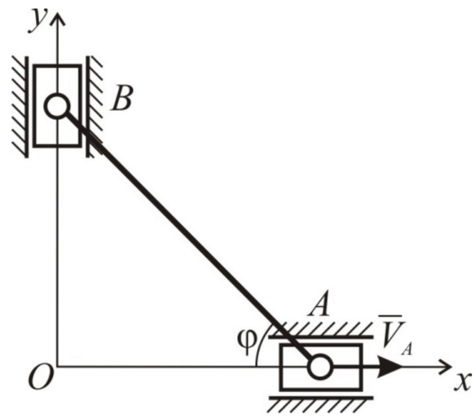
Задача К19

В изображенном на рисунке механизме $OC=AD=l$, $OA=AB=CM=3l$. Кривошип OA вращается с постоянной угловой скоростью ω. Для указанного на рисунке положения определить скорость точки M.

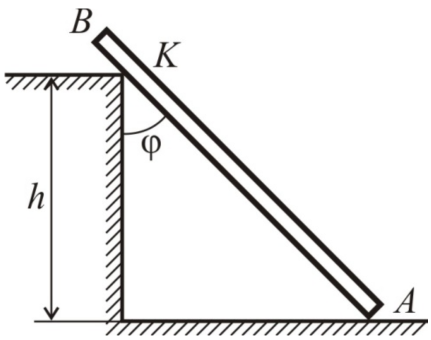


Задача К20

Стержень AB длиной l=1 м движется своими концами A и B вдоль координатных осей, при этом скорость конца равна V_A=const=2 м/с. Определить в момент времени, когда φ=30º, ускорение точки M стержня, скорость которой численно равна скорости точки A.



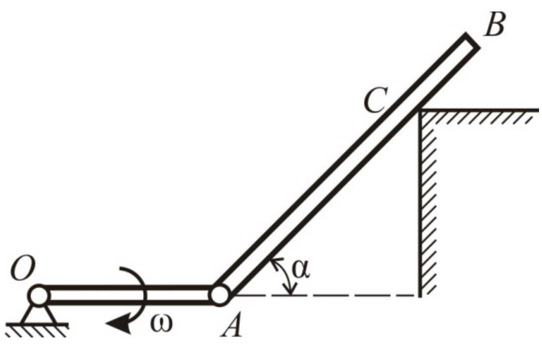
Задача К21



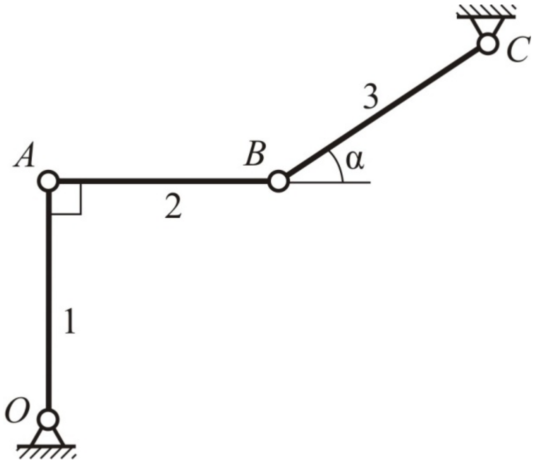
Конец A стержня AB движется по горизонтальной направляющей. Стержень опирается на выступ высотой h. Угловая скорость стержня постоянна и равна ω. Определить скорость и ускорение точки K стержня при φ=45º.

Задача К22

Плоский механизм состоит из кривошипа OA длиной l, вращающегося с постоянной угловой скоростью ω, и шарнирно скрепленного с ним стержня AB длиной $2l\sqrt{2}$, который промежуточной точкой скользит по выступу C. В положении, указанном на чертеже (α=45º, AC=BC), определить ускорение точки B.



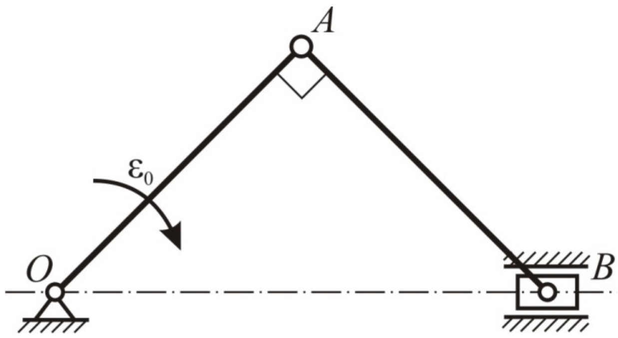
Задача К23



В плоском механизме длины звеньев одинаковы и равны l. Для положения, указанного на чертеже, известны угловая скорость ω_1 первого звена и угловое ускорение ε_3 третьего звена. Определить ε_1 и ω_3.

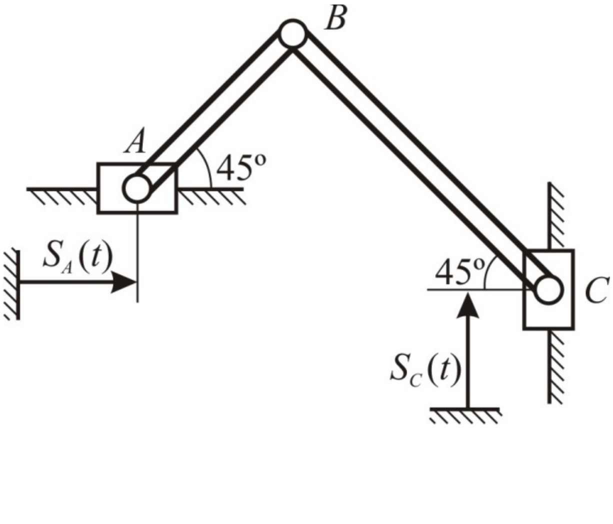
Задача К24

В кривошипно-шатунном механизме $OA = r$, $AB = l$. Кривошип имеет угловое ускорение ε_0. Найти ускорение точки A и угловое ускорение шатуна AB в момент, когда кривошип перпендикулярен шатуну и ускорение ползуна равно нулю.



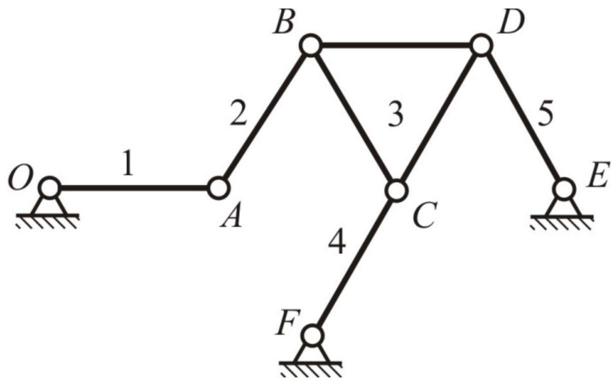
Задача К25

Ползуны A и C, соединенные двумя стержнями AB длиной 0,4 м и BC длиной 1м, движутся по прямолинейным, взаимно перпендикулярным направляющим соответственно по законам $S_A(t)=0{,}1\ t^2$ м, $S_A(t)=0{,}4\ t-0{,}1\ t^2$ м. В момент времени t=1с механизм занимает положение, указанное на рисунке. Для этого момента времени определить угловые скорости и угловые ускорения стержней AB и BC.



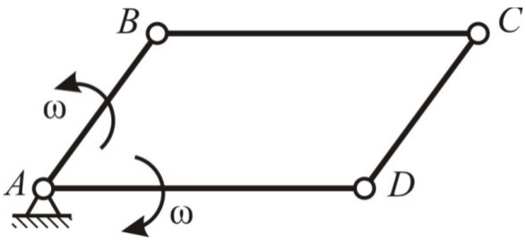
Задача К26

Центр симметрии *S* равностороннего шатуна *BCD* движется со скоростью 1 м/с. Определить угловую скорость кривошипа *OA*. Все расстояния между шарнирами равны 100 мм. Углы *ABC* и *CDE* равны 60º; линия *DCF* – прямая; отрезки *OA* и *BD* параллельны.

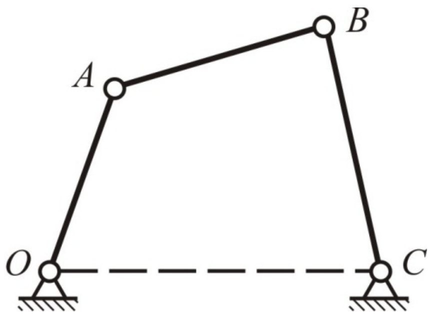


Задача К27

Из стержней *AB*, *BC*, *CD* и *DA* при помощи шарниров образован параллелограмм. Вершина *A* его закреплена неподвижно, стержни *AB* и *AD* вращаются в разные стороны с угловыми скоростями ω. При каком значении угла *BAD* скорость точки *C* направлена по *CD*, если *AD*=2*AB*?



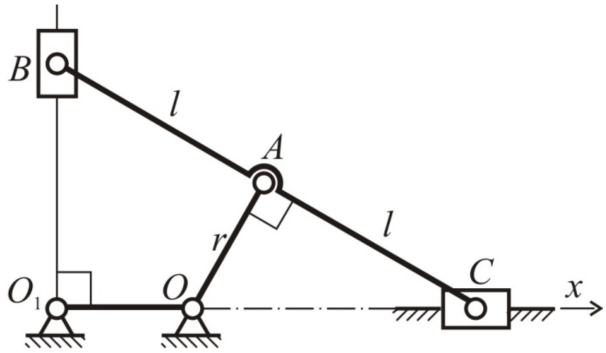
Задача К28



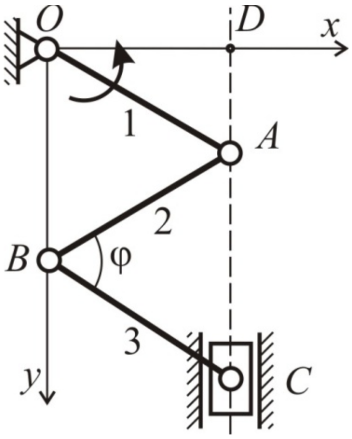
В механизме найти ускорение МЦС звена *AB*. Доказать, что оно не зависит от углового ускорения звена. Размеры звеньев и углы произвольны.

Задача К29

В кривошипно-ползунном механизме с присоединенной кулисой $AB=AC=l$; $OA=r$. Кривошип OA вращается с угловой скоростью ω. Для положения, при котором $\angle BO_1C=\angle OAC=90^\circ$, определить угловую скорость кулисы.



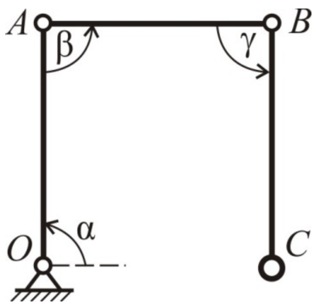
Задача К30



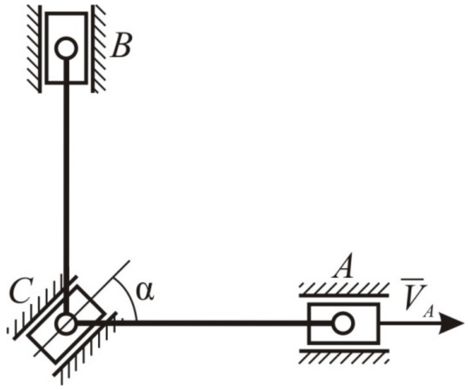
Для плоского механизма с двумя степенями свободы в изображенном на рисунке положении известно, что прямые OB и DAC параллельны, $OA=AB=BC=1$ м, $OD=\sqrt{2}\,/\,2$ м. Определить угловое ускорение звена 2 относительно 3 для следующих двух случаев: стержень 2 или 3 имеет мгновенно-поступательное движение. При этом также дано: $V_A=1$ м/с, $a_A=a_{cy}=1$ м/с^2 – для первого случая и $V_{cy}=1$ м/с, $a_A=a_{cy}=1$ м/с^2, звено l движется ускоренно – для второго.

Задача К31

Определить скорость точки C рычажного механизма руки робота, если $OA=AB=BC=l$ м, $\alpha=\beta=\gamma=\dfrac{\pi}{2}$ рад, $\dot{\alpha}=\dot{\beta}=\dot{\gamma}=1$ рад/с.



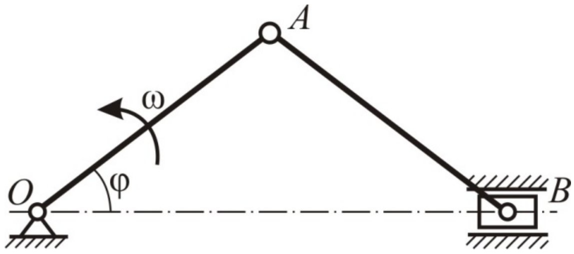
Задача К32



В плоском механизме стержни AC и BC на концах имеют ползуны с шарнирами. Направляющие ползунов A и B между собой перпендикулярны, а направляющая ползуна C образует угол α с направляющей ползуна A. В положении механизма, изображенном на рисунке, известны скорость и ускорение ползуна A ($V_A=u$ м/с, $a_A=0$ м/с^2). Найти угловую скорость и угловое ускорение звена BC в указанном на рисунке положении, если $AC=BC=1$ м.

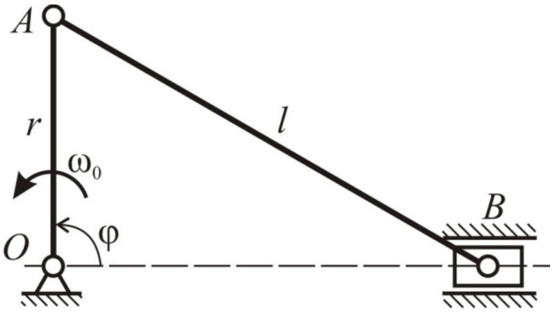
Задача К33

В кривошипно-шатунном механизме $OA=AB$ кривошип имеет постоянную угловую скорость ω. Найти скорость и ускорение ползуна B, скорость мгновенного центра ускорений звена AB и ускорение мгновенного центра скоростей звена AB в момент, когда $\varphi=\dfrac{\pi}{2}$.



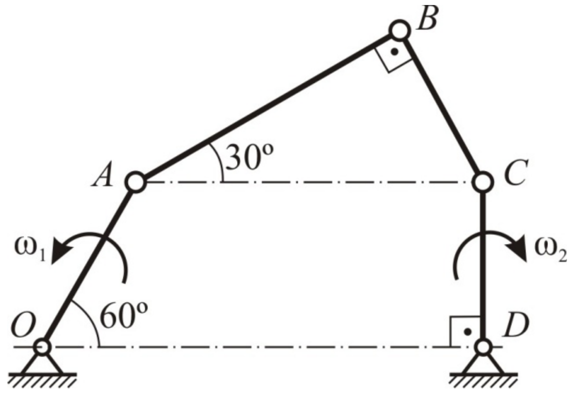
Задача К34

В кривошипно-шатунном механизме радиус кривошипа $OA=r$, длина шатуна $AB=l$. Определить для заданного положения механизма, т.е. при $\varphi=90^\circ$, ускорение точки A, а также угловые ускорения для кривошипа OA и шатуна AB, если известно, что в данный момент угловая скорость кривошипа OA равна ω_0, а ускорение точки B равно a.



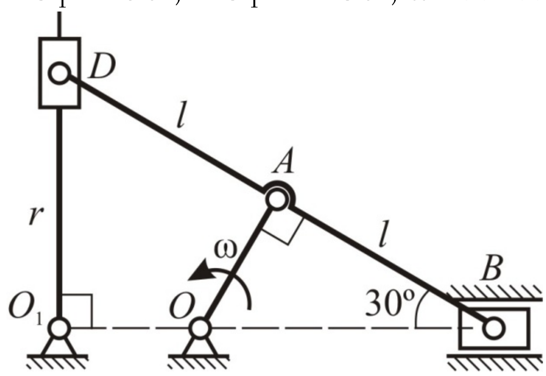
Задача К35

Для данного положения механизма определить скорость точки B и угловые скорости звеньев AB и BC, если $\omega_1 = \omega_2 = \omega$; $OA=l$; $AB=a$.



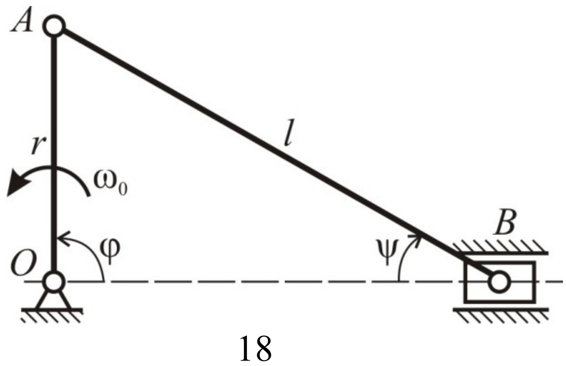
Задача К36

Кулисный механизм приводится в движение кривошипом OA, вращающимся вокруг неподвижного центра O с постоянной угловой скоростью ω. Определить угловые скорости и угловое ускорение шатуна BD и кулисы O_1D в положении механизма, указанном на чертеже. $AB=AD=l$, $\angle BO_1D=90^\circ$; $\angle O_1BD=30^\circ$; $\omega=\text{const}$.



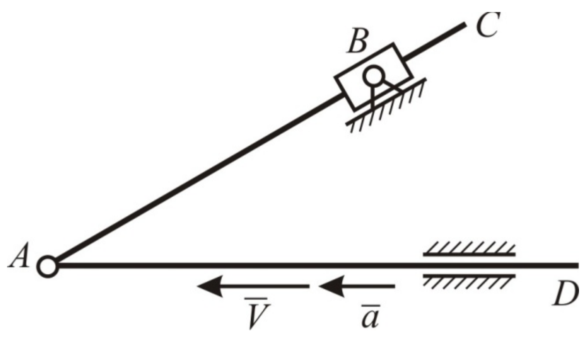
Задача К37

Дано: $r=OA=10$ см, данный момент $\varphi=\pi/2$, $\psi=\pi/6$, $\omega_{OA} = 2$ рад/с=const. Определить радиус кривизны траектории той точки шатуна AB, ускорение которой в данный момент имеет наименьшее значение.

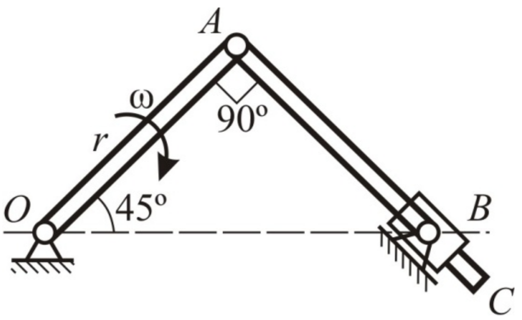


Задача К38

Шток AD, двигаясь в направляющих, приводит в движение стержень AC, который все время проходит через неподвижную точку B. В момент, когда $\angle CAD=30^\circ$, шток имеет скорость 10 см/с и ускорение $2\sqrt{3}$ см/с^2. Определить в этот момент угловую скорость и угловое ускорение стержня AC, а также относительное ускорение и ускорение Кориолиса точки стержня, совпадающей с точкой B, предполагая, что подвижная система отсчета связана с ползуном B. Расстояние от точки B до штока AD равно 5 см.



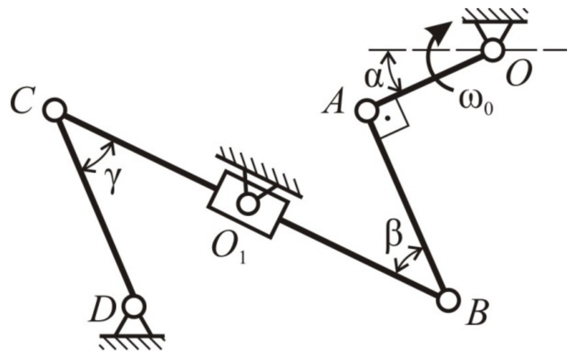
Задача К39



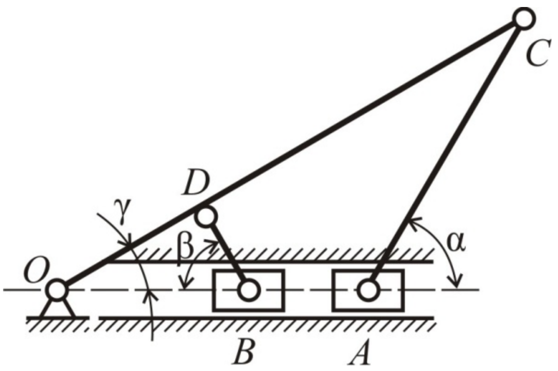
Определить ускорение точки B, принадлежащей кулисе AC механизма, показанного на рисунке, в заданном положении. Кривошип вращается с постоянной угловой скоростью ω.

Задача К40

Плоский механизм состоит из четырех стержней, соединенных друг с другом шарнирно. Стержни OA и DC могут поворачиваться вокруг неподвижных центров O и D, соответственно. Стержень BC свободно проходит через поворотную втулку O_1. Найти угловую скорость стержня DC в момент, когда $\varphi=\pi/2$, $\alpha=\beta=\gamma=\pi/6$ и $CO_1=O_1B$, если $DC=2OA$ и в рассматриваемый момент угловая скорость стержня OA равна ω_0.



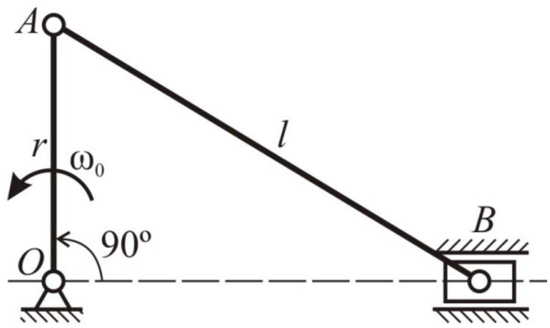
Задача К41



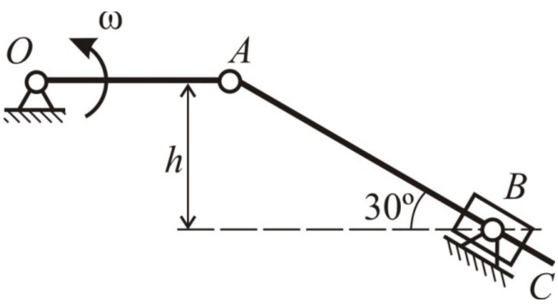
Механизм занимает в данный момент положение, при котором $\alpha=\beta=60°$, $\gamma=30°$. Определить модуль скорости ползуна B в этот момент, если ползун A имеет при этом скорость V, а $OD/OC=\lambda$.

Задача К42

В кривошипно-шатунном механизме OAB радиус кривошипа $OA=r$, длина шатуна $AB=l$, угловая скорость вращения кривошипа ω_0. Найти угловое ускорение кривошипа ε_0, при котором мгновенный центр ускорений шатуна находился бы на прямой AB, найти положение его, а также угловое ускорение ε_{AB} шатуна; $OA\perp OB$.



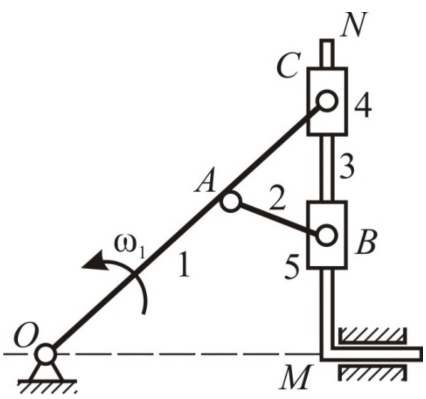
Задача К43



В механизме найти МЦС цилиндра B в системе координат, связанной с кривошипом OA.

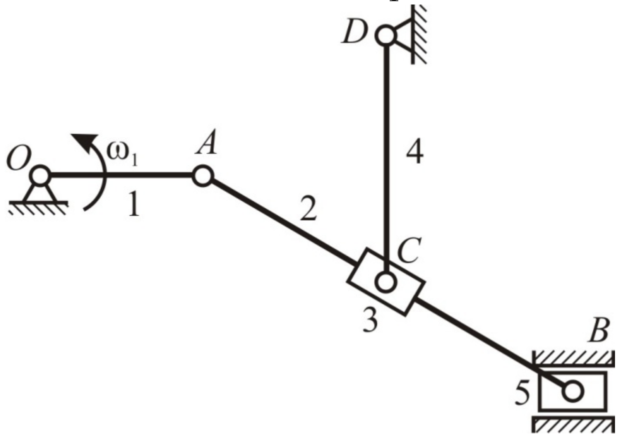
Задача К44

Найти мгновенный центр скоростей звена AB механизма, изображенного на рисунке. Заданы угловая скорость кривошипа OC ω_1, размеры элементов механизма и углы в данный момент времени.



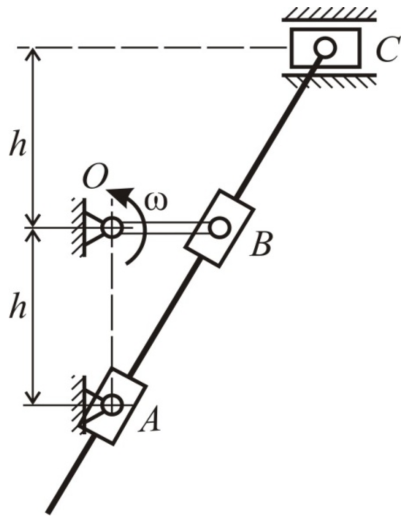
Задача К45

Найти МЦС звена 3 механизма, изображенного на рисунке.



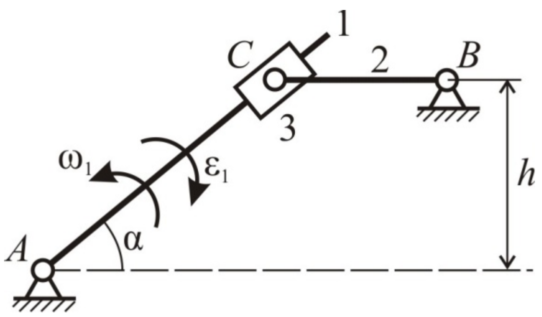
Задача К46

Определить скорость и ускорение ползуна *C* кулисного механизма, кривошип *OB* которого вращается с постоянной угловой скоростью ω, если $OB=r$, $h=r\sqrt{3}$. В расчетном положении *OA* перпендикулярно *OB*.



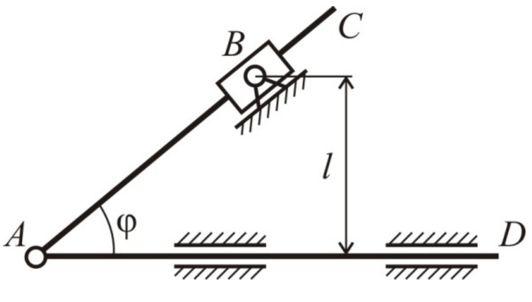
Задача К47

Найти построением МЦС ползуна 3. При $\omega_1=2$ с$^{-1}$, $\varepsilon_1=1$ с$^{-2}$, $CB=10$ см, $h=20$ см. Определить скорость и ускорение той точки ползуна 3, которая совпадает с точкой *B*, если $\alpha=60^{\circ}$.



Задача К48

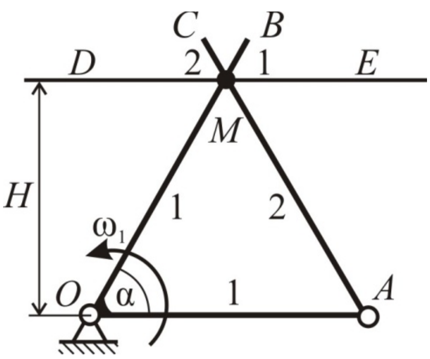
Стержень AD движется в горизонтальных направляющих и приводит в движение стержень AC, соединенный с шарниром. При своем движении стержень AC перемещается внутри качающейся муфты,



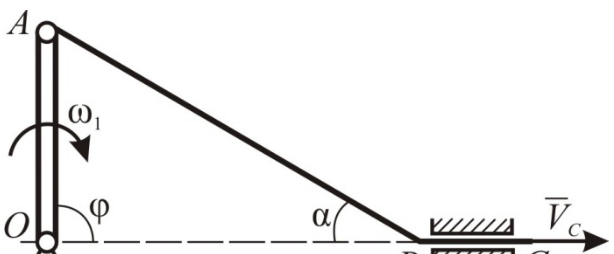
которая находится на расстоянии l от стержня AD. В положении механизма, определяемом углом φ, ускорение точки D направлено вправо и равно a, а скорость точки B стержня AC равна v. Найти угловую скорость и угловое ускорение стержня AC.

Задача К49

Звено 1 плоского механизма представляет собой два стержня OB и OA, жестко соединенные в точке O под углом α друг к другу. Звено 1 равномерно вращается с угловой скоростью ω_1 рад/с вокруг оси шарнира O, которая перпендикулярна к плоскости угла AOB, при этом стержень OB скользит по неподвижному прямолинейному стержню DE, принадлежащему плоскости AOB и находящемуся от оси шарнира O на расстоянии H. Шарниром A, ось которого перпендикулярна плоскости AOB, к звену 1 присоединен стержень AC. В точке M три стержня (OB, AC и DE) перехвачены колечком бесконечно малого размера. Найти угловую скорость ω_2 звена 2 в указанном на рисунке положении, если $H=\sqrt{3}$ м, $\alpha=60°$, $OA=2$ м, $\omega_1=2$ рад/с.



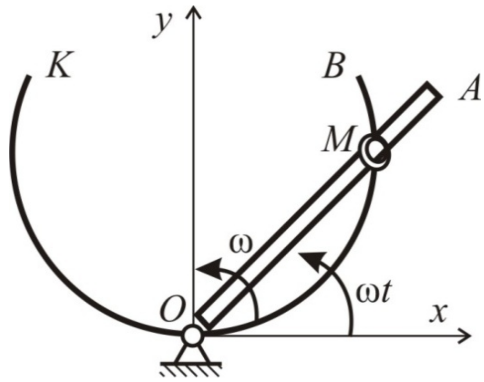
Задача К50



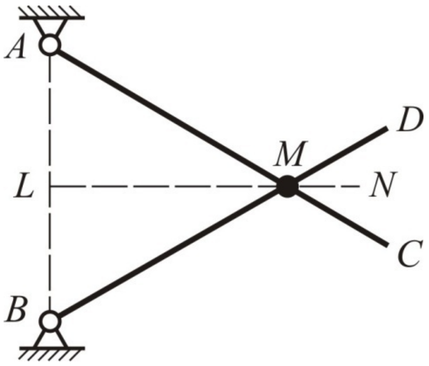
Прикрепленная к точке A рычага OA нить ABC втягивается в отверстие B с постоянной скоростью V_C. Определить угловую скорость ω_1 и угловое ускорение ε_1 рычага OA в данном положении системы $OA=r$, $\varphi=90°$, $\alpha=30°$.

Задача К51

Стержень OA вращается вокруг точки O с постоянной угловой скоростью ω. На стержень насажено колечко M, скользящее по проволоке KOB, неподвижно закрепленной в плоскости xOy. Абсолютная скорость колечка постоянна и равна ωt. По какой кривой изогнута проволока? Определить также абсолютное ускорение колечка.



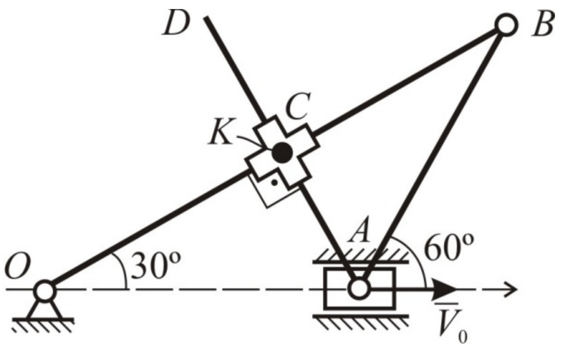
Задача К52



По прямой LN, равноудаленной от неподвижных точек A и B, с постоянной скоростью V движется колечко M, соединяющее стержни AC и BD, вращающиеся вокруг точек A и B, соответственно. Определить скорость и ускорение колечка M относительно стержня AC в момент, когда $AM=AB=a$ см, а также угловое ускорение стержня AC.

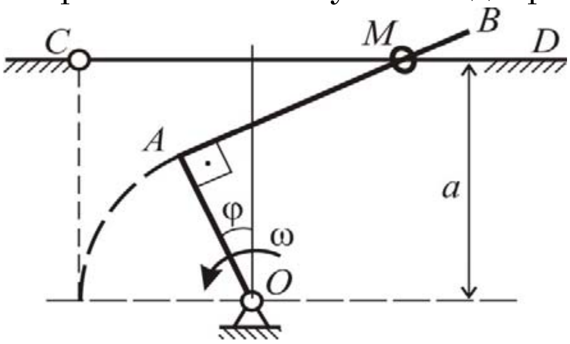
Задача К53

Ползун A кривошипно-ползунного механизма движется со скоростью V_0 вдоль горизонтальной прямой Ox. С ползуном шарнирно связан стержень AD, при этом муфта C может скользить одновременно вдоль стержней OB и AD так, что угол OCA все время равен 90º. Определить скорость точки K муфты в данном положении, если $\angle BOx$=30º, $\angle BAx$=60º. Найти также положение МЦС крестообразной муфты C (построением и расчетом).



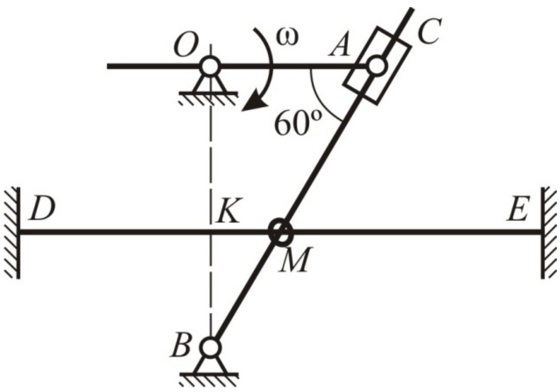
Задача К54

Около неподвижной точки O равномерно вращается с угловой скоростью ω изогнутый под прямым углом стержень OAB. Стержень проходит через колечко M, скользящее по неподвижной прямой CD, находящейся от точки O на расстоянии a. Какова скорость колечка в тот момент, когда прямая AB перпендикулярна CD?

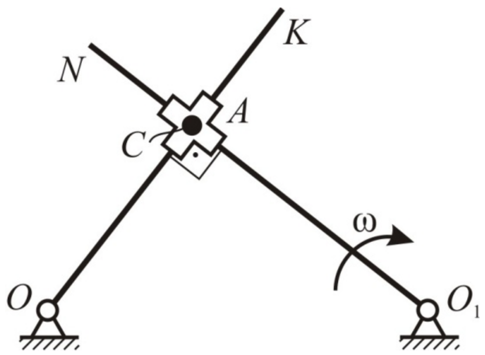


Задача К55

Кривошип $OA=r$ вращается с постоянной скоростью ω. Определить для данного положения механизма абсолютную скорость и абсолютное ускорение колечка M, которое может скользить одновременно вдоль кулисы BC и неподвижной горизонтальной прямой DE; $OK=KB$.



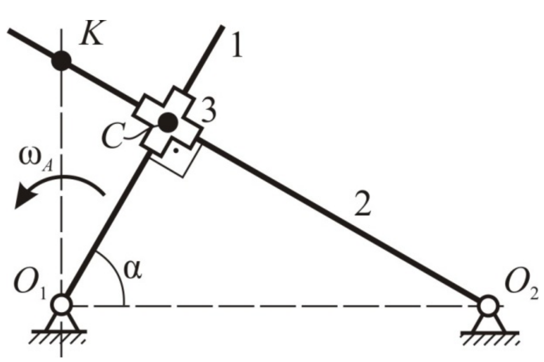
Задача К56



Найти геометрическое место мгновенных центров ускорений крестовины A при ω=const; $\angle O_1CO=90^{\circ}$.

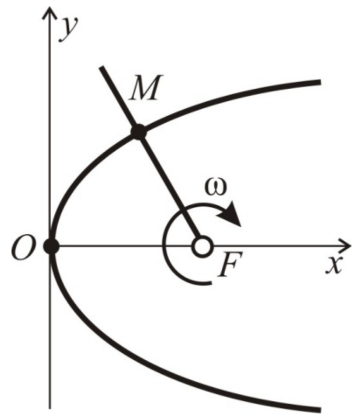
Задача К57

Найти построением МЦС крестовины. Зная в данный момент угловую скорость $\omega_1=2$ с$^{-1}$, расстояние $O_1C=10$ см и угол $\alpha=60^{\circ}$, определить скорость точки K, принадлежащей звену 3. Стержни 1 и 2 перпендикулярны.

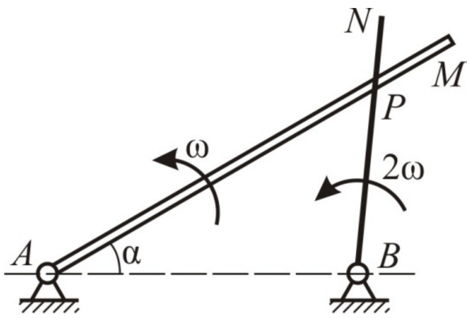


Задача К58

Определить, как функции времени, величины скорости и полного ускорения точки M пересечения параболы $y^2 = 2px$ с прямой, проходящей через фокус и вращающейся вокруг него с постоянной угловой скоростью ω. В начальный момент прямая совпадала с осью Ox.



Задача К59

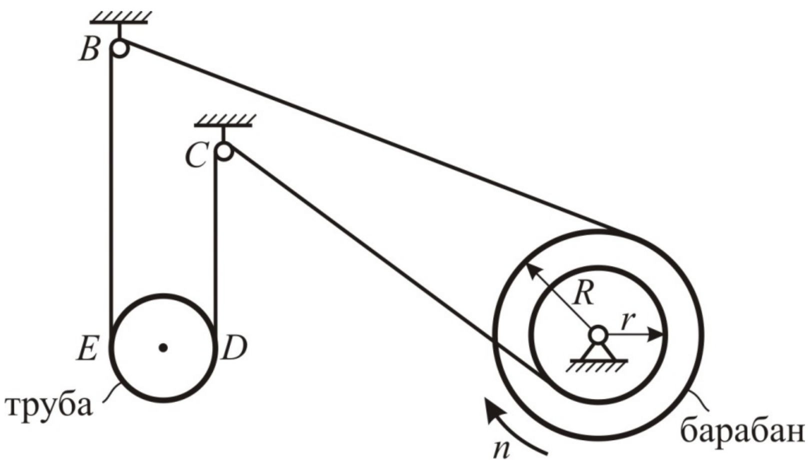


Две прямые AM и BN вращаются вокруг точек A и B в одну сторону с угловыми скоростями ω и 2ω. В начальном положении обе прямые совпадали с направлением прямой AB. Определить, какую траекторию описывает точка их пресечения, а также скорость и положение этой точки при α=30º.

2.2. Плоское движение пластинчатых систем

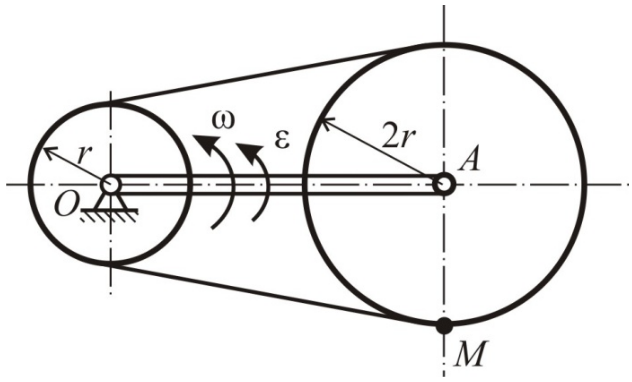
Задача К60

Подъем трубы производится при помощи талевого ступенчатого барабана, вал которого делает n = 10 об/мин. Определить скорость подъема трубы, если r = 5 см, R = 15 см. Тросы BE и CD – вертикальны.

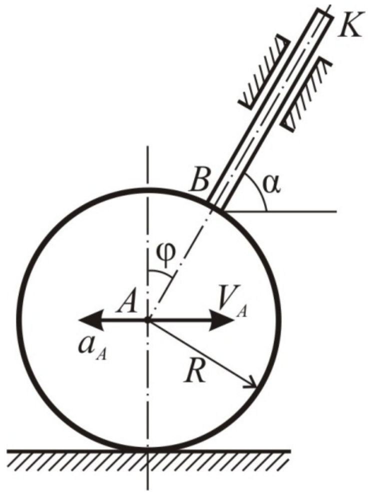


Задача К61

Кривошип OA длины l вращается с угловым ускорением ε вокруг оси O неподвижной шестеренки и несет на конце A ось другой шестеренки. Шестеренки охватываются цепью. Найти скорость и ускорение точки M подвижной шестеренки в тот момент, когда $AM \perp OA$ и угловая скорость кривошипа равна ω.



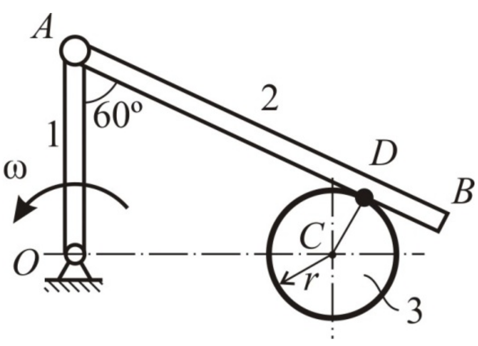
Задача 62



Диск радиуса R катится без скольжения по горизонтальной плоскости и выталкивает вверх вдоль направляющего паза тонкий стержень BK. При этом стержень перемещается в плоскости движения диска под углом α к горизонту. В данном положении системы известны также скорость V_A и ускорение a_A центра диска и угол φ. Определить скорость и ускорение стержня в указанном положении системы.

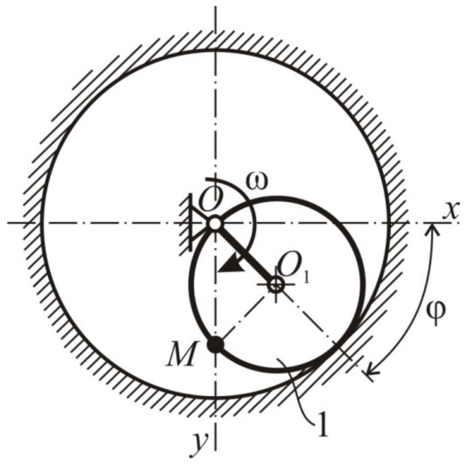
Задача 63

В плоском механизме кривошип OA связан шарнирно со звеном 2 стержнем AB, движущимся в плоскости чертежа и безотрывно скользящим по поверхности неподвижного цилиндра радиуса r. Найти радиус кривизны траектории точки D звена 2 в положении, указанном на рисунке, если $OA \perp OA$.

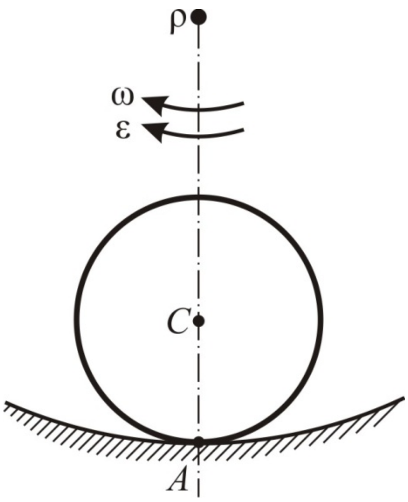


Задача К64

Кривошип OO_1 длиной r вращается с постоянной угловой скоростью ω вокруг оси O. При этом колесо 1 радиусом r, приводимое в движение кривошипом, катится без скольжения по внутренней поверхности неподвижного цилиндра радиусом R=2r. Определить траекторию точки M, а также ее скорость и ускорение в зависимости от угла φ. При φ=0 точка M находится в таком положении, что $\angle OO_1M$=γ.



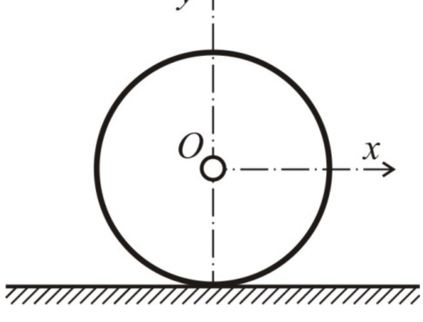
Задача К65



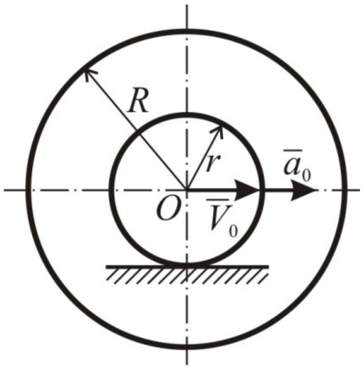
Колесо радиусом R катится без скольжения по кривой, радиус кривизны которой в точке касания с колесом равен ρ. Определить величину скорости точки C как функцию ρ, если известна величина ускорения a_A точки A.

Задача К66

Колесо радиусом R катится без скольжения в вертикальной плоскости по горизонтальному рельсу. Найти для всевозможных законов движения центра O геометрическое место мгновенных центров ускорений колеса в системе координат Oxy, которая перемещается поступательно вместе с точкой O.



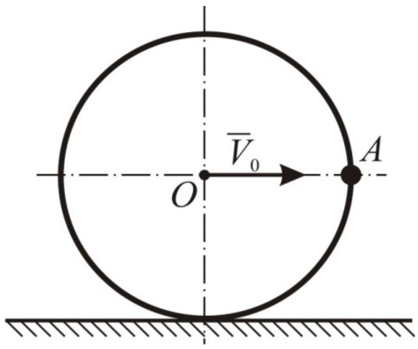
Задача К67



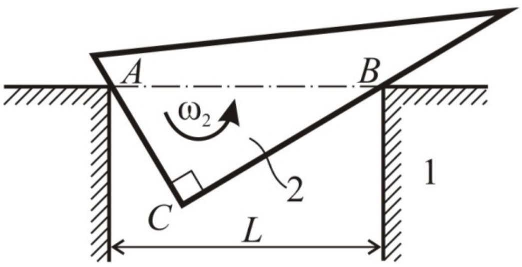
Двухступенчатый цилиндр катится без скольжения по неподвижной плоскости, имея в данный момент скорость и ускорение центра V_0=1 м/с, a_0 = 1 м/с^2. Найти в плоскости движения точки O другую точку цилиндра, имеющую по модулю такие же скорость V_0 и ускорение a_0 (R=2r=2м).

Задача К68

Колесо радиусом R катится без скольжения. Скорость центра V_0 постоянна. Определить радиус кривизны траектории точки A, используя теорию плоского движения.



Задача К69



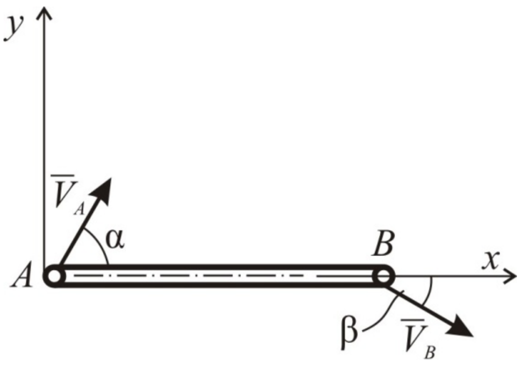
Пластина 2 вращается равномерно в плоскости чертежа, и стороны ее прямого угла скользят по ребрам паза AB. Определить скорость мгновенного центра ускорений и ускорение мгновенного центра скоростей пластинки.

Задача К70

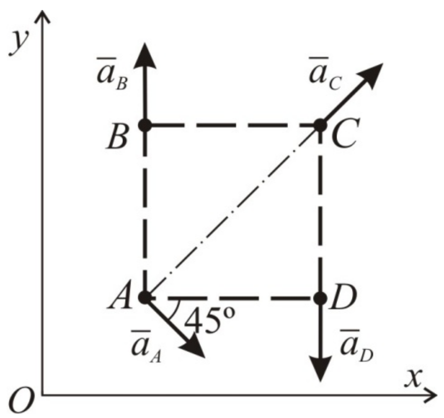
Описать особенность расположения векторов ускорений точек катка, перекатывающегося по горизонтальной прямой без проскальзывания с постоянной угловой скоростью. Найти геометрическое место его точек, у которых в данный момент времени радиусы кривизны траекторий ρ= .

Задача К71

Тонкий стержень AB длиной $2l$ м движется в плоскости xy. Положение стержня и направление скоростей точек A и B в начальный момент времени указаны на рисунке, при этом $V_A = \sqrt{3}$ м/с, α=60°, β=30°. Определить положение точки $A(x_A,\ y_A)$ стержня в тот момент, когда ее ордината будет иметь первый максимум.



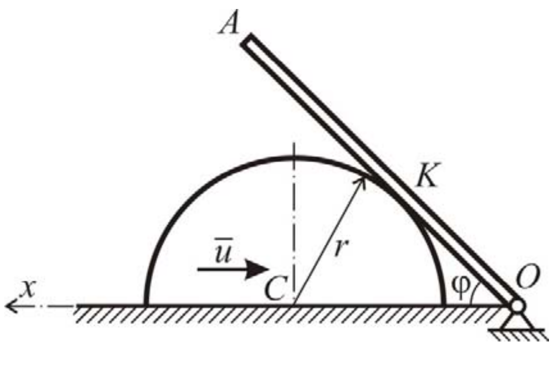
Задача К72



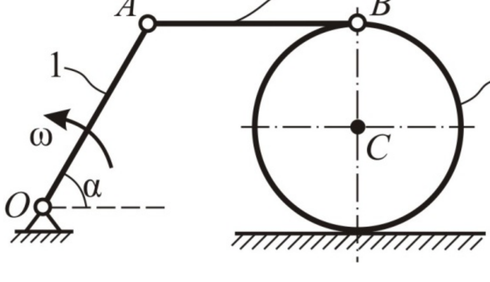
Точки A, B, C, D движутся в плоскости xOy. В некоторый момент времени они являются вершинами квадрата со стороной l. Укажите, какие из точек A, B, C, D могут принадлежать одной плоской фигуре. Определить угловую скорость и угловое ускорение плоской фигуры. Ускорения точек A, B, C, D равны a_A, a_B, a_C, a_D.

Задача К73

Полуцилиндр радиуса r, двигаясь прямолинейно с постоянной скоростью u, приводит во вращение опирающийся на него стержень OA длиной l. Определить скорость V_A и ускорение a_A конца стержня в момент, когда φ=45°.

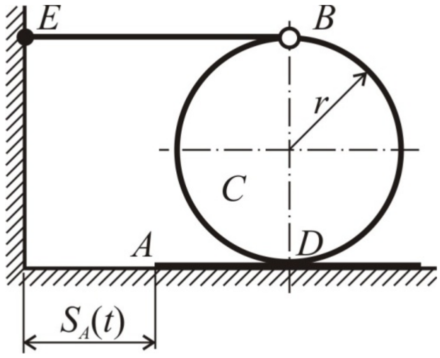


Задача К74



Для механизма, изображенного на рисунке, определить ускорение точек B и C, если угловая скорость стержня OA постоянна и равна ω. OA=AB=2BC=l, α=60°.

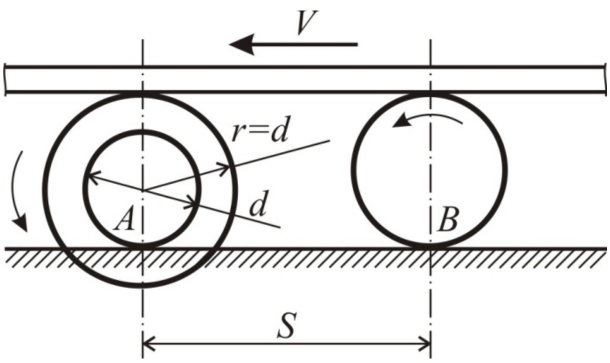
Задача К75



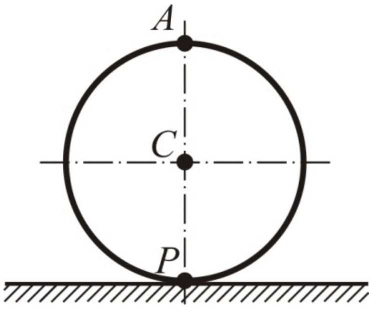
Пластинка A перемещается по горизонтальной плоскости по закону $S_A(t)=0{,}1(t^4+7{,}5t)$ м. На пластинке находится каток радиусом r=0,2 м, обмотанный нерастяжимой нитью, конец E которой закреплен на стене. Считается, что скольжение катка по пластине и нити по катку отсутствует. Определить в момент времени t=0,5 с ускорения точек B, C, D катка.

Задача К76

Очень длинная доска лежит горизонтально на двух катках A и B, причем каток A – ступенчатый. Из положения, указанного на рисунке, катки начали одновременно без проскальзывания катиться по горизонтальной поверхности. Через какое время каток B столкнется с катком A, если скорость доски V=0,5 м/с, $r=d$=1 м, S=10 м?

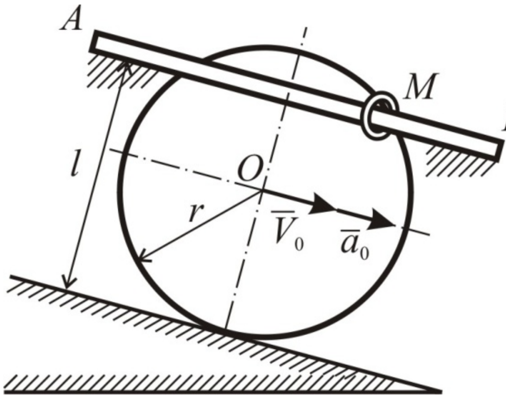


Задача К77



Колесо, радиус которого R, катится без скольжения по прямолинейному неподвижному рельсу. Считают известными в данный момент времени ускорения центра колеса $a_C=a_1$ и точки касания колеса с рельсом $a_p=a_2$, найти в этот момент времени скорость и ускорение точки A.

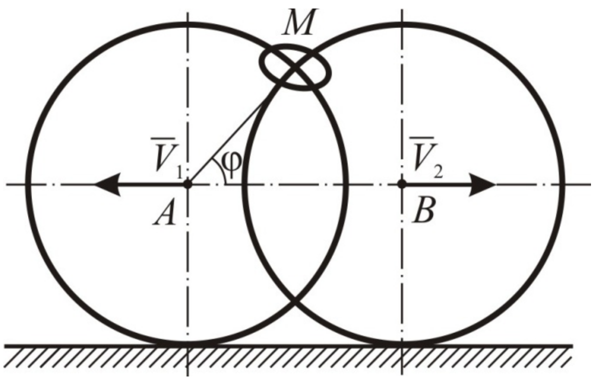
Задача К78



Обруч радиусом r, скатываясь без скольжения по наклонной плоскости, приводит в движение колечко M, надетое на обруч и неподвижный стержень AB, параллельный наклонной плоскости и отстоящий от нее на расстоянии l. Пренебрегая размерами колечка M, определить его скорость и ускорение относительно обруча, если скорость и ускорение центра обруча – V_0 и a_0.

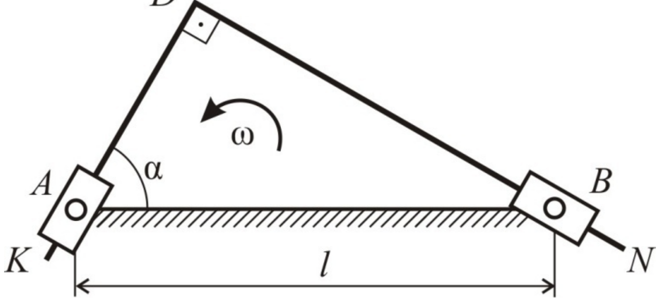
Задача К79

Два обруча радиусом r катятся без скольжения по направляющей в разные стороны. Скорости центров A и B обручей постоянны и равны соответственно $\overline{V}_1$ и $\overline{V}_2$. Определить ускорение кольца M, надетого на два обруча, в зависимости от угла φ.

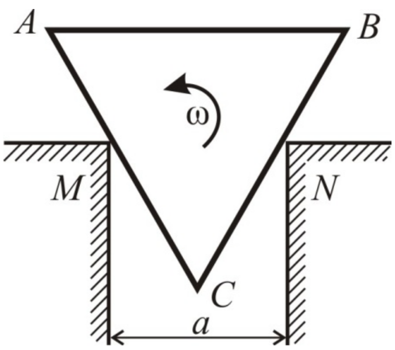


Задача К80

Два стержня KD и ND, жестко соединенные в точке D, движутся в плоскости так, что все время проходят через муфты, качающиеся около неподвижных точек A и B, соответственно. Определить величины скорости и ускорения точки D в указанном на рисунке положении, если $AB=l$, $\angle DAB=\alpha$, $\omega=\text{const}=\omega_0$.



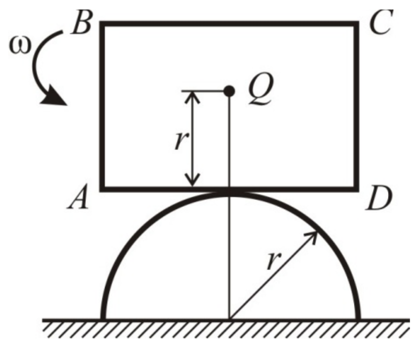
Задача К81



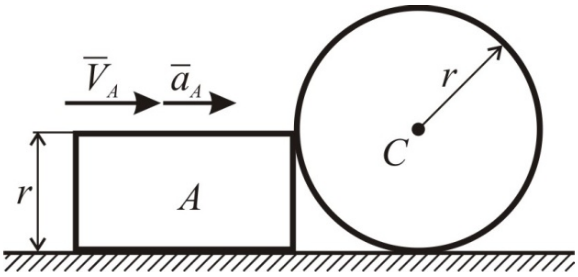
Равносторонний треугольник ABC движется в своей плоскости, скользя боковыми сторонами по опорам M и N. Угловая скорость треугольника постоянна. Для указанного на чертеже положения определить ускорение точки C, если расстояние $MN=a$, и $CM=CN$.

Задача К82

Пластинка $ABCD$ обкатывает без скольжения окружность радиусом r, причем угловая скорость ω пластинки постоянна. Доказать, что мгновенный центр ускорений пластинки находится в точке Q.



Задача К83



Катящийся без скольжения по горизонтальной плоскости цилиндр радиусом r контактирует с брусом, который скользит по плоскости. Скорость бруса – V_0, ускорение – a_0. Найти скорость и ускорение точки бруса, контактирующей с цилиндром, относительно цилиндра.

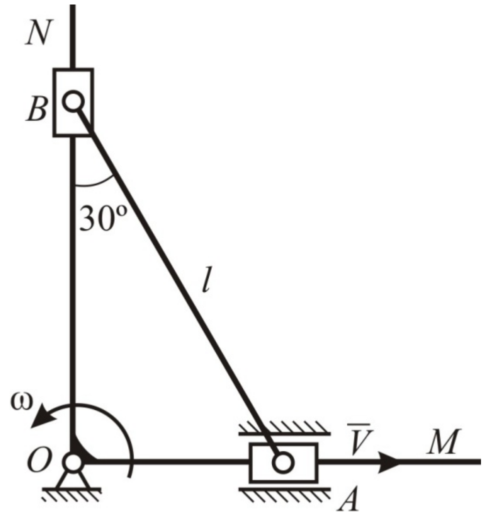
Задача К84

Диск радиусом R катится без скольжения по горизонтальной прямой. Скорость его центра постоянна. Определить геометрическое место точек диска, для которых направления скорости и ускорения совпадают.

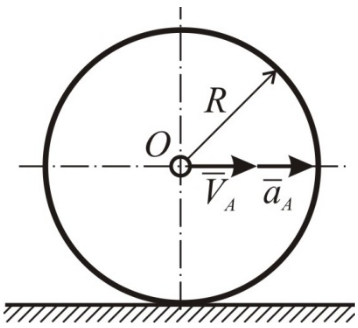
Задача К85

Изогнутый под прямым углом стержень MON вращается с угловой скоростью вокруг оси O. Стержень AB длиною l на концах имеет шарнирно закрепленные ползуны, скользящие по сторонам прямого угла, при этом относительная скорость ползуна A равна V.

Найти положение мгновенного центра скоростей C стержня AB и вычислить расстояние OC.



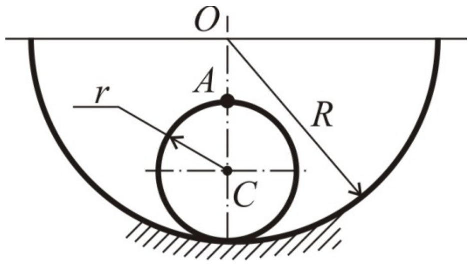
Задача К86



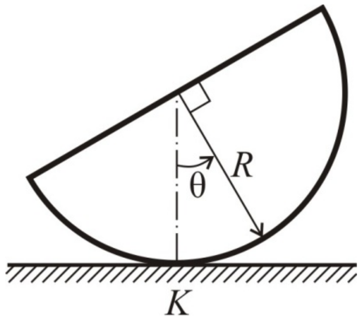
Колесо катится без скольжения. Определить скорости и ускорения точек обода, которые равноудалены от МЦС и МЦУ колеса. Дано: R=1 м, V_0=2 м/с, a_0=4 м/с.

Задача К87

Колесо радиусом r катится без скольжения внутри неподвижного колеса радиусом ($R>r$). Найти ускорение мгновенного центра скоростей подвижного колеса, если скорость его центра C постоянна и равна V_C. Найти также ускорение наивысшей точки колеса (точки A).

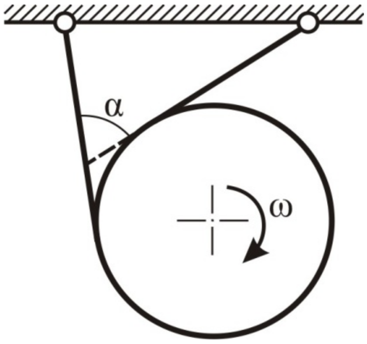


Задача К88



Полуцилиндр, совершая качение без скольжения, колеблется по закону $\theta=\sin(pt)$. Определить ускорение точки контакта в те моменты, когда $\theta=0$ и $\theta=1$ рад. Радиус полуцилиндра равен R.

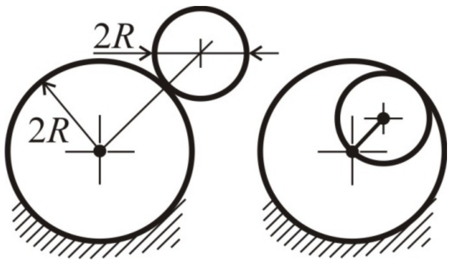
Задача К89



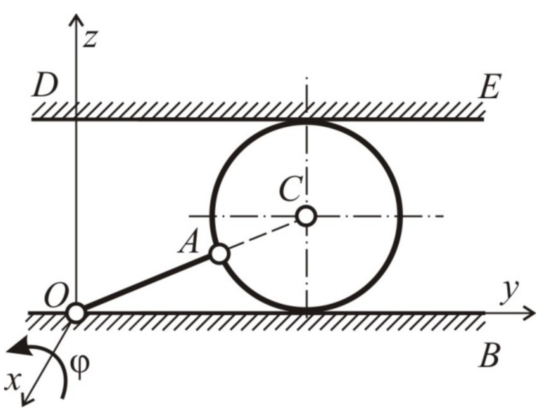
Тяжелый диск радиусом R скатывается на двух нерастяжимых нитях, намотанных на него. Свободные концы нитей закреплены. Нити при движении диска постоянно натянуты. В некоторый момент угловая скорость диска равна ω, а угол между нитями α. Какова в этот момент скорость центра диска?

Задача К90

Диск радиусом R обкатывает неподвижный диск радиусом $2R$, и центр малого диска совершает один оборот вокруг центра большого диска первый раз снаружи, а второй раз изнутри. Сколько раз обернется малый диск вокруг своей оси в первом и во втором случаях?



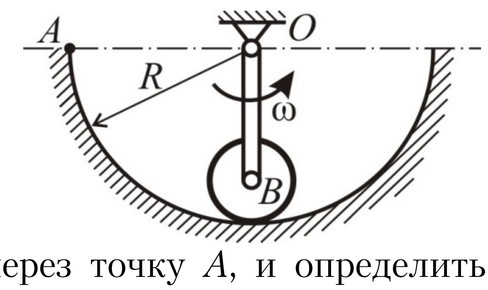
Задача К91



Стержень OA длиной $2R$ вращается вокруг своего конца O по закону $\varphi = \pi/3 \sin(\pi t/3)$. Другой его конец закреплен шарниром на окружности диска радиусом R, который может свободно скользить между двумя гладкими параллельными направляющими OB и DE. Найти скорость и ускорение центра C диска в момент времени t=1/2 с, R=9 см.

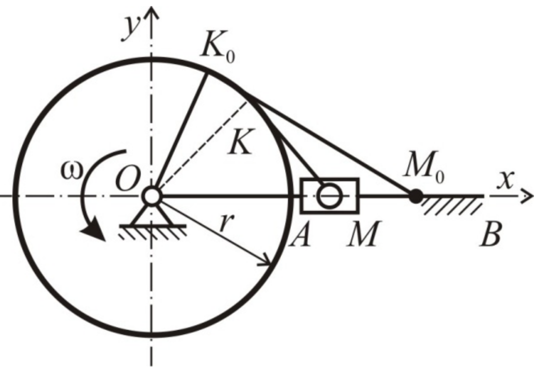
Задача К92

В круге радиусом R ведется кривошипом длиной l малый круг, катящийся по большому кругу без скольжения. Дана угловая скорость ω кривошипа. Найти на ободе малого круга такую точку M, чтобы направление скорости V проходило бы через точку A, и определить величину V_M в момент, когда $AO \perp OB$.

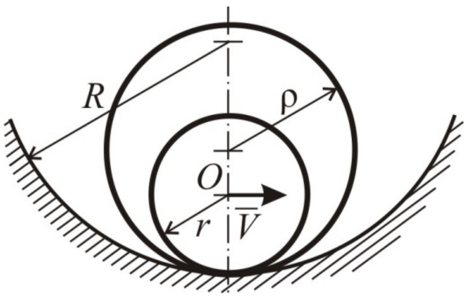


Задача К93

Шкив радиуса r вращается вокруг своей оси с постоянной угловой скоростью ω. На шкив намотана нить, к свободному концу которой прикреплен ползун M, движущийся по стержню AB, продолжение которого пересекает ось шкива под прямым углом в точке O. Определить скорость V ползуна в зависимости от расстояния $OM=x$.



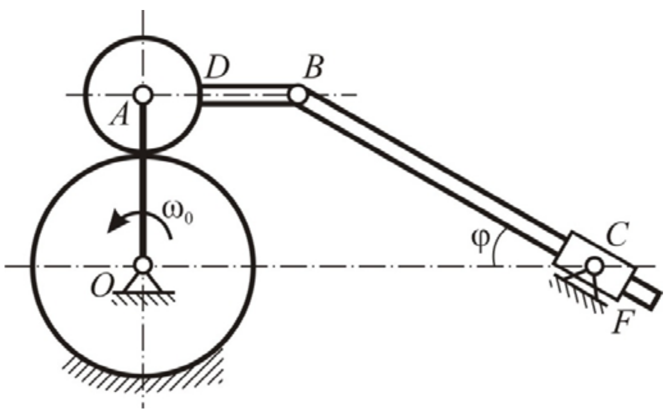
Задача К94



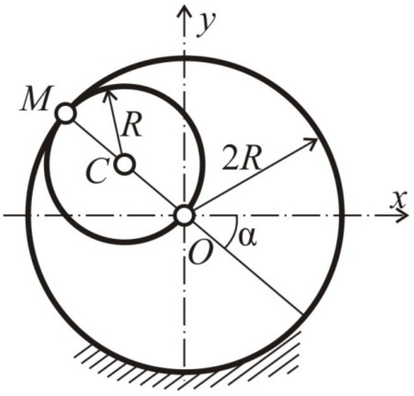
Диск радиуса r катится внутри цилиндрической полости радиусом R, прижимая тонкий обруч радиусом ρ ($r<\rho<R$). Найти угловую скорость обруча, если линейная скорость центра диска равна V. Проскальзывание при движении отсутствует.

Задача К95

Кривошип планетарно-кулисного механизма, вращаясь вокруг оси O с угловой скоростью ω_0, приводит в движение сателлит D, связанный шарнирно со стержнем BF. Стержень BF в своем движении все время проходит через неподвижную точку C. Определить величину скорости точки стержня BF, совпадающей в данный момент с точкой C, если в этот момент кривошип OA занимает вертикальное положение, угол $\varphi = 30^\circ$, а угол $BAO = 90^\circ$. Радиус неподвижной шестерни равен $2r$, подвижной – r, $AB=r\sqrt{3}$.



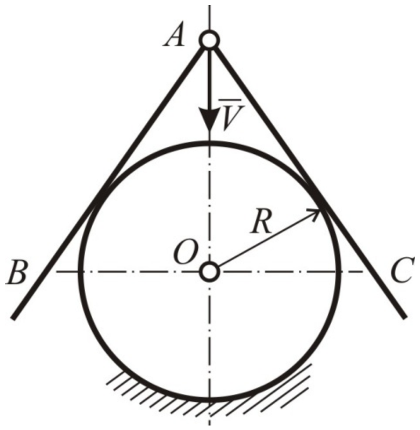
Задача К96



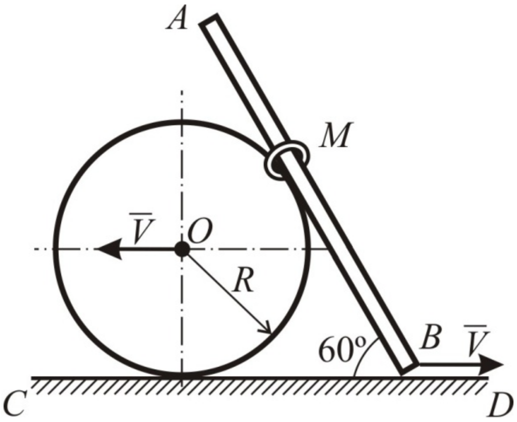
Окружность радиусом R катится без скольжения по внутренней стороне неподвижной окружности радиуса $2R$, при этом скорость ее центра постоянна и равна V. Найти уравнение траектории произвольной точки M подвижной окружности, а также скорость и ускорение этой точки в произвольный момент времени. В начальный момент времени точка M совпадает с точкой M_0 касания окружностей.

Задача К97

Два стержня AB и AC связаны шарниром A и касаются неподвижного круга с центром в точке O и радиусом R. Шарнир A движется по прямой AO с постоянной скоростью V. Найти угловые скорости и угловые ускорения стержней в тот момент, когда $AO=2R$.



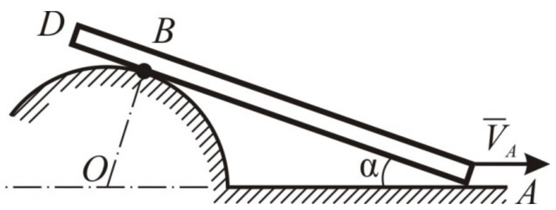
Задача К98



Обод радиусом R катится без скольжения по горизонтальной прямой с постоянной скоростью V его центра O. Стержень AB, все время, касаясь обода, движется в плоскости обода так, что конец стержня B скользит по прямой CD с той же постоянной скоростью V в противоположную сторону. Обод и стержень в точке касания соединены маленьким колечком M. Определить при $\alpha=60°$ угловую скорость и угловое ускорение стержня скорости колечка относительно обода и стержня, абсолютные скорость и ускорение колечка.

Задача К99

Стержень AD движется в вертикальной плоскости так, что конец A его скользит со скоростью V_A по горизонтальной прямой OA, а другой точкой B касается неподвижной полуокружности радиуса R. Определить ускорение конца D стержня в тот момент, когда стержень составляет с горизонтом угол α; $AD=l$.

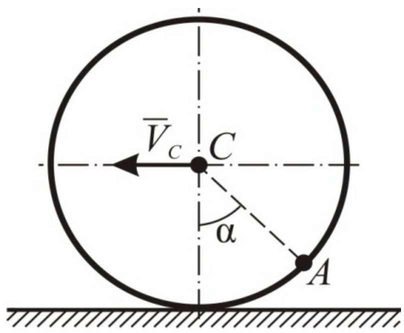


Задача К100

Колесо катится без проскальзывания по прямолинейной направляющей. Доказать, что радиус кривизны траектории любой точки M, лежащей на ободе колеса, равен удвоенному расстоянию от этой точки до мгновенного центра скоростей.

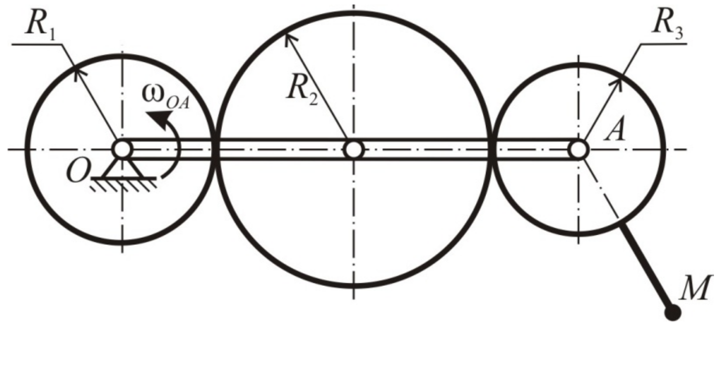
Задача К101

Колесо катится без проскальзывания, скорость центра колеса постоянна, радиус кривизны траектории точки A равен диаметру колеса. Найти угол α.

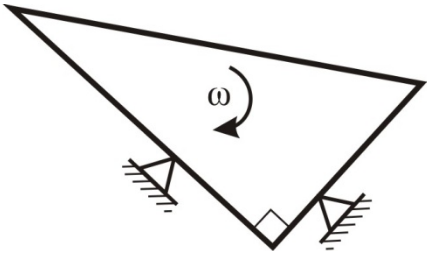


Задача К102

Как связаны между собой размеры R_1, R_2, R_3, AM звеньев механизма, если точка M движется по прямой?



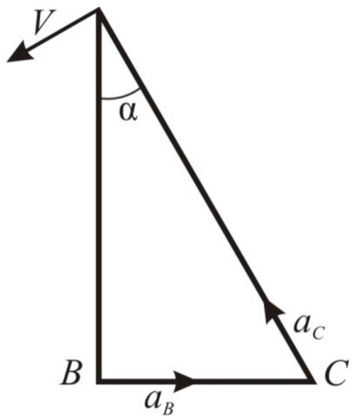
Задача К103



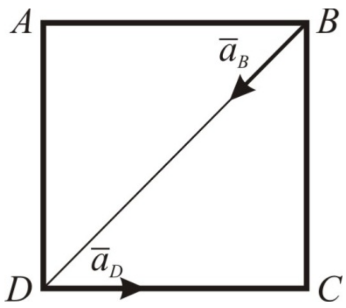
Прямоугольный треугольник движется так, что его катеты скользят по неподвижным направляющим, при этом угловая скорость ω постоянна. Найти МЦС и МЦУ треугольника.

Задача К104

Прямоугольный треугольник ABC со стороной $AB=\sqrt{3}$ (м) и углом $\alpha=30°$ при вершине движется в плоскости так, что $a_B=a_C=1$ м/с^2. Ускорения точек B и C направлены по сторонам треугольника, скорость точки A перпендикулярна AC. Определить скорости точек B и C, если известно, что они не превышают по модулю скорости точки A.



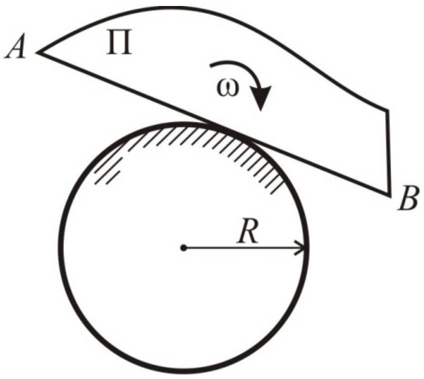
Задача К105



Квадратная пластина перемещается в своей плоскости, причем в данный момент времени скорости точек A, B и D одинаковы по величине. Ускорения точек B и D также одинаковы, и их векторы направлены так, как это показано на рисунке. Найти, во сколько раз отличаются скорости точек A и C, а также отношение их ускорений.

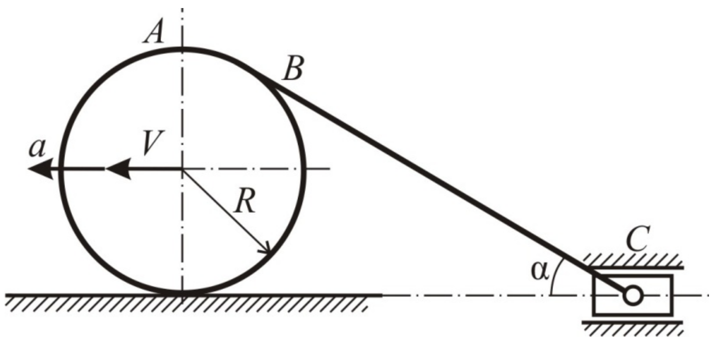
Задача К106

Полуплоскость П перекатывается без скольжения по неподвижному диску радиуса R. Движение полуплоскости происходит с постоянной угловой скоростью ω. Определить геометрическое место точек полуплоскости, ускорения которых параллельны стороне AB.



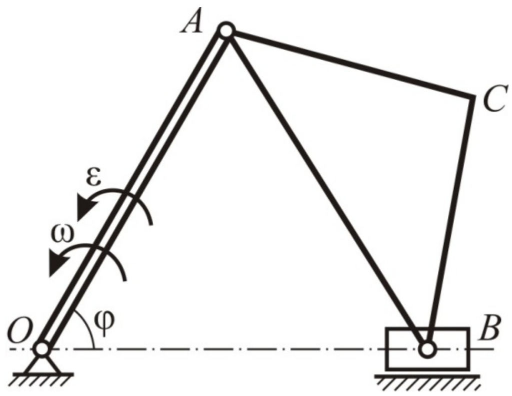
Задача К107

Диск радиусом R катится без скольжения по неподвижной плоскости. Скорость и ускорение центра диска в данный момент времени равны, соответственно, V и a. Определить скорость и ускорение конца B нити, намотанной на диск, если нить составляет с плоскостью угол α.



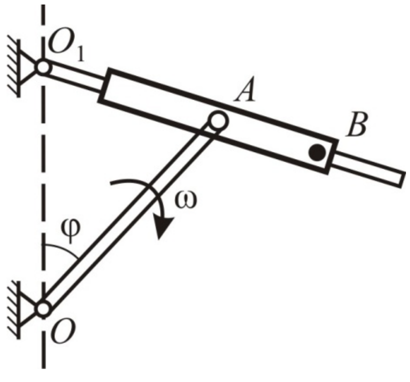
Задача К108

В кривошипно-ползунном механизме, изображенном на рисунке, $OA=AB=l$, а шатун AB представляет собой равносторонний треугольник. В заданном положении кривошип OA имеет угловую скорость ω и угловое ускорение ε. Определить ускорение точки C шатуна относительно кривошипа и ее ускорение Кориолиса.



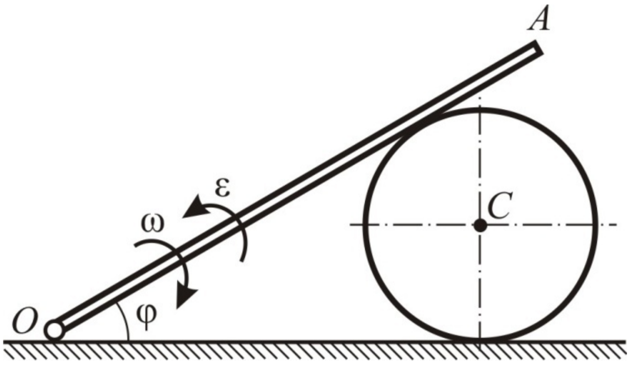
Задача К109

Определить скорость и ускорение точки B кулисного камня механизма в положении, определяемом углом φ, если длина кривошипа $OA=r$, расстояние между осями вращения кривошипа и кулисы $O_1O=r$ и $AB=r/2$. Угловая скорость кривошипа ω=const.



Задача К110

Стержень OA вращается в плоскости рисунка вокруг точки O с угловой скоростью ω, угловым ускорением ε, выталкивая диск радиусом R, движущийся в этой плоскости. Определить скорость и ускорение центра диска C в зависимости от угла наклона стержня φ.

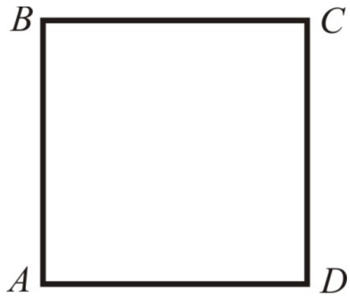


Задача К111

Известны координаты двух точек A (1, -2, -3) и B (-1, 4, 5), скорости которых равны V_A (-5, 3, 2) и V_B (-7, 3, -1). Могут ли точки A и B принадлежать одному твердому телу?

Задача К112

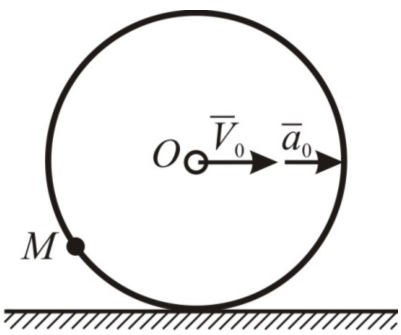
Квадратная пластинка $ABCD$ со стороной $2l$ движется в своей плоскости. Ускорения ее вершин A, B, C равны, соответственно, $a_A=a$, $a_B=a$, $a_C=a\sqrt{5}$, а угловая скорость равна ω. Определить ускорение вершины D и угловое ускорение пластинки.



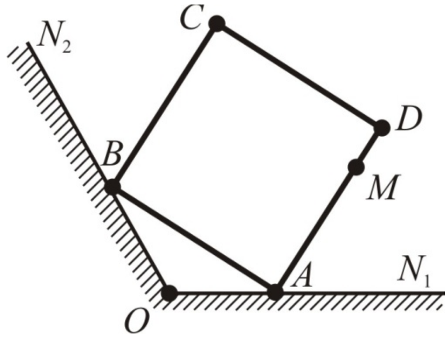
Задача К113

Диск радиусом r катится по горизонтальной плоскости без скольжения. Скорость и ускорение центра O диска равны V_0 и a_0 соответственно.

Найти ускорение такой точки M обода, для которой касательное и нормальное ускорения равны по модулю. Рассмотреть частный случай, для которого $\omega^2=2\varepsilon$.



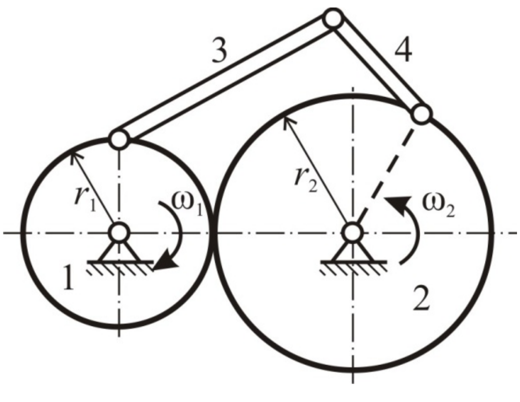
Задача К114



Квадрат $ABCD$ совершает плоское движение, касаясь вершинами A и B двух прямых ON_1 и ON_2, при этом $V_a=V=\text{const}$, $\angle N_1ON_2=120^\circ$. Для положения квадрата, когда $OA=a=OB$, найти на стороне AD такую точку M, для которой ускорение относительно точки B будет направлено параллельно AB. Вычислить величину и указать направление абсолютного ускорения точки M.

Задача К115

Два диска 1 и 2, находясь во внешнем зацеплении, вращаются вокруг неподвижных осей O_1 и O_2. Стержни 3 и 4 шарнирно соединены между собой и в некоторых точках с дисками. Для произвольного положения механизма построением найти МЦС стержней 3 и 4.



2.3. Примеры решения задач к гл. 2

Решение задачи К19

Запишем выражения координат точки M для произвольного угла φ:

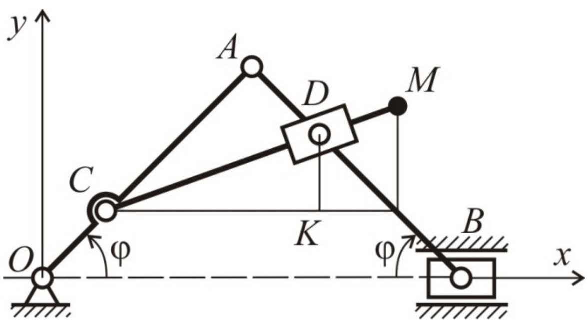
$$x_M = OC\cos\varphi + CM\cos\alpha;$$

$$y_M = OC\sin\varphi + CM\sin\alpha.$$

Дифференцируем их по времени, имеем:

$$\upsilon_{xM} = -OC\sin\varphi\cdot\dot{\varphi} - CM\sin\alpha\cdot\dot{\alpha};$$

$$\upsilon_{yM} = OC\cos\varphi\cdot\dot{\varphi} - CM\cos\alpha\cdot\dot{\alpha}.$$



Из схемы механизма следует, что $CK \operatorname{tg}\alpha = DK$, но
$CK = CA\cos\varphi + AD\cos\varphi = 3l\cos\varphi;\quad DK = AC\sin\varphi - AD\sin\varphi = l\sin\varphi,$
Поэтому $3l\cos\varphi\cdot\operatorname{tg}\alpha = l\sin\varphi;\quad 3\operatorname{tg}\alpha = \operatorname{tg}\varphi.$
Отсюда, дифференцируя по времени, получаем:

$$3\frac{\dot{\alpha}}{\cos^2\alpha} = \frac{\dot{\varphi}}{\cos^2\varphi}.$$

В заданном положении $\varphi = 45^{\circ}$, соответственно

$$CK = 3l\cos\varphi = 3l\frac{\sqrt{2}}{2};\; KD = l\sin\varphi = l\frac{\sqrt{2}}{2};\; CD = \sqrt{CK^2 + KD^2} = l\frac{\sqrt{20}}{2};$$

$$\cos\alpha = \frac{CK}{CD} = \frac{3l\sqrt{2}\cdot 2}{2l\sqrt{20}} = \frac{3}{\sqrt{10}};\quad \sin\alpha = \frac{KD}{CD} = \frac{l\sqrt{2}\cdot 2}{2l\sqrt{20}} = \frac{1}{\sqrt{10}};$$

$$\dot{\alpha} = \frac{\dot{\varphi}\cos^2\alpha}{3\cos^2\varphi} = \frac{\omega}{3}.\frac{3\cdot 2}{10} = \frac{\omega}{5}.$$

Подставляем полученные значения в выражения проекций скоростей:

$$\upsilon_{xM} = -l\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\omega - 3l\cdot\frac{1}{\sqrt{10}}\cdot\frac{\omega}{5} = -\omega l\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{9}{5\sqrt{10}}\right);$$

$$\upsilon_{yM} = l\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\omega + 3l\frac{3}{\sqrt{10}}\cdot\frac{\omega}{5} = \omega l\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{9}{5\sqrt{10}}\right).$$

Ответ: $\upsilon_M = \omega l\left(1 + \frac{9}{5\sqrt{5}}\right).$

Решение задачи К24

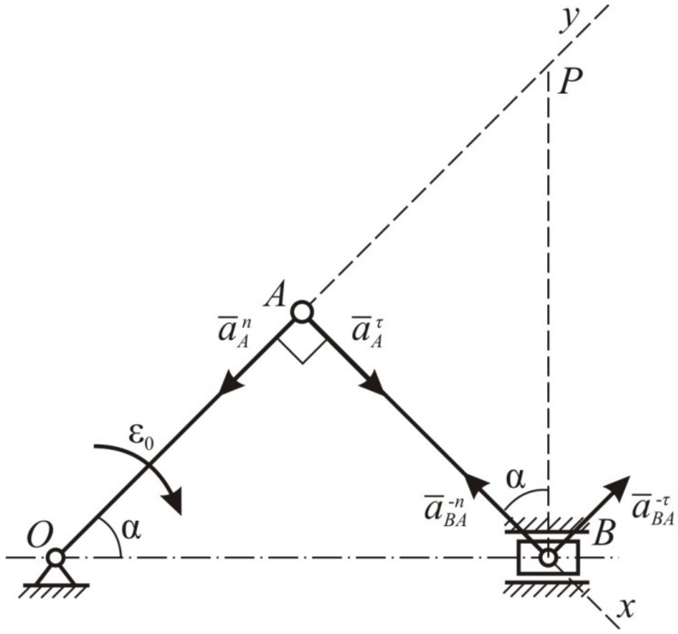
Уравнение $\bar{a}_B = \bar{a}_A^n + \bar{a}_A^\tau + \bar{a}_{BA}^\tau + \bar{a}_{BA}^n$ сначала проецируем на ось x:

$$0 = a_A^\tau - a_{BA}^n.$$

Отсюда $\varepsilon_0 r = \omega_{AB}^2 l$, или $r\omega_{AB}^2 = \varepsilon_0\dfrac{r}{l}.$

Кроме того, $V_A = \omega_{OA} r = \omega_{AB} AP$, или $\omega_{OA} r = \dfrac{\omega_{AB} AP}{r}.$

Так как $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{AP}{l}$, то $AP = \dfrac{l^2}{r}$, $\omega_{OA} = \omega_{AB}\dfrac{l^2}{r^2}$.



Ускорение точки *A*:

$$a_A^n = \omega_{OA}^2 r = \varepsilon_0 \frac{r}{l}\frac{l^4}{r^4} r = \varepsilon_0 \frac{l^3}{r^2},$$

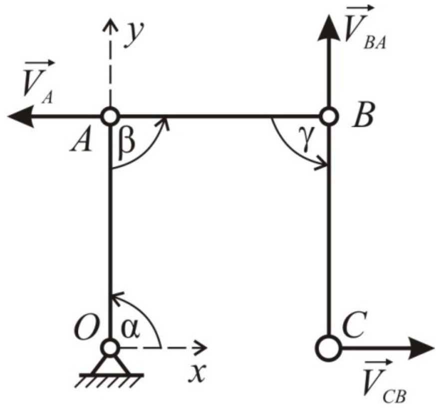
$$a_A = \sqrt{\left(a_A^{-n}\right)^2 + \left(a_A^{-\tau}\right)^2} = \frac{\varepsilon_0}{r^2}\sqrt{l^6 + r^6}.$$

Теперь уравнение для $\overline{a}_B$ проецируем на ось *y*: $0 = a_{BA}^\tau - a_A^n$.

Отсюда получаем $\varepsilon_{AB} l = \varepsilon_0 \dfrac{l^3}{r^2}$, или $\varepsilon_{AB} = \varepsilon_0 \dfrac{l^2}{r^2}$.

Ответ: $a_A = \dfrac{\varepsilon_0}{r^2}\sqrt{l^6 + r^6}$, $\varepsilon_{AB} = \varepsilon_0 \dfrac{l^2}{r^2}$.

Решение задачи К31



Звено *OA* вращается: $V_A = \omega_{OA} \cdot OA = \dot{\alpha}\, l$.

Движение звена *AB* – плоскопараллельное: $\overrightarrow{V_B} = \overrightarrow{V_A} + \overrightarrow{V_{BA}}$, где $V_{BA} = \omega_{AB} \cdot AB$, $\overrightarrow{V_{BA}} \perp AB$, ω_{AB} – абсолютная угловая скорость звена *AB*, т.е. $\omega_{AB} = \dot{\alpha} + \dot{\beta} = 2$.

$$\overrightarrow{V_C} = \overrightarrow{V_B} + \overrightarrow{V_{CB}} + \overrightarrow{V_{BA}} + \overrightarrow{V_{CB}},$$

здесь $V_{CB} = \omega_{CB} \cdot BC,\ \overrightarrow{V_{CB}} \perp BC.$

Найдем проекции $\overrightarrow{V_C}$ на оси x и y:

$$V_{CX} = -V_A + V_{CB} = -V_A + \omega_{CB} \cdot BC,$$

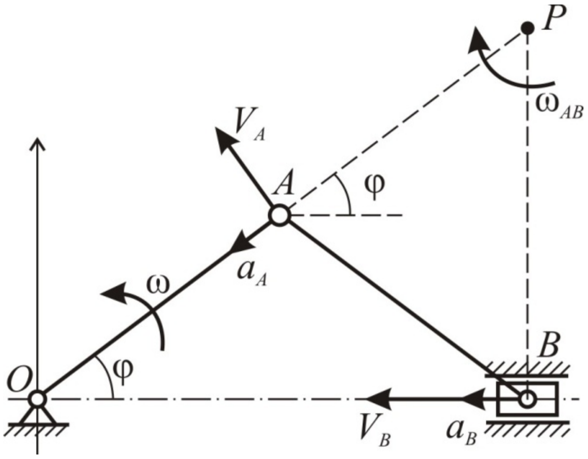
$$\omega_{CB} = \dot{\alpha} + \dot{\beta} + \dot{\gamma}.$$

$$V_{CY} = V_{BA} = \omega_{BA} \cdot AB.\ \ V_{CX} = 2l \text{ м/с}.$$

$$V_{CY} = 2l \text{ м/с}.\ \ V_C = \sqrt{V_{CX}^2 + V_{CY}^2} = 2\sqrt{2} \cdot l \text{ м/с}.$$

Ответ: $V_C = 2\sqrt{2} \cdot l$ м/с.

Решение задачи К33



Изобразим механизм в момент, когда угол φ имеет произвольное значение $\varphi = \omega t$. $V_A = \omega \cdot OA$, $a_A = a_A^n = \omega^2 \cdot OA.$

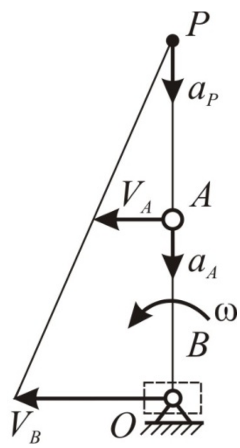
Т. P – МЦС звена AB.

$OA = AP$,

значит, $\omega_{AB} = \dfrac{V_A}{AP} = \dfrac{V_A}{OA} = \omega.$

$$V_B = \omega_{AB} \cdot PB = \omega \cdot 2OA \sin\varphi.$$

Так как ω – const, то $\varepsilon_{AB} = 0$ и $\operatorname{tg}\mu = \dfrac{\varepsilon_{AB}}{\omega_{AB}^2} = 0.$



Ускорения всех точек звена AB направлены к точке O, являющейся МЦУ звена.

Когда $\varphi = \dfrac{\pi}{2}$, точка B совпадает с точкой O,

$$\frac{V_A}{V_B} = \frac{AP}{BP},\ V_B = 2\omega \cdot OA \sin\frac{\pi}{2} = 2V_A,$$

следовательно, $BP = 2AP$,

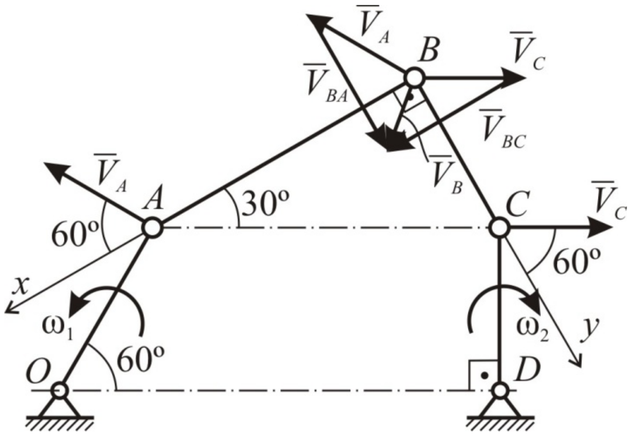
$$\frac{a_A}{a_P} = \frac{OA}{OP} = \frac{1}{2},\ a_P = 2a_A = 2\omega^2 \cdot OA.$$

Ответ: $V_B = 2V_A = 2\omega \cdot OA$, т.$B$ – МЦУ,

$a_B = 0,\ a_P = 2\omega^2 \cdot OA,$ т.P – МЦС звена AB.

Решение задачи К35

Скорость точки определяется уравнением:



$$\overline{V}_B = \overline{V}_A + \overline{V}_{BA} = \overline{V}_C + \overline{V}_{BC};$$

$$V_{Bx} = V_A \cos 60° = -V_C \cos 30° + V_{BC};$$

$$V_{By} = -V_A \cos 30° + V_{BA} = V_C \cos 60°.$$

Из (1):

$$V_{BC} = V_A \cos 60° + V_C \cos 30° = \frac{\omega}{2} + \frac{3\omega l}{4} = \frac{5}{4}\omega l;$$

$$V_{Bx} = \frac{\omega l}{2}; \; V_{BC} = \omega_{BC} BC.$$

$$BC = AB\,\mathrm{tg}30° = \frac{a\sqrt{3}}{3};$$

$$\omega_{BC} = \frac{V_{BC}}{BC} = \frac{5\sqrt{3}\ \omega l}{4a}.$$

Из (2): $V_{BA} = V_C \cos 60° + V_A \cos 30° = \frac{\omega l\sqrt{3}}{4} + \frac{\omega l\sqrt{3}}{2} = \frac{\omega l\sqrt{3}}{4};$

$$V_{By} = \frac{\omega\sqrt{3}}{4}. \quad \omega_{AB} = \frac{V_{BA}}{BA} = \frac{3\sqrt{3}\ \omega\, l}{4a}.$$

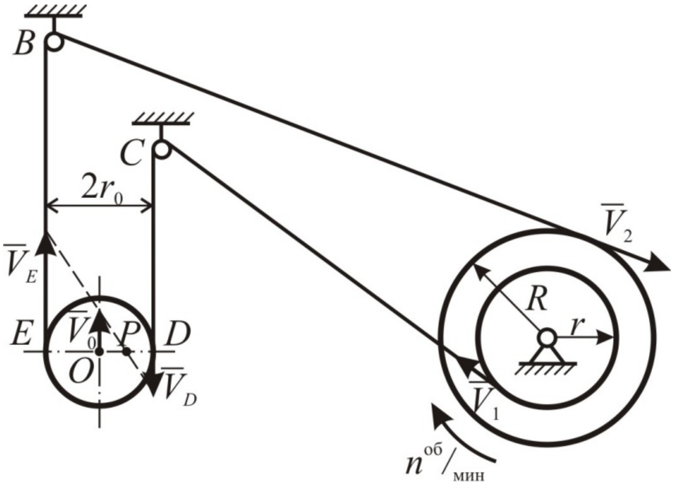
$$V_B = \sqrt{V_{Bx}^2 + V_{By}^2} = \frac{\omega l}{4}\sqrt{7}.$$

Ответ: $V_B = \frac{\omega}{4}\sqrt{7}, \; \omega_{BC} = \frac{5\sqrt{3}\omega l}{4a}, \; \omega_{AB} = \frac{3\sqrt{3}\omega l}{4a}.$

Решение задачи К60

Скорости точек E и D равны скоростям точек на большом и малом ободе ступенчатого барабана $V_D = V_1 = \pi n r / 30 = 10 \cdot 5\pi / 30 = 5\pi / 3$ см/с.

$$V_E = V_2 = \pi n R / 30 = 5\pi \text{ см/с}.$$



Сечение трубы совершает плоское движение, где P – мгновенный центр скоростей трубы.

$$V_E \,/\, PE = V_D \pi n r \,/\, PD,$$

$$PE = r_0 + OP,$$

$$PD = r_0 - OP,$$

$$V_E \,/\, (r_0 + OP) = V_D \,/\, (r_0 - OP).$$

Из этих соотношений находим OP=$1/2r_0$.

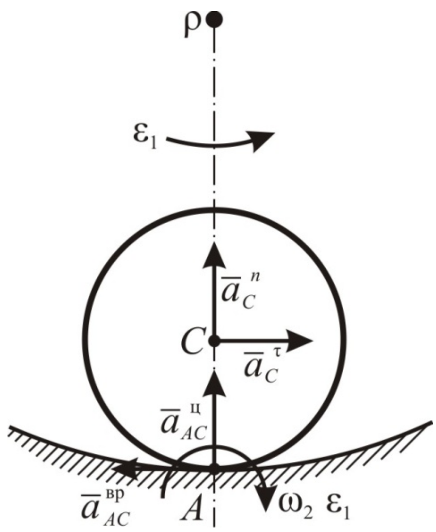
Затем, так как $V_0 \,/\, OP = V_E (r_0 + OP)$, получим

$$V_0 = V_E OP \,/\, (r_0 + OP) = 5\pi \,/\, 3 = 5{,}24 \text{ см/с.}$$

Ответ: $V_0 = 5{,}24$ см/с.

Решение задачи К65

Так как колесо совершает плоское движение, то, выбрав за полюс точку C, можно записать: $\overline{a}_A = \overline{a}_C^n + \overline{a}_C^\tau + \overline{a}_{AC}^{\text{ц}} + \overline{a}_{AC}^{\text{вр}}$, где $\overline{a}_C^\tau = \varepsilon_1 (\rho - R)$; ε_1, ε_2 – угловые ускорения колеса и радиуса ρ.



$a_C^\tau = \varepsilon_2 AC$ и $a_{AC}^{\text{вр}} = \varepsilon_2 R$, геометрическая сумма векторов $\overline{a}_C^\tau + \overline{a}_{AC}^{\text{вр}} = 0$, тогда

$$\overline{a}_A = \overline{a}_C^n + \overline{a}_{AC}^{\text{ц}} = \frac{V_C^2}{\rho - R} + \frac{V_C^2}{R} = \frac{\rho}{R(\rho - R)} V_C^2,$$

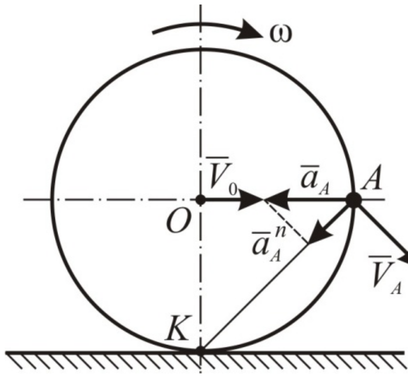
Ответ: $V_C^2 = \dfrac{\rho(\rho - R)}{\rho} a_A.$

Решение задачи К68

Точка K – мгновенный центр скоростей колеса:

$$\omega = \frac{V_0}{OK} = \frac{V_0}{R}, \; V_A = \omega \cdot AK = V_0 \sqrt{2}.$$

Так как ускорение точки O $a_O=0$, то в точке O находится мгновенный центр ускорений колеса, поэтому ускорение точки A направлено к точке O и равно



$$a_A = a_{AO}^{ц} = \omega^2 \cdot AO = \frac{V_0^2}{R}.$$

Но траектория точки A – циклоида, по касательной к ней идет $\bar{V}_A$.

Проекция $\bar{a}_A$ на перпендикуляр к касательной есть нормальное ускорение точки A: $a_A^n = a_A \cos 45° = \dfrac{V_0^2}{\rho}$, откуда $\rho = \dfrac{V_A^2}{a_A \cdot \cos 45°} = 2\sqrt{2} \cdot R.$

Ответ: $\rho = 2\sqrt{2} \cdot R.$

Решение задачи К74

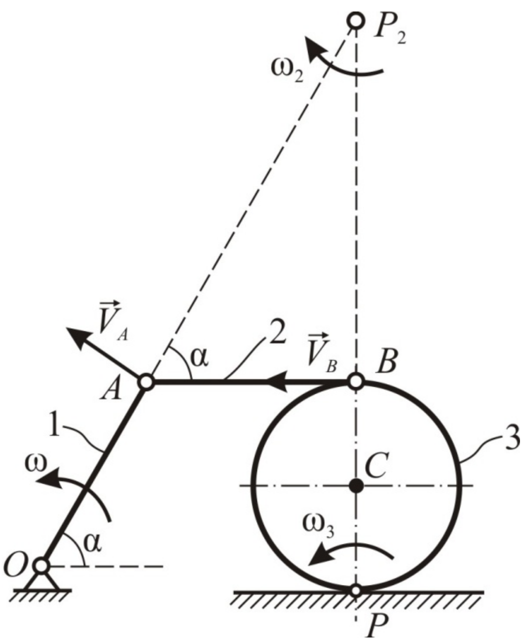
$$V_A = \omega \cdot l, \quad \omega_2 = \frac{V_A}{VP_2} = \frac{\omega}{2},$$

$$V_B = \omega_2 \cdot VP_2 = \frac{\sqrt{3}}{2} l\omega,$$

$$\omega_3 = \frac{V_B}{BP} \frac{\sqrt{3}}{2}\omega,$$

$$\vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{a}^{\,n}_{BA} + \vec{a}^{\,\tau}_{BA}, \qquad (1)$$

$$\vec{a}_B = \vec{a}_C + \vec{a}^{\,n}_{BC} + \vec{a}^{\,\tau}_{BC}, \qquad (2)$$



$$a_A = l\omega^2,$$

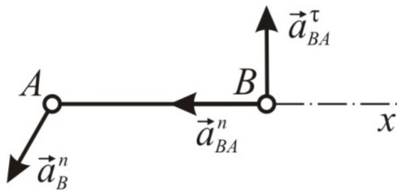
$$a^n_{BA} = \omega_2^2 l = \frac{1}{4} l\omega^2, \qquad a^n_{BC} = \omega_2^2 l = \frac{1}{4} l\omega^2.$$

Проецируем уравнение (1) на ось x, а уравнение (2) – на ось y:

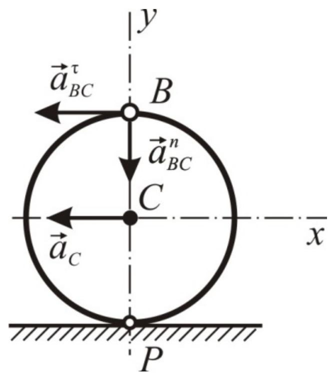
$$a_{BX} = -a_A \cos 60° - a^n_{BA} = -\frac{3}{4} l\omega^2,$$

$$a_{BY} = -a^n_{BC} = -\frac{3}{8} l\omega^2,$$

$$a_B = \sqrt{a^2_{BX} + a^2_{BY}} = \frac{\sqrt{45}}{8} l\omega^2.$$



Для нахождения a_C проецируем уравнение (2) на ось x: $a_{BX} = -a_C - a^{\tau}_{BC}$.



Так как $a^{\tau}_{BC} = \varepsilon_3 \cdot BC$, а с другой стороны, $a_C = \varepsilon_3 \cdot CP$, и CP=BC, то $a^{\tau}_{BC} = a_C$.

Тогда $a_{BX} = -2a_C$, отсюда $a_C = \frac{3}{8} l\omega^2$.

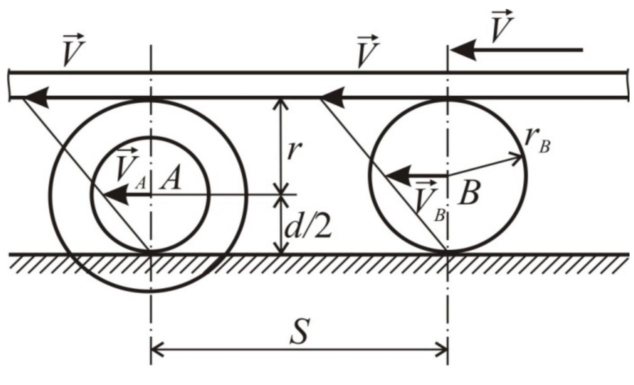
Ответ: $a_B = \frac{\sqrt{45}}{8} l\omega^2$, $a_C = \frac{3}{8} l\omega^2$.

Решение задачи К76

Движение каждого катка – плоское. Из рисунка, где показано распределение скоростей, видно, что $V_B = \frac{1}{2}V$, $V_A = \frac{1}{3}V$.

Учитывая, что $r_B = \left(r + d/2\right)/2 = 3/4$, находим время:

$$t = \frac{S - \left(d/2 + r_B\right)}{V_B - V_A} = 105 \text{ с}.$$



Ответ: t=105 с.

Решение задачи К79

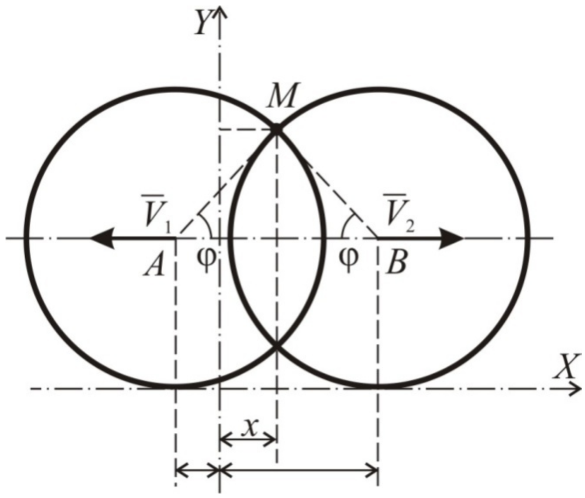
Предположим для определенности $V_2 > V_1$. Поместим ось Y в начальное положение точки M. Тогда $x = -V_1 t + r\cos\varphi = V_2 t - r\cos\varphi$.

Отсюда $\cos\varphi = \dfrac{V_1 + V_2}{2r} t$.

Дифференцируем по времени:

$$-\sin\varphi \cdot \dot{\varphi} = \frac{V_1 + V_2}{2r}, \quad \text{или} \quad \dot{\varphi} = \frac{V_1 + V_2}{2r\sin\varphi};$$

$$\ddot{\varphi} = \frac{(V_1 + V_2)\cos\varphi}{2r\sin^2\varphi}; \; \dot{\varphi} = \frac{(V_1 + V_2)^2\cos\varphi}{4r^2\sin^3\varphi}.$$



Тогда

$$x = V_2 t - \frac{V_1 + V_2}{2r} t,$$

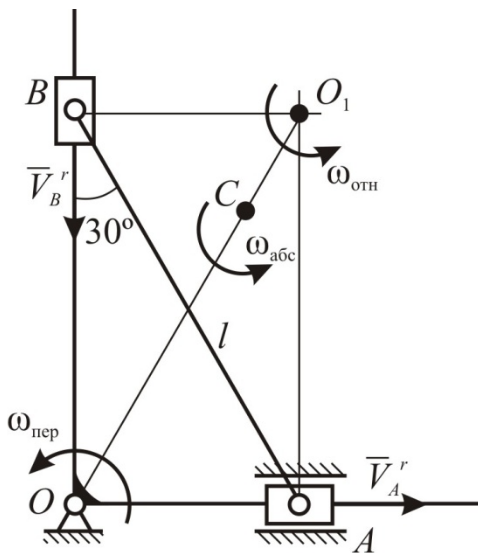
$$r = \frac{V_1 - V_2}{2} t, \;\; \ddot{x} = 0.$$

$$y = r + r\sin\varphi, \quad \dot{y} = r\cos\varphi,$$

$$a = \ddot{y} = -r\sin\varphi \; (\varphi)^2 + r\cos\varphi \; \ddot{\varphi} = \frac{(V_1 + V_2)^2}{2r\sin\varphi}.$$

Ответ: $a = \dfrac{(V_1 + V_2)^2}{2r\sin\varphi}$.

Решение задачи К85



$$\omega_{\text{отн}} = \frac{V}{AO_1} = \frac{V}{l\cos 30°};$$

$$\frac{\omega_{\text{отн}}}{\omega_{\text{пер}}} - \frac{OC}{O_1C};$$

$$\omega_{\text{пер}} = \omega; \quad \frac{V}{l\cos 30°\omega} = \frac{OC}{l - OC};$$

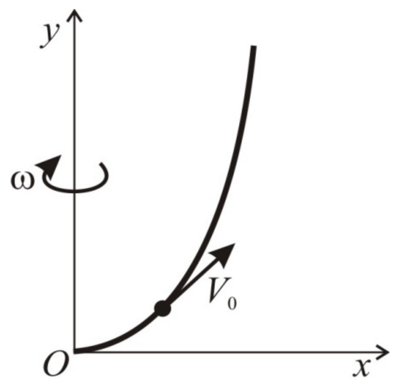
$$OC = \frac{V\,l}{l\omega\cos 30° + V}.$$

Ответ: $OC = \dfrac{V\,l}{l\omega\cos 30° + V}$.

3. КИНЕМАТИКА СЛОЖНОГО ДВИЖЕНИЯ

3.1. Сложное движение

Задача К116

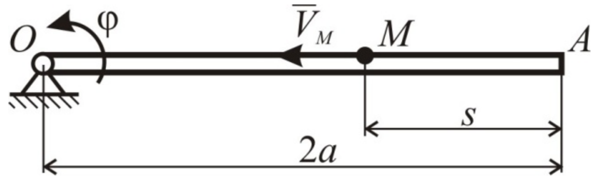


Парабола $y = bx^2$ вращается вокруг оси Oy с постоянной угловой скоростью ω. Бусинка движется по параболе с постоянной скоростью V_0.

Найти абсолютную скорость и проекции абсолютного ускорения бусинки в зависимости от ее положения.

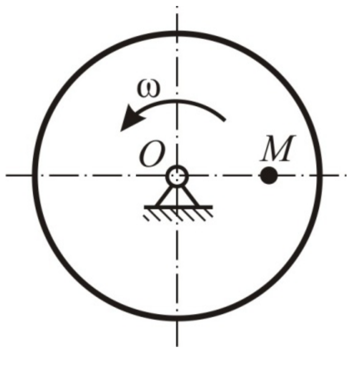
Задача К117

Стержень длины $2a$ вращается вокруг оси O по закону $\varphi = e^{2t}$ рад. Из точки A к оси движется точка M. Каким образом должно изменяться во времени ее расстояние AM для того, чтобы абсолютное ускорение точки M всегда было направлено по стержню?



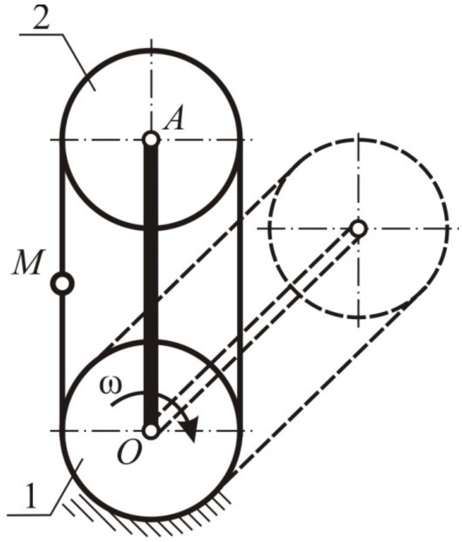
Задача К118

Точка M движется по радиусу вращающегося диска согласно закону $OM = x_0 + V_0 t$. Определить закон вращения диска, если известно, что абсолютное ускорение точки M в любой момент времени направлено по радиусу, абсолютную скорость точки M в момент, когда $x = 2x_0$.

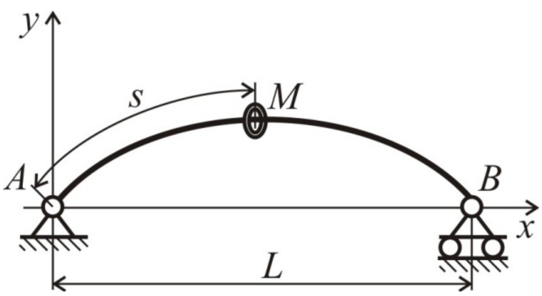


Задача К119

Два одинаковых диска радиусом r охватываются бесконечным ремнем. Диск 1 неподвижен, диск 2 приводится в движение с помощью кривошипа OA длиной $4r$ и свободно может вращаться вокруг точки A. Кривошип вращается с постоянной скоростью ω. По левой ветви ремня движется точка M так, что ее расстояния от точек O и A все время равны. Скольжение ремня по дискам отсутствует. Найти ускорение точки M.



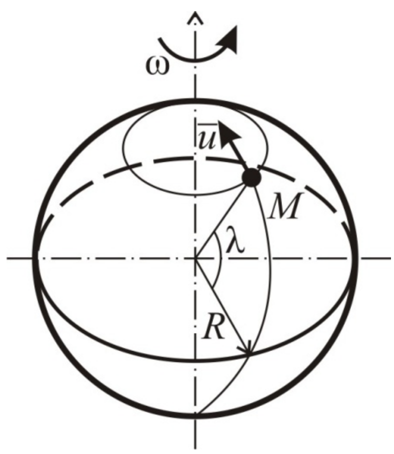
Задача К120



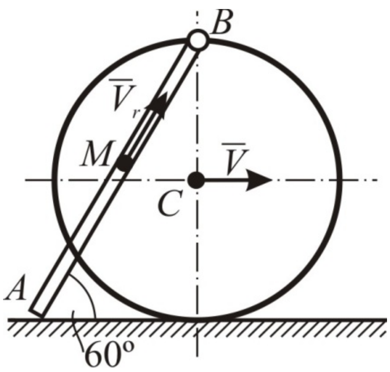
По однородной балке (струне) AB длиной L, изгибные колебания которой описываются уравнением $y(x,t)=a\cos(\omega t)\ \sin(\pi\ x/L)$, скользит кольцо M по закону $AM=s(t)=Vt$. Определить составляющие скорости и ускорения кольца при условии $a<<1$.

Задача К121

По поверхности Земли в плоскости меридиана движется точка M с некоторой постоянно относительной скоростью u. Угловая скорость вращения Земли ω, радиус R. При каком значении u ускорение точки будет постоянным по модулю. Найти также это ускорение.



Задача К122

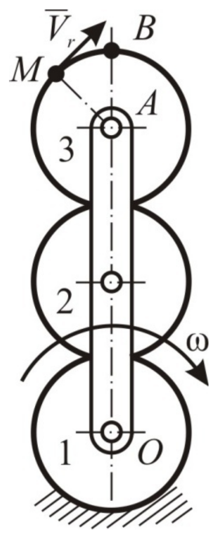


Колесо радиусом R катится без скольжения по горизонтальной плоскости, при этом центр колеса имеет постоянную скорость V. С колесом шарнирно связан стержень AB длиной $l>2R$, второй конец которого скользит по той же плоскости. По стержню в направлении от A к B движется точка M с постоянной относительно скоростью $V_r=V$. Определить абсолютную скорость и абсолютное ускорение точки M в положении, показанном на рисунке, когда шарнир B совпадает с наивысшей точкой колеса, а стержень наклонен к горизонтальной плоскости под углом 60°; $MB=l/2$.

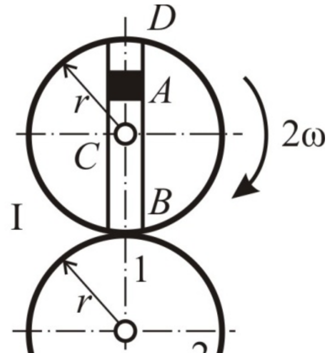
Задача К123

Плоский механизм состоит из трех зубчатых колес 1, 2, 3 одинакового радиуса R=1 м. Колесо 1 неподвижно, колеса 2 и 3 приводятся в движение с помощью кривошипа OA, вращающегося с угловой скоростью ω=1 рад/с.

По ободу колеса 3 движется точка M с постоянной скоростью V_r=2 м/с. Определить абсолютную скорость и абсолютное ускорение этой точки в момент времени, когда она совпадает с верхней точкой B колеса 3 (ω=const).

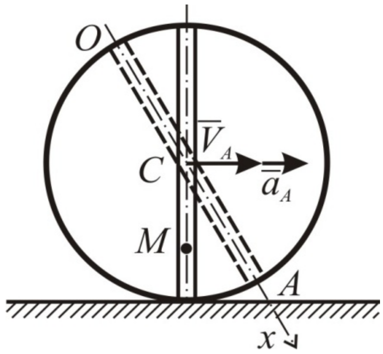


Задача К124



Диск 1 катится без скольжения по неподвижному диску 2 от начального положения 1 с постоянной угловой скоростью $\omega_1=2\omega$. Ползун A движется вдоль диаметра B по закону $s(t)=CA=r\sin(\omega t)$. Определить и показать абсолютные ускорения ползуна для положений 2 и 3 диска.

Задача К125



Диск радиусом R катится без скольжения в вертикальной плоскости. Через центр диска проходит тонкий канал, внутри которого из точки O в точку A в некоторый момент времени t_1 начинает двигаться равноускоренно точка M. К моменту времени, когда канал впервые (после начала движения точки по каналу) занимает вертикальное положение, точка M проходит расстояние, равное 1,5 R. Абсолютное ускорение точки M в этот момент времени направлено параллельно неподвижной плоскости, а скорость и ускорение центра C равны соответственно: $V_C=U$, $a_C=U^2/R$.

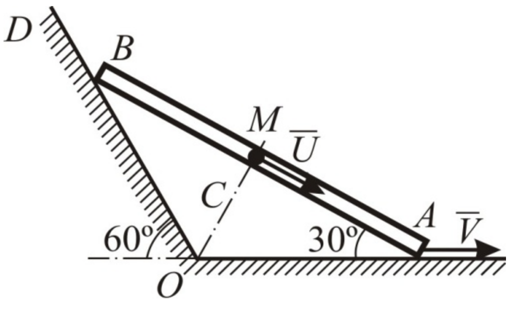
Определить закон движения точки M по каналу и ее абсолютное ускорение при $t=t_2$, если начальная относительная скорость равна 0, а значения t_1 и t_2 неизвестны.

Задача К126

Точка M движется в плоскости xOy согласно уравнениям: $x=t^2, y=t^2$. Плоскость xOy вращается с угловой скоростью $\omega=e^{-t}$ вокруг неподвижной оси, ей перпендикулярной и проходящей через начало координат.

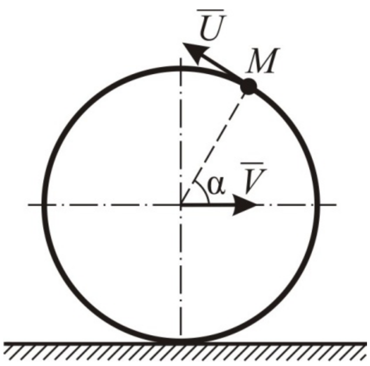
Определить абсолютное ускорение точки M в тот момент времени, когда оно впервые после начала движения направлено вдоль прямой, соединяющей точку M с началом координат.

Задача К127



Стержень $AB=l$ движется в плоскости рисунка, касаясь своими концами двух неподвижных плоскостей, образующих между собой угол 120°. Скорость конца A постоянна и равна V. По стержню AB движется точка M с некоторой относительной скоростью U. Найти значение U, если известно, что абсолютное ускорение точки M в положении, совпадающем с серединой C стержня, направлено вдоль AB.

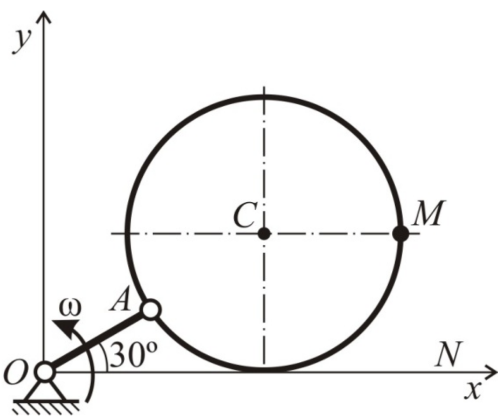
Задача К128



Диск радиусом R катится по горизонтальной прямой без скольжения. Скорость центра O диска постоянна и равна V. По ободу диска в направлении, противоположном вращении диска, движется точка M с постоянной относительной скоростью U, равной по модулю V. Определить абсолютные скорость и ускорение точки M для положения ее на диске, определяемом углом α, и вид траектории дальнейшего движения точки.

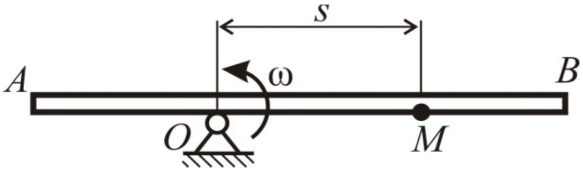
Задача К129

Кривошип OA длиной R вращается вокруг неподвижной точки O с угловой скоростью ω. Обруч с центром в точке C и радиусом R, шарнирно соединенный в точке A с кривошипом, скользит по неподвижной прямой ON. По обручу с постоянной скоростью U движется точка M в направлении против часовой стрелки. Для положения данного механизма, движущегося в плоскости xOy, когда $\angle AON=30°$ и $CM \parallel ON$, найти абсолютные скорость и ускорение точки M.



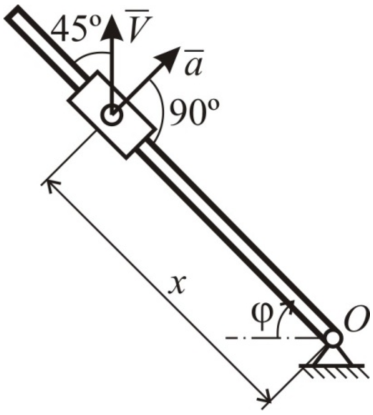
Задача К130

Прямая AB вращается в плоскости вокруг точки O с постоянной угловой скоростью ω. Вдоль прямой движется точка M так, что ее абсолютная скорость и ускорение взаимно перпендикулярны. Определить абсолютные скорость и ускорение точки M, если в начальный момент времени $s_0 = b, \dot{s}_0 = 0$. Найти их численные значения при b=2 см и ω=3 рад/с.

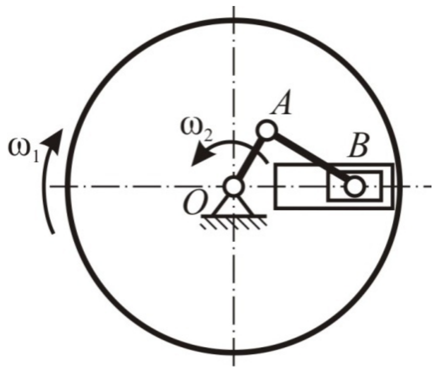


Задача К131

Определить закон относительного движения ползуна $x = x(t)$ и закон вращения стержня $\varphi=\varphi(t)$ при условии, что векторы скорости V и ускорения a ползуна во все время движения составляют со стержнем углы 45° и 90°, соответственно. Начальные условия движения: $t_0 = 0, \varphi_0 = 0, \dot{\varphi}_0 = \omega_0, x = x_0$.



Задача К132

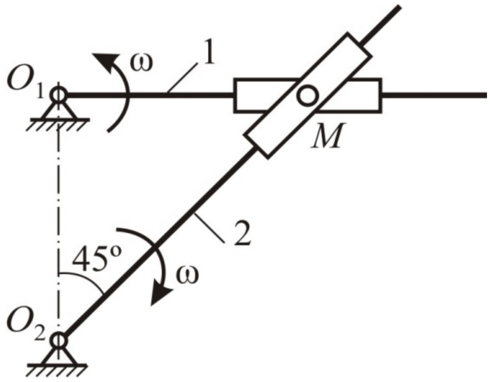


Диск с прорезью для ползуна B равномерно вращается с угловой скоростью $\omega_1 = 1$ с$^{-1}$ по ходу часовой стрелки. Кривошип OA равномерно вращается в обратном направлении с угловой скоростью $\omega_0=3$ с$^{-1}$. Считая, что $OA=r=0{,}1$ м; $AB=2r=0{,}2$ м, определить абсолютные скорость и ускорение центра ползуна B в тот момент, когда угол между шатуном AB и кривошипом OA равен 90°.

Задача К133

Движение центра тяжести снаряда задано уравнениями $x = V_0 t\cos\alpha$, $y=V_0 t\sin\alpha - gt^2/2$, где ($V_0$, α, g – const). Снаряд вращается вокруг своей оси, совпадающей с касательной к траектории, с постоянной угловой скоростью ω. Определить в наивысшем положении снаряда величины абсолютных ускорений тех точек его поверхности, кориолисово ускорение которых максимально, если диаметр снаряда равен $2R$. Вращение Земли не учитывать.

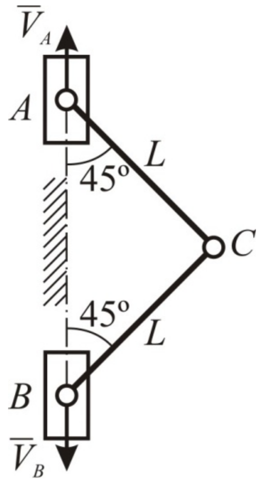
Задача К134



Стержни 1 и 2, расположенные в одной плоскости, вращаются вокруг центров O_1 и O_2 с равными по величине угловыми скоростями ω. Стержни соединены между собой системой шарнирно скрепленных ползунов, один из которых скользит вдоль стержня 1, а второй – вдоль стержня 2. Определить скорость точки *M* для положения, указанного на рисунке, если $O_1O_2=l$.

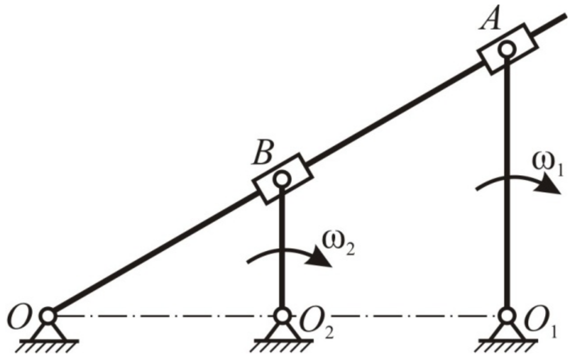
Задача К135

Определить скорость и ускорение точки *C* плоского механизма в положении, указанном на рисунке, если известны скорости V_A и V_B, а ускорения точек *A* и *B* равны 0.



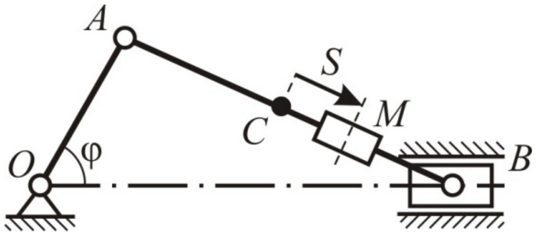
Задача К136

Для данного положения механизма найти угловую скорость ω_2 звена O_2B, если известна угловая скорость ω_1 звена O_1A.



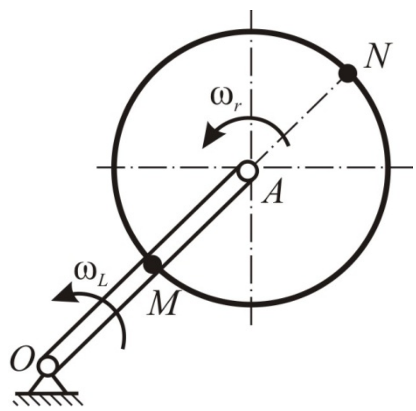
Задача К137

Вдоль шатуна AB кривошипно-ползунного механизма совершает колебания муфта M по закону $CM = r\sin(\omega t)$. Кривошип OA вращается вокруг горизонтальной оси O по закону $\varphi = \omega t$. Определить модули абсолютной скорости абсолютного ускорения муфты M при $t = 0$, если $OA = r$, $AC = CB = 2r$.

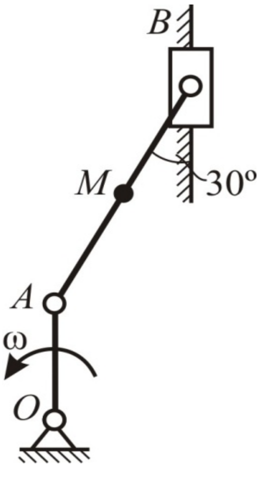


Задача К138

Кривошип OA радиусом $2r$ вращается вокруг оси O с постоянной угловой скоростью ω_L. На пальце свободно надето колесо радиуса r, вращающееся с угловой скоростью ω_r против часовой стрелки. Определить величины и направления ускорений точек M и N колеса, находящихся на концах диаметра, совпадающего с осью кривошипа.

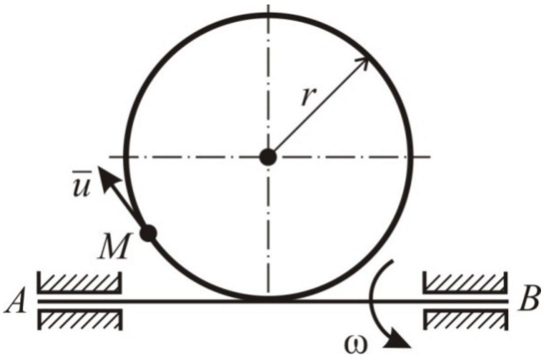


Задача К139



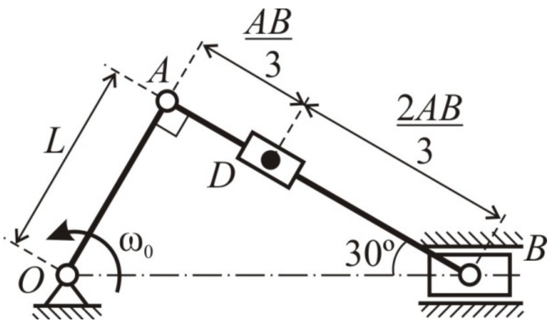
По шатуну AB нецентрального кривошипно-шатунного механизма движется точка M постоянной по величине относительной скоростью u. Кривошип OA вращается с угловой скоростью ω. Определить, при какой относительной скорости u абсолютная скорость точки M при ее прохождении через середину шатуна AB будет горизонтальна в положении механизма, указанном на рисунке; величину абсолютного ускорения точки M в тот же момент времени при условии, что $\omega = \text{const}$, $OA = r$, $AB = 2r$.

Задача К140



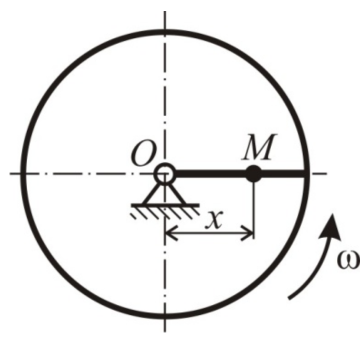
Окружность радиусом r вращается с постоянной угловой скоростью ω рад/с вокруг оси AB. По окружности равномерно с относительной скоростью u м/с движется точка M. Определить абсолютное ускорение точки M в том положении, где ее относительная и переносная скорости равны по величине, т.е. $\omega r = u$.

Задача К141



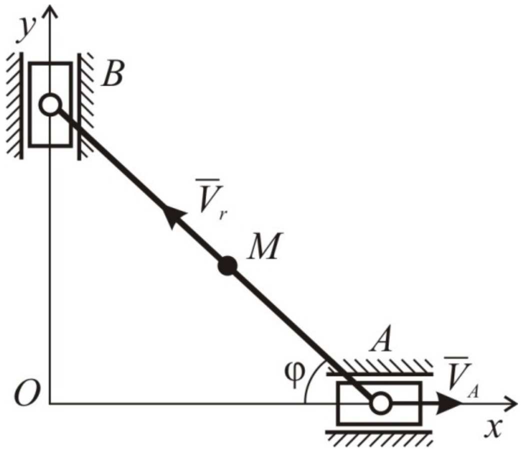
Определить постоянную относительную скорость ползуна D кривошипно-ползунного механизма в положении, указанном на рисунке, если известно, что абсолютное ускорение ползуна D в этот момент времени направлено вдоль шатуна AB. Угловая скорость ω_0 кривошипа постоянна.

Задача К142



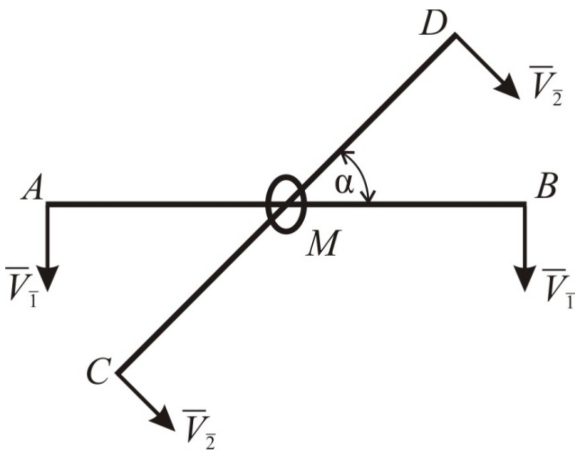
Диск вращается с постоянной угловой скоростью ω вокруг центральной оси, перпендикулярной плоскости диска. Из центра O движется в радиальном направлении точка M. Ее начальная относительная скорость равна V_0. Каково должно быть уравнение относительного движения точки $OM = x = x(t)$ для того, чтобы ее абсолютное ускорение все время было равно ускорению Кориолиса.

Задача К143



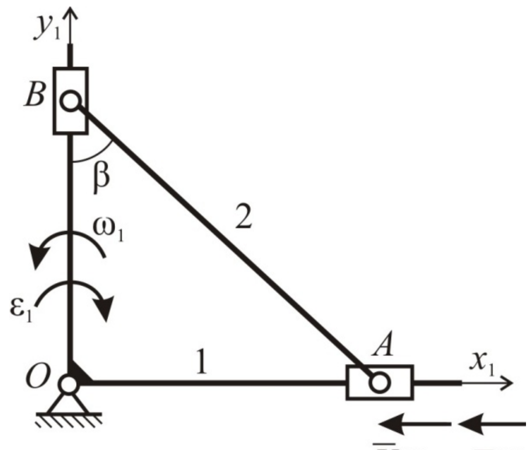
Прямолинейный стержень AB длиной l=1 м скользит своими концами вдоль осей координат, при этом V_A=2 м/с=const. Вдоль стержня в направлении от A к B движется точка M с постоянной относительной скоростью V_r=2 м/с. Определить абсолютное ускорение точки M в тот момент, когда она окажется равноудаленной от МЦС и МЦУ стержня AB. Учесть, что в этот момент угол φ=π/6.

Задача К144



Стержень AB движется поступательно со скоростью V_1, а стержень CD – со скоростью V_2. Стержни продеты свободно через кольцо M и образуют между собой угол α. Найти абсолютную скорость кольца M, если скорость $\bar{V}_1$ перпендикулярна AB, а $\bar{V}_2$ перпендикулярна CD.

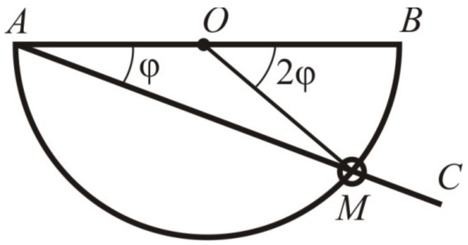
Задача К145



Взаимно перпендикулярные направляющие Ox_1 и Oy_1 в плоском механизме вращаются вокруг оси шарнира O, которая перпендикулярна плоскости Ox_1y_1. Одновременно стержень AB скользит своими концами вдоль направляющих Ox_1 и Oy_1.

Найти $V_{B2}^{\text{абс}}$ и $a_{B2}^{\text{абс}}$, если известны значения следующих величин AB=10 см, β=60°, $V_{A2}^{\text{отн}} = 10$ см/с, $a_{A2}^{\text{отн}} = 20\sqrt{3}$ см/с^2, $\omega_1 = 20\sqrt{3}$ с$^{-1}$, $\varepsilon_1 = 12$ с$^{-2}$.

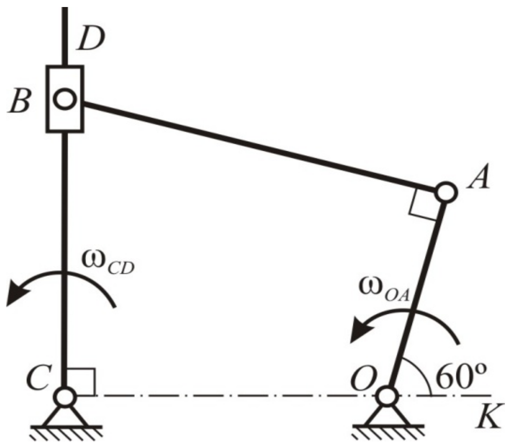
Задача К146



Колечко M надето на проволоку AMB, изогнутую в виде полуокружности, и перемещается по ней при помощи стержня AC так, что $\varphi = \varepsilon t^2 / 2$ (ε=const). Определить абсолютные скорость V, касательное $a_ф$ и нормальное a_n ускорения колечка M, если $AO=OB=R$ и при $t = 0$, $\varphi = 0$, $\dot{\varphi} = 0$.

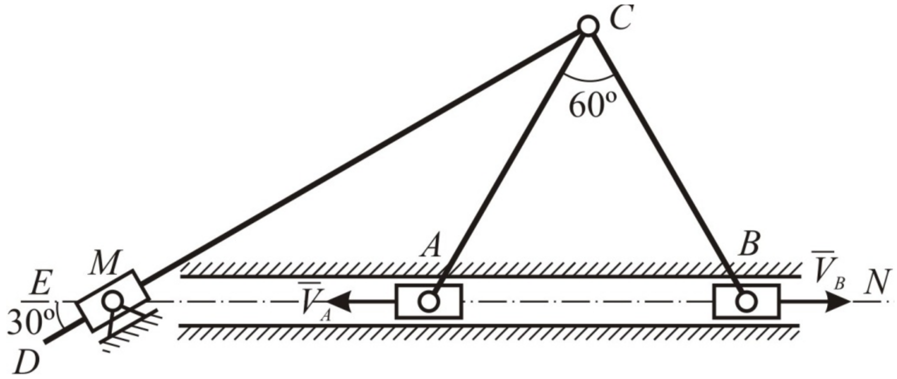
Задача К147

В механизме $OABC$ кривошипа ω_{OA} равна $1\ с^{-1}$. $OA=r=1$ см, $CO=2$ см, $\angle AOK=60°$; $OA \perp AB$, $DC \perp CO$. Определить угловую скорость кулисы CD, если $a_B^{кор} = 1\ см/с^2$; $0{,}8 < V_B^{отн} < 3\ см/с$.

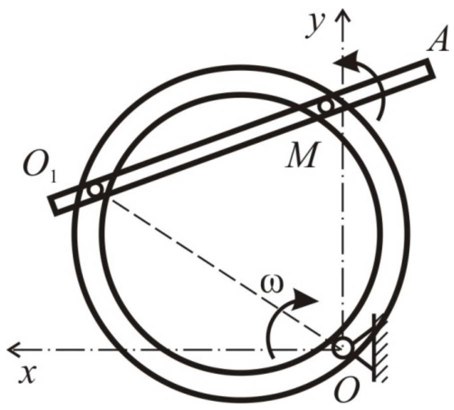


Задача К148

Ползуны A и B движутся по горизонтальной направляющей EN в разные стороны с постоянными скоростями $V_A=V$ и $V_B=2V$. Определить для данного положения механизма угловую скорость и угловое ускорение стержня CD, который может скользить в муфте M и поворачиваться с ней вокруг неподвижной точки O; $AC=CB=l$.



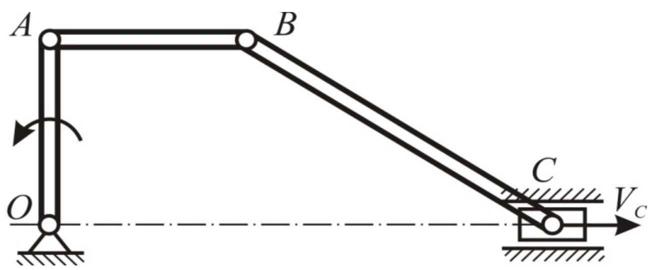
Задача К149



Кольцеобразный желоб радиусом r вращается с постоянной угловой скоростью ω вокруг оси, перпендикулярной его плоскости и проходящей через точку O_1, лежащую на оси желоба. Кривошип OA, имеющий продольную прорезь, вращается в противоположном направлении с угловой скоростью 2ω относительно желоба вокруг точки O, находящейся на одном диаметре с точкой O_1 и жестко связанной с желобом. Стержень (штифт) M, перпендикулярный плоскости кольца, скользит одновременно в желобе и прорези кривошипа.

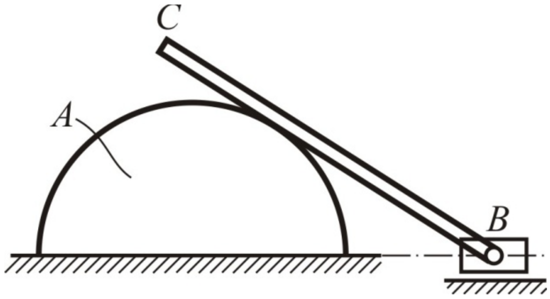
Пренебрегая толщиной кольца, определить величину ускорения штифта M как функцию угла поворота диаметра O_1O (для углов, меньших $\pi/4$), если в начальный момент времени прямые O_1O и OA совпадали.

Задача К150



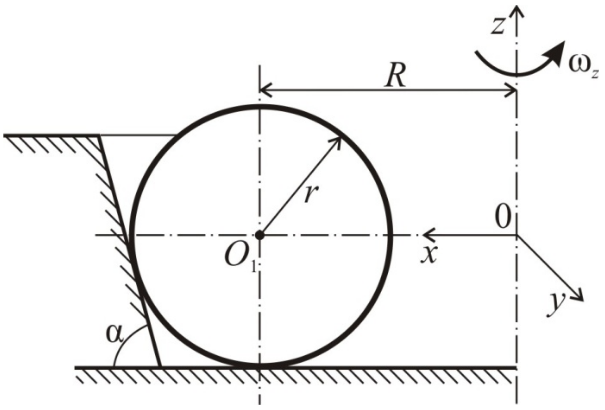
Кривошипно-шатунный механизм состоит из кривошипа OA, равной ему длины шатуна AB и вдвое большего их шатуна BC. Скорости точек A и C равны, постоянны и направлены в разные стороны. В положении, указанном на чертеже, когда кривошип OA расположен вертикально, а шатун AB ему перпендикулярен, определить отношение угловых ускорений шатунов AB и BC.

Задача К151



Полукруглый толкатель A радиусом R=2 м движется ускоренно по горизонтальной плоскости со скоростью $V=\sqrt{2}$ м/с и ускорением $a=\sqrt{2}$ м/с^2. Навстречу ему, так же ускоренно с теми же скоростью и ускорением движется ползун B. Ползун соединен шарнирно со стержнем BC длиной $2R$, который опирается на толкатель. Определить скорость и ускорение точки C в положении механизма, при котором стержень образует с горизонталью угол 45°.

Задача К152

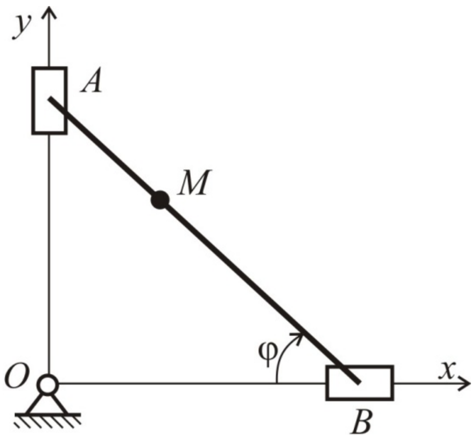


Шарик перекатывается без проскальзывания в точках контакта с конической поверхностью и плоскостью, вращаясь вокруг оси z со скоростью ω_z. Найти точку M шарика, имеющую наибольшую абсолютную скорость и вычислить ее при следующих данных: $\alpha = 60°$,

$$R = \frac{3}{3-\sqrt{3}}r \text{ см}, \ \omega_z = \sqrt{\frac{2}{2-\sqrt{3}}} \text{ с}^{-1}.$$

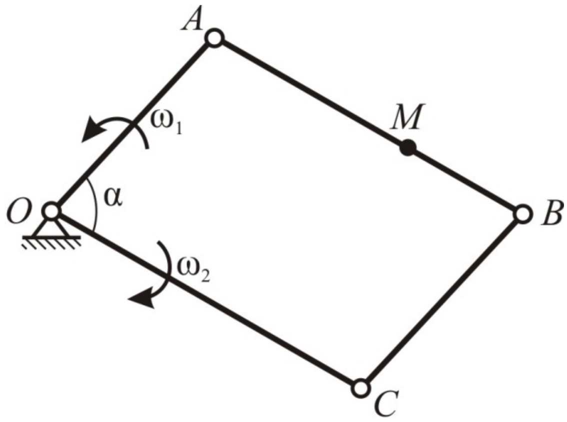
Задача К153

Линейка AB длиной l скользит своими концами по двум взаимно перпендикулярным направляющим Ox и Oy, вращающимся вокруг точки O с постоянной угловой скоростью ω. Закон изменения угла в относительном движении $\varphi = \varphi_0 + \omega t$. Для точки M, делящей AB в отношении 1:3, определить траекторию и скорость в абсолютном движении.



Рассмотреть два случая: 1) когда вращение происходит против часовой стрелки; 2) по ходу часовой стрелки.

Задача К154

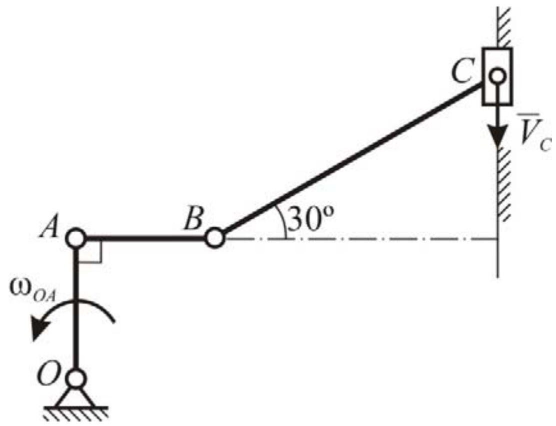


В шарнирном параллелограмме стержень OA вращается в плоскости параллелограмма с постоянной угловой скоростью ω_1, а стержень OC – с постоянной угловой скоростью ω_2 вокруг неподвижной точки O. По стержню AB движется равномерно точка M со скоростью V. $OA=a$, $OC=b$. Определить величину и направление абсолютной скорости и абсолютного ускорения точки M в зависимости от угла α и от расстояния $AM=x$.

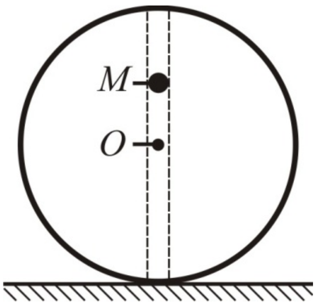
Задача К155

Для изображенного на рисунке плоского механизма дано: V_C=const, ω_{OA}=const; $OA=AB=r$, $BC=2r$.

Определить ω_{AB}, ω_{BC}, ε_{AB}, ε_{BC}.



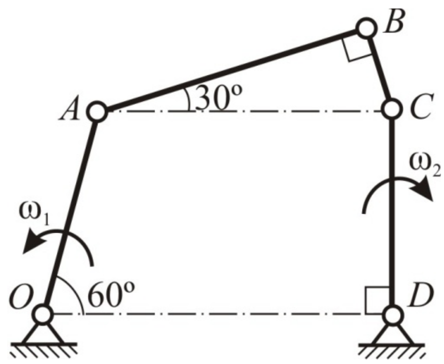
Задача К156



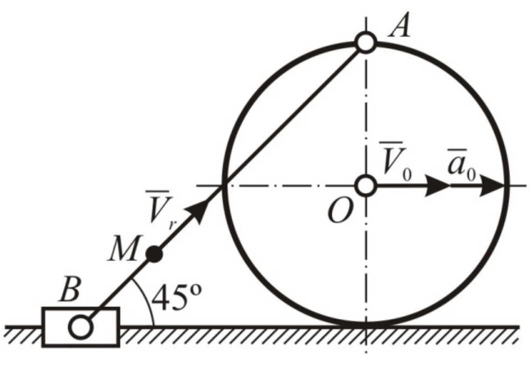
Цилиндр радиусом R = 0,2 м катится без скольжения по неподвижной плоскости, имея в данный момент времени скорость и ускорение центра V_0 = 2 м/с, a_0= 1 м/с. По радиусу цилиндра из центра O движется точка M по закону $S=OM$ =0,1t^2 м. В положении, показанном на рисунке, определить абсолютное ускорение точки M при t = 1 с.

Задача К157

Для данного положения механизма определить скорость точки B и угловые скорости звеньев AB и BC, если ω_1= ω_2= ω, $OA=l$, $AB=a$.



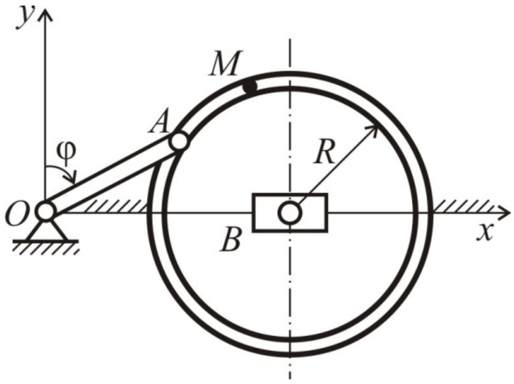
Задача К158



Диск радиусом R=1 м катится без скольжения по прямолинейному рельсу, при этом в данный момент времени скорость его центра O равна V=4 м/с и ускорение a_0=2 м/с. В точке A шарнирно диском скреплен прямолинейный стержень AB, конец B которого перемещается вдоль того же рельса.

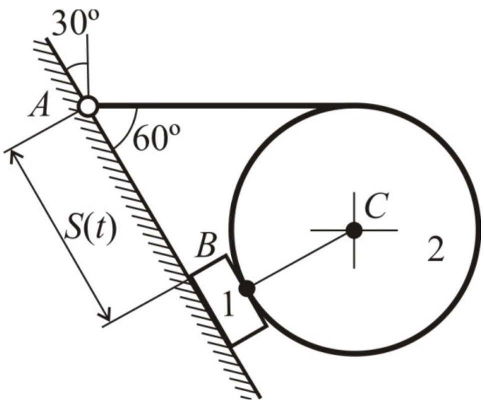
По стержню AB от B к A движется точка M. Найти расстояние AM, при котором в показанном на рисунке положении систем абсолютное ускорение точки M будет направлено вдоль стержня AB.

Задача К159



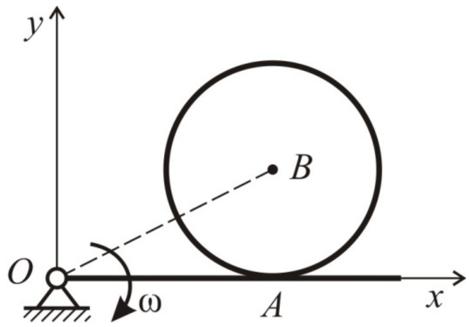
В кривошипно-шатунном механизме шатун выполнен в виде диска радиусом $R=OA=0{,}2$ м с центром на ползуне B. К ободу диска приварена трубка, в которой может перемещаться шарик (точка) M. Определить абсолютную скорость и ускорение шарика при $t_1=1$ с после начала движения. Кривошип вращается по закону $\varphi=(t^2+2{,}14)/2$ радиан, если вести отсчет от вертикали, как это показано на рисунке, а шарик движется так, что расстояние от центра A изменяется согласно уравнению $AM = (\pi + t^2/2 + t - 1{,}5)/5$ м.

Задача К160



Пластина 1 движется по наклонной плоскости по закону $s(t)=0{,}1t^2 + 0{,}4t$ м. По пластине катится без скольжения каток 2 радиусом $R=0{,}2$ м, обмотанный нерастяжимой нитью. Конец A нити закреплен в плоскости. В момент времени $t_1=1$с механизм занимает положение, указанное на рисунке. Определить угловую скорость и угловое ускорение катка 2 в момент времени t_1.

Задача К161

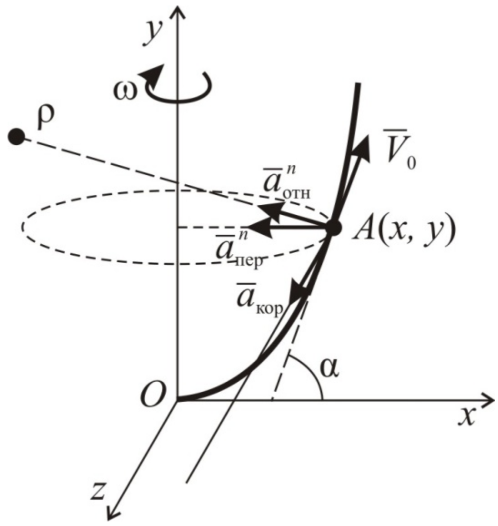


Прямолинейный стержень OA вращается с постоянной угловой скоростью ω в плоскости xOy. По стержню в той же плоскости катится без проскальзывания диск радиусом R так, что расстояние от центра диска до оси вращения стержня меняется по закону: $OB=R(1+t)$.

Определить: 1) как функцию времени, проекцию абсолютного ускорения центра B диска на прямую OB; 2) координаты мгновенного центра скоростей диска в его абсолютном движении в системе координат, связанной со стержнем OA.

3.2. Примеры решения задач к гл. 3

Решение задачи К116



Движение точки по параболе – относительное, вращение параболы – переносное движение.

По теореме сложения скоростей

$$\overline{V}_a = \overline{V}_{\text{отн}} + \overline{V}_{\text{пер}},$$

где $V_{\text{отн}} = V_0,\ V_{\text{пер}} = \omega\, x;\ \overline{V} \perp \overline{V}_{\text{пер}}$,

следовательно, $V_a = \sqrt{V_0^2 + \omega^2 x^2}$.

По теореме сложения ускорений $\overline{a}_a = \overline{a}_{\text{отн}} + \overline{a}_{\text{пер}} + \overline{a}_{\text{кор}}$.

$V_{\text{отн}} = \text{const}$, поэтому $a^{\tau}_{\text{отн}} = 0,\ a^n_{\text{отн}} = \dfrac{V_0^2}{\rho}$.

$\omega = \text{const}$, поэтому $a^{\text{ц}}_{\text{пер}} = \omega^2 x$.

$$\overline{a}_{\text{кор}} = 2\overline{\omega} \cdot \overline{V}_{\text{отн}},\ a_{\text{кор}} = 2\omega V_0 \cos\alpha.$$

Находим проекции абсолютного ускорения $\overline{a}_a$ на оси x, y, z:

$$a_{ax} = -a^n_{\text{отн}} \sin\alpha\ - a^{\text{ц}}_{\text{пер}},$$

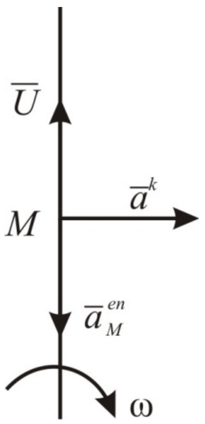
$$a_{ay} = a^n_{\text{отн}} \cos\alpha,\ a_{az} = a_{\text{кор}}.$$

Здесь $\cos\alpha = \dfrac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha}},\ \operatorname{tg}\alpha = 2bx\dfrac{dy}{dx},\ \sin\alpha = \dfrac{1}{\sqrt{1+4b^2x^2}}$,

$$\rho = \frac{\left[1+(y')^2\right]^{3/2}}{y''} = \frac{(1+2b^2x^2)^{3/2}}{2b}.$$

Ответ: $a_{ax} = -\omega^2 x - \dfrac{4b^2V_0^2 x}{\left(1+4b^2x^2\right)^2},\ a_{ay} = \dfrac{2bV_0^2}{\left(1+4b^2x^2\right)^2},\ a_{az} = \dfrac{2\omega V_0}{\sqrt{1+4b^2x^2}}$.

Решение задачи К119



Прямолинейные участки ремня, как и кривошип, равномерно вращаются с угловой скоростью ω. При этом U=V_r=ωr – относительная скорость точки M.

$$\overline{a}_M = \overline{a}_M = \overline{a}_M^k + \overline{a}_M^r = \overline{a}_M^{en} + \overline{a}_M^{e\tau} + \overline{a}_M^k + \overline{a}^r;$$

$$\overline{a}_M^k = 2\omega U = 2\omega^2 r;$$

$$\overline{a}_r = 0;\ \overline{a}_M^{e\tau} = 0;\ \overline{a}_M^{en} = \omega^2 2r = 2\omega^2 r;$$

$$a_{M(\text{абс})} = \sqrt{(a_e^n)^2 + (a^k)^2} = 2\omega^2 r\sqrt{2}.$$

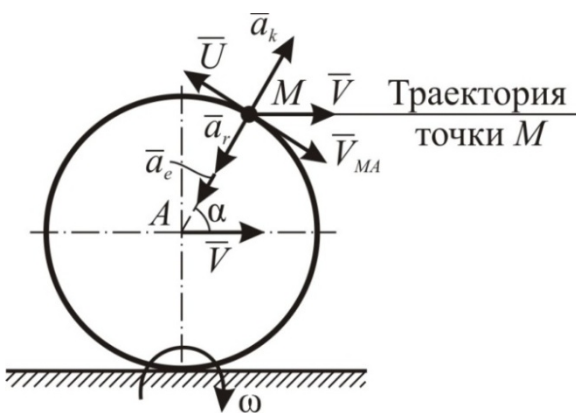
Ответ: $a_{M(\text{абс})} = 2\omega^2 r\sqrt{2}.$

Решение задачи К128

Абсолютная скорость точки M:

$$\overline{V}_M = \overline{V}_r + \overline{V}_e = \overline{U} + \overline{V}_A + \overline{V}_{AM} = \overline{V}_A;$$

$$\omega = \frac{V}{R},\ V_{MA} = \omega R = V,\ U = V.$$



Абсолютное ускорение точки M

$$\overline{a}_M = \overline{a}_r + \overline{a}_e + \overline{a}_k = 0;$$

$$\overline{a}_r = \overline{a}_r^n = \frac{U^2}{R} = \frac{V^2}{R};$$

$$\overline{a}_k = 2\omega U = 2\frac{V^2}{R};$$

$$\overline{a}_e = \overline{a}_A + \overline{a}_{MA}^n + \overline{a}_{MA}^\tau = \overline{a}_{MA}^n \Rightarrow a_e = \omega^2 R = \frac{V^2}{R}.\ a_M = 0.$$

Траектория точки – прямая, параллельная горизонтальной плоскости.

Ответ: $V_M = V$; $a_M = 0$.

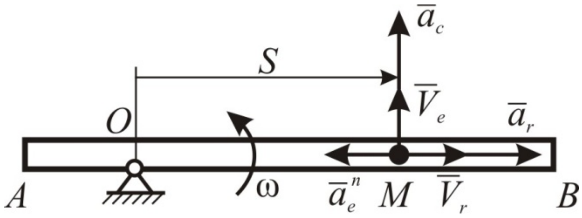
Решение задачи К130

$\overline{V}_m = \overline{V}_r + \overline{V}_e,\ \overline{a}_m = \overline{a}_r + \overline{a}_e + \overline{a}_c.$

Так как $\overline{a}_m \perp \overline{V}_m$, то

$\overline{a}_m\overline{V}_m = (\overline{a}_r + \overline{a}_e + \overline{a}_c)(\overline{V}_r + \overline{V}_e) = \overline{a}_r\overline{V}_r + \overline{a}_e^n\overline{V}_r + \overline{a}_c\overline{V}_e = a_rV_r - a_e^nV_r + a_cV_c = 0.$

Подставляя $\overline{a}_c = 2\omega V_r$ и сокращая на V_r, получим $\ddot{S} - \omega^2 S + 2\omega^2 S = 0$ или $\ddot{S} = \omega^2 S = 0$.



Решение этого дифференциального уравнения:

$$S = c_1\cos\omega t + c_2\sin\omega t,$$

$$\dot{S} = -c_1\omega\sin\omega t + c_2\omega\cos\omega t.$$

Используя начальные условия, находим $c_1 = b$, $c_2 = 0$, тогда $S = b\cos\omega t$,

$V_r = \dot{S} = -b\omega\sin\omega t,\ V_e = \omega S = b\omega\cos\omega t,\ V_m = \sqrt{V_r^2 + V_e^2} = b\omega = 6$ см/с,

$a_r = \ddot{S} = -b\omega^2\cos\omega t,\ a_e^n = b\omega^2\cos\omega t,\ a_c = 2\omega V_r = -2\omega^2 b\sin\ \omega t,$

$a = \sqrt{(a_r - a_e^n)^2 + a_e^2} = 2b\omega^2 = 36$ см/с^2.

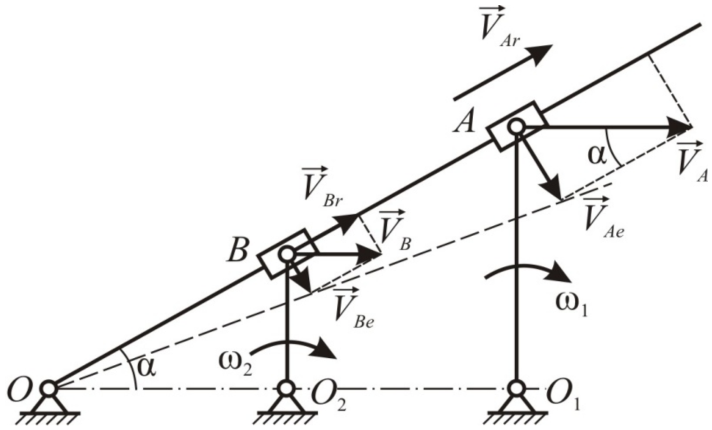
Ответ: $V = 6$ см/с, $a = 36$ см/с^2.

Решение задачи К136

Движение точек A и B механизма – сложное. В соответствии с теоремой сложения скоростей $\vec{V}_A = \vec{V}_{Ae} + \vec{V}_{Ar}$, $\vec{V}_B = \vec{V}_{Be} + \vec{V}_{Br}$, $\vec{V}_A \perp O_1A$, $\vec{V}_B \perp O_2B$.

Построим параллелограммы скоростей, из них

$$V_B = \frac{V_{Be}}{\sin\alpha},\ V_A = \frac{V_{Ae}}{\sin\alpha}.$$



Так как $\dfrac{V_{Be}}{V_{Ae}} = \dfrac{OB}{OA}$, $V_{Be} = V_{Ae}\dfrac{OB}{OA}$ и $V_B = V_A\dfrac{OB}{OA}$, $V_B = V_A\dfrac{OB}{OA}$.

$V_A = \omega_1 \cdot O_1A$, $V_B = \omega_2 \cdot O_2B$, следовательно, $\omega_2 = \omega_1\dfrac{O_1A \cdot OB}{OA \cdot O_2B}$.

Из рисунка видно, что $\dfrac{O_1A}{O_2B} = \dfrac{OA}{OB}$, поэтому $\omega_2 = \omega_1$.

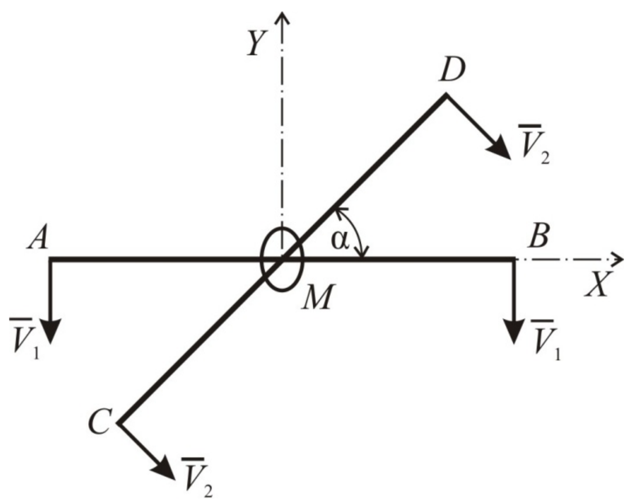
Ответ: $\omega_2 = \omega_1$.

Решение задачи К144

Свяжем подвижную систему координат со стержнем *AB*.
Тогда на основании теоремы сложения скоростей

$$\vec{V}_M = \vec{V}_1 + \vec{V}_{M1}. \tag{1}$$

Здесь неизвестны величина и направление вектора $\vec{V}_M$ и величина относительной скорости $\vec{V}_{M1}$.



Если подвижную систему координат связать со стержнем CD, то

$$\vec{V}_M = \vec{V}_2 + \vec{V}_{M2}. \qquad (2)$$

Запишем проекции уравнений (1) и (2) на оси X и Y:

$$V_{MX} = V_{M1}, \quad V_{MX} = V_2 \sin\alpha + V_{M2}\cos\alpha;$$

$$V_{MY} = -V_1, \quad V_{MY} = -V_2\cos\alpha + V_{M2}\sin\alpha.$$

Отсюда $V_{M1} = V_2\sin\alpha + V_{M2}\cos\alpha,\ V_{M2} = \dfrac{V_2\cos\alpha - V_1}{\sin\alpha}$,

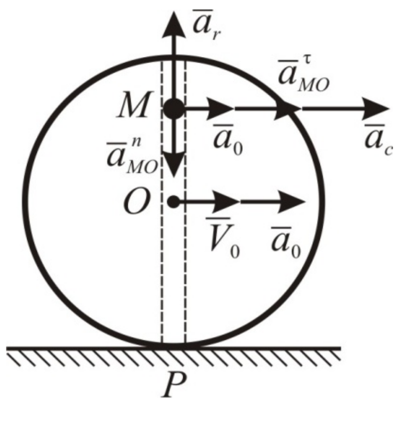
$$-V_1 = -V_2\cos\alpha + V_{M2}\sin\alpha,$$

$$V_M = \sqrt{V_{MX}^2 + V_{MY}^2} = \sqrt{V_2^2 + V_{M2}^2} = \sqrt{V_2^2 + \left(\frac{V_2\cos\alpha - V_1}{\sin\alpha}\right)^2},$$

$$V_M = \sqrt{\frac{V_2^2 + V_1^2 - 2V_1V_2\cos\alpha}{\sin^2\alpha}}.$$

Ответ: $V_M = \sqrt{\dfrac{V_2^2 + V_1^2 - 2V_1V_2\cos\alpha}{\sin^2\alpha}}$.

Решение задачи К156



$$\bar{a}_M = \bar{a}_r + \bar{a}_e + \bar{a}_c.$$

Так как переносное движение – плоскопараллельное, то $\bar{a}_e = \bar{a}_0 + \bar{a}_{MO}^n + \bar{a}_{MO}^\tau$;

$$\omega = \frac{V_0}{R} = 10\ \text{с}^{-1};$$

$$\varepsilon = \frac{d\omega}{dt} = \frac{a_0}{R} = 5\ \text{с}^{-2};\ \ a_r = \ddot{S} = 0{,}2\ \text{м/с}^2;$$

$$a_{MO}^n = \omega^2(MO) = 10\ \text{м/с}^2;\ \ a_{MO}^\tau = \varepsilon(MO) = 0{,}5\ \text{м/с}^2;$$

$$a_c = 2\omega V_r = 4\ \text{м/с}^2;$$

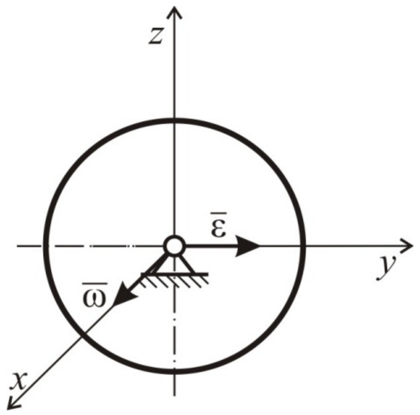
$$a_M = \sqrt{(a_r - a_{MO}^n)^2 + (a_0 + a_c + a_{MO}^\tau)^2} = 11{,}24\ \text{м/с}^2.$$

Ответ: a_M =11,24 м/с^2.

4. СФЕРИЧЕСКОЕ ДВИЖЕНИЕ. ПРИКЛАДНЫЕ ЗАДАЧИ

4.1. Задачи на сферическое движение

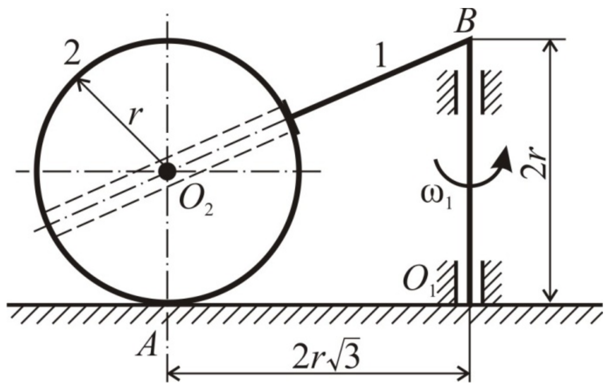
Задача К162



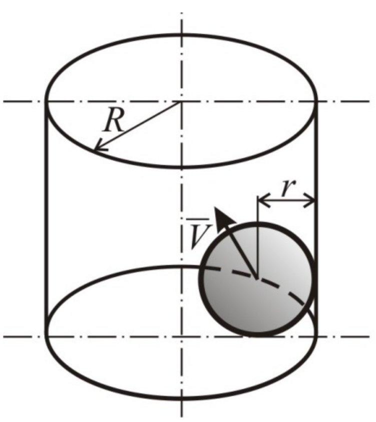
Шар радиусом R, закрепленный шарнирно в центре, совершает сферическое движение. Его угловая скорость ω и угловое ускорение ε направлены, как указано на чертеже, $\varepsilon=\omega^2$. Определить на поверхности шара точки, ускорения которых параллельны ω.

Задача К163

Шар 2 вращается вместе с вертикальной осью O_1B и перекатывается по горизонтальной плоскости без проскальзывания. Определить максимальную относительную скорость (разность абсолютных скоростей) двух точек шара. Дано: r, O_1B, O_1A, ω_1.



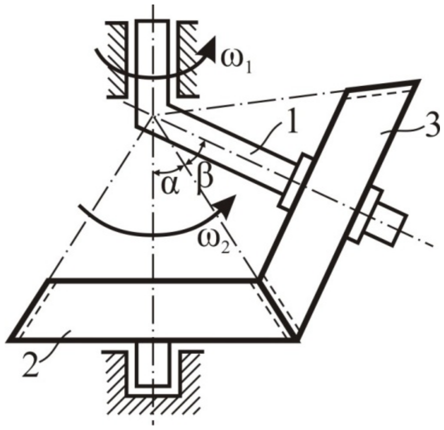
Задача К164



Шар радиусом r катится без проскальзывания в цилиндрическом стакане радиусом R, касаясь одновременно дна и стенки. Вычислить абсолютную величину ε углового ускорения шара, если скорость центра шара по величине постоянна и равна V.

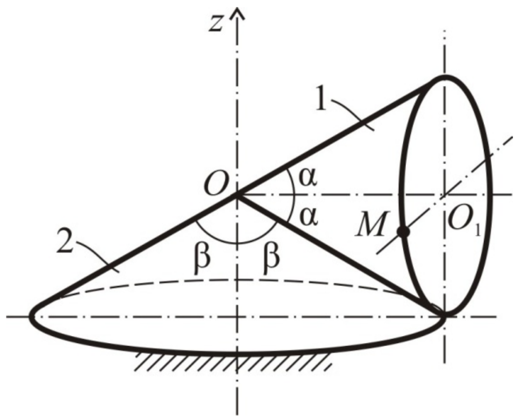
Задача К165

Водило 1 дифференциальной передачи вращается с постоянной угловой скоростью ω_1 вокруг вертикальной оси и несет на себе коническое колесо 3. Колесо 3 свободно насажено на ось водила и входит в зацепление с коническим колесом 2, которое вращается с постоянной угловой скоростью ω_2 ($\omega_2 > \omega_1$) вокруг вертикальной оси. Углы α и β заданы. Найти абсолютное угловое ускорение шестерни 3.



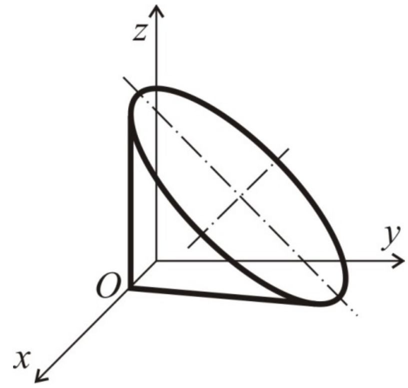
Задача К166

Прямой круговой конус 1 с углом $2\alpha=60^\circ$ при вершине и радиусом основания $R=1$ катится без скольжения по круговому конусу 2 с углом $2\beta=120^\circ$ при вершине. Найти радиус кривизны траектории абсолютного движения точки M основания конуса 1 в положении, когда радиус O_1M горизонтален.

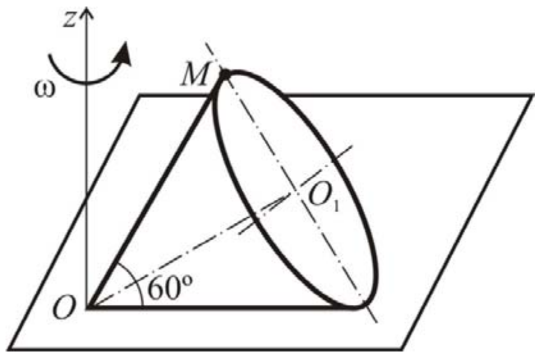


Задача К167

Сплошной конус с углом 90° при вершине катится без скольжения по горизонтальной плоскости с постоянной по величине угловой скоростью ω. Определить геометрическое место тех точек конуса, ускорение которых параллельны опорной плоскости.



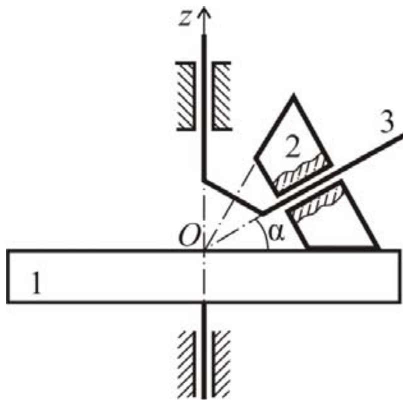
Задача К168



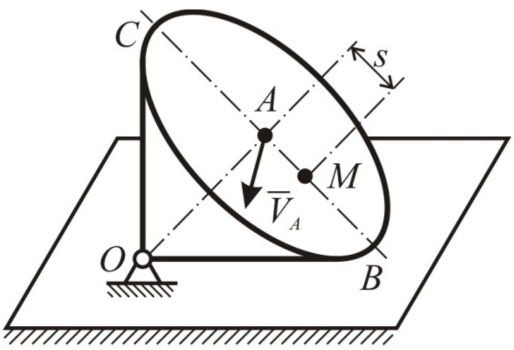
Найти нормальное ускорение точки M конуса, который катится без скольжения по горизонтальной плоскости, вращаясь при этом вокруг оси z/π с постоянной угловой скоростью $\omega=3\ с^{-1}$, $OO_1=30$ см.

Задача К169

В изображенном на рисунке механизме колесо 1 и водило 3 вращаются вокруг оси Oz с угловыми скоростями ω_{1z} и ω_{3z} соответственно. Найти абсолютное угловое ускорение колеса 2, если $\omega_{1z}= -3\ с^{-1}$, $\omega_{3z}=5t\ с^{-1}$, $\alpha=30°$.



Задача К170



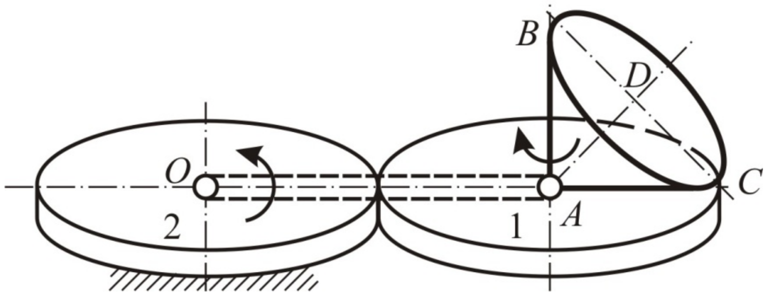
Круговой конус с неподвижной вершиной O и радиусом основания 8 см катится без скольжения по плоскости. Центр основания движется со скоростью $2t$ см/с. Около центра A вдоль диаметра основания BC совершает гармонические колебания точка M по закону $s=AM=2\cos(\pi t/2)$ см.

Определить модуль абсолютного ускорения точки M и модуль абсолютного углового ускорения конуса в момент $t=1$ с, если угол при вершине конуса равен $\pi/2$.

Задача К171

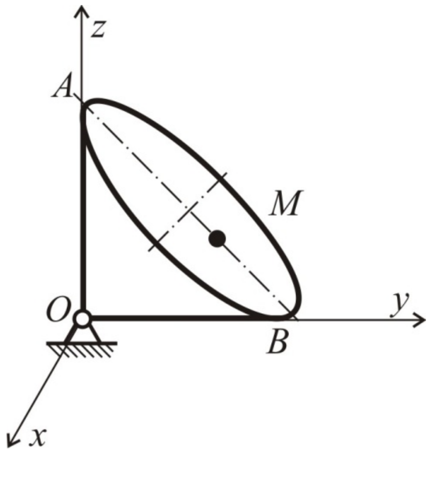
Круговой конус, вершина которого A все время находится в центре колеса 1 радиусом r, катится без скольжения по поверхности этого колеса. Образующая конуса равна r, угол при его вершине $\alpha=\pi/2$. Колесо 1, приводимое в движение кривошипом OA, вращающимся вокруг неподвижной оси O с угловой скоростью ω катится без скольжения по неподвижному колесу 2 с тем же радиусом.

Определить угловое ускорение конуса и модуль абсолютного ускорения точки B конуса в момент, когда точки O, A, C находятся на одной прямой ($OC>OA$), если центр основания конуса движется по отношению к колесу 1 равномерно со скоростью $V=r\,\omega_0$. Направления вращения указаны на рисунке стрелками.



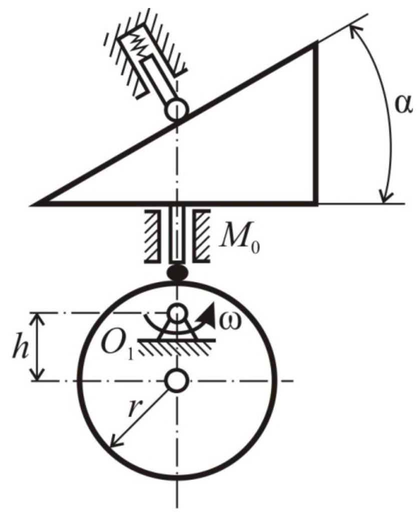
Задача К172

Конус AOB катится без скольжения по горизонтальной плоскости xOy с постоянной абсолютной угловой скоростью ω, все время касаясь этой плоскости по образующей. Вершина O конуса неподвижна, $\angle AOB=90^o$. Найти на диаметре AB основания конуса такую точку M, (найти BM), направление вектора ускорения которой составляет угол 45^o с плоскостью xOy, затем вычислить модуль ускорения этой точки при радиусе основания конуса R=1 м и ω=1 с$^{-1}$.



4.2. Некоторые прикладные задачи

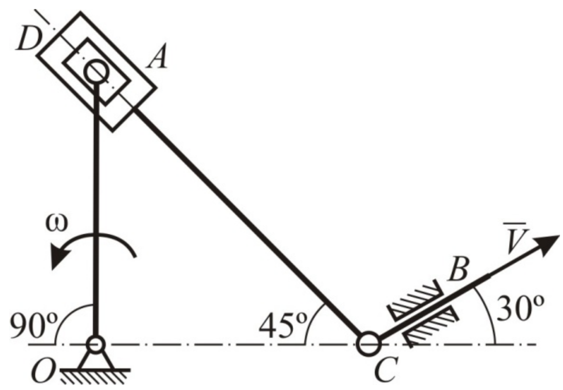
Задача К173



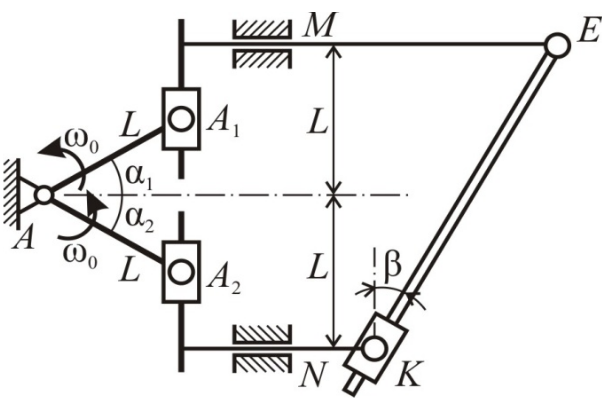
Кулачок, представляющий собой диск радиусом r, эксцентрично посаженный на вал, вращается с угловой скоростью ω. Относительный эксцентриситет кулачка h/r равен ε. Опирающийся на кулачок вертикальный толкатель клиновидной головкой приводит в движение подпружинный ползун. Ось ползуна перпендикулярна плоскости клина, которая составляет с горизонтом угол α. Определить скорость ползуна в зависимости от угла φ поворота кулачка (на чертеже изображено начальное положение кулачка).

Задача К174

В плоском кулисном механизме кривошип длиной OA=0,2 м вращается равномерно с угловой скоростью ω=10 рад/с. Стержень CB движется с постоянной скоростью V=1 м/с. Определить в указанном положении механизма угловую скорость и угловое ускорение кулисы CD.



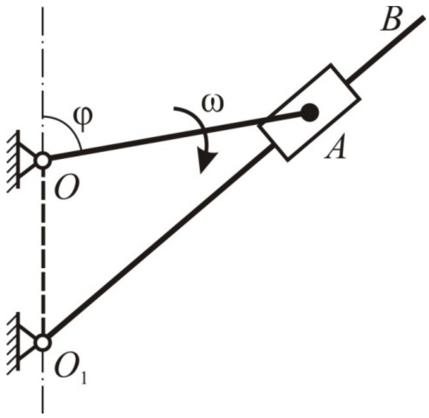
Задача К175



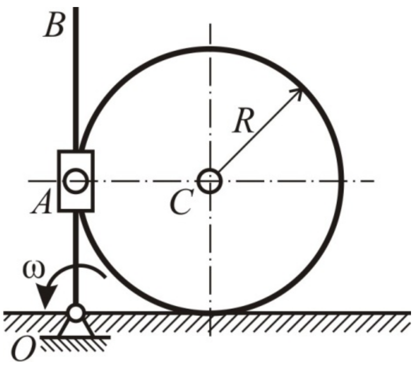
В суммирующем механизме оба кривошипа OA_1 и OA_2 одинаковой длины, равной половине расстояния между направляющими M и N. В некоторый момент, когда углы $\alpha_1=\alpha_2=\beta=30^\circ$, оба кривошипа имеют одинаковые направления вращения, равные угловые скорости ω_0 и угловые ускорения, равные нулю. Определить в этот момент угловую скорость и угловое ускорение звена *EK*.

Задача К176

Определить угловое ускорение вращающейся кулисы O_1B кривошипно-кулисного механизма строгального станка при горизонтальном положении кривошипа ($\varphi = 90°$), если длина AO=40 см, расстояние между осями кривошипа и кулисы OO_1=30 см, угловая скорость равномерного вращения $\omega = 3$ с$^{-1}$.



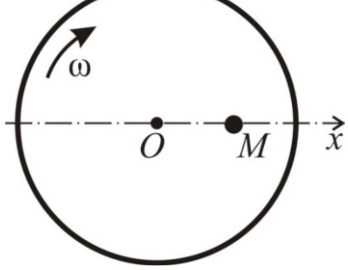
Задача К177



Стержень *OB* вращается вокруг оси *O* по закону $\varphi = t^2 - t$ рад и несет на себе ползун, связанный с ободом колеса в точке *A*. Считая, что в момент времени t=1с стержень вертикален, а точка *A* находится на горизонтальном диаметре колеса радиусом R=1 м, найти скорость и ускорение центра колеса, катящегося без скольжения по горизонтальному рельсу.

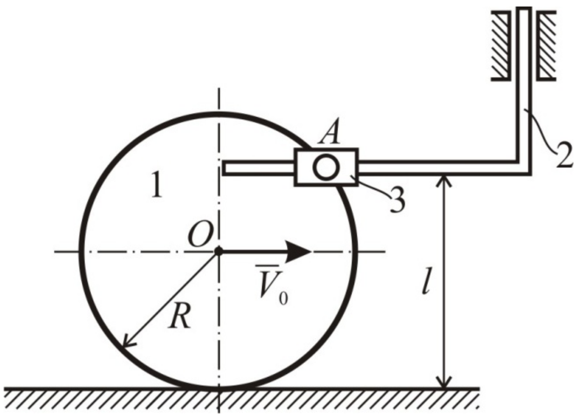
Задача К178

Резец *M* совершает поперечное возвратно-поступательное движение согласно закону $OM=x=a\sin\omega t$. Найти уравнение траектории конца резца *M* относительно диска, вращающегося равномерно с угловой скоростью ω вокруг оси *O*, пересекающей абсолютную траекторию резца.

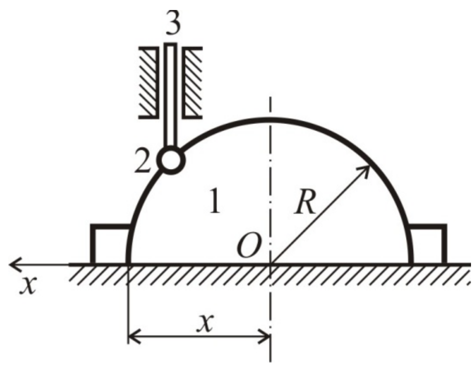


Задача К179

Диск 1 радиусом R= 0,4 м катится без скольжения по плоскости и при помощи ползуна 3, шарнира, прикрепленного к ободу в точке A, приводит в движение изогнутый под прямым углом стержень 2. Стержень скользит в направляющих. Скорость центра диска постоянная и равна V_0 = 0,8 м/с. Определить скорость и ускорение стержня 2, а также ускорение точки A относительно стержня 2 в показанном на рисунке положении механизма, если l=0,6 м.



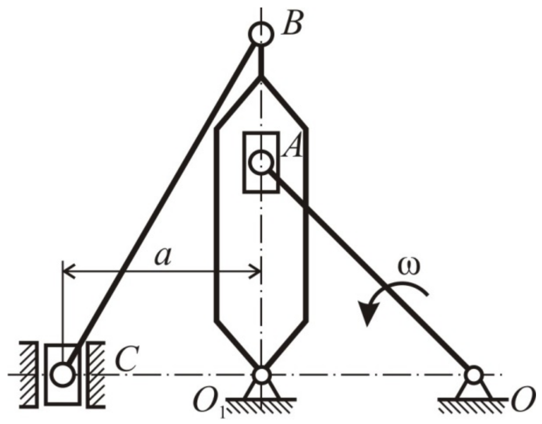
Задача К180



Копир 1 в форме полуцилиндра радиусом R движется в горизонтальных направляющих по закону x=2t. Его обкатывает ролик 2, находящийся на нижнем конце вертикального толкателя 3. Определить скорость и ускорение толкателя. Размерами ролика пренебречь.

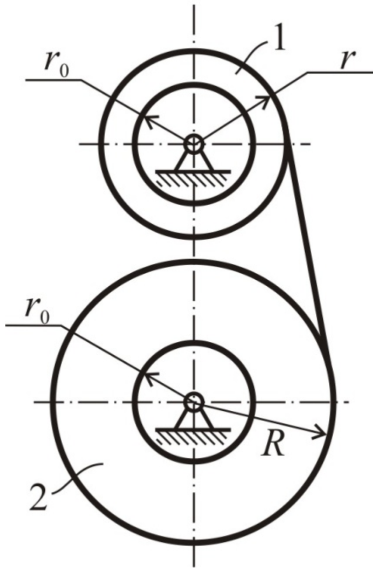
Задача К181

Ползун A, прикрепленный к кривошипу OA, вращающемуся с угловой скоростью ω, перемещается вдоль кулисы O_1B. Определить скорость ползуна C в момент, когда ось кулисы вертикальна. Принять O_1C=a.

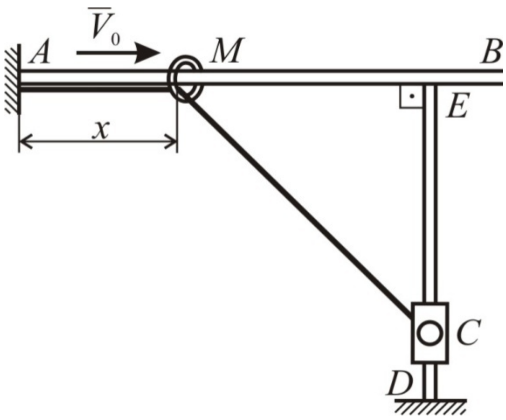


Задача К182

Магнитофонная лента малой толщины δ большой длиной L перематывается с бобины 2 радиусом R, имеющую постоянную угловую скорость $\omega=\omega_0$. Радиусы пустых бобин равны r_0. Определить: 1) радиусы бобин с лентой r и R как функции времени, если в начале перемотки $r=r_0$; 2) угловую скорость ω_2 бобины 2 как функцию времени; 3) максимальный радиус R_0 катушки, на которую намотана вся лента; 4) время перемотки ленты.



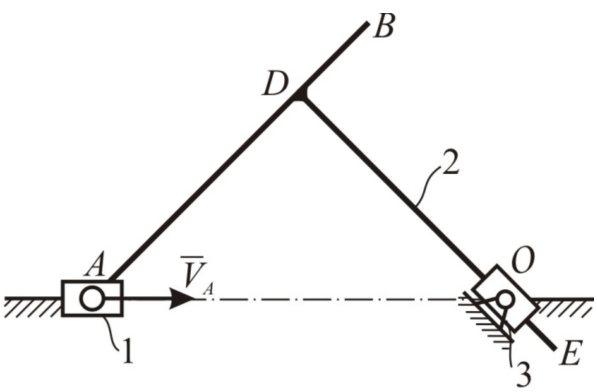
Задача К183



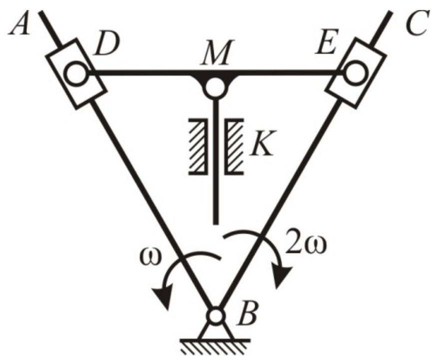
Нить AMC закреплена одним концом в неподвижной точке A и продета через кольцо M, скользящее с постоянной скоростью V_0 по неподвижному стержню AB. Другой конец нити привязан к ползуну C, скользящему по вертикальному стержню DE. Длина нити равна l, расстояние $AE=h$, $AB \perp DE$. Определить скорость ползуна C в зависимости от расстояния $AM=x$.

Задача К184

В механизме движение от ползуна 1 передается шарнирно связанному с ним звену 2, элемент DE которого проходит через муфту 3, вращающийся относительно горизонтальной оси O. Определить угловую скорость и угловое ускорение звена 2 механизма в положении, когда $\angle BAO=45^{\circ}$, если $V_A=1$ м/с, $AO=1$ м, $DE \perp AB$, $a_A=1$ м/с^2.



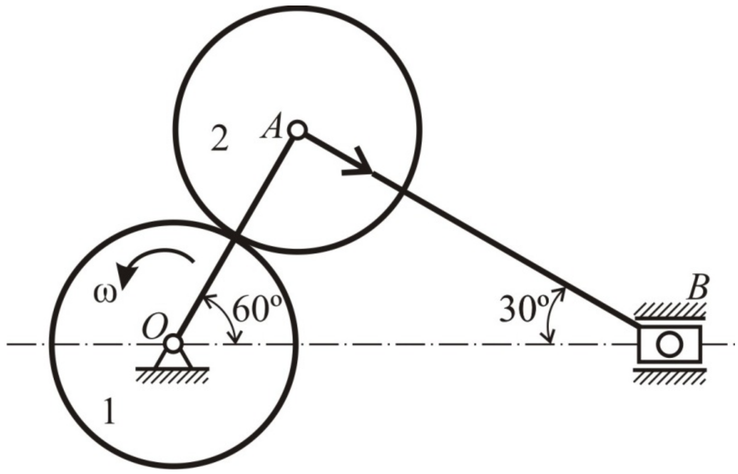
Задача К185



Стержни AB и BC вращаются равномерно с угловыми скоростями ω и 2 ω в разные стороны вокруг неподвижного шарнира B. Стержень DE соединяет два ползуна, движущиеся по AB и BC, при этом средней точкой M стержень связан шарнирно с другим стержнем, движущимся вдоль направляющих K. Найти скорости и ускорения точек D, M, E в тот момент, когда $\angle ABE=60^{\circ}$, а стержень DE горизонтален; $DE=a$.

Задача К186

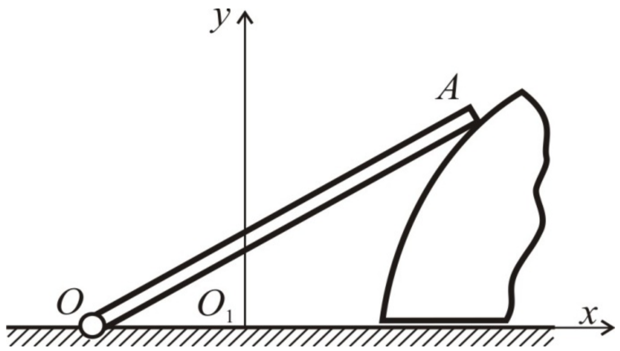
На неподвижную ось OA свободно насажены зубчатое колесо 1 радиусом r и кривошип OA длиной $2r$, не связанные между собой. С шатуном AB жестко скреплено зубчатое колесо 2. Колесо 1 вращается равномерно с угловой скоростью ω, и, захватывая зубья колеса 2, приводит в движение шатун AB и кривошип OA. Для указанного на чертеже положения механизма определить скорость и ускорение ползуна B.



Задача К187

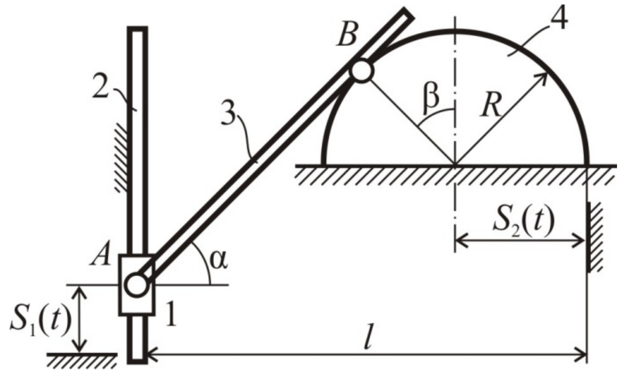
Кулачок движется поступательно справа налево с постоянной скоростью V_0. Уравнение его контура в осях xO_1y, неизменно с ним связанных, известно. Стержень OA длиной l шарнирно скреплен с неподвижной точкой O и опирается свободным концом на кулачок.

Найти угловую скорость ω стержня в зависимости от положения его конца A в осях xO_1y. Найти также такую форму кулачка (уравнение его контура), при которой стержень будет вращаться с постоянной скоростью ω_0.



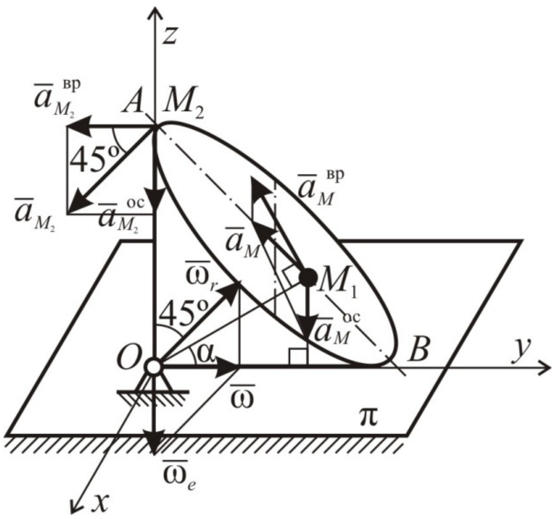
Задача К188

По неподвижной вертикальной стойке 2 скользит втулка 1 по закону $S_1(t)=t^3$ см. К втулке в точке A шарнирно прикреплен стержень 3, который соприкасается в точке B с ползуном 4, представляющим собой полуцилиндр радиусом $R=4\sqrt{2}$ см. Ползун скользит по горизонтальной плоскости по закону $S_2(t)=2\sin(\pi t/2)$ см. Определить угловую скорость и угловое ускорение стержня 3 в момент времени t_1=1 с, если α=45°, l=16 см.



4.3. Примеры решения задач к гл. 4

Решение задачи К172



Угловое ускорение конуса:

$$\overline{\varepsilon} = \overline{\omega}_e \overline{\omega};\ \varepsilon = \omega_e \omega = \omega^2;$$

Ускорение точки M:

$$\overline{a}_M = \overline{a}_M^{\text{вр}} + \overline{a}_M^{\text{ос}}; \qquad (1)$$

$$a_M^{\text{ос}} = \omega^2 OM \sin\alpha.$$

Спроектируем (1) на y и z:

$$a_{My} = -a_M \cos\beta = -a_M^{\text{вр}} \sin\alpha = -\varepsilon OM \sin\alpha;$$

$$a_{Mz} = a_M \sin\beta = a_M^{\text{вр}}\ \cos\alpha;$$

$$a_M^{\text{ос}} = \varepsilon OM\ \cos\alpha\ - \omega^2 OM \sin\alpha;$$

$\beta = \angle(\overline{a}_M, \pi);$

П – плоскость xOy.

$$g\beta = \operatorname{ctg}\alpha - 1.$$

При $\beta = \dfrac{\pi}{4}$: ctg α=2, $M_1B = R - R\operatorname{tg}(45^\circ - \alpha) = 2/3$.

При $\beta = -\dfrac{\pi}{4}$: ctg α=0, α=π/2, $M_1B = AB = 2R$.

При ω=1 с$^{-1}$, R=1 м; $a_{M1y} = \dfrac{\sqrt{2}}{3}$; $a_{M1z} = \dfrac{\sqrt{2}}{3}$; $a_{M1} = \dfrac{2}{3}$м/с^2;

$a_M^{\text{ос}} = a_M^{\text{вр}} = \sqrt{2}$,

$\overline{a}_{M2} = 2$м/с^2.

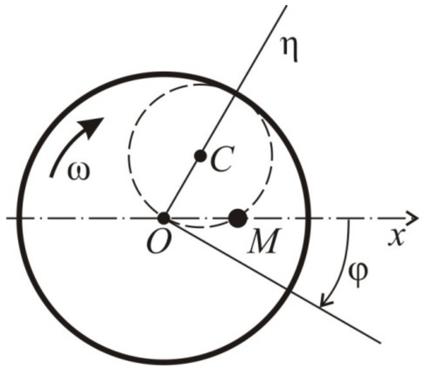
Ответ: $BM_1 = \dfrac{2}{3}R$; $BM_1 = 2R$; $a_{M1} = \dfrac{2}{3}$ м/с^2; $a_{M2} = 2$ м/с^2.

Решение задачи К178

ξз – оси, связанные с диском. Диск вращается равномерно, поэтому φ=ωt. Координаты точки M:

$$\xi = OM\cos\varphi = \frac{1}{2}a\sin 2\omega t,\ \eta = OM\sin\varphi = \frac{1}{2}a(1 - \cos 2\omega t).$$

Исключая время, находим траекторию точки M: $\xi^2+\left(\eta-\frac{a}{2}\right)^2=\left(\frac{a}{2}\right)^2$ – это окружность с центром в точке $C\left(0,\ \frac{a}{2}\right)^2$. Радиус окружности равен $a/2$. На рисунке окружность показана пунктиром.



Ответ: Уравнение траектории – $\xi^2+\left(\eta-\frac{a}{2}\right)^2=\left(\frac{a}{2}\right)^2$.

ОТВЕТЫ

Гл. 1

К1. Задать движение в полярных координатах.

К2. $V = 2t\sqrt{9+4t^2}, \quad a = 2\sqrt{9+16t^2}.$

К3. $V = 8\sqrt{\cos^2 4t + 4\sin^2 4t}; \quad a = 32\sqrt{\sin^2 4t + 4\cos^2 4t}.$

К4. Указание: по уравнениям движения точки M найти последовательно V, a_t, a, a_n, ρ. Затем с учетом рисунка найти расстояние MP и выразить его через ρ.

К5. $L_{\min} = \sqrt{(l - V_1 t_m \cos\alpha - V_2 t_m \cos\beta)^2 + (V_1 t_m \sin\alpha - V_2 t_m \sin\beta)^2},$

где $t_m = l(V_1\cos\alpha + V_2\cos\beta)/(V_1^2 + V_2^2 + 2V_1V_2\cos(\alpha+\beta)).$

К6. $L_{\min} = l_0 V_2 / \sqrt{V_1^2 + V_2^2}.$

К7. $S=2l/3$.

К8. $DC=10$ км.

К9. $r = L\left(\operatorname{tg}(\varphi/2)\right)^{V/u}.$

К10. $V = \dfrac{3bt^2}{\operatorname{tg}\alpha}; \; a = \dfrac{6bt}{\operatorname{tg}\alpha};$

К11. $V_{AB} = \sqrt{V_1^2 + V_2^2}, \; \overrightarrow{V_{AB}} = -\overrightarrow{V_{AB}}, \; |a_{AB}| = V_1^2/R - a_2,$

$a_{AB} = \sqrt{\left(2V_1V_2/R\right)^2 + \left(a_2 + V_1^2/R\right)2.}$

К12. $\operatorname{tg}\varphi_{\min} = 2(H_0 - h_0)/L + \sqrt{3}/3.$

К13. $V_P = V_A\sqrt{l^2+h^2}/h, \quad a_P = V_A^2 l^2/h^3.$

Гл. 2

К14. $a_C = 8{,}66$ см/с^2.

К15. $OM = l\dfrac{\sqrt{3}}{4}, \; a = u^2\dfrac{\sqrt{3}}{l}.$

К16. $a_A = a, \; a_B = a\sqrt{3}.$

К17. $\rho = CD = f^2/e.$

К18. $a_C^n = 0{,}25$ м/с^2.

К19. $V_M = \omega\cdot l\left(1 + \dfrac{9}{5\sqrt{5}}\right).$

К20. $a_M = 16$ м/с^2.

К21. $V_K = \omega h\sqrt{2}$, $a_K = \omega^2 h\sqrt{26}$.

К22. $a_B = \omega^2 l \dfrac{\sqrt{26}}{2}$.

К23. $\omega_3 = \omega / \sin\alpha$, $\varepsilon_1 = \omega_1^2\left(\cos\alpha + \cos^2\alpha\right) / \sin^2\alpha + \varepsilon_3 \sin\alpha$, в предположении, что вектор ε_3 направлен на нас, а вектор ε_1 от нас.

К24. $a_A = \dfrac{\varepsilon_0}{r^2}\sqrt{l^6 + r^6}$, $\varepsilon_{AB} = \varepsilon_0 \dfrac{l^2}{r^2}$.

К25. $\omega_{AB} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$; $\varepsilon_{AB} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$; $\omega_{BC} = 0$; $\varepsilon_{AB} = 0$.

К26. $\omega_{OA} = 10\sqrt{3}$ рад/с.

К27. $\cos\alpha = 0{,}5$.

К28. Указание: найти МЦС звена AB, выразить ускорение МЦС через ускорения точек A и B.

К29. $\omega_k = \omega\,(1 - r^2 / l^2) / 2$.

К30. 1) $\ddot{\varphi} = \varepsilon_2 - \varepsilon_3 = 2 - \sqrt{2}$ рад/с^2,

2) $\ddot{\varphi} = \varepsilon_2 - \varepsilon_3 = 1 + \sqrt{3} / 2 - \sqrt{2}$ рад/с^2.

К31. $V_C = 2\sqrt{2} \cdot l$ м/с.

К32. $\omega_{BC} = u / l$, $\varepsilon_{BC} = u^2 / l^2 \operatorname{ctg}^2\alpha$.

К33. $V_B = 2V_A = 2\omega \cdot OA$, т.$B$ – МЦУ, $a_B = 0$, $a_P = 2\omega^2 \cdot OA$,

P – МЦС звена AB.

К34. $\varepsilon_{AB} = \omega^2 r / \sqrt{l^2 - r^2}$, $\varepsilon_{OA} = a / r \pm \omega_0^2 r / \sqrt{l^2 - r^2}$,

$$a_A = \sqrt{\left(\omega^2 r\right)^2 + \left(a \pm \omega^2 r^2 / \sqrt{l^2 - r^2}\right)^2}.$$

К35. $V_B = \dfrac{\omega}{4}\sqrt{7}$, $\omega_{BC} = \dfrac{5\sqrt{3}\,\omega l}{4a}$, $\omega_{AB} = \dfrac{3\sqrt{3}\,\omega l}{4a}$.

К36. $\omega_{BD} = \omega_{O_1E} = \omega / 3$, $\varepsilon_{BD} = 8\omega^2\sqrt{3} / 27$, $\varepsilon_{O_1E} = \omega^2\sqrt{3} / 27$.

К37. $a_M = 20$ м/с^2, $BM = 5$ см.

К38. $\omega = 0{,}5$ рад/с, $\varepsilon = 0{,}4 / \sqrt{3}$ рад/с^2, $a_r = 55$ см/с^2, $a_k = 5\sqrt{3}$ см/с^2.

К39. $a_B = 0$.

К40. $\omega_{DC} = \omega_0\sqrt{3} / 3$.

К41. $V_B = 2\lambda V$.

К42. МЦУ звена AB совпадает с точкой B, $\varepsilon_0 = \varepsilon_{AB} = \omega^2 r\sqrt{l^2 - r^2}$.

К43. МЦС цилиндра B находится в точке P на прямой OB между точками O и B на расстоянии $OP = r\sqrt{3}\sqrt{r^2 + 4h^2 + 2\sqrt{3}rh}\,/\,(r\sqrt{3} + 4h)$.

К44. Указание: рассматривая сложное движение точек A и B, найти V_{B2}. Зная V_{B2} и V найти МЦС звена AB.

К45. Указание: найти МЦС звена 2 – точку P_2. Учесть, что скорость точки звена 3, которая совпадает с точкой P_2, направлена параллельно AB.

К46. $V_C = 2\omega r / \sqrt{3},\ a_C = 2\omega^2 r / 3$.

К47. МЦС звена 3 находится на пересечении перпендикуляра к AC, проведенного из точки A, с продолжением прямой BC, V_{B3}=1,13 м/с; a_{B3}=22,18 м/с^2.

К48. $\omega = V\,\mathrm{tg}\,\varphi \sin\varphi / l,\ \varepsilon = \sin^2\varphi(a + 2V^2\,\mathrm{tg}\,\varphi / l) / l$.

К49. $\omega_2 = 3$ рад/с.

К50. $\omega_1 = 2\sqrt{3}V_B / 3r,\ \varepsilon_1 = \sqrt{3}V_B^2 / 3r^2$.

К51. $x^2 + (y - 0{,}5l)^2 = 0{,}25l^2$ (окружность радиуса 0,5 l), $a_B = 2l\omega^2$.

К52. $V_r = V\sqrt{3} / 2,\ a_{AC} = V^2 / 4a,\ \varepsilon_{AC} = \sqrt{3} / 2a^2$.

К53. $V_C = V\sqrt{7} / 2\sqrt{3}$. Указание: при нахождении МЦС крестовины геометрическим методом учесть, что скорость точки K, связанной с крестовиной и являющейся МЦС крестовины в относительном движении ее по отношению к звену AD направлена параллельно AD, а скорость точки, связанной с крестовиной и совпадающей с точкой O, направлена вдоль OB.

К54. $V = \omega a$.

К55. $V_M = \omega r / 2\sqrt{3},\ a_M = \omega^2 r / 6$.

К56. МЦУ крестовины лежит в середине отрезка OO_1 при любом положении системы.

К57. $V_K = 20\sqrt{19}/\sqrt{3}$ см, МЦС крестовины лежит в точке пересечения перпендикуляров к стержням 1 и 2, проведенных соответственно из точек O_1 и O_2.

К58. $V = p\omega / 2\cos^3(\omega t / 2),\ a = p\omega^2\sqrt{5 - 4\cos\omega t}\,/\,4\cos^4(\omega t / 2)$.

К59. Точка P будет двигаться по окружности радиусом AB с центром в точке B. $V_p = 2\omega R,\ a_p = 4\omega^2 R,\ R = AB$.

К60. $V_0 = 5{,}24$ см/с.

К61. $V=\omega\sqrt{l^2+r^2}$, $a=\sqrt{(\varepsilon\, r-l\omega^2+r^2(\varepsilon l+r\omega^2/2)^2}$.

К62. $V=V_A\sin\varphi/\sin(\alpha+\varphi)$,

$$a=(a_A R\sin^2(\alpha+\varphi)+V_A^2\sin^2\varphi)/R\sin^3(\alpha+\varphi)).$$

Указание: рассмотреть движение точки B стержня как сложное, состоящее из относительного движения по отношению к диску и переносного вместе с диском.

К63. $\rho=(2\sqrt{3}R-3r)^2/(4\sqrt{3}R-7r)$.

К64. $y=x\,\mathrm{ctg}(\gamma/2)$. Траектория точки M – диаметр большой окружности, проходящей через начальное положение точки M.

К65. $V_C^2=\dfrac{\rho(\rho-R)}{\rho}a_A$.

К66. Окружность $x^2+(y+R/2)^2=(R/2)^2$.

К67. Искомая точка лежит на неподвижной плоскости на расстоянии одного метра по ходу движения от точки пересечения оси касания цилиндра с плоскостью движения точки O.

К68. $\rho=2\sqrt{2}\cdot R$.

К69. $V_Q=\omega l$, $a_P=\omega^2 l$.

К70. Ускорения всех точек катка лежат на прямых, проходящих через центр C катка. Геометрическим местом искомых точек является окружность с диаметром CP, где P – МЦС катка.

К71. $x_A=l(1{,}5+\ \sqrt{3}/3)$, $y_A=l(/3+0{,}5\sqrt{3})$.

К72. A, D, $\omega=\sqrt{a_A\sqrt{2}/2l}$, $\varepsilon=(a_D-0{,}5\sqrt{2}a_A)/l$.

К73. $V_A=ul\sqrt{2}/2r$, $a_A=u^2l\sqrt{10}/2r^2$.

К74. $a_B=\dfrac{\sqrt{45}}{8}l\omega^2$, $a_C=\dfrac{3}{8}l\omega^2$.

К75. $a_B=0{,}8$ м/с^2, $a_C=0{,}15$ м/с^2, $a_D=\sqrt{0{,}73}$ м/с^2.

К76. t=105 с.

К77. $V_A=2\sqrt{a_2R}$, $a_A=\sqrt{4a_1^2+a_2^2}$.

К78. $V_r=V_0$, $a_r=\sqrt{a_0^2+V_0^4/r^2}$.

К79. $a=\dfrac{(V_1+V_2)^2}{2r\sin\varphi}$.

К80. $V_D=\omega_0 l$, $a_D=2\omega_0^2 l$.

К81. $a_C = 4\omega^2 a / \sqrt{3}.$

К82. Указание: применить метод остановки движения пластины или рассмотреть движение точки Q как сложное.

К83. $V_r = V_0,\ \ a_r = \sqrt{a_0^2 + V_0^4 / r^2}.$

К84. Полуокружность, построенная на диаметре PC (C – центр диска, P – МЦС диска, эти точки исключаются в полуокружности).

К85. $OC = \dfrac{V\,l}{l\omega\cos 30° + V}.$

К86. $V_{M1} = \sqrt{2(3+\sqrt{7})}$ см/с, $V_{M2} = \sqrt{2(3-\sqrt{7})}$ см/с,

$a_{M1} = 4\sqrt{(3+\sqrt{7})}$см/с, $a_{M2} = 4\sqrt{(3-\sqrt{7})}$см/с.

К87. $a_P = V^2 R / (R-r)r, a_A = V^2(2R-r)/(R-r)r$ (ось направлена вверх).

К88. $a_0 = \omega^2 p,\ a_1 = 0.$

К89. $V_C = \omega R / \cos(\alpha / 2).$

К90. Два раза.

К91. $V_C = 0{,}5\pi^2\sqrt{3}$ см/с, $a_C = \pi^3(3\pi + \pi\sqrt{3} - 2)/12$ см/с.

К92. $V_M = 2\omega l R / \sqrt{R^2 + (2l - R)^2}.$

К93. $dx/dt = -\omega r x / \sqrt{x^2 - r^2}.$

К94. $\omega = V_0(R-\rho)/(R-r)\rho.$

К95. $V_C = 3/\sqrt{3}\omega_0 r.$

К96. Траекторией точки M является диаметр неподвижной окружности, который проходит через точку M_0.

$V_M = 2V \cdot \sin(Vt / R),\ a = 2V^2 \cdot \cos(Vt / R) / R.$

К97. $\omega = V / 2R\sqrt{3},\ \varepsilon = 7V^2 / 12R^2\sqrt{3}.$

К98. $\omega_2 = V / R,\ \varepsilon_2 = V^2\sqrt{3} / R^2, V_{31} = 0, V_{32} = 2V, V_3 = V\sqrt{3}, a = 2V^2 / R.$

К99. $a_D = l V_A^2 \,\mathrm{tg}^3\alpha\sqrt{4 - 3\sin^2\alpha}.$

К100. Указание: для упрощения расчетов положить скорость центра колеса постоянной. Определив ускорение точки M, спроектировать его на MP (P – МЦС колеса). Это и будет нормальное ускорение точки M. Так как $MP \perp V_M$. Затем, используя формулу $a_M^n = V_M^2 / \rho$, найти ρ.

К101. α=60°.

К102. $AM=2R_2=3R_3,\ R_1=2R_3.$

К103. Указание: обозначить l – расстояние между точками опоры, где C – вершина прямого угла треугольника. Тогда $CP=CQ=2l$, где P – точка пересечения перпендикуляров к катетам в точках опоры треугольника. $CQ=2l$, точки C, P, Q – на одной прямой, причем точка P лежит между C и Q.

К104. V_C=7,55 м/с, V_B=8,23 м/с.

К105. $V_A = V_C$; $\dfrac{a_C}{a_A} = \operatorname{tg}\dfrac{\pi}{8}$.

К106. Прямая CD ($CD \parallel AB$), отстоящая от AB на расстояние R.

К107. $V_B = V(1+\cos\alpha)/\cos\alpha$,

$$a_B = a(1+\cos\alpha)/\cos\alpha + V^2\sin\alpha(1+\cos\alpha)/R\cos^3\alpha.$$

К108. $a_r = 2l\sqrt{\varepsilon^2+4\omega^4}$, $a_k = 4\omega^2 l$.

К109. $V_B = \omega r\sqrt{17+8\sin(\varphi/2)}/4$, $a_B = \omega^2 r\sqrt{65+16\sin(\varphi/2)}/8$.

К110. $V_C = R\omega/2\sin^2(\varphi/2)$, $a_C = R\left(\omega^2\cos(\varphi/2) - \varepsilon\sin(\varphi/2)\right)/2\sin^3(\varphi/2)$.

К111. Да.

К112. $a_D = a\sqrt{5}$, $\varepsilon = \sqrt{a^2-\omega^4 l^2}\,/\,l$.

К113. $a_M = 2a_0\sqrt{2}$.

К114. $a_M = 2V^2/3\sqrt{3}\,a$, $MA = a$.

К115. Указание: 1) найти МЦС звена 3 в относительном движении по отношению к диску 2 (точка P находится на пересечении прямой, проходящей по телу 4 и прямой, проходящей через левую точку тела 3 и точку касания дисков); 2) использовать соотношение $V_{P32} = V_{P32}^{\text{пер}} + V_{P32}^{\text{отн}}$ (за переносное движение принять движение тела 2, здесь $V_{P32}^{\text{отн}} = 0$, $V_{P32}^{\text{пер}} \perp O_2P_{32}$; 3) определить МЦС звена 3 как точку пересечения перпендикуляров к V_A и V_{P32}.

Гл. 3

116. $a_{ax} = -\omega^2 x - \dfrac{4b^2V_0^2x}{\left(1+4b^2x^2\right)^2}$, $a_{ay} = \dfrac{2bV_0^2}{\left(1+4b^2x^2\right)^2}$, $a_{az} = \dfrac{2\omega V_0}{\sqrt{1+4b^2x^2}}$.

117. $s = 2a(1-e^{-1})$.

118. $\varphi = \omega_0 x^2(1/x_0 - 1/(x_0+V_0t))/V_0$, $V = \sqrt{V_0^2 + \omega_0^2x_0^2/4}$.

119. $a_{M(\text{абс})} = 2\omega^2 r\sqrt{2}$.

120. $V_x = V;\ V_y = -a\omega\sin(\pi\ Vt) + (\pi\ aV/l)\cos\omega t\cos(\pi\ aV/l);\ a_x = 0;$

$a_y = -a(\omega^2 + (\pi V/l^2)\cos\omega t\ \sin(\pi Vt/l) - (2\pi\ a\omega V/l)\sin\omega t\cos(\pi Vt/l).$

121. $U = \omega R/\sqrt{2},\ a = 1{,}5\omega^2 R.$

122. $V_M = V\sqrt{7},\ a_M = V^2/R.$

123. $V_M = 6$ м/с, $a_M = 4$ м/с^2.

124. $a_2 = r\omega^2 R/\sqrt{29},\ a_3 = r\omega^2\sqrt{20}.$

125. $a_{Mx} = 0,\ a_{My} = U^2(0{,}5 - \sqrt{6})/R.$

126. $a_M = a_r = 2\sqrt{2}(1 - 8e^{-8}).$

127. $U = V/4\sqrt{3}.$

128. Траектория точки – прямая, параллельная горизонтальной плоскости. V_M=V, a_M=0.

129. $a_{Mx} = 2\omega U - 4\omega^2 R/\sqrt{3} - \omega^2 R,\ a_{My} = 2\omega^2 R/\sqrt{3}.$

130. $V = 6$ см/с, $a = 36$ см/с^2.

131. $x = x_0\exp(\omega_0 t),\ \varphi = \omega_0 t.$

132. $V_B = 0{,}5$ м/с, $a_B = 1$ м/с^2.

133. $a = g(1 + 4R^2\omega_r^2/V_0^2\cos^2\alpha + R^2\omega_r^4/g^2)^{0{,}5}.$

134. $V = \omega l/\sqrt{10}.$

135. $V_C = ((V_A^2 + V_B^2)/2)^{0{,}5},\ a_C = (V_A + V_B)^2/l\sqrt{2}.$

136. $\omega_2 = \omega_1.$

137. $V_M = \omega r\sqrt{7}/2,\ a_M = \omega^2 r\sqrt{97}/8.$

138. $a_M = \omega_e^2 2r - (4\omega_e + \omega_r)^2,\ a_N = \omega_e^2 2r + (\omega_e + \omega_r)^2 r.$

139. $u = \omega r/3,\ a = \omega^2 r\sqrt{13 + 6\sqrt{3}}/3.$

140. $a = u^2\sqrt{6}/r.$

141. $U = 19\omega_0 l/18$, вектор U направлен к точке A.

142. $x = V_0(e^{\omega t} - e^{-\omega t})/2\omega.$

143. $a_M = 26{,}4$ м/с.

144. $V_M = \sqrt{\dfrac{V_2^2 + V_1^2 - 2V_1V_2\cos\alpha}{\sin^2\alpha}}.$

145. $V_{B2} = 10\sqrt{6},\ a_{B2} = 100$ см/с^2.

146. $V = 2R\varepsilon t$, $a_ф = 2R\varepsilon$, $a_n = 4R\varepsilon^2 t^2$.

147. $\omega_{CD} = 0{,}5$ рад/с.

148. $a_M = 2\omega^2 r\sqrt{16 + 9\sin^2 2\varphi}$.

150. $|\varepsilon AB| / |\varepsilon BC| = 0{,}75(4\sqrt{3} + 5) / (\sqrt{3} + 3) = 1{,}89$.

151. $V_C = \sqrt{10}$ м/с, $a_C = \sqrt{234}$ м/с^2.

152. $V = \omega(r + r\cos\beta) = \dfrac{2+\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}} r$, где β – угол наклона мгновенной оси к горизонту.

153. а) Окружность радиуса $l/2$ с центром O_2, $V_M = \omega l$.

б) Окружность радиуса $l/4$ с центром O_{x1}, $V_M = \omega l/2$.

154. $V_M = (\omega_1^2 a^2 - 2a\omega_1(V\sin\alpha + \omega_2 x\cos\alpha) + \omega_2^2 x + V^2)^{0{,}5}$;

$a_M = (a^2\omega_1^4 - 2\omega_1^2\omega_2^2 ax\cos\alpha + \omega_2^4 x^2 + 2\omega_1^2\omega_2 Va\sin\alpha + 4\omega_1^2 V^2)^{0{,}5}$.

155. $\omega_{AB} = V/r - \omega\sqrt{3}$, $\omega_{BC} = \omega$, $a_{BA}^t = -(5\omega^2 r + (V/r - \omega\sqrt{3})^2 r\sqrt{3}$,

$\varepsilon_{BC} = \omega^2\sqrt{3} + (V/r - \sqrt{3})^2$.

156. $a_M = 11{,}24$ м/с^2.

157. $V_B = \omega l\sqrt{7}/4$, $\omega_{BC} = 5\sqrt{3}\,\omega l/4a$, $\omega_{AB} = 3\sqrt{3}\,\omega l/4a$.

158. $AM = 1{,}25\sqrt{2}$ м.

159. $V_M = 0{,}2$ м/с, $a_M = 0{,}6$ м/с^2.

160. $\omega = 1$ рад/с, $\varepsilon = (1 + 2\sqrt{3})/3$ рад/с^2.

161. $a_{Br} = -R(\omega(1+t) + 1/G)^2/(1+t)$,

$x_C = R(1+t)G/(1+t+\omega G)$, $y_C = 0$, $G = (t^2 + 2t)^{0{,}5}$.

Гл.4

162. $M_1(R/\sqrt{2},\ 0,\ -R/\sqrt{2})$, $M_2(-R/\sqrt{2},\ 0,\ R/\sqrt{2})$.

163. $V_{\max} = 8\sqrt{3}\omega_1 r/3$.

164. $\varepsilon = V^2/r(R-r)$.

165. $|\varepsilon| = \omega_1(\omega_2 - \omega_1)\sin\alpha\sin(\alpha+\beta)/\sin\beta$.

166. $\rho = 7\sqrt{7}/\sqrt{106}$. Указание: для простоты вычислений положить ω=const, например, ω_e=1 рад/с.

167. Геометрическим местом точек, ускорения которых параллельны плоскости XOY, является треугольник, получаемый пересечением плоскости $z-y=0$ и конуса.

168. $a_M^n = 60\omega$ см/с^2.

169. $\varepsilon_2 = (5t+3)\sqrt{27+75/a},\ a = (5t+3)^2 + 3.$

170. $a = 0{,}5(\pi^2 + 8\pi\ +\ 18)^{0,5}$ см/с^2, $\varepsilon = 0{,}375$ рад/с^2.

171. $\varepsilon = 0,\ a_B = 2\omega_0^2\sqrt{5}r.$

172. $BM_1 = \dfrac{2}{3}R;\ BM_1 = 2R;\ a_{M1} = \dfrac{2}{3}$ м/с^2; $a_{M2} = 2$ м/с^2.

173. $V = \omega_1\varepsilon\sin\varphi\cos\alpha(1-\cos\varphi/\sqrt{1-\varepsilon^2\sin^2\varphi}).$

174. $\omega_{CD} = (\sqrt{3}+5)/0{,}8 = 8{,}4$ рад/с.

175. $\omega = 0{,}375\omega_0,\ \varepsilon = 3\sqrt{3}\omega_0^2/32.$

176. $\varepsilon_1 = 1{,}21\,\text{с}^{-2}.$

177. V=1 м/с, a=1 м/с^2.

178. Уравнение траектории – $\xi^2 + \left(\eta - \dfrac{a}{2}\right)^2 = \left(\dfrac{a}{2}\right)^2.$

179. $V_2 = 0{,}4\sqrt{3}$ м/с; $a_2 = 0{,}8$ м/с^2, $a_{32} = 0{,}8\sqrt{3}$ м/с^2.

180. $V = 2(R-2t^2)/\sqrt{R-t^2},\ a = 2t(2t^2-3R)/\sqrt{(R-t^2)^3}.$

181. $V_C = a\omega.$

182. 1) $r = r_0 + \omega_0\delta t/2\pi,\ R = (r_0^2 + L\delta\,\pi - \omega_0\delta(4\pi\, r_0 t + \omega_0\delta t^2)/4\pi^2)^{0,5};$

2) $\omega_2 = \omega_0 r/R;$

3) $R_0 = (r_0^2 + L\delta\omega)^{0,5};$

4) $T = 2\pi\, r_0((1+L\delta\omega r_0^2)^{0,5} - 1)/\omega_0\delta.$

183. $V_C = (1-h)V_0/\sqrt{l^2 - h^2 + 2x(h-l)}.$

184. ω_2=1 рад/с, ε_2=4 рад/с^2, если вектор a направлен вправо, ε_2=2 рад/с^2 – если влево.

185. $V_D = 2\omega a,\ V_M = 3\omega a, V_E = 4\omega a, a_D = 4\omega^2 a, a_M = 8\omega^2 a\sqrt{3},$

$a_E = 4\omega^2 a\sqrt{37}.$

186. $V_B = 4\sqrt{3}\omega r/7,\ a_B = 60\omega^2 r/343.$

187. $\omega = V_0/((l^2-y^2)^{0,5}(dx/dy)+y),$

$x = V_0\ \arcsin(y/l)/\omega_0 +\ (l^2-y^2)^{0,5} + C.$

188. $\omega_3 = 0{,}15$ рад/с, $\varepsilon_3 = 0{,}58$ рад/с^2.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Попов, А.И. Теоретическая механика: Сборник задач для творческого саморазвития личности студента [Текст]: учеб. пособие / А.И.Попов – Тамбов: Изд-во Тамб. гос. техн. ун-та, 2010.– 188 с.

2. Крамаренко, Н.В. Теоретическая механика. Сборник олимпиадных задач для студентов технических специальностей [Текст]: учеб. пособие / Н.В. Крамаренко, А.И. Родионов, А.А. Рыков. – Новосибирск: НГТУ, 2007. – 100 с.

3. Яблонский, А.А. Курс теоретической механики [Текст]: учебник для вузов / А.А.Яблонский, В.М.Никифорова. – СПб.: Лань, 2004. – 768 с.

4. Бутенин, Н.В. Курс теоретической механики [Текст]: учеб. пособие для вузов: в 2-х т. Т.1. Статика и кинематика / Н.В.Бутенин, Я.Л.Лунц, Д.Р.Мерлин. – СПб.: Лань, 2004.

5. Сборник конкурсных задач олимпиад по теоретической механике 1987-1998 гг. с анализом их решений [Текст] / под ред. А.В.Чигарева. – Минск: Тэхналогія, 2000. – 280 с.

6. Финальный отчет по Всероссийской олимпиаде студентов вузов по теоретической механике [Текст]. – Екатеринбург: Изд-во Комитета по делам молодежи при правительстве Свердловской области, 1999. – 90 с.

7. Финальный отчет по Всероссийской олимпиаде студентов вузов по теоретической механике [Текст]. – Екатеринбург: Изд-во УрГСХА, 1996. – 56 с.

8. Методические материалы и конкурсные задачи Всероссийской олимпиады «Студент и научно-технический прогресс» по теоретической механике 1994 г. [Текст]. – Пермь: Изд-во ПГТУ, 1995. – 32 с.

О Г Л А В Л Е Н И Е

Учебное издание

Зайцев Михаил Борисович

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА
Сборник олимпиадных задач
Часть II. Кинематика
Учебное пособие

В авторской редакции
Верстка Н.А. Сазонова

Подписано в печать 8.05.15. Формат 60×84/16.
Бумага офисная «Снегурочка». Печать на ризографе.
Усл. печ. л. 5,35. Уч.-изд. л. 5.75. Тираж 100 экз.
Заказ №185.

Издательство ПГУАС.
440028, г.Пенза, ул. Германа Титова, 28.