МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«Пензенский государственный университет
архитектуры и строительства»
(ПГУАС)

Р.В. Тарасов, Л.В. Макарова

ОСНОВЫ НАУЧНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ. ОРГАНИЗАЦИЯ И ПЛАНИРОВАНИЕ ЭКСПЕРИМЕНТА

Учебно-методическое пособие
по выполнению курсовой работы

Пенза 2015

УДК 006:001.12(075.8)
ББК 30ц+30.10+73я73
Т19

Рекомендовано Редсоветом университета

Рецензенты: доктор технических наук, профессор В.И. Логанина (ПГУАС);
заместитель директора по качеству ООО «Строительные материалы», кандидат технических наук, доцент В.Ю. Нестеров

Тарасов Р.В.

Т19 Основы научных исследований. Организация и планирование эксперимента: учебно-методическое пособие по выполнению курсовой работы / Р.В. Тарасов, Л.В. Макарова. – Пенза: ПГУАС. – 40 с.

Изложены последовательность выполнения курсовой работы и содержания расчетно-пояснительной записки. Приведены необходимые сведения о статистических методах обработки экспериментальных данных и о методах математического планирования эксперимента. Даны примеры решения типовых задач.

Учебно-методическое пособие подготовлено на кафедре «Управление качеством и ТСП» и предназначено для использования обучающимися по направлению подготовки 27.04.01 «Стандартизация и метрология» при выполнении курсовой работы по дисциплине «Основы научных исследований. Организация и планирование эксперимента».

ПРЕДИСЛОВИЕ

Учебно-методическое пособие по выполнению курсовой работы позволит овладеть следующими компетенциями:

– способностью к абстрактному мышлению, анализу, синтезу (ОК-1).

– владением методами математического моделирования процессов, оборудования и производственных объектов с использованием современных информационных технологий проведения исследований; разработкой методики и технологии проведения экспериментов и испытаний, обработкой и анализом результатов, принятием решений, связанных с обеспечением качества продукции, процессов и услуг (ПК-21);

– готовностью к сбору, обработке, анализу, систематизации и обобщению научно-технической информации, отечественного и зарубежного опыта по направлению исследований, выбору рациональных методов и средств при решении практических задач; разработке рабочих планов и программ проведения научных исследований и перспективных технических разработок, подготовке отдельных заданий для исполнителей; подготовке научно-технических отчетов, обзоров и публикаций по результатам выполненных исследований и разработок (ПК-22);

– способностью к исследованию обобщенных вариантов решения проблем, анализу этих вариантов, прогнозированию последствий, нахождению компромиссных решений в условиях многокритериальности, неопределенности создания стандартов и обеспечения единства измерений (ПК-24).

ВВЕДЕНИЕ

Цель курсовой работы – закрепить теоретический материал изучаемой дисциплины, привить обучающимся знания и навыки выполнения инженерных исследований, в том числе и практического умения планирования и организации эксперимента в условиях организации исследовательской работы

В курсовой работе студенты должны овладеть практическими навыками использования методов организации и планирования эксперимента.

Основное внимание уделяется:

– методам планирования активного эксперимента (полный факторный эксперимент типа 2^k).

– снижению количества опытов и определению системы смешивания при планировании дробного факторного эксперимента;

– применению латинских и греко-латинских квадратов.

1. Задание на курсовую работу

В задании на курсовую работу, которое выдается индивидуально для каждого студента, содержится следующая информация (приложение 1):

– исходные данные для расчета коэффициентов регрессии и проверки статистических гипотез;

– исходные данные для получения дробных реплик и соответствующих систем смешивания;

– латинские или греко-латинские квадраты;

– сроки выполнения курсового проекта.

2. Состав и содержание курсовой работы

Курсовая работа состоит из расчетно-пояснительной записки объемом 25-30 машинописных страниц в комплекте представляет собой принятое студентом решение поставленной задачи.

Расчетно-пояснительная записка должна быть написана от руки с одной стороны листа бумаги формата А4 или машинописным способом через 1,5 интервала. На каждый лист пояснительной записки наносится карандашом рамка рабочего поля, отстоящая от кромки листа слева на 20 мм, а справа, снизу и сверху- на 5 мм. Расстояние от рамки до границы текста в начале строк - не менее 5 мм, в конце строк не менее -3 мм; от верхней и нижней строк - не менее 10 мм.

Пояснительная записка должна содержать:

●титульный лист,

●задание на курсовую работу,
●содержание,
●введение,
●основную часть,
●список использованных источников,
●приложение (при необходимости).

Титульный лист выполняется по форме, указанной в приложении 2 стандартным шрифтом.

Пояснительная записка должна излагаться грамотным литературным языком, со сжатыми и четкими формулировками, без лишних подробностей и повторений. Не допускается сокращения слов, кроме общепринятых. Страницы записки должны быть пронумерованы и, если есть таблицы, графики или рисунки, иметь название.

В расчетно-пояснительной записке предусматриваются разделы:
– введение-1...2 стр.;
– основная часть - 10...20 стр.;
– заключение -1...2 стр.
– библиографический список – 1…2 стр.

3. Последовательность выполнения курсовой работы

Рекомендуется следующий порядок выполнения работы:

1. Ознакомиться с индивидуальным заданием, настоящими методическими указаниями и графиком выполнения курсовой работы.
2. Изучить соответствующие разделы рекомендуемой литературы.
3. Произвести необходимые описания и расчеты, в соответствие с заданием.
4. Оформить требуемые разделы расчетно-пояснительной записки согласно методическим указанием по выполнению и оформлению курсовой работы.
5. Подготовить доклад и защитить курсовую работу.

4. Консультации и защита курсовой работы

Основная цель консультаций – привить студентам навыки работы над справочной и нормативной литературой, монографиями, статьями в журналах, учебниками и т.п. На консультациях студенты должны обращаться к преподавателю со своими решениями. Задача преподавателя – оценить решенные вопросы и дать ответы на вопросы частного или принципиального характера.

Обучающийся обязан выполнить отдельные разделы работы в сроки, установленные преподавателем, и явиться в дни обязательных консультаций для контроля выполнения ими индивидуального задания в соответствующие сроки.

Студент защищает курсовую работу перед преподавателем в присутствии других студентов.

К защите студент предоставляет пояснительную записку. До защиты курсовая работа хранится у студента.

Оценка за работу ставится по пятибалльной системе. При этом учитывается: глубина проработки курсовой работы; качество оформления; умение докладывать и отвечать на вопросы.

В случае неудовлетворительной оценки студент дорабатывает работу или получает новое задание по усмотрению преподавателя.

Защищенная курсовая работа хранится на кафедре.

5. Расчетно-пояснительная записка

Расчетно-пояснительная записка должна включает в себя следующие основные разделы:

Введение.

1 Полный факторный эксперимент 2^3

1.1 Расчет коэффициентов уравнения регрессии.

1.2 Проверка адекватности модели.

1.3 Проверка значимости коэффициентов уравнения регрессии.

1.4 Выводы

2 Дробный факторный эксперимент типа 2^k.

2.1 Выбор дробных реплик

2.2 Нахождение системы смешивания.

2.3 Выбор наиболее эффективного варианта реплики с обоснованием выбранного решения.

2.4 Выводы

3 Латинские и греко-латинские квадраты.

3.2 Провести анализ данных и сделать соответствующие выводы.

Заключение.

Список использованных источников.

5.1. Введение

Введение расчетно-пояснительной записки должно содержать краткий обзор состояния, перспективы и пути решения поставленных задач. В обзоре необходимо отразить практическую значимость экспериментальных исследований с использованием методов планирования эксперимента.

5.2. Полный факторный эксперимент типа 2^k

Эксперимент – система операций, воздействий и наблюдений, направленных на получение информации об объекте при исследовательских операциях.

Эксперимент может быть физическим, психологическим или модельным. Он может непосредственно проводиться на объекте или на его модели. Модель обычно отличается от объекта масштабом, а иногда природой.

Если модель достаточно точно описывает объект, то эксперимент на объекте может быть заменен экспериментом на модели. В последнее время наряду с физическими моделями все большее распространение получают абстрактные математические модели. Можно получать новые сведения об объекте, экспериментируя на модели, если она достаточно точно описывает объект.

Для проведения эксперимента с наибольшей эффективностью необходим научный подход к его планированию, что позволит собрать необходимые данные, использовать для их анализа статистические методы и сделать правильные и объективные выводы.

При решении задачи используются математические модели объекта исследования, т.е. уравнение, связывающее параметр оптимизации с факторами. Это уравнение в общем виде выглядит следующим образом: $y=\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_k)$,

Каждый фактор может принимать в опыте одно из нескольких значений, т.е. уровней. Если используется непрерывный ряд, то фактор способен принимать бесконечное множество значений. Однако на практике точность, с которой устанавливается некоторое значение, не безгранична. Поэтому можно считать, что любой фактор имеет определенное число дискретных уровней.

Фиксированный набор уровней факторов (т.е. установление каждого фактора на некоторый уровень) определяет одно из возможных состояний «черного ящика». Одновременно это есть условия проведения одного из возможных опытов. Если перебрать все возможные наборы состояний, то получится полное множество различных состояний данного «ящика». Одновременно это будет число возможных различных опытов.

Таким образом, целью эксперимента является установление степени влияния каждого фактора на отклик (параметр оптимизации) или получение функции, связывающей факторы и отклик. Полученную зависимость между факторами и откликом называют *поверхностью отклика*, уравнение, связывающее факторы и отклик – *регрессионным уравнением*, а определение коэффициентов этого уравнения – *оценкой коэффициентов*.

Эксперименты бывают двух видов – активные и пассивные. Пассивный эксперимент заключается в сборе статистического материала на работающем объекте или проведении серии опытов с равномерным разбиением диапазона измерения фактора на большее количество точек. Обработка данных пассивного эксперимента осуществляется методами корреляционного анализа (определение наличия или отсутствия зависимости между каждым фактором и откликом) и регрессионного анализа (получение уравнения, связывающего факторы и отклик). Регрессионное уравнение при пассивном эксперименте имеет большое число степеней свободы и обычно на факторном поле она близка к истинной зависимости.

Фактором называют параметр, значение которого в эксперименте задают. Факторов может быть несколько. *Отклик* – параметр, который измеряется при различных значениях факторов, он обязательно должен быть один. Исследование объекта заключается в задании ряда значений факторов и получении для каждой совокупности факторов отклика. Отдельный акт по получению отклика по значениям факторов называется *экспериментом* или *экспериментальной точкой*. Совокупность значений факторов всех элементов, проводимых при одном исследовании, называется *планом эксперимента*. Диапазон изменений факторов, при котором проводится эксперимент, называется *факторным полем*.

При планировании эксперимента определяющим является выбор параметра оптимизации. Цель исследования должна быть сформулирована очень четко и предполагает количественную оценку. Параметр оптимизации является реакцией (откликом) на воздействие факторов, которые определяют поведение выбранной вами системы. Реакция объекта многогранна, многоаспектна. Выбор того аспекта, который представляет наибольший интерес, как раз и задается целью исследования.

При планировании эксперимента необходим учет всех факторов которые могут влиять на процесс. Так же, как и параметр оптимизации, каждый фактор имеет область определения и принимает различные значения, т.е. варьируется на разных уровнях.

Планирование эксперимента состоит из множества последовательных этапов, часть которых формализована, а часть требует «интуитивных» решений. После выбора локальной области факторного пространства, т.е. нахождения основного уровня и интервалов варьирования, все условия эксперимента представляют в виде таблицы – матрицы планирования.

Изначально планирование эксперимента для получения линейной модели основано на варьировании факторов на двух уровнях. Если число факторов известно, можно найти число опытов, необходимое для реализации всех возможных сочетаний уровней факторов. Для этого используется простая формула

$$N = 2^k ,$$

где N – число опытов;
k – число факторов;
2 – число уровней.

В общем случае *эксперимент, в котором реализуются все возможные сочетания уровней факторов, называется полным факторным экспериментом.* Если число уровней каждого фактора равно двум (верхний и нижний уровни факторов, то это полный факторный эксперимент типа 2^k.

Планируя эксперимент, на первом этапе стараются получить линейную модель $y\ =b_0+b_1x_1+b_2x_2$. Однако неизвестно, описывается ли процесс линейной моделью в выбранных интервалах варьирования. Существуют способы проверки пригодности линейной модели – проверка адекватности. Если модель нелинейна, а на практике процесс, как правило, описывается нелинейно, то необходимо учитывать такой вид нелинейности, как эффект взаимодействия двух факторов.

5.2.1. Расчет коэффициентов уравнения регрессии

Для движения к точке оптимума используется линейная модель $y=b_0+b_1x_1+b_2x_2$. Цель – найти по результатам эксперимента значения неизвестных коэффициентов модели. При предварительной оценке пригодности линейной модели для описания исследуемого процесса статистическая оценка ее коэффициентов не проводилась. Однако, следует отметить, что эксперимент проводится для проверки гипотезы о том, что линейная модель $\eta=\beta_0+\beta_1x_1+\beta_2x_2$ адекватна.. Коэффициенты вычисляют по формуле

$$b_j = \frac{\sum_{i=1}^{N} x_{ji} y_i}{N}, j = 0,1,...k$$

Если воспользоваться этой формулой для подсчета коэффициентов b_1 и b_2, получим:

$$b_1 = \frac{(-1)y_1 + (+1)y_2 + (-1)y_3 + (+1)y_4}{4}, b_2 = \frac{(-1)y_1 + (-1)y_2 + (+1)y_3 + (+1)y_4}{4}$$

Для подсчета коэффициента b_1 используется вектор-столбец x_1, а для b_2 – столбец x_2. Вопрос в том, как найти b_0. Если уравнение $y\ =b_0+b_1x_1+b_2x_2$ справедливо, то оно верно и для средних арифметических значений переменных: $\bar{y} = b_0 + b_1\bar{x}_1 + b_2\bar{x}_2$. Но в силу свойства симметрии $\bar{x}_1 = \bar{x}_2 = 0$. Следовательно, $\bar{y} = b_0$. Таким образом, b_0 есть среднее арифметическое значение параметра оптимизации. Чтобы его получить, необходимо сложить все y и разделить их на число опытов. Чтобы привести эту процедуру в соответствие с формулой для вычисления коэффициентов, в матрицу планирования вводят вектор-столбец фиктивной переменной x_0, которая принимает во всех опытах значение +1. Это учитывается в записи формулы, где принимало значения от 0 до k.

Коэффициенты при независимых переменных указывают на силу влияния факторов. Чем больше численная величина коэффициента, тем большее влияние оказывает фактор. Если коэффициент имеет знак плюс, то с увеличением значения фактора параметр оптимизации увеличивается, а если минус, то уменьшается. Величина коэффициента соответствует вкладу данного фактора в величину параметра оптимизации при переходе фактора с нулевого уровня на верхний или нижний.

Пример. В результате исследования влияния трех факторов на прочность композиционного материала были получены следующие результаты (табл. 1).

Коэффициент b_0 вычислим как среднее арифметическое полученных результатов y:

$$b_0 = \overline{y} = \frac{84+77+82+83+80+81+78+79}{8} = 80,5.$$

Подсчитаем остальные коэффициенты регрессии, отражающие вклад того или иного фактора на прочность композиционного материала.

Таблица 1

Полный факторный эксперимент 2^3

Номер опыта	x_0	x_1	x_2	x_3	x_1x_2	x_1x_3	x_2x_3	$x_1x_2x_3$	y'	y''	$\overline{y}$
1	+	–	–	–	+	+	+	–	84,8	83,2	84,0
2	+	+	–	–	–	–	+	+	77,2	76,8	77,0
3	+	–	+	–	–	+	–	+	83,0	81,0	82,0
4	+	+	+	–	+	–	–	–	83,5	82,5	83,0
5	+	–	–	+	+	–	–	+	80,1	79,9	80,0
6	+	+	–	+	–	+	–	–	81,9	80,1	81,0
7	+	–	+	+	–	–	+	–	78,5	77,5	78,0
8	+	+	+	+	+	+	+	+	78,6	79,4	79,0

$$b_1 = \frac{-84+77-82+83-80+81-78+79}{8} = -0,5;$$

$$b_2 = \frac{-84-77+82+83-80-81+78+79}{8} = 0;$$

$$b_3 = 1,\ b_{12} = 1,\ b_{13} = 1,\ b_{23} = 1,\ b_{123} = -1.$$

Таким образом, получим окончательный вид уравнения регрессии:

$$y = 80,5 - 0,5x_1 + x_3 + x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 - x_1x_2x_3.$$

5.2.2. Проверка адекватности модели

После вычисления коэффициентов модели необходимо оценить ее пригодность. Такая проверка называется проверкой адекватности модели

Если расставить экспериментальные точки относительно линии регрессии, то они будут характеризоваться некоторым разбросом, причем для каждой точки разброс будет различным (разная дисперсия воспроизводимости).

Для характеристики среднего разброса относительно линии регрессии вполне подходит остаточная сумма квадратов. Неудобство состоит в том, что она зависит от числа коэффициентов в уравнении: введите столько коэффициентов, сколько вы провели независимых опытов, и получите остаточную сумму, равную нулю. Поэтому предпочитают относить ее на один «свободный» опыт. Число таких опытов называется числом степеней свободы (*f*).

Числом степеней свободы в статистике называется разность между числом опытов и числом коэффициентов (констант), которые уже вычислены по результатам этих опытов независимо друг от друга.

Существует следующее правило: в планировании эксперимента число степеней свободы для дисперсии адекватности равно числу различных опытов, результаты которых используются при подсчете коэффициентов регрессии, минус число определяемых коэффициентов.

Остаточная сумма квадратов, деленная на число степеней свободы, называется *остаточной дисперсией, или диспепсией адекватности* ($s_{\text{ад}}^2$).

$$s_{\text{ад}}^2 = \frac{\sum_{i=1}^{N} \Delta y_i^2}{f}$$

Остаточная сумма квадратов (сумма квадратов невязок) представляет собой разность между предсказанным значением, рассчитанным по полученному уравнению регрессии, и полученным в результате эксперимента: $\Delta y = \hat{y} - \bar{y}$.

Для проверки гипотезы об адекватности можно использовать F-критерий (критерий Фишера).

$$F = \frac{s_{\text{ад}}^2}{s_{\{y\}}^2}$$

где $s_{\{y\}}^2$ – дисперсия параметра оптимизации.

При подсчете дисперсии параметра оптимизации квадрат разности между значением y_q в каждом опыте и средним значением из n повторных наблюдений $\bar{y}$ нужно просуммировать по числу опытов в матрице N, а затем разделить на $N(n–1)$.

$$s^2_{\{y\}} = \frac{\sum_1^N \sum_1^n (y_{iq} - \bar{y}_i)^2}{N(n-1)}$$

Дисперсию воспроизводимости проще всего рассчитывать, когда соблюдается равенство числа повторных опытов во всех экспериментальных точках. На практике чаще всего число повторных опытов различно.

При усреднении дисперсий можно пользоваться взвешенным значением дисперсий, взятым с учетом числа степеней свободы

$$s^2_{\{y\}} = \frac{s_1^2 f_1 + s_2^2 f_2 + ... + s_N^2 f_N}{f_1 + f_2 + ... + f_N} = \frac{\sum_{i=1}^N s_i^2 f_i}{\sum_{i=1}^N f_i},$$

где s_1^2 – дисперсия первого опыта;

s_2^2 – дисперсия второго опыта и т.д.;

f_1 – число степеней свободы в первом опыте, равное числу параллельных опытов n_1 минус 1, т.е. $f_1 = n_1 - 1$;

f_2 – число степеней свободы во втором опыте и т.д.

Число степеней свободы средней дисперсии принимается равным сумме чисел степеней свободы дисперсий, из которых она вычислена.

Если взять среднее значение дисперсий без учета числа степеней свободы, то это будет ошибкой, также как если взять среднее значение стандартных отклонений. Стандартные отклонения нужно возвести в квадрат и затем взять взвешенное среднее, как указано выше.

Прежде чем проверять адекватность модели необходимо провести проверку однородности дисперсий.

Если сравниваемое количество дисперсий больше двух и одна дисперсия превышает остальные, то можно воспользоваться критерием Кохрена. Это критерий пригоден для случаев, когда во всех точках имеется одинаковое число повторных опытов. При этом подсчитывается дисперсия в каждой горизонтальной строке матрицы.

$$s^2 = \frac{\sum_1^n \left(y_q - \bar{y}\right)^2}{n-1},$$

а затем из всех дисперсий находится наибольшая $s_{\max}^2$, которая делится на сумму всех дисперсий. Критерий Кохрена – это отношение максимальной дисперсии к сумме всех дисперсий.

$$G = \frac{s_{\max}^2}{\sum\limits_{1}^{N} s_i^2},$$

С этим критерием связаны числа степеней свободы $f_1 = n - 1$ и $f_2 = N$. Гипотеза об однородности дисперсий подтверждается, если экспериментальное значение критерия Кохрена не превышает табличного значения. Тогда можно усреднять дисперсии и пользоваться формулой

$$S_{\{y\}}^2 = \frac{\sum\limits_{1}^{N}\sum\limits_{1}^{n}(y_{iq} - \overline{y}_i)^2}{N(n-1)}.$$

Удобство использования критерия Фишера состоит в том, что проверку гипотезы можно свести к сравнению с табличным значением (прил. 2).

Таблица построена следующим образом. Столбцы связаны с определенным числом степеней свободы для числителя f_1 строки – для знаменателя f_2. На пересечении соответствующей строки и столбца стоят критические значения F-критерия. Как правило, в технических задачах используется уровень значимости 0,05.

Если рассчитанное значение F-критерия не превышает табличного, то с соответствующей доверительной вероятностью модель можно считать адекватной. При превышении табличного значения эту приятную гипотезу приходится отвергать.

5.2.3. Проверка значимости коэффициентов

Проверка значимости каждого коэффициента проводится независимо.

Ее можно осуществлять двумя равноценными способами: проверкой по *t*-критерию Стьюдента или построением доверительного интервала. При использовании полного факторного эксперимента или регулярных дробных реплик доверительные интервалы для всех коэффициентов (в том числе и эффектов взаимодействия) равны друг другу. Прежде всего надо, конечно, найти дисперсию коэффициента регрессии $s_{\{b_j\}}^2$

$$s_{\{b_j\}}^2 = \frac{s_{\{\overline{y}\}}^2}{N}.$$

Из формулы видно, что дисперсии всех коэффициентов равны друг другу, так как они зависят только от ошибки опыта и числа опытов.

Теперь легко построить доверительный интервал (Δb_j)

$$\Delta b_j = \pm t s_{\{b_j\}} .$$

Здесь t – табличное значение критерия Стьюдента при числе степеней свободы, с которыми определялась $s^2_{\{y\}}$, и выбранном уровне значимости (обычно 0,05); $s_{\{b_j\}}$ – квадратичная ошибка коэффициента регрессии

$$s_{\{b_j\}} = +\sqrt{s^2_{\{b_j\}}} .$$

Формулу для доверительного интервала можно записать в следующей эквивалентной форме:

$$\Delta b_j = \pm \frac{t s_{\{y\}}}{\sqrt{N}}$$

Коэффициент значим если его абсолютная величина больше доверительного интервала. Доверительный интервал задается верхней и нижней границами $b_j + \Delta b_j$ и $b_j - \Delta b_j$.

Для отыскания значений t-критерия можно воспользоваться таблицей, фрагмент из которой приведен в приложении 2

Таблица построена следующим образом. Столбцы соответствуют различным степеням свободы и значениям критерия.

Пусть в двух разных задачах случайно оказались два численно равных коэффициента регрессии. Доверительные интервалы для них оказались различными. Из них значим только второй

Задача	bj	Δb_j
1	5,3	±5,5
2	5,3	±2,6

В действительности, чем у́же доверительный интервал (при заданном α), тем с большей уверенностью можно говорить о значимости коэффициента.

Если абсолютная величина коэффициента больше, чем доверительный интервал, то коэффициент значим.

Можно проверять значимость коэффициентов по критерию, то воспользоваться формулой

$$t = \frac{|b_j|}{s_{\{b_j\}}} .$$

Вычисленное значение t-критерия сравнивается с табличным при заданном α и соответствующем числе степеней свободы. Полученные выводы о значимости коэффициентов, конечно, должны совпадать с предыдущими.

Так производится проверка значимости коэффициентов.

Пример. Проверим адекватность модели и значимость коэффициентов регрессии на основании полученных экспериментальных данных.

Прежде чем делать выводы о адекватности линейной модели необходимо проверить однородность дисперсий, для чего можно воспользоваться критерием Кохрена. Сначала подсчитаем дисперсии в каждой горизонтальной строке матрицы (табл. 2).

Таблица 2

Расчет дисперсии воспроизводимости

Номер опыта	y'	y''	$\bar{y}$	Δy	$(\Delta y)^2$	S_i^2
1	84,8	83,2	84,0	0,8	0,64	1,28
2	77,2	76,8	77,0	0,2	0,04	0,08
3	83,0	81,0	82,0	1	1	2
4	83,5	82,5	83,0	0,5	0.25	0.5
5	80,1	79,9	80,0	0,1	0,01	0,02
6	81,9	80,1	81,0	0,9	0,81	1,62
7	78,5	77,5	78,0	0,5	0,25	0,5
8	78,6	79,4	79,0	0,4	0,16	0,32
				$\sum$	3,16	6,32

В нашем случае эта формула для расчета дисперсии приобретает вид:

$$s^2 = \frac{\sum_1^n \left(y_q - \bar{y}\right)^2}{n-1} = \frac{\sum_1^2 \left(y_q - \bar{y}\right)^2}{2-1} = 2(\Delta y)^2.$$

Максимальная дисперсия оказалась в третьем опыте. Экспериментальный критерий Кохрена рассчитаем по формуле:

$$G = \frac{s_{\max}^2}{\sum_1^N s_i^2} = \frac{2}{6,32} = 0,32.$$

Табличный критерий Кохрена равен: G=0,68 (прил. 2). Экспериментальный критерий не превышает значения табличного, значит гипотеза об однородности дисперсий подтверждается.

Найдем дисперсию воспроизводимости. Для двух повторных опытов она приобретает следующий вид:

$$S^2_{\{y\}} = \frac{2\sum_{1}^{N}(y_{iq}-\overline{y}_i)^2}{N} = \frac{2\cdot 3,16}{8} = 0,79\,.$$

Остаточная дисперсия (дисперсия адекватности) составила

$$s^2_{\text{ад}} = \frac{\sum_{i=1}^{N}\Delta y_i^2}{f} = \frac{\sum_{1}^{8}\Delta y_i^2}{f} = \frac{64}{8-3-1} = 16,0\,.$$

Табличное значение критерия Фишера составило (прил. 2) F=6,04. $F_{\text{расч}} = 16,0/0,79 = 20,25$. Так как расчетное значение коэффициента Фишера превышает табличное, то модель нельзя считать адекватной.

Проверим значимость коэффициентов.

Найдем доверительный интервал по формуле:

$$\Delta b_j = \pm\frac{ts_{\{y\}}}{\sqrt{N}} = \frac{2,306\cdot 0,89}{\sqrt{8}} = \pm 0,727\,.$$

Сравним полученную величину интервала с абсолютными значениями коэффициентов. Сред полученных коэффициентов незначимым оказывается коэффициент b_1. Остальные коэффициенты значимы.

Можно проверить значимость коэффициентов по t-критерию. Для отыскания значений t-критерия можно воспользоваться табл. 3 приложения. Сначала необходимо найти квадратичную ошибку коэффициента регрессии по формуле.

$$s_{\{b_j\}} = +\sqrt{s^2_{\{b_j\}}} = \sqrt{\frac{0,79}{8}} = 0,31\,.$$

Тогда

$$t_1 = \frac{|b_j|}{s_{\{b_j\}}} = \frac{0,5}{0,31} = 1,61 < 2,306\,;$$

$$t_2 = \frac{|b_i|}{s_{\{b_j\}}} = \frac{1}{0,31} = 3,22 > 2,306 \text{ и т.д.}$$

Незначимым является коэффициент b_1.

Таким образом, окончательное уравнение регрессии будет иметь следующий вид:

$$y = 80,5 + x_3 + x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 - x_1x_2x_3\,.$$

5.2.4. Выводы

Необходимо сделать выводы об адекватности или неадекватности полученной модели. В случае неадекватности модели необходимо провести анализ возможных причин возникновения неадекватности и описать характер их влияния на линейность модели.

Также следует провести оценку значимости коэффициентов при факторах и их знаках и описать характер и силу влияния факторов на параметр оптимизации.

5.3 Дробный факторный эксперимент

Количество опытов в полном факторном эксперименте значительно превосходит число определяемых коэффициентов линейной модели. Таким образом, полный факторный эксперимент обладает большой избыточностью опытов, и их число целесообразно сократить. При этом нужно стремиться к тому, чтобы матрица планирования не лишилась своих оптимальных свойств.

Реплики, которые используются для сокращения опытов в 2^m раз, где m=1, 2, 3, 4, ..., называются регулярными. Они пользуются большой популярностью, так как позволяют производить расчет коэффициентов уравнения так же просто, как и в случае полного факторного эксперимента.

Для более полного понимания сути использования дробных реплик рассмотрим полный факторный эксперимент 2^2 (табл. 3).

Таблица 3

Полный факторный эксперимент 2^2

Номер опыта	x_0	x_1	x_2	$x_1x_2x_3$	y	Номер опыта	x_0	x_1	x_2	$x_1x_2x_3$	y
1	+	-	-	+	y_1	3	+	-	-	-	y_3
2	+	+	-	-	y_2	4	+	+	-	+	y_4

Пользуясь таким планированием, можно вычислить четыре коэффициента и представить результаты эксперимента в виде неполного квадратного уравнения

$$y=b_0+b_1x_1+b_2x_2+b_{12}x_1x_2.$$

Если имеются основания считать, что в выбранных интервалах варьирования процесс может быть описан линейной моделью, то достаточно определить три коэффициента: b_0, b_1 и b_2. Остается одна степень свободы. Употребим ее для минимизации числа опытов. При линейном приближении b_{12} и вектор-столбец x_1x_2 можно использовать для нового фактора x_3 . Поставим этот фактор в скобках над взаимодействием x_1x_2 и посмотрим, каковы будут оценки, коэффициентов. Здесь уже не будет тех раздельных оценок, которые мы имели в полном факторном эксперименте 2^2. Оценки смешаются следующим образом:

$$b_1 \rightarrow \beta_1+\beta_{23};\ b_2 \rightarrow \beta_2+\beta_{13};\ b_3 \rightarrow \beta_3+\beta_{12}.$$

5.3.1. Выбор дробных реплик

Так как, мы постулируем линейную модель, то, следовательно, все парные взаимодействия незначимы. Главное, мы нашли средство минимизировать число опытов: вместо восьми опытов для изучения трех факторов оказывается можно поставить четыре. При этом матрица планирования не теряет своих оптимальных свойств (ортогональность, ротатабельность и т.п.). Следовательно: *чтобы сократить число опытов, нужно новому фактору присвоить вектор-столбец матрицы, принадлежащий взаимодействию, которым можно пренебречь*. Тогда значение нового фактора в условиях опытов определяется знаками этого столбца.

Пример. Три матрицы предлагаются взамен полного факторного эксперимента 2^3, требующего восьми опытов. Какой из них можно воспользоваться?

Матрица №1

Номер опыта	x_0	x_1	x_2	x_1x_2	y
1	+	–	–	+	y_1
2	+	+	+	–	y_2
3	+	–	+	–	y_3
4	+	+	–	+	y_4

Матрица №2

Номер опыта	x_0	x_1	x_2	x_1x_2	y
1	+	–	–	+	y_1
2	+	+	+	+	y_2
3	+	–	+	–	y_3

Матрица №3

Номер опыта	x_0	x_1	x_2	x_1x_2	y
1	+	–	–	+	y_1
2	+	+	+	+	y_2
3	+	–	+	–	y_3
4	+	+	–	–	y_4

Проверим свойства матрицы № 1. Каждый вектор-столбец матрицы, кроме первого, содержит равное число +1 и –1. Это означает, что выполняется условие:

$$\sum_{1}^{4} x_{ji} = 0.$$

Перемножим каждую пару вектор-столбцов и посмотрим, будет ли сумма произведений равна 0. К сожалению,

$$\sum_{1}^{4} x_{2i} x_{3i} = -4 .$$

т.е. совершена какая-то ошибка в выборе матрицы. Вектор-столбцы для x_1 и x_2 не вызывают сомнения (эта часть матрицы – полный факторный эксперимент 2^2). Следовательно, ошибка могла появиться при построении вектор-столбца для x_3. Элементы этого столбца обратны по знаку элементам соседнего столбца x_2. Два этих столбца оказались взаимосвязанными: $x_3=-x_2$. При этом $b_3 \to \beta_3+\beta_2$ и $b_2 \to \beta_2+\beta_3$. В таком планировании не могут быть раздельно оценены основные эффекты. Значит, были потеряны сведения о двух линейных коэффициентах модели. Таким планированием воспользоваться невозможно.

Матрица №3 содержит всего три опыта. Три опыта недостаточны для оценки четырех коэффициентов: b_0, b_1, b_2 и b_3. Кроме того, ни одно из свойств, присущих полному факторному эксперименту, здесь не выполняется, за исключением нормировки. Матрица №3 сохраняет все свойства полного факторного эксперимента. Она дает возможность оценить свободный член b_0 и три коэффициента при линейных членах, потому что для x_3 использован вектор-столбец x_1x_2 полного факторного эксперимента 2^2.

Если в дополнение к столбцам матрицы № 3 вычислить столбцы для произведений x_1x_3 и x_2x_3, то элементы столбца x_1x_3 совпадут с элементами столбца x_2, а элементы столбца x_2x_3 – с элементами столбца x_1. Найденные коэффициенты будут оценками для совместных эффектов

$$b_1 \to \beta_1+\beta_{23};\ b_2 \to \beta_2+\beta_{13};\ b_3 \to \beta_3+\beta_{12}.$$

В этом случае смешиваются эффекты взаимодействия с основными эффектами. Так как постулируется линейная модель, то предполагается, что эффекты взаимодействия близки к нулю и поэтому $b_1 \approx \beta_1$; $b_2 \approx \beta_2$; $b_3 \approx \beta_3$.

Это самый простой случай: матрица из четырех опытов для трехфакторного планирования. С увеличением числа факторов вопрос о минимизации числа опытов превращается в довольно сложную задачу.

Поставив четыре опыта для оценки влияния трех факторов можно воспользоваться половиной полного факторного эксперимента 2^3, или «полурепликой». Если x_3 приравнять к $-x_1x_2$, то получим вторую половину матрицы 2^3. В этом случае: $b_1 \to \beta_1+\beta_{23}$; $b_2 \to \beta_2+\beta_{13}$; $b_3 \to \beta_3+\beta_{12}$.

При реализации обеих полуреплик можно получить раздельные оценки для линейных эффектов и эффектов взаимодействия, как и в полном факторном эксперименте 2^3. Объединение этих двух полуреплик и есть полный факторный эксперимент 2^3.

Матрица из восьми опытов для четырехфакторного планирования будет полурепликой от полного факторного эксперимента 2^4, а для пятифакторного планирования – четверть-репликой от 2^5. В последнем случае два линейных эффекта приравниваются к эффектам взаимодействия. Для обозначения дробных реплик, в которых p линейных эффектов приравнены к эффектам взаимодействия, удобно пользоваться условным обозначением 2^{k-p}. Так, полуреплика от 2^6 запишется в виде 2^{6-1}, а четвертьреплика от 2^5 – в виде 2^{5-2}.

При построении полуреплики 2^{3-1} существует две возможности: приравнять x_3 к $+x_1x_2$ или к $-x_1x_2$. Поэтому есть только две полуреплики 2^{3-1} (табл. 4).

Таблица 4

Две полуреплики 2^{3-1}

Номер опыта	1. $x_3=x_1x_2$				Номер опыта	2. $x_3=-x_1x_2$			
	x_1	x_2	x_3	$x_1x_2x_3$		x_1	x_2	x_3	$x_1x_2x_3$
1	+	+	+	+	1	+	+	–	–
2	–	–	+	+	2	–	–	–	–
3	+	–	–	+	3	+	–	+	–
4	–	+	–	+	4	–	+	+	–

Для произведения трех столбцов матрицы 1 выполняется соотношение: $+1=x_1x_2x_3$, матрицы 2: $-1=x_1x_2x_3$. Все знаки столбцов произведений одинаковы и в первом случае равны плюс единице, а во втором – минус единице.

5.3.2. Нахождение системы смешивания.

При применении дробных реплик линейные эффекты смешиваются с эффектами взаимодействий. Чтобы определить систему смешивания, нужно знать определяющие контрасты и генерирующие соотношения.

Символическое обозначение произведения столбцов, равного +1 или –1, называется *определяющим контрастом.* Контраст помогает определять смешанные эффекты. Для того чтобы определить, какой эффект смешан с данным, нужно помножить обе части определяющего контраста на столбец, соответствующий данному эффекту. Если $1=x_1x_2x_3$, то для x_1 имеем $x_1 = x_1^2x_2x_3 = x_2x_3$, так как всегда $x_i^2 = 1$.

Для x_2 находим $x_2 = x_1x_2^2x_3 = x_1x_3$

для x_3 находим $x_3 = x_1x_2x_3^2 = x_1x_2$.

Это значит, что коэффициенты линейного уравнения будут оценками

$$b_1 \rightarrow \beta_1+\beta_{23};\ b_2 \rightarrow \beta_2+\beta_{13};\ b_3 \rightarrow \beta_3+\beta_{12}.$$

Соотношение, показывающее, с каким из эффектов смешан данный эффект, называется генерирующим соотношением.

5.3.3. Выбор наиболее эффективного варианта реплики с обоснованием выбранного решения.

Полуреплики, в которых основные эффекты смешаны с двухфакторными взаимодействиями, носят название планов с разрешающей способностью III (по наибольшему числу факторов в определяющем контрасте). Такие планы принято обозначать: 2_{III}^{3-1}.

Реплики, в которых нет ни одного главного эффекта, смешанного с другим главным эффектом или парным взаимодействием, а все парные взаимодействия смешаны друг с другом, носят название планов с разрешающей способностью IV (по наибольшему числу факторов в определяющем контрасте). Они имеют обозначение 2_{VI}^{4-1}.

Эффективность реплики зависит от системы смешивания. Реплики, у которых линейные эффекты смешаны с взаимодействиями наивысшего порядка, являются наиболее эффективными, так как обладают наибольшей разрешающей способностью. Рассмотрим пример полуреплики 2_{VI}^{4-1}.

Пример. Необходимо спланировать эксперимент для отыскания оптимальных условий получения нового полимерного серосодержащего антиоксиданта, синтезированного превращением высокомолекулярного полистирола с серой [4]. Задача состоит в получении стабилизатора, введение которого в изотактический полипропилен увеличивало бы период индукции, не ухудшая физико-механических свойств полимера. В качестве факторов рассматриваются переменные, показанные в табл. 5.

Таблица 5

Уровни факторов и интервалы варьирования

Факторы	Уровни факторов			Интервал варьирования
	–1	0	+1	
$\tilde{x}_1$ – температура реакционной среды, °С	200	220	240	20
$\tilde{x}_2$ – дозировка серы в исходной смеси, вес. ч.	3	6	9	3
$\tilde{x}_3$ – время реакции, мин.	40	100	160	60
$\tilde{x}_4$ – дозировка антиоксиданта в полипропилене, вес. ч.	1	2	3	1

Матрица планирования представляла собой полуреплику от 2^4, заданную генерирующим соотношением $x_4 = x_1x_2x_3$. Определяющим контрастом является $1=x_1x_2x_3x_4$. Умножая определяющий контраст последовательно на

x_1, x_2, x_3, x_4 и x_4 определяем совместно оценки линейных эффектов и взаимодействий

$b_1 \to \beta_1+\beta_{234}$ $\quad$ $b_3 \to \beta_3+\beta_{124} b_{12} \to \beta_{12}+\beta_{34}$

$b_2 \to \beta_2+\beta_{134}$ $\quad$ $b_4 \to \beta_4+\beta_{123} b_{13} \to \beta_{13}+\beta_{24}$

$b_{23} \to \beta_{23}+\beta_{14}$

Матрица планирования приведена в табл. 6.

С ростом числа факторов быстро увеличивается число реплик различной дробности. Эти реплики характеризуются обобщающими определяющими контрастами, которые получаются перемножением по два, по три и т. д. исходных определяющих контрастов.

Таблица 6

Матрица планирования 2_{IV}^{4-1}

Номер опыта	x_0	x_1	x_2	x_3	x_4	$x_1x_2=x_3x_4$	$x_1x_3=x_2x_4$	$x_2x_3=x_1x_4$	y
1	+	+	+	–	–	+	–	–	y_1
2	+	–	–	–	–	+	+	+	y_2
3	+	+	–	–	+	–	–	+	y_3
4	+	–	+	–	+	–	+	–	y_4
5	+	+	+	+	+	+	+	+	y_5
6	+	–	–	+	+	+	–	–	y_6
7	+	+	–	+	–	–	+	–	y_7
8	+	–	+	+	–	–	–	+	y_8

При исследовании влияния пяти факторов можно поставить не 16 опытов, а только 8, т.е. воспользоваться репликой 2^{5-2}. Здесь возможны двенадцать решений, если x_4 приравнять парному взаимодействию, а x_5 – тройному:

1) $x_4 = x_1x_2$ $\quad$ $x_5 = x_1x_2x_3$
2) $x_4 = -x_1x_2$ $\quad$ $x_5 = -x_1x_2x_3$
3) $x_4 = -x_1x_2$ $\quad$ $x_5 = x_1x_2x_3$
4) $x_4 = -x_1x_2$ $\quad$ $x_5 = -x_1x_2x_3$
5) $x_4 = x_1x_3$ $\quad$ $x_5 = x_1x_2x_3$
6) $x_4 = x_1x_3$ $\quad$ $x_5 = -x_1x_2x_3$
7) $x_4 = -x_1x_3$ $\quad$ $x_5 = x_1x_2x_3$
8) $x_4 = -x_1x_3$ $\quad$ $x_5 = -x_1x_2x_3$
9) $x_4 = x_2x_3$ $\quad$ $x_5 = x_1x_2x_3$
10) $x_4 = x_2x_3$ $\quad$ $x_5 = -x_1x_2x_3$
11) $x_4 = -x_2x_3$ $\quad$ $x_5 = x_1x_2x_3$
12) $x_4 = -x_2x_3$ $\quad$ $x_5 = -x_1x_2x_3$

Допустим, выбран пятый вариант: $x_4=x_1x_3$ и $x_5=x_1x_2x_3$. Тогда определяющими контрастами являются: $1=x_1x_3x_4$ и $1=x_1x_2x_3x_5$.

Если перемножить эти определяющие контрасты, то получится третье соотношение, задающее элементы столбца $1=x_2x_4x_5$. Чтобы полностью охарактеризовать разрешающую способность реплики, необходимо записать обобщающий определяющий контраст $1=x_1x_3x_4=x_2x_4x_5=x_1x_2x_3x_5$.

Система смешивания определяется умножением обобщающего определяющего контраста последовательно на x_1, x_2, x_3 и т.д.

$x_1= x_3 x_4 = x_1x_2x_4x_5 = x_2x_3x_5$.

$x_2= x_1x_2x_3x_4= x_4x_5 = x_1x_3x_5$.

$x_3= x_1x_4= x_2x_3x_4x_5 = x_1x_2x_5$.

$x_4= x_1x_3=x_2x_5 = x_1x_2x_3x_4x_5$.

$x_5= x_1x_3x_4x_5 = x_2x_4 = x_1x_2x_3$.

$x_1x_2= x_2x_3x_4 = x_1x_4x_5 =x_3x_5$.

$x_1x_5= x_3x_4x_5 = x_1x_2x_4 = x_2x_3$.

Получается сложная система смешивания линейных эффектов с эффектами взаимодействия первого, второго, третьего и четвертого порядков. Если, например, коэффициенты $b_{12} \to \beta_{12}+\beta_{234}+\beta_{145}+\beta_{35}$ и $b_{15} \to \beta_{15}+\beta_{345}+\beta_{124}+\beta_{23}$ отличаются от нуля, то возникают сомнения, можно ли пренебрегать другими парными взаимодействиями, с которыми смешаны линейные эффекты. Тогда следует поставить вторую серию опытов, выбрав нужным образом другую 1/4-реплику.

Для освобождения линейных эффектов от взаимодействий первого порядка можно использовать метод «перевала». Смысл метода в добавлении новой реплики, все знаки которой противоположны исходной реплике.

Существуют реплики и большей дробности и принцип их построения тот же самый. Например, при выборе 1/8-реплики 2^{6-3} можно воспользоваться вектор-столбцами трех взаимодействий:

1) $x_4 =x_1x_2$, $x_5 =x_1x_3$, $x_6 =x_2x_3$,
2) $x_4 =x_1x_3$, $x_5 = x_2x_3$, $x_6 =x_1x_2x_3$,
3) $x_4 = x_1x_2$, $x_5 =x_2x_3$, $x_6 =x_1x_2 x_3$,
4) $x_4 =x_1x_2$, $x_5 = x_1x_3$, $x_6 =x_1x_2 x_3$.

Для каждого из этих решений можно сделать шесть перестановок.

Итого получается 24 возможности выбора 1/8-реплики. Это при условии, что мы всюду выбираем положительные генерирующие соотношения.

Из четырех приведенных выше решений наименее удачно первое, поскольку все линейные эффекты смешиваются с парными взаимодействиями.

Если априорно известно, что из всех взаимодействий наиболее существенно x_1x_2, то нужно выбрать второе решение, если x_1x_3 – третье, а если x_2x_3 – четвертое.

Допустим, мы избрали четвертое решение, предполагая, что из факторов x_4, x_5, x_6 наиболее существенным является x_4. Приравняем x_4 тройному взаимодействию и запишем генерирующие соотношения.

$x_4=x_1x_2x_3$, $\quad x_5=x_1x_2$, $\quad x_6=x_1x_3$.

Рассмотрим только парные и тройные взаимодействия и для нашей реплики получим следующие определяющие контрасты

$1=x_1x_2x_3x_4$; $\quad 1=x_1x_2x_5$; $\quad 1=x_1x_3x_6$.

При попарном перемножении этих определяющих контрастов получим

$1=x_3x_4x_5$; $\quad 1=x_2x_4x_6$; $\quad 1=x_2x_3x_5x_6$.

Произведение трех определяющих контрастов равно:

$1=x_1x_4x_5x_6$.

Чтобы полностью охарактеризовать разрешающую способность данной 1/8-реплики, запишем обобщающий определяющий контраст:

$1=x_1x_2x_3x_4=x_1x_2x_5=x_1x_3x_6=x_3x_4x_5=x_2x_4x_6=x_2x_3x_5x_6=x_1x_4x_5x_6.$

Получается следующая система смешивания:

$b_1 \rightarrow \beta_1+\beta_{25}+\beta_{36}+\beta_{234}+\beta_{456}$, $\quad b_4 \rightarrow \beta_4+\beta_{35}+\beta_{26}+\beta_{123}+\beta_{156}$,

$b_2 \rightarrow \beta_2+\beta_{15}+\beta_{46}+\beta_{134}+\beta_{356}$, $\quad b_5 \rightarrow \beta_5+\beta_{12}+\beta_{34}+\beta_{236}+\beta_{146}$,

$b_3 \rightarrow \beta_3+\beta_{16}+\beta_{45}+\beta_{124}+\beta_{256}$, $\quad b_6 \rightarrow \beta_6+\beta_{13}+\beta_{24}+\beta_{235}+\beta_{145}$.

Возможно также построение реплик еще большей дробности: 1/16, 1/32, 1/64 и т.д.

5.3.4. Выводы

На основании полученной системы смешивания необходимо сделать анализ ее эффективности.

5.4. Латинские и греко-латинские квадраты.

Латинские квадраты применяются для того, чтобы исключить два внешних источника неоднородности, т.е. чтобы обеспечить систематическое группирование в блоки по двум направлениям. Таким образом, строки и столбцы, в сущности, представляют собой два ограничения на рандомизацию. В общем случае латинский квадрат для p факторов или латинский квадрат $p \times p$ – это квадрат, состоящий их p строк и p столбцов. Каждая из p^2 получающихся ячеек содержит одну из p букв, соответствующих обработкам, причем каждая буква встречается в каждой строке и каждом столбце один и только один раз. Ниже даны примеры латинских квадратов:

4×4

$$\begin{array}{cccc} A & B & D & C \\ B & C & A & D \\ C & D & B & A \\ D & A & C & B \end{array}$$

5×5

$$\begin{array}{ccccc} A & D & B & E & C \\ D & A & C & B & E \\ C & B & E & D & A \\ B & E & A & C & D \\ E & C & D & A & B \end{array}$$

6×6

$$\begin{array}{cccccc} A & D & C & E & B & F \\ B & A & E & C & F & D \\ C & E & D & F & A & B \\ D & C & F & B & E & A \\ F & D & A & D & C & E \\ E & F & B & A & D & C \end{array}$$

Статистическая модель для латинского квадрата имеет вид

$$y_{ijk}=\mu+\alpha_i+\tau_j+\beta_k+\varepsilon_{ijk}$$

$$i=1,2,\ldots,p;\ j=1,2,\ldots,p;\ k=1,2,\ldots,p$$

где y_{ijk} – наблюдение в i-й строке и k-м столбце для j-й обработки;

μ – математическое ожидание общего среднего;

α_i – эффект i-й строки;

τ_j – эффект j-й обработки;

β_k – эффект k-го столбца;

ε_{ijk} – случайная ошибка.

Эта модель полностью аддитивна, т.е. взаимодействия между строками, столбцами и обработками отсутствуют. Поскольку на каждую ячейку приходится только одно наблюдение, то для его обозначения необходимы лишь два из трех индексов i, j и k.

Рассмотрим латинский квадрат $p\times p$. Наложим на него другой латинский квадрат $p\times p$, в котором обработки обозначены греческими буквами. Если при наложении каждая греческая буква встречается с каждой из латинских букв один и один только раз, то такие квадраты являются ортогональными, а образующийся при этом квадрат называется греко-латинским.

Греко-латинские квадраты могут использоваться при планировании экспериментов для систематического контроля трех источников мешающей неоднородности, т.е. для группирования в блоки по трем направлениям. Такие планы позволяют исследовать всего при при p^2 наблюдениях четыре фактора (строки, столбцы, латинские и греческие буквы), причем каждый из них на p уровнях. Греко-латинские квадраты существуют для всех $p\geq3$, кроме $p=6$.

5.4.1. Дисперсионный анализ данных

Пример

Предположим, что экспериментатор исследует влияние пяти различных формул взрывчатой смеси на наблюдаемую силу взрыва. Смесь по каждой из формул приготавливается из партии сырья, объем которой позволяет проверить не более пяти формул. Смеси приготавливаются несколькими операторами, которые могут существенно отличаться по квалификации и опыту (таблица 7).

Т а б л и ц а 7

Исходные данные

Партии сырья	Операторы				
	1	2	3	4	5
1	A=24	B=20	C=19	D=24	E=24
2	B=17	C=24	D=30	E=27	A=36
3	C=18	D=38	E=26	A=27	B=21
4	D=26	E=31	A=26	B=23	C=22
5	E=22	A=30	B=20	C=29	D=31

Если i=2 и k=3, то автоматически следует, что j=4 (формула смеси D), а если i=1 и j=3 (формула смеси C), то k=3. Это вытекает из того, что каждая обработка в каждом столбце и каждой строке встречается один и только один раз.

При дисперсионном анализе осуществляется разбиение общей суммы квадратов $N=p^2$ наблюдений на компоненты для строк, столбцов, обработок и ошибки, например,

$SS_{общ}=SS_{стр}+SS_{столб}+SS_{обр}+SS_{ош}$

с числом степеней свободы:

Всего Строки Столбцы Обработки Ошибка

$p^2\text{-}1 = \quad p\text{-}1 \quad + \quad p\text{-}1 \quad + \quad p\text{-}1 \quad + \quad (p\text{-}2)\,(p\text{-}1).$

Для проверки гипотезы об отсутствии эффектов обработок должна использоваться статистика

$$F_0=MS_{обр}/MS_{ош},$$

которая при условии истинности нулевой гипотезы подчиняется F – распределению с $p\text{-}1$ и $(p\text{-}2)\ (p\text{-}1)$ степенями свободы. Можно также проверить гипотезы об отсутствии эффектов строк или столбцов, образовав отношение $MS_{стр}$ или $MS_{столб}$ или $MS_{ош}$. Однако поскольку строки и столбцы представляют собой ограничение на рандомизацию, такая проверка может оказаться нестрогой.

Процедура вычислений при дисперсионном анализе приведена в табл. 8, из которой видно, что этот анализ является непосредственным обобщением случая рандомизированного полноблочного плана, причем сумма квадратов для строк определяется через суммы наблюдений по строкам.

Рассмотрим задачу о формулах взрывчатой смеси, упоминавшуюся выше. Здесь как партии сырья, так и операторы представляют собой ограничения на рандомизацию. В этом эксперименте используется латинский квадрат 5×5 (табл. 7). После кодирования (вычитанием 25 из каждого наблюдения) мы получаем данные (табл. 9).

Таблица 8

Дисперсионный анализ для латинского квадрата

Источник изменчивости	Сумма квадратов	Степени свободы	Средний квадрат	F_0
Обработки	$SS_{обр} = \frac{1}{p}\sum_{j=1}^{p} y_{.j.}^2 - \frac{1}{N} y_{...}^2$	$p-1$	$\frac{SS_{обр}}{p-1}$	$\frac{MS_{обр}}{MS_{ош}}$
Строки	$SS_{стр} = \frac{1}{p}\sum_{i=1}^{p} y_{i..}^2 - \frac{1}{N} y_{...}^2$	$p-1$	$\frac{SS_{стр}}{p-1}$	
Столбцы	$SS_{столб} = \frac{1}{p}\sum_{k=1}^{p} y_{..k}^2 - \frac{1}{N} y_{...}^2$	$p-1$	$\frac{SS_{столб}}{p-1}$	
Ошибка	$SS_{ош}\,(вычитанием)$	$(p-2)\times(p-1)$	$\frac{SS_{ош}}{(p-2)\times(p-1)}$	
Сумма	$SS_{общ} = \sum_i\sum_j\sum_k y_{ijk}^2 - \frac{1}{N} y_{...}^2$	p^2-1		

Таблица 9

Кодированные данные для задачи о формулах взрывчатой смеси

Партии сырья	Операторы					$y_{i..}$
	1	2	3	4	5	
1	A=-1	B=-5	C=-1	D=-1	E=-1	-14
2	B=-8	C=-1	D=5	E=2	A=11	9
3	C=-7	D=13	E=1	A=2	B=-4	5
4	D=1	E=6	A=1	B=-2	C=-3	3
5	E=-3	A=5	B=-5	C=4	D=6	7
$y_{..k}$	-18	18	-4	5	9	$y_{...}=10$

Общая сумма квадратов и суммы квадратов для партий сырья (строк) и операторов (столбцов) находятся следующим образом:

$$SS_{общ} = \sum_i\sum_j\sum_k y_{ijk}^2 - \frac{1}{N} y_{...}^2 = 680 - \frac{1}{25}10^2 = 676{,}00$$

$$SS_{сырья} = \frac{1}{p}\sum_{i=1}^{p} y_{i..}^2 - \frac{1}{N} y_{...}^2 = \frac{1}{5}\left[(-14)^2 + 9^2 + 5^2 + 3^2 + 7^2\right] - \frac{1}{25}10^2 = 68{,}0$$

$$SS_{опер} = \frac{1}{p}\sum_{k=1}^{p} y_{..k}^2 - \frac{1}{N} y_{...}^2 = \frac{1}{5}\left[(-18)^2 + 18^2 + (-4)^2 + 5^2 + 9^2\right] - \frac{1}{25}10^2 = 150{,}00$$

Суммы по обработкам (латинским буквам) приведены ниже:

Латинская буква	Сумма по обработке
A	$y_{.1.}=18$
B	$y_{.2.}=-24$
C	$y_{.3.}=-13$
D	$y_{.4.}=-24$
E	$y_{.5.}=5$

Сумма квадратов, обусловленная формулами смеси, исходя из найденных сумм, имеет величину

$$SS_{\text{обр}}=\frac{1}{p}\sum_{j=1}^{p}y_{.j.}^{2}-\frac{1}{N}y_{...}^{2}=\frac{1}{5}\left[18^2+(-24)^2+(-13)^2+24^2+5^2\right]-\frac{1}{5}10^2=330,00$$

Сумма квадратов для ошибки с вычитанием:

$$SS_{\text{ош}}(\textit{вычитанием})=SS_{\text{общ}}-SS_{\text{сыр}}-SS_{\text{опер}}-SS_{\text{форм}}=$$

$$=676,00-68,00-150,00-330,00=128,00$$

Результаты дисперсионного анализа приведены в табл. 10. Различия формул взрывчатой смеси оказываются значимыми на уровне одного процента. Кроме того, средний квадрат для операторов велик по сравнению со средним квадратом ошибки.

Таблица 10

Дисперсионный анализ для задачи о формулах взрывчатой смеси

Источник изменчивости	Сумма квадратов	Степени свободы	Средний квадрат	F_0
Формулы	330,00	4	82,5	7,73*
Партии сырья	68,00	4	17,0	
Операторы	150,00	4	37,50	
Ошибка	128,00	12	10,67	
Сумма	676,00	24		

*Значимо при 1 проценте

Пример.

Предположим, что при исследовании формул взрывчатой смеси (табл. 1) может оказаться важным еще один фактор – испытательные установки. Пусть этих установок пять, обозначим их греческими буквами $\alpha,\beta,\gamma,\delta,\varepsilon$. Получившийся греко-латинский квадрат приведен в таблице 11.

Таблица 11

Исходные данные

Партии сырья	Операторы					$y_{i...}$
	1	2	3	4	5	
1	Aα=-1	Bγ=-5	Cε=-1	Dβ=-1	Eδ=-1	-14
2	Bβ=-8	Cδ=-1	Dα=5	Eγ=2	Aε=11	9
3	Cγ=-7	Dε=13	Eβ=1	Aδ=2	Bα=-4	5
4	Dδ=1	Eα=6	Aγ=1	Bε=-2	Cβ=-3	3
5	Eε=-3	Aβ=5	Bδ=-5	Cα=4	Dγ=6	7
$y_{...l}$	-18	18	-4	5	9	$y_{...}=10$

Дисперсионный анализ проводится практически так же, как и в случае латинских квадратов. Правила вычислений приведены в таблице 12.

Таблица 12

Дисперсионный анализ для латинского квадрата

Источник изменчивости	Сумма квадратов	Степени свободы
Латинские буквы	$SS_{\text{лат}}=\frac{1}{P}\sum_{j=1}^{p}y_{.j..}^2-\frac{1}{N}y_{....}^2$	$p-1$
Греческие буквы	$SS_{\text{гр}}=\frac{1}{p}\sum_{k=1}^{p}y_{..k.}^2-\frac{1}{N}y_{....}^2$	$p-1$
Строки	$SS_{\text{стр}}=\frac{1}{p}\sum_{i=1}^{p}y_{i...}^2-\frac{1}{N}y_{....}^2$	$p-1$
Столбцы	$SS_{\text{столб}}=\frac{1}{p}\sum_{l=1}^{p}y_{...l}^2-\frac{1}{N}y_{....}^2$	$p-1$
Ошибка	$SS_{\text{ош}}(\textit{вычитанием})$	$(p-3)\times(p-1)$
Сумма	$SS_{\text{общ}}=\sum_{i}\sum_{j}\sum_{k}\sum_{l}y_{ijkl}^2-\frac{1}{N}y_{....}^2$	p^2-1

$$SS_{\text{сырья}}=\frac{1}{p}\sum_{i=1}^{p}y_{i..}^2-\frac{1}{N}y_{...}^2=\frac{1}{5}\Big[(-14)^2+9^2+5^2+3^2+7^2\Big]-\frac{1}{25}10^2=68,0$$

$$SS_{\text{опер}}=\frac{1}{p}\sum_{k=1}^{p}y_{..k}^2-\frac{1}{N}y_{...}^2=\frac{1}{5}\Big[(-18)^2+18^2+(-4)^2+5^2+9^2\Big]-\frac{1}{25}10^2=150,00$$

$$SS_{\text{форм}}=\frac{1}{p}\sum_{j=1}^{p}y_{.j.}^2-\frac{1}{N}y_{...}^2=\frac{1}{5}\Big[18^2+(-24)^2+(-13)^2+24^2+5^2\Big]-\frac{1}{5}10^2=330,00$$

Найдем суммы для испытательных установок:

Греческая буква	Сумма по обработке
α	$y_{..1.} = 10$
β	$y_{..2.} = -6$
γ	$y_{..3.} = -3$
δ	$y_{..4.} = -4$
ε	$y_{..5.} = 13$

Тогда сумма квадратов, обусловленная воздействием испытательных установок будет равна:

$$SS_{\text{уст}} = \frac{1}{p}\sum_{k=1}^{p} y_{..k.}^{2} - \frac{1}{N} y_{....}^{2} = \frac{1}{5}\left[10^2 + (-6)^2 + (-3)^2 + (-4)^2 + 13^2\right] - \frac{1}{25}10^2 = 62{,}00$$

Результаты полного дисперсионного анализа сведены в таблице 13.

Таблица 13

Дисперсионный анализ для задачи о формулах взрывчатой смеси

Источник изменчивости	Сумма квадратов	Степени свободы	Средний квадрат	F_0
Формулы	330,00	4	82,5	10,00*
Партии сырья	68,00	4	17,0	
Операторы	150,00	4	37,50	
Испытательные установки	62,00	4	15,50	
Ошибка	66,00	8	8,25	
Сумма	676,00	24		

*Значимо при 1 проценте

Различия между формулами смеси оказываются значимыми на уровне одного процента. Сравнивая таблицы 4 и 7 можно сказать, что исключение изменчивости, обусловленной испытательными установками, уменьшило ошибку эксперимента. При этом, однако, уменьшилось и число степеней свободы с 12 до 8. Следовательно, критерий может оказаться менее чувствительным.

5.5. Заключение

В заключении необходимо привести основные выводы об используемых методах планирования эксперимента, описать их преимущества и недостатки с указанием сфер их практического применения.

ПРИЛОЖЕНИЕ

П р и л о ж е н и е 1

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РФ

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО
ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
«ПЕНЗЕНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
АРХИТЕКТУРЫ И СТРОИТЕЛЬСТВА

КАФЕДРА Управление качеством и ТСП

ЗАДАНИЕ НА КУРСОВУЮ РАБОТУ
**по дисциплине «Основы научных исследований.
Организация и планирование эксперимента»**

Студент ______________________.______ Группа ___*СиМ-11м*

1.Тема: **«Решение задач оптимизации методами математического планирования эксперимента»**

2.Срок представления к защите: *«   »   20   г*

3. Содержание пояснительной записки:

Введение.

1 Полный факторный эксперимент 2^3

1.1 Расчет коэффициентов уравнения регрессии.

1.2 Проверка адекватности модели.

1.3 Проверка значимости коэффициентов уравнения регрессии.

1.4 Выводы

Исходные данные

Номер опыта	x_1	x_2	x_3	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5
1	-	-	-	76,1	75,3	74,5	74,9	74,8
2	+	-	-	72,1	71,3	70,5	70,9	
3	-	+	-	49,1	48,3	47,5		
4	+	+	-	65,8	65			
5	-	-	+	68,8	68	67,2	67,6	
6	+	-	+	60,8	60			
7	-	+	+	81,3	80,5	79,7		
8	+	+	+	66,2	65,4	64,6		

2 Дробный факторный эксперимент типа 2^k.

2.1 Выбор ½ -реплики для ПФЭ 2^3 и 1/8 – реплики для ПФЭ 2^7.

2.2 Нахождение системы смешивания.

2.3 Выбор наиболее эффективного варианта реплики с обоснованием выбранного решения.

2.4 Выводы

3 Латинские и греко-латинские квадраты.

3.1 Решить задачу с использованием латинских квадратов: выход химического процесса измерялся на пяти партиях сырья при пяти концентрациях кислоты и пяти продолжительностях реакции *A, B, C, D, E*.

Исходные данные

Партии сырья	Концентрация кислоты				
	1	2	3	4	5
1	A = 26,2	B = 16,7	C = 19,4	D = 16,1	E = 13,2
2	B = 18,4	C = 21,4	D = 18,2	E = 11,4	A = 20,9
3	C = 20,4	D = 12,4	E = 16,1	A = 24,8	B = 13,3
4	D = 15	E = 15,2	A = 22,2	B = 14,1	C = 17,3
5	E = 10	A = 24,3	B = 17,2	C = 17,3	D = 13,9

3.2 Провести анализ данных и сделать соответствующие выводы.

Заключение.

Список использованных источников.

Руководитель работы____________________ */к.т.н., доцент Р.В Тарасов/*

подпись, дата, инициалы, фамилия

Задание принял: ____

подпись, дата

Сроки выполнения работы

25 % – 75% - Сдача работы – со ____________ по ________________

50 % – 100 % –

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РФ

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО
ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
«ПЕНЗЕНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
АРХИТЕКТУРЫ И СТРОИТЕЛЬСТВА

КАФЕДРА Управление качеством и ТСП

ЗАДАНИЕ НА КУРСОВУЮ РАБОТУ
**по дисциплине «Основы научных исследований.
Организация и планирование эксперимента»**

Студент ________________________.______ Группа ___*СиМ-11м*

1.Тема: **«Решение задач оптимизации методами математического планирования эксперимента»**

2.Срок представления к защите*: «___»________________20____г*

3. Содержание пояснительной записки:

Введение.

1 Полный факторный эксперимент 2^3

1.1 Расчет коэффициентов уравнения регрессии.

1.2 Проверка адекватности модели.

1.3 Проверка значимости коэффициентов уравнения регрессии.

1.4 Выводы

Исходные данные

Номер опыта	x_1	x_2	x_3	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5
1	-	-	-	76,2	75,4	74,6		
2	+	-	-	72,2	71,4	70,6	71	
3	-	+	-	49,2	48,4			
4	+	+	-	65,9	65,1	64,3		
5	-	-	+	68,9	68,1	67,3	67,7	
6	+	-	+	60,9	60,1	59,3		
7	-	+	+	81,4	80,6	79,8	80,2	80,1
8	+	+	+	66,3	65,5	64,7		

2 Дробный факторный эксперимент типа 2^k.

2.1 Выбор ½ -реплики для ПФЭ 2^4 и 1/4 – реплики для ПФЭ 2^7.

2.2 Нахождение системы смешивания.

2.3 Выбор наиболее эффективного варианта реплики с обоснованием выбранного решения.

2.4 Выводы

3 Латинские и греко-латинские квадраты.

3.1 Решить задачу с использованием латинских квадратов: выход химического процесса измерялся на пяти партиях сырья при пяти концентрациях кислоты и пяти продолжительностях реакции *A, B, C, D, E*.

Исходные данные

Партии сырья	Концентрация кислоты				
	1	2	3	4	5
1	A = 26,7	B = 17,2	C = 19,9	D = 16,6	E = 13,7
2	B = 18,9	A = 21,9	E = 18,7	C = 11,9	D = 21,4
3	C = 20,9	D = 12,9	A = 16,6	E = 25,3	B = 13,8
4	D = 15,5	E = 15,7	B = 22,7	A = 14,6	C = 17,8
5	E = 10,5	C = 24,8	D = 17,7	B = 17,8	A = 14,4

3.2 Провести анализ данных и сделать соответствующие выводы.

Заключение.

Список использованных источников.

Руководитель работы____________________ */к.т.н., доцент Р.В Тарасов/*

подпись, дата, инициалы, фамилия

Задание принял: ____

подпись, дата

Сроки выполнения работы

25 % – 75% - Сдача работы – со ___________по

____

50 % – 100 % –

П р и л о ж е н и е 2

Критические значения статистических критериев

Критерий Фишера $F_{кр}$ при α=0,05

f_2	Число степеней свободы f_1 (числитель)											
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	20	∞
1	161	199	216	225	230	234	237	239	241	242	248	254
2	18,5	19,0	19,2	19,2	19,3	19,3	19,4	19,4	19,4	19,4	19,4	19,5
3	10,1	9,55	9,28	9,12	9,01	8,94	8,89	8,85	8,81	8,79	8,66	8,53
4	7,71	6,94	6,59	6,39	6,26	6,16	6,09	6,04	6,00	5,96	5,80	5,63
5	6,61	5,79	5,41	5,19	5,05	4,95	4,88	4,82	4,77	4,74	4,56	4,37
6	5,99	5,14	4,76	4,53	4,39	4,28	4,21	4,15	4,10	4,06	3,87	3,67
7	5,59	4,74	4,35	4,12	3,97	3,87	3,79	3,73	3,68	3,64	3,44	3,23
8	5,32	4,46	4,07	3,84	3,69	3,58	3,50	3,44	3,39	3,35	3,15	2,93
9	5,12	4,26	3,86	3,63	3,48	3,37	3,29	3,23	3,18	3,14	2,94	2,71
10	4,96	4,1	3,71	3,48	3,33	3,22	3,14	3,07	3,02	2,98	2,77	2,54
20	4,35	3,49	3,10	2,87	2,71	2,60	2,51	2,45	2,39	2,35	2,12	1,84
∞	3,84	3,00	2,60	2,37	2,21	2,10	2,01	1,94	1,88	1,83	1,57	1,00

Критерий Фишера $F_{кр}$ при α=0,1

f_2	Число степеней свободы f_1 (числитель)											
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	20	∞
1	39,9	49,5	53,6	55,8	57,2	58,2	58,9	59,4	59,9	60,2	61,7	63,3
2	8,53	9,00	9,16	9,24	9,29	9,33	9,35	9,37	9,38	9,39	9,44	9,49
3	5,54	5,46	5,39	5,34	5,31	5,28	5,27	5,25	5,24	5,23	5,18	5,13
4	4,54	4,32	4,19	4,11	4,05	4,01	3,98	3,95	3,94	3,92	3,84	3,76
5	4,06	3,78	3,62	3,52	3,45	3,40	3,37	3,34	3,32	3,30	3,21	3,10
6	3,78	3,46	3,29	3,18	3,11	3,05	3,01	2,98	2,96	2,94	2,84	2,72
7	3,59	3,26	3,07	2,96	2,88	2,83	2,78	2,75	2,72	2,70	2,59	2,47
8	3,46	3,11	2,92	2,81	2,73	2,67	2,62	2,59	2,56	2,54	2,42	2,29
9	3,36	3,01	2,81	2,69	2,61	2,55	2,51	2,47	2,44	2,42	2,30	2,16
10	3,29	2,92	2,73	2,61	2,52	2,46	2,41	2,38	2,35	2,32	2,20	2,06
20	2,97	2,59	2,38	2,25	2,16	2,09	2,04	2,00	1,96	1,94	1,79	1,61
∞	2,71	2,30	2,08	1,94	1,85	1,77	1,72	1,67	1,63	1,60	1,42	1,00

Критерий Кохрена $G_{кр}$ при α=0,05

№	Число степеней свободы f											
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	16	∞
2	0,998	0,975	0,939	0,906	0,877	0,853	0,833	0,816	0,801	0,788	0,734	0,500
3	0,967	0,871	0,798	0,746	0,707	0,677	0,653	0,633	0,617	0,602	0,547	0,333
4	0,906	0,768	0,684	0,629	0,590	0,560	0,536	0,518	0,502	0,488	0,437	0,250
5	0,841	0,684	0,598	0,544	0,506	0,478	0,456	0,439	0,424	0,412	0,364	0,200
6	0,781	0,616	0,532	0,480	0,445	0,418	0,398	0,382	0,368	0,357	0,314	0,167
7	0,727	0,561	0,480	0,431	0,397	0,373	0,354	0,338	0,326	0,315	0,276	0,143
8	0,680	0,520	0,438	0,391	0,360	0,336	0,318	0,304	0,293	0,283	0,246	0,125
9	0,638	0,478	0,403	0,358	0,329	0,307	0,290	0,277	0,266	0,257	0,223	0,111
10	0,602	0,445	0,374	0,331	0,303	0,282	0,267	0,254	0,244	0,235	0,203	0,100
15	0,471	0,335	0,275	0,242	0,220	0,203	0,191	0,182	0,174	0,167	0,143	0,067
20	0,389	0,27	0,220	0,192	0,173	0,160	0,150	0,142	0,136	0,130	0,111	0,050
∞	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000

Распределение Пирсона χ^2

α	Число степеней свободы f											
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	15	20
0,05	3,8	6,0	7,8	9,5	11,1	12,6	14,1	15,5	16,9	18,3	25,0	31,4
0,1	2,7	4,6	6,3	7,8	9,2	10,6	12,0	13,4	14,7	16,0	22,3	28,4
0,2	1,64	3,22	4,64	6,0	7,3	8,6	9,8	11,0	12,2	13,4	19,3	25,0

Критерий Стьюдента $t_{кр}$

α	Число степеней свободы f											
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	20	∞
0,05	12,71	4,30	3,18	2,78	2,57	2,45	2,36	2,31	2,26	2,23	2,09	1,96
0,1	6,31	2,92	2,35	2,13	2,01	1,94	1,89	1,86	1,83	1,81	1,72	1,65
0,2	3,08	1,89	1,64	1,53	1,48	1,44	1,41	1,40	1,38	1,37	1,33	1,28

Приложение 3

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ФГБОУ ВПО «ПЕНЗЕНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
АРХИТЕКТУРЫ И СТРОИТЕЛЬСТВА»
КАФЕДРА «УПРАВЛЕНИЕ КАЧЕСТВОМ И ТСП»

КУРСОВАЯ РАБОТА

На тему:

«РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ ОПТИМИЗАЦИИ МЕТОДАМИ МАТЕМАТИЧЕСКОГО ПЛАНИРОВАНИЯ ЭКСПЕРИМЕНТА»

Автор работы: ____________________________
Направление: 27.04.01 «Стандартизация и метрология»
Обозначение: Группа СиМ - 11м
Руководитель:____________________________
Работа защищена:__________________ Оценка

Пенза 20___

РЕКОМЕНДУЕМАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. Гмурман, В.Е. Теория вероятностей и математическая статистика [Текст] / В.Е. Гмурман – М.: Высшая школа. – 2003. – 480 с.

2. Данилов, А.М. Теория вероятностей и математическая статистика: учебное пособие / М. Данилов, А.А. Данилов. – Пенза: Пензенский гос. архит.-строит. ин. – 1996. – 167 с.

3. Зейдель, А. Н. Элементарные оценки ошибок измерений [Текст] / А.Н. Зейдель – М.: Наука. – 1967. – 88 с.

4. Ивченко, Г.И. Сборник задач по математической статистике: учебное пособие / Г.И. Ивченко, Ю.И. Медведев, А.В. Чистяков. – М.: Высшая школа. – 1989. – 256 с.

5. Линник, Ю.В. Метод наименьших квадратов и основы теории обработки наблюдений [Текст] / Ю.В. Линник – М.: Физматгиз, 1962. – 114 с.

6. Налимов, В.В. Применение математической статистики при анализе вещества [Текст] / В.В. Налимов – М.: Физматгиз. – 1960. – 430 с.

7. Супрун, А.Н. Вычислительная математика для инженеров-экологов: методическое пособие /А.Н. Супрун, В.В. Найденко – М.: Изд-во АСВ. – 1996. – 391 с.

8. Тейлор, Дж. Введение в теорию ошибок [Текст] / Дж. Тейлор – М.: Мир. – 1985. – 272 с.

9. Щиголев Б.М. Математическая обработка наблюдений [Текст] / Б.М. Щиголев – М.: Физматгиз. – 1962. – 344 с.

10. Адлер, Ю.П. Введение в планирование эксперимента [Текст] / Ю.П. Адлер. – М.: Металлургия. – 1969. – 157 с.

11. Львовский, Е.Н. Статистические методы построения эмпирических формул: учебное пособие /Е.Н. Львовский. – М.: Высшая школа. – 1988. – 239 с.

12. Монтгомери, Д.К. Планирование и анализ данных [Текст] / Д.К. Монтгомери. – Л.: Судостроение. – 1980. – 384 с.

13. Кальгин, А.А. Лабораторный практикум по технологии бетонных и железобетонных изделий [Текст] / А.А. Кальгин, Ф.Гю Сулейманов – М.: Высш. шк., 1994. – 272 с.

14. Королев, Е.В. Организация и проведение научно-исследовательской работы студентов технических специальностей [Текст] / Е.В. Королев, В.И. Логанина, В.С. Демьянова, Р.В. Тарасов – Пенза: ПГУАС, 2012. – 172 с.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Учебное издание

Тарасов Роман Викторович
Макарова Людмила Викторовна

ОСНОВЫ НАУЧНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ.
ОРГАНИЗАЦИЯ И ПЛАНИРОВАНИЕ ЭКСПЕРИМЕНТА

Учебно-методическое пособие
по выполнению курсовой работы

В авторской редакции
Верстка Т.Ю. Симутина

Подписано в печать 13.07.15. Формат 60×84/16.
Бумага офисная «Снегурочка». Печать на ризографе.
Усл.печ.л. 2,32. Уч.-изд.л. 2,5. Тираж 80 экз.
Заказ № 287.

Издательство ПГУАС.
440028, г.Пенза, ул. Германа Титова, 28