

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«Пензенский государственный университет
архитектуры и строительства»
(ПГУАС)

Н.А. Очкина

ФИЗИКА

МОЛЕКУЛЯРНАЯ ФИЗИКА И ТЕРМОДИНАМИКА

Рекомендовано Редсоветом университета
в качестве учебного пособия для студентов,
обучающихся по направлению 23.03.01
«Технология транспортных процессов»

Под общей ред. доктора технических наук,
профессора Г.И. Грейсуха

Пенза 2015

УДК 53 (075.8)

ББК 22.3 я73

О-94

Рецензенты: кандидат технических наук, доцент
С.В. Тертычная (ПГУ);
кандидат физико-математических
наук, доцент П.П. Мельниченко
(ПГУАС)

Очкина Н.А.

Физика. Молекулярная физика и термодинамика: учеб. пособие /
О-94 Н.А. Очкина; под общ. ред. д-ра техн. наук, проф. Г.И. Грейсуха. –
Пенза: ПГУАС, 2015. – 216 с.

Рассмотрены основные вопросы молекулярно-кинетической теории и термодинамики. Особое внимание уделено раскрытию физического смысла основных законов, явлений и понятий. Показано, что закономерности и соотношения между физическими величинами в молекулярной физике и термодинамике имеют универсальный характер. Приведены методы решения практических задач и задачи для самостоятельного решения двух уровней сложности, что позволяет осуществлять процесс обучения на основе компетентностного, личностно-ориентированного подхода. Пособие содержит материалы, предназначенные для фонда оценочных средств.

Учебное пособие подготовлено на кафедре «Физика и химия» и предназначено для использования на занятиях по дисциплине «Физика» студентами, обучающимися по направлению 23.03.01 «Технология транспортных процессов».

© Пензенский государственный университет
архитектуры и строительства, 2015
© Очкина Н.А. 2015

ПРЕДИСЛОВИЕ

Настоящее учебное пособие разработано в соответствии с программой курса «Физика» ФГОС ВПО третьего поколения для направления 23.03.01 «Технология транспортных процессов» и имеет целью совершенствование компетенций в процессе овладения студентами знаниями о явлениях природы как в период обучения в вузе, так и в последующей профессиональной и научной деятельности.

Пособие, посвященное изучению одной из частей физики «Молекулярная физика и термодинамика», содержит три главы:

1. Молекулярно-кинетическая теория идеального газа.
2. Основы термодинамики.
3. Реальные газы, жидкости и твердые тела.

В первой части каждой из глав приводится формулировка основных законов и формулы. Например, во второй главе изложены законы термодинамики и принцип работы тепловых двигателей. Во второй части рассматриваются примеры решения задач. Третья часть касается самостоятельной работы студентов и включает задачи двух уровней сложности: среднего и достаточного.

Таким образом, учебное пособие позволяет осуществлять процесс обучения и учения на основе компетентностного, личностно-ориентированного подхода.

Систематическая работа с пособием как в аудитории, так и во внеаудиторное время способствует формированию у студентов:

знаний фундаментальных законов физики;

умений правильно применять законы физики для анализа и решения физических задач; самостоятельно работать с учебной, научной и справочной литературой; осуществлять самооценку и самоанализ на основе самопроверки в процессе выполнения заданий.

Работа с учебным пособием в аудитории под руководством преподавателя в коллективе с другими студентами позволяет **овладеть** способностью к коммуникации в устной и письменной формах (ОК-5); способностью работать в коллективе (ОК-6).

Внеаудиторная работа (самостоятельное решение задач различного уровня сложности) позволяет **овладеть** способностью к самоорганизации и самообразованию (ОК-7); навыками работы с дополнительной литературой.

Успешное освоение законов и теорий молекулярной физики и термодинамики позволит выпускнику-бакалавру:

владеть научными основами технологических процессов в области эксплуатации транспортно-технологических машин и комплексов (ОПК 2);

уметь применять систему фундаментальных знаний (математических, естественнонаучных, инженерных и экономических) для идентификации, формулирования и решения технических и технологических проблем эксплуатации транспортно-технологических машин и комплексов (ОПК 3).

В тексте учебного пособия наиболее важные положения и термины, а также формулировки законов и формулы выделены **жирным шрифтом** или *курсивом*. Это способствует более эффективному усвоению материала студентами.

ВВЕДЕНИЕ

Молекулярная физика и термодинамика – две разные по своим подходам, но тесно связанные науки, занимающиеся изучением макроскопических систем, состоящих из огромного числа микрочастиц (молекул, атомов, ионов, электронов).

Молекулярная физика (в основе которой лежит молекулярно-кинетическая теория строения вещества) является статистической теорией и на основе вероятностных моделей объясняет свойства макроскопических систем характером движения и взаимодействия микрочастиц, входящих в их состав. Она стремится на основе статистического подхода установить связь между экспериментально измеренными макроскопическими величинами (объем, температура, давление) и микроскопическими характеристиками частиц, входящих в состав системы (масса, энергия, импульс).

Молекулярная физика как наука начала развиваться в XIX веке. Фундаментом для неё послужили работы немецкого физика Р. Клаузиуса (1833–1888) и английского математика Д. Максвелла (1831–1879). Эта наука базируется на законах классической механики.

В отличие от молекулярно-кинетической теории термодинамика изучает свойства макроскопических систем без учета представлений об их внутренней структуре. Это феноменологическая наука, она не вводит никаких конкретных представлений и специальных гипотез о строении вещества и физической природе теплоты. Ее выводы основаны на общих принципах, или началах, являющихся обобщением опытных фактов.

Термодинамика сложилась исторически раньше молекулярной физики (в XVIII веке) как теоретическая база для разработки тепловых машин. Важнейшее значение для термодинамики и всего естествознания имело открытие немецкими учеными Ю.Р. Майером (1814–1878), Г. Гельмгольцем (1821–1894) и английским физиком Дж. Джоулем (1818–1889) закона сохранения энергии, связавшего воедино все явления живой и неживой природы. В середине XIX века опытным путем была доказана эквивалентность теплоты и работы и установлено, что теплота представляет особую форму энергии. Закон сохранения энергии стал основным законом теории

тепловых явлений и получил название первого начала термодинамики. Значительный вклад в термодинамику внес знаменитый французский физик С. Карно (1796–1832), который стремился разработать проект идеальной и наиболее экономичной тепловой машины. Он открыл соотношение общего типа – второе начало термодинамики. Основным содержанием современной физической термодинамики является изучение закономерностей тепловой формы движения материи и связанных с ней физических явлений.

Тепловая форма движения материи – это хаотическое движение атомов и молекул в макроскопических телах.

Особое положение термодинамики связано с тем, что любая форма энергии (электрическая, механическая, химическая) в итоге преобразуется в тепловую энергию.

1. МОЛЕКУЛЯРНАЯ ФИЗИКА

Молекулярная физика изучает зависимость строения и физических свойств тел от характера движения и взаимодействия между частицами, из которых состоят тела.

1.1. Молекулярно-кинетическая теория идеального газа

Основные положения молекулярно-кинетической теории:

1. Все тела состоят из мельчайших частиц – атомов, молекул, в состав которых входят ещё более мелкие элементарные частицы (электроны, протоны, нейтроны). Строение любого вещества дискретно (прерывисто).
2. Атомы и молекулы вещества находятся в непрерывном хаотическом движении, которое называют тепловым движением.
3. Между частицами любого вещества существуют силы взаимодействия – притяжения и отталкивания. Они являются силами электромагнитной природы.

1.1.1. Идеальный газ. Законы идеального газа

Основные формулы

В молекулярно-кинетической теории рассматривают идеализированную модель реальных газов – идеальный газ, удовлетворяющую следующим условиям:

- а) собственный объем молекул пренебрежимо мал по сравнению с объемом сосуда, в котором находится газ;
- б) столкновения молекул газа между собой и со стенками сосуда являются абсолютно упругими;
- в) потенциальная энергия взаимодействия молекул пренебрежимо мала по сравнению с кинетической энергией их хаотического движения.

Уравнение состояния идеального газа (уравнение Клапейрона – Менделеева)

$$pV = \frac{m}{M}RT,$$

где p – давление; V – объем; T – абсолютная температура; m – масса; M – молярная масса газа; R – универсальная газовая постоянная ($R = 8,31 \text{ Дж}/(\text{моль} \cdot \text{К})$).

Законы идеального газа:

- а) закон Бойля – Мариотта

$$pV = \text{const} \quad (\text{при } m = \text{const и } T = \text{const}),$$

или для двух состояний газа

$$p_1 V_1 = p_2 V_2;$$

б) закон Гей-Люссака

$$\frac{V}{T} = \text{const} \quad (\text{при } m = \text{const и } p = \text{const}),$$

или для двух состояний газа

$$\frac{V_1}{T_1} = \frac{V_2}{T_2};$$

в) закон Шарля

$$\frac{p}{T} = \text{const} \quad (\text{при } m = \text{const и } V = \text{const}),$$

или для двух состояний газа

$$\frac{p_1}{T_1} = \frac{p_2}{T_2}.$$

Объединенный закон газового состояния (формула Клапейрона)

$$\frac{pV}{T} = \text{const} \quad (\text{при } m = \text{const}),$$

или для двух состояний газа

$$\frac{p_1 V_1}{T_1} = \frac{p_2 V_2}{T_2}.$$

Если, по условию задачи, газ находится при каких-либо заданных условиях, то его сравнивают с состоянием при нормальных условиях: $p_0 = 1,01 \cdot 10^5$ Па, $T_0 = 273$ К, $V_0 = 22,4 \cdot 10^{-3}$ м³ (V_0 – объем 1 моль любого газа при нормальных условиях).

Закон Дальтона

$$p = p_1 + p_2 + \dots + p_n$$

(если в сосуде находится смесь нескольких газов, не вступающих друг с другом в химические реакции, то давление смеси газов p равно сумме парциальных давлений отдельных компонентов смеси $p_1, p_2, \dots, p_n$, т.е. тех давлений, которые имел бы каждый из газов в отдельности, если бы он при данной температуре один заполнял весь объем).

Уравнение Клапейрона – Менделеева для смеси газов

$$pV = \left(\frac{m_1}{M_1} + \frac{m_2}{M_2} + \dots + \frac{m_n}{M_n} \right) RT = RT \sum_{i=1}^n \frac{m_i}{M_i},$$

где m_i – масса; M_i – молярная масса i -го компонента смеси.

ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

Пример 1. В баллоне объемом $V = 10$ л находится гелий под давлением $p_1 = 1$ МПа при температуре $T_1 = 300$ К. После того как из баллона было израсходовано $m = 10$ г гелия температура в нём понизилась до $T_2 = 290$ К. Определите давление p_2 гелия, оставшегося в баллоне.

Дано:
 $V = 10^{-2} \text{ м}^3$
 $p_1 = 10^6 \text{ Па}$
 $M = 4 \cdot 10^{-3} \text{ кг/моль}$
 $T_1 = 300 \text{ К}$
 $T_2 = 290 \text{ К}$
 $m = 10^{-2} \text{ кг}$
 $p_2 = ?$

Решение:
 Для решения задачи воспользуемся уравнением Клапейрона – Менделеева, применив его дважды к начальному и конечному состояниям газа. Для начального состояния уравнение имеет вид

$$p_1 V = (m_1 / M) RT_1, \quad (1)$$

а для конечного состояния –

$$p_2 V = (m_2 / M) RT_2, \quad (2)$$

где m_1 и m_2 – массы гелия в начальном и конечном состояниях.

Выразим массы m_1 и m_2 гелия из уравнений (1) и (2):

$$m_1 = Mp_1 V / (RT_1); \quad (3)$$

$$m_2 = Mp_2 V / (RT_2). \quad (4)$$

Вычитая из (3) равенство (4), получим

$$m = m_1 - m_2 = \frac{Mp_1 V}{RT_1} - \frac{Mp_2 V}{RT_2}.$$

Отсюда найдем искомое давление

$$p_2 = \frac{RT_2}{MV} \left(\frac{Mp_1 V}{RT_1} - m \right) = \frac{T_2}{T_1} p_1 - \frac{m}{M} \frac{RT_2}{V}. \quad (5)$$

$$p_2 = \frac{290}{300} 10^6 - \frac{10^{-2}}{4 \cdot 10^{-3}} \frac{8,31 \cdot 300}{10^{-2}} = 3,64 \cdot 10^5 \text{ Па}.$$

Ответ: $p_2 = 3,64 \cdot 10^5 \text{ Па}$.

Пример 2. Сосуд с воздухом, давление которого 97 кПа, соединен с поршневым откачивающим устройством. После пяти ходов поршня давление воздуха в сосуде стало 29 кПа. Определите отношение объемов сосуда и цилиндра откачивающего устройства.

Дано:	Решение:
$p_0 = 9,7 \cdot 10^4 \text{ Па}$	Пусть V_1 и V_2 – объемы сосуда и цилиндра откачивающего устройства. После первого соединения цилиндра с сосудом по закону Бойля – Мариотта имеем $p_0 V_1 = p_1 (V_1 + V_2),$
$p_5 = 2,9 \cdot 10^4 \text{ Па}$	
$n = 5$	
$V_1/V_2 = ?$	
откуда	

$$p_1 = p_0 V_1 / (V_1 + V_2).$$

После второго соединения

$$p_1 V_1 = p_2 (V_1 + V_2),$$

откуда

$$p_2 = p_1 V_1 / (V_1 + V_2)$$

или

$$p_2 = \frac{p_0 V_1^2}{(V_1 + V_2)^2}.$$

Аналогично, после пятого соединения

$$p_5 = \frac{p_0 V_1^5}{(V_1 + V_2)^5}.$$

Преобразуем полученное выражение

$$\frac{p_0}{p_5} = \left(\frac{V_1 + V_2}{V_1} \right)^5; \quad \lg \frac{p_0}{p_5} = 5 \lg \frac{V_1 + V_2}{V_1},$$

откуда

$$\lg \frac{V_1 + V_2}{V_1} = \frac{1}{5} \lg \frac{p_0}{p_5}.$$

$$\lg \frac{V_1 + V_2}{V_1} = \frac{1}{5} \lg \frac{9,7 \cdot 10^4}{2,9 \cdot 10^4} = \frac{1}{5} \lg 3,33 = \frac{1}{5} 0,5224 = 0,1044.$$

По таблице логарифмов находим $(V_1 + V_2)/V_1 = 1,272$, откуда $V_1/V_2 = 3,68$.

Ответ: $V_1/V_2 = 3,68$.

Пример 3. В сосуде объемом 2 м^3 находится смесь 4 кг гелия и 2 кг водорода при температуре 27°C . Определите: 1) давление; 2) молярную массу смеси газов.

Дано:
$V = 2 \text{ м}^3$
$m_1 = 4 \text{ кг}$
$M_1 = 4 \cdot 10^{-3} \text{ кг/моль}$
$m_2 = 2 \text{ кг}$
$M_2 = 2 \cdot 10^{-3} \text{ кг/моль}$
$T = 300 \text{ К}$
1) $p = ?$ 2) $M = ?$

Решение:
Воспользуемся уравнением Клапейрона – Менделеева, применив его к гелию и водороду:

$$p_1 V_1 = \frac{m_1}{M_1} RT; \quad (1)$$

$$p_2 V_2 = \frac{m_2}{M_2} RT, \quad (2)$$

где p_1 – парциальное давление гелия; m_1 – масса гелия; M_1 – молярная масса гелия; V – объем сосуда; T – температура газа; p_2 – парциальное давление водорода; m_2 – масса водорода; M_2 – молярная масса водорода.

Под парциальным давлением p_1 и p_2 понимается то давление, которое производил бы газ, если бы он один находился в сосуде. По закону Дальтона давление смеси равно сумме парциальных давлений газов, входящих в её состав:

$$p = p_1 + p_2. \quad (3)$$

Из уравнений (1) и (2) выразим p_1 и p_2 и подставим их в уравнение (3):

$$p = \left(\frac{m_1}{M_1} + \frac{m_2}{M_2} \right) \frac{RT}{V}, \quad (4)$$

$$p = \left(\frac{4}{4 \cdot 10^{-3}} + \frac{2}{2 \cdot 10^{-3}} \right) \cdot \frac{8,31 \cdot 300}{2} = 24,93 \cdot 10^5 \text{ Па}.$$

Найдем молярную массу смеси газов по формуле

$$M = (m_1 + m_2) / (v_1 + v_2), \quad (5)$$

где v_1 и v_2 – количество вещества гелия и водорода соответственно.

$$v_1 = m_1 / M_1; \quad (6)$$

$$v_2 = m_2 / M_2. \quad (7)$$

Подставляя (6) и (7) в формулу (5), находим

$$M = \frac{m_1 + m_2}{m_1 / M_1 + m_2 / M_2}.$$

$$M = \frac{4 + 2}{4 / (4 \cdot 10^{-3}) + 2 / (2 \cdot 10^{-3})} = 3 \cdot 10^{-3} \text{ кг/моль}.$$

Ответ: 1) $p = 2493 \text{ кПа}$; 2) $M = 3 \cdot 10^{-3} \text{ кг/моль}$.

Пример 4. Смесь азота и гелия при температуре 27°C находится под давлением $p = 1,3 \cdot 10^2$ Па. Масса азота составляет 70 % от общей массы смеси. Определите концентрацию молекул каждого из газов.

Дано:

$$p = 1,3 \cdot 10^2 \text{ Па}$$

$$T = 300 \text{ К}$$

$$k = 1,38 \cdot 10^{-23} \text{ Дж/К}$$

$$n_1 = ? \quad n_2 = ?$$

Решение:

При заданном давлении газ можно считать идеальным, подчиняющимся уравнению Клапейрона – Менделеева:

$$p = nkT, \quad (1)$$

где n – концентрация молекул; $k = 1,38 \cdot 10^{-23}$ Дж/К – постоянная Больцмана; $T = t + 273^\circ\text{C}$ – термодинамическая температура.

Давление идеального газа не зависит от его природы и, как видно из уравнения (1), однозначно определяется температурой и его концентрацией, т.е. отношением числа частиц к занимаемому объему. Уравнение (1) позволит найти концентрацию молекул смеси и по известному процентному содержанию – концентрацию каждого газа. Процентное содержание газов задано по массе, это значит, что масса каждого из них

$$m_1 = c_1 m, \quad m_2 = c_2 m, \quad (2)$$

где m – масса смеси; c_1 и c_2 – процентное содержание соответственно азота и гелия.

С другой стороны, масса каждого из газов

$$m_1 = Vn_1M_1 / N_A, \quad m_2 = Vn_2M_2 / N_A, \quad (3)$$

где V – объем газа; M_i – молярная масса; N_A – постоянная Авогадро (M_i/N_A – масса молекулы).

Концентрация смеси (см. (1))

$$n = p / (kT).$$

Приравнивая правые части уравнений (2) и (3), получим

$$c_1 m = Vn_1M_1 / N_A, \quad c_2 m = Vn_2M_2 / N_A,$$

откуда $n_1 / n_2 = c_1M_2 / (c_2M_1) = 1/3$. Поскольку $n_1 + n_2 = n$, то

$$n_1 = \frac{1}{4} \frac{p}{kT} = 0,8 \cdot 10^{22} \text{ м}^{-3};$$

$$n_2 = \frac{3}{4} \frac{p}{kT} = 2,4 \cdot 10^{22} \text{ м}^{-3}.$$

$$\text{Ответ: } n_1 = 0,8 \cdot 10^{22} \text{ м}^{-3}; \quad n_2 = 2,4 \cdot 10^{22} \text{ м}^{-3}.$$

Задачи для самостоятельного решения

Средний уровень

1. У идеального газа...

- 1) молекулы можно уподобить абсолютно твердым шарикам, а их столкновения считать абсолютно упругими;
- 2) молекулы не взаимодействуют друг с другом на расстоянии, а столкновения считаются абсолютно упругими;
- 3) молекулы притягиваются друг к другу, а столкновения считаются абсолютно упругими;
- 4) молекулы не взаимодействуют друг с другом на расстоянии, а столкновения считаются абсолютно неупругими.

2. Какое количество вещества содержится в теле, состоящем из $1,204 \cdot 10^{24}$ молекул? Число Авогадро $6,02 \cdot 10^{23}$ моль⁻¹.

- | | |
|--------------|--------------|
| 1) 1,5 моль; | 3) 2,5 моль; |
| 2) 2 моль; | 4) 3 моль. |

3. Какое давление (в мкПа) производят пары ртути в баллоне ртутной лампы объемом $3 \cdot 10^{-5}$ м³ при 300 К, если в ней содержится 10^{12} молекул? Постоянная Больцмана $1,38 \cdot 10^{-23}$ Дж/К.

- | | |
|--------|---------|
| 1) 24; | 3) 138; |
| 2) 67; | 4) 256. |

4. Сколько тысяч молекул воздуха находится в 1 мм³ сосуда при 27 °С, если воздух в сосуде откачан до давления 0,83 мкПа? Универсальная газовая постоянная 8,31 Дж/(моль·К), число Авогадро $6 \cdot 10^{23}$ моль⁻¹.

- | | |
|---------|---------|
| 1) 250; | 3) 300; |
| 2) 200; | 4) 100. |

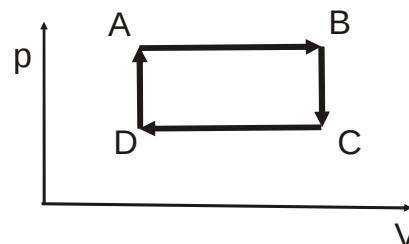
5. Объем некоторой массы идеального газа при нагревании на 1 К при постоянном давлении увеличивается на $\frac{1}{335}$ от своего первоначального значения. При какой температуре находился газ вначале?

- | | |
|-----------|-----------|
| 1) 255 К; | 3) 450 К; |
| 2) 335 К; | 4) 150 К. |

6. На (p, V) -диаграмме изображен циклический процесс.

Как изменяется температура газа на участках BC и CD ?

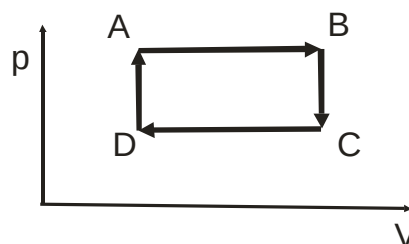
- 1) повышается;
- 2) понижается;
- 3) на BC – понижается, на CD – повышается;
- 4) на BC – повышается, на CD – понижается.



7. На (p, V) -диаграмме изображен циклический процесс.

Как изменяется температура газа на участках DA и AB ?

- 1) повышается;
- 2) на DA – понижается, на AB – повышается;
- 3) на DA – повышается, на AB – понижается;
- 4) понижается.



8. Выберите *верное* утверждение:

В смеси газов, содержащей молекулы разного сорта, будут одинаковыми...

- 1) средняя скорость молекул;
- 2) импульс молекул;
- 3) температура;
- 4) давление.

9. В цилиндре при сжатии постоянной массы воздуха давление возрастает в 3 раза. Если температура газа увеличилась в 2 раза, то отношение объемов до и после сжатия V_1/V_2 равно...

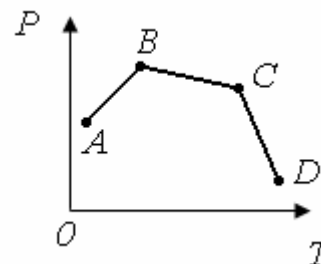
- 1) 1/6;
- 2) 3/2;
- 3) 2/3;
- 4) 6.

10. При увеличении давления в 3 раза и уменьшении объема в 2 раза абсолютная температура идеального газа...

- 1) увеличится в 1,5 раза;
- 2) уменьшится в 1,5 раза;
- 3) уменьшится в 6 раз;
- 4) увеличится в 6 раз.

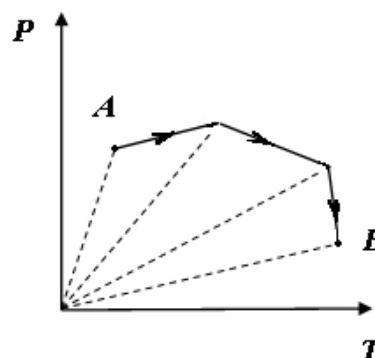
11. В сосуде, закрытом поршнем, находится идеальный газ. График зависимости давления газа от температуры при изменении его состояния представлен на рисунке. Наименьшее значение объема соответствует состоянию газа

- 1) в точке A ; 2) в точке B ;
- 3) в точке C ; 4) в точке D .



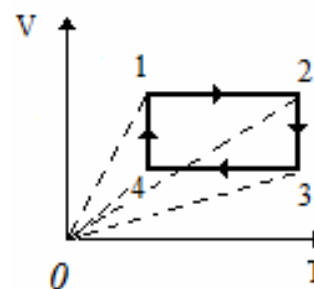
12. В сосуде, закрытом поршнем, находится идеальный газ. Процесс изменения состояния газа приведен на рисунке. При переходе газа из состояния A в состояние B его объем ...

- 1) все время увеличивался;
- 2) все время уменьшался;
- 3) сначала увеличивался, затем уменьшался;
- 4) сначала уменьшался, затем увеличивался.

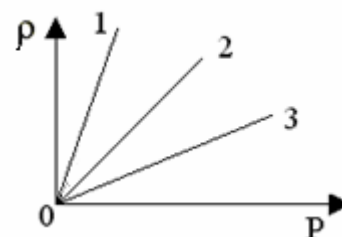


13. Идеальный газ совершает круговой процесс, как показано на рисунке. Давление газа максимально в точке ...

- 1) 1; 2) 2; 3) 3; 4) 4.

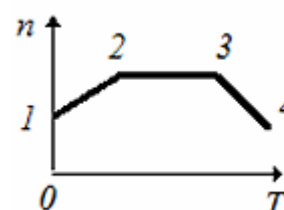


14. На рисунке приведены графики зависимости плотности ρ четырех разных идеальных газов от давления P при одинаковых температурах. Большей молярной массой обладает газ под номером ...



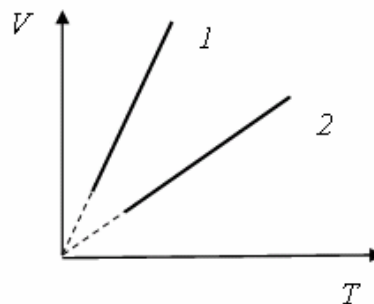
15. На рисунке представлена зависимость концентрации идеального газа от температуры для трех процессов. Изохорический процесс соответствует участку ...

- 1) 1 – 2; 2) 2 – 3; 3) 3 – 4;
- 4) такого участка на рисунке нет.



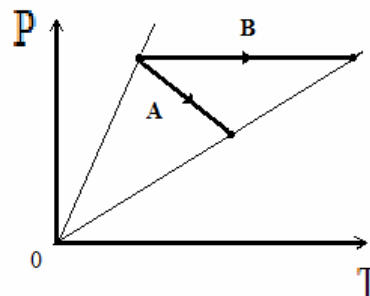
16. На рисунке приведены графики изобарических процессов, проведенных при одинаковом давлении для различных масс одного и того же идеального газа. Укажите номер графика, соответствующего большей массе, и поясните ответ.

- 1) $m_1 = m_2$; 2) $m_2 > m_1$; 3) $m_1 > m_2$.



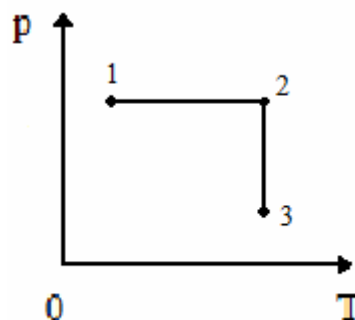
17. Сравните приращения объемов ΔV_A и ΔV_B в процессах, представленных графиками А и В.

- 1) $\Delta V_A > \Delta V_B$; 2) $\Delta V_A < \Delta V_B$;
3) $\Delta V_A = \Delta V_B$; 4) однозначного ответа дать нельзя.



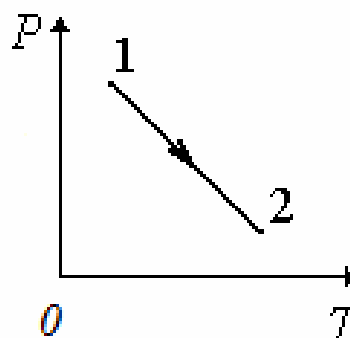
18. Постоянная масса идеального газа участвует в процессе, показанном на рисунке. В каком состоянии объем газа будет наименьшим?

- 1) в точке 1; 2) в точке 2;
3) в точке 3; 4) объем везде будет одинаковым.



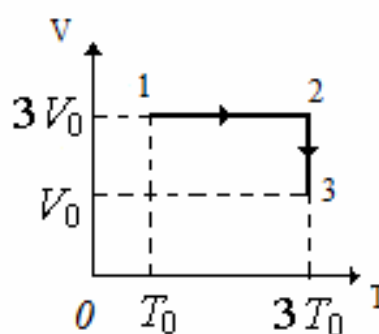
19. Идеальный газ перешел из состояния 1 в состояние 2 по пути, изображенному на рисунке, при этом $T_1/T_2 = 0,5$, а $P_1/P_2 = 2$. Отношение объемов газов V_2/V_1 равно ...

- 1) 1; 2) 2; 3) 4; 4) $1/2$; 5) $1/4$.

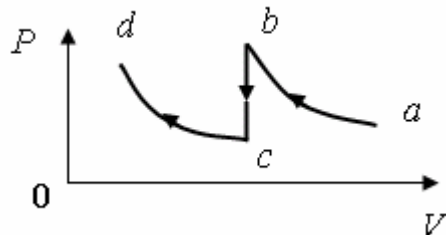


20. На диаграмме $V - T$ изображены процессы перехода идеального газа постоянного количества из состояния 1 в состояние 2. Конечное давление P_3 и начальное давление P_1 связаны соотношением ...

- 1) $P_3 = P_1$; 2) $P_3 = 2 P_1$; 3) $P_3 = 3 P_1$;
4) $P_3 = 6 P_1$ 5) $P_3 = 9 P_1$.

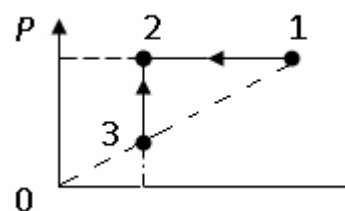


21. На графике изображен изотермический процесс, при проведении которого изменилась масса газовой системы (участок $b-c$). Какие из утверждений справедливы? Укажите сумму их номеров и поясните ответ.



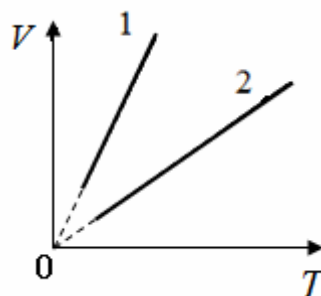
- 1) участок cd – изотерма для меньшей массы газа;
- 2) участок ab – изотерма для меньшей массы газа;
- 3) участок bc соответствует процессу возрастания массы газа;
- 4) участок bc соответствует уменьшению массы газа.

22. На рисунке стрелками указаны направления двух изопроцессов 1-2 и 2-3 для одного и того же количества идеального газа. Укажите соотношения объемов, относящихся к этим процессам, и поясните ответ.



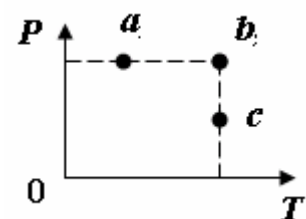
- 1) $V_1 < V_2$ 2) $V_2 > V_3$ 3) $V_1 = V_2$
- 4) $V_1 > V_2$ 5) $V_1 = V_3$

23. На рисунке представлены изобарические процессы для одной и той же массы идеального газа. Укажите номер правильного соотношения между давлениями и поясните ответ.

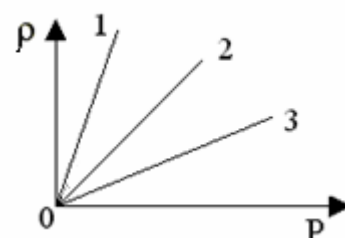


- 1) $p_1 = p_2$; 2) $p_1 > p_2$; 3) $p_1 < p_2$.

24. На рисунке три точки a , b , c характеризуют три состояния одного и того же количества идеального газа. Какое из состояний соответствует большей плотности газа? Укажите его номер и поясните ответ.



25. На рисунке приведены графики зависимости плотности ρ одного и того же идеального газа от давления p при разных температурах. Более высокая температура соответствует графику под номером...



Достаточный уровень

1. Вычислите массу одной молекулы углекислого газа.

Ответ: $m_0 = 7,31 \cdot 10^{-26}$ кг.

2. В сосуде, имеющем форму шара, радиус которого 0,2 м, находится 80 г азота. До какой температуры можно нагреть сосуд, если его стенки выдерживают давление не более $7 \cdot 10^5$ Па?

Ответ: $T = 987$ К.

3. Каково давление газа, в 1 см^3 которого содержится 1 млрд молекул, при температуре 1000 К?

Ответ: $p = 1,38 \cdot 10^{-5}$ Па.

4. Определите плотность водяного пара, находящегося под давлением 2,5 МПа при температуре 250 К.

Ответ: $\rho = 21,6 \text{ кг/м}^3$.

5. Плотность газа при давлении $p = 720$ мм рт. ст. и температуре $t = 0^\circ \text{C}$ равна 1,35 г/л. Найдите молярную массу газа.

Ответ: $M = 32 \cdot 10^{-3}$ кг/моль.

6. Кислород массой 16 г при давлении 2 атм занимает объем 5 л. Как изменится температура газа, если при увеличении давления до 5 атм его объем увеличится на 1 л?

Ответ: $\Delta T = 481,7$ К.

7. Азот массой 7 г находится под давлением 0,1 МПа при температуре 290 К. Вследствие изобарного нагревания он занял объем 10 л. Определите температуру азота после расширения, объем до расширения, плотность до и после расширения.

Ответ: $T_2 = 481$ К, $V_1 = 6$ л, $\rho_1 = 1,16 \text{ кг/м}^3$, $\rho_2 = 0,7 \text{ кг/м}^3$.

8. Какова разница масс воздуха, заполняющего помещение объемом 50 м^3 зимой и летом, если температура воздуха зимой 0°C , а летом 40°C ? Атмосферное давление зимой и летом равно 0,1 МПа.

Ответ: $\Delta m = 8,2$ кг.

9. В баллоне емкостью 30 л находится сжатый воздух при 17°C . После того как часть воздуха выпустили, давление понизилось на $2 \cdot 10^5$ Па. Определите массу выпущенного воздуха. Процесс считать изотермическим.

Ответ: $\Delta m = 7,3 \cdot 10^{-2}$ кг.

10. Из баллона объемом 1 л, заполненного водородом, происходит утечка газа. Первоначальное давление 15 МПа, а температура газа 17°C. Через некоторое время давление упало до 12 атм, а температура повысилась до 27°C. Найдите массу вытекшего газа.

Ответ: $\Delta m = 2,8 \cdot 10^{-3}$ кг.

11. Баллон содержал идеальный газ при температуре 27°C и давлении 4 МПа. Каким будет давление в баллоне, если из него выпустить половину массы газа, а температуру снизить до 12°C?

Ответ: $p = 1,9$ МПа.

12. В сосуде вместимостью $V = 0,3$ л при температуре $T = 290$ К находится некоторый газ. На сколько понизится давление газа в сосуде, если из него из-за утечки выйдет $N = 10^{19}$ молекул?

Ответ: $\Delta p = 133$ Па.

13. В баллоне емкостью 15 л находится смесь, содержащая $m_1 = 10$ г водорода, $m_2 = 54$ г водяного пара и $m_3 = 60$ г окиси углерода. Температура смеси $t = 27^\circ\text{C}$. Определите давление смеси.

Ответ: $p = 16,9 \cdot 10^5$ Па.

14. В сосуде находится 0,1 моль кислорода и 10 г азота. Температура смеси 100°C. Давление в сосуде 10 кПа. Найдите объем сосуда, парциальные давления и концентрации молекул кислорода и азота.

Ответ: $V = 8,1$ м³; $p_1 = 8 \cdot 10^3$ Па; $p_2 = 2 \cdot 10^3$ Па; $n_1 = 1,6 \cdot 10^{24}$ м⁻³; $n_2 = 0,4 \cdot 10^{24}$ м⁻³.

15. В баллоне емкостью 110 л находится 0,8 кг водорода и 1,8 кг азота при температуре 12°C. Определите давление смеси и концентрацию молекул водорода и азота.

Ответ: $p = 99,9 \cdot 10^5$ Па; $n_1 = 2,14 \cdot 10^{27}$ м⁻³; $n_2 = 3,52 \cdot 10^{26}$ м⁻³.

16. Баллон вместимостью 20 л содержит смесь водорода и азота при температуре 290 К и давлении 1 МПа. Определите массу водорода, если масса смеси 150 г.

Ответ: $m_1 = 6,2 \cdot 10^{-3}$ кг.

17. Определите плотность смеси, состоящей из 4 г водорода и 42 г азота при температуре 7°C и давлении 93 кПа.

Ответ: $\rho = 0,52$ кг/м³.

18. Какой объем занимает смесь азота массой 1 кг и гелия массой 1 кг при нормальных условиях?

Ответ: $V = 6,4 \text{ м}^3$.

19. Определите молекулярную формулу аммиака, если при давлении 103 740 Па и температуре 20°C его плотность равна 0,736 кг/м³. Учсть, что элементы, из которых образуется аммиак, – это азот и водород.

Ответ: NH_3 .

20. При температуре 27°C и давлении $12 \cdot 10^5$ Па плотность смеси водорода и азота 10 г/дм³. Определите молярную массу смеси.

Ответ: $M = 2,02 \cdot 10^{-2}$ кг/моль.

21. Плотность смеси азота и водорода при 300 К и давлении 0,62 кПа равна 0,3 кг/м³. Найдите концентрацию молекул азота и водорода в смеси.

Ответ: $n_1 = 6,84 \cdot 10^{25} \text{ м}^{-3}$; $n_2 = 2,2 \cdot 10^{24} \text{ м}^{-3}$.

22. Плотность ρ некоторого двухатомного газа при нормальном давлении равна 1,78 кг/м³. Определите скорость распространения звука в газе при этих условиях.

Ответ: $v = 282 \text{ м/с}$.

1.1.2. Основное уравнение молекулярно-кинетической теории идеального газа

Основные формулы

Основное уравнение молекулярно-кинетической теории идеального газа (уравнение Клаузиуса)

$$p = \frac{1}{3} n m_0 \langle v_{\text{кв}} \rangle^2,$$

где m_0 – масса молекулы; n – концентрация молекул (число молекул в единице объема); $\langle v_{\text{кв}} \rangle$ – средняя квадратичная скорость молекул.

Средняя квадратичная скорость молекул

$$\langle v_{\text{кв}} \rangle = \sqrt{\frac{3kT}{m_0}} = \sqrt{\frac{3RT}{M}}.$$

Средняя арифметическая скорость молекул

$$\langle v \rangle = \sqrt{\frac{8kT}{\pi m_0}} = \sqrt{\frac{8RT}{\pi M}},$$

где k – постоянная Больцмана.

Средняя кинетическая энергия молекулы

$$\langle \epsilon \rangle = \frac{i}{2} kT,$$

где i – число степеней свободы молекулы.

Число степеней свободы i молекулы – это число независимых величин, с помощью которых можно задать её положение в пространстве.

$$i = n_{\text{пост}} + n_{\text{вращ}} + 2n_{\text{колеб}}.$$

Теорема о равномерном распределении энергии: каждой степени свободы молекулы соответствует один и тот же вклад в её среднюю энергию, равный $\frac{1}{2}kT$.

$$\langle \epsilon \rangle = \langle \epsilon \rangle_{\text{пост}} + \langle \epsilon \rangle_{\text{вращ}} + \langle \epsilon \rangle_{\text{колеб}} = \frac{kT}{2} (n_{\text{пост}} + n_{\text{вращ}} + 2n_{\text{колеб}}) = \frac{i}{2} kT.$$

У всех молекул, как минимум, три поступательные степени свободы ($n_{\text{пост}} = 3, i \geq 3$).

У одноатомных молекул только три поступательные степени свободы ($i = n_{\text{пост}} = 3$).

У линейных (всех двухатомных и некоторых трех- и более атомных (HCN, CO_2)) – две вращательные степени свободы ($n_{\text{вращ}} = 2$).

У нелинейных (трех и более атомных) есть три вращательные степени свободы ($n_{\text{вращ}} = 3$).

У жестких – нет колебательных степеней свободы ($n_{\text{колеб}} = 0$).

У упругих – есть одна колебательная степень свободы ($n_{\text{колеб}} = 1$).

Зависимость давления газа от концентрации молекул и температуры

$$p = nkT.$$

ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

Пример 1. Чему равна средняя кинетическая энергия поступательного и вращательного движения молекул, содержащихся в 2 кг водорода при температуре 400 К?

Дано:
 $m = 2$ кг
 $T = 400$ К
 $M = 2 \cdot 10^{-3}$ кг/моль
 1) $\langle E_{\text{пост}} \rangle$; 2) $\langle E_{\text{вр}} \rangle$

Решение:
 Считаем водород идеальным газом. Молекула водорода – двухатомная, связь между атомами считаем жесткой, тогда число степеней свободы молекулы водорода равно 5.

В среднем на одну степень свободы приходится энергия

$$\langle \epsilon_i \rangle = kT / 2,$$

где k – постоянная Больцмана; T – термодинамическая температура.

Поступательному движению приписываются три ($i = 3$), а вращательному две ($i = 2$) степени свободы. Энергия одной молекулы водорода

$$\langle \epsilon_{\text{пост}} \rangle = \frac{3}{2} kT, \quad \langle \epsilon_{\text{вр}} \rangle = kT.$$

Число молекул, содержащихся в заданной массе газа,

$$N = \nu N_A = (m / M) N_A,$$

где ν – число молей; N_A – постоянная Авогадро.

Средняя кинетическая энергия поступательного движения молекул водорода

$$\langle E_{\text{пост}} \rangle = (m / M) N_A \cdot \frac{3}{2} kT = \frac{3}{2} (m / M) RT, \quad (1)$$

где $R = kN_A$ – молярная газовая постоянная.

Средняя кинетическая энергия вращательного движения молекул водорода

$$\langle E_{\text{вр}} \rangle = (m / M) RT. \quad (2)$$

$$\langle E_{\text{пост}} \rangle = \frac{3 \cdot 2,8,31 \cdot 400}{2 \cdot 2 \cdot 10^{-3}} = 49,86 \cdot 10^5 \text{ Дж} = 4986 \text{ кДж};$$

$$\langle E_{\text{вр}} \rangle = \frac{2 \cdot 8,31 \cdot 400}{2 \cdot 10^{-3}} = 33,24 \cdot 10^5 \text{ Дж} = 3324 \text{ кДж}.$$

Ответ: 1) $\langle E_{\text{пост}} \rangle = 4986 \text{ кДж}$; 2) $\langle E_{\text{вр}} \rangle = 3324 \text{ кДж}$.

Пример 2. Средняя квадратичная скорость молекул некоторого газа при нормальных условиях равна 461 м/с. Какое количество молекул содержится в 1 г этого газа?

Дано:	Решение:
$\langle v_{\text{кв}} \rangle = 461 \text{ м/с}$	Число молекул, содержащихся в данной массе газа,
$m = 0,001 \text{ кг}$	
$T = 273 \text{ К}$	$N = \frac{m}{m_0}, \quad (1)$
$k = 1,38 \cdot 10^{-23} \text{ Дж/К}$	
$N = ?$	где m_0 – масса одной молекулы.

Средняя кинетическая энергия поступательного движения одной молекулы газа может быть рассчитана по формуле

$$\langle E \rangle = \frac{m_0 \langle v_{\text{KB}}^2 \rangle}{2}, \quad (2)$$

либо по формуле

$$\langle E \rangle = \frac{3}{2} kT, \quad (3)$$

где k – постоянная Больцмана.

Приравнивая правые части формул (2) и (3)

$$\frac{m_0 \langle v_{\text{KB}}^2 \rangle}{2} = \frac{3}{2} kT,$$

определим массу одной молекулы газа

$$m_0 = \frac{3kT}{\langle v_{\text{KB}}^2 \rangle}. \quad (4)$$

Подставив выражение (4) в формулу (1), определим число молекул газа

$$N = \frac{m \langle v_{\text{KB}}^2 \rangle}{3kT}.$$

$$N = \frac{10^{-3} \cdot 461}{3 \cdot 1,38 \cdot 10^{-23} \cdot 273} = 1,88 \cdot 10^{22}.$$

О т в е т: $N = 1,88 \cdot 10^{22}$.

Пример 3. Определите массу и давление кислорода, находящегося в баллоне объемом 10 л, если кинетическая энергия поступательного движения всех его молекул равна 2 кДж, а средняя квадратичная скорость молекул равна 1 км/с.

Дано:	Решение:
$\langle v_{\text{KB}} \rangle = 10^3 \text{ м/с}$	Средняя кинетическая энергия одной молекулы
$E = 2 \cdot 10^3 \text{ Дж}$	$\langle \epsilon_0 \rangle = \frac{E}{N} = \frac{m_0 \langle v_{\text{KB}}^2 \rangle}{2}, \quad (1)$
$V = 10^{-2} \text{ л}$	где E – общая энергия всех молекул.
$k = 1,38 \cdot 10^{-23} \text{ Дж/К}$	Из формулы (1) выразим массу одной молекулы
$p - ?, m - ?$	кислорода
	$m_0 = \frac{2 \langle \epsilon_0 \rangle}{\langle v_{\text{KB}}^2 \rangle}$

и, умножив её на общее число молекул, определим общую массу всех молекул:

$$m = m_0 N = \frac{2E}{\langle v_{\text{кв}}^2 \rangle}.$$

$$m = \frac{2 \cdot 2 \cdot 10^3}{10^6} = 4 \cdot 10^3 \text{ кг.} \quad (2)$$

В соответствии с основным уравнением молекулярно-кинетической теории идеальных газов давление кислорода

$$p = \frac{1}{3} n m_0 \langle v_{\text{кв}}^2 \rangle. \quad (3)$$

Так как $m_0 = \frac{2 \langle \epsilon_0 \rangle}{\langle v_{\text{кв}}^2 \rangle}$, а $n = \frac{N}{V}$, то $p = \frac{2}{3} \frac{E}{V}$.

$$p = \frac{2 \cdot 2 \cdot 10^3}{3 \cdot 10^{-2}} = 1,33 \cdot 10^5 \text{ Па.} \quad (4)$$

Ответ: $m = 4 \cdot 10^3 \text{ кг}$; $p = 1,33 \cdot 10^5 \text{ Па}$.

Пример 4. Определите среднюю квадратичную скорость, среднюю кинетическую энергию поступательного движения и среднюю полную кинетическую энергию молекул гелия и азота при температуре $t = 27^\circ \text{C}$. Определите полную энергию всех молекул 100 г каждого из газов.

Дано:	Решение:
$T = 300 \text{ К}$ $m = 0,1 \text{ кг}$ $M_1 = 4 \cdot 10^{-3} \text{ кг/моль}$ $M_2 = 28 \cdot 10^{-3} \text{ кг/моль}$	Средняя кинетическая энергия поступательного движения одной молекулы любого газа однозначно определяется его термодинамической температурой: $\langle E_{0\text{п}} \rangle = \frac{3}{2} kT, \quad (1)$ где $k = 1,38 \cdot 10^{-23} \text{ Дж/К}$ – постоянная Больцмана.
$\langle v_{\text{кв}} \rangle = ? \quad \langle E_{0\text{п}} \rangle = ?$ $\langle E_0 \rangle = ? \quad E = ?$	

Однако средняя квадратичная скорость молекул газа зависит от массы его молекул:

$$\langle v_{\text{кв}} \rangle = \sqrt{3kT/m_0}, \quad (2)$$

где m_0 – масса одной молекулы.

Средняя полная энергия молекулы зависит не только от температуры, но и от структуры молекулы – от числа i степеней свободы:

$$\langle E_0 \rangle = ikT/2. \quad (3)$$

Полная кинетическая энергия всех молекул, равная для идеального газа его внутренней энергии, может быть найдена как произведение $\langle E_0 \rangle$ на число N всех молекул:

$$E = U = \langle E_0 \rangle N. \quad (4)$$

Очевидно,

$$N = N_A m / M, \quad (5)$$

где m – масса всего газа, отношение m / M определяет число молей; N_A – постоянная Авогадро. Выражение (4) с учетом уравнения Клапейрона – Менделеева позволит рассчитать полную энергию всех молекул газа.

Согласно равенству (1) $\langle E_{0п} \rangle = 6,2 \cdot 10^{-21}$ Дж, причем средние энергии поступательного движения одной молекулы и гелия и азота одинаковы.

Для расчёта средней квадратичной скорости выражение (2) удобно несколько преобразовать, умножив и числитель и знаменатель на N_A .

Тогда

$$\langle v_{кв} \rangle = \sqrt{3RT/M},$$

где $R = 8,31$ Дж/(К·моль). Для гелия $\langle v_{кв} \rangle = 13,7 \cdot 10^2$ м/с, для азота $\langle v_{кв} \rangle = 5,17 \cdot 10^2$ м/с.

Для расчёта средней полной энергии молекулы (см. (3)) надо знать число степеней свободы молекулы.

Гелий – одноатомный газ, следовательно, $i = 3$, тогда

$$\langle E_{0п} \rangle = \langle E_0 \rangle = 6,2 \cdot 10^{-21} \text{ Дж.}$$

Азот – двухатомный газ, следовательно, $i = 5$ и

$$\langle E_0 \rangle = \frac{5}{2} kT = 10,4 \cdot 10^{-21} \text{ Дж.}$$

Полная энергия всех молекул после подстановки выражений (3) и (5) в формулу (4)

$$E = \frac{i}{2} kT \frac{m}{M} N_0 = \frac{i}{2} \frac{m}{M} RT.$$

Для гелия $E = 93,5$ кДж; для азота $E = 22,3$ кДж.

Ответ: $\langle v_{кв} \rangle(He) = 13,7 \cdot 10^2$ м/с, $\langle v_{кв} \rangle(N_2) = 5,17 \cdot 10^2$ м/с;
 $\langle E_{0п} \rangle = 6,2 \cdot 10^{-21}$ Дж; $\langle E_0 \rangle(He) = 6,2 \cdot 10^{-21}$ Дж, $\langle E_0 \rangle(N_2) = 10,4 \cdot 10^{-21}$ Дж;
 $E(He) = 93,5$ кДж, $E(N_2) = 22,3$ кДж.

Задачи для самостоятельного решения

Средний уровень

1. Согласно молекулярно-кинетической теории температура идеального газа прямо пропорциональна:

- 1) объему газа;
- 2) моменту импульса частиц газа;
- 3) среднему импульсу частиц газа;
- 4) средней кинетической энергии частиц газа.

2. В данном объеме скорость каждой молекулы газа удвоилась. Какое из следующих утверждений справедливо?

- 1) температура и давление газа увеличилась в 2 раза;
- 2) температура газа увеличилась в 2 раза, давление газа увеличилось в 4 раза;
- 3) температура газа увеличилась в 4 раза, а давление – в 2 раза;
- 4) температура и давление газа увеличились в 4 раза.

3. Средний импульс молекулы идеального газа при уменьшении абсолютной температуры газа в 4 раза...

- 1) уменьшился в 2 раза;
- 2) увеличился в 2 раза;
- 3) увеличился в 4 раза;
- 4) уменьшился в 4 раза.

4. Как должна измениться концентрация молекул одноатомного идеального газа, чтобы при увеличении средней кинетической энергии его молекул в 3 раза давление увеличилось бы в 2 раза?

- 1) увеличиться в 6 раз;
- 2) увеличиться в 1,5 раза;
- 3) уменьшиться в 1,5 раза;
- 4) уменьшиться в 6 раз.

5. В баллоне емкостью V находится некоторый газ массой m под давлением p . Средняя квадратичная скорость молекул газа $\langle v_{кв} \rangle$ равна...

- | | |
|-----------------------------|-----------------------------|
| 1) $\sqrt{\frac{pV}{3m}}$; | 2) $\sqrt{\frac{8pV}{m}}$; |
| 3) $\sqrt{\frac{2pV}{m}}$; | 4) $\sqrt{\frac{3pV}{m}}$. |

6. Молекулы водорода в одном сосуде имеют такую же среднюю квадратичную скорость, что и молекулы кислорода в другом сосуде. Какое заключение можно сделать?

- 1) кислород имеет более высокую температуру;
- 2) водород имеет более высокую температуру;
- 3) температура обоих газов одинакова;
- 4) давление обоих газов одинаково.

7. Средняя квадратичная скорость молекул водорода, азота и кислорода в разных сосудах одинакова. Что можно сказать о температуре газов?

- 1) азот имеет более высокую температуру;
- 2) водород имеет более высокую температуру;
- 3) кислород имеет более высокую температуру;
- 4) температура газов одинакова.

8. Сравните давления водорода p_1 и кислорода p_2 , если концентрация молекул газов одинакова и среднеквадратичная скорость молекул водорода в 2 раза больше среднеквадратичной скорости молекул кислорода.

- | | |
|--------------------|-------------------|
| 1) $p_2 = 16p_1$; | 3) $p_2 = 4p_1$; |
| 2) $p_2 = 8p_1$; | 4) $p_2 = p_1$. |

9. В идеальном газе отношение значений средних скоростей $\langle v \rangle$ теплового движения атомов водорода и гелия при $T = \text{const}$ составляет ...

- | | |
|-------|------------|
| 1) 2; | 3) $1/2$; |
| 2) 4; | 4) $1/4$; |

10. Идеальный газ нагревают, увеличивая температуру в 4 раза. Как при этом изменяется наиболее вероятная скорость теплового движения молекул?

- 1) уменьшается в 2 раза;
- 2) увеличивается в 2 раза;
- 3) увеличивается в 4 раза;
- 4) уменьшается в 4 раза.

11. Значение квадрата наиболее вероятной скорости $v_{\text{вер}}^2$ молекул газа при температуре T_1 совпадает со значением их среднего квадрата скорости $\langle v^2 \rangle$ при температуре T_2 , если отношение температур T_1/T_2 равно ...

- | | |
|-------|------------|
| 1) 2; | 3) $3/2$; |
| 2) 3; | 4) $2/3$. |

12. Распределите молекулы по группам А, В, С в порядке увеличения (в каждой последующей группе) числа вращательных степеней свободы ($i_{\text{вращ}}$). Заполните форму, выбрав целые значения $i_{\text{вращ}}$ и номера молекул из предложенных значений в порядке увеличения их номера.

№1	№2	№3	№4	№5	№6
H ₂	He	H ₂ O	D ₂ O (тяжёлая вода)	CO	He

Группа	$i_{\text{вращ}}$	Молекулы
А		
В		
С		

13. Средняя кинетическая энергия молекулы идеального газа при температуре T равна $\varepsilon = \frac{i}{2}kT$. Здесь $i = n_{\text{п}} + n_{\text{вр}} + 2n_{\text{к}}$, где $n_{\text{п}}$, $n_{\text{вр}}$ и $2n_{\text{к}}$ – степени свободы поступательного, вращательного и колебательного движений. Для гелия (He) число i равно ...

- 1) 1; 2) 3; 3) 5; 4) 7.

14. Средняя кинетическая энергия молекул газа при температуре T зависит от их структуры, что связано с возможностью различных видов движения атомов в молекуле. Средняя кинетическая энергия молекул гелия (He) равна...

- 1) $1/2kT$; 2) $3/2kT$; 3) $5/2kT$; 4) $6/2kT$.

15. Средняя кинетическая энергия молекулы идеального газа при температуре T равна $\varepsilon = \frac{i}{2}kT$. Здесь $i = n_{\text{п}} + n_{\text{вр}} + 2n_{\text{к}}$, где $n_{\text{п}}$, $n_{\text{вр}}$ и $2n_{\text{к}}$ – степени свободы поступательного, вращательного и колебательного движений молекулы. При условии, что имеет место только поступательное и вращательное движение, для молекулярного водорода средняя кинетическая энергия молекул равна...

- 1) $1/2kT$; 2) $3/2kT$; 3) $5/2kT$; 4) $6/2kT$.

16. Средняя кинетическая энергия молекул газа при температуре T зависит от их конфигурации и структуры, что связано с возможностью различных видов движения атомов в молекуле и самой молекулы. При условии, что имеет место поступательное, вращательное движение молекулы как целого и колебательное движение атомов в молекуле, средняя кинетическая энергия молекулы кислорода (O_2) равна ...

- 1) $7/2kT$; 2) $3/2kT$; 3) $5/2kT$; 4) $1/2kT$.

A horizontal line segment with three vertices. The left vertex is labeled O , the middle vertex is labeled C , and the right vertex is labeled O .

18. Отношение средней кинетической энергии вращательного движения к средней энергии молекулы с жесткой связью $\frac{\langle \epsilon \rangle_{\text{вращ}}}{\langle \epsilon \rangle} = \frac{2}{5}$. Это имеет

4. Давление идеального газа 2 мПа, концентрация молекул $2 \cdot 10^{10} \text{ см}^{-3}$. Определите среднюю кинетическую энергию поступательного движения одной молекулы и температуру газа.

Ответ: $\langle \epsilon_{\text{пост}} \rangle = 1,5 \cdot 10^{-19} \text{ Дж}$; $T = 7,25 \cdot 10^3 \text{ К}$.

5. Водород в количестве 0,5 моль находится при температуре 300 К. Вычислите среднюю кинетическую энергию вращательного движения одной молекулы, а также суммарную кинетическую энергию всех молекул этого газа.

Ответ: $\langle \epsilon_{\text{вращ}} \rangle = 4,14 \cdot 10^{-21} \text{ Дж}$, $E = 1242 \text{ Дж}$.

6. Определите давление, оказываемое газом на стенки сосуда, если его плотность равна $0,01 \text{ кг/м}^3$, а средняя квадратичная скорость молекул газа составляет 480 м/с.

Ответ: $p = 768 \text{ Па}$.

7. Средняя квадратичная скорость молекул некоторого газа при нормальных условиях равна 461 м/с. Какое количество молекул содержится в 1 г этого газа?

Ответ: $N = 1,88 \cdot 10^{22}$.

8. Чему равна энергия теплового движения 20 г кислорода при температуре 10°C ? Какая часть этой энергии приходится на долю поступательного движения и какая часть на долю вращательного?

Ответ: $E = 3,7 \cdot 10^3 \text{ Дж}$; $E_{\text{пост}} = 2,2 \cdot 10^3 \text{ Дж}$; $E_{\text{вращ}} = 1,5 \cdot 10^3 \text{ Дж}$.

9. Найдите кинетическую энергию теплового движения молекул, находящихся в 1 г воздуха при температуре 15°C . Воздух считать однородным газом с молярной массой $29 \cdot 10^{-3} \text{ кг/моль}$.

Ответ: $E = 210 \text{ Дж}$.

10. Определите среднюю кинетическую энергию $\langle \epsilon_0 \rangle$ поступательного движения молекул газа, находящегося под давлением 0,1 Па. Концентрация молекул газа равна 10^{13} см^{-3} .

Ответ: $\langle \epsilon_0 \rangle = 1,5 \cdot 10^{-20} \text{ Дж}$.

11. Определите среднюю кинетическую энергию $\langle \epsilon \rangle_{\text{пост}}$ поступательного движения и среднее значение полной кинетической энергии молекулы водяного пара при температуре $T = 600 \text{ К}$. Найдите также кинетическую

энергию E поступательного движения всех молекул, содержащихся в 1 кмоль пара.

Ответ: $\langle \epsilon \rangle_{\text{пост}} = 1,24 \cdot 10^{-20}$ Дж, $\langle \epsilon_0 \rangle = 2,48 \cdot 10^{-20}$ Дж, $E = 14,9$ МДж.

12. Определите кинетическую энергию $\langle \epsilon_1 \rangle$, приходящуюся в среднем на одну степень свободы молекулы азота, при температуре $T = 1000$ К, а также среднюю кинетическую энергию $\langle \epsilon \rangle_{\text{пост}}$ поступательного движения, $\langle \epsilon_{\text{вращ}} \rangle$ вращательного движения и среднее значение полной кинетической энергии $\langle \epsilon \rangle$ молекулы.

Ответ: $\langle \epsilon_1 \rangle = 6,9 \cdot 10^{-21}$ Дж, $\langle \epsilon \rangle_{\text{пост}} = 20,7 \cdot 10^{-21}$ Дж, $\langle \epsilon_{\text{вращ}} \rangle = 13,8 \cdot 10^{-21}$ Дж, $\langle \epsilon \rangle = 34,5 \cdot 10^{-21}$ Дж.

1.2. Элементы статистической физики

1.2.1. Распределение Максвелла

Закон о распределении молекул идеального газа по скоростям (распределение Максвелла):

$$dN(v) = N 4\pi \left(\frac{m_0}{2\pi kT} \right)^{3/2} v^2 e^{-\frac{m_0 v^2}{2kT}} dv,$$

где $dN(v)$ – число молекул из общего числа N , имеющих при температуре T скорости в интервале от v до $v + dv$.

Наиболее вероятная скорость молекул

$$v_{\epsilon} = \sqrt{\frac{2kT}{m_0}} = \sqrt{\frac{2RT}{M}}.$$

Распределение молекул газа по относительным скоростям

$$dN(u) = \frac{4}{\sqrt{\pi}} N e^{-u^2} u^2 du,$$

где $u = v/v_{\epsilon}$ – относительная скорость, равная отношению скорости v к наиболее вероятной скорости v_{ϵ} ; $dN(u)$ – число молекул, относительные скорости которых заключены в интервале от u до $u + du$.

Распределение молекул газа по энергиям

$$dN(\epsilon) = N f(\epsilon) d\epsilon = \frac{2}{\sqrt{\pi}} N (kT)^{-3/2} \epsilon^{1/2} e^{-\epsilon/(kT)} d\epsilon,$$

где $f(\epsilon)$ – функция распределения по энергиям.

ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

Пример 1. Температура окиси азота (NO) $T = 300$ К. Определите долю молекул, скорость которых лежит в интервале от $v_1 = 820$ м/с до $v_2 = 830$ м/с.

Дано: $T = 300$ К $v_1 = 820$ м/с $v_2 = 830$ м/с $\frac{\Delta N}{N} = ?$	Решение: Рассматриваемый газ находится в равновесном состоянии, и, согласно Максвеллу, относительное число молекул, скорость которых заключена в интервале от v до $v + dv$, $\frac{dN}{N} = f(v, T) dv,$ где $f(v, T)$ – функция Максвелла; dv – настолько малый диапазон скоростей, что в пределах его заведомо $f(v, T) = \text{const}$.
---	---

В условии задачи требуется определить долю молекул, скорости которых лежат в диапазоне $\Delta v = v_2 - v_1 = 10$ м/с.

Если в этом пределе функцию Максвелла можно с достаточной степенью точности считать постоянной, то искомая величина может быть рассчитана по приближённой формуле

$$\frac{\Delta N}{N} = f(v_1, T) \Delta v. \quad (1)$$

Такое приближение соответствует тому, что на рисунке заштрихованная площадь приравнивается к площади прямоугольника с основанием Δv и высотой, равной значению $f(v_1, T)$.

Следовательно, прежде всего надо найти значения функции Максвелла при $v = v_1$ и $v = v_2$ и выяснить, какую погрешность даёт использование равенства (1).

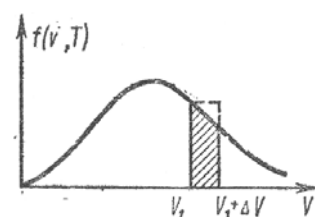
Функция Максвелла, как известно, имеет вид

$$f(v, T) = \frac{4}{\sqrt{\pi}} \frac{v^2}{v_B^3} e^{-v^2/v_B^2}, \quad (2)$$

где

$$v_B = \sqrt{2kT / m_0} = \sqrt{2RT / M} \quad (3)$$

– наиболее вероятная скорость молекул.



Для облегчения расчёта найдём сначала наиболее вероятную скорость по равенству (3):

$$v_b = \sqrt{2RT / M} = 410 \text{ м/с.}$$

Тогда [см. (2)]

$$f(v_1, T) = 4,03 \cdot 10^{-4} \text{ с/м; } f(v_2, T) = 3,75 \cdot 10^{-4} \text{ с/м.}$$

Это значит, что при использовании выражения (1) допускается ошибка, относительная величина которой

$$\delta f = \frac{f(v_1, T) - f(v_2, T)}{f(v_1, T)} = 0,07, \text{ т.е. } 7 \%.$$

Следовательно, с указанной степенью точности можно использовать равенство (1). Тогда доля молекул, скорость которых лежит в заданном интервале,

$$\Delta N / N = f(v_1, T) \Delta v = 4,0 \cdot 10^{-3}, \text{ т.е. } 0,4 \%.$$

$$\text{Ответ: } \Delta N / N = 4,0 \cdot 10^{-3}.$$

Пример 2. Используя функцию распределения молекул идеального газа по относительным скоростям $f(u) = \frac{4}{\sqrt{\pi}} e^{-u^2} \cdot u^2$ ($u = \frac{v}{v_b}$), определите число молекул, скорости v которых меньше 0,002 наиболее вероятной скорости, если в объеме газа содержится $N = 1,64 \cdot 10^{24}$ молекул.

Дано:	Решение:
$f(u) = \frac{4}{\sqrt{\pi}} e^{-u^2} \cdot u^2 \quad (u = \frac{v}{v_b})$ $v_{\max} = 0,002 v_b$ $N = 1,64 \cdot 10^{24}$ $\Delta N - ?$	Число $dN(u)$ молекул, относительные скорости которых заключены в пределах от $u + du$, $dN(u) = N f(u) du = \frac{4N}{\sqrt{\pi}} e^{-u^2} u^2 du, \quad (1)$ где N – число молекул в объеме газа.

По условию задачи $v_{\max} = 0,002 v_b$, поэтому $u_{\max} = v_{\max} / v_b = 0,002$.

Так как $u \ll 1$, то $e^{-u^2} \approx 1 - u^2$. Пренебрегая $u^2 \ll 1$, выражение (1) можно записать в виде

$$dN(u) = \frac{4N}{\sqrt{\pi}} u^2 du. \quad (2)$$

Проинтегрировав (2) по u в пределах от 0 до $u_{\max}$, найдем

$$\Delta N = \frac{4N}{\sqrt{\pi}} \int_0^{u_{\max}} u^2 du = \frac{4N}{3\sqrt{\pi}} u_{\max}^3 ;$$

$$\Delta N = \frac{4 \cdot 1,67 \cdot 10^{24} \cdot 0,002^3}{3\sqrt{3,14}} = 10^{16}.$$

Ответ: $\Delta N = 10^{16}$.

Пример 3. Кислород нагревают от температуры $T_1 = 240$ К до $T_2 = 480$ К. Рассчитать для каждой из указанных температур значения функции Максвелла при скоростях: а) $v = v_B$; б) $v = v_B + 200$ м/с; в) $v = v_B - 200$ м/с; г) $v = 2v_B$. По полученным значениям построить графики функции $f(v, T)$ для каждой из температур. Определить, во сколько раз изменяется при увеличении температуры доля молекул, скорость которых находится в интервале: 1) от 100 до 200 м/с; 2) от 700 до 800 м/с.

Дано:
 $T_1 = 240$ К
 $T_2 = 480$ К
а) $v = v_B$;
б) $v = v_B + 200$ м/с;
в) $v = v_B - 200$ м/с;
г) $v = 2v_B$
1) от 100 до 200 м/с;
2) от 700 до 800 м/с

 $f(v, T) = ?$ $\Delta N / N = ?$

Как известно,

Решение:
Независимо от характера процесса начальное и конечное состояния газа можно считать равновесными. Следовательно, в каждом из этих состояний молекулы распределены по скоростям согласно закону Максвелла. Относительное число молекул dN / N , скорость которых лежит в интервале от v до $v + dv$,

$$dN / N = f(v, T) dv.$$

Функция Максвелла имеет вид

$$f(v, T) = \frac{4}{\sqrt{\pi}} \frac{v^2}{v_B^3} e^{-v^2/v_B^2}. \quad (1)$$

$$v_B = \sqrt{2kT / m_0} = \sqrt{2RT / M}. \quad (2)$$

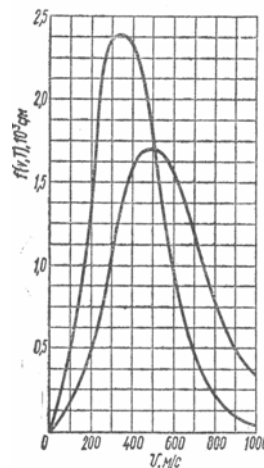
Таким образом, первая часть сводится к непосредственному расчёту значений функции Максвелла по формуле (1) при заданных скоростях и температурах и к построению графика по полученным точкам. Относительное число dN / N молекул, скорость которых лежит в диапазоне от v_1 до $v_2 = v_1 + \Delta v$, в общем случае может быть рассчитана по формуле

$$\frac{\Delta N}{N} = \int_{v_1}^{v_2} f(v, T) dv. \quad (3)$$

В случае, когда интервал Δv настолько мал, что изменением функции Максвелла можно пренебречь, т.е. $f(v_1, T) \approx f(v_2, T)$, доля молекул может быть найдена по приближённой формуле

$$\Delta N / N = f(v, T) \Delta v. \quad (4)$$

В условии интервал скоростей $\Delta v = 100$ м/с настолько велик, что использование формулы (4) невозможно. Однако расчет $\Delta N / N$ по формуле (3) сложен и записанный интервал в явном виде не берется, приходится пользоваться численными методами интегрирования. При невозможности использования ЭВМ решение задачи может быть проведено приближенно графическим методом: относительное число молекул, скорость которых лежит в диапазоне от v_1 до v_2 , численно равно площади, ограниченной графиком функции Максвелла, осью абсцисс (осью скоростей) и ординатами $f(v_1, T)$, $f(v_2, T)$. Таким образом, расчёт может быть приближённо проведён после построения графиков $f(v, T)$.



Для облегчения вычислений найдем сначала по формуле (2) наиболее вероятные скорости для каждой из заданных температур: $v_{1в} = 350$ м/с; $v_{2в} = 500$ м/с. Используя выражение (1), определим функции Максвелла:

- а) $f(v, T_1) = 2,40 \cdot 10^{-3}$ с/м; $f(v, T_2) = 1,70 \cdot 10^{-3}$ с/м, если $v = v_{в}$;
- б) $f(v, T_1) = 1,32 \cdot 10^{-3}$ с/м; $f(v, T_2) = 1,20 \cdot 10^{-3}$ с/м, если $v = v_{в} + 200$ м/с;
- в) $f(v, T_1) = 0,96 \cdot 10^{-3}$ с/м; $f(v, T_2) = 1,14 \cdot 10^{-3}$ с/м, если $v = v_{в} - 200$ м/с;
- г) $f(v, T_1) = 0,47 \cdot 10^{-3}$ с/м; $f(v, T_2) = 0,33 \cdot 10^{-3}$ с/м, если $v = 2v_{в}$.

Графики $f(v, T_1)$ и $f(v, T_2)$, построенные по полученным значениям с учетом того, что при $v = 0$ и $v \rightarrow \infty$ $f(v, T) = 0$, изображены на рисунке.

Как видно из графиков, в заданных диапазонах скоростей функция Максвелла действительно изменяется довольно резко, что и не позволяет использовать приближенную формулу.

Рассчитаем отношение площадей, ограниченных графиком функции Максвелла и соответствующими ординатами (площади находятся по числу клеточек (см. рисунок) в соответствующих диапазонах). В диапазоне скоростей от 100 до 200 м/с

$$\frac{\Delta N_1}{N_1} : \frac{\Delta N_2}{N_2} = 3.$$

В диапазоне скоростей от 700 до 800 м/с

$$\frac{\Delta N_1}{N_1} : \frac{\Delta N_2}{N_2} = \frac{1}{3}.$$

При увеличении температуры от $T_1 = 240$ К до $T_2 = 480$ К доля молекул, скорость которых заключена в диапазоне от 100 до 200 м/с, уменьшилась примерно в три раза, доля молекул, скорость которых лежит в диапазоне от 700 до 800 м/с, увеличилась примерно в три раза.

Ответ: а) $f(v, T_1) = 2,40 \cdot 10^{-3}$ с/м; $f(v, T_2) = 1,70 \cdot 10^{-3}$ с/м, если $v = v_B$;
 б) $f(v, T_1) = 1,32 \cdot 10^{-3}$ с/м; $f(v, T_2) = 1,20 \cdot 10^{-3}$ с/м, если $v = v_B + 200$ м/с;
 в) $f(v, T_1) = 0,96 \cdot 10^{-3}$ с/м; $f(v, T_2) = 1,14 \cdot 10^{-3}$ с/м, если $v = v_B - 200$ м/с; г)
 $f(v, T_1) = 0,47 \cdot 10^{-3}$ с/м; $f(v, T_2) = 0,33 \cdot 10^{-3}$ с/м, если $v = 2v_B$. В диапазоне скоростей от 100 до 200 м/с $\frac{\Delta N_1}{N_1} : \frac{\Delta N_2}{N_2} = 3$, в диапазоне скоростей от 700 до 800 м/с $\frac{\Delta N_1}{N_1} : \frac{\Delta N_2}{N_2} = \frac{1}{3}$.

Пример 4. Используя закон распределения молекул идеального газа по скоростям, найдите среднюю квадратичную скорость молекул.

Дано:	Решение:
$f(v) = 4\pi \left(\frac{m_0}{2\pi kT} \right)^{3/2} v^2 e^{-\frac{m_0 v^2}{2kT}}$ $\langle v_{KB} \rangle = ?$	Средняя квадратичная скорость молекул газа $\langle v_{KB} \rangle = \sqrt{\langle v^2 \rangle},$ $\langle v^2 \rangle = \int_0^\infty v^2 f(v) dv = 4\pi \left(\frac{m_0}{2\pi kT} \right)^{3/2} \int_0^\infty v^4 e^{-\frac{m_0 v^2}{2kT}} dv.$

Для вычисления среднего квадрата скорости молекул воспользуемся табличным интегралом

$$\int_0^\infty x^4 e^{-ax^2} dx = \frac{3}{8} \sqrt{\pi} a^{-5/2}.$$

Примем $x = v$, $a = \frac{m_0}{2\pi kT}$, тогда

$$\langle v^2 \rangle = 4\pi \left(\frac{m_0}{2\pi kT} \right)^{3/2} \cdot \frac{3}{8} \sqrt{\pi} \left(\frac{m_0}{2\pi kT} \right)^{-5/2} = \frac{3kT}{m_0}, \text{ откуда}$$

$$\langle v_{KB} \rangle = \sqrt{\langle v^2 \rangle} = \sqrt{\frac{3kT}{m_0}}.$$

$$\text{Ответ: } \langle v_{KB} \rangle = \sqrt{\frac{3kT}{m_0}}.$$

Пример 5. Используя функцию распределения молекул идеального газа по энергиям, найдите для данной температуры отношение средней кинетической энергии молекул $\langle \epsilon \rangle$ к их наиболее вероятному значению энергии ϵ_B .

Дано:	Решение:
$f(\epsilon) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} (kT)^{-3/2} \epsilon^{1/2} e^{-\epsilon/(kT)}$	Средняя кинетическая энергия молекул идеального газа
$T = \text{const}$	$\langle \epsilon \rangle = \int_0^{\infty} \epsilon f(\epsilon) d\epsilon =$
$\frac{\langle \epsilon \rangle}{\epsilon_B} = ?$	$= \frac{2}{\sqrt{\pi}} (kT)^{-3/2} \int_0^{\infty} \epsilon^{3/2} e^{-\epsilon/(kT)} d\epsilon = \frac{3}{2} kT.$

Наиболее вероятное значение энергии молекул определим из условия

$$\frac{df(\epsilon)}{d\epsilon} = 0, \quad \frac{d}{d\epsilon} \left(\frac{2}{\sqrt{\pi}} (kT)^{-3/2} \epsilon^{1/2} e^{-\epsilon/(kT)} \right) = 0,$$

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}} (kT)^{-3/2} e^{-\epsilon/(kT)} \left(\frac{1}{2} \epsilon^{-1/2} - \frac{\epsilon^{1/2}}{kT} \right) = 0,$$

$$\frac{1}{2\epsilon_B^{1/2}} - \frac{\epsilon_B^{1/2}}{kT} = 0, \quad \text{откуда } \epsilon_B = \frac{1}{2} kT.$$

Искомое отношение $\frac{\langle \epsilon \rangle}{\epsilon_B} = 3.$

Ответ: $\frac{\langle \epsilon \rangle}{\epsilon_B} = 3.$

Пример 6. В сосуде содержится газ, количество вещества ν которого равно 1,2 моль. Рассматривая этот газ как идеальный, определите число ΔN молекул, скорости v которых меньше 0,001 наиболее вероятной скорости v_B .

Дано:	Решение:
$v_{\max} = 0,001 v_B$	Для решения задачи удобно воспользоваться распределением молекул по относительным скоростям u ($u = v/v_B$).
$\nu = 1,2$ моль	Число $dN(u)$ молекул, относительные скорости u которых заключены в пределах от u до du , определяют по формуле
$\Delta N = ?$	$dN(u) = \frac{4N}{\sqrt{\pi}} e^{-u^2} u^2 du, \quad (1)$

где N – полное число молекул в рассматриваемом объеме.

По условию задачи, максимальная скорость интересующих нас молекул $v_{\max} = 0,001v_B$, откуда $u_{\max} = v_{\max}/v_B = 0,001$. Для таких значений u выражение (1) можно существенно упростить. В самом деле, для $u \ll 1$ имеем $e^{-u^2} \approx 1 - u^2$. Пренебрегая значением $u^2 = (0,001)^2 = 10^{-6}$ по сравнению с единицей, выражение (1) запишем в виде

$$dN(u) = \frac{4N}{\sqrt{\pi}} u^2 du. \quad (2)$$

Интегрируя это выражение по u в пределах от 0 до $u_{\max}$, получим

$$\Delta N = \frac{4N}{\sqrt{\pi}} \int_0^{u_{\max}} u^2 du = \frac{4N}{\sqrt{\pi}} \frac{u^3}{3} \Big|_0^{u_{\max}}, \text{ или } \Delta N = \frac{4N}{3\sqrt{\pi}} u_{\max}^3. \quad (3)$$

Выразив в (3) число молекул N через количество вещества и постоянную Авогадро, найдем расчетную формулу:

$$\Delta N = \frac{4\nu N_A}{3\sqrt{\pi}} u_{\max}^3. \quad (4)$$

$$\Delta N = \frac{4 \cdot 1,2 \cdot 6,02 \cdot 10^{23}}{3 \cdot 1,77} (10^{-3})^3 = 5,44 \cdot 10^{14} \text{ молекул.}$$

Ответ: $\Delta N = 5,44 \cdot 10^{14}$ молекул.

Пример 7. Зная функцию $f(p)$ распределения молекул по импульсам, определить среднее значение квадрата импульса $\langle p^2 \rangle$.

Дано: $f(p) = 4\pi \left(\frac{1}{2\pi mkT} \right)^{3/2} e^{-p^2/(2mkT)} p^2$ $\langle p^2 \rangle - ?$	Решение: Среднее значение квадрата импульса $\langle p^2 \rangle$ можно определить по общему правилу вычисления среднего: $\langle p^2 \rangle = \int_0^\infty p^2 f(p) dp / \int_0^\infty f(p) dp. \quad (1)$
--	---

Функция распределения молекул по импульсам имеет вид

$$f(p) = 4\pi \left(\frac{1}{2\pi mkT} \right)^{3/2} e^{-p^2/(2mkT)} p^2. \quad (2)$$

Эта функция распределения уже нормирована на единицу, т.е. $\int_0^{\infty} f(p) dp = 1$. С учетом нормировки формулу (1) перепишем иначе:

$$\langle p^2 \rangle = \int_0^{\infty} p^2 f(p) dp. \quad (3)$$

Подставим выражение $f(p)$ по уравнению (2) в формулу (3) и вынесем величины, не зависящие от p , за знак интеграла:

$$\langle p^2 \rangle = 4\pi \left(\frac{1}{2\pi mkT} \right)^{3/2} \int_0^{\infty} p^4 e^{-p^2/(2mkT)} dp.$$

Этот интеграл можно свести к табличному

$$\int_0^{\infty} x^4 e^{-ax^2} dx = \frac{3}{8} \sqrt{\pi} a^{-5/2}, \text{ где } a = \frac{1}{2mkT}.$$

В нашем случае это даст

$$\langle p^2 \rangle = 4\pi \left(\frac{1}{2\pi mkT} \right)^{3/2} \frac{3}{8} \sqrt{\pi} \left(\frac{1}{2mkT} \right)^{-5/2} = 3mkT.$$

Ответ: $\langle p^2 \rangle = 3mkT$.

Пример 8. Сосуд, содержащий некоторую массу газа, движется со скоростью u . На сколько увеличится средний квадрат скорости теплового движения молекул при остановке сосуда для одноатомного и двухатомного газов? Теплоёмкость, теплопроводность и масса стенок сосуда пренебрежимо малы.

Дано:

m

u

$$\Delta \langle v^2 \rangle = ?$$

Решение:

При движении сосуда все молекулы газа участвуют одновременно в хаотическом (тепловом) движении и направленном движении со скоростью u . При остановке сосуда молекулы по инерции некоторое время сохраняют свою направленную скорость, но затем в результате соударений друг с другом и со стенками сосуда газ придет в равновесное состояние, при котором молекулы его не обладают направленной скоростью.

При этом установится максвелловское распределение молекул по скоростям с некоторым значением среднего квадрата скорости $\langle v^2 \rangle_2$. Чтобы выяснить, насколько это значение больше того, что было до остановки

сосуда $\left(\langle v^2 \rangle_1\right)$, надо найти прирост средней кинетической энергии $\Delta \langle W_0 \rangle$ хаотического движения одной молекулы в результате остановки.

При движении сосуда результирующая скорость $\mathbf{c}_i$ и кинетическая энергия поступательного движения любой молекулы соответственно равны:

$$\mathbf{c}_i = \mathbf{v}_i + \mathbf{u}, \quad \frac{m_0 c_i^2}{2} = \frac{m_0 v_i^2}{2} + \frac{m_0 u^2}{2} + m_0 \mathbf{v}_i \mathbf{u}. \quad (1)$$

Здесь $\mathbf{v}_i$ – скорость хаотического движения молекулы.

Для нахождения средней кинетической энергии поступательного движения молекулы выражение (1) надо просуммировать по всем молекулам и затем разделить на общее число N молекул:

$$\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \frac{m_0 c_i^2}{2} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \frac{m_0 v_i^2}{2} + \frac{m_0 u^2}{2} + \frac{m_0 u}{N} \sum_{i=1}^N v_i. \quad (2)$$

Вследствие хаотичности теплового движения, т.е. полной равноправности всех направлений вектора $\mathbf{v}_i$, $\sum \mathbf{v}_i = 0$ и последнее слагаемое в правой части (2) обращается в нуль. Первое слагаемое можно представить как $m_0 \langle v^2 \rangle_1 / 2$. Тогда поступательная кинетическая энергия молекулы во время движения сосуда

$$\langle W_{0п} \rangle_1 = \frac{m_0 \langle v^2 \rangle_1}{2} + \frac{m_0 u^2}{2}.$$

Очевидно, и средняя полная кинетическая энергия молекулы во время движения сосуда может быть выражена аналогичной суммой:

$$\langle W_0 \rangle' = \langle W_0 \rangle_1 + \frac{m_0 u^2}{2}. \quad (3)$$

Здесь первое слагаемое есть средняя полная энергия хаотического движения молекулы, равная $ikT_1/2$. После остановки сосуда

$$\langle W_0 \rangle'' = \langle W_0 \rangle_2 = (i/2)kT_2. \quad (4)$$

Если учесть сделанные в условии задачи оговорки, свидетельствующие о том, что сосуд не участвует в энергетическом балансе, то $\langle W_0 \rangle' = \langle W_0 \rangle''$, т.е. при остановке сосуда кинетическая энергия направленного движения каждой молекулы полностью переходит в энергию хаотического движения. Сравнивая (3) и (4), получим

$$\Delta \langle W_0 \rangle = \langle W_0 \rangle_2 - \langle W_0 \rangle_1 = m_0 u^2 / 2. \quad (5)$$

Выражение (5) позволит найти искомое приращение среднего квадрата скорости теплового движения молекул.

Из выражения для средней энергии поступательного движения молекулы $m_0 \langle v^2 \rangle / 2 = 3/2 kT$ следует, что

$$\langle v^2 \rangle = 3kT / m_0.$$

Средняя полная кинетическая энергия одной молекулы

$$\langle W_0 \rangle = ikT / 2.$$

Совместное решение двух последних уравнений даёт

$$\langle v^2 \rangle = 6 \langle W_0 \rangle / (im_0).$$

Тогда изменение среднего квадрата скорости

$$\Delta \langle v^2 \rangle = \langle v^2 \rangle_2 - \langle v^2 \rangle_1 = \Delta \langle W_0 \rangle \frac{6}{im_0}.$$

Учитывая выражение (5), находим

$$\Delta \langle v^2 \rangle = 3u^2 / i.$$

Для одноатомного газа ($i = 3$) $\Delta \langle v^2 \rangle = u^2$. Для двухатомного газа ($i = 5$) $\Delta \langle v^2 \rangle = 0,6u^2$.

Ответ: $\Delta \langle v^2 \rangle = u^2$, $\Delta \langle v^2 \rangle = 0,6u^2$.

Задачи для самостоятельного решения

Средний уровень

1. Как изменится характер распределения молекул газа по скоростям при уменьшении массы молекул газа при неизменной температуре?

1) максимум функции распределения сместится в сторону меньших скоростей, площадь под кривой распределения уменьшится;

2) максимум функции распределения сместится в сторону больших скоростей, площадь под кривой распределения уменьшится;

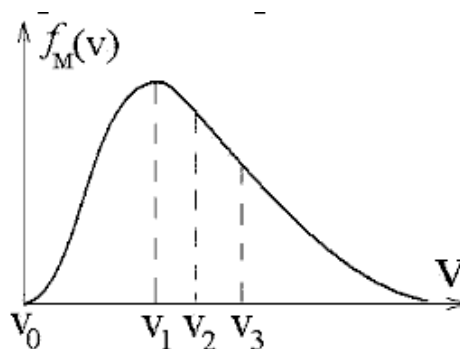
3) положение максимума функции распределения не изменится, площадь под кривой распределения увеличится;

4) максимум функции распределения сместится в сторону больших скоростей, площадь под кривой распределения увеличится;

5) максимум функции распределения сместится в сторону больших скоростей, площадь под кривой распределения не изменится.

2. На рисунке представлен график распределения молекул идеального газа по величинам скоростей (распределение Максвелла). На оси абсцисс обозначены величины средней, среднеквадратичной и наиболее вероятной скорости. Наиболее вероятной скорости соответствует...

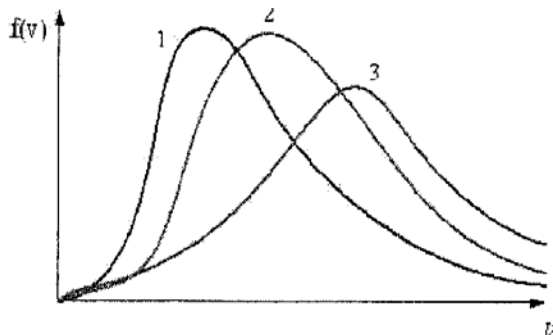
- 1) V_0 ; 2) V_1 ;
3) V_2 ; 4) V_3 .



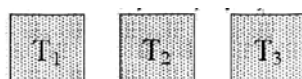
3. В трех одинаковых сосудах при равных условиях находится одинаковое количество водорода, гелия и азота.



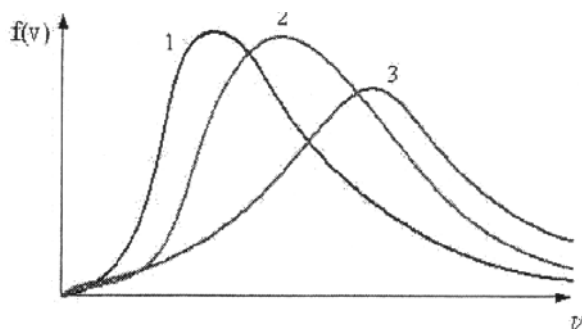
Какая из кривых описывает распределение скоростей молекул водорода; азота?



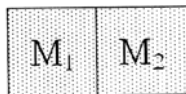
4. В трех одинаковых сосудах находится одинаковое количество газа, причем $T_1 > T_2 > T_3$.



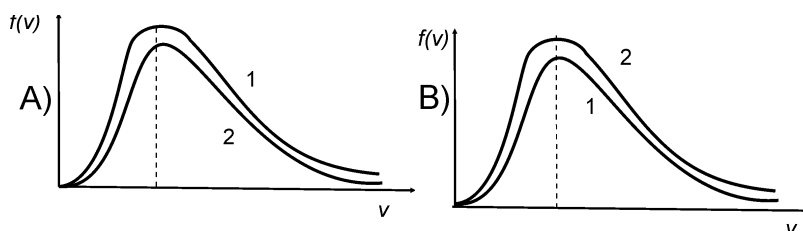
Какая из кривых описывает распределение скоростей молекул в сосуде с температурой T_3 ?



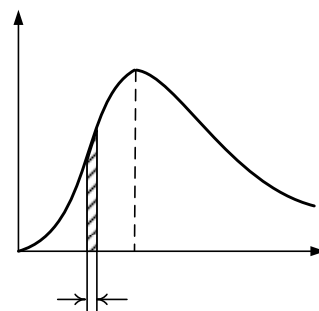
5. В сосуде, разделенном на равные части неподвижной непроницаемой перегородкой, находится газ. Температуры газа в каждой части сосуда равны, но масса газа в левой части больше, чем в правой ($M_1 > M_2$).



Функция распределения $f(v) = \frac{dN}{dv}$ скоростей молекул газа в сосудах будет описываться кривыми...



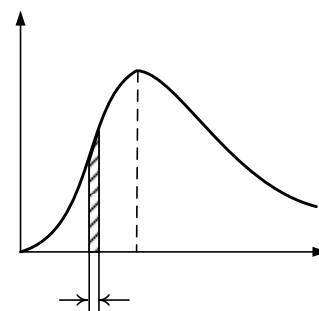
6. На рисунке представлен график функции (распределения Максвелла), где $f(v) = \frac{dN}{Ndv}$ – доля молекул, скорости которых заключены в интервале скоростей от v до $v + dv$ в расчете на единицу этого интервала.



Для этой функции верным утверждением является...

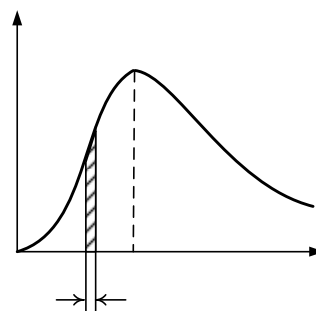
- 1) с ростом температуры площадь под кривой растет;
- 2) с ростом температуры максимум кривой смещается вправо;
- 3) с ростом температуры величина максимума растет.

7. На рисунке представлен график функции распределения Максвелла. Используя максвелловскую функцию распределения молекул по скоростям, можно:



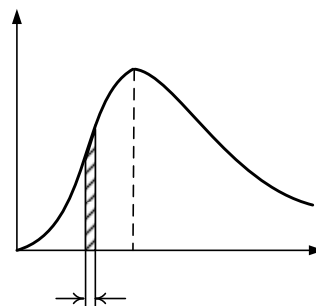
- 1) доказать, что молекулы движутся с определенной скоростью v ;
- 2) сделать вывод о направлении скорости v ;
- 3) рассчитать вероятность того, что скорость молекул находится в интервале от v до $v + dv$;
- 4) рассчитать вероятность того, что скорость молекул равна v ;
- 5) доказать, что скорости молекул отличны друг от друга, но постоянны.

8. На рисунке представлен график функции распределения молекул идеального газа по скоростям (распределение Максвелла), где $f(v) = \frac{dN}{Nd v}$ – доля молекул, скорости которых заключены в интервале скоростей от v до $v + dv$ в расчете на единицу этого интервала. Выберите верные утверждения:



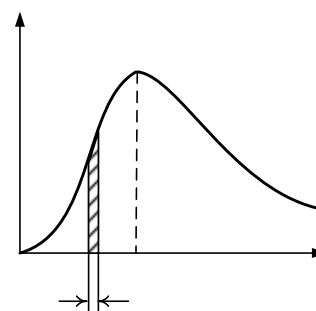
- 1) площадь заштрихованной полоски равна доле молекул со скоростями в интервале от v до $v + dv$;
- 2) с ростом температуры площадь под кривой растет;
- 3) с ростом температуры максимум кривой смещается вправо.

9. На рисунке представлен график функции распределения молекул идеального газа по скоростям (распределение Максвелла), где $f(v) = \frac{dN}{Nd v}$ – доля молекул, скорости которых заключены в интервале скоростей от v до $v + dv$ в расчете на единицу этого интервала. Выберите верные утверждения:



- 1) положение максимума кривой зависит как от температуры, так и от природы газа;
- 2) при понижении температуры максимум кривой смещается влево;
- 3) при понижении температуры площадь под кривой уменьшается.

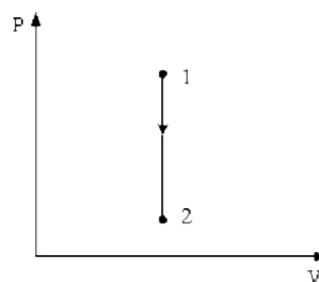
10. На рисунке представлен график распределения молекул идеального газа по величинам скоростей (распределение Максвелла). С ростом температуры T газа площадь под этим графиком будет...

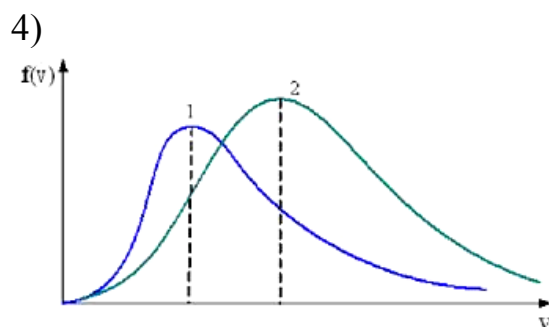
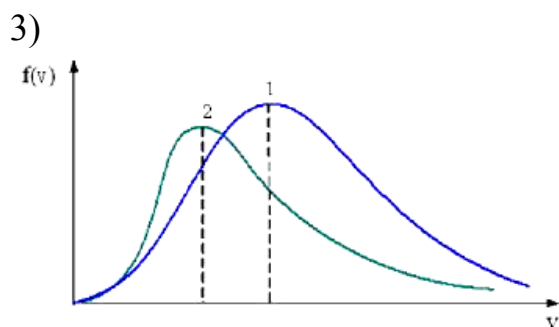
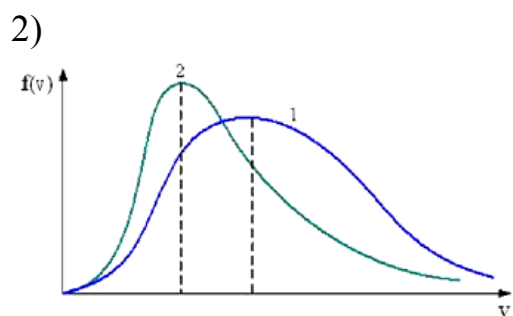
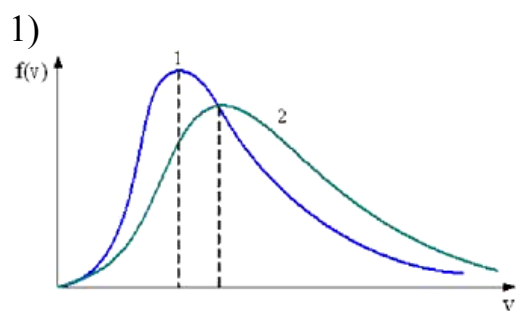


- 1) расти пропорционально $T^{3/2}$;
- 2) расти пропорционально T ;
- 3) оставаться неизменной;
- 4) расти пропорционально $\sqrt{T}$.

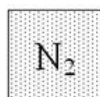
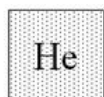
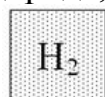
11. На (p, V) -диаграмме показан процесс, производимый идеальным газом в изолированном сосуде.

Начальное и конечное состояния будут соответствовать распределениям скоростей молекул, изображенным на рисунке...

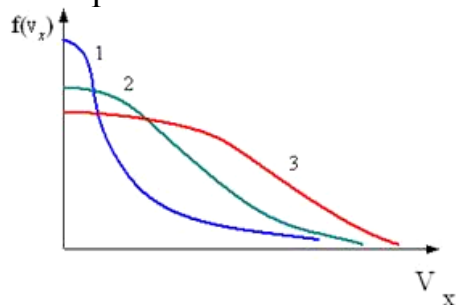




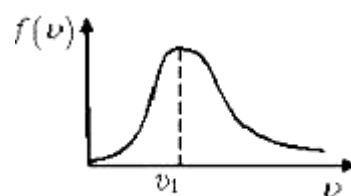
12. В трех одинаковых сосудах при равных условиях находится одинаковое количество водорода, гелия и азота.



Какая из кривых описывает распределение проекций скоростей молекул гелия на произвольное направление x ?

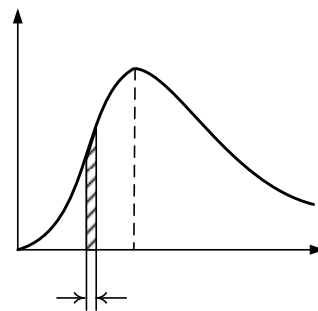


13. На рисунке приведен график распределения молекул идеального газа по скоростям (распределение Максвелла) при температуре T . При увеличении температуры в 4 раза положение максимума кривой по оси v ...



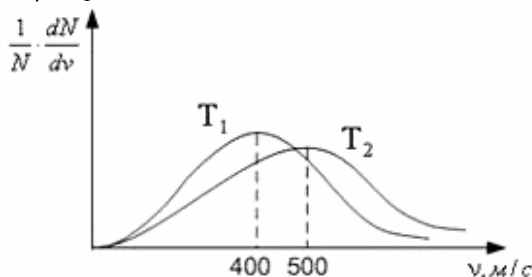
- 1) сместится в точку $v = 4v_1$;
- 2) не изменится;
- 3) сместится в точку $v = \frac{v_1}{2}$;
- 4) сместится в точку $v = 2v_1$.

14. На рисунке представлен график распределения молекул идеального газа по величинам скоростей (распределение Максвелла), где $f(v) = \frac{dN}{Ndv}$ – доля молекул, скорости которых заключены в интервале скоростей от v до $v + dv$ в расчете на единицу этого интервала. При увеличении температуры и неизменном интервале скоростей dv площадь заштрихованной области ...



- 1) может как увеличиться, так и уменьшиться;
- 2) увеличивается;
- 3) уменьшается;
- 4) не изменяется.

15. На рисунке приведены две кривые распределения молекул одного газа по абсолютным скоростям при разных значениях температур. Отношение температур T_2/T_1 равно...

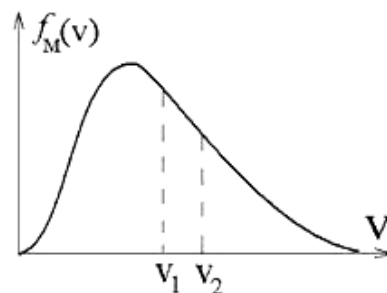


- 1) 5/4;
- 2) 4/5;
- 3) 16/25;
- 4) 25/16.

16. Как соотносятся между собой наиболее вероятная v_B , средняя арифметическая (интегральная) $\langle v \rangle$ и средняя квадратичная скорость $\langle v_{KB} \rangle$ молекул в газе?

- 1) $v_B = \langle v \rangle = \langle v_{KB} \rangle$;
- 2) $\langle v \rangle < v_B < \langle v_{KB} \rangle$;
- 3) $\langle v_{KB} \rangle < \langle v \rangle < v_B$;
- 4) $v_B < \langle v \rangle < \langle v_{KB} \rangle$

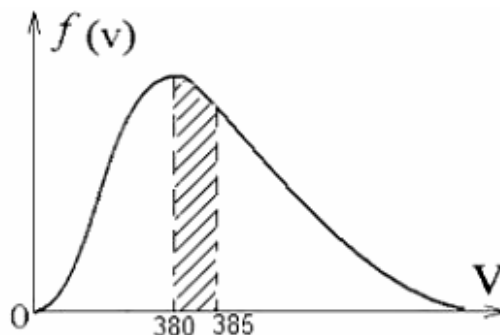
17. На рисунке представлен график распределения молекул идеального газа по величинам скоростей (распределение Максвелла), v_1 и v_2 – средняя и средняя квадратичная скорости молекул газа. С ростом температуры газа отношение этих скоростей



- 1) может как увеличиться, так и уменьшиться;

- 2) увеличивается;
- 3) уменьшается;
- 4) не изменяется.

18. На рисунке представлен график функции распределения молекул кислорода по скоростям (распределение Максвелла) для температуры $T = 273$ К. При скорости $v = 380$ м/с функция достигает максимума. Здесь $f(v) = \frac{dN}{Nd v}$ – плот-

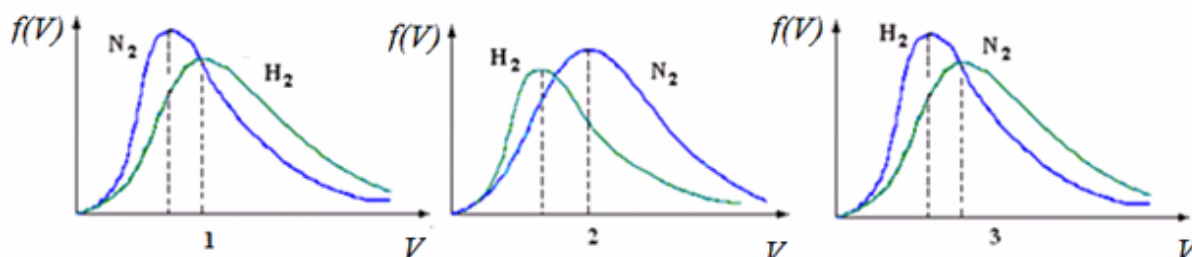


ность вероятности или доля молекул, скорости которых заключены в интервале скоростей от v до $v + dv$ в расчете на единицу этого интервала. Для распределения Максвелла справедливы утверждения, что ...

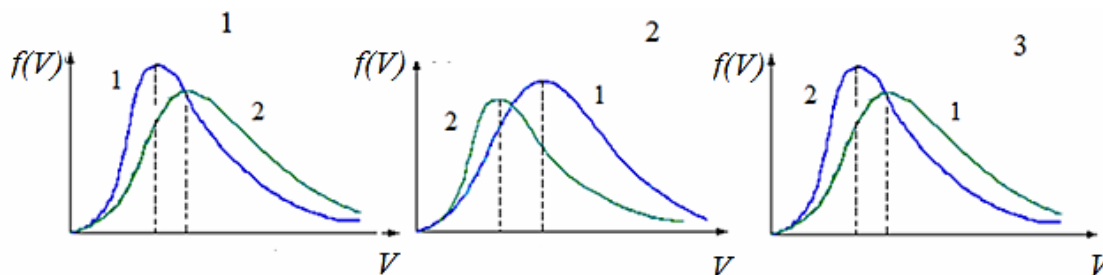
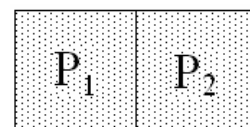
- 1) отлична от нуля вероятность того, что молекула кислорода при $T = 273$ К имеет скорость, точно равную 380 м/с;
- 2) с понижением температуры площадь под кривой уменьшается;
- 3) с ростом температуры наиболее вероятная скорость молекул увеличится;
- 4) площадь заштрихованной полоски равна доле молекул со скоростями в интервале от 380 м/с до 385 м/с или вероятности того, что скорость молекулы имеет значение в этом интервале скоростей.

Укажите **не менее двух** вариантов ответов.

19. В сосуде, разделенном на две равные части неподвижной теплоизолирующей перегородкой, находятся одинаковые количества (число молекул) водорода и азота. Если давление газов в обеих частях сосуда одинаково, то распределение скоростей молекул газа в сосуде будет описываться кривыми...



20. В сосуде, разделенном на равные части неподвижной теплоизолирующей перегородкой, находятся одинаковые количества газа, причем $P_1 > P_2$. Распределение скоростей молекул газа в сосуде будет описываться кривыми...



Достаточный уровень

1. Определите: 1) наиболее вероятную v_B ; 2) среднюю арифметическую $\langle v \rangle$; 3) среднюю квадратичную $\langle v_{KB} \rangle$ скорость молекул азота (N_2) при 27°C .

Ответ: 1) $v_B = 422 \text{ м/с}$; 2) $\langle v \rangle = 476 \text{ м/с}$; 3) $\langle v_{KB} \rangle = 517 \text{ м/с}$.

2. Определите среднюю арифметическую, среднюю квадратичную и наиболее вероятную скорости молекул газа, плотность которого при давлении 300 мм. рт. ст. равна 0,3 г/л.

Ответ: 1) $\langle v \rangle = 579 \text{ м/с}$; 2) $\langle v_{KB} \rangle = 628 \text{ м/с}$; 3) $v_B = 513 \text{ м/с}$.

3. При какой температуре T средняя квадратичная скорость атомов гелия станет равной второй космической скоростью $v_2 = 11,2 \text{ км/с}$?

Ответ: $T = 20,1 \text{ К}$.

4. Колба вместимостью $V = 4 \text{ л}$ содержит некоторый газ массой $m = 0,6 \text{ г}$ под давлением $p = 200 \text{ кПа}$. Определите среднюю квадратичную скорость $\langle v_{KB} \rangle$ молекул газа.

Ответ: $\langle v_{KB} \rangle = 2 \text{ км/с}$.

5. Смесь гелия и аргона находится при температуре $T = 1,2 \text{ К}$. Определите среднюю квадратичную скорость $\langle v_{KB} \rangle$ и среднюю кинетическую энергию атомов гелия и аргона.

Ответ: Гелий: $\langle v_{KB} \rangle = 2,73 \text{ км/с}$, $\langle \epsilon \rangle = 2,48 \cdot 10^{-20} \text{ Дж}$;

аргон: $\langle v_{KB} \rangle = 864 \text{ м/с}$, $\langle \epsilon \rangle = 2,48 \cdot 10^{-20} \text{ Дж}$.

6. Во сколько раз средняя квадратичная скорость $\langle v_{\text{кв}} \rangle$ молекул кислорода больше средней квадратичной скорости пылинки массой $m = 10^{-8}$ г, находящейся среди молекул кислорода?

Ответ: в $1,37 \cdot 10^7$ раз.

7. Определите среднюю арифметическую скорость $\langle v \rangle$ молекул газа, если их средняя квадратичная скорость $\langle v_{\text{кв}} \rangle = 1$ км/с.

Ответ: $\langle v \rangle = 0,92$ км/с.

8. Определите наиболее вероятную скорость $v_{\text{в}}$ молекул водорода при температуре $T = 400$ К.

Ответ: $v_{\text{в}} = 1,82$ км/с.

9. При какой температуре средняя квадратичная скорость молекул кислорода больше их наиболее вероятной скорости на 100 м/с?

Ответ: $T = 381$ К.

10. Определите наиболее вероятную скорость молекул газа, плотность которого при давлении 40 кПа составляет $0,35$ кг/м³.

Ответ: $v_{\text{в}} = 478$ м/с.

11. Какая часть молекул кислорода при 0°C обладает скоростью от 100 м/с до 110 м/с?

Ответ: $\frac{\Delta N}{N} = 0,4\%$

12. Какая часть молекул азота при 150°C обладает скоростями от 300 м/с до 800 м/с?

Ответ: $\frac{\Delta N}{N} = 70\%$.

13. Во сколько раз число молекул ΔN_1 , скорости которых лежат в интервале от $\langle v_{\text{кв}} \rangle$ до $\langle v_{\text{кв}} \rangle + \Delta v$, меньше числа молекул ΔN_2 , скорости которых лежат в интервале от $v_{\text{в}}$ до $v_{\text{в}} + \Delta v$?

Ответ: $\frac{\Delta N_1}{\Delta N_2} = 1,1$.

14. Какая часть общего числа N молекул имеет скорости: 1) больше наиболее вероятной скорости, 2) меньше наиболее вероятной скорости?

Ответ: 1) $\frac{\Delta N_1}{N} = 57\%$; 2) $\frac{\Delta N_2}{N} = 43\%$.

15. В баллоне находится 2,5 г кислорода. Найти число молекул кислорода, скорости которых превышают значение средней квадратичной скорости.

Ответ: $\Delta N = 1,9 \cdot 10^{22}$.

16. В сосуде находится 8 г кислорода при температуре 1600 К. Какое число молекул кислорода имеет кинетическую энергию поступательного движения, превышающую значение $6,65 \cdot 10^{-20}$ Дж?

Ответ: $\Delta N = 1,8 \cdot 10^{22}$.

17. Считая, что сухой воздух состоит из 78 % азота, 21 % кислорода и 1 % аргона (по объему), определите, какая часть молекул от общего числа при температуре 20°C движется со скоростями от 350 до 360 м/с.

Ответ: $\left(\frac{\Delta N}{N}\right)_1 = 1,88 \%$; $\left(\frac{\Delta N}{N}\right)_2 = 2,1 \%$; $\left(\frac{\Delta N}{N}\right)_3 = 2,4 \%$.

18. Используя функцию распределения молекул идеального газа по энергиям, найдите для данной температуры отношение средней кинетической энергии $\langle \epsilon \rangle$ молекул к их наиболее вероятному значению энергии ϵ_B .

Ответ: $\frac{\langle \epsilon \rangle}{\epsilon_B} = 3$.

19. Определите долю молекул, энергия которых заключена в интервале от $\epsilon_1 = 0$ до $\epsilon_2 = 0,01kT$.

Ответ: $\frac{\Delta N}{N} = 7,53 \cdot 10^{-4}$.

1.2.2. Распределение Больцмана

Распределение молекул в поле сил тяжести (распределение Больцмана)

$$n = n_0 e^{-\Pi/(kT)} = n_0 e^{-mgh/(kT)} = n_0 e^{-\frac{Mgh}{RT}},$$

где n – концентрация частиц; Π – их потенциальная энергия; n_0 – концентрация частиц в точках поля, где $\Pi = 0$, k – постоянная Больцмана; T – термодинамическая температура.

Барометрическая формула (закон убывания давления газа с высотой в поле силы тяжести)

$$p = p_0 e^{-\frac{M g h}{RT}},$$

где p – давление газа на высоте h ; p_0 – давление на высоте $h = 0$; g – ускорение силы тяжести. Эта формула приближенная, так как температуру T нельзя считать одинаковой для больших разностей высот.

ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

Пример 1. Пылинки массой $m = 10^{-18}$ г взвешены в воздухе. Определите толщину слоя воздуха, в пределах которого концентрация пылинок различается более чем на 1 %. Температура воздуха во всем объеме одинакова и равна 300 К.

Дано:
 $T = 300$ К
 $m = 10^{-21}$ кг
 $n = 0,99n_0$
 $h = ?$

Решение:

При равновесном распределении пылинок концентрация их зависит только от координаты h по оси, направленной вертикально. В этом случае к распределению пылинок можно применить формулу Больцмана

$$n = n_0 e^{-\frac{\Pi}{kT}}. \quad (1)$$

Так как в однородном поле силы тяжести $\Pi = mgh$, то

$$n = n_0 e^{-\frac{mgh}{kT}}. \quad (2)$$

По условию задачи изменение Δn концентрации с высотой мало по сравнению с n ($\Delta n/n = 0,01$), поэтому без существенной погрешности изменение концентрации Δn можно заменить дифференциалом dn .

Дифференцируя выражение (2) по h , получим

$$dn = -n_0 \frac{mg}{kT} e^{-\frac{mgh}{kT}} dh.$$

Так как $n_0 e^{-\frac{mgh}{kT}} = n$, то $dn = -\frac{mg}{kT} n dh$, откуда

$$dh = -\frac{kT}{mg} \frac{dn}{n}.$$

Знак минус показывает, что положительным изменениям координаты ($dh > 0$) соответствует уменьшение относительной концентрации ($dn < 0$). Опустим знак минус и заменим дифференциалы dh и dn конечными приращениями Δh и Δn :

$$\Delta h = -\frac{kT}{mg} \frac{\Delta n}{n}.$$

$$\Delta h = \frac{1,38 \cdot 10^{23} \cdot 300 \cdot 0,01}{10^{-21} \cdot 10} = 4,23 \cdot 10^{-3} \text{ м.}$$

Как видно из полученного результата, концентрация даже таких маленьких пылинок ($m = 10^{-18}$) г очень быстро изменяется с высотой.

Ответ: $\Delta h = 4,23 \cdot 10^{-3} \text{ м.}$

Пример 2. На какой высоте давление воздуха составляет 60 % от давления на уровне моря? Считайте, что температура воздуха везде одинакова и равна 10°C .

Дано:	Решение:
$T = 283 \text{ К}$	Закон убывания давления газа с высотой в поле силы тяжести
$M = 29 \cdot 10^{-3} \text{ кг/моль}$	
$p = 0,6 p_0$	$p = p_0 e^{-\frac{M g (h-h_0)}{RT}},$ где p – давление газа на высоте h ; p_0 – давление на высоте $h_0 = 0$.
$h = ?$	

Так как $h_0 = 0$, то $p = p_0 e^{-\frac{M g h}{RT}}$, откуда $\frac{p}{p_0} = e^{-\frac{M g h}{RT}}$.

Выразим h из полученного уравнения $\frac{M g h}{RT} = -\ln \frac{p}{p_0}$:

$$h = -\frac{RT}{Mg} \ln \frac{p}{p_0}.$$

$$h = -\frac{8,31 \cdot 283}{29 \cdot 10^{-3} \cdot 10} \ln 0,6 = 4,22 \cdot 10^3 \text{ м.}$$

Ответ: $h = 4,22 \cdot 10^3 \text{ м.}$

Пример 3. На какой высоте плотность воздуха в 2 раза меньше, чем его плотность на уровне моря? Считайте, что температура воздуха везде одинакова и равна $T = 273 \text{ К}$.

Дано:	Решение:
$\rho = \frac{1}{2}\rho_0$	Закон убывания давления газа с высотой в поле силы тяжести
$T = 273 \text{ К}$	$p = p_0 e^{-\frac{m_0 g (h-h_0)}{kT}},$
$M = 29 \cdot 10^{-3} \text{ кг/моль}$	где p – давление газа на высоте h ; p_0 – давление на высоте $h_0 = 0$; m_0 – масса молекулы; T – температура, причем $T = \text{const}$.
$h = ?$	

Так как $h_0 = 0$, то $p = p_0 e^{-\frac{m_0 g h}{kT}}$. (1)

Из основного уравнения молекулярно-кинетической теории идеального газа следует, что $p = nkT$, поэтому уравнение (1) можно записать в виде

$$nkT = n_0 k T e^{-\frac{m_0 g h}{kT}}, \text{ или } nT = n_0 e^{-\frac{m_0 g h}{kT}} = n_0 e^{-\frac{M g h}{RT}},$$

где M – молярная масса воздуха.

Учитывая, что плотность газа $\rho = n m_0$, получим

$$\rho = \rho_0 e^{-\frac{\mu g h}{RT}}.$$

По условию задачи $\rho = \frac{1}{2}\rho_0$, тогда $\frac{1}{2}\rho_0 = \rho_0 e^{-\frac{M g h}{RT}}$, откуда следует, что

$$e^{\frac{M g h}{RT}} = 2.$$

Прологарифмируем это уравнение по основанию e :

$$\frac{M g h}{RT} = \ln 2, \text{ откуда } h = \frac{RT \ln 2}{M g}.$$

$$h = \frac{8,31 \cdot 273 \ln 2}{29 \cdot 10^{-3} \cdot 10} = 5422 \text{ м.}$$

Ответ: $h = 5422 \text{ м}$.

Пример 4. Используя идею установки Перрена для определения числа Авогадро и применив к частицам краски, взвешенным в воде, больцмановское распределение, найдите объем частиц, если при расстоянии между двумя слоями $h = 80 \text{ мкм}$ число взвешенных частиц в одном слое вдвое

больше, чем в другом. Плотность растворенной краски $\rho = 1700 \text{ кг/м}^3$, а температура окружающей среды $T = 300 \text{ К}$.

Дано:	Решение:
$h = 80 \cdot 10^{-6} \text{ м}$	Распределение Больцмана во внешнем потенциальном поле имеет вид
$T = 300 \text{ К}$	$n = n_0 e^{-\frac{U}{kT}},$
$\rho = 1700 \text{ кг/м}^3$	где U – потенциальная энергия частицы в гравитационном поле Земли.
$N = 2N_0$	
$V = ?$	

$$U = mgh, \text{ поэтому } n = n_0 e^{-\frac{mgh}{kT}}. \quad (1)$$

Идея установки Перрена состоит в том, что взвешенные в жидкости частицы, совершающие броуновское движение, подчиняются законам молекулярно-кинетической теории, как и сами молекулы вещества.

Число частиц в слое $N = nV$. Считая объемы слоев равными (см. рисунок) и принимая во внимание условие задачи ($N = 2N_0$), получим, что

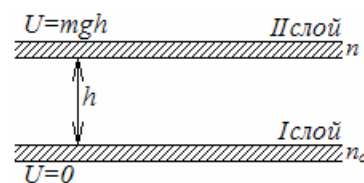
$$n = 2n_0, \quad (2)$$

где n_0 – концентрация частиц нижнего слоя;

n – концентрация частиц верхнего слоя

Из формул (1) и (2) следует, что

$$2n_0 = n_0 e^{-\frac{mgh}{kT}}, \quad e^{-\frac{mgh}{kT}} = 2, \quad \frac{mgh}{kT} = \ln 2.$$



Отсюда масса частицы растворенной краски

$$m = \frac{\ln 2 \cdot kT}{gh}.$$

Зная массу частицы и плотность краски, можно найти объем одной частицы.

$$V = \frac{m}{\rho} = \frac{\ln 2 \cdot kT}{\rho gh}.$$

$$V = \frac{\ln 2 \cdot 1,38 \cdot 10^{-23} \cdot 300}{1700 \cdot 10 \cdot 80 \cdot 10^{-6}} = 5,22 \cdot 10^{-21} \text{ м}^3.$$

Ответ: $V = 5,22 \cdot 10^{-21} \text{ м}^3$.

Задачи для самостоятельного решения

Средний уровень

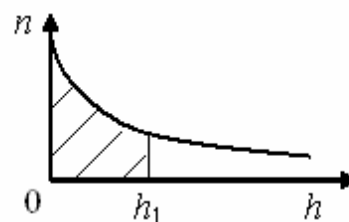
1. Перечислите номера правильных утверждений о системах, подчиняющихся распределению Больцмана?

- 1) распределение Больцмана описывает равновесное распределение частиц по координатам в стационарном потенциальном поле;
- 2) распределение Больцмана применимо как к электронейтральным, так и к заряженным классическим частицам;
- 3) распределение Больцмана применимо для неразличимых (тождественных) частиц;
- 4) распределение Больцмана применимо только для различимых частиц.

2. При каких допущениях получена барометрическая формула, характеризующая распределения давления в атмосфере по высоте?

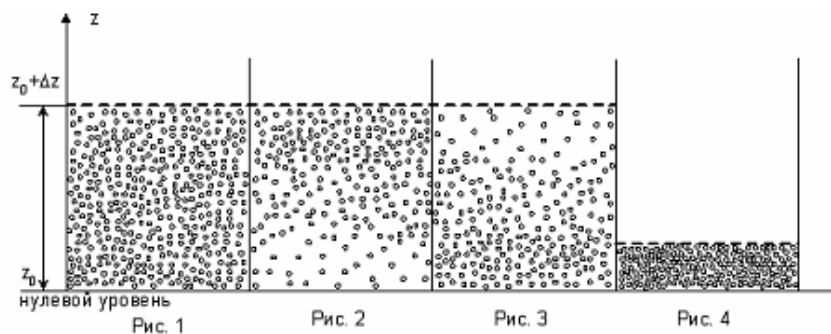
- 1) $g = \text{const}$;
- 2) Земля-шар;
- 3) $T = \text{const}$;
- 4) $p = \text{const}$.

3. На рисунке дан график зависимости концентрации n молекул воздуха от высоты h над поверхностью Земли. Что определяет заштрихованная площадь?



- 1) среднюю концентрацию молекул на высотах от 0 до h_1 ;
- 2) концентрацию молекул на высоте h_1 ;
- 3) число молекул в кубе с ребром h_1 ;
- 4) число молекул в столбе высотой h_1 с площадью основания 1 м^2 .

4. Формула Больцмана характеризует распределение частиц, находящихся в состоянии хаотического теплового движения, в потенциальном силовом поле, в частности распределение молекул по высоте в изотермической атмосфере. Соотнесите рисунки и соответствующие им утверждения.

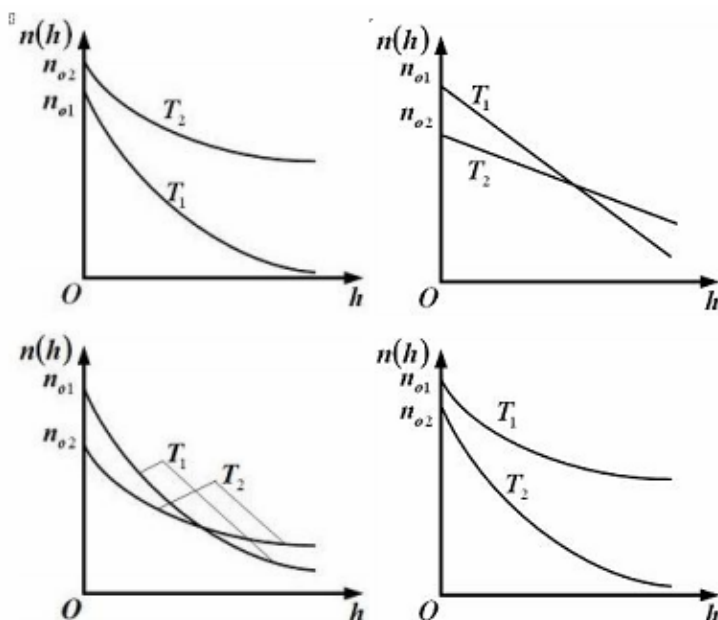


1) распределение молекул воздуха в атмосфере Земли;
 2) распределение молекул в силовом поле при температуре $T \rightarrow 0$;
 3) распределение молекул не является больцмановским и описывается функцией $n = n_0 e^{\Pi/(kT)}$;

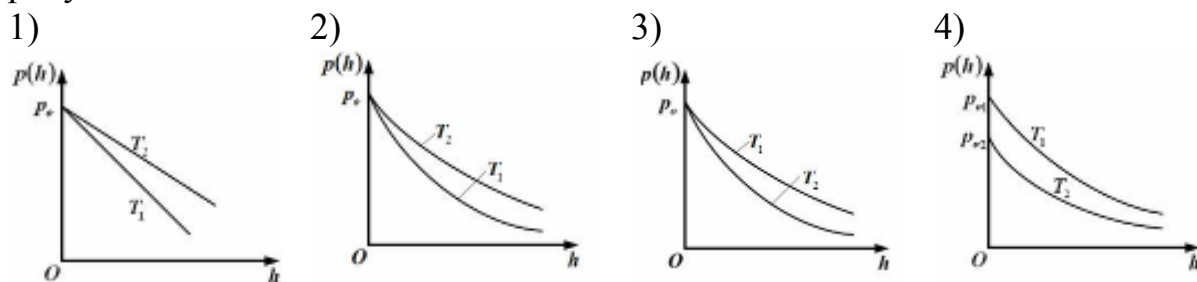
4) распределение молекул в силовом поле при очень высокой температуре, когда энергия хаотического теплового движения значительно превосходит потенциальную энергию молекул;

5) распределение молекул по кинетическим энергиям.

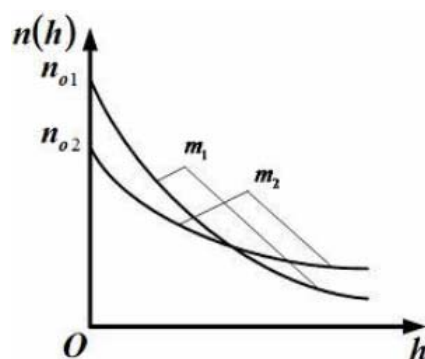
5. На каком из рисунков представлена зависимость концентрации молекул идеального газа во внешнем однородном поле силы тяжести от высоты для двух разных температур ($T_2 > T_1$)?



6. Зависимость давления идеального газа во внешнем однородном поле силы тяжести от высоты двух разных температур ($T_2 > T_1$) представлена на рисунке.....

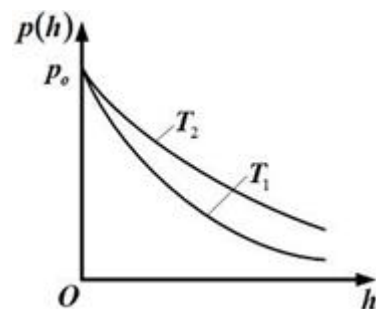


7. На рисунке представлены графики функций распределения молекул идеального газа n во внешнем однородном поле силы тяжести от высоты h для двух разных газов, где m_1 и m_2 – массы молекул газа (распределение Больцмана). Для этих функций верными являются утверждения, что ...



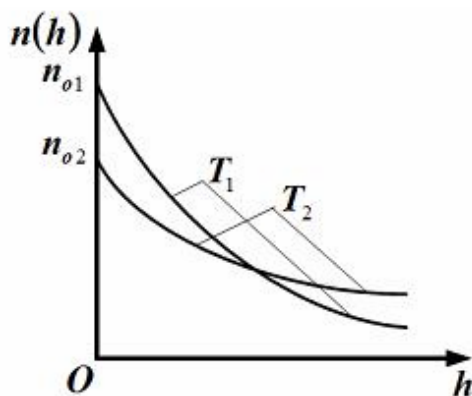
- 1) масса m_1 больше массы m_2 ;
- 2) концентрация молекул газа с меньшей массой на «нулевом уровне» ($h = 0$) меньше;
- 3) масса m_1 меньше массы m_2 ;
- 4) концентрация молекул газа с меньшей массой на «нулевом уровне» ($h = 0$) больше.

8. Зависимости давления p идеального газа во внешнем однородном поле силы тяжести от высоты h для двух разных температур определяются барометрической формулой и представлены на рисунке. Для этих функций неверным является утверждение, что ...



- 1) температура T_1 выше температуры T_2 ;
- 2) давление газа на высоте h равно давлению на «нулевом уровне» ($h = 0$), если температура газа стремится к абсолютному нулю;
- 3) температура T_1 ниже температуры T_2 ;
- 4) зависимость давления идеального газа от высоты определяется не только температурой газа, но и массой молекул.

9. На рисунке представлена зависимость концентрации молекул n одного и того же идеального газа во внешнем однородном поле силы тяжести от высоты h для двух разных температур.

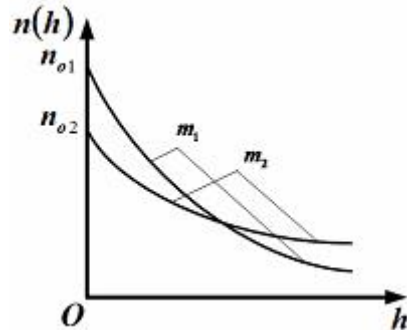


Какому соотношению удовлетворяют температуры газов:

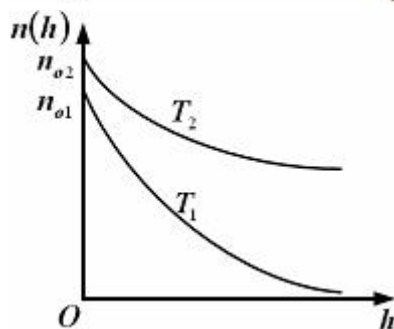
- 1) $T_1 > T_2$; 2) $T_1 < T_2$; 3) $T_1 = T_2$.

10. Формула $n = n_0 e^{-mgh/(kT)}$ описывает распределение одинаковых молекул массой m по высоте в изотермической атмосфере. Здесь n_0 – концентрация молекул при $h = 0$, n – их концентрация на высоте h . Для этой зависимости справедливы следующие утверждения...

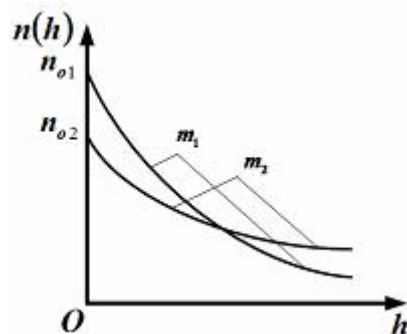
1) приведенные на рисунке кривые соответствуют распределениям для двух разных газов при одинаковой температуре, причем массы молекул удовлетворяют соотношению $m_1 < m_2$;



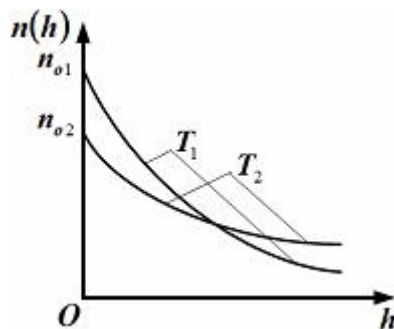
2) приведенные на рисунке кривые соответствуют распределениям для одного и того же газа при разных температурах, причем $T_2 < T_1$;



3) приведенные на рисунке кривые соответствуют распределениям для двух разных газов при одинаковой температуре, причем массы молекул удовлетворяют соотношению $m_1 > m_2$;

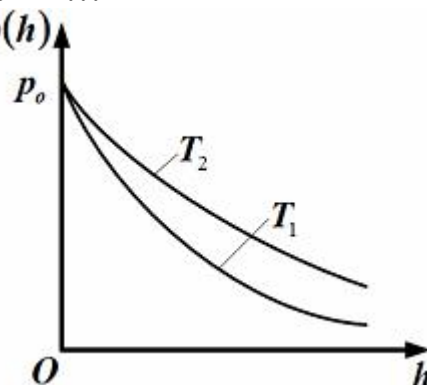


4) приведенные на рисунке кривые соответствуют распределениям для одного и того же газа при разных температурах, причем $T_2 < T_1$.

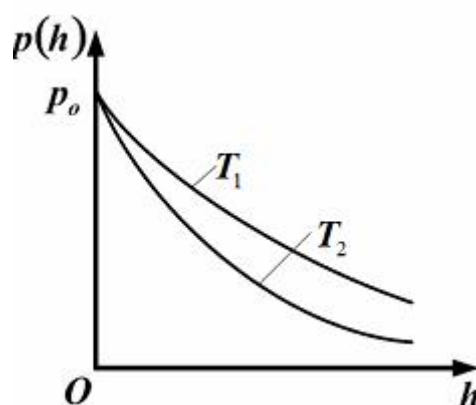


11. Зависимость давления от высоты для изотермической атмосферы описывается барометрической формулой $p = p_0 e^{-\frac{Mgh}{RT}}$. Для этой зависимости справедливы следующие утверждения...

1) Зависимость давления $p(h)$ одного и того же газа при двух разных температурах ($T_2 > T_1$) представлена на рисунке;



2) зависимость давления $p(h)$ одного и того же газа при двух разных температурах ($T_2 > T_1$) представлена на рисунке;



3) зависимость давления $p(h)$ от высоты определяется не только температурой газа, но и массой его молекул;

4) с понижением температуры давление газа на высоте h стремится к давлению на высоте $h = 0$.

Достаточный уровень

1. На какой высоте давление воздуха составляет 50 % от давления на уровне моря? Считайте, что температура воздуха везде одинакова и равна 10°C .

Ответ: $h = 5,62$ км.

2. Каково давление воздуха в шахте на глубине 1 км, если считать, что температура по всей высоте постоянна и равна 22°C , а ускорение свободного падения не зависит от высоты? Давление воздуха у поверхности Земли примите равным ρ_0 .

Ответ: $\rho = 1,12\rho_0$.

3. Определите отношение давления воздуха на высоте 1 км к давлению на дне скважины глубиной 1 км. Воздух у поверхности Земли находится при нормальных условиях, и его температура не зависит от высоты.

Ответ: $\frac{\rho_1}{\rho_2} = 0,778$.

4. На какой высоте плотность воздуха в e раз (e – основание натуральных логарифмов) меньше по сравнению с его плотностью на уровне моря? Температуру воздуха и ускорение свободного падения считайте не зависящими от высоты.

Ответ: $h = 7,98$ км.

5. У поверхности Земли молекул гелия почти в 10^8 раз, а водорода почти в 10^6 раз меньше, чем молекул азота. На какой высоте число молекул гелия будет равно числу молекул азота? Водорода? Принять среднюю температуру атмосферы равной 0°C .

Ответ: $h_1 = 111$ км, $h_2 = 123$ км.

6. На высоте 3 км над поверхностью Земли в 1 см^3 воздуха содержится примерно 10^2 пылинок, а у самой поверхности – примерно 10^5 . Определите среднюю массу пылинки и оцените ее размер, полагая, что плотность пылинки $1,5\text{ г/см}^3$. Температура воздуха 27°C .

Ответ: $m = 10^{-24}$ кг, $d = 10^{-9}$ м.

7. На сколько уменьшится атмосферное давление $p = 100\text{ кПа}$ при подъеме наблюдателя над поверхностью Земли на высоту 100 м? Считать, что температура воздуха равна 290 К и не изменяется с высотой.

Ответ: на 1,18 кПа.

8. Масса каждой из пылинок, взвешенных в воздухе, равна 1 аг. Отношение концентрации пылинок на высоте $h = 1$ м к концентрации их на высоте $h_0 = 0$ равно 0,787. Температура воздуха 300 К. Определите по этим данным значение постоянной Авогадро.

Ответ: $N_A = 5,97 \cdot 10^{23}$ моль $^{-1}$.

1.2.3. Длина свободного пробега и число столкновений молекул

Средняя длина свободного пробега молекул газа

$$\langle l \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}\pi d^2 n},$$

где d – эффективный диаметр молекулы; n – концентрация молекул.

При постоянной температуре концентрация молекул n пропорциональна давлению p . Следовательно,

$$\frac{\langle l_1 \rangle}{\langle l_2 \rangle} = \frac{n_2}{n_1} = \frac{p_2}{p_1}.$$

Среднее число соударений, испытываемых одной молекулой газа в единицу времени,

$$\langle z \rangle = \sqrt{2}\pi d^2 n \langle v \rangle,$$

где $\langle v \rangle$ – средняя арифметическая скорость молекул.

ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

Пример 1. Определите среднюю длину свободного пробега молекул углекислого газа при температуре 100 °С и давлении 100 мм ртутного столба. Диаметр молекулы $3,2 \cdot 10^{-8}$ см.

Дано:	Решение:
$T = 373 \text{ К}$ $p = 13300 \text{ Па}$ $d = 3,2 \cdot 10^{-10} \text{ м}$ $k = 1,38 \cdot 10^{-23} \text{ Дж/К}$ $\langle l \rangle = ?$	Средняя длина свободного пробега молекул газа определяется по формуле $\langle l \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}\pi d^2 n}, \quad (1)$ где n – концентрация молекул.

Выразим n из основного уравнения молекулярно-кинетической теории для идеального газа ($p = nkT$):

$$n = \frac{p}{kT}. \quad (2)$$

Подставляя выражение (2) в формулу (1), получим:

$$\langle l \rangle = \frac{kT}{\sqrt{2}\pi d^2 p}.$$

$$\langle l \rangle = \frac{1,38 \cdot 10^{-23} \cdot 373}{\sqrt{2} \cdot 3,14 \cdot (3,2 \cdot 10^{-10})^2 \cdot 13300} = 8,51 \cdot 10^{-7} \text{ м}.$$

Ответ: $\langle l \rangle = 8,51 \cdot 10^{-7} \text{ м}.$

Пример 2. Определите плотность азота, если молекула за 1 с испытывает $2,05 \cdot 10^8 \text{ с}^{-1}$ столкновений при температуре 280 К. Какова средняя длина свободного пробега молекул?

Дано:	Решение:
$T = 280 \text{ К}$	Плотность азота определяется по формуле
$\langle z \rangle = 2,05 \cdot 10^8 \text{ с}^{-1}$	$\rho = \frac{m}{V}, \quad (1)$
$d = 3,1 \cdot 10^{-10} \text{ м}$	где m – масса азота; V – объем.
$M = 28 \cdot 10^{-3} \text{ кг/моль}$	Массу азота можно выразить через число молекул в данном объеме и массу одной молекулы:
$N_A = 6,02 \cdot 10^{23} \text{ моль}^{-1}$	$m = m_1 N. \quad (2)$
$\rho = ?, \langle l \rangle = ?$	

Массу m_1 одной молекулы можно найти делением массы одного моля азота на постоянную Авогадро:

$$m_1 = \frac{M}{N_A}. \quad (3)$$

Число N молекул, содержащихся в объеме V газа, равно

$$N = n_0 V, \quad (4)$$

где n_0 – концентрация молекул.

Подставляя (4) и (3) в формулу (2), получим

$$m = \frac{M n_0 V}{N_A}. \quad (5)$$

Далее, подставляя (5) в (1), получим выражение для плотности газа

$$\rho = \frac{M n_0}{N_A}. \quad (6)$$

Концентрацию молекул найдем из формулы для числа столкновений их в единицу времени

$$\langle z \rangle = \sqrt{2} \pi d^2 n_0 \langle v \rangle,$$

откуда

$$n_0 = \frac{\langle z \rangle}{(\sqrt{2} \pi d^2 \langle v \rangle)}, \quad (7)$$

где $d = 3,1 \cdot 10^{-10} \text{ м}$ – эффективный диаметр молекулы азота; $\langle v \rangle$ – средняя арифметическая скорость молекул;

$$\langle v \rangle = \sqrt{\frac{8RT}{\pi M}}, \quad (8)$$

где $R = 8,31$ Дж/(моль·К) – универсальная газовая постоянная; T – термодинамическая температура.

Подставляя выражение средней скорости молекул в формулу (7), получим

$$n_0 = \frac{\langle z \rangle}{4d^2 \sqrt{\frac{\pi RT}{M}}}. \quad (9)$$

Подставляя величину n_0 из (9) в (6), получим

$$\rho = \frac{M \langle z \rangle}{N_A 4d^2 \sqrt{\frac{\pi RT}{M}}}. \quad (10)$$

$$\rho = \frac{28 \cdot 10^{-3}}{6,02 \cdot 10^{23}} \cdot \frac{2,05 \cdot 10^8}{4 \cdot 3,1^2 \cdot 10^{-20} \sqrt{\frac{3,14 \cdot 8,31 \cdot 280}{28 \cdot 10^{-3}}}} = 4,86 \cdot 10^{-2} \text{ кг/м}^3.$$

Среднюю длину свободного пробега молекул азота находим по формуле

$$\langle l \rangle = \frac{1}{\sqrt{2} \pi d^2 n_0}.$$

Подставив в нее выражение для концентрации молекул, получим

$$\langle l \rangle = \sqrt{\frac{8RT}{\pi M}} \cdot \frac{1}{\langle z \rangle}. \quad (11)$$

$$\langle l \rangle = \frac{1}{2,05} \cdot \sqrt{\frac{8 \cdot 8,31 \cdot 280}{3,14 \cdot 28 \cdot 10^{-3}}} = 2,24 \text{ мкм}.$$

Ответ: $\rho = 4,86 \cdot 10^{-2} \text{ кг/м}^3$, $\langle l \rangle = 2,24 \text{ мкм}$.

Пример 3. Идеальный газ совершил изохорный процесс, и при этом его давление возросло в 4 раза. Во сколько раз изменилась длина свободного пробега и средняя частота столкновений молекул?

Дано:

$$p_2 = 4p_1$$

$$V = \text{const}$$

$$\frac{\langle l_2 \rangle}{\langle l_1 \rangle} = ? \quad \frac{\langle z_2 \rangle}{\langle z_1 \rangle} = ?$$

Решение:

Средняя длина свободного пробега молекул газа

$$\langle l \rangle = 1 / \sqrt{2} \pi d^2 n. \quad (1)$$

Отношение средней длины свободного пробега молекул до и после совершения процесса обратно пропорционально их концентрациям

$$\frac{\langle l_2 \rangle}{\langle l_1 \rangle} = \frac{1 / \sqrt{2} \pi d^2 n_2}{1 / \sqrt{2} \pi d^2 n_1} = \frac{n_1}{n_2}. \quad (2)$$

В ходе процесса объем газа не изменяется, следовательно, остается постоянной концентрация молекул, т.е.

$$n_1 = n_2 = \frac{N}{V}, \quad (3)$$

где N – число молекул газа.

Так как $d = \text{const}$ и $n = \text{const}$, то

$$\frac{\langle l_2 \rangle}{\langle l_1 \rangle} = 1, \quad (4)$$

то есть, средняя длина свободного пробега молекул не изменяется.

Число столкновений молекул в единицу времени

$$\langle z \rangle = \sqrt{2} \pi d^2 n \langle v \rangle. \quad (5)$$

Отношение числа столкновений молекул до и после процесса с учетом соотношения (3) прямо пропорционально отношению их средних арифметических скоростей:

$$\frac{\langle z_2 \rangle}{\langle z_1 \rangle} = \frac{\sqrt{2} \pi d^2 n_2 \langle v_2 \rangle}{\sqrt{2} \pi d^2 n_1 \langle v_1 \rangle} = \frac{\langle v_2 \rangle}{\langle v_1 \rangle}. \quad (6)$$

Средняя арифметическая скорость молекул газа

$$\langle v \rangle = \sqrt{\frac{8RT}{\pi M}}. \quad (7)$$

Подставив выражение (7) в формулу (6), получим:

$$\frac{\langle z_2 \rangle}{\langle z_1 \rangle} = \sqrt{\frac{T_2}{T_1}}. \quad (8)$$

Согласно закону Шарля для изохорного процесса

$$\frac{p_2}{p_1} = \frac{T_2}{T_1}. \quad (9)$$

Следовательно,

$$\frac{\langle z_2 \rangle}{\langle z_1 \rangle} = \sqrt{\frac{p_2}{p_1}} = \sqrt{\frac{4p_1}{p_1}}. \quad (10)$$

$$\frac{\langle z_2 \rangle}{\langle z_1 \rangle} = \sqrt{4} = 2.$$

Ответ: длина свободного пробега не изменится;
средняя частота столкновения молекул увеличится в 2 раза.

Пример 4. Идеальный газ совершил изотермический процесс, в результате его давление возросло в 2 раза. Как и во сколько раз изменились: а) длина свободного пробега молекул, б) средняя частота столкновений?

Дано:

$$p_2 = 2p_1$$

$$T = \text{const}$$

$$\frac{\langle l_2 \rangle}{\langle l_1 \rangle} - ? \quad \frac{\langle z_2 \rangle}{\langle z_1 \rangle} - ?$$

Решение:

а) Средняя длина свободного пробега молекул газа

$$\langle l \rangle = 1 / \sqrt{2} \pi d^2 n. \quad (1)$$

Отношение средней длины свободного пробега молекул до и после совершения процесса обратно пропорционально их концентрациям

$$\frac{\langle l_2 \rangle}{\langle l_1 \rangle} = \frac{1 / \sqrt{2} \pi d^2 n_2}{1 / \sqrt{2} \pi d^2 n_1} = \frac{n_1}{n_2}. \quad (2)$$

Так как

$$n = \frac{N}{V}, \quad (3)$$

то при одинаковом числе N молекул газа

$$\frac{\langle l_2 \rangle}{\langle l_1 \rangle} = \frac{NV_2}{NV_1} = \frac{V_2}{V_1}. \quad (4)$$

По закону Бойля – Мариотта для изотермического процесса

$$p_1 V_1 = p_2 V_2 \Rightarrow \frac{V_1}{V_2} = \frac{p_2}{p_1} = \frac{2p_1}{p_1}. \quad (5)$$

Тогда из уравнений (4) и (5) получим:

$$\frac{\langle l_2 \rangle}{\langle l_1 \rangle} = \frac{p_1}{2p_1} = \frac{1}{2}, \quad (6)$$

т.е. средняя длина свободного пробега молекул газа уменьшится в 2 раза.

б) Число столкновений молекул в единицу времени

$$\langle z \rangle = \sqrt{2} \pi d^2 n \langle v \rangle \quad (7)$$

зависит от средней арифметической скорости $\langle v \rangle = \sqrt{\frac{8RT}{\pi M}}$ и, следовательно, от температуры газа.

(8)

Так как при изотермическом процессе $T = \text{const}$, то $\langle v_1 \rangle = \langle v_2 \rangle$.

Поэтому

$$\frac{\langle z_2 \rangle}{\langle z_1 \rangle} = \frac{\sqrt{2} \pi d^2 n_2 \langle v_2 \rangle}{\sqrt{2} \pi d^2 n_1 \langle v_1 \rangle} = \frac{n_2}{n_1}. \quad (9)$$

Из формул (2), (6) и (9) следует, что

$$\frac{\langle z_2 \rangle}{\langle z_1 \rangle} = \frac{n_2}{n_1} = 2, \quad (10)$$

т.е. длина свободного пробега молекул увеличится в 2 раза.

Ответ: а) уменьшилась в 2 раза, б) увеличилась в 2 раза.

Пример 5. Функция распределения молекул по длинам свободного пробега x имеет вид $f(x) = Ae^{-kx}$, где A и k – некоторые коэффициенты. Определите относительное число молекул, длина свободного пробега которых либо меньше λ , либо заключена в диапазоне от λ до 2λ , где λ – средняя длина свободного пробега.

Дано:	Решение:
$f(x) = Ae^{-kx}$	Заданная функция распределения позволяет найти число dN молекул, длина свободного пробега которых лежит в пределе от x до $x+dx$, отнесённое к общему числу N молекул:
$\frac{\Delta N_1}{N} = ? \quad \frac{\Delta N_2}{N} = ?$	$\frac{dN}{N} = f(x) dx. \quad (1)$

Доля молекул, длина свободного пробега которых находится в диапазоне от x_1 до x_2 , может быть найдена интегрированием выражения (1) в указанных пределах:

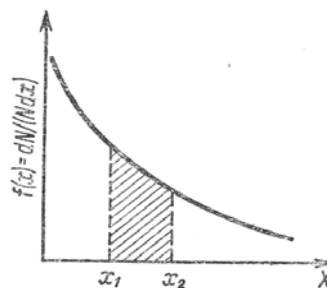
$$\frac{dN}{N} = \int_{x_1}^{x_2} f(x) dx. \quad (2)$$

Искомая доля молекул (см. рисунок) численно равна площади заштрихованной фигуры.

Использование формулы (2) возможно только после того, как будут определены значения постоянных коэффициентов A и k , что может быть сделано из условия нормировки и по известной средней длине свободного пробега.

Условие нормировки сводится к тому, что при расширении пределов интегрирования от 0 до ∞

$$\int_0^{\infty} f(x) dx = 1. \quad (3)$$



Действительно, число молекул, длина свободного пробега которых лежит в пределах от 0 до ∞ , есть общее число молекул, т.е.

$\Delta N = N \int_0^{\infty} f(x) dx = N$. (Таким образом, вся площадь, ограниченная осями координат и графиком $f(x)$, численно равна единице.)

Средняя длина свободного пробега

$$\langle x \rangle = \lambda = \frac{1}{N} \int x dN,$$

где (N) под знаком интеграла означает, что суммирование проводится по всем молекулам. Подставляя dN из равенства (1) и учитывая, что при суммировании по всем молекулам длина свободного пробега может принимать любое значение от 0 до ∞ , получим

$$\lambda = \int_0^{\infty} x f(x) dx. \quad (4)$$

Подставим в уравнения (3) и (4) заданное выражение функции $f(x)$ и проведём интегрирование:

$$\int_0^{\infty} A e^{-kx} dx = \frac{A}{k} = 1, \quad \int_0^{\infty} x A e^{-kx} dx = \frac{A}{k^2} = \lambda.$$

Второй интеграл может быть взят интегрированием по частям. При подстановке пределов следует иметь в виду, что $\lim_{x \rightarrow \infty} x e^{-kx} = 0$. Сопоставив полученные выражения, найдём, что

$$A = k = 1/\lambda.$$

Доля молекул, длина свободного пробега которых меньше λ ,

$$\frac{\Delta N_1}{N} = \frac{1}{\lambda} \int_0^{\lambda} e^{-x/\lambda} dx = 1 - e^{-1} = 0,63.$$

Доля молекул, длина свободного пробега которых лежит в диапазоне от λ до 2λ ,

$$\frac{\Delta N_2}{N} = \frac{1}{\lambda} \int_{\lambda}^{2\lambda} e^{-x/\lambda} dx = e^{-1} - e^{-2} = 0,23.$$

Таким образом, примерно 63 % от общего числа молекул обладают длиной свободного пробега, меньшей λ , и 23 % – длиной свободного пробега, лежащей в диапазоне от λ до 2λ .

Ответ: $\frac{\Delta N_1}{N} = 0,63, \frac{\Delta N_2}{N} = 0,23.$

Задачи для самостоятельного решения

Средний уровень

1. Средняя длина свободного пробега молекул зависит от...

- 1) концентрации молекул;
- 2) массы молекул;
- 3) давления газа;
- 4) объема газа.

2. Выберите случай, в котором средняя длина свободного пробега двухатомных молекул, входящих в состав воздуха, в изотермических условиях является максимальной:

- 1) на подземной станции метро;
- 2) на уровне моря;
- 3) в жилом отсеке космической станции;
- 4) в высокогорье Тибета.

3. Если в воздухе при постоянной температуре повысить давление в 5 раз, то средняя длина свободного пробега молекул, входящих в состав воздуха...

- 1) увеличится в 5 раз;
- 2) уменьшится в 5 раз;
- 3) останется неизменной;
- 4) увеличится в 25 раз.

4. Спущенную автомобильную шину накачивают до давления 5 атм при постоянной температуре. При этом средняя длина свободного пробега молекул воздуха, заполняющего шину, уменьшается в ... раз.

5. Выберите случай, когда средняя частота столкновений двухатомных молекул, входящих в состав воздуха в изотермических условиях, является максимальной:

- 1) на уровне моря;
- 2) на вершине Останкинской башни;
- 3) на вершине Эльбруса;
- 4) на балконе второго этажа жилого дома.

6. В сосуде, разделённом пополам непроницаемой теплоизолирующей перегородкой, находятся одинаковое число моль идеального газа при температурах T_1 в одной части сосуда и $T_2 = 4T_1$ – в другой. При этом частоты z_1 и z_2 соударений молекул с перегородкой

- | | |
|------------------|------------------------|
| 1) $z_1 > z_2$; | 3) $z_1 = z_2$; |
| 2) $z_1 < z_2$; | 4) $z_1 \approx z_2$. |

7. В сосуде, разделённом пополам на равные объёмы непроницаемой перегородкой, находятся при одинаковых условиях газы N_2 и CO . При этом частота z_{N_2} соударений молекул N_2 с перегородкой

- | | |
|-------------------------|-------------------------------|
| 1) $z_{N_2} > z_{CO}$; | 3) $z_{N_2} = z_{CO}$; |
| 2) $z_{N_2} < z_{CO}$; | 4) $z_{N_2} \approx z_{CO}$. |

8. Сколько столкновений в секунду испытывает молекула кислорода, если средняя длина свободного пробега при нормальных условиях равна 65 нм?

- | | |
|------------------------|-----------------------|
| 1) $0,71 \cdot 10^9$; | 3) $7,1 \cdot 10^8$; |
| 2) $71 \cdot 10^9$; | 4) $7,1 \cdot 10^9$. |

Достаточный уровень

1. Оцените среднюю длину свободного пробега молекулы азота в воздухе при нормальных условиях. Радиус молекулы азота принять равным 0,18 нм.

Ответ: $\langle l \rangle = 60$ нм.

2. В баллоне вместимостью $V = 2,53$ л содержится углекислый газ CO_2 при температуре $T = 400$ К и давлении $p = 1,3$ Па. Сколько столкновений $\langle z \rangle$ происходит между молекулами за $t = 1$ с?

Ответ: $\langle z \rangle = 2,92 \cdot 10^{22} \text{ с}^{-1}$.

3. Определите среднюю длину свободного пробега молекул кислорода, находящегося при температуре 0°C , если среднее число столкновений, испытываемых молекулой в 1 с, равно $3,7 \cdot 10^9$.

Ответ: $\langle l \rangle = 115$ нм.

4. При температуре 300 К и некотором давлении средняя длина свободного пробега молекул кислорода равна 0,1 мкм. Чему равно среднее число столкновений, испытываемых молекулами за 1 с, если сосуд откачать до 0,1 первоначального давления? Температуру газа считать постоянной.

Ответ: $\langle z \rangle = 4,45 \cdot 10^8 \text{ с}^{-1}$.

5. Средняя длина свободного пробега $\langle l_1 \rangle$ молекул водорода при нормальных условиях составляет 0,1 мкм. Определите среднюю длину их

свободного пробега при давлении 0,1 мПа, если температура газа остается постоянной.

Ответ: $\langle l_2 \rangle = 101 \text{ м}$.

6. Определите среднюю продолжительность τ свободного пробега молекул водорода при температуре 27°C и давлении 0,5 кПа, принимая диаметр молекулы водорода равным 0,28 нм.

Ответ: $\tau = 13,3 \text{ нс}$.

7. При каком давлении средняя длина свободного пробега молекул водорода равна 2,5 см, если температура газа равна 67°C? Диаметр молекулы водорода примите равным 0,28 нм.

Ответ: $p = 0,539 \text{ Па}$.

8. Определите: 1) плотность ρ воздуха в сосуде; 2) концентрацию n его молекул; 3) среднюю длину свободного пробега $\langle l \rangle$ молекул, если сосуд откачан до давления 0,13 Па. Диаметр молекулы воздуха примите равным 0,27 нм. Температура воздуха 300 К.

Ответ: $\rho = 1,51 \cdot 10^{-6} \text{ кг/м}^3$; $n = 3,14 \cdot 10^{19} \text{ м}^{-3}$; $\langle l \rangle = 0,1 \text{ м}$.

9. Найдите среднее время между двумя последовательными столкновениями молекул азота при температуре 10°C и давлении 1 мм рт. ст.

Ответ: $\tau = 1,6 \cdot 10^{-6} \text{ с}$.

10. Сосуд с воздухом откачан до давления 10^{-6} мм рт. ст. Чему равны при этом плотность воздуха в сосуде, число молекул в 1 см^3 сосуда и средняя длина свободного пробега молекул? Диаметр молекул воздуха считать равным $3 \cdot 10^{-8} \text{ см}$ и массу одного моля $M = 29 \cdot 10^{-3} \text{ кг/моль}$. Температура воздуха равна 17°C.

Ответ: $\rho = 1,6 \cdot 10^{-9} \text{ кг/м}^3$; $n = 3,3 \cdot 10^{10} \text{ см}^{-3}$; $\langle l \rangle = 76 \text{ м}$.

1.2.3. Явления переноса

Основные формулы

Диффузия – это явление самопроизвольного взаимного проникновения и перемешивания частиц соприкасающихся газов, жидкостей и твердых тел. Она возникает вследствие неодинаковой плотности в разных частях объема.

Закон Фика:

$$\Delta m = -D \left(\frac{d\rho}{dx} \right) S \Delta t,$$

где Δm – масса газа, перенесенная в результате диффузии через поверхность площадью S за время Δt ; $\frac{d\rho}{dx}$ – градиент плотности газа; D – коэффициент диффузии.

Коэффициент диффузии

$$D = \frac{1}{3} \langle v \rangle \langle l \rangle,$$

где $\langle v \rangle$ – средняя арифметическая скорость; $\langle l \rangle$ – средняя длина свободного пробега молекул.

Теплопроводность – это явление переноса тепловой энергии от более нагретых частей вещества к менее нагретым.

Закон Фурье:

$$\Delta Q = -\lambda \left(\frac{dT}{dx} \right) S \Delta t,$$

где ΔQ – количество теплоты, перенесенной посредством теплопроводности через сечение площадью S за время Δt ; $\frac{dT}{dx}$ – градиент температуры; λ – коэффициент теплопроводности.

Коэффициент теплопроводности газа

$$\lambda = \frac{1}{3} c_v \rho \langle v \rangle \langle l \rangle,$$

где c_v – удельная теплоемкость газа при постоянном объеме; ρ – плотность газа; $\langle v \rangle$ – средняя арифметическая скорость; $\langle l \rangle$ – средняя длина свободного пробега молекул.

Внутреннее трение (вязкость) возникает между параллельными слоями газа (жидкости), движущимися с различными скоростями. Из-за хаотического теплового движения происходит обмен молекулами между слоями, в результате чего импульс слоя, движущегося быстрее, уменьшается, а движущегося медленнее – увеличивается.

Закон Ньютона:

$$F = -\eta \frac{dv}{dx} S,$$

где F – сила внутреннего трения между движущимися слоями газа; $\frac{dv}{dx}$ – градиент (поперечный) скорости течения слоев; η – динамическая вязкость газа.

Динамическая вязкость

$$\eta = \frac{1}{3} \rho \langle v \rangle \langle l \rangle,$$

где ρ – плотность газа (жидкости); $\langle v \rangle$ – средняя скорость хаотического движения молекул; $\langle l \rangle$ – средняя длина свободного пробега молекул.

ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

Пример 1. Какой толщины необходимо сделать деревянную стену здания, чтобы она давала такую же потерю тепла, что и кирпичная стена толщиной 40 см при одинаковой температуре внутри и снаружи здания? Коэффициенты теплопроводности кирпича и дерева равны соответственно 0,7 и 0,175 Вт/(м·К).

Дано:	Решение:
$\Delta x_{\text{к}} = 40 \text{ см} = 0,4 \text{ м}$	Потеря тепла характеризуется плотностью теплового потока, которая в соответствии с уравнением Фурье, определяется по формуле
$j_{E_{\text{к}}} = j_{E_{\text{д}}}$	
$\lambda_{\text{к}} = 0,7 \frac{\text{Вт}}{\text{м} \cdot \text{К}} \quad \lambda_{\text{д}} = 0,175 \frac{\text{Вт}}{\text{м} \cdot \text{К}}$	
$\Delta x_{\text{д}} = ?$	$j_E = -\lambda \frac{dT}{dx}. \quad (1)$

Считая, что температура в стене изменяется по линейному закону

$$\frac{dT}{dx} \approx \frac{\Delta T}{\Delta x},$$

запишем формулу (1) в виде $j_E = -\lambda \frac{\Delta T}{\Delta x}.$

Для кирпичной стены $j_{E_{\text{к}}} = -\lambda_{\text{к}} \frac{\Delta T}{\Delta x_{\text{к}}}.$

Для деревянной стены $j_{E_{\text{д}}} = -\lambda_{\text{д}} \frac{\Delta T}{\Delta x_{\text{д}}}.$

По условию задачи $j_{E_{\text{к}}} = j_{E_{\text{д}}}.$

Тогда $\lambda_{\text{к}} \frac{\Delta T}{\Delta x_{\text{к}}} S = \lambda_{\text{д}} \frac{\Delta T}{\Delta x_{\text{д}}} S$, откуда $\Delta x_{\text{д}} = \frac{\lambda_{\text{д}} \Delta x_{\text{к}}}{\lambda_{\text{к}}}.$

$$\Delta x_{\text{д}} = \frac{0,175 \cdot 0,4}{0,7} = 0,1 \text{ м}.$$

Ответ: $\Delta x_{\text{д}} = 0,1 \text{ м}.$

Пример 2. Определите, за какое время растают 20 кг льда при 0°C, помещенные в ящик из пенопласта размерами 30×20×50 см и толщиной стенок 1,5 см. Температура в комнате 20°C. Коэффициент теплопроводности пенопласта 0,023 Вт/(м·К), удельная теплота плавления льда 334 кДж/кг.

Дано:
 $m = 20 \text{ кг}$
 $T_1 = 273 \text{ К}$
 $\lambda = 0,023 \text{ Вт/(м·К)}$
 $a = 0,3 \text{ м}$
 $b = 0,2 \text{ м}$
 $c = 0,5 \text{ м}$
 $\Delta x = 0,015 \text{ м}$
 $T_2 = 293 \text{ К}$
 $q = 3,34 \cdot 10^5 \text{ Дж/кг}$
 $\tau - ?$

Решение:
 Количество теплоты, прошедшее через внутренние стенки ящика,

$$Q_{\text{отд}} = \left| -\lambda \frac{\Delta T}{\Delta x} \cdot S \tau \right| = \lambda \frac{\Delta T}{\Delta x} \cdot S \tau = \lambda \frac{T_2 - T_1}{\Delta x} \cdot S \tau,$$

где S – площадь стенок.

$$S = 2(ab + bc + ac).$$

Количество теплоты, необходимое для расплавления льда,

$$Q_{\text{получ}} = qm_{\text{л}}.$$

Так как потери теплоты отсутствуют, то $Q_{\text{отд}} = Q_{\text{получ}}$, или $\lambda \frac{T_2 - T_1}{\Delta x} S \tau = qm_{\text{л}}$, откуда

$$\tau = \frac{qm_{\text{л}} \Delta x}{2\lambda(ab + bc + ac)(T_2 - T_1)}.$$

$$\tau = \frac{3,34 \cdot 10^5 \cdot 20 \cdot 0,015}{2 \cdot 0,023 \cdot (0,3 \cdot 0,2 + 0,2 \cdot 0,5 + 0,3 \cdot 0,5)(293 - 273)} = 3,51 \cdot 10^5 \text{ с} = 97,6 \text{ ч}.$$

Ответ: $\tau = 97,6 \text{ ч}$.

Пример 3. Определите тепловой поток через стеклянное окно площадью 3 м² и толщиной 3,2 мм, если температура внутренней поверхности окна равна 15°C, а внешней 14°C. Коэффициент теплопроводности стекла 0,84 Вт/(м·К).

Дано:
 $S = 3 \text{ м}^2$
 $T_1 = 288 \text{ К}$
 $\lambda = 0,84 \text{ Вт/(м·К)}$
 $\Delta x = 0,0032 \text{ м}$
 $T_2 = 287 \text{ К}$
 $J_E - ?$

Решение:
 Тепловой поток через окно площадью S равен

$$J_E = j_E \cdot S,$$

где j_E – плотность теплового потока, равная

$$j_E = -\lambda \frac{dT}{dx} \approx -\lambda \frac{\Delta T}{\Delta x}.$$

Тогда

$$J_E = \lambda \frac{T_1 - T_2}{\Delta x} S.$$

$$J_E = \frac{0,84(288 - 287)}{3,2 \cdot 10^{-3}} \cdot 3 = 788 \frac{\text{Вт}}{\text{м}^2}.$$

Ответ: $J_E = 788 \frac{\text{Вт}}{\text{м}^2}.$

Пример 4. Здание имеет стены толщиной 50 см. Температура внутри здания 18°C, снаружи – минус 30°C. Коэффициент теплопроводности стен 0,2 Вт/(м·К). Определите потери тепла с 1 м² стены в течение суток.

Дано:	Решение:
$S = 1 \text{ м}^2$	Потеря тепла с 1 м ² стены в течение суток
$T_1 = 291 \text{ К}$	$Q = j_E \cdot S \cdot \tau ,$ (1)
$\lambda = 0,2 \text{ Вт/(м} \cdot \text{К)}$	где j_E – плотность теплового потока, равная
$\Delta x = 0,5 \text{ м}$	$j_E = -\lambda \frac{dT}{dx} \approx -\lambda \frac{\Delta T}{\Delta x}.$ (2)
$T_2 = 243 \text{ К}$	Подставив выражение (2) в формулу (1), получим
$\tau = 86400 \text{ с}$	$Q = \left -\lambda \frac{T_1 - T_2}{\Delta x} S \tau \right .$
$Q - ?$	
$Q = 0,2 \frac{291 - 243}{0,5} \cdot 1 \cdot 86400 = 1,66 \cdot 10^6 \text{ Дж}.$	

Ответ: $Q = 1,66 \cdot 10^6 \text{ Дж}.$

Пример 5. Вода в пруду имеет температуру 0°C. Температура окружающего воздуха минус 10°C. Какой слой льда образуется за сутки, считая с момента замерзания воды? Коэффициент теплопроводности льда 2,23 Вт/(м·К), плотность льда 900 кг/м³, а его удельная теплота плавления 334 кДж/кг.

Дано:	Решение:
$T_1 = 273 \text{ К}$	Пусть x – текущая толщина слоя льда, dx – приращение толщины льда за бесконечно малый промежуток времени $d\tau$, площадь поверхности озера S , тогда приращение объема льда dV за время $d\tau$ составит
$\lambda = 2,23 \text{ Вт/(м} \cdot \text{К)}$	$dV = S dx.$
$T_2 = 283 \text{ К}$	
$\tau = 86400 \text{ с}$	
$q = 3,34 \cdot 10^5 \text{ Дж/кг}$	
$\rho = 900 \text{ кг/м}^3$	
$x_1 - ?$	

Количество теплоты, отданное водой за время $d\tau$,

$$dQ = -\lambda \frac{dT}{dx} S d\tau \approx -\lambda \frac{\Delta T}{x} S d\tau. \quad (1)$$

Масса льда, образующаяся за время $d\tau$,

$$dm = \frac{dQ}{q}, \text{ откуда } dQ = q dm = q \rho S dx. \quad (2)$$

Из формул (1) и (2) следует, что

$$\lambda \frac{\Delta T}{x} S d\tau = q \rho S dx, \text{ откуда } d\tau = \frac{q \rho x dx}{\lambda \Delta T}.$$

Проинтегрируем полученное дифференциальное уравнение

$$\tau = \frac{q \rho}{\lambda \Delta T} \int_0^{x_1} x dx = \frac{q \rho}{\lambda \Delta T} \cdot \frac{x_1^2}{2} \text{ и выразим из полученной формулы искомую}$$

толщину слоя льда

$$x_1 = \sqrt{\frac{2\tau\lambda\Delta T}{q\rho}}.$$

$$x_1 = \sqrt{\frac{2 \cdot 86400 \cdot 2,23 \cdot 10}{900 \cdot 334 \cdot 10^3}} = 0,113 \text{ м.}$$

Ответ: $x_1 = 0,113 \text{ м.}$

Пример 6. В результате некоторого процесса коэффициент вязкости идеального газа увеличился в 3 раза, а коэффициент диффузии – в 4 раза. Как и во сколько раз изменилось давление газа?

Дано:	Решение:
$\eta_2/\eta_1 = 3$	Коэффициент диффузии
$D_2/D_1 = 4$	$D = \frac{1}{3} \langle v \rangle \langle l \rangle,$
$p_2/p_1 = ?$	где $\langle v \rangle$ – средняя скорость молекул, $\langle v \rangle = \sqrt{\frac{8RT}{\pi M}}.$

Средняя длина свободного пробега молекул

$$\langle l \rangle = \frac{kT}{\sqrt{2}\pi d^2 p}.$$

Тогда

$$D = \frac{1}{3} \sqrt{\frac{8RT}{\pi M}} \cdot \frac{kT}{\sqrt{2}\pi d^2 p}.$$

$$\frac{D_2}{D_1} = \frac{1}{3} \sqrt{\frac{8RT_2}{\pi M}} \cdot \frac{kT_2}{\sqrt{2}\pi d^2 p_2} \cdot 3 \sqrt{\frac{\pi M}{8RT_1}} \cdot \frac{\sqrt{2}\pi d^2 p_1}{kT_1} = \left(\frac{T_2}{T_1}\right)^{3/2} \cdot \frac{p_1}{p_2} = 4. \quad (1)$$

Коэффициент вязкости

$$\eta = \frac{1}{3} \rho \langle v \rangle \langle l \rangle = \rho D.$$

Выразим из уравнения Клапейрона – Менделеева $pV = \frac{m}{M} RT$ или $p = \rho \frac{RT}{M}$ плотность газа $\rho = \frac{pM}{RT}$ и подставим это выражение в формулу коэффициента вязкости

$$\eta = \frac{pM}{RT} D.$$

$$\frac{\eta_2}{\eta_1} = \frac{p_2 M}{RT_2} \cdot \frac{RT_1}{p_1 M} \cdot \frac{D_2}{D_1} = \frac{p_2}{p_1} \cdot \frac{T_1}{T_2} \cdot \frac{D_2}{D_1} = \frac{p_2}{p_1} \cdot \frac{T_1}{T_2} \cdot \left(\frac{T_2}{T_1}\right)^{3/2} \cdot \frac{p_1}{p_2} = \left(\frac{T_2}{T_1}\right)^{1/2} = 3. \quad (2)$$

Из уравнений (1) и (2), следует, что

$$\frac{p_2}{p_1} = \frac{3}{4} \frac{T_2}{T_1}.$$

$$\frac{p_2}{p_1} = \frac{3 \cdot 3^2}{4} = 6,75.$$

Ответ: $\frac{p_2}{p_1} = 6,75.$

Пример 7. Коэффициент теплопроводности кислорода при 100°C равен $3,25 \cdot 10^{-2}$ Вт/(м·К). Вычислите коэффициент вязкости при этой температуре. Молярная масса кислорода $M = 0,032$ кг/моль.

Дано:	Решение:
$\lambda = 3,25 \cdot 10^{-2} \frac{\text{Вт}}{\text{м} \cdot \text{К}}$	Коэффициент теплопроводности $\lambda = \frac{1}{3} c_V \rho \langle v \rangle \langle l \rangle$,
$M = 0,032$ кг/моль	вязкость $\eta = \frac{1}{3} \rho \langle v \rangle \langle l \rangle$ и теплоемкость газа при
$T = 373$ К	постоянном объеме c_V связаны соотношением
$i = 5$	$\frac{\lambda}{\eta c_V} = 1$, откуда $\eta = \frac{\lambda}{c_V}$.
$\eta = ?$	

Для идеального газа $c_V = \frac{iR}{2M}$, где i – число степеней свободы молекулы газа.

Для кислорода (двухатомный газ) $i = 5$, поэтому $\eta = \frac{2\lambda M}{iR}$.

$$\eta = \frac{2 \cdot 3,25 \cdot 10^{-2} \cdot 0,032}{5 \cdot 8,31} = 5 \cdot 10^{-5} \text{ Па}\cdot\text{с}.$$

Ответ: $\eta = 5 \cdot 10^{-5} \text{ Па}\cdot\text{с}$.

Пример 8. Гелий находится между двумя пластинами, отстоящими друг от друга на 5 мм. Температуры пластин равны 17°C и 37°C. Эффективный диаметр молекулы гелия 0,2 нм. Определите плотность потока тепла.

Дано:	Решение:
$d = 2 \cdot 10^{-10} \text{ м}$	Согласно уравнению Фурье, плотность теплового потока
$M = 0,004 \text{ кг/моль}$	
$T_1 = 290 \text{ К}$	$j_E = -\lambda \frac{dT}{dx}.$ (1)
$T_2 = 310 \text{ К}$	
$i = 3$	Считая, что температура гелия между пластинами изменяется по линейному закону $\frac{dT}{dx} \approx \frac{\Delta T}{\Delta x}$, запишем формулу (1) в виде
$\Delta x = 5 \cdot 10^{-3} \text{ м}$	
$\eta = ?$	

$$j_E = -\lambda \frac{\Delta T}{\Delta x} = \lambda \frac{T_2 - T_1}{\Delta x}.$$

Коэффициент теплопроводности

$$\lambda = \frac{1}{3} c_V \rho \langle v \rangle \langle l \rangle, \text{ где } c_V = \frac{iR}{2M}.$$

Из уравнения Клапейрона – Менделеева $pV = \frac{m}{M} RT$ выразим давление газа $p = \frac{m}{V} \frac{RT}{M}$. Учтем, что $\frac{m}{V} = \rho$, тогда плотность газа $\rho = \frac{pM}{RT}$.

Средняя арифметическая скорость молекул $\langle v \rangle = \sqrt{\frac{8RT}{\pi M}}$, средняя длина свободного пробега $\langle l \rangle = \frac{kT}{\sqrt{2}\pi d^2 p}$.

Подставив выражения для $c_V, \rho, \langle v \rangle$ и $\langle l \rangle$ в формулу коэффициента теплопроводности, получим

$$\lambda = \frac{1}{3} \cdot \frac{iR}{2M} \cdot \frac{pM}{RT} \cdot \sqrt{\frac{8RT}{\pi M}} \cdot \frac{kT}{\sqrt{2}\pi d^2 p} = \frac{1}{3} \frac{ik}{d^2} \sqrt{\frac{RT}{\pi^3 M}}.$$

$$T = \langle T \rangle = \frac{T_2 + T_1}{2}.$$

$$j_E = \frac{1}{3} \cdot \frac{ik}{d^2} \sqrt{\frac{RT}{\pi^3 M}} \cdot \frac{T_2 - T_1}{\Delta x} = \frac{1}{3} \cdot \frac{ik}{d^2} \sqrt{\frac{R(T_2 + T_1)}{\pi^3 M}} \cdot \frac{T_2 - T_1}{\Delta x}.$$

$$j_E = \frac{1}{3} \cdot \frac{3 \cdot 1,38 \cdot 10^{-23}}{(2 \cdot 10^{-10})^2} \sqrt{\frac{8,31 \cdot (310 + 290)}{2(3,14)^3 \cdot 4 \cdot 10^{-3}}} \cdot \frac{310 - 290}{5 \cdot 10^{-3}} = 196 \frac{\text{Вт}}{\text{м}^2}.$$

Ответ: $j_E = 196 \frac{\text{Вт}}{\text{м}^2}.$

Пример 9. Как изменятся коэффициенты диффузии и вязкости идеального газа, если его объем увеличится в 2 раза: а) изобарно; б) изотермически?

Дано:	Решение:
$V_2/V_1 = 2$	Коэффициент диффузии газа
а) $p = \text{const}$	$D = \frac{1}{3} \langle v \rangle \langle l \rangle,$
б) $T = \text{const}$	
$\eta_2/\eta_1 - ?$	где $\langle v \rangle$ – средняя арифметическая скорость молекул
$D_2/D_1 - ?$	$\left(\langle v \rangle = \sqrt{\frac{8RT}{\pi M}} \right); \langle l \rangle$ – средняя длина свободного пробега молекул
	$\left(\langle l \rangle = \frac{kT}{\sqrt{2}\pi d^2 p} \right).$

Подставив выражения для $\langle v \rangle$ и $\langle l \rangle$ в формулу коэффициента диффузии, получим

$$D = \frac{1}{3} \sqrt{\frac{8RT}{\pi M}} \cdot \frac{kT}{\sqrt{2}\pi d^2 p}.$$

Коэффициент вязкости

$$\eta = \rho D,$$

где ρ – плотность газа $\left(\rho = \frac{m}{V} \right).$

Выразим из уравнения Клапейрона – Менделеева $pV = \frac{m}{M}RT$ массу газа $m = \frac{pVM}{RT}$ и, разделив её на объем, получим выражение для плотности

$$\rho = \frac{pM}{RT}.$$

Подставив это выражение в формулу для коэффициента вязкости, приведем её к виду

$$\eta = \frac{pM}{RT}D.$$

а) $p = \text{const}$:

Согласно закону Гей-Люссака

$$\frac{V_2}{V_1} = \frac{T_2}{T_1}.$$

$$\frac{D_2}{D_1} = \frac{1}{3} \sqrt{\frac{8RT_2}{\pi M}} \cdot \frac{kT_2}{\sqrt{2}\pi d^2 p} \cdot 3 \sqrt{\frac{\pi M}{8RT_1}} \cdot \frac{\sqrt{2}\pi d^2 p}{kT_1} = \left(\frac{T_2}{T_1}\right)^{3/2} = (2)^{3/2} = 2,83.$$

$$\frac{\eta_2}{\eta_1} = \frac{\rho_2 D_2}{\rho_1 D_1} = \frac{pM}{RT_2} \cdot \frac{D_2}{D_1} \cdot \frac{RT_1}{pM} = \frac{T_1}{T_2} \cdot \left(\frac{T_2}{T_1}\right)^{3/2} = \sqrt{\frac{T_2}{T_1}} = \sqrt{2} = 1,41.$$

б) $T = \text{const}$:

По закону Бойля – Мариотта

$$p_1 V_1 = p_2 V_2 \Rightarrow \frac{p_1}{p_2} = \frac{V_2}{V_1}.$$

$$\frac{D_2}{D_1} = \frac{1}{3} \sqrt{\frac{8RT}{\pi M}} \cdot \frac{kT}{\sqrt{2}\pi d^2 p_2} \cdot 3 \sqrt{\frac{\pi M}{8RT}} \cdot \frac{\sqrt{2}\pi d^2 p_1}{kT} = \frac{p_1}{p_2} = \frac{V_2}{V_1} = 2.$$

$$\frac{\eta_2}{\eta_1} = \frac{\rho_2 D_2}{\rho_1 D_1} = \frac{p_2 M}{RT} \cdot \frac{D_2}{D_1} \cdot \frac{RT}{p_1 M} = \frac{p_2}{p_1} \cdot \frac{D_2}{D_1} = \frac{p_2}{p_1} \cdot \frac{p_1}{p_2} = 1.$$

Ответ: а) увеличится в 2,83 раза; увеличится в 1,41раза;

б) увеличится в 2 раза; не изменится.

Пример 10. Коэффициент теплопроводности азота при температуре 0°C равен $1,3 \cdot 10^{-2} \frac{\text{Вт}}{\text{м} \cdot \text{К}}$. Определите газокинетический диаметр молекул при этой температуре.

Дано:	Решение:
$M = 0,028 \text{ кг/моль}$	Коэффициент теплопроводности
$T = 273 \text{ К}$	$\lambda = \frac{1}{3} c_V \rho \langle v \rangle \langle l \rangle$, где $c_V = \frac{iR}{2M}$.
$i = 5$	
$\lambda = 1,3 \cdot 10^{-2} \frac{\text{Вт}}{\text{м} \cdot \text{К}}$	Из уравнения Клапейрона – Менделеева $pV = \frac{m}{M} RT$
$d - ?$	выразим давление газа
	$p = \frac{m}{V} \frac{RT}{M}$.
	Учтем, что $\frac{m}{V} = \rho$, тогда плотность газа $\rho = \frac{pM}{RT}$.

Средняя арифметическая скорость молекул $\langle v \rangle = \sqrt{\frac{8RT}{\pi M}}$, средняя длина свободного пробега $\langle l \rangle = \frac{kT}{\sqrt{2} \pi d^2 p}$.

Подставив выражения для c_V , ρ , $\langle v \rangle$ и $\langle l \rangle$ в формулу коэффициента теплопроводности, получим

$$\lambda = \frac{1}{3} \cdot \frac{iR}{2M} \cdot \frac{pM}{RT} \cdot \sqrt{\frac{8RT}{\pi M}} \cdot \frac{kT}{\sqrt{2} \pi d^2 p} = \frac{1}{3} \frac{ik}{d^2} \sqrt{\frac{RT}{\pi^3 M}}.$$

Выразим из полученной формулы эффективный диаметр молекулы

$$d = \sqrt{\frac{ik}{3\lambda} \sqrt{\frac{RT}{\pi^3 M}}}.$$

$$d = \sqrt{\frac{5 \cdot 1,38 \cdot 10^{-23}}{3 \cdot 1,3 \cdot 10^{-2}}} \sqrt{\frac{8,31 \cdot 273}{(3,14)^3 \cdot 28 \cdot 10^{-3}}} = 3,0 \cdot 10^{-10} \text{ м}.$$

Ответ: $d = 3,0 \cdot 10^{-10} \text{ м}$.

Пример 11. Два свинцовых шарика диаметрами $2 \cdot 10^{-3} \text{ м}$ и $1 \cdot 10^{-3} \text{ м}$ опускают в сосуд с глицерином высотой $0,5 \text{ м}$. Считая движение шариков равномерным, определить, какой из них и на сколько раньше достигнет дна сосуда.

Дано:
$d_1 = 2 \cdot 10^{-3} \text{ м}$
$\rho_1 = 11,3 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3$
$d_2 = 1 \cdot 10^{-3} \text{ м}$
$\rho_2 = 1,2 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3$
$h = 0,5 \text{ м}$
$\eta = 0,61 \text{ Па} \cdot \text{с}$
$t_1 - ? \quad t_2 - ?$

Решение:

На каждый из шариков, опускающихся в жидкости, действуют три силы – сила тяжести $m\vec{g}$, сила внутреннего трения $\vec{F}_c$, определяемая по формуле Стокса, и выталкивающая (Архимедова) сила $\vec{F}_A$.

Если скорость тела v постоянна, то время движения равно

$$t = \frac{h}{v}. \quad (1)$$

По первому закону Ньютона: $m\vec{g} + \vec{F}_c + \vec{F}_A = 0$, или $mg - F_c - F_A = 0$.

Так как $F_c = 6\pi\eta Rv$ и $F_A = \rho g V$, то

$mg = \rho_2 Vg + 6\pi\eta r v$, откуда

$$v = \frac{mg - \rho_2 Vg}{6\pi\eta r}. \quad (2)$$

Подставляя (2) в (1), получим выражение для времени падения шарика

$$t = \frac{6\pi\eta r h}{mg - \rho_2 Vg}. \quad (3)$$

С учетом того, что радиус шарика $r = \frac{d}{2}$, объем $V = \frac{\pi d^3}{6}$, масса

$m = \rho_1 V = \rho_1 \frac{\pi d^3}{6}$, выражение (3) можно привести к виду

$$t = \frac{18h \cdot \eta}{g(p_1 - p_2)d^2}.$$

Время падения первого шарика

$$t_1 = \frac{18 \cdot 0,5 \cdot 0,61}{9,81(11,3 - 1,2) \cdot 10^3 \cdot 4 \cdot 10^{-6}} = 13,88 \text{ с}.$$

Время падения второго шарика

$$t_2 = \frac{18 \cdot 0,5 \cdot 0,61}{9,81(11,3 - 1,2) \cdot 10^3 \cdot 1 \cdot 10^{-6}} = 55,52 \text{ с}.$$

$$\frac{t_2}{t_1} = \frac{d_1^2}{d_2^2} = 4.$$

Ответ: Шарик меньшего диаметра будет опускаться в 4 раза медленнее.

Задачи для самостоятельного решения

Средний уровень

1. Явление диффузии имеет место при наличии градиента...
 - 1) температуры;
 - 2) потенциала электростатического поля;
 - 3) концентрации;
 - 4) скорости слоев жидкости или газа.
2. Явление диффузии характеризует перенос:
 - 1) электрического заряда;
 - 2) массы;
 - 3) энергии;
 - 4) импульса направленного движения.
3. Явление внутреннего трения имеет место при наличии градиента...
 - 1) температуры;
 - 2) потенциала электростатического поля;
 - 3) концентрации;
 - 4) скорости слоев жидкости или газа.
4. Явление теплопроводности имеет место при наличии градиента...
 - 1) температуры;
 - 2) потенциала электростатического поля;
 - 3) концентрации;
 - 4) скорости слоев жидкости или газа.
5. В жидкости вектор градиента скорости слоев направлен вдоль оси $+OZ$. В каком направлении происходит перенос импульса молекул?
 - 1) $+OX$;
 - 2) $-OZ$;
 - 3) $-OY$;
 - 4) $+OY$.
6. При нагревании тела градиент температуры направлен вдоль оси $+OY$. Перенос тепла происходит в направлении ...
 - 1) $+OX$;
 - 2) $-OZ$;
 - 3) $-OY$;
 - 4) $+OY$.
7. В жидкости вектор градиента концентрации примеси направлен вдоль оси $+OX$. Перенос массы примеси происходит в направлении ...
 - 1) $+OX$;
 - 2) $-OZ$;
 - 3) $-OX$;
 - 4) $+OY$.
8. Диффузия молекул газа возрастает (если $\frac{d\rho}{dx} = \text{const}$) при...
 - 1) уменьшении давления;
 - 2) росте температуры;

- 3) уменьшении температуры;
- 4) увеличении давления.

9. Внутреннее трение в идеальном газе (если $dv/dz = \text{const}$) уменьшается при ...

- 1) уменьшении давления;
- 2) увеличении температуры;
- 3) уменьшении температуры;
- 4) увеличении давления.

10. Коэффициент теплопроводности газа зависит от....

- 1) массы молекулы;
- 2) температуры;
- 3) размеров и формы молекул;
- 4) давления.

11. Расстояние, на которое сближаются центры двух молекул при столкновении называют...

- 1) длина свободного пробега;
- 2) эффективный диаметр;
- 3) концентрация;
- 4) пройденный путь.

12. Какое количество тепла теряется еже часно через окно за счет теплопроводности воздуха, заключенного между рамами? Площадь каждой рамы 4 м^2 , расстояние между рамами 30 см. Температура в помещении 18°C , температура снаружи -20°C . Диаметр молекул воздуха принять равным $3 \cdot 10^{-8} \text{ см}$, температуру воздуха между рамами считать равной среднему арифметическому температур в помещении и снаружи. Давление равно 760 мм рт. ст.

- | | |
|------------|------------|
| 1) 2,8 Дж; | 3) 6,4 Дж; |
| 2) 4,3 Дж; | 4) 5,7 Дж. |

13. Между двумя пластинами, находящимися на расстоянии 1 мм друг от друга, находится воздух. Между пластинами поддерживается разность температур $\Delta T = 1 \text{ К}$. Площадь каждой пластины равна $S = 100 \text{ см}^2$. Какое количество тепла передается за счет теплопроводности от одной пластины к другой за 10 мин? Считать, что воздух находится при нормальных условиях. Диаметр молекулы воздуха принять равным $3 \cdot 10^{-10} \text{ м}$.

- | | |
|-----------|-----------|
| 1) 56 Дж; | 3) 69 Дж; |
| 2) 78 Дж; | 4) 87 Дж. |

14. Найти коэффициент теплопроводности воздуха при температуре $10\text{ }^{\circ}\text{C}$ и давлении 10^5 Н/см^2 . Диаметр молекулы воздуха принять равным $3\cdot 10^{-8}\text{ см}$.

- | | |
|---|---|
| 1) $13,2\cdot 10^{-3}\text{ Вт/м}\cdot\text{К}$; | 3) $8,6\cdot 10^{-3}\text{ Вт/м}\cdot\text{К}$; |
| 2) $6,2\cdot 10^{-3}\text{ Вт/м}\cdot\text{К}$; | 4) $22,4\cdot 10^{-3}\text{ Вт/м}\cdot\text{К}$. |

15. Определите коэффициент диффузии воздуха при давлении 760 мм рт. ст. и температуре $10\text{ }^{\circ}\text{C}$. Диаметр молекулы воздуха принять равным $3\cdot 10^{-10}\text{ м}$.

- | | |
|--|--|
| 1) $2,36\cdot 10^{-5}\text{ м}^2/\text{с}$; | 3) $1,28\cdot 10^{-5}\text{ м}^2/\text{с}$; |
| 2) $4,22\cdot 10^{-5}\text{ м}^2/\text{с}$; | 4) $1,48\cdot 10^{-5}\text{ м}^2/\text{с}$. |

16. Определите коэффициент внутреннего трения воздуха при давлении 760 мм рт. ст. и температуре $10\text{ }^{\circ}\text{C}$. Диаметр молекулы воздуха принять равным $3\cdot 10^{-10}\text{ м}$.

- | | |
|---|---|
| 1) $1,85\cdot 10^{-5}\text{ кг/(м}\cdot\text{с)}$; | 3) $4,24\cdot 10^{-5}\text{ кг/(м}\cdot\text{с)}$; |
| 2) $3,65\cdot 10^{-5}\text{ кг/(м}\cdot\text{с)}$; | 4) $3,46\cdot 10^{-5}\text{ кг/(м}\cdot\text{с)}$. |

17. Коэффициенты диффузии и внутреннего трения кислорода равны соответственно $1,22\cdot 10^{-5}\text{ м}^2/\text{с}$ и $1,95\cdot 10^{-5}\text{ кг/(м}\cdot\text{с)}$. Определите при этих условиях плотность кислорода.

- | | |
|---------------------------|---------------------------|
| 1) $4,80\text{ кг/м}^3$; | 3) $1,60\text{ кг/м}^3$; |
| 2) $3,61\text{ кг/м}^3$; | 4) $2,46\text{ кг/м}^3$. |

18. Коэффициенты диффузии и внутреннего трения кислорода равны соответственно $1,22\cdot 10^{-5}\text{ м}^2/\text{с}$ и $1,95\cdot 10^{-5}\text{ кг/(м}\cdot\text{с)}$. Определите при этих условиях среднюю длину свободного пробега его молекул

- | | |
|-----------------------------------|-----------------------------------|
| 1) $6,65\cdot 10^{-8}\text{ м}$; | 3) $8,35\cdot 10^{-8}\text{ м}$; |
| 2) $5,35\cdot 10^{-8}\text{ м}$; | 4) $3,42\cdot 10^{-8}\text{ м}$. |

19. Коэффициенты диффузии и внутреннего трения кислорода равны соответственно $1,22\cdot 10^{-5}\text{ м}^2/\text{с}$ и $1,95\cdot 10^{-5}\text{ кг/(м}\cdot\text{с)}$. Определите при этих условиях среднюю арифметическую скорость его молекул.

- | | |
|-----------------------|-----------------------|
| 1) 440 м/с ; | 3) 545 м/с ; |
| 2) 320 м/с ; | 4) 325 м/с . |

20. Какой наибольшей скорости может достичь дождевая капля диаметром $0,3\text{ мм}$? Диаметр молекулы воздуха принять равным $3\cdot 10^{-10}\text{ м}$; температуру воздуха – $0\text{ }^{\circ}\text{C}$. Считать, что для дождевой капли справедлив закон Стокса.

- | | |
|------------------------|------------------------|
| 1) $2,36\text{ м/с}$; | 3) $2,72\text{ м/с}$; |
| 2) $2,45\text{ м/с}$; | 4) $2,84\text{ м/с}$. |

21. Самолет летит со скоростью 360 км/ч. Считая, что слой воздуха у крыла самолета, увлекаемый вследствие вязкости, равен 4 см, найти касательную силу, действующую на каждый квадратный метр поверхности крыла. Диаметр молекулы воздуха принять равным $3 \cdot 10^{-8}$ см. Температура воздуха 0 °С.

- | | |
|-------------|-------------|
| 1) 0,42 Н; | 3) 0,045 Н; |
| 2) 0,025 Н; | 4) 0,24 Н. |

22. Определите коэффициент теплопроводности водорода, если известно, что коэффициент внутреннего трения для него при этих условиях равен $8,6 \cdot 10^{-6}$ Н·с/м².

- | | |
|--------------------|--------------------|
| 1) 0,045 Вт/(м·К); | 3) 0,025 Вт/(м·К); |
| 2) 0,090 Вт/(м·К); | 4) 0,040 Вт/(м·К). |

Достаточный уровень

1. Площадь соприкосновения слоев текущей жидкости $S = 10$ см², коэффициент динамической вязкости жидкости $\eta = 10^{-3}$ Па·с, а возникающая сила трения между слоями $F = 0,1$ мН. Определите градиент скорости.

Ответ: $\text{grad } v = 100 \text{ с}^{-1}$.

2. Какой толщины необходимо сделать деревянную стену здания, чтобы она давала такую же потерю тепла, что и кирпичная стена толщиной 40 см при одинаковой температуре внутри и снаружи здания? Коэффициенты теплопроводности кирпича и дерева равны соответственно 0,7 и 0,175 Вт/(м·К).

Ответ: $x = 10$ см.

3. Определите тепловой поток в единицу времени через стеклянное окно площадью 3 м² и толщиной 3,2 мм, если температура внутренней поверхности окна равна 15 °С, а внешней 14 °С. Коэффициент теплопроводности стекла 0,84 Вт/(м·К).

Ответ: $j_E = 788 \text{ Вт/м}^2$.

4. Вода в пруду имеет температуру 0°С. Температура окружающего воздуха минус 10°С. Какой слой льда образуется за сутки, считая с момента замерзания воды? Коэффициент теплопроводности льда 2,23 Вт/(м·К), плотность льда 900 кг/м³, а его удельная теплота плавления 334 кДж/кг.

Ответ: $\Delta x = 0,113$ м.

5. Гелий находится между двумя пластинами, отстоящими друг от друга на 5 мм. Температуры пластин равны 17 и 37°C. Эффективный диаметр молекулы гелия 0,2 нм. Определите плотность потока тепла.

Ответ: $j_E = 196 \text{ Вт/м}^2$.

6. Пространство между двумя коаксиальными цилиндрами заполнено газом. Радиусы цилиндров равны соответственно $r = 5 \text{ см}$ и $R = 5,2 \text{ см}$. Высота внутреннего цилиндра равна $h = 25 \text{ см}$. Внешний цилиндр вращается со скоростью, соответствующей $\nu = 360 \text{ об/мин}$. Для того чтобы внутренний цилиндр оставался неподвижным, к нему надо приложить касательную силу $F = 1,38 \cdot 10^{-3} \text{ Н}$. Рассматривая в первом приближении случай как плоский, определите из данных этого опыта коэффициент вязкости газа, находящегося между цилиндрами.

Ответ: $\eta = 1,8 \cdot 10^{-5} \text{ Н}\cdot\text{с/м}^2$.

7. Углекислый газ и азот находятся при одинаковых температуре и давлении. Найдите для этих газов отношение: 1) коэффициентов диффузии, 2) коэффициентов внутреннего трения и 3) коэффициентов теплопроводности. Диаметры молекул этих газов считать одинаковыми.

Ответ: $D_1/D_2 = 0,8$; $\eta_1/\eta_2 = 1,25$; $\lambda_1/\lambda_2 = 0,96$.

8. Два горизонтальных диска радиусами $R = 20 \text{ см}$ расположены друг над другом так, что оси их совпадают. Расстояние d между плоскостями дисков равно 0,5 см. Верхний диск неподвижен, нижний вращается относительно геометрической оси с частотой $n = 10 \text{ с}^{-1}$. Найдите вращающий момент M , действующий на верхний диск. Динамическая вязкость η воздуха, в котором находятся диски, равна 17,2 мкПа·с.

Ответ: $M = 0,58 \text{ мН}\cdot\text{м}$.

9. В ультраразреженном азоте, находящемся под давлением $p = 1 \text{ мПа}$ и при температуре $T = 300 \text{ К}$, движутся друг относительно друга две параллельные пластины со скоростью $v = 1 \text{ м/с}$. Расстояние между пластинами не изменяется и много меньше средней длины свободного пробега молекул. Определите силу F внутреннего трения, действующую на поверхность пластин площадью $S = 1 \text{ м}^2$.

Ответ: $F = 0,89 \text{ мкН}$.

10. Оцените тепловой поток из комнаты, размеры которой $5 \times 5 \times 4 \text{ м}$, наружу через два окна с рамами размерами $1,5 \times 2 \text{ м}$, расположенными на расстоянии $\Delta x = 0,2 \text{ м}$ друг от друга, и время, в течение которого темпера-

тура в комнате уменьшится на 1°C , если температура комнатного воздуха $t_1 = +20^{\circ}\text{C}$, а наружного $t_2 = -20^{\circ}\text{C}$. Почему тепловой поток через окна всегда значительно больше?

Ответ: $J_E = 12 \text{ Вт}$; $\tau = 2$ часа; из-за конвекции воздуха.

11. Оцените коэффициент диффузии паров воды в воздухе при 20°C . Радиус молекул воды $r_1 = 0,21 \text{ нм}$. Радиус молекул азота и кислорода $r_2 = 0,18 \text{ нм}$.

Ответ: $D = 12 \text{ мкм}^2/\text{с}$.

12. Рассчитайте среднюю длину свободного пробега $\langle l \rangle$ молекул азота, коэффициент диффузии D , вязкость η и теплопроводность λ при давлении $p = 10^5 \text{ Па}$ и температуре $t = 17^{\circ}\text{C}$.

Ответ: $\langle l \rangle = 6,5 \cdot 10^{-8} \text{ м}$; $D = 10^{-5} \text{ м}^2/\text{с}$; $\eta = 1,2 \cdot 10^{-5} \text{ кг/м}\cdot\text{с}$.

13. Определите, во сколько раз отличаются коэффициенты диффузии азота ($M_1 = 28 \cdot 10^{-3} \text{ кг/моль}$) и углекислого газа ($M_2 = 44 \cdot 10^{-3} \text{ кг/моль}$), если оба газа находятся при одинаковых температурах и давлении. Эффективные диаметры газов считать одинаковыми.

Ответ: $\frac{D_1}{D_2} = 1,25$.

14. При нормальных условиях динамическая вязкость η воздуха равна $17,2 \text{ мкПа}\cdot\text{с}$. Определите для тех же условий теплопроводность λ воздуха.

Ответ: $\lambda = 23,4 \text{ мВт/(м}\cdot\text{К)}$.

15. Пространство между двумя большими параллельными пластинами, расстояние d между которыми равно 5 мм , заполнено гелием. Температура T_1 одной пластины поддерживается равной 290 К , другой – $T_2 = 310 \text{ К}$. Вычислите плотность теплового потока. Расчеты выполнить для случая, когда давление p гелия равно $0,1 \text{ МПа}$.

Ответ: $j_E = 196 \text{ Вт/м}^2$.

2. ОСНОВЫ ТЕРМОДИНАМИКИ

2.1. Теплоемкость идеального газа. Работа газа

Основные формулы

Связь между молярной c_M и удельной c теплоемкостями газа

$$c_M = cM,$$

где M – молярная масса газа.

Молярные теплоемкости при постоянном объеме и постоянном давлении соответственно равны

$$c_V = iR / 2; \quad c_p = (i + 2)R / 2,$$

где i – число степеней свободы; R – универсальная газовая постоянная.

Уравнение Майера

$$c_p - c_V = R.$$

Показатель адиабаты

$$\gamma = \frac{c_p}{c_V}, \text{ или } \gamma = \frac{i + 2}{i}.$$

Внутренняя энергия идеального газа

$$U = N\langle \epsilon \rangle, \text{ или } U = \nu c_V T,$$

где $\langle \epsilon \rangle$ – средняя кинетическая энергия молекулы; N – число молекул газа; ν – количество вещества.

Внутренняя энергия произвольной массы идеального газа

$$U = \frac{i}{2} \nu RT = \frac{i}{2} \frac{m}{M} RT.$$

Работа, связанная с изменением объема газа, в общем случае вычисляется по формуле

$$A = \int_{V_1}^{V_2} p dV,$$

где V_1 – начальный объем газа; V_2 – его конечный объем.

Работа газа:

а) при изобарном процессе ($p = \text{const}$)

$$A = p(V_2 - V_1);$$

б) при изотермическом процессе ($T = \text{const}$)

$$A = \frac{m}{M} RT \ln \frac{V_2}{V_1};$$

в) при адиабатном процессе

$$A = \frac{m}{M} c_V (T_1 - T_2), \text{ или } A = \frac{RT_1}{\gamma - 1} \frac{m}{M} \left[1 - \left(\frac{V_1}{V_2} \right)^{\gamma-1} \right],$$

где T_1 – начальная температура газа; T_2 – его конечная температура.

Уравнение Пуассона (уравнение газового состояния при адиабатном процессе)

$$pV^\gamma = \text{const.}$$

Связь между начальным и конечным значениями параметров состояний газа при адиабатном процессе:

$$\frac{p_2}{p_1} = \left(\frac{V_1}{V_2} \right)^\gamma; \quad \frac{T_2}{T_1} = \left(\frac{V_1}{V_2} \right)^{\gamma-1}; \quad \frac{T_2}{T_1} = \left(\frac{p_2}{p_1} \right)^{(\gamma-1)/\gamma}.$$

ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

Пример 1. Найти удельную теплоемкость при постоянном объеме некоторого многоатомного газа, если известно, что плотность этого газа при нормальных условиях равна $0,795 \text{ кг/м}^3$.

Дано:	Решение:
$\rho = 0,795 \text{ кг/м}^3$	Удельная теплоемкость газа при постоянном
$p = 1,013 \cdot 10^5 \text{ Па}$	объеме определяется по формуле
$T = 273 \text{ К}$	$c_V = \frac{iR}{2M}, \quad (1)$
$R = 8,31 \text{ Дж/моль} \cdot \text{К}$	где i – число степеней свободы; R – универсальная
$c_V - ?$	газовая постоянная; M – молярная масса газа.

Молярную массу газа выразим из уравнения Клапейрона – Менделеева:

$$pV = \frac{m}{M} RT \Rightarrow M = \frac{m}{V} \cdot \frac{RT}{p}.$$

Учитывая, что $\frac{m}{V} = \rho$, (ρ – плотность газа), запишем выражение для молярной массы газа в виде

$$M = \rho \frac{RT}{p}.$$

Подставив это выражение в формулу (1), получим $c_V = \frac{iRp}{2\rho RT} = \frac{ip}{2\rho T}$.

Число степеней свободы для многоатомного газа $i = 6$.

$$c_V = \frac{6 \cdot 1,013 \cdot 10^5}{2 \cdot 0,795 \cdot 273} = 1,4 \cdot 10^3 \text{ Дж/(кг·К)}.$$

Ответ: $c_V = 1,4 \cdot 10^3 \text{ Дж/(кг·К)}$.

Пример 2. Определите удельные теплоемкости c_V и c_p смеси углекислого газа массой $m_1 = 3 \text{ г}$ и азота массой $m_2 = 4 \text{ г}$.

Дано:	Решение:
$m_1 = 3 \cdot 10^{-3} \text{ кг}$	Количество теплоты, необходимой для нагревания смеси на ΔT К, можно выразить двумя способами:
$m_2 = 4 \cdot 10^{-3} \text{ кг}$	$Q = c_V (m_1 + m_2) \Delta T,$ (1)
$M_1 = 44 \cdot 10^{-3} \text{ кг/моль}$	где c_V – удельная теплоемкость смеси.
$M_2 = 28 \cdot 10^{-3} \text{ кг/моль}$	$Q = Q_1 + Q_2,$ (2)
$R = 8,31 \text{ Дж/моль·К}$	где Q_1 – количество теплоты, необходимой для нагревания углекислого газа ($Q_1 = c_{V1} m_1 \Delta T$); Q_2 – количество теплоты, необходимой для нагревания азота ($Q_2 = c_{V2} m_2 \Delta T$).
$c_V - ? \quad c_p - ?$	

Подставив выражения для Q_1 и Q_2 в формулу (2), получим

$$Q = (c_{V1} m_1 + c_{V2} m_2) \Delta T, \quad (3)$$

где c_{V1} и c_{V2} – удельные теплоемкости углекислого газа и азота соответственно.

Для углекислого газа (трехатомный газ) $i = 6$,

$$c_{V1} = \frac{iR}{2M} = \frac{6 \cdot 8,31}{2 \cdot 44 \cdot 10^{-3}} = 566,6 \text{ Дж/(кг·К)}.$$

Для азота (двухатомный газ) $i = 5$,

$$c_{V2} = \frac{iR}{2M} = \frac{5 \cdot 8,31}{2 \cdot 28 \cdot 10^{-3}} = 742 \text{ Дж/(кг·К)}.$$

Приравняв правые части выражений (1) и (3) и разделив обе части полученного равенства на ΔT , найдем

$$c_V (m_1 + m_2) = (c_{V1} m_1 + c_{V2} m_2),$$

откуда

$$c_V = \frac{c_{V1}m_1 + c_{V2}m_2}{m_1 + m_2}.$$

$$c_V = \frac{566,6 \cdot 3 \cdot 10^{-3} + 742 \cdot 4 \cdot 10^{-3}}{3 \cdot 10^{-3} + 4 \cdot 10^{-3}} = 667 \text{ Дж/(кг·К)}.$$

Рассуждая подобным образом, получим формулу для определения удельной теплоемкости смеси при постоянном давлении

$$c_p = \frac{c_{p1}m_1 + c_{p2}m_2}{m_1 + m_2},$$

где c_{p1} и c_{p2} – удельные теплоемкости углекислого газа и азота соответственно.

$$c_{p1} = \frac{(i+2)R}{2M} = \frac{(6+2)8,31}{2 \cdot 44 \cdot 10^{-3}} = 755 \text{ Дж/(кг·К)}.$$

$$c_{p2} = \frac{(i+2)R}{2M} = \frac{(5+2)8,31}{2 \cdot 28 \cdot 10^{-3}} = 1039 \text{ Дж/(кг·К)}.$$

$$c_p = \frac{755 \cdot 3 \cdot 10^{-3} + 1039 \cdot 4 \cdot 10^{-3}}{3 \cdot 10^{-3} + 4 \cdot 10^{-3}} = 917 \text{ Дж/(кг·К)}.$$

Ответ: $c_V = 667 \text{ Дж/(кг·К)}$, $c_p = 917 \text{ Дж/(кг·К)}$.

Пример 3. Нагревается или охлаждается газ, расширяющийся по закону $pV^2 = \text{const}$?

Дано: $pV^2 = \text{const}$	Решение:
Как изменяется температура газа?	Так как по условию газ расширяется, то $V_2 > V_1$. Запишем закон расширения для двух произвольно выбранных состояний газа
	$p_1V_1^2 = p_2V_2^2$, откуда $\frac{p_1}{p_2} = \frac{V_2^2}{V_1^2}$. (1)

Опишем каждое из состояний газа уравнением Клапейрона – Менделеева:

$$p_1V_1 = \nu RT_1;$$

$$p_2V_2 = \nu RT_2.$$

Разделив одно из них на другое, получим

$$\frac{p_1}{p_2} = \frac{T_1}{T_2} \cdot \frac{V_2}{V_1}. \quad (2)$$

Приравнивая правые части уравнений (1) и (2), получим

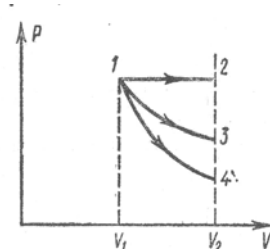
$$\frac{V_2^2}{V_1^2} = \frac{T_1}{T_2} \cdot \frac{V_2}{V_1}, \text{ откуда } \frac{T_1}{T_2} = \frac{V_2}{V_1}.$$

Так как $V_2 > V_1$, то $\frac{T_1}{T_2} > 1$, откуда следует, что $T_1 > T_2$.

Таким образом, газ в данном процессе охлаждается.

Ответ: газ охлаждается.

Пример 4. Азот, занимающий при давлении $p = 10^5$ Па объем $V_1 = 10$ л, расширяется вдвое. Определите конечное давление и работу, совершённую газом при следующих процессах: а) изобарном, б) изотермическом, в) адиабатном (см. рисунок).



Дано:

$$p = 10^5 \text{ Па}$$

$$V_1 = 10 \text{ л}$$

$$A = ? \quad p = ?$$

Решение:

Заданное начальное давление позволяет считать газ идеальным. Рассмотрим графики всех процессов в координатах p, V . Очевидно, что работа будет тем больше, чем выше пройдет кривая, т.е. чем больше давление в течение процесса. Исходя из молекулярно-кинетической теории давление определяется силой ударов молекул о стенки и частотой ударов.

Согласно основному уравнению молекулярно-кинетической теории,

$$p = \frac{2}{3} n \frac{m_0 \langle v^2 \rangle}{2}.$$

Это уравнение есть следствие того, что сила, действующая на стенку сосуда, определяется (по абсолютному значению) числом ударов, испытываемых стенкой за некоторое время, и силой этих ударов.

При изобарном 1-2 процессе расширение происходит при непрерывном увеличении температуры, что соответствует увеличению силы отдельных ударов, испытываемых стенками сосуда. Частота ударов уменьшается вследствие увеличения объема так, что давление остается постоянным.

При изотермическом 1-3 процессе кинетическая энергия молекул не изменяется, и давление уменьшается только в результате уменьшения числа ударов, испытываемых стенкой.

При адиабатном 1-4 процессе кинетическая энергия молекул, отдаваемая движущемуся поршню, не пополняется извне. Поэтому адиабатное расширение происходит при более резком, чем при постоянной температуре, падении давления (уменьшается и частота ударов, и сила ударов).

Работа при изобарном процессе

$$A_{12} = p_1(V_2 - V_1) = 1000 \text{ Дж.}$$

При изотермическом процессе конечное давление

$$p_3 = p_1 V_1 / V_2 = 0,5 \cdot 10^5 \text{ Па.}$$

Работа газа

$$A_{13} = \int_{V_1}^{V_2} p dV = p_1 V_1 \int_{V_1}^{V_2} \frac{dV}{V} = p_1 V_1 \ln \frac{V_2}{V_1} = 690 \text{ Дж.}$$

При адиабатном процессе конечное давление

$$p_4 = p_1 (V_1 / V_2)^\gamma.$$

Азот – двухатомный газ, поэтому $\gamma = (i + 2) / i = 1,4$. Тогда $p_4 = 0,38 \cdot 10^5 \text{ Па}$.

Работа, совершаемая газом при адиабатном расширении, равна убыли внутренней энергии газа:

$$A_{14} = -\Delta U_{14} = \frac{m}{M} \frac{i}{2} R(T_1 - T_4).$$

Из уравнения Клапейрона – Менделеева, записанного для начального и конечного состояний, получим:

$$\frac{m}{M} R T_1 = p_1 V_1, \quad \frac{m}{M} R T_4 = p_4 V_2.$$

Подставляя эти выражения в формулу для работы, находим

$$A_{14} = \frac{i}{2} (p_1 V_1 - p_4 V_2) = 600 \text{ Дж.}$$

$$\text{Ответ: } A_{12} = 1000 \text{ Дж; } p_3 = 0,5 \cdot 10^5 \text{ Па; } A_{13} = 690 \text{ Дж; } p_4 = 0,38 \cdot 10^5 \text{ Па; } A_{14} = 600 \text{ Дж.}$$

Пример 5. В цилиндре под поршнем находится водород массой $m = 0,02 \text{ кг}$ при температуре $T_1 = 300 \text{ К}$. Водород начал расширяться адиабатно, увеличив свой объем в пять раз, а затем был сжат изотермически, причем объем газа уменьшился в пять раз. Найдите температуру T_2 в конце адиабатного расширения и работу A , совершенную газом. Изобразить процесс графически.

Дано:	Решение:
$m = 0,02 \text{ кг}$	Адиабатный переход газа из одного состояния в
$T_1 = 300 \text{ К}$	другое можно описать уравнением
$T_2 = ?, A = ?$	$\frac{T_2}{T_1} = \left(\frac{V_1}{V_2} \right)^{\gamma-1}, \quad (1)$

где γ – показатель адиабаты (для водорода как двухатомного газа $\gamma = 1,4$).

Из формулы (1) выразим температуру T_2 газа после адиабатного расширения

$$T_2 = T_1 \left(\frac{V_1}{V_2} \right)^{\gamma-1}.$$

$$T_2 = 300 \left(\frac{1}{5} \right)^{1,4-1} \text{ К} = 300 \left(\frac{1}{5} \right)^{0,4} \text{ К} = 157 \text{ К}.$$

Работу A_1 газа при адиабатном расширении можно определить по формуле

$$A_1 = \frac{m}{M} c_v (T_1 - T_2) = \frac{m}{M} \frac{i}{2} R (T_1 - T_2).$$

$$A_1 = \frac{0,02}{2 \cdot 10^{-3}} \cdot \frac{5}{2} \cdot 8,31 (300 - 157) \text{ Дж} = 29,8 \cdot 10^3 \text{ Дж}.$$

Работа A_2 газа при изотермическом сжатии может быть выражена в виде

$$A_2 = RT_2 (m / M) \ln(V_2 / V_1).$$

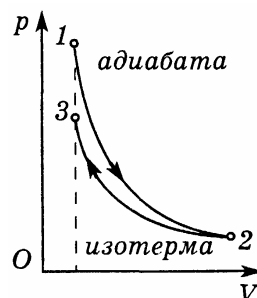
$$A_2 = 8,31 \cdot 157 (0,02 / 2 \cdot 10^{-3}) \ln \frac{1}{5} = -21 \cdot 10^4 \text{ Дж}.$$

Знак минус показывает, что при сжатии газа работа совершена внешними силами.

Общая работа, совершенная газом при описанных процессах, равна

$$A = A_1 + A_2 = 29,8 \text{ кДж} + (-21 \text{ кДж}) = 8,8 \text{ кДж}.$$

График процесса имеет вид:



Ответ: $T_2 = 157 \text{ К}$, $A = 8,8 \text{ кДж}$.

Задачи для самостоятельного решения

Средний уровень

1. Удельная теплоемкость гелия ($M = 0,004$ кг/моль) при постоянном объеме равна....Дж/(кг·К).

- 1) 1,5; 2) 1,7; 3) 12,5; 4) 20,8; 5) 3117.

2. Молярная теплоемкость гелия ($M = 0,004$ кг/моль) при постоянном объеме равна....Дж/(моль·К).

- 1) 1,5; 2) 1,7; 3) 12,5; 4) 20,8; 5) 3117.

3. Разность молярных теплоемкостей $C_p - C_v$ газа с молярной массой M , имеющего i степеней свободы, равна...

- 1) $\frac{R}{M}$; 2) $\frac{i+2}{i}$; 3) $M - R$; 4) $\frac{M}{R}$; 5) R .

4. Разность удельных теплоемкостей $c_p - c_v$ газа с молярной массой M , имеющего i степеней свободы равна...

- 1) R ; 2) $\frac{i+2}{i}$; 3) $M - R$; 4) $\frac{M}{R}$; 5) $\frac{R}{M}$.

5. Молярная теплоемкость идеального газа при постоянном давлении равна $C_p = \frac{9}{2}R$, где $R = 8,31$ Дж/(моль·К) – универсальная газовая постоянная. Число вращательных степеней свободы молекулы равно...

- 1) 4; 2) 6; 3) 2; 4) 3.

6. Если для многоатомных молекул газа при температурах 10^2 К вклад энергии колебания ядер в теплоемкость газа пренебрежимо мал, то из предложенных ниже идеальных газов (водород, азот, гелий, водяной пар) изохорную теплоемкость $C_v = 3R$ ($R = 8,31$ Дж/(моль·К) – универсальная газовая постоянная) имеет один моль...

- 1) водяного пара;
2) водорода;
3) гелия;
4) азота.

7. При комнатной температуре отношение $\frac{C_p}{C_v}$ молярных теплоемкостей при постоянном давлении и постоянном объеме равно $\frac{5}{3}$ для ...

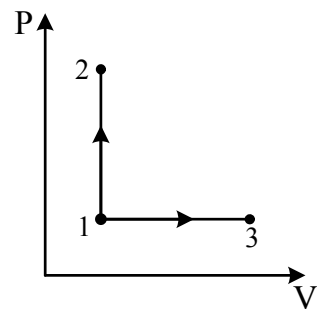
- 1) водяного пара;
- 2) воздуха;
- 3) гелия;
- 4) кислорода.

8. При комнатной температуре отношение $\frac{C_p}{C_v}$ молярных теплоемкостей при постоянном давлении и постоянном объеме равно $\frac{7}{5}$ для ...

- 1) водяного пара
- 2) неона
- 3) гелия
- 4) водорода

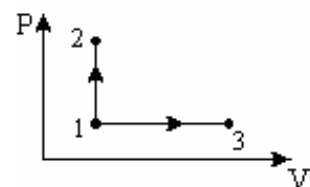
9. Молярные теплоемкости гелия в процессах 1-2 и 1-3 равны C_1 и C_2 соответственно. Тогда отношение $\frac{C_1}{C_2}$ составляет...

- 1) $\frac{5}{7}$;
- 2) $\frac{3}{5}$;
- 3) $\frac{5}{3}$;
- 4) $\frac{7}{5}$.



10. Молярные теплоемкости водорода (H_2) в процессах 1-2 и 1-3 равны C_1 и C_2 соответственно. Тогда отношение $\frac{C_1}{C_2}$ составляет...

- 1) $\frac{5}{7}$;
- 2) $\frac{3}{5}$;
- 3) $\frac{5}{3}$;
- 4) $\frac{7}{5}$;
- 5) $\frac{2}{5}$.



11. Выберите правильное утверждение:

Удельная теплоемкость идеального газа при постоянном давлении c_p больше, чем удельная теплоемкость при постоянном объеме c_v , из-за того, что...

- 1) давление газа остается постоянным, когда его температура остается постоянной;
- 2) объем газа остается постоянным, когда его температура остается постоянной;
- 3) необходимое количество теплоты для нагревания на 1 К больше при постоянном объеме, чем при постоянном давлении;
- 4) при $p = \text{const}$ нагреваемый газ расширяется, и часть подводимой теплоты расходуется на совершение работы над внешними телами;
- 5) увеличение внутренней энергии газа при нагревании на ΔT при постоянном давлении больше, чем при постоянном объеме.

12. Молярная теплоемкость при постоянном объеме C_v для некоторого газа равна $1,5R$ (R – универсальная газовая постоянная). Сколько атомов содержит молекула этого газа? (Считать, что атомы в молекуле колебаний не совершают.)

- 1) больше трех;
- 2) три;
- 3) один;
- 4) для ответа недостаточно данных;
- 5) два.

13. В двух сосудах при комнатной температуре хранится по 1 моль газа. В первом сосуде газ состоит из одноатомных молекул, а во втором – из двухатомных. Каково отношение молярных теплоемкостей этих газов при постоянном объеме?

- 1) $1/2$;
- 2) $5/3$;
- 3) $1,0$;
- 4) $2,0$;
- 5) $3/5$.

14. В двух сосудах при комнатной температуре хранится по 1 моль газа. В первом сосуде газ состоит из одноатомных молекул, а во втором – из трехатомных. Каково отношение молярных теплоемкостей этих газов при постоянном объеме?

- 1) $5/3$;
- 2) $1/2$;
- 3) $3/5$;
- 4) 3 ;
- 5) 1 .

15. В двух сосудах при комнатной температуре хранится по 1 моль газа. В первом сосуде газ состоит из одноатомных молекул, а во втором – из двухатомных. Каково отношение внутренних энергий этих газов?

- 1) $1/2$;
- 2) 1 ;
- 3) $5/3$;
- 4) 2 ;
- 5) $3/5$.

16. В двух сосудах при комнатной температуре хранится по 1 моль газа. В первом сосуде газ состоит из одноатомных молекул, а во втором – из трехатомных. Каково отношение внутренних энергий этих газов?

- 1) $3/5$; 2) 1; 3) $5/3$; 4) $1/2$; 5) 3.

17. Теплоемкость идеального газа при адиабатическом процессе равна...

- 1) $\frac{5}{2}R$; 2) 0; 3) R ; 4) $\frac{3}{2}R$.

18. Коэффициентом Пуассона называют величину, равную...

- 1) $\frac{i}{i+2}$; 2) $\frac{i+2}{2}$; 3) $\frac{C_p - R}{C_V}$; 4) $\frac{C_V}{C_p}$; 5) $\frac{C_p}{C_V}$.

19. Коэффициент Пуассона для аргона равен...

- 1) 0,71; 2) 1,29; 3) 1,33; 4) 1,4; 5) 1,67.

20. Расположите идеальные газы O_2 , NH_3 , He в порядке возрастания коэффициента Пуассона...

- 1) He , O_2 , NH_3 ; 2) O_2 , He , NH_3 ; 3) NH_3 , O_2 , He ;
4) NH_3 , He , O_2 ; 5) O_2 , NH_3 , He .

21. Адиабатному расширению газа (p – давление, V – объем, T – температура, S – энтропия) соответствует диаграмма ...



Укажите **не менее двух** вариантов ответа

- 1) 4; 2) 3; 3) 6; 4) 5; 5) 2; 6) 1.

22. При увеличении давления в 3 раза и уменьшении объема в 2 раза внутренняя энергия идеального газа....

- 1) уменьшится в 6 раз;
- 2) уменьшится в 1,5 раза;
- 3) увеличится в 1,5 раза;
- 4) увеличится в 6 раз.

23. Состояние идеального газа определяется значениями параметров T_0 , p_0 и V_0 , где T – термодинамическая температура, p – давление, V – объем газа. Определенное количество газа перевели из состояния (p_0, V_0) в состояние $(2p_0, V_0)$. При этом его внутренняя энергия газа...

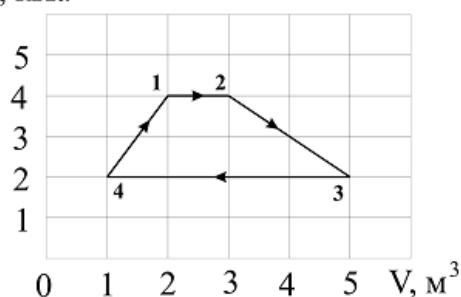
- 1) увеличилась;
- 2) не изменилась;
- 3) уменьшилась.

24. Состояние идеального газа определяется значениями параметров T_0 , p_0 и V_0 , где T – термодинамическая температура, p – давление, V – объем газа. Определенное количество газа перевели из состояния $(3p_0, V_0)$ в состояние $(p_0, 2V_0)$. При этом его внутренняя энергия газа...

- 1) не изменилась;
- 2) уменьшилась;
- 3) увеличилась.

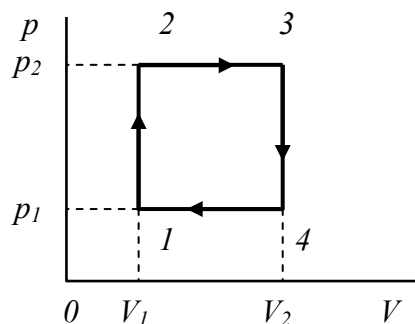
25. Диаграмма циклического процесса идеального одноатомного газа представлена на рисунке. Работа газа за цикл (в кДж) равна ...

- 1) 10; 2) 5; 3) 20; 4) 15.

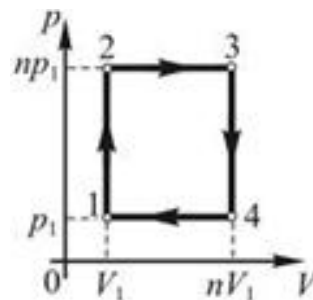


26. Найти работу тепловой машины за один цикл, изображенный на рисунке.

- 1) $A = (p_2 - p_1)(V_2 - V_1)$;
- 2) $A = p_2(V_2 - V_1)$;
- 3) $A = (p_2 - p_1)V_2$;
- 4) $A = p_2V_2$.

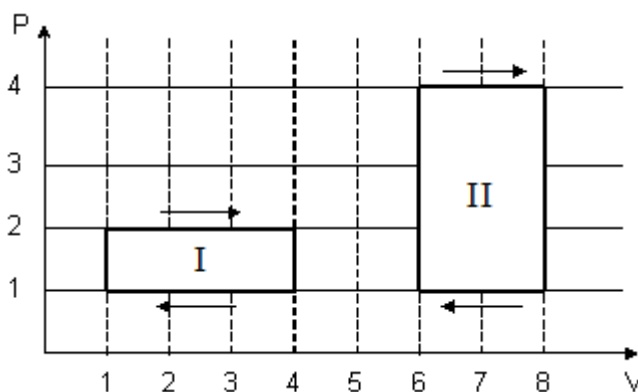


27. Идеальный газ совершает замкнутый цикл 1-2-3-4-1, состоящий из двух изохор и двух изобар. Как давление, так и объем в пределах цикла изменяются в n раз. Если давление и объем в состоянии 1 равны соответственно p_1 и V_1 , то работа газа за цикл равна ...



- 1) $A = p_1 V_1 n$; 2) $A = p_1 V_1 (n - 1)$;
 3) $A = p_1 V_1 (n - 1)^2$; 4) $A = p_1 V_1 n^2$.

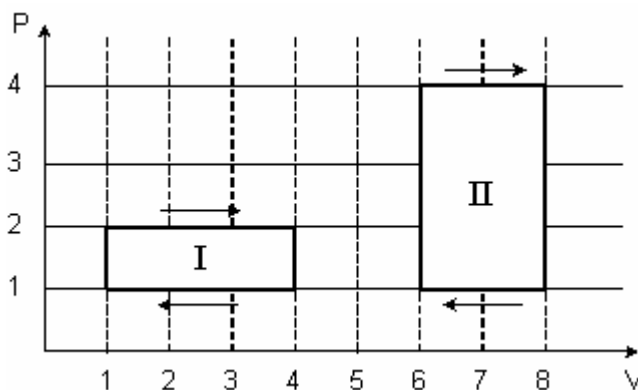
28. На (p, V) -диаграмме изображены два циклических процесса.



Отношение работ $\frac{A_{II}}{A_I}$, совершенных в этих циклах, равно ...

- 1) 2; 2) $\frac{1}{2}$; 3) -2; 4) $-\frac{1}{2}$.

29. На (p, V) -диаграмме изображены два циклических процесса.



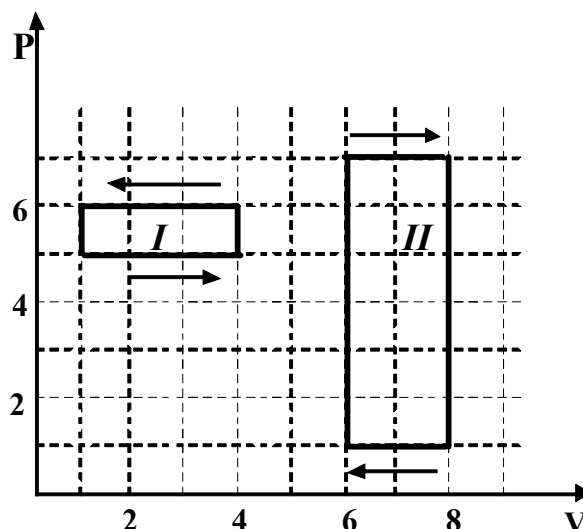
Отношение работ $\frac{A_I}{A_{II}}$, совершенных в этих циклах, равно ...

- 1) 2; 2) $\frac{1}{2}$; 3) -2; 4) $-\frac{1}{2}$.

30. На (p, V) -диаграмме изображены два циклических процесса.

Отношение работ $\frac{A_I}{A_{II}}$, совершенных в этих циклах, равно ...

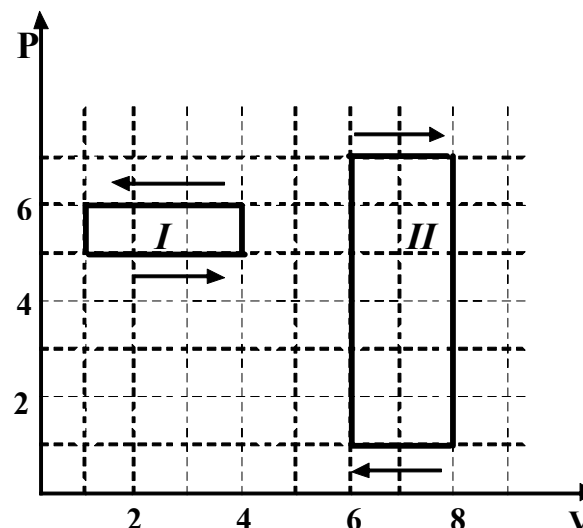
- 1) 4; 2) $\frac{1}{4}$;
3) -4; 4) $-\frac{1}{4}$.



31. На (p, V) -диаграмме изображены два циклических процесса.

Отношение работ $\frac{A_{II}}{A_I}$, совершенных в этих циклах, равно ...

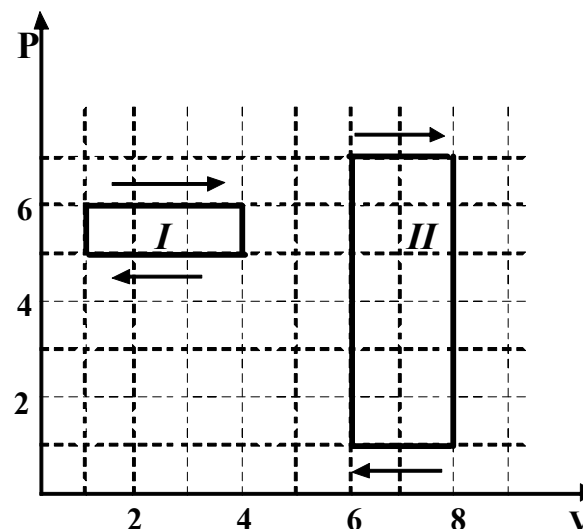
- 1) 4; 2) $\frac{1}{4}$;
3) -4; 4) $-\frac{1}{4}$.



32. На (p, V) -диаграмме изображены два циклических процесса.

Отношение работ $\frac{A_{II}}{A_I}$, совершенных в этих циклах, равно ...

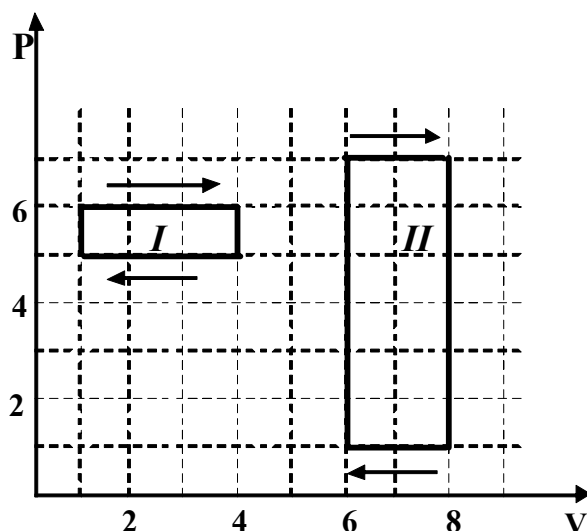
- 1) 4; 2) $\frac{1}{4}$;
3) -4; 4) $-\frac{1}{4}$.



33. На (p, V) -диаграмме изображены два циклических процесса.

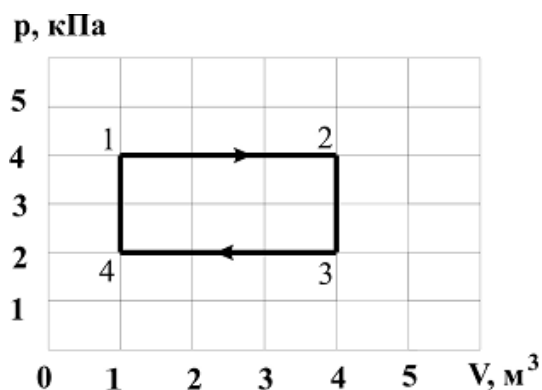
Отношение работ $\frac{A_I}{A_{II}}$, совершенных в этих циклах, равно ...

- 1) 4; 2) $\frac{1}{4}$;
3) -4; 4) $-\frac{1}{4}$.



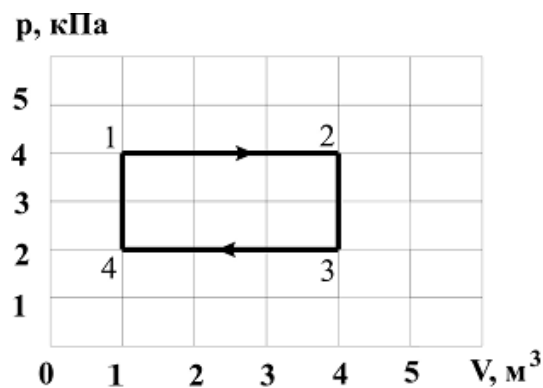
34. Диаграмма циклического процесса идеального одноатомного газа представлена на рисунке. Отношение работы при нагревании к работе газа за весь цикл по модулю равно ...

- 1) 2; 2) $\frac{1}{2}$;
3) 1; 4) 4.



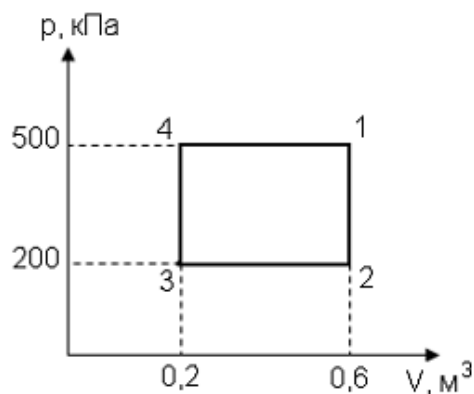
35. Диаграмма циклического процесса идеального одноатомного газа представлена на рисунке. Отношение работы газа за цикл к работе при охлаждении газа по модулю равно ...

- 1) 2; 2) $\frac{1}{2}$;
3) 1; 4) 4.



36. Диаграмма циклического процесса идеального одноатомного газа представлена на рисунке. Отношение работы при нагревании газа к работе при охлаждении равно...

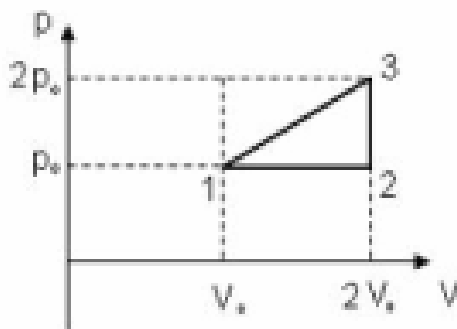
- 1) 3; 2) 1,5;
3) 5; 4) 2,5.



37. Идеальный газ переходит из состояния 1 в состояние 3 двумя способами по пути 1-3 и 1-2-3.

Отношение работ $\frac{A_{1-3}}{A_{1-2-3}}$, совершенных газом равно...

- 1) 3; 2) 1,5;
3) 4; 4) 2.



38. При изотермическом расширении 0,5 моль газа при температуре 200 К объем увеличился в e раз ($e \approx 2,7$). Работа газа (в Дж) равна ...

- 1) 1662; 2) 831; 3) 450; 4) 2493.

Достаточный уровень

1. Считая азот идеальным газом, определите его удельные теплоемкости при изохорном и изобарном процессах.

Ответ: $c_V = 742$ кДж/(кг·К); $c_p = 1,04$ кДж/(кг·К).

2. Трехатомный газ массой 2 кг, находящийся под давлением 240 кПа и имеющий температуру 20°C занимает объем 10 л. Определите удельную теплоемкость этого газа при постоянном давлении.

Ответ: $c_p = 16,62$ Дж/(кг·К).

3. Определите удельные теплоемкости c_V и c_p , если известно, что некоторый газ при нормальных условиях имеет удельный объем $v = 0,7$ м³/кг. Что это за газ?

Ответ: кислород; $c_V = 649$ Дж/(кг·К); $c_p = 909$ Дж/(кг·К).

4. Некоторый газ при нормальных физических условиях имеет плотность $\rho = 0,0894 \text{ кг/м}^3$. Определите его удельные теплоемкости c_p и c_v , а также укажите, какой это газ.

Ответ: $c_p = 14560 \text{ Дж/(кг·К)}$; $c_v = 10400 \text{ Дж/(кг·К)}$; водород.

5. Определите молярную массу газа, если его удельные теплоемкости равны $c_v = 650 \text{ Дж/(кг·К)}$, $c_p = 910 \text{ Дж/(кг·К)}$. Чему равны молярные теплоемкости этого газа?

Ответ: $M = 32 \cdot 10^{-3} \text{ кг/моль}$; $C_v = 20,8 \text{ Дж/(моль·К)}$; $C_p = 29,1 \text{ Дж/(моль·К)}$.

6. При температуре 207°C $2,5 \text{ кг}$ некоторого газа занимают объем $0,8 \text{ м}^3$. Определите давление газа, если удельная теплоемкость $c_p = 519 \text{ Дж/(кг·К)}$ и $\gamma = 1,67$.

Ответ: $p = 3,13 \cdot 10^5 \text{ Па}$.

7. Газообразный ацетон ($\text{C}_3\text{H}_6\text{O}$) при температуре 200°C имеет удельную теплоемкость при постоянном давлении $c_p = 1787 \text{ Дж/(кг·К)}$. Опре-

делите $\frac{c_p}{c_v}$ и удельный объем газа, если давление его $p = 1,8 \cdot 10^5 \text{ Па}$.

Ответ: $\frac{c_p}{c_v} = 1,086$; $v = 0,377 \text{ м}^3/\text{кг}$.

8. Определите удельные теплоемкости некоторого двухатомного газа, если его плотность при нормальных условиях равна $1,43 \text{ кг/м}^3$.

Ответ: $c_p = 897 \text{ Дж/кг·К}$; $c_v = 640 \text{ Дж/кг·К}$.

9. Найдите удельные теплоемкости c_v и c_p некоторого газа, если известно, что его молярная масса $M = 0,03 \text{ кг/моль}$ и отношение $\frac{c_p}{c_v} = 1,4$.

Ответ: $c_p = 970 \text{ Дж/(кг·К)}$; $c_v = 693 \text{ Дж/(кг·К)}$.

10. Определите отношение $\frac{c_p}{c_v}$ для газовой смеси, состоящей из 8 г гелия и 16 г кислорода.

Ответ: $\frac{c_p}{c_v} = 1,59$.

11. Определите удельные теплоемкости c_V и c_p смеси, состоящей из 20 г аргона и 7 г водяного пара.

Ответ: $c_V = 420 \text{ Дж/(кг·К)}$; $c_p = 650 \text{ Дж/(кг·К)}$.

12. Определите удельную теплоемкость c_V смеси газов, содержащей $V_1 = 5 \text{ л}$ водорода и $V_2 = 3 \text{ л}$ гелия. Газы находятся при одинаковых условиях.

Ответ: $c_V = 4530 \text{ Дж/(кг·К)}$.

13. Определите удельную теплоемкость c_p смеси кислорода и азота, если количество вещества ν_1 первого компонента равно 2 моль, а количество вещества ν_2 второго равно 4 моль.

Ответ: $c_p = 981 \text{ Дж/(кг·К)}$.

14. В баллоне находятся аргон и азот. Определите удельную теплоемкость c_V смеси этих газов, если массовые доли аргона (ω_1) и азота (ω_2) одинаковы и равны $\omega = 0,5$.

Ответ: $c_V = 526 \text{ Дж/(кг·К)}$.

15. Чему равна внутренняя энергия при нормальных условиях 1 см^3 воздуха? 1 кг воздуха?

Ответ: $U_1 = 0,25 \text{ Дж}$; $U_2 = 0,2 \text{ МДж}$.

16. В закрытом сосуде находится смесь азота массой $m_1 = 56 \text{ г}$ и кислорода массой $m_2 = 64 \text{ г}$. Определите изменение внутренней энергии этой смеси, если ее охладил на 20°C .

Ответ: $\Delta U = 1,66 \text{ кДж}$.

17. Двухатомный идеальный газ, занимавший при давлении 200 кПа объем 6 л, расширяется до объема вдвое большего, чем начальный. Процесс происходит так, что $pV^2 = \text{const}$. Определите изменение внутренней энергии газа.

Ответ: $\Delta U = 1,5 \text{ кДж}$.

18. Газ при постоянном давлении был нагрет от температуры $t_1 = 7^\circ \text{C}$ до $t_2 = 107^\circ \text{C}$. Определите работу изобарного расширения газа, если в начале нагревания 8 м^3 газа находилось под давлением $0,5 \cdot 10^6 \text{ Па}$.

Ответ: $A = 1428,6 \text{ кДж}$.

19. В цилиндре диаметром $d = 20$ см и высотой $h = 42$ см с подвижным поршнем находится газ под давлением $p_1 = 12 \cdot 10^5$ Па при температуре 300°C . Определите работу A во время снижения температуры до 10°C при постоянном давлении.

Ответ: $A = -8 \cdot 10^6$ Дж.

20. Водород массой $m = 4$ г был нагрет на $\Delta T = 10$ К при постоянном давлении. Определить работу A расширения газа.

Ответ: $A = 166$ Дж.

21. Газ, занимавший объем $V_1 = 12$ л под давлением $p = 100$ кПа, был изобарно нагрет от температуры $T_1 = 300$ К до $T_2 = 400$ К. Определите работу A расширения газа.

Ответ: $A = 400$ Дж.

22. Какая работа A совершается при изотермическом расширении водорода массой $m = 5$ г, взятого при температуре $T = 290$ К, если объем газа увеличивается в три раза?

Ответ: $A = 6620$ Дж.

23. При изотермическом расширении 10 г азота, находящегося при температуре 17°C , была совершена работа, равная 860 Дж. Во сколько раз изменилось давление азота при расширении?

Ответ: в 2,72 раза.

24. Газ, занимавший объем 2 л при давлении 0,1 МПа, расширялся изотермически до 4 л. После этого, охлаждая газ изохорно (при постоянном объеме), уменьшили его давление в два раза. Далее газ изобарно расширился до 8 л. Найдите работу, совершенную газом.

Ответ: $A = 240$ Дж.

25. Некоторый газ массой 1 кг находится при температуре 300 К и под давлением 0,5 МПа. В результате изотермического сжатия давление газа увеличилось в 2 раза. Работа, затраченная на сжатие, равна 432 кДж. Определите: 1) какой это газ; 2) первоначальный удельный объем газа.

Ответ: $\nu = 1,25$ м³/кг.

26. Некоторый газ массой $m = 5$ расширяется изотермически от объема V_1 до объема $V_2 = 2V_1$. Работа расширения $A = 1$ кДж. Определите среднюю квадратичную скорость молекул газа.

Ответ: $\langle v_{\text{кв}} \rangle = 930$ м/с.

27. Определите показатель адиабаты γ для смеси газов, содержащей гелий массой $m_1 = 10$ г и водород массой $m_2 = 4$ г.

Ответ: $\gamma = 1,51$.

28. Смесь газов состоит из аргона и азота, взятых при одинаковых условиях и в одинаковых объемах. Определите показатель адиабаты γ такой смеси.

Ответ: $\gamma = 1,5$.

29. Найдите показатель адиабаты γ смеси водорода и неона, если массовые доли обоих газов в смеси одинаковы и равны $\omega = 0,5$.

Ответ: $\gamma = 1,42$.

30. Определите показатель адиабаты γ смеси газов, содержащей кислород и аргон, если количества вещества того и другого газа в смеси одинаковы и равны ν .

Ответ: $\gamma = 1,5$.

31. При адиабатном сжатии газа его объем уменьшился в $n = 10$ раз, а давление увеличилось в $k = 21,4$ раза. Определите отношение $\frac{c_p}{c_v}$ теплоемкостей газов.

Ответ: $\gamma = 1,33$.

32. 7,5 л кислорода адиабатно сжимаются до объема в 1 л, причем в конце сжатия установилось давление $1,6 \cdot 10^6$ Па. Под каким давлением находился газ до сжатия?

Ответ: $p_1 = 9,5 \cdot 10^4$ Па.

33. Воздух в цилиндрах двигателя внутреннего сгорания сжимается адиабатно и его давление при этом изменяется от $p_1 = 1$ ат до $p_2 = 35$ ат. Начальная температура воздуха 40°C . Найдите температуру воздуха в конце сжатия.

Ответ: $T = 592^\circ\text{C}$.

34. В бензиновом автомобильном моторе степень сжатия горючей смеси равна 6,2. Смесь засасывается в цилиндр при температуре $t_1 = 15^\circ\text{C}$. Найдите температуру t_2 горючей смеси в конце такта сжатия. Горючую

смесь рассматривать как двухатомный идеальный газ, процесс считать адиабатным.

Ответ: $t_2 = 342^\circ\text{C}$.

35. До какой температуры охладится воздух, находящийся при температуре 0°C , если он расширяется адиабатно от объема V_1 до объема $V_2 = 2V_1$?

Ответ: $t = -66^\circ\text{C}$.

36. Двухатомный газ, находящийся при температуре 27°C и давлении в $2 \cdot 10^6$ Па, сжимается адиабатно от объема V_1 до объема $V_2 = 0,5V_1$. Найти температуру и давление газа после сжатия.

Ответ: $t = 123^\circ\text{C}$, $p = 52,8 \cdot 10^5$ Па.

37. Во сколько раз уменьшится средняя квадратичная скорость молекул двухатомного газа при адиабатическом увеличении объема газа в два раза?

Ответ: в 1,15 раза.

38. Азот, находившийся при температуре 400 К, подвергли адиабатному расширению, в результате которого его объем увеличился в 5 раз, а внутренняя энергия уменьшилась на 4 кДж. Определите массу азота.

Ответ: $m = 28$ г.

39. При адиабатном расширении кислорода ($\nu = 2$ моль), находящегося при нормальных условиях, его объем увеличился в 3 раза. Определите: 1) изменение внутренней энергии газа; 2) работу расширения газа.

Ответ: $\Delta U = -4,03$ кДж, $A = 4,03$ кДж.

40. При адиабатном сжатии кислорода массой $m = 1$ кг совершена работа $A = 100$ кДж. Определить конечную температуру T_2 газа, если до сжатия кислород находился при температуре $T_1 = 300$ К.

Ответ: $T_2 = 454$ К,

41. Определить работу A адиабатного расширения водорода массой $m = 4$ г, если температура газа понизилась на $\Delta T = 10$ К.

Ответ: $A = 416$ Дж.

42. Азот массой $m = 2$ г, имевший температуру $T_1 = 300$ К, был адиабатно сжат так, что его объем уменьшился в $n = 10$ раз. Определить конечную температуру T_2 газа и работу A сжатия.

Ответ: $T_2 = 754$ К, $A = 674$ Дж.

43. Кислород, занимавший объем $V_1 = 1$ л под давлением $p_1 = 1,2$ МПа, адиабатно расширился до объема $V_2 = 10$ л. Определить работу A расширения газа.

Ответ: $A = 1,81$ кДж.

44. Найдите работу и изменение внутренней энергии при адиабатном расширении 1 кг воздуха, если его объем увеличился в 10 раз. Начальная температура 15°C .

Ответ: $A = -\Delta U = 1,25 \cdot 10^5$ Дж.

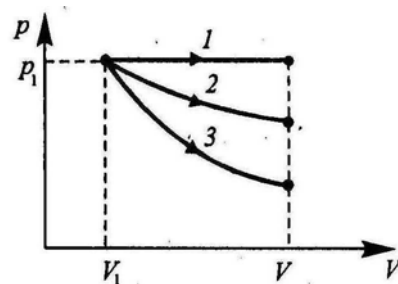
45. Водород, занимающий объем 5 л и находящийся под давлением 10^5 Па, адиабатно сжат до объема 1 л. Найдите работу сжатия и изменение внутренней энергии водорода.

Ответ: $A = -\Delta U = 1,14 \cdot 10^3$ Дж.

46. Азот массой 2 кг при температуре 17°C и давлении 10^5 Па сжимают до давления 1 МПа. Определите работу, затраченную на сжатие, если газ сжимают: 1) изотермически, 2) адиабатно.

Ответ: $A_1 = 396$ кДж; $A_2 = 400$ кДж.

47. Кислород, занимающий при давлении $p_1 = 1$ МПа объем $V_1 = 5$ л, расширяется в $\eta = 3$ раза. Определите конечное давление и работу, совершенную газом. Рассмотрите следующие процессы: 1) изобарный; 2) изотермический; 3) адиабатный.



Ответ: 1) $p = 1$ МПа, $A = 10$ кДж;

2) $p = 0,33$ МПа, $A = 5,5$ кДж; 3) $p = 0,21$ МПа, $A = 4,63$ кДж.

48. Определить скорость вылета поршня массой 4 кг из цилиндра при адиабатном расширении воздуха в 40 раз, если начальное давление воздуха 10^7 Па, а объем 0,3 л.

Ответ: $v = 54$ м/с.

49. Объем одного моля воды при изменении давления от $p_1 = 0$ атм до $p_2 = 1000$ атм изменяется согласно закону, выраженному уравнением $V = bP + cP^2$, где $b = -7,15 \cdot 10^{-4}$ м³/Па, $c = 4,6 \cdot 10^{-8}$ м³/Па. Определите работу сжатия моля воды в этот период.

Ответ: $A = 332$ Дж.

2.2. Первое начало термодинамики

Основные формулы

Первое начало термодинамики:

количество теплоты Q , сообщенное газу, расходуется на изменение его внутренней энергии ΔU и на совершение газом работы A против внешних сил

$$Q = \Delta U + A.$$

Первое начало термодинамики при *изобарном* процессе

$$Q = \Delta U + A = \frac{m}{M} C_V \Delta T + \frac{m}{M} R \Delta T = \frac{m}{M} C_p \Delta T,$$

при *изохорном* процессе ($A = 0$)

$$Q = \Delta U = \frac{m}{M} C_V \Delta T,$$

при *изотермическом* процессе ($\Delta U = 0$)

$$Q = A = \frac{m}{M} R T \ln \frac{V_2}{V_1},$$

при *адиабатном* процессе ($Q = 0$)

$$Q = -\Delta U = -\frac{m}{M} C_V \Delta T.$$

ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

Пример 1. Объем аргона, находящегося при давлении 80 кПа, увеличился от 1 до 2 л. На сколько изменилась внутренняя энергия газа, если расширение производилось: 1) изобарно; 2) адиабатно.

Дано:
 $V_1 = 10^{-3} \text{ м}^3$
 $V_2 = 2 \cdot 10^{-3} \text{ м}^3$
 $p = 0,8 \cdot 10^5 \text{ Па}$
 $M = 40 \cdot 10^{-3} \text{ кг/моль}$
 $i = 3$

 $\Delta U_1 = ? \quad \Delta U_2 = ?$

Решение:

Применим первый закон термодинамики, согласно которому количество теплоты Q , переданное системе, расходуется на увеличение внутренней энергии ΔU системы и на внешнюю механическую работу A :

$$Q = \Delta U + A. \quad (1)$$

Величину ΔU можно определить, зная массу m газа, удельную теплоемкость c_V при постоянном объеме и изменение температуры ΔT :

$$\Delta U = mc_V \Delta T. \quad (2)$$

Однако удобнее изменение внутренней энергии ΔU определять через молярную теплоемкость C_V , которая может быть выражена через число степеней свободы

$$C_V = \frac{c_V}{M} = \frac{iR}{2M}. \quad (3)$$

Подставляя величину C_V из формулы (3) в (2), получаем

$$\Delta U = \frac{mi}{2M} R \Delta T. \quad (4)$$

Изменение внутренней энергии зависит от характера процесса, при котором идет расширение газа. При изобарном расширении газа согласно первому закону термодинамики часть количества теплоты идет на изменение внутренней энергии ΔU , которая выражается формулой (4). Найти ΔU для аргона по формуле (4) нельзя, так как масса газа и температура в условии задачи не даны. Поэтому необходимо провести преобразование формулы (4).

Запишем уравнение Клапейрона – Менделеева для начального и конечного состояний газа:

$$pV_1 = (m/M)RT_1 \quad pV_2 = (m/M)RT_2,$$

или

$$p(V_2 - V_1) = (m/M)R(T_2 - T_1). \quad (5)$$

Подставив (5) в формулу (4), получим

$$\Delta U = (i / 2)p(V_2 - V_1). \quad (6)$$

Это уравнение является расчетным для определения ΔU при изобарном расширении.

$$\Delta U = \frac{3}{2} \cdot 0,8 \cdot 10^5 \cdot 10^{-3} = 120 \text{ Дж.}$$

При адиабатном расширении газа теплообмена с внешней средой не происходит, поэтому $Q = 0$. Уравнение (1) запишется в виде

$$\Delta U + A = 0. \quad (7)$$

Это соотношение устанавливает, что работа расширения газа может быть произведена только за счет уменьшения внутренней энергии газа (знак минус перед ΔU):

$$A = -\Delta U. \quad (8)$$

Работа для адиабатного процесса

$$A = \frac{m}{M} \frac{RT_1}{\gamma - 1} \left[1 - \left(\frac{V_1}{V_2} \right)^{\gamma - 1} \right], \quad (9)$$

где γ – показатель степени адиабаты, равный отношению теплоемкостей

$$\gamma = \frac{C_p}{C_v} = \frac{i + 2}{i}.$$

Для аргона – одноатомного газа ($i = 3$) имеем $\gamma = 1,67$.

Находим изменение внутренней энергии при адиабатном процессе для аргона, учитывая формулы (8) и (9):

$$\Delta U = \frac{m}{M} \frac{RT_1}{\gamma - 1} \left[\left(\frac{V_1}{V_2} \right)^{\gamma - 1} - 1 \right]. \quad (10)$$

Применив уравнение Клапейрона – Менделеева для данного случая $p_1 V_1 = (m / M) RT_1$, преобразуем формулу (10) к виду

$$\Delta U = \frac{p_1 V_1}{\gamma - 1} \left[\left(\frac{V_1}{V_2} \right)^{\gamma - 1} - 1 \right]. \quad (11)$$

$$\Delta U = \frac{0,8 \cdot 10^5 \cdot 10^{-3}}{1,67 - 1} \cdot \left[\left(\frac{10^{-3}}{2 \cdot 10^{-3}} \right)^{1,67 - 1} - 1 \right] = -44,6 \text{ Дж.}$$

Ответ: 1) $\Delta U = 120$ Дж; 2) $\Delta U = -44,6$ Дж.

Пример 2. Кислород массой 160 г нагревают при постоянном давлении от 320 до 340 К. Определите: 1) количество теплоты, поглощенное газом; 2) изменение внутренней энергии; 3) работу расширения газа.

Дано:
 $m = 160 \text{ г} = 16 \cdot 10^{-2} \text{ кг}$
 $T_1 = 320 \text{ К}$
 $T_2 = 340 \text{ К}$
 1) $Q = ?$; 2) $\Delta U = ?$;
 3) $A = ?$

Решение:
 Количество теплоты, необходимое для нагревания газа при постоянном давлении,

$$Q = mc_p(T_2 - T_1) = (m / M)C_p(T_2 - T_1), \quad (1)$$
 где c_p и $C_p = Mc_p$ – удельная и молярная теплоемкости газа при постоянном давлении; $M = 32 \cdot 10^{-3} \text{ кг/моль}$ – молярная масса кислорода.

Для всех двухатомных газов

$$C_p = \frac{7}{2}R.$$

$$C_p = 3,5 \cdot 8,31 = 29 \text{ Дж/(моль} \cdot \text{К)}.$$

$$Q = \frac{16 \cdot 10^{-2}}{32 \cdot 10^{-3}} \cdot 29,1 \cdot (340 - 320) = 2910 \text{ Дж}.$$

Изменение внутренней энергии газа

$$\Delta U = (m / M)C_v(T_2 - T_1), \quad (2)$$

где C_v – молярная теплоемкость газа при постоянном объеме.

Для всех двухатомных газов

$$C_v = \frac{5}{2}R.$$

$$C_v = 2,5 \cdot 8,31 = 20,8 \text{ Дж/(моль} \cdot \text{К)}.$$

$$\Delta U = \frac{16 \cdot 10^{-2}}{32 \cdot 10^{-3}} \cdot 20,8 \cdot (340 - 320) = 2080 \text{ Дж}.$$

Работа расширения газа в изобарном процессе

$$A = p\Delta V,$$

где $\Delta V = V_2 - V_1$ – изменение объема газа, которое можно найти из уравнения Клапейрона – Менделеева.

В изобарном процессе

$$pV_1 = (m / M)RT_1, \quad (3)$$

$$pV_2 = (m / M)RT_2. \quad (4)$$

Почленным вычитанием выражения (4) из (3) находим

$$p(V_2 - V_1) = (m / M)R(T_2 - T_1),$$

следовательно,

$$A = (m / M) R (T_2 - T_1).$$

$$A = \frac{16 \cdot 10^{-2}}{32 \cdot 10^{-3}} \cdot 8,31 \cdot (340 - 320) = 830 \text{ Дж}.$$

Ответ: 1) $Q = 2910$ Дж; 2) $\Delta U = 2080$ Дж; 3) $A = 830$ Дж.

Пример 3. Кислород занимает объем $V_1 = 1 \text{ м}^3$ и находится под давлением $p_1 = 200$ кПа. Газ нагрели сначала при постоянном давлении до объема $V_2 = 3 \text{ м}^3$, а затем при постоянном объеме до давления $p_2 = 500$ кПа. Постройте график процесса и найдите: 1) изменение ΔU внутренней энергии газа; 2) совершенную им работу A ; 3) количество теплоты Q , переданное газу.

Дано:
 $V_1 = 1 \text{ м}^3$
 $p_1 = 200 \text{ кПа}$
 $V_2 = 3 \text{ м}^3$
 $p_2 = 500 \text{ кПа}$

1) $\Delta U = ?$; 2) $A = ?$;
 3) $Q = ?$

Решение:

Построим график процесса (см. рисунок). На графике точками 1, 2, 3 обозначены состояния газа, характеризующиеся параметрами

$$(p_1, V_1, T_1), (p_1, V_2, T_2), (p_2, V_2, T_3).$$

1. Изменение внутренней энергии газа при переходе его из состояния 1 в состояние 3 выражается формулой

$$\Delta U = c_V m \Delta T,$$

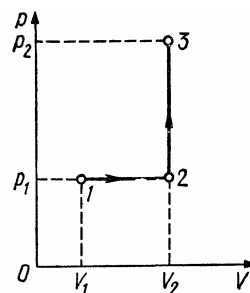
где c_V — удельная теплоемкость газа при постоянном объеме; m — масса газа; ΔT — разность температур, соответствующих конечному 3 и начальному 1 состояниям, т.е. $\Delta T = T_3 - T_1$.

Так как $c_V = \frac{i}{2} \frac{R}{M}$; где M — молярная масса газа, то

$$\Delta U = \frac{i}{2} \frac{m}{M} R (T_3 - T_1). \quad (1)$$

Температуры T_1 и T_3 выразим из уравнения Клапейрона — Менделеева ($pV = \frac{m}{M} RT$):

$$T_1 = \frac{Mp_1V_1}{mR}; \quad T_3 = \frac{Mp_2V_2}{mR}.$$



С учетом этого равенство (1) перепишем в виде

$$\Delta U = (i/2)(p_2 V_2 - p_1 V_1).$$

Подставив в эту формулу значения величин (учтем, что для кислорода, как двухатомного газа, $i = 5$) и выполнив вычисления, получим

$$\Delta U = 3,25 \text{ МДж}.$$

2. Полная работа, совершаемая газом, равна $A = A_1 + A_2$, где A_1 – работа на участке $1 - 2$; A_2 – работа на участке $2 - 3$.

На участке $1 - 2$ давление постоянно ($p = \text{const}$). Работа в этом случае выражается по формуле $A_1 = p_1 \Delta V = p_1 (V_2 - V_1)$. На участке $2 - 3$ объем газа не изменяется и, следовательно, работа газа на этом участке равна нулю ($A_2 = 0$). Таким образом,

$$A = A_1 = p_1 (V_2 - V_1).$$

Подставив в эту формулу значения физических величин, получим

$$A = 0,4 \text{ МДж}.$$

3. Согласно первому началу термодинамики количество теплоты Q , переданное газу, равно сумме работы A , совершенной газом, и изменению ΔU внутренней энергии:

$$Q = \Delta U + A, \text{ или } Q = 3,65 \text{ МДж}.$$

Ответ: 1) $\Delta U = 2080 \text{ Дж}$; 2) $A = 830 \text{ Дж}$; 3) $Q = 2910 \text{ Дж}$.

Пример 4. Кислород нагревают от $t_1 = 50^\circ \text{C}$ до $t_2 = 60^\circ \text{C}$. Масса кислорода $m = 160 \text{ г}$. Определите количество поглощённой теплоты и изменение внутренней энергии при изохорном и изобарном процессах. Начальное давление близко к атмосферному.

Дано:	Решение:
$t_1 = 50^\circ \text{C}$	При давлении, близком к атмосферному, газ можно считать идеальным. Графики изохорного I и изобарного II процессов (см. рисунок) лежат между одними и теми же изотермами, следовательно, изменение внутренней энергии газа должно быть одинаковым:
$t_2 = 60^\circ \text{C}$	
$m = 160 \text{ г}$	
$\Delta U_V = ? \quad \Delta U_P = ?$	
$Q_V = ? \quad Q_P = ?$	$\Delta U_V = \Delta U_P = \frac{m}{M} \frac{i}{2} R (T_2 - T_1), \quad (1)$ где $i = 5$ – число степеней свободы (молекула кислорода двухатомная).

Поскольку оба процесса характеризуются постоянными теплоемкостями, искомое количество теплоты может быть найдено по формуле

$$Q = \frac{m}{M} C (T_2 - T_1), \quad (2)$$

где C – молярная теплоемкость, зависящая от характера процесса.

При изохорном процессе газ не совершает работы, поэтому количество поглощенной теплоты будет меньше: $Q_V < Q_P$.

Исходя из молекулярно-кинетической теории, это можно объяснить тем, что при изобарном нагревании газ расширяется и молекулы его, ударяясь о движущийся поршень, отскакивают от него с меньшей, чем до удара, скоростью, отдавая часть своей кинетической энергии поршню. На восстановление энергии молекул и требуется дополнительное количество теплоты.

Согласно выражению (1), $\Delta U_V = \Delta U_P = 1040$ Дж.

При изохорном процессе

$$Q_V = \Delta U_V = 1040 \text{ Дж.}$$

При изобарном процессе, учитывая, что молярная теплоёмкость $C_P = (i + 2)R / 2$, из равенства (2) получаем

$$Q_P = \frac{m}{M} \frac{i + 2}{2} R (T_2 - T_1) = 1450 \text{ Дж.}$$

Очевидно, что разность $Q_P - \Delta U_P$ равна работе, совершённой газом при изобарном нагревании.

Ответ: $\Delta U_V = \Delta U_P = 1040$ Дж; $Q_V = 1040$ Дж; $Q_P = 1450$ Дж.

Пример 5. Двухатомный идеальный газ, занимающий при давлении $p_1 = 3 \cdot 10^5$ Па объем $V_1 = 4$ л, расширяют до объема $V_2 = 6$ л, при этом давление падает до значения $p_2 = 10^5$ Па. Процесс происходит сначала по адиабате, затем по изохоре. Определите работу сил давления газа, изменение его внутренней энергии и количество поглощённой теплоты при этом переходе.

Дано:

$$p_1 = 3 \cdot 10^5 \text{ Па}$$

$$p_2 = 10^5 \text{ Па}$$

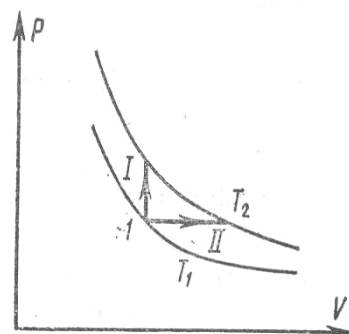
$$V_1 = 4 \text{ л}$$

$$V_2 = 6 \text{ л}$$

$$A = ? \quad Q = ? \quad \Delta U = ?$$

Решение:

Как следует из условия задачи, газ участвует в двух процессах: а) адиабатное расширение из состояния 1 в некоторое состояние L , в котором объем $V_L = V_2$, давление p_L неизвестно; б) изохорный переход из состояния L в состояние 2.



Чтобы определить характер изохорного процесса – нагревание или охлаждение, – надо найти промежуточное значение давления p_L .

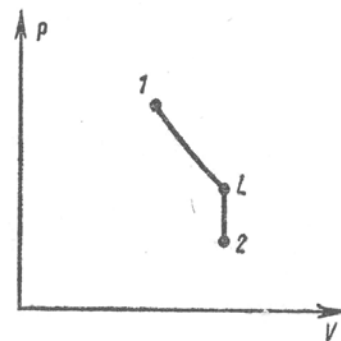
Согласно уравнению адиабаты

$$p_L / p_1 = (V_1 / V_L)^\gamma. \quad (1)$$

Газ двухатомный, следовательно, $\gamma = \frac{i+2}{i} = 1,4$.

Таким образом,

$$p_L = 3 \cdot 10^5 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{1,4} > p_2 = 10^5 \text{ Па.}$$



Последнее неравенство показывает, что при изохорном переходе из состояния L в состояние 2 давление газа уменьшается (см. рисунок) и, следовательно, процесс $L-2$ является изохорным охлаждением ($p/T = \text{const}$ при $V = \text{const}$).

Чтобы найти работу A_{12} и количество поглощенной теплоты Q_{12} при переходе из состояния 1 в состояние 2 , надо рассмотреть каждый из указанных процессов отдельно. При этом

$$A_{12} = A_{1L} + A_{L2}, \quad Q_{12} = Q_{1L} + Q_{L2}.$$

Изменение внутренней энергии не зависит от процесса и в любом случае

$$\Delta U_{12} = \frac{i}{2} \frac{m}{M} R(T_2 - T_1). \quad (2)$$

Неизвестные значения T_2 , T_1 и m/M можно найти из уравнения Клапейрона – Менделеева.

На участке $1-L$ количество поглощенной теплоты $Q_{1L} = 0$. Работа газа A_{1L} может быть определена по изменению внутренней энергии ΔU_{1L} с использованием уравнения Клапейрона – Менделеева и уравнения адиабаты. На участке $L-2$ работа газа $A_{L2} = 0$, количество поглощенной теплоты

$$Q_{L2} = \frac{m}{M} C_V (T_2 - T_L). \quad (3)$$

Работа газа при адиабатном процессе

$$A_{1L} = -\Delta U_{1L} = \frac{i}{2} \frac{m}{M} R(T_1 - T_L).$$

Используя уравнения Клапейрона – Менделеева для состояний 1 и L , получим

$$A_{1L} = \frac{i}{2} (p_1 V_1 - p_L V_2).$$

Из уравнения адиабаты (1)

$$p_L = p_1(V_1 / V_L)^\gamma = 1,7 \cdot 10^5 \text{ Па.}$$

Тогда $A_{1L} = 450$ Дж. Учитывая, что $A_{L2} = 0$, находим $A_{12} = A_{1L} = 450$ Дж.

При изохорном процессе молярная теплоемкость $C_V = (i / 2)R$. Подставив это выражение в уравнение (3) и используя уравнение Клапейрона – Менделеева для состояний L и 2 , получим

$$Q_{L2} = \frac{i}{2}(p_2V_2 - p_LV_2) = -1050 \text{ Дж.}$$

Поскольку $Q_{1L} = 0$, общее количество теплоты $Q_{12} = Q_{L2} = -1050$ Дж. Знак минус показывает, что газ отдавал теплоту окружающим телам. Изменение внутренней энергии [см. (2)]

$$\Delta U_{12} = i(p_2V_2 - p_1V_1) / 2 = -1500 \text{ Дж.}$$

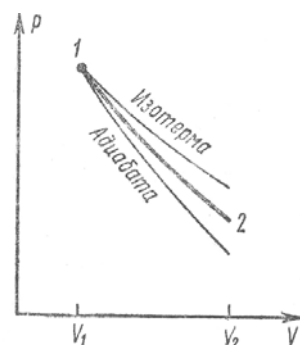
$$\text{Ответ: } p_L = 1,7 \cdot 10^5 \text{ Па, } A_{12} = A_{1L} = 450 \text{ Дж,} \\ Q_{12} = Q_{L2} = -1050 \text{ Дж, } \Delta U_{12} = -1500 \text{ Дж.}$$

Пример 6. Двухатомный идеальный газ, занимавший при давлении $p_1 = 2 \cdot 10^5$ Па объем $V_1 = 6$ л, расширяется до объема вдвое большего, чем начальный. Процесс расширения происходит так, что $pV^k = \text{const}$, где $k = 1,2$. Найдите изменение внутренней энергии газа и работу, совершенную им при расширении. Рассчитайте молярную теплоемкость газа в этом процессе.

Дано: $p_1 = 2 \cdot 10^5$ Па $V_1 = 6$ л $pV^k = \text{const}, k = 1,2$ $\Delta U = ?$ $A = ?$ $C = ?$	Решение: Качественный анализ происходящего процесса удобнее всего провести, сравнивая график этого процесса в координатах p, V с изотермой и адиабатой при расширении из одного и того же начального состояния до одинакового конечного объема (см. рисунок).
--	--

В рассматриваемом процессе коэффициент $k > 1$, следовательно, график располагается ниже изотермы – это значит, что процесс $1-2$ сопровождается понижением температуры ($\Delta T_{12} < 0$) и уменьшением внутренней энергии ($\Delta U_{12} < 0$).

С другой стороны, коэффициент $k < \gamma = C_p / C_V$, следовательно, график этого процесса должен располагаться выше графика адиабаты. Это значит, что



убыль внутренней энергии ($|\Delta U_{12}| < |\Delta U_{\text{ад}}|$). Работа A_{12} больше, чем работа, совершаемая газом при отсутствии теплообмена ($A_{12} > A_{\text{ад}}$). Поскольку при адиабатном процессе $|\Delta U_{\text{ад}}| = A_{\text{ад}}$, то

$$|\Delta U_{12}| < A_{12}.$$

Это значит, что количество теплоты, необходимое для проведения данного расширения, $Q_{12} = A_{12} - |\Delta U_{12}| > 0$, т.е. газ при таком процессе получает теплоту, а температура его при этом понижается – теплоемкость газа отрицательна. Таким образом, на совершение газом работы против внешних сил расходуется и сообщаемое газом количество теплоты, и часть его внутренней энергии.

Изменение внутренней энергии, как обычно,

$$\Delta U_{12} = \frac{i}{2} \frac{m}{M} R(T_2 - T_1), \quad (1)$$

причем входящие в это выражение неизвестные величины можно найти из уравнения Клапейрона – Менделеева и уравнения процесса.

Работа рассчитывается по формуле

$$A_{12} = \int_{V_1}^{V_2} p dV, \quad (2)$$

при этом $p(V)$ задано уравнением процесса.

На основании первого начала термодинамики

$$Q_{12} = A_{12} + \Delta U_{12}. \quad (3)$$

Если полученное для данного процесса выражение Q_{12} прямо пропорционально разности температур $\Delta T_{12} = T_2 - T_1$, то теплоёмкость газа постоянна (процесс политропный). Тогда, сравнив выражение (3) с равенством

$$Q_{12} = \frac{m}{M} C(T_2 - T_1), \quad (4)$$

получим молярную теплоемкость процесса.

Правда, она может быть найдена и непосредственно из дифференциального уравнения первого начала термодинамики, уравнения состояния и уравнения данного процесса. В настоящей задаче используется первый способ.

Согласно выражению (1)

$$\Delta U_{12} = \frac{i}{2} \left(\frac{m}{M} R T_2 - \frac{m}{M} R T_1 \right) = \frac{i}{2} (p_2 V_2 - p_1 V_1). \quad (5)$$

Конечное давление газа по заданному уравнению процесса

$$p_2 = p_1(V_1 / V_2)^k = 8,7 \cdot 10^4 \text{ Па.}$$

Рассматриваемый газ – двухатомный ($i = 5$). Изменение его внутренней энергии [см. (5)] $\Delta U_{12} = -400 \text{ Дж}$.

Чтобы найти работу, подставим в равенство (2) выражение для давления. Согласно уравнению процесса, $pV^k = \text{const} = p_1V_1^k$. Отсюда $p = p_1V_1^k / V^k$. Поскольку p_1 и V_1 – фиксированные значения давления и объема в начальном состоянии, то $p_1V_1^k$ можно вынести за знак интеграла. Тогда

$$A_{12} = p_1V_1^k \int_{V_1}^{V_2} \frac{dV}{V^k} = p_1V_1^k \frac{1}{k-1} \left(\frac{1}{V_1^{k-1}} - \frac{1}{V_2^{k-1}} \right).$$

Внесем произведение $p_1V_1^k$ в скобки, причем при умножении на второе слагаемое (вычитаемое) запишем его в виде $p_2V_2^k$. Тогда

$$A_{12} = \frac{1}{k-1} (p_1V_1 - p_2V_2) = 780 \text{ Дж.} \quad (6)$$

Подставим выражения (5) и (6) в (3):

$$Q_{12} = \frac{i}{2} (p_2V_2 - p_1V_1) + \frac{1}{k-1} (p_1V_1 - p_2V_2),$$

или

$$Q_{12} = \left(\frac{i}{2} - \frac{1}{k-1} \right) (p_2V_2 - p_1V_1).$$

Используя уравнение Клапейрона – Менделеева, получим

$$Q_{12} = \frac{m}{M} \left(\frac{i}{2} - \frac{1}{k-1} \right) R (T_2 - T_1),$$

т.е. количество теплоты прямо пропорционально разности температур – молярная теплоемкость процесса постоянна. Сравнивая это выражение с равенством (4), получим

$$C_{12} = \left(\frac{i}{2} - \frac{1}{k-1} \right) R = -21 \text{ Дж/(моль·К)}.$$

Как известно, коэффициент Пуассона $\gamma = (i + 2) / i$, следовательно, $\gamma - 1 = 2 / i$ и $i / 2 = 1 / (\gamma - 1)$. Тогда

$$C = \left(\frac{1}{\gamma - 1} - \frac{1}{k-1} \right) R < 0,$$

если $1 < k < \gamma$.

Ответ: $\Delta U_{12} = -400 \text{ Дж}$; $A_{12} = 780 \text{ Дж}$; $C_{12} = -21 \text{ Дж/(моль·К)}$.

Пример 7. 0,5 моль идеального одноатомного газа нагревают от температуры $T_1 = 250$ К до $T_2 = 500$ К так, что в процессе нагрева $p/V = \text{const}$. Определите молярную теплоёмкость и рассчитайте количество теплоты, поглощённое газом при нагревании.

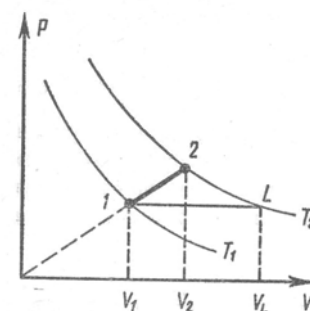
Дано:
 $\nu = 0,5$ моль
 $T_1 = 250$ К
 $T_2 = 500$ К
 $p/V = \text{const}$
 $C = ?$ $Q = ?$

Решение:

Рассмотрим график процесса в координатах p, V и сравним его с изобарой, заключенной в тех же пределах температур (см. рисунок). Поскольку состояния 2 и L лежат на одной изотерме ($T = T_2$), а газ идеальный, то изменения внутренней энергии в процессах 1-2 и 1-L одинаковы:

$$\Delta U_{12} = \Delta U_{1L} = \Delta U_p.$$

Работа, совершаемая газом в процессе 1-2, меньше, чем работа, совершаемая газом при изобарном нагреве. Графически работа A_{12} численно равна площади, ограниченной графиком 1-2, осью абсцисс и ординатами $V = V_1$ и $V = V_2$. Работа A_{1L} численно равна площади, ограниченной графиком 1-L, осью абсцисс и ординатами $V = V_1$ и $V = V_L$.



Следовательно, количество теплоты, поглощенное газом в процессе 1-2, меньше, чем при изобарном процессе, поэтому и теплоемкость газа при этом процессе меньше, чем при изобарном, но больше, чем при изохорном процессе, так как газ совершает работу.

Молярная теплоемкость этого процесса может быть найдена непосредственно из первого начала термодинамики, записанного в дифференциальной форме:

$$\delta Q = dU + \delta A = \frac{i}{2} \frac{m}{M} R dT + p dV. \quad (1)$$

С другой стороны, из определения молярной теплоемкости

$$\delta Q = \frac{m}{M} C dT, \quad (2)$$

где C – молярная теплоемкость заданного процесса.

Приравнивая правые части выражений (1) и (2), получаем

$$C = \frac{i}{2} R + \frac{m}{M} p \frac{dV}{dT}. \quad (3)$$

Второе слагаемое может быть найдено из уравнения заданного процесса и уравнения состояния газа.

Подставим выражение давления, полученное из уравнения Клапейрона – Менделеева $p = mRT / (MV)$, поочередно в (3) и в уравнение процесса $p / V = \text{const}$:

$$C = \frac{i}{2}R + R \frac{T}{V} \frac{dV}{dT}, \quad (4)$$

$$V^2 / T = \text{const}. \quad (5)$$

Чтобы найти dV / dT , продифференцируем выражение (5) по переменной T :

$$\frac{2V(dV / dT)T - V^2}{T^2} = 0,$$

откуда

$$\frac{dV}{dT} = \frac{1}{2} \frac{V}{T}. \quad (6)$$

Подставим выражение (6) в (4):

$$C = \frac{i}{2}R + \frac{R}{2} = \frac{i+1}{2}R.$$

Искомая молярная теплоемкость постоянна, причём $C_V < C < C_p$. Рассматриваемый газ – одноатомный ($i = 3$). Тогда $C = 16,6$ Дж/(моль·К).

Количество теплоты, поглощенное газом при нагревании,

$$Q_{12} = \int_{T_1}^{T_2} \delta Q = \frac{m}{M} C(T_2 - T_1) = 2,1 \text{ кДж}.$$

Ответ: $C = 16,6$ Дж/(моль · К); $Q_{12} = 2,1$ кДж.

Пример 8. Водород, находящийся при давлении $p_1 = 0,5$ МПа и температуре $T_1 = 350$ К, подвергли сначала адиабатическому расширению от объема $V_1 = 1$ л до объема $V_2 = 2$ л, а затем изобарному расширению, в результате которого объем газа увеличился до значения $V_3 = 3$ л. Определите для каждого из этих процессов: 1) работу, совершенную газом; 2) изменение его внутренней энергии газа; 3) количество подведенной к газу теплоты.

Дано:	Решение:
$p_1 = 0,5$ МПа	Согласно первому началу термодинамики, количество теплоты Q , сообщенное газу, расходуется на изменение его внутренней энергии ΔU и на совершение газом работы A против внешних сил:
$T_1 = 350$ К	
$V_1 = 1$ л	
$V_2 = 2$ л	
$A_{12} = ?$, $A_{23} = ?$, $\Delta U_{12} = ?$, $\Delta U_{23} = ?$, $Q_{12} = ?$, $Q_{23} = ?$	$Q = \Delta U + A.$

Адиабатический процесс совершается без теплообмена с окружающей средой ($Q_{12} = 0$), поэтому $\Delta U_{12} = -A_{12}$.

Работа, совершаемая газом в адиабатическом процессе,

$$A_{12} = \frac{p_1 V_1}{\gamma - 1} \left[1 - \left(\frac{V_1}{V_2} \right)^{\gamma-1} \right] = \frac{0,5 \cdot 10^6 \cdot 10^{-3}}{0,4} \left[1 - \left(\frac{1}{2} \right)^{0,4} \right] = 303 \text{ Дж},$$

где $\gamma = \frac{i+2}{i}$ – коэффициент Пуассона; i – число степеней свободы молекулы (для водорода – двухатомного газа $i = 5$, $\gamma = 1,4$).

Работа изобарного расширения равна $A_{23} = p_2 (V_3 - V_2)$.

Давление p_2 найдем, воспользовавшись уравнением Пуассона для адиабаты:

$$p_2 = p_1 \left(\frac{V_1}{V_2} \right)^{\gamma}.$$

Получим

$$A_{23} = p_1 \left(\frac{V_1}{V_2} \right)^{\gamma} (V_3 - V_2) = 0,5 \cdot 10^6 \left(\frac{1}{2} \right)^{1,4} (3 - 2) \cdot 10^{-3} = 188 \text{ Дж}.$$

Изменение внутренней энергии при изобарном расширении газа определяется выражением

$$\Delta U_{23} = \frac{i}{2} \frac{m}{M} R (T_3 - T_2) = \frac{i}{2} p_2 (V_3 - V_2) = \frac{i}{2} A_{23} = \frac{5}{2} 188 = 472 \text{ Дж}.$$

Количество подведенной теплоты при изобарном расширении газа равно

$$Q_{23} = \Delta U_{23} + A_{23} = 472 + 188 = 660 \text{ Дж}.$$

$$\text{Ответ: } A_{12} = 303 \text{ Дж}, A_{23} = 188 \text{ Дж}, \Delta U_{12} = -303 \text{ Дж}, \\ \Delta U_{23} = 472 \text{ Дж}, Q_{12} = 0, Q_{23} = 660 \text{ Дж}.$$

Задачи для самостоятельного решения

Средний уровень

1. Если ΔU – изменение внутренней энергии идеального газа, A – работа газа, Q – количество теплоты, сообщаемое газу, то для адиабатного расширения газа справедливы соотношения...

$$1) Q < 0; A < 0; \Delta U = 0;$$

- 2) $Q = 0$; $A < 0$; $\Delta U > 0$;
- 3) $Q > 0$; $A > 0$; $\Delta U = 0$;
- 4) $Q = 0$; $A > 0$; $\Delta U < 0$.

2. Если ΔU – изменение внутренней энергии идеального газа, A – работа газа, Q – количество теплоты, сообщаемое газу, то для адиабатного сжатия газа справедливы соотношения...

- 1) $Q < 0$; $A < 0$; $\Delta U = 0$;
- 2) $Q = 0$; $A < 0$; $\Delta U > 0$;
- 3) $Q > 0$; $A > 0$; $\Delta U = 0$;
- 4) $Q = 0$; $A > 0$; $\Delta U < 0$.

3. Если ΔU – изменение внутренней энергии идеального газа, A – работа газа, Q – количество теплоты, сообщаемое газу, то для изотермического расширения газа справедливы соотношения...

- 1) $Q < 0$; $A < 0$; $\Delta U = 0$;
- 2) $Q = 0$; $A < 0$; $\Delta U > 0$;
- 3) $Q > 0$; $A > 0$; $\Delta U = 0$;
- 4) $Q = 0$; $A > 0$; $\Delta U < 0$.

4. Если ΔU – изменение внутренней энергии идеального газа, A – работа газа, Q – количество теплоты, сообщаемое газу, то для изохорного охлаждения газа справедливы соотношения...

- 1) $Q < 0$; $A = 0$; $\Delta U < 0$;
- 2) $Q = 0$; $A < 0$; $\Delta U > 0$;
- 3) $Q > 0$; $A > 0$; $\Delta U = 0$;
- 4) $Q = 0$; $A > 0$; $\Delta U < 0$.

5. Если ΔU – изменение внутренней энергии идеального газа, A – работа газа, Q – количество теплоты, сообщаемое газу, то для изобарного охлаждения газа справедливы соотношения...

- 1) $Q < 0$; $\Delta U < 0$; $A < 0$;
- 2) $Q = 0$; $A < 0$; $\Delta U > 0$;
- 3) $Q > 0$; $A > 0$; $\Delta U = 0$;
- 4) $Q = 0$; $A > 0$; $\Delta U < 0$.

6. Если ΔU – изменение внутренней энергии идеального газа, A – работа газа, Q – количество теплоты, сообщаемое газу, то для изотермического сжатия газа справедливы соотношения...

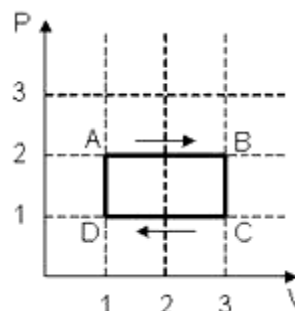
- 1) $Q < 0$; $A < 0$; $\Delta U = 0$;
- 2) $Q = 0$; $A < 0$; $\Delta U > 0$;
- 3) $Q > 0$; $A > 0$; $\Delta U = 0$;
- 4) $Q = 0$; $A > 0$; $\Delta U < 0$.

7. Если ΔU – изменение внутренней энергии идеального газа, A – работа газа, Q – количество теплоты, сообщаемое газу, то для изобарного нагревания газа справедливы соотношения...

- 1) $Q < 0$; $\Delta U < 0$; $A < 0$;
- 2) $Q = 0$; $A < 0$; $\Delta U > 0$;
- 3) $Q > 0$; $A > 0$; $\Delta U > 0$;
- 4) $Q = 0$; $A > 0$; $\Delta U < 0$.

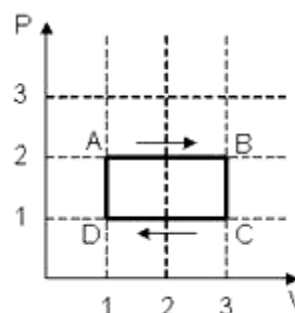
8. На (p, V) -диаграмме изображен циклический процесс. Если ΔU – изменение внутренней энергии идеального газа, A – работа газа, Q – количество теплоты, сообщаемое газу, то для процесса AB справедливы соотношения...

- 1) $Q > 0$; $A > 0$; $\Delta U = 0$;
- 2) $Q > 0$; $A = 0$; $\Delta U > 0$;
- 3) $Q > 0$; $A > 0$; $\Delta U > 0$;
- 4) $Q = 0$; $A < 0$; $\Delta U > 0$.



9. На (p, V) -диаграмме изображен циклический процесс. Если ΔU – изменение внутренней энергии идеального газа, A – работа газа, Q – количество теплоты, сообщаемое газу, то для процесса CD справедливы соотношения...

- 1) $Q < 0$; $A < 0$; $\Delta U = 0$;
- 2) $Q = 0$; $A > 0$; $\Delta U < 0$;
- 3) $Q < 0$; $A < 0$; $\Delta U < 0$;
- 4) $Q < 0$; $A = 0$; $\Delta U < 0$.

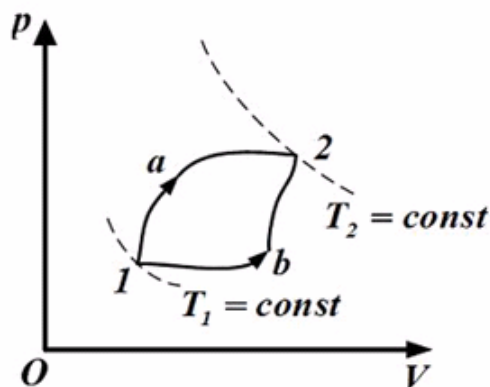


10. Газ не совершает работы над внешними силами...

- 1) изохорном процессе;
- 2) изотермическом процессе;

- 3) адиабатном процессе;
- 4) изобарном процессе.

11. Идеальный газ переводится из 1 состояния во 2-е двумя способами (1a2 и 1b2), как показано на рисунке. Теплота, полученная газом, изменение внутренней энергии и работа газа при переходе его из одного состояния в другое связаны соотношениями....



- 1) $Q_{1a2} > Q_{1b2}$; 2) $\Delta U_{1a2} > \Delta U_{1b2}$; 3) $A_{1a2} > A_{1b2}$.
- 2) $Q_{1a2} = Q_{1b2}$; 2) $\Delta U_{1a2} = \Delta U_{1b2}$; 3) $A_{1a2} = A_{1b2}$.
- 3) $Q_{1a2} > Q_{1b2}$; 2) $\Delta U_{1a2} = \Delta U_{1b2}$; 3) $A_{1a2} > A_{1b2}$.
- 4) $Q_{1a2} = Q_{1b2}$; 2) $\Delta U_{1a2} = \Delta U_{1b2}$; 3) $A_{1a2} > A_{1b2}$.

12. Из перечисленных утверждений:

- 1) вся теплота, сообщаемая газу, идет на увеличение внутренней энергии;
- 2) при сообщении газу некоторого количества теплоты его внутренняя энергия возрастает, при этом газ совершает работу;
- 3) все количество теплоты, сообщаемое газу, расходуется им на совершение работы против внешних сил;
- 4) внешняя работа совершается за счет изменения внутренней энергии системы

для адиабатического процесса верно утверждение....

для изобарного процесса верно утверждение....

для изотермического процесса верно утверждение...

для изохорного процесса верно утверждение...

13. Первое начало термодинамики для изотермического процесса, осуществляемого с идеальным газом, имеет вид:

- 1) $\delta Q = dU + \delta A$;
- 2) $\delta Q = dU$;
- 3) $\delta Q = \delta A$;
- 4) $dU = -\delta A$.

14. Среди приведенных формул к изотермическому процессу не имеют отношение

- | | |
|--|---|
| 1) $\delta Q = \delta A$; | 3) $A = \frac{m}{M} RT \ln \frac{V_2}{V_1}$; |
| 2) $A = \frac{m}{M} C_V (T_1 - T_2)$; | 4) $dU = 0$; |
| | 5) $C_T = \infty$. |

15. Среди приведенных формул к изотермическому процессу не имеют отношение

- | | |
|-------------------------|---------------------------------------|
| 1) $Q = A$; | 3) $A = \nu RT \ln \frac{V_2}{V_1}$; |
| 2) $A = p(V_2 - V_1)$; | 4) $0 = \Delta U + A$; |
| | 5) $pV^\gamma = \text{const}$. |

16. Изменение внутренней энергии газа при изохорном процессе возможно...

- 1) в результате совершения внешними силами работы над газом;
- 2) без теплообмена с внешней средой;
- 3) при теплообмене с внешней средой;
- 4) в результате совершения газом работы.

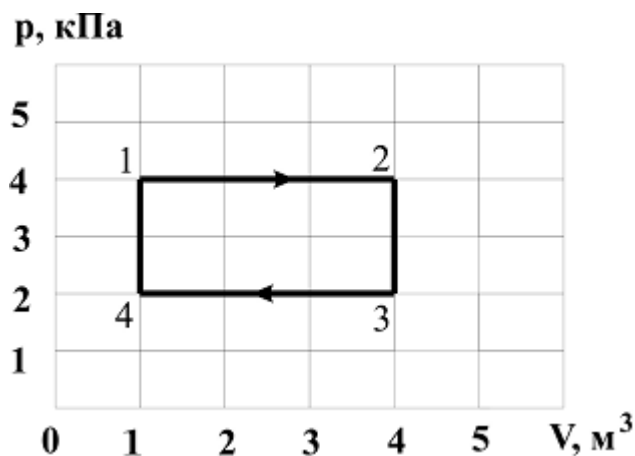
17. Идеальному газу сообщили количество теплоты δQ и над ним совершена работа $\delta A'$. Работа, совершенная самим газом δA , и приращение его внутренней энергии dU равны...

- 1) $\delta A = 0$, $dU = \delta Q + \delta A'$;
- 2) $\delta A = 0$, $dU = \delta Q - \delta A$;
- 3) $\delta A = -\delta A'$, $dU = \delta Q + \delta A'$;
- 4) $\delta A = -\delta A'$, $dU = \delta Q - \delta A'$;
- 5) $\delta A = 0$, $dU = \delta Q$.

18. Газ находится в состоянии с параметрами p_1 , V_1 . Необходимо расширить газ, затратив при этом минимум энергии. Для этого подходит процесс ...

- 1) изотермический;
- 2) изобарный;
- 3) ни один процесс не подходит;
- 4) изохорный;
- 5) адиабатный.

19. На рисунке представлена диаграмма циклического процесса идеального одноатомного газа:



За цикл газ получает количество теплоты (в кДж), равное ...

- 1) 8; 2) 6; 3) 10; 4) 2.

20. Изменение внутренней энергии газа произошло только за счет работы сжатия газа в....

- 1) изотермическом процессе;
2) изобарном процессе;
3) изохорном процессе;
4) адиабатном процессе.

21. Одноатомному идеальному газу в результате изобарного процесса сообщено количество теплоты ΔQ . На увеличение внутренней энергии

газа расходуется часть теплоты $\frac{\Delta U}{\Delta Q}$, равная...

- 1) 0,6; 2) 0,4; 3) 0,25; 4) 0,75.

22. Многоатомному идеальному газу в результате изобарного процесса сообщено количество теплоты ΔQ . На работу, совершаемую при

расширении газа, расходуется часть теплоты $\frac{A}{\Delta Q}$, равная...

- 1) 0,5; 2) 0,4; 3) 0,25; 4) 0,75; 5) 0,6.

Достаточный уровень

1. Азот массой $m = 280$ г расширяется в результате изобарного процесса при давлении $p = 1$ МПа. Определите: 1) работу расширения; 2) конечный объем газа, если на расширение затрачена теплота $Q = 5$ кДж, а начальная температура газа $T_1 = 290$ К.

Ответ: 1) $A = 1,43$ кДж; 2) $V_2 = 0,026$ м³.

2. Какое количество теплоты нужно сообщить 1000 моль кислорода, чтобы он совершил работу 1000 Дж 1) при изотермическом процессе; 2) при изобарном?

Ответ: $\Delta Q_T = 1 \cdot 10^3$ Дж; $\Delta Q_p = 3,5 \cdot 10^3$ Дж.

3. Определите количество теплоты, сообщенное 20 г азота, если он был нагрет от 27 до 177°С. Какую работу при этом совершил газ и как изменилась его внутренняя энергия?

Ответ: $Q = 3,1 \cdot 10^3$ Дж; $A = 8,9 \cdot 10^2$ Дж; $\Delta U = 2,2 \cdot 10^3$ Дж.

4. Температуру смеси азота массой 28 г и кислорода массой 32 г, находящуюся в закрытом сосуде, изменили на 20°С. Определите изменение внутренней энергии смеси.

Ответ: $\Delta U = 0,831$ кДж.

5. В цилиндре диаметром $d = 20$ см и высотой $h = 42$ см с подвижным поршнем находится газ под давлением $12 \cdot 10^5$ Па при температуре 300°С. Определите работу, совершаемую газом при понижении температуры до 10°С при постоянном давлении.

Ответ: $A = -8000$ Дж.

6. В баллоне емкостью 10 дм³ содержится кислород при температуре 27°С и под давлением 10^7 Па. Нагреваясь солнечными лучами, кислород получил 8350 Дж теплоты. Определите температуру и давление кислорода после нагревания.

Ответ: $T_2 = 310$ К; $p_1 = p_2 = 1,03 \cdot 10^5$ Па.

7. При изотермическом сжатии 2,8 кг окиси углерода объем его уменьшается в четыре раза. Определите работу сжатия, если температура газа 7°С.

Ответ: $A = -322$ Дж.

8. Воздух в количестве 1000 моль при давлении $p_1 = 10^6$ Па и температуре $T_1 = 390$ К изохорно изменяет давление так, что его внутренняя энергия изменяется на $\Delta U = -71,7$ кДж, затем изобарно расширяется и совершает работу $A = 745$ кДж. Определите параметры воздуха (считать $c_V = 721$ Дж/(кг·К) = const).

Ответ: Для изохорного процесса: $T_2 = 290$ К; $V_2 = 3,24$ м³; $p = 7,45 \cdot 10^5$ Па; для изобарного процесса: $T_3 = 379$ К; $V_3 = 4,24$ м³; $p = 7,45 \cdot 10^5$ Па.

9. Атомарный кислород О, молекулярный кислород О₂ и озон О₃ отдельно друг от друга расширяются изобарно, при этом расходуется Q количества теплоты. Определите, какая доля тепла расходуется: 1) на работу расширения; 2) на изменение внутренней энергии О, О₂ и О₃.

Ответ: О: $i = 3$; $A = 0,4Q$; $\Delta U = 0,6Q$;

О₂: $i = 5$; $A = 0,29Q$; $\Delta U = 0,71Q$;

О₃: $i = 6$; $A = 0,25Q$; $\Delta U = 0,75Q$.

10. При изобарическом сжатии азота была совершена работа, равная 12 кДж. Определить затраченное количество теплоты и изменение внутренней энергии газа.

Ответ: $Q = -42$ кДж; $\Delta U = -30$ кДж.

11. Определите работу расширения 7 кг водорода при постоянном давлении, а также количество теплоты, переданное этому водороду, при условии, что в процессе нагревания температура повысилась на 200 °С.

Ответ: $A = 5,82 \cdot 10^3$ Дж; $Q = 20,4 \cdot 10^3$ кДж.

12. Какое количество теплоты потребуется для нагревания 5 м³ окиси углерода (СО) от температуры $t_1 = 0^\circ\text{C}$ до $t_2 = 220^\circ\text{C}$, если газ находится в цилиндрическом сосуде, закрытом сверху легкоскользящим невесомым поршнем? Атмосферное давление $p = 9,35 \cdot 10^4$ Па.

Ответ: $Q = 1320$ кДж.

13. Кислород массой 32 г находится в закрытом сосуде под давлением 0,1 МПа при температуре 290 К. После нагревания давление в сосуде повысилось в 4 раза. Определите: 1) объем сосуда; 2) температуру, до которой нагрели газ; 3) количество теплоты, сообщенное газу.

Ответ: 1) $V = 2,41 \cdot 10^{-2}$ м³; 2) $T_2 = 1160$ К; 3) $Q = 18,1$ кДж.

14. Определите количество теплоты, сообщенное газу, если в процессе изохорного нагревания кислорода объемом $V = 20$ л его давление изменилось на $\Delta p = 100$ кПа.

Ответ: $Q = 5$ кДж.

15. Двухатомный идеальный газ ($\nu = 2$ моль) нагревают при постоянном объеме до температуры 289 К. Определите количество теплоты, которое необходимо сообщить газу, чтобы увеличить его давление в 3 раза.

Ответ: $Q = \frac{i}{2} \nu R(n-1)T_1 = 24$ кДж.

16. При изобарном нагревании некоторого идеального газа ($\nu = 2$ моль) на $\Delta T = 90$ К ему было сообщено количество теплоты 5,25 кДж. Определите: 1) работу, совершенную газом; 2) изменение внутренней энергии газа; 3) величину $\gamma = c_p / c_v$.

Ответ: 1) $A = 1,5$ кДж; 2) $\Delta U = 0,6$ кДж; 3) $\gamma = 1,4$.

17. Кислород объемом 1 л находится под давлением 1 МПа. Определите, какое количество теплоты необходимо сообщить газу, чтобы: 1) увеличить его объем вдвое в результате изобарного процесса; 2) увеличить его давление вдвое в результате изохорного процесса.

Ответ: $Q_{\text{изоб}} = 3,5$ кДж; $Q_{\text{изох}} = 2,5$ кДж.

18. Азот массой $m = 14$ г сжимают изотермически при температуре $T = 300$ К от давления $p_1 = 100$ кПа до давления $p_2 = 500$ кПа. Определите: 1) изменение внутренней энергии газа; 2) работу сжатия; 3) количество выделившейся теплоты.

Ответ: 1) $\Delta U = 0$; 2) $A = -2,01$ кДж; 3) $Q = 2,01$ кДж.

19. Некоторый газ массой 1 кг находится при температуре $T = 300$ К и под давлением $p_1 = 0,5$ Па. В результате изотермического сжатия давление газа увеличилось в два раза. Работа, затраченная на сжатие, $A = -432$ кДж. Определите: 1) какой это газ; 2) первоначальный удельный объем газа.

Ответ: 1) гелий; 2) $v_1 = 1,25$ м³/кг.

20. Водород объемом $V_0 = 1$ м³, находящийся при нормальных условиях, вначале изохорно перевели в состояние с давлением, в пять раз большим первоначального, а затем изобарно в состояние с объемом, в два раза большим первоначального. Определите: а) изменение внутренней энергии ΔU газа; б) работу A , совершенную газом; в) полученное количество теплоты Q .

Ответ: а) $\Delta U = 2,2 \cdot 10^6$ Дж; б) $A = 5 \cdot 10^5$ Дж; в) $Q = 2,7 \cdot 10^6$ Дж.

21. Два моль идеального газа при начальной температуре 300 К охладили изохорно, вследствие чего его давление уменьшилось в два раза; затем газ изобарно расширили так, что в конечном состоянии его температура стала равна начальной. Найдите количество тепла Q , поглощенное газом в данном процессе.

Ответ: $Q = 2,5$ кДж.

22. Определите количество теплоты, поглощаемой водородом массой $m = 0,2$ кг при нагревании его от температуры $t_1 = 0^\circ\text{C}$ до температуры $t_2 = 100^\circ\text{C}$ при постоянном давлении. Найдите также изменение внутренней энергии газа и совершаемую им работу.

Ответ: $Q = 291$ кДж, $\Delta U = 208$ кДж, $A = 83$ кДж.

23. Какое количество теплоты Q потребовалось подвести к молю одноатомного газа при его изобарном обратимом нагревании, если в процессе этого нагревания газ совершил внешнюю работу $A = 10$ Дж?

Ответ: $Q = 25$ Дж.

24. Какое количество теплоты Q отдает одноатомный газ при его изобарическом обратимом охлаждении при температуре от T_1 до T_2 , если на сжатие газа в ходе этого процесса затрачена работа $A = 12$ Дж.

Ответ: $Q = 30$ Дж.

25. При постоянном давлении водяной пар $V = 12$ м³ нагрет от температуры $t_1 = 127^\circ\text{C}$ до $t_2 = 227^\circ\text{C}$. Начальное давление водяных паров $p_0 = 1,2 \cdot 10^5$ Па. Определите количество теплоты Q , необходимое для нагревания, при условии, что молярная теплоемкость $C_p = 33700$ Дж/К·моль = const.

Ответ: $Q = 11 \cdot 10^3$ кДж.

26. Перегородка нагревательной печи размером $2 \times 30 \times 0,5$ м выполнена из кирпича, у которого плотность $\rho = 1900$ кг/м³, а удельная теплоемкость изменяется согласно закону, выраженному уравнением $c = c_0(1 + bt)$, где $c_0 = 880$ Дж/(кг·К), $b = 2,4$ К⁻¹, t – температура в градусах Цельсия. Определите количество теплоты, аккумулированное этой перегородкой при условии, что ее температура изменяется в пределах от $t_1 = 20^\circ\text{C}$ до $t_2 = 1200^\circ\text{C}$.

Ответ: $Q = 14,55 \cdot 10^9$ Дж.

27. При расширении 3,2 кг кислорода согласно закону, выраженному уравнением $pV^2 = \text{const}$, объем его изменился с 2 м^3 до $4,4 \text{ м}^3$. Определите изменение внутренней энергии ΔU и количество поглощенной теплоты Q при условии, что давление газа до расширения $p_1 = 2,5 \cdot 10^5 \text{ Па}$. (Считать $c_T = 652 \text{ Дж}/(\text{кг} \cdot \text{К})$).

Ответ: $\Delta U = -686 \text{ кДж}$; $Q = -412 \text{ кДж}$.

28. 0,5 моль идеального одноатомного газа нагревают от 250 до 500 К так, что в процессе нагревания $\frac{p}{V} = \text{const}$. Определите молярную теплоемкость газа. Рассчитайте количество теплоты, поглощенное газом при нагревании.

Ответ: $C = 16,6 \text{ Дж}/\text{К} \cdot \text{моль}$; $Q = 2,1 \text{ кДж}$.

29. Какая доля ω_1 количества теплоты Q_1 , подводимого к идеальному газу при изобарном процессе, расходуется на увеличение ΔU внутренней энергии газа и какая доля ω_2 — на работу A расширения? Рассмотреть три случая, если газ: 1) одноатомный; 2) двухатомный; 3) трехатомный.

Ответ: 1) 0,6; 0,4. 2) 0,71; 0,29. 3) 0,75; 0,25.

30. Водяной пар расширяется при постоянном давлении. Определить работу A расширения, если пару передано количество теплоты $Q = 4 \text{ кДж}$.

Ответ: $A = 1 \text{ кДж}$.

31. При изотермическом расширении кислорода, содержавшего количество вещества $\nu = 1$ моль и имевшего температуру $T = 300 \text{ К}$, газу было передано количество теплоты $Q = 2 \text{ кДж}$. Во сколько раз увеличился объем газа?

Ответ: $\frac{V_2}{V_1} = 2,23$.

32. Какое количество теплоты Q выделится, если азот массой $m = 1 \text{ г}$, взятый при температуре $T = 280 \text{ К}$ под давлением $p_1 = 0,1 \text{ МПа}$, изотермически сжать до давления $p_2 = 1 \text{ МПа}$?

Ответ: $Q = 191 \text{ Дж}$.

33. При изохорном нагревании кислорода объемом $V = 50 \text{ л}$ давление газа изменилось на $\Delta p = 0,5 \text{ МПа}$. Найдите количество теплоты Q , сообщенное газу.

Ответ: $Q = 62,5 \text{ Дж}$.

34. Баллон вместимостью $V = 20$ л содержит водород при температуре $T = 300$ К под давлением $p = 0,4$ МПа. Каковы будут температура T_1 и давление p_1 , если газу сообщить количество теплоты $Q = 6$ кДж?

Ответ: $T_1 = 390$ К, $p_1 = 520$ кПа.

2.3. Круговые процессы. термический кпд. Цикл Карно

Основные формулы

Коэффициент полезного действия для кругового процесса (цикла)

$$\eta = \frac{A}{Q_1} = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1} = 1 - \frac{Q_2}{Q_1},$$

где Q_1 – количество теплоты, переданное рабочему телу нагревателем;
 Q_2 – количество теплоты, отданное рабочим телом холодильнику.

Для идеального цикла Карно

$$\eta = \frac{T_1 - T_2}{T_1},$$

где T_1 – температура нагревателя, T_2 – температура холодильника.

ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

Пример 1. Температура нагревателя тепловой машины 500 К. Температура холодильника 400 К. Определите КПД тепловой машины, работающей по циклу Карно, и полную мощность машины, если нагреватель ежесекундно передает ей 1675 Дж теплоты.

Дано:	Решение:
$T_1 = 500$ К	КПД тепловой машины
$T_2 = 400$ К	$\eta = (T_1 - T_2) / T_1,$ (1)
$Q_1 = 1675$ Дж	$\eta = A / Q_1.$ (2)
1) η – ? 2) N – ?	Из выражений (2) и (1) находим
	$A = \eta Q_1 = [(T_1 - T_2) / T_1] Q_1.$
	$\eta = \frac{500 - 400}{500} = 0,2;$
	$A = 0,2 \cdot 1675 = 335$ Дж.

Эта работа совершается за 1 с, следовательно, полная мощность машины $N = 335$ Вт.

Ответ: 1) $\eta = 0,2$; 2) $N = 335$ Вт.

Пример 2. Температура пара, поступающего в паровую машину, $t_1 = 127^\circ \text{C}$; температура в конденсаторе $t_2 = 27^\circ \text{C}$. Определите теоретически максимальную работу при затрате количества теплоты $Q_1 = 4,2 \text{ кДж}$.

Дано:
 $t_1 = 127^\circ \text{C}$
 $t_2 = 27^\circ \text{C}$
 $Q_1 = 4,2 \text{ кДж}$
 $A = ?$

Решение:

Для того чтобы работа, совершаемая тепловой машиной (тепловым двигателем), была максимальной, необходимо, чтобы цикл, по которому работает двигатель, был обратимым. При наличии только двух термостатов – нагревателя с температурой T_1 и холодильника с температурой T_2 – возможен лишь один обратимый цикл – цикл Карно, состоящий из двух изотерм и двух адиабат (см. рисунок).

Коэффициент полезного действия этого цикла

$$\eta_k = (T_1 - T_2) / T_1. \quad (1)$$

КПД любого теплового двигателя

$$\eta = A / Q_1, \quad (2)$$

где A – полезная работа, совершаемая двигателем, Q_1 – количество теплоты, полученное рабочим телом от нагревателя.

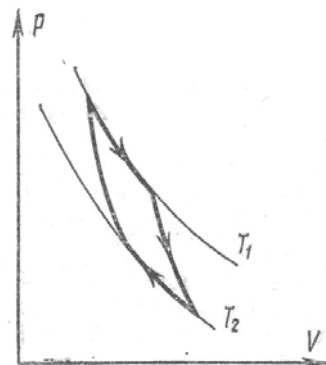
Очевидно, что сопоставление равенств (1) и (2) позволит найти искомое значение A .

Приравняв правые части равенств (1) и (2), получим

$$A / Q_1 = (T_1 - T_2) / T_1,$$

откуда

$$A = Q_1(T_1 - T_2) / T_1 = 1,05 \text{ кДж}.$$

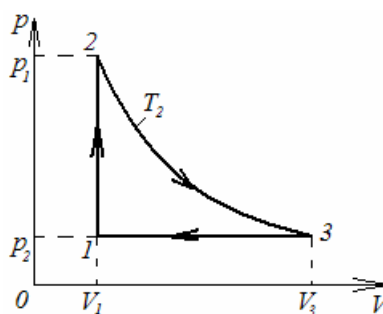


Ответ: $A = 1,05 \text{ кДж}$.

Пример 3. Один моль идеального двухатомного газа находится под давлением $p_1 = 250 \text{ кПа}$ и занимает объем $V_1 = 10 \text{ л}$. Сначала газ изохорно нагревают до температуры $T_2 = 400 \text{ К}$. Далее, изотермически расширяя, доводят его до первоначального давления. После этого путем изобарного сжатия возвращают газ в начальное состояние. Определите термический КПД (η) цикла.

Дано:
 $T_2 = 400 \text{ К}$
 $\nu = 1 \text{ моль}$
 $p_1 = 250 \text{ кПа}$
 $V_1 = 10 \text{ л}$
 $\eta = ?$

Решение:
 Построим сначала график цикла, состоящего из изохоры, изотермы и изобары.



Термический КПД любого цикла

$$\eta = \frac{A}{Q_1} = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1} = 1 - \frac{Q_2}{Q_1},$$

где Q_1 – количество теплоты, полученное газом за цикл от нагревателя; Q_2 – количество теплоты, отданное газом за цикл холодильнику.

Заметим, что разность количеств теплоты $Q_1 - Q_2$ равна работе A , совершаемой газом за цикл. Эта работа на графике в координатах p, V (см. рисунок) равна площади цикла.

Рабочее вещество (газ) получает количество теплоты Q_1 на двух участках: Q_{1-2} на участке 1-2 (изохорный процесс) и Q_{2-3} на участке 2-3 (изотермический процесс). Таким образом,

$$Q_1 = Q_{1-2} + Q_{2-3}.$$

Количество теплоты, полученное газом при изохорном процессе,

$$Q_{1-2} = C_V \nu (T_2 - T_1),$$

где C_V – молярная теплоемкость газа при постоянном объеме; ν – количество вещества.

Температуру T_1 начального состояния газа найдем, воспользовавшись уравнением Клапейрона – Менделеева:

$$T_1 = p_1 V_1 / (\nu R).$$

$$T_1 = \frac{250 \cdot 10^3 \cdot 10^{-2}}{1 \cdot 8,31} \text{ К} = 300 \text{ К}.$$

Количество теплоты, полученное газом при изотермическом процессе, равно

$$Q_{2-3} = \nu R T_2 \ln(V_2 / V_1),$$

где V_2 – объем, занимаемый газом при температуре T_2 и давлении p_1 (точка 3 на графике).

На участке 3-1 газ отдает количество теплоты Q_2 , равное

$$Q_2 = Q_{3-1} = C_p \nu (T_2 - T_1),$$

где C_p – молярная теплоемкость газа при изобарном процессе.

Подставив найденные значения Q_1 и Q_2 в формулу (1), получим

$$\eta = 1 - \frac{\nu C_p (T_2 - T_1)}{\nu C_v (T_2 - T_1) + \nu R T_2 \ln(V_2/V_1)}.$$

В полученном выражении заменим отношение объемов V_2/V_1 согласно закону Гей-Люссака отношением температур ($V_2/V_1 = T_2/T_1$) и выразим C_v и C_p через число степеней свободы молекулы газа $[C_v = iR/2, C_p = (i+2)R/2]$. Тогда после сокращения на ν и $R/2$ получим

$$\eta = 1 - \frac{(i+2)(T_2 - T_1)}{i(T_2 - T_1) + 2T_2 \ln(T_2/T_1)}.$$

$$\eta = 1 - \frac{(5+2)(400-300)}{5(400-300) + 2 \cdot 400 \ln(400/300)} = 0,041 = 4,1\%$$

Ответ: $\eta = 4,1\%$.

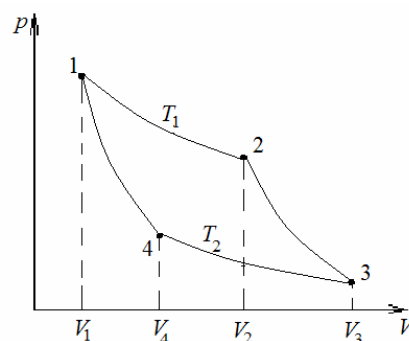
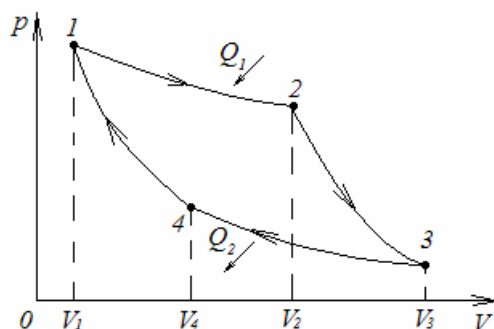
Пример 4. Газ, совершающий цикл Карно, КПД которого $\eta = 25\%$, при изотермическом расширении производит работу $A_1 = 240$ Дж. Какова работа A_2 , совершаемая газом при изотермическом сжатии?

Дано: $\eta = 25\%$ $A_1 = 240$ Дж $A_2 = ?$	Решение: Построим в координатах p, V график цикла Карно, состоящего из двух изотерм (1-2 – расширение газа и 3-4 – сжатие газа) и двух адиабат (2-3 и 4-1). При адиабатном процессе система не получает и не отдает тепла (теплообмена с внешней средой нет), в ходе изотермического расширения (1-2) газ получает количество теплоты Q_1 , в процессе изотермического сжатия (3-4) – отдает количество теплоты Q_2 .
---	---

Запишем первое начало термодинамики для перехода 1-2. Так как при изотермическом расширении $T_1 = \text{const}$, то изменение внутренней энергии газа $\Delta U = 0$, поэтому

$$Q_1 = A_{1-2} = A_1, \quad (1)$$

т.е. количество теплоты, полученное газом, равно работе газа в процессе изотермического расширения.



Аналогично для процесса изотермического сжатия (3-4):

$$Q_2 = A_2. \quad (2)$$

Термический КПД цикла

$$\eta = \frac{A}{Q_1} = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1} = 1 - \frac{Q_2}{Q_1}, \quad (3)$$

где Q_1 – количество теплоты, полученное газом за цикл от нагревателя;
 Q_2 – количество теплоты, отданное газом за цикл холодильнику.

Подставив (1) и (2) в формулу (3), получим

$$\eta = \frac{A_1 - A_2}{A_1} = 1 - \frac{A_2}{A_1},$$

откуда $A_2 = A_1(1 - \eta) = 180 \text{ Дж}$.

Ответ: $A_2 = 180 \text{ Дж}$

Пример 5. Многоатомный идеальный газ совершает цикл Карно, при этом в процессе адиабатного расширения объем газа увеличивается в $k = 4$ раза. Определите термический КПД цикла.

Дано:
 $k = 4$
 $\eta = ?$

Решение:

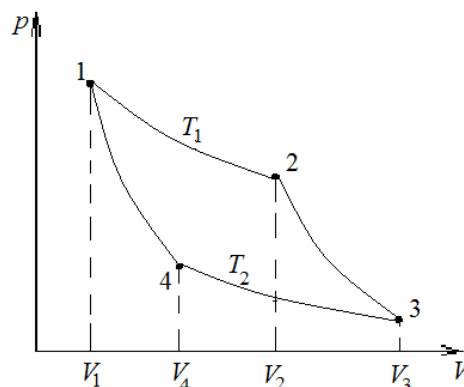
Построим в координатах p, V график цикла Карно, состоящего из двух изотерм (1-2 – расширение газа и 3-4 – сжатие газа) и двух адиабат (2-3 и 4-1).

Адиабатному расширению соответствует переход 2-3, следовательно, по условию задачи

$$\frac{V_3}{V_2} = k.$$

Запишем уравнение адиабаты 2-3:

$$T_1 V_2^{\gamma-1} = T_2 V_3^{\gamma-1},$$



откуда

$$\frac{T_2}{T_1} = \left(\frac{V_2}{V_3} \right)^{\gamma-1} = \left(\frac{1}{k} \right)^{\gamma-1}.$$

Термический КПД цикла Карно

$$\eta = 1 - \frac{T_2}{T_1} = 1 - \left(\frac{1}{k} \right)^{\gamma-1}.$$

Здесь $\gamma = \frac{c_p}{c_v} = \frac{c_{\mu p}}{c_{\mu v}} = \frac{i+2}{i}$ – показатель адиабаты, i – число степеней

свободы, для многоатомного газа $i = 6$, $\gamma = \frac{4}{3}$.

$$\eta = 1 - \left(\frac{1}{4} \right)^{\frac{4}{3}-1} = 0,37.$$

Ответ: $\eta = 0,37$.

Пример 6. Холодильная машина работает по обратимому циклу Карно в интервале температур $t_1 = 27^\circ \text{C}$ и $t_2 = -3^\circ \text{C}$. Рабочее тело – азот, масса которого $m = 0,2$ кг. Найдите количество теплоты, отбираемое от охлаждаемого тела, и работу внешних сил за цикл, если отношение максимального объема к минимальному $b = 5$.

Дано:

$$t_1 = 27^\circ \text{C}$$

$$t_2 = -3^\circ \text{C}$$

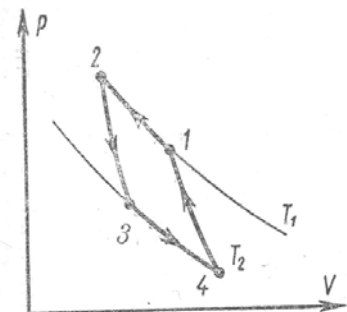
$$m = 0,2 \text{ кг}$$

$$b = 5$$

$$Q = ? \quad A = ?$$

Решение:

Холодильная машина – это устройство, которое за счет работы внешних сил отнимает теплоту от охлаждаемого тела и передает ее более нагретой окружающей среде. Если холодильная машина работает по циклу Карно, то изотермическое сжатие рабочего тела, сопровождаемое работой внешних сил, происходит при более высокой температуре T_1 (см. рисунок, участок 1-2). При этом рабочее тело отдает в окружающую среду, играющую роль термостата, количество теплоты Q_1 (очевидно, $Q_1 = |Q_{12}|$).



На участке 3-4 при более низкой температуре T_2 происходит изотермическое расширение рабочего тела, при этом от охлаждаемого тела (термостат при температуре T_2) отбирается количество теплоты $Q_2 = Q_{34}$.

Поскольку речь идет об обратимом цикле Карно, для него, как всегда, справедливо соотношение

$$(Q_1 - Q_2) / Q_1 = (T_1 - T_2) / T_1,$$

или

$$Q_2 / Q_1 = T_2 / T_1. \quad (1)$$

Согласно первому началу термодинамики, работа за цикл равна полному количеству теплоты, получаемому и отдаваемому за цикл:

$$A = -Q_1 + Q_2.$$

Из графика легко видеть, что работа газа за цикл при указанном направлении процесса отрицательна. Работа внешних сил за цикл

$$A^* = -A = Q_1 - Q_2. \quad (2)$$

Искомое количество теплоты $Q_2 = Q_{34}$. При изотермическом расширении идеального газа

$$Q_{34} = A_{34} = \frac{m}{M} RT_2 \ln \frac{V_4}{V_3}. \quad (3)$$

Как видно из графика, минимальный объем за цикл V_2 , максимальный — V_4 , следовательно,

$$V_4 / V_2 = b. \quad (4)$$

Второе и третье состояния лежат на одной адиабате, проведенной в интервале температур от T_1 к T_2 . Следовательно,

$$\left(\frac{V_2}{V_3} \right)^{\gamma-1} = \frac{T_2}{T_1},$$

или

$$\frac{V_2}{V_3} = \left(\frac{T_2}{T_1} \right)^{1/(\gamma-1)}. \quad (5)$$

Перемножив почленно равенства (4) и (5), получим

$$\frac{V_4}{V_3} = b \left(\frac{T_2}{T_1} \right)^{1/(\gamma-1)}.$$

Подставим это выражение в (3):

$$Q_{34} = Q_2 = \frac{m}{M} RT_2 \left(\ln b + \frac{1}{\gamma-1} \ln \frac{T_2}{T_1} \right).$$

Азот – газ двухатомный, следовательно, коэффициент Пуассона $\gamma = 1,4$ и $Q_2 = 21,6$ кДж.

Чтобы найти работу внешних сил за цикл, выразим Q_1 из уравнения (1) и подставим полученное значение в уравнение (2):

$$A^* = Q_2 \left(\frac{T_1}{T_2} - 1 \right) = Q_2 \frac{T_1 - T_2}{T_2} = 2,40 \text{ кДж.} \quad (6)$$

Для характеристики холодильных машин принято вводить холодильный коэффициент $\epsilon = Q_2 / A^*$. Из выражения (6) следует, что для холодильной машины, рабочий цикл которой – обратимый цикл Карно, $\epsilon = T_2 / (T_1 - T_2)$.

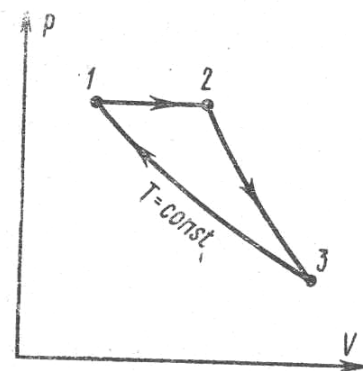
Ответ: $Q_2 = 21,6$ кДж, $A^* = 2,40$ кДж.

Пример 7. Тепловой двигатель работает по циклу, состоящему из изотермического, изобарного и адиабатного процессов. При изобарном процессе рабочее тело – идеальный газ – нагревается от температуры $T_1 = 200$ К до $T_2 = 500$ К. Определите коэффициент полезного действия данного теплового двигателя и двигателя, работающего по циклу Карно, происходящему между максимальной и минимальной температурами данного цикла.

Дано:	Решение:
$T_1 = 200$ К	В условии задачи не оговорена последовательность процессов, но поскольку изобарный процесс, по условию, – процесс нагревания, следовательно, и расширения, а тепловая машина является тепловым двигателем, то прямая, соответствующая графику этого процесса в координатах p, V , должна лежать выше кривых, изображающих изотермический и адиабатный процессы.
$T_2 = 500$ К	
$\eta = ? \quad \eta_K = ?$	

После изобарного расширения 1-2 (см. рисунок) газ должен адиабатно расширяться (кривая 2-3) до тех пор, пока температура его не будет равна начальной температуре T_1 , а затем изотермическим сжатием (кривая 3-1) газ можно вернуть в исходное состояние. (Легко убедиться, что при любой другой последовательности процессов не будет выполняться условие задачи.)

При последовательности процессов (см. рисунок), газ получает теплоту только в процессе 1-2,



поэтому $Q_1 = Q_{12}$, и отдает теплоту в процессе 3-1 ($Q_2 = |Q_{31}|$). Процесс 2-3 происходит без теплообмена.

Тогда коэффициент полезного действия цикла, согласно определению,

$$\eta = (Q_1 - Q_2) / Q_1 = (Q_{12} - |Q_{31}|) / Q_{12}. \quad (1)$$

Газ идеальный, все процессы предполагаются обратимыми (фактически это предположение было сделано уже при изображении процессов на графике). Тогда Q_{12} и Q_{31} могут быть выражены по известным формулам для изобарного и изотермического процессов.

Коэффициент полезного действия цикла Карно найдем по известным формулам, так как из проведенного анализа очевидно, что $T_{\text{макс}} = T_2$, $T_{\text{мин}} = T_1$.

Количество теплоты, получаемое рабочим телом при изобарном процессе,

$$Q_{12} = \frac{m}{M} \frac{i+2}{2} R(T_2 - T_1), \quad (2)$$

где $(i+2)R/2 = C_p$ – молярная теплоемкость при постоянном давлении.

Количество теплоты, отдаваемое рабочим телом при изотермическом сжатии,

$$|Q_{31}| = \frac{m}{M} R T_1 \ln \frac{V_3}{V_1}. \quad (3)$$

Для процесса 3-1 количество теплоты Q_{31} пропорционально $\ln(V_1/V_3)$. Поскольку $V_1 < V_3$, логарифм будет отрицательным, поэтому в выражении для $|Q_{31}|$ стоит $\ln(V_3/V_1)$.

Объемы газа и их отношения неизвестны, однако состояния 1 и 2 лежат на одной изобаре и

$$V_2/V_1 = T_2/T_1. \quad (4)$$

Состояния 2 и 3 лежат на одной адиабате:

$$(V_3/V_2)^{\gamma-1} = T_2/T_3. \quad (5)$$

Учитывая, что $T_3 = T_1$, и извлекая корень степени $\gamma-1$, получаем

$$\frac{V_3}{V_2} = \left(\frac{T_2}{T_1} \right)^{1/(\gamma-1)}. \quad (6)$$

Перемножая почленно равенства (4) и (6), имеем

$$\frac{V_3}{V_1} = \left(\frac{T_2}{T_1} \right)^{\gamma/(\gamma-1)}.$$

Тогда

$$|Q_{31}| = \frac{m}{M} R T_1 \frac{\gamma}{\gamma - 1} \ln \frac{T_2}{T_1}.$$

Если коэффициент Пуассона выразить через число степеней свободы, то $\gamma / (\gamma - 1) = (i + 2) / 2$ и

$$|Q_{31}| = \frac{m}{M} \frac{i + 2}{2} R T_1 \ln \frac{T_2}{T_1}. \quad (7)$$

Подставим выражения (2) и (7) в (1):

$$\eta = \frac{T_2 - T_1 - T_1 \ln \frac{T_2}{T_1}}{T_2 - T_1} = 1 - \frac{T_1}{T_2 - T_1} \ln \frac{T_2}{T_1} = 0,39.$$

Коэффициент полезного действия цикла Карно между максимальной и минимальной температурами

$$\eta_K = (T_2 - T_1) / T_2 = 0,60.$$

Ответ: $\eta_K = 0,60$; $\eta = 0,39$.

Задачи для самостоятельного решения

Средний уровень

1. Тепловой двигатель за цикл получает от нагревателя 200 Дж и отдает холодильнику 150 Дж. Чему равен КПД двигателя?

- 1) 25 %; 2) 33 %; 3) 67 %; 4) 75 %.

2. Чему равно максимальное значение КПД, которое может иметь тепловой двигатель с температурой нагревателя 527 °С и температурой холодильника 27 °С?

- 1) 95 %; 2) 37,5 %; 3) 62,5 %; 4) 5 %.

3. В идеальной тепловой машине, работающей по циклу Карно, абсолютная температура нагревателя в 2 раза превышает температуру холодильника. Если температура холодильника уменьшится вдвое при неизменной температуре нагревателя, то КПД машины станет равным...

- 1) 100 %; 2) 50 %; 3) 75 %; 4) 90 %.

4. КПД цикла Карно равен 60 %. Если на 20 % уменьшить температуру нагревателя и на 20 % увеличить температуру охладителя, КПД цикла достигнет значения...

- 1) 40 %; 2) 50 %; 3) 70 %; 4) 90 %.

5. В идеальной тепловой машине из каждого 1 Дж теплоты, получаемого от нагревателя, 0,75 Дж отдается холодильнику. Если температура холодильника 27°C , то температура нагревателя (в $^{\circ}\text{C}$) равна ...

- 1) 100; 2) 127; 3) 175; 4) 200.

6. Тепловая машина работает по циклу Карно. Если температуру холодильника уменьшить, то КПД цикла...

- 1) увеличится;
2) не изменится;
3) уменьшится.

7. Тепловая машина работает по циклу Карно. Если температуру холодильника увеличить, то КПД цикла...

- 1) увеличится;
2) не изменится;
3) уменьшится.

8. Тепловая машина работает по циклу Карно. Если температуру нагревателя увеличить, то КПД цикла...

- 1) увеличится;
2) не изменится;
3) уменьшится.

9. Тепловая машина работает по циклу Карно. Если температуру нагревателя уменьшить, то КПД цикла...

- 1) увеличится;
2) не изменится;
3) уменьшится.

10. Тепловая машина работает по циклу Карно. Если температуру нагревателя и холодильника увеличить на одинаковую величину ΔT , то КПД цикла...

- 1) увеличится;
2) не изменится;
3) уменьшится.

11. Тепловая машина работает по циклу Карно. Если температуру нагревателя и холодильника уменьшить на одинаковую величину ΔT , то КПД цикла...

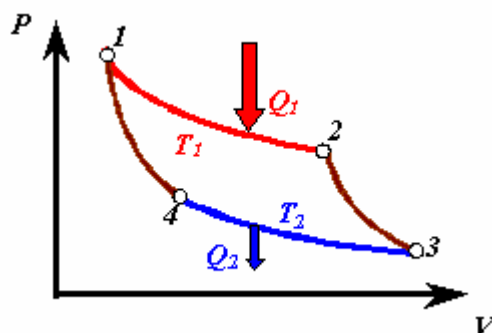
- 1) увеличится;
- 2) не изменится;
- 3) уменьшится.

12. Если количество теплоты, отдаваемое рабочим телом холодильнику, увеличится в два раза, то коэффициент полезного действия тепловой машины...

- 1) уменьшится на Q_2/Q_1 ;
- 2) увеличится на Q_2/Q_1 ;
- 3) уменьшится на $Q_2/2Q_1$;
- 4) увеличится на $Q_2/2Q_1$.

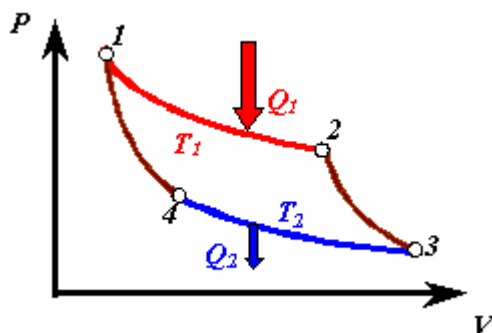
13. На рисунке изображен цикл Карно в координатах (p, V) .

Адиабатное расширение происходит на этапе ...



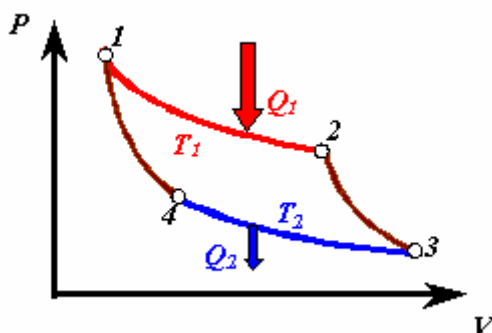
14. На рисунке изображен цикл Карно в координатах (p, V) .

Адиабатное сжатие происходит на этапе ...



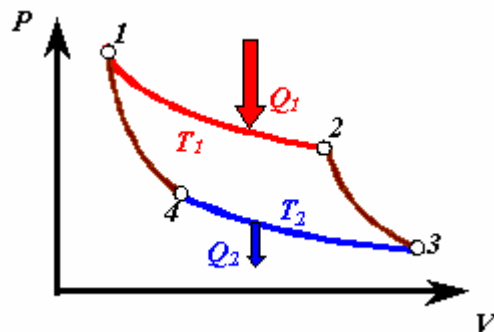
15. На рисунке изображен цикл Карно в координатах (p, V) .

Охлаждение газа происходит на этапе ...



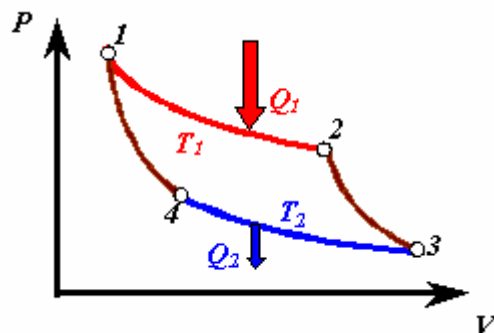
16. На рисунке изображен цикл Карно в координатах (p, V) .

На этапе 3 – 4 происходит ...



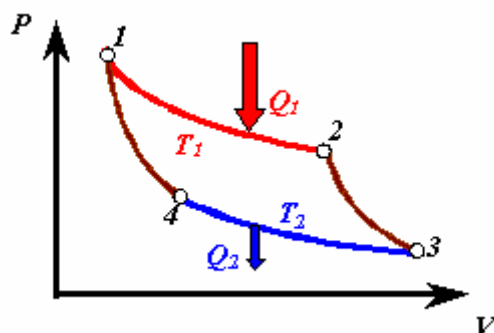
17. На рисунке изображен цикл Карно в координатах (p, V) .

На этапе 4 – 1 происходит ...



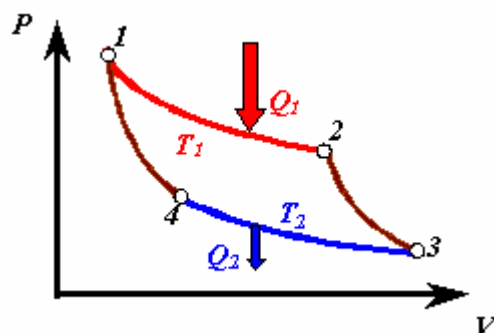
18. На рисунке изображен цикл Карно в координатах (p, V) .

На этапе 2 – 3 происходит ...

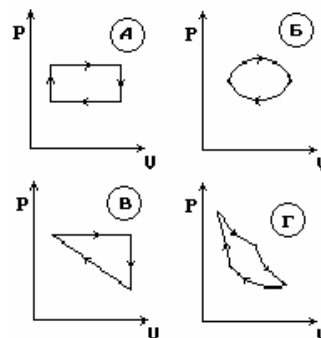


19. Тепловой двигатель, работающий по циклу Карно (см. рисунок), совершает за цикл работу, равную...

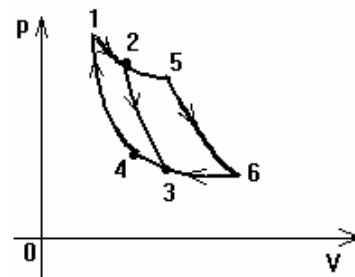
- 1) $A_{34} + A_{41}$;
- 2) $A_{23} + A_{41}$;
- 3) $A_{12} + A_{23}$;
- 4) $A_{12} + A_{34}$;
- 5) $A_{12} - A_{34}$.



20. Тепловые машины работают по циклам, представленным на рисунках. Какая из них имеет максимальный КПД при одинаковых температурах нагревателей и холодильников?



21. На рисунке 1-2-5 – изотерма, 6-3-4 – изотерма, 2-3, 5-6, 4-1 – адиабаты. Рассматриваются 2 цикла: I – 12341, II – 15641. Какое из соотношений для КПД циклов справедливо?



- 1) $\text{КПД (I)} = \text{КПД (II)} = 0$;
- 2) $\text{КПД (I)} = \text{КПД (II)}$;
- 3) $\text{КПД (I)} > \text{КПД (II)}$;
- 4) $\text{КПД (I)} < \text{КПД (II)}$.

22. Выберите правильные формулы для КПД цикла Карно:

- 1) $\eta = \frac{T_{\text{нагр}} - T_{\text{холод}}}{T_{\text{нагр}}}$;
- 2) $\eta = \frac{T_{\text{холод}}}{T_{\text{нагр}} - T_{\text{холод}}}$;
- 3) $\eta = \frac{A_{\text{цикла}}}{Q_{\text{нагр}}}$;
- 4) $\eta = \frac{Q_{\text{холод}}}{A_{\text{цикла}}}$;
- 5) $\eta = \frac{Q_{\text{нагр}} - |Q_{\text{холод}}|}{Q_{\text{нагр}}}$;
- 6) $\eta = \frac{|Q_{\text{нагр}}|}{Q_{\text{нагр}} - Q_{\text{холод}}}$.

23. Выберите правильные формулы для холодильного коэффициента цикла Карно:

- 1) $\epsilon = \frac{T_{\text{нагр}} - T_{\text{холод}}}{T_{\text{нагр}}}$;
- 2) $\epsilon = \frac{T_{\text{холод}}}{T_{\text{нагр}} - T_{\text{холод}}}$;
- 3) $\eta = \frac{A_{\text{цикла}}}{Q_{\text{нагр}}}$;
- 4) $\epsilon = \frac{Q_{\text{холод}}}{|A_{\text{цикла}}|}$;
- 5) $\epsilon = \frac{Q_{\text{нагр}} - |Q_{\text{холод}}|}{Q_{\text{нагр}}}$;
- 6) $\epsilon = \frac{|Q_{\text{нагр}}|}{Q_{\text{нагр}} - Q_{\text{холод}}}$.

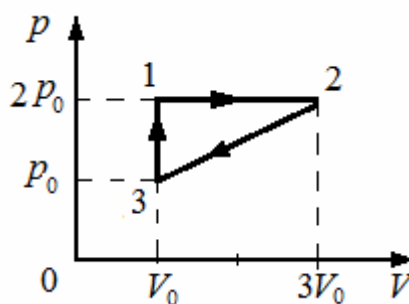
24. Выберите правильную формулу для КПД произвольного цикла:

- 1) $\eta = \frac{T_{\text{нагр}} - T_{\text{холод}}}{T_{\text{нагр}}}$;
- 2) $\eta = \frac{T_{\text{холод}}}{T_{\text{нагр}} - T_{\text{холод}}}$;
- 3) $\eta = \frac{A_{\text{цикла}}}{Q_{\text{нагр}}}$;
- 4) $\eta = \frac{Q_{\text{холод}}}{A_{\text{цикла}}}$;
- 5) $\eta = \frac{Q_{\text{нагр}} - |Q_{\text{холод}}|}{Q_{\text{нагр}}}$;
- 6) $\eta = \frac{|Q_{\text{нагр}}|}{Q_{\text{нагр}} - Q_{\text{холод}}}$.

25. Что нужно сделать для повышения КПД цикла Карно?

- 1) подобрать рабочее вещество;
 - 2) увеличить температуру изотермического расширения рабочего вещества;
 - 3) увеличить температуру изотермического сжатия рабочего вещества;
 - г) снизить температуру изотермического сжатия рабочего вещества.
- 1) а, б; 2) б, в; 3) в, г; 4) а, в; 5) б, г.

26. С одноатомным идеальным газом неизменной массы происходит циклический процесс, изображенный на рисунке. За цикл от нагревателя газ получает количество теплоты $Q_1 = 8$ кДж. Чему равна работа газа за цикл? Чему равен КПД цикла?

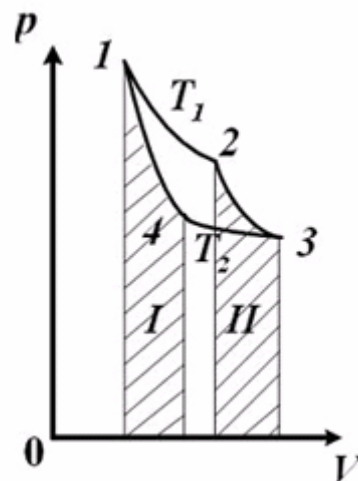


- 1) $A = p_0 V_0 = 2$ кДж; $\eta = 25\%$;
- 2) $A = 2p_0 V_0 = 4$ кДж; $\eta = 50\%$;
- 3) $A = 2p_0 V_0 = 4$ кДж; $\eta = 25\%$;
- 4) $A = p_0 V_0 = 2$ кДж; $\eta = 50\%$.

27. На (p, V) -диаграмме изображен цикл Карно для идеального газа.

Для величины работы адиабатического расширения газа A_{2-3} и адиабатического сжатия A_{4-1} справедливо соотношение

- 1) $A_{2-3} > |A_{4-1}|$;
- 2) $A_{2-3} = |A_{4-1}|$;
- 3) $A_{2-3} < |A_{4-1}|$;
- 4) работы невозможно сравнить.



Достаточный уровень

1. Определите работу идеальной тепловой машины за один цикл, если она в течение цикла получает от нагревателя количество теплоты 2095 Дж. Температура нагревателя 500 К, температура холодильника 300 К.

Ответ: $A = 838$ Дж

2. Тепловая машина работает по циклу Карно. Температура нагревателя 127°C , холодильника 15°C . На сколько надо изменить температуру нагревателя (при неизменной температуре холодильника), чтобы увеличить КПД машины в 2 раза?

Ответ: $\Delta T_1 = 255 \text{ K}$.

3. При прямом цикле Карно тепловая машина совершает работу 200 Дж. Температура нагревателя 375 К, холодильника 300 К. Определите количество теплоты, получаемое машиной от нагревателя.

Ответ: $Q = 1 \cdot 10^3 \text{ Дж}$

4. Идеальная тепловая машина, работающая по циклу Карно, совершает за один цикл работу $7,35 \cdot 10^4 \text{ Дж}$. Температура нагревателя 100°C , температура холодильника 0°C . Найдите: 1) КПД машины; 2) количество тепла, получаемого машиной за один цикл от нагревателя; 3) количество тепла, отдаваемого за один цикл холодильнику.

Ответ: 1) $\eta = 26,8\%$; 2) $Q_1 = 27,4 \cdot 10^4 \text{ Дж}$; 3) $Q_2 = 20 \cdot 10^4 \text{ Дж}$.

5. Идеальная холодильная машина, работающая по обратному циклу Карно, совершает за один цикл работу, равную $3,7 \cdot 10^4 \text{ Дж}$. При этом она берет тепло от тела с температурой -10°C и передает тепло телу с температурой $+17^{\circ}\text{C}$. Найти: 1) КПД цикла; 2) количество тепла, отнятого у холодного тела за один цикл; 3) количество тепла, переданного горячему телу за один цикл.

Ответ: 1) $\eta = 0,093$; 2) $Q_2 = 360 \text{ кДж}$; 3) $Q_1 = 397 \text{ кДж}$.

6. Найдите КПД карбюраторного двигателя внутреннего сгорания, если показатель политропы равен 1,33 и степень сжатия равна 1) $\frac{V_1}{V_2} = 4$,

2) $\frac{V_1}{V_2} = 6$, 3) $\frac{V_1}{V_2} = 8$.

Ответ: 1) 36,7 %; 2) 44,6 %; 3) 49,6 %.

7. Кислород массой 1 кг совершает цикл Карно. При изотермическом расширении газа его объем увеличивается в 2 раза, а при последующем адиабатном расширении совершается работа 3000 Дж. Определите работу, совершенную за цикл.

Ответ: $A = 831,6 \text{ Дж}$.

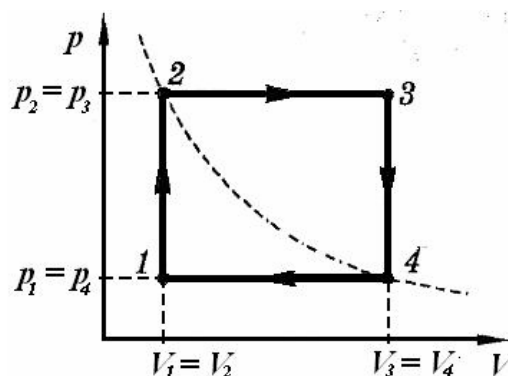
8. Идеальный двухатомный газ ($\nu = 1$ моль), занимающий объем $V_1 = 5$ л и находящийся под давлением $p_1 = 1$ МПа, подвергают изохорному нагреванию до $T_2 = 500$ К. После этого газ изотермически расширяют до начального давления, а затем в результате изобарного сжатия возвращают в первоначальное состояние. Постройте график цикла и определите его термодинамический КПД.

Ответ: $\eta = 13,3\%$.

9. Рабочее тело – идеальный газ – теплового двигателя совершает цикл, состоящий из последовательных процессов: изобарного, адиабатного и изотермического. В результате изобарного процесса газ нагревается от $T_1 = 300$ К до $T_2 = 600$ К. Определите термический КПД теплового двигателя.

Ответ: $\eta = 30,7\%$.

10. Один моль газа участвует в циклическом процессе, состоящем из двух изохор и двух изобар. Температура в точках 1 и 3 равна T_1 и T_3 . Определите работу, совершенную газом за цикл, если известно, что точки 2 и 4 лежат на одной изотерме.



Ответ: $A = R(\sqrt{T_3} - \sqrt{T_1})^2$.

11. Идеальный газ совершает цикл Карно. Температура нагревателя $T_1 = 470$ К, а температура холодильника $T_2 = 280$ К. При изотермическом расширении газ совершает работу $A = 100$ Дж. Определите термический КПД цикла, а также количество теплоты Q_2 , которое газ отдает холодильнику при изотермическом сжатии.

Ответ: 1) $\eta = 0,4$; 2) $Q_2 = 150$ Дж.

12. Тепловая машина работает по циклу Карно. Температура нагревателя $T_1 = 600$ К. Определите КПД цикла и температуру T_2 холодильника тепловой машины, если за счет $Q_1 = 2$ кДж теплоты, полученной от нагревателя, машина совершает работу $A = 400$ Дж.

Ответ: 1) $\eta = 0,2$; $T_2 = 480$ К.

13. Паровая машина мощностью 14,7 кВт потребляет за 1 час работы 8,1 кг угля с удельной теплотой сгорания $3,3 \cdot 10^7$ Дж/кг. Температура котла 200°C , холодильника 58°C . Найдите КПД этой машины и сравните его с КПД идеальной тепловой машины.

Ответ: 1) $\eta = 0,198$; 2) $\eta_{\text{ид}} = 0,3$.

2.4. Энтропия. Второе начало термодинамики

Основные формулы

Определение энтропии: энтропия есть такая функция состояния системы, дифференциал которой связан с элементарным тепловым эффектом в обратимом процессе соотношением $dS = \frac{\delta Q}{T}$.

Изменение энтропии идеального газа при равновесном переходе из состояния 1 в состояние 2:

$$\Delta S_{1 \rightarrow 2} = S_2 - S_1 = \int_1^2 \frac{dQ}{T} = \frac{m}{M} \left(c_V \ln \frac{T_2}{T_1} + R \ln \frac{V_2}{V_1} \right).$$

Изменение энтропии:

в изохорном процессе ($V = \text{const}$):

$$\Delta S_{1 \rightarrow 2} = S_2 - S_1 = \frac{m}{M} c_V \ln \frac{T_2}{T_1};$$

в изобарном процессе ($p = \text{const}$):

$$\Delta S_{1 \rightarrow 2} = S_2 - S_1 = \frac{m}{M} \left(c_V \ln \frac{T_2}{T_1} + R \ln \frac{V_2}{V_1} \right);$$

в изотермическом процессе ($T = \text{const}$):

$$\Delta S_{1 \rightarrow 2} = S_2 - S_1 = \frac{m}{M} R \ln \frac{V_2}{V_1};$$

в адиабатном процессе ($\delta Q = 0$):

$$S = \text{const}.$$

Изменение энтропии при плавлении:

$$\Delta S = \frac{m\lambda}{T}.$$

Изменение энтропии при парообразовании:

$$\Delta S = \frac{mr}{T}.$$

Связь энтропии и термодинамической вероятности:

$$S = k \ln W.$$

ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

Пример 1. Определите изменение энтропии ΔS при изотермическом расширении азота массой $m = 10$ г, если давление газа уменьшилось от $p_1 = 0,1$ МПа до $p_2 = 50$ кПа.

Дано:	Решение:
$m = 10$ г $p_1 = 0,1$ МПа $p_2 = 50$ кПа $M = 28 \cdot 10^{-3}$ кг/моль $\Delta S = ?$	Изменение энтропии газа в изотермическом процессе $\Delta S = \int_1^2 \frac{dQ}{T} = \frac{1}{T} \int_1^2 dQ = \frac{Q}{T}.$ Согласно первому началу термодинамики количество теплоты, полученное газом, равно $Q = \Delta U + A.$

Для изотермического процесса $\Delta U = 0$, поэтому $Q = A$.

Работа газа в изотермическом процессе

$$A = \frac{m}{M} RT \ln \frac{V_2}{V_1} = \frac{m}{M} RT \ln \frac{p_1}{p_2},$$

поэтому изменение энтропии газа

$$\Delta S = \frac{m}{M} R \ln \frac{p_1}{p_2} = \frac{10^{-2}}{28 \cdot 10^{-3}} 8,31 \ln \frac{10^5}{5 \cdot 10^4} = 2,06 \text{ Дж/К}.$$

Ответ: $\Delta S = 2,06$ Дж/К.

Пример 2. Во сколько раз необходимо увеличить объем $\nu = 5$ моль идеального газа при изотермическом расширении, чтобы его энтропия увеличилась на $\Delta S = 57,6$ Дж/К?

Дано:	Решение:
$\nu = 5$ моль $\Delta S = 57,6$ Дж/К $n = ?$	Изменение энтропии идеального газа $\Delta S = \int \frac{dQ}{T}, \quad (1)$ где dQ – бесконечно малое количество теплоты, подводимое к газу, T – температура.

В изотермическом процессе температура T постоянна, внутренняя энергия газа не изменяется, поэтому подводимая к газу теплота полностью расходуется на совершение газом работы:

$$dQ = dA = p dV.$$

С учетом этого формула (1) принимает вид

$$\Delta S = \frac{1}{T} \int_{V_1}^{V_2} p dV,$$

где V_1 – начальный объем; V_2 – конечный объем после расширения.

Из уравнения Клайперона-Менделеева найдем давление p :

$$pV = \nu RT, \quad p = \frac{\nu RT}{V}.$$

Тогда

$$\Delta S = \frac{\nu RT}{T} \int_{V_1}^{V_2} \frac{dV}{V} = \nu R \ln V \Big|_{V_1}^{V_2} = \nu R (\ln V_2 - \ln V_1) = \nu R \ln \frac{V_2}{V_1} = \nu R \ln n, \quad (2)$$

где $n = \frac{V_2}{V_1}$ – величина, показывающая, во сколько раз увеличивается объем газа. Из (2) находим n :

$$\ln n = \frac{\Delta S}{\nu R}, \quad n = e^{\Delta S / \nu R}.$$

$$n = e^{\frac{57,6}{58,31}} = e^{1,386} = 4,00.$$

Ответ: объем газа необходимо увеличить в 4,00 раза.

Пример 3. Кислород, масса которого $m = 200$ г, нагревают от температуры $t_1 = 27^\circ \text{C}$ до $t_2 = 127^\circ \text{C}$. Найти изменение энтропии, если известно, что начальное и конечное давления одинаковы и близки к атмосферному.

Дано:
$m = 200$ г
$t_1 = 27^\circ \text{C}$
$t_2 = 127^\circ \text{C}$
$S_2 - S_1 = ?$

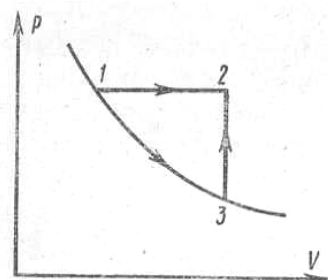
Решение:

Последняя оговорка в условии показывает, что в рассматриваемой задаче кислород подчиняется уравнениям идеального газа.

Характер процесса нагрева неизвестен.

Но изменение энтропии системы при переходе из одного состояния в другое определяется только параметрами этих состояний и не зависит от характера процесса.

Найти изменение энтропии можно, рассмотрев произвольный обратимый процесс, в результате которого систему (в данном случае идеальный газ) можно перевести из состояния 1 в 2 (см. рисунок).



На рисунке показаны два таких возможных квазистатических процесса: первый – изобарное расширение 1-2; второй – изотермическое расширение 1-3 с последующим изохорным нагреванием 3-2.

Для процесса 1-2

$$S_2 - S_1 = \int_1^2 \frac{\delta Q_p}{T}, \quad (1)$$

где $\delta Q_p = \frac{m}{M} C_p dT$.

Для процессов 1-3-2

$$S_2 - S_1 = \frac{1}{T} \int_1^3 \delta Q_T + \int_3^2 \frac{\delta Q_V}{T}, \quad (2)$$

где $\delta Q_T = \delta A = p dV$, $\delta Q_V = \frac{m}{M} C_V dT$.

Найдем изменение энтропии, рассматривая изобарный процесс 1-2. При изобарном процессе молярная теплоёмкость $C_p = \text{const} = (i + 2)R / 2$. Подставляя выражение δQ_p под знак интеграла равенства (1) и учитывая постоянство C_p , получим

$$S_2 - S_1 = \frac{m}{M} \frac{i + 2}{2} R \int_1^2 \frac{dT}{T} = \frac{m}{M} \frac{i + 2}{2} R \ln \frac{T_2}{T_1}.$$

Кислород – газ двухатомный ($i = 5$), и для заданных температур $S_2 - S_1 = 52$ Дж/К.

Легко проверить, что результат не изменится и при переходе 1-3-2.

Подставляя выражения δQ_T и δQ_V в (2) и учитывая, что при изотермическом процессе $p = p_1 V_1 / V = mRT_1 / (MV)$, получим

$$S_2 - S_1 = \frac{m}{M} R \int_1^3 \frac{dV}{V} + \frac{m}{M} C_V \int_3^2 \frac{dT}{T} = \frac{m}{M} R \ln \frac{V_3}{V_1} + \frac{m}{M} C_V \ln \frac{T_2}{T_3}.$$

Учитывая, что $T_3 = T_1$, $V_3 = V_2$, а также $T_2 / T_1 = V_2 / V_1$, получим

$$S_2 - S_1 = \frac{m}{M} \frac{i + 2}{2} R \ln \frac{T_2}{T_1}.$$

Ответ: $S_2 - S_1 = 52$ Дж/К.

Пример 4. При нагревании двухатомного идеального газа ($\nu = 2$ моль) его термодинамическая температура увеличилась в $n = 2$ раза. Определите изменение энтропии газа, если нагревание происходит: 1) изохорно; 2) изобарно.

Дано:	Решение:
$\nu = 2$ моль	Энтропия – это функция состояния системы.
$n = 2$	Приращение энтропии dS равно приведенному количеству теплоты, полученному в результате перехода системы из одного состояния в другое:
$\Delta S_V - ?, \Delta S_p - ?$	$dS = \frac{\delta Q}{T}.$

В соответствии с определением энтропии её изменение при переходе системы из одного состояния в другое

$$\Delta S_{1-2} = S_2 - S_1 = \int_1^2 \frac{\delta Q}{T} = \int_1^2 \frac{\Delta U + \delta A}{T}.$$

1) При изохорном процессе ($V = \text{const}$), $\delta A = 0$, поэтому

$$\Delta S_V = \int_1^2 \frac{dU}{T} = \frac{i}{2} \nu R \int_1^2 \frac{dT}{T} = \frac{i}{2} \nu R \ln \frac{T_2}{T_1} = \frac{i}{2} \nu R \ln n.$$

Для двухатомного газа $i = 5$.

$$\Delta S_V = \frac{5}{2} 2 \cdot 8,31 \ln 2 = 28,8 \text{ Дж/К}.$$

2) При изобарном процессе ($p = \text{const}$), $\delta A = p dV = \nu R T \frac{dV}{V}$, тогда

$$\Delta S_p = \int_1^2 \frac{\frac{i}{2} \nu R dT + \nu R T \frac{dV}{V}}{T} = \nu R \left(\frac{i}{2} \int_1^2 \frac{dT}{T} + \int_1^2 \frac{dV}{V} \right) = \nu R \left(\frac{i}{2} \ln \frac{T_2}{T_1} + \ln \frac{V_2}{V_1} \right).$$

При изобарном процессе

$$\frac{V_2}{V_1} = \frac{T_2}{T_1} = n,$$

поэтому

$$\Delta S_p = \nu R \ln n \left(\frac{i}{2} + 1 \right).$$

$$\Delta S_p = 2 \cdot 8,31 \cdot \ln 2 \left(\frac{5}{2} + 1 \right) = 40,3 \text{ Дж/К}.$$

Ответ: $\Delta S_V = 28,8 \text{ Дж/К}$; $\Delta S_p = 40,3 \text{ Дж/К}$.

Пример 5. Азот массой $m = 28$ г адиабатно расширили в $n = 2$ раза, а затем изобарно сжали до первоначального объема (см. рисунок). Определите изменение энтропии газа в ходе указанных процессов.

Дано:	Решение:
$m = 28$ г	При адиабатном расширении газа (1-2) $Q = 0$, следовательно $\Delta S_{12} = 0$, т.е. энтропия не меняется.
$n = 2$	При изобарном сжатии система отдает теплоту, поэтому $\Delta S_{23} < 0$.
$M = 28 \cdot 10^{-3}$ кг/моль	
$\Delta S_{13} = ?$	

$$\Delta S_{23} = \int_2^3 \frac{\delta Q}{T} = \int_2^3 \frac{\nu c_p dT}{T} = \nu c_p \int_2^3 \frac{dT}{T} = \frac{m}{M} \left(\frac{i}{2} + 1 \right) R \ln \frac{T_3}{T_2}.$$

Из уравнения изобары 2-3:

$$\frac{nV_1}{V_1} = \frac{T_2}{T_3} = n,$$

следует, что

$$\frac{T_3}{T_2} = \frac{1}{n},$$

поэтому

$$\Delta S_{23} = \frac{m}{M} \left(\frac{i}{2} + 1 \right) R \ln \frac{1}{n}.$$

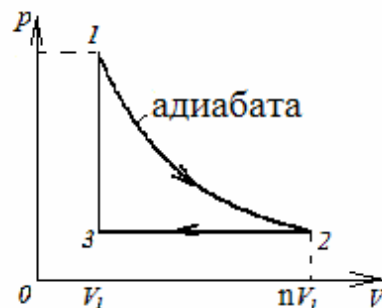
Так как $\frac{1}{n} < 1$, то $\ln \frac{1}{n} < 0$, т.е., действительно, $\Delta S_{23} < 0$.

Общее изменение энтропии в ходе указанных процессов

$$\Delta S_{13} = 0 + \Delta S_{23} = -\frac{m}{M} \left(\frac{i}{2} + 1 \right) R \ln n.$$

$$\Delta S_{13} = -\frac{28 \cdot 10^{-3}}{28 \cdot 10^{-3}} \left(\frac{5}{2} + 1 \right) 8,31 \cdot \ln 2 = -20,2 \text{ Дж/К}.$$

Ответ: $\Delta S_{13} = -20,2$ Дж/К.



Пример 6. Теплоизолированный сосуд, разделенный на две равные части ($V_1 = 2$ л, $V_2 = 3$ л), наполнен идеальным газом. В первой части газ находится под давлением $p_1 = 10^5$ Па при температуре $t_1 = 27^\circ \text{C}$; во второй части под давлением $p_2 = 5 \cdot 10^5$ Па и той же температуре (см. рисунок). Найдите изменение энтропии всей системы после удаления перегородки и установления равновесного состояния. Изменится ли ответ, если в объемах V_1 и V_2 находятся разные газы?

Дано:

$$V_1 = 2 \text{ л}$$

$$V_2 = 3 \text{ л}$$

$$p_1 = 10^5 \text{ Па}$$

$$p_2 = 5 \cdot 10^5 \text{ Па}$$

$$t_1 = 27^\circ \text{ С}$$

$$\Delta S = ?$$

Решение:

Рассматриваемая система изолирована – теплообмен не происходит, внешние силы не действуют. После удаления перегородки начнется заведомо необратимый самопроизвольный процесс, в результате которого во всем сосуде будет находиться однородный газ под некоторым давлением p_0 , причем $p_1 < p_0 < p_2$.



Вся система не участвует в теплообмене, ни один из газов не совершает работы. Следовательно, в конечном состоянии суммарная внутренняя энергия системы, а значит, и средняя энергия, приходящаяся на долю одной молекулы, будут такими же, как и до удаления перегородки. Поэтому температура газа остается постоянной и равной T_1 .

Энтропия системы в результате этого необратимого процесса увеличивается. Изменение ее определяется только начальным и конечным состояниями системы. Чтобы найти это изменение, надо представить себе любой обратимый процесс, переводящий данную систему из начального состояния в конечное.

Представим себе, что сосуды разделены поршнем, который перемещается до тех пор, пока давление с обеих его сторон не станет одинаковым и равным p_0 (газ в левой части сосуда сжимается, в правой – расширяется). Чтобы процесс был изотермическим и обратимым, во-первых, должна быть нарушена теплоизоляция сосуда: газ в левой части сосуда должен отдавать теплоту, в правой – получать. Во-вторых, поршень должен двигаться медленно, следовательно, на него должна действовать внешняя сила, компенсирующая результирующую силу давления газов.

После выравнивания давлений обе части газа окажутся в одинаковых равновесных состояниях; поэтому если убрать перегородку (поршень), то энтропия системы не изменится. Следовательно, искомое изменение энтропии системы равно сумме изменений энтропии каждой части газа в отдельности при описанном изотермическом перемещении поршня:

$$\Delta S = \Delta S_1 + \Delta S_2 = \int_{p_1}^{p_0} \frac{\delta Q}{T} + \int_{p_2}^{p_0} \frac{\delta Q}{T}. \quad (1)$$

При изотермическом процессе

$$\delta Q_T = \delta A_T = p dV = -V dp.$$

[Последнее из равенств следует из того, что $d(pV) = 0$ при $pV = \text{const.}$]
Тогда из уравнения (1)

$$\Delta S = \frac{1}{T_1} \left[\int_{p_0}^{p_1} V dp + \int_{p_0}^{p_2} V dp \right].$$

Выражая в интегралах текущий объем V из уравнений изотермических процессов, записанных для начального и текущего состояний, получим

$$\Delta S = \frac{1}{T_1} \left[\int_{p_0}^{p_1} \frac{p_1 V_1}{p} dp + \int_{p_0}^{p_2} \frac{p_2 V_2}{p} dp \right] = \frac{1}{T_1} \left(p_1 V_1 \ln \frac{p_1}{p_0} + p_2 V_2 \ln \frac{p_2}{p_0} \right). \quad (2)$$

Давление p_0 может быть найдено из уравнений изотермических процессов для каждой части газа:

$$p_1 V_1 = p_0 V_1', \quad p_2 V_2 = p_0 V_2', \quad (3)$$

где V_1' и V_2' – объем каждой части газа после выравнивания давлений, причем $V_1' + V_2' = V_1 + V_2$. Тогда почленное сложение уравнений (3) дает

$$p_1 V_1 + p_2 V_2 = p_0 (V_1 + V_2),$$

откуда

$$p_0 = \frac{p_1 V_1 + p_2 V_2}{V_1 + V_2}. \quad (4)$$

Подставим выражение (4) в (2):

$$\Delta S = \frac{1}{T_1} \left(p_1 V_1 \ln \frac{p_1 (V_1 + V_2)}{p_1 V_1 + p_2 V_2} + p_2 V_2 \ln \frac{p_2 (V_1 + V_2)}{p_1 V_1 + p_2 V_2} \right) = 1,1 \text{ Дж/К.}$$

Если бы в объемах V_1 и V_2 находились разные газы, то после удаления перегородки, даже при условии, что по обе ее стороны газы находятся под одинаковым давлением p_0 , начнется необратимый самопроизвольный процесс диффузии, который приведет к выравниванию концентраций каждого из газов во всем объеме сосуда. Очевидно, что в процессе диффузии энтропия будет возрастать. Следовательно, в этом случае полное изменение энтропии системы больше значения, найденного ранее.

Чтобы рассчитать изменение энтропии в процессе диффузии, надо заменить реальный необратимый процесс таким воображаемым обратимым процессом, который приведет систему в то же самое конечное состояние. Такой процесс может быть осуществлен только с помощью полупроницаемых перегородок, т.е. перегородок, проницаемых для молекул одного газа и непроницаемых для молекул другого газа.

Ответ: $\Delta S = 1,1 \text{ Дж/К.}$

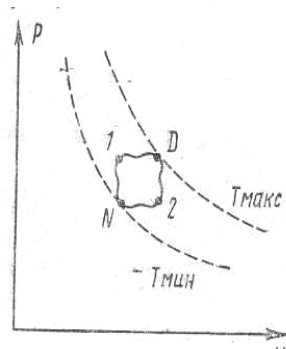
Пример 7. Докажите, что коэффициент полезного действия теплового двигателя, работающего по произвольному обратимому циклу, меньше, чем коэффициент полезного действия цикла Карно, работающего между максимальной и минимальной температурами этого цикла.

Дано:
 $T_{\text{макс}}, T_{\text{мин}}$
 $\eta_K > \eta$

Решение:
 Чтобы сравнить коэффициент полезного действия некоторого произвольного цикла и цикла Карно, проведенного в том же интервале температур, следует сравнить выражения

$$\eta_K = \frac{T_{\text{макс}} - T_{\text{мин}}}{T_{\text{макс}}} = 1 - \frac{T_{\text{мин}}}{T_{\text{макс}}} \text{ и } \eta = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1} = 1 - \frac{Q_2}{Q_1},$$

где $T_{\text{макс}}$ и $T_{\text{мин}}$ – соответственно максимальная и минимальная температуры произвольного цикла; Q_1 – полное количество теплоты, полученное рабочим телом от всех термостатов-нагревателей, с которыми рабочее тело находилось в контакте за цикл; Q_2 – полное количество теплоты, отданное рабочим телом всем термостатам-холодильникам за цикл.



Следует обратить внимание, что изменение температуры рабочего тела, например, от T_1 до T_2 обратимым процессом может быть осуществлено только при наличии очень большого числа термостатов с температурами, охватывающими весь диапазон от T_1 до T_2 , причем температуры соседних термостатов очень мало отличаются одна от другой. (Чем больше число термостатов, тем меньше отличаются температуры двух соседних, тем ближе процесс к обратимому.) Очевидно, исключение составляет только изменение температуры в результате адиабатного расширения или сжатия, для осуществления которого вообще не требуется термостатов.

Поскольку произвольный цикл обратим, для него неравенство Клаузиуса примет вид

$$\oint \frac{\delta Q}{T} = 0.$$

Представим этот интеграл как сумму двух: в первый войдут все участки, на которых рабочее тело получает теплоту от термостатов-нагревателей, во второй – все участки, на которых рабочее тело отдает теплоту термостатам-холодильникам. Можно предположить, что для произвольного цикла первый интеграл соответствует процессам $1 \rightarrow D \rightarrow 2$, второй – процессам $2 \rightarrow N \rightarrow 1$ (см. рисунок). Тогда

$$\oint \frac{\delta Q}{T} = \int_{1D}^2 \frac{\delta Q}{T} + \int_{2N}^1 \frac{\delta Q}{T} = 0.$$

Так как на всех участках $2 \rightarrow 1$ рабочее тело отдает теплоту ($\delta Q < 0$), то

$$\int_{1D}^2 \frac{\delta Q}{T} - \int_{2N}^1 \frac{|\delta Q|}{T} = 0, \text{ или } \int_{1D}^2 \frac{\delta Q}{T} = \int_{2N}^1 \frac{|\delta Q|}{T}. \quad (1)$$

Если на всех участках $1 \rightarrow 2$ текущую температуру рабочего тела, при которой происходит теплообмен, заменить максимальной температурой цикла, то

$$\int_{1D}^2 \frac{\delta Q}{T} > \int_{1D}^2 \frac{\delta Q}{T_{\max}} = \frac{1}{T_{\max}} \int_{1D}^2 \delta Q = \frac{Q_1}{T_{\max}}. \quad (2)$$

Аналогично, если на всех участках $2 \rightarrow 1$ заменить текущую температуру минимальной, то

$$\int_{2N}^1 \frac{|\delta Q|}{T} < \int_{2N}^1 \frac{|\delta Q|}{T_{\min}} = \frac{1}{T_{\min}} \int_{2N}^1 |\delta Q| = \frac{Q_2}{T_{\min}}. \quad (3)$$

Из выражений (1) – (3) следует, что

$$\frac{Q_1}{T_{\max}} < \frac{Q_2}{T_{\min}},$$

откуда $\frac{T_{\min}}{T_{\max}} < \frac{Q_2}{Q_1}$. Тогда

$$1 - \frac{T_{\min}}{T_{\max}} > 1 - \frac{Q_2}{Q_1} \text{ и } \eta_K > \eta.$$

Ответ: $\eta_K > \eta$.

Пример 8. Горячая вода некоторой массы отдает теплоту холодной воде такой же массы, и температуры их становятся одинаковыми. Покажите, что энтропия при этом увеличивается.

Решение:

Пусть температура горячей воды T_1 , холодной T_2 , а температура смеси θ . Определим температуру смеси, исходя из уравнения теплового баланса

$$mc(T_2 - \theta) = mc(\theta - T_2) \quad \text{или} \quad T_1 - \theta = \theta - T_2,$$

откуда

$$\theta = (T_1 + T_2) / 2. \quad (1)$$

Изменение энтропии, происходящее при охлаждении горячей воды,

$$\Delta S_1 = \int_{T_1}^{\theta} \frac{cm dT}{T} = cm \ln \frac{\theta}{T_1}.$$

Изменение энтропии, происходящее при нагревании холодной воды,

$$\Delta S_2 = \int_{T_2}^{\theta} \frac{cm dT}{T} = cm \ln \frac{\theta}{T_2}.$$

Изменение энтропии системы

$$\Delta S = \Delta S_1 + \Delta S_2 = cm \ln(\theta / T_1) + cm \ln(\theta / T_2) = cm \ln \frac{\theta^2}{T_1 T_2}.$$

С учетом соотношения (1) получим

$$\Delta S = cm \ln \frac{(T_1 + T_2)^2}{4T_1 T_2}.$$

Так как $T_1 < T_2$, то $(T_1 + T_2)^2 > 4T_1 T_2$, следовательно $\frac{(T_1 + T_2)^2}{4T_1 T_2} > 1$ и $\ln \frac{(T_1 + T_2)^2}{4T_1 T_2} > 0$.

Тогда $\Delta S > 0$, т.е. энтропия возрастает.

Ответ: энтропия смеси возрастает.

Пример 9. *Очень небольшой теплоизолированный сосуд разделен на две равные части теплопроницаемой перегородкой. В каждой части находится углекислый газ в количестве 10^{-8} моль. Температура газа в одной части сосуда $t_1 = 28^\circ \text{C}$, во второй части $t_2 = 27^\circ \text{C}$. Пренебрегая теплоемкостью сосуда, определить, во сколько раз возрастает вероятность состояния системы при выравнивании температур. Определить изменение вероятности при переходе теплоты от менее нагретой части газа к более нагретой. Считать, что газ идеальный.*

Дано:	Решение:
$\nu = 10^{-8}$ моль	Согласно соотношению Больцмана изменение энтропии прямо пропорционально натуральному логарифму вероятности W данного состояния системы:
$t_1 = 28^\circ \text{C}$	
$t_2 = 27^\circ \text{C}$	
$W'_2 / W_1 = ?$	$\Delta S = S_2 - S_1 = k \ln(W_2 / W_1),$
	откуда
	$W_2 / W_1 = \exp(\Delta S / k), \quad (1)$

где k – постоянная Больцмана; W – термодинамическая вероятность состояния – число, пропорциональное количеству тех физически различных

микросостояний системы, которыми может быть реализовано данное макросостояние.

Для того чтобы найти изменение энтропии, следует рассмотреть квазистатический процесс, который может перевести систему из начального состояния в конечное. Поскольку объем газа, находящегося в каждой части сосуда, остается постоянным, таким процессом может быть квазистатическое изохорное нагревание одной части газа и квазистатическое изохорное охлаждение другой части. Причем каждый из этих процессов должен происходить в результате теплообмена с внешними термостатами при нарушении теплоизоляции системы.

Если температура газа, находящегося в первой части сосуда, изменится от T_1 до T_1' , а во второй части – от T_2 до T_2' , то

$$\Delta S = S_2 - S_1 = \int_{T_1}^{T_1'} \frac{\delta Q_V}{T} + \int_{T_2}^{T_2'} \frac{\delta Q_V}{T}. \quad (2)$$

Здесь $\delta Q_V = m C_V dT / M$, где m / M – число молей, $C_V = iR / 2$ – молярная теплоемкость при постоянном объеме (для углекислого газа $i = 6$).

Поскольку в действительности температура каждой части газа изменяется не в результате теплообмена с внешними термостатами, а в результате перехода теплоты от одной части газа к другой, то количество теплоты, отдаваемое одним газом, равно количеству теплоты, получаемому другим газом. (Теплоемкостью сосуда, а следовательно, и количеством теплоты, им получаемым, можно пренебречь.) Так как в обеих частях сосуда находится однородный газ одинаковой массы, то изменение температуры по модулю будет также одинаковым. Если в результате теплообмена температура газа в первой части сосуда уменьшится, так что $T_1' = T_1 - \Delta T$, то во второй части температура увеличится и $T_2' = T_2 + \Delta T$. При выравнивании температур $T_1' = T_2'$ и

$$\Delta T = (T_1 - T_2) / 2.$$

Проводя интегрирование равенства (2) с учётом выражений для T_1' и T_2' , получим

$$\Delta S = \frac{m}{M} C_V \left[\ln \left(1 - \frac{\Delta T}{T_1} \right) + \ln \left(1 + \frac{\Delta T}{T_2} \right) \right].$$

Поскольку $\Delta T \leq T_2$, натуральные логарифмы можно разложить в степенной ряд и ограничиться только первым членом. Тогда

$$\Delta S = \frac{m}{M} C_V \Delta T \left(-\frac{1}{T_1} + \frac{1}{T_2} \right), \quad (3)$$

где $mC_V\Delta T / M = Q_{12}$ – абсолютное значение количества теплоты, отданное одной и полученное второй частями газа. Следовательно, выражение (3) может быть использовано для расчета изменения энтропии не только при выравнивании температур, но при любом теплообмене между газами, находящимися в разных частях сосуда. В этом случае могут изменяться Q_{12} и знак перед скобкой. Если Q_{12} – количество теплоты, которое отдает менее нагретый, а получает более нагретый газ, то выражение, стоящее в скобках формулы (3), примет вид

$$1/T_1 - 1/T_2.$$

В случае выравнивания температур $\Delta T = 0,5$ К и количество теплоты $Q_{12} = 1,25 \cdot 10^{-7}$ Дж. Тогда $\Delta S = 1,38 \cdot 10^{-12}$ Дж/К. Согласно (1)

$$W_2 / W_1 = \exp 10^{11}.$$

Изменение энтропии при переходе такого же количества теплоты от газа, менее нагретого, к газу, более нагретому, $\Delta S' = -1,38 \cdot 10^{-12}$ Дж/К и соответственно

$$W'_2 / W_1 = 1 / \exp 10^{11} \approx 10^{-48}.$$

Полагая, что термодинамическая вероятность равно или прямо пропорциональна числу случаев, когда данное состояние имеет место, полученный результат можно интерпретировать так: описанная в задаче система самопроизвольно переходит в состояние, при котором температуры газов будут равны практически всегда; переход теплоты от менее нагретого газа к более нагретому невозможен.

Однако если рассмотреть вероятность перехода количества теплоты на много порядков меньше, например $Q_{12} = 1,25 \cdot 10^{-17}$ Дж, то в этом случае изменение энтропии при передаче теплоты от более нагретого газа к менее нагретому $\Delta S = 1,38 \cdot 10^{-22}$ Дж/К и $W'_2 / W_1 = e^{10} \approx 20\,000$.

Изменение энтропии при переходе этого же количества теплоты от менее нагретого газа к более нагретому $\Delta S' = -1,38 \cdot 10^{-22}$ Дж/К и

$$W'_2 / W_1 = e^{-10} \approx 1 / 20\,000.$$

Это значит, что уже в одном случае из 20 000 возможен процесс перехода теплоты от менее нагретого газа к более нагретому, т.е. вероятность такого процесса резко повышается.

Очевидно, для того чтобы передача такого количества теплоты (порядка 10^{-17} Дж) могла хоть сколько-нибудь изменить температуру газа, количество газа должно быть резко уменьшено. Так, для изменения температуры на 0,01 К число молей газа должно составлять $10^{-15} - 10^{-16}$, что

соответствует общему количеству молекул $N \approx 10^8 \div 10^7$. Для макроскопических объемов, содержащих такое количество молекул, уже можно говорить о реальной вероятности процесса, идущего в нарушение второго начала термодинамики.

Ответ: $W'_2 / W_1 = e^{-10} \approx 1 / 20\,000$.

Задачи для самостоятельного решения

Средний уровень

1. Выберите неправильное утверждение:

- 1) функция состояния, называемая энтропией, выражается формулой $S = k \ln W$;
- 2) дифференциал функции состояния, называемой энтропией, выражается формулой $dS = \frac{\delta Q}{T}$;
- 3) энтропия является мерой неупорядоченности системы;
- 4) все обратимые процессы в замкнутой системе ведут к увеличению ее энтропии.

2. Какими из нижеперечисленных свойств обладает энтропия изолированной системы?

- а) при протекании в системе необратимых процессов энтропия убывает;
- б) при протекании обратимых циклических процессов энтропия остаётся постоянной;
- в) при протекании в системе необратимых процессов энтропия возрастает.

1) а, б; 2) а, в; 3) б, в.

3. Реальные процессы в изолированных системах протекают:

- а) в направлении возрастания энтропии;
- б) изменения макросостояния системы в более вероятное макросостояние;
- в) из неравновесного состояния в равновесное состояние;
- г) из более упорядоченного состояния в менее упорядоченное состояние.

Варианты ответов:

- 1) верны все эти утверждения; 2) только а; 3) только а и б;
- 4) только б и в; 5) а, б и в.

4. Какие процессы являются обратимыми?

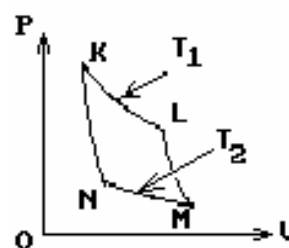
- 1) адиабатное расширение газа в вакууме;
- 2) теплообмен двух тел;
- 3) изоэнтропное сжатие газа;
- 4) адиабатное дросселирование газа.

5. Для обратимого процесса в неизолированной термодинамической системе условие Клаузиуса имеет вид...

- 1) $TdS = dU + \delta A$;
- 2) $TdS > dU + \delta A$;
- 3) $TdS < dU + \delta A$.

6. Для кругового процесса, изображенного на рисунке, KL и MN – изотермы, а KN и LM – обратимые адиабаты.

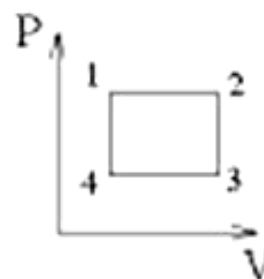
Система совершает цикл Карно $KLMNK$, получая количество теплоты Q_1 от нагревателя при температуре T_1 и отдавая количество теплоты Q_2 холодильнику при температуре T_2 . Все следующие утверждения верны, за исключением...



- 1) энтропия нагревателя уменьшается;
- 2) энтропия системы возрастает;
- 3) выполненная работа равна $Q_1 - Q_2$;
- 4) $Q_1/T_1 = Q_2/T_2$;
- 5) КПД цикла не зависит от природы рабочего тела.

7. Тепловая машина работает по циклу (две изобары 1-2 и 3-4 и две изохоры 2-3 и 4-1).

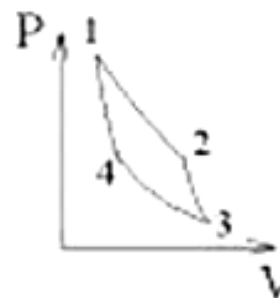
За один цикл работы тепловой машины энтропия рабочего тела ...



- 1) не изменится;
- 2) возрастет;
- 3) уменьшится.

8. Идеальная тепловая машина работает по циклу Карно (две изотермы 1-2 и 3-4 и две адиабаты 2-3 и 4-1).

За один цикл работы тепловой машины энтропия рабочего тела ...



- 1) уменьшится;
- 2) не изменится;
- 3) возрастет.

9. Какое из утверждений **неправильное**?

- 1) Все допустимые микросостояния замкнутой системы равновероятны
- 2) Энтропия изолированной системы остаётся постоянной
- 3) Энтропия системы в равновесном состоянии максимальна.
- 4) Энтропия с точностью до постоянного множителя равна логарифму числа допустимых микроскопических состояний система.

10. Как изменяется энтропия ΔS газа при:

- а) квазистатическом адиабатном процессе;
- б) расширении в пустоту в теплоизолированной оболочке?
 - 1) в первом случае $\Delta S = 0$, во втором – $\Delta S > 0$;
 - 2) в первом случае $\Delta S > 0$, во втором – $\Delta S = 0$;
 - 3) в обоих случаях $\Delta S = 0$;
 - 4) в обоих случаях $\Delta S > 0$.

11. В каком из нижеперечисленных процессов энтропия остается постоянной?

- 1) в изотермическом;
- 2) в адиабатном;
- 3) в изохорном.

12. Термодинамическая теплоизолированная система совершает обратимый процесс. Как изменится энтропия в конце процесса?

- 1) уменьшится;
- 2) не изменится;
- 3) возрастет;
- 4) для ответа недостаточно информации.

13. В процессе обратимого изохорического охлаждения постоянной массы идеального газа его энтропия ...

- 1) уменьшается;
- 2) не меняется;
- 3) увеличивается.

14. При адиабатном сжатии идеального газа ...

- 1) температура и энтропия возрастают;
- 2) температура возрастает, энтропия не изменяется;
- 3) температура не изменяется, энтропия возрастает;
- 4) температура возрастает, энтропия убывает.

15. При изотермическом сжатии идеального газа энтропия ...

- 1) не изменяется;
- 2) увеличивается;
- 3) уменьшается;
- 4) сначала увеличивается, потом уменьшается.

16. Замкнутая термодинамическая система перешла из состояния (1) в состояние (2) с помощью необратимого процесса, так что давление возросло в два раза. Как изменилась энтропия системы?

- 1) возросла;
- 2) уменьшилась;
- 3) не изменилась;
- 4) для ответа недостаточно информации.

17. Систему привели в неравновесное состояние и изолировали от окружающих тел. Пренебрегая флуктуациями в системе, ответьте на следующие вопросы:

- а) Будет ли изменяться термодинамическое состояние системы?
- б) Возможно ли уменьшение термодинамической вероятности (статистического веса) этой системы?
- в) Возможно ли уменьшение энтропии этой системы?
- г) Возможно ли увеличение энтропии этой системы?

На какие вопросы вы ответили «нет»?

- 1) а, б; 2) а, в; 3) а, г;
- 4) б, в; 5) б, г.

18. В каком из нижеприведённых процессов энтропия системы уменьшится?

- 1) неравновесное адиабатическое сжатие;
- 2) равновесное адиабатическое сжатие;
- 3) изобарическое расширение;
- 4) изотермическое сжатие;
- 5) ни в одном из процессов.

19. Термодинамическая система из состояния (1) перешла адиабатно в состояние (2), при этом давление уменьшилось. Что можно сказать об изменении энтропии системы в результате этого процесса?

- 1) энтропия не изменилась;
- 2) энтропия системы уменьшилась;
- 3) энтропия системы возросла;
- 4) для ответа недостаточно информации.

20. Какие из утверждений верны:

а) система пребывает в наиболее вероятном состоянии неограниченно долго;
б) предоставленная самой себе, система не может переходить из одного состояния в другое;

в) энтропия и вероятность состояний изолированной системы ведут себя сходным образом – или возрастают или остаются неизменными.

- 1) а, б; 2) а, б, в;
3) б, в; 4) а, в.

21. Объём некоторого газа может вырасти при изотермическом (1), адиабатном (2) и изобарном (3) процессах.

В каком из этих процессов изменение энтропии будет максимальным, в каком – минимальным?

- 1) ΔS_1 – минимальное, ΔS_2 – максимальное;
2) ΔS_1 – минимальное, ΔS_3 – максимальное;
3) ΔS_2 – минимальное, ΔS_1 – максимальное;
4) ΔS_2 – минимальное, ΔS_3 – максимальное;
5) ΔS_3 – минимальное, ΔS_1 – максимальное;
6) ΔS_3 – минимальное, ΔS_2 – максимальное.

22. Объёмы одного моля гелия и одного моля азота увеличены вдвое в результате одного и того же процесса.

а) Зависит ли соотношение между $\Delta S(\text{He})$ и $\Delta S(\text{N}_2)$ от условий расширения газов?

б) Имеется ли такой изопроцесс, при котором $\Delta S(\text{He}) > \Delta S(\text{N}_2)$?

в) Имеется ли такой процесс, при котором $\Delta S(\text{He}) = \Delta S(\text{N}_2)$ и не равно нулю?

г) Имеется ли такой изопроцесс, при котором $\Delta S(\text{He}) < \Delta S(\text{N}_2)$?

д) Может ли оказаться, что $\Delta S(\text{He}) = \Delta S(\text{N}_2)$ и равно нулю?

$\Delta S(\text{He})$ и $\Delta S(\text{N}_2)$ – изменения энтропии гелия и азота соответственно.

На какие вопросы вы ответили «да»?

- 1) а, б, в, г; 2) а, б, в, г, д; 3) а, в, г, д; 4) а, г, д;
5) а, б, в; 6) а, в, д; 7) в, г, д.

23. В каком из нижеперечисленных процессах количество теплоты Q , получаемое системой, может быть выражено по формуле $Q = T(S_2 - S_1)$?

- 1) в любом процессе;
2) в адиабатном процессе;
3) в изобарном процессе;
4) в изотермическом процессе.

24. При изотермическом расширении одного киломоля идеального газа его энтропия изменяется на 5,75 кДж/К. Определите отношение начального и конечного давлений газа ($\frac{p_1}{p_2}$).

Примечание: $e^{0,69} = 2$; $e^{-0,69} = \frac{1}{2}$; $e^{1,098} = 3$; $e^{-1,098} = \frac{1}{3}$; $e^{-0,405} = \frac{2}{3}$.

1) 3; 2) 1/2; 3) 1/3; 4) 2/3; 5) 2.

25. Один киломоль гелия (He), изобарно расширяясь, увеличил свой объём в 4 раза. Определить изменение $\Delta S(\text{He})$ энтропии гелия при расширении.

1) 29 кДж/К; 2) -29 кДж/К;
3) 0 Дж/К; 4) 17,4 кДж/К.

26. Каково изменение энтропии ΔS одного моля идеального газа при его адиабатном расширении в пустоту от объёма V_1 до объёма V_2 ?

1) $\Delta S = 0$; 2) $\Delta S = R \ln \frac{V_2}{V_1}$; 3) $\Delta S = R \ln \frac{V_1}{V_2}$; 4) $\Delta S = R \frac{V_2}{V_1}$.

27. Определите приращение энтропии при нагревании воды массой 2 кг от 0°C до 100°C. Удельная теплоёмкость воды $c = 4200$ Дж/(кг·К).

1) 1498,1 Дж/К; 2) 2621,7 Дж/К; 3) 5243,4 Дж/К.

28. Определите приращение энтропии при превращении 200 г льда, находившегося при температуре -10°C, в воду при температуре 0°C. Удельная теплоёмкость льда 2100 Дж/(кг·К), удельная теплота плавления льда $3,35 \cdot 10^5$ Дж/кг.

1) $7,12 \cdot 10^4$ Дж/К; 2) $3,5 \cdot 10^3$ Дж/К; 3) 261 Дж/К.

29. Автомобиль массой $m = 10^3$ кг движется со скоростью $v = 15$ м/с, затем тормозит и останавливается. Определите полное изменение энтропии Вселенной. Считайте температуру равной 300 К.

1) 500 Дж/К; 2) 1000 Дж/К; 3) 375 Дж/К;
4) 750 Дж/К; 5) 50 Дж/К; 6) 100 Дж/К.

30. Чтобы расплавить некоторую массу меди, требуется большее количество теплоты, чем для плавления такой же массы цинка, так как удельная теплота плавления меди в 1,5 раза больше, чем цинка ($\lambda_{\text{Cu}} = 1,8 \cdot 10^5$ Дж/кг, $\lambda_{\text{Zn}} = 1,2 \cdot 10^5$ Дж/кг). Температура плавления меди примерно в 2 раза выше температуры плавления цинка ($T_{\text{Cu}} = 1356$ К, $T_{\text{Zn}} = 693$ К). Разрушение

кристаллической решетки металла при плавлении приводит к возрастанию энтропии. Если энтропия цинка увеличилась на ΔS , то изменение энтропии меди составит ...

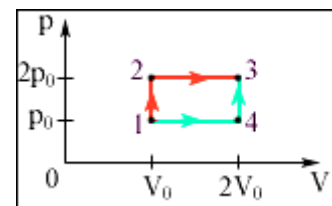
- 1) $\frac{1}{4}\Delta S$; 2) $\frac{1}{2}\Delta S$; 3) $\frac{3}{4}\Delta S$; 4) ΔS .

31. В двух одинаковых закрытых сосудах находится по 1 киломоль гелия (He) и кислорода (O_2). Сосуды нагревают от температуры T_1 до температуры T_2 .

Укажите правильное соотношение между изменениями энтропии газов при этом процессе.

- 1) $\Delta S(\text{He}) = -\Delta S(\text{O}_2)$;
 2) $\Delta S(\text{He}) = \frac{5}{7}\Delta S(\text{O}_2)$;
 3) $\Delta S(\text{He}) = \frac{3}{5}\Delta S(\text{O}_2)$.

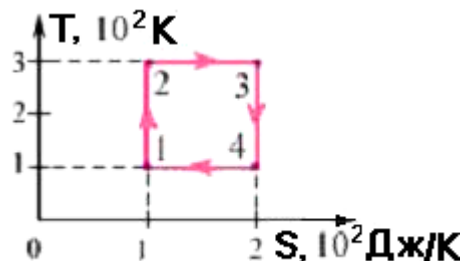
32. На диаграмме p, V (см. рисунок) представлены два процесса, проведенные с идеальным газом: 1–2–3 и 1–4–3. Сравните изменение энтропии ΔS_1 и ΔS_2 в этих процессах.



- 1) $\Delta S_1 > \Delta S_2$; 2) $\Delta S_1 < \Delta S_2$; 3) $\Delta S_1 = \Delta S_2$;
 4) ответ неоднозначен.

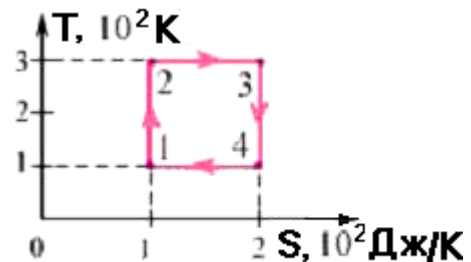
33. На диаграмме T, S (см. рисунок) изображен термодинамический цикл. Чему равна полезная работа, совершенная газом за цикл?

- 1) 10 кДж; 2) 20 кДж;
 3) 60 кДж; 4) 30 кДж.



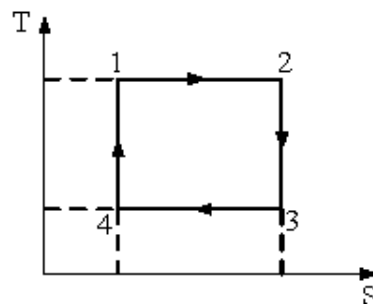
34. На диаграмме T, S (см. рисунок) изображен термодинамический цикл. Чему равно количество теплоты, полученное от нагревателя?

- 1) 10 кДж; 2) 20 кДж;
 3) 60 кДж; 4) 30 кДж.



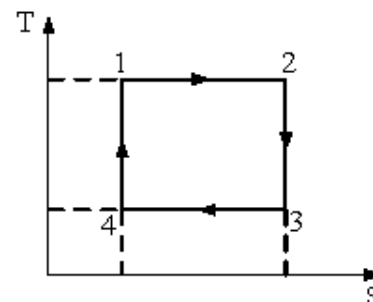
35. На рисунке изображен цикл Карно в координатах T, S , где S – энтропия. Изотермическое расширение происходит на этапе ...

- 1) 1 – 2; 2) 2 – 3;
3) 3 – 4; 4) 4 – 1.



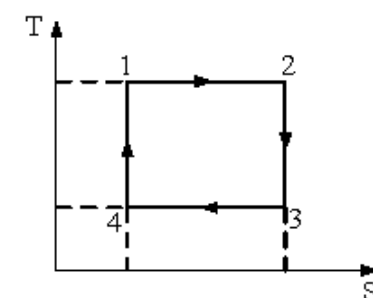
36. На рисунке изображен цикл Карно в координатах T, S , где S – энтропия. Адиабатное расширение происходит на этапе ...

- 1) 1 – 2; 2) 2 – 3;
3) 3 – 4; 4) 4 – 1.



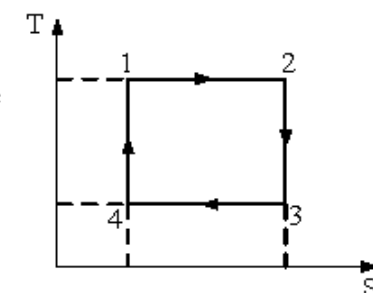
37. На рисунке изображен цикл Карно в координатах T, S , где S – энтропия. Изотермическое сжатие происходит на этапе ...

- 1) 1 – 2; 2) 2 – 3;
3) 3 – 4; 4) 4 – 1.



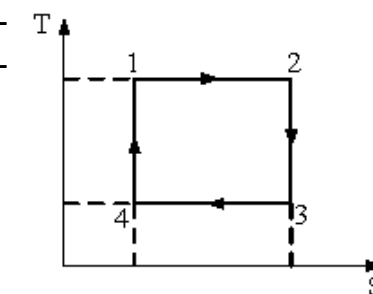
38. На рисунке изображен цикл Карно в координатах T, S , где S – энтропия. Адиабатное сжатие происходит на этапе ...

- 1) 1 – 2; 2) 2 – 3; 3) 3 – 4; 4) 4 – 1.



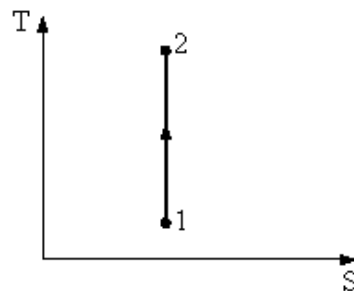
39. На рисунке изображен цикл Карно в координатах T, S , где S – энтропия. Теплота подводится к системе на участке...

- 1) 1 – 2; 2) 2 – 3;
3) 3 – 4; 4) 4 – 1.



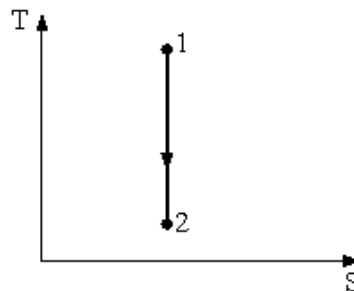
40. Процесс, изображенный на рисунке в координатах T, S , где S – энтропия, является...

- 1) адиабатным сжатием;
- 2) изохорным нагреванием;
- 3) изобарным расширением;
- 4) изотермическим расширением.



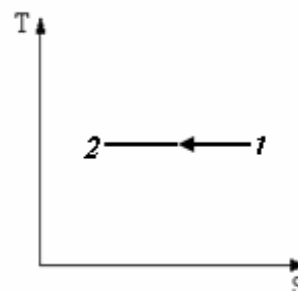
41. Процесс, изображенный на рисунке в координатах T, S , где S – энтропия, является...

- 1) адиабатным расширением;
- 2) изохорным охлаждением;
- 3) изобарным сжатием;
- 4) изотермическим сжатием.



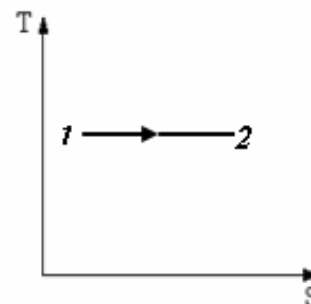
42. Процесс, изображенный на рисунке в координатах T, S , где S – энтропия, является...

- 1) адиабатным расширением;
- 2) изохорным охлаждением;
- 3) изобарным сжатием;
- 4) изотермическим сжатием.



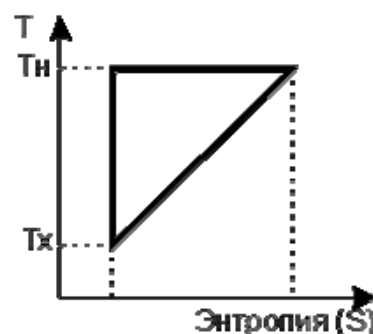
43. Процесс, изображенный на рисунке в координатах T, S , где S – энтропия, является...

- 1) адиабатным расширением;
- 2) изохорным охлаждением;
- 3) изобарным сжатием;
- 4) изотермическим расширением.

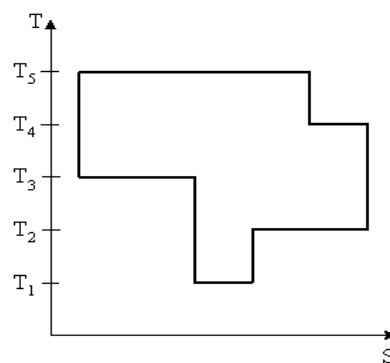


44. Каков КПД тепловой машины, работающей по циклу, изображенному на рисунке?

- 1) $\eta = \frac{T_H - T_X}{T_H}$;
- 2) $\eta = \frac{T_H - T_X}{T_X}$;
- 3) $\eta = \frac{T_H - T_X}{2T_H}$;
- 4) $\eta = \frac{T_H - T_X}{2T_X}$



45. На рисунке представлен цикл тепловой машины в координатах T, S , где T – термодинамическая температура, S – энтропия. Укажите температуры нагревателей (теплоисточников) и холодильников (телоприёмников), которые осуществляли теплообмен с рабочим телом в этом циклическом процессе.



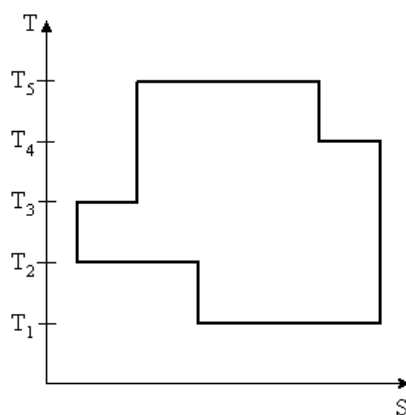
1) нагреватели – T_3, T_4, T_5 ; холодильники – T_1, T_2 ;

2) нагреватели – T_4, T_5 ; холодильники – T_1, T_2, T_3 ;

3) нагреватели – T_2, T_4, T_5 ; холодильники – T_1, T_3 ;

4) нагреватели – T_3, T_5 ; холодильники – T_1, T_2, T_4 .

46. На рисунке представлен цикл тепловой машины в координатах T, S , где T – термодинамическая температура, S – энтропия. Укажите нагреватели и холодильники с соответствующими температурами.



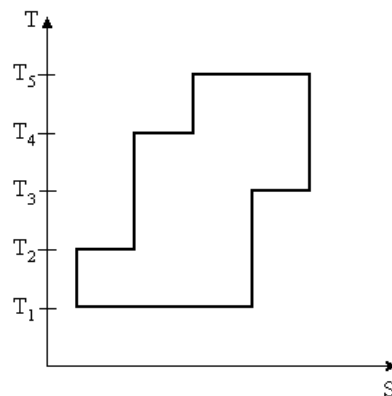
1) нагреватели – T_3, T_4, T_5 ; холодильники – T_1, T_2 ;

2) нагреватели – T_4, T_5 ; холодильники – T_1, T_2, T_3 ;

3) нагреватели – T_2, T_3, T_5 ; холодильники – T_1, T_4 ;

4) нагреватели – T_3, T_5 ; холодильники – T_1, T_2, T_4 .

47. На рисунке представлен цикл тепловой машины в координатах T, S , где T – термодинамическая температура, S – энтропия. Укажите нагреватели и холодильники с соответствующими температурами.



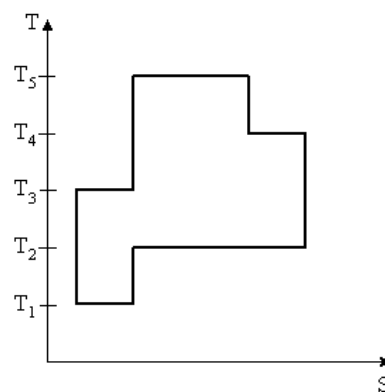
1) нагреватели – T_2, T_4, T_5 ; холодильники – T_1, T_3 ;

2) нагреватели – T_4, T_5 ; холодильники – T_1, T_2, T_3 ;

3) нагреватели – T_3, T_4, T_5 ; холодильники – T_1, T_2 ;

4) нагреватели – T_2, T_4 ; холодильники – T_1, T_3, T_5 .

48. На рисунке представлен цикл тепловой машины в координатах T, S , где T – термодинамическая температура, S – энтропия. Укажите нагреватели и холодильники с соответствующими температурами.



1) 1) нагреватели – T_3, T_4, T_5 ; холодильники – T_1, T_2 ;

2) нагреватели – T_4, T_5 ; холодильники – T_1, T_2, T_3 ;

3) нагреватели – T_3, T_5 ; холодильники – T_1, T_2, T_4 ;

4) нагреватели – T_2, T_4, T_5 ; холодильники – T_1, T_3 .

49. Какая из нижеприведенных формулировок выражает содержание второго закона термодинамики?

1. В циклически действующей тепловой машине невозможен процесс, единственным результатом которого было бы преобразование в механическую работу всего количества теплоты, полученного от источника энергии – нагревателя.

2. Невозможен процесс, единственным результатом которого была бы передача энергии путем теплообмена от холодного тела к горячему.

3. При любых процессах, протекающих в замкнутой и адиабатно изолированной системе, ее энтропия не убывает.

1) Только первая.

2) Только вторая.

3) Только третья.

4) Все три формулировки.

50. Какое утверждение может служить формулировкой второго начала термодинамики?

1) энтропия системы, состоящей из невзаимодействующих частей, равна сумме энтропий отдельных частей;

2) $S = k \ln W$, где W – термодинамическая вероятность состояния системы;

3) при любом процессе количество тепла, подведённое к системе, не может быть больше приращения её внутренней энергии и совершённой системой работы;

4) невозможен самопроизвольный переход тепла от менее нагретого тела к более нагретому телу.

51. Термодинамическая система перешла из одного состояния в другое так, что изменение энтропии составило $\Delta S = k \ln 2$.

Как изменилась при этом термодинамическая вероятность состояния (статистический вес) системы?

- 1) не изменилась;
- 2) увеличилась;
- 3) уменьшилась;
- 4) для ответа недостаточно информации.

52. Термодинамическая система перешла из одного состояния в другое так, что изменение энтропии составило $\Delta S = k \ln 0,5$.

Как изменилась при этом термодинамическая вероятность состояния (статистический вес) системы?

- 1) не изменилась;
- 2) увеличилась;
- 3) уменьшилась;
- 4) для ответа недостаточно информации.

53. Укажите формулировку третьего начала термодинамики (теорема Нернста):

1) тепло, полученное системой, идёт на приращение её внутренней энергии и на производство внешней работы;

2) вне зависимости от начального состояния изолированной системы в конце концов в ней установится термодинамическое равновесие, при котором все части системы будут иметь одинаковую температуру;

3) приращение энтропии при абсолютном нуле температуры стремится к конечному пределу, не зависящему от того, в каком равновесном состоянии находится система;

4) невозможен круговой процесс, единственным результатом которого было бы производство работы за счёт охлаждения теплового резервуара.

54. Энтропия некоторой термодинамической системы при температуре T_0 равна S_0 . При приближении к абсолютному нулю ($T \rightarrow 0$) приращение энтропии $S(T) - S_0(T_0)$ стремится....

- 1) к нулю;
- 2) некоторому конечному пределу;
- 3) это зависит от конечного состояния, в котором окажется система при абсолютном нуле;
- 4) к бесконечности.

55. Теплоизолированный сосуд разделён перегородкой на 2 равные части, в которых содержится по 0,5 моля разных идеальных газов. Как

изменится общая энтропия газов в сосуде, если убрать перегородку, допустив необратимое перемешивание газов?

- 1) увеличится на $R \ln 2$;
- 2) увеличится в 2 раза;
- 3) останется неизменной;
- 4) изменение энтропии в этом процессе неопределенно;
- 5) увеличится на $2R \ln 2$.

Достаточный уровень

1. Определите изменение энтропии при изобарном нагревании 0,1 кг азота от 17 до 100°C.

Ответ: $\Delta S = 25,37$ Дж/К.

2. Объем гелия, масса которого 2 кг, увеличился в 5 раз: 1) изотермически; 2) адиабатно. Чему равно изменение энтропии в этих случаях?

Ответ: 1) $\Delta S = 6,69 \cdot 10^3$ Дж/К; 2) $\Delta S = 0$.

3. Определить изменение энтропии при изотермическом расширении водорода массой 1 г, если объем газа увеличился в 3 раза.

Ответ: $\Delta S = 4,56$ Дж/К.

4. При изобарном расширении гелия массой 2 г его объем изменился в 10 раз. Каково изменение энтропии?

Ответ: $\Delta S = 23,9$ Дж/К.

5. Найдите изменение энтропии при переходе 8 г кислорода от объема в 10 л при температуре 80°C к объему в 40 л при температуре 300°C.

Ответ: $\Delta S = 5,4$ Дж/К.

6. Найдите изменение энтропии при переходе 6 г водорода от объема в 20 л под давлением $1,5 \cdot 10^5$ Па к объему в 60 л под давлением в $1 \cdot 10^5$ Па.

Ответ: $\Delta S = 71$ Дж/К.

7. Определите изменение энтропии при изобарном расширении 8 г гелия от объема $V_1 = 10$ л до объема $V_2 = 25$ л.

Ответ: $\Delta S = 38,1$ Дж/К.

8. Определите изменение энтропии при изотермическом расширении 6 г водорода от 10^5 до $0,5 \cdot 10^5$ Па.

Ответ: $\Delta S = 17,3$ Дж/К.

9. 10,5 г азота изотермически расширяются от объема $V_1 = 2$ л до $V_2 = 5$ л. Найти прирост энтропии при этом процессе.

Ответ: $\Delta S = 2,9$ Дж/К.

10. При нагревании 1000 моль двухатомного газа его абсолютная температура увеличивается в 1,5 раза. Найти изменение энтропии, если нагревание происходит: 1) изохорно и 2) изобарно.

Ответ: 1) $\Delta S = 8,5 \cdot 10^3$ Дж/К; 2) $\Delta S = 11,8 \cdot 10^3$ Дж/К.

11. Найти изменение энтропии при переходе 8 г кислорода от объема 10 л при 80°C к объему 40 л при 300°C .

Ответ: $\Delta S = 5,3$ Дж/К.

12. Идеальный газ ($\nu = 2$ моль) сначала изобарно нагрели, так что объем газа увеличился в 2 раза, а затем изохорно охладили, так что давление его уменьшилось в 2 раза. Определите приращение энтропии газа в ходе указанных процессов.

Ответ: $\Delta S = 11,5$ Дж/К.

13. Азот массой 56 г адиабатно расширили в 2 раза, а затем изобарно сжали до первоначального объема. Определите изменение энтропии газа в ходе указанных процессов.

Ответ: $\Delta S = -40,4$ Дж/К.

14. Найдите приращение энтропии 1 кг льда при его плавлении.

Ответ: $\Delta S = 1,2$ кДж/К.

15. На сколько возрастет энтропия 1 кг воды, находящейся при температуре 293 К, при превращении ее в пар?

Ответ: $\Delta S = 7$ кДж/К.

16. Определите изменение энтропии, происходящее при смешивании 5 кг воды, находящейся при температуре 280 К, и 8 кг воды, находящейся при температуре 350 К.

Ответ: $\Delta S = 0,3 \cdot 10^3$ Дж/К.

3. РЕАЛЬНЫЕ ГАЗЫ, ЖИДКОСТИ И ТВЕРДЫЕ ТЕЛА

3.1. Реальные газы

Основные формулы

Уравнение состояния для 1 моль реального газа (уравнение Ван-дер-Ваальса):

$$\left(p + \frac{a}{V_0^2}\right)(V_0 - b) = RT,$$

где V_0 – объем 1 моль газа; a и b – постоянные Ван-дер-Ваальса; p – давление; T – абсолютная температура газа; R – универсальная газовая постоянная.

Уравнение Ван-дер-Ваальса для ν моль газа:

$$\left(p + \nu^2 \frac{a}{V^2}\right)(V - \nu b) = \nu RT,$$

где V – объем всего газа; $\nu = \frac{m}{M}$ (m – масса газа, M – молярная масса).

В этом уравнении $\nu^2 \frac{a}{V^2} = p_i$ – давление, обусловленное силами взаимодействия молекул реального газа; $\nu b = V_i$ – собственный объем молекул.

Критические параметры газа:

$$V_K = 3b, \quad p_K = \frac{a}{27b^2}, \quad T_K = \frac{8a}{27bR}.$$

ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

Пример 1. Какую температуру имеют 2 г азота, занимающего объем 820 см³ при давлении 0,2 МПа? Газ рассматривать как: 1) идеальный и 2) реальный. Критические значения давления и температуры азота соответственно равны 3,4 МПа и 126 К.

Дано:	СИ	Решение:
$m = 2 \text{ г}$	$2 \cdot 10^{-3} \text{ кг}$	1) Состояние идеального газа описывается уравнением Клапейрона – Менделеева
$V = 820 \text{ см}^3$	$8,2 \cdot 10^{-4} \text{ м}^3$	$pV = \frac{mRT_1}{M}$, откуда $T_1 = \frac{pVM}{mR}$.
$p = 0,2 \text{ МПа}$	$2 \cdot 10^5 \text{ Па}$	$T_1 = \frac{2 \cdot 10^5 \cdot 8,2 \cdot 10^{-4} \cdot 28 \cdot 10^{-3}}{2 \cdot 10^{-3} \cdot 8,31} = 276,3 \text{ К}.$
$p_K = 3,4 \text{ МПа}$	$3,4 \cdot 10^6 \text{ Па}$	2) Состояние реального газа описывается уравнением Ван-дер-Ваальса
$T_K = 126 \text{ К}$		
$M = 28 \cdot 10^{-3} \text{ кг/моль}$		
$R = 8,31 \text{ Дж/моль} \cdot \text{К}$		
$T_1 - ?$		
$T_2 - ?$		

$$\left(p + \frac{m^2}{M^2} \cdot \frac{a}{V^2}\right)\left(V - \frac{mb}{M}\right) = \frac{mRT_2}{M},$$

откуда

$$T_2 = \frac{\left(p + \frac{m^2}{M^2} \cdot \frac{a}{V^2}\right)\left(V - \frac{mb}{M}\right)M}{mR}.$$

Из формул для определения критических параметров газа $p_K = \frac{a}{27b^2}$ и

$T_K = \frac{8a}{27bR}$ выразим постоянные a и b :

$$a = \frac{27T_K^2 R^2}{64p_K}; \quad b = \frac{T_K R}{8p_K}.$$

$$a = \frac{27 \cdot 126^2 \cdot 8,31^2}{64 \cdot 3,4 \cdot 10^6} = 0,136 \text{ Н} \cdot \text{м}^4 / \text{моль}^2; \quad b = \frac{126 \cdot 8,31}{8 \cdot 3,4 \cdot 10^6} = 3,85 \cdot 10^{-5} \text{ м}^3 / \text{моль}.$$

$$T_2 = \frac{\left(2 \cdot 10^5 + \frac{4 \cdot 10^{-6}}{784 \cdot 10^{-6}} \cdot \frac{0,136}{67,24 \cdot 10^{-8}}\right) \left(8,2 \cdot 10^{-4} - \frac{2 \cdot 10^{-3} \cdot 3,85 \cdot 10^{-5}}{28 \cdot 10^{-3}}\right) \cdot 28 \cdot 10^{-3}}{2 \cdot 10^{-3} \cdot 8,31} = 275,3 \text{ К}.$$

Ответ: $T_1 = 276,3 \text{ К}; T_2 = 275,3 \text{ К}.$

Пример 2. Один моль некоторого газа находится в сосуде объемом 0,25 л. При температуре 300 К давление газа 9 МПа, а при температуре 350 К – 11 МПа. Определите постоянные Ван-дер-Ваальса для этого газа.

Дано:	СИ	Решение:
$\nu = 1$ моль		Согласно уравнению Ван-дер-
$V_0 = 0,25$ л	$0,25 \cdot 10^{-3} \text{ м}^3$	Ваальса для 1 моль газа при тем-
$T_1 = 300$ К		пературе T_1
$p_1 = 9$ МПа	$9 \cdot 10^6$ Па	$\left(p_1 + \frac{a}{V_0^2}\right)(V_0 - b) = RT_1, \quad (1)$
$T_2 = 350$ К		а при температуре T_2
$p_2 = 11$ МПа	$11 \cdot 10^6$ Па	$\left(p_2 + \frac{a}{V_0^2}\right)(V_0 - b) = RT_2. \quad (2)$
$R = 8,31$ Дж/(моль·К)		
$a - ?$		
$b - ?$		

Поделив уравнение (1) и (2), получим

$$\frac{p_1 + \frac{a}{V_0^2}}{p_2 + \frac{a}{V_0^2}} = \frac{T_1}{T_2}, \text{ откуда } a = \frac{V_0^2(T_1 p_2 - T_2 p_1)}{T_2 - T_1}.$$

$$a = \frac{0,25^2 \cdot 10^{-6}(300 \cdot 11 \cdot 10^6 - 350 \cdot 9 \cdot 10^6)}{350 - 300} = 0,188 \text{ Н} \cdot \text{м}^4 / \text{моль}^2.$$

Из уравнения (1) выразим постоянную b

$$b = V_0 - \frac{RT_1}{p_1 + \frac{a}{V_0^2}}.$$

$$b = 0,25 \cdot 10^{-3} - \frac{8,31 \cdot 300}{9 \cdot 10^6 + \frac{0,188}{0,25^2 \cdot 10^{-6}}} = 4,2 \cdot 10^{-5} \text{ м}^3 / \text{моль}.$$

Ответ: $a = 0,188 \text{ Н} \cdot \text{м}^4 / \text{моль}^2$; $b = 4,2 \cdot 10^{-5} \text{ м}^3 / \text{моль}$.

Пример 3. Определите давление, обусловленное силами взаимодействия молекул 1 кмоль газа при нормальных условиях. Критическая температура и критическое давление газа соответственно равны 417 К и 7,7 МПа.

Дано:	СИ	Решение:
$\nu = 1$ кмоль	10^3 моль	Давление, обусловленное силами
$p = 760$ мм рт. ст.	10^5 Па	взаимодействия молекул реального газа,
$T = 417$ К		$p' = \nu^2 \frac{a}{V^2}.$
$p_K = 7,7$ МПа	$7,7 \cdot 10^6$ Па	1 моль газа при нормальных усло-
$R = 8,31$ Дж/(моль·К)		виях занимает объем
$p' - ?$		$V_0 = 22,4 \text{ л} = 22,4 \cdot 10^{-3} \text{ м}^3.$

Соответственно, объем 1 кмоль газа при нормальных условиях

$$V = \nu V_0 = 22,4 \text{ м}^3.$$

Постоянную a определим по формуле $a = \frac{27 \cdot T_K^2 R}{64 \cdot p_K}$,

$$a = \frac{27 \cdot 417^2 \cdot 8,31^2}{64 \cdot 7,7 \cdot 10^6} = 0,658 \text{ Н} \cdot \text{м}^4 / \text{моль}^2,$$

тогда

$$p' = \nu^2 \frac{a}{V^2}.$$

$$p' = \frac{10^6 \cdot 0,658}{22,4^2} = 1311 \text{ Па}.$$

Ответ: $p' = 1311 \text{ Па}$.

Пример 4. В баллоне вместимостью $V = 8$ л находится кислород массой $m = 0,3$ кг при температуре $T = 300 \text{ К}$. Определите, какую часть вместимости сосуда составляет объем молекул газа. Найдите отношение внутреннего давления p' к давлению p на стенки сосуда.

Дано:	СИ	Решение:
$V = 8 \text{ л}$	$8 \cdot 10^{-3} \text{ м}^3$	В уравнении Ван-дер-Ваальса
$m = 0,3 \text{ кг}$		$(p + \nu^2 a/V^2)(V - \nu b) = \nu RT \quad (1)$
$T = 300 \text{ К}$		поправка νb означает учетверённый
$R = 8,31 \text{ Дж}/(\text{моль} \cdot \text{К})$		собственный объем молекул всего газа,
$\frac{V'}{V} - ?, \frac{p'}{p} - ?$		т.е.
		$\nu b = 4V',$

откуда

$$V' = \nu b/4, \text{ или } V' = mb/(4M),$$

где $\nu = m/M$ – количество вещества; M – молярная масса кислорода ($M = 32 \cdot 10^{-3} \text{ кг/моль}$).

$$\frac{V'}{V} = \frac{mb}{4MV}.$$

Постоянная b для кислорода равна $b = 3,17 \cdot 10^{-5} \text{ м}^3/\text{моль}$, поэтому

$$\frac{V'}{V} = \frac{0,3 \cdot 3,17 \cdot 10^{-5}}{4 \cdot 32 \cdot 10^{-3} \cdot 8 \cdot 10^{-3}} = 0,0093.$$

Следовательно, собственный объем молекул составляет 0,93 % от объема сосуда.

В уравнении (1)

$$v^2 a / V^2 = p',$$

где или p' – внутреннее давление.

Так как $v = m/M$, то выражение для внутреннего давления можно записать в виде

$$\rho' = (m/M)^2 a / V^2,$$

где a – постоянная Ван-дер-Ваальса для одного моля кислорода ($a = 0,136 \text{ Н} \cdot \text{м}^4 / \text{моль}^2$).

$$\rho' = \left(\frac{0,3}{32 \cdot 10^{-3}} \right)^2 \cdot \frac{0,136}{64 \cdot 10^{-6}} = 179 \text{ кПа}.$$

Давление p , производимое газом на стенки сосуда, найдём из уравнения (1)

$$p = \frac{vRT}{V - vb} - v^2 \frac{a}{V^2}.$$

$$p = \left[\frac{\frac{0,3}{32 \cdot 10^{-3}} \cdot 8,31 \cdot 300}{8 \cdot 10^{-3} - \frac{0,3}{32 \cdot 10^{-3}} \cdot 3,17 \cdot 10^{-5}} - \left(\frac{0,3}{32 \cdot 10^{-3}} \right)^2 \frac{136 \cdot 10^{-3}}{(8 \cdot 10^{-3})^2} \right] = 2,84 \cdot 10^6 \text{ Па} = 2,84 \text{ МПа}.$$

$$\frac{p'}{p} = \frac{0,179 \cdot 10^6}{2,84 \cdot 10^6} = 0,063.$$

Следовательно, давление газа, обусловленное силами притяжения молекул, составляет 6,3 % давления газа на стенки сосуда.

$$\text{Ответ: } \frac{V'}{V} = 0,0093, \frac{p'}{p} = 0,063.$$

Пример 4. В сосуде ёмкостью $V = 25 \text{ л}$ при температуре $T = 300 \text{ К}$ находится $v = 40$ моль кислорода. Определите давление газа, считая его идеальным; реальным.

Дано:	СИ	Решение:
$V = 25 \text{ л}$	$25 \cdot 10^{-3} \text{ м}^3$	Давление идеального газа выразим из уравнения Клапейрона – Менделеева
$\nu = 40 \text{ моль}$		$pV = \nu RT,$
$T = 300 \text{ К}$		$p_1 = \frac{\nu RT}{V}.$
$R = 8,31 \text{ Дж/(моль} \cdot \text{К)}$		$p_1 = \frac{40 \cdot 8,31 \cdot 300}{2,5 \cdot 10^{-2}} = 4 \cdot 10^6 \text{ Па}.$
$a = 0,136 \text{ Н} \cdot \text{м}^4/\text{моль}^2$		Давление реального газа выразим из уравнения Ван-дер-Ваальса
$b = 3,17 \cdot 10^{-5} \text{ м}^3/\text{моль}$		
$p_1 - ?, p_2 - ?$		

$$\left(p + \frac{\nu^2 a}{V^2}\right) \left(\frac{V}{\nu} - b\right) = RT,$$

где a и b – постоянные Ван-дер-Ваальса.

Преобразуя это выражение, получим

$$p_2 + \frac{\nu^2 a}{V^2} = \frac{\nu RT}{V - \nu b},$$

откуда

$$p_2 = \frac{\nu RT}{V - \nu b} - \frac{\nu^2 a}{V^2}.$$

$$p_2 = \frac{40 \cdot 8,31 \cdot 3 \cdot 10^2}{2,5 \cdot 10^{-2} - 40 \cdot 3,17 \cdot 10^{-5}} - \frac{16 \cdot 10^2 \cdot 0,136}{2,5^2 \cdot 10^{-4}} = 3,85 \cdot 10^6 \text{ Па}.$$

Ответ: $p_1 = 4 \cdot 10^6 \text{ Па}$; $p_2 = 3,85 \cdot 10^6 \text{ Па}$.

Задачи для самостоятельного решения

Средний уровень

- Когда реальный газ близок по свойствам к идеальному газу?
 - при малых давлениях и высоких температурах;
 - при больших давлениях;
 - при низких температурах;
 - при малых давлениях и очень низких температурах.
- Отклонение свойств газа от идеальности наблюдается, если
 - средняя длина свободного пробега сравнима с эффективным диаметром молекул;
 - средняя кинетическая энергия молекул становится сравнимой с потенциальной энергией взаимодействия молекул;

3) среднее время свободного пробега молекул сравнимо с длительностью соударений.

3. В реальных газах между молекулами действуют силы, называемые

- 1) силами обменного взаимодействия;
- 2) силами Ван-дер-Ваальса;
- 3) силами ионной связи.

4. Физический смысл поправки b в уравнении Ван-дер-Ваальса заключается в том, что...

- 1) это поправка на объём численно равная предельному объёму, который бы занял 1 моль реального газа при бесконечно большом давлении;
- 2) она учитывает силы притяжения между молекулами газа, которые вызывают уменьшение давления на стенки сосуда;
- 3) эта поправка равна реальному физическому объёму молекул газа;
- 4) эта поправка учитывает изменение температуры газа.

5. Как постоянная b в уравнении Ван-дер-Ваальса изменяет объём одного моль реального газа по сравнению с идеальным?

- 1) увеличивает;
- 2) уменьшает;
- 3) не изменяет;
- 4) увеличивает или уменьшает в зависимости от природы газа.

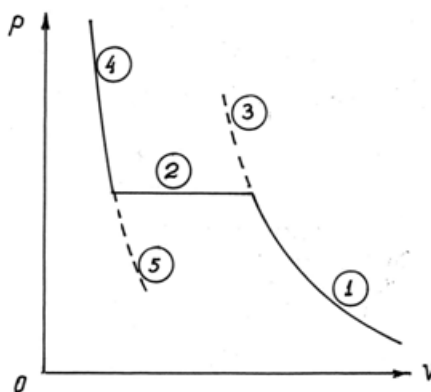
6. Как слагаемое $\frac{a}{V_0^2}$ в уравнении $\left(p + \frac{a}{V_0^2}\right)(V_0 - b) = RT$ Ван-дер-Ваальса

изменяет давление одного моль реального газа по сравнению с идеальным?

- 1) увеличивает;
- 2) уменьшает;
- 3) не изменяет;
- 4) увеличивает или уменьшает в зависимости от природы газа.

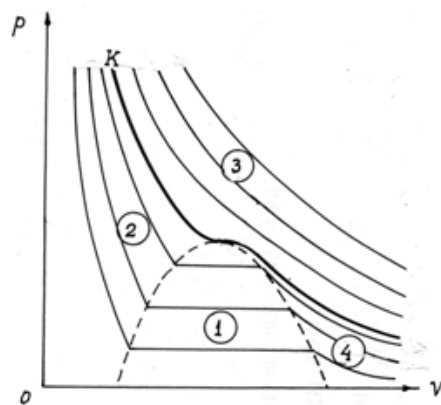
7. На рисунке изображена одна из опытных изотерм реального газа. Установите соответствие между номерами (1, 2, 3, 4, 5) участков изотермы и состоянием вещества:

- насыщенный пар;
- ненасыщенный пар;
- пересыщенный пар;
- насыщенный пар+жидкость;
- жидкость;
- перегретая жидкость.



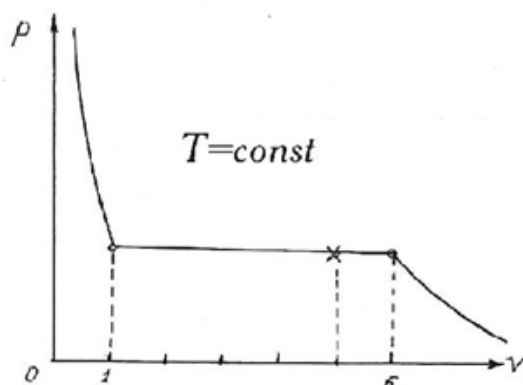
8. На рисунке изображены опытные изотермы реального газа (изотермы Эндрюса). Установите соответствие между номерами областей (1, 2, 3, 4) и соответствующими им термодинамическими состояниями:

- насыщенный пар;
- ненасыщенный пар;
- пересыщенный пар;
- насыщенный пар+жидкость;
- жидкость;
- перегретая жидкость.

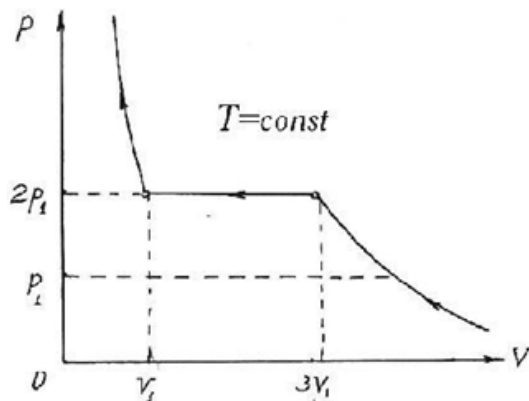


K – критическая изотерма

9. Суммарная масса равновесной системы жидкости и её насыщенного пара $m = 10$ кг. Чему равна масса паровой фазы (в кг) в состоянии, отмеченном на рисунке крестом?

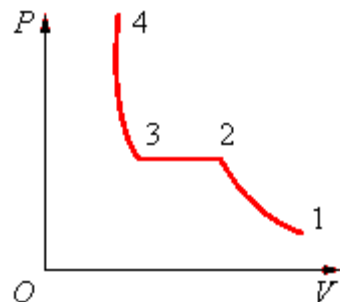


10. Какую работу (в единицах $p_1 V_1$) надо совершить над системой (см. рисунок) в процессе фазового перехода?



11. Какой участок изотермы реального газа соответствует процессу превращения ненасыщенного пара в насыщенный?

- 1) участок 1 – 2;
- 2) участок 2 – 3;
- 3) участок 3 – 4;
- 4) такой процесс не происходит.



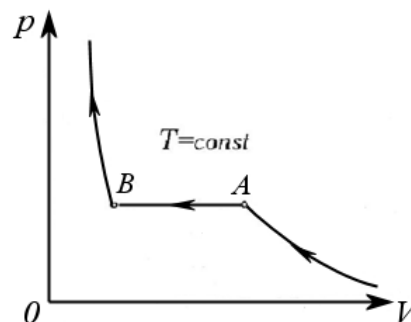
12. Как можно перевести насыщенный пар в ненасыщенный?

- 1) уменьшить объем и температуру;
- 2) увеличить объем и температуру;
- 3) уменьшить объем и увеличить температуру;
- 4) увеличить объем и уменьшить температуру.

13. На рисунке изображена одна из опытных изотерм реального газа. Укажите правильные ответы:

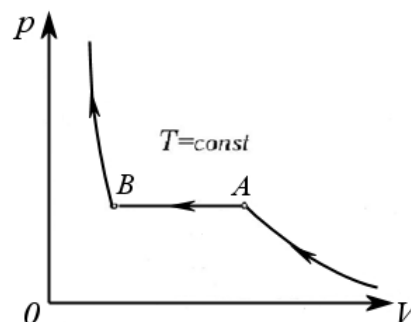
- 1) $T > T_K$; 3) $p_H > p_K$;
- 2) $T < T_K$; 4) $p_H < p_K$.

T_K и p_K – параметры критического состояния газа; p_H давление насыщенного пара при температуре T .



14. Как изменяется внутренняя энергия вещества при переходе из состояния A в состояние B ?

- 1) увеличивается;
- 2) уменьшается;
- 3) не изменяется;
- 4) увеличивается или уменьшается в зависимости от природы газа.



15. Внутренняя энергия реального газа...

- 1) так же, как и идеального газа, не зависит от его объема;
- 2) зависит не только от температуры, но и от объема;
- 3) не зависит ни от его температуры, ни от его объема, а определяется только его критическими параметрами.

16. Внутренняя энергия реального газа...

- 1) возрастает с увеличением температуры и объема;
- 2) уменьшается с увеличением объема;
- 3) уменьшается с увеличением температуры;
- 4) возрастает с уменьшением объема;
- 5) возрастает с увеличением температуры.

17. Температура реального газа...

- 1) изменяется только при изменении его внутренней энергии;
- 2) может изменяться даже в том случае, когда его внутренняя энергия остаётся постоянной;
- 3) в отличие от идеального газа, не определяет его внутренней энергии.

18. При температурах выше критической...

- 1) даже небольшое увеличение давления приводит к превращению газа в жидкость;
- 2) образование жидкости возможно при повышении давления выше критического;
- 3) образование жидкости ни при каких давлениях невозможно.

19. В критическом состоянии...

- 1) происходит переход вещества из одной фазы в другую, и появляется четкая граница раздела между ними;
- 2) нет границы раздела между фазами;
- 3) вещество начинает оказывать сильное сопротивление изменению объёма

20. Приведите в соответствие выражения (при адиабатическом расширении в пустоту):

- | | | |
|-------------------|------------------------|-------------------|
| А) идеальный газ; | 1) работа газа; | а) не меняется; |
| В) реальный газ; | 2) внутренняя энергия; | б) увеличивается; |
| | 3) температура; | в) уменьшается; |
| | 4) энтропия. | г) равна нулю. |

Достаточный уровень

1. Плотность азота 140 кг/м^3 , давление 10 МПа . Определите температуру газа, если: 1) газ идеальный; 2) газ реальный. Постоянные Ван-дер-Ваальса для азота $a = 0,135 \text{ Н} \cdot \text{м}^4/\text{моль}^2$, $b = 3,86 \cdot 10^{-5} \text{ м}^3/\text{моль}$.

Ответ: $T_1 = 240,7 \text{ К}$; $T_2 = 259,8 \text{ К}$.

2. Определите плотность гелия в критическом состоянии, считая известными его критические параметры: $T_K = 5,2 \text{ К}$ и $p_K = 0,23 \cdot 10^6 \text{ Па}$.

Ответ: $\rho = 57 \text{ кг/м}^3$.

3. Какую температуру имеют $3,5 \text{ г}$ кислорода, занимающего объём 90 см^3 при давлении в 28 атм ? Газ рассматривать как 1) идеальный и 2) реальный.

Ответ: $T_1 = 281 \text{ К}$; $T_2 = 289 \text{ К}$.

4. В сосуде объемом 10 л находится 0,25 кг азота при температуре 27°C. 1) Какую часть давления газа составляет давление, обусловленное силами взаимодействия молекул? 2) Какую часть объема сосуда составляет собственный объем молекул?

Ответ: $\frac{V'}{V} = 0,0495$, $\frac{p'}{p} = 0,0086$.

5. Углекислый газ массой 88 г находится в сосуде ёмкостью 10 л. Определите внутреннее давление газа и собственный объём молекул.

Ответ: $p' = 14,4$ кПа; $V' = 0,021$ л.

6. 40,5 кмоль трехатомного газа адиабатно расширяются в пустоту от $V_1 = 0,5$ м³ до $V_2 = 3$ м³. Температура газа при этом понижается на 12,2 К. Найдите из этих данных постоянную a , входящую в уравнение Ван-дер-Ваальса.

Ответ: $a = 3,64 \cdot 10^5$ Н·м⁴/кмоль².

7. 20 кг азота адиабатно расширяются в пустоту от $V_1 = 1$ м³ до $V_2 = 2$ м³. Определите понижение температуры при этом расширении, считая известной для азота постоянную a , входящую в уравнение Ван-дер-Ваальса.

Ответ: $\Delta T = 2,33$ К.

8. Вычислите постоянные a и b в уравнении Ван-дер-Ваальса для азота, если известны значения критических параметров $T_K = 126$ К и $p_K = 3,39 \cdot 10^6$ Па.

Ответ: $a = 0,135$ Н·м⁴/моль², $b = 3,86 \cdot 10^{-5}$ м³/моль.

9. Вычислите для воды критические значения температуры T_K и давления p_K .

Ответ: $T_K = 654$ К; $p_K = 22,6$ МПа.

10. Критическая температура T_K аргона равна 151 К, критическое давление $p_K = 4,86$ МПа. Определите по этим данным критический молярный объем V_{M_K} аргона.

Ответ: $V_{M_K} = 96,8$ см³/моль.

11. Определите наибольший объем $V_{\max}$, который может занимать вода, содержащая количество вещества $\nu = 1$ моль.

Ответ: $V_{\max} = 91,2 \text{ см}^3$.

12. Определите плотность ρ водяных паров в критическом состоянии.

Ответ: $\rho = 197 \text{ кг/м}^3$.

13. Определите наибольшее давление $p_{\max}$ насыщающих водяных паров.

Ответ: $p_{\max} = 21,8 \text{ МПа}$.

14. Во сколько раз концентрация n_K молекул азота в критическом состоянии больше концентрации n_0 молекул при нормальных условиях?

Ответ: $\frac{n_K}{n_0} = 193$.

15. Газ, содержащий количество вещества $\nu = 1$ моль, находится при критической температуре и занимает объем V , в $n = 3$ раза превышающий критический объем V_K . Во сколько раз давление p газа в этом состоянии меньше критического давления p_K ?

Ответ: $\frac{p_K}{p} = 1,5$

3.2. Свойства жидкостей

Основные формулы

Поверхностное натяжение

$$\sigma = \frac{F}{l},$$

где F – сила поверхностного натяжения, действующая на контур l , ограничивающий поверхность жидкости, или

$$\sigma = \frac{\Delta E}{\Delta S},$$

где ΔE – изменение свободной энергии поверхностной пленки жидкости, связанное с изменением площади ΔS поверхности этой пленки.

Формула Лапласа

$$p = \sigma \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right),$$

где p – давление, создаваемое изогнутой поверхностью жидкости; σ – поверхностное натяжение; R_1 и R_2 – радиусы кривизны двух взаимно перпендикулярных сечений поверхности жидкости.

В случае сферической поверхности

$$p = \frac{2\sigma}{R}.$$

Высота подъема жидкости в капилляре радиусом r

$$h = \frac{2\sigma \cos \theta}{\rho g r},$$

где σ – поверхностное натяжение; ρ – плотность жидкости.

Высота подъема жидкости между двумя близкими и параллельными плоскостями

$$h = \frac{2\sigma \cos \theta}{\rho g d},$$

где d – расстояние между плоскостями.

Скорость течения жидкости из малого отверстия в открытом широком сосуде

$$v = \sqrt{2gh},$$

где h – глубина, на которой находится отверстие относительно уровня жидкости в сосуде.

Формула Пуазейля (объем жидкости (газа), протекающей за время t через длинную трубку),

$$V = \frac{\pi r^4 t \Delta p}{8l\eta},$$

где r – радиус трубки; l – её длина; Δp – разность давлений на концах трубки; η – динамическая вязкость (коэффициент внутреннего трения) жидкости.

Число Рейнольдса для потока жидкости в длинных трубках

$$\text{Re} = \rho \langle v \rangle \frac{d}{\eta},$$

где $\langle v \rangle$ – средняя по сечению скорость течения жидкости; d – диаметр трубки, ρ – плотность жидкости.

Для движения шарика в жидкости

$$Re = \frac{\rho v d}{\eta},$$

где v – скорость шарика; d – его диаметр.

Число Рейнольдса Re является функцией скорости v тела, линейной величины l , определяющей размеры тела, плотности ρ и динамической вязкости η жидкости, т.е.

$$Re = f(\rho, \eta, l, v).$$

При малых значениях Re , меньших некоторого критического значения $Re_{кр}$, движение жидкости является ламинарным. При значениях $Re \gg Re_{кр}$ движение жидкости переходит в турбулентное.

Критическое число Рейнольдса для движения шарика в жидкости в длинных трубках $Re_{кр} = 0,5$; для потока жидкости в длинных трубках $Re_{кр} = 2300$.

Формула Стокса (сила сопротивления F , действующая со стороны потока жидкости на медленно движущийся в ней шарик),

$$F = 6\pi\eta r v,$$

где r – радиус шарика; v – его скорость.

Формула справедлива для скоростей, при которых число Рейнольдса много меньше единицы ($Re \ll 1$).

ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

Пример 1. Как изменится высота поднятия спирта между двумя погруженными в него пластинками, если расстояние между ними уменьшить с 1 мм до 0,5 мм? Смачивание пластинок считать полным.

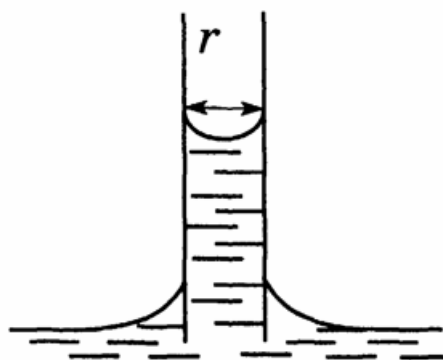
Дано:	СИ	Решение:
$\sigma = 0,022 \text{ Н/м}$		Поверхность смачивающей жидкости между пластинами принимает цилиндрический вид (см. рисунок).
$\rho = 0,8 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3$		Лапласовское давление равно:
$r_1 = 1 \text{ мм}$	10^{-3} м	$p = \sigma \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right),$
$r_2 = 0,5 \text{ мм}$	$0,5 \cdot 10^{-3} \text{ м}$	
$\Delta h - ?$		

где R_1 и R_2 – радиусы кривизны двух взаимно-перпендикулярных нормальных сечений поверхности жидкости.

Для цилиндрической поверхности одно из нормальных сечений – сечение, идущее вдоль образующей цилиндра. Для него $R_1 = \infty$. Второе, перпендикулярное ему сечение, даёт окружность радиусом $R_2 = \frac{r}{2}$, где r – расстояние между плоскостями.

Поэтому добавочное давление

$$p = \frac{\sigma}{R_2} = \frac{2\sigma}{r}.$$



Это давление уравнивает давление столба жидкости высотой h , поэтому

$$\frac{2\sigma}{r} = \rho gh.$$

Отсюда

$$h = \frac{2\sigma}{\rho gr}.$$

В нашем случае

$$h_1 = \frac{2\sigma}{\rho gr_1}; \quad h_2 = \frac{2\sigma}{\rho gr_2}.$$

$$\Delta h = h_2 - h_1 = \frac{2\sigma}{\rho g} \left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1} \right).$$

$$\Delta h = \frac{2 \cdot 0,022}{0,8 \cdot 10^3 \cdot 9,81} \left(\frac{1}{0,5 \cdot 10^{-3}} - \frac{1}{10^{-3}} \right) = 5,61 \cdot 10^{-3} \text{ м.}$$

Ответ: $\Delta h = 5,61 \cdot 10^{-3} \text{ м.}$

Пример 2. Из капиллярной трубки с радиусом канала $r = 0,2$ мм по капле вытекает жидкость. Масса 100 капель $m = 0,282$ г. Определите коэффициент поверхностного натяжения жидкости.

Дано:	СИ	Решение:
$r = 0,2 \text{ мм}$	$0,2 \cdot 10^{-3} \text{ м}$	Капля отрывается в тот момент, когда действующая на нее сила тяжести равна силе поверхностного натяжения.
$m = 0,282 \text{ г}$	$0,282 \cdot 10^{-3} \text{ кг}$	
$n = 100$		
$\sigma - ?$		

Считая радиус шейки капли равным радиусу капилляра, можно записать

$$2\pi r\sigma = \frac{mg}{n},$$

откуда

$$\sigma = \frac{mg}{2\pi rn};$$

$$\sigma = \frac{2,82 \cdot 10^{-4} \cdot 9,8}{2 \cdot 3,14 \cdot 2 \cdot 10^{-4} \cdot 100} = 2,2 \cdot 10^{-2} \text{ Н/м.}$$

Ответ: $\sigma = 2,2 \cdot 10^{-2} \text{ Н/м.}$

Пример 3. Найдите добавочное давление внутри мыльного пузыря диаметром $d = 10$ см. Какую работу нужно совершить, чтобы выдуть этот пузырь?

Дано:	СИ	Решение:
$d = 10 \text{ см}$	0,1 м	Пленка мыльного пузыря имеет две сферические поверхности – внешнюю и внутреннюю. Обе поверхности оказывают давление на воздух, заключенный внутри пузыря.
$p - ?, A - ?$		

Так как толщина пленки чрезвычайно мала, то диаметры обеих поверхностей практически одинаковы. Поэтому добавочное давление

$$p = 2 \cdot \frac{2\sigma}{r},$$

где r – радиус пузыря.

$$\text{Так как } r = \frac{d}{2}, \text{ то } p = \frac{8\sigma}{d}.$$

Коэффициент поверхностного натяжения мыльной воды $\sigma = 40 \text{ мН/м}$, диаметр пузыря $d = 10 \text{ см} = 0,1 \text{ м}$. Следовательно,

$$p = \frac{8 \cdot 40 \cdot 10^{-3}}{0,1} = 3,2 \text{ Па.}$$

Работа, которую нужно совершить, чтобы, растягивая пленку, увеличить ее поверхность на ΔS , выражается формулой

$$A = \sigma \cdot \Delta S, \text{ или } A = \sigma(S - S_0).$$

В данном случае S – общая площадь двух сферических поверхностей пленки мыльного пузыря, S_0 – общая площадь двух поверхностей плоской

пленки, затягивавшей отверстие трубки до выдувания пузыря. Пренебрегая величиной S_0 ,

$$A \approx \sigma S = 2\pi d^2 \sigma.$$

$$A = 2 \cdot 3,14 \cdot (0,1)^2 \cdot 40 \cdot 10^{-3} \approx 2,5 \cdot 10^{-3} \text{ Дж.}$$

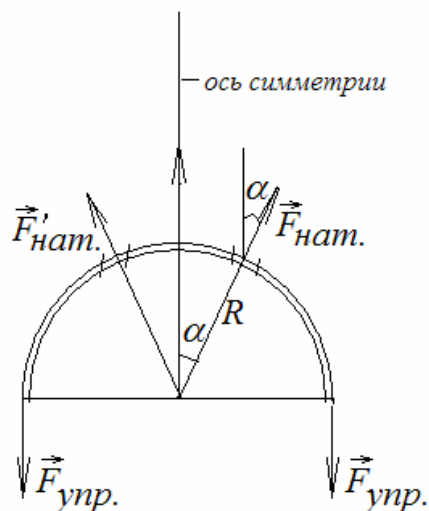
$$\text{Ответ: } p = 3,2 \text{ Па; } A = 2,5 \cdot 10^{-3} \text{ Дж.}$$

Пример 4. Найдите поверхностное натяжение жидкости, если петля из резиновой нити длины l и жесткости k , положенная на пленку этой жидкости, растянулась по окружности радиуса R , после того как пленка была проколота внутри петли (см. рис.).

Дано:	Решение:
l	Рассмотрим половину образованной окружности (см. рисунок). На каждый элемент dl резиновой нити действует сила поверхностного натяжения, направленная перпендикулярно нити (вдоль радиуса) и равная
k	
R	
$\sigma - ?$	

$$dF_{\text{нат}} = \sigma dl.$$

Но всегда найдется, в силу симметрии окружности, симметричный участок нити, на который действует сила натяжения $d\vec{F}'_{\text{нат}}$, такая, что векторная сумма этих двух сил будет направлена вдоль оси симметрии. Если сложить векторно силы поверхностного натяжения, действующие на все участки выбранной полуокружности, то суммарная сила будет направлена вдоль оси симметрии (вверх на рисунке). Ее значение найдем интегрированием по переменной α . При сложении сил достаточно просуммировать лишь составляющие элементов сил, направленные по оси симметрии.



$$dF = \sigma dl \cdot \cos \alpha, \quad dl = R d\alpha,$$

тогда

$$F_{\text{нат}} = 2 \cdot \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sigma R \cos \alpha d\alpha = 4\sigma R.$$

Множитель 2 обусловлен тем, что пленка имеет две поверхности.

При растяжении резиновой петли в ней возникает сила упругости, которая действует в любом ее сечении и равна

$$F_{\text{упр}} = kx = k(2\pi R - l).$$

Найденную силу поверхностного натяжения уравнивают, согласно рисунку, две силы упругости, приложенные к концам полуокружности и действующие на нее со стороны другой половины окружности в направлении по касательной в сторону, противоположную направлению действия силы поверхностного натяжения.

Получаем равенство, определяющее равновесие рассматриваемой половины окружности резиновой петли

$$4\sigma R = 2k(2\pi R - l),$$

откуда

$$\sigma = \frac{k(2\pi R - l)}{2R}.$$

Ответ: $\sigma = \frac{k(2\pi R - l)}{2R}.$

Пример 5. Какую работу против сил поверхностного натяжения нужно совершить, чтобы разделить сферическую каплю ртути радиуса $R = 3$ мм на 2 одинаковые капли?

Дано:	Решение:
$R = 3$ мм	Капля ртути имеет поверхность, площадь которой вычисляется по формуле
$n = 2$	
$\sigma = 0,47$ Н/м	$S = 4\pi R^2.$
$A = ?$	При делении ее на две одинаковые капли радиуса r получаем суммарную поверхность площадью
	$S_1 = 2 \cdot 4\pi r^2.$

Для сравнения исходной и конечной площадей выразим радиус r малой капли через величину R . Для этого воспользуемся тем, что общий объем воды не изменяется в результате деления

$$\frac{4}{3}\pi R^3 = 2 \cdot \frac{4}{3}\pi r^3.$$

Отсюда

$$r = \frac{R}{\sqrt[3]{2}}$$

и тогда

$$S_1 = 2 \cdot 4\pi R^2 \cdot 2^{-2/3} = \sqrt[3]{2} \cdot 4\pi R^2 = 1,26 \cdot 4\pi R^2,$$

т.е. площадь поверхности при делении капли увеличивается.

Согласно определению коэффициента поверхностного натяжения для увеличения площади поверхности жидкости необходимо совершить работу

$$A = \sigma \Delta S = \sigma(\sqrt[3]{2} - 1) \cdot 4\pi R^2.$$

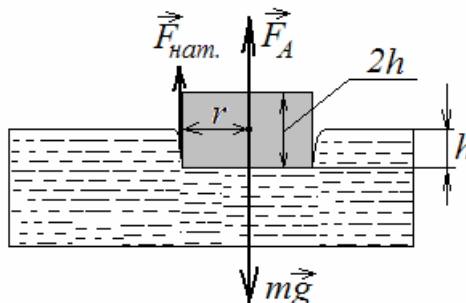
$$A = 0,47(\sqrt[3]{2} - 1) \cdot 4 \cdot 3,14 \cdot 0,003^2 = 1,4 \cdot 10^{-5} \text{ Дж.}$$

Ответ: $A = 1,4 \cdot 10^{-5}$ Дж.

Пример 6. На поверхности жидкости плавает погруженная на глубину h шайба радиусом r и высотой $2h$, не смачиваемая жидкостью. Плотность жидкости и шайбы одинакова и равна ρ . Поверхность жидкости соприкасается с боковой поверхностью шайбы. Определите поверхностное натяжение жидкости.

Дано:	Решение:
h	Из условия задачи следует, что шайба, плотность которой равна плотности жидкости, выступает над ее поверхностью на величину h . Это теоретически возможно лишь с учетом силы поверхностного натяжения, действующей на шайбу со стороны не смачивающей жидкости, соприкасающейся с боковой поверхностью шайбы (см. рисунок).
r	
$2h$	
ρ	
$\sigma - ?$	

Равновесие шайбы обеспечивается взаимным уравниванием трех сил: силы тяжести, Архимедовой силы и силы поверхностного натяжения жидкости, распределенной по периметру основания шайбы и направленной вверх для уменьшения поверхности жидкости. Условие касания поверхностей жидкости и шайбы равносильно заданию краевого угла, который в этом случае равен 180° , т.е. сила поверхностного натяжения направлена вертикально вверх.



Согласно первому закону Ньютона

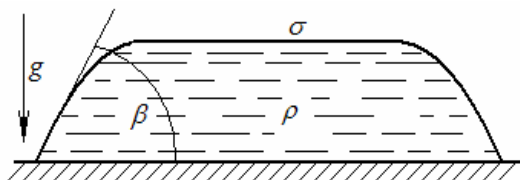
$$mg = F_A + F_{\text{нат}}, \text{ или } \rho \cdot \pi r^2 \cdot 2h \cdot g = \rho \cdot \pi r^2 \cdot h \cdot g + 2\pi r \sigma,$$

откуда

$$\sigma = \frac{\rho g h r}{2}.$$

Ответ: $\sigma = \frac{\rho g h r}{2}.$

Пример 7. Определите толщину слоя жидкости, разлитой на горизонтальной поверхности (см. рисунок). Краевой угол θ , плотность жидкости ρ , поверхностное натяжение σ .



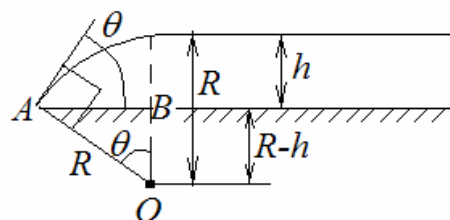
Дано:	Решение:
σ	Боковая поверхность слоя жидкости имеет сферическую форму. Изобразим новый рисунок, на котором центр кривизны боковой поверхности слоя жидкости обозначим буквой O .
θ	
ρ	
$h - ?$	

Рассмотрим треугольник AOB :

$$\cos \theta = \frac{R - h}{R} = 1 - \frac{h}{R}.$$

Отсюда радиус кривизны поверхности

$$R = \frac{h}{1 - \cos \theta}.$$



Под горизонтальной поверхностью с радиусом кривизны, равным бесконечности, добавочного давления нет. Поэтому избыточное давление создается только под боковой поверхностью слоя жидкости. По закону Паскаля добавочное давление, приложенное к поверхности жидкости, передается без изменения во все точки жидкости.

Давление Лапласа

$$\Delta p = \frac{2\sigma}{R} = \frac{2\sigma(1 - \cos \theta)}{h}.$$

Оно уравновешивается гидростатическим давлением $\Delta p = \rho gh$,

$$\frac{2\sigma(1 - \cos \theta)}{h} = \rho gh,$$

откуда $h = 2 \sin \frac{\theta}{2} \sqrt{\frac{\sigma}{\rho g}}.$

Ответ: $h = 2 \sin \frac{\theta}{2} \sqrt{\frac{\sigma}{\rho g}}.$

Задачи для самостоятельного решения

Средний уровень

1. Сила поверхностного натяжения – это
 - 1) сила, направленная по касательной к поверхности жидкости, перпендикулярно участку контура, ограничивающего поверхность, в сторону ее увеличения;
 - 2) сила, направленная по касательной к поверхности жидкости, перпендикулярно участку контура, ограничивающего поверхность, в сторону ее сокращения;
 - 3) сила, направленная перпендикулярно к поверхности жидкости;
 - 4) сила, направленная вдоль отрезка на поверхности жидкости.
2. Какова природа сил поверхностного натяжения?
 - 1) гравитационное взаимодействие;
 - 2) трение между слоями жидкости;
 - 3) межмолекулярные взаимодействия.
3. Что называется коэффициентом поверхностного натяжения?
 - 1) работа, затраченная на создание единичной поверхности жидкости;
 - 2) сила, действующая на некоторый отрезок на поверхности жидкости;
 - 3) минимальная энергия поверхностного слоя жидкости;
 - 4) отношение силы поверхностного натяжения к длине отрезка, на который действует эта сила.
4. От чего зависит коэффициент поверхностного натяжения?
 - 1) от природы жидкости;
 - 2) от температуры жидкости;
 - 3) от наличия поверхностно-активных веществ;
 - 4) от вязкости жидкости;
 - 5) от площади поверхностного слоя.
5. Явление смачивания наблюдается, когда.....
 - 1) силы притяжения между молекулами жидкости и твердого тела меньше, чем между молекулами самой жидкости;
 - 2) силы притяжения между молекулами жидкости и твердого тела равны силам притяжения между молекулами самой жидкости;
 - 3) силы притяжения между молекулами жидкости и твердого тела больше, чем между молекулами самой жидкости.

6. Явление несмачивания наблюдается, когда.....

- 1) силы притяжения между молекулами жидкости и твердого тела меньше, чем между молекулами самой жидкости;
- 2) силы притяжения между молекулами жидкости и твердого тела равны силам притяжения между молекулами самой жидкости;
- 3) силы притяжения между молекулами жидкости и твердого тела больше, чем между молекулами самой жидкости.

7. Какова форма поверхности смачивающей жидкости в капилляре?

- 1) плоская;
- 2) вогнутый мениск;
- 3) выпуклый мениск.

8. Какова форма поверхности несмачивающей жидкости в капилляре?

- 1) плоская;
- 2) вогнутый мениск;
- 3) выпуклый мениск.

9. Что является причиной возникновения дополнительного давления под криволинейной поверхностью мениска?

- 1) атмосферное давление;
- 2) гидростатическое давление столба жидкости в капилляре.

10. Давление Лапласа зависит от....

- 1) коэффициента поверхностного натяжения;
- 2) высоты столба жидкости в капилляре;
- 3) радиуса кривизны мениска;
- 4) атмосферного давления.

11. Какова причина равновесия столба жидкости в капилляре?

- 1) гидростатическое давление столба жидкости равно атмосферному давлению;
- 2) давление Лапласа под мениском равно атмосферному давлению;
- 3) гидростатическое давление столба жидкости равно давлению Лапласа под мениском.

12. Два одинаковых капилляра опущены в смачивающие жидкости с соотношением коэффициентов поверхностного натяжения $\frac{\sigma_1}{\sigma_2} = 3$. Сравните высоту подъема жидкостей в капиллярах.

- 1) $h_1 = 3h_2$;
- 2) $h_1 = \frac{1}{3}h_2$;
- 3) $h_1 = 9h_2$;
- 4) $h_1 = \frac{1}{9}h_2$.

13. Две капиллярные трубки радиусами $R_1 = 2R_2$ опущены в смачивающую жидкость. Сравните высоту подъема жидкости в капиллярах.

- 1) $h_1 = 2h_2$; 2) $h_1 = \frac{1}{2}h_2$; 3) $h_1 = 4h_2$; 4) $h_1 = \frac{1}{4}h_2$.

14. В одинаковых капиллярных трубках жидкости разной плотности ($\rho_1 = 2\rho_2$) поднялись на разные высоты ($h_2 = 2h_1$). Отношение поверхностного натяжения σ_1 первой жидкости к поверхностному натяжению σ_2 второй равно....

- 1) 2; 2) 0,5; 3) 1; 4) 1,5.

15. Каким должен быть внутренний диаметр капилляра, чтобы при полном смачивании вода в нём поднялась на 2 см? (Поверхностное натяжение воды 0,072 Н/м).

- 1) 18 мм; 2) 36 мм; 3) 72 мм; 4) 1,44 мм; 5) 1,8 мм.

16. Укажите величины, между которыми устанавливается связь в законе Пуазейля:

- 1) объемная скорость истечения жидкости;
- 2) градиент скорости;
- 3) разность давлений на концах трубы;
- 4) радиус трубы;
- 5) длина трубы;
- 6) вязкость жидкости;
- 7) атмосферное давление.

17. Какой характер движения шарика в жидкости предполагается в методе Стокса?

- 1) замедленное движение;
- 2) ускоренное;
- 3) равномерное.

18. Какие силы действуют на падающий шарик в методе Стокса?

- 1) сила тяжести;
- 2) сила упругости;
- 3) сила трения;
- 4) сила инерции;
- 5) выталкивающая сила.

19. Что можно сказать о силах, действующих на падающий шарик в методе Стокса?

- 1) сила Архимеда уравновешена силами Стокса и тяжести шарика;
- 2) сила Стокса уравновешена силами Архимеда и тяжести шарика;
- 3) сила тяжести уравновешена силами Архимеда и Стокса;
- 4) равнодействующая всех сил отлична от нуля.

Достаточный уровень

1. Определите радиус R капли спирта, вытекающей из узкой вертикальной трубки радиусом $r = 1$ мм. Считайте, что в момент отрыва капля сферическая. Поверхностное натяжение спирта $\sigma = 22$ мН/м, а его плотность $\rho = 1$ г/см³.

Ответ: $R = 1,61$ мм.

2. Оцените максимальный размер капель воды, которые могут висеть на потолке. Поверхностное натяжение воды $\sigma = 0,073$ Н/м.

Ответ: $R_{\max} = 0,5$ см.

3. Две капли воды радиусом $r = 1$ мм каждая слились в одну большую каплю. Считая процесс изотермическим, определите уменьшение поверхностной энергии при этом слиянии, если поверхностное натяжение воды $\sigma = 0,073$ Н/м.

Ответ: $\Delta W = 378$ нДж.

4. Считая процесс образования мыльного пузыря изотермическим, определите работу A , которую надо совершить, чтобы увеличить его диаметр от $d_1 = 6$ мм до $d_2 = 60$ мм. Поверхностное натяжение мыльного раствора $\sigma = 40$ мН/м.

Ответ: $A = 378$ мкДж.

5. Воздушный пузырек диаметром $d = 0,02$ мм находится на глубине $h = 25$ см под поверхностью воды. Определите давление воздуха в этом пузырьке. Атмосферное давление принять нормальным. Поверхностное натяжение воды $\sigma = 0,073$ Н/м, а ее плотность $\rho = 1$ г/см³.

Ответ: $p = 118$ кПа.

6. В сосуд с ртутью опущен открытый капилляр. Разность уровней ртути в сосуде и капилляре $h = 3,7$ мм. Принимая плотность ртути

$\rho = 13,6 \text{ г/см}^3$, а ее поверхностное натяжение $\sigma = 0,5 \text{ Н/м}$, определите радиус кривизны R ртутного мениска в капилляре.

Ответ: $R = 2,03 \text{ мм}$.

7. Капилляр радиуса R опускают в смачивающую жидкость с поверхностным натяжением σ и плотностью ρ . Определите высоту, на которую поднимется жидкость. Определите работу, совершенную силами поверхностного натяжения, и потенциальную энергию жидкости в капилляре. Почему эти величины не совпадают?

Ответ: $h = \frac{2\sigma}{\rho g R}$; $A = \frac{4\pi\sigma^2}{\rho g}$; $U = \frac{2\pi\sigma^2}{\rho g}$. Часть энергии переходит в тепло.

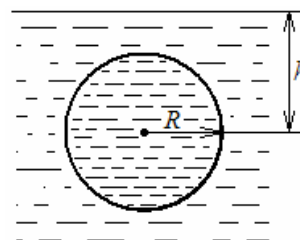
8. Какую работу нужно совершить, чтобы жидкость объема V с поверхностным натяжением σ растянуть в пленку, толщина которой $\Delta \ll \sqrt[3]{V}$?

Ответ: $A = \frac{4V\sigma}{\Delta}$.

9. Большая и тонкая пластина не тонет, если ее осторожно положить на поверхность воды. Определите максимальную массу единицы ее площади. Пластина водой не смачивается.

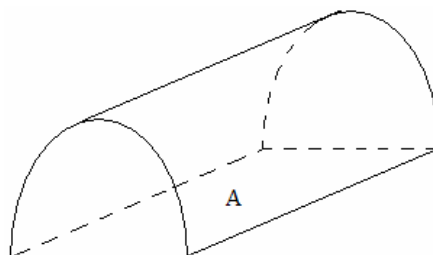
Ответ: $m = 0,55 \text{ г/см}^2$.

10. Определите максимальное и минимальное давление внутри сферической капли жидкости, которая плавает в другой жидкости (см. рисунок). Расстояние от центра капли до поверхности жидкости h , радиус капли R , плотность жидкостей одинакова и равна ρ , поверхностное натяжение на границе раздела жидкостей σ .

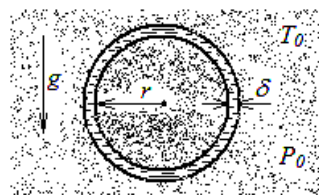


Ответ: $p_{\max} = p_0 + \frac{2\sigma}{R} + \rho g(h + R)$; $p_{\min} = p_0 + \frac{2\sigma}{R} + \rho g(h - R)$.

11. Докажите, что давление жидкости (с поверхностным натяжением σ) под ее цилиндрической поверхностью радиуса R , равно $\frac{\sigma}{R}$. Для доказательства воспользуйтесь условием равновесия объема жидкости, лежащего над плоскостью A (см. рис.).



12. Мыльный пузырь, заполненный горячим воздухом, неподвижно висит в атмосфере (см. рис.). Атмосферное давление p_0 , температура T_0 . Плотность мыльной пленки ρ , ее толщина δ , а радиус пузыря r . Найдите температуру воздуха внутри пузыря, если поверхностное натяжение мыльной воды равно σ . Молярная масса воздуха M .

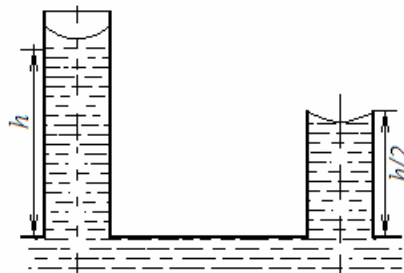


Ответ: $T = T_0 \frac{M(p_0 r + 4\sigma)}{Mp_0 r - 3\delta \rho R T_0}$, где R – универсальная газовая постоянная.

13. Давление воздуха внутри мыльного пузыря на $\Delta p = 200$ Па больше атмосферного. Определите диаметр d пузыря. Поверхностное натяжение мыльного раствора $\sigma = 40$ мН/м.

Ответ: $d = 1,6$ мм.

14. Жидкость в длинном капилляре (см. рисунок) поднимается на высоту h . Определите радиус кривизны мениска в коротком капилляре, длина которого $\frac{h}{2}$. Радиус обоих капилляров r , краевой угол θ .



Ответ: $r_x = \frac{2r}{\cos \theta}$.

15. На какую высоту поднимется жидкость между двумя вертикальными пластинами, расстояние между которыми Δ , если краевой угол у первой пластины θ_1 , у второй θ_2 ? Плотность жидкости ρ , ее поверхностное натяжение σ .

Ответ: $x = \frac{\sigma}{\rho g \Delta} (\cos \theta_1 + \cos \theta_2)$.

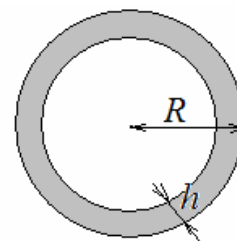
16. Вертикальный стеклянный капилляр погружен в воду. Определите радиус кривизны мениска, если высота столба воды в капилляре $h = 20$ мм. Плотность воды $\rho = 1$ г/см³, поверхностное натяжение $\sigma = 0,073$ Н/м.

Ответ: $r = 744$ мкм.

17. Капилляр с внутренним радиусом 0,5 мм опущен в жидкость. Определите массу жидкости, поднявшейся в капилляре, если ее поверхностное натяжение равно 60 мН/м.

Ответ: $m = 1,92 \cdot 10^{-5}$ кг.

18. Внешний радиус мыльного пузыря равен R , толщина его стенки равна h (см. рисунок). Найдите давление воздуха внутри пузыря. Давление воздуха вне пузыря p_0 , поверхностное натяжение воды σ .



Ответ: $p = p_0 + 2\sigma \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R-h} \right)$.

3.3. Фаза. Фазовые переходы

Основные понятия и формулы

Фаза – термодинамически равновесное состояние вещества, отличающееся по физическим свойствам от других возможных равновесных состояний того же вещества.

Если, например, в закрытом сосуде находится вода, то эта система является *двухфазной*: жидкая фаза – вода; газообразная фаза – смесь воздуха с водяными парами.

Переход вещества из одной фазы в другую – **фазовый переход** – всегда связан с качественными изменениями свойств вещества.

Фазовые переходы I рода:

Плавление – переход из твердого кристаллического состояния в жидкое.

Кристаллизация (затвердевание) – переход вещества из жидкого в твердое кристаллическое состояние.

Сублимация (возгонка) – переход из твердого кристаллического состояния в газообразное.

Испарение – переход из жидкого состояния в газообразное.

Конденсация – переход из газообразного состояния в жидкое или твердое.

Фазовые переходы I рода характеризуются постоянством температуры, изменениями энтропии и объема. Они сопровождаются поглощением или выделением теплоты, называемой **теплотой фазового перехода** Q .

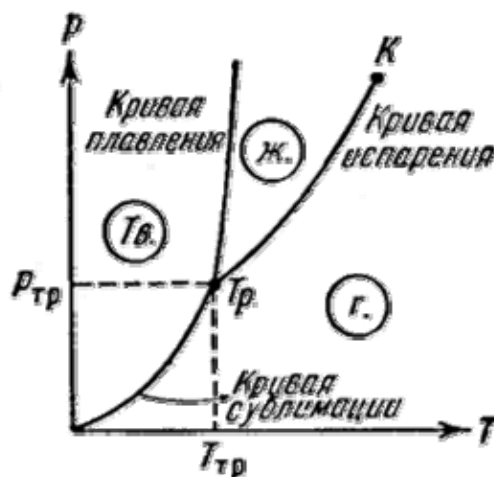
$$Q = \lambda m,$$

где λ – удельная теплота фазового перехода $\left[\frac{\text{Дж}}{\text{кг}} \right]$ – количество тепла, поглощаемого или выделяемого при фазовом переходе 1 килограмма вещества; m – масса вещества.

Для изображения фазовых превращений используют **диаграмму состояния** (см. рисунок), на которой в координатах p, T задается зависи-

мость между температурой фазового перехода и давлением в виде кривых испарения, плавления и сублимации, разделяющих поле диаграммы на три области, соответствующие условиям существования твердой (Тв), жидкой (Ж) и газообразной (Г) фаз.

Кривые на диаграмме называются **кривыми фазового равновесия**, каждая точка на них соответствует условиям равновесия двух сосуществующих фаз: твердого тела и жидкости, жидкости и газа, твердого тела и газа. Точка, в которой пересекаются эти кривые и которая, следовательно, определяет условия (температуру T_{TP} и соответствующее ей равновесное давление p_{TP}) одновременного равновесного сосуществования трех фаз вещества, называется **тройной точкой**.



Связь наклона кривой равновесия двух фаз с теплотой фазового перехода и изменением фазового объема выражается уравнением Клапейрона – Клаузиуса

$$\frac{dp}{dT} = \frac{L}{T(V_2 - V_1)},$$

где L – теплота фазового перехода ($L = Q$); $(V_2 - V_1)$ – изменение объема вещества при переходе его из первой фазы во вторую; T – температура перехода (процесс изотермический).

Для фазовых переходов с поглощением теплоты ($L > 0$) знак $\frac{dp}{dT}$ определяется знаком разности $(V_2 - V_1)$.

Для испарения и сублимации $\frac{dp}{dT} > 0$, т.к. объем пара V_2 больше объема конденсированной фазы V_1 , и температура фазового перехода повышается с ростом давления.

При плавлении большинства веществ объем, как правило, тоже возрастает, т.е. $\frac{dp}{dT} > 0$; следовательно, увеличение давления приводит к повышению температуры плавления.

Однако для некоторых веществ (вода, висмут, чугун и др.) объем в процессе плавления уменьшается $V_2 < V_1$. Для них $\frac{dp}{dT} < 0$, т.е. в этом случае

увеличение давления сопровождается понижением температуры плавления.

ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

Пример 1. Изменение энтропии при плавлении 1 моль льда составило 25 Дж/К. Определите, на сколько изменится температура плавления льда при увеличении внешнего давления на 1 МПа? Плотность льда $\rho_1 = 0,9$ г/см³, плотность воды $\rho_2 = 1$ г/см³.

Дано:	Решение:
$\nu = 1$ моль	Запишем уравнение Клапейрона – Клаузиуса
$\Delta S = 25$ Дж/К	$\frac{\Delta p}{\Delta T} = \frac{L}{T(V_2 - V_1)}, \quad (1)$
$\Delta p = 10^6$ Па	где L – теплота фазового перехода ($L = \Delta Q$).
$\rho_1 = 0,9 \cdot 10^3$ кг/м ³	Изменение энтропии при плавлении льда
$\rho_2 = 10^3$ кг/м ³	$\Delta S = \frac{\Delta Q}{T}, \text{ откуда } \Delta Q = T \Delta S.$
$\Delta T = ?$	

V_1 – объем льда,

$$V_1 = \frac{m}{\rho_1};$$

V_2 – объем воды,

$$V_2 = \frac{m}{\rho_2},$$

где m – масса льда ($m = \nu M$).

Подставив в формулу (1) выражения входящих в нее величин, получим

$$\frac{\Delta p}{\Delta T} = \frac{T \Delta S}{T \left(\frac{\nu M}{\rho_2} - \frac{\nu M}{\rho_1} \right)},$$

откуда

$$\Delta T = \nu M \frac{\Delta p}{\Delta S} \left(\frac{1}{\rho_2} - \frac{1}{\rho_1} \right).$$

$$\Delta T = 1 \cdot 18 \cdot 10^{-3} \frac{10^6}{25} \left(\frac{1}{10^3} - \frac{1}{0,9 \cdot 10^3} \right) = -0,08 \text{ К}.$$

Ответ: $\Delta T = -0,08 \text{ К}$.

Пример 2. Нафталин плавится при температуре $t = 80,1^\circ\text{C}$, молярная теплота его плавления $\lambda = 19,12$ Дж/моль, а увеличение молярного объема при плавлении $\Delta V_M = 18,7 \text{ см}^3/\text{моль}$. Определите скорость изменения температуры плавления нафталина при изменении внешнего давления.

Дано:	Решение:
$t = 80,1^\circ\text{C}$	Запишем уравнение Клапейрона – Клаузиуса
$\lambda = 19,12$ Дж/моль	
$\Delta V_M = 18,7 \cdot 10^{-6} \text{ м}^3/\text{моль}$	
$\frac{\Delta T}{\Delta p} - ?$	$\frac{\Delta p}{\Delta T} = \frac{\lambda}{T(V_2 - V_1)} = \frac{\lambda}{T\Delta V_M}, \quad (1)$
	где $T = t + 273 = 353,1 \text{ К}$.
	Из формулы (1) следует, что
	$\frac{\Delta T}{\Delta p} = \frac{T\Delta V_M}{\lambda}.$
	$\frac{\Delta T}{\Delta p} = \frac{353,1 \cdot 18,7 \cdot 10^{-6}}{19,12} = 34,5 \cdot 10^{-5} \text{ К/Па}.$

Ответ: $\frac{\Delta T}{\Delta p} = 34,5 \cdot 10^{-5} \text{ К/Па}.$

Пример 3. На сколько изменится точка плавления льда при изменении давления от $p_1 = 0,098$ МПа до $p_2 = 0,196$ МПа? Удельная теплота плавления льда $\lambda = 334$ кДж/кг.

Дано:	СИ	Решение:
$p_1 = 0,098$ МПа	$9,8 \cdot 10^4$ Па	Воспользуемся уравнением Клапейрона – Клаузиуса
$p_2 = 0,196$ МПа	$1,96 \cdot 10^5$ Па	
$\lambda = 334$ кДж/кг	$3,34 \cdot 10^5$ Дж/кг	$\frac{\Delta p}{\Delta T} = \frac{\lambda_M}{T_0(V_{M1} - V_{M2})}, \quad (1)$
$\rho_1 = 9 \cdot 10^2$ кг/м ³		где λ_M – молярная теплота плавления:
$\rho_2 = 10^3$ кг/м ³		$\lambda_M = M\lambda,$
$T_0 = 273$ К		λ – удельная теплота плавления;
$\Delta T - ?$		
V_{M1} и V_{M2} – молярные объемы льда и воды.		$\frac{V_M}{M} = \frac{1}{\rho},$

где ρ – плотность вещества.

Тогда уравнение (1) можно записать в виде

$$\frac{\Delta p}{\Delta T} = \frac{\lambda}{T_0 \left(\frac{1}{\rho_2} - \frac{1}{\rho_1} \right)},$$

откуда

$$\Delta T = \frac{T_0 \left(\frac{1}{\rho_2} - \frac{1}{\rho_1} \right) (p_2 - p_1)}{\lambda}.$$

$$\Delta T = \frac{273 \left(\frac{1}{9 \cdot 10^2} - \frac{1}{10^3} \right) (1,96 - 0,98) 10^5}{3,34 \cdot 10^5} = 0,32 \text{ К}.$$

Ответ: $\Delta T = 0,32 \text{ К}$.

Пример 4. Определите температуру кипения воды при давлении $p_1 = 10^5$ Па, если при нормальном давлении $p_0 = 101325$ Па она равна $T_0 = 373$ К. Удельная теплота парообразования воды $r = 2,26 \cdot 10^6$ Дж/кг.

Дано:

$$p_1 = 10^5 \text{ Па}$$

$$p_0 = 101325 \text{ Па}$$

$$T_0 = 373 \text{ К}$$

$$r = 2,26 \cdot 10^6 \text{ Дж/кг}$$

$$M = 18 \cdot 10^{-3} \text{ кг/моль}$$

$$T_1 = ?$$

Решение:

Решим совместно уравнение Клапейрона – Клаузиуса

$$\frac{\Delta p}{\Delta T} = \frac{r_M}{T_0 (V_{M_{\text{п}}} - V_{M_{\text{ж}}})},$$

где $\Delta p = p_1 - p_0$; $\Delta T = T_1 - T_0$; $V_{M_{\text{ж}}} \approx 0$; $r_M = rM$,

и уравнение Клапейрона – Менделеева

$$V_{M_{\text{п}}} = \frac{RT_0}{p_0}.$$

Тогда

$$\frac{p_1 - p_0}{T_1 - T_0} = \frac{r M p_0}{R T_0^2},$$

откуда

$$T_1 = T_0 + \frac{R T_0^2 (p_1 - p_0)}{r M p_0}.$$

$$T_1 = 373 + \frac{8,31 \cdot 273^2 (1 - 1,01325) \cdot 10^5}{2,26 \cdot 10^6 \cdot 18 \cdot 10^{-3} \cdot 1,01325 \cdot 10^5} = 372,63 \text{ К}.$$

Ответ: $T_1 = 372,63 \text{ К}$.

Пример 5. Относительная влажность воздуха в замкнутом сосуде объемом 1 м^3 при температуре 20°С равна 0,6. Какую массу воды нужно дополнительно испарить в этом сосуде, чтобы водяной пар стал насыщенным?

Дано:	Решение:
$V = 1 \text{ м}^3$	Относительная влажность воздуха
$t_1 = 20^\circ\text{С}$	$\varphi_1 = \frac{\rho_1}{\rho_H},$
$\varphi_1 = 0,6$	откуда $\rho_1 = \rho_H \cdot \varphi_1.$
$\rho_H = 17,3 \cdot 10^{-3} \text{ кг/м}^3$	При насыщенном состоянии $\varphi_H = \frac{\rho_H}{\rho_H}.$
$\varphi_1 = 1$	
$\Delta m - ?$	

Масса воды, которую нужно дополнительно испарить в этом сосуде, чтобы водяной пар стал насыщенным,

$$\Delta m = (\rho_H - \rho_1)V; \Delta m = \rho_H(1 - \varphi_1)V$$

$$\Delta m = 17,3 \cdot 10^{-3}(1 - 0,6) \cdot 1 = 6,92 \cdot 10^{-3} \text{ кг}.$$

Ответ: $\Delta m = 6,92 \cdot 10^{-3} \text{ кг}.$

Пример 6. Кусок льда массой 500 г при температуре минус 10°С помещен в воду массой 3 кг при температуре 20°С . Определите температуру смеси. Удельная теплота плавления льда 334 кДж/кг , удельная теплоемкость льда $2,1 \text{ кДж/(кг}\cdot\text{К)}$, удельная теплоемкость воды $4,2 \text{ кДж/(кг}\cdot\text{К)}$.

Дано:	СИ	Решение:
$m_1 = 500 \text{ г}$	$0,5 \text{ кг}$	По уравнению теплового баланса
$t_1 = -10^\circ\text{С}$	$T_1 = 263 \text{ К}$	$Q_1 = Q_2, \quad (1)$
$m_2 = 3 \text{ кг}$	$T_2 = 293 \text{ К}$	где Q_1 – количество теплоты, полученное льдом,
$t_2 = 20^\circ\text{С}$	$2,1 \cdot 10^3 \text{ Дж/кг}\cdot\text{К}$	$Q_1 = \lambda_1 m_1 + c_1 m_1 (\theta_2 - T_1); \quad (2)$
$c_1 = 2,1 \text{ кДж/(кг}\cdot\text{К)}$	$4,2 \cdot 10^3 \text{ Дж/кг}\cdot\text{К}$	Q_2 – количество теплоты, отданное водой,
$c_2 = 4,2 \text{ кДж/(кг}\cdot\text{К)}$	$3,34 \cdot 10^5 \text{ Дж/кг}$	$Q_2 = c_2 m_2 (T_2 - \theta). \quad (3)$
$\lambda_1 = 334 \text{ кДж/кг}$		
$\theta - ?$		

Подставив выражения (2) и (3) в формулу (1), получим

$$\lambda_1 m_1 + c_1 m_1 (\theta_2 - T_1) = c_2 m_2 (T_2 - \theta),$$

откуда

$$\theta = \frac{c_2 m_2 T_2 - \lambda_1 m_1 + c_1 m_1 T_1}{c_1 m_1 + c_2 m_2}$$

$$\theta = \frac{4,2 \cdot 10^3 \cdot 3 \cdot 293 - 3,34 \cdot 10^5 \cdot 0,5 + 2,1 \cdot 10^3 \cdot 0,5 \cdot 263}{4,2 \cdot 10^3 \cdot 3 + 2,1 \cdot 10^3 \cdot 0,5} = 278,3 \text{ К.}$$

Ответ: $\theta = 278,3 \text{ К.}$

Задачи для самостоятельного решения

Средний уровень

1. Фазами называются....
 - 1) вещества, находящиеся в разных агрегатных состояниях;
 - 2) физически однородные части, разделённые границами, на которые распалась система;
 - 3) различные состояния вещества, возникающие вследствие изменения температуры и давления.

2. Горячая жидкость охлаждалась в стакане. В таблице приведены результаты измерений ее температуры с течением времени.

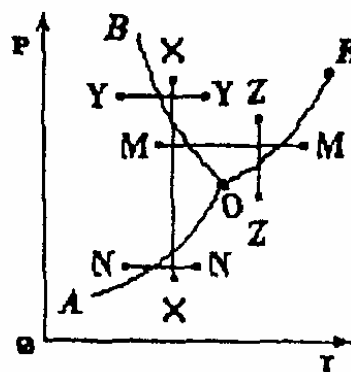
Время, мин	0	2	4	6	8	10	12	14
Температура, °C	95	88	81	80	80	80	77	72

Что было в стакане через 12 мин от начала измерений?

- 1) смесь жидкой и твердой фаз;
- 2) только твердое вещество;
- 3) только жидкость;
- 4) по этим данным нельзя дать однозначного ответа.

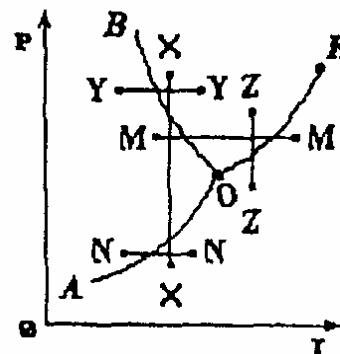
3. На рисунке приведена диаграмма состояния кристаллического вещества (лед). Какой процесс содержит переходы «вода-лед» и «лед-пар»?

- 1) X-X; 2) M-M; 3) Z-Z;
- 4) Y-Y; 5) N-N.



4. На рисунке приведена диаграмма состояния кристаллического вещества (лед). Какой процесс содержит переходы «лед-вода» и «вода-пар»?

- 1) М-М; 2) У-У; 3) Х-Х; 4) Z-Z; 5) N-N.



5. Из предложенных ответов выберите соотношение температуры кипения воды у основания горы T_1 и на ее вершине T_2 .

- 1) $T_1 > T_2$; 2) $T_1 < T_2$;
3) $T_1 = T_2$; 4) на вершине горы вода не закипит.

6. Твердое железо тонет в своем расплаве. Как зависит температура плавления железа от давления?

- 1) возрастает при увеличении давления;
2) уменьшается при увеличении давления;
3) не зависит от давления.

7. Твердый галлий плавает в своем расплаве. Как зависит температура плавления галлия от давления?

- 1) возрастает при увеличении давления;
2) уменьшается при увеличении давления;
3) не зависит от давления.

8. В теплоизолированный сосуд с большим количеством льда при температуре $t_1 = 0^\circ\text{C}$ заливают 1 кг воды с температурой $t_2 = 44^\circ\text{C}$. Какая масса льда расплавится при установлении теплового равновесия в сосуде?

- 1) 44 г; 2) 100 г; 3) 560 г; 4) 710 г.

9. Относительная влажность воздуха в закрытом сосуде равна 90 %. Какой будет относительная влажность, если объем сосуда при неизменной температуре увеличить в 1,5 раза?

- 1) 30 %; 2) 40 %; 3) 50 %; 4) 60 %.

10. Относительная влажность воздуха в закрытом сосуде 40 %. Какая часть водяного пара выпадет в виде росы, если объем сосуда при неизменной температуре уменьшить в 3 раза?

- 1) $1/3$; 2) $1/4$; 3) $1/6$; 4) $1/9$.

11. Найдите приращение $\Delta\lambda$ удельной теплоты парообразования воды при повышении температуры от 323 до 373 К. Считайте теплоемкость воды постоянной, а водяной пар – классическим идеальным газом.

- 1) 1,2 кДж/кг; 3) 2,3 кДж/кг;
2) 4,6 кДж/кг; 4) 5,3 кДж/кг.

Достаточный уровень

1. Температура плавления железа изменяется на $\Delta T = 0,012$ К при изменении давления на $\Delta p = 98$ кПа. На сколько изменяется при плавлении объем 1 кмоль железа?

Ответ: $\Delta V = 1,03$ л.

2. Как изменится температура плавления льда при повышении давления на 1 атм, если известно, что при 0°C теплота плавления льда равна 333,5 Дж/г, а удельные объемы воды и льда соответственно равны $1,0001 \cdot 10^{-6}$ м³/г и $1,0908 \cdot 10^{-6}$ м³/г?

Ответ: понизится на $0,0075^\circ\text{C}$.

3. Определите давление, при котором вода закипит при 98°C .

Ответ: $p = 707,7$ мм. рт. ст.

4. Относительная влажность воздуха в герметичной камере объемом 100 м³ при температуре $26,5^\circ\text{C}$ была равна 80 %. Вычислите массу воды, сконденсировавшейся в капельки тумана или росы при понижении температуры в камере до 12°C . Плотность насыщенного водяного пара при температуре $26,5^\circ\text{C}$ равна 25 г/м³, при температуре 12°C равна 10,6 г/м³.

Ответ: $m = 0,94$ кг.

5. Смешали 5 м³ воздуха, имеющего относительную влажность 22 % и температуру 15°C , и 3 м³ воздуха, имеющего относительную влажность 46 % и температуру 28°C . Общий объем смеси 8 м³. Воспользовавшись приведенной таблицей, определите относительную влажность этой смеси.

Температура, К	Плотность насыщенного пара, 10^{-3} кг/м ³	Температура, К	Плотность насыщенного пара 10^{-3} кг/м ³
288	12,8	295	19,4
289	13,6	297	21,8
291	15,4	299	24,4
293	17,3	301	27,2

Ответ: $\phi = 37$ %.

6. В сосуд с водой при $0\text{ }^{\circ}\text{C}$ опущена трубка. По трубке через воду начали пропускать пар при температуре $100\text{ }^{\circ}\text{C}$. Вначале масса воды увеличивается, но начиная с некоторого момента времени, масса воды перестает увеличиваться, хотя пар по-прежнему пропускают. Какова была первоначальная масса воды, если к моменту прекращения конденсации пара она увеличилась на 42 г? Потерями теплоты пренебречь.

Ответ: $m = 0,23\text{ кг}$.

7. В двух сосудах имеется по 500 г воды при температуре $20\text{ }^{\circ}\text{C}$. В первый сосуд наливают 50 г холодной воды при температуре $0\text{ }^{\circ}\text{C}$, а во второй добавляют 50 г льда при температуре $0\text{ }^{\circ}\text{C}$. На сколько градусов температура в первом сосуде будет больше, чем во втором после установления теплового равновесия в сосудах? Теплоемкостью сосудов пренебречь.

Ответ: $\Delta t = 7\text{ }^{\circ}\text{C}$.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Одна из важнейших задач курса физики в вузе состоит в формировании у студентов представлений о физической картине мира. В настоящем пособии «Молекулярная физика и термодинамика» изложены свойства и закономерности поведения микрочастиц, входящих в состав макроскопических систем.

Молекулярная физика с ее статистическим методом была первым шагом в микромир. Основываясь на атомно-молекулярной гипотезе строения вещества и моделируя характер межатомных и межмолекулярных взаимодействий, удалось построить целостную физическую картину окружающего нас мира и, в частности, протекающих в нем тепловых процессов.

Термодинамика описывает наиболее общие свойства макроскопических систем на основе фундаментальных принципов (начал), которые являются обобщением многочисленных наблюдений. Она отвечает на многие важные для технического прогресса вопросы, в том числе на вопрос о том, как должны быть устроены тепловые двигатели, чтобы они могли наиболее эффективно превращать тепло в работу.

Интенсивное развитие молекулярной физики привело к выделению из неё целого ряда крупных самостоятельных разделов физики, таких, например, как статистическая физика, физика твёрдого тела, физическая химия, молекулярная биология. Успехи теоретической и экспериментальной физики твердого тела привели к созданию полупроводниковой электронной промышленности, разработке и производству компьютеров, созданию системы мобильной связи, изменивших жизнь человечества и в настоящее время определяющих темпы развития современного общества. На основе общих теоретических представлений молекулярной физики получили развитие такие специальные области науки, как физика полупроводников, физика металлов, физика полимеров, физика плазмы, кристаллофизика.

Молекулярная физика и термодинамика внесли огромный вклад в развитие новой области научных исследований – синергетики, главной целью которой является выявление общих закономерностей в различных процессах, происходящих в сложных, открытых, неравновесных системах различной природы: физических, химических, биологических, экологических.

Однако несмотря на быстрое развитие и огромные успехи, современные молекулярная физика и термодинамика стоят перед целым рядом нерешенных проблем. Например, создание высокоэкономичных и экологически чистых двигателей внутреннего сгорания; разработка альтернативных и долговечных источников энергии; исследование свойств материалов при температурах, близких к 0 К, и т.д. Решение этих проблем является важнейшим условием ускорения научно-технического прогресса.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Дмитриева, В.Ф. Основы физики [Текст] / В.Ф. Дмитриева, В.Л. Прокофьев. – М.: Высшая школа, 2009. – 526 с.
2. Волькенштейн, В.С. Сборник задач по общему курсу физики [Текст] / В.С. Волькенштейн. – М.: Наука, 2008. – 478 с.
3. Коган, Л.М. Учись решать задачи по физике [Текст] / Л.М. Коган. – М.: Высшая школа, 1993. – 368 с.
4. Трофимова, Т.И. Сборник задач по курсу физики с решениями [Текст] / Т.И. Трофимова, З.Г. Павлова. – М.: Абрис, 2012. – 312 с.
5. Яворский, Б.М. Справочник по физике для инженеров и студентов вузов [Текст] / Б.М. Яворский, А.А. Детлаф, А.К. Лебедев. – 8-е изд. – М.: Оникс: Мир и образование, 2006. – 524 с.
6. Чертов, А.Г. Задачник по физике [Текст] / А.Г. Чертов, А.А. Воробьев. – 7-е изд., перераб. и доп. – М.: Физматлит, 2001. – 640 с.
7. Савельев, И.В. Курс общей физики [Текст] / И.В. Савельев. – СПб.: Лань, 2008. – 432 с.
8. Иродов, И.Е. Задачи по общей физике [Текст] / И.Е. Иродов. – СПб.: Лань, 2007.
9. Калашников, Н.П. Физика: интернет-тестирование базовых знаний [Текст] / Н.П. Калашников, Н.М. Кожевников. – СПб., М., Кр-р.: Лань, 2009.
10. Детлаф, А.А. Курс физики [Текст] / А.А. Детлаф, Б.М. Яворский. – М.: Академия, 2007. – 534 с.
11. Сивухин, Л.В. Общий курс физики: термодинамика и молекулярная физика [Текст] / Л.В. Сивухин. – М.: Наука, 2006. – 544 с.
12. Трофимова, Т.И. Курс физики. [Текст] / Т.И. Трофимова – М.: Академия, 2010. – 560 с.
13. Грабовский, Р.И. Курс физики. [Текст] / Р.И. Грабовский – М.: Лань, 2009. – 608 с.
14. Матвеев, А.Н. Молекулярная физика. [Текст] / А.Н. Матвеев – М.: Бином. Лаборатория знаний, 2010. – 368 с.

О Г Л А В Л Е Н И Е

ПРЕДИСЛОВИЕ	3
ВВЕДЕНИЕ.....	5
1. МОЛЕКУЛЯРНАЯ ФИЗИКА	7
1.1. Молекулярно-кинетическая теория идеального газа.....	7
1.1.1. Идеальный газ. Законы идеального газа.....	7
1.1.2. Основное уравнение молекулярно-кинетической теории идеального газа.....	20
1.2. Элементы статистической физики.....	31
1.2.1. Распределение Максвелла.....	31
1.2.2. Распределение Больцмана.....	50
1.2.3. Длина свободного пробега и число столкновений молекул.....	61
1.2.3. Явления переноса.....	70
2. ОСНОВЫ ТЕРМОДИНАМИКИ	88
2.1. Теплємкость идеального газа. Работа газа.....	88
2.2. Первое начало термодинамики	110
2.3. Круговые процессы. термический КПД. Цикл Карно.....	134
2.4. Энтропия. Второе начало термодинамики.....	151
3. РЕАЛЬНЫЕ ГАЗЫ, ЖИДКОСТИ И ТВЕРДЫЕ ТЕЛА	178
3.1. Реальные газы	178
3.2. Свойства жидкостей	189
3.3. Фаза. Фазовые переходы.....	204
ЗАКЛЮЧЕНИЕ	214
БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК.....	215

Учебное издание

Очкина Наталья Александровна

ФИЗИКА. МОЛЕКУЛЯРНАЯ ФИЗИКА И ТЕРМОДИНАМИКА
Учебное пособие

Под общ. ред. д-ра техн. наук, проф. Г.И. Грейсуха

Р е д а к т о р	Н.Ю. Шалимова
В е р с т к а	Н.А. Сазонова

Подписано в печать 17.03.2015. Формат 60×84/16.
Бумага офисная «Снегурочка». Печать на ризографе.
Усл. печ. л. 12,56. Уч.-изд. л. 13,5. Тираж 80 экз.
Заказ №92.



Издательство ПГУАС.
440028, г.Пенза, ул. Германа Титова, 28.