МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Федеральное государственное бюджетное образовательное
учреждение высшего образования
«Пензенский государственный университет
архитектуры и строительства»
(ПГУАС)

В.В. Кузина, А.Н. Кошев

ВЫЧИСЛИТЕЛЬНАЯ МАТЕМАТИКА

Учебно-методическое пособие
по подготовке к зачету по направлению подготовки
09.03.02 «Информационные системы и технологии»

Пенза 2016

УДК 519.6 (075.8)
ББК 22.193я73
К89

Рекомендовано Редсоветом университета
Рецензент – доктор технических наук,
профессор А.М. Данилов (ПГУАС)

Кузина В.В.

К89 Вычислительная математика: учебно-методическое пособие по подготовке к зачету по направлению подготовки 09.03.02 «Информационные системы и технологии» / В.В. Кузина, А.Н. Кошев. – Пенза: ПГУАС, 2016. – 64 с.

Представлены методические рекомендации по подготовке к зачету по дисциплине «Вычислительная математика», примерные вопросы к зачету, тестовые задания по всем разделам курса, список рекомендуемых литературных источников.

Учебно-методическое пособие подготовлено на кафедре «Информационно-вычислительные системы» и предназначено для студентов, обучающихся по программе подготовки академического бакалавриата по направлению 09.03.02 «Информационные системы и технологии» очной формы обучения при изучении дисциплины «Вычислительная математика».

ПРЕДИСЛОВИЕ

Зачет является формой промежуточного контроля уровня освоения студентом образовательной программы по дисциплине «Вычислительная математика» в целом и предназначен для проверки знаний и навыков, полученных на лекционных и лабораторных занятиях, а также при выполнении курсового проекта и обязательных самостоятельных работ.

Зачет проводится в соответствии с учебным планом по программе подготовки академического бакалавриата очной формы обучения по направлению 09.03.02 «Информационные системы и технологии», рабочей программой дисциплины.

Зачет, как правило, проводится в два этапа: 1-й этап – компьютерное тестирование, 2-й этап – ответы на вопросы билета.

Разработанный учебно-методический комплекс (УМК) по дисциплине, включающий учебное пособие, практикум для выполнения лабораторных работ, методические указания по самостоятельной работе студентов и учебно-методическое пособие по подготовке к зачету, размещен в открытом доступе на сервере кафедры, что обеспечивает возможность ознакомления с ним в течение всего учебного года.

К зачету допускаются студенты, успешно освоившие программу по дисциплине в течение семестра, выполнившие и защитившие лабораторные работы и курсовой проект, а также получившие положительные оценки за выполнение коллоквиумов.

По результатам зачета студенту выставляется оценка «зачтено», «не зачтено».

ВВЕДЕНИЕ

Дисциплина «Вычислительная математика» является вариативной частью обязательных дисциплин учебного цикла ООП. К задачам освоения дисциплины относятся:

– приобретение обучающимися знания о методах вычислительной математики, их применимости в профессиональной деятельности;

– формирование умения применять численные методы для решения задач интегрирования, дифференцирования, интерполирования и аппроксимации функций, решения дифференциальных уравнений;

– выработка умения реализовывать численные методы в интегрированных математических средах.

Процесс изучения дисциплины направлен на формирование следующих компетенций:

– владение широкой общей подготовкой (базовыми знаниями) для решения практических задач в области информационных систем и технологий;

– способность использовать основные законы естественнонаучных дисциплин в профессиональной деятельности, применять методы математического анализа и моделирования, теоретического и экспериментального исследования.

Планируемые результаты обучения (показатели достижения заданного уровня освоения компетенции):

знать:

– математический аппарат современных численных методов;

– основные положения и методы численного дифференцирования и интегрирования, интерполирования и аппроксимации функций, численного решения алгебраических и дифференциальных уравнений и их систем; о приложениях теории в информатике, программировании и вычислительной технике;

– современные методы обработки результатов измерений (аппроксимация, визуализация и оценка погрешности);

– современные математические пакеты программ для решения задач вычислительной математики;

уметь:

– осуществлять цепочку приближенных арифметических вычислений с заданной точностью, реализовывать численные методы решения задач на ПЭВМ;

– решать типовые задачи;

– использовать встроенные функции математических пакетов для решения задач вычислительной математики;

– программировать вычислительные алгоритмы и решать типовые задачи на компьютере;

владеть:

– базовыми знаниями и навыками методов вычислительной математики;

– навыками решения проблемных задач, требующих применения логико-математического аппарата;

– навыками работы в интегрированных математических средах, навыками работы с прикладными математическими пакетами программ;

– навыками решения проблемных задач, используя вычислительный эксперимент;

иметь представление:

– о математическом аппарате современных численных методов;

– об основных положениях и методах современной вычислительной математики, о приложениях теории в информатике, программировании и вычислительной технике;

– о применении методов математического анализа и моделирования в профессиональной деятельности;

– математическом моделировании и вычислительном эксперименте.

Знания, умения и приобретенные компетенции будут использованы при изучении следующих дисциплин (модулей) и разделов ООП: численные методы и методы оптимизации, моделирование процессов и систем, математическая статистика и прогнозирование.

МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ ПО ПОДГОТОВКЕ К ЗАЧЕТУ

Подготовка к зачету по дисциплине «Вычислительная математика», как к промежуточному контролю для проверки знаний и навыков, полученных на лекционных и лабораторных занятиях, а также при выполнении курсового проекта и обязательных самостоятельных работ, заключается в изучении и тщательной проработке обучающимся учебного материала дисциплины с учётом учебников, лекционных и лабораторных занятий, сгруппированном в виде контрольных вопросов и заданий по всем темам и тестовых заданий. Контрольные вопросы и задания для подготовки к зачету по каждой теме, тесты и примерный перечень вопросов к зачету приведены ниже.

Для лучшего усвоения учебного материала и удобства подготовки студентов к зачету преподавателями данного курса – авторами учебно-методического пособия – на файл-сервере кафедры представлен УМК – учебно-методический комплекс материалов, содержащий полнотекстовые файлы лекционного материала, учебное пособие, практикум для выполнения лабораторных работ, учебно-методические пособия для самостоятельной работы студента, методические указания по выполнению курсового проекта и всем видам контроля (входного, текущего, промежуточного).

Зачет по курсу проводится, как правило, в два этапа: 1) в виде компьютерного тестирования, включающего как теоретические, так и практические задания по всему пройденному материалу, в том числе выносимого на самостоятельное изучение; 2) по билетам, включающим один теоретический вопрос и задачу.

Преподавателю предоставляется право воспользоваться примерными тестовыми заданиями или составить новые тестовые задания в полном соответствии с материалом учебной дисциплины.

К зачету допускается студент, успешно выполнивший все предусмотренные программой курса лабораторные работы и защитивший их в компьютерном классе, продемонстрировав преподавателю электронный вариант и сдавший печатный либо рукописный вариант отчета, а также успешно выполнивший и защитивший курсовой проект по дисциплине.

Студент, пропустивший занятия по уважительной причине или отсутствии таковой, обязан отработать материал самостоятельно.

Студенты, получившие зачет по всем темам учебного курса и отчитавшиеся по всем заданиям домашней работы, допускаются к промежуточному контролю или получают итоговый зачет по всему курсу по усмотрению ведущего преподавателя (возможно и досрочно). Студенты, не получившие зачет по всем темам учебного курса или не отчитавшиеся по всем заданиям домашней работы до окончания зачетной сессии, не допускаются к итоговому зачету по курсу.

Для ликвидации задолженности по учебному курсу студенты должны получить зачеты по всем не сданным ими темам и успешно отчитаться перед преподавателем по всем не сданным заданиям домашней работы.

Студенту при подготовке к зачету рекомендуется:

– Внимательно прочитать конспекты лекций, запомнить основные положения, разобрать приведенные примеры и ответить на поставленные в конце каждой темы вопросы; повторить алгоритмы выполнения лабораторных работ и более подробное изложение материала каждой темы прочитать в рекомендованной литературе.

– При повторении материала особое внимание уделить терминологии, используемой в дисциплине и основным понятиям.

– Если материал кажется не вполне понятным, найти дополнительную информацию по данной теме и получить консультацию у преподавателя.

Качественной подготовкой к зачету является:

− полное знание всего учебного материала по курсу, выражающееся в строгом соответствии излагаемого студентом материалу учебного пособия, лекций и лабораторных занятий;

− свободное оперирование материалом, выражающееся в выходе за пределы тематики конкретного вопроса с целью оптимально широкого освещения вопроса (свободным оперированием материалом не считается рассуждение на общие темы, не относящиеся к конкретно поставленному вопросу);

− демонстрация знаний дополнительного материала;

− чёткие правильные ответы на дополнительные вопросы, задаваемые преподавателем с целью выяснить объём знаний студента;

– умение решать вычислительные задачи с использованием пакетов прикладных программ.

Неудовлетворительной подготовкой, вследствие которой студенту не зачитывается прохождение курса, является:

− недостаточное знание всего учебного материала по курсу;

− нечёткие ответы или отсутствие ответа на дополнительные вопросы, задаваемые преподавателем с целью выяснить объём знаний студента;

– неумение решать вычислительные задачи с использованием пакетов прикладных программ;

− отсутствие подготовки к зачету или отказ студента от сдачи зачета.

Требования к студенту на зачете.

Необходимым условием для получения зачета по теме является: 1) положительный результат выполнения теста; 2) полное и безошибочное изложение всей теории по вопросу из билета (включая доказательства теорем и выводы формул) и верное решение задачи из билета по сдаваемой теме.

Методические указания к выполнению теста.

Тесты, разработанные авторами данного издания, хранятся в системе MOODLE и расположены по принципу: «Факультет – Кафедра-разработчик – Наименование дисциплины – Тест».

То есть в нашем случае: «ИСИ – ИВС – Вычислительная математика – Тест».

Для записи на курс каждый студент должен ввести адрес своей электронной почты и получить ссылку – подтверждение на своем почтовом ящике.

После того как запись на курс произведена, можно приступать к тестированию, набрав в адресной строке браузера:

http://do.pguas.ru

В начале тестирования каждый студент предварительно должен ввести в компьютер логин – пароль, выдаваемые преподавателем.

Каждый вопрос, наряду с заданием, содержит 3-4 формы ответа, одна (или несколько) из которых является правильной, а другие формы учитывают возможные наиболее часто допускаемые студентами ошибки.

Кроме того, имеются вопросы на соответствие и так называемые открытые вопросы, ожидающие ввода числа или пропущенного слова.

После прохождения теста компьютер выдает в процентном соотношении каждому студенту количество верных ответов.

Следует иметь в виду, что количество попыток ограничено: одна или две, по усмотрению преподавателя. Тестирование ограничено еще и по времени: например, на предложенные случайной выборкой 30 вопросов устанавливается время 45 минут.

На 2-м этапе студент даёт ответы на вопросы билета после предварительной подготовки. Студенту предоставляется право отвечать на вопросы билета без подготовки по его желанию.

Ошибки, на которые указал преподаватель в процессе ответа, должны быть устранены студентом без долгих раздумий. Кроме того, студенту может быть предложено ответить на несколько простых дополнительных вопросов по темам, выходящим за рамки вопроса билета. Преподаватель имеет право задавать дополнительные вопросы, если студент недостаточно полно осветил тематику вопроса, если затруднительно однозначно оценить ответ, если студент не может ответить на вопрос билета, если студент отсутствовал на занятиях в семестре.

На дополнительные вопросы студент отвечает без подготовки. Дополнительные вопросы не требуют долгого развернутого ответа. Это могут быть, например, формулировки основных задач, теорем, определения основных понятий учебного курса, основные формулы, идеи, геометрический смысл понятий, элементы фактического материала, фрагменты выполнения заданий домашней работы по сдаваемой теме, определения понятий и формулы из курса высшей математики, используемые в теории и при решении задач.

Критерии оценки на зачете.

1. Оценка «**зачтено**» выставляется студенту, который

– прочно усвоил предусмотренный программный материал;

– имеет положительный результат выполнения компьютерного теста (не менее 60%);

– правильно, аргументировано ответил на вопрос билета, с приведением примеров;

– показал глубокие систематизированные знания, правильно ответил не менее чем на 60% дополнительных вопросов;

– без ошибок выполнил практическое задание.

Обязательным условием выставленной оценки является правильная речь и владение математической терминологией и символикой.

Дополнительным условием получения оценки «зачтено» могут стать хорошие успехи при выполнении самостоятельной работы и коллоквиума, систематическая активная работа на занятиях.

2. Оценка «**не зачтено**» выставляется студенту, который не справился с 40% вопросов и заданий билета, в ответах на другие вопросы допустил существенные ошибки. Не может ответить на дополнительные вопросы, предложенные преподавателем. Не имеет целостного представления о взаимосвязях тем курса.

3. Студент, набравший при тестировании 95–100%, может быть освобожден от второго этапа по усмотрению преподавателя.

ТЕСТЫ ДЛЯ ЗАЧЕТА

1. Общие вопросы

1. Выберите верные характеристики численных методов:
   - ✓ это численное описание физических процессов;
   - ✓ это средства, необходимые для выполнения одного из этапов математического моделирования;
   - ✓ это методы построения алгоритмов для численных расчетов;
   - ✓ это дискретные аналоги непрерывных математических задач.

2. Дискретный аналог непрерывной математической задачи – это:
   - ✓ разбиение общей задачи на составляющие ее фрагменты для последующего решения;
   - ✓ задача, которая возникает при замене всех функций непрерывного аргумента, присутствующих в задаче, на функции дискретного аргумента;
   - ✓ задача, которая возникает при использовании вместо точных приближенных функций, полученных в результате дискретизации задачи;
   - ✓ алгоритм, который позволяет решить задачу в численной форме.

3. К этапами математического моделирования относятся:
   - ✓ математическая постановка задачи;
   - ✓ теоретическое и экспериментальное исследование свойств моделируемого объекта;
   - ✓ разработка теории решения математических задач;
   - ✓ численное решение моделирующих уравнений.

4. Выберите правильные утверждения:
   - ✓ математическая модель всегда дискретна;
   - ✓ математическое моделирование – это метод решения вычислительных задач;
   - ✓ математическая модель – это описание исследуемого процесса с помощью математических соотношений;
   - ✓ математическая модель – это результат численного решения поставленной задачи.

5. Математическая модель – это:
   - ✓ физические законы и соотношения;
   - ✓ компьютерная программа;
   - ✓ описание процесса средствами математики;
   - ✓ системы математических уравнений, устанавливающих связи между факторами, параметрами, исходными данными и результирующими значениями выходных величин.

6. Математическую модель можно представить в виде:
   - ✓ системы алгебраических уравнений;
   - ✓ решения дифференциального уравнения;
   - ✓ теоремы высшей математики;
   - ✓ дифференциальных уравнений и алгебраических неравенств.

7. Какие из следующих действий можно отнести к этапам математического моделирования:
   - ✓ установление эквивалентностей бесконечно-малых величин;
   - ✓ решение систем математических уравнений и неравенств;
   - ✓ описание экономических законов математическими терминами;
   - ✓ полное описание исследуемого процесса разговорным языком в стихотворной форме.

8. Анализ численных результатов при математическом моделировании позволяет:
   - ✓ установить методику экспериментальных исследований;
   - ✓ скорректировать математическую модель;
   - ✓ установить необходимость корректировки математической модели;
   - ✓ принять решение о замене метода решения математической задачи.

9. Вычислительный эксперимент – это:
   - ✓ численный метод решения задачи;
   - ✓ алгоритм для обработки числовых данных;
   - ✓ численное решение задачи для определенного набора значений исходных данных;
   - ✓ получение решения задачи и его анализ средствами вычислительной математики.

10. Выберите верные утверждения:
    - ✓ численные методы всегда позволяют решить задачу с требуемой точностью;
    - ✓ применение численных методов всегда приводит к решению задачи с определенной ошибкой;
    - ✓ погрешность численного метода возникает только из-за ошибок округления;
    - ✓ численные методы всегда предполагают дискретизацию непрерывной задачи.

11. Выберите правильные положения:
    - ✓ реализуемый алгоритм – это алгоритм, позволяющий получить точное решение задачи;

- ✓ реализуемый алгоритм – это алгоритм получения решения задачи за конечное число действий;
- ✓ время работы реализуемого алгоритма не зависит от требуемой точности решения задачи;
- ✓ Точность решения задачи посредством реализуемого алгоритма может повышаться до любого уровня путем увеличения числа итераций применения алгоритма.

12. Выберите верные утверждения:
- ✓ реализуемый алгоритм всегда экономичный;
- ✓ экономичный алгоритм – это алгоритм, состоящий из наименьшего числа операторов или команд (в сравнении с другими алгоритмами);
- ✓ экономичный алгоритм позволяет решать задачу за наименьшее компьютерное время (в сравнении с другими алгоритмами, решающими данную задачу);
- ✓ экономичный алгоритм позволяет решать задачу с максимально достижимой точностью.

13. Термин «некорректность» можно отнести:
- ✓ к методу решения математической задачи;
- ✓ к математической модели;
- ✓ к математической задаче;
- ✓ к исходным данным для решения задачи.

14. Корректно поставленная математическая задача:
- ✓ устойчива по отношению к начальным условиям;
- ✓ имеет хотя бы одно решение;
- ✓ имеет решение для допустимых исходных данных;
- ✓ не может иметь два или более решения.

15. Алгоритм называют устойчивым, если:
- ✓ ошибки округления при его реализации на ЭВМ не превышают заданного значения;
- ✓ ошибки округления не накапливаются в результате итерационного процесса решения;
- ✓ ошибки округления накапливаются по степенному закону δ^n, $\delta > 1$;
- ✓ алгоритм реализуется за конечное число шагов.

16. В каких случаях вычислительный алгоритм по итерационной схеме $y_{i+1} = \frac{y_i}{d}$, где $d = \mathrm{const}$, будет устойчивым:
- ✓ при $d = 1$;

- ✓ при $d < 1$;
- ✓ при $d > 1$;
- ✓ для любого d.

17. Вычислительная задача поставлена таким образом, что ее решение непрерывно зависит от входных данных. Выберите необходимые дополнительные условия корректности задачи:
- ✓ имеет единственное решение для любых допустимых исходных данных;
- ✓ либо имеет единственное решение, либо не имеет решения вовсе;
- ✓ задача устойчива к ошибкам округления, возникающим при решении;
- ✓ каждому набору входных данных из ОДЗ соответствует единственное решение.

18. Выберите правильные условия. Задача численного интегрирования по формуле $J_n = \sum_{k=0}^{N-1} C_k f(x_k), \quad C_k > 0, \quad \sum_{k=0}^{N-1} C_k = 1$ корректна, так как:
- ✓ по этой формуле можно вычислить интеграл с любой точностью;
- ✓ ошибка в решении задачи не превосходит ошибку, вносимую в подынтегральную функцию;
- ✓ итерационный процесс устойчивый;
- ✓ задача имеет единственное решение.

19. Задача дифференцирования функции из класса дифференцируемых функций не является корректной, так как:
- ✓ она не является разрешимой для любой функции;
- ✓ можно внести погрешность определенного вида, которая приведет к потере устойчивости решения задачи;
- ✓ операция дифференцирования – обратная к операции интегрирования;
- ✓ решение задачи дифференцирования не является единственным.

20. Вычислительная схема $x_n = \frac{1}{2}\left(x_{n-1} + \frac{1}{x_{n-1}}\right)$ сходится к следующему решению уравнения:
- ✓ $x = 0$;
- ✓ $x = 1$;
- ✓ $x = \sqrt{1}$;
- ✓ $x = 2$.

21. При реализации вычислительной схемы $y_{i+1} = d \cdot y_i$ при $d < 1$ погрешность δ, внесенная на *i*-м шаге, в дальнейшем:
- ✓ накапливается по экспоненциальному закону;
- ✓ накапливается по степенному закону;
- ✓ не накапливается;
- ✓ уменьшается.

22. Если погрешность вычислений при использовании алгоритма накапливается по линейному закону, то:
- ✓ алгоритм не является устойчивым;
- ✓ алгоритм является условно устойчивым;
- ✓ для определения устойчивости алгоритма необходима дополнительная информация;
- ✓ алгоритм называется линейно устойчивым.

2. СЛАУ

23. Выберите неверные определения. В матричной форме *n*-мерной неоднородной СЛАУ $AX = B$:
- ✓ A – треугольная матрица размерности $n \times n$;
- ✓ X – вектор-строка неизвестных;
- ✓ B – заданная константа;
- ✓ B – ненулевая матрица.

24. Выберите тип, к которому относится заданная матрица коэффициентов СЛАУ:

$$\begin{pmatrix} 5 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 7 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 9 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 11 \end{pmatrix}:$$

- ✓ плотная;
- ✓ симметричная;
- ✓ ленточная;
- ✓ диагональная.

25. Выберите правильные утверждения:
- ✓ Норму двумерного вектора можно измерить линейкой.
- ✓ Квадрат вектора – это величина $\left(x^T, x\right)$.
- ✓ Норма вектора вычисляется по формуле $\|x\| = \sqrt{|x_1| + |x_2|^2 + \ldots + |x_n|^2}$.
- ✓ Длина вектора всегда больше его нормы.

26. Выберите верные соотношения, всегда выполняющиеся для нормы вектора:
- ✓ $\|x\| > 0$;
- ✓ $\|cx\| = c\|x\|$;
- ✓ $\dfrac{\|x^T \cdot y\|}{\|y\| \cdot \|x\|} \le 1$;
- ✓ $\|x + y + z\| \le \|x\| + \|y\| + \|z\|$.

27. Выберите неверные определения:
- ✓ Норма матрицы – это ее длина.
- ✓ Норма матрицы может быть задана различными способами.
- ✓ Каким бы способом ни была задана норма матрицы, она имеет единственное значение.
- ✓ За норму матрицы можно принять самый большой ее элемент.

28. Норму матрицы можно вычислить как (выберите все правильные варианты ответов):
- ✓ максимальное значение из сумм модулей элементов матрицы по строкам;
- ✓ максимальное значение из сумм модулей элементов матрицы по столбцам;
- ✓ минимальное значение из сумм модулей элементов матрицы по столбцам;
- ✓ максимальное сингулярное число матрицы.

29. Матрица является положительно определенной, если (выберите все правильные варианты ответов):
- ✓ она имеет положительные собственные числа;
- ✓ все главные миноры матрицы положительны;
- ✓ она соответствует положительно определенной квадратичной форме;
- ✓ все ее элементы положительны.

30. Как изменится число обусловленности матрицы, если ее диагональные элементы увеличить:
- ✓ увеличится;
- ✓ уменьшится;
- ✓ не изменится;
- ✓ увеличится при незначительных изменениях и уменьшится при больших изменениях.

31. Задача является хорошо обусловленной, если:
- ✓ при небольших изменениях входных данных результаты изменяются незначительно;
- ✓ существенные изменения входных данных незначительно изменяют результат;
- ✓ изменения входных данных не влияют на результат;
- ✓ изменения входных данных не влияют на алгоритм решения задачи.

32. От хорошей обусловленности задачи зависит:
- ✓ скорость решения задачи;
- ✓ устойчивость решения;
- ✓ точность результата;
- ✓ выбор метода решения задачи.

33. По формуле $\Delta x = \left| x^* - x \right|$, где x^* – точное значение величины, а x – ее известное приближенное значение, вычисляется:
- ✓ относительная погрешность;
- ✓ абсолютная погрешность;
- ✓ шаг;
- ✓ окрестности точки оптимума.

34. Выделите прямые методы решения СЛАУ:
- ✓ метод Гаусса;
- ✓ метод простых итераций;
- ✓ метод сложных итераций;
- ✓ метод LU-разложения.

35. Итерация – это:
- ✓ приближенное решение;
- ✓ шаг вычислений в направлении решения задачи;
- ✓ последовательное приближение;
- ✓ погрешность вычисления.

36. Какие из математических пакетов и офисных приложений можно использовать при решении задач вычислительного характера на компьютере (введите название программного продукта)?

37. Сходимость метода Зейделя зависит от:
- ✓ от нормы матрицы коэффициентов;
- ✓ от начального приближения к решению;
- ✓ от собственных чисел матрицы коэффициентов;
- ✓ –от расположения уравнений в исходной системе.

38. Функция $f(x)$, определенная на интервале $[A, B]$ такова, что $f(A) \cdot f(B) > 0$, это означает, что уравнение $f(x) = 0$ может:
   - ✓ иметь четное число корней;
   - ✓ не иметь корней вообще;
   - ✓ иметь только положительные корни;
   - ✓ иметь нечетное число корней.

39. Составляется характеристическое уравнение для матрицы A, чтобы:
   - ✓ определить норму этой матрицы;
   - ✓ найти собственные значения матрицы;
   - ✓ вычислить детерминант матрицы;
   - ✓ определить положительную определенность матрицы.

40. Нахождение таблично заданной функции в тех точках внутри интервала определения, где ее значения неизвестны, – это:
   - ✓ аппроксимация;
   - ✓ экстраполяция;
   - ✓ интерполирование;
   - ✓ интерполяция.

41. Норму матрицы можно вычислить как (выберите все правильные варианты ответов):
   - ✓ максимальное значение из сумм модулей элементов матрицы по строкам;
   - ✓ максимальное значение из сумм модулей элементов матрицы по столбцам;
   - ✓ минимальное значение из сумм модулей элементов матрицы по столбцам или по строкам;
   - ✓ максимальное сингулярное число матрицы.

42. СЛАУ является хорошо обусловленной, если ее число обусловленности cond удовлетворяет соотношению:
   - ✓ $\mathrm{cond} \sim 1$;
   - ✓ $\mathrm{cond} >> 1$;
   - ✓ $\mathrm{cond} << 1$;
   - ✓ $\mathrm{cond} = 0$.

43. СЛАУ является недоопределенной, если в ее матрице коэффициентов размера $m \times n$:
   - ✓ $m > n$;
   - ✓ $m < n$;
   - ✓ $m \neq n$;
   - ✓ $m = n$.

44. В чем отличие метода простой итерации и метода Зейделя:
- ✓ один из них одношаговый, другой двухшаговый;
- ✓ метод простой итерации – итерационный, а метод Зейделя – точный;
- ✓ в методе Зейделя для приближения переменной на n-й итерации x_k^n используются все приближения x_i^n, $i = 1, \ldots, k-1$, а в методе простой итерации x_k^n определяются с помощью x_i^{n-1}, $i = 1, \ldots, n$;
- ✓ отличаются условиями сходимости.

45. Выберите правильные определения.
- ✓ Для любой СЛАУ существует каноническая форма записи.
- ✓ Матричная форма существует только для определенных СЛАУ.
- ✓ Итерационные методы нельзя применять для решения плохо обусловленных СЛАУ.
- ✓ Все одношаговые итерационные методы имеют одну каноническую формулу.

46. Выражение $B\dfrac{x^{(k+1)} - x^{(k)}}{\tau_k} + Ax^{(k)} = b$, где B, A, b, $x^{(k+1)}$, $x^{(k)}$ – матрицы, τ_k – параметр:
- ✓ является канонической формулой одношаговых итерационных методов.
- ✓ позволяет за конечное число итераций решить любую СЛАУ.
- ✓ представляет собой неявную схему решения СЛАУ.
- ✓ предназначено для решения СЛАУ вида $Ax = b$.

47. Каноническая формула решения СЛАУ:
- ✓ является явной, если $A = E$, где E – единичная матрица;
- ✓ позволяет последовательно вычислять последующее приближение через предыдущее, когда B – единичная матрица;
- ✓ для любой СЛАУ может быть записана в виде $x^{(k+1)} = x^{(k)} - \tau_{k+1}\left(Ax^{(k)} - b\right)$;
- ✓ в общем случае имеет вид: $Bx^{(k+1)} = Bx^{(k)} - \tau\left(Ax^{(k)} - b\right)$.

48. Пусть $x^{(0)}, x^{(m)}$ – соответственно начальное и m-тое приближения к решению, а x^* – точноерешение СЛАУ, тогда:
- ✓ всегда существует число ξ: $\left\|x^{(m)} - x^*\right\| \le \xi\left\|x^{(0)} - x^*\right\|$ для любого m;
- ✓ неравенство $\left\|x^{(m)} - x^*\right\| \le \xi\left\|x^{(0)} - x^*\right\|$ при $0 < \xi < 1$ говорит о сходимости последовательных приближений $x^{(m)}$ к решению x^*;

- ✓ если выполняется неравенство $\left\|x^{(m)}-x^*\right\| \le \xi \left\|x^{(0)}-x^*\right\|$, то величина ξ определяет скорость сходимости;
- ✓ если итерационный метод сходится, то x^* является пределом последовательности $\left\{\left(x^{(m)}-x^{(0)}\right)\right\}$ при $m \to \infty$.

49. Выберите правильные канонические формулы метода простой итерации решения СЛАУ:

- ✓ $B\dfrac{x^{(k+1)}-x^{(k)}}{\tau_k}+Ax^{(k)}=b$, где $B=E$ (единичная матрица);
- ✓ $D\dfrac{x^{(k+1)}-x^{(k)}}{\tau_k}+Ax^{(k)}=b$, где D – диагональная матрица;
- ✓ $x_i=-\dfrac{1}{a_{ii}}\left(\sum\limits_{\substack{j=1\\ j\ne i}} a_{ij}x_j^{(k)}-b_i\right)$;
- ✓ $D\dfrac{x^{(k+1)}-x^{(k)}}{\tau_k}+Ax^{(k)}=B$.

50. Выберите СЛАУ, имеющие одинаковые решения:

- ✓ $\begin{cases}2x+y=1;\\ x+y=2.\end{cases}$
- ✓ $\begin{cases}x=-1;\\ x+y=2.\end{cases}$
- ✓ $\begin{cases}2x+y=1;\\ 3x+2y=3.\end{cases}$
- ✓ $\begin{cases}2x+y=1;\\ -2x-3y=-7.\end{cases}$

51. Из заданных эквивалентных систем выберите пригодную для решения методом простой итерации:

- ✓ $\begin{cases}2x+y=1;\\ x+y=2.\end{cases}$
- ✓ $\begin{cases}x=-1;\\ x+y=2.\end{cases}$

✓ $\begin{cases} 2x + y = 1; \\ 3x + 2y = 3. \end{cases}$

✓ $\begin{cases} 2x + y = 1; \\ -2x - 3y = -7. \end{cases}$

52. Решая СЛАУ $\begin{cases} 2x_1 + x_2 = 1; \\ x_1 + 3x_2 = 2. \end{cases}$ методом простой итерации, начиная с нулевого приближения $x_1^{(0)} = 0,\ x_2^{(0)} = 0$, выберите правильно вычисленное второе приближение к решению:

✓ $x_1^{(2)} = \dfrac{1}{2},\ x_2^{(2)} = \dfrac{1}{4}$;

✓ $x_1^{(2)} = \dfrac{1}{2},\ x_2^{(2)} = \dfrac{1}{8}$;

✓ $x_1^{(2)} = \dfrac{1}{6},\ x_2^{(2)} = \dfrac{1}{2}$;

✓ $x_1^{(2)} = \dfrac{1}{12},\ x_2^{(2)} = \dfrac{1}{4}$.

53. Выберите правильную запись канонической формулы метода простой итерации для СЛАУ $\begin{cases} 2x_1 + x_2 = 1; \\ x_1 + 3x_2 = 2. \end{cases}$

✓ $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \dfrac{\begin{pmatrix} x_1^{(k+1)} \\ x_2^{(k+1)} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x_1^{(k)} \\ x_2^{(k)} \end{pmatrix}}{2} + \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1^{(k+1)} \\ x_2^{(k+1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$;

✓ $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1^{(k+1)} \\ x_2^{(k+1)} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1^{(k)} \\ x_2^{(k)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$;

✓ $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1^{(k+1)} - x_1^{(k)} \\ x_2^{(k+1)} - x_2^{(k)} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1^{(k)} \\ x_2^{(k)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$;

✓ $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1^{(k+1)} \\ x_2^{(k+1)} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1^{(k)} \\ x_2^{(k)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

54. Выполните два шага решения СЛАУ $\begin{cases} 2x_1 + x_2 = 1; \\ x_1 + 3x_2 = 2 \end{cases}$ методом простой итерации, если $x_1^{(0)} = 0,\ x_2^{(0)} = 0$. Запишите вычисленные значения $x_1^{(2)},\ x_2^{(2)}$ – результаты второй итерации – в виде десятичных чисел с двумя знаками после запятой.

55. Для СЛАУ $Ax = b$ каноническая форма записи для метода Зейделя задана в виде: $B\dfrac{x^{(k+1)} - x^{(k)}}{\tau_k} + Ax^{(k)} = b$. Выберите правильную структуру матрицы B:
- ✓ B – диагональная матрица (a_{ii});
- ✓ B – преобразованная матрица $\widetilde{A}$ с преобладанием диагональных элементов;
- ✓ B – сумма диагональной, наддиагональной и поддиагональной матриц матрицы коэффициентов СЛАУ;
- ✓ $B = A^{+} + A^{-} + D$.

56. Выберите правильные положения:
- ✓ метод Зейделя для решения СЛАУ имеет большую область сходимости, чем метод простой итерации;
- ✓ метод Зейделя и метод простой итерации для решения СЛАУ имеют одинаковую скорость сходимости;
- ✓ метод Зейделя сходится к решению СЛАУ с заданной точностью быстрее метода простой итерации за счет выбора итерационного параметра;
- ✓ метод простой итерации имеет одинаковую область сходимости с методом Зейделя, однако уступает ему по скорости сходимости.

57. Выберите правильные утверждения:
Для реализации метода Зейделя необходимо:
- ✓ вычислить матрицу, обратную к матрице коэффициентов СЛАУ;
- ✓ разложить матрицу коэффициентов СЛАУ на поддиагональную, диагональную и наддиагональную матрицы;
- ✓ преобразовать матрицу коэффициентов СЛАУ к виду с преобладающими диагональными элементами при помощи эквивалентных преобразований;
- ✓ привести СЛАУ к виду, где в левой части системы расположен вектор-столбец неизвестных.

58. Для СЛАУ $\begin{cases} 2x - y = 1; \\ -x + 3y = 2 \end{cases}$ рассчитайте и выберите первые приближения к решению по методу простой итерации и методу Зейделя, если $x_0 = 2,\ y_0 = 2$:

- ✓ $x_1 = \frac{4}{3},\ y_1 = \frac{4}{3}$;
- ✓ $x_1 = \frac{3}{2},\ y_1 = \frac{7}{6}$;
- ✓ $x_1 = \frac{4}{3},\ y_1 = \frac{5}{6}$;
- ✓ $x_1 = \frac{3}{2},\ y_1 = \frac{4}{3}$.

59. Для СЛАУ $\begin{cases} 2x - y = 1; \\ -x + 3y = 2 \end{cases}$ рассчитайте и выберите первые приближения к решению по методам нижней и верхней релаксации с параметрами $\frac{1}{3}$ и $\frac{3}{2}$, если $x_0 = 0,\ y_0 = 0$:

- ✓ $x_1 = \frac{1}{6},\ y_1 = \frac{13}{54}$;
- ✓ $x_1 = \frac{1}{3},\ y_1 = \frac{14}{27}$;
- ✓ $x_1 = \frac{3}{2},\ y_1 = \frac{7}{8}$;
- ✓ $x_1 = \frac{1}{3},\ y_1 = \frac{9}{7}$.

60. Выберите правильные утверждения.

- ✓ Методы нижней и верхней релаксации для решения СЛАУ сходятся или расходятся одновременно.
- ✓ В методе верхней релаксации используется параметр, монотонно возрастающий от итерации к итерации.
- ✓ В методе нижней релаксации итерационный параметр строго меньше 1.

- ✓ Методы нижней и верхней релаксации при решении СЛАУ используются одновременно.

61. Для того, чтобы итерационный процесс решения СЛАУ $B\dfrac{x^{(k+1)}-x^{(k)}}{\tau}+Ax^{(k)}=b$ был сходящимся, необходимо:
- ✓ $\dfrac{1}{\|A\|}-\dfrac{\tau}{2}>0$;
- ✓ $\tau>\dfrac{2}{\|A\|}$;
- ✓ $\|A\|<1$;
- ✓ $\|A\|<\dfrac{2}{\tau}$.

62. Выберите справедливые утверждения:
- ✓ Любую СЛАУ можно привести к виду, для которого метод простой итерации будет сходиться со скоростью геометрической прогрессии.
- ✓ Для СЛАУ вида $x=Ax+b$ метод простой итерации сходится к решению, если $\|A\|<1$
- ✓ Если метод простой итерации для СЛАУ вида $x=Ax+b$ сходится, то скорость его сходимости равна скорости сходимости геометрической прогрессии со знаменателем $\|A\|$.
- ✓ Если СЛАУ $Ax+b$ и $x=A'x+\varphi$ эквивалентны, то $\|A\|=\|A'\|$.

3. Нелинейные уравнения

63. Выберите правильные утверждения.
Корень нелинейного алгебраического уравнения $f(x)=0$
- ✓ совпадает с минимумом функции $f(x)$;
- ✓ отделяет участок на числовой оси, на котором функция была отрицательной, от «положительного» участка;
- ✓ обращает равенство $f(x)=0$ в тождество $f(x)\equiv 0$;
- ✓ является точкой пересечения кривой $y=f(x)$ с осью *Ox*.

64. Если уравнение $f(x)=0$ преобразовано к виду $x=\varphi(x)$, то:
- ✓ последовательность $\{x^n=\varphi(x^{n-1})\}$, $n\to\infty$, начиная с любого x_0, сходится к решению уравнения $x=\varphi(x)$;

- ✓ всегда существует x_0, такое что последовательность $\{x^n = \varphi(x^{n-1})\}$, $n \to \infty$ сходится к решению $f(x) = 0$;
- ✓ если последовательность $\{x^n\}$, где $x^n = \varphi(x^{n-1})$ сходится, то предел последовательности – корень уравнения $f(x) = 0$;
- ✓ если предела последовательности $\{x^n = \varphi(x^{n-1})\}$, $n \to \infty$ не существует, то не существует и корня уравнения $f(x) = 0$.

65. Какой из перечисленных итерационных процессов приводит к решению уравнения $x^2 - 2 = 0$ на интервале [1, 2]:
   - ✓ $x^{n+1} = -\left(x^n - \frac{1}{2}\right)^2 + 2\frac{1}{4}$;
   - ✓ $x^{n+1} = \frac{2}{x^n}$;
   - ✓ $x^{n+1} = \frac{1}{2}x^n + \frac{1}{x^n}$;
   - ✓ $x^{n+1} = 2x^n + \frac{2}{x^n}$.

66. Итерационная схема $x^{n+1} = \frac{1}{2}x^n + \frac{1}{x^n}$ сходится к решению уравнения $x^2 - 2 = 0$ на интервале [1, 2], так как:

✓ функция $y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{x}$ на интервале [1, 2] является сжатым отображением;

✓ $|\varphi'(x)| < 1$ на интервале [1, 2];

✓ $|x^{n+1} - x^n| \to 0$ при $n \to \infty$;

✓ $|x^n - 2| \to 0$ при $n \to \infty$.

67. Из условия Липшица для функции φ на интервале [a, b] следует, что:
   - ✓ $|\varphi(x^{n-1}) - \varphi(x^*)| < \theta|x^{n-1} - x^*|$, $\theta < 1$, x^* – корень уравнения $\varphi(x) - x = 0$;
   - ✓ $|\varphi'(x)| < 0$ на интервале [a, b];
   - ✓ уравнение $\varphi(x) = 0$ имеет корень на интервале [a, b];
   - ✓ для решения уравнения $x = \varphi(x)$ можно использовать итерационную схему $x^{n+1} = \varphi(x^n)$ при $x_0 \in [a, b]$.

68. Скорость сходимости итерационной схемы $x^{n+1} = \varphi(x^n)$ для решения уравнения $x = \varphi(x)$ на интервале [a, b] определяется значением:
- ✓ $\max\limits_{x\in[a,b]}|\varphi(x)|$;
- ✓ $\min\limits_{x\in[a,b]}|\varphi(x)|$;
- ✓ $\max\limits_{x\in[a,b]}|\varphi'(x)|$;
- ✓ $\min\limits_{x\in[a,b]}|x-\varphi(x)|$.

69. Функция $f(x)$ непрерывна на интервале [a, b]. Выберите правильное утверждение:
- ✓ Если $f(a)\cdot f(b) > 0$, то внутри интервала [a, b] не существует корня уравнения $\varphi(x)=0$.
- ✓ Если $f(a)\cdot f(b) < 0$, то на интервале [a, b] существует единственный корень уравнения $\varphi(x)=0$.
- ✓ Если $f(a)\cdot f(b) = 0$, то либо a, либо b является корнем уравнения $\varphi(x)=0$.
- ✓ Если $f(a)\cdot f(b) < 0$, то функция $f(x)$ на интервале [a, b] меняет знак.

70. Для функции $f(x)$, заданной на интервале [a, b], известно, что $f(a)\cdot f(b) > 0$. Сколько корней функции $f(x)$, возможно, существует на интервале [a, b]:
- ✓ один;
- ✓ два;
- ✓ ни одного;
- ✓ три.

71. Выберите правильные фрагменты алгоритма метода половинного деления для отыскания корня x* уравнения $f(x)=0$ на интервале [A, B], если выполнено $(k-1)$ итераций и $z_k = A_k + \dfrac{B_k - A_k}{2}$:
- ✓ $if\ \ f(z_k)\cdot f(A_k) < 0\ \ then\ \ B_{k+1} = z_k$
- ✓ $if\ \ f(z_k)\cdot f(A_k) > 0\ \ then\ \ B_{k+1} = B_k,\ \ A_{k+1} = z_k$
- ✓ $if\ \ f(z_k)\cdot f(A_k) = 0\ \ then\ \ z_k = x^*$
- ✓ $if\ \ f(z_k)\cdot f(A_k) < 0\ \ then\ \ B_{k+1} = z_k,\ \ A_{k+1} = A_k$

72. На интервале [A, B] выполнено четыре итерации по методу деления отрезка пополам для поиска корня уравнения $f(x)=0$, т.е. найдены значения A_n, B_n. Каково значение $|A_n - B_n|$:

- ✓ 0,025;
- ✓ 0,03125;
- ✓ 0,0625;
- ✓ 0,001525.

73. В каких случаях метод хорд не может быть использован для поиска корня уравнения $f(x)=0$, где $f(x)$ – непрерывная функция, на интервале [A, B]:

- ✓ если $f(x)$ на интервале [A, B] вогнута;
- ✓ если $f(x)$ на интервале [A, B] выпукла;
- ✓ если $f(x)$ на интервале [A, B] имеет точку перегиба;
- ✓ если $f(x)$ на интервале [A, B] одного знака.

74. Функция $f(x)$ на интервале [A, B] такова, что $f(a)\cdot f(b)<0$ и внутри [A, B] существует один корень уравнения $f(x)=0$. Исходя из какого математического положения записано уравнение секущей, проходящей через точки $(A, f(A))$; $(B, f(B))$: $\dfrac{y-f(A)}{x-A}=\dfrac{f(B)-f(A)}{B-A}$:

- ✓ из теоремы Пифагора;
- ✓ из свойств прямоугольного треугольника;
- ✓ из свойств подобия треугольников;
- ✓ из свойств касательной к функции в точках A и B.

75. Схема метода для поиска корня $f(x)=0$ на [A, B] представлена в виде: $A_0 = A$; $A_k = A_{k-1} + \Delta A_k$; $\Delta A_k = \dfrac{-f(A_{k-1})(B-A_{k-1})}{f(B)-f(A_{k-1})}$. Выберите возможные варианты окончания работы алгоритма поиска корня:

- ✓ $|\Delta A_k| < \varepsilon$;
- ✓ $|f(B) - f(A_k)| < \varepsilon$;
- ✓ $|B - A_k| < \varepsilon$;
- ✓ $|f(A_k)| < \varepsilon$.

76. Для функции $y = x^2 - 1$ выберите правильное значение первого приближения к корню по методу хорд на интервале [0, 2]:
   - ✓ 0,6;
   - ✓ 0,5;
   - ✓ 0,55;
   - ✓ 0,45.

77. Для функции $y = x^2 - 1$ выберите правильное значение первого приближения к корню по методу касательных на интервале [0, 2]:
   - ✓ 1,0;
   - ✓ 1,75;
   - ✓ 1,25;
   - ✓ 1,5.

78. Какова длина интервала на первом шаге поиска корня функции $y = x^2 - 1$ по методу хорд и касательных, если поиск корня начат с интервала [0, 2]:
   - ✓ 0,5;
   - ✓ 1,0;
   - ✓ 0,75;
   - ✓ 1,25.

79. Кривая $y = f(x)$ на интервале $[A, B]$ вогнутая, т.е. $f''(x) < 0$, $x \in [A, B]$. Что произойдет, если метод хорд и касательных начать с точки *A* (выбрать правильные утверждения):
   - ✓ Если $f(A) > 0$, то касательная пересечет ось *Ox* за точкой *B*.
   - ✓ Если $f(A) > 0 \;\; \forall x \in [A, B]$, то метод хорд применим, только когда исходной точкой является точка *B*.
   - ✓ Если $f(B) < 0 \;\; \forall x \in [A, B]$, то метод обязательно отыщет корень, если начать из точки *A*.
   - ✓ Если $f(A) \cdot f(B) < 0$, то метод хорд и касательных сходится из точки, в которой функция $f(x)$ положительна.

80. Какое максимальное количество корней на некотором интервале $[A, B]$ может иметь функция $f(x) = ax + e^{bx} + cx^2 + dx^3$:
   - ✓ один;
   - ✓ ни одного;
   - ✓ три;
   - ✓ два.

81. Какие из методов решения НАУ не требуют задания начального приближения:
- ✓ метод касательных;
- ✓ метод половинного деления;
- ✓ метод секущих;
- ✓ метод Ньютона.

82. Какой из разделов не относится к математическому программированию:
- ✓ линейное программирование;
- ✓ системное программирование;
- ✓ выпуклое программирование;
- ✓ квадратичное программирование.

83. Точка является граничной точкой множества *A*, если:
- ✓ любая окрестность этой точки содержит как элементы множества *A*, так и элементы дополнения к этому множеству;
- ✓ существует окрестность, которая содержит как элементы множества *A*, так и элементы дополнения к этому множеству;
- ✓ любая окрестность этой точки является непустым множеством;
- ✓ любая окрестность этой точки содержит только элементы множества *A*.

84. Итерационная схема $x = \varphi(x)$ сходится в области поиска решения, потому что:
- ✓ правая часть уравнения является линейной;
- ✓ модуль производной $|\varphi'(x)| < 1$ во всех точках области решения;
- ✓ модуль функции $|\varphi(x)| < 1$ во всех точках области решения;
- ✓ для функции $\varphi(x)$ выполняется условие Липшица.

85. Итерационную схему метода Ньютона решения НАУ можно записать в виде:
- ✓ $x^{k+1} = x^k + \dfrac{f(x^k)}{f'(x^k)}$;
- ✓ $x^{k+1} = x^k - f(x^k) \cdot (f'(x^k))^{-1}$;
- ✓ $x^{k+1} = x^k - f(x^k) \cdot |f'(x^k)|$;
- ✓ $x^{k+1} = x^k - \dfrac{f(x^k)}{f'(x^k)}$.

86. Для решения уравнения $\ln x = 0$ методом Ньютона верна итерационная схема:
- ✓ $x^{k+1} = x^k\left(1 - \ln x^k\right)$;
- ✓ $x^{k+1} = x^k - \ln x^k$;
- ✓ $x^{k+1} = x^k + x^k \ln x^k$;
- ✓ $x^{k+1} = x^k - \dfrac{\ln x^k}{x}$.

4. Системы нелинейных уравнений

87. Для системы уравнений $\begin{cases} x^2 - y^2 + xy = 1; \\ x - y - xy = 0 \end{cases}$ выбрать из представленных чисел величину, соответствующую норме матрицы Якоби системы в точке (0, 1), полученной как максимум из суммы модулей элементов строк матрицы:
- ✓ 1;
- ✓ 2;
- ✓ 3;
- ✓ 4.

88. СНАУ представлена в векторной форме $F(X) = 0$. Выберите правильные положения:
- ✓ $F(X)$ и X-вектор представляют собой столбцы одинаковой размерности;
- ✓ в утверждении «$F(X)$ и X-вектор представляют собой столбцы одинаковой размерности» есть ошибка, заключающаяся в том, что $F(X)$ – вектор-строка
- ✓ размерности векторов $F(X)$ и X могут быть неодинаковыми;
- ✓ правая часть уравнения $F(X) = 0$ является вектором.

89. СНАУ $F(X) = 0$ преобразована в СНАУ $X = \Phi(X)$ таким образом, что обе системы имеют один и тот же корень, тогда:
- ✓ корень уравнения $F(X) = 0$ всегда можно найти по итерационной схеме $X^n = \Phi\left(X^{n-1}\right)$;
- ✓ если $\Phi(X)$ – непрерывна, то она удовлетворяет условию Липшица;
- ✓ условие $\left\|\Phi(X') - \Phi(X'')\right\| < \left\|X' - X''\right\|$ является условием Липшица;

- ✓ для выполнения условия Липшица достаточно выполнения условия $\|\Phi'(X)\| < 1$ для всех X из области определения функции $\Phi(X)$.

90. Для СНАУ $X = \Phi(X)$ известно, что $\max\limits_{x}\|\Phi'(X)\| < 1$ тогда (выберите верное):
- ✓ итерационный процесс $X^n = \Phi\left(X^{n-1}\right)$ сходится от любого начального приближения;
- ✓ функция $F(X)$ может как удовлетворять, так и не удовлетворять условию Липшица;
- ✓ за параметр θ в условии Липшица можно принять $\|\Phi'(X)\|$, вычисленную в любой точке X области определения функции $\Phi(X)$;
- ✓ существует такая X^*, что $\Phi\left(X^*\right) = 0$.

91. Метод Ньютона для СНАУ $F(X) = 0$ записан в следующем виде: $\left(X^{(n)}\right)^T = \left(X^{(n-1)}\right)^T - \left(F'\left(X^{(n-1)}\right)\right)^{-1} \cdot F\left(X^{(n-1)}\right)$. Выберите правильные расшифровки этого соотношения:
- ✓ $X^{(n)}$ – вектор-строка приближения к решению;
- ✓ $F'\left(X^{(n-1)}\right)$ – матрица, состоящая из функций $\left(\dfrac{\partial f_i}{\partial x_j}\right)$, $i = 1, \ldots, n$, $j = 1, \ldots, n$, где n – порядок СНАУ;
- ✓ $\left(F'\left(X^{(n-1)}\right)\right)^{-1} \cdot F\left(X^{(n-1)}\right)$ – числовой вектор приращения для определения (n)-го приближения к решению;
- ✓ Для одномерного случая $\left(F'\left(X^{(n-1)}\right)\right)^{-1}$ – функция, обратная к производной.

92. Для СНАУ $\begin{cases} x^2 - y = 0 \\ x + y^2 = 1 \end{cases}$ выберите матрицу Якоби в точке (1, 1):
- ✓ $\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$;
- ✓ $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$;
- ✓ $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$;

✓ $\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.

93. Для СНАУ $\begin{cases} x^2 - y = 0 \\ x + y^2 = 1 \end{cases}$ выберите матрицу, обратную к матрице Якоби в точке (1, 1):

✓ $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$;

✓ $\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$;

✓ $\frac{1}{5}\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$;

✓ $\frac{1}{5}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$.

94. Для СНАУ $\begin{cases} x_1^{\ 2} - x_2 = 0 \\ x_1 + x_2^2 = 1 \end{cases}$ выберите правильное первое приближение к решению, если $X^0 = (1, 1)$:

✓ $x^1 = (0{,}6;\ 0{,}8)$;

✓ $x^1 = (0{,}4;\ 0{,}6)$;

✓ $x^1 = (0{,}8;\ 0{,}6)$;

✓ $x^1 = (0{,}8;\ -0{,}6)$.

95. Для СНАУ $\begin{cases} x_1^{\ 2} - x_2 = 0 \\ x_1 + x_2^2 = 1 \end{cases}$ определите приращение $\left(F'\left(X^{(0)}\right)\right)^{-1} \cdot F\left(X^{(0)}\right)$, если $X^0 = (1, 1)$:

✓ $\begin{pmatrix} 0{,}1 \\ 0{,}2 \end{pmatrix}$;

✓ $\begin{pmatrix} 0{,}2 \\ 0{,}4 \end{pmatrix}$;

✓ $\begin{pmatrix} 0{,}6 \\ 0{,}8 \end{pmatrix}$;

✓ $\begin{pmatrix} 0{,}4 \\ 0{,}2 \end{pmatrix}$.

96. Для СНАУ $\begin{cases} x_1^{\ 2} - x_2 = 0 \\ x_1 + x_2^2 - 1 = 0 \end{cases}$ определите значение функций $f_1\left(x_1^1, x_2^1\right)$; $f_2\left(x_1^1, x_2^1\right)$, где x_1^1, x_2^1 – первое приближение по методу Ньютона для вычисления корня СНАУ, а $X^0 = (1, 1)$:
- ✓ $(0{,}04;\ 1{,}16)$;
- ✓ $(0{,}01;\ 1{,}06)$;
- ✓ $(0{,}1;\ 1{,}1)$;
- ✓ $(0{,}06;\ 0{,}96)$.

97. Выберите правильные утверждения:
- ✓ метод Ньютона сходится при любом начальном приближении;
- ✓ схема метода Ньютона – Рафсона позволяет увеличить скорость сходимости метода Ньютона;
- ✓ метод Левенберга – Марквардта имеет итерационную схему $x^{k+1} = x^k - \lambda_k \left(F'\left(x^k\right)\right)^{-1} F\left(x^k\right)$;
- ✓ схемы методов Ньютона и Ньютона – Рафсона имеют различные области сходимости.

98. Матрица Якоби – это:
- ✓ матрица частных производных первого порядка для вектор-функции многих переменных;
- ✓ матрица частных производных первого порядка для вектор-функции одной переменной;
- ✓ матрица частных производных первого порядка для градиента скалярной функции;
- ✓ матрица частных производных второго порядка для скалярной функции многих переменных;

99. Итерационная схема $x = \varphi(x)$ сходится в области поиска решения, если:
- ✓ правая часть уравнения является линейной;
- ✓ $\left|\varphi'(x)\right| < 1$ во всех точках области решения;
- ✓ модуль функции $\left|\varphi(x)\right| < 1$ во всех точках области решения;
- ✓ для функции $\varphi(x)$ выполняется условие Липшица.

100. Наиболее эффективным методом для решения СНАУ с плохо обусловленной матрицей Якоби является:
- ✓ метод Ньютона – Рафсона;
- ✓ метод Ньютона;
- ✓ метод Левенберга – Марквардта.

101. Выберите правильные утверждения:

- ✓ метод Ньютона сходится при любом начальном приближении;
- ✓ схема метода Ньютона – Рафсона позволяет расширить область сходимости метода Ньютона;
- ✓ метод Левенберга – Марквардта имеет итерационную схему $x^{k+1} = x^k - \lambda_k \left(F'\left(x^k\right)\right)^{-1} F\left(x^k\right)$;
- ✓ схемы методов Ньютона и Ньютона – Рафсона совпадают при $\lambda_k = 1$, где λ_k – некоторая константа, используемая в методе Ньютона – Рафсона.

102. Метод Левенберга – Марквардта для решения СНАУ имеет следующую итерационную схему:

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} - \left[F'\left(x^{(k)} + \lambda_k E\right)\right]^{-1} F\left(x^{(k)}\right).$$

Выберите правильные пояснения:

- ✓ k – размерность СНАУ
- ✓ $\lambda_k E$ – матрица, состоящая целиком из чисел λ_k
- ✓ $F'\left(x^{(k)}\right)$ – производная от функции $F(x)$
- ✓ При $\lambda_k = 0$ метод совпадает с методом Ньютона

103. Метод Левенберга – Марквардта для решения СНАУ имеет следующую итерационную схему:

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} - \left[F'\left(x^{(k)} + \lambda_k E\right)\right]^{-1} F\left(x^{(k)}\right).$$

Выберите правильные пояснения.

- ✓ Число обусловленности матрицы $F'\left(x^{(k)}\right)$ всегда больше числа обусловленности матрицы $\left(F'\left(x^{(k)}\right) + \lambda_k E\right)$.
- ✓ Выражение $\left[F'\left(x^{(k)} + \lambda_k E\right)\right]^{-1} F\left(x^{(k)}\right)$ представляет собой квадратную матрицу размера $n \times n$, где n – порядок СНАУ.
- ✓ $F'\left(x^{(k)}\right)$ – числовая матрица, состоящая из значений частных производных функции $F(x)$ в точке $x^{(k)}$.
- ✓ Метод Левенберга – Марквардта имеет большую область сходимости, чем метод Ньютона.

104. Найдите соответствие между методом решения СНАУ и его итерационной схемой:

- ✓ $x^{(k+1)} - x^{(k)} = -\lambda\left[F'\left(x^{(k)}\right)\right]^{-1} F\left(x^{(k)}\right)$ – метод Ньютона – Рафсона
- ✓ $x^{(k+1)} = x^{(k)} - \lambda\left[F'\left(x^{(k)} + \lambda_k E\right)\right]^{-1} F\left(x^{(k)}\right)$ – метод Левенберга – Марквардта
- ✓ $x^{(k+1)} - x^{(k)} = -\left[F'\left(x^{(k)}\right)\right]^{-1} F\left(x^{(k)}\right)$ – метод Ньютона
- ✓ $x^{(k+1)} - x^{(k)} = -\left[\left(F'\left(x^{(k)}\right)\right)^{-1} + \lambda_k E\right] F\left(x^{(k)}\right)$ – без имени

105. Выберите, какими методами решения СНАУ $\begin{cases} x_1^2 - x_2 = 0 \\ x_1^2 + x_2 = 2 \end{cases}$ получено $(k+1)$-е приближение к решению, если $x^{(k+1)} - x^{(k)} = -\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix}$, а $x^{(k)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$:

- ✓ методом Ньютона;
- ✓ методом Левенберга – Марквардта при $\lambda = \frac{1}{2}$;
- ✓ методом Ньютона – Рафсона при $\lambda = \frac{1}{2}$.

106. Метод Ньютона сходится при минимизации функции за n итераций, где n – количество переменных:
   - ✓ если функция линейна в области определения;
   - ✓ если функция равно нулю во всех точках пространства;
   - ✓ если функция постоянна в области определения;
   - ✓ такая ситуация невозможна.

107. Метод Ньютона сходится при минимизации функции за n итераций, где n – количество переменных:
   - ✓ если функция представляет собой квадратичную форму;
   - ✓ если функция линейна относительно всех переменных;
   - ✓ если функция определяет плоскость в трехмерном евклидовом пространстве;
   - ✓ если функция имеет вид: $y = kx + b$.

5. Интерполирование и аппроксимация функций

108. Решение задачи интерполирования функции позволяет находить:
   - ✓ аналитический вид функции, заданной таблично;
   - ✓ интерполянту, значение которой в узлах интерполирования совпадают со значениями заданной функции;
   - ✓ значения функции, заданной в виде таблицы в точках, не совпадающих с таблично заданными значениями аргумента;
   - ✓ коэффициенты интерполирующего полинома.

109. Узлы интерполяции – это:
   - ✓ множество значений аргумента табличной функции;

- ✓ точки совпадений значения значений заданной функции и интерполянты;
- ✓ множество решений уравнения $f(x)-\varphi(x)=0$, где $f(x)$ – заданная функция; $\varphi(x)$ – интерполянта;
- ✓ множество точек на плоскости, через которые проходит заданная функция

110. Интерполянта $\varphi(x)$ заданной функции $f(x)$ – это:
- ✓ линейная комбинация линейно-независимых функций;
- ✓ функция, заданная аналитически и совпадающая с табличной в узлах интерполяции;
- ✓ функция, пересекающаяся с заданной табличной во всех точках ее определения;
- ✓ функция, для которой $\sum_{i=1}^{n}\left(\varphi(x_i)-f(x_i)\right)^2=0$.

111. Если $\varphi(x)=\sum_{k=0}^{n}C_k\Phi_k(x)$ – интерполянта функции $f(x)$, заданной точками $(x_i,\, y_i)$, то:
- ✓ неизвестные функции $\Phi_k(x)$ можно найти из СНАУ $y_i=\sum_{k=0}^{n}C_k\Phi_k(x_i)$;
- ✓ C_k – система линейно независимых векторов;
- ✓ каждая функция $\Phi_k(x)$ – полином степени k;
- ✓ $\Phi_k(x)$ – система заданных линейно независимых функций.

112. Для функции $f(x)$, $x\in[a,b]$, заданной таблично в узлах $(x_i,\, y_i)$, найдены две интерполянты: на основе системы степенных функций $\varphi(x)$ и на основе системы тригонометрических функций $\omega(x)$. Выберите правильные положения:
- ✓ $\forall x\in[a,b]\quad f(x)=\varphi(x)=\omega(x)$;
- ✓ $\exists x\in[a,b]\quad f(x)=\varphi(x)=\omega(x)$;
- ✓ $\{x_i\}$ – множество корней функции $v(x)=\varphi(x)-\omega(x)$;
- ✓ если $\varphi(x)=\sum_{k=0}^{n}C_kx^k$, то $\omega(x)=\sum_{k=0}^{n}C_k(\cos kx+\sin kx)$.

113. СЛАУ для определения интерполяционного полинома записана в виде $\sum_{k=0}^{n}C_kx_j^k=y_j$, $j=0,\ldots,n$. Выберите правильные утверждения:
- ✓ эта система всегда имеет решение;

- ✓ определитель матрицы коэффициентов при любых значениях x_j, таких что $x_j \neq x_i$ при $i \neq j$ не равен 0;
- ✓ ни один из C_k, $k = 0, \ldots, n$ не может быть равным 0;
- ✓ один из столбцов определителя Вандермонда состоит только из из компонент, равных единице.

114. Интерполяционный полином для интерполирования табличной функции, значения которой известны в $(n+1)$-й точке:
- ✓ определяется единственным образом;
- ✓ всегда существует независимо от системы узлов интерполяции (x_i, y_i);
- ✓ имеет степень меньшую, либо равную $(n+1)$;
- ✓ содержит в своей структуре $(n+1)$ коэффициент.

115. Интерполяционный полином Лагранжа:
- ✓ представляет собой дробно-рациональную функцию;
- ✓ имеет вид $\sum\limits_{k=0}^{n} y_k \cdot \prod\limits_{\substack{i=0 \\ i \neq k}} \dfrac{(x - x_i)}{(x_k - x_i)}$;
- ✓ определен только на интервале интерполирования;
- ✓ является полиномом степени и вида $d_0 + d_1 x + d_2 x^2 + \ldots + d_n x^n$, где $d \geq 0$, $i = 1, \ldots, n$.

116. Для оценки точности полиномиального приближения функции $\varphi(x)$ в некоторой точке x полиномом Лагранжа степени n необходимо:
- ✓ построить полином Лагранжа степени n;
- ✓ оценить максимальное значение производной функции $\varphi(x)$ порядка $(n+1)$;
- ✓ вычислить приближенное значение $\varphi(x)$ при помощи полинома Лагранжа;
- ✓ знать узлы интерполирования.

117. Определить коэффициент при старшей степени переменной x полинома Лагранжа по следующей таблице:

i	0	1
x_i	1	2
y_i	0,5	1

- ✓ 2;
- ✓ 1,5;
- ✓ 1;
- ✓ 0,5.

118. Построить полином Лагранжа и определить приближенное значение функции в точке $x = 1{,}5$ для функции, заданной следующей таблицей:

i	0	1
x_i	1	2
y_i	0,5	1

- ✓ 1,25;
- ✓ 0,75;
- ✓ 1,5;
- ✓ 0,25.

119. Определить значение коэффициента при x^0 интерполяционного полинома Лагранжа для следующей таблично заданной функции:

i	0	1
x_i	1	2
y_i	0,5	1

- ✓ 0,5;
- ✓ 1;
- ✓ 0;
- ✓ 0,25.

120. Выберите выражения, которые являются слагаемыми в интерполяционном полиноме Ньютона:

- ✓ $\dfrac{\Delta y_0}{h \cdot 1!}(x - x_0)$;
- ✓ $\dfrac{\Delta^2 y_1}{h^2 \cdot 2!}(x - x_0)(x - x_1)$;
- ✓ $\dfrac{\Delta^n y_n}{h^n \cdot n!}(x - x_0)\ldots(x - x_n)$;
- ✓ $\dfrac{\Delta^3 y_0}{h^3 \cdot 3!}(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)$.

121. Выберите правильные положения из нижеприведенных.

- ✓ Для построения интерполяционного полинома Ньютона порядка n необходимо вычислить все разделенные разности до порядка $(n+1)$ включительно.
- ✓ Величина h в записи интерполяционного полинома Ньютона равна расстоянию от точки x_1 до точки x_0, где x_1 и x_0 – узлы интерполяции.
- ✓ Интерполяционные полиномы Лагранжа и Ньютона, построенные интерполирования некоторой табличной функции, представляют собой один и тот же полином.

- ✓ Неразделенные разности используются для записи полинома Ньютона только тогда, когда задан шаг интерполяции табличной функции.

122. Вычислить $\dfrac{\Delta^2 y_0}{h^2 \cdot 2!}$ для следующей табличной функции:

i	0	1	2
x_i	1	2	3
y_i	0,5	1	1,5

- ✓ 1;
- ✓ 0,5;
- ✓ 0;
- ✓ 2.

123. Вычислить $\Delta y_0^1 + \Delta y_1^1$ для следующей табличной функции:

i	0	1	2
x_i	1	2	3
y_i	0,5	1	1,5

- ✓ 0;
- ✓ 1;
- ✓ 2;
- ✓ 3.

124. Записать полином Ньютона и вычислить приближенное значение в точке $x = 2{,}5$ функции, заданной таблично:

i	0	1	2
x_i	1	2	3
y_i	0,5	1	1,5

- ✓ 1,75;
- ✓ 1,5;
- ✓ 1,25;
- ✓ 1.

125. Записать полином Ньютона для функции, заданной таблично:

i	0	1	2
x_i	1	2	3
y_i	0,5	1	1,5

- ✓ $P(x) = 0{,}5 + \dfrac{1}{1!}(x-1) + \dfrac{0{,}5}{2!}(x-1)(x-2)$;
- ✓ $P(x) = 0{,}5 + \dfrac{0{,}5}{2!}(x-1)$;
- ✓ $P(x) = x - 0{,}5$;

- ✓ $P(x)=\frac{1}{2}x$.

126. Выберите правильные условия, необходимые для построения кубического полинома для сплайн-интерполяции в точке $x_i,\ i=1,\ldots,n$:
   - ✓ $P(x_i)=y_i$;
   - ✓ $\lim\limits_{\substack{x\to x_i \\ x_{i-1}<x<x_i}} P'(x)=\lim\limits_{\substack{x\to x_i \\ x_{i-1}>x>x_i}} P'(x)$;
   - ✓ $\frac{d^2P}{dx^2}(x_i-0)=\frac{d^2P}{dx^2}(x_i+0)$;
   - ✓ $P''(x_i)=P''(x_{i+1})$.

127. Заданы точки интерполяции $x_i,\ i=1,\ldots,n$. Выберите правильные положения:
   - ✓ Для кубической сплайн-интерполяции табличной функции, заданной в точках x_i, необходимо построить множество кубических полиномов, проходящих через каждые четыре соседние точки.
   - ✓ Кубический интерполирующий полином для сплайн-интерполяции определен на всем интервале интерполяции и обладает свойством $P(x_i)=y_i$, где $(x_i,\ y_i)$ – узлы интерполяции.
   - ✓ Метод сплайн-интерполяции предполагает построение кубического полинома на каждом из интервалов $[x_i,\ x_{i+1}]$.
   - ✓ Коэффициенты каждого кубического полинома при сплайн-интерполяции определяются из условия совпадения соседних полиномов и их производных до второго порядка включительно.

128. При аппроксимации функций решается задача:
   - ✓ построения функции, заданной аналитически и проходящей через те же точки, что и таблично заданная аппроксимируемая функция.
   - ✓ приближения заданной табличной функции некоторой функцией из выбранного класса по методу наименьших квадратов;
   - ✓ определения коэффициентов функции выбранного типа, заданной аналитически из условия минимума среднеквадратического отклонения;
   - ✓ построения алгоритма расчета значений табличной функции в точках, не совпадающих с узлами интерполяции.

129. При аппроксимации табличной функции многочленом степени m:
   - ✓ значения многочлена при значениях аргумента, равных табличным, обязательно совпадают со значениями табличной функции;

- ✓ степень многочлена определяется количеством точек, в которых задана табличная функция;
- ✓ его коэффициенты представляют собой вектор решения задачи минимизации среднеквадратичного отклонения многочлена от известной функции, заданной таблично;
- ✓ его коэффициенты являются решением СЛАУ, называемой нормальной.

130. Выберите правильно записанный k-й компонент вектора-столбца нормальной системы, возникающей при решении задачи аппроксимации функции по n точкам:

- ✓ $\sum_{j=0}^{n} y_j^k x_j$;
- ✓ $\sum_{j=0}^{n} y_j^k x_j^k$;
- ✓ $\sum_{j=0}^{n} x_j^k$;
- ✓ $\sum_{j=0}^{n} x_j^k y_j$.

131. k-е уравнение нормальной СЛАУ для решения задачи полиномиальной аппроксимации

$$a_0 \sum_{j=0}^{n} x_j^k + a_1 \sum_{j=0}^{n} x_j^{k+1} + \ldots + a_m \sum_{j=0}^{n} x_j^{k+m} = \sum_{j=0}^{m} y_j x_j^k$$

получается из соотношения:

- ✓ $a_0 + a_1 x_k + a_2 x_k^2 + \ldots + a_m x_k^m - y_k = 0$;
- ✓ $\min\limits_{a_k} \sum_{j=0}^{n} \left(a_0 + a_1 x_j + a_2 x_j^2 + \ldots + a_m x_j^m - y_j \right)^2$;
- ✓ $\dfrac{\partial \left[\sum_{j=0}^{n} \left(a_0 + a_1 x_j + a_2 x_j^2 + \ldots + a_m x_j^m - y_j \right)^2 \right]}{\partial x_k}$;
- ✓ $\dfrac{\partial \left[\sum_{j=0}^{n} \left(a_0 + a_1 x_j + a_2 x_j^2 + \ldots + a_m x_j^m - y_j \right)^2 \right]}{\partial a_k}$.

132. Для решения задачи аппроксимации выберите правильное уравнение $\frac{\partial S}{\partial a_1}=0$, если аппроксимирующей функцией является полином 3-й степени, а исходная функция задана следующей таблицей:

j	0	1	2
x_j	1	2	3
y_j	1	4	9

- ✓ $2a_0+4a_1+6a_2=6$;
- ✓ $3a_0+6a_1+14a_2=14$;
- ✓ $6a_0+14a_1+32a_2=32$;
- ✓ $8a_0+16a_1+34a_2=36$.

133. Для решения задачи аппроксимации выберите правильное уравнение $\frac{\partial S}{\partial a_2}=0$, если аппроксимирующей функцией является полином 3-й степени, а исходная функция задана следующей таблицей:

j	0	1	2
x_j	1	2	3
y_j	1	4	9

- ✓ $3a_0+6a_1+14a_2=14$;
- ✓ $5a_0+10a_1+20a_2=20$;
- ✓ $6a_0+14a_1+32a_2=36$;
- ✓ $16a_0+32a_1+44a_2=56$.

134. Для решения задачи аппроксимации выберите правильное уравнение $\frac{\partial S}{\partial a_3}=0$, если аппроксимирующей функцией является полином 3-й степени, а исходная функция задана следующей таблицей:

j	0	1	2
x_j	1	2	3
y_j	1	4	9

- ✓ $6a_0+14a_1+36a_2=36$;
- ✓ $12a_0+14a_1+28a_2=28$;
- ✓ $14a_0+36a_1+98a_2=98$;
- ✓ $7a_0+18a_1+49a_2=49$.

135. Выберите два уравнения для вычисления коэффициентов A и B аппроксимирующей функции $y = Ae^{Bx}$ по методу наименьших квадратов, если исходная функция задана следующей таблицей:

j	0	1	2
x_j	1	2	3
y_j	1	4	9

- ✓ $Ae^{B} - 1 + \left(Ae^{2B} - 1\right)e^{B} + \left(Ae^{3B} - 1\right)e^{2B} = 0$;
- ✓ $\left(Ae^{B} - 1\right) + 2\left(Ae^{2B} - 1\right)e^{B} + 3\left(Ae^{3B} - 1\right)e^{2B} = 0$;
- ✓ $2\left(Ae^{B} - 1\right) + 6\left(Ae^{2B} - 1\right)e^{2B} + 9\left(Ae^{3B} - 1\right)e^{3B} = 0$;
- ✓ $Ae^{B} - 1 + \left(2Ae^{2B} - 1\right)e^{2B} + \left(3Ae^{3B} - 1\right)e^{3B} = 0$.

136. Для оценки параметров аппроксимирующей линейной эмпирической формулы, построенной по экспериментальным данным, необходимо вычислить:
- ✓ узлы аппроксимации;
- ✓ коэффициенты линейной модели;
- ✓ дисперсию случайной величины;
- ✓ взвешенную сумму квадратов.

137. Выбор эмпирической линейной модели, построенной по экспериментальным данным, адекватен реальной зависимости, если:
- ✓ отношение меры рассеивания S_l^2, вызванного случайной ошибкой к взвешенной сумме квадратов S_r^2 больше либо равно значению критерия Фишера $F_{1-\alpha}$, где α – уровень значимости;
- ✓ $\dfrac{S_l^2}{S_r^2} \geq \dfrac{1}{F_{1-\alpha}}$, где α – уровень значимости;
- ✓ – модель записана в виде $\widehat{y} = a + b\left(x - \overline{x}\right)$, где $\overline{x}$ – среднее, a и b – коэффициенты линейной модели;
- ✓ уровень значимости выбран таким образом, чтобы выполнялось соотношение $\dfrac{S_r^2}{S_l^2} \geq F_{1-\alpha}$, где α – уровень значимости.

138. Решение задачи среднеквадратичной аппроксимации в метрическом пространстве позволяет:
- ✓ найти коэффициенты аппроксимирующей функции, заданной в виде линейной комбинации ортогональных функций;

- ✓ построить систему ортонормированных функций для аппроксимации заданной;
- ✓ минимизировать норму разности между заданной функцией и линейной комбинацией системы аппроксимирующих функций;
- ✓ сконструировать функцию из системы заданных, являющуюся наилучшим приближением к аппроксимируемой функции.

139. Среднеквадратичное отклонение функции $f(x)$ от функции $\varphi(x)$ на интервале $[a, b]$, $x_i \in [a, b]$, $i = 1, 2, \ldots, n$, есть функционал:
   - ✓ $I = \int\limits_a^b (f(x) - \varphi(x))^2 dx$;
   - ✓ $S = \sum\limits_{i=1}^{n} (f(x) - \varphi(x))^2$;
   - ✓ $Q = \sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n} (f(x) - \varphi(x))^2}$;
   - ✓ $R = \sum\limits_{i=1}^{n} \int\limits_{x_i}^{x_{i=1}} (f(t) - \varphi(t))^2 dt$.

140. Дано множество точек (x_j, y_j), $j = 1, 2, \ldots, n$: $f(x_j) = y_j$, $\varphi(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_m x^m$ – аппроксимирующий полином для функции $f(x)$. Если $m = n - 1$, то задача аппроксимации:
   - ✓ не имеет решения;
   - ✓ имеет единственное решение;
   - ✓ имеет множество решений;
   - ✓ является задачей интерполяции.

141. Метод наименьших квадратов позволяет:
   - ✓ определить коэффициенты аппроксимации функции полиномом;
   - ✓ свести задачу аппроксимации к задаче интерполяции;
   - ✓ получить СЛАУ для определения интерполяционного полинома;
   - ✓ определить экстремумы аппроксимирующих многочленов.
142. При определении коэффициентов аппроксимации функции всегда решается:
   - ✓ система нелинейных алгебраических уравнений;
   - ✓ система линейных алгебраических уравнений;
   - ✓ СЛАУ или СНАУ в зависимости от вида аппроксимирующей функции;
   - ✓ система линейных дифференциальных уравнений.

143. Нормальная система уравнений для определении коэффициентов аппроксимирующего полинома является:
- ✓ однородной;
- ✓ недоопределенной;
- ✓ однозначно разрешимой;
- ✓ плохообусловленной.

144. Заданную табличную функцию можно аппроксимировать:
- ✓ линейной функцией;
- ✓ полиномом произвольной степени;
- ✓ дробно-рациональной функцией;
- ✓ многоэкстремальной функцией.

145. Для оценки параметров эмпирической функции необходимо знать:
- ✓ число наблюдений;
- ✓ условия наблюдений;
- ✓ меру рассеивания, вызванного случайной ошибкой;
- ✓ дисперсию случайной величины.

146. Задачи аппроксимации и интерполяции различаются между собой:
- ✓ постановкой задачи о приближении табличной функции;
- ✓ методами построения аппроксимирующих функций;
- ✓ полиномиальным приближением заданной функции;
- ✓ условиями существования решения задачи.

4. Численное интегрирование

147. Задача численного интегрирования:
- ✓ является некорректной;
- ✓ имеет единственное решение;
  устойчива к ошибкам в начальных данных;
- ✓ не ограничена по точности решения.

148. Для задачи численного интегрирования можно:
- ✓ задавать сетку на интервале интегрирования;
- ✓ вычислять сетку на интервале интегрирования;
- ✓ задавать весовые коэффициенты для формулы численного интегрирования;
- ✓ вычислять весовые коэффициенты для формулы численного интегрирования.

149. В основу методов численного интегрирования положен:
- ✓ принцип получения точного решения для полиномиальных подынтегральных функций;

- ✓ метод Зейделя решения СЛАУ;
- ✓ принцип равномерного распределения точек сетки интегрирования;
- ✓ способ вычисления интеграла по частям.

150. Для вычисления определенного интеграла численным методом необходимо:
- ✓ при помощи замены переменных привести интеграл к стандартному виду;
- ✓ на интервале интегрирования $\left[a, b\right]$ задать дискретное множество точек, называемое сеткой;
- ✓ определить значения коэффициентов C_k, $k = 0, \ldots, N$, такие чтобы $\left(\sum_{k=0}^{N} C_k f(x_k) - \int_a^b f(x) dx \right)^2 \to \min_{C_k}$;
- ✓ воспользоваться одним из численных методов в системе MathCAD.

151. Выберите правильные утверждения.
- ✓ Любой определенный интеграл $\int_a^b f(x) dx$ привести к виду $k \int_0^1 \bar{f}(s) ds$ таким образом, что численные значения этих интегралов одинаковы.
- ✓ Общая квадратурная формула для вычисления определенного интеграла имеет вид: $\int_a^b f(x) dx = \sum_{k=0}^{n} C_k f(x_k)$.
- ✓ Шаблон квадратурной формулы – это множество точек $0 \le S_0 < S_1 < \ldots < S_m \le 1$, таких что $S_i - S_{i-1} = h$.
- ✓ Задача численного интегрирования не является устойчивой к ошибкам , вносимым в подынтегральную функцию.

152. Выберите правильные положения.
- ✓ Для построения квадратурной формулы необходимо: а) задать шаблон квадратурной формулы; б) определить каким-либо методом весовые коэффициенты формулы.
- ✓ Если формула интегрирования является точной для всех степенных функций до степени *n*, то она будет точной для любого полинома степени $\le n$.

- ✓ Для определения весов квадратурной формулы необходимо решить СНАУ $\sum_{i=0}^{m} P_i S_i^j = \frac{1}{j+1}$ относительно неизвестных S_i.
- ✓ Система уравнений для определения коэффициентов квадратурной формулы имеет единственное решение.

153. Квадратурная формула задана в виде соотношения: $\int_a^b f(x)dx = \sum_{i=1}^{N} f(x_{i-1} + 0{,}5h) \cdot h$. Выберите правильное утверждение:

- ✓ Эта формула соответствует методу трапеций.
- ✓ Шаблон формулы содержит один узел.
- ✓ В этой формуле $x_i = x_{i-1} + 0{,}5h$.
- ✓ По данной формуле $\int_a^b f(x)dx$ вычисляется, как сумма площадей под кусочно-линейной функцией, аппроксимирующей функцию $f(x)$.

154. Квадратурная формула задана в виде соотношения: $\int_a^b f(x)dx = \sum_{i=1}^{N} \frac{f(x_{i-1}) + f(x_{i-1} + h)}{2} h$. Выберите правильное утверждение:

- ✓ Данная формула использует равномерный шаблон на интервале [0, 1].
- ✓ Точки шаблона совпадают с крайними точками интервала $[a, b]$.
- ✓ Каждое слагаемое формулы соответствует площади прямоугольника с высотой $f(x_i)$ и площадью основания $x_i - x_{i-1}$.
- ✓ Это формула трапеций.

155. Из нижеприведенных квадратурных формул выберите те, которые соответсвуют методу трапеций:

- ✓ $I_N = \frac{h}{2} f(x_0) + \sum_{i=2}^{N} hf(x_{i-1}) + \frac{h}{2} f(x_N)$;
- ✓ $I_N = hf(x_0 + 0{,}5h) + \sum_{i=2}^{N-1} hf(x_{i-1} + 0{,}5h) + hf(x_{N-1} + 0{,}5h)$;
- ✓ $I_N = \sum_{i=1}^{N} 0{,}5hf(x_{i-1}) + \sum_{i=1}^{N} 0{,}5hf(x_{i-1} + h)$;
- ✓ $I_N = h\left(f(x_0) + 2\sum_{i=1}^{N-1} f(x_i) + f(x_N) \right)$.

156. Система уравнений для определения коэффициентов квадратурной формулы

$$\begin{cases} P_0 + P_1 + P_2 = 1; \\ 0 \cdot P_0 + 0{,}5 \cdot P_1 + P_2 = 0{,}5; \\ 0 \cdot P_0 + 0{,}25 \cdot P_1 + P_2 = \dfrac{1}{3} \end{cases}$$

соответствует методу:
- ✓ шаблон которого содержит три узла;
- ✓ трапеций;
- ✓ точки шаблона которого равноотстоят друг от друга;
- ✓ Симпсона.

157. в формуле Симпсона

$$I_N = \frac{1}{6} h \sum_{i=1}^{N} \left(f(x_{i-1}) + 4 f\left(x_{i-1} + \frac{1}{2} h \right) + f(x_{i-1} + h) \right):$$

- ✓ $x_0 = a,\ x_N = b$;
- ✓ используется параболическая аппроксимация;
- ✓ расстояние между точками шаблона равно 0,5;
- ✓ использованы значения трех коэффициентов квадратурной формулы.

158. Выберите правильные утверждения:
- ✓ Метод построения квадратурной формулы Котеса использует тот же принцип, что и метод построения формулы Симпсона – требование вычисления точных значений интегралов при интегрировании полиномов.
- ✓ Для построения формулы Котеса необходимо знать интерполяционные коэффициенты Лагранжа.
- ✓ Шаблон для формулы Котеса должен совпадать с точками интерполяции подынтегральной функции по методу Лагранжа.
- ✓ При построении формулы Котеса можно использовать только четырехточечный шаблон.

159. Выберите правильное положение. При использовании формулы Котеса для вычисления определенного интеграла используются интерполяционные полиномы 2-й степени. В этом случае:
- ✓ вычисляются три коэффициента квадратурной формулы $\int_0^1 f(s)ds = \sum_{k=0}^{m} P_k f(s_k)$;
- ✓ шаблон квадратурной формулы содержит две точки;

- ✓ необходимо вычислить четыре интерполяционных коэффициента Лагранжа;
- ✓ значение определенного интеграла $\int_0^1 f(s)ds$ вычисляется по формуле $I_2 = \sum_{k=0}^{2} f(s_k)\int_0^1 L_k^2(s)ds$.

160. Выберите правильные положения:
- ✓ Общий вид квадратурной формулы Чебышева $I_N = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{m} f(x_i)$, где N – количество точек сетки, m – степень интерполяционного полинома.
- ✓ Система уравнений для определения точек разбиения интервала интегрирования в формуле Чебышева: $\sum_{i=1}^{N} x_i^m = \frac{N}{m+1}$.
- ✓ В формуле Чебышева весовые коэффициенты квадратурной формулы вычисляются по уравнению $P_m = \frac{1}{m}, \quad m = 1, 2, \ldots, N$.
- ✓ Для использования формулы Чебышева необходимо предварительно задать шаблон s_k : $0 \le s_0 < s_1 < \ldots < s_N \le 1$.

161. Выберите правильные положения:
- ✓ Для вычисления весовых коэффициентов квадратурной формулы Гаусса необходимо решать систему линейных уравнений с определителем матрицы коэффициентов Вандермонда.
- ✓ При использовании формулы Гаусса весовые коэффициенты и узлы шаблона находятся из одной и той же системы нелинейных алгебраических уравнений.
- ✓ Для отыскания двухточечного шаблона квадратурной формулы Гаусса требуется решить два нелинейных алгебраических уравнения.
- ✓ Квадратурную формулу Гаусса нельзя применять при интегрировании функции, значение которой может быть получено только в узлах равномерной сетки.

162. Выберите правильные утверждения:
- ✓ Точность квадратурной формулы всегда определяется только количеством точек шаблона.
- ✓ Точность квадратурной формулы трапеции выше, чем формулы прямоугольников и ниже, чем формулы Симпсона.

- ✓ Точность квадратурной формулы Гаусса не может быть ниже точности формулы Чебышева при одинаковом количестве точек шаблона.
- ✓ Погрешность квадратурной формулы не зависит от значений подынтегральной функции, но зависит от максимума скорости изменения первой производной на интервале интегрирования.

163. Шаблон квадратурной формулы содержит три узла: $s_0 = 0;\ s_1 = \frac{1}{2};\ s_2 = 1$. Выберите первый и третий (в любой последовательности) столбцы матрицы коэффициентов СЛАУ для определения весов квадратурной формулы:

$$\begin{pmatrix} 0{,}5 \\ 0{,}5 \\ 0{,}5 \end{pmatrix};\qquad \begin{pmatrix} 0 \\ 0{,}25 \\ 1 \end{pmatrix};\qquad \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix};\ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

164. Шаблон квадратурной формулы содержит два узла: $s_0 = 0;\ s_1 = 1$.
Определите весовые коэффициенты P_1, P_2 квадратурной формулы:
- ✓ $P_1 = 1,\ P_2 = 0$;
- ✓ $P_1 = 0{,}5;\ P_2 = 1{,}5$;
- ✓ $P_1 = 0,\ P_2 = 1$;
- ✓ $P_1 = 0{,}5;\ P_2 = 0{,}5$.

165. Шаблон квадратурной формулы прямоугольников содержит один узел. Какие значения можно выбрать в качестве координаты этого узла:
- ✓ $s_0 = 0$;
- ✓ $s_0 = \frac{1}{2}$;
- ✓ $s_0 = \frac{1}{4}$;
- ✓ $s_0 = 1$.

166. При решении задачи численного интегрирования возможны следующие действия:
- ✓ задание шаблона квадратурной формулы;
- ✓ вычисление шаблона квадратурной формулы;
- ✓ задание весовых коэффициентов квадратурной формулы;
- ✓ вычисление весовых коэффициентов квадратурной формулы.

167. Производные функции $f(x)$ в заданной точке x_0, вычисленные аналитически и численно, в точности совпадают, если:

- ✓ для всех x из области определения функции значение $f(x)$ $\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\text{const}$;
- ✓ функция $f(x)=kx+b$, где $k,\ b$ – константы;
- ✓ $f(x)$ – нелинейная, непрерывная и дифференцируемая функция в области определения
- ✓ функция $f(x)$ – постоянная в области определения.

168. Численную производную функции в заданной точке x_0 можно вычислить при помощи:
   - ✓ разложения ее в ряд Тейлора;
   - ✓ путем дифференцирования интерполяционного Ньютона в точке x_0;
   - ✓ посредством геометрических построений и измерений;
   - ✓ как предел отношения приращения функции к приращению аргумента;

169. Выберите значения первой и второй производной функции, заданной нижеследующей таблицей, в точке $x=0{,}7$, по формуле дифференцирования, использующей три узла.

x	0,5	0,7	0,9
y	0,25	0,5	0,8

   - ✓ –1,4475;
   - ✓ 2,1025;
   - ✓ 0,3125;
   - ✓ –1,5625.

7. Численное дифференцирование

170. Для задачи Коши $\dfrac{du}{dt}=F(t,u),\ \ u(0)=u_0$ известно, что она имеет единственное решение. Выберите условия, входящие в совокупность достаточных условий для этого утверждения:
   - ✓ $F(t,u)$ дифференцируема в прямоугольнике
   $$P=\{t:\ 0\le t\le T,\quad u:\ |u-u_0|<V\};$$
   - ✓ $F(t,u)$ непрерывна в прямоугольнике
   $$P=\{t:\ 0\le t\le T,\quad u:\ |u-u_0|<V\};$$

- ✓ $|F(t,u_1)+F(t,u_2)| \le k|u_1-u_2|$, $u_1,\ u_2 \in P$;
- ✓ $|F(t_1,u)+F(t_2,u)| \le r|t_1-t_2|$, $t_1,\ t_2 \in P$.

171. Для построения дискретного аналога дифференциального уравнения $\dfrac{du}{dt}=F(t,u)$, $0 \le t \le T$, $U \le u \le V$ задается множество точек, называемых сеткой. Выберите правильные определения сетки:
   - ✓ $\overline{W}_V=\{u_n=vn;\ n=0,1,\ldots\}$.
   - ✓ Разбиение интервала $[0,T]$ точками t_k, произвольно расположенными в этом интервале.
   - ✓ Множество точек $t_k \in [0,T]$, $k=0,1,\ldots,N$, $t_0=0$, $t_N=T$, равноотстоящих друг от друга.
   - ✓ Множество точек $\varpi=\{t_k=\tau k,\ k=0,1,\ldots,N,\ \ t_N=T\}$.

172. Разностный аналог дифференциального уравнения $\dfrac{du}{dt}=F(t,u)$ записан в виде $\dfrac{u_{n+1}-u_n}{\tau}=F(t_n,u_n)$, $n=0,1,\ldots$ Выберите правильные пояснения:
   - ✓ t_n – точки равномерного разбиения интервала $[0,T]$ определения переменной $t \in [0,T]$;
   - ✓ u_n – известные значения функции $u(t)$ в точках t_n, т.е. $u_n=u(t_n)$;
   - ✓ τ – параметр сетки;
   - ✓ $\{u_k\}$, $k=0,1,\ldots,N$ – вектор неизвестных системы $u_{n+1}=u_n+\tau F(t_n,u_n)$ алгебраических уравнений.

173. Выберите правильные определения и понятия, связанные с представлением дифференциального уравнения $\dfrac{du}{dt}=F(t,u)$, $u(0)=u_0$ в дискретной форме $u_{n+1}=u_n+\tau F(t_n,u_n)$, $u(0)=u_0$:
   - ✓ Такой метод называется методом Рунге – Кутта.
   - ✓ Этот метод позволяет определить все неизвестные значения u_n не прибегая к решению СЛАУ специальными методами.
   - ✓ Такой способ решения дифференциального уравнения называется явной схемой.
   - ✓ Этот метод дает возможность оценки ошибки итерационного процесса на $(n+1)$-й итерации по формуле $u_{n+1}-u_n=\tau F(t_n,u_n)$.

174. Метод Эйлера для решения дифференциального уравнения $\frac{du}{dt} = F(t, u), \quad u(0) = 0$:

- ✓ является явным;
- ✓ имеет порядок аппроксимации $o(\tau^2)$;
- ✓ имеет порядок точности $o(\tau)$;
- ✓ при $\tau \to 0$, где τ – параметр сетки, обеспечивает сходимость приближенного решения к точному со скоростью $o(\tau^2)$.

175. При определении порядка аппроксимации и порядка точности метода Эйлера для решения дифференциального уравнения $\frac{du}{dt} = F(t, u), \quad u(0) = u_0$ используется:

- ✓ разложение функции u в точке t_n по степеням параметра сетки в ряд Тейлора до второго порядка малости;
- ✓ разложение функции $F(t,\ u(t))$ в точке t_n до второго порядка малости;
- ✓ подстановка точных значений функции $u(t)$ в дискретное уравнение;
- ✓ подстановка дискретных значений $u_n, \quad n = 0, 1, \ldots$ в точное уравнение.

176. Выполнить две итерации по схеме Эйлера для решения задачи Коши $\frac{du}{dt} = u, \quad u(0) = 1$, если $0 \le t \le 1, \quad \varpi_\tau = \left\{ t_n = \frac{1}{10} n;\ n = 0, 1, \ldots \right\}$

Выбрать из заданных чисел u_2 – численное решение в точке t_2 и значение дискретного аналога производной в точке t_2:

- ✓ 1,11;
- ✓ 1,1;
- ✓ 1,01;
- ✓ 1,21.

177. Анализируя численную последовательность приближенного решения задачи Коши $\frac{du}{dt} = u, \quad u(0) = 1$ по методу Эйлера с заданной сеткой $\varpi_\tau = \left\{ t_n = \frac{1}{10} n;\ n = 0, 1, \ldots \right\}$, определить, является ли последовательность значений приближенного решения $\{u_n\}, \quad n = 0, 1, \ldots$

- ✓ возрастающей;
- ✓ убывающей;

- ✓ арифметической прогрессией;
- ✓ геометрической прогрессией.

178. Выполнить две итерации по схеме Эйлера для решения задачи Коши $\frac{du}{dt}=t,\ \ u(0)=1$, если $0 \le t \le 1$, $\varpi_\tau = \left\{ t_n = \frac{1}{10}n;\ \ n=0,1,\dots \right\}$. Выбрать из заданных чисел значение u_2 – численное решение в точке t_2 и значение дискретного аналога производной в точке t_2:
    - ✓ 1,01;
    - ✓ 1,11;
    - ✓ 1,21;
    - ✓ 1,0.

179. Анализируя численную последовательность приближенного решения задачи Коши $\frac{du}{dt}=t,\ \ u(0)=1$ по методу Эйлера с заданной сеткой $\varpi_\tau = \left\{ t_n = \frac{1}{10}n;\ \ n=0,1,\dots \right\}$, определить, является ли последовательность значений приближенного решения $\{u_n\},\ \ n=0,1,\dots$
    - ✓ убывающей;
    - ✓ возрастающей;
    - ✓ арифметической прогрессией;
    - ✓ геометрической прогрессией.

180. Выберите дифференциальные уравнения, соответствующие следующей схеме Эйлера для решения задачи Коши: $u_{n+1} = u_n + \left(1 + \frac{\tau}{t_n}\right)$:
    - ✓ $t\frac{du}{dt} = u(t)$;
    - ✓ $u' = t_n$;
    - ✓ $\frac{du}{dt} = u(t)$;
    - ✓ $u' = \frac{u}{t}$.

181. Разностная схема для решения задачи Коши задана в виде: $\frac{u_{n+1}-u_n}{\tau}=\frac{1}{2}\left[F(t_n,u_n)+F(t_{n+1},u_{n+1})\right]$. Выберите правильные характеристики этой схемы:

- ✓ Схема является неявной, так как неизвестная дискретная функция u_n не может быть явно выражена через аргумент t_n.
- ✓ Схема явная, так как разностный аналог производной $\frac{u_{n+1}-u_n}{\tau}$ явно выражен через функции $F(t_n,u_n)$ и $F(t_{n+1},u_{n+1})$.
- ✓ Схема неявная, так как u_{n+1} не выражена явно через u_n.
- ✓ Схема неявная, так как не является схемой Эйлера.

182. Если дифференциальное уравнение представлено в виде разностной схемы $\frac{u_{n+1}-u_n}{\tau}=\frac{1}{2}\left[F(t_n,u_n)+F(t_{n+1},u_{n+1})\right]$, то для определения неизвестной дискретной функции $\{u_n\}$ необходимо:

- ✓ решить систему в общем случае нелинейных алгебраических уравнений;
- ✓ использовать метод прогонки;
- ✓ задать начальное приближение вектора $\{u_n\}$ и использовать метод итераций;
- ✓ преобразовать схему, приведя ее к явному виду.

183. Из представленных разностных схем для решения дифференциальных уравнений 1-го порядка выберите схемы с порядком точности $o(\tau^2)$, τ – параметр сетки:

- ✓ $u_{n+1}=u_n+\frac{\tau}{2}\left[F(t_n,u_n)+F(t_{n+1},\tilde{u}_{n+1})\right],\quad \tilde{u}_{n+1}=u_n+\tau F(t_n,u_n);$
- ✓ $\frac{u_{n+1}-u_n}{\tau}=\frac{1}{2}\left[F(t_n,u_n)+F(t_{n+1},u_{n+1})\right];$
- ✓ $u_{n+1}=u_n+\tau F(t_n,u_n);$
- ✓ $\bar{u}_n=u_n+\frac{1}{2}\tau F(t_n,u_n),\quad u_{n+1}=u_n+\tau F\left(t_n+\frac{1}{2}\tau,\bar{u}_n\right).$

184. Для задачи Коши $\frac{du}{dt}=u,\quad u(0)=1$ по схеме второго порядка при $\sigma=\frac{1}{2},\ a=1$ вычислить и выбрать значения $\bar{u}_1,\ u_1$ при параметре сетки, равном 0,1:

1,215; 1,100; 1,015; 1,105.

185. Для задачи Коши $\frac{du}{dt} = u + t$ выбрать из предложенных схему Эйлера и схему «предиктор – корректор»:

- ✓ $u_{n+1} = u_n + \frac{\tau}{2}\left[u_n + u_{n+1} + t_n + t_{n+1}\right]$;
- ✓ $\frac{u_{n+1} - u_n}{\tau} = u_n + t_n$;
- ✓ $u_{n+1} = u_n + \tau F\big(t_n, u_n + \tau F(t_n, u_n)\big)$;
- ✓ $\overline{u}_n = u_n + \frac{1}{2}\tau F(t_n, u_n), \quad u_{n+1} = u_n + \tau F\left(t_n + \frac{1}{2}\tau, \overline{u}_n\right)$.

186. Выберите правильные характеристики метода Рунге – Кутта:

- ✓ Это разностная схема 4-го порядка аппроксимации.
- ✓ Это разностный метод решения дифференциальных уравнений $\frac{du}{dt} = F(t, u)$, использующий на каждой итерации два вычисления функции $F(t, u)$
- ✓ Это явная разностная схема.
- ✓ Это другое название метода «предиктор – корректор».

187. Для решения задачи Коши $\frac{du}{dt} = t,\ u(0) = 0$ при заданной сетке $\overline{\varpi}_\tau = \{t_n = n \cdot 0{,}1;\ n = 0, 1, \ldots\}$ выполнить один шаг по методу Рунге – Кутта и выбрать правильные значения k_3 и u_1:

- ✓ 0,05;
- ✓ 0,01;
- ✓ $\frac{1}{100}$;
- ✓ $\frac{1}{30}$.

188. Выполнить один шаг решения задачи Коши $\frac{du}{dt} = u,\ u(0) = 1$ по методу Рунге – Кутта и выбрать правильные значения k_2 и u_1, если $\overline{\varpi}_\tau = \{t_n = n \cdot 0{,}1;\ n = 0, 1, \ldots\}$:

- ✓ 1,0525;
- ✓ 1,10525;
- ✓ 1,01;
- ✓ 1,05.

189. Выберите правильные характеристики методов Адамса для решения задачи Коши:
- ✓ Метод Адамса предназначен для решения дифференциальных уравнений, когда правая часть задана в виде интерполяционного полинома.
- ✓ Метод Адамса можно применить только в совокупности с другим явным методом численного решения дифференциального уравнения.
- ✓ При реализации метода Адамса используется метод экстраполяции.
- ✓ Методом Адамса можно решать дифференциальные уравнения, у которых правая часть – разрывная функция.

190. Для того чтобы численно решить дифференциальное уравнение $u'' + p(x)u' - q(x)u = f(x)$ на интервале $[a, b]$, его необходимо дополнить начальными и граничными условиями типа (выберите правильные):
- ✓ $u(a) = u_a$; $\dfrac{du}{dx}(a) = u'_a$;
- ✓ $u(a) = u_a$; $\dfrac{du}{dx}(b) = u'_b$;
- ✓ $u(a) = u_a$; $u(b) = u_b$;
- ✓ $\dfrac{du}{dx}(a) = u'_a$; $\dfrac{du}{dx}(b) = u'_b$.

191. Какому дифференциальному уравнению соответствует разностная схема $\dfrac{u_{i-1} - 2u_i + u_{i+1}}{h^2} + p_i \dfrac{u_{i+1} - u_{i-1}}{2h} - q_i u_i = f_i$:
- ✓ $(u')^2 + \dfrac{1}{2} p(x)u' - q(x)u = f(x)$;
- ✓ $\dfrac{1}{h^2} u'' + \dfrac{p(x)}{h} u' - q(x)u = f(x)$;
- ✓ $u'' + p(x)u' - q(x)u = f(x)$;
- ✓ $\dfrac{du'}{dx} + p(x)u' - q(x)u = f(x)$.

192. Для реализации метода прогонки решения дифференциального уравнения $u'' + p(x)u' - q(x)u = f(x)$ на интервале $[0, L]$ задачу необходимо дополнить условиями вида:
- ✓ $u(0) = u_0$; $\dfrac{du}{dx}(0) = u'_0$;

- ✓ $\frac{du}{dx}(0)=u'_0$; $\frac{du}{dx}(L)=u'_L$;
- ✓ $u(0)=u_0$; $u(L)=u_L$;
- ✓ $u(0)=u(L)$; $\frac{du}{dx}(0)=u'_0$.

193. Выберите правильные положения, используемые при реализации метода прогонки:
   - ✓ Базовым является предположение о линейности решения разностного уравнения.
   - ✓ Строится зависимость $y_i = \alpha_{i+1} y_{i+1} + \beta_{i+1}$ с неопределенными коэффициентами α_{i+1}, β_{i+1}
   - ✓ Вычисление значений y_i происходит пошагово по формулам $y_{n-1} = \alpha_n y_n + \beta_n$, начиная с $n = N$, то есть с конца интервала определения аргумента.
   - ✓ Коэффициенты α_1, β_1 определяются из краевых условий.

194. Известно аналитическое решение уравнения в частных производных первого порядка:

$$u(x,t)=\Phi(x-at)+\int_0^t F(x-at+at',\ t')dt'.$$

Выберите правильные пояснения к этому выражению:

- ✓ $\Phi(x-at)$ – это произведение константы Φ на линейную комбинацию переменных x и t.
- ✓ $F(x-at+at',\ t')$ – функция, стоящая в правой части дифференциального уравнения.
- ✓ Подынтегральная функция получается из функции $F(x,t)$ путем замены переменных.
- ✓ a – числовой параметр, $\Phi(x)$ – начальное условие для дифференциального уравнения.

195. Выберите правильные объяснения разностного аналога дифференциального уравнения в частных производных первого порядка: $\frac{u_k^{n+1}-u_k^n}{\tau}+a\frac{u_{k+1}^n-u_k^n}{h}=f_k^n$, $u_k^0=\varphi_k$:
   - ✓ u_k^{n+1} – компонента в матрице решения разностного уравнения;
   - ✓ $u_{k+1}^n - u_k^n$ – неразделенная разность численных решений в точках сетки $\omega_\tau = \{t_n = \tau n,\ n=0,1,\ldots\}$;
   - ✓ $\psi_k = \Phi(x_k)$;

- ✓ $\dfrac{u_k^{n+1}-u_k^n}{\tau}$ – аналог частной производной по переменной t.

196. Вычислительный алгоритм решения разностного аналога дифференциального уравнения в частных производных первого порядка записан в виде: $u_k^{n+1}=\left(1+a\dfrac{\tau}{h}\right)u_k^n-a\dfrac{\tau}{h}u_{k+1}^n+\tau f_k^n,\quad u_k^0=\varphi_k$. Выберите правильные утверждения:
   - ✓ Это неявная схема, т.к. в правой части присутствует неизвестная величина u_{k+1}^n, взятая из $(k+1)$-й итерации.
   - ✓ Это явная схема, т.к. в левой части стоит величина с $(n+1)$-й итерации, а в правой части – величины с n-й итерации.
   - ✓ Величины a, τ, h, f_k^n таковы, что f_k^n – известная матрица, а a, τ, h задаются при решении задачи.
   - ✓ параметр τ выбирается таким образом, чтобы $\dfrac{\tau}{h}=1$.

197. Для разностной схемы решения дифференциального уравнения в частных производных первого порядка известно выражение, полученное при исследовании аппроксимации и точности разностного аналога:

$$\frac{u_k^{n+1}-u_k^n}{\tau}+a\frac{u_{k+1}^n-u_k^n}{h}=\left(\frac{\partial u}{\partial t}+a\frac{\partial u}{\partial x}\right)+A.$$

Выберите правильные положения:
   - ✓ $A=\mathrm{o}\left(\tau^2, h^2\right)$ – то есть имеем второй порядок малости аппроксимации.
   - ✓ Величина A говорит о точности решения дифференциального уравнения разностным методом.
   - ✓ Точность аппроксимации исходного дифференциального уравнения обуславливается величиной A и равна в данном случае $\mathrm{o}(\tau, h)$.
   - ✓ Величина A свидетельствует о сходимости численного решения к точному при $\tau,\ h\to 0$.

198. Из приведенных выражений выберите неявную разностную схему решения дифференциального уравнения в частных производных второго порядка

$$\frac{\partial u}{\partial t}=a\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},\ u(0,x)=u_0(x);\quad -\infty<x<\infty,\quad 0\le t\le T,$$

а также условие устойчивости явной схемы:

- ✓ $\dfrac{u_k^{n+1} - u_k^n}{\tau} = a\dfrac{u_{k+1}^n - 2u_k^n + u_{k-1}^n}{h^2}$;
- ✓ абсолютно устойчива;
- ✓ $2a\tau \le h^2$;
- ✓ $\dfrac{u_k^{n+1} - u_k^n}{\tau} = a\dfrac{u_{k+1}^{n+1} - 2u_k^{n+1} + u_{k-1}^{n+1}}{h^2}$.

199. Выберите методы, которые можно применять при решении системы алгебраических уравнений, полученных при аппроксимации дифференциального уравнения второго порядка разностной схемой:
- ✓ методом итераций;
- ✓ методом LU-разложения;
- ✓ – методом Зейделя;
- ✓ – методом прогонки.

ПРИМЕРНЫЙ ПЕРЕЧЕНЬ ВОПРОСОВ К ЗАЧЕТУ

1. Понятие математической модели и вычислительного эксперимента. Общая характеристика численных методов. Пример.
2. Погрешность численного метода и алгоритма. Реализуемость и устойчивость алгоритма.
3. Корректность постановки задачи. Примеры корректно и некорректно поставленных задач.
4. Системы линейных алгебраических уравнений: общая характеристика; задачи, приводящие к СЛАУ; типы СЛАУ и матриц коэффициентов.
5. Понятие обусловленности СЛАУ. Число обусловленности.
6. Зависимость решения СЛАУ от ошибок правой части системы.
7. Общая характеристика методов решения СЛАУ. Принципы выбора метода решения.
8. Прямые методы решения СЛАУ. Метод Гаусса.
9. Прямые методы решения СЛАУ. Метод треугольного разложения (LU-разложение, алгоритм Краута).
10. Итерационные методы решения СЛАУ. Общая характеристика, двухслойны и трехслойные схемы. Каноническая форма. Явные и неявные, стационарные и нестационарные итерационные методы. Сходимость и точность итерационных методов.
11. Метод простой итерации. Операторная и вычислительная формы. Тип схемы метода простой итерации.
12. Метод Зейделя. Операторная и вычислительная формы. Тип схемы метода Зейделя.
13. Метод релаксации. Операторная и вычислительная формы. Тип схемы метода релаксации.
14. Сходимость стационарных итерационных методов. Пример.
15. Условия и скорость сходимости метода простой итерации.
16. Условия сходимости и скорость сходимости метода Зейделя.
17. Условия сходимости метода релаксации.
18. Общая характеристика нелинейных алгебраических уравнений (НАУ). Понятие корня, способы отделения корней. Пример.
19. Итерационные методы решения НАУ. Условие сходимости.
20. Принцип выбора функции правой части итерационного метода.
21. Метод половинного деления. Условия и доказательство сходимости.
22. Метод хорд. Условия и доказательство сходимости.
23. Метод касательных. Условия и доказательство сходимости.
24. Комбинированный метод. Условия и доказательство сходимости.

25. Системы нелинейных алгебраических уравнений (СНАУ). Векторная форма записи. Вывод условия сходимости итерационных методов решения СНАУ.

26. Метод Ньютона для решения СНАУ. Операторная и вычислительная формы.

27. Теорема сходимости метода Ньютона. Пример.

28. Метод Ньютона и его модификации.

29. Интерполирование функций. Общая постановка задачи. Общая формула интерполирования, условия реализации.

30. Полиномиальная интерполяция. Теорема Вейерштрасса.

31. Интерполяционный полином Лагранжа. Построение формулы, оценка точности.

32. Интерполяционный полином Ньютона на неравномерной сетке.

33. Интерполяционный полином Ньютона на равномерной сетке.

34. Кубическая сплайн-интерполяция.

35. Приближение функций по методу наименьших квадратов.

36. Линейное приближение. Вывод нормальных уравнений.

37. Квадратичное приближение. Вывод нормальных уравнений.

38. Нормальная система для расчета коэффициентов полинома произвольного порядка для аппроксимации функции.

39. Численное интегрирование. Общая постановка задачи. Сведение определенного интеграла в пределах от a до b к интегралу с пределами от 0 до 1.

40. Метод построения квадратурной формулы, точной для интегралов от степенных функций.

41. Получение квадратурной формулы прямоугольников.

42. Получение квадратурной формулы трапеций.

43. Получение квадратурной формулы Симпсона.

44. Принцип получения формул Котеса.

45. Формула Котеса на четырехточечном шаблоне.

46. Формула Котеса на пятиточечном шаблоне.

47. Квадратурная формула Гаусса, в том числе при $N = 2$.

48. Квадратурная формула Чебышева, в том числе при $N = 3$.

49. Оценка погрешности квадратурных формул (на примере).

50. Численное решение обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ). Условия существования и единственности решения.

51. Конечно-разностная схема по методу Эйлера.

52. Точность аппроксимации метода Эйлера.

53. Оценка точности решения ДУ по методу Эйлера.

54. Доказательство сходимости приближенного решения к точному по методу Эйлера, когда параметр сетки τ стремится к 0.

55. Метод Рунге – Кутта 4-го порядка.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

Основная литература

1. Кошев, А.Н. Вычислительные методы [Текст]: учеб. пособие / А.Н. Кошев, В.В. Кузина. – Пенза: ПГУАС, 2012. – 204 с.
2. Контрольно-измерительные материалы по курсу «Вычислительная математика» [Текст]: учебно-методическое пособие / В.В. Кузина, А.Н. Кошев. – Пенза: ПГУАС, 2013. – 98 с.

Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети Интернет, необходимых для освоения дисциплины

3. Пантина, И.В. Вычислительная математика [Электронный ресурс]: учебник/ Пантина И.В., Синчуков А.В.— Электрон. текстовые данные.— М.: Московский финансово-промышленный университет «Синергия», 2012.— 176 с.— Режим доступа: http://www.iprbookshop.ru/17012.— ЭБС «IPRbooks», по паролю.
4. Методы математической физики [Электронный ресурс]: учебное пособие/ Ю.В. Гриняев [и др.].— Электрон. текстовые данные.— Томск: Томский государственный университет систем управления и радиоэлектроники, Эль Контент, 2012.— 148 с.— Режим доступа: http://www.iprbookshop.ru/13862.— ЭБС «IPRbooks», по паролю
5. Плохотников, К.Э. Вычислительные методы. Теория и практика в среде MATLAB [Электронный ресурс]: курс лекций. Учебное пособие для вузов/ Плохотников К.Э.— Электрон. текстовые данные.— М.: Горячая линия – Телеком, 2013.— 496 с.— Режим доступа: http://www.iprbookshop.ru/37120.— ЭБС «IPRbooks», по паролю.
6. Бахвалов, Н.С. Численные методы [Электронный ресурс]/ Бахвалов Н.С., Жидков Н.П., Кобельков Г.М.— Электрон. текстовые данные.— М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2012.— 635 с.— Режим доступа: http://www.iprbookshop.ru/6502.— ЭБС «IPRbooks», по паролю.
7. Бахвалов, Н.С. Численные методы в задачах и упражнениях [Электронный ресурс]: учеб. пособие/ Бахвалов Н.С., Лапин А.В., Чижонков Е.В.— Электрон. текстовые данные.— М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2013.— 240 с.— Режим доступа: http://www.iprbookshop.ru/12282.— ЭБС «IPRbooks», по паролю.
8. Кондаков, Н.С. Основы численных методов [Электронный ресурс]: практикум/ Кондаков Н.С.— Электрон. текстовые данные.— М.: Московский гуманитарный университет, 2014.— 92 с.— Режим доступа: http://www.iprbookshop.ru/39690.— ЭБС «IPRbooks», по паролю.
9. Дьяконов, В.П. MATLAB. Полный самоучитель [Электронный ресурс]/ Дьяконов В.П.— Электрон. текстовые данные.— М.: ДМК Пресс,

2014.— 768 с.— Режим доступа: http://www.iprbookshop.ru/7911.— ЭБС «IPRbooks», по паролю.

10. Седов, Е.С. Основы работы в системе компьютерной алгебры Mathematica [Электронный ресурс]/ Седов Е.С.— Электрон. текстовые данные.— М.: Интернет-Университет Информационных Технологий (ИНТУИТ), 2016.— 401 с.— Режим доступа: http://www.iprbookshop.ru/16717.— ЭБС «IPRbooks», по паролю.

11. http://www.iprbookshop.ru/

12. http://www.intuit.ru/

13. http://www.exponenta.ru/

14. www.mathnet.ru – общероссийский математический портал;

15. http://e.lanbook.com/books/?p_f_1_temp_id=18&p_f_1_65=917&p_f_1_63=&p_f_1_67= – электронно-библиотечная система, издательство «Лань»;

16. www.elibrary.ru – научная электронная библиотека;

17. http://lib.mexmat.ru/ – электронная библиотека механико-математического факультета МГУ;

18. http://www.newlibrary.ru/genre/nauka/matematika/kompyutery_i_matematika/ – электронная библиотека по математике;

19. http://www.edu.ru/modules.php?op=modload&name=Web_Links&file=index&l_op=viewlink&cid=2851 – федеральный портал российского профессионального образования: численные методы;

20. https://mipt.ru/education/chair/computational_mathematics/study/materials/compmath/ – кафедра вычислительной математики МФТИ: вычислительная математика (3 курс).

Дополнительная литература

21. Данко, П.Е. Высшая математика в упражнениях и задачах [Текст]: учеб. пособие для вузов: в 2 ч. Ч. 2. – 7-е изд., испр. / П.Е. Данко, А.Г. Попов, Т.Я. Кожевникова, С.П. Данко. – М.: Оникс; Мир и образование, 2008. – 448 с.

22. Копченова, Н.В. Вычислительная математика в примерах и задачах [Текст]: учеб. пособие / Н.В. Копченова, И.А. Марон.– 2-е изд., стер. – СПб.: Лань, 2008. – 368 с.

23. Охорзин, В.А. Прикладная математика в системе MATHCAD [Текст]: учеб. пособие / В.А. Охорзин. – 2-е изд., испр. и доп. – СПб.: Лань, 2008. – 352 с.

24. Тыртышников, Е.Е. Методы численного анализа [Текст]: учеб. пособие для студ. вузов / Е.Е. Тыртышников – М.: ИЦ «Академия», 2007. – 320 с.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Учебное издание

Кузина Валентина Владимировна
Кошев Александр Николаевич

ВЫЧИСЛИТЕЛЬНАЯ МАТЕМАТИКА
Учебно-методическое пособие по подготовке к зачету
по направлению подготовки 09.03.02
«Информационные системы и технологии»

В авторской редакции
Верстка Н.В. Кучина

Подписано в печать 01.04.16. Формат 60x84/16.
Бумага офисная «Снегурочка». Печать на ризографе.
Усл.печ.л. 3,72. Уч.-изд.л. 4,0. Тираж 80 экз.
Заказ № 216.

Издательство ПГУАС.
440028, г. Пенза, ул. Германа Титова, 28.