

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ  
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

---

Федеральное государственное бюджетное  
образовательное учреждение высшего образования  
«Пензенский государственный университет  
архитектуры и строительства»  
(ПГУАС)

**В.В. Зернов, А.Е. Евсеев, К.С. Подшивалова**

# **СОПРОТИВЛЕНИЕ МАТЕРИАЛОВ ПРИМЕРЫ РАСЧЕТА СТЕРЖНЕВЫХ СИСТЕМ НА ПРОЧНОСТЬ, ЖЕСТКОСТЬ И УСТОЙЧИВОСТЬ**

Рекомендовано Редсоветом университета  
в качестве учебного пособия для студентов,  
обучающихся по направлению подготовки  
23.03.03 «Эксплуатация транспортно-технологических  
машин и комплексов»

Пенза 2016

УДК 539.3  
ББК 30.121  
3-57

Рецензенты: кандидат технических наук, доцент, главный конструктор «ООО Пензагропроект» В.В. Викотров;  
доктор технических наук, профессор кафедры «Механика» В.А. Монахов (ПГУАС)

**Зернов В.В.**

3-57      Соппротивление материалов. Примеры расчета стержневых систем на прочность, жесткость и устойчивость: учеб. пособие по направлению подготовки 23.03.03 «Эксплуатация транспортно-технологических машин и комплексов»/ В.В. Зернов, А.Е. Евсеев, К.С. Подшивалова. – Пенза: ПГУАС, 2016. – 164 с.

Рассмотрены основы расчета элементов стержневых систем на прочность, жесткость и устойчивость при различных внешних нагрузках. Каждый раздел содержит теоретическую часть, примеры решения типовых задач, задания и вопросы для самостоятельной работы. Приведены справочные материалы и формулы.

Учебное пособие подготовлено на кафедре «Механика» и предназначено для использования студентами технических вузов, обучающимися по направлению подготовки 23.03.03 «Эксплуатация транспортно-технологических машин и комплексов», при изучении дисциплины «Соппротивление материалов», а также для научных и инженерно-технических работников транспортных и строительных организаций.

© Пензенский государственный университет архитектуры и строительства, 2016

© Зернов В.В., Евсеев А.Е.,  
Подшивалова К.С., 2016

## ПРЕДИСЛОВИЕ

Настоящее учебное пособие предназначено для студентов технических вузов, обучающихся по направлению подготовки 23.03.03 «Эксплуатация транспортно-технологических машин и комплексов». Оно написано в соответствии с утверждённой рабочей программой преподавания курса сопротивления материалов в ПГУАС. Методы исследования, применяемые в пособии, не требуют специальной физико-математической подготовки, что делает его доступным для достаточно широкого круга читателей.

Материал в пособии распределен равномерно, что позволяет выполнить самостоятельные расчётно-графические работы в течение всего курса обучения. Так, раздел «Геометрические характеристики плоских сечений» помещён в начале курса, и уже в первые дни учёбы студенты получают задания на самостоятельную расчётно-графическую работу.

Кроме разделов, изучающих простые виды сопротивления бруса – осевое (центральное) растяжение (сжатие), кручение, изгиб, – в пособии нашли отражение такие важные для студентов машиностроительных направлений обучения разделы, как расчёты вала на кручение с изгибом, одновременное действие изгиба и продольной силы, расчёты на ударные нагрузки.

Каждый раздел содержит краткую теоретическую часть, примеры решения типовых задач, задания для самостоятельной работы, вопросы для самоконтроля.

Изучение курса «Сопротивление материалов» позволит сформировать у обучающихся готовность применять систему фундаментальных знаний (математических, естественнонаучных, инженерных и экономических) для идентификации, формулирования и решения технических проблем эксплуатации транспортно-технологических машин и комплексов.

## ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ И ДОПУЩЕНИЯ

Сопротивление материалов – это наука об инженерных методах расчёта на прочность, жёсткость и устойчивость элементов машин и сооружений при наименьшей затрате материалов.

При проектировании машин и сооружений инженер должен выбирать материал и поперечные размеры каждого элемента конструкции так, чтобы он надёжно, без риска разрушиться или сильно исказить свою форму и размеры сопротивлялся внешним воздействиям (внешним силам и нагрузкам). Внешние воздействия возникают в результате взаимодействия с другими элементами (телами), при нагревании или охлаждении, при трении со стороны соприкасающихся с расчётными элементами движущихся тел, коррозии и т.п. Для обеспечения нормальной работы конструкция должна удовлетворять необходимым требованиям прочности, жёсткости и устойчивости.

Под **прочностью** понимают способность конструкции, её частей и деталей сопротивляться внешним воздействиям (выдерживать определённую нагрузку) не разрушаясь.

Под **жёсткостью** понимают способность конструкции и её элементов сопротивляться внешним воздействиям без больших деформаций (изменения формы и размеров).

Под **устойчивостью** понимают способность конструкции или её элементов сохранять первоначальную форму упругого равновесия под нагрузкой.

При всём разнообразии конструктивных элементов, встречающихся в сооружениях и машинах, их можно свести к сравнительно небольшому числу основных форм, являющихся объектами расчёта на прочность, жёсткость и устойчивость. К ним относятся:

- стержень или брус – тело, у которого один размер (длина) значительно превышает два других (поперечных) размера (ширину и высоту); на практике встречаются стержни прямолинейные (валы, балки, стойки, оси колёсных пар и др.), криволинейные (грузоподъёмные крюки, звенья цепей и др.), постоянного и переменного сечения;

- оболочка – тело, ограниченное криволинейными поверхностями, расположенными на близком расстоянии друг от друга; поверхность, которая делит толщину оболочки на две равные части, называется срединной; по форме срединной поверхности различают оболочки цилиндрические (цистерны и т.п.), конические (бункеры, воронки и т.п.) сферические (резервуары, купола и т.п.);

- пластина или плита – тело, ограниченное поверхностями, расположенными на близком расстоянии друг от друга, у которого срединная поверхность представляет собой плоскость; на практике встречаются круглые пластинки (плоские днища и крышки резервуаров, диски турбомашин и др.), прямоугольные (стены, перегородки, перекрытия инженерных сооружений и др.) и других очертаний;

- массивные тела или массивы – тела, у которых все три размера одного порядка (фундаменты под зданиями и тяжёлым технологическим оборудованием, подпорные стенки и др.).

Основным объектом, рассматриваемом в сопротивлении материалов, является стержень (брус) с прямолинейной осью, у которого основными геометрическими элементами являются его ось и поперечное сечение. Эти элементы взаимно связаны между собой. С одной стороны, ось представляет собой линию, проходящую через центры тяжести поперечных сечений, с другой стороны, поперечными сечениями являются сечения, образованные плоскостями, проведёнными перпендикулярно оси стержня. Прямолинейный стержень можно представить себе как тело, образованное плоской фигурой, движущейся вдоль некоторой прямой таким образом, что центр тяжести этой фигуры совпадает с прямой, а плоскость фигуры всё время остаётся перпендикулярной к касательной, проведённой в соответствующей точке к данной прямой.

На рис. 1,а представлен прямолинейный стержень с произвольным поперечным сечением 1-2.

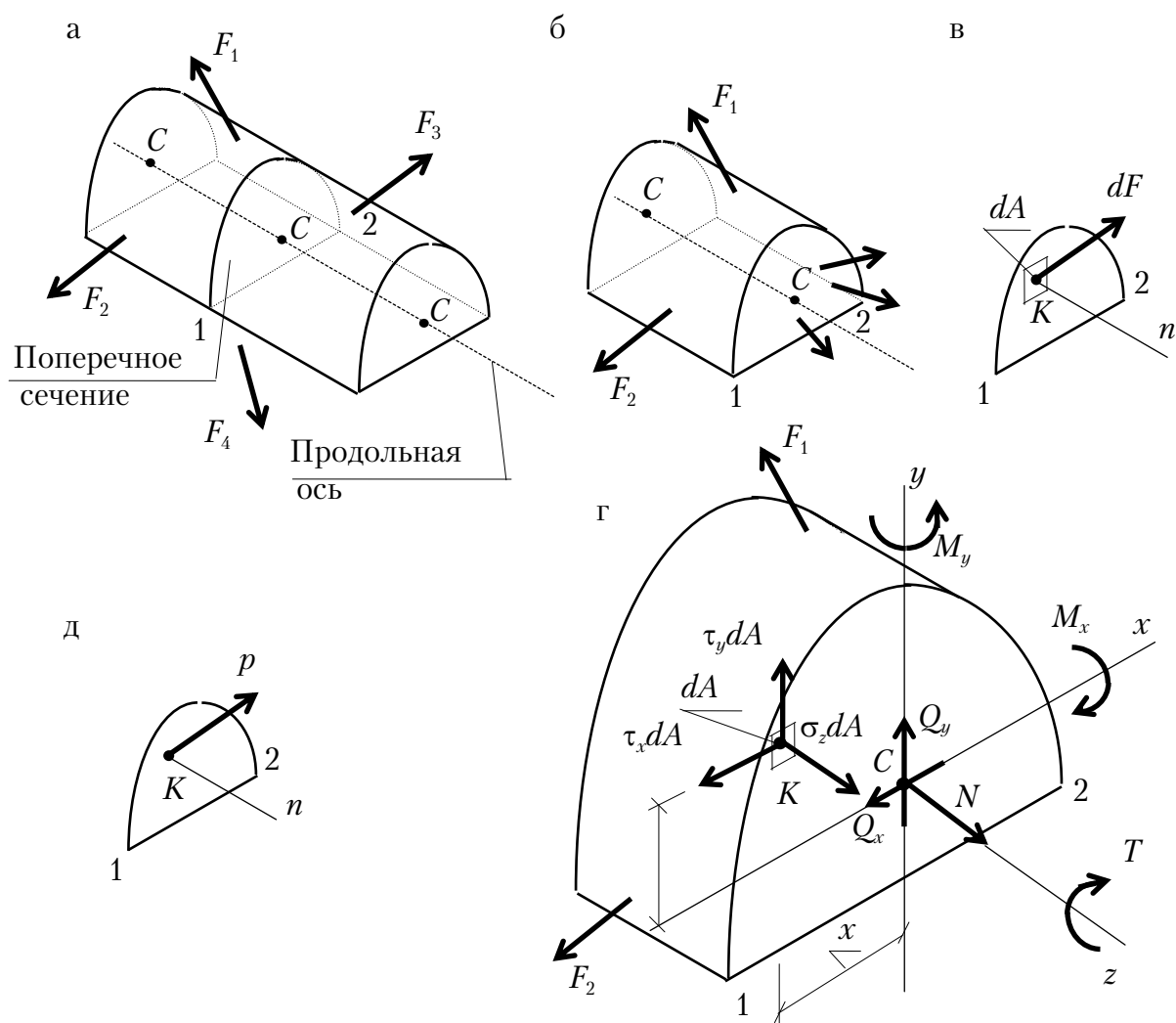


Рис. 1

Материал тела, рассматриваемый в курсе «Сопротивление материалов», идеализируется. С целью упрощения расчетов (без ущерба для точности) приняты следующие гипотезы и допущения:

1. Материал представляет собой однородную сплошную среду.  
Однородная среда – во всех точках тела свойства одинаковы.  
Сплошная среда – материал непрерывно (без пустот) заполняет объем.
2. Материал конструкции изотропный – свойства во всех направлениях одинаковы.
3. Материал до определенного предела нагружения работает упруго.
4. Перемещения точек элемента или системы элементов, обусловленные его деформациями, малы по сравнению с размерами самого элемента.
5. Результат действия нескольких сил на тело равен алгебраической сумме результатов действия каждой силы, прикладываемой в отдельности (принцип независимости действия сил).

Абсолютно твердых тел в природе не существует. Под действием внешних сил тела изменяют свою формы и размеры. Изменение формы и размеров тела называется **деформацией**. Свойство тел деформироваться под нагрузкой и затем после устранения внешних сил восстанавливать свое первоначальное состояние называется **упругостью**. Часть деформации тела, которая исчезает после снятия нагрузки, называется упругой, а та часть, которая остается, называют неупругой или остаточной. Изменение размеров тела характеризуется линейной, а изменения формы – угловой деформацией. Для кубика бесконечно малых размеров (рис.2) имеем:

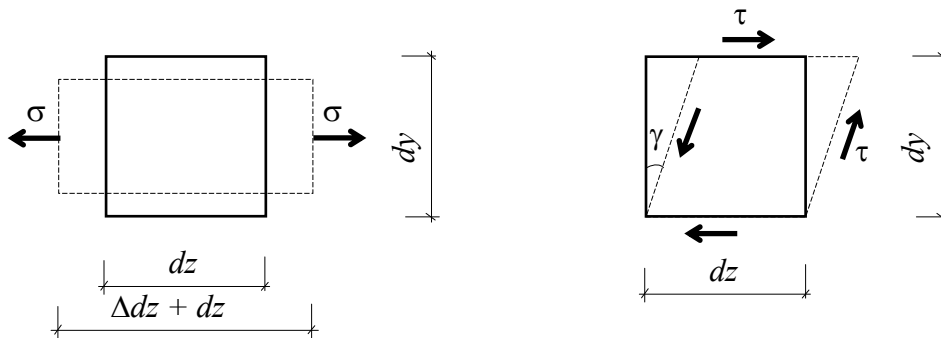


Рис. 2

Условные обозначения к рис. 2:

$\Delta dz$  – абсолютная линейная деформация ребра кубика;

$\varepsilon$  (эпсилон) – относительная линейная деформация,  $\varepsilon = \frac{\Delta dz}{dz}$ ;

$\gamma$  (гамма) – относительная угловая деформация, показывающая изменение прямого угла.

В процессе деформирования между отдельными частями стержня возникают силы взаимодействия – внутренние силы. Они сохраняют цело-

стность бруса и возвращают его в исходное положение после снятия нагрузки. Для оценки прочности стержня необходимо научиться определять величину внутренних сил. Их находим, используя метод сечений. В том месте, где требуется определить внутренние силы, мысленно рассекаем брус сечением на две части и отбрасываем одну из них, например правую (см. рис. 1, б). Влияние правой части на левую заменяем внутренними силами взаимодействия. Под действием внешних и внутренних сил отсеченная левая часть должна находиться в равновесии.

Для характеристики величины и направления внутренних сил используется понятие напряжения. Для определения напряжений выделим вокруг некоторой точки  $K$  бесконечно малую площадку  $dA$ . На эту площадку приходится равнодействующая внутренних усилий  $dF$  (см. рис. 1, в).

Напряжением называется предел отношения внутренней силы, передающейся через бесконечно малую площадку, когда размеры площадки стремятся к нулю (см. рис. 1, д):

$$p = \lim_{dA \rightarrow 0} \frac{dF}{dA}.$$

Таким образом, напряжение есть мера интенсивности внутренних сил и измеряется в Па ( $\text{Н/м}^2$ ).

В общем случае вектор полного напряжения  $p$  может не совпадать с направлением нормали  $n$  к поперечному сечению 1-2. Разложим вектор напряжения на три составляющие по правилу параллелепипеда (рис. 1, г):  $\sigma_z, \tau_x, \tau_y$ .

Нормальным напряжением  $\sigma$  (сигма) называется вектор, направленный по нормали к поперечному сечению. Два других компонента, расположенные в плоскости сечения, называются касательными напряжениями  $\tau$  (тау). При этом индекс у напряжения показывает, параллельно какой оси оно направлено. Нормальные напряжения вызывают линейную деформацию, а касательные напряжения – угловую деформацию (см. рис. 2). Напряжения непрерывно распределены по сечению и являются функцией координат. При расчёте первостепенное значение имеют напряжения, действующие в поперечном сечении, перпендикулярном продольной оси бруса. Совместим начало координат с центром тяжести, а ось  $y$  – с осью симметрии поперечного сечения (см. рис. 1, г). В этом случае оси  $x$  и  $y$  называются главными центральными осями (см. задачу №1), а ось  $z$  совпадает с продольной осью стержня.

Заменяем напряжения их равнодействующими внутренними усилиями.

Равнодействующая всех нормальных напряжений в сечении называется продольной силой:

$$N = \int_A \sigma_z dA.$$

Она приложена в центре тяжести поперечного сечения и направлена вдоль оси  $z$ .

Изгибающим моментом называется момент, создаваемый нормальными напряжениями, соответственно вокруг осей  $x$  и  $y$ :

$$M_x = \int_A y \sigma_z dA; \quad M_y = \int_A x \sigma_z dA.$$

При этом  $M_x$  расположен в вертикальной плоскости  $yCz$ , а  $M_y$  – в горизонтальной плоскости  $xCz$ .

Равнодействующая всех касательных напряжений в сечении называется поперечной силой. Она приложена в центре тяжести и направлена соответственно по осям  $x$  и  $y$ :

$$Q_x = \int_A \tau_z dA; \quad Q_y = \int_A \tau_y dA.$$

Крутящим моментом называется момент, создаваемый касательными напряжениями вокруг продольной оси  $z$ :

$$T = \int_A (\tau_{xy} - \tau_{yx}) dA.$$

Он расположен в плоскости поперечного сечения  $yCx$ .

Тогда, как следует из курса теоретической механики, величину и направление компонентов внутренних усилий можно найти из шести независимых уравнений равновесия:

$$\sum F_x = 0, \quad \sum F_y = 0, \quad \sum F_z = 0, \quad \sum M_x = 0, \quad \sum M_y = 0, \quad \sum M_z = 0.$$

В каждое из них входит только одно неизвестное внутреннее усилие: соответственно  $Q_x$ ,  $Q_y$ ,  $N$ ,  $M_x$ ,  $M_y$ ,  $T$ .

В зависимости от вида возникающего усилия различают три простейших типа деформаций (сопротивления) стержня: центральное (осевое) растяжение-сжатие, кручение и плоский поперечный изгиб (рис. 3).

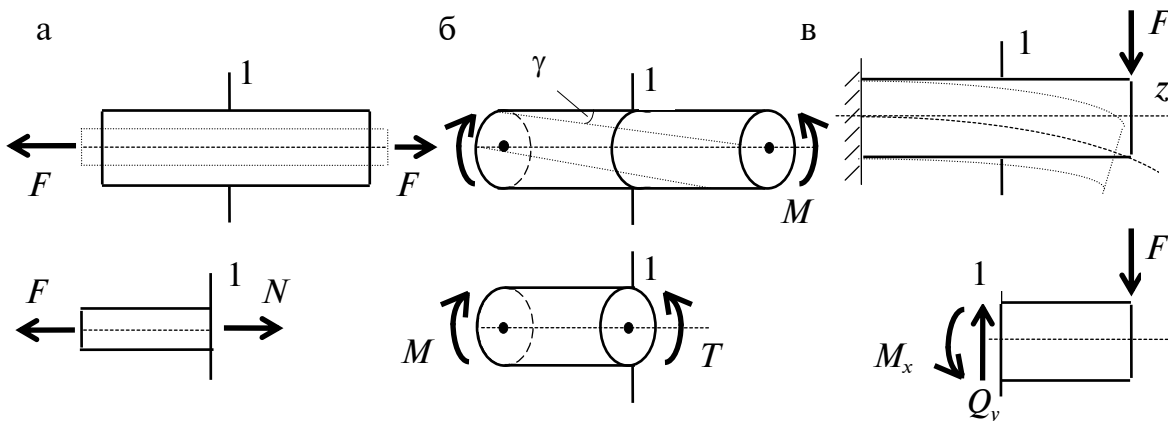


Рис. 3



Брус подвергается центральному растяжению (сжатию), если в его поперечном сечении возникает только одна продольная сила  $N$ . При его деформации поперечные сечения перемещаются, длина стержня изменяется, продольная ось не изменяет своего положения (рис. 3,а).

Брус подвергается кручению, когда в поперечном сечении возникает только крутящий момент  $T$ . При этом образующие поворачиваются на некоторый угол сдвига  $\gamma$ , а поперечные сечения вращаются вокруг продольной оси как жёсткие диски. Положение продольной оси не изменяется (рис. 3, б).

Поперечным изгибом называется такой вид деформации бруса, когда его продольная ось  $z$  искривляется в плоскости чертежа под действием нагрузки. При этом в поперечном сечении возникают изгибающий момент  $M_x$  и поперечная сила  $Q_y$  (рис. 3, в).

В случае комбинаций простейших видов деформаций говорят, что стержень испытывает сложное сопротивление.

Сложному сопротивлению посвящены раздел "Расчёт стального вала при совместном действии изгиба и кручения" и раздел "Определение напряжений в стержне при совместном действии изгиба и продольной силы".

Напряжения и усилия в брус не могут расти до бесконечности. Наступает момент, когда брус разрушается.

Максимальное напряжение, которое можно допустить в материале стержня в процессе его эксплуатации, называется допускаемым напряжением:  $[\sigma]$ ,  $[\tau]$ . Тогда условие прочности (безопасной работы) запишем в следующем виде:

$$\sigma_{\max} \leq [\sigma], \quad \tau_{\max} \leq [\tau].$$

Как правило, появление неупругих деформаций не допускается, поэтому допускаемые напряжения меньше предела пропорциональности, т.е. материал работает упруго. Значение принимаемого в расчётах допускаемого напряжения в значительной степени определяет надёжность и экономичность конструкции и, как правило, обусловлено нормами и техническими условиями эксплуатации.

Величина деформации стержня также должна быть меньше предельно допустимой, исходя из условия его нормальной эксплуатации.

Предметом изучения дисциплины "Сопротивление материалов" является определение деформаций и напряжений в брус при различных видах его нагружения. В курсе "Сопротивление материалов" рассматриваются методы их определения.

Учебное пособие предназначено для студентов, обучающихся по направлениям подготовки 23.03.03 «Эксплуатация транспортно-технологических машин и комплексов».

# Раздел 1

## ОПРЕДЕЛЕНИЕ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИК ПЛОСКИХ СЕЧЕНИЙ

### З а д а н и е

Поперечное сечение стержня составлено из прокатных профилей (рис. 1.1, табл. 1.1). Требуется:

1. Определить положение главных центральных осей.
2. Вычислить величину главных центральных моментов инерции.

При расчёте все необходимые данные следует брать из таблиц сортаментов (прил. 1–4).

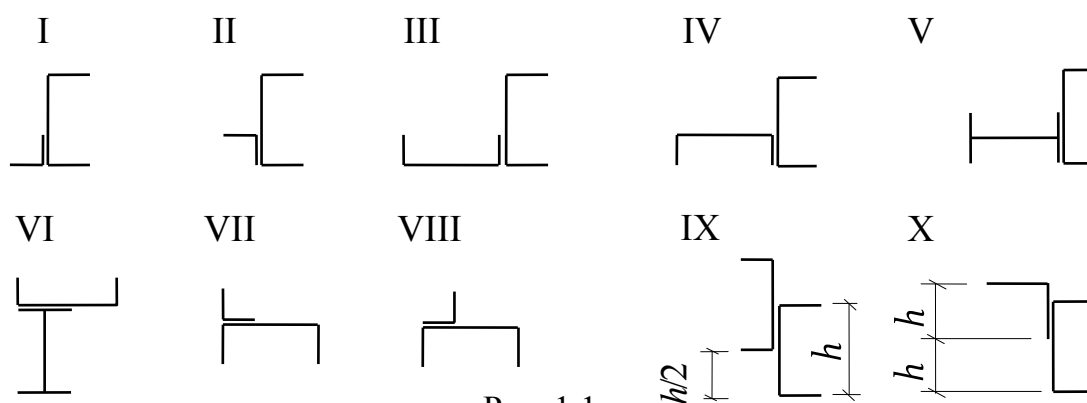


Рис. 1.1

Т а б л и ц а 1.1

### Исходные данные

Номер строки	Тип сечения по рис. 1.1	Швеллер №	Равнобокий уголок	Двутавр №
1	I	14	80 × 80 × 8	12
2	II	16	80 × 80 × 6	14
3	III	18	90 × 90 × 8	16
4	IV	20	90 × 90 × 7	18
5	V	22	90 × 90 × 6	32
6	VI	24	100 × 100 × 8	20
7	VII	27	100 × 100 × 10	36
8	VIII	30	100 × 100 × 12	22
9	IX	33	125 × 125 × 10	40
0	X	36	125 × 125 × 12	24
	<i>e</i>	<i>в</i>	<i>д</i>	<i>e</i>

## Т е о р е т и ч е с к а я   ч а с т ь

Опыты показывают, что прочность и жёсткость бруса при изгибе и кручении зависит не только от площади поперечного сечения  $A$ , но и от его формы.

Для учёта формы поперечного сечения используются специальные геометрические характеристики (рис. 1.2):

– статические моменты площади (размерность –  $\text{м}^3, \text{см}^3$ )

$$S_x = \int_A y dA; \quad S_y = \int_A x dA; \quad (1.1)$$

– осевые моменты инерции (размерность –  $\text{м}^4, \text{см}^4$ )

$$I_x = \int_A y^2 dA; \quad I_y = \int_A x^2 dA; \quad (1.2)$$

– центробежный момент инерции (размерность –  $\text{м}^4, \text{см}^4$ )

$$I_{xy} = \int_A xy dA; \quad (1.3)$$

– полярный момент инерции (размерность –  $\text{м}^4, \text{см}^4$ )

$$I_\rho = \int_A \rho^2 dA. \quad (1.4)$$

Из формулы (1.1) следует, что статический момент площади относительно некоторой оси равен произведению площади на расстояние (координату) от центра тяжести поперечного сечения до этой оси (рис. 1.3):

$$S_x = Ay_c, \quad S_y = Ax_c. \quad (1.5)$$

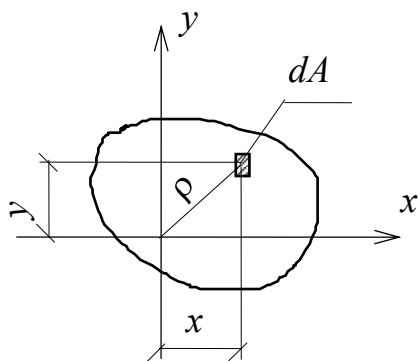


Рис. 1.2

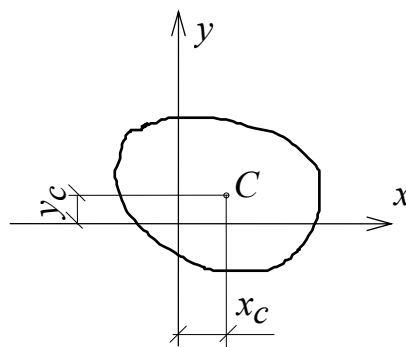


Рис. 1.3

Оси, проходящие через центр тяжести фигуры, называются центральными. Относительно этих осей статические моменты равны нулю.

Из формулы (1.5) находим координаты центра тяжести фигуры:

$$y_c = \frac{S_x}{A}; \quad x_c = \frac{S_y}{A}. \quad (1.6)$$

Осевые моменты инерции  $I_x, I_y$  (см. формулу (1.2)) представляют собой сумму произведений элементарных площадок  $dA$  на квадраты их расстояний (координаты) до соответствующих осей. Эти величины всегда положительны.

Центробежный момент инерции (см. формулу (1.3)) равен сумме произведений элементарных площадок  $dA$  на их координаты относительно осей  $x$  и  $y$ .

В зависимости от знака координат  $S_x$ ,  $S_y$  и  $I_{xy}$  могут быть положительными, отрицательными или равными нулю.

Полярный момент инерции (см. формулу (1.4)) равен сумме произведений площадей элементарных площадок  $dA$  на квадрат расстояния от начала координат до элементарных площадок. Эта величина всегда положительна.

При вычислении геометрических характеристик сложного сечения его разбивают на простые фигуры, у которых известны площади, положение центра тяжести и величины моментов инерции относительно их собственных центральных осей. Геометрические характеристики всего сечения определяют как алгебраическую сумму соответствующих геометрических характеристик простых частей. При этом используются зависимости между моментами инерции при параллельном переносе и повороте осей.

Допустим, что известны осевые и центробежный моменты инерции некоторого сечения относительно центральных осей  $x$ ,  $y$  (рис. 1.4). Тогда осевые и центробежный моменты инерции относительно произвольных параллельных осей  $x_1$ ,  $y_1$  могут быть найдены по следующим формулам:

$$I_{x_1} = I_x + a^2 A; \quad I_{y_1} = I_y + b^2 A; \quad I_{x_1 y_1} = I_{xy} + abA. \quad (1.7)$$

В формулах (1.7)  $a$  и  $b$  трактуются как координаты точки  $C$  (центра тяжести сечения) относительно новых осей  $x_1$  и  $y_1$ .

Зависимость между моментами инерции при повороте осей (рис. 1.5) определяется следующими формулами:

$$\begin{aligned} I_{x_1} &= I_x \cos^2 \alpha + I_y \sin^2 \alpha - I_{xy} \sin 2\alpha, \\ I_{y_1} &= I_x \sin^2 \alpha + I_y \cos^2 \alpha + I_{xy} \sin 2\alpha, \\ I_{x_1 y_1} &= \frac{I_x - I_y}{2} \sin 2\alpha + I_{xy} \cos 2\alpha. \end{aligned} \quad (1.8)$$

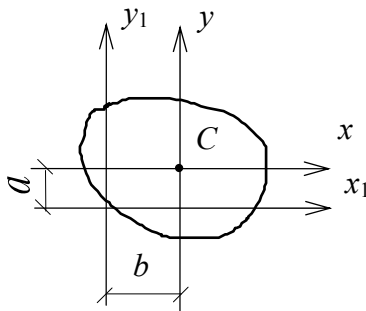


Рис. 1.4

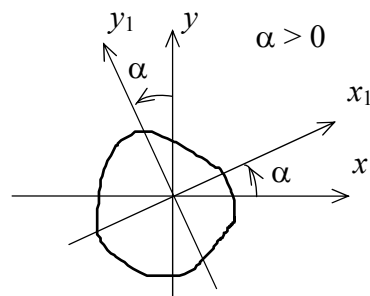


Рис. 1.5

*Правило знаков.* В формулах (1.8) угол  $\alpha$  считается положительным, если новые оси  $x_1, y_1$  повернуты относительно осей  $x$  и  $y$  против часовой стрелки.

Из формул (1.8) следует, что при повороте осей каждый из моментов инерции меняется, но сумма осевых моментов инерции относительно двух взаимно перпендикулярных осей остается постоянной:

$$I_x + I_y = I_{x_1} + I_{y_1} = \text{const} . \quad (1.9)$$

Существует такой угол поворота осей  $\alpha_0$ , при котором центробежный момент инерции  $I_{x_1 y_1}$  обращается в нуль.

Оси, относительно которых центробежный момент инерции равен нулю, называются главными осями. Центральные оси, относительно которых центробежный момент инерции равен нулю, называются главными центральными осями.

Осевые моменты инерции, вычисленные относительно главных осей, называются главными моментами инерции.

Главные оси обладают свойством экстремальности: относительно одной из них осевой момент инерции принимает максимальное, а относительно другой – минимальное значение по сравнению с величинами осевых моментов инерции, вычисленных относительно любых других осей, проходящих через данную точку.

Для определения положения главных осей используют формулу

$$\text{tg } 2\alpha_0 = -\frac{2I_{xy}}{I_x - I_y} . \quad (1.10)$$

Если сечение имеет хотя бы одну ось симметрии, то центробежный момент инерции относительно этой и любой ей перпендикулярной оси равен нулю. Следовательно, эти оси являются главными.

Основные геометрические характеристики для прокатных профилей приведены в таблицах сортаментов (см. прил. 1–4), а для простейших фигур – в прил. 5.

### Примеры решения задач

**Пример 1.1.** Определить положение главных центральных осей и вычислить значение главных центральных моментов инерции фигуры, изображенной на рис. 1.6.

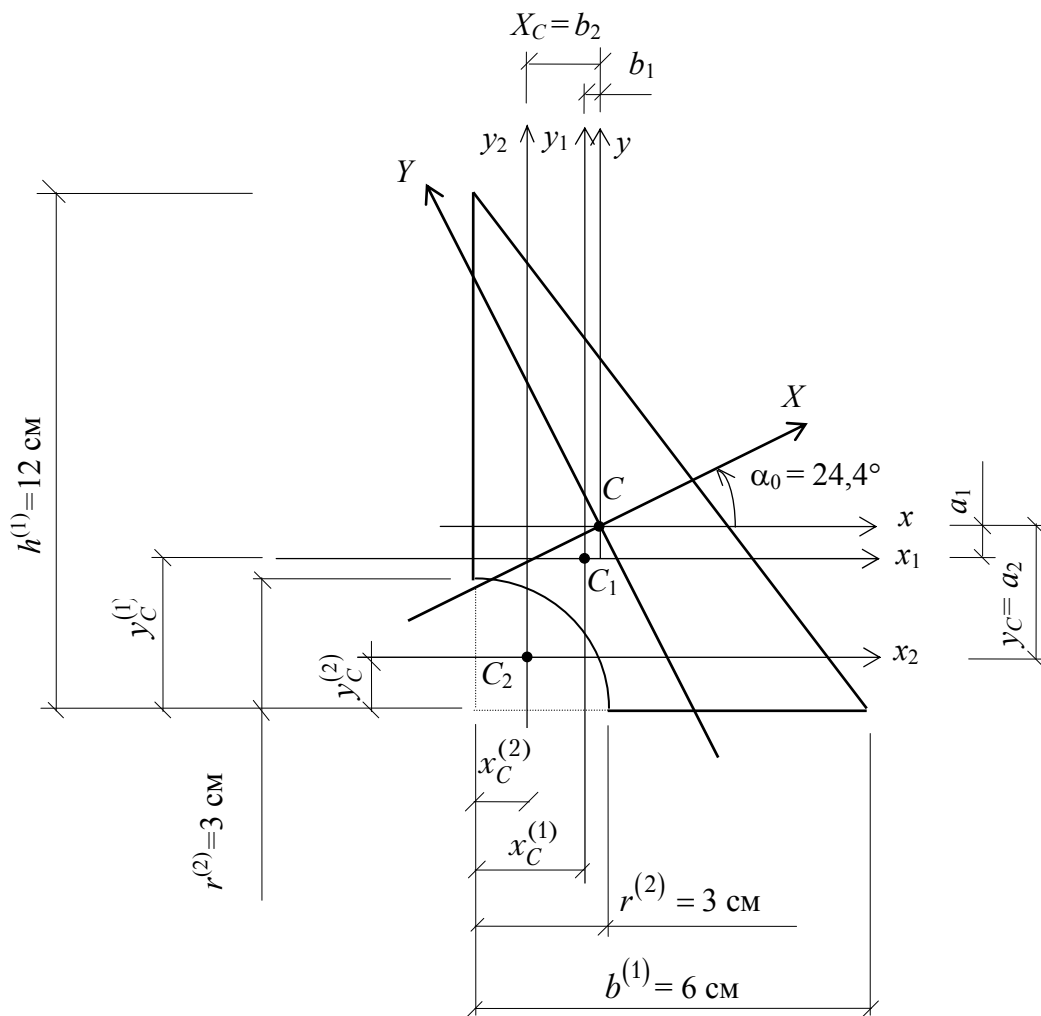


Рис. 1.6

### Решение

Разбиваем сложную фигуру на две простые, геометрические характеристики и координаты центров тяжести которых известны и приведены в прил. 5: 1 – прямоугольный треугольник, 2 – четверть круга. Выписываем из прил. 5 необходимые данные.

Прямоугольный треугольник:

$$b^{(1)} = 6 \text{ см}; \quad h^{(1)} = 12 \text{ см}; \quad A^{(1)} = \frac{12 \cdot 6}{2} = 36 \text{ см}^2; \quad x_C^{(1)} = 2 \text{ см}; \quad y_C^{(1)} = 4 \text{ см};$$

$$I_{x_1}^{(1)} = \frac{6 \cdot 12^3}{36} = 288 \text{ см}^4;$$

$$I_{y_1}^{(1)} = \frac{12 \cdot 6^3}{36} = 72 \text{ см}^4 \quad I_{x_1 y_1}^{(1)} = \frac{-12^2 \cdot 6^2}{72} = -72 \text{ см}^4.$$

Четверть круга:

$$r^{(2)} = 3 \text{ см}; \quad A^{(2)} = -0,785 \cdot 3^2 = -7,07 \text{ см}^2; \quad x_C^{(2)} = y_C^{(2)} = 1,27 \text{ см};$$

$$I_{x_2}^{(2)} = I_{y_2}^{(2)} = -0,0547 \cdot 3^4 = -4,43 \text{ см}^4; \quad I_{x_2 y_2}^{(2)} = -0,0165 \cdot 3^4 = -1,34 \text{ см}^4.$$

Наименования осей и обозначения принимаются в соответствии с принятыми в задаче (см. рис. 1.6).

1. *Определение положения центра тяжести сечения.* Координаты центра тяжести вычисляются по формуле (1.6). Для сложного сечения статический момент площади равен алгебраической сумме статических моментов частей, его составляющих. Так как четверть круга представляет собой вырез, то статический момент и площадь второй фигуры надо вычесть из первой. Из формулы (1.6) получаем:

$$x_C = \frac{\sum S_y}{\sum A} = \frac{S_y^{(1)} - S_y^{(2)}}{A^{(1)} - A^{(2)}} = \frac{A^{(1)}x_1 - A^{(2)}x_2}{A^{(1)} - A^{(2)}},$$

$$y_C = \frac{\sum S_x}{\sum A} = \frac{S_x^{(1)} - S_x^{(2)}}{A^{(1)} - A^{(2)}} = \frac{A^{(1)}y_1 - A^{(2)}y_2}{A^{(1)} - A^{(2)}},$$

где  $x_1, y_1, x_2, y_2$  – координаты центров тяжести простых фигур со своими знаками во вспомогательной системе координат.

Расположение вспомогательной системы координат может быть любым. В данном примере в качестве вспомогательной системы координат используем центральные оси второй фигуры  $x_2$  и  $y_2$ , тогда

$$x_c = \frac{36 \cdot (2 - 1,27) - 7,07 \cdot 0}{36 - 7,07} = 0,908 \text{ см};$$

$$y_c = \frac{36 \cdot (4 - 1,27) - 7,07 \cdot 0}{36 - 7,0} = 3,40 \text{ см}.$$

Наносим на схему центр тяжести и центральные оси  $x$  и  $y$  (см. рис. 1.6).

2. *Определение моментов инерции относительно центральных осей.* Моменты инерции всего сечения относительно центральных осей вычисляются как алгебраическая сумма моментов инерции простых фигур относительно этих осей. При этом значения моментов инерции для четверти круга принимаем со знаком минус, так как данная фигура представляет собой вырез:

$$I_x = I_x^{(1)} - I_x^{(2)}; \quad I_y = I_y^{(1)} - I_y^{(2)}; \quad I_{xy} = I_{xy}^{(1)} - I_{xy}^{(2)}.$$

Для нахождения значений моментов инерции первой и второй фигур относительно центральных осей всего сечения  $x$  и  $y$  используем соотношения (1.7):

$$I_x^{(1)} = I_{x_1}^{(1)} + A^{(1)}a_1^2 = 288 + 36 \cdot 0,67^2 = 304,2 \text{ см}^4;$$

$$I_x^{(2)} = I_{x_2}^{(2)} + A^{(2)}a_2^2 = 4,43 + 7,07 \cdot 3,40^2 = 86,2 \text{ см}^4;$$

$$I_x = 304,2 - 86,2 = 218 \text{ см}^4;$$

$$I_y = I_{y_1}^{(1)} = I_{y_1}^{(1)} + A^{(1)}b_1^2 = 72 + 36 \cdot 0,178^2 = 73,1 \text{ см}^4;$$

$$I_y^{(2)} = I_{y_2}^{(2)} + A^{(2)}b_2^2 = -4,43 + (-7,07) \cdot 0,908^2 = -10,3 \text{ см}^4;$$

$$I_y = 73,1 - 10,3 = 62,8 \text{ см}^4.$$

$$I_{xy}^{(1)} = I_{x_1y_1}^{(1)} + A^{(1)}(-a_1)(-b_1) = -72 + 36(-0,67)(-0,178) = -67,7 \text{ см}^4;$$

$$I_{xy}^{(2)} = I_{x_2y_2}^{(2)} + A^{(2)}(-a_2)(-b_2) = (-1,34) - 7,07(3,40)(0,908) = 20,5 \text{ см}^4;$$

$$I_{xy} = -67,7 + (-20,5) = -88,2 \text{ см}^4.$$

Расстояния между центральными параллельными осями:

$$a_1 = y_C - (y_C^{(1)} - y_C^{(2)}) = 3,40 - (4 - 1,27) = 0,67 \text{ см}; a_2 = y_C;$$

$$b_1 = x_C - (x_C^{(1)} - x_C^{(2)}) = 0,908 - (2 - 1,27) = 0,178 \text{ см}; b_2 = x_C.$$

3. *Определение положения главных центральных осей и вычисление главных центральных моментов инерции.* По найденным значениям моментов инерции относительно центральных осей, используя соотношение (1.10), определяем угол поворота  $\alpha_0$  главных центральных осей (см. рис. 1.6):

$$\operatorname{tg} 2\alpha_0 = -\frac{2I_{xy}}{I_x - I_y} = -\frac{2 \cdot (-88,2)}{218 - 62,8} = 1,14; \alpha_0 = 24,4^\circ.$$

Поворачивая центральные оси сечения  $x$  и  $y$  на угол  $24,4^\circ$  против часовой стрелки, строим главные центральные оси  $X$ ,  $Y$ .

На основе зависимостей (1.8) определяем значения главных центральных моментов инерции сечения:

$$I_X = I_x \cos^2 \alpha_0 + I_y \sin^2 \alpha_0 - I_{xy} \sin 2\alpha_0 =$$

$$= 218 \cdot \cos^2(24,4^\circ) + 62,8 \cdot \sin^2(24,4^\circ) - (-88,2) \cdot \sin(48,8^\circ) =$$

$$= 180,9 + 10,7 + 66,2 = 257,8 \text{ см}^4;$$

$$I_Y = I_x \sin^2 \alpha_0 + I_y \cos^2 \alpha_0 + I_{xy} \sin 2\alpha_0 =$$

$$= 218 \cdot \sin^2(24,4^\circ) + 62,8 \cdot \cos^2(24,4^\circ) + (-88,2) \cdot \sin(48,8^\circ) =$$

$$= 37,0 + 52,1 - 66,2 = 22,9 \text{ см}^4.$$

Таким образом, экстремальные значения главных центральных моментов инерции сечения равны следующим величинам:

$$I_{\max} = I_X = 257,8 \text{ см}^4; \quad I_{\min} = I_Y = 22,9 \text{ см}^4.$$

Для проверки правильности вычислений используем соотношения (1.9):

$$I_x + I_y = I_X + I_Y; \quad 218 + 62,8 = 257,8 + 22,9;$$

$$280,8 \text{ см}^4 \cong 280,7 \text{ см}^4.$$



Пример 1.2. Для фигуры, состоящей из швеллера №27 и равнобокого уголка 100×100×10 (рис. 1.7), найти величину главных центральных моментов инерции и положение главных центральных осей.

### Решение

Разбиваем сечение на две простые фигуры, геометрические характеристики которых приведены в соответствующих ГОСТах (сортаментах): 1 – швеллер № 27, 2 – уголок 100 × 100 × 10.

Выписываем из таблиц сортаментов необходимые данные (см. прил. 2, 4). Цифры сверху в скобках обозначают номер фигуры.

Швеллер № 27 (ГОСТ 8240-89):

$$h^{(1)} = 27 \text{ см}; A^{(1)} = 35,2 \text{ см}^2; I_{x_1}^{(1)} = 4160 \text{ см}^4;$$

$$I_{y_1}^{(1)} = 262 \text{ см}^4; x_C^{(1)} = 2,47 \text{ см}, b^{(1)} = 9,5 \text{ см}.$$

Уголок 100 × 100 × 10 (ГОСТ 8509-93):

$$A^{(2)} = 19,2 \text{ см}^2; x_C^{(2)} = y_C^{(2)} = 2,83 \text{ см}; I_{x_2}^{(2)} = I_{y_2}^{(2)} = 179 \text{ см}^4;$$

$$I_{x_3}^{(2)} = 284 \text{ см}^4; I_{y_3}^{(2)} = 74,1 \text{ см}^4.$$

Сортаментами необходимо пользоваться очень внимательно, помня о том, что названия осей в сортаменте не всегда совпадают с названиями осей в конкретной задаче (см. рис. 1.7).

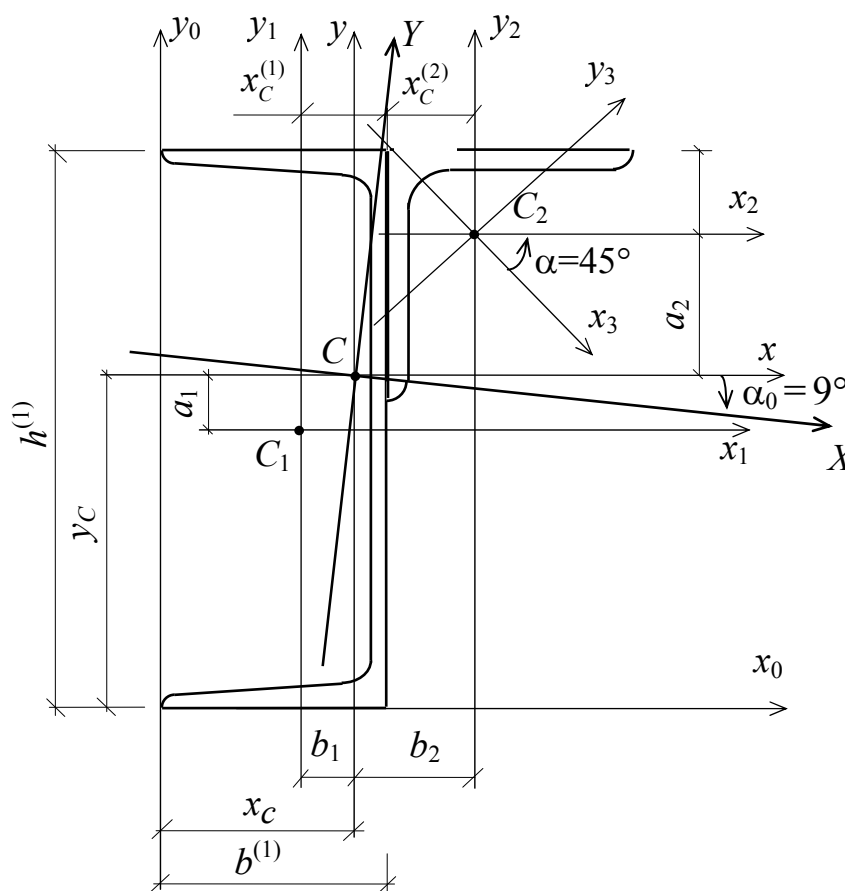


Рис. 1.7

1. *Определение положения центра тяжести фигуры.* Координаты центра тяжести сечения находим из формулы (1.6). Статический момент сложного сечения равен сумме статических моментов его составных частей.

Тогда

$$x_C = \frac{\sum S_y^{(i)}}{\sum A^{(i)}} = \frac{S_y^{(1)} + S_y^{(2)}}{A^{(1)} + A^{(2)}} = \frac{A^{(1)}x_1 + A^{(2)}x_2}{A^{(1)} + A^{(2)}},$$

$$y_C = \frac{\sum S_x^{(i)}}{\sum A^{(i)}} = \frac{S_x^{(1)} + S_x^{(2)}}{A^{(1)} + A^{(2)}} = \frac{A^{(1)}y_1 + A^{(2)}y_2}{A^{(1)} + A^{(2)}},$$

где  $x_1, y_1, x_2, y_2$  – координаты центров тяжести составных частей во вспомогательной системе координат

В качестве вспомогательных осей используем оси  $x_0$  и  $y_0$ , проходящие через нижнюю и левую грань фигуры. Получаем:

$$x_C = \frac{35,2 \cdot 7,03 + 19,2 \cdot 12,33}{35,2 + 19,2} = 8,9 \text{ см};$$

$$y_C = \frac{35,2 \cdot 13,5 + 19,2 \cdot 24,17}{35,2 + 19,2} = 17,27 \text{ см}.$$

Здесь  $x_1 = b^{(1)} - x_C^{(1)} = 9,5 - 2,47 = 7,03 \text{ см},$

$$y_1 = 0,5h^{(1)} = 0,5 \cdot 27 = 13,5 \text{ см};$$

$$x_2 = b^{(1)} + x_C^{(2)} = 9,5 + 2,83 = 12,33 \text{ см},$$

$$y_2 = h^{(1)} - y_C^{(2)} = 27 - 2,83 = 24,17 \text{ см}.$$

По найденным значениям  $x_C, y_C$  строим на схеме (см. рис. 1.7) центр тяжести сечения и проводим через него центральные оси  $x$  и  $y$  параллельно осям  $x_1$  и  $y_1$ .

2. *Определение моментов инерции относительно центральных осей.* Моменты инерции сечения относительно центральных осей вычисляются как сумма моментов инерции простых фигур:

$$I_x = I_x^{(1)} + I_x^{(2)}; I_y = I_y^{(1)} + I_y^{(2)}; I_{xy} = I_{xy}^{(1)} + I_{xy}^{(2)}.$$

Для нахождения моментов инерции простых фигур относительно центральных осей сечения используем соотношения (1.7). При этом расстояние между параллельными осями  $x$  и  $x_1, x_2$ , а также  $y$  и  $y_1, y_2$  равны следующим величинам:

$$a_1 = y_1 - y_C = 13,5 - 17,27 = -3,77 \text{ см};$$

$$a_2 = y_2 - y_C = 24,17 - 17,27 = 6,9 \text{ см};$$

$$b_1 = x_1 - x_C = 7,03 - 8,9 = -1,87 \text{ см};$$

$$b_2 = x_2 - x_C = 12,33 - 8,9 = 3,43 \text{ см}.$$

Подставляя найденные значения в формулу (1.7), получим:

$$I_x^{(1)} = I_{x_1}^{(1)} + a_1^2 A^{(1)} = 4160 + (-3,77)^2 \cdot 35,2 = 4660 \text{ см}^4;$$

$$I_x^{(2)} = I_{x_2}^{(2)} + a_2^2 A^{(2)} = 179 + 6,9^2 \cdot 19,2 = 1093 \text{ см}^4;$$

$$I_y^{(1)} = I_{y_1}^{(1)} + b_1^2 A^{(1)} = 262 + (-1,87)^2 \cdot 35,2 = 385 \text{ см}^4;$$

$$I_y^{(2)} = I_{y_2}^{(2)} + b_2^2 A^{(2)} = 179 + 3,43^2 \cdot 19,2 = 405 \text{ см}^4.$$

Тогда

$$I_x = 4660 + 1093 = 5753 \text{ см}^4; \quad I_y = 385 + 405 = 790 \text{ см}^4.$$

При определении центробежных моментов инерции каждой простой фигуры относительно центральных осей  $x$  и  $y$  всего сечения необходимо знать значения центробежных моментов инерции этих фигур относительно собственных центральных осей ( $x_1 y_1$ ,  $x_2 y_2$ ). Так как одна из центральных осей швеллера является осью симметрии, то  $I_{x_1 y_1}^{(1)} = 0$ . Для уголка главными центральными осями являются оси  $x_3 y_3$  (см. рис. 1.7) и, значит,  $I_{x_3 y_3}^{(2)} = 0$ . Центробежный момент инерции уголка относительно осей  $x_2 y_2$  определяется из соотношений (1.8):

$$I_{x_2 y_2}^{(2)} = \frac{I_{x_3}^{(2)} - I_{y_3}^{(2)}}{2} \sin 2\alpha + I_{x_3 y_3}^{(2)} \cos 2\alpha.$$

Из рис. 1.7 видно, что  $\alpha = 45^\circ$ . Он положителен, так как поворот осей  $x_3$  и  $y_3$  соответственно к осям  $x_2$  и  $y_2$  осуществляется против часовой стрелки.

$$I_{x_2 y_2}^{(2)} = \frac{284 - 74,1}{2} \sin 90^\circ + 0 = 105 \text{ см}^4.$$

Находим центробежный момент инерции всего сечения относительно центральных осей:

$$I_{xy}^{(1)} = I_{x_1 y_1}^{(1)} + a_1 \cdot b_1 A^{(1)} = 0 + (3,77) \cdot (1,87) \cdot 35,2 = 248 \text{ см}^4;$$

$$I_{xy}^{(2)} = I_{x_2 y_2}^{(2)} + a_2 b_2 A^{(2)} = 105 + 6,9 \cdot 3,43 \cdot 19,2 = 559 \text{ см}^4;$$

$$I_{xy} = 248 + 559 = 807 \text{ см}^4.$$

3. *Определение положения главных центральных осей и вычисление главных центральных моментов инерции.* По найденным значениям моментов инерции относительно центральных осей, используя соотношение (1.10), находим угол поворота  $\alpha_0$  главных центральных осей:

$$\operatorname{tg} 2\alpha_0 = -\frac{2I_{xy}}{I_x - I_y} = -\frac{2 \cdot 807}{5753 - 790} = -0,325; \quad \alpha_0 = -9^\circ.$$

Поворачивая центральные оси  $x$  и  $y$  сечения на угол  $9^\circ$  по часовой стрелке в соответствии с правилом знаков, строим главные центральные оси  $X, Y$  (см. рис. 1.7).

На основе зависимостей (1.8) определяем значения главных центральных моментов инерции сечения:

$$\begin{aligned} I_X &= I_x \cos^2 \alpha_0 + I_y \sin^2 \alpha_0 - I_{xy} \sin 2\alpha_0 = \\ &= 5753 \cos^2(-9^\circ) + 790 \sin^2(-9^\circ) - 807 \sin(-18^\circ) = \\ &= 5612,3 + 19,3 + 249 = 5881 \text{ см}^4; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I_Y &= I_x \sin^2 \alpha_0 + I_y \cos^2 \alpha_0 + I_{xy} \sin 2\alpha_0 = \\ &= 5753 \sin^2(-9^\circ) + 790 \cos^2(-9^\circ) + 807 \sin(-18^\circ) = \\ &= 140 + 771 - 249 = 662 \text{ см}^4. \end{aligned}$$

Таким образом, главные центральные моменты инерции сечения:

$$I_{\max} = I_X = 5881 \text{ см}^4; \quad I_{\min} = I_Y = 662 \text{ см}^4.$$

Для проверки правильности вычислений используем соотношения (1.9):

$$\begin{aligned} I_x + I_y &= I_X + I_Y; \\ 5753 + 790 &= 5881 + 662; \\ 6543 \text{ см}^4 &= 6543 \text{ см}^4. \end{aligned}$$

### К о н т р о л ь н ы е   в о п р о с ы

1. Что называется статическим моментом площади относительно оси? Его размерность.
2. Когда статический момент равен нулю?
3. Какие оси называются центральными?
4. Как вычислить статический момент площади сложного очертания относительно произвольной оси?
5. Как определить положение центра тяжести плоской фигуры сложного очертания?

6. Сравните абсолютные значения статических моментов двух фигур, составляющих прямоугольник, относительно центральных осей  $x$  и  $y$  прямоугольника (рис. 1.8).

7. Что называется осевым моментом инерции? Его размерность.

8. Что называется полярным моментом инерции? Его размерность.

9. Могут ли осевой и полярный моменты инерции быть меньше или равны нулю?

10. Что называется центробежным моментом инерции?

11. Может ли центробежный момент быть меньше или равен нулю?

12. Как связаны между собой осевые и полярный моменты инерции?

13. Какие оси называются главными?

14. Какие оси называются главными центральными?

15. В каких фигурах определяется без вычислений одна из главных центральных осей?

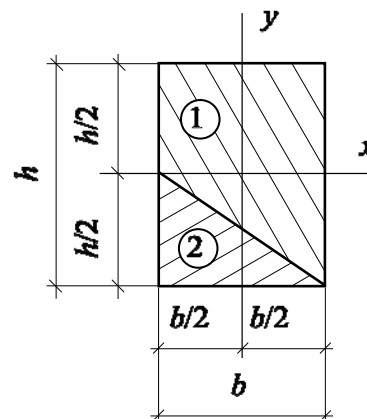


Рис. 1.8

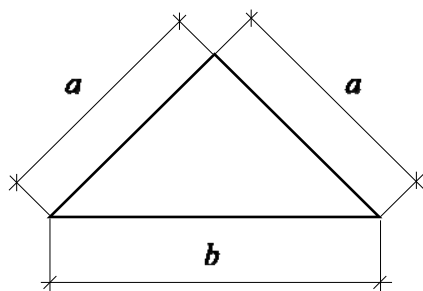


Рис. 1.9

16. В каких фигурах все оси являются главными центральными?

17. Проведите главные оси для равнобедренного треугольника, используя точку  $B$  (рис. 1.9).

18. Сколько главных осей можно провести для фигуры с одной осью симметрии?

19. Как вычислить моменты инерции для фигуры сложного очертания?

20. Как изменяется осевой момент инерции по мере удаления (приближения) площади от какой-либо оси?

21. Сформулируйте правило изменения осевого момента инерции при параллельном переносе осей.

22. Как изменяются осевые, центробежный и полярный моменты инерции при повороте координатных осей?

23. Как определить положение главных центральных осей?

24. Как вычисляются главные центральные моменты инерции составного сечения, не имеющего осей симметрии.

25. Запишите формулу для вычисления главных центральных моментов инерции прямоугольника.

26. Запишите формулу для вычисления главных центральных моментов инерции круга.

27. Запишите формулу для вычисления полярного момента инерции круга.

28. Запишите формулу для вычисления главных центральных моментов инерции равнобедренного треугольника.

29. Сравните осевые моменты инерции для прямоугольника, приведенного на рис. 1.10 ( $h > b$ ), относительно указанных осей.

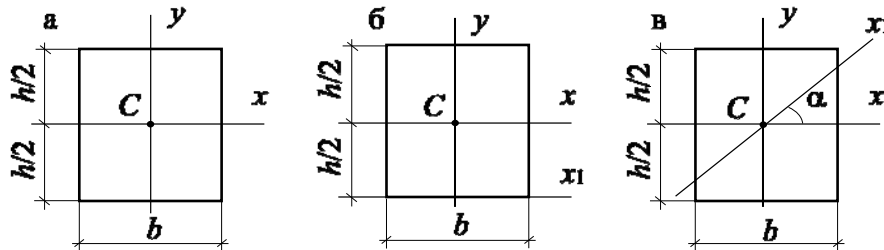


Рис. 1.10

30. Сравните площади и моменты инерции фигур относительно оси x (рис. 1.11).

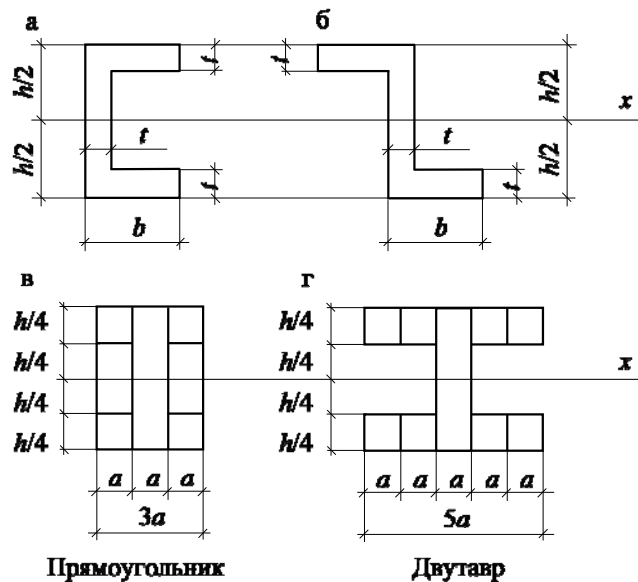


Рис. 1.11

31. Относительно какой оси момент инерции в эллипсе (рис. 1.12) будет максимальным, а относительно какой — минимальным, и почему?

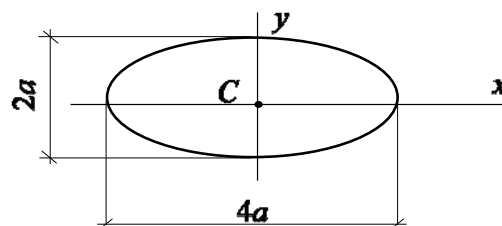


Рис. 1.12

## Раздел 2 РАСЧЁТ СТЕРЖНЯ НА РАСТЯЖЕНИЕ И СЖАТИЕ

### З а д а н и е

Стальной стержень находится под действием продольных сил  $F_1$  и  $F_2$ .

Требуется:

1. Определить из условия прочности площадь поперечного сечения  $A$ , приняв допускаемое напряжение  $[\sigma] = 210$  МПа.

2. Найти перемещение нижнего конца стержня при  $E = 200$  ГПа. Данные взять из табл. 2.1 и рис. 2.1 согласно шифру.

Т а б л и ц а 2.1

Исходные данные

Номер строки	Схема по рис. 2.1	$a$ , м	$b$ , м	$c$ , м	$F_1$ , кН	$F_2$ , кН
1	I	2,1	2,1	1,1	11	21
2	II	2,2	2,2	1,2	12	22
3	III	2,3	2,3	1,3	13	23
4	IV	2,4	2,4	1,4	14	24
5	V	2,5	2,5	1,5	15	25
6	VI	2,6	2,6	1,6	16	26
7	VII	2,7	2,7	1,7	17	27
8	VIII	2,8	2,8	1,8	18	28
9	IX	2,9	2,9	1,9	19	29
0	X	3,0	3,0	2,0	20	30
	$e$	$e$	$\delta$	$e$	$\delta$	$e$

### Т е о р е т и ч е с к а я   ч а с т ь

Если под действием нагрузки в поперечном сечении стержня возникает только одно внутреннее усилие – продольная сила  $N$ , то говорят, что он подвергается центральному (осевому) растяжению или сжатию.

Это можно продемонстрировать действием двух равных и противоположных по направлению внешних сил, приложенных в центре тяжести поперечного сечения вдоль продольной оси стержня (рис. 2.2, а).

В этом случае поперечные сечения 1 и 2 (рис. 2.2, а) в средней части стержня перемещаются параллельно самим себе в положение 1' и 2' (рис. 2.2, в). При этом длина стержня увеличивается, а размеры поперечного сечения уменьшаются. Таким образом, деформации в каждой точке между сечениями, а следовательно, и напряжения одинаковы. Говорят, что эпюра (график распределения) напряжений по поперечному сечению постоянна (рис. 2.2, б).

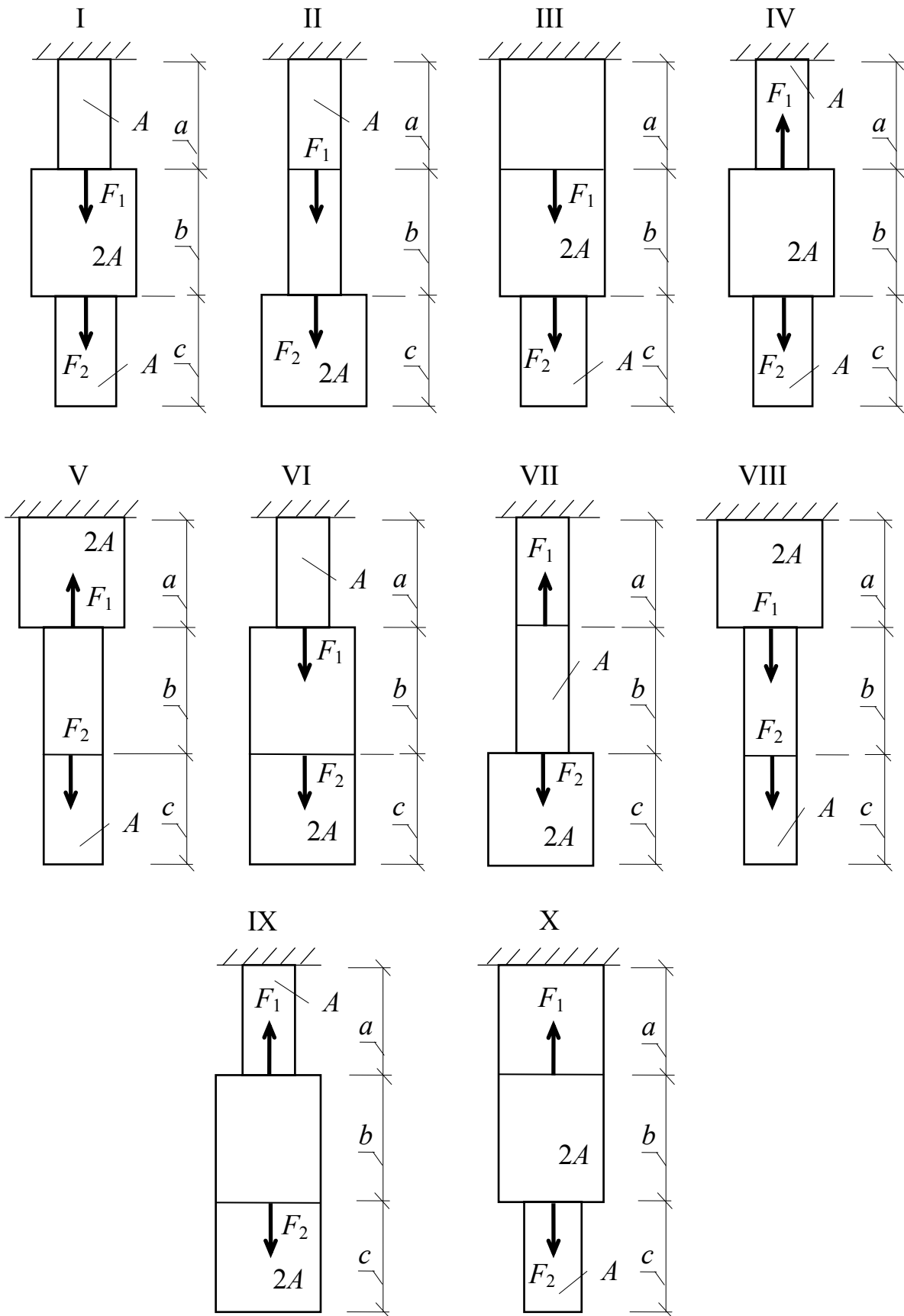


Рис. 2.1



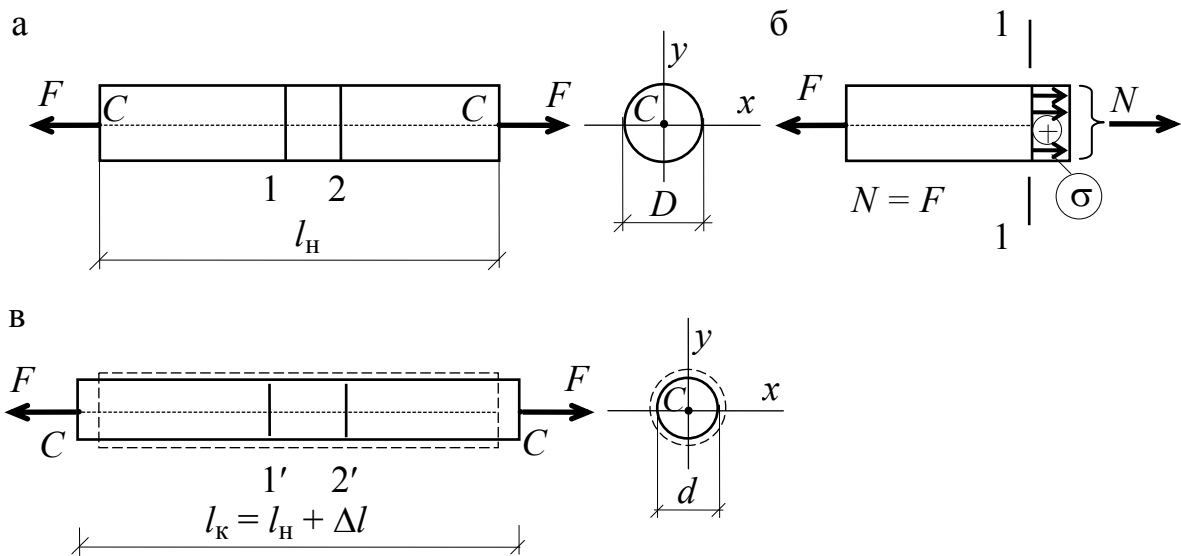


Рис. 2.2

Известно, что равнодействующей всех нормальных напряжений является продольная сила. Тогда

$$N = \int_A \sigma dA = \sigma A \text{ и } \sigma = \frac{N}{A}. \quad (2.1)$$

Абсолютной продольной деформацией называется величина

$$\Delta l = l_k - l_H. \quad (2.2)$$

Относительная продольная деформация

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l}. \quad (2.3)$$

Относительная поперечная деформация

$$\varepsilon' = \frac{d - D}{D}. \quad (2.4)$$

Коэффициент Пуассона определяется по выражению

$$\nu = \left| \frac{\varepsilon'}{\varepsilon} \right|. \quad (2.5)$$

Величину абсолютной деформации находят по закону Гука:

$$\Delta l = \frac{Nl}{EA}. \quad (2.6)$$

Он утверждает, что абсолютная деформация прямо пропорциональна продольной силе  $N$  и длине стержня и обратно пропорциональна жёсткости поперечного сечения при растяжении (сжатии)  $EA$ . В формуле (2.6) величина  $E$  называется модулем упругости материала и характеризует его способность сопротивляться деформациям растяжения (сжатия).

Подставляя в выражение (2.6) формулу (2.1) и учитывая (2.3), получим закон Гука в виде:

$$\sigma = E\varepsilon. \quad (2.7)$$

Поведение материала под нагрузкой характеризуется зависимостью между напряжением и деформацией (рис. 2.3), называемой диаграммой напряжения. Каждый материал имеет свою диаграмму.

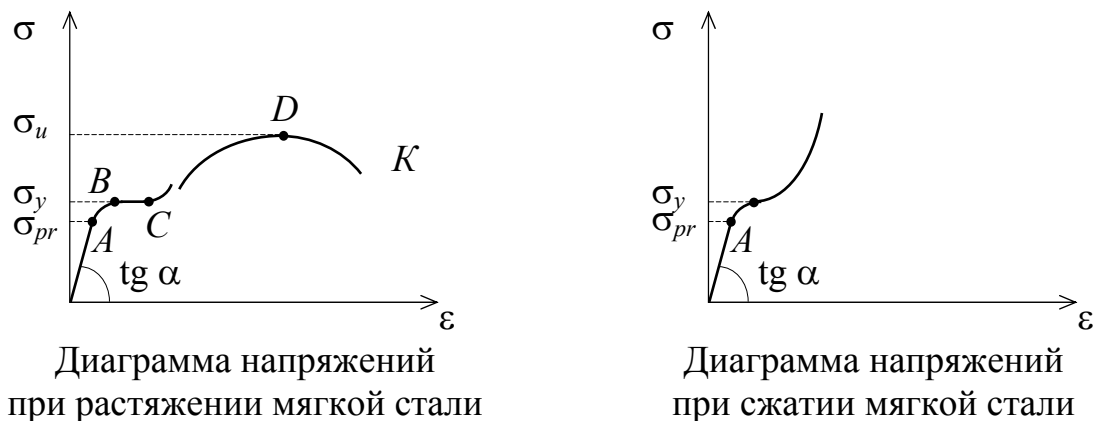


Рис. 2.3

Максимальное напряжение, соответствующее точке A, когда напряжение прямо пропорционально относительной деформации называется пределом пропорциональности  $\sigma_{pr}$ , т.е. выполняется закон Гука. При этом возникают только упругие деформации, которые исчезают после снятия нагрузки. С появлением и увеличением неупругих деформаций от точки B до точки C напряжения остаются постоянными. Этот уровень напряжений называется пределом текучести  $\sigma_y$ , а отрезок BC – площадкой текучести. Максимальное напряжение, соответствующее точке D, называется пределом прочности  $\sigma_u$ .

При увеличении нагрузки деформация и напряжение не могут расти до бесконечности, наступает момент, когда стержень начинает разрушаться.

Наибольшее напряжение, которое можно допустить в материале, чтобы обеспечить нормальную безопасную работу стержня под нагрузкой, называется допускаемым напряжением  $[\sigma]$ . Оно меньше предела пропорциональности, так как появление неупругих деформаций в материале не допускается.

Тогда условие безопасной работы (условие прочности) при растяжении (сжатии) можно записать в виде

$$\sigma_{\max} = \frac{|N_{\max}|}{A} \leq [\sigma]. \quad (2.8)$$

Для выяснения положения опасного сечения, где возникает  $\sigma_{\max}$ , строят график изменения напряжений по длине, называемый эпюрой.

Когда к стержню приложено несколько сил, внутреннее продольное усилие переменное по длине и равно алгебраической сумме сил, приложенных

к рассматриваемой отсеченной части. Для определения значения  $N_{\max}$  строим график, показывающий закон изменения продольных усилий по длине, называемый эпурой.

*Правило знаков.* Продольную силу считаем положительной, если она вызывает растяжение стержня, т.е. направлена от сечения.

Чтобы вычислить абсолютную деформацию между двумя сечениями при переменных внутренних усилиях, необходимо определить отдельно деформации на каждом участке с постоянным усилием по формуле (2.6) и результат алгебраически сложить.

### Примеры решения задач

**Пример 2.1.** Подобрать поперечное сечение стержней, если  $[\sigma] = 180 \text{ МПа}$  (рис. 2.4).

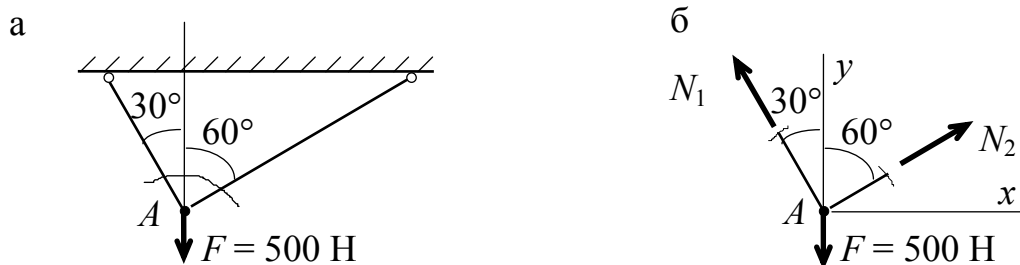


Рис. 2.4

### Решение

1. *Определение внутренних усилий в стержнях.* Вырезаем узел  $A$  и составляем уравнения равновесия (рис. 2.4, б):

$$\sum x = -N_1 \sin 30^\circ + N_2 \sin 60^\circ = 0, \quad N_1 = N_2 \frac{0,866}{0,5} = 1,732 N_2;$$

$$\sum y = N_1 \cos 30^\circ + N_2 \cos 60^\circ - F = 0, \quad N_1 = \frac{500 - 0,5 N_2}{0,866}.$$

Решая эти уравнения совместно, получим:

$$N_2 = 250 \text{ кН}, \quad N_1 = 433 \text{ кН}.$$

2. *Определение площади поперечного сечения.* Из условия прочности (2.8) находим требуемые площади:

$$A_1 = \frac{N_1}{[\sigma]} = \frac{433 \cdot 10^3}{180 \cdot 10^6} = 2,406 \cdot 10^{-3} \text{ м}^2 = 24,06 \text{ см}^2;$$

$$A_2 = \frac{N_2}{[\sigma]} = \frac{250 \cdot 10^3}{180 \cdot 10^6} = 1,39 \cdot 10^{-3} \text{ м}^2 = 13,9 \text{ см}^2.$$

**Пример 2.2.** Для стержня диаметром  $D = 4 \text{ см}$  определить допускаемую величину силы  $F$  при  $[\sigma] = 160 \text{ МПа}$  (рис. 2.5, а).

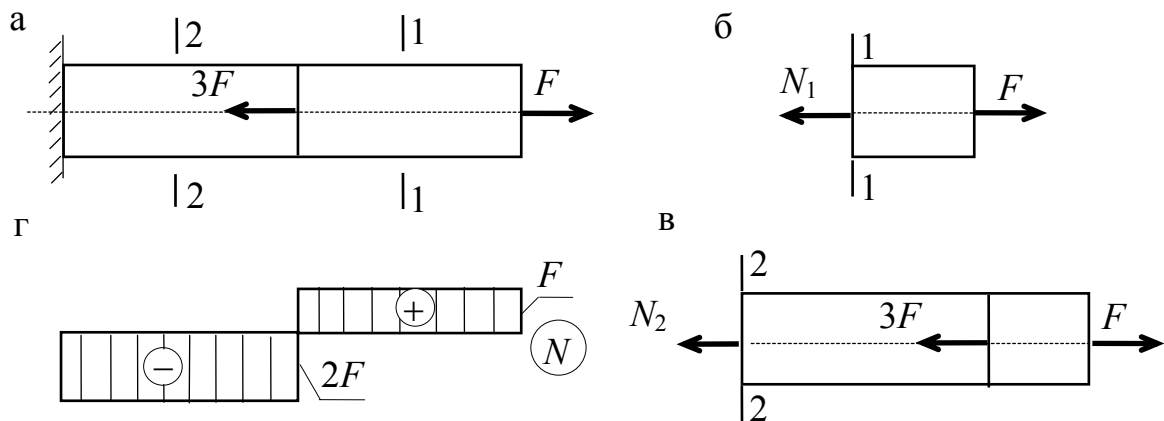


Рис. 2.5

### Решение

1. *Построение эпюры продольных усилий.* В сечении 1-1 (рис. 2.5, б)  $N_1 - F = 0$ ;  $N = F_1$  (растяжение). В сечении 2-2 (рис. 2.5, в)  $N_2 - F + 3F = 0$ ;  $N_2 = -2F$  (сжатие). Максимальное усилие  $N_{\max} = 2F$ .

2. *Определение допускаемой величины силы.* Из условия прочности (2.8) максимальное продольное усилие, которое можно допустить в поперечном сечении, равно:

$$N_{\max} = [\sigma]A = 160 \cdot 10^6 \cdot \frac{3,14 \cdot 4^2}{4} \cdot 10^{-4} = 200960 \text{ Н} = 201,96 \text{ кН.}$$

В сечении действует усилие  $2F$ . Тогда допускаемая сила

$$F = \frac{N_{\max}}{2} = \frac{201,96}{2} = 100,98 \text{ кН.}$$

**Пример 2.3.** Определить площадь поперечного сечения  $A$  и перемещение нижнего конца стержня  $\Delta l$  при  $[\sigma] = 210 \text{ МПа}$  и  $E = 200 \text{ ГПа}$  (рис. 2.6).

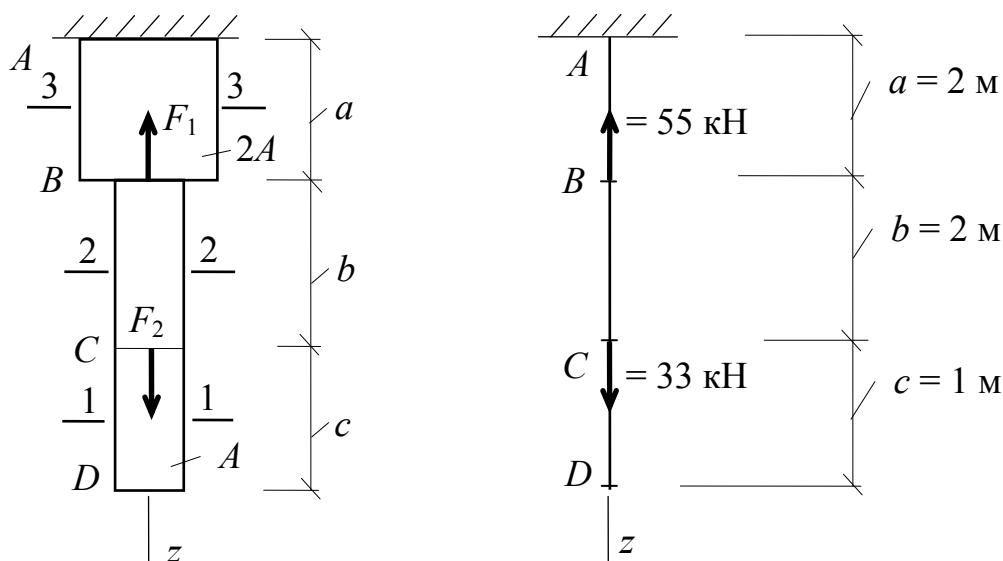


Рис. 2.6

## Р е ш е н и е

1. *Построение эпюр продольных сил и напряжений.* Имеем три участка:  $AB$ ,  $BC$ ,  $CD$ . Последовательно проводим сечения на каждом участке стержня: 1-1, 2-2, 3-3 (рис. 2.6, а). Рассматриваем равновесие нижних отсеченных частей стержня (рис. 2.7). Во всех сечениях за положительное значение принята растягивающая сила, направленная от сечения.

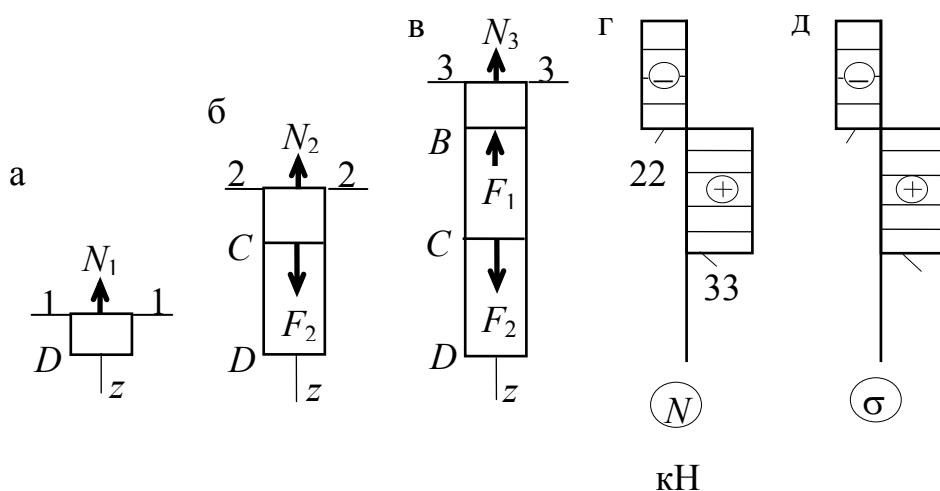


Рис. 2.7

На участке  $CD$ , в сечении 1-1 (рис. 2.7, а):

$$\sum Z = N_1 = 0, \quad N_1 = 0.$$

На участке  $BC$ , в сечении 2-2 (рис. 2.7, б):

$$\sum Z = N_2 - F_2 = 0, \quad N_2 = F_2 = 33 \text{ кН}.$$

На участке  $AB$ , в сечении 3-3 (рис. 2.7, в):

$$\sum Z = N_3 + F_1 - F_2 = 0, \quad N_3 = F_2 - F_1 = 33 - 55 = -22 \text{ кН}.$$

Сила  $N_3$  получилась отрицательной, значит, участок  $AB$  испытывает сжатие и ее направление надо изменить на обратное.

По эпюре  $N$  (рис. 2.7, г) строим эпюру нормальных напряжений  $\sigma$  (рис. 2.7, д). На участке  $CD$  с площадью поперечного сечения стержня  $A$   $\sigma_1 = 0$ .

На участке  $BC$  с площадью поперечного сечения стержня  $A$ :

$$\sigma_2 = \frac{N_2}{A} = \frac{33 \text{ кН}}{A}.$$

На участке  $AB$  с площадью поперечного сечения стержня  $2A$ :

$$\sigma_3 = \frac{N_3}{2A} = \frac{-22 \text{ кН}}{2A} = \frac{-11 \text{ кН}}{A}.$$

Из эпюры  $\sigma$  (см. рис. 2.7, д) следует, что опасное сечение – на участке  $BC$ , где возникает наибольшее по величине нормальное напряжение:

$$\sigma_{\max} = \sigma_2 = \frac{33 \text{ кН}}{A}.$$

2. *Подбор поперечного сечения.* Из условия прочности (2.8) при  $\sigma_2 = [\sigma]$  определяем требуемую площадь поперечного сечения:

$$A = \frac{33 \text{ кН}}{[\sigma]} = \frac{33 \cdot 10^3 \text{ Н}}{210 \cdot 10^6 \text{ Па}} = 1,571 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2 = 1,571 \text{ см}^2.$$

Принимаем для участков  $CD$  и  $BC$   $A = 1,60 \text{ см}^2$ , а для участка  $AB$  –  $2A = 3,2 \text{ см}^2$ .

3. *Определение перемещения.* Перемещение точки  $D$  определяем относительно опорного неподвижного сечения, т.е. находим абсолютную деформацию участка  $AD$  как алгебраическую сумму деформаций на каждом из трёх участков:

$$\Delta l_{AD} = \Delta l_{AB} + \Delta l_{BC} + \Delta l_{CD}.$$

Деформации на каждом участке вычисляем по формуле (2.6) с учётом знака продольной силы:

$$\Delta l_{AB} = \frac{N_3 a}{E \cdot 2A} = \frac{-22 \cdot 10^3 \text{ Н} \cdot 2 \text{ м}}{200 \cdot 10^9 \text{ Па} \cdot 3,2 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2} = -6,88 \cdot 10^{-4} \text{ м} = -0,688 \text{ мм};$$

$$\Delta l_{BC} = \frac{N_2 b}{EA} = \frac{33 \cdot 10^3 \text{ Н} \cdot 2 \text{ м}}{200 \cdot 10^9 \text{ Па} \cdot 1,60 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2} = 2,06 \cdot 10^{-3} \text{ м} = 2,06 \text{ мм};$$

$$\Delta l_{CD} = 0.$$

Тогда полная деформация стержня

$$\Delta l_{AD} = \Delta l_{AB} + \Delta l_{BC} = -0,688 + 2,06 = 1,372 \text{ мм}.$$

### Контрольные вопросы

1. Какие случаи сопротивления (деформации) стержня называются центральным (осевым) растяжением и сжатием?

2. Вычислить значения продольной силы в сечениях 1-1, 2-2 и 3-3 (рис.2.8).

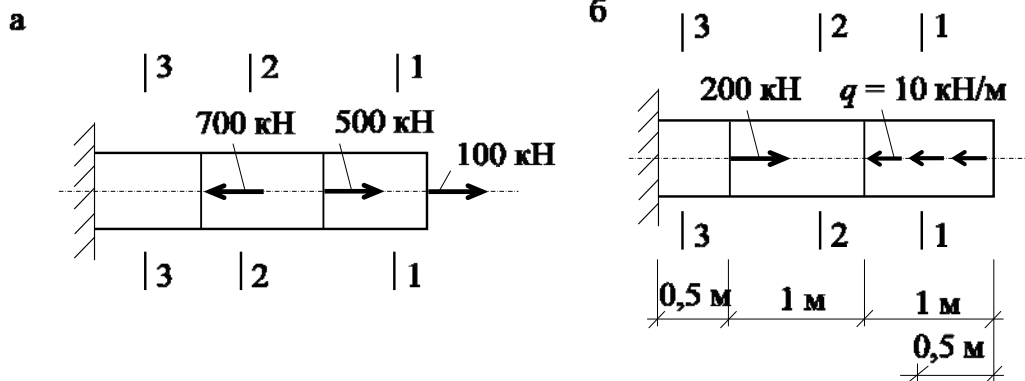


Рис. 2.8

3. Напишите дифференциальную зависимость между продольной силой и распределённой вдоль оси стержня нагрузкой.
4. Как строится эпюра продольных сил? Правило знаков.
5. Определить значение и направление продольной силы в стержнях 1, 2 и 3 на рис. 2.9.

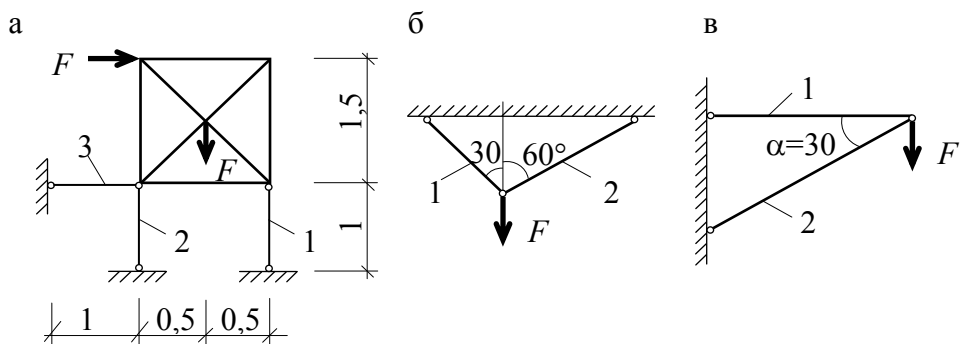


Рис. 2.9

6. Что называется полным напряжением в точке? Компоненты напряжения и их размерность.
7. Какое напряжение возникает в поперечном сечении бруса при растяжении и сжатии? Как оно изменяется по его площади?
8. Как найти величину нормального напряжения и его знак?
9. Интегральная форма связи напряжений с продольной силой.
10. Какие напряжения возникают в наклонном сечении при растяжении и сжатии? Покажите их направление в сечениях 1-1, 2-2 (рис. 2.10).
11. Как найти величину касательных и нормальных напряжений в наклонном сечении?
12. В каком из сечений (1-1, 2-2 или 3-3) будут действовать наибольшие напряжения  $\sigma$  и  $\tau$  (рис. 2.11)?

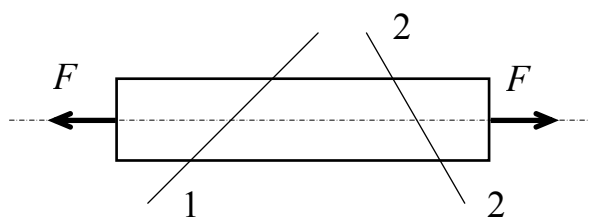


Рис. 2.10

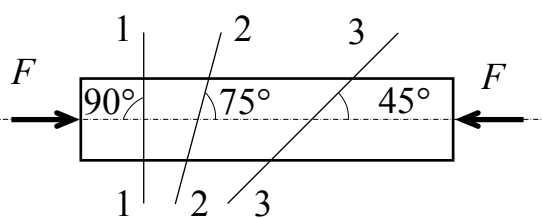


Рис. 2.11

13. Что называется концентрацией напряжения?
14. Что понимается под деформацией? Компоненты деформации.
15. Что называется абсолютной линейной деформацией?
16. Что называется относительной линейной деформацией?
17. Что называется коэффициентом Пуассона? В каких пределах он изменяется?
18. Какие деформации называются упругими, а какие остаточными (пластическими)?

19. Нарисуйте диаграмму напряжений при растяжении и сжатии низкоуглеродистой стали.

20. Нарисуйте диаграмму напряжений при растяжении и сжатии хрупкого материала.

21. Что называется пределом пропорциональности?

22. Что называется пределом упругости?

23. Что называется пределом текучести?

24. Что называется площадкой текучести?

25. Какие напряжения – нормальные или касательные – являются причиной возникновения пластических деформаций? На каком уровне напряжений они начинают появляться?

26. Что называется пределом прочности?

27. Какое явление называется наклёпом?

28. Что утверждает закон Гука? Что называется жёсткостью поперечного сечения?

29. Какие свойства материала характеризует модуль упругости? У какого из материалов – стали или резины – он больше?

30. Как по диаграмме напряжений определить модуль упругости?

31. В чём отличие в поведении под нагрузкой между пластическими и хрупкими материалами?

32. В чём отличие в характере разрушения пластических и хрупких материалов?

33. Какой из стержней из одинакового материала получит наибольшую относительную деформацию, а какой – наибольшую абсолютную деформацию (рис. 2.12)?

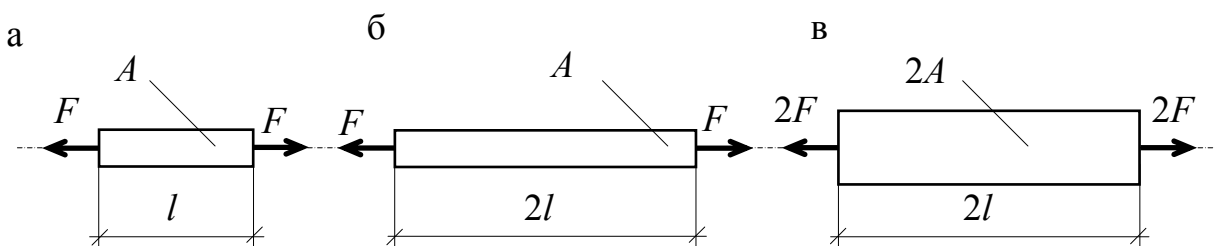


Рис. 2.12

34. К какому из стержней одинаковой площади поперечного сечения, показанных на рис. 2.13, приложена бóльшая нагрузка, если деформации их одинаковы?

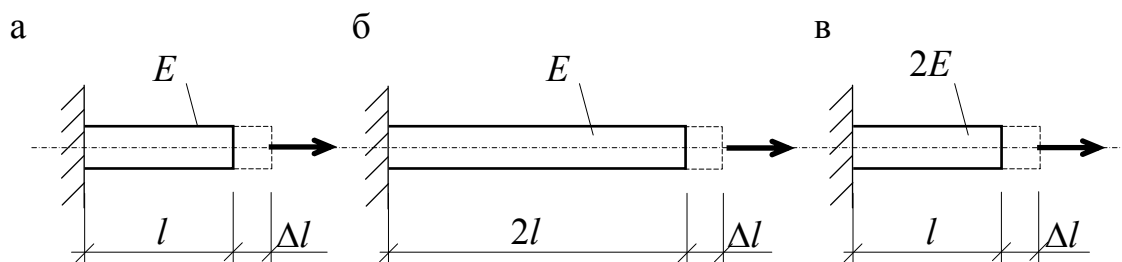


Рис. 2.13



35. Какой из стержней (стальной, медный или деревянный), имеющих одинаковые размеры и нагруженных одинаковой силой, получит наименьшую деформацию?

36. Как найти удельную потенциальную энергию упругой деформации?

37. Что называется допускаемым напряжением? Как оно выбирается для хрупких и пластических материалов?

38. Что называется предельным состоянием конструкции? Их виды.

39. Что называется расчётным сопротивлением материала? Его размерность.

40. Как определяются расчётные нагрузки?

41. По каким нагрузкам производится расчёт на прочность и на жёсткость?

42. Запишите условие прочности (безопасной работы) при осевом растяжении или сжатии.

43. Как подобрать размеры поперечного сечения?

44. Как определить допускаемую нагрузку?

45. Как построить эпюру перемещений для бруса, показанного на рис. 2.14 и 2.15?

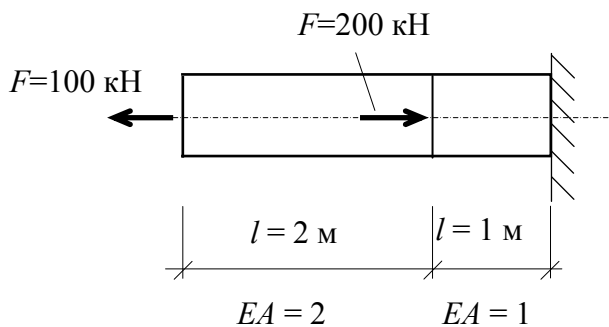


Рис. 2.14

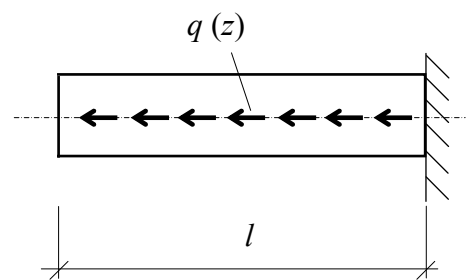


Рис. 2.15

## Раздел 3 РАСЧЁТ СТАЛЬНОГО ВАЛА НА КРУЧЕНИЕ

### Задание

На стальной вал постоянного сечения, вращающийся со скоростью  $n$  оборотов в минуту, насажено четыре шкива (рис. 3.1). Шкивы № 2, № 3 и № 4 передают от шкива № 1 соответственно мощности  $P_2$ ,  $P_3$  и  $P_4$ .

Требуется:

1. Вычислить внешние крутящие моменты  $M_1$ ,  $M_2$ ,  $M_3$  и  $M_4$ , приложенные к шкивам, и построить эпюру крутящих моментов.
2. Определить из условия прочности диаметр вала сплошного и трубчатого сечений при отношении внутреннего диаметра к внешнему диаметру  $d/D = 0,8$ .
3. Сравнить подобранные сечения по расходу материала.
4. Построить эпюру углов закручивания относительно ведущего шкива № 1 для трубчатого сечения при модуле упругости на сдвиг  $G = 80$  ГПа.
5. Найти наибольший относительный угол закручивания и проверить условие жёсткости, если допускаемый относительный угол закручивания  $[\theta] = 2,5$  град/м.

Данные взять из табл. 3.1 согласно шифру.

Т а б л и ц а 3 . 1

### Исходные данные

Номер строки	Схема по рис.3.1	$P_2$ , кВт	$P_3$ , кВт	$P_4$ , кВт	$n$ , об/мин	$[\tau]$ , МПа	$a$ , м	$b$ , м	$c$ , м
1	I	200	350	450	2200	45	0,1	0,2	0,3
2	II	300	150	100	2000	30	0,2	0,1	0,3
3	III	300	250	300	3000	35	0,3	0,2	0,2
4	IV	400	1000	400	3300	25	0,4	0,2	0,3
5	V	500	300	500	3500	20	0,35	0,1	0,45
6	VI	600	200	800	4000	60	0,25	0,15	0,4
7	VII	700	800	250	1800	65	0,15	0,3	0,25
8	VIII	800	700	700	4500	50	0,2	0,25	0,35
9	IX	900	600	150	2000	55	0,1	0,4	0,15
0	X	1000	500	200	2500	70	0,3	0,4	0,2
	$e$	$d$	$e$	$e$	$d$	$e$	$d$	$e$	$e$

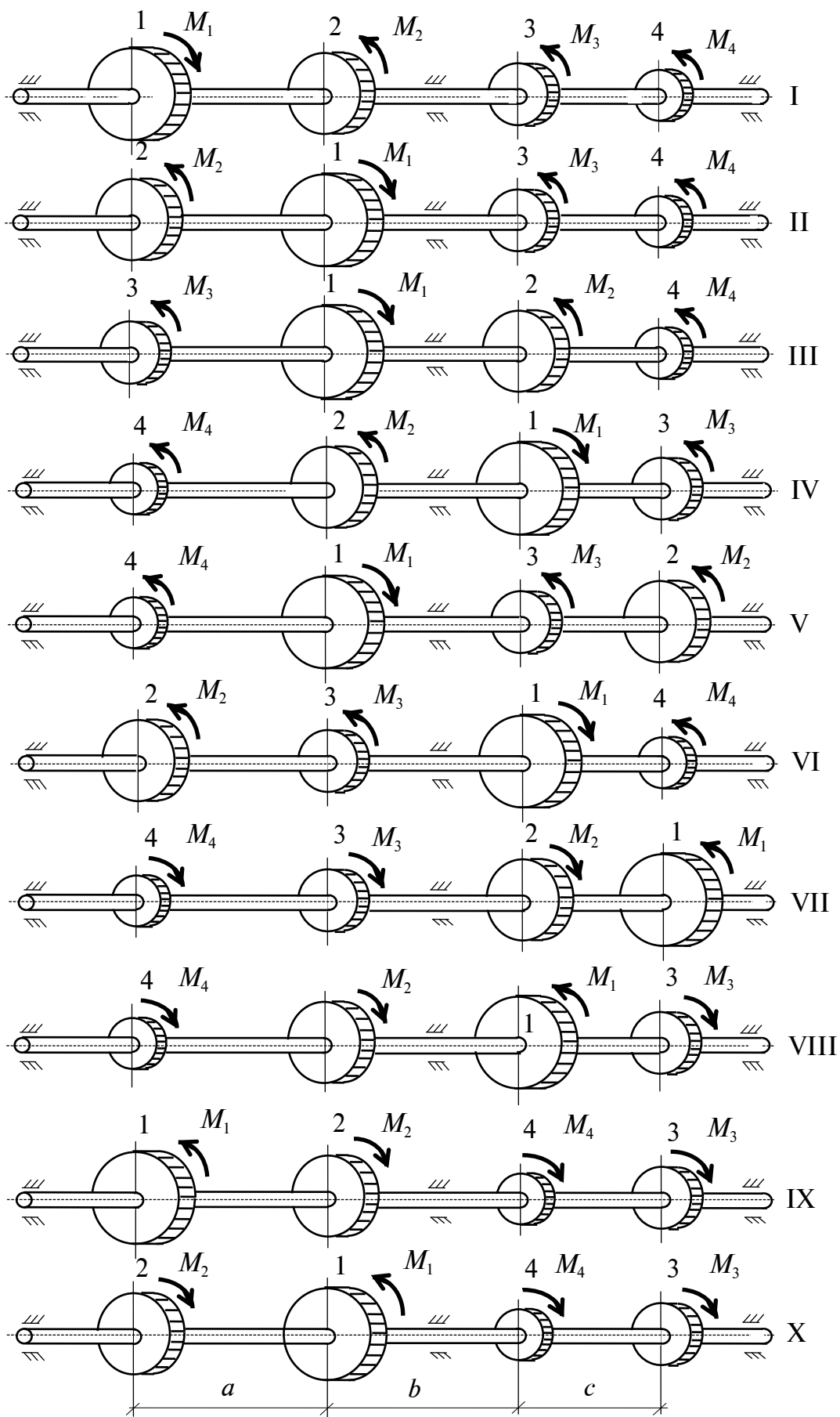


Рис. 3.1

## Теоретическая часть

При кручении стержня (рис. 3.2, а) в плоскости поперечного сечения  $уСх$  возникает внутренний крутящий момент  $T$  (рис. 3.2, б) и касательные напряжения, направленные перпендикулярно радиусу (рис. 3.3, д). Из условия равновесия отсеченной части  $\sum M_z = 0$ :

$$M = T = \int_A \tau \rho dA. \quad (3.1)$$

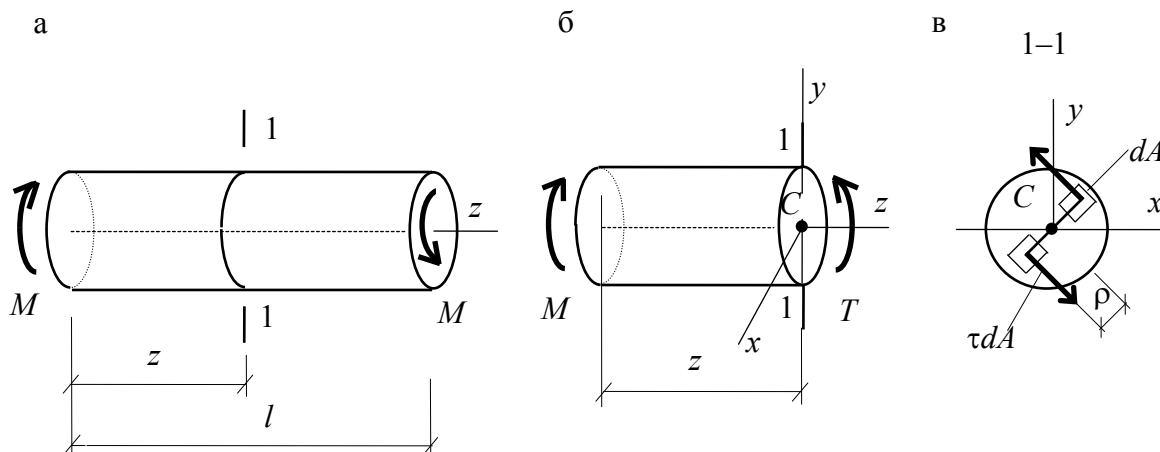


Рис. 3.2

Чтобы решить уравнение (3.1), необходимо знать закон распределения  $\tau = f(\rho)$ . Для его определения надо рассмотреть деформированное состояние стержня, показанное на рис. 3.3, а.

Выделим на поверхности скручиваемого вала до его деформации прямоугольник  $FBDE$  двумя образующими  $AB$  и  $HD$  и двумя бесконечно близкими поперечными сечениями. Опыты показывают, что после деформации правое сечение повернётся относительно левого вокруг продольной оси стержня как жёсткое целое на угол  $d\theta$ , называемый углом закручивания (рис. 3.3, б). При этом образующие переместятся на угол сдвига  $\gamma$ . На основании опытов можно утверждать:

- 1) поперечные сечения, плоские до деформации, остаются плоскими и перпендикулярными к оси вала после их поворота;
- 2) расстояние между сечениями не изменяется и, следовательно, отсутствуют продольные деформации и нормальные напряжения в поперечных сечениях стержня;
- 3) радиусы поперечных сечений остаются прямолинейными;
- 4) прямоугольник  $FBDE$  занимает положение  $F_1B_1D_1E_1$  (рис. 3.3, а), испытывая деформацию чистого сдвига (рис. 3.3, в).

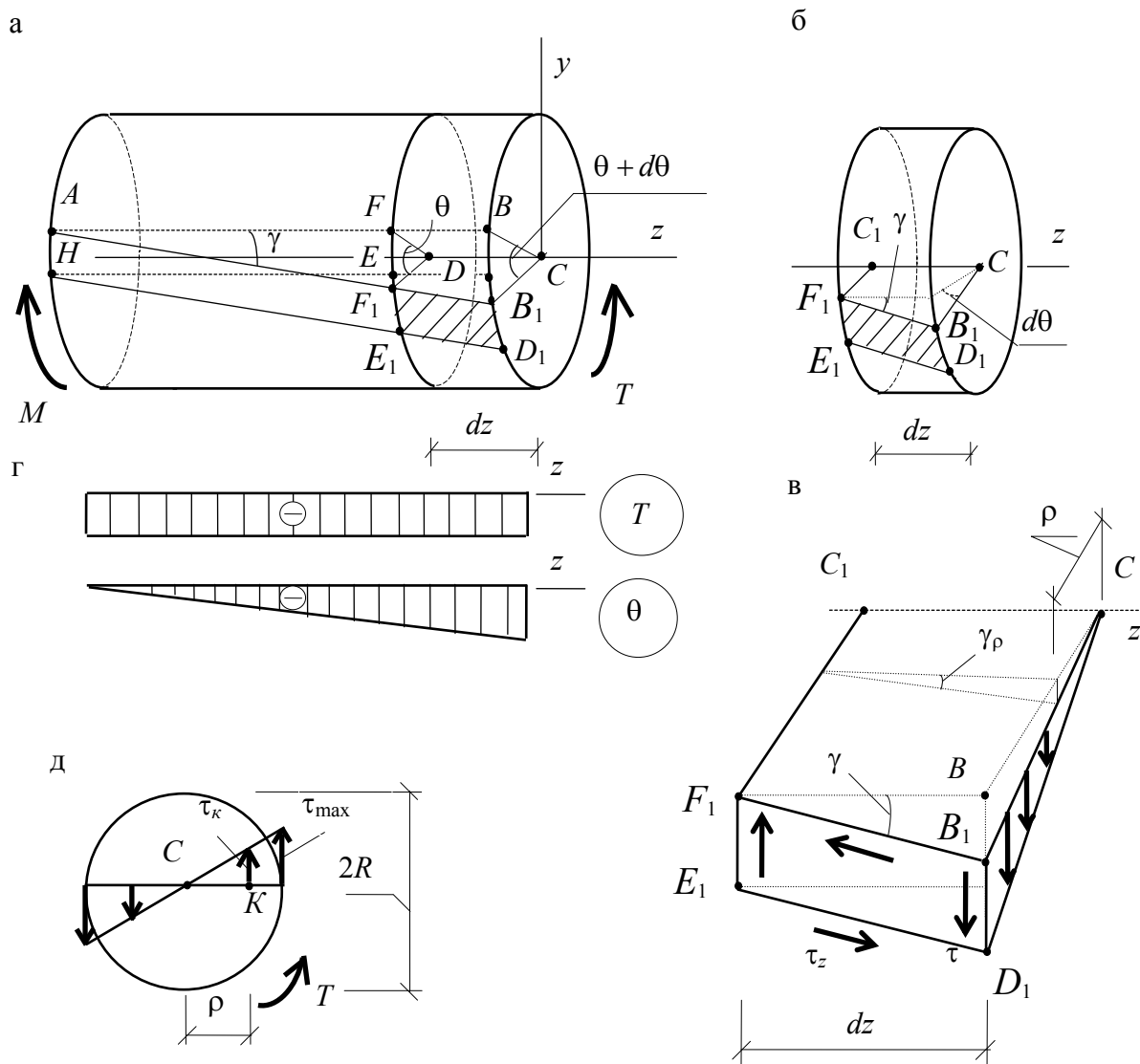


Рис. 3.3

Таким образом, в поперечных сечениях вала возникают только касательные напряжения. На основании закона парности касательных напряжений  $\tau = \tau_z$  такие же по величине напряжения будут действовать в сечениях, проведенных через продольную ось стержня, например  $F_1C_1CB_1$ . В указанных сечениях нормальные напряжения отсутствуют.

Как видно из рис. 3.3, в, перемещения точек, лежащих в радиусе  $CB$ , и угол сдвига  $\gamma_\rho$  прямо пропорциональны расстоянию от продольной оси  $\rho$ . Наибольшее их значение возникает у поверхности.

Между угловой деформацией и касательным напряжением принята прямо пропорциональная зависимость в виде закона Гука при сдвиге:

$$\tau = G\gamma, \quad (3.2)$$

где  $G$  – модуль упругости при сдвиге.

Поэтому касательные напряжения, изменяющиеся по радиусу поперечного сечения по линейному закону (рис. 3.3, д), определяются по формуле

$$\tau_k = \frac{T}{I_\rho} \rho, \quad (3.3)$$

где  $I_\rho = \frac{\pi D^4}{32}$  – полярный момент инерции.

При этом направление касательных напряжений перпендикулярно радиусу.

Максимальное напряжение возникает у поверхности вала и находится из выражения

$$\tau_{\max} = \frac{|T_{\max}|}{I_\rho} R = \frac{|T_{\max}|}{W_\rho}, \quad (3.4)$$

где  $W_\rho = \frac{I}{R} = \frac{\pi D^3}{16}$  – полярный момент сопротивления круглого сечения.

Для обеспечения безопасной работы вала, во-первых, должно выполняться условие прочности

$$\tau_{\max} = \frac{|T_{\max}|}{W_\rho} \leq [\tau], \quad (3.5)$$

во-вторых, чтобы не получить нарушения нормальной работы машины, необходимо соблюдать условие жёсткости

$$\bar{\theta} \leq [\bar{\theta}]. \quad (3.6)$$

Оно означает, что относительный угол закручивания  $\bar{\theta}$  (угол закручивания, приходящийся на единицу длины) должен быть меньше или равен допускаемому значению, устанавливаемому нормами. Угол закручивания находится по формуле

$$\theta = \int_0^l \frac{T}{GI_\rho} \cdot dz. \quad (3.7)$$

Для вала с постоянным значением  $\frac{T}{GI_\rho}$  он равен:

$$\theta = \frac{Tl}{GI_\rho}. \quad (3.8)$$

Таким образом, угол поворота поперечного сечения возрастает с увеличением внутреннего крутящего момента и длины стержня и с умень-

шением жёсткости поперечного сечения при кручении  $GI_p$ . Формула (3.8) выражает закон Гука при кручении. Изменение  $\theta$  по длине согласно формуле (3.8) происходит по линейному закону (см. рис. 3.3, г).

Когда к валу приложено несколько внешних моментов, внутренний крутящий момент равен их алгебраической сумме, приложенных к рассматриваемой отсечённой части. График, показывающий закон изменения моментов по длине, называется эпюрой.

*Правило знаков.* При построении эпюры внутренний крутящий момент считаем положительным, если при взгляде со стороны внешней нормали к сечению он направлен по часовой стрелке.

В общем случае при изменении величины  $\frac{T}{GI_p}$  на отдельных участках угол закручивания определяется алгебраическим суммированием по участкам.

С экономической точки зрения целесообразно использовать вал трубчатого сечения. Это объясняется тем, что наиболее напряженный материал расположен близко к поверхности, а малонапряженный – у оси вала (рис. 3.3, д).

Следовательно, чем больше материала расположено дальше от продольной оси, тем лучше. При одинаковой площади поперечного сечения чем дальше расположен материал от центра тяжести, тем больше полярный момент сопротивления сечения и, согласно формуле (3.4), касательные напряжения меньше.

Решение задач на кручение рассмотрим на примерах. При этом, если мощность  $P$  задана в кВт, то крутящий момент вычисляется в Н·м по формуле

$$M = 9551 \frac{P}{n}. \quad (3.9)$$

### Примеры решения задач

**Пример 3.1.** Шкив № 1 вращается со скоростью  $n = 200$  об/мин и передает трём другим шкивам мощности, кВт:  $P_2 = 20$ ;  $P_3 = 15$  и  $P_4 = 10$  (рис. 3.4).

Подобрать диаметр вала сплошного и трубчатого поперечного сечения при  $d/D = 0,8$  и  $[\tau] = 80$  МПа. Построить эпюру крутящих моментов и в эпюрах углов закручивания. Проверить условие жесткости при  $[\bar{\theta}] = 2,5 \frac{\text{град}}{\text{м}}$  и  $G = 80$  ГПа.

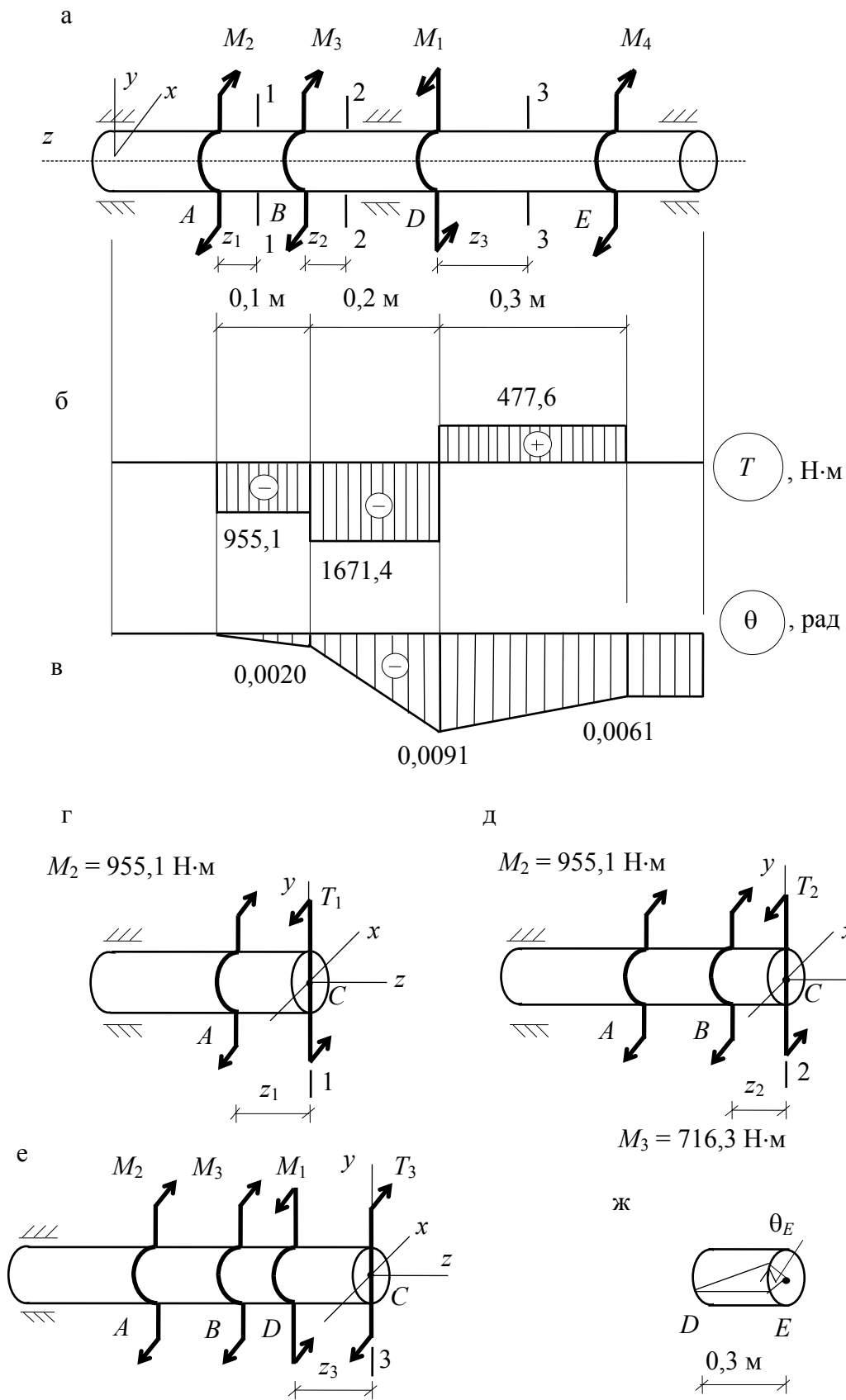


Рис. 3.4



## Р е ш е н и е

1. *Определение крутящих моментов и построение их эпюр* (рис. 3.4, б).  
По формуле (3.9) находим:

$$M_2 = 9551 \frac{P_2}{n} = 9551 \cdot \frac{20}{200} = 955,1 \text{ Н}\cdot\text{м};$$

$$M_3 = 9551 \cdot \frac{15}{200} = 716,3 \text{ Н}\cdot\text{м};$$

$$M_4 = 9551 \cdot \frac{10}{200} = 477,6 \text{ Н}\cdot\text{м};$$

$$M_1 = M_2 + M_3 + M_4 = 955,1 + 716,3 + 477,6 = 2149 \text{ Н}\cdot\text{м}.$$

Разбиваем вал на три участка: *AB*, *BD* и *DE*.

Участок *AB*:  $0 \leq z_1 \leq 0,1$  м; сечение 1–1 (рис. 3.4, г);

$$\sum M_Z = M_2 - T_1 = 0; \quad T_1 = M_2 = 955,1 \text{ Н}\cdot\text{м}.$$

Участок *BD*:  $0 \leq z_2 \leq 0,2$  м; сечение 2–2 (рис. 3.4, д);

$$\sum M_Z = M_2 + M_3 - T_2 = 0;$$

$$T_2 = M_2 + M_3 = 955,1 + 716,3 = 1671,4 \text{ Н}\cdot\text{м}.$$

Участок *DE*:  $0 \leq z_3 \leq 0,3$  м; сечение 3–3 (рис. 3.4, е);

$$\sum M_Z = M_2 + M_3 - M_1 + T_3 = 0;$$

$$T_3 = M_1 - M_2 - M_3 = 2149 - 955,1 - 716,3 = 477,6 \text{ Н}\cdot\text{м}.$$

Усилия  $T_1$  и  $T_2$  направлены против часовой стрелки и, согласно правилу знаков, их считаем отрицательными, а  $T_3$  – положительным. Скачки на эпюре моментов равны приложенным внешним усилиям.

2. *Определение диаметра вала.* Из условия прочности (3.5) имеем:

$$W_\rho = \frac{|T_{\max}|}{[\tau]} = \frac{1671,4 \text{ (Н}\cdot\text{м)}}{80 \cdot 10^6 \text{ (Н/м}^2\text{)}} = 20,89 \cdot 10^{-6} \text{ м}^3 = 20,89 \text{ см}^3.$$

Находим диаметр сплошного вала:

$$D = \sqrt[3]{\frac{16W_\rho}{\pi}} = \sqrt[3]{\frac{16 \cdot 20,89}{3,14}} = 4,72 \text{ см}.$$

Для трубчатого сечения полярный момент сопротивления

$$W_\rho = \frac{\pi D^3}{16} \left[ 1 - \left( \frac{d}{D} \right)^4 \right] = \frac{3,14 \cdot D^3}{16} (1 - 0,8^4) = 0,116 D^3.$$

Вычисляем диаметр трубчатого сечения:

$$D = \sqrt[3]{\frac{W_p}{0,116}} = \sqrt[3]{\frac{20,89}{0,116}} = 5,647 \text{ см}; \quad d = 0,8 \cdot 5,647 = 4,518 \text{ см.}$$

Определяем соответственно площадь круга и площадь трубы:

$$A_{\text{круга}} = \frac{\pi D^2}{4} = \frac{3,14 \cdot 4,72^2}{4} = 17,49 \text{ см}^2;$$

$$A_{\text{трубы}} = \frac{\pi D^2}{4} \left[ 1 - \left( \frac{d}{D} \right)^2 \right] = \frac{3,14 \cdot 5,647^2}{4} \left[ 1 - \left( \frac{4,518}{5,647} \right)^2 \right] = 9 \text{ см}^2.$$

Сравнение показывает, что расход материала на трубу меньше в 1,94 раза.

2. Построение эпюры углов закручивания (рис. 3.4, в). Угол закручивания определяем по формуле (3.8) отдельно на каждом участке, считая левый его конец неподвижным. Полярный момент инерции трубы

$$I_p = \frac{\pi D^4}{32} \left[ 1 - \left( \frac{d}{D} \right)^4 \right] = \frac{3,14 \cdot 5,647^4}{32} \left[ 1 - \left( \frac{4,518}{5,647} \right)^4 \right] = 58,92 \text{ см}^4.$$

Шкив № 4 (точка E) поворачивается относительно шкива № 1 на угол (рис. 3.4, ж)

$$\theta_{DE} = \frac{T_3 l_{DE}}{GI_p} = \frac{477,6 \text{ (Н} \cdot \text{м)} \cdot 0,3 \text{ (м)}}{80 \cdot 10^9 \text{ (Н/м}^2\text{)} \cdot 58,92 \cdot 10^{-8} \text{ (м}^4\text{)}} = 0,0030 \text{ рад.}$$

Шкив № 1 (точка D) закручивается относительно шкива № 3 (точка B) на угол

$$\theta_{BD} = \frac{T_2 l_{BD}}{GI_p} = \frac{-1671,4 \cdot 0,2}{80 \cdot 10^9 \cdot 58,92 \cdot 10^{-8}} = -0,0071 \text{ рад.}$$

Шкив № 3 (точка B) поворачивается относительно шкива № 2 (точка A) на угол

$$\theta_{AB} = \frac{T_1 l_{AB}}{GI_p} = \frac{-955,1 \cdot 0,1}{80 \cdot 10^9 \cdot 58,92 \cdot 10^{-8}} = -0,0020 \text{ рад.}$$

Построение эпюры углов закручивания производим относительно шкива № 2. Следовательно, в точке B сечение повернется относительно точки A на угол  $\theta_B = -0,0020$ , а в точке D –

$$\theta_D = \theta_{AB} + \theta_{BD} = -0,0020 - 0,0071 = -0,0091 \text{ рад.}$$

Сечение в точке E повернется относительно точки A на угол

$$\theta_E = \theta_{AB} + \theta_{BD} + \theta_{DE} = -0,0020 - 0,0071 + 0,0030 = -0,0061 \text{ рад.}$$

4. Проверка условия жесткости. Относительный угол закручивания:

на участке  $DE$  
$$\bar{\theta}_{DE} = \frac{\theta_{DE}}{l_{DE}} = \frac{0,003}{0,3} = 0,01 \frac{\text{рад}}{\text{м}};$$

на участке  $BD$  
$$\bar{\theta}_{BD} = \frac{\theta_{BD}}{l_{BD}} = \frac{-0,0071}{0,2} = -0,0355 \frac{\text{рад}}{\text{м}};$$

на участке  $AB$  
$$\bar{\theta}_{AB} = \frac{\theta_{AB}}{l_{AB}} = \frac{-0,0020}{0,1} = -0,020 \frac{\text{рад}}{\text{м}}.$$

$$\bar{\theta}_{\max} = |\bar{\theta}_{BD}| = 0,0355 < [\bar{\theta}] = \frac{2,5}{57,3} = 0,0436 \frac{\text{рад}}{\text{м}}.$$

Условие жесткости (3.6) выполняется.

Пример 3.2. Для вала, изображенного на рис. 3.5а, подобрать поперечное сечение при  $[\tau] = 160$  МПа и  $G = 80$  ГПа. Построить эпюру углов закручивания.

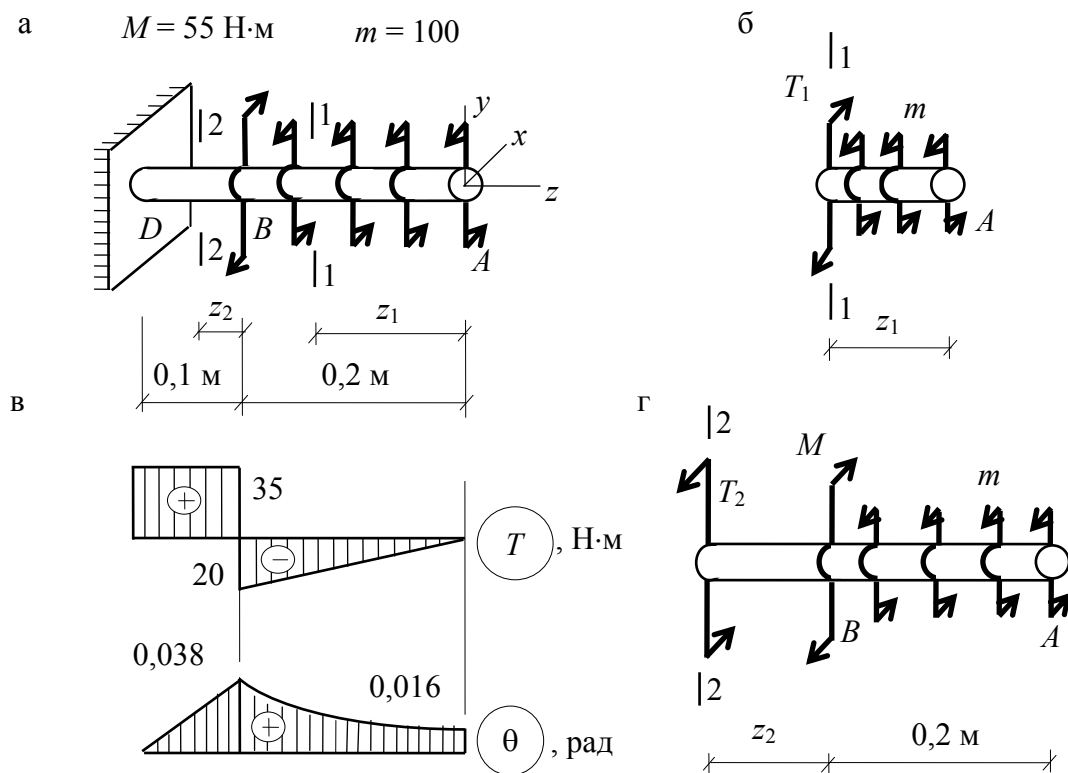


Рис. 3.5

### Решение

1. Построение эпюры крутящих моментов.

На участке АВ, сечение 1-1 (рис. 3.5, б):  $0,2 \text{ м} \geq z_1 \geq 0$ ;

$$\sum M_z = m \cdot z_1 - T_1 = 0; T_1 = 100 \cdot z_1.$$

При  $z_1 = 0$   $T_1 = 0$ , а при  $z_1 = 0,2 \text{ м}$   $T_1 = 100 \cdot 0,2 = 20 \text{ Н} \cdot \text{м}$ .

На участке  $BD$ , сечение 2-2 (рис. 3.5, в):  $0,1 \text{ м} \geq z_2 \geq 0$ ;

$$\sum M_z = m \cdot 0,2 - M + T_2 = 0; T_2 = 55 - 100 \cdot 0,2 = 35 \text{ Н}\cdot\text{м}.$$

Откладываем положительный момент  $T_2$  вверх, а отрицательный  $T_1$  – вниз от оси  $z$ .

2. *Подбор диаметра вала.* Из условия прочности (3.5) имеем:

$$D = \sqrt[3]{\frac{16|T_{\max}|}{\pi[\tau]}} = \sqrt[3]{\frac{16 \cdot 35}{3,14 \cdot 160 \cdot 10^6}} = 1,037 \cdot 10^{-2} \text{ м} = 1,04 \text{ см}.$$

Полярный момент инерции

$$I_p = \frac{\pi D^4}{32} = \frac{3,14 \cdot 1,04^4}{32} = 0,115 \text{ см}^4.$$

3. *Построение эпюры углов закручивания.* Сечение в заделке неподвижно и  $\theta_D = 0$ . В точке  $B$  при постоянном моменте на участке  $BD$ :

$$\theta_{BD} = \frac{T_2 l_{BD}}{GI_p} = \frac{35 \cdot 0,1}{80 \cdot 10^9 \cdot 0,115 \cdot 10^{-8}} = 0,038 \text{ рад}.$$

При изменении момента по линейному закону на участке  $AB$  угол закручивания изменяется по закону квадратной параболы. В точке  $A$  он равен:

$$\begin{aligned} \theta_A &= \theta_{BD} - \int_0^{0,2} \frac{T}{GI_p} dz = \theta_{BD} - \int_0^{0,2} \frac{mz}{GI_p} dz = \theta_{BD} - \frac{mz^2}{2GI_p} \Big|_0^{0,2} = \\ &= \theta_{BD} - \frac{m}{2GI_p} (0,2^2 - 0) = 0,038 - \frac{100 \cdot 0,04}{2 \cdot 80 \cdot 10^9 \cdot 0,115 \cdot 10^{-8}} = 0,016 \text{ рад}. \end{aligned}$$

**Пример 3.3.** Определить величину допустимого крутящего момента для вала, изображенного на рис. 3.6, если  $[\tau] = 100 \text{ МПа}$ ,  $d = 2 \text{ см}$ ,  $D_1 = 4 \text{ см}$  и  $D_2 = 6 \text{ см}$ .

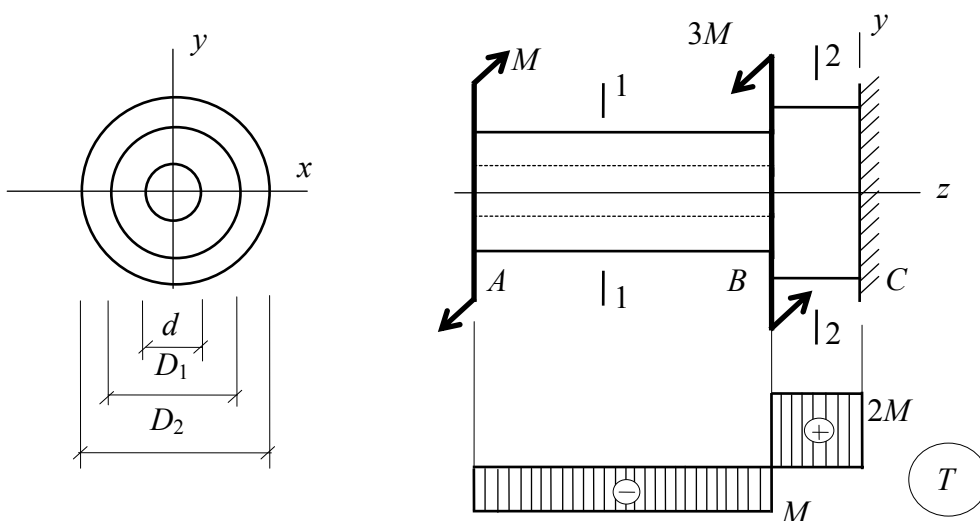


Рис. 3.6

## Р е ш е н и е

1. Построение эпюры крутящих моментов.

В сечении 1-1:  $\sum M_Z = M - T_1 = 0$ ;  $T_1 = M$  кН·м.

В сечении 2-2:  $\sum M_Z = M - 3M + T_2 = 0$ ;

$$T_2 = -M + 3M = 2M \text{ кН·м (по часовой стрелке).}$$

2. Определение допустимой нагрузки. Имеем два участка  $AB$  и  $BC$  с разными поперечными сечениями и полярными моментами сопротивления. Поэтому находим допустимый крутящий момент на каждом участке и выбираем минимальный.

Из условия прочности (3.5) имеем:

$$T_{\max} = W_p \cdot [\tau].$$

На участке  $AB$  для трубчатого сечения

$$W_p = \frac{\pi D_1^3}{16} \left[ 1 - \left( \frac{d}{D_1} \right)^4 \right] = \frac{3,14 \cdot 4^3}{16} \left[ 1 - \left( \frac{2}{4} \right)^4 \right] = 11,77 \text{ см}^3.$$

и допустимая нагрузка

$$M = T_{\max}^{AB} = 11,77 \cdot 10^{-6} (\text{м}^3) \cdot 100 \cdot 10^6 (\text{Н/м}^2) = 1177 \text{ Н·м} = 1,2 \text{ кН·м.}$$

На участке  $BC$  для сплошного сечения

$$W_p = \frac{3,14 \cdot 6^3}{16} = 42,39 \text{ см}^3$$

и допустимая нагрузка

$$M = 0,5 T_{\max}^{BC} = 0,5 \cdot 42,39 \cdot 10^{-6} \cdot 100 \cdot 10^6 = 2119 \text{ Н·м} = 2,12 \text{ кН·м.}$$

Окончательно принимаем наименьшее значение:  $M = 1,2$  кН·м.

## К о н т р о л ь н ы е в о п р о с ы

1. Когда брус испытывает кручение?
2. Как строится эпюра крутящих моментов? Правило знаков.
3. Запишите дифференциальную зависимость между интенсивностью распределенного момента и внутренним крутящим моментом.
4. Что происходит с поперечными сечениями вала при кручении?
5. Что называется углом закручивания и как найти его величину?
6. Какие напряжения возникают в поперечном сечении вала и по какому закону они изменяются?
7. Как вычислить напряжение в любой точке поперечного сечения вала?
8. Какое напряжённое состояние называется чистым сдвигом?

9. Сформулируйте закон парности касательных напряжений.
10. Как записывается закон Гука при сдвиге?
11. Как записывается условие прочности (безопасной работы) при кручении?
12. Как вычислить допускаемую нагрузку (несущую способность) на вал?
13. Что называется полярным моментом инерции и полярным моментом сопротивления?
14. Как связаны между собой осевой и полярный моменты инерции для круга?
15. Как определить диаметр вала сплошного и трубчатого сечений из условия прочности?
16. Что называется жёсткостью поперечного сечения вала при кручении?
17. Запишите условие жёсткости при кручении.
18. Как построить эпюру углов закручивания?
19. Какая форма поперечного сечения является наиболее рациональной при кручении и почему?

## Раздел 4 РАСЧЁТ БАЛКИ НА ПРОЧНОСТЬ ПРИ ПЛОСКОМ ИЗГИБЕ

### З а д а н и е

Для заданной схемы балки (рис. 4.1) требуется:

1. Записать выражения поперечных сил  $Q$  и изгибающих моментов  $M$  в общем виде для каждого участка.
2. Построить эпюры  $Q$  и  $M$ , найти максимальный изгибающий момент  $M_{\max}$  в балке.
3. Подобрать сечение стальной балки в виде прокатного двутавра.
4. Построить эпюры  $\sigma_{\max}$  и  $\tau_{\max}$ .

Исходные данные взять из табл. 4.1 согласно шифру.

Т а б л и ц а 4 . 1

### Исходные данные

Номер строки	Схема по рис. 4.1	$l$ , м	Расстояние в долях пролета			$M$ , кН·м	$F$ , кН	$q$ , кН·м	$[\sigma]$ , МПа	$[\tau]$ , МПа
			$\frac{a_1}{a}$	$\frac{a_2}{a}$	$\frac{a_3}{a}$					
1	I	6	1	9	1	10	10	10	180	70
2	II	7	2	8	2	20	20	20	185	75
3	III	3	3	7	3	3	3	3	190	80
4	IV	4	4	6	4	4	4	4	195	85
5	V	5	5	5	5	5	5	5	200	90
6	VI	6	6	6	6	6	6	6	205	95
7	VII	7	7	7	7	7	7	7	210	100
8	VIII	8	8	8	8	8	8	8	175	105
9	IX	9	9	9	9	9	9	9	190	110
0	X	10	10	10	10	10	10	10	195	115
	$e$	$e$	$e$	$\delta$	$e$	$e$	$\delta$	$e$	$e$	$e$

### Т е о р е т и ч е с к а я   ч а с т ь

Брус (рис. 4.2, а) испытывает плоский поперечный изгиб, когда в его поперечном сечении возникают изгибающий момент и поперечная сила. Например, в сечении 1-1 (рис. 4.2, б)  $M_x = F \cdot z$  и  $Q_y = F$ .

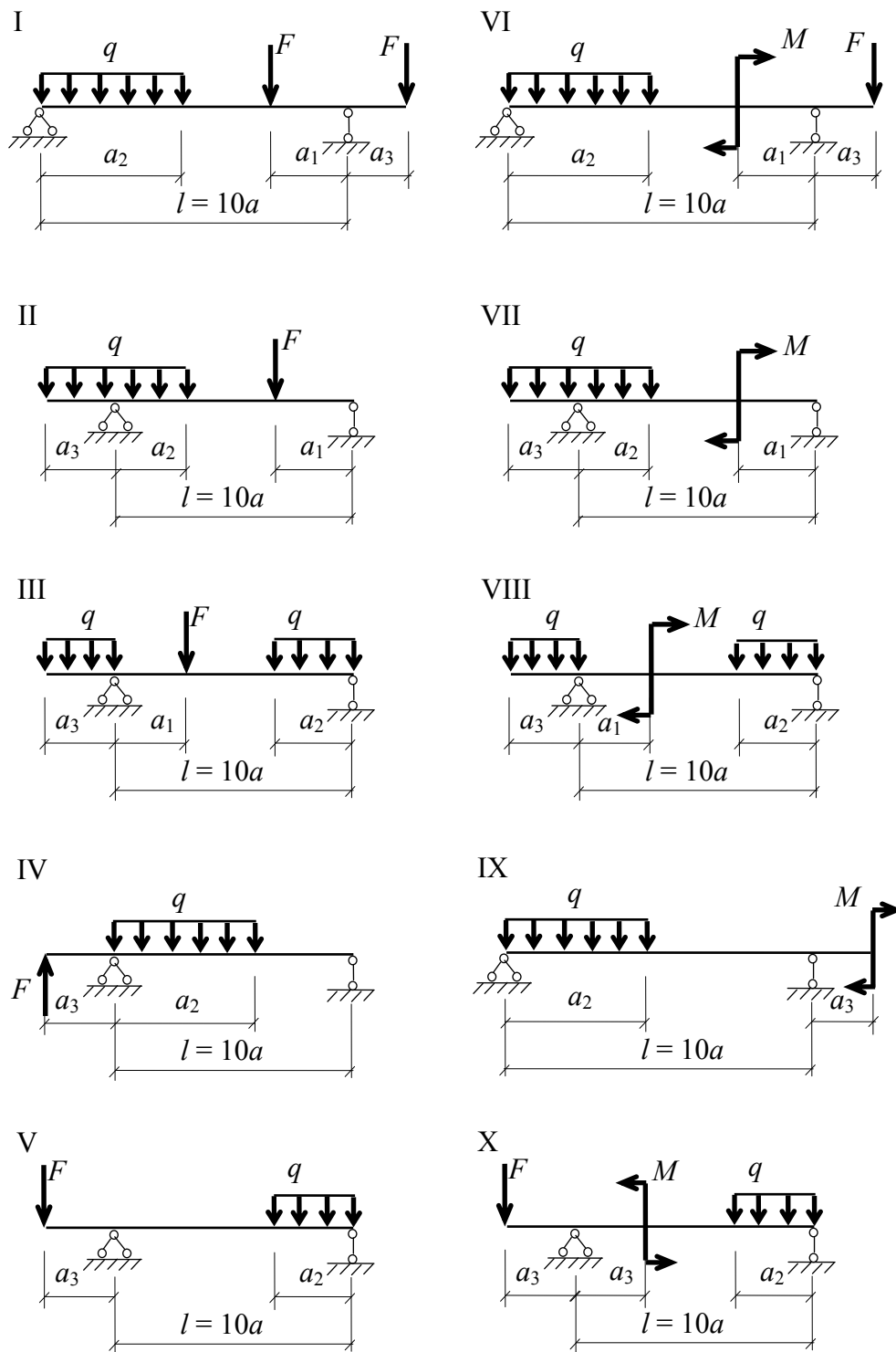


Рис. 4.1



При этом продольная ось  $z$  искривляется в плоскости чертежа, а поперечное сечение 1-1 поворачивается на угол  $\varphi$  вокруг нейтральной оси  $x$  (рис. 4.2, в), оставаясь плоским. Таким образом, считается справедливой гипотеза плоского распределения деформаций по высоте сечения.

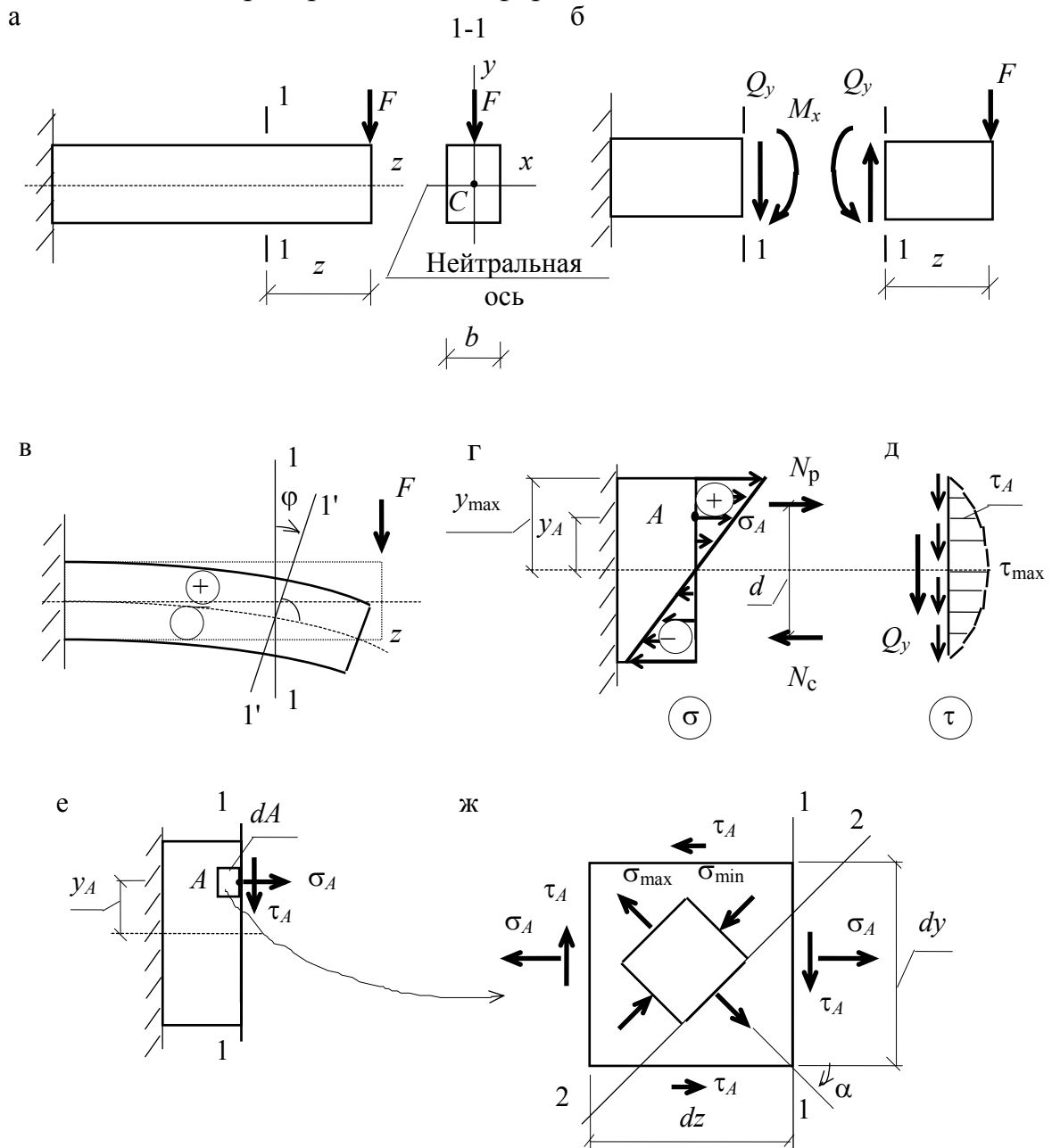


Рис. 4.2

Разность между положением поперечного сечения 1-1 до и после его поворота 1'-1' представляет собой эпюру распределения продольных деформаций по высоте сечения. Согласно закону Гука

$$\sigma = E\varepsilon, \quad (4.1)$$

т.е. нормальные напряжения прямо пропорциональны относительным деформациям.

Таким образом, при изгибе нормальные напряжения распределяются по высоте бруса по линейному закону с максимальным значением в крайних точках и нулевым значением на нейтральной оси (рис. 4.2, г). Нейтральная ось делит поперечное сечение на сжатую и растянутую зоны. По ширине сечения напряжения распределены равномерно.

Равнодействующая всех растягивающих напряжений  $N_p$  равна площади верхнего треугольника и приложена в его центре тяжести. Равнодействующая всех сжимающих напряжений  $N_c$  приложена в центре тяжести нижнего треугольника (рис. 4.2, г). Эти продольные силы образуют внутренний изгибающий момент, сопротивляющийся повороту поперечного сечения 1-1 и, следовательно, изгибу бруса:

$$M_x = N_p d = N_c d. \quad (4.2)$$

Очевидно, чем больше  $d$ , тем меньше напряжение.

Величина напряжений в некоторой точке  $A$  находится по формуле

$$\sigma_A = \frac{M_x}{I_x} y_A, \quad (4.3)$$

где  $I_x$  – осевой момент инерции относительно нейтральной оси  $x$ ;

$y_A$  – расстояние от нейтральной оси до точки  $A$ .

Для вычисления наибольших напряжений в формулу (4.3) подставляем  $y_A = y_{\max}$ , и тогда

$$\sigma_{\max} = \frac{M_x}{I_x} y_{\max} = \frac{M_x}{W_x}, \quad (4.4)$$

где  $W_x = \frac{I_x}{y_{\max}}$  – называется осевым моментом сопротивления сечения.

Кроме нормальных напряжений, связанных с изгибающим моментом, в поперечном сечении возникают касательные напряжения, вызванные поперечной силой  $Q_y$  (рис. 4.2, д). Касательные напряжения распределены по закону квадратной параболы по высоте сечения с максимальным значением на нейтральной оси и находятся по формуле Журавского:

$$\tau_A = \frac{Q_y S_x^{\text{отс}}}{I_x b}, \quad (4.5)$$

где  $S_x^{\text{отс}}$  – статический момент площади отсечённой части относительно нейтральной оси  $x$ ;

$b$  – ширина сечения, в котором определяются касательные напряжения.

По ширине сечения напряжения распределены равномерно.

Таким образом, в некоторой точке  $A$  поперечного сечения одновременно действуют нормальные и касательные напряжения (рис. 4.2, е). Говорят, что в точке возникает плоское напряжённое состояние (рис. 4.2, ж). Если теперь провести через точку  $A$  сечение 2-2 под некоторым углом  $\alpha$  к поперечному сечению 1-1 (рис. 4.2, ж), то величина нормального напряжения изменится.

Из теории напряжённого состояния в точке известно, что можно найти такой угол  $\alpha$ , при котором в сечении 2-2 (на площадке) нормальные напряжения достигнут максимального значения  $\sigma_{\max}$ . Одновременно на взаимно перпендикулярной площадке оно будет равно минимальному значению  $\sigma_{\min}$ . Такие площадки называются главными площадками, а нормальные напряжения, действующие на них, – главными напряжениями. Положение главных площадок находится по формуле

$$\operatorname{tg} 2\alpha = -\frac{2\tau_A}{\sigma_A}. \quad (4.6)$$

Положительное значение  $\alpha$  откладываем против часовой стрелки, а отрицательные – по часовой от оси  $x$ .

На главных площадках касательные напряжения отсутствуют. Величина главных напряжений определяется следующим образом:

$$\sigma_{\max} = \sigma_{1,3} = \frac{\sigma_A}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_A}{2}\right)^2 + \tau_A^2}. \quad (4.7)$$

В формуле (4.7) знак "плюс" берётся при вычислении  $\sigma_{\max}$  и знак "минус" – при вычислении  $\sigma_{\min}$ . При этом напряжение  $\sigma_A$  подставляется со своим знаком.

Прочность балки при плоском поперечном изгибе считается обеспеченной, если выполняются условия прочности:

– по нормальным напряжениям

$$\sigma_{\max} = \frac{|M_{\max}|}{W_x} \leq [\sigma]; \quad (4.8)$$

– по касательным напряжениям

$$\tau_{\max} = \frac{|Q_{\max}| S_x^{\text{отс}}}{I_x b} \leq [\tau]; \quad (4.9)$$

– по эквивалентным напряжениям, исходя из энергетического критерия пластичности

$$\sigma_{\text{эkv}} = \sqrt{\frac{1}{2} \left[ \sigma_1^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2 + \sigma_3^2 \right]} \leq [\sigma]. \quad (4.10)$$

В общем случае действия нагрузки для определения величины и места расположения  $M_{\max}$  и  $Q_{\max}$  строят графики их изменения по длине бруса – эпюры.

Построение эпюр производят по определенным правилам методом сечений. Мысленно рассечем балку на две части и рассмотрим равновесие любой из них (рис. 4.3).

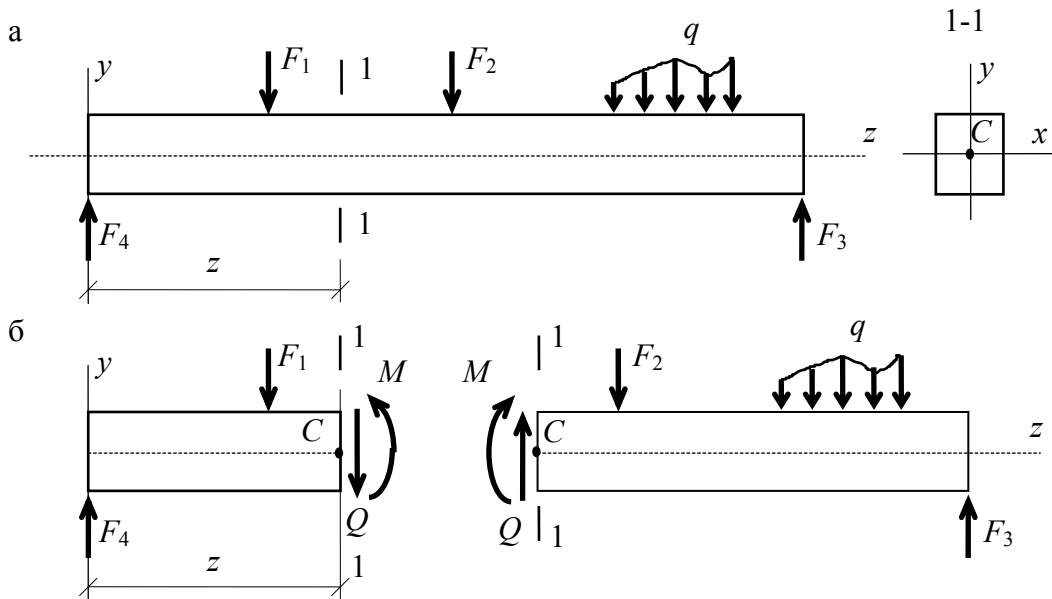


Рис. 4.3

Поперечная сила  $Q$  будет равна сумме всех вертикальных внешних сил, действующих на рассматриваемую отсеченную часть:

$$Q = \sum F_{iy}.$$

Изгибающий момент  $M$  будет равен сумме моментов всех внешних сил, действующих на рассматриваемую отсеченную часть относительно нейтральной оси  $x$ , проходящей через центр тяжести поперечного сечения:

$$M = \sum M_x(F_i).$$

Введем правило знаков для поперечных сил  $Q$  и моментов  $M$  (рис. 4.4).

Если поперечная сила вращает рассматриваемую часть бруса *по часовой стрелке*, то она положительна (рис. 4.4, а).

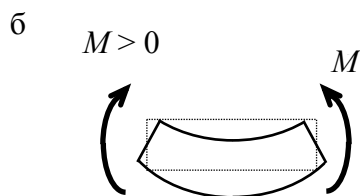
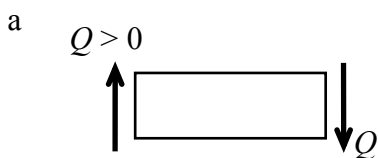


Рис.4.4

Если изгибающий момент сжимает у рассматриваемой части *верхние* волокна, то он положителен (рис. 4.4, б).

Положительные значения  $Q$  и  $M$  откладываем вверх от оси эпюры (рис. 4.5).

Между поперечной силой, изгибающим моментом и интенсивностью внешней нагрузки  $q$  существуют дифференциальные зависимости:

$$\frac{dM}{dz} = Q, \quad \frac{dQ}{dz} = q, \quad \frac{d^2M}{dz^2} = q.$$

Эти зависимости позволяют судить о виде эпюр  $Q$  и  $M$  на различных участках балки. Особенности эпюр  $Q$  и  $M$ , вытекающие из дифференциальных зависимостей, можно представить следующим образом.

1. Если на некотором участке (рис. 4.5) нет распределённой нагрузки ( $q = 0$ ), то поперечная сила  $Q$  постоянна, а изгибающий момент  $M$  меняется по линейному закону. Причём, если  $Q > 0$ , то  $M$  возрастает, и наоборот.

2. Если на некотором участке (рис. 4.6) действует равномерно распределённая нагрузка  $q$ , то поперечная сила  $Q$  меняется по линейному закону, а изгибающий момент  $M$  – по закону квадратной параболы, обращенной выпуклостью в сторону, противоположную действию нагрузки; причём в точке, где  $Q = 0$ ,  $M$  принимает экстремальное значение –  $M_{\max}$  или  $M_{\min}$ .

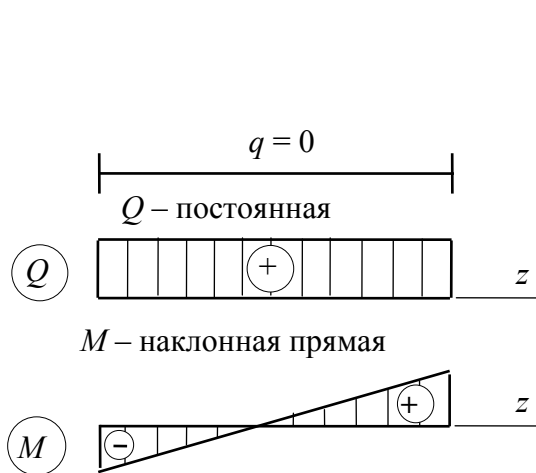


Рис. 4.5

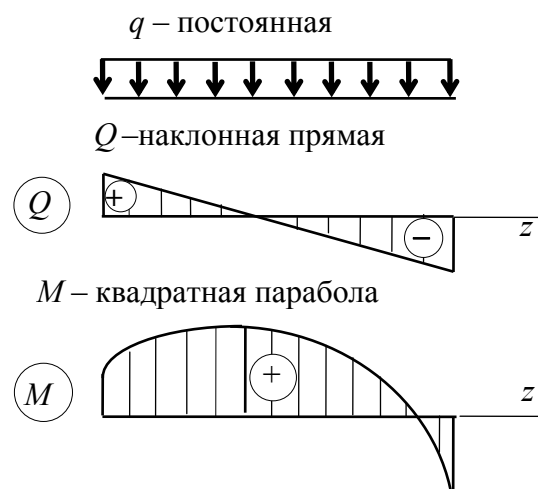


Рис. 4.6

3. Под сосредоточенной силой  $F$  (рис. 4.7) в эпюре  $Q$  будет наблюдаться «скачок» (разрыв функции) на величину силы.

4. Под сосредоточенным моментом (рис. 4.8) в эпюре  $M$  наблюдается «скачок» (разрыв функции) на величину момента.

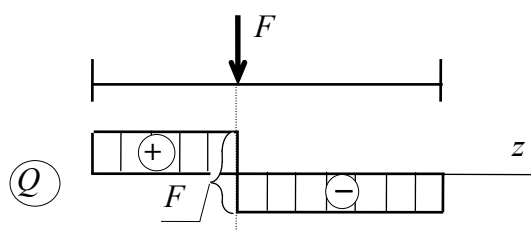


Рис. 4.7

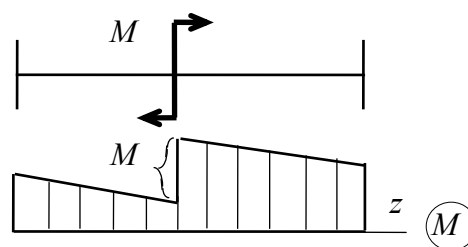


Рис. 4.8

Для построения эпюр  $Q$  и  $M$  балку разбивают на участки, границами которых являются точки приложения сосредоточенных сил и моментов, начало и конец распределённой нагрузки. На каждом участке функции  $Q$  и  $M$  имеют свое аналитическое выражение.

## Примеры решения задач

**Пример 4.1.** Для балки, изображенной на рис. 4.9, построить эпюры  $Q$  и  $M$  и подобрать поперечное сечение в виде двутавра при  $[\sigma] = 210$  МПа. Проверить условие прочности по касательным напряжениям при  $[\tau] = 130$  МПа. Построить эпюры  $\sigma_{\max}$  и  $\tau_{\max}$ .

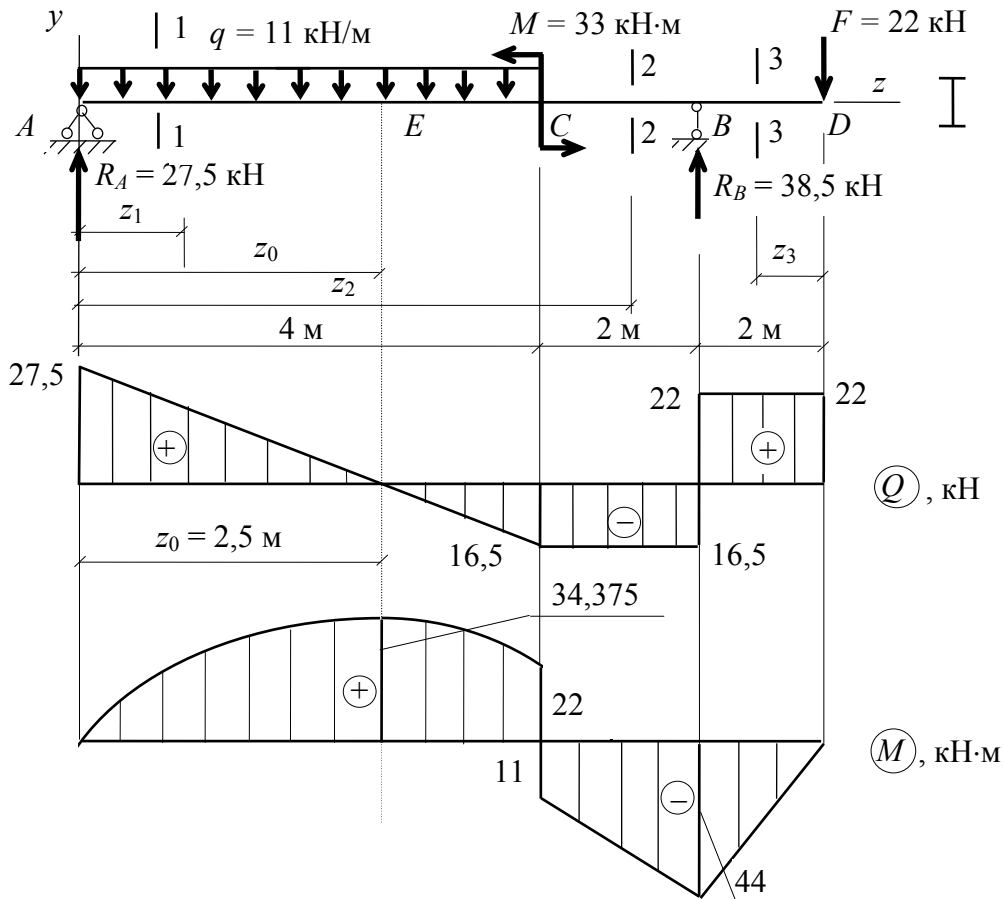


Рис. 4.9

### Решение

1. *Определение опорных реакций.* Из условия равновесия балки:

$$\sum M_A = 0; \quad q \cdot 4 \cdot 2 - M - R_B \cdot 6 + F \cdot 8 = 0;$$

$$R_B = \frac{q \cdot 4 \cdot 2 - M + F \cdot 8}{6} = \frac{11 \cdot 4 \cdot 2 - 33 + 22 \cdot 8}{6} = 38,5 \text{ кН};$$

$$\sum M_B = 0; \quad R_A \cdot 6 - q \cdot 4 \cdot 4 - M + F \cdot 2 = 0;$$

$$R_A = \frac{q \cdot 4 \cdot 4 + M - F \cdot 2}{6} = \frac{11 \cdot 4 \cdot 4 + 33 - 22 \cdot 2}{6} = 27,5 \text{ кН}.$$

Производим проверку правильности найденных реакций.

$$\sum Y = R_A - q \cdot 4 + R_B - F = 27,5 - 11 \cdot 4 + 38,5 - 22 = 0.$$

Следовательно, реакции найдены верно.

2. Построение эпюр  $Q$  и  $M$ . Балка имеет три участка:  $AC$ ,  $CB$  и  $BD$ .

1-й участок  $AC$ . Рассекаем балку в произвольном месте этого участка сечением 1-1. Рассматриваем левую отсеченную часть (рис. 4.10).

Фиксируем сечение 1-1 текущей координатой  $z_1$  от начала балки:  $0 \leq z_1 \leq 4$  м. Действие правой отброшенной части на рассматриваемую левую заменяем внутренними усилиями  $Q_1$  и  $M_1$ .

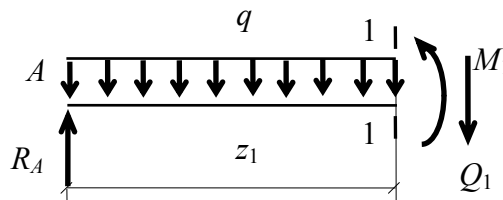


Рис. 4.10

Руководствуясь принятыми правилами знаков, находим выражения  $Q_1$  и  $M_1$  в общем виде:

$$Q_1 = R_A - qz_1 = 27,5 - 11z_1;$$

$$M_1 = R_A z_1 - qz_1 \frac{z_1}{2} = 27,5z_1 - 5,5z_1^2.$$

Поперечная сила на участке  $AC$  меняется по его длине по линейному закону, а изгибающий момент  $M_1$  – по закону квадратной параболы.

Найдём ординаты эпюры  $Q_1$  при:

$$z_1 = 0 \quad Q_A = 27,5 \text{ кН};$$

$$z_1 = 4 \text{ м} \quad Q_C = 27,5 - 11 \cdot 4 = -16,5 \text{ кН}.$$

Поперечная сила меняется по линейному закону и меняет при этом знак. Определяем координату  $z_0$ , при которой в точке  $E$   $Q_1 = 0$ :

$$Q_1 = Q_E = R_A - qz_0 = 0, \quad z_0 = \frac{R_A}{q} = \frac{27,5}{11} = 2,5 \text{ м}.$$

Для построения эпюры  $M_1$  определяем её ординаты в трёх сечениях: на границах участка  $AC$  и при  $z_0 = 2,5$  м:

$$\text{при } z_1 = 0 \quad M_A = 0;$$

$$\text{при } z_1 = z_0 = 2,5 \text{ м} \quad M_{\max} = 27,5 \cdot 2,5 - 5,5 \cdot (2,5)^2 = 34,375 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

$$\text{при } z_1 = 4 \text{ м} \quad M_C = 27,5 \cdot 4 - 5,5 \cdot (4)^2 = 22 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

В случае, когда на участке с равномерно распределённой нагрузкой поперечная сила не равна нулю и не меняет знака, ординаты эпюры  $M$  определяем обязательно на границах участка и в произвольном третьем сечении этого участка.

2-й участок  $CB$ . Рассекаем балку в произвольном месте этого участка сечением 2-2. Рассматриваем левую отсеченную часть (рис. 4.11). Сечение

2-2 фиксируем текущей координатой  $z_2$  от начала балки:  $4 \text{ м} \leq z_2 \leq 6 \text{ м}$ . Действие правой отброшенной части на левую заменяем внутренними усилиями  $Q_2$  и  $M_2$ .

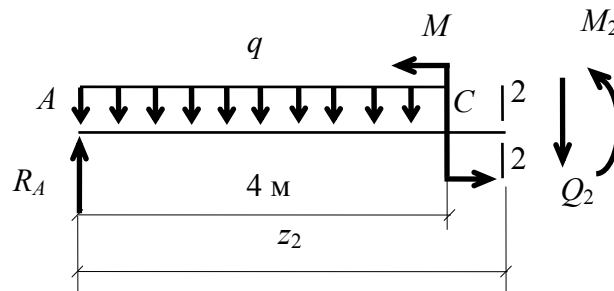


Рис. 4.11

Находим выражения  $Q_2$  и  $M_2$  в общем виде:

$$Q_2 = R_A - q \cdot 4 = 27,5 - 11 \cdot 4 = -16,5 \text{ кН};$$

$$M_2 = R_A z_2 - q \cdot 4(z_2 - 4) - M = -16,5 z_2 - 44(z_2 - 4) - 33.$$

Поперечная сила на участке  $CB$  постоянна и в любом сечении  $Q_2 = Q_C = Q_B = -16,5 \text{ кН}$ . Изгибающий момент  $M_2$  меняется по линейному закону. Для построения эпюры  $M_2$  определяем ординаты на границах участка при:

$$z_2 = 4 \text{ м} \quad M_C = -11 \text{ кН}\cdot\text{м};$$

$$z_2 = 6 \text{ м} \quad M_B = -44 \text{ кН}\cdot\text{м}.$$

3-й участок  $BD$ . Рассекаем балку в произвольном месте этого участка сечением 3-3. Рассматриваем правую отсечённую часть (рис. 4.12). Сечение 3-3 фиксируем текущей координатой  $z_3$  от правого конца балки:  $0 \leq z_3 \leq 2 \text{ м}$ . Действие левой отброшенной части на правую заменяем усилиями  $Q_3$  и  $M_3$ . Находим выражения  $Q_3$  и  $M_3$  в общем виде:

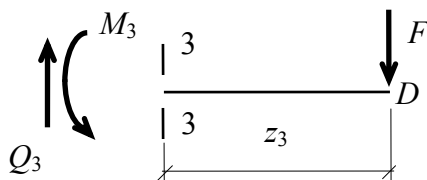


Рис. 4.12

$$Q_3 = F = 22 \text{ кН},$$

$$M_3 = -F \cdot z_3 = -22 z_3.$$

Поперечная сила  $Q_3$  постоянна на участке  $BD$  и в любом сечении  $Q_B = Q_D = 22 \text{ кН}$ . Изгибающий момент  $M_3$  меняется по линейному закону.

Для построения эпюры  $M$  определяем ординаты на границах участка при:

$$z_3 = 0 \quad M_D = 0;$$

$$z_3 = 2 \text{ м} \quad M_B = -22 \cdot 2 = -44 \text{ кН}\cdot\text{м}.$$



По найденным ординатам в выбранном масштабе строим эпюры  $Q$  и  $M$  (см. рис. 4.9). Легко убедиться, что все правила, перечисленные выше, выполняются.

Подбор поперечного сечения, проверка прочности балки. Находим по эпюрам  $M$  и  $Q$  максимальные по абсолютной величине значения внутренних усилий:

$$M_{\max} = 44 \text{ кН}\cdot\text{м}, \quad Q_{\max} = 27,5 \text{ кН}.$$

Из формулы (4.8) определяем требуемый момент сопротивления сечения балки при  $\sigma_{\max} = [\sigma] = 210 \text{ МПа}$ :

$$W_x = \frac{|M_{\max}|}{[\sigma]} = \frac{44 \cdot 10^3 \text{ (Н}\cdot\text{м)}}{210 \cdot 10^6 \text{ (Н/м}^2\text{)}} = 0,209 \cdot 10^{-3} \text{ м}^3 = 209 \text{ см}^3.$$

По таблице сортамента для прокатных профилей (см. прил. 1) принимаем двутавр № 22 (рис. 4.13), для которого:

$$W_x = 232 \text{ см}^3; \quad I_x = 2550 \text{ см}^4;$$

$$S_x^{\text{отс}} = 131 \text{ см}^3; \quad s = 0,54 \text{ см};$$

$$t = 0,87 \text{ см}; \quad b = 11 \text{ см}.$$

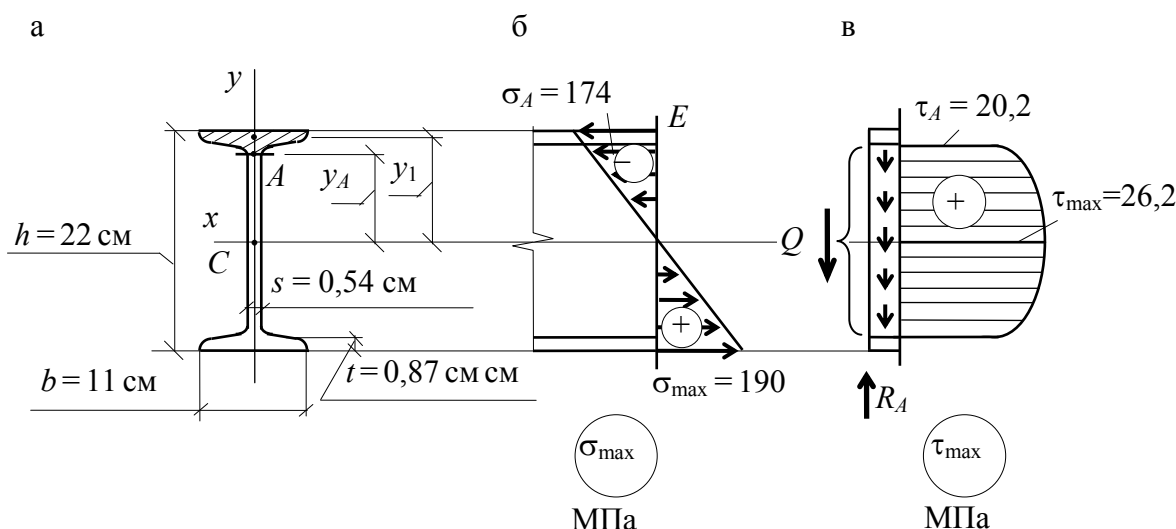


Рис. 4.13

Проверяем прочность выбранного сечения по нормальным и касательным напряжениям по формулам (4.8) и (4.9):

$$\begin{aligned} \sigma_{\max} &= \frac{|M_{\max}|}{W_x} = \frac{44 \cdot 10^3 \text{ (Н}\cdot\text{м)}}{232 \cdot 10^{-6} \text{ (м}^3\text{)}} = 0,190 \cdot 10^9 \text{ Н/м}^2 = \\ &= 190 \text{ МПа} < [\sigma] = 210 \text{ МПа}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tau_{\max} &= \frac{|Q_{\max}| S_x^{\text{отс}}}{I_x s} = \frac{27,5 \cdot 10^3 \text{ (Н)} \cdot 131 \cdot 10^{-6} \text{ (м}^3\text{)}}{2550 \cdot 10^{-8} \text{ (м}^4\text{)} \cdot 0,54 \cdot 10^{-2} \text{ (м)}} = \\ &= 2,62 \cdot 10^7 \text{ Н/м}^2 = 26,2 \text{ МПа} < [\tau] = 130 \text{ МПа}. \end{aligned}$$

Условия прочности выполняются.

4. Построение эпюр  $\sigma_{\max}$  и  $\tau_{\max}$ . Эпюру  $\sigma_{\max}$  строим в сечении, проходящем через точку  $E$  с  $M_{\max}$ , и рассматриваем левую отсеченную часть (см. рис. 4.13, б). Верхние волокна сжимаются (знак "минус"), а нижние растягиваются (знак "плюс"). Закон изменения напряжений по высоте линейный. Определим их величину в некоторой точке  $A$ :

$$\sigma_A = \frac{|M_{\max}|}{I_x} y_A = \frac{44 \cdot 10^3}{2550 \cdot 10^{-8}} (11 - 0,87) \cdot 10^{-2} = 17,4 \cdot 10^7 \text{ Н/м}^2 = 174 \text{ МПа.}$$

Построение эпюры  $\tau_{\max}$  производим в сечении рядом с левой опорой, где действует  $Q_{\max}$  (см. рис. 4.13, в). Она изменяется по закону квадратной параболы в пределах стенки двутавра с максимальным значением на нейтральной оси. В местах перехода стенки и полок (в точке  $A$ ) на эпюре наблюдается «скачок» напряжений, равный:

$$\tau_A = \frac{|Q_{\max}| S_x^{\text{отс}}}{I_x s} = \frac{27,5 \cdot 10^3 \text{ (м)} \cdot 101,1 \cdot 10^{-6} \text{ (м}^3\text{)} \cdot 10^6}{2550 \cdot 10^{-8} \text{ (м}^4\text{)} \cdot 0,54 \cdot 10^{-2} \text{ (м)}} = 20,2 \text{ МПа,}$$

здесь  $S_x^{\text{отс}}$  – статический момент площади отсеченной части (заштрихованная область на рис. 4.13, а),

$$S_x^{\text{отс}} = Ay_1 = bty_1 = 11 \cdot 0,87 \cdot \left(11 - \frac{0,87}{2}\right) = 101,1 \text{ см}^3.$$

Вектор касательных напряжений направлен вниз вдоль сечения и совпадает с положительным направлением поперечной силы на опоре  $Q_{\max} = 27,5 \text{ кН}$ .

Пример 4.2. Балка с поперечным сечением в виде тавра загружена согласно рис. 4.14, а. Определить главные напряжения в точке  $A$  в сечении с  $|M_{\max}|$  и проверить условие прочности по энергетическому критерию пластичности при  $[\sigma] = 210 \text{ МПа}$ .

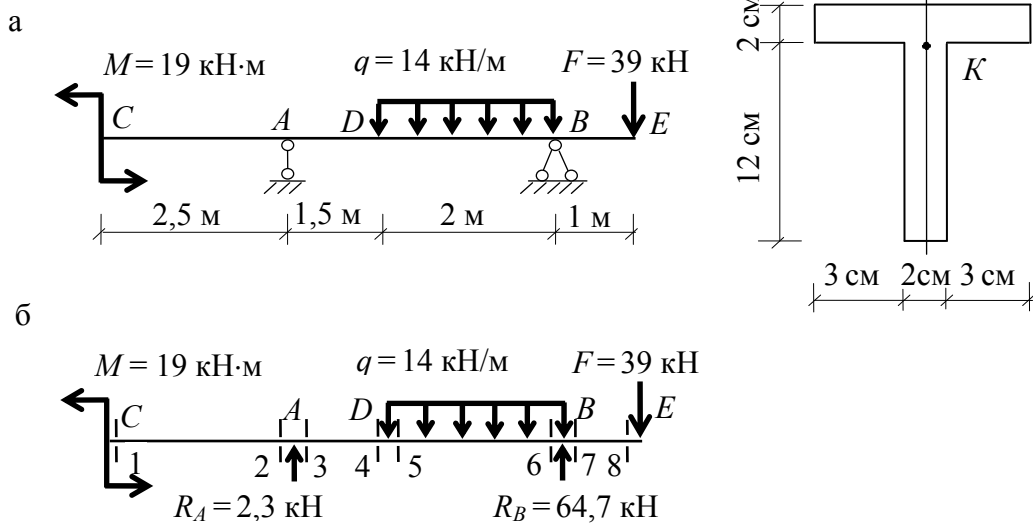
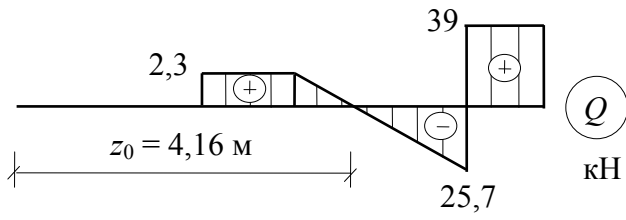
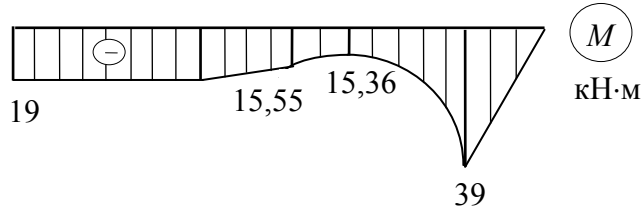


Рис. 4.14 (Начало)

В



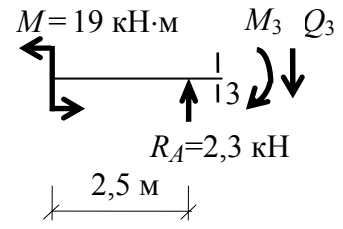
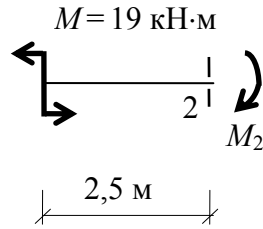
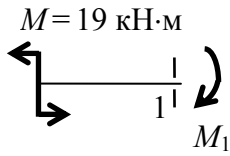
Г



Д

е

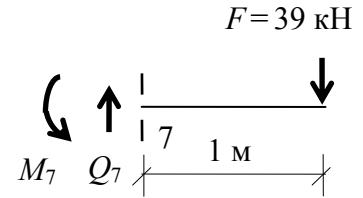
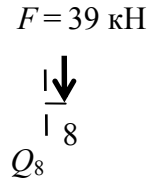
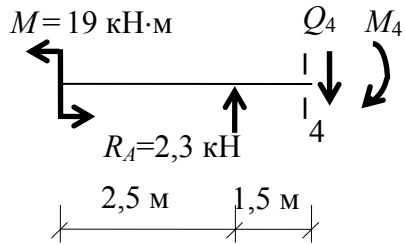
ж



З

и

к



Л

м

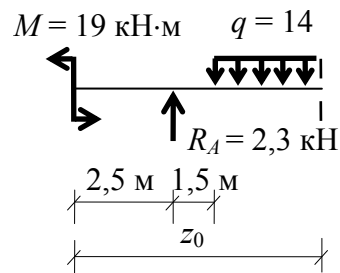
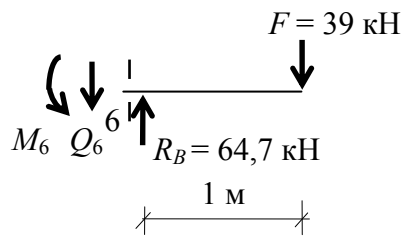


Рис. 4.14 (Окончание)

## Р е ш е н и е

1. *Определение опорных реакций:*

$$\sum M_A = -M + q \cdot 2 \cdot 2,5 - R_B \cdot 3,5 + F \cdot 4,5 = 0, \quad R_B = 64,7 \text{ кН};$$

$$\sum M_B = -M - q \cdot 2 \cdot 1 + R_A \cdot 3,5 + F \cdot 1 = 0, \quad R_A = 2,3 \text{ кН}.$$

Проверка реакций:

$$\sum \rightarrow = 0, \quad R_A + R_B - 2 \cdot q - F = 0, \quad 67 = 67.$$

2. *Построение эпюр  $M$  и  $Q$ .* Построение эпюр производим по "точкам", используя правила их построения. Балка имеет четыре участка:  $AC$ ,  $AD$ ,  $BD$  и  $BE$ . Начало и конец участков обозначим цифрами 1–8 (рис. 4.14, б).

На участке  $AC$ , в сечении 1–1 (рис. 4.14, д):

$$M_1 = -19 \text{ кН}\cdot\text{м}, \quad Q_1 = 0;$$

в сечении 2–2 (рис. 4.14, е):

$$M_2 = -19 \text{ кН}\cdot\text{м}, \quad Q_2 = 0.$$

Участок не загружен распределённой нагрузкой. Эпюра моментов постоянна и  $Q = 0$ .

На участке  $AD$ , в сечении 3–3 (рис. 4.14, ж):

$$Q_3 = R_A = 2,3 \text{ кН}, \quad M_3 = -19 \text{ кН}\cdot\text{м};$$

в сечении 4–4 (рис. 4.14, з):

$$Q_4 = 2,3 \text{ кН}, \quad M_4 = R_A \cdot 1,5 - M = 2,3 \cdot 1,5 - 19 = -15,55 \text{ кН}\cdot\text{м}.$$

Участок не загружен. Эпюра поперечных сил постоянна, а эпюра моментов наклонная прямая.

На участке  $BE$ , в сечении 8–8 (рис. 4.14, и):

$$Q_8 = F = 39 \text{ кН}, \quad M_8 = 0;$$

в сечении 7–7 (рис. 4.14, к):

$$Q_7 = 39 \text{ кН}, \quad M_7 = -F \cdot 1 = -39 \text{ кН}\cdot\text{м}.$$

Эпюра поперечных сил постоянна и положительна. Эпюра моментов изменяется от нуля до  $M_7 = -39 \text{ кН}\cdot\text{м}$  по линейному закону.

На участке  $BD$ , в сечении 5–5:

$$Q_5 = Q_4 = 2,3 \text{ кН}, \quad M_5 = M_4 = -15,55 \text{ кН}\cdot\text{м};$$

в сечении 6–6 (рис. 4.14, л):

$$Q_6 = F - R_B = 39 - 64,7 = -25,7 \text{ кН} \quad M_6 = M_7 = -39 \text{ кН}\cdot\text{м}.$$

Участок загружен распределённой нагрузкой. Следовательно, эпюра  $M$  меняется по закону квадратной параболы выпуклостью вверх, а эпюра поперечных сил – наклонная прямая, пересекающая ось эпюры. В точке, где

$Q = 0$ , момент достигает экстремального значения. Находим координату  $z_0$  этой точки, рассматривая равновесие левой части (рис. 4.14, м):

$$Q = R_A - q(z_0 - 4) = 2,3 - 14(z_0 - 4) = 0, \quad z_0 = 4,16 \text{ м.}$$

В сечении с  $z_0 = 4,16$  м:

$$M = -M + R_A(z_0 - 2,5) - 0,5q(z_0 - 4)^2 = \\ = -19 + 2,3 \cdot (4,16 - 2,5) - 0,5 \cdot 14 \cdot (4,16 - 4)^2 = -15,36 \text{ кН} \cdot \text{м.}$$

Построение эпюр  $M$  и  $Q$  показано на рис. 4.14, в, г.

3. *Определение геометрических характеристик поперечного сечения.*

Находим положение центра тяжести таврового сечения относительно вспомогательной оси  $x_0$  (рис. 4.15, а):

$$x_C = \frac{\sum S_{x_0}}{\sum A} = \frac{A^{(1)}x_1 + A^{(2)}x_2}{A^{(1)} + A^{(2)}} = \frac{2 \cdot 12 \cdot 6 + 2 \cdot 8 \cdot 13}{24 + 16} = 8,8 \text{ см.}$$

Осейвой момент инерции относительно нейтральной оси определяется по формуле параллельного переноса осей (см. задачу № 1):

$$I_x = I_x^{(1)} + I_x^{(2)} = I_{x_1}^{(1)} + A^{(1)}a_1^2 + I_{x_2}^{(2)} + A^{(2)}a_2^2 = \\ = 288 + 24 \cdot (-2,8)^2 + 5,33 + 16 \cdot 4,2^2 = 763,7 \text{ см}^4; \\ I_{x_1}^{(1)} = \frac{bh^3}{12} = \frac{2 \cdot 12^3}{12} = 288 \text{ см}^4; \quad I_{x_2}^{(2)} = \frac{8 \cdot 2^3}{12} = 5,33 \text{ см}^4.$$

Расстояния между параллельными центральными осями  $x_1$ ,  $x_2$  и  $x$ :

$$a_1 = x_1 - x_C = 6 - 8,8 = -2,8 \text{ см}; \quad a_2 = x_2 - x_C = 13 - 8,8 = 4,2 \text{ см.}$$

4. *Вычисление главных напряжений.* На правой опоре в сечении 7–7 в точке  $A$  с  $M = 39$  кН·м и  $Q = 39$  кН (рис. 4.14, б и 4.15, б) нормальное напряжение при  $y_K = 12 - 8,8 = 3,2$  см равно:

$$\sigma_K = \frac{M \cdot y_K}{I_x} = \frac{39 \cdot 10^3 \cdot 3,2 \cdot 10^{-2}}{763,7 \cdot 10^{-8}} = 1,63 \cdot 10^8 \text{ Н/м}^2 = 163 \text{ МПа.}$$

Касательное напряжение

$$\tau_K = \frac{Q \cdot S_x^{\text{отс}}}{I_x \cdot b} = \frac{39 \cdot 10^3 \cdot 67,2 \cdot 10^{-6}}{763,7 \cdot 10^{-8} \cdot 2 \cdot 10^{-2}} = 1,7 \cdot 10^7 \text{ Н/м}^2 = 17 \text{ МПа,}$$

здесь  $S_x^{\text{отс}}$  – статический момент площади отсечённой части сечения выше точки  $K$ ,

$$S_x^{\text{отс}} = Ay = Aa_2 = 2 \cdot 8 \cdot 4,2 = 67,2 \text{ см}^3.$$

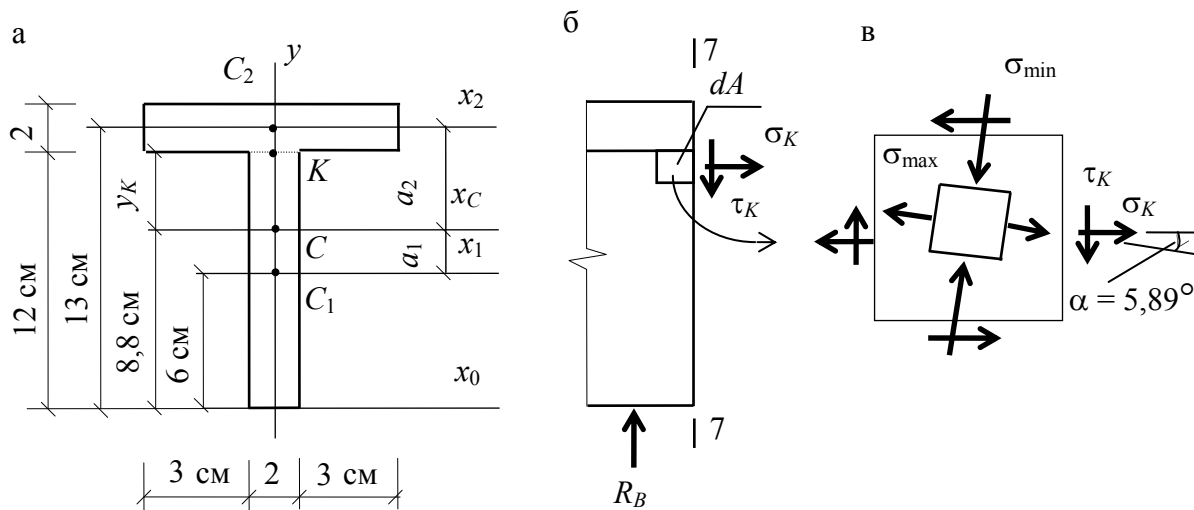


Рис. 4.15

Определяем главные напряжения по формуле (4.7):

$$\sigma_{1,3} = \sigma_{\max/\min} = \frac{\sigma_K}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_K}{2}\right)^2 + \tau_K^2} = \frac{163}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{163}{2}\right)^2 + 17^2} = 81,5 \pm 83,3.$$

Отсюда

$$\sigma_1 = \sigma_{\max} = 81,5 + 83,3 = 164,8 \text{ МПа};$$

$$\sigma_3 = \sigma_{\min} = 81,5 - 83,3 = -1,8 \text{ МПа}.$$

Устанавливаем положение главных площадок по выражению (4.6):

$$\operatorname{tg} 2\alpha = -\frac{2\tau_K}{\sigma_K} = -\frac{2 \cdot 17}{163} = -0,208; \quad \alpha = -5,89^\circ.$$

При этом напряжения подставляются в формулу со своими знаками. Заметим, что растягивающие нормальные напряжения считаются положительными, а сжимающие – отрицательными. Знак и направление касательных напряжений совпадает со знаком поперечной силы. Отрицательное значение угла  $\alpha$  откладываем по часовой стрелке от оси  $x$  (рис. 4.15, в).

5. Проверка условия прочности по энергетическому критерию пластичности. Величину эквивалентного напряжения в точке  $K$  вычисляем по формуле (4.10):

$$\begin{aligned} \sigma_{\text{эkv}} &= \sqrt{\frac{1}{2} \left[ 164,8^2 + (164,8 + 1,8)^2 + 1,8^2 \right]} = 16,57 \cdot 10^7 \text{ Н/м}^2 = \\ &= 165,7 \text{ МПа} < [\sigma] = 210 \text{ МПа}. \end{aligned}$$

Условие прочности выполняется.

Пример 4.3. Определить допускаемую нагрузку  $q$  на балку из двух швеллеров № 24 при  $[\sigma] = 200 \text{ МПа}$  (рис. 4.16, а).

## Решение

1. Построение эюр  $M$  и  $Q$  (рис. 4.16, б, в). Ввиду симметрии нагрузка распределяется поровну между опорными реакциями:

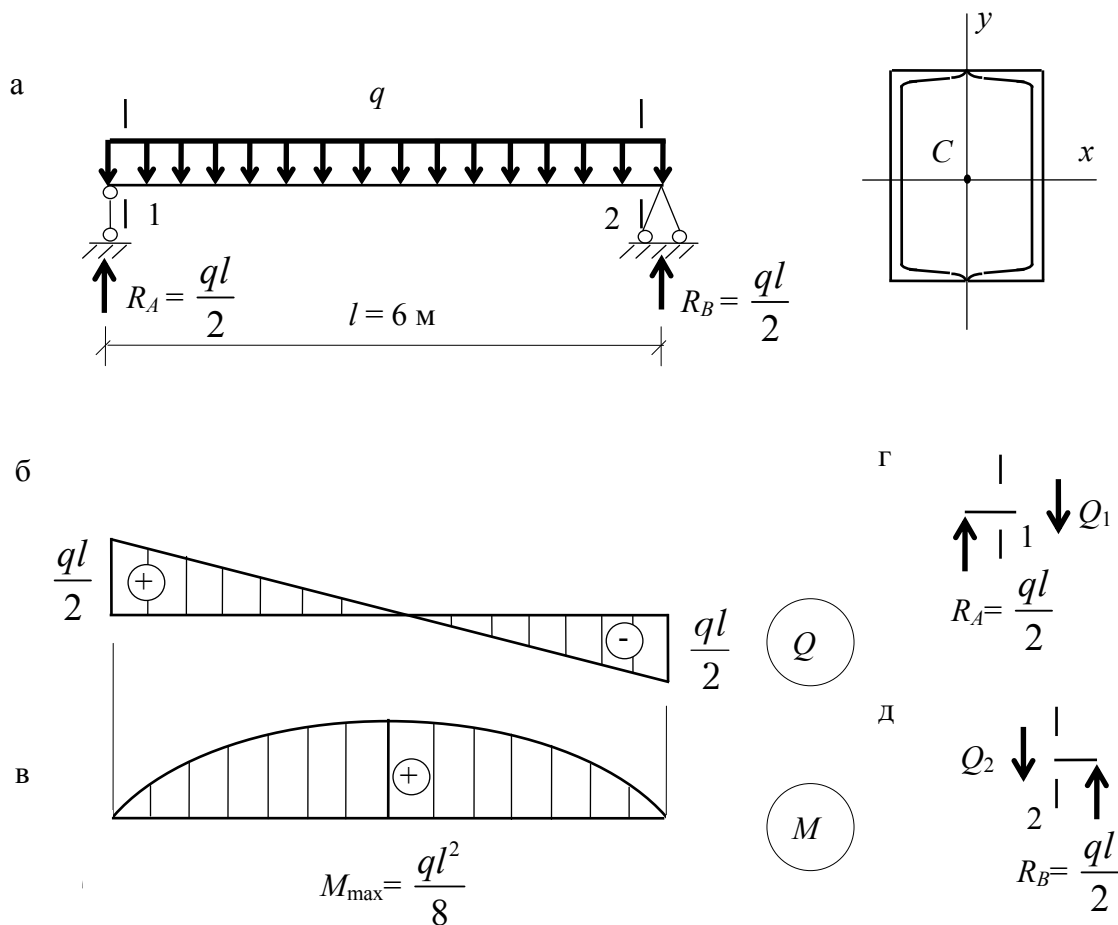
$$R_A = R_B = \frac{ql}{2}.$$

В сечении 1–1 (рис. 4.15, г):

$$Q_1 = R_A = 0,5ql, \quad M_1 = 0.$$

В сечении 2–2 (рис. 4.15, д):

$$Q_2 = -R_B = -0,5ql, \quad M_2 = 0.$$



Эюра поперечных сил линейная и пересекает нулевую линию. Изгибающий момент изменяется по квадратной параболе и достигает экстремального значения в середине балки:

$$M_{\max} = R_A \frac{l}{2} - q \frac{l}{2} \cdot 0,5 \frac{l}{2} = \frac{ql^2}{8}.$$

2. *Определение допускаемой нагрузки.* Из условия прочности (4.8) при  $\sigma_{\max} = [\sigma]$  находим несущую способность поперечного сечения по изгибающему моменту:

$$M_{\max} = W_x [\sigma] = 2 \cdot 242 \cdot 10^{-6} (\text{м}^3) \cdot 200 \cdot 10^6 (\text{Н/м}^2) = 96800 \text{ Н} \cdot \text{м},$$

здесь  $W_x = 242 \text{ см}^3$  (см. прил. 2).

Приравнявая найденное значение действующему моменту, получим допускаемую нагрузку:

$$q = \frac{8M_{\max}}{l^2} = \frac{8 \cdot 96,8}{6^2} = 21,5 \text{ кН/м}.$$

### К о н т р о л ь н ы е   в о п р о с ы

1. Что понимается под внутренними силами?
2. Какой метод используется для определения внутренних усилий?
3. Перечислите компоненты внутренних усилий в общем случае действия нагрузки.
4. Назовите простые и сложные виды сопротивления (деформации) бруса.
5. Какой вид деформации стержня относится к плоскому поперечному изгибу?
6. Что называется чистым изгибом?
7. Что называется изгибающим моментом? Как и с каким напряжением он связан?
8. Как находится изгибающий момент в каком-либо сечении бруса?
9. Что показывает эпюра внутреннего усилия?
10. Как строится эпюра изгибающего момента? Правило знаков.
11. Что называется поперечной силой? Как и с каким напряжением она связана?
12. Как находится величина поперечной силы в каком-либо сечении бруса?
13. Как строится эпюра поперечных сил? Правило знаков.
14. Какова зависимость между изгибающим моментом, поперечной силой и интенсивностью распределённой нагрузки?
15. По какому закону изменяется изгибающий момент и поперечная сила на участке, не загруженном распределённой нагрузкой?
16. По какому закону изменяется изгибающий момент и поперечная сила на участке, загруженном равномерно распределённой нагрузкой?
17. Как установить экстремальное значение изгибающего момента на участке, загруженном распределённой нагрузкой?
18. Как изменяется эпюра изгибающего момента на участке, где поперечная сила равна нулю?
19. Когда на эпюре поперечных сил возникает «скачок»?



20. Когда на эпюре моментов возникает «скачок»?

21. Восстановите схему нагружения балки, если известны эпюры изгибающих моментов и поперечных сил (рис. 4.17).

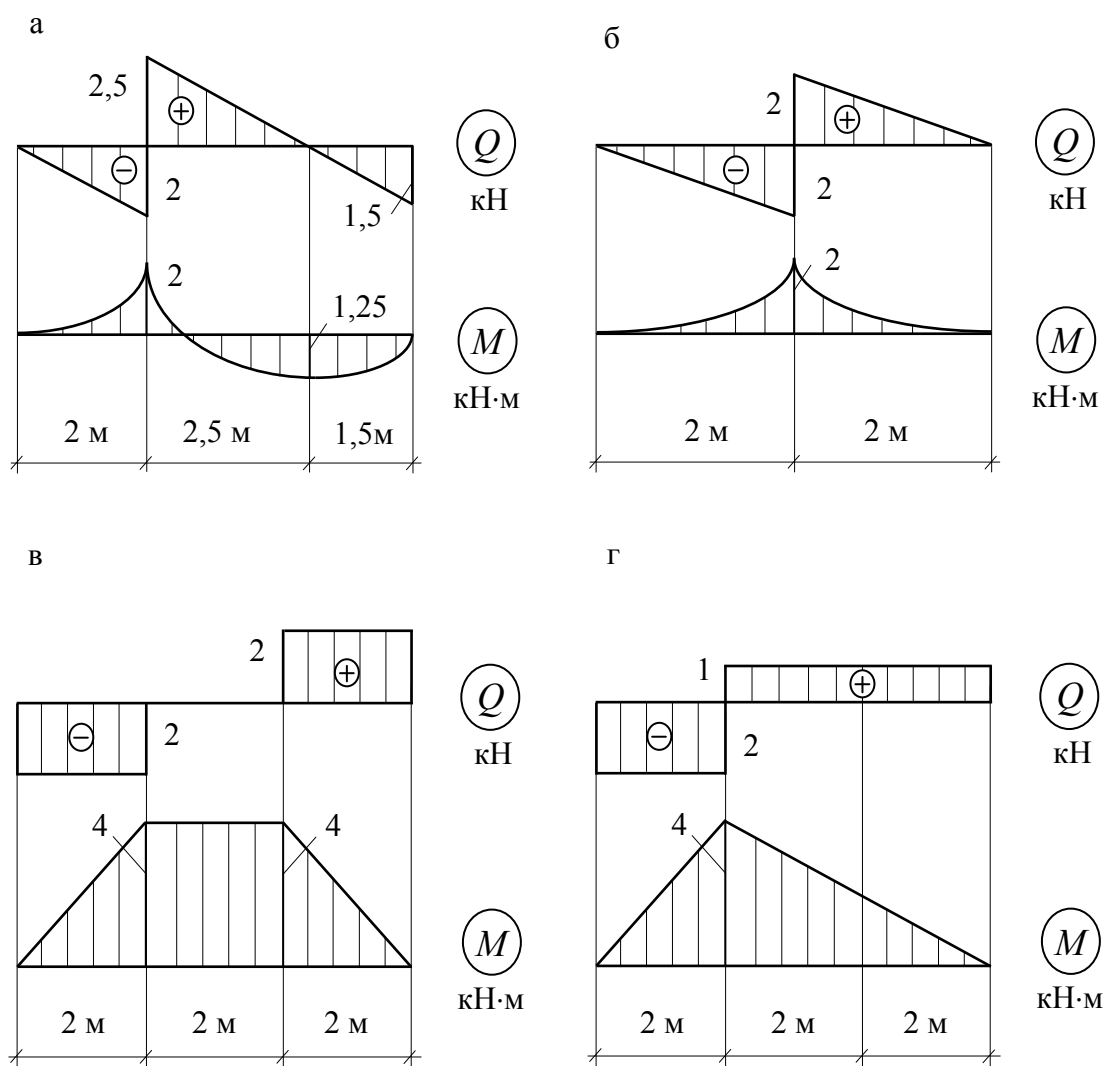


Рис. 4.17

22. Каковы особенности построения эпюр внутренних усилий в брус с ломаной осью?

23. Как выполняется статическая проверка правильности построенных эпюр в раме?

24. Сформулируйте гипотезу плоских сечений при чистом изгибе бруса.

25. Что называется нейтральным слоем и где он находится?

26. Как изменяются нормальные напряжения по высоте и ширине сечения балки?

27. Как определить величину нормального напряжения в точке и его направление?

28. Запишите условие прочности (безопасной работы) балки по нормальным напряжениям.

29. Что называется моментом сопротивления сечения?  
 30. Как подобрать размеры поперечного сечения балки?  
 31. Как определить допускаемую нагрузку на балку из двутавра № 24 (рис. 4.18)?

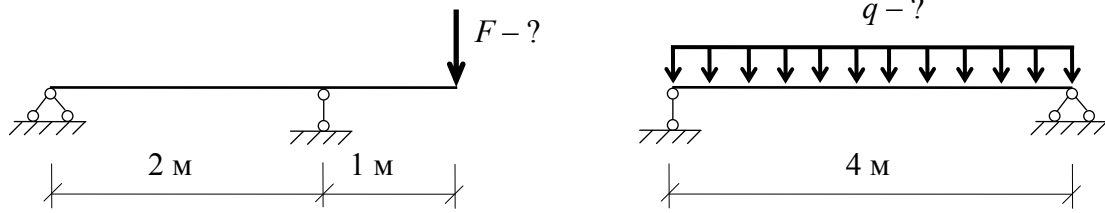


Рис. 4.18

32. В каком случае расположения бруса прямоугольного поперечного сечения – плашмя (рис. 4.19, в) или на ребро (рис. 4.19, б) – возникнут меньшие нормальные напряжения и почему?

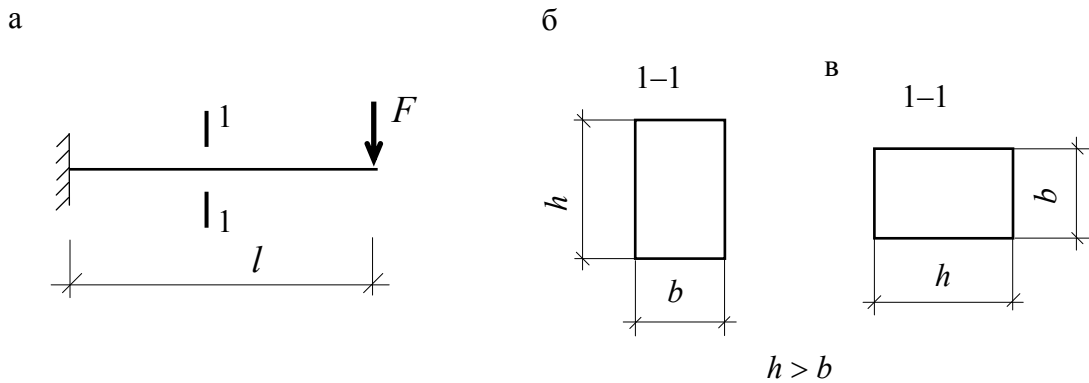


Рис. 4.19

33. Какой из брусьев, формы поперечных сечений которых представлены на рис. 4.20, требует меньшего расхода материала при изгибе, если момент сопротивления  $W_x$  у них одинаков?

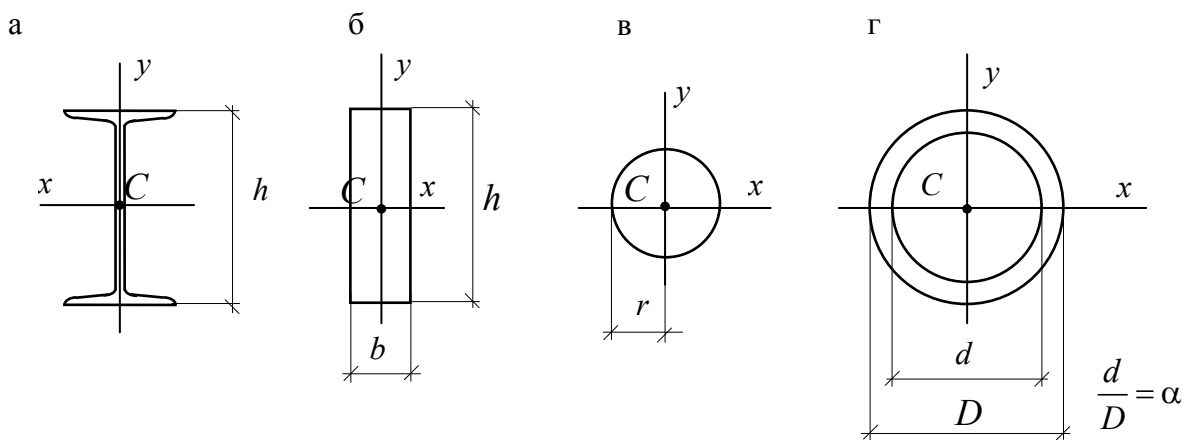


Рис. 4.20

34. Сравните моменты сопротивления сечений балок, показанных на рис. 4.21.

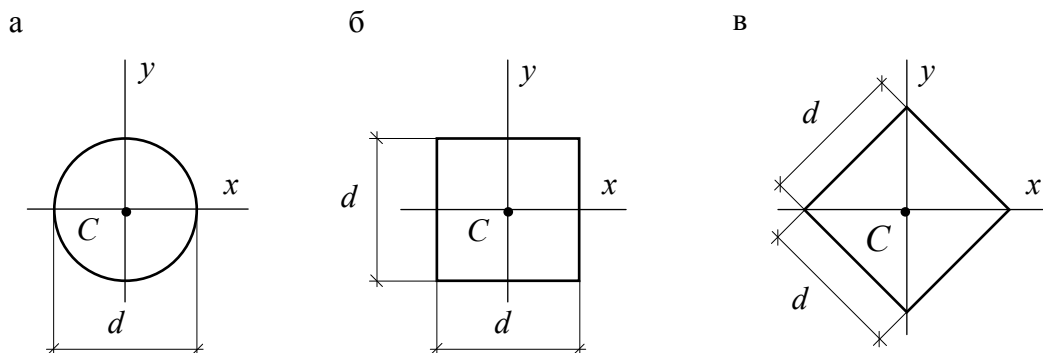


Рис. 4.21

35. При каком варианте расположения поперечного сечения можно приложить бóльшую нагрузку к балке (рис. 4.22)? Сопротивление материала на растяжение меньше, чем на сжатие.

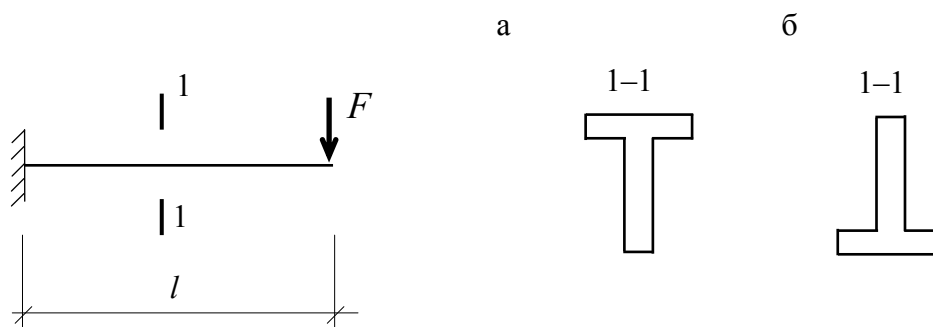


Рис. 4.22

36. Как определить величину касательных напряжений в точке по формуле Журавского?

37. Что понимается под статическим моментом площади отсечённой части сечения?

38. Как изменяется эпюра касательных напряжений по высоте и ширине поперечного сечения в форме прямоугольника?

39. Как изменяется эпюра касательных напряжений по высоте и ширине поперечного сечения в форме двутавра и тавра?

40. Как определить направление касательных напряжений?

41. Запишите условие прочности по касательным напряжениям.

42. Что называется главным напряжением?

43. Какие площадки называются главными?

44. Что называется напряжённым состоянием в точке? Виды напряжённых состояний.

45. Сформулируйте закон парности касательных напряжений.

46. Что называется чистым сдвигом?
47. В каких точках балки возникает линейное, а в каких – плоское напряжённое состояние?
48. Как определить положение главных площадок?
49. Как определить направление главных напряжений?
50. Как найти величину главных напряжений?
51. Запишите закон Гука при плоском напряжённом состоянии.
52. В чём заключается суть энергетического критерия пластичности (энергетической теории прочности)? Запишите формулу.
53. В чём заключается суть критерия пластичности (теории прочности) по наибольшему касательным напряжениям? Запишите формулу.
54. Сформулируйте теорию прочности Мора.
55. Что понимается под траекторией главных напряжений?
56. В каких точках бруса возникают наибольшие нормальные растягивающие и сжимающие напряжения (рис. 4.23)?
57. В каких точках бруса возникают наибольшие касательные напряжения (рис. 4.23)?

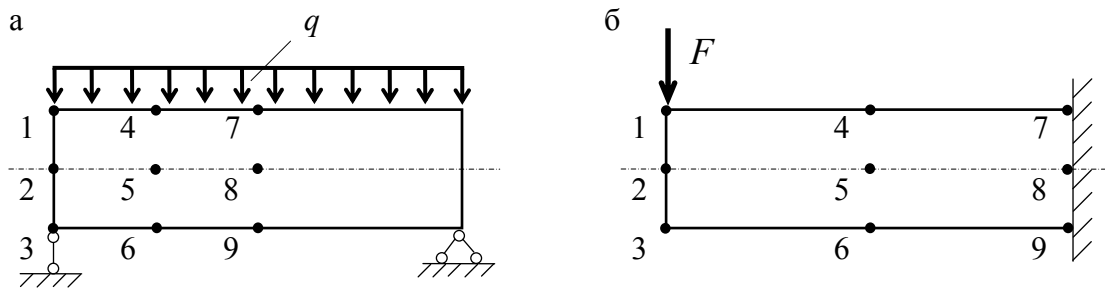


Рис. 4.23

58. В какой точке –  $A$  или  $B$  (рис. 4.24) – нормальные напряжения будут больше и во сколько раз при одинаковых длине бруса  $l$ , ширине сечения  $b$  и силе  $F$ ?

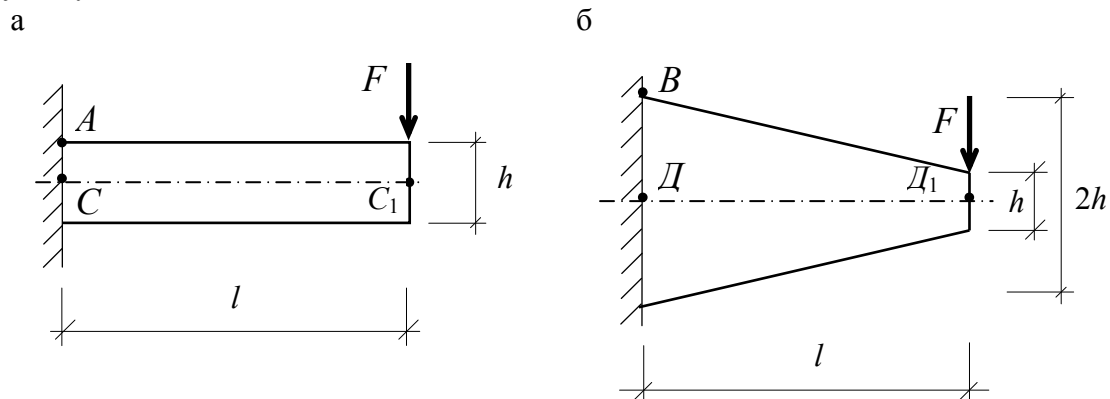


Рис. 4.24

59. Деревянная балка, шарнирно опертая по концам, имеет прямоугольное поперечное сечение и нагружена сосредоточенной силой  $F = 20$  кН в

середине пролета (рис. 4.25). Какой пролет  $l$  можно перекрыть такой балкой, чтобы максимальное напряжение было равно 20 МПа?

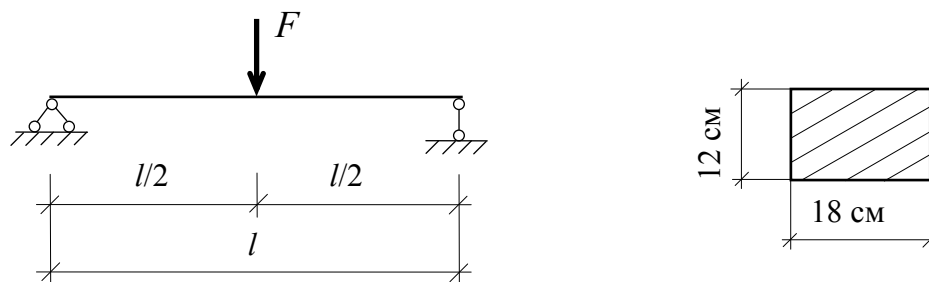


Рис. 4.25

## Раздел 5 РАСЧЁТ СТАЛЬНОГО ВАЛА ПРИ СОВМЕЩЕННОМ ДЕЙСТВИИ ИЗГИБА И КРУЧЕНИЯ

### З а д а н и е

Шкив диаметром  $D_1$  и с углом наклона  $\alpha_1$  ветвей ремня к горизонту вращается со скоростью  $n$ , об/мин, и передаёт мощность  $P$ , кВт (рис. 5.1). Два других шкива диаметром  $D_2$  и с углом наклона  $\alpha_2$  ветвей ремня к горизонту передают мощность по  $0,5P$ . Усилия в ремнях принять согласно рис. 5.1, б.

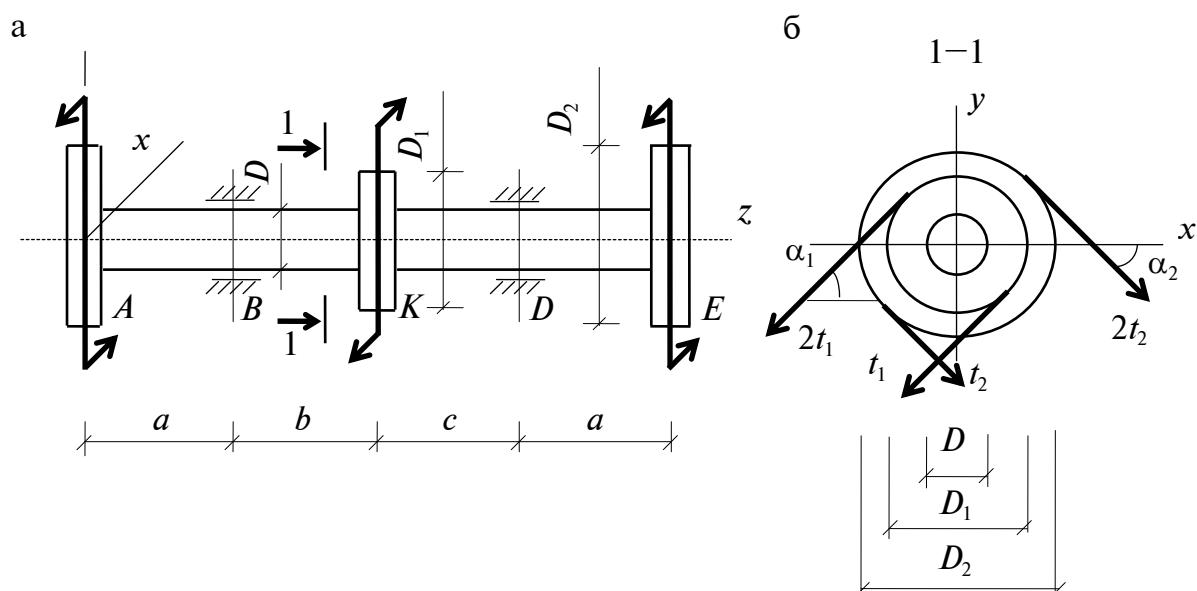


Рис. 5.1

Требуется:

1. Найти нагрузки, передаваемые шкивами на вал.
2. Построить эпюры крутящих и изгибающих моментов.

Определить диаметр вала, используя третью теорию прочности по наибольшему касательным напряжениям.

Данные для расчёта взять из табл. 5.1 согласно шифру.

Таблица 5.1

## Исходные данные

Номер строки	$a$ , см	$b$ , см	$c$ , см	$D_1$ , см	$D_2$ , см	$P$ , кВт	$n$ , об/мин	$\alpha_1$ , град	$\alpha_2$ , град	$[\sigma]$ , МПа
1	20	30	20	40	50	80	1000	24	32	70
2	25	10	30	50	70	100	1100	30	48	80
3	15	30	20	60	90	120	1200	50	64	90
4	20	15	35	40	60	140	800	48	61	100
5	30	20	15	30	50	160	1400	25	46	110
6	20	10	20	60	80	180	1500	44	56	120
7	30	15	20	45	75	200	1300	47	60	130
8	35	20	15	40	80	220	1600	48	70	140
9	40	20	30	50	90	240	1500	56	72	150
0	15	20	20	35	70	260	1900	53	65	160
	$\delta$	$e$	$e$	$\delta$	$e$	$\delta$	$e$	$\delta$	$e$	$e$

## Теоретическая часть

При совместном действии изгиба и кручения в поперечных сечениях возникают пять внутренних усилий: изгибающие моменты  $M_x$  и  $M_y$ , крутящий момент  $T$  и поперечные силы  $Q_x$  и  $Q_y$ . Используя принцип независимости действия сил, определяем отдельно касательные напряжения, возникающие в вале при кручении, и нормальные напряжения от его изгиба. Например, от силы  $F_1$  максимальные нормальные напряжения возникают в точках 1 и 3 (рис. 5.2, б). При изгибе в горизонтальной плоскости силой  $F_2$  максимальные напряжения возникают в точках 2 и 4 (рис. 5.2, г). От совместного действия обоих моментов  $M_x$  и  $M_y$  максимальное растягивающее напряжение будет действовать в точке  $A$  на диаметре  $AB$ , перпендикулярном линии полного изгибающего момента (рис. 5.2, д).

Максимальные напряжения

$$\sigma_{\max} = \frac{M}{W} = \frac{\sqrt{M_x^2 + M_y^2}}{W}, \quad (5.1)$$

где  $M$  – полный изгибающий момент (рис. 5.2, д);

$W$  – осевой момент сопротивления для круга.

Максимальные касательные напряжения от кручения возникают у поверхности вала (рис. 5.2, в). Их находят по формуле (3.4):

$$\tau_{\max} = \frac{|T_{\max}|}{W_p}. \quad (5.2)$$

Заметим, что касательные напряжения у поверхности вала от действия поперечных сил равны нулю.

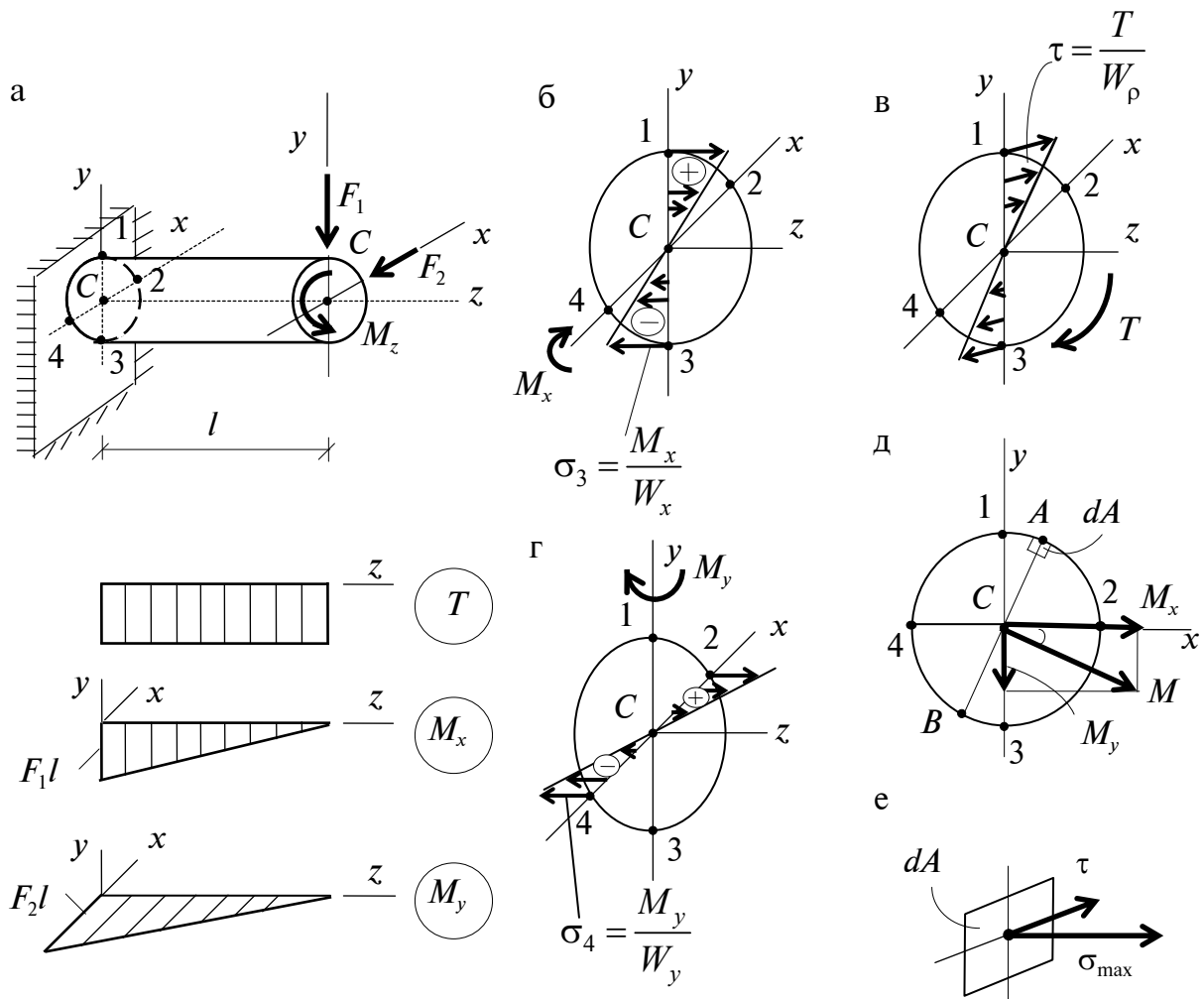


Рис. 5.2

Таким образом, у поверхности вала возникает плоское напряжённое состояние (рис. 5.2, е). Для проверки условия прочности используем критерий пластичности по наибольшим касательным напряжениям

$$\sigma_{\text{экв}} = \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} \leq [\sigma]. \quad (5.3)$$

Подставляя в выражение (5.3) формулы (5.1) и (5.2), получим:

$$\sigma_{\text{экв}} = \sqrt{\frac{M_x^2 + M_y^2}{W^2} + 4 \frac{T^2}{W_\rho^2}} = \sqrt{\frac{M_x^2 + M_y^2 + T^2}{W^2}} \leq [\sigma],$$

где  $W_\rho = 2W$  – полярный момент сопротивления круглого сечения.

Отсюда требуемый осевой момент сопротивления для круга

$$W = \frac{\sqrt{M_x^2 + M_y^2 + T^2}}{[\sigma]} = \frac{\pi D^3}{32}. \quad (5.4)$$



Диаметр вала находим по формуле

$$D = \sqrt[3]{\frac{32W}{\pi}}. \quad (5.5)$$

### Примеры решения задач

**Пример 5.1.** Рассчитать вал, изображенный на рис. 5.3, а, при следующих исходных данных:

$$a = 0,15 \text{ м}, \quad b = 0,3 \text{ м}, \quad c = 0,15 \text{ м}, \quad D_1 = 0,6 \text{ м}, \quad D_2 = 0,8 \text{ м},$$

$$P = 135 \text{ кВт}, \quad n = 1012 \text{ об/мин}, \quad \alpha_1 = 50^\circ, \quad \alpha_2 = 75^\circ \text{ и } [\sigma] = 80 \text{ МПа}.$$

### Решение

1. *Определение нагрузок на вал.* Ведущий шкив в точке  $K$  передаёт крутящий момент

$$M_1 = 9551 \frac{P}{n} = 9551 \cdot \frac{135}{1012} = 1274 \text{ Н} \cdot \text{м}.$$

На ведомом шкиве по сравнению с ведущим возникает момент, в два раза меньший по величине:

$$M_2 = 0,5 \cdot 1274 = 637 \text{ Н} \cdot \text{м}.$$

Давление на вал в точке  $K$  вследствие натяжения ремней (рис. 5.3, б):

$$\text{вертикальная составляющая } F_{yK} = (2t_1 + t_1) \sin \alpha_1 = 3t_1 \sin \alpha_1;$$

$$\text{горизонтальная составляющая } F_{xK} = 3t_1 \cos \alpha_1.$$

Величину  $t_1$  найдем из приложенного крутящего момента

$$M_1 = (2t_1 - t_1) \frac{D_1}{2} = \frac{t_1 D_1}{2}.$$

Отсюда

$$t_1 = \frac{2M_1}{D_1} = \frac{2 \cdot 1274}{0,6} = 4246,7 \text{ Н}.$$

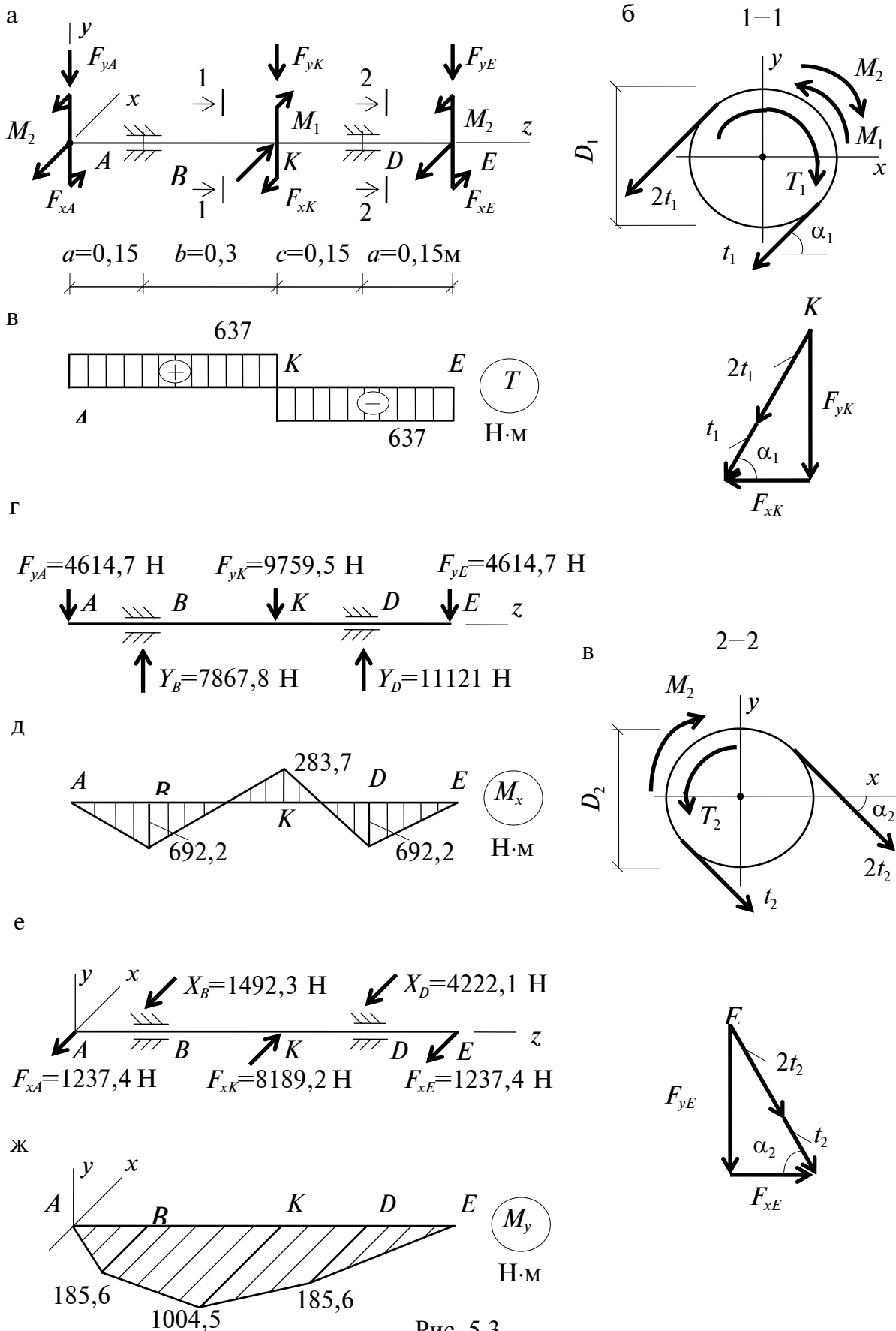


Рис. 5.3

Тогда

$$F_{yK} = 3 \cdot 4246,7 \sin 50^\circ = 9759,5 \text{ Н};$$

$$F_{xK} = 3 \cdot 4246,7 \cos 50^\circ = 8189,2 \text{ Н}.$$

Аналогично находим сосредоточенные нагрузки, передаваемые от ведомого шкива  $D_2$  (рис. 5.3, в):

вертикальная составляющая

$$F_{yA} = F_{yE} = 3t_2 \sin \alpha_2 = 3 \frac{2M_2}{D_2} \sin 75^\circ = 3 \cdot \frac{2 \cdot 637}{0,8} \cdot 0,966 = 4614,7 \text{ Н};$$

горизонтальная составляющая

$$F_{xA} = F_{xE} = 3t_2 \cos \alpha_2 = 3 \frac{2M_2}{D_2} \cos 75^\circ = 3 \cdot \frac{2 \cdot 637}{0,8} \cdot 0,259 = 1237,4 \text{ Н}.$$

Найденные усилия показаны на рис. 5.3, а.

## 2. Построение эпюр крутящих и изгибающих моментов.

Внутренний крутящий момент, направленный по часовой стрелке, считаем положительным (рис.5.3, г).

На участке  $KE$   $T_2 = -637 \text{ Н} \cdot \text{м}$ ; а на участке  $AK$   $T_1 = 637 \text{ Н} \cdot \text{м}$ .

Находим опорные реакции при изгибе в вертикальной плоскости (рис. 5.3, д):

$$\sum M_B = F_{xK} \cdot b + F_{yE} (a + b + c) - F_{yA} \cdot a - Y_D (b + c) = 0;$$

$$Y_D = \frac{9759,5 \cdot 0,3 + 4614,7(0,15 + 0,15 + 0,3) - 4614,7 \cdot 0,15}{0,45} = 11121 \text{ Н}.$$

$$\sum M_D = F_{yE} \cdot a + Y_B (b + c) - F_{yA} (a + b + c) - F_{yK} \cdot c = 0;$$

$$Y_B = \frac{-4614,7 + 4614,7(0,15 + 0,3 + 0,15) + 9759,5 \cdot 0,15}{0,45} = 7867,85 \text{ Н}.$$

Проверка вертикальных реакций:

$$F_{yA} + F_{yK} + F_{yR} - Y_B - Y_D = 2 \cdot 4614,7 + 9759,5 - 7867,85 - 11121 = 0.$$

Реакции от горизонтальных сил (рис. 5.3, ж):

$$\sum M_B = X_D (b + c) + F_{xE} (a + b + c) - F_{xK} \cdot b - F_{xA} \cdot a = 0;$$

$$X_D = \frac{-1237,4(0,15 + 0,3 + 0,15) + 8189,2 \cdot 0,3 + 1237,4 \cdot 0,15}{0,45} = 4222,1 \text{ Н};$$

$$\sum M_D = F_{xA} (a + b + c) + X_B (b + c) - F_{xK} \cdot c - F_{xE} \cdot a = 0;$$

$$X_B = \frac{-1237,4 \cdot 0,6 + 8189,2 \cdot 0,15 + 1237,4 \cdot 0,15}{0,45} = 1492,3 \text{ Н}.$$

Проверка горизонтальных реакций:

$$\sum X = F_{xA} - F_{xK} + F_{xE} + X_B + X_D =$$

$$= 1237,4 - 8189,2 + 1237,4 + 1492,4 + 4222,1 = 0.$$

Построение эпюр изгибающих моментов производим в аксонометрии со стороны сжатого волокна.

Изгибающие моменты от вертикальных нагрузок (рис. 5.3, е):

$$M_{xB} = M_{xD} = F_{yE} \cdot a = 4614,7 \cdot 0,15 = 692,2 \text{ Н} \cdot \text{м};$$

$$M_{xK} = F_{yE} \cdot (a + b) - Y_D \cdot c = 4614,7 \cdot (0,15 + 0,15) - 11121 \cdot 0,15 = -283,7 \text{ Н} \cdot \text{м}.$$

Изгибающие моменты от горизонтальных нагрузок (рис. 5.3, з):

$$M_{yB} = M_{yD} = F_{xA} \cdot a = 1237,4 \cdot 0,15 = 185,6 \text{ Н} \cdot \text{м};$$

$$M_{yK} = F_{xA} \cdot (a + b) + X_B \cdot b = 1237,4 \cdot 0,45 + 1492,3 \cdot 0,3 = 1004,5 \text{ Н} \cdot \text{м}.$$

Анализ эпюр показывает, что опасное сечение находится в точке  $K$ , где суммарное значение  $M_x$ ,  $M_y$ ,  $T$  дает наибольшее значение.

Полный изгибающий момент

$$M = \sqrt{M_x^2 + M_y^2} = \sqrt{283,7^2 + 1004,5^2} = 1043,8 \text{ Н} \cdot \text{м}.$$

Крутящий момент  $T = 637 \text{ Н} \cdot \text{м}$ .

3. *Определение диаметра вала.* Используя энергетический критерий пластичности, находим требуемый момент сопротивления вала из выражения (5.4):

$$W = \frac{\sqrt{M^2 + T^2}}{[\sigma]} = \frac{\sqrt{1043,8^2 + 637^2}}{80 \cdot 10^6} = 15,28 \text{ см}^3.$$

Требуемый диаметр вала вычисляем по формуле (5.5):

$$D = \sqrt[3]{\frac{32W}{\pi}} = \sqrt[3]{\frac{32 \cdot 15,28}{3,14}} = 5,38 \text{ см}.$$

**Пример 5.2.** Цилиндрический прямозубый редуктор передает вращение на цепную передачу (рис. 5.4). Диаметр зубчатого колеса  $D_1 = 300 \text{ мм}$ , диаметр цепной звездочки  $D_2 = 100 \text{ мм}$ . Окружное усилие на зубчатом колесе  $F_{xB} = 3 \text{ кН}$ , радиальное  $F_{yB} = 2 \text{ кН}$ . Определить диаметр вала по критерию пластичности наибольших касательных напряжений при  $a = 0,8 \text{ м}$  и допусковом напряжении  $[\sigma] = 200 \text{ МПа}$ .

### Р е ш е н и е

1. *Расчет нагрузок на вал.* Переносим силы  $F_{xB}$  и  $F_{xE}$  в центр тяжести вала. Скручивающие моменты (рис. 5.4, б) находим по формулам:

$$M_B = F_{xB} \frac{D_1}{2}; \quad M_E = F_{xE} \frac{D_2}{2}.$$

Сумма моментов, действующих на вал, равна:

$$\sum M_z = F_{xB} \frac{D_1}{2} - F_{xE} \frac{D_2}{2} = 0.$$

Отсюда горизонтальное усилие на звездочке

$$F_{xE} = F_{xB} \frac{D_1}{D_2} = 3 \cdot \frac{300}{100} = 9 \text{ кН.}$$

Внутренний крутящий момент

$$T = M_B = F_{xB} \cdot \frac{D_1}{2} = \frac{3,0 \cdot 0,3}{2} = 0,45 \text{ кН} \cdot \text{м.}$$

2. Построение эпюр крутящего и изгибающих моментов. Эпюра крутящего момента постоянна  $T = 0,45 \text{ кН} \cdot \text{м}$  (рис. 5.4, г). Изгибающий момент от вертикальной нагрузки равен (рис. 5.4, д):

$$M_{xB} = Y_A \cdot 0,8 = 1 \cdot 0,8 = 0,8 \text{ кН} \cdot \text{м}$$

В горизонтальной плоскости от сил  $F_{xE} = 9 \text{ кН}$  и  $F_{xB} = 3 \text{ кН}$  (рис. 5.4, ж) возникают опорные реакции:

$$\sum M_A = F_{xB} \cdot 0,8 + X_D \cdot 1,6 - F_{xE} \cdot 2,4 = 0; \quad X_D = \frac{9 \cdot 2,4 - 3 \cdot 0,8}{1,6} = 12 \text{ кН};$$

$$\sum M_D = X_A \cdot 1,6 - F_{xB} \cdot 0,8 - F_{xE} \cdot 0,8 = 0; \quad X_A = \frac{3 \cdot 0,8 + 9 \cdot 0,8}{1,6} = 6 \text{ кН.}$$

Изгибающие моменты в горизонтальной плоскости (рис. 5.4, з):

$$M_{yD} = F_{xE} \cdot 0,8 = 9 \cdot 0,8 = 7,2 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

$$M_{yB} = X_A \cdot 0,8 = 6 \cdot 0,8 = 4,8 \text{ кН} \cdot \text{м.}$$

3. Подбор поперечного сечения. Анализ эпюр показывает, что опасным является сечение в точке  $D$ . Изгибающий момент

$$M = M_y = 7,2 \text{ кН} \cdot \text{м.}$$

Из условия прочности (5.4) находим момент сопротивления:

$$W = \frac{\sqrt{M^2 + T^2}}{[\sigma]} = \frac{\sqrt{(7,2^2 + 0,45^2) \cdot 10^6}}{200 \cdot 10^6} = 0,036 \cdot 10^{-3} \text{ м}^3 = 36 \text{ см}^3.$$

Требуемый диаметр вала вычисляем по формуле (5.5):

$$D = \sqrt[3]{\frac{32W}{\pi}} = \sqrt[3]{\frac{32 \cdot 36}{3,14}} = 7,16 \text{ см.}$$

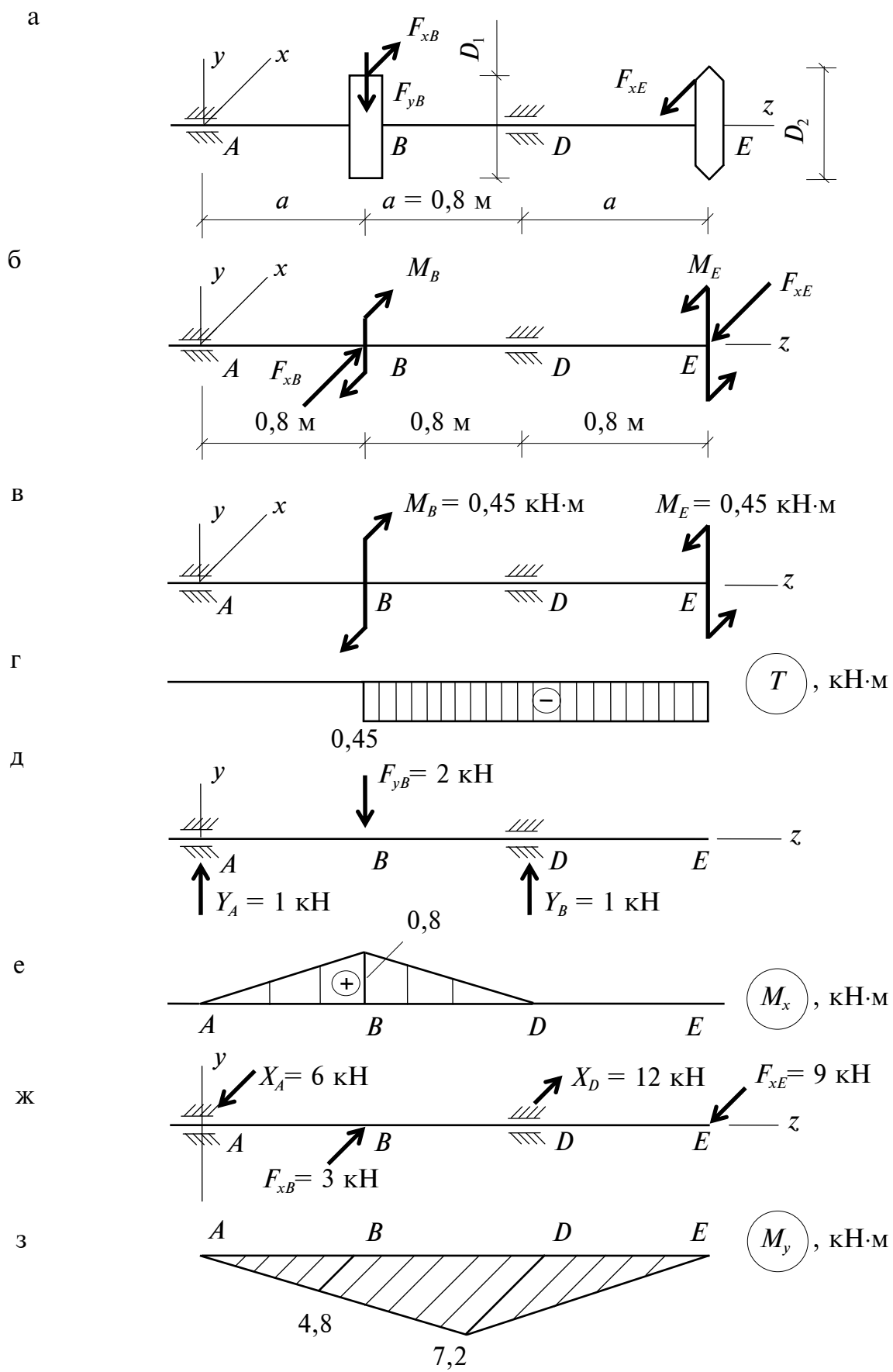


Рис. 5.4

## Контрольные вопросы

1. Какие внутренние усилия возникают в поперечных сечениях вала при изгибе с кручением?
2. Что понимается под внутренним крутящим моментом и как он находится?
3. Правило знаков и порядок построения эпюры крутящих моментов.
4. Сформулируйте гипотезу плоских сечений при кручении вала.
5. Что называется углом сдвига?
6. Что называется углом закручивания?
7. Какие напряжения возникают в поперечных сечениях вала при кручении? Эпюра напряжений.
8. Какие напряжения возникают в горизонтальных сечениях, проходящих через продольную ось вала?
9. Как определить величину напряжений в точке?
10. Запишите условие прочности при кручении.
11. Что называется полярным моментом сопротивления?
12. Как найти полярный момент сопротивления для круга и трубы?
13. Какая форма поперечного сечения является рациональной при кручении?
14. Как, зная форму и размеры поперечного сечения, определить допускаемый крутящий момент?
15. Как определить величину угла закручивания?
16. Как строится эпюра углов закручивания?
17. Что называется относительным углом закручивания?
18. Сформулируйте условие жесткости при кручении.
19. К какому валу – круглого или кольцевого поперечного сечения одинаковой площади – можно приложить наибольшую нагрузку?
20. Сформулируйте теорию прочности по наибольшим касательным напряжениям для плоского напряжённого состояния.
21. Как определить положение опасного сечения по длине вала при кручении с изгибом?
22. Как найти величину крутящего момента, если известны мощность и количество оборотов?
23. Как находятся вертикальные и горизонтальные нагрузки на вал от натяжения ремней на шкивах?
24. Запишите условие прочности при совместном действии изгиба и кручения.
25. Как определить диаметр вала, используя теорию прочности по наибольшим касательным напряжениям?
26. Как определить диаметр вала, используя энергетическую теорию прочности?
27. В какой точке вала, изображённого на рис. 5.5, возникает наибольшее полное напряжение?

28. На каком участке вала, показанного на рис. 5.6, возникает наибольшее касательное напряжение?

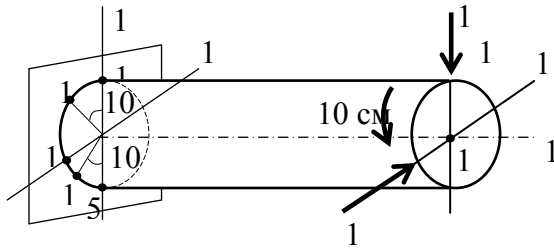


Рис. 5.5

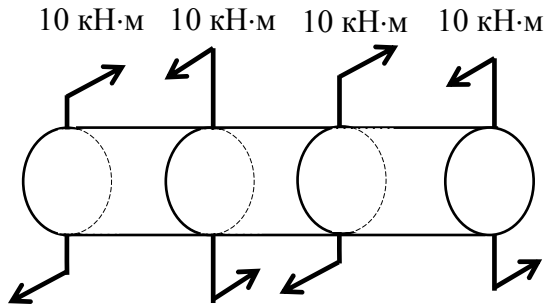


Рис. 5.6

29. На шкив диаметром 20 см действует горизонтальная сила  $F_x = 100$  кН. Как найти величину силы  $F_y$ , передающуюся со шкива диаметром 10 см (рис. 5.7)?

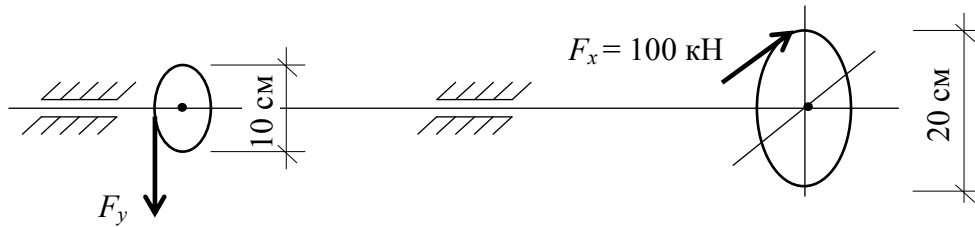


Рис. 5.7



## Раздел 6

### РАСЧЁТ ПЛОСКОЙ СТАТИЧЕСКИ НЕОПРЕДЕЛИМОЙ РАМЫ МЕТОДОМ СИЛ

#### З а д а н и е

Для заданной схемы нагружения стержневой системы, изгибная жёсткость  $EI$  которой по всей длине постоянна, построить эпюры изгибающих моментов, поперечных и продольных сил, выполнить статическую и деформационную проверки построенных эпюр. Исходные данные взять из табл. 6.1 и рис. 6.1.

Т а б л и ц а 6.1

Исходные данные

Номер строки	Схема из рис. 6.1	$a$ , м	$b$ , м	$c$ , м	$F$ , кН	$q$ , кН/м
1	I	0,2	0,2	0,2	10	20
2	II	0,4	0,4	0,4	20	30
3	III	0,6	0,6	0,6	30	40
4	IV	0,2	0,8	0,2	10	20
5	V	0,4	0,2	0,4	20	30
6	VI	0,6	0,4	0,6	30	40
7	VII	0,2	0,6	0,2	10	20
8	VIII	0,4	0,8	0,4	20	30
9	IX	0,6	0,2	0,6	30	40
0	X	0,2	0,4	0,2	10	20
	$e$	$\delta$	$\epsilon$	$\zeta$	$e$	$\delta$

#### Т е о р е т и ч е с к а я   ч а с т ь

При решении задач механики во многих случаях требуется вычислить перемещения в конкретных точках конструкции по заданным направлениям. Именно эту задачу успешно решает метод Максвелла-Мора, основанный на использовании принципа возможных перемещений.

Проекцию полного перемещения  $CC_1$  на фиксированное направление  $n-n$  обозначим  $\Delta_{np}$ , где первый индекс  $n$  представляет собой номер и направление искомого перемещения, а второй индекс  $p$  обозначает причину, вызвавшую деформацию рассматриваемого элемента (рис. 6.2, а).

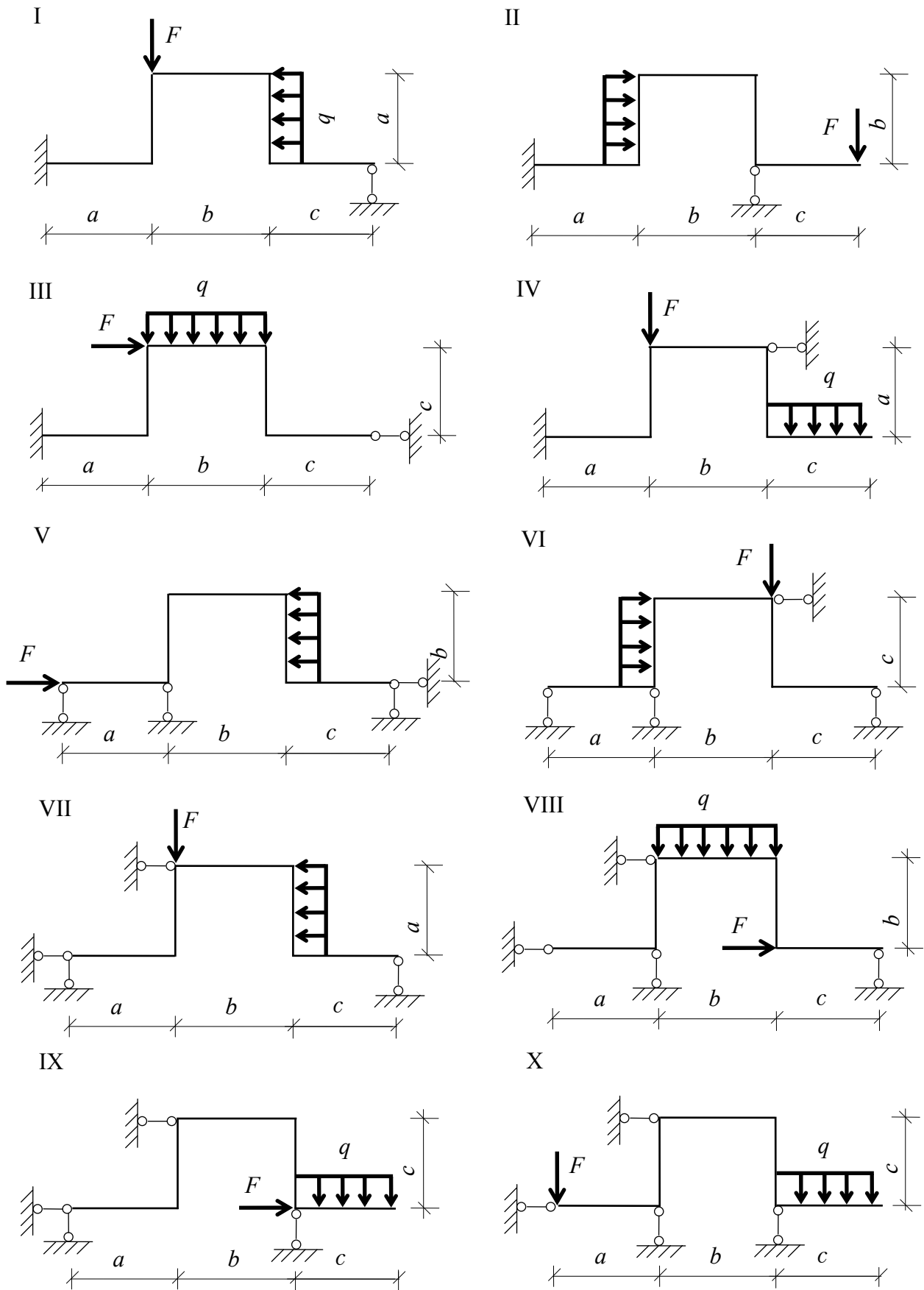


Рис. 6.1

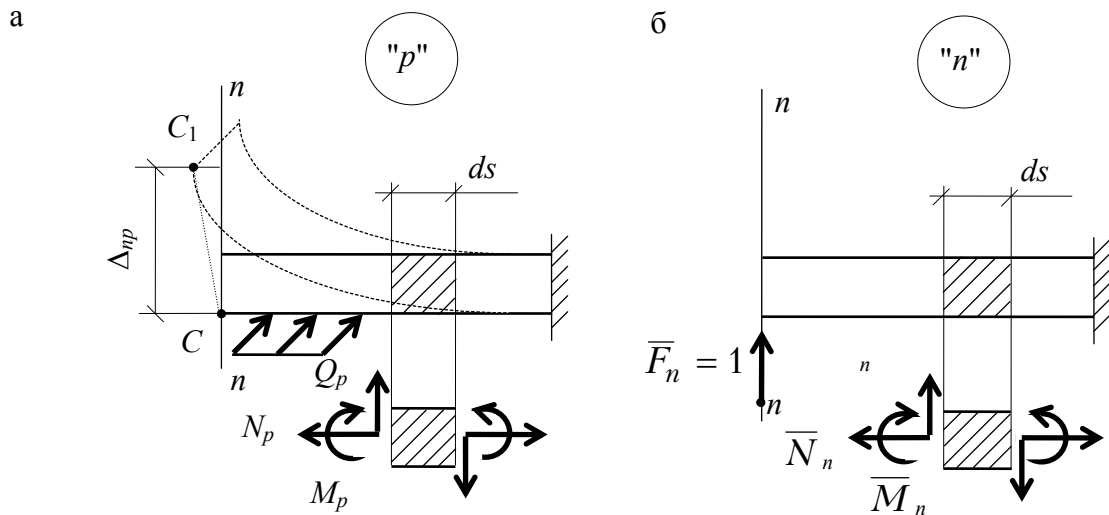


Рис. 6.2

Для определения перемещения  $\Delta_{np}$  рассмотрим стержень в двух состояниях: в состоянии  $p$  (грузовое состояние) и состоянии  $n$  (вспомогательное состояние).

Вспомогательное состояние  $n$ , получаемое от нагружения бруса силой, равной единице и прикладываемой в конкретной точке по направлению искомого перемещения  $\Delta_{np}$ , будем называть единичным. Внутренние усилия, появляющиеся в стержне от такого единичного нагружения, будем отмечать сверху чертой:  $\bar{N}_n$ ,  $\bar{M}_n$ ,  $\bar{Q}_n$  (см. рис. 6.2, б).

Для системы сил, находящейся в равновесии (вспомогательное состояние  $n$ ), примем за возможные перемещения (т.е. бесконечно малые перемещения, допускаемые связями системы) элементарные перемещения  $d\Delta_{np}$ , возникшие в бруске от заданных деформаций удлинения  $\Delta ds_p$ , изгиба  $d\phi_p$  и сдвига  $\gamma_p ds$  одного только элемента  $ds$  в грузовом состоянии  $p$  (рис. 6.3).

Тогда на основании общего энергетического условия равновесия системы сил, а именно принципа возможных перемещений, для системы сил, находящейся в равновесии (состояние  $n$ ), суммарная работа этих сил на любых возможных перемещениях (состояние  $p$ ) равна нулю:

$$\bar{F}_n d\Delta_{np} - (\bar{N}_n \Delta ds_p + \bar{M}_n d\phi_p + \bar{Q}_n \gamma_p ds) = 0. \quad (6.1)$$

С учётом того, что  $\bar{F}_n = 1$ , полное перемещение  $\Delta_{np}$  получим как определенный интеграл от  $d\Delta_{np}$  по всей длине стержней  $L$ :

$$\Delta_{np} = \int_L d\Delta_{np}, \quad (6.2)$$

т.е. будем иметь формулу Максвелла-Мора для определения перемещения  $\Delta_{np}$  от заданных деформаций  $\Delta ds_p$ ,  $d\phi_p$ ,  $\gamma_p$ :

$$\Delta_{np} = \int_L \bar{N}_n \Delta ds_p + \int_L \bar{M}_n d\phi_p + \int_L \bar{Q}_n \gamma_p ds_p. \quad (6.3)$$

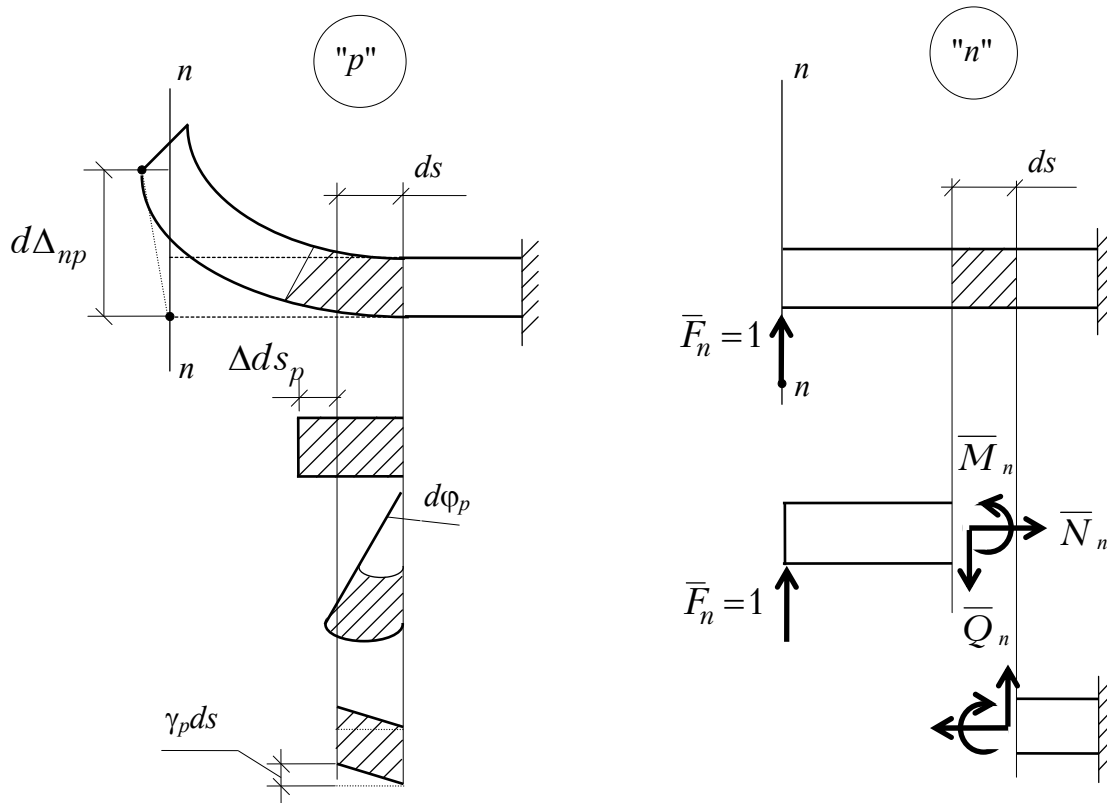


Рис. 6.3

В частном случае для упругих деформаций, которые связаны с внутренними силами  $N_p$ ,  $M_p$  и  $Q_p$  известными соотношениями:

$$\Delta ds_p = \frac{N_p ds}{EA}, \quad d\varphi_p = \frac{M_p ds}{EI}, \quad \gamma_p = \frac{kQ_p}{GA}, \quad (6.4)$$

эта формула получает вид

$$\Delta_{np} = \int_L \frac{\bar{N}_n N_p}{EA} ds + \int_L \frac{\bar{M}_n M_p}{EI} ds + \int_L \frac{k \bar{Q}_n Q_p}{GA} ds. \quad (6.5)$$

При изгибе бруса влияние первого и третьего слагаемых на величину  $\Delta_{np}$  в большинстве случаев мало. Поэтому при определении перемещений учитывают лишь деформации, вызванные изгибающими моментами:

$$\Delta_{np} = \int_L \frac{\bar{M}_n M_p}{EI} ds. \quad (6.6)$$

Таким образом, геометрическая задача определения перемещений  $\Delta_{np}$  в отдельных точках бруса по заданным направлениям сводится к статической задаче, а именно построению эпюр внутренних усилий в грузовом и единичном состояниях и последующему вычислению соответствующих интегралов (см. формулы (6.5), (6.6)), называемых интегралами Мора.

Последняя операция условно называется "перемножением эпюр". Причём, если изгибная жёсткость  $EI$  системы на отдельном участке длиной  $l$  постоянна, то при выполнении этой операции удобно использовать формулу Верещагина, приспособленную для вычисления интегралов вида

$$\int_L f(s)F(s)ds. \quad (6.7)$$

Интеграл (6.7) от произведения двух функций, представленных графически, когда  $f(s)$  – линейная, а  $F(s)$  – любая, равен произведению площади  $A$  криволинейной эпюры  $F(s)$  на ординату  $f_C$  линейной эпюры  $f(s)$ , взятую под центром тяжести  $C$  площади  $A$  (рис. 6.4), т.е.

$$\int_0^l f(s)F(s)ds = A \cdot f_C. \quad (6.8)$$

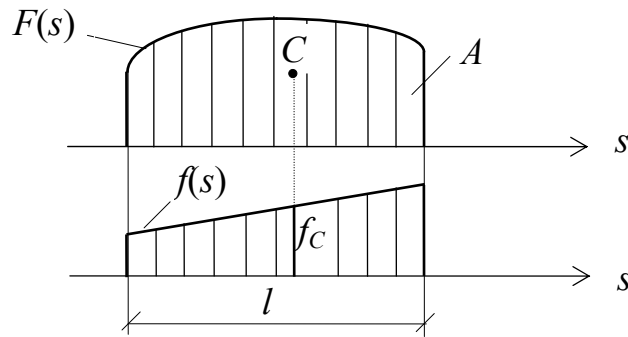


Рис. 6.4

Для возможности пользоваться формулой Верещагина (6.8) надо знать площадь и положение центра тяжести для характерных кривых (рис. 6.5).

Если обе эпюры  $f(s)$  и  $F(s)$  являются линейными (рис. 6.6), то интеграл (6.7) может быть вычислен по формуле

$$\frac{l}{6}(2ac + 2bd + ad + bc). \quad (6.9)$$

Она условно называемой формулой "перемножения трапеций".

Умение определять перемещения в отдельных точках конструкции по определённым направлениям необходимо при расчёте статически неопределимых систем методом сил (пример 6.2).

Стержневая система, т.е. рама, называется статически неопределимой, если реакции в опорных связях и внутренние усилия в стержнях нельзя определить, используя только уравнения равновесия.

Для решения такой системы к уравнениям равновесия (статическая сторона задачи) необходимо добавить уравнения совместности деформаций или уравнения перемещений (геометрическая сторона задачи) и зависимость между усилиями и деформациями (физическая сторона задачи).

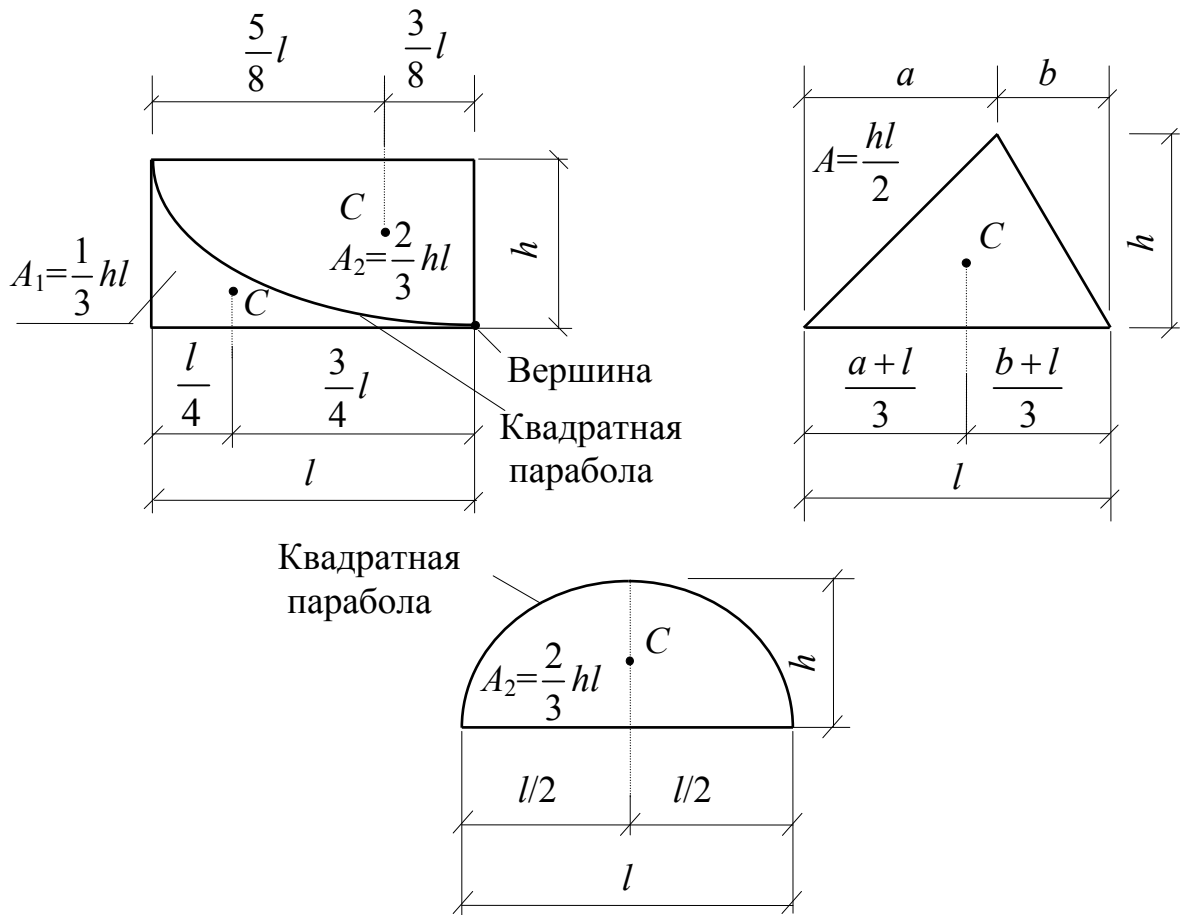


Рис. 6.5

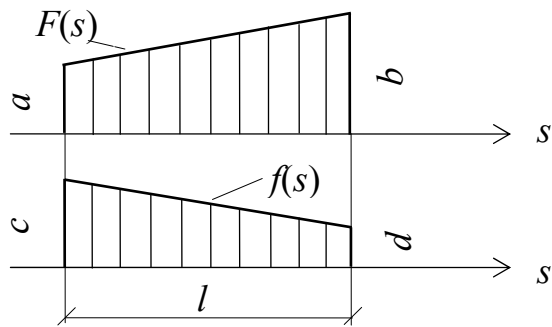


Рис. 6.6

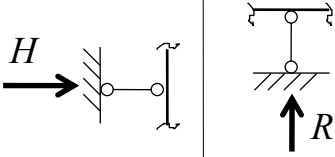
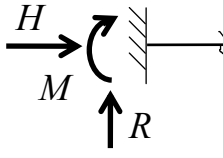
При расчёте данной системы методом сил необходимо определить степень статической неопределимости системы или количество "лишних" связей  $L$ , определяемых как разность между общим числом наложенных связей на систему  $\sum C_i$  и числом независимых уравнений равновесия, составленных для этой системы.

Основные типы опорных связей и составляющие опорных реакций в них приведены в табл. 6.2.

Для плоской стержневой системы можно составить три линейно независимых уравнения равновесия:

$$\sum X = 0, \quad \sum Y = 0, \quad \sum M = 0. \quad (6.10)$$

## Типы опор

Условные обозначения	Типы опор	Число наложенных связей
	Шарнирно-подвижная опора	$C_i = 1$
	Шарнирно-неподвижная опора	$C_i = 2$
	Жесткая заделка	$C_i = 3$

Таким образом, все стержневые системы, изображенные на рис. 6.1, один раз статически неопределимы, так как

$$L = \sum C_i - 3 = 4 - 3 = 1.$$

Основная статически определимая система получается из заданной путём отбрасывания "лишних" связей. При этом она должна быть геометрически неизменяемой, т.е. системой, в которой перемещения точек или элементов были возможны только за счёт деформации стержней. Поэтому в основной системе оставшиеся связи не должны пересекаться в одной точке или быть параллельными (рис. 6.7).

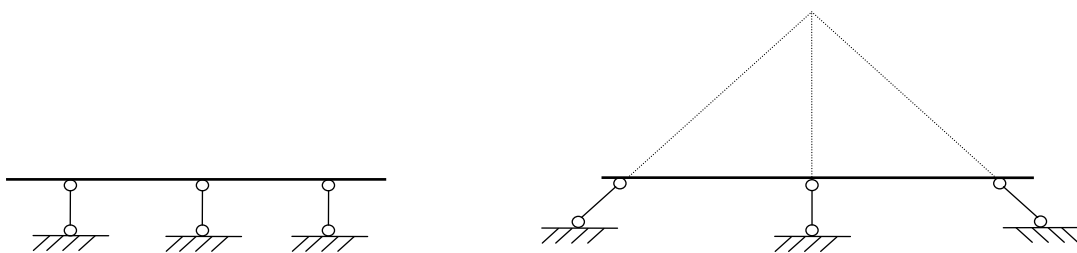


Рис. 6.7

В основной статически определимой системе действие отброшенной связи заменяют неизвестной реакцией связи  $X_1$ . Поскольку за неизвестные в дальнейшем принимаются усилия в "лишних" связях, такой метод расчёта получил название метода сил.

Например, в заданной статически неопределимой системе, изображённой на рис. 6.8, а, основным разрешающим уравнением в методе сил относительно неизвестной  $X_1$  является уравнение совместности деформаций

$$\Delta_1 = \Delta_1(X_1) + \Delta_1(q) = 0. \quad (6.11)$$

Уравнение (6.11) означает, что суммарное перемещение  $\Delta_1$  в основной системе, вызванное внешней нагрузкой  $\Delta_1(q)$  (рис. 6.8, б) и лишней неизвестной  $\Delta_1(X_1)$  (рис. 6.8, в) по направлению самой неизвестной  $X_1$ , должно быть равно нулю, так как в заданной статически неопределимой системе в этой точке расположена опора (рис. 6.8, а).

Перемещения  $\Delta_1(X_1)$  и  $\Delta_1(q)$  в основной системе находятся по формулам:

$$\begin{aligned} \Delta_1(X_1) &= \delta_{11} \cdot X_1 \\ \Delta_1(q) &= \Delta_{1q} \end{aligned} \quad (6.12)$$

где  $\delta_{11}$  – перемещение в основной системе по направлению неизвестной  $X_1$  от  $\bar{X}_1 = 1$  (рис. 6.8, г);

$\Delta_{1q}$  – перемещение в основной системе по направлению неизвестной  $X_1$  от внешней нагрузки (рис. 6.8, б).

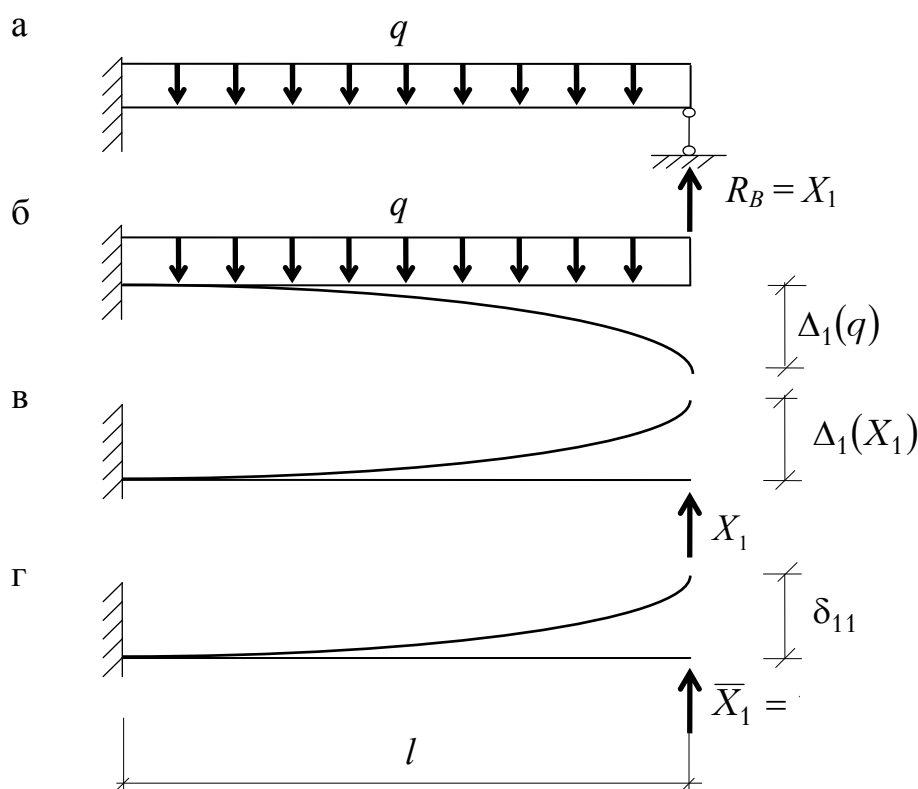


Рис. 6.8

Тогда каноническое уравнение метода сил для стержневых систем, изображённых на рис. 6.8, принимает следующий вид:

$$\delta_{11}X_1 + \Delta_{1q} = 0. \quad (6.13)$$



Если зависимость между деформациями и усилиями линейная (см. выражения (6.4)), то коэффициенты в каноническом уравнении (6.13) вычисляются с помощью интегралов Мора (6.6):

$$\begin{aligned}\delta_{11} &= \int_0^l \frac{\overline{M}_1 \overline{M}_1}{EI} ds, \\ \Delta_{1q} &= \int_0^l \frac{\overline{M}_1 M_q}{EI} ds,\end{aligned}\tag{6.14}$$

где  $\overline{M}_1$  – эпюра изгибающих моментов в основной системе от единичного неизвестного  $\overline{X}_1 = 1$ ;

$M_q$  – эпюра изгибающих моментов в основной системе от заданной нагрузки.

Если изгибная жёсткость  $EI$  элементов рамы на отдельных участках постоянна, то интегралы (6.14) удобно вычислять по правилу Верещагина (6.8)–(6.9).

Неизвестная реакция в "лишней" связи  $X_1$  находится из уравнения (6.13) по формуле

$$X_1 = -\frac{\Delta_{1q}}{\delta_{11}}.\tag{6.15}$$

Опорные реакции в остальных связях определяются из уравнений равновесия (6.10), а эпюры внутренних усилий в раме можно построить, используя метод сечений.

При построении эпюр приняты следующие правила знаков:

– изгибающий момент считается положительным, если сжаты верхние или левые волокна стержней;

– поперечная сила положительна, если она вращает отсечённый участок по часовой стрелке;

– продольная сила положительна, если она вызывает растяжение стержня.

Следует отметить, что ординаты эпюры изгибающих моментов  $M$  в заданной статически неопределимой системе после нахождения  $X_1$  по формуле (6.15) проще определяются на основании принципа независимости действия сил (для линейно деформируемых систем результат действия группы сил равен сумме результатов, полученных от действия каждой силы в отдельности) в виде суммы:

$$M = \overline{M}_1 X_1 + M_q.\tag{6.16}$$

На основании дифференциальных зависимостей между  $M$ ,  $Q$  и  $q$  и принципа независимости действия сил величины поперечных сил на каждом  $i$ -м участке вычисляются по формулам:

$$\begin{aligned} Q_{\text{к}} &= \frac{M_{\text{к}} - M_{\text{н}}}{l_i} + \frac{q_i l_i}{2}, \\ Q_{\text{н}} &= \frac{M_{\text{к}} - M_{\text{н}}}{l_i} - \frac{q_i l_i}{2}, \end{aligned} \quad (6.17)$$

где  $Q_{\text{н}}$  и  $M_{\text{н}}$  – величины поперечной силы и изгибающего момента в начале  $i$ -го участка;

$Q_{\text{к}}$  и  $M_{\text{к}}$  – то же в конце  $i$ -го участка;

$l_i$  – длина  $i$ -го участка;

$q_i$  – интенсивность равномерно распределённой нагрузки на  $i$ -м участке; принимается положительной, если она направлена сверху вниз или слева направо.

За начало участка принимаем нижний или левый конец стержня, а за конец участка – верхний или правый конец стержня.

Эпюра продольных сил строится способом вырезания узлов на эпюре  $Q$  (см. пример 6.2).

Статическую проверку эпюр следует осуществлять, рассматривая уравнения равновесия (6.10) вырезанных узлов под действием внутренних ( $M$ ,  $Q$ ,  $N$ ) и внешних сил, приложенным к ним.

Деформационная проверка производится по формуле (6.11), т.е.

$$\Delta_1 = \int_L \frac{M\bar{M}_1}{EI} ds = 0. \quad (6.18)$$

### Примеры решения задач

**Пример 6.1.** Для стержневой системы, изображённой на рис. 6.9, определить вертикальный прогиб  $\Delta_{1q}$  и угол поворота  $\Delta_{2q}$  на свободном конце, учитывая лишь деформации, вызванные изгибающими моментами.

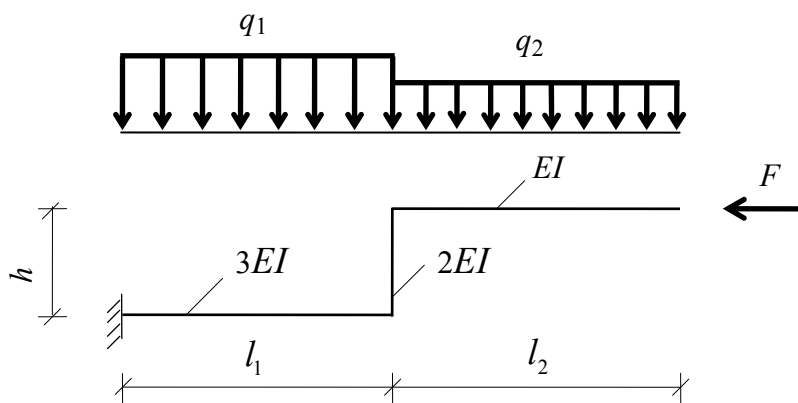


Рис. 6.9

Исходные данные:

$$q_1 = 20 \text{ кН/м}, \quad q_2 = 10 \text{ кН/м}, \quad F = 30 \text{ кН}, \quad l_1 = 3 \text{ м},$$

$$l_2 = 2 \text{ м}, \quad h = 1 \text{ м}, \quad EI = 4000 \text{ кН}\cdot\text{м}^2.$$

### Решение

Разбивая раму на участки, будем строить эпюры изгибающих моментов со свободного конца, используя метод сечений (рис. 6.10).

Грузовая эпюра  $M_q$  от заданной нагрузки и единичные эпюры  $\bar{M}_1$  и  $\bar{M}_2$  от единичных усилий, прикладываемых в заданной точке по направлению искомого перемещения, изображены на рис. 6.11.

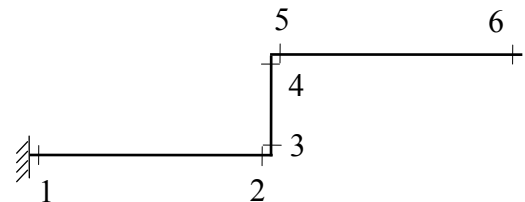
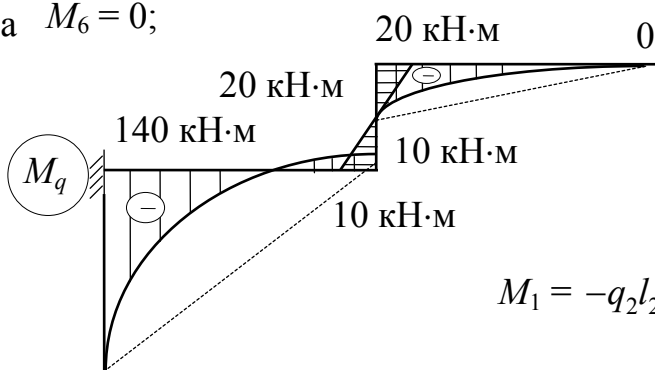


Рис. 6.10

а  $M_6 = 0$ ;

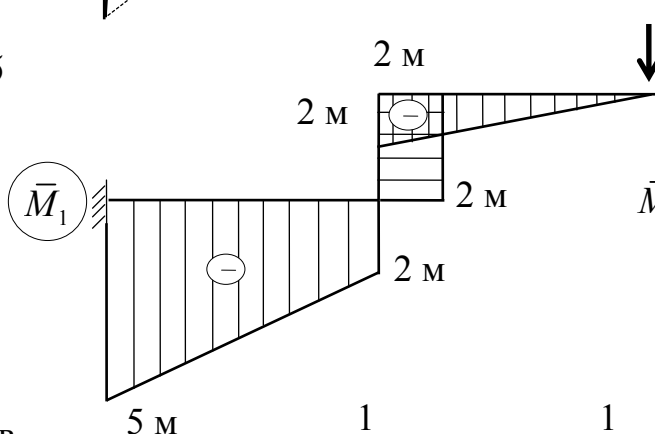


$$M_5 = M_4 = -\frac{q_2 l_2^2}{2} = -20 \text{ кН}\cdot\text{м};$$

$$M_3 = M_2 = -\frac{q_2 l_2^2}{2} + Fh = 10 \text{ кН}\cdot\text{м};$$

$$M_1 = -q_2 l_2 \left( l_1 + \frac{l_2}{2} \right) - q_1 \frac{l_1^2}{2} + Fh = -140 \text{ кН}\cdot\text{м}.$$

б

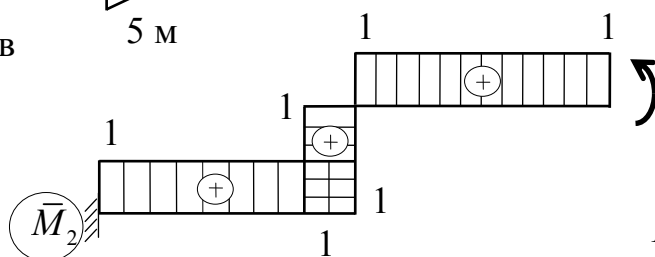


$$\bar{M}_6 = 0;$$

$$\bar{M}_5 = \bar{M}_4 = \bar{M}_3 = \bar{M}_2 = -\bar{X}_1 l_2 = -2 \text{ м};$$

$$\bar{M}_1 = -\bar{X}_1 (l_1 + l_2) = -5 \text{ м};$$

в



$$\bar{M}_6 = \bar{M}_5 = \bar{M}_4 = \bar{M}_3 = \bar{M}_2 = \bar{M}_1 = 1.$$

Рис. 6.11

Искомые перемещения  $\Delta_{1q}$  и  $\Delta_{2q}$  будем определять с помощью интеграла Мора (6.6), используя формулу Верещагина (6.8). При этом эпюру  $M_q$  на участках 1–2 и 5–6 на основании принципа независимости действия сил представим в виде суммы (рис. 6.12).

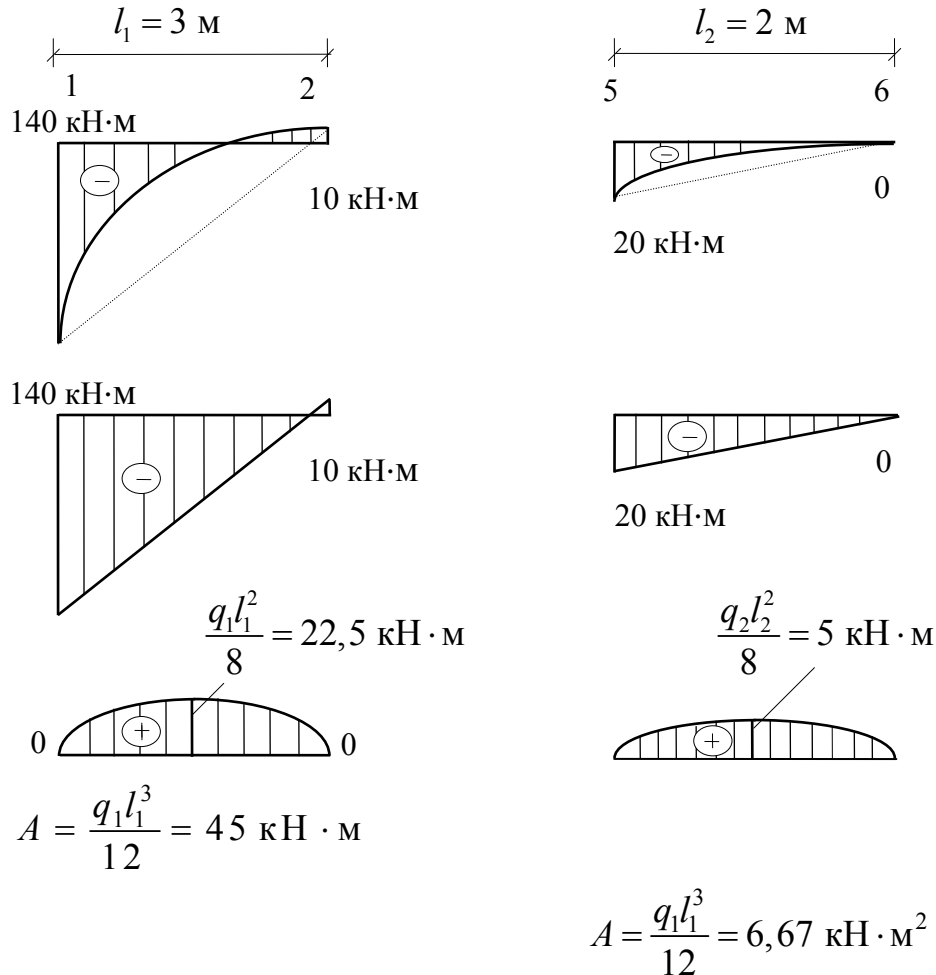


Рис. 6.12

Тогда

$$\begin{aligned}
 \Delta_{1q} &= \int_L \frac{\bar{M}_1 M_q}{EI} ds = \int_{1-2} \frac{\bar{M}_1 M_q}{3EI} ds + \int_{3-4} \frac{\bar{M}_1 M_q}{2EI} ds + \int_{5-6} \frac{\bar{M}_1 M_q}{EI} ds = \\
 &= \frac{1}{3EI} \cdot \left( \frac{3}{6} \cdot (2 \cdot (-140) \cdot (-5) + 2 \cdot 10 \cdot (-2) + (-140) \cdot (-2) + 10 \cdot (-5)) + \right. \\
 &\quad \left. + 45 \frac{(-5) + (-2)}{2} \right) + \frac{1}{2EI} \cdot \left( \frac{(-20) + 10}{2} \cdot 1 \cdot (-2) \right) + \\
 &+ \frac{1}{EI} \left( \frac{1}{2} \cdot (-20) \cdot 2 \cdot \frac{2}{3} \cdot (-2) + 6,67 \cdot \frac{(-2) + 0}{2} \right) = \frac{237,5}{EI} \text{ кН} \cdot \text{м}^3 = 0,059 \text{ рад.}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Delta_{2q} &= \int_L \frac{\bar{M}_2 M_q}{EI} ds = \int_{1-2} \frac{\bar{M}_2 M_q}{3EI} ds + \int_{3-4} \frac{\bar{M}_2 M_q}{2EI} ds + \int_{5-6} \frac{\bar{M}_2 M_q}{EI} ds = \\ &= \frac{1}{3EI} \cdot \left( \frac{(-140) + 10}{2} \cdot 3 \cdot 1 + 45 \cdot 1 \right) + \frac{1}{2EI} \cdot \left( \frac{(-20) + 10}{2} \cdot 1 \cdot 1 \right) + \\ &+ \frac{1}{EI} \left( \frac{(-20) + 0}{2} \cdot 2 \cdot 1 + 6,67 \cdot 1 \right) = \frac{(-22,5)}{EI} \text{ кН} \cdot \text{м}^2 = -0,005625 \text{ рад.} \end{aligned}$$

Полученный для  $\Delta_{2q}$  знак "минус" говорит о том, что возможная работа момента  $\bar{X}_2 = 1$  на фактическом угле  $\Delta_{2q}$  будет отрицательной. Следовательно, фактический угол поворота  $\Delta_{2q}$  будет противоположен моменту  $\bar{X}_2 = 1$ , т.е. направлен по часовой стрелке.

**Пример 6.2.** Для стержневой системы (рис. 6.13) построить эпюры изгибающих моментов, поперечных и продольных сил ( $M$ ,  $Q$ ,  $N$ ) и выполнить их проверку, когда  $EI = \text{const}$  для всех участков,  $l = 6$  м,  $h_1 = 6$  м,  $h_2 = 3$  м,  $q = 5$  кН/м,  $F = 10$  кН.

#### Решение

Определим количество "лишних" связей:

$$L = \sum_i C_i - 3 = 4 - 3 = 1.$$

Для получения статически определимой основной системы проще всего отбросить правую связь и заменить ее неизвестной опорной реакцией  $X_1$  (рис. 6.14).

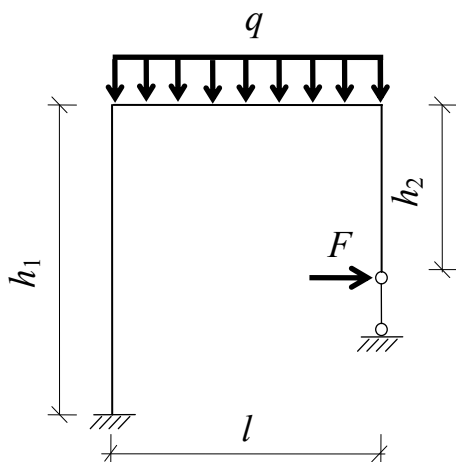


Рис. 6.13

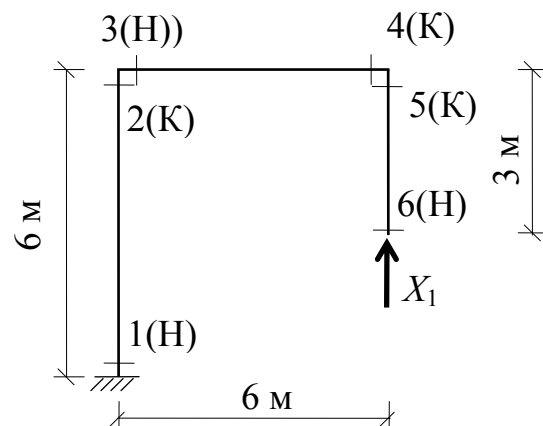
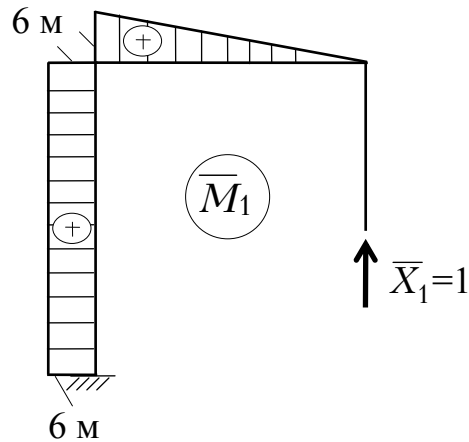


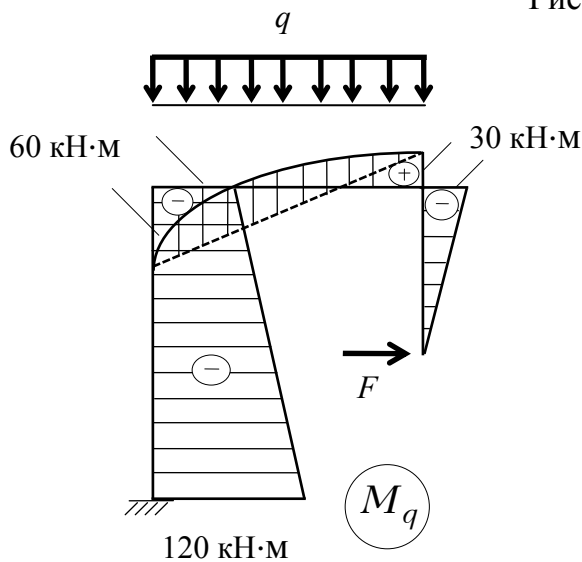
Рис. 6.14

Построим единичную эпюру  $\bar{M}_1$  от силы  $\bar{X}_1 = 1$  (рис. 6.15) и грузовую эпюру  $M_q$  от заданной нагрузки в основной системе (рис. 6.16).



$$\begin{aligned} M_6 = M_5 = M_4 &= 0; \\ M_3 = \bar{X}_1 l &= 6 \text{ м}; \\ M_2 = M_1 &= 6 \text{ м}. \end{aligned}$$

Рис. 6.15



$$\begin{aligned} M_6 &= 0; \\ M_5 = -Fh_2 &= -30 \text{ кН}\cdot\text{м}; \\ M_4 = Fh_2 &= 30 \text{ кН}\cdot\text{м}; \\ M_2 = M_3 = Fh_2 - ql^2/2 &= -60 \text{ кН}\cdot\text{м}; \\ M_1 = -F(h_1 - h_2) - \frac{ql^2}{2} &= -120 \text{ кН}\cdot\text{м}. \end{aligned}$$

Рис. 6.16

Вычислим коэффициенты канонического уравнения метода сил:

$$\delta_{11} X_1 + \Delta_{1q} = 0.$$

Перемещения  $\delta_{11}$  и  $\Delta_{1q}$  определим по формуле (6.14):

$$\begin{aligned} \delta_{11} &= \int_L \frac{\bar{M}_1 \bar{M}_1}{EI} ds = \int_{1-2} \frac{\bar{M}_1 \bar{M}_1}{EI} ds + \int_{3-4} \frac{\bar{M}_1 \bar{M}_1}{EI} ds + \int_{5-6} \frac{\bar{M}_1 \bar{M}_1}{EI} ds = \\ &= \frac{1}{EI} \cdot (6 \cdot 6 \cdot 6) + \frac{1}{EI} \cdot \left( \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 6 \cdot \frac{2}{3} \cdot 6 \right) + \frac{1}{EI} \cdot 0 = \frac{288 \text{ м}^3}{EI}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Delta_{1q} &= \int_L \frac{\bar{M}_1 M_q}{EI} ds = \int_{1-2} \frac{\bar{M}_1 M_q}{EI} ds + \int_{3-4} \frac{\bar{M}_1 M_q}{EI} ds + \int_{5-6} \frac{\bar{M}_1 M_q}{EI} ds = \\ &= \frac{1}{EI} \cdot \left( \frac{(-60) + (-120)}{2} \cdot 6 \cdot 6 \right) + \frac{1}{EI} \cdot \left( \frac{6}{6} \cdot (2 \cdot 6 \cdot (-60) + 2 \cdot 0 \times \right. \\ &\quad \left. \times 30 + (-60) \cdot 0 + 30 \cdot 6) + \frac{2}{3} \cdot 22,5 \cdot 6 \cdot \frac{1}{2} \cdot 6 \right) + \frac{1}{EI} \times \\ &\quad \times \left( \frac{1}{2} \cdot (-30 \cdot 3 \cdot 0) \right) = -\frac{3510 \text{ кН} \cdot \text{м}^3}{EI}. \end{aligned}$$

При вычислении интеграла Мора для  $\Delta_{1q}$  на участке 3–4 с равномерно распределённой нагрузкой грузовую эпюру представим в виде суммы линейной и квадратичной эпюр (рис. 6.17).

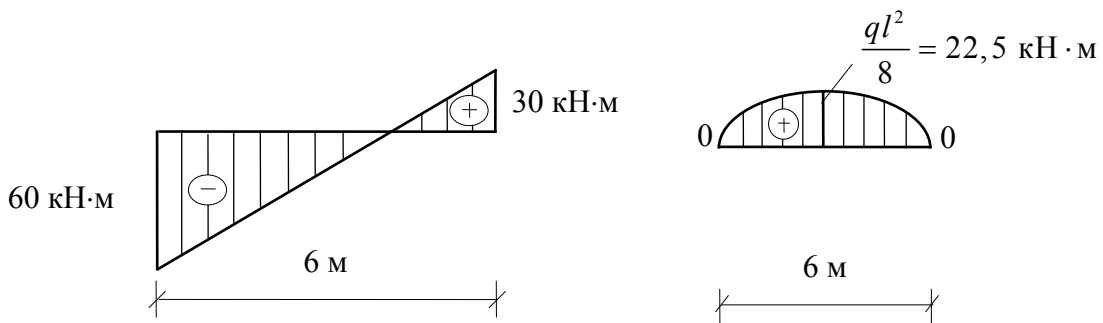


Рис. 6.17

Далее вычисляем величину неизвестной  $X_1$ :

$$X_1 = -\frac{\Delta_{1q}}{\delta_{11}} = -\frac{(-3510)}{288} = 12,1875 \text{ кН}.$$

Построим теперь "исправленную" эпюру  $\bar{M}_1 \cdot X_1$  (рис. 6.18) и результирующую эпюру  $M = \bar{M}_1 X_1 + M_q$  (рис. 6.19).

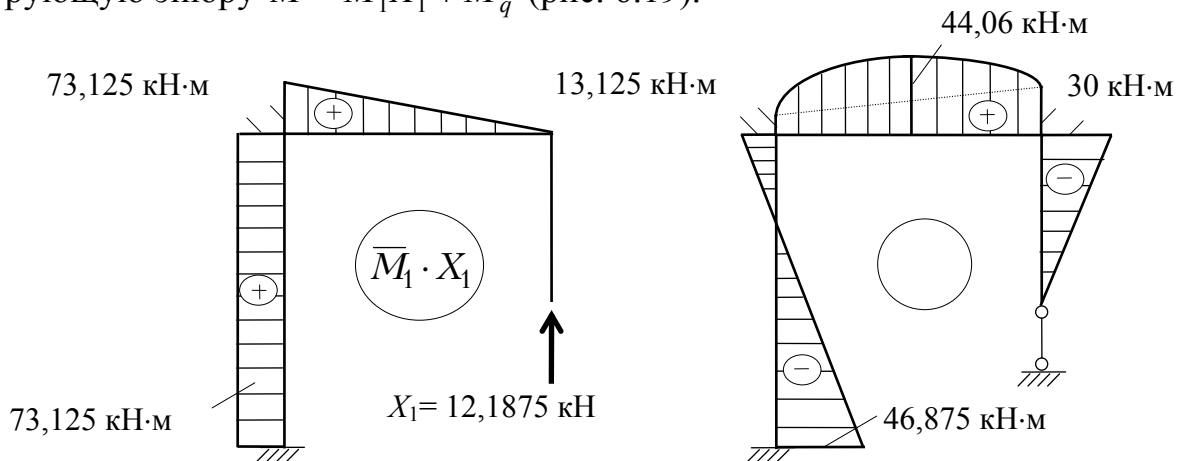


Рис. 6.18

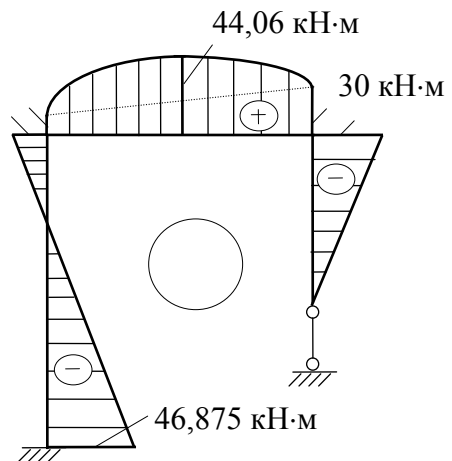


Рис. 6.19

Сразу же выполним деформационную проверку эпюры  $M$ :

$$\begin{aligned} \int_L \frac{M\bar{M}_1}{EI} ds &= \int_{1-2} \frac{M\bar{M}_1}{EI} ds + \int_{3-4} \frac{M\bar{M}_1}{EI} ds + \int_{5-6} \frac{M\bar{M}_1}{EI} ds = \\ &= \frac{1}{EI} \cdot \left( \frac{13,125 + (-46,875)}{2} \cdot 6 \cdot 6 \right) + \frac{1}{EI} \cdot \left( \frac{6}{6} \cdot (2 \cdot 13,125 \cdot 6 + \right. \\ &\quad \left. + 2 \cdot 30 \cdot 0 + 30 \cdot 6 + 13,125 \cdot 0) + \frac{2}{3} \cdot 22,5 \cdot 6 \cdot \frac{1}{2} \cdot 6 \right) + \\ &\quad + \frac{1}{EI} \cdot \left( \frac{(-30)}{2} \cdot 6 \cdot 0 \right) = \frac{1}{EI} \cdot (-607,5 + 607,5 + 0) = 0. \end{aligned}$$

Значит, эпюра  $M$  в заданной статически неопределимой системе построена правильно.

С помощью эпюры  $M$  по формулам (6.8) построим эпюру  $Q$ , изображённую на рис. 6.20.

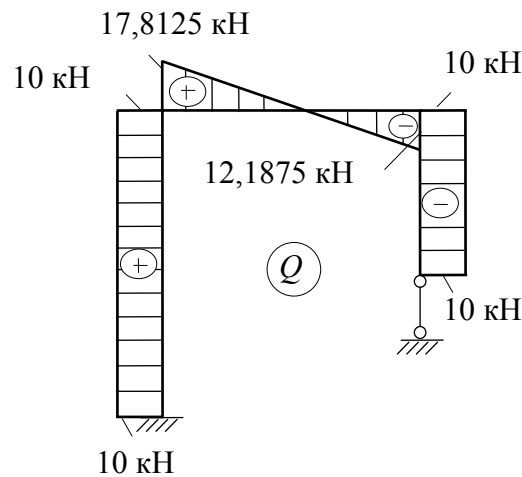


Рис. 6.20

$$Q_1 = \frac{13,125 - (-46,875)}{6} + \frac{0 \cdot 6}{2} = 10 \text{ кН};$$

$$Q_2 = \frac{13,125 - (-46,875)}{6} - \frac{0 \cdot 6}{2} = 10 \text{ кН};$$

$$Q_3 = \frac{30 - 13,125}{6} + \frac{5 \cdot 6}{2} = 17,8125 \text{ кН};$$

$$Q_4 = \frac{30 - 13,125}{6} - \frac{5 \cdot 6}{2} = -12,1875 \text{ кН};$$

$$Q_6 = \frac{(-30) - 0}{3} + \frac{0 \cdot 3}{2} = -10 \text{ кН};$$



$$Q_5 = \frac{(-30) - 0}{3} - \frac{0 \cdot 3}{2} = -10 \text{ кН.}$$

По эпюре  $Q$  способом вырезания узлов построим эпюру продольных сил  $N$ . При этом усилие  $N$  направляем от сечения.

Вырежем сечениями узел (2–3) (рис. 6.21).

Проектируя силы на оси, определим значения продольных сил:

$$\sum X = N_3 - 10 = 0; \quad N_3 = 10 \text{ кН;}$$

$$\sum Y = -N_2 - 17,8125 = 0; \quad N_2 = -17,8125 \text{ кН.}$$

Вырежем сечениями узел (4–5) (рис. 6.22):

$$\sum X = -N_4 + 10 = 0; \quad N_4 = 10 \text{ кН;}$$

$$\sum Y = -12,1875 - N_5 = 0; \quad N_5 = -12,1875 \text{ кН.}$$

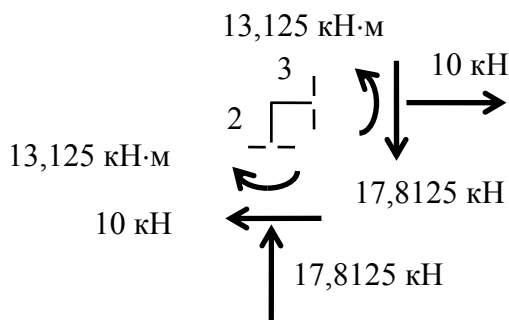


Рис. 6.21

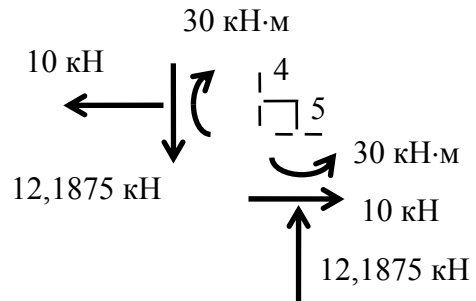


Рис. 6.22

Построим эпюру  $N$  (рис. 6.23) с учётом знаков.

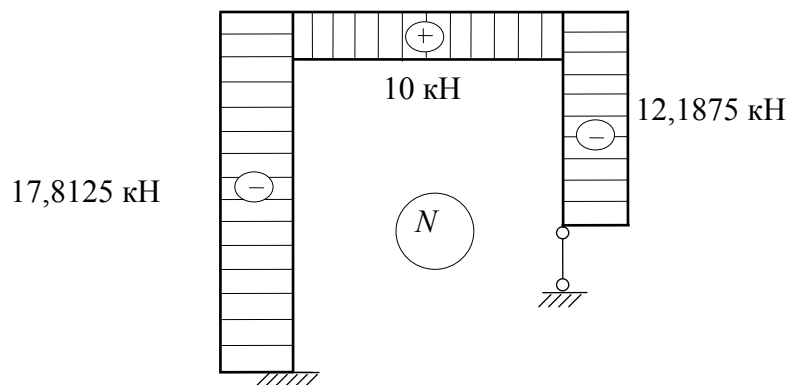


Рис. 6.23

Выполним статическую проверку построенных эпюр.

Вырежем сечениями узел (2–3) (рис. 6.24):

$$\sum X = 10 - 10 = 0; \quad \sum Y = 17,8125 - 17,8125 = 0;$$

$$\sum M = 13,125 - 13,125 = 0.$$

Вырежем узел (4–5) сечениями (рис. 6.25):

$$\sum X = 10 - 10 = 0; \quad \sum Y = 12,1875 - 12,1875 = 0;$$

$$\sum M = 30 - 30 = 0.$$

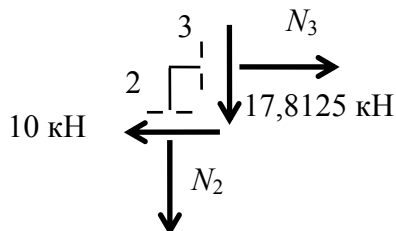


Рис. 6.24

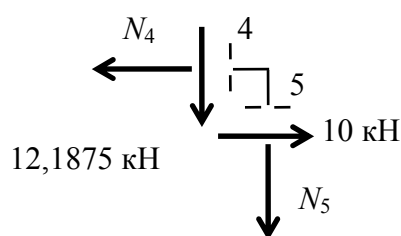


Рис. 6.25

Во всех вырезанных узлах все три условия равновесия выполняются. Значит, все эпюры построены правильно.

### К о н т р о л ь н ы е в о п р о с ы

1. Запишите формулу для определения потенциальной энергии упругой деформации при центральном растяжении.

2. Как найти величину потенциальной энергии упругой деформации при изгибе?

3. Сформулируйте теорему Бетти о взаимности работ.

4. Сформулируйте теорему Максвелла о взаимности перемещений.

5. Запишите интеграл Мора.

6. Как определить поступательное перемещение точки по заданному направлению с помощью интеграла Мора?

7. Как определить угол поворота поперечного сечения при помощи интеграла Мора?

8. Что называется статически неопределимой системой?

9. Как определить степень статической неопределимости?

10. Какие стороны задачи нужно рассмотреть при решении статически неопределимой системы?

11. Что называется основной системой метода сил? Нарисуйте её варианты для балок, показанных на рис. 6.26.

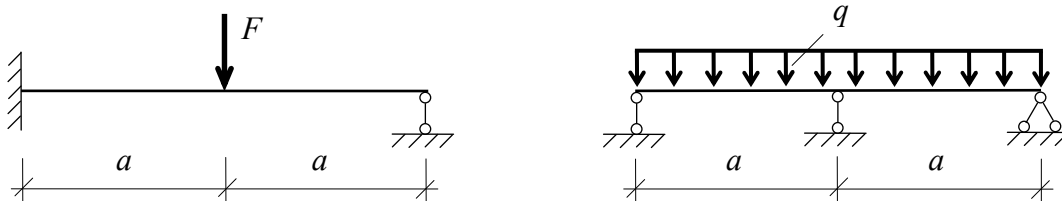


Рис. 6.26

12. Как строятся грузовая и единичная эпюры моментов в раме? Правило знаков.

13. В чём заключается идея метода сил?

14. Запишите основное каноническое уравнение метода сил для балок, изображённых на рис. 6.26.

15. Как определить коэффициенты канонического уравнения, используя метод Верещагина?

16. Можно ли использовать формулу Верещагина для стержней, имеющих непрерывное переменное поперечное сечение, или для криволинейных стержней?

17. Какое правило знаков используется при вычислении интеграла Мора по формуле Верещагина?

18. Как построить окончательную эпюру моментов?

19. Как, используя окончательную эпюру моментов, построить эпюру поперечных сил?

20. Как построить эпюру продольных сил? Правило знаков.

21. Что представляет собой статическая проверка правильности построения эпюр?

22. Что представляет собой деформационная проверка правильности построения эпюр?

## Раздел 7 РАСЧЁТ СЖАТОГО СТЕРЖНЯ НА УСТОЙЧИВОСТЬ

### З а д а н и е

Стержень длиной  $l$  сжимается продольной силой  $F$ , приложенной в центре тяжести поперечного сечения.

Требуется:

1. Найти размеры поперечного сечения при  $[\sigma] = 160$  МПа.
2. Определить критическую силу и коэффициент запаса на устойчивость при  $E = 200$  ГПа.

Исходные данные взять из табл. 7.1 согласно шифру.

Формулы для определения геометрических характеристик простейших фигур даны в прил. 5.

### Т е о р е т и ч е с к а я   ч а с т ь

Понятие устойчивости известно еще из курса физики. Рассмотрим три различных положения шарика на поверхности (рис. 7.1). Сместим шарик, находящийся на дне вогнутой поверхности, немного влево или вправо и отпустим его (рис. 7.1, а). Через некоторое время, поколебавшись, он вернется в исходное положение. Расположение шарика на дне по сравнению со всеми соседними положениями соответствует наименьшему значению его потенциальной энергии. Если сместить шарик, находящийся на вершине выпуклости (рис. 7.1, б), то он покатится вниз и не вернется в исходное положение. Считается, что в первом случае равновесие шарика является устойчивым, а во втором – неустойчивым. В третьем случае (рис. 7.1, в) при отклонении шарика он остается в новом положении равновесия, называемом безразличным.

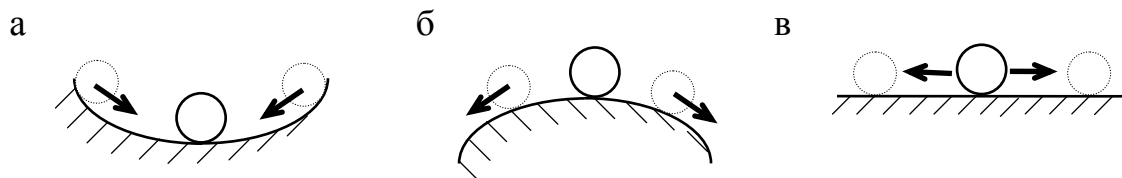
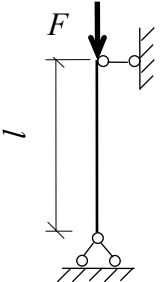
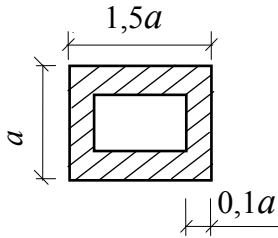
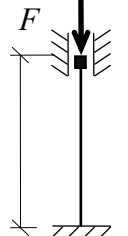
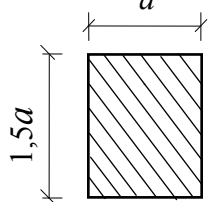
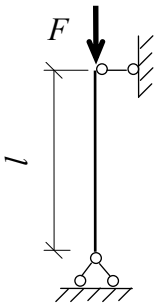
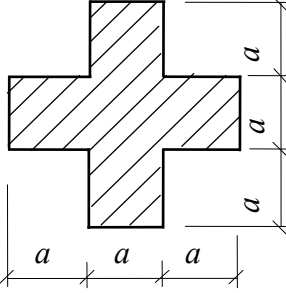
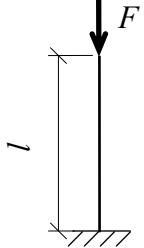
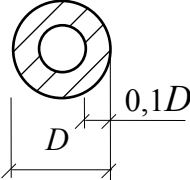
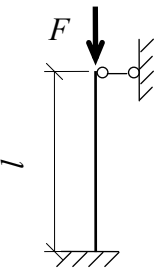
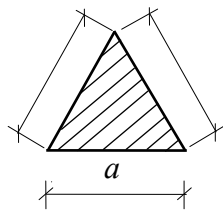


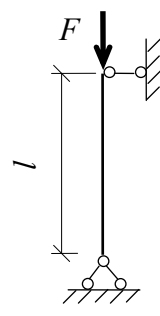
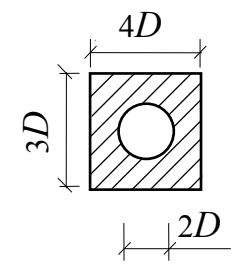
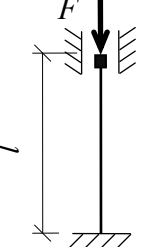
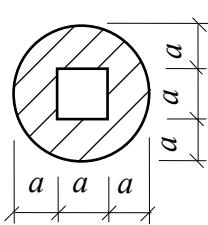
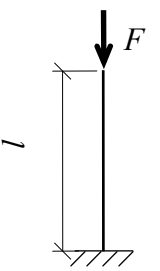
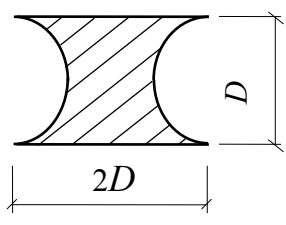
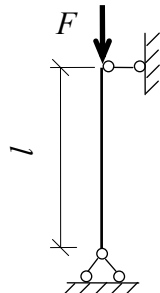
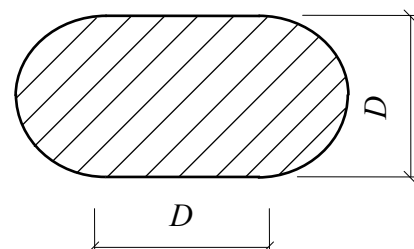
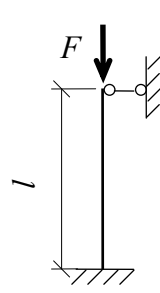
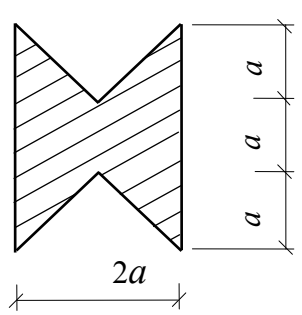
Рис. 7.1

Таблица 7.1

## Исходные данные

Номер строки	$F$ , кН	$l$ , м	Схема закрепления стержня	Форма сечения стержня
1	2	3	4	5
1	100	1,1		
2	950	5,0		
3	350	2,3		
4	150	1,4		
5	500	4,0		
	$e$	$\partial$	$\partial$	$e$

Окончание табл. 7.1

1	2	3	4	5
6	600	2,6		
7	700	4,0		
8	800	1,2		
9	900	2,9		
0	1000	3,0		
	<i>e</i>	<i>δ</i>	<i>δ</i>	<i>e</i>

Рассмотрим центрально-сжатый стержень. Опыт показывает, что в зависимости от величины силы  $F$  он может иметь прямолинейную или искривленную форму равновесия (рис. 7.2). Пока величина силы  $F$  меньше некоторого критического значения  $F_{cr}$ , стержень сохраняет первоначальную прямолинейную форму равновесия. При этом если верхний конец стержня слегка отклонить (пунктирная линия), а затем отпустить, то после некоторого колебания он возвратится в исходное положение (рис. 7.2, а). Следовательно, при  $F < F_{cr}$  прямолинейная форма равновесия стержня является устойчивой. Когда величина силы  $F$  достигнет критического значения ( $F = F_{cr}$ ), стержень придет в состояние безразличного равновесия. Если теперь слегка отклонить стержень от первоначального положения (сплошная линия), то он останется в изогнутом состоянии (рис. 7.2, б). Следовательно, прямолинейная форма равновесия оказалась неустойчивой и перешла в другую, искривленную форму равновесия.

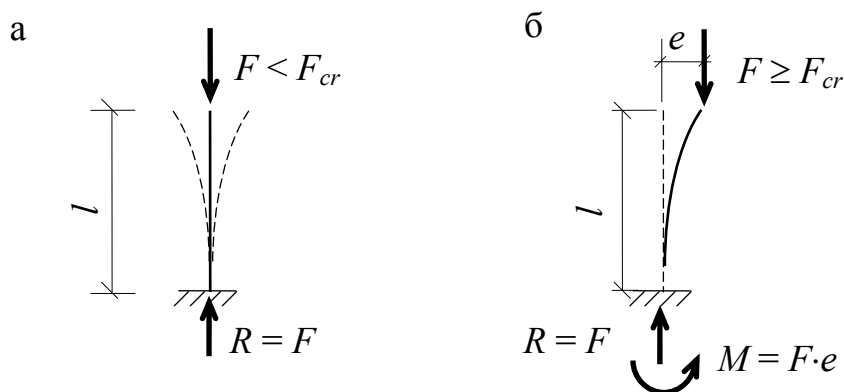


Рис. 7.2

Происходит раздвоение (бифуркация) форм равновесия, то есть наряду с прямолинейной возможно существование искривленной формы равновесия. Это явление называется продольным изгибом.

Критической силой называется наименьшее значение сжимающей силы, при которой первоначальная форма равновесия является неустойчивой. Соответствующее напряжение называется критическим.

Потеря устойчивости приводит к появлению изгибающего момента и, следовательно, резкому возрастанию напряжений. Сопротивление изогнутого стержня действию продольной силы резко падает. Даже при незначительном увеличении силы сверх критического значения происходит резкое нарастание прогибов, что может привести к разрушению сжатой стойки.

Различают два случая потери устойчивости. В первом случае она наступает при критическом напряжении, не превышающем предела пропор-

циональности  $\sigma_{cr} \leq \sigma_{pr}$ , когда деформации являются упругими. Для стержня из стали с  $\sigma_{pr} = 200$  МПа это происходит при гибкости

$$\lambda \geq \sqrt{\frac{\pi^2 E}{\sigma_{pr}}} = \sqrt{\frac{3,14^2 \cdot 200 \cdot 10^9}{200 \cdot 10^6}} \approx 100.$$

В этом случае критическое напряжение и силу находим по формулам Эйлера:

$$\sigma_{cr} = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2}, \quad (7.1)$$

$$F_{cr} = \frac{\pi^2 EI_{\min}}{(\mu l)^2}. \quad (7.2)$$

Следовательно, чем больше гибкость, тем меньше критические напряжение и сила.

Величина гибкости определяется в зависимости от условий закрепления и геометрических размеров стержня по формуле

$$\lambda = \frac{\mu l}{i}, \quad (7.3)$$

где  $\mu$  – коэффициент приведения длины. Он зависит от условий закрепления стержня (рис. 7.3).

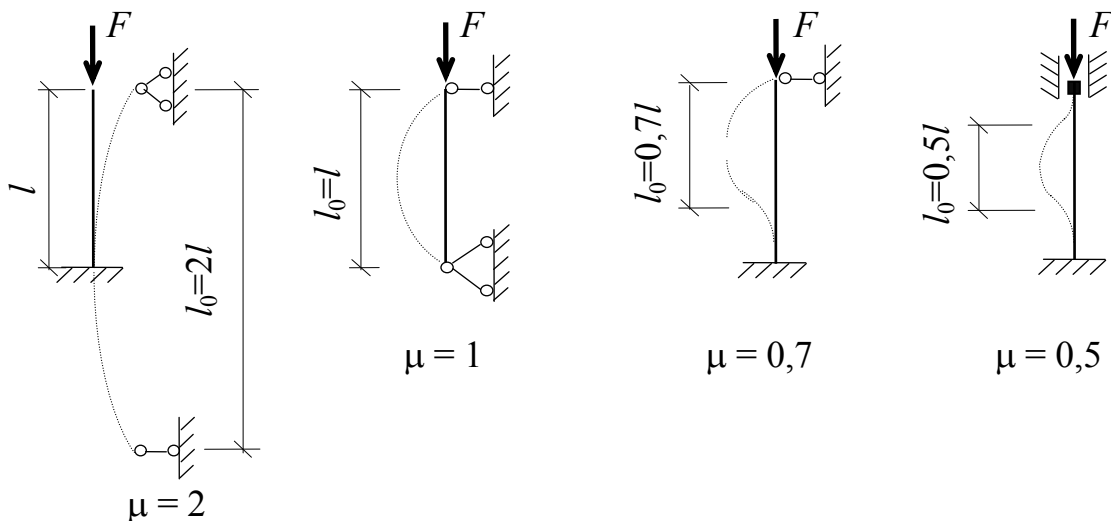


Рис. 7.3

Радиус инерции вычисляем по формуле

$$i = \sqrt{\frac{I}{A}}. \quad (7.4)$$



Во втором случае потеря устойчивости происходит, когда напряжения больше предела пропорциональности ( $\sigma_{cr} > \sigma_{pr}$ ). Тогда в поперечном сечении появляются неупругие деформации. Критические напряжения вычисляем по эмпирической формуле Ясинского:

$$\sigma_{cr} = 310 - 1,14 \lambda \text{ (МПа)}. \quad (7.5)$$

В этом случае  $60 \leq \lambda < 100$ . При значении гибкости  $\lambda < 60$  потери устойчивости не происходит и стержень рассчитывается на центральное сжатие. График зависимости между критическими напряжениями и гибкостью стержня из стали с  $[\sigma] = 160$  МПа показан на рис. 7.4.

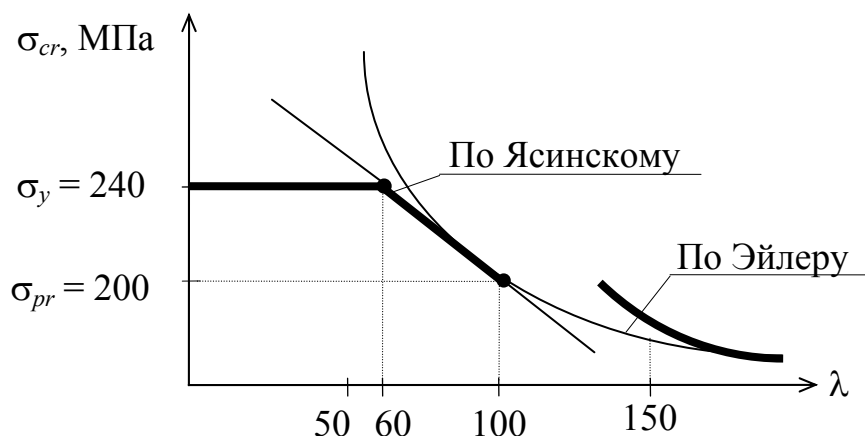


Рис. 7.4

Для обеспечения определенного запаса на устойчивость должно соблюдаться неравенство

$$\sigma \leq \frac{\sigma_{cr}}{n}, \quad (7.6)$$

где  $n > 1$  — коэффициент запаса. Он учитывает случайное увеличение силы  $F$ , первоначальное искривление реального стержня, возможность внецентренного приложения нагрузки, наличие несовершенств в опорах, неоднородность материала и т.д.

Переходя к допускаемому напряжению материала, имеем:

$$\frac{\sigma_{cr}}{n} = \varphi \cdot [\sigma], \quad (7.7)$$

где  $\varphi$  — коэффициент уменьшения допускаемого напряжения (коэффициент продольного изгиба). Он зависит от гибкости стержня  $\lambda$  и вида материала. Для стали с  $[\sigma] = 160$  МПа значения  $\varphi$  приведены в табл. 7.2.

Запишем условие прочности (безопасной работы) стержня при продольном изгибе:

$$\sigma = \frac{F}{A} \leq \varphi \cdot [\sigma]. \quad (7.8)$$

Отсюда допускаемая нагрузка на стержень равна:

$$F = A \cdot \varphi \cdot [\sigma]. \quad (7.9)$$

Т а б л и ц а 7.2

Значения коэффициента продольного изгиба  $\varphi$

$\lambda$	$\varphi$	$\lambda$	$\varphi$	$\lambda$	$\varphi$	$\lambda$	$\varphi$
10	0,987	60	0,805	110	0,478	160	0,244
20	0,962	70	0,754	120	0,419	170	0,218
30	0,931	80	0,686	130	0,364	180	0,196
40	0,894	90	0,612	140	0,315	190	0,177
50	0,852	100	0,542	150	0,276	200	0,161
						210	0,147

Величину коэффициента запаса на устойчивость находим по формуле

$$n = \frac{F_{cr}}{F}. \quad (7.10)$$

Проектный расчёт на устойчивость производится путём последовательных приближений, так как в выражении (7.8) при выбранном материале и форме сечения неизвестными являются площадь сечения  $A$  и коэффициент  $\varphi$ .

В первом приближении принимается  $\varphi_{1н} = 0,5$ . Затем расчёт продолжается по следующей схеме. Определяем:

1) площадь

$$A_1 = \frac{F}{\varphi_{1н} \cdot [\sigma]}; \quad (7.11)$$

2) размеры сечения, а по ним – минимальный радиус инерции

$$i_{1\min} = \sqrt{\frac{I_{\min}}{A_1}}; \quad (7.12)$$

3) гибкость стержня

$$\lambda_1 = \mu l / i_{1\min}; \quad (7.13)$$

4) коэффициент продольного изгиба  $\varphi_{1к}$  по табл. 7.2;

5) сжимающее напряжение

$$\sigma_1 = \frac{F}{A_1} \quad (7.14)$$

и сравниваем его с допускаемым  $\varphi_{1к} \cdot [\sigma]$ . Если  $\sigma_1$  значительно отличается от  $\varphi_{1к} \cdot [\sigma]$ , то делаем второе приближение, приняв в начале расчётов на втором этапе

$$\varphi_{2н} = \frac{\varphi_{1н} + \varphi_{1к}}{2}. \quad (7.15)$$

Приближение проводим, пока расхождение между напряжением  $\sigma_i$  и  $\varphi_{ик} \cdot [\sigma]$  в  $i$ -м приближении не станет минимальным. При этом должно выполняться условие прочности

$$\sigma_i \leq \varphi_{ик} \cdot [\sigma]. \quad (7.16)$$

Для сечений не из прокатных профилей допускается недонапряжение менее 5%.

С экономической точки зрения наиболее оптимальной будет такая форма поперечного сечения, при которой гибкость стержня в направлении любой центральной оси будет одинаковой. Этому отвечает фигура, у которой все центральные моменты инерции равны, например круг, равносторонний многоугольник, квадрат и т.д., при условии, что закрепления стержня одинаковы в направлении любой центральной оси. Кроме того, чтобы при данной площади гибкость была наименьшей, а радиус инерции наибольшим, необходимо стремиться к получению наибольшего центрального момента инерции. Для этого надо размещать материал возможно дальше от центра тяжести сечения. Обоим поставленным условиям удовлетворяет выпускаемое промышленностью сечение, например в форме трубы.

Если закрепления стержня в различных направлениях отличаются друг от друга, то центральные моменты инерции также целесообразно выбрать разными с таким расчётом, чтобы гибкость в этих направлениях была одинакова.

### Примеры решения задач

**Пример 7.1.** Определить размеры поперечного сечения стержня, изображённого на рис. 7.5. Найти величину критической силы и коэффициент запаса на устойчивость при  $[\sigma] = 160$  МПа.

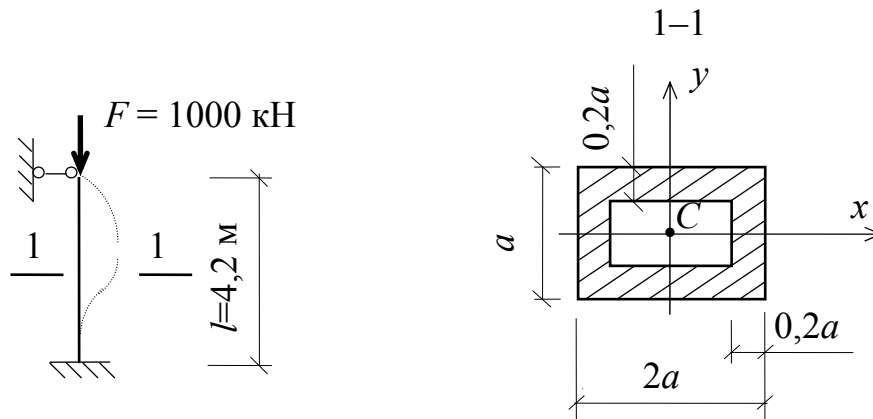


Рис. 7.5

Решение

1. *Определение размеров поперечного сечения.* Предварительно для заданного сечения выражаем все геометрические характеристики через размер "a". Используя формулы прил. 5, находим:

$$I_x = \frac{2aa^3 - 1,6a(0,6a)^3}{12} = 0,138a^4 = I_{\min};$$

$$I_y = \frac{a(2a)^3}{12} - \frac{0,6a(1,6a)^3}{12} = 0,462a^4 = I_{\max};$$

$$A = 2aa - 1,6a \cdot 0,6a = 1,04a^2;$$

$$i_{\min} = \sqrt{\frac{I_{\min}}{A}} = \sqrt{\frac{0,138a^4}{1,04a^2}} = 0,36a.$$

1-й этап. Задаёмся  $\varphi_{1н} = 0,5$ .

$$A_1 = \frac{F}{\varphi_{1н} \cdot [\sigma]} = \frac{1000 \cdot 10^3 (\text{Н})}{0,5 \cdot 160 \cdot 10^6 (\text{Н/м}^2)} = 12,5 \cdot 10^{-3} \text{ м}^2 = 125 \text{ см}^2;$$

$$a_1 = \sqrt{\frac{A_1}{1,04}} = \sqrt{\frac{125}{1,04}} = 10,96 \text{ см}$$

$$i_{1\min} = 0,36 \cdot 10,96 = 3,95 \text{ см.}$$

При  $\mu = 0,7$  (см. рис. 7.3) гибкость

$$\lambda_1 = \frac{0,7 \cdot 420}{3,95} = 74,43.$$

Из табл. 7.2 имеем при  $\lambda = 70$   $\varphi = 0,754$ , а при  $\lambda = 80$   $\varphi = 0,686$ . Для промежуточного значения  $\lambda_1 = 74,4$  значение коэффициента продольного изгиба  $\varphi_{1к}$  определим с помощью линейной интерполяции:

$$\varphi_{1к} = 0,754 - \frac{0,754 - 0,686}{10}(74,43 - 70) = 0,724.$$

Напряжение

$$\sigma_1 = \frac{F}{A_1} = \frac{1000 \cdot 10^3 (\text{Н})}{125 \cdot 10^{-4} (\text{м}^2)} = 8 \cdot 10^7 \text{ Н/м}^2 = 80 \text{ МПа} <$$

$$< \varphi_{1к} \cdot [\sigma] = 0,724 \cdot 160 = 115,8 \text{ МПа}.$$

Условие прочности выполняется. Однако разница между  $\sigma_1$  и  $\varphi_{1к} \cdot [\sigma]$  велика. Следовательно, площадь поперечного сечения слишком большая и необходимо сделать второе приближение.

2-й этап. Повторяем алгоритм вычислений, принимая

$$\varphi_{2н} = \frac{\varphi_{1н} + \varphi_{1к}}{2} = \frac{0,5 + 0,724}{2} = 0,612 ;$$

$$A_2 = \frac{1000 \cdot 10^3 \cdot 10^4}{0,612 \cdot 160 \cdot 10^6} = 102,1 \text{ см}^2;$$

$$a_2 = \sqrt{\frac{102,1}{1,04}} = 9,91 \text{ см};$$

$$i_{2\text{min}} = 0,36 \cdot 9,91 = 3,57 \text{ см};$$

$$\lambda_2 = \frac{0,7 \cdot 420}{3,57} = 82,35.$$

Из табл. 7.2 находим значение коэффициента продольного изгиба также, как на 1-м этапе:

$$\varphi_{2к} = 0,686 - \frac{0,686 - 0,612}{10} \cdot 2,35 = 0,669.$$

Напряжение

$$\sigma_2 = \frac{1000 \cdot 10^{-3}}{102,1 \cdot 10^{-4}} = 9,79 \cdot 10^7 \text{ Н/м}^2 = 97,9 \text{ МПа} <$$

$$< \varphi_{2к} \cdot [\sigma] = 0,669 \cdot 160 = 107 \text{ МПа}.$$

По сравнению с 1-м этапом разница в напряжениях сократилась и составила около 9%. Делаем третье приближение.

3-й этап. Повторяем алгоритм вычислений, принимая

$$\varphi_{3н} = \frac{0,612 + 0,669}{2} = 0,640;$$

$$A_3 = \frac{1000 \cdot 10^3 \cdot 10^4}{0,640 \cdot 160 \cdot 10^6} = 97,66 \text{ см}^2;$$

$$a_3 = \sqrt{\frac{97,66}{1,04}} = 9,69 \text{ см};$$

$$i_{3\min} = 0,36 \cdot 9,69 = 3,49 \text{ см};$$

$$\lambda_3 = \frac{0,7 \cdot 420}{3,49} = 84,24;$$

$$\varphi_{3к} = 0,686 - \frac{0,686 - 0,612}{10} \cdot 4,24 = 0,655;$$

$$\sigma_3 = \frac{1000 \cdot 10^{-3}}{97,66 \cdot 10^{-4}} = 10,24 \cdot 10^7 \text{ Н/м}^2 = 102,4 \text{ МПа} <$$

$$< \varphi_{3к} \cdot [\sigma] = 0,655 \cdot 160 = 104,8 \text{ МПа.}$$

Недонапряжение составило около 2%. Это допустимо, и процесс приближения можно прекратить.

2. *Вычисление критической силы.* Так как гибкость у выбранного сечения  $\lambda_3 = 84,24 < 100$ , то величину критических напряжений определяем по формуле Ясинского (7.5):

$$\sigma_{cr} = 310 - 1,14\lambda = 310 - 1,14 \cdot 84,24 = 213,97 \text{ МПа.}$$

Критическая сила

$$F_{cr} = \sigma_{cr} A = 213,97 \cdot 10^6 \cdot 97,66 \cdot 10^{-4} = 20896,3 \cdot 10^2 \text{ Н} = 2090 \text{ кН.}$$

3. *Определение коэффициента запаса на устойчивость.* Расчет ведем по формуле (7.10):

$$n = \frac{F_{cr}}{F} = \frac{2090}{1000} = 2,09.$$

**Пример 7.2.** Для стальной стойки, изготовленной из двутавра № 24 и закрепленной, как показано на рис. 7.6, а, найти критическую силу и допускаемую нагрузку при  $[\sigma] = 160 \text{ МПа}$  и  $E = 200 \text{ ГПа}$ .

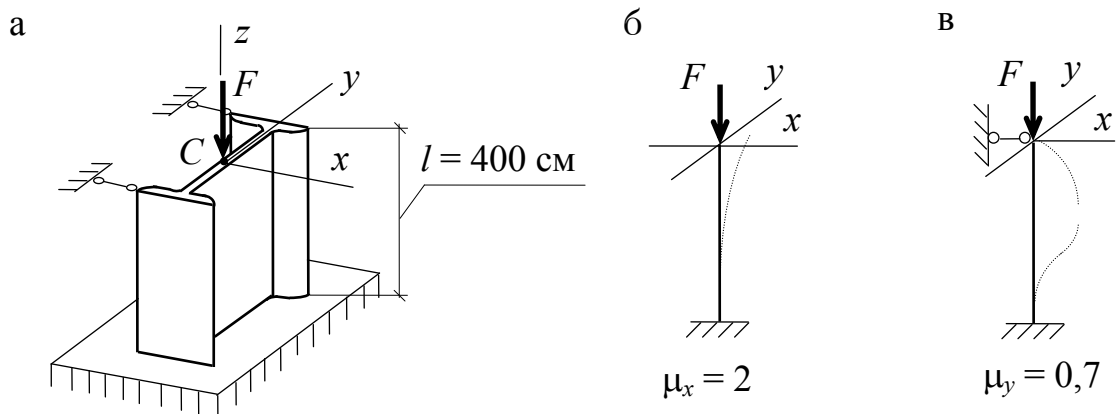


Рис. 7.6

### Решение

1. *Определение геометрических характеристик двутавра.* По прил. 1 для двутавра № 24 имеем:  $A = 34,8 \text{ см}^2$ ;  $i_x = 9,97 \text{ см}$ ,  $i_y = 2,37 \text{ см}$ .

2. *Вычисление критической силы.* Известно, что она зависит от гибкости. Гибкость относительно оси  $x$  и оси  $y$  разная, так как условия закрепления и радиусы инерции различные. Поэтому необходимо установить максимальное значение гибкости  $\lambda_{\max}$ . При потере устойчивости стержня в направлении оси  $y$  поперечное сечение поворачивается вокруг оси  $x$  (рис. 7.6, б) и гибкость относительно оси  $x$  равна:

$$\lambda_x = \frac{\mu_x l}{i_x} = \frac{2 \cdot 400}{9,97} = 80,2.$$

Аналогично определяем гибкость относительно оси  $y$  (рис. 7.6, в):

$$\lambda_y = \frac{\mu_y l}{i_y} = \frac{0,7 \cdot 400}{2,37} = 118,1.$$

Сравнивая их, находим, что  $\lambda_{\max} = \lambda_y = 118,1$ . Таким образом, стержень будет терять устойчивость в направлении оси  $x$  по рис. 7.6, в. Так как  $\lambda_{\max} = 118,1 > 100$ , то критические напряжения вычисляем по формуле Эйлера (7.1):

$$\sigma_{cr} = \frac{\pi^2 E}{\lambda_{\max}^2} = \frac{3,14^2 \cdot 200 \cdot 10^9}{118,1^2} = 0,141 \cdot 10^9 \text{ н/м}^2 = 141 \text{ МПа}.$$

Критическая сила

$$F_{cr} = \sigma_{cr} A = 141 \cdot 10^6 \cdot 34,8 \cdot 10^{-4} = 4906,8 \cdot 10^2 \text{ Н} = 491 \text{ кН}.$$

3. *Вычисление допускаемой нагрузки.* Её находим по формуле (7.9). Коэффициент продольного изгиба для  $\lambda_{\max} = 118,1$  определяем по табл. 7.2 линейной интерполяцией:

$$\varphi = 0,478 - \frac{0,478 - 0,419}{10} (118,1 - 110) = 0,430.$$

Тогда допускаемую нагрузку вычисляем по формуле (7.9):

$$F = \varphi A [\sigma] = 0,430 \cdot 34,8 \cdot 10^{-4} (\text{м}^2) \cdot 160 \cdot 10^3 (\text{кН/м}^2) = 239,4 \text{ кН}.$$

**Пример 7.3.** Стойка состоит из двух швеллеров, соединённых между собой планками (рис. 7.7). Подобрать номер швеллера и определить, на каком расстоянии "a" они должны находиться друг от друга, чтобы устойчивость вдоль осей x и y была одинаковой. Принять  $[\sigma] = 160 \text{ МПа}$ .

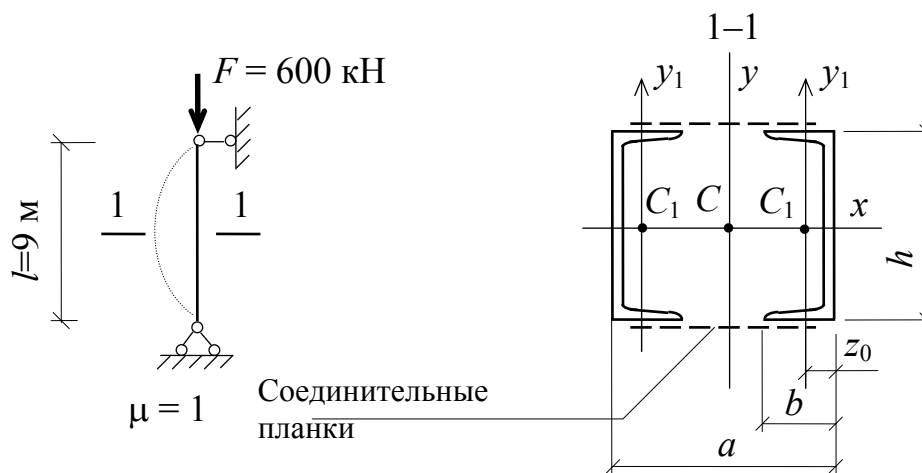


Рис. 7.7

### Решение

1. *Подбор поперечного сечения.* Его находим при условии потери устойчивости относительно оси x, так как при изменении расстояния "a" момент инерции и гибкость стержня относительно неё не меняются. Расчёт ведём методом последовательных приближений.

1-й этап. Принимаем  $\varphi_{1н} = 0,5$ .

Вычисляем площадь сечения:

$$A_1 = \frac{600 \cdot 10^3 \cdot 10^4}{0,5 \cdot 160 \cdot 10^6} = 75 \text{ см}^2.$$

По прил. 2 принимаем два швеллера № 30 с

$$A_1 = 2 \cdot 40,5 = 81 \text{ см}^2 > 75 \text{ см}^2 \text{ и } i_x = 12 \text{ см}.$$

Вычисляем гибкость:

$$\lambda_1 = \frac{\mu l}{i_x} = \frac{1 \cdot 900}{12} = 75.$$

По табл. 7.2 интерполяцией находим коэффициент продольного изгиба:

$$\varphi_{1к} = 0,754 - \frac{0,754 - 0,686}{10} \cdot 5 = 0,720.$$



Напряжение

$$\sigma_1 = \frac{600 \cdot 10^{-3}}{81 \cdot 10^{-4}} = 7,41 \cdot 10^7 \text{ Н/м}^2 = 74,1 \text{ МПа} < \varphi_{1к} [\sigma] = 0,72 \cdot 160 = 115,2 \text{ МПа.}$$

Недонапряжение – более 35%. Площадь поперечного сечения слишком велика. Делаем второе приближение.

2-й этап. Принимаем  $\varphi_{2н} = \frac{0,5 + 0,720}{2} = 0,610$ .

Требуемая площадь сечения

$$A_2 = \frac{600 \cdot 10^7}{0,61 \cdot 160 \cdot 10^6} = 61,5 \text{ см}^2.$$

Принимаем два швеллера № 27 с

$$A_2 = 2 \cdot 35,2 = 70,4 \text{ см}^2 > 61,5 \text{ см}^2 \text{ и } i_x = 10,9 \text{ см.}$$

Гибкость

$$\lambda_2 = \frac{1 \cdot 900}{10,9} = 82,6.$$

По табл. 7.2 интерполяцией находим коэффициент продольного изгиба:

$$\varphi_{2к} = 0,686 - \frac{0,686 - 0,612}{10} \cdot 2,6 = 0,667.$$

Проверяем напряжение:

$$\sigma_2 = \frac{600 \cdot 10^3 \cdot 10^{-6}}{70,4 \cdot 10^{-4}} = 85,2 \text{ МПа} < \varphi_{2к} [\sigma] = 0,667 \cdot 160 = 106,7 \text{ МПа.}$$

Недонапряжение – около 20%. Делаем третье приближение.

3-й этап. Принимаем  $\varphi_{3н} = \frac{\varphi_{2н} + \varphi_{2к}}{2} = \frac{0,61 + 0,667}{2} = 0,639$ .

Тогда

$$A_3 = \frac{600 \cdot 10^3 \cdot 10^4}{0,639 \cdot 160 \cdot 10^6} = 58,68 \text{ см}^2.$$

Для одного швеллера

$$A_3 = \frac{58,68}{2} = 29,34 \text{ см}^2.$$

Принимаем два швеллера № 24 с

$$A_3 = 2 \cdot 30,6 = 61,2 \text{ см}^2 \text{ и } i_x = 9,73 \text{ см.}$$

Гибкость

$$\lambda_3 = \frac{1 \cdot 900}{9,73} = 92,50.$$

По табл. 7.2 интерполяцией определяем  $\varphi_{3к}$ :

$$\varphi_{3к} = 0,612 - \frac{0,612 - 0,542}{10} \cdot 2,5 = 0,595.$$

Напряжение

$$\sigma_3 = \frac{600 \cdot 10^{-3}}{61,2 \cdot 10^{-4}} = 98 \text{ МПа} > \varphi_{3к} [\sigma] = 0,595 \cdot 160 = 95,2 \text{ МПа}.$$

Перенапряжение недопустимо, поэтому возвращаемся ко 2-му этапу и принимаем окончательно два швеллера № 27 с

$$I_x = 4160 \text{ см}^4, I_{y_1}^{(1)} = 262 \text{ см}^4, A = 35,2 \text{ см}^2 \text{ и } z_0 = 2,47 \text{ см}.$$

2. *Определение расстояния "a"*. Его находим из условия равноустойчивости  $I_x = I_y$ . С учётом параллельного переноса осей по формуле (1.7) имеем:

$$I_y = 2 \left[ I_{y_1}^{(1)} + A \cdot \left( \frac{a}{2} - z_0 \right)^2 \right] = I_x.$$

Тогда

$$I_y = 2 \left[ 262 + 35,2 \cdot \left( \frac{a}{2} - z_0 \right)^2 \right] = 2 \cdot 4160,$$

или

$$\left( \frac{a}{2} - z_0 \right)^2 = \frac{4160 - 262}{35,2} = 110,7 \text{ см}.$$

Отсюда

$$\frac{a}{2} - z_0 = \sqrt{110,7} = 10,52 \text{ см} \quad \text{и} \quad a = 2 \cdot (10,52 + 2,47) = 25,98 \text{ см}.$$

**Пример 7.4.** Подобрать поперечные сечения в виде круга и трубы при отношении  $\frac{d}{D} = 0,9$ . Сравнить их по расходу материала при  $[\sigma] = 160 \text{ МПа}$  (рис.7.8).

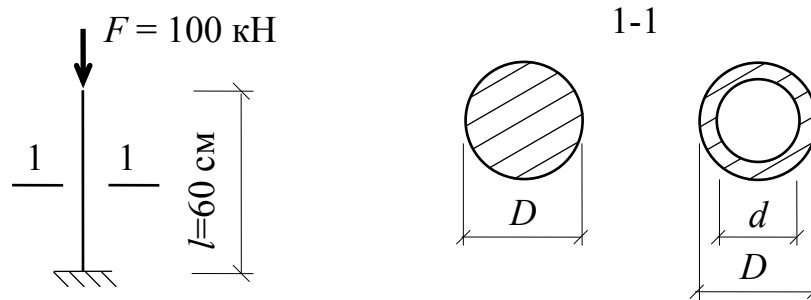


Рис. 7.8

Решение

1. *Определение диаметра круга.*

1-й этап. Принимаем  $\varphi_{1н} = 0,5$ . Находим площадь сечения:

$$A_1 = \frac{F}{\varphi_{1н}[\sigma]} = \frac{100 \cdot 10^3 (\text{Н}) \cdot 10^4}{0,5 \cdot 160 \cdot 10^6 (\text{Н/м}^2)} = 12,5 \text{ см}^2.$$

Далее по площади определяем диаметр круга и радиус инерции:

$$D_1 = \sqrt{\frac{4A}{\pi}} = \sqrt{\frac{4 \cdot 12,5}{3,14}} = 4 \text{ см},$$

$$i_1 = \sqrt{\frac{I}{A_1}} = \sqrt{\frac{R^4}{4R^2}} = \frac{R}{2} = \frac{D}{4} = \frac{4}{4} = 1 \text{ см}.$$

Согласно рис. 7.3  $\mu = 2$  и гибкость

$$\lambda_1 = \frac{\mu l}{i} = \frac{2 \cdot 60}{1} = 120.$$

По табл. 7.2 принимаем  $\varphi_{1к} = 0,419$ . Напряжение

$$\sigma_1 = \frac{100 \cdot 10^3 \cdot 10^{-6}}{12,5 \cdot 10^{-4}} = 80 \text{ МПа} > \varphi_{1к}[\sigma] = 0,419 \cdot 160 = 67,04 \text{ МПа}.$$

Перенапряжение – около 19%. Это недопустимо. Площадь поперечного сечения недостаточна. Делаем второе приближение.

2-й этап. Принимаем

$$\varphi_{2н} = \frac{0,5 + 0,419}{2} = 0,459.$$

Находим

$$A_2 = \frac{100 \cdot 10^7}{0,459 \cdot 160 \cdot 10^6} = 13,62 \text{ см}^2;$$

$$D_2 = \sqrt{\frac{4 \cdot 13,62}{3,14}} = 4,16 \text{ см};$$

$$i_2 = \frac{4,16}{4} = 1,04 \text{ см};$$

$$\lambda_2 = \frac{2 \cdot 60}{1,04} = 115,4.$$

По табл. 7.2 принимаем

$$\varphi_{2к} = 0,478 - \frac{0,478 - 0,419}{10} \cdot 5,4 = 0,446.$$

Напряжение

$$\sigma_2 = \frac{100 \cdot 10^{-3}}{13,62 \cdot 10^{-4}} = 73,4 \text{ МПа} > \varphi_{2к} [\sigma] = 0,446 \cdot 160 = 71,4 \text{ МПа}.$$

Перенапряжение – около 2,8%. Выполняем третье приближение.  
3 этап. Принимаем

$$\varphi_{3н} = \frac{0,459 + 0,446}{2} = 0,453.$$

Находим

$$A_3 = \frac{100 \cdot 10^7}{0,453 \cdot 160 \cdot 10^6} = 13,8 \text{ см}^2;$$

$$D_3 = \sqrt{\frac{4 \cdot 13,8}{3,14}} = 4,19 \text{ см};$$

$$i_3 = \frac{4,19}{4} = 1,05 \text{ см};$$

$$\lambda_3 = \frac{2 \cdot 60}{1,05} = 114,3;$$

$$\varphi_{3к} = 0,478 - \frac{0,478 - 0,419}{10} \cdot 4,3 = 0,453;$$

$$\sigma_3 = \frac{100 \cdot 10^{-3}}{13,8 \cdot 10^{-4}} = 72,5 \text{ МПа} = \varphi_{3к} [\sigma] = 0,453 \cdot 160 = 72,5 \text{ МПа}.$$

Условие прочности выполняется.

2. *Определение диаметра трубы при  $d/D = 0,9$ .*

1-й этап. Принимаем  $\varphi_{1н} = 0,5$ .

Находим площадь сечения:

$$A_1 = \frac{100 \cdot 10^7}{0,5 \cdot 160 \cdot 10^6} = 12,5 \text{ см}^2.$$

Для трубы площадь сечения равна:

$$A = \frac{\pi D^2}{4} \left[ 1 - \left( \frac{d}{D} \right)^2 \right] = 0,785 D^2 (1 - 0,9^2) = 0,149 D^2.$$

Откуда

$$D_1 = \sqrt{\frac{A_1}{0,149}} = \sqrt{\frac{12,5}{0,149}} = 9,16 \text{ см.}$$

Момент инерции

$$I = \frac{\pi D^4}{64} \left[ 1 - \left( \frac{d}{D} \right)^4 \right] = \frac{3,14}{64} D^4 [1 - 0,9^4] = 0,017 D^4.$$

Радиус инерции

$$i_1 = \sqrt{\frac{I}{A}} = \sqrt{\frac{0,017 D^4}{0,149 D^2}} = 0,338 D_1 = 0,338 \cdot 9,16 = 3,1 \text{ см.}$$

Гибкость

$$\lambda_1 = \frac{\mu l}{i_1} = \frac{2 \cdot 60}{3,1} = 38,71.$$

По табл. 7.2 принимаем

$$\varphi_{1к} = 0,931 - \frac{0,931 - 0,894}{10} \cdot (38,71 - 30,71) = 0,899.$$

Напряжение

$$\sigma_1 = \frac{100 \cdot 10^{-3}}{12,5 \cdot 10^{-4}} = 80 \text{ МПа} < \varphi_{1к} \cdot [\sigma] = 0,899 \cdot 160 = 144 \text{ МПа.}$$

Недонапряжение составило около 31%. Делаем второе приближение.

2-й этап. Принимаем

$$\varphi_{2н} = \frac{0,5 + 0,899}{2} = 0,7.$$

Находим

$$A_2 = \frac{100 \cdot 10^7}{0,7 \cdot 160 \cdot 10^6} = 8,93 \text{ см}^2;$$

$$D_2 = \sqrt{\frac{8,93}{0,149}} = 7,74 \text{ см.}$$

$$i_2 = 0,338D = 0,338 \cdot 7,74 = 2,62 \text{ см};$$

$$\lambda_2 = \frac{2 \cdot 60}{2,62} = 45,8;$$

$$\varphi_{2к} = 0,894 - \frac{0,894 - 0,852}{10} \cdot 5,8 = 0,870;$$

$$\sigma_2 = \frac{100 \cdot 10^{-3}}{8,93 \cdot 10^{-4}} = 112 \text{ МПа} < \varphi_{2к} \cdot [\sigma] = 0,87 \cdot 160 = 139 \text{ МПа.}$$

Недонапряжение – около 20%. Делаем третье приближение.

3-й этап. Принимаем

$$\varphi_{3н} = \frac{0,7 + 0,87}{2} = 0,785;$$

$$A_3 = \frac{100 \cdot 10^7}{0,785 \cdot 160 \cdot 10^6} = 7,96 \text{ см}^2;$$

$$D_3 = \sqrt{\frac{7,96}{0,149}} = 7,31 \text{ см.}$$

Находим

$$i_3 = 0,338 \cdot 7,31 = 2,47 \text{ см};$$

$$\lambda_3 = \frac{2 \cdot 60}{2,47} = 48,58;$$

$$\varphi_{3к} = 0,894 - \frac{0,894 - 0,852}{10} \cdot 8,58 = 0,858;$$

$$\sigma_3 = \frac{100 \cdot 10^{-3}}{7,96 \cdot 10^{-4}} = 125,6 \text{ МПа} < \varphi_{3к} \cdot [\sigma] = 0,858 \cdot 160 = 137,3 \text{ МПа.}$$

Недонапряжение – около 9%. Делаем четвертое приближение.

4 этап. Принимаем

$$\varphi_{4н} = \frac{0,785 + 0,858}{2} = 0,821.$$

Находим

$$A_4 = \frac{100 \cdot 10^7}{0,821 \cdot 160 \cdot 10^6} = 7,61 \text{ см}^2;$$

$$D_4 = \sqrt{\frac{7,61}{0,149}} = 7,15 \text{ см};$$

$$i_4 = 0,338 \cdot 7,15 = 2,42 \text{ см};$$

$$\lambda_4 = \frac{2 \cdot 60}{2,42} = 49,59 ;$$

$$\varphi_{4к} = 0,894 - \frac{0,894 - 0,852}{10} \cdot 9,59 = 0,854;$$

$$\sigma_4 = \frac{100 \cdot 10^{-3}}{7,61 \cdot 10^{-4}} = 131,4 \text{ МПа} < \varphi_{4к} \cdot [\sigma] = 0,854 \cdot 160 = 136,6 \text{ МПа}.$$

Недонапряжение – около 4%. Процесс вычисления прекращаем.

Принимаем в соответствии с ГОСТ 104-91 (см. прил. 6) трубу  $D = 70$  мм с  $A = 7,9 \text{ см}^2 > A_4 = 7,61 \text{ см}^2$  и  $i = 2,4$  см. Проверяем условие прочности:

$$\lambda = \frac{2,60}{2,4} = 50; \quad \varphi = 0,825;$$

$$\sigma = \frac{100 \cdot 10^{-3}}{7,9 \cdot 10^{-4}} = 126,6 \text{ МПа} < \varphi [\sigma] = 0,825 \cdot 160 = 136,3 \text{ МПа}.$$

Условие прочности выполняется.

Сравнение показывает, что на трубчатое поперечное сечение ( $A = 7,9 \text{ см}^2$ ) расходуется в 1,75 раза меньше материала, чем на круглое ( $A = 13,8 \text{ см}^2$ ).

**Пример 7.5.** Подобрать поперечное сечение стержня в виде двух швеллеров и двутавра из условия равноустойчивости по главным осям инерции при  $[\sigma] = 210$  МПа (рис. 7.9)

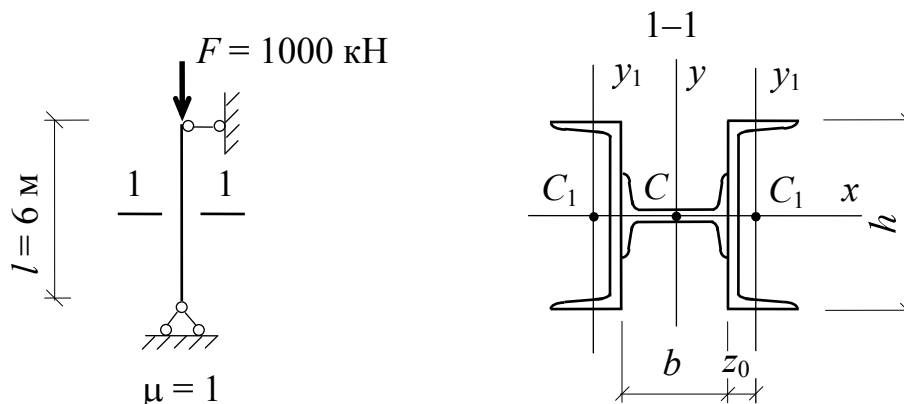


Рис. 7.9

### Р е ш е н и е

Условия закрепления стержня в обоих направлениях  $x$  и  $y$  одинаковы. Поэтому при подборе сечения необходимо исходить из равенства радиусов инерции вокруг осей  $x$  и  $y$ :  $i_x = i_y$ . Для этого воспользуемся приближенными для прокатных профилей зависимостями, связывающими радиусы инерции и габаритные размеры сечения  $b$  и  $h$  (прил. 7):

$$i_x = 0,32h \quad \text{и} \quad i_y = 0,58b.$$

Из равенства радиусов инерции находим:

$$b = \frac{0,32}{0,58}h = 0,55h.$$

Таким образом, из сортамента нужно подобрать двутавр и швеллеры так, чтобы высота двутавра была примерно в два раза меньше высоты швеллера.

1. *Подбор поперечного сечения.*

1-й этап. Принимаем  $\varphi_{1н} = 0,5$ . Определяем площадь сечения:

$$A_1 = \frac{F}{\varphi_{1н} [\sigma]} = \frac{1000 \cdot 10^3}{0,5 \cdot 210 \cdot 10^6} = 9,52 \cdot 10^{-3} \text{ м}^2 = 95,2 \text{ см}^2.$$

По сортаменту принимаем (см. прил. 1 и 2):

два швеллера № 30:

$$h = 30 \text{ см}, \quad A^{(1)} = 40,5 \text{ см}^2, \quad I_x^{(1)} = 5810 \text{ см}^4, \\ I_{y_1}^{(1)} = 327 \text{ см}^2, \quad z_0 = 2,52 \text{ см};$$

двутавр № 16:

$$b = 16 \text{ см}, \quad A^{(2)} = 20,2 \text{ см}^2, \quad I_y^{(2)} = 873 \text{ см}^4, \quad I_x^{(2)} = 58,6 \text{ см}^4.$$

Проверяем условие равноустойчивости:

$$b/h = \frac{16}{30} = 0,53 \approx 0,55.$$

Оно выполняется приближенно. Общая площадь больше требуемой:

$$A = 2 \cdot A^{(1)} + A^{(2)} = 2 \cdot 40,5 + 20,2 = 101,2 > A_1 = 95,2 \text{ см}^2.$$

Находим момент инерции всего сечения:

$$I_y = 2I_y^{(1)} + I_x^{(2)} = 2 \cdot 5810 + 58,6 = 11680 \text{ см}^4; \\ I_y = 2 \left( I_{y_1}^{(1)} + (z_0 + 0,5b)^2 \cdot A^{(1)} \right) + I_y^{(2)} = \\ = 2 \left( 327 + (2,52 + 0,5 \cdot 16)^2 \cdot 40,5 \right) + 873 = 10490 \text{ см}^4.$$



Сравнивая  $I_x$  и  $I_y$ , убеждаемся, что они мало отличаются друг от друга. Полного их совпадения добиться нельзя, так как размеры  $b$  и  $h$  обусловлены сортаментом. Для дальнейших расчетов используем  $I_{\min} = I_y = 10490 \text{ см}^4$ .  
Радиус инерции

$$i_{\min} = i_y = \sqrt{\frac{I_y}{A}} = \sqrt{\frac{10490}{101,2}} = 10,2 \text{ см.}$$

Находим наибольшую гибкость:

$$\lambda_{\max} = \lambda_y = \frac{\mu l}{i_{\min}} = \frac{1 \cdot 600}{10,2} = 58,8.$$

По табл. 7.2

$$\varphi_{1к} = 0,852 - \frac{0,852 - 0,805}{10} 58,8 = 0,811.$$

Напряжение

$$\sigma_1 = \frac{F}{A} = \frac{1000 \cdot 10^3}{101,2 \cdot 10^{-4}} = 9,88 \cdot 10^7 \text{ Н/м}^2 = 98,8 \text{ МПа} < \\ < \varphi_{1к} [\sigma] = 0,811 \cdot 210 = 170,3 \text{ МПа.}$$

Недонапряжение составляет около 42%. Сечение слишком велико и необходимо сделать второе приближение.

2-й этап. Принимаем

$$\varphi_{2н} = \frac{0,5 + 0,811}{2} = 0,656.$$

Требуемая площадь

$$A_2 = \frac{1000 \cdot 10^3}{0,656 \cdot 210 \cdot 10^6} = 7,26 \cdot 10^{-3} \text{ м}^2 = 72,6 \text{ см}^2.$$

Из сортамента находим:

два швеллера № 24 с

$$A^{(1)} = 30,6 \text{ см}^2, \quad I_x^{(1)} = 2900 \text{ см}^4, \quad I_y^{(1)} = 208 \text{ см}^4, \quad z_0 = 2,42 \text{ см};$$

двутавр № 12 с

$$A^{(2)} = 14,7 \text{ см}^2, \quad I_x^{(2)} = 27,9 \text{ см}^4, \quad I_y^{(2)} = 350 \text{ см}^4.$$

Проверяем условие равноустойчивости:

$$b/h = \frac{12}{24} = 0,5 \approx 0,55.$$

Оно приближенно выполняется. Общая площадь больше требуемой:

$$A = 2 \cdot 30,6 + 14,7 = 75,9 \text{ см}^2 > A_2 = 72,6 \text{ см}^2.$$

Находим моменты инерции всего сечения:

$$I_x = 2 \cdot 2900 + 27,9 = 5828 \text{ см}^4;$$
$$I_y = 350 + 2 \cdot 208 + 2 \cdot (2,42 + 0,5 \cdot 12)^2 \cdot 30,6 = 5105 \text{ см}^4.$$

Радиус инерции и гибкость

$$i_2 = \sqrt{\frac{5105}{75,9}} = 8,2 \text{ см}, \quad \lambda_2 = \frac{1600}{8,2} = 73,17.$$

По табл. 7.2

$$\varphi_{2к} = 0,754 - \frac{0,754 - 0,686}{10} 3,2 = 0,732.$$

Напряжение

$$\sigma_2 = \frac{1000 \cdot 10^3}{75,9 \cdot 10^{-4}} = 13,17 \cdot 10^7 \text{ Н/м}^2 = 131,7 \text{ МПа} <$$
$$< \varphi_{2к} [\sigma] = 0,732 \cdot 210 = 153,7 \text{ МПа}.$$

Недонапряжение – около 14%. Сечение имеет лишнюю площадь. Переходим к третьему этапу.

3-й этап. Принимаем:

$$\varphi_{3н} = \frac{0,656 + 0,732}{2} = 0,694;$$
$$A_3 = \frac{1000 \cdot 10^3}{0,694 \cdot 210 \cdot 10^6} = 6,87 \cdot 10^{-3} \text{ м}^2 = 68,7 \text{ см}^2.$$

Принимаем из сортамента:

два швеллера № 22 с

$$A^{(1)} = 26,7 \text{ см}^2, \quad I_x^{(1)} = 2110 \text{ см}^4, \quad I_{y_1}^{(1)} = 151 \text{ см}^4, \quad z_0 = 2,21 \text{ см};$$

двутавр № 12 с

$$A^{(2)} = 14,7 \text{ см}^2, \quad I_y^{(2)} = 350 \text{ см}^4, \quad I_x^{(2)} = 27,9 \text{ см}^4.$$

Условие равноустойчивости выполняется:

$$b/h = \frac{12}{22} = 0,55.$$

Общая площадь принятого сечения

$$A = 2 \cdot 26,7 + 14,7 = 68,1 \text{ см}^2 \approx A_3 = 68,7 \text{ см}^2.$$

Видим, что принятая площадь почти равна требуемой.

Вычисляем моменты инерции принятого сечения:

$$I_x = 2 \cdot 2110 + 27,9 = 4247,9 \text{ см}^4;$$

$$I_y = 350 + 2 \cdot 151 + 2 \cdot (2,21 + 0,5 \cdot 12)^2 \cdot 26,7 = 4251 \text{ см}^4.$$

Минимальный радиус инерции

$$i_3 = i_x = i_{\min} = \sqrt{\frac{4247,9}{68,1}} = 7,9 \text{ см}.$$

Гибкость

$$\lambda_3 = \frac{1600}{7,9} = 75,95.$$

По табл. 7.2

$$\varphi_{3к} = 0,754 - \frac{0,754 - 0,686}{10} \cdot 5,95 = 0,714.$$

Напряжение

$$\begin{aligned} \sigma_3 &= \frac{1000 \cdot 10^3}{68,1 \cdot 10^{-4}} = 14,68 \cdot 10^7 \text{ Н/м}^2 = 146,8 \text{ МПа} < \\ &< \varphi_{3к} [\sigma] = 0,714 \cdot 210 = 149,9 \text{ МПа}. \end{aligned}$$

Условие прочности выполняется. Недонапряжение – 2,07%. Большой степени близости  $\sigma_i$  и  $\varphi_{ик} [\sigma]$  достичь не удастся без нарушения условия безопасной работы (прочности)

$$\sigma_i = \frac{F}{A_i} \leq \varphi_{ик} [\sigma].$$

Окончательно принимаем два швеллера № 22 и двутавр № 12.

### Контрольные вопросы

1. Какое явление называется продольным изгибом или потерей устойчивости?
2. Что называется критической силой и критическим напряжением?
3. Как найти критическую силу по формуле Эйлера?

4. По какому закону изгибается ось стержня при шарнирном закреплении концов?
5. Что понимается под гибкостью?
6. Что понимается под предельной гибкостью? От чего она зависит?
7. Сравните предельные гибкости двух стальных стержней, если, при прочих равных условиях, у первого  $\sigma_{pr} = 210$  МПа, у другого  $\sigma_{pr} = 300$  МПа?
8. Как влияют условия закрепления стержня на его гибкость?
9. Когда применима формула Эйлера?
10. Как вычислить критические напряжения по формуле Ясинского?
11. Какой из стержней, показанных на рис. 7.10, выдержит бóльшую критическую силу?

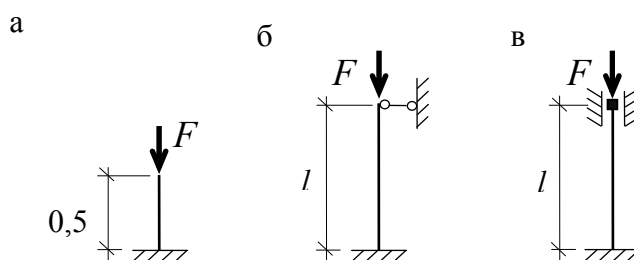


Рис. 7.10

12. Запишите условие прочности (безопасной работы) при центральном сжатии стержня.
13. Что понимается под коэффициентом продольного изгиба, от чего он зависит и в каких пределах изменяется?
14. Как определить допустимую нагрузку на стержень?
15. Как определить площадь поперечного сечения с использованием коэффициента продольного изгиба?
16. Какая форма поперечного сечения, составленного из четырёх равнополочных уголков, является наиболее рациональной (рис. 7.11)?

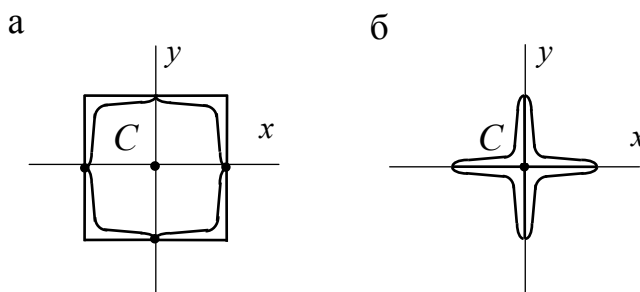


Рис. 7.11

17. Какой вид имеет график зависимости критических напряжений от гибкости для стали Ст3?
18. Как изменится критическая сила, если диаметр стержня круглого поперечного сечения уменьшить в два раза?

19. При какой форме поперечного сечения (двутавр, прямоугольник, круг или труба) стержни одинаковой площади и при одинаковых условиях закрепления выдержат бóльшую нагрузку?

20. Сравните несущую способность ( $F_1$  и  $F_2$ ) двух одинаковых стержней, нагруженных, как показано на рис. 7.12.

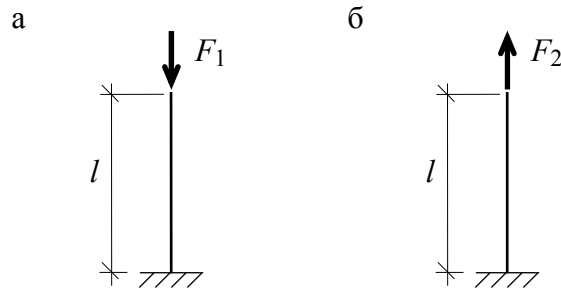


Рис. 7.12

## Раздел 8 ОПРЕДЕЛЕНИЕ НАПРЯЖЕНИЙ ПРИ УДАРНЫХ НАГРУЗКАХ

### З а д а н и е

На двутавровую балку, свободно лежащую на двух опорах (рис. 8.1), с высоты  $h$  падает груз весом  $F$ .

Требуется:

1. Найти нормальное напряжение в сечении балки под силой  $F$ .
2. Решить аналогичную задачу при условии, что правая опора заменена пружиной, податливость которой, т.е. осадка от груза весом 1 кН, равна  $\alpha$ .
3. Сравнить полученные результаты.

Исходные данные взять из табл. 8.1 согласно шифру.

Т а б л и ц а 8 . 1

Исходные данные

Номер строки	Схема по рис.8.1	Номер двутавра	$l$ , м	$F$ , Н	$h$ , см	$\alpha \cdot 10^3$ , м/кН
1	I	14	2,1	1100	11	21
2	II	16	2,2	1200	12	22
3	III	18	2,3	300	3	23
4	IV	20	2,4	400	4	24
5	V	22	2,5	500	5	25
6	VI	24	2,6	600	6	26
7	VII	27	2,7	700	7	27
8	VIII	30	2,8	800	8	28
9	IX	33	2,9	900	9	29
0	X	36	3,0	1000	10	30
	$e$	$\delta$	$e$	$v$	$\delta$	$e$

### Т е о р е т и ч е с к а я   ч а с т ь

Нагрузка, быстро меняющая свое значение или место приложения, называется динамической. При такой нагрузке в брус возникают перемещения с ускорением. В результате появляются дополнительные силы инерции, которые, в свою очередь, вызывают дополнительные напряжения, деформации и перемещения. Силы инерции непрерывно распределены по объему тела.

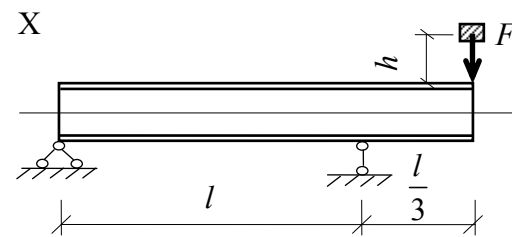
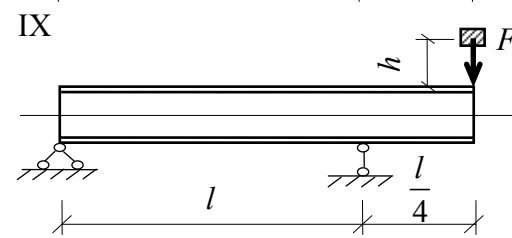
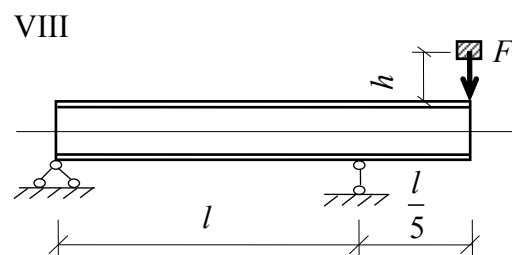
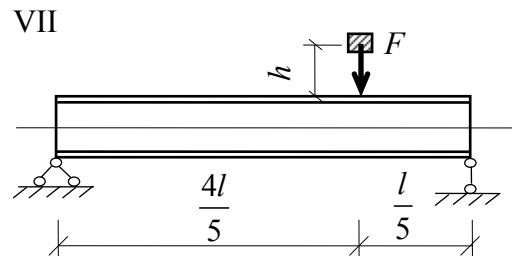
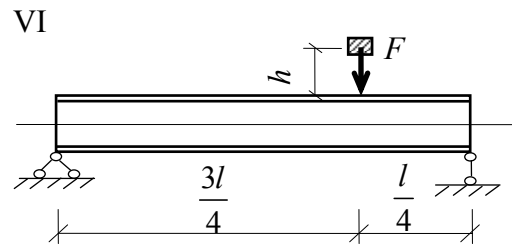
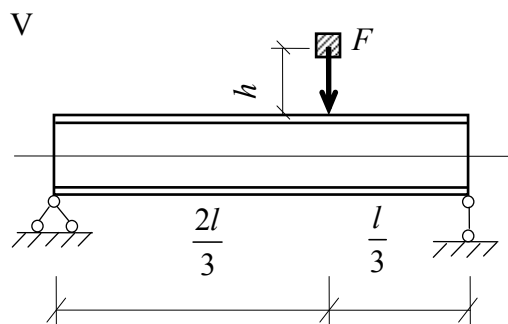
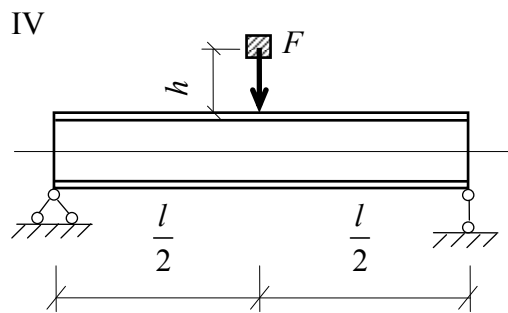
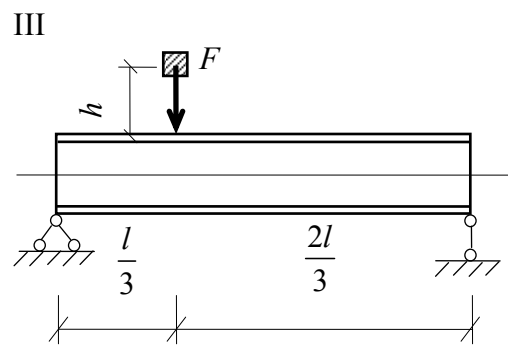
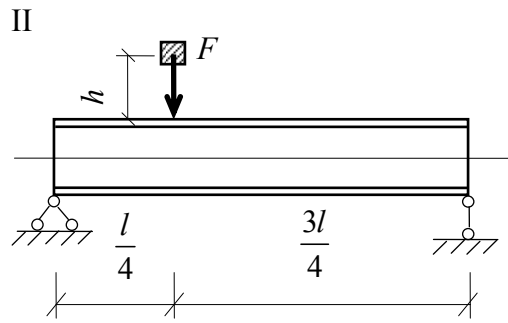
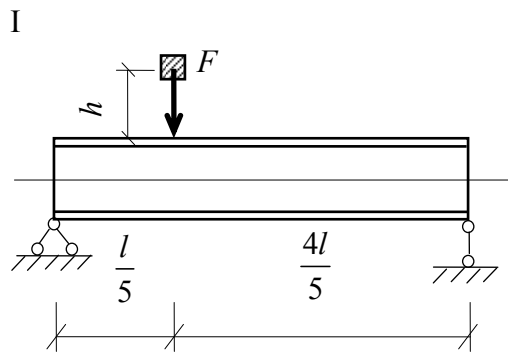


Рис. 8.1

К динамическим относятся ударные и вибрационные нагрузки, создаваемые различными механизмами, и нагрузки, возникающие при движении тела с ускорением.

При расчёте конструкции на динамические нагрузки используется принцип Даламбера, согласно которому движущуюся с ускорением систему в каждый момент времени можно рассматривать как находящуюся в состоянии покоя, если к внешним силам добавить силы инерции. Тогда динамические напряжения и перемещения могут быть найдены по следующим формулам:

$$\sigma_d = \mu \sigma_c, \quad \delta_d = \mu \delta_c, \quad (8.1)$$

где  $\sigma_c$  и  $\delta_c$  – соответственно напряжения и перемещения от статической нагрузки;

$\mu$  – поправочный динамический коэффициент (или коэффициент динамичности).

Величина динамического коэффициента зависит от способа приложения нагрузки, типа и массы соударяемых тел, вида материала и других факторов. При его определении исходят из общего принципа, что вся накопленная кинетическая энергия  $K$  в момент удара полностью переходит в энергию упругой деформации тела  $U$ , т.е.

$$K = U. \quad (8.2)$$

Решая уравнение (8.2), можно непосредственно найти величину динамических перемещений, а используя закон Гука, – и величину динамических напряжений.

Если пренебречь массой ударяемого стержня и считать удар абсолютно упругим, то коэффициент динамичности можно определить по формуле

$$\mu = 1 + \sqrt{1 + \frac{K}{U}}. \quad (8.3)$$

Для частных случаев ударной нагрузки имеем:

При вертикальном движении с постоянным ускорением  $a$

$$\mu = 1 + \frac{a}{g}, \quad (8.4)$$

где  $g$  – ускорение свободного падения;

при вертикальном ударе

$$\mu = 1 + \sqrt{1 + \frac{2h}{\delta_c}}, \quad (8.5)$$

здесь  $h$  – высота падения груза;

$\delta_c$  – перемещение поперечного сечения при статическом приложении нагрузки;



при крутящем ударе

$$\mu = \omega \cdot \sqrt{\frac{I_0}{T\theta_c}}, \quad (8.6)$$

где  $\theta_c$  – угол поворота поперечного сечения при статическом приложении нагрузки;

$\omega$  – угловая скорость ударяющего тела;

$I_0$  – момент инерции массы маховика;

$T$  – передаваемый внутренний крутящий момент.

### Примеры решения задач

**Пример 8.1.** Определить диаметр троса, на котором подвешен груз массой 30 кН, поднимаемый с ускорением  $a = 4 \text{ м/с}^2$ . Массой троса пренебречь. Допускаемое напряжение  $[\sigma] = 70 \text{ МПа}$ .

#### Решение

По формуле (8.4) определяем коэффициент динамичности:

$$\mu = 1 + \frac{a}{g} = 1 + \frac{4}{9,81} = 1,408.$$

Из условия прочности при центральном растяжении находим площадь сечения:

$$A = \frac{\mu N}{[\sigma]} = \frac{1,408 \cdot 30 \cdot 10^3}{70 \cdot 10^6} = 0,603 \cdot 10^{-3} \text{ м}^2 = 6,03 \text{ см}^2.$$

Требуемый диаметр троса

$$D = \sqrt{\frac{4A}{\pi}} = \sqrt{\frac{4 \cdot 6,03}{3,14}} = 2,27 \text{ см}.$$

**Пример 8.2.** Трос, наматываясь на барабан диаметром  $D_1 = 0,6 \text{ м}$  (рис. 8.2), поднимает груз весом  $F = 20 \text{ кН}$  с постоянным ускорением  $a = 5 \text{ м/с}^2$ . Диаметр вала  $D = 0,2 \text{ м}$  и  $l = 1 \text{ м}$ . Проверить выполнение энергетического критерия пластичности (условия прочности) при  $[\sigma] = 80 \text{ МПа}$ .

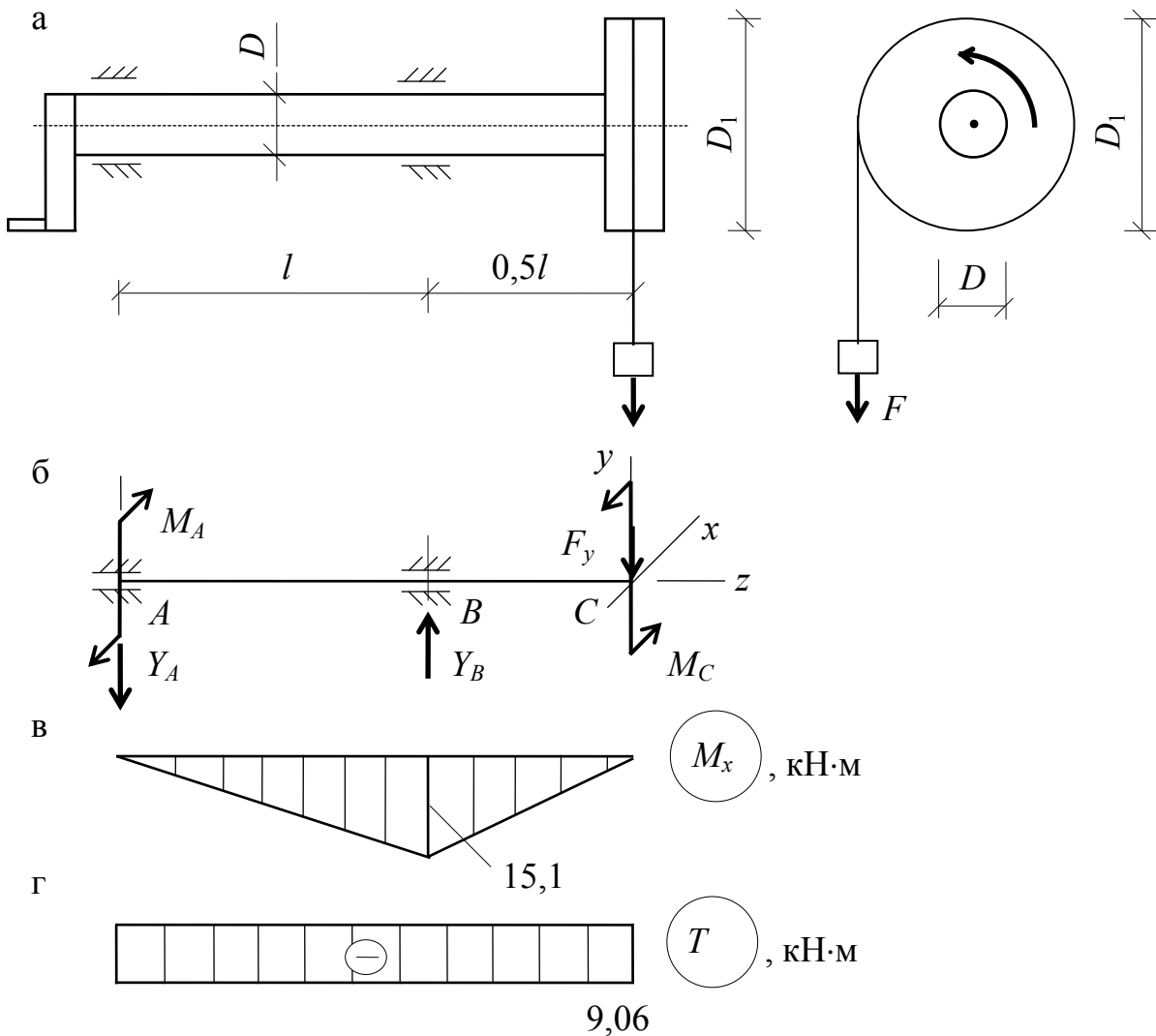


Рис. 8.2

### Решение

1. *Расчёт нагрузок на вал.* Коэффициент динамичности определяем по формуле (8.4):

$$\mu = 1 + \frac{a}{g} = 1 + \frac{5}{9,81} = 1,51.$$

Вычисляем динамическую сосредоточенную нагрузку, крутящий и изгибающий моменты:

$$F_y = \mu F = 1,51 \cdot 20 = 30,2 \text{ кН};$$

$$T = M_C = \frac{F_y \cdot D_1}{2} = \frac{30,2 \cdot 0,6}{2} = 9,06 \text{ кН}\cdot\text{м};$$

$$M_x = F_y \cdot 0,5 = 30,2 \cdot 0,5 = 15,1 \text{ кН}\cdot\text{м}.$$

Построенные эпюры изгибающего (рис. 8.2, в) и крутящего (рис. 8.2, г) моментов показывают, что опасное сечение находится на опоре  $B$  с  $M_x = 15,1$  кН·м и  $T = 9,06$  кН·м.

2. *Определение напряжений.* Максимальное нормальное напряжение от изгибающего момента вычисляем по формуле (4.4):

$$\sigma = \frac{M_x}{W_x} = \frac{32M_x}{\pi D^3} = \frac{32 \cdot 15,1 \cdot 10^{-3}}{3,14 \cdot 0,2^3} = 19,2 \text{ МПа.}$$

Максимальное касательное напряжение от крутящего момента определяем по формуле (3.4):

$$\tau = \frac{T}{W_\rho} = \frac{16T}{\pi D^3} = \frac{16 \cdot 9,06 \cdot 10^{-3}}{3,14 \cdot 0,2^3} = 5,77 \text{ МПа.}$$

Проверяем энергетический критерий пластичности:

$$\sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2} = \sqrt{19,2^2 + 3 \cdot 5,77^2} = 21,6 \text{ МПа} < [\sigma] = 80 \text{ МПа.}$$

Условие прочности выполняется.

**Пример 8.3.** Определить динамическое напряжение в стержне длиной  $l = 50$  см при падении груза весом  $F = 500$  Н на недеформируемый диск с высоты  $h = 10$  см (рис. 8.3). Модуль упругости  $E = 200$  ГПа.

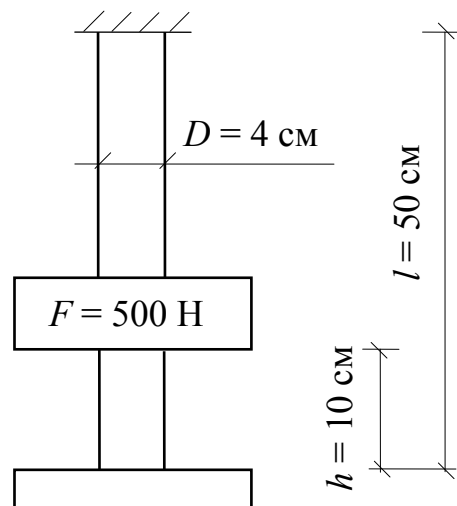


Рис. 8.3

### Р е ш е н и е

Статическое перемещение находим по закону Гука:

$$\delta_c = \Delta l_c = \frac{Fl}{EA} = \frac{500 \cdot 0,5 \cdot 4}{200 \cdot 10^9 \cdot 3,14 \cdot 4^2 \cdot 10^{-4}} = 0,995 \cdot 10^{-4} \text{ м.}$$

Динамический коэффициент рассчитываем по формуле (8.5):

$$\mu = 1 + \sqrt{1 + \frac{2 \cdot 10}{0,995 \cdot 10^{-2}}} = 45,84..$$

Динамическое напряжение

$$\sigma_d = \frac{\mu F}{A} = \frac{45,84 \cdot 500 \cdot 4}{3,14 \cdot 4^2 \cdot 10^{-4}} = 18,25 \cdot 10^6 \text{ Н/м}^2 = 18,25 \text{ МПа.}$$

**П р и м е р 8.4.** На балку из двутавра № 27 длиной  $l = 5$  м с высоты  $h = 12$  см падает груз весом  $F = 3300$  Н (рис. 8.4). Найти наибольшее нормальное напряжение. Решить аналогичную задачу при условии, что правая опора заменена пружиной с коэффициентом податливости  $\alpha = 30 \cdot 10^{-3}$  м/кН.

### Р е ш е н и е

Из прил. 1 для двутавра № 27 находим

$$W_x = 371 \text{ см}^3, \quad I_x = 5010 \text{ см}^4.$$

Анализ построенной эпюры моментов показывает, что наибольшие напряжения возникают в сечении под грузом с  $M = \frac{3300 \cdot 2 \cdot 3}{5} = 3960 \text{ Н} \cdot \text{м}$ .

Поэтому все расчеты производим в этом сечении.

1. *Определение статического перемещения.* Прогиб под грузом найдем с помощью интеграла Мора перемножением единичной эпюры  $\overline{M}$  (рис. 8.4, в) на грузовую  $M$  (рис. 8.4, б):

$$v_c = \int_0^l \frac{\overline{M}M}{EI} dz = \frac{1}{EI} \left( \frac{1}{2} \cdot 1,2 \cdot 2 \cdot \frac{2}{3} \cdot 3960 + \frac{1}{2} \cdot 1,2 \cdot 3 \cdot \frac{2}{3} \cdot 3960 \right) = \frac{7920}{EI}.$$

Отсюда

$$\delta_c = v_c = \frac{7920}{200 \cdot 10^9 \cdot 5010 \cdot 10^{-8}} = 0,079 \text{ см.}$$

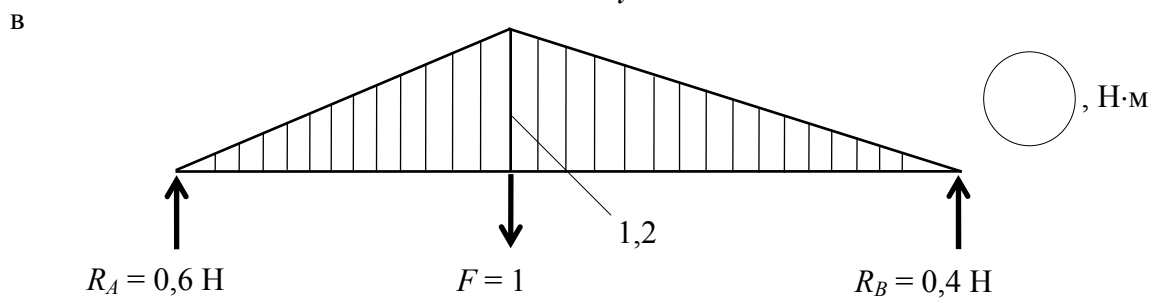
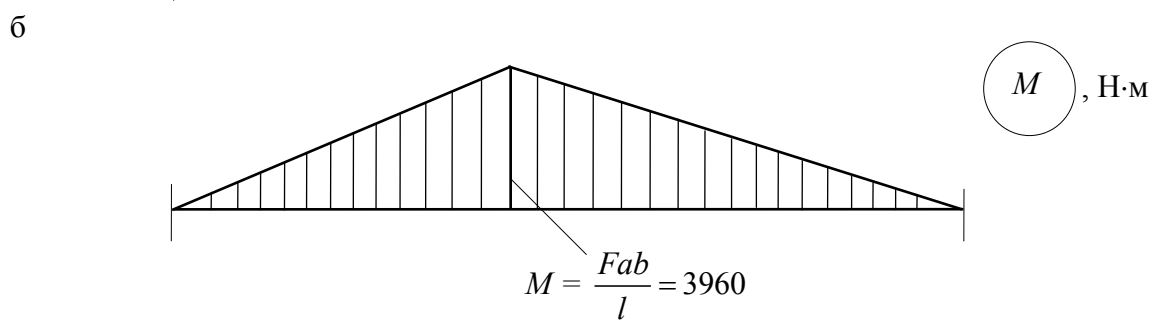
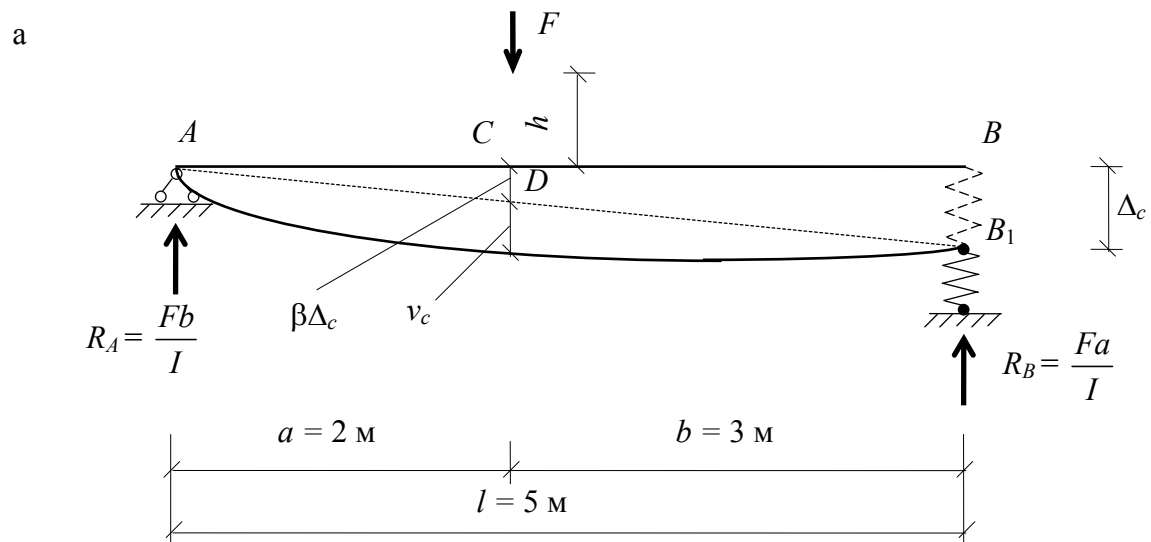


Рис. 8.4

Динамический коэффициент вычисляем по формуле (8.5):

$$\mu = 1 + \sqrt{1 + \frac{2 \cdot 12}{0,079}} = 18,46.$$

Динамический прогиб

$$v_d = \mu v_c = 18,46 \cdot 0,079 = 1,46 \text{ см.}$$

Наибольшее нормальное напряжение при статической нагрузке определяем по формуле

$$\sigma_c = \frac{M_{\max}}{W_x} = \frac{3960 \cdot 10^{-6}}{371 \cdot 10^{-6}} = 10,67 \text{ МПа.}$$

В момент удара

$$\sigma_d = \mu \cdot \sigma_c = 18,46 \cdot 10,67 = 197 \text{ МПа.}$$

2. *Определение нормальных напряжений в балке при наличии пружины.*  
Статический прогиб балки под силой при осадке пружины на величину  $\Delta_c$  равен (рис. 8.4, а):

$$v'_c = v_c + \beta \Delta_c.$$

Осадка пружины (коэффициент податливости  $\alpha = 30 \cdot 10^{-3}$  м/кН)

$$\Delta_c = R_B \alpha = \frac{Fa}{l} \alpha = \frac{3,3 \cdot 2}{5} \cdot 30 \cdot 10^{-3} = 39,6 \cdot 10^{-3} \text{ м.}$$

Величину коэффициента  $\beta$  находим из подобия треугольников  $ACD$  и  $ABB_1$  (рис. 8.4, а):

$$\beta = \frac{a}{l} = \frac{2}{5} = 0,4.$$

Тогда

$$v'_c = 0,079 + 0,4 \cdot 3,96 = 1,663 \text{ см.}$$

Динамический коэффициент

$$\mu' = 1 + \sqrt{1 + \frac{2 \cdot 12}{1,663}} = 4,928.$$

Динамическое напряжение

$$\sigma'_d = \mu' \cdot \sigma_c = 4,928 \cdot 10,67 = 52,58 \text{ МПа.}$$

Сравнивая полученное напряжение с  $\sigma_d = 197$  МПа, видим, что применение пружины взамен жесткой опоры снижает напряжение в момент удара в четыре раза.

**Пример 8.5.** Вычислить максимальные касательные напряжения при торможении вала диаметром  $D = 6,5$  см, вращающегося со скоростью  $n = 1000$  об/мин. После включения тормоза маховик сделал  $n_1 = 50$  оборотов. Момент инерции маховика  $I_0 = 500 \text{ Н} \cdot \text{м} \cdot \text{с}^2$ .

**Решение**

Максимальное касательное напряжение при кручении находим по формуле (3.4):

$$\tau = \frac{T}{W_p},$$

где  $W_p = \frac{\pi D^3}{16}$  – полярный момент сопротивления.

Динамический крутящий момент производит работу на угловом перемещении  $\theta$  и находится из выражения

$$T = \frac{A}{\theta} = \frac{A}{2\pi n_1}.$$

Величина работы равна кинетической энергии от вращения маховика:

$$A = K = \frac{I_0 \omega^2}{2},$$

где  $\omega$  – угловая скорость,

$$\omega = \frac{2\pi n}{60} = \frac{2 \cdot 3,14 \cdot 1000}{60} = 104,7 \frac{1}{c}.$$

Таким образом, крутящий момент

$$T = \frac{I_0 \omega^2}{2\theta} = \frac{500 \cdot 104,7^2}{2 \cdot 2 \cdot 3,14 \cdot 50} = 8728 \text{ Н} \cdot \text{м}.$$

Находим касательные напряжения:

$$\tau = \frac{8728 \cdot 16 \cdot 10^{-6}}{3,14 \cdot 6,5^3 \cdot 10^{-6}} = 162 \text{ МПа}.$$

### К о н т р о л ь н ы е в о п р о с ы

1. Какая нагрузка считается динамической?
2. В чем заключается принцип Даламбера?
3. Что называется коэффициентом динамичности?
4. Как уменьшить динамические напряжения?
5. Как влияет масса конструкции на величину коэффициента динамичности?
6. Какие допущения принимаются при расчёте на удар?
7. Как определить перемещения в балке с помощью интеграла Мора?
8. Как вычисляется динамический коэффициент при расчёте на удар?
9. Как определяется динамический коэффициент при движении с постоянным ускорением?
10. Как определяется динамический коэффициент при крутящем ударе?

## Раздел 9

### ОПРЕДЕЛЕНИЕ НАПРЯЖЕНИЙ В СТЕРЖНЕ ПРИ СОВМЕСТНОМ ДЕЙСТВИИ ИЗГИБА И ПРОДОЛЬНОЙ СИЛЫ

#### З а д а н и е

Стержень, поперечное сечение которого изображено на рис. 9.2, загружен согласно рис. 9.1.

Требуется:

1. Построить эпюры  $M_x$ ,  $M_y$  и  $N$ .
2. Определить положение нейтральной оси в опасном сечении.
3. Построить эпюру  $\sigma$  в опасном сечении.

Исходные данные взять из табл. 9.1 согласно шифру. При отрицательном знаке нагрузки её направление на рис. 9.1 изменить на противоположное.

Т а б л и ц а 9 . 1

Исходные данные

Номер строки	Тип сечения	$a$ , см	$b$ , см	$l$ , см	$F_z$ , Н	$q_x$ , Н/м	$q_y$ , Н/м	Точка приложения силы $F_z$
1	I	5	6	50	100	–	–20	1
2	II	10	7	55	110	–	30	2
3	III	7	8	60	120	20	–	3
4	IV	20	9	65	130	–25	–	4
5	V	12	10	70	–140	–	15	1
6	VI	8	11	75	–150	–	–25	2
7	VII	6	12	80	160	30	–	3
8	VIII	14	13	85	170	–20	–	2
9	IX	9	14	90	–180	–	–20	3
0	X	11	15	95	–190	–	–30	4
	$e$	$d$	$e$	$e$	$d$	$e$	$e$	$d$



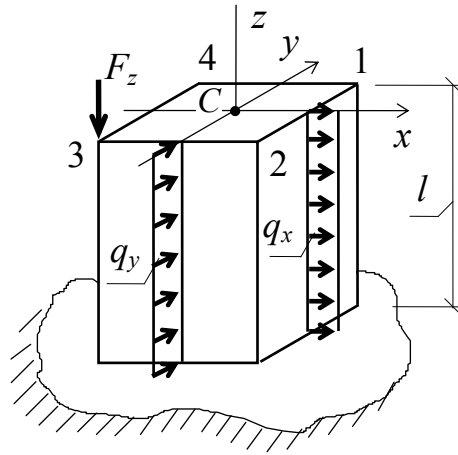


Рис. 9.1

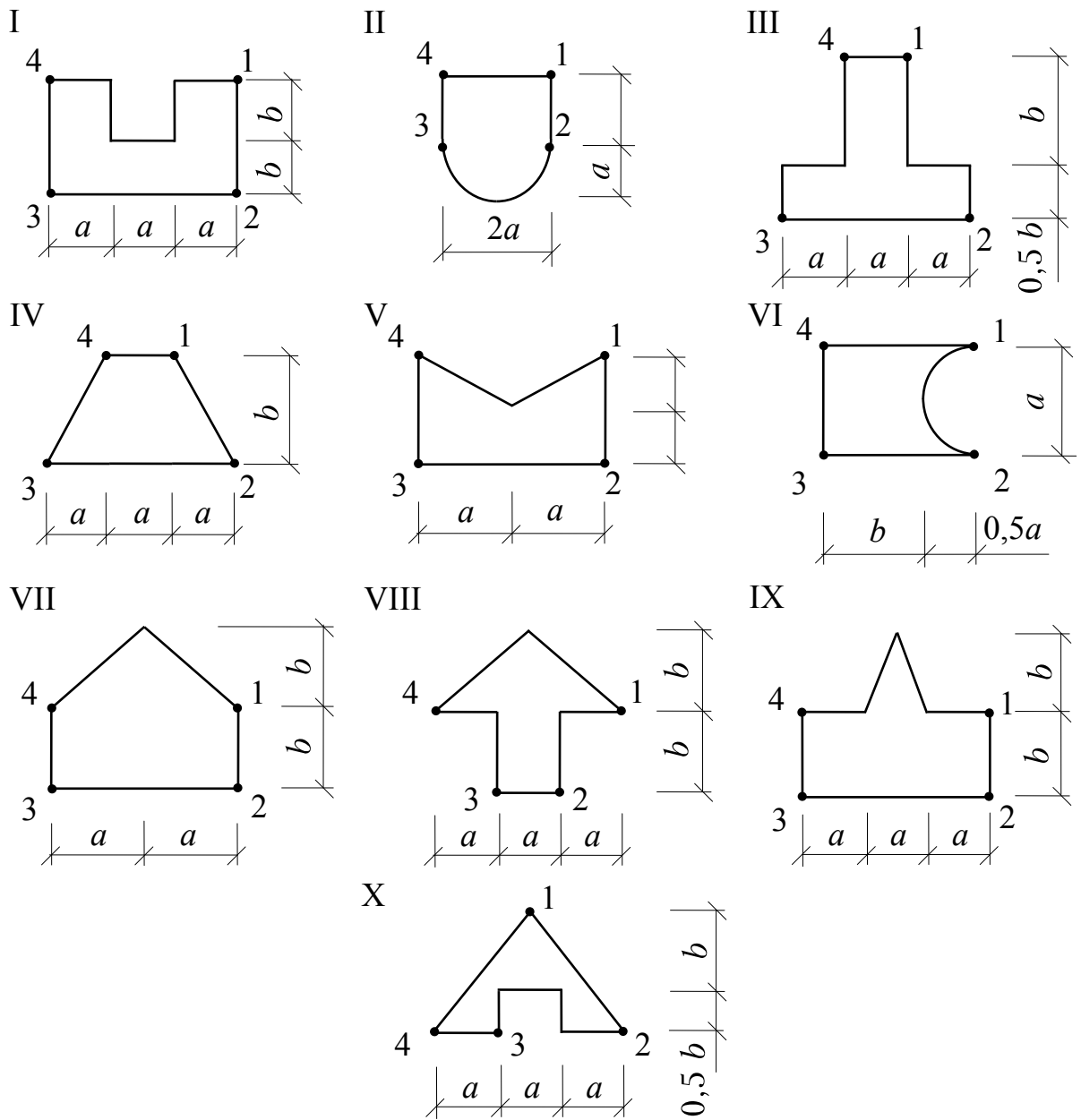


Рис. 9.2

## Теоретическая часть

При совместном действии изгиба и продольной силы (рис. 9.3,а) в поперечном сечении бруса могут возникать пять внутренних силовых факторов: продольная сила  $N$ , изгибающие моменты  $M_x$  и  $M_y$ ; поперечные силы  $Q_x$  и  $Q_y$ . Их величины определяются из уравнений равновесия. Например, в сечении 1–2–3–4 (рис. 9.3):

$$\begin{aligned} \sum z &= N - F_2 = 0; & N &= F_2; \\ \sum M_x &= M_x - F_1 a - F_2 \cdot 0,5h = 0; & M_x &= F_1 a + 0,5F_2 h; \\ \sum M_y &= M_y - F_2 \cdot 0,5b = 0; & M_y &= 0,5F_2 b; \\ \sum y &= F_1 - Q_y = 0; & Q_y &= F_1. \end{aligned}$$

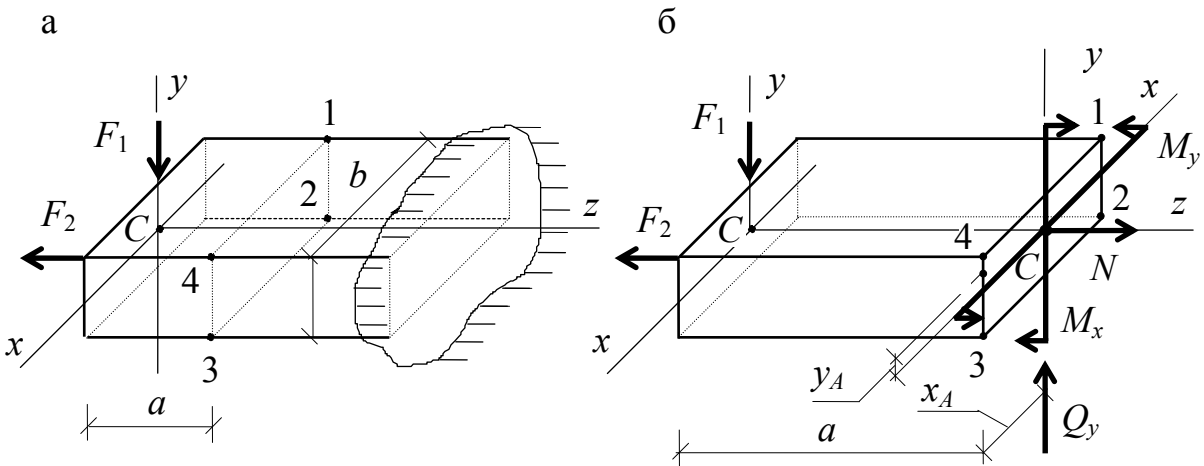


Рис. 9.3

Влиянием поперечных сил, а следовательно, и касательных напряжений на прочность бруса пренебрегаем.

На основании принципа независимости действия сил нормальное напряжение в некоторой точке  $A$  находится как алгебраическая сумма напряжений от каждого компонента внутренних усилий:

$$\sigma_A = \pm \frac{N}{A} \pm \frac{M_x}{I_x} y_A \pm \frac{M_y}{I_y} x_A, \quad (9.1)$$

где  $x_A$  и  $y_A$  – расстояния от точки  $A$  до главных центральных осей  $y$  и  $x$  (рис. 9.3, б);

$I_x, I_y$  – главные центральные осевые моменты инерции.

Перед усилием берется знак "плюс", если оно вызывает деформацию растяжения в рассматриваемой точке, и, наоборот, знак "минус", если возникает деформация сжатия (рис. 9.4).

На рис. 9.4 сплошной линией показано сечение до деформации, а пунктирной – после его перемещения под действием каждого из выделенных усилий:  $N$ ,  $M_x$ ,  $M_y$ .

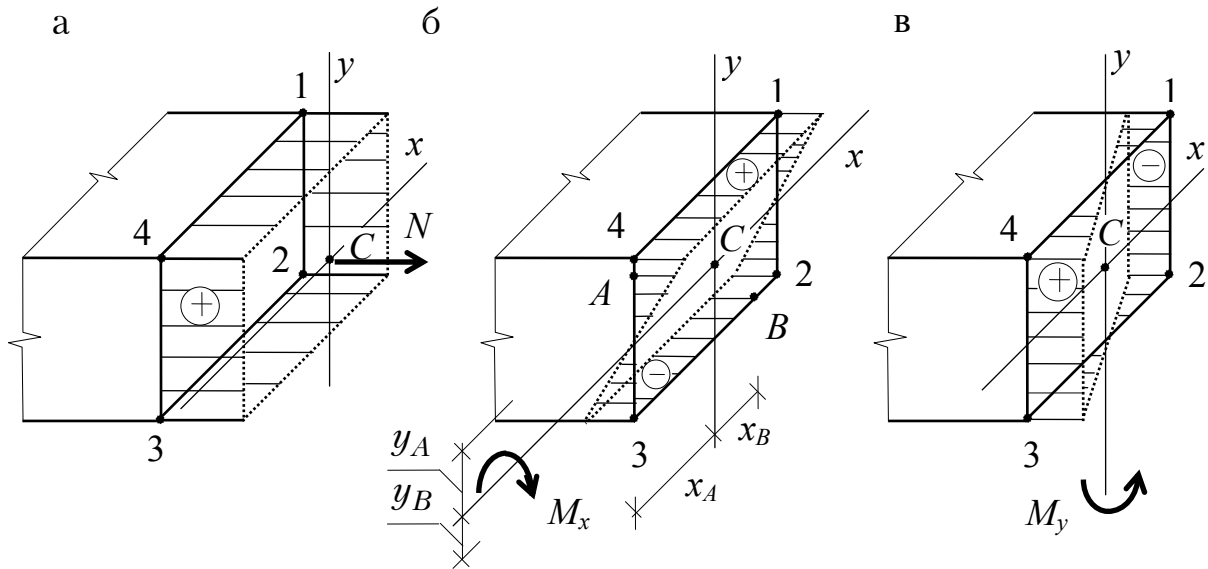


Рис. 9.4

Следовательно, если надо вычислить напряжения в точках  $A$  и  $B$ , то имеем:

$$\sigma_A = \frac{N}{A} + \frac{M_x}{I_x} y_A + \frac{M_y}{I_y} x_A; \quad \sigma_B = \frac{N}{A} - \frac{M_x}{I_x} y_B - \frac{M_y}{I_y} x_B.$$

При этом видно, что наибольшие перемещения возникают в угловых точках, наиболее удаленных от оси поворота. Поэтому в угловых точках получим:

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= \frac{N}{A} + \frac{M_x}{W_x} - \frac{M_y}{W_y}; & \sigma_2 &= \frac{N}{A} - \frac{M_x}{W_x} - \frac{M_y}{W_y}; \\ \sigma_3 &= \frac{N}{A} - \frac{M_x}{W_x} + \frac{M_y}{W_y}; & \sigma_4 &= \frac{N}{A} + \frac{M_x}{W_x} + \frac{M_y}{W_y}. \end{aligned}$$

Следовательно, наибольшие напряжения действуют в точке 4, где они складываются. Для этой точки условие прочности запишется в следующем виде:

$$\sigma_{\max} = \sigma_4 = \frac{N}{A} + \frac{M_x}{W_x} + \frac{M_y}{W_y} \leq [\sigma].$$

В общем случае, при произвольной форме поперечного сечения:

$$\sigma_{\max}^{\min} = \pm \frac{N}{A} \pm \frac{M_x}{I_x} y \pm \frac{M_y}{I_y} x \leq [\sigma]. \quad (9.2)$$

В сечениях сложной формы положение наиболее напряжённых точек может быть не столь очевидным. Тогда надо найти положение нейтральной оси, вокруг которой поворачивается поперечное сечение. В точках, наиболее удалённых от неё, возникают наибольшие напряжения. Уравнение нейтральной оси найдем из выражения (9.2) при  $\sigma_{\max} = 0$ :

$$y = -\frac{N}{M_x} \frac{I_x}{A} - \frac{M_y}{M_x} \frac{I_x}{I_y} x. \quad (9.3)$$

В формулу (9.3) подставляем усилия  $N$ ,  $M_x$  и  $M_y$  со своими знаками из I четверти осей координат. В рассматриваемом случае имеем:  $+N$ ,  $+M_x$ ,  $-M_y$  (рис. 9.5, а). Тогда выражение (9.3) преобразуется к виду

$$y = -\frac{N}{M_x} \frac{I_x}{A} + \frac{M_y}{M_x} \frac{I_x}{I_y} x. \quad (9.4)$$

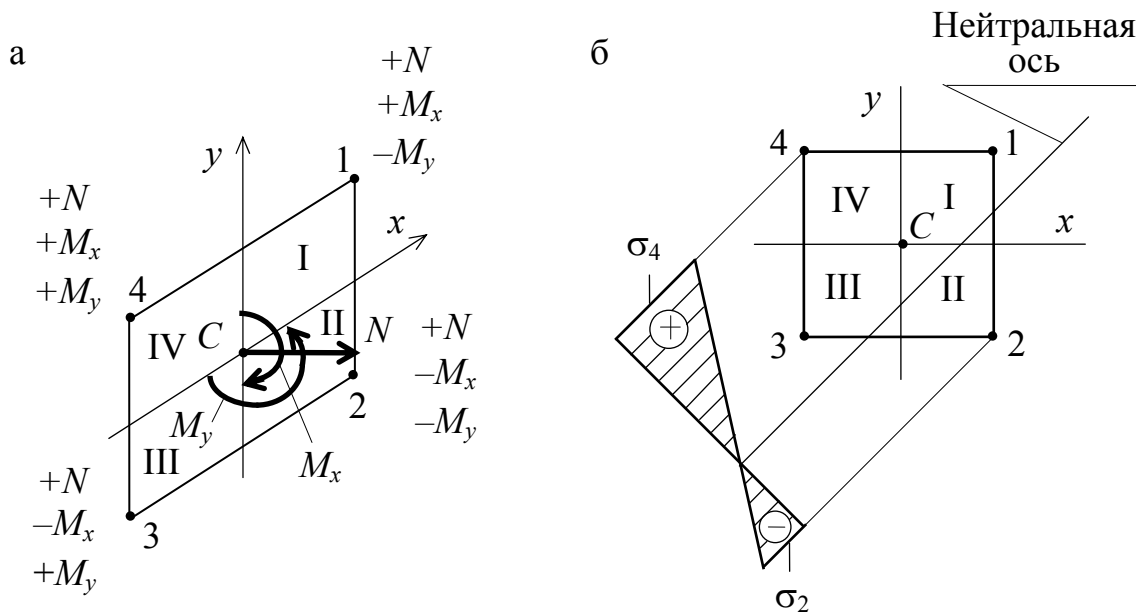


Рис. 9.5

Как видно из формулы (9.4), при  $x = 0$   $y < 0$ , а при  $y = 0$   $x > 0$ . Следовательно, нейтральная ось должна пересекать II четверть осей координат (рис. 9.5, б). Из рис. 9.5, б видно, что наиболее удалённой от нейтральной оси является точка 4. В ней возникает наибольшее напряжение. Оно будет растягивающим. В точке 2 действует сжимающее напряжение. Проводя из угловых точек прямые, параллельные и касательные к нейтральной оси, построим эпюру напряжений.

## Примеры решения задач

**Пример 9.1.** Консольная балка (рис. 9.6, а) загружена силой  $F$ , расположенной в плоскости  $yCz$ , составляющей с осью  $y$  угол  $\alpha = 30^\circ$ . Определить величину наибольших растягивающих и сжимающих напряжений.

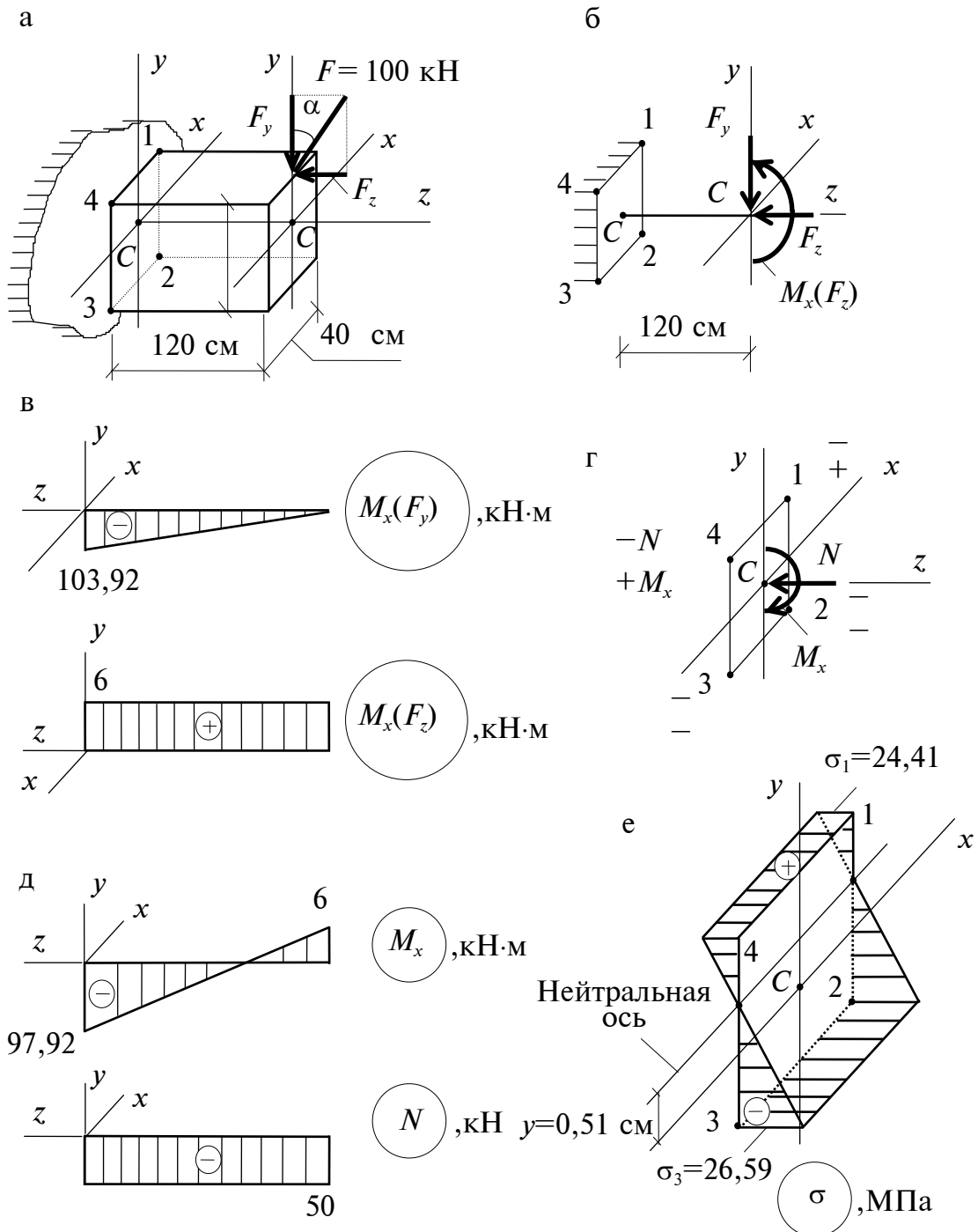


Рис. 9.6

## Р е ш е н и е

1. *Построение эпюр внутренних усилий.* Раскладываем внешнюю нагрузку  $F$  по координатным осям  $y$  и  $z$  и переносим её в центр тяжести:

$$F_z = F \sin 30^\circ = 100 \cdot 0,5 = 50 \text{ кН};$$

$$F_y = F \cos 30^\circ = 100 \cdot 0,866 = 86,6 \text{ кН};$$

$$M_x(F_z) = F_z \cdot 0,5h = 50 \cdot 0,5 \cdot 0,24 = 6 \text{ кН}; \quad N = F_z = 50 \text{ кН}.$$

Расчётная схема показана на рис. 9.6, б. Построение эпюр производим по правилам, изложенным в задаче № 4.

В заделке:

$$M_x = -F_y \cdot 1,2 + M_x(F_z) = -86,6 \cdot 1,2 + 6 = -97,92 \text{ кН}\cdot\text{м}$$

На свободном конце:

$$M_x = M_x(F_z) = 6 \text{ кН}\cdot\text{м}.$$

Откладываем найденные ординаты на эпюре  $M_x$  и соединяем их наклонной прямой (рис. 9.6, д). На рис. 9.6, в показаны эпюры моментов отдельно от каждой силы:  $F_y$  и  $M_x(F_z)$ . Опасное сечение в заделке, где  $|M_{\max}| = 97,92 \text{ кН}\cdot\text{м}$

2. *Определение положения нейтральной оси в опасном сечении.* Продольная сила  $N$  вызывает сжатие во всех точках поперечного сечения (знак минус). Изгибающий момент растягивает верхние волокна, и, следовательно, в точках 1 и 4 ставим знак "плюс" (рис. 9.6, г). С учётом знаков усилий в I четверти осей координат из уравнения (9.3) при  $M_y = 0$  получим:

$$y = -\frac{-N}{M_x} \frac{I_x}{A} = \frac{50(\text{кН}) \cdot 46080 \cdot 10^{-8} (\text{м}^4)}{97,92(\text{кН}\cdot\text{м}) \cdot 460 \cdot 10^{-4} (\text{м}^2)} = 0,0051 \text{ м} = 0,51 \text{ см},$$

где  $I_x = \frac{bh^3}{12} = \frac{40 \cdot 24^3}{12} = 46080 \text{ см}^4$ .

Заметим, что нейтральная ось параллельна оси  $x$  (рис. 9.6, е). Наибольшие напряжения сжатия возникают в точках 2 и 3. Они равны следующим величинам:

$$\begin{aligned} \sigma_2 = \sigma_3 &= -\frac{N}{A} - \frac{M_x}{I_x} y_{\max} = -\frac{50 \cdot 10^3}{460 \cdot 10^{-4}} - \frac{97,92 \cdot 10^3}{46080 \cdot 10^{-8}} 12 \cdot 10^{-2} = \\ &= -1,09 \cdot 10^6 \text{ Н/м}^2 - 25,5 \cdot 10^6 \text{ Н/м}^2 = -26,59 \text{ МПа}. \end{aligned}$$

Наибольшее растягивающее напряжение действует в точках 1 и 4:

$$\sigma_1 = \sigma_4 = -\frac{N}{A} + \frac{M_x}{I_x} = -1,09 + 25,5 = 24,41 \text{ МПа.}$$

Эпюра нормальных напряжений показана на рис. 9.6, е.

**Пример 9.2.** Стойка из двутавра № 18 нагружена сосредоточенной силой (рис. 9.7, а). Определить допускаемую нагрузку при  $[\sigma] = 200 \text{ МПа}$ .

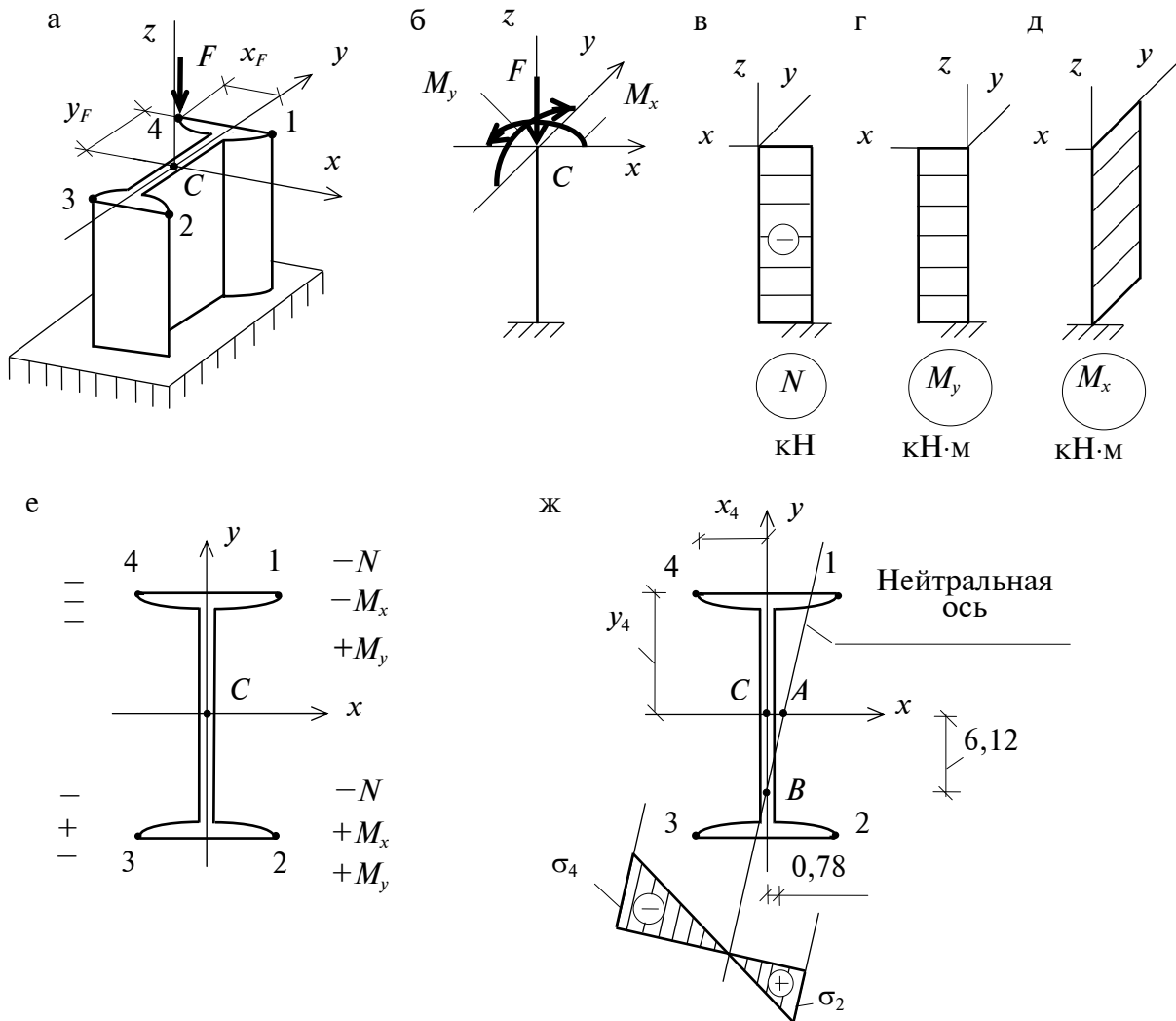


Рис. 9.7

### Решение

Из прил. 1 выписываем геометрические характеристики для двутавра № 18:

$$A = 23,4 \text{ см}^2, b = 9 \text{ см}, h = 18 \text{ см}, I_x = 1290 \text{ см}^4, I_y = 82,6 \text{ см}^4,$$

$$x_F = 4,5 \text{ см}, y_F = 9 \text{ см.}$$

1. *Построение эпюр внутренних усилий.* Переносим внешнюю силу в центр тяжести. Она создаёт изгибающие моменты:  $M_x = Fy_F$ ,  $M_y = Fx_F$ . Расчётная схема показана на рис. 9.7, б. Величина внутренних усилий не изменяется по длине стержня. Их эпюры строятся со стороны сжатого волокна в аксонометрии и показаны на рис. 9.7, в, г, д.

2. *Определение положения нейтральной оси.* Устанавливаем знаки деформаций в каждой четверти координат. Момент  $M_x$  изгибает стойку в направлении оси  $y$ , вызывая растяжение в точках 2 и 3 (знак "плюс") и сжатие в точках 1 и 4 (знак "минус"). От действия момента  $M_y$  в точках 1 и 2 появляется растяжение (знак "плюс"), а в точках 3 и 4 – сжатие (знак "минус"). Продольная сила  $N$  вызывает сжатие во всех точках поперечного сечения (знак "минус"). Подставляя усилия из I четверти осей координат со своими знаками в формулу (9.3), получим уравнение нейтральной оси:

$$y = -\frac{-N}{-M_x} \frac{I_x}{A} - \frac{M_y}{-M_x} \frac{I_x}{I_y} x = -\frac{F}{F \cdot y_F} \frac{I_x}{A} + \frac{F \cdot x_F}{F \cdot y_F} \frac{I_x}{I_y} x =$$

$$= -\frac{I_x}{A \cdot y_F} + \frac{x_F}{y_F} \frac{I_x}{I_y} x = -\frac{1290}{23,4 \cdot 9} + \frac{4,5}{9} \frac{1290}{82,6} x = -6,12 + 7,81x.$$

Отсюда при  $x = 0$   $y = -6,12$  см, а при  $y = 0$   $x = 0,78$  см. Следовательно, нейтральная ось проходит через точки  $A$  и  $B$  II-й четверти (рис. 9.7, ж).

3. *Вычисление допускаемой нагрузки.* Наибольшее напряжение по абсолютной величине возникает в точке 4 как наиболее удалённой от нейтральной оси. Из формулы (9.2) с учётом знаков усилий находим:

$$\sigma_4 = -\frac{N}{A} - \frac{M_x}{I_x} x_4 - \frac{M_y}{I_y} y_4 \leq [\sigma].$$

Выражая моменты через силу  $F$ , получим:

$$\sigma_4 = -\frac{F}{A} - \frac{Fy_F}{I_x} y_4 - \frac{Fx_F}{I_y} x_4 = -\frac{F}{A} \left( 1 + \frac{y_F y_4}{i_x^2} + \frac{x_F x_4}{i_y^2} \right) \leq [\sigma].$$

Отсюда при  $\sigma_4 = [\sigma] = 200$  МПа допускаемая нагрузка

$$F = \frac{A[\sigma]}{1 + \frac{y_F y_4}{i_x^2} + \frac{x_F x_4}{i_y^2}} = \frac{23,4 \cdot 10^{-4} \cdot 200 \cdot 10^6 \cdot 10^{-3}}{1 + \frac{9 \cdot 9}{55,13} + \frac{(-4,5)(-4,5)}{3,53}} = 57038 \text{ Н} = 57,04 \text{ кН},$$

здесь  $i_x^2$  и  $i_y^2$  – квадраты радиусов инерции,



$$i_x^2 = \frac{I_x}{A} = \frac{1290}{23,4} = 55,13 \text{ см}^2; \quad i_y^2 = \frac{I_y}{A} = \frac{82,6}{23,4} = 3,53 \text{ см}^2.$$

Отметим, что при определении силы  $F$  координаты точек подставляются со своими знаками.

**Пример 9.3.** Найти положение нейтральной оси и величины  $\sigma_{\max}$  и  $\sigma_{\min}$  в опасном сечении стержня (рис. 9.8, а).

### Решение

1. *Определение геометрических характеристик полученного сечения.* Сечение разбиваем на три фигуры: полукруг, прямоугольник  $40 \times 26$  см, вырез в виде треугольника. Находим расстояние от вспомогательной оси  $x_0$  до центра тяжести (см. задачу № 1) (рис. 9.8, б):

$$\begin{aligned} y_C &= \frac{\sum S_{x_0}}{\sum A} = \frac{S_{x_0}^{(1)} + S_{x_0}^{(2)} - S_{x_0}^{(3)}}{A^{(1)} + A^{(2)} - A^{(3)}} = \frac{A^{(1)} y_1 + A^{(2)} y_2 - A^{(3)} y_3}{A^{(1)} + A^{(2)} - A^{(3)}} = \\ &= \frac{628 \cdot 11,5 + 960 \cdot 32 - 180 \cdot 41}{628 + 960 - 180} = \frac{30562}{1408} = 21,71 \text{ см}. \end{aligned}$$

$$\text{Здесь } A^{(1)} = 0,5\pi R^2 = 0,5 \cdot 3,14 \cdot 20^2 = 628 \text{ см}^2;$$

$$y_1 = R - \frac{4R}{3\pi} = 20 - \frac{4 \cdot 20}{3 \cdot 3,14} = 11,5 \text{ см};$$

$$A^{(2)} = 40 \cdot 24 = 960 \text{ см}^2; \quad y_2 = 20 + 12 = 32 \text{ см};$$

$$A^{(3)} = 0,5 \cdot 40 \cdot 9 = 180 \text{ см}^2; \quad y_3 = 20 + 15 \cdot \left(9 - \frac{1}{3} \cdot 9\right) = 41 \text{ см}.$$

Через найденный центр тяжести проводим главные оси  $y$  и  $x$ . Заметим, что ось  $y$  является осью симметрии.

2. *Вычисление главных центральных моментов инерции.* Используя прил. 5, находим:

$$\begin{aligned} I_y &= I_y^{(1)} + I_y^{(2)} - I_y^{(3)} = \frac{\pi R^4}{2 \cdot 4} + \frac{h_2 b_2^3}{12} - \frac{h_3 b_3^3}{48} = \\ &= \frac{3,14 \cdot 20^4}{8} + \frac{24 \cdot 40^3}{12} - \frac{9 \cdot 40^3}{48} = 178800 \text{ см}^4. \end{aligned}$$

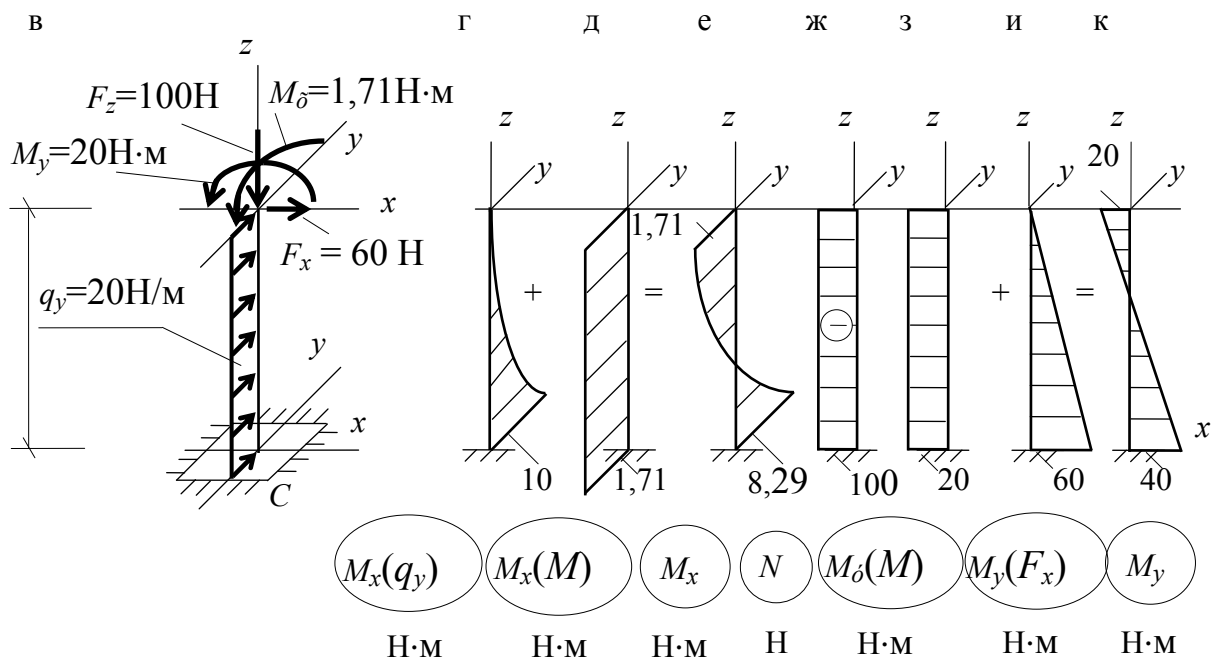
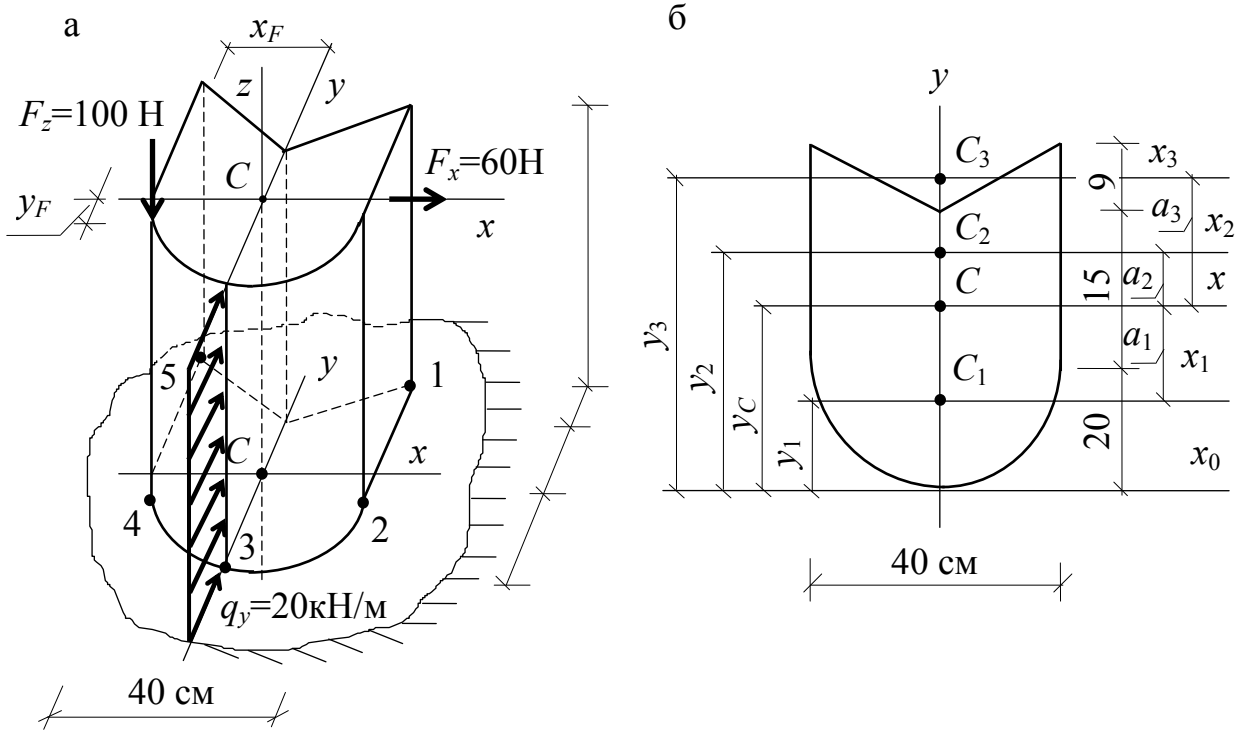


Рис. 9.8

Чтобы найти второй момент инерции, используем формулу (1.7) для параллельного переноса осей:

$$\begin{aligned} I_x &= I_x^{(1)} + I_x^{(2)} - I_x^{(3)} = \\ &= I_{x_1}^{(1)} + A^{(1)} \cdot a_1^2 + I_{x_2}^{(2)} + A^{(2)} \cdot a_2^2 - (I_{x_3}^{(3)} + A^{(3)} \cdot a_3^2) = \\ &= 17600 + 628(-10,21)^2 + 46080 + 960 \cdot 10,29^2 - (810 + 180 \cdot 19,29^2) = \\ &= 103951,87 \text{ см}^4, \end{aligned}$$

Здесь

$$I_{x_1}^{(1)} = 0,11R^4 = 0,11 \cdot 20^4 = 17600 \text{ см}^4;$$

$$I_{x_2}^{(2)} = \frac{b_2 h_2^3}{12} = \frac{40 \cdot 24^3}{12} = 46080 \text{ см}^4;$$

$$I_{x_3}^{(3)} = \frac{b_3 h_3^3}{36} = \frac{40 \cdot 9^3}{36} = 810 \text{ см}^4;$$

$$a_1 = y_1 - y_C = 11,5 - 21,71 = -10,21 \text{ см};$$

$$a_2 = y_2 - y_C = 32 - 21,71 = 10,29 \text{ см};$$

$$a_3 = y_3 - y_C = 41 - 21,71 = 19,29 \text{ см}.$$

3. *Построение эпюр внутренних усилий.* Переносим все силы в центр тяжести. В результате от силы  $F_z$  появляются изгибающие моменты относительно осей  $x$  и  $y$ :

$$M_x = F_z \cdot y_F = 100 \cdot 0,0171 = 1,71 \text{ Н} \cdot \text{м},$$

$$M_y = F_z \cdot x_F = 100 \cdot 0,2 = 20 \text{ Н} \cdot \text{м},$$

где  $y_F = 20 - y_C = 20 - 21,71 = -1,71 \text{ см};$

$$x_F = 20 \text{ см}.$$

Заметим, что при переносе  $F_x$  и  $q_y$  в центр тяжести изгибающие моменты не появляются.

Построение эпюр производим отдельно для каждой нагрузки (рис. 9.8, г–к). Изгибающий момент откладываем со стороны сжатого волокна в аксонометрии. Одноименные эпюры складываем алгебраически.

Определяем изгибающий момент от распределённой нагрузки (рис. 9.8, г):

$$M_x(q_y) = 0,5q_y l^2 = 0,5 \cdot 20 \cdot 1 = 10 \text{ Н} \cdot \text{м}.$$

От сосредоточенного момента  $M_x$  на свободном конце эпюра  $M_x(M) = 1,71 \text{ Н} \cdot \text{м}$  постоянна. Результирующий момент в заделке (рис.9.8, е)

$$M_x = M_x(q_y) - M_x(M) = 10 - 1,71 = 8,29 \text{ Н} \cdot \text{м}.$$

Эпюра продольных сил постоянна  $N = F_y = 100$  Н (рис. 9.8, ж). От сосредоточенного момента  $M_y = 20$  кН·м эпюра  $M_y(M)$  постоянна (рис. 9.8, з). От силы  $F_x = 60$  Н стержень изгибается слева направо с  $M_y(F_x) = F_x \cdot l = 60$  Н·м (рис. 9.8, и). Результирующий момент в заделке (рис. 9.8, к)

$$M_y = M_y(F_x) - M_y(M) = 60 - 20 = 40 \text{ Н} \cdot \text{м}.$$

Анализ эпюр  $M_x$ ,  $M_y$  и  $N$  показывает, что опасное сечение находится в заделке (рис. 9.8, а). Определяем в этом сечении знаки усилий в каждой четверти координат (рис. 9.9, а). Напомним, что если от усилия возникают сжимающие деформации, например от  $M_x$  в I четверти осей координат, то ставим знак "минус". И, наоборот, при растяжении, например во II четверти от  $M_x$ , берем знак "плюс".

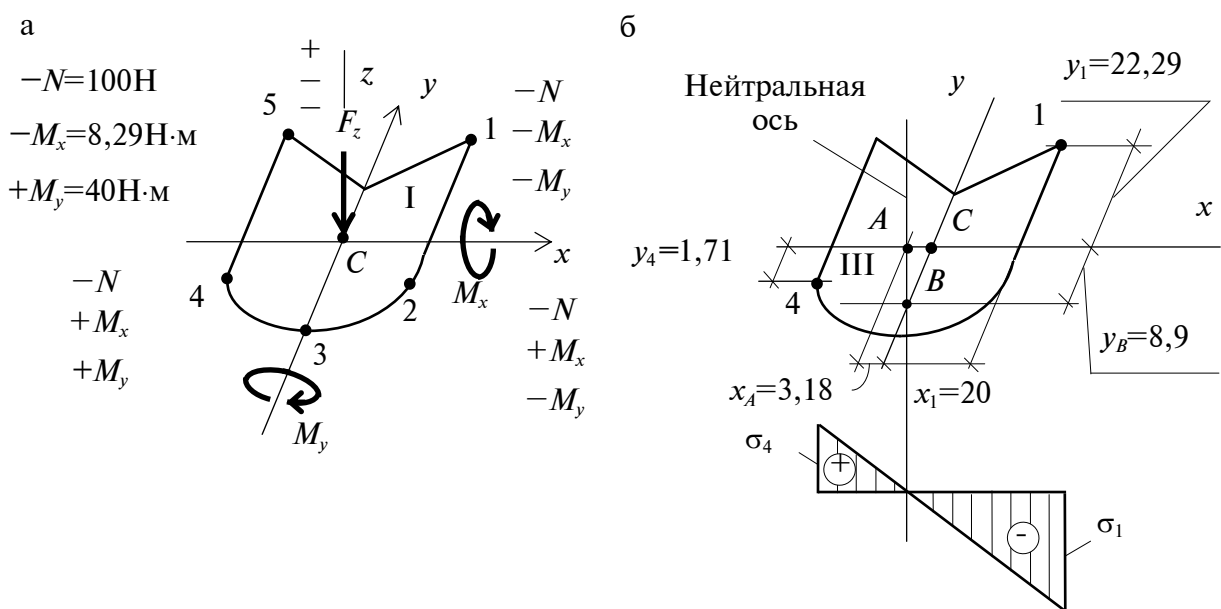


Рис. 9.9

4. *Определение положения нейтральной оси.* Уравнение нейтральной оси находим из формулы (9.3), подставляя знаки усилий из I четверти осей координат.

Имеем:

$$y = -\frac{-NI_x}{-M_x A} - \frac{-M_y I_x}{-M_x I_y} x = -\frac{100 \text{ (Н)} \cdot 103951,87 \text{ (см}^4\text{)}}{829 \text{ (Н} \cdot \text{см)} \cdot 1408 \text{ (см}^2\text{)}} - \frac{4000 \text{ (Н} \cdot \text{см)} \cdot 103951,87 \text{ (см}^4\text{)}}{829 \text{ (Н} \cdot \text{см)} \cdot 178800 \text{ (см}^4\text{)}} = -8,9 - 2,8x.$$

При  $x = 0$   $y = -8,9$  см. Если  $y = 0$ , то  $x = -3,18$  см.

Таким образом, нейтральная ось проходит через точки А и В и III четверть осей координат (рис. 9.9, б). Наиболее удаленной от неё, а следовательно, и наиболее напряжённой, является точка 1. С учётом знаков усилий по формуле (9.2) находим напряжения (рис. 9.9, б):

$$\begin{aligned}\sigma_1 &= -\frac{N}{A} - \frac{M_x}{J_x} y_1 - \frac{M_y}{J_y} x_1 = -\frac{100(\text{Н})}{1408 \cdot 10^{-4}(\text{м}^2)} - \\ & - \frac{8,29(\text{Н} \cdot \text{м}) \cdot 22,29 \cdot 10^{-2}(\text{м})}{103951,87 \cdot 10^{-8}(\text{м}^4)} - \frac{40(\text{Н} \cdot \text{м}) \cdot 20 \cdot 10^{-2}(\text{м})}{178800 \cdot 10^{-8}(\text{м}^4)} = \\ & = -6962 \text{ Н/м}^2; \\ \sigma_4 &= -\frac{N}{A} + \frac{M_x}{J_x} y_4 + \frac{M_y}{J_y} x_4 = -\frac{100}{1408 \cdot 10^{-4}} + \frac{8,29 \cdot 1,71 \cdot 10^{-2}}{103951,87 \cdot 10^{-8}} + \\ & + \frac{40 \cdot 20 \cdot 10^{-2}}{178800 \cdot 10^{-8}} = 3900 \text{ Н/м}^2,\end{aligned}$$

где  $y_1, x_1$  и  $y_4, x_4$  – координаты точек 1 и 4 без учёта их знаков:

$$y_1 = 44 - y_C = 44 - 21,71 \text{ см} = 22,29 \text{ см}; x_1 = 20 \text{ см};$$

$$y_4 = y_C - 20 = 21,71 - 20 = 1,71 \text{ см}; x_4 = 20 \text{ см}.$$

### Контрольные вопросы

1. В чем заключается принцип независимости действия сил?
2. Как определить нормальное напряжение при совместном действии изгиба и продольной силы?
3. Как определить положение опасного сечения?
4. Как установить координаты наиболее напряжённой точки?
5. Как найти положение нейтральной оси при совместном действии изгиба и продольной силы?
6. Когда брус испытывает внецентренное сжатие (растяжение)?
7. Запишите условие прочности при внецентренном сжатии.
8. Как определить допускаемую нагрузку при внецентренном сжатии?
9. Когда брус испытывает кривой изгиб?
10. Как записывается условие прочности при кривом изгибе?
11. Как определить положение нейтральной оси при кривом изгибе?
12. Какие оси называются главными центральными осями инерции?
13. Как определить положение главных центральных осей?

14. Как определить величину осевых моментов инерции относительно центральных осей сложной фигуры, используя формулу параллельного переноса осей?

15. В какой точке бруса будут возникать наибольшие сжимающие и растягивающие напряжения (рис. 9.10, 9.11, 9.12 и 9.13)?

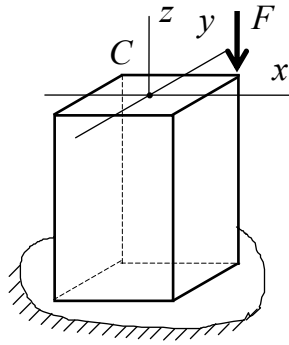


Рис. 9.10

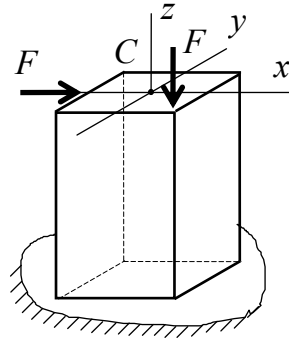


Рис. 9.11

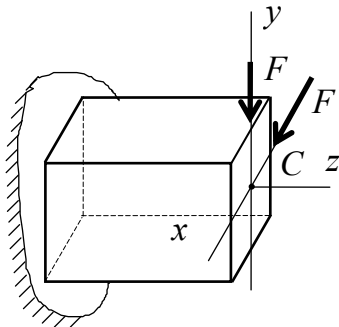


Рис. 9.12

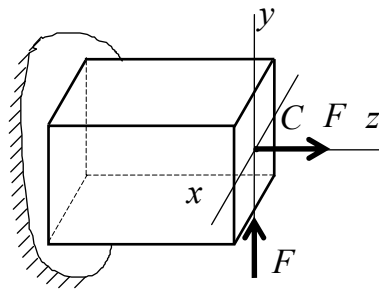


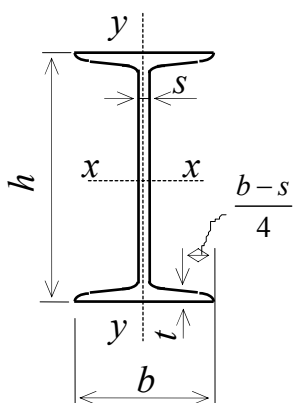
Рис. 9.13

## БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Феодосьев, В.И. Сопротивление материалов [Текст] / В.И. Феодосьев. – М.: Высшая школа, 2000.
2. Черячукин, В.В. Лекции по технической механике для студентов-строителей [Текст] / В.В. Черячукин. – Пенза: ПГУАС, 2012.
3. Качурин, В.К. Сборник задач по сопротивлению материалов [Текст] / В.К. Качурин [и др.]. – М.: Наука, 1970.
4. Ицкович, Г.М. Сопротивление материалов [Текст] / Г.М. Ицкович. – М.: Высшая школа, 1998.
5. Александров, А.В. Сопротивление материалов [Текст] / А.В. Александров. – М.: Высшая школа, 1995.

# ПРИЛОЖЕНИЯ

## Приложение 1 ДВУТАВРЫ СТАЛЬНЫЕ ГОРЯЧЕКАТАНЫЕ (по ГОСТ 8239-89)



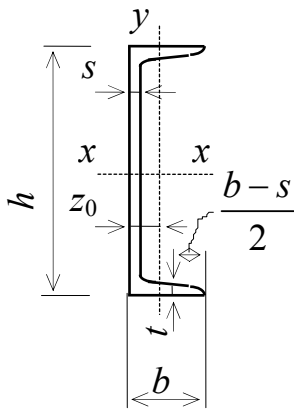
- $h$  — высота двутавра
- $b$  — ширина полки
- $s$  — толщина стенки
- $t$  — средняя толщина полки
- $A$  — площадь поперечного сечения
- $I$  — момент инерции
- $W$  — момент сопротивления
- $S$  — статический момент  
полусечения
- $i$  — радиус инерции

Номер дву- тавра	Масса 1 м, кг	Размеры, мм				$A$ , см <sup>2</sup>	$I_x$ , см <sup>4</sup>	$W_{x_0}$ , см <sup>3</sup>	$i_x$ , см	$S_x$ , см <sup>3</sup>	$I_y$ , см <sup>4</sup>	$W_y$ , см <sup>3</sup>	$i_y$ , см
		$h$	$b$	$s$	$t$								
10	9,46	100	55	4,5	7,2	12	198	39,7	4,06	23	17,9	6,49	1,22
12	11,5	120	64	4,8	7,3	14,7	350	58,4	4,88	33,7	27,9	8,72	1,38
14	13,7	140	73	4,9	7,5	17,4	572	81,7	5,73	46,8	41,9	11,5	1,55
16	15,9	160	81	5	7,8	20,2	873	109	6,57	62,3	58,6	14,5	1,7
18	18,4	180	90	5,1	8,1	23,4	1290	143	7,42	81,4	82,6	18,4	1,88
20	21	200	100	5,2	8,4	26,8	1840	184	8,28	104	115	23,1	2,07
22	24	220	110	5,4	8,7	30,6	2550	232	9,13	131	157	28,6	2,27
24	27,3	240	115	5,6	9,5	34,8	3460	289	9,97	163	198	34,5	2,37
27	31,5	270	125	6	9,8	40,2	5010	371	11,2	210	260	41,5	2,54
30	36,5	300	135	6,5	10,2	46,5	7080	472	12,3	268	337	49,9	2,69
33	42,2	330	140	7	11,2	53,8	9840	597	13,5	339	419	59,9	2,79
36	48,6	360	145	7,5	12,3	61,9	13380	743	14,7	423	516	71,1	2,89
40	57	400	155	8,3	13	72,6	19062	953	16,2	545	667	86,1	3,03
45	66,5	450	160	9	14,2	84,7	27696	1231	18,1	708	808	101	3,09
50	78,5	500	170	10	15,2	100	39727	1589	19,9	919	1043	123	3,23
55	92,6	550	180	11	16,5	118	55962	2035	21,8	1181	1356	151	3,39
60	108	600	190	12	17,8	138	76806	2560	23,6	1491	1725	182	3,54



Приложение 2

**ШВЕЛЛЕРЫ СТАЛЬНЫЕ ГОРЯЧЕКАТАНЫЕ**  
(по ГОСТ 8240-89)

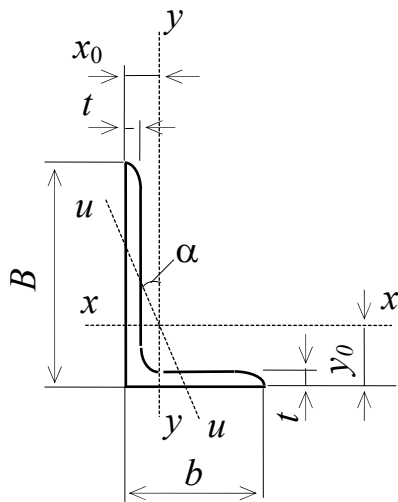


- $h$  — высота швеллера  
 $b$  — ширина полки  
 $s$  — толщина стенки  
 $t$  — средняя толщина полки  
 $A$  — площадь поперечного сечения  
 $I$  — момент инерции  
 $W$  — момент сопротивления  
 $S$  — статический момент  
 полусечения  
 $i$  — радиус инерции  
 $z_0$  — расстояние от оси  $y$  до наружной грани стенки

Номер швеллера	Масса 1 м, кг	Размеры, мм				$A$ , см <sup>2</sup>	$I_x$ , см <sup>4</sup>	$W_{x_1}$ , см <sup>3</sup>	$i_x$ , см	$S_x$ , см <sup>3</sup>	$I_y$ , см <sup>4</sup>	$W_{y_1}$ , см <sup>3</sup>	$i_y$ , см	$z_0$ , см
		$h$	$b$	$s$	$t$									
5	4,84	50	32	4,4	7	6,16	22,8	9,1	1,92	5,59	5,61	2,75	0,95	1,16
6,5	5,9	65	36	4,4	7,2	7,51	48,6	15	2,54	9	8,7	3,68	1,08	1,24
8	7,05	80	40	4,5	7,4	8,98	89,4	22,4	3,16	13,3	12,8	4,75	1,19	1,31
10	8,59	100	46	4,5	7,6	10,9	174	34,8	3,99	20,4	20,4	6,46	1,37	1,44
12	10,4	120	52	4,8	7,8	13,3	304	50,6	4,78	29,6	31,2	8,52	1,53	1,54
14	12,3	140	58	4,9	8,1	15,6	491	70,2	5,6	40,8	45,4	11	1,7	1,67
16	14,2	160	64	5	8,4	18,1	747	93,4	6,42	54,1	63,3	13,8	1,87	1,8
16a	15,3	160	68	5	9	19,5	823	103	6,49	59,4	78,8	16,4	2,01	2
18	16,3	180	70	5,1	8,7	20,7	1090	121	7,24	69,8	86	17	2,04	1,94
18a	17,4	180	74	5,1	9,3	22,2	1190	132	7,32	76,1	105	20	2,18	2,13
20	18,4	200	76	5,2	9	23,4	1520	152	8,07	87,8	113	20,5	2,2	2,07
22	21	220	82	5,4	9,5	26,7	2110	192	8,89	110	151	25,1	2,37	2,21
24	24	240	90	5,6	10	30,6	2900	242	9,73	139	208	31,6	2,6	2,42
27	27,7	270	95	6	10,5	35,2	4160	308	10,9	178	262	37,3	2,73	2,47
30	31,8	300	100	6,5	11	40,5	5810	387	12	224	327	43,6	2,84	2,52
33	36,5	330	105	7	11,7	46,5	7980	484	13,1	281	410	51,8	2,97	2,59
36	41,9	360	110	7,5	12,6	53,4	10820	601	14,2	350	513	61,7	3,1	2,68
40	48,3	400	115	8	13,5	61,5	15220	761	15,7	444	642	73,4	3,23	2,75

Приложение 3

УГОЛКИ СТАЛЬНЫЕ ГОРЯЧЕКАТАНЫЕ НЕРАВНОПОЛОЧНЫЕ  
(по ГОСТ 8510-86)

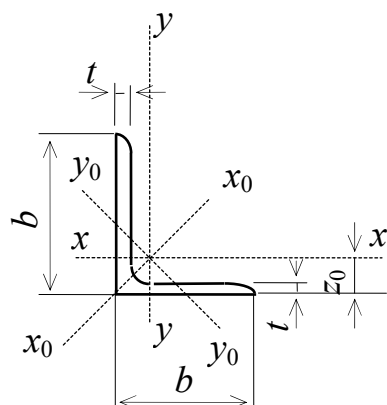


- $B$  — ширина большей полки
- $b$  — ширина меньшей полки
- $t$  — толщина полки
- $A$  — площадь поперечного сечения
- $I$  — момент инерции
- $i$  — радиус инерции
- $\alpha$  — угол наклона главной центральной оси
- $I_{xy}$  — центробежный момент инерции
- $x_0, y_0$  — расстояние от центра тяжести до наружных граней полкок

Номер уголка	Масса 1 м, кг	Размеры, мм			$A, \text{см}^2$	$I_x, \text{см}^4$	$i_x, \text{см}$	$I_y, \text{см}^4$	$i_y, \text{см}$	$I_{\min}, \text{см}^4$	$i_{\min}, \text{см}$	$\text{tg } \alpha$	$ I_{xy} , \text{см}^4$	$x_0, \text{см}$	$y_0, \text{см}$
		$B$	$b$	$t$											
5/3,2	2,4	50	32	4	3,17	7,98	1,59	2,56	0,90	1,52	0,69	0,401	2,59	0,76	1,65
7,5/5	4,79	75	50	5	6,11	34,8	2,39	12,5	1,43	7,24	1,09	0,436	12	1,17	2,39
9/5,6	6,7	90	56	6	8,54	70,6	2,88	21,2	1,58	12,7	1,22	0,384	22,5	1,28	2,95
10/6,3	7,53	100	63	6	9,58	98,3	3,2	30,6	1,79	18,2	1,38	0,393	31,5	1,42	3,23
	8,7			7	11,1	113	3,19	35	1,78	20,8	1,37	0,392	36,1	1,46	3,28
	9,87			8	12,6	127	3,18	39,2	1,77	23,4	1,36	0,391	40,5	1,5	3,32
11/7	10,9	110	70	8	13,9	172	3,51	54,6	1,98	32,3	1,52	0,4	55,9	1,64	3,61
12,5/8	11	125	80	7	14,1	227	4,01	73,7	2,29	43,4	1,76	0,407	74,7	1,8	4,01
	12,6			8	16	256	4	83	2,28	48,8	1,75	0,406	84,1	1,84	4,05
	15,5			10	19,7	312	3,98	100	2,26	59,3	1,74	0,404	102	1,92	4,14
14/9	14,1	140	90	8	18	364	4,49	120	2,58	70,3	1,98	0,411	121	2,03	4,49
	17,5			10	22,2	444	4,47	146	2,56	85,5	1,96	0,409	147	2,12	4,58
16/10	18	160	100	9	22,9	606	5,15	186	2,85	110	2,2	0,391	194	2,24	5,19
	19,8			10	25,3	667	5,13	204	2,84	121	2,19	0,39	213	2,28	5,23
	23,6			12	30	784	5,11	239	2,82	142	2,18	0,388	249	2,36	5,32
18/11	22,2	180	110	10	28,3	952	5,8	276	3,12	165	2,42	0,376	295	2,44	5,88
	26,4			12	33,7	1123	5,77	324	3,1	194	2,4	0,374	348	2,52	5,97
20/12,5	27,4	200	125	11	34,9	1449	6,45	446	3,58	264	2,75	0,392	465	2,79	6,5
	29,7			12	37,9	1568	6,43	482	3,57	285	2,74	0,392	503	2,83	6,54
	34,4			14	43,9	1801	6,41	551	3,54	327	2,73	0,39	573	2,91	6,62
	39,1			16	49,8	2026	6,38	617	3,52	367	2,72	0,388	643	2,99	6,71

Приложение 4

УГОЛКИ СТАЛЬНЫЕ ГОРЯЧЕКАТАНЫЕ РАВНОПОЛОЧНЫЕ  
(по ГОСТ 8509-93)



$b$  — ширина полки  
 $t$  — толщина полки  
 $A$  — площадь поперечного сечения  
 $I$  — момент инерции  
 $i$  — радиус инерции  
 $I_{xy}$  — центробежный момент инерции  
 $z_0$  — расстояние от центра тяжести до наружной грани полки

Номер уголка	Масса 1 м кг	Размеры, мм		$A$ , см <sup>2</sup>	$I_x$ , см <sup>4</sup>	$i_x$ , см	$I_{x0max}$ , см <sup>4</sup>	$i_{x0max}$ , см	$I_{y0min}$ , см <sup>4</sup>	$i_{y0min}$ , см	$ I_{xy} $ , см <sup>4</sup>	$z_0$ , см
		$b$	$t$									
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
5	3,05	50	4	3,89	9,21	1,54	14,6	1,94	3,8	0,99	5,42	1,38
	3,77		5	4,8	11,2	1,53	17,8	1,92	4,63	0,98	6,57	1,42
5,6	3,44	56	4	4,38	13,1	1,73	20,8	2,18	5,41	1,11	7,69	1,52
	4,25		5	5,41	16	1,72	25,4	2,16	6,59	1,1	9,41	1,57
6,3	3,9	63	4	4,96	18,9	1,95	29,9	2,45	7,81	1,25	11	1,69
	4,81		5	6,13	23,1	1,94	36,8	2,44	9,52	1,25	13,7	1,74
	5,72		6	7,28	27,1	1,93	42,9	2,43	11,2	1,24	15,9	1,78
7	5,38	70	5	6,86	31,9	2,16	50,7	2,72	13,2	1,39	18,7	1,9
	6,39		6	8,15	37,6	2,15	59,6	2,71	15,5	1,38	22,1	1,94
7,5	5,8	75	5	7,39	39,5	2,31	62,6	2,91	16,4	1,49	23,1	2,02
	6,89		6	8,78	46,6	2,3	73,9	2,9	19,3	1,48	27,3	2,06
	7,96		7	10,1	53,3	2,29	84,6	2,89	22,1	1,48	31,2	2,1
8	6,78	80	5,5	8,63	52,7	2,47	83,6	3,11	21,8	1,59	30,9	2,17
	7,36		6	9,38	57	2,47	90,4	3,11	23,5	1,58	33,4	2,19
	8,51		7	10,8	65,3	2,45	104	3,09	27	1,58	38,3	2,23
9	8,33	90	6	10,6	82,1	2,78	130	3,5	34	1,79	48,1	2,43
	9,64		7	12,3	94,3	2,77	150	3,49	38,9	1,78	55,4	2,47
	10,9		8	13,9	106	2,76	168	3,48	43,8	1,77	62,3	2,51
10	10,8	100	7	13,8	131	3,08	207	3,88	54,2	1,98	76,4	2,71
	12,2		8	15,6	147	3,07	233	3,87	60,9	1,98	86,3	2,75
	15,1		10	19,2	179	3,05	284	3,84	74,1	1,96	105	2,83
	17,9		12	22,8	209	3,03	331	3,81	86,9	1,95	122	2,91

Окончание прил. 4

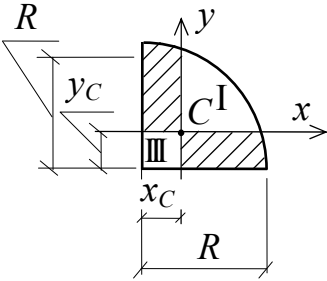
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
11	11,9	110	7	15,2	176	3,4	279	4,29	72,7	2,19	106	2,96
	13,5		8	17,2	198	3,39	315	4,28	81,8	2,18	116	3
12,5	15,5	125	8	19,7	294	3,87	467	4,87	122	2,49	172	3,36
	17,3		9	22	327	3,86	520	4,86	136	2,48	192	3,4
	19,1		10	24,3	360	3,85	571	4,84	149	2,47	211	3,45
	22,7		12	28,9	422	3,82	670	4,82	174	2,46	248	3,53
14	19,4	140	9	24,7	466	4,34	739	5,47	192	2,79	274	3,78
	21,5		10	27,3	512	4,33	814	5,46	211	2,78	301	3,82
	25,5		12	32,5	602	4,31	957	5,43	248	2,76	354	3,9
16	24,7	160	10	31,4	774	4,96	1229	6,25	319	3,19	455	4,3
	27		11	34,4	844	4,95	1340	6,24	348	3,18	496	4,35
	29,4		12	37,4	913	4,94	1450	6,23	376	3,17	537	4,39
	34		14	43,6	1046	4,92	1662	6,2	431	3,16	615	4,47
	38,5		16	49,1	1175	4,89	1866	6,17	485	3,14	690	4,55
18	30,5	180	11	38,8	1216	5,6	1933	7,06	500	3,59	716	4,85
	33,1		12	42,2	1317	5,59	2093	7,04	540	3,58	776	4,89

ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ПРОСТЕЙШИХ ФИГУР

- $A$  — площадь поперечного сечения
- $I$  — момент инерции
- $I_p$  — полярный момент инерции
- $I_{xy}$  — центробежный момент инерции

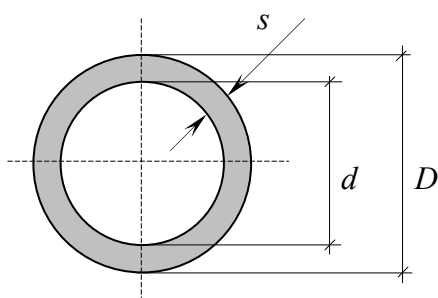
Поперечное сечение	Формулы
1	2
	<p>Прямоугольник</p> $A = bh; I_x = \frac{bh^3}{12}; I_y = \frac{hb^3}{12}; I_{xy} = 0;$ $I_{x_1} = \frac{bh^3}{3}; I_{y_1} = \frac{hb^3}{3}.$
	<p>Квадрат</p> $A = a^2; I_x = I_y = \frac{a^4}{12} = \frac{h^4}{48}; I_{xy} = 0.$
	<p>Треугольник</p> $A = \frac{bh}{2}; I_x = \frac{bh^3}{36}; I_{x_1} = \frac{bh^3}{12}; I_{x_2} = \frac{bh^3}{4};$ $d = \frac{x - x'}{3}; I_y = \frac{bh(b^2 - xx')}{36}; I_{y_1} = \frac{h(x')^3 + x^3}{12}.$
	<p>Равнобедренный треугольник</p> $A = \frac{bh}{2}; I_x = \frac{bh^3}{36}; I_{xy} = 0;$ $I_{x_1} = \frac{bh^3}{12}; I_y = \frac{hb^3}{48}; I_{x_1 y} = 0.$

1	2
	<p>Прямоугольный треугольник*</p> $A = \frac{bh}{2}; I_x = \frac{bh^3}{36}; I_{x_1} = \frac{bh^3}{12}; I_{x_2} = \frac{bh^3}{4};$ $I_{y_1} = \frac{hb^3}{12}; I_y = \frac{hb^3}{36};  I_{xy}  = \frac{b^2h^2}{72}.$
	<p>Круг</p> $A = \pi R^2 = \frac{\pi D^2}{4} = 0,785D^2;$ $I_x = I_y = \frac{\pi R^4}{4} = \frac{\pi D^4}{64} = 0,78R^4 = 0,05D^4;$ $I_p = 2I_x = \frac{\pi R^4}{2} = \frac{\pi D^4}{32} = 1,57R^4 = 0,1D^4;$ $I_{xy} = 0.$
	<p>Труба</p> $A = \frac{\pi D^2}{4}(1 - a^2) = 0,785D^2(1 - a^2) \quad a = \frac{d}{D};$ $I_x = I_y = \frac{\pi(D^4 - d^4)}{64} = 0,05D^4(1 - a^4);$ $I_p = \frac{\pi D^4}{32}(1 - a^4) = 0,1D^4(1 - a^4); I_{xy} = 0.$
	<p>Полукруг</p> $A = \frac{\pi R^2}{2} = \frac{\pi D^2}{8} = 0,393D^2;$ $y_c = \frac{4R}{3\pi} = 0,212D; I_x = 0,00686D^4 = 0,11R^4;$ $I_y = \frac{\pi R^4}{8} = 0,0246D^4 = 0,393R^4; I_{xy} = 0.$

1	2
	<p>Четверть круга*</p> $A = \frac{\pi R^2}{4} = 0,785R^2;$ $x_C = y_C = \frac{4R}{3\pi} = 0,425R;$ $I_x = I_y = R^4 \left( \frac{\pi}{16} - \frac{4}{9\pi} \right) = 0,0547R^4;$ $ I_{xy}  = R^4 \left( \frac{4}{9\pi} - \frac{1}{8} \right) = 0,0165R^4.$
<p>* Центробежный момент инерции прямоугольного треугольника и четверти круга принимается положительным, если заштрихованные части располагаются в I и III координатных четвертях, и отрицательным, если — во II и IV координатных четвертях.</p>	

Приложение 6

ТРУБЫ СТАЛЬНЫЕ  
ЭЛЕКТРОСВАРНЫЕ ПРЯМОШОВНЫЕ  
(по ГОСТ 10704-91)

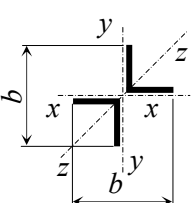
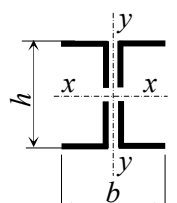
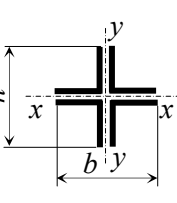
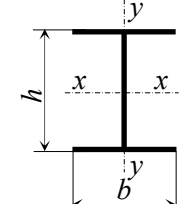
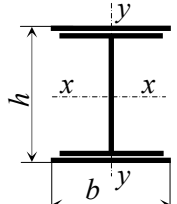
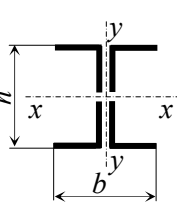
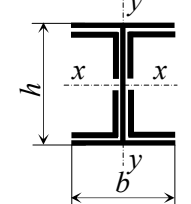
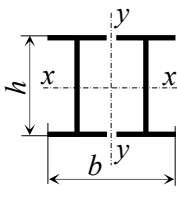
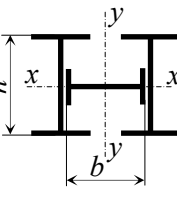
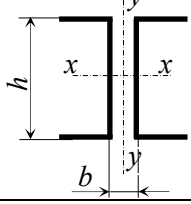
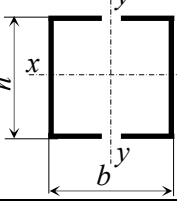
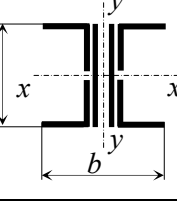
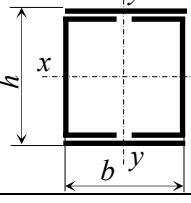
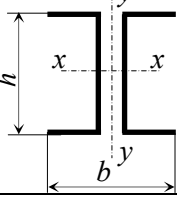
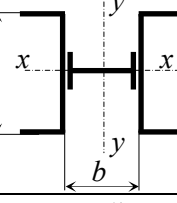
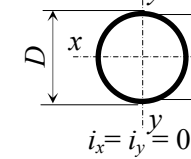
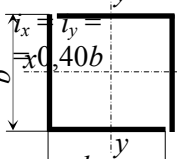
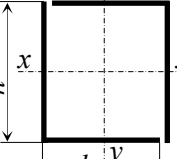
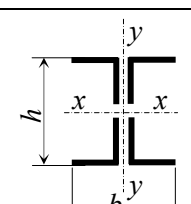
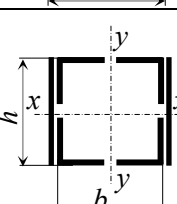
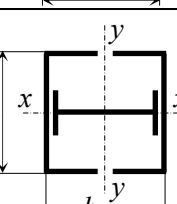


Размеры, мм		Линейная плотность, кг/м	Площадь, см <sup>2</sup>	Радиус инерции, см	Размеры, мм		Линейная плотность, кг/м	Площадь, см <sup>2</sup>	Радиус инерции, см	
D	s				D	s				
63,5	3,5	5,2	6,6	2,1	168	5,0	20,1	25,6	5,8	
	3,8	5,6	7,1	2,1		5,5	22,0	28,1	5,8	
70	3,5	5,7	7,3	2,4	168	6,0	24,0	30,5	5,7	
	3,8	6,2	7,9	2,4		7,0	27,8	35,4	5,7	
	4,0	6,5	8,3	2,3		219	5,0	26,4	33,4	7,6
76	4,0	7,1	9,0	2,6	6,0		31,5	40,2	7,5	
	4,5	7,9	10,1	2,5	7,0		36,6	46,6	7,5	
	5,0	8,8	11,1	2,5	8,0		41,6	53,0	7,5	
	5,5	9,6	12,2	2,3	9,0		46,6	59,4	7,4	
89	4,0	8,4	10,7	3,0	219		10,0	51,5	65,6	7,4
	4,5	9,4	11,9	3,0			12,0	61,3	78,0	7,3
	5,0	10,4	13,2	3,0			273	7,0	45,9	58,5
5,5	11,3	14,4	3,0	8,0	52,3			66,6	9,4	
102	4,0	9,7	12,3	3,5	325		7,0	54,9	69,9	11,2
	4,5	10,8	13,8	3,5		8,0	62,5	79,6	11,2	
	5,0	12,0	15,2	3,4		9,0	70,1	89,3	11,2	
108	4,0	10,3	13,1	3,7	426	6,0	62,1	79,2	14,9	
	4,5	11,5	14,6	3,7		7,0	72,3	92,1	14,8	
	5,0	12,7	16,2	3,7		8,0	82,5	105,0	14,8	
	5,5	13,9	17,7	3,6		9,0	92,6	118,0	14,8	
		10,0	102,6	131,0		14,7	530	9,0	115,6	147,0
114	4,5	12,2	15,5	3,9	10,0	128,2		163,0	18,4	
	5,0	13,4	17,1	3,9	11,0	140,8		179,0	18,4	
	5,5	14,7	18,8	3,8	12,0	153,3		197,0	18,3	
127	4,5	13,6	17,3	4,3	630	7,0	107,5	137,0	22,0	
	5,0	15,0	19,2	4,3		8,0	122,7	153,0	22,0	
	5,5	16,5	21,0	4,3		9,0	137,8	175,0	22,0	
133	4,5	14,3	18,2	4,6	630	10,0	152,9	195,0	21,9	
	5,0	15,8	20,1	4,5		11,0	167,9	214,0	21,9	
	5,5	17,3	22,0	4,5		12,0	182,9	233,0	21,8	
152	4,5	16,4	20,8	5,2	630	7,0	107,5	137,0	22,0	
	5,0	18,1	23,1	5,2		8,0	122,7	153,0	22,0	
	5,5	19,9	25,3	5,2		9,0	137,8	175,0	22,0	



Приложение 7

ПРИБЛИЖЁННЫЕ ЗНАЧЕНИЯ РАДИУСОВ  
ИНЕРЦИИ  $i_x$  И  $i_y$  СЕЧЕНИЙ

 <p><math>i_x = 0,21b</math> <math>i_y = 0,21b</math> <math>i_z = 0,185b</math></p>	 <p><math>i_x = 0,43h</math> <math>i_y = 0,43b</math></p>	 <p><math>i_x = 0,21h</math> <math>i_y = 0,21b</math></p>
 <p><math>i_x = 0,43h</math> <math>i_y = 0,24b</math></p>	 <p><math>i_x = 0,42h</math> <math>i_y = 0,22b</math></p>	 <p><math>i_x = 0,40h</math> <math>i_y = 0,21b</math></p>
 <p><math>i_x = 0,43h</math> <math>i_y = 0,24b</math></p>	 <p><math>i_x = 0,39h</math> <math>i_y = 0,52b</math></p>	 <p><math>i_x = 0,32h</math> <math>i_y = 0,49b</math></p>
 <p><math>i_x = 0,38h</math> <math>i_y = 0,60b</math></p>	 <p><math>i_x = 0,38h</math> <math>i_y = 0,44b</math></p>	 <p><math>i_x = 0,37h</math> <math>i_y = 0,54b</math></p>
 <p><math>i_x = 0,44h</math> <math>i_y = 0,38b</math></p>	 <p><math>i_x = 0,44h</math> <math>i_y = 0,32b</math></p>	 <p><math>i_x = 0,32h</math> <math>i_y = 0,58b</math></p>
 <p><math>i_x = i_y = 0,354d_{cp}</math></p>	 <p><math>i_x = i_y = 0,40b</math></p>	 <p><math>i_x = 0,37h</math> <math>i_y = 0,42b</math></p>
 <p><math>i_x = 0,45h</math> <math>i_y = 0,24b</math></p>	 <p><math>i_x = 0,37h</math> <math>i_y = 0,45b</math></p>	 <p><math>i_x = 0,32h</math> <math>i_y = 0,40b</math></p>

## ОГЛАВЛЕНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ .....	3
ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ И ДОПУЩЕНИЯ .....	4
Раздел 1. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИК ПЛОСКИХ СЕЧЕНИЙ .....	10
Раздел 2. РАСЧЁТ СТЕРЖНЯ НА РАСТЯЖЕНИЕ И СЖАТИЕ .....	23
Раздел 3. РАСЧЁТ СТАЛЬНОГО ВАЛА НА КРУЧЕНИЕ .....	34
Раздел 4. РАСЧЁТ БАЛКИ НА ПРОЧНОСТЬ ПРИ ПЛОСКОМ ИЗГИБЕ ..	47
Раздел 5. РАСЧЁТ СТАЛЬНОГО ВАЛА ПРИ СОВМЕСТНОМ ДЕЙСТВИИ ИЗГИБА И КРУЧЕНИЯ .....	70
Раздел 6. РАСЧЁТ ПЛОСКОЙ СТАТИЧЕСКИ НЕОПРЕДЕЛИМОЙ РАМЫ МЕТОДОМ СИЛ .....	81
Раздел 7. РАСЧЁТ СЖАТОГО СТЕРЖНЯ НА УСТОЙЧИВОСТЬ .....	100
Раздел 8. ОПРЕДЕЛЕНИЕ НАПРЯЖЕНИЙ ПРИ УДАРНЫХ НАГРУЗКАХ .....	126
Раздел 9. ОПРЕДЕЛЕНИЕ НАПРЯЖЕНИЙ В СТЕРЖНЕ ПРИ СОВМЕСТНОМ ДЕЙСТВИИ ИЗГИБА И ПРОДОЛЬНОЙ СИЛЫ .....	136
БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК .....	151
ПРИЛОЖЕНИЯ .....	152



Учебное издание

Зернов Владимир Владимирович  
Евсеев Александр Евгеньевич  
Подшивалова Кристина Сергеевна

**СОПРОТИВЛЕНИЕ МАТЕРИАЛОВ  
ПРИМЕРЫ РАСЧЕТА СТЕРЖНЕВЫХ СИСТЕМ  
НА ПРОЧНОСТЬ, ЖЕСТКОСТЬ И УСТОЙЧИВОСТЬ**

Учебное пособие по направлению подготовки  
23.03.03 «Эксплуатация транспортно-технологических  
машин и комплексов»

Редактор В.С. Кулакова  
Верстка Н.А. Сазонова

---

Подписано в печать 4.12.15. Формат 60×84/16.  
Бумага офисная «Снегурочка». Печать на ризографе.  
Усл. печ. л. 9,5. Уч.-изд. л. 10,25. Тираж 80 экз.  
Заказ № 29.



---

Издательство ПГУАС.  
440028, г.Пенза, ул. Г. Титова, 28.