

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Федеральное государственное бюджетное образовательное
учреждение высшего образования
«Пензенский государственный университет
архитектуры и строительства»
(ПГУАС)

В.А. Монахов

ТЕОРИЯ ПЛАСТИН И ОБОЛОЧЕК

Рекомендовано Редсоветом университета
в качестве учебного пособия для студентов,
обучающихся по направлению подготовки 08.05.01
«Строительство уникальных зданий и сооружений»

Пенза 2016

УДК 624.074.4 (075)
ББК 38.112я73
М77

Рецензенты: доктор технических наук, профессор
В.В. Коновалов (ПГТУ);
доктор технических наук, профессор
С.В. Бакушев (ПГУАС)

Монахов В.А.

М77 Теория пластин и оболочек: учеб. пособие по направлению подготовки 08.05.01 «Строительство уникальных зданий и сооружений» / В.А. Монахов. – Пенза: ПГУАС, 2016. – 252 с.

В учебном пособии, наряду с изложением основ теории расчёта пластин и оболочек, дан анализ напряжённо-деформированного состояния пластин и оболочек при различных воздействиях. Рассмотрены аналитические и численные методы решения уравнений состояния пластин и оболочек.

Учебное пособие подготовлено на кафедре механики и предназначено для студентов, обучающихся по направлению подготовки 08.05.01 «Строительство уникальных зданий и сооружений», при изучении дисциплины «Теория пластин и оболочек».

© Пензенский государственный университет
архитектуры и строительства, 2016
© Монахов В.А., 2016

ПРЕДИСЛОВИЕ

Теория пластин и оболочек, служащая основой для выполнения инженерных расчётов в строительстве, базируется на двух важных гипотезах, характеризующих деформации и напряжения, присущие большим классам пластин и оболочек. Вследствие этого она носит название технической теории расчёта.

Первая часть предлагаемого пособия знакомит читателя с основными понятиями и методами анализа напряжённо-деформированного состояния пластин. Приводятся определения деформаций и напряжений, возникающих в пластинках под действием нагрузок. Дан вывод дифференциального уравнения изгиба пластинки – уравнения Софи Жермен, служащего основой для расчёта пластин на различные внешние воздействия. В пособии, наряду с классическими аналитическими методами М. Леви, Навье, рассматриваются также и известные вариационные и численные методы Бубнова – Галёркина, Ритца – Тимошенко, метод сеток. В четвёртом разделе особое внимание обращено на сравнительно новый метод расчёта пластин – метод конечных элементов (МКЭ). Поскольку расчёты пластин в настоящее время выполняются с помощью ПЭВМ на основе программ МКЭ, заложенных в большинстве вычислительных комплексов (ВК), в том числе в ЛИРе, *SCAD Office* [15], подробно описывается модель МКЭ для расчёта пластин при нагружении в их плоскости. Одновременно с изложением теоретических основ метода: процедуры формирования матрицы жёсткости механической системы, её корректировки с целью учёта условий опирания, определения узловых перемещений и напряжений пластины – приводятся несколько примеров расчёта. К тому же в прил. 1 для сравнения результатов вычислений, выполненных разными методами, помещён листинг программы расчёта клина, осуществлённого с помощью ВК *SCAD Office*.

Во второй части книги обоснован вывод трёх групп уравнений, относящихся к условиям равновесия оболочек, физическим уравнениям общей теории оболочек и условиям совместности деформаций оболочек. В дальнейшем на их основе выведены уравнения напряжённно-деформированного состояния безмоментных оболочек и с их помощью выполнены расчёты оболочек вращения на статические нагрузки, в том числе на нагрузки, периодически изменяющиеся в окружном направлении. Значительное внимание в книге уделяется анализу напряжённно-деформированного состояния цилиндрических оболочек, наиболее распространённых на практике. Наряду с решениями уравнений состояния цилиндрической оболочки по безмоментной теории, в пособии рассмотрены примеры расчёта оболочек аналитическими и численными методами по общей моментной теории.

Два последних раздела учебного пособия посвящены современным проблемам расчёта оболочек. В разд. 12 описана расчётная модель цилиндрической оболочки, построенная в соответствии с методом конечных элементов. Приведены различные подходы, предпринятые исследователями для аппроксимации возможных перемещений конечного элемента цилиндрической формы, и даны оценки степени точности полученных решений в зависимости от числа степеней свободы КЭ. В последнем разделе пособия изложены результаты исследований напряжённно-деформированного состояния оболочек при статическом и динамическом нагружении с учётом пластических свойств материала оболочек. В частности рассмотрены вопросы предельного равновесия и сопротивления цилиндрических и сферических оболочек, в решении которых автор принимал непосредственное участие.

Часть I. РАСЧЁТ ПЛАСТИН

1. НАПРЯЖЁННО-ДЕФОРМИРОВАННОЕ СОСТОЯНИЕ ПЛАСТИН

Пластиной (плитой) называется тело призматической или цилиндрической формы, высота (толщина) которого намного меньше других размеров (рис. 1.1).

Плоскость, параллельная основанию пластинки и разделяющая её высоту пополам, называется *срединной плоскостью*. Линия пересечения срединной плоскости с боковой поверхностью пластины называется *контуром*.

В пособии рассматривается теория расчёта *тонких пластин*, для которых отношение толщины δ к наименьшему другому размеру пластины находится в пределах

$$0,012 \leq \delta/B \leq 0,2.$$

Возможные прогибы пластины также малы по сравнению с толщиной; верхний предел величины прогиба составляет $w = 0,2\delta$. Если соотношения в размерах плиты не отвечают указанным условиям, то она относится к разряду плит *средней толщины* или *толстых* плит.

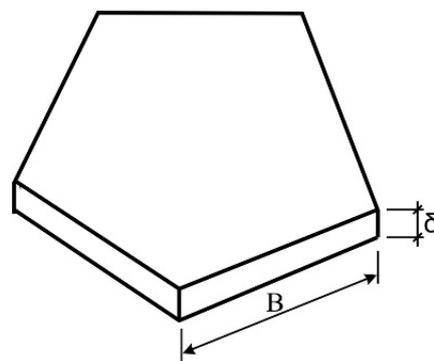


Рис. 1.1

1.1. Основные предпосылки теории расчёта тонких пластин

Техническая теория расчёта пластин основана на двух допущениях, упрощающих исследование:

I. *Статическая гипотеза* – нормальные напряжения, возникающие при деформировании вследствие взаимного нажатия горизонтальных слоёв пластинки друг на друга, на площадках, параллельных срединной плоскости, считаются нулевыми $\sigma_z = 0$.

Это означает, что бесконечно тонкий слой находится в условиях плоского напряжённого состояния. К тому же и касательные напряжения τ_{xz} , τ_{yz} относятся к второстепенным. Они также принимаются равными нулю.

II. *Кинематическая гипотеза* – прямая, перпендикулярная срединной поверхности в начальном положении, остаётся перпендикулярной к поверхности и в деформированном состоянии (гипотеза прямых нормалей Кирхгофа) (рис. 1.2).

На рис. 1.2 показаны прогиб w точки M_0 срединной плоскости в сечении, параллельном оси Ox , и перемещение W произвольной точки C_0 , отстоящей

на расстоянии $z \leq \delta/2$; угол наклона нормали, обусловленный изгибом пластинки, обозначен через φ .

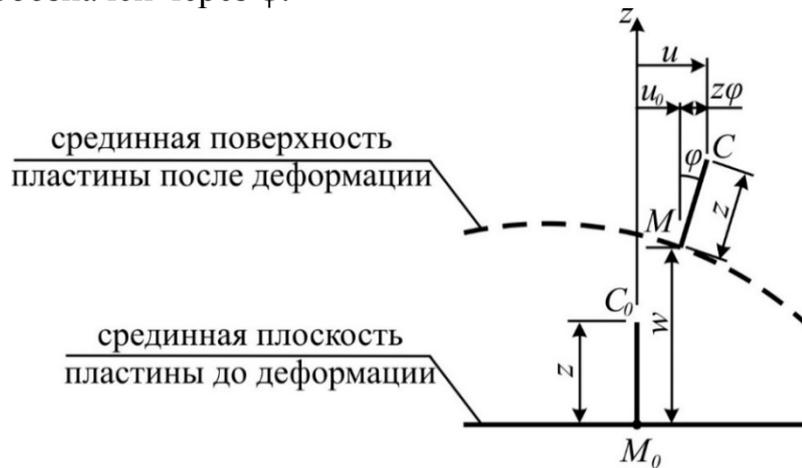


Рис. 1.2

Данная гипотеза, по существу, вытекает из первого предположения. Действительно, из условия отсутствия касательных напряжений $\tau_{xz}, \tau_{yz} = 0$ следует, что деформации сдвига $\gamma_{xz} = \gamma_{yz} = 0$. Как известно, в технической теории изгиба балок принята аналогичная гипотеза плоских сечений [5].

Поскольку нормальные напряжения $\sigma_z = 0$, то деформации *срединной плоскости* согласно физическим соотношениям теории упругости находят по формулам [3]:

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{1}{E}(\sigma_x - \nu\sigma_y), \\ \varepsilon_y &= \frac{1}{E}(\sigma_y - \nu\sigma_x), \\ \gamma_{xy} &= \frac{\tau_{xy}}{G} = \frac{2(1+\nu)}{E}\tau_{xy}, \end{aligned} \quad (1.1)$$

где ν – коэффициент Пуассона (для стали $\nu = 0,3$); E – модуль упругости материала (для стали $E = 200$ ГПа),

Отсюда нетрудно установить обратную зависимость напряжений от деформаций:

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \frac{E}{1-\nu^2}(\varepsilon_x + \nu\varepsilon_y), \\ \sigma_y &= \frac{E}{1-\nu^2}(\varepsilon_y + \nu\varepsilon_x), \\ \tau_{xy} &= G\gamma_{xy} = \frac{E}{2(1+\nu)}\gamma_{xy}. \end{aligned} \quad (1.2)$$

На основании первой гипотезы

$$\tau_{xz} = G\gamma_{xz} = G\left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}\right) = 0,$$

$$\tau_{yz} = G\gamma_{yz} = G\left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}\right) = 0$$

можно утверждать, что

$$\frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{\partial w}{\partial x},$$

$$\frac{\partial v}{\partial z} = -\frac{\partial w}{\partial y}.$$

Интегрируя последние соотношения с учётом граничных условий на срединной поверхности пластинки ($u_0 = v_0 = 0$ при $z = 0$), легко установить характер изменения перемещений точки C , взятой на некотором удалении z от срединной плоскости, а именно:

$$u = -z \frac{\partial w}{\partial x} = -z \operatorname{tg} \varphi \approx -z \varphi,$$

$$v = -z \frac{\partial w}{\partial y} = -z \operatorname{tg} \xi \approx -z \xi,$$
(1.3)

где φ, ξ – углы наклона нормали с осями координат¹.

1.2. Распределение напряжений и моментов при изгибе пластин

Деформации (1.1) элемента *срединной плоскости* пластинки в направлении осей координат (рис. 1.3) с учётом (1.3) можно найти по формулам:

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} = -z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2},$$

$$\varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} = -z \frac{\partial^2 w}{\partial y^2},$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = -2z \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}.$$
(1.4)

¹ На рис. 1.2 показан случай, соответствующий граничному условию $u_0 \neq 0$.

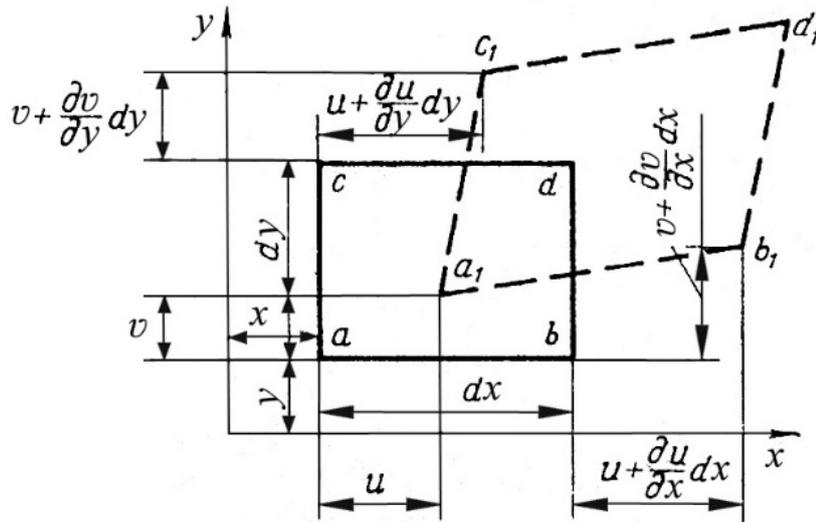


Рис. 1.3

Приравнявая правые части выражений (1.1) и (1.4), в результате решения полученной системы нетрудно установить распределение нормальных и касательных напряжений по высоте пластинки (рис. 1.4):

$$\sigma_x = -\frac{E}{1-\nu^2} z \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right), \quad (1.5)$$

$$\sigma_y = -\frac{E}{1-\nu^2} z \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right),$$

$$\tau_{xy} = -\frac{E}{2(1+\nu)} z \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}.$$

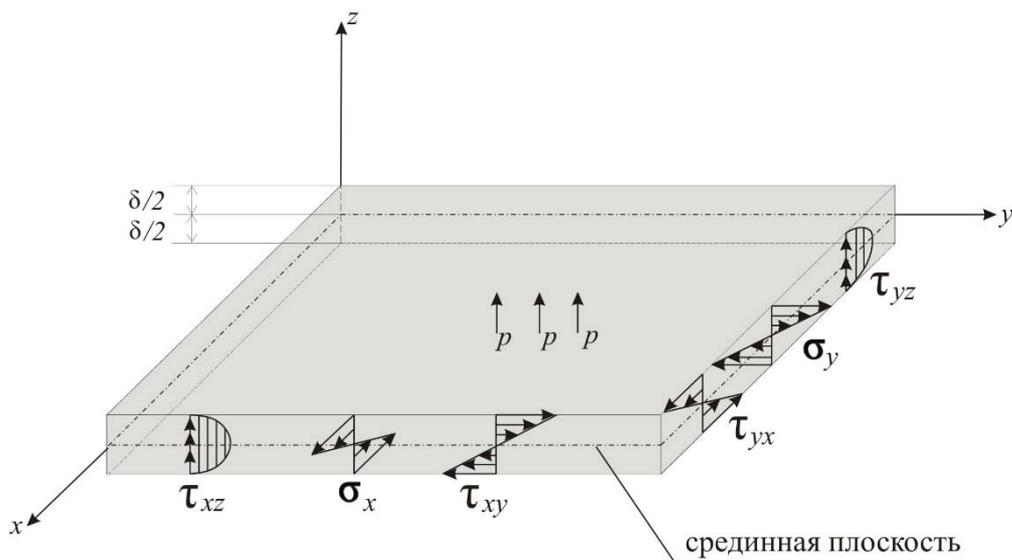


Рис. 1.4

Величины изгибающих моментов и поперечных сил, действующих на боковых гранях элемента пластинки, определяют путём интегрирования функций напряжений по толщине пластинки, т.е.

$$M_x = \int_{-\delta/2}^{\delta/2} \sigma_x z dz,$$

$$M_y = \int_{-\delta/2}^{\delta/2} \sigma_y z dz,$$

$$M_{xy} = M_{yx} = \int_{-\delta/2}^{\delta/2} \tau_{xy} z dz.$$

Подставив сюда выражения для напряжений (1.5), легко найти:

$$\begin{aligned} M_x &= -\frac{E}{1-\nu^2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \int_{-\delta/2}^{\delta/2} z^2 dz = \\ &= -\frac{E\delta^3}{12(1-\nu^2)} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) = -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right). \end{aligned} \quad (1.6, a)$$

Аналогично находят и величины:

$$M_y = -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right), \quad (1.6, б)$$

$$M_{xy} = M_{yx} = -D(1-\nu) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}. \quad (1.6, в)$$

Здесь w – прогиб произвольной точки; $D = \frac{E\delta^3}{12(1-\nu^2)}$ – цилиндрическая

жёсткость пластинки; δ – её толщина; ν – коэффициент Пуассона (рис. 1.5).

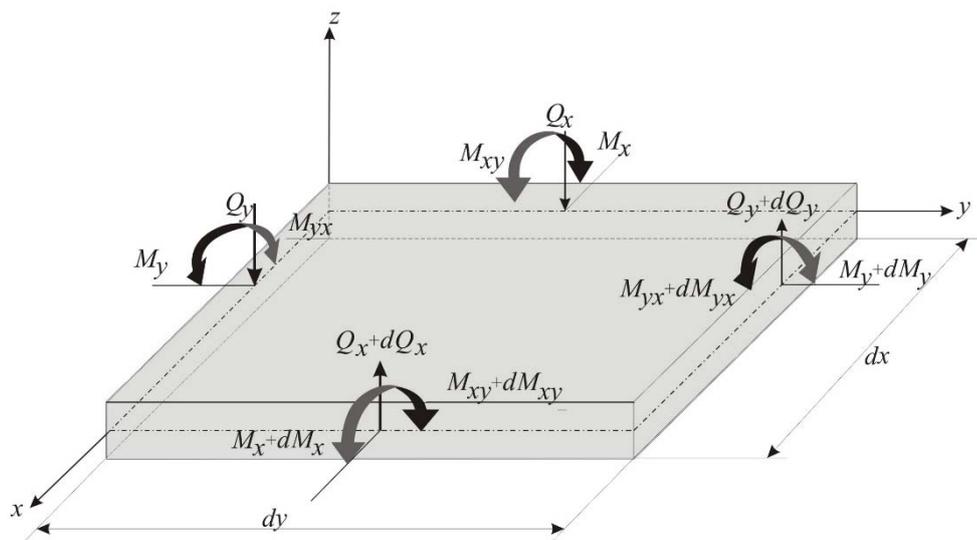


Рис. 1.5

1.3. Вывод дифференциального уравнения изгиба пластинки

При рассмотрении равновесия элемента тонкой пластинки, подверженной действию внешней распределённой нагрузки p , нормальной к срединной плоскости, кроме изгибающих моментов следует учитывать также поперечные силы Q_x, Q_y .

Несмотря на то, что в соответствии с первой предпосылкой теории расчёта пластинок деформации $\gamma_{xz} = \gamma_{yz}$ пренебрежимо малы, поперечные силы Q_x, Q_y имеют тот же порядок малости, что и величина нагрузки q . Иначе как тогда объяснить возможность сохранения условия равновесия элемента в направлении оси Oz в виде $\sum F_z = 0$:

$$\frac{\partial Q_x}{\partial x} dxdy + \frac{\partial Q_y}{\partial y} dxdy + pdxdy = 0,$$

или

$$\frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} + p = 0. \quad (1.7)$$

Условие равновесия элемента $\sum M_x = 0$ после отбрасывания слагаемых высшего порядка имеет вид

$$\frac{\partial M_{xy}}{\partial x} dxdy + \frac{\partial M_y}{\partial y} dxdy - Q_y dxdy = 0,$$

или

$$\frac{\partial M_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial M_y}{\partial y} - Q_y = 0. \quad (1.8, a)$$

Аналогично, из условия $\sum M_y = 0$ следует, что

$$\frac{\partial M_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial M_x}{\partial y} - Q_x = 0. \quad (1.8, б)$$

В результате исключения поперечных сил из приведенных условий равновесия приходят к одному условию

$$\frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} - p = 0.$$

Подставив сюда величины моментов согласно (1.6), условие равновесия пластинки можно выразить через прогибы

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{p}{D}. \quad (1.9, a)$$

Это условие называется уравнением изогнутой поверхности тонкой пластинки. С использованием оператора Лапласа

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$$

оно записывается намного короче в виде

$$\Delta^2 w = \frac{p}{D}. \quad (1.9,б)$$

Здесь p – интенсивность поверхностной нагрузки.

Дифференциальное уравнение изгиба пластинки (1.9) установлено Лагранжем в связи с обсуждением статьи Софи – Жермен в 1811 г. [16].

Величины поперечных сил несложно выразить через прогибы пластинки, воспользовавшись их определением из формул (1.8) с привлечением (1.6):

$$\begin{aligned} Q_x &= \int_{-\delta/2}^{\delta/2} \tau_{xz} dz = -D \frac{\partial w}{\partial x} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right), \\ Q_y &= \int_{-\delta/2}^{\delta/2} \tau_{yz} dz = -D \frac{\partial w}{\partial y} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right). \end{aligned} \quad (1.10)$$

1.4. Процедура анализа НДС пластин.

Аналогии с решением плоской задачи теории упругости

Процесс анализа НДС пластин заключается в интегрировании дифференциального уравнения изгиба (1.9) с учётом граничных условий, т.е. условий опирания на контуре пластины. Действительно, если будет найдено решение уравнения, т.е. поле прогибов срединной плоскости $w(x, y)$, то с помощью формул (1.6) и (1.10) можно без труда найти значения изгибающих моментов и поперечных сил в любой точке пластинки.

Очевидно, уравнение изогнутой поверхности пластинки при нулевой правой части, как и бигармоническое уравнение функции напряжений в плоской задаче теории упругости, является разрешающим уравнением при анализе изгиба пластинок [5]. Следовательно, функция напряжений характеризует изогнутую поверхность пластинки при её нагружении моментами или (и) поперечными силами, прикладываемыми на контуре.

Ещё одна аналогия наблюдается и в самих граничных условиях, а именно: статическим граничным условиям плоской задачи теории упругости соответствуют кинематические граничные условия фиктивного поперечного изгиба пластинки, и наоборот.

1.5. Формулировка граничных условий пластинки

Граничные условия пластинки можно формулировать в терминах перемещений или усилий.

Описание граничных условий можно начать с составления условий для прямоугольной пластинки с различным характером опирания кромок:

а) жёстким защемлением, б) шарнирным прикреплением и в) свободным краем (рис. 1.6).

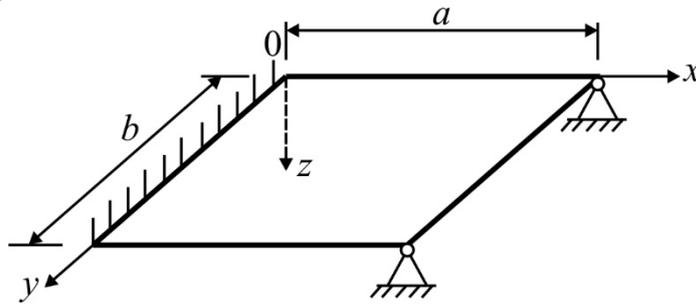


Рис. 1.6

а) Обращаясь к жёсткой кромке, легко установить, что вдоль неё (при $x=0$) прогибы, как и углы наклона касательной к срединной плоскости по отношению к оси Ox , равны нулю, т.е.

$$w = 0 \text{ и } \frac{\partial w}{\partial x} = 0. \quad (1.11,а)$$

б) Для шарнирной кромки характерно отсутствие прогиба и нормальных напряжений по опорному сечению и касательных напряжений τ_{xy} , имеющих направление, параллельное оси Ox . Касательные напряжения, параллельные оси Oz , уравнивают опорные реакции. В аналитической форме граничные условия

$$\text{при } x=a \quad w = 0, \quad M_x = 0$$

на основе определения M_x по (1.6,а) можно представить только через перемещения:

$$\text{при } x=a \quad w = 0, \quad \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = 0, \quad (1.11,б)$$

т.к. вторая производная по этой же кромке заведомо нулевая, т.е. $\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0$.

Аналогично,

$$\text{при } x=0 \quad w = 0, \quad \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = 0. \quad (1.11,в)$$

Данные условия можно несколько смягчить, отказавшись от последнего из них, и принять граничное условие в интегральной форме, получив его путём суммирования касательных напряжений по толщине пластинки и приведения их к системе взаимно уравновешенных усилий на кромке (см. подразд. 1.6).

в) На свободном крае напряжения $\sigma_x = \tau_{zx} = \tau_{yx}$ и соответствующие им усилия M_x, Q_x, M_{xy} равны нулю. На основе формул (1.6), (1.10) можно составить три условия:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0, \quad \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) = 0, \quad \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = 0. \quad (1.12)$$

Однако для интегрирования уравнения (1.9) достаточно иметь всего по два условия на каждой кромке. Оставив без изменения первое, два других можно свести к одному путём объединения касательных напряжений τ_{zx}, τ_{yx} , точнее, путём сложения соответствующих им поперечной силы Q_x и силы $F_x = \frac{\partial M_{xy}}{\partial y}$, отвечающей крутящему моменту M_{xy} (рис. 1.7):

$$V_x = Q_x - \left(\frac{\partial M_{xy}}{\partial y} \right)_{x=a}. \quad (1.13)$$

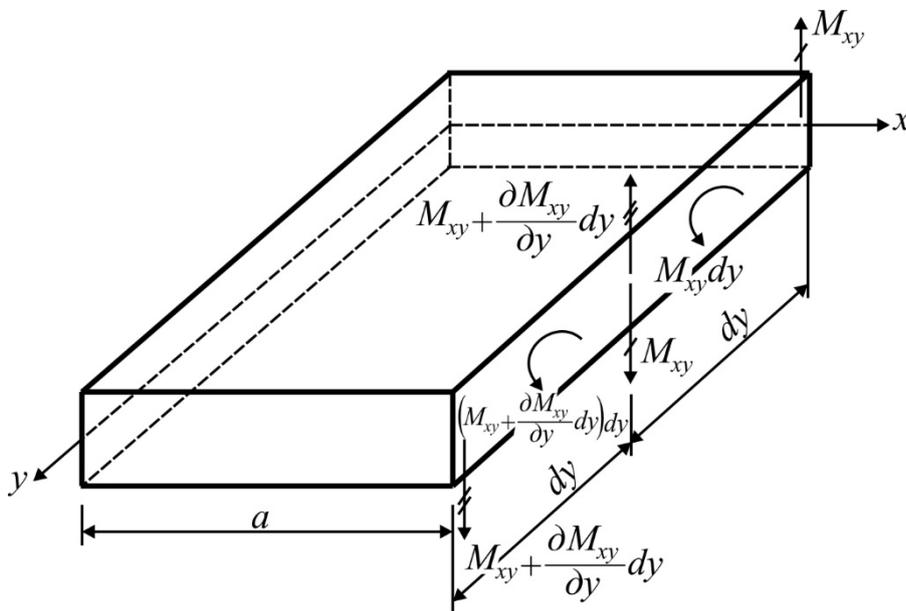


Рис. 1.7

Действительно, действие крутящего момента M_{xy} на элементарном отрезке длиной dy эквивалентно паре сил с модулем, равным M_{xy} . На соседнем участке момент получает приращение и становится равным

$$\left(M_{xy} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} dy \right) dy.$$

Ему соответствует пара сил

$$\left(M_{xy} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} dy \right).$$

Складывая полученные силы в пределах каждого элементарного отрезка, можно утверждать, что на единицу длины кромки в направлении оси y действует сила $\frac{\partial M_{xy}}{\partial y}$. В итоге по всей длине кромки в каждой её точке, кроме поперечной силы Q_x , следует принимать во внимание действие дополнительной силы $\frac{\partial M_{xy}}{\partial y}$, направление которой противоположно Q_x . В совокупности они составляют так называемую *приведенную поперечную силу* V_x . После дифференцирования момента (1.6,в) с учётом определения Q_x по (1.10) выражение *приведенной поперечной силы* V_x на кромке $x = \text{const}$ принимает вид

$$V_x = -D \left[\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + (2 - \nu) \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} \right]. \quad (1.14,а)$$

Аналогично, по краю $y = \text{const}$

$$V_y = -D \left[\frac{\partial^3 w}{\partial y^3} + (2 - \nu) \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} \right]. \quad (1.14,б)$$

Очевидно, на свободной кромке момент и приведенная сила отсутствуют; следовательно,

$$\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)_{x=a} = 0, \quad \left[\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + (2 - \nu) \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} \right]_{y=a} = 0. \quad (1.15)$$

При шарнирном опирании на кромке приведенная сила уравновешивается реакциями опоры. А поскольку в составе приведенной силы имеется часть, соответствующая крутящему моменту на кромке, то это приводит к появлению в углах пластинки дополнительных ответных сосредоточенных сил реакций $R_{1,2,3,4}$, причем

$$R_{1,2,3,4} = 2M_{xy}.$$

Таким образом, приведенные поперечные силы V_x и V_y представляют собой распределенные опорные реакции пластины, а силы $R_{1,2,3,4}$ – сосредоточенные реакции в угловых точках (рис. 1.8).

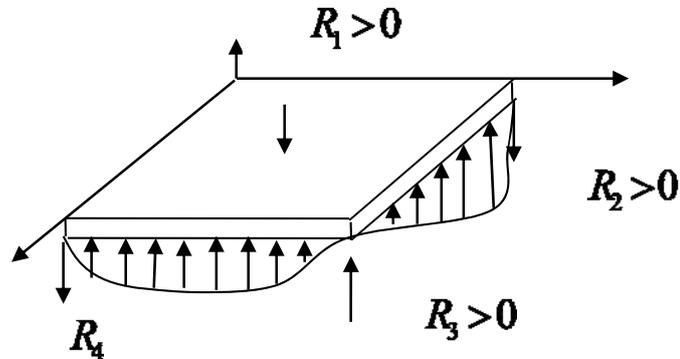


Рис. 1.8

Граничные условия для круглых или эллиптических пластинок рассматриваются в подразд. 2.2.

1.6. Принцип возможных перемещений

Потенциальная энергия изогнутой пластинки, отнесённая к единице объёма

$$U = W + A, \quad (1.16)$$

складывается из энергии упругих деформаций

$$W = \frac{1}{2} \int_V \bar{\varepsilon} \bar{\sigma} dV \quad (1.17,а)$$

и потенциала поверхностной нагрузки p

$$A = - \int_S w p ds. \quad (1.18)$$

Здесь $\bar{\sigma}$ – вектор напряжений, распределённых в объёме V пластинки; $\bar{\varepsilon}$ – вектор деформаций, в общем случае связанный с перемещениями W дифференциальными соотношениями (1.4); S – площадь поверхности, на которой распределена нагрузка p .

Принимая во внимание компоненты вектора напряжений согласно (1.5), нетрудно подсчитать энергию упругих деформаций, отнесённую к единице объёма:

$$W = \frac{1}{2} \int_V \bar{\varepsilon} \bar{\sigma} dV = \frac{1}{2} \frac{Ez^2}{1-\nu^2} \times \left\{ \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 - 2(1-\nu) \left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 \right] \right\}. \quad (1.17,б)$$

Потенциальная энергия всей пластинки находится путём интегрирования выражения (1.17,б) по всему объёму пластинки с учётом того, что переменная z меняется в пределах от $-\delta/2$ до $+\delta/2$, а также суммирования внешнего воздействия по поверхности т.е.

$$U = \iiint W dx dy dz + \iint A dx dy =$$

$$= \frac{1}{2} \iint D \left\{ \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 - 2(1-\nu) \left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 \right] - pw \right\} dx dy. \quad (1.18)$$

Потенциальную энергию пластинки можно выразить и через усилия M_x , M_y , M_{xy} , воспользовавшись их определением по (1.6).

$$U = \iint \left(M_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + M_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - M_{xy} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right) dx dy -$$

$$- \iint \left\{ \frac{1}{2D} \left[(M_x + M_y)^2 - 2(1-\nu)(M_x M_y - M_{xy}^2) \right] - pw \right\} dx dy. \quad (1.19)$$

В соответствии с *вариационным принципом Лагранжа в состоянии равновесия элемента пластинки величина потенциальной энергии принимает стационарное значение, причём в положении устойчивого равновесия этот экстремум является минимумом.*

Условие минимума функционала энергии

$$U = W + A = \frac{1}{2} \int_V \bar{\varepsilon} \bar{\sigma} dV - \int_S w p ds$$

имеет вид

$$\frac{\partial U}{\partial w} = \frac{\partial (W + A)}{\partial w} = 0. \quad (1.20)$$

Следовательно, из всех кинематически возможных перемещений W элемента состоянию равновесия отвечают те, которые сообщают минимум величине полной потенциальной энергии U .

Кинематически возможные перемещения, непрерывно изменяющиеся по полю пластинки, можно задать в виде некоторого приближения к истинному или действительному распределению перемещений. При этом возможные перемещения должны удовлетворять граничным условиям.

Выражение энергии (1.19) используется (см. разд. 3) для обоснования связи вариационного принципа Лагранжа и метода Бубнова – Галёркина. В лекции № 4 вариационный принцип Лагранжа служит основанием для вывода разрешающего уравнения метода конечных элементов.

1.7. Методы интегрирования уравнения изгиба прямоугольных пластин

Как правило, интегрирование уравнения изгиба пластин осуществляется обратным способом. В таком случае задаются ожидаемым распределением прогибов срединной плоскости.

Например, для прямоугольной пластинки, шарнирно опертой по всему контуру, в качестве возможного распределения прогибов Навье (1820) было предложено воспользоваться двойным тригонометрическим рядом [17]

$$w = \sum_{m=1, n=1}^{\infty, \infty} A_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}, \quad (1.21)$$

который автоматически удовлетворяет указанным краевым условиям

$$w \Big|_{\substack{x=0, \\ x=a \\ y=0 \\ y=b}} = 0, \quad \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \Big|_{x=0, x=a} = 0, \quad \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \Big|_{y=0, y=b} = 0,$$

а неизвестные коэффициенты ряда A_{mn} искать на основе решения уравнения (1.10).

Подставив выражение прогиба (1.21) в уравнение, после небольших преобразований можно установить, что

$$\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} D\pi^4 \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right) A_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} = p(x, y).$$

Умножив полученное равенство на $\sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}$ и проинтегрировав его по x от нуля до a и по y от нуля до b , приходят к соотношению

$$\frac{ab}{4} D\pi^4 \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right) A_{mn} = \int_0^a \int_0^b p(x, y) \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} dx dy,$$

из которого легко установить коэффициенты

$$A_{mn} = \frac{4}{D\pi^4 ab \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)} \int_0^a \int_0^b p(x, y) \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} dx dy. \quad (1.22)$$

При интегрировании левой части были использованы известные интегралы произведений тригонометрических функций

$$\int_0^a \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi x}{a} dx = \begin{cases} 0 & \text{при } m \neq n, \\ \frac{a}{2} & \text{при } m = n, \end{cases}$$

Зная коэффициенты A_{mn} , можно вычислить прогибы согласно (1.21). Например, при действии равномерной нагрузки постоянной интенсивности p , нетрудно определить величину интеграла

$$\int_0^a \int_0^b p \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} dx dy = \frac{4p}{\pi^2 mn},$$

где m, n – нечётные числа. Благодаря этому становится известным поле прогибов пластинки

$$w = \frac{16p}{D\pi^6} \sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{\sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}}{mn \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)^2}. \quad (1.23)$$

Максимальный прогиб пластинки имеет место в центре

$$w = \frac{16p}{D\pi^6} \sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{(-1)^{\frac{m+n}{2}}}{mn \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)^2}.$$

Значения изгибающих моментов и поперечных сил в сечениях пластинки определяют по формулам (1.6)-(1.7). Полученное решение можно использовать для анализа состояния пластинки при действии сосредоточенной силы, приложенной в точке $x=c, y=d$.

Ещё один аналитический метод интегрирования уравнения изгиба пластинок разработал М. Леви (1899) [6]. В качестве допустимого поля прогибов он принял выражение прогиба на основе одинарного тригонометрического ряда

$$w = \sum_{k=1}^{\infty} X_k \sin \frac{k\pi y}{b}, \quad (1.24)$$

где X_k – неизвестные коэффициенты ряда, являющиеся функциями только координаты x . Для их определения следует найти производные выражения (1.24) и подставить в уравнение (1.10). В результате приходят к равенству

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{d^4 X_k}{dx^4} - 2 \frac{k^2 \pi^2}{b^2} \frac{d^2 X_k}{dx^2} + \frac{k^4 \pi^4}{b^4} X_k \right) \sin \frac{k\pi y}{b} = \frac{p(x, y)}{D}.$$

Умножив обе части равенства на $\sin \frac{k\pi y}{b}$ и выполнив интегрирование по y в пределах от 0 до b , выводят уравнение

$$\frac{d^4 X_k}{dx^4} - 2 \frac{k^2 \pi^2}{b^2} \frac{d^2 X_k}{dx^2} + \frac{k^4 \pi^4}{b^4} X_k = \frac{p(x, y)}{D}.$$

Общее решение данного дифференциального уравнения

$$X_k = X'_k + X_k^0 \quad (1.25)$$

складывается из частного решения X'_k , соответствующего правой части, и решения однородного дифференциального уравнения

$$\frac{d^4 X_k^0}{dx^4} - 2 \frac{k^2 \pi^2}{b^2} \frac{d^2 X_k^0}{dx^2} + \frac{k^4 \pi^4}{b^4} X_k^0 = 0.$$

Решение последнего уравнения находят с помощью подстановки

$$X_k^0 = C e^{\lambda x},$$

где C – постоянная интегрирования. Соответствующее характеристическое уравнение имеет вид

$$\lambda^4 - 2 \frac{k^2 \pi^2}{b^2} \lambda^2 + \frac{k^4 \pi^4}{b^4} = 0.$$

Корни этого уравнения

$$\lambda_{1,2} = \frac{k \pi}{b}, \quad \lambda_{3,4} = -\frac{k \pi}{b}$$

указывают на существование решения однородного уравнения в виде

$$X_k^0 = (C_{k_1} + C_{k_2} x) e^{k\pi x/b} + (C_{k_3} + C_{k_4} x) e^{-k\pi x/b}. \quad (1.26)$$

Частное решение

$$X'_k = \frac{4p}{\pi k}$$

при действии равномерной нагрузки постоянной интенсивности p определяется по аналогии с решением Навье. При вычислении прогибов пластинки следует принимать во внимание также характер опирания кромок. Например, при шарнирном опирании контура постоянные интегрирования в (1.26) должны быть установлены из краевых условий на сторонах $x = \pm \frac{a}{2}$:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \Big|_{x=\pm a/2} = 0, \quad w \Big|_{x=\pm a/2} = 0,$$

или

$$\frac{\partial^2 X_k}{\partial x^2} \Big|_{x=\pm a/2} = 0, \quad X_k \Big|_{x=\pm a/2} = 0.$$

С учётом их соблюдения в результате несложных преобразований можно получить функцию

$$X_k = \frac{4pb^4}{k^5\pi^5 D} \left[1 - \frac{\left(1 + \frac{k\pi p}{4b} \operatorname{th} \frac{k\pi p}{2b}\right) \operatorname{ch} \frac{k\pi x}{b} - \frac{k\pi x}{2b} \operatorname{sh} \frac{k\pi x}{b}}{\operatorname{ch} \frac{k\pi p}{2b}} \right], \text{ где } k = 1, 3, 5, \dots,$$

которая служит коэффициентами ряда (1.24).

Данный ряд обладает удивительной сходимостью, свидетельством чего служит следующий факт. Если ограничиться только одним членом ряда ($k=1$), то прогиб в центре определяется по формуле

$$w = \frac{4pb^4}{\pi^5 D} \left[1 - \frac{\left(1 + \frac{\pi p}{4b} \operatorname{th} \frac{\pi p}{2b}\right)}{\operatorname{ch} \frac{\pi p}{2b}} \right]. \quad (1.27)$$

Для квадратной пластинки согласно этой формуле

$$w = 0,00411 \frac{pb^4}{D},$$

что лишь на 1% отличается от точного значения.

Изгибающие и крутящие моменты определяют на основе формул (1.6) и (1.25):

$$M_x = -D \sum_{k=1,3,\dots}^{\infty} \left(\frac{\partial^2 X_k}{\partial x^2} - \nu \frac{k^2 \pi^2}{b^2} X_k \right) \sin \frac{k\pi y}{b},$$

$$M_y = -D \sum_{k=1,3,\dots}^{\infty} \left(\nu \frac{\partial^2 X_k}{\partial x^2} - \frac{k^2 \pi^2}{b^2} X_k \right) \sin \frac{k\pi y}{b},$$

$$M_{xy} = -D(1-\nu) \frac{\pi}{b} \sum_{k=1,3,\dots}^{\infty} k \frac{\partial X_k}{\partial x} \cos \frac{k\pi y}{b}.$$

2. РАСЧЁТ КРУГЛЫХ ПЛАСТИН

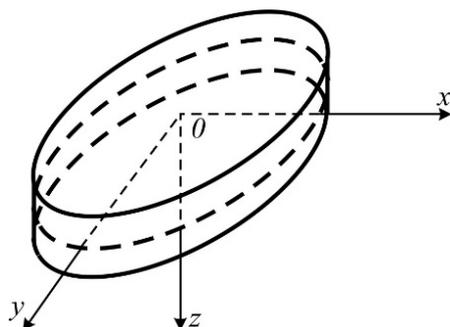
2.1. Вывод уравнения изгиба круглой пластины

Преобразование декартовых координат к полярным осуществляется по формулам:

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta, \quad (2.1)$$

где r, θ – полярные координаты (рис. 2.1).

а



б

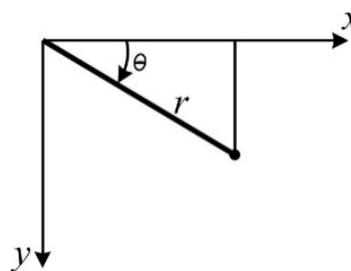


Рис. 2.1

Если принять начало радиуса полярной системы совпадающим с началом оси x декартовой системы, то формулы

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \theta = \arctg \frac{y}{x}$$

устанавливают связь координат произвольной точки на плоскости.

Производные величин r, θ легко вычислить:

$$\frac{\partial r}{\partial x} = -\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} = -\cos \theta$$

$$\frac{\partial r}{\partial y} = -\frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} = -\sin \theta, \quad (2.2)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial x} = -\frac{\sin \theta}{r},$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial y} = \frac{\cos \theta}{r}.$$

На основании данных вычислений без труда находятся производные:

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial r} (-\cos \theta) + \frac{\partial}{\partial \theta} \left(-\frac{\sin \theta}{r} \right),$$

$$\frac{\partial}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial r} \frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial r} \sin \theta + \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{\cos \theta}{r} \right), \quad (2.3)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial x^2} &= \left(\cos \theta \frac{\partial}{\partial r} - \frac{\sin \theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \right) \left(\cos \theta \frac{\partial}{\partial r} - \frac{\sin \theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \right) = \\ &= \cos^2 \theta \frac{\partial^2}{\partial r^2} - \sin \theta \cos \theta \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \right) - \frac{\sin \theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\cos \theta \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{\sin \theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial}{\partial r} \right) = \\ &= \cos^2 \theta \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \sin^2 \theta \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right) + 2 \sin \theta \cos \theta \left(\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} - \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r \partial \theta} \right), \\ \frac{\partial^2}{\partial y^2} &= \sin^2 \theta \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \cos^2 \theta \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right) - 2 \sin \theta \cos \theta \left(\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} - \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r \partial \theta} \right), \\ \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial}{\partial y} \right) = \sin \theta \cos \theta \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right) - \\ &\quad - (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) \left(\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} - \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r \partial \theta} \right). \end{aligned}$$

Оператор Лапласа

$$\Delta w = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}$$

с учётом данных определений производных в полярных координатах принимает вид

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2}. \quad (2.4)$$

С его помощью левая часть уравнения изгиба пластинки в полярных координатах может быть представлена состоящей из сомножителей

$$\Delta \Delta w = \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \right). \quad (2.5)$$

Приравнявая это выражение величине $\frac{p}{D}$, выводят уравнение изогнутой поверхности

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \right) = \frac{p(r, \theta)}{D}. \quad (2.6)$$

Здесь, как и для прямоугольной пластинки, W обозначает прогиб произвольной точки, $D = \frac{E\delta^3}{12(1-\nu^2)}$ – цилиндрическую жёсткость, δ – её толщину; ν – коэффициент Пуассона, p – интенсивность распределённой нагрузки.

При действии симметричной нагрузки прогибы не зависят от окружной координаты. Следовательно, производные функции прогибов по θ в уравнении исключаются, и уравнение принимает вид

$$\frac{\partial^4 w}{\partial r^4} + \frac{2}{r} \frac{\partial^3 w}{\partial r^3} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r^3} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} = \frac{p(r, \theta)}{D}. \quad (2.7)$$

2.2. Интегрирование уравнения изгиба круглых пластин

Общий интеграл уравнения (2.7) можно представить как сумму частного решения и решения однородного уравнения при $p(r) = 0$, т.е.

$$w = w^* + w_0. \quad (2.8)$$

Частное решение в случае равномерно распределённой нагрузки очевидно –

$$w^* = \frac{pr^4}{64D}. \quad (2.9)$$

Решение однородного уравнения записывается в виде

$$w_0 = c_1 \ln r + c_2 r^2 \ln r + c_3 r^2 + c_4, \quad (2.10)$$

где c_1, c_2, c_3, c_4 – постоянные интегрирования.

Таким образом, общее решение для круговой пластинки имеет вид

$$w = c_1 \ln r + c_2 r^2 \ln r + c_3 r^2 + c_4 + \frac{pr^4}{64D}. \quad (2.11)$$

2.3. Определение изгибающих моментов и поперечных сил круглых пластин

Величины изгибающих моментов и поперечных сил в круглых пластинах, как и уравнение изогнутой поверхности, можно выразить в полярной системе. Формулы для них, во-первых, вполне естественны для анализа круглых пластин, а, во-вторых, необходимы при практическом решении задач на стадии формулировки краевых условий.

Формулы для изгибающих моментов и поперечных сил несложно вывести на основе известных выражений аналогичных величин в декартовых координатах (см. формулы для прямоугольных пластинок (1.6,а)). Воспользовавшись, например, определением

$$M_x = -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right),$$

после подстановки формул преобразования производных (2.3) находят моменты в радиальном направлении

$$M_r = -D \left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right) \right]. \quad (2.12,а)$$

Аналогично выводят формулы и для окружных и крутящих моментов:

$$M_\theta = -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) = -D \left(\frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} + \nu \right), \quad (2.12,б)$$

$$M_{r\theta} = M_{\theta r} = -D(1-\nu) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = -D(1-\nu) \left(\frac{1}{r^2} \frac{\partial w}{\partial \theta} - \frac{1}{r} \frac{\partial^2 w}{\partial r \partial \theta} \right). \quad (2.12,в)$$

Точно также и для поперечных сил легко установить, что:

$$Q_r = -D \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) = -D \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right), \quad (2.13)$$

$$Q_\theta = -D \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) = -D \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right).$$

При полярно-симметричном изгибе круглой пластинки формулы упрощаются:

Изгибающие моменты равны:

$$M_r = -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{\nu}{r} \frac{\partial w}{\partial r} \right), \quad (2.14,а)$$

$$M_\theta = -D \left(\frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} \right). \quad (2.14,б)$$

Поперечные силы

$$Q_r = -D \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \right). \quad (2.15)$$

Остальные усилия не возникают совсем

$$M_{r\theta} = M_{\theta r} = Q_\theta = 0. \quad (2.16)$$

2.4. Граничные условия для круглых пластин

А) При защемлении контура

$$w = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial r} = 0. \quad (2.17)$$

Б) При шарнирном опирании контура

$$w = 0, \quad M_r = -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{\nu}{r} \frac{\partial w}{\partial r} \right) = 0. \quad (2.18)$$

В) На свободном контуре (при отсутствии внешних воздействий по контуру отверстия)

$$M_r = -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{\nu}{r} \frac{\partial w}{\partial r} \right) = 0, \quad Q_r = 0. \quad (2.19)$$

Г) На свободном контуре (при наличии внешних воздействий) по наружному контуру

$$M_r = -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{\nu}{r} \frac{\partial w}{\partial r} \right) = 0, \quad Q_r = q, \quad (2.20)$$

если нагрузка q распределена только на контуре;

если нагрузка q распределена на внутреннем контуре (у отверстия), то должны быть выполнены следующие условия:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{\nu}{r} \frac{\partial w}{\partial r} = 0, \quad Q_r = -q. \quad (2.21)$$

2.5. Прогибы кольцевых пластин

На основе полученного решения несложно определит прогибы не только сплошных круглых пластинок, но пластинок с симметричным отверстием, т.е. кольцевых пластинок, при самых разных краевых условиях.

В частности, для круглой пластинки с защемлённым внешним контуром и шарнирным опиранием в месте выреза (рис. 2.2) краевые условия имеют вид:

на внешнем контуре, при $r = a$:

$$w = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial r} = 0;$$

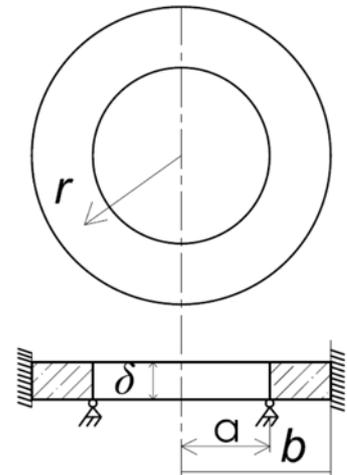


Рис. 2.2

на внутреннем, при $r = b$:

$$M_r = \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{\nu}{r} \frac{\partial w}{\partial r} = 0, \quad Q_r = -D \frac{\partial}{\partial r} \left[\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} \right] = 0.$$

Подставив сюда выражение для прогибов (2.11), приходят к системе четырёх уравнений относительно постоянных интегрирования:

$$c_1 \ln a + c_2 a^2 \ln a + c_3 a^2 + c_4 + \frac{pa^4}{64D} = 0,$$

$$\frac{c_2}{a} + 2c_3 a + 2c_4 a \ln a + c_4 a + \frac{pa^3}{16D} = 0,$$

$$-\frac{c_2}{b^2} + 2c_3 + 2c_4 \ln b + 3c_4 + \frac{3pb^2}{16D} + \nu \left(\frac{c_2}{b^2} + 2c_3 + 2c_4 \ln b + c_4 + \frac{pb^2}{16D} \right) = 0,$$

$$\frac{4c_4}{b} + \frac{pb}{2D} = 0.$$

Решив систему, находят:

$$c_1 = \frac{pa^2}{64D} \left\{ (1-\nu)a^4 - \left[(5-3\nu) - 4(1+\nu) \ln a \right] a^2 b^2 \right\} -$$

$$2 \left[2(1+\nu) + (1-2 \ln a) \left((1-\nu) + 4(1+\nu) \ln \frac{b}{a} \right) \right] b^4,$$

$$c_2 = -\frac{pa^2 b^2}{16D} \left\{ a^2 (1+\nu) + \left[(1-\nu) + 4(1+\nu) \ln \frac{b}{a} \right] b^2 \right\},$$

$$c_3 = \frac{p}{32\alpha D} \left\{ -(1-\nu)a^4 + 2(1-\nu) \ln \frac{b}{a} a^2 b^2 + \left[(3+\nu) + 4(1+\nu) \ln b \right] b^4 \right\},$$

$$c_4 = \frac{pb^2}{8D},$$

где $\alpha = (1-\nu)a^2 + (1+\nu)b^2$.

Если ещё ввести параметры:

$$\beta = \frac{b}{a}, \quad \rho = \frac{r}{a}, \quad k = \frac{(1-\nu)\beta^2 + (1+\nu)(4\beta^2 \ln \beta)}{(1-\nu) + (1+\nu)\beta^2} \beta^2$$

то прогибы кольцевой пластинки находят по формуле

$$w = \frac{pr^4}{64D} \left[-1 + 2(1-k-2\beta^2)(1-\rho^2) + \rho^4 - 4k \lg \rho - 8\beta^2 \rho^2 \ln \rho \right].$$

Значения моментов в пластинке при действии равномерно распределённой нагрузки p вычисляют по формулам (2.14).

3. ВАРИАЦИОННЫЕ И ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ РАСЧЁТА ПЛАСТИНОК

3.1. Классификация численных методов расчёта пластин

Во многих случаях определение поля прогибов пластинок путём непосредственного интегрирования уравнения изгиба пластинок

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{p(x, y)}{D} \quad (3.1)$$

связано с преодолением больших математических преград, например, для пластинок со сложным характером опирания контура, для пластин с отверстиями и т.п. В таких задачах вместо отыскания прогибов в аналитической форме согласно уравнению (3.1) переходят к определению перемещений и усилий в заранее намеченных точках – узлах сетки дискретизации срединной плоскости. Такой подход носит название метода сеток. Суть его с формальной стороны решения проблемы расчёта состоит в замене производных в уравнении (3.1) их выражениями в конечных разностях. В результате перехода к новой форме записи уравнения формируется система линейных алгебраических уравнений относительно значений прогибов в конечном числе узловых точек. В физическом отношении замена дифференциального уравнения системой конечно-разностных уравнений метода сеток означает переход от континуальной механической системы с непрерывным распределением перемещений и усилий к дискретной модели пластинки (рис. 3.1,а).

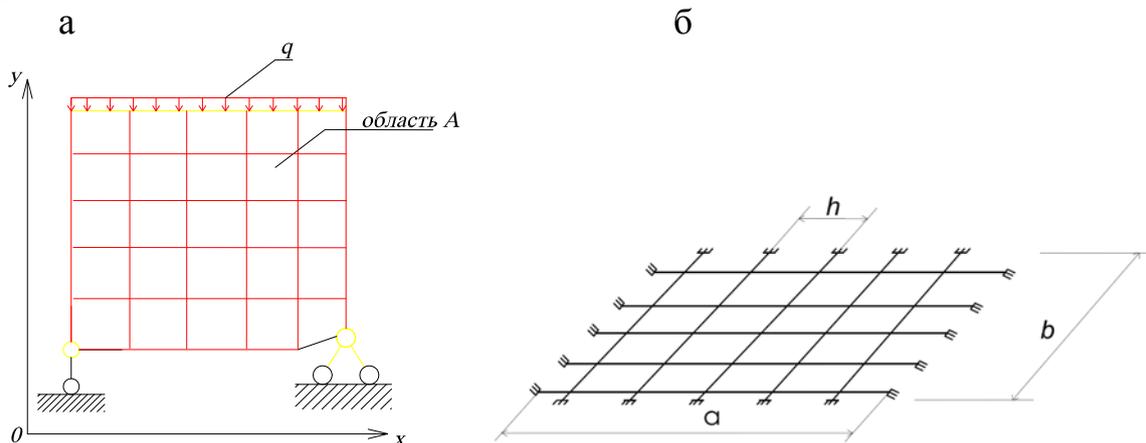


Рис. 3.1

Ещё один численный подход основан на представлении пластинки в виде связанного набора перекрёстных балок (рис. 3.1,б).

Другая группа приближённых методов основана на применении методов, имеющих вариационную природу. Например, метод Бубнова – Галёркина является следствием принципа возможных перемещений

(принципа Лагранжа) (см. подразд. 3.3). Метод Ритца – Тимошенко, в свою очередь, можно рассматривать как производное принципа возможного изменения напряжений (принципа Кастильяно (см. п. 3.3) [6]).

Со второй половины XX века для расчёта сооружений и их частей, в том числе и пластин, развивается метод конечных элементов, который также относится к вариационным. Формирование уравнений равновесия конечно-элементной модели (КЭ-модели) пластинки осуществляется на базе принципа возможных перемещений. Изложение метода конечных элементов (МКЭ) для расчёта пластин подробно рассматривается в следующем разделе пособия.

3.2. Метод конечных разностей, или метод сеток

Из математики известно, что производные непрерывной функции w могут быть представлены в конечных разностях, например вторая производная по переменной x записывается в следующем виде:

$$\left. \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right|_{ij} \approx \frac{(w_{i+1,j} - 2w_{i,j} + w_{i-1,j}))}{\delta^2}. \quad (3.2,а)$$

Аналогичное выражение справедливо и по направлению оси y

$$\left. \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right|_{ij} \approx \frac{(w_{i,j+1} - 2w_{i,j} + w_{i,j-1}))}{\delta^2}, \quad (3.2,б)$$

где δ – шаг сетки дискретизации (рис. 3.2). Сложив данные выражения, можно получить аппроксимирующее конечно-разностное представление бигармонического оператора (оператора Лапласа):

$$\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \Big|_{ij} \approx \frac{w_{i-1,j} + w_{i+1,j} + w_{i,j-1} + w_{i,j+1} - 4w_{i,j}}{\delta^2}. \quad (3.3)$$

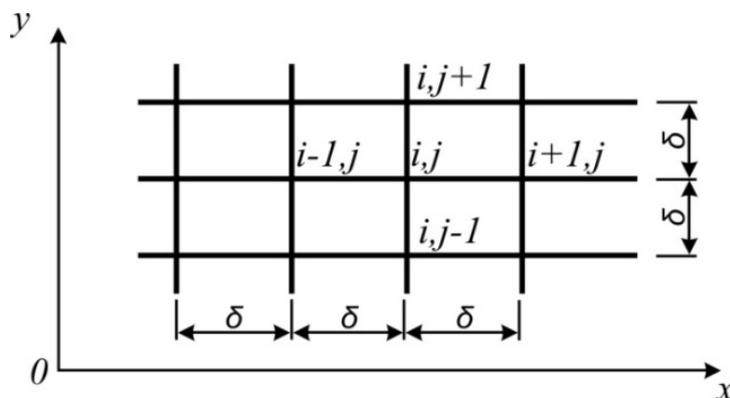


Рис. 3.2

Дифференциальное уравнение изгиба пластинки (3.1) можно переписать в виде

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) = -\frac{p}{D}.$$

Сложив величины моментов

$$M_x = -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right),$$

$$M_y = -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)$$

и разделив их сумму на $1 + \nu$, нетрудно составить выражение для *приведенного момента*:

$$M = \frac{M_x + M_y}{1 + \nu} = -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right). \quad (3.4)$$

С учётом данного определения момента уравнение (3.1) предстанет в виде

$$\frac{\partial^2 M}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 M}{\partial y^2} = -p, \quad (3.5,а)$$

а сумма моментов $M_x + M_y$ согласно (3.3) –

$$\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) = -\frac{M}{D}. \quad (3.5,б)$$

Очевидно, два уравнения (3.5) эквивалентны исходному уравнению (3.1).

Полученные уравнения несложно записать в конечно-разностной форме. С этой целью на поверхности пластинки необходимо нанести регулярную сетку с шагом δ . С каждым узлом сетки следует связать величину прогиба, снабдив её двумя индексами i, j . Для отдельного узла согласно (3.3), (3.5,б) можно составить уравнение в конечных разностях:

$$\frac{w_{i-1,j} + w_{i+1,j} + w_{i,j-1} + w_{i,j+1} - 4w_{i,j}}{\delta^2} = -\frac{M_{ij}}{D}. \quad (3.6)$$

Аналогично поступают и с уравнением (3.4,а). Для удобства дальнейшего использования совокупность уравнений (3.4) в конечной форме записывают построчно:

$$M_{i-1,j} + M_{i+1,j} + M_{i,j-1} + M_{i,j+1} - 4M_{i,j} = p_{i,j} \delta^2, \quad (3.7,а)$$

$$w_{i-1,j} + w_{i+1,j} + w_{i,j-1} + w_{i,j+1} - 4w_{i,j} = -\frac{M_{ij}}{D} \delta^2. \quad (3.7,б)$$

Для пластин с шарнирным опиранием контура для вычисления моментов число уравнений будет совпадать с числом неизвестных. При выполнении расчёта пластинки сначала определяют моменты по (3.5,а), а затем переходят к вычислению прогибов по (3.5,б).

В общем случае по формуле (3.5,а) для сетки с m узлами можно составить систему линейных уравнений с m неизвестными. Если обозначить

$$\bar{M}_i = (M_{i,1}, M_{i,2}, \dots, M_{i,m-1})^T,$$

$$\bar{M} = (\bar{M}_1, \bar{M}_2, \dots, \bar{M}_{m-1})^T$$

– вектор-столбцы узловых моментов в пластинке, то систему уравнений можно записать в матричной форме

$$[V]\bar{M} = \bar{P}, \quad (3.8)$$

где

$$[V] = \begin{bmatrix} [v] & -[1] & & & \\ -[1] & [v] & -[1] & & \\ & \dots & \dots & \dots & \\ & & -[1] & [v] & -[1] \\ & & & -[1] & [v] \end{bmatrix}$$

– матрица равновесия, а

$$[v] = \begin{bmatrix} 4 & -1 & & & \\ -1 & 4 & -1 & & \\ & \dots & \dots & \dots & \\ & & -1 & 4 & -1 \\ & & & -1 & 4 \end{bmatrix} \quad (3.9)$$

– её ячейка в виде блок-матрицы, $[1]$ – единичная матрица.

Пример 1.

Приближённые значения вторых производных от изгибающих моментов M в узлах сетки равны (рис. 3.3):

$$\left(\frac{\partial^2 M}{\partial x^2}\right)_0 = \frac{M_1 - M_0 + M_1}{\delta^2} = \frac{2M_1 - 2M_0}{\delta^2}; \quad \left(\frac{\partial^2 M}{\partial y^2}\right)_0 = \frac{2M_1 - 2M_0}{\delta^2};$$

$$\left(\frac{\partial^2 M}{\partial x^2}\right)_1 = \frac{M_3 - 2M_1 + M_0}{\delta^2} = \frac{-M_1 + M_0}{\delta^2}; \quad \left(\frac{\partial^2 M}{\partial y^2}\right)_1 = \frac{2M_2 - M_1}{\delta^2} \quad (3.10)$$

$$\left(\frac{\partial^2 M}{\partial x^2}\right)_2 = \frac{-2M_2 + M_1}{\delta^2}; \quad \left(\frac{\partial^2 M}{\partial y^2}\right)_2 = \frac{-2M_2 - M_1}{\delta^2}.$$

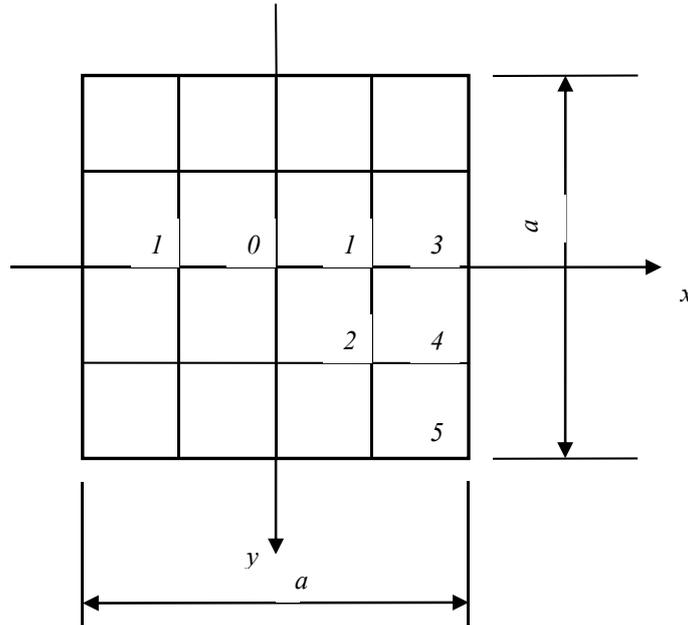


Рис. 3.3

После постановки производных (3.10) в условие (3.5,а) приходят к системе трёх уравнений

$$\begin{aligned} -4M_1 - 4M_0 &= \frac{pa^2}{16}, \\ 2M_2 - 4M_1 + M_0 &= -\frac{pa^2}{16}, \\ -4M_2 + 2M_1 &= \frac{pa^2}{16}. \end{aligned} \quad (3.11)$$

Её решение имеет вид

$$M_0 = \frac{9}{2} \frac{pa^2}{64}, \quad M_1 = \frac{7}{2} \frac{pa^2}{64}, \quad M_2 = \frac{11}{4} \frac{pa^2}{16}. \quad (3.12)$$

Если выразить с помощью конечных разностей вторые производные в уравнении (3.5,б) и подставить полученные значения моментов (3.12), то образуется система трёх уравнений относительно прогибов в точках 0, 1 и 2:

$$\begin{aligned} -4w_1 - 4w_0 &= -\frac{9}{2} \frac{pa^2}{64}, \\ 2w_2 - 4w_1 + w_0 &= -\frac{7}{2} \frac{pa^2}{64}, \\ -4w_2 + 2w_1 &= -\frac{11}{4} \frac{pa^2}{16}. \end{aligned}$$

Отсюда они и находятся

$$w_0 = \frac{66 pa^2}{16 \cdot 64}, \quad w_1 = \frac{48 pa^2}{16 \cdot 64}, \quad w_2 = \frac{36 pa^2}{16 \cdot 64}.$$

Значение прогиба в центре

$$w_0 = 0,00403 \frac{pa^2}{D}$$

незначительно отличается от точного (менее чем на 1%). Изгибающий момент в центре пластинки равен:

$$M_x = M_y = \frac{M_0(1+\nu)}{2} = 0,0457 pa^2,$$

что меньше точного на 4,5% при $\nu = 0,3$.

Пример 2.

Если края пластинки защемлены, то число неизвестных будет больше количества внутренних узлов сетки, поскольку на границах моменты неизвестны. К тому же необходимо учесть и условия отсутствия наклонов граней, когда:

$$\left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)_i = \frac{w_{i-1} - w_{i+1}}{2\delta} = 0; \quad \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)_j = \frac{w_{j-1} - w_{j+1}}{2\delta} = 0$$

Для удовлетворения этих условий на контуре следует ввести *законтурные* узлы при сохранении того же шага сетки δ , что и внутри пластинки (рис. 3.3,б).

Откуда

$$w_{i-1} = w_{i+1}; \quad w_{j-1} = w_{j+1} \quad (w_i = w_j = 0).$$

Например, пусть у квадратной пластинки со стороной a защемлена только одна кромка; остальные стороны – шарнирно опёрты (рис. 3.4).

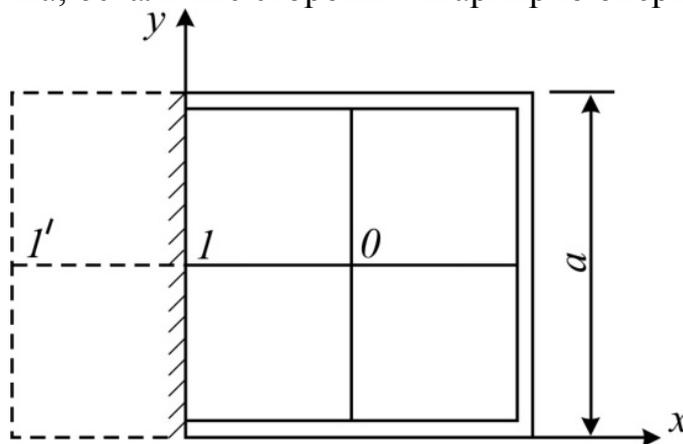


Рис. 3.4

Поделив стороны на две части, т.е. приняв шаг $\delta = \frac{a}{2}$, в соответствии с уравнением (3.7,а) можно записать

$$M_1 - 4M_0 = -p \left(\frac{a}{2} \right)^2.$$

Согласно уравнению (3.7,б):

для узла 0 справедливо выражение

$$-4w_0 = -\frac{M_0 a^2}{4D},$$

для узла 1 (при $w'_1 = w_0$) –

$$w_0 + w'_1 = -\frac{M_1 a^2}{4D} \text{ или } 2w_0 = -\frac{M_1 a^2}{4D}.$$

Решение полученной системы уравнений имеет следующие корни:

$$w_0 = \frac{1}{18} \frac{pa^4}{16D}, \quad M_0 = \frac{pa^2}{18}, \quad M_1 = -\frac{pa^2}{36}.$$

Другой подход к формированию системы уравнений в конечных разностях заключается в составлении уравнений для узлов сетки с использованием только узловых перемещений [14].

Метод конечных разностей применим к пластинкам любой формы в плане. При уменьшении шага сетки дискретизации точность решения повышается. Проблем с решением больших систем линейных уравнений с помощью ПЭВМ даже при малом шаге сетки не возникает.

3.3. Вариационный метод Бубнова – Галёркина

А) Обоснование метода Бубнова – Галёркина (1913-1915)

Варьируя величину потенциальной энергии (1.19) по перемещениям и приравнявая в соответствии с принципом Лагранжа полученное выражение нулю, приходят к уравнению

$$\delta U = \iint \left[\left(M_x \frac{\partial^2 \delta w}{\partial x^2} + M_y \frac{\partial^2 \delta w}{\partial y^2} - M_{xy} \frac{\partial^2 \delta w}{\partial x \partial y} \right) - p \delta w \right] dx dy = 0 \quad (3.13)$$

Выполнив интегрирование левой части по частям, его можно представить в виде

$$\begin{aligned} & \iint (D \nabla^2 \nabla^2 w) \delta w + D \int_0^b Q_x \delta w dy + D \int_0^a Q_y \delta w dx + \\ & + D \int_0^b M_x \delta \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right) dy \Big|_0^a + D \int_0^a M_y \delta \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right) dx \Big|_0^b + 2(1-\nu) D M_{xy} \Big|_0^a \Big|_0^b = 0. \end{aligned}$$

Если возможные перемещения заведомо принять соответствующими кинематическим граничным условиям, то интегралы на контуре пластинки (написанные во второй строке) обращаются в нуль. В этом случае уравнение принимает компактную форму

$$\iint_A (D\nabla^2\nabla^2 w - q)\delta w dx dy = 0, \quad (3.14)$$

которая обычно используется при практическом применении метода Бубнова – Галёркина.

Б) Пример расчёта пластинки методом Бубнова – Галёркина

В этом подразделе приводится решение простейшей задачи расчёта прямоугольной пластинки, шарнирно опёртой по всему контуру, на основе метода Бубнова – Галёркина. Для такого случая опирания справедливы следующие граничные условия:

$$\left. \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right|_{x=0} = 0, \quad \left. \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right|_{x=a} = 0, \quad w \Big|_{\substack{x=0 \\ x=a \\ y=0 \\ y=b}} = 0. \quad (3.15)$$

Кроме того, прогибы пластинки должны удовлетворять разрешающему уравнению (3.1).

В качестве кинематически допустимого поля прогибов пластинки можно взять распределение перемещений в виде синусовидного купола

$$w = C \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b}, \quad (3.16)$$

который удовлетворяет краевым условиям; C – постоянный множитель (рис. 3.5).

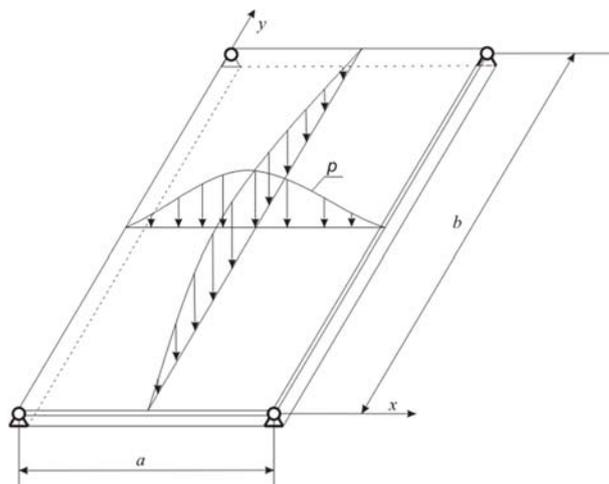


Рис. 3.5

Неизвестный множитель C предлагается искать также на основе уравнения (3.1) следующим образом.

Подставив выражение прогиба в левую часть уравнения (3.1), после выполнения необходимых операций легко получить новую форму этой части:

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = C \pi^2 \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \right)^2 \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b}. \quad (3.17)$$

Таким образом, оказывается, что теперь левая часть уравнения (3.1) имеет переменный характер, в то время как в исходном уравнении она постоянна и равна $\frac{p}{D}$. Это означает, что уравнение равновесия (3.1) не удовлетворяется для всех точек пластинки. Ставя целью решения задачи удовлетворение условия (3.1) в целом по всей площади пластинки, следует, в соответствии с принципом возможных перемещений, умножить обе части уравнения на возможное перемещение $\delta w = C \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b}$ и проинтегрировать результат по всей поверхности

$$\iint_{00}^{ab} \left(\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} \right) \delta w dx dy = \iint_{00}^{ab} \frac{p(x, y)}{D} \delta w dx dy.$$

С учётом выражения (3.6) данное соотношение принимает вид

$$C^2 \pi^4 \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)^2 \sin^2 \frac{\pi x}{a} \sin^2 \frac{\pi y}{b} dx dy = \iint_{00}^{ab} \frac{p(x, y)}{D} C \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b} dx dy.$$

Выполнив здесь интегрирование, приходят к уравнению

$$C^2 \pi^4 \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)^2 \frac{a}{2} \frac{b}{2} = \frac{p}{D} \frac{2a}{\pi} \frac{2b}{\pi},$$

из которого находят коэффициент

$$C = \frac{16p}{D \pi^6 \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \right)}. \quad (3.18)$$

Для квадратной пластинки величина этого коэффициента определяет максимальный прогиб пластинки в центре

$$C = \frac{4p}{D \pi^6} = 0,0454 \frac{pa^4}{E \delta^3}. \quad (3.19)$$

Полученное значение прогиба только на 2,5% больше точного. Следует заметить, что погрешность при определении напряжений, в отличие от прогибов, значительна, около 11,5% [3].

При интегрировании левой части были использованы известные интегралы произведений тригонометрических функций (см. разд. 1).

Точность решения по методу Бубнова – Галёркина можно существенно повысить, если в качестве возможного поля перемещений принять более общее выражение прогибов в виде суммы

$$\delta w = \sum_{i=1}^n C_i w_i, \quad (3.20)$$

где C_i – постоянные коэффициенты.

3.4. Приложение вариационного метода Ритца – Тимошенко к расчёту прямоугольных пластин

А) Истоки метода Ритца – Тимошенко (1908-1910)

В основе метода лежит принцип минимума потенциальной энергии пластинки при её равновесии

$$\delta U = 0. \quad (3.21)$$

Как и в методе Бубнова – Галёркина, поле прогибов принимают в виде ряда

$$w = \sum_{i=1}^n c_i \varphi_i, \quad (3.22)$$

где c_i – постоянные коэффициенты, φ_i – некоторые функции. Следовательно, вариация энергии выражается через коэффициенты ряда c_i . Выполняя минимизацию энергии по каждому коэффициенту ряда с помощью соответствующих условий

$$\frac{\partial U}{\partial c_1} = 0, \quad \frac{\partial U}{\partial c_2} = 0, \quad \dots \quad \frac{\partial U}{\partial c_n} = 0, \quad (3.23)$$

составляют тем самым систему алгебраических уравнений, из которых впоследствии находят коэффициенты ряда c_i . Зная их, получают поле перемещений пластинки согласно (3.22).

Метод рекомендуется применять в расчётах пластинок при сложных граничных условиях.

Б) Пример расчёта пластинки методом Ритца – Тимошенко

Выполнить расчёт прямоугольной шарнирно опертой по всему контуру пластинки, нагруженной сосредоточенной силой P в центре (рис. 3.6).

Взяв начало системы декартовых координат в одном из углов прямоугольника, ожидаемое распределение прогибов пластинки можно принять в виде ряда

$$w = \sum_{i=1}^n c_i \sin \frac{i\pi x}{a} \sin \frac{i\pi y}{b}, \quad (3.24)$$

где c_i ($i=1,2,\dots,n$) – коэффициенты полинома; n – число степеней свободы. Очевидно, в качестве функций φ_i выступают здесь произведения тригонометрических функций

$$\varphi_i = \sin \frac{i\pi x}{a} \sin \frac{i\pi y}{b} \quad (i=1,2,\dots,n).$$

На первый взгляд указанное поле перемещений несущественно отличается от известного поля прогибов Навье в виде

$$w = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} A_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}.$$

Как и в решении Навье, оно удовлетворяет краевым условиям задачи (рис. 3.6).

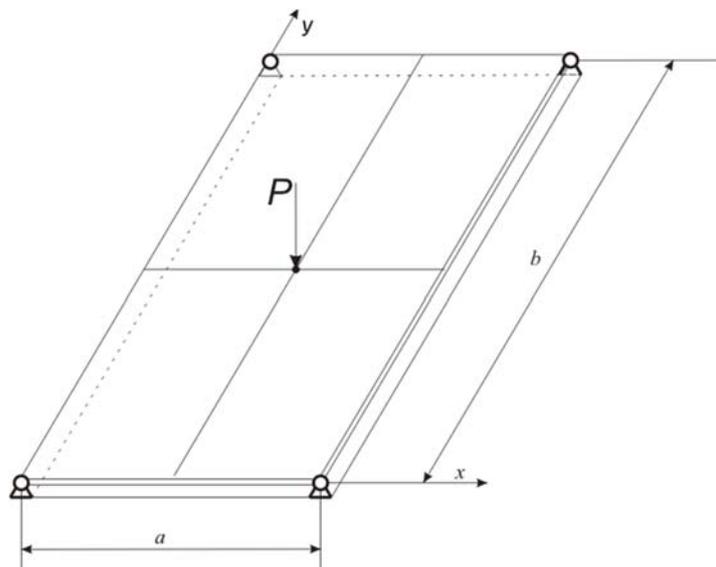


Рис. 3.6

$$w \left| \begin{array}{l} x=0, \\ x=a, \\ y=0, \\ y=b \end{array} \right. \quad \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \Big|_{x=0} = 0, \quad \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \Big|_{y=0} = 0. \quad (3.25)$$

Поиск неизвестных коэффициентов c_i ряда (3.24) в соответствии с рассматриваемым методом осуществляется на основе условий экстремальности (3.23).

Величина потенциальной энергии U пластинки, если ограничиться только одним членом ряда в (3.31), согласно (1.18), равна:

$$U = \frac{1}{8} \pi^4 D \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \right)^2 abc^2 - Pc.$$

Продифференцировав это выражение по c и приравняв производную нулю, легко найти коэффициент

$$c = \frac{4a^3b^3P}{\pi^4 D (a^2 + b^2)^2}. \quad (3.26)$$

Очевидно, максимальный прогиб пластинки $w_{\max} = c$ возникает в её центре. Точность решения повышается, если воспользоваться бóльшим числом членов ряда.

4. РАСЧЁТ ПЛАСТИНОК МЕТОДОМ КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

Анализ напряжённо-деформированного состояния пластин, лежащих на упругом основании, ребристых пластин, пластин с отверстиями и др. аналитическими методами становится настолько трудоёмким, что во многих случаях не удаётся получить результат в обозримой (аналитической) форме [11]. Для таких сложных задач по расчёту пластин и предназначен метод конечных элементов (МКЭ). На его основе возможно решение практических задач любой сложности, в том числе пластинчатых систем, а также учёт совместной работы пластин и стержней в комбинированных (плитно-балочных) системах. При этом в пластинках могут быть отверстия, на части поверхности пластинки могут опираться на упругое основание, иметь нелинейный характер деформирования, обусловленный как изменением геометрии, так и учётом неупругих свойств материалов. Таким образом, метод конечных элементов позволяет отразить действительную работу конструкций.

4.1. Идея метода конечных элементов для расчёта пластин

Расчёт пластин методом конечных элементов, т.е. определение напряжённо-деформированного состояния, в частности вычисление прогибов пластин, как и методом конечных разностей, заключается в определении прогибов конечного числа точек пластины – узлов сетки дискретизации, с помощью которой осуществляется разбиение пластины на множество пластинок меньших размеров (рис. 4.1,а). Отдельные небольшие пластинки (они и есть конечные элементы) могут быть квадратной, треугольной или иной формы (рис. 4.1,б).

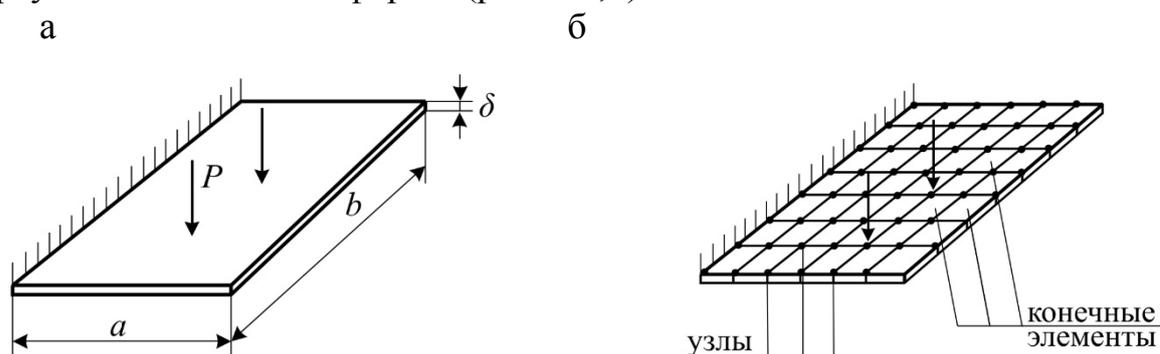


Рис. 4.1

Взаимодействие конечных элементов обеспечивается за счёт «связей», установленных только в узлах принятой конечно-элементной модели пластины (КЭ-модели). При этом в качестве узлов иногда рассматривают и другие точки КЭ, в частности точки, расположенные посередине сторон

контура элемента, в центре его и др. Как таковые, в отличие от метода перемещений, связи в модели отсутствуют. Тем не менее конечно-элементная модель пластины может рассматриваться в качестве «основной системы» МКЭ. Совместная работа конечных элементов, примыкающих к тому или иному узлу, достигается путём уравнивания прогибов соседних элементов в узлах, углов наклона смежных граней или (и) усилий. В зависимости от выбора типа независимых переменных, характеризующих напряжённо-деформированное состояние КЭ, различают три основные формы метода:

- МКЭ в форме метода перемещений;
- МКЭ в форме метода сил;
- гибридный метод конечных элементов.

Расчёт пластин по МКЭ в форме метода перемещений, как и расчёт стержневых систем методом перемещений, сводится к формированию условий равновесия набора конечных элементов в узлах КЭ-модели. Итогом процесса составления условий равновесия является система линейных алгебраических уравнений:

$$[R] \bar{Z} + \bar{P} = 0.$$

Здесь $[R]$ – матрица жёсткости КЭ-модели в общей системе координат (глобальная матрица жёсткости); \bar{Z} – вектор узловых перемещений; \bar{P} – вектор узловых нагрузок. Порядок матрицы $[R]$ равен числу степеней свободы КЭ-модели. Условия равновесия выводятся на основе вариационного принципа Лагранжа (см. подразд. 4.3).

При формировании глобальной матрицы используется библиотека конечных элементов, содержащая матрицы (ячейки) жёсткости отдельных конечных элементов $[C^e]$. Ячейки жёсткости в общем случае переводятся в глобальную систему координат, и затем по специальной процедуре формируется общая матрица жёсткости пластины $[R]$. Матрица $[R]$, как и вектор узловых перемещений \bar{Z} , в дальнейшем подлежат корректировке с целью учёта граничных условий на контуре пластинки. В итоге приходят к системе линейных алгебраических уравнений

$$[K] \bar{\xi} + \bar{P} = 0,$$

порядок которой, как и порядок матрицы $[R]$, равен числу степеней свободы КЭ-модели. Решив данную систему, находят вектор $\bar{\xi}$, включающий, наряду с перемещениями, и реакции связей (см. ниже пример расчёта клина в подразд. 4.3).

4.2. Типы конечных элементов

При выполнении расчётов пластин методом конечных элементов важную роль при формировании матрицы жёсткости конечно-элементной модели играет выбор типа конечного элемента.

Тип элемента характеризуется в первую очередь:

- формой в плане (рис. 4.2)

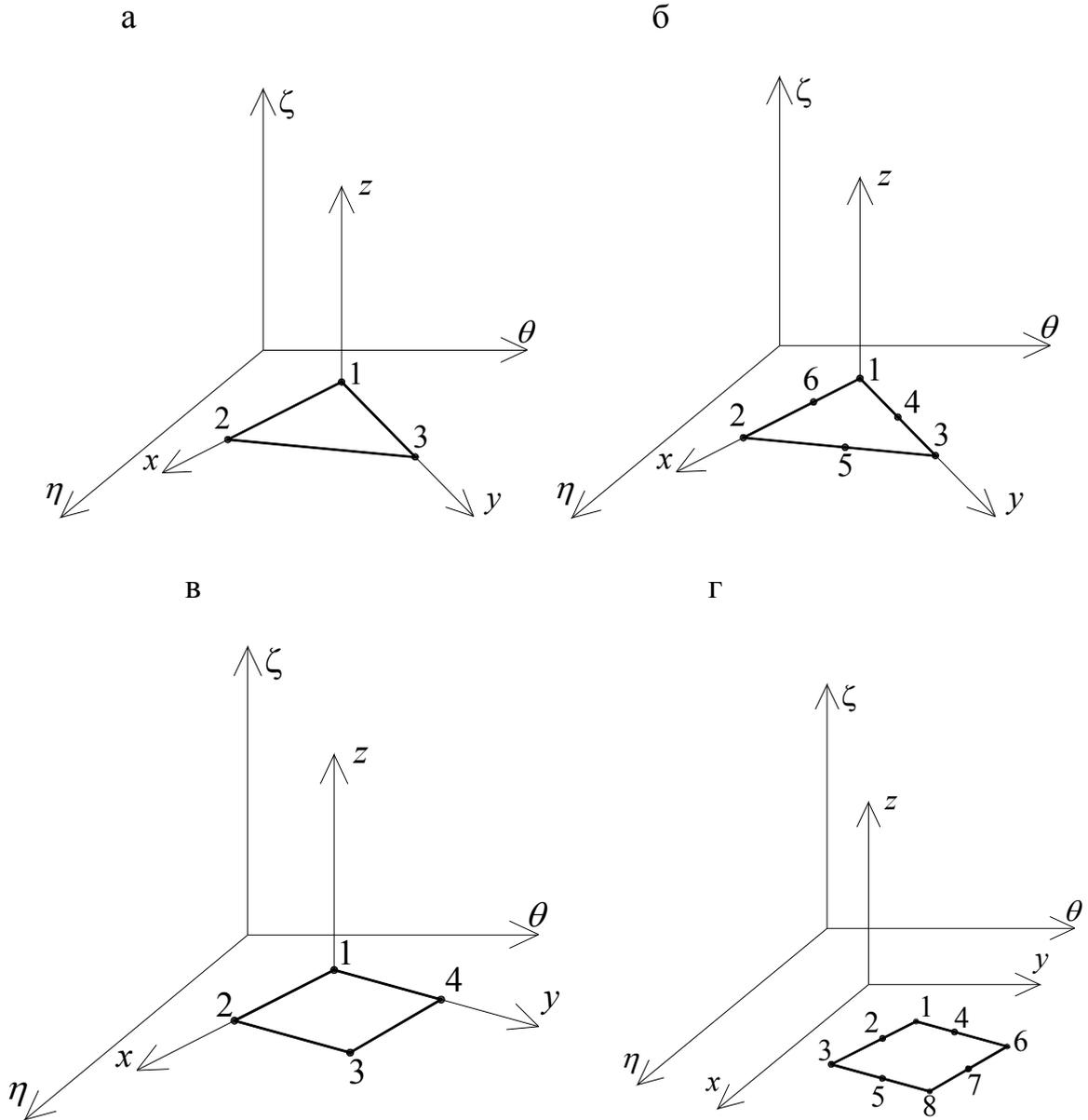


Рис. 4.2

Ещё большее число разновидностей элементов существует в зависимости от:

- набора узловых переменных, среди которых могут быть как перемещения, углы наклоны поперечных сечений, так и усилия на контуре элемента, характеризующие его состояние, т.е. числа степеней свободы (ср.

например, на рис. 4.2 схемы «а» и «б» треугольных элементов с разным количеством узлов);

- способа аппроксимации поля перемещений деформированного элемента с помощью базисных функций;
- класса рассматриваемых задач.

При первоначальном изучении МКЭ пластин достаточно ограничиться рассмотрением конечных элементов треугольной формы, таких, как:

- 1) плоский симплекс-элемент (элемент с постоянными деформациями – *CST*);
- 2) элемент Морли.

Они могут быть использованы в расчётах пластин с прямолинейным и криволинейным очертаниями как внешнего, так и внутреннего контура.

Плоский симплекс-элемент предназначен для расчёта пластины, нагруженной силами, расположенными в её плоскости. Элемент Морли, а также подобный ему элемент *BCIZ*, элемент *DKT* и четырёхугольные конечные элементы, исследованные в специальной литературе, находят широкое применение в расчётах изгибаемых пластин [3, 6, 7].

Обширные библиотеки конечных элементов имеются во всех вычислительных комплексах (ПК «Лира», *SCAD* и др.). Каждому типу элемента в ПК присваивается определённый номер или код для того, чтобы при разработке алгоритма программы расчёта пластинки по МКЭ необходимый элемент вместе с его ячейкой жёсткости можно было «вызвать» из библиотеки и вставить в программу.

Далее подробно рассматривается напряжённо-деформированное состояние двух простейших типов *конечных элементов* пластин, составляющих библиотеку элементов.

4.3. Ячейки жёсткости плоских элементов

В этом подразделе рассматриваются процедуры формирования ячеек жёсткости двух наиболее распространённых типов КЭ: *симплекс-элемента* и *КЭ Морли*.

А) Двумерный симплекс-элемент с шестью степенями свободы

Дискретизацию диска при наличии криволинейной части контура целесообразно выполнять путём разбиения его на треугольные элементы (рис. 4.3,а). В таком случае в качестве конечного элемента служит пластинка треугольной формы с узлами в её вершинах – *симплекс-элемент* (рис. 4.3,б, в).

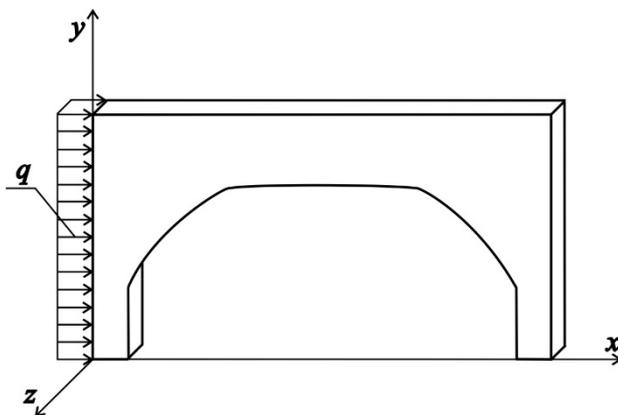
Узлы на плоскости xOy нумеруют, начиная с произвольно выбранного i -го узла, обходя треугольник против хода часовой стрелки. Абсциссы i -го, j -го и k -го узлов обозначают через x_i, x_j, x_k , ординаты – через y_i, y_j, y_k . Каждый узел имеет две степени свободы – перемещения $u_i, v_i, u_j, v_j, u_k, v_k$ вдоль осей x и y . Интерполирующие функции, с

помощью которых описывается возможное распределение перемещений по полю элемента вдоль направлений осей координат, принимают линейными (в виде линейных полиномов):

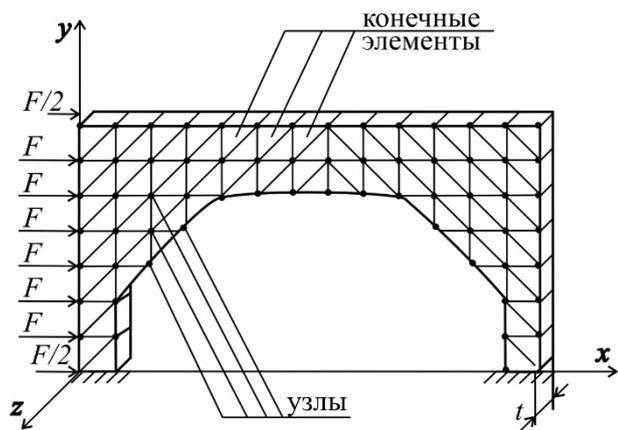
$$u(x, y) = \alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 y, \quad (4.1,а)$$

$$v(x, y) = \alpha_3 + \alpha_4 x + \alpha_5 y. \quad (4.1,б)$$

а



б



в

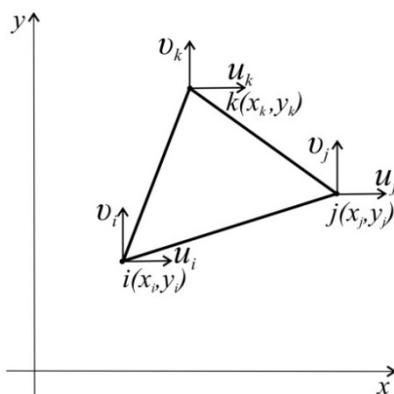


Рис. 4.3

Коэффициенты $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5$ легко выразить через узловые координаты $x_i, x_j, x_k, y_i, y_j, y_k$ с помощью граничных условий КЭ. Например, первая группа коэффициентов $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2$ находится из системы, полученной после подстановки u_i, u_j, u_k в (4.1,а):

$$\begin{aligned} u_i &= \alpha_0 + \alpha_1 x_i + \alpha_2 y_i, \\ u_j &= \alpha_0 + \alpha_1 x_j + \alpha_2 y_j, \\ u_k &= \alpha_0 + \alpha_1 x_k + \alpha_2 y_k. \end{aligned}$$

Если ввести частный вектор перемещений $\bar{Z}_u = (u_i, u_j, u_k)$ и вектор коэффициентов $\bar{\alpha} = (\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2)$, то систему можно переписать в виде

$$\bar{Z}_u = [K] \bar{\alpha}, \quad (4.2)$$

где $[K] = \begin{bmatrix} 1 & x_i & y_i \\ 1 & x_j & y_j \\ 1 & x_k & y_k \end{bmatrix}$

– матрица координат вершин треугольника.

Компоненты вектора $\bar{\alpha}$, в частности коэффициент α_0 , можно найти по способу Крамера

$$\alpha_0 = \frac{\begin{vmatrix} u_i & x_i & y_i \\ u_j & x_j & y_j \\ u_k & x_k & y_k \end{vmatrix}}{[K]} = \frac{\begin{vmatrix} u_i & x_i & y_i \\ u_j & x_j & y_j \\ u_k & x_k & y_k \end{vmatrix}}{2A},$$

где $[K] = 2A$, буква A , как принято, обозначает площадь треугольника.

Разложив определитель, стоящий в числителе, по первому столбцу, определяют коэффициент

$$\alpha_0 = \frac{u_i(x_j y_k - x_k y_j) - u_j(x_i y_k - x_k y_i) - u_k(x_i y_j - x_j y_i)}{2A}.$$

Аналогично находят и два других коэффициента. После подстановки выражений для $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2$ в формулу (4.1,а) становится известным распределение перемещений вдоль оси Ox

$$\begin{aligned} u(x, y) &= \alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 y = \\ &= \frac{1}{2A} \left[(\zeta_i + \theta_i x + \eta_i y) u_i + (\zeta_j + \theta_j x + \eta_j y) u_j + (\zeta_k + \theta_k x + \eta_k y) u_k \right], \end{aligned} \quad (4.3,а)$$

где

$$\zeta_i = x_j y_k - x_k y_j, \quad \theta_i = y_j - y_k, \quad \eta_i = x_k - x_j = -(x_j - x_k). \quad (4.4)$$

Очевидно, величины θ_i, η_i являются проекциями на оси $0x$ и $0y$ стороны $j-k$ треугольника, расположенной напротив i -й вершины (рис. 4.4). Распределение перемещений вдоль оси $0y$ находится по аналогии с определением перемещений u

$$\begin{aligned} v(x, y) &= \alpha_3 + \alpha_4 x + \alpha_5 y = \\ &= \frac{1}{2A} \left[(\zeta_i + \theta_i x + \eta_i y) v_i + (\zeta_j + \theta_j x + \eta_j y) v_j + (\zeta_k + \theta_k x + \eta_k y) v_k \right]. \end{aligned} \quad (4.3, б)$$

Полученное поле перемещений конечного элемента можно представить и в матричной форме

$$\bar{\Gamma} = [N] \bar{Z}, \quad (4.4)$$

если воспользоваться обобщённым вектор-столбцом узловых перемещений

$$\bar{Z} = (u_i, v_i, u_j, v_j, u_k, v_k)^T,$$

вектором обобщённого поля перемещений в виде

$$\bar{\Gamma} = (u, v)^T$$

и матрицей

$$[N] = \begin{bmatrix} N_i & 0 & N_j & 0 & N_k & 0 \\ 0 & N_i & 0 & N_j & 0 & N_k \end{bmatrix}, \quad (4.5)$$

составленной из так называемых базисных функций:

$$\begin{aligned} N_i(x, y) &= \frac{1}{2A} (\zeta_i + \theta_i x + \eta_i y), \\ N_j(x, y) &= \frac{1}{2A} (\zeta_j + \theta_j x + \eta_j y), \\ N_k(x, y) &= \frac{1}{2A} (\zeta_k + \theta_k x + \eta_k y), \end{aligned} \quad (4.6, а)$$

фигурирующих в формулах (4.3). Указанные функции, очевидно, также носят линейный характер, что и функции u, v , изначально принятые для описания предполагаемого поля перемещений конечного элемента.

В МКЭ часто, минуя начальный этап, описанный выше, задаются изменением перемещений в форме (4.4), выбирая базисные функции, соответствующие критериям полноты и совместности деформаций*. В рассматриваемом случае в качестве базисных функций можно взять функции, принимающие единичное значение в одном из узлов конечного элемента

* Критерий полноты, в частности, заключается в том, что базисные функции должны обеспечивать описание НДС в области КЭ, соответствующего случаю постоянных деформаций и напряжений пластинки; при этом выполняется равенство $L_i + L_j + L_k = 1$. Совместность выражается в сохранении непрерывности как самих функций, так и их производных, встречающихся в выражении потенциальной энергии конечного элемента.

при сохранении нулевых величин в двух других. Графической иллюстрацией одной из таких функций, например для i -й вершины треугольника, служит наклонная плоскость $L_i(x, y)$, след которой на горизонтальной плоскости xOy совпадает с прямой, проходящей через вершины j, k треугольника и через точку l , расположенную над вершиной i на расстоянии, равном единице (рис. 4.4).

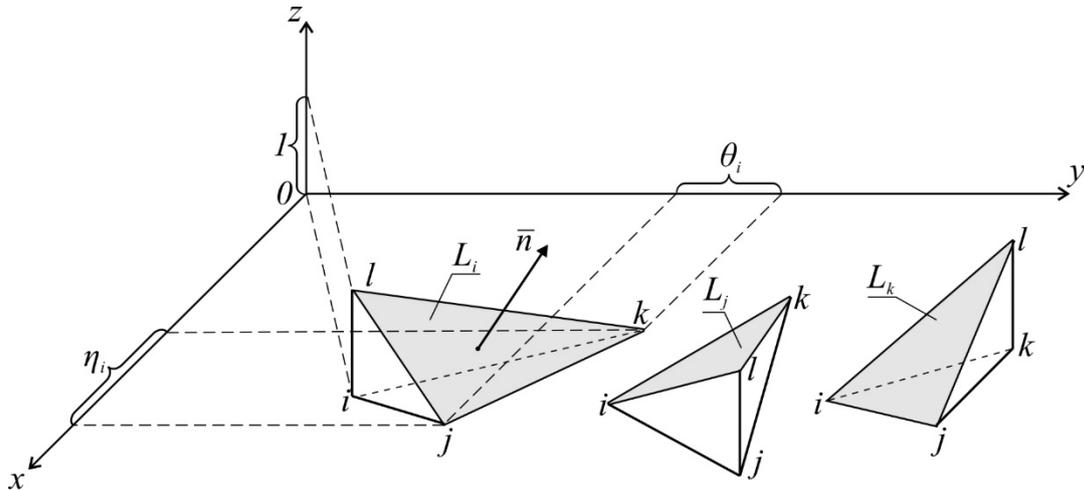


Рис. 4.4

Указанным признакам плоскости $L_i(x, y)$ в аналитической форме отвечает условие равенства нулю определителя следующей структуры [12]:

$$\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ x_i & y_i & 1 & 1 \\ x_j & y_j & 0 & 1 \\ x_k & y_k & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Разложив определитель по третьему столбцу и заменив при этом z на $L_i(x, y)$, легко вывести уравнение

$$L_i(x, y) \cdot \begin{vmatrix} x_i & y_i & 1 \\ x_j & y_j & 1 \\ x_k & y_k & 1 \end{vmatrix} - 1 \cdot \begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_j & y_j & 1 \\ x_k & y_k & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

которое в явной форме принимает вид

$$L_i(x, y) = \frac{\theta_i x + \eta_i y}{2A}, \quad (4.6, б)$$

где, как и в формулах (4.6,a), присутствуют проекции θ_i , η_i и удвоенная площадь треугольника, равная

$$2A = \begin{vmatrix} x_i & y_i & 1 \\ x_j & y_j & 1 \\ x_k & y_k & 1 \end{vmatrix}.$$

Однако, в отличие от функции $N_i(x, y)$, в полученной формуле для $L_i(x, y)$ отсутствует слагаемое, содержащее постоянную величину ζ_i .

Аналогично находятся базисные функции и для двух других узлов (см. рис. 4.4):

$$L_j(x, y) = \frac{\theta_j x + \eta_j y}{2A}, \quad L_k(x, y) = \frac{\theta_k x + \eta_k y}{2A}.$$

Проекция θ_i стороны треугольника, отнесённая к удвоенной площади треугольника, определяет тангенс угла наклона плоскости $L_i(x, y)$ с осью ординат, поскольку проекция нормали $\vec{n} = (n_x, n_y, n_z)$ к плоскости на ось Oz по модулю равна $2A$, а проекция нормали на ось Oy совпадает с θ_i (рис. 4.5).

Наклон плоскости с осью абсцисс составляет угол $\alpha_i = \arctg(\eta_i/2A)$. С учётом этих замечаний выражение для функции $L_i(x, y)$ принимает вид

$$L_i(x, y) = x \operatorname{tg} \beta_i + y \operatorname{tg} \alpha_i.$$

По аналогии записываются и другие базисные функции.

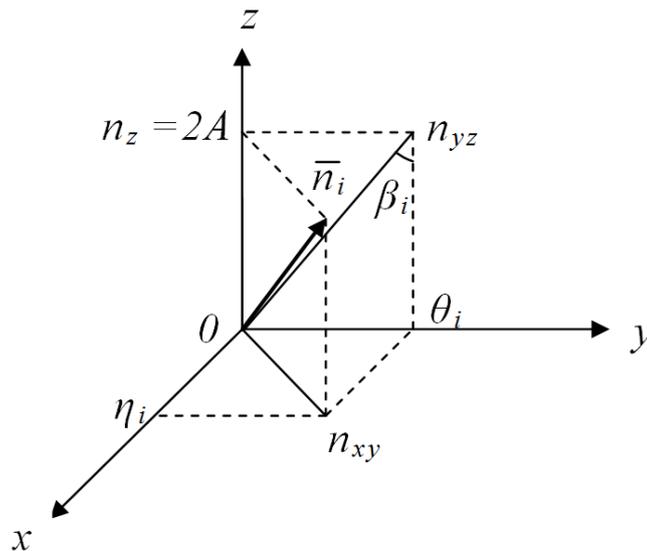


Рис. 4.5

Таким образом, обобщённое поле перемещений можно выразить и с помощью новых функций согласно преобразованию (4.4), в котором матрица $[N]$ подлежит замене на матрицу

$$[L] = \begin{bmatrix} L_i & 0 & L_j & 0 & L_k & 0 \\ 0 & L_i & 0 & L_j & 0 & L_k \end{bmatrix}$$

похожей структуры.

Вектор деформаций $\bar{\varepsilon} = (\varepsilon_x, \varepsilon_y, \gamma_{xy})$, компоненты которого находятся на основе общих соотношений между деформациями и перемещениями

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x},$$

справедливыми в рамках плоской задачи теории упругости, можно представить в матричной форме

$$\bar{\varepsilon} = [\nabla] \bar{\Gamma}, \quad (4.7)$$

если воспользоваться матричным дифференциальным оператором следующего вида:

$$[\nabla] = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix}.$$

Учитывая зависимость (4.4), несложно установить связь между деформациями и узловыми перемещениями

$$\bar{\varepsilon} = [\nabla][L]\bar{Z}.$$

Произведение матриц в этом выражении, обозначаемое символом

$$[B] = [\nabla][L], \quad (4.8)$$

называется *матрицей формы деформаций* или *матрицей градиентов*; в литературе на английском языке – «*strain matrix*». С её помощью вектор деформаций пластинки можно представить в виде

$$\bar{\varepsilon} = [B]\bar{Z}. \quad (4.9)$$

Структуру матрицы $[B]$ легко установить, выполнив перемножение матриц $[\nabla]$ и $[L]$ и последующее дифференцирование выражений (4.6,б)

$$[B] = \frac{1}{2A} \begin{bmatrix} \theta_i & 0 & \theta_j & 0 & \theta_k & 0 \\ 0 & \eta_i & 0 & \eta_j & 0 & \eta_k \\ \eta_i & \theta_i & \eta_j & \theta_j & \eta_k & \theta_k \end{bmatrix} = \frac{1}{2A} [[B_i] \quad [B_j] \quad [B_k]].$$

Матрица формы деформаций позволяет найти деформации конечного элемента на основе перемещений его узлов. Так как все элементы блоков

$$[B_i] = \begin{bmatrix} \theta_i & 0 \\ 0 & \eta_i \\ \eta_i & \theta_i \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{2A}, \quad [B_j] = \begin{bmatrix} \theta_j & 0 \\ 0 & \eta_j \\ \eta_j & \theta_j \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{2A}, \quad [B_k] = \begin{bmatrix} \theta_k & 0 \\ 0 & \eta_k \\ \eta_k & \theta_k \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{2A} \quad (4.10)$$

данной матрицы постоянны, то и компоненты вектора деформаций $\bar{\varepsilon}$ на всей площадке рассматриваемого конечного элемента постоянны (критерий полноты базисных функций $L_i(x, y)$, $L_j(x, y)$, $L_k(x, y)$ удовлетворяется).

Если в последних выражениях выполнить умножение, то они могут быть представлены через тангенсы углов наклона плоскостей $L_i(x, y)$, $L_j(x, y)$, $L_k(x, y)$ с осями координат:

$$[B_i] = \begin{bmatrix} \operatorname{tg}\beta_i & 0 \\ 0 & \operatorname{tg}\alpha_i \\ \operatorname{tg}\alpha_i & \operatorname{tg}\beta_i \end{bmatrix}, \quad [B_j] = \begin{bmatrix} \operatorname{tg}\beta_j & 0 \\ 0 & \operatorname{tg}\alpha_j \\ \operatorname{tg}\alpha_j & \operatorname{tg}\beta_j \end{bmatrix}, \quad [B_k] = \begin{bmatrix} \operatorname{tg}\beta_k & 0 \\ 0 & \operatorname{tg}\alpha_k \\ \operatorname{tg}\alpha_k & \operatorname{tg}\beta_k \end{bmatrix}.$$

В строительной механике (стержневых систем) аналогом матрицы формы деформаций $[B]$ является геометрическая или кинематическая матрица $[H]$, связывающая узловые перемещения с деформациями элементов стержневой системы [11].

Зависимость между напряжениями и деформациями для изотропных упругих пластин подчинена закону Гука

$$\bar{\sigma} = (\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy})^T = [D] \bar{\varepsilon},$$

где

$$[D] = \frac{E_0}{1-\nu_0^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu_0 & 0 \\ \nu_0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu_0}{2} \end{bmatrix}$$

– матрица упругих констант (матрица упругости) пластины; E, ν – модуль упругости и коэффициент Пуассона материала пластины. Когда здесь

$$E_0 = \frac{E}{1-\nu^2}, \quad \nu_0 = \frac{\nu}{1-\nu},$$

имеет место случай *плоского напряжённого состояния* ($\sigma_z = 0$), а при $E_0 = E$, $\nu_0 = \nu$ – *плоской деформации* ($\varepsilon_z = 0$).

Приняв во внимание выражение для деформаций согласно (4.9), напряжения в элементе можно определить через узловые перемещения, т.е.

$$\bar{\sigma} = [D][B]\bar{Z}. \quad (4.11)$$

Выражения энергии упругих деформаций и работы внешних распределённых нагрузок интенсивностью \bar{q} , приложенных на контуре в срединной плоскости конечного элемента, с учётом последних соотношений можно представить в матричном виде:

$$W = \int_{V^e} \bar{\sigma}^T \bar{\varepsilon} dV \approx \frac{1}{2} \bar{Z}^T \left(\int_{V^e} [B]^T [D] [B] dV \right) \bar{Z},$$

$$A = \int_{S^e} \bar{q}^T \bar{\Gamma} ds \approx - \int_{S^e} [L] \bar{Z} \bar{q} ds.$$

После подстановки выражений для энергии W и работы A в условие минимума полной потенциальной энергии элемента

$$\frac{\partial (W + A)}{\partial \bar{Z}} = 0$$

с последующим дифференцированием матричных произведений в соответствии с правилами:

$$\frac{\partial}{\partial \bar{Z}} ([L] \bar{Z}) = [L]^T,$$

$$\frac{\partial}{\partial \bar{Z}} (\bar{Z}^T [D] \bar{Z}) = 2 [D] \bar{Z},$$

справедливыми для любых квадратных матриц $[L]$ и $[D]$ того же порядка, что и вектор \bar{Z} , выводят уравнение равновесия конечного элемента

$$\left(\int_V [B]^T [D] [B] dV \right) \bar{Z} - \int_{S^e} [L]^T \bar{q} ds = 0.$$

Здесь V – объём элемента; S – площадь его боковых граней.

Обозначив множитель, стоящий перед \bar{Z} в первом слагаемом, символом

$$[C^e] = \int_V [B]^T [D] [B] dV, \quad (4.12, a)$$

а второе слагаемое – через

$$\bar{F}^e = - \int_S [L]^T \bar{q} ds, \quad (4.13)$$

уравнение равновесия конечного элемента можно записать в матричной форме, а именно

$$[C^e] \bar{Z} + \bar{F}^e = 0. \quad (4.14)$$

Сравнивая полученное уравнение с уравнением равновесия стержневой системы в форме канонического уравнения метода перемещений, можно утверждать, что множитель $[C^e]$, обладающий структурой матрицы, играет роль матрицы жёсткости конечного элемента. В отличие от матрицы жёсткости стержня, используемой в методе перемещений, формирование матрицы жёсткости конечного элемента по формуле (4.12,а) связано с заданием ожидаемого поля перемещений пластины, описываемого матрицей формы деформаций $[B]$ конечного элемента.

Выражение (4.13) характеризует вектор «узловых нагрузок» \bar{F}^e конечного элемента. Объяснить это можно тем, что согласно определению \bar{F}^e , содержащему объёмный и поверхностный интегралы, производится суммирование нагрузок, распределённых по объёму V и на поверхностях боковых кромок площадью S , т. е. отыскание равнодействующих нагрузок. Местом сбора нагрузок (точек приведения), об этом нетрудно догадаться на основе определений ячейки жёсткости по формуле (4.12,а) и вектора узловых перемещений – по (4.13), очевидно, служат узлы конечного элемента.

В частности, определение вектора узловых нагрузок \bar{F} треугольной пластинки при действии равномерно распределённой нагрузки интенсивностью f на одной из её кромок (стороне $j-k$) (рис. 4.5) выполняется по формуле (4.13), содержащей лишь одно слагаемое

$$\bar{F} = \int_{l_{j-k}} [L]^T \bar{f} dl.$$

Здесь $\bar{f} = (f_x, f_y)$ – вектор нагрузки, компоненты которого равны проекциям равномерно распределённой нагрузки, направленной перпендикулярно грани $j-k$ элемента и лежащей в срединной плоскости пластинки.

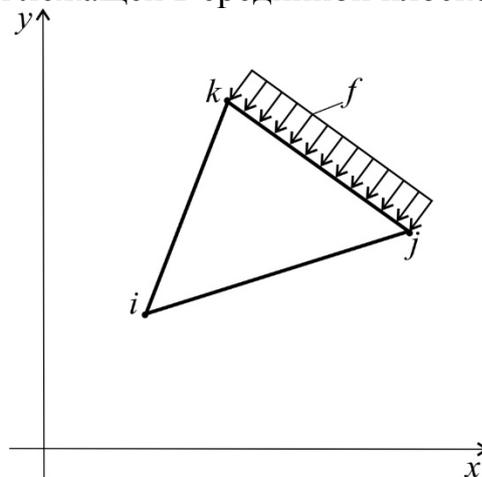


Рис. 4.5

Вычислив интеграл, можно найти вектор узловых нагрузок треугольного конечного элемента при действии нагрузки на грани $j-k$:

$$\bar{F} = \frac{1}{2} l_{j-k} (0, 0, f_x, f_y, f_x, f_y)^T.$$

Поскольку все элементы матрицы формы деформаций $[B]$ и матрицы упругости $[D]$ имеют постоянные значения, то при формировании ячейки жёсткости симплекс-элемента по формуле (4.12,а) вычисление интеграла сводится к простому перемножению матриц и определению объёма пластины по формуле $V = At$, т.е.

$$[C^e] = [B]^T [D] [B] A t, \quad (4.12,б)$$

где A – площадь треугольника; t – толщина пластины. Так как матрица формы деформаций обладает блочной структурой, то и ячейка жёсткости конечного элемента может быть представлена в блочной форме

$$[C^e] = \begin{bmatrix} [c_{ii}^e] & [c_{ij}^e] & [c_{ik}^e] \\ [c_{ji}^e] & [c_{jj}^e] & [c_{jk}^e] \\ [c_{ki}^e] & [c_{kj}^e] & [c_{kk}^e] \end{bmatrix}_{(6 \times 6)},$$

состоящей из матриц-клеток второго порядка, которые вычисляются по формуле

$$[c_{\delta\gamma}^e]_{(2 \times 2)} = [c_{\gamma\delta}^e]_{(2 \times 2)} = [B_{\delta}^e]_{(2 \times 3)}^T [D]_{(3 \times 3)} [B_{\gamma}^e]_{(3 \times 2)}$$

$$(e = I, II, III, \dots, m; \delta, \gamma = i, j, k),$$

полученных при перемножении блоков (4.10) на матрицу упругости $[D]$.

Выше изложен вариационный подход к выводу уравнения равновесия отдельного элемента. Данный подход без осложнений переносится и на пластинку в целом. На основании принципа независимости действия сил её потенциальную энергию можно найти путём суммирования энергий отдельных элементов, т.е.

$$U = \sum_{e=1}^m U^e$$

(здесь, как и в двух предыдущих формулах, индекс e используется для обозначения номера конечного элемента, который присваивается ему при дискретизации пластины).

Отсюда вытекает, что матрицу жёсткости тела можно сформировать на основе матриц жёсткости отдельных элементов, упаковав их в одну*. То же

* Чтобы отличать матрицу жёсткости конечного элемента от матрицы жёсткости пластины (тела) в тексте для первой матрицы используется термин «ячейка» жёсткости конечного элемента.

касается и вектора узловых нагрузок \bar{P} , который составляется на основе векторов \bar{F} .

Условия равновесия отдельных элементов, составленные для узлов по направлениям всех степеней свободы КЭ-модели, в совокупности образуют условие равновесия всей механической системы. И оно может быть представлено точно в такой же форме, как и условие равновесия отдельного элемента в виде

$$[R]\bar{\zeta} + \bar{P} = 0.$$

Здесь $[R]$ – матрица жёсткости всей механической системы в глобальной системе координат (*глобальная матрица жёсткости*), $\bar{\zeta}$ – вектор узловых перемещений, как и вектор узловых нагрузок \bar{P} , также должны быть приведены к этой же системе путём преобразований векторов \bar{Z} и \bar{F} , соответственно. Порядок системы линейных уравнений определяется общим числом степеней свободы системы w , нумерация которых осуществляется в глобальной системе ещё на подготовительной стадии расчёта. При построении ячейки жёсткости отдельного элемента его степеням свободы присваиваются порядковые номера из глобальной нумерации. В общем случае далее выполняется преобразование ячейки к глобальной системе координат, т.е. $[C^e] \Rightarrow [r^e]^*$. Впоследствии по специальной процедуре осуществляется упаковка (ансамблирование) ячеек жёсткости отдельных конечных элементов $[r^e]$ в глобальную матрицу жёсткости $[R]$. В итоге процедура формирования матрицы жёсткости механической системы, состоящей из m элементов, формально предстанет в виде

$$R_{ij} = \sum_{e=1}^m r_{ij}^e \quad (i, j = 1, 2, \dots, w).$$

Аналогично формируется и вектор узловых нагрузок всей системы

$$P_i = \sum_{e=1}^m p_i^e \quad (i = 1, 2, \dots, w).$$

И здесь прежде чем суммировать узловые нагрузки отдельных конечных элементов по направлению i -й степени свободы, каждая из них, подобно ячейке жёсткости, также приводится к глобальной системе координат $f_i^e \Rightarrow p_i^e$. Это в общем случае относится и к преобразованию вектора узловых перемещений к глобальной системе $\bar{Z} \Rightarrow \bar{\zeta}$.

* При расчёте пластины на нагрузки, действующие в её плоскости, в подобном преобразовании нет необходимости (см. примеры расчёта в конце раздела).

Очевидно, матрица жёсткости механической системы составлена без учёта условий опирания. В связи с этим она подлежит корректировке. Один из возможных приёмов корректировки рассматривается в приведенном ниже примере расчёта клина. Одновременно с этим корректируется и вектор узловых перемещений – $\bar{\zeta} \Rightarrow \bar{\xi}$. В результате коррекции приходят к новой системе уравнений:

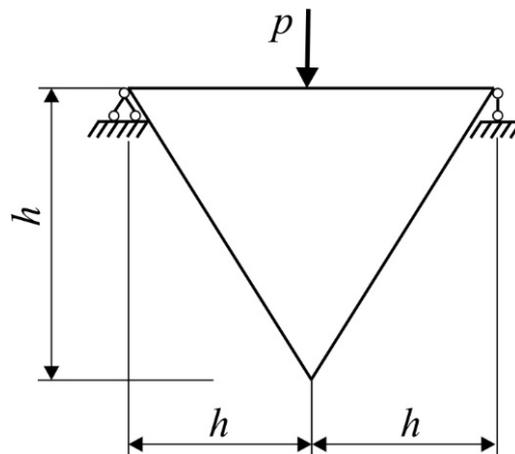
$$[K] \bar{\xi} + \bar{P} = 0,$$

где $[K]$ – матрица, полученная путём исправления матрицы жёсткости $[R]$.

Статические граничные условия учитываются на стадии составления вектора узловых нагрузок.

В качестве приложения рассматриваемой теории ниже приводится пример расчёта упругой пластины, форма и размеры которой представлены на рис. 4.6,а. Значение отрезка h принято равным 0,03 м; модуль упругости E материала пластинки равен 0,3; величина нагрузки p равна $4kH$.

а



б

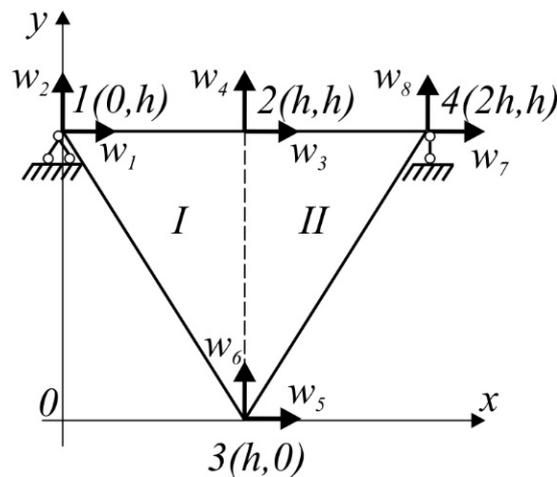


Рис. 4.6

С целью упрощения процедуры формирования матрицы жёсткости достаточно ограничиться разбиением пластины на два конечных элемента треугольной формы (рис. 4.6,б). На схеме КЭ-модели, кроме системы координат, нумерации элементов и узлов, показана также нумерация степеней свободы w_i ($i=1, 2, \dots, 8$).

Ячейка жёсткости элемента I имеет следующую структуру:

$$[C^I] = \begin{bmatrix} [c_{11}^I] & [c_{12}^I] & [c_{13}^I] \\ [c_{21}^I] & [c_{22}^I] & [c_{23}^I] \\ [c_{31}^I] & [c_{32}^I] & [c_{33}^I] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \nu & -1 & -\nu \\ 0 & \frac{1-\nu}{2} & \frac{1-\nu}{2} & 0 & -\frac{1-\nu}{2} & -\frac{1-\nu}{2} \\ 0 & \frac{1-\nu}{2} & \frac{1-\nu}{2} & 0 & -\frac{1-\nu}{2} & -\frac{1-\nu}{2} \\ \nu & 0 & 0 & 1 & -\nu & -1 \\ -1 & -\frac{1-\nu}{2} & -\frac{1-\nu}{2} & -\nu & \frac{3-\nu}{2} & \frac{1+\nu}{2} \\ -\nu & -\frac{1-\nu}{2} & -\frac{1-\nu}{2} & -1 & \frac{1+\nu}{2} & \frac{3-\nu}{2} \end{bmatrix} \frac{E}{2(1-\nu^2)}.$$

Она составлена из матриц-клеток $[c_{ij}^e]$ второго порядка, которые находят путём перемножения блоков матрицы формы деформаций (4.10):

$$[B_i] = \begin{bmatrix} \theta_i & 0 \\ 0 & \eta_i \\ \eta_i & \theta_i \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{2A}, \quad [B_j] = \begin{bmatrix} \theta_j & 0 \\ 0 & \eta_j \\ \eta_j & \theta_j \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{2A}, \quad [B_k] = \begin{bmatrix} \theta_k & 0 \\ 0 & \eta_k \\ \eta_k & \theta_k \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{2A}$$

на матрицу упругости $[D]$ согласно (4.12,б)

$$[c_{\gamma\delta}^e] = [B_\gamma]^T [D] [B_\delta] \quad (\gamma, \delta = i, j, k; e = I, II).$$

Верхний индекс в блок-матрице жёсткости $[c_{\gamma\delta}^e]$ указывает на номер КЭ на сетке дискретизации пластины $I \leq e \leq m$; первый нижний индекс (γ) – на номер узла, в котором определяются единичные реакции по направлениям его степеней свободы, а второй – на узел (δ), в котором заданы единичные перемещения вдоль степеней свободы w_i .

В частности, вычислив проекции сторон треугольника по формулам (4.4):

$$\begin{aligned}\theta_1 &= -h, & \eta_1 &= 0; \\ \theta_2 &= h, & \eta_2 &= h; \\ \theta_3 &= 0, & \eta_3 &= -h;\end{aligned}$$

при известных координатах узлов I -го элемента (рис. 4.6,б):

$$\begin{aligned}x_{i=1} &= 0, & x_{i=2} &= h, & x_{i=3} &= h, \\ y_{i=1} &= h, & y_{i=2} &= h, & y_{i=3} &= 0,\end{aligned}$$

нетрудно определить отдельные блоки ячейки жёсткости $[C^I]$, элементами которых являются единичные реакции каждого узла, принадлежащего к конечному элементу с номером I :

$$[c_{11}^1] = \frac{E}{2h^2(1-\nu^2)} \begin{bmatrix} -h & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -h \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -h & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & -h \end{bmatrix} = \frac{E}{2(1-\nu^2)} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix},$$

$$[c_{21}^1] = \frac{E}{2h^2(1-\nu^2)} \begin{bmatrix} 0 & 0 & -h \\ 0 & -h & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -h & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & -h \end{bmatrix} = \frac{E}{2(1-\nu^2)} \begin{bmatrix} 0 & \frac{1-\nu}{2} \\ \nu & 0 \end{bmatrix},$$

$$\begin{aligned}[c_{31}^1] &= \frac{E}{2h^2(1-\nu^2)} \begin{bmatrix} h & 0 & h \\ 0 & h & h \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -h & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & -h \end{bmatrix} = \\ &= \frac{E}{2(1-\nu^2)} \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1-\nu}{2} \\ -\nu & -\frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \text{ и т.д.}\end{aligned}$$

Аналогично находится и ячейка жёсткости элемента II

$$\begin{aligned}
 [C^{II}] &= \begin{bmatrix} [c_{22}^{II}] & [c_{23}^{II}] & [c_{24}^{II}] \\ [c_{32}^{II}] & [c_{33}^{II}] & [c_{34}^{II}] \\ [c_{42}^{II}] & [c_{43}^{II}] & [c_{44}^{II}] \end{bmatrix} = \\
 &= \begin{bmatrix} \frac{3-\nu}{2} & -\frac{1+\nu}{2} & -\frac{1-\nu}{2} & \nu & -1 & \frac{1-\nu}{2} \\ -\frac{1+\nu}{2} & \frac{3-\nu}{2} & \frac{1-\nu}{2} & -1 & \nu & -\frac{1-\nu}{2} \\ -\frac{1-\nu}{2} & \frac{1-\nu}{2} & \frac{1-\nu}{2} & 0 & 0 & -\frac{1-\nu}{2} \\ \nu & -1 & 0 & 1 & -\nu & 0 \\ -1 & \nu & 0 & -\nu & 1 & 0 \\ \frac{1-\nu}{2} & -\frac{1-\nu}{2} & -\frac{1-\nu}{2} & 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \frac{E}{2(1-\nu^2)};
 \end{aligned}$$

выписывать её полностью, как, впрочем, и первую, нет необходимости, поскольку для построения матрицы жёсткости всей пластины достаточно вложить обе ячейки жёсткости в формируемую матрицу и элементы блоков $[c_{ij}^e]$ с одинаковыми нижними индексами сложить. Итогом комбинированного процесса «наложения – сложения», который и составляет суть процедуры упаковки, будет определение элементов блоков матрицы жёсткости пластины $[R]$ по формуле

$$[r_{ij}] = [c_{ij}^I] + [c_{ij}^{II}];$$

в частности, $r_{22} = c_{22}^I + c_{22}^{II}$, $r_{23} = r_{32} = c_{23}^I + c_{23}^{II}$, $r_{33} = c_{33}^I + c_{33}^{II}$. Над остальными блоками производится лишь операция переприсваивания, т.е. $r_{11} = c_{11}^I$, $r_{12} = +c_{12}^I$ и т. д.

В рассматриваемом примере, заполняя указанным способом блоки матрицы жёсткости, устанавливают её структуру в виде

$$[R] = \begin{bmatrix} c_{11}^I & c_{12}^I & c_{13}^I & 0 \\ c_{21}^I & c_{22}^I + c_{22}^{II} & c_{23}^I + c_{23}^{II} & c_{24}^{II} \\ c_{31}^I & c_{32}^I + c_{32}^{II} & c_{33}^I + c_{33}^{II} & c_{34}^{II} \\ 0 & c_{42}^{II} & c_{43}^{II} & c_{44}^{II} \end{bmatrix} \quad (8 \times 8)$$

Порядок матрицы $[R]$ определяется общим числом степеней свободы КЭ-модели пластины $w = 2n = 2 \times 4 = 8$, где n – количество узлов сетки дискретизации. Процедуру упаковки матрицы $[R]$ можно автоматизировать, воспользовавшись матрицами расширения [5]

$$[E_I] = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} 1 & & & & & & & \\ & 1 & & & & & & \\ & & 1 & & 0 & & & \\ & & & 1 & & & & \\ 0 & & & & 1 & & & \\ & & & & & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} & \begin{matrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \\ w_4 \\ w_5 \\ w_6 \end{matrix} \end{matrix},$$

и

$$[E_{II}] = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & & & & & \\ & & & 1 & & & 0 & \\ & & & & 1 & & & \\ & & & & & 1 & & \\ 0 & & & & & & 1 & \\ & & & & & & & 1 \end{bmatrix} & \begin{matrix} w_3 \\ w_4 \\ w_5 \\ w_6 \\ w_7 \\ w_8 \end{matrix} \end{matrix}.$$

Путём умножения этих матриц на ячейки жёсткости $[C^I]$, $[C^{II}]$ по формуле

$$[R^e]_{(8 \times 8)} = [E_e]_{(8 \times 6)}^T [C^e]_{(6 \times 6)} [E_e]_{(6 \times 8)} \quad (e = I, II)$$

каждая из ячеек $[C^I]$, $[C^{II}]$ сначала перебрасывается в соответствующую расширенную ячейку жёсткости $[R^e]_{(8 \times 8)}$, порядок которой совпадает с порядком матрицы $[R]$, а затем расширенные ячейки суммируются

$$[R]_{(8 \times 8)} = \sum_{e=1}^2 [R^e].$$

Вектор узловых нагрузок $\bar{P} = (0 \ 0 \ 0 \ -p \ 0 \ 0 \ 0 \ 0)$ в данном примере состоит из восьми компонент; все они, кроме четвёртого, нулевые.

Здесь p – величина нагрузки, приложенной по направлению степени свободы w_4 (рис. 4.6,б). Учёт граничных условий рассматриваемой задачи, как указано ранее, осуществляется путём одновременной корректировки матрицы жёсткости и вектора узловых перемещений \bar{Z} .

Корректировка вектора неизвестных \bar{Z} системы уравнений

$$[R]\bar{Z} + \bar{P} = 0$$

заключается в переходе к вспомогательному вектору

$$\bar{\xi} = (V_{1x}, V_{1y}, u_2, v_2, u_3, v_3, u_4, V_{4y}),$$

где на местах, соответствующих направлениям j -х степеней свободы (здесь $j=1, 2, 8$), по которым перемещения на границе отсутствуют, помещают реакции опор (в данном примере таковыми являются реакции V_{1x}, V_{1y} , возникающие в первом узле, и V_{4y} – в четвёртом), а остальные компоненты остаются прежними. В матрице жёсткости $[R]$ надо приравнять нулю элементы 1, 2 и 8-го столбцов, соответствующих реакциям V_{1x}, V_{1y}, V_{4y} , за исключением элементов 1, 2 и 8-й строк, которые следует положить равными единице с минусом. Объяснить это несложно, исходя из физического смысла уравнений равновесия. В результате корректировки приходят к системе разрешающих уравнений

$$[G]\bar{\xi} + \bar{P} = 0,$$

где

$$[G] = \begin{bmatrix} -1,82 & 0 & 0 & -0,55 & 1,82 & 0,55 & 0 & 0 \\ 0 & -1,82 & -0,64 & 0 & 0,64 & 0,64 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3,09 & 0,64 & 1,27 & 0,09 & 1,82 & 0 \\ 0 & 0 & 0,64 & -4,28 & -0,09 & 3,64 & -0,55 & 0 \\ 0 & 0 & 1,27 & -0,09 & -3,09 & -1,18 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,09 & -3,64 & -3 & -2,46 & 0,55 & 0 \\ 0 & 0 & 1,82 & -0,55 & 0 & 0,55 & -1,82 & 0 \\ 0 & 0 & -0,64 & 0,64 & 0,64 & 0 & 0 & -1,82 \end{bmatrix} \frac{E}{1,82}$$

(8×8)

– матрица жёсткости, полученная в итоге преобразований. Обратив данную матрицу

$$[G]^{-1} = \begin{bmatrix} -0,55 & 0 & 0,44 & -0,05 & -0,36 & -0,15 & -0,46 & 0 \\ 0 & -0,55 & 0,21 & 0,08 & -0,11 & 0,09 & 0,21 & 0 \\ 0 & 0 & -1,45 & 0,11 & -0,74 & 0,15 & -1,43 & 0 \\ 0 & 0 & -0,38 & 0,18 & -0,64 & 0,49 & -0,28 & 0 \\ 0 & 0 & -0,42 & -0,15 & -0,33 & -0,17 & 0,43 & 0 \\ 0 & 0 & -0,42 & 0,49 & -0,74 & 0,57 & 0,40 & 0 \\ 0 & 0 & -1,46 & 0,20 & -0,77 & 0,17 & -2,02 & 0 \\ 0 & 0 & 0,23 & -0,03 & -0,08 & 0,06 & 0,25 & -0,55 \end{bmatrix} \frac{1,82}{E},$$

(8×8)

находят реакции связей левой опоры путём умножения двух первых строк матрицы $[G]^{-1}$ на вектор нагрузки \bar{P} :

$$\begin{aligned} \frac{V_{1x}}{E} &= -\frac{1,82}{E}(-0,55 \cdot 0 + 0 \cdot 0 + 0,44 \cdot 0 - 0,05 \cdot p - \\ &\quad - 0,36 \cdot 0 - 0,15 \cdot 0 - 0,46 \cdot 0 + 0 \cdot 0) = 0,09p/E, \\ \frac{V_{1y}}{E} &= -\frac{1,82}{E}(0 \cdot 0 - 0,55 \cdot 0 + 0,21 \cdot 0 + 0,08 \cdot p - \\ &\quad - 0,11 \cdot 0 + 0,09 \cdot 0 + 0,21 \cdot 0 + 0 \cdot 0) = -0,15p/E. \end{aligned}$$

Перемещения узлов, характеризующие деформированное состояние диска, вычисляют аналогично. Например, вертикальное перемещение второго узла равно:

$$\begin{aligned} \frac{v_2}{E} &= -\frac{1,82}{E}(0 \cdot 0 + 0 \cdot 0 - 0,38 \cdot 0 + 0,18 \cdot p - \\ &\quad - 0,64 \cdot 0 + 0,49 \cdot 0 - 0,28 \cdot 0 + 0 \cdot 0) = -0,33p/E. \end{aligned}$$

Затем по формуле

$$\bar{\sigma}^e = (\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy})^T = [D][B_e]\bar{Z}^e,$$

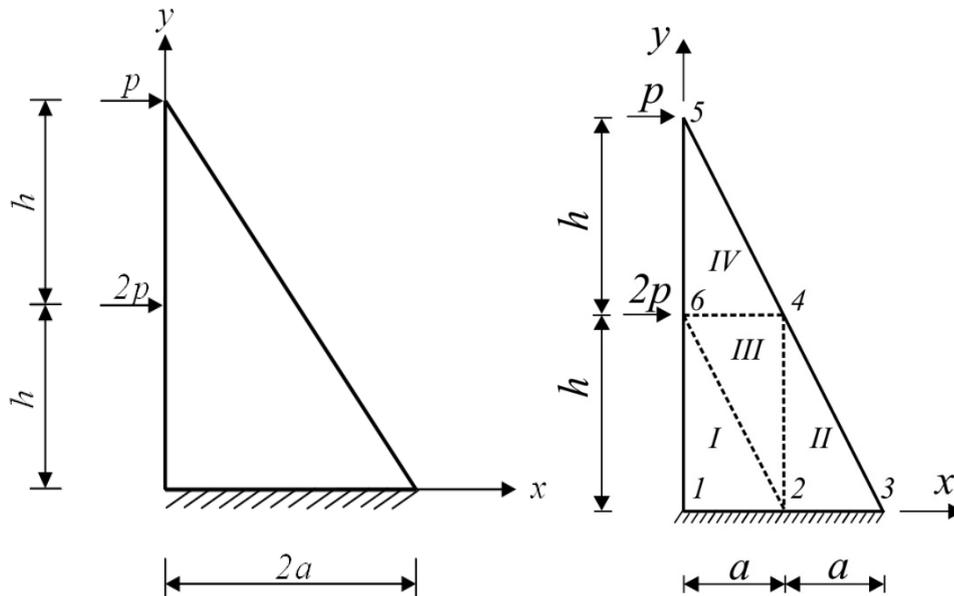
где $[B_e]$ – матрица формы деформаций, а \bar{Z}^e – вектор узловых перемещений e -го элемента, могут быть вычислены напряжения в каждом узле отдельного КЭ, а позже одноимённые напряжения в узлах следует суммировать с целью определения поля напряжений пластинки.

Усвоив на простейшем примере методику построения матрицы жёсткости, нетрудно распространить её на решение практических задач. В частности, методом конечных элементов обычно выполняют расчёты балок-стенок, клиньев и т.п. Процедура формирования матрицы жёсткости упругого клина, форма и размеры которого представлены на рис. 4.7,а,

сводится к построению матрицы жёсткости КЭ-модели, составленной из четырёх конечных элементов треугольной формы (рис. 4.7,б).

а
Расчетная схема клина

б
КЭ-модель клина



$p=50$ кН, $2h=1,2$ м, $2a=0,6$ м, $\nu=0,3$, $E=200 \times 10^9$ Па, $\delta=0,1$ м

Рис. 4.7

Ячейка жёсткости I -го элемента

$$[C^I] = \begin{bmatrix} [c_{11}^I] & [c_{12}^I] & [c_{16}^I] \\ [c_{21}^I] & [c_{22}^I] & [c_{26}^I] \\ [c_{61}^I] & [c_{62}^I] & [c_{66}^I] \end{bmatrix} =$$

$$= \frac{E}{2(1-\nu^2)} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \nu & -1 & -\nu \\ 0 & \frac{1-\nu}{2} & \frac{1-\nu}{2} & 0 & -\frac{1-\nu}{2} & -\frac{1-\nu}{2} \\ 0 & \frac{1-\nu}{2} & \frac{1-\nu}{2} & 0 & -\frac{1-\nu}{2} & -\frac{1-\nu}{2} \\ \nu & 0 & 0 & 1 & -\nu & -1 \\ -1 & -\frac{1-\nu}{2} & -\frac{1-\nu}{2} & -\nu & \frac{3-\nu}{2} & \frac{1+\nu}{2} \\ -\nu & -\frac{1-\nu}{2} & -\frac{1-\nu}{2} & -1 & \frac{1+\nu}{2} & \frac{3-\nu}{2} \end{bmatrix}$$

составлена из матриц-клеток второго порядка $[c_{ij}^I]$, которые находят в результате перемножения блоков (4.10):

$$[B_i] = \begin{bmatrix} \theta_i & 0 \\ 0 & \eta_i \\ \eta_i & \theta_i \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{2A}, \quad [B_j] = \begin{bmatrix} \theta_j & 0 \\ 0 & \eta_j \\ \eta_j & \theta_j \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{2A}, \quad [B_k] = \begin{bmatrix} \theta_k & 0 \\ 0 & \eta_k \\ \eta_k & \theta_k \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{2A}$$

на матрицу упругости $[D]$, согласно формуле (4.12,б)

$$[c_{ij}^k] = [B_i]^T [D] [B_j] \quad (i, j = 1, 2, \dots, 6; k = I, II, III, IV).$$

Верхний индекс в матрице-клетке жёсткости $[c_{ij}^k]$ указывает на номер КЭ на сетке дискретизации клина $1 \leq k \leq m$; первый нижний индекс (i) – на номер узла, в котором определяются реакции по направлениям его степеней свободы, а второй – на узел (j), в котором заданы единичные перемещения вдоль степеней свободы.

В частности, выполнив вычисления коэффициентов базисных функций

$$\begin{aligned} \theta_1 = y_2 - y_1 = 0, & \quad \theta_2 = y_6 - y_2 = h, & \quad \theta_3 = y_1 - y_6 = 0, \\ \eta_1 = -(x_2 - x_1) = -a, & \quad \eta_2 = -(x_6 - x_2) = a, & \quad \eta_3 = -(x_1 - x_6) = 0 \end{aligned}$$

по формулам (4.5) при известных координатах узлов I -го элемента (рис. 4.8,а):

$$\begin{aligned} x_{i=1} = 0, & \quad x_{i=2} = a, & \quad x_{i=6} = 0, \\ y_{i=1} = 0, & \quad y_{i=2} = 0, & \quad y_{i=6} = h, \end{aligned}$$

находят отдельные блоки ячейки жёсткости, элементы которых характеризуют единичные реакции каждого узла элемента с номером I :

$$[c_{11}^1] = \frac{E}{2h^2(1-\nu^2)} \begin{bmatrix} -h & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -h \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -h & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & -h \end{bmatrix} = \frac{E}{2(1-\nu^2)} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix},$$

$$[c_{21}^1] = \frac{E}{2h^2(1-\nu^2)} \begin{bmatrix} 0 & 0 & -h \\ 0 & -h & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -h & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & -h \end{bmatrix} = \frac{E}{2(1-\nu^2)} \begin{bmatrix} 0 & \frac{1-\nu}{2} \\ \nu & 0 \end{bmatrix},$$

$$\begin{aligned}
 [c_{31}^I] &= \frac{E}{2h^2(1-\nu^2)} \begin{bmatrix} h & 0 & h \\ 0 & h & h \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -h & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & -h \end{bmatrix} = \\
 &= \frac{E}{2(1-\nu^2)} \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1-\nu}{2} \\ -\nu & -\frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \text{ и т.д.}
 \end{aligned}$$

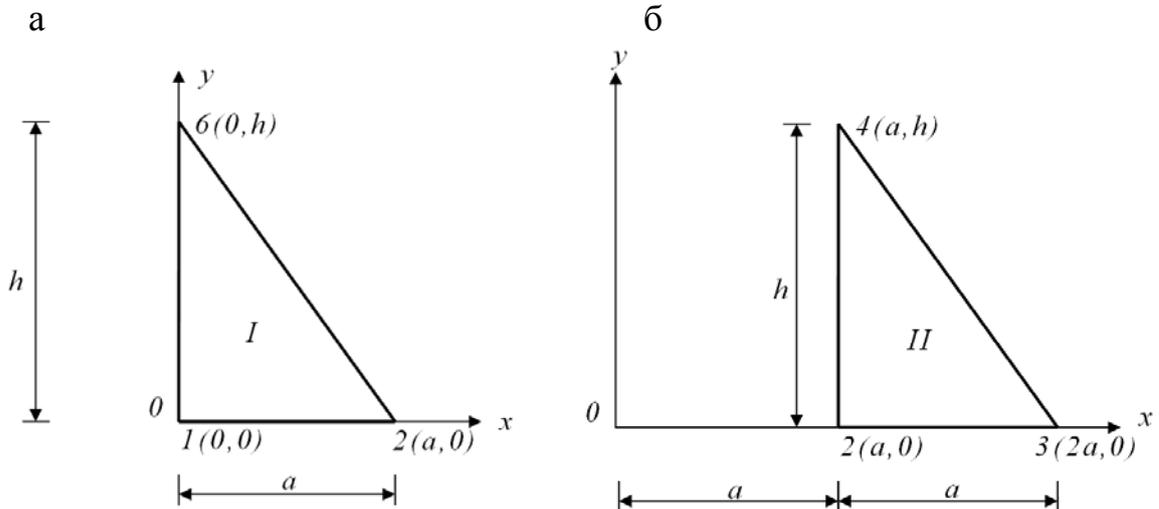


Рис. 4.8

Аналогично находятся и ячейки жёсткости остальных элементов:

$$[C^{II}] = \begin{bmatrix} [c_{22}^{II}] & [c_{23}^{II}] & [c_{24}^{II}] \\ [c_{32}^{II}] & [c_{33}^{II}] & [c_{34}^{II}] \\ [c_{42}^{II}] & [c_{43}^{II}] & [c_{44}^{II}] \end{bmatrix}, [C^{III}] = \begin{bmatrix} [c_{22}^{III}] & [c_{24}^{III}] & [c_{26}^{III}] \\ [c_{42}^{III}] & [c_{44}^{III}] & [c_{46}^{III}] \\ [c_{62}^{III}] & [c_{64}^{III}] & [c_{66}^{III}] \end{bmatrix},$$

$$[C^{IV}] = \begin{bmatrix} [c_{44}^{IV}] & [c_{45}^{IV}] & [c_{46}^{IV}] \\ [c_{54}^{IV}] & [c_{55}^{IV}] & [c_{56}^{IV}] \\ [c_{64}^{IV}] & [c_{65}^{IV}] & [c_{66}^{IV}] \end{bmatrix}.$$

Выписывать их полностью нет необходимости, т.к. для построения матрицы жесткости всего клина достаточно внести ячейки жёсткости в формируемую матрицу и в последующем блоки $[c_{ij}^k]$ с одинаковыми нижними индексами сложить. Итогом такого процесса «сложения»,

который и составляет суть упаковки, будет определение элементов одного из блоков матрицы жёсткости стержня $[R]$ по формуле $[r_{ij}] = [c_{ij}^I] + [c_{ij}^{II}] + [c_{ij}^{III}] + [c_{ij}^{IV}]$; в частности, $[r_{22}^I] = [c_{22}^I] + [c_{22}^{II}] + [c_{22}^{III}]$, $[r_{24}^I] = [c_{24}^{II}] + [c_{24}^{III}]$, $[r_{26}^I] = [c_{26}^I] + [c_{26}^{III}]$.

Далее выполняется упаковка ячеек жесткости конечных элементов в глобальную матрицу жесткости клина. Для этого ячейки жёсткости элементов следует последовательно переслать в глобальную матрицу таким образом, чтобы элементы ячеек жёсткостей соответствовали направлениям степеней свободы w_i , указанным в узлах сетки дискретизации, в глобальной системе координат. Процедуру упаковки проще всего проиллюстрировать на поле (карте) глобальной матрицы, порядок которой определяется числом степеней свободы клина; здесь $w = 2 \times 6 = 12$ (рис. 4.9).

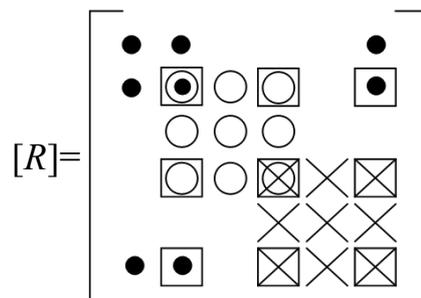


Рис. 4.9

Пусть изначально матрица $[R]$ была пуста. На первом шаге переносят элементы ячейки жёсткости элемента I (они обозначены на карте жирными точками), согласовав их положение с принятой индексацией степеней свободы. На втором шаге перебрасывают элементы ячейки жёсткости второго стержня (они на карте занимают положения, отмеченные окружностями). Точно так же пересылают элементы ячейки жёсткости и стержня III (места, соответствующие их положению на карте, показаны квадратиками). Наконец, заполняются те места глобальной матрицы, которые отмечены крестиками; они соответствуют ячейкам жёсткости элемента IV .

В результате проведения указанных операций по заполнению матрицы $[R]$ отдельные элементы разных ячеек оказываются в одном и том же месте карты, что и демонстрирует рисунок карты. И поскольку с физической точки зрения элементы каждой клеточки карты матрицы – это не что иное, как реакции «связей» по направлению одной и той же степени свободы, то их следует суммировать. В итоге подобной «упаковки» формируется глобальная матрица жёсткости клина двенадцатого порядка

$$[R] = \begin{bmatrix} c_{11}^I & c_{12}^I & 0 & 0 & 0 & c_{16}^I \\ c_{21}^I & c_{22}^I + c_{22}^{II} + c_{22}^{III} & c_{23}^{II} & c_{24}^{II} + c_{24}^{III} & 0 & c_{26}^I + c_{26}^{III} \\ 0 & c_{32}^{II} & c_{33}^{II} & c_{34}^{II} & 0 & 0 \\ 0 & c_{42}^{II} + c_{42}^{III} & c_{43}^{II} & c_{44}^{II} + c_{44}^{III} + c_{44}^{IV} & c_{45}^{VI} & c_{46}^{III} + c_{46}^{IV} \\ 0 & 0 & 0 & c_{54}^{IV} & c_{55}^{IV} & c_{56}^{IV} \\ c_{61}^I & c_{62}^I + c_{62}^{III} & 0 & c_{64}^{III} + c_{64}^{IV} & c_{65}^{IV} & c_{66}^I + c_{66}^{III} + c_{66}^{IV} \end{bmatrix} \quad (12 \times 12)$$

Элементы данной матрицы теперь должны быть переобозначены и представлены в виде

$$[R] = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & 0 & 0 & 0 & r_{16} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} & r_{24} & 0 & r_{26} \\ 0 & r_{32} & r_{33} & r_{34} & 0 & 0 \\ 0 & r_{42} & r_{43} & r_{44} & r_{45} & r_{46} \\ 0 & 0 & 0 & r_{54} & r_{55} & r_{56} \\ r_{61} & r_{62} & 0 & r_{64} & r_{65} & r_{66} \end{bmatrix} \quad (12 \times 12)$$

Далее матрица жёсткости $[R]$ подлежит корректировке с целью учёта граничных условий, состоящих в отсутствии перемещений 1, 2, 3-го узлов и наличии горизонтальных внешних нагрузок $2p, p$, приложенных в 6-м и 5-м узлах, соответственно.

Одновременно корректируется и вектор неизвестных узловых перемещений \bar{Z} разрешающей системы уравнений МКЭ

$$[R] \bar{Z} + \bar{F} = 0$$

путём перехода к вспомогательному вектору

$$\bar{\xi} = (X_1, Y_1, X_2, Y_2, X_3, Y_3, u_4, v_4, u_5, v_5, u_6, v_6),,$$

где часть компонент остаётся прежней, а на местах, соответствующих направлениям j -х степеней свободы (здесь $j=1, 2, \dots, 6$), по которым перемещения на границе по условиям задачи отсутствуют, помещают реакции опор (в данном примере таковыми являются реакции $X_1, Y_1, \dots, X_3, Y_3$, возникающие в первом, втором и третьем узлах КЭ-модели в основании клина).

В матрице жёсткости $[R]$ следует приравнять нулю элементы j -х столбцов, соответствующих j -м реакциям, за исключением элементов j -х строк, которые равны единице с минусом. Объяснить это несложно, обратившись к физическому смыслу разрешающего уравнения, согласно которому

величина суммарного усилия по направлению w_j -й степени свободы в узле при сохранении равновесия равняется нулю, т. е. $\bar{S} = [R]\bar{Z} + \bar{F} = 0$. Размещая на месте j -й компоненты вектора \bar{Z} реакцию X_j и одновременно полагая диагональный элемент матрицы жёсткости r_{jj} равным минус единице, тем самым заменяют первое слагаемое в уравнении равновесия неизвестной реакцией X_j . В результате уравнение равновесия узла по направлению w_j -й степени свободы принимает вид $X_j + f_j = 0$. Приравнивая нулю все остальные компоненты j -го столбца матрицы $[R]$, исключают влияние перемещения по направлению w_j -й степени свободы на величины упругих реакций во всех других узлах КЭ-модели.

В результате корректировки приходят к новой записи уравнений

$$[G]\bar{\xi} + \bar{F} = 0,$$

где $[G]$ – матрица, полученная на основе матрицы $[R]$ после её преобразования.

Вектор внешних узловых нагрузок \bar{F} формируется независимо. В данном примере он заполняется нулями, кроме тех элементов, номера которых совпадают с индексами степеней свободы w_9, w_{11} . Элементы, соответствующие w_9, w_{11} -м степеням свободы, приравниваются значениям сосредоточенных сил $2p$ и p , приложенных в 6-м и 5-м узлах клина. Решив последнюю систему уравнений, вычисляют неизвестные (вектор $\bar{\xi}$), характеризующие напряжённо-деформированное состояние клина. Затем по формуле

$$\bar{\sigma}^I = (\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy})^T = [D][B]\bar{Z}^I,$$

где матрица $[B]$ определяется согласно (4.10), а $\bar{Z}^I = (0, 0, u_2, v_2, u_3, v_3)$, вычисляют напряжения в узлах конечного элемента с номером I . Аналогично находят напряжения в узлах конечных элементов с номерами II, III, IV , воспользовавшись векторами:

$$\bar{Z}^{II} = (0, 0, u_2, v_2, u_3, v_3),$$

$$\bar{Z}^{III} = (0, 0, u_4, v_4, u_6, v_6),$$

$$\bar{Z}^{IV} = (u_4, v_4, u_5, v_5, u_6, v_6).$$

Далее одноимённые напряжения в узлах, где сопрягаются соседние КЭ, суммируют с целью определения полных напряжений.

Выполнив вычисления элементов матрицы жёсткости, приняв основание клина равным 0,6 м, высоту – 1,2 м (размеры конечного элемента, соответственно, $0,3 \times 0,6$ м), значение коэффициента Пуассона – 0,3 и взяв значение нагрузки p равным $50kH$, в результате численного решения системы уравнений находят перемещения 4, 5, и 6-го узлов:

$$u_4 = 0,041, \quad v_4 = -0,007, \quad u_5 = 0,042, \\ v_5 = 0,015, \quad u_6 = 0,113, \quad v_6 = 0,016 \text{ мм.}$$

Полученный результат легко проверить, воспользовавшись вычислительным комплексом *SCAD* (см. прил. 1).

Ещё одним практическим примером, где могут быть использованы формулы, приведенные в настоящем параграфе, может служить расчёт стержня квадратного или ромбовидного сечения на кручение [20].

Б) Треугольный элемент Морли с шестью степенями свободы

Рассматриваемый в данном подразделе конечный элемент, так же, как и симплекс-элемент, имеет шесть степеней свободы, но в отличие от последнего предназначается для использования в расчётах изгибаемых пластин.

Вполне очевидным представляется предположить, что при изгибе пластины деформированная поверхность в пределах отдельного элемента будет обладать постоянной кривизной в основных направлениях (рис. 4.10,а). Этой гипотезе отвечает квадратичный закон изменения прогибов

$$w = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y + \alpha_4 x^2 + \alpha_5 x y + \alpha_6 y^2, \quad (4.15,а)$$

который в компактной форме можно записать в виде скалярного произведения векторов

$$w = \bar{\alpha} \cdot \bar{Y}, \quad (4.15,б)$$

если воспользоваться обозначением вектора коэффициентов квадратичной формы $\bar{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5, \alpha_6)$ и вектора текущих координат точек срединной поверхности элемента $\bar{Y} = (1, x, y, x^2, xy, y^2)^*$.

В соответствии с процедурой формирования ячеек жёсткости коэффициенты формы α_k следует выразить через шесть узловых степеней свободы элементы, в качестве которых Морли принял величины прогибов w_1, w_2, w_3 в вершинах треугольника и нормальных производных функции прогибов $\partial w / \partial n_4, \partial w / \partial n_5, \partial w / \partial n_6$ в точках 4, 5, 6, взятых в середине сторон треугольника.

*В литературе вектор \bar{Y} чаще называют просто вектором степенных функций.

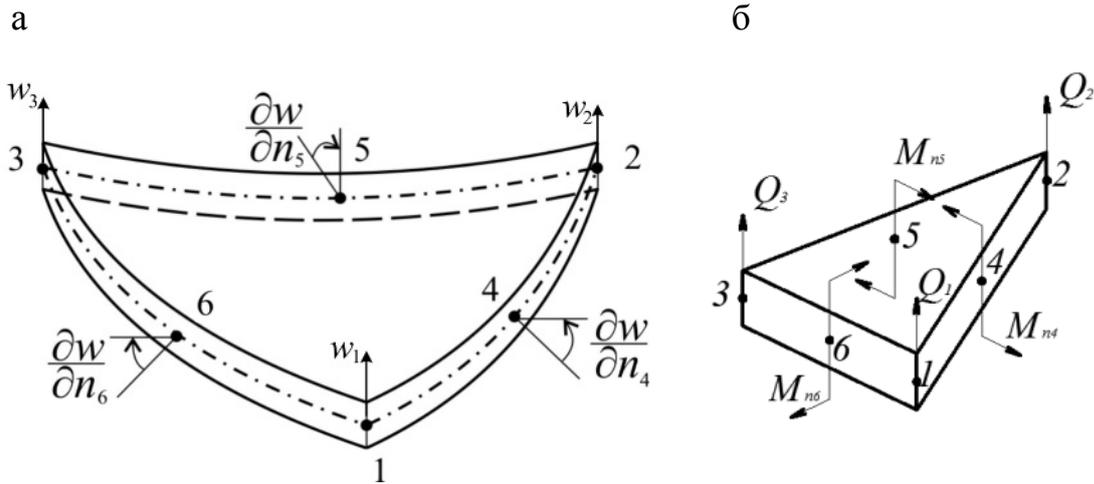


Рис. 4.10

Данные величины образуют вектор перемещений или степеней свободы элемента Морли

$$\bar{Z} = (w_1, w_2, w_3, \partial w / \partial n_4, \partial w / \partial n_5, \partial w / \partial n_6). \quad (4.16)$$

Нормальные производные прогибов, которые понадобятся в дальнейшем, могут быть выражены через производные в направлениях осей координат по формуле

$$\frac{\partial w}{\partial n} = \frac{\partial w}{\partial x} \cos \varphi + \frac{\partial w}{\partial y} \sin \varphi, \quad (4.17)$$

где φ – угол между направлением оси Ox и внешней нормалью к границе.

Представив каждую компоненту вектора \bar{Z} в соответствии с определениями (4.15) и (4.16) и формулой (4.17), нетрудно составить шесть уравнений относительно полиномиальных коэффициентов α_i и записать их в матричной форме

$$[K] \bar{\alpha} = \bar{Z}. \quad (4.18)$$

Здесь

$$[K] = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & y_1 & x_1^2 & y_1 & y_1^2 \\ 1 & x_2 & y_2 & x_2^2 & y_2 & y_2^2 \\ 1 & x_3 & y_3 & x_3^2 & y_3 & y_3^2 \\ 0 & c_4 & s_4 & 2x_4c_4 & y_4c_4 + x_4s_4 & 2s_4y_4 \\ 0 & c_5 & s_5 & 2x_5c_5 & y_5c_5 + x_5s_5 & 2s_5y_5 \\ 0 & c_6 & s_6 & 2x_6c_6 & y_6c_6 + x_6s_6 & 2s_6y_6 \end{bmatrix}$$

– матрица узловых координат, среди которых числятся и углы между боковыми гранями элемента и осями декартовой системы координат; величины c_k, s_k ($k = 4, 5, 6$) обозначают, как принято в литературе по механике, соответственно, косинус и синус угла φ_k внешней нормали боковой грани треугольника.

Решив систему уравнений (4.18), находят вектор коэффициентов полинома

$$\bar{\alpha} = [K]^{-1} \bar{Z}.$$

Теперь поле прогибов конечного элемента (4.15) можно выразить с помощью функций формы в виде

$$w = \bar{N} \bar{Z}, \quad (4.15, \text{в})$$

где $\bar{N} = [K]^{-1} \bar{Y}$ – вектор шести базисных функций или функций формы деформаций,

$$\bar{N} = [N_1(x, y), N_2(x, y), N_3(x, y), N_4(x, y), N_5(x, y), N_6(x, y)]. \quad (4.19)$$

Аналитический вид полученных функций в системе xOy столь громоздкий, что от использования их в дальнейшем изложении процедуры формирования ячейки жёсткости отказались. Намного короче и выразительнее функции формы выглядят, если в решении применить l -координаты или естественные координаты треугольника, непосредственно связанные с его формой в плане (рис. 4.11). В рассматриваемом случае ранее указанные координаты вершин треугольника дополнены натуральными координатами середин сторон, что в целом характеризует l -координаты всех шести узловых точек элемента.

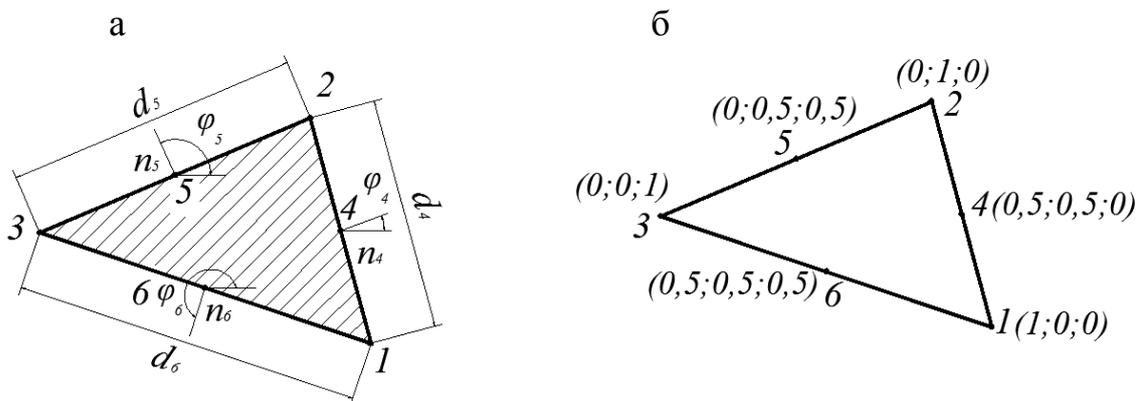


Рис. 4.11

Морли предложил записывать (полные) прогибы элемента в виде разложения на две части

$$w = \hat{w} + \tilde{w}, \quad (4.20)$$

одна часть которых относится к перемещениям элемента в направлении нормали к срединной плоскости как жёсткого диска, не порождающим кривизны элемента

$$\hat{w} = N_1 w_1 + N_2 w_2 + N_3 w_3 = l_1 w_1 + l_2 w_2 + l_3 w_3, \quad (4.21)$$

а другая характеризует искривления поверхности пластинки за счёт изменения углов наклона нормалей в средних точках сторон треугольника

$$\tilde{w} = N_4 \partial w / \partial n_4 + N_5 \partial w / \partial n_5 + N_6 \partial w / \partial n_6 \quad (4.22)$$

при отсутствии прогибов в узлах. Следовательно, квадратичные функции формы N_4, N_5, N_6 в узловых точках должны быть нулевыми как в декартовых, так и в l -координатах.

Указанным требованиям удовлетворяют базисные функции в виде

$$N_4 = -\frac{2A}{d_{21}} l_3 (1 - l_3), \quad N_5 = -\frac{2A}{d_{32}} l_1 (1 - l_1), \quad N_6 = -\frac{2A}{d_{13}} l_2 (1 - l_2), \quad (4.23)$$

где d_{21}, d_{23}, d_{13} – длины сторон треугольника.

На рис. 4.12 приведены графики функций $N_1 = l_1$ и $N'_1 = l_1(1 - l_1)$ первого и второго порядка, соответственно; функция $N_1 = l_1$ использована при записи формулы (4.21); функция $N'_1 = l_1(1 - l_1)$ составляет основу базисной функций N_5 , используемой в данном решении.

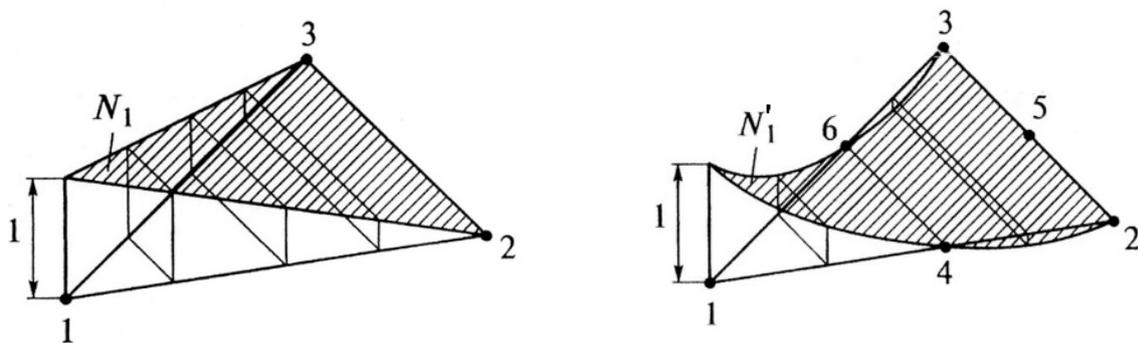


Рис. 4.12

В узлах посредине сторон производные функций формы в направлении нормалей должны принимать следующие значения:

$$\begin{aligned} \partial N_4 / \partial n_4 &= \begin{cases} 1 & \text{в узле 4,} \\ 0 & \text{в узлах 5, 6,} \end{cases} \\ \partial N_5 / \partial n_5 &= \begin{cases} 1 & \text{в узле 5,} \\ 0 & \text{в узлах 4, 6,} \end{cases} \\ \partial N_6 / \partial n_6 &= \begin{cases} 1 & \text{в узле 6,} \\ 0 & \text{в узлах 4, 5.} \end{cases} \end{aligned} \quad (4.24)$$

В том, что и условия (4.24) выполняются, легко убедиться, вычислив первые производные функций (4.23) в направлении нормалей, воспользовавшись соответствующим правилом дифференцирования.

Вычисляя вторые производные функции перемещений \tilde{w} по декартовым координатам с помощью формул (4.17), нетрудно установить преобразование

$$\kappa^{\bar{}} = \begin{pmatrix} \partial^2 \tilde{w} / \partial x^2 \\ \partial^2 \tilde{w} / \partial y^2 \\ \partial^2 \tilde{w} / \partial x \partial y \end{pmatrix} = [\tilde{B}] \begin{pmatrix} \partial \tilde{w} / \partial n_4 \\ \partial \tilde{w} / \partial n_5 \\ \partial \tilde{w} / \partial n_6 \end{pmatrix},$$

связывающее кривизны изогнутой поверхности с наклонами элемента в узлах 4, 5, 6. Матрица

$$[\tilde{B}] = \begin{bmatrix} \frac{y_{12}^2}{d_{21}} & \frac{y_{23}^2}{d_{32}} & \frac{y_{31}^2}{d_{13}} \\ \frac{x_{21}^2}{d_{21}} & \frac{x_{32}^2}{d_{32}} & \frac{x_{13}^2}{d_{13}} \\ \frac{2x_{21}y_{12}^2}{d_{21}} & \frac{2x_{32}y_{23}^2}{d_{32}} & \frac{2x_{13}y_{31}^2}{d_{13}} \end{bmatrix} \frac{1}{A}, \quad (4.25)$$

где $d_{13} = \sqrt{x_{13}^2 + y_{13}^2}$, $d_{21} = \sqrt{x_{21}^2 + y_{21}^2}$, $d_{32} = \sqrt{x_{32}^2 + y_{32}^2}$, очевидно, не зависит от координат точек внутри элемента, и, следовательно, все кривизны элемента постоянны.

При постоянной толщине δ конечного элемента ячейка жёсткости находится по формуле, аналогичной (4.12,б), т.е.

$$[\tilde{C}^e] = [\tilde{B}]^T [D] [\tilde{B}] A \delta.$$

Данная ячейка жёсткости соответствует не полным, а только долям углов наклона нормалей в узлах 4, 5, 6, добавляемым к поворотам элемента

как абсолютно твёрдого тела. Следует подчеркнуть, что структура матрицы упругости $[D]$ изгибаемого конечного элемента подобна аналогичной матрице симплекс-элемента, но в качестве множителя матрицы здесь служит цилиндрическая жёсткость $D = \frac{E\delta^3}{12(1-\nu^2)}$ пластины (см. формулу (4.12,a)).

При переходе от частных степеней свободы $\bar{Z} = (\partial\tilde{w}/\partial n_4, \partial\tilde{w}/\partial n_5, \partial\tilde{w}/\partial n_6)$ к полным, определяемым по (4.20), ячейка жёсткости подлежит преобразованию по стандартной формуле [3]

$$[\tilde{C}^e] = [\varphi]^T [\tilde{C}] [\varphi], \quad (4.26)$$

где $[\varphi]$ – матрица преобразования вектора узловых координат

$$\bar{Z} = [\varphi] \tilde{Z}. \quad (4.27)$$

Для отыскания матрицы $[\varphi]$ сначала следует найти углы наклона элемента относительно осей x, y при перемещениях без деформаций. Дифференцируя функцию \hat{w} , заданную выражением (4.21), находят

$$\begin{pmatrix} \partial\hat{w}/\partial x \\ \partial\hat{w}/\partial y \end{pmatrix} = \frac{1}{2A} \begin{bmatrix} y_{23} & y_{31} & y_{12} \\ x_{32} & x_{13} & x_{21} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix}.$$

Далее в соответствии с (4.17) вычисляют компоненту «жёсткого» поворота в плоскости, перпендикулярной к границе элемента

$$\partial\hat{w}/\partial n = \frac{1}{2A} (y_{23}\cos\varphi + x_{32}\sin\varphi + y_{31}\cos\varphi + x_{13}\sin\varphi + y_{12}\cos\varphi + x_{21}\sin\varphi) \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix}.$$

С помощью разложения (4.20) и последней формулы теперь можно выразить дополнительные повороты граней в узлах 4, 5, 6:

$$\begin{pmatrix} \partial\tilde{w}/\partial n_4 \\ \partial\tilde{w}/\partial n_5 \\ \partial\tilde{w}/\partial n_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \partial w/\partial n_4 \\ \partial w/\partial n_5 \\ \partial w/\partial n_6 \end{pmatrix} - \frac{1}{2A} \begin{bmatrix} y_{23}c_4 + x_{32}s_4 & y_{31}c_4 + x_{13}s_4 & y_{12}c_4 + x_{21}s_4 \\ y_{23}c_5 + x_{32}s_5 & y_{31}c_5 + x_{13}s_5 & y_{12}c_5 + x_{21}s_5 \\ y_{23}c_6 + x_{32}s_6 & y_{31}c_6 + x_{13}s_6 & y_{12}c_6 + x_{21}s_6 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix}. \quad (4.28)$$

Здесь

$$\begin{aligned} c_4 &= \frac{y_{21}}{d_{12}}, & s_4 &= \frac{x_{12}}{d_{21}}, & c_5 &= \frac{y_{32}}{d_{32}}, \\ s_5 &= \frac{x_{23}}{d_{32}}, & c_6 &= \frac{y_{13}}{d_{13}}, & s_6 &= \frac{x_{31}}{d_{31}} \end{aligned} \quad (4.29)$$

– направляющие косинусы внешних нормалей к сторонам элемента; значения d_{ij} следует вычислять по формулам, приведенным выше (см. выражения для d_{ij} под формулой (4.25)).

Сравнивая выражения (4.27) и (4.28), находят структуру матрицы перехода

$$[\varphi] = \begin{bmatrix} \frac{y_{23}y_{12} + x_{32}x_{21}}{2A d_{21}} & \frac{y_{31}y_{12} + x_{13}x_{21}}{2A d_{21}} & \frac{d_{21}}{2A} & 1 & 0 & 0 \\ \frac{d_{32}}{2A} & \frac{y_{31}y_{23} + x_{13}x_{32}}{2A d_{32}} & \frac{y_{12}y_{23} + x_{21}x_{32}}{2A d_{32}} & 0 & 1 & 0 \\ \frac{y_{23}y_{31} + x_{32}x_{13}}{2A d_{13}} & \frac{d_{13}}{2A} & \frac{y_{12}y_{31} + x_{21}x_{13}}{2A d_{13}} & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.30)$$

Установив матрицу перехода, теперь можно записать окончательное выражение для ячейки жёсткости элемента Морли:

$$[C^e] = A \delta [\varphi]^T [\tilde{B}]^T [D] [\tilde{B}] [\varphi]. \quad (4.31)$$

Следует отметить, что структура матрицы упругости $[D]$ для изгибаемой пластинки подобна аналогичной матрице симплекс-элемента, но множителем в ней служит цилиндрическая жёсткость $[D] = \frac{E\delta^3}{12(1-\nu^2)}$.

4.5. Формирование вектора нагрузки элемента Морли

При определении вектора узловых сил конечного элемента

$$\bar{F} = (Q_1, Q_2, Q_3, M_{n4}, M_{n5}, M_{n6}),$$

первые три компоненты которого Q_1, Q_2, Q_3 – это поперечные силы в вершинах треугольного элемента, а три другие – изгибающие моменты в узлах посередине сторон M_{n4}, M_{n5}, M_{n6} (рис. 4.6,б), по формуле

$$\bar{F} = \int_A [N] p dA \quad (4.32)$$

следует предварительно найти ещё и оставшиеся базисные функции N_1, N_2, N_3 , которые вследствие особенности данного решения оказались неиспользованными при формировании ячейки жёсткости $[C^e]$.

Полагая, что $w_1 = 1$, $w_2 = w_3 = \partial w / \partial n_4 = \partial w / \partial n_5 = \partial w / \partial n_6 = 0$, сначала находят дополнительные повороты в узлах, пользуясь соотношениями (4.27) и (4.30):

$$\partial \tilde{w} / \partial n_4 = \frac{y_{23}y_{12} + x_{32}x_{21}}{2A d_{21}},$$

$$\partial \tilde{w} / \partial n_5 = \frac{d_{32}}{2A},$$

$$\partial \tilde{w} / \partial n_6 = \frac{y_{23}y_{31} + x_{32}x_{13}}{2A d_{13}}.$$

Затем в соответствии с формулами (4.20)-(4.22) определяют непосредственно базисные функции, например:

$$N_1 = l_1 + \frac{y_{23}y_{12} + x_{32}x_{21}}{2A d_{21}} N_4 + \frac{d_{32}}{2A} N_5 + \frac{y_{23}y_{31} + x_{32}x_{13}}{2A d_{13}} N_6$$

или с учётом определений (4.24)

$$N_1 = l_1 - 1 \cdot l_1(1 - l_1) - \frac{y_{23}y_{31} + x_{32}x_{13}}{d_{13}^2} l_2(1 - l_2) - \frac{y_{23}y_{12} + x_{32}x_{21}}{d_{21}^2} l_3(1 - l_3). \quad (4.33,а)$$

Аналогично находят и две другие функции:

$$N_2 = l_3 - 1 \cdot l_3(1 - l_3) - \frac{y_{12}y_{23} + x_{21}x_{32}}{d_{21}^2} l_1(1 - l_1) - \frac{y_{12}y_{31} + x_{21}x_{13}}{d_{32}^2} l_2(1 - l_2). \quad (4.33,б)$$

$$N_3 = l_3 - 1 \cdot l_3(1 - l_3) - \frac{y_{23}y_{31} + x_{32}x_{13}}{d_{32}^2} l_1(1 - l_1) - \frac{y_{23}y_{12} + x_{32}x_{21}}{d_{13}^2} l_2(1 - l_2). \quad (4.33,в)$$

При вычислении интеграла в выражении вектора узловых сил (4.32) рекомендуется использовать известную формулу интегрирования степенных рядов по площади треугольника

$$\int_A l_1^r l_2^s l_3^t da = 2A \frac{r! s! t!}{(r + s + t + 2)!}. \quad (4.34)$$

При действии на поверхности элемента равномерно распределённой нагрузки с интенсивностью p значения поперечных сил и изгибающих моментов (рис. 4.13,а) будут равны:

$$\begin{aligned}
Q_1 &= \frac{p A}{6} \left(1 - \frac{y_{23}y_{31} + x_{32}x_{13}}{S_{23}^2} - \frac{y_{23}y_{12} + x_{32}x_{21}}{S_{13}^2} \right), \\
Q_2 &= \frac{pA}{6} \left(1 - \frac{y_{31}y_{12} + x_{13}x_{21}}{d_{21}^2} - \frac{y_{23}y_{31} + x_{32}x_{13}}{d_{32}^2} \right), \\
Q_3 &= \frac{pA}{6} \left(1 - \frac{y_{12}y_{23} + x_{21}x_{32}}{d_{32}^2} - \frac{y_{31}y_{12} + x_{13}x_{21}}{d_{31}^2} \right), \\
M_{n4} &= -\frac{pA^2}{3d_{21}}, \quad M_{n5} = -\frac{pA^2}{3d_{32}}, \quad M_{n6} = -\frac{pA^2}{3d_{13}}.
\end{aligned} \tag{4.35,a}$$

При выборе достаточно мелкой сетки узловые силы можно найти проще, применив процедуру осреднения и полагая тем самым (рис. 4.13,б):

$$Q_1 = Q_2 = Q_3 = \frac{pA}{3}, \quad M_{n4} = M_{n5} = M_{n6} = 0. \tag{4.35,б}$$

Это означает, что при вычислении работы внешней нагрузки действительные прогибы элемента заменяют на узловые перемещения элемента как жёсткого тела (рис. 4.13,б), т.е.

$$\int_A p \hat{w} da = \int_A p (l_1 w_1 + l_2 w_2 + l_3 w_3) da = \frac{pA}{3} (w_1 + w_2 + w_3).$$

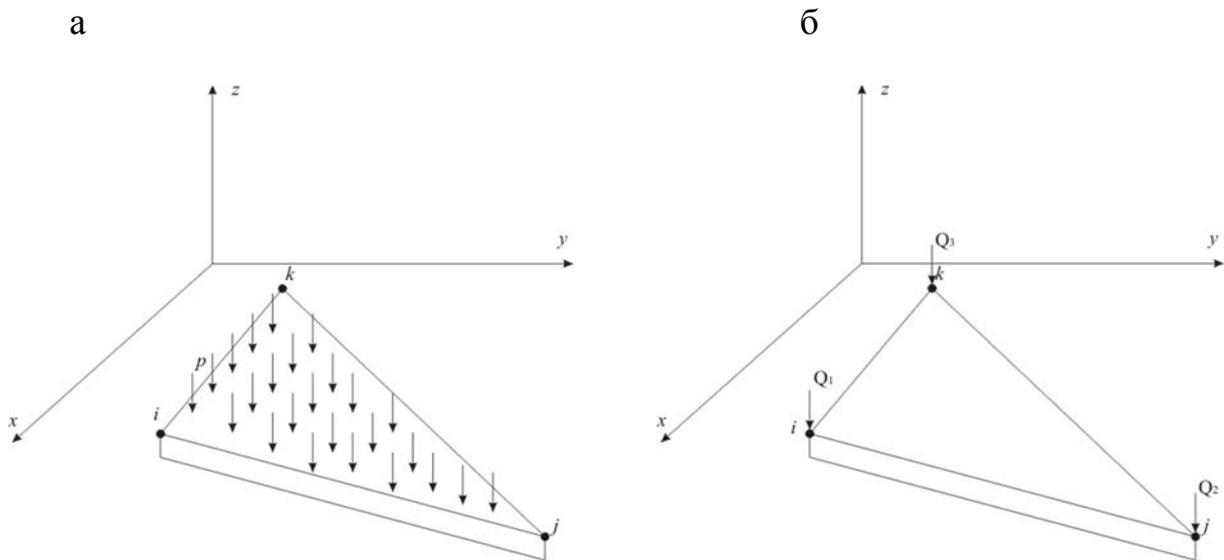


Рис. 4.13

Замечания:

1. Очевидно, элемент Морли является несовместным (несогласованным), т. к. не удовлетворяет требованиям межэлементной непрерывности. На границах элементов допускаются разрывы прогибов и углов наклона нормали. Численные эксперименты

Произведение $[N]=[K]^{-1}[Y]$, фигурирующее в этой формуле, называется *матрицей базисных функций*. Следовательно, поле перемещений элемента можно выразить через указанную матрицу

$$\bar{w}=[N]\bar{Z}.$$

Следующим шагом является определение деформаций КЭ согласно формуле

$$\bar{\varepsilon}=[\nabla]\bar{w},$$

где $[\nabla]$ – дифференциальный оператор. Деформации теперь можно также определить через базисную функцию

$$\bar{\varepsilon}=[\nabla][N]\bar{Z},$$

Обозначив произведение матриц в полученной формуле через

$$[B]=[\nabla][N],$$

деформации можно выразить в зависимости от узловых перемещений

$$\bar{\varepsilon}=[B]\bar{Z}.$$

Матрица $[B]$ называется *матрицей формы деформаций* или *матрицей градиентов*. Напряжения в элементе находят по закону Гука

$$\bar{\sigma}=[D]\bar{\varepsilon},$$

где $[D]$ – матрица упругости (4.8). Вычисляя интеграл

$$[C^e]=\iiint_A [B]^T [D] [B] da,$$

тем самым формируют ячейку жёсткости КЭ.

4.6. Алгоритм программы расчёта пластин методом конечных элементов

Процесс формирования матрицы жесткости пластины как ансамбля конечных элементов, ячейки жёсткости которых могут быть составлены заблаговременно и хранится в библиотеке ячеек, процедуры их упаковки в глобальной матрице жёсткости, построение вектора нагрузок и его преобразование, а также переход от узловых перемещений, принятых в локальной системе координат, к глобальным, последующее определение узловых перемещений путём решения системы уравнений и вычисление усилий в пластине по методу конечных элементов могут быть выполнены в автоматическом режиме. С этой целью разные авторы разработали программы расчёта тонких пластин по МКЭ [20], основу которых составляет алгоритм, блок-схема которого представлена на рис. 4.15.

В настоящее время разработаны обширные программные комплексы (ПК) по расчёту сооружений, включающие и программы расчёта пластин, и не только тонких (ПК «ЛИРА», SCAD и др.).

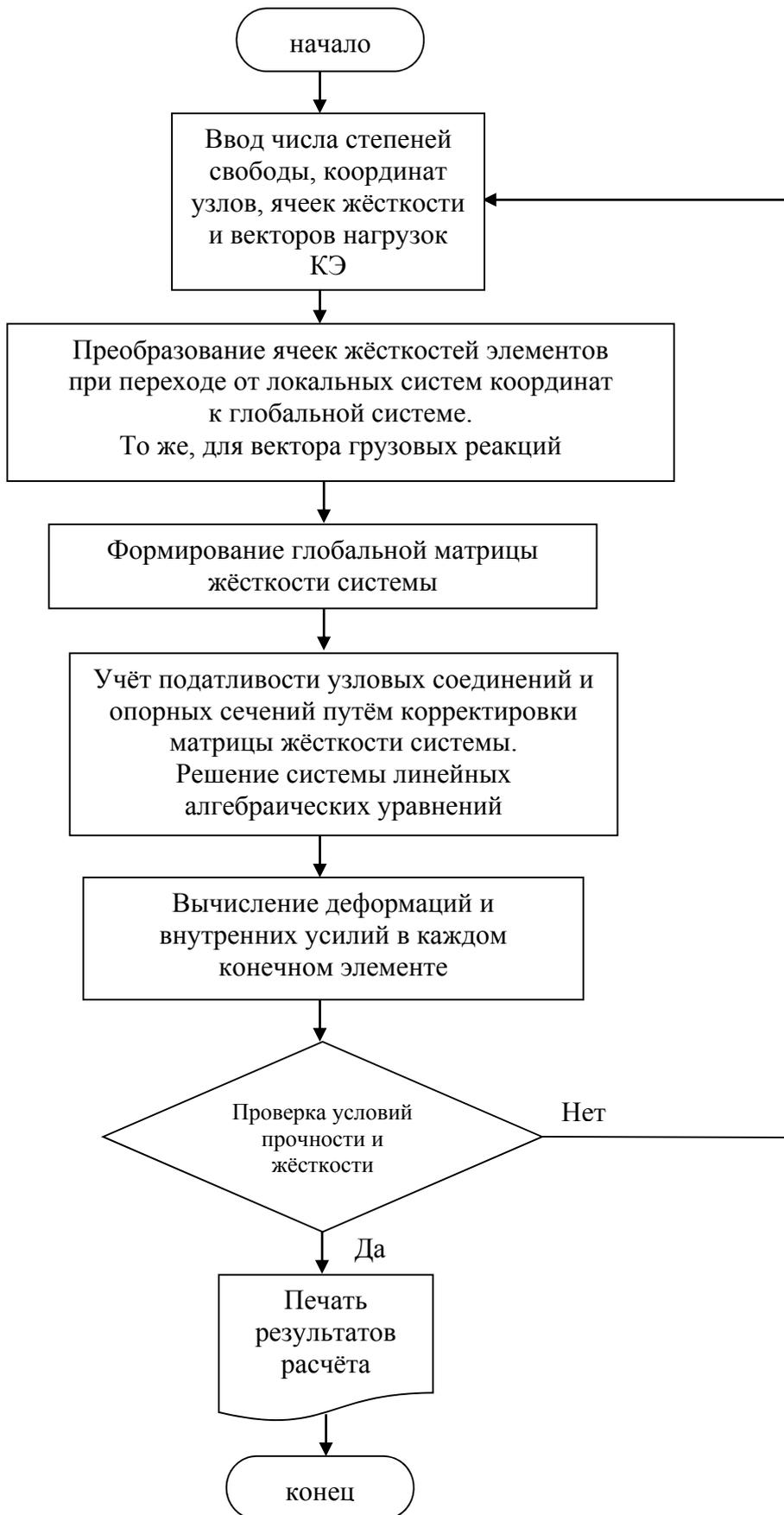


Рис. 4.15

Часть II. РАСЧЁТ ОБОЛОЧЕК

5. ОБОЛОЧКИ. ИХ КЛАССИФИКАЦИЯ. ДЕФОРМАЦИИ ОБОЛОЧЕК

5.1. Основные понятия теории оболочек. Виды оболочек

Оболочкой называется тонкостенная пространственная конструкция, тело которой образовано при движении короткого прямолинейного отрезка, средняя точка которого остаётся на гладкой поверхности, а направление – перпендикулярным к поверхности (рис. 5.1).

Длина отрезка характеризует *толщину* δ оболочки. Если длина сохраняется постоянной, то оболочка обладает постоянной толщиной; в противном случае – переменной.

Поверхность, на которой располагаются средние точки прямой, называется *срединной поверхностью оболочки*.

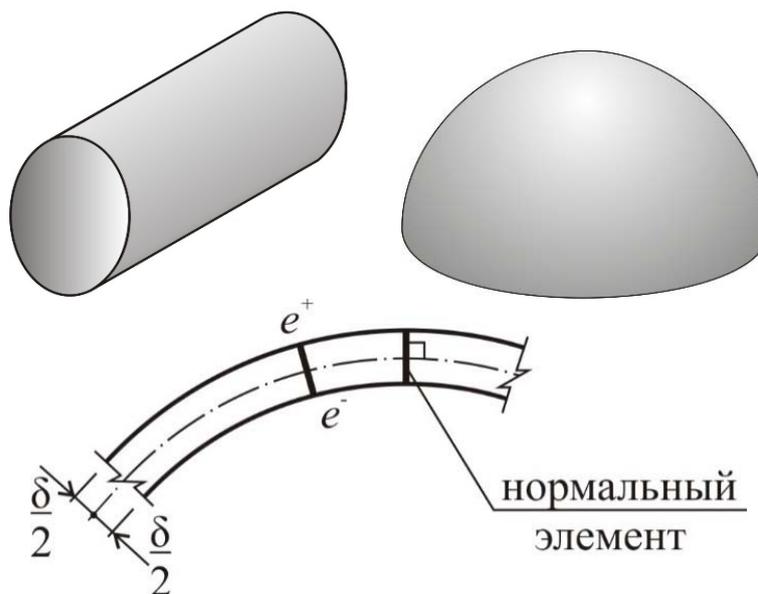


Рис. 5.1

Поверхности, очерчиваемые концами элемента, остаются гладкими.

Контур оболочки или боковую грань можно определить как след скольжения нормали по замкнутой линии на срединной поверхности. Оболочки могут иметь не один, а два и более контура (оболочки с отверстиями). Оболочка может и не иметь контура вовсе, например замкнутая сферическая оболочка в виде полого шара или в форме тора. Оболочка по контуру обычно подкрепляется различными конструктивными элементами в виде балок, арок, ферм, сплошных дисков (диафрагм). На рис. 5.2 показано несколько примеров таких оболочек, в частности

пологие оболочки с бортовыми элементами в виде арок и ферм и ребристая цилиндрическая оболочка, подкреплённая стрингерами.

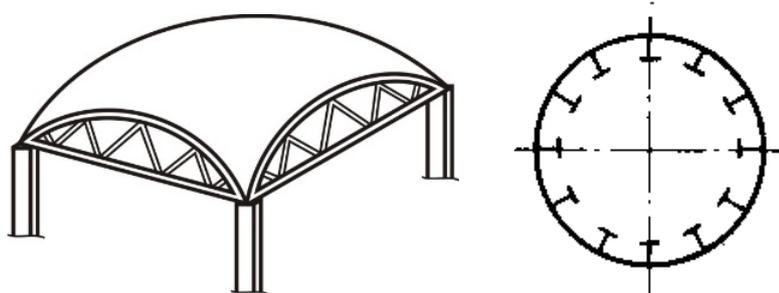


Рис. 5.2

Многообразие форм оболочек, состоящее в различии толщин и габаритных размеров, влечёт за собой возможность упрощения (схематизации) действительной работы тонкостенной конструкции. Эта идеализация формулируется в форме гипотез, аналогичных по природе гипотезам теории расчёта стержней или пластин. По существу, формулировка гипотез для оболочек отличается от предпосылок для пластин лишь употреблением термина «поверхность оболочки» вместо «плоскость пластинки» на соответствующих местах (см. подразд. 1.2 и 5.5). Введение гипотез существенно упрощает расчёт оболочек по сравнению со строгой теорией. Например, если в теории оболочек при выводе уравнений состояния пренебрегают всеми слагаемыми, имеющими порядок δ/R по сравнению с единицей (R – радиус кривизны срединной поверхности), то оболочки относятся к категории тонких. Количественно это отношение составляет:

$$\frac{\delta}{R} \leq 0,05. \quad (5.1)$$

Оболочки с указанным ограничением широко применяются в строительстве. Раздел строительной механики, в котором они изучаются, известен как техническая или геометрически линейная теория расчёта оболочек.

Помимо тонких оболочек в литературе рассматриваются также толстые оболочки и оболочки средней толщины.

По форме срединной поверхности оболочки могут быть Цилиндрическими, коническими и т.п. Материалом оболочек может служить дерево, металл, железобетон, их сочетание.

Оболочки применяются в промышленном и гражданском строительстве – в качестве несущих конструкций покрытий и перекрытий, козырьков над входами зданий, трибунами стадионов и пр.; в тоннелестроении, в частности – в метро; в судо- и самолётостроении – корпуса судов, доков, фюзеляжи и крылья самолётов; в машиностроении – кузова автомобилей, цистерны для перевозки жидкостей, бункера и т.п. (рис. 5.3,а).

Во многих случаях оболочки подкрепляют рёбрами в одном или двух направлениях (шпангоуты и стрингеры). Оболочки могут иметь отверстия, люки, или, наоборот, утолщения в некоторой области (рис. 5.3,б).

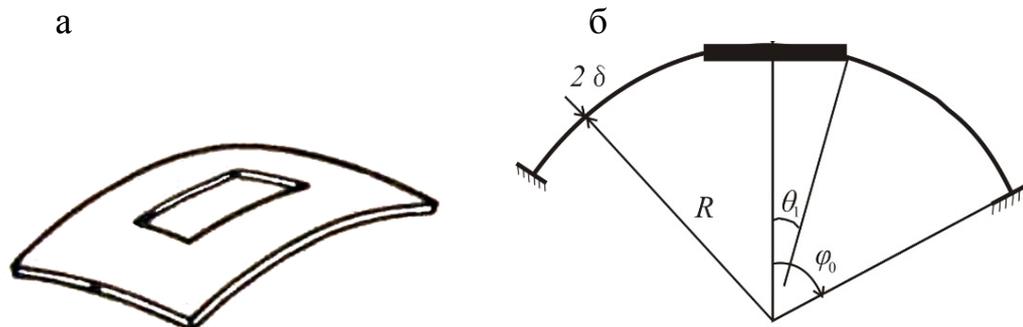


Рис. 5.3

5.2. Формы описания поверхностей оболочек

Срединная поверхность оболочки может быть задана уравнением:

как в явном

$$z = f(x, y), \quad (5.2)$$

так и в неявном виде

$$F(x, y, z) = 0, \quad (5.3)$$

где x, y, z – координаты срединной поверхности оболочки; f, F – непрерывные функции переменных x, y, z .

Примерами подобного способа описания поверхности служат уравнения параболоида и сферы (рис. 5.4,а, б):

$$z = a(x^2 + y^2),$$

$$x^2 + y^2 + z^2 - R^2 = 0.$$

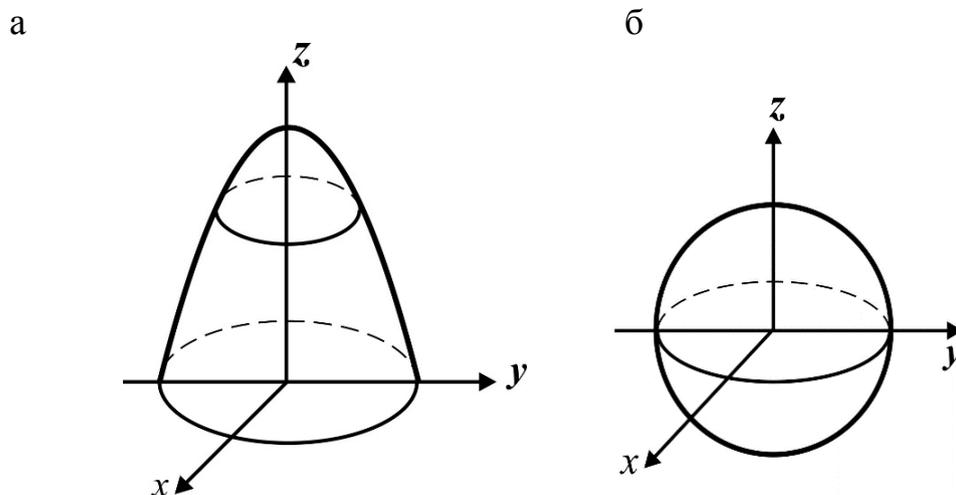


Рис. 5.4

Уравнение поверхности может быть задано и в параметрической форме:

$$x = x(\alpha, \beta), \quad y = y(\alpha, \beta), \quad z = z(\alpha, \beta), \quad (5.4,а)$$

где α, β – параметры срединной поверхности оболочки (рис. 5.5); очевидно, в векторном виде оно записывается немного короче, а именно:

$$\vec{r} = \vec{r}(\alpha, \beta) = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}. \quad (5.4,б)$$

В качестве параметров α, β могут быть приняты криволинейные координаты сетки координат, нанесённой на срединной поверхности оболочки.

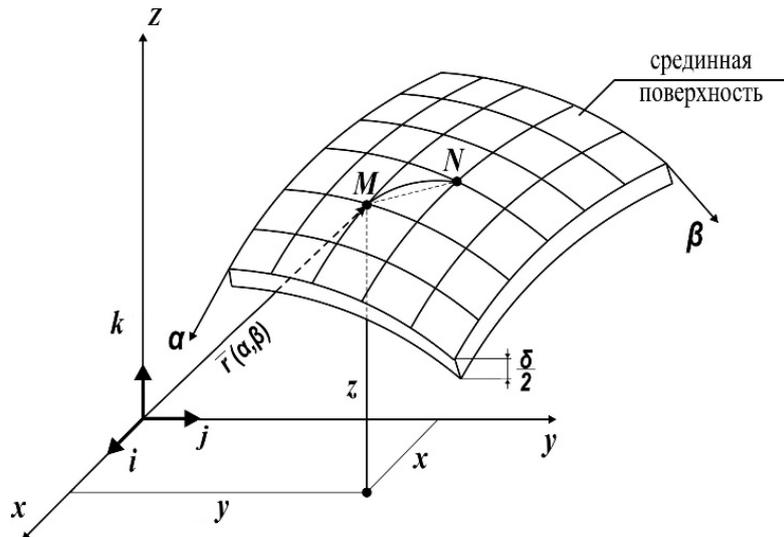


Рис. 5.5

Фиксируя на поверхности значение одной из координат, например β , и изменяя α , можно провести линию α . Аналогично, если оставить постоянным значение α , а менять β , то нетрудно провести другую линию. Линии семейств α и β образуют **координатную сеть** на поверхности.

Любая точка на поверхности характеризуется координатами принятой сетки. Если в точке M восстановить нормаль к поверхности, то плоскость, содержащая нормаль, называется нормалью (рис. 5.6,б).

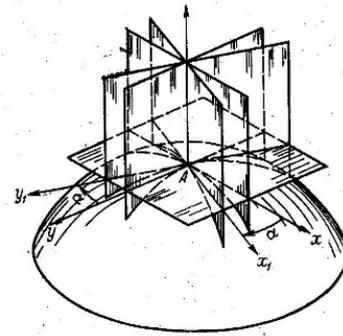
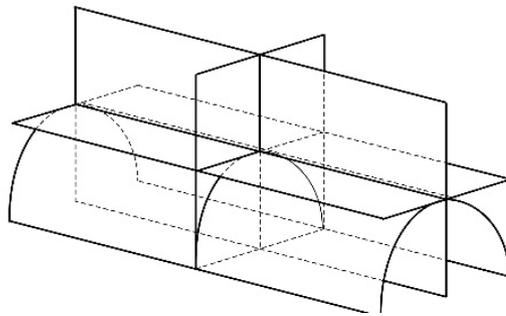
В общем случае система криволинейных координат выбирается произвольно. Единственное ограничение – координатные линии не должны касаться друг друга в рассматриваемой области поверхности; это означает, что $\sin \chi \neq 0$, где χ – угол между линиями α, β . Для упрощения записи основных уравнений теории оболочек следует пользоваться ортогональными криволинейными координатами, для которых нормали, проведённые в соседних с M точках P_1, P_2 , пересекают нормаль в самой точке M . Отрезки MP_1, MP_2 являются радиусами кривизн R_1, R_2 соответствующих координатных линий; величины, обратные к ним, называются кривизнами линий $\kappa_1 = 1/R_1, \kappa_2 = 1/R_2$. Доказано, что среди множества координатных

сетей существует такая сеть, для которой кривизны одной группы координатных линий принимают минимальное, а другой – максимальное значение; координатные линии с указанным свойством называются линиями главных кривизн. Произведение главных кривизн называется гауссовой кривизной поверхности оболочки $k = k_1 \cdot k_2$.

В зависимости от величины и знака гауссовой кривизны оболочки делятся на три класса. К первому относятся оболочки с нулевой кривизной (оболочки, у которых кривизна в направлении одной из координат равна нулю). К этому классу принадлежат цилиндрические и конические оболочки (рис. 5.6,а). Второй класс образуют оболочки двойной кривизны. Среди них следует различать выпуклые оболочки ($k \geq 0$) (рис. 5.4, рис. 5.6,б) и вогнуто-выпуклые ($k \leq 0$) (рис. 5.6,в). Особый класс составляют призматические оболочки-складки (рис. 5.6,г).

а

б



в

г

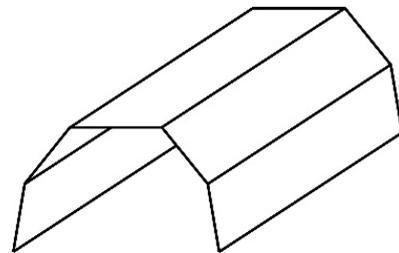
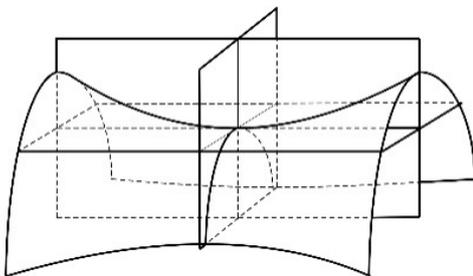


Рис. 5.6

5.3. Геометрические характеристики срединной поверхности. Условия Кодацци – Гаусса

Для описания геометрии поверхности следует обратиться к бесконечно малому элементу, выделенному на поверхности оболочки двумя координатными линиями α, β у точки M (см. рис. 5.5). Пусть другая точка N находится на бесконечно малом расстоянии ds от точки M . Этот бесконечно малый отрезок MN называется **линейным элементом**. Несмотря на такое

название, его следует изображать в виде кривой линии, т.к. поверхность оболочки, на которой показана линия, криволинейная (рис. 5.7,а).

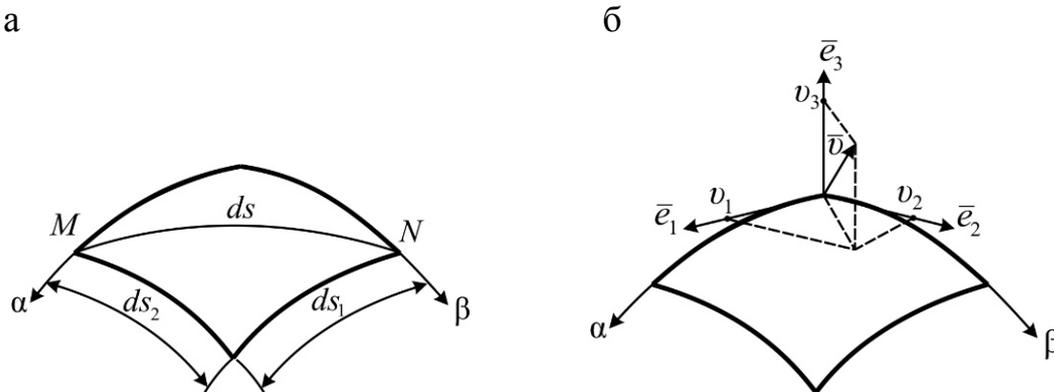


Рис. 5.7

Квадрат длины этого элемента в ортогональных криволинейных координатах равен:

$$ds^2 = ds_1^2 + ds_2^2,$$

где ds_1 , ds_2 – длины линейных элементов, взятых вдоль координатных линий, которые можно выразить через приращения криволинейных координат $d\alpha$, $d\beta$ с помощью коэффициентов A и B ,

$$ds_1 = Ad\alpha, \quad ds_2 = Bd\beta. \quad (5.5)$$

Тогда выражение для квадрата линейного элемента принимает вид

$$ds^2 = A^2 d\alpha^2 + B^2 d\beta^2. \quad (5.6)$$

Величины A , B называются *коэффициентами* или *параметрами Ламэ*.

Линейный элемент поверхности можно представить как приращение радиуса-вектора \vec{r} при переходе из точки M в точку N

$$\vec{MN} = d\vec{r} = ds = \frac{\partial \vec{r}}{\partial \alpha} d\alpha + \frac{\partial \vec{r}}{\partial \beta} d\beta. \quad (5.7)$$

Векторы $\frac{\partial \vec{r}}{\partial \alpha}$, $\frac{\partial \vec{r}}{\partial \beta}$, характеризующие «скорость роста» радиуса-вектора \vec{r} в каждой точке поверхности, направлены вдоль касательных к соответствующим координатным линиям α , β . Квадрат длины линейного элемента согласно (5.7) равен*:

* В геометрии поверхностей правая часть данного выражения называется *первой квадратичной формой* поверхности, а величины $E = \left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial \alpha}\right)^2$, $F = \left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial \alpha} \frac{\partial \vec{r}}{\partial \beta}\right)$, $G = \left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial \beta}\right)^2$ – *коэффициентами первой квадратичной формы*.

$$ds^2 = \left(\frac{\partial \bar{r}}{\partial \alpha} \right)^2 d\alpha^2 + 2 \left(\frac{\partial \bar{r}}{\partial \alpha} \frac{\partial \bar{r}}{\partial \beta} \right) d\alpha d\beta + \left(\frac{\partial \bar{r}}{\partial \beta} \right)^2 d\beta^2.$$

Если линии α, β ортогональны, то второе слагаемое последнего выражения равно нулю; и тогда

$$ds^2 = \left(\frac{\partial \bar{r}}{\partial \alpha} \right)^2 d\alpha^2 + \left(\frac{\partial \bar{r}}{\partial \beta} \right)^2 d\beta^2. \quad (5.8)$$

Сравнивая (5.6) и (5.8), можно заключить, что параметры Ламэ равны производным радиуса-вектора $d\bar{r}$ по криволинейным координатам:

$$A = \frac{\partial \bar{r}}{\partial \alpha}, \quad B = \frac{\partial \bar{r}}{\partial \beta}. \quad (5.9)$$

На основе (5.4,б) они могут быть выражены через декартовы координаты:

$$A = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial \alpha} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \alpha} \right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \alpha} \right)^2}, \quad (5.10,а)$$

$$B = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial \beta} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \beta} \right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \beta} \right)^2}. \quad (5.10,б)$$

Отсюда следует, что величины A и B равны модулям векторов производных $\frac{\partial \bar{r}}{\partial \alpha}$ и $\frac{\partial \bar{r}}{\partial \beta}$. С позиций кинематики A и B – «модули скоростей изменения» радиуса-вектора $d\bar{r}$ произвольной точки поверхности оболочки по направлениям криволинейных координат α, β .

В дальнейшем при выводе условий совместности деформаций понадобятся т.н. условия Кодацци, которые связывают параметры Ламэ с главными радиусами кривизны, а именно:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \beta} \left(\frac{A}{R_1} \right) &= \frac{1}{R_2} \frac{\partial A}{\partial \beta}, \\ \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{B}{R_2} \right) &= \frac{1}{R_1} \frac{\partial B}{\partial \alpha}. \end{aligned} \quad (5.11,а)$$

Для доказательства данных соотношений, обеспечивающих сплошность (непрерывность) поверхности оболочки, необходимо обратиться к определениям единичных векторов нормированного координатного базиса, т.е. к ортам (рис. 5.7):

$$\bar{e}_1 = \frac{\partial \bar{r}}{\partial s_1}, \quad \bar{e}_2 = \frac{\partial \bar{r}}{\partial s_2}, \quad \bar{e}_n = \bar{e}_1 \times \bar{e}_2$$

и подставить в них (5.5). В результате подстановки единичные орты в направлениях координатных линий находятся по формулам:

$$\bar{e}_1 = \frac{1}{A} \frac{\partial \bar{r}}{\partial \alpha}, \quad \bar{e}_2 = \frac{1}{B} \frac{\partial \bar{r}}{\partial \beta}.$$

Любой вектор, в частности вектор перемещений точки срединной поверхности оболочки \bar{v} , может быть представлен в этом координатном базисе разложением

$$\bar{v} = v_1 \bar{e}_1 + v_2 \bar{e}_2 + v_n \bar{e}_n,$$

где v_1, v_2, v_n – проекции вектора перемещений на орты (рис. 5.7,б).

Производная вектора \bar{v} вычисляется как производная сложной функции, т.е.

$$\frac{d\bar{v}}{d\beta} = \frac{\partial v_1}{\partial \beta} \bar{e}_1 + \frac{\partial v_2}{\partial \beta} \bar{e}_2 + \frac{\partial v_n}{\partial \beta} \bar{e}_n + v_1 \frac{\partial \bar{e}_1}{\partial \beta} + v_2 \frac{\partial \bar{e}_2}{\partial \beta} + v_n \frac{\partial \bar{e}_n}{\partial \beta}.$$

Производные единичных орт находят по формулам:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{e}_1}{\partial \beta} &= -\frac{1}{A} \frac{dB}{d\alpha} \bar{e}_2, \\ \frac{\partial \bar{e}_2}{\partial \beta} &= -\frac{1}{A} \frac{dB}{d\alpha} \bar{e}_1 - \frac{B}{R_2} \bar{e}_n \end{aligned}$$

и т.п.*

Условия Кодацци выводятся непосредственно из очевидного равенства

$$\frac{\partial^2 \bar{e}_n}{\partial \alpha \partial \beta} = \frac{\partial^2 \bar{e}_n}{\partial \beta \partial \alpha}. \quad (*)$$

Раскрывая его с помощью определений производных орта \bar{e}_n :

$$\frac{\partial \bar{e}_n}{\partial \beta} = \frac{B}{R_2} \bar{e}_2, \quad \frac{\partial \bar{e}_n}{\partial \alpha} = \frac{A}{R_1} \bar{e}_1,$$

приходят к новому равенству

$$\frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{B}{R_2} \bar{e}_2 \right) = \frac{\partial}{\partial \beta} \left(\frac{A}{R_1} \bar{e}_1 \right).$$

Выполнив теперь дифференцирование произведений, стоящих в скобках,

$$\frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{B}{R_2} \right) \bar{e}_2 + \frac{B}{R_2} \frac{\partial \bar{e}_2}{\partial \alpha} = \frac{\partial}{\partial \beta} \left(\frac{A}{R_1} \right) \bar{e}_1 + \frac{A}{R_1} \frac{\partial \bar{e}_1}{\partial \beta}$$

* Правила дифференцирования ортов изложены в подразд. 5.8.

и подставив сюда известные формулы для производных орт:

$$\frac{\partial \bar{e}_2}{\partial \alpha} = -\frac{1}{B} \frac{dA}{d\beta} \bar{e}_1,$$

$$\frac{\partial \bar{e}_1}{\partial \beta} = -\frac{1}{A} \frac{dB}{d\alpha} \bar{e}_2,$$

после группировки слагаемых, нетрудно установить соотношение

$$\left[\frac{\partial}{\partial \beta} \left(\frac{A}{R_1} \right) - \frac{1}{R_2} \frac{\partial A}{\partial \beta} \right] \bar{e}_1 = \left[\frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{B}{R_2} \right) - \frac{1}{R_1} \frac{\partial B}{\partial \alpha} \right] \bar{e}_2,$$

которое можно переписать в форме уравнения

$$\left[\frac{\partial}{\partial \beta} \left(\frac{A}{R_1} \right) - \frac{1}{R_2} \frac{\partial A}{\partial \beta} \right] \bar{e}_1 - \left[\frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{B}{R_2} \right) - \frac{1}{R_1} \frac{\partial B}{\partial \alpha} \right] \bar{e}_2 = 0.$$

Выражения в квадратных скобках полученного уравнения можно считать проекциями некоторого нулевого вектора, представленного своим разложением по ортам. В таком случае проекции вектора равны нулю. Поэтому множители перед ортами \bar{e}_1 , \bar{e}_2 равны нулю. Следовательно, должны выполняться следующие равенства:

$$\frac{\partial}{\partial \beta} \left(\frac{A}{R_1} \right) = \frac{1}{R_2} \frac{\partial A}{\partial \beta},$$

$$\frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{B}{R_2} \right) = \frac{1}{R_1} \frac{\partial B}{\partial \alpha}.$$
(5.11)

Это и есть условия Кодацци.

Помимо условий Кодацци, являющихся следствием равенства (*), при регулярности* формы поверхности должны соблюдаться ещё два равенства аналогичного вида

$$\frac{\partial^2 \bar{e}_1}{\partial \alpha \partial \beta} = \frac{\partial^2 \bar{e}_1}{\partial \beta \partial \alpha} \quad \text{и} \quad \frac{\partial^2 \bar{e}_2}{\partial \alpha \partial \beta} = \frac{\partial^2 \bar{e}_2}{\partial \beta \partial \alpha}.$$

Раскрывая первое из этих равенств с помощью известных определений производных орта \bar{e}_1 , приходят к более подробной записи равенства

$$\frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{1}{A_1} \frac{\partial B}{\partial \alpha} \bar{e}_2 \right) = \frac{\partial}{\partial \beta} \left(-\frac{1}{B_2} \frac{\partial A}{\partial \alpha} \bar{e}_2 - \frac{A}{R_1} \bar{e}_n \right).$$

Выполнив здесь дифференцирование, равенство можно представить в форме уравнения

$$\frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{1}{A_1} \frac{\partial B}{\partial \alpha} \right) \bar{e}_2 + \frac{1}{A_1} \frac{\partial B}{\partial \alpha} \frac{\partial \bar{e}_2}{\partial \alpha} + \frac{\partial}{\partial \beta} \left(\frac{1}{B} \frac{\partial A}{\partial \beta} \right) \bar{e}_2 + \frac{1}{B} \frac{\partial A}{\partial \beta} \frac{\partial \bar{e}_n}{\partial \beta} + \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{A}{R_1} \right) \bar{e}_n + \frac{A}{R_1} \frac{\partial \bar{e}_n}{\partial \beta} = 0.$$

* Поверхность называется регулярной, если в каждой её точке можно провести касательную плоскость.

С учётом определений производных ортов после группировки слагаемых векторное уравнение принимает вид

$$\left[\frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{1}{A_1} \frac{\partial B}{\partial \alpha} \right) + \frac{\partial}{\partial \beta} \left(\frac{1}{B} \frac{\partial A}{\partial \beta} \right) + \frac{A}{R_1} \frac{B}{R_2} \right] \bar{e}_2 + \left[\frac{\partial}{\partial \beta} \left(\frac{A}{R_1} \right) - \frac{A}{R_2} \frac{\partial A}{\partial \beta} \right] \bar{e}_n = 0. \quad (**)$$

Отсюда следует, что проекции некоего вектора на орты равны нулю, а это приводит к скалярному равенству

$$\frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{1}{A_1} \frac{\partial B}{\partial \alpha} \right) + \frac{\partial}{\partial \beta} \left(\frac{1}{B} \frac{\partial A}{\partial \beta} \right) = - \frac{A}{R_1} \frac{B}{R_2}. \quad (5.12)$$

известному в геометрии как условие Гаусса.

Вторая проекция (множитель, стоящий перед \bar{e}_n в уравнении (**)), очевидно, является условием Кодацци.

Равенство $\frac{\partial^2 \bar{e}_2}{\partial \alpha \partial \beta} = \frac{\partial^2 \bar{e}_2}{\partial \beta \partial \alpha}$ не даёт ничего нового; оно может быть

использовано для проверки полученных ранее условий Кодацци – Гаусса. Таким образом, при существовании (регулярности) срединной поверхности должны удовлетворяться условия Кодацци – Гаусса для четырёх функций A, B, R_1, R_2 .

5.4. Параметры Ламэ для поверхности оболочки вращения

Чтобы уточнить представление о параметрах Ламэ, в этом подразделе приводится их вычисление для поверхности оболочки вращения. Срединная поверхность оболочки вращения, как известно, образуется путём вращения произвольной кривой вокруг какой-либо оси, например оси Oz (рис. 5.8,а).

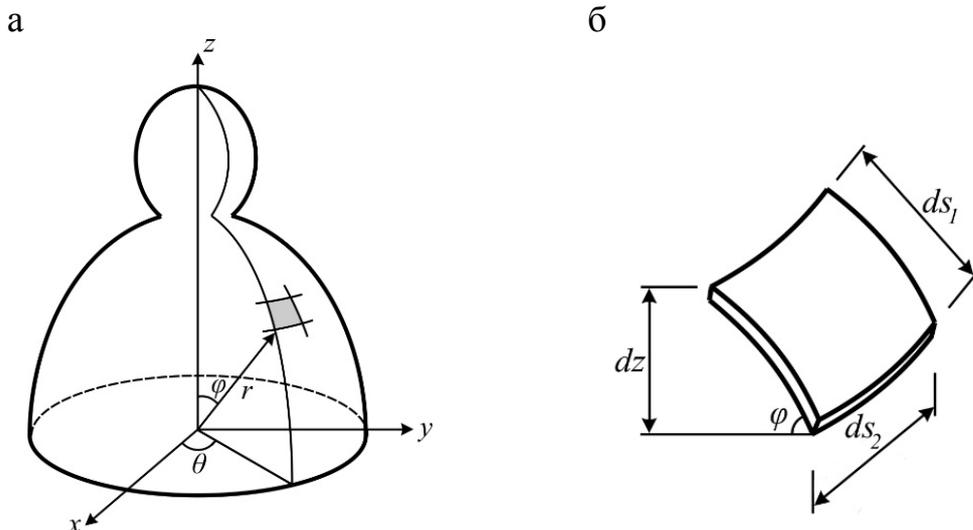


Рис. 5.8

В цилиндрической системе координат поверхность оболочки вращения описывается тремя уравнениями:

$$x = r(z)\cos\theta, \quad y = r(z)\sin\theta, \quad z = z.$$

Если из оболочки вырезать элемент, ограниченный двумя параллельными плоскостями, перпендикулярными оси вращения, и двумя меридиональными плоскостями с углом $d\theta$, проходящими через ту же ось (рис. 5.8,б), то длина элемента вдоль окружности определяется по формуле

$$ds_2 = r d\theta. \quad (5.12,а)$$

А длина в другом направлении

$$ds_1 = \frac{dz}{\sin\varphi} = dz \sqrt{1 + \operatorname{ctg}^2\varphi},$$

где $\operatorname{ctg}\varphi = \frac{dr}{dz}$. Следовательно,

$$ds_1 = \sqrt{1 + \left(\frac{dr}{dz}\right)^2} dz. \quad (5.12,б)$$

Очевидно, положение нормали в любой точке поверхности определяется направляющими косинусами:

$$\sin\varphi = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{dr}{dz}\right)^2}}, \quad \cos\varphi = \frac{\frac{dr}{dz}}{\sqrt{1 + \left(\frac{dr}{dz}\right)^2}}.$$

Квадрат линейного элемента поверхности оболочки с учётом определений (5.12) равен:

$$(ds)^2 = (ds_1)^2 + (ds_2)^2 = \left[\sqrt{1 + \left(\frac{dr}{dz}\right)^2} \right]^2 (dz)^2 + r^2 (d\theta)^2.$$

Таким образом, величины коэффициентов Ламэ оболочки вращения согласно (5.6) равны:

$$A = \sqrt{1 + \left(\frac{dr}{dz}\right)^2}, \quad B = r. \quad (5.13)$$

Если поверхность оболочки вращения рассматривается в другой системе координат, например в сферической, то параметры Ламэ принимают иные выражения. В частности, на основе уравнения поверхности оболочки вращения в сферической системе координат

$$x = \rho \sin\varphi \cos\theta, \quad y = \rho \sin\varphi \sin\theta, \quad z = \rho \cos\varphi$$

коэффициенты Ламэ имеют вид:

$$A = \sqrt{(\rho \cos \varphi \cos \theta)^2 + (\rho \cos \varphi \sin \theta)^2 + (\rho \sin \varphi)^2} = \rho = \frac{r}{\sin \varphi},$$

$$B = \sqrt{(\rho \cos \varphi \sin \theta)^2 + (\rho \sin \varphi \cos \theta)^2} = \rho \sin \varphi = r.$$

5.5. Основные гипотезы технической теории расчёта оболочек

В технической теории расчёта оболочек, как и пластин, приняты те же гипотезы о распределении напряжений и деформаций.

I. Статическая гипотеза – нормальные напряжения, возникающие при деформировании вследствие взаимного нажатия горизонтальных слоёв оболочки друг на друга, на площадках, параллельных срединной поверхности, принимаются нулевыми $\sigma_z = 0$.

Это означает, что бесконечно тонкий слой оболочки находится в условиях плоского напряжённого состояния. К тому же и касательные напряжения τ_{xz} , τ_{yz} относятся к второстепенным. Они также принимаются равными нулю.

II. Кинематическая гипотеза – прямая, перпендикулярная срединной поверхности в начальном положении, остаётся перпендикулярной к поверхности и в деформированном состоянии (гипотеза прямых нормалей Кирхгофа) (рис. 5.9). Эта гипотеза, по существу, вытекает из первого предположения. Действительно, из условия отсутствия касательных напряжений τ_{xz} , $\tau_{yz} = 0$ (в условиях плоского напряжённого состояния) следует, что $\gamma_{xz} = \gamma_{yz} = 0$.

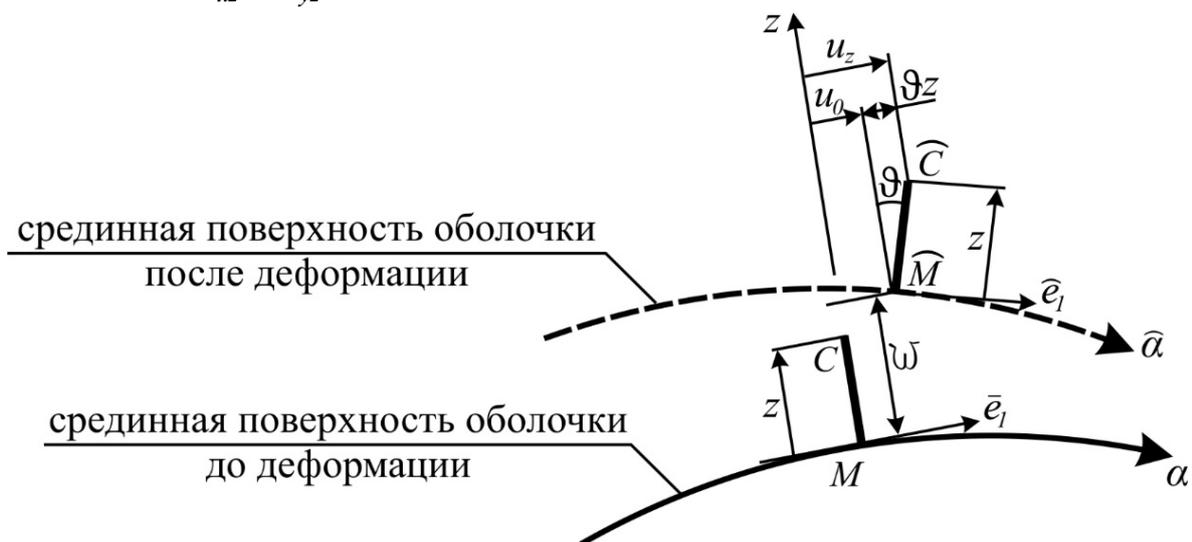


Рис. 5.9

Поскольку нормальные напряжения $\sigma_z = 0$, то деформации *срединной поверхности*, согласно физическим соотношениям теории упругости, находят по формулам [4]:

$$\begin{aligned}\varepsilon_z &= \frac{1}{E}(\sigma_x - \nu\sigma_y), \\ \varepsilon_y &= \frac{1}{E}(\sigma_x - \nu\sigma_y), \\ \gamma_{xy} &= \frac{\tau_{xy}}{G} = \frac{2(1+\nu)}{E}\tau_{xy},\end{aligned}\tag{5.14}$$

где ν – коэффициент Пуассона.

Отсюда определяется обратная зависимость напряжений от деформаций:

$$\begin{aligned}\sigma_x &= \frac{E}{1-\nu^2}(\varepsilon_z + \nu\varepsilon_y), \\ \sigma_y &= \frac{E}{1-\nu^2}(\varepsilon_y + \nu\varepsilon_x), \\ \tau_{xy} &= G\gamma_{xy} = \frac{E}{2(1+\nu)}\gamma_{xy}.\end{aligned}\tag{5.15}$$

На основании первой гипотезы

$$\begin{aligned}\tau_{xz} &= G\gamma_{xz} = G\left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}\right) = 0, \\ \tau_{yz} &= G\gamma_{yz} = G\left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}\right) = 0\end{aligned}$$

можно видеть, что

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial z} &= -\frac{\partial w}{\partial x}, \\ \frac{\partial v}{\partial z} &= -\frac{\partial w}{\partial y}.\end{aligned}$$

Интегрируя последние соотношения с учётом граничных условий на срединной поверхности оболочки ($u = u_0$, $v = v_0$ при $z = 0$), легко установить характер изменения перемещений точки C , взятой на некотором удалении z от поверхности (см. рис. 5.9), а именно:

$$\begin{aligned}u = u_z &= u_0 - z\frac{\partial w}{\partial x} = u_0 + z\vartheta, \\ v = v_z &= v_0 - z\frac{\partial w}{\partial y} = v_0 + z\varphi,\end{aligned}\tag{5.16}$$

где $\vartheta = -\frac{\partial w}{\partial x}$, $\varphi = -\frac{\partial w}{\partial y}$ – углы наклона нормали CM с осями триэдра, расположенными в касательной плоскости.

В следующем подразделе приводится иной вывод формул для перемещений произвольной точки оболочки, исходя из рассмотрения геометрической картины деформирования (рис. 5.10).

5.6. Определение перемещений оболочек

Уравнение срединной поверхности оболочки в начальном состоянии записывается в виде

$$\bar{r} = \bar{r}(\alpha, \beta).$$

В деформированном состоянии положение произвольной точки M срединной поверхности можно определить через радиус-вектор

$$\bar{\rho} = \bar{r}(\alpha, \beta) + \bar{\lambda}(\alpha, \beta),$$

где

$$\bar{\lambda}(\alpha, \beta) = u\bar{e}_1 + v\bar{e}_2 + w\bar{e}_n$$

– вектор перемещений точки оболочки, представленный компонентами u , v , w по направлениям осей триэдра \bar{e}_1 , \bar{e}_2 , \bar{e}_n (см. рис. 5.10).

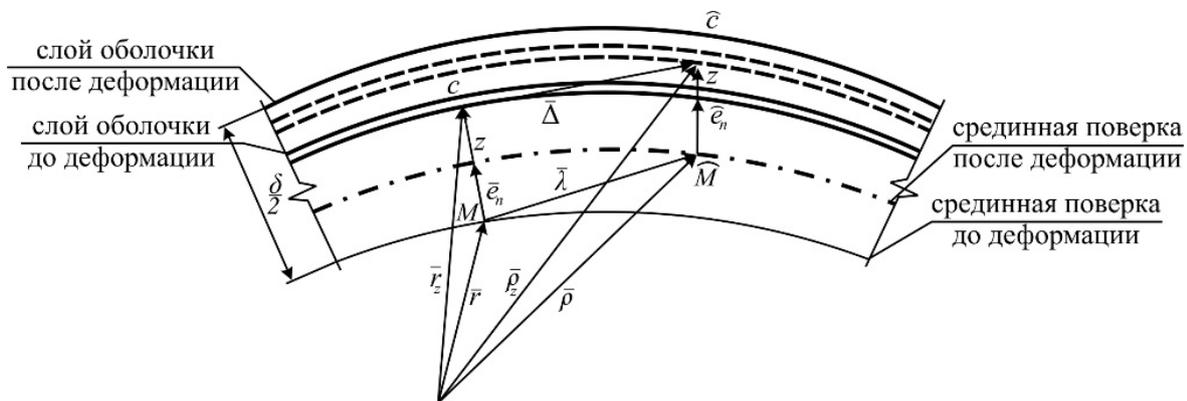


Рис. 5.10

Пусть \bar{r} обозначает радиус-вектор точки C , отстоящей от срединной поверхности на расстоянии z . Очевидно,

$$\bar{r}_z = \bar{r} + z\bar{e}_n. \quad (5.17)$$

Согласно гипотезе Кирхгоффа – Лява

$$\hat{\rho}_z = \bar{\rho} + z\hat{e}_n = \bar{r} + \bar{\lambda} + z\hat{e}_n \quad (5.18)$$

где $\widehat{\rho}_z$ – радиус-вектор той же точки после деформирования (точки \widehat{C}); \widehat{e}_n – единичный вектор нормали к деформированной поверхности, связанный с двумя другими ортами известным соотношением $\widehat{e}_n = \widehat{e}_1 \times \widehat{e}_2$ *.

Принимая во внимание зависимости (5.17), (5.18), вектор перемещения $\bar{\Delta}$ любой точки оболочки при деформировании можно выразить через перемещение её проекции на срединную поверхность в следующем виде:

$$\bar{\Delta} = \widehat{\rho}_z - \bar{r}_z = \bar{\lambda} + z(\widehat{e}_n - \bar{e}_n). \quad (5.19)$$

Чтобы перейти к координатной форме записи рассматриваемого вектора перемещений, следует выполнить несложные преобразования. Сначала, пользуясь определением единичного вектора

$$\widehat{e}_1 = \frac{\partial \bar{\rho}}{\partial \widehat{s}} = \frac{1}{\widehat{A}} \frac{\partial \bar{\rho}}{\partial \alpha}, \quad (5.20)$$

который направлен по касательной к координатной линии α на деформированной срединной поверхности, и зависимостями (5.17) и (5.18), легко установить, что

$$\widehat{e}_1 = \frac{1}{\widehat{A}} \left[\frac{\partial \bar{r}}{\partial \alpha} + \frac{\partial (u\bar{e}_1)}{\partial \alpha} + \frac{\partial (v\bar{e}_2)}{\partial \alpha} + \frac{\partial (w\bar{e}_n)}{\partial \alpha} \right],$$

где

$$\widehat{A} = \frac{d\bar{\rho}}{d\alpha}$$

– коэффициент Ламэ деформированной срединной поверхности, квадрат которого, согласно определению (5.9), равен скалярному произведению производной

$$\begin{aligned} \frac{d\bar{\rho}}{d\alpha} &= \frac{\partial \bar{r}}{\partial \alpha} + \frac{\partial (u\bar{e}_1)}{\partial \alpha} + \frac{\partial (v\bar{e}_2)}{\partial \alpha} + \frac{\partial (w\bar{e}_n)}{\partial \alpha} = \\ &= A\bar{e}_1 + u \frac{\partial (\bar{e}_1)}{\partial \alpha} + v \frac{\partial (\bar{e}_2)}{\partial \alpha} + w \frac{\partial (\bar{e}_n)}{\partial \alpha} + \frac{\partial (u)}{\partial \alpha} \bar{e}_1 + \frac{\partial (v)}{\partial \alpha} \bar{e}_2 + \frac{\partial (w)}{\partial \alpha} \bar{e}_n \end{aligned}$$

на саму себя. Принимая во внимание правила вычисления производных единичных векторов, в частности**

$$\frac{\partial (\bar{e}_1)}{\partial \alpha} = -\frac{1}{B} \frac{\partial A}{\partial \beta} \bar{e}_2 - \frac{A}{R_1} \bar{e}_n,$$

* В этой и других формулах подразд. 5.6 значок дуги « $\widehat{}$ » над каким-либо символом указывает на принадлежность вектора или иного параметра к деформированному состоянию оболочки.

** См. матрицу (5.60) в подразд. 5.8.

выражение для производной можно записать в следующем виде:

$$\frac{d\bar{\rho}}{d\alpha} = A \left(1 + \frac{1}{A} \frac{\partial u}{\partial \alpha} + \frac{1}{AB} \frac{\partial A}{\partial \beta} \nu + \frac{w}{R_1} \right) \bar{e}_1 + \left(\frac{\partial \nu}{\partial \alpha} - \frac{1}{B} \frac{\partial A}{\partial \beta} u \right) \bar{e}_2 + \left(\frac{\partial w}{\partial \alpha} + \frac{A}{R_1} u \right) \bar{e}_n. \quad (5.21)$$

Составив скалярное произведение $\frac{d\bar{\rho}}{d\alpha} \cdot \frac{d\bar{\rho}}{d\alpha}$ и пренебрегая в нём величинами второго порядка малости, находят

$$\bar{\Delta}^2 = \left(\frac{d\bar{\rho}}{d\alpha} \right)^2 \approx A^2 \left(1 + \frac{1}{A} \frac{\partial u}{\partial \alpha} + \frac{1}{AB} \frac{\partial A}{\partial \beta} \nu + \frac{w}{R_1} \right)^2. \quad (5.22)$$

При выводе данной формулы принято во внимание свойство ортогональности единичных векторов $\bar{e}_1 \cdot \bar{e}_2 = \bar{e}_1 \cdot \bar{e}_n = \bar{e}_2 \cdot \bar{e}_n = 0$.

С помощью выражений (5.21), (5.22) единичный орт \hat{e}_1 на деформированной срединной поверхности (см. 5.20) можно выразить через тот же орт в начальном состоянии

$$\hat{e}_1 \approx \frac{1}{A} \frac{\partial \bar{\rho}}{\partial \alpha} = \bar{e}_1 + \left(\frac{1}{A} \frac{\partial \nu}{\partial \alpha} - \frac{1}{AB} \frac{\partial A}{\partial \beta} u \right) \bar{e}_2 + \left(\frac{1}{A} \frac{\partial w}{\partial \alpha} - \frac{1}{R_1} u \right) \bar{e}_n. \quad (5.23,а)$$

Аналогично находится и орт другого направления, т.е.

$$\hat{e}_2 \approx \frac{1}{B} \frac{\partial \bar{\rho}}{\partial \beta} = \bar{e}_2 + \left(\frac{1}{B} \frac{\partial u}{\partial \beta} - \frac{1}{AB} \frac{\partial B}{\partial \alpha} \nu \right) \bar{e}_1 + \left(\frac{1}{B} \frac{\partial w}{\partial \alpha \beta} - \frac{1}{R_2} \nu \right) \bar{e}_n. \quad (5.23,б)$$

Умножая векторно один орт на другой и пренебрегая членами второго порядка малости, вычисляют орт нормали в деформированном состоянии срединной поверхности

$$\hat{e}_n = \hat{e}_1 \times \hat{e}_2 = \vartheta \bar{e}_1 + \theta \bar{e}_2 + \bar{e}_n. \quad (5.24)$$

Здесь введены обозначения величин

$$\vartheta = -\frac{1}{A} \frac{\partial w}{\partial \alpha} + \frac{1}{R_1} u, \quad \theta = -\frac{1}{B} \frac{\partial w}{\partial \alpha \beta} + \frac{1}{R_2} \nu, \quad (5.25)$$

смысл которых выяснится немного позже. При деформировании оболочки вектор перемещения любой точки, удалённой от срединной поверхности на отрезок z , теперь, согласно (5.19) и (5.24), можно определить с помощью величин ϑ , θ в виде

$$\bar{\Delta} = \bar{\lambda} + z(\vartheta \bar{e}_1 + \theta \bar{e}_2). \quad (5.26)$$

Проектируя полученное векторное равенство на оси триэдра, выводят формулы для определения перемещений любой точки оболочки в скалярной форме:

$$u(z) = u + z\vartheta, \quad \nu(z) = \nu + z\theta, \quad w(z) = w. \quad (5.27)$$

Отсюда вытекает, что величины ϑ, θ являются проекциями орта нормали \widehat{e}_n на оси \bar{e}_1, \bar{e}_2 . В силу малости перемещений эти проекции равны углам $1 \cdot \sin \vartheta \approx \vartheta, 1 \cdot \sin \theta \approx \theta$, на которые поворачивается нормаль \widehat{e}_n вокруг осей \bar{e}_1 и \bar{e}_2 . Следовательно, величины ϑ, θ есть не что иное, как углы поворота нормали к срединной поверхности по направлениям координатных линий поверхности оболочки.

Из сравнения формул (5.27) с аналогичными выражениями для перемещений пластин:

$$u = -z \frac{\partial w}{\partial x} = -z \operatorname{tg} \varphi \approx -z \varphi,$$

$$v = -z \frac{\partial w}{\partial y} = -z \operatorname{tg} \xi \approx -z \xi,$$

где φ, ξ – углы наклона нормали к срединной поверхности пластинки с осями координат (см. разд. 1), следует, что, в отличие от пластин, перемещения в оболочках, естественно, зависят от формы поверхности оболочки.

5.7. Деформации оболочек

Длины линейных элементов, взятых вдоль координатных линий, на начальной поверхности оболочки равны:

$$ds_1 = A d\alpha, \quad ds_2 = B d\beta, \quad (5.28, a)$$

где $d\alpha, d\beta$ – приращения криволинейных координат (рис. 5.11).

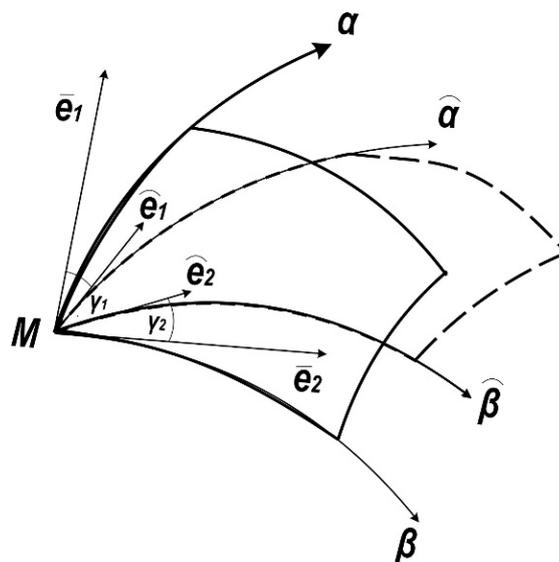


Рис. 5.11

После деформирования линейные элементы удлиняются

$$d\hat{s}_1 = \hat{A}d\alpha, \quad d\hat{s}_2 = \hat{B}d\beta. \quad (5.28,б)$$

Здесь \hat{A} , \hat{B} - коэффициенты Ламэ (5.21) на деформированной срединной поверхности.

Относительное удлинение в направлении координатной линии α обозначается

$$\varepsilon_1 = \frac{d\hat{s}_1 - ds_1}{ds_1} = \frac{\hat{A}d\alpha - Ad\alpha}{Ad\alpha}. \quad (5.29)$$

Согласно определению длины элемента в направлении линии α до и после деформирования (5.28), его деформация в этом направлении с учётом равенства (5.22) выражается через перемещения по формуле

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{A} \frac{\partial u}{\partial \alpha} + \frac{1}{AB} \frac{\partial A}{\partial \beta} v + \frac{w}{R_1}. \quad (5.30,а)$$

Очевидно, квадрат коэффициента Ламэ (5.22) на деформированной срединной поверхности теперь можно представить в виде

$$\hat{A}^2 \approx A^2(1 + \varepsilon_1)^2,$$

откуда вытекает зависимость между коэффициентами Ламэ в начальном и деформированном состоянии оболочки

$$\hat{A} \approx A(1 + \varepsilon_1).$$

Аналогично определяется деформация линейного элемента оболочки вдоль линии β

$$\varepsilon_2 = \frac{1}{B} \frac{\partial v}{\partial \beta} + \frac{1}{AB} \frac{\partial B}{\partial \alpha} u + \frac{w}{R_2} \quad (5.30,б)$$

и соответствующий параметр Ламэ

$$\hat{B} \approx B(1 + \varepsilon_2).$$

Сдвиг элемента срединной поверхности оболочки, по определению, равен сумме углов $\gamma = \gamma_1 + \gamma_2$ (см. рис. 5.11).

Так как углы γ_1 , γ_2 малы, то $\gamma = \cos(\hat{e}_1 \cdot \hat{e}_2) \approx \hat{e}_1 \cdot \hat{e}_2$. Подставив сюда выражения (5.23) для единичных векторов для деформированного положения оболочки, находят деформации сдвига

$$\gamma = \left(\frac{B}{A}\right) \cdot \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{v}{B}\right) + \frac{A}{B} \cdot \frac{\partial}{\partial \beta} \left(\frac{u}{A}\right). \quad (5.31)$$

Теперь можно перейти к выводу формул для кривизны элемента слоя оболочки, расположенного параллельно срединной поверхности и удалённого от неё на одинаковом расстоянии z^* . Если, в частности, рассматривать нормальное сечение оболочки плоскостью, проведённой через касательную к координатной линии β , то можно увидеть, что кривая линия ce , являющаяся сечением слоя, подобна кривой ab , взятой на срединной поверхности (рис. 5.12).

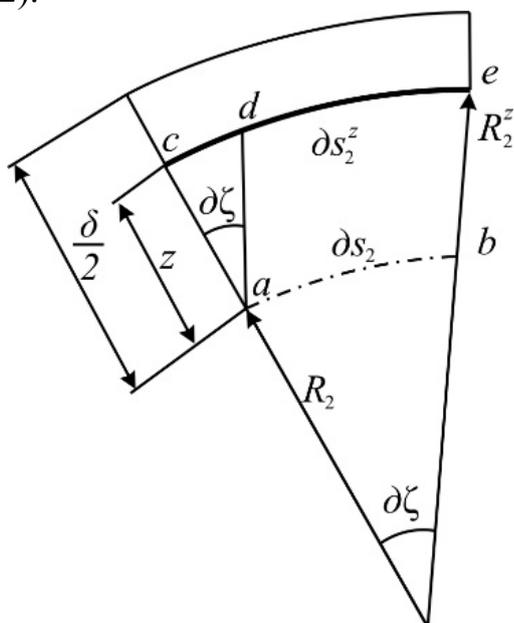


Рис. 5.12

Очевидно, радиусы кривизн эквидистантного слоя вдоль координатных линий отличаются от соответствующих радиусов срединной поверхности на отрезок z

$$R_1^z = R_1 + z, \quad R_2^z = R_2 + z. \quad (5.32)$$

Второе равенство аналогично первому и относится к радиусу кривизны слоя в направлении линии β .

Очевидно, отрезкам ab и cd координатной линии β , расположенным между двумя нормальными к срединной поверхности, соответствует одинаковое приращение координаты $\partial\beta$; следовательно, длина линейного элемента равна

$$\partial s_2^z = B^z \partial\beta.$$

Аналогично, и для линейного элемента линии другого направления (по линии α) – $\partial s_1^z = A^z \partial\alpha$. Здесь A^z , B^z – параметры Ламэ эквидистантного слоя оболочки.

* Данные слои или поверхности оболочки называются *эквидистантными*. Всем параметрам, относящимся к этому слою, приписывается верхний индекс z .

Длины линейных элементов можно выразить и через радиусы кривизн, составив равенства:

$$\partial s_1^z = A \partial \alpha + z \partial \xi, \quad \partial s_2^z = B \partial \beta + z \partial \zeta,$$

где $\partial \xi = A \partial \alpha / R_1$, $\partial \zeta = B \partial \beta / R_2$ – центральные углы дуг элементов. После подстановки углов в выражения для длин приходят к новым определениям длин элементов:

$$\partial s_1^z = A \left(1 + \frac{z}{R_1} \right) \partial \alpha, \quad \partial s_2^z = B \left(1 + \frac{z}{R_2} \right) \partial \beta.$$

Сравнивая полученные выражения длин с их первоначальными определениями, выводят зависимость между параметрами Ламэ на срединной поверхности и в эквидистантном слое оболочки:

$$A^z = A \left(1 + \frac{z}{R_1} \right), \quad B^z = B \left(1 + \frac{z}{R_2} \right). \quad (5.33)$$

Чтобы ввести понятие и определить величину кривизны оболочки при деформировании, необходимо обратиться к рассмотрению деформаций эквидистантного слоя по направлениям координатных линий. Их значения можно определить на основе формул, аналогичных (5.30) (для удлинений срединной поверхности). В частности, для деформации слоя вдоль линии α можно составить формулу

$$\varepsilon_1^z = \frac{1}{A^z} \frac{\partial u(z)}{\partial \alpha} + \frac{1}{A^z B^z} \frac{\partial A^z}{\partial \beta} v(z) + \frac{w}{R_1^z}, \quad (5.34)$$

используя выражения для перемещений согласно (5.30) и параметры Ламэ – (5.33) для эквидистантного слоя. Выполнив необходимые операции по подстановке и дифференцированию, после группировки слагаемых с учётом условий Кодацци (5.11) выводят формулу для удлинения элемента слоя вдоль координатной линии α , содержащую параметр деформаций срединного слоя:

$$\varepsilon_1^z = \frac{1}{\left(1 + \frac{z}{R_1} \right)} \left[\varepsilon_1 + \left(\frac{1}{A} \frac{\partial \theta}{\partial \alpha} + \frac{1}{AB} \frac{\partial A}{\partial \beta} \vartheta \right) \cdot z \right].$$

Обозначив величину, стоящую в круглых скобках этой формулы, через

$$\kappa_1 = \frac{1}{A} \frac{\partial \theta}{\partial \alpha} + \frac{1}{AB} \frac{\partial A}{\partial \beta} \vartheta, \quad (5.35a)$$

деформацию элемента можно представить более компактно

$$\varepsilon_1^z = \frac{1}{\left(1 + \frac{z}{R_1} \right)} (\varepsilon_1 + z \kappa_1) \quad (5.36,a)$$

и к тому же в виде, похожем на известную из курса сопротивления материалов запись деформации слоя изначально криволинейной балки. Отсюда вытекает, что величина κ_1 определяет кривизну слоя оболочки, отстоящего на расстоянии z от срединной поверхности, в направлении линии α .

Аналогично определяется деформация слоя и вдоль координатной линии β :

$$\varepsilon_2^z = \frac{1}{\left(1 + \frac{z}{R_2}\right)} (\varepsilon_2 + z\kappa_2), \quad (5.36,б)$$

где кривизна κ_2 вычисляется по формуле

$$\kappa_2 = \frac{1}{B} \frac{\partial \vartheta}{\partial \beta} + \frac{1}{AB} \frac{\partial B}{\partial \alpha} \theta. \quad (5.35,б)$$

Подобным образом находят также деформации сдвига элемента эквидистантного слоя, выраженные через перемещения срединной поверхности (рис. 5.11):

$$\gamma^z = \frac{1}{\left(1 + \frac{z}{R_1}\right)} (\omega_1 + z\tau_1) + \frac{1}{\left(1 + \frac{z}{R_2}\right)} (\omega_2 + z\tau_2). \quad (5.37)$$

Для сокращения записи здесь введены новые параметры, характеризующие сдвиг элемента, а именно*:

$$\begin{aligned} \omega_1 &= \frac{1}{A} \frac{\partial v}{\partial \alpha} - \frac{1}{AB} \frac{\partial A}{\partial \beta} u, \\ \omega_2 &= \frac{1}{B} \frac{\partial u}{\partial \beta} - \frac{1}{AB} \frac{\partial B}{\partial \alpha} v, \\ \tau_1 &= \frac{1}{A} \frac{\partial \theta}{\partial \alpha} - \frac{1}{AB} \frac{\partial A}{\partial \beta} \vartheta, \\ \tau_2 &= \frac{1}{B} \frac{\partial \vartheta}{\partial \beta} - \frac{1}{AB} \frac{\partial B}{\partial \alpha} \theta. \end{aligned} \quad (5.38)$$

Если воспользоваться определением *деформаций сдвига срединной поверхности* согласно (5.31), то с помощью параметров ω_1 , ω_2 их можно выразить более кратко, а именно:

$$\gamma = \omega_1 + \omega_2, \quad (5.39)$$

* На рис. 5.13 крышки над символами α , ω , ds относятся к параметрам деформаций слоя оболочки, отстоящего от срединной поверхности на расстоянии z .

тем самым раскрыв геометрический смысл величин ω_1, ω_2 , которые, очевидно, являются углами сдвига γ_1, γ_2 элемента, взятого на срединной поверхности.

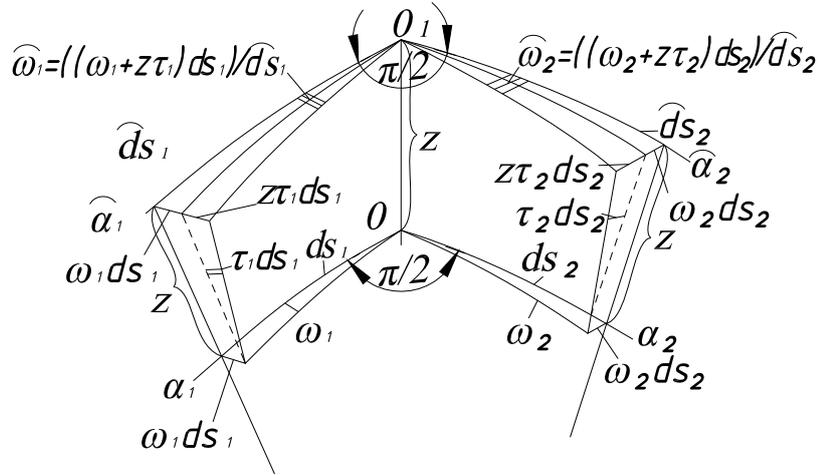


Рис. 5.13

Составив суммы $\tau_1 + \frac{\omega_2}{R_1}$, $\tau_2 + \frac{\omega_1}{R_2}$, легко убедиться в их тождестве и потому обозначить их одним и тем же символом, например буквой

$$\chi = \tau_1 + \frac{\omega_2}{R_1} = \tau_2 + \frac{\omega_1}{R_2}. \quad (5.40)$$

Этот параметр можно использовать для определения деформации параллельного слоя согласно (5.37) в следующей форме:

$$\gamma^z = \frac{1}{\left(1 + \frac{z}{R_1}\right)\left(1 + \frac{z}{R_2}\right)} \left\{ \left(1 - \frac{z^2}{R_1 R_2}\right) \gamma + 2 \left[1 + \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right) \frac{z}{2} \right] z \chi \right\}.$$

Пренебрегая здесь членами порядка $\frac{z}{R_i}$ ($i = 1, 2$) по сравнению с единицей, легко установить, что деформации сдвига параллельного слоя равны:

$$\gamma^z = \gamma + 2z\chi. \quad (5.41)$$

В соответствии с определением (5.40), величина χ при использовании выражений для τ_1, ω_2 по (5.38) может быть выражена через углы ϑ, θ :

$$\chi = \frac{1}{A} \frac{\partial \theta}{\partial \alpha} - \frac{1}{AB} \frac{\partial A}{\partial \beta} \vartheta + \left(\frac{1}{B} \frac{\partial \vartheta}{\partial \beta} - \frac{1}{AB} \frac{\partial B}{\partial \alpha} \theta \right) \frac{1}{R_1}. \quad (5.42)$$

Каков же смысл этой величины? Анализ структуры формулы (5.40) говорит о том, что каждое τ_1, τ_2 служит добавкой к значениям углов ω_1 и

ω_2 , отнесённым к радиусам кривизн координатных линий другого направления, т.е. к величинам $\frac{\omega_1}{R_2}$, $\frac{\omega_2}{R_1}$, соответственно. Сами же углы ω_1 и ω_2 , согласно (5.39), являются углами сдвига взаимно перпендикулярных кромок элемента срединной поверхности (рис. 5.14). Отнесённые к радиусам кривизны, они, с позиций геометрии, очевидно, не что иное, как кривизны. Следовательно, величины τ_1 , τ_2 тоже характеризуют кривизны. Тщательный анализ формулы (5.42) показывает, что величина χ характеризует деформацию кручения элемента срединной поверхности оболочки. Схема деформаций сдвига элементарного объёма оболочки может быть проиллюстрирована на примере деформаций куба (рис. 5.14,а).

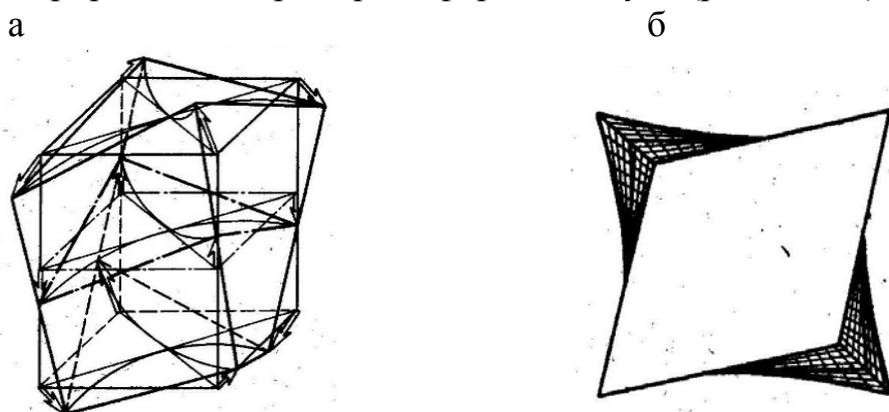


Рис. 5.14

Очевидно, любая из сумм $\tau_1 + \frac{\omega_2}{R_1}$, $\tau_2 + \frac{\omega_1}{R_2}$, т.е. величина χ , определяет относительный крутильный поворот противоположных кромок элемента. При этом две угловые точки контура срединной плоскости, расположенные по концам одной из диагоналей квадрата, опускаются, а две другие – поднимаются. Сама срединная плоскость искривляется. Вследствие того, что вертикальные ребра куба как нормальные элементы должны оставаться нормальными к искривленной срединной плоскости, неизбежен их поворот: два противоположных по диагонали ребра поворачиваются, сближаясь верхними концами, а два других – нижними. В результате этого по мере удаления от срединной плоскости происходит рост сдвига параллельных слоёв; в срединном же слое сдвиг отсутствует.

Общее представление о характере деформирования куба даёт картина, изображённая на рис. 5.14,б [11].

Резюме по подразд. 5.7

1. Параметры деформаций в каждой точке срединной поверхности, определяемые шестью формулами, являются функциями трёх независимых аргументов – перемещений оболочки u , v и w :

$$\begin{aligned}
 & \bullet \quad \varepsilon_1 = \frac{1}{A} \frac{\partial u}{\partial \alpha} + \frac{1}{AB} \frac{\partial A}{\partial \beta} v + \frac{w}{R_1}, \\
 & \bullet \quad \varepsilon_2 = \frac{1}{B} \frac{\partial v}{\partial \beta} + \frac{1}{AB} \frac{\partial B}{\partial \alpha} u + \frac{w}{R_2}, \\
 & \bullet \quad \gamma = \left(\frac{B}{A} \right) \cdot \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{v}{B} \right) + \frac{A}{B} \cdot \frac{\partial}{\partial \beta} \left(\frac{u}{A} \right), \\
 & \bullet \quad \kappa_1 = \frac{1}{A} \frac{\partial \theta}{\partial \alpha} + \frac{1}{AB} \frac{\partial A}{\partial \beta} \vartheta, \\
 & \bullet \quad \kappa_2 = \frac{1}{B} \frac{\partial \vartheta}{\partial \beta} + \frac{1}{AB} \frac{\partial B}{\partial \alpha} \theta, \\
 & \bullet \quad \chi = \frac{1}{A} \frac{\partial \theta}{\partial \alpha} - \frac{1}{AB} \frac{\partial A}{\partial \beta} \vartheta + \left(\frac{1}{B} \frac{\partial \vartheta}{\partial \beta} - \frac{1}{AB} \frac{\partial B}{\partial \alpha} \theta \right) \frac{1}{R_1}.
 \end{aligned} \tag{5.43}$$

2. Первые три компоненты деформаций (ε_1 , ε_2 , γ) называются тангенциальными или мембранными. Они характеризуют степень растяжения (сжатия) и сдвига срединной поверхности оболочки. Параметры κ_1 , κ_2 , χ называются параметрами изгибной деформации срединной поверхности. С их помощью можно установить деформации растяжения и сдвиги, которые возникают в эквидистантном слое.

Так как поверхность оболочки при деформировании сохраняется сплошной (разрывы или складки срединной поверхности недопустимы), то функции u , v и w должны быть непрерывными. Этого нельзя утверждать относительно деформаций ε_1 , ε_2 , γ и кривизн κ_1 , κ_2 , χ . Однако параметры деформаций ε_1 , ε_2 , γ , κ_1 , κ_2 , χ должны удовлетворять определённым зависимостям, обеспечивающим сплошность (непрерывность) срединной поверхности. Указанные зависимости, как и в теории упругости, называются условиями совместности деформаций; их три. Они могут быть получены путём исключения перемещений u , v и w из выражений для деформаций (5.43). Ниже они приводятся:

$$\begin{aligned}
& B \frac{\partial \kappa_2}{\partial \alpha} + \frac{\partial B}{\partial \alpha} (\kappa_2 - \kappa_1) - A \frac{\partial \chi}{\partial \beta} - 2 \frac{\partial A}{\partial \beta} \chi + \frac{1}{R_2} \frac{\partial A}{\partial \beta} \gamma + \\
& \bullet + \frac{1}{R_1} \left[A \frac{\partial \gamma}{\partial \beta} + \frac{\partial A}{\partial \beta} \gamma - B \frac{\partial \varepsilon_2}{\partial \alpha} - \frac{\partial B}{\partial \alpha} (\varepsilon_2 - \varepsilon_1) \right] = 0, \\
& A \frac{\partial \kappa_1}{\partial \beta} + \frac{\partial A}{\partial \beta} (\kappa_1 - \kappa_2) - B \frac{\partial \chi}{\partial \alpha} - 2 \frac{\partial B}{\partial \alpha} \chi + \frac{1}{R_1} \frac{\partial B}{\partial \alpha} \gamma + \\
& \bullet + \frac{1}{R_2} \left[B \frac{\partial \gamma}{\partial \alpha} + \frac{\partial B}{\partial \alpha} \gamma - A \frac{\partial \varepsilon_1}{\partial \beta} - \frac{\partial A}{\partial \beta} (\varepsilon_1 - \varepsilon_2) \right] = 0, \\
& \frac{\kappa_1}{R_2} + \frac{\kappa_2}{R_1} + \frac{1}{AB} \left\{ \frac{\partial}{\partial \alpha} \frac{1}{A} \left[B \frac{\partial \varepsilon_2}{\partial \alpha} + \frac{\partial B}{\partial \alpha} (\varepsilon_2 - \varepsilon_1) - \frac{A}{2} \frac{\partial \gamma}{\partial \beta} - B \frac{\partial A}{\partial \beta} \right] \right\} + \\
& \bullet + \frac{1}{AB} \left\{ \frac{\partial}{\partial \beta} \frac{1}{B} \left[A \frac{\partial \varepsilon_1}{\partial \beta} + \frac{\partial A}{\partial \beta} (\varepsilon_2 - \varepsilon_1) - \frac{B}{2} \frac{\partial \gamma}{\partial \alpha} - \frac{\partial B}{\partial \alpha} \gamma \right] \right\} = 0.
\end{aligned} \tag{5.44}$$

3. При выполнении расчётов оболочек пользуются линейным (5.41), а не гиперболическим (5.37) законом изменения деформаций сдвига элемента по толщине оболочки, поскольку, как и в теории расчёта кривых стержней, при малых отношениях δ/R различие в законах незначительно. Это справедливо и в отношении деформаций растяжения (сжатия).

5.8. Правила дифференцирования единичных ортов

При выводе формул, приведенных в настоящем подразделе, были использованы правила дифференцирования единичных ортов. Ниже дано обоснование этих правил. Как известно, в любой точке срединной поверхности оболочки можно показать тройку ортогональных единичных векторов $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_n$, два из которых – \bar{e}_1, \bar{e}_2 – направлены по касательным к координатным линиям α, β , а третий \bar{e}_n – по нормали к поверхности (см. рис. 5.7,б). Вместе они образуют вектор $\bar{e} = (\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_n)$.

Производные единичных векторов, составляющие вектор

$$\bar{e}' = \left(\frac{\partial \bar{e}_1}{\partial \alpha}, \frac{\partial \bar{e}_2}{\partial \alpha}, \frac{\partial \bar{e}_n}{\partial \alpha}, \frac{\partial \bar{e}_1}{\partial \beta}, \frac{\partial \bar{e}_2}{\partial \beta}, \frac{\partial \bar{e}_n}{\partial \beta} \right),$$

как и сами векторы $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_n$, также являются векторными величинами. На этом основании они могут быть разложены по ортам триэдра $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_n$. Такое разложение можно представить в матричном виде

$$\bar{e}' = [\nabla] \bar{e} \tag{5.45}$$

с использованием дифференциального оператора в форме матрицы

$$[\nabla] = \begin{bmatrix} \bar{e}_1 \cdot \frac{\partial \bar{e}_1}{\partial \alpha} & \bar{e}_2 \cdot \frac{\partial \bar{e}_1}{\partial \alpha} & \bar{e}_n \cdot \frac{\partial \bar{e}_1}{\partial \alpha} \\ \bar{e}_1 \cdot \frac{\partial \bar{e}_2}{\partial \alpha} & \bar{e}_2 \cdot \frac{\partial \bar{e}_2}{\partial \alpha} & \bar{e}_n \cdot \frac{\partial \bar{e}_2}{\partial \alpha} \\ \bar{e}_1 \cdot \frac{\partial \bar{e}_n}{\partial \alpha} & \bar{e}_2 \cdot \frac{\partial \bar{e}_n}{\partial \alpha} & \bar{e}_n \cdot \frac{\partial \bar{e}_n}{\partial \alpha} \\ \bar{e}_1 \cdot \frac{\partial \bar{e}_1}{\partial \beta} & \bar{e}_2 \cdot \frac{\partial \bar{e}_1}{\partial \beta} & \bar{e}_n \cdot \frac{\partial \bar{e}_1}{\partial \beta} \\ \bar{e}_1 \cdot \frac{\partial \bar{e}_2}{\partial \beta} & \bar{e}_2 \cdot \frac{\partial \bar{e}_2}{\partial \beta} & \bar{e}_n \cdot \frac{\partial \bar{e}_2}{\partial \beta} \\ \bar{e}_1 \cdot \frac{\partial \bar{e}_n}{\partial \beta} & \bar{e}_2 \cdot \frac{\partial \bar{e}_n}{\partial \beta} & \bar{e}_n \cdot \frac{\partial \bar{e}_n}{\partial \beta} \end{bmatrix},$$

если любой элемент данной матрицы считать проекцией, определяемой скалярным произведением.

Задача заключается в выводе формул, связывающих производные ортов с параметрами Ламэ и кривизнами поверхности оболочки. С этой целью следует вспомнить определение орта как производных векторной функции скалярного аргумента:

$$\bar{e}_1 = \frac{\partial \bar{r}}{\partial s_1}, \quad \bar{e}_2 = \frac{\partial \bar{r}}{\partial s_2}.$$

В соответствии с правилом дифференцирования сложной функции $\bar{r} = \bar{r}(\alpha, \beta)$ можно написать:

$$\bar{e}_1 = \frac{\partial \bar{r}}{\partial \alpha} \frac{\partial \alpha}{\partial s_1}, \quad \bar{e}_2 = \frac{\partial \bar{r}}{\partial \beta} \frac{\partial \beta}{\partial s_2},$$

где, как известно, $\partial s_1 = A \partial \alpha$, $\partial s_2 = B \partial \beta$. Воспользовавшись последними равенствами, находят:

$$\bar{e}_1 = \frac{1}{A} \frac{\partial \bar{r}}{\partial \alpha}, \quad \bar{e}_2 = \frac{1}{B} \frac{\partial \bar{r}}{\partial \beta}. \quad (5.46)$$

Вектор нормали, очевидно, определяется векторным произведением

$$\bar{e}_n = \bar{e}_1 \times \bar{e}_2.$$

Т.к. вектор производной $\frac{\partial \bar{e}_1}{\partial \alpha}$ ортогонален орту \bar{e}_1 , а $\frac{\partial \bar{e}_2}{\partial \beta}$ – вектору \bar{e}_2 , то в соответствии со скалярным произведением векторов

$$\bar{e}_1 \cdot \frac{\partial \bar{e}_1}{\partial \alpha} = \bar{e}_2 \cdot \frac{\partial \bar{e}_2}{\partial \beta} = 0. \quad (5.47)$$

По той же причине справедливо и равенство

$$\bar{e}_1 \cdot \frac{\partial \bar{e}_1}{\partial \beta} = \bar{e}_2 \cdot \frac{\partial \bar{e}_2}{\partial \alpha} = 0. \quad (5.48)$$

Несложное геометрическое построение (рис. 5.15) позволяет установить модуль вектора

$$\left| \frac{\partial \bar{e}_n}{\partial \alpha} \right| = \frac{A}{R_1}.$$

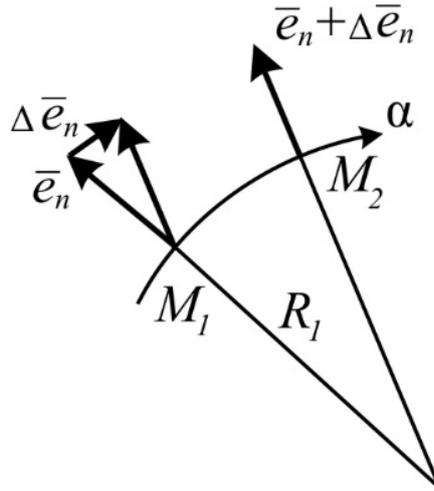


Рис. 5.15

А поскольку векторы \bar{e}_1 и $\frac{\partial \bar{e}_n}{\partial \alpha}$ коллинеарны, то

$$\frac{\partial \bar{e}_n}{\partial \alpha} = \frac{A}{R_1} \bar{e}_1.$$

Следовательно,

$$\bar{e}_1 \cdot \frac{\partial \bar{e}_n}{\partial \alpha} = \frac{A}{R_1}, \quad \bar{e}_2 \cdot \frac{\partial \bar{e}_n}{\partial \alpha} = \bar{e}_n \cdot \frac{\partial \bar{e}_n}{\partial \alpha} = 0. \quad (5.49)$$

Аналогично выводятся и равенства:

$$\frac{\partial \bar{e}_n}{\partial \beta} = \frac{B}{R_2} \bar{e}_2, \quad \bar{e}_1 \cdot \frac{\partial \bar{e}_n}{\partial \beta} = 0, \quad \bar{e}_2 \cdot \frac{\partial \bar{e}_n}{\partial \beta} = \frac{B}{R_2}, \quad \bar{e}_n \cdot \frac{\partial \bar{e}_n}{\partial \beta} = 0. \quad (5.50)$$

Производные $\frac{\partial \bar{e}_2}{\partial \alpha}$, $\frac{\partial \bar{e}_1}{\partial \beta}$ находятся из условия

$$\frac{\partial^2 \bar{r}}{\partial \alpha \partial \beta} = \frac{\partial^2 \bar{r}}{\partial \beta \partial \alpha}.$$

Действительно, если принять во внимание определение векторов по (5.46), то это равенство принимает вид

$$\frac{\partial(A\bar{e}_1)}{\partial\beta} = \frac{\partial(B\bar{e}_2)}{\partial\alpha}. \quad (5.51)$$

На основе полученного равенства путём раскрытия производных в одной части с сохранением другой приходят к двум соотношениям:

$$A\frac{\partial\bar{e}_1}{\partial\beta} + \frac{\partial(A)}{\partial\beta}\bar{e}_1 = \frac{\partial(B\bar{e}_2)}{\partial\alpha}, \quad (5.52)$$

$$\frac{\partial\bar{e}_2}{\partial\alpha} = \frac{1}{B}\frac{\partial(A\bar{e}_1)}{\partial\beta} + \frac{1}{B}\frac{\partial(B)}{\partial\alpha}\bar{e}_2. \quad (5.53)$$

Из первого легко найти

$$\frac{\partial\bar{e}_1}{\partial\beta} = -\frac{1}{A}\frac{\partial(A)}{\partial\beta}\bar{e}_1 - \frac{1}{A}\frac{\partial(B\bar{e}_2)}{\partial\alpha}, \quad (5.54,a)$$

а из второго –

$$\frac{\partial\bar{e}_2}{\partial\alpha} = \frac{1}{B}\frac{\partial(A\bar{e}_1)}{\partial\beta} + \frac{1}{B}\frac{\partial(B)}{\partial\alpha}\bar{e}_2. \quad (5.54,b)$$

Без труда находится произведение

$$\begin{aligned} \bar{e}_1 \cdot \frac{\partial\bar{e}_2}{\partial\alpha} &= \bar{e}_1 \frac{1}{B}\frac{\partial(A\bar{e}_1)}{\partial\beta} - \bar{e}_1 \frac{1}{B}\frac{\partial(B)}{\partial\alpha}\bar{e}_2 = \\ &= \bar{e}_1 \frac{1}{B}\frac{\partial(A)}{\partial\beta}\bar{e}_1 + \bar{e}_1 \frac{A}{B}\frac{\partial\bar{e}_1}{\partial\beta} - \bar{e}_1 \frac{1}{B}\frac{\partial(B)}{\partial\alpha}\bar{e}_2. \end{aligned} \quad (5.55)$$

Последнее слагаемое в этом выражении равно нулю, поскольку орты \bar{e}_1 , \bar{e}_2 ортогональны; по той же причине равно нулю и второе слагаемое, но теперь речь идёт о векторах \bar{e}_1 , $\frac{\partial\bar{e}_1}{\partial\beta}$.

Скалярное произведение $\bar{e}_1 \cdot \bar{e}_1 = 1$, поэтому согласно (5.55)

$$\bar{e}_1 \cdot \frac{\partial\bar{e}_2}{\partial\alpha} = \frac{1}{B}\frac{\partial A}{\partial\beta}. \quad (5.56)$$

Аналогично устанавливается

$$\bar{e}_2 \cdot \frac{\partial\bar{e}_1}{\partial\beta} = \frac{1}{A}\frac{\partial B}{\partial\alpha}. \quad (5.57)$$

В силу ортогональности векторов \bar{e}_i, \bar{e}_j ($i, j = 1, 2, n; i \neq j$) справедливы равенства

$$\frac{\partial(\bar{e}_i \cdot \bar{e}_j)}{\partial \alpha_k} = 0 \quad (k = 1, 2)$$

или

$$\bar{e}_i \cdot \frac{\partial \bar{e}_j}{\partial \alpha_k} + \bar{e}_j \cdot \frac{\partial \bar{e}_i}{\partial \alpha_k} = 0 \quad (k = 1, 2).$$

Отсюда следует, что

$$\bar{e}_i \cdot \frac{\partial \bar{e}_j}{\partial \alpha_k} = -\bar{e}_j \cdot \frac{\partial \bar{e}_i}{\partial \alpha_k} \quad (i, j = 1, 2, n; i \neq j, k = 1, 2). \quad (5.58)$$

Используя равенство (5.59) в сочетании с (5.49), (5.50), (5.58), можно получить последние шесть из восемнадцати проекций, входящих в матрицу $[\nabla]$. В итоге становится известной вся структура оператора дифференцирования $[\nabla]$, а именно:

$$[\nabla] = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{B} \frac{\partial A}{\partial \beta} & -\frac{A}{R_1} \\ \frac{1}{B} \frac{\partial A}{\partial \beta} & 0 & 0 \\ \frac{A}{R_1} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{A} \frac{\partial B}{\partial \alpha} & 0 \\ -\frac{1}{A} \frac{\partial B}{\partial \alpha} & 0 & -\frac{B}{R_2} \\ 0 & \frac{B}{R_2} & 0 \end{bmatrix}. \quad (5.59)$$

6. УРАВНЕНИЯ СОСТОЯНИЯ ОБОЛОЧЕК

6.1. Характеристики напряжённого состояния оболочки

Перед формированием условий равновесия оболочек, по аналогии с пластинами, следует определить равнодействующие напряжений, распределённых по боковым граням бесконечно малого объёма, выделенного из тела оболочки (рис. 6.1). Обозначения напряжений, их индексация совпадают с обозначениями, принятыми в теории упругости [3].

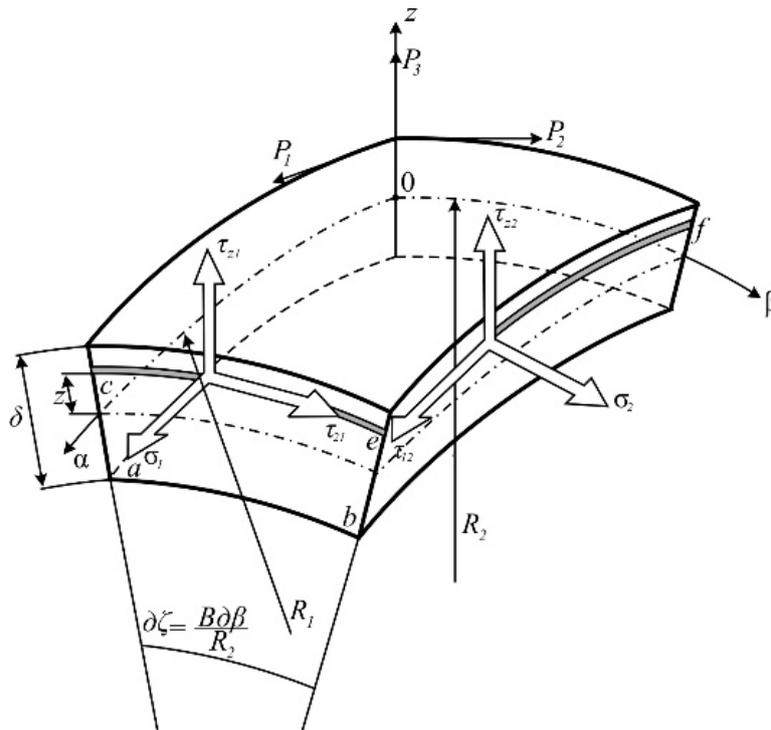


Рис. 6.1

Очевидно, бесконечно малый элемент оболочки, ограниченный двумя парами нормальных плоскостей α , $\alpha + d\alpha$, β , $\beta + d\beta$, соответственно, при действии нагрузки, представленной разложением вектора равнодействующей $\bar{P} = (p_1, p_2, p_3)$ на оси триэдра, находится в равновесии с усилиями, возникающими на боковых гранях. Величины усилий на боковых гранях элементарного участка оболочки, отнесённые к единице длины грани, могут быть получены в результате суммирования соответствующих напряжений. При непрерывном распределении напряжений суммирование сводится к интегрированию функции напряжений по высоте боковой грани; при этом длина грани равна длине элемента в направлении координатной линии $ds_1 = A d\alpha$ или $ds_2 = B d\beta$. На рис. 6.2 показаны усилия только на двух

гранях элемента оболочки (измеряемые в Н/м); остальные опущены. Очевидно, эти усилия являются реакциями отброшенной части оболочки.

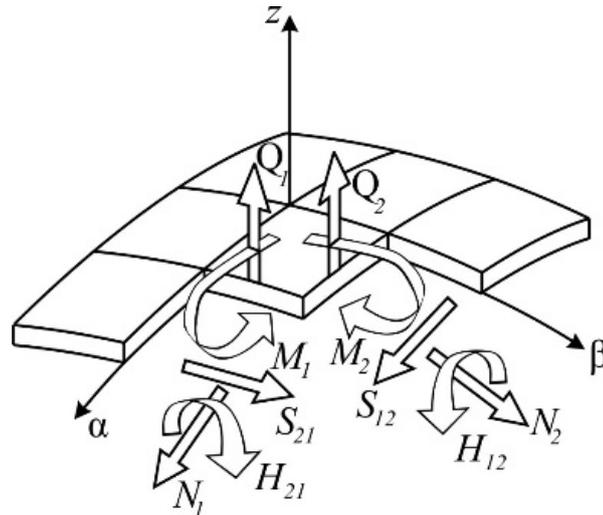


Рис. 6.2

Нормальное усилие N_1 на грани $\alpha = \text{const}$ определяется путём интегрирования

$$N_1 B d\beta = \int_{-\frac{\delta}{2}}^{\frac{\delta}{2}} \sigma_1 \left(1 + \frac{z}{R_2} \right) B d\beta dz ;$$

отнесённое к единице длины грани (в таком случае, очевидно, погонное и измеряемое в Н/м) оно равно:

$$N_1 = \int_{-\frac{\delta}{2}}^{\frac{\delta}{2}} \sigma_1 \left(1 + \frac{z}{R_2} \right) dz , \quad (6.1)$$

где δ – толщина оболочки, σ_1 – нормальные напряжения, распределённые по боковой грани $\alpha = \text{const}$.

Отличие подынтегрального выражения в данном определении от соответствующей величины в формуле для усилия в пластине объясняется тем, что вследствие искривлённости поверхности оболочки длина ds элемента (отрезка ce), отстоящего на некотором расстоянии z от срединной поверхности, увеличивается на величину $cd = z \cdot d\zeta$ по сравнению с длиной отрезка $ds_2 = ab = B d\beta$ координатной линии β , взятой на срединной поверхности (см. рис. 5.12).

С учётом указанных соотношений длину отрезка ce можно выразить через параметры оболочки по формуле

$$ce = ab + cd = B d\beta + \frac{B d\beta}{R_2} z = \left(1 + \frac{z}{R_2} \right) B d\beta .$$

Положительное направление усилия совпадает с направлением нормального напряжения σ_1 на боковой грани.

Точно также можно определить и другие усилия, возникающие на гранях элемента оболочки:

в частности, погонное нормальное усилие на грани $\beta = \text{const}$ равно:

$$N_2 = \int_{-\frac{\delta}{2}}^{\frac{\delta}{2}} \sigma_2 \left(1 + \frac{z}{R_1} \right) dz .$$

Равнодействующие касательных напряжений τ_{12} , τ_{21} на боковых гранях, т.е. сдвигающие усилия, равны:

$$S_{12} = \int_{-\frac{\delta}{2}}^{\frac{\delta}{2}} \tau_{12} \left(1 + \frac{z}{R_1} \right) dz , \quad (6.2)$$

$$S_{21} = \int_{-\frac{\delta}{2}}^{\frac{\delta}{2}} \tau_{21} \left(1 + \frac{z}{R_2} \right) dz .$$

Линейный закон распределения нормальных напряжений по толщине оболочки, обусловленный принятой в технической теории геометрической гипотезой, даёт возможность определить изгибающие моменты, возникающие на гранях элемента:

$$M_1 = \int_{-\frac{\delta}{2}}^{\frac{\delta}{2}} \sigma_1 \left(1 + \frac{z}{R_2} \right) z dz , \quad (6.3)$$

$$M_2 = \int_{-\frac{\delta}{2}}^{\frac{\delta}{2}} \sigma_2 \left(1 + \frac{z}{R_1} \right) z dz ,$$

а также крутящие моменты

$$H_{12} = \int_{-\frac{\delta}{2}}^{\frac{\delta}{2}} \tau_{12} \left(1 + \frac{z}{R_1} \right) z dz , \quad (6.4)$$

$$H_{21} = \int_{-\frac{\delta}{2}}^{\frac{\delta}{2}} \tau_{21} \left(1 + \frac{z}{R_2} \right) z dz .$$

Положительный знак момента соответствует положительным нормальным и касательным напряжениям вблизи наружной поверхности оболочки.

Суммируя касательные напряжения, можно определить погонные поперечные силы на гранях:

$$Q_1 = \int_{-\frac{\delta}{2}}^{\frac{\delta}{2}} \tau_{z1} \left(1 + \frac{z}{R_2} \right) dz, \quad (6.5)$$

$$Q_2 = \int_{-\frac{\delta}{2}}^{\frac{\delta}{2}} \tau_{z2} \left(1 + \frac{z}{R_1} \right) dz.$$

Положительный знак поперечных сил определяется знаком соответствующих касательных напряжений. На рис. 6.1,б показаны положительные направления усилий.

Из закона парности касательных напряжений в общем случае не вытекает парность сдвигающих усилий S и крутящих моментов H . Только для оболочек, у которых радиусы кривизны в обоих направлениях одинаковы, например для сферических, закон парности усилий

$$S = S_{12} = S_{21}, \quad H = H_{12} = H_{21} \quad (6.6)$$

соблюдается.

В (технической) теории тонких оболочек, рассматриваемой в данном пособии, отношение толщины оболочки к минимальному радиусу кривизны $\frac{\delta}{R_{\min}}$ настолько мало (оно составляет $\frac{1}{30} - \frac{1}{1000}$), что по сравнению с единицей им можно пренебречь. В дальнейшем при определении усилий по формулам настоящего подраздела слагаемое $\frac{z}{R_{\min}} < \frac{\delta}{R_{\min}}$ не принимается во внимание, а потому в технической теории оболочек справедливы равенства (6.6).

6.2. Уравнения равновесия оболочек

Для вывода уравнений равновесия необходимо вырезать бесконечно малый элемент оболочки, ограниченный двумя парами нормальных плоскостей $\alpha, \alpha + d\alpha, \beta, \beta + d\beta$, соответственно, и рассмотреть его равновесие при действии нагрузки $\bar{P} = (p_1, p_2, p_3)$ на поверхности (рис. 6.3).

На линиях $\alpha + d\alpha, \beta + d\beta$ длины сторон ab и bc получают приращения

$$\frac{\partial B}{\partial \alpha} d\alpha d\beta \text{ и } \frac{\partial A}{\partial \beta} d\alpha d\beta, \text{ соответственно.}$$

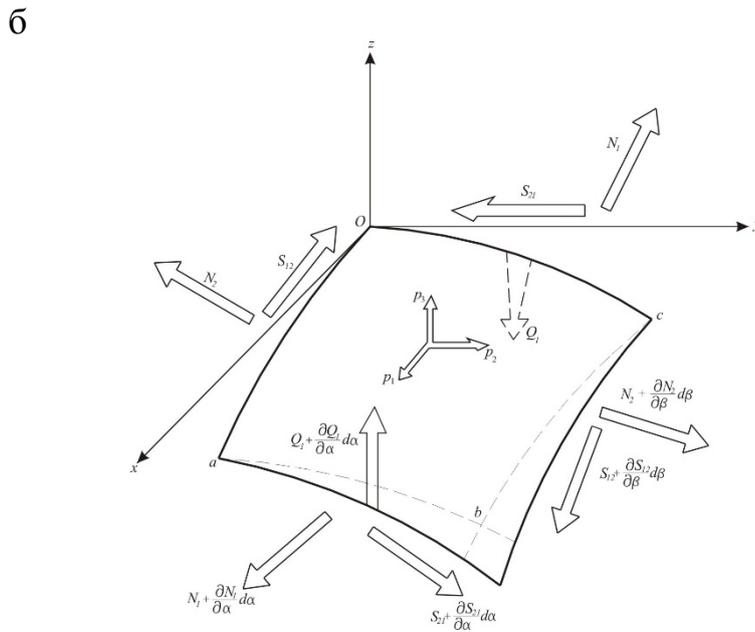
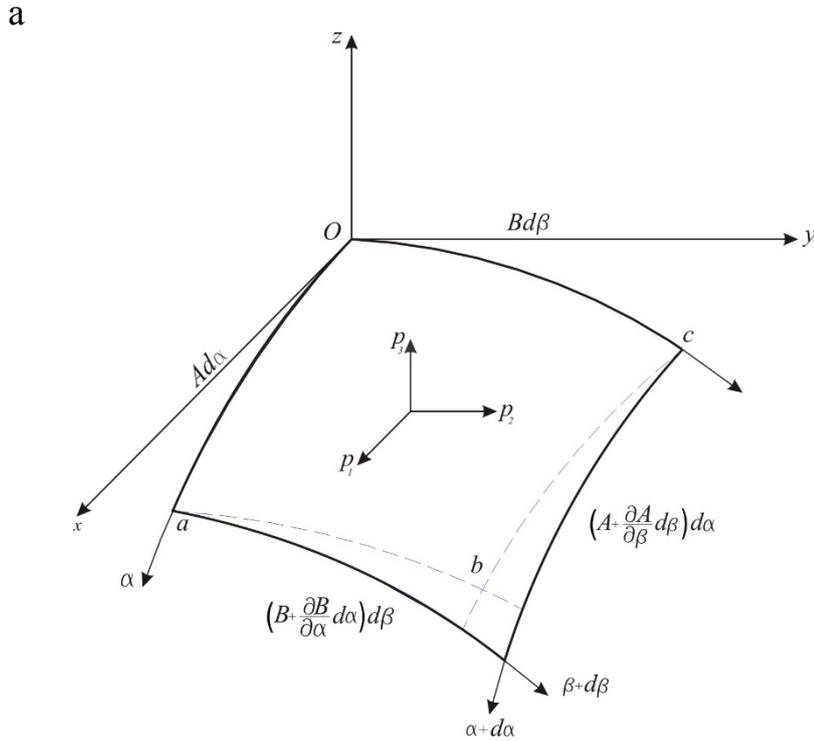


Рис. 6.3

На грани ab действует нормальное усилие $N_1 B d\beta$. На противоположной грани cd того же направления оно в общем случае получает приращение, которое определяется как произведение

$$\left(N_1 + \frac{\partial N_1}{\partial \alpha} d\alpha \right) \left(B + \frac{\partial B}{\partial \alpha} d\alpha \right) d\beta = N_1 B d\beta + \frac{\partial N_1}{\partial \alpha} d\alpha B d\beta + \frac{\partial N_1}{\partial \alpha} d\alpha B d\beta + N_1 \frac{\partial B}{\partial \alpha} d\alpha d\beta + \frac{\partial N_1}{\partial \alpha} \frac{\partial B}{\partial \alpha} d\alpha^2 d\beta.$$

Последнее слагаемое имеет высший порядок малости по сравнению с остальными. Поэтому им можно пренебречь. Подчёркнутые слагаемые определяют произведение производной величины N_1B на $d\alpha d\beta$, т.е.

$$\frac{\partial}{\partial \alpha}(N_1B)d\alpha d\beta.$$

Таким образом, усилие на противоположной грани оказывается равным сумме

$$N_1Bd\beta + \frac{\partial}{\partial \alpha}(N_1B)d\alpha d\beta.$$

Аналогично определяются и другие усилия на гранях оболочки.

Очевидно, суммарное действие внешней нагрузки должно уравниваться внутренними усилиями, возникающими на боковых гранях элемента (см. рис. 6.3).

Для элемента оболочки, находящегося под действием пространственной системы сил, необходимо составить шесть условий равновесия. Первое из них будет условием равновесия элемента в виде

$$\bullet \sum X = 0, \frac{\partial}{\partial \alpha}(N_1B) + \frac{\partial}{\partial \beta}(S_{12}A) - N_2 \frac{\partial B}{\partial \alpha} + S_{12} \frac{\partial A}{\partial \beta} + Q_1 \frac{AB}{R_1} + ABp_1 = 0.$$

При определении слагаемых данного условия подсчитываются разности всех усилий, которые проецируются на ось ax (см. рис. 6.3). Например, разность нормальных усилий на противоположных кромках элемента составляет:

$$N_1Bd\beta + \frac{\partial}{\partial \alpha}(N_1B)d\alpha d\beta - N_1Bd\beta = \frac{\partial}{\partial \alpha}(N_1B)d\alpha d\beta.$$

Аналогично находятся и другие слагаемые.

В результате подобных операций можно составить и два других условия, а именно:

$$\bullet \sum Y = 0, \frac{\partial}{\partial \beta}(N_2A) + \frac{\partial}{\partial \alpha}(S_{21}B) - N_1 \frac{\partial A}{\partial \beta} + S_{12} \frac{\partial B}{\partial \alpha} + Q_2 \frac{AB}{R_2} + ABp_2 = 0,$$

$$\bullet \sum Z = 0, \frac{\partial}{\partial \alpha}(Q_1B) + \frac{\partial}{\partial \beta}(Q_2A) - N_1 \frac{AB}{R_1} - N_2 \frac{AB}{R_2} + ABp_3 = 0.$$

При формировании уравнения $\sum M_x = 0$ следует воспользоваться рис. 6.4.

Условия равновесия элемента в виде

$$\bullet \sum M_x = 0, \frac{\partial}{\partial \alpha}(H_{21}B) + \frac{\partial}{\partial \beta}(M_2A) - M_1 \frac{\partial A}{\partial \beta} + H_{12} \frac{\partial B}{\partial \alpha} - Q_2AB = 0,$$

$$\bullet \sum M_y = 0, \frac{\partial}{\partial \beta}(H_{12}A) + \frac{\partial}{\partial \alpha}(M_1B) - H_{12} \frac{\partial B}{\partial \alpha} + H_{21} \frac{\partial A}{\partial \beta} - Q_1AB = 0$$

вместе с условием $\sum M_z = 0$ образуют ещё одну группу уравнений.

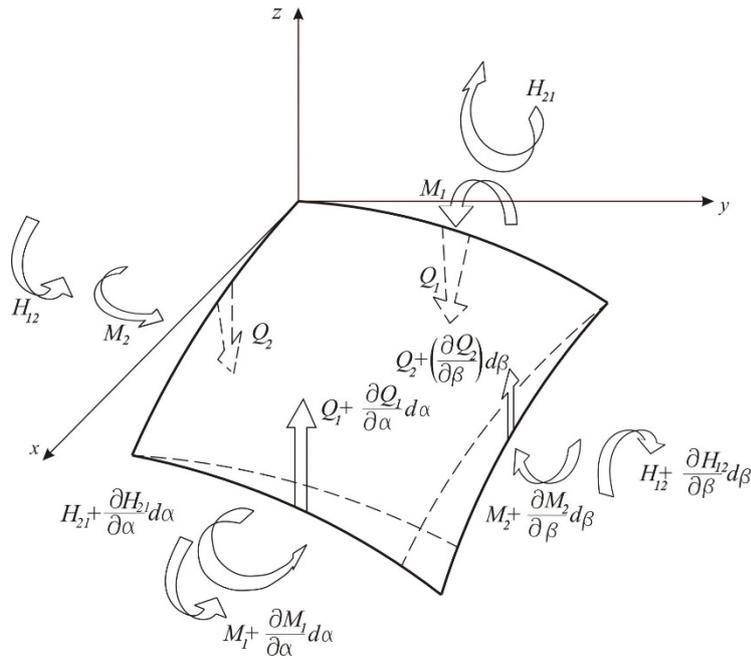


Рис. 6.4

При составлении условия равновесия в виде

$$\sum M_z = 0$$

следует учитывать усилия, показанные на рис. 6.5, которые вызывают моменты относительно оси az . В частности, сдвигающие усилия вызывают момент, равный:

$$S_{21} \left(Bd\beta + \frac{\partial B}{\partial \alpha} d\alpha d\beta \right) Ad\alpha - S_{12} \left(Ad\alpha + \frac{\partial A}{\partial \beta} d\alpha d\beta \right) Bd\beta = (S_{21} - S_{12}) ABd\alpha d\beta.$$

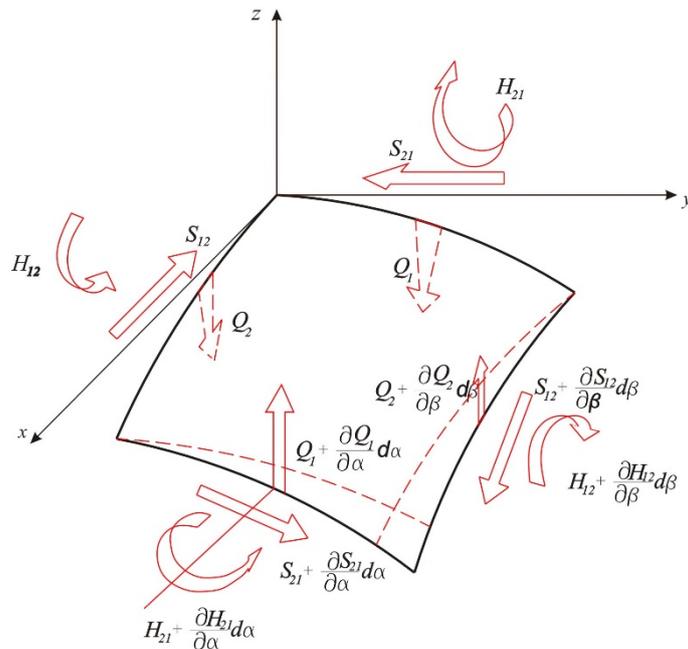


Рис. 6.5

Вследствие кривизны элемента компоненты крутящих моментов вокруг оси az равны:

$$H_{21}Bd\beta \frac{A\partial\alpha}{R_1}, \quad -H_{12}Ad\alpha \frac{B\partial\beta}{R_2}.$$

Моменты, вызываемые внешней нагрузкой, имеют высший порядок малости и не учитываются.

Сложив полученные выражения, выводят шестое условие

$$\sum M_z = 0, \quad S_{21} - S_{12} + \frac{H_{21}}{R_2} - \frac{H_{12}}{R_2} = 0. \quad (6.7)$$

С учётом равенств (6.6) легко убедиться в том, что уравнение (6.7) удовлетворяется тождественно. Очевидно, это является следствием закона парности касательных напряжений.

Таким образом, равновесие оболочки описывается пятью уравнениями, которые содержат 10 неизвестных усилий. Следовательно, задача по расчёту оболочек статически неопределима (в малом).

Если принять во внимание условие (6.6), то число неизвестных сокращается до восьми ($N_1, N_2, S, M_1, M_2, Q_1, Q_2, H$):

1. $\sum X = 0, \quad \frac{\partial}{\partial\alpha}(N_1B) - N_2 \frac{\partial B}{\partial\alpha} + \frac{1}{A} \frac{\partial}{\partial\beta}(SA^2) + Q_1k_1AB + ABp_1 = 0, \quad (6.8)$
2. $\sum Y = 0, \quad \frac{\partial}{\partial\beta}(N_2A) - N_1 \frac{\partial A}{\partial\beta} + \frac{1}{B} \frac{\partial}{\partial\alpha}(SB^2) + Q_2k_2AB + ABp_2 = 0,$
3. $\sum Z = 0, \quad -(k_1N_1 + k_2N_2) + \frac{1}{AB} \left[\frac{\partial}{\partial\alpha}(Q_1B) + \frac{\partial}{\partial\beta}(Q_2A) \right] + p_3 = 0,$
4. $\sum M_x = 0, \quad \frac{1}{B} \frac{\partial}{\partial\alpha}(HB^2) + \frac{\partial}{\partial\beta}(M_2A) - M_1 \frac{\partial A}{\partial\beta} - Q_2AB = 0,$
5. $\sum M_y = 0, \quad \frac{1}{A} \frac{\partial}{\partial\beta}(HA^2) + \frac{\partial}{\partial\alpha}(M_1B) - M_2 \frac{\partial B}{\partial\alpha} - Q_1AB = 0,$

где $k_1 = \frac{1}{R_1}, k_2 = \frac{1}{R_2}$ – кривизны поверхности, $H = H_{21} = H_{12}$ – крутящий момент, $S = S_{12} = S_{21}$ – сдвигающее усилие.

6.3. Физические уравнения общей теории оболочек

На основе первой гипотезы теории расчёта оболочек, как и пластинок, зависимость напряжений от деформаций принимается в виде:

$$\begin{aligned}\sigma_1 &= \frac{E}{1-\nu^2}(\varepsilon_1 + \nu\varepsilon_2), \\ \sigma_2 &= \frac{E}{1-\nu^2}(\varepsilon_2 + \nu\varepsilon_1), \\ \tau_{12} &= G \gamma = \frac{E}{2(1+\nu)}\gamma.\end{aligned}\tag{6.9}$$

Физические уравнения:

$$\begin{aligned}N_1 &= \frac{Eh}{1-\nu^2}(\varepsilon_1 + \nu\varepsilon_2), \\ N_2 &= \frac{Eh}{1-\nu^2}(\varepsilon_2 + \nu\varepsilon_1), \\ S &= S_{12} = S_{21} = Gh\gamma, \\ M_1 &= D(\kappa_1 + \nu\kappa_2), \\ M_2 &= D(\kappa_2 + \nu\kappa_1), \\ H &= H_{12} = H_{21} = D(1-\nu)\chi,\end{aligned}\tag{6.10}$$

т.е. выражения для внутренних обобщённых усилий получают на основе их определений согласно (6.1)–(6.5) в результате вычисления интегралов. Здесь E – модуль деформации материала; ν – коэффициент Пуассона; D – цилиндрическая жёсткость оболочки.

По форме данные уравнения совпадают с аналогичными уравнениями теории пластин. Разница состоит в том, что выражения для деформаций имеют более сложный вид (ср. (5.43) с формулами (4.22)–(4.26)).

6.4. Граничные условия

При интегрировании системы дифференциальных уравнений (6.8), (6.10), (5.43), описывающих напряжённо-деформированное состояние оболочек любого вида, необходимо в каждом случае формулировать граничные условия. Ниже приводятся характеристики напряжений и усилий, перемещений и деформаций, соответствующие тому или иному условию опирания оболочки на контуре.

1. Например, если вдоль координатной линии $\alpha=\text{const}$ край оболочки шарнирно опёрт и неподвижен (рис. 6.6,а), то в этом случае отсутствуют

перемещения края по всем трём направлениям, т.е. $u = v = w = 0$, а также изгибающие моменты $M_1 = 0$.

2. Если край свободен по линии $\beta = \text{const}$ (рис. 6.6,б), то тогда в любой точке на крае должны сохраняться равенства:

$$u = w = 0,$$

$$M_2 = N_2 = 0.$$

3. Если шарнирно опёртый край может смещаться в касательной плоскости (рис. 6.6,в), то в таком случае должны быть выполнены следующие условия:

$$w = 0,$$

$$M_2 = N_2 = S = 0.$$

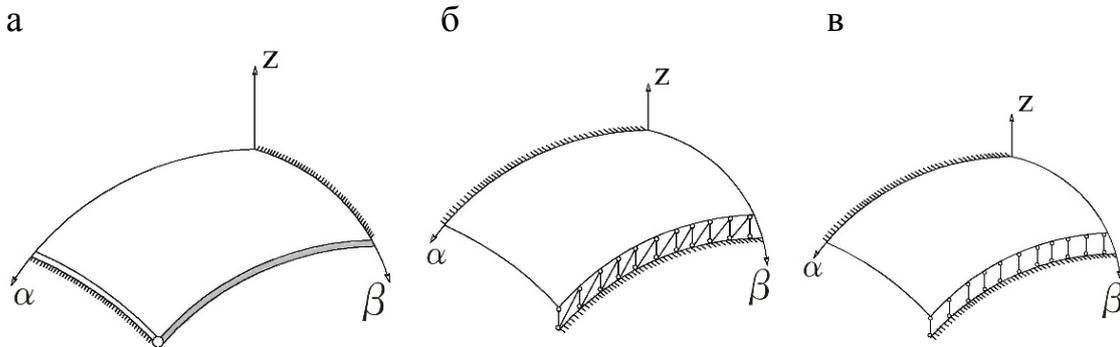


Рис. 6.6

6.5. Методы решения задач по расчёту оболочек

Напряжённно-деформированное состояние оболочки описывается тремя группами уравнений. Ниже приводится их сводка.

I. Первая группа состоит из условий равновесия оболочек (их пять – см. (6.8)):

$$\sum X = 0, \quad \frac{\partial}{\partial \alpha}(N_1 B) - N_2 \frac{\partial B}{\partial \alpha} + \frac{1}{A} \frac{\partial}{\partial \beta}(S A^2) + Q_1 k_1 A B + A B p_1 = 0,$$

$$\sum Y = 0, \quad \frac{\partial}{\partial \beta}(N_2 A) - N_1 \frac{\partial A}{\partial \beta} + \frac{1}{B} \frac{\partial}{\partial \alpha}(S B^2) + Q_2 k_2 A B + A B p_2 = 0,$$

$$\sum Z = 0, \quad -(k_1 N_1 + k_2 N_2) + \frac{1}{A B} \left[\frac{\partial}{\partial \alpha}(Q_1 B) + \frac{\partial}{\partial \beta}(Q_2 A) \right] + p_3 = 0,$$

$$\sum M_x = 0, \quad \frac{1}{B} \frac{\partial}{\partial \alpha}(H B^2) + \frac{\partial}{\partial \beta}(M_2 A) - M_1 \frac{\partial A}{\partial \beta} - Q_2 A B = 0,$$

$$\sum M_y = 0, \quad \frac{1}{A} \frac{\partial}{\partial \beta}(H A^2) + \frac{\partial}{\partial \alpha}(M_1 B) - M_2 \frac{\partial B}{\partial \alpha} - Q_1 A B = 0.$$

Данные условия содержат десять неизвестных усилий. Следовательно, задача по расчёту оболочек является статически неопределимой. Если принять во внимание условие (6.6), то число неизвестных сокращается до восьми ($N_1, N_2, S, M_1, M_2, Q_1, Q_2, H$); $H = H_{21} = H_{12}$ – крутящий момент, $S = S_{12} = S_{21}$ – сдвигающее усилие.

II. Ко второй группе относятся геометрические уравнения (см. определение деформаций по формулам (5.43):

$$\begin{aligned}\varepsilon_1 &= \frac{1}{A} \frac{\partial u}{\partial \alpha} + \frac{1}{AB} \frac{\partial A}{\partial \beta} v + \frac{w}{R_1}, \\ \varepsilon_2 &= \frac{1}{B} \frac{\partial v}{\partial \beta} + \frac{1}{AB} \frac{\partial B}{\partial \alpha} u + \frac{w}{R_2}, \\ \gamma &= \left(\frac{B}{A} \right) \cdot \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{v}{B} \right) + \frac{A}{B} \cdot \frac{\partial}{\partial \beta} \left(\frac{u}{A} \right), \\ \kappa_1 &= \frac{1}{A} \frac{\partial \theta}{\partial \alpha} + \frac{1}{AB} \frac{\partial A}{\partial \beta} \vartheta, \\ \kappa_2 &= \frac{1}{B} \frac{\partial \vartheta}{\partial \beta} + \frac{1}{AB} \frac{\partial B}{\partial \alpha} \theta, \\ \chi &= \frac{1}{A} \frac{\partial \theta}{\partial \alpha} - \frac{1}{AB} \frac{\partial A}{\partial \beta} \vartheta + \left(\frac{1}{B} \frac{\partial \vartheta}{\partial \beta} - \frac{1}{AB} \frac{\partial B}{\partial \alpha} \theta \right) \frac{1}{R_1}.\end{aligned}$$

III. Третью группу образуют физические зависимости (6.10):

$$\begin{aligned}N_1 &= \frac{Eh}{1-\nu^2} (\varepsilon_1 + \nu \varepsilon_2), \quad N_2 = \frac{Eh}{1-\nu^2} (\varepsilon_2 + \nu \varepsilon_1), \quad S = S_{12} = S_{21} = Gh\gamma, \\ M_1 &= D(\kappa_1 + \nu \kappa_2), \quad M_2 = D(\kappa_2 + \nu \kappa_1), \quad H = H_{12} = H_{21} = D(1-\nu)\chi.\end{aligned}$$

Общее решение полной системы уравнений общей теории оболочек при заданных граничных условиях представляет собой сложную математическую проблему.

Одним из путей её решения является упрощение постановки задачи на основе введения дополнительных предпосылок, касающихся ожидаемого распределения внутренних усилий и перемещений в конкретной оболочке. Если ожидаемое поведение (в соответствии с принятой предпосылкой) подтверждается экспериментами с реальной оболочкой, то разработанную теорию расчёта можно считать оправданной и принимать её к руководству. Например, при определённых условиях нагружения в некоторых оболочках возможно безмоментное состояние ($M_1 = M_2 = H \equiv 0$). И тогда из группы уравнений равновесия выпадают уравнения, содержащие моменты; геометрические уравнения, по которым находятся кривизны, также опускаются, а физические соотношения дают зависимости деформаций и усилий только в

срединной поверхности. Полученная таким способом система уравнений может быть проинтегрирована в общем виде (пример см. в разд. 7).

Аналогичные подходы используются и при разработке практических методов расчётов оболочек частного типа, например цилиндрических (см. разд. 8-10).

Возвращаясь к общей теории расчёта оболочек, следует указать на принципиальную возможность разрешения проблемы и в этом случае. Полная система уравнений общей теории состоит из пяти условий равновесия, содержащих десять неизвестных усилий $N_1, N_2, S_{12}, S_{21}, M_1, M_2, Q_1, Q_2, H_{12}, H_{21}$, и трёх уравнений совместности деформаций (5.44), связывающих шесть параметров деформации $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ и др. В итоге получается система из восьми уравнений с шестнадцатью неизвестными. Уравнения совместности деформаций можно представить через усилия, принимая во внимание физические зависимости (6.10). Тогда разрешающая система восьми уравнений будет содержать только усилия, число которых равно десяти. Для того чтобы система была определённой, т.е. чтобы число неизвестных равнялось числу уравнений, достаточно выполнить следующее преобразование. Рассматривая равновесие элемента оболочки при действии усилий $S_{12}, S_{21}, H_{12}, H_{21}$, которые обусловлены только сдвигом в срединной поверхности (см. рис. 6.5), легко убедиться в соблюдении тождества (см. шестое условие равновесия (6.7))

$$S_{12} - \frac{H_{21}}{R_2} \equiv S_{21} - \frac{H_{12}}{R_1} = S.$$

Откуда следует, что обе части данного тождества представляют одну и ту же функцию, которая обозначена через S .

В свою очередь, крутящие моменты H_{12}, H_{21} формально можно выразить как сумму и разность каких-либо двух функций H и P , т.е. полагать, что $H_{12} = H + P, H_{21} = H - P$, и тогда

$$H = \frac{H_{12} + H_{21}}{2}, \quad P = \frac{H_{12} - H_{21}}{2}.$$

Функция P , являющаяся разностью моментов $H_{12} - H_{21}$, практически равна нулю; следовательно, $H_{12} = H_{21} = H$. В итоге последних преобразований четыре величины $S_{12}, S_{21}, H_{12}, H_{21}$ оказались сведены к двум S, H . Таким образом, число неизвестных в разрешающей системе восьми уравнений стало равным восьми – теперь система определённа.

Конечно, формирование полной системы уравнений аналитического вида ещё не означает, что обеспечена возможность найти её решение в общем виде. При наличии разрешающей системы уравнений состояния проблема решения становится сугубо математической. В разд. 10 и 11

излагается один общий метод математического решения уравнений широкого круга задач расчёта цилиндрических оболочек. В большинстве случаев для многих реальных задач проблема расчёта оболочек *в аналитической форме* до сих пор остаётся нерешённой.

В настоящее время любую оболочку можно рассчитать на основе метода конечных элементов с применением ПЭВМ, т.е. косвенно осуществить решение общей системы уравнений с определённой степенью точности, но на совершенно других основаниях, притом численно (см. разд. 12).

7. БЕЗМОМЕНТАЯ ТЕОРИЯ РАСЧЁТА ОБОЛОЧЕК ВРАЩЕНИЯ

7.1. Условия безмоментного состояния оболочек

В инженерной практике в ряде случаев оказывается, что в оболочках вращения при определённых внешних воздействиях не возникают деформации изгиба поверхности и связанные с ними внутренние усилия в виде изгибающих и крутящих моментов. Условия, при которых наблюдаются эти состояния, нетрудно обосновать исходя из общей теории оболочек. В рассматриваемом разделе указанные условия объясняются простейшими физическими соображениями. В частности, ясно, что:

- при действии нагрузок, приложенных по касательной в любой точке поверхности оболочки, следует ожидать, что и внутренние усилия будут иметь то же направление и тем самым вызывать либо сжатие, либо растяжение произвольного элемента оболочки (рис. 7.1); если даже сосредоточенные нагрузки и действуют по нормали к поверхности, то безмоментное состояние возможно на достаточном удалении от них;

- конечно, и поверхность оболочки должна быть гладкой и непрерывной, без резких изломов, без скачкообразного изменения толщины (в общем случае – жёсткости), вследствие чего возникают деформации изгиба;

- на боковых гранях оболочки ничто не должно препятствовать перемещению кромок по нормали к поверхности оболочки, причём крепления опор должны обеспечивать сохранение формы оболочки при нагружении.

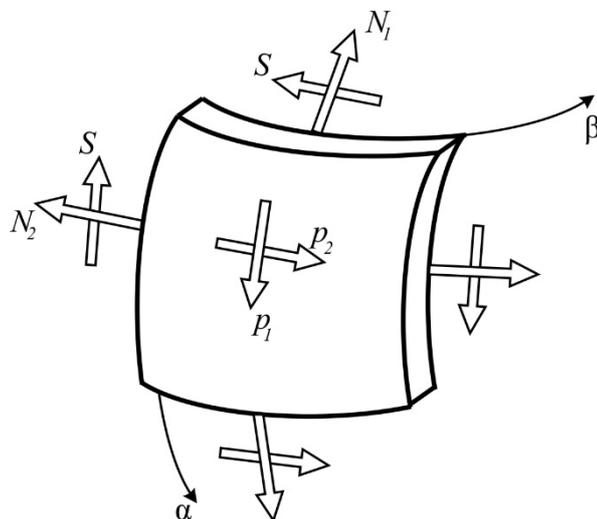


Рис. 7.1

Следует ожидать, что расчёт оболочек по безмоментной теории окажется проще расчёта по общей теории, когда указанные условия не соблюдаются и приходится принимать во внимание взаимовлияние нормальных усилий и моментов.

7.2. Общие уравнения безмоментной теории оболочек вращения

Вывод уравнений равновесия безмоментного состояния оболочек осуществляется на основе условий равновесия, полученных для общего случая (см. разд. 6). Как и ранее, при выводе уравнений необходимо рассмотреть бесконечно малый элемент оболочки $abcd$, вырезанный двумя парами нормальных плоскостей $\alpha, \alpha + d\alpha, \beta, \beta + d\beta$, соответственно, и сформировать условия равновесия элемента при действии вектора нагрузки $\bar{P} = (p_1, p_2, p_3)$, составив суммы проекций усилий на оси сферической системы координат (рис. 7.2).

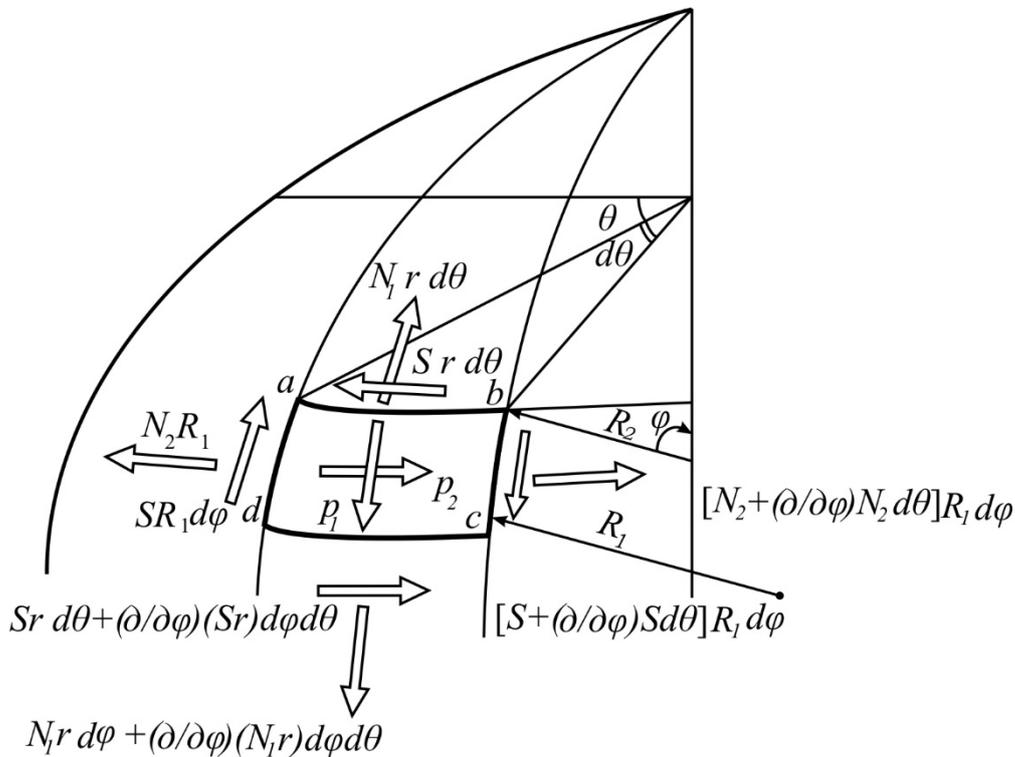


Рис. 7.2

При этих условиях расчёт оболочек выполняют по безмоментной теории, полагая изгибающие и крутящие моменты $M_1, M_2, H_{21} = H_{12} = H$, а также поперечные силы Q_1, Q_2 равными нулю, т.е. принимая изначально

$$M_1 = M_2 = H = Q_1 = Q_2 = 0, \quad (7.1)$$

во всех уравнениях равновесия (6.20). На этом основании уравнения безмоментной теории оболочек при равенстве сдвигающих усилий $S_{12} = S_{21} = S$ принимают вид:

$$1. \sum X = 0, \quad \frac{\partial}{\partial \alpha} (N_1 B) - N_2 \frac{\partial B}{\partial \alpha} + \frac{1}{A} \frac{\partial}{\partial \beta} (S A^2) + A B p_1 = 0,$$

$$2. \sum Y = 0, \quad \frac{\partial}{\partial \beta}(N_2 A) - N_1 \frac{\partial A}{\partial \beta} + \frac{1}{B} \frac{\partial}{\partial \alpha}(SB^2) + ABp_2 = 0, \quad (7.2)$$

$$3. \sum Z = 0, \quad -(k_1 N_1 + k_2 N_2) + p_3 = 0.$$

Остальные три условия в виде $\sum M = 0$ относительно осей координат удовлетворяются тождественно, поскольку моменты и поперечные силы M_1, M_2, H, Q_1, Q_2 исключаются из рассмотрения. Таким образом, основными факторами напряженного состояния оболочки являются нормальные усилия N_1, N_2 и сдвигающее усилие S .

В дополнение к условиям равновесия (7.2) следует принять во внимание геометрические уравнения (см. разд. 5):

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{A} \frac{\partial u}{\partial \alpha} + \frac{\nu}{AB} \frac{\partial A}{\partial \beta} + \frac{w}{R_1} = \frac{1}{Eh}(N_1 - \nu N_2), \quad (7.3,а)$$

$$\varepsilon_2 = \frac{1}{B} \frac{\partial \nu}{\partial \beta} + \frac{u}{AB} \frac{\partial B}{\partial \alpha} + \frac{w}{R_2} = \frac{1}{Eh}(N_2 - \nu N_1), \quad (7.3,б)$$

$$\gamma = \frac{B}{A} \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{\nu}{B} \right) + \frac{A}{B} \frac{\partial}{\partial \beta} \left(\frac{u}{A} \right) = \frac{1}{Gh} S \quad (7.3,в)$$

и физические соотношения (6.10).

7.3. Уравнения напряжённо-деформированного состояния безмоментных оболочек вращения

Уравнения состояния безмоментной теории оболочек вращения целесообразно записать в сферических координатах φ, θ . В этом случае в уравнениях равновесия (7.2) следует принять:

$$\begin{aligned} r &= R_2 \sin \theta, \\ ab &= ds_2 = rd\theta, \\ ad &= ds_1 = R_1 d\varphi, \end{aligned} \quad (7.4,а)$$

где R_1 – радиус кривизны срединной поверхности вдоль меридиана; R_2 – расстояние от поверхности до оси вращения, измеряемое по нормали к поверхности (радиус кривизны в широтном направлении); $r = r(\varphi)$ – радиус окружности, полученный в результате сечения оболочки плоскостью, перпендикулярной оси вращения. Следовательно, коэффициенты Ламэ

$$A = R_1, \quad B = r \quad (7.4,б)$$

в данном случае зависят только от угловой координаты φ ; они не изменяются в широтном направлении (θ) вследствие симметрии поверхности.

Формирование уравнений равновесия безмоментного состояния оболочек вращения осуществляется на основе условий равновесия (см. подразд. 7.2). При составлении условий равновесия следует принять во внимание равенства (7.4,а) и (7.4,б); в таком случае можно установить, что:

$$\sum X = 0, \quad \frac{\partial}{\partial \varphi}(rN_1) - N_2 \frac{\partial r}{\partial \varphi} + R_1 \frac{\partial}{\partial \theta}(S) + rR_1 p_1 = 0, \quad (7.5,а)$$

$$\sum Y = 0, \quad \frac{\partial}{\partial \theta}(N_2) - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \alpha}(S) + rR_1 p_2 = 0, \quad (7.5,б)$$

$$\sum Z = 0, \quad \frac{N_1}{R_1} + \frac{N_2}{R_2} - p_3 = 0. \quad (7.5,в)$$

С помощью рис. 7.3 несложно определить проекцию дуги элемента на плоскость, перпендикулярную оси оболочки:

$$dd' = \frac{dr}{d\varphi} d\varphi \approx ad \cos \varphi = R_1 d\varphi \cos \varphi,$$

откуда находится производная

$$\frac{dr}{d\varphi} = R_1 \cos \varphi. \quad (7.6)$$

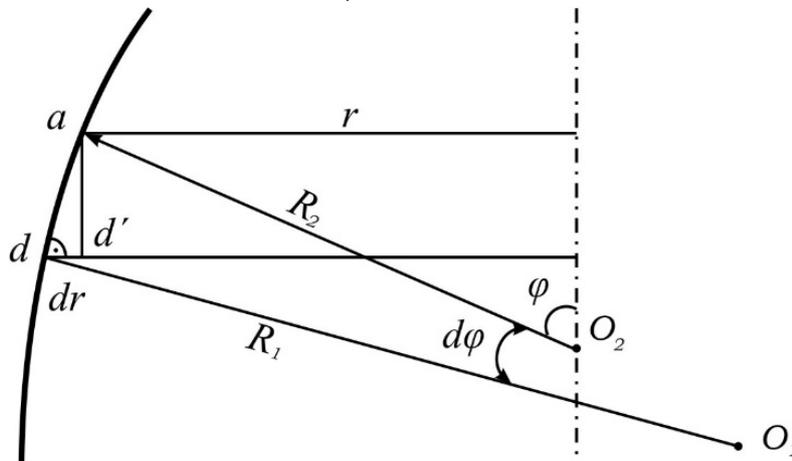


Рис. 7.3

С учётом определения (7.6) уравнения равновесия записываются в виде:

$$\sum X = 0, \quad \frac{\partial}{\partial \varphi}(rN_1) - N_2 R_1 \cos \varphi + R_1 \frac{\partial S}{\partial \theta} + rR_1 p_1 = 0, \quad (7.7,а)$$

$$\sum Y = 0, \quad R_1 \frac{\partial N_2}{\partial \theta} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi}(r^2 S) + rR_1 p_2 = 0, \quad (7.7,б)$$

$$\sum Z = 0, \quad \frac{N_1}{R_1} + \frac{N_2}{R_2} - p_3 = 0. \quad (7.7,в)$$

Точно так можно получить и геометрические уравнения в совокупности с физическими соотношениями:

$$\varepsilon_1 = \frac{r}{R_1} \frac{\partial u}{\partial \varphi} + \frac{v}{R_1} = \frac{1}{Eh} (N_1 - \nu N_2), \quad (7.8,а)$$

$$\varepsilon_2 = \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} + \frac{u}{r} \cos \varphi + \frac{w}{R_2} = \frac{1}{Eh} (N_2 - \nu N_1), \quad (7.8,б)$$

$$\gamma = \frac{r}{R_1} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{v}{r} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} = \frac{1}{Gh} S. \quad (7.8,в)$$

Очевидно, усилия N_1 , N_2 , S , как и перемещения u , v , w , являются функциями двух переменных φ , θ .

Интегрирование системы шести линейных дифференциальных уравнений (7.7), (7.8) безмоментной теории оболочек вращения начинается с решения системы трёх первых уравнений, поскольку задача определения усилий является, очевидно, статически определимой. После вычисления усилий переходят к интегрированию последних трёх уравнений. В результате чего находят и перемещения оболочки (см. рис. 7.2,б). Примеры расчёта оболочек на часто встречающиеся на практике виды нагрузок приводятся ниже.

7.4. Осесимметричные оболочки вращения

При действии нагрузки, симметричной относительно оси Oz , в уравнениях равновесия (7.7) производные по θ обращаются в нуль. Составляющая внешней нагрузки в широтном направлении также отсутствует ($p_2 = 0$). Если бы такая нагрузка действовала, то она приводила бы к возникновению скручивания оболочки, т.е. к появлению моментов H и сдвигающих сил S , что заведомо недопустимо. С учётом указанного допущения уравнение равновесия (7.7,б) удовлетворяется автоматически.

Два оставшихся уравнения несложно решить. Для этого из уравнения (7.7,в) необходимо выразить усилие N_2 и подставить его в (7.7,а). В результате выводят уравнение

$$\frac{\partial}{\partial \varphi} (rN_1) - N_2 R_1 \cos \varphi + rR_1 p_1 = 0.$$

Умножив последнее на $\sin \varphi$ и приняв во внимание (7.3), находят

$$\sin \varphi \frac{\partial}{\partial \varphi} (rN_1) - rN_1 \cos \varphi + rR_1 (p_1 \sin \varphi - p_3 \cos \varphi) = 0.$$

Подчёркнутые слагаемые можно привести к одному, воспользовавшись определением производной произведения $rN_1 \sin \varphi$, а именно:

$$\frac{\partial}{\partial \varphi}(rN_1 \sin \varphi) = \sin \varphi \frac{\partial}{\partial \varphi}(rN_1) - rN_1 \cos \varphi.$$

В итоге уравнение равновесия оболочки вращения

$$\frac{\partial}{\partial \varphi}(rN_1 \sin \varphi) + rR_1(p_1 \sin \varphi - p_3 \cos \varphi) = 0$$

без труда интегрируется в общем виде

$$rN_1 \sin \varphi = -\int_0^{\varphi} rR_1(p_1 \sin \varphi - p_3 \cos \varphi) d\varphi + c. \quad (7.9)$$

Постоянная интегрирования c , как всегда, определяется из граничного условия.

Вычислив усилие N_1 по (7.9), можно определить и другое – N_2 , воспользовавшись уравнением (7.7,в).

Для лучшего усвоения теории следует пояснить физический смысл интеграла (7.9). С этой целью достаточно умножить выражение (7.9) на 2π

$$2\pi \cdot rN_1 \sin \varphi = -2\pi \int_0^{\varphi} rR_1(p_1 \sin \varphi - p_3 \cos \varphi) d\varphi + 2\pi \cdot c \quad (*)$$

и заметить, что произведение $N_1 \sin \varphi$ определяет вертикальную составляющую меридионального усилия N_1 , действующего на уровне параллельного круга, соответствующего углу φ . Следовательно, величина $2\pi \cdot r \cdot N_1 \sin \varphi$ характеризует проекцию равнодействующей нормальных сил на уровне указанного круга (рис. 7.4).

В правой части выражения (*), после внесения под знак интеграла множителя 2π , можно установить, что величина

$$\int_0^{\varphi} 2\pi r R_1 d\varphi$$

равна площади элементарного кольца, соответствующего бесконечно малому углу φ . Величины $p_1 \sin \varphi$, $p_3 \cos \varphi$ представляют собой проекции сил p_1, p_3 на вертикаль. Следовательно, *подынтегральная функция* является вертикальной составляющей нагрузки, действующей на элементарное кольцо. Тогда *интеграл этой функции* определяет полную вертикальную нагрузку, приходящуюся на оболочку с части поверхности, расположенной выше параллели, на уровне которой вычисляется меридиональное усилие N_1 . Таким образом, выражение (7.9) можно считать условием равновесия рассматриваемой верхней части оболочки в виде $\sum Z = 0$. Это даёт возможность найти постоянную интегрирования c .

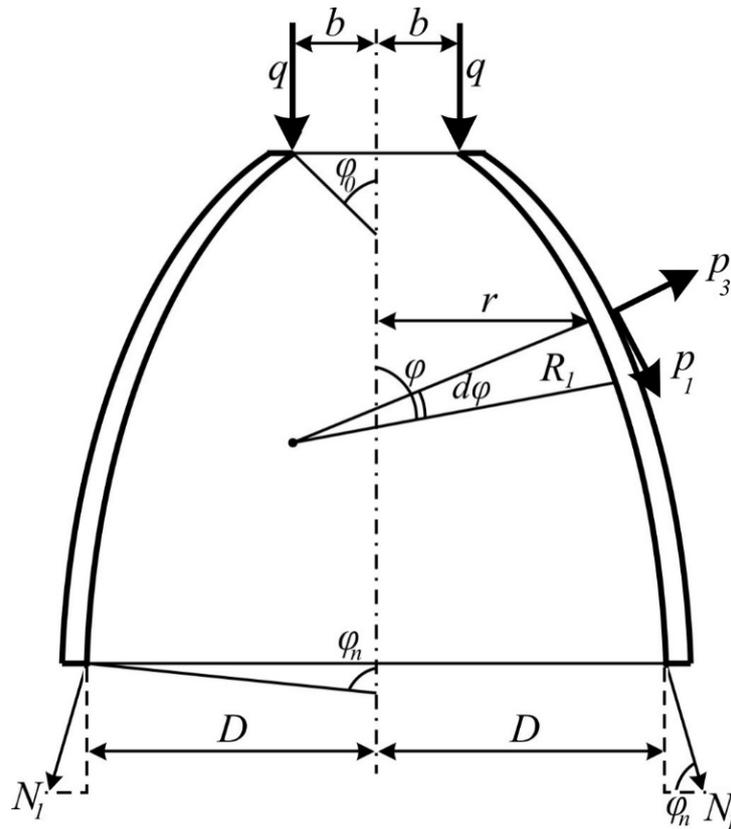


Рис. 7.4

Действительно, рассматривая, например, оболочку вращения, обладающую вырезом в верхней части на уровне угла φ_0 и нагруженную на этой кромке равномерно распределённой нагрузкой q , легко определить равнодействующую этой нагрузки, равную $2\pi b q$ (здесь b – радиус отверстия).

Составив условие равновесия рассматриваемой части

$$r N_1 \sin \varphi = - \int_{\varphi_0}^{\varphi} r R_1 (p_1 \sin \varphi - p_3 \cos \varphi) d\varphi + 2\pi b q,$$

без труда находят меридиональное усилие N_1 .

При отсутствии отверстия интеграл в правой части данного условия вычисляется в пределах от нуля до φ при значении $q = 0$; тогда $c = 0$.

Значение окружного усилия находится согласно (7.7,в) по формуле

$$N_2 = p_3 R_2 - N_1 \frac{R_2}{R_1}.$$

Пример 1. Расчёт сферического купола на действие собственного веса.

Радиусы кривизн сферической оболочки в обоих направлениях одинаковы:

$$R_1 = R_2 = R,$$

где R – радиус сферы (рис. 7.5,а). Текущий радиус r , входящий в уравнения состояния, равен

$$r = R \sin \varphi.$$

Проекции вектора внешней нагрузки, каковой является собственный вес q , на оси координат, находятся без труда:

$$p_1 = q \sin \varphi, \quad p_3 = -q \cos \varphi.$$

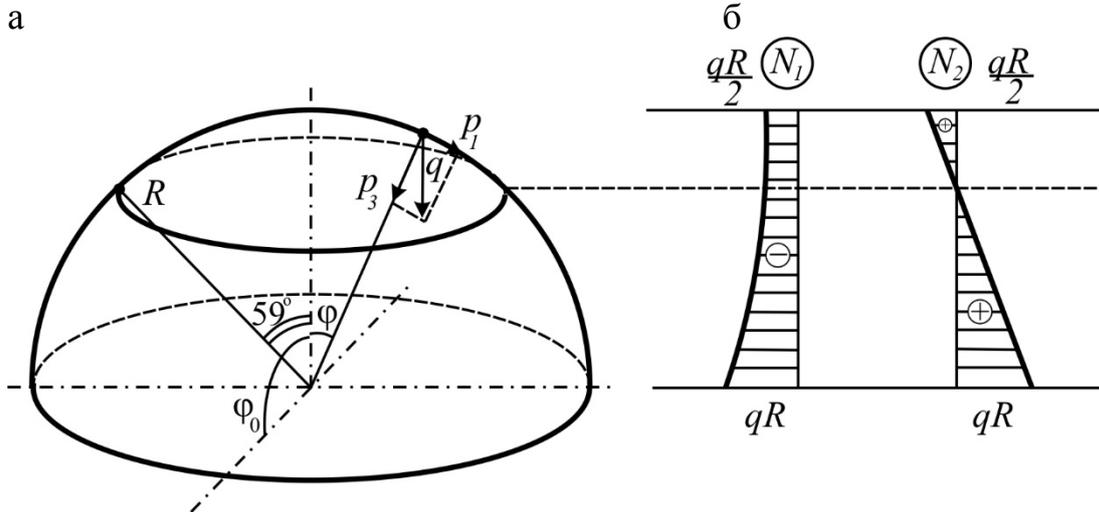


Рис. 7.5

С учётом этих данных, выражение (7.9) принимает вид

$$N_1 \sin \varphi \cdot R \sin \varphi = - \int_{\varphi_0}^{\varphi} R \sin \varphi \cdot R (q \sin^2 \varphi - q \cos^2 \varphi) d\varphi = - \int_{\varphi_0}^{\varphi} qR \sin \varphi \cdot R d\varphi,$$

откуда

$$N_1 = -qR \frac{\int_{\varphi_0}^{\varphi} \sin \varphi d\varphi}{\sin^2 \varphi} = -qR \frac{1 - \cos \varphi}{\cos^2 \varphi} = -qR \frac{1}{1 + \cos \varphi}.$$

Окружное усилие

$$N_2 = -q \cos \varphi \cdot R + qR \frac{1}{1 + \cos \varphi}.$$

В вершине купола ($\varphi = 0$) усилия находят по формуле

$$N_1 = N_2 = \frac{qR}{2}.$$

Характер изменения полученных усилий по высоте купола показан на рис. 7.5,б.

В отличие от усилия N_1 , значение N_2 меняет знак на уровне горизонтальной плоскости, расположенной на широте φ_n , положение которой легко

найти из уравнения $\cos \varphi_n - \frac{1}{1 + \cos \varphi_n} = 0$. Его решение даёт $\varphi_n = 59^\circ 19'$.

7.5. Примеры расчёта оболочек по безмоментной теории

А) Расчёт цилиндрических оболочек

Уравнения равновесия безмоментного состояния *цилиндрической* оболочки (рис. 7.6):

$$R \frac{\partial N_1}{\partial z} + \frac{\partial S}{\partial \theta} + R p_1 = 0, \quad (7.10,а)$$

$$\frac{\partial N_2}{\partial \theta} + R \frac{\partial S}{\partial x} + R p_2 = 0, \quad (7.10,б)$$

$$N_2 = R p_3 \quad (7.10,в)$$

несложно вывести из общих уравнений (7.2), зная параметры Ламэ для круговой цилиндрической оболочки

$$A = 1, \quad B = R = \text{const} \quad (7.11)$$

и радиусы кривизн $R_1 = \infty$, $R_2 = R$, где R – радиус оболочки. Равенства (7.11) вытекают из определения квадрата длины линейного элемента цилиндрической поверхности (рис. 7.6):

$$(ac)^2 = ds^2 = dx^2 + R^2 d\theta^2. \quad (7.12)$$

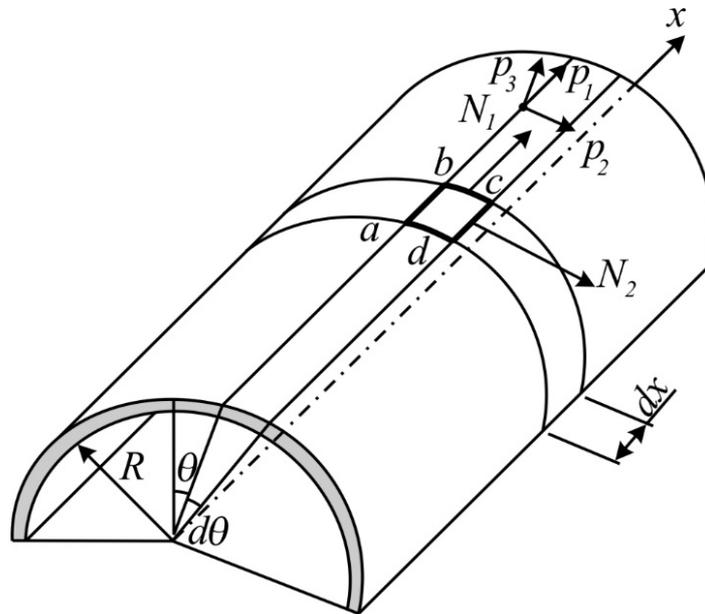


Рис. 7.6

Очевидно, окружное (кольцевое) усилие N_2 зависит только от нормального давления p_3 . Сдвигающее усилие определяется путём интегрирования (7.10,б):

$$S = -\int \left(p_2 + \frac{\partial p_3}{\partial \theta} \right) dx + C_1(\theta). \quad (7.13)$$

Подобным образом находят и усилие

$$N_1 = -\int \left(p_1 + \frac{1}{R} \frac{\partial S}{\partial \theta} \right) dx + C_2(\theta). \quad (7.14)$$

Геометрические уравнения для этого состояния оболочки выводят из соотношений (7.3) с учётом равенств (7.11), заменяя при этом α на x , а β на θ ; в сочетании с физическими зависимостями они принимают вид:

$$\varepsilon_1 = \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{Eh} (N_1 - \nu N_2), \quad (7.15,а)$$

$$\varepsilon_2 = \frac{1}{R} \frac{\partial v}{\partial \theta} + \frac{w}{R} = \frac{1}{Eh} (N_2 - \nu N_1), \quad (7.15,б)$$

$$\gamma = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{1}{R} \frac{\partial u}{\partial \theta} = \frac{1}{Gh} S. \quad (7.15,в)$$

Проекции вектора произвольной внешней нагрузки могут быть разложены в ряды Фурье:

$$p_{1i} = \sum_{i=0}^{\infty} p_{1i} \cos i\theta,$$

$$p_{2i} = \sum_{i=0}^{\infty} p_{2i} \sin i\theta,$$

$$p_{3i} = \sum_{i=0}^{\infty} p_{3i} \cos i\theta,$$

где p_{1i} , p_{2i} , p_{3i} – известные коэффициенты, зависящие только от x .

Далее достаточно найти решение задачи для одного из членов ряда, например n -го. Обладая им, несложно получить полное решение для всей совокупности членов ряда путём суммирования отдельных решений.

Из последнего условия $N_2 = R p_3$ системы уравнений (7.10) следует, что окружное усилие N_2 зависит только от внешнего давления, направленного по нормали к поверхности оболочки

$$N_2 = p_{3n} R \cos n\theta.$$

Дифференцируя это выражение по θ и подставляя производную в уравнение (7.10,б), находят сначала

$$\frac{\partial S}{\partial x} = (-p_{2n} + p_{3n}n) R \sin n\theta,$$

откуда

$$S = -\sin n\theta \int (p_{2n} - p_{3n}n) dx + C_1(\theta).$$

Вычислив производную S по θ и подставив её в выражение (7.14), можно определить усилие и вдоль образующей цилиндра:

$$N_1 = -\cos n\theta \int \left[p_{1n} - \frac{n}{R} \int (p_{2n} - p_{3n}n) dx \right] dx - \frac{dC_1(\theta)}{d\theta} x + C_2(\theta).$$

При отсутствии нагрузки вдоль образующей, т.е. при $p_1 = 0$ и постоянных (но не равных) значениях $p_2 = \text{const}$, $p_3 = \text{const}$, выражения для усилий приобретают замкнутую форму. Для вывода формул величины $C_1(\theta)$, $C_2(\theta)$ можно принять периодическими и полагать

$$C_1(\theta) = D_1 \sin n\theta, \quad C_2(\theta) = D_2 \cos n\theta,$$

где D_1, D_2 - произвольные постоянные. В таком случае усилия равны:

$$N_1 = \left\{ \frac{n}{R} \left[(p_2 - p_3 n) \frac{x^2}{2} - D_1 x \right] + D_2 \right\} \cos n\theta,$$

$$N_2 = p_3 R \cos n\theta,$$

$$S = - \left[(p_2 - p_3 n) x - D_1 \right] \sin n\theta.$$

Постоянные интегрирования D_1, D_2 , как и функции $C_1(\theta), C_2(\theta)$, находятся из граничных условий.

Б) Расчёт сферических оболочек на действие ветровых нагрузок

Действие ветровой нагрузки в первом приближении достаточно охарактеризовать единственной проекцией вектора внешней нагрузки, направленной по нормали к поверхности

$$p_3 = p_{3i} \cos i\theta \quad (i = 1, 2, \dots, n), \quad (7.16)$$

где p_{3i} - функция распределения нагрузки, зависящая от координаты x в цилиндрической системе координат или от φ - в сферической.

Следует обратить внимание на то, что данная функция, характеризующая нагрузку, при $i = 1$ является неуравновешенной (рис. 7.7,а), в то время как при иных (целых) коэффициентах она самоуравновешена (рис. 7.7,б).

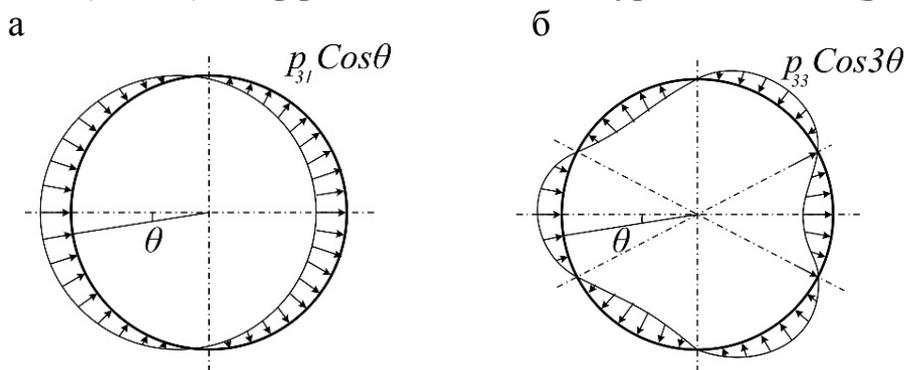


Рис. 7.7

В соответствии с принятым распределением нагрузки следует ожидать, что и усилия N_1, N_2, S будут функциями только одной переменной - x или φ :

$$N_1 = N_{1i} \cos i\theta,$$

$$N_2 = N_{2i} \cos i\theta,$$

$$S = S_i \sin i\theta.$$

Подставив эти усилия в условия равновесия (7.8):

$$\frac{\partial}{\partial \phi} (rN_{1i} \cos i\theta) - N_{2i} R_1 \cos \phi \cos i\theta + R_1 i S_i \cos i\theta \frac{\partial S}{\partial \theta} = 0,$$

$$-R_1 i N_{2i} \sin i\theta + R_1 \cos \phi \cdot S_i \sin i\theta + \frac{\partial}{\partial \phi} (rS_i) \sin i\theta = 0,$$

$$\frac{N_{1i}}{R_1} \cos i\theta + \frac{N_{2i}}{R_2} \cos i\theta = p_{3i} \cos i\theta$$

и сократив затем первое и третье условия на $\cos i\theta$, а второе – на $\sin i\theta$, приходят к уравнениям, не содержащим переменной θ .

$$\frac{\partial}{\partial \phi} (rN_{1i}) - N_{2i} R_1 \cos \phi + R_1 i S_i = 0, \quad (7.17, \text{а})$$

$$-R_1 i N_{2i} + R_1 \cos \phi \cdot S_i + \frac{\partial}{\partial \phi} (rS_i) = 0, \quad (7.17, \text{б})$$

$$\frac{N_{1i}}{R_1} + \frac{N_{2i}}{R_2} = p_{3i}(\phi). \quad (7.17, \text{в})$$

А это означает, что рассматриваемые усилия не зависят от координаты θ .

Известно, что система трёх уравнений состояния (7.17) произвольной оболочки вращения имеет общее решение, основу которого составляет некоторая «функция напряжений».

Ограничиваясь решением частной задачи, имеющей практическое значение, а именно случаем ветровой нагрузки $p_3 = \text{const}$, направленной по нормали к сферической поверхности, усилия в оболочке можно определить, не прибегая к функции напряжений.

Действительно, из последнего уравнения системы (7.17) легко выразить усилие

$$N_{2i} = pR - N_{1i}. \quad (7.18)$$

Подставив его в два других уравнения системы и поделив на $R \sin \phi$, можно установить систему:

$$\frac{dN_{1i}}{d\phi} + 2N_{1i} \text{ctg} \phi + S_i \frac{i}{\sin \phi} = pR \text{ctg} \phi,$$

$$\frac{dS_i}{d\phi} + 2S_i \text{ctg} \phi + N_{1i} \frac{i}{\sin \phi} = pR \frac{i}{\sin \phi}.$$

Структура данной системы такова, что при сложении уравнений

$$\frac{d(N_{1i} + S_i)}{d\phi} + 2(N_{1i} + S_i) \text{ctg} \phi + (N_{1i} + S_i) \frac{i}{\sin \phi} = pR \left(\text{ctg} \phi + \frac{i}{\sin \phi} \right),$$

а затем и вычитании

$$\frac{d(N_{1i} - S_i)}{d\phi} + 2(N_{1i} - S_i) \text{ctg} \phi + (N_{1i} - S_i) \frac{i}{\sin \phi} = pR \left(\text{ctg} \phi - \frac{i}{\sin \phi} \right)$$

она распадается на два независимых дифференциальных уравнения первого порядка. Если обозначить:

$$F = N_{li} + S_i, \quad (7.19,а)$$

$$G = N_{li} - S_i, \quad (7.19,б)$$

то уравнения предстанут в компактной форме:

$$\frac{dF}{d\varphi} + \left(2\operatorname{ctg}\varphi + \frac{i}{\sin\varphi}\right)F = pR \left(\operatorname{ctg}\varphi + \frac{i}{\sin\varphi} \right), \quad (7.20,а)$$

$$\frac{dG}{d\varphi} + \left(2\operatorname{ctg}\varphi - \frac{i}{\sin\varphi}\right)G = pR \left(\operatorname{ctg}\varphi - \frac{i}{\sin\varphi} \right). \quad (7.20,б)$$

Для интегрирования любого из них применяется следующий подход. Задавись, например, решением первого уравнения в виде произведения двух функций

$$F = U(\varphi) \cdot V(\varphi) \quad (7.21)$$

и определив производную этого произведения

$$\frac{dF}{d\varphi} = U(\varphi) \frac{dV(\varphi)}{d\varphi} + V(\varphi) \frac{dU(\varphi)}{d\varphi},$$

само уравнение можно будет записать в виде

$$UV \left(2\operatorname{ctg}\varphi + \frac{i}{\sin\varphi} \right) + U \frac{dV}{d\varphi} + V \frac{dU}{d\varphi} = Rp \left(\operatorname{ctg}\varphi + \frac{i}{\sin\varphi} \right).$$

Данное уравнение удовлетворяется тождественно, если функции U , V связаны соотношениями:

$$\frac{dV}{d\varphi} = -V \left(2\operatorname{ctg}\varphi + \frac{i}{\sin\varphi} \right),$$

$$V \frac{dU}{d\varphi} = Rp \left(\operatorname{ctg}\varphi + \frac{i}{\sin\varphi} \right).$$

Интеграл первого из этих уравнений имеет аналитический вид

$$V = -e^{\int \left(2\operatorname{ctg}\varphi + \frac{i}{\sin\varphi} \right) d\varphi} = \sin^2 \varphi \cdot \operatorname{tg}^i \left(\frac{\varphi}{2} \right),$$

в чём легко убедиться путём дифференцирования данного выражения. Второе уравнение интегрируется по аналогии с первым и также может быть записано в замкнутой форме

$$U = \left[R \int \frac{p}{V} \left(\operatorname{ctg}\varphi + \frac{i}{\sin\varphi} \right) d\varphi + C_1 \right].$$

Таким образом, в соответствии с (7.21) решение первого уравнения системы (7.20) принимает вид

$$F = \left[R \int p \left(\operatorname{ctg} \varphi + \frac{i}{\sin \varphi} \right) \times \sin^2 \varphi \cdot \operatorname{tg}^i \left(\frac{\varphi}{2} \right) d\varphi + C_1 \right]^{\operatorname{ctg}^i \left(\frac{\varphi}{2} \right) / \sin^2 \varphi}.$$

По аналогии с ним находят и решение второго уравнения системы.

$$G = \left[R \int p \left(\operatorname{ctg} \varphi - \frac{i}{\sin \varphi} \right) \times \sin^2 \varphi \cdot \operatorname{ctg}^i \left(\frac{\varphi}{2} \right) d\varphi + C_2 \right]^{\sin^2 \varphi \cdot \operatorname{tg}^i \left(\frac{\varphi}{2} \right)}.$$

Усилия в оболочке N_{1i} , S_i определяют на основе полученных выражений согласно (7.19).

8. КРУГОВЫЕ ЦИЛИНДРИЧЕСКИЕ ОБОЛОЧКИ

Цилиндрические оболочки применяются в различных областях строительства и машиностроения (покрытия промышленных предприятий, вокзалов, рынков, полые сваи фундаментов, трубы газопроводов, резервуары для воды, нефти и других жидкостей, корпуса ракет, тоннели метро и пр.). В разрезе они могут иметь круговое, эллиптическое и иное очертание (рис. 8.1).

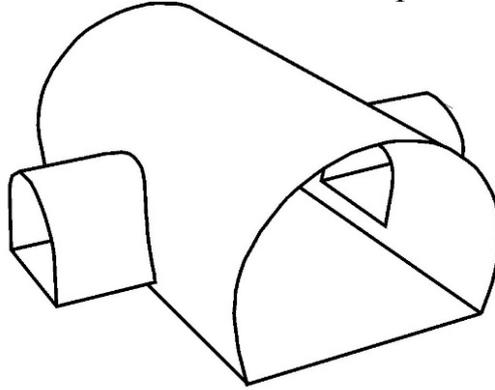


Рис. 8.1

8.1. Уравнения напряжённо-деформированного состояния цилиндрических оболочек

Срединная поверхность цилиндрической оболочки формируется путём вращения образующей (прямой) вокруг оси (рис. 8.2).

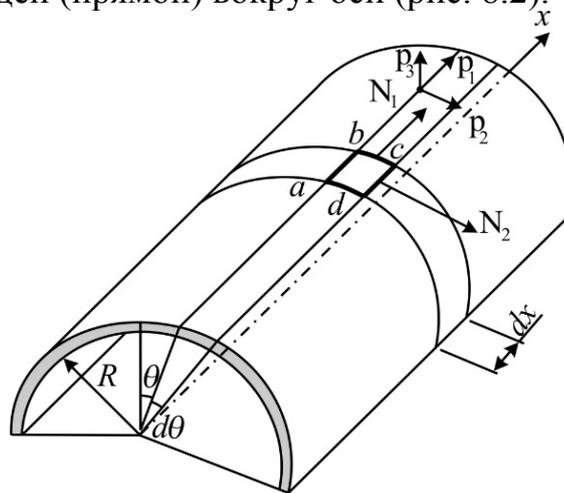


Рис. 8.2

Параметры Ламэ для круговой цилиндрической оболочки находят по формулам (5.13):

$$A = \sqrt{1 + \left(\frac{dr}{dz}\right)^2}, \quad B = r \quad \Rightarrow \quad A = 1, \quad B = R = \text{const.} \quad (8.1)$$

Очевидно, главными радиусами кривизн срединной поверхности являются величины $R_1 = \infty$, $R_2 = R$, где R – радиус оболочки.

Уравнения равновесия оболочки могут быть выведены из общих условий равновесия оболочек (6.4), если принять в них значения параметров Ламэ по формуле (8.1). В цилиндрической системе координат уравнения записываются в следующем виде:

$$\begin{aligned}
 R \frac{\partial N_1}{\partial x} + \frac{\partial T}{\partial \theta} + R p_1 &= 0, \\
 R \frac{\partial T}{\partial x} + \frac{\partial N_2}{\partial \theta} + Q_2 + R p_2 &= 0, \\
 R \frac{\partial Q_1}{\partial x} + \frac{\partial Q_2}{\partial \theta} - N_2 + R p_3 &= 0, \\
 R \frac{\partial H_{21}}{\partial x} + \frac{\partial M_2}{\partial \theta} - R Q_2 &= 0, \\
 \frac{\partial H_{12}}{\partial x} + R \frac{\partial M_1}{\partial \theta} - R Q_1 &= 0.
 \end{aligned}
 \tag{8.2,а}$$

На рис. 8.3 показан элемент оболочки, находящийся в равновесии под действием внутренних усилий, присутствующих в данных уравнениях.

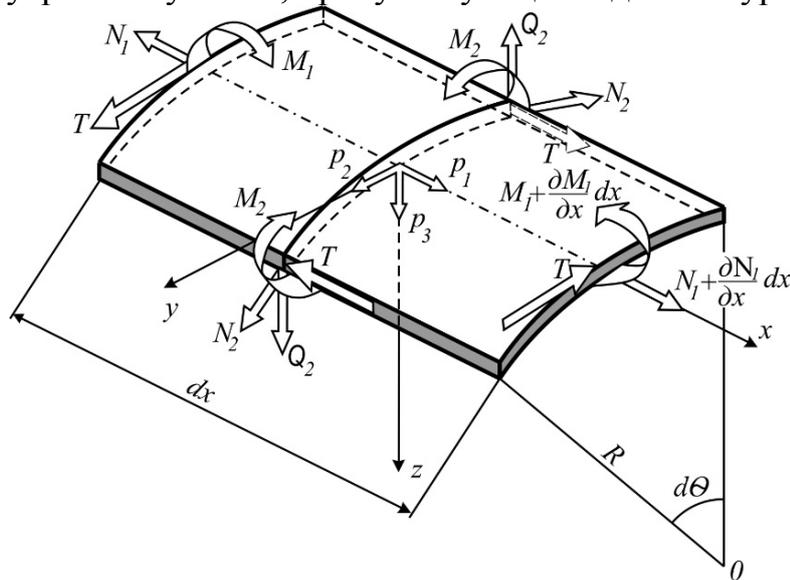


Рис. 8.3

Система пяти уравнений легко сводится к эквивалентной системе трёх уравнений, для чего достаточно из четвёртого и пятого условий выразить величины поперечных усилий:

$$\begin{aligned}
 Q_2 &= \frac{\partial H_{21}}{\partial x} + \frac{1}{R} \frac{\partial M_2}{\partial \theta}, \\
 Q_1 &= \frac{1}{R} \frac{\partial H_{12}}{\partial x} + \frac{\partial M_1}{\partial \theta}
 \end{aligned}$$

и подставить их во второе и третье условия (8.2,а). В итоге преобразований приходят к более обозримой системе:

$$\begin{aligned} R \frac{\partial N_1}{\partial x} + \frac{\partial T}{\partial \theta} + R p_1 &= 0, \\ R \frac{\partial T}{\partial x} + \frac{\partial N_2}{\partial \theta} + Q_2 + R p_2 &= 0, \\ R \frac{\partial Q_1}{\partial x} + \frac{\partial Q_2}{\partial \theta} - N_2 + R p_3 &= 0. \end{aligned} \quad (8.2,б)$$

Деформации элемента срединной поверхности можно установить на основе общих геометрических зависимостей, выведенных в подразд. 5.7:

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 &= \frac{\partial u}{\partial x}, \\ \varepsilon_2 &= \frac{1}{R} \frac{\partial v}{\partial \theta} + \frac{w}{R}, \\ \gamma &= \frac{dv}{dx} + \frac{1}{R} \frac{du}{d\theta}, \\ \kappa_1 &= -\frac{d^2 w}{dx^2}, \\ \kappa_2 &= \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{v}{R} - \frac{1}{R} \frac{\partial w}{\partial \theta} \right), \\ \chi &= \frac{1}{R} \left(-\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial \theta} + \frac{1}{2} \frac{\partial v}{\partial \theta} \right), \\ \psi &= \frac{1}{R} \left(v - \frac{\partial w}{\partial \theta} \right), \end{aligned} \quad (8.3)$$

где ψ – угол поворота касательной к поперечному сечению оболочки при деформации; формула для ψ получена на основе второй формулы (5.25).

Физические соотношения могут быть получены из общих формул (6.10) в результате подстановки выражений указанных выше деформаций:

$$\begin{aligned} N_1 &= \frac{Eh}{1-\nu^2} \left[\frac{\partial u}{\partial x} + \nu \left(\frac{1}{R} \frac{\partial v}{\partial \theta} + \frac{w}{R} \right) \right], \\ N_2 &= \frac{Eh}{1-\nu^2} \left(\frac{1}{R} \frac{\partial v}{\partial \theta} + \frac{w}{R} + \nu \frac{\partial u}{\partial x} \right), \\ T = T_{12} = T_{21} &= \frac{Eh}{2(1+\nu)} \left(\frac{1}{R} \frac{\partial u}{\partial \theta} + \frac{\partial v}{\partial x} \right), \end{aligned} \quad (8.4)$$

$$M_1 = -D \left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\nu}{R^2} \left(-\frac{\partial v}{\partial \theta} + \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \right) \right],$$

$$M_2 = -D \left[\frac{\nu}{R^2} \left(-\frac{\partial v}{\partial \theta} + \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \right) + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right].$$

Если воспользоваться данными выражениями и подставить их в условия равновесия (8.2,б), то последние могут быть представлены в перемещениях:

$$\begin{aligned} \Lambda_{11}u + \Lambda_{12}v + \Lambda_{13}w + R^2q_1 &= 0, \\ \Lambda_{21}u + \Lambda_{22}v + \Lambda_{23}w + R^2q_2 &= 0, \\ \Lambda_{31}u + \Lambda_{32}v + \Lambda_{33}w + R^2q_3 &= 0. \end{aligned} \quad (8.5)$$

$$\begin{aligned} \text{Здесь } \Lambda_{11} &= \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} + \frac{1-\nu}{2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2}; \quad \Lambda_{12} = \frac{1+\nu}{2} \frac{\partial^2}{\partial \alpha \partial \theta}; \quad \Lambda_{13} = \nu \frac{\partial}{\partial \alpha}; \\ \Lambda_{21} &= \Lambda_{12}, \quad \Lambda_{22} = \frac{1-\nu}{2} \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} + \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + a^2 \left[2(1-\nu) \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} + \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right], \\ \Lambda_{23} &= \frac{\partial}{\partial \theta} - a^2 \left[(2-\nu) \frac{\partial^3}{\partial \alpha^2 \partial \theta} + \frac{\partial^3}{\partial \theta^3} \right], \\ \Lambda_{31} &= \Lambda_{13}, \quad \Lambda_{32} = \Lambda_{23}, \quad \Lambda_{33} = 1 + a^2 \nabla^2 \nabla^2 \end{aligned}$$

– дифференциальные операторы, в которых постоянные величины $a = \frac{\delta^2}{12R^2}$

и $b = \frac{1-\nu^2}{E\delta^2}$ характеризуют геометрические и физические параметры оболочки; $q_1 = bp_1$, $q_2 = bp_2$, $q_3 = bp_3$ – параметры внешней нагрузки.

Интегрирование полученной системы трёх дифференциальных уравнений (8.5) при некоторых допущениях можно выполнить в аналитической форме. В подразд. 10.2 рассматривается расчёт оболочек по т.н. полумоментной теории В.З. Власова, в которой пренебрегают влиянием изгибающих моментов в направлении оси x . В разд. 11 выводится разрешающее уравнение общей (момента) теории цилиндрических оболочек, в котором учитывается взаимовлияние всех без исключения внутренних силовых факторов. Небольшие упрощения, обусловленные структурой уравнения, позволяют найти решения ряда практических задач по расчёту коротких оболочек в аналитическом виде.

При действии симметричных нагрузок также можно найти аналитическое решение системы уравнений, которые сводятся к одному, но более высокого порядка (см. подразд. 8.2).

8.2. Осесимметричное нагружение оболочки

Примером данного нагружения является гидростатическое действие жидкости на стенки вертикального резервуара (рис. 8.4,а).

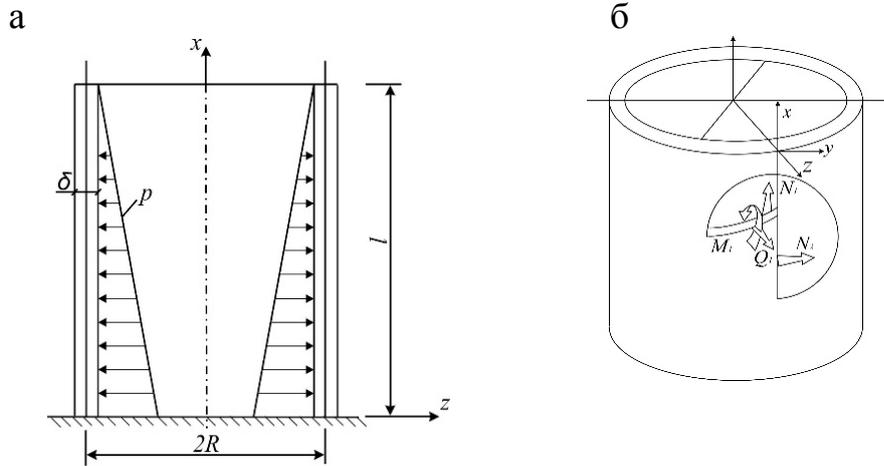


Рис. 8.4

Вследствие симметрии внешней нагрузки все усилия будут постоянны по окружности; при этом сдвигающие силы $T = T_{12} = T_{21}$ и поперечная сила Q_2 , а также крутящие моменты H будут равны нулю. Оставшиеся усилия, показанные на рис. 8.4,б, в сочетании с нагрузкой $p_3 = p$ образуют равновесную систему:

$$\begin{aligned} \frac{\partial N_1}{\partial x} &= 0, \\ \frac{\partial Q_1}{\partial x} - \frac{N_2}{R} &= -p_3, \\ \frac{\partial M_1}{\partial x} - Q_1 &= 0. \end{aligned} \quad (8.2,в)$$

Она получена из условий равновесия элемента оболочки в виде сумм проекций на оси $0x_1$, $0z_1$ и условия в виде $\sum M_{y_1} = 0$.

Остальные уравнения равновесия удовлетворяются тождественно.

Выполнив дифференцирование последнего выражения системы (8.2,в) и приняв во внимание предыдущее условие, легко установить, что

$$\frac{\partial^2 M_1}{\partial x^2} - \frac{N_2}{R} = -p_3.$$

С учётом физических соотношений

$$\begin{aligned} N_2 &= \frac{E\delta}{R} w, \\ M_1 &= -D \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \end{aligned} \quad (8.6)$$

вытекающих из общих зависимостей (8.4) для цилиндрической оболочки, после небольших преобразований можно вывести уравнение деформированного состояния оболочки при осесимметричном нагружении в виде

$$D \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + E\delta \frac{w}{R^2} = p_3. \quad (8.7)$$

8.3. Напряженно-деформированное состояние вертикальной цилиндрической оболочки при гидростатическом нагружении

Решение линейного неоднородного дифференциального уравнения четвёртого порядка (8.7) при действии осесимметричной гидростатической нагрузки, которая распределена по линейному закону

$$p_3 = \gamma(l - x) \quad (8.8)$$

может быть осуществлено различными методами, в том числе и численными.

В этом подразделе рассматривается аналитический способ интегрирования данного уравнения. В разд. 9 приводится процедура численного решения рассматриваемой задачи с помощью ПЭВМ.

Следует заметить, что уравнение вида (8.7) встречается в сопротивлении материалов при изучении поведения балок на упругом основании. Аналитическое решение неоднородного дифференциального уравнения состоит из двух частей:

А) Интеграл w_0 однородного дифференциального уравнения имеет вид

$$D \frac{\partial^4 w_0}{\partial x^4} + E\delta \frac{w_0}{R^2} = 0; \quad (8.9)$$

для удобства интегрирования данное уравнение приводится к стандартной форме

$$\frac{\partial^4 w_0}{\partial x^4} + 4k^4 w_0 = 0,$$

где

$$k = \sqrt{\frac{1}{E\delta}} \sqrt[4]{3(1 - \nu^2)}$$

– физико-геометрический параметр оболочки.

Решение однородного уравнения ищется в виде

$$w_0 = e^{kx}.$$

В соответствии с ходом интегрирования составляется характеристическое уравнение

$$n^4 + 4k^4 = 0.$$

Корни этого уравнения равны:

$$n_{1,2} = (1 \pm i)k, \quad n_{3,4} = -(1 \pm i)k.$$

Этим корням отвечают следующие линейно независимые функции:

$$\left[e^{kx} (\cos kx - \sin kx) + e^{kx} (\cos kx + \sin kx) \right],$$

являющиеся решениями однородного уравнения. Их совокупность может быть представлена как одна функция

$$w_0 = e^{kx} (C_1 \cos kx + C_2 \sin kx) + e^{-kx} (C_3 \cos kx + C_4 \sin kx), \quad (8.10)$$

удовлетворяющая уравнению и содержащая к тому же произвольные постоянные C_1, C_2, C_3, C_4 . График данной функции представлен двумя парами асимптотически убывающих кривых, показанных на рис. 8.5. Скорость приближения к нулю может быть оценена с помощью отношения амплитуд

$$\frac{w_{n+1}}{w_n} = -\frac{e^{k(z+\lambda)}}{e^{kz}} = -e^{k\lambda} = -e^\pi \approx 23,$$

взятых через отрезок, равный полуволне синусоиды $\sin kx = \sin \pi$, т.е. через $k = \pi / \lambda$. Следовательно, функция состоит из двух частей: первой с коэффициентом e^{kx} , быстро убывающей по мере удаления от края $x = l$, и второй, убывающей от противоположного конца с коэффициентом e^{-kx} .

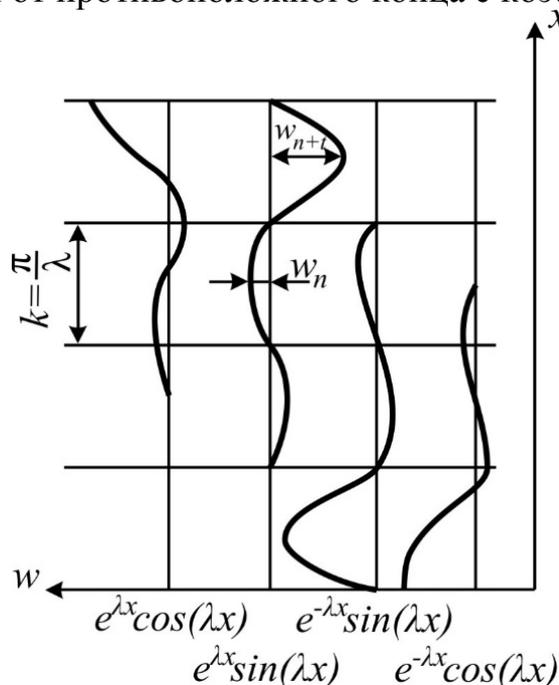


Рис. 8.5

На этом основании при постановке граничных условий достаточно длинной оболочки можно ограничиться составлением двух независимых уравнений для определения двух постоянных C_1, C_2 , вместо системы четырёх – в общем случае, когда влиянием краёв друг на друга пренебречь нельзя (см. ниже примеры расчёта).

Б) вторая половина решения, соответствующая правой части уравнения (8.7) при $p_3 = \text{const}$, имеет вид $\tilde{w} = \frac{\gamma R^2}{E\delta}$. Убедиться в этом не составляет труда. Даже когда нагрузка меняется линейно – $p_3 = \gamma(l-x)$, как в рассматриваемом случае гидростатического давления, легко убедиться, что решение ненамного сложнее, а именно:

$$\tilde{w} = \frac{\gamma R^2}{E\delta}(l-x). \quad (8.11)$$

Причем частное решение может быть представлено в общем случае полиномом степени не выше третьей.

Таким образом, общий интеграл неоднородного дифференциального уравнения (7.7) имеет вид

$$w = w_0 + \tilde{w} = e^{kx} (C_1 e^{ikx} + C_2 e^{-ikx}) + e^{-kx} (C_3 e^{ikx} + C_4 e^{-ikx}) + \frac{\gamma R^2}{E\delta}(l-x).$$

Изгибающие моменты в соответствии с полученным решением равны

$$\begin{aligned} M_1 &= -D \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = \\ &= -2Dk^2 \left[e^{kx} (C_2 \cos kx - C_1 \sin kx) + e^{-kx} (-C_4 \cos kx + C_3 \sin kx) \right]. \end{aligned} \quad (8.12, a)$$

На этом основании поперечные силы находятся по формуле

$$\begin{aligned} Q_1 &= \frac{dM_1}{dx} = -2Dk^3 \left\{ \left[e^{kx} (C_2 - C_1) \cos kx - (C_1 + C_2) \sin kx \right] + \right. \\ &\quad \left. + \left[e^{-kx} (C_4 + C_3) \cos kx + (-C_3 + C_4) \sin kx \right] \right\}, \end{aligned}$$

продольные усилия в окружном направлении – согласно

$$\begin{aligned} N_2 &= \gamma(l-x)R - \frac{E\delta^2}{R} \times \\ &\times \left[e^{kx} (C_2 \cos kx - C_1 \sin kx) + e^{-kx} (-C_4 \cos kx + C_3 \sin kx) \right]. \end{aligned} \quad (8.12, б)$$

Произвольные постоянные C_1, C_2, C_4, C_3 находят их четырёх граничных условий, причём на каждом крае цилиндра ставят по два условия. В

рассматриваемом случае постоянные C_1, C_2, C_4, C_3 определяются из следующих условий:

$$\begin{aligned} z=0, \quad w=0, \quad \frac{\partial w}{\partial x} &= 0; \\ z=l, \quad M_1 = -D \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} &= 0, \quad Q_1 = -D \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} = 0. \end{aligned} \quad (8.13)$$

На основе данных условий с помощью выражений для перемещения (8.9) и усилий M_1, Q_1 можно составить четыре уравнения, из которых находятся постоянные интегрирования. В частности, из краевого условия

$$w(0) = \frac{\gamma R^2}{E\delta} l + 1 \cdot (C_3 \cdot 1) = 0$$

легко найти $C_3 = -\frac{\gamma R^2}{E\delta} l$, а условие

$$\frac{\partial w(0)}{\partial x} = \frac{\gamma R^2}{E\delta} + k(-C_3 + C_4)$$

приводит к постоянной

$$C_4 = \frac{\gamma R^2}{E\delta k} - \frac{\gamma R^2}{E\delta} l = \frac{\gamma R^2}{E\delta} \left(\frac{1}{\beta} - l \right).$$

Аналогично, два оставшихся условия позволяют установить C_1, C_2 .

В итоге оказывается, что прогибы оболочки изменяются по высоте резервуара по закону

$$w = \frac{\gamma R^2}{E\delta} \left\{ l - z - e^{kx} l \left[\cos kx + \left(\frac{1}{\beta} - l \right) \sin kx \right] \right\}. \quad (8.14)$$

На основании данного решения изгибающие моменты и продольные усилия в окружном направлении следует вычислять по формулам:

$$\begin{aligned} M_1 = -D \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = -2Dk^2 \left[e^{kx} (C_2 \cos kx - C_1 \sin kx) + \right. \\ \left. + e^{kx} (-C_4 \cos kx + C_3 \sin kx) \right], \end{aligned} \quad (8.15)$$

$$\begin{aligned} N_2 = \gamma(l-x)R - \frac{E\delta^2}{R} \left[e^{kx} (C_2 \cos kx - C_1 \sin kx) + \right. \\ \left. + e^{kx} (-C_4 \cos kx + C_3 \sin kx) \right]. \end{aligned} \quad (8.16)$$

Всплеск величины изгибающего момента вблизи опоры характеризует т.н. *краевой эффект*, возникающий в оболочках при наличии заделки в основании.

8.4. Анализ напряжений в оболочке при гидростатическом нагружении

Распределение внутренних усилий в оболочке находят по формулам (8.15)-(8.16). Наибольшие значения нормальных напряжений в продольном и окружном направлениях

$$\begin{aligned}\sigma_z &= \pm \frac{6M_1}{\delta^2}, \\ \sigma_\theta &= \frac{N_2}{\delta} \pm \frac{6M_1}{\delta^2}\end{aligned}\tag{8.17}$$

возникают на внутренней и наружной поверхностях оболочки. В свою очередь, максимальная величина изгибающего момента в сечении стенки резервуара вблизи днища равна

$$M_1 = \frac{\gamma R l \delta}{2\sqrt{3}} \left(1 - \frac{1}{kl}\right),\tag{8.18,а}$$

а растягивающего усилия –

$$N_2 = \frac{\gamma R l \delta}{2\sqrt{3}} \left(1 - \frac{1}{kl}\right).\tag{8.18,б}$$

Графики распределения усилий M_1 , N_2 по высоте оболочки, геометрические размеры которой указаны на рис. 8.6, получены при следующих механических характеристиках материала оболочки (железобетона): $E = 200$ ГПа, $\nu = 0$ *. Объёмный вес воды в резервуаре $\gamma = 1000$ кг/м³.

$$\begin{aligned}k &= \sqrt{\frac{1}{R\delta}} \sqrt[4]{3(1-\nu^2)} = \sqrt{\frac{1}{200 \cdot 12}} \sqrt[4]{3} = \frac{1,316}{48,98} = \frac{1}{37,22}, \\ \lambda &= k\pi = 37,22 \cdot 3,14 = 116,87 \text{ см}.\end{aligned}$$

Пунктиром на рис. 8.6 показан график изменения усилия N_2 в случае отсутствия защемления оболочки в основании. При этом моменты M_1 вообще не возникают. Отсюда следует вывод о том, что в заделке у опоры давление воды воспринимается за счёт появления моментов и поперечных сил.

Для коротких резервуаров, когда их высота соизмерима с длиной полуволны λ , влиянием краёв друг на друга пренебрегать нельзя. Тогда постоянные находят из четырёх уравнений.

* В теории расчёта железобетонных оболочек при выводе общих соотношений коэффициент Пуассона ν обычно принимают равным нулю.

В разд. 9, посвящённом численному методу анализа НДС оболочки, дополнительно дана оценка влияния изменения по высоте толщины оболочки на прогибы и усилия при различных внешних нагрузках.

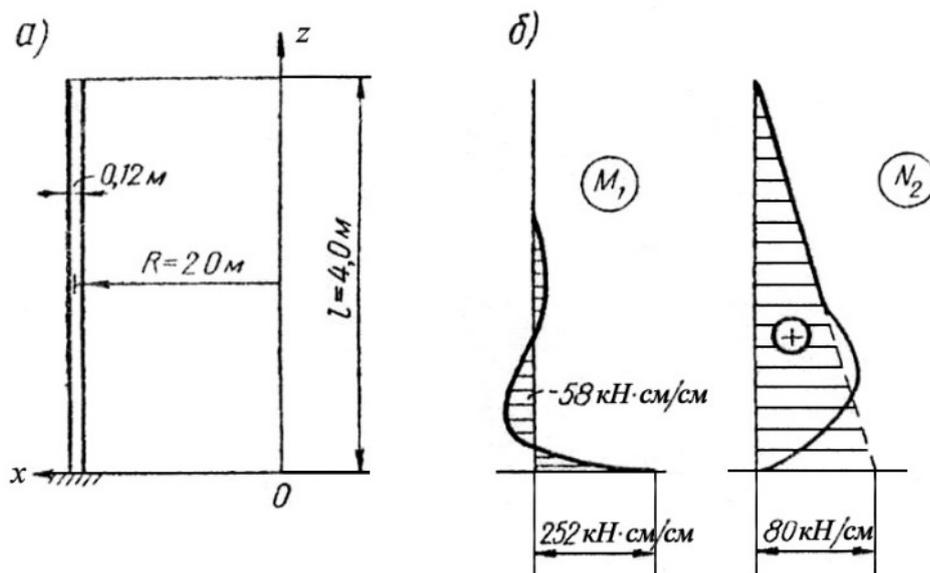


Рис. 8.6

8.5. Примеры расчёта цилиндрических оболочек

Пример 1. *Расчёт цилиндрической части корпуса батискафа при всестороннем равномерном внешнем давлении*

В рассматриваемом случае внешнего всестороннего давления на цилиндрическую оболочку корпуса батискафа, включая и крышки на торцах, вследствие круговой симметрии тела оболочки и приложенной нагрузки относительно оси цилиндра (рис. 8.7) напряжённо-деформированное состояние оболочки, как и при действии гидростатического давления, характеризуется отсутствием поперечных сил и крутящих моментов в окружном направлении.

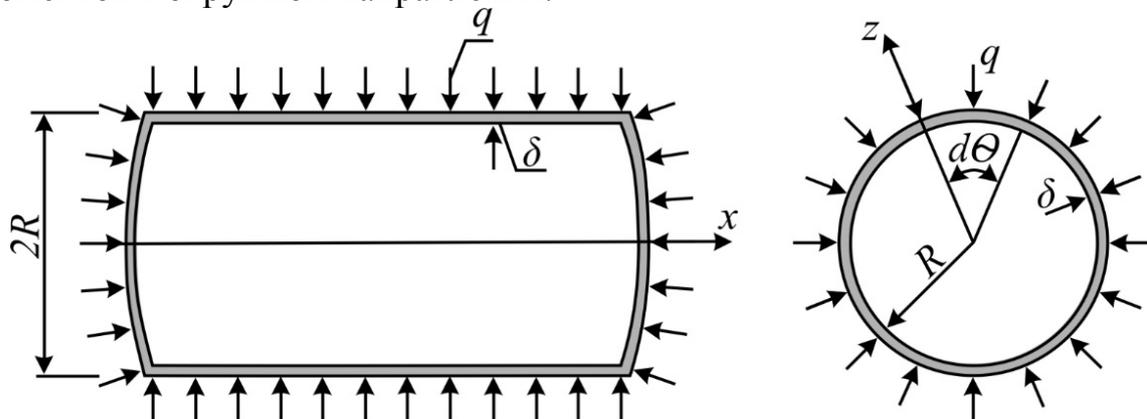


Рис. 8.7

Поскольку внешнее давление q нормально к срединной поверхности оболочки, то и сдвигающие усилия равны нулю. Таким образом, $Q_y = H_{xy} = H_{yx} = T_{xy} = T_{yx} = 0$. Очевидно, что продольные силы N_y и изгибающие моменты M_y в окружном направлении постоянны (рис. 8.8).

Для остальных внутренних усилий должны быть сохранены условия равновесия (8.2,а), т.е.

$$\begin{aligned} \frac{\partial N_x}{\partial x} &= 0, \\ \frac{\partial Q_x}{\partial x} + N_y - Rq &= 0, \\ \frac{\partial M_x}{\partial x} - Q_x &= 0. \end{aligned} \quad (8.2,г)$$

В данной записи прежние цифровые индексы в обозначениях усилий заменены на буквенные, и в дальнейшем приняты следующие обозначения:

$$N_x = N_1, \quad Q_x = Q_1, \quad N_y = N_2, \quad M_x = M_1.$$

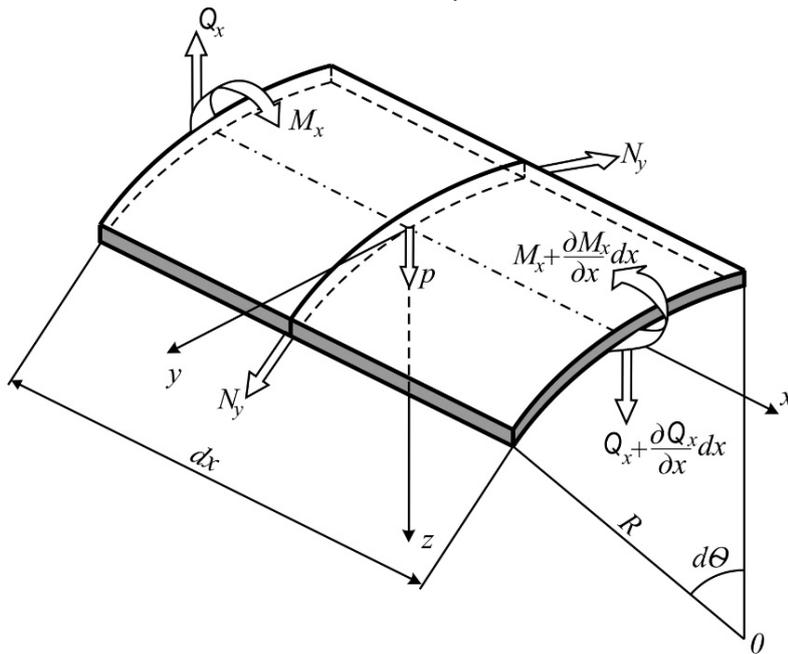


Рис. 8.8

Очевидно, что и продольные силы N_x также постоянны. Это вытекает из первого из приведенных условий. Кроме того, из третьего условия следует, что поперечные силы Q_x и изгибающие моменты M_x в направлении образующей цилиндра связаны между собой той же дифференциальной зависимостью, что и аналогичные усилия в технической теории расчёта балок.

НДС рассматриваемой цилиндрической оболочки корпуса батискафа также можно описать одним дифференциальным уравнением четвёртого

порядка, если систему (8.2,г), как и прежде, представить в перемещениях (через прогибы w оболочки); при этом уравнение усложняется по сравнению с (8.7).

Для вывода уравнения состояния в первую очередь необходимо определить величину силы N_x в продольном направлении. Она постоянна и легко находится из условия равновесия одной из частей оболочки в виде $\sum X = 0$ на ось цилиндра

$$N_x = -\frac{q\pi R^2}{2\pi R} = -\frac{qR}{2}. \quad (8.19)$$

Знак «минус» здесь соответствует деформациям сжатия.

Воспользовавшись физическими уравнениями теории оболочек для нормальных усилий:

$$N_x = \frac{E\delta}{1-\nu^2}(\varepsilon_x + \nu\varepsilon_y), \quad N_y = \frac{E\delta}{1-\nu^2}(\varepsilon_y + \nu\varepsilon_x)$$

и знанием модуля величины N_x согласно (8.19), легко установить связь между деформациями оболочки в основных направлениях.

Очевидно, из определения усилия N_x нетрудно вывести формулу для деформаций оболочки в направлении образующей

$$\varepsilon_x = -\frac{qR}{2} \cdot \frac{1-\nu^2}{E\delta} - \nu\varepsilon_y. \quad (8.20)$$

Деформацию оболочки в окружном направлении ε_y вследствие симметрии деформирования можно выразить через прогибы

$$\varepsilon_y = \frac{2\pi(R-w) - 2\pi R}{2\pi R} = -\frac{w}{R}. \quad (8.21)$$

Учитывая это, теперь и величину нормальной силы в окружном направлении также можно выразить через прогибы

$$\begin{aligned} N_y &= \frac{E\delta}{1-\nu^2}(\varepsilon_y + \nu\varepsilon_x) = \frac{E\delta}{1-\nu^2} \left[-\frac{w}{R}(1-\nu^2) - \nu \frac{qR}{2} \cdot \frac{1-\nu^2}{E\delta} \right] = \\ &= -\left(\frac{E\delta}{R} w + \nu \frac{qR}{2} \right). \end{aligned} \quad (8.22)$$

Два последних условия равновесия системы (8.5), как известно, сводятся к одному дифференциальному уравнению

$$\frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + \frac{N_y}{R} = -q. \quad (8.23)$$

Если выразить изгибающие моменты M_x через прогибы, то на основе данного уравнения с привлечением (8.22) можно вывести уравнение равновесия оболочки в перемещениях.

В общем случае в соответствии с физическими уравнениями теории оболочек моменты находятся по формулам:

$$\begin{aligned} M_x &= D(\kappa_x + \nu\kappa_y), \\ M_y &= D(\kappa_y + \nu\kappa_x), \end{aligned} \quad (8.24)$$

где D – цилиндрическая жёсткость оболочки. Очевидно, при симметричном нагружении кривизна κ_y оболочки в окружном направлении равняется нулю, поскольку прогибы в произвольном сечении $x = c$ одинаковы

$$\kappa_y = -D \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \equiv 0. \quad (8.25)$$

С учётом этого *

$$\begin{aligned} M_x^p &= -D \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \\ M_y^p &= -D\nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = \nu M_x^p. \end{aligned} \quad (8.26)$$

Полная величина изгибающего момента M_x при наличии нормальных сил N_x в сечении оболочки находится по формуле

$$M_x = M_x^p - N_x w = -D \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - N_x w. \quad (8.27)$$

Дважды продифференцировав это выражение и подставив результат в (8.6), после группировки слагаемых выводят разрешающее уравнение цилиндрической оболочки в перемещениях

$$D \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \frac{qR}{2} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{E\delta}{R^2} w = q \left(1 - \frac{\nu}{2} \right). \quad (8.28)$$

Полученное уравнение можно рассматривать как обобщение уравнения (8.7).

Интегрирование уравнения (8.28) можно выполнить различными способами, в том числе и численно, заменив непрерывные производные соответствующими дискретными выражениями, известными из работ по строительной механике [5]. Трудоёмкость решения существенно снижается,

* Значок p над моментом M указывает на внешнее воздействие, которым оно вызвано.

если пренебрегают влиянием нормальных усилий N_x , т.е. опускают в уравнении второе слагаемое

$$D \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \frac{E\delta}{R^2} w = q \left(1 - \frac{\nu}{2} \right). \quad (8.29,а)$$

Поделив на D и введя обозначение для множителя во втором слагаемом $k^4 = \frac{E \cdot \delta}{4R^2 D}$, уравнение записывают в виде, удобном для последующего интегрирования:

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + k^4 w = \frac{q}{D} \left(1 - \frac{\nu}{2} \right). \quad (8.29,б)$$

Сравнительные расчёты оболочек согласно (8.28) и (8.29,б) показывают, что влияние N_x на НДС оболочки действительно невелико^{**}.

Замечание. Уравнение (8.29,б), как и уравнение (8.7), по форме ничем не отличается от уравнения балки постоянного сечения на упругом основании [4]). Несложно установить параметры модели (мнимой) «балки», соответствующие исходным физико-механическим характеристикам цилиндрической оболочки. Для этого необходимо выделить из оболочки двумя сечениями вдоль образующей полоску с расчётной шириной, равной единице, в окружном направлении; длина полоски определяется длиной самой оболочки (рис. 8.8,а).

Реакция основания «балки», заключённая в параметре

$$\beta = \sqrt{\frac{b}{4EI}}$$

приведенного однородного уравнения балки

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 4\beta^4 w = 0,$$

равна $r = -bw$ (b – коэффициент постели основания балки).

Из условия равновесия полоски единичной ширины ($s = \varphi \cdot R = 1$) на ось Oz вытекает (рис. 8.9,б), что

$$r = 2V \sin \frac{\varphi}{2} \approx V\varphi, \quad (*)$$

где V – сжимающая сила, $V = -\sigma \cdot 1 \cdot \delta = -\varepsilon \cdot E \cdot \delta$ (δ – толщина оболочки).

а

б

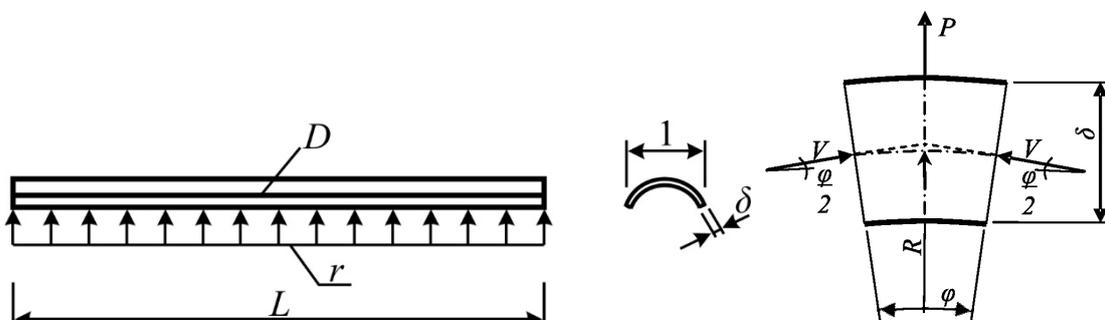


Рис. 8.9

^{**} В разд. 9 для решения данных уравнений использована эффективная процедура численного интегрирования.

С учётом данного определения V из равенства (*) вытекает, что

$$r = -bw = -\frac{w}{R} \frac{E \cdot \delta}{2} \cdot \frac{1}{R}.$$

Отсюда находят некий «коэффициент постели оболочки»

$$b = \frac{E \cdot \delta}{R^2}$$

и соответствующий ему параметр – коэффициент затухания перемещений оболочки

$$\beta = \sqrt[4]{\frac{b}{4EI}} = \sqrt[4]{\frac{E \cdot \delta}{4R^2 D}}.$$

Очевидно, что при расчёте оболочки согласно (8.12) должна быть выполнена замена жесткости балки на изгиб EI на цилиндрическую жесткость оболочки D .

Таким образом, для интегрирования уравнения оболочки могут быть использованы известные методики аналитического и численного расчёта балок на упругом основании [9]).

Пример 2. Расчёт на опоясывающую нагрузку

Указанная нагрузка представляет собой постоянное сосредоточенное силовое воздействие P , распределённое по внешнему контуру в сечении $x = c$ и приложенное по нормали к поверхности оболочки (рис. 8.10).

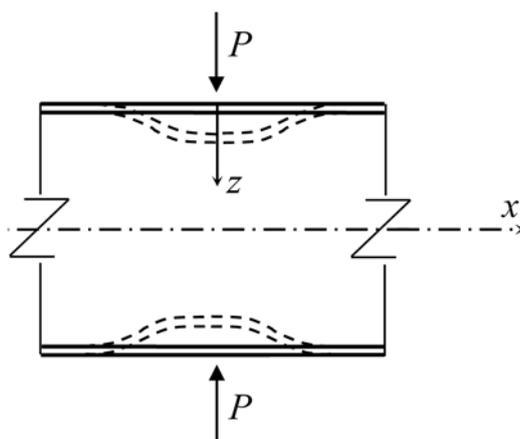


Рис. 8.10

Очевидно, при таком воздействии деформации оболочки будут симметричными и локальными.

Начало системы координат совмещается с любой точкой оболочки, взятой на поверхности в месте приложения силы в сечении $x=0$. Положительное направление оси $0x$ может быть принято в любую сторону; ось $0z$ направляют перпендикулярно к оси цилиндра, а направление оси $0y$ принимают так, чтобы образовать правую систему координат.

Граничными условиями рассматриваемой задачи при решении уравнения (8.28) оболочки служат:

- 1) при $x = 0$ $\frac{\partial w}{\partial x} = 0$, т.к. касательная в этом сечении не имеет наклона;

2) и $Q_0 = -\frac{P}{2}$, поскольку поперечная сила в сечении, очевидно, терпит разрыв на величину P (Q_0 – погонная поперечная сила).

Положительные направления усилий M и Q сохраняются прежними (рис. 8.11).

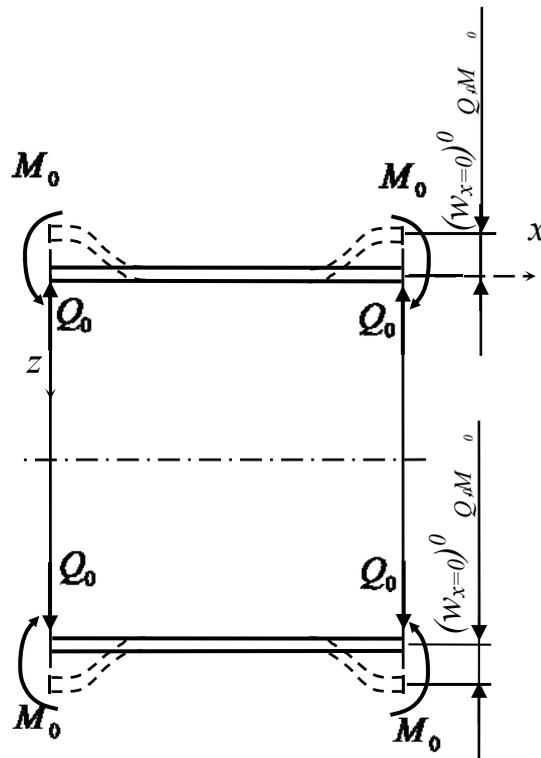


Рис. 8.11

Воспользовавшись первым граничным условием, с помощью формулы

$$\varphi_{\max} = \frac{\partial w}{\partial x} \Big|_{x=0} = \frac{1}{2Dk^2} [Q_0 + 2kM_0] \quad (**)$$

легко найти связь между моментами и поперечными силами, приложенными в сечении $x=0$

$$Q_0 + 2kM_0 = 0.$$

С учётом второго граничного условия величина момента равна:

$$M_0 = \frac{P}{4k}. \quad (8.30)$$

Выражение (**) для угла наклона нормали является вторым интегралом уравнения (8.12). Угол наклона находится путём решения вспомогательной задачи по анализу НДС длинной оболочки, подвергнутой действию усилий Q_0 , M_0 , приложенных к её торцу (рис. 8.12).

Несложно проверить выражение (**), выполнив интегрирование *однородного* дифференциального уравнения (8.12)

$$\frac{\partial^4 w_0}{\partial x^4} + 4k^4 w_0 = 0,$$

где

$$k = \sqrt{\frac{1}{Eh}} \sqrt[4]{3(1-\nu^2)}$$

– физико-геометрический параметр оболочки. Первый интеграл уравнения имеет вид (см. разд. 8 или [4]):

$$w = e^{kx} (C_1 \cos kx + C_2 \sin kx) + e^{-kx} (C_3 \cos kx + C_4 \sin kx). \quad (8.31)$$

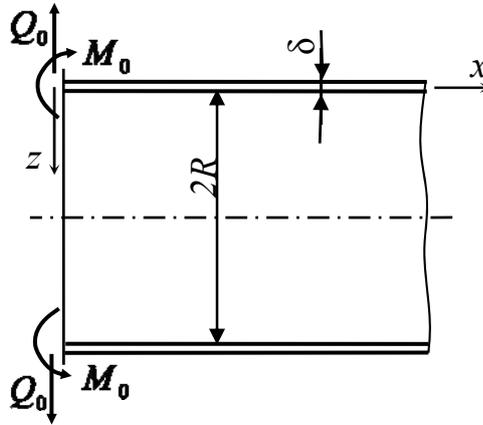


Рис. 8.12

Для определения постоянных следует использовать следующие граничные условия:

1. На значительном удалении от торца оболочки, где приложены усилия Q_0 , M_0 , её прогибы столь малы, что при $x \rightarrow \infty$ $w=0$. Это означает, что $e^{-kx} = 0$ при $x \rightarrow \infty$. Поэтому в решении остаётся только второе слагаемое

$$w_0 = e^{-kx} (C_3 \cos kx + C_4 \sin kx). \quad (8.32)$$

2. Естественно, при $x=0$ $Q = Q_0 = -D \frac{\partial^3 w}{\partial x^3}$ и $M_x = M_0 = -D \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}$. Эти условия используются для определения постоянных C_3 , C_4 .

После вычисления производных

$$\frac{\partial w}{\partial x} = -k [C_3 e^{-kx} (\sin kx - \cos kx) + C_4 e^{-kx} (\cos kx - \sin kx)], \quad (8.33,а)$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 2\beta^2 [C_4 e^{-kx} \sin kx - C_3 e^{-kx} \cos kx], \quad (8.33,б)$$

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} = 2\beta^3 \left[C_3 e^{-kx} (\sin kx - \cos kx) + C_4 e^{-kx} (\cos kx - \sin kx) \right] \quad (8.33, \text{в})$$

легко определить постоянные $C_3 = \frac{M_0}{2Dk^2}$, $C_4 = -\frac{Q_0}{2Dk^3} - \frac{2M_0}{2Dk^3}$. Подставив их в решение (8.32), находят прогибы оболочки

$$w_0 = -\frac{1}{2Dk^3} [Q_0 \theta(kx) + 2kM_0 \eta(kx)], \quad (8.34)$$

где $\eta(kx) = e^{-kx} (\cos kx - \sin kx)$, $\theta(kx) = e^{-kx} \cos kx$.

Теперь можно найти в явном виде распределение как усилий по длине оболочки

$$M_x = 2kM_0 \eta(kx), \quad Q_x = -Q_0 \theta(kx) + 2kM_0 \zeta(kx), \quad (8.35)$$

где $\zeta(kx) = e^{-kx} \sin kx$, так и прогибов

$$w_0 = -\frac{1}{2Dk^3} [Q_0 + kM_0]. \quad (8.36)$$

Максимальная величина прогиба в месте приложения силы составляет:

$$w_{\max} = -\frac{1}{2Dk^3} [Q_0 + kM_0], \quad (8.37, \text{а})$$

а угла наклона нормали к поверхности -

$$\phi_{\max} = \left. \frac{\partial w}{\partial x} \right|_{x=0} = \frac{1}{2Dk^2} [Q_0 + 2kM_0]. \quad (8.37, \text{б})$$

Таким образом, формула (**) достоверна.

Возвращаясь к решению основной задачи, теперь на основе формулы (8.31) можно установить распределение прогибов вдоль оси оболочки в зависимости от силы P , приняв во внимание (8.30):

$$w = \frac{P}{8Dk^3} \zeta(kx).$$

Характер графика изменения прогибов оболочки по мере удаления от места приложения опоясывающей нагрузки показан на рис. 8.13.

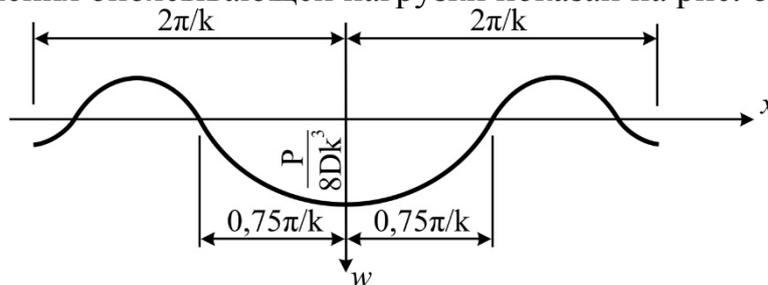


Рис. 8.13

Из него видно, что перемещения оболочки очень быстро «затухают»; в частности, для оболочки с размерами $R = 0,5 \text{ м}$, $\delta = 0,01 \text{ м}$ при значениях

$$E = 2 \cdot 10^5 \text{ МН/м}^2, \nu = 0,3, \quad D = \frac{E \cdot \delta^3}{12(1-\nu^2)} = \frac{2 \cdot 10^5 \cdot (0,01)^3}{12(1-0,3^2)} = \frac{1}{54,6} \text{ МН} \cdot \text{м},$$

$$k = \sqrt[4]{\frac{E \cdot \delta}{4R^2 D}} = \sqrt[4]{\frac{2 \cdot 10^5 \cdot 0,01 \cdot 54,6}{4 \cdot 0,5^2}} = 18,2 \text{ м}^{-1} \quad \text{на} \quad \text{расстоянии}$$

$$a = \frac{2\pi}{k} = \frac{2\pi}{18,2} = 0,35 \text{ м}, \text{ составляющем около трети диаметра оболочки, их}$$

можно полагать нулевыми.

Очевидно, если длина оболочки $l \geq \frac{2\pi}{k}$, то нагрузка, приложенная на одном конце, не оказывает никакого влияния на другом; такие цилиндрические оболочки относятся к длинным.

Обладая данным решением, несложно установить усилия и прогибы оболочки, подверженной действию опоясывающей нагрузки, непрерывно распределённой вдоль образующей на конечном отрезке заданной длины.

Пример 3. Расчёт цилиндрических оболочек, усиленных шпангоутами.

При расчёте оболочки, подкреплённой кольцами (шпангоутами) (рис. 8.14,а), используются те же формулы, что и при расчёте оболочки, нагруженной внутренним давлением.

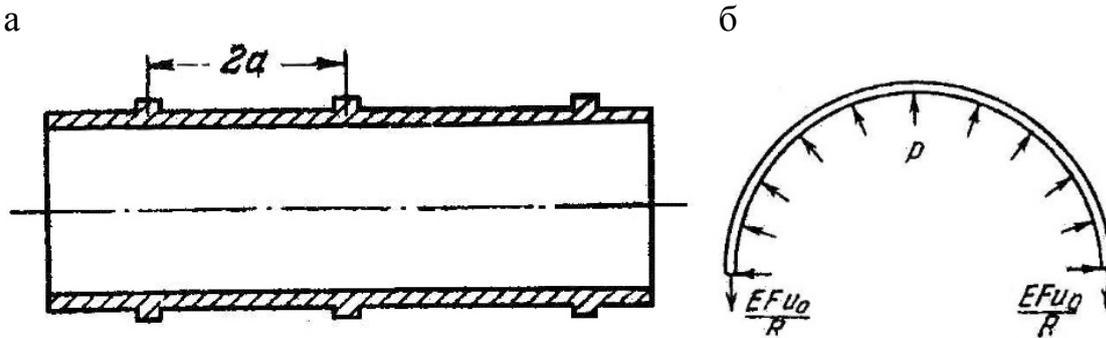


Рис. 8.14

Ключом, открывающим путь к решению рассматриваемой задачи, является условие совместности деформаций оболочки в сечении, где находится кольцо, в виде равенства прогибов, полученных ранее при расчётах оболочки на воздействие кольцевых моментов M_0 и поперечных сил Q_0 в одном случае и на внутреннее давление – в другом.

Условие совместности деформаций оболочки записывается в виде

$$w_{M_0} = w_p,$$

если считать кольцо жёстким, или

$$w_{M_0} - w_p = w_X,$$

когда кольцо деформируемо. Прогиб w_X обусловлен силой взаимодействия X , возникающей между кольцом и оболочкой (рис. 8.15).

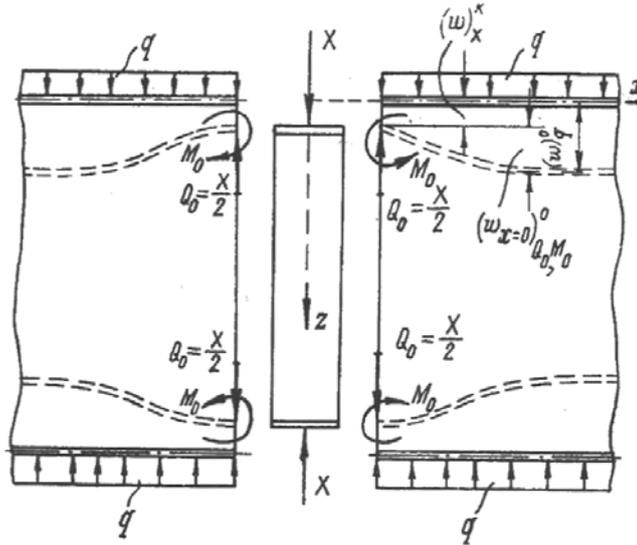


Рис. 8.15

Обращаясь к первому случаю, следует приравнять друг другу прогибы, определяемые формулой (8.36) и решением уравнения (8.29,б)

$$\frac{1}{2Dk^3}[Q_0 + kM_0] = \frac{pR^2}{E\delta} \left(1 - \frac{\nu}{2}\right). \quad (8.38)$$

Величина поперечной силы в месте сопряжения оболочки с кольцом равна:

$$Q_0 = X/2. \quad (8.39)$$

Значение изгибающего момента в том же сечении также можно выразить через силу взаимодействия X , воспользовавшись условием отсутствия наклона касательной к поверхности оболочки в рассматриваемом сечении

$$\frac{\partial w}{\partial x} = 0.$$

Приравняв выражение углов наклона (8.37,б) нулю, т.е.

$$\frac{1}{2Dk^2}[Q_0 + 2kM_0] = 0,$$

находят соотношение

$$M_0 = -Q_0/2k.$$

С учётом определения (8.39) оно принимает вид $M_0 = -X/4k$. Подставив полученные значения M_0, Q_0 в формулу (8.38)

$$\frac{pR^2}{E\delta} \left(1 - \frac{\nu}{2}\right) = \frac{1}{2Dk^3} \left(\frac{X}{2} - \frac{X}{4}\right),$$

находят величину силы взаимодействия

$$X = \frac{8pR^2 D \beta^3}{Eh} \left(1 - \frac{\nu}{2}\right).$$

Из определения коэффициента затухания перемещений оболочки следует, что

$$k^4 = \frac{E\delta}{4R^2 D},$$

и силу теперь можно выразить намного короче, а именно:

$$X = \frac{2p}{k} \left(1 - \frac{\nu}{2}\right).$$

Тогда и погонная поперечная сила, и изгибающий момент в месте сопряжения кольца с оболочкой записываются более компактно:

$$Q_0 = \frac{p}{k} \left(1 - \frac{\nu}{2}\right), \quad M_0 = -\frac{p}{2k^2} \left(1 - \frac{\nu}{2}\right).$$

Если кольцо при нагружении *деформируется*, то в условии совместности деформаций необходимо предварительно найти прогибы кольца, вызываемые силой X . При их вычислении исходят из определения напряжений в кольце согласно

$$\sigma_y = \frac{N}{A} = \frac{XR}{A},$$

где A – площадь поперечного сечения кольца; N – усилие в нём. Прогибы кольца равны:

$$w_X = \frac{N}{EA} = \frac{XR^2}{EA}.$$

В рассматриваемом случае условие совместности деформаций имеет вид

$$\frac{pR^2}{E\delta} \left(1 - \frac{\nu}{2}\right) - \frac{1}{2Dk^3} \left(\frac{X}{2} - \frac{X}{4}\right) = \frac{XR^2}{EA}.$$

Отсюда следует, что

$$X = \frac{2p}{k} \left(1 - \frac{\nu}{2}\right) \gamma.$$

Коэффициент $\gamma = \frac{kA}{2\delta + kA}$ характеризует уменьшение силы взаимодействия X при наличии упругой податливости подкрепляющего кольца оболочки. При уменьшении толщины оболочки и увеличении площади сечения кольца его величина приближается к единице.

Усилия в оболочке по мере удаления от кольца снижаются. Их распределение находят по формулам (8.35).

Пример 4. Найти изгибающие моменты в оболочке радиусом 30 см с толщиной стенки 1 см. Длина оболочки $l = 0,6$ м. Модуль упругости стали $E = 210^5$ МН/м, коэффициент Пуассона $\nu = 0,3$. Цилиндрическая жёсткость оболочки равна:

$$D = \frac{E \cdot \delta^3}{12(1-\nu^2)} = \frac{2 \cdot 10^5 \cdot (0,01)^3}{12(1-0,3^2)} = \frac{1}{54,6} = 1,83 \cdot 10^{-2} \text{ МН/м,}$$

$$k = 0,236 \cdot 10^2 \text{ 1/м.}$$

Граничное значение длины, при превышении которой оболочка относится к длинным находится, по следующей формуле (см. рис. 8.13):

$$\frac{2\pi}{k} = \frac{2 \cdot 3,14}{0,236 \cdot 10^2} = 0,266 \text{ м.}$$

Рассчитываемая оболочка относится к длинным, поскольку $l = 0,6 \text{ м} \geq 0,266 \text{ м}$.

При наличии жёсткого кольца величина силы взаимодействия равна:

$$X = \frac{2p}{k} \left(1 - \frac{\nu}{2}\right) = \frac{2(-2)}{0,236 \cdot 10^2} \left(1 - \frac{0,3}{2}\right) = -0,144 \text{ МН/м.}$$

Поперечная сила, соответствующая этой силе,

$$Q_0 = X / 2 = -0,144 / 2 = -72 \text{ МН/м.}$$

Изгибающий момент в месте сопряжения кольца с оболочкой равен:

$$M_0 = -\frac{p}{2k^2} \left(1 - \frac{\nu}{2}\right) = -\frac{-2}{2 \cdot 0,236^2 \cdot 10^4} \left(1 - \frac{0,3}{2}\right) = 1,52 \cdot 10^3 \text{ МН} \cdot \text{м/м.}$$

Ординаты эпюры моментов по длине оболочки вычисляются по формуле (8.35):

$$M_x = 2kM_0\eta(kx).$$

Первая нулевая точка эпюры находится в сечении

$$x = \frac{\pi}{4k} = \frac{3,14}{4 \cdot 0,236 \cdot 10^2} = 3,33 \cdot 10^{-2} \text{ м} = 3,33 \text{ см.}$$

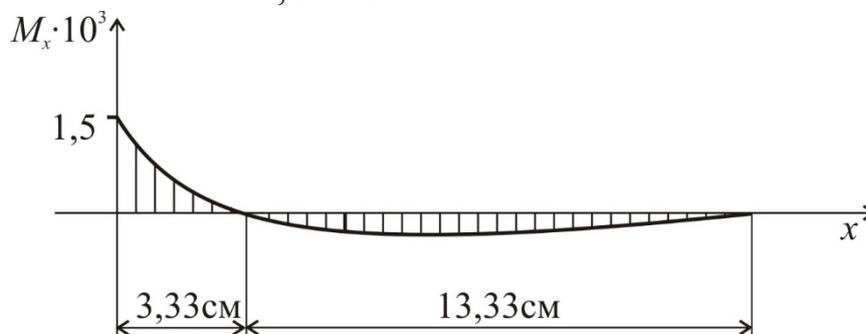


Рис.8.16

Вблизи второй нулевой точки на расстоянии $3,33 + 13,33 = 16,66$ см от кольца моменты практически исчезают.

9. ЧИСЛЕННЫЙ РАСЧЁТ КРУГОВЫХ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ОБОЛОЧЕК

Уравнения состояния цилиндрических оболочек, представленные в разд. 8 в дифференциальном виде, при численном расчёте необходимо перевести в дискретную (матричную) форму. Основанием этого, по аналогии с дискретной моделью стержня в виде многозвенной шарнирной цепи с упругоподатливыми шарнирами, может служить расчётная модель цилиндрической оболочки в виде набора колец малой ширины, объединённых между собой упругими связями. Одна группа связей в виде спиральных пружин препятствует взаимному повороту колец по направлению оси оболочки, а другая – в виде линейных – в окружном. Вследствие этого основными параметрами напряжённого состояния являются изгибающие моменты $M_1 = M_z$ в продольном направлении и растягивающие усилия $N_2 = M_\phi$ – в окружном (рис. 9.1). Похожая схема использовалась В. З. Власовым в качестве модели при расчёте цилиндрической оболочки по «полумоментной» теории (см. рис. 10.1).

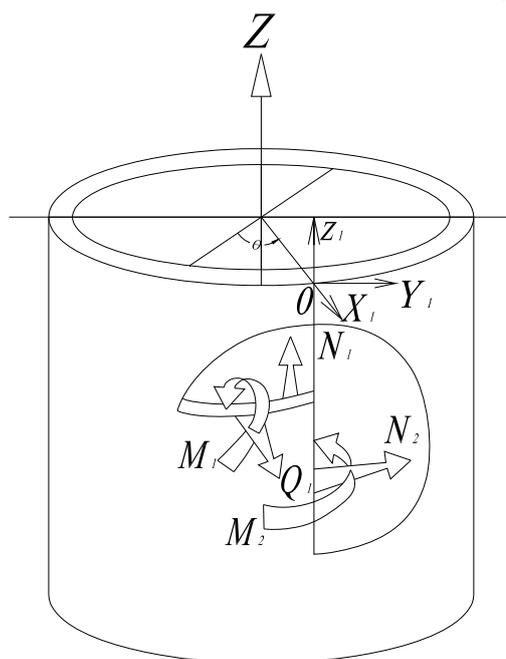


Рис. 9.1

Дискретная форма уравнений в большей степени, чем аналитическая, отвечает процедуре выполнения математических операций на компьютере. Для полной автоматизации расчетов процедуры формирования самих уравнений также следует осуществлять в дискретной форме. Необходимо подчеркнуть важнейшую особенность самой процедуры перевода дифференциального уравнения состояния оболочки в матричную форму. Она заключается в том, что в процессе преобразований осуществляется интегрирование уравнения в матричной форме.

Рассматриваемую в этом разделе модель оболочки, как и модель В. З. Власова, можно считать одним из частных вариантов метода конечных элементов (см. разд. 12).

9.1. Матричная форма дифференциального уравнения оболочки

Уравнение состояния оболочки имеет вид (см. выражение (8.29,а))

$$\frac{d^2}{dz^2} \left(D \frac{d^2 x}{dz^2} \right) + \frac{Eh}{r^2} x = p(z), \quad (9.1)$$

где $p(z)$ и D – соответственно, распределенная нагрузка, приходящаяся на единицу длины, и цилиндрическая жесткость оболочки; $x(z)$ – прогиб оболочки в сечении с текущей абсциссой z .

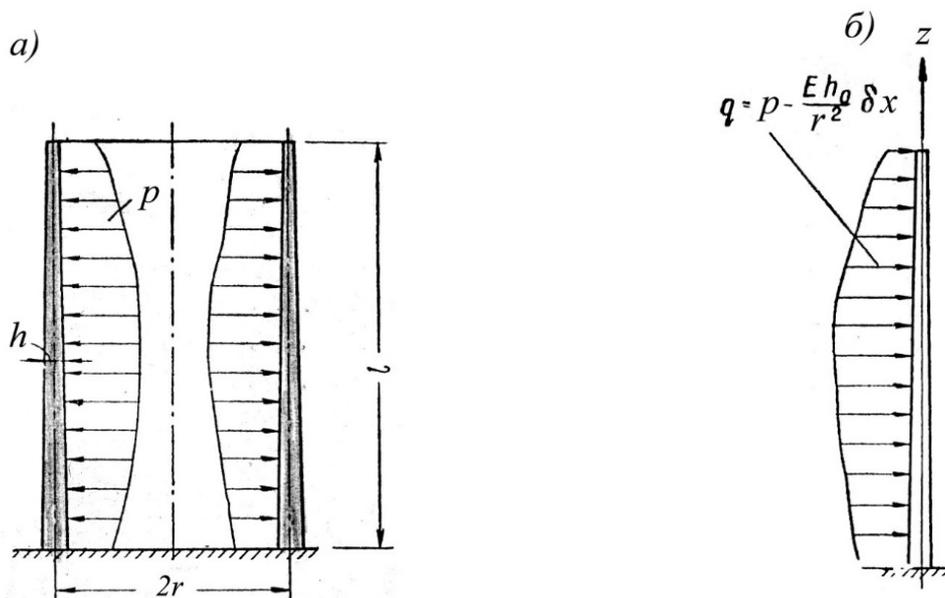


Рис. 9.2

Если в уравнении (9.1) перенести слагаемое с неизвестным x направо

$$\frac{d^2}{dz^2} \left(D \frac{d^2 x}{dz^2} \right) = p(z) - \frac{Eh}{r^2} x$$

и принять его правую часть за «нагрузку» с интенсивностью

$$q = p(z) - \frac{E\delta h_0}{r^2} x, \quad (9.2)$$

где введен безразмерный параметр толщины оболочки $\delta = h/h_0$, то оно приобретает форму, удобную для представления его в матричном виде (рис. 9.2,б, где h_0 – толщина оболочки в основании).

Действительно, разделив оболочку по высоте на n равных участков, распределённую нагрузку q можно будет привести к эквивалентной системе сосредоточенных сил q_1, q_2, \dots, q_n , приложенных на границах раздела. Для этой цели прежде всего правую часть уравнения нужно представить вектором

$$\bar{Q} = (q_1, q_2, \dots, q_n) = \bar{P} - \frac{Eh_0}{r^2} [G] \bar{X}. \quad (9.3)$$

Здесь $\bar{P} = (p_1, p_2, \dots, p_n)$ – вектор равнодействующих внешних сил, приложенных в пределах отрезка дискретизации; $[G]$ – диагональная матрица, элементами которой являются величины параметров толщины оболочки $\delta_{ii} = h_i/h_0$ ($i=1, 2, \dots, n$); $\bar{X} = (X_1, X_2, \dots, X_n)$ – вектор горизонтальных перемещений точек разбиений оболочки.

При определении сосредоточенных сил q_1, q_2, \dots, q_n , приложенных на границах раздела, можно воспользоваться матрицей преобразования $[F]$, предназначенной для аппроксимирования функций с помощью интерполяционных полиномов Лагранжа. В рассматриваемом примере данная матрица состоит из двух матриц четвёртого порядка $[F_{11}]$, $[F_{33}]$ и одной $[F_{22}]$ – пятого

$$[F] = \frac{d}{18} [F_1] = \begin{bmatrix} [F_{11}] & & \\ & [F_{22}] & \\ & & [F_{33}] \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{18n},$$

$d = \frac{l}{n}$ – длина отрезка разбиения. Структура матриц $[F_{11}]$, $[F_{22}]$ и $[F_{33}]$ приводится в конце раздела (см. прил. 2). В результате аппроксимации «нагрузки» \bar{Q} вектор сосредоточенных сил можно представить в матричной форме:

$$\bar{Q} = [F_1] \bar{P} - \frac{Eh_0 l}{18r^2 n} [F_1] [G] \bar{X}. \quad (9.4)$$

Вектор изгибающих моментов

$$\bar{M} = [\Lambda] \bar{Q} = \frac{l^2}{18n^2} [\Lambda] [F_1] \bar{P} - \frac{Eh_0 l^2}{18r^2 n^2} [\Lambda] [F_1] [G] \bar{X}, \quad (9.5)$$

где

$$[\Lambda] = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & \dots & n \\ 0 & 1 & 2 & \dots & n-1 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & n-2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \cdot \frac{l}{n}, \quad (9.6)$$

– матрица влияния изгибающих моментов.

Значения углов наклона участков оболочки находят по формуле

$$[\Omega] = [\delta] \bar{M},$$

где \bar{M} – вектор моментов, определяемый по формуле (9.5); $[\delta] = \frac{D_0}{D}$ – диагональная матрица (внутренней) податливости, элементы которой равны:

$$\delta_{ii} = \frac{D_0}{D} = \frac{h_0^3}{h^3}.$$

Перемещения точек разбиения оболочки оказывается возможным выразить через матрицу влияния моментов $[\Lambda]$ в следующем виде:

$$\bar{X} = [\Lambda]^T \bar{\Omega}.$$

После подстановки формулы (9.6) в это выражение перемещения точек оболочки можно представить в виде

$$\bar{X} = \frac{l^3}{324n^3 D_0} [F_1] [\delta] [\Lambda] [F_1] \bar{P} - \frac{Eh_0 l^3}{324r^2 n^3 D_0} [F_1] [\delta] [\Lambda] [F_1] [G] \bar{X}.$$

Если обозначить произведение четырёх матриц в правой части полученного равенства через $[C] = [F_1] [\delta] [\Lambda] [F_1]$, а множители перед

матрицами – $\alpha_0 = \frac{l^3}{324n^3 D_0}$, $\alpha_r = \frac{Eh_0 l^3}{324r^2 n^3 D_0}$, перемещения принимают

компактную форму

$$\bar{X} = \alpha_r [C] \bar{P} - \alpha_0 [G] \bar{X},$$

или

$$([E] + \alpha_0 [C] [G]) \bar{X} = \alpha_r [C] \bar{P}.$$

После ввода ещё одного сокращения, а именно

$$[A] = [E] + \alpha_0 [C] [G]$$

перемещения предстанут в виде

$$\bar{X} = \alpha_r [A]^{-1} [C] \bar{P} = \alpha_r [\Delta] \bar{P}, \quad (9.7)$$

где

$$[\Delta] = [A]^{-1} [C] \quad (9.8)$$

– матрица (внешней) податливости.

Продольная сила и изгибающие моменты в оболочке равны:

$$N_\varphi = -\frac{Eh}{r} x,$$

$$M_z = -D \frac{\partial^2 x}{\partial z^2}.$$

Вектор продольных сил в точках разбиения оболочки на основе данных определений записывается в виде

$$\bar{N}_\varphi = -\frac{Eh}{r} \alpha_r [G][\Delta] \bar{P} = \alpha_N [L_N] \bar{P},$$

где

$$[L_N] = [G][\Delta]$$

– матрица влияния продольных сил, $\alpha_N = -\frac{Eh_0}{r} \alpha_r$.

Вектор изгибающих моментов в расчётных сечениях оболочки согласно (9.5) с учётом определения перемещений по (9.7) равен:

$$\bar{M}_z = -\frac{l^2}{18n^2} [\Lambda][F_1] \bar{P} + \frac{Eh_0 l^2}{18r^2 n^2} \alpha_r [\Lambda][F_1][G][A]^{-1}[C] \bar{P} = \alpha_M [L_M] \bar{P}, \quad (9.9)$$

где

$$[L_M] = [\Lambda][F_1]([E] - \alpha_0 \delta [G][\Delta])$$

– матрица влияния изгибающих моментов, $\alpha_M = -\frac{l^2}{18n^2}$.

9.2. Пример расчёта

При дискретизации оболочки на десять равных частей матрица влияния моментов имеет вид

$$[\Lambda] = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & \dots & 10 \\ 0 & 1 & 2 & \dots & 9 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 8 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \cdot \frac{l}{n}$$

Интерполяционная матрица Лагранжа, составленная из трёх матриц, имеет тот же порядок, что и матрица влияния, т.е. одиннадцатый*

$$[F] = \frac{l}{180} \begin{bmatrix} [F_{11}] & & \\ & [F_{22}] & \\ & & [F_{33}] \end{bmatrix}.$$

* Подробное изложение построения матриц Лагранжа см. прил. 2.

Структура матрицы $[F_{11}]$, например, такова:

$$[F_{11}] = \begin{bmatrix} 4,85 & 5,70 & -1,95 & 0,40 \\ 1,50 & 15 & 1,50 & 0 \\ 0 & 1,50 & 15 & 1,50 \\ 0,40 & -1,95 & 5,70 & 4,85 \end{bmatrix}$$

На основе формул, представленных в данном подразделе, нетрудно составить программу расчёта оболочки, в которой используются также диагональные матрицы приведенных толщин оболочки.

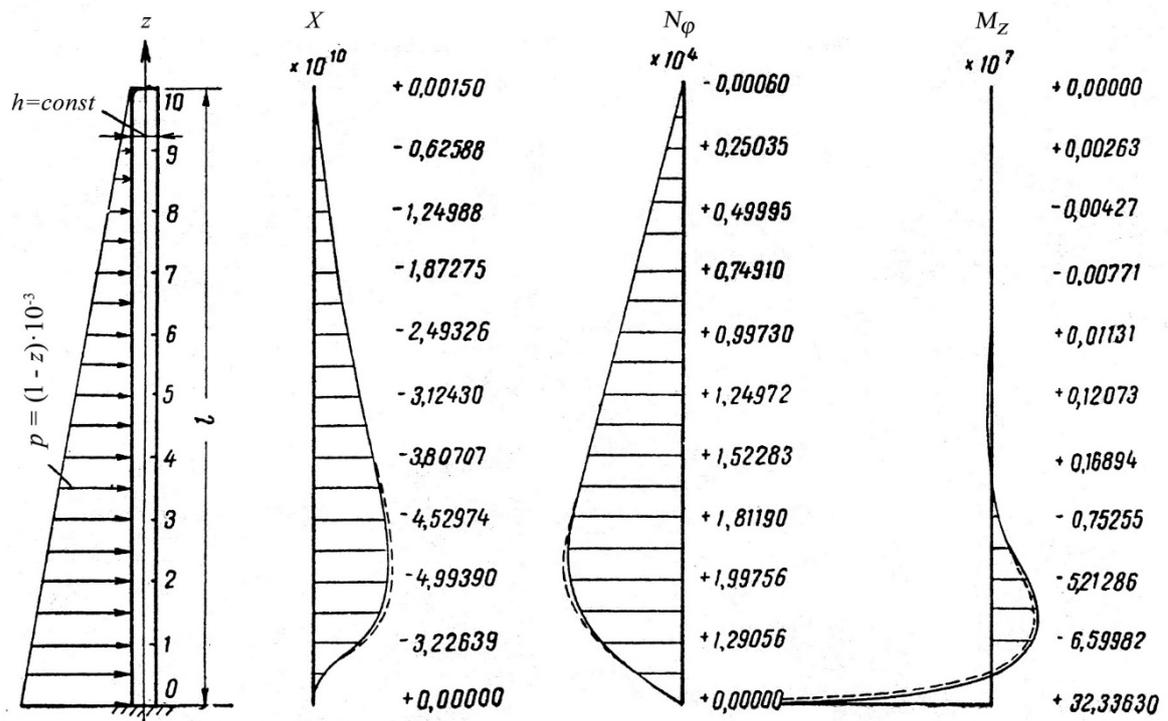


Рис. 9.3

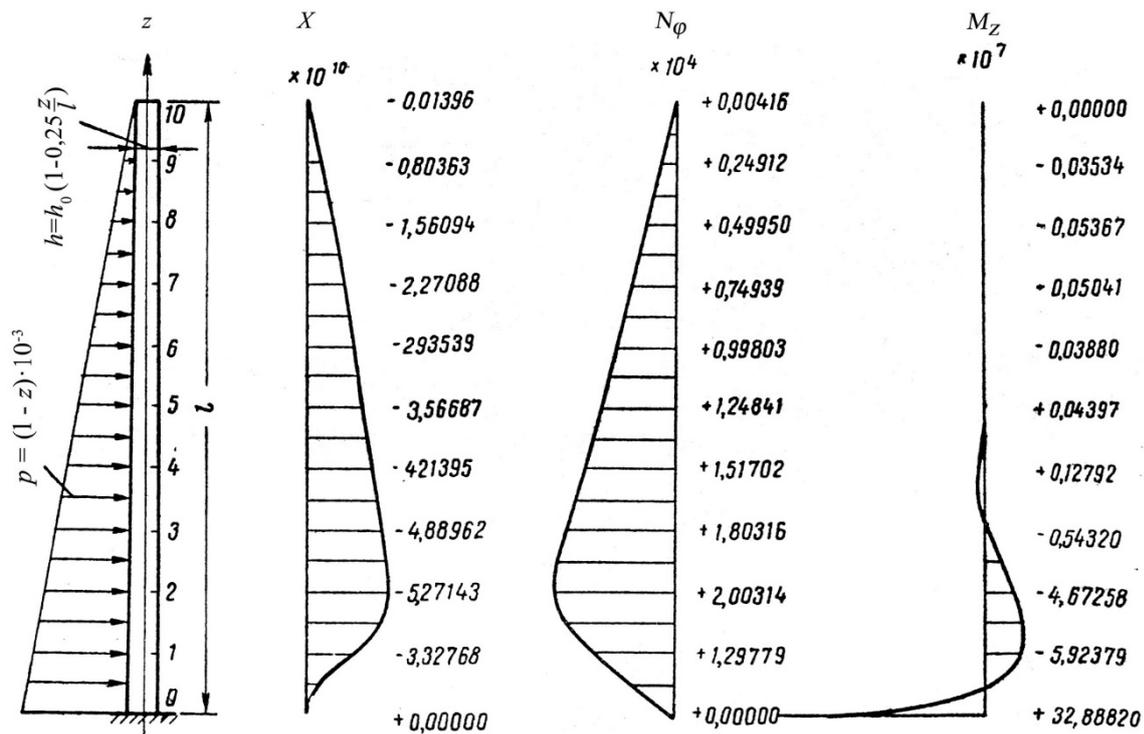


Рис. 9.4

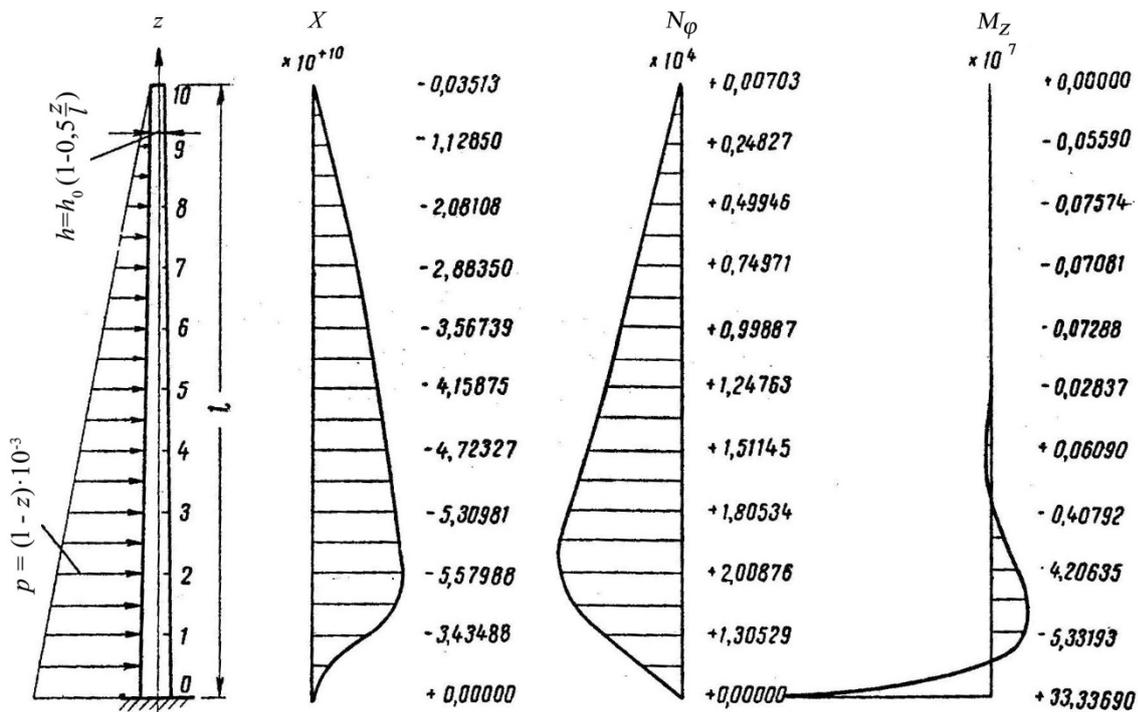


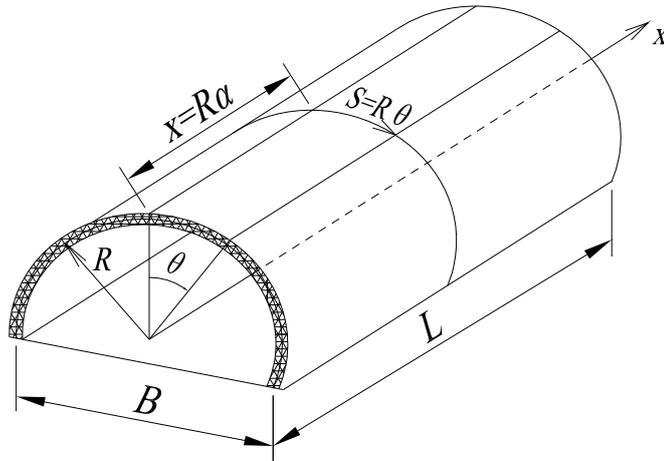
Рис. 9.5

10. ПОЛУМОМЕНТНАЯ ТЕОРИЯ РАСЧЁТА ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ОБОЛОЧЕК В.З. ВЛАСОВА

10.1. Уравнения состояния цилиндрической оболочки по полумоментной теории. Принятые гипотезы расчёта

В предыдущей лекции было отмечено, что длинные цилиндрические оболочки, закреплённые на продольных кромках, при неравномерной или несимметричной нагрузке работают в основном на изгиб в поперечном направлении (рис. 10.1,а). Это означает, что в таком случае в качестве расчётной модели оболочки можно рассматривать множество элементарных полос в виде арок, соединённых между собой в продольном направлении связями-стерженьками, способными воспринимать только продольные и сдвигающие усилия данного направления (рис. 10.1,б). По этой причине изгибающие и крутящие моменты M_1 , H , а следовательно, и поперечные силы Q_1 в условиях равновесия оболочек (8.2,а) следует положить равными нулю. Это допущение подтверждается экспериментами, в которых отмечается незначительная роль указанных усилий в передаче внешней нагрузки на диафрагмы, устанавливаемые в торцах оболочки.

а



б

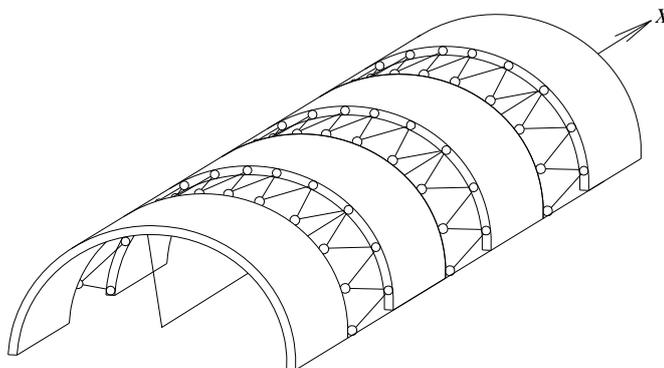


Рис. 10.1

С учётом этого условия при анализе равновесия цилиндрической оболочки по полумоментной теории следует решить систему следующих уравнений:

$$\begin{aligned} \frac{\partial N_1}{\partial \alpha} + \frac{\partial T}{\partial \theta} + Rp_1 &= 0, \\ \frac{\partial T}{\partial \alpha} + \frac{\partial N_2}{\partial \theta} + Q_2 + Rp_2 &= 0, \\ \frac{\partial Q_2}{\partial \theta} - N_2 + Rp_3 &= 0, \\ \frac{\partial M_2}{\partial \theta} - RQ_2 &= 0. \end{aligned} \quad (10.1)$$

Эти уравнения, содержащие пять неизвестных усилий N_1 , N_2 , M_2 , Q_2 , T , получены из общих условий равновесия элемента оболочки (6.2). На рис. 10.2 элемент показан вместе с рассматриваемыми усилиями.

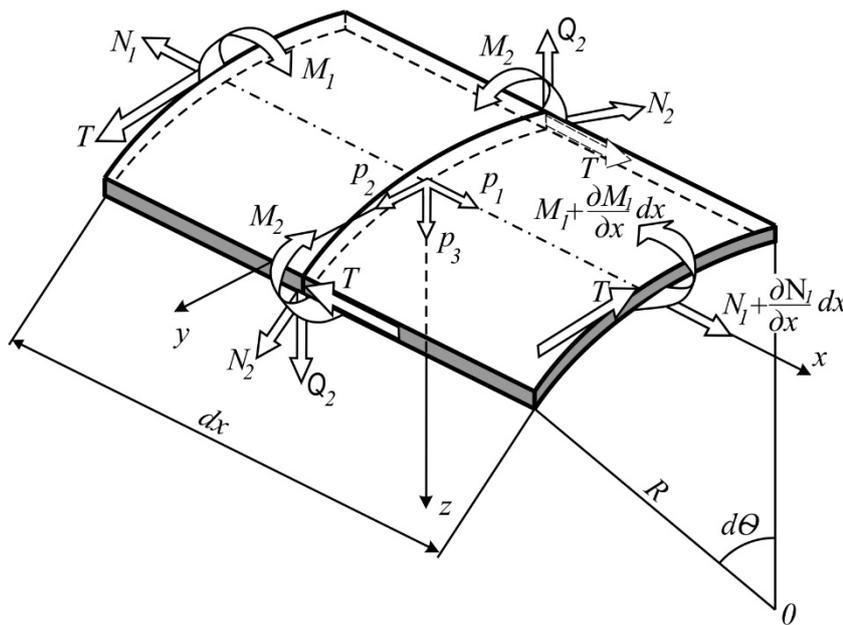


Рис. 10.2

Подобное напряжённое состояние возникает в цилиндрической оболочке открытого профиля при отношении $2 \leq \frac{l}{B} \leq 8$, где B - ширина оболочки (рис. 10,1,а). Оболочки с указанным соотношением размеров относятся к оболочкам *средней* длины.

Из общих геометрических зависимостей (см. подразд. 5.7) следует выделить формулы:

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{R} \frac{\partial u}{\partial \alpha}, \quad (10.3,а)$$

$$\kappa_2 = -\frac{1}{R^2} \left(-\frac{\partial v}{\partial \theta} + \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \right) \quad (10.3,б)$$

и использовать их в качестве определений основных деформаций полосы*.

Осевые деформации полосы в окружном направлении и деформации сдвига полагают отсутствующими, т.е.

$$\varepsilon_2 = \frac{1}{R} \left(\frac{\partial v}{\partial \theta} + w \right) = 0, \quad (10.4,а)$$

$$\gamma = \frac{1}{R} \left(\frac{dv}{d\alpha} + \frac{du}{d\theta} \right) = 0.$$

В определениях деформаций по этим формулам, как и в условиях равновесия (10.1), введена безразмерная координата $\alpha = x/R$.

Физические соотношения могут быть получены по формулам (6.10) лекции № 6 в результате подстановки деформаций (10.3) и (10.4):

$$N_1 = Eh\varepsilon_1,$$

$$M_2 = D\kappa, \quad (10.5)$$

где величина «цилиндрической» жёсткости $D = Eh^3/12$ вычисляется при $\nu = 0$ (это значение коэффициента Пуассона обычно принимается при расчёте железобетонных оболочек).

10.2. Разрешающее уравнение полумоментной теории цилиндрической оболочки. Функция напряжений

Уравнения состояния цилиндрических оболочек можно привести к одному разрешающему уравнению, содержащему единственную неизвестную. Но сначала путём исключения из условий равновесия (10.1) усилий N_2 , Q_2 , T , а из (10.4,а) с помощью (10.4,б) – перемещений u , v , w , привлекая к тому же определения усилий по (10.5), после небольших преобразований можно установить два уравнения:

$$\frac{\partial^2 N_1}{\partial x^2} + \Omega M_2 = -\frac{\partial p_1}{\partial \alpha} + \frac{\partial p_2}{\partial \theta} + \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} (Rp_3), \quad (10.6,а)$$

$$\Omega N_1 - \frac{12}{h^2} \frac{\partial^2 M_2}{\partial \alpha^2} = 0. \quad (10.6,б)$$

* Формула для кривизны полосы, согласно (10.3,б), совпадает с формулой, определяющей кривизну арки [11].

Здесь Ω – дифференциальный оператор (полумоментной теории) цилиндрической оболочки, структура которого имеет вид

$$\Omega \cdot = \frac{\partial^2 \cdot}{\partial \theta^2} \left(R \frac{\partial^2 \cdot}{\partial \theta^2} \right) + \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{1}{R} \frac{\partial \cdot}{\partial \theta} \right);$$

под точкой после символа самого оператора и частной производной подразумевается одно из усилий – N_1 или M_2 .

Система однородных уравнений, полученных из (10.6) в результате приравнивания правой части первого уравнения системы нулю, при постоянной толщине оболочки может быть приведена к одному разрешающему уравнению путём введения функции усилий Φ согласно следующим определениям усилий:

$$\begin{aligned} N_1 &= \Omega \Phi, \\ N_2 &= R \frac{\partial^4 \Phi}{\partial \alpha^2 \partial \theta^2}, \\ T &= -\Omega_1 \frac{\partial \Phi}{\partial \alpha}, \end{aligned} \tag{10.7}$$

$$\begin{aligned} M_2 &= -\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \alpha^2}, \\ Q_2 &= -\frac{\partial^3 \Phi}{\partial \alpha^3} = 0, \end{aligned}$$

где

$$\Omega_1 \cdot = \frac{\partial}{\partial \theta} \left(R \frac{\partial^2 \cdot}{\partial \theta^2} \right) + \frac{1}{R} \frac{\partial \cdot}{\partial \theta}$$

– ещё один, более короткий, дифференциальный оператор рассматриваемой оболочки.

Разрешающее уравнение имеет вид

$$\Omega \Omega \Phi + \frac{12}{h^2} \frac{\partial^4 \Phi}{\partial \alpha^4} = 0. \tag{10.8}$$

Принимая во внимание краевые условия конкретной задачи, выраженные через функцию Φ , можно найти непосредственно функцию усилий Φ .

В качестве частного решения всегда можно взять усилия безмоментного состояния: $M_2 = Q_2 = 0^*$.

* U. Fisterwalder в 1932 году предложил известную конструкцию перекрытий системы «Zeiss – Duwidag», в основе которой лежит теория рассматриваемой оболочки без учёта кинематической предпосылки (10.4,а).

10.3. Интегрирование основного уравнения полумоментной теории цилиндрической оболочки

Интеграл дифференциального уравнения четвёртого порядка

$$\Omega\Omega\Phi + \frac{12}{h^2} \frac{\partial^4 \Phi}{\partial \alpha^4} = 0$$

нетрудно установить, воспользовавшись решением известной задачи динамики стержня с непрерывным распределением массы. Как и там, неизвестную функцию Φ необходимо представить в виде ряда, составленного из произведений двух функций, каждая из которых зависит только от какой-либо одной переменной рассматриваемой задачи, т.е. решение следует принять в виде**

$$\Phi(x, \theta) = \sum_{k=1}^n Y_k(x) \cdot \Theta_k(\theta). \quad (10.9)$$

При этом одну группу функций, например $Y_k(\alpha)$, набирают среди балочных:

$$Y(\alpha) = c_1 chk\alpha + c_2 shk\alpha + c_3 \cos k\alpha + c_4 \sin k\alpha, \quad (10.10)$$

причём берут те из них, что отвечают конкретным условиям опирания торцов оболочки. Другая группа функций отыскивается из уравнения (10.8). В результате подстановки (10.9) в (10.8) составляют выражение

$$\left[\Theta_k''''(\theta) + 2\Theta_k'''(\theta) + \Theta_k(\theta) + \frac{\lambda^4}{a} \Theta_k(\theta) \right] Y_k(\alpha) \neq 0 \quad (k = 1, 2, 3, \dots). \quad (10.11)$$

Неравенство нулю объясняется тем, что принятая согласно (10.9) функция $\Phi(x, \theta)$ удовлетворяет основному уравнению (10.8) благодаря выбору одной из составляющих её частей ($Y_k(x)$) только на границах.

Чтобы максимально приблизить функцию $\Phi(x, \theta)$ к истинным значениям по всей длине оболочки, можно воспользоваться вариационным методом Бубнова – Галёркина. Для этого необходимо умножить выражение (10.11) на $Y_k(x)$, а затем проинтегрировать его в пределах от нуля до $x/R = l/R$.

Поскольку балочные функции обладают свойством ортогональности, т.е.

$$\int_0^l Y_j(x) \cdot Y_k(x) dx = 0 \quad \text{при } j \neq k,$$

** Решение дифференциального уравнения (10.8) в виде (10.9) предложено Канторовичем [9].

постольку правая часть уравнений

$$\Theta_k'''' (\theta) + 2\Theta_k'''(\theta) + \Theta_k (\theta) + \frac{\lambda^4}{a} \Theta_k (\theta) = 0 \quad (k=1,2,3,\dots)$$

в результате интегрирования будет нулевой. Таким образом, каждое уравнение второй группы искомой функции должно удовлетворять полученному обыкновенному дифференциальному уравнению восьмого порядка.

Последовательность решения такого рода уравнений хорошо известна. Определив корни характеристического уравнения

$$\chi^8 + 2\chi^6 + \chi^4 + \frac{\lambda^4}{a} = 0$$

или

$$\chi^4 (\chi^2 + 1) \chi^2 + \frac{\lambda^4}{a} = 0,$$

каковыми в рассматриваемом случае являются величины

$$\chi_{1,2,3,4} = \pm \eta_1 \pm i\zeta_1, \quad \chi_{5,6,7,8} = \pm \eta_2 \pm i\zeta_2,$$

где $\eta_1, \zeta_1, \eta_2, \zeta_2$ зависят от $\frac{\lambda^4}{a}$, находят общее решение

$$\Theta_k (\theta) = c_1 e^{\chi_1 \theta} + c_2 e^{\chi_2 \theta} + \dots + c_8 e^{\chi_8 \theta}.$$

Если рассматривать область оболочки вдоль образующей вблизи края с положительной координатой ($\theta = +\theta$), то в решении можно ограничиться четырьмя корнями с положительными вещественными частями:

$$\chi_{1,2} = \eta_1 \pm i\zeta_1, \quad \chi_{3,4} = \eta_2 \pm i\zeta_2.$$

Соответствующее решение имеет вид

$$\Theta_k = e^{\eta_1} (c_1 \cos \zeta_1 + c_2 \sin \zeta_1) + e^{\eta_2} (c_3 \cos \zeta_2 + c_4 \sin \zeta_2).$$

Т.к. слагаемые содержат произвольные постоянные, то ничего не изменится, если первое из них умножить на $e^{-\eta_1 \theta_0}$, а второе – на $e^{-\eta_2 \theta_0}$. Воспользовавшись новой координатой для отсчёта углов, начинающихся от края $\theta = +\theta_0$, в виде

$$\omega = \theta_0 - \theta,$$

функцию Θ_k можно представить в более удобной форме

$$\Theta_k (\omega) = e^{-\eta_1 \omega} (c_1 \cos \zeta_1 \omega + d_2 \sin \zeta_1 \omega) + e^{-\eta_2 \omega} (c_2 \cos \zeta_2 \omega + d_2 \sin \zeta_2 \omega).$$

В конечном счёте общее решение основного уравнения принимает вид

$$\Phi(x, \omega) = Y_k \left[e^{-\eta_1 \omega} (c_1 \cos \zeta_1 \omega + d_2 \sin \zeta_1 \omega) + e^{-\eta_2 \omega} (c_2 \cos \zeta_2 \omega + d_2 \sin \zeta_2 \omega) \right]. \quad (10.12)$$

На его основе с помощью формул (10.7) усилия в оболочке можно выразить через функции, которые входят в (10.12). Кроме того, перемещения также могут быть выражены через них. Это позволит без затруднений составить краевые условия и на их основе найти постоянные интегрирования.

З а м е ч а н и я :

1. Корни характеристического уравнения могут быть записаны в общем виде

$$\chi_{1,2,3,4,5,6,7,8} = \pm \sqrt{-\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} \pm i\zeta_1^2 \sqrt{\frac{1}{a}}}}.$$

Анализ величин, входящих в данное выражение, для оболочек средней длины указывает на то, что слагаемые практически не оказывают влияния на величину корней и потому могут быть опущены. Следовательно, корни можно вычислять по формуле

$$\chi_{1,2,3,4,5,6,7,8} = \pm \sqrt{\pm \sqrt{\pm ibm}},$$

где

$$b^4 = \frac{R^2}{l^2} \sqrt{\frac{1}{a}};$$

в таком случае

$$\eta_1 = \zeta_2 = \frac{1}{2} b \sqrt{m} \sqrt{2 + \sqrt{2}}, \quad \eta_2 = \zeta_1 = \frac{1}{2} b \sqrt{m} \sqrt{2 - \sqrt{2}},$$

т.е. все корни зависят лишь от одного параметра оболочки $b\sqrt{m}$.

2. Обоснование выражений для усилий согласно (10.7) будет дано в следующем разделе, в котором рассматривается общая (моментная) теория расчёта цилиндрических оболочек.

10.4. Приближённые методы анализа напряжённого состояния цилиндрической оболочки

Очевидно, выполнение расчётов цилиндрических оболочек путём интегрирования уравнений встречает затруднения. Поэтому рядом учёных были предложены другие подходы. В частности, Власов В.З. развил теорию «заменяющей складки», когда анализ оболочки сводится к расчёту складчатой системы. При этом применяются классические методы строительной механики – метод сил или метод перемещений. Обширные исследования состояния цилиндрических оболочек проведены в работах отечественных учёных: Пастернак П.Л. [19] воспользовался методом сил, Милейковский И.Е. [11] – методом перемещений. Другое направление исследований в работах Лауля Х.Х., Канна С.Н. основано на «балочной» теории [19].

11. ОБЩАЯ (МОМЕНТНАЯ) ТЕОРИЯ РАСЧЁТА ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ОБОЛОЧЕК

11.1. Уравнения состояния цилиндрической оболочки

Напряжённно-деформированное состояние коротких цилиндрических оболочек характеризуется взаимовлиянием всех внутренних усилий, возникающих при действии произвольных нагрузок. В общем случае состояние оболочки, как известно, описывается тремя группами уравнений: уравнениями равновесия (10.1), геометрическими зависимостями, взятыми для цилиндрических оболочек без каких-либо допущений, а именно:

$$\begin{aligned}\varepsilon_1 &= \frac{1}{R} \frac{\partial u}{\partial \alpha}, \\ \varepsilon_2 &= \frac{1}{R} \left(\frac{\partial v}{\partial \theta} + w \right), \\ \gamma &= \frac{1}{R} \left(\frac{dv}{d\alpha} + \frac{du}{d\theta} \right), \\ \kappa_1 &= -\frac{1}{R^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2}, \\ \kappa_2 &= -\frac{1}{R^2} \left(-\frac{\partial v}{\partial \theta} + \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \right), \\ \chi &= -\frac{1}{R^2} \left(-\frac{\partial v}{\partial \alpha} + \frac{\partial^2 w}{\partial \alpha \partial \theta} \right)\end{aligned}\tag{11.1}$$

и физическими уравнениями общего вида (8.4).

Полная система данных уравнений может быть приведена к одному разрешающему уравнению в перемещениях. Последовательность сведения состоит в следующем. Сначала из условий равновесия выводятся поперечные силы; в результате из пяти условий остаются только три:

$$\begin{aligned}\frac{\partial N_1}{\partial \alpha} + \frac{\partial T}{\partial \theta} + Rp_1 &= 0, \\ \frac{\partial T}{\partial \alpha} + \frac{\partial N_2}{\partial \theta} + \frac{1}{R} \left(\frac{\partial H}{\partial \alpha} + \frac{\partial M_2}{\partial \theta} \right) + Rp_2 &= 0, \\ \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{\partial H}{\partial \theta} + \frac{\partial M_1}{\partial \alpha} \right) + \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{\partial H}{\partial \alpha} + \frac{\partial M_2}{\partial \theta} \right) - N_2 + Rp_3 &= 0.\end{aligned}\tag{8.2,б}$$

После подстановки сюда величин внутренних усилий согласно (8.4) и приведения подобных членов в каждом уравнении с использованием дифференциальных операторов вида:

$$\begin{aligned}\Lambda_{11} &= \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} + \frac{1-\nu}{2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2}; \quad \Lambda_{12} = \frac{1+\nu}{2} \frac{\partial^2}{\partial \alpha \partial \theta}; \quad \Lambda_{13} = \nu \frac{\partial}{\partial \alpha}; \\ \Lambda_{21} &= \Lambda_{12}, \quad \Lambda_{22} = \frac{1-\nu}{2} \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} + \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + a^2 \left[2(1-\nu) \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} + \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right], \\ \Lambda_{23} &= \frac{\partial}{\partial \theta} - a^2 \left[(2-\nu) \frac{\partial^3}{\partial \alpha^2 \partial \theta} + \frac{\partial^3}{\partial \theta^3} \right],\end{aligned}\tag{11.2}$$

$$\Lambda_{31} = \Lambda_{13}, \quad \Lambda_{32} = \Lambda_{23}, \quad \Lambda_{33} = 1 + a^2 \nabla^2 \nabla^2,$$

постоянных $a = \frac{h^2}{12R^2}$ и $b = \frac{1-\nu^2}{Eh^2}$, а также параметров компонент вектора нагрузки $q_1 = bp_1$, $q_2 = bp_2$, $q_3 = bp_3$ система уравнений моментной теории цилиндрической оболочки в перемещениях принимает вид:

$$\begin{aligned}\Lambda_{11}u + \Lambda_{12}v + \Lambda_{13}w + R^2q_1 &= 0, \\ \Lambda_{21}u + \Lambda_{22}v + \Lambda_{23}w + R^2q_2 &= 0, \\ \Lambda_{31}u + \Lambda_{32}v + \Lambda_{33}w + R^2q_3 &= 0.\end{aligned}\tag{11.3}$$

Матрица данной системы уравнений, как явствует из определений операторов (11.2), симметрична, что является следствием теоремы Бетти. При постоянных Λ_{ij} ($i, j = 1, 2, 3$), которые считаются коэффициентами системы, её можно решить как обычную систему линейных алгебраических уравнений.

Для этого, во-первых, следует переписать систему (11.3) в стандартной форме:

$$\begin{aligned}\Lambda_{11}u + \Lambda_{12}v + \Lambda_{13}w &= f_1, \\ \Lambda_{21}u + \Lambda_{22}v + \Lambda_{23}w &= f_2, \\ \Lambda_{31}u + \Lambda_{32}v + \Lambda_{33}w &= f_3,\end{aligned}$$

используя обозначение $f_i = -R^2q_i$ ($i = 1, 2, 3$). Тогда её решение проще записать в матричном виде

$$\bar{U} = [\Lambda]^{-1} \bar{F}.\tag{11.4}$$

Здесь $\bar{U} = (u, v, w)^T$ обозначает вектор-столбец перемещений произвольной точки оболочки, $\bar{F} = (f_1, f_2, f_3)^T$ – вектор нагрузки,

$$[\Lambda] = \begin{bmatrix} \Lambda_{11} & \Lambda_{12} & \Lambda_{13} \\ \Lambda_{21} & \Lambda_{22} & \Lambda_{23} \\ \Lambda_{31} & \Lambda_{32} & \Lambda_{33} \end{bmatrix}$$

– матрица коэффициентов, состоящая из операторов Λ_{ij} ($i, j = 1, 2, 3$) (см. (11.2)).

Более подробно выражение (11.4) записывается через определители, т.е.

$$\bar{U} = \frac{\begin{vmatrix} L_{11} & L_{21} & L_{31} \\ L_{12} & L_{22} & L_{32} \\ L_{13} & L_{23} & L_{33} \end{vmatrix}}{\Delta([\Lambda])} \bar{F},$$

где L_{ij} ($i, j = 1, 2, 3$) – миноры определителя $\Delta([\Lambda])$; как известно, матрица, составленная из этих миноров, называется *союзной матрицей*.

В развёрнутой форме *частное решение* системы уравнений (11.3) принимает вид:

$$\begin{aligned} u^* &= \frac{1}{\Delta([\Lambda])} (L_{11}f_1 + L_{21}f_2 + L_{31}f_3), \\ v^* &= \frac{1}{\Delta([\Lambda])} (L_{12}f_1 + L_{22}f_2 + L_{32}f_3), \\ w^* &= \frac{1}{\Delta([\Lambda])} (L_{13}f_1 + L_{23}f_2 + L_{33}f_3). \end{aligned}$$

Образуя новые функции уровня нагружения оболочки

$$\Psi_i = \frac{f_i}{\Delta([\Lambda])} \quad (i = 1, 2, 3), \quad (11.5, a)$$

перемещения можно записать более компактно, а именно:

$$\begin{aligned} u^* &= L_{11}\Psi_1 + L_{21}\Psi_2 + L_{31}\Psi_3, \\ v^* &= L_{12}\Psi_1 + L_{22}\Psi_2 + L_{32}\Psi_3, \\ w^* &= L_{13}\Psi_1 + L_{23}\Psi_2 + L_{33}\Psi_3. \end{aligned} \quad (11.6)$$

Миноры матрицы $[\Lambda]$ находятся без труда:

$$\begin{aligned} L_{11} &= L_{22}L_{33} - L_{32}L_{23}, & L_{22} &= L_{11}L_{33} - L_{31}L_{13}, & L_{33} &= L_{11}L_{22} - L_{12}L_{21}, & (*) \\ L_{12} &= -(L_{21}L_{33} - L_{32}L_{31}), & L_{21} &= L_{12} & L_{13} &= L_{31}, & L_{23} &= L_{32}. \end{aligned}$$

С учётом определений операторов согласно (11.2), оператор L_{11} , например, имеет вид:

$$L_{11} = a^2(2-\nu)\left(\frac{1}{2} + 2a^2\right)\frac{\partial^6}{\partial\theta^6} + a^2\left[(2-\nu) + a^2(1-\nu^2)\right]\frac{\partial^6}{\partial\alpha^2\partial\theta^4} +$$

$$+ a^2\left[\frac{1+\nu}{2} + a^2(2-\nu)\right]\frac{\partial^6}{\partial\alpha^2\partial\theta^4} + a^4\frac{\partial^6}{\partial\theta^6} + 2a^2(2-\nu)\frac{\partial^4}{\partial\alpha^2\partial\theta^2} +$$

$$+ 2a^2\frac{\partial^4}{\partial\theta^4} + (1-\nu)\left(\frac{1}{2} + 2a^2\right)\frac{\partial^2}{\partial\alpha^2} + a^2\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}.$$

Остальные миноры имеют аналогичную структуру. В силу симметрии матрицы $[\Lambda]$ справедливы равенства:

$$L_{21} = L_{12}, \quad L_{13} = L_{31}, \quad L_{23} = L_{32}.$$

Равенства (11.5,а) можно рассматривать как систему трёх уравнений, в которой неизвестными являются функции Ψ_i ($i=1,2,3$)

$$\Delta([\Lambda])\Psi_i = f_i \quad (i=1,2,3), \quad (11.5,б)$$

или

$$\begin{vmatrix} L_{11} & L_{21} & L_{31} \\ L_{12} & L_{22} & L_{32} \\ L_{13} & L_{23} & L_{33} \end{vmatrix} \Psi_i = f_i \quad (i=1,2,3).$$

Раскрыв этот определитель по правилу Саррюса и приняв во внимание определение (*) и ему подобные, выводят разрешающее уравнение моментной теории оболочки, соответствующее частному решению

$$\frac{a^2(1-\nu^2)}{2}\left\{\left(1+4a^2\right)\frac{\partial^8\Psi_i}{\partial\alpha^8} + 4\left(1+a^2\right)\frac{\partial^8\Psi_i}{\partial\alpha^6\partial\theta^2}\right\} +$$

$$+ \left[6+a^2(1-\nu^2)\right]\frac{\partial^8\Psi_i}{\partial\alpha^4\partial\theta^4} + 4\frac{\partial^8\Psi_i}{\partial\alpha^2\partial\theta^6} + \frac{\partial^8\Psi_i}{\partial\theta^8} +$$

$$+ (8-2\nu^2)\frac{\partial^6\Psi_i}{\partial\alpha^4\partial\theta^2} + 8\frac{\partial^6\Psi_i}{\partial\alpha^2\partial\theta^4} + 2\frac{\partial^6\Psi_i}{\partial\theta^6} +$$

$$+ \left(4+\frac{1}{a^2}\right)(1-\nu^2)\frac{\partial^4\Psi_i}{\partial\alpha^4} + 4\frac{\partial^4\Psi_i}{\partial\alpha^2\partial\theta^2} + \frac{\partial^4\Psi_i}{\partial\theta^4} = f_i, \quad (i=1,2,3). \quad (11.7)$$

Общее решение однородной системы уравнений

$$u_0 = L_{11}\Psi_{01} + L_{21}\Psi_{02} + L_{31}\Psi_{03},$$

$$v_0 = L_{12}\Psi_{01} + L_{22}\Psi_{02} + L_{32}\Psi_{03},$$

$$w_0 = L_{13}\Psi_{01} + L_{23}\Psi_{02} + L_{33}\Psi_{03} \quad (11.8)$$

нетрудно установить на основе (11.5,б), полагая правую часть нулевой, т.е.

$$\begin{vmatrix} L_{11} & L_{21} & L_{31} \\ L_{12} & L_{22} & L_{32} \\ L_{13} & L_{23} & L_{33} \end{vmatrix} \Psi_{0i} = 0 \quad (i=1,2,3).$$

Приняв, в частности, функции

$$\Psi_{01} = 0, \quad \Psi_{02} = 0, \quad \Psi_{03} = \frac{2}{1-\nu} \Psi,$$

согласно (11.6) находят:

$$u_0 = L_{31} \Psi_3 \quad v_0 = L_{32} \Psi, \quad w_0 = L_{33} \Psi.$$

Для вывода разрешающего уравнения, соответствующего однородной системе

$$\begin{vmatrix} L_{11} & L_{21} & L_{31} \\ L_{12} & L_{22} & L_{32} \\ L_{13} & L_{23} & L_{33} \end{vmatrix} \frac{2}{1-\nu} \Psi = 0 \quad (i=1,2,3),$$

достаточно, как и в решении частной задачи, развернуть определитель и учесть выражение (*) и подобные ему. В итоге приходят к разрешающему уравнению общей (моментной) теории цилиндрической оболочки

$$\begin{aligned} & (1+4a^2) \frac{\partial^8 \Psi}{\partial \alpha^8} + 4(1+a^2) \frac{\partial^8 \Psi}{\partial \alpha^6 \partial \theta^2} + [6+a^2(1-\nu^2)] \frac{\partial^8 \Psi}{\partial \alpha^2 \partial \theta^6} + \\ & + 4 \frac{\partial^8 \Psi}{\partial \alpha^4 \partial \theta^4} + \frac{\partial^8 \Psi}{\partial \theta^8} + (8-2\nu^2) \frac{\partial^6 \Psi}{\partial \alpha^4 \partial \theta^2} + 8 \frac{\partial^6 \Psi}{\partial \alpha^2 \partial \theta^4} + 2 \frac{\partial^6 \Psi}{\partial \theta^6} + \\ & + \left(4 + \frac{1}{a^2}\right) (1-\nu^2) \frac{\partial^4 \Psi}{\partial \alpha^4} + 4 \frac{\partial^4 \Psi}{\partial \alpha^2 \partial \theta^2} + \frac{\partial^4 \Psi}{\partial \theta^4} = 0. \end{aligned} \quad (11.9)$$

11.2. Упрощённая форма разрешающего уравнения

Влияние вкладов ряда слагаемых, содержащихся в формулах миноров (*), на величину перемещений цилиндрических оболочек незначительно. Анализ решений многих задач показал, что слагаемыми, обладающими

множителем $a = \frac{h^2}{12R^2}$, можно пренебречь (за исключением тех, которые

входят в выражение оператора $L_{33} = L_{11}L_{22} - L_{12}L_{21}$). С учётом данного замечания уравнение (11.7) упрощается

$$\begin{aligned} & \frac{a^2(1-\nu^2)}{2} \left[\frac{\partial^8 \Psi_i}{\partial \alpha^8} + 4 \frac{\partial^8 \Psi_i}{\partial \alpha^6 \partial \theta^2} + 6 \frac{\partial^8 \Psi_i}{\partial \alpha^4 \partial \theta^4} + 4 \frac{\partial^8 \Psi_i}{\partial \alpha^2 \partial \theta^6} + \frac{\partial^8 \Psi_i}{\partial \theta^8} + \right. \\ & \left. + \left(\frac{1}{a^2} \right) (1-\nu^2) \frac{\partial^4 \Psi_i}{\partial \alpha^4} \right] = f_i \quad (i=1,2,3). \end{aligned}$$

На этом же основании разрешающее уравнение общей (моментной) теории расчёта цилиндрических оболочек приводится к более краткой форме

$$\nabla^2 \nabla^2 \nabla^2 \nabla^2 \Psi + \frac{1}{a^2} (1 - \nu^2) \frac{\partial^4 \Psi}{\partial \alpha^4} = 0, \quad (11.10)$$

где неизвестной является *функция уровня нагружения и деформаций* Ψ .

Компоненты вектора перемещения произвольной точки оболочки могут быть выражены через данную функцию по формулам:

$$\begin{aligned} u &= \frac{\partial^3 \Psi}{\partial \alpha \partial \theta^2} - \nu \frac{\partial^3 \Psi}{\partial \alpha^3} + u_0, \\ v &= -\frac{\partial^3 \Psi}{\partial \theta^3} - (2 + \nu) \frac{\partial^3 \Psi}{\partial \alpha^2 \partial \theta} + v_0, \\ w &= -\nabla^2 \nabla^2 \Psi + w_0. \end{aligned} \quad (11.11)$$

Усилия в оболочке, удовлетворяющие условиям равновесия (8.2,б), также выражаются через функцию Ψ :

$$\begin{aligned} N_1 &= \frac{Eh}{R} \frac{\partial^4 \Psi}{\partial \alpha^2 \partial \theta^2}, \\ N_2 &= \frac{Eh}{R} \frac{\partial^4 \Psi}{\partial \alpha^4}, \\ T &= -\frac{Eh}{R} \frac{\partial^4 \Psi}{\partial \alpha^3 \partial \theta}, \\ M_1 &= \frac{D}{R^2} \left(\frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} + \nu \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right) \nabla \nabla \Psi, \\ M_2 &= \frac{D}{R^2} \left(\frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \nu \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} \right) \nabla \nabla \Psi, \\ M_{12} = -M_{21} &= -\frac{D}{R^2} (1 - \nu) \frac{\partial^2}{\partial \alpha \partial \theta} \nabla \nabla \Psi, \\ Q_1 &= \frac{D}{R^3} \frac{\partial}{\partial \alpha} \nabla \nabla \nabla \Psi, \\ Q_2 &= \frac{D}{R^3} \frac{\partial}{\partial \theta} \nabla \nabla \nabla \Psi. \end{aligned} \quad (11.12)$$

Дифференциальное уравнение (11.10), представленное в форме

$$(\nabla)^4 \Psi + 4\gamma^4 \frac{\partial^4 \Psi}{\partial \alpha^4} = 0,$$

где

$$\gamma = \sqrt[4]{\frac{3(1 - \nu^2)R^2}{h^2}},$$

эквивалентно системе четырёх уравнений второго порядка

$$\nabla \Psi_k \pm \gamma(1 \pm i) \frac{\partial \Psi_k}{\partial \alpha} = 0 \quad (k=1,2,3,4), \quad i = \sqrt{-1}. \quad (11.13)$$

Если каждую функцию нагружения Ψ_k ($k=1,2,3,4$) выразить в виде произведения экспоненты на некоторую новую функцию напряжения F_k ($k=1,2,3,4$):

$$\Psi_1 = e^{-\frac{1}{2}\gamma(1+i)\alpha} F_1,$$

$$\Psi_2 = e^{\frac{1}{2}\gamma(1+i)\alpha} F_2,$$

$$\Psi_3 = e^{-\frac{1}{2}\gamma(1-i)\alpha} F_3,$$

$$\Psi_4 = e^{\frac{1}{2}\gamma(1-i)\alpha} F_4,$$

то уравнение (11.10) распадается на группу четырёх независимых уравнений

$$\nabla F_k + i \delta_k F_k = 0 \quad (k=1,2,3,4), \quad i = \sqrt{-1}, \quad \delta_k = \pm \frac{R}{2h} \sqrt{3(1-\nu^2)}. \quad (11.14)$$

Подобные по форме уравнения описывают колебания мембраны. Их интегралы хорошо изучены и потому могут быть использованы при выполнении расчётов цилиндрических оболочек на статические нагрузки.

11.3. Расчёт коротких цилиндрических оболочек покрытий

Основные типы конструктивных решений покрытий представлены на рис. 11.1. Первый из них характеризуется многоволновой оболочкой, опирающейся непосредственно на колонны (схема I). Во втором случае опирание происходит через бортовой элемент – балку (схема II). В последнем варианте рассматривается оболочка, плавно переходящая в бортовой элемент, в котором возможно появление кручения (схема III). Оболочка считается короткой, если отношение длины оболочки к радиусу цилиндра не превышает единицы, т.е. при $L/R \leq 1$.

Любая внешняя нагрузка на поверхности оболочки может быть представлена в виде рядов:

$$\begin{aligned} q_x &= \sum_m^{\infty} X_m(\theta) \cos \frac{\lambda_m x}{R}, \\ q_y &= \sum_m^{\infty} Y_m(\theta) \sin \frac{\lambda_m x}{R}, \\ q_z &= \sum_m^{\infty} Z_m(\theta) \sin \frac{\lambda_m x}{R}, \end{aligned} \quad (11.15)$$

где $\lambda_m = \frac{m\pi L}{R}$. То же касается и частных решений основного уравнения:

$$\begin{aligned} u_0 &= \sum_m^{\infty} U_{0m} \cos \frac{\lambda_m x}{R}, \\ v_0 &= \sum_m^{\infty} V_{0m} \sin \frac{\lambda_m x}{R}, \\ w_0 &= \sum_m^{\infty} W_{0m} \sin \frac{\lambda_m x}{R}. \end{aligned} \quad (11.16)$$

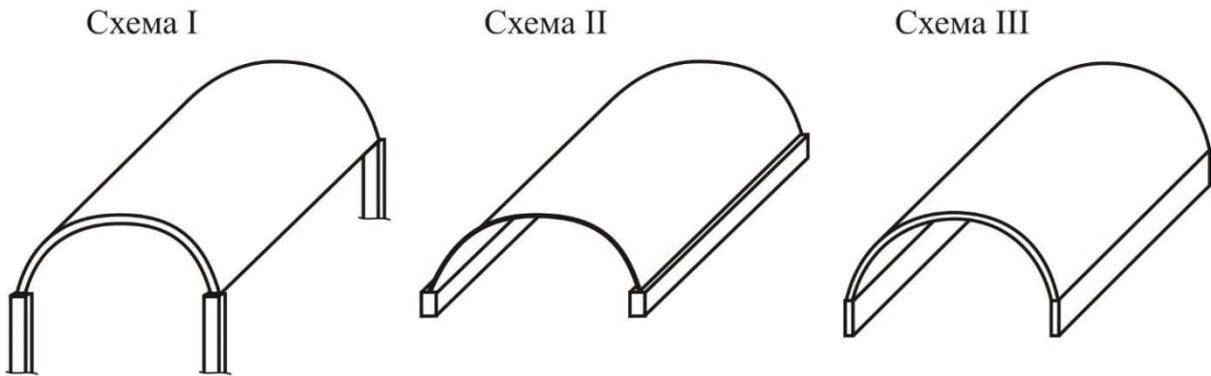


Рис. 11.1

Пользуясь данными разложениями, на основе (11.12) легко определить усилия N_1 , M_1 и с их помощью убедиться в соблюдении граничных условий для шарнирных краёв при $x = 0$, $x = L$.

Для вычисления перемещений при отсутствии внешнего воздействия $q_x = q_y = q_z = 0$ функцию напряжений следует принять в виде

$$F_k = e^{2\theta} \sin \frac{\lambda_k x}{R}.$$

Подставив её в дифференциальное уравнение (11.14), приходят к характеристическому уравнению относительно корней χ

$$(\chi^2 - \lambda_k^2)^4 + \frac{(1 - \nu^2)}{a^2} \lambda_k^4 = 0,$$

где $a = \frac{h^2}{12R^2}$ – геометрический параметр, характеризующий относительную толщину оболочки.

Решив уравнение, находят:

$$\chi_{1,2} = \gamma_1 \pm i\beta_1, \quad \chi_{3,4} = \gamma_2 \pm i\beta_2, \quad \chi_{5,6} = -\chi_{1,2}, \quad \chi_{7,8} = \chi_{3,4}.$$

Вводя новые параметры оболочки:

$$\rho = \sqrt{\lambda_k} \sqrt{\frac{(1-\nu^2)}{\varepsilon^2}}, \quad \sigma = \frac{\lambda_k^2}{\rho^2},$$

вещественные и мнимые части корней можно представить в следующем виде:

$$\gamma_1 = \frac{\rho}{\sqrt[4]{8}} \sqrt{\sqrt{(1+\sigma\sqrt{2})^2 + 1} + 1 + \rho\sqrt{2}}, \quad \beta_1 = \frac{1}{\gamma_1} \frac{\rho^2}{\sqrt{8}},$$

$$\gamma_2 = \frac{\rho}{\sqrt[4]{8}} \sqrt{\sqrt{(1+\sigma\sqrt{2})^2 + 1} - 1 - \rho\sqrt{2}}, \quad \beta_2 = \frac{1}{\gamma_2} \frac{\rho^2}{\sqrt{8}}.$$

При известных корнях характеристического уравнения функция напряжений принимает вид

$$F = \sum_{k=1}^{\infty} f_k(\theta) \sin \frac{\lambda_k x}{R}, \quad (11.17)$$

где

$$f_k(\theta) = C_{1k} e^{\chi_1 \theta} + C_{2k} e^{\chi_2 \theta} + \dots + C_{8k} e^{\chi_8 \theta},$$

C_{1k}, C_{2k}, \dots – произвольные постоянные.

Вычислив производные функции напряжений, входящие в формулы для перемещений (11.11), и суммируя их с выражениями (11.16), несложно найти перемещения оболочки:

$$u = \sum_m^{\infty} (f_k'' \lambda_k + \nu \lambda_k^3 f_k + U_{0m}) \cos \frac{\lambda_m x}{R},$$

$$v = \sum_m^{\infty} [(2+\nu) \lambda_k^2 f_k' - f_k'''' + V_{0m}] \sin \frac{\lambda_m x}{R}, \quad (11.18)$$

$$w = \sum_m^{\infty} (2 \lambda_k^2 f_k'' - f_k'''' - \lambda_k^4 f_k + W_{0m}) \sin \frac{\lambda_m x}{R},$$

где штрих над функцией обозначает дифференцирование по дуге, т.е. $f' = \partial/\partial\theta$.

11.4. Граничные условия для расчёта коротких оболочек на вертикальные нагрузки

Для примера далее рассматривается формулировка граничных условий для оболочки, проектируемой по второй расчётной схеме (рис. 11.1,б). Приводятся расчётные формулы для случая, когда на оболочку действует равномерно распределённая по поверхности вертикальная нагрузка p , проекции которой составляют:

$$X = 0, \quad Y = p \sin \theta, \quad Z = p \cos \theta.$$

По данным значениям легко определить величины (11.15):

$$\begin{aligned} q_x &= \frac{2}{L} \int_0^L X \cos \frac{\lambda_m x}{R} dx = 0, \\ q_y &= \frac{2}{L} \int_0^L Y \sin \frac{\lambda_m x}{R} dx = \frac{4p}{m\pi} \sin \theta \quad (m = 1, 2, 3, \dots), \\ q_z &= \frac{2}{L} \int_0^L Z \sin \frac{\lambda_m x}{R} dx = \frac{4p}{m\pi} \cos \theta. \end{aligned} \quad (11.19)$$

Частное решение, соответствующее указанному характеру нагружения, можно принять в форме:

$$U_{0m} = A_{0m} \cos \frac{\lambda_m x}{R}, \quad V_{0m} = B_{0m} \sin \frac{\lambda_m x}{R}, \quad W_{0m} = C_{0m} \cos \frac{\lambda_m x}{R}. \quad (11.20)$$

В таком случае функцию $f_k(\theta)$, удовлетворяющую условиям симметрии относительно меридиональной плоскости $\theta = 0$, следует взять в следующем виде:

$$\begin{aligned} f_k(\theta) &= A_{1k} \cos \beta_1 \theta \operatorname{ch} \gamma_1 \theta + A_{2k} \sin \beta_1 \theta \operatorname{sh} \gamma_1 \theta + \\ &+ A_{3k} \cos \beta_2 \theta \operatorname{ch} \gamma_2 \theta + A_{4k} \sin \beta_2 \theta \operatorname{ch} \gamma_2 \theta, \end{aligned} \quad (11.21)$$

где A_{1k}, A_{2k}, \dots – произвольные постоянные, $k = 1, 3, 5, \dots$; β_1, \dots, γ_2 – корни характеристического уравнения.

Если воспользоваться обозначениями векторов перемещений оболочки в общей и локальной системах координат через $\bar{\delta} = (y, z)^T$ и $\bar{\eta} = (w, v)^T$, соответственно, то связь между ними можно представить в матричном виде

$$\bar{\delta} = [\Theta] \bar{\eta}, \quad (11.22)$$

где

$$[\Theta] = \begin{bmatrix} \cos \theta_0 & -\sin \theta_0 \\ \sin \theta_0 & \cos \theta_0 \end{bmatrix}$$

– матрица поворота вектора перемещений, θ_0 – половина центрального угла оболочки [12] (рис. 11.2,а).

Аналогичная зависимость между компонентами реакции $\bar{\zeta} = (V, H)^T$ на опоре и вектора обобщённых напряжений $\bar{\xi} = (S, N_2)^T$ записывается в аналогичной форме (рис. 11.2,б)

$$\bar{\zeta} = [\Theta] \bar{\xi}, \quad (11.23)$$

где $S = \frac{dM_{12}}{dx} + Q_2$ – нормальная составляющая напряжений в оболочке. На основе приведенных матричных соотношений можно установить граничные условия, необходимые при интегрировании разрешающего уравнения (11.13).

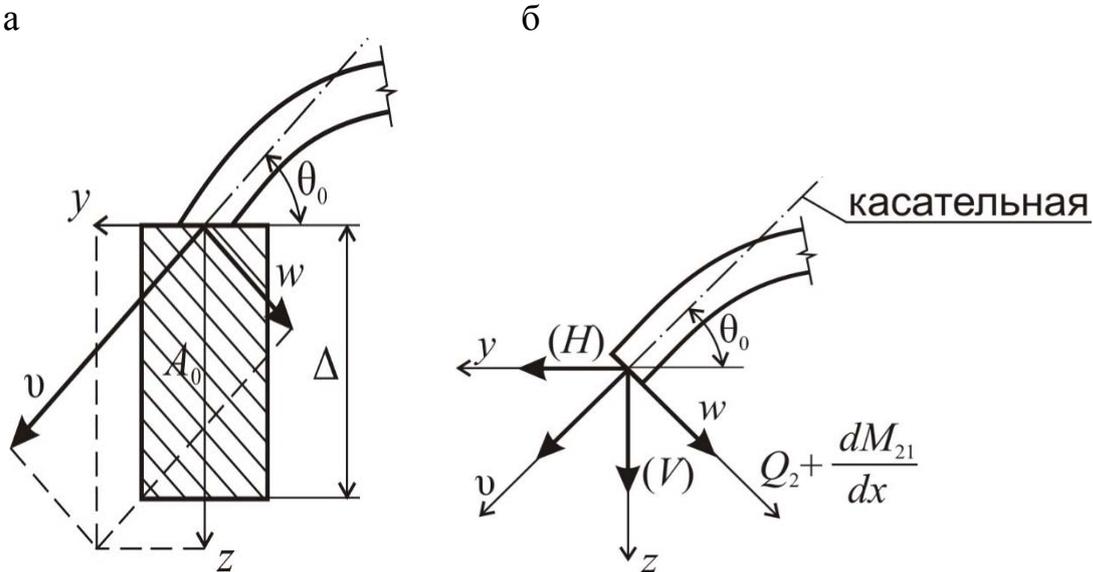


Рис. 11.2

В многоволновой оболочке с бортовыми элементами по II расчётной схеме (рис. 11.1), т.е. в случае наличия бортового элемента между оболочками в виде балки прямоугольного сечения с площадью A_0 , высотой Δ и жёсткостью EI , прогибы элемента можно найти из уравнения изгиба в вертикальной плоскости

$$EI \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} = G - 2V + 2 \frac{\Delta}{2} \frac{\partial T}{\partial x}, \quad (11.24)$$

где G – погонный вес балки; T – сдвигающее усилие в оболочке на её кромке, направленное вдоль оси балки. Последнее слагаемое в уравнении (11.24) отражает разность уровней боковой грани срединной поверхности оболочки на контуре и оси балки.

Очевидно, на стыке оболочек вертикальная составляющая реакции и вес элемента должны быть уравновешены $G = 2V$. Отсюда следует, что согласно (11.20) вес балки можно разложить в ряд

$$G = \frac{4G}{\pi} \sum_{k=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{1}{k} \sin \frac{\lambda_k x}{R}. \quad (11.25).$$

Кроме того, необходимо принять во внимание и зависимость между деформациями оболочки и балки в уровне верха последней

$$\frac{2}{EA} \int_0^{\alpha} T dx + \frac{\Delta}{2} \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{\partial u}{\partial x}. \quad (11.26)$$

Вследствие симметрии конструкции в месте сопряжения оболочек горизонтальные перемещения балки, которые в общем случае находятся по формуле (11.22)

$$y = v \cos \theta_0 - w \sin \theta_0,$$

отсутствуют. Следовательно, перемещения оболочки в этом месте в направлении касательной связаны с её прогибами

$$v = w \operatorname{tg} \theta_0.$$

Одновременно с этим угол поворота χ кромки оболочки при $\theta = \theta_0$, определяемый выражением (11.1), также равен нулю. Поэтому справедливо ещё и соотношение вида

$$v = -\frac{\partial w}{\partial x}.$$

Составив граничные условия, переходят к определению коэффициентов A_{1k}, \dots, A_{4k} функции (11.21). Функция напряжений F находится из решения системы уравнений (11.24) и (11.26). Зная её, по формулам (11.18) определяют перемещения оболочки, а по формулам (11.12) – внутренние усилия.

В частности, для оболочки с пролётом 11,8 м и радиусом срединной поверхности $R = 10$ м (длиной $L = 41$ м) при действии нагрузки $p = 2,45$ кН/м² построены эпюры усилий T , N_θ , N_θ , M_θ , Q_θ , показанные на эпюрах (рис. 11.3). Погонный вес балки составляет $G = 6,5$ кН/м. Если при расчёте цилиндрической оболочки ограничится безмоментной (мембранной) теорией, то соответствующие усилия оказываются значительно меньшими (см. пунктирные линии на эпюрах).

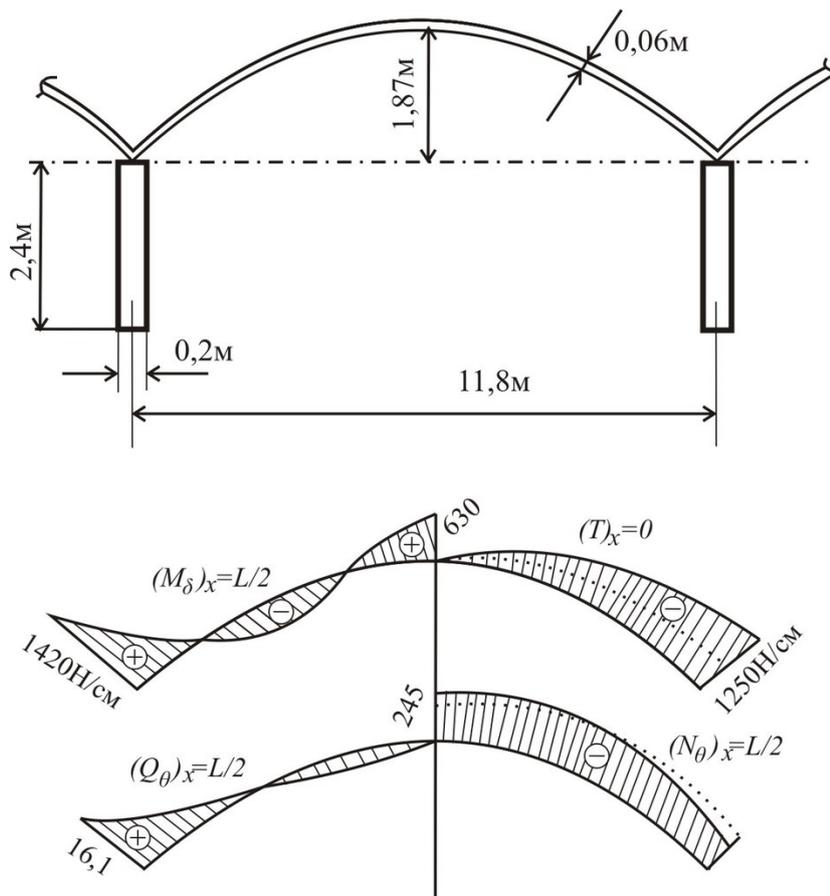


Рис. 11.3

Влияние высоты бортовой балки на внутренние усилия в цилиндрических оболочках при различных отношениях пролёта к длине подробно рассматривается в работе Цетыркина И.Е. [19].

При проектировании коротких цилиндрических оболочек рекомендуется пользоваться таблицами расчётных значений внутренних усилий, помещёнными в справочной литературе [1, 17].

12. РАСЧЁТ ОБОЛОЧЕК МЕТОДОМ КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

Изложение метода конечных элементов для расчёта оболочек, в рамках принятого в данном курсе лекций объёма материала, ограничено рассмотрением МКЭ для цилиндрической оболочки. Особенности применения МКЭ в теории расчёта оболочек иной формы можно найти в книге Зенкевича [21], а также в описаниях различных программных комплексов (Ли́ра, SCAD и др.).

12.1. Применение МКЭ в теории расчёта оболочек

Тонкостенные оболочки относятся к тем объектам, на которые в первую очередь ориентирован метод конечных элементов. Объясняется это сложной структурой систем дифференциальных уравнений, описывающих напряжённо-деформированное состояние оболочек, и, как следствие, отсутствием общего метода интегрирования таких систем (см. разд. 6).

При расчёте по МКЭ гладкая поверхность оболочек подвергается дискретизации. Она может быть осуществлена различными способами. Наиболее естественной для цилиндрической оболочки является рехтэкизация поверхности, т.е. разбиение её на прямоугольные в плане конечные элементы – цилиндрические панели (рис. 12.1,а). Дискретизацию оболочки можно произвести и путём триангулизации, разделив поверхность на мелкие треугольные КЭ. Очевидно, для оболочек сложной формы триангулизация предпочтительна (рис. 12.1,б). Конечно, указанные приёмы дискретизации оболочек могут быть использованы одновременно, к примеру, при дискретизации оболочки, служащей деталью кузова автомобиля (рис. 12.1,в).

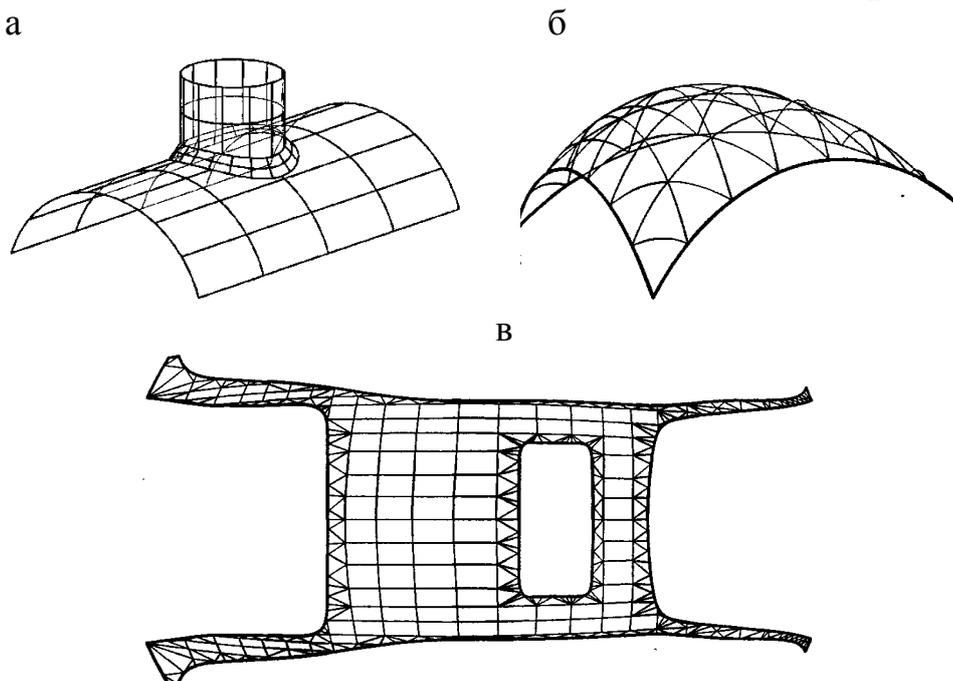


Рис. 12.1

В геометрии разработаны методы дискретизации, в частности триангулизации поверхностей*. В современных программных комплексах содержатся соответствующие процедуры автоматического построения КЭ-моделей оболочек.

12.2. Свойства конечных элементов оболочек

Известно, что сходимость МКЭ определяется свойством приближённых выражений для перемещений или деформаций описывать произвольное деформированное состояние конечного элемента. При этом в первую очередь необходимо как можно точнее установить нулевое и постоянное слагаемые в выражениях для деформаций. Объясняется это тем, что нулевой деформации соответствует движение элемента как жёсткого целого, а постоянное слагаемое отвечает постоянной величине деформации (кривизны) в области элемента. Очевидно, в процессе формирования матрицы жёсткости нельзя принимать такие функции формы, которые допускают деформации элемента при перемещении его как твёрдого тела.

Как известно, для сходимости решения по МКЭ необходимо выполнение условий полноты и совместности.

- *Условие полноты* заключается в выборе таких интерполяционных функций, с помощью которых охватываются перемещения элемента как твёрдого тела, а также состояния постоянных деформаций. Удовлетворить им несложно. Например, выбором полных полиномов для образования интерполяционных функций эти условия автоматически выполняются (см. КЭЭ – Богнер, Фокс, Шмит).

- *Условие совместности* конечного элемента заключается в обеспечении непрерывности наклона касательных к срединной поверхности для направлений, перпендикулярных к границам между элементами.

Конечные элементы, удовлетворяющие приведенным условиям, называются согласованными или конформными.

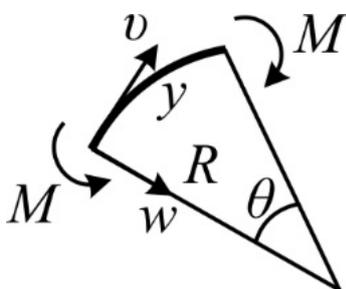


Рис. 12.2

Основная проблема, возникающая при построении конечных элементов оболочек, связана с поиском согласованных элементов, поскольку дело осложняется наличием кривизны поверхности. Чтобы убедиться в этом, достаточно обратиться к простому примеру, где встречаются с аналогичной проблемой. Например, рассматривая чистый изгиб кругового стержня радиуса R (рис. 12.2), естественно принять линейный полином для аппроксимации перемещений по касательной

$$v = \alpha_1 + \alpha_2 y \quad (12.1, a)$$

* Коновалов Н.Н. Геометрическое моделирование. – М.: Физматлит, 2002. – 472 с.

и кубичный – для прогибов

$$w = \alpha_3 + \alpha_4 y + \alpha_{11} y + \alpha_5 y^2 + \alpha_6 y^3 \quad (y = \theta R). \quad (12.1, б)$$

Согласно определениям деформаций кругового бруса [10] с учётом принятого изменения перемещений легко найти удлинение и кривизну оси:

$$\varepsilon = \frac{d\nu}{dy} + \frac{w}{R} = \alpha_2 + \frac{1}{R} (\alpha_3 + \alpha_4 y + \alpha_5 y^2 + \alpha_6 y^3), \quad (12.2, а)$$

$$\kappa = -\frac{d^2 w}{dy^2} + \frac{1}{R} \frac{d\nu}{dy} = -2\alpha_5 - 6\alpha_6 y + \frac{\alpha_2}{R}. \quad (12.2, б)$$

Данные выражения удовлетворяют решению рассматриваемой задачи:

$$\varepsilon = 0 \text{ и } \kappa = \frac{M}{EI} = \text{const}$$

при $\alpha_2 = \kappa R$, $\alpha_3 = -\kappa R$, $\alpha_1 = \alpha_4 = \alpha_5 = \alpha_6 = 0$. Это означает, что аппроксимации (12.1) точно описывают чистый изгиб бруса.

Если же перемещения элемента как твёрдого тела задать в явной форме [10]:

$$\begin{aligned} \nu^0 &= C_1 \cos \frac{y}{R} \approx \left[1 - \frac{1}{2!} \left(\frac{y}{R} \right)^2 \right], \\ w^0 &= C_1 \sin \frac{y}{R} \approx \left[\frac{y}{R} - \frac{1}{3!} \left(\frac{y}{R} \right)^3 \right], \end{aligned} \quad (12.3)$$

то на основе данных разложений перемещений в ряды для коэффициентов аппроксимаций (12.2) можно установить, что

$$\alpha_1 = C, \quad \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_5 = 0, \quad \alpha_4 = \frac{C}{R}, \quad \alpha_6 = -\frac{1}{3!} \left(\frac{C}{R} \right).$$

В таком случае осевые и изгибные деформации элемента, равные:

$$\varepsilon^0 = \frac{d\nu}{dy} + \frac{w}{R} = \frac{C}{R} \left(y - \frac{y^3}{3! R^2} \right), \quad (12.4, а)$$

$$\kappa^0 = -\frac{d^2 w}{dy^2} + \frac{1}{R} \frac{d\nu}{dy} = \frac{C}{R^3} y, \quad (12.4, б)$$

отличны от нуля, в то время как выражения перемещений (12.1) позволяют получить точно нуль.

С помощью соотношений (12.4) легко оценить влияние пологости бруса на точность описания жёстких перемещений. Очевидно, увеличение R , равносильное увеличению пологости, приводит к уменьшению величин ε^0 , κ^0 . При сохранении одной и той же точности представления жёстких

смещений оно может быть обеспечено увеличением длины u элемента. Следовательно, приемлемой точности для непологих стержней, в том числе арок, можно добиться путём уменьшения шага сетки разбиения. Аналогичная ситуация встречается и при описании перемещений в оболочках.

Для выхода из создавшегося положения было предложено два способа. В одном случае попробовали увеличивать степень полиномов, а в другом - рекомендовалось добавлять к перемещениям жёсткие смещения в явном виде. Например, если воспользоваться кубическими полиномами для перемещений

$$\begin{aligned} v &= \alpha_1 + \alpha_2 y + \alpha_3 y^2 + \alpha_4 y^3, \\ w &= \alpha_5 + \alpha_6 y + \alpha_7 y^2 + \alpha_8 y^3, \end{aligned}$$

то деформации при такой аппроксимации перемещений стержня оказываются намного ближе к истинным:

$$\varepsilon^0 = -C \frac{y^3}{3!R^2}, \quad \kappa^0 = 0. \quad (12.5)$$

Таким образом, увеличение степени полиномов даёт возможность точнее представить аппроксимации (сравните с (12.4)). Но, с другой стороны, повышение степени полиномов увеличивает число степеней свободы конечного элемента, следствием чего является повышение порядка ячейки жёсткости элемента. Однако этот подход принципиально не может использоваться для оболочек. Объясняется это тем, что в оболочках какую бы большую степень полинома ни взять, нулевую энергию при жёстких смещениях получить не удастся, т. к. последние изначально не могут быть представлены в полиномиальном виде. Добиться точного нуля можно либо добавлением явного выражения жёстких смещений по аналогии с формулами (12.3), либо непосредственно коррекцией самой ячейки жёсткости.

12.3. Типы конечных элементов цилиндрических оболочек

Поскольку срединная поверхность оболочки является изогнутой, то естественно дискретизацию оболочки следовало бы производить с помощью криволинейных конечных элементов (рис. 12.3).

Однако на начальном этапе разработки метода конечных элементов применительно к расчёту оболочек использовались плоские конечные элементы, точнее, их комбинация*. Например, в одной из первых работ Зенкевича [3] по оболочкам срединная поверхность оболочки аппроксимировалась системой плоских конечных элементов треугольной формы (рис. 12.4,а).

* На рис. 12.4 вблизи одной из вершин элемента показаны узловые переменные, принятые для описания деформированного состояния. В остальных вершинах они имеют те же наименования, но другие номера.

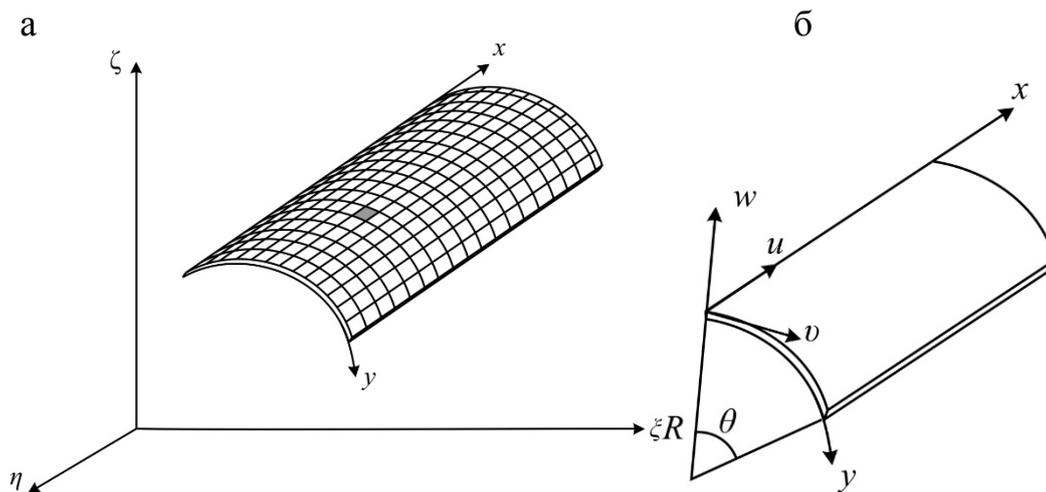


Рис. 12.3

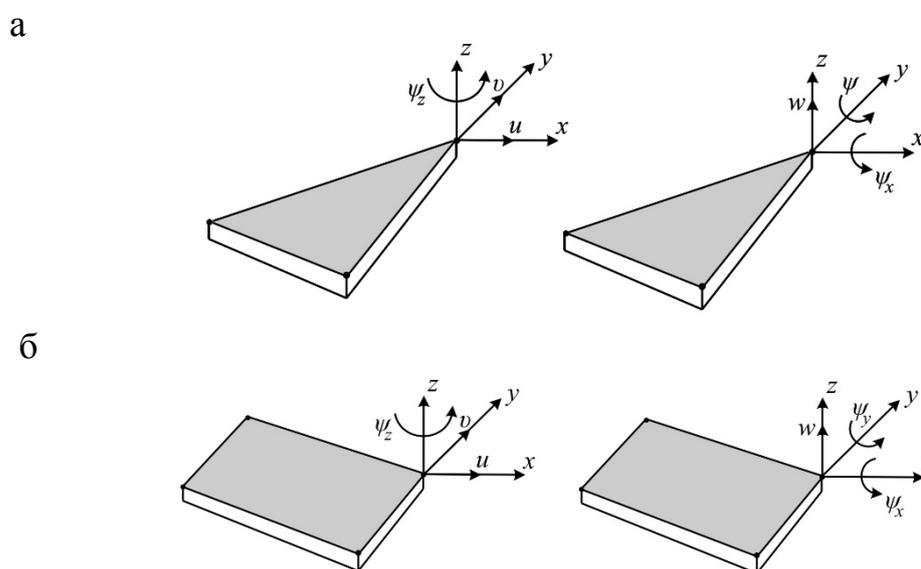


Рис. 12.4

При применении плоских конечных элементов из прямоугольников (рис. 12.4,б), как и из треугольников, неизбежна неточность в расчёте из-за различия в геометрии действительной оболочки и КЭ-модели. Она, как оказалось, может иметь такое же или большее влияние на результат расчета, как и ошибка в аппроксимации полей перемещений.

Очевидно, элементы треугольной формы подходят в большей степени, поскольку они лучше аппроксимируют произвольную кривую поверхность (см. рис. 12.1,б). Применение треугольного элемента по сравнению с прямоугольным снижает «воздействие» геометрической ошибки.

Матрица жёсткости плоского элемента в этом случае формируется путём суперпозиции матриц изгиба и плоского напряжённого состояния пластинки. В качестве узловых перемещений принимали перемещения u , v

в плоскости пластин и прогиб w , а также углы наклона нормалей $\Psi_y = \frac{\partial w}{\partial x}$, $\Psi_x = \frac{\partial w}{\partial y}$ и угол поворота Ψ_z элемента вокруг оси z .

В дальнейшем пришли к выводу, что расчёт цилиндрических оболочек целесообразно выполнять всё же с помощью КЭ-модели, составленной на основе конечных элементов прямоугольного плана с цилиндрической поверхностью (рис. 12.3,б) [5].

12.4. Формирование ячеек жёсткости конечных элементов цилиндрических оболочек

Ниже приводится описание наиболее распространённого конечного элемента цилиндрической формы, обладающего хорошей сходимостью и чаще всего используемого в расчётах оболочек. Кроме того, дана краткая характеристика ещё двух типов элементов, обеспечивающих более высокую точность вычислений.

1. КЭ цилиндрической оболочки, заданный деформациями

Поскольку цилиндрический конечный элемент обладает кривизной поверхности, то задавать или определять возможное поле перемещений следует с учётом сохранения условий совместности деформаций оболочки (см. разд. 5). Условия совместности деформаций для цилиндрической оболочки можно получить из общих уравнений состояния оболочек (5.44) в результате несложных преобразований, полагая в них параметры Ламэ $A = 1$, $B = R = \text{const}$, а радиусы кривизн $R_1 = \infty$, $R_2 = R$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 \gamma}{\partial x \partial y} + \frac{\kappa_x}{R} &= 0, \\ \frac{\partial \kappa_x}{\partial y} - \frac{\partial \chi}{\partial x} - \frac{1}{R} \frac{\partial \varepsilon_x}{\partial y} + \frac{1}{R} \frac{\partial \gamma}{\partial x} &= 0, \\ \frac{\partial \kappa_\theta}{\partial x} - \frac{1}{R} \frac{\partial \chi}{\partial \theta} &= 0. \end{aligned} \quad (12.6)$$

Нетрудно установить, что первые два условия удовлетворяются, если выполнены равенства:

$$\begin{aligned} \frac{1}{R} \frac{\partial \varepsilon_x}{\partial \theta} &= \frac{\partial \gamma}{\partial x}, \\ \frac{1}{R} \kappa_x &= \frac{\partial^2 \varepsilon_\theta}{\partial x^2}. \end{aligned} \quad (12.7,а)$$

Указанные равенства вместе с последним условием (12.6) можно записать в матричной форме

$$[\nabla_C] \bar{e} = 0, \quad (12.7,б)$$

если воспользоваться дифференциальным оператором условий совместности деформаций

$$[\nabla_C] = \begin{bmatrix} \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial \theta} & 0 & -\frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial^2}{\partial x^2} & 0 & \frac{1}{R} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial x} & -\frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial \theta} \end{bmatrix}$$

и вектором деформаций оболочки $\bar{e} = (\varepsilon_x, \varepsilon_\theta, \gamma, \kappa_x, \kappa_\theta, \chi)$.

В свою очередь, компоненты вектора деформаций цилиндрической оболочки согласно формулам (8.8) (см. разд. 8):

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x},$$

$$\varepsilon_\theta = \frac{1}{R} \frac{\partial v}{\partial \theta} + \frac{w}{R},$$

$$\gamma = \frac{dv}{dx} + \frac{1}{R} \frac{du}{d\theta},$$

$$\kappa_x = -\frac{d^2 w}{dx^2}, \quad (12.8,а)$$

$$\kappa_\theta = \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{v}{R} - \frac{1}{R} \frac{\partial w}{\partial \theta} \right),$$

$$\chi = \frac{1}{R} \left(-\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial \theta} + \frac{1}{2} \frac{\partial v}{\partial \theta} \right)$$

также можно выразить в матричном виде

$$\bar{e} = [\nabla_P] \bar{\Delta}, \quad (12.8,б)$$

если ввести вектор перемещений $\bar{\Delta} = (u, v, w)$ и ещё один матричный дифференциальный оператор, подобный $[\nabla_C]$, а именно:

$$[\nabla_P] = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{1}{R} \\ \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial \theta} & \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{\partial^2}{\partial x^2} \\ 0 & \frac{1}{R^2} \frac{\partial}{\partial \theta} & -\frac{1}{R^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \\ 0 & \frac{1}{R} & -\frac{1}{R} \frac{\partial^2}{\partial x \partial \theta} \end{bmatrix}.$$

Теперь, если воспользоваться формулой (12.7,б) с учётом определений перемещений по (12.8,б), нетрудно получить систему дифференциальных уравнений $[\nabla_{CP}] \bar{\Delta} = 0$, выполнив перемножение матричных операторов $[\nabla_{CP}] = [\nabla_C][\nabla_P]$. Решение полученной системы уравнений, записанное в аналитической форме, имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} u &= \alpha_1 + \alpha_2 R \cos \theta - \alpha_3 R \sin \theta, \\ v &= \alpha_4 + (\alpha_5 + \alpha_2 x) \sin \theta + (\alpha_6 + \alpha_3 x) \cos \theta, \\ w &= -(\alpha_5 + \alpha_2 x) \cos \theta + (\alpha_6 + \alpha_3 x) \sin \theta, \end{aligned} \quad (12.9)$$

где $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_6$ – произвольные постоянные.

Очевидно, данные перемещения соответствуют перемещениям конечно-го элемента как жёсткого тела, поскольку они описывают поле перемещений, для которого составляющие деформаций, согласно (12.6), равны нулю.

С другой стороны, условия постоянства значений составляющих деформации без нарушения условий их совместности (12.7,б) приводят к равенствам:

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \alpha_7, & \gamma &= \alpha_8 + \alpha_9, & \chi &= -\frac{1}{2R}(\alpha_8 - 3\alpha_9), \\ \kappa_\theta &= \alpha_{10} \frac{1}{R}, & \kappa_x &= -2\alpha_{12}, & \varepsilon_\theta &= \alpha_{10} + \frac{1}{R}(\alpha_{11} + \alpha_{12} x^2). \end{aligned}$$

Интегрируя уравнения (12.8,а) с учётом последних соотношений, можно найти перемещения:

$$\begin{aligned} u &= \alpha_7 x + \alpha_8 R \sin \theta, \\ v &= \alpha_9 + \alpha_{10} R \cos \theta, \\ w &= \alpha_{11} + \alpha_{12} x^2, \end{aligned} \quad (12.10)$$

где $\alpha_7, \alpha_8, \dots, \alpha_{12}$ – дополнительная группа констант, которая отвечает постоянным деформациям. Таким образом, при выборе конечного элемента цилиндрической оболочки для монотонной сходимости решения необходимо, чтобы интерполяционные функции для перемещений имели члены, которые заданы выражениями (12.9) и (12.10).

Галлагер [15] (1966 г.) одним из первых предложил для цилиндрического конечного элемента принять билинейную аппроксимацию тангенциальных перемещений u , v и бикубическую – прогиба w :

$$\begin{aligned} u &= \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y + \alpha_4 xy, \\ v &= \alpha_5 + \alpha_6 x + \alpha_7 y + \alpha_8 xy, \\ w &= \alpha_9 + \alpha_{10} x + \alpha_{11} y + \alpha_{12} xy + \alpha_{13} x^2 + \alpha_{14} y^2 + \alpha_{15} x^3 + \\ &+ \alpha_{16} x^2 y + \alpha_{17} xy^2 + \alpha_{18} y^3 + \alpha_{19} x^3 y + \alpha_{20} xy^3 + \\ &+ \alpha_{21} x^2 y^2 + \alpha_{22} x^3 y^2 + \alpha_{23} x^2 y^3 + \alpha_{24} x^3 y^3, \end{aligned} \quad (12.11)$$

где $x = \alpha$, $y = \beta$ – криволинейные координаты. В качестве степеней свободы здесь служат шесть величин u , v , w , $\partial w/\partial x$, $\partial w/\partial y$, $\partial^2 w/\partial x \partial y$ в каждой из вершин прямоугольника, составляющих в целом конечный элемент с 24 степенями свободы. Так как принятые функции не содержали слагаемых вида (12.10), и к тому же аппроксимация перемещений u , v была ограничена линейными членами, то предложение Галлагера не оправдало надежды на получение решения вообще, сыграв лишь роль учебного упражнения с отрицательным результатом.

Немного позднее Кантин и Клаф [15] (1968) предприняли неудачную попытку модификации этого элемента, приняв вместо шести пять степеней свободы: u , v , w , $\partial w/\partial x$, $\partial w/\partial y$, $\partial w/\partial y - v/R$ в каждом из четырёх углов элемента – всего 20. К тому же они дополнили описание поля перемещений выражениями (12.9), которые точно определяют перемещения элемента как жёсткого тела. К сожалению, эта совокупность выражений не позволяет выполнить условие постоянства деформаций для осевой деформации ϵ_θ .

Позднее Кантин [14] (1970) всё же удовлетворил последнее условие, вернувшись к прежним шести степеням свободы, увеличив при этом полином для v на еще один дополнительный член с $\alpha_{25}x$, а для перемещения w – на три: α_{26} , $\alpha_{27}x$, $\alpha_{28}y$. Таким образом, сложился вектор перемещений:

$$\bar{\Delta} = \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{выражения (12.9) + (12.11)} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \alpha_{25}x \\ \alpha_{26} + \alpha_{27}x + \alpha_{28}y \end{pmatrix}, \quad (12.12)$$

который обеспечивает условия полноты и совместности. Следовательно, в выражении (12.12) имеется 28 обобщенных координат $\alpha_1, \dots, \alpha_{28}$, в то время как у элемента 24 степени свободы.

Если обобщенные координаты, так иногда ещё называют коэффициенты $\alpha_1, \dots, \alpha_{28}$ полиномов, представить двумя векторами:

$$\bar{a}_1 = (\alpha_{1,\dots}, \alpha_{24}), \quad \bar{a}_2 = (\alpha_{25,\dots}, \alpha_{28}),$$

то тогда вектор $\bar{\Delta}$, характеризующий полученное поле перемещений, можно выразить в матричной форме:

$$\bar{\Delta} = [Y_1] \bar{a}_1 + [Y_2] \bar{a}_2, \quad (12.13)$$

где $[Y_1]$, $[Y_2]$ – матрицы текущих координат поверхности конечного элемента (для сравнения см. формулу (4.15.б)). Вектор узловых перемещений \bar{Z} на основе данного поля перемещений по аналогии с $\bar{\Delta}$ также принимает матричный вид

$$\bar{Z} = [K_1] \bar{a}_1 + [K_2] \bar{a}_2,$$

где $[K_1]$, $[K_2]$ – матрицы узловых координат, элементы которых определены по выражению (12.12) путём замены текущих координат x, y и $\sin \theta$ на значения координат соответствующих узлов.

Путём обращения матрицы $[K_1]$ и последующего умножения на вектор-столбец узловых перемещений \bar{Z} легко определить вектор постоянных

$$\bar{a}_1 = [K_1]^{-1} \bar{Z} - [K_1]^{-1} [K_2] \bar{a}_2.$$

Теперь вектор деформаций $\bar{\epsilon} = (\epsilon_x, \epsilon_\theta, \gamma, \kappa_x, \kappa_\theta, \chi)$ можно выразить через базовые обобщённые координаты, подействовав на вектор перемещений (12.12) дифференциальным оператором $[\nabla_C]$. В результате находят деформации

$$\bar{\epsilon} = [g] \left([K_1]^{-1} \bar{Z} - [K_1]^{-1} [K_2] \bar{a}_2 \right),$$

где матрица $[g] = [\nabla_C] [\Delta]$.

Воспользовавшись определением внутренней энергии деформации элемента, можно составить выражение

$$\begin{aligned} D = \frac{1}{2} \int_A \bar{\epsilon}^T \sigma dA = \frac{1}{2} \int_A \left[[g] \left([K_1]^{-1} [K_2] \bar{Z} - [K_1]^{-1} [K_2] \bar{a}_2 \right) \right]^T \times \\ \times [E] \left[[g] \left([K_1]^{-1} [K_2] \bar{Z} - [K_1]^{-1} [K_2] \bar{a}_2 \right) \right]^T dA. \end{aligned}$$

где

$$[E] = \frac{E_0 \cdot \delta}{1 - \nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & & \\ \nu & 1 & & \\ & & \frac{1 - \nu}{2} & \\ & & & 0 \end{bmatrix} + \frac{E_0 \cdot \delta^3}{12(1 - \nu^2)} \begin{bmatrix} & & & \\ & & & \\ & & 1 & \nu \\ 0 & & \nu & 1 \\ & & & & 1 - \nu \end{bmatrix}$$

– матрица упругости элемента оболочки; E_0 – модуль упругости материала оболочки; ν – коэффициент Пуассона; A – площадь элемента.

Выполнив несложные преобразования подынтегрального выражения, его можно упростить и представить в виде суммы

$$D = \frac{1}{2} \bar{Z}^T [C] \bar{Z} - \bar{a}_2^T [K_2] [C] \bar{Z} + \frac{1}{2} \bar{a}_2^T [K_2]^T [C] [K_2] \bar{a}_2. \quad (12.14)$$

В этом выражении $[C]$ является матрицей жесткости элемента:

$$[C] = ([K_1]^{-1})^T [G] [K_1],$$

а

$$[G] = \int_A [g]^T [E] [g] dA$$

– вспомогательная матрица.

Вариацией выражения (12.14) по \bar{a}_2^T с использованием условия стационарности энергии

$$\frac{dD}{d\bar{a}_2^T} = 0$$

устанавливается зависимость между обобщенными координатами \bar{a}_2^T и вектором узловых переменных \bar{Z} :

$$\bar{a}_2 = ([K_2]^T [C] [K_2])^{-1} ([C] [K_2])^T \bar{Z}.$$

Затем формируется модифицированная ячейка жесткости конечного элемента

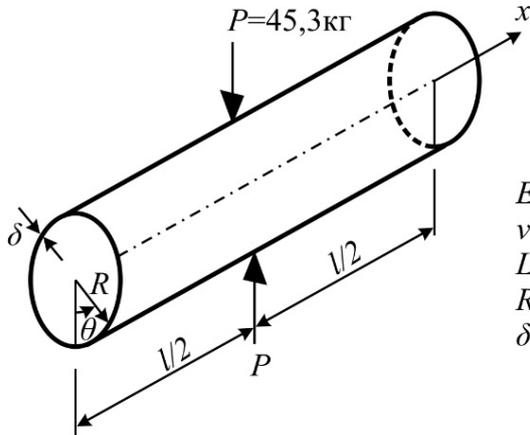
$$[C_M] = [C] - ([C] [K_2]) ([K_2]^T [C] [K_2])^{-1} ([C] [K_2])^T, \quad (12.15)$$

с помощью которой выражение для внутренней энергии деформации элемента записывается, как принято в теории конечного элемента, в виде

$$D = \frac{1}{2} \bar{Z}^T [C_M] \bar{Z}.$$

На графике (рис. 12.5,б) пунктиром показано решение, полученное при расчёте цилиндрической оболочки на основе конечного элемента с ячейкой жёсткости (12.15); непрерывная кривая относится к решению [15].

а



$E = 7,4 \cdot 10^6 \text{ Н/см}^2$
 $\nu = 0,3$
 $L = 26,2 \text{ см}$
 $R = 12,5 \text{ см}$
 $\delta = 0,24 \text{ см}$

б

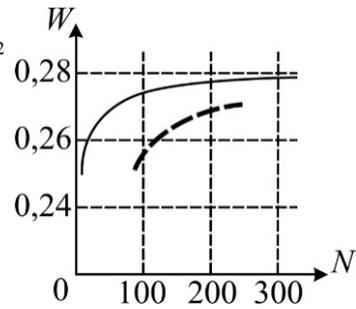


Рис. 12.5

Продолжая исследования цилиндрических оболочек по МКЭ, Эшвел и Сабир, Эшвел и Лок [15] рассмотрели ещё два варианта подобного конечного элемента, которые обладают лучшей сходимостью (см. непрерывную линию на рис. 12.5).

13. ПРЕДЕЛЬНОЕ РАВНОВЕСИЕ И СОПРОТИВЛЕНИЕ ОБОЛОЧЕК

13.1. Модели деформирования оболочек

При проектировании зданий и сооружений с несущими конструкциями из оболочек, при конструировании технологического оборудования с включением оболочек крайне важно знать их реальную несущую способность, запас прочности оболочек. Этим обеспечивается гарантия надёжности и безопасности оболочек.

Вопросам определения несущей способности конструкций посвящён один из разделов строительной механики – теория предельного равновесия. Решение задач динамики конструкций с учётом пластических и вязких свойств материалов рассматривается в другом разделе – теории предельного сопротивления [8].

Следует напомнить ряд основных понятий теории пластичности. В частности, напряженно-деформированное состояние стержня при растяжении характеризуется диаграммой напряжений – деформаций $\sigma - \varepsilon$. Действительные кривые, иллюстрирующие связи $\sigma - \varepsilon$, которые получены в экспериментах над стержнями в зависимости от вида материала (мягкие малоуглеродистые стали и алюминиевые сплавы, железобетон, полимеры и др.), как правило, имеют сложный вид (рис. 13.1,а). Напряжение σ_a , соответствующее точке *a* графика, приведенного на рис. 13.1,а, называется пределом пропорциональности. Предел пропорциональности – максимальное напряжение, при котором справедлив закон Гука. Обычно этот предел и принимают за предел упругости.

Пределом текучести σ_T называется напряжение, при достижении которого появляется площадка текучести *bc*.

Использование в исследованиях действительных кривых, а также в приложениях к расчету конструкций, сопровождается порой значительными трудностями. Поэтому на практике эти диаграммы аппроксимируют, огрубляя, выделяя характерные участки и принимая их в виде прямых. Таким образом, получают основные модели деформирования одномерных и многомерных пластических систем, таких, как: модель жесткопластической (а) и жесткоупрочняющейся (б) системы (рис. 13.2,а, б). Если принимают во внимание также упругие деформации, возникающие в стержне на начальной стадии нагружения, то приходят ещё к двум моделям упругопластических систем: а) упругопластического и б) упругоупрочняющегося деформирования (рис. 13.3,а, б). Пунктиром на схемах показаны участки диаграммы, соответствующие разгрузке стержня. Эти диаграммы достаточно полно характеризуют пластические деформации при статическом нагружении. Пластичность – свойство твердых тел приобретать остаточные деформации.

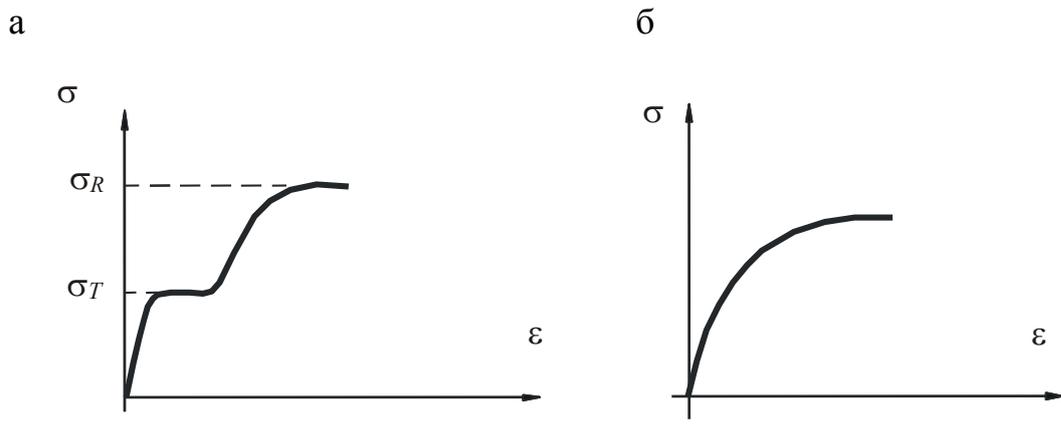


Рис. 13.1

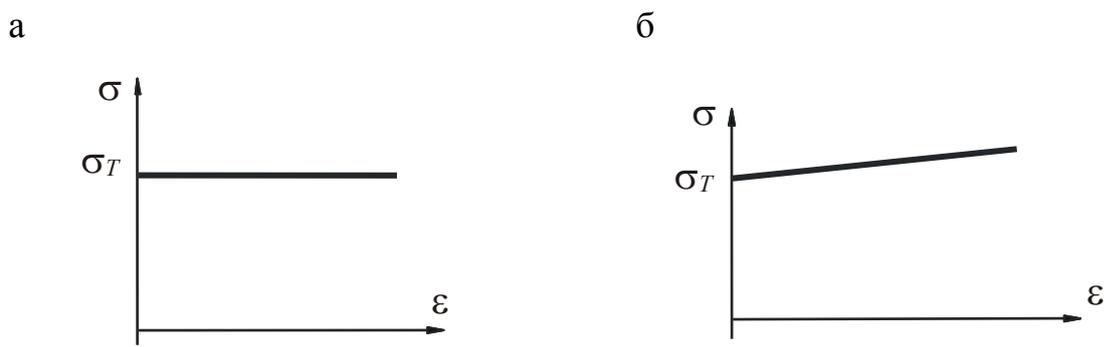


Рис. 13.2

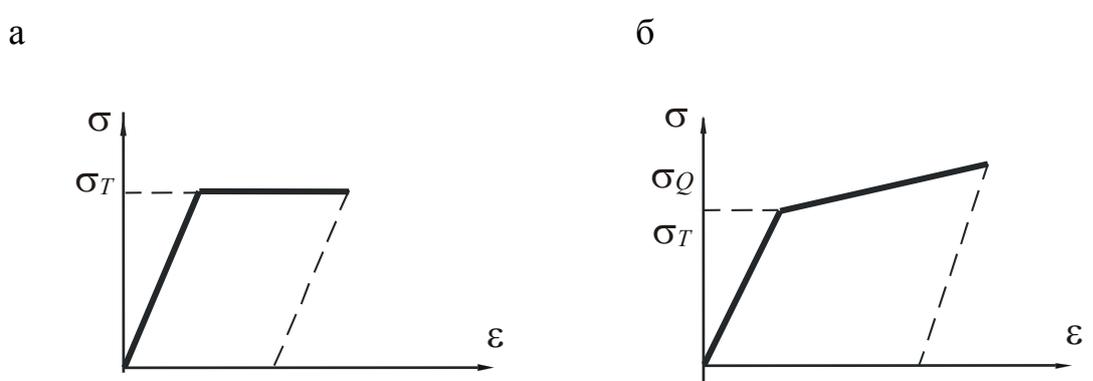


Рис. 13.3

От изучения поведения материалов в терминах $\sigma - \varepsilon$ при рассмотрении стержней и систем из них нетрудно перейти к определению обобщенных усилий и соответствующих им деформаций. Например, диаграмме Прандтля (рис. 13.3, а) в переменных $\sigma - \varepsilon$ соответствует подобная схема в терминах M и κ для изгибаемых элементов (M – изгибающие моменты; κ – кривизна стержня) [12]. Условием текучести в этом случае служит равенство

$$M = M_T, \tag{13.1}$$

где M_T – пластический момент.

При действии динамических нагрузок большое влияние на поведение пластических систем оказывают эффекты вязкости. Вязкость может проявлять себя как в упругой, так и в пластической стадии деформирования или только в пластической. В первом случае механические системы называют вязкоупругопластическими, во втором – вязкопластическими. Наибольшее распространение в динамике конструкций получила схема жестковязкопластического тела, когда упругими деформациями пренебрегают вовсе. Широко используется также модель, где зависимость напряжений от скорости деформаций при динамическом нагружении принимается в виде

$$\sigma = \left[1 + \left(\frac{\dot{\varepsilon}}{\dot{\varepsilon}_0} \right)^{\frac{1}{c}} \right] \cdot \sigma_T, \quad (13.2)$$

где σ_T – предел текучести при статическом растяжении (рис. 13.4); $\dot{\varepsilon} = \frac{d\varepsilon}{dt}$ – скорость деформаций; $c, \dot{\varepsilon}_0$ – константы материала [8].

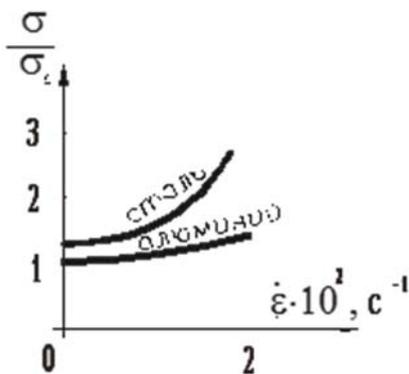


Рис. 13.4

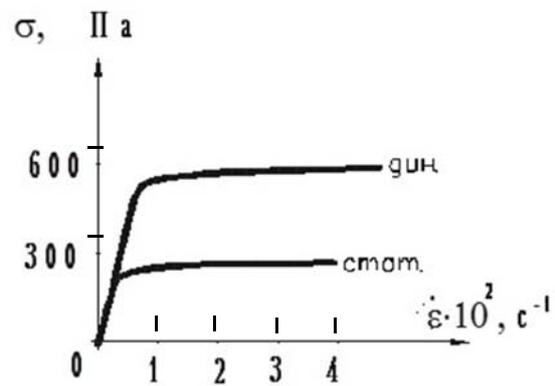


Рис. 13.5

Как известно, динамические и статические характеристики металлов различны – для мягких сталей они представлены на рис. 13.5. При динамическом нагружении происходит увеличение предела текучести материала. В экспериментах обнаружено, что металлы, имеющие хорошо выраженный предел текучести, особенно чувствительны к скорости деформации. Например, для мягких сталей установлено, что вместе с ростом скорости деформации предел текучести растет от значения 276 МПа (статический предел текучести) до 587 МПа при скорости деформации $\dot{\varepsilon} \approx 200 \text{ c}^{-1}$. Предел текучести растет до того момента, пока не достигнет кривой

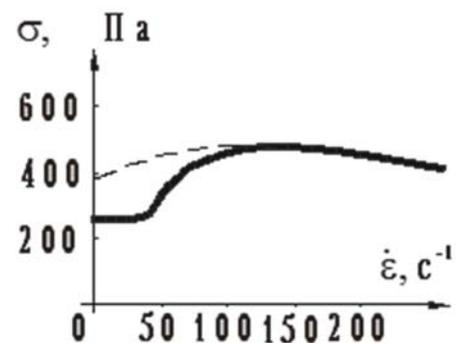


Рис. 13.6

условного предела прочности (пунктирная линия на рис. 13.6). Условный предел прочности возрастает в области скоростей деформаций от 0 до 200 с⁻¹.

13.2. Условия пластичности стержней

Прежде чем начать говорить об условиях пластичности оболочек, следует напомнить об условиях пластичности стержней.

Напряжённое состояние колонн нижних этажей каркасов многоэтажных зданий, арок различного назначения и других конструкций характеризуется наличием изгибающих моментов M и продольных сил N в сечении стержня. Для сравнения здесь рассматриваются два типичных примера условий текучести стержней.

Известно, что по мере увеличения внешней нагрузки в стержне возникает сначала текучесть на одной кромке (рис. 13.7). Затем зона, в которой напряжения достигли предела текучести σ_T , будет распространяться в глубь сечения; напряжения на противоположной кромке при этом стремятся к пределу текучести другого знака и, наконец, достигают его. После этого в сечении возникают две зоны текучести, которые при увеличении M и N распространяются навстречу друг другу.

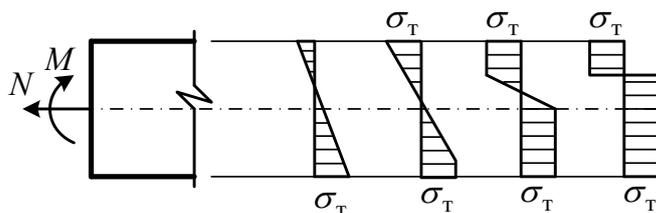


Рис. 13.7

В конце концов наступит предельное состояние сечения с очень малым упругим ядром, отвечающее большим краевым деформациям. В целях упрощения расчетов за предельную эпюру принимают эпюру, состоящую из двух прямоугольников неодинаковой высоты. Это напряженно-деформированное состояние сечения стержня соответствует образованию в сечении «шарнира» текучести.

Для стержня прямоугольного сечения предельные значения усилий M и N и их сочетание, приводящее к образованию «шарнира» текучести, не трудно найти. С этой целью в растянутой (нижней) зоне сечения необходимо отделить участок эпюры, равный по площади эпюре напряжений сжатой зоны (рис. 13.7, 13.8). Тогда продольная сила N , возникающая в сечении, должна уравновеситься остальной (заштрихованной на рисунке) частью эпюры растягивающих или сжимающих напряжений

$$N = 2ab\sigma_T, \quad (13.3)$$

где b – ширина сечения.

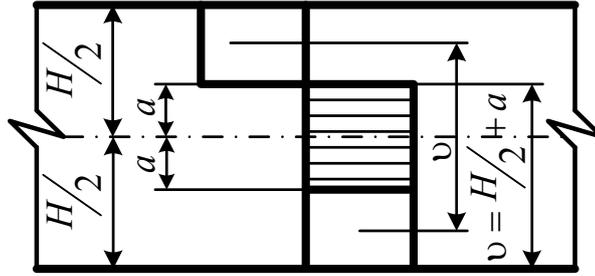


Рис. 13.8

Изгибающий момент равен объему эпюры сжимающих напряжений, умноженному на плечо $v = \left(\frac{H}{2} + a\right)$ пары внутренних сил. Равнодействующая эпюры этих напряжений равна $b\left(\frac{H}{2} - a\right)\sigma_T$. В таком случае момент M , возникающий в сечении, находится по формуле

$$M = b\left(\frac{H}{2} - a\right)\left(\frac{H}{2} + a\right)\sigma_T = b\left(\frac{H^2}{4} - a^2\right)\sigma_T.$$

Подставив величину продольной силы N , определяемую по формуле (13.3), в последнее выражение, находят соотношение между продольной силой и изгибающим моментом в предельном состоянии поперечного сечения стержня

$$M = \frac{bH^2}{4}\sigma_T - \frac{N^2}{4b\sigma_T^2}. \quad (13.4,а)$$

Обозначив предельные значения изгибающих моментов и продольных сил

$$M_T = \frac{bH^2}{4}\sigma_T, \quad N_T = bH^2\sigma_T,$$

полученное соотношение можно переписать в виде*

$$\left(\frac{M}{M_T}\right) + \left(\frac{N}{N_T}\right)^2 = 1. \quad (13.4,б)$$

Если к тому же ввести обозначения для безразмерных величин продольных сил $n = \frac{N}{N_T}$ и изгибающих моментов $m = \frac{M}{M_T}$, то условие пластичности сечения запишется более компактно

$$m + n^2 = 1. \quad (13.4,в)$$

* Величина $W_T = bH^2/4$ называется *пластическим моментом сопротивления* сечения. Для стержня прямоугольного сечения она в 1,5 раза больше, чем упругий момент сопротивления $W_I = bH^2/6$, т.е. $W_T = 1,5W_I$.

Условие предельного состояния сечения графически изображается в виде двух парабол *a*, симметричных относительно оси *n* (рис. 13.9). Нижняя парабола служит условием текучести сечения на участках стержня с отрицательными моментами. Поэтому в общем случае условие текучести можно представить в виде $|m| + n^2 = 1$, где $|m|$ обозначает модуль изгибающего момента.

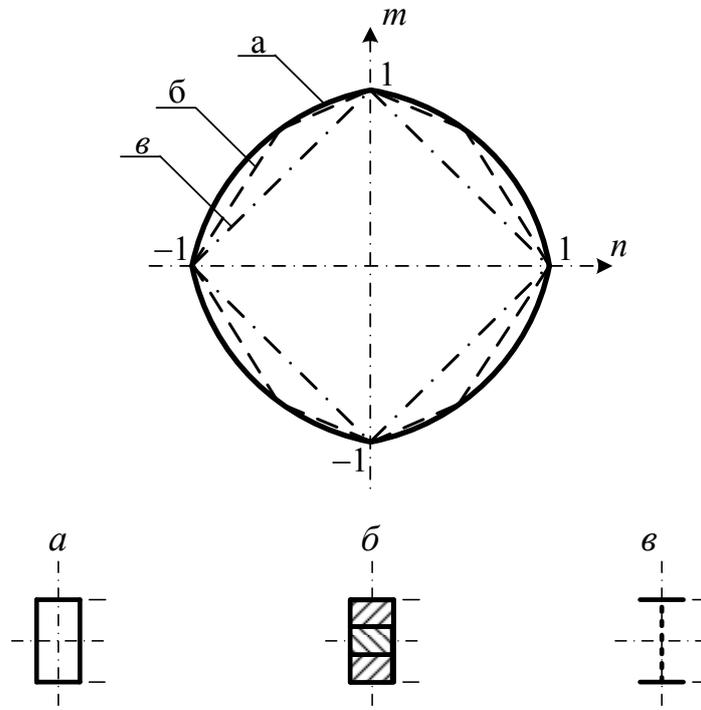


Рис. 13.9

Для стержней, поперечное сечение которых отличается от прямоугольного, условия текучести будут отличаться от (13.4). Например, для сечений, близких к двутавровым (у которых стенка сильно ослаблена), т. е. идеальных двутавров (рис. 13.9,в), условие текучести принимает вид

$$\left| \frac{M}{M_T} \right| + \left| \frac{N}{N_T} \right| = 1, \quad (13.5,а)$$

или

$$|m| + |n| = 1. \quad (13.5,б)$$

Графически оно может быть проиллюстрировано квадратом «в», вписанным в параболу (см. рис. 13.9). Для других сечений, таких, как круглые, двутавры из сортаментов и др., условия текучести будут представлены в виде многоугольников, расположенных между параболой и квадратом. В частности, условие текучести трехслойного прямоугольного сечения аппроксимируется восьмиугольником «б». Перечисленные условия

пластичности часто используются в расчётах несущей способности сжато-изогнутых стоек и арок [8].

Доказано, что для криволинейных стержней, радиус кривизны которых в 8-10 раз превышает высоту сечения, распределение напряжений в упруго-пластической стадии и в состоянии полной пластичности сечения стержня практически не отличается от того, которое имеет место в сечении прямого бруса при тех же внутренних силовых факторах, и, следовательно, при анализе предельного равновесия сжато-изогнутых стержней или арок, как стержней малой кривизны, возможно применение условия предельного состояния сечения, полученного для прямолинейного стержня.

Если при исследовании несущей способности учитывать ещё и поперечные силы Q в сжато-изогнутых стержнях, то условия текучести усложняются. Например, для стержня двутаврового сечения с тонкой стенкой (*идеального двутавра*) условие текучести графически изображается в виде поверхности шара, симметрично срезанной плоскостями с четырех сторон (рис. 13.10).

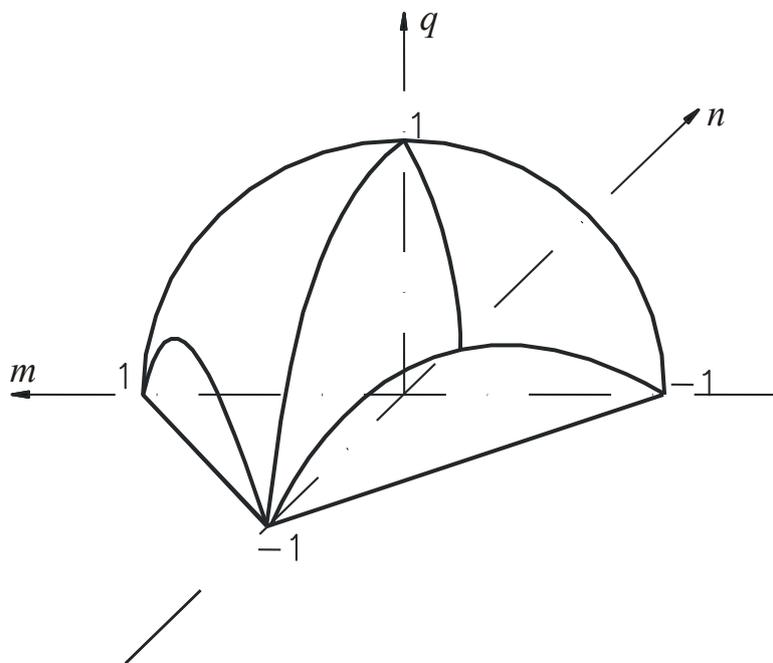


Рис. 13.10

На рис. 13.10 показана только четверть этой поверхности, уравнение которой имеет вид

$$\sqrt{1 + \left(\frac{M}{M_T} + \frac{N}{N_T} \right)^2} - \sqrt{1 - \left(\frac{M}{M_T} - \frac{N}{N_T} \right)^2} = 2 \frac{Q}{Q_T}, \quad (13.6,а)$$

где Q_T – предельное значение усилия Q в сечении. В безразмерных параметрах условие (13.6,а) записывается короче, а именно:

$$\sqrt{1 + (m + n)^2} - \sqrt{1 - (m - n)^2} = 2q. \quad (13.6,б)$$

Здесь m, n обозначают параметры величин внутренних усилий M и N , а $q = \frac{Q}{Q_T}$ – характеризует безразмерный параметр поперечной силы в сечении стержня.

В работах [9], [10] автора на основе приведенных условий пластичности был выполнен подробный анализ пластического состояния арок кругового очертания. При этом было исправлено бытовавшее прежде ошибочное представление о характере разрушения пологих арок.

13.3. Ассоциированный закон течения и его геометрическое представление

В теории пластичности известны различные модели пластического деформирования твёрдых тел. Наибольшее распространение получили теория пластического потенциала или пластического течения и деформационная теория [8]. Автор придерживается первой из них, и потому дальнейшее изложение раздела основано на теории пластического потенциала.

В основу теории пластического течения положен ассоциированный закон течения, который устанавливает связь между приращениями скоростей деформаций $d \dot{\varepsilon}_{ij}$ и напряжениями $\partial \sigma_{ij}$ при пластическом деформировании в виде

$$d \dot{\varepsilon}_{ij} = d\lambda \frac{\partial g}{\partial \sigma_{ij}} \geq 0. \quad (13.7)$$

В выражении (13.7) $d\lambda$ является неопределённым множителем, а функция $g(\sigma_{ij})$ представляет собой в общем случае функцию нагружения* или пластический потенциал. Таковым, например, в случае пластичности сечения *идеального двутавра* служит условие текучести вида (13.5). Очевидно, точкам поверхности нагружения или кривой пластичности в случае плоского напряжённого состояния соответствует пластическое течение, а упругому состоянию – точки, лежащие внутри поверхности или кривой.

Закону течения можно дать простое геометрическое истолкование. Если условие текучести $g(\Phi_{ij})$ представить в виде некоторой поверхности в (шестимерном) пространстве компонент тензора напряжений σ_{ij} , а тензору напряжений сопоставить вектор Φ_{ij} , то тогда согласно определению (13.7) вектор пластических деформаций $\dot{\gamma}_{ij}$ следует направить по нормали к данной поверхности (рис. 13.11). При этом напряжённое состояние некоторой

* Более подробно со свойствами функций нагружения можно ознакомиться в [8].

частицы тела, соответствующее пластическому, изображается в виде вектора, касающегося границы поверхности $g(\sigma_{ij})$. Изображающим точкам, лежащим внутри поверхности, соответствуют векторы упругих напряжений Φ_{ij}^0 .

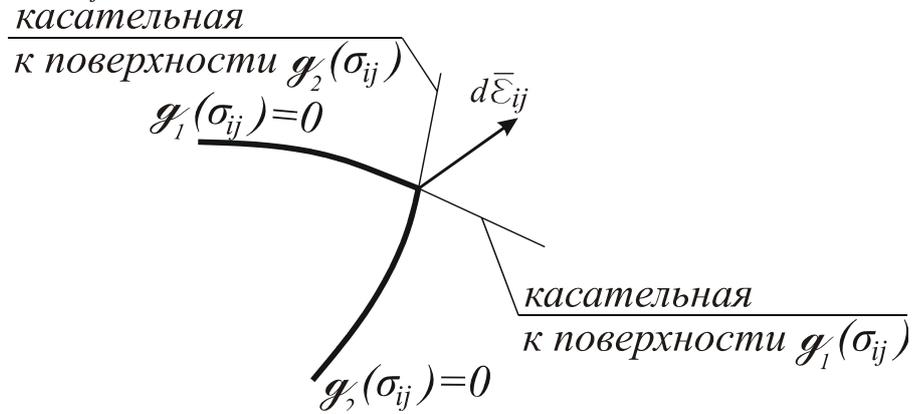


Рис. 13.11

Ассоциированный закон течения (13.7) является следствием принципа максимума работы пластической деформации, поскольку условием относительного максимума приращения пластической работы $\sigma_{ij}d\dot{\epsilon}_{ij}$ по методу Лагранжа служит уравнение

$$\frac{\partial}{\partial \sigma_{ij}}(\sigma_{ij}d\dot{\epsilon}_{ij} - d\lambda g) = 0; \quad (13.8)$$

$d\lambda$ называют чаще множителем Лагранжа.

Принцип максимума работы пластической деформации, представленный в форме скалярного неравенства

$$(\sigma_{ij} - \sigma_{ij}^0)d\dot{\epsilon}_{ij} \geq 0, \quad (13.9)$$

указывает на то, что угол между векторами *приращения напряжений* $(\Phi_{ij} - \Phi_{ij}^0)$ и деформаций γ_{ij} в процессе пластического деформирования должен сохраняться острым (см. рис. 13.11). Отсюда вытекает свойство выпуклости поверхности нагружения или текучести.

При наличии угловых точек или рёбер у поверхности текучести вектор пластических деформаций заключён в пределах пространственного угла, образованного нормальными гладких участков поверхности, примыкающих к углу или ребру. Математическим выражением указанного случая будет более общая форма ассоциированного закона течения в виде

$$d\dot{\epsilon}_{ij} = \sum_1^n d\lambda_k \frac{\partial g_k}{\partial \sigma_{ij}}, \quad (13.10)$$

где n – число гладких участков поверхности вблизи угла.

13.4. Теоремы теории предельного равновесия

Теория предельного равновесия (ТПР) *феноменологически* ** основывается на том подтвержденном обширными экспериментальными исследованиями и натурными наблюдениями факте, что для многих видов конструкций, изготовленных из материалов, обладающих достаточно выраженными пластическими свойствами, исчерпание несущей способности проявляется как развитие значительных деформаций и перемещений при практически неизменной нагрузке. График равновесных состояний (называемый также графиком деформирования) при постепенно возрастающем параметре нагрузки p для таких *конструкций* показан на рис. 13.1, где Δ – характерное перемещение.

Основной задачей ТПР является определение предельного значения параметра нагрузки p_T (по иной терминологии p_T – предельная, или разрушающая, нагрузка, несущая способность) без исследования процесса деформирования. Предельное состояние можно рассматривать как состояние, предшествующее разрушению. Поэтому предельное состояние иногда называют состоянием пластического разрушения или потерей несущей способности сооружения.

В результате решения задачи ТПР выявляется схема разрушения, но при этом значения деформаций и перемещений остаются неопределенными. При $p=p_T$ в результате развития зон пластичности в наиболее напряжённых сечениях конструкция утрачивает геометрическую неизменяемость и превращается в своеобразный механизм – механическую систему, обладающую кинематической подвижностью.

С формальной точки зрения ТПР является прикладной областью теории идеальной пластичности, основанной на использовании простейшей аппроксимации свойств реальных пластически деформируемых материалов – модели жесткопластического тела, характеризуемого диаграммой, приведенной на рис. 13.2,а.

Основные теоремы теории предельного равновесия впервые сформулированы А.А. Гвоздевым в 1936 году. Для их доказательства вводятся понятия статически возможных полей напряжений и кинематически допустимых полей скоростей перемещений.

О п р е д е л е н и е 1.

Статически возможным называется распределение (поле) напряжений или внутренних усилий σ_{ij}^0 , удовлетворяющее:

а) уравнениям равновесия

$$\frac{\partial \sigma_{ij}^0}{\partial x_i} = 0;$$

** *Феномен* – философское понятие, обозначающее явление, данное нам в опыте, чувственном познании (в противоположность ноумену, постигаемому разумом и составляющем основу, сущность феномена).

б) статическим граничным условиям

$$\sigma_{ij}^0 n_i = X_{nj}$$

(здесь индексы отличаются от обозначений, принятых в работе [8]) при заданных воздействиях X_{nj} на поверхности деформируемого твёрдого тела;

в) и условию $g(\sigma_{ij}) \leq 0$.

З а м е ч а н и е. Принцип максимума работы пластической деформации с использованием определения 1 формулируется следующим образом: приращение работы пластической деформации $\sigma_{ij} d\dot{\varepsilon}_{ij}$ имеет максимальное значение для действительного напряжённого состояния по сравнению с любым статически возможным.

Статическая теорема ТПР:

Нагрузка, соответствующая статически возможному состоянию, меньше, чем предельная.

В соответствии с принципом возможных перемещений для действительного напряжённого состояния произвольного объёма тела (рис. 13.12) можно записать

$$\int_S X_{ni} v_i ds = \int_V \sigma_{ij} \dot{\varepsilon}_{ij} dV.$$

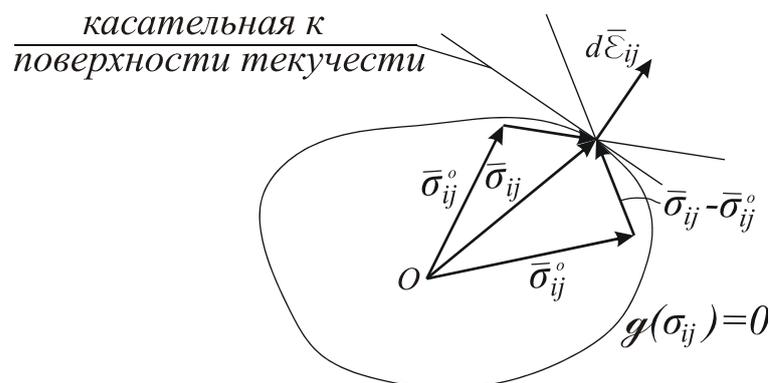


Рис. 13.12

Аналогично, для любого статически возможного состояния того же объёма справедливо равенство

$$\int_S X_{ni}^0 v_i ds = \int_V \sigma_{ni}^0 \dot{\varepsilon}_{ij} dV.$$

Вычитая из первого равенства второе

$$\int_S (X_{ni} - X_{ni}^0) v_i ds = \int_V (\sigma_{ij} - \sigma_{ni}^0) \dot{\varepsilon}_{ij} dV$$

и принимая во внимание неравенство (13.11), легко установить, что

$$\int_S (X_{ni} - X_{ni}^0) v_i ds \geq 0$$

или

$$\int_S X_{ni}^0 v_i ds \leq \int_S X_{ni} v_i ds,$$

т.е. мощность нагрузки, отвечающей статически возможному состоянию, на действительных скоростях перемещений меньше мощности действительной нагрузки на тех же скоростях.

Если нагрузки являются сосредоточенными силами $X_{ni} = P_i$, то согласно полученному неравенству

$$\sum_1^n P_i^0 v_i \leq \sum_1^n P_i v_i.$$

При действии единственной нагрузки P должно соблюдаться неравенство

$$P^0 \leq P.$$

При определении предельной величины нагрузки необходимо рассмотреть различные статически возможные состояния тела или сооружения в целом и вычислить нагрузки, вызывающие эти состояния. Наибольшее значение одной из них будет ближе всего соответствовать предельному состоянию или исчерпанию несущей способности сооружения. В общем случае достаточно рассмотреть какое-либо одно статически возможное состояние сооружения и максимизировать значение нагрузки, отвечающей этому состоянию, например, с помощью методов линейного программирования [8].

Метод определения предельной нагрузки путём рассмотрения статически возможных состояний сооружений называется статическим. С его помощью определяется нижняя граница значения предельной нагрузки.

О п р е д е л е н и е 2.

Кинематически допустимым называется распределение (поле) скоростей перемещений u_i ($i = 1, 2, 3$) или деформаций, удовлетворяющее:

1) условиям непрерывности

$$\varepsilon_{ij}^* = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right),$$

2) заданным условиям совместности деформаций и кинематическим граничным условиям на поверхности тела.

Кинематическая теорема ТПР:

Нагрузка, соответствующая кинематически допустимому полю скоростей, больше, чем предельная.

Рассматривая работу напряжений действительного состояния произвольного объёма тела на кинематически допустимых перемещениях (рис. 13.13) в соответствии с принципом возможных перемещений, можно утверждать, что

$$\int_S X_{ni} v_i^* ds = \int_V \sigma_{ij} \dot{\varepsilon}_{ij}^* dV.$$

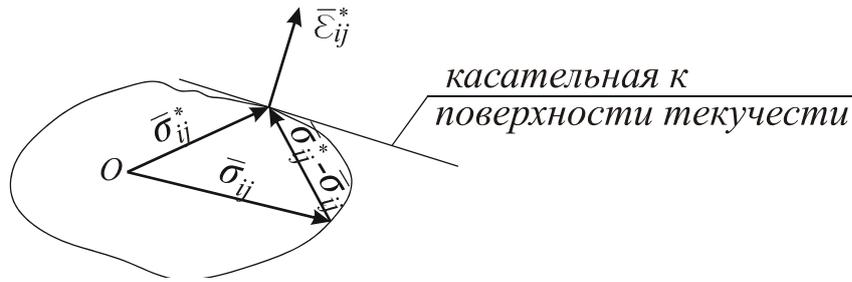


Рис 13.13

Правую часть данного равенства легко преобразовать, воспользовавшись определением кинематически возможного напряжённого состояния тела

$$\int_S X_{ni} v_i^* ds = \int_V \sigma_{ij}^* \dot{\epsilon}_{ij}^* dV - \int_V (\sigma_{ij}^* - \sigma_{ij}) \dot{\epsilon}_{ij}^* dV .$$

Здесь σ_{ij}^* - напряжения, соответствующие кинематически допустимым перемещениям, которые могут и не удовлетворять условиям равновесия тела.

Так как в соответствии с принципом максимума работы пластической деформации справедливо неравенство (13.11), то

$$(\sigma_{ij}^* - \sigma_{ij}) \dot{\epsilon}_{ij}^* \geq 0 .$$

С учётом данного обстоятельства преобразованное равенство принимает форму неравенства вида

$$\int_V \sigma_{ij}^* \dot{\epsilon}_{ij}^* dV \geq \int_S X_{ni} v_i^* ds ,$$

где $\int_V \sigma_{ij}^* \dot{\epsilon}_{ij}^* dV$ представляет собой мощность внутренних напряжений в кинематически допустимом состоянии тела.

Конечно, всегда можно подобрать нагрузку таким образом, что её мощность на кинематически допустимом поле перемещений будет равна мощности соответствующих напряжений, т.е.

$$\int_S X_{ni}^* v_i^* ds = \int_V \sigma_{ij}^* \dot{\epsilon}_{ij}^* dV .$$

Тогда с учётом предыдущего неравенства будет сохраняться неравенство следующего вида:

$$\int_S X_{ni}^* v_i^* ds \geq \int_S X_{ni} v_i^* ds ,$$

в соответствии с которым *мощность нагрузки, отвечающей кинематически допустимому состоянию тела на кинематически допустимом поле скоростей перемещений, всегда больше мощности действительной нагрузки на тех же скоростях.*

При действии только сосредоточенных сил, очевидно,

$$\sum_1^n P_i^* v_i^* \geq \sum_1^n P_i v_i^* .$$

При действии единственной силы P должно соблюдаться неравенство

$$P^* \geq P .$$

Метод вычисления предельной нагрузки с помощью полученной формулы называется кинематическим.

Как и в случае применения статического метода, здесь на основе какой-либо одной вероятной схемы механизма разрушения, т.е. кинематически допустимого поля скоростей перемещений сооружения, путём минимизации значения нагрузки, отвечающей этому полю, например, методом линейного программирования можно найти точную её величину [2, 13].

Если при определении несущей способности сооружения использовать оба метода, то можно дать двустороннюю оценку величины предельной нагрузки

$$P^0 \leq P \leq P^* .$$

В следующих подразделах подробно излагается методика определения предельной нагрузки для сферических оболочек на основе теорем теории предельного равновесия.

13.5. Уравнения состояния сферических оболочек

Напряженно-деформированное состояние упругих тонких оболочек в общем случае характеризуется совокупностью трёх групп уравнений, в целом составляющих 17 уравнений, среди которых:

I. Пять уравнений равновесия:

- $\sum X = 0, \frac{\partial}{\partial \alpha}(N_1 B) - N_2 \frac{\partial B}{\partial \alpha} + \frac{1}{A} \frac{\partial}{\partial \beta}(S A^2) + Q_1 k_1 A B + A B p_1 = 0,$
- $\sum Y = 0, \frac{\partial}{\partial \beta}(N_2 A) - N_1 \frac{\partial A}{\partial \beta} + \frac{1}{B} \frac{\partial}{\partial \alpha}(S B^2) + Q_2 k_2 A B + A B p_2 = 0,$
- $\sum Z = 0, -(k_1 N_1 + k_2 N_2) + \frac{1}{A B} \left[\frac{\partial}{\partial \alpha}(Q_1 B) + \frac{\partial}{\partial \beta}(Q_2 A) \right] + p_3 = 0,$
- $\sum M_x = 0, \frac{1}{B} \frac{\partial}{\partial \alpha}(H B^2) + \frac{\partial}{\partial \beta}(M_2 A) - M_1 \frac{\partial A}{\partial \beta} - Q_2 A B = 0,$
- $\sum M_y = 0, \frac{1}{A} \frac{\partial}{\partial \beta}(H A^2) + \frac{\partial}{\partial \beta}(M_1 B) - M_2 \frac{\partial B}{\partial \alpha} - Q_1 A B = 0.$

II. Шесть геометрических зависимостей между перемещениями и деформациями:

- $\varepsilon_1 = \frac{1}{A} \frac{\partial u}{\partial \alpha} + \frac{1}{A B} \frac{\partial A}{\partial \beta} v + \frac{w}{R_1},$
- $\varepsilon_2 = \frac{1}{B} \frac{\partial v}{\partial \beta} + \frac{1}{A B} \frac{\partial B}{\partial \alpha} u + \frac{w}{R_2},$

- $\varepsilon_{12} = \left(\frac{B}{A}\right) \cdot \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{\nu}{B}\right) + \frac{A}{B} \cdot \frac{\partial}{\partial \beta} \left(\frac{u}{A}\right),$
- $\kappa_1 = \frac{1}{A} \frac{\partial \theta}{\partial \alpha} + \frac{1}{AB} \frac{\partial A}{\partial \beta} \vartheta,$
- $\kappa_2 = \frac{1}{B} \frac{\partial \vartheta}{\partial \beta} + \frac{1}{AB} \frac{\partial B}{\partial \alpha} \theta,$
- $\chi = \frac{1}{A} \frac{\partial \theta}{\partial \alpha} - \frac{1}{AB} \frac{\partial A}{\partial \beta} \vartheta + \left(\frac{1}{B} \frac{\partial \vartheta}{\partial \beta} - \frac{1}{AB} \frac{\partial B}{\partial \alpha} \theta \right) \frac{1}{R_1}.$

III. Шесть уравнений, образующих группу физических уравнений (см. формулы (6.10)):

$$N_1 = \frac{Eh}{1-\nu^2} (\varepsilon_1 + \nu \varepsilon_2), \quad N_2 = \frac{Eh}{1-\nu^2} (\varepsilon_2 + \nu \varepsilon_1), \quad S = S_{12} = S_{21} = Gh\gamma,$$

$$M_1 = D(\kappa_1 + \nu \kappa_2), \quad M_2 = D(\kappa_2 + \nu \kappa_1), \quad H = H_{12} = H_{21} = D(1-\nu)\chi,$$

связывающих внутренние усилия и деформации.

Очевидно, при решении задач пластичности оболочек последняя группа уравнений не используется вовсе. В силу вступают соотношения теории пластичности.

Исследование несущей способности сферической оболочки*, нагруженной равномерным давлением, осуществляется на основе условий равновесия сферических оболочек (рис. 13.14):

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \varphi} (n_1 \sin \varphi) - n_2 \cos \varphi - q_1 \sin \varphi &= 0, \\ \frac{\partial}{\partial \varphi} (q_1 \sin \varphi) + (n_1 + n_2 + p) \sin \varphi &= 0, \\ \frac{\partial}{\partial \varphi} (m_1 \sin \varphi) - m_2 \cos \varphi - \frac{q_1}{\delta} \sin \varphi &= 0. \end{aligned} \tag{13.11}$$

Указанные уравнения получены на основе уравнений I группы уравнений состояния, в которых принято $R_\varphi = R_\theta = R$. Здесь введены следующие обозначения: $n_1 = n_\theta$, $n_2 = n_\varphi$ – безразмерные меридиональное и окружное усилия, т.е. усилия N_1 , N_2 , отнесенные к предельному значению $N_0 = 2\sigma_0\delta$; q_1 – отнесенное к N_0 перерезывающее усилие в меридиальном направлении $Q_1 = Q_\theta$; $m_1 = m_\theta$, $m_2 = m_\varphi$ – меридиональный и окружной изгибающие моменты, отнесенные к предельному значению момента $M_0 = \sigma_0\delta^2$; w и ν – нормальные и меридиональный компоненты смещения

* Выбор сферической оболочки в качестве объекта приложения методов теории пластичности обусловлен пристрастием автора.

срединной поверхности оболочки, отнесенные к радиусу оболочки R ;
 $p = \frac{PR}{N_0}$ – параметр внешнего давления (рис. 13.14).

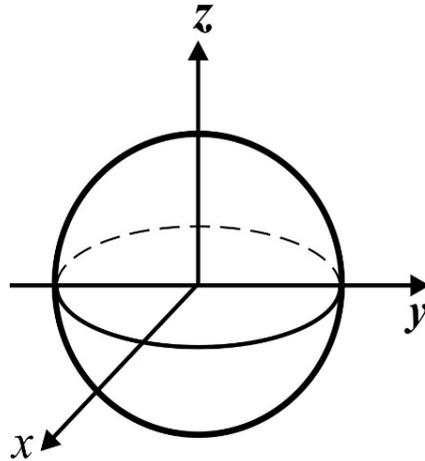


Рис. 13.14

Кроме того, справедливы также зависимости между деформациями и перемещениями срединной поверхности, которые для сферической оболочки принимают вид [1]:

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_\theta = \frac{1}{R_0} \left(\frac{\partial \dot{v}}{\partial \theta} - \dot{w} \right) \pm \frac{\delta}{2R_0} \frac{\partial}{\partial \theta} \left[\frac{1}{R_0} \left(\frac{\partial \dot{w}}{\partial \theta} + \dot{v} \right) \right], \quad (13.12,а)$$

$$\varepsilon_2 = \varepsilon_\varphi = \frac{1}{R_\varphi \sin \theta} \left(\dot{v} \cos \theta - \dot{w} \sin \theta \right) \pm \frac{\delta}{2R_0 R_\varphi \operatorname{tg} \theta} \left(\frac{\partial \dot{w}}{\partial \theta} + \dot{v} \right), \quad (13.12,б)$$

$$\varepsilon_{12} = \varepsilon_{\theta\varphi} = \frac{1}{R_0} \left(\frac{\partial \dot{v}}{\partial \theta} - \dot{w} \right) \pm \frac{\delta}{2R_0} \frac{\partial}{\partial \theta} \left[\frac{1}{R_0} \left(\frac{\partial \dot{w}}{\partial \theta} + \dot{v} \right) \right]. \quad (13.12,в)$$

Очевидно, как при определении предельных нагрузок оболочек, так и при изложении в дальнейшем динамики оболочек с учётом пластических свойств место физических соотношений (6.10) будут занимать условия пластичности оболочек и ассоциированный закон течения.

13.6. Условия пластичности оболочек. Гиперповерхности текучести

Условия пластичности оболочек $g(\sigma_{ij})$, т.н. конечные соотношения между обобщёнными усилиями, при которых возникает пластичность в оболочках, впервые получены советским учёным Ильюшиным А.А. на основе условия текучести Мизеса – Губера для плоского напряжённого состояния в 1946 г. [8]. В пятидесятых годах прошлого века за рубежом проблемой формирования условий пластичности активно занимались Онат Е., Прагер В., Ходж Ф. Г. (США) и др. Воспользовавшись условием текучести Треска – Сен-Венана и применив теорию пластического течения, вначале они вывели ряд соотношений между обобщёнными характеристиками напряжённого состояния цилиндрической оболочки, при которых возникает текучесть материала в наиболее напряжённых зонах оболочки. Геометрически указанные зависимости могут быть представлены т. н. поверхностями текучести. При этом вследствие нелинейности условий текучести поверхности имеют сложное очертание. Из-за этого возникают трудности при формулировке ассоциированного закона течения. В дальнейшем Друккер Д.К. [3], Ерхов М.И. [5], Ходж Ф.Г. предложили аппроксимировать поверхности текучести гиперплоскостями, что равносильно линеаризации нелинейных условий. При этом была дана оценка степени приближённости гиперповерхностей (см. подразд. 13.6).

Линеаризация условий текучести осуществляется путём перехода к расчёту двухслойных оболочек. Слои оболочек обладают бесконечно малой толщиной и располагаются на равном удалении от срединной поверхности. Такое сечение принято называть идеальным. Для каждого слоя значения интенсивности скорости деформаций принимают равными:

$$\dot{e}_i^- = \frac{1}{\delta} \int_{-\delta}^0 \dot{e}_i dz, \quad \dot{e}_i^+ = \frac{1}{\delta} \int_0^{\delta} \dot{e}_i dz, \quad (13.13)$$

где

$$\dot{e}_i = \frac{2}{\sqrt{3}} \sqrt{I_{\dot{e}} - z I_{\dot{e}\dot{\kappa}} + z^2 I_{\dot{\kappa}}} \quad (13.14)$$

– интенсивность скорости деформаций плиты оболочки, а

$$I_{\dot{e}} = \dot{\epsilon}_{11}^2 + \dot{\epsilon}_{22}^2 + \dot{\epsilon}_{11}\dot{\epsilon}_{22} + \dot{\epsilon}_{12}^2,$$

$$I_{\dot{e}\dot{\kappa}} = \dot{\kappa}_{11}^2 + \dot{\kappa}_{22}^2 + \dot{\kappa}_{11}\dot{\kappa}_{22} + \dot{\kappa}_{12}^2,$$

$$I_{\dot{\kappa}} = \dot{\epsilon}_{11}\dot{\kappa}_{11} + \dot{\epsilon}_{22}\dot{\kappa}_{22} + 0,5\dot{\epsilon}_{11}\dot{\kappa}_{22} + 0,5\dot{\epsilon}_{22}\dot{\kappa}_{11} + \dot{\epsilon}_{12}^2\dot{\kappa}_{12}$$

– квадратичные формы деформаций [5]. Следовательно, действительное нелинейное (по гиперболе) распределение интенсивности скорости деформаций \dot{e}_i по толщине оболочки согласно (13.13) заменяется на кусочно-линейное, постоянное в пределах толщины каждой половины сечения (рис. 13.15,а, б).

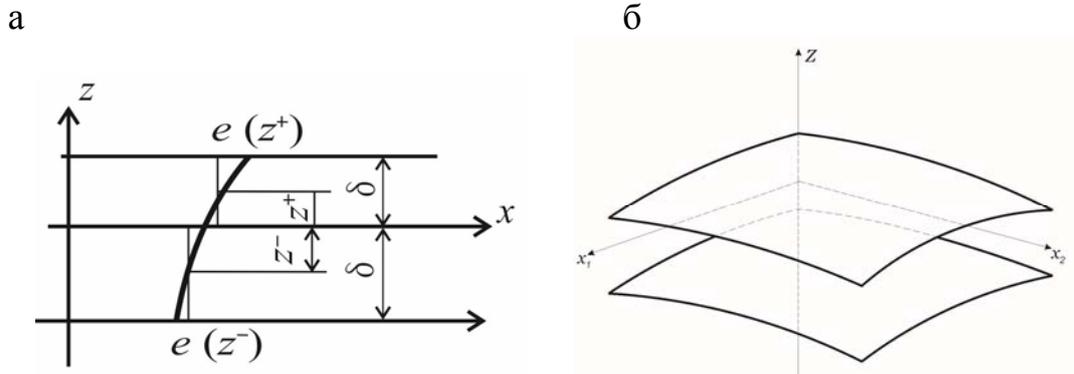


Рис. 13.15

Вследствие этого компоненты девиатора напряжений в тех же пределах будут постоянными:

$$S_i^\pm = \frac{\sigma_0}{\dot{e}_i} \left(\dot{e}_i \pm z^\pm \kappa_i \right),$$

$$S_{i2}^\pm = \frac{2}{3} \frac{\sigma_0}{\dot{e}_i} \left(\dot{e}_{12} \pm z^\pm \kappa_{12} \right).$$

Т.к. компоненты девиатора напряжений можно выразить непосредственно через напряжения:

$$S_i = \sigma_i - \frac{1}{2} \sigma_{3-i}, \quad S_{12} = \tau_{12},$$

то в результате несложных преобразований напряжения в каждом слое оказывается возможным представить как функции параметров обобщённых усилий оболочки:

$$\sigma_i^\pm = \left(n_i \pm m_i \right) \sigma_0,$$

$$\tau_i^\pm = \left(n_{12} \pm m_{12} \right) \sigma_0.$$

Здесь

$$\begin{aligned}
 n_i &= \frac{N_i}{2\delta\sigma_0} = \frac{1}{2}(n_i^- + n_i^+) + \frac{1}{2}(m_i^- - m_i^+), \\
 m_i &= \frac{M_i}{\delta^2\sigma_0} = \frac{1}{2}(n_i^- - n_i^+) + \frac{1}{2}(m_i^- + m_i^+), \\
 n_{12} &= \frac{N_{12}}{2\delta\sigma_0} = \frac{1}{2}(n_{12}^- + n_{12}^+) + \frac{1}{2}(m_{12}^- - m_{12}^+), \\
 m_{12} &= \frac{M_{12}}{\delta^2\sigma_0} = \frac{1}{2}(n_{12}^- - n_{12}^+) + \frac{1}{2}(m_{12}^- + m_{12}^+).
 \end{aligned}
 \tag{13.15}$$

Величины внутренних сил N_i и моментов M_i , по определению, равны:

$$N_i = \int_{-\delta}^{\delta} \sigma_i dz, \quad M_i = \int_{-\delta}^{\delta} \sigma_i z dz, \quad N_{12} = \int_{-\delta}^{\delta} \tau_{12} dz, \quad M_{12} = \int_{-\delta}^{\delta} \tau_{12} z dz.$$

Для вывода условий текучести оболочек следует воспользоваться любым из известных в теории пластичности условием текучести, справедливым для плоского напряжённого состояния. В частности, условие пластичности Треска – Сен-Венана, графически изображаемое в форме шестиугольника в плоскости главных напряжений (рис. 13.12), с помощью определений усилий по (13.15) принимают вид:

$$\left| (n_1 \pm m_1) - (n_2 \pm m_2) \right| \leq 1, \quad \left| (n_1 \pm m_1) \right| \leq 1, \quad \left| (n_2 \pm m_2) \right| \leq 1. \tag{13.16}$$

Полученные неравенства в абстрактном пространстве четырёх измерений графически являют собой совокупность плоскостей, ограничивающих область пространства, внутренние точки которой характеризуют упругое состояние оболочки. Указанные плоскости в рассматриваемом пространстве образуют гиперповерхность текучести оболочки (рис. 13.16).

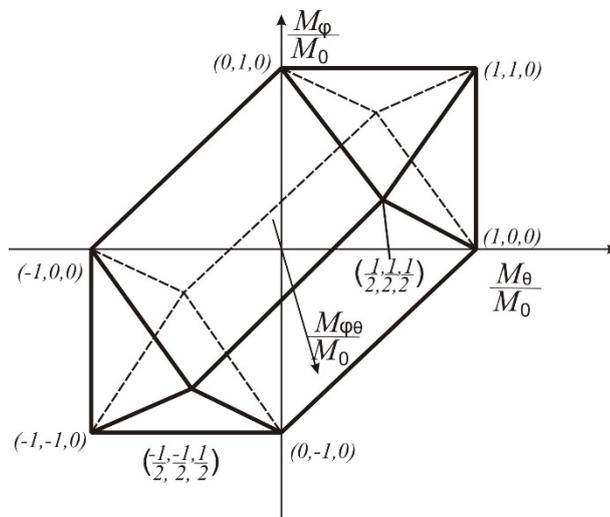


Рис. 13.16

В том случае, когда напряжения в оболочке в каком-либо месте достигают предела текучести, одно из указанных неравенств переходит в равенство. Его часто называют уравнением текучести. В совокупности с ассоциированным законом течения уравнение текучести является важнейшей характеристикой пластической фазы деформирования оболочек.

13.7. Статический метод определения предельного давления на сферическую оболочку

На примере расчёта сферической шарнирно опертой оболочки по несущей способности на действие нагрузки, вызываемой равномерно распределённым давлением p , излагаются основные операции формирования разрешающих уравнений рассматриваемого метода. В соответствии с статическим методом ТПР решение поставленной задачи заключается в определении верхней границы несущей способности, которая находится из условий равновесия оболочки (13.11).

Предполагая, что в пластическом состоянии при действии давления p профиль напряжений достигает граней гиперповерхности текучести [8]

$$m_2 = m = 1, \quad n_1 = n = -1, \quad (13.17)$$

из уравнений равновесия можно определить усилия:

$$n_2 = \operatorname{tg}^2 \varphi - \frac{n}{\cos^2 \varphi},$$

$$m_1 = m + \frac{R}{\delta} \left\{ \frac{pR}{4\delta\sigma_0} + 2n \left[1 - \frac{\operatorname{lg} \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2} \right)}{\sin \varphi} \right] \right\}.$$

Отсюда, принимая во внимание граничное условие (шарнирное опирание контура) оболочки $m_1 = 0$ при $\varphi = \varphi_0$, находят

$$\frac{p}{\sigma_0} = \frac{2\delta^2}{R^2\varphi} \left(m - \frac{2nR}{\delta}\varphi \right),$$

где

$$\varphi(\varphi_0) = \left[1 - \frac{\operatorname{lg} \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi_0}{2} \right)}{\sin \varphi_0} \right].$$

Если отношение p/σ_0 , согласно полученному выражению, больше $4\delta/r$, то следует взять значения:

$$p/\sigma_0 = 4\delta/r, \quad n_1 = n_2 = -1, \quad m_2 = 0. \quad (13.18)$$

Очевидно, по этим формулам находят нижнюю границу предельной нагрузки.

Верхняя граница может быть определена при использовании поверхности текучести (13.17). Соответствующий параметр предельной нагрузки равен:

$$\frac{p}{\sigma_0} = \frac{2\delta^2}{R^2\varphi} + 4\delta/r, \quad n = -1, \quad m_2 = 1. \quad (13.19)$$

Теперь следует установить кинематически возможные перемещения оболочки, отвечающие ребру гиперповерхности текучести (13.17). Из ассоциированного закона течения вытекает, что деформации оболочки в состоянии пластичности равны:

$$\dot{\varepsilon}_{22} = 0, \quad \dot{\kappa}_1 = 0,$$

причём $\left| \dot{\varepsilon}_{11} \right| > 0$, $\left| \dot{\kappa}_2 \right| > 0$.

Скорости деформаций связаны со скоростями перемещений срединной поверхности в направлении нормали w и меридиана u согласно (13.12)

$$\begin{aligned} \dot{\varepsilon}_{11} &= \frac{1}{R_0} \left(\frac{\partial \dot{v}}{\partial \theta} - \dot{w} \right) = 0, \\ \dot{\kappa}_1 &= -\frac{1}{R^2} \left(\frac{\partial \dot{v}}{\partial \phi} + \frac{\partial^2 \dot{w}}{\partial \phi^2} \right) = 0. \end{aligned}$$

Решив систему дифференциальных уравнений при соблюдении условий:

$$\dot{\varepsilon}_{22} = \frac{1}{R} \left(\dot{v} \operatorname{ctg} \phi - \dot{w} \right) > 0, \quad \dot{\kappa}_2 = -\frac{1}{R^2} \operatorname{ctg} \phi \left(\frac{\partial \dot{w}}{\partial \theta} + \dot{v} \right) > 0,$$

находят поле перемещений:

$$\dot{w} = \dot{w}_0 \cos \phi \left[1 - \frac{\Psi(\phi)}{\Psi(\phi_0)} \right],$$

$$\dot{u} = \dot{w} \operatorname{tg} \phi, \quad \text{где } \Psi(\phi_0) = \operatorname{lg} \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\phi_0}{2} \right),$$

соответствующее граничным условиям в вершине и на контуре оболочки:

$$\dot{w} = \dot{w}_0 \quad \text{при } \phi = 0 \quad \text{и} \quad \dot{w} = 0 \quad \text{при } \phi = \phi_0; \quad \dot{u} = 0 \quad \text{при } \phi = 0 \quad \text{и} \quad \phi = \phi_0.$$

Следовательно, величины, определяемые по формулам (13.18) и (13.19), характеризуют границы диапазона значений предельного давления на сферическую оболочку с шарнирным опиранием по контуру (рис. 13.17).

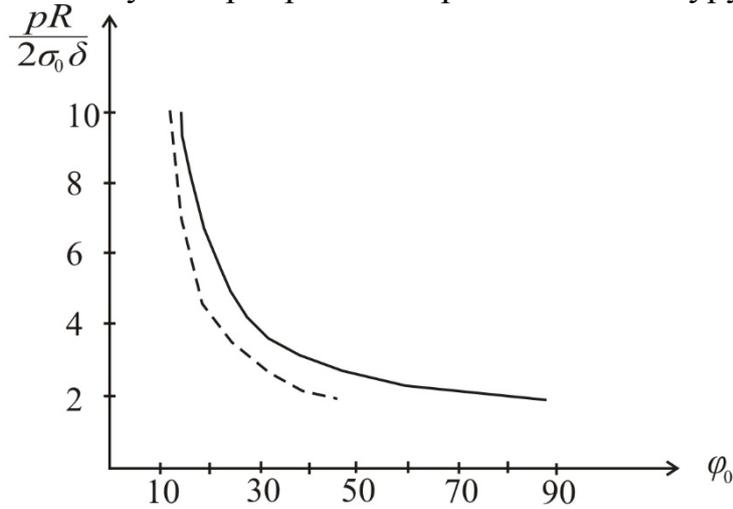


Рис. 13.17

13.8. Кинематический метод определения предельного давления на сферическую оболочку с использованием линейного программирования

Наряду со статическим методом определения предельных нагрузок оболочек, на практике применяется и кинематический метод с использованием стандартных программ линейного программирования.

Указанным методом были определены предельные нагрузки плотины «Ингури ГЭС» [8], пересечения цилиндрических оболочек [13], конических и сферических оболочек. Ниже приводится пример расчёта несущей способности усечённой сферической оболочки на действие нагрузки, вызываемой давлением жёсткого штампа (рис. 13.18,а) [2]. В данном случае оболочка оказывается под воздействием кольцевой равномерно распределённой силы ξp , параметр ξ которой характеризует предельную величину нагрузки (рис. 13.18,б).

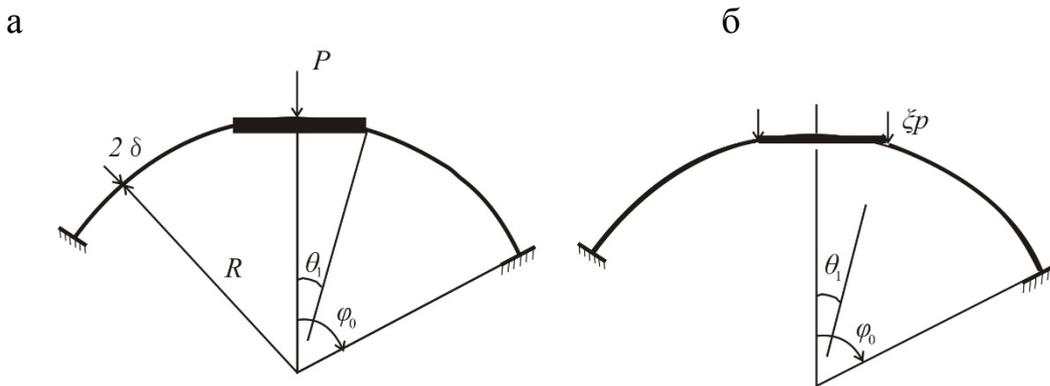


Рис. 13.18

В соответствии с кинематическим методом решение поставленной задачи заключается в определении параметра предельного давления ξ , исходя из условия достижения минимума внутренней энергии рассеяния (диссипации) оболочки, равной

$$D = \int_V \sigma_{ij}^* \dot{\varepsilon}_{ij}^* dV,$$

где $\dot{\varepsilon}_{ij}^*$, σ_{ij}^* – кинематически допустимые скорости деформаций и соответствующие им напряжения (см. подразд. 13.5). В дальнейшем звёздочки в обозначении скорости деформаций опущены. При этом мощность внешнего воздействия (давления P) при скорости перемещения шайбы по вертикали $\dot{\Delta}$ сохраняет постоянное значение $P\dot{\Delta} = 1$.

Указанный интеграл для сферической оболочки в предельном состоянии может быть представлен как сумма мощностей

$$D = \sum M_i \dot{\chi}_i = N_\phi \dot{e}_\phi + N_\theta \dot{e}_\theta + N_{\phi\theta} \dot{e}_{\phi\theta} + M_\phi \dot{\kappa}_\phi + M_\theta \dot{\kappa}_\theta + M_{\phi\theta} \dot{\kappa}_{\phi\theta},$$

отнесённых к единице площади срединной поверхности, поскольку интегрирование по объёму при постоянной толщине оболочки δ сводится к вычислению интеграла по площади. Здесь N_i , M_i – обобщённые усилия (результатирующие силы и моменты), возникающие в сечениях оболочки в меридиональном и широтном направлениях; \dot{e}_i , $\dot{\kappa}_i$ – соответствующие им скорости изменения деформаций срединной поверхности. Поскольку гиперповерхность текучести выпукла и векторы скоростей деформаций, которые находятся согласно ассоциированному закону течения, направлены по внешним нормальям на любом её участке, то величина диссипации D будет превышать значение мощности, накапливаемой оболочкой усилиями M_i^* , не связанными с ассоциированным законом. Вследствие этого от равенства можно перейти к системе неравенств:

$$D \geq N_{\phi(i)} \dot{e}_\phi + N_{\theta(i)} \dot{e}_\theta + N_{\phi\theta(i)} \dot{e}_{\phi\theta} + M_{\phi(i)} \dot{\kappa}_\phi + M_{\theta(i)} \dot{\kappa}_\theta + M_{\phi\theta(i)} \dot{\kappa}_{\phi\theta} \quad (i=1, 2, \dots, l).$$

Здесь $N_{\phi(i)}$, $M_{\phi(i)}$ и др. – обобщённые усилия в i -х точках кусочно-линейной гиперповерхности текучести.

Для реализации численного решения рассматриваемой задачи целесообразно воспользоваться двухслойной моделью оболочки. Аналогичная модель широко используется и при анализе предельного состояния стержневых систем [10]. Как известно, величины скоростей деформаций слоёв оболочки, отстоящих на срединной поверхности на расстоянии $\pm \delta/2$, находятся по формулам:

$$e_{\theta}^{\pm} = \varepsilon_{\theta} \pm \frac{\delta}{2} \kappa_{\theta}, \quad e_{\varphi}^{\pm} = \varepsilon_{\varphi} \pm \frac{\delta}{2} \kappa_{\varphi}, \quad e_{\theta\varphi}^{\pm} = \varepsilon_{\theta\varphi} \pm \kappa_{\theta\varphi}.$$

Последние связаны со скоростями перемещений сферической оболочки геометрическими соотношениями (13.12).

Диссипация энергии пластического деформирования оболочки складывается из диссипаций её слоёв

$$D = D^{+} + D^{-},$$

где

$$D^{\pm} = \delta \left[\sigma_{\theta} \left(\varepsilon_{\theta} \pm \frac{\delta}{2} \kappa_{\theta} \right) + \sigma_{\varphi} \left(\varepsilon_{\varphi} \pm \frac{\delta}{2} \kappa_{\varphi} \right) + \tau_{\theta\varphi} \left(\varepsilon_{\theta\varphi} \pm \kappa_{\theta\varphi} \right) \right]. \quad (13.20,a)$$

Как отмечено ранее, поверхность текучести Треска – Сен-Венана в случае плоского напряжённого состояния принимается линеаризованной. Поэтому энергия диссипации отдельного слоя оболочки должна удовлетворять системе неравенств:

$$\begin{aligned} D^{\pm} &\geq \delta \sigma_0 e_{\theta}^{\pm}, \\ D^{\pm} &\geq \delta \sigma_0 e_{\varphi}^{\pm}, \\ D^{\pm} &\geq \delta \sigma_0 \left(e_{\theta}^{\pm} + e_{\varphi}^{\pm} \right), \\ D^{\pm} &\geq \frac{1}{2} \delta \sigma_0 \left(e_{\theta}^{\pm} + e_{\varphi}^{\pm} + e_{\theta\varphi}^{\pm} \right), \\ D^{\pm} &\geq \frac{1}{2} \delta \sigma_0 \left(e_{\theta}^{\pm} + e_{\varphi}^{\pm} - e_{\theta\varphi}^{\pm} \right), \\ D^{\pm} &\geq -\delta \sigma_0 e_{\theta}^{\pm}, \\ D^{\pm} &\geq -\delta \sigma_0 e_{\varphi}^{\pm}, \\ D^{\pm} &\geq -\delta \sigma_0 \left(e_{\theta}^{\pm} + e_{\varphi}^{\pm} \right), \\ D^{\pm} &\geq -\frac{1}{2} \delta \sigma_0 \left(e_{\theta}^{\pm} + e_{\varphi}^{\pm} + e_{\theta\varphi}^{\pm} \right), \\ D^{\pm} &\geq -\frac{1}{2} \delta \sigma_0 \left(e_{\theta}^{\pm} + e_{\varphi}^{\pm} - e_{\theta\varphi}^{\pm} \right), \end{aligned} \quad (13.20,б)$$

вытекающей из общего неравенства (13.20,a).

Функция цели

$$\xi = \int_A (D^+ + D^-) da = 2\pi \int_l (D^+ + D^-) R^2 \sin \theta d\theta$$

находится с учётом осевой симметрии, при этом вычисление интеграла по площади A заменяется интегрированием по образующей L .

Граничные условия оболочки на защемлённом контуре очевидны:

$$\text{при } \theta = 0, \dot{u} = 0, \dot{w} = 0, \frac{\partial w}{\partial \theta} = 0;$$

в месте прикрепления шайбы: при $\theta = \theta_0, \dot{u} = -\dot{\Delta} \sin \theta_0, \dot{w} = -\dot{\Delta} \cos \theta_0,$

$\frac{\partial w}{\partial \theta} - \dot{u} = 0$. θ_0 – половина центрального угла, характеризующего размер шайбы (рис. 13.19,а).

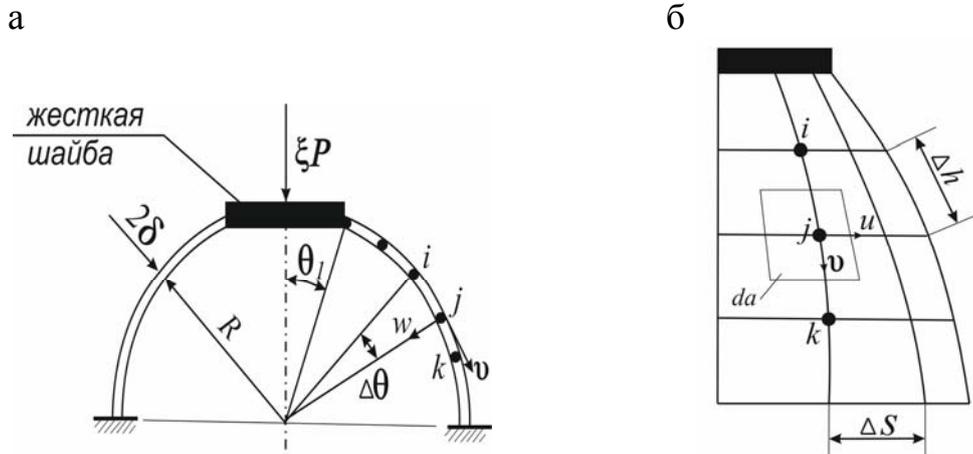


Рис. 13.19

При формировании системы равенств (13.12), неравенств (13.20,б) и функции цели в дискретной форме, которые составляют матрицу метода линейного программирования, срединная поверхность оболочки разбивается сеткой на малые площадки $\Delta a = R \Delta \phi \cdot \Delta h$, где $\Delta h = R \Delta \theta$ – шаг сетки по меридиану (рис. 13.19,б). Скорости деформаций слоёв оболочки (13.13) определяют в узловых точках сетки разбиения с помощью конечных разностей и выражают через скорости перемещений (13.12). Замена производных скоростей перемещений \dot{u} и \dot{v} выполняется левыми и правыми конечными разностями, а производных прогиба \dot{w} – центральными.

Численные расчёты производились с использованием программы симплекс-метода для трёх оболочек различных размеров. Результаты расчётов приводятся в табл. 13.1.

Достоверность результатов теоретических исследований подтверждена серией экспериментов, проведённых в Радиотехническом НИИ в 1977-78 гг.

Базловым В.П. Как в экспериментах, так и в расчётах выяснилось, что пластическая зона локализуется вблизи места примыкания шайбы к оболочке (рис. 13.20). При этом размеры экспериментально обнаруженной зоны пластических деформаций отличались от расчётных всего лишь на 1-2 мм. Распределение перемещений в этом месте показано штриховкой.

Т а б л и ц а 1 3 . 1

θ_1°	$2h$, мм	Предельная нагрузка, кг	
		расчетная	экспериментальная
21°30'	1,9	$1,88 \times 10^3$	$1,9 \times 10^3$
44°30'	1,4	$4,22 \times 10^3$	4×10^3
57°30'	1,0	$3,94 \times 10^3$	$3,8 \times 10^3$

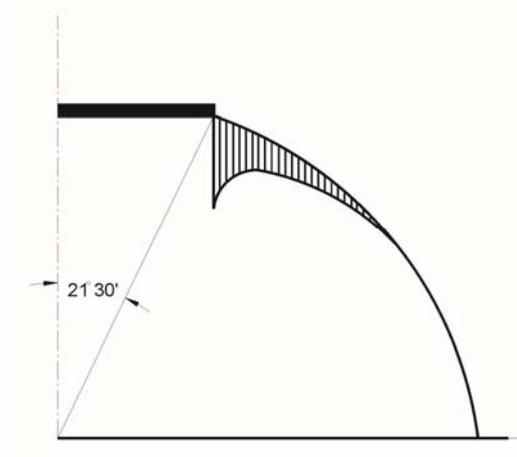


Рис. 13.20

13.9. Динамика сферических оболочек с учётом пластичности материала

В заключение приводятся результаты исследования предельного сопротивления сферической оболочки, нагруженной равномерным давлением p высокой интенсивности в течение короткого интервала времени t_1 (рис. 13.21) [8].

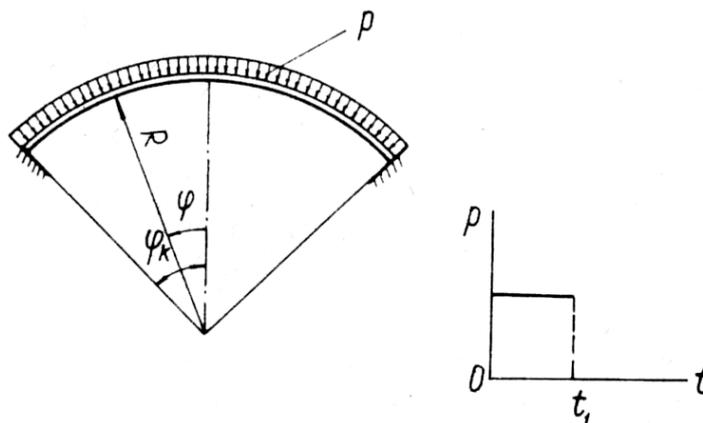


Рис. 13.21

Постоянное внешнее давление p , действующее по нормали к поверхности оболочки, прикладывается в момент времени $t=0$ и при $t=t_1$ снимается. Напряженное состояние в оболочке соответствует определенным участкам поверхности текучести, показанной на рис. 13.16. Деформации определяются на основе ассоциированного закона течения.

Уравнения движения сферической оболочки, нагруженной нормальным давлением p , имеют вид [8]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \varphi}(n_1 \sin \varphi) - n_2 \cos \varphi - (q_1 + \gamma \ddot{v}) \sin \varphi &= 0, \\ \frac{\partial}{\partial \varphi}(q_1 \sin \varphi) + (n_1 + n_2 + p - \gamma \ddot{w}) \sin \varphi &= 0, \\ \frac{\partial}{\partial \varphi}(m_1 \sin \varphi) - m_2 \cos \varphi - \frac{q_1}{\delta} \sin \varphi &= 0. \end{aligned} \quad (13.21)$$

В отличие от условий равновесия (13.11), в уравнениях движения имеются слагаемые $\gamma \ddot{v}$, $\gamma \ddot{w}$, характеризующие силы инерции оболочки в касательной плоскости. Кроме того, добавлен новый параметр $\gamma = \frac{\mu R^2}{N_0 t_1^2}$, носящий комбинированный смысл. Он содержит как физико-механические характеристики оболочки: μ – плотность материала, t_1 – длительность действия нагрузки, N_0 – предельное значение усилия на единицу длины элемента в сечении срединной поверхности, так и геометрические размеры оболочки δ , R .

Деформации оболочки определяются по формулам [8]:

$$\dot{\varepsilon}_1 = \frac{\partial \dot{v}}{\partial \varphi} - \dot{w}, \quad \dot{\varepsilon}_2 = \dot{v} \operatorname{ctg} \varphi - \dot{w}, \quad (13.21, a)$$

$$\chi_1 = -\delta \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\dot{v} + \frac{\partial \dot{w}}{\partial \varphi} \right), \quad \chi_2 = -\delta \operatorname{ctg} \varphi \left(\dot{v} + \frac{\partial \dot{w}}{\partial \varphi} \right). \quad (13.21, б)$$

Нагрузка p , прикладываемая к оболочке, должна несколько превышать разрушающую (статическую), иначе движение не возникает вовсе, поскольку в исследовании принята модель жёсткопластического деформирования материала оболочки. Для значений p , немного больших, чем разрушающее давление p_0 , следует ожидать, что напряженное состояние оболочки будет соответствовать тем же участкам поверхности текучести, что и при статическом решении задачи. Следовательно, в центральной зоне оболочки (при $\varphi \leq \varphi_s$) распределение усилий и моментов соответствует ребру линеаризованной поверхности текучести (описанной около точной) [8]:

$$n_1 = -1, \quad m_1 = 1;$$

в пограничной зоне

$$n_1 = -1, \quad m_2 - m_1 = 1.$$

Следует различать две фазы движения оболочки: фазу нагружения (интервал времени $0 \leq \tau \leq \tau_1$) и фазу разгрузки (интервал $0 \leq \tau \leq \tau_2$).

Фаза $0 \leq \tau \leq \tau_1$. В соответствии с ассоциированным законом течения и формулами скоростей деформации и изменения кривизн (13.22) в статике нетрудно получить выражение прогиба w и меридионального смещения v по зонам, которые можно принять в качестве кинематически возможных при “среднем” уровне динамической нагрузки:

✓ в диапазоне углов $0 \leq \varphi \leq \varphi_s$

$$w = w_0 \cos \varphi \left[1 + \frac{f(\varphi)}{G(\varphi_s)} \right], \quad (13.22a)$$

$$f(\varphi) = \ln \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2} \right), \quad G(\varphi_s) = \sin \varphi_s \ln \frac{\operatorname{tg} \varphi_s}{\operatorname{tg} \varphi_k} - f(\varphi_s),$$

$$v = w \operatorname{tg} \varphi; \quad (13.22, б)$$

✓ в зоне $\varphi_s \leq \varphi \leq \varphi_k$

$$w = w_0 \frac{\sin \varphi_s}{G(\varphi_s)} \cos \varphi \ln \frac{\operatorname{tg} \varphi}{\operatorname{tg} \varphi_k}, \quad (13.23, a)$$

$$v = w \operatorname{tg} \varphi, \quad (13.23, б)$$

где $w_0(\tau)$ – функция прогиба центра оболочки; φ_s, φ_k – значения углов, соответствующие границе зон и опорному контуру оболочки. Выражения для перемещений удовлетворяют краевому условию

$$w(\varphi_k, \tau) = 0, \quad v(\varphi_k, \tau) = 0,$$

условию совместности деформаций на границе зон, а также начальным условиям

$$\dot{w}(\varphi, 0) = \dot{w}(\varphi, 0) = v(\varphi, 0) = \dot{v}(\varphi, 0) = 0, \quad 0 \leq \varphi \leq \varphi_k,$$

если считать $w_0(0) = \dot{w}_0(0) = 0$. Принимая во внимание (13.7), из уравнений движения (13.21) можно найти усилия n_2, m_1 в зоне $0 \leq \varphi \leq \varphi_s$

$$n_2 = \frac{1}{2} p \operatorname{tg}^2 \varphi + \gamma \ddot{w}_0 \left\{ \frac{1}{\cos^2 \varphi} - \frac{1}{G(\varphi_s) \cos^2 \varphi} [\varphi - f(\varphi) \cos \varphi] - \right. \\ \left. - \frac{\sin^2 \varphi}{\cos \varphi} \left[1 + \frac{f(\varphi)}{G(\varphi_s)} \right] \right\} - \frac{1}{\cos^2 \varphi}, \quad (13.24)$$

$$m_1 = 1 + \frac{g(\varphi)}{\delta} \left(1 - \frac{p}{2}\right) + \frac{\gamma \ddot{w}_0}{\delta} \left\{ 1 + g(\varphi) - \frac{\varphi}{\sin \varphi} - \frac{1}{G(\varphi_s) \sin \varphi} [\varphi \cdot f(\varphi) - 2S_1(\varphi)] \right\}, \quad (13.25)$$

где использованы функция $g(\varphi)$ и степенной ряд S_1 :

$$g(\varphi) = \frac{f(\varphi)}{\sin \varphi} - 1, \quad S_1 = \sum_0^{\infty} \frac{E_k}{(2k+2)(2k)!} \varphi^{2k+2};$$

здесь E_k – числа Эйлера.

На границе зон ($\varphi = \varphi_s$) имеет место $m_1 = 0$.

Тогда из (13.25) следует

$$w_0(\tau) = (p - p_0) \frac{g(\varphi_s)}{4F(\varphi_s)} \frac{\tau^2}{\gamma}. \quad (13.26)$$

Здесь $F(\varphi_s)$ – выражение, содержащееся в фигурных скобках (13.25) при значении $\varphi = \varphi_s$; $g(\varphi_s)$ – значение функции $g(\varphi)$ при $\varphi = \varphi_s$; p_0 – предельная нагрузка в данной оболочке (в дальнейших расчетах принимается минимум “верхней границы” по [8]). Вследствие непрерывности усилий m_1 и n_2 на границе зон, из уравнений (13.21) с учетом (13.25) нетрудно найти их распределение в приопорной зоне:

$$m_1 = \frac{p-2}{2h} \ln \frac{\cos \varphi}{\cos \varphi_s} + \ln \frac{\sin \varphi}{\sin \varphi_s} - \frac{\gamma \ddot{w}_0}{h} L(\varphi), \quad (13.27)$$

$$n_2 = \frac{1}{2} p \operatorname{tg}^2 \varphi - \frac{1}{\cos^2 \varphi} + \frac{\gamma \ddot{w}_0}{G(\varphi_s)} \left[\frac{\sin \varphi_s}{\cos^2 \varphi} \left(\frac{\ln \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2}}{\cos^2 \varphi} - \cos \varphi \ln \frac{\operatorname{tg} \varphi}{\operatorname{tg} \varphi_s} \right) - \frac{K(\varphi_s) \cos^2 \varphi_s}{\cos^2 \varphi} \right], \quad (13.28)$$

где

$$K(\varphi_s) = \frac{1}{\cos \varphi_s} - \frac{1}{\cos^2 \varphi_s} - \frac{1}{G(\varphi_s) \cos^2 \varphi_s} [\varphi_s - f(\varphi_s) \cos \varphi_s] - \frac{\sin \varphi_s}{\cos \varphi_s} \left[1 + \frac{f(\varphi_s)}{G(\varphi_s)} \right] + \frac{1}{G(\varphi_s)} \left[\frac{\sin \varphi_s}{\cos^2 \varphi_s} \ln \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2} - \sin \varphi_s \cos \varphi_s \ln \frac{\operatorname{tg} \varphi_s}{\operatorname{tg} \varphi_s} \right],$$

$$L(\varphi_s) = K(\varphi_s) \cos^2 \varphi_s \ln \frac{\operatorname{tg} \varphi_s}{\operatorname{tg} \varphi_k} - \frac{\sin \varphi_s}{G(\varphi_s)} \left[\ln \operatorname{tg} \varphi_k \ln \frac{\operatorname{tg} \frac{\varphi}{2}}{\operatorname{tg} \frac{\varphi_s}{2}} + \ln \operatorname{tg} \varphi \ln \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2} - \right. \\ \left. - \ln \operatorname{tg} \varphi_s \ln \operatorname{tg} \frac{\varphi_s}{2} + \ln^2 \left(2 \operatorname{tg} \frac{\varphi_s}{2} \right) - \ln^2 \left(2 \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2} \right) + S_2(\varphi_s) - S_2(\varphi) \right], \\ S_2(\varphi) = \sum_1^{\infty} \frac{\operatorname{tg}^{2k} \frac{\varphi}{2}}{k^2},$$

где $S_2(\varphi_s)$ — обозначение одноименного ряда при $\varphi = (\varphi_s)$.

Граница зон различных напряженных состояний в оболочке определяется уравнением

$$\ln \frac{\sin \varphi_k}{\sin \varphi_s} + \frac{p-2}{2h} \ln \frac{\cos \varphi_k}{\cos \varphi_s} - \frac{p-p_0}{2h} \frac{g(\varphi_s)L(\varphi_k)}{F(\varphi_s)} + 1 = 0,$$

полученным из (13.28) с учетом (13.27) и условия $m_1 = -1$ на контуре.

Фаза $\tau_1 \leq \tau \leq \tau_2$. В этой фазе нагрузка снимается.

Вследствие пластического рассеивания энергии движение становится затухающим. При этом форма движения оболочки сохраняется непрерывной. Следовательно, в зоне $0 \leq \varphi \leq \varphi_s$ поле скоростей по-прежнему имеет вид (13.22), однако граница зон φ_s движется; теперь она является функцией времени.

Находя компоненты ускорения и принимая во внимание $p=0$, из уравнений движения (13.21) с учетом граничных условий в вершине оболочки получаем:

$$n_2 = -\frac{1}{\cos^2 \varphi} + \frac{\gamma \dot{w}_0 \dot{\varphi}_s E(\varphi_s)}{G^2(\varphi_s) \cos^2 \varphi} \left[\varphi - f(\varphi) \cos^3 \varphi \right] + \\ + \gamma \ddot{w}_0 \left\{ \frac{1}{\cos \varphi} - \frac{1}{\cos^2 \varphi} - \frac{1}{G^2(\varphi_s) \cos^2 \varphi} \left[\varphi - f(\varphi) \cos \varphi \right] - \right. \\ \left. - \frac{\sin^2 \varphi}{\cos \varphi} \left[1 + \frac{f(\varphi)}{G(\varphi_s)} \right] \right\}, \quad (13.29)$$

$$m_1 = 1 + \frac{1}{\delta} \left[\frac{f(\varphi)}{\sin \varphi} - 1 \right] - \frac{\gamma \dot{w}_0 \dot{\varphi}_s E(\varphi_s)}{h G^2(\varphi_s) \sin \varphi} \left[2S_1(\varphi) - \varphi f(\varphi) \right] + \\ + \frac{\gamma \ddot{w}_0}{\delta} \left\{ 1 + g(\varphi) - \frac{\varphi}{\sin \varphi} - \frac{1}{G(\varphi_s) \sin \varphi} \left[\varphi f(\varphi) - 2S_1(\varphi) \right] \right\}. \quad (13.30)$$

Аналогично находят распределение усилий и в приопорной зоне $\varphi_s \leq \varphi \leq \varphi_k$

$$n_2 = -\frac{1}{\cos^2 \varphi} - \gamma \dot{w}_0 \dot{\varphi}_s \left\{ \left[f(\varphi) \cos^3 \varphi_s - \varphi_s \right] \frac{E(\varphi_s)}{G^2(\varphi_s) \cos^2 \varphi} + \right. \\ \left. + \left[\frac{\cos \varphi_s}{G(\varphi_s)} - \frac{E(\varphi_s) \sin(\varphi_s)}{G^2(\varphi_s)} \right] \times \right. \\ \left. \times \left[\ln \frac{\operatorname{tg} \frac{\varphi}{2}}{\operatorname{tg} \frac{\varphi_s}{2}} - \cos^3 \varphi \ln \frac{\operatorname{tg} \varphi}{\operatorname{tg} \varphi_k} + \cos^3 \varphi_s \ln \frac{\operatorname{tg} \varphi_s}{\operatorname{tg} \varphi_k} \right] \frac{1}{\cos^2 \varphi} \right\} - \quad (13.31)$$

$$- \gamma \dot{w}_0 \left\{ \frac{\sin \varphi_s}{G(\varphi_s) \cos^2 \varphi} \left(\ln \frac{\operatorname{tg} \frac{\varphi}{2}}{\operatorname{tg} \frac{\varphi_s}{2}} - \cos^3 \varphi \ln \frac{\operatorname{tg} \varphi}{\operatorname{tg} \varphi_k} + \cos^3 \varphi_s \ln \frac{\operatorname{tg} \varphi_s}{\operatorname{tg} \varphi_k} \right) - \right. \\ \left. - \frac{1 - \cos^3 \varphi_s}{\cos^2 \varphi} - \frac{1}{G(\varphi_s) \cos^2 \varphi} \left[f(\varphi) \cos^3 \varphi_s - \varphi_s \right] \right\}, \\ m_1 = \ln \frac{\sin \varphi}{\sin \varphi_s} - \frac{1}{h} \ln \frac{\cos \varphi}{\cos \varphi_s} + \frac{\gamma \dot{w}_0 \dot{\varphi}_s}{\delta} \left\{ \left[\frac{\cos \varphi_s}{G(\varphi_s)} - \frac{E(\varphi_s) \sin \varphi_s}{G^2(\varphi_s)} \right] \times \right. \\ \left. \times \left[\ln^2 \left(2 \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2} \right) - \ln \operatorname{tg} \varphi \ln \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2} - \ln \operatorname{tg} \varphi_k \ln \frac{\operatorname{tg} \frac{\varphi}{2}}{\operatorname{tg} \frac{\varphi_s}{2}} + \ln \operatorname{tg} \varphi_s \ln \operatorname{tg} \frac{\varphi_s}{2} - \right. \right. \\ \left. \left. - \ln^2 \left(2 \operatorname{tg} \frac{\varphi_s}{2} \right) + S_2(\varphi) - S_2(\varphi_s) + \left(\ln \operatorname{tg} \frac{\varphi_s}{2} - \cos^3 \varphi_s \ln \frac{\operatorname{tg} \varphi_s}{\operatorname{tg} \varphi_k} \right) \ln \frac{\operatorname{tg} \varphi}{\operatorname{tg} \varphi_s} \right] - \right. \\ \left. - \left[\varphi_s - f(\varphi_s) \cos^3 \varphi_s \right] \times \frac{E(\varphi_s)}{G^2(\varphi_s)} \ln \frac{\operatorname{tg} \varphi}{\operatorname{tg} \varphi_s} + \right. \\ \left. + \frac{\gamma \ddot{w}_0}{h} \left\{ \left[\ln \operatorname{tg} \varphi \ln \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2} - S_2(\varphi) - \ln^2 \left(2 \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2} \right) + \ln^2 \left(2 \operatorname{tg} \frac{\varphi_s}{2} \right) - S_2(\varphi) + \right. \right. \right. \\ \left. \left. + \ln \operatorname{tg} \varphi_k \ln \frac{\operatorname{tg} \frac{\varphi}{2}}{\operatorname{tg} \frac{\varphi_s}{2}} - \ln \operatorname{tg} \varphi_s \ln \operatorname{tg} \frac{\varphi_s}{2} \right] \frac{\sin \varphi_s}{G(\varphi_s)} - \right. \right. \quad (13.32)$$

$$-\ln \operatorname{tg} \frac{\varphi_s}{2} - \cos^3 \varphi_s \ln \frac{\operatorname{tg} \varphi_s}{\operatorname{tg} \varphi_k} \ln \frac{\operatorname{tg} \frac{\varphi}{2}}{\operatorname{tg} \frac{\varphi_s}{2}} -$$

$$-\left[f(\varphi_s) \cos^3 \varphi_s - \varphi_s \right] \frac{1}{G(\varphi_s)} - (1 - \cos^3 \varphi_s) \ln \frac{\operatorname{tg} \varphi}{\operatorname{tg} \varphi_s} \Bigg\}.$$

Здесь функция $G(\varphi_s)$ по-прежнему определяется по формуле (13.22), а функция $E(\varphi_s)$ имеет следующий вид

$$E(\varphi_s) = \cos \varphi_s \ln \frac{\operatorname{tg} \varphi_s}{\operatorname{tg} \varphi_k}.$$

Воспользовавшись условием равенства m_1 , определяемого по (13.22), нулю при $\varphi = \varphi_s$ и граничным условием $m_1 = -1$ при $\varphi = \varphi_k$, выводят основные уравнения, характеризующие движение оболочки в фазе разгрузки:

$$Q(\varphi_s) \gamma \ddot{w}_0 + R(\varphi_s) \gamma \dot{w}_0 \dot{\varphi}_s = S(\varphi_s), \quad T(\varphi_s) \gamma \ddot{w}_0 + U(\varphi_s) \gamma \dot{w}_0 \dot{\varphi}_s = V(\varphi_s).$$

Отсюда, решив полученную систему уравнений, находят скорость и ускорение границы:

$$\gamma \ddot{w}_0 = \frac{\varphi_1(\varphi_s)}{\varphi(\varphi_s)}, \quad \gamma \dot{w}_0 \dot{\varphi}_s = \frac{\varphi_2(\varphi_s)}{\varphi(\varphi_s)}, \quad (13.33)$$

где

$$\varphi(\varphi_s) = Q(\varphi_s)U(\varphi_s) - R(\varphi_s)T(\varphi_s),$$

— множители перед $\gamma \ddot{w}_0$ и $\gamma \dot{w}_0 \dot{\varphi}_s$ в выражениях для m_1 (формулы (13.22), (13.33)) при значениях φ , φ_s и φ_k ; $S(\varphi_s), V(\varphi_s)$ — свободные члены в указанных формулах при $\varphi = \varphi_s$ и $\varphi = \varphi_k$.

Полагая $\gamma \dot{w}_0 = y$, выражения (13.33) приводят к сокращённой форме:

$$y = \frac{\varphi_1(\varphi_s)}{\varphi(\varphi_s)}, \quad (13.34)$$

$$\gamma \dot{\varphi}_s = \frac{\varphi_2(\varphi_s)}{\varphi(\varphi_s)}. \quad (13.35)$$

Система двух последних уравнений сводится к одному дифференциальному уравнению

$$\frac{dy}{y} = \frac{\varphi_1(\varphi_s)}{\varphi_2(\varphi_s)} d\varphi_s,$$

решение которого с учетом начальных условий имеет вид

$$y = \dot{w}_{01} e^{\Psi(\varphi_s)}, \quad (13.36)$$

где \dot{w}_{01} – скорость прогиба вершины оболочки в момент $\tau = \tau_1$,

$$\Psi(\varphi_s) = \int_{\varphi_{s1}}^{\varphi_s} \frac{\varphi_1(\varphi_s)}{\varphi_2(\varphi_s)} d\varphi_s. \quad (13.37)$$

Из (13.35) скорость движения границы зон φ_s различных напряженных состояний определяется формулой

$$\dot{\varphi}_s = \frac{1}{\dot{w}_{10}} \frac{\varphi_2(\varphi_s)}{\delta(\varphi_s)} e^{-\Psi(\varphi_s)}. \quad (13.38)$$

Положение границы зон φ_{s2} в момент остановки движения (застывания) τ_2 находят из условия $\dot{w}_0 = 0$. Следовательно, решение уравнения $\delta_2(\varphi_s) = 0$ дает возможность определить границу зон φ_{s2} . Формулу (13.38) можно переписать в виде

$$\frac{dw_0}{d\tau} = \dot{w}_{01} e^{\Psi(\varphi_s)}.$$

Отсюда следует, что

$$\frac{dw_0}{d\varphi_s} = \dot{w}_{01} \frac{1}{\dot{\varphi}_s} e^{\Psi(\varphi_s)}.$$

С учетом (13.37) находят остаточный прогиб вершины оболочки

$$w_0 = \dot{w}_{01}^2 \int_{\varphi_{s1}}^{\varphi_{s2}} \frac{\varphi(\varphi_s)}{\varphi_2(\varphi_s)} e^{2\Psi(\varphi_s)} d\varphi_s.$$

На основе формул (13.35)-(13.38) с использованием ЭВМ нетрудно установить границы изменения уровня давления p , в которых сохраняется принятая схема движения оболочки. Например, на рис. 13.22 указана область допустимых уровней нагружения p для оболочки при $\delta = 0,02$. При значениях нагрузки, взятых вне указанной области, необходимо рассматривать иные схемы деформирования.

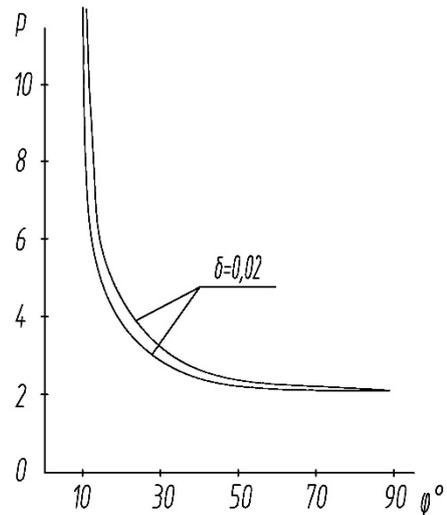


Рис. 13.22

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Аносов, Н.Н. Техническая теория упругих оболочек [Текст] / Н.Н. Аносов. – М.: АСВ, 2009. – 221 с.
2. Базлов, В.П. Несущая способность оболочек вращения при осесимметричном нагружении [Текст] / В.П. Базлов // Строительная механика и расчёт сооружений. – 1977. – №5. – С. 26-29.
3. Белкин, А.Е. Расчёт пластин методом конечных элементов [Текст] / А.Е. Белкин, С.С. Гаврюшин. – М.: Изд-во МГТУ им. М.Э. Баумана, 2008. – 231 с.
4. Власов, В.З. Общая теория оболочек и ее приложение в технике [Текст] / В.З. Власов. – М., 1949. – 766 с.
5. Сидоров, В.Н. Лекции по сопротивлению материалов и теории упругости [Текст] / В.Н. Сидоров. – М.: РИЦ Ген. штаба РФ, 2002. – 352 с.
6. Городецкий, А.С. Компьютерные модели конструкций [Текст] / А.С. Городецкий, И.Д. Евзеров – М.: Изд-во АСВ, 2009. – 357 с.
7. Карпиловский, В.С. Методы конструирования конечных элементов [Текст] / В.С. Карпиловский. – Киев., 1980. – 50 с. Деп. в УкрНИИТИ 23.06.80.
8. Ерхов, М.И. Теория идеально пластических тел и конструкций [Текст] / М.И. Ерхов. – М.: Наука, 1978. – 330 с.
9. Колкунов, Н.В. Основы расчёта упругих оболочек [Текст] / Н.В. Колкунов. – М.: Высшая школа, 1972. – 296 с.
10. Монахов, В.А. О несущей способности пологих арок [Текст] / В.А. Монахов // Строительная механика и расчёт сооружений. – 1976. – №5. – С. 30-35.
11. Монахов, В.А. Динамика упругопластических систем в фазовом пространстве [Текст] / В.А. Монахов. – Пенза: ПГУАС, 2006. – 352 с.
12. Монахов, В.А. Кинематика. Лекции по теоретической механике. Ч. 2. [Текст] / В.А. Монахов. – Пенза: ПГУАС, 2014. – 124 с.
13. Монахов, И.А. Расчёт жесткопластических пересекающихся цилиндрических оболочек, находящихся под действием внутреннего давления [Текст] / И.А. Монахов. – Деп. в ЦИНИС, НТЛ, разд. Б, вып. 12, 1977.
14. Огибалов, П. М. Пластинки и оболочки [Текст] / П.М. Огибалов, М.А. Колтунов. – М.: МГУ, 1968. – 695 с.
15. Программный комплекс *SCAD Office* 11.3, 2009.
16. Смирнов, А.Ф. Расчёт сооружений с применением вычислительных машин [Текст] / А.Ф. Смирнов, А.В. Александров, Н.Н. Шапошников, Б.Я. Лашеников. – М.: Стройиздат, 1964. – 380 с.
17. Тимошенко, С.П. Теория пластин и оболочек [Текст] / С.П. Тимошенко. – М.: Стройиздат, 1977. – 686 с.

18. Чарков, В.Д. Определение несущей способности осесимметричных оболочек методом линейного программирования [Текст] / В.Д. Чарков // Известия ВУЗов. Машиностроение. – 1969. – №5.

19. Цетыркин, И.Е. Влияние высоты бортовой балки на внутренние усилия в цилиндрической оболочке [Текст] / И.Е. Цетыркин // Строительная механика: сб. тр. МИИТа. – М., 1971. – Вып. 364. – С. 68-77.

20. Smith I.M. and Griffiths D.V. Programming the Finite Element Method. John Wiley and Sons. Chichester, Toronto. 1988. - 469 pp.

21. Zienkiewicz, O.C., Taylor, R.L. The Finite Element Method. Vol. 1, 2. Oxford. 2000. – 459 p.

Structure CAD for Windows
SCAD Soft

16.06.2014

Результаты расчета клина

Выполнил:
Проверил:
Утвердил:

Пояснительная записка**Общие данные**

Расчет выполнен с помощью проектно-вычислительного комплекса SCAD. Комплекс реализует конечно-элементное моделирование статических и динамических расчетных схем, проверку устойчивости, выбор невыгодных сочетаний усилий, подбор арматуры железобетонных конструкций, проверку несущей способности стальных конструкций. В представленной ниже пояснительной записке описаны лишь фактически использованные при расчетах названного объекта возможности комплекса SCAD.

Краткая характеристика методики расчета

В основу расчета положен метод конечных элементов с использованием в качестве основных неизвестных перемещений и поворотов узлов расчетной схемы. В связи с этим идеализация конструкции выполнена в форме, приспособленной к использованию этого метода, а именно: система представлена в виде набора тел стандартного типа (стержней, пластин, оболочек и т.д.), называемых конечными элементами и присоединенных к узлам.

Тип конечного элемента определяется его геометрической формой, правилами, определяющими зависимость между перемещениями узлов конечного элемента и узлов системы, физическим законом, определяющим зависимость между внутренними усилиями и внутренними перемещениями, и набором параметров (жесткостей), входящих в описание этого закона и др.

Узел в расчетной схеме метода перемещений представляется в виде абсолютно жесткого тела исчезающе малых размеров. Положение узла в пространстве при деформациях системы определяется координатами центра и углами поворота трех осей, жестко связанных с узлом. Узел представлен как объект, обладающий шестью степенями свободы - тремя линейными смещениями и тремя углами поворота.

Все узлы и элементы расчетной схемы нумеруются. Номера, присвоенные им, следует трактовать только как имена, которые позволяют делать необходимые ссылки.

Основная система метода перемещений выбирается путем наложения в каждом узле всех связей, запрещающих любые узловые перемещения. Условия равенства нулю усилий в этих связях представляют собой разрешающие уравнения равновесия, а смещения указанных связей - основные неизвестные метода перемещений.

В общем случае в пространственных конструкциях в узле могут присутствовать все шесть перемещений:

- 1 - линейное перемещение вдоль оси X;
- 2 - линейное перемещение вдоль оси Y;
- 3 - линейное перемещение вдоль оси Z;
- 4 - угол поворота с вектором вдоль оси X (поворот вокруг оси X);
- 5 - угол поворота с вектором вдоль оси Y (поворот вокруг оси Y);
- 6 - угол поворота с вектором вдоль оси Z (поворот вокруг оси Z).

Нумерация перемещений в узле (степеней свободы), представленная выше, используется далее всюду без специальных оговорок, а также используются соответственно обозначения X, Y, Z, UX, UY и UZ для обозначения величин соответствующих линейных перемещений и углов поворота.

В соответствии с идеологией метода конечных элементов, истинная форма поля перемещений внутри элемента (за исключением элементов стержневого типа) приближенно представлена различными упрощенными зависимостями. При этом погрешность в определении напряжений и деформаций имеет порядок $(h/L)^k$, где h — максимальный шаг сетки; L — характерный размер области. Скорость уменьшения ошибки приближенного результата (скорость сходимости) определяется показателем степени k , который имеет разное значение для перемещений и различных компонент внутренних усилий (напряжений).

Расчетная схема**Системы координат**

Для задания данных о расчетной схеме могут быть использованы различные системы координат, которые в дальнейшем преобразуются в декартовы. В дальнейшем для описания расчетной схемы используются следующие декартовы системы координат:

Глобальная правосторонняя система координат XYZ, связанная с расчетной схемой.

Локальные правосторонние системы координат, связанные с каждым конечным элементом.

Тип схемы

Расчетная схема определена как система с признаком 2. Это означает, что рассматривается плоская рамная система расположена в плоскости XOZ и основные неизвестные представлены линейными перемещениями узловых точек вдоль осей X и Z, а также их поворотами вокруг оси Y.

Количественные характеристики расчетной схемы

Расчетная схема характеризуется следующими параметрами:

Количество узлов — 6

Количество конечных элементов — 4

Общее количество неизвестных перемещений и поворотов — 6

Количество загружений — 1

Выбранный режим статического расчета

Статический расчет системы выполнен в линейной постановке.

Набор исходных данных

Детальное описание расчетной схемы содержится в документе "Исходные данные", где в табличной форме представлены сведения о расчетной схеме, содержащие координаты всех узлов, характеристики всех конечных элементов, условия примыкания конечных элементов к узлам и др.

Граничные условия

Возможные перемещения узлов конечно-элементной расчетной схемы ограничены внешними связями, запрещающими некоторые из этих перемещений. Наличие таких связей помечено в таблице "Координаты и связи" описания исходных данных символом #.

Условия примыкания элементов к узлам

Точки примыкания конечного элемента к узлам (концевые сечения элементов) имеют одинаковые перемещения с указанными узлами.

Характеристики использованных типов конечных элементов

В расчетную схему включены конечные элементы следующих типов.

Конечные элементы плоской задачи теории упругости, для которых, в соответствии с идеологией метода конечных элементов, истинная форма перемещений внутри элемента приближенно представлена упрощенными зависимостями. Описание их напряженного состояния связано с местной системой координат, у которой оси X1 и Z1 расположены в плоскости элемента и ось X1 направлена от первого узла ко второму, а ось Y1 ортогональна плоскости элемента.

Треугольный элемент типа 22, который является совместным и моделирует поле перемещений внутри элемента полиномом первой степени. Располагается в плоскости XOZ.

Результаты расчета

В настоящем отчете результаты расчета представлены выборочно. Вся полученная в результате расчета информация хранится в электронном виде.

Перемещения

Вычисленные значения линейных перемещений и поворотов узлов от загружений представлены в таблице результатов расчета «Перемещения узлов».

Правило знаков для перемещений

Правило знаков для перемещений принято таким, что линейные перемещения положительны, если они направлены в сторону возрастания соответствующей координаты, а углы поворота положительны, если они соответствуют правилу правого винта (при взгляде от конца соответствующей оси к ее началу движение происходит против часовой стрелки).

Усилия и напряжения

Вычисленные значения усилий и напряжений в элементах от загружений представлены в таблице результатов расчета «Усилия/напряжения элементов».

Для стержневых элементов усилия по умолчанию выводятся в концевых сечениях упругой части (начальном и конечном) и в центре упругой части, а при наличии запроса пользователя и в промежуточных сечениях по длине упругой части стержня. Для пластинчатых, объемных, осесимметричных и оболочечных элементов напряжения выводятся в центре тяжести элемента и при наличии запроса пользователя в узлах элемента.

Правило знаков для усилий (напряжений)

Правила знаков для усилий (напряжений) приняты следующими:

В конечных элементах, предназначенных для расчета плоско-напряженных (балок-стенок) или

Продолжение прил. 1

Structure CAD for Windows
SCAD Soft

16.06.2014

плоско-деформированных систем, вычисляют следующие напряжения:

нормальные напряжения NY, NZ;

сдвигающее напряжений TXZ;

нормальное напряжение NY для плоско деформированных систем. Положительные напряжения NX и NZ растягивают сечения балки-стенки, проведенные через центр тяжести КЭ перпендикулярно осям соответственно X1 и Z1.

Суммарные значения приложенных нагрузок по нагружениям.

В протоколе решения задачи для каждого из нагружений указываются значения суммарной узловой нагрузки, действующей на систему.

Протокол выполнения расчета

Wed Jun 04 20:58:00 2014

Полный расчет. Версия 11.5. Сборка: Oct 4 2012
файл - "E:\CALCGYACлин.SPR",
шифр - "клин".

20:58:00

Ввод исходных данных основной схемы

20:58:00

Исключение недействующих степеней свободы

20:58:00

Подготовка данных многофронтального метода

20:58:00

Использование оперативной памяти: 60 процентов

20:58:00

Высокопроизводительный режим факторизации

20:58:00

Информация о расчетной схеме:

- шифр схемы	клин
- порядок системы уравнений	6
- ширина ленты	6
- количество элементов	4
- количество узлов	6
- количество загрузений	1
- плотность матрицы	100%

20:58:00

Необходимая для выполнения расчета дисковая память:

матрица жесткости основной схемы -	1 Kb
динамика	0 Kb
перемещения	0 Kb
усилия	0 Kb
рабочие файлы	7 Kb

всего	-	0.008 Mb
-------	---	----------

20:58:00

На диске свободно 7327.750 Mb

20:58:01

Разложение матрицы жесткости многофронтальным методом.

20:58:02

Накопление нагрузок основной схемы.

Суммарные внешние нагрузки на основную схему

	X	Z	UY
1-	-150	0	0

20:58:02

ВНИМАНИЕ: Дана сумма всех внешних нагрузок на основную схему

20:58:02

Вычисление перемещений в основной схеме.

Продолжение прил. 1

Structure CAD for Windows
SCAD Soft

16.06.2014

20:58:02

Работа внешних сил

1 - 0.00490003

20:58:02

Контроль решения для основной схемы.

20:58:02

Вычисление усилий в основной схеме.

20:58:03

ЗАДАНИЕ ВЫПОЛНЕНО

Затраченное время : 0.05 мин.

Отчет сформирован программой Результаты расчета, версия: 11.5.1.1 от 11.10.2012

Structure CAD for Windows
SCAD Soft

16.06.2014

Элементы

Параметры выборки:

Список узлов/элементов: все

Элементы			
Номер элемента	Тип элемента	Тип жесткости	Узлы
1	22	2	1; 2; 5
2	22	2	2; 3; 4
3	22	2	2; 4; 5
4	22	2	4; 6; 5

Продолжение прил. 1

Structure CAD for Windows
SCAD Soft

16.06.2014

Координаты и связи

Единицы измерений: м.

Параметры выборки:

Список узлов/элементов: все

Координаты и связи					
Номер узла	Координаты		Связи		
	X	Z	X	Z	Uy
1	0	0	#	#	
2	0,3	0	#	#	
3	0,6	0	#	#	
4	0,3	0,6			
5	0	0,6			
6	0	1,2			

Structure CAD for Windows
SCAD Soft

16.06.2014

Управление		
Тип	Наименование	Данные
1	Шифр задачи	клин
2	Признак системы	2
16	Допустимое количество крановых и тормозных нагрузок	2 1
33	Параметры расчета	Метод оптимизации матрицы жесткости: автоматический выбор метода оптимизации Метод решения системы уравнений: мультифронтальный метод Точность разложения матрицы: 1e-012 Точность решения собственной проблемы: 1e-004 Контроль решения: да Точность контроля решения системы уравнений: 1e-010 Учет равномерно-распред. нагрузок на жестких вставках: да
33	Единицы измерения	Линейные единицы измерения: м Единицы измерения размеров сечения: см Единицы измерения сил: кН Единицы измерения температуры: С

Продолжение прил. 1

Structure CAD for Windows
SCAD Soft

16.06.2014

Нагрузки				
№ загрузки	Вид	Направление	Список	Значения
1	0	X	Узлы: 5	-100.0000
1	0	X	Узлы: 6	-50.0000

Structure CAD for Windows
SCAD Soft

16.06.2014

Жесткости		
Тип	Жесткости	Изображение
1	<p>ЖЕСТКОСТНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ПЛАСТИНЫ :</p> <p>E=200000000. NU=0.3 DELTA=0.1</p> <p>Удельный вес : γ=24.525</p>	
2	<p>ЖЕСТКОСТНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ПЛАСТИНЫ :</p> <p>E=200000000. NU=0.3 DELTA=0.1</p>	

Продолжение прил. 1

Structure CAD for Windows
SCAD Soft

16.06.2014

Перемещения

Единицы измерений: мм.

Параметры выборки:

Список узлов/элементов: все

Список загружений/комбинаций: все

Список факторов: все

Перемещения					
Узел	Загружение	Значения			
		X	Z	Uy	
4	1	0,041	-0,007		0
5	1	0,042	0,015		0
6	1	0,113	0,016		0

Structure CAD for Windows
SCAD Soft

16.06.2014

Минимум перемещений

Единицы измерений: мм.

Параметры выборки:

Список узлов/элементов: все

Список загружений/комбинаций: все

Список факторов: все

Минимум перемещений						
Фактор	Максимальные значения			Минимальные значения		
	Значение	Узел	Загружение	Значение	Узел	Загружение
X	0,113	6	1	0,041	4	1
Z	0,016	6	1	-0,007	4	1
Uy	0	4	1	0	4	1

Structure CAD for Windows
SCAD Soft

16.06.2014

Усилия и напряжения

Единицы измерений: кН, м.

Параметры выборки:

Список узлов/элементов: все

Список загружений/комбинаций: все

Список факторов: все

Усилия и напряжения						
Элемент	Сечение	Загружение	Значения			
			NX	NZ	TXZ	
1	1	1	1669,001	5563,336	5345,859	
2	1	1	-798,487	-2661,622	5205,806	
3	1	1	-1598,792	-2901,714	-551,665	
4	1	1	-728,278	8,527e-014	3333,333	

Structure CAD for Windows
SCAD Soft

16.06.2014

Минимакс усилий и напряжений

Единицы измерений: кН, м.

Параметры выборки:

Список узлов/элементов: все

Список загружений/комбинаций: все

Список факторов: все

Минимакс усилий и напряжений								
Фактор	Максимальные значения				Минимальные значения			
	Значение	Элемент	Сечение	Загружение	Значение	Элемент	Сечение	Загружение
NX	1669,001	1	1	1	-1598,792	3	1	1
NZ	5563,336	1	1	1	-2901,714	3	1	1
TXZ	5345,859	1	1	1	-551,665	3	1	1

ИНТЕРПОЛИРОВАНИЕ ФУНКЦИЙ

Постановка задачи

Пусть $x_i \in [a, b]$, $i = 0, 1, 2, \dots, n$ – множество значений аргумента, а $y_i \in R^n$ – множество значений некоторой функции $\varphi(x)$, аналитическое выражение которой в общем случае неизвестно. Требуется по заданным точкам (x_i, y_i) определить функцию $y = f(x)$, такую, чтобы:

- 1) $f(x_i) = y_i$;
- 2) отличие значений этой функции $f(x)$ от значений точной функции $\varphi(x)$ во всех других точках интервала $[a, b]$ было минимальным, то есть

$$\max_{x \in [a, b]} |f(x) - \varphi(x)| \rightarrow \min$$

Точки (x_i, y_i) называются узлами интерполяции. Задача по отысканию функции f называется задачей интерполяции, а сама функция f – интерполянт.

Задачи интерполяции возникают при рассмотрении следующих вопросов:

- 1) при обработке экспериментальных данных для выяснения общих закономерностей поведения изучаемой системы;
- 2) при проведении многократных вычислений в достаточно узком интервале изменения аргумента с целью упрощения сложных вычислительных формул;
- 3) при решении задач дифференциального исчисления, таких, как вычисление производных, вычисление определенных интегралов, решение дифференциальных уравнений (одна из таких задач рассматривается в разд. 9).

Общий подход к решению задачи интерполяции в математике заключается в следующем. Интерполянт определяется в виде линейной комбинации линейно независимых функций:

$$f(x) = \sum_{k=0}^n C_k \cdot \Phi_k(x)$$

Здесь $\Phi_k(x)$ – система известных линейно независимых функций, выбор которых осуществляется исследователем. Постоянные C_k неизвестны, в их определении и заключается задача интерполяции.

Так как для системы точек (x_i, y_i) должно выполняться условие $y_i = f(x_i)$, то можно записать систему, состоящую из $(n + 1)$ -го уравнения с $(n + 1)$ неизвестными C_k :

$$\begin{cases} y_0 = \sum C_k \cdot \Phi_k(x_0); \\ y_1 = \sum C_k \cdot \Phi_k(x_1); \\ \vdots \\ y_n = \sum C_k \cdot \Phi_k(x_n). \end{cases}$$

Данная система линейных уравнений будет иметь решение, когда определитель из коэффициентов системы не равен нулю:

$$\begin{vmatrix} \Phi_0(x_0) & \Phi_1(x_0) & \dots & \Phi_n(x_0) \\ \Phi_0(x_1) & \Phi_1(x_1) & \dots & \Phi_n(x_1) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \Phi_0(x_n) & \Phi_1(x_n) & \dots & \Phi_n(x_n) \end{vmatrix} \neq 0.$$

Для выбора функций Φ_k при построении интерполянта чаще всего используются следующие системы функций:

- 1) $1, x, x^2, \dots, x^n$ – система степенных функций;
- 2) $\{\cos kx, \sin kx\}$, $k = 0, \dots, n$ – система тригонометрических функций;
- 3) $\frac{\alpha_0 + \alpha_1 \cdot x + \alpha_2 \cdot x^2 + \dots + \alpha_s \cdot x^s}{\beta_0 + \beta_1 \cdot x + \beta_2 \cdot x^2 + \dots + \beta_p \cdot x^p}$ – система дробно-рациональных

функций.

В первом случае мы имеем дело с полиномиальной интерполяцией, во втором – с тригонометрической интерполяцией и, наконец, в третьем – получаем дробно-рациональную интерполяцию. Кроме перечисленных способов часто используется так называемая сплайн-интерполяция.

Полиномиальная интерполяция

В этом случае приближение таблично заданной функции осуществляется с помощью системы степенных функций, т.е. интерполянта $f(x)$ определяется в виде:

$$f(x) = C_0 + C_1 \cdot x + C_2 \cdot x^2 + \dots + C_n \cdot x^n = P_n(x),$$

где $P_n(x)$ – полином степени n .

Задача состоит в поиске коэффициентов C_0, C_1, \dots, C_n , удовлетворяющих системе уравнений $y_i = P_n(x_i)$, $i = 1, \dots, n$.

Имеет место следующая теорема (*теорема Вейерштрасса*).

Для любого как угодно малого числа ε существует такой полином степени $n = n(\varepsilon)$, что $\max_{x \in [a, b]} |P(x) - \varphi(x)| < \varepsilon$, где $\varphi(x)$ – точное выражение искомой функции.

Тогда в качестве интерполяционного полинома можно взять сумму вида

$$L_n(x) = \sum_{k=0}^n y_k \cdot l_k^n(x). \text{ В таком случае}$$

$$L_n(x_i) = \sum_{k=0}^n y_k \cdot l_k^n(x_i) = y_i$$

и тогда значения функции $L_n(x)$ в узлах интерполяции x_i совпадают с заданными значениями y_i .

Полином

$$L_n(x) = \sum_{k=0}^n y_k \cdot \prod_{\substack{i=0 \\ i \neq k}}^n \frac{(x - x_i)}{(x_k - x_i)}$$

называется *интерполяционным полиномом Лагранжа*.

Если известно, что интерполируемая функция $\varphi(x)$ имеет непрерывные частные производные до $(n+1)$ -го порядка включительно, то разность между точным значением функции и её полиномиальным приближением $\varphi(x) - L_n(x)$ в любой точке x из интервала интерполирования $x \in [a, b]$

можно оценить по формуле $\varphi(x) - L_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \prod_{j=0}^n (x - x_j)$, где $\xi \in [a, b]$.

Из этой формулы вытекает, что

$$|\varphi(x) - L_n(x)| \leq \max_{x \in [a, b]} \frac{f^{(n+1)}(x)}{(n+1)!} \prod_{j=0}^n (x - x_j).$$

Подробнее о построении интерполяционных полиномов Лагранжа при делении участка на два, три, четыре и шесть частей см. в книге [16].

О Г Л А В Л Е Н И Е

ПРЕДИСЛОВИЕ.....	3
Часть I. РАСЧЁТ ПЛАСТИН.....	5
1. НАПРЯЖЁННО-ДЕФОРМИРОВАННОЕ СОСТОЯНИЕ ПЛАСТИН.....	5
1.1. Основные предпосылки теории расчёта тонких пластин	5
1.2. Распределение напряжений и моментов при изгибе пластин	7
1.3. Вывод дифференциального уравнения изгиба пластинки.....	10
1.4. Процедура анализа НДС пластин. Аналогии с решением плоской задачи теории упругости.....	11
1.5. Формулировка граничных условий пластинки.....	12
1.6. Принцип возможных перемещений	15
1.7. Методы интегрирования уравнения изгиба прямоугольных пластин.....	17
2. РАСЧЁТ КРУГЛЫХ ПЛАСТИН	21
2.1. Вывод уравнения изгиба круглой пластины	21
2.2. Интегрирование уравнения изгиба круглых пластин	23
2.3. Определение изгибающих моментов и поперечных сил круглых пластин	23
2.4. Граничные условия для круглых пластин	25
2.5. Прогибы кольцевых пластин	25
3. ВАРИАЦИОННЫЕ И ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ РАСЧЁТА ПЛАСТИНОК.....	27
3.1. Классификация численных методов расчёта пластин.....	27
3.2. Метод конечных разностей, или метод сеток	28
3.3. Вариационный метод Бубнова – Галёркина.....	33
3.4. Приложение вариационного метода Ритца – Тимошенко к расчёту прямоугольных пластин.....	36
4. РАСЧЁТ ПЛАСТИНОК МЕТОДОМ КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ.....	39
4.1. Идея метода конечных элементов для расчёта пластин	39
4.2. Типы конечных элементов	41
4.3. Ячейки жёсткости плоских элементов.....	42
4.5. Формирование вектора нагрузки элемента Морли	73
4.6. Алгоритм программы расчёта пластин методом конечных элементов.....	77
Часть II. РАСЧЁТ ОБОЛОЧЕК	79
5. ОБОЛОЧКИ. ИХ КЛАССИФИКАЦИЯ. ДЕФОРМАЦИИ ОБОЛОЧЕК.....	79
5.1. Основные понятия теории оболочек. Виды оболочек.....	79
5.2. Формы описания поверхностей оболочек	81

5.3. Геометрические характеристики срединной поверхности. Условия Кодацци – Гаусса.....	83
5.4. Параметры Ламэ для поверхности оболочки вращения	88
5.5. Основные гипотезы технической теории расчёта оболочек.....	90
5.6. Определение перемещений оболочек	92
5.7. Деформации оболочек	95
5.8. Правила дифференцирования единичных ортов	103
6. УРАВНЕНИЯ СОСТОЯНИЯ ОБОЛОЧЕК.....	108
6.1. Характеристики напряжённого состояния оболочки	108
6.2. Уравнения равновесия оболочек	111
6.3. Физические уравнения общей теории оболочек.....	116
6.4. Граничные условия	116
6.5. Методы решения задач по расчёту оболочек.....	117
7. БЕЗМОМЕНТНАЯ ТЕОРИЯ РАСЧЁТА ОБОЛОЧЕК ВРАЩЕНИЯ	121
7.1. Условия безмоментного состояния оболочек	121
7.2. Общие уравнения безмоментной теории оболочек вращения	122
7.3. Уравнения напряжённо-деформированного состояния безмоментных оболочек вращения.....	123
7.4. Осесимметричные оболочки вращения	125
7.5. Примеры расчёта оболочек по безмоментной теории.....	129
8. КРУГОВЫЕ ЦИЛИНДРИЧЕСКИЕ ОБОЛОЧКИ	135
8.1. Уравнения напряжённо-деформированного состояния цилиндрических оболочек	135
8.2. Осесимметричное нагружение оболочки	139
8.3. Напряжённо-деформированное состояние вертикальной цилиндрической оболочки при гидростатическом нагружении...	140
8.4. Анализ напряжений в оболочке при гидростатическом нагружении	144
8.5. Примеры расчёта цилиндрических оболочек.....	145
9. ЧИСЛЕННЫЙ РАСЧЁТ КРУГОВЫХ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ОБОЛОЧЕК.....	158
9.1. Матричная форма дифференциального уравнения оболочки	159
9.2. Пример расчёта.....	162
10. ПОЛУМОМЕНТНАЯ ТЕОРИЯ РАСЧЁТА ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ОБОЛОЧЕК В.З. ВЛАСОВА	165
10.1. Уравнения состояния цилиндрической оболочки по полумоментной теории. Принятые гипотезы расчёта	165
10.2. Разрешающее уравнение полумоментной теории цилиндрической оболочки. Функция напряжений	167
10.3. Интегрирование основного уравнения полумоментной теории цилиндрической оболочки.....	169

10.4. Приближённые методы анализа напряжённого состояния цилиндрической оболочки.....	171
11. ОБЩАЯ (МОМЕНТНАЯ) ТЕОРИЯ РАСЧЁТА ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ОБОЛОЧЕК.....	172
11.1. Уравнения состояния цилиндрической оболочки	172
11.2. Упрощённая форма разрешающего уравнения.....	176
11.3. Расчёт коротких цилиндрических оболочек покрытий	178
11.4. Граничные условия для расчёта коротких оболочек на вертикальные нагрузки	180
12. РАСЧЁТ ОБОЛОЧЕК МЕТОДОМ КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ	185
12.1. Применение МКЭ в теории расчёта оболочек	185
12.2. Свойства конечных элементов оболочек.....	186
12.3. Типы конечных элементов цилиндрических оболочек.....	188
12.4. Формирование ячеек жёсткости конечных элементов цилиндрических оболочек	190
13. ПРЕДЕЛЬНОЕ РАВНОВЕСИЕ И СОПРОТИВЛЕНИЕ ОБОЛОЧЕК	197
13.1. Модели деформирования оболочек.....	197
13.2. Условия пластичности стержней.....	200
13.3. Ассоциированный закон течения и его геометрическое представление	204
13.4. Теоремы теории предельного равновесия	206
13.5. Уравнения состояния сферических оболочек	210
13.6. Условия пластичности оболочек. Гиперповерхности текучести	213
13.7. Статический метод определения предельного давления на сферическую оболочку.....	216
13.8. Кинематический метод определения предельного давления на сферическую оболочку с использованием линейного программирования.....	218
13.9. Динамика сферических оболочек с учётом пластичности материала	222
БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК.....	230
Приложение 1	232
Приложение 2	242

Для заметок

Для заметок

Для заметок

Учебное издание

Монахов Владимир Андреевич

ТЕОРИЯ ПЛАСТИН И ОБОЛОЧЕК

Учебное пособие

по направлению подготовки 08.05.01

«Строительство уникальных зданий и сооружений»

Редактор М.А. Сухова

Верстка Н.В. Кучина

Подписано в печать 05.02.2016. Формат 60x84/16.

Бумага офисная «Снегурочка». Печать на ризографе.

Усл.печ.л. 14,65. Уч.-изд.л. 15,75. Тираж 80 экз.

Заказ № 129.

Издательство ПГУАС.
440028, г. Пенза, ул. Германа Титова, 28.

