

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Федеральное государственное бюджетное образовательное
учреждение высшего образования
«Пензенский государственный университет
архитектуры и строительства»
(ПГУАС)

С.В. Бакушев

ТЕОРИЯ УПРУГОСТИ КРАТКИЙ ТЕОРЕТИЧЕСКИЙ КУРС

Рекомендовано Редсоветом университета
в качестве учебного пособия для студентов,
обучающихся по направлению 08.03.01 «Строительство»

Пенза 2016

УДК 539.3(075.8)
ББК 22.251я73
Б19

Рецензенты: доктор технических наук, профессор Ю.П. Скачков (Пензенский государственный университет архитектуры и строительства);
доктор технических наук, профессор И.Г. Овчинников (Саратовский государственный технический университет)

Бакушев С.В.

Б19 Теория упругости. Краткий теоретический курс: учеб. пособие / С.В. Бакушев. – Пенза: ПГУАС, 2016. – 256 с.

Книга посвящена систематическому изложению теоретического курса линейной теории упругости и охватывает как общие положения курса – напряжения, деформации, перемещения и связь между ними, так и теоретические вопросы решения прикладных задач: расчёт стержней на кручение, расчёт балок-стенок, тонких пластин и оболочек.

Учебное пособие подготовлено на кафедре «Механика» и предназначено для студентов, обучающихся по направлению подготовки 08.03.01 «Строительство». Книга может быть полезной студентам технических специальностей, аспирантам, специализирующимся в области механики деформируемого твёрдого тела, а также инженерам-строителям и инженерам-проектировщикам.

© Пензенский государственный университет
архитектуры и строительства, 2016
© Бакушев, С.В. 2016

ПРЕДИСЛОВИЕ

Теория упругости – это наука, область интересов которой распространяется на выявление напряжённо-деформированного состояния твёрдых деформируемых тел, находящихся под воздействием внешних силовых – статических и динамических, а также температурных полей. Общий курс теории упругости можно условно разделить на две части. К первой части следует отнести теоретические основы определения напряжённо-деформированного состояния твёрдых деформируемых тел различной конфигурации: стержней, балок-стенок, пластин, оболочек, массивных тел. Вторую часть будут составлять практические рекомендации, методы и приёмы решения задач теории упругости: расчёт стержней, в том числе на кручение, расчёт балок-стенок, пластин, оболочек и так далее. Таким образом, вторая часть курса теории упругости должна охватывать вопросы расчёта элементов строительных конструкций и сооружений в целом.

Исторически такое разделение общей теории упругости на две части произошло с самого начала её становления как науки, поскольку существуют математическая и прикладная теории упругости. Изложение этих частей в одной книге с самого начала было обусловлено, видимо, тем, что теоретические изыскания требовали непосредственного практического подтверждения. Однако в настоящее время, когда теоретические выводы успешно прошли практическую проверку, целесообразно, особенно на начальной стадии изучения теории упругости, эти две части излагать отдельно. Кроме того, расчёт элементов строительных конструкций и сооружений в целом требует, как правило, теоретических знаний всего курса, а не отдельных его разделов.

Ввиду этого в предлагаемой книге излагается только первая часть общего курса теории упругости. Автор остановился на освещении лишь теоретических вопросов обоснования напряжённо-деформированного состояния упругих тел вплоть до постановки краевых задач. Однако при этом автор стремился к строгому, обоснованному, но предельно простому стилю изложения материала.

Учебное пособие состоит из тринадцати глав.

Первые пять глав посвящены основным положениям линейной теории упругости: здесь даны теория напряжений, теория деформаций, физические соотношения, постановка и методы решения задач теории упругости, вариационная формулировка задач теории упругости.

В следующих главах рассматриваются теоретические основы одномерной и двумерной задач теории упругости в декартовых координатах, двумерная задача в полярных координатах.

В девятой, десятой и одиннадцатой главах излагаются теоретические основы расчёта призматических стержней на кручение, изгиба тонких пластин, основы теории оболочек.

В двенадцатой главе даются основы теории распространения упругих волн деформаций.

Последняя тринадцатая глава посвящена некоторым обобщениям на геометрически и физически нелинейную теорию упругости.

Содержание книги соответствует Федеральному государственному образовательному стандарту высшего образования по направлению подготовки 08.03.01 «Строительство» и ориентировано на профессиональную деятельность выпускников в области проектирования и реконструкции зданий, сооружений, проведения научных исследований и образовательной деятельности для решения следующих профессиональных задач:

1) расчётные обоснования элементов строительных конструкций зданий, сооружений и комплексов;

2) участие в проектировании строительных объектов;

3) изучение и анализ научно-технической информации, отечественного и зарубежного опыта по профилю деятельности;

4) участие в проведении экспериментов по заданным методикам, составление описания проводимых исследований и систематизация результатов.

При изучении курса «Теория упругости» у обучающегося будут сформированы следующие общекультурные, общепрофессиональные и профессиональные компетенции:

✓ способность к самоорганизации и самообразованию;

✓ способность использовать основные законы естественнонаучных дисциплин в профессиональной деятельности, применять методы математического анализа и математического (компьютерного) моделирования, теоретического и экспериментального исследования;

✓ способность выявлять естественнонаучную сущность проблем, возникающих в ходе профессиональной деятельности, привлекать для их решения соответствующий физико-математический аппарат;

✓ знание научно-технической информации, отечественного и зарубежного опыта по профилю деятельности;

✓ владение методами и средствами физического и математического (компьютерного) моделирования.

При изучении дисциплины «Теория упругости» студенты должны получить исчерпывающие сведения о задачах и методах теории упругости; понимать геометрический, физический и механический смысл основных уравнений теории упругости; уметь записывать условия на поверхности твёрдого тела; уметь формулировать задачи теории упругости в напряжениях и перемещениях; иметь представление о теоретических основах расчёта балок-стенок, тонких пластин и оболочек; получить сведения о расчёте упругих тел с учётом геометрической и физической нелинейности.

Следует отметить, что данное учебное пособие не претендует на исчерпывающее и полное изложение всех разделов курса линейной теории упругости. Для формирования у обучающихся цельного представления о науке «Теория упругости» следует познакомиться ещё с методами и приёмами решения прикладных задач механики деформируемого твёрдого тела.

ВВЕДЕНИЕ

Теория упругости — раздел механики деформируемого твёрдого тела — изучает механическое поведение, то есть напряжённо-деформированное состояние, упругого тела при механических, а именно силовых или кинематических, воздействиях, а также при изменении температуры.

Согласно формуле специальности 01.02.04 «Механика деформируемого твёрдого тела», *механика деформируемого твёрдого тела* — область науки и техники, изучающая закономерности процессов деформирования, повреждения и разрушения материалов различной природы, а также напряжённо-деформированное состояние твёрдых тел из этих материалов при механических, тепловых, радиационных, статических и динамических воздействиях в пассивных и активных, газовых и жидких средах и полях различной природы.

Если рассматривать результаты расчёта упругих тел методами теории упругости с инженерной точки зрения, то напряжения, деформации и перемещения, найденные в каждой точке упругого тела, как таковые никого, вообще говоря, не интересуют. Для инженера важно знать: обеспечивается ли прочность и жёсткость упругого тела заданных размеров, находящегося под действием известных нагрузок, и с каким запасом. Для упругих тел, находящихся в условиях сложного напряжённо-деформированного состояния, прочность, как известно, оценивается с помощью критериев прочности. Для оценки жёсткости необходимо знать деформации и перемещения.

Если рассматривается физически и геометрически линейная или геометрически линейная, но физически нелинейная теория упругости, то критерии прочности представляют собой некоторые соотношения между компонентами тензора напряжений. Для геометрически нелинейной теории упругости критерии прочности кроме компонентов тензора напряжений включают ещё и компоненты тензора деформаций. Критерии прочности устанавливаются, вообще говоря, либо на основании экспериментальных данных, либо феноменологически с подтверждением высказанного предположения данными экспериментов. И хотя вопросы постановки и выполнения экспериментальных работ не входят в сферу интересов теории упругости (это прерогатива материаловедения), но определение составляющих в формулах для критериев прочности — напряжений и деформаций, вообще говоря, есть основная задача теории упругости.

Целью *теории упругости* являются:

- установление функциональных связей между составляющими напряжённого и деформированного состояний, выявление законов деформирования на основе экспериментальных данных;
- разработка методов постановки и методов решения краевых задач для прогноза механического поведения упругих тел при разнообразных статических и динамических воздействиях;

- определение напряжений, деформаций и перемещений в каждой точке упругого тела заданной формы и размеров, находящегося под действием известной совокупности внешних воздействий – сил, перемещений, температуры.

Область исследований *теории упругости* охватывает широкий круг задач, включающий:

1. Разработку законов деформирования упругих тел из изотропных и анизотропных материалов, в том числе с учётом физической и геометрической нелинейности.

2. Решение общей задачи теории упругости в напряжениях, перемещениях и смешанной.

3. Разработку методов решения прикладных задач теории упругости, связанных с расчётом балок-стенок – плоская задача теории упругости; расчётом тонких и толстых пластин; расчётом мембран и оболочек; расчётом сплошных тел типа полупространства; расчётом стержней некруглого поперечного сечения на кручение и так далее.

4. Разработку методов решения прикладных задач теории упругости на интенсивные динамические воздействия и колебания.

5. Исследование устойчивости упругого равновесия твёрдых тел различной конфигурации.

6. Разработку математических моделей и численных методов анализа работы конструкций применительно к задачам, не допускающим прямого аналитического исследования.

7. Разработку критериев прочности упругих тел при сложных режимах нагружения.

Как известно, теми же вопросами, что и теория упругости, занимается наука “Соппротивление материалов”. *Соппротивление материалов* – часть механики деформируемого твёрдого тела, которая рассматривает методы инженерных расчётов конструкций на прочность, жёсткость и устойчивость при одновременном удовлетворении требований надёжности, экономичности и долговечности. Так же, как и теория упругости, сопротивление материалов основной своей задачей ставит определение напряжений, деформаций и перемещений в твёрдом упругом теле, которое подвергается силовому или тепловому воздействию.

Различие между этими науками заключается в методах и строгости решения различных задач. Областью исследований сопротивления материалов являются в основном стержни, то есть твёрдые тела, два геометрических размера которых значительно меньше третьего. Областью исследований теории упругости являются и стержни, и пластинки (оболочки) – твёрдые тела, два геометрических размера которых значительно больше третьего, а также массивные тела, все три геометрических размера которых примерно одного порядка. Соппротивление материалов в своих исследованиях при раскрытии напряжённо-деформированного

состояния тела, статически неопределимого по своей природе, кроме общих с теорией упругости допущений, касающихся свойств упругого твёрдого тела, прибегает к дополнительным гипотезам, например: широко используется гипотеза Бернулли о плоских сечениях. Теория упругости статическую неопределимость напряжённого и деформированного состояний упругого тела раскрывает без каких-либо, вообще говоря, дополнительных допущений и гипотез, кроме общих с сопротивлением материалов допущений, касающихся свойств упругого твёрдого тела.

Многие задачи расчёта элементов строительных конструкций, например расчёт стержней некруглого поперечного сечения на кручение, расчёт пластин, оболочек, балок-стенок, массивных тел, сопротивление материалов решить не в состоянии. Сюда же относятся задачи о местных напряжениях и о концентрации напряжений.

Если напряжённо-деформированное состояние тела раскрывается только на основе гипотез о свойствах упругих тел, то теория упругости называется *математической*. Получаемые в математической теории упругости расчётные уравнения решаются либо точными, либо такими приближёнными методами, которые позволяют безгранично увеличивать степень приближения к точному решению. Поэтому результаты, получаемые при решении задач математической теории упругости, можно считать эталоном для оценки точности различных приближенных теорий и методов решения сходных задач.

Если напряжённо-деформированное состояние тела раскрывается на основе каких-либо дополнительных предпосылок (гипотеза плоских сечений для стержней, гипотеза прямых нормалей для пластинок и оболочек и так далее), то теория упругости называется *прикладной*.

Если теория упругости исследует тела из материалов с линейной зависимостью между напряжениями и деформациями, то есть следующих обобщённому закону Гука, а малые перемещения точек тела пропорциональны действующим нагрузкам, то она называется *линейной*.

Если теория упругости исследует тела из материала, не следующего закону Гука (физическая нелинейность), или перемещения точек не пропорциональны действующим нагрузкам (геометрическая нелинейность), или имеет место и то и другое, то она называется *нелинейной*.

В теории упругости различают прямую и обратную задачи. *Прямая задача* состоит в том, что надо найти напряжения, деформации и перемещения в каждой точке тела по известным внешним воздействиям. Решая *обратную* задачу, нужно по заданным в каждой точке тела напряжениям, или деформациям, или перемещениям найти внешние воздействия на упругое тело.

Теория упругости как самостоятельный раздел механики деформируемого твёрдого тела базируется на работах выдающихся учёных: Галилео Галилея (Galilei Galileo, 1564-1642), Роберта Гука (Hook Robert, 1635-1703),

Клода Луи Мари Анри Навье (Navier Claude Louis Marie Henri, 1785-1836), Якоба Бернулли (Bernoulli Jakob, 1654-1705), Шарля Огюстэна де Кулона (Charles-Augustin de Coulomb, 1736-1806), Леонарда Эйлера (Euler Leonhard, 1707-1783), Жозефа Луи Лагранжа (Lagrange Joseph Louis, 1736-1813) и других учёных.

Теория упругости как наука сформировалась в первой половине XIX века, что было обусловлено успехами, достижениями и развитием математики. Приоритет в создании основ математической теории упругости принадлежит профессорам и выпускникам Парижской политехнической школы, созданной в 1795 году. Математики и механики Симеон Дени Пуассон (Siméon Denis Poisson, 1781-1840), Огюстен Луи Коши (Augustin Louis Cauchy, 1789-1857), Клод Луи Мари Анри Навье (Navier Claude Louis Marie Henri, 1785-1836), Габриель Ляме (Gabriel Lamé, 1795-1870), Адемар Жан-Клод Барре де Сен-Венан (1797-1886) получили основные дифференциальные уравнения этой теории.

Дальнейшее своё развитие математическая и прикладная теория упругости получила в трудах таких выдающихся учёных, как Бенуа Поль Эмиль Клапейрон (Benoît Paul Émile Clapeyron, 1799-1864), Густав Роберт Кирхгоф (Gustav Robert Kirchhoff, 1824-1887), Софи Жермен (Marie-Sophie Germain, 1776-1831), Август Эдуард Хьюг Ляв (Augustus Edward Hough Love, 1863-1940), Жозеф Валантен Буссинеск (Joseph Valentin Boussinesq, 1842-1929), Генрих Рудольф Герц (Heinrich Rudolf Hertz, 1857-1894), Остроградский Михаил Васильевич (1801-1861/62), Гадолин Аксель Вильгельмович (1828-1892), Журавский Дмитрий Иванович (1821-1891), Колосов Гурий Васильевич (1867-1936), Мухелишвили Николай Иванович (1891-1976), Бубнов Иван Григорьевич (1872-1919), Тимошенко Степан Прокофьевич (1878-1972), Галёркин Борис Григорьевич (1871-1945), Папкович Петр Федорович (1887-1946), Власов Василий Захарович (1906-1958), Новожилов Валентин Валентинович (1910-1987), Работнов Юрий Николаевич (1914-1985), Филоненко-Бородич Михаил Митрофанович (1885-1962), Мурнаган Фрэнсис Доминик (Francis Dominic Murnaghan, 1893-1976), Рональд Самуэль Ривлин (Ronald Samuel Rivlin, 1915-2005) и др.

Широкое применение достижений математики и физики, технические приложения теории упругости, развитие компьютерной техники и технологий приводят к тому, что возводимые здания и сооружения проектируются более надёжными, более долговечными, более безопасными, более изысканными и привлекательными.

Глава 1. ТЕОРИЯ НАПРЯЖЕНИЙ

§1.1. Допущения в теории упругости

Математическая теория упругости имеет дело с идеализированным (абстрактным) твёрдым деформируемым телом, наделённым свойствами, учитывающими лишь основные качества реального тела [1].

В основу линейной теории упругости положены следующие допущения и предпосылки относительно свойств материала и характера деформаций.

1. *Сплошность идеально упругого тела.* Полагают, что упругое тело не имеет внутренних пустот и материал тела непрерывно занимает весь его объём. При этом дискретную атомистическую структуру вещества сознательно не принимают во внимание. Данное допущение даёт возможность рассматривать перемещения и деформации как непрерывные функции пространственных координат, и, следовательно, для исследования напряжённо-деформированного состояния упругого тела можно использовать математический аппарат дифференциального исчисления.

2. *Однородность материала упругого тела.* Согласно этому допущению полагают, что во всех точках тело имеет одинаковые упругие свойства. Это допущение может быть признано справедливым, если рассматривать достаточно малую область деформируемого твёрдого тела.

3. *Изотропность твёрдого тела.* Согласно этому допущению полагают, что во всех точках тела его упругие свойства одинаковы и не зависят от рассматриваемого направления. Данное допущение исключает из рассмотрения обширный класс анизотропных конструкционных материалов.

4. *Идеальная упругость материала.* Полагают, что после снятия внешних нагрузок, приложенных к упругому телу и вызвавших его деформацию, оно полностью восстанавливает свою форму и размеры. Это допущение исключает из рассмотрения твёрдые тела, в которых после снятия внешнего воздействия возникают остаточные деформации.

5. *Линейная зависимость между напряжениями и деформациями.* Из данного допущения следует, что зависимость между напряжениями и деформациями при нагружении упругого тела описывается линейным законом. Это допущение для большинства конструкционных материалов соблюдается лишь при очень небольших внешних воздействиях.

6. *Малость перемещений тела по сравнению с его линейными размерами.* Согласно этому допущению полагают, что перемещения точек упругого тела при его нагружении значительно меньше линейных размеров тела. Принятие данного допущения исключает из рассмотрения гибкие упругие тела типа стержней, пластин, оболочек и так далее, а также массивные тела, находящиеся под воздействием значительных внешних нагрузок.

7. *Допущение о естественном ненапряжённом состоянии твёрдого тела.* В соответствии с этим допущением полагают, что до приложения рабочих внешних сил в теле отсутствуют какие-либо напряжения. На самом деле напряжения, определённые при решении задач теории упругости, не являются истинными, а представляют собой дополнение к начальным напряжениям в тех же точках тела. Начальные напряжения зачастую обусловлены действием сил гравитации; они могут возникать при изготовлении или монтаже конструкции, если геометрические размеры элементов конструкции не соответствуют проектным; могут быть следствием неравномерного температурного нагрева упругого тела. Если исключить человеческий фактор, то данное допущение предполагает, что все твёрдые тела являются невесомыми.

Общая (нелинейная) теория упругости основывается, вообще говоря, лишь на предположении о *сплошности* и *однородности* деформируемого твёрдого тела [20].

Справедливость введённых допущений применительно к упругому телу из того или иного материала окончательно может быть установлена лишь опытом. Оценка возникающей при этом погрешности в механическом поведении реального тела и прогнозе его поведения, даваемом теорией упругости, является основой для введения всевозможных коэффициентов безопасности, обеспечивающих надёжную и долговечную работу зданий и сооружений.

В теории упругости широко используется принцип Сен-Венана, который, по существу, также относится к числу рабочих гипотез. В соответствии с этим принципом в точках твёрдого тела, достаточно удалённых от мест приложения внешних нагрузок на малой поверхности тела, напряжения почти не зависят от их распределения по этой малой поверхности тела. Таким образом, если усилия, приложенные к небольшой части упругого тела заменить другими, статически эквивалентными, то существенно изменятся только местные напряжения, на достаточно же удалённых точках такая замена отразится незначительно, практически её влиянием можно пренебречь. Принцип Сен-Венана играет большую роль в построении приближённых решений задач теории упругости, позволяя заменять сложные краевые (граничные) условия более простыми, статическими эквивалентными.

§1.2. Основные понятия теории напряжений

Внешние силы, действующие на твёрдое тело, подразделяются на *поверхностные*, приложенные к поверхности тела, и *объёмные*, приложенные ко всем точкам объёма, занятого телом.

Примерами объёмных сил являются сила тяжести, центробежные силы, развивающиеся в теле при его вращении, сила магнитного тяготения, если

тело находится под действием соответствующего поля, и т. п. Силы эти по тому или иному закону распределяются по всему объёму тела. Вектор объёмной силы \bar{F} будем характеризовать величиной силы, приходящейся на единицу объёма (интенсивность объёмной силы), выделенного в окрестностях рассматриваемой точки тела. Поскольку все точки тела имеют разные координаты, то вектор интенсивности объёмной силы будет являться, вообще говоря, функцией декартовых координат: $\bar{F} = \bar{F}(x, y, z)$. Проекции его на координатные оси OX, OY, OZ будем обозначать как $F_x(x, y, z), F_y(x, y, z), F_z(x, y, z)$ соответственно. Объёмная сила, приходящаяся на бесконечно малый элементарный параллелепипед с рёбрами dx, dy, dz , заключающий в себе данную точку $A(x_A, y_A, z_A)$, имеет своими проекциями на координатные оси величины

$$F_x(x_A, y_A, z_A) dx dy dz - \text{в направлении оси } OX;$$

$$F_y(x_A, y_A, z_A) dx dy dz - \text{в направлении оси } OY;$$

$$F_z(x_A, y_A, z_A) dx dy dz - \text{в направлении оси } OZ.$$

Поверхностные силы являются результатом контакта тела с другими телами, с ним соприкасающимися. Поверхностные силы могут распределяться по поверхности тела непрерывно – по некоторому закону – и дискретно в виде сосредоточенных сил (рис. 1).

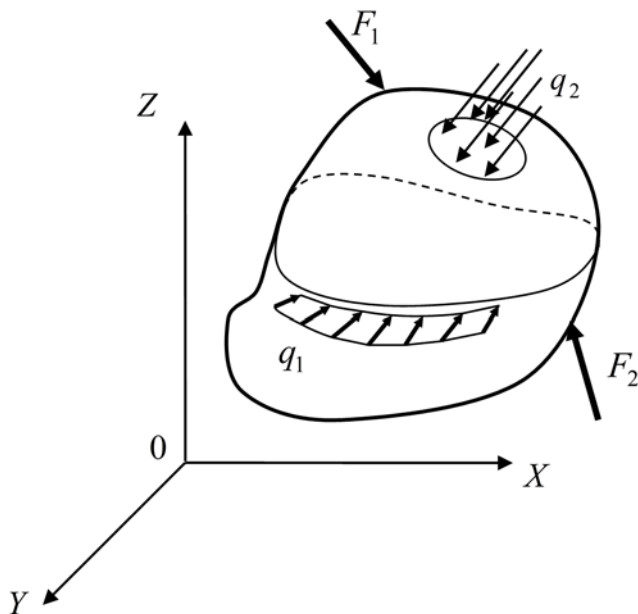


Рис. 1

На рис. 1 обозначено:

F_1 и F_2 – поверхностные сосредоточенные силы; q_1 – поверхностная нагрузка, распределённая по части длины линии; q_2 – поверхностная нагрузка, распределённая по части поверхности тела.

Непрерывные поверхностные силы могут быть распределены либо по площади поверхности тела, либо по линии, проведённой по поверхности тела. В первом случае их величина характеризуется интенсивностью, отнесённой к единице площади поверхности тела; во втором случае их величина характеризуется интенсивностью, отнесённой к единице длины линии. В любом случае и те и другие поверхностные силы являются, вообще говоря, функциями пространственных координат: $F_i = F_i(x, y, z)$, $i=1, 2, \dots$. Сосредоточенные внешние силы, приложенные в точках поверхности тела, можно рассматривать как предельный случай поверхностных нагрузок, распределённых на малой части поверхности тела.

При выполнении расчётов объёмные и поверхностные силы, как правило, раскладывают по осям декартовой системы координат. При этом проекция интенсивности внешней нагрузки считается положительной, если её направление совпадает с направлением соответствующей координатной оси.

При воздействии на упругое тело внешних сил оно деформируется, то есть изменяются его форма и размеры. В результате этого между отдельными частицами тела возникают силы взаимодействия, которые называются *внутренними силами* или *усилиями*. Определяют эти внутренние силы с помощью метода *сечений*. Метод сечений состоит в следующем.

- a. Упругое тело, находящееся под воздействием внешних сил \bar{F}_i в равновесии, мысленно рассекается произвольной плоскостью на две части I и II (рис. 2).
- b. Одна часть отбрасывается (например часть I), а её действие на оставшуюся часть II заменяется внутренними усилиями, распределёнными произвольно, вообще говоря, по плоскости проведённого сечения A . Совокупность этих внутренних сил, в соответствии с теоремами статики, можно привести к главному вектору \bar{R} и главному моменту \bar{M} внутренних сил, приложенных в центре тяжести проведённого сечения.
- c. Поскольку рассматриваемое упругое тело находится в равновесии, то в равновесии находится и любая его отсечённая часть. Таким образом, составляя уравнения равновесия для части II, можно найти внутренние силы:

$$\bar{R} + \sum \bar{F}_i = 0; \quad \bar{M} + \sum \bar{F}_i \cdot l_i = 0. \quad (1.1)$$

Векторные равенства (1.1) в скалярной форме сводятся к шести соотношениям: трём уравнениям, выражающим равенство нулю сумм проекций всех внешних сил и главного вектора внутренних сил на оси декартовой системы координат, и трём уравнениям, выражающим равенство нулю сумм моментов всех внешних сил и главного момента внутренних сил относительно осей декартовой системы координат. В результате могут быть найдены компоненты главного вектора и главного момента внутренних сил относительно осей декартовой системы координат. Следует отметить, что

компоненты главного вектора и главного момента внутренних сил, как и сами главный вектор и главный момент, приложены в центре тяжести проведённого сечения.

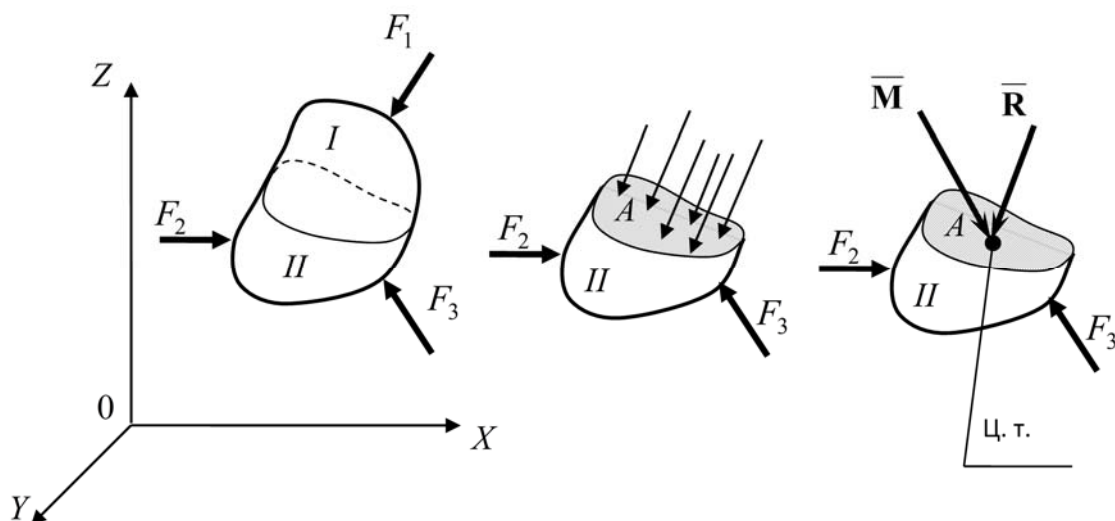


Рис. 2

Такой обобщённый подход не может дать представления о мере интенсивности внутренних усилий и законе их распределения по сечению. Величиной, которая характеризует интенсивность внутренних усилий и даёт закон их распределения по сечению, является *напряжение*.

Для определения напряжения в некоторой точке деформированного упругого тела проведём через эту точку плоскость так, чтобы рассечь тело на две части I и II (рис. 3).

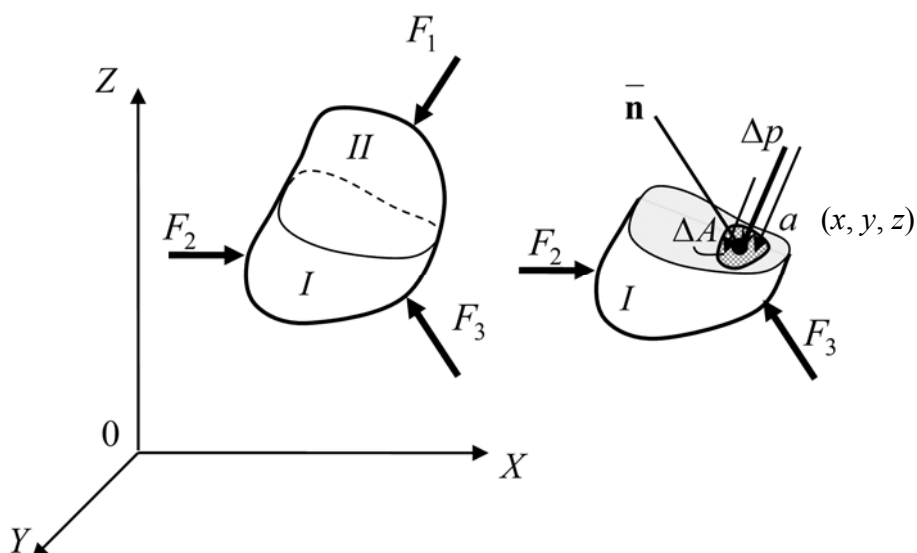


Рис. 3

Отбросим одну часть тела (например часть II), а её действие на оставшуюся часть I заменим внутренними усилиями. Выделим в плоскости проведённого сечения, в окрестности точки $a(x, y, z)$, элементарную

площадку величиной ΔA . Ориентация площадки ΔA будет задаваться направляющими косинусами l, m, n нормали $\bar{\mathbf{n}}$ к элементарной площадке в системе декартовых координат X, Y, Z . На элементарную площадку ΔA будет приходиться некоторая часть внутренних усилий, равнодействующую которых обозначим Δp . Равнодействующая Δp приложена в центре тяжести элементарной площадки ΔA и в общем случае не совпадает с направлением нормали $\bar{\mathbf{n}}$. Отношение равнодействующей Δp к площади ΔA представляет собой *полное среднее напряжение* на выделенной элементарной площадке:

$$P_{cp}^n = \frac{\Delta p}{\Delta A}. \quad (1.2)$$

Вполне понятно, что величина полного среднего напряжения P_{cp}^n зависит как от величины площади ΔA (на большую, например, по величине площадь будет действовать большая часть внутренних усилий), так и от ориентации рассматриваемой элементарной площадки, поскольку в разных сечениях возникают, вообще говоря, разные внутренние усилия:

$$P_{cp}^n = P_{cp}^n(\bar{\mathbf{n}}, \Delta A).$$

Чтобы исключить влияние конфигурации и величины элементарной площадки при неравномерном, вообще говоря, распределении внутренних усилий по проведённому сечению, определим *полное напряжение* в точке $a(x, y, z)$ как предел среднего напряжения, когда величина площади ΔA стремится к нулю:

$$P_n = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta p}{\Delta A}. \quad (1.3)$$

С учётом сказанного в предыдущем абзаце, полное напряжение P_n в точке зависит лишь от ориентации выделенной площадки в окрестностях рассматриваемой точки:

$$P_n = P_n(\bar{\mathbf{n}}).$$

Так как через точку можно провести бесчисленное множество всевозможных площадок, то полное напряжение в точке может быть определено лишь по отношению к конкретной площадке. Таким образом, говоря о полном напряжении в точке, следует в обязательном порядке указывать площадку, по которой оно действует.

Напряжения измеряются в паскалях: один паскаль соответствует силе величиной один ньютон, делённой на один квадратный метр площади:

$$[P_n] = 1 \frac{\text{Н}}{\text{м}^2} = 1 \text{ Па}.$$

Полное напряжение, действующее по рассматриваемой площадке, можно считать величиной векторной, поскольку оно характеризуется двумя параметрами: направлением и величиной. Рассмотрим приёмы разложения вектора полного напряжения, действующего по рассматриваемой площадке, на составляющие.

1. Разложение вектора полного напряжения по осям декартовой системы координат (рис. 4).

Обозначив проекции вектора полного напряжения $\bar{\mathbf{P}}_n$ на оси декартовой системы координат X, Y, Z как P_{nx}, P_{ny}, P_{nz} , легко видеть, что

$$P_n^2 = P_{nx}^2 + P_{ny}^2 + P_{nz}^2. \quad (1.4)$$

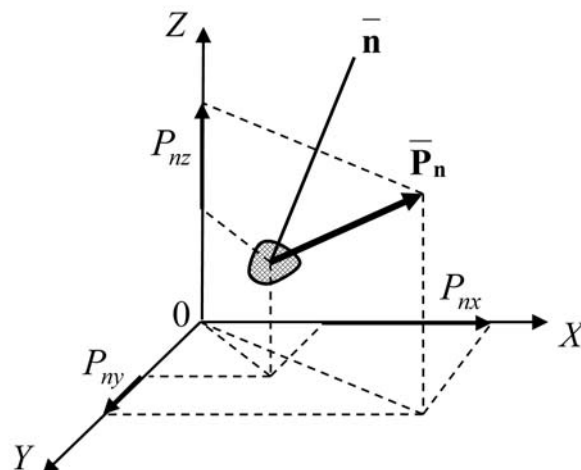


Рис. 4

2. Разложение вектора полного напряжения по нормали и бинормали к рассматриваемой площадке (рис. 5).

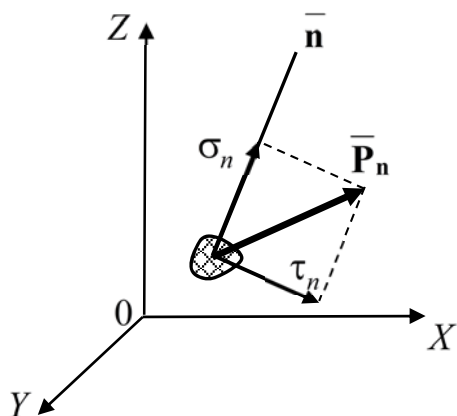


Рис. 5

Проекцию полного напряжения $\bar{\mathbf{P}}_n$ на направление нормали к рассматриваемой площадке обозначим σ_n ; проекцию полного напряжения $\bar{\mathbf{P}}_n$ на направление бинормали к рассматриваемой площадке обозначим τ_n . Очевидно,

$$P_n^2 = \sigma_n^2 + \tau_n^2. \quad (1.5)$$

3. Разложение вектора полного напряжения по осям локальной системы координат.

В этом случае элементарная площадка, на которой определяется полное напряжение в точке $\bar{\mathbf{P}}_n$, выбирается не произвольным образом, а так, чтобы она была параллельна одной из координатных плоскостей. Либо, если

ориентация элементарной площадки в пространстве задана, выбирается система координат так, чтобы одна из координатных плоскостей была параллельна рассматриваемой площадке. Таким образом, в данном случае с каждой площадкой связывается своя (локальная) система координат, однако направление осей локальной системы координат совпадает с направлением осей общей (глобальной) системы координат X, Y, Z .

На рис. 6 показаны три элементарные площадки $\Delta A_x, \Delta A_y, \Delta A_z$. Площадка ΔA_x параллельна координатной плоскости YOZ , то есть нормаль к этой площадке совпадает с направлением оси OX . Площадка ΔA_y параллельна координатной плоскости XOZ , то есть нормаль к этой площадке совпадает с направлением оси OY . Площадка ΔA_z параллельна координатной плоскости XOY , то есть нормаль к этой площадке совпадает с направлением оси OZ .

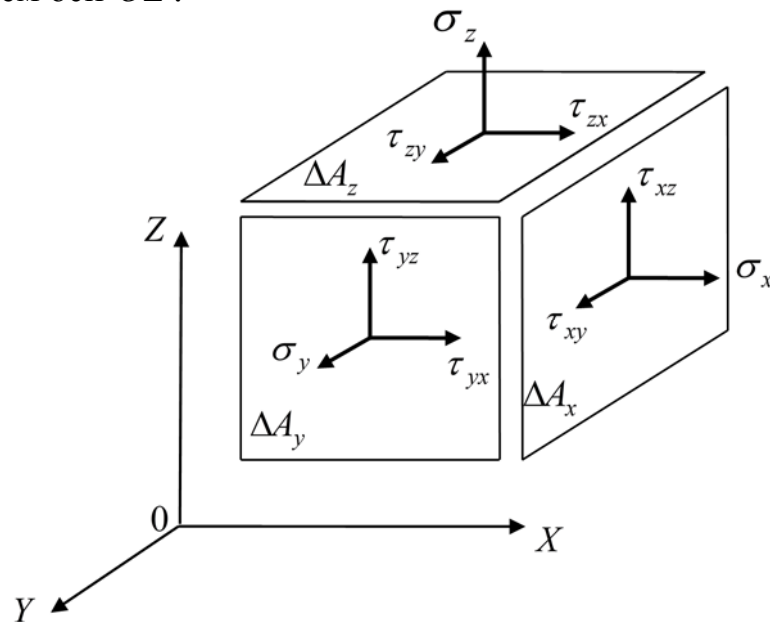


Рис. 6

Полные напряжения, действующие по каждой из этих площадок, раскладываем на составляющие по направлению осей декартовой системы координат X, Y, Z . Составляющие полного напряжения на каждой площадке, совпадающие с направлениями нормалей (*нормальные* напряжения), будем обозначать буквой σ с одним индексом, обозначающим название координатной оси, совпадающей с направлением соответствующей нормали (на рис. 6 это $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$). Составляющие полного напряжения на каждой площадке, направленные перпендикулярно к соответствующей нормали и совпадающие по направлению с координатными осями (*касательные* напряжения), будем обозначать буквой τ с двумя индексами; первый индекс будет обозначать название координатной оси, направленной по нормали к рассматриваемой площадке, второй индекс

будет указывать название оси, в направлении которой действует касательное напряжение (на рис. 6 это $\tau_{xy}, \tau_{xz}, \tau_{yx}, \tau_{yz}, \tau_{zx}, \tau_{zy}$).

Сформулируем правило знаков для напряжений.

Если внешняя нормаль к площадке направлена в сторону положительной оси, то напряжения на этой площадке считаются положительными, когда они совпадают с положительными направлениями соответствующих осей. Если вектор внешней нормали совпадает с отрицательным направлением координатной оси, то положительными напряжениями будут те, которые совпадут с отрицательным направлением осей. Таким образом, все напряжения (и нормальные, и касательные), показанные на рис. 6, положительные.

Для произвольно сориентированной в пространстве площадки с нормалью \bar{n} нормальное напряжение σ_n принято считать положительным, когда оно направлено в сторону внешней нормали к площадке, то есть от сечения, или, другими словами, является растягивающим. Для касательных напряжений τ_n на такой площадке правила знаков не существует.

§1.3. Напряжения на параллельных площадках

Распределение напряжений по объёму деформированного упругого тела является, вообще говоря, неравномерным и изменяется от точки к точке, то есть напряжения являются функциями декартовых координат x, y, z . Найдём связь между напряжениями, действующими на параллельных площадках, расположенных достаточно близко друг к другу.

Выделим в деформированном теле точку $a(x, y, z)$ и проведём через неё элементарную площадку ΔA_a , нормаль к которой будет параллельна оси OX (рис. 7). На расстоянии dx от точки $a(x, y, z)$ выделим точку $b(x + dx, y, z)$ и через неё также проведём элементарную площадку ΔA_b , нормаль которой также будет параллельна оси OX .

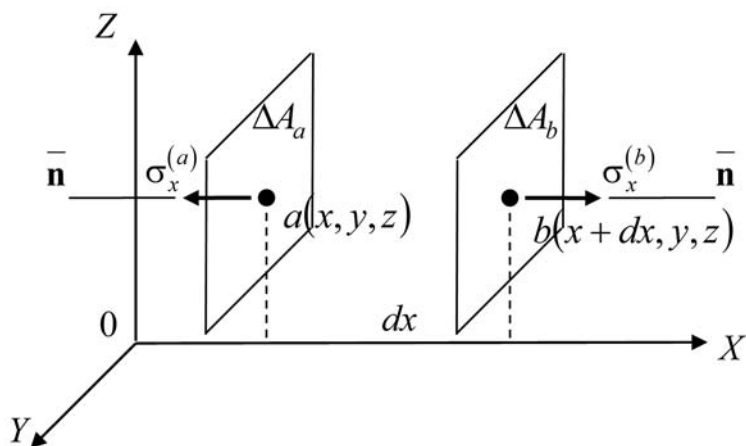


Рис. 7

Пусть, например, нормальное напряжение σ_x описывается функцией $f(x, y, z)$. Тогда напряжение σ_x , действующее в точке $a(x, y, z)$ по площадке ΔA_a , будет равно: $\sigma_x^{(a)} = f(x, y, z)$. Напряжение σ_x , действующее в точке $b(x + dx, y, z)$ по площадке ΔA_b , будет равно: $\sigma_x^{(b)} = f(x + dx, y, z)$. Разложим функцию $f(x, y, z)$ в окрестности точки $a(x, y, z)$ в ряд Тейлора:

$$f(x + dx, y, z) = f(x, y, z) + \frac{\partial f(x, y, z)}{\partial x} dx + \frac{\partial^2 f(x, y, z)}{\partial x^2} \frac{dx^2}{2!} + \dots \quad (1.6)$$

Пренебрегая в разложении (1.6) всеми нелинейными слагаемыми и учитывая обозначения, введённые в предыдущем абзаце, получим:

$$\sigma_x^{(b)} \cong \sigma_x^{(a)} + \frac{\partial \sigma_x^{(a)}}{\partial x} dx. \quad (1.7)$$

Повторив приведённые рассуждения для касательных напряжений τ_{xy} и τ_{xz} , действующих по площадкам ΔA_a и ΔA_b , получим аналогичные формулы:

$$\tau_{xy}^{(b)} \cong \tau_{xy}^{(a)} + \frac{\partial \tau_{xy}^{(a)}}{\partial x} dx, \quad \tau_{xz}^{(b)} \cong \tau_{xz}^{(a)} + \frac{\partial \tau_{xz}^{(a)}}{\partial x} dx. \quad (1.8)$$

Легко показать, что для напряжений, действующих по площадкам, перпендикулярным к осям OY и OZ , также справедливы формулы, аналогичные формулам (1.7) и (1.8).

Заметим, что использование выражений (1.7) и (1.8) при выводе расчётных соотношений, вообще говоря, уже лишает линейную теорию упругости математической строгости.

§1.4. Напряжения на наклонных площадках

Покажем, что задание напряжений на трёх взаимно перпендикулярных площадках полностью определяет напряжённое состояние в точке упругого тела.

Вообще, под напряжённым состоянием в точке понимается такое напряжённое состояние, когда известны напряжения на всех площадках, проходящих через заданную точку. Поскольку через точку можно провести бесчисленное множество площадок, то напряжённое состояние в точке является неопределённым. Однако, если известны напряжения на трёх взаимно перпендикулярных площадках, проходящих через заданную точку, то можно найти напряжения на любой площадке, ориентация которой задаётся направляющими косинусами её нормали. Тем самым напряжённое состояние в точке будет определено.

Рассмотрим элементарную площадку abc , ориентация которой задаётся направляющими косинусами l, m, n её нормали $\bar{\mathbf{n}}$ в системе декартовых координат X, Y, Z (рис. 8). Здесь $l = \cos(\bar{\mathbf{n}}, X)$, $m = \cos(\bar{\mathbf{n}}, Y)$, $n = \cos(\bar{\mathbf{n}}, Z)$. Полное напряжение $\bar{\mathbf{P}}_n$, действующее по площадке abc , разложим на составляющие по осям декартовых координат: P_{nx} , P_{ny} , P_{nz} .

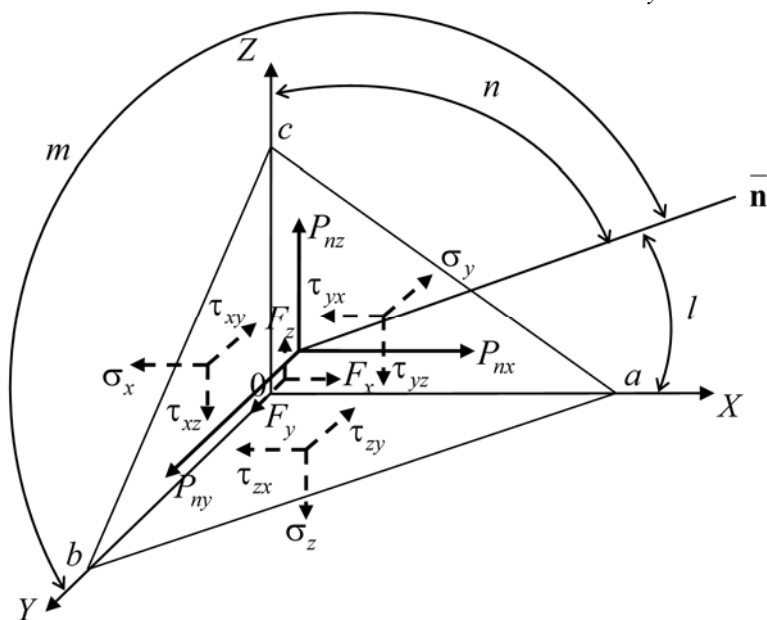


Рис. 8

На площадках, совпадающих с координатными плоскостями, действуют нормальные и касательные напряжения. По площадке Obc действуют: нормальное напряжение σ_x в направлении оси OX и касательные напряжения τ_{xy} и τ_{xz} в направлении осей OY и OZ соответственно. По площадке Oca действуют: нормальное напряжение σ_y в направлении оси OY и касательные напряжения τ_{yx} и τ_{yz} в направлении осей OX и OZ соответственно. По площадке Oab действуют: нормальное напряжение σ_z в направлении оси OZ и касательные напряжения τ_{zx} и τ_{zy} в направлении осей OX и OY соответственно.

Проекции вектора интенсивности объёмных сил на оси декартовой системы координат обозначим F_x, F_y, F_z .

Ввиду малости рассматриваемых площадок распределение напряжений в их пределах, а также распределение интенсивности объёмных сил по объёму тетраэдра можно считать равномерным.

Пусть площадь наклонной площадки abc есть A . Тогда площади площадок, совпадающих с координатными плоскостями, будут равны:

$$A_x = A \cdot l; \quad A_y = A \cdot m; \quad A_z = A \cdot n. \quad (1.9)$$

Здесь A_x – площадь грани Obc ; A_y – площадь грани Oac ; A_z – площадь грани Oab тетраэдра $Oabc$.

Поскольку тетраэдр $Oabc$ находится в равновесии, то должны выполняться условия равновесия в проекциях на оси декартовой системы координат, то есть сумма проекций всех сил, действующих на тетраэдр $Oabc$, на оси OX , OY и OZ должна быть равна нулю:

$$\begin{aligned}\sum X = 0: & P_{nx}A - \sigma_x A_x - \tau_{yx}A_y - \tau_{zx}A_z + F_x \frac{Ah}{3} = 0; \\ \sum Y = 0: & P_{ny}A - \sigma_y A_y - \tau_{xy}A_x - \tau_{zy}A_z + F_y \frac{Ah}{3} = 0; \\ \sum Z = 0: & P_{nz}A - \sigma_z A_z - \tau_{xz}A_x - \tau_{yz}A_y + F_z \frac{Ah}{3} = 0.\end{aligned}\quad (1.10)$$

Здесь h – расстояние от вершины O тетраэдра до основания – площадки abc .

Учитывая формулы (1.9), соотношения (1.10) запишем в следующем виде:

$$\begin{aligned}P_{nx} - \sigma_x l - \tau_{yx}m - \tau_{zx}n + F_x \frac{h}{3} &= 0; \\ P_{ny} - \tau_{xy}l - \sigma_y m - \tau_{zy}n + F_y \frac{h}{3} &= 0; \\ P_{nz} - \tau_{xz}l - \tau_{yz}m - \sigma_z n + F_z \frac{h}{3} &= 0.\end{aligned}\quad (1.11)$$

Поскольку рассматривается элементарный тетраэдр, то в соотношениях (1.11) высоту тетраэдра h можно устремить к нулю: $h \rightarrow 0$. Тогда формулы (1.11) получают вид:

$$\begin{aligned}P_{nx} &= \sigma_x l + \tau_{yx}m + \tau_{zx}n; \\ P_{ny} &= \tau_{xy}l + \sigma_y m + \tau_{zy}n; \\ P_{nz} &= \tau_{xz}l + \tau_{yz}m + \sigma_z n.\end{aligned}\quad (1.12)$$

Формулы (1.12) устанавливают связь между проекциями полного напряжения на оси декартовой системы координат, действующего на произвольной наклонной площадке, ориентация которой задаётся направляющими косинусами её нормали, и напряжениями на трёх взаимно перпендикулярных площадках, совпадающих с плоскостями координатных граней.

Величина полного напряжения P_n на произвольной наклонной площадке может быть найдена по теореме Пифагора:

$$P_n^2 = P_{nx}^2 + P_{ny}^2 + P_{nz}^2. \quad (1.13)$$

Нормальное напряжение σ_n , действующее на наклонной площадке, есть, по сути, проекция на нормаль $\bar{\mathbf{n}}$ вектора полного напряжения $\bar{\mathbf{P}}_n$. В свою очередь, полное напряжение $\bar{\mathbf{P}}_n$ как равнодействующая равна сумме проекций составляющих, то есть

$$\sigma_n = P_{nx}l + P_{ny}m + P_{nz}n. \quad (1.14)$$

Подставив формулы (1.12) в соотношение (1.14), получим:

$$\sigma_n = \sigma_x l^2 + \sigma_y m^2 + \sigma_z n^2 + 2\tau_{xy}lm + 2\tau_{yz}mn + 2\tau_{zx}nl. \quad (1.15)$$

Касательное напряжение τ_n , действующее на наклонной площадке, находится по теореме Пифагора:

$$\tau_n = \sqrt{P_n^2 - \sigma_n^2}. \quad (1.16)$$

Итак, мы выразили полное P_n , нормальное σ_n и касательное τ_n напряжения, действующие по произвольной элементарной наклонной площадке с нормалью $\bar{\mathbf{n}}$, через напряжения на трёх взаимно перпендикулярных площадках. Таким образом, задание компонент напряжения на трёх взаимно перпендикулярных площадках полностью определяет напряжённое состояние в точке.

Если наклонная площадка abc тетраэдра примыкает к поверхности тела, то P_{nx} , P_{ny} и P_{nz} — это проекции на оси декартовой системы координат внешних сил (они считаются известными), действующих на элементарной поверхности тела. Уравнения (1.12) являются, таким образом, условиями в напряжениях на поверхности тела, которые связывают внешнюю нагрузку P_{nx} , P_{ny} и P_{nz} с напряжениями, действующими по трём взаимно перпендикулярным площадкам, выделенным у поверхности тела. Напряжения во всех точках упругого тела должны удовлетворять уравнениям равновесия и условиям на поверхности (1.12).

При записи условий на поверхности упругого тела следует на каждом плоском участке поверхности тела определить направляющие косинусы внешней нормали, затем определить величину внешних сил, действующих на рассматриваемой плоской поверхности в направлении осей декартовой системы координат, затем, воспользовавшись соотношениями (1.12), записать граничные условия в напряжениях.

§ 1.5. Уравнения равновесия

Выделим в окрестности точки $a(x, y, z)$ деформированного упругого тела элементарный параллелепипед с рёбрами dx, dy, dz (рис. 9). По граням

элементарного параллелепипеда действуют нормальные и касательные напряжения. Будем считать, что в силу малости рассматриваемых расстояний в пределах каждой грани параллелепипеда напряжения распределены равномерно и приложены в центре её тяжести. При этом напряжения на параллельных площадках записываются с учётом соотношений (1.7) и (1.8).

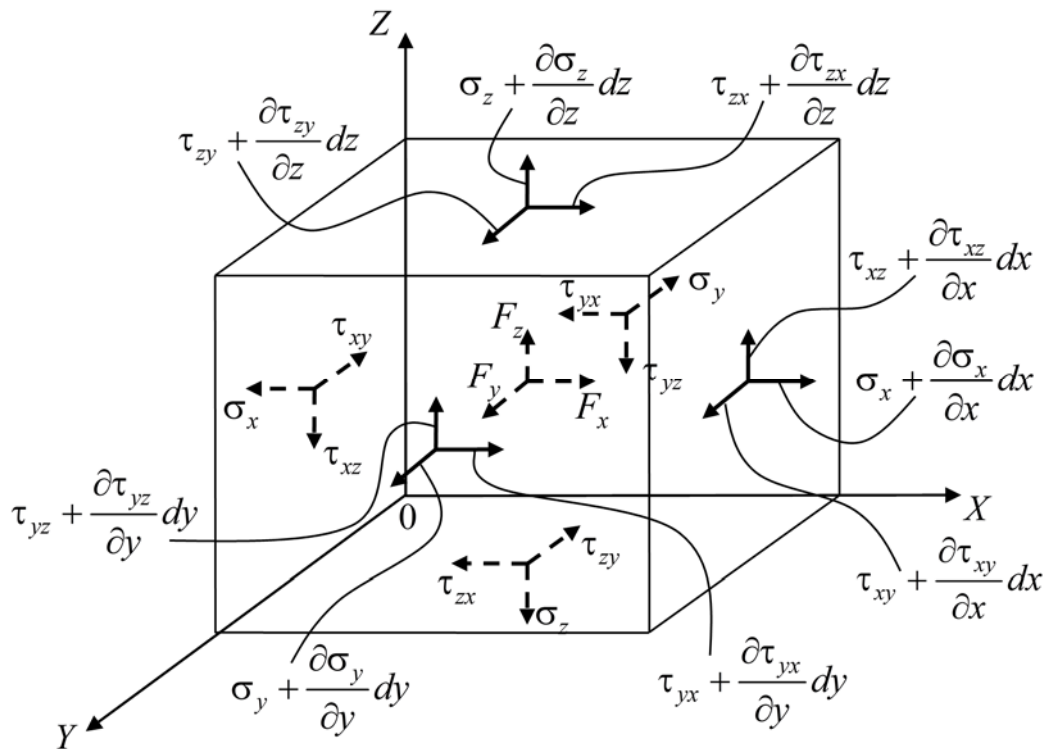


Рис. 9

Проекции вектора интенсивности объёмных сил на оси декартовой системы координат обозначим F_x, F_y, F_z . Распределение объёмных сил в пределах элементарного параллелепипеда примем равномерным. Вектор интенсивности объёмных сил приложен в центре тяжести параллелепипеда.

Поскольку рассматриваемый элементарный параллелепипед находится в равновесии, то должны выполняться условия равновесия: суммы проекций всех сил на оси декартовой системы координат $OXYZ$ должны быть равны нулю, суммы моментов всех сил относительно осей декартовой системы координат также должны быть равны нулю. В итоге получаем:

$$\begin{aligned} \sum X = 0: & -\sigma_x dydz - \tau_{yx} dx dz - \tau_{zx} dx dy + \left(\sigma_x + \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} dx \right) dydz + \\ & + \left(\tau_{yx} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} dy \right) dx dz + \left(\tau_{zx} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} dz \right) dx dy + F_x dx dy dz = 0; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sum Y = 0: \quad & -\sigma_y dx dz - \tau_{xy} dy dz - \tau_{zx} dy dz + \left(\sigma_y + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} dy \right) dx dz + \\ & + \left(\tau_{xy} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} dx \right) dy dz + \left(\tau_{zy} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} dz \right) dx dy + F_y dx dy dz = 0; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sum Z = 0: \quad & -\sigma_z dx dy - \tau_{xz} dy dz - \tau_{yz} dx dz + \left(\sigma_z + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} dz \right) dx dy + \\ & + \left(\tau_{xz} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} dx \right) dy dz + \left(\tau_{yz} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} dy \right) dx dz + F_z dx dy dz = 0; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sum M_X = 0: \quad & \sigma_z dx dy \frac{dy}{2} + \left(\sigma_y + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} dy \right) dx dz \frac{dz}{2} - \left(\tau_{yz} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} dy \right) dx dz dy + \\ & + \left(\tau_{zy} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} dz \right) dx dy dz - \left(\sigma_z + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} dz \right) dx dy \frac{dy}{2} - \sigma_y dx dz \frac{dz}{2} - \\ & - \left(\tau_{xz} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} dx \right) dy dz \frac{dy}{2} + \left(\tau_{xy} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} dx \right) dy dz \frac{dz}{2} + \tau_{xz} dy dz \frac{dy}{2} - \\ & - \tau_{xy} dy dz \frac{dz}{2} + F_z dx dy dz \frac{dy}{2} - F_y dx dy dz \frac{dz}{2} = 0; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sum M_Y = 0: \quad & \sigma_z dx dy \frac{dx}{2} - \left(\sigma_x + \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} dx \right) dy dz \frac{dz}{2} - \left(\tau_{xz} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} dx \right) dy dx dz + \\ & + \left(\tau_{zx} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} dz \right) dx dy dz - \left(\sigma_z + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} dz \right) dy dx \frac{dx}{2} + \sigma_x dy dz \frac{dz}{2} + \\ & + \left(\tau_{yx} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} dy \right) dx dz \frac{dz}{2} - \left(\tau_{yz} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} dy \right) dx dz \frac{dx}{2} + \tau_{yz} dx dz \frac{dx}{2} - \\ & - \tau_{yx} dx dz \frac{dz}{2} - F_z dx dy dz \frac{dx}{2} - F_x dx dy dz \frac{dz}{2} = 0; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sum M_Z = 0: \quad & \sigma_y dx dz \frac{dx}{2} + \left(\sigma_x + \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} dx \right) dy dz \frac{dy}{2} - \left(\tau_{xy} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} dx \right) dy dz dx + \\ & + \left(\tau_{yx} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} dy \right) dx dz dy - \left(\sigma_y + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} dy \right) dx dz \frac{dx}{2} - \sigma_x dy dz \frac{dy}{2} - \\ & - \left(\tau_{zy} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} dz \right) dx dy \frac{dx}{2} + \left(\tau_{zx} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} dz \right) dx dy \frac{dy}{2} - \tau_{zx} dx dy \frac{dy}{2} + \\ & + \tau_{zy} dx dy \frac{dx}{2} + F_x dx dy dz \frac{dy}{2} - F_y dx dy dz \frac{dx}{2} = 0. \end{aligned}$$

Приведём в полученных соотношениях подобные слагаемые. В результате первые три уравнения получают вид:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} + F_x &= 0; \\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} + F_y &= 0; \\ \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + F_z &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (1.17)$$

В четвёртом, пятом и шестом полученных соотношениях, кроме приведения подобных слагаемых, отбросим члены высшего (четвёртого) порядка малости. В итоге получим:

$$\tau_{yz} = \tau_{zy}; \quad \tau_{xz} = \tau_{zx}; \quad \tau_{xy} = \tau_{yx}. \quad (1.18)$$

Соотношения (1.18) представляют собой закон парности касательных напряжений, который гласит, что на двух взаимно перпендикулярных площадках касательные напряжения равны друг другу по величине, одинаковы по знаку и направлены либо навстречу друг другу, либо друг от друга (что мы и видим на рис. 9).

Формулы (1.17) являются дифференциальными уравнениями равновесия. Эти уравнения именованные, их называют *дифференциальными уравнениями Навье*.

С учётом закона парности касательных напряжений (1.18) шесть компонентов напряжений $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy} = \tau_{yx}, \tau_{yz} = \tau_{zy}, \tau_{zx} = \tau_{xz}$, являющихся функциями декартовых координат, описывают напряжённое состояние в рассматриваемой точке тела. Кстати, эти же шесть компонентов напряжений фигурируют в условиях на границе (1.12) деформированного тела. Для отыскания этих шести неизвестных функций имеем лишь три уравнения равновесия (1.17). Определить напряжения, действующие по граням элементарного параллелепипеда, из уравнений статики (1.17) нельзя. Задача раскрытия напряжённого состояния в точке деформированного тела статически неопределима.

§1.6. Тензор напряжений

Напряжённое состояние в точке деформированного тела описывается девятью напряжениями. Записанные в виде таблицы

$$\mathbf{T}_\sigma = \begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{pmatrix}, \quad (1.19)$$

они образуют *тензор напряжений*.

Тензор напряжений \mathbf{T}_σ является симметричным относительно главной диагонали (в силу закона парности касательных напряжений). Величины $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy} = \tau_{yx}, \tau_{yz} = \tau_{zy}, \tau_{zx} = \tau_{xz}$ называются *компонентами тензора напряжений*. Структура тензора напряжений имеет ярко выраженный механический смысл: каждая строка образована из напряжений, действующих в направлении одной из координатных осей; любой столбец содержит напряжения, действующие на площадке с нормалью, параллельной одной из координатных осей.

Следует отметить, что напряжённое состояние в точке характеризуется тензором напряжений, а напряжённое состояние в теле – совокупностью тензоров напряжений в каждой точке тела.

Тензор напряжений \mathbf{T}_σ раскладывается на два составляющих тензора: шаровой (сферический) тензор напряжений \mathbf{T}_{σ_0} и девиатор напряжений \mathbf{D}_σ .

$$\mathbf{T}_\sigma = \mathbf{T}_{\sigma_0} + \mathbf{D}_\sigma \quad (1.20)$$

Здесь

$$\mathbf{T}_{\sigma_0} = \begin{pmatrix} \sigma_0 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_0 \end{pmatrix}, \quad (1.21)$$

$$\mathbf{D}_\sigma = \begin{pmatrix} \sigma_x - \sigma_0 & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y - \sigma_0 & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z - \sigma_0 \end{pmatrix}, \quad (1.22)$$

причём $\sigma_0 = \frac{1}{3}(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z)$ – среднее напряжение.

Шаровой тензор напряжений \mathbf{T}_{σ_0} характеризует всестороннее (гидростатическое) напряжённое состояние. Девиатор напряжений \mathbf{D}_σ физически интерпретируется как мера отклонения напряжённого состояния от состояния всестороннего растяжения или сжатия.

Разложение тензора напряжений на шаровой тензор напряжений и девиатор напряжений обусловлено данными экспериментов, которые показывают, что упругие тела по-разному реагируют на всестороннее сжатие и на напряжение сдвига. Шаровой тензор напряжений выделяет из напряжённого состояния равномерное всестороннее растяжение или сжатие, при котором изменяется лишь объём упругого тела без изменения его формы. Девиатор напряжений характеризует состояние сдвига, при котором изменяется форма тела без изменения его объёма. Следовательно, девиатор напряжений указывает отклонение (девиацию) рассматриваемого

напряжённого состояния от состояния всестороннего растяжения (сжатия) или отклонение приобретённой формы тела от первоначальной.

Тензор напряжений (1.19) записан в произвольной системе декартовых координат $OXYZ$. Компоненты тензора напряжений представляют собой напряжения, действующие на гранях элементарного параллелепипеда, выделенного в окрестности некоторой точки $a(x, y, z)$ деформированного тела, причём нормали к граням этого параллелепипеда параллельны координатным осям OX, OY, OZ . Таким образом, элементарный параллелепипед, по граням которого действуют напряжения, составляющие тензор напряжений (1.19), привязан к декартовой системе координат $OXYZ$. Выясним, как изменятся компоненты тензора напряжений в точке $a(x, y, z)$ деформированного тела, если элементарный параллелепипед вместе с декартовой системой координат повернуть в пространстве вокруг точки $a(x, y, z)$ (рис. 10). После поворота по граням уже нового элементарного параллелепипеда будут, очевидно, действовать уже другие напряжения, которые в новой системе координат $OX'Y'Z'$ составят новый тензор напряжений

$$\mathbf{T}'_{\sigma} = \begin{pmatrix} \sigma'_x & \tau'_{yx} & \tau'_{zx} \\ \tau'_{xy} & \sigma'_y & \tau'_{zy} \\ \tau'_{xz} & \tau'_{yz} & \sigma'_z \end{pmatrix}. \quad (1.23)$$

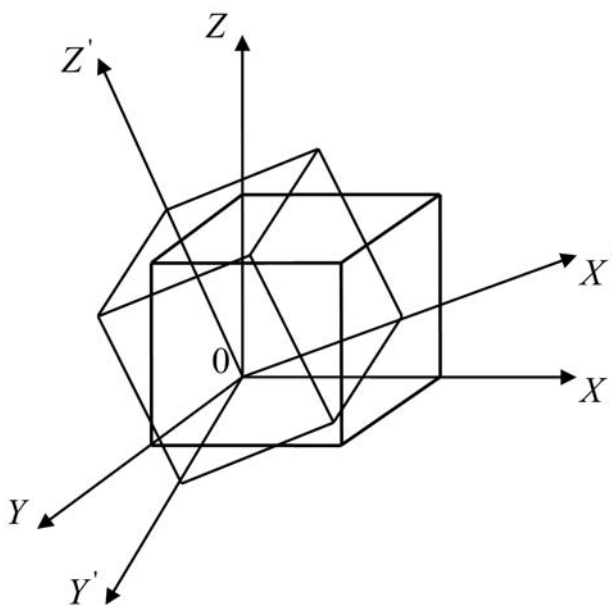


Рис. 10

Пусть направляющие косинусы нормалей к граням нового параллелепипеда в старой системе координат $OXYZ$ будут задаваться табл. 1. При этом следует иметь в виду, что направления нормалей к граням нового параллелепипеда совпадают с направлениями осей новой системы координат $OX'Y'Z'$.

Т а б л и ц а 1

Оси	X	Y	Z
X'	l_1	m_1	n_1
Y'	l_2	m_2	n_2
Z'	l_3	m_3	n_3

Ввиду того, что наше преобразование ортогональное, направляющие косинусы в табл. 1 удовлетворяют следующим соотношениям:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^3 l_i^2 = 1; \quad \sum_{i=1}^3 m_i^2 = 1; \quad \sum_{i=1}^3 n_i^2 = 1; \\ l_i^2 + m_i^2 + n_i^2 = 1, \quad (i=1,2,3); \\ \sum_{i=1}^3 l_i m_i = 0; \quad \sum_{i=1}^3 m_i n_i = 0; \quad \sum_{i=1}^3 n_i l_i = 0. \end{aligned} \quad (1.24)$$

Поскольку грани нового параллелепипеда по отношению к старым осям координат $OXYZ$ являются наклонными площадками, а направляющие косинусы нормалей к граням нового параллелепипеда задаются табл. 1, то нормальные напряжения, действующие по граням нового параллелепипеда, будут определяться в соответствии с формулой (1.15), то есть

$$\begin{aligned} \sigma_{x'} &= \sigma_x l_1^2 + \sigma_y m_1^2 + \sigma_z n_1^2 + 2\tau_{xy} l_1 m_1 + 2\tau_{yz} m_1 n_1 + 2\tau_{zx} n_1 l_1; \\ \sigma_{y'} &= \sigma_x l_2^2 + \sigma_y m_2^2 + \sigma_z n_2^2 + 2\tau_{xy} l_2 m_2 + 2\tau_{yz} m_2 n_2 + 2\tau_{zx} n_2 l_2; \\ \sigma_{z'} &= \sigma_x l_3^2 + \sigma_y m_3^2 + \sigma_z n_3^2 + 2\tau_{xy} l_3 m_3 + 2\tau_{yz} m_3 n_3 + 2\tau_{zx} n_3 l_3. \end{aligned} \quad (1.25)$$

Касательные напряжения, действующие по граням нового параллелепипеда в направлении новых осей координат, определяются путём проецирования полных напряжений, действующих по граням нового параллелепипеда, на направления новых осей координат. С учётом соотношений (1.12) получаем:

$$\begin{aligned} \tau_{x'y'} = \tau_{y'x'} &= \sigma_x l_1 l_2 + \sigma_y m_1 m_2 + \sigma_z n_1 n_2 + \tau_{xy} (l_1 m_2 + l_2 m_1) + \\ &+ \tau_{yz} (m_1 n_2 + m_2 n_1) + \tau_{zx} (n_1 l_2 + n_2 l_1); \\ \tau_{y'z'} = \tau_{z'y'} &= \sigma_x l_2 l_3 + \sigma_y m_2 m_3 + \sigma_z n_2 n_3 + \tau_{xy} (l_2 m_3 + l_3 m_2) + \\ &+ \tau_{yz} (m_2 n_3 + m_3 n_2) + \tau_{zx} (n_2 l_3 + n_3 l_2); \\ \tau_{z'x'} = \tau_{x'z'} &= \sigma_x l_3 l_1 + \sigma_y m_3 m_1 + \sigma_z n_3 n_1 + \tau_{xy} (l_3 m_1 + l_1 m_3) + \\ &+ \tau_{yz} (m_3 n_1 + m_1 n_3) + \tau_{zx} (n_3 l_1 + n_1 l_3). \end{aligned} \quad (1.26)$$

Соотношения (1.25), (1.26) устанавливают зависимости между компонентами напряжённого состояния при переходе от одной декартовой системы координат к другой, повернутой относительно первой. Таким образом, при переходе от одной декартовой системы координат к другой, повернутой относительно первой, компоненты тензора напряжений преобразуются в соответствии с формулами (1.25) и (1.26).

З а м е ч а н и е . Если таблица содержит три строки и три столбца, то есть состоит из девяти величин, и эти величины расположены симметрично относительно главной диагонали, причём при переходе от одной системы

декартовых координат к другой путём поворота эти величины преобразуются в соответствии с формулами (1.25) и (1.26), то эти девять величин образуют тензор. Если эти условия не выполняются, то таблица из девяти величин не является тензором.

§1.7. Главные напряжения

Покажем, что в окрестности любой точки деформированного тела всегда можно выбрать три такие взаимно перпендикулярные площадки, на которых действуют только нормальные напряжения, а касательные напряжения равны нулю. Такие площадки называются *главными*. Нормальные напряжения, действующие на главных площадках, называются *главными напряжениями*. Нормали к главным площадкам образуют прямоугольную систему координат, оси которой называются *главными осями*.

Тензор напряжений в главных осях получает вид:

$$\mathbf{T}_\sigma = \begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{pmatrix}, \quad (1.27)$$

причём полагают, что $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$, т.е. главные оси нумеруются так, чтобы в алгебраическом смысле для главных значений выполнялись следующие неравенства: $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$.

Для нахождения главных площадок и главных напряжений предположим, что наклонная площадка abc (рис. 11) есть главная с направляющими косинусами нормали l_k, m_k, n_k и с главным напряжением σ_k .

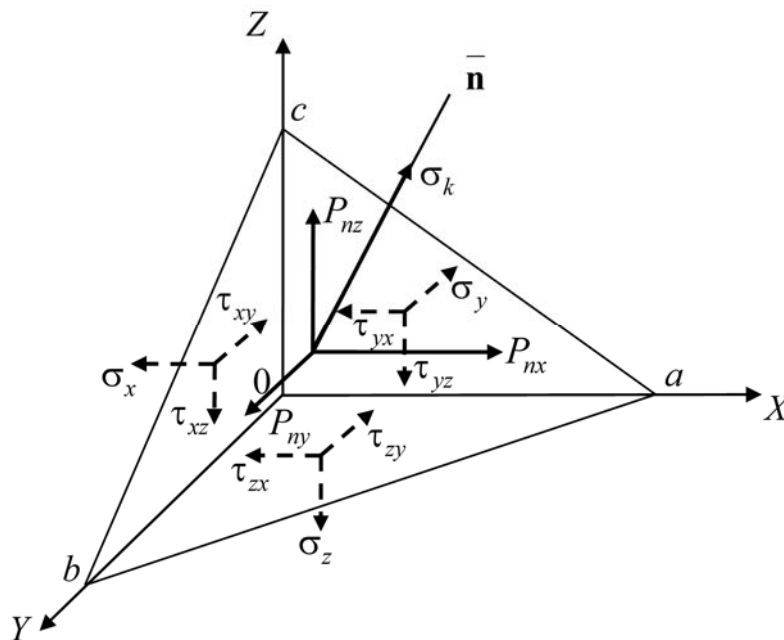


Рис. 11

Поскольку площадка abc является главной, то касательное напряжение на ней равно нулю, следовательно, главное напряжение σ_k совпадает с направлением нормали к площадке и является полным напряжением, действующим на главной площадке. Тогда

$$P_{nx} = \sigma_k l_k; \quad P_{ny} = \sigma_k m_k; \quad P_{nz} = \sigma_k n_k. \quad (1.28)$$

Проекции полного напряжения на оси декартовой системы координат, действующего по наклонной (главной) площадке, связаны с напряжениями, действующими на площадках, совпадающих с плоскостями координатных граней Obc , Oac , Oab , соотношениями (1.12). Сопоставив в формулы (1.28) и соотношения (1.12), получим:

$$\begin{aligned} \sigma_k l_k &= \sigma_x l_k + \tau_{yx} m_k + \tau_{zx} n_k; \\ \sigma_k m_k &= \tau_{xy} l_k + \sigma_y m_k + \tau_{zy} n_k; \\ \sigma_k n_k &= \tau_{xz} l_k + \tau_{yz} m_k + \sigma_z n_k, \end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned} (\sigma_x - \sigma_k) l_k + \tau_{yx} m_k + \tau_{zx} n_k &= 0; \\ \tau_{xy} l_k + (\sigma_y - \sigma_k) m_k + \tau_{zy} n_k &= 0; \\ \tau_{xz} l_k + \tau_{yz} m_k + (\sigma_z - \sigma_k) n_k &= 0. \end{aligned} \quad (1.29)$$

В системе (1.29) определению подлежат четыре величины: главное напряжение σ_k и направляющие косинусы нормали к главной площадке l_k, m_k, n_k . Эту систему можно рассматривать как систему трёх линейных однородных алгебраических уравнений относительно трёх неизвестных l_k, m_k, n_k . Поскольку величины l_k, m_k, n_k – это направляющие косинусы, то есть $l_k^2 + m_k^2 + n_k^2 = 1$, то нулевое решение системы (1.29) следует исключить. Для существования ненулевого решения системы линейных однородных алгебраических уравнений её главный определитель должен быть равен нулю, то есть

$$\begin{vmatrix} \sigma_x - \sigma_k & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y - \sigma_k & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z - \sigma_k \end{vmatrix} = 0. \quad (1.30)$$

Раскрыв определитель (1.30), получим характеристическое уравнение третьего порядка относительно главного напряжения σ_k :

$$\sigma_k^3 - I_1 \sigma_k^2 - I_2 \sigma_k - I_3 = 0. \quad (1.31)$$

Здесь

$$\begin{aligned}
 I_1 &= \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z, \\
 I_2 &= - \begin{vmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} \\ \tau_{yx} & \sigma_y \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zy} & \sigma_z \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \sigma_z & \tau_{zx} \\ \tau_{xz} & \sigma_x \end{vmatrix}, \\
 I_3 &= \begin{vmatrix} \sigma_x & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{vmatrix}.
 \end{aligned} \tag{1.32}$$

Ввиду того что элементы определителя (1.30) симметричны относительно его главной диагонали, все три корня уравнения (1.31) будут вещественными.

Для решения уравнения (1.31) воспользуемся тригонометрической формулой Виета. Вычисляем вспомогательные величины:

$$Q = \frac{1}{9}(I_1^2 + 3I_2), \quad R = \frac{1}{54}(-2I_1^3 - 9I_1I_2 - 27I_3), \quad S = Q^3 - R^3.$$

Так как все три корня уравнения (1.31) вещественные, то $S > 0$, и тогда вычисляем $\varphi = \frac{1}{3} \arccos\left(\frac{R}{\sqrt{Q^3}}\right)$. Корни уравнения (1.31) будут определяться по формулам:

$$\begin{aligned}
 \sigma_1 &= -2\sqrt{Q} \cos(\varphi) + \frac{I_1}{3}; \\
 \sigma_2 &= -2\sqrt{Q} \cos\left(\varphi + \frac{2\pi}{3}\right) + \frac{I_1}{3}; \\
 \sigma_3 &= -2\sqrt{Q} \cos\left(\varphi - \frac{2\pi}{3}\right) + \frac{I_1}{3}.
 \end{aligned} \tag{1.33}$$

З а м е ч а н и е . Индексы при главных напряжениях проставляются так, чтобы выполнялись неравенства: $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$.

Вычислив главные напряжения, далее перейдём к определению ориентаций главных площадок. Подставляя главные напряжения $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ по очереди в систему (1.29) и используя соотношение $l_k^2 + m_k^2 + n_k^2 = 1$, получаем три совокупности направляющих косинусов:

$$\begin{aligned}
 l_1, m_1, n_1 &- \text{ для главного напряжения } \sigma_1; \\
 l_2, m_2, n_2 &- \text{ для главного напряжения } \sigma_2; \\
 l_3, m_3, n_3 &- \text{ для главного напряжения } \sigma_3,
 \end{aligned} \tag{1.34}$$

каждая из которых определяет ориентацию нормали к соответствующей главной площадке. Доказано, что совокупность нормалей, задаваемых направляющими косинусами (1.34), образует прямоугольную систему координат, так как их попарное скалярное произведение равно нулю:

$$l_1 l_2 + m_1 m_2 + n_1 n_2 = 0;$$

$$l_2 l_3 + m_2 m_3 + n_2 n_3 = 0;$$

$$l_3 l_1 + m_3 m_1 + n_3 n_1 = 0.$$

Величина главных напряжений и ориентация главных площадок в некоторой точке $a(x, y, z)$ деформированного тела не зависят от выбора декартовой системы координат $OXYZ$. Это означает, что независимо от того, в какой системе координат в точке $a(x, y, z)$ был задан тензор напряжений \mathbf{T}_σ , с неизбежностью должно быть получено однозначное решение уравнения (1.31). Это возможно тогда и только тогда, когда коэффициенты уравнения (1.31) являются величинами постоянными для рассматриваемой точки $a(x, y, z)$ деформированного тела, не зависящими от выбора системы координат.

Величины, не зависящие от выбора системы координат, называются *инвариантами*. Таким образом, тензор напряжений имеет три инварианта: первый – I_1 , второй – I_2 и третий – I_3 .

Для тензора напряжений, заданного в главных осях (1.27), его инварианты будут вычисляться, очевидно, по формулам

$$\begin{aligned} I_1 &= \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3; \\ I_2 &= -\sigma_1 \sigma_2 - \sigma_2 \sigma_3 - \sigma_3 \sigma_1; \\ I_3 &= \sigma_1 \sigma_2 \sigma_3. \end{aligned} \tag{1.35}$$

В заключение отметим, что напряжённое состояние в точке определяется шестью величинами: в произвольных декартовых осях координат – компонентами тензора напряжений \mathbf{T}_σ , в главных осях – тремя главными напряжениями $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ и тремя направляющими косинусами нормали к главной площадке l, m, n .

§1.8. Наибольшие касательные напряжения

Экстремальные касательные напряжения будем определять в системе координат, оси которой пусть будут совпадать с главными направлениями (рис. 12). Пусть компоненты тензора напряжений в главных осях (1.27) в некоторой точке деформированного тела известны. Совместим с этой точкой начало декартовых координат, совпадающих с главными осями.

Направляющие косинусы нормали к произвольной наклонной площадке abc в системе главных осей обозначим l, m, n .

В соответствии с соотношениями (1.12) проекции полного напряжения, действующего по наклонной площадке abc , на главные оси будут равны:

$$P_{n1} = \sigma_1 l; \quad P_{n2} = \sigma_2 m; \quad P_{n3} = \sigma_3 n,$$

то есть полное напряжение P_n , в соответствии с формулой (1.13), будет вычисляться по формуле

$$P_n^2 = \sigma_1^2 l^2 + \sigma_2^2 m^2 + \sigma_3^2 n^2. \quad (1.36)$$

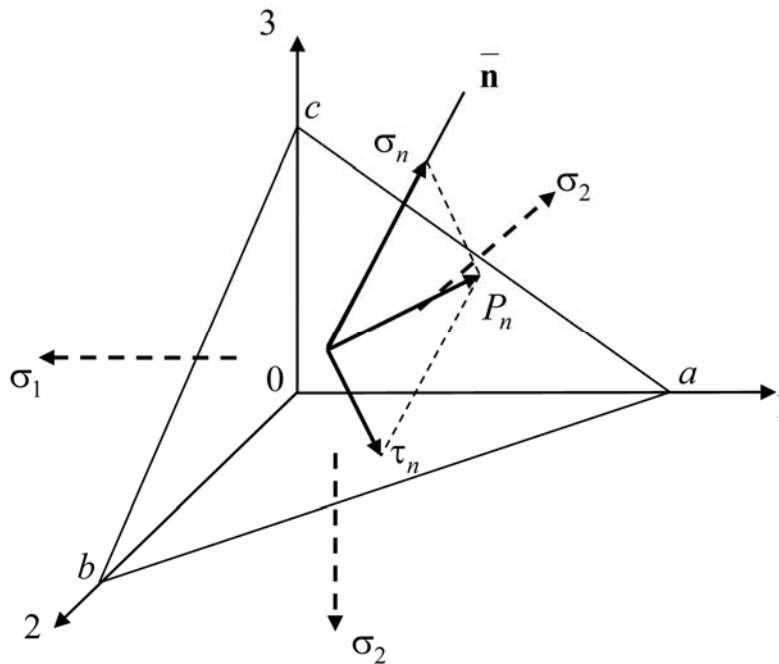


Рис. 12

Согласно формуле (1.15), нормальное напряжение σ_n на наклонной площадке abc будет определяться выражением

$$\sigma_n = \sigma_1 l^2 + \sigma_2 m^2 + \sigma_3 n^2. \quad (1.37)$$

Подставив (1.36) и (1.37) в формулу (1.16), получим выражение для вычисления касательного напряжения τ_n , действующего по наклонной площадке abc :

$$\tau_n^2 = \sigma_1^2 l^2 + \sigma_2^2 m^2 + \sigma_3^2 n^2 - (\sigma_1 l^2 + \sigma_2 m^2 + \sigma_3 n^2)^2. \quad (1.38)$$

Здесь
$$l^2 + m^2 + n^2 = 1. \quad (1.39)$$

Из соотношения (1.39) найдём $n^2 = 1 - m^2 - l^2$ и подставим полученное уравнение в формулу (1.38). После элементарных преобразований получим

выражение для касательного напряжения τ_n , зависящего от двух независимых переменных l и m :

$$\tau_n^2 = (\sigma_1^2 - \sigma_3^2)l^2 + (\sigma_2^2 - \sigma_3^2)m^2 + \sigma_3^2 - [(\sigma_1 - \sigma_3)l^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)m^2 + \sigma_3]^2.$$

Следуя процедуре отыскания экстремума функции нескольких независимых переменных, приравняем нулю первые производные от функции τ_n^2 по l и m :

$$\frac{\partial \tau_n^2}{\partial l} = 2l \left\{ \sigma_1^2 - \sigma_3^2 - 2(\sigma_1 - \sigma_3) [(\sigma_1 - \sigma_3)l^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)m^2 + \sigma_3] \right\} = 0;$$

$$\frac{\partial \tau_n^2}{\partial m} = 2m \left\{ \sigma_2^2 - \sigma_3^2 - 2(\sigma_2 - \sigma_3) [(\sigma_1 - \sigma_3)l^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)m^2 + \sigma_3] \right\} = 0.$$

После сокращения первого уравнения на $(\sigma_1 - \sigma_3)$, а второго – на $(\sigma_2 - \sigma_3)$ получим систему уравнений для нахождения значений l, m, n , удовлетворяющих условию экстремума касательного напряжения τ_n :

$$\begin{aligned} l \left\{ \sigma_1 - \sigma_3 - 2 [(\sigma_1 - \sigma_3)l^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)m^2] \right\} &= 0; \\ m \left\{ \sigma_2 - \sigma_3 - 2 [(\sigma_1 - \sigma_3)l^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)m^2] \right\} &= 0; \\ l^2 + m^2 + n^2 - 1 &= 0. \end{aligned} \quad (1.40)$$

Условиям $l = m = 0$ и $n = 1$ соответствует главная площадка Oab , на которой касательное напряжение равно нулю.

Если же $l \neq 0$, а $m = 0$, то уравнение (1.40₂) удовлетворяется при любом значении l , а уравнение (1.40₁) – при условии $\sigma_1 - \sigma_3 - 2(\sigma_1 - \sigma_3)l^2 = 0$, откуда $l = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$. Тогда из уравнения (1.40₃) получаем: $n = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$. Сово-

купность направляющих косинусов $l = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$, $m = 0$ и $n = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$ определяет нормали к площадкам, равно наклонённым к главным осям 1 и 3 и параллельным главной оси 2 (рис. 13а).

Если же $l = 0$, а $m \neq 0$, то уравнение (1.40₁) удовлетворяется при любом значении m , а уравнение (1.40₂) – при условии $\sigma_2 - \sigma_3 - 2(\sigma_2 - \sigma_3)m^2 = 0$, откуда $m = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$. Тогда из уравнения (1.40₃) получаем $n = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$. Сово-

купность направляющих косинусов $l = 0$, $m = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$ и $n = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$ определяет

нормали к площадкам, равно наклонённым к главным осям 2 и 3 и параллельным главной оси 1 (рис. 13б).

Если теперь из соотношения (1.39) выразить m^2 и подставить его в соотношение (1.38), то после аналогично проведённых выше преобразований получим ещё одну систему уравнений для нахождения значений l, m, n , удовлетворяющих условию экстремума касательного напряжения τ_n :

$$\begin{aligned} l\left\{\sigma_1 - \sigma_2 - 2\left[(\sigma_1 - \sigma_2)l^2 + (\sigma_3 - \sigma_2)n^2\right]\right\} &= 0; \\ n\left\{\sigma_3 - \sigma_2 - 2\left[(\sigma_1 - \sigma_2)l^2 + (\sigma_3 - \sigma_2)n^2\right]\right\} &= 0; \\ l^2 + m^2 + n^2 - 1 &= 0. \end{aligned} \quad (1.41)$$

Условием $l = n = 0$ и $m = 1$ соответствует главная площадка Oac , на которой касательное напряжение равно нулю.

Если же $l \neq 0$, а $n = 0$, то уравнение (1.41₂) удовлетворяется при любом значении l , а уравнение (1.41₁) – при условии $\sigma_1 - \sigma_2 - 2(\sigma_1 - \sigma_2)l^2 = 0$, откуда $l = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$. Тогда из уравнения (1.41₃) получаем: $m = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$. Сово-

купность направляющих косинусов $l = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$, $m = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$ и $n = 0$ определяет нормали к площадкам, равно наклонённым к главным осям 1 и 2 и параллельным главной оси 3 (рис. 13в).

Если же $l = 0$, а $n \neq 0$, то уравнение (1.41₁) удовлетворяется при любом значении n , а уравнение (1.41₂) – при условии $\sigma_3 - \sigma_2 - 2(\sigma_3 - \sigma_2)n^2 = 0$, откуда $n = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$. Тогда из уравнения (41₃) получаем $m = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$. Сово-

купность направляющих косинусов $l = 0$, $m = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$ и $n = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$ определяет нормали к площадкам, равно наклонённым к главным осям 2 и 3 и параллельным главной оси 1 (рис. 13б).

Выразив из (1.39) l^2 и повторив вышеизложенную процедуру ещё раз, получим ещё одну систему уравнений для нахождения значений l, m, n , удовлетворяющих условию экстремума касательного напряжения τ_n :

$$\begin{aligned} m\left\{\sigma_2 - \sigma_1 - 2\left[(\sigma_2 - \sigma_1)m^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)n^2\right]\right\} &= 0; \\ n\left\{\sigma_3 - \sigma_1 - 2\left[(\sigma_2 - \sigma_1)m^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)n^2\right]\right\} &= 0; \\ l^2 + m^2 + n^2 - 1 &= 0. \end{aligned} \quad (1.42)$$

Условием $m = n = 0$ и $l = 1$ соответствует главная площадка Obc , на которой касательное напряжение равно нулю.

Если же $m \neq 0$, а $n = 0$, то уравнение (1.42₂) удовлетворяется при любом значении m , а уравнение (1.42₁) – при условии $\sigma_2 - \sigma_1 - 2(\sigma_2 - \sigma_1)m^2 = 0$, откуда $m = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$. Тогда из уравнения (1.42₃) получаем: $l = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$. Совокупность направляющих косинусов $l = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$, $m = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$ и $n = 0$ определяет нормали к площадкам, равно наклонённым к главным осям 1 и 2 и параллельным главной оси 3 (рис. 13в).

Если же $m = 0$, а $n \neq 0$, то уравнение (1.42₁) удовлетворяется при любом значении n , а уравнение (1.42₂) – при условии $\sigma_3 - \sigma_1 - 2(\sigma_3 - \sigma_1)n^2 = 0$, откуда $n = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$. Тогда из уравнения (1.42₃) получаем: $l = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$. Совокупность направляющих косинусов $l = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$, $m = 0$ и $n = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$ определяет нормали к площадкам, равно наклонённым к главным осям 1 и 3 и параллельным главной оси 2 (см. рис. 13а).

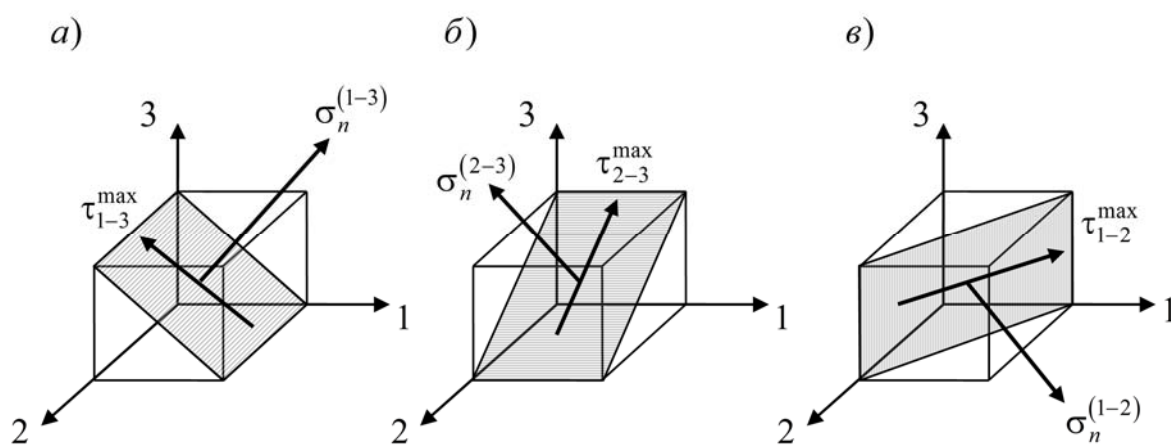


Рис. 13

Таким образом, площадки с экстремальными касательными напряжениями составляют с главными площадками угол, равный $\pm 45^\circ$. Подставив в выражение (1.38) значения направляющих косинусов l, m, n , обращающие его в экстремум, получим экстремальные значения касательных напряжений:

$$\tau_{1-3}^{\max} = \pm \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}; \quad \tau_{2-3}^{\max} = \pm \frac{\sigma_2 - \sigma_3}{2}; \quad \tau_{1-2}^{\max} = \pm \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}.$$

Так как $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$, то $\tau_{\max} = \pm \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}$. (1.43)

Нормальные напряжения на площадках с экстремальными касательными напряжениями, в соответствии с формулой (1.15), равны:

$$\sigma_n^{(1-3)} = \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2}; \quad \sigma_n^{(2-3)} = \frac{\sigma_2 + \sigma_3}{2}; \quad \sigma_n^{(1-2)} = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2}. \quad (1.44)$$

Итак, наибольшее касательное напряжение в точке тела равно полуразности наибольшего и наименьшего главных нормальных напряжений, действующих в рассматриваемой точке.

Глава 2. ТЕОРИЯ ДЕФОРМАЦИЙ

§2.1. Понятие о перемещениях

Под действием внешних сил упругое тело изменяет свои форму и размеры; его точки меняют, вообще говоря, своё местоположение, то есть перемещаются. Говорят, тело испытывает деформацию.

Вообще, *деформацией* тела называется изменение его формы или размеров либо и того и другого одновременно без изменения массы тела. Чтобы определить деформацию, следует сопоставить положение точек тела до и после приложения нагрузки. Изменение положения точки тела (изменение её координат) при деформации называется *перемещением*.

Пусть в состоянии до деформации некоторая точка тела занимала положение $A(x_a, y_a, z_a)$; после деформации эта точка стала занимать положение $B(x_b, y_b, z_b)$ (рис. 14). Вектор \overline{AB} , проведённый из начального положения точки до деформации тела в конечное её положение после деформации, называется *полным линейным перемещением* этой точки. Проекция полного линейного перемещения точки на какое-либо направление называется *линейным перемещением точки по данному направлению*.

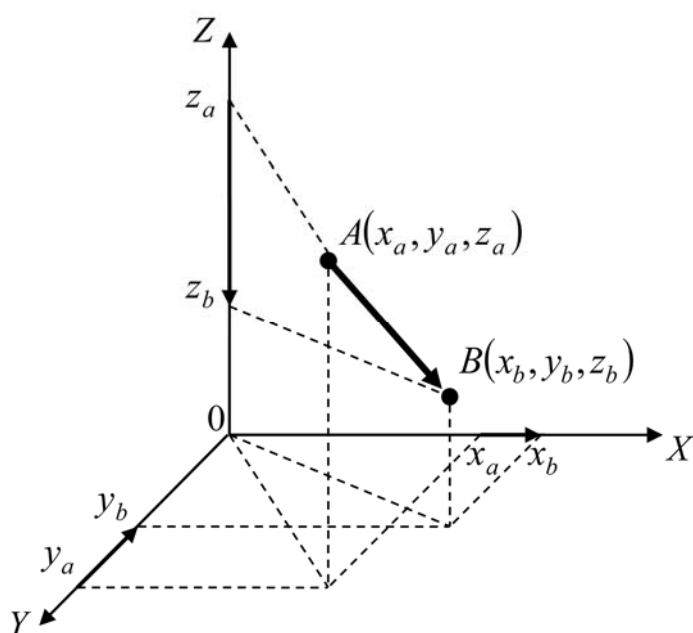


Рис. 14

На рис. 14 вектор $\overline{x_a x_b}$ – линейное перемещение точки $A(x_a, y_a, z_a)$ по направлению OX ; вектор $\overline{y_a y_b}$ – линейное перемещение точки $A(x_a, y_a, z_a)$ по направлению OY ; вектор $\overline{z_a z_b}$ – линейное перемещение точки $A(x_a, y_a, z_a)$ по направлению OZ .

Обозначим линейные перемещения точки в направлении осей декартовой системы координат X, Y, Z буквами u, v, w : $x_a x_b = u$, $y_a y_b = v$, $z_a z_b = w$. Вполне понятно, что $u = u(x, y, z)$; $v = v(x, y, z)$; $w = w(x, y, z)$. Здесь x, y, z — координаты точки в состоянии до деформации.

Изменение длины линейного элемента называется *абсолютной линейной деформацией* или *абсолютным удлинением по данному направлению*. Выделим в упругом теле в состоянии до деформации линейный элемент AB длиной l_0 (рис. 15). После деформации линейный элемент AB займёт положение A_1B_1 , длина его изменится и станет равной l_1 . Тогда абсолютное удлинение по направлению AB будет определяться зависимостью

$$\Delta l = |l_1 - l_0|. \quad (2.1)$$

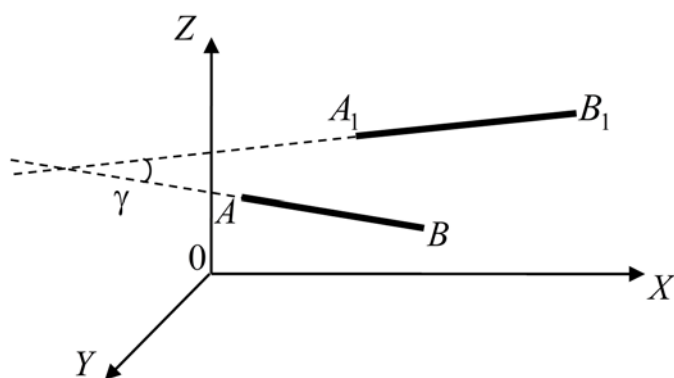


Рис. 15

Отношение изменения длины бесконечно малого линейного элемента к первоначальной его длине называется *относительной линейной деформацией в точке по данному направлению*:

$$\varepsilon_{AB} = \lim_{l_0 \rightarrow 0} \frac{\Delta l}{l_0}. \quad (2.2)$$

Угол, составленный новым после деформации тела направлением линейного элемента с его первоначальным направлением, называется *угловым перемещением* (см. рис. 15). Угловое перемещение обозначается буквой γ .

Изменение при деформации прямого угла между двумя бесконечно малыми линейными элементами, выходящими из одной точки, называется *углом сдвига* или просто *сдвигом* в этой точке в плоскости линейных элементов (рис. 16). Здесь два бесконечно малых линейных элемента AB и AC , угол между которыми $\angle BAC = 90^\circ$ до деформации, после деформации займут положение A_1B_1 и A_1C_1 . Изменение прямого угла $\angle BAC$ будет равно $\alpha + \beta$. Следовательно, углом сдвига в точке A будет величина $\gamma = \alpha + \beta$. Вполне понятно, что угол сдвига в точке является функцией декартовых координат точки в состоянии до деформации, то есть в точке $A(x, y, z)$, следовательно, $\gamma = \gamma(x, y, z)$.

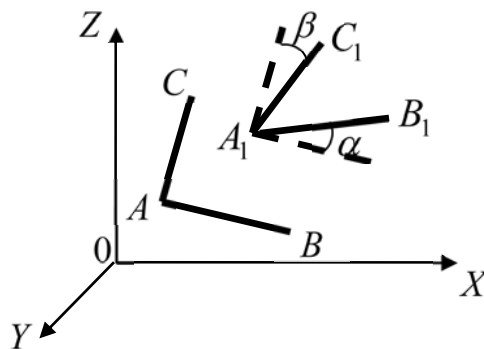


Рис. 16

Состояние тела в окрестности данной точки, определяемое совокупностью относительных линейных деформаций всех линейных элементов, проходящих через данную точку, а также углами сдвига между всеми парами взаимно перпендикулярных до деформации линейных элементов, называется *деформированным состоянием* в этой точке.

Деформированное состояние в точке полностью определяется относительными удлинениями трёх взаимно перпендикулярных линейных элементов тела, проходящих через данную точку, и тремя углами сдвига этих линейных элементов. В теории упругости в качестве таких трёх взаимно перпендикулярных линейных элементов тела принимаются линейные элементы, совпадающие с направлениями осей декартовой системы координат $OXYZ$. Тогда деформированное состояние в точке будет полностью определяться заданием относительных линейных деформаций $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z$ в направлении осей декартовой системы координат и углами сдвига $\gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{zx}$ в плоскости координатных граней (рис. 17). Длины рёбер элементарного параллелепипеда на рис. 17 равны dx, dy, dz .

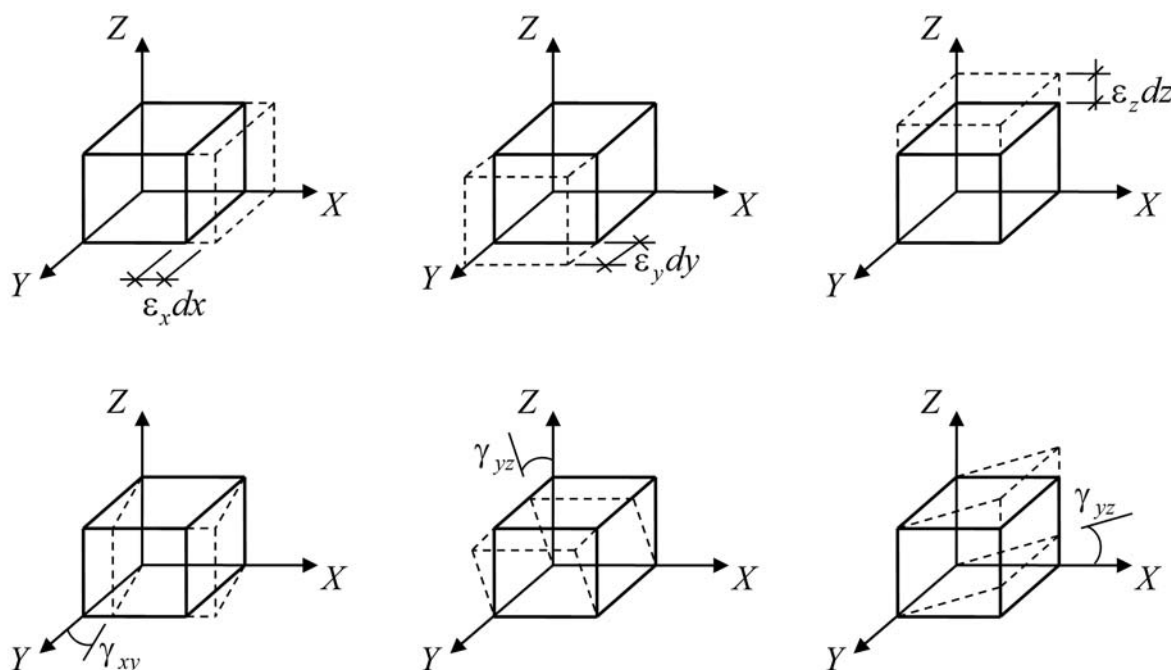


Рис. 17

Относительные линейные деформации $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z$ принято считать положительными, если они вызывают удлинение линейных элементов; угловые деформации $\gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{zx}$ считаются положительными, если они вызывают уменьшение прямого угла между положительными направлениями соответствующих координатных осей.

§2.2. Геометрические соотношения

Установим связь между деформациями и перемещениями. Будем полагать, что перемещения u, v, w и их производные по декартовым координатам x, y, z малы, так что их произведениями и квадратами по сравнению с самими перемещениями можно пренебречь.

Рассмотрим деформацию грани $abcd$ элементарного параллелепипеда с длинами рёбер dx, dy, dz (рис. 18), которая лежит в плоскости, параллельной координатной плоскости XOZ .

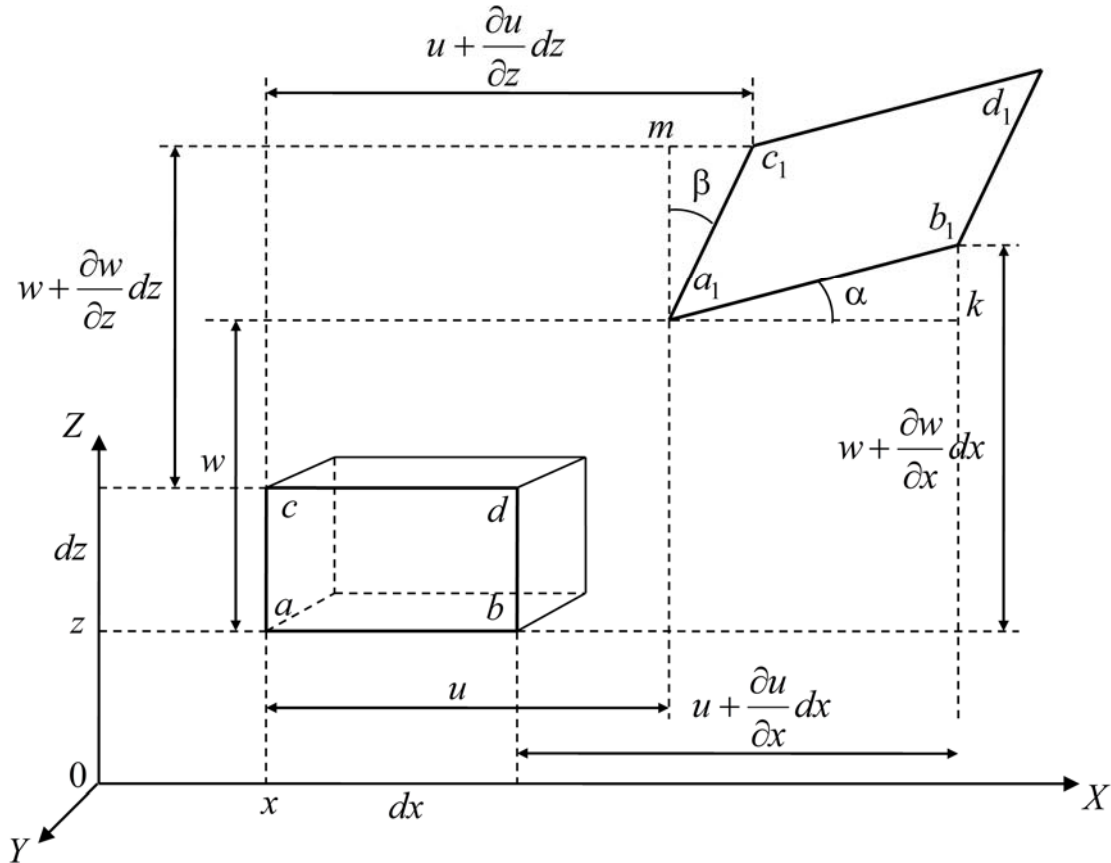


Рис. 18

В состоянии до деформации вершины a, b и c имели следующие координаты:

$$a(x, y, z), \quad b(x + dx, y, z), \quad c(x, y, z + dz). \quad (2.3)$$

После деформации вершины a, b и c переместились в положение a_1, b_1 и c_1 .

Пусть перемещения вершины a вдоль осей OX и OZ определяются функциями $u_a = u(x, y, z)$; $w_b = w(x, y, z)$. Тогда перемещения вершин b и c

в направлении тех же осей с учётом зависимостей (2.3) можно представить в следующем виде:

$$\begin{aligned}
 u_b &= u(x + dx, y, z) \cong u(x, y, z) + \frac{\partial u}{\partial x} dx; \\
 w_b &= w(x + dx, y, z) \cong w(x, y, z) + \frac{\partial w}{\partial x} dx; \\
 u_c &= u(x, y, z + dz) \cong u(x, y, z) + \frac{\partial u}{\partial z} dz; \\
 w_c &= w(x, y, z + dz) \cong w(x, y, z) + \frac{\partial w}{\partial z} dz.
 \end{aligned}
 \tag{2.4}$$

Координаты вершин a_1 , b_1 и c_1 теперь будут равны:

$$\begin{aligned}
 &a_1(x + u, y, z + w); \\
 &b_1\left(x + dx + u + \frac{\partial u}{\partial x} dx, y, z + w + \frac{\partial w}{\partial x} dx\right); \\
 &c_1\left(x + u + \frac{\partial u}{\partial z} dz, y, z + dz + w + \frac{\partial w}{\partial z} dz\right).
 \end{aligned}
 \tag{2.5}$$

Согласно рис. 18 относительное удлинение в точке a_1 по направлению оси OX можно найти по формуле

$$\varepsilon_x = \frac{a_1 b_1 - ab}{ab},
 \tag{2.6}$$

причём, $ab = dx$ и, кроме того,

$$(a_1 b_1)^2 = (a_1 k)^2 + (b_1 k)^2.
 \tag{2.7}$$

Сопоставляя формулы (2.6) и (2.7), получаем:

$$(1 + \varepsilon_x) dx = (a_1 k)^2 + (b_1 k)^2.
 \tag{2.8}$$

Здесь, в соответствии с координатами (2.5),

$$\begin{aligned}
 a_1 k &= x + dx + u + \frac{\partial u}{\partial x} dx - (x + u) = \left(1 + \frac{\partial u}{\partial x}\right) dx; \\
 b_1 k &= z + w + \frac{\partial w}{\partial x} dx - (z + w) = \frac{\partial w}{\partial x} dx.
 \end{aligned}
 \tag{2.9}$$

Подставив выражения (2.9) в формулу (2.8), после элементарных преобразований получим:

$$1 + \varepsilon_x = \sqrt{1 + 2 \frac{\partial u}{\partial x} + \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2}.$$

Раскладывая радикал в полученном соотношении в биномиальный ряд $\sqrt{1+\delta} = 1 + \frac{1}{2}\delta - \frac{1}{8}\delta^2 + \dots$ и ограничиваясь только линейными членами,

будем иметь $1 + \varepsilon_x = 1 + \frac{\partial u}{\partial x}$. Отсюда

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}.$$

Определим теперь угловую деформацию

$$\gamma_{xz} = \alpha + \beta \approx \operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta. \quad (2.10)$$

Здесь $\operatorname{tg}\alpha = \frac{b_1 k}{a_1 k}$, $\operatorname{tg}\beta = \frac{c_1 m}{a_1 m}$, причём

$$\begin{aligned} c_1 m &= x + u + \frac{\partial u}{\partial z} dz - (x + u) = \frac{\partial u}{\partial z} dz; \\ a_1 m &= z + dz + w + \frac{\partial w}{\partial z} dz - (z + w) = \left(1 + \frac{\partial w}{\partial z}\right) dz. \end{aligned} \quad (2.11)$$

Подставив формулы (2.9) и (2.11) в соотношение (2.10), после элементарных преобразований и пренебрежением квадратами и произведениями частных производных от перемещений по пространственным координатам, получим:

$$\begin{aligned} \gamma_{xz} &= \frac{\frac{\partial w}{\partial x} dx}{\left(1 + \frac{\partial u}{\partial x}\right) dx} + \frac{\frac{\partial u}{\partial z} dz}{\left(1 + \frac{\partial w}{\partial z}\right) dz} = \\ &= \frac{\frac{\partial w}{\partial x} \left(1 - \frac{\partial u}{\partial x}\right)}{\left(1 + \frac{\partial u}{\partial z}\right) \left(1 - \frac{\partial u}{\partial z}\right)} + \frac{\frac{\partial u}{\partial z} \left(1 - \frac{\partial w}{\partial z}\right)}{\left(1 + \frac{\partial w}{\partial z}\right) \left(1 - \frac{\partial w}{\partial z}\right)} = \\ &= \frac{\frac{\partial w}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial x}}{1 - \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2} + \frac{\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial u}{\partial z} \frac{\partial w}{\partial z}}{1 - \left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)^2} = \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}. \end{aligned}$$

Рассматривая подобным образом деформации граней элементарного параллелепипеда, параллельных координатным плоскостям OXY и OYZ , придём к зависимостям, подобным только что полученным. Таким образом,

связь между перемещениями и деформациями устанавливается соотношениями:

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x}, & \gamma_{xy} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}, \\ \varepsilon_y &= \frac{\partial v}{\partial y}, & \gamma_{yz} &= \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}, \\ \varepsilon_z &= \frac{\partial w}{\partial z}, & \gamma_{zx} &= \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}. \end{aligned} \quad (2.12)$$

Уравнения (2.12) впервые получены О.Коши и носят его имя. Уравнения (2.12) называются *геометрическими*.

§2.3. Деформация в произвольном направлении

Рассмотрим деформацию отрезка AB длиной ds , произвольным образом расположенного внутри упругого тела (рис. 19). Координаты точек A и B в состоянии до деформации равны: $A(x, y, z)$; $B(x + dx, y + dy, z + dz)$. Тогда проекции отрезка AB на оси декартовой системы координат $OXYZ$ будут равны: dx, dy, dz , то есть

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2. \quad (2.13)$$

После деформации точка A перейдет в положение $A_1(x_1, y_1, z_1)$, а точка B – в положение $B_1(x_1 + dx_1, y_1 + dy_1, z_1 + dz_1)$. Квадрат длины элемента A_1B_1 после деформации будет равен:

$$ds_1^2 = dx_1^2 + dy_1^2 + dz_1^2. \quad (2.14)$$

Разложим перемещение точки A при её переходе в положение A_1 на составляющие вдоль осей координат: $u(x, y, z)$, $v(x, y, z)$, $w(x, y, z)$. Тогда координаты точек A и A_1 будут связаны между собой зависимостями:

$$\begin{aligned} x_1 &= x + u(x, y, z); \\ y_1 &= y + v(x, y, z); \\ z_1 &= z + w(x, y, z). \end{aligned} \quad (2.15)$$

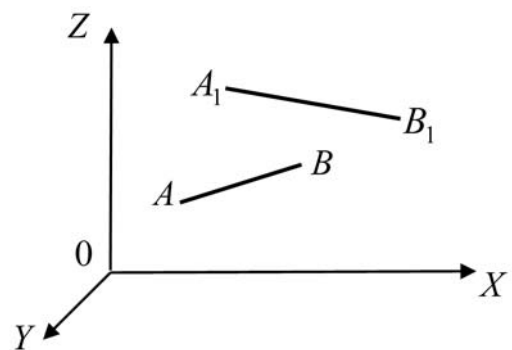


Рис. 19

Из (2.15) следует, что

$$\begin{aligned} dx_1 &= dx + \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy + \frac{\partial u}{\partial z} dz; \\ dy_1 &= dy + \frac{\partial v}{\partial x} dx + \frac{\partial v}{\partial y} dy + \frac{\partial v}{\partial z} dz; \\ dz_1 &= dz + \frac{\partial w}{\partial x} dx + \frac{\partial w}{\partial y} dy + \frac{\partial w}{\partial z} dz. \end{aligned} \quad (2.16)$$

Подставив соотношения (2.16) в формулу (2.14), получим:

$$\begin{aligned} ds_1^2 &= \left(1 + 2\frac{\partial u}{\partial x}\right) dx^2 + \left(1 + 2\frac{\partial v}{\partial y}\right) dy^2 + \left(1 + 2\frac{\partial w}{\partial z}\right) dz^2 + \\ &+ 2\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right) dx dy + 2\left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}\right) dy dz + 2\left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}\right) dz dx. \end{aligned} \quad (2.17)$$

Направляющие косинусы углов, составляемых произвольным вектором $\bar{\mathbf{s}}$ с осями декартовой системы координат OX, OY, OZ , как известно, определяются зависимостями:

$$\cos(\bar{\mathbf{s}}, X) = l = \frac{\partial x}{\partial s}; \quad \cos(\bar{\mathbf{s}}, Y) = m = \frac{\partial y}{\partial s}; \quad \cos(\bar{\mathbf{s}}, Z) = n = \frac{\partial z}{\partial s}. \quad (2.18)$$

При этом соотношение (2.17) с учётом зависимостей (2.13), (2.18) и (2.12) после элементарных преобразований, получит вид:

$$ds_1^2 = ds^2 \left[1 + 2(\varepsilon_x l^2 + \varepsilon_y m^2 + \varepsilon_z n^2 + \gamma_{xy} lm + \gamma_{yz} mn + \gamma_{zx} nl) \right]. \quad (2.19)$$

С другой стороны, $A_1 B_1 = ds_1 = ds + \Delta(ds) = ds \left[1 + \frac{\Delta(ds)}{ds} \right] = ds(1 + \varepsilon_s)$,

откуда

$$ds_1^2 = ds^2 (1 + 2\varepsilon_s + \varepsilon_s^2) \quad (2.20)$$

Сопоставляя (2.19) и (2.20) и пренебрегая квадратом относительной линейной деформации как бесконечно малой более высокого порядка малости, получаем:

$$\varepsilon_s = \varepsilon_x l^2 + \varepsilon_y m^2 + \varepsilon_z n^2 + \gamma_{xy} lm + \gamma_{yz} mn + \gamma_{zx} nl. \quad (2.21)$$

Таким образом, относительная линейная деформация в точке в произвольном направлении, задаваемом направляющими косинусами l, m и n , определяется по формуле (2.21).

§2.4. Угол сдвига между двумя произвольными направлениями

Пусть в состоянии до деформации угол между прямыми r и s равен 90° (рис. 20). Ориентация прямой r в системе декартовых координат $OXYZ$ задаётся направляющими косинусами l_r, m_r, n_r ; ориентация прямой s – направляющими косинусами l_s, m_s, n_s . После деформации прямые r и s займут положение r_1 и s_1 . При этом направляющие косинусы прямой r_1 будут равны $l_{r_1}, m_{r_1}, n_{r_1}$; направляющие косинусы прямой s_1 будут равны $l_{s_1}, m_{s_1}, n_{s_1}$.

На прямой r выделим отрезок CB длиной dr , на прямой s – отрезок CA длиной ds . После деформации отрезок CB займёт положение C_1B_1 и его длина будет равна dr_1 ; отрезок CA займёт положение C_1A_1 и длина его будет равна ds_1 .

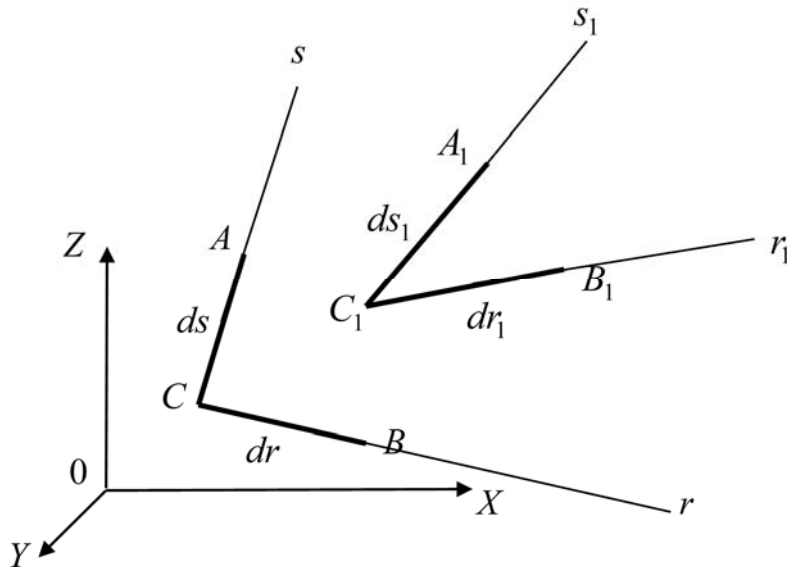


Рис. 20

Угол сдвига между направлениями s, r будет равен: $\gamma_{rs} = \frac{\pi}{2} - \angle(r_1, s_1)$. Отсюда следует, что $\sin \gamma_{rs} = \sin \left[\frac{\pi}{2} - \angle(r_1, s_1) \right] = \cos(\angle(r_1, s_1))$. Полагая ввиду малости угла $\sin \gamma_{rs} = \gamma_{rs}$, получим, что $\gamma_{rs} = \cos(\angle(r_1, s_1))$. Так как $\cos(\angle(r_1, s_1)) = l_{r_1} l_{s_1} + m_{r_1} m_{s_1} + n_{r_1} n_{s_1}$, то

$$\gamma_{rs} = l_{r_1} l_{s_1} + m_{r_1} m_{s_1} + n_{r_1} n_{s_1}. \quad (2.22)$$

Таким образом, задача сводится к выражению направляющих косинусов направлений r_1 и s_1 через направляющие косинусы направлений r и s .

В дальнейших выкладках воспользуемся результатами, приведенными в § 2.3, ввиду того, что и там и здесь рассматривается деформация прямолинейных отрезков.

Найдём выражение для направляющего косинуса

$$l_{r_1} = \frac{dx_1}{dr_1}. \quad (2.23)$$

Здесь в соответствии с результатами § 2.3 $dx_1 = dx + \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy + \frac{\partial u}{\partial z} dz$, $dr_1 = dr(1 + \varepsilon_r)$. Тогда формула (2.23) получает вид

$$l_{r_1} = \frac{dx + \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy + \frac{\partial u}{\partial z} dz}{dr(1 + \varepsilon_r)} = \frac{1}{1 + \varepsilon_r} \left(\frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial r} + \frac{\partial u}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial r} \right).$$

Но $\frac{\partial x}{\partial r} = l_r$, $\frac{\partial y}{\partial r} = m_r$, $\frac{\partial z}{\partial r} = n_r$, то есть

$$l_{r_1} = \frac{1}{1 + \varepsilon_r} \left[\left(1 + \frac{\partial u}{\partial x} \right) l_r + \frac{\partial u}{\partial y} m_r + \frac{\partial u}{\partial z} n_r \right]. \quad (2.24)$$

Пренебрегая в соотношении (2.24) величиной ε_r по сравнению с единицей, запишем окончательное выражение для направляющего косинуса l_{r_1} , а также аналогично полученные выражения для направляющих косинусов m_{r_1} , n_{r_1} , l_{s_1} , m_{s_1} , n_{s_1} :

$$\begin{aligned} l_{r_1} &= \left(1 + \frac{\partial u}{\partial x} \right) l_r + \frac{\partial u}{\partial y} m_r + \frac{\partial u}{\partial z} n_r; \\ m_{r_1} &= \frac{\partial v}{\partial x} l_r + \left(1 + \frac{\partial v}{\partial y} \right) m_r + \frac{\partial v}{\partial z} n_r; \\ n_{r_1} &= \frac{\partial w}{\partial x} l_r + \frac{\partial w}{\partial y} m_r + \left(1 + \frac{\partial w}{\partial z} \right) n_r; \\ l_{s_1} &= \left(1 + \frac{\partial u}{\partial x} \right) l_s + \frac{\partial u}{\partial y} m_s + \frac{\partial u}{\partial z} n_s; \\ m_{s_1} &= \frac{\partial v}{\partial x} l_s + \left(1 + \frac{\partial v}{\partial y} \right) m_s + \frac{\partial v}{\partial z} n_s; \\ n_{s_1} &= \frac{\partial w}{\partial x} l_s + \frac{\partial w}{\partial y} m_s + \left(1 + \frac{\partial w}{\partial z} \right) n_s. \end{aligned} \quad (2.25)$$

Подставив направляющие косинусы (2.25) в формулу (2.22), получим выражение для угла сдвига между двумя отрезками, произвольно расположенными в пространстве:

$$\begin{aligned}
 \gamma_{rs} = & 2 \left(\frac{\partial u}{\partial x} l_r l_s + \frac{\partial v}{\partial y} m_r m_s + \frac{\partial w}{\partial z} n_r n_s \right) + \\
 & + \left(\frac{\partial u}{\partial y} m_s + \frac{\partial u}{\partial z} n_s \right) l_r + \left(\frac{\partial u}{\partial y} m_r + \frac{\partial u}{\partial z} n_r \right) l_s + \\
 & + \left(\frac{\partial v}{\partial x} l_s + \frac{\partial v}{\partial z} n_s \right) m_r + \left(\frac{\partial v}{\partial x} l_r + \frac{\partial v}{\partial z} n_r \right) m_s + \\
 & + \left(\frac{\partial w}{\partial x} l_s + \frac{\partial w}{\partial y} m_s \right) n_r + \left(\frac{\partial w}{\partial x} l_r + \frac{\partial w}{\partial y} m_r \right) n_s.
 \end{aligned} \tag{2.26}$$

При записи выражения (2.26) произведения производных, как бесконечно малых высшего порядка малости, опущены.

Используя геометрические соотношения О.Коши (2.12), формулу (2.26) можно привести к следующему виду:

$$\begin{aligned}
 \gamma_{rs} = & 2 \left(\varepsilon_x l_r l_s + \varepsilon_y m_r m_s + \varepsilon_z n_r n_s \right) + \\
 & + \gamma_{xy} (l_r m_s + l_s m_r) + \gamma_{yz} (m_r n_s + m_s n_r) + \gamma_{zx} (n_r l_s + n_s l_r).
 \end{aligned} \tag{2.27}$$

По формуле (2.27) можно определить угол сдвига между двумя отрезками, проходящими через данную точку упругого тела, если известны компоненты деформации в этой точке и направляющие косинусы данных отрезков.

Формулы (2.21) и (2.27) показывают, что шесть величин $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z, \gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{zx}$ позволяют определить относительное линейное удлинение в точке деформированного тела по произвольному (любому) направлению, а также угол сдвига между двумя произвольными направлениями. Таким образом, относительные линейные деформации в направлении осей декартовой системы координат $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z$ и углы сдвига в плоскости координатных граней $\gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{zx}$ полностью определяют деформированное состояние в точке.

§2.5. Объёмная деформация

Рассмотрим элементарный параллелепипед с рёбрами, параллельными осям декартовой системы координат $OXYZ$ (рис. 21). До деформации длины рёбер были равны dx, dy, dz . Будем полагать, что деформация сдвига отсутствует.

Объём параллелепипеда до деформации $dV = dxdydz$. После деформации длины рёбер параллелепипеда изменятся:

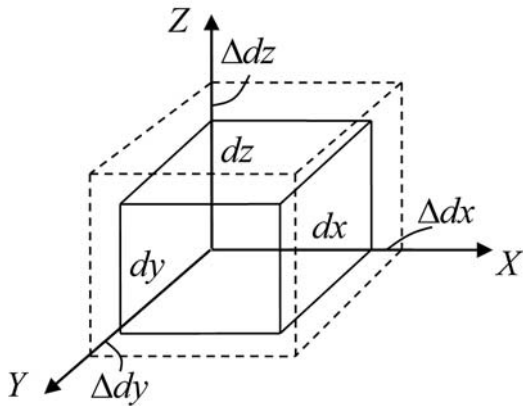


Рис. 21

$$dx' = dx + \Delta dx = dx \left(1 + \frac{\Delta dx}{dx} \right) = dx(1 + \varepsilon_x);$$

$$dy' = dy + \Delta dy = dy \left(1 + \frac{\Delta dy}{dy} \right) = dy(1 + \varepsilon_y);$$

$$dz' = dz + \Delta dz = dz \left(1 + \frac{\Delta dz}{dz} \right) = dz(1 + \varepsilon_z).$$

Следовательно, объём параллелепипеда после деформации будет равен:

$$dV' = (1 + \varepsilon_x)(1 + \varepsilon_y)(1 + \varepsilon_z)dxdydz.$$

Вычислим относительное изменение объёма параллелепипеда:

$$\begin{aligned} \theta &= \frac{dV' - dV}{dV} = \frac{(1 + \varepsilon_x)(1 + \varepsilon_y)(1 + \varepsilon_z)dxdydz - dxdydz}{dxdydz} = \\ &= \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z + \varepsilon_x\varepsilon_y + \varepsilon_y\varepsilon_z + \varepsilon_z\varepsilon_x + \varepsilon_x\varepsilon_y\varepsilon_z. \end{aligned}$$

Пренебрегая в силу малости произведениями компонент деформации, окончательно получим:

$$\theta = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z. \quad (2.28)$$

Таким образом, относительная объёмная деформация в точке равна сумме относительных удлинений по трём взаимно перпендикулярным направлениям, проведённым через эту точку.

§2.6. Тензор деформации

Конструкция соотношений (2.21) и (2.27) такова, что их можно сразу применить для вычисления компонент деформации при повороте исходной системы декартовых координат. Пусть в некоторой точке упругого тела заданы компоненты деформации $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z, \gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{zx}$ в декартовой системе координат $OXYZ$. Повернём оси OX, OY, OZ так, что они займут положение OX', OY', OZ' и также образуют прямоугольную систему координат $OX'Y'Z'$ (рис. 22).

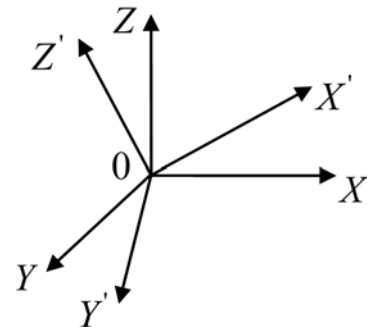


Рис. 22

Направляющие косинусы углов между осями этих двух систем координат приведены в табл. 1.

Для определения компонент деформации $\varepsilon_{x'}$, $\varepsilon_{y'}$, $\varepsilon_{z'}$, $\gamma_{x'y'}$, $\gamma_{y'z'}$, $\gamma_{z'x'}$ в новой системе координат $OX'Y'Z'$ через компоненты деформации ε_x , ε_y , ε_z , γ_{xy} , γ_{yz} , γ_{zx} в старой системе координат $OXYZ$ подставим данные табл. 1 в формулы (2.21) и (2.27).

В результате получим:

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_{x'} &= \varepsilon_x l_1^2 + \varepsilon_y m_1^2 + \varepsilon_z n_1^2 + \gamma_{xy} l_1 m_1 + \gamma_{yz} m_1 n_1 + \gamma_{zx} n_1 l_1; \\
 \varepsilon_{y'} &= \varepsilon_x l_2^2 + \varepsilon_y m_2^2 + \varepsilon_z n_2^2 + \gamma_{xy} l_2 m_2 + \gamma_{yz} m_2 n_2 + \gamma_{zx} n_2 l_2; \\
 \varepsilon_{z'} &= \varepsilon_x l_3^2 + \varepsilon_y m_3^2 + \varepsilon_z n_3^2 + \gamma_{xy} l_3 m_3 + \gamma_{yz} m_3 n_3 + \gamma_{zx} n_3 l_3; \\
 \gamma_{x'y'} &= 2(\varepsilon_x l_1 l_2 + \varepsilon_y m_1 m_2 + \varepsilon_z n_1 n_2) + \\
 &\quad + \gamma_{xy}(l_1 m_2 + l_2 m_1) + \gamma_{yz}(m_1 n_2 + m_2 n_1) + \gamma_{zx}(n_1 l_2 + n_2 l_1); \\
 \gamma_{y'z'} &= 2(\varepsilon_x l_2 l_3 + \varepsilon_y m_2 m_3 + \varepsilon_z n_2 n_3) + \\
 &\quad + \gamma_{xy}(l_2 m_3 + l_3 m_2) + \gamma_{yz}(m_2 n_3 + m_3 n_2) + \gamma_{zx}(n_2 l_3 + n_3 l_2); \\
 \gamma_{z'x'} &= 2(\varepsilon_x l_3 l_1 + \varepsilon_y m_3 m_1 + \varepsilon_z n_3 n_1) + \\
 &\quad + \gamma_{xy}(l_3 m_1 + l_1 m_3) + \gamma_{yz}(m_3 n_1 + m_1 n_3) + \gamma_{zx}(n_3 l_1 + n_1 l_3).
 \end{aligned} \tag{2.29}$$

Сопоставляя формулы преобразования к новым осям для деформаций (2.29) с формулами преобразования к новым осям для напряжений (1.25), (1.26), видим, что компоненты деформации преобразовываются при переходе от одной декартовой системы координат к другой аналогично тому, как преобразовываются компоненты тензора напряжений (1.19). Следовательно, если записать компоненты деформации в виде таблицы

$$\mathbf{T}_\varepsilon = \begin{pmatrix} \varepsilon_x & \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \frac{1}{2}\gamma_{xz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{yx} & \varepsilon_y & \frac{1}{2}\gamma_{yz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{zx} & \frac{1}{2}\gamma_{zy} & \varepsilon_z \end{pmatrix}, \tag{2.30}$$

то они образуют тензор деформации.

Тензор деформации является симметричным относительно главной диагонали, то есть $\gamma_{xy} = \gamma_{yx}$, $\gamma_{yz} = \gamma_{zy}$, $\gamma_{zx} = \gamma_{xz}$. Это объясняется тем, что

углы сдвигов в плоскости координатных граней γ_{xy} , γ_{yz} , γ_{zx} образуются при равноправном участии касательных напряжений $\tau_{xy} = \tau_{yx}$, $\tau_{yz} = \tau_{zy}$, $\tau_{zx} = \tau_{xz}$.

Тензор деформации раскладывается на шаровой тензор деформации $\mathbf{T}_{\varepsilon_0}$ и девиатор деформации \mathbf{D}_ε :

$$\mathbf{T}_\varepsilon = \mathbf{T}_{\varepsilon_0} + \mathbf{D}_\varepsilon. \quad (2.31)$$

Здесь

$$\mathbf{T}_{\varepsilon_0} = \begin{pmatrix} \varepsilon_0 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_0 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_0 \end{pmatrix}, \quad (2.32)$$

$$\mathbf{D}_\varepsilon = \begin{pmatrix} \varepsilon_x - \varepsilon_0 & \frac{1}{2}\gamma_{yx} & \frac{1}{2}\gamma_{zx} \\ \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \varepsilon_y - \varepsilon_0 & \frac{1}{2}\gamma_{zy} \\ \frac{1}{2}\gamma_{xz} & \frac{1}{2}\gamma_{yz} & \varepsilon_z - \varepsilon_0 \end{pmatrix}, \quad (2.33)$$

причём $\varepsilon_0 = \frac{1}{3}(\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z)$ – средняя деформация.

Шаровой тензор деформации $\mathbf{T}_{\varepsilon_0}$ характеризует изменение объёма тела; девиатор деформации \mathbf{D}_ε – изменение его формы.

§2.7. Главные деформации

По аналогии с напряжённым состоянием в каждой точке деформированного тела можно найти три таких взаимно перпендикулярных направления, что между ними все три компонента сдвига равны нулю, а линейные деформации имеют экстремальные значения. Направления, соответствующие этим осям, называются *главными направлениями*, а соответствующие линейные деформации – *главными деформациями*. Оси эти обычно обозначаются цифрами 1, 2, 3, а главные деформации – соответственно ε_1 , ε_2 , ε_3 ($\varepsilon_1 \geq \varepsilon_2 \geq \varepsilon_3$).

Для определения главных деформаций воспользуемся методом нахождения относительного экстремума, учитывая, что $l^2 + m^2 + n^2 = 1$. В соответствии с процедурой Лагранжа, найдём экстремум выражения:

$$\varepsilon_s = \varepsilon_x l^2 + \varepsilon_y m^2 + \varepsilon_z n^2 + \gamma_{xy} lm + \gamma_{yz} mn + \gamma_{zx} nl - \lambda(l^2 + m^2 + n^2 - 1).$$

Необходимым условием существования экстремума является равенство нулю частных производных от этого выражения по l , m и n :

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\varepsilon_s}{dl} &= 2l(\varepsilon_x - \lambda) + m\gamma_{xy} + n\gamma_{xz} = 0; \\ \frac{d\varepsilon_s}{dm} &= l\gamma_{xy} + 2m(\varepsilon_y - \lambda) + n\gamma_{yz} = 0; \\ \frac{d\varepsilon_s}{dn} &= l\gamma_{xz} + m\gamma_{yz} + 2n(\varepsilon_z - \lambda) = 0. \end{aligned} \right\} \quad (2.34)$$

Система линейных алгебраических уравнений (2.34) относительно неизвестных направляющих косинусов l, m и n является однородной и, следовательно, имеет ненулевые решения, когда её определитель равен нулю. Нулевое решение данной системы исключается ввиду того, что $l^2 + m^2 + n^2 = 1$.

Приравняв нулю определитель системы (2.34):

$$\begin{vmatrix} \varepsilon_x - \lambda & \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \frac{1}{2}\gamma_{xz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{yx} & \varepsilon_y - \lambda & \frac{1}{2}\gamma_{yz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{zx} & \frac{1}{2}\gamma_{zy} & \varepsilon_z - \lambda \end{vmatrix} = 0,$$

получим кубическое, относительно λ , уравнение:

$$\lambda^3 - S_1\lambda^2 - S_2\lambda - S_3 = 0. \quad (2.35)$$

Здесь

$$\begin{aligned} S_1 &= \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z; \\ S_2 &= -\varepsilon_x\varepsilon_y - \varepsilon_y\varepsilon_z - \varepsilon_z\varepsilon_x + \frac{1}{4}(\gamma_{xy}^2 + \gamma_{yz}^2 + \gamma_{zx}^2); \\ S_3 &= \varepsilon_x\varepsilon_y\varepsilon_z - \frac{1}{4}(\gamma_{xy}^2\varepsilon_z + \gamma_{yz}^2\varepsilon_x + \gamma_{zx}^2\varepsilon_y - \gamma_{xy}\gamma_{yz}\gamma_{zx}). \end{aligned} \quad (2.36)$$

Корни кубического уравнения (2.35) $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ определяют главные деформации $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$. Поскольку тензор деформации симметричен относительно главной диагонали, все корни уравнения (2.35) вещественны.

Для решения уравнения (2.35) воспользуемся тригонометрической формулой Виета. Вычисляем вспомогательные величины:

$$H = \frac{1}{9}(S_1^2 + 3S_2), \quad K = \frac{1}{54}(-2S_1^3 - 9S_1S_2 - 27S_3), \quad D = H^3 - K^3.$$

Так как все три корня уравнения (2.35) вещественные, то $D > 0$, и тогда вычисляем $\varphi = \frac{1}{3} \arccos\left(\frac{K}{\sqrt{H^3}}\right)$. Корни уравнения (2.35) будут определяться по формулам:

$$\begin{aligned}\varepsilon_1 &= -2\sqrt{H} \cos(\varphi) + \frac{S_1}{3}; \\ \varepsilon_2 &= -2\sqrt{H} \cos\left(\varphi + \frac{2\pi}{3}\right) + \frac{S_1}{3}; \\ \varepsilon_3 &= -2\sqrt{H} \cos\left(\varphi - \frac{2\pi}{3}\right) + \frac{S_1}{3}.\end{aligned}\tag{2.37}$$

З а м е ч а н и е . Индексы при главных деформациях проставляются так, чтобы выполнялись неравенства: $\varepsilon_1 \geq \varepsilon_2 \geq \varepsilon_3$.

Для определения направляющих косинусов главных направлений подставим главные деформации $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ по очереди в систему (2.34) и, используя соотношение $l_k^2 + m_k^2 + n_k^2 = 1$, получим три совокупности направляющих косинусов:

$$\begin{aligned}l_1, m_1, n_1 &- \text{ для главной деформации } \varepsilon_1; \\ l_2, m_2, n_2 &- \text{ для главной деформации } \varepsilon_2; \\ l_3, m_3, n_3 &- \text{ для главной деформации } \varepsilon_3.\end{aligned}\tag{2.38}$$

Доказано, что совокупность нормалей, задаваемых направляющими косинусами (2.38), образует прямоугольную систему координат, так как их попарное скалярное произведение равно нулю:

$$\begin{aligned}l_1 l_2 + m_1 m_2 + n_1 n_2 &= 0; \\ l_2 l_3 + m_2 m_3 + n_2 n_3 &= 0; \\ l_3 l_1 + m_3 m_1 + n_3 n_1 &= 0.\end{aligned}$$

Покажем, что корни уравнения (2.35), которые мы обозначили $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$, являются искомыми главными деформациями $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$. Действительно, подставим в уравнения (2.34) первый корень λ_1 и соответствующие ему направляющие косинусы l_1, m_1, n_1 . Затем умножим первое из этих уравнений на l_1 , второе – на m_1 , третье – на n_1 . Сложим уравнения. После элементарных преобразований получим:

$$\varepsilon_x l_1^2 + \varepsilon_y m_1^2 + \varepsilon_z n_1^2 + \gamma_{xy} l_1 m_1 + \gamma_{yz} m_1 n_1 + \gamma_{zx} n_1 l_1 = \lambda_1 (l_1^2 + m_1^2 + n_1^2).$$

Сопоставляя полученное выражение с формулами (2.29), можно записать

$$\varepsilon_{x'} = \lambda_1(l_1^2 + m_1^2 + n_1^2),$$

или

$$\varepsilon_{x'} = \lambda_1. \quad (2.39)$$

Повторив указанную процедуру для второго λ_2 и третьего λ_3 корней уравнения (2.35), получим ещё два соотношения:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{y'} &= \lambda_2, \\ \varepsilon_{z'} &= \lambda_3. \end{aligned} \quad (2.40)$$

Из формул (2.39) и (2.40) следует, что относительная деформация λ_1 определяется направляющими косинусами l_1, m_1, n_1 ; относительная деформация λ_2 – направляющими косинусами l_2, m_2, n_2 ; относительная деформация λ_3 – направляющими косинусами l_3, m_3, n_3 . Но эти направления, согласно (2.34), и есть направления главных деформаций, а следовательно, $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ есть главные деформации $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$.

Таким образом, в любой точке упругого тела существует три взаимно перпендикулярных направления, для которых углы сдвига равны нулю, а линейные деформации имеют экстремальные значения.

В главных осях тензор деформации имеет вид:

$$\mathbf{T}_\varepsilon = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_2 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_3 \end{pmatrix}. \quad (2.41)$$

Очевидно, величины главных деформаций, так же, как и величины главных напряжений, не могут зависеть от выбора координатных осей. Вследствие этого коэффициенты кубического уравнения (2.35) S_1, S_2, S_3 также останутся инвариантными при повороте осей координат. Они называются первым, вторым и третьим инвариантами тензора деформаций.

§2.8. Уравнения неразрывности деформаций

Неразрывность деформаций определяется условием, по которому бесконечно малые элементарные параллелепипеды с рёбрами dx, dy, dz , выделенные в упругом теле (рис. 23а), должны быть так деформированы под действием внешних сил, чтобы из них можно было получить сплошное (без разрывов) деформированное тело (рис. 23б). Если компоненты тензора деформации произвольны в каждой точке тела, то из деформированных параллелепипедов невозможно будет сложить сплошное непрерывное тело: между отдельными параллелепипедами могут быть пустоты, либо габариты двух соседних параллелепипедов не совпадут (рис. 23в).

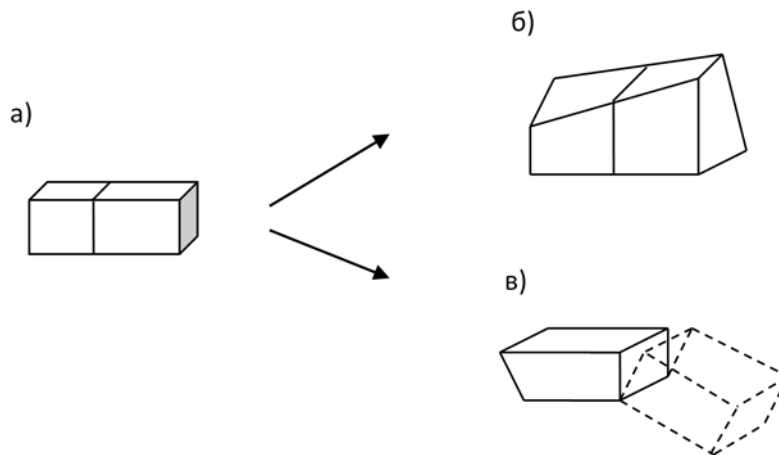


Рис. 23

Если в каждой точке упругого тела известны перемещения как функции пространственных координат, то линейные и угловые деформации однозначно определяются из геометрических соотношений О.Коши (2.12). Если же по заданным деформациям нужно найти перемещения, то возникают затруднения, ибо перемещений три, а геометрических уравнений шесть, причём структура их такова, что одну и ту же компоненту перемещений можно, вообще говоря, определить из трёх дифференциальных уравнений (см. формулы (2.12)).

Для получения однозначных значений перемещений между деформациями должна существовать взаимная связь. Эта связь устанавливается уравнениями совместности или сплошности.

Если компоненты тензора деформации не будут удовлетворять уравнениям сплошности, то перемещения, определяемые геометрическими уравнениями (2.12), не будут непрерывными. Разрывность перемещений означает нарушение непрерывности (сплошности) материала упругого тела – основного предположения (гипотезы) теории упругости.

Перейдём к непосредственному выводу уравнений совместности деформаций. Идея построения уравнений совместности состоит в том, чтобы из геометрических уравнений (2.12) исключить перемещения. Эту операцию

впервые провёл Сен-Венан и получил шесть соотношений между деформациями, которые и называются уравнениями совместности или *уравнениями неразрывности деформаций*. Эти шесть уравнений можно разбить на две группы. В первую группу входят уравнения, устанавливающие связь между линейными и угловыми деформациями, относящимися к одной плоскости; во вторую группу – связи между деформациями в разных плоскостях.

В геометрических соотношениях О.Коши (2.12) продифференцируем ε_x дважды по y , ε_y – дважды по x , а γ_{xy} – по x и по y . В итоге получим:

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} = \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2}, \quad \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^3 v}{\partial x^2 \partial y}, \quad \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2} + \frac{\partial^3 v}{\partial x^2 \partial y}.$$

Отсюда следует первая зависимость между деформациями:

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y}.$$

Аналогично можно получить ещё две зависимости первой группы уравнений неразрывности деформаций:

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{yz}}{\partial y \partial z}; \quad \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{zx}}{\partial z \partial x}.$$

Для получения зависимостей второй группы, опять же используя геометрические соотношения О.Коши (2.12), составим производные:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y \partial z} &= \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y \partial z}; & \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} &= \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z} + \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial z}; \\ \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} &= \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}; & \frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y} &= \frac{\partial^2 w}{\partial y \partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z}. \end{aligned}$$

Отсюда следует, что

$$2 \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y \partial z} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} + \frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y} - \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} \right).$$

Аналогично могут быть получены две другие зависимости второй группы уравнений неразрывности деформаций:

$$2 \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial z \partial x} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} + \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} - \frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y} \right); \quad 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y} - \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} \right).$$

Выпишем сводку всех шести уравнений совместности деформаций Сен-Венана:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} &= \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y}; \\
 \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial y^2} &= \frac{\partial^2 \gamma_{yz}}{\partial y \partial z}; \\
 \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial z^2} &= \frac{\partial^2 \gamma_{zx}}{\partial z \partial x}; \\
 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y \partial z} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y} + \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} - \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} \right); \\
 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial z \partial x} &= \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} + \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} - \frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial y} \right); \\
 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial x \partial y} &= \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial y} - \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} \right).
 \end{aligned} \tag{2.42}$$

Уравнения неразрывности деформаций необходимы и достаточны только для тел с односвязной областью, в пределах которой всякая замкнутая линия непрерывной деформацией может быть стянута в точку без пересечения поверхности тела. Для многосвязных областей (тело с отверстиями или пустотами) эти уравнения только необходимы, но, как правило, недостаточны для сплошности тела.

Глава 3. ФИЗИЧЕСКИЕ СООТНОШЕНИЯ

§3.1. Физический закон для упругого тела

Эксперименты показывают, что чем большая нагрузка действует на упругое тело, тем большую деформацию оно испытывает. На этот факт учёные обратили внимание ещё в эпоху зарождения науки о сопротивлении материалов. В 1676 г. Р.Гук вывел экспериментально подтверждённый закон, устанавливающий связь между напряжениями и деформациями. Этот закон он сформулировал в виде «*Ut tensio sic vis*» («Какова сила, такова деформация») и опубликовал его в 1676 г. в форме анаграммы «*ceiīinossttuv*». Этот же закон был независимо открыт в 1680 г. французским физиком Э.Мариоттом.

Этим законом была установлена пропорциональность между силами и соответствующими им деформациями (свойство упругости).

Закон упругости в обобщённой форме для упругого тела можно сформулировать в виде следующего утверждения: компоненты напряжений являются линейными функциями компонентов деформации. Математическое описание этого утверждения в наиболее общем случае имеет вид:

$$\begin{aligned}\sigma_x &= a_{11}\varepsilon_x + a_{12}\varepsilon_y + a_{13}\varepsilon_z + a_{14}\gamma_{xy} + a_{15}\gamma_{yz} + a_{16}\gamma_{zx}; \\ \sigma_y &= a_{21}\varepsilon_x + a_{22}\varepsilon_y + a_{23}\varepsilon_z + a_{24}\gamma_{xy} + a_{25}\gamma_{yz} + a_{26}\gamma_{zx}; \\ \sigma_z &= a_{31}\varepsilon_x + a_{32}\varepsilon_y + a_{33}\varepsilon_z + a_{34}\gamma_{xy} + a_{35}\gamma_{yz} + a_{36}\gamma_{zx}; \\ \tau_{xy} &= a_{41}\varepsilon_x + a_{42}\varepsilon_y + a_{43}\varepsilon_z + a_{44}\gamma_{xy} + a_{45}\gamma_{yz} + a_{46}\gamma_{zx}; \\ \tau_{yz} &= a_{51}\varepsilon_x + a_{52}\varepsilon_y + a_{53}\varepsilon_z + a_{54}\gamma_{xy} + a_{55}\gamma_{yz} + a_{56}\gamma_{zx}; \\ \tau_{zx} &= a_{61}\varepsilon_x + a_{62}\varepsilon_y + a_{63}\varepsilon_z + a_{64}\gamma_{xy} + a_{65}\gamma_{yz} + a_{66}\gamma_{zx}.\end{aligned}\tag{3.1}$$

В формулах (3.1) коэффициенты a_{ij} , $i=1,2,\dots,6$; $j=1,2,\dots,6$ зависят от механических свойств материала упругого тела и называются *упругими постоянными*. Если a_{ij} одинаковы во всех точках тела, то такое тело является *однородным*. Если a_{ij} зависят от рассматриваемого в теле направления, то такое тело называется, вообще говоря, *анизотропным*. Если a_{ij} различны в трёх взаимно перпендикулярных направлениях, выделенных в упругом теле, то такое тело называется *ортотропным*. Если a_{ij} не зависят от рассматриваемого направления, то такое тело называется *изотропным*. В этом случае число коэффициентов в уравнениях (3.1) сокращается до трёх (E, G, μ), причём независимыми из них будут лишь два:

$$E = 2(1 + \mu)G.\tag{3.2}$$

Здесь E – модуль упругости, G – модуль сдвига, μ – коэффициент поперечной деформации (коэффициент Пуассона). Модуль упругости и модуль сдвига – это константы, присущие каждому материалу и определяемые из опытов на одноосное растяжение (сжатие) для модуля упругости и на кручение для модуля сдвига.

В XIX столетии закон (3.1) попытались обосновать теоретически. В 1821 г. Л. Навье вывел уравнения, связывающие силы и деформации, исходя из гипотезы о молекулярных силах взаимодействия. Дж. Грин пришел к уравнениям теории упругости, приняв за основу потенциальную энергию упругого тела. В 1951 году В.В. Новожилов сформулировал связь между напряжениями и деформациями исходя из тензорных свойств понятий «напряжения» и «деформации» [28].

§3.2. Обобщённый закон Гука

Обобщённый закон Гука получен на основе следующих положений:

1. Перемещения и деформации малы; справедлив принцип независимости действия сил.
2. Направления главных напряжений и главных деформаций совпадают во всех точках тела.
3. Имеет место линейная зависимость между напряжениями и деформациями.

Гук Р. экспериментально установил физический закон для призматического стержня (одномерная задача):

$$\sigma = E\varepsilon. \quad (3.3)$$

Здесь σ – напряжение на площадках, перпендикулярных продольной оси прямого стержня; ε – относительная линейная деформация в направлении продольной оси стержня.

Эксперименты показывают, что в поперечном к продольной оси стержня направлении также имеют место деформации, связанные с продольной деформацией с помощью коэффициента Пуассона:

$$\varepsilon_{\text{поп}} = -\mu\varepsilon. \quad (3.4)$$

Попытки установить опытным путём аналогичные зависимости для плоской и пространственной задач не увенчались успехом. Причина неудачи заключается в следующем: 1) трудно осуществить равномерное растяжение или сжатие по двум, а тем более по трём направлениям; 2) имеется бесчисленное множество комбинаций растягивающих и сжимающих нагрузок, которые могут существовать в реальных конструкциях.

Для изотропного упругого тела, работающего в пределах малых деформаций, выход из такого положения заключается в использовании

принципа независимости действия сил, то есть полная деформация вычисляется суммированием деформаций от приложения нагрузки по направлению каждой из осей.

Пусть дан элементарный параллелепипед, вырезанный из упругого тела, с гранями, совпадающими с главными площадками (рис. 24а). Рассмотрим далее часть деформации элементарного параллелепипеда в плоскости 1-3 (рис. 24б).

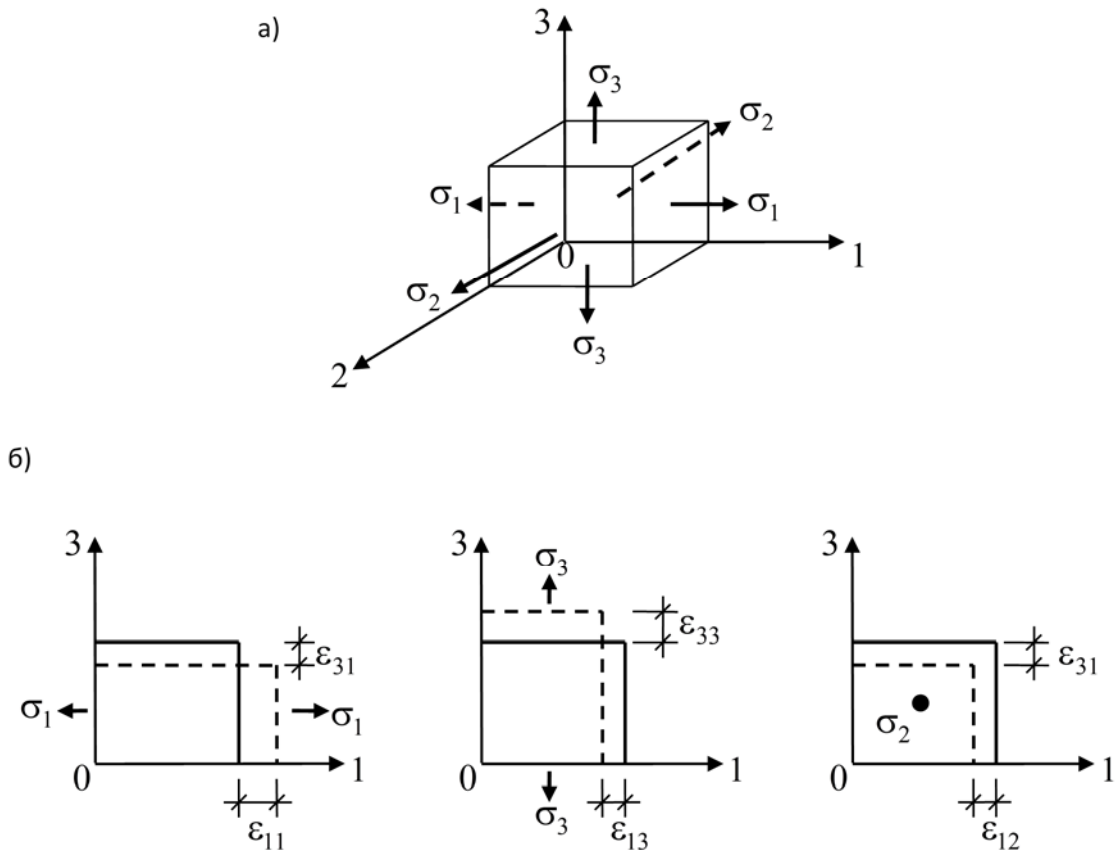


Рис. 24

На основании принципа суперпозиции полная деформация в направлении оси 1 будет равна:

$$\epsilon_1 = \epsilon_{11} + \epsilon_{13} + \epsilon_{12}. \quad (3.5)$$

Здесь ϵ_{11} – относительная линейная деформация в направлении оси 1 от действия только напряжения σ_1 , то есть в соответствии с законом Р.Гука (3.3)

$$\epsilon_{11} = \frac{\sigma_1}{E}; \quad (3.6)$$

ϵ_{13} – относительная линейная деформация в направлении оси 1 от действия только напряжения σ_3 , то есть в соответствии с (3.4)

$$\epsilon_{13} = -\mu\epsilon_{33} = -\mu\frac{\sigma_3}{E}; \quad (3.7)$$

ε_{12} – относительная линейная деформация в направлении оси 1 от действия только напряжения σ_2 , то есть в соответствии с (3.4)

$$\varepsilon_{12} = -\mu\varepsilon_{22} = -\mu\frac{\sigma_2}{E}. \quad (3.8)$$

Подставив формулы (3.6), (3.7) и (3.8) в соотношение (3.5) и повторив указанную процедуру для определения деформации в направлении главных осей 2 и 3, получим:

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 &= \frac{1}{E}[\sigma_1 - \mu(\sigma_2 + \sigma_3)]; \\ \varepsilon_2 &= \frac{1}{E}[\sigma_2 - \mu(\sigma_3 + \sigma_1)]; \\ \varepsilon_3 &= \frac{1}{E}[\sigma_3 - \mu(\sigma_1 + \sigma_2)]. \end{aligned} \quad (3.9)$$

Уравнения (3.9) называются *уравнениями обобщённого закона Гука в главных осях*.

Разрешим теперь зависимости (3.9) относительно главных напряжений. Для этого из уравнения (3.9₁) выразим σ_1 , из (3.9₂) выразим σ_2 и из (3.9₃) выразим σ_3 . В результате получим:

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= E\varepsilon_1 + \mu(\sigma_2 + \sigma_3); \\ \sigma_2 &= E\varepsilon_2 + \mu(\sigma_3 + \sigma_1); \\ \sigma_3 &= E\varepsilon_3 + \mu(\sigma_1 + \sigma_2). \end{aligned}$$

Теперь в правые и левые части полученных соотношений добавим напряжения, стоящие в левой части и умноженные на коэффициент Пуассона:

$$\begin{aligned} \sigma_1 + \mu\sigma_1 &= E\varepsilon_1 + \mu(\sigma_2 + \sigma_3) + \mu\sigma_1; \\ \sigma_2 + \mu\sigma_2 &= E\varepsilon_2 + \mu(\sigma_3 + \sigma_1) + \mu\sigma_2; \\ \sigma_3 + \mu\sigma_3 &= E\varepsilon_3 + \mu(\sigma_1 + \sigma_2) + \mu\sigma_3. \end{aligned} \quad (*)$$

Далее сложим уравнения (3.9):

$$\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 = \frac{1}{E}[(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) - 2\mu(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)],$$

откуда

$$\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 = \frac{E}{1 - 2\mu}(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3).$$

Подставив полученное соотношение в уравнения (*) и приняв во внимание, что $\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 = 3\sigma_0$, а $\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 = 3\varepsilon_0$, получим окончательно:

$$\begin{aligned}\sigma_1 &= \frac{E}{1+\mu}\varepsilon_1 + \frac{3\mu E}{(1+\mu)(1-2\mu)}\varepsilon_0 = 2G\varepsilon_1 + 3\lambda\varepsilon_0; \\ \sigma_2 &= \frac{E}{1+\mu}\varepsilon_2 + \frac{3\mu E}{(1+\mu)(1-2\mu)}\varepsilon_0 = 2G\varepsilon_2 + 3\lambda\varepsilon_0; \\ \sigma_3 &= \frac{E}{1+\mu}\varepsilon_3 + \frac{3\mu E}{(1+\mu)(1-2\mu)}\varepsilon_0 = 2G\varepsilon_3 + 3\lambda\varepsilon_0.\end{aligned}\quad (3.10)$$

Здесь $\lambda = \frac{\mu E}{(1+\mu)(1-2\mu)}$ – коэффициент Ляме; $G = \frac{E}{2(1+\mu)}$.

Уравнения (3.10) называются *обобщённым законом Гука в форме Ляме в главных осях*.

Поскольку направление главных осей заведомо неизвестно, то полученные зависимости обобщённого закона Гука (3.9) и (3.10) целесообразно преобразовать к произвольной декартовой системе координат $OXYZ$. Для этого воспользуемся формулами преобразования компонент напряжений (1.25), (1.26) и деформаций (2.29) к новым осям. В нашем случае роль старых осей играют главные оси 1, 2, 3. Новые оси обозначим X, Y, Z . С учётом этого выражения (1.25), (1.26) и (2.29) можно переписать в следующем виде:

$$\begin{aligned}\sigma_x &= \sigma_1 l_1^2 + \sigma_2 m_1^2 + \sigma_3 n_1^2; & \tau_{xy} &= \sigma_1 l_1 l_2 + \sigma_2 m_1 m_2 + \sigma_3 n_1 n_2; \\ \sigma_y &= \sigma_1 l_2^2 + \sigma_2 m_2^2 + \sigma_3 n_2^2; & \tau_{yz} &= \sigma_1 l_2 l_3 + \sigma_2 m_2 m_3 + \sigma_3 n_2 n_3; \\ \sigma_z &= \sigma_1 l_3^2 + \sigma_2 m_3^2 + \sigma_3 n_3^2; & \tau_{zx} &= \sigma_1 l_3 l_1 + \sigma_2 m_3 m_1 + \sigma_3 n_3 n_1.\end{aligned}\quad (3.11)$$

$$\begin{aligned}\varepsilon_x &= \varepsilon_1 l_1^2 + \varepsilon_2 m_1^2 + \varepsilon_3 n_1^2; & \gamma_{xy} &= 2(\varepsilon_1 l_1 l_2 + \varepsilon_2 m_1 m_2 + \varepsilon_3 n_1 n_2); \\ \varepsilon_y &= \varepsilon_1 l_2^2 + \varepsilon_2 m_2^2 + \varepsilon_3 n_2^2; & \gamma_{yz} &= 2(\varepsilon_1 l_2 l_3 + \varepsilon_2 m_2 m_3 + \varepsilon_3 n_2 n_3); \\ \varepsilon_z &= \varepsilon_1 l_3^2 + \varepsilon_2 m_3^2 + \varepsilon_3 n_3^2; & \gamma_{zx} &= 2(\varepsilon_1 l_3 l_1 + \varepsilon_2 m_3 m_1 + \varepsilon_3 n_3 n_1).\end{aligned}\quad (3.12)$$

Подставим в соотношение (3.11₁) значения главных напряжений из зависимостей (3.10):

$$\begin{aligned}\sigma_x &= 2G\varepsilon_1 l_1^2 + 3\lambda\varepsilon_0 l_1^2 + 2G\varepsilon_2 m_1^2 + 3\lambda\varepsilon_0 m_1 + 2G\varepsilon_3 n_1^2 + 3\lambda\varepsilon_0 n_1 = \\ &= 2G(\varepsilon_1 l_1^2 + \varepsilon_2 m_1^2 + \varepsilon_3 n_1^2) + 3\lambda\varepsilon_0(l_1^2 + m_1^2 + n_1^2).\end{aligned}$$

Учитывая формулу (3.12₁), получим $\sigma_x = 2G\varepsilon_x + 3\lambda\varepsilon_0$.

Подобным образом можно получить ещё два соотношения:

$$\sigma_y = 2G\varepsilon_y + 3\lambda\varepsilon_0; \quad \sigma_z = 2G\varepsilon_z + 3\lambda\varepsilon_0.$$

Подставим в соотношение (3.114) значения главных напряжений из зависимостей (3.10):

$$\begin{aligned}\tau_{xy} &= 2G\varepsilon_1 l_1 l_2 + 3\lambda\varepsilon_0 l_1 l_2 + 2G\varepsilon_2 m_1 m_2 + 3\lambda\varepsilon_0 m_1 m_2 + 2G\varepsilon_3 n_1 n_2 + 3\lambda\varepsilon_0 n_1 n_2 = \\ &= 2G(\varepsilon_1 l_1 l_2 + \varepsilon_2 m_1 m_2 + \varepsilon_3 n_1 n_2) + 3\lambda\varepsilon_0 (l_1 l_2 + m_1 m_2 + n_1 n_2).\end{aligned}$$

Учитывая формулу (3.124), получим $\tau_{xy} = G\gamma_{xy}$.

Подобным образом можно получить ещё два соотношения:

$$\tau_{yz} = G\gamma_{yz}; \quad \tau_{zx} = G\gamma_{zx}.$$

Выпишем сводку всех шести уравнений обобщённого закона Гука в произвольных декартовых осях координат:

$$\begin{aligned}\sigma_x &= 2G\varepsilon_x + 3\lambda\varepsilon_0; & \tau_{xy} &= G\gamma_{xy}; \\ \sigma_y &= 2G\varepsilon_y + 3\lambda\varepsilon_0; & \tau_{yz} &= G\gamma_{yz}; \\ \sigma_z &= 2G\varepsilon_z + 3\lambda\varepsilon_0; & \tau_{zx} &= G\gamma_{zx}.\end{aligned}\tag{3.13}$$

Здесь $3\varepsilon_0 = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z$.

Уравнения (3.13) называются *обобщённым законом Гука в форме Ляме*.

Разрешим уравнения (3.13) относительно деформаций. В первой группе уравнений (3.13) перенесём относительные линейные деформации в левую часть, а всё остальное оставим в правой:

$$\begin{aligned}\varepsilon_x &= \frac{1}{2G}(\sigma_x - 3\lambda\varepsilon_0); \\ \varepsilon_y &= \frac{1}{2G}(\sigma_y - 3\lambda\varepsilon_0); \\ \varepsilon_z &= \frac{1}{2G}(\sigma_z - 3\lambda\varepsilon_0).\end{aligned}\tag{**}$$

Теперь сложим полученные соотношения:

$$\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z = \frac{1}{2G}[\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z - 3\lambda(\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z)],$$

откуда, после приведения подобных слагаемых, получаем:

$$(\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z)\left(1 + \frac{3\lambda}{2G}\right) = \frac{1}{2G}(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z),$$

то есть $\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z = \frac{1}{2G + 3\lambda}(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z)$.

Принимая во внимание параметры Ляме, получаем:

$$\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z = \frac{1 - 2\mu}{E}(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z).\tag{3.14}$$

Подставив соотношение (3.14) в правую часть формул (***) и присоединив вторую группу соотношений (3.13), в которой угловые деформации выражены через касательные напряжения, после элементарных преобразований окончательно получим *обобщённый закон Гука в произвольных осях декартовых координат*:

$$\begin{aligned}\varepsilon_x &= \frac{1}{E} \left[\sigma_x - \mu(\sigma_y + \sigma_z) \right]; & \gamma_{xy} &= \frac{1}{G} \tau_{xy}; \\ \varepsilon_y &= \frac{1}{E} \left[\sigma_y - \mu(\sigma_z + \sigma_x) \right]; & \gamma_{yz} &= \frac{1}{G} \tau_{yz}; \\ \varepsilon_z &= \frac{1}{E} \left[\sigma_z - \mu(\sigma_x + \sigma_y) \right]; & \gamma_{zx} &= \frac{1}{G} \tau_{zx}.\end{aligned}\quad (3.15)$$

Следует обратить внимание на то обстоятельство, что при $\mu \rightarrow 0,5$ параметр Ляме $\lambda \rightarrow \infty$. В этом случае пользоваться соотношениями обобщённого закона Гука в форме Ляме (3.13) затруднительно. Поэтому целесообразно закон упругости, устанавливающий линейную зависимость между напряжениями и деформациями, записать в виде соотношений, в которых объёмная деформация, пропорциональная средней деформации ε_0 , была бы выделена в явном виде.

Рассмотрим соотношение (3.14). Здесь в левой части записано выражение для объёмной деформации (см. формулу (2.28)), а в правой части стоит величина, пропорциональная среднему напряжению, то есть формулу (3.14) можно записать в следующем виде:

$$\theta = \frac{1-2\mu}{E} 3\sigma_0. \quad (3.16)$$

Исследуя формулу (3.16), получаем два существенных замечания:

1. Коэффициент поперечной деформации $\mu = 0$ соответствует материалу, не изменяющему объём при деформации (несжимаемый материал).

2. Коэффициент поперечной деформации $0 \leq \mu \leq \frac{1}{2}$, иначе при всестороннем гидростатическом растяжении ($\sigma_0 > 0$) объём тела уменьшится ($\theta < 0$), чего в природе быть не может.

Итак, формула (3.16) устанавливает связь между объёмной деформацией и средним (гидростатическим) напряжением.

Для получения закона упругости, соответствующего изменению формы тела, нужно из первых трёх уравнений (3.13) вычесть равенство (3.16). В результате получим:

$$\begin{aligned}\sigma_x - \sigma_0 &= 2G(\varepsilon_x - \varepsilon_0); & \tau_{xy} &= G\gamma_{xy}; \\ \sigma_y - \sigma_0 &= 2G(\varepsilon_y - \varepsilon_0); & \tau_{yz} &= G\gamma_{yz}; \\ \sigma_z - \sigma_0 &= 2G(\varepsilon_z - \varepsilon_0); & \tau_{zx} &= G\gamma_{zx}.\end{aligned}\quad (3.17)$$

Равенства (3.17) устанавливают связь между компонентами девиаторов напряжений и деформаций. Связь между компонентами шаровых тензоров напряжений и деформаций устанавливается соотношением (3.16), которое мы запишем в следующем виде:

$$\sigma_0 = K\varepsilon_0. \quad (3.18)$$

Здесь $K = \frac{E}{1-2\mu}$ – коэффициент объёмной деформации.

§3.3. Потенциальная энергия деформации

Под воздействием внешних сил упругое тело деформируется, то есть возникают перемещения его точек. Такого рода перемещения присущи и точкам приложения внешних сил. Значит, внешние силы совершают некоторую работу. Эта работа расходуется на накопление внутренней потенциальной энергии, полученной за счёт работы внутренних напряжений. Часть работы внешних сил, перешедшую в тепло, не учитываем.

Будем считать, что работа внешних сил полностью переходит в потенциальную энергию деформации упругого тела. Внутреннюю потенциальную энергию называют *работой деформации*.

Рассмотрим медленное нагружение твёрдого тела [31] (то есть кинетической энергией частиц тела пренебрегаем). В этом случае можно считать, что на любом этапе нагружения зависящая от времени внешняя нагрузка находится в равновесии с внутренними упругими силами.

Рассмотрим элементарный параллелепипед с рёбрами dx, dy, dz , параллельными главным осям. Напряжения $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$, умноженные на площади соответствующих граней, можно трактовать как внешние силы. Эти силы произведут работу на перемещениях, определяемых деформациями $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$.

В силу медленного нарастания внешней нагрузки, напряжения, являющиеся функциями координат, будут зависеть ещё и от времени, прошедшего с начала нагружения.

Введём относительное время

$$\xi = \frac{t}{T}.$$

Здесь T – период нагружения, $0 \leq t \leq T$, $0 \leq \xi \leq 1$.

Тогда в произвольный момент времени t напряжения и деформации будут соответственно равны: $\sigma_1\xi, \sigma_2\xi, \sigma_3\xi$; $\varepsilon_1\xi, \varepsilon_2\xi, \varepsilon_3\xi$. Здесь σ_i и ε_i

($i = 1, 2, 3$) – окончательные значения главных напряжений и деформаций в конце процесса приложения внешнего воздействия.

Вычислим работу сил, действующих по граням элементарного параллелепипеда. В произвольный момент времени ξ на гранях элементарного параллелепипеда действуют силы $\sigma_1 \xi dydz$, $\sigma_2 \xi dxdz$, $\sigma_3 \xi dxdy$; длина рёбер изменится на величины $\varepsilon_1 \xi dx$, $\varepsilon_2 \xi dy$, $\varepsilon_3 \xi dz$. Через промежуток времени $d\xi$ эти силы изменятся и станут равными

$$\sigma_1(\xi + d\xi) dydz, \quad \sigma_2(\xi + d\xi) dxdz, \quad \sigma_3(\xi + d\xi) dxdy, \quad (***)$$

а длина рёбер изменится на величины $\varepsilon_1(\xi + d\xi) dx$, $\varepsilon_2(\xi + d\xi) dy$, $\varepsilon_3(\xi + d\xi) dz$. Следовательно, приращения перемещений за время $d\xi$ будут равны:

$$\varepsilon_1 d\xi dx, \quad \varepsilon_2 d\xi dy, \quad \varepsilon_3 d\xi dz. \quad (***)$$

Силы (***) на перемещениях (***) произведут работу:

$$\begin{aligned} dU &= \sigma_1(\xi + d\xi) dydz \cdot \varepsilon_1 d\xi dx + \sigma_2(\xi + d\xi) dxdz \cdot \varepsilon_2 d\xi dy + \\ &+ \sigma_3(\xi + d\xi) dxdy \cdot \varepsilon_3 d\xi dz = \\ &= (\sigma_1 \varepsilon_1 + \sigma_2 \varepsilon_2 + \sigma_3 \varepsilon_3)(\xi + d\xi) d\xi dxdydz. \end{aligned}$$

Раскрывая в полученном выражении скобки и пренебрегая величиной $d\xi^2$, получим выражение работы внутренних сил за промежуток времени $d\xi$:

$$dU = (\sigma_1 \varepsilon_1 + \sigma_2 \varepsilon_2 + \sigma_3 \varepsilon_3) \xi d\xi dxdydz.$$

Работа за весь период нагружения будет равна:

$$U = \int_0^1 [(\sigma_1 \varepsilon_1 + \sigma_2 \varepsilon_2 + \sigma_3 \varepsilon_3) dxdydz] \xi d\xi = \frac{1}{2} (\sigma_1 \varepsilon_1 + \sigma_2 \varepsilon_2 + \sigma_3 \varepsilon_3) dxdydz.$$

Работа, отнесённая к единице объёма, – удельная потенциальная энергия деформации – будет равна:

$$U_0 = \frac{U}{dxdydz} = \frac{1}{2} (\sigma_1 \varepsilon_1 + \sigma_2 \varepsilon_2 + \sigma_3 \varepsilon_3). \quad (3.19)$$

Используя обобщённый закон Гука в главных осях (3.9), выражение для удельной потенциальной энергии деформации (3.19) можно записать в терминах главных напряжений:

$$U_0 = \frac{1}{2E} \left[(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)^2 - 2(1 + \mu)(\sigma_1 \sigma_2 + \sigma_2 \sigma_3 + \sigma_3 \sigma_1) \right], \quad (3.20)$$

или в терминах инвариантов тензора напряжений:

$$U_0 = \frac{1}{2E} [I_1^2 - 2(1+\mu)I_2]. \quad (3.21)$$

Перейдём в формуле (3.21) от главных напряжений к напряжениям в произвольных осях декартовых координат. Тогда

$$U_0 = \frac{1-2\mu}{6E} (\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z)^2 + \frac{1+\mu}{6E} \left[(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2 + 6(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2) \right]. \quad (3.22)$$

Используя закон Гука в форме Ляме в главных осях (3.10), выражение для удельной потенциальной энергии (3.19) деформации можно записать в терминах главных деформаций:

$$U_0 = G \left[\frac{1-\mu}{1-2\mu} (\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3)^2 - 2(\varepsilon_1\varepsilon_2 + \varepsilon_2\varepsilon_3 + \varepsilon_3\varepsilon_1) \right], \quad (3.23)$$

или в терминах инвариантов тензора деформации:

$$U_0 = G \left(\frac{1-\mu}{1-2\mu} S_1 + S_2 \right). \quad (3.24)$$

Перейдём в формуле (3.24) от главных деформаций к деформациям в произвольных осях декартовых координат. Тогда

$$U_0 = G \left[\frac{1-\mu}{1-2\mu} (\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z)^2 - 2(\varepsilon_x\varepsilon_y + \varepsilon_y\varepsilon_z + \varepsilon_z\varepsilon_x) + \frac{1}{2} (\gamma_{xy}^2 + \gamma_{yz}^2 + \gamma_{zx}^2) \right]. \quad (3.25)$$

В произвольных осях декартовой системы координат $OXYZ$ выражение для удельной потенциальной энергии (3.19) имеет вид:

$$U_0 = \frac{1}{2} (\sigma_x\varepsilon_x + \sigma_y\varepsilon_y + \sigma_z\varepsilon_z + \tau_{xy}\gamma_{xy} + \tau_{yz}\gamma_{yz} + \tau_{zx}\gamma_{zx}). \quad (3.26)$$

Удельная потенциальная энергия деформации может быть разделена на удельную потенциальную энергию изменения объёма тела $U_{об}$, соответствующую шаровым тензорам напряжений и деформаций, и удельную потенциальную энергию изменения формы тела U_{ϕ} , соответствующую девиаторам напряжений и деформаций:

$$U_0 = U_{об} + U_{\phi}.$$

Величину $U_{об}$, принимая во внимание (1.21) и (2.32), можно найти так:

$$U_{об} dx dy dz = \frac{1}{2} (\sigma_0 dx dy \cdot \varepsilon_0 dz + \sigma_0 dy dz \cdot \varepsilon_0 dx + \sigma_0 dz dx \cdot \varepsilon_0 dy),$$

то есть

$$U_{об} = \frac{3}{2} \sigma_0 \varepsilon_0. \quad (3.27)$$

Удельную потенциальную энергию изменения объёма $U_{об}$, используя соотношение (3.16), можно записать либо в терминах напряжений, либо в терминах деформаций:

$$U_{об} = \frac{3(1-2\mu)}{2E} \sigma_0^2 = \frac{3E}{2(1-2\mu)} \varepsilon_0^2. \quad (3.28)$$

Удельная потенциальная энергия формоизменения находится путём вычитания из удельной потенциальной энергии деформации удельной потенциальной энергии изменения объёма. На основании соотношения (3.20) получим формулу для удельной потенциальной энергии формоизменения в терминах главных напряжений:

$$\begin{aligned} U_{\phi} = U_0 - U_{об} &= \frac{1}{2E} \left[(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)^2 - 2(1+\mu)(\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_3\sigma_1) \right] - \\ &- \frac{3(1-2\mu)}{2E} \left(\frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{3} \right)^2 = \\ &= \frac{1+\mu}{6E} \left[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2 \right]. \end{aligned} \quad (3.29)$$

Если удельную потенциальную энергию деформации взять в терминах главных деформаций (3.23), то получим формулу для удельной потенциальной энергии формоизменения в терминах главных деформаций:

$$\begin{aligned} U_{\phi} = U_0 - U_{об} &= G \left[\frac{1-\mu}{1-2\mu} (\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3)^2 - 2(\varepsilon_1\varepsilon_2 + \varepsilon_2\varepsilon_3 + \varepsilon_3\varepsilon_1) \right] - \\ &- \frac{3E}{2(1-2\mu)} \left(\frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3}{3} \right)^2 = \\ &= \frac{G}{3} \left[(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)^2 + (\varepsilon_2 - \varepsilon_3)^2 + (\varepsilon_3 - \varepsilon_1)^2 \right]. \end{aligned} \quad (3.30)$$

При рассмотрении вопросов прочности упругих тел будет использоваться формула для удельной потенциальной энергии формоизменения,

записанная в напряжениях и отнесённая к произвольной декартовой системе координат $OXYZ$:

$$U_{\phi} = \frac{1+\mu}{6} \left[(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2 \right] + \frac{1}{2G} (\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2). \quad (3.31)$$

Если взять частные производные от выражения для удельной потенциальной энергии (3.22) по напряжениям, то получим соответствующие деформации:

$$\begin{aligned} \frac{\partial U_0}{\partial \sigma_x} = \varepsilon_x; & \quad \frac{\partial U_0}{\partial \sigma_y} = \varepsilon_y; & \quad \frac{\partial U_0}{\partial \sigma_z} = \varepsilon_z; \\ \frac{\partial U_0}{\partial \tau_{xy}} = \gamma_{xy}; & \quad \frac{\partial U_0}{\partial \tau_{yz}} = \gamma_{yz}; & \quad \frac{\partial U_0}{\partial \tau_{zx}} = \gamma_{zx}. \end{aligned} \quad (3.32)$$

Выражения (3.32) называются *формулами Кастильяно*.

Если взять частные производные от выражения для удельной потенциальной энергии (3.25) по деформациям, то получим соответствующие напряжения:

$$\begin{aligned} \frac{\partial U_0}{\partial \varepsilon_x} = \sigma_x; & \quad \frac{\partial U_0}{\partial \varepsilon_y} = \sigma_y; & \quad \frac{\partial U_0}{\partial \varepsilon_z} = \sigma_z; \\ \frac{\partial U_0}{\partial \gamma_{xy}} = \tau_{xy}; & \quad \frac{\partial U_0}{\partial \gamma_{yz}} = \tau_{yz}; & \quad \frac{\partial U_0}{\partial \gamma_{zx}} = \tau_{zx}. \end{aligned} \quad (3.33)$$

Выражения (3.33) называются *формулами Грина*.

Поскольку и формулы Кастильяно, и формулы Грина связывают между собой напряжения и деформации, им можно приписать смысл физического закона.

Глава 4. ПОСТАНОВКА И МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ

§4.1. Общая система уравнений теории упругости

Общая система уравнений теории упругости включает три группы соотношений.

1. Геометрические соотношения (2.12):

$$\begin{aligned}\varepsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x}; & \gamma_{xy} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}; \\ \varepsilon_y &= \frac{\partial v}{\partial y}; & \gamma_{yz} &= \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}; \\ \varepsilon_z &= \frac{\partial w}{\partial z}; & \gamma_{zx} &= \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}.\end{aligned}\tag{4.1}$$

2. Уравнения равновесия (1.17):

$$\begin{aligned}\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + F_x &= 0; \\ \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} + F_y &= 0; \\ \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + F_z &= 0.\end{aligned}\tag{4.2}$$

3. Физические соотношения:

А) В виде обобщённого закона Гука (3.15):

$$\begin{aligned}\varepsilon_x &= \frac{1}{E} \left(\sigma_x - \mu (\sigma_y + \sigma_z) \right); & \gamma_{xy} &= \frac{1}{G} \tau_{xy}; \\ \varepsilon_y &= \frac{1}{E} \left(\sigma_y - \mu (\sigma_z + \sigma_x) \right); & \gamma_{yz} &= \frac{1}{G} \tau_{yz}; \\ \varepsilon_z &= \frac{1}{E} \left(\sigma_z - \mu (\sigma_x + \sigma_y) \right); & \gamma_{zx} &= \frac{1}{G} \tau_{zx}.\end{aligned}\tag{4.3}$$

Б) В виде обобщённого закона Гука в форме Ляме (3.13):

$$\begin{aligned}\sigma_x &= 2G\varepsilon_x + 3\lambda\varepsilon_0; & \tau_{xy} &= G\gamma_{xy}; \\ \sigma_y &= 2G\varepsilon_y + 3\lambda\varepsilon_0; & \tau_{yz} &= G\gamma_{yz}; \\ \sigma_z &= 2G\varepsilon_z + 3\lambda\varepsilon_0; & \tau_{yz} &= G\gamma_{yz}.\end{aligned}\tag{4.4}$$

Решение любой задачи теории упругости находят путём интегрирования дифференциальных уравнений (4.1)–(4.2) совместно с алгебраическими уравнениями (4.3) или (4.4). Найденные 15 функций декартовых координат

$$u(x, y, z), v(x, y, z), w(x, y, z), \\ \varepsilon_x(x, y, z), \varepsilon_y(x, y, z), \varepsilon_z(x, y, z), \gamma_{xy}(x, y, z), \gamma_{yz}(x, y, z), \gamma_{zx}(x, y, z), \\ \sigma_x(x, y, z), \sigma_y(x, y, z), \sigma_z(x, y, z), \tau_{xy}(x, y, z), \tau_{yz}(x, y, z), \tau_{zx}(x, y, z)$$

должны удовлетворять граничным условиям, заданным на контуре тела:

А) В напряжениях:

$$\begin{aligned} P_{nx} &= \sigma_x l + \tau_{yx} m + \tau_{zx} n; \\ P_{ny} &= \tau_{xy} l + \sigma_y m + \tau_{zy} n; \\ P_{nz} &= \tau_{xz} l + \tau_{yz} m + \sigma_z n. \end{aligned} \quad (4.5)$$

Б) В перемещениях:

$$\begin{aligned} u(x_0, y_0, z_0) &= u_0; \\ v(x_0, y_0, z_0) &= v_0; \\ w(x_0, y_0, z_0) &= w_0. \end{aligned} \quad (4.6)$$

В соотношениях (4.6) x_0, y_0, z_0 – декартовы координаты точек поверхности упругого тела; u_0, v_0, w_0 – компоненты перемещения точек поверхности тела.

Уравнения (4.1)–(4.9) получены при существенном допущении о малости рассматриваемых деформаций. Следствием этого является, например, то обстоятельство, что уравнения Навье были получены без учёта того, что при приложении сил к упругому элементу он неизбежно претерпевает формоизменение и местоположения сил до и после деформации оказываются нетождественными. Строго говоря, точность уравнений равновесия (4.2) соблюдаются только тогда, когда свойства рассматриваемого тела приближаются к свойствам абсолютно твёрдого (недеформируемого) тела, или в условиях пренебрежимо малых нагрузок. Кроме того, в линейной теории упругости не учитывается тот факт, что в статических уравнениях (4.2) координаты, по которым производится дифференцирование, взяты для состояния, последовавшего за деформацией, а в геометрических уравнениях (4.1) – для состояния до деформации. При малых деформациях, с которыми оперирует линейная теория упругости, высказанные неточности и допущения, как показывают более глубокие и тщательные исследования, не оказывают существенного влияния на точность решения прикладных задач.

Решение задач теории упругости с точки зрения математики сводится к решению краевой задачи для дифференциальных уравнений в частных

производных. При этом возникает вопрос о единственности получаемого решения, с одной стороны, и, с другой стороны, вопрос о существовании решения краевой задачи для дифференциальных уравнений линейной теории упругости.

Первый вопрос исчерпывается теоремой единственности, которая утверждает, что при заданных граничных условиях в упругом теле, находящемся в естественном состоянии, возникает одно и только одно определённое напряжённо-деформированное состояние, и наоборот, данному напряжённо-деформированному состоянию отвечает только одна система внешних воздействий. Теорема единственности впервые была установлена Г. Кирхгофом.

Доказательство существования решения краевой задачи для дифференциальных уравнений линейной теории упругости дали А. Корн и Л. Лихтенштейн.

§4.2. Типы задач теории упругости

В теории упругости различают два основных типа задач.

1. *Прямая задача*, когда известными считаются объёмные F_x, F_y, F_z и поверхностные силы P_{nx}, P_{ny}, P_{nz} (или смещения u_0, v_0, w_0 на границе тела). Требуется определить компоненты перемещений, деформаций и напряжений в каждой точке тела.

Следует отметить, что до настоящего времени не разработан общий метод решения прямой задачи теории упругости. Это объясняется тем, что современная математика не обладает аналитическим аппаратом, позволяющим получить общее решение краевой задачи (4.1)-(4.6). Однако отсутствие общего решения не означает, что теория упругости в своём развитии не достигла существенных успехов. Наоборот, к настоящему времени разработано большое число различных методов решения конкретных, важных для инженерной практики прямых задач и получено ещё большее число решений. Более того, разработаны универсальные численные методы решения прямой задачи теории упругости, к которым следует отнести метод конечных разностей, метод конечных элементов, метод граничных элементов. Несмотря на то что с использованием этих методов можно решить практически любую задачу теории упругости, не потеряли свою актуальность и аналитические и аналитико-численные методы решения конкретных задач теории упругости: решение с помощью целых полиномов, решение в тригонометрических рядах, полуобратный метод Сен-Венана, методы Ритца – Тимошенко, Бубнова – Галёркина, Власова – Канторовича и так далее.

Построение разрешающих уравнений прямой задачи теории упругости в общем виде выполняется либо в перемещениях, когда из общей системы уравнений теории упругости исключают напряжения и деформации, либо в напряжениях, когда из общей системы уравнений теории упругости исключают перемещения и деформации.

В зависимости от вида граничных условий прямые задачи теории упругости подразделяются на:

- ✓ первую основную задачу – когда на границе тела предполагаются известными усилия;

- ✓ вторую основную задачу – когда на границе тела предполагаются известными перемещения;

- ✓ смешанную задачу – когда на одной части границы тела предполагаются известными усилия, на другой части – перемещения.

2. *Обратная задача*, когда в каждой точке тела заданы либо перемещения u, v, w , либо деформации $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z, \gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{zx}$, либо напряжения $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{zx}$. Требуется определить остальные компоненты напряжённо-деформированного состояния, в том числе объёмные и поверхностные силы.

Случай 1. В каждой точке упругого тела известны перемещения u, v, w как функции пространственных координат. Тогда из уравнений Коши (4.1) находят деформации $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z, \gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{zx}$; из физических соотношений в форме Ляме (4.4) – напряжения $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{zx}$; из уравнений Навье (4.2) – объёмные силы F_x, F_y, F_z ; из граничных условий (4.5) – поверхностные силы p_{nx}, p_{ny}, p_{nz} . Уравнения неразрывности деформаций Сен-Венана (2.42) здесь всегда выполняются.

Случай 2. В каждой точке упругого тела известны линейные и угловые деформации, удовлетворяющие уравнениям неразрывности деформаций Сен-Венана (2.42). Тогда из физических уравнений в форме Ляме (4.4) определяются напряжения $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{zx}$; из статических уравнений (4.2) – объёмные силы F_x, F_y, F_z ; из условий на поверхности тела (4.5) находят поверхностные силы; из геометрических уравнений (4.1) – перемещения u, v, w .

Случай 3. В каждой точке упругого тела известны напряжения $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{zx}$. Тогда из физических соотношений в форме обобщённого закона Гука (4.3) находят деформации $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z, \gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{zx}$; из статических уравнений – объёмные силы F_x, F_y, F_z ; из условий на поверхности тела находят (4.5) – поверхностные силы p_{nx}, p_{ny}, p_{nz} ; из геометрических уравнений (4.1) находят перемещения

u, v, w . Компоненты деформации должны удовлетворять уравнениям неразрывности деформаций Сен-Венана (2.42).

Обратная задача возникает обычно при проверке правильности приближённых или сконструированных решений. С точки зрения математики обратная задача теории упругости намного проще прямой задачи, за исключением проблемы нахождения перемещений на основании геометрических соотношений. Однако, как отмечал известный исследователь в области теории упругости А.Сен-Венан, «следуя подобным путём, мы, к сожалению, имели бы весьма мало шансов даже после долгих попыток прийти к решениям, представляющим какой-либо интерес». Вместе с тем, решая прямую задачу теории упругости в «перемещениях» или «напряжениях», мы приходим, в конце концов, к необходимости решать обратную задачу, поскольку в первом случае в каждой точке тела определяются перемещения, а во втором случае – напряжения, и надо найти остальные компоненты напряжённо-деформированного состояния.

§4.3. Прямая задача теории упругости в перемещениях

Решая прямую задачу теории упругости в перемещениях, следует из системы уравнений (4.1)–(4.3) исключить и деформации, и напряжения. Эта процедура выполняется путём постановки в уравнения равновесия (4.2) физических уравнений в форме Ляме (4.4), в которых деформации заменены производными от перемещений по декартовым координатам в соответствии с геометрическими соотношениями (4.1). В результате получаем следующую систему уравнений:

$$\begin{aligned} \lambda \frac{\partial \theta}{\partial x} + 2G \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + G \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \right) + G \left(\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial z} \right) + F_x &= 0; \\ G \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \right) + \lambda \frac{\partial \theta}{\partial y} + 2G \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + G \left(\frac{\partial^2 v}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y \partial z} \right) + F_y &= 0; \\ G \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} \right) + G \left(\frac{\partial^2 v}{\partial z \partial y} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) + \lambda \frac{\partial \theta}{\partial z} + 2G \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} + F_z &= 0. \end{aligned}$$

Раскрыв скобки и перегруппировав слагаемые, получим:

$$\begin{aligned} G \nabla^2 u + 3(\lambda + G) \frac{\partial \varepsilon_0}{\partial x} + F_x &= 0; \\ G \nabla^2 v + 3(\lambda + G) \frac{\partial \varepsilon_0}{\partial y} + F_y &= 0; \\ G \nabla^2 w + 3(\lambda + G) \frac{\partial \varepsilon_0}{\partial z} + F_z &= 0. \end{aligned} \tag{4.7}$$

Здесь

$$\begin{aligned}\nabla^2 u &= \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) u; \\ \nabla^2 v &= \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) v; \\ \nabla^2 w &= \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) w.\end{aligned}$$

Выражение в круглых скобках называется *оператором Лапласа*. Функции, удовлетворяющие оператору Лапласа, называются *гармоническими*. Таким образом, функции перемещений u, v, w являются гармоническими функциями декартовых координат.

Уравнения (4.7) – дифференциальные уравнения второго порядка относительно функций перемещений – являются разрешающими уравнениями теории упругости в перемещениях. Эти уравнения – дифференциальные уравнения эллиптического типа – называются *уравнениями Ляме*.

Если объёмные силы равны нулю, или ими можно пренебречь, или они не зависят от текущих координат, то уравнения Ляме (4.7) упрощаются. Действительно, продифференцировав первое из уравнений (4.7) по x ; второе – по y ; третье – по z и сложив результаты, получим:

$$G\nabla^2 \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) + 3(\lambda + G)\nabla^2 \varepsilon_0 = 0,$$

то есть

$$\nabla^2 \varepsilon_0 = 0. \quad (4.8)$$

Это означает, что если не учитывать объёмные силы, то средняя деформация является гармонической функцией координат.

Далее применим к уравнениям (4.7) оператор Лапласа. В результате получим:

$$\begin{aligned}G\nabla^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) + 3(\lambda + G) \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial^2 \varepsilon_0}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_0}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_0}{\partial z^2} \right) &= 0; \\ G\nabla^2 \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right) + 3(\lambda + G) \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial^2 \varepsilon_0}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_0}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_0}{\partial z^2} \right) &= 0; \\ G\nabla^2 \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right) + 3(\lambda + G) \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial^2 \varepsilon_0}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_0}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_0}{\partial z^2} \right) &= 0.\end{aligned}$$

Выражение в круглых скобках во втором слагаемом полученных соотношений, в соответствии с формулой (4.8), равно нулю. Тогда, как это легко видеть, получаем:

$$\nabla^2 \nabla^2 u = \nabla^4 u = 0; \quad \nabla^2 \nabla^2 v = \nabla^4 v = 0; \quad \nabla^2 \nabla^2 w = \nabla^4 w = 0. \quad (4.9)$$

Уравнения (4.9) называются *бигармоническими*, а функции, удовлетворяющие бигармоническим уравнениям, называют *бигармоническими функциями*. Таким образом, если объёмные силы не учитывать, то функции перемещений u, v, w являются бигармоническими функциями координат.

Перемещения u, v, w , удовлетворяющие уравнениям Ляме (4.7), должны также удовлетворять и граничным условиям как в перемещениях (4.6), так и в напряжениях (4.5). Поскольку уравнения Ляме (4.7) записаны в перемещениях, то и граничные условия (4.5) следует записать в перемещениях. Для этого необходимо воспользоваться физическими уравнениями в форме Ляме (4.4) и геометрическими соотношениями (4.1). В итоге условия на поверхности (4.5) получают вид:

$$\begin{aligned} P_{nx} &= 3\lambda\varepsilon_0 l + G \left(\frac{\partial u}{\partial x} l + \frac{\partial u}{\partial y} m + \frac{\partial u}{\partial z} n \right) + G \left(\frac{\partial u}{\partial x} l + \frac{\partial v}{\partial x} m + \frac{\partial w}{\partial x} n \right); \\ P_{ny} &= 3\lambda\varepsilon_0 m + G \left(\frac{\partial v}{\partial x} l + \frac{\partial v}{\partial y} m + \frac{\partial v}{\partial z} n \right) + G \left(\frac{\partial u}{\partial y} l + \frac{\partial v}{\partial y} m + \frac{\partial w}{\partial y} n \right); \\ P_{nz} &= 3\lambda\varepsilon_0 n + G \left(\frac{\partial w}{\partial x} l + \frac{\partial w}{\partial y} m + \frac{\partial w}{\partial z} n \right) + G \left(\frac{\partial u}{\partial z} l + \frac{\partial v}{\partial z} m + \frac{\partial w}{\partial z} n \right). \end{aligned} \quad (4.10)$$

Следует ещё раз подчеркнуть, что решение прямой задачи теории упругости в перемещениях сводится к отысканию трёх функций перемещений u, v, w из дифференциальных уравнений с частными производными второго порядка (4.7). Общее решение уравнений (4.7) до сих пор не найдено. Анализ предложенных общих решений уравнений Ляме показывает, насколько эти решения громоздки и неэффективны. Отмечается, что эти решения скорее доказывают существование решения, нежели решают прямую задачу теории упругости.

§4.4. Прямая задача теории упругости в напряжениях

Решая прямую задачу теории упругости в напряжениях, следует из системы уравнений (4.1)–(4.3) исключить и деформации, и перемещения. Эта процедура выполняется путём подстановки физических соотношений в форме обобщённого закона Гука (4.3) в уравнения неразрывности деформаций (2.42).

Рассмотрим первое уравнение из первой группы соотношений неразрывности (2.42).

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y}.$$

Подставив сюда выражения для деформаций ε_x , ε_y и γ_{xy} из соотношений (4.3), получим:

$$\frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial y^2} - \mu \frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial y^2} - \mu \frac{\partial^2 \sigma_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial y^2} - \mu \frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial x^2} - \mu \frac{\partial^2 \sigma_z}{\partial x^2} = 2(1 + \mu) \frac{\partial^2 \tau_{xy}}{\partial x \partial y}. \quad (\text{а})$$

Касательное напряжение в правой части соотношения (а) исключим, используя уравнения равновесия (4.2). Для этого первое из уравнений (4.2) продифференцируем по x , второе – по y и третье – по z :

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \tau_{xy}}{\partial y \partial x} + \frac{\partial^2 \tau_{xz}}{\partial z \partial x} + \frac{\partial F_x}{\partial x} &= 0; \\ \frac{\partial^2 \tau_{yx}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \tau_{yz}}{\partial z \partial y} + \frac{\partial F_y}{\partial y} &= 0; \\ \frac{\partial^2 \tau_{zx}}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 \tau_{zy}}{\partial y \partial z} + \frac{\partial^2 \sigma_z}{\partial z^2} + \frac{\partial F_z}{\partial z} &= 0. \end{aligned} \quad (\text{б})$$

Теперь сложим первые два из соотношений (б) и вычтем третье. В итоге получим:

$$2 \frac{\partial^2 \tau_{xy}}{\partial x \partial y} = -\frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \sigma_z}{\partial z^2} - \frac{\partial F_x}{\partial x} - \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z}. \quad (\text{в})$$

Подставим формулу (в) в соотношение (а) и после элементарных преобразований будем иметь:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 \sigma_z}{\partial z^2} - \mu \frac{\partial^2 \sigma_z}{\partial x^2} - \\ - \mu \frac{\partial^2 \sigma_z}{\partial y^2} - \mu \frac{\partial^2 \sigma_z}{\partial z^2} = (1 + \mu) \left(-\frac{\partial F_x}{\partial x} - \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z} \right). \end{aligned} \quad (\text{г})$$

В полученном соотношении прибавим и вычтем в левой части сумму $\frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial z^2}$. Тогда формула (г) приобретает вид

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial z^2} \right) + \left(\frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial z^2} \right) - \left(\frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \sigma_z}{\partial z^2} \right) - \\ - \mu \left(\frac{\partial^2 \sigma_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \sigma_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \sigma_z}{\partial z^2} \right) = (1 + \mu) \left(-\frac{\partial F_x}{\partial x} - \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z} \right), \end{aligned}$$

или

$$\nabla^2 \sigma_x + \nabla^2 \sigma_y - \mu \nabla^2 \sigma_z - 3 \frac{\partial^2 \sigma_0}{\partial z^2} = (1 + \mu) \left(-\frac{\partial F_x}{\partial x} - \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z} \right). \quad (д)$$

В левой части соотношения (д) прибавим и вычтем $\nabla^2 \sigma_z$. Тогда формула (д) получает вид:

$$(1 + \mu) \nabla^2 \sigma_z - 3 \nabla^2 \sigma_0 + 3 \frac{\partial^2 \sigma_0}{\partial z^2} = (1 + \mu) \left(\frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} - \frac{\partial F_z}{\partial z} \right).$$

Аналогичным образом можно получить ещё два соотношения из первой группы уравнений неразрывности деформаций. В итоге первая группа уравнений неразрывности деформаций, записанная в терминах напряжений будет иметь вид:

$$\begin{aligned} (1 + \mu) \nabla^2 \sigma_x - 3 \nabla^2 \sigma_0 + 3 \frac{\partial^2 \sigma_0}{\partial x^2} &= (1 + \mu) \left(-\frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z} \right); \\ (1 + \mu) \nabla^2 \sigma_y - 3 \nabla^2 \sigma_0 + 3 \frac{\partial^2 \sigma_0}{\partial y^2} &= (1 + \mu) \left(\frac{\partial F_x}{\partial x} - \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z} \right); \\ (1 + \mu) \nabla^2 \sigma_z - 3 \nabla^2 \sigma_0 + 3 \frac{\partial^2 \sigma_0}{\partial z^2} &= (1 + \mu) \left(\frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} - \frac{\partial F_z}{\partial z} \right). \end{aligned} \quad (4.11)$$

Сложив уравнения (4.11), найдём

$$3 \nabla^2 \sigma_0 = -\frac{1 + \mu}{1 - \mu} \left(\frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z} \right). \quad (е)$$

Подставим (е) в уравнения (4.11) и после несложных преобразований получим:

$$\begin{aligned} \nabla^2 \sigma_x + \frac{3}{(1 + \mu)} \frac{\partial^2 \sigma_0}{\partial x^2} &= -\frac{1}{(1 - \mu)} \left((2 - \mu) \frac{\partial F_x}{\partial x} + \mu \frac{\partial F_y}{\partial y} + \mu \frac{\partial F_z}{\partial z} \right); \\ \nabla^2 \sigma_y + \frac{3}{(1 + \mu)} \frac{\partial^2 \sigma_0}{\partial y^2} &= -\frac{1}{(1 - \mu)} \left(\mu \frac{\partial F_x}{\partial x} + (2 - \mu) \frac{\partial F_y}{\partial y} + \mu \frac{\partial F_z}{\partial z} \right); \\ \nabla^2 \sigma_z + \frac{3}{(1 + \mu)} \frac{\partial^2 \sigma_0}{\partial z^2} &= -\frac{1}{(1 - \mu)} \left(\mu \frac{\partial F_x}{\partial x} + \mu \frac{\partial F_y}{\partial y} + (2 - \mu) \frac{\partial F_z}{\partial z} \right). \end{aligned} \quad (4.12)$$

Далее рассмотрим вторую группу уравнений неразрывности деформаций Сен-Венана. Подставим в первое уравнение второй группы уравнений неразрывности (2.42)

$$2 \frac{\partial^2 \epsilon_x}{\partial y \partial z} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y} + \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} - \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} \right)$$

выражения для деформаций ε_x , γ_{xy} , γ_{yz} и γ_{zx} из физических соотношений (4.3). В результате получим:

$$\frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial y \partial z} - \mu \frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial y \partial z} - \mu \frac{\partial^2 \sigma_z}{\partial y \partial z} = (1 + \mu) \left(\frac{\partial^2 \tau_{zx}}{\partial y \partial x} + \frac{\partial^2 \tau_{xy}}{\partial z \partial x} - \frac{\partial^2 \tau_{yz}}{\partial x^2} \right). \quad (\text{ж})$$

Теперь второе уравнение из уравнений равновесия (4.2) разрешим относительно $\frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x}$ и продифференцируем по z , третье уравнение из

уравнений (4.3) разрешим относительно $\frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x}$ и продифференцируем по y :

$$\frac{\partial^2 \tau_{yz}}{\partial x \partial z} = -\frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 \tau_{yz}}{\partial z^2} - \frac{\partial F_y}{\partial z}, \quad \frac{\partial^2 \tau_{zx}}{\partial x \partial y} = -\frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 \tau_{yz}}{\partial z^2} - \frac{\partial F_y}{\partial z}.$$

Подставим полученные соотношения в правую часть уравнения (ж). После преобразований будем иметь

$$(1 + \mu) \left(\frac{\partial^2 \tau_{yz}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \tau_{yz}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \tau_{yz}}{\partial z^2} \right) + \frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial y \partial z} + \frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial y \partial z} + \frac{\partial^2 \sigma_z}{\partial y \partial z} = -(1 + \mu) \left(\frac{\partial F_y}{\partial z} + \frac{\partial F_z}{\partial y} \right). \quad (\text{и})$$

Уравнение (и) можно, очевидно, записать в следующем виде:

$$\nabla^2 \tau_{yz} + \frac{3}{(1 + \mu)} \frac{\partial^2 \sigma_0}{\partial y \partial z} = - \left(\frac{\partial F_y}{\partial z} + \frac{\partial F_z}{\partial y} \right).$$

Проделав аналогичные выкладки со вторым и третьим уравнениями второй группы соотношений неразрывности деформаций (2.42), получим ещё два подобных уравнения. Полная совокупность уравнений второй группы соотношений неразрывности деформаций Сен-Венана, записанная в терминах напряжений, имеет вид:

$$\begin{aligned} \nabla^2 \tau_{xy} + \frac{3}{(1 + \mu)} \frac{\partial^2 \sigma_0}{\partial x \partial y} &= - \left(\frac{\partial F_x}{\partial y} + \frac{\partial F_y}{\partial x} \right); \\ \nabla^2 \tau_{yz} + \frac{3}{(1 + \mu)} \frac{\partial^2 \sigma_0}{\partial y \partial z} &= - \left(\frac{\partial F_y}{\partial z} + \frac{\partial F_z}{\partial y} \right); \\ \nabla^2 \tau_{zx} + \frac{3}{(1 + \mu)} \frac{\partial^2 \sigma_0}{\partial z \partial x} &= - \left(\frac{\partial F_z}{\partial x} + \frac{\partial F_x}{\partial z} \right). \end{aligned} \quad (4.13)$$

Итак, полная совокупность разрешающих уравнений теории упругости в напряжениях представлена уравнениями (4.12) и (4.13). Эти уравнения называются *уравнениями Бельтрами – Митчелла*.

Если объёмные силы постоянны, то есть не зависят от декартовых координат, или их можно не учитывать, то уравнения Бельтрами-Митчелла упрощаются:

$$\begin{aligned} \nabla^2 \sigma_x + \frac{3}{(1+\mu)} \frac{\partial^2 \sigma_0}{\partial x^2} &= 0; & \nabla^2 \tau_{xy} + \frac{3}{(1+\mu)} \frac{\partial^2 \sigma_0}{\partial x \partial y} &= 0; \\ \nabla^2 \sigma_y + \frac{3}{(1+\mu)} \frac{\partial^2 \sigma_0}{\partial y^2} &= 0; & \nabla^2 \tau_{yz} + \frac{3}{(1+\mu)} \frac{\partial^2 \sigma_0}{\partial y \partial z} &= 0; \\ \nabla^2 \sigma_z + \frac{3}{(1+\mu)} \frac{\partial^2 \sigma_0}{\partial z^2} &= 0; & \nabla^2 \tau_{zx} + \frac{3}{(1+\mu)} \frac{\partial^2 \sigma_0}{\partial z \partial x} &= 0. \end{aligned} \quad (4.14)$$

Уравнения теории упругости в напряжениях (4.12) и (4.13) либо (4.14) совместно с условиями на поверхности тела (4.5) составляют краевую задачу, решив которую определяют напряжения в каждой точке упругого тела как функции декартовых координат: $\sigma_x(x, y, z)$, $\sigma_y(x, y, z)$, $\sigma_z(x, y, z)$, $\tau_{xy}(x, y, z)$, $\tau_{yz}(x, y, z)$, $\tau_{zx}(x, y, z)$. Поскольку число граничных условий меньше числа искомых функций, то в качестве дополнительных граничных условий можно использовать уравнения равновесия (4.2).

Покажем, что компоненты напряжения, как и компоненты вектора перемещения, являются бигармоническими функциями декартовых координат при условии, что объёмные силы постоянны, или ими пренебрегают.

Действительно с учетом соотношения (3.18) вполне понятно, что в силу зависимости (4.8) будет иметь место равенство

$$\nabla^2 \sigma_0 = 0. \quad (4.15)$$

Применим к каждому из уравнений (4.14) оператор Лапласа. В результате получим:

$$\begin{aligned} \nabla^2 \nabla^2 \sigma_x + \frac{3}{(1+\mu)} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \nabla^2 \sigma_0 &= 0; & \nabla^2 \nabla^2 \tau_{xy} + \frac{3}{(1+\mu)} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \nabla^2 \sigma_0 &= 0; \\ \nabla^2 \nabla^2 \sigma_y + \frac{3}{(1+\mu)} \frac{\partial^2}{\partial y^2} \nabla^2 \sigma_0 &= 0; & \nabla^2 \nabla^2 \tau_{yz} + \frac{3}{(1+\mu)} \frac{\partial^2}{\partial y \partial z} \nabla^2 \sigma_0 &= 0; \\ \nabla^2 \nabla^2 \sigma_z + \frac{3}{(1+\mu)} \frac{\partial^2}{\partial z^2} \nabla^2 \sigma_0 &= 0; & \nabla^2 \nabla^2 \tau_{zx} + \frac{3}{(1+\mu)} \frac{\partial^2}{\partial z \partial x} \nabla^2 \sigma_0 &= 0. \end{aligned}$$

Откуда, с учётом зависимости (4.15), будем иметь:

$$\begin{aligned}\nabla^4 \sigma_x &= 0; & \nabla^4 \tau_{xy} &= 0; \\ \nabla^4 \sigma_y &= 0; & \nabla^4 \tau_{yz} &= 0; \\ \nabla^4 \sigma_z &= 0; & \nabla^4 \tau_{zx} &= 0.\end{aligned}\tag{4.16}$$

Равенства (4.16) говорят о том, что компоненты напряжения являются бигармоническими функциями декартовых координат.

Общего метода решения уравнений Бельтрами – Митчелла не существует. Попытки решить эту задачу в общем виде успехом не увенчались.

Решая прямую и, в совокупности, обратную задачу теории упругости, определяют перемещения, напряжения и деформации в каждой точке упругого тела. Однако целью расчёта упругого тела является, в конце концов, оценка его прочности или несущей способности. Если тело находится в условиях осевого растяжения или сжатия (простое напряжённое состояние), то оценка его прочности выполняется по экспериментальной диаграмме «напряжения – деформации» путём сравнения действующего главного нормального напряжения с пределом текучести (для пластичных материалов) или пределом прочности (для хрупких материалов). Если же тело находится в условиях сложного напряжённого состояния, когда отличными от нуля являются все три, вообще говоря, главных напряжения, то оценка прочности становится затруднительной. И вот здесь на помощь инженеру приходят теории прочности.

§4.5. Теории прочности

Степень опасности любого напряжённого состояния оценивается, главным образом, по результатам опытов при простом растяжении или сжатии. Мера напряжённого состояния, при достижении которой происходит переход от упругого состояния к предельному состоянию, устанавливается с помощью критериев (или теорий) пластичности (текучести) или прочности (разрушения).

Построение таких теорий основывается на предпосылке, состоящей в том, что *два каких-либо напряжённых состояния считаются равнопрочными и равноопасными, если они при пропорциональном увеличении главных напряжений в одно и то же число раз одновременно становятся предельными.*

В качестве одного (основного) из равноопасных напряжённых состояний принимается напряжённое состояние в точке при одноосном растяжении, а в качестве другого – напряжённое состояние в точке при сложном напряжённом состоянии, опасность которого для данного материала необходимо оценить.

Значение напряжения $\sigma_{\text{экв}}$, которое задается некоторой совокупностью главных напряжений $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$ и при котором напряжённое состояние в точке при сложном напряжённом состоянии оказывается в равноопасном состоянии с напряжённым состоянием в этой точке при одноосном напряжённом состоянии, называется *эквивалентным напряжением*.

Таким образом, условие прочности при сложном напряжённом состоянии в самом общем случае имеет вид:

$$\sigma_{\text{экв}} = f(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) \leq \sigma_{\text{он}}. \quad (4.17)$$

Здесь $\sigma_{\text{он}}$ – опасное напряжение, определяемое из опытов на осевое растяжение.

Значение опасного напряжения зависит от материала. Для пластичных материалов величина опасного напряжения определяется пределом текучести с соответствующим коэффициентом запаса; для хрупких материалов величина опасного напряжения зависит от предела прочности также с соответствующим коэффициентом запаса.

Вид функции $f(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ определяет критерий или теорию прочности.

Если предложенный критерий подтверждается экспериментальными данными, то соответствующая теория прочности может быть использована при оценке прочности материала в точке. Если предложенный критерий противоречит опытным данным, то его использование в практике проектирования конструкций зданий и сооружений должно быть исключено.

Следует отметить, что процесс наступления предельного (опасного) состояния в материале – это чрезвычайно сложный и до конца не изученный процесс. Важно также подчеркнуть, что "пластичность" и "прочность" – понятия разные. Пластичность связывают с появлением в материале остаточных деформаций, что далеко не означает разрушение материала, в то время как нарушение прочности материала означает его разрушение [12].

Первая теория прочности

Первая теория прочности вводит критерий *наибольших нормальных напряжений*, в соответствии с которым напряжённое состояние в точке становится предельным, когда наибольшее нормальное напряжение достигает величины опасного напряжения:

$$\sigma^{\text{max}} = \sigma_1 \leq \sigma_{\text{он}}. \quad (4.18)$$

Таким образом, в соответствии с первой теорией прочности

$$\sigma_{\text{экв}} \equiv \sigma_1. \quad (4.19)$$

Первая теория прочности восходит своими корнями к работам Г. Галилея.

Первая теория прочности подтверждается опытом лишь при растяжении хрупких материалов, разрушение которых происходит путём отрыва одной части материала от другой без развития заметных пластических деформаций. В практике проектирования первая теория прочности не применяется и имеет лишь историческое значение.

Вторая теория прочности

Вторая теория прочности вводит критерий *наибольших удлинений*, в соответствии с которым напряжённое состояние в точке становится предельным, когда наибольшее удлинение в точке достигает опасного значения:

$$\varepsilon^{\max} = \varepsilon_1 \leq \varepsilon_{on}. \quad (4.20)$$

В соответствии с обобщённым законом Гука (3.9)

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{E} [\sigma_1 - \mu(\sigma_2 + \sigma_3)]. \quad (a)$$

При осевом растяжении

$$\varepsilon_{on} = \frac{1}{E} \sigma_{on}. \quad (б)$$

Подставив (а) и (б) в соотношение (4.20), получим критерий прочности по теории наибольших удлинений:

$$\sigma_1 - \mu(\sigma_2 + \sigma_3) \leq \sigma_{on}. \quad (4.21)$$

Для второй теории прочности

$$\sigma_{\text{экв}} \equiv \sigma_1 - \mu(\sigma_2 + \sigma_3). \quad (4.22)$$

Основы второй теории были заложены Мариоттом, окончательно она была оформлена Сен-Венаном.

Как и первая, вторая теория прочности недостаточно подтверждается опытами и в большей степени оправдывается для хрупких материалов.

Третья теория прочности

Третья теория прочности вводит критерий *наибольших касательных напряжений*, в соответствии с которым напряжённое состояние в точке становится предельным, когда наибольшие касательные напряжения в точке достигают величины опасного значения:

$$\tau^{\max} \leq \tau_{on}. \quad (4.23)$$

При сложном напряжённом состоянии (см. (1.43))

$$\tau^{\max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}. \quad (a)$$

При осевом растяжении

$$\tau_{on} = \frac{\sigma_{on}}{2}. \quad (б)$$

Подставив (а) и (б) в соотношение (4.23), запишем критерий прочности по теории наибольших касательных напряжений:

$$\sigma_1 - \sigma_3 \leq \sigma_{on}. \quad (4.24)$$

Таким образом, для третьей теории прочности

$$\sigma_{экр} \equiv \sigma_1 - \sigma_3. \quad (4.25)$$

Основоположником третьей теории прочности считается Кулон. Экспериментальное обоснование теории прочности наибольших касательных напряжений было выполнено Треска в 1868 году.

Теория прочности наибольших касательных напряжений лучше всего подтверждается опытами с пластичными материалами, одинаково сопротивляющимися как растяжению, так и сжатию.

Энергетические теории прочности

Энергетические теории прочности основываются на предположении о том, что количество удельной потенциальной энергии деформации в упругом теле, накопленное к моменту наступления предельного напряжённого состояния в данном материале, не зависит от вида рассматриваемого напряжённо-деформированного состояния в точке (будь то сложное напряжённое состояние или простое растяжение).

Первая энергетическая теория прочности вводит критерий *полной удельной потенциальной энергии деформации*, согласно которому напряжённое состояние в точке становится предельным, когда полная удельная потенциальная энергия деформации достигает опасного значения:

$$U_0 \leq U_{on}. \quad (4.26)$$

Для сложного напряжённого состояния (см. (3.20))

$$U_0 = \frac{1}{2E} \left[(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)^2 - 2(1 + \mu)(\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_3\sigma_1) \right]. \quad (а)$$

При осевом растяжении

$$U_{on} = \frac{\sigma_{on}^2}{2E}. \quad (б)$$

Подставив (а) и (б) в формулу (4.26), получим запись критерия прочности по теории полной удельной потенциальной энергии деформации:

$$\sqrt{(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)^2 - 2(1 + \mu)(\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_3\sigma_1)} \leq \sigma_{on}. \quad (4.27)$$

Таким образом, для первой энергетической теории прочности

$$\sigma_{\text{экв}} \equiv \sqrt{(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)^2 - 2(1 + \mu)(\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_3\sigma_1)}. \quad (4.28)$$

Идея оценить прочность упругих тел на основе энергии деформации была высказана Максвеллом во второй половине XIX века, однако разработку этой теории прочности завершил Бельтрами 1885 году.

Теория прочности полной удельной потенциальной энергии деформации на опыте не оправдалась и не нашла своего применения на практике.

Вторая энергетическая теория прочности вводит критерий *удельной потенциальной энергии формоизменения*, в соответствии с которым напряжённое состояние в точке становится предельным, когда удельная потенциальная энергия формоизменения достигает опасного значения:

$$U_0^\phi \leq U_{on}^\phi. \quad (4.29)$$

При сложном напряжённом состоянии (см. (3.29))

$$U_\phi = \frac{1 + \mu}{6E} \left[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2 \right]. \quad (a)$$

При осевом растяжении

$$U_\phi = \frac{1 + \mu}{6E} 2\sigma_{on}^2. \quad (б)$$

Подставив формулы (а) и (б) в соотношение (4.29), получим критерий прочности по теории прочности удельной потенциальной энергии формоизменения:

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2} \leq \sigma_{on}. \quad (4.30)$$

Из (4.30) следует, что согласно второй энергетической теории прочности

$$\sigma_{\text{экв}} \equiv \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2}. \quad (4.31)$$

Теорию прочности удельной потенциальной энергии формоизменения предложил Губер в 1904 году, видоизменив теорию прочности Бельтрами.

Вторая энергетическая теория прочности хорошо подтверждается в опытах с пластичными материалами и широко применяется на практике.

Выше были изложены основные (классические) теории прочности, предназначенные для оценки прочности материалов, одинаково сопротивляющихся растяжению и сжатию.

Необходимо отметить, что помимо изложенных существует большое количество теорий, предназначенных для оценки прочности как

материалов, одинаково сопротивляющихся растяжению и сжатию, так и материалов, по-разному сопротивляющихся растяжению и сжатию. Многие из этих теорий прочности не нашли ещё достаточно широкого применения на практике.

Теория прочности Мора

Теория прочности Мора (1914 год) основана на предположении, что среднее главное напряжение оказывает малое влияние на наступление предельного состояния и может не учитываться. Опыты показывают, что ошибка от неучёта среднего главного напряжения не превышает 10–15%.

Аналитическое выражение критерия прочности по теории прочности Мора имеет вид:

$$\sigma_1 - \frac{\sigma_{on}^{(+)}}{\sigma_{on}^{(-)}} \sigma_3 \leq \sigma_{on}^{(+)}. \quad (4.32)$$

Здесь $\sigma_{on}^{(+)}$ – опасное напряжение при осевом растяжении; $\sigma_{on}^{(-)}$ – опасное напряжение при осевом сжатии.

Теория прочности Мора явилась огромным шагом вперёд в развитии науки о прочности упругих тел. Она нашла подтверждение в многочисленных опытах над различными материалами и широко применяется для оценки прочности материалов, неодинаково сопротивляющихся растяжению и сжатию.

Теория прочности К. Шлейхера

Теория прочности К.Шлейхера (1925 год) вводит критерий полной удельной потенциальной энергии деформации, в соответствии с которым напряжённое состояние в точке становится предельным, когда полная удельная потенциальная энергия деформации достигает опасного значения, являющегося не постоянной величиной, а некоторой функцией среднего напряжения.

Предполагая зависимость удельной потенциальной энергии от среднего напряжения линейной, Шлейхер предложил условие прочности в следующем виде:

$$\begin{aligned} & \sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - 2\mu(\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_3\sigma_1) + \\ & + (\sigma_{on}^{(-)} - \sigma_{on}^{(+)}) (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) \leq \sigma_{on}^{(-)} \cdot \sigma_{on}^{(+)}. \end{aligned} \quad (4.33)$$

Теория прочности Шлейхера недостаточно подтверждается опытами с материалами неодинаково сопротивляющимися растяжению и сжатию, и почти не используется для практических расчётов.

Теория прочности Ю.И. Ягна

Теория прочности Ю.И.Ягна (1931 год) вводит критерий прочности в виде полинома второй степени, симметричного относительно всех трёх главных напряжений (последнее требование вытекает из условия изотропности материала):

$$\frac{\sigma_{on}^{(+)} \cdot \sigma_{on}^{(-)}}{2\tau_{on}^2} (\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2) + \left(1 - \frac{\sigma_{on}^{(+)} \cdot \sigma_{on}^{(-)}}{2\tau_{on}^2} \right) (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)^2 + \left(\sigma_{on}^{(-)} - \sigma_{on}^{(+)} \right) (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) \leq \sigma_{on}^{(+)} \cdot \sigma_{on}^{(-)}. \quad (4.34)$$

Здесь τ_{on} – опасное напряжение при чистом сдвиге.

Теория прочности Ягна в достаточной мере не подвергалась экспериментальной проверке, и не исследованы до конца границы применимости этой теории, предназначенной для оценки прочности материалов, неодинаково сопротивляющихся растяжению и сжатию.

Теория прочности П.П. Баландина

Теория прочности П.П. Баландина (1937 год) вводит критерий удельной потенциальной энергии формоизменения, в соответствии с которым напряжённое состояние в точке становится предельным, когда удельная потенциальная энергия формоизменения достигает опасного значения, причём её опасное значение не постоянно, а зависит от вида рассматриваемого напряжённого состояния, а именно, линейно от среднего напряжения:

$$\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - (\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_3\sigma_1) - \left(\sigma_{on}^{(+)} - \sigma_{on}^{(-)} \right) (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) \leq \sigma_{on}^{(-)} \cdot \sigma_{on}^{(+)}. \quad (4.35)$$

Полного экспериментального обоснования теория прочности Баландина ещё не получила, однако для некоторых марок бетона и закалённой инструментальной стали эта теория даёт хорошие результаты и может быть рекомендована для выполнения прочностных расчётов.

Теории прочности Г.А. Гениева

Теории прочности, предложенные проф. Г.А. Гениевым, относятся к узкому кругу конкретных материалов, неодинаково сопротивляющихся растяжению и сжатию. Гениев обратил своё внимание на такие, широко применяемые в области строительства материалы, как бетон, железобетон, а также грунтовые и сыпучие среды, являющиеся основанием для любых зданий и сооружений.

Теория прочности бетона. В 1965 году Г.А.Гениев для оценки прочности бетона предложил критерий, аналитическое выражение которого имеет вид [11]:

$$T^2 = T_c (T_c + \lambda T)(1 + \delta). \quad (4.36)$$

Здесь $T = \frac{1}{\sqrt{6}} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2}$ – интенсивность касательных напряжений, квадрат которой численно равен второму инварианту девиатора напряжений;

$$\lambda = f \frac{\sigma_0}{T} \quad \text{– параметр;}$$

$$\delta = e \left(\frac{S}{T} \right)^3 \quad \text{– параметр;}$$

$$S = \sqrt{3} \cdot \sqrt[3]{\frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_0)(\sigma_2 - \sigma_0)(\sigma_3 - \sigma_0)} \quad \text{– инвариантная величина,}$$

третья степень которой с точностью до постоянного коэффициента совпадает с третьим инвариантом девиатора напряжений;

$$f = \frac{3T_c \left[\sigma_{on}^{(-)} - \sigma_{on}^{(+)} \right]}{\sigma_{on}^{(-)} \cdot \sigma_{on}^{(+)}} \quad \text{– безразмерный коэффициент;}$$

$$e = \frac{\sigma_{on}^{(-)} \cdot \sigma_{on}^{(+)}}{3T_c^2} \quad \text{– безразмерный коэффициент;}$$

T_c – предельное значение интенсивности касательных напряжений при чистом сдвиге;

$\sigma_{on}^{(+)}$ – опасное напряжение в бетоне при осевом растяжении;

$\sigma_{on}^{(-)}$ – опасное напряжение в бетоне при осевом сжатии.

Проведённая экспериментальная проверка критерия (4.36) на образцах из бетона различных составов показала хорошее соответствие опытных и теоретических данных. Для выявления возможности распространения критерия (4.36) на другие материалы и границ его применимости необходимы дальнейшие экспериментальные исследования.

Теория прочности железобетона [11]. Приняв в качестве исходных предпосылок следующие положения:

- массив бетона армируется ортогонально расположенными стержнями, совпадающими с направлениями осей декартовой системы координат;
- в стержнях арматуры возникают только продольные нормальные напряжения,

Гениев Г.А. в 1964 году предложил критерий прочности железобетона:

$$\begin{aligned} & \sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2 - (\sigma_x \sigma_y + \sigma_y \sigma_z + \sigma_z \sigma_x) - (\sigma_{on}^{(-)} - \sigma_{on}^{(+)}) (\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z) + \\ & + 3(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2) - \mu_x \sigma_T (2\sigma_x - \sigma_y - \sigma_z) - \mu_y \sigma_T (2\sigma_y - \sigma_z - \sigma_x) - \\ & - \mu_z \sigma_T (2\sigma_z - \sigma_x - \sigma_y) + \sigma_T^2 (\mu_x^2 + \mu_y^2 + \mu_z^2 - \mu_x \mu_y - \mu_y \mu_z - \mu_z \mu_x) + \\ & + (\sigma_{on}^{(-)} - \sigma_{on}^{(+)}) (\mu_x + \mu_y + \mu_z) \sigma_T \leq \sigma_{on}^{(-)} \cdot \sigma_{on}^{(+)} \end{aligned} \quad (4.37)$$

Здесь σ_T – предел текучести арматуры;

μ_x, μ_y, μ_z – коэффициенты армирования в направлении соответствующих осей координат;

$\sigma_{on}^{(+)}$ – опасное напряжение в бетоне при осевом растяжении;

$\sigma_{on}^{(-)}$ – опасное напряжение в бетоне при осевом сжатии.

Несмотря на то что условие прочности железобетона (4.37) получено на основе обработки экспериментальных данных и хорошо им соответствует, его опытная проверка ещё не завершена.

Теория прочности сыпучей среды. Условие предельного равновесия сыпучей среды было предложено в 1968 году Г.А.Гениевым в следующем виде [9]:

$$T = (T_c + \lambda T)(1 + \delta). \quad (4.38)$$

Здесь $T = \frac{1}{\sqrt{6}} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2}$;

$$S = \sqrt{3} \cdot \sqrt[3]{\frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_0)(\sigma_2 - \sigma_0)(\sigma_3 - \sigma_0)} ;$$

$$\lambda = f \frac{\sigma_0}{T} ; \delta = e \left(\frac{S}{T} \right)^3 ;$$

f и e – безразмерные коэффициенты, определяемые, вообще говоря, экспериментальным путём;

T_c – предел прочности сыпучей среды при чистом сдвиге.

Условие предельного равновесия (4.38) моделирует наступление предельного равновесия в сыпучей среде, обладающей помимо сцепления внутренним трением.

В работе [36] отмечается, что одним из существенных недостатков имеющихся теорий прочности является отсутствие необходимого объёма экспериментальных данных, позволяющих надёжно оценивать достоверность той или иной теории в общем случае объёмного напряжённого состояния. Этот недостаток связан в основном с техническими трудностями постановки соответствующих опытов.

Второй, также существенный недостаток имеющихся теорий заключается в том, что при их построении материал рассматривается как сплошная однородная среда без учёта его микроструктуры. Вместе с тем выполненные в последнее время экспериментальные и теоретические исследования показали, что микроструктура реальных твёрдых тел оказывает большое влияние на их деформацию и разрушение.

К недостаткам имеющихся теорий прочности следует отнести и то, что соответствующими критериями наступления предельного напряжённого состояния материала не учитывается влияние таких факторов, как температура, время, а также масштабный фактор.

Указанные выше недостатки имеющихся теорий ограничивают область их применения и во всех случаях делают необходимым учёт приближённости получаемых с их помощью результатов, а также наличия экспериментальных данных, в достаточной степени подтверждающих ту или иную теорию.

Глава 5. ВАРИАЦИОННАЯ ФОРМУЛИРОВКА ЗАДАЧ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ

§5.1. Общее выражение для работы внешних сил

При выводе общего уравнения работы внешних сил будем следовать работе [30].

Пусть под действием внешних сил, к каковым относят поверхностные P_{nx} , P_{ny} , P_{nz} и объёмные F_x , F_y , F_z силы, точки упругого тела получают перемещения u , v , w . Подсчитаем, какую работу должны совершить внешние силы для того, чтобы точки тела получили указанные перемещения u , v , w .

Работа объёмных сил будет определяться соотношением

$$\iiint_V (F_x u + F_y v + F_z w) dx dy dz. \quad (a)$$

Работа поверхностных сил может быть подсчитана на основании выражения

$$\iint_S (P_{nx} u + P_{ny} v + P_{nz} w) dS. \quad (б)$$

В формулах (а) и (б) V – объём упругого тела; S – площадь всей поверхности упругого тела.

Таким образом, работа всех внешних сил, действующих на тело, может быть представлена зависимостью

$$A = \iiint_V (F_x u + F_y v + F_z w) dx dy dz + \iint_S (P_{nx} u + P_{ny} v + P_{nz} w) ds. \quad (5.1)$$

Далее рассмотрим выражение

$$I = \iint_S \left[(\sigma_x l + \tau_{xy} m + \tau_{xz} n) u + (\tau_{yx} l + \sigma_y m + \tau_{yz} n) v + \right. \\ \left. + (\tau_{zx} l + \tau_{zy} m + \sigma_z n) \right] ds. \quad (в)$$

Применяя к выражению (в) формулу Остроградского – Гаусса

$$\iiint_V \frac{\partial R(x, y, z)}{\partial x} dx dy dz = \iint_S R(x, y, z) dy dz$$

и учитывая соотношения $ds \cdot l = dy dz$; $ds \cdot m = dx dz$; $ds \cdot n = dx dy$, получаем:

$$I = \iiint_V \left[\frac{\partial}{\partial x} (\sigma_x u + \tau_{xy} v + \tau_{xz} w) + \frac{\partial}{\partial y} (\tau_{yx} u + \sigma_y v + \tau_{yz} w) + \right. \\ \left. + \frac{\partial}{\partial z} (\tau_{zx} u + \tau_{zy} v + \sigma_z w) \right] dx dy dz. \quad (г)$$

Прибавим теперь к правой части соотношения (5.1) выражение (г) и вычтем тождественно равное ему выражение (в). После элементарных преобразований получим:

$$\begin{aligned}
A = & \iint_S \left[(P_{nx} - \sigma_x l - \tau_{xy} m - \tau_{xz} n) u + (P_{ny} - \tau_{yx} l - \sigma_y m - \tau_{yz} n) v + \right. \\
& \left. + (P_{nz} - \tau_{zx} l - \tau_{zy} m - \sigma_z n) w \right] ds + \iiint_V \left[\left(F_x + \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} \right) u + \right. \\
& \left. + \left(F_y + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} \right) v + \left(F_z + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} \right) w \right] dxdydz + \quad (5.2) \\
& + \iiint_V \left[\sigma_x \frac{\partial u}{\partial x} + \sigma_y \frac{\partial v}{\partial y} + \sigma_z \frac{\partial w}{\partial z} + \tau_{xy} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) + \right. \\
& \left. + \tau_{yz} \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) + \tau_{zx} \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right) \right] dxdydz.
\end{aligned}$$

В этом выражении по смыслу сделанного вывода внешние силы, перемещения и компоненты напряжения могут соответствовать как бы трём разным произвольным напряжённым состояниям упругого тела.

Введём теперь в рассмотрение компоненты деформации, соответствующие некоторому четвёртому произвольному напряжённому состоянию рассматриваемого упругого тела, прибавив и вычтя из правой части выражения (5.2) величину $\iiint_V (\sigma_x \varepsilon_x + \sigma_y \varepsilon_y + \sigma_z \varepsilon_z + \tau_{xy} \gamma_{xy} + \tau_{yz} \gamma_{yz} + \tau_{zx} \gamma_{zx}) dxdydz$.

После элементарных преобразований выражение (5.2) запишется в следующем виде:

$$\begin{aligned}
A = & \iint_S \left[(P_{nx} - \sigma_x l - \tau_{xy} m - \tau_{xz} n) u + (P_{ny} - \tau_{yx} l - \sigma_y m - \tau_{yz} n) v + \right. \\
& \left. + (P_{nz} - \tau_{zx} l - \tau_{zy} m - \sigma_z n) w \right] ds + \iiint_V \left[\left(F_x + \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} \right) u + \right. \\
& \left. + \left(F_y + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} \right) v + \left(F_z + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} \right) w \right] dxdydz + \quad (5.3) \\
& + \iiint_V \left[\sigma_x \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \varepsilon_x \right) + \sigma_y \left(\frac{\partial v}{\partial y} - \varepsilon_y \right) + \sigma_z \left(\frac{\partial w}{\partial z} - \varepsilon_z \right) + \tau_{xy} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} - \gamma_{xy} \right) + \right. \\
& \left. + \tau_{yz} \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} - \gamma_{yz} \right) + \tau_{zx} \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} - \gamma_{zx} \right) \right] dxdydz + \\
& + \iiint_V (\sigma_x \varepsilon_x + \sigma_y \varepsilon_y + \sigma_z \varepsilon_z + \tau_{xy} \gamma_{xy} + \tau_{yz} \gamma_{yz} + \tau_{zx} \gamma_{zx}) dxdydz.
\end{aligned}$$

Уравнение (5.3) представляет собой общее выражение для работы внешних сил, действующих на упругое тело. Из него следует, что работа соответствующих одному произвольно выбранному напряжённому состоянию внешних сил, производимая на перемещениях, соответствующих другому произвольному напряжённому состоянию, связана с компонентами напряжения некоторого третьего и компонентами деформации некоторого четвёртого произвольных напряжённых состояний.

Все общие теоремы теории упругости можно вывести непосредственно из равенства (5.3). Для этого следует четыре произвольных напряжённых состояния, скрытых в формуле (5.3), приводить каждый раз в надлежащее соответствие друг с другом.

§5.2. Теорема Клапейрона

Допустим, что в формуле (5.3) все характеристики напряжённо-деформированного состояния – перемещения, деформации и напряжения, а также поверхностные и объёмные силы – соответствуют одному и тому же напряжённому состоянию. В этом случае в соответствии с условиями на поверхности тела (1.12) интеграл по поверхности в (5.3) будет равен нулю, согласно уравнениям равновесия (1.17) первый интеграл по объёму также будет равен нулю, второй интеграл по объёму также будет равен нулю в силу геометрических соотношений (2.12). Следовательно, выражение для работы внешних сил (5.3) получает вид:

$$A = \iiint_V (\sigma_x \varepsilon_x + \sigma_y \varepsilon_y + \sigma_z \varepsilon_z + \tau_{xy} \gamma_{xy} + \tau_{yz} \gamma_{yz} + \tau_{zx} \gamma_{zx}) dx dy dz. \quad (5.4)$$

Вместе с тем удельная потенциальная энергия деформации упругого тела, согласно (3.26), определяется соотношением

$$U_0 = \frac{1}{2} (\sigma_x \varepsilon_x + \sigma_y \varepsilon_y + \sigma_z \varepsilon_z + \tau_{xy} \gamma_{xy} + \tau_{yz} \gamma_{yz} + \tau_{zx} \gamma_{zx})$$

Сопоставляя выражения (5.4) и (3.26), получаем теорему Клапейрона: «работа внешних сил, производимая на перемещениях, им статически соответствующих, равна удвоенной потенциальной энергии тела в напряжённом состоянии, статически соответствующем действию рассматриваемых внешних сил».

$$A = 2 \iiint_V U_0 dx dy dz = 2U. \quad (5.5)$$

Здесь U – потенциальная энергия упругого тела.

§5.3. Начало возможных перемещений. Принцип Лагранжа

Пусть упругое тело под действием внешних поверхностных нагрузок и объёмных сил находится в равновесии. Это означает, что перемещения, деформации и напряжения, а также внешние силы соответствуют одному и тому же напряжённому состоянию.

Начало возможных перемещений заключается в том, что полная работа внешних сил, действующих на упругое тело, на любом *возможном перемещении* точек тела равна нулю.

Пусть перемещения точек тела u, v, w получают некоторые бесконечно малые приращения $\delta u, \delta v, \delta w$, которые допускаются связями и не нарушают эти связи. Например, если некоторая часть тела закреплена неподвижно, то для неё $\delta u = 0, \delta v = 0, \delta w = 0$. Вычислим работу δA , которую произведут внешние силы на перемещениях $\delta u, \delta v, \delta w$. В соответствии с выражением (5.4), будем иметь:

$$\delta A = \iiint_V (\sigma_x \delta \varepsilon_x + \sigma_y \delta \varepsilon_y + \sigma_z \delta \varepsilon_z + \tau_{xy} \delta \gamma_{xy} + \tau_{yz} \delta \gamma_{yz} + \tau_{zx} \delta \gamma_{zx}) dx dy dz. \quad (д)$$

Принимая во внимание формулы Грина (3.33), в которых удельная потенциальная энергия деформации записана в терминах деформаций (3.25), выражение (д) получает вид:

$$\delta A = \iiint_V \left(\frac{\partial U_0}{\partial \varepsilon_x} \delta \varepsilon_x + \frac{\partial U_0}{\partial \varepsilon_y} \delta \varepsilon_y + \frac{\partial U_0}{\partial \varepsilon_z} \delta \varepsilon_z + \frac{\partial U_0}{\partial \gamma_{xy}} \delta \gamma_{xy} + \frac{\partial U_0}{\partial \gamma_{yz}} \delta \gamma_{yz} + \frac{\partial U_0}{\partial \gamma_{zx}} \delta \gamma_{zx} \right) dx dy dz,$$

или

$$\delta A = \delta \iiint_V U_0 dx dy dz = \delta U. \quad (5.6)$$

Итак, при всяком возможном отклонении упругого тела от положения равновесия работа внешних сил на этих возможных перемещениях равна приращению потенциальной энергии тела. Этим положением формулируется *начало возможных перемещений* применительно к упругим телам.

На основании начала возможных перемещений можно сформулировать признак равновесия упругого тела: положение тела, при малом отклонении от которого работа внешних сил равна приращению потенциальной энергии тела, является положением равновесия.

Левая часть уравнения (5.6) представляет собой работу внешних сил (поверхностных и объёмных) на возможных перемещениях, то есть приращение потенциальной энергии внешних сил. Потенциальную энергию внешних сил можно вычислить по соотношению (5.1). Приращение потенциальной энергии внешних сил обозначим δW . Тогда, согласно равенству (5.6)

$$\delta W = \delta U,$$

или

$$\delta(U - W) = \delta \mathcal{E} = 0. \quad (5.7)$$

Выражение в круглых скобках представляет собой полную потенциальную энергию упругого тела:

$$\begin{aligned} \mathcal{E} = \mathcal{E}(u, v, w) = & \iiint_V U_0(u, v, w) dV - \\ & - \iiint_V (F_x u + F_y v + F_z w) dV - \iint_S (P_{nx} u + P_{ny} v + P_{nz} w) ds. \end{aligned} \quad (5.8)$$

Таким образом, согласно равенств (5.7) и (5.8), перемещения, действительно имеющие место под действием внешних сил, обращают в нуль приращение полной потенциальной энергии упругого тела. Или, другими словами, если тело находится в состоянии равновесия под действием внешних сил, то приращение полной потенциальной энергии упругого тела на любых возможных перемещениях, допускаемых связями, равно нулю.

Равенство нулю первой вариации полной потенциальной энергии упругого тела говорит о том, что в состоянии равновесия полная потенциальная энергия упругого тела имеет экстремальное значение. Если взять вторую вариацию от полной потенциальной энергии упругого тела, то можно показать, что она положительна, а следовательно, в состоянии равновесия полная потенциальная энергия упругого тела имеет минимальное значение:

$$\mathcal{E} \rightarrow \min.$$

Теперь сформулируем *принцип минимума для перемещений* – *принцип Лагранжа*: из всех возможных систем перемещений упругого тела перемещения, действительно имеющие место, сообщают полной потенциальной энергии упругого тела минимальное значение.

Существует теорема Лежен Дирихле, в соответствии с которой:

а) при $\delta\mathcal{E} = 0$ и $\delta^2\mathcal{E} > 0$ полная потенциальная энергия упругого тела минимальна и его равновесие устойчиво;

б) при $\delta\mathcal{E} = 0$ и $\delta^2\mathcal{E} < 0$ эта энергия максимальна и равновесие системы внутренних и внешних сил неустойчиво;

в) при $\delta\mathcal{E} = 0$ и $\delta^2\mathcal{E} = 0$ полная потенциальная энергия упругого тела стационарна, а тело находится в состоянии безразличного равновесия.

Итак, решая задачу теории упругости с использованием принципа Лагранжа, следует найти такие перемещения, являющиеся функциями пространственных координат: $u = u(x, y, z)$, $v = v(x, y, z)$, $w = w(x, y, z)$, при которых первая вариация полной потенциальной энергии упругого тела равна нулю, а вторая вариация – положительна.

§5.4. Вариационный принцип Кастильяно

В отличие от принципа Лагранжа, в котором состояние деформируемого тела характеризуется функциями перемещений, в принципе Кастильяно состояние тела характеризуется функциями напряжений.

Пусть компоненты напряжения, деформации и перемещения соответствуют некоторой системе внешних сил, действующей на упругое тело, причём перемещения и деформации связаны между собой соотношениями Коши (2.12). Используя уравнение (5.3), найдём работу, производимую приращениями внешних сил $\delta F_x, \delta F_y, \delta F_z, \delta P_{nx}, \delta P_{ny}, \delta P_{nz}$ на перемещениях точек приложения этих сил.

Изменения напряжённого состояния, при котором приращения внешних сил и приращения компонентов напряжения удовлетворяют уравнениям равновесия (1.17) и условиям на поверхности тела (1.12), называются *виртуальными изменениями напряжённого состояния*. Напряжённое состояние, характеризуемое истинными напряжениями $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{zx}$, то есть удовлетворяющими уравнениям равновесия (1.17) и условиям на поверхности упругого тела (1.12), а также напряжённое состояние, изменённое на величину приращения напряжений: $\sigma_x + \delta\sigma_x, \sigma_y + \delta\sigma_y, \sigma_z + \delta\sigma_z, \tau_{xy} + \delta\tau_{xy}, \tau_{yz} + \delta\tau_{yz}, \tau_{zx} + \delta\tau_{zx}$ и удовлетворяющее и уравнениям равновесия (1.17), и условиям на поверхности (1.12), называются *статически возможными*. Поскольку статически возможные напряжения удовлетворяют и уравнениям равновесия (1.17), и условиям на поверхности (1.12), то вполне логично предположить, что деформации кинематически соответствуют перемещениям.

С учётом вышесказанного для статически возможного изменённого напряжённого состояния приращение работы внешних сил, в соответствии с выражением (5.3), получает вид:

$$\delta A = \iiint_V (\varepsilon_x \delta\sigma_x + \varepsilon_y \delta\sigma_y + \varepsilon_z \delta\sigma_z + \gamma_{xy} \delta\tau_{xy} + \gamma_{yz} \delta\tau_{yz} + \gamma_{zx} \delta\tau_{zx}) dx dy dz. \quad (e)$$

С учетом формул Кастильяно (3.32), в которых удельная потенциальная энергия деформации записана в терминах напряжений (3.22), выражение (e) получает вид:

$$\delta A = \iiint_V \left(\frac{\partial U_0}{\partial \sigma_x} \delta\sigma_x + \frac{\partial U_0}{\partial \sigma_y} \delta\sigma_y + \frac{\partial U_0}{\partial \sigma_z} \delta\sigma_z + \frac{\partial U_0}{\partial \tau_{xy}} \delta\tau_{xy} + \frac{\partial U_0}{\partial \tau_{yz}} \delta\tau_{yz} + \frac{\partial U_0}{\partial \tau_{zx}} \delta\tau_{zx} \right) dx dy dz,$$

или

$$\delta A = \delta \iiint_V \tilde{U}_0 dx dy dz = \delta \tilde{U}. \quad (5.9)$$

Здесь \tilde{U}_0 – удельная дополнительная энергия деформации.

Удельная потенциальная энергия деформации U_0 и удельная дополнительная энергия деформации \tilde{U}_0 связаны соотношением

$$U_0 + \tilde{U}_0 = \sigma_x \varepsilon_x + \sigma_y \varepsilon_y + \sigma_z \varepsilon_z + \tau_{xy} \gamma_{xy} + \tau_{yz} \gamma_{yz} + \tau_{zx} \gamma_{zx}. \quad (5.10)$$

Левая часть уравнения (5.9) представляет собой работу приращения внешних сил (поверхностных и объёмных) на перемещениях точек их приложения. При этом вариациям напряжений отвечает отсутствие нагрузки на поверхности тела, то есть система напряжений, соответствующая приращениям напряжений, является самоуравновешенной. В силу этого работа приращения объёмных сил будет равна нулю. Потенциальную энергию, соответствующую работе приращения поверхностных сил, можно вычислить по соотношению (5.1), в котором интеграл по поверхности следует взять лишь по той части поверхности, где известны перемещения. Приращение потенциальной энергии приращения внешних сил обозначим $\delta\tilde{W}$. Тогда, согласно равенству (5.9),

$$\delta\tilde{W} = \delta\tilde{U},$$

или

$$\delta(\tilde{U} - \tilde{W}) = \delta\tilde{\mathcal{E}} = 0. \quad (5.11)$$

Выражение в круглых скобках представляет собой дополнительную энергию упругого тела:

$$\begin{aligned} \tilde{\mathcal{E}} &= \tilde{\mathcal{E}}(\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{zx}) = \\ &= \iiint_V \tilde{U}_0(\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{zx}) dV - \iint_{\tilde{S}} (P_{nx}u + P_{ny}v + P_{nz}w) ds. \end{aligned} \quad (5.12)$$

Равенство (5.11) выражает принцип Кастильяно: истинные напряжения сообщают дополнительной энергии упругого тела стационарное значение. Или, другими словами, из всех статически возможных систем напряжений только та система имеет место, для которой дополнительная энергия упругого тела имеет минимум.

Итак, решая задачу теории упругости с использованием принципа Кастильяно, следует найти такие напряжения, которые являются функциями пространственных координат и при которых первая вариация дополнительной энергии упругого тела равна нулю.

Помимо рассмотренных принципов Лагранжа и Кастильяно в теории упругости известны и другие вариационные принципы, различающиеся как выбором варьируемых функций, так и видом соответствующего функционала энергии. Такими дополнительными принципами являются принцип Рейсснера, в котором в качестве варьируемых функций приняты и перемещения, и напряжения; а также принцип Ху-Вашицу, в котором в качестве независимо варьируемых функций приняты и перемещения, и напряжения, и деформации.

Решение задач теории упругости на основе вариационных принципов сводится к отысканию экстремума соответствующего функционала.

Глава 6. ОДНОМЕРНАЯ ЗАДАЧА В ДЕКАРТОВЫХ КООРДИНАТАХ

Задача называется одномерной, когда характеристики напряжённо-деформированного состояния (напряжения, деформации, перемещения) являются функцией только одной пространственной координаты.

§6.1. Одномерная деформация

Одномерной деформацией называется такая деформация, при которой перемещения всех точек упругого тела параллельны одной плоскости. Это означает, что

$$u = u(x), \quad v = 0, \quad w = 0. \quad (6.1)$$

Примером упругого тела, находящегося в условиях одномерной деформации, является полупространство, на поверхности которого действует бесконечно-протяжённая в направлении осей Y и Z по его поверхности равномерно распределённая нагрузка (рис. 25).

Геометрические соотношения (2.12) при этом получают вид:

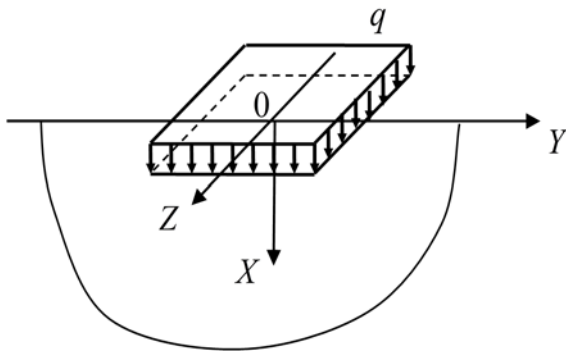


Рис. 25

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x} = \varepsilon_x(x), \\ \varepsilon_y &= \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \\ \varepsilon_z &= \frac{\partial w}{\partial z} = 0, \\ \gamma_{xy} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = 0, \\ \gamma_{yz} &= \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} = 0, \\ \gamma_{zx} &= \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} = 0. \end{aligned} \quad (6.2)$$

Из соотношений (6.2) следует, что относительная линейная деформация ε_x является главной, причём в случае одноосного удлинения $\varepsilon_1 = \varepsilon_x$, $\varepsilon_2 = \varepsilon_3 = 0$, в случае одноосного сжатия $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 0$, $\varepsilon_3 = \varepsilon_x$.

Рассматривая физические уравнения в форме Ляме (3.13), получаем соотношения:

$$\begin{aligned} \sigma_x &= (2G + \lambda)\varepsilon_x = \sigma_x(x); & \tau_{xy} &= 0; \\ \sigma_y &= \lambda\varepsilon_x = \sigma_y(x); & \tau_{yz} &= 0; \\ \sigma_z &= \lambda\varepsilon_x = \sigma_z(x); & \tau_{zx} &= 0. \end{aligned} \quad (6.3)$$

Отсюда следует, что

$$\sigma_y = \sigma_z. \quad (6.4)$$

Рассматривая физические уравнения в форме обобщённого закона Гука (3.15), получаем:

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{1}{E} [\sigma_x - \mu(\sigma_y + \sigma_z)]; & \tau_{xy} &= 0; \\ 0 &= \frac{1}{E} [\sigma_y - \mu(\sigma_z + \sigma_x)]; & \tau_{yz} &= 0; \\ 0 &= \frac{1}{E} [\sigma_z - \mu(\sigma_x + \sigma_y)]; & \tau_{zx} &= 0. \end{aligned} \quad (6.5)$$

Отсюда, из уравнений (6.5₂) и (6.5₃), с учётом формулы (6.4), следует, что

$$\sigma_y = \sigma_z = \frac{\mu}{1-\mu} \sigma_x. \quad (6.6)$$

Из соотношений (6.3) ясно, что напряжения σ_x , σ_y и σ_z являются главными, причём, как показывает соотношение (6.6), если $\sigma_x > 0$, то $\sigma_1 = \sigma_x$, $\sigma_2 = \sigma_3 = \sigma_y = \sigma_z$; если $\sigma_x < 0$, то $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_y = \sigma_z$, $\sigma_3 = \sigma_x$.

Уравнения равновесия (1.17) с учётом зависимостей (6.3) запишутся так:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + F_x &= 0; \\ F_y &= 0; \\ F_z &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (6.7)$$

Теперь запишем условия на поверхности упругого тела, находящегося в условиях одномерной деформации, в напряжениях. Принимая во внимание формулу (6.6), соотношения (1.12) приведём к виду:

$$\begin{aligned} P_{nx} &= \sigma_x l; \\ P_{ny} &= \frac{\mu}{1-\mu} \sigma_x m; \\ P_{nz} &= \frac{\mu}{1-\mu} \sigma_x n. \end{aligned} \quad (6.8)$$

Условия на поверхности тела в перемещениях будут иметь вид:

$$u(x_0) = u_0, \quad v_0 = 0, \quad w_0 = 0. \quad (6.9)$$

Здесь x_0 – координата точки поверхности тела; u_0, v_0, w_0 – перемещения точек поверхности тела в направлении осей декартовой системы координат.

Уравнения неразрывности деформаций Сен-Венана (2.42) тождественно удовлетворяются, то есть обращаются в тождества вида

$$0 \equiv 0.$$

Итак, для случая одномерной деформации имеем совокупность трёх разрешающих уравнений:

$$\varepsilon_x(x) = \frac{\partial u(x)}{\partial x}, \quad \sigma_x(x) = (2G + \lambda)\varepsilon_x(x), \quad \frac{\partial \sigma_x(x)}{\partial x} + F_x = 0, \quad (6.10)$$

содержащую три искомые функции: $u(x)$, $\varepsilon_x(x)$, $\sigma_x(x)$.

Тензор напряжения и тензор деформации для одномерной деформации имеют вид:

$$T_\sigma = \begin{pmatrix} \sigma_x & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_y & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_z \end{pmatrix}; \quad T_\varepsilon = \begin{pmatrix} \varepsilon_x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (6.11)$$

Решение задачи теории упругости для тел, находящихся в условиях одномерной деформации, как и для общей (трёхмерной) задачи, может быть построено как в перемещениях, так и в напряжениях.

Решение в перемещениях. Для построения решения в перемещениях следует из уравнений (6.10) исключить и напряжения, и деформации. Для этого подставим уравнение (6.10₁) в уравнение (6.10₂) и полученное соотношение подставим в уравнение (6.10₃). В итоге получим:

$$(\lambda + 2G) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + F_x = 0. \quad (6.12)$$

Дифференциальное уравнение второго порядка (6.12) является разрешающим уравнением в перемещениях одномерной деформации. В зависимости от дополнительных условий с уравнением (6.12) может быть связана либо задача Коши, либо краевая задача.

Если на поверхности тела, в частности полупространства, заданы перемещение и относительная линейная деформация в направлении оси OX , то получим задачу Коши:

$$u(0) = u_0, \quad \varepsilon_x(0) = \frac{\partial u(x)}{\partial x} \Big|_{x=0}. \quad (6.13)$$

Если задано вертикальное смещение поверхности полупространства и смещение точек полупространства на некоторой глубине h , то есть

$$u(0) = u_0, \quad u(h) = u_h, \quad (6.14)$$

то получим краевую задачу.

З а м е ч а н и е : обычно величину u_h принимают равной нулю.

Решая задачу (6.12), (6.13) или (6.12), (6.14), находят функцию перемещений $u = u(x)$. Остальные характеристики напряжённо-деформированного состояния определяют по формулам (6.2), (6.3), решая обратную задачу теории упругости.

Решение в напряжениях. Разрешающим уравнением одномерной деформации в напряжениях будет уравнение (6.10₃):

$$\frac{\partial \sigma_x(x)}{\partial x} + F_x = 0. \quad (6.15)$$

В качестве дополнительного уравнения нужно использовать условия на поверхности тела, в частности полупространства, записанные в напряжениях:

$$P_{nx} = \sigma_x(0). \quad (6.16)$$

Решая задачу Коши (6.15), (6.16) для дифференциального уравнения (6.15), найдём функцию $\sigma_x = \sigma_x(x)$. Остальные характеристики напряжённо-деформированного состояния определяют по формулам (6.2), (6.3) путём решения обратной задачи теории упругости.

§6.2. Одномерное напряжённое состояние

Одномерным напряжённым состоянием называется такое состояние упругого тела, когда нормальные напряжения на элементарных площадках, нормаль к которым совпадает с выбранным направлением, не равны нулю, а на площадках к ним ортогональных – равны нулю и, кроме того, касательные напряжения на рассматриваемых площадках равны нулю:

$$\begin{aligned} \sigma_x = \sigma_x(x), \quad \sigma_y = 0, \quad \sigma_z = 0, \\ \tau_{xy} = \tau_{yz} = \tau_{zx} = 0. \end{aligned} \quad (6.17)$$

Примером упругого тела, находящегося в условиях одномерного напряжённого состояния, является тонкий стержень, на который воздействуют осевые усилия (рис. 26).

Физические соотношения в форме обобщённого закона Гука (3.15) с учётом (6.17) получают вид:

$$\begin{aligned}\varepsilon_x &= \frac{1}{E} \sigma_x = \varepsilon_x(x); & \gamma_{xy} &= 0; \\ \varepsilon_y &= -\frac{\mu}{E} \sigma_x = \varepsilon_y(x); & \gamma_{yz} &= 0; \\ \varepsilon_z &= -\frac{\mu}{E} \sigma_x = \varepsilon_z(x); & \gamma_{zx} &= 0.\end{aligned}\quad (6.18)$$

Принимая во внимание формулы (6.18), запишем геометрические соотношения (2.12):

$$\begin{aligned}\varepsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x}, & \gamma_{xy} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = 0, \\ \varepsilon_y &= \frac{\partial v}{\partial y}, & \gamma_{yz} &= \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} = 0, \\ \varepsilon_z &= \frac{\partial w}{\partial z}, & \gamma_{zx} &= \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} = 0.\end{aligned}\quad (6.19)$$

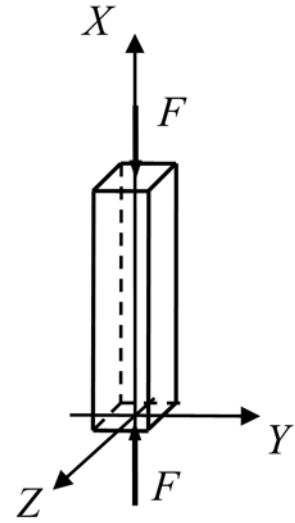


Рис. 26

На основании полученных зависимостей (6.19) и (6.18) можно сделать вывод о том, что

$$u = u(x), \quad v = v(x, y), \quad w = w(x, z), \quad (6.20)$$

причём координаты y и z входят в функции перемещений $v = v(x, y)$ и $w = w(x, z)$ в первой степени.

Главные напряжения действуют на взаимно перпендикулярных площадках, одна из которых перпендикулярна к оси OX , и в случае, когда $\sigma_x > 0$, равны $\sigma_1 = \sigma_x$, $\sigma_2 = \sigma_3 = 0$; в случае, когда $\sigma_x < 0$, равны $\sigma_1 = \sigma_2 = 0$, $\sigma_3 = \sigma_x$. Относительные линейные деформации ε_x , ε_y , ε_z также являются главными, причём, как это следует из формул (6.18), если $\varepsilon_x > 0$, то $\varepsilon_1 = \varepsilon_x$, $\varepsilon_2 = \varepsilon_3 = \varepsilon_y = \varepsilon_z$; если $\varepsilon_x < 0$, то $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon_y = \varepsilon_z$, $\varepsilon_3 = \varepsilon_x$.

Уравнения равновесия (1.17) с учётом зависимостей (6.17) получают вид:

$$\left. \begin{aligned}\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + F_x &= 0; \\ F_y &= 0; \\ F_z &= 0.\end{aligned}\right\} \quad (6.21)$$

Условия на поверхности упругого тела в напряжениях (1.12) для одномерного напряжённого состояния будут иметь вид:

$$P_{nx} = \sigma_x l; \quad P_{ny} = 0; \quad P_{nz} = 0. \quad (6.22)$$

Условия на поверхности в перемещениях можно записать в следующей форме:

$$u(x_0) = u_0, \quad v(x_0, y_0) = v_0, \quad w(x_0, z_0) = w_0. \quad (6.23)$$

Здесь x_0, y_0, z_0 – координаты точек поверхности тела; u_0, v_0, w_0 – перемещения точек поверхности тела в направлении осей декартовой системы координат.

Уравнения неразрывности деформаций Сен-Венана (2.42), в соответствии с (6.18), приводятся к зависимостям:

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} = 0; \quad \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial x^2} = 0. \quad (6.24)$$

Зависимости (6.24) показывают, что функции деформаций ε_y и ε_z содержат координату x в первой степени.

Таким образом, функции перемещений в направлении осей OX и OY при одномерном напряжённом состоянии могут быть лишь следующего вида:

$$v(x, y) = axy; \quad w(x, z) = bxz. \quad (6.25)$$

Здесь a и b – некоторые константы.

Итак, для случая одномерного напряжённого состояния имеем совокупность трёх разрешающих уравнений:

$$\varepsilon_x(x) = \frac{\partial u(x)}{\partial x}, \quad \sigma_x(x) = E\varepsilon_x(x), \quad \frac{\partial \sigma_x(x)}{\partial x} + F_x = 0, \quad (6.26)$$

содержащую три искомые функции: $u(x)$, $\varepsilon_x(x)$, $\sigma_x(x)$.

Тензор напряжения и тензор деформации для одномерного напряжённого состояния имеют вид:

$$T_\sigma = \begin{pmatrix} \sigma_x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad T_\varepsilon = \begin{pmatrix} \varepsilon_x & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_y & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_z \end{pmatrix}. \quad (6.27)$$

Решение задачи теории упругости для тел, находящихся в условиях одномерного напряжённого состояния, как и общей (трёхмерной) задачи, может быть построено как в перемещениях, так и в напряжениях.

Решение в перемещениях. Для построения решения в перемещениях следует из уравнений (6.26) исключить и напряжения, и деформации. Для этого подставим уравнение (6.26₁) в уравнение (6.26₂) и полученное соотношение подставим в уравнение (6.26₃). В итоге получим:

$$E \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + F_x = 0. \quad (6.28)$$

Дифференциальное уравнение второго порядка (6.28) является разрешающим уравнением в перемещениях одномерного напряжённого состояния. В зависимости от дополнительных условий с уравнением (6.28) может быть связана либо задача Коши, либо краевая задача.

Для построения задачи Коши нужно задать перемещение и относительную линейную деформацию на поверхности упругого тела (тонкого стержня), перпендикулярной к оси OX :

$$u(0) = u_0, \quad \varepsilon_x(0) = \left. \frac{\partial u(x)}{\partial x} \right|_{x=0}. \quad (6.29)$$

Если задано смещение обеих торцевых поверхностей упругого тела (тонкого стержня), перпендикулярных к оси OX , то имеем краевую задачу:

$$u(0) = u_0, \quad u(l) = u_l, \quad (6.30)$$

Решая задачу (6.28), (6.29) или (6.28), (6.30), находят функцию перемещений $u = u(x)$. Остальные характеристики напряжённо-деформированного состояния определяют по формулам (6.18), (6.19), решая обратную задачу теории упругости.

Решение в напряжениях. Разрешающим уравнением одномерной деформации в напряжениях будет уравнение (6.26₃):

$$\frac{\partial \sigma_x(x)}{\partial x} + F_x = 0. \quad (6.31)$$

В качестве дополнительного уравнения нужно использовать условия на поверхности тела, в частности тонкого стержня, записанные в напряжениях:

$$P_{nx} = \sigma_x(0). \quad (6.32)$$

Решая задачу Коши (6.31), (6.32) для дифференциального уравнения (6.31), находят функцию $\sigma_x = \sigma_x(x)$. Остальные характеристики напряжённо-деформированного состояния определяют по формулам (6.18), (6.19) путём решения обратной задачи теории упругости.

§6.3. Напряжённое состояние в точке для одномерной задачи теории упругости

Оценивая напряжённое состояние в точке для одномерной задачи теории упругости, воспользуемся формулами и уравнениями объёмной задачи теории упругости (см. гл. 1). Выделим в деформированном теле некоторую точку и через эту точку проведём произвольную площадку, ориентация которой в декартовой системе координат $OXYZ$ будет задаваться направляющими косинусами: l , m и n . Найдём полное, нормальное и касательное напряжения в рассматриваемой точке, действующие по заданной наклонной площадке.

Одномерная деформация. С учетом вида тензора напряжений (6.11) и зависимости между напряжениями (6.6), проекции полного напряжения, действующего по наклонной площадке, на оси декартовой системы координат OX , OY и OZ , в соответствии с формулами (1.12), будут равны:

$$P_{nx} = \sigma_x l; \quad P_{ny} = \frac{\mu}{1-\mu} \sigma_x m; \quad P_{nz} = \frac{\mu}{1-\mu} \sigma_x n. \quad (6.33)$$

Полное напряжение, действующее по наклонной площадке, на основании зависимости (1.13) будет определяться соотношением

$$P_n = \sigma_x \sqrt{l^2 + \left(\frac{\mu}{1-\mu}\right)^2 (m^2 + n^2)}. \quad (6.34)$$

Используя зависимость (1.15), получим выражение для нормального напряжения, действующего по наклонной площадке:

$$\sigma_n = \left[l^2 + \frac{\mu}{1-\mu} (m^2 + n^2) \right] \sigma_x. \quad (6.35)$$

Величина касательного напряжения, действующего по наклонной площадке, будет определяться, в соответствии с формулой (1.16), соотношением

$$\tau_n = \sigma_x \sqrt{\left[l^2 + \left(\frac{\mu}{1-\mu}\right)^2 (m^2 + n^2) \right] - \left[l^2 + \frac{\mu}{1-\mu} (m^2 + n^2) \right]^2}. \quad (6.36)$$

Одномерное напряжённое состояние. Проекции полного напряжения, действующего по наклонной площадке, на оси декартовой системы координат OX , OY и OZ , в соответствии с формулами (1.12) и с учетом вида тензора напряжений (6.27), будут равны:

$$P_{nx} = \sigma_x l; \quad P_{ny} = 0; \quad P_{nz} = 0. \quad (6.37)$$

Полное напряжение, действующее на наклонной площадке, согласно зависимости (1.13), будет определяться соотношением

$$P_n = \pm \sigma_x l. \quad (6.38)$$

Нормальное напряжение на наклонной площадке найдём по формуле (1.15), то есть

$$\sigma_n = \sigma_x l^2. \quad (6.39)$$

Касательное напряжение на наклонной площадке, в соответствии с выражением (1.16), будет равно:

$$\tau_n = \sigma_x l \sqrt{1 - l^2}. \quad (6.40)$$

Итак, мы определили в заданной точке полное, нормальное и касательное напряжения на произвольной наклонной площадке как для случая одномерной деформации, так и для случая одномерного напряжённого состояния. Тем самым определено напряжённое состояние в точке упругого тела, находящегося либо в условиях одномерной деформации, либо в условиях одномерного напряжённого состояния.

Глава 7. ДВУМЕРНАЯ ЗАДАЧА В ДЕКАРТОВЫХ КООРДИНАТАХ

Задача называется двумерной, когда характеристики напряжённо-деформированного состояния (напряжения, деформации, перемещения) являются функцией только двух пространственных координат.

В теории упругости различают два типа двумерных задач в декартовых координатах: плоская деформация и обобщённое плоское напряжённое состояние.

§7.1. Плоская деформация

Плоской деформацией называется такая деформация, при которой перемещения всех точек тела определяются выражениями:

$$u = u(x, y); \quad v = v(x, y); \quad w = 0. \quad (7.1)$$

На основе геометрических соотношений (2.12) и с использованием зависимостей (7.1) получаем составляющие тензора деформации:

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x} = \varepsilon_x(x, y); & \gamma_{xy} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = \gamma_{xy}(x, y); \\ \varepsilon_y &= \frac{\partial v}{\partial y} = \varepsilon_y(x, y); & \gamma_{yz} &= \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} = 0; \\ \varepsilon_z &= \frac{\partial w}{\partial z} = 0; & \gamma_{zx} &= \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} = 0. \end{aligned} \quad (7.2)$$

Запишем физические соотношения в форме Ляме (3.13), учитывая формулы (7.2):

$$\begin{aligned} \sigma_x &= (2G + \lambda)\varepsilon_x + \lambda\varepsilon_y = \sigma_x(x, y); & \tau_{xy} &= G\gamma_{xy} = \tau_{xy}(x, y); \\ \sigma_y &= (2G + \lambda)\varepsilon_y + \lambda\varepsilon_x = \sigma_y(x, y); & \tau_{yz} &= 0; \\ \sigma_z &= \lambda(\varepsilon_x + \varepsilon_y) = \sigma_z(x, y); & \tau_{zx} &= 0. \end{aligned} \quad (7.3)$$

Физические уравнения в форме обобщённого закона Гука (3.15) получают вид:

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{1}{E} \left[\sigma_x - \mu(\sigma_y + \sigma_z) \right]; & \gamma_{xy} &= \frac{1}{G} \tau_{xy}; \\ \varepsilon_y &= \frac{1}{E} \left[\sigma_y - \mu(\sigma_z + \sigma_x) \right]; & \gamma_{yz} &= 0; \\ 0 &= \frac{1}{E} \left[\sigma_z - \mu(\sigma_x + \sigma_y) \right]; & \gamma_{zx} &= 0. \end{aligned} \quad (7.4)$$

Из соотношения (7.4₃) следует, что

$$\sigma_z = \mu(\sigma_x + \sigma_y). \quad (7.5)$$

Принимая во внимание формулу (7.5), запишем соотношения (7.4) в следующей форме:

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{1}{E'}(\sigma_x - \mu'\sigma_y); \\ \varepsilon_y &= \frac{1}{E'}(\sigma_y - \mu'\sigma_x); \\ \gamma_{xy} &= \frac{2(1+\mu')}{E'}\tau_{xy}. \end{aligned} \quad (7.6)$$

$$\text{Здесь } E' = \frac{E}{1-\mu^2}; \quad \mu' = \frac{\mu}{1-\mu}.$$

Уравнения равновесия (1.17) для плоской деформации получают вид:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + F_x &= 0; \\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + F_y &= 0; \\ F_z &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (7.7)$$

Запишем условия на поверхности в терминах напряжений (1.12):

$$\begin{aligned} P_{nx} &= \sigma_x l + \tau_{yx} m; \\ P_{ny} &= \tau_{xy} l + \sigma_y m; \\ P_{nz} &= \sigma_z n. \end{aligned} \quad (7.8)$$

Условия на поверхности упругого тела в терминах перемещений будут иметь вид:

$$u(x_0, y_0) = u_0; \quad v(x_0, y_0) = v_0; \quad w_0 = 0. \quad (7.9)$$

Здесь x_0, y_0 – координаты точек поверхности тела; u_0, v_0, w_0 – перемещения точек поверхности тела в направлении осей декартовой системы координат.

Уравнения неразрывности деформаций Сен-Венана (2.42) значительно упрощаются и приводятся к одному соотношению:

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y}. \quad (7.10)$$

В соответствии с вышеизложенным, тензоры напряжений и деформаций для случая плоской деформации имеют вид:

$$\mathbf{T}_\sigma = \begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & 0 \\ \tau_{yx} & \sigma_y & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_z \end{pmatrix}; \quad \mathbf{T}_\varepsilon = \begin{pmatrix} \varepsilon_x & \frac{1}{2}\gamma_{xy} & 0 \\ \frac{1}{2}\gamma_{yx} & \varepsilon_y & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (7.11)$$

Примером упругого тела, находящегося в условиях, близких к условиям плоской деформации, является такое тело, у которого геометрический размер в направлении одной из осей, например оси OZ , значительно превышает два других размера, а внешняя нагрузка не изменяется вдоль оси OZ . Таким телом является, в частности, толстостенная труба, находящаяся под действием внутреннего и внешнего давлений (рис. 27). Вполне понятно,

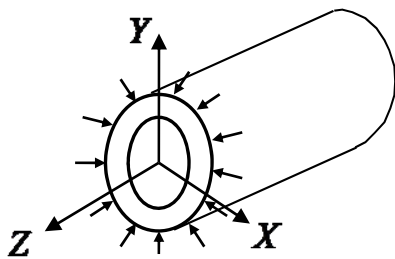


Рис. 27

что перемещения точек тела трубы в направлении оси OZ будут равны нулю, а перемещения точек тела трубы в радиальном направлении будут зависеть только от координат x и y .

В качестве второго примера упругого тела, находящегося в условиях плоской деформации, можно рассмотреть полупространство, на поверхности которого в направлении, например, оси OZ , действует бесконечно протяжённая полосовая нагрузка (рис. 28). В этом случае в точках внутри полупространства перемещения в направлении оси OZ будут равны нулю, а перемещения в плоскости XOY будут зависеть только от координат x и y рассматриваемой точки.

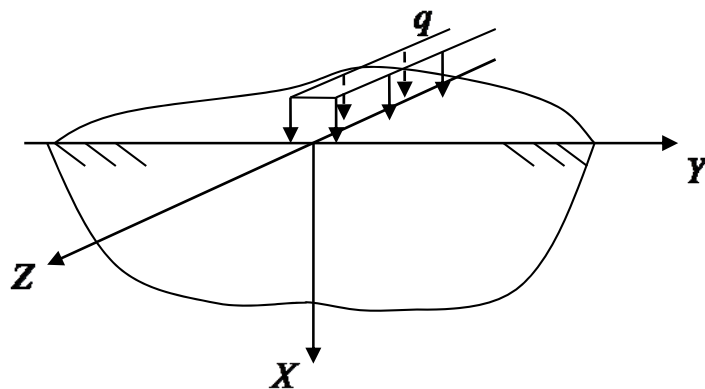


Рис. 28

§7.2. Обобщённое плоское напряжённое состояние

Обобщённым плоским напряжённым состоянием называется такое состояние упругого тела, при котором напряжения на элементарных площадках, нормаль к которым совпадает с выбранным направлением, равны нулю:

$$\sigma_z = 0, \quad \tau_{zx} = 0, \quad \tau_{zy} = 0. \quad (7.12)$$

Примером упругого тела, находящегося в условиях, близких к условиям обобщённого плоского напряжённого состояния, является тонкая пластинка, по контуру которой действуют силовые нагрузки параллельно её срединной плоскости (рис. 29). В этом случае, в силу малого размера пластинки в направлении оси OZ , на элементарных площадках, перпендикулярных к оси OZ , напряжения будут отсутствовать, т.е. будут иметь место соотношения (7.12). Напряжения, действующие на элементарных площадках, перпендикулярных к осям OX и OY , опять же в силу малости толщины пластины, можно считать постоянными по толщине пластины и не зависящими от координаты z , то есть

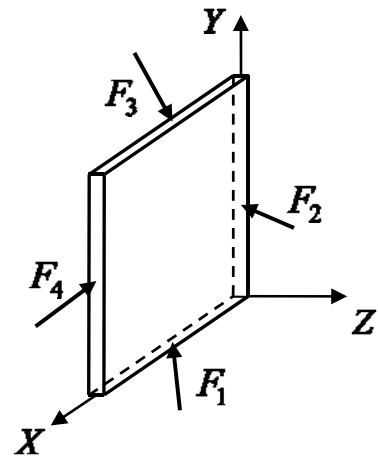


Рис. 29

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \sigma_x(x, y); \\ \sigma_y &= \sigma_y(x, y); \\ \tau_{xy} &= \tau_{xy}(x, y). \end{aligned}$$

В этом случае уравнения равновесия (1.17) получают такой же вид, как и для плоской деформации:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + F_x &= 0; \\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + F_y &= 0; \\ F_z &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (7.13)$$

Физические соотношения в форме обобщённого закона Гука (3.15) приводятся к соотношениям:

$$\begin{aligned}
\varepsilon_x &= \frac{1}{E}(\sigma_x - \mu\sigma_y) = \varepsilon_x(x, y); & \gamma_{xy} &= \frac{1}{G}\tau_{xy} = \gamma_{xy}(x, y); \\
\varepsilon_y &= \frac{1}{E}(\sigma_y - \mu\sigma_x) = \varepsilon_y(x, y); & \gamma_{yz} &= 0; \\
\varepsilon_z &= -\frac{\mu}{E}(\sigma_x + \sigma_y) = \varepsilon_z(x, y); & \gamma_{zx} &= 0.
\end{aligned} \tag{7.14}$$

Сопоставив формулы (7.14) и (7.6), видим, что запись физических соотношений в форме обобщённого закона Гука для случая обобщённого плоского напряжённого состояния имеет такой же вид, как и для случая плоской деформации. Различие между этими соотношениями заключается лишь в значении упругих постоянных.

Запишем физические соотношения в форме Ляме (3.13):

$$\begin{aligned}
\sigma_x &= 2G\varepsilon_x + 3\lambda\varepsilon_0; & \tau_{xy} &= G\gamma_{xy}; \\
\sigma_y &= 2G\varepsilon_y + 3\lambda\varepsilon_0; & \tau_{yz} &= 0; \\
0 &= 2G\varepsilon_z + 3\lambda\varepsilon_0; & \tau_{zx} &= 0.
\end{aligned} \tag{7.15}$$

Из соотношения (7.15₃) следует, что

$$\varepsilon_z = -\frac{\lambda}{\lambda + 2G}(\varepsilon_x + \varepsilon_y). \tag{7.16}$$

Подставив (7.16) в первые два соотношения (7.15), получим:

$$\begin{aligned}
\sigma_x &= (2G + \lambda')\varepsilon_x + \lambda'\varepsilon_y; \\
\sigma_y &= (2G + \lambda')\varepsilon_y + \lambda'\varepsilon_x; \\
\tau_{xy} &= G\gamma_{xy}.
\end{aligned} \tag{7.17}$$

Здесь

$$\lambda' = \lambda \left(1 - \frac{\lambda}{\lambda + 2G} \right). \tag{7.18}$$

Геометрические соотношения (2.12) получают следующий вид:

$$\begin{aligned}
\varepsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x}, & \gamma_{xy} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}, \\
\varepsilon_y &= \frac{\partial v}{\partial y}, & \gamma_{yz} &= \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} = 0, \\
\varepsilon_z &= \frac{\partial w}{\partial z}, & \gamma_{zx} &= \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} = 0.
\end{aligned} \tag{7.19}$$

Анализируя формулы (7.14)–(7.19), получаем, что

$$u = u(x, y); \quad v = v(x, y). \tag{7.20}$$

Третий компонент перемещений w весьма мал вследствие малой толщины пластинки и на этом основании не представляет практического интереса. Однако при необходимости его можно определить, пользуясь соотношением (7.16).

Запишем условия на поверхности упругого тела в терминах напряжений (1.12):

$$\begin{aligned} P_{nx} &= \sigma_x l + \tau_{yx} m; \\ P_{ny} &= \tau_{xy} l + \sigma_y m; \\ P_{nz} &= 0. \end{aligned} \quad (7.21)$$

В перемещениях условия на поверхности тела имеют вид:

$$u(x_0, y_0) = u_0; \quad v(x_0, y_0) = v_0; \quad w(x_0, y_0) = w_0. \quad (7.22)$$

Здесь x_0, y_0 – координаты точек поверхности тела; u_0, v_0, w_0 – перемещения точек поверхности тела в направлении осей декартовой системы координат.

Уравнения неразрывности деформаций Сен-Венана (2.42) значительно упрощаются и приводятся к одному соотношению:

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y}. \quad (7.23)$$

Тензоры напряжений и деформаций для случая обобщённого плоского напряжённого состояния имеют вид:

$$\mathbf{T}_\sigma = \begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & 0 \\ \tau_{yx} & \sigma_y & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad \mathbf{T}_\varepsilon = \begin{pmatrix} \varepsilon_x & \frac{1}{2} \gamma_{xy} & 0 \\ \frac{1}{2} \gamma_{yx} & \varepsilon_y & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_z \end{pmatrix}. \quad (7.24)$$

§7.3. Сводка уравнений двумерной плоской задачи теории упругости

Выпишем основные группы соотношений плоской двумерной задачи теории упругости:

1. Геометрические соотношения:

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}; \quad \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}; \quad \gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}. \quad (7.25)$$

Здесь для случая плоской деформации $\varepsilon_z = 0$, для случая обобщённого плоского напряжённого состояния $\varepsilon_z = -\frac{\lambda}{\lambda + 2G}(\varepsilon_x + \varepsilon_y) = -\frac{\mu}{E}(\sigma_x + \sigma_y)$.

2. Статические уравнения:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + F_x &= 0; \\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + F_y &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (7.26)$$

3. Физические уравнения:

а) В форме обобщённого закона Гука

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{1}{E'}(\sigma_x - \mu'\sigma_y); \\ \varepsilon_y &= \frac{1}{E'}(\sigma_y - \mu'\sigma_x); \\ \gamma_{xy} &= \frac{1}{G'}\tau_{xy}. \end{aligned} \quad (7.27)$$

Здесь для случая плоской деформации $E' = \frac{E}{1 - \mu^2}$; $\mu' = \frac{\mu}{1 - \mu}$; $G' = \frac{E'}{2(1 + \mu')}$; $\sigma_z = \mu(\sigma_x + \sigma_y)$; для случая обобщённого плоского напряжённого состояния $E' = E$; $\mu' = \mu$; $G' = G$; $\sigma_z = 0$.

б) В форме Ляме:

$$\begin{aligned} \sigma_x &= (2G + \lambda')\varepsilon_x + \lambda'\varepsilon_y; \\ \sigma_y &= (2G + \lambda')\varepsilon_y + \lambda'\varepsilon_x; \\ \tau_{xy} &= G\gamma_{xy}. \end{aligned} \quad (7.28)$$

Здесь для случая плоской деформации $\lambda' = \lambda$; $\varepsilon_z = 0$; для случая обобщённого плоского напряжённого состояния $\lambda' = \lambda \left(1 - \frac{\lambda}{\lambda + 2G}\right)$;

$$\varepsilon_z = -\frac{\lambda}{\lambda + 2G}(\varepsilon_x + \varepsilon_y).$$

4. Уравнения неразрывности деформаций:

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y}. \quad (7.29)$$

Итак, для решения плоской задачи теории упругости имеем восемь уравнений (7.25), (7.26), (7.27) или (7.28) с восемью неизвестными: двумя компонентами перемещений $u(x, y)$, $v(x, y)$; тремя составляющими деформации $\varepsilon_x(x, y)$, $\varepsilon_y(x, y)$, $\gamma_{xy}(x, y)$ и тремя компонентами напряжений $\sigma_x(x, y)$, $\sigma_y(x, y)$, $\tau_{xy}(x, y)$.

§7.4. Решение плоской задачи теории упругости в перемещениях

Для построения разрешающих уравнений плоской задачи теории упругости в перемещениях следует из уравнений (7.25), (7.26), (7.27) или (7.28) исключить и напряжения, и деформации. Для этого в уравнения равновесия (7.26) подставим физические соотношения в форме Ляме (7.28), в которых компоненты деформации заменим геометрическими соотношениями (7.25). В результате после элементарных преобразований получим два дифференциальных уравнения второго порядка в частных производных относительно компонент перемещений $u(x, y)$ и $v(x, y)$:

$$\begin{aligned} (2G + \lambda') \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + G \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + (G + \lambda') \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + F_x &= 0; \\ G \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + (2G + \lambda') \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + (G + \lambda') \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + F_y &= 0. \end{aligned} \quad (7.30)$$

Уравнения (7.30) являются разрешающими для плоской задачи теории упругости в перемещениях.

Краевые условия для системы линейных дифференциальных уравнений (7.30) должны быть сформулированы в перемещениях. Если на поверхности упругого тела заданы поверхностные силы, то краевые условия будут иметь вид:

$$\begin{aligned} P_{nx} &= \left[(2G + \lambda') \frac{\partial u}{\partial x} + \lambda' \frac{\partial v}{\partial y} \right] l + G \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) m; \\ P_{ny} &= G \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) l + \left[(2G + \lambda') \frac{\partial v}{\partial y} + \lambda' \frac{\partial v}{\partial x} \right] m. \end{aligned} \quad (7.31)$$

Если на поверхности упругого тела заданы перемещения, то краевые условия описываются либо соотношениями (7.9) для случая плоской деформации, либо соотношениями (7.22) для случая обобщённого плоского напряжённого состояния.

После отыскания компонент перемещений как функций декартовых координат деформации находятся с использованием геометрических соотношений (7.25), напряжения определяются из физических соотношений, записанных в форме Ляме (7.28).

На методах решения краевой задачи для системы дифференциальных уравнений (7.30) останавливаться не будем.

§7.5. Решение плоской задачи теории упругости в напряжениях

Для построения разрешающих уравнений плоской задачи теории упругости в напряжениях, следует из уравнений (7.25), (7.26), (7.27) или (7.28) исключить и деформации, и перемещения. Для этого воспользуемся уравнениями равновесия (7.26) и уравнением неразрывности деформаций (7.29):

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + F_x &= 0; \\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + F_y &= 0; \\ \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} &= \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y}. \end{aligned} \right\} \quad (7.32)$$

Принимая объёмные силы постоянными, то есть не зависящими от декартовых координат $F_x = \text{const}$; $F_y = \text{const}$, запишем уравнение неразрывности в напряжениях. Для этого подставим физические уравнения (7.27) в уравнение неразрывности деформаций (7.29):

$$\frac{1}{E'} \left(\frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial y^2} - \mu' \frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial y^2} \right) + \frac{1}{E'} \left(\frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial x^2} - \mu' \frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial x^2} \right) = \frac{1}{G'} \frac{\partial^2 \tau_{xy}}{\partial x \partial y}. \quad (\text{a})$$

Правую часть полученного соотношения преобразуем, используя уравнения равновесия. Для этого соотношение (7.32₁) продифференцируем по x , а соотношение (7.32₂) – по y :

$$\frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \tau_{xy}}{\partial x \partial y} = 0; \quad \frac{\partial^2 \tau_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial x^2} = 0. \quad (\text{б})$$

Сложим полученные соотношения (б):

$$\frac{\partial^2 \tau_{xy}}{\partial x \partial y} = -\frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial y^2} \right).$$

Полученную вторую производную от касательного напряжения подставим в правую часть выражения (а):

$$\frac{1}{E'} \left(\frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial y^2} - \mu' \frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial y^2} \right) + \frac{1}{E'} \left(\frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial x^2} - \mu' \frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial x^2} \right) = -\frac{1}{2G'} \left(\frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial y^2} \right). \quad (в)$$

Поскольку $E' = 2G'(1 + \mu')$, то соотношение (в) получает вид:

$$\frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial y^2} - \mu' \frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial x^2} - \mu' \frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial x^2} = -\frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial y^2} - \mu' \frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial x^2} - \mu' \frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial y^2},$$

или

$$\frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial y^2} = 0,$$

или

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} (\sigma_x + \sigma_y) + \frac{\partial^2}{\partial y^2} (\sigma_x + \sigma_y) = 0,$$

или

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) (\sigma_x + \sigma_y) = 0. \quad (7.33)$$

Дифференциальный оператор $\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ называется *гармоническим оператором Лапласа*. Тогда уравнение (7.33) можно записать в следующем виде:

$$\nabla^2 (\sigma_x + \sigma_y) = 0. \quad (7.34)$$

Уравнение неразрывности деформаций (7.29), записанное в напряжениях (7.34), называется *уравнением Леви*.

Итак, возвращаясь к системе уравнений (7.32), имеем разрешающие уравнения плоской задачи теории упругости в напряжениях:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + F_x &= 0; \\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + F_y &= 0; \\ \nabla^2 (\sigma_x + \sigma_y) &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (7.35)$$

В систему (7.35) не входят константы упругости – модуль упругости и коэффициент Пуассона. Следовательно, при заданных на поверхности тела нагрузках эти уравнения дадут напряжения, не зависящие от упругих свойств изотропного линейно-упругого материала. Данное обстоятельство можно использовать при исследовании напряжённого состояния упругих тел оптическими методами.

Таким образом, решение плоской задачи теории упругости сводится к интегрированию трёх дифференциальных уравнений (7.35) при выполнении условий на поверхности тела в напряжениях: соотношений (7.8) – для случая плоской деформации, соотношений (7.21) – для случая обобщённого плоского напряжённого состояния.

Функция напряжений

Если объёмными силами можно пренебречь, то систему разрешающих уравнений плоской задачи теории упругости можно свести к одному уравнению. Действительно, рассмотрим первые два уравнения из системы (7.35) при отсутствии объёмных сил $F_x = 0$, $F_y = 0$:

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} = 0; \quad \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} = 0. \quad (7.36)$$

Уравнение (7.36₁) будет удовлетворено тождественно, если ввести такую произвольную функцию $F_1(x, y)$, чтобы

$$\sigma_x = \frac{\partial F_1}{\partial y} \quad \text{и} \quad \tau_{xy} = -\frac{\partial F_1}{\partial x}. \quad (*)$$

Уравнение (7.36₂) будет удовлетворено тождественно, если ввести такую произвольную функцию $F_2(x, y)$, чтобы

$$\sigma_y = \frac{\partial F_2}{\partial x} \quad \text{и} \quad \tau_{yx} = -\frac{\partial F_2}{\partial y}. \quad (**)$$

Поскольку $\tau_{xy} = \tau_{yx}$, то из равенств (*) и (**) следует, что

$$\frac{\partial F_1}{\partial x} = \frac{\partial F_2}{\partial y}. \quad (***)$$

Это равенство будет удовлетворено тождественно, если ввести функцию $\varphi(x, y)$ такую, что

$$F_1 = \frac{\partial \varphi}{\partial y}; \quad F_2 = \frac{\partial \varphi}{\partial x}.$$

Теперь, согласно соотношениям (*) и (**), напряжения будут определяться формулами

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}; \quad \sigma_y = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}; \quad \tau_{xy} = -\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y}. \quad (7.37)$$

Однородные уравнения (7.36) при этом удовлетворяются тождественно.

Если объёмными силами пренебречь нельзя, то система напряжений (7.37) будет иметь вид:

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}; \quad \sigma_y = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}; \quad \tau_{xy} = -\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} - F_x y - F_y x. \quad (7.38)$$

Подставив напряжения (7.38) в уравнение неразрывности деформаций (7.35₃), получим:

$$\nabla^2 \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} \right) = 0,$$

или, в соответствии с определением оператора Лапласа,

$$\nabla^2 \nabla^2 \varphi = 0. \quad (7.39)$$

В развёрнутом виде соотношение (7.39) записывается в следующей форме:

$$\frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \varphi}{\partial y^4} = 0. \quad (7.40)$$

Уравнение (7.40) называется *бигармоническим*, а функция напряжений $\varphi(x, y)$, ему удовлетворяющая, – *бигармонической*. Ещё её называют *функцией Эри*.

Функция напряжений $\varphi(x, y)$ имеет размерность силы.

Уравнение (7.40) является разрешающим уравнением в напряжениях плоской задачи теории упругости.

Таким образом, решение плоской задачи теории упругости свелось к интегрированию бигармонического уравнения (7.40), то есть к отысканию такой функции $\varphi(x, y)$, которая удовлетворяет бигармоническому уравнению и условиям на поверхности упругого тела в напряжениях:

$$\begin{aligned} P_{nx} &= \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} l - \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} + F_x y + F_y x \right) m; \\ P_{ny} &= - \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} + F_x y + F_y x \right) l + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} m. \end{aligned} \quad (7.41)$$

После отыскания функции напряжений $\varphi(x, y)$ напряжения определяются либо по формулам (7.37), если объёмными силами можно пренебречь, либо по формулам (7.38), если объёмные силы нельзя проигнорировать.

§7.6. Определение перемещений

При решении плоской задачи теории упругости в напряжениях искомыми функциями являются напряжения. После их отыскания деформации определяются из физических соотношений, записанных в форме обобщённого закона Гука (7.27). Для определения перемещений следует воспользоваться геометрическими соотношениями (7.25). Процедура решения при этом заключается в том, что из первых двух соотношений (7.25) определяются функции перемещений

$$\begin{aligned}u(x, y) &= \int \varepsilon_x(x, y) dx + \xi(y); \\v(x, y) &= \int \varepsilon_y(x, y) dy + \zeta(x),\end{aligned}\tag{7.42}$$

а постоянные интегрирования $\xi(y)$ и $\zeta(x)$ определяются на основании уравнения (7.25₃):

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial}{\partial y} \left[\int \varepsilon_x(x, y) dx \right] + \frac{\partial \xi(y)}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial x} \left[\int \varepsilon_y(x, y) dy \right] + \frac{\partial \zeta(x)}{\partial x},\tag{7.43}$$

и условий на поверхности упругого тела.

З а м е ч а н и е . Постоянные интегрирования являются постоянными по отношению к величине, по которой производится интегрирование. Так функция $\xi(y)$ не зависит от переменной x , то есть по отношению к переменной x функция $\xi(y)$ является величиной постоянной. Функция $\zeta(x)$ не зависит от переменной y , то есть по отношению к переменной y функция $\zeta(x)$ также является величиной постоянной.

Следует отметить, что в случае постоянных объёмных сил $F_x = \text{const}$, $F_y = \text{const}$, распределение напряжений, как для плоской деформации, так и для обобщённого плоского напряжённого состояния является одинаковым. Это утверждение следует из того, что в этом случае система уравнений равновесия (7.26) вместе с граничными условиями и уравнением неразрывности деформаций (7.29) или (7.34) дают систему уравнений, которая является достаточной для полного определения распределения напряжений в двумерной задаче. Однако распределение перемещений в упругом теле, находящемся в условиях плоской деформации или обобщённого плоского напряжённого состояния, будет различным. Действительно, физические уравнения для плоской задачи определяются соотношениями (7.27), причём в случае плоской деформации компоненты деформации ε_x , ε_y и γ_{xy} связаны с напряжениями σ_x , σ_y и τ_{xy} формулами

$$\varepsilon_x = \frac{1-\mu^2}{E} \left(\sigma_x - \frac{\mu}{1-\mu} \sigma_y \right);$$

$$\varepsilon_y = \frac{1-\mu^2}{E} \left(\sigma_y - \frac{\mu}{1-\mu} \sigma_x \right);$$

$$\gamma_{xy} = \frac{2(1+\mu)}{E} \tau_{xy},$$

а в случае обобщённого плоского напряжённого состояния – формулами

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E} (\sigma_x - \mu \sigma_y); \quad \varepsilon_y = \frac{1}{E} (\sigma_y - \mu \sigma_x); \quad \gamma_{xy} = \frac{2(1+\mu)}{E} \tau_{xy}.$$

Таким образом, задача определения перемещений при решении плоской задачи теории упругости в напряжениях, математически сводится к определению вида произвольных функций, а не постоянных (констант) интегрирования. Зачастую эта задача оказывается чрезвычайно сложной.

§7.7. Напряжённое состояние в точке для плоской задачи теории упругости

Рассмотрим упругое тело, находящееся в условиях плоской задачи. Выделим в упругом теле в окрестности некоторой точки элементарный параллелепипед с рёбрами, параллельными осям декартовой системы координат X, Y, Z (рис. 30).

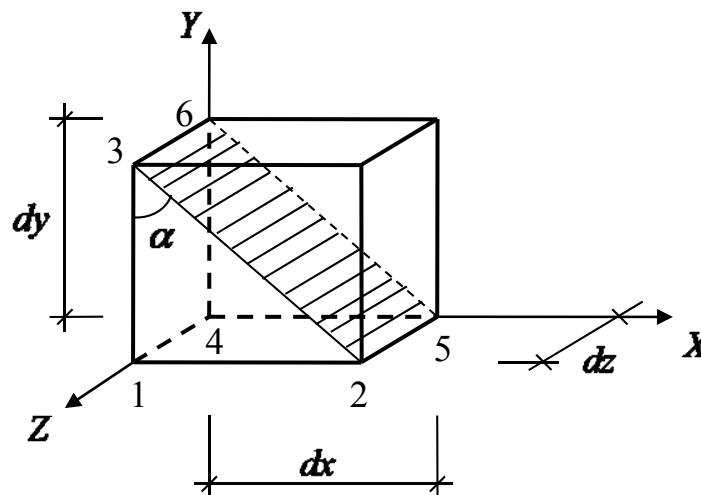


Рис. 30

По граням элементарного параллелепипеда, перпендикулярным осям OX и OY , действуют нормальные σ_x и σ_y , а также касательные $\tau_{xy} = \tau_{yx}$ напряжения; по граням, перпендикулярным к оси OZ , действует отличное от нуля нормальное напряжение σ_z для случая плоской деформации (касательные напряжения τ_{zx} и τ_{zy} при этом равны нулю), либо эти грани свободны от напряжений для случая обобщённого плоского напряжённого состояния. Действующие на элементарный параллелепипед напряжения покажем на проекции части этого параллелепипеда на координатную плоскость XOY (рис. 31).

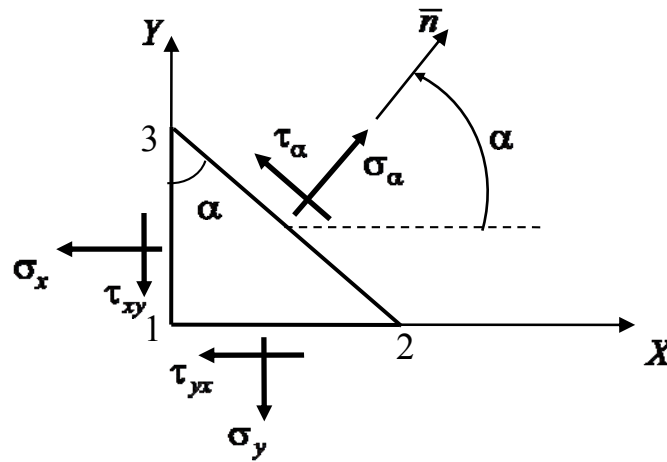


Рис. 31

Найдём нормальное σ_α и касательное τ_α напряжения, действующие на произвольной наклонной площадке 2-3-6-5, параллельной оси OZ . Ориентация этой наклонной площадки будет задаваться углом α .

Будем полагать, что размер элементарного параллелепипеда в направлении оси OZ равен единице, то есть $dz = 1$. Площадь наклонной площадки 2-3-6-5 обозначим dA . Тогда площадь грани 1-3-6-4, перпендикулярной к оси OX , будет равна $dA_x = dA \cdot \cos \alpha$, а площадь грани 1-2-5-4, перпендикулярной к оси OY , составит $dA_y = dA \cdot \sin \alpha$.

Запишем уравнения равновесия в проекциях на оси координат (рис. 31):

$$\begin{aligned} \sum X = 0: \quad & \sigma_\alpha dA \cos \alpha - \tau_\alpha dA \sin \alpha - \tau_{yx} dA_y - \sigma_x dA_x = 0; \\ \sum Y = 0: \quad & \sigma_\alpha dA \sin \alpha + \tau_\alpha dA \cos \alpha - \tau_{xy} dA_x - \sigma_y dA_y = 0. \end{aligned} \quad (a)$$

С учетом введённого ранее соотношения между площадями формулы (a) получают вид:

$$\begin{aligned} \sigma_\alpha \cos \alpha - \tau_\alpha \sin \alpha - \tau_{yx} \sin \alpha - \sigma_x \cos \alpha &= 0; \\ \sigma_\alpha \sin \alpha + \tau_\alpha \cos \alpha - \tau_{xy} \cos \alpha - \sigma_y \sin \alpha &= 0. \end{aligned} \quad (б)$$

Первое из соотношений (б) умножим на $-\sin \alpha$, второе из соотношений (б) – на $\cos \alpha$ и сложим полученные соотношения. Принимая во внимание формулы тригонометрии $\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = \cos 2\alpha$ и $\sin \alpha \cdot \cos \alpha = \frac{1}{2} \sin 2\alpha$, после элементарных преобразований получаем:

$$\tau_{\alpha} = -\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin 2\alpha + \tau_{xy} \cos 2\alpha . \quad (7.44)$$

Далее первое из соотношений (б) умножим на $\cos \alpha$, а второе – на $\sin \alpha$. Сложив полученные соотношения и принимая во внимание формулы тригонометрии $\cos^2 \alpha = \frac{1}{2}(1 + \cos 2\alpha)$ и $\sin^2 \alpha = \frac{1}{2}(1 - \cos 2\alpha)$, после элементарных преобразований будем иметь:

$$\sigma_{\alpha} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\alpha + \tau_{xy} \sin 2\alpha . \quad (7.45)$$

Формулы (7.44) и (7.45) определяют нормальное σ_{α} и касательное τ_{α} напряжения на произвольной наклонной площадке, ориентация которой задаётся углом наклона к оси OX нормали \bar{n} рассматриваемой наклонной площадки.

Правильность полученных соотношений для напряжений σ_{α} и τ_{α} оценим для характерных углов α :

✓ для $\alpha = 0$ получаем: $\tau_{\alpha} = \tau_{xy}$; $\sigma_{\alpha} = \sigma_x$ (рис. 32а);

✓ для $\alpha = \frac{\pi}{2}$ получаем: $\tau_{\alpha} = -\tau_{xy}$; $\sigma_{\alpha} = \sigma_y$ (рис. 32б).

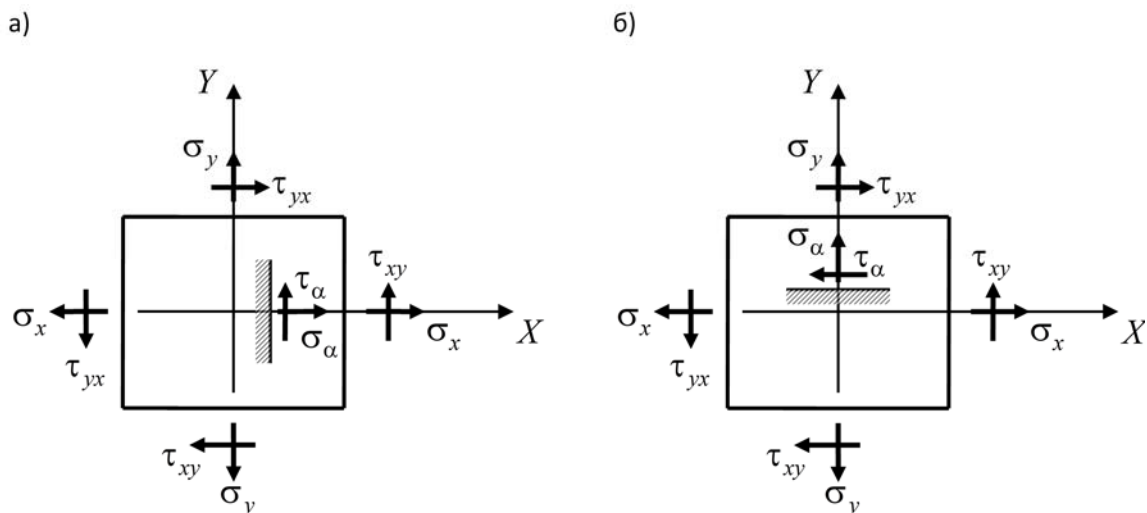


Рис. 32

Таким образом, напряжения на наклонной площадке, если ее повернуть так, что она будет перпендикулярна к координатным осям, совпадают с напряжениями на исходных площадках.

Найдём напряжения на гранях элементарного параллелепипеда, повернутого относительно исходной декартовой системы координат вокруг оси OZ на угол α (рис. 33). Напряжения τ_α и σ_α определяются по формулам (7.44) и (7.45). Что касается напряжений, действующих на площадке, перпендикулярной к площадке с нормалью \bar{n} , то для них получим:

$$\begin{aligned}\sigma_{\alpha+90} &= \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos(2\alpha + 180) + \tau_{yx} \sin(2\alpha + 180) = \\ &= \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} - \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\alpha - \tau_{yx} \sin 2\alpha; \\ \tau_{\alpha+90} &= -\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin(2\alpha + 180) + \tau_{xy} \cos(2\alpha + 180) = \\ &= -\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} (-\sin 2\alpha) + \tau_{xy} (-\cos 2\alpha) = -\tau_\alpha.\end{aligned}\tag{7.46}$$

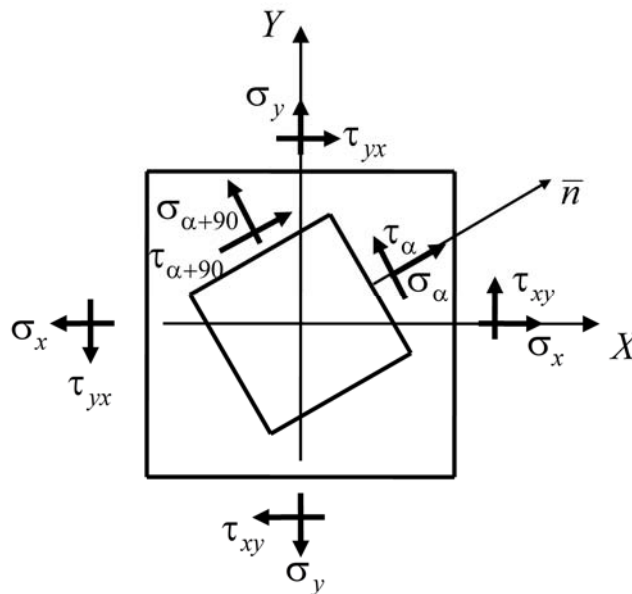


Рис. 33

Из (7.46₂) следует, что касательные напряжения на двух взаимно перпендикулярных площадках равны по величине и обратны по знаку (закон парности касательных напряжений). Сумма нормальных напряжений на взаимно перпендикулярных наклонных площадках, в соответствии с формулами (7.45) и (7.46₁), будет равна:

$$\sigma_\alpha + \sigma_{\alpha+90} = \sigma_x + \sigma_y.\tag{7.47}$$

Это значит, что сумма нормальных напряжений на двух взаимно перпендикулярных площадках не зависит от угла α . А так как угол α определяет направление нормали к рассматриваемой наклонной площадке, по отношению к оси OX декартовой системы координат, то независимость суммы нормальных напряжений от угла α означает независимость этой суммы от выбранной изначально декартовой системы координат. Таким образом, сумма нормальных напряжений на двух взаимно перпендикулярных площадках, проходящих через заданную точку упругого тела, является *инвариантом*.

Следует напомнить, что мы сейчас рассматриваем плоскую задачу теории упругости и, следовательно, полученный результат ни в коей мере неприменим к пространственной задаче, где инвариантом является сумма нормальных напряжений на трёх взаимно перпендикулярных площадках (см. §1.7).

Найдём площадки, на которых нормальные напряжения достигают своих экстремальных значений. Для этого приравняем производную от напряжения σ_α по углу α к нулю:

$$\frac{d\sigma_\alpha}{d\alpha} = 2 \left(-\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin 2\alpha + \tau_{xy} \cos 2\alpha \right) = 2\tau_\alpha = 0.$$

Таким образом, на площадках с экстремальными нормальными напряжениями, касательные напряжения равны нулю. Такие площадки, как известно, называются главными, а соответствующие им нормальные напряжения – главными напряжениями.

Угол α_0 , определяющий ориентацию главной площадки в системе координат XOY , найдём из уравнения: $\tau_\alpha = 0$, то есть

$$\operatorname{tg} 2\alpha_0 = \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y}. \quad (7.48)$$

Формула (7.48) позволяет определить два взаимно перпендикулярных направления α'_0 и $\alpha''_0 = \alpha'_0 + 90^\circ$, задающих направления нормалей к главным площадкам.

Для определения величины главных нормальных напряжений подставим угол $\alpha = \alpha_0$ из формулы (7.48) в формулу (7.45). Имеем:

$$\sigma_{\alpha_0} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} + \tau_{xy} \operatorname{tg} 2\alpha_0 \right) \cos 2\alpha_0. \quad (B)$$

Поскольку $\cos 2\alpha_0 = \pm \frac{\sigma_x - \sigma_y}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 2\alpha_0}}$, или с учётом соотношения (7.48)

$$\cos 2\alpha_0 = \pm \frac{\sigma_x - \sigma_y}{\sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2}},$$

то формула (в) получает вид:

$$\sigma_{\alpha_0} = \sigma_{1,2} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2}. \quad (7.49)$$

Главное напряжение σ_1 соответствует знаку «+», напряжение σ_2 – знаку «-» перед радикалом.

Таким образом, при любых исходных напряжениях σ_x , σ_y , τ_{xy} , действующих в данной точке упругого тела, существуют взаимно перпендикулярные площадки, которые проходят через рассматриваемую точку и на которых действуют только нормальные напряжения. Иначе, плоское напряжённое состояние в точке путём поворота осей всегда может быть представлено как растяжение-сжатие в двух взаимно перпендикулярных направлениях.

Найдём направления, соответствующие главным напряжениям σ_1 и σ_2 . Пусть наклонная площадка будет главной (рис. 34).

Запишем условие равновесия элементарной треугольной призмы (рис. 34) в проекциях на горизонтальную ось:

$$\sum X = 0: \sigma_{1,2} dA \cos \alpha_{1,2} - \sigma_x dA_x - \tau_{yx} dA_y = 0.$$

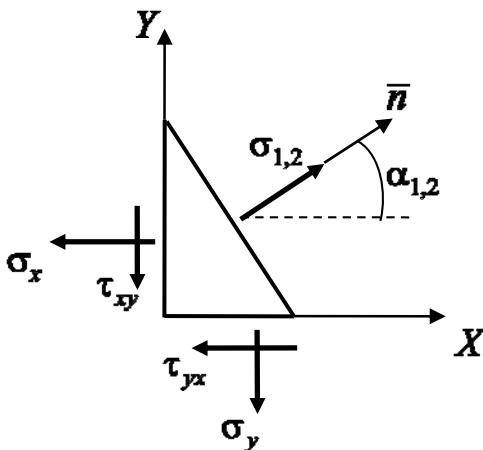


Рис. 34

Принимая во внимание введённое ранее соотношение между площадями dA , dA_x , dA_y , записанное уравнение равновесия приведём к виду:

$$\sigma_{1,2} \cos \alpha_{1,2} - \sigma_x \cos \alpha_{1,2} - \tau_{yx} \sin \alpha_{1,2} = 0;$$

Отсюда

$$\operatorname{tg} \alpha_{1,2} = \frac{\sigma_{1,2} - \sigma_x}{\tau_{yx}}. \quad (7.50)$$

Далее запишем условие равновесия в проекциях на вертикальную ось:

$$\sum Y = 0: \sigma_{1,2} dA \sin \alpha_{1,2} - \sigma_y dA_y - \tau_{xy} dA_x = 0,$$

или $\sigma_{1,2} \sin \alpha_{1,2} - \sigma_y \sin \alpha_{1,2} - \tau_{xy} \cos \alpha_{1,2} = 0$.

Отсюда

$$\operatorname{tg} \alpha_{1,2} = \frac{\tau_{xy}}{\sigma_{1,2} - \sigma_y}. \quad (7.51)$$

Формулы (7.50) и (7.51), как и формула (7.48) определяют ориентацию главных площадок. Однако в формулах (7.50) и (7.51) угол $\alpha_{1,2}$ привязан к величине главного напряжения $\sigma_{1,2}$, что является несомненным преимуществом этих формул по сравнению с формулой (7.48). Действительно, главному напряжению σ_1 или σ_2 в правой части формул (7.50) и (7.51) соответствует угол α_1 или α_2 соответственно в левой части этих формул. При использовании же формулы (7.48) для определения угла наклона главной площадки вопрос о величине действующего по этой площадке главного напряжения остаётся открытым.

Найдём площадки, на которых действуют экстремальные касательные напряжения. Пусть, для упрощения, исходные площадки будут главными, то есть в направлении осей декартовой системы координат OX и OY действуют главные напряжения σ_1 и σ_2 соответственно. Тогда на произвольной наклонной площадке нормальное и касательное напряжения будут определяться, в соответствии с зависимостями (7.44) и (7.45), формулами:

$$\sigma_\alpha = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} + \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \cos 2\alpha; \quad \tau_\alpha = -\frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \sin 2\alpha. \quad (7.52)$$

Отсюда следует, что при $\alpha = -45^\circ$ касательное напряжение τ_α будет максимальным, то есть

$$\tau_{\max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}. \quad (7.53)$$

Подставив главные напряжения σ_1 и σ_2 из формулы (7.49) в соотношение (7.53), получим:

$$\tau_{\max} = \frac{1}{2} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2}. \quad (7.54)$$

Таким образом, максимальные касательные напряжения в произвольных декартовых осях координат определяются по формуле (7.54) и действуют на площадках, делящих угол между главными напряжениями пополам.

Нормальные напряжения на таких площадках равны полусумме главных напряжений:

$$\sigma_\alpha = \sigma_{\pm 45^\circ} = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2}. \quad (7.55)$$

Оценку прочности упругих тел, находящихся в условиях плоской задачи, следует выполнять в соответствии с теориями прочности, часть из

которых описана в гл. 4, § 4.5. Критерии прочности в гл. 4 записаны в терминах главных напряжений, между которыми имеет место следующая зависимость: $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$, то есть σ_1 – это наибольшее главное напряжение, σ_3 – наименьшее главное напряжение. В случае плоской деформации главными напряжениями будут напряжения, определяемые формулами (7.49) и (7.5). В случае обобщённого плоского напряжённого состояния главными напряжениями будут напряжения, определяемые формулами (7.49), и напряжение $\sigma_z = \sigma_3 = 0$. Эти напряжения действуют на трёх взаимно перпендикулярных площадках. Оценка величины этих главных напряжений для определения наибольшего и наименьшего среди главных напряжений, действующих в заданной точке упругого тела, требует дополнительного численного исследования в каждом конкретном случае.

*Геометрическая интерпретация
напряжённого состояния в точке*

Зависимости напряжений σ_α и τ_α от угла наклона нормали рассматриваемой наклонной площадки к оси, совпадающей с наибольшим главным напряжением, имеют простую геометрическую интерпретацию в виде круговой диаграммы, предложенной немецким учёным Отто Мором. Эту круговую диаграмму так и называют: *круг Мора* или *круг напряжений*.

Пусть $a = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2}$ и $R = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}$. Тогда формулы (7.52) можно будет записать в следующем виде:

$$\sigma_\alpha = a + R \cos 2\alpha; \quad \tau_\alpha = -R \sin 2\alpha. \quad (7.56)$$

Освобождаясь в формулах (7.56) от тригонометрических функций, приведём их к одному уравнению вида:

$$(\sigma_\alpha - a)^2 + \tau_\alpha^2 = R^2. \quad (7.57)$$

Уравнение (7.57) в системе координат σ, τ описывает окружность радиуса R с центром, расположенным на оси σ и смещённым в её положительном направлении на расстояние a , причём σ_α и τ_α являются текущими координатами точки на окружности. Уравнения (7.56), таким образом, описывают указанную окружность в параметрической форме, а угол 2α представляет собой угол между направлением радиуса-вектора точки на окружности с координатами $(\sigma_\alpha, \tau_\alpha)$ и положительным направлением оси σ . Судя по виду уравнений (7.56), ось τ должна быть направлена вниз, поскольку угол α отсчитывается против хода часовой стрелки.

Точки, принадлежащие рассматриваемой окружности, характеризуют нормальные и касательные напряжения на всевозможных площадках, проходящих через заданную точку упругого тела. Точки окружности,

расположенные на оси σ , соответствуют главным напряжениям σ_1 и σ_2 в данной точке упругого тела.

Рассмотрим на окружности некоторую точку $K(\sigma_\alpha, \tau_\alpha)$ (рис. 35). Прямая, соединяющая точки σ_2 и $K(\sigma_\alpha, \tau_\alpha)$, будет совпадать с направлением нормали к рассматриваемой наклонной площадке. Прямая, соединяющая точки σ_1 и $K(\sigma_\alpha, \tau_\alpha)$, будет совпадать с направлением нормали к площадке, перпендикулярной рассматриваемой наклонной площадке. Напряжения, действующие на площадке, перпендикулярной к рассматриваемой наклонной площадке, будут равны напряжениям в точке окружности, расположенной на одном диаметре с точкой $K(\sigma_\alpha, \tau_\alpha)$.

Если в некоторой точке упругого тела известны главные напряжения σ_1 и σ_2 , то построение круга Мора выполняется достаточно просто: нужно на оси σ отметить координаты, равные главным напряжениям σ_1 и σ_2 , а затем на отрезке $\sigma_1\sigma_2$, как на диаметре, построить окружность (рис. 35).

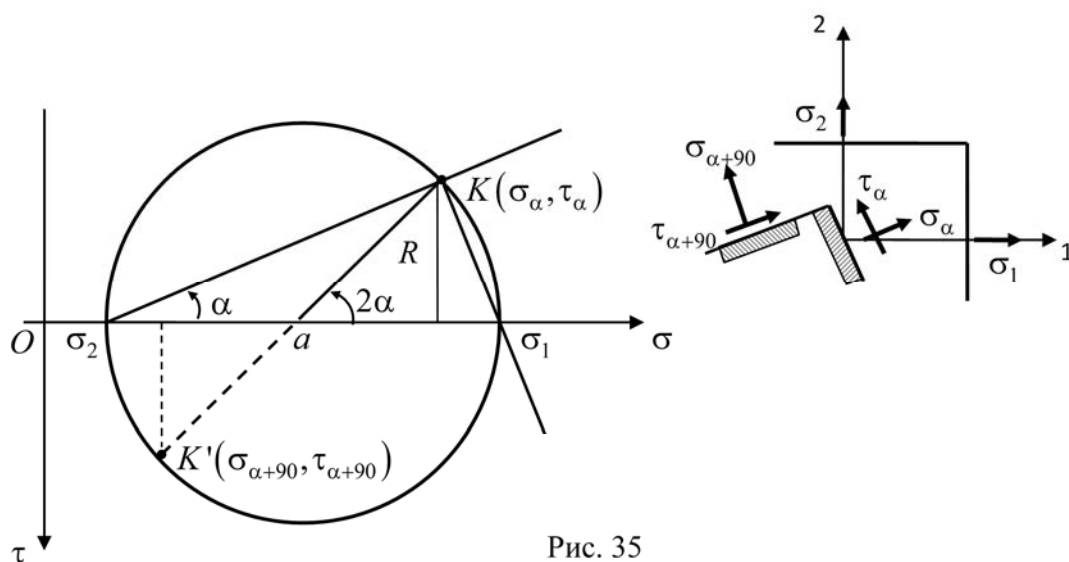


Рис. 35

Рис. 35

Пусть в некоторой точке упругого тела известны напряжения σ_x , σ_y и τ_{xy} в произвольных осях декартовой системы координат XOY .

Тогда для построения круга напряжений сначала строится точка $M(\sigma_x, \tau_{xy})$ по напряжениям, действующим на площадке, перпендикулярной к оси OX , затем строится точка $N(\sigma_y, \tau_{yx})$ по напряжениям, действующим на площадке перпендикулярной к оси OY . Точка пересечения прямой MN с осью σ есть центр круга напряжений, то есть круг Мора строится на отрезке MN как на диаметре (рис. 36).

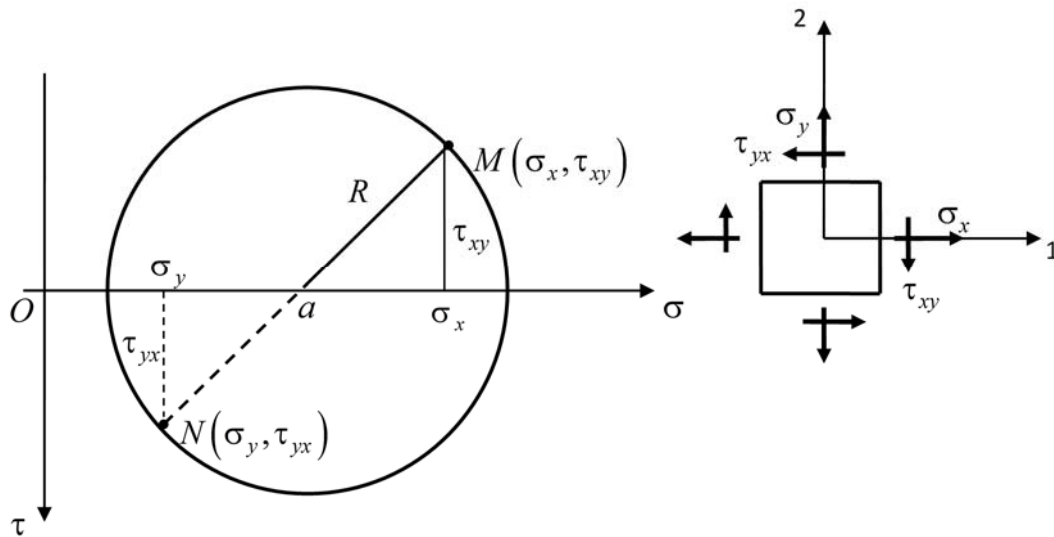


Рис. 36

Круг напряжений используется для анализа напряжённого состояния в точке упругого тела, находящегося в условиях обобщённого плоского напряжённого состояния.

§7.8. Деформированное состояние в точке для плоской задачи теории упругости

Вновь рассмотрим упругое тело, находящееся в условиях плоской задачи. Пусть в состоянии до деформации (рис. 37) линейный элемент ds занимал положение ab и составлял с осью OX угол β ; после деформации его положение в результате переноса, удлинения (или сжатия) и вращения изменилось, и он стал занимать положение a_1b_1 . Пусть в некоторой системе декартовых координат XOY точка a имеет координаты (x, y) ; тогда координаты точки b будут равны $(x + dx, y + dy)$. Обозначим компоненты перемещений точки a через $u_a = u(x, y)$ и $v_a = v(x, y)$. Компоненты перемещений точки b будут определяться соотношениями:

$$\begin{aligned}
 u_b &= u(x + dx, y + dy) \cong u(x, y) + \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy; \\
 v_b &= v(x + dx, y + dy) \cong v(x, y) + \frac{\partial v}{\partial x} dx + \frac{\partial v}{\partial y} dy.
 \end{aligned}
 \tag{a}$$

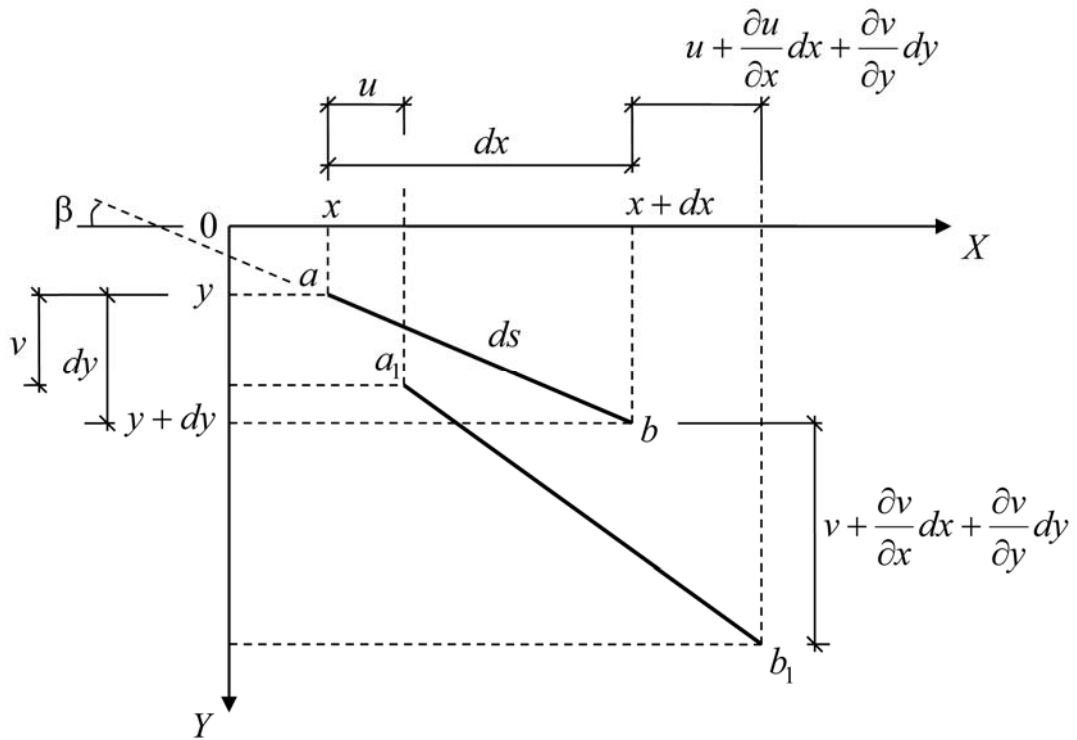


Рис. 37

Перенесём мысленно отрезок a_1b_1 таким образом, чтобы точка a_1 совпала с точкой a . Тогда отрезок a_1b_1 окажется в положении ab_2 (рис. 38). Компоненты перемещения точки b относительно точки a вдоль осей декартовой системы координат XOY будут выражаться отрезками bd и db_2 , причём (см. рис. 37)

$$bd = \left(x + dx + u + \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy \right) - u - (x + dx) = \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy;$$

$$db_2 = \left(y + dy + v + \frac{\partial v}{\partial x} dx + \frac{\partial v}{\partial y} dy \right) - v - (y + dy) = \frac{\partial v}{\partial x} dx + \frac{\partial v}{\partial y} dy.$$

(б)

Опустим из точки b на отрезок ab_2 перпендикуляр bc . Пренебрегая малым по сравнению с углом β , углом $\delta_\beta = \angle bac$, найдём:

$$bc = -bd \sin \beta + db_2 \cos \beta;$$

$$cb_2 = bd \cos \beta + db_2 \sin \beta$$

(в)

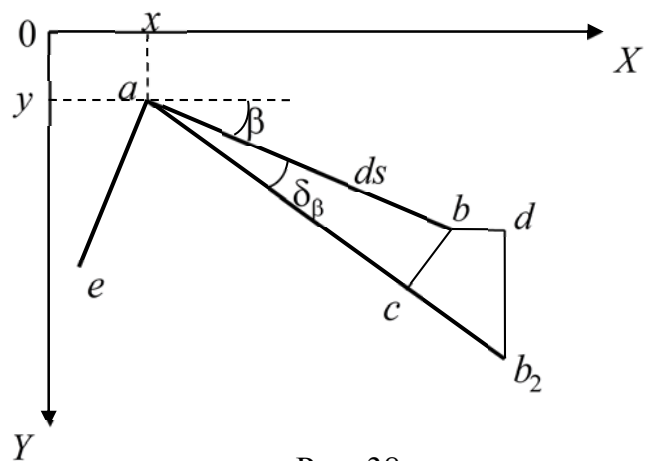


Рис. 38

Поскольку отрезок bc , опять же в силу малости угла $\delta_\beta = \angle bac$, можно отождествить с дугой окружности с центром в точке a , то отрезок cb_2 представляет собой абсолютное удлинение линейного элемента ab . Относительное удлинение линейного элемента ab , ориентация которого задаётся произвольным углом β , можно найти по формуле:

$$\varepsilon_\beta = \frac{cb_2}{ab} = \frac{bd \cos \beta + db_2 \sin \beta}{ab} = \frac{bd}{ab} \cos \beta + \frac{db_2}{ab} \sin \beta. \quad (\text{г})$$

Принимая во внимание соотношения (б), а также, учитывая, что $ab = ds$, получим:

$$\frac{bd}{ab} = \frac{\frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy}{ds} = \frac{\partial u}{\partial x} \frac{dx}{ds} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{dy}{ds} = \frac{\partial u}{\partial x} \cos \beta + \frac{\partial u}{\partial y} \sin \beta; \quad (\text{д})$$

$$\frac{db_2}{ab} = \frac{\frac{\partial v}{\partial x} dx + \frac{\partial v}{\partial y} dy}{ds} = \frac{\partial v}{\partial x} \frac{dx}{ds} + \frac{\partial v}{\partial y} \frac{dy}{ds} = \frac{\partial v}{\partial x} \cos \beta + \frac{\partial v}{\partial y} \sin \beta.$$

Подставив формулы (д) в соотношение (г) получим окончательное выражение для относительного удлинения линейного элемента в произвольном направлении в случае плоской задачи теории упругости:

$$\varepsilon_\beta = \frac{\partial u}{\partial x} \cos^2 \beta + \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \sin \beta \cdot \cos \beta + \frac{\partial v}{\partial y} \sin^2 \beta,$$

или

$$\varepsilon_\beta = \varepsilon_x \cos^2 \beta + \gamma_{xy} \sin \beta \cdot \cos \beta + \varepsilon_y \sin^2 \beta. \quad (7.58)$$

Далее найдём сдвиговую деформацию. В силу малости угла $\delta_\beta = \angle bac$, его можно найти как отношение отрезков bc и ab , а именно

$$\delta_\beta = \frac{bc}{ab} = \frac{-bd \sin \beta + db_2 \cos \beta}{ab} = -\frac{bd}{ab} \sin \beta + \frac{db_2}{ab} \cos \beta. \quad (\text{е})$$

Учитывая формулы (б), выражение (е) получает вид:

$$\delta_\beta = -\left(\frac{\partial u}{\partial x} \frac{dx}{ds} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{dy}{ds} \right) \sin \beta + \left(\frac{\partial u}{\partial x} \frac{dx}{ds} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{dy}{ds} \right) \cos \beta,$$

или

$$\delta_\beta = \frac{\partial v}{\partial x} \cos^2 \beta + \left(\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial x} \right) \sin \beta \cdot \cos \beta - \frac{\partial u}{\partial y} \sin^2 \beta. \quad (\text{ж})$$

Линейный элемент ae , составляющий прямой угол с отрезком ab , наклонён под углом $\beta + \frac{\pi}{2}$ к направлению оси X . Это означает, что его угол поворота $\delta_{\beta + \frac{\pi}{2}}$ определяется по формуле (ж), в которой угол β нужно заменить на угол $\beta + \frac{\pi}{2}$. Поскольку $\cos\left(\beta + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin\beta$, и $\sin\left(\beta + \frac{\pi}{2}\right) = \cos\beta$, то на основании формулы (ж), находим:

$$\delta_{\beta + \frac{\pi}{2}} = \frac{\partial v}{\partial x} \sin^2 \beta - \left(\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial x} \right) \sin \beta \cdot \cos \beta - \frac{\partial u}{\partial y} \cos^2 \beta. \quad (\text{и})$$

Деформация сдвига γ_β для направлений ab , ae при этом равна разности $\delta_\beta - \delta_{\beta + \frac{\pi}{2}}$, откуда находим

$$\gamma_\beta = \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) [\cos^2 \beta - \sin^2 \beta] + 2 \left(\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial x} \right) \sin \beta \cdot \cos \beta,$$

или

$$\frac{1}{2} \gamma_\beta = \frac{1}{2} \gamma_{xy} [\cos^2 \beta - \sin^2 \beta] + (\varepsilon_y - \varepsilon_x) \sin \beta \cdot \cos \beta. \quad (7.59)$$

Используя формулы тригонометрии для двойного аргумента: $\cos^2 \beta - \sin^2 \beta = \cos 2\beta$, $\sin \beta \cdot \cos \beta = \frac{1}{2} \sin 2\beta$, $\cos^2 \beta = \frac{1}{2}(1 + \cos 2\beta)$ и $\sin^2 \beta = \frac{1}{2}(1 - \cos 2\beta)$, соотношения (7.58) и (7.59) можно представить в следующем виде:

$$\begin{aligned} \varepsilon_\beta &= \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y}{2} + \frac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{2} \cos 2\beta + \frac{1}{2} \gamma_{xy} \sin 2\beta; \\ \frac{1}{2} \gamma_\beta &= -\frac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{2} \sin 2\beta + \frac{1}{2} \gamma_{xy} \cos 2\beta. \end{aligned} \quad (7.60)$$

Формулы (7.60) определяют относительную линейную деформацию ε_β и угол сдвига γ_β по произвольному направлению ab , задаваемому углом β между рассматриваемым направлением ab и осью OX декартовой системы координат.

Сопоставляя формулы (7.60) с соотношениями (7.44) и (7.45), замечаем, что зависимости (7.60) можно получить из соотношений (7.44) и (7.45), если в последних выполнить следующую замену: напряжения σ_α , τ_α , σ_x , σ_y , τ_{xy} заменить на деформации ε_β , $\frac{1}{2} \gamma_\beta$, ε_x , ε_y , $\frac{1}{2} \gamma_{xy}$ соответственно; угол α заменить на угол β . Следовательно, каждому результату,

полученному из соотношений (7.44) и (7.45) для напряжений σ_α и τ_α соответствует результат для деформаций ε_β и $\frac{1}{2}\gamma_\beta$.

В частности, обращаясь к соотношению (7.47), получаем, что сумма относительных линейных деформаций двух взаимно перпендикулярных линейных элементов является величиной инвариантной:

$$\varepsilon_\beta + \varepsilon_{\beta+90} = \varepsilon_x + \varepsilon_y. \quad (7.61)$$

Далее, направления, вдоль которых относительные линейные деформации достигают своих экстремальных значений, определяются, на основании соотношения (7.48), формулой:

$$\operatorname{tg} 2\beta_0 = \frac{\gamma_{xy}}{\varepsilon_x - \varepsilon_y}. \quad (7.62)$$

Соотношение (7.62) показывает, что в плоской задаче теории упругости существует два направления β'_0 и $\beta''_0 = \beta'_0 + 90^\circ$, вдоль которых относительные линейные деформации $\varepsilon_{\beta'_0}$ и $\varepsilon_{\beta''_0}$ экстремальны, а угловая деформация γ_{β_0} равна нулю. Эти экстремальные относительные линейные деформации называются *главными деформациями* и определяются, в соответствии с формулой (7.49), соотношением:

$$\varepsilon_{\beta_0} = \varepsilon_{1,2} = \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(\varepsilon_x - \varepsilon_y)^2 + \gamma_{xy}^2}. \quad (7.63)$$

В соответствии с формулами (7.52), (7.53) и (7.54) максимальная деформация сдвига γ_β^{\max} возникает по направлению, делящему угол между направлениями главных деформаций ε_1 и ε_2 пополам, и вычисляется по формуле:

$$\gamma_\beta^{\max} = \varepsilon_1 - \varepsilon_2 = \sqrt{(\varepsilon_x - \varepsilon_y)^2 + \gamma_{xy}^2}. \quad (7.64)$$

Направление, по которому действует максимальная угловая деформация, испытывает относительную линейную деформацию $\varepsilon_{\beta,\max}$, величина которой вычисляется на основании формулы (7.55):

$$\varepsilon_{\beta,\max} = \frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}{2} = \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y}{2}. \quad (7.65)$$

По аналогии с напряжённым состоянием в точке упругого тела, находящегося в условиях плоской задачи, можно построить *круг деформаций*, аналогичный кругу Мора для напряжений. В этом круге деформаций ординатами будут являться величины $\frac{1}{2}\gamma_\beta$, а абсциссами – величины ε_β .

§7.9. Потенциальная энергия деформации

На основании результатов, представленных в гл. 3, запишем формулы для определения удельной потенциальной энергии деформации в случае плоской задачи.

Плоская деформация

Принимая во внимание вид тензоров напряжений и деформаций для случая плоской деформации (7.11), удельную потенциальную энергию деформации (3.26) будем определять по формуле

$$U_0 = \frac{1}{2}(\sigma_x \varepsilon_x + \sigma_y \varepsilon_y + \tau_{xy} \gamma_{xy}). \quad (7.66)$$

Формулу (7.66) нетрудно преобразовать к терминам напряжений, используя соотношение (3.22):

$$U_0 = \frac{1-2\mu}{6E}(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z)^2 + \frac{1+\mu}{6E} \left[(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2 + 6\tau_{xy}^2 \right]. \quad (7.67)$$

Запишем выражение для удельной потенциальной энергии деформации в терминах деформации, принимая во внимание соотношение (3.25):

$$U_0 = G \left[\frac{1-\mu}{1-2\mu}(\varepsilon_x + \varepsilon_y)^2 - 2\varepsilon_x \varepsilon_y + \frac{1}{2}\gamma_{xy}^2 \right]. \quad (7.68)$$

Наконец, на основании соотношения (3.20) запишем выражение для удельной потенциальной энергии деформации в терминах главных напряжений:

$$U_0 = \frac{1}{2E} \left[(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)^2 - 2(1+\mu)(\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_3\sigma_1) \right]. \quad (7.69)$$

Здесь главные напряжения связаны с напряжениями в произвольных осях формулами (7.49) и (7.5).

Выражение для удельной потенциальной энергии формоизменения (3.31) в случае плоской деформации получает вид:

$$U_\phi = \frac{1+\mu}{6} \left[(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2 \right] + \frac{1}{2G} \tau_{xy}^2. \quad (7.70)$$

Обобщённое плоское напряжённое состояние

Для случая обобщённого плоского напряжённого состояния тензоры напряжений и деформаций определяются соотношениями (7.24). Ввиду этого удельная потенциальная энергия деформации (3.26) будет

определяться по формуле (7.66). В терминах напряжений выражение для удельной потенциальной энергии деформации (3.22) получает вид:

$$U_0 = \frac{1-2\mu}{6E}(\sigma_x + \sigma_y)^2 + \frac{1+\mu}{6E}\left[(\sigma_x - \sigma_y)^2 + \sigma_y^2 + \sigma_x^2 + 6\tau_{xy}^2\right]. \quad (7.71)$$

На основании соотношения (3.25) запишем формулу для удельной потенциальной энергии деформации в терминах деформации:

$$U_0 = G\left[\frac{1-\mu}{1-2\mu}(\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z)^2 - 2(\varepsilon_x\varepsilon_y + \varepsilon_y\varepsilon_z + \varepsilon_z\varepsilon_x) + \frac{1}{2}\gamma_{xy}^2\right]. \quad (7.72)$$

Запишем выражение для удельной потенциальной энергии деформации в терминах главных напряжений, используя соотношение (3.20):

$$U_0 = \frac{1}{2E}\left[(\sigma_1 + \sigma_2)^2 - 2(1+\mu)\sigma_1\sigma_2\right]. \quad (7.73)$$

Выражение для удельной потенциальной энергии формоизменения (3.31) в случае обобщённого плоского напряжённого состояния получает вид:

$$U_\phi = \frac{1+\mu}{6}\left[(\sigma_x - \sigma_y)^2 + \sigma_y^2 + \sigma_x^2\right] + \frac{1}{2G}\tau_{xy}^2. \quad (7.74)$$

Глава 8. ДВУМЕРНАЯ ПЛОСКАЯ ЗАДАЧА В ПОЛЯРНЫХ КООРДИНАТАХ

Предыдущее изложение основ теории упругости базировалось на том, что положения точек деформируемого сплошного тела были заданы их проекциями на оси декартовой системы координат. Этот способ описания деформации наиболее рационален и с точки зрения простоты вывода расчётных формул, и с точки зрения простоты вида этих формул. Но не всегда, однако, данный способ целесообразен с точки зрения простоты решения задач. Некоторые задачи решаются значительно проще, если вместо декартовых координат определять положение точек тела до его деформации в некоторой криволинейной системе координат, специально подобранной, исходя из условий постановки рассматриваемой конкретной задачи. Общим правилом, которым при этом следует руководствоваться, является стремление выбрать криволинейные координаты таким образом, чтобы границы рассматриваемого тела входили в число координатных поверхностей. Тогда краевые условия формулируются наиболее просто, что обычно облегчает построение решения.

В настоящей главе рассматривается плоская задача теории упругости применительно к случаю *обобщённого плоского напряжённого состояния* в полярных координатах. Полярная система координат является криволинейной ортогональной системой координат. Неортогональные криволинейные координаты не рассматриваются, поскольку они приводят, как правило, к весьма громоздким уравнениям, затруднительным для решения.

§8.1. Основные уравнения

В полярной системе координат положение каждой точки $M(x, y)$ определяется полярными координатами r и θ : $M(r, \theta)$. Здесь r – расстояние рассматриваемой точки M от начала координат; θ – угол между направлением некоторой оси X и направлением r (рис. 39).

Между декартовыми и полярными координатами существуют известные зависимости:

$$x = r \cos \theta; \quad y = r \sin \theta; \quad r^2 = x^2 + y^2; \quad \theta = \arctg \frac{y}{x}. \quad (8.1)$$

Дифференциалы полярных координат связаны между собой:

$$ds = r \cdot d\theta. \quad (8.2)$$

Полное перемещение MM_1 произвольной точки $M(r, \theta)$ будем определять двумя компонентами:

$u(r, \theta)$ – перемещение в направлении радиуса r (радиальное перемещение);

$v(r, \theta)$ – перемещение в направлении, перпендикулярном радиусу r (тангенциальное перемещение).

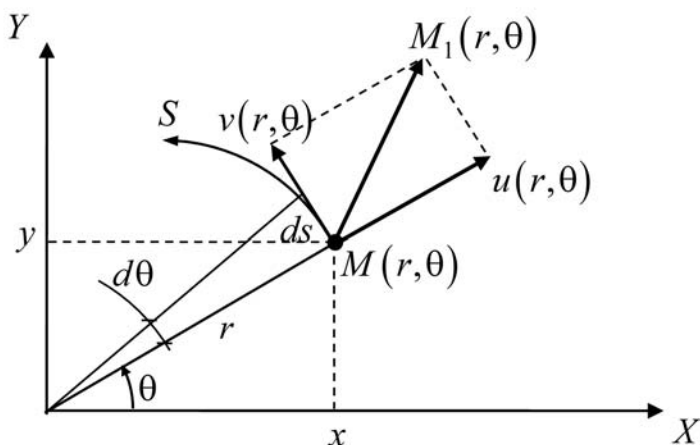


Рис. 39

Геометрические соотношения

Рассмотрим деформацию элемента площади $abcd$ в полярных координатах (рис. 40). Деформацию растяжения (сжатия) в радиальном направлении обозначим ε_r . Деформацию растяжения (сжатия) в окружном

направлении обозначим ε_θ . Деформацию сдвига, которая измеряется изменением прямого угла между радиусом-вектором r и касательной к описанной им окружности S , обозначим $\gamma_{r\theta}$.

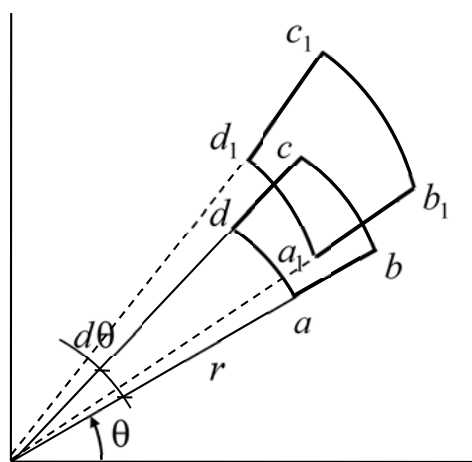


Рис. 40

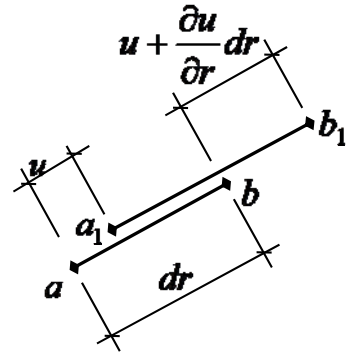
Таким образом, деформация ε_r характеризует изменение длины отрезка ab ; деформация ε_θ – изменение длины отрезка ad ; деформация $\gamma_{r\theta}$ – изменение прямого угла bad в результате деформации элемента площади $abcd$.

Пусть в состоянии после деформации элемент площади $abcd$ будет занимать положение $a_1b_1c_1d_1$.

Тогда

$$\varepsilon_r = \frac{a_1b_1 - ab}{ab}. \quad (a)$$

Совместим мысленно отрезок a_1b_1 с направлением радиуса-вектора r (рис. 41). Вполне понятно, что удлинение линейного элемента ab будет обусловлено разницей перемещений в радиальном направлении точек a и b , то есть, если $aa_1 = u$, то $bb_1 = u + \frac{\partial u}{\partial r} dr$. Учитывая, что $ab = dr$, а $a_1b_1 = \left(1 + \frac{\partial u}{\partial r}\right) dr$, для формулы (а) получим:



$$\varepsilon_r = \frac{\left(1 + \frac{\partial u}{\partial r} dr\right) - dr}{dr} = \frac{\partial u}{\partial r}. \quad (8.3)$$

Рис. 41

Деформация ε_θ определяется путём суммирования двух составляющих. Во-первых, имеет место удлинение дуги ad вследствие её радиального перемещения на величину u (рис. 42а). Учитывая зависимость (8.2), получим:

$$\varepsilon_\theta = \frac{(r+u)d\theta - rd\theta}{rd\theta} = \frac{u}{r}. \quad (б)$$

Во-вторых, дуга ad изменяет свою длину в результате разницы в перемещениях точек a и d в тангенциальном направлении (рис. 42б) :

$$\varepsilon_\theta = \frac{\left(v + \frac{\partial v}{\partial s} ds\right) - v}{ds} = \frac{\partial v}{\partial s} = \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta}. \quad (в)$$

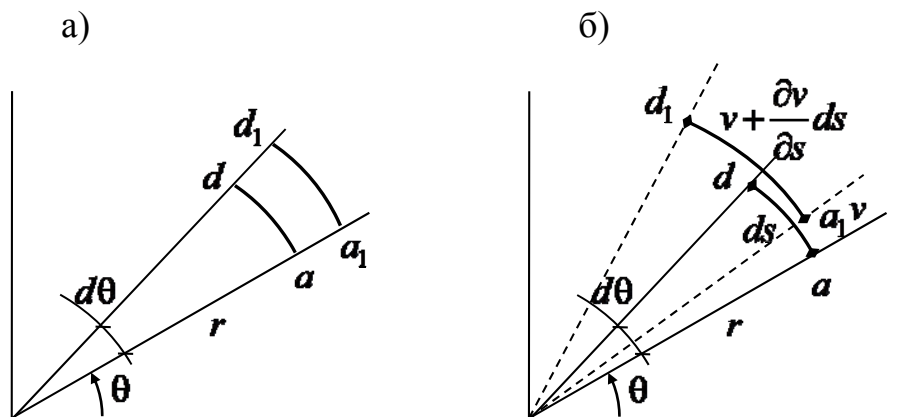


Рис. 42

Складывая обе составляющие, получим:

$$\varepsilon_{\theta} = \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} + \frac{u}{r}. \quad (8.4)$$

Рассмотрим угловую деформацию $\gamma_{r\theta}$. Если бы точка a в результате деформации не перемещалась в положение a_1 , а осталась на месте, то изменение прямого угла bad (см. рис. 40) определялось бы поворотом сторон ab и ad соответственно на углы dad_1 и bab_1 , то есть

$$\gamma'_{r\theta} = \angle dad_1 + \angle bab_1 = \frac{\partial u}{\partial s} + \frac{\partial v}{\partial r} = \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} + \frac{\partial v}{\partial r}. \quad (г)$$

Поскольку точка a в результате деформации переместится в положение a_1 на величину v , то наклон элемента ab изменится на величину $\frac{v}{r}$. Эту величину необходимо вычесть из угловой деформации, определяемой формулой (г). В результате получим:

$$\gamma_{r\theta} = \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} + \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r}. \quad (8.5)$$

Итак, компоненты деформации для плоской задачи теории упругости в полярных координатах определяются соотношениями (8.3), (8.4) и (8.5):

$$\begin{aligned} \varepsilon_r &= \frac{\partial u}{\partial r}; \\ \varepsilon_{\theta} &= \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} + \frac{u}{r}; \\ \gamma_{r\theta} &= \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} + \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r}. \end{aligned} \quad (8.6)$$

Уравнения равновесия

Выделим из упругого тела элемент $abcd$ с центральным углом $d\theta$ и наименьшим радиусом r (рис. 43). Пусть толщина элемента $abcd$ из его плоскости будет равна единице. Длины сторон элемента $abcd$ в полярной системе координат будут равны:

$$ad = rd\theta, \quad bc = (r + dr)d\theta, \quad ab = cd = dr.$$

По граням рассматриваемого элемента действуют нормальные и касательные напряжения. Рассмотрим условия его равновесия. В силу малости угла $d\theta$, положим: $\sin \frac{d\theta}{2} = \frac{d\theta}{2}$, $\cos \frac{d\theta}{2} = 1$.

Умножим приложенные к граням элемента $abcd$ напряжения на соответствующие площади и спроектируем полученные таким образом силы на направление радиуса-вектора r и на направление, перпендикулярное к радиусу-вектору θ .

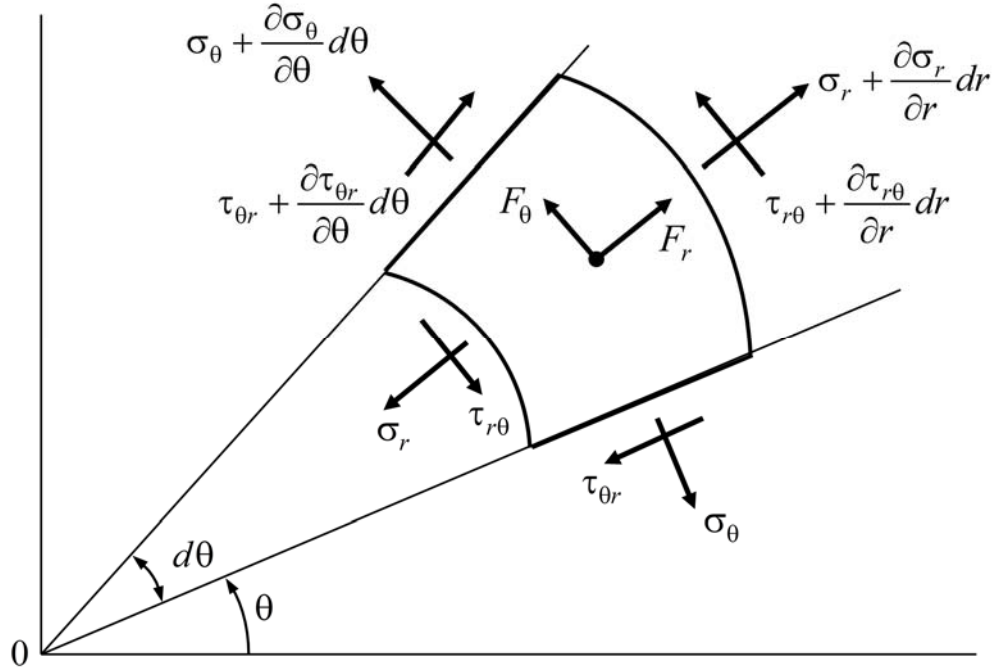


Рис. 43

$$\begin{aligned} \sum r = 0: & -\sigma_r r d\theta + \left(\sigma_r + \frac{\partial \sigma_r}{\partial r} dr \right) (r + dr) d\theta - \sigma_\theta dr \frac{d\theta}{2} - \\ & - \left(\sigma_\theta + \frac{\partial \sigma_\theta}{\partial \theta} d\theta \right) \frac{d\theta}{2} dr - \tau_{\theta r} dr \cdot 1 + \left(\tau_{\theta r} + \frac{\partial \tau_{\theta r}}{\partial \theta} d\theta \right) dr \cdot 1 + \\ & + F_r dr \cdot r d\theta = 0; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sum \theta = 0: & -\sigma_\theta dr \cdot 1 + \left(\sigma_\theta + \frac{\partial \sigma_\theta}{\partial \theta} d\theta \right) dr \cdot 1 - \tau_{r\theta} r d\theta + \\ & + \left(\tau_{r\theta} + \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial r} dr \right) (r + dr) d\theta + \tau_{\theta r} dr \frac{d\theta}{2} + \\ & + \left(\tau_{\theta r} + \frac{\partial \tau_{\theta r}}{\partial \theta} d\theta \right) dr \frac{d\theta}{2} + F_\theta dr \cdot r d\theta = 0. \end{aligned}$$

Упростив полученные соотношения, получим:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} + F_r &= 0; \\ \frac{\partial \tau_{\theta r}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_\theta}{\partial \theta} + \frac{2}{r} \tau_{\theta r} + F_\theta &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (8.7)$$

Вычислив сумму моментов всех сил относительно центра тяжести элемента $abcd$, получим закон парности касательных напряжений в полярной системе координат:

$$\sum M_{ц.т} = 0: \quad \tau_{r\theta} = \tau_{\theta r}. \quad (8.8)$$

Обратим внимание на одну особенность уравнений равновесия в полярных координатах (8.7), которая вытекает из анализа членов, содержащих в знаменателе координату r . Чем меньше значение координаты r , тем быстрее возрастают эти члены уравнений и для координаты $r \rightarrow 0$, эти члены стремятся к бесконечности. Таким образом, уравнения (8.7) нельзя применять, если координата рассматриваемой точки $r \rightarrow 0$, то есть уравнения равновесия (8.7) остаются справедливыми, если $r \geq r_0$, причём $r_0 \neq 0$.

Физические уравнения

Соотношения между напряжениями и деформациями для плоской задачи теории упругости в полярных координатах записываются фактически теми же уравнениями, что и в декартовых координатах. Отличие состоит только в обозначениях: вместо индексов x и y следует писать r и θ соответственно.

Физические уравнения в форме обобщённого закона Гука (7.27) в полярных координатах имеют вид:

$$\begin{aligned} \varepsilon_r &= \frac{1}{E'}(\sigma_r - \mu'\sigma_\theta); \\ \varepsilon_\theta &= \frac{1}{E'}(\sigma_\theta - \mu'\sigma_r); \\ \gamma_{r\theta} &= \frac{1}{G'}\tau_{r\theta}. \end{aligned} \quad (8.9)$$

Здесь для случая плоской деформации $E' = \frac{E}{1-\mu^2}$; $\mu' = \frac{\mu}{1-\mu}$; $G' = \frac{E'}{2(1+\mu')}$; $\sigma_z = \mu(\sigma_r + \sigma_\theta)$; для случая обобщённого плоского напряжённого состояния $E' = E$; $\mu' = \mu$; $G' = G$; $\sigma_z = 0$.

Физические уравнения в форме Ляме:

$$\begin{aligned} \sigma_r &= (2G + \lambda')\varepsilon_r + \lambda'\varepsilon_\theta; \\ \sigma_\theta &= (2G + \lambda')\varepsilon_\theta + \lambda'\varepsilon_r; \\ \tau_{r\theta} &= G\gamma_{r\theta}. \end{aligned} \quad (8.10)$$

Здесь для случая плоской деформации $\lambda' = \lambda$; $\varepsilon_z = 0$; для случая обобщённого плоского напряжённого состояния $\lambda' = \lambda \left(1 - \frac{\lambda}{\lambda + 2G}\right)$;

$$\varepsilon_z = -\frac{\lambda}{\lambda + 2G}(\varepsilon_r + \varepsilon_\theta).$$

Уравнение неразрывности деформаций

Уравнение неразрывности деформаций для плоской задачи (7.10) или (7.23) в полярной системе координат будет иметь вид:

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_r}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_\theta}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{r\theta}}{\partial x \partial y}. \quad (8.11)$$

Перейдём в уравнении (8.11) от дифференцирования по декартовым координатам x и y к дифференцированию по полярным координатам r и θ .

Рассмотрим некоторую функцию $\psi(r, \theta)$ и выразим её частные производные по декартовым координатам в полярных координатах, учитывая, что декартовы и полярные координаты связаны между собой соотношениями (8.1).

По правилу дифференцирования сложной функции

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial x}; \quad \frac{\partial \psi}{\partial y} = \frac{\partial \psi}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial y} + \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial y}. \quad (a)$$

Так как $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ и $\theta = \arctg \frac{y}{x}$ (см. (8.1)), то

$$\begin{aligned} \frac{\partial r}{\partial x} &= \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \cos \theta; & \frac{\partial r}{\partial y} &= \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \sin \theta; \\ \frac{\partial \theta}{\partial x} &= -\frac{y}{x^2 + y^2} = -\frac{\sin \theta}{r}; & \frac{\partial \theta}{\partial y} &= \frac{x}{x^2 + y^2} = \frac{\cos \theta}{r}. \end{aligned} \quad (б)$$

Подставив производные (б) в соотношения (а), получим:

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial r} \cos \theta - \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \frac{\sin \theta}{r}; \quad \frac{\partial \psi}{\partial y} = \frac{\partial \psi}{\partial r} \sin \theta + \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \frac{\cos \theta}{r}. \quad (8.12)$$

Перейдём к отысканию вторых производных. Применяя к производным $\frac{\partial \psi}{\partial x}$ и $\frac{\partial \psi}{\partial y}$ опять правило дифференцирования сложной функции, будем иметь:

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \psi}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial \psi}{\partial x} \right) \frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{\partial \psi}{\partial x} \right) \frac{\partial \theta}{\partial x};$$

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} \right) = \frac{\partial \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} \right)}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial y} + \frac{\partial \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} \right)}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial y}; \quad (\text{в})$$

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \psi}{\partial x} \right) = \frac{\partial \left(\frac{\partial \psi}{\partial x} \right)}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial y} + \frac{\partial \left(\frac{\partial \psi}{\partial x} \right)}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial y}.$$

Здесь, с учётом соотношений (8.12),

$$\begin{aligned} \frac{\partial \left(\frac{\partial \psi}{\partial x} \right)}{\partial r} &= \frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} \cos \theta - \frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta \partial r} \frac{\sin \theta}{r} + \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \frac{\sin \theta}{r^2}; \\ \frac{\partial \left(\frac{\partial \psi}{\partial x} \right)}{\partial \theta} &= \frac{\partial^2 \psi}{\partial r \partial \theta} \cos \theta - \frac{\partial \psi}{\partial r} \sin \theta - \frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta^2} \frac{\sin \theta}{r} - \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \frac{\cos \theta}{r}; \\ \frac{\partial \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} \right)}{\partial r} &= \frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} \sin \theta + \frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta \partial r} \frac{\cos \theta}{r} - \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \frac{\cos \theta}{r^2}; \\ \frac{\partial \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} \right)}{\partial \theta} &= \frac{\partial^2 \psi}{\partial r \partial \theta} \sin \theta + \frac{\partial \psi}{\partial r} \cos \theta - \frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta^2} \frac{\cos \theta}{r} - \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \frac{\sin \theta}{r}. \end{aligned} \quad (\text{г})$$

Подставив производные (г) в соотношения (в) и выполнив приведение подобных слагаемых, получим:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} &= \frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} \cos^2 \theta + \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta^2} \right) \sin^2 \theta + \\ &+ \left(\frac{2}{r^2} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} - \frac{2}{r} \frac{\partial^2 \psi}{\partial r \partial \theta} \right) \sin \theta \cdot \cos \theta; \\ \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} &= \frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} \sin^2 \theta + \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta^2} \right) \cos^2 \theta - \\ &- \left(\frac{2}{r^2} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} - \frac{2}{r} \frac{\partial^2 \psi}{\partial r \partial \theta} \right) \sin \theta \cdot \cos \theta; \\ \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} &= \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta^2} \right) \sin \theta \cdot \cos \theta + \\ &+ \left(\frac{1}{r} \frac{\partial^2 \psi}{\partial r \partial \theta} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \right) (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta). \end{aligned} \quad (8.13)$$

Теперь, полагая $\psi \equiv \varepsilon_\theta$ в первом уравнении, $\psi \equiv \varepsilon_r$ во втором уравнении, $\psi \equiv \gamma_{r\theta}$ в третьем уравнении соотношений (8.13), запишем уравнение неразрывности деформаций (8.11) в полярной системе координат:

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial^2 \varepsilon_r}{\partial r^2} \sin^2 \theta + \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \varepsilon_r}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \varepsilon_r}{\partial \theta^2} \right) \cos^2 \theta - \\
& - \left(\frac{2}{r^2} \frac{\partial \varepsilon_r}{\partial \theta} - \frac{2}{r} \frac{\partial^2 \varepsilon_r}{\partial r \partial \theta} \right) \sin \theta \cdot \cos \theta + \frac{\partial^2 \varepsilon_\theta}{\partial r^2} \cos^2 \theta + \\
& + \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \varepsilon_\theta}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \varepsilon_\theta}{\partial \theta^2} \right) \sin^2 \theta + \left(\frac{2}{r^2} \frac{\partial \varepsilon_\theta}{\partial \theta} - \frac{2}{r} \frac{\partial^2 \varepsilon_\theta}{\partial r \partial \theta} \right) \sin \theta \cdot \cos \theta = \quad (8.14) \\
& = \left(\frac{\partial^2 \gamma_{r\theta}}{\partial r^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial \gamma_{r\theta}}{\partial r} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \gamma_{r\theta}}{\partial \theta^2} \right) \sin \theta \cdot \cos \theta + \\
& + \left(\frac{1}{r} \frac{\partial^2 \gamma_{r\theta}}{\partial r \partial \theta} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial \gamma_{r\theta}}{\partial \theta} \right) (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta).
\end{aligned}$$

Принимая во внимание, что для плоской задачи $\sigma_x + \sigma_y = \sigma_r + \sigma_\theta$, а также учитывая, что гармонический оператор Лапласа $\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ в полярной системе координат на основании соотношений (8.13) имеет вид:

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2}, \quad (д)$$

запишем уравнение неразрывности деформаций в терминах напряжений (7.33) – уравнение Леви – в полярной системе координат:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right) (\sigma_r + \sigma_\theta) = 0. \quad (8.15)$$

Подводя итог сказанному, отметим, что общая система уравнений плоской задачи теории упругости в полярных координатах представляется:

- ✓ геометрическими соотношениями – (8.6);
- ✓ статическими уравнениями – (8.7);
- ✓ физическими зависимостями – (8.9) или (8.10).

При этом решение плоской задачи теории упругости должно удовлетворять условиям на поверхности тела и уравнению неразрывности деформаций (8.14), если решение строится в перемещениях, либо соотношению (8.15), если решение строится в напряжениях.

§8.2. Решение плоской задачи теории упругости в полярных координатах

Построение решения плоской задачи теории упругости в полярных координатах возможно как в перемещениях, так и в напряжениях. Для получения решения в перемещениях следует из общей системы уравнений плоской задачи теории упругости в полярных координатах исключить и напряжения, и деформации. Для построения решения в напряжениях надо из общей системы уравнений плоской задачи теории исключить и перемещения, и деформации.

Решение в перемещениях

Подставим физические уравнения в форме Ляме (8.10) в уравнения равновесия (8.7). Затем в полученных соотношениях деформации заменим перемещениями в соответствии с геометрическими соотношениями (8.6). В результате получим систему двух дифференциальных уравнений второго порядка в частных производных относительно функций перемещений $u(r, \theta)$ и $v(r, \theta)$:

$$\begin{cases} (2G + \lambda') \frac{\partial \varepsilon_r}{\partial r} + \lambda' \frac{\partial \varepsilon_\theta}{\partial r} + \frac{G}{r} \frac{\partial \gamma_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{2G}{r} (\varepsilon_r - \varepsilon_\theta) + F_r = 0; \\ G \frac{\partial \gamma_{r\theta}}{\partial r} + \frac{2G + \lambda'}{r} \frac{\partial \varepsilon_\theta}{\partial \theta} + \frac{\lambda'}{2} \frac{\partial \varepsilon_r}{\partial \theta} + \frac{2G}{r} \gamma_{r\theta} + F_\theta = 0. \end{cases} \quad (8.16)$$

Здесь

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varepsilon_r}{\partial r} &= \frac{\partial^2 u}{\partial r^2}; & \frac{\partial \varepsilon_\theta}{\partial r} &= -\frac{1}{r^2} \frac{\partial v}{\partial \theta} + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 v}{\partial r \partial \theta} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{u}{r^2}; \\ \frac{\partial \varepsilon_r}{\partial \theta} &= \frac{\partial^2 u}{\partial r \partial \theta}; & \frac{\partial \varepsilon_\theta}{\partial \theta} &= \frac{1}{r} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial \theta^2} + \frac{\partial u}{\partial \theta} \right); \\ \frac{\partial \gamma_{r\theta}}{\partial r} &= -\frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial u}{\partial \theta} - v \right) + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial r \partial \theta} - \frac{\partial v}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 v}{\partial r^2}; \\ \frac{\partial \gamma_{r\theta}}{\partial \theta} &= \frac{1}{r} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} - \frac{\partial v}{\partial \theta} \right) + \frac{\partial^2 v}{\partial r \partial \theta}; \\ \varepsilon_r - \varepsilon_\theta &= \frac{\partial u}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{u}{r}; & \gamma_{r\theta} &= \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} + \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r}. \end{aligned} \quad (8.17)$$

Подставим формулы (8.17) в уравнения (8.16):

$$\begin{cases} (2G + \lambda') \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{G}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} + \frac{G + \lambda'}{r} \frac{\partial^2 v}{\partial r \partial \theta} + \frac{\lambda'}{r} \frac{\partial u}{\partial r} - \\ - \frac{G + \lambda'}{r^2} \frac{\partial v}{\partial \theta} + \lambda' \frac{u}{r^2} + \frac{2G}{r} \left(\frac{\partial u}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{u}{r} \right) + F_r = 0; \\ G \frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + \frac{2G + \lambda'}{r^2} \frac{\partial^2 v}{\partial \theta^2} + \frac{G + \lambda'}{r} \frac{\partial^2 u}{\partial r \partial \theta} - \\ - \frac{G}{r} \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{G + \lambda'}{r^2} \frac{\partial u}{\partial \theta} + G \frac{v}{r^2} + \frac{2G}{r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} + \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r} \right) + F_\theta = 0. \end{cases} \quad (8.18)$$

Система дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка относительно функций перемещений (8.18) представляет собой разрешающую систему уравнений плоской задачи теории упругости в полярных координатах.

Решение плоской задачи теории упругости в перемещениях в полярной системе координат сводится к отысканию таких функций перемещений $u(r, \theta)$ и $v(r, \theta)$, которые удовлетворяли бы уравнениям равновесия (8.18) и условиям на границе тела. Условия неразрывности деформаций (8.14) удовлетворяются при этом тождественно.

При определении краевых условий следует учитывать, что при $r \rightarrow 0$ система (8.18) будет иметь особенность. Таким образом, краевые условия в перемещениях нужно формулировать так:

- при $r \rightarrow r_0$ перемещения на поверхности тела будут равны заданным:

$$u(r_0, \theta) = u_0; \quad v(r_0, \theta) = v_0. \quad (8.19)$$

Здесь $r_0 \neq 0$.

Решение в напряжениях

Решение в напряжениях плоской задачи теории упругости в полярных координатах сводится к интегрированию уравнений равновесия (8.7) совместно с уравнением неразрывности деформаций (8.15).

Введём функцию напряжений в полярных координатах: $\varphi = \varphi(r, \theta)$. Как известно, в декартовой прямоугольной системе координат напряжения σ_x , σ_y и τ_{xy} связаны с функцией напряжений (без учёта объёмных сил) соотношениями (7.37)

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}; \quad \sigma_y = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}; \quad \tau_{xy} = -\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y}. \quad (8.20)$$

Учитывая выражения для вторых частных производных (8.13), а также заменив произвольную функцию $\psi(r, \theta)$ на функцию напряжений $\varphi(r, \theta)$ в соотношениях (8.20), получим:

$$\begin{aligned}
\sigma_x &= \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} \cos^2 \theta + \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \theta^2} \right) \sin^2 \theta + \\
&\quad + \left(\frac{2}{r^2} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} - \frac{2}{r} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r \partial \theta} \right) \sin \theta \cdot \cos \theta; \\
\sigma_y &= \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} \sin^2 \theta + \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \theta^2} \right) \cos^2 \theta - \\
&\quad - \left(\frac{2}{r^2} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} - \frac{2}{r} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r \partial \theta} \right) \sin \theta \cdot \cos \theta; \\
\tau_{xy} &= \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \theta^2} \right) \sin \theta \cdot \cos \theta + \\
&\quad + \left(\frac{1}{r} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r \partial \theta} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \right) (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta).
\end{aligned} \tag{8.21}$$

Теперь на основе выражений (8.21) для σ_x , σ_y и τ_{xy} составим выражения для напряжений σ_r , σ_θ и $\tau_{r\theta}$. Для этого совместим ось r с осью X . Тогда будем иметь [15]: $\theta = 0$, $\sigma_r = \sigma_x$, $\sigma_\theta = \sigma_y$ и $\tau_{r\theta} = \tau_{xy}$. Следовательно, формулы (8.21) преобразуются к виду:

$$\sigma_r = \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \theta^2}; \quad \sigma_\theta = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2}; \quad \tau_{r\theta} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} - \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r \partial \theta}. \tag{8.22}$$

Непосредственной подстановкой соотношений (8.22) в уравнения равновесия (8.7) можно убедиться, что уравнения равновесия удовлетворяются тождественно.

Подставив формулы (8.22) в уравнение неразрывности деформаций (8.15), получим *бигармоническое* уравнение, записанное в полярной системе координат:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right) \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \theta^2} \right) = 0. \tag{8.23}$$

Решая плоскую задачу теории упругости в напряжениях, необходимо подобрать функцию $\varphi(r, \theta)$ таким образом, чтобы она удовлетворяла уравнению (8.23). Уравнения равновесия (8.7) при этом будут удовлетворены тождественно.

§8.3. Главные площадки и главные напряжения в полярной системе координат

Оценку прочности упругих тел, находящихся в условиях плоской задачи, в полярной системе координат следует выполнять в соответствии с теориями прочности, часть из которых описана в гл. 4, §4.5. Критерии прочности в гл. 4 записаны в терминах главных напряжений, между которыми имеет место следующая зависимость: $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$, то есть σ_1 – это наибольшее главное напряжение, σ_3 – наименьшее главное напряжение. Ввиду этого в полярной системе координат найдём площадки, на которых действуют главные напряжения, а также найдём величину главных напряжений.

Рассмотрим элемент тела a,b,c единичной толщины в направлении, перпендикулярном плоскости чертежа в полярной системе координат (r, θ) , выделенный в окрестностях некоторой точки деформированного тела, находящегося в условиях плоской задачи (рис. 44).

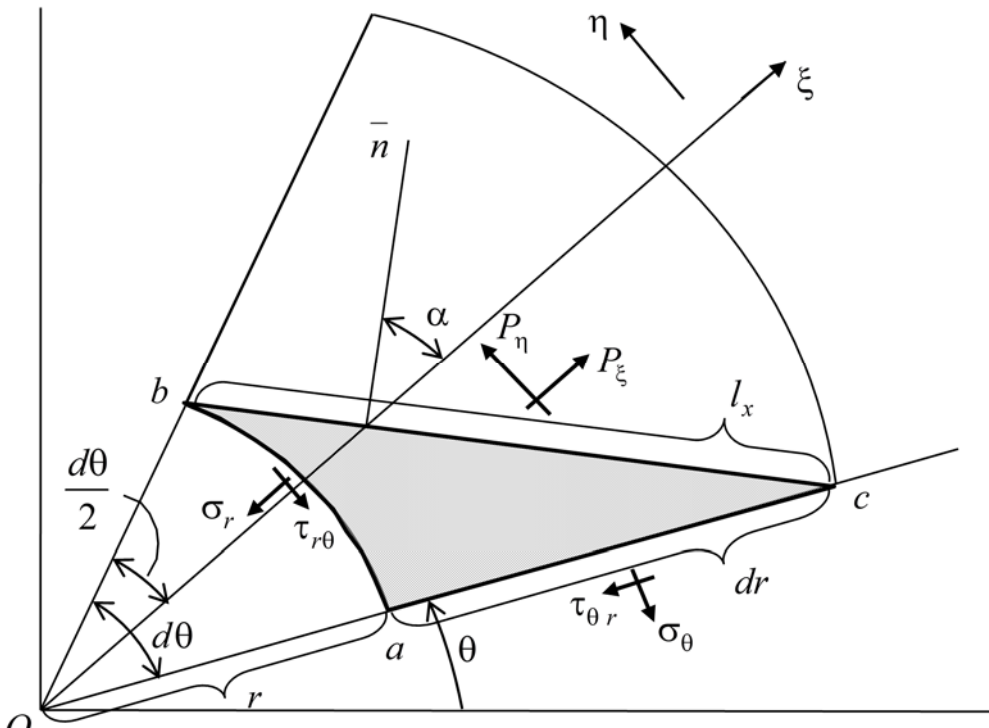


Рис. 44

Ориентацию в пространстве произвольной наклонной площадки bc будем определять нормалью \bar{n} . Обозначим угол между направлением радиуса-вектора полярной системы координат ξ и нормалью к наклонной площадке \bar{n} буквой α . Проекции вектора полного напряжения \bar{P} , действующего на наклонной площадке, на оси ξ и η обозначим P_ξ и P_η .

Бесконечно малый элемент abc находится в равновесии. Следовательно, сумма проекций всех сил на оси ξ и η , действующих на выделенный элемент abc , должна быть равна нулю:

$$\begin{aligned} \sum \xi = 0: & P_{\xi} l_x - \tau_{\varphi r} dr \cos\left(\frac{d\theta}{2}\right) - \sigma_{\varphi} dr \sin\left(\frac{d\theta}{2}\right) - \sigma_r 2r \sin\left(\frac{d\theta}{2}\right) = 0; \\ \sum \eta = 0: & P_{\eta} l_x + \tau_{\varphi r} dr \sin\left(\frac{d\theta}{2}\right) - \sigma_{\varphi} dr \cos\left(\frac{d\theta}{2}\right) - \tau_{r\varphi} 2r \sin\left(\frac{d\theta}{2}\right) = 0. \end{aligned} \quad (8.24)$$

В соотношениях (8.24) длина наклонной площадки l_x может быть получена из рассмотрения геометрии вырезанного элемента abc (рис. 45).

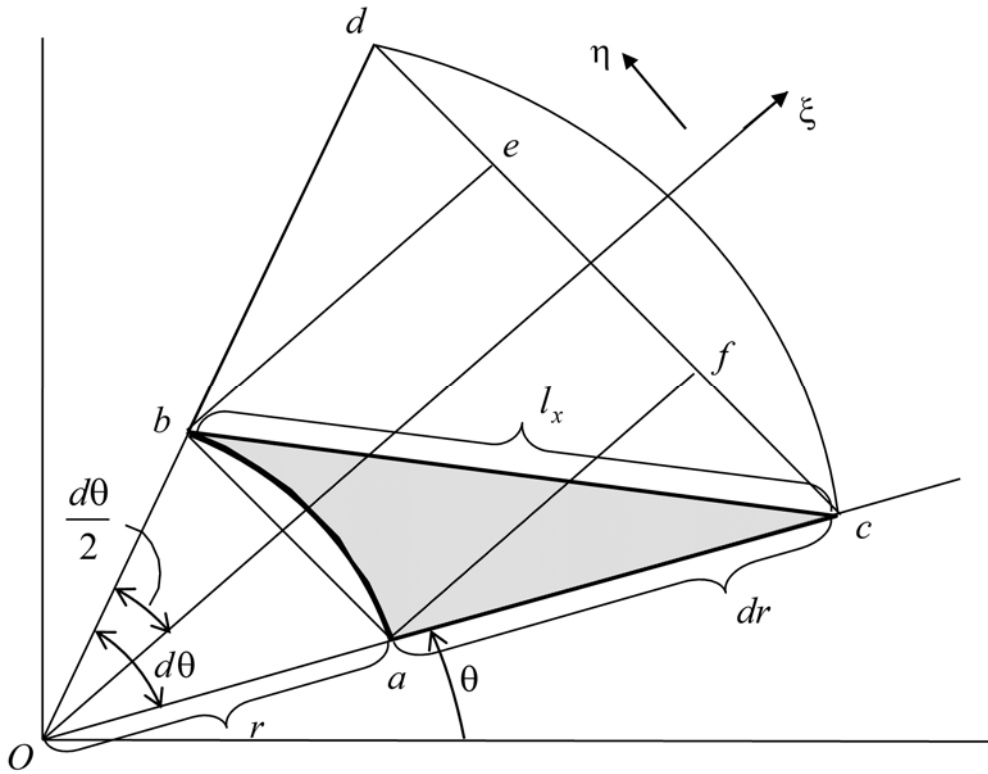


Рис. 45

Действительно, длины сторон равнобедренной трапеции $abdefc$ равны:

$$\begin{aligned} ab &= 2r \sin\left(\frac{d\theta}{2}\right), \quad cd = 2(r + dr) \sin\left(\frac{d\theta}{2}\right), \quad ac = bd = dr, \\ de &= cf = \frac{1}{2} \left[2(r + dr) \sin\left(\frac{d\theta}{2}\right) - 2r \sin\left(\frac{d\theta}{2}\right) \right] = dr \sin\left(\frac{d\theta}{2}\right), \\ af^2 &= be^2 = dr^2 \left[1 - \sin^2\left(\frac{dr}{2}\right) \right], \quad ec = dc - de = (2r + dr) \sin\left(\frac{d\theta}{2}\right). \end{aligned}$$

Следовательно, из прямоугольного треугольника abc находим:

$$l_x^2 = dr^2 + 4r(r + dr) \sin^2\left(\frac{d\theta}{2}\right). \quad (8.25)$$

Для контроля выполним предельный переход в соотношении (8.25). В итоге получаем:

– для $d\varphi \rightarrow 0$, $l_x = dr$;

– для $dr \rightarrow 0$, $l_x = 2r \sin\left(\frac{d\theta}{2}\right)$.

В силу малости угла $d\theta$, положим $\sin\left(\frac{d\theta}{2}\right) = \frac{d\theta}{2}$ и $\cos\left(\frac{d\theta}{2}\right) = 1$. При этом выражения (8.24) преобразуются к виду:

$$\begin{aligned} P_\xi l_x - \tau_{\varphi r} dr - \sigma_\varphi \frac{drd\theta}{2} - \sigma_r r d\theta &= 0; \\ P_\eta l_x + \tau_{\varphi r} \frac{drd\theta}{2} - \sigma_\varphi dr - \tau_{r\varphi} r d\theta &= 0. \end{aligned} \quad (8.26)$$

Аналогично, для формулы (8.25) получим:

$$l_x^2 = dr^2 + r(r + dr)d\theta^2. \quad (8.27)$$

Далее, подставив формулу (8.27) в соотношения (8.26), найдём проекции вектора полного напряжения, действующего на наклонной площадке, на оси ξ и η :

$$P_\xi = \frac{\sigma_r r d\theta + \sigma_\varphi dr \frac{d\theta}{2} + \tau_{r\varphi} dr}{\sqrt{dr^2 + r(r + dr)(d\theta)^2}}; \quad P_\eta = \frac{\sigma_\varphi dr + \tau_{r\varphi} \left(r - \frac{dr}{2}\right) d\theta}{\sqrt{dr^2 + r(r + dr)(d\theta)^2}}. \quad (8.28)$$

Нормальное и касательное напряжения на наклонной площадке выражаются через напряжения P_ξ и P_η с помощью соотношений (см. рис. 46):

$$\begin{aligned} \sigma_n &= P_\xi \cos \alpha + P_\eta \sin \alpha; \\ \tau_n &= -P_\xi \sin \alpha + P_\eta \cos \alpha. \end{aligned} \quad (8.29)$$

Угол α связан с длинами сторон элемента abc формулой:

$$\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \frac{\sqrt{(h - dr)(h - l_x)(h - r \cdot d\theta)}}{h - dr}. \quad (8.30)$$

Здесь $h = \frac{1}{2}(dr + r \cdot d\theta + l_x)$.

Полное напряжение на наклонной площадке

$$P = \sqrt{P_\xi^2 + P_\eta^2} = \sqrt{\sigma_n^2 + \tau_n^2}. \quad (8.31)$$

Поскольку, вообще говоря, $dr \ll r$, то можно положить $r + dr \cong r$.
Формулы (8.28) при этом получают вид:

$$P_\xi = \frac{\sigma_r r d\theta + \sigma_\varphi dr \frac{d\theta}{2} + \tau_{r\varphi} dr}{\sqrt{dr^2 + r^2 (d\theta)^2}}; \quad P_\eta = \frac{\sigma_\varphi dr + \tau_{r\varphi} r d\theta}{\sqrt{dr^2 + r^2 (d\theta)^2}}. \quad (8.32)$$

Длина наклонной площадки l_x будет в этом случае равна

$$l_x = \sqrt{dr^2 + r^2 (d\theta)^2}. \quad (8.33)$$

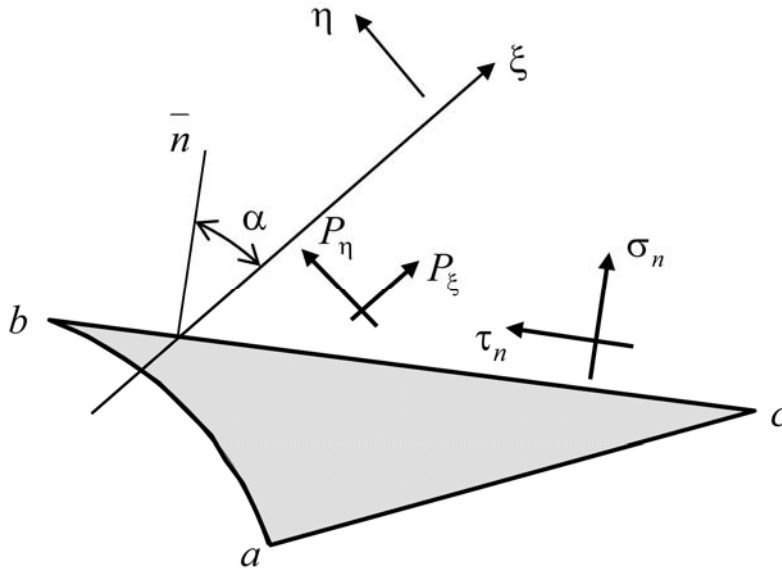


Рис. 46

На главных площадках касательные напряжения отсутствуют, то есть $\tau_n = 0$. Но тогда из соотношения (8.29₂) можно найти угол α_{01} , определяющий ориентацию одной из главных площадок:

$$\operatorname{tg} \alpha_{01} = \frac{P_\eta}{P_\xi} = \frac{\sigma_\varphi dr + \tau_{r\varphi} \left(r - \frac{dr}{2} \right) d\theta}{\sigma_r r d\theta + \sigma_\varphi dr \frac{d\theta}{2} + \tau_{r\varphi} dr}. \quad (8.34)$$

Вторая главная площадка будет перпендикулярна к площадке, ориентация которой определяется углом α_{01} , то есть её ориентация будет определяться углом $\alpha_{02} = \alpha_{01} + 90^\circ$.

Нормальные напряжения, действующие на главных площадках, можно определить из уравнения (8.29₁):

$$\begin{aligned}
\sigma_{01} &= P_{\xi} \cos \alpha_{01} + P_{\eta} \sin \alpha_{01}; \\
\sigma_{02} &= P_{\xi} \cos(\alpha_{01} + 90^0) + P_{\eta} \sin(\alpha_{01} + 90^0) = \\
&= -P_{\xi} \sin \alpha_{01} + P_{\eta} \cos \alpha_{01}.
\end{aligned}
\tag{8.35}$$

Итак, главные напряжения в полярной системе координат определяются соотношениями (8.35) и действуют на взаимно перпендикулярных площадках, ориентация одной из которых определяется соотношением (8.34).

В случае плоской деформации главными напряжениями будут напряжения, определяемые формулами (8.35), и $\sigma_z = \mu(\sigma_r + \sigma_{\theta})$. В случае обобщённого плоского напряжённого состояния главными напряжениями будут напряжения, определяемые формулами (8.35), и напряжение $\sigma_z = \sigma_3 = 0$. Эти напряжения действуют на трёх взаимно перпендикулярных площадках. Оценка величин этих главных напряжений для определения наибольшего и наименьшего среди главных напряжений, действующих в заданной точке упругого тела, требует дополнительного численного исследования в каждом конкретном случае.

Глава 9. КРУЧЕНИЕ ПРИЗМАТИЧЕСКИХ СТЕРЖНЕЙ

Стержнем называется тело, два геометрических размера которого значительно меньше третьего (рис. 47). В зависимости от вида и характера внешней нагрузки, действующей на стержень, он может испытывать различные виды сопротивления. В частности, если нагрузка приложена в центре тяжести поперечного сечения прямолинейного стержня и направлена вдоль его продольной оси, то он испытывает осевое растяжение или сжатие; если нагрузка действует перпендикулярно к продольной оси стержня и линия её действия продольную ось стержня пересекает, то стержень испытывает изгиб; если нагрузка приложена перпендикулярно его продольной оси, но линия её действия эту ось не пересекает, то стержень находится в условиях кручения.

Корректное решение задачи о кручении прямолинейного стержня постоянного поперечного сечения силами, приложенными по его концам, дал Сен-Венан. Руководствуясь элементарной теорией кручения стержня с круглым поперечным сечением, Сен-Венан предположил, что деформация скручиваемого стержня состоит из двух частей: 1) поворотов поперечных сечений стержня, которые будут такими же, как и повороты стержней с круглым поперечным сечением; 2) депланации (искажения) поперечных сечений стержня, которая для всех поперечных сечений рассматриваемого стержня будет одинакова.

С задачами кручения упругих стержней приходится сталкиваться довольно часто. Деформацию кручения испытывают всевозможные валы в машинах и механизмах. Кручение возникает и в элементах строительных конструкций, например, стропильная балка будет испытывать деформацию кручения в момент монтажа при установке на неё элементов покрытия. Достаточно часто на кручение работают прямолинейные стержни, входящие в состав сложных сооружений – мостов, ферм и так далее.

§9.1. Решение задачи о кручении при помощи функции напряжений

При изложении теории кручения будем придерживаться работы [40]. Рассмотрим прямолинейный упругий однородный стержень произвольного поперечного сечения, нагруженный лишь на торцевых поверхностях, перпендикулярных к оси стержня, нагрузками, статически эквивалентными крутящему моменту (рис. 47). Объёмные силы не учитываем, полагая их много меньше действующих на стержень внешних сил.

Основываясь на результатах элементарной теории кручения стержней круглого поперечного сечения, запишем выражения для перемещений в

Из соотношений для деформаций (9.3) и напряжений (9.4) следует, что продольные волокна в стержне не растягиваются и не сжимаются и давление между ними отсутствует. Кроме того, как следует из зависимостей (9.3), поперечные сечения не искажаются, так как ε_x , ε_y , γ_{xy} равны нулю.

Функция $\psi(x, y)$, определяющая депланацию поперечного сечения, должна быть выбрана таким образом, чтобы удовлетворялись уравнения равновесия (1.17). Подставив зависимости (9.4) в соотношения (1.17), получим:

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = 0. \quad (9.5)$$

Рассмотрим далее условия на поверхности скручиваемого стержня. На боковой поверхности, используя формулы (1.12) и принимая во внимание соотношения (9.4), получим, что первые два уравнения из соотношений (1.12) удовлетворяются тождественно, а третье принимает вид:

$$\tau_{xz}l + \tau_{yz}m = 0. \quad (9.6)$$

Это означает, что результирующее касательное напряжение на контуре поперечного сечения стержня направлено вдоль касательной к контуру (рис. 48). Этому условию можно удовлетворить, если боковая поверхность стержня свободна от внешних нагрузок.

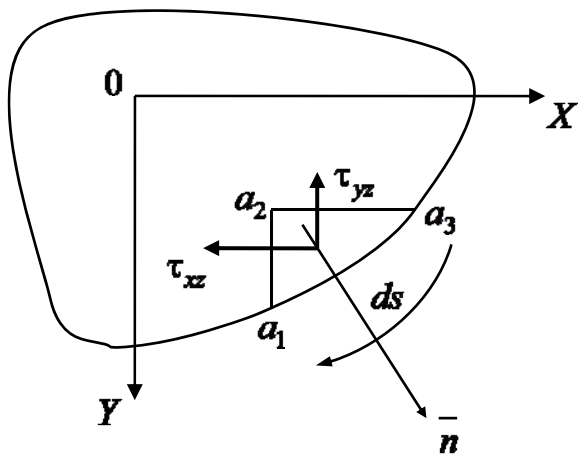


Рис. 48

Рассматривая бесконечно малый элемент $a_1 a_2 a_3$ на границе и предполагая, что контурная дуга s увеличивается в направлении от точки a_3 к точке a_1 , получаем:

$$l = \cos(n, x) = \frac{dy}{ds},$$

$$m = \cos(n, y) = -\frac{dx}{ds}.$$

Но тогда уравнение (9.6) с учётом формул (9.4) принимает вид:

$$\left(\frac{\partial \psi}{\partial x} - y \right) \frac{dy}{ds} - \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} + x \right) \frac{dx}{ds} = 0. \quad (9.7)$$

Таким образом, любая задача о кручении стержня сводится к задаче отыскания функции кручения $\psi(x, y)$, удовлетворяющей уравнению (9.5) и граничным условиям (9.7).

Обратимся ещё раз к уравнениям равновесия (1.17). Ввиду обращения в нуль величин σ_x , σ_y , σ_z , τ_{xy} (см. (9.4)), уравнения равновесия приводятся к виду:

$$\frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} = 0; \quad \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} = 0; \quad \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} = 0. \quad (9.8)$$

Здесь первые два уравнения, в силу зависимостей (9.4), удовлетворяются тождественно. Третье уравнение будет, очевидно, удовлетворено, если ввести некоторую функцию $\varphi(x, y)$ так, что

$$\tau_{xz} = \frac{\partial \varphi(x, y)}{\partial y}; \quad \tau_{yz} = -\frac{\partial \varphi(x, y)}{\partial x}. \quad (9.9)$$

Функция $\varphi(x, y)$, введённая Прандтлем, называется *функцией напряжения при кручении*.

Сопоставляя уравнения (9.9) и (9.4), получим:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} = G\varphi \left(\frac{\partial \psi}{\partial x} - y \right); \quad \frac{\partial \varphi}{\partial x} = -G\varphi \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} + x \right). \quad (9.10)$$

Дифференцируя соотношение (9.10₁) по y , а соотношение (9.10₂) – по x , будем иметь:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = G\varphi \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} - 1 \right); \quad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = -G\varphi \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial y \partial x} + 1 \right).$$

Отсюда следует, что функция напряжений должна удовлетворять дифференциальному уравнению

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = H, \quad (9.11)$$

где $H = -2G\varphi$.

Подставив (9.9) в граничное условие (9.6), получим:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} \frac{dy}{ds} + \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{dx}{ds} = \frac{d\varphi}{ds} = 0. \quad (9.12)$$

Это показывает, что функция напряжений должна быть постоянной вдоль границы поперечного сечения. В случае односвязных сечений, например для стержней сплошного поперечного сечения, эту константу можно выбирать произвольно, в частности, равной нулю.

Таким образом, определение распределения напряжений по поперечному сечению скручиваемого стержня состоит в отыскании такой функции

напряжений $\varphi(x, y)$, которая удовлетворяет уравнению (9.11) и равна нулю на контуре стержня.

Рассмотрим теперь условия по концам скручиваемого стержня. Так как нормали к конечным поперечным сечениям стержня параллельны оси z , то есть $l = m = 0$, $n = \pm 1$, то граничные условия (1.12) принимают вид:

$$P_{nx} = \pm \tau_{zx}; \quad P_{ny} = \pm \tau_{zy}; \quad P_{nz} = 0. \quad (9.13)$$

Здесь знак «+» должен приниматься для того конца стержня, для которого внешняя нормаль к поперечному сечению совпадает с положительным направлением оси z . Из формул (9.13) следует, что на концах стержня касательные усилия распределяются таким же образом, как и касательные напряжения по поперечным сечениям стержня. Покажем, что эти усилия приводятся к крутящему моменту.

Действительно, подставляя в уравнения (9.13) равенства (9.9) и учитывая, что функция напряжений $\varphi(x, y)$ на контуре поперечного сечения равна нулю, находим:

$$\begin{aligned} \iint P_{nx} dx dy &= \iint \tau_{xz} dx dy = \iint \frac{\partial \varphi}{\partial y} dx dy = \int dx \int \frac{\partial \varphi}{\partial y} dy = 0, \\ \iint P_{ny} dx dy &= \iint \tau_{yz} dx dy = -\iint \frac{\partial \varphi}{\partial x} dx dy = -\int dy \int \frac{\partial \varphi}{\partial x} dx = 0. \end{aligned}$$

Таким образом, результирующая усилий, распределённых по концам стержня, равна нулю и эти силы сводятся к моменту, величина которого равна:

$$M_z = \iint (P_{ny} x - P_{nx} y) dx dy = -\iint \frac{\partial \varphi}{\partial x} x dx dy - \iint \frac{\partial \varphi}{\partial y} y dx dy.$$

Интегрируя это выражение по частям и учитывая, что на границе $\varphi = 0$, получаем:

$$M_z = 2 \iint \varphi(x, y) dx dy. \quad (9.14)$$

Таким образом, принимая перемещения в форме (9.1) и (9.2) и определяя касательные напряжения τ_{xz} и τ_{yz} через функцию напряжений (9.9), удовлетворяющую уравнению (9.11) и граничным условиям (9.12), мы получаем распределение напряжений, которое удовлетворяет уравнениям равновесия (1.17), оставляет боковую поверхность стержня свободной от внешней нагрузки и даёт на концах стержня крутящие моменты, определяемые выражением (9.14). Условия совместности (2.42) при этом рассматривать не нужно, так как напряжения определяются исходя из выражений для перемещений (9.1) и (9.2).

Построенное решение для скручиваемого стержня предполагает, чтобы внешние силы, действующие по концам стержня, распределялись некоторым определённым образом. Однако практическое приложение данного решения этим не ограничивается. Из принципа Сен-Венана следует, что на достаточном удалении от концов длинного скручиваемого стержня напряжения зависят только от величины крутящего момента M_z и практически не зависят от способа, по которому усилия распределяются по концевым сечениям.

В заключение отметим, что стержень постоянного поперечного сечения, боковая поверхность которого свободна от внешней нагрузки, а крутящий момент не меняется по длине стержня, находится в условиях *чистого кручения*. Если крутящий момент изменяется по длине стержня, а на торцах помимо крутящих моментов дополнительно действуют самоуравновешенные нормальные нагрузки, то стержень будет находиться в условиях *стеснённого кручения*.

§9.2. Мембранная аналогия

Для многих технических задач, встречающихся в инженерной практике, получение аналитического решения связано со значительными, а иногда и непреодолимыми трудностями. Ввиду этого для получения решения приходится прибегать к численным и экспериментально-модельным методам.

Под *моделью* понимают такую мысленно представляемую или искусственно реализуемую материальную систему (квазиобъект), которая, отражая главные свойства объекта или процесса исследования, способна определённым образом заменять его так, что при её изучении получают новую информацию об этом объекте. К понятию «модель» непосредственно примыкает понятие *моделирование*, которое обозначает процесс исследования на моделях.

Модели, которыми пользуются при исследовании упругих систем, можно условно подразделить на четыре группы.

Логические модели на основе экспериментальных данных, аналогий или математических соотношений дают представление об изучаемом явлении.

Геометрические модели воспроизводят различные реальные объекты, как правило, лишь с соблюдением геометрического подобия; физическое подобие в таких моделях не соблюдается. Геометрические модели служат в основном для демонстрационных целей.

Физические модели предназначены главным образом для воспроизведения физики происходящих явлений на установках (моделях), различающихся параметрами и масштабом. Исследования на физических моделях

применяют тогда, когда из-за сложности самого объекта либо граничных условий рассчитать его вообще невозможно или достоверность расчёта требует тщательной экспериментальной проверки.

Математические модели основаны на тождественности уравнений, описывающих рассматриваемый физический процесс в натуральных условиях и при его моделировании. Природа явлений в объекте и модели может быть совершенно различна. Математическое моделирование используется, когда требуется получить численные значения величин, характеризующих натуральный объект, по данным, измеренным на модели.

При решении задач о кручении упругих стержней наиболее плодотворной оказалась математическая модель, построенная на основе *мембранной аналогии*. Мембранная аналогия установлена Л. Прандтлем в 1904 г.

Рассмотрим жёсткий контур, совпадающий с контуром поперечного сечения скручиваемого стержня. На этот контур натягивается однородная мембрана, которая подвергается равномерному поперечному постоянному давлению интенсивности q . В равновесии мембрана удерживается растягивающими силами S , равномерно распределёнными по контуру (рис. 49). Ввиду малости толщины мембрана может работать только на растяжение.

Вырежем из мембраны прямоугольный элемент $abcd$ с длинами сторон dx и dy , параллельными координатным осям X и Y соответственно. Составим уравнение равновесия элемента $abcd$, спроектировав все приложенные к нему силы на вертикальную ось Z .

Угол наклона касательной к поверхности мембраны, параллельной оси X и проведённой через центр стороны ab , будет равен $\alpha \cong \frac{\partial w}{\partial x}$. Тогда угол

наклона касательной к поверхности мембраны, параллельной оси X и проведённой через центр стороны bc , будет равен

$$\alpha + \frac{\partial \alpha}{\partial x} dx \cong \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} dx.$$

К стороне ad элемента $abcd$ приложена сила натяжения Sdy . С учётом направления оси Z проекция этой силы на ось Z будет равна $-Sdy \frac{\partial w}{\partial x}$. Проекция на ту же ось силы, действующей по стороне bc , будет соответственно

$$\text{равна: } Sdy \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} dx \right).$$

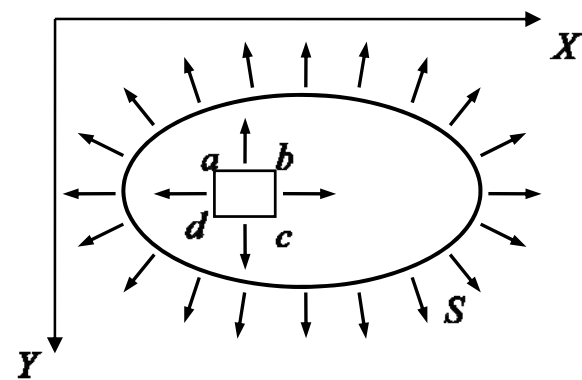
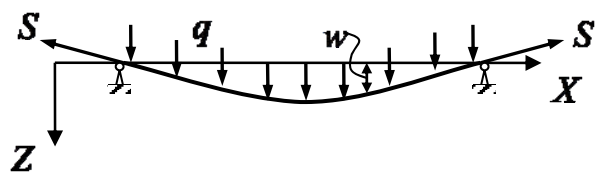


Рис. 49

действующие по сторонам ab и cd , будут равны соответственно $-Sdx \frac{\partial w}{\partial y}$

и $Sdx \left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} dy \right)$. Следовательно, уравнение равновесия элемента

мембраны получает вид:

$$-S \frac{\partial w}{\partial x} dy + S \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} dx \right) dy - S \frac{\partial w}{\partial y} dx + S \left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} dy \right) dx + q dx dy = 0.$$

Упростив, получим:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = -\frac{q}{S}. \quad (9.15)$$

Прогибов мембраны на контуре не будет из-за жёсткости контура, то есть

$$w(x_0, y_0) = 0. \quad (9.16)$$

Здесь x_0, y_0 – координаты точек контура.

Сравнивая далее уравнение (9.15) и условие (9.16) для мембраны с уравнением (9.11) и условием (9.12) для функции напряжений $\varphi(x, y)$ при кручении стержня, приходим к выводу, что эти две задачи тождественно совпадают. Это значит, что по прогибам мембраны $w(x, y)$ мы можем получить значения функции напряжений $\varphi(x, y)$ с помощью замены величины $-\frac{q}{S}$ из уравнения (9.15) на величину $H = -2G\varphi$ из уравнения (9.11).

Завершая обсуждение полученных результатов, заметим, что мембранная модель-аналог даёт возможность экспериментально изучать напряжённое состояние стержней при кручении, на форму контура поперечного сечения которых не накладываются никакие ограничения. Так, например, для поперечного сечения скручиваемого стержня горизонтали мембраны (линии уровня) являются траекториями касательных напряжений; удвоенный объём, ограниченный изогнутой мембраной и плоскостью x, y , равен крутящему моменту.

Глава 10. ИЗГИБ ПЛАСТИН

Пластиной называется призматическое тело, толщина которого значительно меньше его размеров в плане (рис. 50). Плоскость, делящая

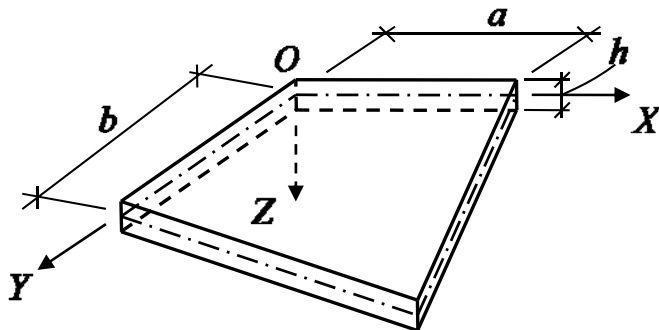


Рис. 50

пластинку пополам по толщине, называется *срединой*. Линия пересечения боковой поверхности пластинки со срединной плоскостью называется *контуром пластинки*.

Введём декартову систему координат так, чтобы координатная плоскость XOY совпадала со срединной плоскостью, а ось OZ

направим вниз. Толщину пластинки обозначим буквой h , размер в плане в направлении оси X – буквой a , размер в плане в направлении оси Y – буквой b .

Пластинка будет находиться под действием внешней произвольной поперечной нагрузки $q(x, y)$, то есть нагрузки, направленной вертикально вниз и приложенной к верхней поверхности пластинки. Опорные конструкции пластинки будут располагаться по её контуру. Таким образом, под действием внешней нагрузки пластинка будет испытывать изгиб и её срединная плоскость в результате деформации превращается в изогнутую поверхность.

Толщина пластинки оказывает существенное влияние на её свойства при изгибе. Различают три вида пластин в зависимости от отношения характерного размера в плане a к её толщине h :

- ✓ если $\frac{a}{h} \leq 8 \dots 10$, то такие пластинки называются *толстыми плитами*;
- ✓ если $\frac{a}{h} \geq 80 \dots 100$, то такие пластинки называются *мембранами*;
- ✓ если $8 \dots 10 \leq \frac{a}{h} \leq 80 \dots 100$, то такие пластинки называются *тонкими*.

Если у тонких пластинок величина ожидаемого прогиба не превышает $(0,2 \dots 0,5)h$, то такие пластинки называются *жёсткими*. Если у тонких пластинок величина ожидаемого прогиба превышает $(0,2 \dots 0,5)h$, то такие пластинки называются *гибкими*.

Расчёт толстых плит выполняется с учётом всех компонент напряжённо-деформированного состояния как массивных тел с помощью общих уравнений пространственной задачи теории упругости.

При изгибе мембран основную роль в восприятии поперечной нагрузки играют усилия растяжения (а также сдвига) в срединной поверхности. Эти усилия, называемые *мембранными*, создают проекцию на вертикальную ось и тем самым уравнивают внешнюю поперечную нагрузку.

У тонких жёстких пластинок основную роль в сопротивлении внешним нагрузкам играют изгибные силовые факторы. Деформациями в срединной поверхности и мембранными усилиями в этом случае можно пренебречь.

Тонкая гибкая пластинка одновременно работает и на изгиб, и как мембрана. Значимость изгибных силовых факторов и мембранных усилий становится одного порядка

Далее мы будем рассматривать вопросы расчёта тонких жёстких пластин на изгиб.

§10.1. Основные гипотезы и допущения

Тонкие жёсткие пластинки рассчитывают по приближённой теории – технической теории изгиба пластинок, основанной на гипотезах, предложенных немецким физиком Г. Кирхгофом. При изложении теории изгиба тонких жёстких пластинок будем в основном придерживаться работ [1] и [34].

1. *Гипотеза прямых нормалей*: любой прямолинейный элемент, нормальный к срединной плоскости до деформации, остаётся прямолинейным и нормальным к срединной поверхности и после деформирования пластинки, и длина его не изменяется.

В локальной системе прямоугольных декартовых координат, координатная плоскость XOY которой привязана к срединной поверхности пластинки, гипотеза прямых нормалей предполагает, что прямые углы между направлением рассматриваемого прямолинейного элемента и осями OX и OY не меняются в процессе изгиба пластинки, то есть остаются прямыми. Следовательно, сдвиги между слоями пластинки, параллельными срединной плоскости, отсутствуют, или, по крайней мере, настолько малы, что их можно не учитывать:

$$\gamma_{zx} = 0; \quad \gamma_{zy} = 0. \quad (10.1)$$

Гипотеза о сохранении длины прямолинейного элемента предполагает, что линейная деформация в направлении оси Z (по толщине пластинки) отсутствует или настолько мала, что ею можно пренебречь:

$$\varepsilon_z = 0. \quad (10.2)$$

2. *Гипотеза об отсутствии давления между слоями пластинки, параллельными срединной плоскости*: слои пластинки, параллельные срединной плоскости, при её изгибе не давят друг на друга.

Эта гипотеза позволяет пренебрегать напряжением σ_z ввиду его малости, то есть, по сути, принимается, что

$$\sigma_z = 0. \quad (10.3)$$

3. *Гипотеза о недеформируемости срединной плоскости:* в срединной плоскости отсутствуют деформации растяжения, сжатия и сдвига, то есть она является нейтральной, и её перемещения в направлении осей X и Y равны нулю, то есть

$$u_0 = 0, \quad v_0 = 0. \quad (10.4)$$

Третья гипотеза носит характер ограничения ввиду малости вертикальных прогибов пластинки, что означает, что мембранными усилиями в пластинке можно пренебречь.

§10.2. Перемещения, деформации и напряжения в пластинке

На основании геометрических соотношений (2.12) и первой гипотезы Г. Кирхгофа (соотношение (10.2)) получаем:

$$\varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z} = 0, \text{ то есть } w = w(x, y). \quad (10.5)$$

Это означает, что перемещения точек пластинки в направлении оси OZ не зависят от координаты z . Другими словами, все точки пластинки, лежащие на одной вертикали, в результате деформации получают одинаковые перемещения в направлении оси OZ .

Рассмотрим далее соотношения (10.1):

$$\gamma_{zx} = \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} = 0; \quad \gamma_{zy} = \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} = 0.$$

Отсюда

$$\frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{\partial w}{\partial x}; \quad \frac{\partial v}{\partial z} = -\frac{\partial w}{\partial y}.$$

Проинтегрируем полученные зависимости по координате z . В результате, принимая во внимание соотношение (10.5), получим:

$$u = -z \frac{\partial w}{\partial x} + c_1(x, y); \quad v = -z \frac{\partial w}{\partial y} + c_2(x, y). \quad (a)$$

Постоянные интегрирования $c_1(x, y)$ и $c_2(x, y)$ (постоянные по отношению к переменной z) найдём на основании третьей гипотезы:

✓ при $z = 0$ имеем $u = u_0 = 0$, то есть $c_1(x, y) = 0$;

✓ при $z = 0$ имеем $v = v_0 = 0$, то есть $c_2(x, y) = 0$.

Тогда перемещения (а) в пластинке будут определяться по формулам

$$u = -z \frac{\partial w}{\partial x} = u(x, y, z); \quad v = -z \frac{\partial w}{\partial y} = v(x, y, z). \quad (10.6)$$

Деформации найдём, используя геометрические соотношения (2.12):

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x} = -z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = \varepsilon_x(x, y, z); \\ \varepsilon_y &= \frac{\partial v}{\partial y} = -z \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = \varepsilon_y(x, y, z); \\ \gamma_{xy} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = -2z \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = \gamma_{xy}(x, y, z). \end{aligned} \quad (10.7)$$

Таким образом, соотношения (10.7), с учётом зависимостей (10.1) и (10.2), определяют все компоненты тензора деформации.

Из соотношений (10.6) и (10.7) следует, что и перемещения, и деформации в пластинке выражены через функцию прогибов $w(x, y)$ срединной поверхности.

В соответствии со второй гипотезой (10.3) нормальные напряжения на площадках, параллельных срединной плоскости пластинки, равны нулю. В этом случае остальные компоненты тензора напряжений можно найти из физического закона в форме, аналогичной форме Ляме (3.13). С учётом первой и второй гипотез Кирхгофа получим:

$$\begin{aligned} \sigma_x &= (2G + \lambda_n) \varepsilon_x + \lambda_n \varepsilon_y; \\ \sigma_y &= (2G + \lambda_n) \varepsilon_y + \lambda_n \varepsilon_x; \\ \sigma_z &= \varepsilon_x + \varepsilon_y = 0; \\ \tau_{xy} &= G \gamma_{xy}; \\ \tau_{yz} &= G \gamma_{yz} = 0; \\ \tau_{zx} &= G \gamma_{zx} = 0. \end{aligned} \quad (10.8)$$

$$\text{Здесь } G = \frac{E}{2(1+\mu)}; \quad \lambda_n = \frac{\mu E}{(1+\mu)(1-\mu)}. \quad (10.9)$$

В соотношениях (10.8) равенства (10.8₃), (10.8₅) и (10.8₆) получены лишь вследствие принятых гипотез. При этом из уравнений равновесия (1.17), без учёта объёмных сил, выполняться будет лишь соотношение (1.17₃).

В действительности касательные напряжения τ_{yz} и τ_{zx} не равны нулю, и их отличные от нуля значения можно найти из первого и второго уравнений равновесия. Но тогда третье уравнение равновесия будет

выполняться, если напряжение σ_z будет отличным от нуля; его, отличное от нуля значение найдём из третьего уравнения равновесия.

Используя выражения для деформаций (10.7), запишем выражения для напряжений σ_x , σ_y и τ_{xy} :

$$\begin{aligned}\sigma_x &= -(2G + \lambda_n)z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \lambda_n z \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}; \\ \sigma_y &= -(2G + \lambda_n)z \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \lambda_n z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}; \\ \tau_{xy} &= -2Gz \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}.\end{aligned}\tag{10.10}$$

Пренебрегая объёмными силами, из первого уравнения соотношений равновесия (1.17) находим

$$\frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} = -\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} - \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y}.$$

Подставим сюда напряжения из формул (10.10):

$$\frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} = (2G + \lambda_n)z \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + \lambda_n z \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} + 2Gz \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2}.$$

После упрощений получаем:

$$\frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} = (2G + \lambda_n)z \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right),$$

или

$$\frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} = (2G + \lambda_n)z \frac{\partial}{\partial x} \nabla^2 w.$$

Полученное соотношение проинтегрируем по координате z :

$$\tau_{zx} = \frac{(2G + \lambda_n)z^2}{2} \frac{\partial}{\partial x} \nabla^2 w + c_3(x, y).\tag{б}$$

Постоянную интегрирования $c_3(x, y)$ (постоянную по отношению к переменной z) найдём из граничных условий на верхней либо нижней поверхности пластинки, полагая, что на пластинку действует только нормальная к её срединной поверхности нагрузка, а касательная нагрузка по верхней либо нижней поверхности пластинки отсутствует. Итак,

✓ при $z = \pm \frac{h}{2}$ касательные напряжения $\tau_{zx} = 0$, $\tau_{zy} = 0$.

С учётом этих условий, из формулы (б) найдём

$$c_3(x, y) = -\frac{(2G + \lambda_n)h^2}{8} \frac{\partial}{\partial x} \nabla^2 w.$$

Подставляя постоянную интегрирования $c_3(x, y)$ в формулу (б), получаем:

$$\tau_{zx} = -\frac{(2G + \lambda_n)}{2} \left(\frac{h^2}{4} - z^2 \right) \frac{\partial}{\partial x} \nabla^2 w. \quad (10.11)$$

Рассматривая аналогичным образом второе уравнение из соотношений равновесия (1.17), находим

$$\tau_{zy} = -\frac{(2G + \lambda_n)}{2} \left(\frac{h^2}{4} - z^2 \right) \frac{\partial}{\partial y} \nabla^2 w. \quad (10.12)$$

Теперь рассмотрим третье уравнение из соотношений равновесия (1.17) и найдём отсюда напряжение σ_z . Имеем:

$$\frac{\partial \sigma_z}{\partial z} = -\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} - \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y}. \quad (в)$$

Подставим в формулу (в) напряжения из формул (10.11) и (10.12):

$$\frac{\partial \sigma_z}{\partial z} = \frac{(2G + \lambda_n)}{2} \left(\frac{h^2}{4} - z^2 \right) \frac{\partial}{\partial x^2} \nabla^2 w + \frac{(2G + \lambda_n)}{2} \left(\frac{h^2}{4} - z^2 \right) \frac{\partial}{\partial y^2} \nabla^2 w.$$

После элементарных преобразований получим:

$$\frac{\partial \sigma_z}{\partial z} = \frac{(2G + \lambda_n)}{2} \left(\frac{h^2}{4} - z^2 \right) \left(\frac{\partial}{\partial x^2} \nabla^2 w + \frac{\partial}{\partial y^2} \nabla^2 w \right),$$

или

$$\frac{\partial \sigma_z}{\partial z} = \frac{(2G + \lambda_n)}{2} \left(\frac{h^2}{4} - z^2 \right) \nabla^2 \nabla^2 w. \quad (г)$$

Проинтегрируем соотношение (е) по координате z :

$$\sigma_z = \frac{(2G + \lambda_n)}{2} \left(\frac{h^2}{4} z - \frac{z^3}{3} \right) \nabla^2 \nabla^2 w + c_4(x, y). \quad (д)$$

Постоянную интегрирования $c_4(x, y)$ (постоянную по отношению к переменной z) найдём из граничных условий на нижней поверхности пластинки при $z = +\frac{h}{2}$, полагая, что на нижней поверхности пластинки внешняя нормальная к поверхности пластинки нагрузка отсутствует. Итак,

✓ при $z = +\frac{h}{2}$ нормальное напряжение $\sigma_z = 0$.

Из формулы (д) при этом найдём:

$$c_4(x, y) = -\frac{(2G + \lambda_n) h^3}{2 \cdot 12} \nabla^2 \nabla^2 w.$$

Подставив постоянную интегрирования $c_4(x, y)$ в формулу (д), получим:

$$\sigma_z = -\frac{(2G + \lambda_n)}{24} (h^3 - 3h^2z + 4z^3) \nabla^2 \nabla^2 w. \quad (10.13)$$

Итак, выпишем формулы для вычисления компонент тензора напряжений в тонких жёстких пластинках:

$$\begin{aligned} \sigma_x &= -(2G + \lambda_n) z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \lambda_n z \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}; \\ \sigma_y &= -(2G + \lambda_n) z \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \lambda_n z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}; \\ \tau_{xy} &= -2Gz \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \\ \tau_{zx} &= -\frac{(2G + \lambda_n)}{2} \left(\frac{h^2}{4} - z^2 \right) \frac{\partial}{\partial x} \nabla^2 w; \\ \tau_{zy} &= -\frac{(2G + \lambda_n)}{2} \left(\frac{h^2}{4} - z^2 \right) \frac{\partial}{\partial y} \nabla^2 w; \\ \sigma_z &= -\frac{(2G + \lambda_n)}{24} (h^3 - 3h^2z + 4z^3) \nabla^2 \nabla^2 w. \end{aligned} \quad (10.14)$$

В формулах (10.14) все напряжения выражены через прогибы срединной поверхности пластинки $w(x, y)$.

На рис. 51 показаны эпюры напряжений по толщине пластинки, действующих в сечениях, перпендикулярных её срединной плоскости. Напряжения σ_x , σ_y и $\tau_{xy} = \tau_{yx}$ изменяются по толщине пластинки по линейному закону, обращаясь в нуль на срединной поверхности и принимая экстремальные значения в точках на верхней и нижней поверхностях пластинки. Касательные напряжения $\tau_{zx} = \tau_{xz}$ и $\tau_{zy} = \tau_{yz}$ распределяются по толщине пластинки по закону квадратной параболы, обращаясь в нуль на верхней и нижней поверхностях пластинки и принимая максимальные значения на уровне срединной поверхности. Нормальное напряжение σ_z , действующее на площадках, перпендикулярных оси OZ , согласно формуле (10.14₃) изменяется по толщине пластинки по закону кубической параболы, принимая нулевое значение на нижней поверхности пластинки.

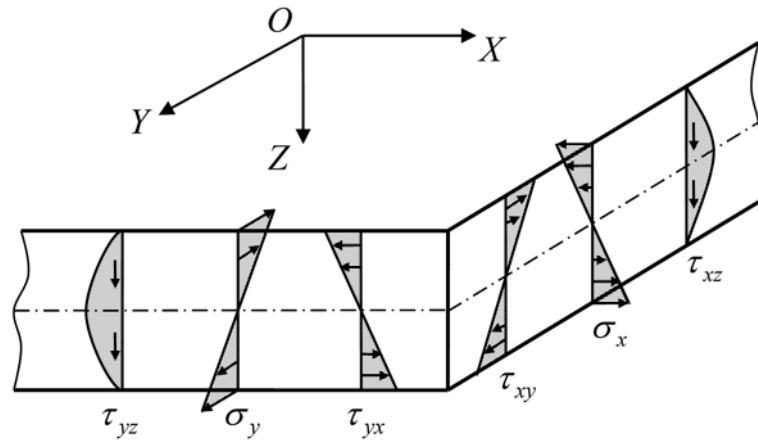


Рис. 51

§10.3. Внутренние усилия в пластинке

Для определения внутренних усилий, возникающих в сечениях пластинки, нормальных к её срединной поверхности, и соответствующих напряжениям (10.14), вырежем из пластинки элементарный столбик высотой, равной толщине пластинки h , и размерами в плане dx и dy (рис. 52). На боковых гранях этого столбика на расстоянии z от срединной поверхности выделим элементарные полоски (площадки) с размерами $dx dz$ и $dy dz$. На площадке $dy dz$, перпендикулярной к оси OX , действуют нормальное напряжение σ_x и касательные напряжения τ_{xy} и τ_{xz} . На площадке $dx dz$, перпендикулярной к оси OY , действуют нормальное напряжение σ_y и касательные напряжения τ_{yx} и τ_{yz} .

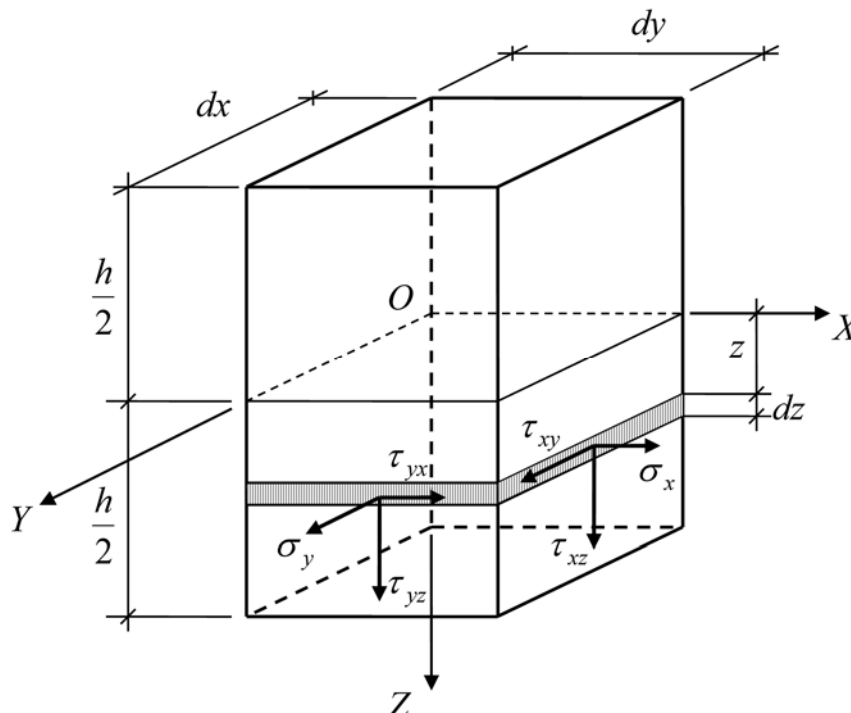


Рис. 52

Далее рассмотрим боковую грань элементарного столбика, перпендикулярную к оси OX . Совокупности напряжений σ_x , τ_{xy} и τ_{xz} , действующих на элементарных площадках (полосках) на этой грани величиной $dA_x = dydz$, соответствует совокупность внутренних усилий N_x , M_x , Q_x , S_x и H_x .

Здесь N_x – нормальная сила, действующая в направлении оси OX перпендикулярно к рассматриваемой грани элементарного столбика. Её величина будет определяться интегралом:

$$N_x = \int_{A_x} \sigma_x dA_x. \quad (10.15)$$

M_x – изгибающий момент, поворачивающий рассматриваемую грань элементарного столбика вокруг оси OY , то есть действующий навстречу оси OX . Величина изгибающего момента будет определяться интегралом:

$$M_x = \int_{A_x} \sigma_x z dA_x. \quad (10.16)$$

Q_x – поперечная сила, действующая в плоскости рассматриваемой грани элементарного столбика в направлении оси OZ . Величина поперечной силы будет определяться интегралом:

$$Q_x = \int_{A_x} \tau_{xz} dA_x. \quad (10.17)$$

S_x – сдвигающая сила, действующая в плоскости рассматриваемой грани элементарного столбика в направлении оси OY . Величина сдвигающей силы будет определяться интегралом:

$$S_x = \int_{A_x} \tau_{xy} dA_x. \quad (10.18)$$

H_x – крутящий момент, поворачивающий рассматриваемую грань элементарного столбика вокруг оси OX , то есть действующий навстречу оси OY . Величина крутящего момента будет определяться интегралом:

$$H_x = \int_{A_x} \tau_{xy} z dA_x. \quad (10.19)$$

В формулах (10.15)–(10.19) величина $A_x = hdy$.

Поскольку в любом вертикальном сечении пластинки внутренние усилия в общем случае распределены неравномерно, то мы будем рассматривать внутренние усилия, приходящиеся на единицу длины. В этом случае $dx = 1$ и $dy = 1$. Но тогда величина элементарной площади $dA_x = dz$

и площадь боковой поверхности столбика $A_x = h$. Следовательно, расчётные интегралы (10.15)–(10.18) с учётом соотношений (10.14) будут равны:

$$\begin{aligned} N_x &= \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \sigma_x dz = - \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \left[(2G + \lambda_n) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \lambda_n \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right] z dz = \\ &= - \left[(2G + \lambda_n) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \lambda_n \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right] \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} z dz = 0; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M_x &= \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \sigma_x z dz = - \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \left[(2G + \lambda_n) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \lambda_n \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right] z^2 dz = \\ &= - \left[(2G + \lambda_n) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \lambda_n \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right] \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} z^2 dz = \\ &= - \left[(2G + \lambda_n) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \lambda_n \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right] \frac{h^3}{12}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Q_x &= \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \tau_{xz} dz = \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} - \frac{2G + \lambda_n}{2} \left(\frac{h^2}{4} - z^2 \right) \frac{\partial}{\partial x} \nabla^2 w dz = \\ &= - \frac{2G + \lambda_n}{2} \frac{\partial}{\partial x} \nabla^2 w \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \left(\frac{h^2}{4} - z^2 \right) dz = \\ &= - (2G + \lambda_n) \frac{h^2}{12} \frac{\partial}{\partial x} \nabla^2 w; \end{aligned}$$

$$S_x = \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \tau_{xy} dz = \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} -2Gz \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} dz = -2G \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} z dz = 0;$$

$$H_x = \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \tau_{xy} z dz = \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} -2Gz^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} dz = -2G \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} z^2 dz = -2G \frac{h^3}{12} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}.$$

Рассматривая далее боковую поверхность элементарного столбика, перпендикулярную к оси OY , можно по аналогии получить величину внутренних усилий N_y , M_y , Q_y , S_y и H_y , действующих по этой грани.

Итак, под действием поперечной нагрузки в сечениях пластинки, перпендикулярных её срединной плоскости, возникают следующие внутренние усилия:

– изгибающие моменты

$$M_x = - \left[(2G + \lambda_n) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \lambda_n \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right] \frac{h^3}{12};$$

$$M_y = - \left[(2G + \lambda_n) \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \lambda_n \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right] \frac{h^3}{12};$$
(10.20)

– поперечные силы

$$Q_x = -(2G + \lambda_n) \frac{h^2}{12} \frac{\partial}{\partial x} \nabla^2 w;$$

$$Q_y = -(2G + \lambda_n) \frac{h^2}{12} \frac{\partial}{\partial y} \nabla^2 w;$$
(10.21)

– крутящий момент

$$H_x = H_y = H = -2G \frac{h^3}{12} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}.$$
(10.22)

Все внутренние усилия выражены через прогибы срединной поверхности пластинки. Положительные направления указанных усилий показаны на рис. 53.

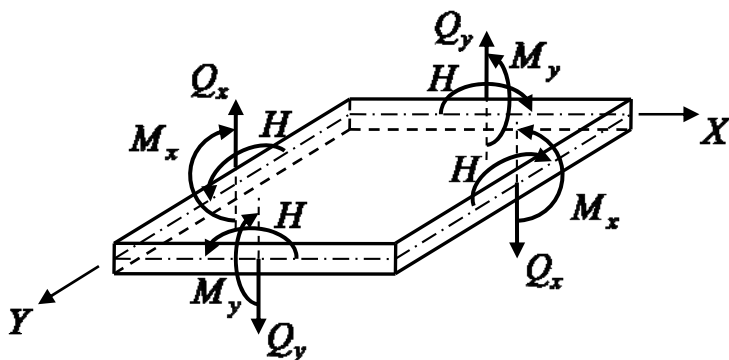


Рис. 53

Отметим, что поскольку все внутренние усилия являются распределёнными, приходящими на единицу длины, то единицы их измерения будут следующими:

$$[M_x] = [M_y] =$$

$$= [H] = \frac{1 \text{ Н} \cdot 1 \text{ м}}{1 \text{ м}} = 1 \text{ Н};$$

$$[Q_x] = [Q_y] = \frac{1 \text{ Н}}{1 \text{ м}}.$$

Сравнивая выражения для внутренних усилий (10.20), (10.21), (10.22) с выражениями для напряжений (10.14), найдём выражения напряжений через внутренние усилия:

$$\sigma_x = \frac{12M_x}{h^3}z; \quad \sigma_x = \frac{12M_x}{h^3}z; \quad (10.23)$$

$$\tau_{xy} = \frac{12H}{h^3}z; \quad (10.24)$$

$$\tau_{zx} = \frac{6Q_x}{h^3} \left(\frac{h^2}{4} - z^2 \right); \quad \tau_{zy} = \frac{6Q_y}{h^3} \left(\frac{h^2}{4} - z^2 \right). \quad (10.25)$$

Формулы (10.23) и (10.25) соответствуют формулам сопротивления материалов для определения нормальных и касательных напряжений в поперечных сечениях при изгибе балки с прямоугольным сечением высотой h и шириной, равной единице.

Принимая во внимание формулы (10.9), запишем формулы для напряжений (10.14) и внутренних усилий (10.20), (10.21) и (10.22) через модуль упругости E и коэффициент Пуассона μ .

Для напряжений получим:

$$\begin{aligned} \sigma_x &= -\frac{Ez}{1-\mu^2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right); \\ \sigma_y &= -\frac{Ez}{1-\mu^2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right); \\ \tau_{xy} &= -\frac{Ez}{1+\mu} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}; \\ \tau_{zx} &= -\frac{E}{2(1-\mu^2)} \left(\frac{h^2}{4} - z^2 \right) \frac{\partial}{\partial x} \nabla^2 w; \\ \tau_{zy} &= -\frac{E}{2(1-\mu^2)} \left(\frac{h^2}{4} - z^2 \right) \frac{\partial}{\partial y} \nabla^2 w; \\ \sigma_z &= -\frac{E}{24(1-\mu^2)} (h^3 - 3h^2z + 4z^3) \nabla^2 \nabla^2 w. \end{aligned} \quad (10.26)$$

Выражения для внутренних усилий получают вид:

$$M_x = -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right); \quad M_y = -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right);$$

$$Q_x = -D \frac{\partial}{\partial x} \nabla^2 w; \quad Q_y = -D \frac{\partial}{\partial y} \nabla^2 w; \quad (10.27)$$

$$H = -D(1 - \mu) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}.$$

Здесь $D = \frac{Eh^3}{12(1 - \mu^2)}$ — цилиндрическая жёсткость.

Совокупное действие в поперечных сечениях пластинки поперечных сил Q_x и Q_y и крутящего момента H приводит к появлению приведённых поперечных сил V_x и V_y , причём

$$V_x = Q_x + \Delta Q_x; \quad V_y = Q_y + \Delta Q_y. \quad (10.28)$$

Простое объяснение появления дополнительных поперечных сил ΔQ_x и ΔQ_y было дано Максвеллом. В качестве пояснения рассмотрим поперечное сечение пластинки, перпендикулярное к оси OY (рис. 52). Выделим на этом поперечном сечении две соседние элементарные площадки шириной dx каждая и высотой, равной толщине пластинки h . На эти площадки действуют крутящие моменты Hdx и $\left(H + \frac{\partial H}{\partial x} dx \right) dx$, реализуемые системой горизонтальных касательных усилий, обусловленных действием касательных напряжений τ_{yx} (рис. 54а). Заменяем эти крутящие моменты парами вертикальных сил H и $H + \frac{\partial H}{\partial x} dx$ с плечом dx , имеющими тот же момент (рис. 54б), то есть как бы повернём пары горизонтальных сил на 90° .

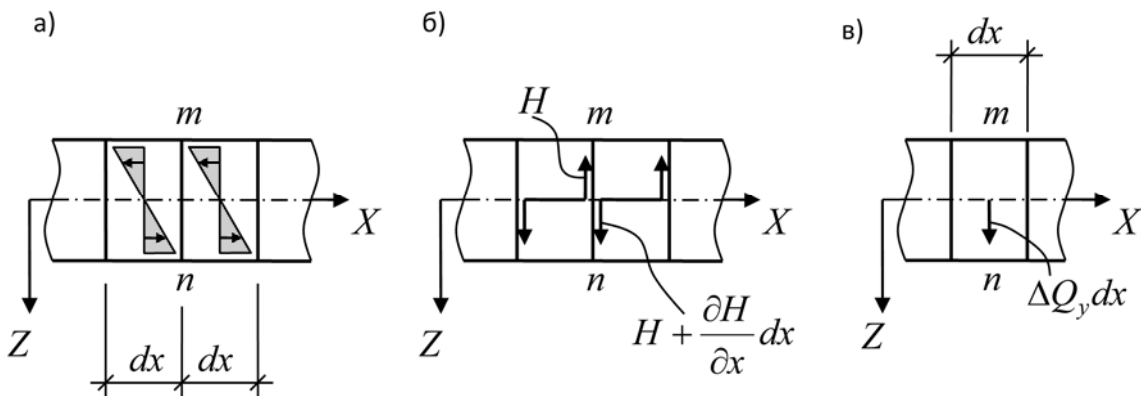


Рис. 54

Такая статически эквивалентная замена пар горизонтальных сил парами вертикальных сил в рамках данной теории изгиба пластин вполне допустима. Действительно, элементы, к которым они приложены, связаны с недеформируемой (прямой) нормалью mn и поворачиваются в плоскости действия этих моментов вместе с нею на некоторый угол как твёрдые тела. А в твёрдом теле, как известно из теоретической механики, такая замена возможна, так как это не нарушает условий равновесия.

Силы H и $H + \frac{\partial H}{\partial x}$ действуют вдоль линии mn в противоположные стороны. Приравняв их разность нагрузке $\Delta Q_y dx$, собранной с длины dx (рис. 54в), получим $\frac{\partial H}{\partial x} dx = \Delta Q_y dx$. Следовательно, $\Delta Q_y = \frac{\partial H}{\partial x}$ и суммарная приведённая поперечная сила (10.28₂) будет представлена вторым из двух равенств

$$V_x = Q_x + \frac{\partial H}{\partial y}; \quad V_y = Q_y + \frac{\partial H}{\partial x}. \quad (10.29)$$

Первое приведённое поперечное усилие относится к поперечному сечению пластинки, перпендикулярному оси OX и записано по аналогии.

С учетом формул для внутренних усилий в пластинке (10.27) выражения для приведённых поперечных сил (10.29) будут иметь вид:

$$V_x = -D \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + (2 - \mu) \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right];$$

$$V_y = -D \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + (2 - \mu) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right]. \quad (10.30)$$

Если рассматриваемые поперечные сечения совпадают с контуром пластинки (рис. 55), то действие крутящего момента на стыке двух взаимно перпендикулярных поперечных сечений приводит к появлению в угловой точке прямоугольной пластинки сосредоточенной силы. Действительно, на конце кромки контура, например перпендикулярного оси OY , сила H повернутой пары уже не уравновешивается такой же силой последующего элемента dx , так как кромка контура обрывается. С учётом аналогичной силы на кромке контура, перпендикулярного оси OX , получаем в угловой точке прямоугольной пластинки сосредоточенную суммарную силу

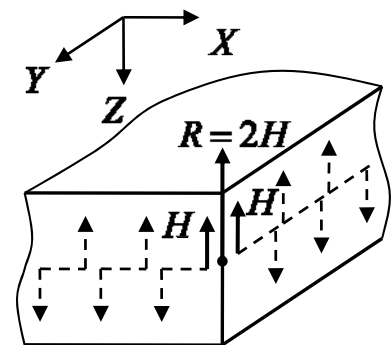


Рис. 5

$$R = 2H = -2D(1 - \mu) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}. \quad (10.31)$$

Из всего вышесказанного следует, что приведённые поперечные силы V_x и V_y представляют собой распределённые опорные реакции по контуру тонкой пластины, а сосредоточенные силы R – сосредоточенные реакции в угловых точках контура прямоугольной пластинки. На рис. 56 показаны положительные направления сосредоточенных реакций в угловых точках и приведённых поперечных сил V_x и V_y .

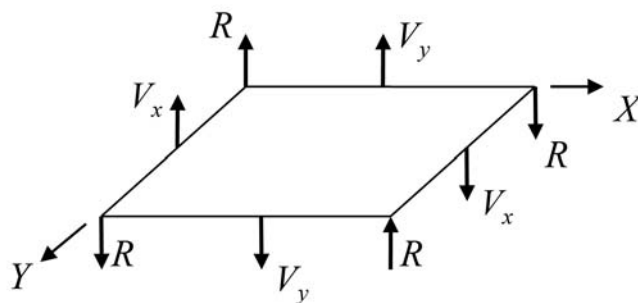


Рис. 56

Рассмотрим усилия в косых сечениях, перпендикулярных срединной поверхности, тонкой пластинки. Пусть вертикальное сечение пластинки (косое сечение) имеет нормаль \bar{n} , составляющую с осью OX угол α (рис. 57). В этом сечении в общем случае действуют нормальные и касательные напряжения в плоскости, параллельной срединной поверхности:

σ_α , τ_α , и в плоскости, перпендикулярной срединной поверхности пластинки $\tau_{\alpha z}$.

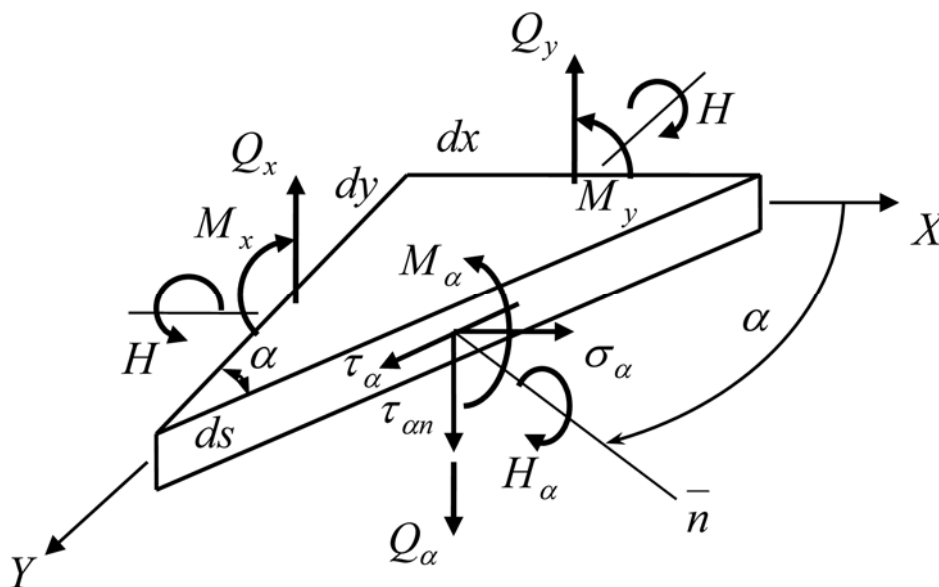


Рис. 57

Нормальное напряжение σ_α действует в направлении нормали \bar{n} к косой площадке; касательное напряжение τ_α действует в плоскости косо́го сечения параллельно срединной поверхности пластинки; касательное напряжение $\tau_{\alpha z}$ – в плоскости косо́го сечения в направлении оси OZ . Связь между напряжениями, действующими на косой площадке, и напряжениями, действующими на площадках, перпендикулярных координатным осям OX

и OY , выражается известными формулами двумерной задачи теории упругости (7.44) и (7.45):

$$\begin{aligned}\sigma_\alpha &= \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\alpha + \tau_{xy} \sin 2\alpha; \\ \tau_\alpha &= -\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin 2\alpha + \tau_{xy} \cos 2\alpha.\end{aligned}\tag{a}$$

Полагая ширину косо́го сечения равной единице, то есть $ds = 1$, подсчитаем внутренние усилия, действующие по косо́й площадке, используя формулы (10.15)–(10.19) и соотношения (а).

$$\begin{aligned}N_\alpha &= \int_{A_\alpha} \sigma_\alpha dA_\alpha = \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \left(\frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\alpha + \tau_{xy} \sin 2\alpha \right) dz = 0; \\ M_\alpha &= \int_{A_\alpha} \sigma_\alpha z dA_\alpha = \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \left(\frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\alpha + \tau_{xy} \sin 2\alpha \right) z dz = \\ &= \frac{M_x + M_y}{2} + \frac{M_x - M_y}{2} \cos 2\alpha + H_{xy} \sin 2\alpha; \\ S_\alpha &= \int_{A_\alpha} \tau_\alpha dA_\alpha = \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \left(-\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin 2\alpha + \tau_{xy} \cos 2\alpha \right) dz = 0; \\ H_\alpha &= \int_{A_\alpha} \tau_\alpha z dA_\alpha = \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \left(-\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin 2\alpha + \tau_{xy} \cos 2\alpha \right) z dz = \\ &= -\frac{M_x - M_y}{2} \sin 2\alpha + H \cos 2\alpha.\end{aligned}\tag{б}$$

В формулах (б) величина $A_\alpha = h \cdot 1$ и элемент площади $dA_\alpha = dz$.

Для определения поперечной силы Q_α , действующей в косо́й площадке, запишем уравнение равновесия всех сил, действующих на рассматриваемый, треугольный в плане, элемент пластинки (рис. 57), в проекциях на ось OZ :

$$\sum Z = 0: Q_\alpha ds - Q_x dy - Q_y dx = 0.$$

Отсюда найдём:

$$Q_\alpha = Q_x \cos \alpha + Q_y \sin \alpha.\tag{в}$$

Итак, в косых сечениях тонкой пластинки, перпендикулярных срединной поверхности, возникают следующие внутренние усилия:

$$\begin{aligned}
 M_{\alpha} &= \frac{M_x + M_y}{2} + \frac{M_x - M_y}{2} \cos 2\alpha + H_{xy} \sin 2\alpha; \\
 Q_{\alpha} &= Q_x \cos \alpha + Q_y \sin \alpha; \\
 H_{\alpha} &= -\frac{M_x - M_y}{2} \sin 2\alpha + H \cos 2\alpha.
 \end{aligned}
 \tag{10.32}$$

Приведённая поперечная сила в косых сечениях тонкой пластинки будет вычисляться по формуле

$$V_{\alpha} = Q_{\alpha} + \frac{\partial H_{\alpha}}{\partial s}.
 \tag{10.33}$$

Если тонкая призматическая пластинка имеет форму в плане, отличную от прямоугольной, то есть нормали к боковым сторонам, сходящимся в угловой точке, составляют с осью OX углы, отличные от нуля и девяноста градусов, то сосредоточенная сила в угловой точке будет определяться по формуле

$$R = H_{\alpha_x} - H_{\alpha_y}.
 \tag{10.34}$$

Здесь α_x и α_y – углы между направлениями нормалей к боковым сторонам пластинки и осью OX (рис. 58).

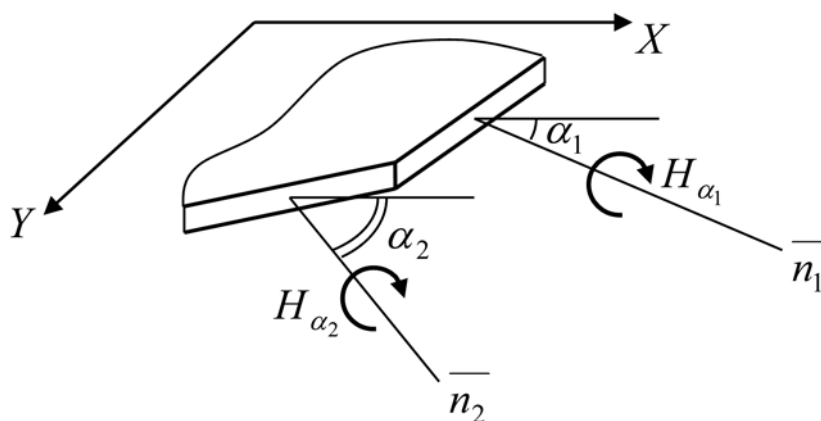


Рис. 58

§10.4. Дифференциальное уравнение изогнутой срединной поверхности пластинки

Вырежем из пластинки, находящейся под воздействием произвольной поперечной распределённой нагрузки $q(x, y)$, бесконечно малый элемент размерами dx и dy и покажем приложенные к нему усилия (рис. 59).

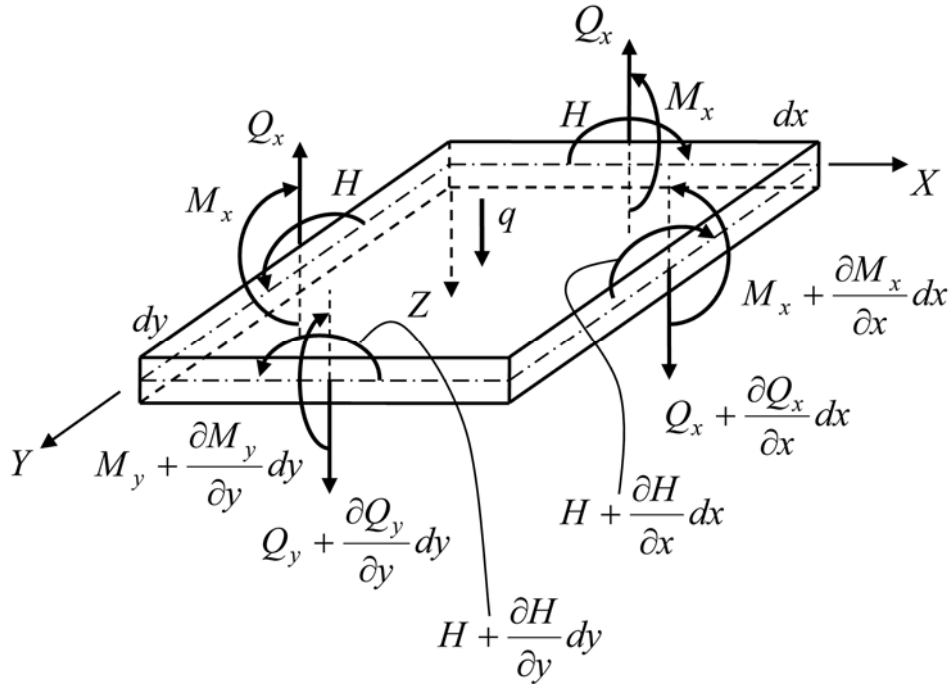


Рис. 59

Рассматриваемый элемент пластинки находится в равновесии, то есть удовлетворяются шесть уравнений равновесия: суммы проекций сил, действующих на выделенный элемент, на оси декартовой системы координат X, Y, Z должны быть равны нулю; суммы моментов сил, действующих на выделенный элемент, относительно осей декартовой системы координат X, Y, Z также должны быть равны нулю. При записи уравнений равновесия все внутренние усилия следует умножать на длину грани, по которой они действуют. Отметим, что некоторые из этих уравнений равновесия удовлетворяются тождественно.

$$\sum X \equiv 0;$$

$$\sum Y \equiv 0;$$

$$\sum M_z \equiv 0;$$

$$\sum Z = 0: \left(Q_x + \frac{\partial Q_x}{\partial x} dx \right) dy + \left(Q_y + \frac{\partial Q_y}{\partial y} dy \right) dx - Q_x dy - Q_y dx + q dx dy = 0.$$

Отсюда, после упрощений, получаем:

$$\frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} = -q. \quad (\text{а})$$

$$\begin{aligned} \sum M_Y = 0: & \left(M_x + \frac{\partial M_x}{\partial x} dx \right) dy - M_x dy + \left(H + \frac{\partial H}{\partial y} dy \right) dx - H dx - \\ & - \left(Q_x + \frac{\partial Q_x}{\partial x} dx \right) dy dx + Q_y dx \frac{dx}{2} - \left(Q_y + \frac{\partial Q_y}{\partial y} dy \right) dx \frac{dx}{2} - q dx dy \frac{dx}{2} = 0. \end{aligned}$$

Отсюда, приведя подобные слагаемые и отбросив члены более высокого порядка малости, получаем:

$$\frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial H}{\partial y} = Q_x. \quad (\text{б})$$

$$\begin{aligned} \sum M_X = 0: & \left(M_y + \frac{\partial M_y}{\partial y} dy \right) dx - M_y dx + \left(H + \frac{\partial H}{\partial x} dx \right) dy - H dy - \\ & - \left(Q_y + \frac{\partial Q_y}{\partial y} dy \right) dx dy + Q_x dy \frac{dy}{2} - \left(Q_x + \frac{\partial Q_x}{\partial x} dx \right) dy \frac{dy}{2} - q dx dy \frac{dy}{2} = 0. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\frac{\partial M_y}{\partial y} + \frac{\partial H}{\partial x} = Q_y. \quad (\text{в})$$

Подставим поперечные силы из соотношений (б) и (в) в уравнение (а). В результате получим:

$$\frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 H}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} = -q. \quad (\text{г})$$

Принимая во внимание выражения для изгибающих и крутящего моментов, записанные через прогибы срединной поверхности (10.27), формулу (г) запишем в виде:

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \mu \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + 2(1 - \mu) \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} + \mu \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} = \frac{q}{D},$$

или

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{q}{D}. \quad (10.35)$$

Уравнение (10.35) можно записать короче, используя понятие гармонического оператора Лапаса:

$$\nabla^2 \nabla^2 w = \frac{q}{D}, \quad (10.36)$$

или ещё короче

$$\nabla^4 w = \frac{q}{D}. \quad (10.37)$$

Впервые уравнение изгиба тонких пластин, но содержащее ошибку, было получено Софи Жермен на основе вариационного принципа Лагранжа в работе, представленной на конкурс, объявленный французской академией наук в 1811 г. На ошибку указал член жюри Лагранж, и эта ошибка была позднее исправлена. В литературе уравнение (10.35) или, что то же самое, (10.36), или (10.37) носит название *уравнение Софи Жермен – Лагранжа*. Оно играет фундаментальную роль в теории изгиба пластин.

После того как уравнение (10.35) будет проинтегрировано и найдена функция прогибов $w(x, y)$, напряжения, деформации, перемещения и внутренние усилия в пластинке могут быть вычислены по полученным ранее формулам.

§10.5. Условия на контуре пластинки

В зависимости от характера закрепления краёв на контуре пластинки могут быть заданы прогибы и углы поворота срединной плоскости, изгибающие и крутящие моменты, поперечные силы. Условия, при которых на контуре заданы перемещения, называются *геометрическими*. Условия, при которых на контуре заданы усилия, то есть изгибающие и крутящие моменты и поперечные силы, называются *статическими*. Если на контуре пластинки заданы одновременно и перемещения, и усилия, то условия называются *смешанными*.

Расчёт тонких пластин на действие поперечной нагрузки сводится к интегрированию дифференциального уравнения изогнутой срединной поверхности пластинки (10.35) совместно с граничными условиями, определяемыми способом закрепления пластины. На каждом крае пластины следует задать два граничных условия.

Рассмотрим граничные условия для различных случаев закрепления краёв прямоугольной пластины (рис. 60): жёсткое защемление – сторона

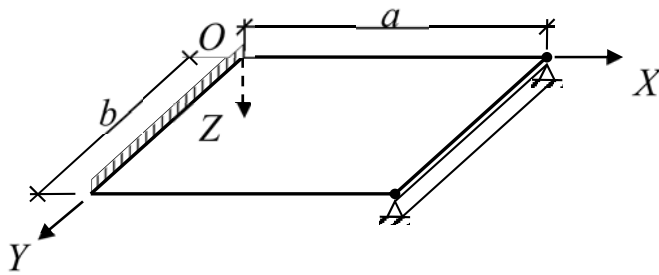


Рис. 60

пластинки, для которой $x=0$, шарнирное закрепление – сторона пластинки, для которой $x=a$, свободный край – стороны пластинки, для которых $y=0$ и $y=b$.

I. Жёсткая заделка по контуру пластинки.

Если сторона пластинки имеет жёсткое опирание, то прогиб на этой стороне равен нулю и угол поворота в направлении, перпендикулярном к рассматриваемой стороне, тоже равен нулю:

✓ Стороны, где $x=0$ или $x=a$. Имеем

$$w=0; \quad \frac{\partial w}{\partial x}=0. \quad (10.38)$$

✓ Стороны, где $y=0$ или $y=b$. Имеем

$$w=0; \quad \frac{\partial w}{\partial y}=0. \quad (10.39)$$

II. Шарнирное опирание по контуру пластинки.

Если сторона пластинки имеет шарнирное опирание, то на этой стороне и прогиб, и изгибающий момент равны нулю:

✓ Стороны, где $x=0$ или $x=a$. Имеем

$$w=0; \quad M_x = -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) = 0.$$

Так как стороны пластинки, где $x=0$ или $x=a$, при деформации не искривляются, то есть на этих сторонах $\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \equiv 0$, а цилиндрическая жёст-

кость $D \neq 0$, то равенство нулю изгибающего момента M_x сводится к усло-

вию $\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0$. Итак, на сторонах пластинки, где $x=0$ или $x=a$ при их шар-

нирном опирании, имеем условия:

$$w=0; \quad \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0. \quad (10.40)$$

✓ Стороны, где $y=0$ или $y=b$. Имеем

$$w=0; \quad M_y = -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) = 0.$$

Так как стороны пластинки, где $y=0$ или $y=b$, при деформации не искривляются, то есть на этих сторонах $\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \equiv 0$, а цилиндрическая жёсткость $D \neq 0$, то равенство нулю изгибающего момента M_y сводится к условию $\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0$. Итак, на сторонах пластинки, где $y=0$ или $y=b$ при их шарнирном опирании, имеем условия:

$$w = 0; \quad \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0. \quad (10.41)$$

III. Свободное опирание по контуру пластинки.

Если край пластинки свободен, то на этом краю все усилия – изгибающие и крутящие моменты, поперечные силы – равны нулю. В таком виде условия для свободного края пытался формулировать Пуассон. Однако позже, в 1850 году, Кирхгоф показал, что для данной приближённой теории изгиба пластин, основанной на использовании гипотезы прямых нормалей, в общем случае нельзя одновременно удовлетворить и условию равенства нулю поперечной силы, и условию равенства нулю крутящего момента. Как и в предыдущих случаях опирания, для свободного края пластинки можно удовлетворить не трём, а только двум силовым условиям. Одно из этих условий выражает равенство нулю изгибающего момента, другое – равенство нулю приведённой поперечной силы:

✓ Стороны, где $x=0$ или $x=a$. Имеем

$$M_x = -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) = 0;$$

$$V_x = -D \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + (2 - \mu) \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right] = 0.$$

Поскольку цилиндрическая жёсткость не равна нулю, то записанные выше условия на свободном краю пластины сводятся к соотношению

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0; \quad \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} = 0. \quad (10.42)$$

✓ Стороны, где $y=0$ или $y=b$. Имеем

$$M_y = -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) = 0;$$

$$V_y = -D \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + (2 - \mu) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right] = 0.$$

Или, после элементарных преобразований, получаем:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0; \quad \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} = 0. \quad (10.43)$$

Если стороны пластинки имеют различное опирание, то условия на её контуре получаются путём комбинации ранее полученных условий (10.38)–(10.43).

Если решается какая-либо задача об упругом взаимодействии пластины на её контуре, то в качестве усилий взаимодействия должны быть учтены в общем случае как распределённые опорные реакции V_x и V_y (а при наличии необходимых связей и изгибающие моменты M_x и M_y), так и сосредоточенные силы R в углах пластины.

§10.6. Оценка прочности пластинки

Целью расчёта тонкой пластинки является, вообще говоря, либо подбор её толщины, либо проверка её прочности. При этом внешняя нагрузка, размеры пластинки в плане, условия её закрепления, механические характеристики материала пластинки считаются известными. И для решения первой, и для решения второй задачи следует опираться на критерии прочности (см. гл. 4).

В гл. 4 критерии прочности записаны в терминах главных напряжений. Поэтому после решения дифференциального уравнения изогнутой срединной поверхности пластинки (10.35) и определения напряжений по формулам (10.26) следует вычислить главные напряжения. Для их определения можно воспользоваться результатами, изложенными в гл 1, §1.7.

Следует иметь в виду, что нормальное напряжение σ_z , принимаемое равным нулю в соответствии со второй гипотезой Кирхгофа, на самом деле отлично от нуля и вычисляется по формуле (10.26₆). Принимая во внимание уравнение (10.35), формулу (10.26₆) можно записать в следующем виде:

$$\sigma_z = -\frac{E}{24(1-\mu^2)} (h^3 - 3h^2z + 4z^3) \frac{q}{D},$$

или, учитывая выражение для цилиндрической жёсткости $D = \frac{Eh^3}{12(1-\mu^2)}$,

получим:

$$\sigma_z = -\frac{q}{2h^3} (h^3 - 3h^2z + 4z^3). \quad (10.44)$$

Таким образом, нормальное напряжение σ_z , действующее на горизонтальных площадках, изменяется по толщине пластинки по закону кубической параболы, причём на нижней поверхности пластинки оно равно нулю, а на верхней – действующей на пластинку внешней распределённой нагрузке q .

Следовательно, вычисляя эквивалентные напряжения, следует учитывать нормальное напряжение σ_z в тех точках пластинки, которые расположены в зоне приложения внешних распределённых нагрузок. В точках пластинки, расположенных вне зоны действия распределённых нагрузок, нормальное напряжение σ_z , видимо, равно нулю и его можно не учитывать.

§10.7. Потенциальная энергия при изгибе пластинки

Полная энергия изогнутой пластины \mathcal{E} складывается из потенциальной энергии деформации пластинки U и потенциала внешних сил Π :

$$\mathcal{E} = U + \Pi. \quad (10.45)$$

Удельная энергия деформации (3.26) для тонкой пластинки, с учётом принятых гипотез (10.1), (10.2) и (10.3), запишется в следующем виде:

$$U_0 = \frac{1}{2} (\sigma_x \varepsilon_x + \sigma_y \varepsilon_y + \tau_{xy} \gamma_{xy}). \quad (10.46)$$

Приняв во внимание выражения для напряжений (10.26) и деформаций (10.7), записанные через перемещения срединной поверхности, для удельной потенциальной деформации (10.46) получим:

$$U_0 = \frac{Ez^2}{2(1-\mu^2)} \left[\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2 + 2\mu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 + 2(1-\mu) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 \right].$$

Потенциальная энергия деформации всей пластины будет определяться интегралом по всему её объёму:

$$\begin{aligned} U &= \int_V U_0 dV = \int_0^{\frac{h}{2}} \int_0^a \int_0^b U_0 dx dy dz = \\ &= \frac{1}{2} \int_0^a \int_0^b D \left[\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2 + 2\mu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 + 2(1-\mu) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 \right] dx dy. \end{aligned} \quad (10.47)$$

Итак, энергия деформации всей пластины находится как интеграл по её площади. Выражению (10.47) можно придать несколько другой вид, если в прямых скобках прибавить и вычесть $2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}$. Тогда получим:

$$U = \frac{1}{2} \int_0^b \int_0^a D \left\{ (\nabla^2 w)^2 - 2(1-\mu) \left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 \right] \right\} dx dy. \quad (10.48)$$

Если цилиндрическая жёсткость пластинки постоянна, то величину D можно вынести за знак интеграла. Кроме того, для пластин, жёстко или шарнирно опёртых по всему контуру, выражение в прямых скобках (10.48) оказывается равным нулю. Тогда выражение для энергии всей пластины для указанных пластин упрощается:

$$U = \frac{D}{2} \int_0^b \int_0^a (\nabla^2 w)^2 dx dy. \quad (10.49)$$

Здесь $\nabla^2 w = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}$ – гармонический оператор Лапласа.

Для пластин, нагруженных только поперечной нагрузкой $q(x, y)$, величина потенциала внешних сил Π составляется как работа элементарных сил $q dx dy$ на перемещениях w при переводе изогнутой пластины в недеформированное состояние:

$$\Pi = - \int_0^b \int_0^a q(x, y) w(x, y) dx dy. \quad (10.50)$$

Необходимость составления выражений для полной энергии деформированной пластины возникает при использовании различных энергетических методов при построении расчётных алгоритмов.

§10.8. Пластинка на упругом основании

Кроме рассмотренного ранее контурного опирания, пластина может опираться всей своей плоскостью на какое-либо сплошное деформируемое основание, например грунт (рис. 61). В этом случае при записи дифференциального уравнения изгиба пластины (10.35) необходимо учесть распределённую по площади пластины реакцию (отпор) основания $r(x, y)$. В этом случае уравнение (10.36) получит вид:

$$\nabla^2 \nabla^2 w = \frac{q - r}{D}. \quad (10.51)$$

Здесь $q(x, y)$ – интенсивность внешней распределённой нагрузки.

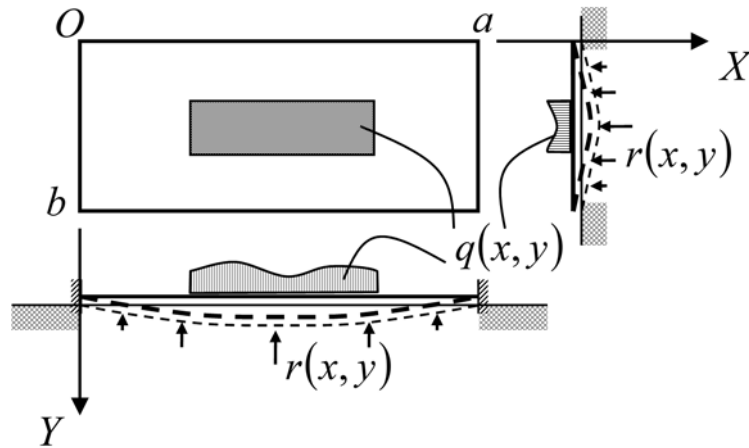


Рис. 61

В зависимости от свойств деформируемого основания связь между отпором $r(x, y)$ и прогибами пластинки $w(x, y)$ может быть различной.

Модели сплошных оснований пластин

Различают упругие, упругопластичные и пластичные основания. Условие контактности пластинки и сплошного основания обычно записывают только по равенству вертикальных перемещений срединной плоскости $w(x, y)$ и основания, прилегающего к подошве пластины $w_0(x, y)$:

$$w(x, y) = w_0(x, y). \quad (10.52)$$

При этом полагают, что сдвиг и отрыв подошвы пластины от поверхности основания отсутствуют.

Сплошное реальное основание, как правило, заменяют *гипотетическим* основанием, наделённым главными свойствами заменяемого реального основания. Такое гипотетическое основание называют *моделью основания*.

1. Модель упругого основания Фусса – Винклера. Данная модель построена на следующих допущениях:

а. Основание считается упругим и двусторонним, в котором могут возникать вертикальные реакции и вверх и вниз.

б. Реакции основания на подошву пластины пропорциональны вертикальным перемещениям поверхности основания:

$$r(x, y) = kw_0(x, y). \quad (10.53)$$

Здесь k ($\text{кН}/\text{см}^2$) – коэффициент сопротивления упругого основания (коэффициент постели).

Модель упругого основания Фуса – Винклера механически может быть представлена бесконечно большим количеством вертикальных упругих пружин, не связанных между собой (рис. 62).

Характерной особенностью такого основания является то, что оно деформируется только в пределах площади пластины. Однако это противоречит опыту, так как реальное основание деформируется и за пределами подошвы пластины. Данная модель упругого основания не учитывает распределительную способность грунта. Модель упругого основания Фусса – Винклера идеально подходит для пластинки, плавающей на поверхности воды.

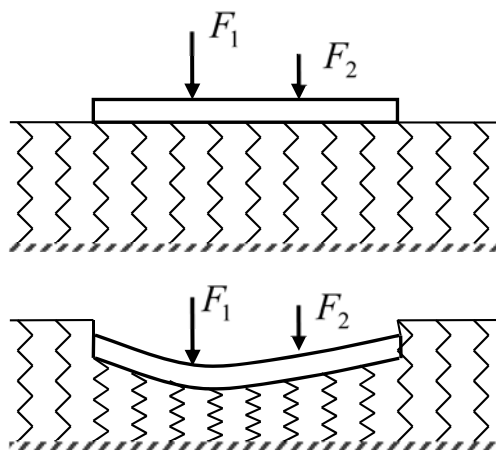


Рис. 60

2. Модель упругого основания с двумя коэффициентами постели. Представляет собой основание, реакции которого определяются двумя коэффициентами сопротивления основания (двумя коэффициентами постели).

Данная модель была предложена в работах М.М. Филоненко-Бородича, В.З. Власова, П.Л. Пастернака.

Согласно данной модели реакция основания определяется по формуле

$$r(x, y) = k_1 w - k_2 \nabla^2 w. \quad (10.54)$$

Здесь k_1 (кН/см³) – первый коэффициент постели; k_2 (кН/см) – второй коэффициент постели.

Следуя работе [16], рассмотрим построение аналитического выражения для этих коэффициентов. Пусть основание представляет собой упругий слой толщиной B , лежащий, в свою очередь, на абсолютно жёстком подстилающем слое (рис. 63). Вырежем из этого упругого слоя элементарный столбик высотой B с размерами в плане dx и dy . По боковым граням элементарного столбика действуют нормальные σ_x , σ_y и касательные τ_{zx} , τ_{zy} напряжения (рис. 64).

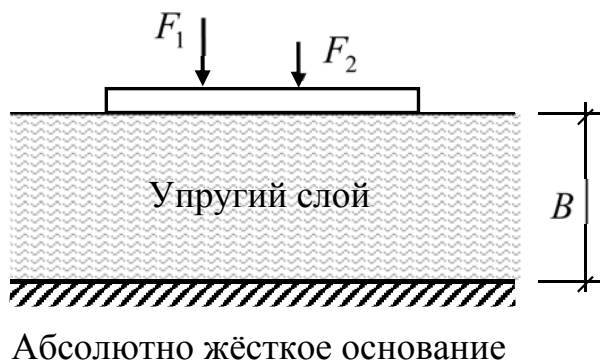


Рис. 61

Будем полагать, что вертикальные перемещения слоёв столбика с ростом координаты z убывают, обращаясь при $z = B$ в нуль. В качестве такой функции, обеспечивающей убывание вертикальных перемещений слоёв столбика, примем функцию

$\omega(z) = \frac{f(\chi B - \chi z)}{f(\chi B)}$. Тогда функция вертикальных перемещений слоёв столбика получает вид:

$$w_s(x, y, z) = w_0(x, y) \frac{f(\chi B - \chi z)}{f(\chi B)}. \quad (\text{а})$$

Здесь $f(\chi B - \chi z)$ – всякая убывающая функция, обращающаяся при $z = B$ в нуль; χ – параметр, определяющий быстроту затухания перемещений слоёв элементарного столбика.

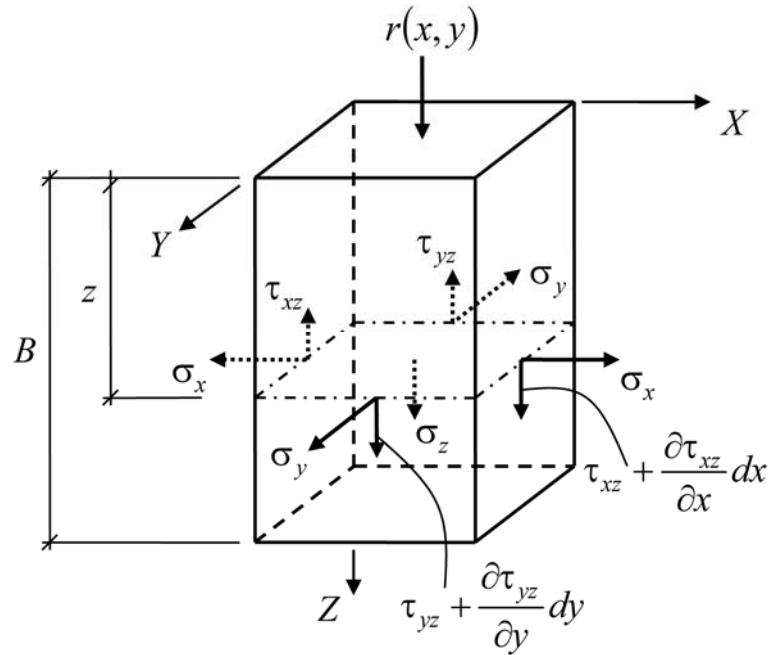


Рис. 64

Далее будем считать, что вертикальные грани столбика при деформации остаются вертикальными, то есть столбик как бы находится в жёсткой обойме. Но тогда перемещения в направлении осей OX и OY будут равны нулю:

$$u = 0, \quad v = 0. \quad (\text{б})$$

Следовательно,

$$\varepsilon_x = 0, \quad \varepsilon_y = 0, \quad \gamma_{xy} = 0;$$

$$\gamma_{xz}(x, y, z) = \frac{\partial w_s}{\partial x}; \quad \gamma_{yz}(x, y, z) = \frac{\partial w_s}{\partial y}. \quad (\text{в})$$

Элементарный столбик будет находиться в условиях одномерной деформации (гл. 6). В соответствии с (6.6)

$$\sigma_x = \sigma_y = \frac{\mu_0}{1 - \mu_0} \sigma_z. \quad (\text{г})$$

Для касательных напряжений τ_{xz} и τ_{yz} получим:

$$\tau_{xz}(x, y, z) = G_0 \frac{\partial w_s}{\partial x}; \quad \tau_{yz}(x, y, z) = G_0 \frac{\partial w_s}{\partial y}; \quad (\text{д})$$

Здесь $G_0 = \frac{E_0}{2(1 + \mu_0)}$ – модуль сдвига упругого основания; E_0 – модуль упругости основания; μ_0 – коэффициент поперечной деформации упругого основания.

Найдём продольную силу в сечении столбика на глубине z :

$$N_z = r(x, y) dx dy - \int_0^z \tau_{xz} dy dz + \int_0^z \left(\tau_{xz} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} dx \right) dy dz - \\ - \int_0^z \tau_{yz} dx dz + \int_0^z \left(\tau_{yz} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} dy \right) dx dz,$$

или

$$N_z = r(x, y) dx dy + \int_0^z \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} dx dy dz + \int_0^z \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} dx dy dz. \quad (\text{е})$$

Зная продольную силу, найдём соответствующее напряжение:

$$\sigma_z = \frac{N_z}{dx dy} = r(x, y) + \int_0^z \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} dz + \int_0^z \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} dz.$$

Учитывая соотношения (д), получим:

$$\sigma_z = r(x, y) + \int_0^z G_0 \frac{\partial^2 w_s}{\partial x^2} dz + \int_0^z G_0 \frac{\partial^2 w_s}{\partial y^2} dz. \quad (\text{ж})$$

Деформацию ε_z на глубине z найдём, используя закон Гука и принимая во внимание соотношение (г):

$$\varepsilon_z = \frac{1}{E_0} \left[\sigma_z - \mu_0 (\sigma_x + \sigma_y) \right] = \frac{\sigma_z}{E_0} \left(1 - \frac{2\mu_0^2}{1 - \mu_0} \right).$$

Учитывая (ж), получим:

$$\varepsilon_z = \frac{\sigma_z}{E^*} = \frac{r(x, y)}{E^*} + \frac{G_0}{E^*} \int_0^z \nabla^2 w_s dz. \quad (\text{и})$$

$$\text{Здесь } E^* = \frac{E_0(1 - \mu_0)}{(1 + \mu_0)(1 - 2\mu_0)}. \quad (10.55)$$

Укорочение бесконечно малого слоя столбика будет равно:

$$\Delta dz = \frac{\sigma_z}{E^*} dz = \left[\frac{r(x, y)}{E^*} + \frac{G_0}{E^*} \int_0^z \nabla^2 w_s dz \right] dz.$$

Полное укорочение столбика будет вычисляться путём суммирования:

$$\Delta B = \int_0^H \Delta dz = \frac{r(x, y)}{E^*} B + \frac{G_0}{E^*} \int_0^H \left(\int_0^z \nabla^2 w_s dz \right) dz. \quad (\kappa)$$

Это укорочение должно быть равно перемещению (прогибу) срединной плоскости пластинки:

$$w(x, y) = \Delta B. \quad (\lambda)$$

Из соотношений (κ) и (λ) получаем давление пластинки на основание или соответственно вертикальную (нормальную) реакцию от основания на подошву пластинки:

$$r(x, y) = \frac{E^*}{B} w(x, y) B - \frac{G_0}{B} \int_0^H \left(\int_0^z \nabla^2 w_s dz \right) dz. \quad (\mu)$$

На основе (а) получаем:

$$\frac{\partial^2 w_s}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \cdot \frac{f(\chi B - \chi z)}{f(\chi B)}, \quad \frac{\partial^2 w_s}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \cdot \frac{f(\chi B - \chi z)}{f(\chi B)}.$$

Уравнение (μ) теперь получает вид:

$$r(x, y) = \frac{E^*}{B} w(x, y) B - \frac{G_0}{B} \int_0^H \left[\int_0^z \nabla^2 w \cdot \frac{f(\chi B - \chi z)}{f(\chi B)} dz \right] dz,$$

или окончательно получаем соотношение (10.54):

$$r(x, y) = k_1 w - k_2 \nabla^2 w.$$

Здесь

$$k_1 = \frac{E^*}{B}; \quad (10.56)$$

$$k_2 = \frac{G_0}{B} \int_0^H \left[\int_0^z \frac{f(\chi B - \chi z)}{f(\chi B)} dz \right] dz. \quad (10.57)$$

Если в качестве убывающей функции принять $f(\chi B - \chi z) = B - z$, то

$$k_2 = \frac{G_0}{B} \int_0^H \left[\int_0^z \left(1 - \frac{z}{B} \right) dz \right] dz = \frac{G_0 B}{3}. \quad (10.58)$$

Если в качестве убывающей функции принять $f(\chi B - \chi z) = (B - z)^2$, то

$$k_2 = \frac{G_0 B}{4}. \quad (10.59)$$

В соответствии с законом парности касательных напряжений, по подошве пластинки будут приложены касательные напряжения τ_{zx} и τ_{zy} , учёт которых в расчётах наделяет модель упругого основания с двумя коэффициентами постели распределительными свойствами, то есть основание будет деформироваться и за пределами площади пластинки. Величина этих касательных напряжений определяется по формулам:

$$\tau_{zx} = G_0 \frac{\partial w}{\partial x}; \quad \tau_{zy} = G_0 \frac{\partial w}{\partial y}. \quad (10.60)$$

Поскольку при установлении связей между коэффициентами постели и механическими характеристиками основания принимаются некоторые допущения, то получаемые числовые значения коэффициентов постели должны контролироваться данными экспериментов.

3. Модель упругого полупространства. Эта модель была предложена Проктором Г.Э., Герсевановым Н.М., Жемочкиным Б.Н., Горбуновым-Посадовым М.И. и другими отечественными учёными в области механики грунтов и теории упругости.

Согласно этой модели прогибы поверхности полупространства могут быть определены от распределённой по подошве пластинки нагрузки или, что то же самое, от неизвестной реакции основания $r(x, y)$, с помощью решения Буссинеска о действии сосредоточенной силы на поверхности полупространства. Так, в некоторой точке M полупространства с координатами (x_i, y_i) погиб w_i будет определяться по формуле

$$w_i(x_i, y_i) = \frac{1 - \mu^2}{\pi E} \int_0^a \int_0^b \frac{r(x, y)}{\sqrt{(x - x_i)^2 + (y - y_i)^2}} dx dy. \quad (10.61)$$

Поскольку неизвестная реакция основания $r(x, y)$, действующая по подошве пластинки, входит под знак интеграла, аналитическое решение весьма затруднительно. В большинстве случаев задача расчёта плит, лежащих на упругом полупространстве, решается численно.

Следует отметить, что при расчёте пластинок на упругом основании нужно учитывать возможное неблагоприятное воздействие подстилающего слоя основания на материал пластинки, приводящее к снижению её прочности, а следовательно, и долговечности. Это неблагоприятное

воздействие, обусловленное наличием в грунтовом основании хлоридсодержащих компонентов, может приводить к повышенному коррозионному процессу в материале пластинки [29].

Дифференциальное уравнение изогнутой срединной поверхности пластинки на сплошном упругом основании

Дифференциальное уравнение изогнутой срединной поверхности тонкой пластинки на сплошном упругом основании (10.51), описываемом моделью Фусса – Винклера (10.53), можно записать в следующем виде:

$$D \left(\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} \right) + kw = q. \quad (10.62)$$

Соответственно дифференциальное уравнение изогнутой срединной поверхности тонкой пластинки на сплошном упругом основании, описываемом моделью с двумя коэффициентами постели (10.54), получает вид:

$$D \left(\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} \right) - k_2 \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) + k_1 w = q. \quad (10.63)$$

Следует отметить, что пластинка на упругом основании кроме свободного опирания по контуру может иметь по контуру и опорные конструкции как в виде шарнирного, так и в виде жёсткого закрепления. Таким образом, для пластинки на упругом основании остаются справедливыми краевые условия, описанные в §10.5.

§10.9. Пластинка в полярных координатах

Применение криволинейных координат в случаях, когда поверхности, ограничивающие рассматриваемое тело, являются криволинейными, во многих случаях позволяет упростить построение решения. В частности, при изучении изгиба круглой или кольцевой пластинки следует использовать полярную систему координат (r, θ) . В этой системе координат уравнение изогнутой срединной поверхности пластинки (10.35), на основании записи в полярной системе координат бигармонического уравнения для плоской задачи (8.23), получает вид:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \right) = \frac{q}{D}. \quad (10.64)$$

Рассмотрим поперечные сечения пластинки, перпендикулярные и параллельные радиусу-вектору r , то есть перпендикулярные осям r и θ полярной системы координат (рис. 65). В этих сечениях действуют

отнесённые к единице длины изгибающие моменты M_r , M_θ и крутящий момент $M_{r\theta} = M_{\theta r} = H$, а также поперечные силы Q_r и Q_θ .

Предположим, что ось OX совпадает с полярным радиусом r . Тогда моменты в полярной системе координат M_r , M_θ и H , а также поперечные

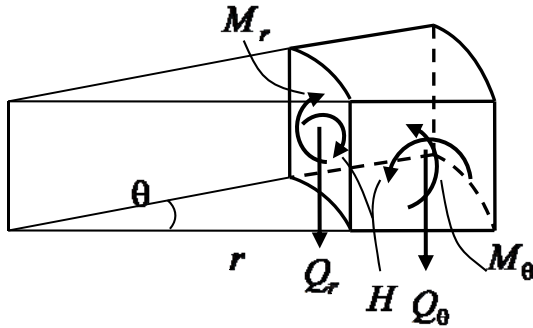


Рис. 65

силы Q_r и Q_θ будут иметь те же самые значения, что и моменты M_x , M_y и H , и поперечные силы Q_x и Q_y в декартовой системе координат. Таким образом, в формулах (10.27), переходя с помощью соотношений (8.1) от декартовых координат к полярным и принимая $\theta = 0$, окончательно будем иметь выражения для изгибающих и крутящего моментов:

$$\begin{aligned} M_r &= -D \left[\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \mu \left(\frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \right) \right]; \\ M_\theta &= -D \left(\frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} \right); \\ H &= D(1 - \mu) \left(\frac{1}{r} \frac{\partial^2 w}{\partial r \partial \theta} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial w}{\partial \theta} \right); \end{aligned} \quad (10.65)$$

и выражения для поперечных сил:

$$Q_r = -D \frac{\partial}{\partial r} \nabla^2 w; \quad Q_\theta = -D \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \nabla^2 w. \quad (10.66)$$

$$\text{Здесь } \nabla^2 w = \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2}.$$

Обозначим V_r и V_θ – интенсивности приведённых поперечных сил в поперечных сечениях пластинки, перпендикулярных и параллельных радиусу-вектору r соответственно. Тогда из формул (10.29) после замены переменных x и y на r и θ можно получить выражения для приведённых поперечных сил:

$$V_r = Q_r + \frac{1}{r} \frac{\partial H}{\partial \theta}; \quad V_\theta = Q_\theta + \frac{\partial H}{\partial r}.$$

Подставляя сюда значения поперечных сил и крутящего момента из соотношений (10.65), (10.66), находим:

$$Q_r = -D \left[\frac{\partial}{\partial r} \nabla^2 w + \frac{1-\mu}{r} \frac{\partial^2}{\partial r \partial \theta} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} \right) \right];$$

$$Q_\theta = -D \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \nabla^2 w + (1-\mu) \frac{\partial^2}{\partial r^2} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} \right) \right].$$
(10.67)

Запишем краевые условия в полярной системе координат:

– если край круглой пластинки радиуса a заземлён, то

$$w|_{r=a} = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial r} \Big|_{r=a} = 0;$$
(10.68)

– если край круглой пластинки имеет шарнирное опирание, то

$$w|_{r=a} = 0, \quad M_r|_{r=a} = 0;$$
(10.69)

– если край круглой пластинки свободен от нагрузки, то

$$M_r|_{r=a} = 0, \quad V_r|_{r=a} = 0.$$
(10.70)

Как и в плоской задаче теории упругости в полярных координатах, уравнения, описывающие напряжённо-деформированное состояние тонких пластин в полярных координатах, имеют особенность при $r \rightarrow 0$.

§10.10. Понятие о расчёте гибких пластинок

Тонкие пластинки, у которых величина ожидаемого прогиба превышает $(0,2 \dots 0,5)h$, называются *гибкими*. Для них гипотеза о недеформируемости срединной плоскости оказывается несправедливой, так как в ней появляются деформации растяжения, сжатия и сдвига. Кроме того, усилия в срединной плоскости гибкой пластинки оказываются зависящими от её прогиба.

В гибкой пластинке наряду с изгибными напряжениями возникают напряжения, равномерно распределённые по толщине пластинки и называемые *цепными* или *мембранными*. Эти напряжения вызваны усилиями, действующими в срединной поверхности пластинки. Суммарное напряжённое состояние образуется путём сложением напряжений изгиба и напряжений растяжения, сжатия и сдвига в срединной поверхности пластинки. Это, по сути, означает, что суммируются решения при поперечном изгибе и плоском напряжённом состоянии.

При расчёте гибких пластинок используются две гипотезы: гипотеза прямых нормалей и гипотеза о ненадавливании горизонтальных слоёв пластинки.

Считая перемещения u и v малыми, прогиб w – конечным, но сопоставимым с толщиной пластинки, для определения деформаций в срединной поверхности ε_x^0 , ε_y^0 и γ_{xy}^0 , соответствующих цепным, или мембранным,

напряжениям, воспользуемся нелинейными соотношениями, учитывающими квадратичные слагаемые в геометрических уравнениях [28]:

$$\varepsilon_x^0 = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2; \quad \varepsilon_y^0 = \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2; \quad \gamma_{xy}^0 = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y}. \quad (10.71)$$

Деформации в срединной поверхности должны удовлетворять условию сплошности для плоского напряжённого состояния (7.29). Подставив формулы (10.71) в уравнение (7.29), получим:

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x^0}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y^0}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \gamma_{xy}^0}{\partial x \partial y} = \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}. \quad (10.72)$$

При больших прогибах точки срединной плоскости получают перемещения u_0 и v_0 вдоль осей OX и OY . Тогда формулы (10.6) принимают вид:

$$u = u_0 - z \frac{\partial w}{\partial x}; \quad v = v_0 - z \frac{\partial w}{\partial y}. \quad (10.73)$$

Деформации в произвольной точке пластинки, с учётом гипотезы прямых нормалей, оказываются равными:

$$\varepsilon_x = \varepsilon_x^0 - z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}; \quad \varepsilon_y = \varepsilon_y^0 - z \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}; \quad \gamma_{xy} = \gamma_{xy}^0 - 2z \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}. \quad (10.74)$$

Составим уравнения равновесия бесконечно малого элемента тонкой гибкой пластинки, боковые грани которого в состоянии до деформации были параллельны вертикальным координатным плоскостям. После деформации бесконечно малый элемент пластинки деформируется так, что нормали к боковым граням будут составлять с осями OX и OY углы, равные:

✓ с осью OX — $\frac{\partial w}{\partial x}$ и $\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} dx$ (рис. 66 а);

✓ с осью OY — $\frac{\partial w}{\partial y}$ и $\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} dy$ (рис. 66 б).

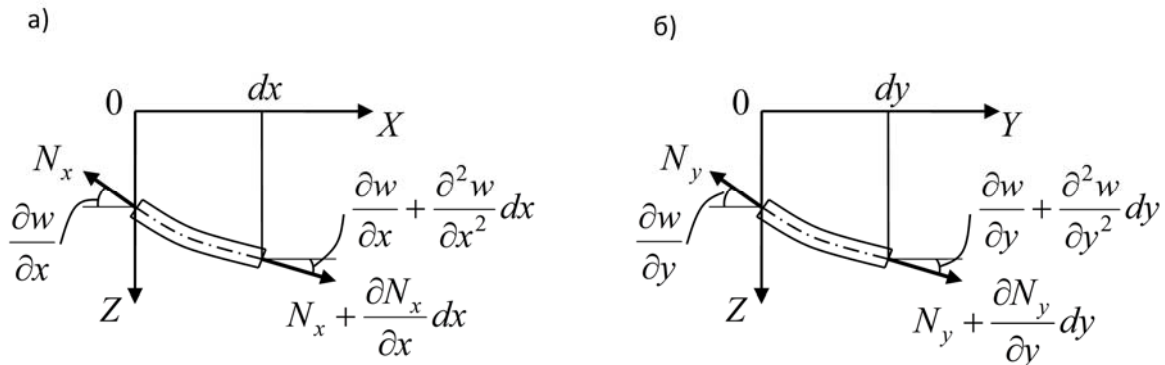


Рис. 66

Действительно, в случае малых прогибов $\sin \alpha \approx \alpha = \frac{\partial w}{\partial x}$. Тогда для угла

$\alpha' = \alpha + \frac{\partial \alpha}{\partial x} dx$, получим $\sin \alpha' \approx \alpha' = \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} dx$. Кроме того, для малых

углов α в разложении $\cos \alpha$ по степеням угла α величиной $\frac{\alpha^2}{2}$ и последующими по сравнению с единицей обычно пренебрегают, поэтому в дальнейшем будем полагать $\cos \alpha \approx 1$. На основании тех же соображений $\cos \alpha' \approx 1$.

На боковых гранях бесконечно малого элемента тонкой гибкой пластинки будут действовать изгибающие и крутящие моменты M_x, M_y, H , поперечные силы Q_x, Q_y , сдвигающие усилия S_x, S_y и продольные силы N_x, N_y . Все внутренние усилия являются распределёнными по длине. Разделим все внутренние усилия на две группы. К первой группе отнесём усилия, вызывающие растяжение или сжатие срединной поверхности, то есть сдвигающие усилия S_x, S_y и продольные силы N_x, N_y (рис. 67).

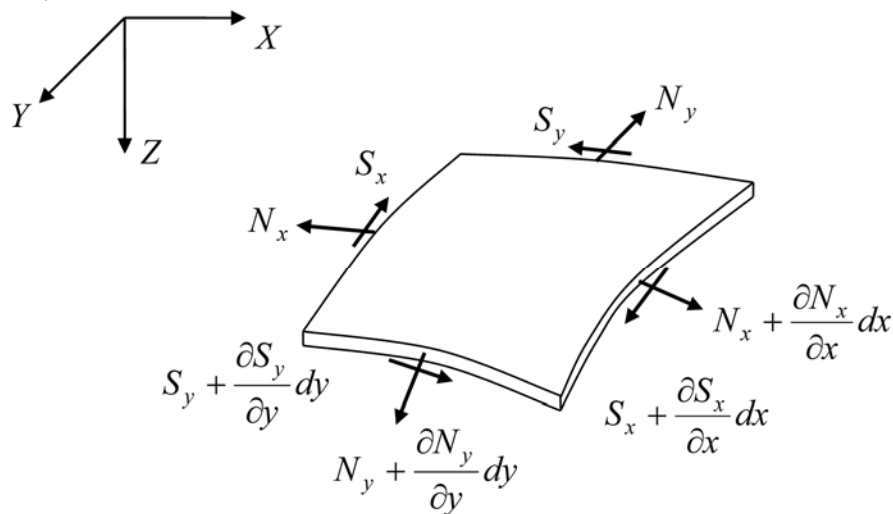


Рис. 67

Ко второй группе отнесём усилия, вызывающие изгиб пластинки, то есть изгибающие и крутящие моменты M_x, M_y, H и поперечные силы (рис. 68).

Поскольку сдвигающие усилия S_x и S_y являются результатом действия касательных напряжений $\tau_{xy} = \tau_{yx}$, то $S_x = S_y = S$.

Тонкая гибкая пластинка находится под воздействием внешней поперечной нагрузки интенсивностью $q(x, y)$.

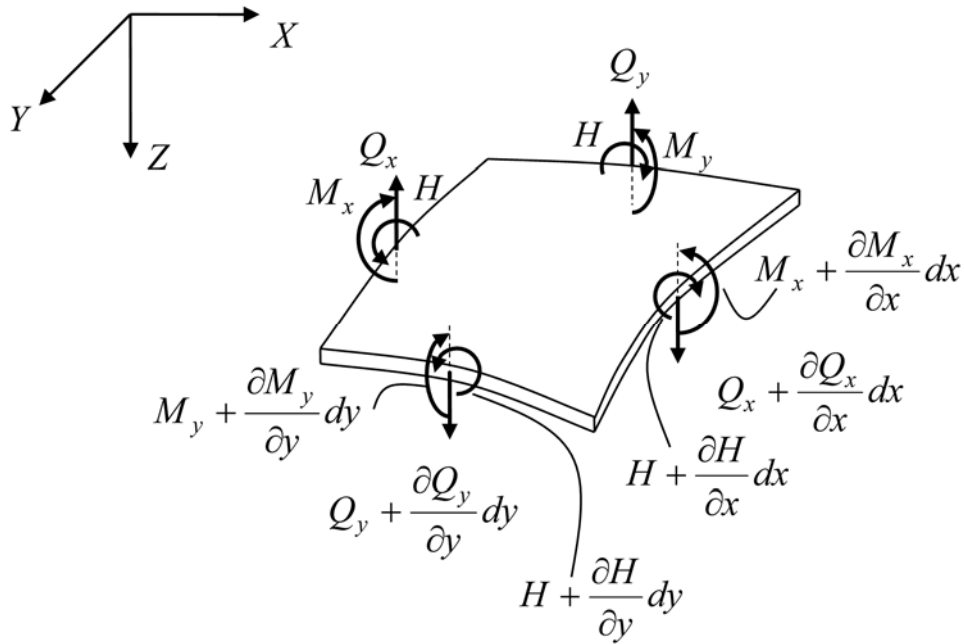


Рис. 68

Уравнение равновесия элемента пластинки в проекциях на ось OX , в соответствии с рис. 67 и 68, имеет вид:

$$-N_x dy \cdot 1 + \left(N_x + \frac{\partial N_x}{\partial x} dx \right) dy \cdot 1 - S_y dx \cdot 1 + \left(S_y + \frac{\partial S_y}{\partial y} dy \right) dx \cdot 1 = 0. \quad (\text{а})$$

Проецируя все силы на ось OY , получаем:

$$-N_y dx \cdot 1 + \left(N_y + \frac{\partial N_y}{\partial y} dy \right) dx \cdot 1 - S_x dy \cdot 1 + \left(S_x + \frac{\partial S_x}{\partial x} dx \right) dy \cdot 1 = 0. \quad (\text{б})$$

Из соотношений (а) и (б), после элементарных преобразований, будем иметь окончательные выражения для уравнений равновесия в проекциях на оси OX и OY :

$$\frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial S_x}{\partial y} = 0; \quad \frac{\partial N_y}{\partial y} + \frac{\partial S_y}{\partial x} = 0. \quad (10.75)$$

При проецировании всех сил, действующих на элемент $dx dy$ пластинки, на ось OZ гибкую пластинку следует рассматривать в деформированном состоянии. Положение нормальных сил N_x и N_y и углы, образованные ими с координатной плоскостью XOY при этом, показаны на рис. 66. Расположение сдвигающих сил S_x и S_y и углы, составляемые этими силами с координатной плоскостью XOY , приведены на рис. 69.

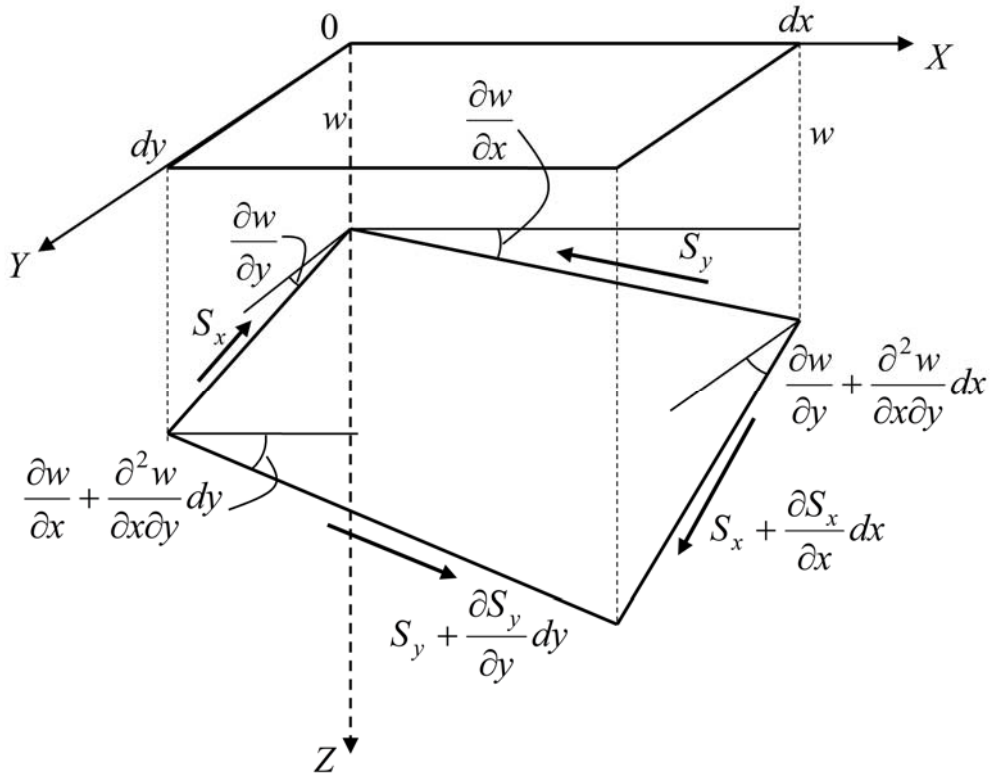


Рис. 69

Уравнение равновесия элемента пластинки в проекциях на ось OZ , в соответствии с рис. 66, 67, 68 и 69, имеет вид:

$$\begin{aligned}
 & -Q_x dy + \left(Q_x + \frac{\partial Q_x}{\partial x} dx \right) dy - Q_y dx + \left(Q_y + \frac{\partial Q_y}{\partial y} dy \right) dx - \\
 & -N_x dy \frac{\partial w}{\partial x} + \left(N_x + \frac{\partial N_x}{\partial x} dx \right) \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} dx \right) dy - \\
 & -N_y dx \frac{\partial w}{\partial y} + \left(N_y + \frac{\partial N_y}{\partial y} dy \right) \left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} dy \right) dx - \\
 & -S_y \frac{\partial w}{\partial x} dx + \left(S_y + \frac{\partial S_y}{\partial y} dy \right) \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} dy \right) dx - \\
 & -S_x \frac{\partial w}{\partial y} dy + \left(S_x + \frac{\partial S_x}{\partial x} dx \right) \left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} dx \right) dy + q dx dy = 0.
 \end{aligned}$$

Опуская слагаемые выше второго порядка малости, получим:

$$\begin{aligned}
 & \frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} + N_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + N_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + S_x \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + S_y \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + \\
 & + \frac{\partial N_x}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial N_y}{\partial y} \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial S_y}{\partial y} \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial S_x}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} + q = 0.
 \end{aligned}$$

Принимая во внимание равенства (10.75), а также учитывая, что $S_x = S_y = S$, будем иметь:

$$\frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} + N_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + N_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 2S \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = -q. \quad (10.76)$$

Уравнения равновесия, представляющие собой сумму моментов всех сил относительно осей OX и OY , записываются так же, как и для тонкой жёсткой пластины:

$$\frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial H}{\partial y} = Q_x; \quad \frac{\partial M_y}{\partial y} + \frac{\partial H}{\partial x} = Q_y. \quad (10.77)$$

Подставив соотношения (10.77) в уравнение (10.76), получим окончательное выражение для уравнения равновесия в проекциях на ось OZ :

$$\frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 H}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + N_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + 2S \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + N_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = -q. \quad (10.78)$$

Итак, система разрешающих уравнений для гибкой тонкой пластинки представляет собой совокупность уравнений, куда входят: уравнение неразрывности деформаций (10.70) и уравнения равновесия в проекциях на оси декартовой системы координат (10.75), (10.78). Система уравнений (10.72), (10.75) и (10.78) содержит десять неизвестных: ε_x^0 , ε_y^0 , ε_z^0 , w , N_x , N_y , S , M_x , M_y , H . Для исключения части этих неизвестных воспользуемся физическими соотношениями для плоского напряжённого состояния в срединной поверхности пластинки. На основании обобщённого закона Гука (7.27) запишем:

$$\begin{aligned} \varepsilon_x^0 &= \frac{1}{E}(\sigma_x - \mu\sigma_y) = \frac{1}{E}\left(\frac{N_x}{h} - \mu\frac{N_y}{h}\right) = \frac{1}{Eh}(N_x - \mu N_y); \\ \varepsilon_y^0 &= \frac{1}{E}(\sigma_y - \mu\sigma_x) = \frac{1}{E}\left(\frac{N_y}{h} - \mu\frac{N_x}{h}\right) = \frac{1}{Eh}(N_y - \mu N_x); \\ \gamma_{xy}^0 &= \frac{1}{G}\tau_{xy} = \frac{1}{G}\frac{S}{h} = \frac{1}{Gh}S. \end{aligned} \quad (10.79)$$

Кроме того, учтём связь между изгибающими и крутящим моментами и перемещениями срединной плоскости пластинки (10.27):

$$\begin{aligned} M_x &= -D\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \mu\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right); \quad M_y = -D\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \mu\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right); \\ H &= -D(1-\mu)\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}. \end{aligned} \quad (10.80)$$

Подставив выражения (10.79) и (10.80) в уравнения (10.72) и (10.78), получим:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{Eh} \left[\frac{\partial^2}{\partial y^2} (N_x - \mu N_y) + \frac{\partial^2}{\partial x^2} (N_y - \mu N_x) - 2(1 + \mu) \frac{\partial^2 S}{\partial x \partial y} \right] = \\ & = \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}; \end{aligned} \quad (10.81)$$

$$D\nabla^4 w - N_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - 2S \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} - N_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = q.$$

Итак, уравнения (10.81) совместно с уравнениями (10.75) составляют систему четырёх нелинейных уравнений относительно четырёх неизвестных w , N_x , N_y , S . Система является замкнутой и позволяет с учётом условий закрепления на контуре тонкой гибкой пластинки определить её перемещения (прогибы), нормальные и касательные усилия в срединной поверхности.

Для уменьшения числа разрешающих уравнений введём функцию напряжений $\Phi(x, y)$:

$$N_x = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2}, \quad N_y = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2}, \quad S = -\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y}. \quad (10.82)$$

Здесь $\Phi(x, y) = h\varphi(x, y)$.

Уравнения (10.75) при этом удовлетворяются тождественно.

После подстановки выражений (10.82) в уравнения (10.81) получим разрешающие уравнения для расчёта тонких гибких пластинок, представляющие собой систему двух нелинейных дифференциальных уравнений четвёртого порядка относительно двух функций – функции $\Phi(x, y)$ и функции $w(x, y)$:

$$\begin{aligned} & \nabla^4 \Phi - Eh \left[\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 + \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right] = 0; \\ & D\nabla^4 w - \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) = q. \end{aligned} \quad (10.83)$$

Эти уравнения известны в теории упругости как уравнения Т.Кармана.

Функции $\Phi(x, y)$ и $w(x, y)$ должны удовлетворять не только уравнениям (10.83), но и граничным условиям. В частности, для прямоугольной в плане пластинки на каждой её кромке должно быть задано по два условия как для функции напряжений, так и для функции прогибов.

В случае жёсткой пластинки, когда прогибы малы по сравнению с её толщиной, необходимо принять функцию напряжений $\varphi=0$. Тогда система (10.83) сводится к уравнению (10.37).

Глава 11. ОСНОВЫ ТЕОРИИ ОБОЛОЧЕК

Оболочкой называется тело, ограниченное двумя криволинейными поверхностями, расстояние между которыми (толщина оболочки h) мало по сравнению с другими габаритными размерами. Поверхность, делящая толщину оболочки пополам, называется *срединной*. В дальнейшем ограничимся рассмотрением оболочек постоянной толщины ($h = \text{const}$). Их геометрия полностью определяется формой срединной поверхности и толщиной оболочки.

Если на срединной поверхности оболочки выделить некоторую точку M и через эту точку провести по срединной поверхности всевозможные кривые, то касательные к ним будут лежать в одной плоскости, называемой *касательной плоскостью к срединной поверхности оболочки в точке M* . Перпендикуляр к касательной плоскости, проведённый через точку M , называется *нормалью к срединной поверхности оболочки в точке M* . Плоская кривая, образованная пересечением срединной поверхности оболочки с плоскостью, содержащей нормаль к срединной поверхности в точке M , называется *нормальным сечением срединной поверхности в точке M* . Среди всех нормальных сечений, проходящих через точку M , можно выделить два, в которых кривизны нормальных сечений имеют наибольшее k_1 и наименьшее k_2 значения. Эти кривизны называются *главными*, а соответствующие нормальные сечения – *главными направлениями*.

Кривизна поверхности в точке характеризуется двумя параметрами – средней кривизной нормальных сечений $k_{\text{ср}}$ и гауссовой кривизной k , причём

$$k_{\text{ср}} = \frac{k_1 + k_2}{2}, \quad k = k_1 k_2. \quad (11.1)$$

Если $k > 0$, то оболочка называется оболочкой положительной гауссовой кривизны [например, оболочка в виде эллипсоида, сферы и так далее (рис. 70, а)]; если $k = 0$, то оболочка называется оболочкой нулевой гауссовой кривизны [например, оболочка в виде цилиндра, конуса и так далее (рис. 70, б)]; если $k < 0$, то оболочка называется оболочкой отрицательной гауссовой кривизны [например, оболочка в виде однополостного гиперболоида, гиперболического параболоида и так далее (рис. 70, в)].

Если срединная поверхность оболочки получена в результате вращения какой-либо кривой относительно некоторой оси, то такая оболочка называется *оболочкой вращения*. В сечении, перпендикулярном к оси вращения, образуется окружность. К таким оболочкам относятся круговые, цилиндрические, конические, сферические, а также эллипсоиды, параболоиды и гиперболоиды вращения.

Поверхности нулевой гауссовой кривизны являются развёртывающимися поверхностями, поэтому их метрика тождественна с метрикой на плоскости. Для таких поверхностей справедлива геометрия Евклида. Для поверхностей неразвёртывающихся с ненулевой гауссовой кривизной евклидова геометрия уже не имеет места (например, для сферической поверхности).

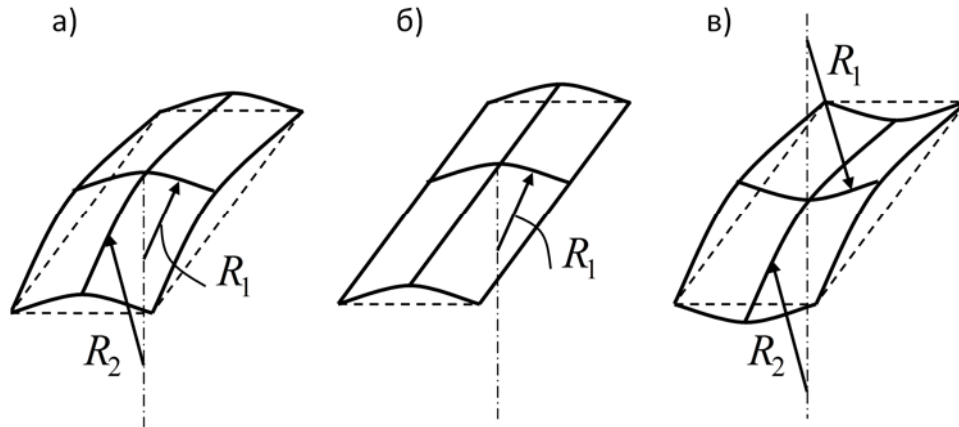


Рис. 70

Положение точки на срединной поверхности оболочки можно задавать как в декартовых $z = f(x, y)$, так и в криволинейных $z = \psi(\xi, \eta)$ координатах. В криволинейных координатах величины ξ и η – это две системы координатных линий, которые образуют на срединной поверхности ортогональную сетку (рис. 71, а). Цилиндрические и сферические координатные линии показаны на рис. 71, б, в.

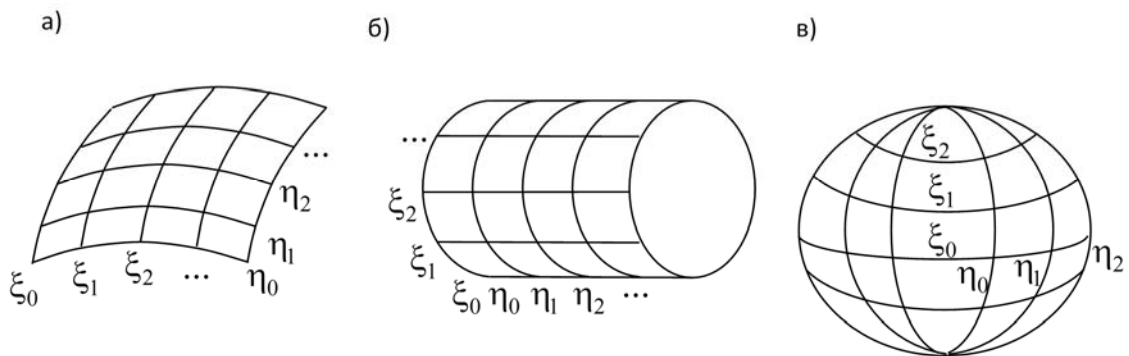


Рис. 71

Расчёт оболочек произвольной формы выполняют в криволинейных ортогональных координатах ξ и η . Бесконечно малые дуги ds_ξ и ds_η на криволинейной поверхности можно рассматривать как прямые (рис. 72). В теории поверхностей их называют *линейными элементами*. Длины линейных элементов пропорциональны дифференциалам независимых переменных:

$$ds_\xi = Ad\xi; \quad ds_\eta = Bd\eta. \quad (11.2)$$

Коэффициенты пропорциональности A и B , являющиеся, вообще говоря, функциями координат ξ и η , представляют собой коэффициенты искажения, преобразующие приращения криволинейных координат в линейные отрезки.

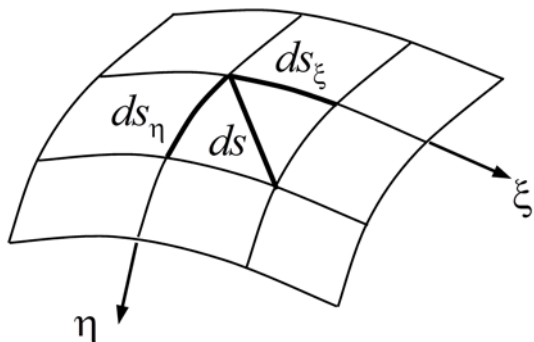


Рис. 72

Квадрат линейного элемента в ортогональных криволинейных координатах можно вычислить по формуле

$$(ds)^2 = (ds_\xi)^2 + (ds_\eta)^2,$$

или, с учётом зависимостей (11.2),

$$(ds)^2 = A^2 (d\xi)^2 + B^2 (d\eta)^2. \quad (11.3)$$

Выражение (11.3) называется *первой квадратичной формой* поверхности,

а величины A и B – коэффициентами первой квадратичной формы.

На рис. 70 введены обозначения: $R_1 = R_\xi$, $R_2 = R_\eta$ – радиусы кривизны срединной поверхности оболочки в направлении осей ξ и η криволинейной системы координат.

В зависимости от отношения толщины h к наименьшему радиусу кривизны k_2 срединной поверхности, оболочки делят на толстые и тонкие.

Если $\frac{h}{k_2} \geq \frac{1}{30}$, то оболочки считаются толстыми; если $\frac{1}{30} \geq \frac{h}{k_2} \geq \frac{1}{1000}$, то

оболочки считаются тонкими.

Толстые оболочки рассчитывают как трёхмерное упругое тело.

Теория расчёта тонких оболочек основана на гипотезах Кирхгофа – Лява:

а) прямолинейный элемент, нормальный к срединной поверхности, остаётся прямолинейным и нормальным к ней и после деформации и свою длину не меняет (гипотеза прямых нормалей);

б) нормальные напряжения на площадках, параллельных срединной поверхности оболочки, пренебрежимо малы по сравнению с остальными напряжениями и при расчёте не учитываются.

Эти гипотезы сводят задачу к исследованию деформаций срединной поверхности оболочки. Кроме того, рассматриваются только такие оболочки, у которых прогибы малы по сравнению с их толщиной.

Доказано, что принятые гипотезы приводят к результатам, порядок погрешности которых не превышает отношения $\frac{h}{k_2}$.

§11.1. Деформации, напряжения и внутренние усилия в тонких оболочках

Рассмотрим тонкую оболочку [1]. Выберем криволинейную систему координат так, чтобы координатные оси совпадали с линиями главных кривизн срединной поверхности оболочки, а ось OZ направим по нормали к ней, считая координату z положительной, если она направлена к центру кривизны. Кривизны срединной поверхности оболочки в исходном состоянии (до деформации) обозначим k_ξ и k_η .

Выделим из оболочки бесконечно малый элемент, образованный двумя парами плоскостей, нормальных к срединной поверхности и совпадающих с направлениями главных кривизн (рис. 73). Рассмотрим слой оболочки, отстоящий на расстоянии z от срединной поверхности. В результате деформации срединной поверхности и поворота боковых граней рассматриваемого элемента в слое появляются линейные ε_ξ , ε_η и угловая $\gamma_{\xi\eta}$ деформации, причём

$$\begin{aligned}\varepsilon_\xi &= \varepsilon_\xi^0 + \chi_\xi z; \\ \varepsilon_\eta &= \varepsilon_\eta^0 + \chi_\eta z; \\ \gamma_{\xi\eta} &= \gamma_{\xi\eta}^0 + \chi z.\end{aligned}\tag{11.4}$$

Здесь ε_ξ^0 , ε_η^0 , $\gamma_{\xi\eta}^0$ – деформации в срединной поверхности; χ_ξ , χ_η , χ – изменения кривизн и кручение срединной поверхности.

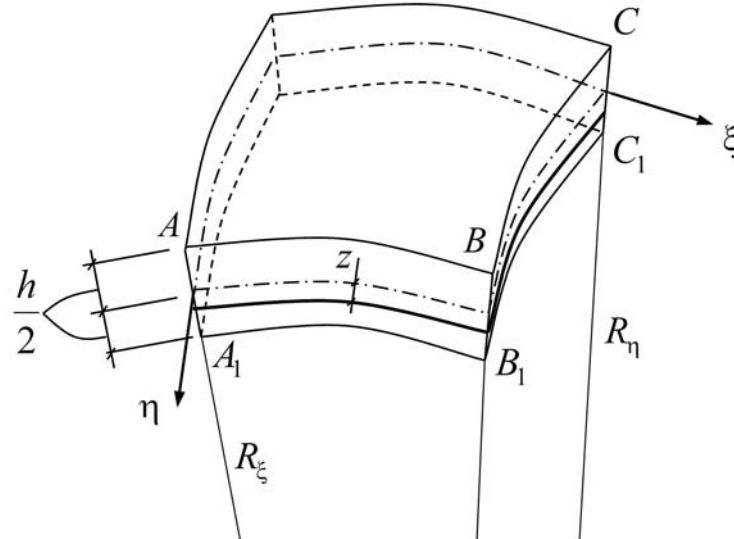


Рис. 73

Относительные линейные удлинения срединной поверхности ε_ξ^0 , ε_η^0 состоят из трёх частей каждое. Первая часть деформации ε_ξ^1 , ε_η^1 определяется изменением перемещения вдоль координатной линии η для

деформации ε_{ξ}^0 и вдоль координатной линии ξ для деформации ε_{η}^0 соответственно:

$$\varepsilon_{\xi}' = \frac{1}{A} \frac{\partial u}{\partial \xi}, \quad \varepsilon_{\eta}' = \frac{1}{B} \frac{\partial v}{\partial \eta}. \quad (\text{а})$$

Вторая часть деформации ε_{ξ}'' , ε_{η}'' связана с перемещением точки в направлении координатной линии ξ и изменением коэффициента первой квадратичной формы A по координате η для деформации ε_{ξ}^0 и с перемещением точки в направлении координатной линии η и изменением коэффициента первой квадратичной формы B по координате ξ для деформации ε_{η}^0 соответственно:

$$\varepsilon_{\xi}'' = \frac{1}{AB} \frac{\partial A}{\partial \eta} v, \quad \varepsilon_{\eta}'' = \frac{1}{AB} \frac{\partial B}{\partial \xi} u. \quad (\text{б})$$

Третья составляющая деформации ε_{ξ}''' , ε_{η}''' связана с перемещением в направлении нормали к срединной поверхности оболочки, то есть

$$\varepsilon_{\xi}''' = \frac{w}{R_{\xi}}, \quad \varepsilon_{\eta}''' = \frac{w}{R_{\eta}}. \quad (\text{в})$$

Собрав формулы (а), (б) и (в), получим окончательные формулы для линейных деформаций ε_{ξ}^0 , ε_{η}^0 :

$$\varepsilon_{\xi}^0 = \frac{1}{A} \frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{1}{AB} \frac{\partial A}{\partial \eta} v + \frac{w}{R_{\xi}}; \quad \varepsilon_{\eta}^0 = \frac{1}{B} \frac{\partial v}{\partial \eta} + \frac{1}{AB} \frac{\partial B}{\partial \xi} u + \frac{w}{R_{\eta}}. \quad (11.5)$$

Далее приведём выражения для деформации сдвига в срединной поверхности $\gamma_{\xi\eta}$, изменения кривизн χ_{ξ} , χ_{η} и кручения χ [27]:

$$\gamma_{\xi\eta} = \frac{B}{A} \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{v}{B} \right) + \frac{A}{B} \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{u}{A} \right). \quad (11.6)$$

$$\chi_{\xi} = -\frac{1}{A} \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{1}{A} \frac{\partial w}{\partial \xi} - \frac{u}{R_{\xi}} \right) - \frac{1}{AB} \frac{\partial A}{\partial \eta} \left(\frac{1}{B} \frac{\partial w}{\partial \eta} - \frac{v}{B} \right); \quad (11.7)$$

$$\chi_{\eta} = -\frac{1}{B} \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{1}{B} \frac{\partial w}{\partial \eta} - \frac{u}{R_{\eta}} \right) - \frac{1}{AB} \frac{\partial B}{\partial \xi} \left(\frac{1}{A} \frac{\partial w}{\partial \xi} - \frac{u}{A} \right);$$

$$\begin{aligned} \chi = & -\frac{1}{AB} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial \xi \partial \eta} - \frac{1}{A} \frac{\partial A}{\partial \eta} \frac{\partial w}{\partial \xi} - \frac{1}{B} \frac{\partial B}{\partial \xi} \frac{\partial w}{\partial \eta} \right) + \\ & + \frac{1}{R_{\xi}} \left(\frac{1}{B} \frac{\partial u}{\partial \eta} - \frac{1}{AB} \frac{\partial A}{\partial \eta} u \right) + \frac{1}{R_{\eta}} \left(\frac{1}{A} \frac{\partial v}{\partial \xi} - \frac{1}{AB} \frac{\partial B}{\partial \xi} v \right). \end{aligned} \quad (11.8)$$

Нормальные σ_ξ , σ_η и касательные $\tau_{\xi\eta} = \tau_{\eta\xi}$ напряжения в рассматриваемом слое (см. рис. 73) найдём на основании закона Гука:

$$\sigma_\xi = \frac{E}{1-\mu^2}(\varepsilon_\xi + \mu\varepsilon_\eta); \quad \sigma_\eta = \frac{E}{1-\mu^2}(\varepsilon_\eta + \mu\varepsilon_\xi); \quad \tau_{\xi\eta} = G\gamma_{\xi\eta}. \quad (11.9)$$

Произвольная нагрузка вызывает в оболочках две группы усилий: 1) нормальные N_ξ , N_η и сдвигающие $N_{\xi\eta}$, $N_{\eta\xi}$ силы, постоянные по толщине оболочки (рис. 74, а); 2) изгибающие M_ξ , M_η и крутящие $H_{\xi\eta}$, $H_{\eta\xi}$ моменты, а также поперечные силы Q_ξ , Q_η (рис. 74, б). В отличие от пластинок, в оболочках в основном возникают деформации растяжения и сжатия, доля изгибных деформаций в работе оболочки существенно меньше. Это обстоятельство обуславливает большую экономичность оболочки по сравнению с пластинкой.

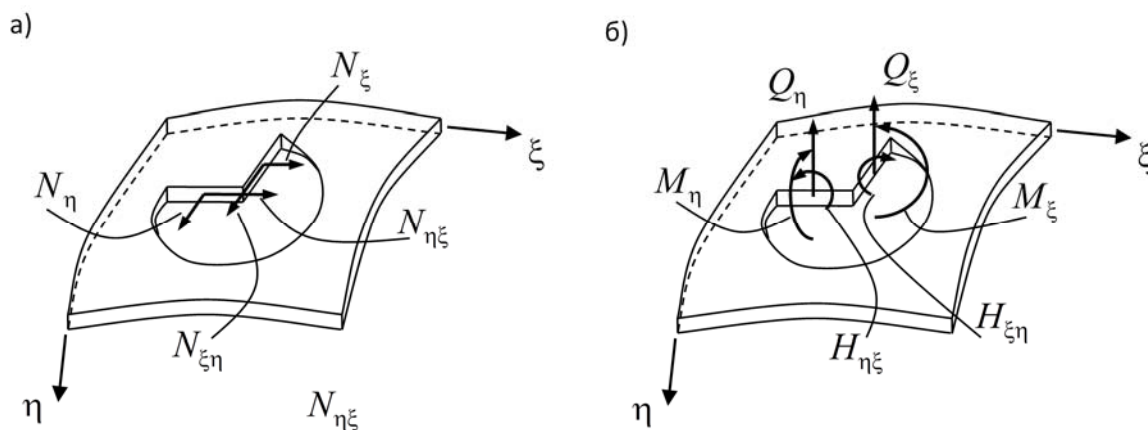


Рис. 74

Следует отметить, что, принимая допущение о прямолинейности нормального элемента (первая гипотеза Кирхгофа – Лява), мы тем самым пренебрегаем сдвигами в плоскостях $z\xi$ и $z\eta$, то есть мы должны бы пренебречь и касательными напряжениями $\tau_{z\xi}$ и $\tau_{z\eta}$, а, следовательно, и поперечными силами $Q_{z\xi}$ и $Q_{z\eta}$. Однако пренебрегать поперечными силами $Q_{z\xi}$ и $Q_{z\eta}$ не следует, так как они играют существенную роль в уравнениях равновесия. Иначе говоря, первое допущение Кирхгофа – Лява следует трактовать таким образом, что при определении деформаций волокон в оболочках, так же, как и в пластинках, пренебрегаем сдвигами, вызванными действием касательных напряжений $\tau_{z\xi}$ и $\tau_{z\eta}$, но не самими напряжениями.

Кстати, как и в гибких пластинках, величину поперечных сил $Q_{z\xi}$ и $Q_{z\eta}$ удобнее находить не через напряжения $\tau_{z\xi}$ и $\tau_{z\eta}$, а из уравнений равновесия.

Величина интенсивности всех остальных внутренних усилий находится по формулам:

$$\begin{aligned}
 N_{\xi} &= \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \sigma_{\xi} \left(1 - \frac{z}{R_{\eta}}\right) dz; & N_{\eta} &= \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \sigma_{\eta} \left(1 - \frac{z}{R_{\xi}}\right) dz; \\
 N_{\xi\eta} &= \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \tau_{\xi\eta} \left(1 - \frac{z}{R_{\eta}}\right) dz; & N_{\eta\xi} &= \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \tau_{\eta\xi} \left(1 - \frac{z}{R_{\xi}}\right) dz; \\
 M_{\xi} &= \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \sigma_{\xi} z \left(1 - \frac{z}{R_{\eta}}\right) dz; & M_{\eta} &= \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \sigma_{\eta} z \left(1 - \frac{z}{R_{\xi}}\right) dz; \\
 H_{\xi\eta} &= \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \tau_{\xi\eta} z \left(1 - \frac{z}{R_{\eta}}\right) dz; & H_{\eta\xi} &= \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \tau_{\eta\xi} z \left(1 - \frac{z}{R_{\xi}}\right) dz.
 \end{aligned} \tag{11.10}$$

Слагаемые $\frac{z}{R_{\xi}}$ и $\frac{z}{R_{\eta}}$ появились в соотношениях (11.10) вследствие того, что длины дуг A_1B_1 и B_1C_1 не равны длинам AB и BC (см. рис. 73). В результате при неравенстве главных радиусов срединной поверхности оболочки, то есть когда $R_{\xi} \neq R_{\eta}$, оказываются различными и сдвигающие силы $N_{\xi\eta} \neq N_{\eta\xi}$, и крутящие моменты $H_{\xi\eta} \neq H_{\eta\xi}$, несмотря на то что касательные напряжения, в силу закона парности касательных напряжений, равны между собой: $\tau_{\xi\eta} = \tau_{\eta\xi}$.

Для тонких оболочек $\frac{z}{R_{\xi}} \ll 1$, $\frac{z}{R_{\eta}} \ll 1$, то есть $1 - \frac{z}{R_{\xi}} \approx 1$, $1 - \frac{z}{R_{\eta}} \approx 1$.

Тогда формулы (11.10) приобретают вид:

$$\begin{aligned}
 N_{\xi} &= \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \sigma_{\xi} dz; & N_{\eta} &= \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \sigma_{\eta} dz; & N_{\xi\eta} &= N_{\eta\xi} = S = \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \tau_{\xi\eta} \left(1 - \frac{z}{R_{\eta}}\right) dz; \\
 M_{\xi} &= \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \sigma_{\xi} z dz; & M_{\eta} &= \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \sigma_{\eta} z dz; & H_{\xi\eta} &= H_{\eta\xi} = H = \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \tau_{\xi\eta} z \left(1 - \frac{z}{R_{\eta}}\right) dz.
 \end{aligned} \tag{11.11}$$

Подставляя физические соотношения (11.9) в уравнения (11.11) и учитывая, что нормальные N_{ξ} , N_{η} и сдвигающие $N_{\xi\eta}$, $N_{\eta\xi}$ силы

постоянны по толщине оболочки, то есть связаны лишь с деформациями срединной поверхности ε_{ξ}^0 , ε_{η}^0 , $\gamma_{\xi\eta}^0$, получаем:

$$N_{\xi} = \frac{Eh}{1-\mu^2}(\varepsilon_{\xi}^0 + \mu\varepsilon_{\eta}^0); \quad N_{\eta} = \frac{Eh}{1-\mu^2}(\varepsilon_{\eta}^0 + \mu\varepsilon_{\xi}^0); \quad S = \frac{Eh}{2(1+\mu)}\gamma_{\xi\eta}^0; \quad (11.12)$$

$$M_{\xi} = D(\chi_{\xi} + \mu\chi_{\eta}); \quad M_{\eta} = D(\chi_{\eta} + \mu\chi_{\xi}); \quad H = D(1-\mu)\chi.$$

Здесь $D = \frac{Eh^3}{12(1-\mu^2)}$ – цилиндрическая жёсткость оболочки.

Расчёт оболочек и с физической, и с математической точек зрения является чрезвычайно сложной задачей. Ввиду этого при расчёте оболочек вводятся всевозможные упрощения.

Так, если напряжения, вызываемые изгибом оболочки, малы по сравнению с напряжениями, обусловленными деформацией срединной поверхности, то изгибающими и крутящими моментами, а также поперечными силами пренебрегают и определяют только усилия в срединной поверхности. Такая теория называется *безмоментной теорией оболочек* и используется для расчёта весьма тонких оболочек положительной и отрицательной гауссовой кривизны.

При расчёте оболочек нулевой гауссовой кривизны – цилиндрических оболочек, вытянутых в одном направлении, – применяется *полубезмоментная теория* в основе которой лежит допущение о малости изгибающего и крутящего моментов, а также поперечной силы, действующих в направлении образующей срединной поверхности оболочки.

Если напряжения, вызываемые изгибом оболочки, и напряжения, обусловленные деформацией срединной поверхности, одного порядка, то расчёт таких оболочек выполняется по *моментной (общей) теории*.

§11.2. Пологие оболочки

Пологими называются оболочки, имеющие небольшой подъём над плоскостью, на которую они опираются. Для пологих оболочек, прямоугольных в плане, выполняется неравенство $\frac{f}{a} \leq \frac{1}{5}$, где f – стрела подъёма оболочки; a – её наименьший размер в плане.

Ввиду небольшого подъёма геометрию срединной поверхности пологой оболочки можно отождествить с геометрией плоскости, на которую она проецируется (опирается). В этом случае криволинейные координаты ξ , η , откладываемые вдоль линий главных кривизн, можно считать совпадающими с декартовыми координатами x , y на плоскости (рис. 75), то

есть принимать, как и для плоскости, $ds^2 = dx^2 + dy^2$. Следовательно, у пологих оболочек можно считать коэффициенты первой квадратичной формы A и B равными единице: $A = B = 1$.

Если уравнение срединной поверхности полой оболочки имеет вид

$$z = f(x, y),$$

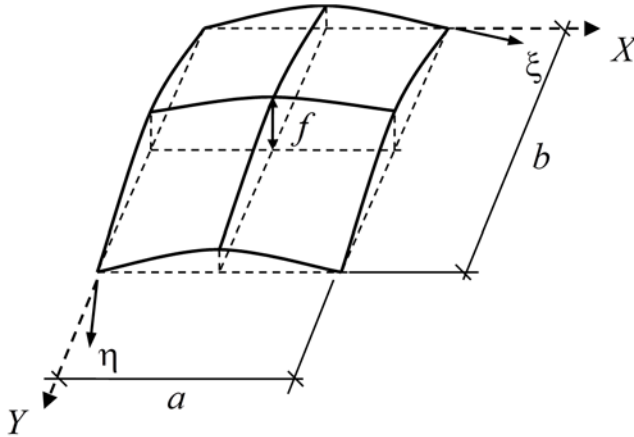


Рис. 75

то главные кривизны могут быть найдены по формулам:

$$\begin{aligned} k_\xi = k_x &= \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}; \\ k_\eta = k_y &= \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}. \end{aligned} \quad (11.13)$$

Гауссову кривизну для пологих оболочек приближённо принимают равной нулю.

Изменения главных кривизн и кручения срединной поверхности полой оболочки в результате её деформации определяют по формулам:

$$\chi_x = -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}; \quad \chi_y = -\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}; \quad \chi = -\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}. \quad (11.14)$$

Линейные и угловые деформации срединной поверхности представляется в виде:

$$\varepsilon_x^0 = \frac{\partial u}{\partial x} - k_x w; \quad \varepsilon_y^0 = \frac{\partial v}{\partial y} - k_y w; \quad \gamma_{xy}^0 = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}. \quad (11.15)$$

Здесь u, v, w – перемещения точек срединной поверхности в направлении координатных осей X, Y, Z .

Происхождение дополнительных слагаемых в выражениях для относительных линейных деформаций в формулах (11.15) можно объяснить на основании следующих рассуждений. Рассмотрим, например, положение элементарного участка координатной линии ξ в недеформированном и деформированном состояниях (рис. 76). В исходном (недеформируемом) состоянии радиус кривизны линейного элемента $d\xi$ равен $R_x = \frac{1}{k_x}$. В состоянии после деформации его радиус кривизны изменится и станет равным

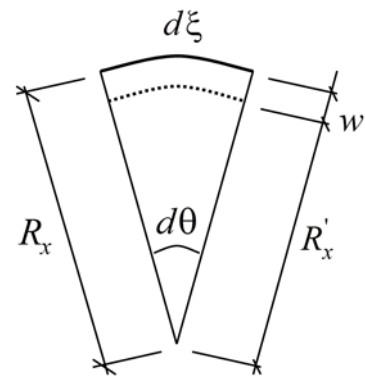


Рис. 76

$R'_x = R_x - w$. Следовательно, относительная линейная деформация линейного элемента $d\xi$, обусловленная только его смещением в направлении радиуса кривизны R_x , будет равна:

$$\frac{(R_x - w)d\theta - R_x d\theta}{R_x d\theta} = -\frac{w}{R_x} = -k_x w.$$

Аналогично можно показать, что относительная линейная деформация линейного элемента $d\eta$, обусловленная только его смещением в направлении радиуса кривизны R_y , будет равна:

$$\frac{(R_y - w)d\theta - R_y d\theta}{R_y d\theta} = -\frac{w}{R_y} = -k_y w.$$

Деформации ε_x^0 ; ε_y^0 ; γ_{xy}^0 должны удовлетворять уравнению неразрывности деформаций для плоского напряжённого состояния (7.29). Подставив формулы (11.11) в уравнение (7.29), получим:

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x^0}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y^0}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \gamma_{xy}^0}{\partial x \partial y} = -k_x \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - k_y \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}. \quad (11.16)$$

Здесь предполагается, что главные кривизны $k_x = k_x(x)$ и $k_y = k_y(y)$.

Рассмотрим пологую оболочку, находящуюся под действием поперечной нагрузки, приложенной перпендикулярно к её срединной поверхности, то есть будем полагать, что составляющие внешней нагрузки в направлении осей OX и OY будут равны нулю. Вырежем из оболочки прямоугольный в плане элемент $d\xi d\eta$ толщиной h . В силу принятых выше оговорок, элемент $d\xi d\eta$ можно считать совпадающим с элементом $dxdy$. По боковым граням этого элемента действуют внутренние усилия – нормальные и сдвигающие усилия в срединной поверхности, показанные на рис. 77; изгибающие и крутящие моменты: поперечные силы, показанные на рис. 78.

Элемент пологой оболочки $d\xi d\eta$ находится в равновесии. Следовательно (см. рис. 77):

$$\sum X = 0: \quad -N_x dy + \left(N_x + \frac{\partial N_x}{\partial x} dx \right) dy - S_y dx + \left(S_y + \frac{\partial S_y}{\partial y} dy \right) dx = 0; \quad (a)$$

$$\sum Y = 0: \quad -N_y dx + \left(N_y + \frac{\partial N_y}{\partial y} dy \right) dx - S_x dy + \left(S_x + \frac{\partial S_x}{\partial x} dx \right) dy = 0; \quad (б)$$

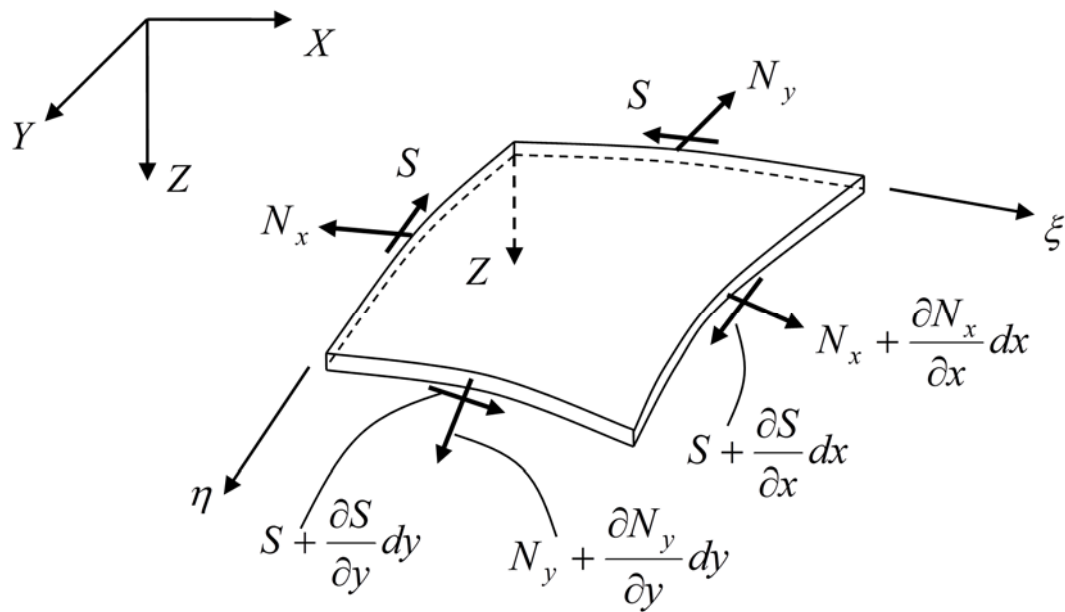


Рис. 77

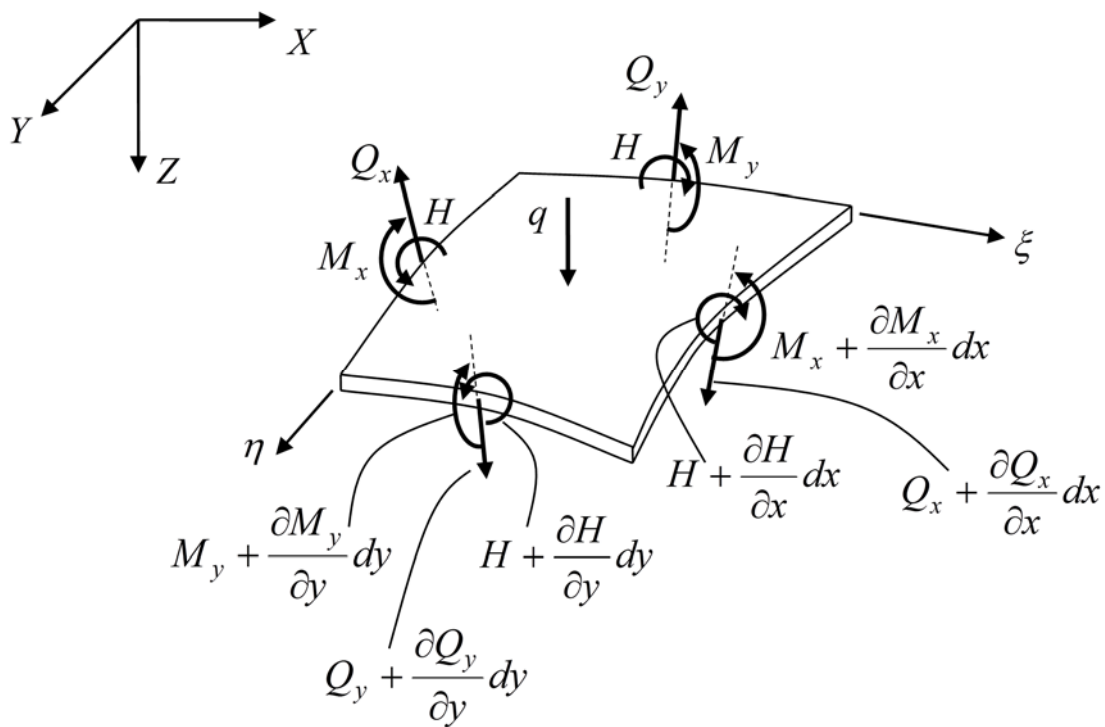


Рис. 78

На основании рис. 78 получаем:

$$\begin{aligned}
 \sum M_x = 0: & \quad -M_y dx + \left(M_y + \frac{\partial M_y}{\partial y} dy \right) dx - H dy + \left(H + \frac{\partial H}{\partial x} dx \right) dy - \\
 & \quad - \left(Q_y + \frac{\partial Q_y}{\partial y} dy \right) dx dy - \frac{\partial Q_x}{\partial x} dx dy \frac{1}{2} dy - q dx dy \frac{1}{2} dy = 0;
 \end{aligned}
 \tag{B}$$

$$\begin{aligned} \sum M_y = 0: \quad & -M_x dy + \left(M_x + \frac{\partial M_x}{\partial x} dx \right) dy - H dx + \left(H + \frac{\partial H}{\partial y} dy \right) dx - \\ & - \left(Q_x + \frac{\partial Q_x}{\partial x} dx \right) dy dx - \frac{\partial Q_y}{\partial y} dy dx \frac{1}{2} dx - q dx dy \frac{1}{2} dx = 0; \end{aligned} \quad (\Gamma)$$

При записи уравнений (а), (б), (в) и (г) из-за малости соответствующих углов проекции усилий в срединной поверхности элемента на координатные оси берём в натуральную величину, а проекциями поперечных сил, в силу их малости, пренебрегаем.

Из уравнений (а) и (б) получаем, соответственно:

$$\frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial S}{\partial y} = 0; \quad \frac{\partial N_y}{\partial y} + \frac{\partial S}{\partial x} = 0. \quad (11.17)$$

Из уравнений (в) и (г), после отбрасывания членов более высокого порядка малости и упрощений, найдём, соответственно:

$$\frac{\partial M_y}{\partial y} + \frac{\partial H}{\partial x} - Q_y = 0; \quad \frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial H}{\partial y} - Q_x = 0. \quad (11.18)$$

При записи уравнения равновесия в проекциях на ось OZ учитываются слагаемые, обусловленные проекциями на эту ось нормальных сил N_x и N_y (рис. 79):

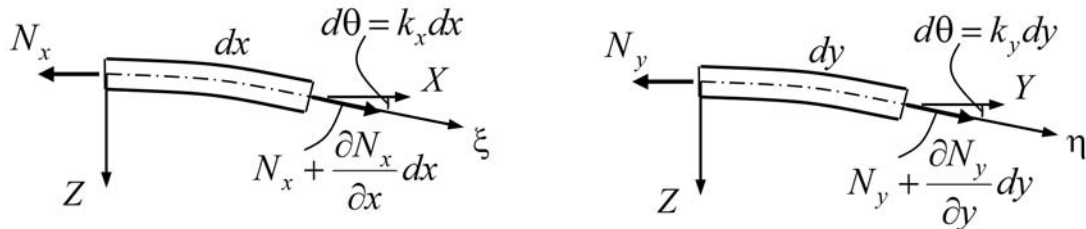


Рис. 79

В результате получаем уравнение:

$$\begin{aligned} \sum Z = 0: \quad & \left(Q_x + \frac{\partial Q_x}{\partial x} dx \right) dy + \left(Q_y + \frac{\partial Q_y}{\partial y} dy \right) dx - Q_x dy - Q_y dx + \\ & + \left(N_x + \frac{\partial N_x}{\partial x} dx \right) k_x dx dy + \left(N_y + \frac{\partial N_y}{\partial y} dy \right) k_y dy dx - \\ & - N_x dy - N_y dx + q dx dy = 0. \end{aligned} \quad (\Delta)$$

Пренебрегая членами более высокого порядка малости, запишем уравнение (д) в следующем виде:

$$\frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} + N_x k_x + N_y k_y = -q. \quad (11.19)$$

Подставим соотношения (11.18) в уравнение (11.19). В результате получим:

$$\frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 H}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} + N_x k_x + N_y k_y = -q. \quad (11.20)$$

Совокупность уравнений (11.17) и (11.20) представляют собой систему уравнений равновесия полой оболочки в усилиях. Эта система уравнений содержит шесть неизвестных N_x , N_y , S , M_x , M_y , H .

Далее, воспользовавшись соотношениями (11.14), выразим изгибающие M_x , M_y и крутящий H моменты в формулах (11.12) через прогиб w полой оболочки:

$$M_x = -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right); \quad M_y = -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right); \quad (11.21)$$

$$H = -D(1 - \mu) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}.$$

Подставим выражения (11.21) в уравнение (11.20):

$$D \nabla^4 w - k_x N_x - k_y N_y = q. \quad (11.22)$$

Для определения четырёх неизвестных w , N_x , N_y , S имеем четыре уравнения: (11.16), (11.17) и (11.22).

Введём функцию напряжений $\varphi = \varphi(x, y)$ так, что

$$\sigma_x^0 = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}; \quad \sigma_y^0 = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}; \quad \tau_{xy}^0 = -\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y}, \quad (11.23)$$

причём напряжения σ_x^0 ; σ_y^0 ; τ_{xy}^0 связаны с соответствующими деформациями ε_x^0 ; ε_y^0 ; γ_{xy}^0 соотношениями:

$$\varepsilon_x^0 = \frac{1}{E} (\sigma_x^0 - \mu \sigma_y^0); \quad \varepsilon_y^0 = \frac{1}{E} (\sigma_y^0 - \mu \sigma_x^0); \quad \gamma_{xy}^0 = \frac{2(1 + \mu)}{E} \tau_{xy}^0. \quad (11.24)$$

Принимая функцию $\Phi(x, y) = h\varphi(x, y)$, можно записать:

$$N_x = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2}; \quad N_y = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2}; \quad S = -\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y}. \quad (11.25)$$

При этом уравнения (11.17) удовлетворяются тождественно.

С учётом соотношений (11.25), зависимости между напряжениями σ_x^0 ; σ_y^0 ; τ_{xy}^0 и деформациями ε_x^0 ; ε_y^0 ; γ_{xy}^0 [формулы (11.24)] можно записать в следующей форме:

$$\begin{aligned}\varepsilon_x^0 &= \frac{1}{E}(\sigma_x^0 - \mu\sigma_y^0) = \frac{1}{E}\left(\frac{N_x}{h} - \mu\frac{N_y}{h}\right) = \\ &= \frac{1}{Eh}(N_x - \mu N_y) = \frac{1}{Eh}\left(\frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2} - \mu\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}\right); \\ \varepsilon_y^0 &= \frac{1}{E}(\sigma_y^0 - \mu\sigma_x^0) = \frac{1}{E}\left(\frac{N_y}{h} - \mu\frac{N_x}{h}\right) = \\ &= \frac{1}{Eh}(N_y - \mu N_x) = \frac{1}{Eh}\left(\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2} - \mu\frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2}\right); \\ \gamma_{xy}^0 &= \frac{2(1+\mu)}{E}\tau_{xy}^0 = \frac{2(1+\mu)}{E}\frac{S}{h} = \frac{2(1+\mu)}{Eh}S = -\frac{2(1+\mu)}{Eh}\frac{\partial^2\Phi}{\partial x\partial y}.\end{aligned}\tag{11.26}$$

Подставив полученные зависимости (11.26) в уравнение совместности деформаций (11.16), получим:

$$\frac{1}{Eh}\nabla^4 w = -k_x\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - k_y\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}.\tag{11.27}$$

С учётом зависимостей (11.25) уравнение равновесия (11.22) принимает вид:

$$D\nabla^4 w - k_x\frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2} - k_y\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2} = q.\tag{11.28}$$

Следуя работе [1], введём обозначение

$$\nabla_k^2(\) = k_x\frac{\partial^2}{\partial y^2}(\) + k_y\frac{\partial^2}{\partial x^2}(\).$$

Тогда уравнения (11.21) и (11.22) можно записать в виде:

$$\frac{1}{Eh}\nabla^4\Phi + \nabla_k^2 w = 0; \quad D\nabla^4 w - \nabla_k^2\Phi = q.\tag{11.29}$$

Таким образом, для расчёта пологих оболочек имеем разрешающую систему двух дифференциальных уравнений в частных производных четвёртого порядка относительно двух неизвестных функций: $w(x, y)$ и $\Phi(x, y)$.

Система дифференциальных уравнений (11.29) обобщает две задачи теории упругости: плоскую задачу и задачу об изгибе тонкой пластинки. Действительно, полагая главные кривизны оболочки равными нулю,

получаем $\nabla_k^2(\) \equiv 0$, а система (11.29) распадается на два независимых уравнения:

$$\nabla^4 \varphi = 0; \quad D\nabla^4 w = q. \quad (11.30)$$

Уравнение (11.30₁) представляет собой бигармоническое уравнение плоской задачи теории упругости; уравнение (11.30₂) – это уравнение изогнутой срединной поверхности тонкой пластинки (уравнение Софи-Жермен).

Уравнения (11.29) записаны в системе координат, оси которой совпадают с линиями главных кривизн срединной поверхности оболочки. Иногда оказывается более предпочтительным выполнение расчёта с использованием другой ортогональной системы координат. В этом случае разрешающая система уравнений формально может быть записана в том же виде, что и система уравнений (11.29), но оператор $\nabla_k^2(\)$ при этом будет иметь следующее выражение:

$$\nabla_k^2(\) = \frac{\partial}{\partial x} \left[k_y \frac{\partial}{\partial x}(\) \right] - \frac{\partial}{\partial y} \left[k_{xy} \frac{\partial}{\partial x}(\) \right] - \frac{\partial}{\partial x} \left[k_{yx} \frac{\partial}{\partial y}(\) \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[k_x \frac{\partial}{\partial y}(\) \right].$$

Здесь $k_{xy} = k_{yx}$ – кручение срединной поверхности оболочки.

Для пологой оболочки, уравнение срединной поверхности которой описывается уравнением $z = f(x, y)$, имеем:

$$k_{xy} \approx \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}.$$

В том случае, когда справедливы соотношения

$$k_x = k_x(x); \quad k_y = k_y(y); \quad k_{xy} = \text{const},$$

оператор $\nabla_k^2(\)$ принимает вид:

$$\nabla_k^2(\) = k_x \frac{\partial^2}{\partial y^2}(\) - 2k_{xy} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} + k_y \frac{\partial^2}{\partial x^2}(\).$$

Разрешающая система уравнений для пологой оболочки (11.29) записана в смешанной форме. Эта система уравнений может быть приведена к одному разрешающему уравнению восьмого порядка относительно функции прогиба $w(x, y)$. Для этого необходимо к уравнению (11.29₂) применить бигармонический оператор $\nabla^4 \dots$. В результате получим:

$$D\nabla^4 \nabla^4 w = h \left(\frac{1}{R_x} \frac{\partial^2}{\partial y^2} \nabla^4 \varphi + \frac{1}{R_y} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \nabla^4 \varphi \right) + \nabla^4 q.$$

Учитывая уравнение (11.29₁), будем иметь:

$$D\nabla^4\nabla^4w + Eh\left(\frac{1}{R_x^2}\frac{\partial^4w}{\partial y^4} + \frac{2}{R_xR_y}\frac{\partial^4w}{\partial x^2\partial y^2} + \frac{1}{R_y^2}\frac{\partial^4w}{\partial x^4}\right) = \nabla^4q. \quad (11.31)$$

Таким образом, задача об изгибе пологой оболочки, находящейся под действием произвольной нормальной к срединной поверхности нагрузки $q(x, y)$, сводится к решению одного линейного дифференциального уравнения восьмого порядка в частных производных.

Если прогибы пологой оболочки сравнимы с её толщиной, то определение относительных линейных деформаций ε_x^0 , ε_y^0 и деформаций сдвига γ_{xy}^0 срединной поверхности должно выполняться с учётом квадратичных слагаемых в геометрических соотношениях, как это было показано ранее для гибких пластин (10.69). При этом уравнения (11.29) станут нелинейными и будут иметь вид:

$$D\nabla^4w - \left(\frac{1}{R_x} + \frac{\partial^2w}{\partial x^2}\right)\frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2} - 2\frac{\partial^2\Phi}{\partial x\partial y}\frac{\partial^2w}{\partial x\partial y} - \left(\frac{1}{R_y} + \frac{\partial^2w}{\partial y^2}\right)\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2} = q; \quad (11.32)$$

$$\frac{1}{Eh}\nabla^4\Phi = \left(\frac{\partial^2w}{\partial x\partial y}\right)^2 - \frac{\partial^2w}{\partial x^2}\frac{\partial^2w}{\partial y^2} - \frac{1}{R_x}\frac{\partial^2w}{\partial y^2} - \frac{1}{R_y}\frac{\partial^2w}{\partial x^2}.$$

Уравнения равновесия пологой оболочки в усилиях (11.17) и (11.20) можно записать в перемещениях, если воспользоваться соотношениями (11.12) и (11.15):

$$\frac{\partial^2u}{\partial x^2} + \frac{1-\mu}{2}\frac{\partial^2u}{\partial y^2} + \frac{1+\mu}{2}\frac{\partial^2v}{\partial x\partial y} + \left(\frac{1}{R_x} + \frac{\mu}{R_y}\right)\frac{\partial w}{\partial x} = 0;$$

$$\frac{1+\mu}{2}\frac{\partial^2u}{\partial x\partial y} + \frac{1-\mu}{2}\frac{\partial^2v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2v}{\partial y^2} + \left(\frac{\mu}{R_x} + \frac{1}{R_y}\right)\frac{\partial w}{\partial y} = 0; \quad (11.33)$$

$$\frac{h^2}{12}\nabla^4w + \left(\frac{1}{R_x} + \frac{\mu}{R_y}\right)\frac{\partial u}{\partial x} + \left(\frac{1}{R_y} + \frac{\mu}{R_x}\right)\frac{\partial v}{\partial x} + \left(\frac{1}{R_x^2} + \frac{2\mu}{R_xR_y} + \frac{1}{R_y^2}\right)w = q.$$

Если задача о напряжённом и деформированном состоянии пологой оболочки решается в перемещениях, то необходимо отыскать такие функции перемещений u , v , w , которые удовлетворяли бы уравнениям равновесия (11.33) и заданным граничным условиям. В этом случае уравнения совместности деформаций удовлетворяются тождественно.

Граничные условия

Функции $w(x, y)$ и $\Phi(x, y)$, являющиеся решением системы уравнений (11.29), должны удовлетворять условиям на границе пологой оболочки. Рассмотрим особенности записи граничных условий на примере пологой оболочки, прямоугольной в плане. На каждой кромке оболочки накладываются ограничения на функции $w(x, y)$ и $\Phi(x, y)$, причём таких условий должно быть четыре – по два условия на каждую из функций $w(x, y)$ и $\Phi(x, y)$. Рассмотрим случай жёсткой заделки опорного контура и случай шарнирного опирания контура пологой оболочки. Заметим, что краевые условия, зависящие от прогиба оболочки, имеют точно такой же вид, как и для жёстких тонких пластинок. Условия на контуре для функции $\Phi(x, y)$ записывают относительно перемещений u и v в направлении координатных осей OX и OY .

1. Жёсткая заделка по контуру пологой оболочки.

✓ Стороны, где $x = 0$ или $x = a$:

$$\begin{aligned} w = 0; \quad \frac{\partial w}{\partial x} = 0; \\ u = 0; \quad v = 0. \end{aligned} \tag{11.34}$$

✓ Стороны, где $y = 0$ или $y = b$:

$$\begin{aligned} w = 0; \quad \frac{\partial w}{\partial y} = 0; \\ u = 0; \quad v = 0. \end{aligned} \tag{11.35}$$

2. Шарнирное опирание по контуру пологой оболочки.

✓ Стороны, где $x = 0$ или $x = a$:

$$\begin{aligned} w = 0; \quad \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0; \\ u = 0; \quad v = 0. \end{aligned} \tag{11.36}$$

✓ Стороны, где $y = 0$ или $y = b$:

$$\begin{aligned} w = 0; \quad \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0; \\ u = 0; \quad v = 0. \end{aligned} \tag{11.37}$$

Если, кроме того, опорный контур пологой оболочки свободно смещается в направлении координатных осей OX и OY , то вместо равенства нулю перемещений в направлении этих осей записываются условия равенства нулю соответствующих напряжений.

Потенциальная энергия пологой оболочки

Потенциальная энергия U в оболочке складывается из энергии изгиба и кручения U_u , а также из энергии деформации в срединной поверхности U_c .

В терминах напряжений и деформаций потенциальная энергия пологой оболочки, с учетом гипотезы Кирхгофа – Лява, будет равна:

$$U = \frac{1}{2} \iiint_V (\sigma_x \varepsilon_x + \sigma_y \varepsilon_y + \tau_{xy} \gamma_{xy}) dV. \quad (11.38)$$

Здесь V – объём, занимаемый оболочкой.

Выразим напряжения σ_x , σ_y и τ_{xy} через внутренние усилия. Для этого подставим соотношения (11.4) в зависимости (11.9) и, учитывая формулы (11.12) и (11.14), получим:

$$\sigma_x = \frac{N_x}{h} + \frac{12M_x}{h^3} z; \quad \sigma_y = \frac{N_y}{h} + \frac{12M_y}{h^3} z; \quad \tau_{xy} = \frac{S}{h} + \frac{12H}{h^3} z. \quad (11.39)$$

Подставляя зависимости (11.39) и (11.4) с учётом соотношений (11.14) в формулу (11.38), будем иметь:

$$U = \frac{1}{2} \iiint_V \left[\left(\frac{N_x}{h} + \frac{12M_x}{h^3} z \right) \left(\varepsilon_x^0 - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} z \right) + \left(\frac{N_y}{h} + \frac{12M_y}{h^3} z \right) \left(\varepsilon_y^0 - \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} z \right) + \left(\frac{S}{h} + \frac{12H}{h^3} z \right) \left(\gamma_{xy}^0 - 2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} z \right) \right] dV.$$

После интегрирования по толщине оболочки найдём:

$$U = \frac{1}{2} \iint_{A_0} (N_x \varepsilon_x^0 + N_y \varepsilon_y^0 + S \gamma_{xy}^0) dA_0 - \frac{1}{2} \iint_{A_0} \left(M_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + 2H \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + M_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) dA_0. \quad (11.40)$$

Здесь A_0 – площадь срединной поверхности оболочки.

Первый интеграл в формуле (11.40) представляет собой энергию деформации срединной поверхности U_c ; второй – энергию деформации кручения и изгиба U_u .

Выразив деформации ε_x^0 , ε_y^0 , γ_{xy}^0 через внутренние усилия N_x , N_y , S в первых трёх соотношениях формул (11.12) и подставив полученные зависимости в первое слагаемое выражения (11.40), получим формулу для потенциальной энергии деформации срединной поверхности:

$$U_c = \frac{1}{2Eh} \iint_{A_0} \left[(N_x^2 - 2\mu N_x N_y + N_y^2) + 2(1+\mu) S^2 \right] dA_0. \quad (11.41)$$

Выражение (11.41), записанное с использованием функции напряжений (11.25), получает вид:

$$U_c = \frac{1}{2Eh} \iint_{A_0} \left\{ \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} \right)^2 - 2(1+\mu) \left[\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} \right)^2 \right] \right\} dA_0. \quad (11.42)$$

Подставив во второе слагаемое уравнения (11.40) значения внутренних усилий M_x , M_y , H , выраженные через перемещения (11.21), получим формулу для потенциальной энергии изгиба и кручения:

$$U_u = \frac{D}{2} \iint_{A_0} \left\{ \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 - 2(1-\mu) \left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 \right] \right\} dA_0. \quad (11.43)$$

Итак, полная потенциальная энергия полой оболочки будет определяться, как это следует из соотношения (11.40), суммой:

$$U = U_c + U_u. \quad (11.44)$$

§11.3. Расчёт оболочки произвольной формы по безмоментной теории

Расчёт оболочки по безмоментной теории значительно проще расчёта по полной, моментной теории. Как следует из формул (11.12), изгибающие и крутящие моменты становятся пренебрежимо малыми тогда, когда оболочка имеет либо очень малую толщину h , либо очень малые величины изменения кривизн χ_ξ , χ_η и кручения η . Принимая равными нулю величины изгибающих и крутящего моментов, мы полагаем тем самым, что нормальные σ_ξ , σ_η и касательные напряжения не зависят от координаты z .

Условия существования безмоментного напряжённого состояния формулируются следующим образом:

1. Оболочка должна иметь плавно изменяющуюся непрерывную поверхность, то есть кривизна срединной поверхности оболочки должна меняться плавно.

2. Нагрузка на оболочку должна быть непрерывной, равномерной или плавно изменяющейся.

3. Края оболочки должны иметь возможность свободно перемещаться в направлении нормали к срединной поверхности. Однако граничные условия должны обеспечивать неизменяемость формы оболочки.

4. Нагрузки, приложенные к краям оболочки, должны действовать в плоскости, касательной к её срединной поверхности.

Рассмотрим оболочку произвольной формы, находящуюся под действием внешней поверхностной нагрузки. Выделим из срединной поверхности оболочки линиями $\xi = \text{const}$, $\xi + d\xi = \text{const}$ и $\eta = \text{const}$, $\eta + d\eta = \text{const}$ бесконечно малый элемент $CDEF$ (рис. 80).

В координатах ξ и η выделенный элемент имеет форму ортогонального криволинейного четырёхугольника со сторонами

$$\begin{aligned} CD = Ad\xi, \quad EF &= \left(A + \frac{\partial A}{\partial \eta} d\eta \right) d\xi; \\ CE = Bd\eta, \quad DF &= \left(B + \frac{\partial B}{\partial \xi} d\xi \right) d\eta. \end{aligned} \quad (11.45)$$

Углы $d\alpha_\xi$ и $d\alpha_\eta$ соответствуют криволинейным сторонам четырёхугольника $Ad\xi$ и $Bd\eta$ соответственно. Они расположены в двух взаимно перпендикулярных главных нормальных плоскостях, проходящих через точку C . Согласно рис. 80, эти углы равны:

$$d\alpha_\xi = \frac{A}{R_\xi} d\xi; \quad d\alpha_\eta = \frac{B}{R_\eta} d\eta. \quad (11.46)$$

Углы $d\beta_\xi$ и $d\beta_\eta$ лежат в касательной плоскости и образованы направлениями смежных касательных к линиям кривизн, проходящих через точки C , D и E . Для этих углов, согласно рис. 80, получаем:

$$\begin{aligned} d\beta_\xi \approx \text{tg}(d\beta_\xi) &= \frac{\frac{\partial A}{\partial \eta} d\xi d\eta}{Bd\eta} = \frac{1}{B} \frac{\partial A}{\partial \eta} d\xi; \\ d\beta_\eta \approx \text{tg}(d\beta_\eta) &= \frac{\frac{\partial B}{\partial \xi} d\eta d\xi}{Ad\xi} = \frac{1}{A} \frac{\partial B}{\partial \xi} d\eta. \end{aligned} \quad (11.47)$$

В случае безмоментного напряжённого состояния на гранях рассматриваемого элемента действуют отнесённые к единице длины сечения оболочки нормальные N_ξ , N_η и сдвигающие $S_{\xi\eta}$, $S_{\eta\xi}$ усилия, являющиеся функциями координат ξ и η (рис. 81). Внешняя поверхностная нагрузка, действующая на рассматриваемый элемент оболочки, показана в виде составляющих интенсивности нагрузки F_x , F_y , F_z по осям подвижной ортогональной системы координат XYZ с началом в точке C .

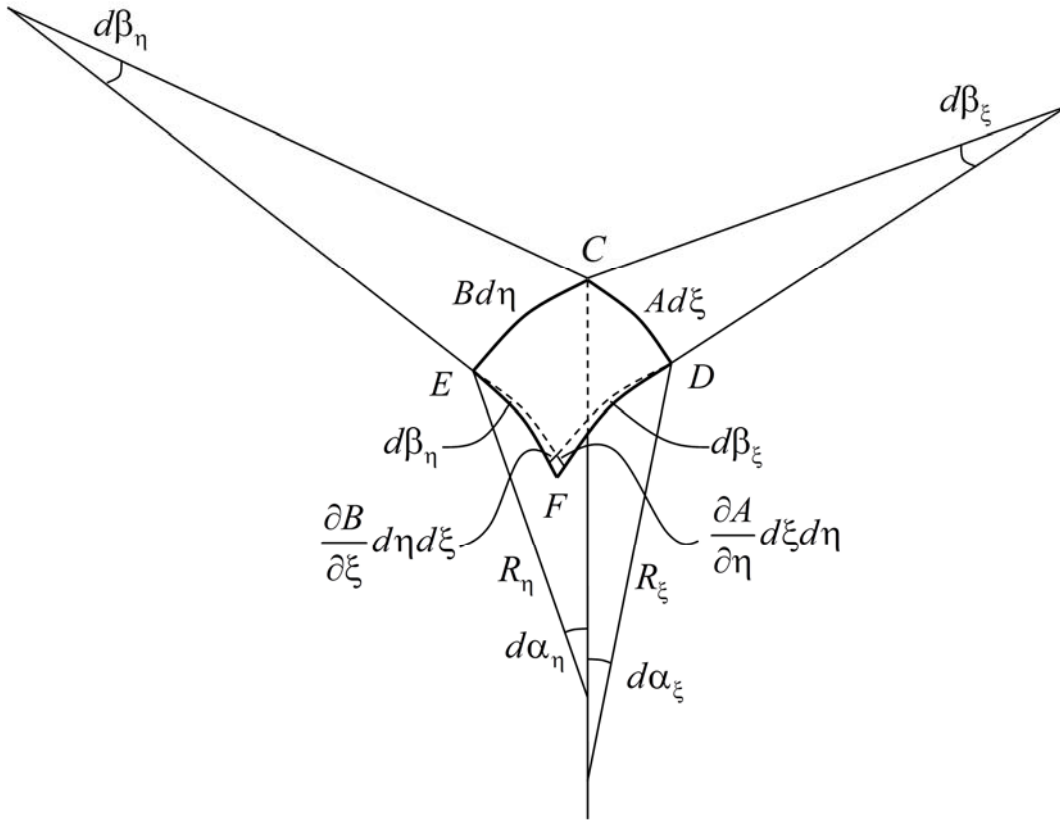


Рис. 80

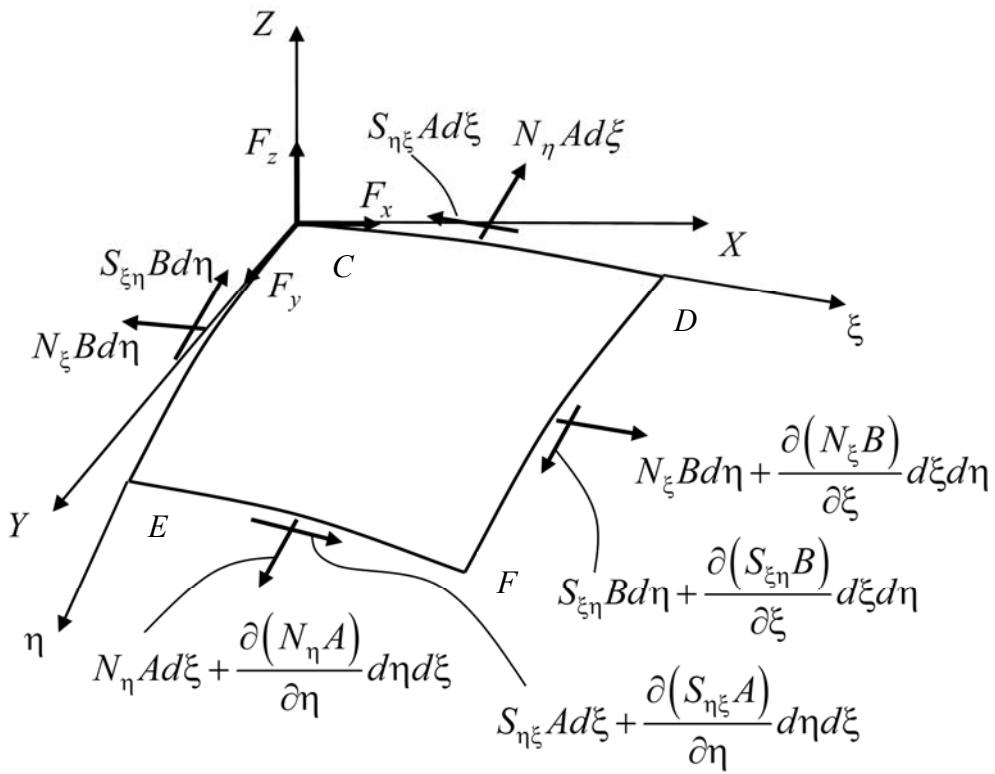


Рис. 81

Выделенный рассматриваемый элемент оболочки находится в равновесии. Следовательно, суммы проекций всех сил на оси CX , CY , CZ должны быть равны нулю:

$$\begin{aligned} \sum X = 0: & N_{\xi} B d\eta + \frac{\partial(N_{\xi} B)}{\partial \xi} d\xi d\eta - N_{\xi} B d\eta + S_{\eta \xi} A d\xi + \frac{\partial(S_{\eta \xi} A)}{\partial \eta} d\xi d\eta - \\ & - S_{\eta \xi} A d\xi - \left[N_{\eta} A d\xi + \frac{\partial(N_{\eta} A)}{\partial \eta} d\xi d\eta \right] d\beta_{\eta} + \\ & + \left[S_{\xi \eta} B d\eta + \frac{\partial(S_{\xi \eta} B)}{\partial \xi} d\xi d\eta \right] d\beta_{\xi} + F_x A d\xi B d\eta = 0; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sum Y = 0: & N_{\eta} A d\xi + \frac{\partial(N_{\eta} A)}{\partial \eta} d\xi d\eta - N_{\eta} A d\xi + S_{\xi \eta} B d\eta + \frac{\partial(S_{\xi \eta} B)}{\partial \xi} d\xi d\eta - \\ & - S_{\xi \eta} B d\eta - \left[N_{\xi} B d\eta + \frac{\partial(N_{\xi} B)}{\partial \xi} d\xi d\eta \right] d\beta_{\xi} + \\ & + \left[S_{\eta \xi} A d\xi + \frac{\partial(S_{\eta \xi} A)}{\partial \eta} d\xi d\eta \right] d\beta_{\eta} + F_y B d\eta A d\xi = 0; \end{aligned}$$

$$\sum Z = 0: \quad -N_{\xi} B d\eta d\alpha_{\xi} - N_{\eta} A d\xi d\alpha_{\eta} + F_z A d\xi B d\eta = 0.$$

После приведения подобных слагаемых и пренебрежения членами высших порядков малости получим:

$$\begin{aligned} \frac{\partial(N_{\xi} B)}{\partial \xi} d\xi d\eta + \frac{\partial(S_{\eta \xi} A)}{\partial \eta} d\xi d\eta - N_{\eta} A d\xi d\beta_{\eta} + S_{\xi \eta} B d\eta d\beta_{\xi} + F_x A d\xi B d\eta &= 0; \\ \frac{\partial(N_{\eta} A)}{\partial \eta} d\xi d\eta + \frac{\partial(S_{\xi \eta} B)}{\partial \xi} d\xi d\eta - N_{\xi} B d\eta d\beta_{\xi} + S_{\eta \xi} A d\xi d\beta_{\eta} + F_y B d\eta A d\xi &= 0; \\ + N_{\xi} B d\eta d\alpha_{\xi} + N_{\eta} A d\xi d\alpha_{\eta} &= F_z A d\xi B d\eta. \end{aligned}$$

В полученные соотношения подставим формулы (11.46), (11.47). В результате имеем полную систему основных уравнений безмоментной

теории оболочек, записанную в координатах главных кривизн срединной поверхности оболочки.

$$\begin{aligned}
\frac{\partial(N_\xi B)}{\partial\xi} - N_\eta \frac{\partial B}{\partial\xi} + \frac{\partial(S_{\eta\xi} A)}{\partial\eta} + S_{\xi\eta} \frac{\partial A}{\partial\eta} + F_x AB &= 0; \\
\frac{\partial(S_{\xi\eta} B)}{\partial\xi} + S_{\eta\xi} \frac{\partial B}{\partial\xi} + \frac{\partial(N_\eta A)}{\partial\eta} - N_\xi \frac{\partial A}{\partial\eta} + F_y AB &= 0; \\
\frac{N_\xi}{R_\xi} + \frac{N_\eta}{R_\eta} - F_z &= 0.
\end{aligned} \tag{11.48}$$

Из уравнения моментов относительно оси CZ получаем соотношение

$$S_{\xi\eta} = S_{\eta\xi} = S. \tag{11.49}$$

Таким образом, система (11.48) включает три неизвестные искомые функции: N_ξ , N_η и S . Это означает, что при расчёте по безмоментной теории оболочка в бесконечно малом представляет собой статически определимую систему.

Решение системы уравнений (11.48) относится к статической задаче безмоментной теории оболочек. Чтобы найти деформации и перемещения в оболочке, к этим уравнениям следует добавить геометрические и физические соотношения [27].

Относительные линейные деформации ε_ξ^0 , ε_η^0 и сдвиг $\gamma_{\xi\eta}^0$ срединной поверхности можно выразить через усилия N_ξ , N_η , S по формулам закона Гука:

$$\varepsilon_x^0 = \frac{1}{Eh}(N_\xi - \mu N_\eta); \quad \varepsilon_y^0 = \frac{1}{Eh}(N_\eta - \mu N_\xi); \quad \gamma_{xy}^0 = \frac{2(1+\mu)}{Eh} S. \tag{11.50}$$

Поскольку деформации ε_ξ^0 , ε_η^0 и сдвиг $\gamma_{\xi\eta}^0$ выражаются через перемещения u , v , w по формулам (11.5) и (11.6), то их подстановка в физические уравнения (11.50) позволяет получить дифференциальные уравнения для определения перемещений u , v , w :

$$\begin{aligned}
\frac{1}{A} \frac{\partial u_\xi}{\partial\xi} + \frac{1}{AB} \frac{\partial A}{\partial\eta} u_\eta + \frac{w}{R_\xi} &= \frac{1}{Eh}(N_\xi - \mu N_\eta); \\
\frac{1}{B} \frac{\partial u_\eta}{\partial\eta} + \frac{1}{AB} \frac{\partial B}{\partial\xi} u_\xi + \frac{w}{R_\eta} &= \frac{1}{Eh}(N_\eta - \mu N_\xi); \\
\frac{B}{A} \frac{\partial}{\partial\xi} \left(\frac{u_\eta}{B} \right) + \frac{A}{B} \frac{\partial}{\partial\eta} \left(\frac{u_\xi}{A} \right) &= \frac{2(1+\mu)}{Eh} S.
\end{aligned} \tag{11.51}$$

Здесь u_ξ и u_η – перемещения в направлении криволинейных координат ξ и η , совпадающих с линиями главных кривизн срединной поверхности оболочки.

Итак, для определения усилий N_ξ , N_η , S в оболочке по безмоментной теории имеем систему трёх дифференциальных уравнений (11.48); определение перемещений в направлении осей криволинейной системы координат ξ , η , выполняется путём интегрирования системы трёх дифференциальных уравнений (11.51)

В качестве первого примера рассмотрим *сферическую оболочку* (рис. 82). Для неё главные кривизны одинаковы:

$$R_\xi = R_\eta = R.$$

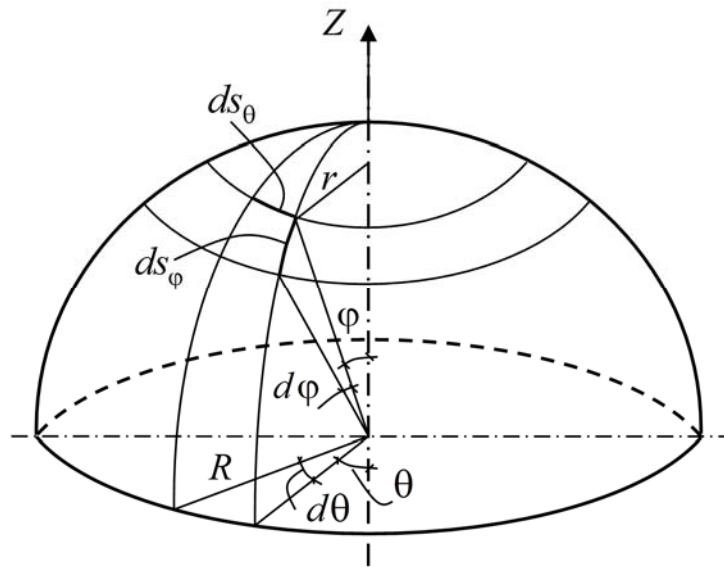


Рис. 82

В соответствии с рис. 82, выполним замену: ξ заменим на φ ; η заменим на θ . Тогда длины линейных элементов будут равны:

$$ds_\xi = R d\varphi; \quad ds_\eta = r d\theta = R \sin \varphi d\theta. \quad (11.52)$$

Сопоставляя формулы (11.52) и (11.2), получаем, что коэффициенты первой квадратичной формы для сферы будут равны:

$$A=R; \quad B=R \sin \varphi. \quad (11.53)$$

Подставляя (11.53) в уравнения (11.48), получим разрешающие уравнения для сферической оболочки:

$$\begin{aligned} \frac{\partial(N_\varphi \sin \varphi)}{\partial \varphi} - N_\theta \cos \varphi + \frac{\partial S}{\partial \theta} + F_x R \sin \varphi &= 0; \\ \frac{\partial(S \cdot \sin \varphi)}{\partial \varphi} + S \cos \varphi + \frac{\partial N_\theta}{\partial \theta} + F_y R \sin \varphi &= 0; \\ N_\varphi + N_\theta - F_z R &= 0. \end{aligned} \quad (11.54)$$

Рассмотрим *цилиндрическую оболочку* в качестве второго примера (рис. 83). Для цилиндрической оболочки

$$R_\xi = \infty; \quad R_\eta = R; \quad ds_\xi = dz; \quad ds_\eta = R d\theta; \quad A = 1; \quad B = R.$$

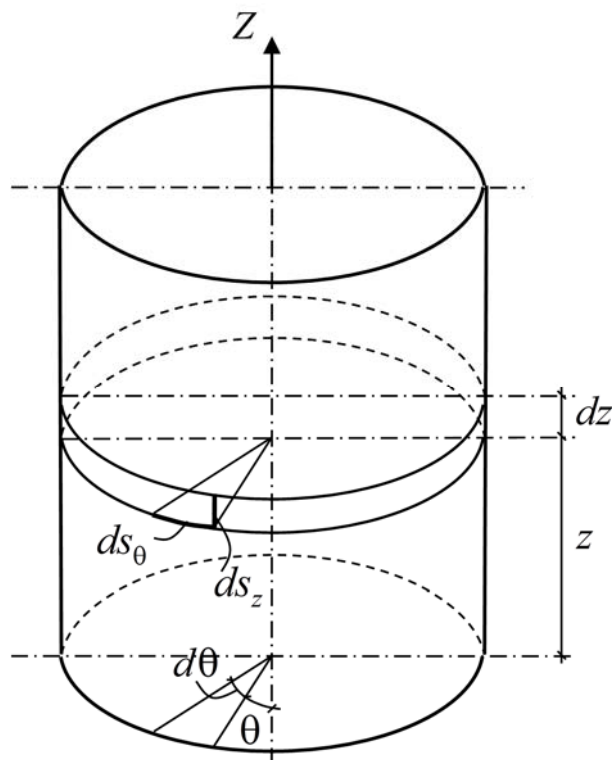


Рис. 83

Уравнения (11.48) получают вид:

$$\frac{\partial N_z}{\partial z} + \frac{1}{R} \frac{\partial S}{\partial \theta} + F_x = 0; \quad \frac{\partial S}{\partial z} + \frac{1}{R} \frac{\partial N_\theta}{\partial \theta} + F_y = 0; \quad N_\theta - F_z R = 0. \quad (11.55)$$

Краевой эффект

С точки зрения рационального использования материала конструкции безмоментное напряжённое состояние является наиболее выгодным. Поэтому в конструкциях следует стремиться обеспечить условия для реализации безмоментного напряжённого состояния.

Во многих случаях обеспечить условия, при которых в полной мере реализуется безмоментное напряжённое состояние, не удаётся. Однако это не обязательно означает неприменимость безмоментной теории. Нередко большая часть оболочки находится в условиях безмоментного (или, точнее, близкого к безмоментному) напряжённого состояния, и лишь небольшие области находятся в условиях смешанного напряжённого состояния. Эти

области часто прилегают к краям оболочки, и поэтому их называют *зонами краевого эффекта*.

Области смешанного напряжённого состояния в оболочке возникают также там, где имеет место резкое изменение сечения или величины нагрузки. В подобных случаях иногда оказывается удобным рассматривать смешанное напряжённое состояние оболочки как сумму безмоментного напряжённого состояния всей оболочки и быстро затухающего моментного напряжённого состояния в зоне краевого эффекта.

Граничные условия на кромках оболочки должны быть такими, чтобы обеспечивалась безмоментность напряжённого состояния. В связи с этим на границах оболочки можно задавать только усилия, действующие в направлениях, касательных к срединной поверхности, то есть только в направлении действия усилий N_ξ , N_η и S . Если условия на границе формулируются в перемещениях, то эти перемещения можно задавать только в тангенциальных направлениях, то есть в направлении действия перемещений u и v .

Глава 12. ОСНОВЫ ТЕОРИИ РАСПРОСТРАНЕНИЯ УПРУГИХ ВОЛН ДЕФОРМАЦИЙ

Деформации в упругом теле распространяются не мгновенно, а с конечной скоростью. Если к упругому телу приложить внезапно силу, то достаточно удалённые части тела вначале останутся ненапряжёнными и лишь спустя какое-то время здесь появятся напряжения. Говорят, по телу распространяется волна напряжений (или волна деформаций). Прежде чем перейти к количественному описанию процесса распространения воздействия по упругому телу, дадим строгое определение понятию «волна» [24].

Обозначим через $\omega(x, y, z, t)$ поверхность, разделяющую в упругом теле объёмом V две области с объёмами V_1 и V_2 (рис. 84). Через $\bar{\mathbf{u}}(x, y, z, t)$

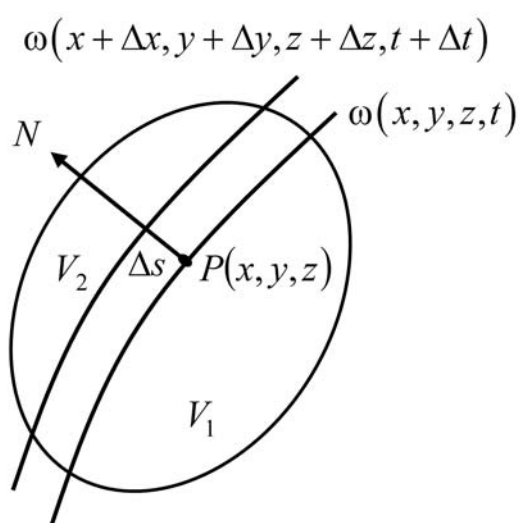


Рис. 84

обозначим функцию, непрерывную в области V и определяющую перемещения материальных точек упругого тела. Предполагается, что при переходе через поверхность $\omega(x, y, z, t)$ некоторые производные функции $\bar{\mathbf{u}}(x, y, z, t)$ по координатам x, y, z и времени t испытывают внезапные (скачкообразные) изменения. Такая поверхность называется поверхностью разрыва n -го порядка, если все производные по пространственным координатам и времени до порядка $n - 1$ включительно непрерывны и

если некоторые производные по x, y, z или t порядка n разрывны при переходе через эту поверхность.

Когда поверхность $\omega(x, y, z, t)$ перемещается по упругому телу, то говорят, что распространяется разрыв; поверхность $\omega(x, y, z, t)$ называется *волной*.

В случае разрыва 1-го порядка волна называется *волной сильного разрыва*; если разрыв порядка $n \geq 2$, то такая волна называется *обыкновенной волной*. Разрыв нулевого порядка не может распространяться, так как это означало бы разрыв упругого тела. Таким образом, если на поверхности $\omega(x, y, z, t)$ компоненты тензора напряжений или компоненты вектора скоростей материальных частиц имеют разрывы, то эта поверхность является *волной сильного разрыва*. Если компоненты тензора напряжений или компоненты вектора скоростей материальных частиц на поверхности

$\omega(x, y, z, t)$ – непрерывные функции, но какая-нибудь из их первых производных разрывна, то волна называется *волной слабого разрыва*.

Пусть в момент времени t поверхность разрыва занимает положение $\omega(x, y, z, t)$. В момент времени $t + \Delta t$ поверхность разрыва займёт положение $\omega(x + \Delta x, y + \Delta y, z + \Delta z, t + \Delta t)$. Обозначим через Δs длину нормали к поверхности $\omega(x, y, z, t)$ в точке $P(x, y, z)$, заключённую между поверхностями $\omega(x, y, z, t)$ и $\omega(x + \Delta x, y + \Delta y, z + \Delta z, t + \Delta t)$. Тогда скорость распространения волны N будет равна:

$$N = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t}. \quad (12.1)$$

Если материальные частицы и в области V_1 , и в области V_2 находятся в упругом состоянии, причём в области V_1 материальные частицы испытывают нагружение, то перемещающаяся из области V_1 в область V_2 поверхность разрыва $\omega(x, y, z, t)$ носит название *упругой волны*; если же материальные частицы в области V_1 испытывают разгрузку, то поверхность разрыва $\omega(x, y, z, t)$, перемещающаяся в направлении области V_2 , называется *волной разгрузки*.

Волна сильного разрыва возникает, как правило, в случае, когда имеет место разрыв в граничных условиях, например внезапное приложение нагрузки (удар) на поверхности упругого тела. Особым случаем волны сильного разрыва является *ударная волна*. Ударную волну характеризует появление на её фронте разрыва компонентов тензора напряжений и компонентов вектора скоростей материальных частиц (то есть разрыв первых производных перемещений) даже в том случае, когда тензор напряжений изменяется во времени непрерывным образом в том месте, от которого эта волна начинает распространяться. Другими словами, образование ударной волны не зависит от разрывности граничных условий; причиной её возникновения являются либо механические свойства материала упругого тела, либо геометрия сплошной среды упругого тела [33, 8, 3, 4].

Пусть $\omega(x, y, z, t) = 0$ – уравнение поверхности разрыва. Кинематические условия совместности [35] имеют вид:

$$\left[\frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_k} \right] = \frac{\partial \omega}{\partial x_j} \frac{\partial \omega}{\partial x_k} \lambda_{u_i}. \quad (12.2)$$

Здесь [...] – символическая запись скачка производных; λ_{u_i} – коэффициенты прерывности; x_j и x_k – декартовы координаты x , y и z ; u_i – перемещения u , v и w .

Значения скоростей распространения волн деформаций по нормали к фронту определяются соотношением [10]

$$N^2 = \frac{\left(\frac{\partial \omega}{\partial t}\right)^2}{\left(\frac{\partial \omega}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \omega}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \omega}{\partial z}\right)^2}. \quad (12.3)$$

Для вычисления направляющих косинусов l_x , l_y , l_z вектора нормали к фронту волны можно воспользоваться соотношениями:

$$\begin{aligned} l_x^2 &= \frac{\left(\frac{\partial \omega}{\partial x}\right)^2}{\left(\frac{\partial \omega}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \omega}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \omega}{\partial z}\right)^2}; \\ l_y^2 &= \frac{\left(\frac{\partial \omega}{\partial y}\right)^2}{\left(\frac{\partial \omega}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \omega}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \omega}{\partial z}\right)^2}; \\ l_z^2 &= \frac{\left(\frac{\partial \omega}{\partial z}\right)^2}{\left(\frac{\partial \omega}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \omega}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \omega}{\partial z}\right)^2}. \end{aligned} \quad (12.4)$$

§12.1. Распространение упругих волн в стержнях

Задача распространения продольных упругих волн в стержне в точной постановке достаточно сложна. Сложность обусловлена тем, что при нагружении стержня продольной нагрузкой он испытывает не только продольные, но и поперечные деформации. Мы рассмотрим элементарную теорию, в которой предполагается, что каждый элемент стержня испытывает простое растяжение или сжатие, отвечающее осевой деформации $\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}$, причём осевое перемещение u является функцией

только пространственной координаты x и времени t . Другими словами, ограничимся задачей распространения упругих волн деформаций в тонких стержнях.

Предположим, что к упругому стержню неограниченной длины (рис. 85), плотность материала которого ρ , внезапно приложена нагрузка в виде сжимающих напряжений σ_x , распределённых равномерно по площади A поперечного сечения.

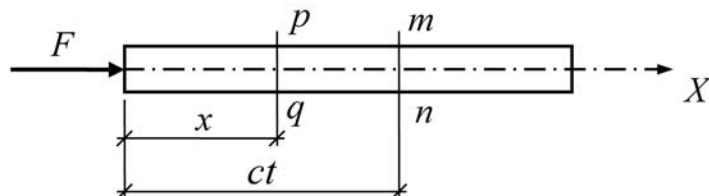


Рис. 85

В первый момент эта нагрузка вызовет сжатие только бесконечно тонкого слоя у левого конца стержня. Затем деформируется следующий слой, затем следующий и так далее. По истечении промежутка времени t будет сжат участок стержня длиной ct . Последующие слои стержня останутся пока ещё недеформированными. Сечение mn , которое служит границей между напряжённой и ненапряжёнными частями стержня, называется фронтом упругой волны. Этот фронт движется со скоростью c .

Зафиксируем некоторое сечение pq с координатой x , отсчитываемой от конца стержня. В данный момент времени t расстояние его от фронта есть $ct - x$. Участок стержня длиной $ct - x$ равномерно сжат напряжением

σ_x . На этом участке относительная продольная деформация $\epsilon_x = \frac{\sigma_x}{E}$.

Следовательно, сечение pq сместилось из своего первоначального (до деформации) положения на расстояние

$$u = \epsilon_x (ct - x) = \frac{\sigma_x}{E} (ct - x). \quad (12.5)$$

Дифференцируя (12.5) по времени, найдём скорость движения сечения pq (скорость движения материальных частиц):

$$\vartheta = \frac{du}{dt} = \frac{\sigma_x}{E} c. \quad (12.6)$$

Скорость, определяемая формулой (12.6), имеет место быть для $x < ct$; если $x > ct$, то $\vartheta = 0$.

Таким образом, если приложенная к концу стержня сила постоянна и не зависит от времени, то скорость частиц ϑ за фронтом тоже постоянна, а на фронте претерпевает разрыв, так же, как и напряжение σ_x .

Для определения скорости распространения c фронта волны представим себе участок стержня длиной dx между сечениями 1–1 и 2–2. Пусть в момент времени t фронт упругой волны проходит через сечение 1–1, а в момент $(t + dt)$ – через сечение 2–2, то есть $dx = cdt$. В течение времени dt в сечении 1–1 действует сила $\sigma_x A$, тогда как сечение 2–2 остаётся ненапряжённым. Следовательно, импульс силы равен $\sigma_x A dt$. В начальный момент времени t вся выделенная часть стержня между сечениями 1–1 и 2–2 была в покое; в момент $(t + dt)$ вся она движется со скоростью ϑ . Тогда изменение количества движения будет равно $\vartheta \rho A dx$. Приравнявая импульс силы изменению количества движения, получаем: $\sigma_x A dt = \vartheta \rho A dx$. Отсюда

$$\sigma_x = \vartheta \rho c. \quad (12.7)$$

Более общая запись соотношения (12.7) имеет вид:

$$[\sigma_x] = [\vartheta] \rho c. \quad (12.8)$$

Здесь квадратные скобки означают скачок соответствующей величины при переходе через фронт.

Формула (12.8) используется, если нагрузка прикладывается не к покоящемуся стержню, а к движущемуся и предварительно напряжённому, причём сама нагрузка изменяется (увеличивается) с течением времени.

Итак, скорость распространения фронта упругой волны в стержне в соответствии с формулами (12.7) и (12.6) будет равна:

$$c = \sqrt{\frac{E}{\rho}}. \quad (12.9)$$

Для стали $E = 2 \cdot 10^{11}$ Н/м²; $\rho = 7,8$ г/см³, то есть $c = 5064$ м/сек.

Предположим теперь, что постоянная сила F действовала в течение определённого промежутка времени Δt . Картину распределения напряжений по длине стержня проследим на диаграмме (рис. 86).

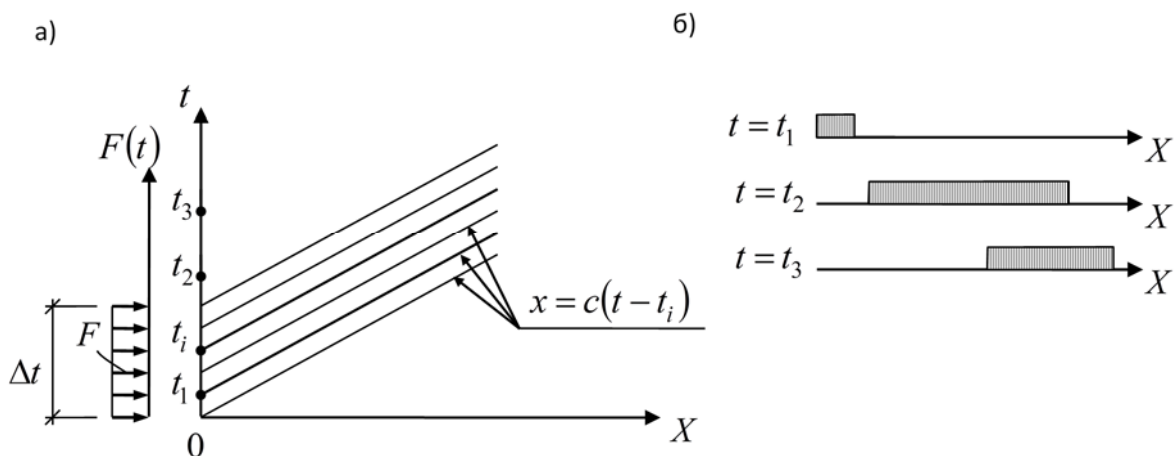


Рис. 86

В системе координат $X0t$, представленной на рис. 86, а, семейство прямых линий $x = c(t - t_i)$ называется волнами Римана. Каждая из них соответствует действию силы F в определённый момент времени t_i . Скорости распространения упругих волн Римана определяются по формуле (12.9). На рис. 86, б показано распределение напряжений $\sigma_x = \frac{F}{A}$ по длине стержня в различные моменты времени: t_1, t_2, t_3 . Из рис. 86 следует, что перед фронтом первой волны Римана напряжения в стержне равны нулю. Через промежуток времени Δt , то есть за последней волной Римана, напряжения в стержне также равны нулю. Напряжённый участок стержня "перемещается" вправо со скоростью упругой волны c , сохраняя неизменную форму. Форма напряжённого участка повторяет график изменения во времени силы, действующей на левый конец стержня, с изменением масштаба по оси абсцисс. Вполне понятно, что на каждой волне Римана напряжение σ_x , а следовательно, и деформация ε_x остаются неизменными.

Для составления дифференциального уравнения, описывающего процесс распространения продольных волн деформаций в стержне, рассмотрим элемент стержня,

который в недеформированном состоянии был заключён между сечениями mn и pq с координатами x и $x + dx$ соответственно (рис. 87). Пусть на стержень действует продольная сила, являющаяся функцией времени $F(t)$. В некоторый момент времени t сечение mn займёт положение $m'n'$, а сечение pq – положение $p'q'$. Пусть $u(x, t)$ – перемещение сечения mn , тогда перемещение сечения pq будет равно $u + \frac{\partial u}{\partial x} dx$. Если напряжение, действующее в сечении $m'n'$, обозначим через σ_x , то напряжение, действующее в сечении $p'q'$, будет равно $\sigma_x + \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} dx$.

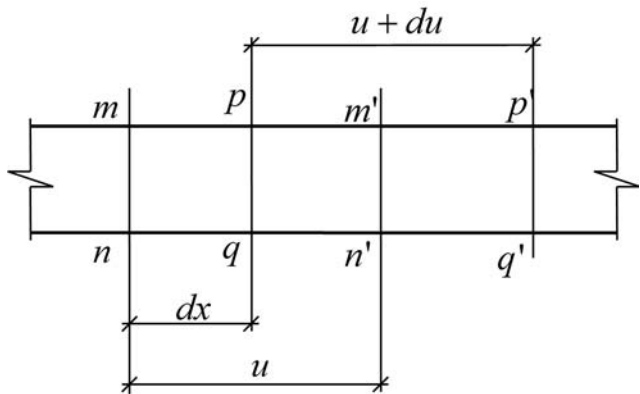


Рис. 87

Так как рассматриваемый элемент стержня массой $\rho A dx$ находится в движении, то его ускорение будет равно $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$. Уравнение движения этого элемента будет иметь вид:

$$\rho A dx \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = A \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} dx. \quad (a)$$

Поскольку $\sigma_x = E\varepsilon_x$, а относительная деформация $\varepsilon_x = \frac{m'p' - mp}{mp} = \frac{\partial u}{\partial x}$,

то уравнение движения (а) получает вид:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0. \quad (12.10)$$

Здесь $c^2 = \frac{E}{\rho}$.

Таким образом, величина c есть скорость распространения продольной упругой волны.

Дифференциальное уравнение (12.10) описывает всевозможные динамические процессы в стержне: распространение волн деформаций, колебания. Уравнение (12.10) называется *волновым*.

В соответствии с классификацией дифференциальных уравнений с частными производными [42], уравнение (12.10) относится к гиперболическому типу. Действительно, в соответствии с [42] $a_{11} = -c^2$, $a_{12} = 0$, $a_{22} = 1$, то есть $a_{12}^2 - a_{11}a_{22} = 0 - (-c^2) \cdot 1 > 0$.

Общее решение уравнения (12.10), принадлежащее Даламберу, имеет вид:

$$u = f_1\left(t - \frac{x}{c}\right) + f_2\left(t + \frac{x}{c}\right). \quad (12.11)$$

Здесь f_1 и f_2 – произвольные дважды дифференцируемые функции.

В решении (12.11) первое слагаемое представляет собой волну, движущуюся вправо со скоростью c . Действительно, для любого заданного момента времени t этот член является функцией только одной переменной x и может быть представлен некоторой кривой, например kmn (рис. 88),

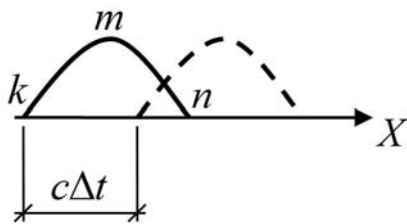


Рис. 88

форма которой зависит от вида функции f_1 . Через интервал времени Δt аргумент функции f_1 примет вид $t + \Delta t - \frac{x}{c}$. Значение функции f_1 останется неизменным, если одновременно с увеличением параметра t на величину Δt параметр x увеличить на величину $\Delta x = c\Delta t$. Это означает, что кривая kmn , построенная для момента времени t , может также использоваться для момента времени $t + \Delta t$, если её сместить в направлении x на расстояние $\Delta x = c\Delta t$, как показано на рис. 88 пунктиром. Аналогично можно показать, что второе слагаемое представляет собой волну, движущуюся влево с той же скоростью c .

Перепишем формулу (12.11) в виде

$$u = f_1(\eta) + f_2(\xi), \quad (12.12)$$

где $\eta = t - \frac{x}{c}$; $\xi = t + \frac{x}{c}$.

Дифференцируя уравнение (12.12) по времени t и затем по координате x , найдём величину скорости частиц ϑ и величину деформации ε_x :

$$\begin{aligned} \vartheta &= \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial f_1(\eta)}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial f_2(\xi)}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial t} = \frac{\partial f_1(\eta)}{\partial \eta} + \frac{\partial f_2(\xi)}{\partial \xi} = \vartheta(x, t); \\ \varepsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial f_1(\eta)}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\partial f_2(\xi)}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x} = -\frac{1}{c} \frac{\partial f_1(\eta)}{\partial \eta} + \frac{1}{c} \frac{\partial f_2(\xi)}{\partial \xi} = \varepsilon_x(x, t). \end{aligned} \quad (12.13)$$

Умножим уравнение (12.13₂) на c , после чего сложим и вычтем получившиеся уравнения. В результате получим:

$$\vartheta + c\varepsilon_x = 2 \frac{\partial f_2(\xi)}{\partial \xi}; \quad \vartheta - c\varepsilon_x = 2 \frac{\partial f_1(\eta)}{\partial \eta}. \quad (12.14)$$

Величины ξ и η называются *характеристическими координатами*, а линии $\xi = \text{const}$ и $\eta = \text{const}$ в плоскости x, t – *характеристиками*. Будем линии ξ , на которых $\eta = \text{const}$, называть положительными характеристиками, а линии η , на которых $\xi = \text{const}$, – отрицательными характеристиками.

Предположим теперь, что в двух точках P и Q плоскости x, t (рис. 89) заданы значения скоростей частиц ϑ_p и ϑ_q , деформаций ε_{xp} и ε_{xq} . Через точку P проведём положительную характеристику $\eta = \text{const}$, а через точку Q – отрицательную характеристику $\xi = \text{const}$. Обе характеристики пересекутся в точке M . Вдоль положительной характеристики постоянна разность $\vartheta - c\varepsilon_x$; вдоль отрицательной характеристики постоянна сумма $\vartheta + c\varepsilon_x$. Таким образом, можно составить следующие соотношения:

$$\begin{aligned} \vartheta_m - c\varepsilon_{xm} &= \vartheta_p - c\varepsilon_{xp}; \\ \vartheta_m + c\varepsilon_{xm} &= \vartheta_q + c\varepsilon_{xq}. \end{aligned} \quad (12.15)$$

Система уравнений (12.15) позволяет определить скорость частиц ϑ_m и деформацию ε_{xm} в точке M плоскости x, t :

$$\vartheta_m = \frac{\vartheta_p + \vartheta_q}{2} - c \frac{\varepsilon_{xp} - \varepsilon_{xq}}{2}; \quad \varepsilon_{xm} = \frac{\vartheta_q - \vartheta_p}{2c} + \frac{\varepsilon_{xq} + \varepsilon_{xp}}{2}. \quad (12.16)$$

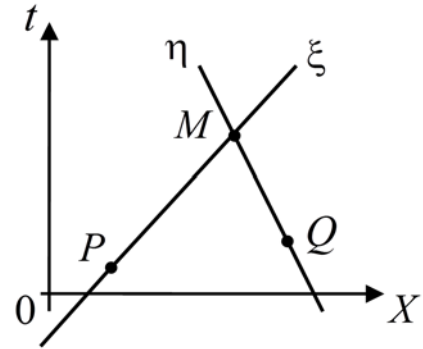


Рис. 89

Уравнения (12.15) являются основой *метода характеристик* для решения задачи о распространении продольных упругих волн деформаций в тонких стержнях при заданных начальных и граничных условиях.

§12.2. Распространение двумерных упругих волн деформаций

Рассматривая вопросы динамики для упругого тела, находящегося в условиях плоской задачи, ограничимся исследованием скоростей распространения двумерных упругих волн деформаций – нестационарных поверхностей сильных разрывов вторых производных перемещений, являющихся, вообще говоря, поверхностями слабых разрывов деформаций, напряжений и скоростей частиц.

Система динамических уравнений равновесия в перемещениях для случая плоской деформации, на основании (7.30), имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} (2G + \lambda) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + G \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + (G + \lambda) \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + F_x &= \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}; \\ G \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + (2G + \lambda) \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + (G + \lambda) \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + F_y &= \rho \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}. \end{aligned} \quad (12.17)$$

Для определения скоростей распространения двумерных волн деформаций – нестационарных поверхностей сильных разрывов вторых производных перемещений, являющихся, вообще говоря, поверхностями слабых разрывов деформаций, напряжений и скоростей частиц воспользуемся кинематическими условиями совместности (12.2).

Пусть $\omega(x, y, t) = 0$ – уравнение поверхности разрыва. Применив кинематические условия совместности (12.2) для плоской задачи к системе (12.17), получим:

$$\begin{aligned} (2G + \lambda) \frac{\partial \omega}{\partial x} \frac{\partial \omega}{\partial x} \lambda_u + G \frac{\partial \omega}{\partial y} \frac{\partial \omega}{\partial y} \lambda_u + (G + \lambda) \frac{\partial \omega}{\partial x} \frac{\partial \omega}{\partial y} \lambda_v &= \rho \frac{\partial \omega}{\partial t} \frac{\partial \omega}{\partial t} \lambda_u; \\ G \frac{\partial \omega}{\partial x} \frac{\partial \omega}{\partial x} \lambda_v + (2G + \lambda) \frac{\partial \omega}{\partial y} \frac{\partial \omega}{\partial y} \lambda_v + (G + \lambda) \frac{\partial \omega}{\partial x} \frac{\partial \omega}{\partial y} \lambda_u &= \rho \frac{\partial \omega}{\partial t} \frac{\partial \omega}{\partial t} \lambda_v. \end{aligned} \quad (12.18)$$

Здесь λ_u, λ_v – коэффициенты прерывности.

Учитывая, что значения скоростей распространения двумерных волн деформаций по нормали к фронту определяются соотношением вида (12.3), а направляющие косинусы l_x, l_y вектора нормали к фронту волны определяются соотношениями вида (12.4), систему (12.18) запишем в следующем виде:

$$\begin{cases} (\alpha_1 - \rho N^2)\lambda_u + \beta_1\lambda_v = 0; \\ \alpha_2\lambda_u + (\beta_2 - \rho N^2)\lambda_v = 0. \end{cases} \quad (12.19)$$

Здесь

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= (2G + \lambda)l_1^2 + Gl_2^2; & \beta_1 &= (G + \lambda)l_1l_2; \\ \alpha_2 &= (G + \lambda)l_1l_2; & \beta_2 &= (2G + \lambda)l_2^2 + Gl_1^2. \end{aligned} \quad (12.20)$$

Для существования ненулевых решений для коэффициентов прерывности λ_u и λ_v однородной системы линейных алгебраических уравнений (12.19) её определитель должен быть равен нулю, то есть

$$\begin{vmatrix} \alpha_1 - \rho N^2 & \beta_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 - \rho N^2 \end{vmatrix} = 0.$$

Отсюда получаем:

$$2\rho N_{1,2}^2 = (\alpha_1 + \beta_2) \pm \sqrt{(\alpha_1 - \beta_2)^2 + 4\alpha_2\beta_1}. \quad (12.21)$$

Уравнение (12.21) определяет две независимые скорости распространения двумерных упругих волн деформаций в упругом теле. Подставляя формулы (12.20) в соотношение (12.21), получаем:

$$N_1 = \sqrt{\frac{2G + \lambda}{\rho}}; \quad N_2 = \sqrt{\frac{G}{\rho}}. \quad (12.22)$$

Исследование характера разрывов

В локальной системе координат, совпадающей с направлениями главных деформаций (напряжений) в каждой точке сплошной среды, введём вектор $\bar{\lambda}$ с составляющими (λ_1, λ_2) . Пусть λ_n – проекция вектора $\bar{\lambda}$ на нормаль $\bar{\mathbf{n}}$ к переднему фронту двумерной волны (рис. 90), то есть

$$\lambda_n = \lambda_1 l_1 + \lambda_2 l_2. \quad (12.23)$$

Здесь $l_1 = \cos(\alpha)$; $l_2 = \sin(\alpha)$.

Случай 1. $l_1 = 1, l_2 = 0$, то есть $(\alpha = 0)$ и главное направление x_1 совпадает с нормалью $\bar{\mathbf{n}}$ к фронту волны. Система (12.19), в соответствии с формулами (12.20), получает вид:

$$\begin{aligned} [(2G + \lambda) - \rho N^2]\lambda_u &= 0; \\ (G - \rho N^2)\lambda_v &= 0, \end{aligned} \quad (12.24)$$

откуда $N_1^2 = \frac{2G + \lambda}{\rho}$; $N_2^2 = \frac{G}{\rho}$.

Рассмотрим распространение волны N_1 . Если $N = N_1$, то система (12.24) приводится к виду:

$$\begin{aligned} 0\lambda_u &= 0; \\ (G - \rho N_1^2)\lambda_v &= 0, \end{aligned} \tag{12.25}$$

откуда следует, что $\lambda_v = 0$, то есть из двух составляющих вектора $\bar{\lambda}$ одна, λ_v , равна нулю; следовательно, проекции λ_n и λ_u совпадают с самим вектором $\bar{\lambda}$. Это значит, что главное направление x_1 и нормаль к фронту волны \bar{n} совпадают с вектором скорости N_1 , то есть имеет место *чисто продольная волна*.

При распространении волны N_2 , то есть $N = N_2$, система (12.24) получает вид:

$$\begin{aligned} [(2G + \lambda) - \rho N_2^2]\lambda_u &= 0; \\ 0\lambda_v &= 0, \end{aligned} \tag{12.26}$$

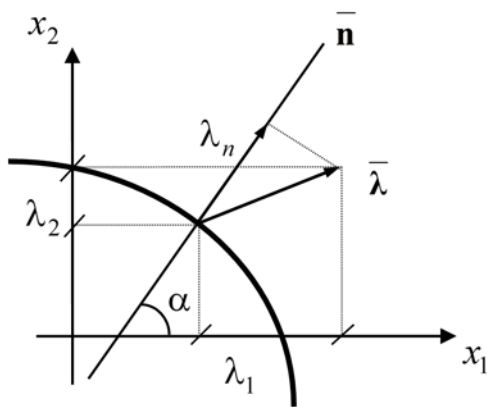


Рис. 90

а это означает, что $\lambda_u = 0$, то есть проекции λ_n и λ_v совпадают с вектором $\bar{\lambda}$. Следовательно, главное направление x_1 и нормаль к фронту \bar{n} перпендикулярны к вектору скорости N_2 , то есть имеет место *чисто поперечная волна*.

Случай 2. $l_1 = 0, l_2 = 1$, то есть ($\alpha = 90^\circ$) и главное направление x_2 совпадает с нормалью \bar{n} к фронту волны.

Система (12.19), в соответствии с формулами (12.20), получает вид:

$$\begin{aligned} (G - \rho N^2)\lambda_u &= 0; \\ [(2G + \lambda) - \rho N^2]\lambda_v &= 0, \end{aligned} \tag{12.27}$$

откуда $N_1^2 = \frac{G}{\rho}$; $N_2^2 = \frac{2G + \lambda}{\rho}$.

Рассматривая распространение волны N_1 , получаем, что главное направление x_2 и нормаль к фронту \bar{n} перпендикулярны вектору скорости N_1 , то есть имеет место *чисто поперечная волна*.

Рассматривая распространение волны N_2 , получаем, что главное направление x_2 и нормаль к фронту $\bar{\mathbf{n}}$ совпадают с вектором скорости N_2 , то есть имеет место *чисто продольная волна*.

Таким образом, исследование характера разрывов показывает, что в упругом теле, находящемся в условиях плоской деформации, могут распространяться два независимых вида волн деформаций: продольная волна, распространяющаяся со скоростью $N_1 = \sqrt{\frac{2G + \lambda}{\rho}}$, и поперечная волна, распространяющаяся со скоростью $N_2 = \sqrt{\frac{G}{\rho}}$. Чисто продольные и чисто поперечные волны имеют место только при совпадении нормали к фронту волны с одним из главных направлений. В направлении, произвольно ориентированном по отношению к главным направлениям в упругом теле, будет распространяться волна деформаций, получающаяся в результате суперпозиции продольных и поперечных волн [48].

§12.3. Распространение волн деформаций в неограниченном упругом теле

Динамические уравнения равновесия, без учёта объёмных сил, описывающие процесс распространение волн деформаций в упругом теле в общем случае пространственной задачи, запишем на основании статических уравнений (4.7), присоединив в правых частях силы инерции:

$$\begin{aligned} G\nabla^2 u + 3(\lambda + G)\frac{\partial \varepsilon_0}{\partial x} &= \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}; \\ G\nabla^2 v + 3(\lambda + G)\frac{\partial \varepsilon_0}{\partial y} &= \rho \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}; \\ G\nabla^2 w + 3(\lambda + G)\frac{\partial \varepsilon_0}{\partial z} &= \rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}. \end{aligned} \quad (12.28)$$

Уравнения движения (12.28) описывают распространение двух типов волн деформаций в упругом теле. Волны первого типа называются *безвихревыми* или *волнами расширения*; волны второго типа называются *эквиволлюмиальными* или *волнами искажения*.

Дифференциальное уравнение, описывающее распространение волн расширения, можно получить следующим образом. Продифференцируем уравнение (12.28₁) по x , уравнение (12.28₂) по y , уравнение (12.28₃) по z и, сложив отдельно левые и правые части, получим:

$$(2G + \lambda)\nabla^2(\theta) = \rho \frac{\partial^2(\theta)}{\partial t^2}. \quad (12.29)$$

Соотношение (12.29) описывает распространение безвихревых волн. Оно показывает, что объёмное расширение $\theta = 3\varepsilon_0$ распространяется в упругом теле со скоростью

$$a_1 = \sqrt{\frac{2G + \lambda}{\rho}}. \quad (12.30)$$

Действительно, применив к уравнению (12.29) кинематические условия совместности (12.2), получим:

$$(2G + \lambda)\left(\frac{\partial\omega}{\partial x}\frac{\partial\omega}{\partial x}\lambda_\theta + \frac{\partial\omega}{\partial y}\frac{\partial\omega}{\partial y}\lambda_\theta + \frac{\partial\omega}{\partial z}\frac{\partial\omega}{\partial z}\lambda_\theta\right) = \rho \frac{\partial\omega}{\partial t}\frac{\partial\omega}{\partial t}\lambda_\theta. \quad (12.31)$$

Учитывая, что значения скоростей распространения трёхмерных волн деформаций по нормали к фронту определяются соотношением (12.3), а направляющие косинусы l_1, l_2, l_3 вектора нормали к фронту волны определяются соотношениями (12.4), уравнение (12.31) запишем в следующей форме:

$$(2G + \lambda) = \rho N^2. \quad (12.32)$$

Отсюда получаем скорость распространения в упругом теле объёмного расширения θ , то есть формулу (12.30):

$$N = \sqrt{\frac{2G + \lambda}{\rho}}.$$

Для вычисления скорости распространения волн искажения поступим следующим образом. Продифференцировав (12.28₂) по z , а (12.28₃) – по y и вычитая из одного результата другой, получим:

$$G\nabla^2\left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}\right) = \rho \frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}\right),$$

или

$$G\nabla^2\bar{\omega}_x = \rho \frac{\partial^2\bar{\omega}_x}{\partial t^2}. \quad (12.33)$$

Продифференцировав (12.28₁) по z , а (12.28₃) – по x и вычитая из одного результата другой, получим:

$$G\nabla^2\left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}\right) = \rho \frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}\right),$$

или

$$G\nabla^2\bar{\omega}_y = \rho \frac{\partial^2\bar{\omega}_y}{\partial t^2}. \quad (12.34)$$

Продифференцировав (12.28₂) по x , а (12.28₁) – по y и вычитая из одного результата другой, получим:

$$G\nabla^2\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right) = \rho \frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right),$$

или

$$G\nabla^2\bar{\omega}_z = \rho \frac{\partial^2\bar{\omega}_z}{\partial t^2}. \quad (12.35)$$

В формулах (12.33)–(12.35) величины

$$\bar{\omega}_x = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}\right); \quad \bar{\omega}_y = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}\right); \quad \bar{\omega}_z = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right)$$

представляют собой вращение окрестности рассматриваемой точки упругого тела, как абсолютно жёсткого твёрдого тела, вокруг соответствующих осей координат.

Сопоставив вид формул (12.33)–(12.35) с видом формулы (12.29), можно сделать вывод о том, что эквиволюмиальные волны распространяются в упругом теле со скоростью

$$a_2 = \sqrt{\frac{G}{\rho}}. \quad (12.36)$$

Если объёмное расширение равно нулю, то есть $\theta = 0$, то уравнения (12.28) приводятся к виду:

$$G\nabla^2 u = \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}; \quad G\nabla^2 v = \rho \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}; \quad G\nabla^2 w = \rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}. \quad (12.37)$$

Если функции перемещений u, v, w удовлетворяют условиям

$$u = \frac{\partial \varphi}{\partial x}; \quad v = \frac{\partial \varphi}{\partial y}; \quad w = \frac{\partial \varphi}{\partial z},$$

где φ – потенциальная функция, то вращения $\bar{\omega}_x, \bar{\omega}_y, \bar{\omega}_z$ также будут равны нулю. В этом случае

$$\theta = \nabla^2 \varphi \quad \text{и} \quad \frac{\partial \theta}{\partial x} = \nabla^2 u; \quad \frac{\partial \theta}{\partial y} = \nabla^2 v; \quad \frac{\partial \theta}{\partial z} = \nabla^2 w$$

и система (12.28) получает вид:

$$\begin{aligned}
(2G + \lambda)\nabla^2 u &= \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}; \\
(2G + \lambda)\nabla^2 v &= \rho \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}; \\
(2G + \lambda)\nabla^2 w &= \rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}.
\end{aligned}
\tag{12.38}$$

Из уравнений (12.37) и (12.38) следует, что перемещения u, v, w могут распространяться по упругому телу либо со скоростью волны расширения (12.30), либо со скоростью волны искажения (12.36).

Кроме волн расширения и волн искажения, в упругом теле, имеющем свободные границы (например полупространство), могут распространяться ещё и "поверхностные волны", или *волны Релея*. Волны Релея распространяются в тонком поверхностном слое. Они подобны кругам на гладкой поверхности жидкости, вызываемым брошенным в неё камнем. Релей, впервые обнаруживший существование поверхностно-волновых решений общих динамических уравнений теории упругости, заметил: «Не исключена возможность, что рассмотренные здесь поверхностные волны играют важную роль при землетрясениях и при соударении упругих тел. Распространяясь только в двух направлениях, они должны с удалением от источника приобретать всё большее значение». Изучение записей сейсмических волн подтверждает предположение Релея.

Скорость волн Релея c_R можно найти из уравнения

$$\left(2 - \frac{c_R^2}{a_2^2}\right)^2 - 4\sqrt{1 - \frac{c_R^2}{a_1^2}}\sqrt{1 - \frac{c_R^2}{a_2^2}} = 0.
\tag{12.39}$$

Скорость поверхностных волн оказывается несколько меньшей, чем скорость распространения волн искажения.

Глава 13. ОБОБЩЕНИЯ НА ГЕОМЕТРИЧЕСКИ И ФИЗИЧЕСКИ НЕЛИНЕЙНУЮ ТЕОРИЮ УПРУГОСТИ

Общая, геометрически и физически нелинейная теория упругости исходит лишь из предпосылок о *сплошности* и *однородности* деформируемого твёрдого тела. Кроме того, при построении уравнений, описывающих напряжённо-деформированное состояние в точке упругого тела, в общей теории упругости отсутствует принцип затвердевания, в соответствии с которым отождествлялось положение элементарного параллелепипеда, вырезанного из деформированного тела, в состоянии до и после деформации.

Одними из лучших работ по геометрически и физически нелинейной теории упругости являются работы профессора В.В. Новожилова [26, 28]. На этих работах мы и будем в дальнейшем основываться.

§13.1. Общая система уравнений нелинейной теории упругости

Деформация в каждой точке нелинейно упругого тела определяется симметричным тензором второго ранга (тензором деформации)

$$\mathbf{T}_\varepsilon = \begin{pmatrix} \varepsilon_x; & \frac{1}{2}\gamma_{xy}; & \frac{1}{2}\gamma_{xz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{yx}; & \varepsilon_y; & \frac{1}{2}\gamma_{yz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{zx}; & \frac{1}{2}\gamma_{zy}; & \varepsilon_z \end{pmatrix}, \quad (13.1)$$

составляющие которого связаны с перемещениями u, v, w точек вдоль осей декартовой системы координат X, Y, Z , направления которых не изменяются при деформации, нелинейными зависимостями:

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right]; \\ \varepsilon_y &= \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right]; \\ \varepsilon_z &= \frac{\partial w}{\partial z} + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial z} \right)^2 \right]; \end{aligned} \quad (13.2)$$

$$\begin{aligned}\gamma_{xy} = \gamma_{yx} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y}; \\ \gamma_{yz} = \gamma_{zy} &= \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial z} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \frac{\partial w}{\partial y}; \\ \gamma_{zx} = \gamma_{xz} &= \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial z}.\end{aligned}$$

Тензор напряжений, определённый в декартовой системе точек тела до деформации, имеет вид:

$$T_{\sigma}^* = \begin{pmatrix} \sigma_x^* & \tau_{xy}^* & \tau_{xz}^* \\ \tau_{yx}^* & \sigma_y^* & \tau_{yz}^* \\ \tau_{zx}^* & \tau_{zy}^* & \sigma_z^* \end{pmatrix}. \quad (13.3)$$

Компоненты тензора (13.3) представляют собой обобщённые напряжения σ_x^* , σ_y^* , σ_z^* , $\tau_{xy}^* = \tau_{yx}^*$, $\tau_{yz}^* = \tau_{zy}^*$, $\tau_{zx}^* = \tau_{xz}^*$ (по терминологии В.В. Новожилова), связанные с истинными напряжениями σ_x , σ_y , σ_z , $\tau_{xy} \neq \tau_{yx}$, $\tau_{yz} \neq \tau_{zy}$, $\tau_{zx} \neq \tau_{xz}$, действующими по граням косоугольного параллелепипеда, рёбра которого до деформации были параллельны осям декартовой системы координат X, Y, Z , соотношениями:

$$\begin{aligned}\sigma_x^* &= \frac{1}{1+E_x} \frac{A_x^*}{A_x} \sigma_x; & \sigma_y^* &= \frac{1}{1+E_y} \frac{A_y^*}{A_y} \sigma_y; & \sigma_z^* &= \frac{1}{1+E_z} \frac{A_z^*}{A_z} \sigma_z; \\ \tau_{xy}^* &= \frac{1}{1+E_y} \frac{A_x^*}{A_x} \tau_{xy}; & \tau_{yx}^* &= \frac{1}{1+E_x} \frac{A_y^*}{A_y} \tau_{yx}; \\ \tau_{yz}^* &= \frac{1}{1+E_z} \frac{A_y^*}{A_y} \tau_{yz}; & \tau_{zy}^* &= \frac{1}{1+E_y} \frac{S_z^*}{S_z} \tau_{zy}; \\ \tau_{zx}^* &= \frac{1}{1+E_x} \frac{A_z^*}{A_z} \tau_{zx}; & \tau_{xz}^* &= \frac{1}{1+E_z} \frac{A_x^*}{A_x} \tau_{xz}.\end{aligned} \quad (13.4)$$

В формулах (13.4)

$$E_x = \sqrt{1+2\varepsilon_x} - 1; \quad E_y = \sqrt{1+2\varepsilon_y} - 1; \quad E_z = \sqrt{1+2\varepsilon_z} - 1 \quad (13.5)$$

– относительные удлинения волокон, параллельных до деформации осям декартовой системы координат X, Y, Z ;

$$\begin{aligned}
\frac{A_x^*}{A_x} &= \sqrt{(1+2\varepsilon_y)(1+2\varepsilon_z) - \gamma_{yz}^2}, \\
\frac{A_y^*}{A_y} &= \sqrt{(1+2\varepsilon_z)(1+2\varepsilon_x) - \gamma_{zx}^2}, \\
\frac{A_z^*}{A_z} &= \sqrt{(1+2\varepsilon_x)(1+2\varepsilon_y) - \gamma_{xy}^2}
\end{aligned} \tag{13.6}$$

– отношение площадей элементарных площадок, выделенных в сплошной среде после деформации, к их площадям до деформации, которые до деформации были перпендикулярны осям декартовой системы координат X, Y, Z .

Зависимости между компонентами симметричного тензора обобщённых напряжений T_{σ}^* составляют уравнения равновесия в проекциях на оси X, Y, Z :

$$\left\{ \begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial x} \left[\left(1 + \frac{\partial u}{\partial x} \right) \sigma_{xx}^* + \frac{\partial u}{\partial y} \sigma_{xy}^* + \frac{\partial u}{\partial z} \sigma_{xz}^* \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[\left(1 + \frac{\partial u}{\partial x} \right) \sigma_{yx}^* + \frac{\partial u}{\partial y} \sigma_{yy}^* + \right. \\
&\left. + \frac{\partial u}{\partial z} \sigma_{yz}^* \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[\left(1 + \frac{\partial u}{\partial x} \right) \sigma_{zx}^* + \frac{\partial u}{\partial y} \sigma_{zy}^* + \frac{\partial u}{\partial z} \sigma_{zz}^* \right] + DF_{\xi} = 0; \\
&\frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\partial v}{\partial x} \sigma_{xx}^* + \left(1 + \frac{\partial v}{\partial y} \right) \sigma_{xy}^* + \frac{\partial v}{\partial z} \sigma_{xz}^* \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{\partial v}{\partial x} \sigma_{yx}^* + \left(1 + \frac{\partial v}{\partial y} \right) \sigma_{yy}^* + \right. \\
&\left. + \frac{\partial v}{\partial z} \sigma_{yz}^* \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[\frac{\partial v}{\partial x} \sigma_{zx}^* + \left(1 + \frac{\partial v}{\partial y} \right) \sigma_{zy}^* + \frac{\partial v}{\partial z} \sigma_{zz}^* \right] + DF_{\eta} = 0; \\
&\frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\partial w}{\partial x} \sigma_{xx}^* + \frac{\partial w}{\partial y} \sigma_{xy}^* + \left(1 + \frac{\partial w}{\partial z} \right) \sigma_{xz}^* \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{\partial w}{\partial x} \sigma_{yx}^* + \frac{\partial w}{\partial y} \sigma_{yy}^* + \right. \\
&\left. + \left(1 + \frac{\partial w}{\partial z} \right) \sigma_{yz}^* \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[\frac{\partial w}{\partial x} \sigma_{zx}^* + \frac{\partial w}{\partial y} \sigma_{zy}^* + \left(1 + \frac{\partial w}{\partial z} \right) \sigma_{zz}^* \right] + DF_{\zeta} = 0.
\end{aligned} \right. \tag{13.7}$$

Здесь

$$D = \begin{vmatrix} 1 + \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial u}{\partial z} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & 1 + \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial z} \\ \frac{\partial w}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial y} & 1 + \frac{\partial w}{\partial z} \end{vmatrix} \tag{13.8}$$

– коэффициент изменения объёма – определяется отношением единицы объёма упругого тела после деформации к единице объёма упругого тела до деформации.

Физические соотношения для нелинейно упругого тела строятся на основании следующих предпосылок:

1. Материал упругого тела изотропен.
2. Материал упругого тела деформируется нелинейно упруго.
3. Девиаторы деформаций и обобщённых напряжений подобны.

В этом случае компоненты тензоров деформаций и обобщённых напряжений будут связаны зависимостями

$$\begin{aligned}\sigma_x^* - \frac{1}{3}\sigma^* &= 2G^* \left(\varepsilon_x - \frac{\varepsilon}{3} \right); & \tau_{xy}^* &= 2G\gamma_{xy}; \\ \sigma_y^* - \frac{1}{3}\sigma^* &= 2G^* \left(\varepsilon_y - \frac{\varepsilon}{3} \right); & \tau_{yz}^* &= 2G\gamma_{yz}; \\ \sigma_z^* - \frac{1}{3}\sigma^* &= 2G^* \left(\varepsilon_z - \frac{\varepsilon}{3} \right); & \tau_{zx}^* &= 2G\gamma_{zx}.\end{aligned}\tag{13.9}$$

В соотношениях (13.9)

$$G^* = \frac{T^*}{\Gamma}; \quad K^* = \frac{1}{3} \frac{\sigma^*}{\varepsilon},\tag{13.10}$$

причём σ^* , T^* – первый и второй инварианты тензора обобщённых напряжений (13.3); ε , Γ – первый и второй инварианты тензора нелинейных деформаций (13.1):

$$\begin{aligned}\sigma^* &= \sigma_x^* + \sigma_y^* + \sigma_z^*; \\ T^* &= \frac{1}{\sqrt{6}} \sqrt{(\sigma_x^* - \sigma_y^*)^2 + (\sigma_y^* - \sigma_z^*)^2 + (\sigma_z^* - \sigma_x^*)^2 + 6(\tau_{xy}^{*2} + \tau_{yz}^{*2} + \tau_{zx}^{*2})}.\end{aligned}\tag{13.11}$$

$$\begin{aligned}\varepsilon &= \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z; \\ \Gamma &= \sqrt{\frac{2}{3}} \sqrt{(\varepsilon_x - \varepsilon_y)^2 + (\varepsilon_y - \varepsilon_z)^2 + (\varepsilon_z - \varepsilon_x)^2 + \frac{3}{2}(\gamma_{xy}^2 + \gamma_{yz}^2 + \gamma_{zx}^2)}.\end{aligned}\tag{13.12}$$

Смешанные инварианты K^* и G^* полностью характеризуют механические свойства изотропного материала. Величина K^* называется обобщённым модулем объёмного расширения, поскольку при малых по сравнению с единицей удлинениях и сдвигах, то есть для линейной теории упругости, инвариант K^* оказывается равным отношению среднего нормального напряжения к относительному изменению объёма, то есть является мерой сопротивления изотропного материала изменениям его объёма. Величина G^* называется обобщённым модулем сдвига, ввиду того, что при малых удлинениях и сдвигах, то есть для линейной теории упругости, инвариант G^* оказывается равным отношению среднего касательного напряжения к

среднему сдвигу, то есть является мерой сопротивления изотропного материала деформации сдвига.

Для построения решения в замкнутой форме необходимо установить зависимости обобщённых модулей K^* и G^* от инвариантов тензора деформации.

Следует отметить, что В.В. Новожиловым [28] установлен вид возможной функциональной зависимости (с точностью до инвариантных коэффициентов) между двумя соосными тензорами второго ранга, в частности между тензором напряжений (или тензором обобщённых напряжений (13.3)) и тензором деформации (или тензором нелинейных деформаций (13.1)). Таким образом, исходя лишь из предположения о соосности тензоров напряжений и деформаций, определяются физические зависимости между напряжениями и деформациями в геометрически и физически нелинейной теории упругости.

Формулы (13.9) определяют зависимости между компонентами тензоров напряжений и деформаций для случая, когда девиаторы напряжения и деформации оказываются подобными (в смысле пропорциональности их компонент).

§13.2. Феноменологический подход при построении замыкающих уравнений

Конкретный вид зависимостей (13.10) – замыкающих уравнений – определяет математическую модель, позволяющую описать эволюцию напряжённо-деформированного состояния в точках изотропной, геометрически нелинейной и нелинейно-упругой сплошной среды. Если смешанные инварианты K^* и G^* являются известными функциями инвариантов деформации, то совокупность уравнений (13.2), (13.7) и (13.9) позволяет определить напряжённо-деформированное состояние во всех точках нелинейно-упругого тела.

Первая попытка рассмотрения связи между напряжениями и деформациями в форме, отличной от закона Гука, была предпринята Бюльфингером в работе [46], опубликованной в трудах Российской академии наук в 1729 г.

Первые работы, связанные с определением физических зависимостей для геометрически нелинейных и нелинейно-упругих сплошных сред, были посвящены не вопросам установления вида функций смешанных инвариантов от инвариантов деформации, а вопросам определения удельной работы деформации. При этом функция удельной работы деформации представлялась в виде ряда по степеням трёх параметров (трёх инвариантов), от которых она зависит. Для получения, например, уравнений линейной

теории упругости достаточно было в этом ряду сохранить только квадратичные члены. Если сохранить в этом ряду квадратичные и кубические слагаемые, то получаем так называемую пятиконстантную теорию упругости. Упругий закон, ей соответствующий, обычно называют законом Мурнагана [50]. Следует отметить, что кривая растяжения-сжатия для такого материала будет вся лежать по одну сторону от своей касательной в начале координат и в области растягивающих, и в области сжимающих напряжений и деформаций, что не соответствует действительности. Для исправления данного противоречия предложено удельную энергию деформации аппроксимировать степенным рядом, в котором удержат все члены с чётными степенями до четвёртой включительно [26]. В этом случае получаем шестикомпонентную нелинейную теорию упругости. Если в разложении удельной энергии деформации удержат все члены до четвёртого порядка включительно, то получаем девятиконстантную нелинейную теорию, предложенную Каваной [49]. Экспериментальное обоснование нелинейных теорий и определение модулей упругости второго порядка для некоторых материалов, в частности для таких материалов, как медь и железо, было выполнено Сигером и Баком [51].

Как отмечал В.В. Новожилов, расчётные формулы при таком подходе для построения физических уравнений получаются чрезвычайно громоздкими и могут доставить много математических неприятностей при решении конкретных задач.

Практически все варианты математических моделей геометрически и физически нелинейной сплошной среды являются в известной степени приближениями и, вообще говоря, не лишены внутренних противоречий. Для современного этапа развития технических наук характерен переход от расчётных методик к математическому моделированию [37], что позволяет отразить функциональное назначение и условия надёжности конструкций, выбрать оптимальные параметры. Под моделью в широком смысле понимают совокупность представлений, зависимостей, условий, ограничений, описывающих образ какого-либо объекта, процесса или явления. Она может иметь разные формы выражения. Наиболее часто используются математические модели в виде различного рода уравнений, ограничений и т.д. Учёт влияния тех или иных факторов накладывает отпечаток на степень соответствия модели исходному объекту. Вместе с тем в работе [25], в части "Математические модели и точность инженерных расчётов", утверждается, что требование внутренней непротиворечивости математической модели должно быть строго обосновано конечной целью расчёта и его реальными возможностями. Обосновывается мнение, что "...и логические противоречия в модели могут быть терпимы, если обусловленные ими ошибки в расчётах не выходят за рамки погрешности, следующей из принятых в модели допущений физического характера".

Конечно, и это особо отмечает Лурье А.И. в работе [20], "применимость модели идеально-упругого тела к реальным телам, как и любой другой реологической модели, должна быть подтверждена экспериментально. Однако осуществима проверка только следствий, получаемых теоретически из исходного закона. Чем больше накоплено таких следствий, тем больше возможностей создаётся для экспериментального исследования. Трудная задача установления закона состояния материала "...должна быть передана экспериментаторам как можно позже..." (Синьорини)". С другой стороны, говоря о совпадении предсказаний теории с данными опытов, необходимо отметить, что степень справедливости этого утверждения зависит от допуска, с которым измеряются деформации [22].

К построению замыкающих уравнений для нелинейной теории упругости В.В.Новожилова можно подойти с двух позиций: либо строить замыкающие уравнения для каждого материала с чистого листа на основе вновь полученных экспериментальных данных, позволяющих записать функциональные зависимости между обобщёнными напряжениями и нелинейными деформациями, либо пойти феноменологическим путём и строить замыкающие уравнения для нелинейной теории упругости В.В. Новожилова в соответствии с определёнными гипотезами и предположениями, например на основе гипотезы об эквивалентности формы записи замыкающих уравнений [2].

В последнее время в научной литературе появились работы, посвящённые расчёту твёрдых деформируемых тел с учётом геометрической нелинейности на основе нелинейных соотношений теории упругости В.В. Новожилова. При этом геометрическая нелинейность учитывается лишь в геометрических соотношениях, то есть геометрические соотношения записываются с учётом квадратичных слагаемых, а статические уравнения (уравнения равновесия) используются в форме линейных соотношений Навье. Это обстоятельство никак не соотнобразуется с теорией линеаризации нелинейных соотношений общей (нелинейной) теории упругости. Действительно, если использовать линейные уравнения равновесия Навье, которые остаются справедливыми для малых удлинений, углов сдвига и поворотов, то применение нелинейных геометрических соотношений теряет смысл, поскольку для малых удлинений, сдвигов и углов поворота вклад нелинейных слагаемых в величины деформаций пренебрежимо мал. Отсюда следует необходимость тщательного обоснования используемой теории (и с точки зрения её непротиворечивости, и с точки зрения получаемой погрешности в расчётах) для моделирования реального поведения твёрдых деформируемых тел с помощью нелинейных геометрических соотношений и линейных уравнений равновесия. Более того, теория, базирующаяся на геометрически нелинейных геометрических соотношениях и геометрически линейных уравнениях равновесия, содержит внутреннее логическое противоречие.

Разработка теории и методов решения задач механики деформируемого твёрдого тела с учётом геометрической и физической нелинейности сталкивается со значительными трудностями как физического, так и математического характера. Это связано как со сложностью расчётных соотношений нелинейной теории упругости, так и с отсутствием приемлемой гипотезы для построения замкнутой системы уравнений.

Расчёт по деформированной схеме с учётом “геометрической нелинейности”, давно и успешно используемый на практике в расчётах различных конструкций и основанный на уравнениях линейной теории упругости, качественно отличается от расчёта с учётом геометрической и физической нелинейности на основе нелинейных соотношений В.В. Новожилова. Эти расчёты базируются на совершенно различных посылах и гипотезах, отождествлять их никак нельзя. Новожиловская теория приводит к качественно новым результатам, которые невозможно получить, оставаясь в рамках гипотез и допущений линейной теории упругости, даже если выполнять расчёт по деформированной схеме, допустим, шаговым методом с малым приращением нагрузки.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Цель и задачи, поставленные при написании данного учебного пособия, выполнены. В книге дано систематическое изложение теоретических основ математической теории упругости в декартовых координатах. Сюда вошли разделы о напряжениях, о деформациях, о связи между ними, а также теоретические вопросы о постановке и методах решения трёхмерных задач линейной теории упругости. Достаточно подробно рассмотрены вопросы прочности упругих тел. Дана вариационная формулировка задач теории упругости. Далее рассмотрена постановка одномерной задачи в декартовых координатах. Постановка двумерной задачи теории упругости дана как в декартовых, так и в полярных координатах. В следующих разделах книги рассмотрены прикладные задачи теории упругости. Сюда относятся теоретические вопросы кручения призматических тел, вопросы теории тонких пластин и оболочек. В заключение в книге изложены основы теории распространения упругих волн деформаций, а также даны обобщения на геометрически и физически нелинейную теорию упругости.

При написании книги автор стремился к строгому, но предельно простому стилю изложения материала. Практически все положения даны с обоснованием. В книге практически отсутствуют бездоказательные выводы.

Изложение материала учебного пособия полностью соответствует её названию – краткий теоретический курс. Действительно, даются только теоретические положения основ математической и прикладной теории упругости. Примеры решения задач отсутствуют. Такой подход к изложению основ теории упругости сделан намеренно, поскольку, по мнению автора, усвоение теоретических основ любой науки должно предшествовать её практическому приложению. Это с одной стороны. А с другой стороны, решение задач теории упругости не в абстрактной постановке, а применительно к расчёту элементов строительных конструкций и сооружений в целом требует, как правило, теоретических знаний всего курса, а не отдельных его разделов.

В свете сказанного перед автором стоит вторая задача – написать краткий практический курс теории упругости.

Надеюсь, что данная книга поможет читателю стать грамотным специалистом в области расчёта сооружений.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Александров, А.В. Сопротивление материалов. Основы теории упругости и пластичности [Текст]: учебник для строит. спец. вузов / А.В. Александров, В.Д. Потапов. – М.: Высш. шк., 2002. – 400 с.
2. Бакушев, С.В. Геометрически и физически нелинейная механика сплошной среды. Плоская задача [Текст] / С.В. Бакушев. – М.: Книжный дом «Либроком», 2013. – 312 с.
3. Бакушев, С.В. К вопросу о формировании одномерных волн сильного разрыва в сплошных средах [Текст] / С.В. Бакушев // Строительная механика и расчёт сооружений. – 2011. – №4. – С.11-15.
4. Бакушев, С.В. К вопросу о возможности формирования плоских ударных волн в сплошных средах [Текст] / С.В. Бакушев // Строительная механика и расчёт сооружений. – 2012. – №2. – С.70-76.
5. Безухов, Н.И. Основы теории упругости, пластичности и ползучести [Текст] / Н.И. Безухов. – М.: Высшая школа, 1968.
6. Власов, В.З. Балки, плиты и оболочки на упругом основании [Текст] / В.З. Власов., Н.Н. Леонтьев. – М.: Физматгиз, 1960.
7. Вольмир А.С. Гибкие пластинки и оболочки. – М.: Гостехиздат, 1956. – 420 с.
8. Галин, Г.Я. Об условиях на поверхностях сильных разрывов для упругих и пластических тел [Текст] / Г.Я. Галин // ПММ. – 1955. – Т.19. – С.368-370.
9. Гениев, Г.А. К вопросу обобщения условия предельного равновесия сыпучей среды [Текст] / Г.А. Гениев // Основания, фундаменты и механика грунтов. – 1968. – №2. – С.1-2.
10. Гениев, Г.А. О некоторых закономерностях распространения трёхмерных волн деформаций в неупругих средах и средах с внутренним трением [Текст] / Г.А. Гениев // Известия АН СССР. Механика твёрдого тела. – 1975. – №1. – С. 131-136.
11. Гениев, Г.А. Теория пластичности бетона и железобетона [Текст] / Г.А. Гениев, В.Н. Киссюк, Г.А. Тюпин. – М.: Стройиздат, 1974. – 316 с.
12. Гольденблат, И.И. Критерии прочности и пластичности конструкционных материалов [Текст] / И.И. Гольденблат, В.А. Копнов. – М.: Машиностроение, 1968. – 192 с.
13. Горбунов-Посадов, М.И. Балки и плиты на упругом основании [Текст] / М.И. Горбунов-Посадов. – М.: Стройиздат, 1949.
14. Жемочкин, Б.Н. Теория упругости [Текст] / Б.Н. Жемочкин. – М.: Госстраиздат, 1957.
15. Киселёв, В.А. Плоская задача теории упругости [Текст]: учеб. пособие для вузов / В.А. Киселёв. – М.: Высш.школа, 1976. – 151 с.
16. Киселёв, В.А. Расчёт пластин [Текст] / В.А. Киселёв. – М.: Стройиздат, 1973. – 151 с.

17. Колкунов, Н.В. Основы расчёта упругих оболочек [Текст] / Н.В. Колкунов. – М.: Высшая школа, 1987. – 296 с.
18. Колтунов М.А., Кравчук А.С, Майборода В.П. Прикладная механика деформируемого твёрдого тела [Текст]: учеб. пособие для студентов вузов / М.А. Колтунов, А.С. Кравчук, В.П. Майборода. – М.: Высш. школа, 1983. – 349 с.
19. Лейбензон, Л.С. Курс теории упругости [Текст] / Л.С. Лейбензон. – М.: Гостехиздат, 1947.
20. Лурье, А.И. Теория упругости [Текст] / А.И. Лурье. – М.: Наука, 1970. – 939 с.
21. Ляв А.Е. Математическая теория упругости [Текст] / А.Е. Ляв. – М.-Л., 1935.
22. Микронапряжения в конструкционных материалах [Текст] / В.В. Новожилов, Ю.И. Кадашевич. – Л.: Машиностроение. Ленингр. отд-ние, 1990. – 223 с.
23. Муштари, Х.М. Нелинейная теория упругих оболочек [Текст] / Х.М. Муштари, К.З. Галимов. – Казань: Таткнигиздат, 1957. – 432 с.
24. Новацкий, В.К. Волновые задачи теории пластичности [Текст] / В.К. Новацкий. – М.: Мир, 1978. – 307 с.
25. Новожилов, В.В. Две статьи о математических моделях в механике сплошной среды. Институт проблем механики. Препринт №215 [Текст] / В.В. Новожилов. – 1983. – С.3-28.
26. Новожилов, В.В. Основы нелинейной теории упругости [Текст] / В.В. Новожилов. – 2-е изд., стереотипное. – М.: ЕдиториалУРСС, 2003. – 208 с.
27. Новожилов, В.В. Теория тонких оболочек [Текст] / В.В. Новожилов. – М.: Судпромгиз, 1962. – 432 с.
28. Новожилов, В.В. Теория упругости [Текст] / В.В. Новожилов. – М.: Судпромгиз, 1958. – 370 с.
29. Овчинников, И.Г. Влияние хлоридсодержащих сред на прочность и долговечность пластин на упругом основании [Текст] / И.Г. Овчинников, А.В. Кривцов, Ю.П. Скачков. – Пенза: ПензГАСА, 2002. – 214 с.
30. Папкович, П.Ф. Теория упругости [Текст] / П.Ф. Папкович. – М.: Оборонгиз, 1939.
31. Подгорный, А.Н. Основы и методы прикладной теории упругости [Текст]: учеб. пособие для вузов / А.Н. Подгорный, Г.А. Марченко, В.И. Пустынников. – Киев: Вища школа. Головное изд-во, 1981. – 328 с.
32. Пономарёв, С.Д. Расчёты на прочность в машиностроении. Т. I. Теоретические основы и экспериментальные методы. Расчёты стержневых элементов конструкций при статической нагрузке [Текст] / С.Д. Пономарёв [и др.]; под ред. С.Д. Пономарёва. – М.: Машгиз, 1959. – 884 с.
33. Рахматулин, Х.А. О распространении плоских волн в упругой среде при нелинейной зависимости напряжения от деформации [Текст] / Х.А. Рахматулин // Учёные записки МГУ. – 1951. – Т. III. – Вып. 152. – С.47-54.

34. Самуль, В.И. Основы теории упругости и пластичности [Текст]: учеб. пособие для студентов вузов / В.И. Самуль. – 2-е изд., перераб. – М.: Высш. школа, 1982. – 264 с.
35. Смирнов, В.И. Курс высшей математики [Текст] / В.И. Смирнов. – М.: Наука, 1981. – Т.4. – Ч.2. – 550 с.
36. Сопротивление материалов [Текст]: учебник для вузов; под ред. А.Ф. Смирнова. – 3-е изд., перераб. и доп. – М.: Высш. школа, 1975. – 480 с.
37. Сопротивление материалов и основы строительной механики [Текст]: учебник для вузов / Р.А. Хечумов, А.Г. Юрьев, А.А. Толбатов; под ред. Р.А. Хечумова. – М.: Изд-во АСВ, 1994. – 384 с.
38. Терещушко, О.И. Основы теории упругости и пластичности [Текст] / О.И. Терещушко. – М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1984. – 320 с.
39. Тимошенко, С.П. Пластинки и оболочки [Текст] / С.П. Тимошенко, С. Войновский-Кригер. – М.: Физматгиз, 1963.
40. Тимошенко, С.П. Теория упругости [Текст] / С.П. Тимошенко, Дж. Гудьер; под ред. Г.С. Шапиро: пер. с англ. – 2-е изд. – М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1979, 560 с.
41. Уравнения и краевые задачи теории пластичности и ползучести [Текст]: справочное пособие / Г.С. Писаренко, Н.С. Можаровский. – Киев: Наук. думка, 1981. – 496 с.
42. Уравнения математической физики [Текст]: учеб. пособие для высших учебных заведений / А.Н. Тихонов, А.А. Самарский. – 5-е изд., стереотип. – М.: Главная редакция физико-математической литературы изд-ва «Наука», М., 1977. – 736 с.
43. Филин, А.П. Прикладная механика твёрдого деформируемого тела [Текст] / А.П. Филин. – М.: Т. I. Главная редакция физико-математической литературы изд-ва «Наука», 1975. – Т. I. – 832 с.
44. Филоненко-Бородич, М.М. Механические теории прочности [Текст] / М.М. Филоненко-Бородич. – М., Изд-во Московского ун-та, 1961. – 92 с.
45. Филоненко-Бородич, М.М. Теория упругости [Текст] / М.М. Филоненко-Бородич. – М.: Физматгиз, 1959.
46. Bulfingeri G. De solidorum resistentia specimen. Commentarii Academiae scieniarum imperialis Petropolitanea vol 4., 1729, стр. 164.
47. Goodier J.N., Shaw J. Mtch.Phys. Solids. 10, 35-52 (1962).
48. E. Sternberg. Arch. Rational. Mech. and Anal. 6, 34-50 (1960).
49. Kavanagh K.T. The finite element analysis of physically and kinematically non-linear elastic solids, doct. diss., Univ. of California, Berkeley; также опубликовано как Struct. Mater. Res. Rep. 69-4, Structural Engineering Laboratory, Univ. of California, Berkeley, April, 1969.
50. Mjurnaghan F. Finite deformation of an elastic solid. Amer. Journ. of Math., Vol. 59., 1937, 235-260.
51. Seeger A., Buck O. Die experimentelle Ermittlung der elasctischen Konstanten höherer Ordnung, Z. Naturforsch., 15a, 1960, 1056-1067.

ОГЛАВЛЕНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ	3
ВВЕДЕНИЕ	5
Глава 1. ТЕОРИЯ НАПРЯЖЕНИЙ	9
§ 1.1. Допущения в теории упругости	9
§ 1.2. Основные понятия теории напряжений	10
§ 1.3. Напряжения на параллельных площадках	17
§ 1.4. Напряжения на наклонных площадках	18
§ 1.5. Уравнения равновесия	21
§ 1.6. Тензор напряжений	24
§ 1.7. Главные напряжения	28
§ 1.8. Наибольшие касательные напряжения	31
Глава 2. ТЕОРИЯ ДЕФОРМАЦИЙ	37
§ 2.1. Понятие о перемещениях	37
§ 2.2. Геометрические соотношения	40
§ 2.3. Деформация в произвольном направлении	43
§ 2.4. Угол сдвига между двумя произвольными направлениями	45
§ 2.5. Объёмная деформация	47
§ 2.6. Тензор деформации	48
§ 2.7. Главные деформации	50
§ 2.8. Уравнения неразрывности деформаций	54
Глава 3. ФИЗИЧЕСКИЕ СООТНОШЕНИЯ	57
§ 3.1. Физический закон для упругого тела	57
§ 3.2. Обобщённый закон Гука	58
§ 3.3. Потенциальная энергия деформации	64
Глава 4. ПОСТАНОВКА И МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ	69
§ 4.1. Общая система уравнений теории упругости	69
§ 4.2. Типы задач теории упругости	71
§ 4.3. Прямая задача теории упругости в перемещениях	73
§ 4.4. Прямая задача теории упругости в напряжениях	75
§ 4.5. Теории прочности	80
Глава 5. ВАРИАЦИОННАЯ ФОРМУЛИРОВКА ЗАДАЧ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ	90
§ 5.1. Общее выражение для работы внешних сил	90
§ 5.2. Теорема Клапейрона	92
§ 5.3. Начало возможных перемещений. Принцип Лагранжа	93
§ 5.4. Вариационный принцип Кастильяно	94

Глава 6. ОДНОМЕРНАЯ ЗАДАЧА В ДЕКАРТОВЫХ КООРДИНАТАХ..	96
§ 6.1. Одномерная деформация.....	96
§ 6.2. Одномерное напряжённое состояние.....	99
§ 6.3. Напряжённое состояние в точке для одномерной задачи теории упругости.....	103
Глава 7. ДВУМЕРНАЯ ЗАДАЧА В ДЕКАРТОВЫХ КООРДИНАТАХ..	105
§ 7.1. Плоская деформация.....	105
§ 7.2. Обобщённое плоское напряжённое состояние	108
§ 7.3. Сводка уравнений двумерной плоской задачи теории упругости	110
§ 7.4. Решение плоской задачи теории упругости в перемещениях ...	112
§ 7.5. Решение плоской задачи теории упругости в напряжениях.....	113
§ 7.6. Определение перемещений	117
§ 7.7. Напряжённое состояние в точке для плоской задачи теории упругости	118
§ 7.8. Деформированное состояние в точке для плоской задачи теории упругости	127
§ 7.9. Потенциальная энергия деформации	131
Глава 8. ДВУМЕРНАЯ ПЛОСКАЯ ЗАДАЧА В ПОЛЯРНЫХ КООРДИНАТАХ	135
§8.1. Основные уравнения.....	135
§8.2. Решение плоской задачи теории упругости в полярных координатах.....	144
§8.3. Главные площадки и главные напряжения в полярной системе координат.....	147
Глава 9. КРУЧЕНИЕ ПРИЗМАТИЧЕСКИХ СТЕРЖНЕЙ.....	152
§9.1. Решение задачи о кручении при помощи функции напряжений.....	152
§9.2. Мембранная аналогия.....	157
Глава 10. ИЗГИБ ПЛАСТИН.....	160
§10.1. Основные гипотезы и допущения	161
§10.2. Перемещения, деформации и напряжения в пластинке.....	162
§10.3. Внутренние усилия в пластинке	167
§10.4. Дифференциальное уравнение изогнутой срединной поверхности пластинки	177
§10.5. Условия на контуре пластинки.....	179
§10.6. Оценка прочности пластинки	182
§10.7. Потенциальная энергия при изгибе пластинки.....	183
§10.8. Пластинка на упругом основании	184
§10.9. Пластинка в полярных координатах	191
§10.10. Понятие о расчёте гибких пластинок.....	193

Глава 11. ОСНОВЫ ТЕОРИИ ОБОЛОЧЕК	200
§11.1. Деформации, напряжения и внутренние усилия в тонких оболочках	203
§11.2. Пологие оболочки	207
§11.3. Расчёт оболочки произвольной формы по безмоментной теории.....	218
Глава 12. ОСНОВЫ ТЕОРИИ РАСПРОСТРАНЕНИЯ УПРУГИХ ВОЛН ДЕФОРМАЦИЙ	226
§12.1. Распространение упругих волн в стержнях.....	228
§12.2. Распространение двумерных упругих волн деформаций	234
§12.3. Распространение волн деформаций в неограниченном упругом теле	237
Глава 13. ОБОБЩЕНИЯ НА ГЕОМЕТРИЧЕСКИ И ФИЗИЧЕСКИ НЕЛИНЕЙНУЮ ТЕОРИЮ УПРУГОСТИ.....	241
§13.1. Общая система уравнений нелинейной теории упругости.....	241
§13.2. Феноменологический подход при построении замыкающих уравнений.....	245
ЗАКЛЮЧЕНИЕ	249
БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК	250

Учебное издание

Бакушев Сергей Васильевич

**ТЕОРИЯ УПРУГОСТИ.
КРАТКИЙ ТЕОРЕТИЧЕСКИЙ КУРС.**

Учебное пособие

Редактор М.А. Сухова
Верстка Н.В. Кучина

Подписано в печать 24.03.2016. Формат 60x84/16.
Бумага офисная «Снегурочка». Печать на ризографе.
Усл.печ.л. 14,88. Уч.-изд.л. 16,0. Тираж 80 экз.
Заказ № 194.

Издательство ПГУАС.
440028, г. Пенза, ул. Германа Титова, 28.

