

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Федеральное государственное бюджетное образовательное
учреждение высшего образования
«Пензенский государственный университет
архитектуры и строительства»
(ПГУАС)

В.В. Зернов

ТЕХНИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА

Учебно-методическое пособие к практическим занятиям
по направлению подготовки 08.03.01 «Строительство»

Пенза 2016

УДК 539.3
ББК 30.121
3-57

Рекомендовано Редсоветом университета
Рецензент – кандидат технических наук, доцент
М.Б. Зайцев (ПГУАС)

Зернов В.В.
3-57 Техническая механика: учебно-методическое пособие к практическим занятиям по направлению подготовки 08.03.01 «Строительство» / В.В. Зернов. – Пенза: ПГУАС, 2016. – 84 с.

Содержатся примеры задач, предусмотренных учебным планом дисциплины «Техническая механика».

Учебно-методическое пособие подготовлено на кафедре «Механика» и предназначено для студентов, обучающихся по направлению подготовки 08.03.01 «Строительство» (уровень бакалавриата).

© Пензенский государственный университет
архитектуры и строительства, 2016
© Зернов В.В., 2016

Введение

Учебно-методическое пособие предназначено для студентов, обучающихся по направлению 08.03.01 «Строительство» (уровень бакалавриата).

Техническая механика – это наука о механическом поведении твёрдых деформируемых тел при силовых, температурных и других воздействиях на них. Она изучает вопросы подбора геометрических размеров элементов строительных конструкции, выполненных из надлежащего материала, из условия полной надёжности работы и наибольшей дешевизны конструкции.

В курсе «Техническая механика», в основном изучается механическое поведение стержней, то есть твёрдых тел, у которых два геометрических размера (ширина и высота) существенно меньше третьего размера (длины).

Строительные конструкции и их элементы в процессе эксплуатации должны удовлетворять требованиям безопасности, надёжности, долговечности и быть экономичными.

Перечисленные требования означают, чтобы в течение всего срока эксплуатации была исключена возможность разрушения и возникновения недопустимо больших деформаций конструкции при одновременном требовании экономии материала. Необходимые размеры сечений элементов конструкции определяются из расчёта на прочность, жёсткость и устойчивость.

Расчёт на прочность сводится к требованию, чтобы наибольшие напряжения в элементе конструкции (нормальные, касательные, либо определенная комбинация этих напряжений) не превосходили некоторой допустимой для данного материала величины.

Расчёт на жёсткость сводится к требованию, чтобы наибольшие перемещения (удлинения стержней, прогибы, осадки опор) не превышали некоторых допустимых величин.

Расчёт на устойчивость сводится к требованию, чтобы конструкция в процессе эксплуатации сохраняла свою первоначальную форму равновесия.

Предельным называется такое состояние, при котором становится невозможной дальнейшая нормальная эксплуатация конструкции. Для пластичного материала предельное состояние соответствует появлению пластических деформации; для хрупкого материала предельному состоянию соответствует начало разрушения.

В нормах проектирования установлены две основные группы предельных состояний:

I группа предельных состояний определяется потерей несущей способности конструкций – прочности или устойчивости;

II группа предельных состояний определяется нарушением нормальной эксплуатации конструкций вследствие возникновения чрезмерно больших деформаций или колебаний сооружения, а также образования и развития трещин и других повреждений.

В соответствии с рабочим учебным планом предусмотрены практические занятия.

Темы практических занятий

Тема 1. Геометрические характеристики плоских сечений.

Перечень вопросов, заданий, выносимых на практические занятия.

1. Выбор вспомогательных осей. Вычисление статических моментов площадей простых фигур относительно вспомогательных осей.
2. Вычисление координат центра тяжести. Построение центральных осей.
3. Определение положения главных центральных осей.
4. Вычисление главных центральных моментов инерции.

Тема 2. Осевое растяжение (сжатие) бруса.

Перечень вопросов, заданий, выносимых на практические занятия

1. Построение эпюр продольных сил.
2. Подбор сечения бруса.
3. Определение деформаций.

Тема 3. Кручение бруса круглого сечения.

Перечень вопросов, заданий, выносимых на практическое занятие

1. Построение эпюр крутящих моментов
2. Определение касательных напряжений. Подбор сечения вала.

Тема 4. Плоский поперечный изгиб бруса.

Перечень вопросов, заданий, выносимых на практические занятия

1. Построение эпюр поперечных сил и изгибающих моментов в балках с прямолинейной осью.
2. Определение напряжений в сечениях балки.
3. Подбор сечения балки из условия прочности по нормальным напряжениям.

Тема 5. Расчёт балок на жёсткость при плоском поперечном изгибе.

Перечень вопросов, заданий, выносимых на практические занятия.

1. Определение перемещений методом непосредственного интегрирования приближённого уравнения изогнутой оси балки.
2. Метод начальных параметров.
3. Проверка жёсткости балок.

Тема 6. Внецентренное сжатие (растяжение) бруса.

Перечень вопросов, заданий, выносимых на практические занятия.

1. Определение положения нейтральной оси.
2. Оценка прочности бруса.
3. Построение ядра сечения.

Тема 7. Косой изгиб.

Перечень вопросов, заданий, выносимых на практические занятия.

1. Определение положения нейтральной оси.
2. Оценка прочности и подбор сечения бруса.

Тема 8. Одновременное действие изгиба и продольной силы.

Перечень вопросов, заданий, выносимых на практические занятия.

1. Определение положения нейтральной оси.
2. Оценка прочности.

Тема 9. Устойчивость центрально сжатых стержней.

Перечень вопросов, заданий, выносимых на практические занятия

1. Определение критической силы для сжатого стержня с различными способами закрепления.
2. Подбор сечения сжатого стержня из условия равноустойчивости методом последовательных приближений. Компоновка сечения.
3. Определение коэффициента запаса устойчивости.

Процесс изучения дисциплины «Техническая механика» направлен на формирование у студентов следующих компетенций:

– способность использовать основные законы естественнонаучных дисциплин в профессиональной деятельности, применять методы математического анализа и математического (компьютерного) моделирования, теоретического и экспериментального исследования.

Тема №1 ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ПЛОСКИХ СЕЧЕНИЙ

Примеры задач

Пример 1.1. Дано сечение, состоящее из прокатных профилей: швеллера № 27 и равнобокого уголка 100×100×10 (рис. 1.1). Геометрические характеристики прокатных профилей следует брать из сортамента, помня о том, что названия осей в сортаменте не всегда совпадают с названиями осей в конкретной задаче.

Решение

Разбиваем сечение на две простые фигуры (швеллер – первая фигура, уголок – вторая фигура).

Выпишем из таблиц сортамента необходимые данные. При этом наименования осей примем в соответствии с принятыми в задаче (рис. 1.1).

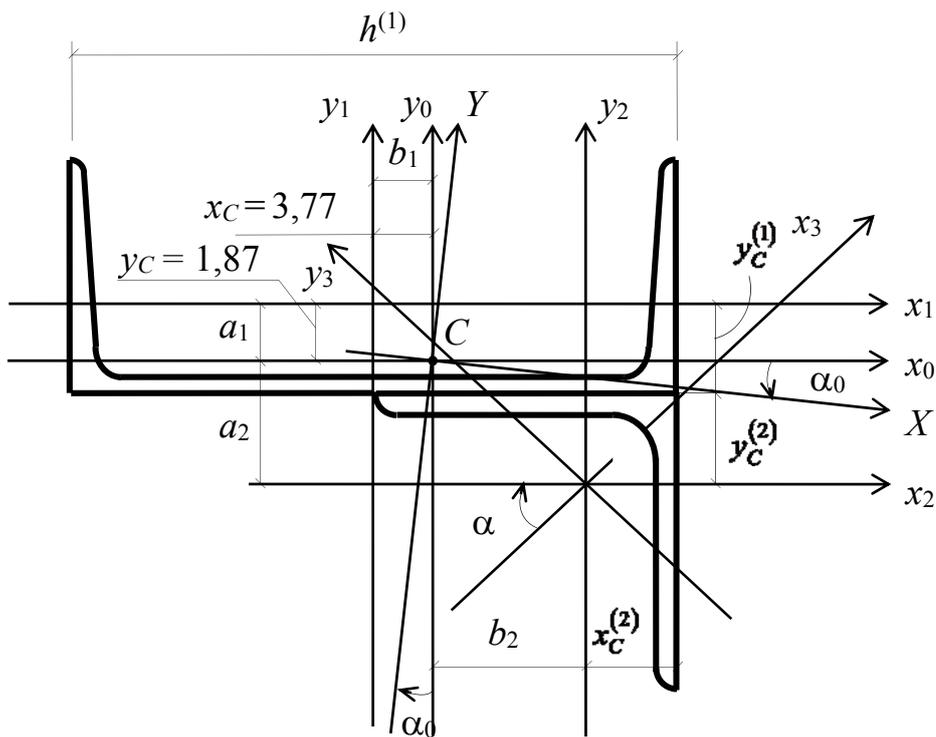


Рис. 1.1

Швеллер № 27 — ГОСТ 8240-89:

$$h^{(1)} = 27 \text{ см}; A^{(1)} = 35,2 \text{ см}^2; y_{01} = z_0 = 2,47 \text{ см}$$

$$I_{y_1}^{(1)} = I_x = 4160 \text{ см}^4; I_{x_1}^{(1)} = I_y = 262 \text{ см}^4.$$

Уголок $100 \times 100 \times 10$ — ГОСТ 8509-86:

$$A^{(2)} = 19,2 \text{ см}^2; \quad x_{0_2} = y_{0_2} = 2,83 \text{ см};$$

$$I_{x_2}^{(2)} = I_{y_2}^{(2)} = 179 \text{ см}^4; \quad I_{x_3}^{(2)} = 284 \text{ см}^4; \quad I_{y_3}^{(2)} = 74,1 \text{ см}^4.$$

1. *Определение положения центра тяжести сечения.*

В качестве вспомогательных осей используем центральные оси первой фигуры, то есть x_1 и y_1 . Тогда

$$X_C = \frac{S_y}{A} = \frac{S_y^{(1)} + S_y^{(2)}}{A} = \frac{A^{(1)} X_C^{(1)} + A^{(2)} X_C^{(2)}}{A^{(1)} + A^{(2)}};$$

$$Y_C = \frac{S_x}{A} = \frac{S_x^{(1)} + S_x^{(2)}}{A} = \frac{A^{(1)} Y_C^{(1)} + A^{(2)} Y_C^{(2)}}{A^{(1)} + A^{(2)}}.$$

Здесь $X_C^{(1)}, Y_C^{(1)}, X_C^{(2)}, Y_C^{(2)}$ — координаты центров тяжести простых фигур во вспомогательной системе координат.

Таким образом,

$$X_C = \frac{35,2 \cdot 0 + 19,2 \cdot (13,5 - 2,83)}{35,2 + 19,2} = 3,77 \text{ см};$$

$$Y_C = \frac{35,2 \cdot 0 + 19,2 \cdot (-2,47 - 2,83)}{35,2 + 19,2} = -1,87 \text{ см}.$$

По найденным значениям X_C, Y_C наносим на схему (рис. 1.1) центр тяжести сечения и проводим через него центральные оси x_0 и y_0 так, чтобы относительно них было удобно вычислять осевые моменты инерции всего сечения. (Центральные оси всего сечения следует по возможности проводить параллельно собственным центральным осям простых фигур).

2. *Определение моментов инерции относительно центральных осей.*

Моменты инерции сечения относительно центральных осей определяются как алгебраическая сумма моментов инерции простых фигур сечения:

$$I_{x_0} = I_{x_0}^{(1)} + I_{x_0}^{(2)}; \quad I_{y_0} = I_{y_0}^{(1)} + I_{y_0}^{(2)}; \quad I_{x_0 y_0} = I_{x_0 y_0}^{(1)} + I_{x_0 y_0}^{(2)}.$$

Здесь:

$$I_{x_0}^{(1)} = I_{x_1}^{(1)} + a_1^2 A^{(1)} = 262 + (+1,87)^2 \cdot 35,2 = 385 \text{ см}^4;$$

$$I_{x_0}^{(2)} = I_{x_2}^{(2)} + a_2^2 A^{(2)} = 179 + (-2,47 - 2,83 + 1,87)^2 \cdot 19,2 = 405 \text{ см}^4;$$

$$I_{x_0} = 385 + 405 = 790 \text{ см}^4. \quad I_x > I_y; \quad I_{xy} = 0.$$

$$I_{y_0}^{(1)} = I_{y_1}^{(1)} + b_1^2 A^{(1)} = 4160 + (-3,77)^2 \cdot 35,2 = 4660 \text{ см}^4;$$

$$I_{y_0}^{(2)} = I_{y_2}^{(2)} + b_2^2 A^{(2)} = 179 + (13,5 - 2,83 - 3,77)^2 \cdot 19,2 = 1093 \text{ см}^4;$$

$$I_{y_0} = 4660 + 1093 = 5753 \text{ см}^4;$$

Центробежный момент инерции сечения относительно центральных осей будет равен:

$$I_{x_0 y_0} = I_{x_0 y_0}^{(1)} + I_{x_0 y_0}^{(2)}.$$

Здесь

$$I_{x_0 y_0}^{(1)} = I_{x_1 y_1}^{(1)} + a_1 b_1 A^{(1)} = 0 + (1,87) \cdot (-3,77) \cdot 35,2 = -248 \text{ см}^4,$$

причём $I_{x_1 y_1}^{(1)} = 0$, поскольку одна из осей швеллера является осью симметрии.

$$I_{x_0 y_0}^{(2)} = I_{x_2 y_2}^{(2)} + a_2 b_2 A^{(2)} =$$

$$= -105 + (13,5 - 2,83 - 3,77) \cdot (-2,47 - 2,83 + 1,87) \cdot 19,2 = -559 \text{ см}^4;$$

причём центробежный момент инерции уголка относительно осей x_2, y_2 определяется из соотношения:

$$I_{x_2 y_2}^{(2)} = \frac{I_{x_3}^{(2)} - I_{y_3}^{(2)}}{2} \sin 2\alpha + I_{x_3 y_3}^{(2)} \cos 2\alpha,$$

поскольку $I_{x_3 y_3}^{(2)} = 0$. Из рис. 1.1 видно, что $\alpha = 45^\circ$, значит:

$$I_{x_2 y_2}^{(2)} = \frac{284 - 74,1}{2} \sin(-90) + 0 = -105 \text{ см}^4.$$

Окончательно получаем

$$I_{x_0 y_0} = -248 - 559 = 807 \text{ см}^4.$$

3. *Определение положения главных центральных осей и вычисление главных центральных моментов инерции.* По найденным значениям моментов инерции относительно центральных осей определяем угол α_0 поворота главных центральных осей:

$$\operatorname{tg} 2\alpha_0 = -\frac{2I_{x_0 y_0}}{I_{x_0} - I_{y_0}} = -\frac{2 \cdot (-807)}{790 - 5753} = -0,325;$$

$$\alpha_0 = \frac{\operatorname{arctg}(-0,325)}{2} = -9^\circ.$$

Поворачивая центральные оси сечения на угол 9° по часовой стрелке, построим главные центральные оси X, Y (рис. 1.1).

Определяем значения главных центральных моментов инерции сечения:

$$\begin{aligned} I_x &= I_{x_0} \cos^2 \alpha_0 + I_{y_0} \sin^2 \alpha_0 - I_{x_0 y_0} \sin 2\alpha_0 = \\ &= 790 \cos^2(-9^\circ) + 5753 \sin^2(-9^\circ) + 807 \sin(-18^\circ) = \\ &= 140 + 771 - 249 = 662 \text{ см}^4. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I_y &= I_{y_0} \cos^2 \alpha_0 + I_{x_0} \sin^2 \alpha_0 + I_{x_0 y_0} \sin 2\alpha_0 = \\ &= 5753 \cos^2(-9^\circ) + 790 \sin^2(-9^\circ) - 807 \sin(-18^\circ) = \\ &= 5612,3 + 19,3 + 249 = 5881 \text{ см}^4. \end{aligned}$$

Таким образом, главные центральные моменты инерции сечения равны:

$$I_{\max} = I_y = 5881 \text{ см}^4; \quad I_{\min} = I_x = 662 \text{ см}^4.$$

Для проверки правильности последних вычислений используем соотношения:

$$\begin{aligned} I_{x_0} + I_{y_0} &= I_{\min} + I_{\max}; \\ 790 + 5753 &= 662 + 5881; \\ 6543 \text{ см} &= 6543 \text{ см}^4. \end{aligned}$$

Пример 1.2. Для заданного поперечного сечения требуется определить значения главных центральных моментов инерции (рис.1.2).

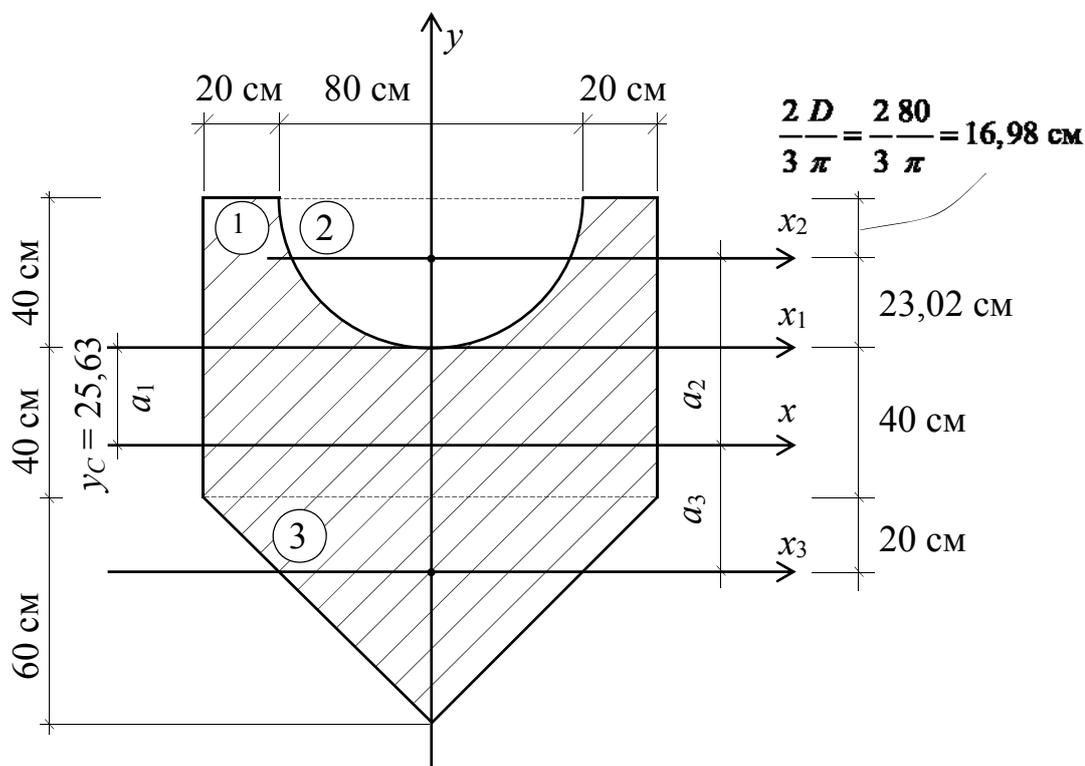


Рис. 1.2

Решение

Разбиваем сечение на три простые фигуры: прямоугольник – фигура 1, полукруг – фигура 2, треугольник – фигура 3. В качестве вспомогательных осей примем оси, проходящие через центр тяжести первой фигуры, то есть оси x_1, y .

1. *Определение положения центра тяжести сечения.*

Поскольку ось y является осью симметрии сечения, то $x_c = 0$;

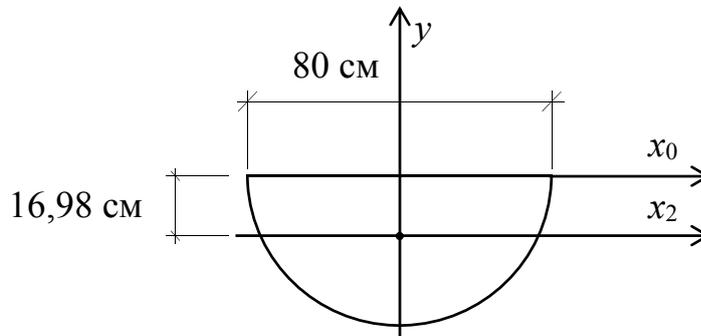
$$\begin{aligned}
 y_C &= \frac{S_{x_1}}{A} = \frac{\sum_{i=1}^3 S_{x_1}^{(i)}}{\sum_{i=1}^3 A^{(i)}} = \frac{S_{x_1}^{(1)} - S_{x_1}^{(2)} + S_{x_1}^{(3)}}{A^{(1)} - A^{(2)} + A^{(3)}} = \\
 &= \frac{A^{(1)} \cdot y_C^{(1)} - A^{(2)} \cdot y_C^{(2)} + A^{(3)} \cdot y_C^{(3)}}{A^{(1)} - A^{(2)} + A^{(3)}} = \\
 &= \frac{120 \cdot 80 \cdot 0 - \frac{\pi \cdot 80^2}{4 \cdot 2} \cdot 23,02 + \frac{1}{2} \cdot 120 \cdot 60 \cdot (-60)}{120 \cdot 80 - \frac{\pi \cdot 80^2}{4 \cdot 2} + \frac{1}{2} \cdot 120 \cdot 60} = \\
 &= \frac{0 - 57856 - 216000}{9600 - 2513 + 3600} = \frac{-273856}{10687} = -25,63 \text{ см.}
 \end{aligned}$$

2. *Определение осевых моментов инерции простых фигур относительно собственных центральных осей.*

Первая фигура:

$$\begin{aligned}
 I_{x_1}^{(1)} &= \frac{bh^3}{12} = \frac{120 \cdot 80^3}{12} = 5120000 \text{ см}^4 = 0,0512 \text{ м}^4, \\
 I_y^{(1)} &= \frac{bh^3}{12} = \frac{80 \cdot 120^3}{12} = 11520000 \text{ см}^4 = 0,1152 \text{ м}^4.
 \end{aligned}$$

Вторая фигура:



$$I_{x_0}^{(2)} = \frac{\pi D^4}{64} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\pi \cdot 80^4}{64 \cdot 2} = 1005310 \text{ см}^4;$$

$$I_{x_0}^{(2)} = I_{x_2}^{(2)} + a^2 A^{(2)};$$

$$\begin{aligned} I_{x_2}^{(2)} &= I_{x_0}^{(2)} - a^2 A^{(2)} = 1005310 - 16,98^2 \cdot \frac{\pi \cdot 80^2}{4 \cdot 2} = \\ &= 1005310 - 724628 = 280682 \text{ см}^4 = 0,002807 \text{ м}^4; \end{aligned}$$

$$I_y^{(2)} = \frac{\pi D^4}{64} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\pi \cdot 80^4}{64} \cdot \frac{1}{2} = 1005310 \text{ см}^4 = 0,01005 \text{ м}^4;$$

Третья фигура:

$$I_{x_3}^{(1)} = \frac{bh^3}{36} = \frac{120 \cdot 60^3}{36} = 720000 \text{ см}^4 = 0,0072 \text{ м}^4;$$

$$I_{x_4}^{(1)} = \frac{bh^3}{48} = \frac{60 \cdot 120^3}{48} = 2160000 \text{ см}^4 = 0,0216 \text{ м}^4.$$

3. Определение главных центральных моментов инерции относительно главных центральных осей.

$$I_x = I_x^{(1)} - I_x^{(2)} + I_x^{(3)}$$

$$I_x^{(1)} = I_{x_1}^{(1)} + a_1^{(2)} \cdot A^{(1)} = 0,0152 + 0,2563^2 \cdot 0,96 = 0,1143 \text{ м}^4$$

$$I_x^{(2)} = I_{x_2}^{(2)} + a_2^{(2)} \cdot A^{(2)} =$$

$$= 0,002807 + (0,2302 + 0,2563)^2 \cdot 0,2513 = 0,06229 \text{ м}^4$$

$$I_x^{(3)} = I_{x_3}^{(3)} + a_3^{(2)} \cdot A^{(3)} = 0,0072 + (0,6 - 0,2563)^2 \cdot 0,3600 = 0,04973 \text{ м}^4$$

$$I_x = 0,1143 - 0,06229 + 0,04973 = 0,10174 \text{ м}^4$$

$$I_y = I_y^{(1)} - I_y^{(2)} + I_y^{(3)} = 0,1152 - 0,011005 + 0,0216 = 0,12675 \text{ м}^4$$

Пример 1.3. Определить положение главных центральных осей и вычислить значение главных центральных моментов инерции фигуры, изображенной на рис. 1.3.

Разбиваем сложную фигуру на две простые, геометрические характеристики и координаты центров тяжести которых известны: 1 – прямоугольный треугольник, 2 – четверть круга.

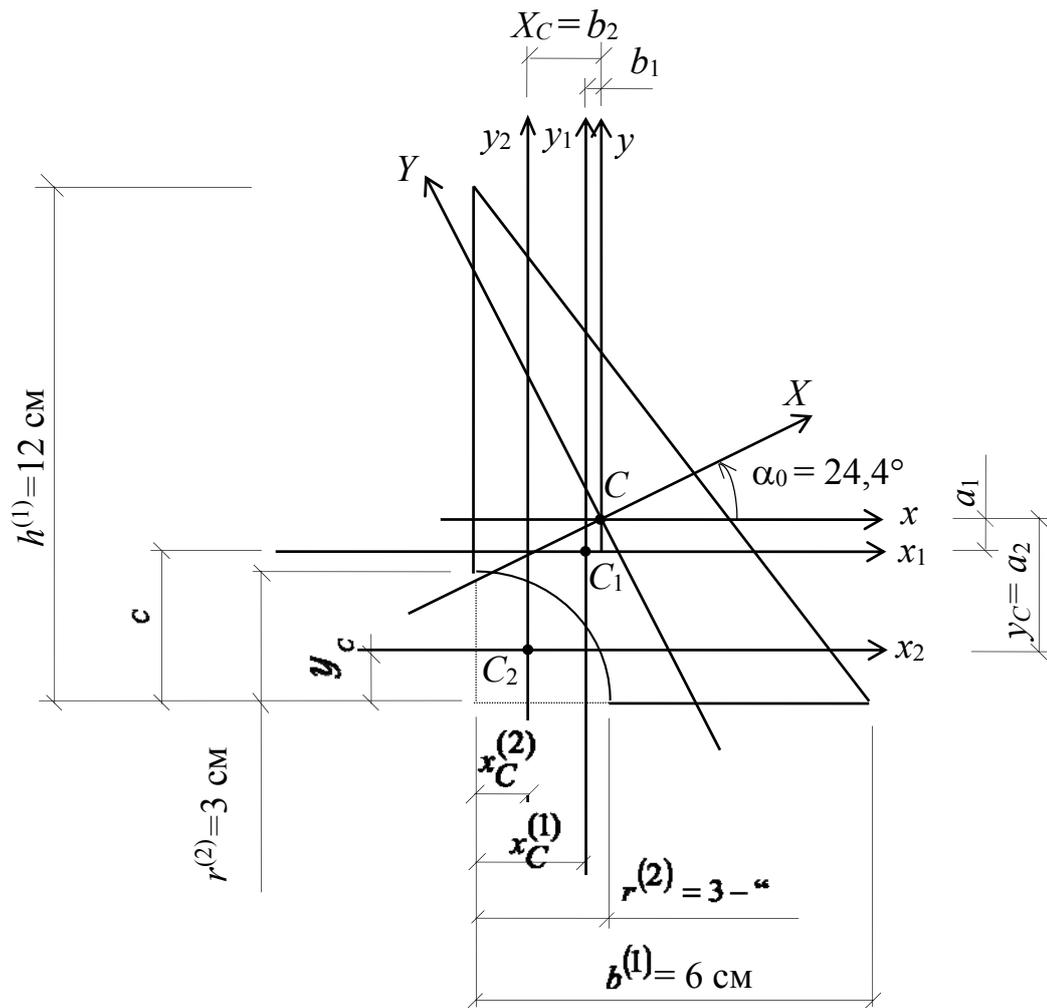


Рис. 1.3

Решение

Прямоугольный треугольник:

$$b^{(1)} = 6 \text{ см}; h^{(1)} = 12 \text{ см}; A^{(1)} = \frac{12 \cdot 6}{2} = 36 \text{ см}^2; x_C^{(1)} = 2 \text{ см}; y_C^{(1)} = 4 \text{ см};$$

$$I_{x_1}^{(1)} = \frac{6 \cdot 12^3}{36} = 288 \text{ см}^4;$$

$$I_{y_1}^{(1)} = \frac{12 \cdot 6^3}{36} = 72 \text{ см}^4 \quad I_{x_1 y_1}^{(1)} = \frac{-12^2 \cdot 6^2}{72} = -72 \text{ см}^4.$$

Четверть круга:

$$r^{(2)} = 3 \text{ см}; A^{(2)} = 0,785 \cdot 3^2 = 7,07 \text{ см}^2; x_C^{(2)} = y_C^{(2)} = 1,27 \text{ см};$$

$$I_{x_2}^{(2)} = I_{y_2}^{(2)} = 0,0547 \cdot 3^4 = 4,43 \text{ см}^4; I_{x_2 y_2}^{(2)} = -0,0165 \cdot 3^4 = -1,34 \text{ см}^4.$$

Наименования осей и обозначения принимаются в соответствии с принятыми на рис. 1.3.

1. *Определение положения центра тяжести сечения.* Вычисляем статический момент площади сечения относительно вспомогательных осей. Для сложного сечения статический момент равен алгебраической сумме статических моментов частей, его составляющих. Так как четверть круга представляет собой вырез (отверстие), то статический момент и площадь второй фигуры надо вычесть из первой:

$$x_c = \frac{\sum S_y}{\sum A} = \frac{S_y^{(1)} - S_y^{(2)}}{A^{(1)} - A^{(2)}} = \frac{A^{(1)}x_1 - A^{(2)}x_2}{A^{(1)} - A^{(2)}},$$

$$y_c = \frac{\sum S_x}{\sum A} = \frac{S_x^{(1)} - S_x^{(2)}}{A^{(1)} - A^{(2)}} = \frac{A^{(1)}y_1 - A^{(2)}y_2}{A^{(1)} - A^{(2)}},$$

где x_1, y_1, x_2, y_2 – координаты центров тяжести простейших фигур со своими знаками во вспомогательной системе координат.

Расположение вспомогательной системы координат может быть различным. В данном примере в качестве неё используем центральные оси второй фигуры x_2 и y_2 , тогда

$$x_c = \frac{36 \cdot (2 - 1,27) - 7,07 \cdot 0}{36 - 7,07} = 0,908 \text{ см};$$

$$y_c = \frac{36 \cdot (4 - 1,27) - 7,07 \cdot 0}{36 - 7,0} = 3,40 \text{ см}.$$

Наносим на чертёж центр тяжести и центральные оси x и y (рис. 1.3).

2. *Определение моментов инерции относительно центральных осей.* Моменты инерции всего сечения относительно центральных осей вычисляются как алгебраическая сумма моментов инерции простых фигур относительно этих осей. При этом значения моментов инерции для четверти круга принимаем со знаком минус, так как данная фигура представляет собой вырез (отверстие):

$$I_x = I_x^{(1)} - I_x^{(2)}; \quad I_y = I_y^{(1)} - I_y^{(2)}; \quad I_{xy} = I_{xy}^{(1)} - I_{xy}^{(2)}.$$

Для определения значений моментов инерции первой и второй фигур относительно центральных осей всего сечения x и y используем соотношения:

$$I_x^{(1)} = I_{x_1}^{(1)} + A^{(1)}a_1^2 = 288 + 36 \cdot 0,67^2 = 304,2 \text{ см}^4;$$

$$I_x^{(2)} = I_{x_2}^{(2)} + A^{(2)}a_2^2 = 4,43 + 7,07 \cdot 3,40^2 = 86,2 \text{ см}^4;$$

$$I_x = 304,2 - 86,2 = 218 \text{ см}^4;$$

$$I_x = I_y^{(1)} = I_{y_1}^{(1)} + A^{(1)}b_1^2 = 72 + 36 \cdot 0,178^2 = 73,1 \text{ см}^4;$$

$$I_y^{(2)} = I_{y_2}^{(2)} + A^{(2)}b_2^2 = 4,43 + 7,07 \cdot 0,908^2 = 10,3 \text{ см}^4;$$

$$I_y = 73,1 - 10,3 = 62,8 \text{ см}^4.$$

$$I_{xy}^{(1)} = I_{x_1y_1}^{(1)} + A^{(1)}(-a_1)(-b_1) = -72 + 36(-0,67)(-0,178) = -67,7 \text{ см}^4;$$

$$I_{xy}^{(2)} = I_{x_2y_2}^{(2)} + A^{(2)}(-a_2)(-b_2) = (-1,34) + 7,07(-3,40)(-0,908) = 20,5 \text{ см}^4;$$

$$I_{xy} = -67,7 + (-20,5) = -88,2 \text{ см}^4.$$

Расстояния между центральными параллельными осями:

$$a_1 = y_C - (y_C^{(1)} - y_C^{(2)}) = 3,40 - (4 - 1,27) = 0,67 \text{ см}; a_2 = y_C;$$

$$b_1 = x_C - (x_C^{(1)} - x_C^{(2)}) = 0,908 - (2 - 1,27) = 0,178 \text{ см}; b_2 = x_C.$$

3. *Определение положения главных центральных осей и вычисление главных центральных моментов инерции.* По найденным значениям моментов инерции относительно центральных осей вычисляем угол α_0 поворота главных центральных осей (см. рис. 1.3):

$$\operatorname{tg} 2\alpha_0 = -\frac{2I_{xy}}{I_x - I_y} = -\frac{2 \cdot (-88,2)}{218 - 62,8} = 1,14; \alpha_0 = 24,4^\circ.$$

Поворачивая центральные оси сечения x и y на угол $24,4^\circ$ против часовой стрелки, строим главные центральные оси X , Y .

На основе зависимостей (1.8) определяем значения главных центральных моментов инерции сечения:

$$\begin{aligned} I_X &= I_x \cos^2 \alpha_0 + I_y \sin^2 \alpha_0 - I_{xy} \sin 2\alpha_0 = \\ &= 218 \cdot \cos^2(24,4^\circ) + 62,8 \cdot \sin^2(24,4^\circ) - (-88,2) \cdot \sin(48,8^\circ) = \\ &= 180,9 + 10,7 + 66,2 = 257,8 \text{ см}^4; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I_Y &= I_x \sin^2 \alpha_0 + I_y \cos^2 \alpha_0 + I_{xy} \sin 2\alpha_0 = \\ &= 218 \cdot \sin^2(24,4^\circ) + 62,8 \cdot \cos^2(24,4^\circ) + (-88,2) \cdot \sin(48,8^\circ) = \\ &= 37,0 + 52,1 - 66,2 = 22,9 \text{ см}^4. \end{aligned}$$

Таким образом, экстремальные значения главных центральных моментов инерции сечения равны следующим величинам:

$$I_{\max} = I_X = 257,8 \text{ см}^4; I_{\min} = I_Y = 22,9 \text{ см}^4.$$

Для проверки правильности последних вычислений используем соотношение:

$$I_x + I_y = I_X + I_Y; 218 + 62,8 = 257,8 + 22,9; 280,8 \text{ см}^4 \cong 280,7 \text{ см}^4.$$

Тема №2 ОСЕВОЕ РАСТЯЖЕНИЕ (СЖАТИЕ) БРУСА

Примеры решения задач

Пример 2.1. Определить площадь поперечного сечения A и перемещение нижнего конца стержня Δl при $R_{\sigma} = 210 \text{ МПа}$ и $E = 200 \text{ ГПа}$ (рис. 2.1). $\gamma_c = 1,0$; $\gamma_f = 1,1$.

Решение

1. Вычисление расчётных нагрузок.

$$F_1^p = F_1^h \cdot \gamma_f = 50 \cdot 1.1 = 55 \text{ кН};$$

$$F_2^p = F_2^h \cdot \gamma_f = 30 \cdot 1.1 = 33 \text{ кН}$$

2. Построение эпюр продольных сил и напряжений. Имеем три участка: AB , BC , CD . Для построения эпюр воспользуемся методом сечений. Последовательно проводим сечения на каждом участке стержня: 1-1, 2-2, 3-3 (рис. 2.1, а). Рассматриваем равновесие нижних отсеченных частей стержня (рис. 2.2). Во всех сечениях за положительное значение принята растягивающая сила, направленная от сечения.

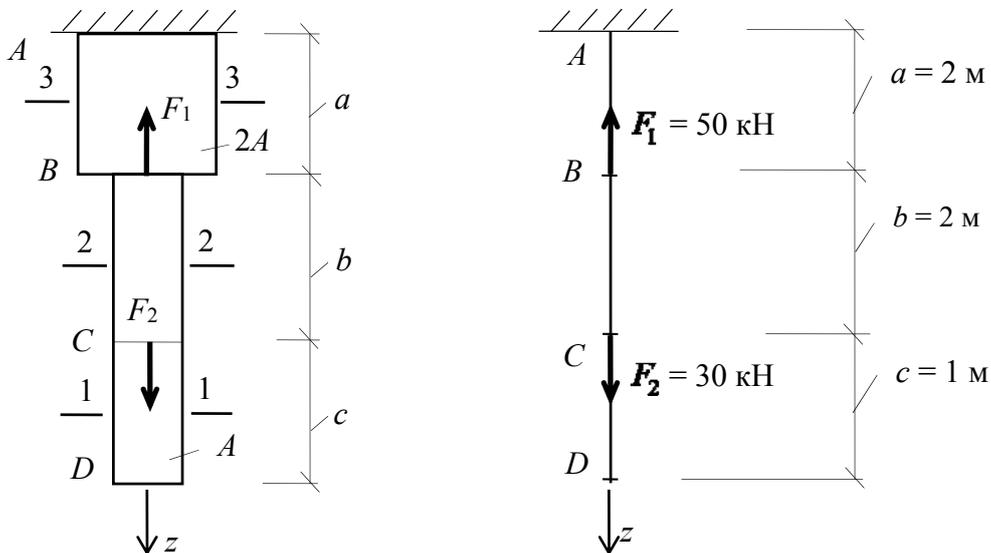


Рис. 2.1

На участке CD , в сечении 1-1 (рис. 2.2, а):

$$\sum Z = N_1 = 0, \quad N_1 = 0.$$

На участке BC , в сечении 2-2 (рис. 2.2, б):

$$\sum Z = N_2 - F_2^p = 0, \quad N_2 = F_2^p = 33 \text{ кН}.$$

На участке AB , в сечении 3-3 (рис. 2.2, в):

$$\sum Z = N_3 + F_1^p - F_2^p = 0, \quad N_3 = F_2^p - F_1^p = 33 - 55 = -22 \text{ КН}.$$

Сила N_3 получилась отрицательной, значит, участок AB испытывает сжатие.

По эпюре N (рис. 2.2, г) строим эпюру нормальных напряжений σ_z (рис. 2.2, д). На участке CD с площадью поперечного сечения стержня A напряжение $\sigma^{(1)} = 0 \left(\frac{\text{КН}}{\text{см}^2} \right)$

На участке BC с площадью поперечного сечения стержня A :

$$\sigma^{(2)} = \frac{N_2}{A} = \frac{33}{A} \left(\frac{\text{КН}}{\text{см}^2} \right).$$

На участке AB с площадью поперечного сечения стержня $2A$:

$$\sigma^{(3)} = \frac{N_3}{2A} = \frac{-22 \text{ КН}}{2A} = -\frac{11}{A} \left(\frac{\text{КН}}{\text{см}^2} \right).$$

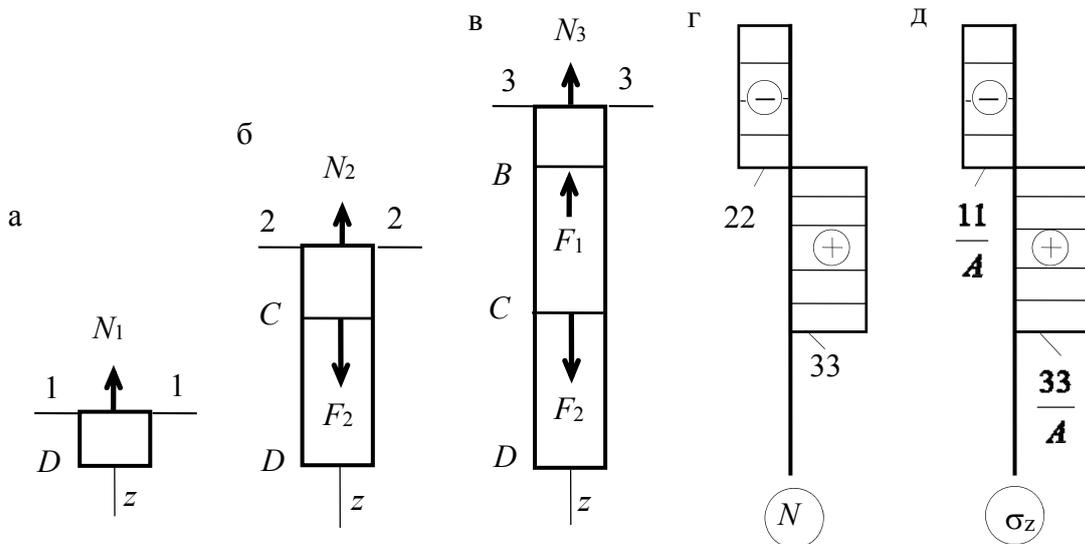


Рис. 2.2

Из эпюры нормальных напряжений σ_z (рис. 2.2, д) следует, что все сечения на участке BC равнопасны, поскольку именно на этом участке возникают наибольшие по величине нормальные напряжения:

$$\sigma_{\max} = \sigma^{(2)} = \frac{33}{A} \left(\frac{\text{КН}}{\text{см}^2} \right).$$

3. *Подбор поперечного сечения.* Из условия прочности определяем требуемую площадь поперечного сечения:

$$A = \frac{33 \text{ (кН)}}{R_{\sigma} \gamma_c} = \frac{33 \cdot 10^3 \text{ (Н)}}{210 \cdot 10^6 \text{ (Па)} \cdot 1,0} = 1,571 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2 = 1,571 \text{ см}^2.$$

Принимаем для участков CD и BC $A=1,6 \text{ см}^2$, а для участка AB – $2A=3,2 \text{ см}^2$.

4. *Проверка прочности сечения.* Прочность сечения проверяем на каждом участке стержня.

Участок AB :

$$\sigma = \frac{N_3}{2A} = \frac{22 \text{ (кН)}}{3,2 \text{ (см}^2\text{)}} = 6,875 \left(\frac{\text{кН}}{\text{см}^2} \right) = 68,75 \text{ МПа} < R_{\sigma} = 210 \text{ МПа}.$$

Участок BC :

$$\sigma = \frac{N_2}{A} = \frac{33 \text{ (кН)}}{1,6 \text{ (см}^2\text{)}} = 20,625 \left(\frac{\text{кН}}{\text{см}^2} \right) = 206,25 \text{ (МПа)} < R_{\sigma} = 210 \text{ МПа}.$$

Участок CD :

$$\sigma = \frac{N_3}{A} = \frac{0 \text{ (кН)}}{1,6 \text{ (см}^2\text{)}} = 0 \left(\frac{\text{кН}}{\text{см}^2} \right) = 0 \text{ (МПа)} < R_{\sigma} = 210 \text{ (МПа)}$$

Таким образом, на всех участках условие прочности выполняется. Это означает, что площадь поперечного сечения подобрана, верно.

5. *Определение перемещения нижнего сечения стержня.* Перемещение точки D определяем относительно опорного неподвижного сечения, то есть, находим абсолютную деформацию участка AD как алгебраическую сумму деформаций на каждом из трех участков:

$$\Delta l_{AD} = \Delta l_{AB} \Delta l_{BC} + \Delta l_{CD}.$$

Деформации на каждом участке вычисляем по формуле с учётом знака продольной силы. При этом учтём понижающий коэффициент для продольной силы, обеспечивающий расчёт деформаций по нормативным нагрузкам.

$$\Delta l_{AB} = \frac{N_3 \cdot a}{E \cdot 2A \cdot \gamma_f} = \frac{-22 \cdot 10^3 \text{ Н} \cdot 2 \text{ м}}{200 \cdot 10^9 \text{ Па} \cdot 3,2 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2 \cdot 1,1} = -6,25 \cdot 10^{-4} \text{ м} = -0,625 \text{ мм};$$

$$\Delta l_{BC} = \frac{N_2 b}{EA \cdot \gamma_f} = \frac{33 \cdot 10^3 \text{ Н} \cdot 2 \text{ м}}{200 \cdot 10^9 \text{ Па} \cdot 1,60 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2 \cdot 1,1} = 1,87 \cdot 10^{-3} \text{ м} = 1,87 \text{ мм};$$

$$\Delta l_{CD} = 0.$$

Полная деформация стержня будет равна

$$\Delta l_{AD} + \Delta l_{AB} + \Delta l_{CD} = -0,625 + 1,87 + 0 = 1,245 \text{ мм}.$$

Примеры решения задач

Пример 2.2. Подобрать поперечное сечение стержней, если $R = 180$ МПа (рис. 2.3).

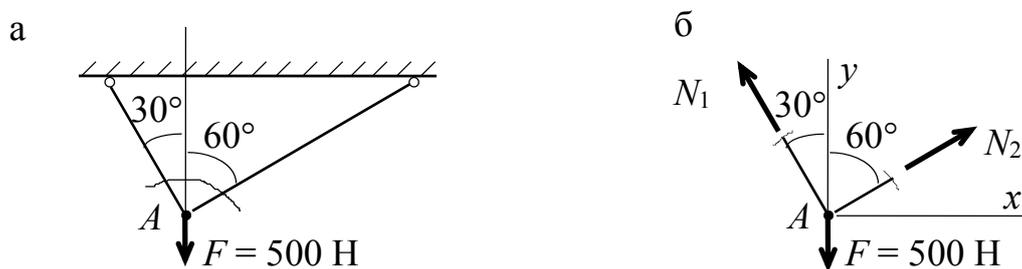


Рис. 2.3

Решение

1. *Определение внутренних усилий в стержнях.* Для этого вырезаем узел A и составляем уравнения равновесия (рис. 2.3, б):

$$\sum x = 0, -N_1 \sin 30^\circ + N_2 \sin 60^\circ = 0, N_1 = N_2 \frac{0,866}{0,5} = 1,732 N_2;$$

$$\sum y = 0, N_1 \cos 30^\circ + N_2 \cos 60^\circ - F = 0, N_1 = \frac{500 - 0,5 N_2}{0,866}.$$

Решая эти уравнения совместно, получим:

$$N_2 = 250 \text{ кН}, N_1 = 433 \text{ кН}.$$

2. *Определение площади поперечного сечения.* Из условия прочности находим требуемые площади:

$$A_1 = \frac{N_1}{R} = \frac{433 \cdot 10^3}{180 \cdot 10^6} = 2,406 \cdot 10^{-3} \text{ м}^2 = 24,06 \text{ см}^2;$$

$$A_2 = \frac{N_2}{R} = \frac{250 \cdot 10^3}{180 \cdot 10^6} = 1,39 \cdot 10^{-3} \text{ м}^2 = 13,9 \text{ см}^2.$$

Пример 2.3. Для стержня диаметром $D = 4$ см определить допускаемую величину силы F при $R = 160$ МПа (рис. 2.4, а).

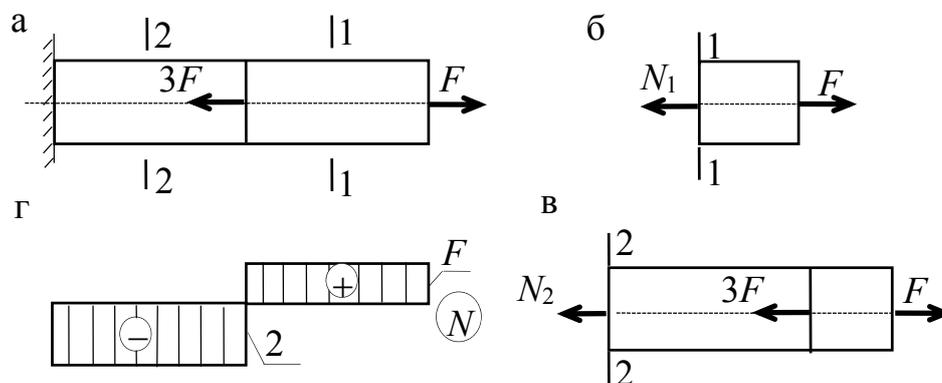


Рис. 2.4

Решение

1. *Построение эпюры продольных сил.* В сечении 1-1 (рис. 2.4, б) $N_1 - F = 0$; $N = F_1$ (растяжение). В сечении 2-2 (рис. 2.4, в) $N_2 - F + 3F = 0$; $N_2 = -2F$ (сжатие). Максимальное усилие $N_{\max} = 2F$.

2. *Определение допускаемой величины силы.* Из условия прочности максимальное продольное усилие, которое можно допустить в поперечном сечении, равно:

$$N_{\max} = R \cdot A = 160 \cdot 10^6 \cdot \frac{3,14 \cdot 4^2}{4} \cdot 10^{-4} = 200960 \text{ Н} = 201,96 \text{ кН.}$$

В сечении действует усилие $2F$. Тогда допускаемая сила

$$F = \frac{N_{\max}}{2} = \frac{201,96}{2} = 100,98 \text{ кН.}$$

Тема №3

КРУЧЕНИЕ БРУСА КРУГЛОГО СЕЧЕНИЯ

Примеры задач

Пример 3.1. Известны внешние нормативные крутящие моменты, приложенные в точках B , C и D (рис. 3.1): $M_B^H = 1 \text{ кН} \cdot \text{м}$, $M_C^H = 3,6 \text{ кН} \cdot \text{м}$, $M_D^H = 1,5 \text{ кН} \cdot \text{м}$. Расчетное сопротивление стали сдвигу $R_S = 100 \text{ МПа}$. Размеры участков: $a = 1,2 \text{ м}$, $b = 1,3 \text{ м}$ и $c = 1,1 \text{ м}$, коэффициенты $\gamma_f = 1,1$, $\gamma_C = 0,8$.

1. *Вычисление расчётных нагрузок.*

$$M_B = M_B^H \cdot \gamma_f = 1 \cdot 1,1 = 1,1 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

$$M_C = M_C^H \cdot \gamma_f = 3,6 \cdot 1,1 = 3,96 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

$$M_D = M_D^H \cdot \gamma_f = 1,5 \cdot 1,1 = 1,65 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

2. *Построение эпюры моментов* начинаем со свободного конца балки. Последовательно проводим сечения на каждом участке стержня: I-I, II-II и III-III. и рассматриваем равновесие отсечённых правых частей.

На участке $D - C$, в сечении I-I,

$$\sum m_z = T_1^H - M_D^H = 0, T_1^H = M_D^H = 1,5 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

На участке $C - B$, в сечении II-II,

$$\sum m_z = T_2^H - M_C^H - M_D^H = 0, T_2^H = M_D^H - M_C^H = 1,5 - 3,6 = 2,1 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

На участке $A - B$, в сечении III-III,

$$\begin{aligned}\sum m_z &= T_3^H - M_B^H + M_C^H - M_D^H = 0, \\ T_2^H &= M_B^H - M_C^H + M_D^H = 1,5 - 3,6 + 1,0 = 1,1 \text{ кН} \cdot \text{м}.\end{aligned}$$

Моменты T_2^H и T_3^H получились отрицательными, это означает, что их истинные направления противоположны принятым, т.е. будут направлены против часовой стрелки.

На участке $A - B$, в сечении III-III,

$$\begin{aligned}\sum m_z &= T_3^H - M_B^H + M_C^H - M_D^H = 0, \\ T_2^H &= M_B^H - M_C^H + M_D^H = 1,5 - 3,6 + 1,0 = 1,1 \text{ кН} \cdot \text{м}.\end{aligned}$$

Моменты T_2^H и T_3^H получились отрицательными, это означает, что их истинные направления противоположны принятым, т.е. должны быть направлены против часовой стрелки.

На эпюре моментов положительные моменты откладываем вверх, а отрицательные вниз (рис. 3.1). Эпюра расчётных крутящих моментов получается умножением нормативных значений на коэффициент надёжности по нагрузке $\gamma_f = 1,1$;

$$T_1 = T_1^H \cdot 1,1 = 1,5 \cdot 1,1 = 1,65 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

$$T_2 = T_2^H \cdot 1,1 = 2,1 \cdot 1,1 = 2,31 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

$$T_3 = T_3^H \cdot 1,1 = 1,1 \cdot 1,1 = 1,21 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

Из эпюры следует, что наибольший по величине расчётный крутящий момент действует на участке $B - C$ и равен

$$T_{\max} = |T_2| = 2,31 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

3. *Определение диаметра стержня.* Из условия прочности получаем:

$$d \geq 1,72 \cdot \sqrt[3]{\frac{2,31 \cdot 10^3 (\text{Н} \cdot \text{м})}{0,8 \cdot 100 \cdot 10^6 (\text{Н}/\text{м}^2)}} = 0,0528 \text{ м} = 52,8 \text{ мм}.$$

Округлив полученное значение, принимаем диаметр стержня $d = 60 \text{ мм}$.

4. *Проверка прочности сечения.* Проверяем условие прочности:

$$\tau_{\max} = \frac{2,31 \cdot 10^3 \cdot 16}{3,14 \cdot 60^3 \cdot 10^{-9}} = 54,5 \cdot 10^6 \text{ Па} < 100 \cdot 10^6 \cdot 0,8 \text{ Па},$$

$$54,5 \text{ МПа} < 80 \text{ МПа}.$$

Условие прочности выполняется.

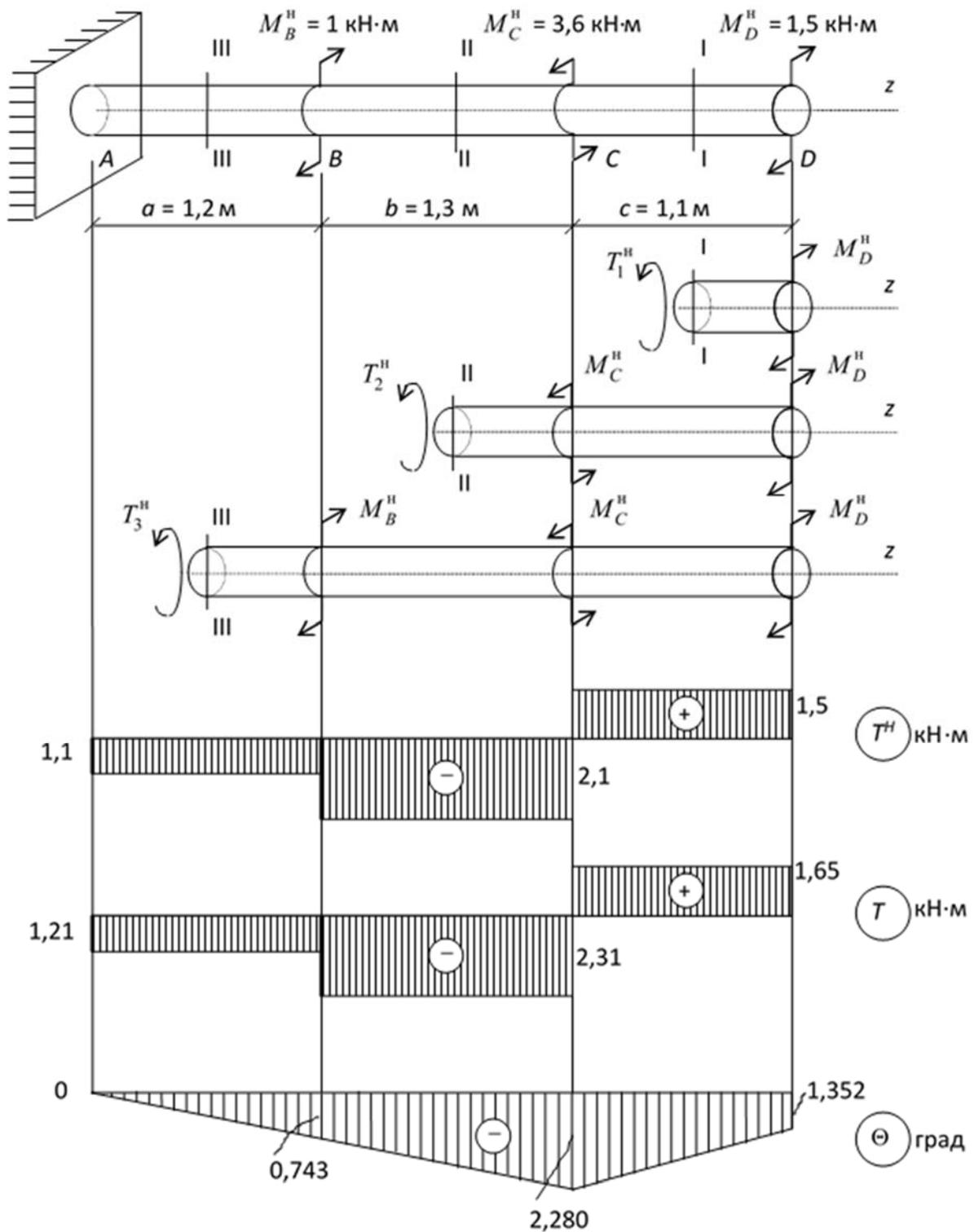


Рис. 3.1

5. Построение эпюры углов закручивания. В сечении у неподвижного конца стержня (точка A) $\Theta_A = 0$. В точке B , согласно формуле

$$\Theta_B = \Theta_A + \frac{T_3 a}{GJ_\rho},$$

где $J_p = \frac{\pi \cdot 6^4}{32} 127,17 \text{ см}^4$.

Подставляя численные значения, получим

$$\Theta_B = 0 + \frac{-1,1 \cdot 10^3 \cdot 1,2}{80 \cdot 10^9 \cdot 127,17 \cdot 10^{-8}} = 0,013 \text{ рад} = 0,745^\circ.$$

По аналогии в точках C и D углы закручивания будут равны:

$$\begin{aligned} \Theta_C &= \Theta_B + \frac{T_2^H b}{GJ_p} = 0,130 + \frac{-2,1 \cdot 10^3 \cdot 1,3}{80 \cdot 10^9 \cdot 127,17 \cdot 10^{-8}} = \\ &= 0,013 + 0,0268 = 0,0398 \text{ рад} = 2,28^\circ; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Theta_D &= \Theta_C + \frac{T_1^H c}{GJ_p} = 0,0398 + \frac{1,5 \cdot 10^3 \cdot 1,1}{80 \cdot 10^9 \cdot 127,17 \cdot 10^{-8}} = \\ &= 0,0398 - 0,0162 = 0,0236 \text{ рад} = 1,352^\circ. \end{aligned}$$

По найденным значениям углов закручивания, учитывая линейное изменение их в пределах каждого участка, строим эпюру (рис. 3.4).

6. *Определение относительных углов закручивания.* Определяем на каждом участке относительные углы закручивания:

$$\Theta_{AB} = \frac{T_3^H}{GJ_p} = \frac{-1,1 \cdot 10^3}{80 \cdot 10^9 \cdot 127,17 \cdot 10^{-8}} = 0,0108 \text{ рад/м} = -0,620 \text{ град/м};$$

$$\Theta_{BC} = \frac{T_2^H}{GJ_p} = \frac{-2,1 \cdot 10^3}{80 \cdot 10^9 \cdot 127,17 \cdot 10^{-8}} = 0,0206 \text{ рад/м} = -1,181 \text{ град/м};$$

$$\Theta_{CD} = \frac{T_1^H}{GJ_p} = \frac{1,5 \cdot 10^3}{80 \cdot 10^9 \cdot 127,17 \cdot 10^{-8}} = 0,0147 \text{ рад/м} = 0,844 \text{ град/м}.$$

Наибольший относительный угол закручивания равен:

$$\Theta_{\max} = |\Theta_{BC}| = 1,181 \text{ град/м}.$$

Пример 3.1. Шкив № 1 вращается со скоростью $n = 200$ об/мин и передает трём другим шкивам мощности, кВт: $P_2 = 20$; $P_3 = 15$ и $P_4 = 10$ (рис. 3.2).

Подобрать диаметр вала сплошного и трубчатого поперечного сечения при $d/D = 0,8$ и $R_s = 80$ МПа. Построить эпюру крутящих моментов и в эпюрах углов закручивания. Проверить условие жесткости при $[\bar{\theta}] = 2,5 \frac{\text{град}}{\text{м}}$ и $G = 80$ ГПа.

Решение

1. *Определение крутящих моментов и построение их эпюр (рис. 3.2, б).*
По формуле находим:

$$M_2 = 9551 \frac{P_2}{n} = 9551 \cdot \frac{20}{200} = 955,1 \text{ Н}\cdot\text{м};$$

$$M_3 = 9551 \cdot \frac{15}{200} = 716,3 \text{ Н}\cdot\text{м};$$

$$M_4 = 9551 \cdot \frac{10}{200} = 477,6 \text{ Н}\cdot\text{м};$$

$$M_1 = M_2 + M_3 + M_4 = 955,1 + 716,3 + 477,6 = 2149 \text{ Н}\cdot\text{м}.$$

Разбиваем вал на три участка: AB , BD и DE .

Участок AB : $0 \leq z_1 \leq 0,1$ м; сечение 1–1 (рис. 3.2, г);

$$\sum M_Z = M_2 - T_1 = 0; \quad T_1 = M_2 = 955,1 \text{ Н}\cdot\text{м}.$$

Участок BD : $0 \leq z_2 \leq 0,2$ м; сечение 2–2 (рис. 3.2, д);

$$\sum M_Z = M_2 + M_3 - T_2 = 0;$$

$$T_2 = M_2 + M_3 = 955,1 + 716,3 = 1671,4 \text{ Н}\cdot\text{м}.$$

Участок DE : $0 \leq z_3 \leq 0,3$ м; сечение 3–3 (рис. 3.4, е);

$$\sum M_Z = M_2 + M_3 - M_1 + T_3 = 0;$$

$$T_3 = M_1 - M_2 - M_3 = 2149 - 955,1 - 716,3 = 477,6 \text{ Н}\cdot\text{м}.$$

Усилия T_1 и T_2 направлены против часовой стрелки и, согласно правилу знаков, их считаем отрицательными, а T_3 – положительным. «Скачки» на эпюре моментов равны приложенным внешним крутящим моментам.

2. *Определение диаметра вала.* Из условия прочности имеем:

$$W_p = \frac{|T_{\max}|}{R_s} = \frac{1671,4 \text{ (Н}\cdot\text{м)}}{80 \cdot 10^6 \text{ (Н/м}^2\text{)}} = 20,89 \cdot 10^{-6} \text{ м}^3 = 20,89 \text{ см}^3.$$

Находим диаметр сплошного вала:

$$D = \sqrt[3]{\frac{16W_p}{\pi}} = \sqrt[3]{\frac{16 \cdot 20,89}{3,14}} = 4,72 \text{ см}.$$

Для трубчатого сечения полярный момент сопротивления

$$W_p = \frac{\pi D^3}{16} \left[1 - \left(\frac{d}{D} \right)^4 \right] = \frac{3,14 \cdot D^3}{16} (1 - 0,8^4) = 0,116 D^3.$$

Вычисляем диаметр трубчатого сечения:

$$D = \sqrt[3]{\frac{W_p}{0,116}} = \sqrt[3]{\frac{20,89}{0,116}} = 5,647 \text{ см}; \quad d = 0,8 \cdot 5,647 = 4,518 \text{ см}.$$

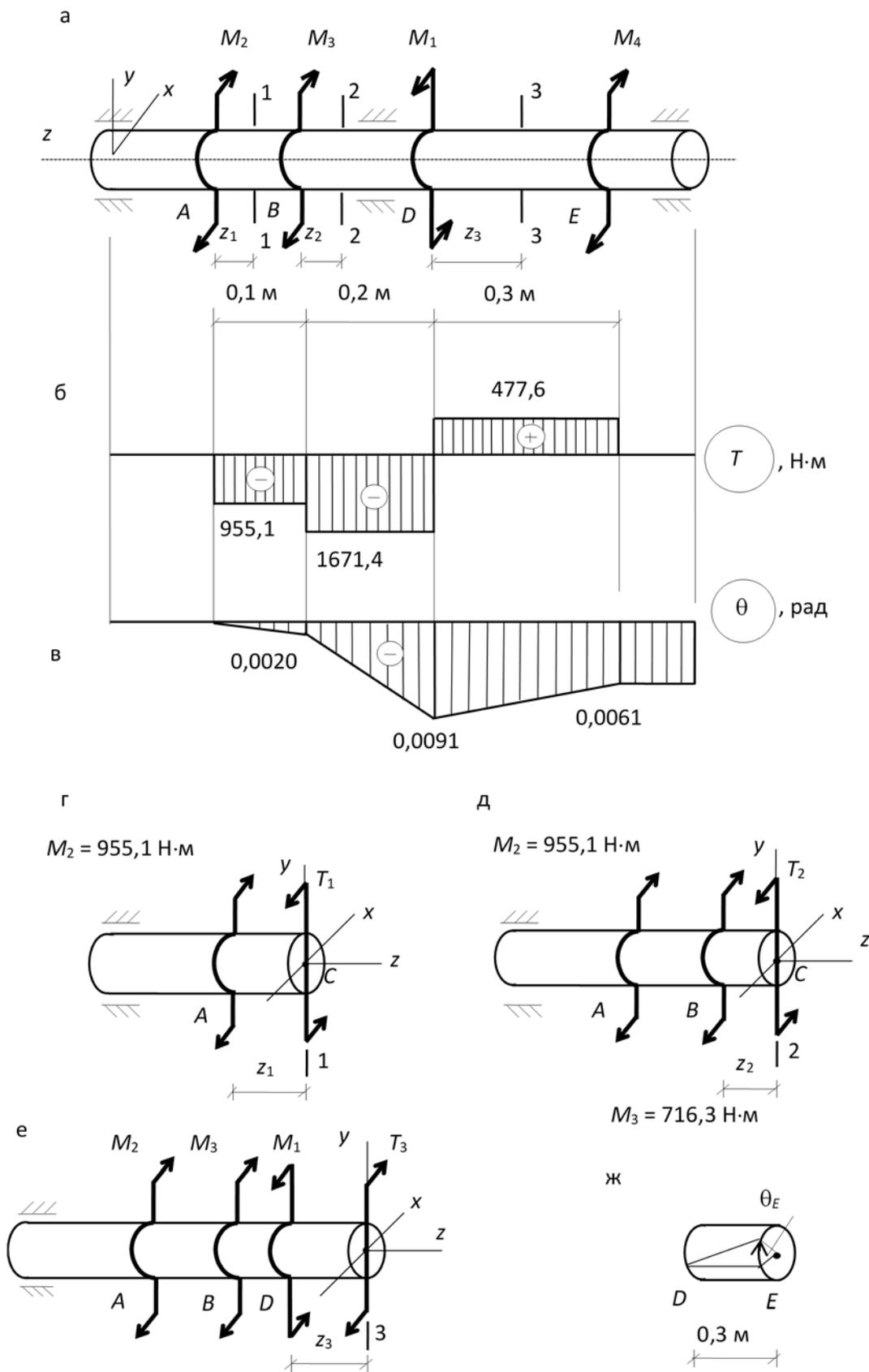


Рис. 3.2

Определяем соответственно площадь круга и площадь трубы:

$$A_{\text{круга}} = \frac{\pi D^2}{4} = \frac{3,14 \cdot 4,72^2}{4} = 17,49 \text{ см}^2;$$

$$A_{\text{трубы}} = \frac{\pi D^2}{4} \left[1 - \left(\frac{d}{D} \right)^2 \right] = \frac{3,14 \cdot 5,647^2}{4} \left[1 - \left(\frac{4,518}{5,647} \right)^2 \right] = 9 \text{ см}^2.$$

Сравнение площадей показывает, что расход материала на трубу меньше в 1,94 раза.

2. Построение эпюры углов закручивания (рис. 3.2, в). Угол закручивания определяем отдельно на каждом участке, считая левый его конец неподвижным. Полярный момент инерции трубы

$$I_{\rho} = \frac{\pi D^4}{32} \left[1 - \left(\frac{d}{D} \right)^4 \right] = \frac{3,14 \cdot 5,647^4}{32} \left[1 - \left(\frac{4,518}{5,647} \right)^4 \right] = 58,92 \text{ см}^4.$$

Шкив № 4 (точка E) поворачивается относительно шкива № 1 на угол (рис. 3.2, ж)

$$\theta_{DE} = \frac{T_3 l_{DE}}{GI_{\rho}} = \frac{477,6(\text{Н} \cdot \text{м}) \cdot 0,3(\text{м})}{80 \cdot 10^9 (\text{Н} / \text{м}^2) \cdot 58,92 \cdot 10^{-8} (\text{м}^4)} = 0,0030 \text{ рад.}$$

Шкив № 1 (точка D) закручивается относительно шкива № 3 (точка B) на угол

$$\theta_{BD} = \frac{T_2 l_{BD}}{GI_{\rho}} = \frac{-1671,4 \cdot 0,2}{80 \cdot 10^9 \cdot 58,92 \cdot 10^{-8}} = -0,0071 \text{ рад.}$$

Шкив № 3 (точка B) поворачивается относительно шкива № 2 (точка A) на угол

$$\theta_{AB} = \frac{T_1 l_{AB}}{GI_{\rho}} = \frac{-955,1 \cdot 0,1}{80 \cdot 10^9 \cdot 58,92 \cdot 10^{-8}} = -0,0020 \text{ рад.}$$

Построение эпюры углов закручивания производим относительно шкива № 2. Следовательно, в точке B сечение повернётся относительно точки A на угол $\theta_B = -0,0020$, а в точке D –

$$\theta_D = \theta_{AB} + \theta_{BD} = -0,0020 - 0,0071 = -0,0091 \text{ рад.}$$

Сечение в точке E повернётся относительно точки A на угол

$$\theta_E = \theta_{AB} + \theta_{BD} + \theta_{DE} = -0,0020 - 0,0071 + 0,0030 = -0,0061 \text{ рад.}$$

4. Проверка условия жёсткости. Относительный угол закручивания:

на участке DE $\bar{\theta}_{DE} = \frac{\theta_{DE}}{l_{DE}} = \frac{0,003}{0,3} = 0,01 \frac{\text{рад}}{\text{м}};$

на участке BD $\bar{\theta}_{BD} = \frac{\theta_{BD}}{l_{BD}} = \frac{-0,0071}{0,2} = -0,0355 \frac{\text{рад}}{\text{м}};$

на участке AB $\bar{\theta}_{AB} = \frac{\theta_{AB}}{l_{AB}} = \frac{-0,0020}{0,1} = -0,020 \frac{\text{рад}}{\text{м}}.$

$$\bar{\theta}_{\max} = |\bar{\theta}_{BD}| = 0,0355 < [\bar{\theta}] = \frac{2,5}{57,3} = 0,0436 \frac{\text{рад}}{\text{м}}.$$

Условие жёсткости (3.6) выполняется.

Пример 3.2. Для вала, изображённого на рис. 3.3, подобрать поперечное сечение при $R_s = 160$ МПа и $G = 80$ ГПа. Построить эпюру углов закручивания.

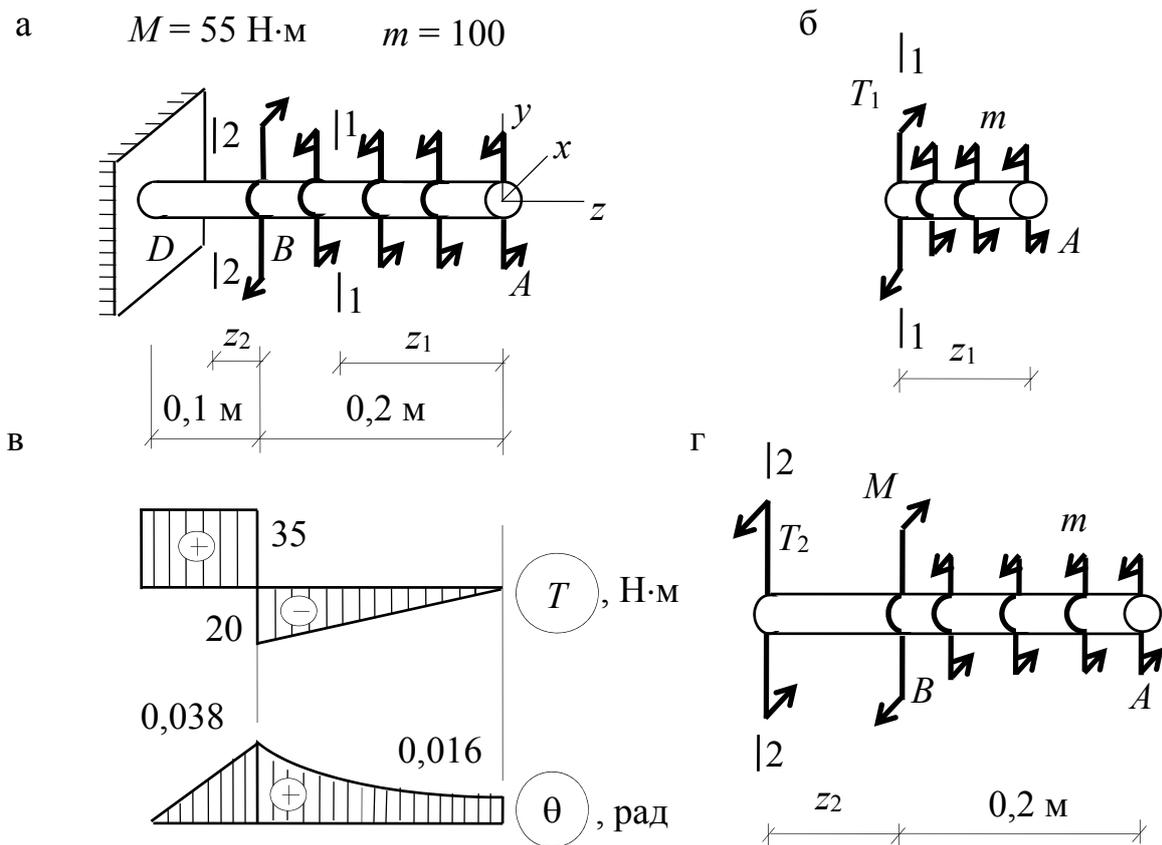


Рис. 3.3

Решение

1. Построение эпюры крутящих моментов.

На участке АВ, сечение 1-1 (рис. 3.3, б): $0,2 \text{ м} \geq z_1 \geq 0$;

$$\sum M_z = m \cdot z_1 - T_1 = 0; T_1 = 100 \cdot z_1.$$

При $z_1 = 0$ $T_1 = 0$, а при $z_1 = 0,2 \text{ м}$ $T_1 = 100 \cdot 0,2 = 20 \text{ Н} \cdot \text{м}$.

На участке ВD, сечение 2-2 (рис. 3.3, в): $0,1 \text{ м} \geq z_2 \geq 0$;

$$\sum M_z = m \cdot 0,2 - M + T_2 = 0; T_2 = 55 - 100 \cdot 0,2 = 35 \text{ Н} \cdot \text{м}.$$

Откладываем положительный момент T_2 вверх, а отрицательный T_1 – вниз от оси z .

2. Подбор диаметра вала. Из условия прочности (3.5) имеем:

$$D = \sqrt[3]{\frac{16 \cdot |T_{\max}|}{\pi \cdot R_s}} = \sqrt[3]{\frac{16 \cdot 35 (\text{Н} \cdot \text{м})}{3,14 \cdot 160 \cdot 10^6 (\text{Н}/\text{м}^2)}} = 1,037 \cdot 10^{-2} \text{ м} \approx 1,04 \text{ см}.$$

Полярный момент инерции

$$I_\rho = \frac{\pi D^4}{32} = \frac{3,14 \cdot 1,04^4}{32} = 0,115 \text{ см}^4.$$

3. Построение эпюры углов закручивания. Сечение в заделке неподвижно и $\theta_D = 0$. В точке В при постоянном моменте на участке ВD:

$$\theta_{BD} = \frac{T_2 l_{BD}}{GI_\rho} = \frac{35 \cdot 0,1}{80 \cdot 10^9 \cdot 0,115 \cdot 10^{-8}} = 0,038 \text{ рад}.$$

При изменении момента по линейному закону на участке АВ угол закручивания изменяется по закону квадратной параболы. В точке А он равен:

$$\begin{aligned} \theta_A &= \theta_{BD} - \int_0^{0,2} \frac{T}{GI_\rho} dz = \theta_{BD} - \int_0^{0,2} \frac{mz}{GI_\rho} dz = \theta_{BD} - \left. \frac{mz^2}{2GI_\rho} \right|_0^{0,2} = \\ &= \theta_{BD} - \frac{m}{2GI_\rho} (0,2^2 - 0) = 0,038 - \frac{100 \cdot 0,04}{2 \cdot 80 \cdot 10^9 \cdot 0,115 \cdot 10^{-8}} = 0,016 \text{ рад}. \end{aligned}$$

Пример 3.4. Определить величину допустимого крутящего момента для вала, изображённого на рис. 3.4, если $R_s = 100 \text{ МПа}$, $d = 2 \text{ см}$, $D_1 = 4 \text{ см}$ и $D_2 = 6 \text{ см}$.

1. Построение эпюры крутящих моментов.

В сечении 1-1: $\sum M_z = M - T_1 = 0$; $T_1 = M \text{ кН} \cdot \text{м}$.

В сечении 2-2: $\sum M_z = M - 3M + T_2 = 0$;

$$T_2 = -M + 3 \cdot M = 2 \cdot M \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

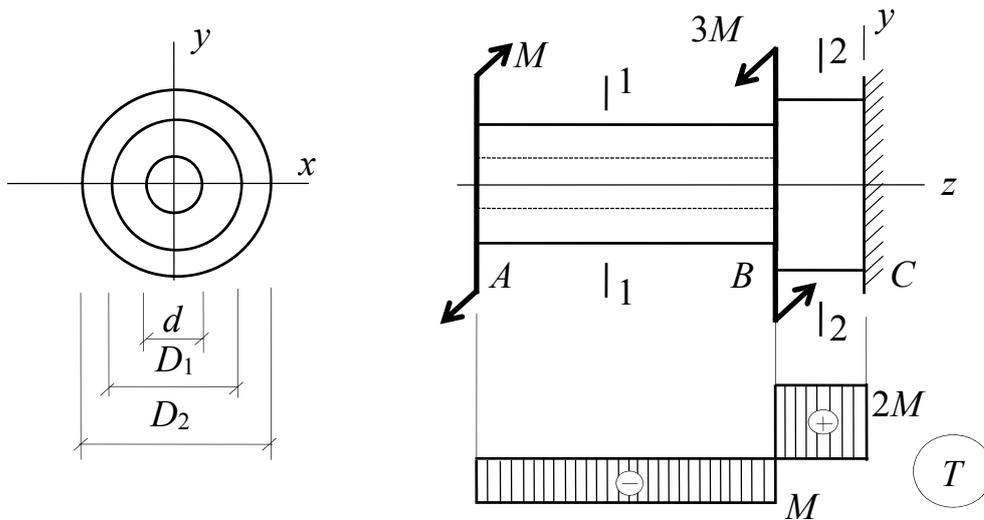


Рис. 3.4

Решение

2. *Определение допустимой нагрузки.* Имеем два участка AB и BC с разными поперечными сечениями и полярными моментами сопротивления. Поэтому находим допустимый крутящий момент на каждом участке и выбираем минимальный.

Из условия прочности при кручении имеем:

$$T_{\max} = W_p \cdot R_s$$

На участке AB для трубчатого сечения

$$W_p = \frac{\pi D_1^3}{16} \left[1 - \left(\frac{d}{D_1} \right)^4 \right] = \frac{3,14 \cdot 4^3}{16} \left[1 - \left(\frac{2}{4} \right)^4 \right] = 11,77 \text{ см}^3.$$

Допустимая нагрузка

$$M = T_{\max}^{AB} = 11,77 \cdot 10^{-6} (\text{м}^3) \cdot 100 \cdot 10^6 (\text{Н/м}^2) = 1177 \text{ Н}\cdot\text{м} = 1,2 \text{ кН}\cdot\text{м}.$$

На участке BC для сплошного сечения

$$W_p = \frac{3,14 \cdot 6^3}{16} = 42,39 \text{ см}^3$$

Допустимая нагрузка

$$M = 0,5 T_{\max}^{BC} = 0,5 \cdot 42,39 \cdot 10^{-6} \cdot 100 \cdot 10^6 = 2119 \text{ Н}\cdot\text{м} = 2,12 \text{ кН}\cdot\text{м}.$$

Окончательно принимаем наименьшее значение: $M = 1,2 \text{ кН}\cdot\text{м}.$

Тема № 4 ПЛОСКИЙ ПОПЕРЕЧНЫЙ ИЗГИБ БРУСА

Примеры задач

Пример 4.1. Из условия прочности подобрать двутавровое сечение стальной балки на двух опорах (рис. 4.1), если $M^H = 30 \text{ кН}\cdot\text{м}$, $q^H = 10 \text{ кН/м}$, $F^H = 20 \text{ кН}$.

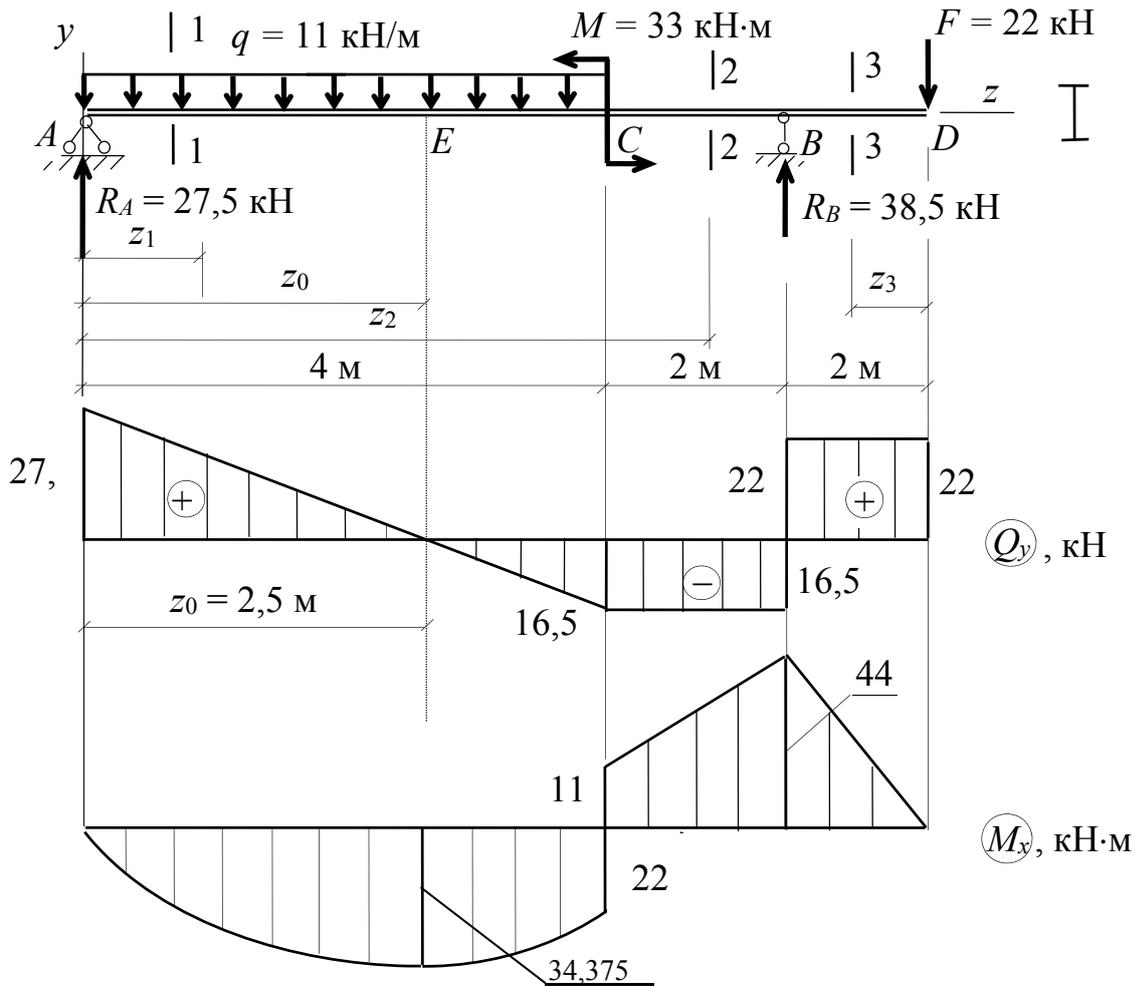


Рис. 4.1

Решение

1. *Вычисление расчётных нагрузок.* По заданным нормативным нагрузкам определяем величины расчётных нагрузок, которые указываем также на расчётной схеме (рис. 4.1).

$$M = M^H \cdot \gamma_f = 30 \text{ кН}\cdot\text{м} \cdot 1,1 = 33 \text{ кН}\cdot\text{м},$$

$$q = q^H \cdot \gamma_f = 10 \text{ кН/м} \cdot 1,1 = 11 \text{ кН/м},$$

$$F = F^H \cdot \gamma_f = 20 \text{ кН} \cdot 1,1 = 22 \text{ кН}.$$

Реакции опор определяем из условия равновесия балки:

$$\sum Z = 0; H_A = 0;$$

$$\sum m_A = 0; q \cdot 4 \cdot 2 - M - R_B \cdot 6 + F \cdot 8 = 0;$$

$$R_B = \frac{q \cdot 4 \cdot 2 - M + F \cdot 8}{6} = \frac{11 \cdot 4 \cdot 2 - 33 + 22 \cdot 8}{6} = 38,5 \text{ кН};$$

$$\sum m_B = 0; R_A \cdot 6 - q \cdot 4 \cdot 4 - M + F \cdot 2 = 0;$$

$$R_A = \frac{q \cdot 4 \cdot 4 + M - F \cdot 2}{6} = \frac{11 \cdot 4 \cdot 4 + 33 - 22 \cdot 2}{6} = 27,5 \text{ кН}.$$

Производим проверку правильности найденных реакций путём проецирования всех сил на вертикальную ось Y :

$$\sum Y = R_A - q \cdot 4 + R_B - F = 27,5 - 11 \cdot 4 + 38,5 - 22 = 0,$$

Следовательно, реакции найдены, верно.

2. Построение эпюр поперечных сил Q_y и изгибающих моментов M_x .

1-й участок AC . Рассекаем балку в произвольном месте этого участка сечением 1-1. Рассматриваем равновесие левой отсеченной части (рис. 4.2). Фиксируем сечение 1-1 текущей координатой z_1 от начала балки. Действие

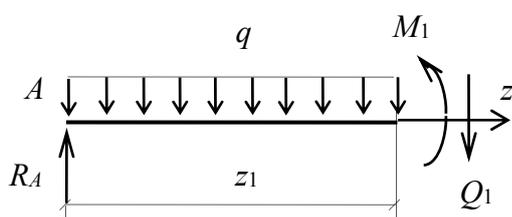


Рис. 4.2

правой отброшенной части на рассматриваемую левую заменяем внутренними усилиями $Q_1(z)$ и $M_1(z)$.

Руководствуясь принятыми правилами, находим выражения Q_y и M_x в общем виде:

$$Q_1(z) = R_A - q \cdot z_1 = 27,5 - 11 \cdot z_1;$$

$$M_1(z) = R_A \cdot z_1 - q \cdot z_1 \frac{z_1}{2} = 27,5 \cdot z_1 - 5,5 \cdot z_1^2;$$

$$0 \leq z_1 \leq 4 \text{ м}.$$

Поперечная сила на участке AC изменяется по его длине по линейному закону, а изгибающий момент M — по закону квадратной параболы.

Найдём ординаты эпюры Q_y :

при $z_1 = 0 \text{ м}$, $Q_1 = 27,5 \text{ кН}$,

при $z_1 = 4 \text{ м}$, $Q_1 = 27,5 - 11 \cdot 4 = 16,5 \text{ кН}$.

Поперечная сила изменяется по линейному закону и меняет при этом знак. Значит, в каком-то месте этого участка при $z_1 = z_0$ $Q_1 = 0$.

Определяем эту координату z_0 .

$$Q_1 = R_A - q \cdot z_0 = 0, \text{ откуда } z_0 = \frac{R_A}{q} = \frac{27,5}{11} = 2,5 \text{ м.}$$

Для построения эпюры M_x определяем ординаты в трёх сечениях: на границах участка AC и обязательно при $z = z_0 = 2,5$ м:

при $z_1 = 0$ м, $M_1 = 0$;

при $z = z_0 = 2,5$ м, $M_1 = 27,5 \cdot 2,5 - 5,5 \cdot (2,5)^2 = 34,375$ кН·м.

при $z_1 = 4$ м, $M_1 = 27,5 \cdot 4 - 5,5 \cdot (4)^2 = 22$ кН·м.

В случае, когда на участке с равномерно распределенной нагрузкой поперечная сила не равна нулю и не меняет знака, ординаты эпюры M_x определяются обязательно на границах участка и в произвольном третьем сечении этого участка.

2-й участок CB . Рассекаем балку в произвольном месте этого участка сечением 2-2. Рассматриваем равновесие левой отсечённой части (рис. 4.3). Сечение 2-2 фиксируем текущей ординатой z_2 от начала балки. Действие правой отброшенной части на левую заменяем внутренними усилиями Q_2 и M_2 .

Находим выражения M_x и Q_y в общем виде:

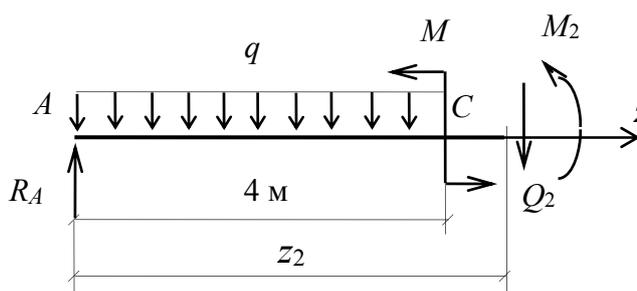


Рис. 4.3

$$Q_2 = R_A - q \cdot 4 = 27,5 - 11 \cdot 4 = -16,5 \text{ кН};$$

$$M_2 = R_A z_2 - q \cdot 4(z_2 - 2) - M = -27,5 \cdot z_2 - 44(z_2 - 2) - 33;$$

$$4 \leq z_2 \leq 6 \text{ м.}$$

Поперечная сила Q_y на участке CB постоянна и в любом сечении равна $Q_2 = 16,5$ кН. Изгибающий момент M_x изменяется по линейному закону.

Для построения эпюры M_x определяем ординаты на границах участка:

при $z_2 = 4$ м, $M_2 = 11$ кН·м;

при $z_2 = 6$ м $M_2 = 44$ кН·м.

3-й участок BD . Рассекаем балку в произвольном месте этого участка сечением 3-3. Рассматриваем равновесие правой отсечённой части (рис. 4.4). Сечение 3-3 фиксируем текущей координатой z_3 от правого конца

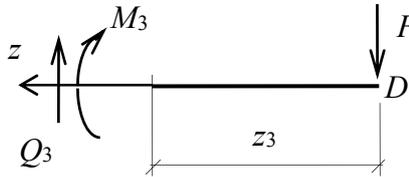


Рис. 4.4

балки. Действие левой отброшенной части на правую заменяем усилиями Q_3 и M_3 .

Находим выражения Q и M в общем виде:

$$Q_3 = F = 22 \text{ кН}, \quad M_3 = F \cdot z_3 = 22z_3, \quad 0 \leq z_3 \leq 2 \text{ м}.$$

Поперечная сила Q_y постоянна на участке BD и в любом сечении равна $Q_3 = 22 \text{ кН}$. Из-

гибающий момент M_x изменяется по линейному закону.

Для построения эпюры M_x определяем ординаты на границах участка:

при $z_3 = 0 \text{ м}$, $M_3 = 0$;

при $z_3 = 2 \text{ м}$, $M_3 = 22 \cdot 2 = 44 \text{ кН} \cdot \text{м}$.

По найденным ординатам в выбранном масштабе строим эпюры Q_y и M_x (рис. 4.1). Легко убедиться, что построенные эпюры соответствуют следствиям из дифференциальных зависимостей.

3. *Подбор сечения балки.* Находим по эпюрам M_x и Q_y максимальные (по абсолютной величине) значения внутренних усилий:

$$|M_{\max}| = 44 \text{ кН} \cdot \text{м}, \quad |Q_{\max}| = 27,5 \text{ кН}.$$

Из условия прочности по нормальным напряжениям определяем требуемый момент сопротивления сечения балки:

$$W_x^{\text{тр}} = \frac{M_{\max}}{R\gamma_c} = \frac{44 \cdot 10^3 \text{ Н} \cdot \text{м}}{210 \cdot 10^6 \cdot 0,9 \text{ Н} / \text{м}^2} = 0,233 \cdot 10^{-3} \text{ м}^3 = 233 \text{ см}^3.$$

По таблице ГОСТ 8239-89* для прокатных профилей принимаем двутавр № 24, для которого

$$W_x = 289 \text{ см}^3, \quad J_x = 3460 \text{ см}^4; \quad S_x^{\text{п.с.}} = 163 \text{ см}^3; \quad b_y = d = 0,56 \text{ см}.$$

4. *Проверка прочности сечения.* Вычисляем наибольшие нормальные и касательные напряжения в сечении и сравниваем их с расчётными сопротивлениями:

$$\begin{aligned} \sigma_{\max} &= \frac{M_{\max}}{W_x} = \frac{44 \cdot 10^3 \text{ Н} \cdot \text{м}}{289 \cdot 10^{-6} \text{ м}^3} = 0,152 \cdot 10^9 = 152 \text{ МПа} < \\ &< R \cdot \gamma_c = 210 \cdot 0,9 = 189 \text{ МПа}; \end{aligned}$$

$$\tau_{\max} = \frac{Q_{\max} S_x^{\text{п.с.}}}{J_x b_y} = \frac{27,5 \cdot 10^3 \text{ Н} \cdot 163 \cdot 10^{-6} \text{ м}^3}{3460 \cdot 10^{-8} \text{ м}^4 \cdot 0,56 \cdot 10^{-2} \text{ м}} =$$

$$= 2,31 \cdot 10^7 = 23,1 \text{ МПа} < R_s \gamma_c = 130 \cdot 0,9 = 117 \text{ МПа}.$$

Условия прочности удовлетворяются. Следовательно, сечение балки подобрано верно.

Если условия прочности по касательным напряжениям не удовлетворяются, то необходимо принять больший номер прокатного профиля (двутавра) и вновь проверить условия прочности.

Пример 4.2. Из условия прочности подобрать прямоугольное сечение деревянной консольной балки (рис.4.5), если $M^H = 20 \text{ кН} \cdot \text{м}$; $q^H = 10 \text{ кН/м}$; $F^H = 10 \text{ кН}$.

Решение

1. *Вычисление расчётных нагрузок.* Определяем величины расчётных нагрузок и указываем их на расчётной схеме (рис. 4.5):

$$M = M^H \cdot \gamma_f = 20 \text{ кН} \cdot \text{м} \cdot 1,1 = 22 \text{ кН} \cdot \text{м},$$

$$q = q^H \cdot \gamma_f = 10 \text{ кН/м} \cdot 1,1 = 11 \text{ кН/м},$$

$$F = F^H \cdot \gamma_f = 10 \text{ кН} \cdot 1,1 = 11 \text{ кН}.$$

Реакции опор определять не обязательно, так как при определении усилий Q_y и M_x будем рассматривать правую отсечённую часть балки.

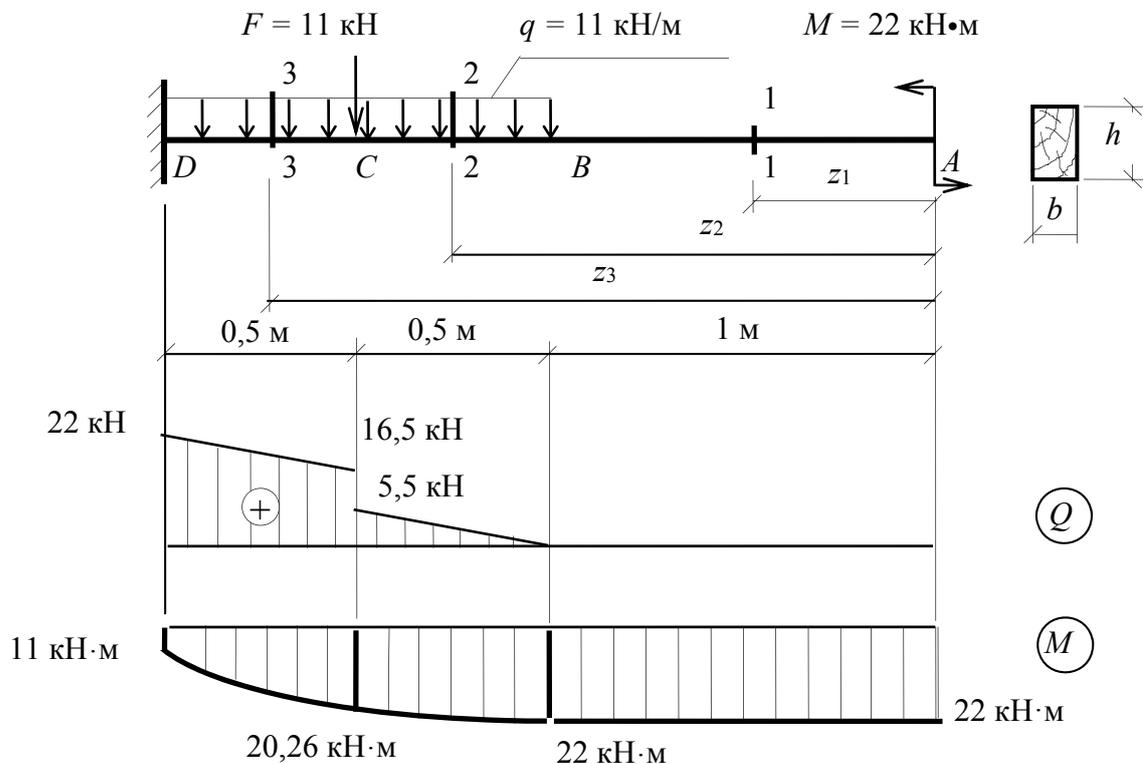


Рис. 4.5

2. Определение усилий Q_y и M_x и построение эюр этих усилий.

1-й участок AB . Рассекаем балку в произвольном месте этого участка сечением 1-1 на расстоянии z_1 от правого конца балки. Рассматриваем равновесие правой отсеченной части (рис. 4.6).

Действие левой отброшенной части на правую заменяем внутренними усилиями $Q_1(z)$ и $M_1(z)$. Находим выражения для Q_y и M_x в общем виде:

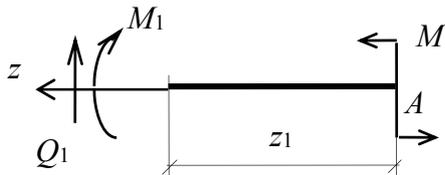


Рис. 4.6

$$Q_1 = 0;$$

$$M_1 = M = 22 \text{ кН} \cdot \text{м},$$

$$0 \leq z_1 \leq 1.$$

Поперечная сила Q_y и изгибающий момент M_x на участке AB постоянны.

2-й участок BC . Рассекаем балку в произвольном месте этого участка сечением 2-2 на расстоянии z_2 от правого конца балки. Рассматриваем правую отсеченную часть (рис. 4.7).

Действие левой отброшенной части заменяем внутренними усилиями $Q_2(z)$ и $M_2(z)$. Находим выражения Q_y и M_x в общем виде:

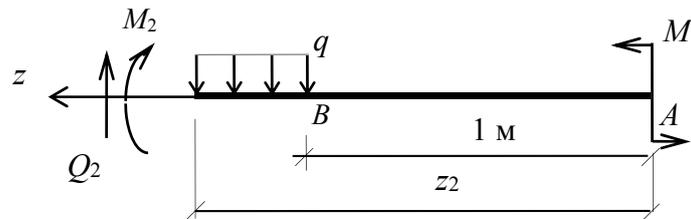


Рис. 4.7

$$Q_2 = q(z_2 - 1) = 11(z_2 - 1);$$

$$M_2 = M_1 - q(z_2 - 1) \cdot \frac{(z_2 - 1)}{2} = 22 - 11 \frac{(z_2 - 1)^2}{2} =$$

$$= 22 - 5,5 \cdot (z_2 - 1)^2 \text{ кН} \cdot \text{м},$$

$$1 \leq z_2 \leq 1,5.$$

На участке BC поперечная сила изменяется по его длине по линейному закону, а изгибающий момент — по закону квадратной параболы.

Найдём ординаты эюры Q_y на концах участка BC :

при $z_2 = 1 \text{ м}$, $Q_2 = 11 \cdot 0 = 0 \text{ кН}$;

при $z_2 = 1,5 \text{ м}$, $Q_2 = 11 \cdot 0,5 = 5,5 \text{ кН}$.

Поперечная сила Q_y не меняет знака на этом участке.

Вычислим ординаты эюры M_x на концах участка BC и в его середине:

при $z_2 = 1 \text{ м}$, $M_2 = 22 \text{ кН} \cdot \text{м}$;

при $z_2 = 1,5$ м, $M_2 = 22 - 5,5 \cdot (1,5 - 1)^2 = 22 - 5,5 \cdot 0,5^2 = 20,625$ кН · м;

3-й участок CD. Рассекаем балку в произвольном месте этого участка сечением 3-3 на расстоянии z_3 от правого конца балки. Рассматриваем правую отсеченную часть (рис. 4.8). Действие левой отброшенной части на правую заменяем внутренними усилиями $Q_3(z)$ и $M_3(z)$. Находим выражения Q_y и M_x в общем виде:

$$Q_3 = q(z_3 - 1) + F = 11(z_3 - 1) + 11 = 11z_3;$$

$$\begin{aligned} M_3 &= M - F(z_3 - 1,5) - q(z_3 - 1) \frac{(z_3 - 1)}{2} = 22 - 11(z_3 - 1,5) - 11 \cdot \frac{(z_3 - 1)^2}{2} = \\ &= 38,5 - 11(z_3 - 1,5) - 5,5 \cdot (z_3 - 1)^2; \\ &1,5 \leq z_3 \leq 2. \end{aligned}$$

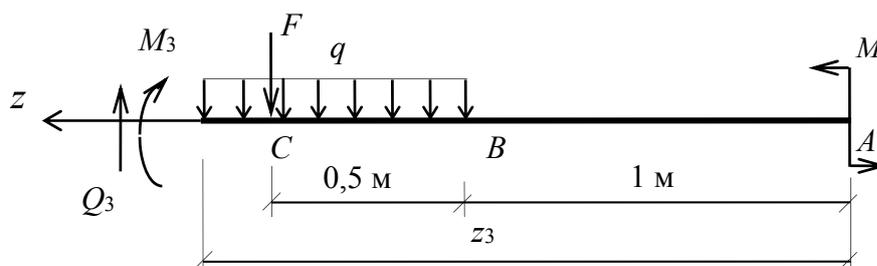


Рис. 4.8

Поперечная сила на этом участке изменяется по линейному закону, изгибающий момент — по закону квадратной параболы.

Определяем ординаты эпюры поперечной силы Q_y на границах участка CD:

при $z_3 = 1,5$ м, $Q_3 = 11 \cdot 1,5 = 16,5$ кН;

при $z_2 = 2$ м, $Q_3 = 11 \cdot 2 = 22$ кН.

Поперечная сила Q_y на этом участке знака не меняет.

Для построения эпюры M_x определим ординаты моментов на границах участка и в его середине:

при $z_3 = 1,5$ м, $M_3 = 38,5 - 11 \cdot 0 - 5,5 \cdot (1,5 - 1)^2 = 20,625$ кН · м;

при $z_3 = 2$ м, $M_3 = 38,5 - 11 \cdot 0,5 - 5,5 \cdot (2 - 1)^2 = 11$ кН · м;

По найденным ординатам в выбранном масштабе строим эпюры Q_y и M_x (рис. 4.5).

3. *Подбор сечения балки.* По эпюрам Q_y и M_x находим максимальные по абсолютной величине значения внутренних усилий:

$$|M_{\max}| = 22 \text{ кН} \cdot \text{м}; |Q_{\max}| = 22 \text{ кН}.$$

Из условия прочности по нормальным напряжениям определяем требуемый момент сопротивления сечения балки:

$$W_x^{mp} \geq \frac{|M_{\max}|}{\gamma_c R} = \frac{22 \cdot 10^3}{0,9 \cdot 8 \cdot 10^6} = 3,056 \cdot 10^{-3} \text{ м}^3 = 3056 \text{ см}^3.$$

Момент сопротивления прямоугольного сечения

$$W_x = \frac{bh^2}{6}.$$

Поскольку $h/b = 1,5$, то $W_x = \frac{(1,5 \cdot b)^2 b}{6} = \frac{2,25 \cdot b^3}{6}.$

Сравнивая W_x и W_x^{Tp} , получим $\frac{2,25b^3}{6} \geq W_x^{Tp}$, откуда определим ширину

сечения:

$$b \geq \sqrt[3]{\frac{W_x^{Tp} \cdot 6}{2,25}} = \sqrt[3]{\frac{3056 \cdot 6}{2,25}} = 20,12 \text{ см}.$$

Округляя размер b до целого числа в большую сторону, принимаем ширину $b = 21 \text{ см}$, а высоту $h = 1,5 \cdot 21 = 31,5 \text{ см} = 32 \text{ см}$.

Найдём для подобранного сечения геометрические характеристики:

$$W_x = \frac{bh^2}{6} = \frac{21 \cdot 32^2}{6} = 3584 \text{ см}^3 = 3584 \cdot 10^6 \text{ м}^3;$$

$$J_x = \frac{bh^3}{12} = \frac{21 \cdot 32^3}{12} = 57344 \text{ см}^4 = 57344 \cdot 10^8 \text{ м}^3;$$

$$S_x^{n.c.} = A_{п.с.} \cdot \frac{h}{4} = \frac{bh^2}{8} = \frac{21 \cdot 32^2}{8} = 2688 \text{ см}^3 = 2688 \cdot 10^6 \text{ м}^3;$$

$$b_y = b = 21 \text{ см} = 21 \cdot 10^{-2} \text{ м}.$$

4. *Проверка прочности сечения.* Проверяем условия прочности по нормальным и касательным напряжениям:

$$\sigma_{\max} = \frac{|M_{\max}|}{W_x} = \frac{22 \cdot 10^3}{3584 \cdot 10^{-6}} = 6,14 \cdot 10 \text{ Па} < R\gamma_c = 8 \cdot 0,9 = 7,2 \text{ МПа}.$$

$$\tau_{\max} = \frac{Q_{\max} S_x^{n.c.}}{J_x \cdot b_y} = \frac{22 \cdot 10^3 \cdot 2688 \cdot 10^{-6}}{57344 \cdot 10^{-8} \cdot 21 \cdot 10^{-2}} =$$

$$= 0,49 \cdot 10 \text{ Па} = 0,49 \text{ МПа} < \gamma_c R_S = 0,9 \cdot 2,4 = 2,16 \text{ МПа}.$$

Условия прочности удовлетворяются. Сечение балки подобрано, верно.

Если условия прочности не удовлетворяются, то следует увеличить размеры поперечного сечения балки.

Тема № 5 РАСЧЕТ БАЛОК НА ЖЁСТКОСТЬ ПРИ ПЛОСКОМ ПОПЕРЕЧНОМ ИЗГИБЕ

Примеры задач

Пример 5.1. Методом непосредственного интегрирования определить прогиб и угол поворота двутаврового поперечного сечения балки из дерева с модулем упругости $E = 10$ ГПа в точке A (рис. 5.1 а). Размеры поперечного сечения даны в сантиметрах (рис. 5.1 б).

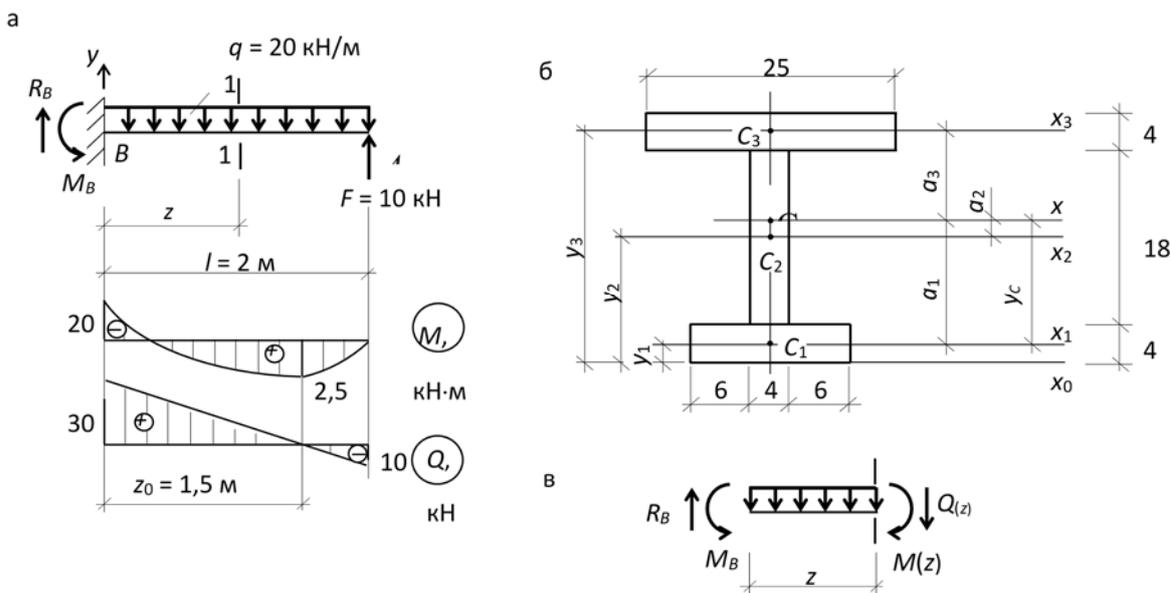


Рис. 5.1

Решение

1. Определяем опорные реакции в заделке:

$$\sum M_B = 0, \quad M_B - q \cdot 2 \cdot 1 + 10 \cdot 2 = 0 \quad M_B = 20 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

$$\sum F_y = 0, \quad R_B + F - q \cdot 2 = 0, \quad R_B = 30 \text{ кН}.$$

2. Построение эюр внутренних усилий.

Проводим сечение 1-1 на некотором расстоянии z от заделки и рассматриваем равновесие левой отсечённой части. Выбираем направление внутренних сил $M(z)$ и $Q(z)$ (рис. 5.1 в). Составляем уравнения равновесия моментов и поперечных сил относительно рассматриваемого сечения:

$$\sum M = 0, \quad M(z) - M_B - q \frac{z^2}{2} + R_B \cdot z = 0,$$

$$M(z) = 20 + 10z^2 - 30z.$$

$$\sum F_y = 0, \quad R_B - qz + Q(z) = 0,$$

$$Q(z) = -qz + R_B = -20z + 30.$$

3. Определение прогиба и угла поворота.

Составляем уравнения для углов поворота и погибов:

$$EI\Theta(z) = \int (20 + 10z^2 - 30z) dz = 20z + \frac{10}{3}z^3 - 15z^2 + C,$$

$$EI\upsilon(z) = \int \left(20z + \frac{10}{3}z^3 - 15z^2 \right) dz + \int C dz = 10z^2 + \frac{10}{12}z^4 - 5z^3 + Cz + D.$$

Для определения постоянных интегрирования C и D используем граничные условия, которые определяются способом закрепления балки (рассматриваются сечения, где величины $\Theta(z)$ и $\upsilon(z)$ известны). В заделке, при $z = 0$, углы поворота и прогибы равны нулю, то есть $\upsilon(0) = 0$ и $\Theta(0) = 0$.

Таким образом, получаем:

$$0 = 20 \cdot 0 + \frac{10}{3} \cdot 0 - 15 \cdot 0 + C \quad C = 0;$$

$$0 = 10 \cdot 0 + \frac{10}{12} \cdot 0 - 5 \cdot 0 + 0 + D \quad D = 0.$$

С учётом этого окончательные выражения для углов поворота и прогибов получают вид:

$$EI\Theta(z) = \frac{10}{3}z^3 - 15z^2 + 20z,$$

$$EI\upsilon(z) = \frac{10}{12}z^4 - 5z^3 + 10z^2.$$

Прогиб и угол поворота сечения A находится из полученных соотношений при $z = 2$ м:

$$EI\Theta_{z=2} = \frac{10}{3} \cdot 2^3 - 15 \cdot 2^2 + 20 \cdot 2 = 6,67 \text{ Н} \cdot \text{м}^2,$$

$$EI\upsilon_{z=2} = \frac{10}{12} \cdot 2^4 - 5 \cdot 2^3 + 10 \cdot 2 = 60 \text{ Н} \cdot \text{м}^3.$$

4. Определение главного центрального момента инерции.

Координаты центра тяжести поперечного сечения (рис. 5.1, б), заданного в виде неравнополочного двутавра с вертикальной осью симметрии, относительно оси x_0 и y_0 равны:

$$x_c = 0 \text{ см},$$

$$y_c = \frac{\sum S_{x_0}}{\sum A} = \frac{S_{x_0}^{(1)} + S_{x_0}^{(2)} + S_{x_0}^{(3)}}{A^{(1)} + A^{(2)} + A^{(3)}} = \frac{4 \cdot 16 \cdot 2 + 4 \cdot 18 \cdot 13 + 4 \cdot 25 \cdot 24}{4 \cdot 16 + 4 \cdot 18 + 4 \cdot 25} = 14,68 \text{ см}.$$

Расстояния (координаты) между главной центральной осью x и собственными центральными осями x_1, x_2, x_3 каждой из трёх фигур равны:

$$a_1 = y_1 - y_c = 2 - 14,68 = -12,68 \text{ см};$$

$$a_2 = y_2 - y_c = 13 - 14,68 = -1,68 \text{ см};$$

$$a_2 = y_3 - y_c = 24 - 14,68 = 9,32 \text{ см}.$$

Используя формулы для параллельного переноса осей, вычисляем главный центральный момент инерции сечения относительно оси x .

$$\begin{aligned} I_x &= I_x^{(1)} + I_x^{(2)} + I_x^{(3)} = I_{x_1}^{(1)} + A^{(1)} \cdot a_1^2 + I_{x_2}^{(2)} + A^{(2)} \cdot a_2^2 + I_{x_3}^{(3)} + A^{(3)} \cdot a_3^2 = \\ &= \frac{16 \cdot 4^3}{12} + 16 \cdot 4(-12,68)^2 + \frac{4 \cdot 18^3}{12} + 4 \cdot 18(-1,68)^2 + \frac{25 \cdot 4^3}{12} + \\ &\quad + 25 \cdot 4 \cdot 9,32^2 = 23171,107 \text{ см}^4. \end{aligned}$$

5. Вычисление абсолютного прогиба и угла поворота сечения A . Зная величину главного центрального момента инерции сечения, подсчитаем абсолютную величину угла поворота и прогиба сечения в точке A :

$$\begin{aligned} \Theta_B &= \frac{6,67}{EI} = \frac{6,67 \cdot 10^3 (\text{Н} \cdot \text{м}^2)}{10 \cdot 10^9 (\text{Н}/\text{м}^2) \cdot 23171,107 \cdot 10^{-8} (\text{м}^4)} = \\ &= 2,88 \cdot 10^{-3} \text{ рад} \cdot 57,3^\circ = 0,165 \text{ град}; \end{aligned}$$

$$\upsilon_B = \frac{60}{EI} = \frac{60 \cdot 10^3 \text{ Н} \cdot \text{м}^3}{10 \cdot 10^9 (\text{Н}/\text{м}^2) \cdot 2317,107 \cdot 10^{-8}} = 0,026 \text{ м} = 2,6 \text{ см}.$$

Положительное значение прогиба и угла поворота свидетельствует о том, что сечение балки перемещается вверх и поворачивается против часовой стрелки.

Пример 5.2. Для стальной двутавровой балки, изображенной на рис. 5.2 требуется:

1. Построить эпюры внутренних усилий;
2. Подобрать поперечное сечение при $R = 210 \text{ МПа}$ и $\gamma_c = 0,9$;
3. Методом начальных параметров построить эпюру прогибов балки, вычислив три её ординаты: одну в пролете и две на консоли;
4. Проверить условие жёсткости в пролете и на консоли при

$$E = 200 \text{ ГПа} \text{ и } \upsilon_{adm} = \frac{l}{300} \text{ (} l \text{ – расстояние между опорами)} \text{ и } \upsilon_{adm} = \frac{l_k}{100} \text{ (} l_k \text{ – длина консоли)}.$$

Решение

1. *Построение эпюр Q и M .* Находим опорные реакции:

$$\Sigma M_A = 0; R_B \cdot 6 - F \cdot 8 - q \cdot 3 \cdot 4,5 = 0; R_B = 61 \text{ кН};$$

$$\Sigma M_B = 0; -R_A \cdot 6 + q \cdot 3 \cdot 1,5 - F \cdot 2 = 0; R_A = 11 \text{ кН}.$$

Проверяем опорные реакции

$$\Sigma F_y = 0; R_A + R_B - q \cdot 3 - F = 11 + 61 + 20 \cdot 3 - 12 = 0.$$

Реакции найдены, верно.

(Эпюры внутренних сил строим по известным правилам, изложенным ранее в задаче расчёта балки на прочность при изгибе).

2. Подбор поперечного сечения.

Его находим из условия прочности по нормальным напряжениям

$$\sigma_{\max} = \frac{|M_{\max}|}{W_x} \leq R\gamma_c.$$

Из условия прочности определяем требуемый момент сопротивления:

$$W_x^{\text{тр}} \geq \frac{M_{\max}}{R\gamma_c} = \frac{36,025 \cdot 10^3 (\text{Н} \cdot \text{м})}{210 \cdot 10^6 (\text{Н}/\text{м}^2) \cdot 0,9} = 0,191 \cdot 10^3 \text{ м}^3 = 191 \text{ см}^3.$$

По таблице сортамента принимаем двутавр № 22, для которого

$$W_x = 232 \text{ см}^3, \quad I_x = 2550 \text{ см}^4.$$

Для определения прогибов используем универсальное уравнение изогнутой оси балки. Выбираем начало координат на левом конце балки в точке A и проводим оси y и z (рис. 5.3).

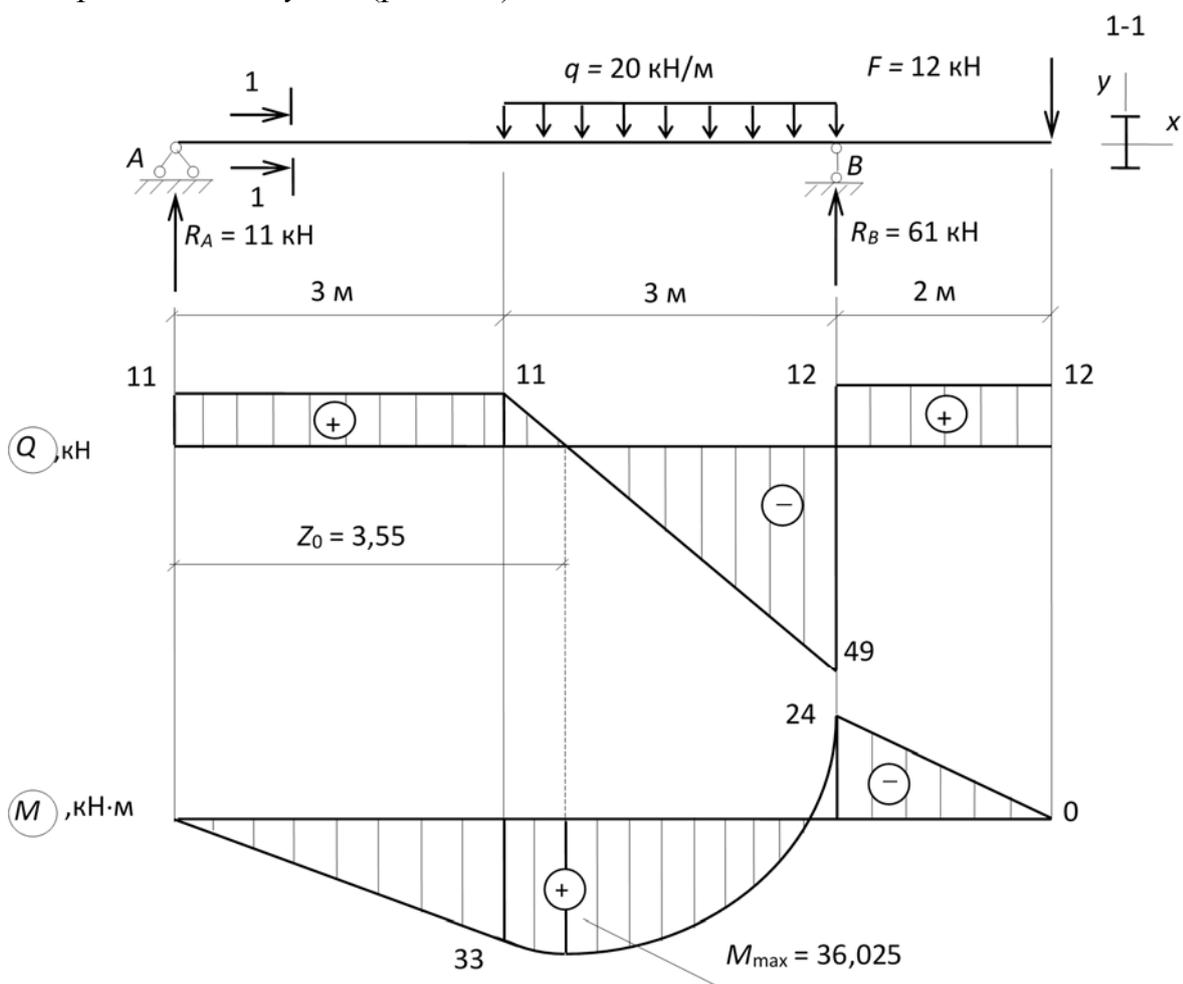


Рис. 5.2

По условию нагружения делим балку на три участка и проводим три сечения. Равномерно распределенную нагрузку продолжаем до конца балки, имея в виду начало балки в начале координат. На догружаемой части прикладываем такую же нагрузку, но в обратном направлении (штриховая линия на рис. 5.3). На каждом последующем участке входят нагрузки, расположенные левее рассматриваемого сечения.

Если провести сечение на I участке на расстоянии z_1 от начала координат, то на этом участке в уравнении изогнутой оси к слагаемым v_0 и $\Theta_0 \cdot z$ будет добавляться прогиб от реакций R_A ; на II участке – прогиб от нагрузки q ; на III участке – от реакции R_B и нагрузки q , направленной снизу вверх. Каждому типу нагрузки соответствует определенный тип слагаемого в уравнении изогнутой оси: сосредоточенной силе F_j соответствует слагаемое $F_j(z - B_j)^3 / 6EJ$; равномерно распределенной нагрузке – слагаемое $q_k(z - C_k)^4 / 24EJ$; сосредоточенному моменту $M_i(z - A_i)^2 / 2EJ$. Согласно правилу знаков, если сила и распределенная нагрузка направлены снизу вверх, то соответствующее слагаемое положительно, в противном случае – отрицательно. Для рассматриваемой балки универсальное уравнение изогнутой оси будет иметь вид:

$$v(z) = v_0 + \Theta_0 z + \frac{R_A(z-0)^3}{6EJ} \Big|_{\leftarrow} - \frac{q(z-3)^4}{24EJ} \Big|_{\leftarrow} + \frac{R_B(z-6)^3}{6EJ} + \frac{q(z-6)^4}{24EJ} \Big|_{\leftarrow}.$$

$$0 \leq z_1 \leq 3 \text{ м} \quad 3 \text{ м} \leq z_2 \leq 6 \text{ м} \quad 6 \text{ м} \leq z_3 \leq 8 \text{ м}$$

Ломаные стрелки показывают, какой частью уравнения следует пользоваться при вычислении прогиба на том или ином участке. Начальные параметры v_0 и Θ_0 определяем из граничных условий, которые определяются способом закрепления балки:

$$\text{при } z = 0 \quad v(0) = 0,$$

$$\text{при } z = 6 \text{ м} \quad v(6) = 0.$$

Подставляем первое граничное условие в уравнение для I участка:

$$0 = v_0 + \Theta_0 \cdot 0 + R_A \frac{(0-0)^3}{6EI}.$$

Отметим, что слагаемые, имеющие отрицательное выражение в скобках, не учитываем. Следовательно $v_0 = 0$.

Второе граничное условие подставляем в уравнение для II участка

$$0 = 0 + \Theta_0 \cdot 6 + \frac{R_A \cdot 6^3}{6EJ} - \frac{q(6-3)^4}{24EJ}.$$

Решаем это уравнение относительно Θ_0 :

$$\Theta_0 = \frac{1}{6EJ} \left[-R_A \frac{6^3}{6} + q \frac{(6-3)^4}{24} \right] = \frac{1}{6EJ} \left[-11 \frac{6^3}{6} + 20 \frac{3^4}{24} \right] = -\frac{54,75}{EJ} \text{ кН} \cdot \text{м}^3.$$

После подстановки найденных значений начальных параметров v_0 и Θ_0 получим окончательное уравнение изогнутой оси балки в виде

$$v(z) = -\frac{54,75}{EJ} \cdot z + 11 \frac{z^3}{6EJ} \Big|_{0 \leq z_1 \leq 3 \text{ м}}^{\text{I}} - \frac{20(z-3)^4}{24EJ} \Big|_{3 \text{ м} \leq z_2 \leq 6 \text{ м}}^{\text{II}} + \frac{61(z-6)^3}{6EJ} + \frac{20(z-6)^4}{24EJ} \Big|_{6 \text{ м} \leq z_2 \leq 8 \text{ м}}^{\text{III}}$$

Для построения эпюры прогибов вычислим их значение в трёх точках пролета при $z = 1,5 \text{ м}$, $z = 3 \text{ м}$, $z = 4,5 \text{ м}$ и в двух точках консоли при $z = 7 \text{ м}$, $z = 8 \text{ м}$.

Находим значение жесткости EJ_x :

$$EJ_x = 200 \cdot 10^9 \frac{\text{Н}}{\text{м}^2} \cdot 2550 \cdot 10^8 \text{ м}^4 = 5100000 = 5100 \cdot 10^3 \text{ Н} \cdot \text{м}^2.$$

При $z = 1,5 \text{ м}$ в пределах I участка

$$v(1,5) = -\frac{54,75 \cdot 10^3}{5100 \cdot 10^3} \cdot 1,5 + \frac{11 \cdot 10^3 \cdot 1,5^3}{6 \cdot 5100 \cdot 10^3} = -1,489 \cdot 10^{-2} \text{ м} = -1,489 \text{ см}.$$

При $z = 3 \text{ м}$ в конце I участка

$$v(3) = -\frac{54,75 \cdot 10^3}{5100 \cdot 10^3} \cdot 3 + \frac{11 \cdot 10^3 \cdot 3^3}{6 \cdot 5100 \cdot 10^3} = -2,25 \cdot 10^{-2} \text{ м} = -2,25 \text{ см}.$$

При $z = 4,5 \text{ м}$ в пределах II участка

$$v(4,5) = -\frac{54,75 \cdot 10^3}{5100 \cdot 10^3} \cdot 4,5 + \frac{11 \cdot 10^3 \cdot 4,5^3}{6 \cdot 5100 \cdot 10^3} - \frac{20 \cdot 10^3 (4,5-3)^4}{24 \cdot 5100 \cdot 10^3} = -1,638 \cdot 10^{-2} \text{ м} = -1,638 \text{ см}.$$

При $z = 7 \text{ м}$ в пределах III участка

$$v(7) = -\frac{54,75 \cdot 10^3}{5100 \cdot 10^3} \cdot 7 + \frac{11 \cdot 10^3 \cdot 7^3}{6 \cdot 5100 \cdot 10^3} - \frac{20 \cdot 10^3 (7-3)^4}{24 \cdot 5100 \cdot 10^3} + \frac{61 \cdot 10^3 (7-6)^3}{6 \cdot 5100 \cdot 10^3} + \frac{20 \cdot 10^3 (7-6)^4}{24 \cdot 5100 \cdot 10^3} = 0,847 \cdot 10^{-2} \text{ м} = -0,847 \text{ см}.$$

При $z = 8$ м в пределах III участка

$$v(8) = -\frac{54,75 \cdot 10^3}{5100 \cdot 10^3} \cdot 8 + \frac{11 \cdot 10^3 \cdot 8^3}{6 \cdot 5100 \cdot 10^3} - \frac{20 \cdot 10^3 (8-3)^4}{24 \cdot 5100 \cdot 10^3} + \frac{61 \cdot 10^3 (8-6)^3}{6 \cdot 5100 \cdot 10^3} + \frac{20 \cdot 10^3 (8-6)^4}{24 \cdot 5100 \cdot 10^3} = 1,461 \cdot 10^{-2} \text{ м} = -1,461 \text{ см.}$$

По результатам вычислений строим эпюру прогибов в выбранном масштабе (рис. 5.3).

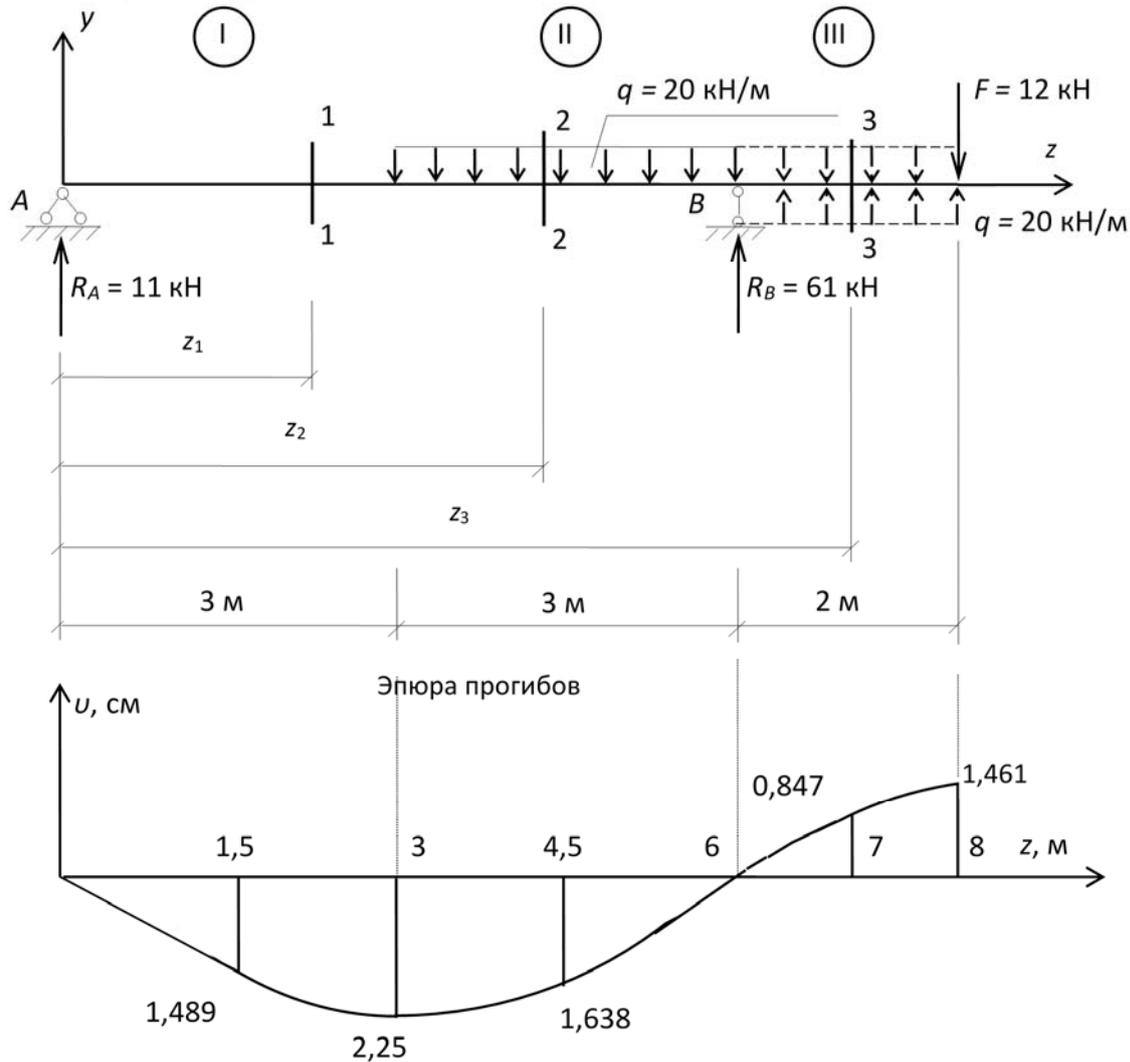


Рис. 5.3

4. Проверка условия жёсткости балки.

Сначала проверим условие жесткости в пролете балки.

При $z = 3$ м $v_{\max} = 2,25$ см, $v_{adm} = \frac{1}{300} l = \frac{600 \text{ см}}{300} = 2$ см.

$$v_{\max} = 2,25 \text{ см} > v_{ADM} = 2 \text{ см.}$$

Условие жёсткости в пролёте не выполняется. Необходимо подобрать новое сечение балки.

При $z = 3$ м прогиб балки равен

$$v_{adm} = -\frac{54,75 \cdot 10^3}{EJ_x} \cdot 3 + \frac{11 \cdot 10^3 \cdot 3^3}{EJ_x}.$$

Определяем требуемый момент инерции сечения

$$J_x^{тр} \geq \left| -\frac{114,75 \cdot 10^3}{E v_{adm}} \right| = \left| \frac{-114,75 \cdot 10^3}{200 \cdot 10^9 \cdot 2 \cdot 10^{-2}} \right| = 2868,75 \cdot 10^{-8} \text{ м}^4 = 2868,75 \text{ см}^4.$$

По таблице сортамента (ГОСТ 8239-89) принимаем двутавр № 24, $J_x = 3460 \text{ см}^4 > J_x^{тр} = 2868,75 \text{ см}^4$.

Проверим жёсткость на конце консоли для двутавра № 22.

При $z = 8$ м

$$v_{консоли} = 1,461 \text{ см} < v_{adm} = \frac{1}{100} l_1 = \frac{200 \text{ см}}{100} = 2 \text{ см},$$

т.е. условие жёсткости удовлетворяется. Чтобы балка удовлетворяла условиям прочности и жёсткости в любом месте окончательно принимаем двутавр № 24.

Тема №6 ВНЕЦЕНТРЕННОЕ СЖАТИЕ (РАСТЯЖЕНИЕ) БРУСА БОЛЬШОЙ ЖЁСТКОСТИ

Примеры задач

Пример 6.1. Построить ядро сечения для короткого составного стержня из двух двутавров № 33 (рис. 6.1).

Решение

2. *Определение положения центра тяжести сечения.* Учитывая, что сечение имеет вертикальную ось симметрии, принимаем в качестве вспомогательных осей оси x_2, y . Положение центра тяжести, при этом, будет определяться координатами:

$$x_c = 0,$$

$$y_c = \frac{\sum S_{x_2}^i}{\sum A_i} = \frac{S_{x_2}^{(1)} + S_{x_2}^{(2)}}{A_1 + A_2} = \frac{A_1 \cdot 16,85 + A_2 \cdot 0}{A_1 + A_2} = \frac{53,8 \cdot 16,85 + 0}{53,8 + 53,8} = 8,425 \text{ см}$$

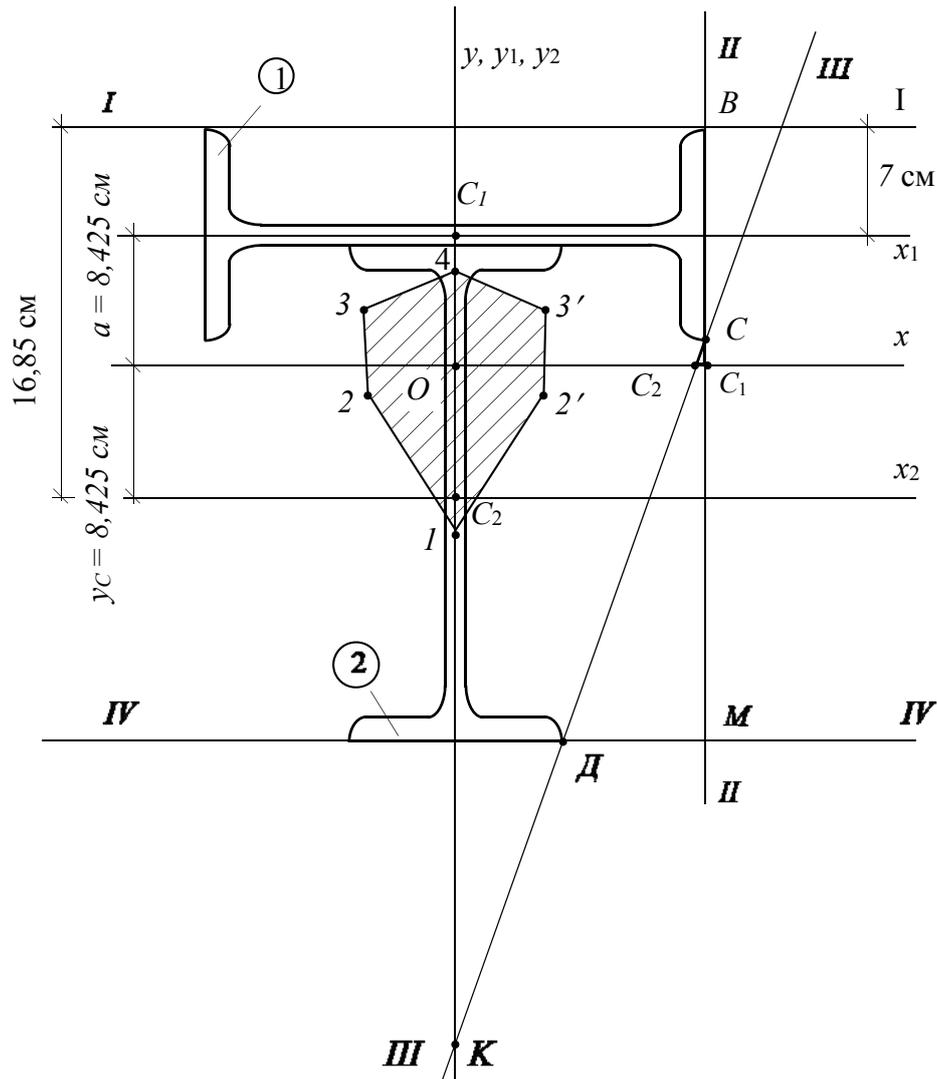


Рис. 6.1

3. Вычисление геометрических характеристик сечения. Осевые моменты инерции относительно главных центральных осей x, y будут равны:

$$I_x = I_x^{(1)} + I_x^{(2)} = (I_{x_1}^{(1)} + a^2 A_1) + (I_{x_2}^{(2)} + y_C^2 A_2) = (419 + 8,425^2 \cdot 53,8) + (9840 + 8,425^2 \cdot 53,8) = 17896,516 \text{ см}^4$$

$$I_y = I_y^{(1)} + I_y^{(2)} = I_{y_2}^{(1)} + I_{y_2}^{(2)} = 9840 + 419 = 10259 \text{ см}^4$$

Найдём квадраты радиусов инерции сечения:

$$i_x^2 = \frac{I_x}{A} = \frac{17896,516}{107,6} = 166,32 \text{ см}^2$$

$$i_y^2 = \frac{I_y}{A} = \frac{10259}{107,6} = 95,34 \text{ см}^2$$

3. *Построение ядра сечения.* Для построения ядра сечения задаёмся положением нейтральных линий, касательных к сечению, и определяем для каждой из них координаты точек приложения силы.

Пусть нейтральная линия заняла положение I-I, коснувшись сечения. Она перпендикулярна к оси y и параллельна к оси x . Следовательно, $a_x = \infty$ и из геометрических построений $a_y = +(8,425 + 7) = +15,425$ см.

Итак, чтобы нейтральная линия заняла положение I-I необходимо силу приложить в точке 1 с координатами $(0; -10,78)$ (рис. 6.1).

Поворачиваем линию из положения I-I вокруг неподвижной точки B в положение II-II. Точка приложения силы будет перемещаться из точки 1 в точку 2 по прямой линии. Нейтральная линия II-II отсечёт на осях координат отрезки $a_x = +16,5$ см, $a_y = \infty$. Координаты точки 2 приложения силы будут равны

$$x_F = -\frac{95,34}{16,5} = -5,78 \text{ см}, \quad y_F = -\frac{166,32}{\infty} = 0.$$

Далее поворачиваем нейтральную линию вокруг неподвижной точки C в положение III-III, которая отсечёт на осях координат отрезки $a_x = OC_2$; $a_y = -OK$. Отрезок $OC_2 = OC_1 - C_2C_1$; $OC_1 = 16,5$ см. Отрезок C_2C_1 , найдём из подобия ΔCC_1C_2 и $\Delta CМД$:

$$C_1C_2 = \frac{CC_1 \cdot ДМ}{СМ} = \frac{1,425 \cdot 9,5}{26,35} = 0,51 \text{ см},$$

где $CC_1 = 1,425$ см, $СМ = 26,35$ см, $ДМ = 9,5$ см находятся из геометрических построений на рис. 6.1.

Таким образом

$$a_x = +(16,5 - 0,51) = 15,99 \text{ см}.$$

Из подобия $\Delta КОС_2$ и $\Delta СМД$:

$$OK = \frac{OC_2 \cdot СМ}{ДМ} = \frac{15,99 \cdot 26,35}{9,5} = 44,35 \text{ см}.$$

Следовательно, $a_y = -44,35$ см.

Определяем координаты точки 3 приложения силы:

$$x_F = -\frac{95,34}{15,99} = -5,96 \text{ см}; \quad y_F = -\frac{166,32}{(-44,35)} = 3,75 \text{ см}.$$

Точка приложения силы переместилась в положение 3 по прямой 2 – 3.

Поворачиваем нейтральную линию вокруг неподвижной точки D из положения III-III в положение IV-IV. При этом:

$$a_x = \infty; a_y = -26,35 \text{ см}.$$

Координаты точки 4 будут следующими:

$$x_F = -\frac{95,34}{\infty} = 0; y_F = -\frac{166,32}{(-26,35)} = 6,31 \text{ см}.$$

Точку 4 соединяем с точкой 3 прямой линией. Поскольку сечение симметрично относительно оси y , то точки 2' и 3' являются зеркальным отображением точек 2 и 3. Ломаная замкнутая линия 12343'2'1' ограничивает область вокруг центра тяжести сечения, которая называется ядром сечения.

Пример 6.2. Для бетонного стержня сложного поперечного сечения, находящегося в условиях внецентренного сжатия (рис. 6.2) найти величину сжимающей силы F , вычислить наибольшие сжимающие и растягивающие напряжения, построить эпюру нормальных напряжений. Исходные данные: $a = 0,5 \text{ м}$, $b = 0,6 \text{ м}$, $R_t = 1 \text{ МПа}$, $R_c = 10 \text{ МПа}$, $\gamma_c = 1$.

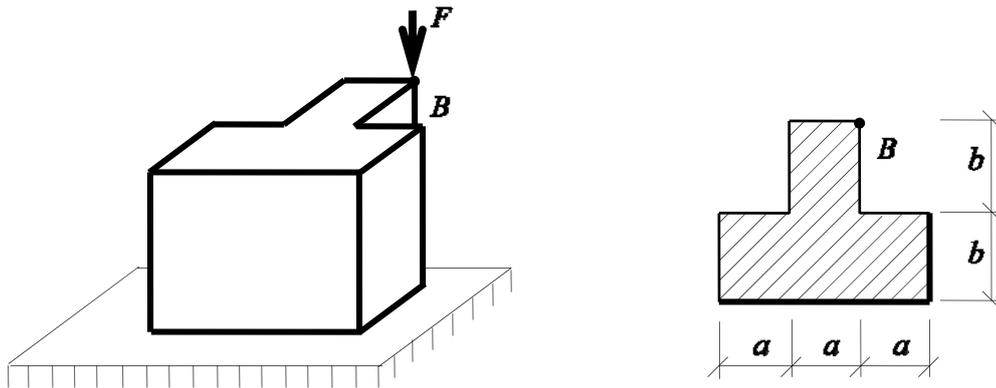


Рис. 6.2

Решение

1. *Определение положения центра тяжести сечения.* Поскольку сечение имеет вертикальную ось симметрии, то, принимая в качестве вспомогательных осей оси x_1, y_1 (рис. 6.3), определяем координаты центра тяжести сечения:

$$x_c = 0,$$

$$y_c = \frac{S_{x_1}^{(1)} + S_{x_1}^{(2)}}{A^{(1)} + A^{(2)}} = \frac{0 + 0,3 \cdot 0,6}{3 \cdot 0,5 \cdot 0,6 + 0,5 \cdot 0,6} = 0,15 \text{ м}.$$

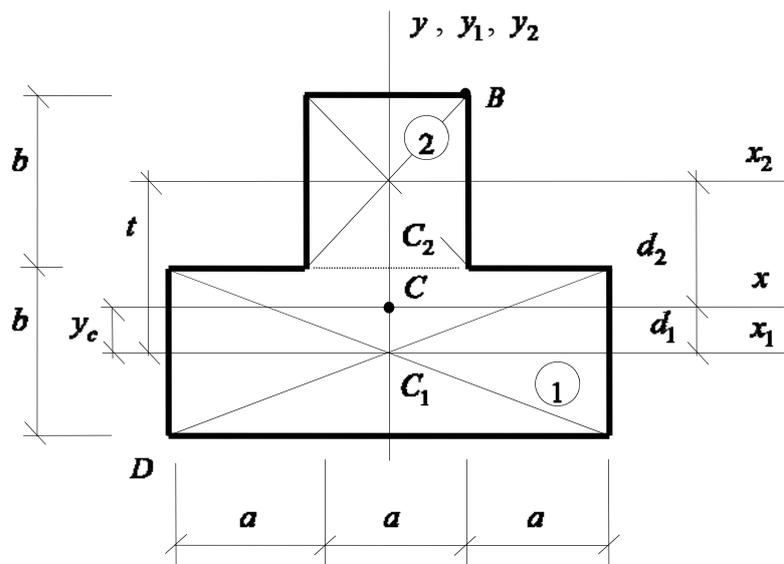


Рис. 6.3

2. *Определение геометрических характеристик сечения.* Главные центральные моменты инерции будут равны:

$$J_x = J_x^{(1)} + J_x^{(2)} = \left(J_{x_1}^{(1)} + A^{(1)} d_1^2 \right) + \left(J_{x_2}^{(2)} + A^{(2)} d_2^2 \right),$$

$$J_y = J_y^{(1)} + J_y^{(2)} = J_{y_1}^{(1)} + J_{y_2}^{(2)},$$

где

$$J_{x_1}^{(1)} = \frac{3ab^3}{12} = \frac{3 \cdot 0,5 \cdot 0,6^3}{12} = 0,027 \text{ м}^4;$$

$$J_{x_2}^{(2)} = \frac{ab^3}{12} = \frac{0,5 \cdot 0,6^3}{12} = 0,009 \text{ м}^4;$$

$$J_{y_1}^{(1)} = \frac{b(3a)^3}{12} = \frac{0,6 \cdot (3 \cdot 0,5)^3}{12} = 0,169 \text{ м}^4;$$

$$J_{y_2}^{(1)} = \frac{ba^3}{12} = \frac{0,6 \cdot 0,5^3}{12} = 0,00625 \text{ м}^4;$$

$$d_1 = y_c = 0,15 \text{ м}; \quad d_2 = t - y_c = 0,6 - 0,15 = 0,45 \text{ м};$$

$$I_x = \left(0,027 + 0,9 \cdot 0,15^2 \right) + \left(0,009 + 0,3 \cdot 0,45^2 \right) = 0,117 \text{ м}^4;$$

$$I_y = 0,169 + 0,00625 = 0,17525 \text{ м}^4 \approx 0,175 \text{ м}^4.$$

Вычисляем квадраты радиусов инерции:

$$i_x^2 = \frac{J_x}{A} = \frac{0,117}{1,2} = 0,0975 \text{ м}^2, \quad i_y^2 = \frac{J_y}{A} = \frac{0,175}{1,2} = 0,146 \text{ м}^2.$$

3. *Определение расчетного значения силы F .* Решение начнем с определения положения нейтральной линии, $H - H$.

Из рис. 6.3 находим координаты точки B приложения силы F в системе главных центральных осей x, y с учётом знаков:

$$x_F = \frac{a}{2} = 0,25 \text{ м}, \quad y_F = \left(\frac{b}{2} + b\right) - y_c = \left(\frac{0,6}{2} + 0,6\right) - 0,15 = 0,75 \text{ м}.$$

Находим отрезки, отсекаемые на осях x, y нейтральной линией:

$$a_x = -\frac{i_y^2}{x_F} = -\frac{0,146}{0,25} = -0,584 \text{ м}, \quad a_y = -\frac{i_x^2}{y_F} = -\frac{0,0975}{0,75} = -0,13 \text{ м}.$$

Проводим в сечении нейтральную линию $H - H$ (рис. 6.4). Проводя касательные к сечению, параллельные к нейтральной линии, находим наиболее удаленные, а значит, и наиболее напряжённые точки B и D . В точке B будут возникать наибольшие сжимающие, а в точке D – наибольшие растягивающие напряжения. Из геометрических построений на рис. 6.4 найдём координаты точек B и D с учётом знаков:

$$x_B = \frac{a}{2} = 0,25 \text{ м}, \quad y_B = y_F = \left(\frac{b}{2} + b\right) - y_c = 0,75 \text{ м},$$

$$x_D = -\left(\frac{a}{2} + a\right) = -\left(\frac{0,5}{2} + 0,5\right) = -0,75 \text{ м},$$

$$y_D = -\left(\frac{b}{2} + d_1\right) = -\left(\frac{0,6}{2} + 0,15\right) = -0,45 \text{ м}.$$

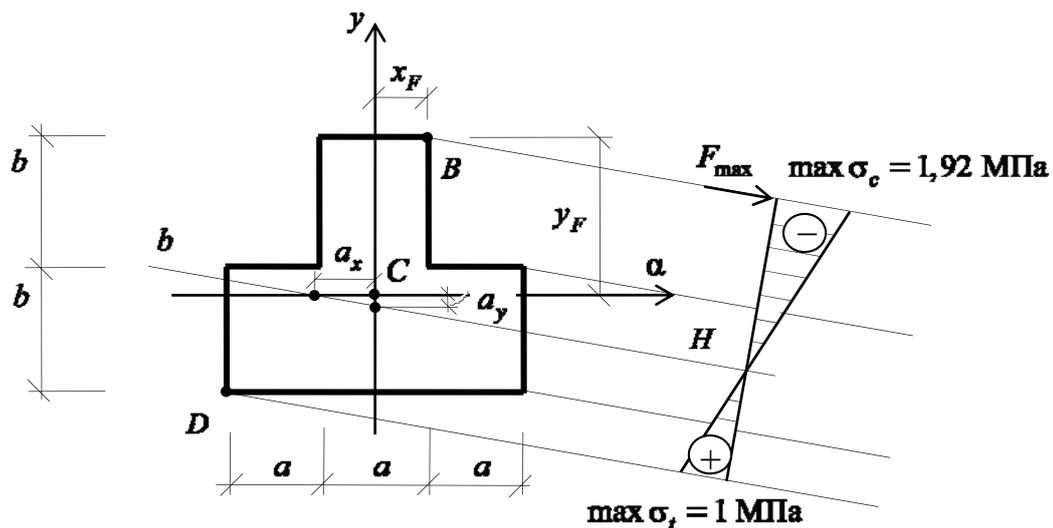


Рис. 6.4

Так как материал стержня неодинаково сопротивляется сжатию и растяжению, необходимо составить два условия прочности. Из этих условий определяем две расчетные силы F . Условие прочности для точки D в развёрнутом виде имеет вид:

$$\max \sigma_t = \sigma_D = -\frac{F}{A} \left(1 + \frac{y_F y_D}{i_x^2} + \frac{x_F x_D}{i_y^2} \right) \leq R_t.$$

Отсюда, принимая знак равенства, получим расчётную силу F :

$$F = \left| -\frac{R_t A}{\left(1 + \frac{y_F y_D}{i_x^2} + \frac{x_F x_D}{i_y^2} \right)} \right| = \left| -\frac{1 \cdot 10^6 \cdot 1,2}{\left[1 + \frac{0,75 \cdot (-0,45)}{0,0975} + \frac{0,25 \cdot (-0,75)}{0,146} \right]} \right| =$$

$$= 0,320 \cdot 10^6 \text{ Н} = 320 \text{ кН}.$$

Условие прочности для точки B в развёрнутом виде имеет вид:

$$\max \sigma_c = \sigma_B = -\frac{F}{A} \left(1 + \frac{y_F y_B}{i_x^2} + \frac{x_F x_B}{i_y^2} \right) \leq R_c.$$

Отсюда расчётная сила будет равна:

$$F = \left| -\frac{R_c A}{\left(1 + \frac{y_F y_B}{i_x^2} + \frac{x_F x_B}{i_y^2} \right)} \right| = \left| -\frac{10 \cdot 10^6 \cdot 1,2}{\left(1 + \frac{0,75 \cdot 0,75}{0,0975} + \frac{0,25 \cdot 0,25}{0,146} \right)} \right| =$$

$$= 1,668 \cdot 10^6 \text{ Н} = 1668 \text{ кН}.$$

Окончательно принимаем меньшую из двух сил: $F = 320 \text{ кН}$.

4. *Вычисление наибольших сжимающих и растягивающих напряжений.*

Для найденной расчётной силы наибольшие сжимающие и растягивающие напряжения будут равны:

$$\max \sigma_c = \sigma_B = -\frac{F}{A} \left(1 + \frac{y_F y_B}{i_x^2} + \frac{x_F x_B}{i_y^2} \right) = -\frac{320 \cdot 10^3}{1,2} \left(1 + \frac{0,75 \cdot 0,75}{0,0975} + \frac{0,25 \cdot 0,25}{0,146} \right) =$$

$$= -1,92 \cdot 10^6 \text{ Па} = -1,92 \text{ МПа},$$

$$\max \sigma_c = 1,92 \text{ МПа} < R_c = 10 \text{ МПа},$$

$$\max \sigma_t = \sigma_D = 1 \text{ МПа} = R_t = 1 \text{ МПа}.$$

Таким образом, условия прочности выполняются. Эпюра нормальных напряжений приведена на рис. 6.4.

Тема №7 КОСОЙ ИЗГИБ

Примеры задач

Пример 7.1. Стальная двутавровая балка закреплена шарнирно на концах как в вертикальной, так и в горизонтальной плоскости (одна из двух опор неподвижна). Расчётная схема балки и нагрузки показаны на рис. 7.1. Подобрать сечение балки, а также определить величину и направление полного прогиба в середине пролёта, если $R = 210$ МПа, $E = 200$ ГПа, $\gamma_c = 0,9$, $\gamma_f = 1$.

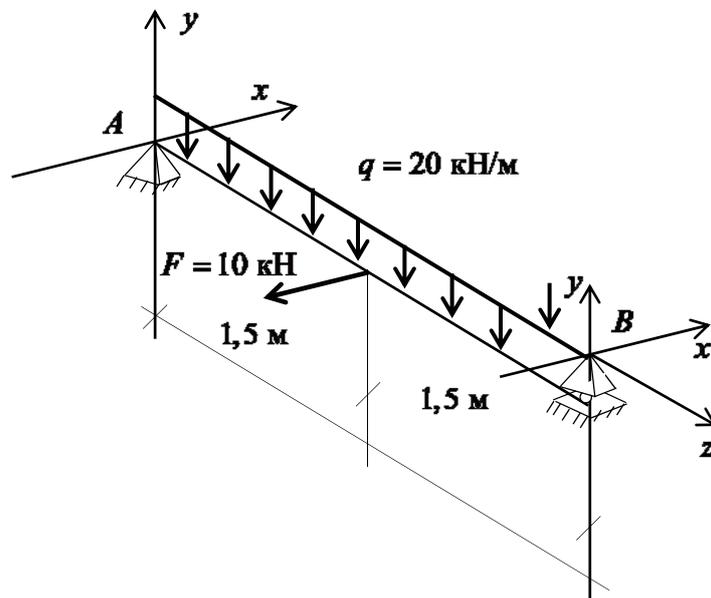


Рис. 7.1

Решение

1. *Построение эпюр изгибающих моментов.* Применяем принцип независимости действия сил: строим отдельно эпюры изгибающих моментов от вертикальной и от горизонтальной нагрузок (рис. 7.2). Эпюры строим со стороны растянутых волокон. Далее определяем опасное сечение, в котором комбинация изгибающих моментов будет неблагоприятной, то есть такое сечение, в котором результирующий момент будет наибольшим.

Опасным является сечение в середине пролёта: $|M_{x,\max}| = 22,5$ кН·м,
 $|M_{y,\max}| = 3,75$ кН·м.

2. *Подбор сечения балки.* По действующему ГОСТу на прокатные двутавры соотношение $\frac{W_x}{W_y}$ колеблется в пределах (6÷14).

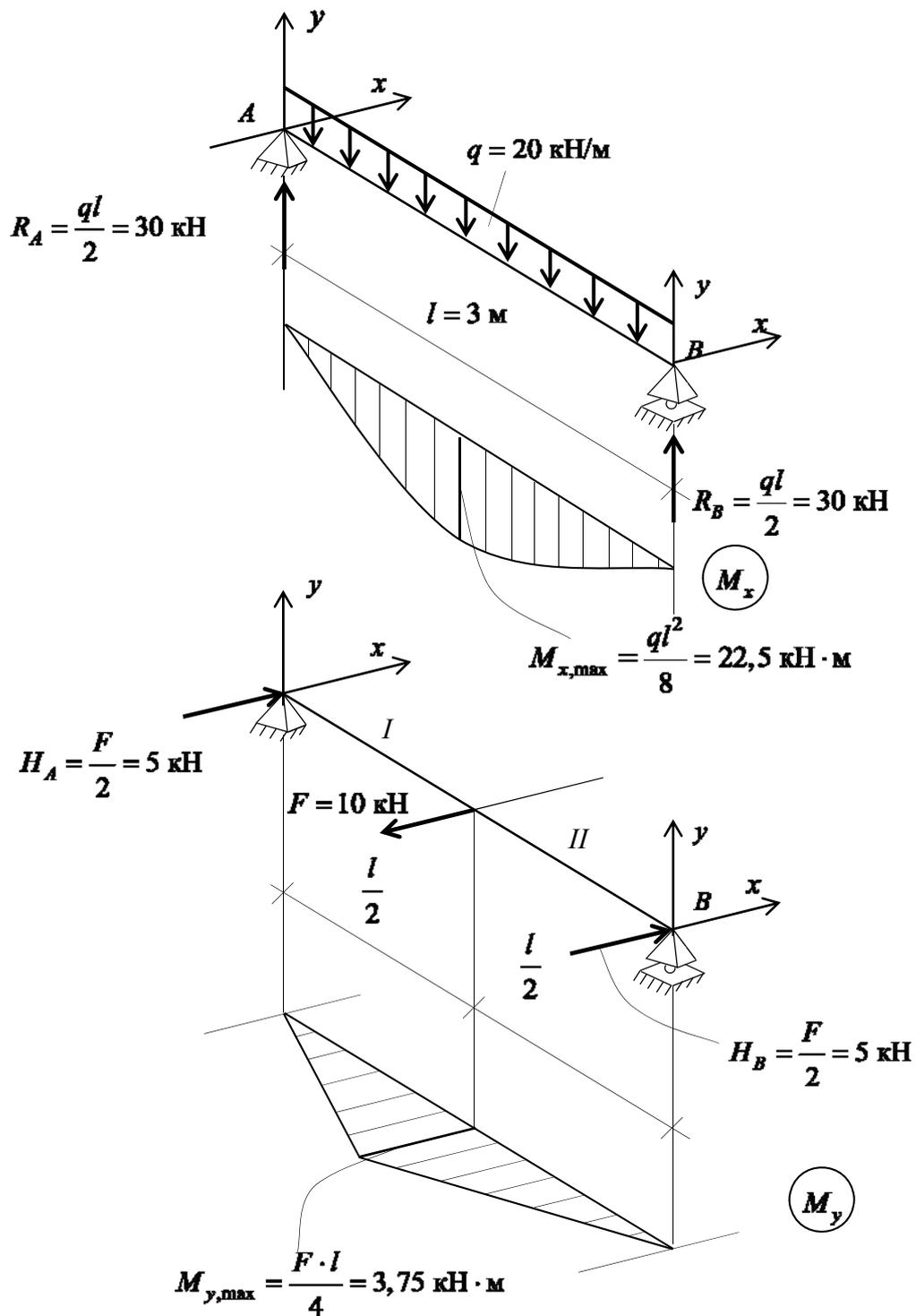


Рис. 7.2

Зададимся $\frac{W_x}{W_y} = 10$, то есть $W_x = 10W_y$. Тогда из условия прочности по-
 лучаем

$$W_x^{mp} \geq \frac{M_{x,\max} + 10M_{y,\max}}{R \cdot \gamma_c} = \frac{22,5 \cdot 10^3 + 10 \cdot 3,75 \cdot 10^3}{210 \cdot 10^6 \cdot 0,9} =$$

$$= 311,46 \cdot 10^{-6} \text{ м}^3 = 311,46 \text{ см}^3.$$

По сортаменту (ГОСТ 8239-89) принимаем двутавр № 27, для которого $W_x = 371 \text{ см}^3$, $W_y = 41,5 \text{ см}^3$.

Проверяем прочность сечения двутавра № 27:

$$\sigma_{\max} = \frac{22,5 \cdot 10^3}{371 \cdot 10^{-6}} + \frac{3,75 \cdot 10^3}{41,5 \cdot 10^{-6}} = (60,65 + 90,5) \cdot 10^6 \cong$$

$$\cong 151,1 \text{ МПа} < R \cdot \gamma_c = 189 \text{ МПа}.$$

Недонапряжение составляет

$$\delta\% = \frac{\sigma_{\max} - R \cdot \gamma_c}{R \cdot \gamma_c} \cdot 100\% = \frac{151,1 - 189}{189} \cdot 100\% = -20,1\%,$$

что значительно больше рекомендуемых 5%.

Уменьшаем номер двутавра. Принимаем двутавр № 24, для которого $W_x = 289 \text{ см}^3$, $W_y = 34,5 \text{ см}^3$.

Проверяем прочность:

$$\sigma_{\max} = \frac{22,5 \cdot 10^3}{289 \cdot 10^{-6}} + \frac{3,75 \cdot 10^3}{34,5 \cdot 10^{-6}} = (77,85 + 108,7) \cdot 10^6 =$$

$$= 186,5 \text{ МПа} < R \cdot \gamma_c = 189 \text{ МПа}.$$

Недонапряжение составляет

$$\delta\% = \frac{186,5 - 189}{189} \cdot 100\% = -1,32\%.$$

Окончательно принимаем двутавр № 24, у которого $I_x = 3460 \text{ см}^4$, $I_y = 198 \text{ см}^4$.

3. *Определяем величину и направление полного прогиба в середине пролёта.* Для определения прогибов используем метод начальных параметров.

Определяем прогиб ϑ_y в середине пролёта от вертикальных нагрузок по известной формуле

$$\vartheta_y = -\frac{5ql^4}{384EI_x} = -\frac{5 \cdot 20 \cdot 10^3 \cdot 3^4}{384 \cdot 200 \cdot 10^9 \cdot 3460 \cdot 10^{-8}} =$$

$$= -3,05 \cdot 10^{-3} \text{ м} = -0,305 \text{ см}.$$

Определяем прогиб ϑ_x в середине пролёта от горизонтальных нагрузок методом начальных параметров.

Универсальное уравнение изогнутой оси бруса в плоскости XOZ для нашего случая имеет вид:

$$EI_y \vartheta_x(z) = EI_y \vartheta_0 + EI_y \vartheta_x \theta_0 \cdot z + \frac{H_A \cdot z^3}{6} \Big|_I - \frac{F(z-1,5)^3}{6} \Big|_{II}$$

Граничные условия

а) при $z = 0$ м, $\vartheta_x(0) = 0$, откуда $\vartheta_0 = 0$;

б) при $z = 3$ м, $\vartheta_x(3) = 0$.

Учитывая условие (а) и используя условие (б), найдём

$$\theta = EI_y \theta_0 \cdot 3 + \frac{H_A \cdot 3^3}{6} - \frac{F(3-1,5)^3}{6};$$

$$3EI_y \theta_0 = -\frac{5 \cdot 3^3}{6} + \frac{10 \cdot 1,5^3}{6};$$

$$EI \theta_0 = -5,625 \text{ (кН} \cdot \text{м}^2\text{)}.$$

Таким образом, уравнение изогнутой оси бруса в плоскости XOZ примет вид:

$$EI_y \vartheta_x = -5,625 \cdot 1,5 + \frac{5 \cdot z^3}{6} \Big|_I - \frac{10(z-1,5)^3}{6} \Big|_{II}$$

Прогиб ϑ_x в середине пролёта, при $z = 1,5$ м будет равен:

$$EI_y \vartheta_x = -5,625 \cdot 1,5 \frac{5 \cdot 1,5^3}{6} = -5,625 \text{ кН} \cdot \text{м}^3$$

$$\vartheta_x = -\frac{5,625}{EI_y} = \frac{5,625 \cdot 10^3}{200 \cdot 10^9 \cdot 198 \cdot 10^{-8}} = -0,0142 \cdot 10^{-2} \text{ м} = -1,42 \text{ см}.$$

Полный прогиб найдём путём геометрического сложения:

$$\vartheta = \sqrt{\vartheta_x^2 + \vartheta_y^2} = \sqrt{1,42^2 + 0,305^2} = 1,452 \text{ см}.$$

Направление прогиба определяем по формуле

$$\text{tg} \beta = \frac{\vartheta_x}{\vartheta_y} = \frac{1,42}{0,305} = 4,656, \text{ то есть}$$

$$\beta = \text{arctg} 4,656 = 77,88^\circ.$$

Этот угол следует отложить против хода часовой стрелки от оси x .

Пример 7.2. Деревянная балка прямоугольного сечения длиной 2 м закреплена одним концом и нагружена в вертикальной плоскости равно-

мерно распределенной нагрузкой $q = 20 \text{ кН/м}$, а в горизонтальной плоскости – сосредоточенными силами $F_1 = 20 \text{ кН}$, $F_2 = 5 \text{ кН}$ (рис. 7.3). Подобрать сечение балки и построить эпюру нормальных напряжений в сечении у заделки. Расчётное сопротивление равно $R = 15 \text{ МПа}$, $\gamma_c = 0,9$, $\gamma_f = 1$. Принять $h/b = 2$.

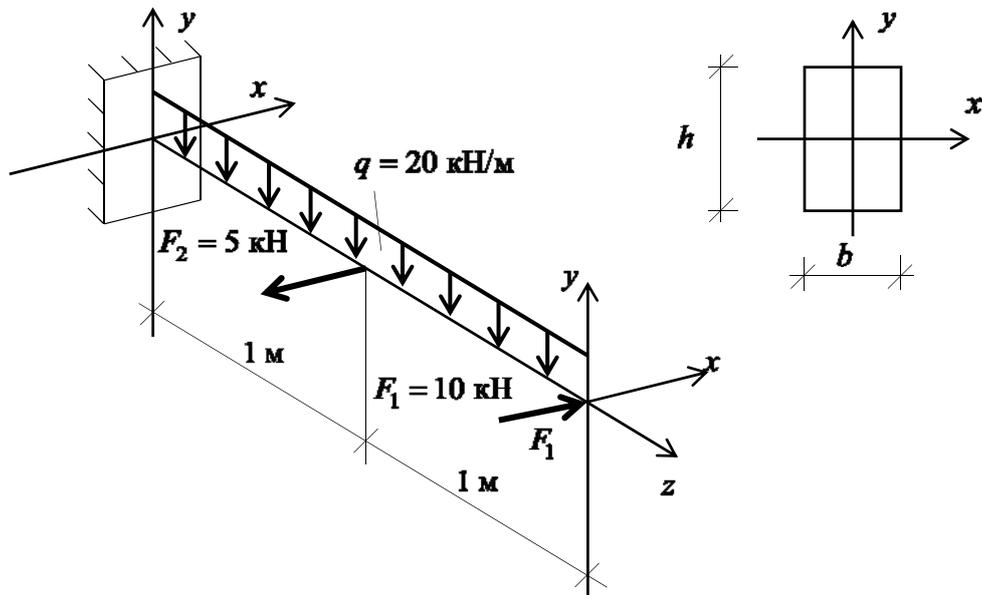


Рис. 7.3

Решение

1. *Построение эпюр изгибающих моментов.* Применяя принцип независимости действия сил, строим эпюры изгибающих моментов M_x и M_y (рис. 7.4).

Из эпюр следует, что опасным оказалось сечение у заделки, где $|M_{x,\max}| = 40 \text{ кН} \cdot \text{м}$, $|M_{y,\max}| = 15 \text{ кН} \cdot \text{м}$.

2. *Подбор сечения балки.* Из анализа эпюр также видно, что наибольшие растягивающие напряжения возникнут в угловой точке 2 во втором квадранте, а наибольшие сжимающие – в четвертом квадранте в точке 4. Так как эти точки равноудалены от нейтральной линии и материал балки одинаково сопротивляется растяжению и сжатию, то для подбора сечения достаточно составить одно условие прочности. Так, для точки 2 будем иметь:

$$\sigma_{\max} = \left(\frac{M_{x,\max}}{W_x} + \frac{M_{y,\max}}{W_y} \right) \leq R \cdot \gamma_c,$$

где $W_x = \frac{bh^2}{6}$, $W_y = \frac{hb^2}{6}$.

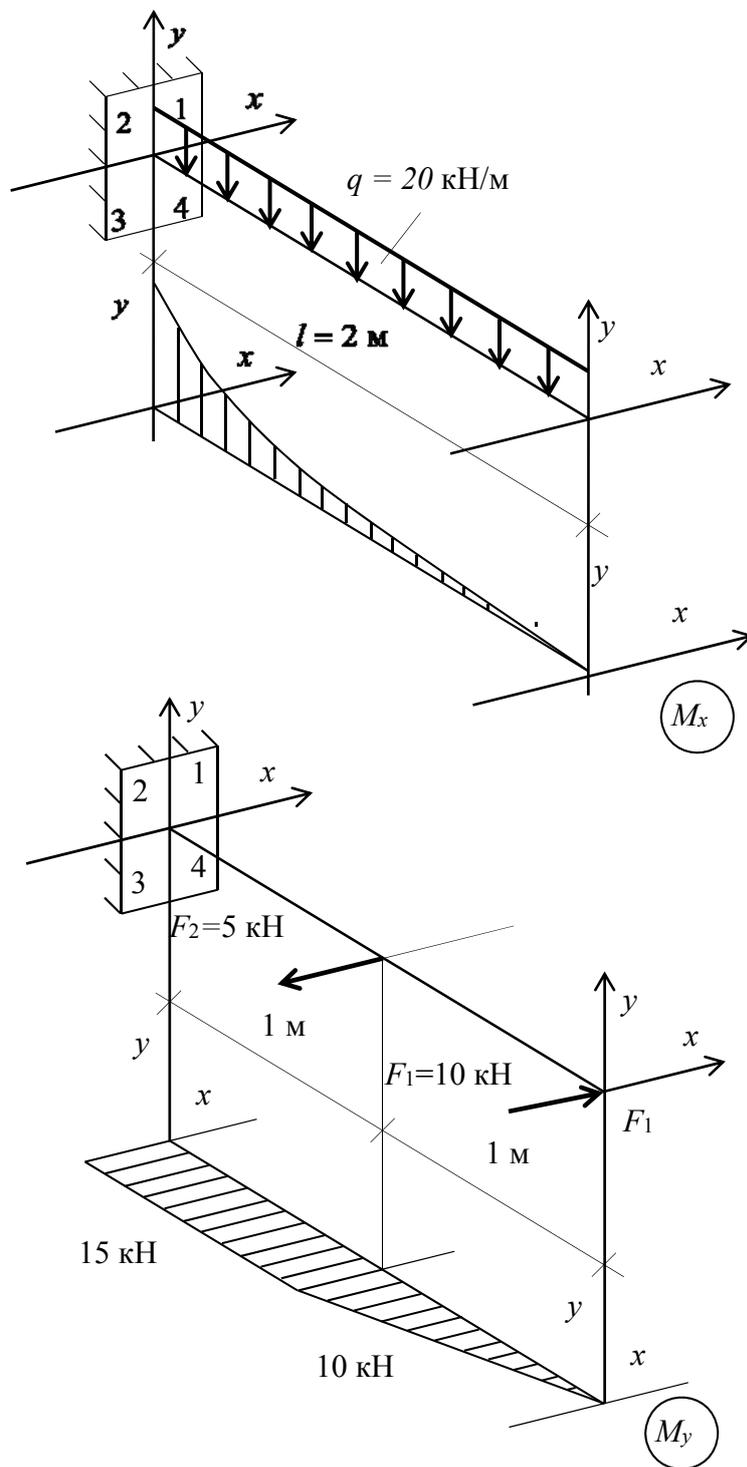


Рис.7.4

Так как $\frac{h}{b} = 2$, то есть $h = 2b$, то $W_x = \frac{b(2b)^2}{6} = \frac{4b^3}{6} = \frac{2b^3}{3}$,

$$W_x = \frac{2b \cdot b^2}{6} = \frac{b^3}{3}.$$

Подставив полученные выражения для W_x и W_y в условие прочности

$$\left(\frac{3M_{x,\max}}{2b^3} + \frac{M_{y,\max}}{b^3} \right) \leq R \cdot \gamma_c,$$

найдем $b \geq \sqrt[3]{\frac{3(0,5M_{x,\max} + M_{y,\max})}{R \cdot \gamma_c}}$, то есть

$$b \geq \sqrt[3]{\frac{3(0,5 \cdot 40 \cdot 10^3 + 15 \cdot 10^3)}{15 \cdot 10^6 \cdot 0,9}} = 1,98 \cdot 10^{-1} \text{ м} = 19,8 \text{ см}.$$

Принимаем $b = 20 \text{ см}$, $h = 2 \cdot 20 = 40 \text{ см}$.

3. *Проверка прочности подобранного сечения.* В соответствии с полученными результатами, имеем:

$$W_x = \frac{bh^2}{6} = \frac{20 \cdot 40^2}{6} = 5333,33 \text{ см}^3,$$

$$W_y = \frac{hb^2}{6} = \frac{40 \cdot 20^2}{6} = 2666,67 \text{ см}^3.$$

Проверяем условие прочности:

$$\begin{aligned} \sigma_{\max} &= \frac{40 \cdot 10^3}{5333,33 \cdot 10^6} + \frac{15 \cdot 10^3}{2666,67 \cdot 10^6} = 13,1 \cdot 10^6 \text{ МПа} < R \cdot \gamma_c = \\ &= 15 \cdot 0,9 = 13,5 \text{ МПа}. \end{aligned}$$

4. *Построение эпюры нормальных напряжений.*

В заданном сечении (у заделки) определяем положение нейтральной линии по формуле:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{M_y}{M_x} \cdot \frac{I_x}{I_y}.$$

В эту формулу изгибающие моменты подставляем с учётом знака: если изгибающий момент вызывает растягивающие напряжения в первой четверти осей координат, то его считаем положительным, если сжимающие – отрицательным.

Из эпюр изгибающих моментов получаем:

$$M_x = 40 \text{ кН} \cdot \text{м}, \quad M_y = -15 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

Вычисляем осевые моменты инерции сечения:

$$I_x = \frac{bh^3}{12} = \frac{20 \cdot 40^3}{12} = 106666,67 \text{ см}^4,$$

$$I_y = \frac{hb^3}{12} = \frac{40 \cdot 20^3}{12} = 2666,67 \text{ см}^4.$$

Определяем угол наклона нейтральной линии к оси x :

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{(-15)}{40} \cdot \frac{106666,65}{26666,67} = -1,5,$$

$$\alpha = \operatorname{arctg}(-1,5) = -62,57^\circ.$$

Откладываем отрицательный угол против хода часовой стрелки и строим нейтральную линию (рис. 7.5).

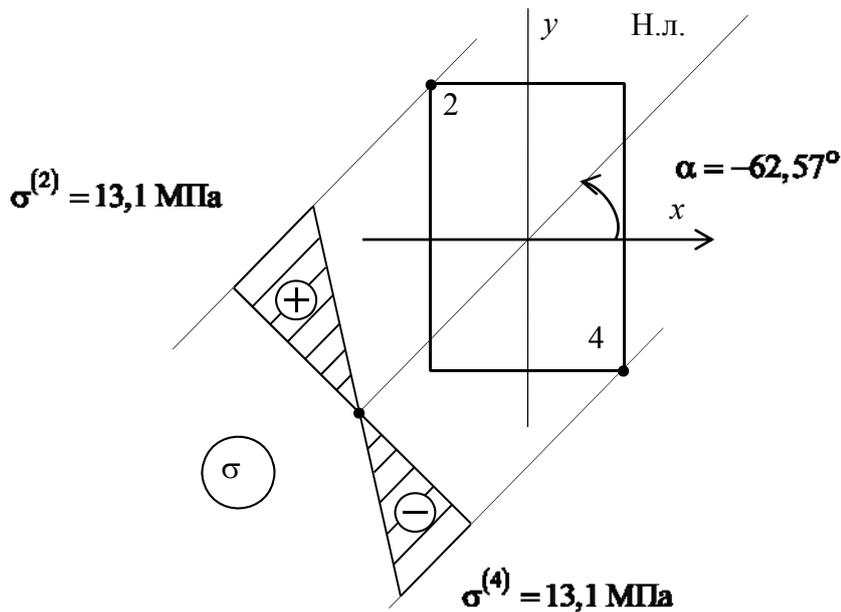


Рис. 7.5

Наиболее удалёнными от нейтральной линии точками будут точки 2 и 4. Точки 2 и 4 будут самыми напряженными. Определяем напряжения в этих точках по формуле:

$$\sigma = \pm \frac{|M_x|}{W_x} \pm \frac{|M_y|}{W_x};$$

где знак «плюс» относится к точке 2, «минус» – к точке 4:

$$\sigma^{(2)} = \frac{40 \cdot 10^3}{5333,33 \cdot 10^{-6}} + \frac{15 \cdot 10^3}{2666,67 \cdot 10^{-6}} = 13,1 \cdot 10^6 \text{ Па} = 13,1 \text{ МПа},$$

$$\sigma^{(4)} = -\frac{40 \cdot 10^3}{5333,33 \cdot 10^{-6}} - \frac{15 \cdot 10^3}{2666,67 \cdot 10^{-6}} = -13,1 \cdot 10^6 \text{ Па} = -13,1 \text{ МПа}.$$

В выбранном масштабе строим эпюру нормальных напряжений (рис. 7.5).

Тема №8 ОДНОВРЕМЕННОЕ ДЕЙСТВИЕ ИЗГИБА И ПРОДОЛЬНОЙ СИЛЫ

Примеры задач.

Пример 8.1. Найти положение нейтральной оси и величины σ_{\max} и σ_{\min} в сечении у заделки стержня (рис. 8.1, а).

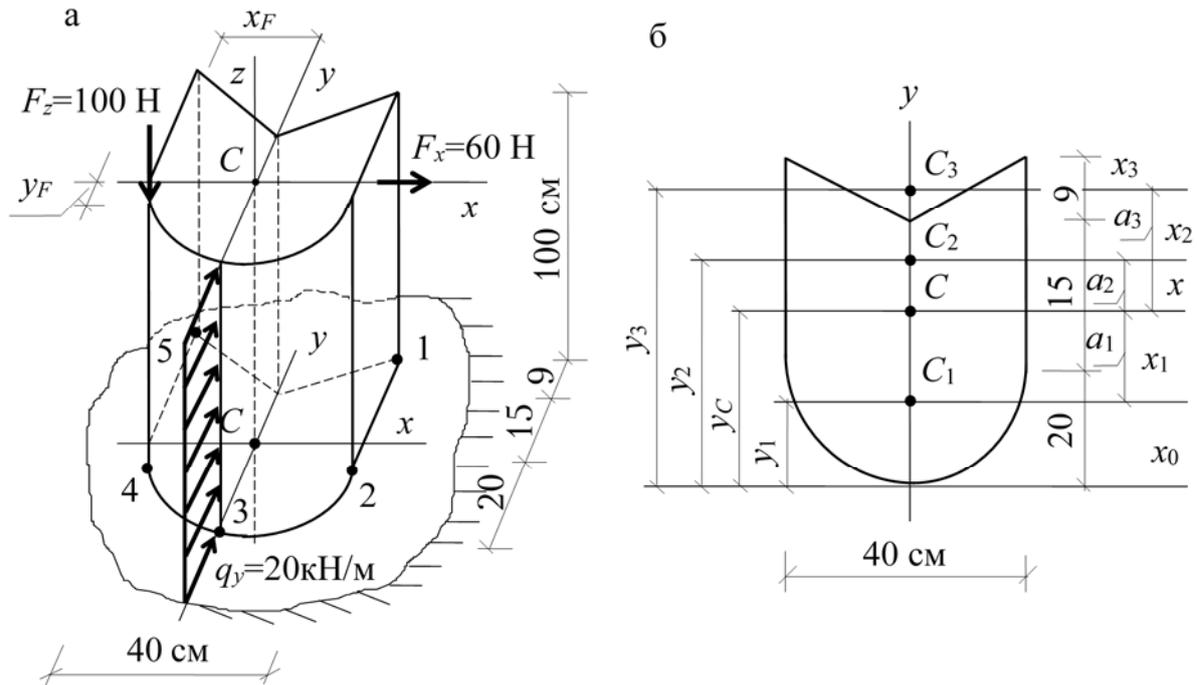


Рис.8.1

Решение

1. *Определение геометрических характеристик полученного сечения.* Сечение разбиваем на три фигуры: полукруг, прямоугольник 40×26 см, вырез (отверстие) в виде треугольника (площадь отверстия в расчётах берётся со знаком «минус»). Находим расстояние от вспомогательной оси x_0 до центра тяжести (рис. 8.1,б):

$$y_C = \frac{\sum S_{x_0}}{\sum A} = \frac{S_{x_0}^{(1)} + S_{x_0}^{(2)} - S_{x_0}^{(3)}}{A^{(1)} + A^{(2)} - A^{(3)}} = \frac{A^{(1)} y_1 + A^{(2)} y_2 - A^{(3)} y_3}{A^{(1)} + A^{(2)} - A^{(3)}} =$$

$$= \frac{628 \cdot 11,5 + 960 \cdot 32 - 180 \cdot 41}{628 + 960 - 180} = \frac{30562}{1408} = 21,71 \text{ см.}$$

Здесь $A^{(1)} = 0,5\pi R^2 = 0,5 \cdot 3,14 \cdot 20^2 = 628 \text{ см}^2$;

$$y_1 = R - \frac{4R}{3\pi} = 20 - \frac{4 \cdot 20}{3 \cdot 3,14} = 11,5 \text{ см};$$

$$A^{(2)} = 40 \cdot 24 = 960 \text{ см}^2; \quad y_2 = 20 + 12 = 32 \text{ см};$$

$$A^{(3)} = 0,5 \cdot 40 \cdot 9 = 180 \text{ см}^2; \quad y_3 = 20 + 15 \cdot \left(9 - \frac{1}{3} \cdot 9\right) = 41 \text{ см}.$$

Через найденный центр тяжести проводим главные центральные оси y и x . Заметим, что ось y является осью симметрии.

2. *Вычисление главных центральных моментов инерции.*

$$\begin{aligned} I_y &= I_y^{(1)} + I_y^{(2)} - I_y^{(3)} = \frac{\pi R^4}{2 \cdot 4} + \frac{h_2 b_2^3}{12} - \frac{h_3 b_3^3}{48} = \\ &= \frac{3,14 \cdot 20^4}{8} + \frac{24 \cdot 40^3}{12} - \frac{9 \cdot 40^3}{48} = 178800 \text{ см}^4. \end{aligned}$$

Чтобы найти момент инерции относительно оси x , используем формулу для параллельного переноса осей:

$$\begin{aligned} I_x &= I_x^{(1)} + I_x^{(2)} - I_x^{(3)} = \\ &= I_{x_1}^{(1)} + A^{(1)} \cdot a_1^2 + I_{x_2}^{(2)} + A^{(2)} \cdot a_2^2 - (I_{x_3}^{(3)} + A^{(3)} \cdot a_3^2) = \\ &= 17600 + 628(-10,21)^2 + 46080 + 960 \cdot 10,29^2 - (810 + 180 \cdot 19,29^2) = \\ &= 103951,87 \text{ см}^4, \end{aligned}$$

здесь $I_{x_1}^{(1)} = 0,11R^4 = 0,11 \cdot 20^4 = 17600 \text{ см}^4$;

$$I_{x_2}^{(2)} = \frac{b_2 h_2^3}{12} = \frac{40 \cdot 24^3}{12} = 46080 \text{ см}^4;$$

$$I_{x_3}^{(3)} = \frac{b_3 h_3^3}{36} = \frac{40 \cdot 9^3}{36} = 810 \text{ см}^4;$$

$$a_1 = y_1 - y_C = 11,5 - 21,71 = -10,21 \text{ см};$$

$$a_2 = y_2 - y_C = 32 - 21,71 = 10,29 \text{ см};$$

$$a_3 = y_3 - y_C = 41 - 21,71 = 19,29 \text{ см}.$$

3. *Определение внутренних усилий.* Переносим все внешние силы в центр тяжести. В результате от силы F_z появляются изгибающие моменты относительно осей x и y :

$$M_x = F_z \cdot y_F = 100 \cdot 0,0171 = 1,71 \text{ Н} \cdot \text{м},$$

$$M_y = F_z \cdot x_F = 100 \cdot 0,2 = 20 \text{ Н} \cdot \text{м},$$

где $y_F = 20 - y_C = 20 - 21,71 = -1,71$ см;

$$x_F = 20 \text{ см.}$$

(Заметим, что при переносе F_x и q_y в центр тяжести сосредоточенные изгибающие моменты не появляются).

Определяем усилия отдельно от каждой нагрузки и складываем алгебраически полученные результаты.

Результирующий изгибающий M_x в заделке

$$M_x = M_x(q_y) - M_x(M) = 10 - 1,71 = 8,29 \text{ Н} \cdot \text{м.}$$

Продольная сила $N = F_y = 100 \text{ Н}$.

От сосредоточенного изгибающего момента $M_y = 20 \text{ кН} \cdot \text{м}$. От силы $F_x = 60 \text{ Н}$ изгибающий момент $M_y(F_x) = F_x \cdot 1 = 60 \text{ Н} \cdot \text{м}$. Результирующий изгибающий момент M_y в заделке (с учётом знака)

$$M_y = M_y(F_x) - M_y(M) = 60 - 20 = 40 \text{ Н} \cdot \text{м.}$$

Напомним, что если от усилия возникают сжимающие деформации, например от M_x , в I четверти осей координат, то перед усилием ставим знак "минус". И, наоборот, при растяжении, например во II четверти от M_x , ставим знак "плюс". На рис.8.2 показаны внутренние усилия во всех четвертях осей координат с учётом знаков.

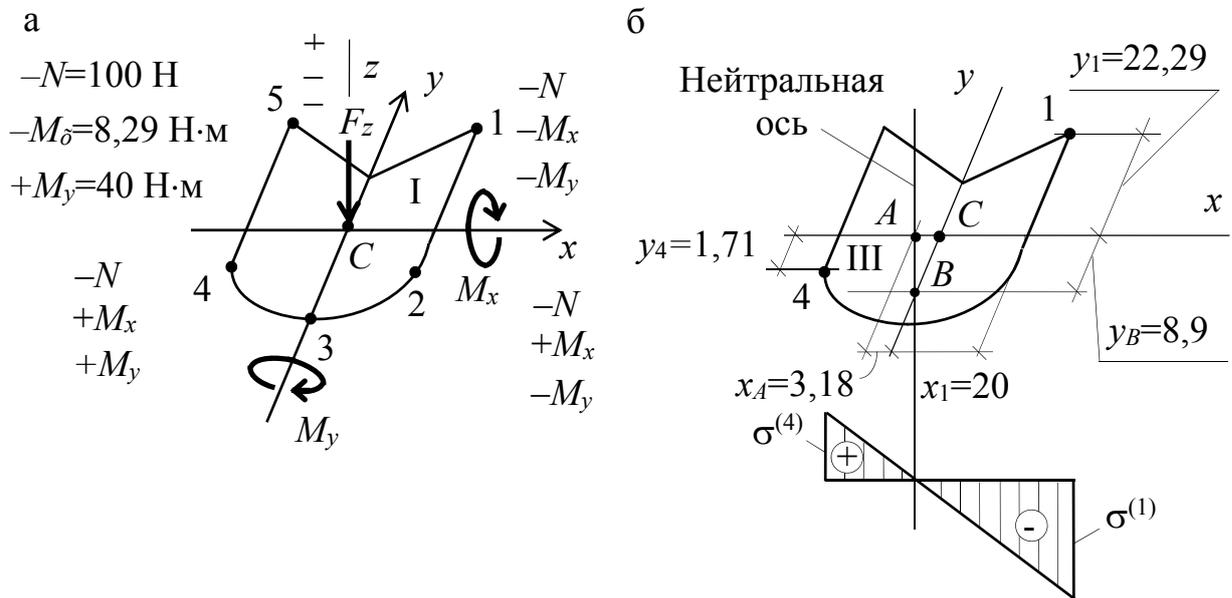


Рис. 8.2

4. *Определение положения нейтральной оси.* Уравнение нейтральной оси находим из формулы, подставляя знаки усилий из I четверти осей координат.

В результате подстановки получим:

$$y = -\frac{-NI_x}{-M_x A} - \frac{-M_y I_x}{-M_x I_y} x = -\frac{100 \text{ (Н)} \cdot 103951,87 \text{ (м}^4\text{)}}{829 \text{ (Н} \cdot \text{м)} \cdot 1408 \text{ (м}^2\text{)}} - \frac{4000 \text{ (Н} \cdot \text{м)} \cdot 103951,87 \text{ (м}^4\text{)}}{829 \text{ (Н} \cdot \text{м)} \cdot 178800 \text{ (м}^4\text{)}} = -8,9 - 2,8x.$$

При $x = 0$, $y = -8,9$ см. Если $y = 0$, то $x = -3,18$ см.

Таким образом, нейтральная ось проходит через точки А и В и III четверть осей координат (рис. 8.2, б). Наиболее удалёнными от нейтральной оси, а, следовательно, и наиболее напряжёнными, являются точки 1 и 4. С учётом знаков усилий находим напряжения (рис. 8.2, б):

$$\begin{aligned} \sigma^{(1)} &= -\frac{N}{A} - \frac{M_x}{J_x} y_1 - \frac{M_y}{J_y} x_1 = -\frac{100 \text{ (Н)}}{1408 \cdot 10^{-4} \text{ (м}^2\text{)}} - \\ &= -\frac{8,29 \text{ (Н} \cdot \text{м)} \cdot 22,29 \cdot 10^{-2} \text{ (м)}}{103951,87 \cdot 10^{-8} \text{ (м}^4\text{)}} - \frac{40 \text{ (Н} \cdot \text{м)} \cdot 20 \cdot 10^{-2} \text{ (м)}}{178800 \cdot 10^{-8} \text{ (м}^4\text{)}} = \\ &= -6962 \text{ Н/м}^2; \\ \sigma^{(4)} &= -\frac{N}{A} + \frac{M_x}{J_x} y_4 + \frac{M_y}{J_y} x_4 = -\frac{100}{1408 \cdot 10^{-4}} + \frac{8,29 \cdot 1,71 \cdot 10^{-2}}{103951,87 \cdot 10^{-8}} + \\ &+ \frac{40 \cdot 20 \cdot 10^{-2}}{178800 \cdot 10^{-8}} = 3900 \text{ Н/м}^2, \end{aligned}$$

где y_1 , x_1 и y_4 , x_4 – координаты точек 1 и 4 без учёта их знаков:

$$\begin{aligned} y_1 &= 44 - y_c = 44 - 21,71 = 22,29 \text{ см}; \quad x_1 = 20 \text{ см}; \\ y_4 &= y_c - 20 = 21,71 - 20 = 1,71 \text{ см}; \quad x_4 = 20 \text{ см}. \end{aligned}$$

Тема №9 УСТОЙЧИВОСТЬ ЦЕНТРАЛЬНО СЖАТЫХ СТЕРЖНЕЙ

Примеры задач

Пример 9.1. На рис.9.1 приведены расчётная схема и тип сечения стержня. Определить размеры поперечного сечения стержня из условия устойчивости.

Решение

Поскольку сечение имеет перпендикулярные оси симметрии, то все оси, проходящие через центр тяжести, будут являться главными центральными.

Выразим необходимые геометрические характеристики через размер a .

$$\text{Площадь сечения } A = 3a \cdot 3a - a \cdot a = 8a^2,$$

$$\text{Моменты инерции } I_x = I_y = \frac{(3a)^4}{12} - \frac{a^4}{12} = \frac{80a^4}{12} = \frac{20a^4}{3},$$

$$\text{Радиусы инерции } i_x = i_y = \sqrt{\frac{I}{A}} = \sqrt{\frac{20a^4}{3} \cdot \frac{1}{8a^2}} = \sqrt{\frac{5a^2}{6}} = 0,913a.$$

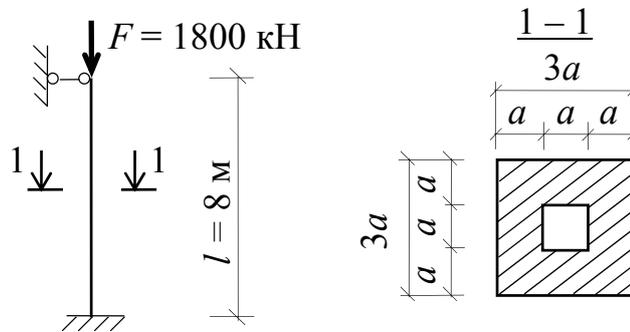


Рис. 9.1

Так как закрепление одинаково в обеих главных плоскостях инерции, то и гибкости будут равны

$$\lambda_x = \lambda_y = \frac{\mu l}{i} = \frac{0,7 \cdot 8}{0,913a} = \frac{6,13}{a}.$$

Подбор сечения осуществляем методом последовательных приближений.

В первом приближении задаемся коэффициентом продольного изгиба $\varphi = 0,5$, тогда площадь сечения должна быть равна

$$A = \frac{F}{\varphi \cdot R_y} = \frac{1800 \cdot 10^3}{0,5 \cdot 210 \cdot 10^6} = 171 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2 (171 \text{ см}^2).$$

В этом случае размер $a = \sqrt{\frac{A}{8}} = \sqrt{\frac{171}{8}} = 4,6$ см (округлим до целых миллиметров).

Площадь поперечного сечения бруса

$$A = 8 \cdot a^2 = 8 \cdot 4,6^2 = 169,3 \text{ см}^2.$$

$$\text{Гибкость стержня } \lambda = \frac{6,13}{4,6 \cdot 10^{-2}} = 133,3$$

Используя таблицы для коэффициентов φ , по линейной интерполяции находим коэффициент продольного изгиба. Так, по одной из таблиц,

$$\varphi(133) = 0,382 \text{ и } \varphi(134) = 0,373,$$

$$\varphi(127,7) = 0,382 - \frac{0,382 - 0,373}{1} \cdot 0,3 = 0,379.$$

Проверим условие безопасной работы

$$\frac{F}{\varphi \cdot A} = \frac{1800 \cdot 10^3}{0,379 \cdot 169,3 \cdot 10^{-4}} = 280,5 \cdot 10^6 \text{ Па} \quad (280,5 \text{ МПа}) > R_y = 210 \text{ МПа}.$$

Поскольку условие безопасной работы не выполняется необходимо перейти ко второму приближению. В нём используем коэффициент продольного изгиба равный среднему арифметическому его значению из предыдущего приближения:

$$\varphi = \frac{0,5 - 0,379}{2} = 0,44.$$

В этом случае площадь поперечного сечения

$$A = \frac{F}{\varphi \cdot R_y} = \frac{1800 \cdot 10^3}{0,44 \cdot 210 \cdot 10^6} = 194,8 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2 \quad (194,8 \text{ см}^2).$$

Тогда размер сечения a и гибкость будут равны

$$a = \sqrt{\frac{A}{8}} = \sqrt{\frac{194,8}{8}} = 5 \text{ см},$$

$$A = 8 \cdot a^2 = 8 \cdot 5^2 = 200 \text{ см}^2,$$

$$\lambda = \frac{6,13}{5 \cdot 10^{-2}} = 122,6.$$

Определим коэффициент продольного изгиба

$$\varphi(122) = 0,438 \text{ и } \varphi(123) = 0,433,$$

$$\varphi(122,6) = 0,438 - \frac{0,438 - 0,433}{1} \cdot 0,6 = 0,435.$$

Проверим условие безопасной работы

$$\frac{F}{\varphi \cdot A} = \frac{1800 \cdot 10^3}{0,435 \cdot 200 \cdot 10^{-4}} = 206,9 \cdot 10^6 \text{ Па} = 206,9 \text{ МПа} < R_y = 210 \text{ МПа}.$$

Условие выполняется.

При этом недонапряжение составляет $\frac{210 - 206,9}{210} \cdot 100\% = 1,5\%$, что

вполне допустимо (в пределах $5 \div 10 \%$)

Определим критическую силу для подобранного стержня.

Так как гибкость $\lambda = 122,6$ больше предельной для стали Ст.3 ($\lambda_0 = 100$), критическая сила определяется по формуле Эйлера. Для этого вычислим предварительно осевой момент инерции

$$I_x = I_y = \frac{20 \cdot a^4}{3} = \frac{20 \cdot 5^4}{3} = 4166,7 \text{ см}^4.$$

Таким образом

$$F_{кр}^э = \frac{\pi^2 EI}{(\mu l)^2} = \frac{3,14^2 \cdot 200 \cdot 10^9 \cdot 4166,7 \cdot 10^{-8}}{(0,7 \cdot 8)^2} = 2620 \cdot 10^3 \text{ Н (2620 кН)}.$$

Тогда коэффициент запаса устойчивости будет равен

$$n = \frac{F_{кр}}{F} = \frac{2620}{1800} = 1,46.$$

Пример 9.2. Расчётная схема стержня и тип сечения приведены на рис. 9.2. Определить размеры поперечного сечения стержня из условия устойчивости.

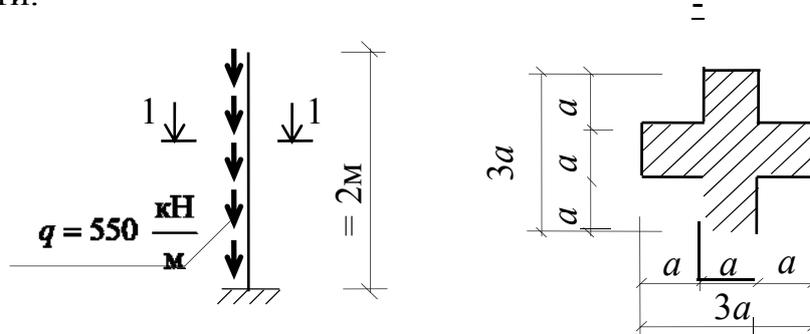


Рис. 9.2

Решение

Поскольку сечение имеет две перпендикулярные оси симметрии, все оси, проходящие через центр тяжести поперечного сечения, будут являться главными.

Выразим необходимые геометрические характеристики через размер a .

Площадь сечения $A = 3a \cdot 3a - 4(a \cdot a) = 5a^2$.

Моменты инерции $I_x = I_y = \frac{(3a)^4}{12} - 4\left(\frac{a^4}{12} + a^2 \cdot a^2\right) = \frac{29a^4}{12}$.

Радиусы инерции $i_x = i_y = \sqrt{\frac{I}{A}} = \sqrt{\frac{29a^4}{12} \cdot \frac{1}{5a^2}} = 0,695a$.

Так как закрепление одинаково из главных плоскостей инерции, то и гибкости будут равны

$$\lambda_x = \lambda_y = \frac{\mu l}{i} = \frac{1,12 \cdot 2}{0,695a} = \frac{3,22}{a}.$$

Подбор сечения осуществляем методом последовательных приближений.

В первом приближении задаемся коэффициентом продольного изгиба $\varphi = 0,5$, тогда площадь поперечного сечения должна быть равна

$$A = \frac{N_{\max}}{\varphi \cdot R_y} = \frac{550 \cdot 10^3 \cdot 2}{0,5 \cdot 210 \cdot 10^6} = 104,8 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2 \quad (104,8 \text{ см}^2).$$

$$\text{В этом случае размер } a = \sqrt{\frac{A}{5}} = \sqrt{\frac{104,8}{5}} = 4,6 \text{ см}.$$

$$\text{Площадь поперечного сечения бруса } A = 5a^2 = 5 \cdot 4,6^2 = 105,8 \text{ см}^2.$$

$$\text{Гибкость стержня } \lambda = \frac{3,22}{4,6 \cdot 10^{-2}} = 70.$$

Используя таблицы, находим по одной из них коэффициент продольного изгиба $\varphi(70) = 0,77$

Проверим условие безопасной работы

$$\frac{N_{\max}}{\varphi \cdot A} = \frac{550 \cdot 10^3 \cdot 2}{0,77 \cdot 105,8 \cdot 10^{-4}} = 135 \cdot 10^6 \text{ Па} \quad (135 \text{ МПа}) < R_y = 210 \text{ МПа}.$$

Условие выполняется. При этом недонапряжение составляет $\frac{210 - 135}{210} \cdot 100\% = 35,7\%$, что указывает на значительный запас по устойчивости и перерасход материала. В связи с этим необходимо перейти ко второму приближению. В нем используем коэффициент продольного изгиба, равный среднему арифметическому значению из предыдущего приближения

$$\varphi = \frac{0,5 + 0,77}{2} = 0,635.$$

В этом случае площадь поперечного сечения

$$A = \frac{N_{\max}}{\varphi \cdot R_y} = \frac{550 \cdot 10^3 \cdot 2}{0,635 \cdot 210 \cdot 10^6} = 82,5 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2 \quad (82,5 \text{ см}^2).$$

Тогда размер сечения a и гибкость будут равны

$$a = \sqrt{\frac{A}{5}} = \sqrt{\frac{82,5}{5}} = 4 \text{ см} \quad (\text{округлим до целых миллиметров}),$$

$$A = 5a^2 = 5 \cdot 4^2 = 80 \text{ см}^2,$$

$$\lambda = \frac{3,22}{4 \cdot 10^{-2}} = 80,5.$$

Используя таблицы для φ , по линейной интерполяции находим коэффициент продольного изгиба

$$\varphi(80) = 0,715, \quad \varphi(81) = 0,709,$$

$$\varphi(80,5) = 0,715 - \frac{0,715 - 0,709}{1} \cdot 0,5 = 0,712.$$

Проверим условие безопасной работы

$$\frac{N_{\max}}{\varphi \cdot A} = \frac{550 \cdot 10^3 \cdot 2}{0,712 \cdot 80 \cdot 10^{-4}} = 193,1 \cdot 10^6 \text{ Па} (193,1 \text{ МПа}) < R_y = 210 \text{ МПа}.$$

При этом недонапряжение составляет $\frac{210 - 193,1}{210} \cdot 100\% = 8\%$, что

вполне допустимо в пределах (5 ÷ 10%).

Определим критическую силу для подобранного стержня.

Так как гибкость $\lambda = 80,5$ меньше предельной для стали Ст. 3 ($\lambda = 100$), критическая сила определяется по формуле Ясинского

$$\begin{aligned} N_{\max} = F_{\text{кр}}^{\text{Я}} &= (a - b \cdot \lambda) \cdot A = (310 - 1,14 \cdot 80,5) \cdot 10^6 \cdot 80 \cdot 10^{-4} = \\ &= 1745,8 \cdot 10^3 \text{ Н} = 1745,8 \text{ кН}, \end{aligned}$$

откуда $q_{\text{кр}} = \frac{N_{\max}}{l} = \frac{1745,8}{2} = 872,9 \text{ кН/м}.$

Коэффициент запаса устойчивости будет равен

$$n = \frac{q_{\text{кр}}}{q} = \frac{872,9}{550} = 1,59.$$

Пример 9.3. Определить размеры поперечного сечения стержня, изображённого на рис. 9.3. Найти величину критической силы и коэффициент запаса устойчивости при $R = 160 \text{ МПа}$.

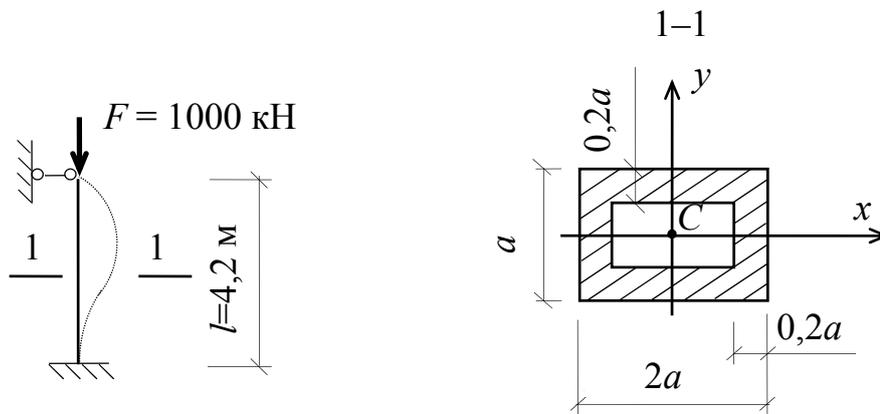


Рис. 9.3

Решение

1. *Определение размеров поперечного сечения.* Предварительно для заданного сечения выражаем все геометрические характеристики через размер "a":

$$I_x = \frac{2aa^3 - 1,6a(0,6a)^3}{12} = 0,138a^4 = I_{\min};$$
$$I_y = \frac{a(2a)^3}{12} - \frac{0,6a(1,6a)^3}{12} = 0,462a^4 = I_{\max};$$
$$A = 2aa - 1,6a \cdot 0,6a = 1,04a^2;$$
$$i_{\min} = \sqrt{\frac{I_{\min}}{A}} = \sqrt{\frac{0,138a^4}{1,04a^2}} = 0,36a.$$

1-й этап. Задаемся $\varphi_{1н} = 0,5$ (индекс «н» указывает на «начало» этапа)

$$A_1 = \frac{F}{\varphi_{1н} \cdot R} = \frac{1000 \cdot 10^3 (\text{Н})}{0,5 \cdot 160 \cdot 10^6 (\text{Н/м}^2)} = 12,5 \cdot 10^{-3} \text{ м}^2 = 125 \text{ см}^2;$$
$$a_1 = \sqrt{\frac{A_1}{1,04}} = \sqrt{\frac{125}{1,04}} = 10,96 \text{ см};$$
$$i_{1\min} = 0,36 \cdot 10,96 = 3,95 \text{ см}.$$

При $\mu = 0,7$ (рис. 9.3) гибкость

$$\lambda_1 = \frac{0,7 \cdot 420}{3,95} = 74,43.$$

По одной из таблиц для φ имеем при $\lambda = 70$ $\varphi = 0,754$, а при $\lambda = 80$ $\varphi = 0,686$. Для промежуточного значения $\lambda_1 = 74,4$ значение коэффициента продольного изгиба $\varphi_{1к}$ определим с помощью линейной интерполяции (индекс «к» указывает на «конец» этапа):

$$\varphi_{1к} = 0,754 - \frac{0,754 - 0,686}{10} (74,43 - 70) = 0,724.$$

Напряжение

$$\sigma = \frac{F}{A_1} = \frac{1000 \cdot 10^3 (\text{Н})}{125 \cdot 10^{-4} (\text{м}^2)} = 8 \cdot 10^7 \text{ Па} = 80 \text{ МПа} < \varphi_{1к} \cdot R = 0,724 \cdot 160 \text{ МПа} = 115,8 \text{ МПа}.$$

Условие прочности выполняется. Однако разница между σ_1 и $\varphi_{1к} \cdot R$ велика. Следовательно, площадь поперечного сечения слишком большая и необходимо сделать второе приближение.

2-й этап. Повторяем алгоритм вычислений, принимая

$$\varphi_{2н} = \frac{\varphi_{1н} + \varphi_{1к}}{2} = \frac{0,5 + 0,724}{2} = 0,612 ;$$

$$A_2 = \frac{1000 \cdot 10^3 \cdot 10^4}{0,612 \cdot 160 \cdot 10^6} = 102,1 \text{ см}^2;$$

$$a_2 = \sqrt{\frac{102,1}{1,04}} = 9,91 \text{ см};$$

$$i_{2\min} = 0,36 \cdot 9,91 = 3,57 \text{ см};$$

$$\lambda_2 = \frac{0,7 \cdot 420}{3,57} = 82,35.$$

Из таблицы находим значение коэффициента продольного изгиба так же, как на 1-м этапе:

$$\varphi_{2к} = 0,686 - \frac{0,686 - 0,612}{10} \cdot 2,35 = 0,669.$$

Напряжение

$$\sigma^{(2)} = \frac{1000 \cdot 10^{-3}}{102,1 \cdot 10^{-4}} = 9,79 \cdot 10^7 \text{ Н/м}^2 = 97,9 \text{ МПа} <$$

$$< \varphi_{2к} \cdot R = 0,669 \cdot 160 = 107 \text{ МПа}.$$

По сравнению с 1-м этапом разница в напряжениях сократилась и составила около 9%. Делаем третье приближение.

3-й этап. Повторяем алгоритм вычислений, принимая

$$\varphi_{3н} = \frac{0,612 + 0,669}{2} = 0,640;$$

$$A_3 = \frac{1000 \cdot 10^3 \cdot 10^4}{0,640 \cdot 160 \cdot 10^6} = 97,66 \text{ см}^2;$$

$$a_3 = \sqrt{\frac{97,66}{1,04}} = 9,69 \text{ см};$$

$$i_{3\min} = 0,36 \cdot 9,69 = 3,49 \text{ см};$$

$$\lambda_3 = \frac{0,7 \cdot 420}{3,49} = 84,24;$$

$$\varphi_{3к} = 0,686 - \frac{0,686 - 0,612}{10} \cdot 4,24 = 0,655;$$

$$\sigma_3 = \frac{1000 \cdot 10^{-3}}{97,66 \cdot 10^{-4}} = 10,24 \cdot 10^7 \text{ Н/м}^2 = 102,4 \text{ МПа} <$$

$$< \varphi_{3к} \cdot [\sigma] = 0,655 \cdot 160 = 104,8 \text{ МПа}.$$

Недонапряжение составило около 2%. Это допустимо, и процесс приближения можно прекратить.

2. *Вычисление критической силы.* Так как гибкость у подобранного сечения $\lambda_3 = 84,24 < 100$, то величину критических напряжений определяем по формуле Ясинского:

$$\sigma_{cr} = 310 - 1,14\lambda = 310 - 1,14 \cdot 84,24 = 213,97 \text{ МПа.}$$

Окончательно критическая сила

$$F_{cr} = \sigma_{cr} A = 213,97 \cdot 10^6 \cdot 97,66 \cdot 10^{-4} = 20896,3 \cdot 10^2 \text{ Н} = 2090 \text{ кН.}$$

3. *Определение коэффициента запаса устойчивости.* Расчёт ведем по формуле:

$$n = \frac{F_{cr}}{F} = \frac{2090}{1000} = 2,09.$$

Пример 9.4. Для стальной стойки, изготовленной из двутавра № 24 закрепленной, как показано на рис. 9.4, а, найти критическую силу и допустимую нагрузку при $R = 160 \text{ МПа}$ и $E = 200 \text{ ГПа}$.

Решение

1. *Геометрические характеристики двутавра.* По ГОСТ для двутавра № 24 имеем: $A = 34,8 \text{ см}^2$; $i_x = 9,97 \text{ см}$, $i_y = 2,37 \text{ см}$.

2. *Вычисление критической силы.* Известно, что критическая сила зависит от гибкости. Из условия закрепления стержня видно, что гибкость относительно осей x и y разная. Радиусы инерции также различные. Поэтому необходимо установить максимальное значение гибкости λ_{\max} . При потере устойчивости стержня в направлении оси y поперечное сечение поворачивается вокруг оси x (рис.9.4, б) и гибкость относительно оси x равна:

$$\lambda_x = \frac{\mu_x l}{i_x} = \frac{2 \cdot 400}{9,97} = 80,2 .$$

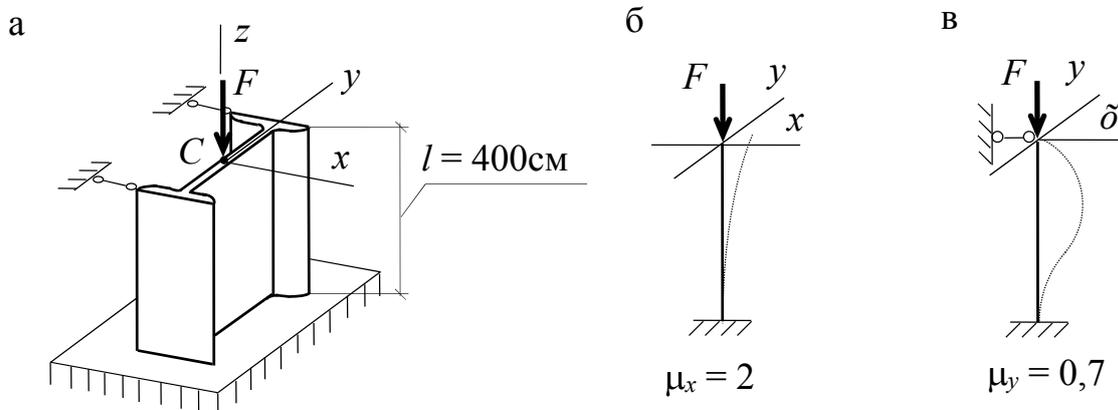


Рис. 9.4

Аналогично определяем гибкость относительно оси y (рис. 9.4, в):

$$\lambda_y = \frac{\mu_y \cdot l}{i_y} = \frac{0,7 \cdot 400}{2,37} = 118,1.$$

Сравнивая гибкости, находим, что $\lambda_{\max} = \lambda_y = 118,1$. Таким образом, стержень будет терять устойчивость в направлении оси x по рис.9.4, в. Так как $\lambda_{\max} = 118,1 > 100$, то критические напряжения вычисляем по формуле Эйлера (7.1):

$$\sigma_{cr} = \frac{\pi^2 \cdot E}{\lambda_{\max}^2} = \frac{3,14^2 \cdot 200 \cdot 10^9}{118,1^2} = 0,141 \cdot 10^9 \text{ Н/м}^2 = 141 \text{ МПа.}$$

Критическая сила

$$F_{cr} = \sigma_{cr} \cdot A = 141 \cdot 10^6 \cdot 34,8 \cdot 10^{-4} = 4906,8 \cdot 10^2 \text{ Н} = 491 \text{ кН.}$$

3. *Вычисление допускаемой нагрузки.* Допускаемую нагрузку на стойку находим из условия безопасной работы. Коэффициент продольного изгиба для $\lambda_{\max} = 118,1$ определяем по одной из таблиц линейной интерполяцией:

$$\varphi = 0,478 - \frac{0,478 - 0,419}{10} (118,1 - 110) = 0,430.$$

Допускаемую нагрузку вычисляем по формуле

$$F = \varphi \cdot A \cdot R = 0,430 \cdot 34,8 \cdot 10^{-4} (\text{м}^2) \cdot 160 \cdot 10^3 (\text{кН/м}^2) = 239,4 \text{ кН.}$$

Пример 9.5. Стойка состоит из двух швеллеров, соединенных между собой планками (рис.9.5). Подобрать номера швеллеров и определить, на каком расстоянии "а" они должны находиться друг от друга, чтобы устойчивость вокруг осей x и y была одинаковой. Принять $R = 160$ МПа.

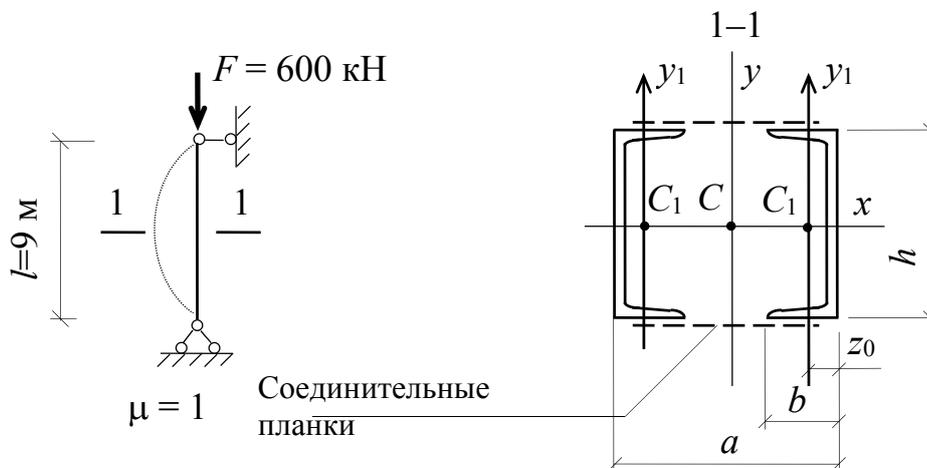


Рис. 9.5

Решение

1. *Подбор поперечного сечения.* Предполагаем, что стойка теряет устойчивость относительно оси x , так как при изменении расстояния " a " момент инерции и гибкость стержня относительно неё не меняются. Расчёт ведём методом последовательных приближений.

1-й этап. Принимаем $\varphi_{1н} = 0,5$.

Вычисляем площадь сечения:

$$A_1 = \frac{600 \cdot 10^3 \cdot 10^4}{0,5 \cdot 160 \cdot 10^6} = 75 \text{ см}^2.$$

По ГОСТ принимаем два швеллера № 30

$$A_1 = 2 \cdot 40,5 = 81 \text{ см}^2 > 75 \text{ см}^2 \text{ и } i_x = 12 \text{ см.}$$

Вычисляем гибкость:

$$\lambda_1 = \frac{\mu l}{i_x} = \frac{1 \cdot 900}{12} = 75.$$

По одной из таблиц интерполяцией находим коэффициент продольного изгиба:

$$\varphi_{1к} = 0,754 - \frac{0,754 - 0,686}{10} \cdot 5 = 0,720.$$

Проверяем условие безопасной работы

$$\sigma^{(1)} = \frac{600 \cdot 10^3}{81 \cdot 10^{-4}} = 7,41 \cdot 10^7 \text{ Н/м}^2 = 74,1 \text{ МПа} < \\ < \varphi_{1к} R = 0,72 \cdot 160 = 115,2 \text{ МПа.}$$

Недонапряжение – более 35%. Площадь поперечного сечения слишком велика. Делаем второе приближение.

2-й этап. Принимаем $\varphi_{2н} = \frac{0,5 + 0,720}{2} = 0,610$.

Требуемая площадь сечения

$$A_2 = \frac{600 \cdot 10^7}{0,61 \cdot 160 \cdot 10^6} = 61,5 \text{ см}^2.$$

Принимаем два швеллера № 27

$$A_2 = 2 \cdot 35,2 = 70,4 \text{ см}^2 > 61,5 \text{ см}^2, i_x = 10,9 \text{ см.}$$

Гибкость

$$\lambda_2 = \frac{1 \cdot 900}{10,9} = 82,6.$$

По таблице интерполяцией находим коэффициент продольного изгиба:

$$\varphi_{2к} = 0,686 - \frac{0,686 - 0,612}{10} \cdot 2,6 = 0,667.$$

Проверяем напряжение:

$$\sigma^{(2)} = \frac{600 \cdot 10^3}{70,4 \cdot 10^{-4}} = 85,2 \text{ МПа} < \varphi_{2к} R = 0,667 \cdot 160 = 106,7 \text{ МПа.}$$

Недонапряжение – около 20%. Делаем третье приближение.

3-й этап. Принимаем $\varphi_{3н} = \frac{\varphi_{2н} + \varphi_{2к}}{2} = \frac{0,61 + 0,667}{2} = 0,639$.

Тогда:

$$A_3 = \frac{600 \cdot 10^3 \cdot 10^4}{0,639 \cdot 160 \cdot 10^6} = 58,68 \text{ см}^2.$$

Для одного швеллера

$$A_3 = \frac{58,68}{2} = 29,34 \text{ см}^2.$$

Принимаем два швеллера № 24

$$A_3 = 2 \cdot 30,6 = 61,2 \text{ см}^2 \text{ и } i_x = 9,73 \text{ см.}$$

Гибкость

$$\lambda_3 = \frac{1 \cdot 900}{9,73} = 92,50.$$

По таблице интерполяцией определяем $\varphi_{3к}$:

$$\varphi_{3к} = 0,612 - \frac{0,612 - 0,542}{10} \cdot 2,5 = 0,595.$$

Проверяем условие безопасной работы

$$\sigma^{(3)} = \frac{600 \cdot 10^3}{61,2 \cdot 10^{-4}} = 98 \text{ МПа} > \varphi_{3к} R = 0,595 \cdot 160 = 95,2 \text{ МПа.}$$

Перенапряжение недопустимо, поэтому возвращаемся ко 2-му этапу и принимаем окончательно два швеллера № 27

$$I_x = 4160 \text{ см}^4, I_y = 262 \text{ см}^4, A = 35,2 \text{ см}^2 \text{ и } z_0 = 2,47 \text{ см.}$$

2. Определение расстояния "a" между швеллерами. Из условия равноустойчивости $I_x = I_y$. С учётом параллельного переноса осей имеем:

$$I_y = 2 \left[I_{y1} + A \left(\frac{a}{2} - z_0 \right)^2 \right] = I_x.$$

Тогда

$$I_y = 2 \left[262 + 35,2 \cdot \left(\frac{a}{2} - z_0 \right)^2 \right] = 2 \cdot 4160,$$

или

$$\left(\frac{a}{2} - z_0\right)^2 = \frac{4160 - 262}{35,2} = 110,7 \text{ см.}$$

Отсюда

$$\frac{a}{2} - z_0 = \sqrt{110,7} = 10,52 \text{ см и } a = 2 \cdot (10,52 + 2,47) = 25,98 \text{ см}$$

Пример 9.6. Подобрать поперечные сечения в виде круга и трубы при отношении $\frac{d}{D} = 0,9$. Сравнить их по расходу материала при $R = 160$ МПа (рис.9.6).

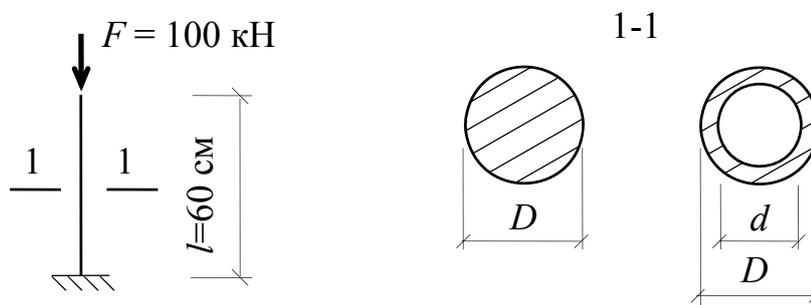


Рис. 9.6

Решение

1. *Определение диаметра круга.*

1-й этап. Принимаем $\varphi_{1н} = 0,5$. Находим площадь сечения:

$$A_1 = \frac{F}{\varphi_{1н} R} = \frac{100 \cdot 10^3 \text{ (Н)} \cdot 10^4}{0,5 \cdot 160 \cdot 10^6 \text{ (Н/м}^2\text{)}} = 12,5 \text{ см}^2.$$

Далее по площади определяем диаметр круга и радиус инерции:

$$D_1 = \sqrt{\frac{4A}{\pi}} = \sqrt{\frac{4 \cdot 12,5}{3,14}} = 4 \text{ см,}$$

$$i_1 = \sqrt{\frac{I}{A_1}} = \sqrt{\frac{R^4}{4R^2}} = \frac{R}{2} = \frac{D}{4} = \frac{4}{4} = 1 \text{ см.}$$

Согласно способу закрепления $\mu = 2$ и гибкость

$$\lambda_1 = \frac{\mu l}{i} = \frac{2 \cdot 60}{1} = 120.$$

По таблице принимаем $\varphi_{1к} = 0,419$. Проверяем условие безопасной работы

$$\sigma^{(1)} = \frac{100 \cdot 10^3}{12,5 \cdot 10^{-4}} = 80 \text{ МПа} > \varphi_{1к} R = 0,419 \cdot 160 = 67,04 \text{ МПа.}$$

Перенапряжение – около 19%. Это недопустимо. Площадь поперечного сечения недостаточна. Делаем второе приближение.

2-й этап. Принимаем

$$\varphi_{2н} = \frac{0,5 + 0,419}{2} = 0,459.$$

Находим:

$$A_2 = \frac{100 \cdot 10^7}{0,459 \cdot 160 \cdot 10^6} = 13,62 \text{ см}^2;$$

$$D_2 = \sqrt{\frac{4 \cdot 13,62}{3,14}} = 4,16 \text{ см,}$$

$$i_2 = \frac{4,16}{4} = 1,04 \text{ см,}$$

$$\lambda_2 = \frac{2 \cdot 60}{1,04} = 115,4.$$

По таблице, интерполируя, принимаем

$$\varphi_{2к} = 0,478 - \frac{0,478 - 0,419}{10} \cdot 5,4 = 0,446.$$

Проверяем условие безопасной работы

$$\sigma^{(2)} = \frac{100 \cdot 10^3}{13,62 \cdot 10^{-4}} = 73,4 \text{ МПа} > \varphi_{2к} R = 0,446 \cdot 160 = 71,4 \text{ МПа.}$$

Перенапряжение – около 2,8%. Выполняем третье приближение.

3 этап. Принимаем

$$\varphi_{3н} = \frac{0,459 + 0,446}{2} = 0,453.$$

Находим:

$$A_3 = \frac{100 \cdot 10^7}{0,453 \cdot 160 \cdot 10^6} = 13,8 \text{ см}^2;$$

$$D_3 = \sqrt{\frac{4 \cdot 13,8}{3,14}} = 4,19 \text{ см,}$$

$$i_3 = \frac{4,19}{4} = 1,05 \text{ см};$$

$$\lambda_3 = \frac{2 \cdot 60}{1,05} = 114,3;$$

$$\varphi_{3к} = 0,478 - \frac{0,478 - 0,419}{10} \cdot 4,3 = 0,453;$$

$$\sigma^{(3)} = \frac{100 \cdot 10^3}{13,8 \cdot 10^{-4}} = 72,5 \text{ МПа} = \varphi_{3к} R = 0,453 \cdot 160 = 72,5 \text{ МПа}.$$

Условие безопасной работы выполняется.

2. *Определение диаметра трубы при $d/D = 0,9$.*

1-й этап. Принимаем $\varphi_{1н} = 0,5$.

Находим площадь сечения:

$$A_1 = \frac{100 \cdot 10^7}{0,5 \cdot 160 \cdot 10^6} = 12,5 \text{ см}^2.$$

Для трубы площадь сечения равна:

$$A = \frac{\pi}{4} D^2 \left[1 - \left(\frac{d}{D} \right)^2 \right] = 0,785 D^2 (1 - 0,9^2) = 0,149 D^2.$$

Откуда

$$D_1 = \sqrt{\frac{A_1}{0,149}} = \sqrt{\frac{12,5}{0,149}} = 9,16 \text{ см}.$$

Момент инерции

$$I = \frac{\pi D^4}{64} \left[1 - \left(\frac{d}{D} \right)^4 \right] = \frac{3,14}{64} D^4 [1 - 0,9^4] = 0,017 D^4.$$

Радиус инерции

$$i_1 = \sqrt{\frac{I}{A}} = \sqrt{\frac{0,017 D^4}{0,149 D^2}} = 0,338 D_1 = 0,338 \cdot 9,16 = 3,1 \text{ см}.$$

Гибкость

$$\lambda_1 = \frac{\mu l}{i_1} = \frac{2 \cdot 60}{3,1} = 38,71.$$

По таблице принимаем

$$\varphi_{1к} = 0,931 - \frac{0,931 - 0,894}{10} \cdot (38,71 - 30,71) = 0,899.$$

Напряжение

$$\sigma^{(1)} = \frac{100 \cdot 10^3}{12,5 \cdot 10^{-4}} = 80 \text{ МПа} < \varphi_{1к} \cdot R = 0,899 \cdot 160 = 144 \text{ МПа.}$$

Недонапряжение составило около 31%. Делаем второе приближение.

2-й этап. Принимаем

$$\varphi_{2i} = \frac{0,5 + 0,899}{2} = 0,7.$$

Находим:

$$A_2 = \frac{100 \cdot 10^7}{0,7 \cdot 160 \cdot 10^6} = 8,93 \text{ см}^2;$$

$$D_2 = \sqrt{\frac{8,93}{0,149}} = 7,74 \text{ см};$$

$$i_2 = 0,338D = 0,338 \cdot 7,74 = 2,62 \text{ см};$$

$$\lambda_2 = \frac{2 \cdot 60}{2,62} = 45,8;$$

$$\varphi_{2к} = 0,894 - \frac{0,894 - 0,852}{10} \cdot 5,8 = 0,870;$$

$$\sigma^{(2)} = \frac{100 \cdot 10^3}{8,93 \cdot 10^{-4}} = 112 \text{ МПа} < \varphi_{2к} \cdot R = 0,87 \cdot 160 = 139 \text{ МПа.}$$

Недонапряжение – около 20%. Делаем третье приближение.

3-й этап. Принимаем:

$$\varphi_{3н} = \frac{0,7 + 0,87}{2} = 0,785;$$

$$A_3 = \frac{100 \cdot 10^7}{0,785 \cdot 160 \cdot 10^6} = 7,96 \text{ см}^2;$$

$$D_3 = \sqrt{\frac{7,96}{0,149}} = 7,31 \text{ см.}$$

Находим:

$$i_3 = 0,338 \cdot 7,31 = 2,47 \text{ см};$$

$$\lambda_3 = \frac{2 \cdot 60}{2,47} = 48,58;$$

$$\varphi_{3к} = 0,894 - \frac{0,894 - 0,852}{10} \cdot 8,58 = 0,858;$$

$$\sigma^{(3)} = \frac{100 \cdot 10^3}{7,96 \cdot 10^{-4}} = 125,6 \text{ МПа} < \varphi_{3к} \cdot R = 0,858 \cdot 160 = 137,3 \text{ МПа.}$$

Недонапряжение – около 9%. Делаем четвертое приближение.
4 этап. Принимаем

$$\varphi_{4н} = \frac{0,785 + 0,858}{2} = 0,821.$$

Находим:

$$A_4 = \frac{100 \cdot 10^7}{0,821 \cdot 160 \cdot 10^6} = 7,61 \text{ см}^2;$$

$$D_4 = \sqrt{\frac{7,61}{0,149}} = 7,15 \text{ см,}$$

$$i_4 = 0,338 \cdot 7,15 = 2,42 \text{ см,}$$

$$\lambda_4 = \frac{2 \cdot 60}{2,42} = 49,59 ;$$

$$\varphi_{4ê} = 0,894 - \frac{0,894 - 0,852}{10} \cdot 9,59 = 0,854;$$

$$\sigma^{(4)} = \frac{100 \cdot 10^3}{7,61 \cdot 10^{-4}} = 131,4 \text{ МПа} < \varphi_{4к} R = 0,854 \cdot 160 = 136,6 \text{ МПа.}$$

Недонапряжение – около 4%. Процесс вычисления прекращаем.

Принимаем в соответствии с ГОСТ 104-91 (см. прил. 6) трубу $D = 70$ мм с $A = 7,9 \text{ см}^2 > A_4 = 7,61 \text{ см}^2$ и $i = 2,4$ см. Проверяем условие безопасной работы:

$$\lambda = \frac{2,60}{2,4} = 50; \quad \varphi = 0,825;$$

$$\sigma = \frac{100 \cdot 10^3}{7,9 \cdot 10^{-4}} = 126,6 \text{ МПа} < \varphi \cdot R = 0,825 \cdot 160 = 132,0 \text{ МПа.}$$

Условие выполняется.

Сравнение показывает, что на трубчатое поперечное сечение ($A=7,9 \text{ см}^2$) расходуется в 1,75 раза меньше материала, чем на круглое ($A = 13,8 \text{ см}^2$).

Пример 9.7. Подобрать поперечное сечение стержня в виде двух швеллеров и двутавра из условия равноустойчивости при $R = 210$ МПа (рис. 9/7).

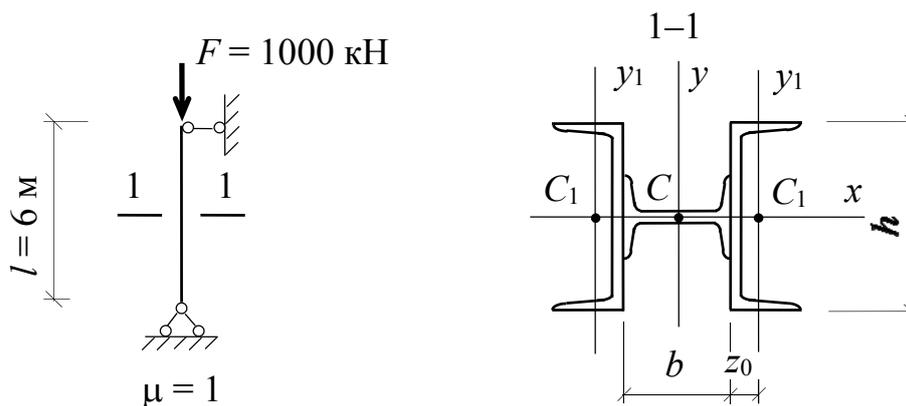


Рис. 9.7

Решение

Условия закрепления стержня в обоих направлениях x и y одинаковы. Поэтому при подборе сечения необходимо исходить из равенства радиусов инерции относительно осей x и y : $i_x = i_y$. Для этого воспользуемся приближенными для прокатных профилей зависимостями, связывающими радиусы инерции и габаритные размеры сечения b и h :

$$i_x = 0,32h \text{ и } i_y = 0,58b.$$

Из равенства радиусов инерции находим:

$$b = \frac{0,32}{0,58} \cdot h = 0,55h.$$

Таким образом, из сортаментов ГОСТов нужно подобрать двутавр и швеллера так, чтобы высота двутавра была примерно в два раза меньше высоты швеллера.

1. *Подбор поперечного сечения.*

1-й этап. Принимаем $\varphi_{1н} = 0,5$. Определяем площадь сечения:

$$A_1 = \frac{F}{\varphi_{1н} \cdot R} = \frac{1000 \cdot 10^3}{0,5 \cdot 210 \cdot 16^6} = 9,52 \cdot 10^{-3} \text{ м}^2 = 95,2 \text{ см}^2.$$

По сортаментам ГОСТов принимаем:

два швеллера № 30:

$$h = 30 \text{ см}, \quad A^{(1)} = 40,5 \text{ см}^2, \quad I_x^{(1)} = 5810 \text{ см}^4,$$

$$I_{y_1}^{(1)} = 327 \text{ см}^2, \quad z_0 = 2,52 \text{ см};$$

двутавр № 16:

$$b = 16 \text{ см}, \quad A^{(2)} = 20,2 \text{ см}^2, \quad I_y^{(2)} = 873 \text{ см}^4,$$

$$I_x^{(2)} = 58,6 \text{ см}^4.$$

Проверяем условие равноустойчивости:

$$b/h = \frac{16}{30} = 0,53 \approx 0,55.$$

Условие выполняется приближенно. Общая площадь больше требуемой:

$$A = 2 \cdot A^{(1)} + A^{(2)} = 2 \cdot 40,5 + 20,2 = 101,2 \text{ см}^2 > A_1 = 95,2 \text{ см}^2.$$

Находим момент инерции всего сечения:

$$I_y = 2I_y^{(1)} + I_x^{(2)} = 2 \cdot 5810 + 58,6 = 11680 \text{ см}^4;$$

$$\begin{aligned} I_y &= 2 \left(I_{y_1}^{(1)} + (z_0 + 0,5b)^2 \cdot A^{(1)} \right) + I_y^{(2)} = \\ &= 2 \left(327 + (2,52 + 0,5 \cdot 16)^2 \cdot 40,5 \right) + 873 = 10490 \text{ см}^4. \end{aligned}$$

Сравнивая I_x и I_y , убеждаемся, что они мало отличаются друг от друга. Полного их совпадения добиться нельзя, так как размеры b и h обусловлены сортаментом. Для дальнейших расчётов используем $I_{\min} = I_y = 10490 \text{ см}^4$.

Радиус инерции

$$i_{\min} = i_y = \sqrt{\frac{I_y}{A}} = \sqrt{\frac{10490}{101,2}} = 10,2 \text{ см.}$$

Находим наибольшую гибкость:

$$\lambda_{\max} = \lambda_y = \frac{\mu l}{i_{\min}} = \frac{1 \cdot 600}{10,2} = 58,8.$$

По таблице

$$\varphi_{1к} = 0,852 - \frac{0,852 - 0,805}{10} 58,8 = 0,811.$$

Проверяем условие безопасной работы

$$\begin{aligned} \sigma^{(1)} = \frac{F}{A} &= \frac{1000 \cdot 10^3}{101,2 \cdot 10^{-4}} = 9,88 \cdot 10^7 \text{ Н/м}^2 = 98,8 \text{ МПа} < \\ &< \varphi_{1к} \cdot R = 0,811 \cdot 210 = 170,3 \text{ МПа.} \end{aligned}$$

Недонапряжение составляет около 42%. Сечение слишком велико и необходимо сделать второе приближение.

2-й этап. Принимаем

$$\varphi_{2н} = \frac{0,5 + 0,811}{2} = 0,656.$$

Требуемая площадь

$$A_2 = \frac{1000 \cdot 10^3}{0,656 \cdot 210 \cdot 10^6} = 7,26 \cdot 10^{-3} \text{ м}^2 = 72,6 \text{ см}^2.$$

Из сортаментов находим:

два швеллера № 24

$$A^{(1)} = 30,6 \text{ см}^2, \quad I_x^{(1)} = 2900 \text{ см}^4, \quad I_y^{(1)} = 208 \text{ см}^4, \\ z_0 = 2,42 \text{ см},$$

двутавр № 12

$$A^{(2)} = 14,7 \text{ см}^2, \quad I_x^{(2)} = 27,9 \text{ см}^4, \quad I_y^{(2)} = 350 \text{ см}^4.$$

Проверяем условие равноустойчивости

$$b/h = \frac{12}{24} = 0,5 \approx 0,55.$$

Условие приближенно выполняется. Общая площадь больше требуемой:

$$A = 2 \cdot 30,6 + 14,7 = 75,9 \text{ см}^2 > A_2 = 72,6 \text{ см}^2.$$

Находим моменты инерции всего сечения:

$$I_x = 2 \cdot 2900 + 27,9 = 5828 \text{ см}^4; \\ I_y = 350 + 2 \cdot 208 + 2 \cdot (2,42 + 0,5 \cdot 12)^2 \cdot 30,6 = 5105 \text{ см}^4.$$

Радиус инерции и гибкость:

$$i_2 = \sqrt{\frac{5105}{75,9}} = 8,2 \text{ см}, \quad \lambda_2 = \frac{1600}{8,2} = 73,17.$$

По таблице

$$\varphi_{2\kappa} = 0,754 - \frac{0,754 - 0,686}{10} \cdot 3,2 = 0,732.$$

Проверяем напряжение

$$\sigma^{(2)} = \frac{1000 \cdot 10^3}{75,9 \cdot 10^{-4}} = 13,17 \cdot 10^7 \text{ Н/м}^2 = 131,7 \text{ МПа} < \\ < \varphi_{2\kappa} \cdot R = 0,732 \cdot 210 = 153,7 \text{ МПа}.$$

Недонапряжение – около 14%. Сечение имеет лишнюю площадь. Переходим к третьему этапу.

3-й этап. Принимаем:

$$\varphi_{3н} = \frac{0,656 + 0,732}{2} = 0,694;$$

$$A_3 = \frac{1000 \cdot 10^3}{0,694 \cdot 210 \cdot 10^6} = 6,87 \cdot 10^{-3} \text{ м}^2 = 68,7 \text{ см}^2.$$

Принимаем из сортаментов:

два швеллера № 22

$$A^{(1)} = 26,7 \text{ см}^2, \quad I_x^{(1)} = 2110 \text{ см}^4, \quad I_{y_1}^{(1)} = 151 \text{ см}^4, \\ z_0 = 2,21 \text{ см};$$

двутавр № 12

$$A^{(2)} = 14,7 \text{ см}^2, \quad I_y^{(2)} = 350 \text{ см}^4, \quad I_x^{(2)} = 27,9 \text{ см}^4.$$

Условие равноустойчивости выполняется:

$$b/h = \frac{12}{22} = 0,55.$$

Общая площадь принятого сечения

$$A = 2 \cdot 26,7 + 14,7 = 68,1 \text{ см}^2 \approx A_3 = 68,7 \text{ см}^2.$$

Видим, что принятая площадь почти равна требуемой.

Вычисляем моменты инерции принятого сечения:

$$I_x = 2 \cdot 2110 + 27,9 = 4247,9 \text{ см}^4;$$

$$I_y = 350 + 2 \cdot 151 + 2 \cdot (2,21 + 0,5 \cdot 12)^2 \cdot 26,7 = 4251 \text{ см}^4.$$

Минимальный радиус инерции

$$i_3 = i_x = i_{\min} = \sqrt{\frac{4247,9}{68,1}} = 7,9 \text{ см}.$$

Гибкость

$$\lambda_3 = \frac{1600}{7,9} = 75,95.$$

По таблице

$$\varphi_{3к} = 0,754 - \frac{0,754 - 0,686}{10} \cdot 5,95 = 0,714.$$

Напряжение

$$\sigma^{(3)} = \frac{1000 \cdot 10^3}{68,1 \cdot 10^{-4}} = 14,68 \cdot 10^7 \text{ Н/м}^2 = 146,8 \text{ МПа} < \\ < \phi_{3к} \cdot R = 0,714 \cdot 210 = 149,9 \text{ МПа.}$$

Условие безопасной работы выполняется. Недонапряжение составляет – 2,07%. Большой степени близости σ_i и $\phi_{ik} \cdot R$ достичь не удастся без нарушения условия безопасной работы

$$\sigma_i = \frac{F}{A_i} \leq \phi_{ik} \cdot R.$$

Окончательно принимаем два швеллера № 22 и двутавр № 12.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Варданян, Г.С. Сопротивление материалов с основами теории упругости и пластичности [Текст] / Г.С. Варданян, В.И. Андреев, Н.М. Атаров, А.А. Горшков. – М.: Инфра-М, 2010.
2. Техническая механика. Краткий курс в примерах и задачах [Текст]: учеб. пособие / С.В. Бакушев [и др.]. – Пенза: ПГУАС, 2014 – 176 с.
3. Черячукин, В.В. Лекции по технической механике для студентов-строителей [Текст]: учеб. пособие / В.В. Черячукин. – Пенза: ПГУАС, 2012. – 300 с.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Введение	3
Тема №1 ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ПЛОСКИХ СЕЧЕНИЙ	6
Тема №2 ОСЕВОЕ РАСТЯЖЕНИЕ (СЖАТИЕ) БРУСА	15
Тема №3 КРУЧЕНИЕ БРУСА КРУГЛОГО СЕЧЕНИЯ	19
Тема № 4 ПЛОСКИЙ ПОПЕРЕЧНЫЙ ИЗГИБ БРУСА	29
Тема № 5 РАСЧЕТ БАЛОК НА ЖЁСТКОСТЬ ПРИ ПЛОСКОМ ПОПЕРЕЧНОМ ИЗГИБЕ	37
Тема №6 ВНЕЦЕНТРЕННОЕ СЖАТИЕ (РАСТЯЖЕНИЕ) БРУСА БОЛЬШОЙ ЖЁСТКОСТИ	44
Тема №7 КОСОЙ ИЗГИБ	51
Тема №8 ОДНОВРЕМЕННОЕ ДЕЙСТВИЕ ИЗГИБА И ПРОДОЛЬНОЙ СИЛЫ	59
Тема №9 УСТОЙЧИВОСТЬ ЦЕНТРАЛЬНО СЖАТЫХ СТЕРЖНЕЙ	62
БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК	83

Учебное издание

Зернов Владимир Викторович

ТЕХНИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА

Учебно-методическое пособие к практическим занятиям
по направлению подготовки 08.03.01 «Строительство»

В авторской редакции

Верстка Н.В. Кучина

Подписано в печать 06.06.16. Формат 60x84/16.

Бумага офисная «Снегурочка». Печать на ризографе.

Усл.печ.л. 4,88 Уч.-изд.л. 5,25. Тираж 80 экз.

Заказ № 371.

Издательство ПГУАС.

440028, г. Пенза, ул. Германа Титова, 28.