

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

---

Федеральное государственное бюджетное  
образовательное учреждение высшего образования  
«Пензенский государственный университет  
архитектуры и строительства»  
(ПГУАС)

В.П. Волков

## **СОПРОТИВЛЕНИЕ МАТЕРИАЛОВ**

Учебно-методическое пособие  
для практических занятий по направлениям подготовки  
08.05.01 «Строительство уникальных зданий и сооружений»,  
08.03.01 «Строительство»

Пенза 2016

УДК 539.3/6(075.8)  
ББК 30.121я73  
В67

Рецензенты: главный конструктор ОАО «Приволжское  
КБ», кандидат технических наук, доцент  
В.М. Машин;  
заслуженный строитель РФ, кандидат тех-  
нических наук, профессор В.С. Абрашитов  
(ПГУАС)

**Волков В.П.**

В67 Соппротивление материалов: учебно-методическое пособие для  
практических занятий по направлениям подготовки 08.05.01  
«Строительство уникальных зданий и сооружений», 08.03.01  
«Строительство» / В.П. Волков. – Пенза: ПГУАС, 2016. – 164 с.

Приведены краткие теоретические сведения, примеры решения обычных и нестандартных, требующих при решении оригинального подхода задач, и задачи для самостоятельного решения по различным разделам курса сопротивления материалов.

Учебно-методическое пособие подготовлено на кафедре «Механика» и предназначено для студентов, изучающих курс «Соппротивление материалов», обучающихся по направлениям подготовки 08.05.01 «Строительство уникальных зданий и сооружений», 08.03.01 «Строительство». Также оно может быть полезно аспирантам, исследующим вопросы расчета элементов зданий и сооружений на прочность и жесткость, и преподавателям курсов «Соппротивление материалов» и «Техническая механика».

© Пензенский государственный университет  
архитектуры и строительства, 2016  
© Волков В.П., 2016

## ПРЕДИСЛОВИЕ

Сопротивление материалов – наука о прочности, жесткости и устойчивости стержня, т.е. одного из основных элементов строительных конструкций. Умение определять напряженно-деформированное состояние стержня от действия различных внешних силовых, деформационных и температурных воздействий является необходимым требованием к инженеру.

В учебно-методическом пособии рассмотрен один из возможных вариантов решения представленных задач. В основном в данном пособии рассмотрены задачи из [3], т.е. как стандартные, так и задачи повышенной трудности, так и задачи, требующие нестандартного оригинального подхода к их решению, так и задачи показывающие ограниченность некоторых стандартных подходов, правил и теорем. Как и в [3], задачи сгруппированы по темам, относящимся к различным разделам сопротивления материалов. Краткие теоретические сведения и формулы, необходимые при решении задач по данной тематике, приведены в виде справочника в начале каждого раздела. Разбор примеров решения таких задач значительно помогает студентам самостоятельно освоить основные разделы сопротивления материалов. В конце каждого раздела представлены задачи для самостоятельного решения с ответами.

В учебно-методическом пособии рассмотрено более трехсот задач, которые могут быть использованы как при проведении практических занятий по сопротивлению материалов и технической механике, так и при проведении олимпиад по сопротивлению материалов и при организации учебно-исследовательской работы студентов, в кружках, а также студентами и преподавателями, интересующимися задачами необычного типа с целью углубить свои знания по сопротивлению материалов.

# Глава 1. РАСТЯЖЕНИЕ (СЖАТИЕ) ПРЯМОГО СТЕРЖНЯ

## Краткие теоретические сведения

### Основные понятия и обозначения

$u = u(z) \rightarrow$  продольное перемещение поперечного сечения стержня;

$\varepsilon = \varepsilon(z) \rightarrow$  относительная линейная или продольная деформация;

$N = N(z) \rightarrow$  продольная сила в поперечном сечении стержня;

$A = A(z) \rightarrow$  площадь поперечного сечения стержня;

$\Delta dz \rightarrow$  абсолютная деформация или приращение элемента  $dz$ .

### Напряженное состояние

а) дифференциальная зависимость внутренних усилий от внешней нагрузки:

$$\frac{dN}{dz} = \pm q_z, \quad N(z) = \int \pm q_z dz + N_0;$$

б) напряжения в произвольной точке поперечного сечения стержня:

$$\tau = 0; \quad \sigma = \frac{N}{A} \rightarrow \text{это линейное напряженное состояние};$$

в) условие прочности материала стержня:

$$\sigma_{\max} \leq R.$$

### Деформированное состояние

$\varepsilon = \frac{\Delta dz}{dz} \rightarrow$  относительная линейная деформация элемента  $dz$ ;

$\varepsilon = \alpha_t \cdot \Delta t \rightarrow$  деформация элемента  $dz$  от изменения температуры  $\Delta t$ .

### Определение перемещений

а) при упругой деформации зависимость  $\sigma = \sigma(\varepsilon)$  из закона Гука:

$$\sigma = E \cdot \varepsilon;$$

б) методом непосредственного интегрирования:

$$\frac{du}{dz} = \varepsilon \Rightarrow \frac{N}{EA}, \quad u(z) = \int \frac{N}{EA} dz + u_0;$$

в) по формуле Мора:

$$\delta_{iF} = \sum \int \bar{N}_i \left( \frac{N_F}{EA} + \alpha_t \Delta t \right) dz,$$

где  $\delta_{iF} \rightarrow$  проекция полного перемещения на  $i$ -е направление от внешней нагрузки  $F$  и  $\Delta t = \frac{t_b + t_n}{2} - t_0$  (причина);

$N_F \rightarrow$  "грузовая" эпюра  $N$  от внешней нагрузки  $F$ ;

$\bar{N}_i \rightarrow$  "единичная" эпюра  $N$  от единичного усилия по  $i$ -му направлению.

Потенциальная энергия упругой деформации

$$U = \frac{N \cdot \Delta dz}{2} \Rightarrow \frac{N^2}{2EA} dz, \quad U = \frac{1}{2} \sum \int \frac{N^2}{EA} dz.$$

## Примеры решения задач

**1.1. Сила  $F$  совершает медленное вращательное движение в плоскости стержневой конструкции. Определить из условия прочности угол, при котором конструкция будет иметь наименьший вес. Размер  $a$  задан.**

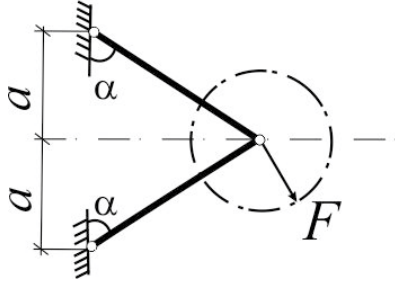


Рис. 1.1

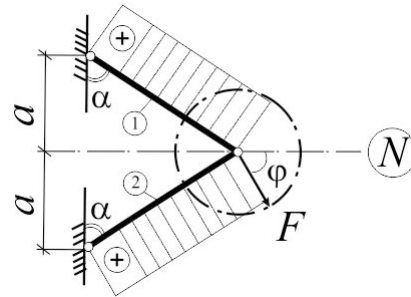


Рис. 1.1 (а)

### Решение

Из равновесия узла:

$$\begin{cases} N_1 = \frac{F}{2} \left( \frac{\cos \varphi}{\sin \alpha} + \frac{\sin \varphi}{\cos \alpha} \right) = F \frac{\cos(\varphi - \alpha)}{\sin(2\alpha)}, & \begin{cases} 0 < \alpha < \pi/2 \\ 0 \leq \varphi \leq 2\pi \cdot n \end{cases} \\ N_2 = \frac{F}{2} \left( \frac{\cos \varphi}{\sin \alpha} - \frac{\sin \varphi}{\cos \alpha} \right) = F \frac{\cos(\varphi + \alpha)}{\sin(2\alpha)}. \end{cases}$$

$$0 \leq (\varphi \pm \alpha) \leq 2\pi: N_i = N_{\max}, \text{ если } |\cos(\varphi \pm \alpha)| = 1: N_{\max} = F / \sin(2\alpha);$$

$$\sigma_{\max} = \frac{N_{\max}}{A} \leq R: A \geq \frac{N_{\max}}{R} = \frac{F}{R \sin(2\alpha)}, V = A \cdot l = \frac{F}{R \sin(2\alpha)} \cdot \frac{a}{\cos \alpha}.$$

Т.к.  $V = V_{\min}$ , если  $V'(\alpha) = 0$ , тогда

$$\dot{V} = 0: \frac{F \cdot a}{R} \cdot (-1) \cdot \frac{1}{(\sin(2\alpha) \cos \alpha)^2} \cdot (\cos 2\alpha \cdot 2 \cos \alpha - \sin 2\alpha \cdot \sin \alpha) = 0,$$

$$\operatorname{tg}(2\alpha) \cdot \operatorname{tg} \alpha = 2, \frac{2 \operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha} \cdot \operatorname{tg} \alpha = 2, \operatorname{tg}^2 \alpha = \frac{1}{2}, \operatorname{tg} \alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Ответ:  $\alpha = \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{2}}{2}$ .

1.2. Дано:  $E_1A_1 = E_2A_2$ . Определить, при каком значении угла  $\alpha$  перемещение узла  $B$  будет совпадать с линией действия силы  $F$ . Сила  $F$  действует в плоскости фермы в любом направлении (рис.1.2).

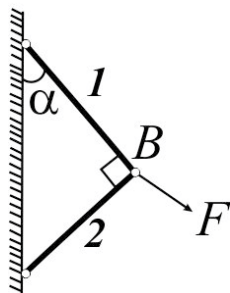


Рис. 1.2

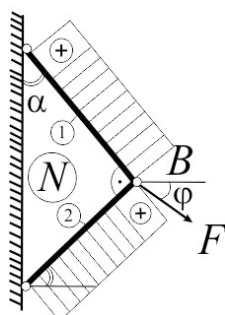


Рис. 1.2 (а)

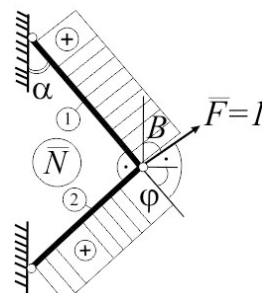


Рис. 1.2 (б)

### Решение

Из равновесия узла:

$$\begin{cases} N_1 = F(\sin \alpha \cos \varphi + \sin \varphi \cos \alpha) = F \sin(\alpha + \varphi) \\ N_2 = F(\cos \alpha \cos \varphi - \sin \alpha \sin \varphi) = F \cos(\alpha + \varphi) \end{cases}, \text{ где } \begin{cases} 0 < \alpha < \pi / 2 \\ 0 \leq \varphi \leq 2\pi \end{cases};$$

$$\begin{cases} \bar{N}_1 = \bar{F}(\sin \alpha \sin \varphi - \cos \varphi \cos \alpha) = \bar{F}(-\cos(\alpha + \varphi)) \\ \bar{N}_2 = \bar{F}(\cos \alpha \sin \varphi + \sin \alpha \cos \varphi) = \bar{F} \cdot \sin(\alpha + \varphi) \end{cases}.$$

$$\Delta_B = \sum \int \frac{N_i \bar{N}_i}{E_i A_i} ds \Rightarrow 0:$$

$$-\frac{l \cos \alpha}{E_1 A_1} F \sin(\alpha + \varphi) \cos(\alpha + \varphi) + \frac{l \sin \alpha}{E_2 A_2} F \cos(\alpha + \varphi) \sin(\alpha + \varphi) = 0,$$

$$\sin \alpha = \cos \alpha.$$

Ответ:  $\alpha = \pi / 4$ .

1.4. Определить, какая зависимость должна быть между углами  $\alpha$  и  $\theta$ , чтобы перемещение узла  $A$  было направлено по линии действия силы  $F$  (рис.1.4).

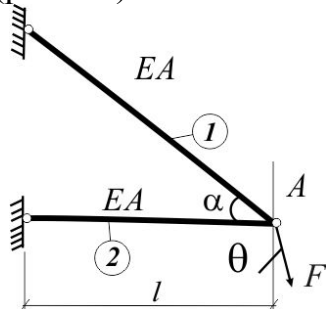


Рис. 1.4

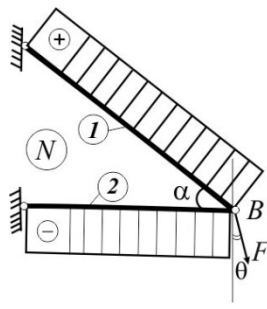


Рис.1.4 (а)

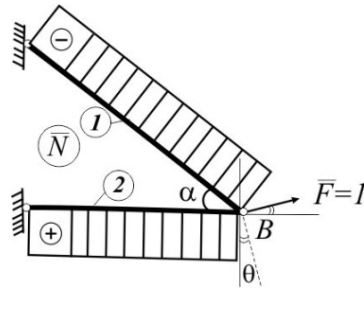


Рис. 1.4 (б)

## Решение

Из равновесия узла:

$$\begin{cases} N_1 = F \cdot \frac{\cos \theta}{\sin \alpha} \\ N_2 = -F \left( \frac{\cos \theta}{\sin \alpha} \cdot \cos \alpha - \sin \theta \right) = -F \cos(\theta + \alpha) / \sin \alpha \end{cases};$$

$$\begin{cases} \bar{N}_1 = -\bar{F} \cdot \frac{\sin \theta}{\sin \alpha} \\ \bar{N}_2 = -\bar{F} \left( \cos \theta + \sin \theta \cdot \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} \right) = \bar{F} \sin(\theta + \alpha) / \sin \alpha \end{cases}.$$

$$\Delta_B = \sum \int \frac{N\bar{N}}{EA} ds = 0:$$

$$\begin{aligned} & -\frac{l}{\cos \alpha \cdot EA} \cdot F \cdot \frac{\cos \theta}{\sin \alpha} \cdot \frac{\sin \theta}{\sin \alpha} - \frac{l}{EA} \cdot F \frac{\cos(\theta + \alpha)}{\sin \alpha} \cdot \frac{\sin(\theta + \alpha)}{\sin \alpha} = 0, \\ & \frac{\sin(2\theta)}{2 \cos \alpha} + \frac{\sin 2(\theta + \alpha)}{2} = 0. \end{aligned}$$

Ответ:  $\sin(2\theta) + \cos \alpha \sin(2(\theta + \alpha)) = 0$ .

**1.5. Дано:**  $E_1 A_1 = E_2 A_2$ . Сила  $F$ , действующая в плоскости фермы, совершает поворот на  $360^\circ$ . Определить, какую траекторию при этом описывает узел  $B$  в результате деформации стержней 1 и 2 (рис.1.5).

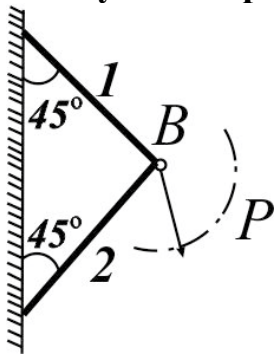


Рис. 1.5

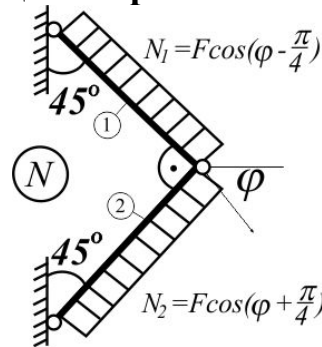


Рис. 1.5(a)

## Решение

$$\begin{cases} \Delta_{1B} = \frac{l}{EA_1} \cdot F \cos\left(\varphi - \frac{\pi}{4}\right) \cdot 1 = \frac{Fl}{EA} \left( \cos \varphi \frac{\sqrt{2}}{2} + \sin \varphi \frac{\sqrt{2}}{2} \right) \\ \Delta_{2B} = \frac{l}{EA_2} \cdot F \cos\left(\varphi + \frac{\pi}{4}\right) \cdot 1 = \frac{Fl}{EA} \left( \cos \varphi \frac{\sqrt{2}}{2} - \sin \varphi \frac{\sqrt{2}}{2} \right) \end{cases}, \quad \{0 \leq \varphi \leq 2\pi.$$

$$\Delta_B = \sqrt{\Delta_{1B}^2 + \Delta_{2B}^2} \Rightarrow \frac{Fl}{EA} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{(\cos \varphi + \sin \varphi)^2 + (\cos \varphi - \sin \varphi)^2} =$$

$$= \frac{Fl}{EA} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{(\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi) + (\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi)} = \frac{Fl}{EA}.$$

Ответ: окружность вокруг В с радиусом  $\frac{Fl}{EA}$ .

1.6. Сила  $F$  может быть приложена в плоскости чертежа под любым углом  $\beta$ . Подобрать площади сечения стержней фермы из условия прочности.  $R = 100$  МПа,  $F = 20$  кН,  $\alpha = 30^\circ$ . Снижение расчетного сопротивления при сжатии не учитывать (рис.1.6).

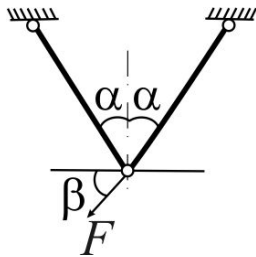


Рис. 1.6

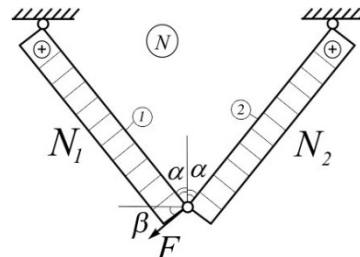


Рис. 1.6 (а)

### Решение

Из равновесия узла:

$$\begin{cases} N_1 = \frac{F}{2} \left( \frac{\sin \beta}{\cos \alpha} - \frac{\cos \beta}{\sin \alpha} \right) = F \frac{(-\cos(\beta + \alpha))}{\sin(2\alpha)} \\ N_2 = \frac{F}{2} \left( \frac{\sin \beta}{\cos \alpha} + \frac{\cos \beta}{\sin \alpha} \right) = F \frac{\cos(\beta - \alpha)}{\sin(2\alpha)} \end{cases}, \begin{cases} 0 < \alpha < \pi/2 \\ 0 \leq \beta \leq 2\pi \end{cases}$$

$$|N_i| = N_{\max}, \text{ если } |\cos(\beta \pm \alpha)| = 1 \Rightarrow N_{\max} = \frac{F}{\sin(2\alpha)}.$$

$$\sigma_{\max} = \frac{|N_{\max}|}{A} \leq R: A \geq \frac{|N_{\max}|}{R} = \frac{F}{R \sin(2\alpha)} = 2,3 \text{ см}^2.$$

Ответ:  $2,3 \text{ см}^2$ .

1.7. На узел В кронштейна, состоящего из стержней BC и BD одинакового поперечного сечения  $A = 5 \text{ см}^2$ , подвешен груз  $F = 30$  кН. Под действием груза  $F$  узел В сместился вправо на  $u = 1,6$  мм и опустился вниз на  $v = 10,5$  мм. Определить модули продольной упругости материалов стержней  $E_{BC}$  и  $E_{BD}$ , если  $l_{BC} = 5$  м,  $l_{BD} = 4$  м (рис.1.7).



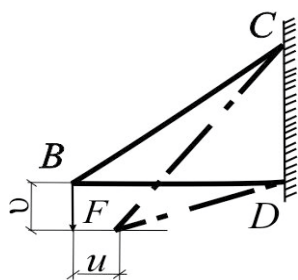


Рис. 1.7

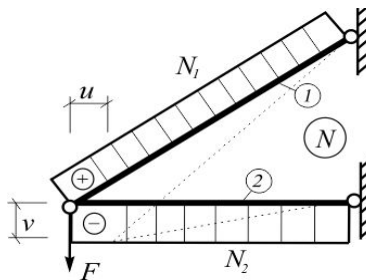


Рис. 1.7(а)

Решение

$$\left\{ \begin{array}{l} N_1 = \frac{F}{3/5} = \frac{5}{3}F \\ N_2 = \frac{F}{3/4} = \frac{4}{3}F \end{array} \right. ; \left\{ \begin{array}{l} v = \frac{(5/3)^2 F}{E_1 A} \cdot 5 \text{ м} + \frac{(4/3)^2 F}{E_2 A} \cdot 4 \text{ м} \\ u = \frac{0}{E_1 A} + \frac{(4/3)^2 F \cdot 1}{E_2 A} \cdot 4 \text{ м} \end{array} \right. ;$$

$$\left\{ \begin{array}{l} E_2 = \frac{(4/3)F \cdot 4 \text{ м}}{u \cdot A} = \frac{(4/3)30 \text{ кН} \cdot 4 \text{ м}}{1,6 \text{ мм} \cdot 5 \text{ см}^2} = 200 \text{ ГПа} \\ E_1 = \frac{(5/3)^2 F \cdot 5 \text{ м}}{\left(v - \frac{4}{3}u\right) \cdot A} = \frac{(5/3)^2 30 \text{ кН} \cdot 5 \text{ м}}{8,37 \text{ мм} \cdot 5 \text{ см}^2} = 100 \text{ ГПа} \end{array} \right.$$

Ответ: 200 ГПа, 100 ГПа.

1.8. Определить, при каком значении угла  $\varphi$  перемещение узла B будет следовать по направлению силы F (рис.1.8).

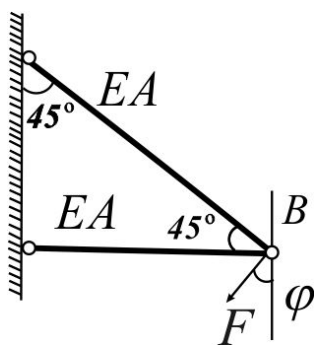


Рис. 1.8

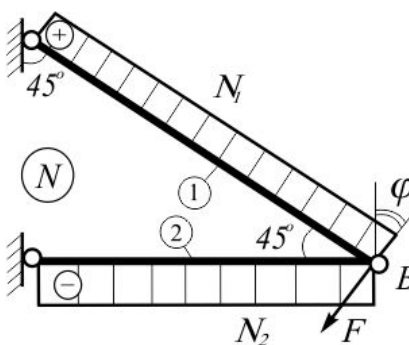


Рис. 1.8(а)

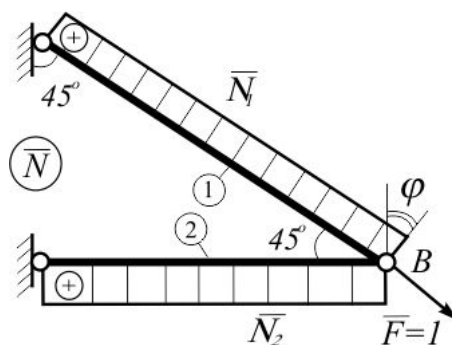


Рис. 1.8(б)

Решение

Из равновесия узла:

$$\left\{ \begin{array}{l} N_1 = \frac{F \cos \varphi}{\sqrt{2}/2} \\ N_2 = F(\sin \varphi + \cos \varphi) \end{array} \right. ; \left\{ \begin{array}{l} \bar{N}_1 = \frac{\bar{F} \sin \varphi}{\sqrt{2}/2} \\ \bar{N}_2 = \bar{F}(\cos \varphi - \sin \varphi) \end{array} \right.$$

$$\Delta_B = \sum \int \frac{N\bar{N}}{EA} ds = 0:$$

$$\frac{1}{EA} \cdot l \cdot (F \sin 2\varphi) - \frac{1}{EA} \cdot l \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot (F \cos 2\varphi) = 0, \quad \operatorname{tg}(2\varphi) = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Ответ:  $\varphi = \frac{\operatorname{arctg}(\sqrt{2}/2)}{2}$ .

1.10. Под каким углом  $\alpha$  нужно установить тягу  $AB$  длиной  $l$ , чтобы напряжения в ней были минимальными (рис.1.10)?

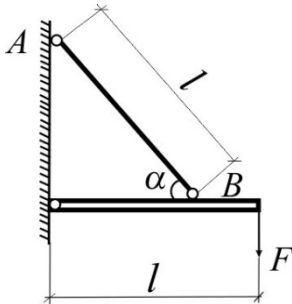


Рис. 1.10

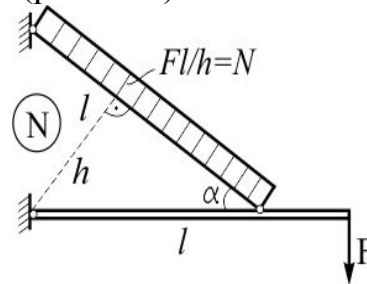


Рис. 1.10(а)

Решение

$$N \rightarrow N_{\min}, \text{ если } h \rightarrow h_{\max}.$$

$$S = \frac{l \cdot h}{2} = \frac{l \sin \alpha \cdot l \cos \alpha}{2} = \frac{l^2}{4} \sin 2\alpha, \quad h = \frac{l}{2} \cdot \sin 2\alpha.$$

$$h = h_{\max}, \text{ если } \sin 2\alpha = 1, \quad \alpha = \pi/4.$$

Ответ:  $\alpha = \frac{\pi}{4}$ .

1.11. При сборке кронштейна  $BDC$  оказалось, что стержень  $DB$  имеет длину, превышающую проектную на 3,2 мм. Поэтому узел  $D$  сместился вправо. После загрузки узла силой  $F$  он сместился влево на 2 мм от вертикали  $CD$ . Определить силу  $F$ , если материал стержней имеет модуль упругости  $E = 2 \times 10^5$  МПа, площадь сечения стержней  $A = 4 \text{ см}^2$  (рис.1.11).

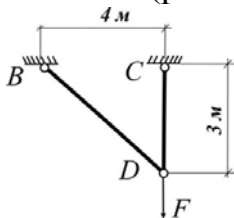


Рис. 1.11

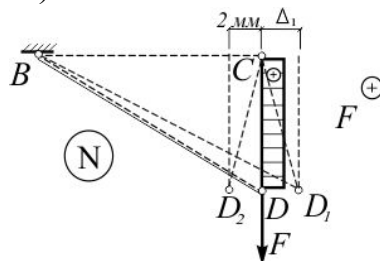


Рис. 1.11(а)

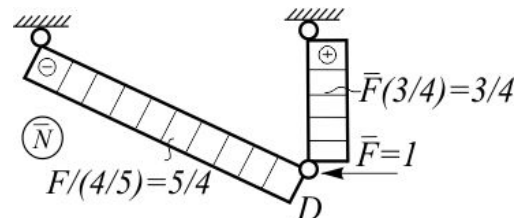


Рис. 1.11(б)

Решение

$$\Delta_1 = \sqrt{(5 \text{ м} + 3,2 \text{ мм})^2 - (3 \text{ м})^2} - 4 \text{ м} \approx 4 \text{ мм}.$$

$$\Delta_0 = 2 + \Delta_1 \approx 2 + 4 = 6 \text{ мм.}$$

$$\Delta_0 = \int \frac{N\bar{N}}{EA} ds \Rightarrow \frac{3}{4} \frac{F \cdot 3 \text{ м}}{EA}, \quad F \Rightarrow \frac{4}{3} \cdot \frac{6 \text{ мм} \cdot 200 \text{ ГПа} \cdot 4 \text{ см}^2}{3 \text{ м}} = 213,3 \text{ кН.}$$

Ответ: 213,3 кН.

**1.13.** Определить значение угла  $\alpha$ , минимизирующее суммарный объем двух одинаковых стержней, удовлетворяющих условиям прочности. Снижение расчетного сопротивления при сжатии не учитывать. Размер  $l$  задан (рис.1.13).

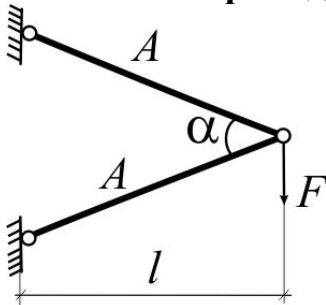


Рис. 1.13

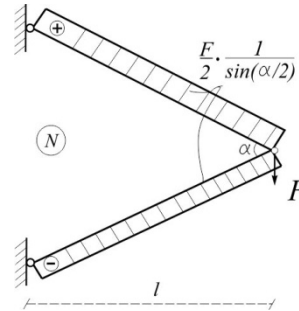


Рис. 1.13(а)

Решение

$$V(\alpha) = A \cdot \frac{l}{\cos \alpha / 2} = \frac{N}{R} \frac{l}{\cos \alpha / 2} = \frac{F}{2 \sin \alpha / 2} \frac{l}{\cos \alpha / 2} = \frac{Fl}{\sin \alpha}.$$

$$V'_\alpha = 0: Fl \cdot \frac{(-1)}{\sin^2 \alpha} \cdot \cos \alpha = 0, \quad \cos \alpha = 0.$$

Ответ:  $\alpha = \frac{\pi}{2}$ .

**1.14.** Определить, при каком угле  $\alpha$  объем стержневой конструкции будет наименьшим, если  $R_s = nR_t$ ? Решить задачу для  $n = 0,5; 1; 5$  (рис.1.14).

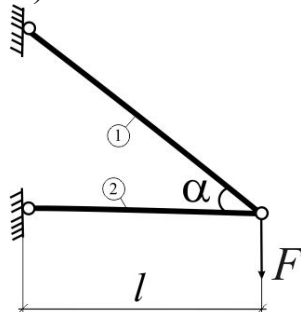


Рис. 1.14

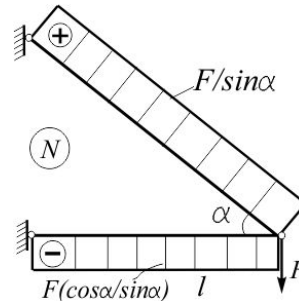


Рис. 1.14(а)

### Решение

Из равновесия узла:  $N_1 = F / \sin \alpha$ ;  $N_2 = F \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}$ .

$$A_1 = \frac{F / \sin \alpha}{R_t}; \quad A_2 = \frac{N_2}{R_s} \Rightarrow \frac{F / \sin \alpha}{R_t} \cdot \frac{\cos \alpha}{n} = A_1 \cdot \frac{\cos \alpha}{n}.$$

$$V(\alpha) = A_1 l_1 + A_2 l_2 \Rightarrow A_1 \frac{l}{\cos \alpha} + A_1 \frac{\cos \alpha}{n} l =$$

$$= \frac{Fl}{R_t \sin \alpha} \cdot \left( \frac{1}{\cos \alpha} + \frac{\cos \alpha}{n} \right) = \frac{2Fl}{R_t} \cdot \frac{n + \cos^2 \alpha}{n \cdot \sin 2\alpha}.$$

$$V = V_{\min},$$

если  $V^{(\alpha)} = 0$ :  $\frac{2Fl}{nR_t} \cdot \frac{2 \cos \alpha (-\sin \alpha) \cdot \sin 2\alpha - (n + \cos^2 \alpha) \cdot \cos 2\alpha \cdot 2}{\sin^2 2\alpha} = 0,$

$$-4 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha - 2 \cdot (\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha) \cdot (n + \cos^2 \alpha) = 0,$$

$$-\cos^2 \alpha = 2n \cdot \cos^2 \alpha - n, \quad \cos^2 \alpha = \frac{n}{2n + 1}.$$

Ответ:  $\cos^2 \alpha = \frac{n}{2n + 1}$ ;  $\alpha = 60^\circ; 55^\circ; 48^\circ$ .

**1.15. Определить величину перемещения  $\delta_c$  после приложения груза  $F$ , считая радиус шкива  $r$  пренебрежимо малым по сравнению с длиной троса  $l$ . Площади сечений и материал тросов одинаковы (рис.1.15).**

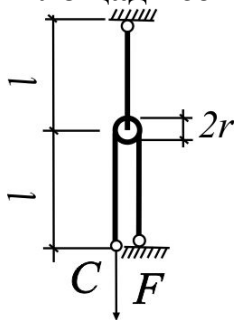


Рис. 1.15

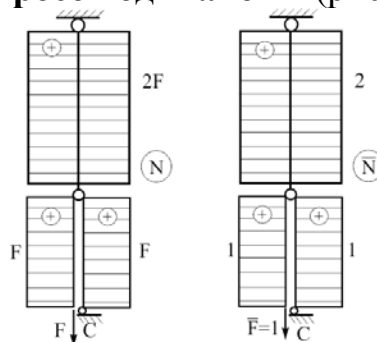


Рис. 1.15(a)

### Решение

$$\delta_c = \sum \int \frac{N\bar{N}}{EA} ds \Rightarrow \frac{1}{EA} (F \cdot l \cdot 1 \cdot 2 + 2F \cdot l \cdot 2) = \frac{6Fl}{EA}.$$

Ответ:  $\delta_c = \frac{6Fl}{EA}$ .

**1.16. Круглый стержень диаметром  $2r$  имеет переменный вдоль радиуса модуль упругости, закон изменения которого показан на рисунке. Опираясь на гипотезу плоских сечений, вывести, формулу напряжений в поперечном сечении при осевом растяжении стержня.**

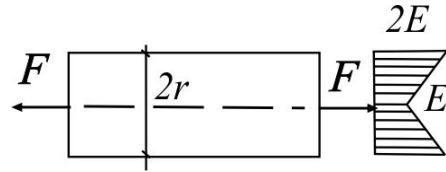


Рис. 1.16

Решение

$$0 \leq \rho \leq r: E(\rho) = E \left( 1 + \frac{\rho}{r} \right),$$

$$\sigma = E(\rho) \cdot \varepsilon, \quad \varepsilon = \text{const}.$$

$$N = \int_A \sigma dA = \int_0^r E(\rho) \cdot \varepsilon \cdot d\rho \cdot \rho 2\pi = \int_0^r E \left( 1 + \frac{\rho}{r} \right) \varepsilon \cdot 2\pi \rho d\rho = E\varepsilon \cdot 2\pi \int_0^r \left( \rho + \frac{\rho^2}{r} \right) d\rho \Rightarrow$$

$$\Rightarrow E\varepsilon \cdot 2\pi \left[ \frac{\rho^2}{2} + \frac{\rho^3}{3r} \right]_0^r = E\varepsilon \cdot 2\pi \left( \frac{r^2}{2} + \frac{r^2}{3} \right) = E\varepsilon \cdot \frac{5}{3} \cdot \pi r^2 \Rightarrow F. \quad E\varepsilon = \frac{3}{5} \cdot \frac{F}{\pi r^2}.$$

Ответ:  $\sigma = E(\rho) \cdot \varepsilon = \sigma_0 \left( 1 + \frac{\rho}{r} \right)$ , где  $\sigma_0 = E\varepsilon = \frac{3}{5} \cdot \frac{F}{\pi r^2}$ .

**1.17. Очень длинная тяжелая лента лежит на шероховатой поверхности и от силы  $F$  ее конец перемещается на величину  $\Delta$ . Найти закон изменения нормальных напряжений по ее длине, если погонный вес материала  $q$ , коэффициент трения  $f$ . Дано: 1)  $F, A$ ; 2)  $\Delta, E, A$  (рис.1.17).**

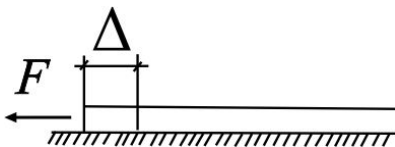


Рис. 1.17

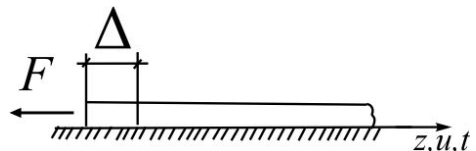


Рис. 1.17(a)

Решение

1 вариант:

$$\frac{dN}{dz} = -t = -qf,$$

$$N(z) = -qf \cdot z + C,$$

$$N(0) = F: \quad C = F.$$

$$N(z) = F - qf \cdot z,$$

$$N(l) = 0: \quad l = F / qf.$$

$$\sigma(z) = \frac{N(z)}{A} = \frac{F - qf \cdot z}{A}, \quad 0 \leq z \leq l.$$

**2 вариант:**

$$\frac{dN}{dz} = -t = -qf, \quad N = -qf \cdot z + C, \quad N(l) = 0: \quad C = qfl.$$

$$\frac{du}{dz} = \frac{N(z)}{EA}, \quad u(z) = -\frac{qf \cdot z^2}{2EA} + \frac{C \cdot z}{EA} + D \Rightarrow -\frac{qf \cdot z^2}{2EA} + \frac{qfl}{EA} \cdot z + D$$

Ответ:  $0 \leq z \leq l$  :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{1 вариант: } \sigma(z) = \frac{F - qf \cdot z}{A}, \quad l = F / qf; \\ \text{2 вариант: } \sigma(z) = \frac{qf \cdot (l - z)}{A}, \quad l = \sqrt{\frac{2 \cdot \Delta \cdot EA}{qf}}. \end{array} \right.$$

**1.18.** Найти закон изменения площади поперечного сечения для бруса равного сопротивления с удельным весом  $\gamma$  от действия осевой силы  $F$ . Считать  $A_0$  известной величиной (рис.1.18).

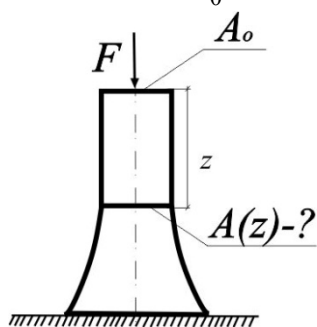


Рис. 1.18

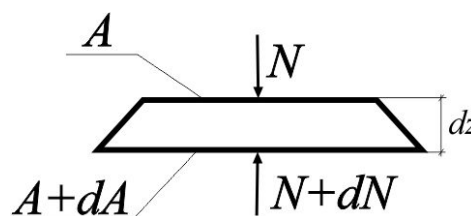


Рис. 1.18(a)

**Решение**

Из равновесия элемента  $dz$ :  $dN \approx \gamma \cdot dz \cdot A$ .

Для бруса равного сопротивления с  $\sigma(z) = \sigma = \text{const}$ :

$$N = \sigma \cdot A, \quad N + dN = \sigma \cdot (A + dA), \quad dN = \sigma \cdot dA.$$

Тогда  $\sigma \cdot dA = \gamma \cdot dz \cdot A$ ,

$$\frac{dA}{A} = \frac{\gamma}{\sigma} \cdot dz \quad \text{или} \quad \ln A = \frac{\gamma}{\sigma} \cdot z + C,$$

при  $z = 0$ :  $A(z) = A_0$ :  $C = \ln A_0$ ,  $\sigma = \frac{F}{A_0}$ ;  $\ln\left(\frac{A}{A_0}\right) = \frac{\gamma \cdot A_0}{F} \cdot z$ .

Ответ:  $A(z) = A_0 \cdot \exp\left(\frac{\gamma \cdot A_0}{F} \cdot z\right)$ .

**1.19.** Определить удлинение конического стержня от собственного веса, а также перемещение произвольного сечения  $m - n$ . Удельный вес  $\gamma$  и модуль упругости  $E$  заданы (рис.1.19).

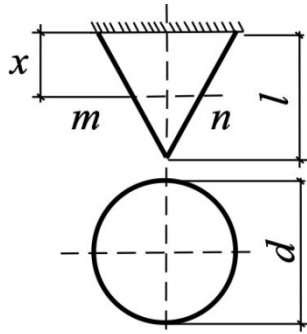


Рис. 1.19

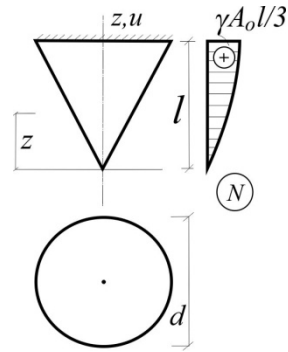


Рис. 1.19(a)

Решение

$$x = l - z; \quad 0 \leq z \leq l;$$

$$\xi = \frac{z}{l}, \quad d\xi = \frac{dz}{l}, \quad 0 \leq \xi \leq 1;$$

$$A_0 = \frac{\pi d^2}{4}; \quad d(z) = d \cdot \frac{z}{l} \Rightarrow d \cdot \xi;$$

$$A(z) = \frac{\pi d^2(z)}{4} \Rightarrow A_0 \cdot \xi^2;$$

$$dV = A(z) \cdot dz \Rightarrow A_0 \cdot \xi^2 \cdot d\xi \cdot l;$$

$$dN = \gamma \cdot dV \Rightarrow \gamma \cdot A_0 \cdot \xi^2 \cdot d\xi \cdot l,$$

$$N = \int dN \Rightarrow \gamma \cdot A_0 \cdot l \cdot \frac{\xi^3}{3} + C, \quad N(0) = 0: C = 0.$$

$$N(z) = \gamma \cdot A_0 \cdot l \cdot \left(\frac{z}{l}\right)^3 \cdot \frac{1}{3} \Rightarrow \gamma \cdot A_0 \cdot \frac{l \cdot \xi^3}{3}.$$

$$du = \Delta dz = \frac{N \cdot dz}{EA} \Rightarrow \frac{\gamma \cdot \xi \cdot d\xi \cdot l^2}{3E},$$

$$u = \int du \Rightarrow \frac{\gamma \cdot l^2}{6E} \cdot \xi^2 + D,$$

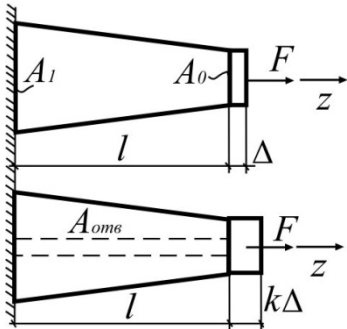
$$\begin{cases} u(1) = 0 & : D = -\frac{\gamma \cdot l^2}{6E} \\ u(0) = -\Delta l & : \Delta l = -D. \end{cases}$$

$$u(z) = \frac{\gamma \cdot l^2}{6E} \left( \left(\frac{z}{l}\right)^2 - 1 \right)$$

$$u(x) = \frac{\gamma \cdot l^2}{6E} \left( \left(\frac{l-x}{l}\right)^2 - 1 \right) = \frac{\gamma l^2}{6E} \cdot \frac{x^2 - 2xl}{l}$$

Ответ:  $\Delta l = \frac{\gamma l^2}{6E}; \quad u(x) = \frac{\gamma l^2}{6E} \cdot \frac{x^2 - 2xl}{l}.$

1.21. Стержень с переменной по длине площадью поперечного сечения при действии силы  $F$  на конце получает удлинение  $\Delta$ . Затем в стержне просверливается сквозное отверстие площадью сечения  $A_{\text{отв}}$ .



После чего удлинение стержня (от той же силы) вырастает в  $k$  раз. Найти площадь  $A_{\text{отв}}$ .

Решение

$$\text{а) } \Delta = \frac{Fl}{E} \frac{\ln(A_1 / A_0)}{(A_1 - A_0)};$$

$$\text{б) } k \cdot \Delta = \frac{Fl}{E} \cdot \frac{\ln((A_1 - A_{\text{отв}}) / (A_0 - A_{\text{отв}}))}{A_1 - A_0};$$

$$\text{в) } k = \ln\left(\frac{A_1 - A_{\text{отв}}}{A_0 - A_{\text{отв}}}\right) / \ln\left(\frac{A_1}{A_0}\right), \quad \left(\frac{A_1}{A_0}\right)^k = \frac{A_1 - A_{\text{отв}}}{A_0 - A_{\text{отв}}}.$$

$$\text{Ответ: } A_{\text{отв}} = A_1 \cdot \frac{\varepsilon^{k-1} - 1}{\varepsilon^k - 1}, \text{ где } \varepsilon = \frac{A_1}{A_0}.$$

1.22. Определить напряжение в стержне и перемещение точки приложения силы. Учесть трение в ползуне (коэффициент трения  $f$ ) (рис.1.22).

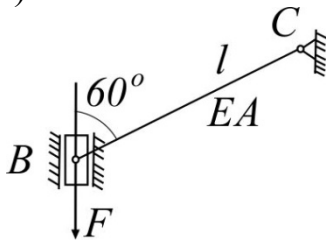


Рис. 1.22

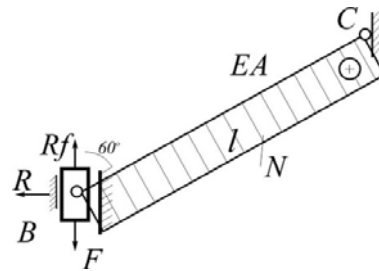


Рис. 1.22(а)

Решение

$$\Sigma_c M = 0: (F - Rf) \cdot l \sin 60^\circ = Rl \cos 60^\circ, \quad (F - Rf) \cdot \sqrt{3} = R, \quad R = \frac{F\sqrt{3}}{1 + f\sqrt{3}}.$$

Из равновесия узла B:

$$N = \sqrt{R^2 + (F - Rf)^2} \Rightarrow \sqrt{R^2 + \left(\frac{R}{\sqrt{3}}\right)^2} = \frac{2R}{\sqrt{3}} \Rightarrow \frac{2F}{1 + f\sqrt{3}}.$$

$$\sigma = \frac{N}{A} \Rightarrow \frac{F}{A} \cdot \frac{2}{1 + f\sqrt{3}}.$$

$$\delta = \int \frac{N\bar{N}}{EA} ds \Rightarrow \frac{1}{EA} \cdot \frac{2F}{1 + f\sqrt{3}} \cdot l \cdot \frac{2}{1 + f\sqrt{3}} = \frac{4Fl}{EA} \cdot \frac{1}{(1 + f\sqrt{3})^2}.$$

$$\text{Ответ: } \sigma = \frac{F}{A} \cdot \frac{2}{1 + f\sqrt{3}}; \quad \delta = \frac{4Fl}{EA} \cdot \frac{1}{(1 + f\sqrt{3})^2}.$$



1.23. Дано:  $l_1 = l_2 = l$ ,  $A_1 = A_2 = A$ ,  $E_1 = E_2 = E$ . Определить напряжения в стержнях 1 и 2 и перемещение точки  $B$ . Учесть трение в ползуне  $B$  (коэффициент трения  $f$ ) (рис.1.23).

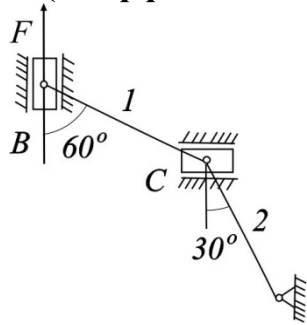


Рис. 1.23

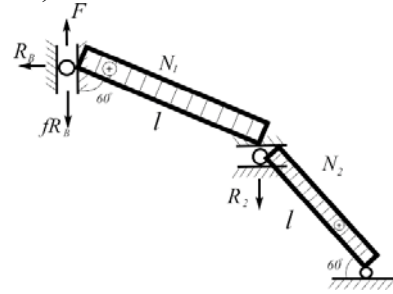


Рис. 1.23(a)

Решение  
Из равновесия:

$$\sum_c M^{\text{лев}} = 0: R_B l \cos 60^\circ = (F - fR_B) l \sin 60^\circ, \quad R_B = \frac{F\sqrt{3}}{1 + f\sqrt{3}};$$

$$\text{Узел В: } \sum X = 0: R_B = N_1 \sin 60^\circ, \quad N_1 = \frac{2F}{1 + f\sqrt{3}};$$

$$\text{Узел С: } \sum X = 0: N_1 \sin 60^\circ = N_2 \sin 30^\circ, \quad N_2 = N_1 \sqrt{3}.$$

$$\delta_B = \sum \int \frac{N_i \bar{N}_i}{E_i A_i} ds \Rightarrow \frac{1}{EA} \left( \frac{2F}{1 + f\sqrt{3}} \cdot l \cdot \frac{2}{1 + f\sqrt{3}} + \frac{2F\sqrt{3}}{1 + f\sqrt{3}} \cdot l \cdot \frac{2\sqrt{3}}{1 + f\sqrt{3}} \right) =$$

$$= \frac{16Fl}{EA(1 + f\sqrt{3})}.$$

$$\text{Ответ: } \delta_B = \frac{16Fl}{EA(1 + f\sqrt{3})^2}; \quad \sigma_1 = \frac{2F}{A(1 + f\sqrt{3})}; \quad \sigma_2 = \sigma_1 \sqrt{3}.$$

1.25. Абсолютно жесткий брус  $B CD$  поддерживается тремя стержнями одинаковой жесткости  $EA$ . Определить  $\theta$  – угол поворота бруса  $B CD$  при действии силы  $P$ . Дано:  $a, b$  (рис.1.25).

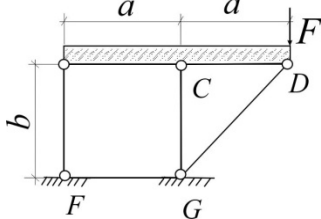


Рис. 1.25

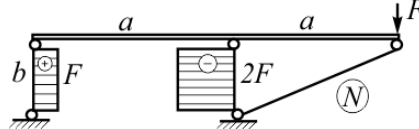


Рис. 1.25(a)

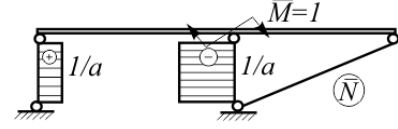


Рис. 1.25(б)

Решение

$$\theta = \sum \int \frac{N\bar{N}}{EA} ds \Rightarrow \frac{1}{EA} \left( F \cdot \frac{1}{a} \cdot b + 2F \cdot b \cdot \frac{1}{a} \right) = \frac{3F \cdot b}{a} \cdot \frac{1}{EA}.$$

Ответ:  $\theta = \frac{3F \cdot b}{aEA}.$

1.26. Абсолютно жесткие брусья  $FO$  и  $BO$  соединены упругим горизонтальным стержнем  $CD$ , жесткость поперечного сечения которого равна  $EA$ . Считая отношение  $\lambda/L \ll 1$ , определить наименьшее значение силы  $F$ , которую нужно приложить к системе, чтобы вызвать «прощелкивание» из верхнего положения  $FOB$  в нижнее  $FO'B$  (рис.1.26).

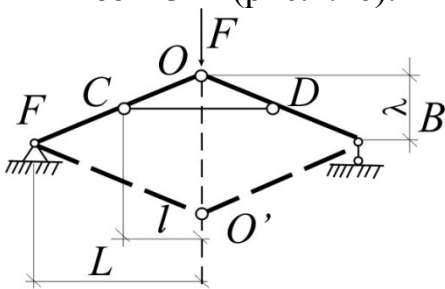


Рис.1.26

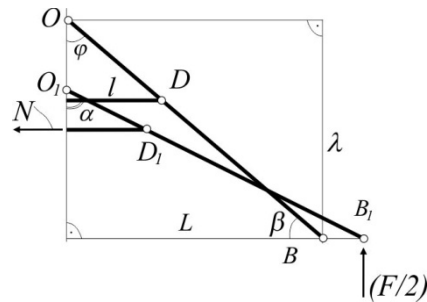


Рис. 1.26(a)

Решение

Примечание. Решение задачи методом Мора ошибочно, т.к. зависимость  $F(\lambda)$  нелинейная.

Из рис.1.26(a): 
$$\begin{cases} \varphi \leq \alpha \leq \pi/2; \\ \beta = \frac{\pi}{2} - \varphi, \quad \beta \ll 1; \end{cases} \quad \text{ctg}\varphi = \text{tg}\beta = \lambda / L;$$

$$\begin{cases} OD = O_1D_1 = l \cdot \sqrt{1 + (\lambda / L)^2}; \\ OB = O_1B_1 = L \cdot \sqrt{1 + (\lambda / L)^2}; \end{cases}$$

$$\begin{cases} dl = O_1D_1 \cdot \sin(\alpha + d\alpha) - O_1D_1 \cdot \sin\alpha \Rightarrow O_1D_1 \cdot \cos\alpha \cdot d\alpha; \\ dl = \frac{dN \cdot O_1D_1 \cdot \sin\alpha}{EA} : \quad \cos\alpha \cdot d\alpha = \frac{dN \cdot \sin\alpha}{EA}, \quad dN = EA \cdot \text{ctg}\alpha \cdot d\alpha. \end{cases}$$

Из равновесия в деформированном состоянии:  $\sum_{O_1} M^{\text{np}} = 0:$

$$N \cdot O_1D_1 \cdot \cos\alpha = \frac{F}{2} \cdot O_1B_1 \cdot \sin\alpha, \quad N = \frac{F}{2} \cdot \frac{L}{l} \cdot \text{tg}\alpha, \quad dN = \frac{dF}{2} \cdot \frac{L}{l} \cdot \text{tg}\alpha.$$

Тогда  $dF = 2EA \cdot \text{ctg}^2\alpha \cdot \frac{l}{L} \cdot d\alpha,$

$$F = \int dF \Rightarrow \int_{\varphi}^{\pi/2} 2EA \cdot \operatorname{ctg}^2 \alpha \cdot \frac{l}{L} \cdot d\alpha = \frac{2EA l}{L} \cdot [-\operatorname{ctg} \alpha - \alpha]_{\varphi}^{\pi/2} =$$

$$= \frac{2EA l}{L} \cdot \left[ \operatorname{ctg} \varphi - \left( \frac{\pi}{2} - \varphi \right) \right],$$

где  $\left( \frac{\pi}{2} - \varphi \right) = \beta \Rightarrow \operatorname{tg} \beta - \frac{\operatorname{tg}^3 \beta}{3} - \frac{\operatorname{tg}^5 \beta}{5} - \dots \approx \operatorname{ctg} \varphi - \frac{\operatorname{ctg}^3 \varphi}{3}$ ,

$$F \cong \frac{2 \cdot EA \cdot l}{L} \cdot \frac{\operatorname{ctg}^3 \varphi}{3}.$$

Ответ:  $F = \frac{2}{3} \cdot EA \cdot \left( \frac{l}{L} \right) \cdot \left( \frac{\lambda}{L} \right)^3$ .

**1.27.** При сборке двух одинаковых упругих стержней  $DB$  и  $BC$ , жесткость сечений которых при растяжении  $EA$ , созданы начальные растягивающие усилия  $N$ . Установить зависимость между приложенной после сборки к шарниру  $B$  горизонтальной силой  $F$  и его перемещением  $\delta$ . Учесть, что  $\Delta l \ll l$  (рис.1.27).

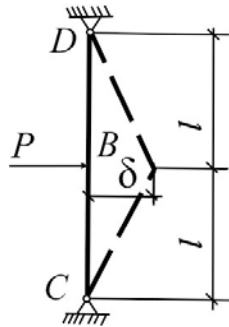


Рис. 1.27

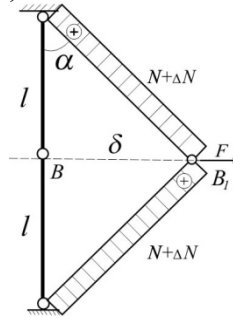


Рис. 1.27(a)

### Решение

Примечание. Решение задачи методом Мора ошибочно, т.к. зависимость  $F(\delta)$  нелинейная.

Из условия равновесия узла  $B_1$  в деформированном состоянии:

$$F = 2 \cdot (N + \Delta N) \cdot \sin \alpha \approx 2 \cdot (N + \Delta N) \cdot \frac{\delta}{l}.$$

$$\begin{cases} \Delta l = l \sqrt{1 + \left( \frac{\delta}{l} \right)^2} - l \approx l \left( 1 + \frac{1}{2} \left( \frac{\delta}{l} \right)^2 \right) - l = \frac{\delta^2}{2l} \\ \Delta l = \frac{\Delta N \cdot l}{EA}, \quad \Delta N = \frac{EA}{l} \cdot \Delta l \Rightarrow \frac{EA}{2} \cdot \left( \frac{\delta}{l} \right)^2. \end{cases}$$

Ответ:  $F = 2 \cdot N \cdot \left( \frac{\delta}{l} \right) + EA \cdot \left( \frac{\delta}{l} \right)^3$ .

**1.28. Определить полное перемещение точки B. E, A, l, P заданы (рис.1.28).**

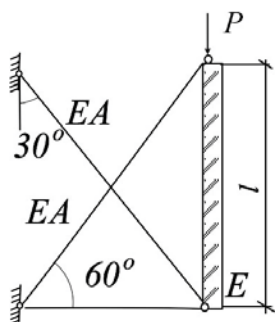


Рис. 1.28

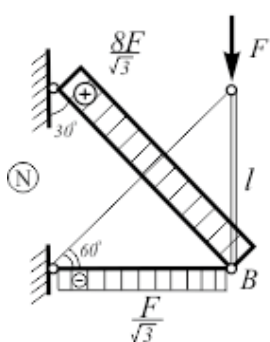


Рис. 1.28 (а)

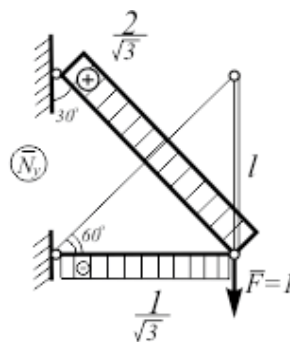


Рис. 1.28 (б)

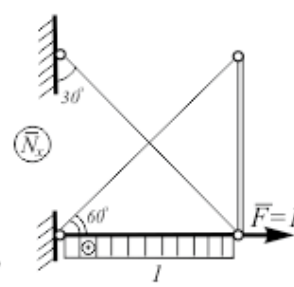


Рис. 1.28 (в)

Решение

$$\left\{ \begin{aligned} \Delta_{By} &= \int \frac{N\bar{N}_y}{EA} ds = \frac{1}{EA} \cdot \left[ \frac{2F}{\sqrt{3}} \cdot \frac{2l}{\sqrt{3}} \cdot \frac{2}{\sqrt{3}} + \frac{F}{\sqrt{3}} \cdot \frac{l}{\sqrt{3}} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} \right] = \sqrt{3} \frac{Fl}{EA} \\ \Delta_{Bx} &= \int \frac{N\bar{N}_x}{EA} ds = \frac{1}{EA} \cdot \left[ 0 - \frac{F}{\sqrt{3}} \cdot \frac{l}{\sqrt{3}} \cdot 1 \right] = \frac{Fl}{3EA} \end{aligned} \right.$$

$$\Delta_B = \sqrt{\Delta_{Bx}^2 + \Delta_{By}^2} \Rightarrow \frac{Fl}{EA} \cdot \sqrt{(\sqrt{3})^2 + (1/3)^2} = \frac{\sqrt{28}}{3} \cdot \frac{Fl}{EA}.$$

Ответ:  $\frac{\sqrt{28}}{3} \cdot \frac{Fl}{EA}.$

**1.29. Найти расстояние z, при котором вертикальное перемещение точки приложения силы  $F v_c = \min$ . E, A, l, F известны. DB – абсолютно жесткий стержень (рис.1.29).**

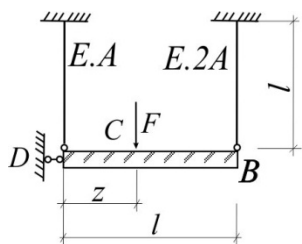


Рис. 1.29

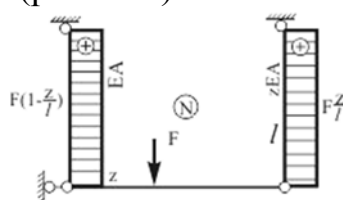


Рис. 1.29(а)

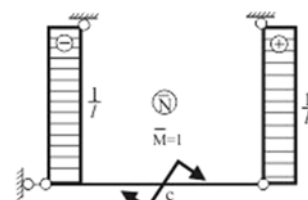


Рис. 1.29(б)

Решение

$v_c = v_{\min}$ , если  $\varphi_c = 0$ .

$$\left\{ \begin{aligned} N_1 &= F \cdot \left(1 - \frac{z}{l}\right) \\ N_2 &= F \cdot \frac{z}{l} \end{aligned} \right., \left\{ \begin{aligned} \bar{N}_1 &= -\frac{1}{l} \\ \bar{N}_2 &= \frac{1}{l} \end{aligned} \right.;$$

$$\varphi_c = \sum \int \frac{N_i \bar{N}_i}{E_i A_i} ds \Rightarrow \frac{1}{EA} \cdot F \cdot \left(1 - \frac{z}{l}\right) \cdot l \cdot \left(-\frac{1}{l}\right) + \frac{1}{2EA} \cdot F \cdot \frac{z}{l} \cdot l \cdot \frac{1}{l}.$$

$$\varphi_C = 0: -\left(1 - \frac{z}{l}\right) + \frac{1}{2} \cdot \frac{z}{l} = 0.$$

Ответ:  $z = \frac{2}{3}l$ .

**1.31.** Стержневая система состоит из бесконечного числа абсолютно жестких горизонтальных стержней и подвесок одинаковой длины  $l$  и жесткости  $EA$ . Определить перемещение точки  $C$  (рис.1.31).

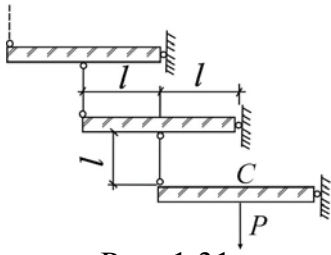


Рис. 1.31

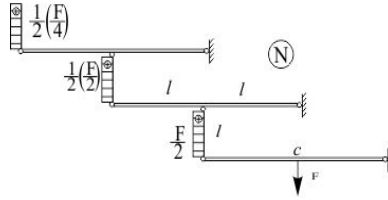


Рис. 1.31(а)

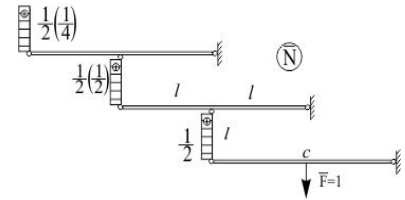


Рис. 1.31(б)

Решение

$$\begin{aligned} \Delta_c &= \sum_1^{\infty} \int \frac{N\bar{N}}{EA} ds = \frac{1}{EA} \cdot \left[ \frac{F}{2} \cdot l \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{F}{2}\right) \cdot l \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{F}{4} \cdot l \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} + \dots \right] = \\ &= \frac{Fl}{EA} \cdot \left[ \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \left(\frac{1}{4}\right) + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{16} + \dots \right] = \frac{Fl}{EA} \cdot \sum_{i=1}^{\infty} a_1 q^i = \frac{Fl}{EA} \cdot \frac{a_1}{1-q} = \frac{Fl}{EA} \cdot \frac{1/4}{1-1/4} = \frac{Fl}{3EA}. \end{aligned}$$

Ответ:  $\Delta_c = \frac{Fl}{3EA}$ .

**1.33.** Абсолютно жесткий стержень  $OC$  поддерживается тросом  $BDFC$ , проходящим через блоки  $D$  и  $F$ . Определить  $\delta$  – перемещение точки приложения силы  $F$ . Найти сечение троса, остающееся неподвижным. Заданы величины  $F$ ,  $a$ ,  $A$  и  $E$  троса (рис.1.33).

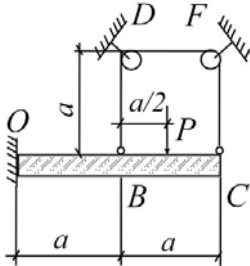


Рис. 1.33

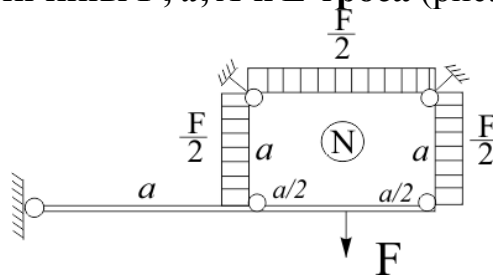


Рис. 1.33(а)

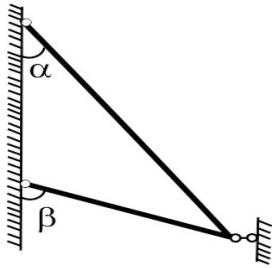
Решение

Из равновесия:  $\sum_0 M = 0: F \cdot 1,5a = N \cdot a + N \cdot 2a, \quad N = \frac{F}{2};$

$$\delta = \int \frac{N\bar{N}}{EA} ds \Rightarrow \frac{1}{EA} \cdot \frac{F}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot 3a = \frac{3}{4} \cdot \frac{Fa}{EA}.$$

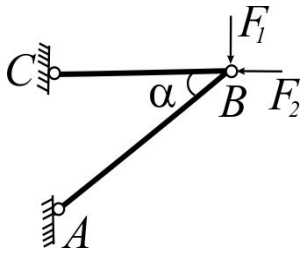
Ответ:  $\delta = \frac{3}{4} \cdot \frac{Fa}{EA}$ ; точка D:  $\frac{\delta_B}{l_{BD}} = \frac{\delta_C}{l_{CD}} = \epsilon$ .

## Задачи для самостоятельного решения



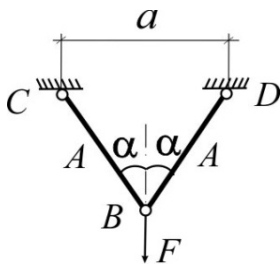
1. При каком соотношении между углами  $\alpha$  и  $\beta$  в стержневой конструкции не возникают температурные напряжения? Материал и изменение температуры двух стержней одинаковы.

Ответ:  $\alpha + \beta = \pi / 2$ .



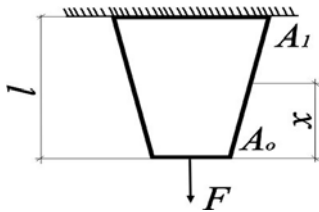
2. На узел  $B$  кронштейна действуют силы  $F_1 = 3F$  и  $F_2 = 4F$ . Под каким углом надо установить подкос  $AB$ , чтобы после приложения указанных сил узел  $B$  не получил горизонтального перемещения? Определить его вертикальное перемещение  $v_B$ , если  $AB = l$ , площадь поперечного сечения  $A$ , модуль упругости  $E$ .

Ответ:  $\alpha = \arctg(0,75)$ ;  $\frac{25}{3} \cdot \frac{Fl}{EA}$ .



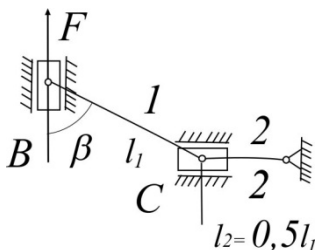
3. Из условия прочности стержней  $BC$  и  $BD$  определить угол  $\alpha$ , обеспечивающий минимальный вес стержней. Размер  $a$  задан.

Ответ:  $\alpha = \pi / 4$ .



4. Вычислить величину удлинения стержня от силы  $F$ . Площадь стержня меняется по линейному закону:  $A(x) = A_0 + x(A_1 - A_0)/l$ .

Ответ:  $\Delta l = \frac{F \cdot l}{E} \cdot \frac{\ln(A_1 / A_0)}{(A_1 - A_0)}$ .

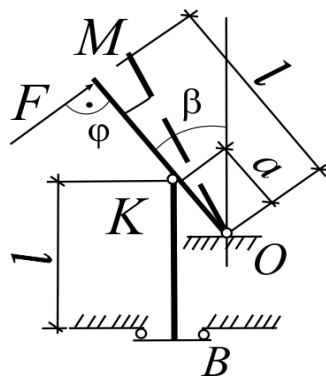


5. Определить напряжения в стержнях 1 и 2 ( $A_1 = A_2$ ) и перемещение точки  $B$ . Учесть трение в ползуне  $B$  (коэффициент трения  $f$ ). Материал стержней одинаковый.

Ответ:  $\sigma_1 = \frac{F}{A} \cdot \frac{1}{\cos \beta + f \sin \beta}$ ;  $\sigma_2 = \sigma_1 \cdot \sin \beta$ ;

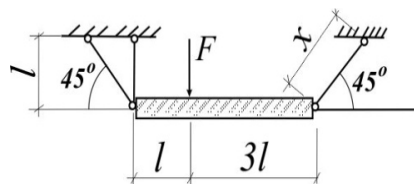
$\delta_B = \frac{Fl}{EA(\cos \beta + f \sin \beta)^2} \cdot \left(1 + \frac{\sin^2 \beta}{2}\right)$ .

6. Абсолютно жесткий рычаг  $MO$  длиной  $L$  закреплен в точке  $K$  тросом  $KB$ , нижний конец которого может свободно перемещаться по горизонтали. Трос имеет длину  $l$  и жесткость поперечного сечения  $EA$ . Установить зависимость силы  $F$  от угла поворота рычага  $\varphi$  (рис.1.35).



Ответ: 
$$F = \frac{2EA \cdot a^2}{L \cdot l} \cdot \sin(\beta - \varphi) \cdot \sin\left(\beta - \frac{\varphi}{2}\right) \cdot \sin\frac{\varphi}{2}.$$

7. Абсолютно жесткая балка подвешена на трех стержнях, поперечные сечения которых и материал одинаковы. Какова длина правого стержня, если балка под действием силы  $F$  остается горизонтальной?

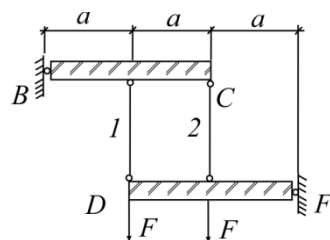


Ответ: 
$$x = (2 - \sqrt{2})l.$$

8. Стержни  $BC$  и  $DF$  абсолютно жесткие. Дано:  $E_1A_1 = E_2A_2$ ,  $l_1 = l_2 = l$ .

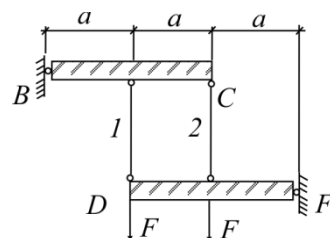
Определить перемещение точки  $C$ .

Ответ: 
$$\delta_c = \frac{8}{3} \cdot \frac{Fl}{EA}.$$



9. Два шарнирно соединенных стержня до приложения силы  $F$  горизонтальны. Получить зависимость между силой  $F$  и опусканием узла  $\delta$ , учитывая, что  $\Delta l \ll l$ .

Ответ: 
$$\delta = l \cdot \sqrt[3]{\frac{F}{EA}}.$$



## Глава 2. НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОЕ СОСТОЯНИЕ В ТОЧКЕ

Краткие теоретические сведения

Основные понятия и обозначения

Упругие постоянные изотропного материала:

$\nu = \left| \frac{\varepsilon_i}{\varepsilon_i} \right| \rightarrow$  коэффициент Пуассона,  $0 \leq \nu \leq 0,5$ ;

$E \rightarrow$  модуль упругости при растяжении и сжатии;

$G = \frac{E}{2(1+\nu)} \rightarrow$  модуль упругости при сдвиге или модуль сдвига.

$\sigma_i \rightarrow$  нормальное напряжение в сечении с  $i$ -й внешней нормалью;

$\varepsilon_i = \frac{\Delta ds_i}{ds_i} \rightarrow$  относительная линейная деформация по  $i$ -му направлению;

$e = \frac{\Delta dV}{dV} = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z \Rightarrow \frac{1-2\nu}{E} (\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z) \rightarrow$  объемная деформация;

$\tau_{ij} \rightarrow$  касательное напряжение в сечении с  $i$ -й нормалью по  $j$ -му направлению;

$\tau_{ij} = \tau_{ji} \rightarrow$  закон парности касательных напряжений, где  $\widehat{i, j} = \frac{\pi}{2}$ ;

$\gamma_{ij} = \frac{\tau_{ij}}{G} \rightarrow$  относительный сдвиг или угол сдвига между гранями  $i$  и  $j$ .

Правило знаков:  $\varepsilon > 0$ , если удлинение;  $\gamma > 0$ , если уменьшение угла  $\frac{\pi}{2}$ .

Линейное напряженное состояние  $\rightarrow$

одно из трех главных напряжений отлично от нуля:  $\sigma_1 \neq 0$ ;

закон Гука:  $\varepsilon_1 = \frac{\sigma_1}{E}$ ;  $\varepsilon_2 = -\nu \frac{\sigma_1}{E}$ ;  $\varepsilon_3 = -\nu \frac{\sigma_1}{E}$ ;

при повороте граней вокруг  $\sigma_2$  или  $\sigma_3$ ,  $\angle \alpha = \widehat{\sigma_1, \sigma_\alpha} > 0$ , если  $\curvearrowright$ :

а) напряжения:  $\sigma_\alpha = \sigma_1 \cos^2(\alpha)$ ;  $\tau_{\alpha\beta} = -\sigma_1 \frac{\sin(2\alpha)}{2}$ ;

б) максимальное касательное напряжение:  $\tau_{\max} = \frac{\sigma_1}{2}$ ,  $\widehat{\sigma_1, \sigma_\alpha} = \frac{\pi}{4}$ ;

в) деформации:  $\varepsilon_\alpha = \varepsilon_1 (\cos^2(\alpha) - \nu \sin^2(\alpha))$ ;  $\frac{\gamma_{\alpha\beta}}{2} = -\varepsilon_1 (1 + \nu) \frac{\sin(2\alpha)}{2}$ .



Плоское напряженное состояние  $\rightarrow$

два из трех главных напряжений отличны от нуля:  $\sigma_1 \neq 0, \sigma_2 \neq 0$ ;

закон Гука:  $\varepsilon_z = \frac{1}{E}(\sigma_z - \nu\sigma_y)$ ;  $\varepsilon_y = \frac{1}{E}(\sigma_y - \nu\sigma_z)$ ;  $\varepsilon_x = \frac{-\nu}{E}(\sigma_z + \sigma_y)$ ;

тензор напряжений:  $T_n = \begin{pmatrix} \sigma_z & \tau_{zy} \\ \tau_{zy} & \sigma_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_\alpha & \tau_{\beta\alpha} \\ \tau_{\alpha\beta} & \sigma_\beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 \\ 0 & \sigma_2 \end{pmatrix}$ ;

тензор деформаций:  $T_\delta = \begin{pmatrix} \varepsilon_z & \frac{1}{2}\gamma_{zy} \\ \frac{1}{2}\gamma_{zy} & \varepsilon_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varepsilon_\alpha & \frac{1}{2}\gamma_{\beta\alpha} \\ \frac{1}{2}\gamma_{\alpha\beta} & \varepsilon_\beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 & 0 \\ 0 & \varepsilon_2 \end{pmatrix}$ ;

при повороте граней вокруг  $\sigma_3$ ,  $\angle\alpha = \widehat{\sigma_z, \sigma_\alpha} > 0$ , если  $\curvearrowright$ :

а) напряжения:  $\sigma_\alpha = \sigma_z \cos^2(\alpha) + \sigma_y \sin^2(\alpha) + \tau_{zy} \sin(2\alpha)$ ;

$\sigma_\beta = \sigma_z \sin^2(\alpha) + \sigma_y \cos^2(\alpha) - \tau_{zy} \sin(2\alpha)$ ;

$\tau_{\alpha\beta} = \tau_{zy} \cos(2\alpha) - (\sigma_z - \sigma_y) \frac{\sin(2\alpha)}{2}$ ;

б) главные напряжения:  $\sigma_i^2 - I_1\sigma_i - I_2 = 0$ ,

где инварианты тензора напряжений 2 ранга

$$I_1 = \sigma_z + \sigma_y = \sigma_\alpha + \sigma_\beta,$$

$$I_2 = -\sigma_z\sigma_y + \tau_{zy}^2 = -\sigma_\alpha\sigma_\beta + \tau_{\alpha\beta}^2,$$

или  $\sigma_{1,2} = \frac{\sigma_z + \sigma_y}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{(\sigma_z - \sigma_y)^2 + 4\tau_{zy}^2}$ ;

в) максимальное касательное напряжение:

$$\tau_{\max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} = \frac{1}{2}\sqrt{(\sigma_z - \sigma_y)^2 + 4\tau_{zy}^2};$$

г) главные площадки:  $\tan \alpha_{1,2} = \frac{\tau_{zy}}{\sigma_{1,2} - \sigma_y}$ ,  $\angle\alpha_{1,2} = \widehat{\sigma_z, \sigma_{1,2}} > 0$ , если  $\curvearrowright$ ;

д) деформации:  $\varepsilon_\alpha = \varepsilon_z \cos^2(\alpha) + \varepsilon_y \sin^2(\alpha) + \frac{\gamma_{zy}}{2} \sin(2\alpha)$ ;

$\varepsilon_\beta = \varepsilon_z \sin^2(\alpha) + \varepsilon_y \cos^2(\alpha) - \frac{\gamma_{zy}}{2} \sin(2\alpha)$ ;

$\frac{\gamma_{\alpha\beta}}{2} = \frac{\gamma_{zy}}{2} \cos(2\alpha) - (\varepsilon_z - \varepsilon_y) \frac{\sin(2\alpha)}{2}$ .

Объемное напряженное состояние  $\rightarrow$

три из трех главных напряжений отличны от нуля:  $\sigma_1 \neq 0, \sigma_2 \neq 0, \sigma_3 \neq 0$ ;

закон Гука:  $\varepsilon_i = \frac{1}{E}(\sigma_i - \nu(\sigma_2 + \sigma_3))$ ,  $i = 1, 2, 3$  или  $i = x, y, z$ ;

тензор напряжений:  $T_n = \begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{pmatrix}$ ;

главные напряжения:  $\sigma_i^3 - I_1\sigma_i^2 - I_2\sigma_i - I_3 = 0$ ,

где инварианты тензора напряжений 3 ранга

$$I_1 = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z,$$

$$I_2 = -\sigma_x\sigma_y - \sigma_y\sigma_z - \sigma_z\sigma_x + \tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2,$$

$$I_3 = \begin{vmatrix} \sigma_x & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{vmatrix};$$

максимальное касательное напряжение:  $\tau_{\max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}$ ,  $\widehat{\sigma_1, n_\alpha} = \widehat{\sigma_3, n_\alpha} = \frac{\pi}{4}$ ;

главные площадки: 
$$\begin{cases} l^2 + m^2 + n^2 = 1, \\ \tau_{xy}l + (\sigma_y - \sigma_i)m + \tau_{zy}n = 0, \\ \tau_{xz}l + \tau_{yz}m + (\sigma_z - \sigma_i)n = 0, \end{cases}$$

где  $l = \cos(\widehat{x, n_\alpha})$ ,  $m = \cos(\widehat{y, n_\alpha})$ ,  $n = \cos(\widehat{z, n_\alpha})$ ;

тензор деформаций:  $T_\partial = \begin{pmatrix} \varepsilon_x & \frac{1}{2}\gamma_{yx} & \frac{1}{2}\gamma_{zx} \\ \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \varepsilon_y & \frac{1}{2}\gamma_{zy} \\ \frac{1}{2}\gamma_{xz} & \frac{1}{2}\gamma_{yz} & \varepsilon_z \end{pmatrix}$ .

Удельная (в единице объема  $dV$ ) потенциальная энергия упругой деформации:

$$u = \frac{1}{2}(\sigma_x\varepsilon_x + \sigma_y\varepsilon_y + \sigma_z\varepsilon_z + \tau_{xy}\gamma_{xy} + \tau_{yz}\gamma_{yz} + \tau_{zx}\gamma_{zx});$$

$$u = \frac{1}{2E}(\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2) - \frac{\nu}{E}(\sigma_x\sigma_y + \sigma_y\sigma_z + \sigma_z\sigma_x) + \frac{1}{2G}(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2);$$

$$u = \frac{G\nu}{1-2\nu}e^2 + G(\varepsilon_x^2 + \varepsilon_y^2 + \varepsilon_z^2) + \frac{1}{2}G(\gamma_{xy}^2 + \gamma_{yz}^2 + \gamma_{zx}^2);$$

$$\frac{\partial u}{\partial \sigma_i} = \varepsilon_i, \quad \frac{\partial u}{\partial \tau_{ij}} = \gamma_{ij}; \quad \frac{\partial u}{\partial \varepsilon_i} = \sigma_i, \quad \frac{\partial u}{\partial \gamma_{ij}} = \tau_{ij}.$$

## Теории прочности:

3 теория прочности или теория  $\tau_{\max}$  (пластичный материал):

а) общий случай – объемное напряженное состояние:  $\sigma_1 - \sigma_3 \leq R$ ;

б) стержень – плоское напряженное состояние,  $\sigma_y = 0$ ,  $\sigma_z = \sigma$ ,  $\tau_{zy} = \tau$ :

$$\sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} \leq R;$$

4 теория или энергетическая теория формоизменения (пластичный материал):

а) общий случай – объемное напряженное состояние:

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2} \leq R;$$

б) стержень – плоское напряженное состояние,  $\sigma_y = 0$ ,  $\sigma_z = \sigma$ ,  $\tau_{zy} = \tau$ :

$$\sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2} \leq R;$$

теория прочности Мора (при  $\sigma_1 \geq 0$ ,  $\sigma_3 \leq 0$ ),  $k = \frac{\sigma_{\max}^p}{\sigma_{\max}^c}$ :

а) общий случай – объемное напряженное состояние:  $\sigma_1 - k\sigma_3 \leq R_p$ ;

б) стержень – плоское напряженное состояние,  $\sigma_y = 0$ ,  $\sigma_z = \sigma$ ,  $\tau_{zy} = \tau$ :

$$\frac{1-k}{2}\sigma + \frac{1+k}{2}\sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} \leq R_p.$$

Примечания: 1) осевое растяжение-сжатие стержня  $\rightarrow$  линейное напряженное состояние:  $\sigma_1 = \sigma$ ,  $\sigma_2 = \sigma_3 = 0 \Rightarrow e = \frac{1-2\nu}{E}\sigma$ ;

2) кручение трубы  $\rightarrow$  чистый сдвиг, частный случай плоского напряженного состояния:  $\sigma_1 = \tau$ ,  $\sigma_2 = 0$ ,  $\sigma_3 = -\tau \Rightarrow e = 0$ ;

3) гидростатическое давление:  $\sigma_i = -p \Rightarrow e = \frac{3(1-2\nu)}{E}(-p)$ .

## Примеры решения задач

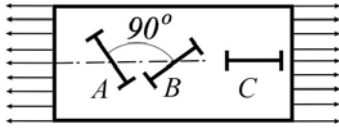


Рис. 2.1

**2.1. На растянутой пластинке установлены три одинаковых тензметра, как показано на рис. 2.1. Доказать, что показания тензметров связаны зависимостью:  $\Delta A + \Delta B = \Delta C(1 - \nu)$ , где  $\nu$  – коэффициент Пуассона (рис.2.1).**

**Решение**

$$\varepsilon_z = \frac{\sigma_z}{E}, \quad \beta = \alpha + \frac{\pi}{2} : \begin{cases} \varepsilon_\alpha = \varepsilon_z (\cos^2 \alpha - \nu \sin^2 \alpha) \\ \varepsilon_\beta = \varepsilon_z (\sin^2 \alpha - \nu \cos^2 \alpha) \end{cases};$$

$$\varepsilon_\alpha + \varepsilon_\beta = \varepsilon_z (1 - \nu), \quad \text{где } \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1.$$

$$\varepsilon_i = \frac{\Delta l_i}{l_i}, \quad \text{т.к. по условию } l_i = \text{const}, \quad \text{то } \Delta A + \Delta B = \Delta C(1 - \nu).$$

**2.2. На боковой поверхности круглого стержня нанесена винтовая линия с углом наклона к образующей  $\alpha = 60^\circ$ . Обнаружено, что при осевом растяжении стержня длина винтовой линии не изменилась. Определить коэффициент Пуассона материала (рис.2.2).**

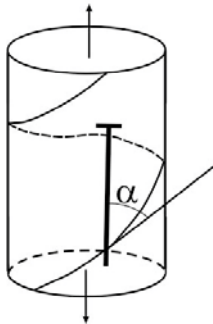


Рис. 2.2

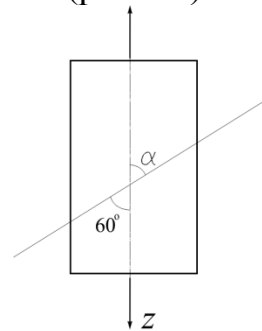


Рис. 2.2 (а)

**Решение**

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_z, \quad \varepsilon_2 = \varepsilon_3 = 0:$$

$$\varepsilon_\alpha = \varepsilon_z (\cos^2 \alpha - \nu \sin^2 \alpha) = 0, \quad \left(\frac{1}{2}\right)^2 - \nu \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = 0.$$

$$\text{Ответ: } \nu = \frac{1}{3}.$$

**2.3. Доказать, что при осевом растяжении (сжатии) стержня абсолютное изменение его объема зависит от длины, но не зависит от площади поперечного сечения этого стержня.**

**Решение**

$$e = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z = \frac{\Delta V}{V}.$$

$$\varepsilon_z = \frac{\Delta l}{l} \Rightarrow \frac{F}{EA}, \quad \varepsilon_x = -\nu \varepsilon_z, \quad \varepsilon_y = -\nu \cdot \varepsilon_z;$$

$$e = \varepsilon_z \cdot (1 - 2\nu) = \frac{\Delta l}{l} (1 - 2\nu) \Rightarrow \frac{\Delta V}{V},$$

$$\Delta V = V \cdot \frac{\Delta l}{l} (1 - 2\nu) \Rightarrow Al \cdot \frac{F}{EA} \cdot (1 - 2\nu).$$

Ответ:  $\Delta V = \frac{Fl}{E} \cdot (1 - 2\nu).$

**2.4.** Под каким углом  $\alpha$  к оси стержня надо установить тензометр 1, чтобы его показания при растяжении стержня были втрое меньше показаний такого же тензометра 2, расположенного вдоль оси стержня. Дано:  $\nu = 0,33$  (рис.2.4).

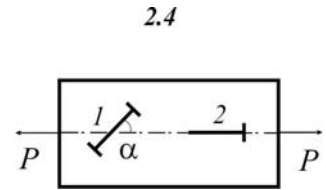


Рис. 2.4

Решение

$$\varepsilon_\alpha = \frac{\varepsilon_z}{3} \Rightarrow \varepsilon_z (\cos^2 \alpha - \nu \sin^2 \alpha),$$

$$\frac{1}{3} = \cos^2 \alpha - \frac{1}{3} \sin^2 \alpha = (1 - \sin^2 \alpha) - \frac{1}{3} \sin^2 \alpha = 1 - \frac{4}{3} \sin^2 \alpha,$$

$$1 = 3 - 4 \sin^2 \alpha, \quad 4 \sin^2 \alpha = 2, \quad \sin^2 \alpha = \frac{1}{2}, \quad \sin \alpha = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \alpha = \pm \frac{\pi}{4}.$$

Ответ:  $\pm \alpha = \frac{\pi}{4}.$

**2.5.** Определить модуль упругости  $E$  и коэффициент Пуассона  $\nu$ , если изменения показаний тензометров  $A$  и  $B$ , установленных на образец, как указано на рис. 2.5, равны соответственно 20 и 2 мм. Коэффициент увеличения тензометров  $k = 1000$ , база  $l_T = 100$  мм (рис.2.5).

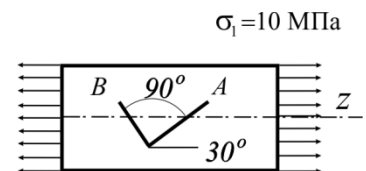


Рис. 2.5

Решение

$$\varepsilon_\alpha = \frac{20}{100 \cdot 10^3} = 0,2 \cdot 10^{-3}, \quad \varepsilon_\beta = \frac{2}{100 \cdot 10^3} = 0,2 \cdot 10^{-4},$$

$$\left\{ \begin{array}{l} (\cos^2 30 - \nu \sin^2 30) \cdot \varepsilon_z = \varepsilon_\alpha \\ (\sin^2 30 - \nu \cos^2 30) \cdot \varepsilon_z = \varepsilon_\beta \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \left( \frac{3}{4} - \nu \frac{1}{4} \right) \cdot \varepsilon_z = 2 \cdot 10^{-4} \\ \left( \frac{1}{4} - \nu \frac{3}{4} \right) \cdot \varepsilon_z = 0,2 \cdot 10^{-4} \end{array} \right\}$$

$$\frac{3 - \nu \cdot 1}{1 - \nu \cdot 3} = 10, \quad 29 \cdot \nu = 7, \quad \nu = 7/29, \quad \varepsilon_z = 2,9 \cdot 10^{-4},$$

$$\frac{\sigma_z}{E} = \varepsilon_z, \quad \frac{10 \text{ МПа}}{E} = 2,9 \cdot 10^{-4}, \quad E = \frac{10^5 \text{ МПа}}{2,9}.$$

Ответ:  $E = 10^5 \text{ МПа} / 2,9$ ,  $\nu = 7 / 29$ .

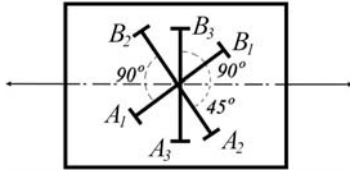


Рис. 2.6

**2.6. Стержень подвергается осевому растяжению. Обозначим  $\Delta l_1, \Delta l_2, \Delta l_3$  – удлинения трёх, изображенных на рисунке отрезков равной длины. Доказать, что  $\nu (\Delta l_1 + \Delta l_2) + (1 - \nu) \Delta l_3 = 0$ ,  $\nu$  – коэффициент Пуассона (рис.2.6).**

Решение

Если  $\beta = \alpha + \frac{\pi}{2}$ , то  $\varepsilon_\alpha + \varepsilon_\beta = (1 - \nu) \cdot \varepsilon_z$ .

Т.к.  $\varepsilon_3 = -\nu \cdot \varepsilon_z$ , то  $\varepsilon_1 + \varepsilon_2 = (1 - \nu) \cdot \left(-\frac{\varepsilon_3}{\nu}\right)$

$\varepsilon_i = \frac{\Delta l_i}{l_i}$ , т.к. по условию  $l_i = \text{const}$ , то  $\nu (\Delta l_1 + \Delta l_2) + (1 - \nu) \Delta l_3 = 0$ .

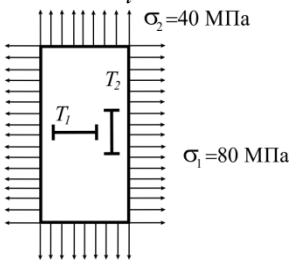


Рис. 2.8

**2.8. Однородная пластинка подвергается двухстороннему растяжению. Показания тензометра  $T_1$  в два раза больше показаний тензометра  $T_2$ . Коэффициенты увеличения тензометров одинаковы, а база  $l_2 = 2l_1$ . Определить коэффициент Пуассона материала пластинки (рис.2.8).**

Решение

$$\begin{cases} \varepsilon_1 = \frac{2\Delta}{Rl} = \frac{1}{E}(80 \text{ МПа} - \nu \cdot 40 \text{ МПа}) \\ \varepsilon_2 = \frac{\Delta}{2Rl} = \frac{1}{E}(40 \text{ МПа} - \nu \cdot 80 \text{ МПа}) \end{cases} \quad 4 = \frac{80 - \nu \cdot 40}{40 - \nu \cdot 80} = \frac{2 - \nu}{1 - 2\nu}$$

$$4 - 8\nu = 2 - \nu \quad 2 = 7\nu,$$

Ответ:  $\nu = 2 / 7$ .

**2.9. При совместном действии на квадратный элемент пластины двух одинаковых по величине растягивающих напряжений показание тензометра, установленного по диагонали элемента и имеющего базу  $L = 100$  мм и цену деления шкалы  $k = 0,001$  мм, составило  $n = 10$  делений. Определить показание тензометра после удаления одного растягивающего напряжения, если модуль упругости материала  $E = 2 \times 10^5$  МПа и коэффициент Пуассона  $\nu = 0,2$ .**

Решение

$$\alpha = 45^\circ, \quad \beta = \alpha + \frac{\pi}{2}:$$

а)  $\sigma_x = \sigma_y = \sigma, \quad \tau = 0:$

$$\varepsilon_\alpha = \frac{1-\nu}{E} \sigma \Rightarrow \frac{n \cdot k}{L} = 1 \cdot 10^{-4}, \quad \sigma = \frac{E}{1-\nu} \cdot \varepsilon_\alpha = 25 \text{ МПа};$$

б)  $\sigma_x = \sigma, \sigma_y = 0, \tau = 0:$

$$\varepsilon_\alpha = \varepsilon_x \cdot (\cos^2 \alpha - \nu \sin^2 \alpha) \Rightarrow \frac{\sigma}{E} \cdot \frac{1-\nu}{2} = 0,5 \cdot 10^{-4}.$$

Ответ:  $n = 5$ .

**2.10.** Элемент пластинки находится под действием напряжений, как показано на рисунке. Определить пределы значений коэффициента  $K$ , при которых в плоскости пластинки существуют линии, не изменяющие своей длины (рис.2.10).

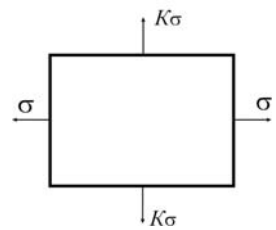


Рис. 2.10

Решение

$$\varepsilon_\alpha = \varepsilon_x \cdot \cos^2 \alpha + \varepsilon_y \cdot \sin^2 \alpha$$

$$\varepsilon_\alpha = \frac{\sigma}{E} \left( (1-k\nu) \cdot \cos^2 \alpha + (k-\nu) \sin^2 \alpha \right) = 0$$

$$\operatorname{tg}^2 \alpha = \frac{k\nu - 1}{k - \nu} > 0 \quad ;$$

$$\begin{cases} \varepsilon_x = \frac{1}{E} (\sigma - \nu \cdot k\sigma) \\ \varepsilon_y = \frac{1}{E} (k\sigma - \nu\sigma) \end{cases}$$

а)  $\begin{cases} k\nu - 1 \geq 0 \\ k - \nu \geq 0 \end{cases}, \quad \begin{cases} k \geq 1/\nu \\ k \geq \nu \end{cases}, \quad k \geq 1/\nu, \text{ т.к. } \nu < 1 ;$

б)  $\begin{cases} k\nu - 1 \leq 0 \\ k - \nu \leq 0 \end{cases}, \quad \begin{cases} k \leq 1/\nu \\ k \leq \nu \end{cases}, \quad k \leq \nu .$

Ответ:  $\begin{cases} k \geq 1/\nu \\ k \leq \nu. \end{cases}$

**2.11.** Под каким углом  $\alpha$  к направлению главного напряжения  $\sigma_1$  надо установить тензомер, чтобы он не изменял своего показания при пропорциональном возрастании нагрузки? При каких соотношениях  $\sigma_1/\sigma_2$  задача имеет решение (рис.2.11)?

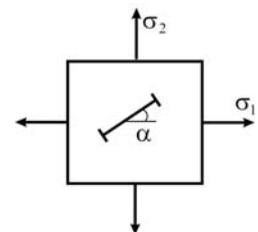


Рис. 2.11

Решение

$$\varepsilon_\alpha = \varepsilon_1 \cdot \cos^2 \alpha + \varepsilon_2 \cdot \sin^2 \alpha = \frac{\sigma_1 - \nu \sigma_2}{E} \cdot \cos^2 \alpha + \frac{\sigma_2 - \nu \sigma_1}{E} \cdot \sin^2 \alpha;$$

$$\varepsilon_\alpha = 0: (\sigma_1 - \nu \sigma_2) \cos^2 \alpha + (\sigma_2 - \nu \sigma_1) \sin^2 \alpha = 0, \quad \operatorname{tg}^2 \alpha = \frac{\sigma_1 - \nu \sigma_2}{\nu \sigma_1 - \sigma_2};$$

$$\alpha = \pm \operatorname{arctg} \sqrt{(\sigma_1 - \nu \sigma_2) / (\nu \sigma_1 - \sigma_2)}.$$

Так как  $\operatorname{tg}^2 \alpha \geq 0$ , то  $\frac{\sigma_1 - \nu \sigma_2}{\nu \sigma_1 - \sigma_2} \geq 0$ ,  $\begin{cases} \sigma_1 \geq \nu \sigma_2 \\ \nu \sigma_1 \geq \sigma_2 \end{cases}$ ,  $\frac{\sigma_1}{\sigma_2} \geq \frac{1}{\nu}$ .

Ответ:  $\pm \alpha = \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{\sigma_1 - \nu \sigma_2}{\nu \sigma_1 - \sigma_2}}$ , при  $\frac{\sigma_1}{\sigma_2} \geq \frac{1}{\nu}$ .

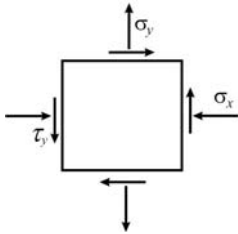


Рис. 2.12

**2.12.** По граням элемента действуют напряжения, как указано на рисунке, равные  $\sigma_x = 40$  МПа,  $\sigma_y = 20$  МПа,  $\tau_y = 30$  МПа. Найти направление, по которому отсутствует линейная деформация, если  $\nu = 0,25$  (рис.2.12).

Решение

$$\begin{cases} \sigma_x = -40 \text{ МПа} \\ \sigma_y = 20 \text{ МПа} \\ \tau = 30 \text{ МПа} \\ \nu = 0,25 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \varepsilon_x = (-40 - 0,25 \cdot 20) / E = -45 / E \\ \varepsilon_y = (20 - 0,25(-40)) / E = 30 / E \\ \gamma = \frac{2(1 + 0,25)}{E} \cdot 30 = \frac{75}{E} \end{cases}$$

$$\varepsilon_\alpha = \varepsilon_x \cos^2 \alpha + \varepsilon_y \cdot \sin^2 \alpha + \gamma \cdot \frac{\sin 2\alpha}{2} = 0$$

$$(-45) \cos^2 \alpha + 30 \sin^2 \alpha + 75 \sin \alpha \cos \alpha = 0$$

$$\operatorname{tg}^2 \alpha + 2,5 \cdot \operatorname{tg} \alpha - 1,5 = 0$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{-2,5 \pm 3,5}{2} \Rightarrow \begin{cases} 0,5 \\ -3 \end{cases}$$

Ответ:  $\begin{cases} \alpha = \operatorname{arctg}(0,5) \\ \alpha = \operatorname{arctg}(-3) \end{cases}$ .



2.13. Найти угол  $\alpha$  наклона тензомера, если после снятия напряжений на горизонтальных площадках приращение показаний тензометра уменьшилось в два раза (рис.2.13).

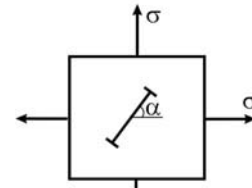


Рис. 2.13

Решение

$$\begin{cases} \varepsilon_{\alpha}^{(1)} = \frac{1-\nu}{E} \cdot \sigma, \\ \varepsilon_{\alpha}^{(2)} = \frac{\sigma}{E} (\cos^2 \alpha - \nu \sin^2 \alpha) \end{cases} \quad \varepsilon_{\alpha}^{(1)} = 2\varepsilon_{\alpha}^{(2)}, \quad 1-\nu = (\cos^2 \alpha - \nu \sin^2 \alpha) \cdot 2,$$

$$\cos^2 \alpha = \frac{1}{2}.$$

Ответ:  $\alpha = \pm \frac{\pi}{4}$ .

2.15. Лист материала размерами  $a \times b$ , обрамленный жесткими звеньями, испытывает деформацию чистого сдвига. Замерены линейные деформации  $\pm \varepsilon$  по направлению главных напряжений. Найти перемещение точки приложения силы  $F$  (рис.2.15).

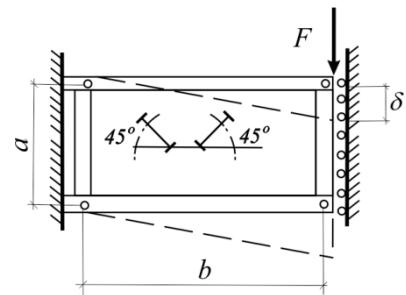


Рис. 2.15

Решение

$$\begin{cases} \varepsilon_1 = \frac{\sigma - \nu(-\sigma)}{E} = \frac{\sigma}{E}(1 + \nu) \Rightarrow \varepsilon \\ \varepsilon_2 = \frac{-\sigma - \nu\sigma}{E} = -\frac{\sigma}{E}(1 + \nu) \Rightarrow -\varepsilon \end{cases} \quad \begin{cases} \tau = \sigma \\ \gamma = \frac{\tau}{G} \Rightarrow \frac{2(1 + \nu)}{E} \cdot \sigma \Rightarrow 2\varepsilon \end{cases}$$

$$\delta \approx \gamma \cdot b = 2 \cdot \varepsilon \cdot b.$$

Ответ:  $\delta = 2\varepsilon b$ .

2.16. При совместном действии на элемент растягивающих и неизвестных сжимающих напряжений показания тензомера  $\Delta_A = 14$  мм. Определить  $\sigma_x$ , если база тензометра  $l_T = 100$  мм, коэффициент увеличения  $k = 2000$ ,  $E = 2 \times 10^5$  МПа,  $\nu = 0,3$ . Каковы будут показания тензомера А, если с элемента снять растягивающие напряжения  $\sigma_y$  (рис.2.16)?

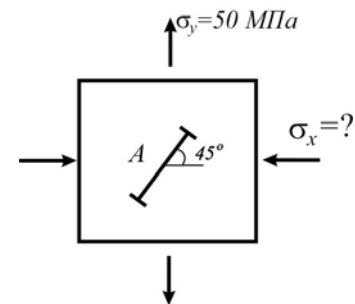


Рис. 2.16

Решение

$$\varepsilon_{\alpha} = \frac{\Delta}{kl_t} = \frac{14}{2000 \cdot 100} = 7 \cdot 10^{-5} \Rightarrow \frac{-\sigma_x - \nu \cdot 50}{2 \cdot 10^5} \cdot \frac{1}{2} + \frac{50 - \nu \cdot (-\sigma_x)}{2 \cdot 10^5} \cdot \frac{1}{2},$$

$$28 = -\sigma_x - 0,3 \cdot 50 + 50 - 0,3 \cdot \sigma_x = 0,7 \cdot \sigma_x + 35, \quad \sigma_x = -10 \text{ МПа};$$

$$\varepsilon'_{\alpha} = \frac{-10}{2 \cdot 10^5} \cdot \left( \frac{1}{2} - 0,3 \cdot \frac{1}{2} \right) \Rightarrow -1,75 \cdot 10^{-5} \rightarrow \frac{\Delta'}{2 \cdot 10^5}, \quad \Delta' = -3,5 \text{ мм}$$

Ответ:  $\Delta' = -3,5 \text{ мм}$ ,  $\sigma_x = -10 \text{ МПа}$ .

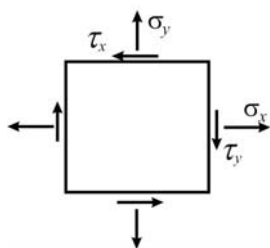


Рис. 2.17

**2.17. В некоторой точке тела  $\sigma_x = \sigma_y$ ,  $\tau_y = C$ . При каком значении напряжений  $\sigma_x$  напряженное состояние будет линейным (рис.2.17)?**

Решение

Линейное НС:  $\sigma_{\alpha} = 0$ ,  $\tau_{\alpha} = 0$ ,  $\sigma_{\beta} \neq 0$ :

$$\sigma_x = -C \sin 2\alpha \Rightarrow \pm C.$$

Ответ:  $\sigma_x = \pm C$ .

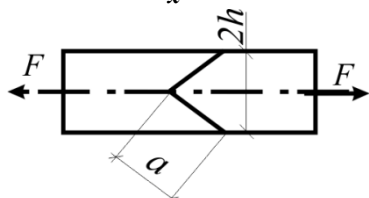


Рис. 2.18

**2.18. Нормальные напряжения в плоскости клевого шва в полтора раза больше касательных. Требуется определить такую величину размера  $a$  соединения, при которой выполняется это условие.**

Решение

$$\sigma_{\alpha} = p \cdot \sin \alpha, \quad \tau_{\alpha} = p \cdot \cos \alpha,$$

$$\sigma_{\alpha} = 1,5 \cdot \tau_{\alpha} \rightarrow \sin \alpha = 1,5 \cdot \cos \alpha, \quad \sin^2 \alpha = 2,25 \cdot \cos^2 \alpha,$$

$$\sin^2 \alpha = 2,25 \cdot (1 - \sin^2 \alpha), \quad \sin^2 \alpha = \frac{2,25}{3,25}.$$

$$\sin \alpha = \frac{h}{a}: \quad a = \frac{h}{\sin \alpha} \Rightarrow h \cdot \sqrt{\frac{3,25}{2,25}}.$$

Ответ:  $a \approx 1,2h$ .

**2.19.** Торцевые сечения *B* и *C* круглого прямого стержня длиной *l* жестко зашпемлены. На участке длиной *a* стержень нагружен равномерно распределенным по поверхности давлением интенсивностью *p*. Определить нормальные напряжения в поперечном сечении стержня, если жесткость сечения *EA* (рис.2.19).

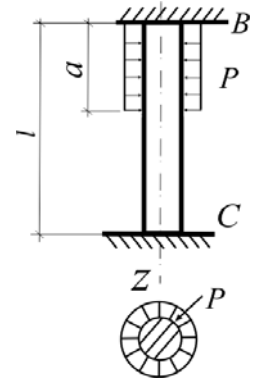


Рис. 2.19

Решение

Обобщенный закон Гука:

$$\varepsilon_z = \frac{1}{E}(\sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y)); \quad \Delta l_i = l_i \cdot \varepsilon_z:$$

$$a) \sigma_z = \frac{N}{A}, \sigma_x = \sigma_y = -p; \quad l_1 = a: \quad \Delta l_1 = \frac{a}{E} \cdot \left( \frac{N}{A} + 2\nu \cdot p \right);$$

$$б) \sigma_z = \frac{N}{A}, \sigma_x = \sigma_y = 0; \quad l_2 = l - a: \quad \Delta l_2 = \frac{l - a}{E} \cdot \left( \frac{N}{A} \right).$$

$$\Delta l = \Delta l_1 + \Delta l_2 = 0, : \frac{a}{E} \left( \frac{N}{A} + 2\nu p \right) + \frac{l - a}{E} \cdot \frac{N}{A} = 0, \quad \frac{l \cdot N}{EA} + \frac{a}{E} \cdot 2\nu p = 0.$$

Ответ:  $\sigma_z = \frac{N}{A} = -\frac{a}{l} \cdot 2 \cdot \nu \cdot p.$

**2.20.** Определить значение нормального напряжения  $\sigma_y$ , при котором линейная деформация в направлении  $x_0$  в два раза больше линейной деформации вдоль оси  $y_0$ . Дано:  $\alpha = 30^\circ$ ,  $\sigma_x = 20$  МПа,  $\nu = 0,3$  (рис.2.20).

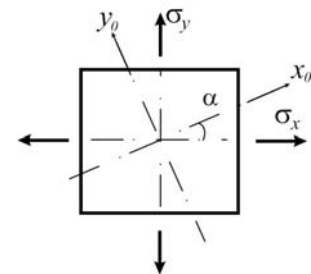


Рис. 2.20

Решение

$$\beta = \widehat{\sigma_x, y_0} = \alpha + \frac{\pi}{2};$$

$$\begin{cases} \varepsilon_\alpha = \varepsilon_x \cos^2 \alpha + \varepsilon_y \sin^2 \alpha \rightarrow \varepsilon_x \frac{3}{4} + \varepsilon_y \frac{1}{4} \rightarrow 2\varepsilon_\beta \\ \varepsilon_\beta = \varepsilon_\alpha \sin^2 \alpha + \varepsilon_y \cos^2 \alpha \rightarrow \varepsilon_x \frac{1}{4} + \varepsilon_y \frac{3}{4} \end{cases}$$

$$\frac{1}{4}(3\varepsilon_x + \varepsilon_y) = \frac{2}{4}(\varepsilon_x + \varepsilon_y \cdot 3), \quad \varepsilon_x = 5\varepsilon_y$$

$$\frac{1}{E}(\sigma_x - \nu\sigma_y) = 5 \frac{1}{E}(\sigma_y - \nu\sigma_x), \quad \sigma_y = \sigma_x \frac{1 + 5\nu}{5 + \nu} = 9,4 \text{ МПа.}$$

Ответ:  $\sigma_y = 9,4$  МПа.

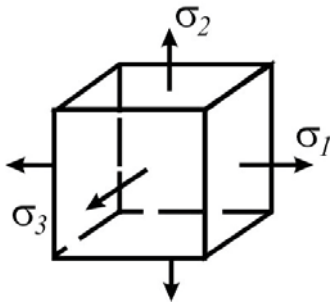


Рис. 2.22

2.22. Указать, при какой зависимости между главными напряжениями, действующими по граням элемента, имеет место одноосная деформация (т.е.  $\varepsilon_1 \neq 0$ ,  $\varepsilon_2 = \varepsilon_3 = 0$ ). Упругие постоянные материала считать известными (рис.2.22).

Решение

$$\begin{cases} \varepsilon_1 = \frac{1}{E}(\sigma_1 - \nu(\sigma_2 + \sigma_3)) \neq 0; \\ \varepsilon_2 = \frac{1}{E}(\sigma_2 - \nu(\sigma_3 + \sigma_1)) = 0, \quad \sigma_2 = \nu(\sigma_3 + \sigma_1); \\ \varepsilon_3 = \frac{1}{E}(\sigma_3 - \nu(\sigma_1 - \sigma_2)) = 0, \quad \sigma_3 = \nu(\sigma_1 - \sigma_2); \end{cases}$$

$$\sigma_2 = \sigma_1 \cdot \frac{\nu}{1-\nu}, \quad \sigma_3 = \sigma_1 \cdot \frac{\nu}{1-\nu}.$$

Ответ:  $\sigma_2 + \sigma_3 = \sigma_1 \cdot \frac{2\nu}{1-\nu}$ .

2.23. Полый куб, изготовленный из листового материала, подвержен действию одинаковых внутреннего и внешнего давлений  $p$ . Определить изменение объема материала куба, если известны  $E$ ,  $\nu$ ,  $p$ , сторона куба  $a$  и толщина стенок  $t$ . Отношение  $t/a$  считать малым.

Решение

$$V \approx 6 \cdot a^2 \cdot t.$$

$$\sigma_x = -p, \quad \sigma_y = \sigma_z = -p \left(1 + \frac{t}{a}\right) \approx -p,$$

$$\varepsilon_x = \varepsilon_y = \varepsilon_z = \frac{-p}{E}(1-2\nu)$$

$$e = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z = -3 \frac{p(1-2\nu)}{E}$$

$$\Delta V = eV = -\frac{3p(1-2\nu)}{E} \cdot 6a^2t = -\frac{18pa^2t}{E}(1-2\nu).$$

Ответ:  $\Delta V = -\frac{18pa^2t}{E}(1-2\nu)$ .

**2.24. В форме, состоящей из двух половин, прессуется пластмасса. Определить допускаемое (по условию прочности болтов) значение силы  $F$ , если для болтов  $R=50$  МПа, внутренний диаметр резьбы  $d=1,73$  см, коэффициент Пуассона пластмассы  $\nu=0,36$ . Деформацией формы и болтов пренебречь. Дано:  $a = 10$  см (рис.2.24).**

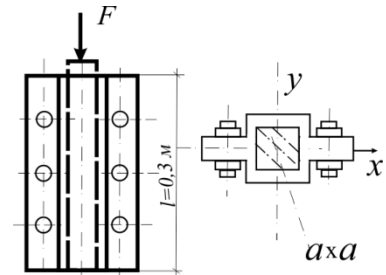


Рис. 2.24

Решение

$$а) \quad \sigma_z = -\frac{F}{a^2}, \quad \sigma_x = \sigma_y = -\sigma:$$

$$\varepsilon_x = \varepsilon_y = \frac{1}{E}(\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)) \Rightarrow \frac{1}{E}((- \sigma)(1 - \nu) - \nu\sigma_z) \Rightarrow 0:$$

$$(-\sigma) = \frac{\nu}{1 - \nu} \cdot \sigma_z, \quad \sigma = \frac{\nu}{1 - \nu} \cdot \frac{F}{a^2};$$

б) из равновесия одной половины формы:

$$\sigma \cdot a \cdot l = 6 \cdot R \frac{\pi d^2}{4}, \quad \sigma = \frac{3}{2} \cdot R \frac{\pi d^2}{l \cdot a};$$

$$\frac{3}{2} \cdot R \frac{\pi d^2}{l \cdot a} = \frac{\nu}{1 - \nu} \cdot \frac{F}{a^2}, \quad F = \frac{\nu}{1 - \nu} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{Ra \cdot \pi d^2}{l} \Rightarrow 47 \text{ кН.}$$

Ответ: 47 кН.

**2.25. Пять одинаковых кубиков помещены в абсолютно жесткую обложку. На средний кубик действует давление  $p$ . Определить напряжения, возникающие на гранях кубика. Упругие характеристики материала известны (рис.2.25).**

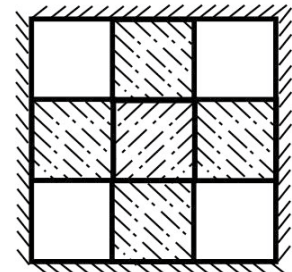


Рис. 2.25

Решение

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E}(\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)) \cdot \frac{\Delta l_i}{a}.$$

$$\text{Средний кубик: } \sigma_z = -p, \quad \sigma_x = \sigma_y = \sigma: \quad \varepsilon_1 \Rightarrow \varepsilon_x = \frac{1}{E}(\sigma - \nu(\sigma - p));$$

$$\text{Крайний кубик: } \sigma_x = \sigma, \quad \sigma_z = \sigma_y = 0: \quad \varepsilon_2 \Rightarrow \varepsilon_x = \frac{1}{E}(\sigma - \nu(0 + 0)) = \frac{\sigma}{E};$$

$$\text{По всей длине: } \Delta l = 2\varepsilon_2 a + \varepsilon_1 a = 0, \quad 2\frac{\sigma}{E}a + \frac{1}{E}(\nu p + \sigma - \nu\sigma)a = 0.$$

$$\text{Ответ: } \sigma = -p \cdot \frac{\nu}{3 - \nu}.$$

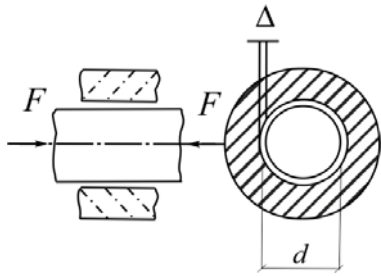


Рис. 2.26

**2.26. Упругий стержень вставлен в абсолютно жесткую трубку с кольцевым зазором  $\Delta$ . Под действием сил  $F$  зазор закрывается и на стенки трубки передается давление  $p$ . Определить коэффициент Пуассона материала стержня при заданных  $\Delta, d, F, p, E$  (рис.2.26).**

Решение

$$\text{а) } \sigma_z = \frac{-F_1}{A}, \sigma_x = \sigma_y = 0 : \varepsilon_x = \frac{1}{E} \nu \cdot \frac{F_1}{A} \Rightarrow \frac{2X}{d} : F_1 = \frac{2 \cdot \Delta \cdot EA}{\nu \cdot d};$$

$$\text{б) } \sigma_z \approx \frac{-F_2}{A},$$

$$\sigma_x = \sigma_y = -p : \varepsilon_x = \frac{1}{E} \cdot \left( -p - \nu \left( -\frac{F_2}{A} - p \right) \right) \Rightarrow 0 : F_2 = p \cdot A \cdot \frac{1-\nu}{\nu};$$

$$F = F_1 + F_2:$$

$$F = \frac{2 \cdot \Delta \cdot EA}{\nu \cdot d} + \frac{pA}{\nu} - pA, \quad \nu = \frac{2 \cdot E/d + p}{p + F/A}, \quad \text{где } A = \frac{\pi d^2}{4}.$$

$$\text{Ответ: } \nu = \left( \frac{2E\Delta}{d} + p \right) / \left( p + \frac{4F}{\pi d^2} \right).$$

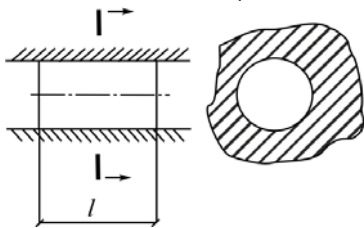


Рис. 2.27

**2.27. Упругий стержень вставлен без зазора в отверстие в абсолютно жестком теле. Предполагая отсутствие сил трения, определить удлинение стержня при нагревании его на  $\Delta t$ . Дано:  $l, \nu, \alpha_t$  (рис.2.27).**

Решение

$$\sigma_z = 0, \sigma_x = \sigma_y = -p :$$

$$\text{а) } \begin{cases} \varepsilon'_x = \varepsilon'_y = \frac{1}{E} ((-p) - \nu(-p - 0)) \Rightarrow \frac{-p(1-\nu)}{E} \\ \varepsilon''_x = \varepsilon''_y = \alpha_t \cdot \Delta t \end{cases}$$

$$\varepsilon'_x + \varepsilon''_x = 0 : p = \frac{E}{1-\nu} \cdot \alpha_t \cdot \Delta t ;$$

$$\text{б) } \begin{cases} \varepsilon'_z = \frac{1}{E} (0 - \nu(-p - p)) = \frac{2\nu}{E} p \Rightarrow \frac{2\nu}{1-\nu} \cdot \alpha_t \cdot \Delta t \\ \varepsilon''_z = \alpha_t \cdot \Delta t \end{cases}$$

$$\varepsilon'_z + \varepsilon''_z = \frac{\Delta l}{l} : \left( \frac{2\nu}{1-\nu} + 1 \right) \cdot \alpha_t \cdot \Delta t = \frac{\Delta l}{l}.$$

Ответ:  $\Delta l = \frac{1+\nu}{1-\nu} \cdot \alpha_t \cdot \Delta t \cdot l$ .

**2.29.** Ступенчатый стальной брус по всей длине подвергается действию всестороннего давления интенсивностью  $p$ . Определить допускаемое давление из условия, чтобы нормальные напряжения в поперечном сечении бруса не превышали 80 МПа. Принять:  $E = 2 \times 10^5$  МПа,  $\nu = 0,25$  (рис.2.29).

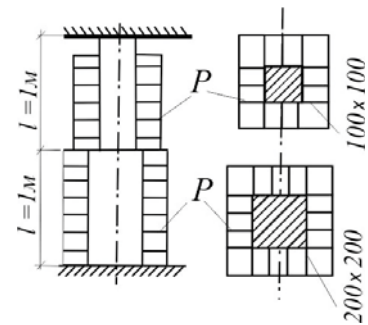


Рис. 2.29

Решение

$$\begin{aligned} \text{а) } \begin{cases} \sigma_z = -\frac{N}{A_1}, & \sigma_x = \sigma_y = -p, & A_1 = 0,1 \cdot 0,1 = 0,01 \text{ м}^2, \\ \varepsilon_z = \frac{1}{E} \left( -\frac{N}{A_1} + 2\nu p \right) \Rightarrow \frac{\Delta l_1}{l}, & \Delta l_1 = \frac{l}{E} \left( 2\nu p - \frac{N}{A_1} \right); \end{cases} \\ \text{б) } \begin{cases} \sigma_z = -\frac{N}{A_2}, & \sigma_x = \sigma_y = -p, & A_2 = 0,2 \cdot 0,2 = 0,04 \text{ м}^2 \Rightarrow 4 \cdot A_1 \\ \varepsilon_z = \frac{1}{E} \left( -\frac{N}{A_2} + 2\nu p \right) \Rightarrow \frac{\Delta l_2}{l}, & \Delta l_2 = \frac{l}{E} \left( 2\nu p - \frac{N}{A_2} \right); \end{cases} \\ \text{в) } \Delta l_1 + \Delta l_2 = 0: \frac{l}{E} \left( 4\nu p - \frac{N}{A_1} - \frac{N}{A_2} \right) = 0, \quad 4\nu p = \frac{5}{4} \cdot \frac{N}{A_1}; \\ \text{г) } \sigma_{\max} = \frac{N}{A_1} \leq [\sigma]: \quad p = \frac{5}{16 \cdot \nu} [\sigma] \Rightarrow \frac{5}{16 \cdot 0,25} \cdot 80 \text{ МПа} = 100 \text{ МПа}. \end{aligned}$$

Ответ:  $p = 100$  МПа.

**2.30.** На стержень  $AB$  квадратного сечения плотно надета абсолютно жесткая обойма  $CD$ . Определить изменение длины стержня после приложения нагрузки  $F$ . Трением между стержнем и обоймой пренебречь. Принять  $E = 100$  МПа,  $\nu = 0,5$  (рис.2.30).

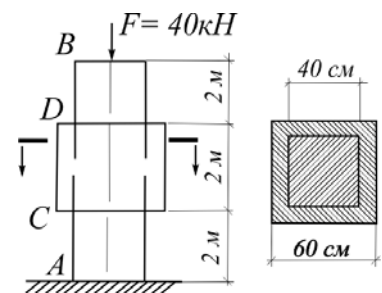


Рис. 2.30

Решение

$$A = 40 \text{ см} \cdot 40 \text{ см} = 0,16 \text{ м}^2; \quad l = 2 \text{ м};$$

$$\begin{aligned} \text{а) } \sigma_z = -\frac{F}{A}, \quad \sigma_x = \sigma_y = 0: \quad \varepsilon_z = \frac{1}{E} \left( -\frac{F}{A} \right) \Rightarrow \frac{\Delta l_1}{l}, \\ \Delta l_1 = \frac{-F \cdot l}{EA} \Rightarrow \frac{-40 \text{ кН} \cdot 2 \text{ м}}{100 \cdot 10^6 \text{ Па} \cdot 0,16 \text{ м}^2} = -5 \cdot 10^{-3} \text{ м} = -5 \text{ мм}; \end{aligned}$$

$$\text{б) } \sigma_z = -\frac{F}{A}, \sigma_x = \sigma_y = -\sigma: \quad \varepsilon_z = \frac{1}{E} \left( -\frac{F}{A} + \nu \sigma 2 \right) \Rightarrow \frac{\Delta l_0}{l},$$

$$\text{где } \varepsilon_x = \varepsilon_y = \frac{1}{E} \left( -\sigma - \nu \cdot \left( -\frac{F}{A} - \sigma \right) \right) \Rightarrow 0: \quad \sigma = \frac{\nu}{1-\nu} \cdot \frac{F}{A},$$

$$\Delta l_0 = \frac{l}{E} \left( -\frac{F}{A} + 2\nu \sigma \right) = \frac{Fl}{EA} \left( -1 + 2\nu \frac{\nu}{1-\nu} \right) \Rightarrow 0 \text{ мм};$$

$$\text{в) } \Delta l = \Delta l_1 + \Delta l_0 + \Delta l_1 \Rightarrow -10 \text{ мм}.$$

Ответ:  $\Delta l = -10$  мм.

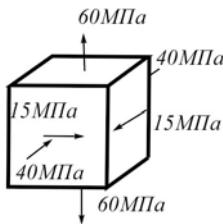


Рис. 2.31

**2.31. Для объемного напряженного состояния, показанного на рис. 2.31, определить наибольшее касательное напряжение.**

Решение

$$\text{а) } \sigma_z = +60 \text{ МПа};$$

$$\text{б) } XY: \sigma_x = -40 \text{ МПа}, \tau_{xy} = 15 \text{ МПа}, \sigma_y = 0:$$

$$\sigma_{\max/\min} = \frac{-40+0}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(-40-0)^2 + 4 \cdot 15^2} \Rightarrow \begin{cases} +5 \text{ МПа} \\ -45 \text{ МПа} \end{cases};$$

$$\text{в) Вывод: } \sigma_1 = +60 \text{ МПа}, \sigma_2 = +5 \text{ МПа}, \sigma_3 = -45 \text{ МПа}; \tau_{\max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}.$$

Ответ:  $\tau_{\max} = 52,5$  МПа.

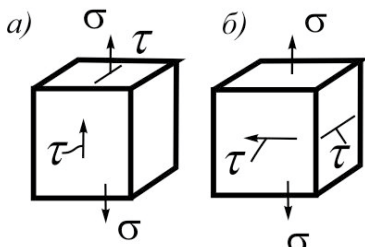


Рис. 2.32

**2.32. Пользуясь III теорией прочности, определить, какой из указанных на рисунке случаев напряженного состояния опаснее (рис.2.32).**

Решение

$$\xi = \frac{\sigma}{\tau}. \text{ III теория прочности: } \sigma_{\text{экв}} = \sigma_1 - \sigma_3:$$

$$\text{а) } \sigma_2 = 0: \quad \sigma_{\text{экв}} = \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} \Rightarrow \tau \cdot \sqrt{\xi^2 + 4};$$

$$\text{б) } \sigma_1 = +\sigma, \sigma_2 = +\tau, \sigma_3 = -\tau: \quad \sigma_{\text{экв}} = \sigma_1 - \sigma_3 \Rightarrow \sigma + \tau = \tau(\xi + 1);$$

$$\text{в) } \begin{cases} \frac{\sqrt{\xi^2 + 4}}{\xi + 1} > 1, & \xi^2 + 4 > \xi^2 + 2\xi + 1, & \xi < 1,5 \Rightarrow (a); \\ \frac{\sqrt{\xi^2 + 4}}{\xi + 1} < 1, & & \xi > 1,5 \Rightarrow (б). \end{cases}$$

Ответ:  $\begin{cases} \text{При } \frac{\sigma}{\tau} < 1,5 \text{ состояние (а)} \\ \text{При } \frac{\sigma}{\tau} > 1,5 \text{ состояние (б)} \end{cases}$ .



2.33. Определить изменение прямого угла  $DBC$ , выделенного в окрестности точки  $B$ , если сосредоточенную силу  $F$  повернуть в плоскости чертежа на угол  $\pi/2$ . Модуль сдвига  $G$  и площадь прямоугольного поперечного сечения стержня  $A$  считать известными. Точка  $B$  лежит на продольной оси стержня (рис.2.33).

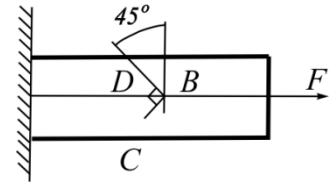


Рис. 2.33

Решение

$$y_B = 0; \quad \alpha = 45^\circ: \quad \tau_\alpha = \sigma_z \frac{\sin 2\alpha}{2} + \tau \cos 2\alpha \Rightarrow \sigma_z \cdot \frac{1}{2}.$$

а) Растяжение:  $N = F: \quad \sigma_z = \frac{N}{A}: \quad \tau_\alpha = \frac{1}{2} \cdot \frac{F}{A}:$

$$\gamma_1 = \frac{1}{G} \cdot \tau_\alpha \Rightarrow \frac{F}{2GA} \text{ (уменьшение);}$$

б) Изгиб:  $M_x = F \cdot z, \quad Q_y = F: \quad \sigma_z = \frac{M_x}{J_x} \cdot y_B = 0: \quad \tau_\alpha = 0:$

$$\gamma_2 = \frac{1}{G} \tau_\alpha \Rightarrow 0 \text{ (нет изменения);}$$

в)  $\Delta\gamma = \gamma_2 - \gamma_1 \Rightarrow \frac{-F}{2GA}.$

Ответ: угол увеличится на  $F/(2GA)$ .

2.34. Определить, при каком соотношении между напряжениями  $\sigma_x, \sigma_y, \tau_y$  в данной точке материала возникает линейное напряженное состояние (рис.2.34).

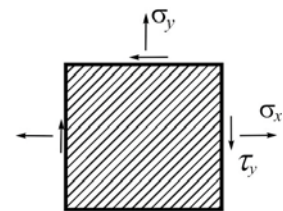


Рис. 2.34

Решение

$$\sigma_1 = \sigma_{\max} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau^2} \neq 0;$$

$$\sigma_2 = \sigma_{\min} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau^2} = 0:$$

$$(\sigma_x + \sigma_y)^2 = (\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau^2, \quad 2\sigma_x\sigma_y = -2\sigma_x\sigma_y + 4\tau^2$$

Ответ:  $\sigma_x\sigma_y = \tau^2$ .

2.35. К элементу приложено напряжение  $\sigma$ . Какое касательное напряжение  $\tau$  нужно дополнительно приложить, чтобы  $\tau_{\max}$  в материале увеличилось в два раза (рис.2.35)?

Решение

а)  $\tau'_{\max} = \sigma/2;$

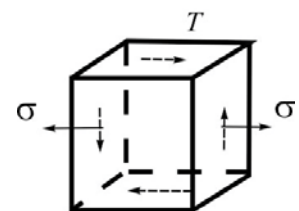


Рис. 2.35

$$\text{б) } \tau_{\max}'' = \frac{\sigma_{\max} - \sigma_{\min}}{2} \Rightarrow \frac{\sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2}}{2};$$

$$\text{в) } \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} = 2\sigma.$$

$$\text{Ответ: } \tau = \pm\sigma\sqrt{3}/4.$$

**2.37. В растянутом вдоль оси стержне нормальные напряжения по одному из наклонных сечений равны 75 МПа, а касательные – 43,3 МПа. Определить  $\sigma_{\max}$  в стержне и угол наклона площадки к поперечному сечению.**

Решение

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_{\alpha} = \sigma_z \cdot \cos^2 \alpha = 75 \text{ МПа} \\ \tau_{\alpha} = \sigma_z \frac{\sin 2\alpha}{2} = 43,3 \text{ МПа} \end{array} \right. , \quad \left\{ \begin{array}{l} \operatorname{tg} \alpha = \frac{\tau_{\alpha}}{\sigma_{\alpha}} = 0,5773, \quad \alpha = 30^{\circ}; \\ \sigma_z \Rightarrow 100 \text{ МПа.} \end{array} \right.$$

Ответ: 100 МПа, 30°.

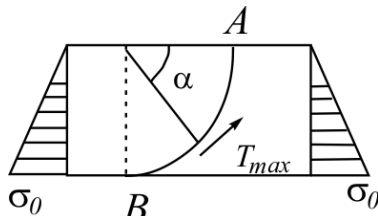


Рис. 2.39

**2.39. Полоса, склеенная по дуге окружности  $AB$  из двух однородных материалов, находится в линейном напряженном состоянии. Во всех поперечных сечениях напряжения распределяются по указанному на рисунке закону. Определить  $\tau_{\max}$  в склейке и угол  $\alpha$ , соответствующий точке, в которой действует  $\tau_{\max}$**

Решение

$$y = h \cdot \sin \alpha: \quad \sigma_z = \sigma_0 \cdot \frac{y}{h} \Rightarrow \sigma_0 \cdot \sin \alpha.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_{\alpha} = \sigma_z \cos^2 \alpha \Rightarrow \sigma_0 \cdot \sin \alpha \cdot \cos^2 \alpha \\ \tau_{\alpha} = \sigma_z \frac{\sin 2\alpha}{2} \Rightarrow \sigma_0 \cdot \sin^2 \alpha \cdot \cos \alpha \end{array} \right. ; \quad \tau'_{\alpha} = \sigma_0 (2 \sin \alpha \cos^2 \alpha - \sin^3 \alpha).$$

$$\tau = \tau_{\max}, \text{ если } \tau'_{\alpha} = 0: \sin \alpha \cdot (2 \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha) = 0,$$

$$2 \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = 0, \quad 3 \cos^2 \alpha - 1 = 0, \quad \left\{ \begin{array}{l} \cos^2 \alpha = 1/3 \\ \sin^2 \alpha = 2/3 \end{array} \right.$$

$$\tau_{\max} \Rightarrow \sigma_0 \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} = \sigma_0 \frac{2\sqrt{3}}{9},$$

$$\alpha = \operatorname{arctg}(\sqrt{3}/3) \cong 54,7^{\circ}.$$

Ответ:  $\tau_{\max} = \sigma_0 \frac{2\sqrt{3}}{9}$ ,  $\alpha \approx 54,7^{\circ}$ .

2.40. Какое напряженное состояние (линейное, плоское или объемное) возникает в данной точке материала? Определить величину главных напряжений и положение главных площадок (рис.2.40).

Решение

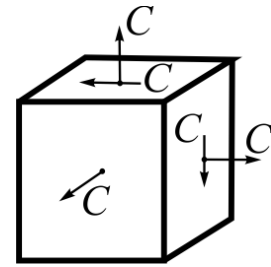
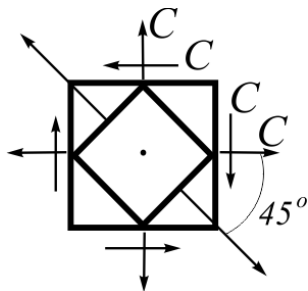


Рис. 2.40



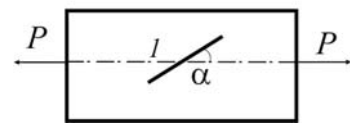
$$\begin{cases} \sigma_2 = +C \\ \sigma_{\max/\min} = \frac{+2c}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{0^2 + 4c^2} = C \pm C = \begin{cases} +2C \rightarrow \sigma_1; \\ 0 \rightarrow \sigma_3 \end{cases} \\ \sigma_1 = +2C, \sigma_2 = +C, \sigma_3 = 0: \end{cases}$$

Плоское напряженное состояние.

Ответ:  $\sigma_1 = 2C, \sigma_2 = C, \sigma_3 = 0; \alpha = 45^\circ$ .

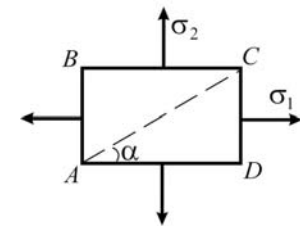
### Задачи для самостоятельного решения

1. На стержень установлен тензометр под углом  $\alpha$  к продольной оси. При каком  $\alpha$  имеет место равенство  $\Delta_1 = \Delta_2$ , где  $\Delta_1$  и  $\Delta_2$ , – отсчеты по тензометру до и после действия силы  $F$ .



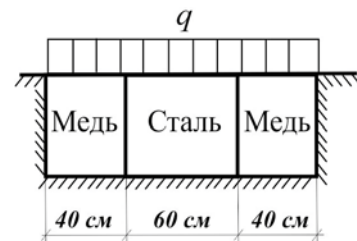
Ответ:  $\alpha = \pm \arctg \sqrt{1/\nu}$ .

2. При каком соотношении между напряжениями  $\sigma_1$  и  $\sigma_2$  длина диагонали  $AC$  элемента  $ABCD$  не изменится, если коэффициент Пуассона материала равен  $\nu$ ?

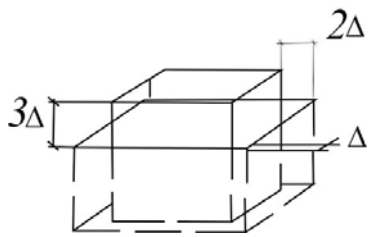


Ответ:  $\frac{\sigma_1}{\sigma_2} = \frac{\nu - \text{tg}^2 \alpha}{1 - \nu \text{tg}^2 \alpha}$ .

3. Три пластины единичной толщины были плотно вставлены в недеформируемую обойму. Затем к ним была приложена нагрузка  $q$ , как показано на рисунке. Определить главные напряжения в пластинках. Трением между пластинками пренебречь:  $E_{ст}/E_{м} = 2$ .

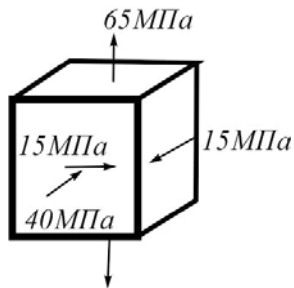


Ответ:  $\sigma_1 = 0, \sigma_2 = -\nu q, \sigma_3 = -q$ .



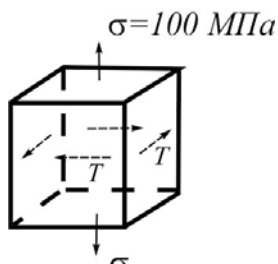
4. Кубик из изотропного упругого материала вставлен в гнездо абсолютно жесткой плиты (рис.2.28). Под действием давления, приложенного к выступающей грани зазоры закрываются, и в момент закрытия последнего зазора верхняя грань достигает уровня поверхности плиты. Найти коэффициент Пуассона материала кубика.

Ответ:  $\nu = 0,5$ .



5. Определить наибольшее касательное напряжение (рис.2.38).

Ответ:  $\tau_{\max} = 55 \text{ МПа}$ .



6. Какое наибольшее значение касательных напряжений  $\tau$  можно допустить, чтобы  $\tau_{\max}$  в материале не превзошло 80 МПа?

Ответ: 60 МПа.

Рис. 2.36

## Глава 3. ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ПЛОСКИХ ФИГУР

### Краткие теоретические сведения Основные понятия и обозначения

$S_x = \int_A y dA \rightarrow$  статический момент фигуры относительно оси  $x$  ( $y : x \leftrightarrow y$ );

$I_x = \int_A y^2 dA \rightarrow$  осевой момент инерции относительно оси  $x$  ( $y : x \leftrightarrow y$ );

$W_x = \frac{I_x}{y_{max}} \rightarrow$  осевой момент сопротивления относительно оси  $x$  ( $y : x \leftrightarrow y$ );

$I_{xy} = \int_A xy dA \rightarrow$  центробежный момент инерции относительно осей  $x, y$ ;

$I_p = \int_A \rho^2 dA \rightarrow$  полярный момент инерции относительно полюса;

$I_p = I_x + I_y \rightarrow$  если полюс совпадает с началом декартовых координат  $x, y$ ;

центральная  $\rightarrow$  ось, проходящая через центр тяжести фигуры  $\Rightarrow S_x = 0$ ;

главные  $\rightarrow$  оси, относительно которых  $I_{xy} = 0$ ;

ось симметрии фигуры  $\rightarrow$  главная центральная ось.

Параллельный перенос осей:

$S_{x_1} = A \cdot Y_c$ , где  $Y_c \rightarrow$  расстояние от центра тяжести фигуры до оси  $x_1$ ;

$I_{x_1} = I_x + A \cdot Y_c^2$ , где  $Y_c \rightarrow$  расстояние от центральной оси  $x$  до любой оси  $x_1$ ;

следствие: относительно центральных осей осевые моменты инерции фигуры принимают минимальное значение.

Тензор моментов инерции: 
$$T_I = \begin{pmatrix} I_x & I_{yx} \\ I_{xy} & I_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_u & I_{vu} \\ I_{uv} & I_v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_1 & 0 \\ 0 & I_2 \end{pmatrix}.$$

Поворот осей  $\angle \alpha = \widehat{x, u} > 0$ , если  $\curvearrowright$ :

$$I_u = I_x \cos^2(\alpha) + I_y \sin^2(\alpha) - I_{xy} \sin(2\alpha),$$

$$I_v = I_x \sin^2(\alpha) + I_y \cos^2(\alpha) + I_{xy} \sin(2\alpha);$$

$$I_{uv} = I_{xy} \cos(2\alpha) + (I_x - I_y) \frac{\sin(2\alpha)}{2};$$

следствия:

1) относительно главных осей осевые моменты инерции фигуры принимают экстремальные значения;

2) если относительно главных осей  $xu$  ( $I_{xy} = 0$ ) осевые моменты инерции равны ( $I_x = I_y$ ), то оси  $uv$  главные ( $I_{uv} = 0$ ) и  $I_x = I_y = I_u = I_v$ ;

3) инварианты тензора:  $I_u + I_v = I_x + I_y$ ,  $I_u I_v - I_{uv}^2 = I_x I_y - I_{xy}^2$ ;

главные моменты инерции:  $I_{1,2} = \frac{I_x + I_y}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(I_x - I_y)^2 + 4I_{xy}^2}$ ;

главные оси:  $\tan \alpha_{1,2} = \frac{I_{xy}}{I_y - I_{1,2}}$ ,  $\angle \alpha_{1,2} = \widehat{x, \alpha_{1,2}} > 0$ , если  $\curvearrowright$ ;

центробежный момент инерции:  $\max |I_{uv}| = \frac{I_1 - I_2}{2} = \frac{1}{2} \sqrt{(I_x - I_y)^2 + 4I_{xy}^2}$ .

Для правильных фигур (более двух осей симметрии) все центральные оси являются главными центральными осями ( $I_{xy} = I_{uv} = 0$ ) и  $I_x = I_y = I_u = I_v$ .

## Примеры решения задач

**3.1. Определить положение центра тяжести заданной фигуры путем построения с помощью одной линейки (рис.3.1).**

Решение

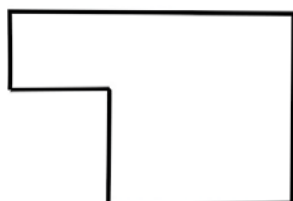


Рис. 3.1

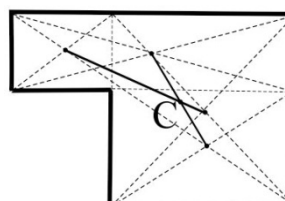


Рис. 3.1(a)

**3.2. Показать положение главных центральных осей заданной фигуры (не прибегая к вычислениям) (рис.3.2).**

Решение

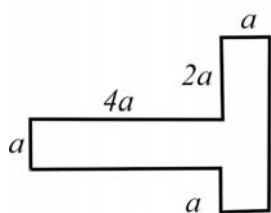


Рис. 3.2

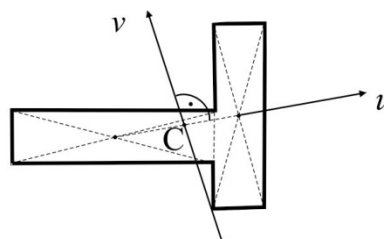


Рис. 3.2 (a)

3.3. Показать положение главных центральных осей заданной фигуры (не прибегая к вычислениям) (рис.3.3).

Решение

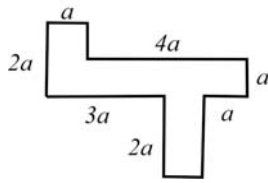
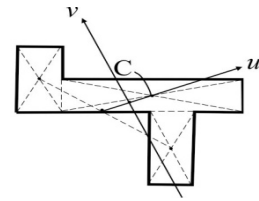


Рис. 3.3



3.4. Из равнобедренного треугольника  $ABC$  вырезан равнобедренный треугольник  $ADC$ . Определить высоту вырезанного треугольника, если вершина его  $D$  является центром тяжести оставшейся фигуры (на рисунке заштрихована) (рис.3.4).

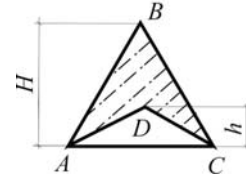


Рис.3.4

$$y_c = \frac{S_{x_0}}{A} = \frac{a \cdot \frac{H}{2} \cdot \frac{H}{3} - a \cdot \frac{h}{2} \cdot \frac{h}{3}}{\frac{aH - ah}{2}} = h, \quad \frac{H^2/3 - h^2/3}{H - h} = h, \quad \frac{H + h}{3} = h.$$

Ответ:  $h = \frac{H}{2}$ .

3.5. Вычислить момент инерции фигуры относительно оси  $x$  (рис.3.5).

Решение

$$I_x = \int_A y^2 dA \rightarrow \int_0^h b dy \cdot y^2 = b \frac{y^3}{3} \Big|_0^h = \frac{bh^3}{3}.$$

Ответ:  $\frac{bh^3}{3}$ .

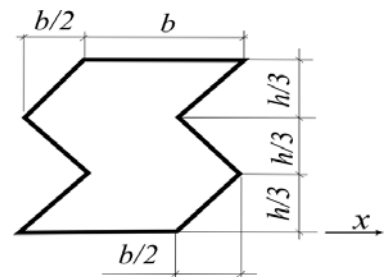


Рис.3.5

3.6. Определить момент инерции заштрихованной фигуры относительно центральной оси  $x_2$  параллельной  $x_1$  (рис.3.6).

Решение

$$I_{x_1} = \frac{(2a)^4}{12} - \left( \frac{\pi a^4}{64} + \frac{\pi a^2}{4} \left( \frac{a}{2} \right)^2 \right) \approx 1,088 \cdot a^4;$$

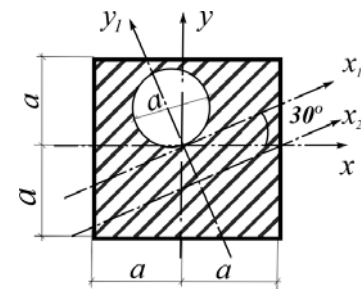


Рис.3.6

$$Y_{1c} = \frac{\sum S_{x_1}}{\sum A} = \frac{(2a)^2 \cdot 0 - (\pi a^2 / 4) a / 2}{(2a)^2 - \pi a^2 / 4} \approx -0,1222 \cdot a;$$

$$I_{x_2} = I_{x_1} - (2a)^2 - \pi a^2 / 4 \cdot Y_{1c}^2 \approx 1,04 \cdot a^4. \text{ Ответ: } 1,04 \cdot a^4.$$

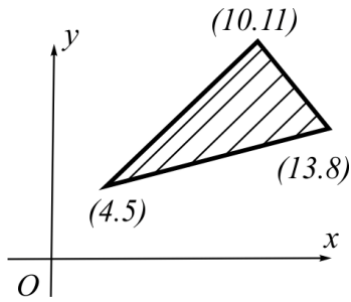


Рис.3.7

**3.7. Вычислить полярный момент инерции треугольника относительно начала координат. Треугольник задан координатами своих вершин (в см) (рис.3.7).**

Решение

$$I_x = \left( \frac{9 \cdot 6^3}{12} + 54 \cdot 8^2 \right) - \left( \frac{9 \cdot 3^3}{36} + \frac{27}{2} \cdot 6^2 \right) -$$

$$- \left( \frac{3 \cdot 3^3}{36} + \frac{9}{2} \cdot 10^2 \right) - \left( \frac{6^4}{36} + \frac{36}{2} \cdot 9^2 \right) = 1179 \text{ см}^4;$$

$$I_y = \left( \frac{6 \cdot 9^3}{12} + 54 \cdot 8,5^2 \right) - \left( \frac{3 \cdot 9^3}{36} + \frac{27}{2} \cdot 10^2 \right) -$$

$$- \left( \frac{3^4}{36} + \frac{9}{2} \cdot 12^2 \right) - \left( \frac{6^4}{36} + \frac{36}{2} \cdot 6^2 \right) = 1521 \text{ см}^4.$$

Ответ:  $I_p = I_x + I_y \Rightarrow 2700 \text{ см}^4$ .

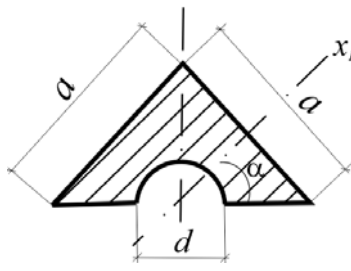


Рис.3.8

**3.8. Определить момент инерции фигуры относительно оси  $x_1$  (рис.3.8).**

Решение

$$I_{x_1} = \frac{1}{2} \cdot \frac{a^4}{12} - \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi \cdot d^4}{64}.$$

Ответ:  $I_{x_1} = 0,5 \left( \frac{a^4}{12} - \frac{\pi d^4}{64} \right)$ .

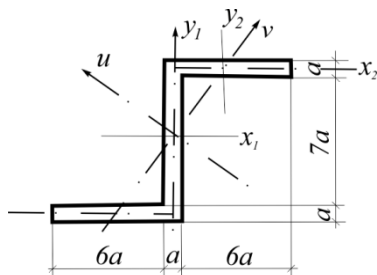


Рис.3.9

**3.9. Вычислить центробежный момент инерции плоской фигуры относительно осей  $u, v$ , при этом ось  $v$  проходит через центры тяжести трех одинаковых прямоугольников, составляющих фигуру (рис.3.9).**

Решение

$$\sin \alpha = \frac{4}{5}, \quad \cos \alpha = \frac{3}{5}, \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{4}{3}, \quad \sin 2\alpha = \frac{24}{25}, \quad \cos 2\alpha = \frac{-7}{25}.$$

$$\begin{cases} I_{x_1} = \frac{7a \cdot a^3}{12}, & I_{y_1} = \frac{(7a)^3 \cdot a}{12}, & I_{x_1 y_1} = 0 \\ I_{uv}^{(1)} = \frac{I_{x_1} - I_{y_1}}{2} \cdot \sin 2\alpha \rightarrow \frac{7a \cdot a}{12} \cdot \frac{1}{2} (a^2 - (7a)^2) \cdot \frac{24}{25} = -\frac{336}{25} \cdot a^4 \end{cases}$$



$$\begin{cases} I_{x_2} = \frac{(7a)^3 \cdot a}{12}, & I_{y_2} = \frac{7a \cdot a^3}{12}, & I_{x_1 y_1} = 0 \\ I_{uv}^{(2)} = \frac{I_{x_2} - I_{y_2}}{2} \cdot \sin 2\alpha \rightarrow \frac{7a \cdot a}{12} \cdot \frac{1}{2} \left( (7a)^2 - a^2 \right) \cdot \frac{24}{25} = + \frac{336}{25} \cdot a^4 \\ I_{uv} = 2I_{uv}^{(1)} + I_{uv}^{(2)} = - \frac{336}{25} a^4 = -13,44a^4. \end{cases}$$

Ответ:  $I_{uv} = -13,44a^4$ .

**3.10. Определить момент инерции фигуры относительно оси  $x_1$ .**

Решение

$$I_{x_1}^{(1)} = \frac{\pi \cdot b^4}{4} \cdot \frac{1}{2}$$

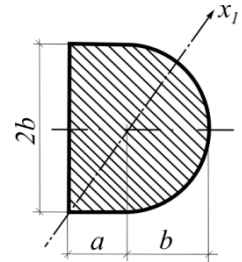


Рис. 3.10

$$\sin \alpha = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \quad \cos \alpha = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

$$I_x^{(2)} = \frac{a \cdot (2b)^3}{12}, \quad I_y^{(2)} = \frac{(a)^3 \cdot 2b}{3}, \quad I_{xy}^{(2)} = 0,$$

$$I_{x_1}^{(2)} = I_x^{(2)} \cos^2 \alpha + I_y^{(2)} \sin^2 \alpha = \frac{a \cdot (2b)^3}{12} \cdot \frac{a^2}{a^2 + b^2} + \frac{(a)^3 \cdot 2b}{3} \cdot \frac{b^2}{a^2 + b^2} = \frac{4}{3} \cdot \frac{a^3 b^3}{a^2 + b^2}$$

$$I_{x_1} = I_{x_1}^{(1)} + I_{x_1}^{(2)} = \frac{\pi \cdot b^4}{8} + \frac{4a^3 b^3}{3(a^2 + b^2)}.$$

Ответ:  $I_{x_1} = \frac{\pi \cdot b^4}{8} + \frac{4a^3 b^3}{3(a^2 + b^2)}$ .

**3.11. Вывести формулу центробежного момента инерции относительно осей  $x$ ,  $y$ , проходящих через центр тяжести заштрихованной фигуры (рис.3.11).**

Решение

$$\begin{cases} S_x = 0: & A_1 \cdot y_1 = A_2 \left( \frac{d}{2} + c \right) \\ S_y = 0: & A_2 \cdot x_2 = A_1 \left( \frac{a}{2} + b \right) \end{cases}$$

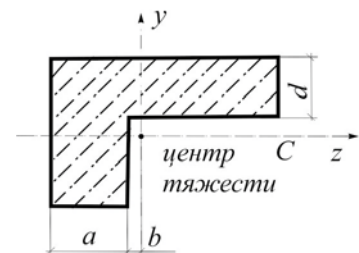


Рис.3.11

$$I_{xy} = A_1 (-y_1) \cdot \left( - \left( \frac{a}{2} + b \right) \right) + A_2 \cdot x_2 \cdot \left( \frac{d}{2} + c \right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow A_2 \left( \frac{d}{2} + c \right) \cdot \left( \frac{a}{2} + b \right) + A_1 \left( \frac{a}{2} + b \right) \cdot \left( \frac{d}{2} + c \right) = \left( \frac{d}{2} + c \right) \cdot \left( \frac{a}{2} + b \right) \cdot (A_1 + A_2).$$

Ответ:  $\left( \frac{d}{2} + c \right) \cdot \left( \frac{a}{2} + b \right) \cdot A.$

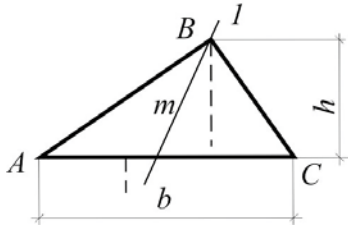


Рис.3.12

**3.12.** Найти момент инерции треугольника *ABC* относительно оси *I-I*, совпадающей с медианой. Размеры *b*, *h*, *m* заданы (рис.3.12).

Решение

$$\sin \alpha = h/m, \quad h_m = \frac{b}{2} \cdot \sin \alpha \Rightarrow \frac{b}{2} \cdot \frac{h}{m}.$$

$$I_{1-1} = 2 \cdot \frac{m h_m^3}{12} \Rightarrow \frac{b^3 \cdot h^3}{48 \cdot m^2}.$$

Ответ:  $I_{1-1} = \frac{b^3 \cdot h^3}{48 \cdot m^2}.$   
 $t=0,25r$

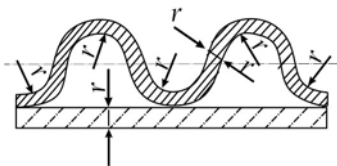


Рис.3.13

**3.13.** Для составного профиля, изображенного на рисунке, определить момент инерции относительно горизонтальной центральной оси (рис.3.13).

Решение

$$Y_c = \frac{4(2r+t) \cdot t \cdot (r+1,5t) + 0}{4(2r+t)t + (\pi(r+t)^2 + \pi r^2) \cdot 2} = \frac{2,25r^2 \cdot 1,375r + 0}{2,25r^2 + 1,125r^2\pi} = 0,53485r.$$

$$I_x = 2 \cdot \left( \frac{\pi(r+t)^4}{4} - \pi r^4 / 4 + \frac{\pi \cdot 1,125}{2} \cdot r^2 \cdot (0,53485r)^2 \right) + \left( \frac{9r \cdot t^3}{12} + 2,25r^2 \cdot (0,84015r)^2 \right) = 3,275r^4 + 1,600r^4.$$

Ответ:  $4,875 \cdot r^4.$

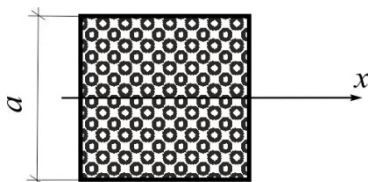


Рис.3.16

**3.14.** Стержень квадратного сечения выполнен из материала с капиллярами, ориентированными вдоль оси стержня и равномерно распределенными по площади сечения с коэффициентом пористости  $A_{\text{кап}}/A_{\text{бр}}=0,25$ . Определить размер сечения, для которого  $I_x = 10000 \text{ см}^4$  (рис.3.16).

Решение

$$A_{netto} = A_{\text{бп}} - A_{\text{кан}} = A_{\text{бп}} \cdot (1 - 0,25) = 0,75 \cdot A_{\text{бп}}.$$

$$I_x = \int_{A_{\text{бп}}} dA_{netto} \cdot y^2 = \int_{-a/2}^{a/2} dy \cdot a \cdot 0,75 \cdot y^2 = \frac{3a}{4} \cdot \frac{y^3}{3} \Big|_{-a/2}^{a/2} = \frac{3}{4} \cdot \frac{a^4}{12} = \frac{a^4}{16}.$$

$$a/2 = \sqrt[4]{I_x} = \sqrt[4]{10^4} = 10 \text{ см.}$$

Ответ:  $a = 20$  см.

**3.15. Определить центробежный момент инерции  $I_{zy}$  прямоугольного треугольника относительно центральных осей  $x, y$ , параллельных катетам, не прибегая к интегрированию (рис.3.17).**

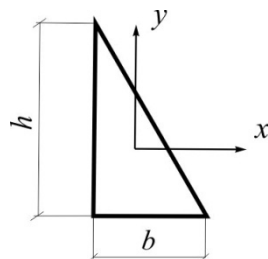


Рис.3.17

Решение

$$I_{x_0y_0} = \int_A dAx_0y_0 = \int_0^h \int_0^{x(y)=b-\frac{b}{h}y} dx \cdot dy \cdot x \cdot y = \int_0^h y dy \int_0^{b-\frac{b}{h}y} x dx =$$

$$= \int_0^h y dy \left( b - \frac{b}{h}y \right)^2 \frac{1}{2} = \int_0^h \frac{1}{2} \left( b^2 - 2\frac{b^2}{h}y + \left(\frac{b}{h}\right)^2 y^2 \right) y dy =$$

$$= \left( \frac{b^2}{2} \frac{y^2}{2} - \frac{b^2}{h} \frac{y^3}{3} + \frac{1}{2} \left(\frac{b}{h}\right)^2 \frac{y^2}{4} \right) \Big|_0^h =$$

$$= \frac{b^2 h^2}{4} - \frac{b^2 h^2}{3} + \frac{b^2 h^2}{8} = \frac{b^2 h^2}{24} (6 - 8 + 3) = \frac{b^2 h^2}{24};$$

$$I_{xy} = I_{x_0y_0} - A \cdot \frac{h}{3} \cdot \frac{b}{3} = \frac{b^2 \cdot h^2}{24} - \frac{b^2 \cdot h^2}{18} = -\frac{b^2 \cdot h^2}{72}.$$

Ответ:  $I_{xy} = -\frac{b^2 \cdot h^2}{72}$ .

**3.18. Найти осевой момент инерции  $I_x$  круга, ослабленного отверстиями в форме равносторонних треугольников со стороной, равной  $r/4$  (рис.3.19).**

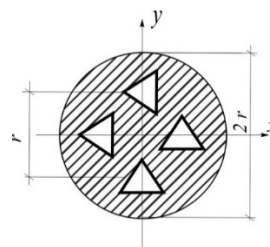


Рис.3.19

Решение

$$A_o = \frac{r \left(\frac{r}{4}\right) \sin 60}{4 \cdot 12} = \frac{r^2 \sqrt{3}}{64}, I_o = \frac{\left(\frac{r}{4}\right) \left(\frac{r}{4} \sin 60\right)^3}{36} = \frac{r^4 \sqrt{3}}{24576}$$

$$I_x = \frac{\pi r^4}{4} - 2I_o - 2 \left( I_o + A_o \left(\frac{r}{2}\right)^2 \right) = \frac{\pi r^4}{4} - 4I_o - \frac{A_o r^2}{2}.$$

Ответ:  $I_x = 0,772r^4$ .

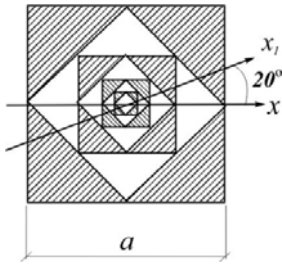


Рис.3.21

**3.19.** Фигура образована вписанными друг в друга квадратами (на рис.3.21 они заштрихованы). Вычислить момент инерции относительно оси  $x_1$ , когда число квадратов стремится к бесконечности (рис.3.21).

Решение

$$\begin{aligned}
 I_{x_1} = I_x &= \frac{a^4}{12} - \left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^4 \cdot \frac{1}{12} + \left(\frac{a\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^4 \cdot \frac{1}{12} - \left(\frac{a\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^4 \cdot \frac{1}{12} + \dots = \\
 &= \frac{a^4}{12} \left[ 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^4 + \left(\frac{1}{2}\right)^4 \left(\frac{1}{2}\right)^4 - \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^4 \cdot \left(1^4 + \left(\frac{1}{2}\right)^4 + \dots\right) \right] = \\
 &= \frac{a^4}{12} \left[ \left(1 - \frac{1}{4}\right) \cdot 1 \frac{1}{1 - 1/16} \right] = \frac{a^4}{12} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{16}{15} = \frac{a^4}{15}.
 \end{aligned}$$

Ответ:  $\frac{a^4}{15}$ .

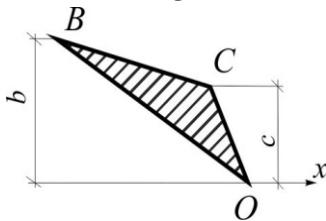


Рис.3.22

**3.20.** Найти момент инерции  $I_x$  треугольника  $OBC$ , если известна его площадь  $A$  и длины отрезков  $b$  и  $c$  (рис.3.22).

Решение

$$A = \frac{1}{2}(Lb - lb - (L-l)c) = \frac{1}{2}(b-c)(L-l),$$

$$(L-l) = \frac{2A}{b-c}.$$

$$I_x = \frac{L \cdot b^3}{12} - \frac{l \cdot b^3}{12} - \frac{(L-l)c^3}{12} = \frac{L-l}{12}(b^3 - c^3).$$

Ответ:  $I_x = \frac{A}{6}(b^2 + bc + c^2)$ .

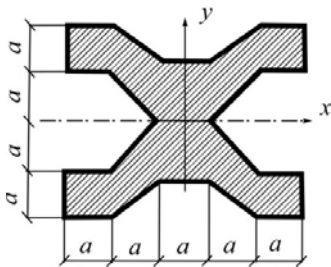


Рис. 3.23

**3.21.** Для заданной фигуры определить момент инерции относительно оси  $y$ .

Решение

$$I_y = \frac{2a \cdot (5a)^3}{12} = \frac{125 \cdot a^4}{6}.$$

Ответ:  $I_y = \frac{125 \cdot a^4}{6}$ .

**3.22. При каких соотношениях  $h/b$  будут наибольшими геометрические характеристики ( $I_x$ ,  $W_x$ ,  $I_p$ ) прямоугольника, вписанного в круг заданного радиуса  $r$ .**

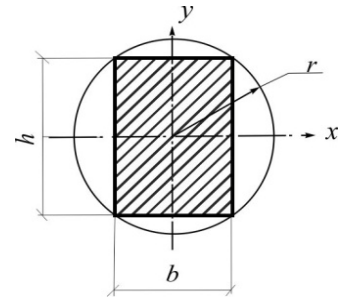


Рис. 3.25

Решение

$$b^2 + h^2 = (2r)^2, \quad b^2(1 + \xi^2) = (2r)^2, \quad \begin{cases} 0 \leq b \leq 2r \\ \infty > \xi = \frac{h}{b} > 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} I_x = \frac{bh^3}{12} = \frac{b^4\xi^3}{12} = \frac{(2r)^4}{12} \cdot \frac{\xi^3}{(1+\xi^2)^2} \\ I_x \rightarrow I_{\max}, \text{ если } I'_x(\xi) = 0: \frac{(2r)^4}{12} \cdot \frac{3\xi^2(1+\xi^2)^2 - \xi^3 \cdot 2(1+\xi^2) \cdot 2\xi}{(1+\xi^2)^4} = 0 \end{cases}$$

$$3\xi^2(1+\xi^2)^2 = 4\xi^4(1+\xi^2), \quad \xi^2 = 3, \quad \xi = \sqrt{3}.$$

$$\begin{cases} W_x = \frac{bh^2}{6} = \frac{b^3\xi^2}{6} = \frac{(2r)^2}{6} \cdot \frac{\xi^2}{1+\xi^2} \cdot \frac{2r}{\sqrt{1+\xi^2}} = \frac{(2r)^3}{6} \cdot \frac{\xi^2}{(1+\xi^2)^{3/2}} \\ W_x \rightarrow W_{\max}, \text{ если } W'_x(\xi) = 0: \frac{(2r)^3}{6} \cdot \frac{2\xi(1+\xi^2)^{3/2} - \xi^2 \cdot \frac{3}{2}(1+\xi^2)^{1/2} \cdot 2\xi}{(1+\xi^2)^3} = 0 \end{cases}$$

$$2(1+\xi^2) - 3\xi^2 = 0, \quad \xi^2 = 2, \quad \xi = \sqrt{2}.$$

$$\begin{cases} I_p = I_x + I_y = \frac{bh^3}{12} + \frac{b^3h}{12} = \frac{b^4}{12} \cdot (\xi^3 + \xi) = \frac{(2r)^4}{12} \cdot \frac{\xi^3 + \xi}{(1+\xi^2)^2} = \frac{(2r)^4}{12} \cdot \frac{\xi}{1+\xi^2} \\ I_p \rightarrow I_{\max}, \text{ если } I'_p(\xi) = 0: \frac{(2r)^4}{12} \cdot \frac{1 \cdot (1+\xi)^2 - \xi(2\xi)}{(1+\xi^2)^2} = 0 \end{cases}$$

$$\xi^2 = 1, \quad \xi = 1.$$

Ответ:  $\xi = \sqrt{3}$ ,  $\xi = \sqrt{2}$ ,  $\xi = 1$ .

**3.23. Доказать, что для любой плоской фигуры справедливо неравенство:  $I_x I_y > I_{xy}$ , где  $x, y$  – две произвольные взаимно перпендикулярные оси (рис.3.26).**

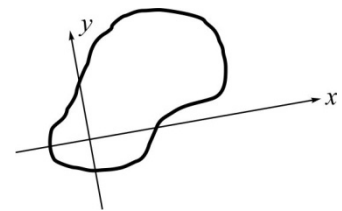


Рис.3.26

Решение

$$I_{\min} = \frac{I_x + I_y}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{(I_x + I_y)^2 + 4I_{xy}^2} > 0$$

$$(I_x + I_y)^2 > (I_x - I_y)^2 + 4I_{xy}^2$$

$$2I_y \cdot 2I_x > 4I_{xy}^2.$$

Ответ:  $I_x \cdot I_y > I_{xy}^2$ .

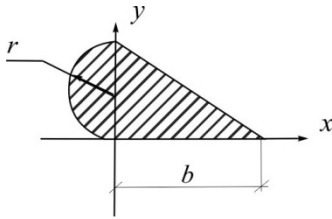


Рис.3.27

**3.24. Сечение составлено из полукруга радиуса  $r$  и прямоугольного треугольника с основанием  $b$ . При каком соотношении  $b/r$  центробежный момент  $I_{xy}$  равен нулю (рис.3.27)?**

Решение

$$I_{xy} = \frac{\pi r^2}{2} \left( -\frac{4}{3} \cdot \frac{r}{\pi} \right) r + \frac{b^2 (2r)^2}{24} = 0$$

$$\frac{2}{3} r^4 = \frac{b^2 r^2}{6}, \quad 4r^2 = b^2.$$

Ответ:  $b/r = 2$ .

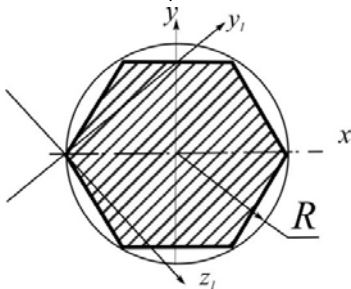


Рис.3.28

**3.25. В окружность радиуса  $R$  вписан правильный шестиугольник. Определить центробежный момент шестиугольника относительно осей  $x_1, y_1$  (рис.3.28).**

Решение

$$A = \frac{2R + R}{2} \cdot \frac{R\sqrt{3}}{2} \cdot 2 = R^2 1,5\sqrt{3} \Rightarrow R^2 \cdot \frac{24\sqrt{3}}{16}.$$

$$I_x = I_y = 2 \cdot \frac{R}{2} \cdot \frac{(R\sqrt{3})^3}{48} + \frac{R(R\sqrt{3})^3}{12} = R^4 \cdot \sqrt{3} \left( \frac{1}{16} + \frac{1}{4} \right) \Rightarrow R^4 \cdot \frac{5\sqrt{3}}{16}.$$

$$I_{y_0} = I_y + A \cdot R^2 \Rightarrow R^4 \cdot \frac{29\sqrt{3}}{16}; \quad I_{xy_0} \Rightarrow 0; \quad \sin \alpha = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}}, \quad \cos \alpha = \frac{\sqrt{4}}{\sqrt{7}}.$$

$$I_{y_1 x_1} = (I_{y_0} - I_x) \sin \alpha \cos \alpha \Rightarrow R^4 \cdot \frac{24\sqrt{3}}{16} \cdot \frac{\sqrt{3} \cdot 2}{7}.$$

Ответ:  $\frac{9}{7} R^4$ .

**3.26. Определить осевой момент инерции равнобедренного прямоугольного треугольника относительно оси  $x$ . Размер  $b$  и угол  $\alpha$  заданы (рис.3.29).**

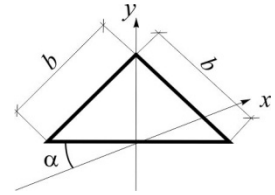


Рис.3.29

Решение

$$I_{x_0} = \frac{b\sqrt{2} \cdot \left(\frac{b\sqrt{2}}{2}\right)^3}{12} = \frac{b^4}{24}, \quad I_{y_0} = \frac{b\sqrt{2}/2 \cdot (b\sqrt{2})^3}{48} = \frac{b^4}{24}, \quad I_{x_0 y_0} = 0:$$

$$I_{x_0} = I_{y_0} = I_x = \frac{b^4}{24}.$$

Ответ:  $I_x = \frac{b^4}{24}$ .

**3.27. Известны моменты инерции  $I_x, I_y, I_{xy}$ . Составить формулу для определения угла  $\alpha$ , на который нужно повернуть оси  $x, y$ , чтобы осевые моменты инерции относительно новых осей  $x_1$  и  $y_1$  были одинаковыми.**

Решение

$$I_{x_1} = I_{y_1}: \quad I_x \cos^2 \alpha + I_y \sin^2 \alpha - I_{xy} \sin 2\alpha = I_x \sin^2 \alpha + I_y \cos^2 \alpha + I_{xy} \sin 2\alpha,$$

$$I_x \cos 2\alpha - I_y \cos 2\alpha - 2I_{xy} \sin 2\alpha = 0.$$

$$\frac{I_x - I_y}{2I_{xy}} = \operatorname{tg} 2\alpha.$$

Ответ:  $\alpha = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \left( \frac{I_x - I_y}{2I_{xy}} \right)$ .

**3.28. Показать, что момент инерции фигуры относительно оси  $u$  не зависит от угла  $\alpha$  (рис.3.31).**

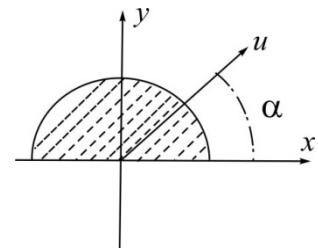


Рис.3.31

Решение

$$I_{xy} = 0, \quad I_u \Rightarrow I_x = I_y = \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi r^4}{4}.$$

Ответ:  $I_u = \frac{\pi r^4}{8}$ .

**3.32. Определить момент инерции плоской фигуры относительно оси  $x$  (рис.3.32).**

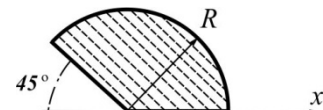


Рис.3.32

Решение

$$I_x = \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi R^4}{4} - I_x^{(1)} = \frac{\pi R^4}{8} - \frac{R^4}{8} \left( \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \right) = \frac{R^4}{32} \cdot (3\pi + 2)$$

$$I_x^{(1)} = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^2 \varphi \frac{R^4}{4} d\varphi = \frac{R^4}{4} \cdot \frac{\varphi - \sin 2\varphi}{2} \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{R^4}{8} \left( \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \right)$$

Ответ:  $I_x = \frac{R^4}{32} (3\pi + 2)$ .

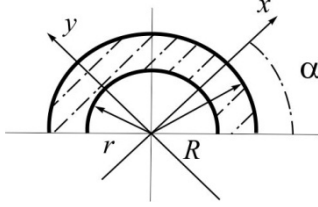


Рис.3.33

**3.33. Для плоской фигуры найти осевые моменты инерции  $I_x$  и  $I_y$ . Известны  $R, r, \alpha$ .**

Решение

$$\begin{cases} I_{x_0} = I_{y_0} = \frac{1}{2} \left( \frac{\pi R^4}{4} - \frac{\pi r^4}{4} \right); I_{x_0 y_0} = 0 \\ I_x = I_y = I_{x_0} = I_{y_0} = \frac{\pi}{8} (R^4 - r^4) \end{cases}$$

Ответ:  $I_x = I_y = \frac{\pi}{8} (R^4 - r^4)$ .

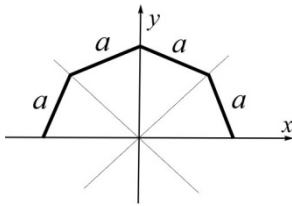


Рис.3.34

**3.34. Определить  $I_x$  для заданной плоской фигуры – половины правильного восьмиугольника (рис.3.34).**

Решение

$$I_x = 2 \left( \frac{R(\sqrt{2} + 1)R^3}{12} - \frac{R\sqrt{2} \cdot (R\sqrt{2}/2)^3}{12} \right) =$$

$$\frac{R^4}{6} \cdot \left( \sqrt{2} + 1 - \frac{1}{2} \right) = R^4 \cdot \frac{2\sqrt{2} + 1}{2} = \frac{a^4}{6 - 4\sqrt{2}} \cdot \frac{2\sqrt{2} + 1}{2} = \frac{a^4 \cdot (2\sqrt{2} + 1)}{4(3 - 2\sqrt{2})}$$

Ответ:  $I_x = \frac{a^4 \cdot (2\sqrt{2} + 1)}{4(3 - 2\sqrt{2})}$ .

**3.35. Определить, при каком значении  $n$  оси  $x$  и  $y$  будут главными (рис.3.35).**

Решение

$$I_{xy} = 2 \left[ \frac{2R \cdot R}{2} \cdot (+R) \cdot \left( +\frac{R}{3} \right) + \frac{\pi R^2}{2} \cdot (+R) \cdot \left( -\frac{4R}{3\pi} \right) - \frac{\pi(nR)^2}{2} \cdot (+R) \cdot \left( -\frac{4nR}{3\pi} \right) \right] = 0,$$



$$\frac{1}{3} - \frac{2}{3} + \frac{2}{3}n^3 = 0, \quad n^3 = \frac{1}{2}.$$

Ответ:  $n \approx 0,794$ .

**3.36. Показать, что при любом  $\alpha$  оси  $x_1$  и  $y_1$  являются главными (рис.3.36).**

Решение

$$\begin{cases} I_x = \frac{2a \cdot a^3}{3} = \frac{2}{3}a^4, & I_y = \frac{a(2a)^3}{12} = \frac{2}{3}a^4, & I_{xy} = 0; \\ I_x = I_y = I_{x_1} = I_{y_1}. \end{cases}$$

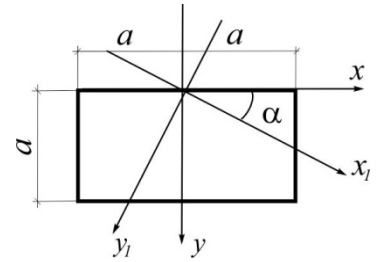


Рис.3.36

**3.37. Задан правильный шестиугольник со стороной  $a$ . Найти на оси  $u$  положение точки  $O$ , для которой оси  $v$  и  $u$  будут главными осями инерции и полярный момент инерции фигуры относительно этой точки (рис.3.37).**

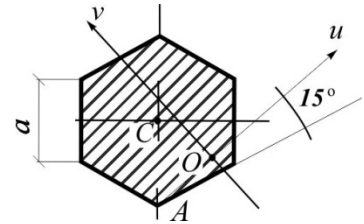


Рис.3.37

Решение

$$I_{x_c} = I_{y_c} = \frac{a(a\sqrt{3})^3}{12} + 2 \frac{(a/2)(a\sqrt{3})^3}{48} = a^4 \cdot \frac{\sqrt{3} \cdot 5}{16},$$

$$A = a \cdot a\sqrt{3} + 2 \cdot \frac{a}{2} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a^2 \cdot 3\sqrt{3}}{2}$$

$$I_{x_c y_c} = 0, \quad V \perp U \text{ через ц.т. фигуры,} \quad v_o = a \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

$$I_v = I_{u_c} = I_{x_c} = I_{y_c} = a^4 \frac{5\sqrt{3}}{16};$$

$$I_u = I_{u_c} + A \cdot \left( a \frac{\sqrt{2}}{2} \right)^2 = \frac{17\sqrt{3}}{16} \cdot a^4;$$

$$I_\rho = I_u + I_v = a^4 \cdot \frac{22 \cdot \sqrt{3}}{16}.$$

Ответ:  $v_o = a \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad I_\rho = a^4 \cdot \frac{11\sqrt{3}}{8}.$

**3.38. При каком значении  $h$  любая ось, проходящая через точку  $A$  сечения, будет главной? Размер  $a$  задан (рис.3.38).**

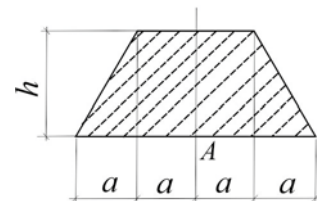


Рис.3.38

Решение

$$\begin{cases} I_{x_A} = \frac{(2a) \cdot h^3}{3} + 2 \cdot \frac{ah^3}{12} = a \cdot h^3 \cdot \frac{5}{6}; \\ I_{y_A} = \frac{h \cdot (2a)^3}{12} + 2 \cdot \left( \frac{ha^3}{36} + \frac{ha}{2} \left( \frac{4}{3}a \right)^2 \right) = a^3 h \cdot \frac{45}{18}. \end{cases}$$

$$I_{x_A} = I_{y_A} : \quad h^2 \cdot \frac{5}{6} = a^2 \cdot \frac{45}{18}, \quad h = a\sqrt{3}.$$

Ответ:  $h = a\sqrt{3}$ .

**3.39.** Фигура имеет площадь  $A = 10 \text{ см}^2$ , главные центральные моменты инерции  $I_v = 410 \text{ см}^4$ ,  $I_u = 320 \text{ см}^4$ . На главной оси  $v$  найти такие точки, чтобы все оси, проходящие через них, были главными для данной фигуры.

Решение

$$I_{u_1} = I_v : \quad I_v = I_u + A(V_c)^2, \quad V_c = \pm \sqrt{\frac{I_v - I_u}{A}} = \pm \sqrt{\frac{410 - 320}{10}} = \pm 3 \text{ см}.$$

Ответ:  $V_c = \pm 3 \text{ см}$ .

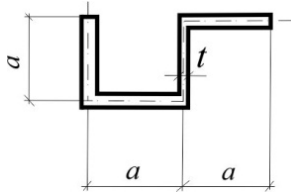


Рис.3.41

**3.41.** Определить величины главных моментов инерции относительно главных центральных осей заданной тонкостенной фигуры. Толщина стенки  $t$  постоянна и мала по сравнению с  $a$ . Размеры даны по средней линии сечения (рис.3.41).

Решение

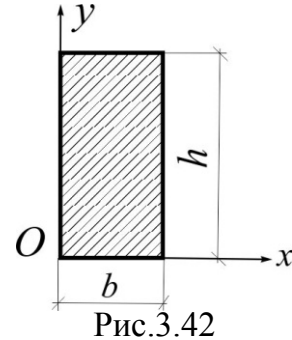
$$A = 4at, \quad \begin{cases} X_c = \frac{t \cdot a \cdot (0 + 0,5a + a + 1,5a)}{4a \cdot t} = 0,75 \cdot a = \frac{3}{4}a; \\ Y_c \cong \frac{a}{2}. \end{cases}$$

$$\begin{cases} I_{x_c} = \frac{a^3 \cdot t}{12} \cdot 2 + at \cdot (a/2)^2 \cdot 2 = a^3 \cdot t \cdot \frac{2}{3} \\ I_{y_c} = at(0,75a)^2 + \left( \frac{a^3 \cdot t}{12} + at(0,25a)^2 \right) + at(0,25a)^2 + \\ + \left( \frac{a^3 t}{12} + at(0,75a)^2 \right) = a^3 \cdot t \cdot \frac{17}{12} \\ I_{x_c y_c} = at \cdot (-0,5a) \cdot (-0,25a) + at \cdot (0,5a) \cdot (0,75a) = \frac{a^3 t}{2} \end{cases}$$

$$I_{\frac{\max}{\min}} = \frac{I_{x_c} + I_{y_c}}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(I_{x_c} - I_{y_c})^2 + 4 \cdot I_{x_c y_c}^2} = a^3 t \cdot \left[ \frac{25 \pm 15}{24} \right] = \begin{cases} a^3 t \cdot \frac{5}{3} \\ a^3 t \cdot \frac{5}{12} \end{cases}$$

Ответ:  $I_{\max} = \frac{5}{3} a^3 t$ ;  $I_{\min} = \frac{5}{12} a^3 t$ .

3.42. Для прямоугольника со сторонами  $b = 2$  см и  $h = 3$  см определить положение главных осей, проходящих через  $O$ , и вычислить главные моменты инерции (рис.3.42).

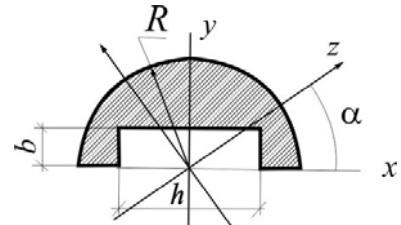


Решение

$$\begin{cases} I_x = bh^3/3 = 18 \text{ см}^4; \\ I_y = b^3h/3 = 8 \text{ см}^4; \\ I_{xy} = bh \frac{b}{2} \frac{h}{2} = \frac{b^2 h^2}{4} = 9 \text{ см}^4 \end{cases} \quad \begin{cases} \operatorname{tg} 2\alpha = \frac{-2I_{xy}}{I_x - I_y} = -1,8 \\ I_{\frac{\max}{\min}} = 13 \pm 10,3 = \begin{cases} 23,3 \text{ см}^4 \\ 2,7 \text{ см}^4 \end{cases} \end{cases}$$

Ответ:  $\alpha = \frac{\operatorname{arctg}(-1,8)}{2}$ , т.е.  $I_{\max} = 23,3 \text{ см}^4$ ;  $I_{\min} = 2,7 \text{ см}^4$ .

3.43. Фигура представляет собой полу-круг, ослабленный прямоугольным вырезом со сторонами  $b$  и  $h$ . При каком отношении  $h/b$  момент инерции относительно оси  $z$  не будет зависеть от угла  $\alpha$  (рис.3.43).



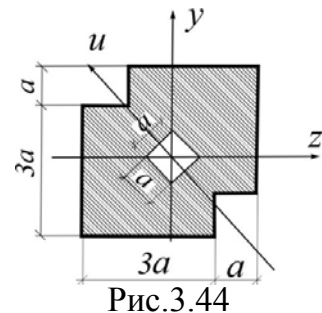
Решение

$$I_{xy} = 0; \quad I_x = -\frac{b^3 h}{3} + \frac{\pi R^4}{8}; \quad I_y = -\frac{bh^3}{12} + \frac{\pi R^4}{8}$$

$$I_z \Rightarrow I_x = I_y : \quad b^2 = \frac{h^2}{4}$$

Ответ:  $\frac{h}{b} = 2$ .

3.44. Вычислить осевой момент инерции изображенной фигуры относительно главной центральной оси  $u$  (рис.3.44).



Решение

$$\left\{ I_u = \frac{(4a)^4}{12} - 3 \frac{a^4}{12} = \frac{253}{12} a^4 \right.$$

Ответ:  $I_u = \frac{253}{12} a^4$ .

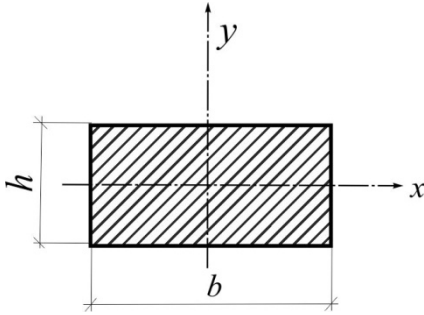


Рис.3.45

3.45. В системе осей  $x, y$  определить точки, каждая из которых обладает тем свойством, что две любые взаимно перпендикулярные оси, пересекающиеся в этой точке, являются главными осями инерции заданной фигуры (рис.3.45).

Решение

$$\left\{ \begin{array}{l} h > b: \frac{bh^3}{12} = \frac{hb^3}{12} + hb \cdot x_0^2, \quad x_0 = \pm \sqrt{(h^2 - b^2)/12} \\ b > h: \frac{bh^3}{12} + bh \cdot y_0^2 = \frac{hb^3}{12}, \quad y_0 = \pm \sqrt{(b^2 - h^2)/12} \end{array} \right.$$

Ответ:  $\left\{ \begin{array}{l} \text{при } h > b: x_0 = \pm \sqrt{(h^2 - b^2)/12} \\ \text{при } h < b: y_0 = \pm \sqrt{(b^2 - h^2)/12} \end{array} \right.$

3.46. Для плоской фигуры найти точку, обладающую свойством, что все проходящие через нее оси являются главными. Считать известными: положение центра тяжести,  $A, I_x, I_y, I_{xy}, x, y$  – заданные центральные оси координат.

Решение

$$\operatorname{tg} 2\alpha_0 = -\frac{2I_{xy}}{I_x - I_y}, \quad I_{\max/\min} = \frac{I_x + I_y}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(I_x - I_y)^2 + 4I_{xy}^2}$$

$$A \cdot z^2 + I_{\min} = I_{\max}, \quad \left\{ \begin{array}{l} z = \pm \sqrt{\frac{\sqrt{(I_x - I_y)^2 + 4I_{xy}^2}}{A}} \\ \alpha_0 = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \left( -\frac{2I_{xy}}{I_x - I_y} \right) \end{array} \right.$$

Ответ:  $I_x > I_y: \begin{cases} x = z \cos \alpha_0 \\ y = z \sin \alpha_0 \end{cases}; I_x < I_y: \begin{cases} x = z \sin \alpha_0 \\ y = -z \cos \alpha_0 \end{cases}$ .

3.47. Для сечения в виде ромба определить, при каких соотношениях  $h/b$  будут максимальными  $I_x$ ,  $W_x$ . Сторона ромба равна  $a$  (рис.3.47).

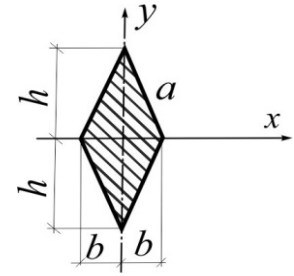


Рис.3.47

Решение

$$h^2 + b^2 = a^2, \quad b^2 = \frac{a^2}{1 + \xi^2}, \quad \begin{cases} \xi = \frac{h}{b} \\ 0 < \xi < \infty \end{cases}; \quad \begin{cases} b = \frac{a}{\sqrt{1 + \xi^2}} \\ h = \frac{a}{\sqrt{1 + \xi^2}} \cdot \xi \end{cases}.$$

$$\begin{cases} I_x = 2 \frac{2b \cdot h^3}{12} = \frac{bh^3}{3} \Rightarrow \frac{b^4 \xi^3}{3} = \frac{a^4}{3} \cdot \frac{\xi^3}{(1 + \xi^2)^2}; \\ I_x \rightarrow I_{\max}, \text{ если } I'_x(\xi) = 0: \end{cases}$$

$$\frac{a^4}{3} \cdot \frac{3\xi^2(1 + \xi^2)^2 - \xi^3 \cdot 2(1 + \xi^2) \cdot 2\xi}{(1 + \xi^2)^4} = 0,$$

$$3(1 + \xi^2) - 4\xi^2 = 0, \quad \xi^2 = 3, \quad \xi = \sqrt{3}.$$

$$\begin{cases} W_x = \frac{I_x}{y_{\max}} = \frac{bh^2}{3} = \frac{a^3}{3} \frac{\xi^2}{(1 + \xi^2)^{3/2}} \\ W_x \rightarrow W_{\max}, \text{ если } W'_x(\xi) = 0 \end{cases}$$

$$\frac{a^3}{3} \cdot \frac{2\xi(1 + \xi^2)^{3/2} - \xi^2 \cdot \frac{3}{2} \cdot (1 + \xi^2)^{1/2} \cdot 2\xi}{(1 + \xi^2)^3} = 0,$$

$$2(1 + \xi^2) - 3\xi^2 = 0, \quad \xi^2 = 2, \quad \xi = \sqrt{2}.$$

Ответ:  $\frac{h}{b} = \sqrt{3}$  для  $I_x = I_{\max}$ ;  $\frac{h}{b} = \sqrt{2}$  для  $W_x = W_{\max}$ .

3.48. При каком соотношении  $a/h$  момент сопротивления сечения относительно оси  $z$  не изменится при повороте оси на  $45^\circ$  (рис.3.48)?

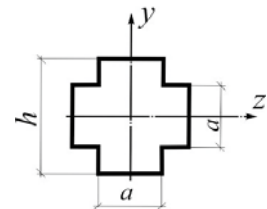


Рис.3.48

Решение

$$\frac{h}{2} = \frac{h}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{a}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad h \left( 1 - \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = a \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \frac{a}{h} = (\sqrt{2} - 1).$$

Ответ:  $\frac{a}{h} = (\sqrt{2} - 1)$ .

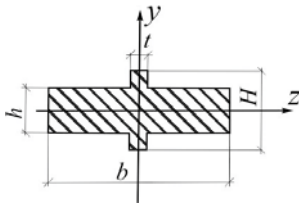


Рис.3.49

**3.49.** При каком соотношении размеров крестообразного сечения наличие верхнего и нижнего ребер приводит к уменьшению момента сопротивления сечения относительно оси симметрии  $z$  (рис.3.49)?

Решение

$$\frac{bh^2}{6} > \left( \frac{(b-t)h^3}{12} + \frac{tH^3}{12} \right) / \left( \frac{H}{2} \right)$$

$$bh^2 > \frac{(b-t)h^3}{H} + tH^2, \quad b > (b-t) \cdot \frac{h}{H} + t \left( \frac{H}{h} \right)^2,$$

$$\frac{b}{t} > \left( \frac{b}{t} - 1 \right) \cdot \frac{h}{H} + \left( \frac{H}{h} \right)^2.$$

Ответ:  $\frac{b}{t} > \left( \frac{H}{h} \right)^2 + \left( \frac{H}{h} \right) + 1.$

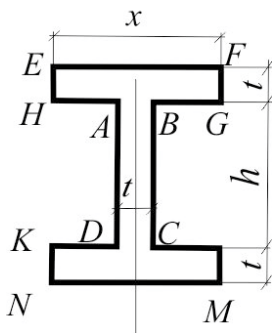


Рис.3.50

**3.50.** Двутавровое сечение получается присоединением к прямоугольнику  $ABCD$  прямоугольников  $EFGH$  и  $KLMN$ . При какой ширине  $x$  добавляемых прямоугольников момент сопротивления сечения увеличится в два раза (рис.3.50)?

Решение

$$W_x^{(1)} = \frac{th^2}{6}; \quad W_x^{(2)} = \frac{2}{(h+2t)} \cdot \left( \frac{x(h+2t)^3}{12} - \frac{(x-t) \cdot h^3}{12} \right).$$

$$\frac{W_x^{(2)}}{W_x^{(1)}} = 2: \quad \frac{2}{h+2t} \left( x \left( \frac{(h+2t)^3}{12} - \frac{h^3}{12} \right) + \frac{th^3}{12} \right) = \frac{th^2}{3}.$$

Ответ:  $x = \frac{h^3 + 4t \cdot h}{2t^2 + 6(h+t)^2}.$

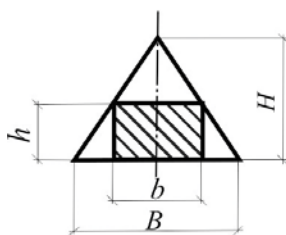


Рис.3.52

**3.52.** Определить размеры прямоугольника, который можно выделить из равнобедренного треугольника так, чтобы момент сопротивления прямоугольника относительно центральной оси, параллельной основанию, был максимальным (рис.3.52).

Решение

$$\begin{cases} \frac{h}{H-h} = \frac{B-b}{b} = x; \\ b = \frac{B}{1+x}; \quad h = \frac{H \cdot x}{1+x}. \end{cases}$$

$$\begin{cases} W_x = \frac{bh^2}{6} = \frac{BH^2}{6} \frac{x^2}{(1+x)^3}; \\ W'_x = \frac{BH^2}{6} \cdot \frac{2x(1+x)^3 - x^2 \cdot 3 \cdot (1+x)^2}{(1+x)^6}; \end{cases}$$

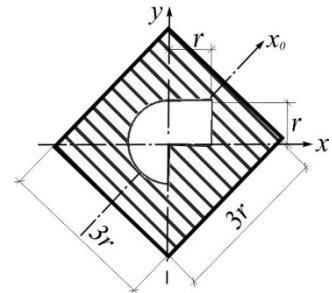
$$W'_x = 0: 2(1+x) - 3x = 0, \quad x = 2:$$

Ответ:  $b = \frac{B}{3}; h = \frac{2}{3}H.$

### Задачи для самостоятельного решения

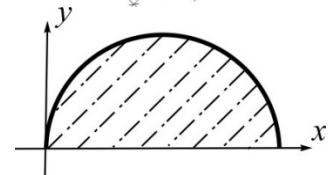
3.1. Определить осевой момент инерции  $I_{x_0}$  сечения, показанного на рис.3.14.

Ответ:  $6,274r^4.$



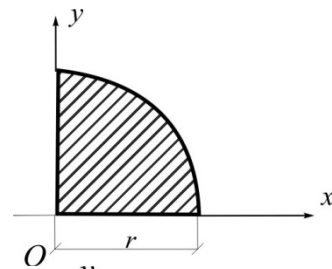
3.2. Вычислить центробежный момент инерции полукруга относительно осей  $x, y$ .

Ответ:  $+\frac{2}{3} \cdot r^4.$



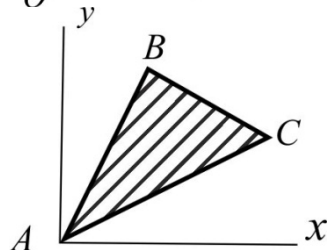
3.18. Найти центробежный момент инерции  $I_{xy}$  четверти круга.

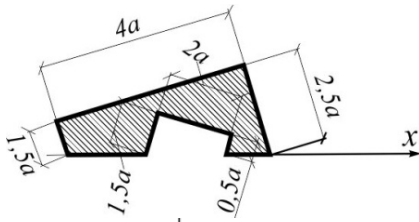
Ответ:  $I_{xy} = \frac{r^4}{8}.$



3.18. Найти осевой момент инерции треугольника  $ABC$  относительно оси  $x$ , если известны координаты его вершин:  $A(0,0), B(b,2b), C(2b,b)$  (рис.3.20).

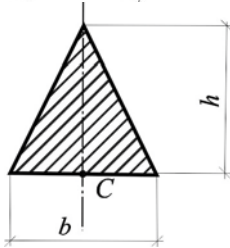
Ответ:  $I_x = 1,75b^4.$





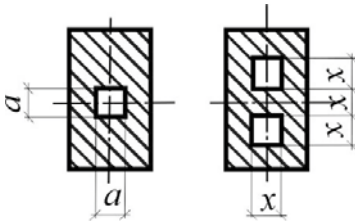
3.18. Для заданной несимметричной фигуры определить момент инерции относительно оси  $x$ .

Ответ:  $I_x = 10a^4$ .



3.40. При каком соотношении  $h/b$  все оси, проходящие через середину основания равнобедренного треугольника (точка  $C$ ), будут главными.

Ответ:  $\frac{h}{b} = \frac{1}{2}$ .



3.51. В прямоугольном сечении одно квадратное отверстие стороной  $a$  заменено двумя квадратными отверстиями со стороной  $x$ , как показано на рисунке. Определить  $x$  из условия, что моменты сопротивления обоих сечений одинаковы.

Ответ:  $x = \frac{a}{\sqrt[4]{26}}$ .



## Глава 4. ПЛОСКИЙ ПОПЕРЕЧНЫЙ ИЗГИБ (УСИЛИЯ И НАПРЯЖЕНИЯ)

### Краткие теоретические сведения

#### Основные понятия и обозначения

$X, Y \rightarrow$  соответственно нейтральная ось и силовая линия, совпадающие с главными центральными осями поперечного сечения стержня;

$q = q(z) \rightarrow$  погонная распределенная поперечная нагрузка;

$q_z = q_z(z) \rightarrow$  погонная продольная сдвигающая нагрузка;

$m = m(z) \rightarrow$  погонная распределенная моментная нагрузка;

$Q_y = Q(z) \rightarrow$  поперечная сила в поперечном сечении стержня;

$M_x = M(z) \rightarrow$  изгибающий момент в поперечном сечении стержня;

балка  $\rightarrow$  стержень, испытывающий деформацию изгиба, т.е. изгибаемый;

консоль  $\rightarrow$  стержень или его часть, между свободным концом и закреплением;

пролёт  $\rightarrow$  стержень или его часть, между закреплениями;

а) правила знаков:  $z, q_z > 0 : \rightarrow$ ;  $q > 0 : \downarrow$ ;  $m > 0 : \curvearrowright$ ;

$\tau, Q > 0 : \uparrow \downarrow$ ;  $M > 0 : \odot = \ominus$ ;

б) дифференциальная зависимость внутренних усилий от внешней нагрузки:

$$\frac{dQ}{dz} = -q, \quad \frac{dM}{dz} = Q + m;$$

в) правила о скачках:  $\Delta Q \Rightarrow F$ ,  $\Delta M \Rightarrow M$ ;

г) напряжения в произвольной точке поперечного сечения стержня:

$$\sigma = \frac{M_x}{I_x} \cdot y \quad (\text{для сплошной однородной балки}),$$

$$\sigma_i = E_i \cdot \frac{M_x}{EI_{np}} \cdot y \quad (\text{для сплошной композитной балки});$$

$$\tau = \frac{dM}{dz} \cdot \frac{S_x^{\text{отс}}}{I_x \cdot b_y} \quad (\text{без учета сдвигающей нагрузки } q_z),$$

$$\tau \cdot b_y = - \left[ \frac{q_z^B - q_z^H}{2} + \frac{q_z^B + q_z^H}{2} \cdot \frac{2y}{h} \right] + \frac{dM}{dz} \cdot \frac{S_x^{\text{отс}}}{I_x} \quad \left( \text{где } -\frac{h}{2} \{q_z^H\} \leq y \leq \frac{h}{2} \{q_z^B\} \right);$$

– в наиболее удаленных точках сечения от нейтральной оси, при  $y = y_{\max}$  :

$\tau \Rightarrow 0$ ,  $\sigma \Rightarrow \sigma_{\max} \Rightarrow \frac{M_x}{I_x} y_{\max} = \frac{M_x}{W_x} \rightarrow$  это линейное напряженное состояние;

– на нейтральной оси, при  $y = 0$  :  $\tau \Rightarrow \tau_{\max}$ ,  $\sigma \Rightarrow 0 \rightarrow$  это чистый сдвиг;

в) условие прочности материала стержня:

– расчетное по  $\sigma$  при  $y = y_{\max}$  :  $\sigma_{\max} \leq R$ , где  $\sigma_{\max} = \frac{|M_{\max}|}{W_x}$  ;

– проверочное по  $\tau$  при  $y = 0$  :  $\tau_{\max} \leq R_s$ , где  $\tau_{\max} = \frac{|Q_{\max}| \cdot S_x^{\text{п.с.}}}{I_x \cdot b_y}$  ;

г) условие равнопрочности сечения:  $\frac{R_p}{\sigma_{p,\max}} = \frac{R_c}{\sigma_{c,\max}}$ .

## Примеры решения задач

**4.1. Балка загружена распределенной нагрузкой  $q(z) = q_0 \sin(\pi z/l)$ . Построить эпюры поперечных сил и изгибающих моментов (рис.4.1).**

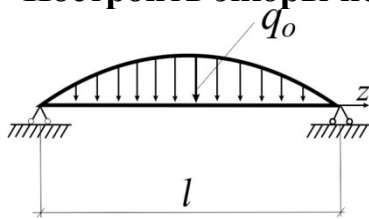


Рис.4.1

Решение

$$2R_A = 2R_B \Rightarrow \int_0^l q_0 \sin \frac{\pi z}{l} dz = q_0 \left( -\cos \frac{\pi z}{l} \right) \frac{l}{\pi} \Big|_0^l = q_0 \frac{2l}{\pi};$$

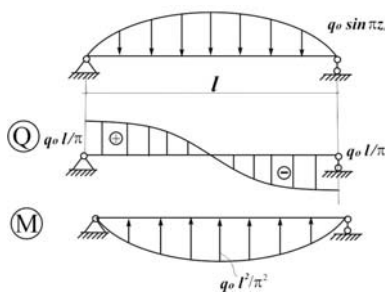


Рис.4.1(а)

$$\begin{cases} Q = \int q(z) dz = q_0 \frac{l}{\pi} \cos \frac{\pi z}{l} \\ M = \int Q dz = q_0 \left( \frac{l}{\pi} \right)^2 \sin \frac{\pi z}{l} \end{cases}$$

**4.2. Найти наиболее невыгодное положение тележки крана на балке ( $x$ ), при котором возникает наибольший изгибающий момент. Вычислить величину наибольшего момента. Давление на каждое колесо  $P$  (рис.4.2).**

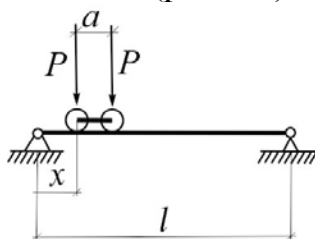


Рис.4.2

Решение

$$R_A = \frac{2P}{l}(l - x - a/2); \quad R_B = \frac{2P}{l}(x + a/2)$$

$$\begin{cases} M_1 = R_A x = \frac{2P}{l}(l - x - a/2)x \\ M_2 = R_B (l - x - a) = \frac{2P}{l}(l - x - a)(x + a/2) \end{cases}$$

$$\begin{cases} M_1'(x) = 0: & l - 2x - a/2 = 0, & x = \frac{l - a/2}{2}: & M_1 = \frac{2P}{l} \left( \frac{l - a/2}{2} \right)^2; \\ M_2'(x) = 0: & \left( x + \frac{a}{2} \right) = (l - x - a), & x = \frac{l - 3a/2}{2}: & M_2 = \frac{2P}{l} \left( \frac{l - a/2}{2} \right)^2. \end{cases}$$

Ответ:  $x = \begin{cases} l/2 - a/4 \\ l/2 - 3a/4 \end{cases}, \quad M_{\max} = \frac{P}{2l} \left( l - \frac{a}{2} \right)^2.$

**4.3. Как должна изменяться ширина поперечного сечения балки  $b(x)$  при постоянной высоте  $h$ , чтобы изогнутая ось балки была дугой окружности радиуса  $R$  (рис.4.4).**

Решение

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M}{EI} \Rightarrow \frac{1}{R}, \quad \frac{M}{I} = \frac{E}{R} = \text{const}$$

$$\begin{cases} M = Fx \\ I = \frac{b(x)h^3}{12}, \end{cases} \quad \frac{E}{R} = \frac{Fx}{b(x)h^3} \cdot 12,$$

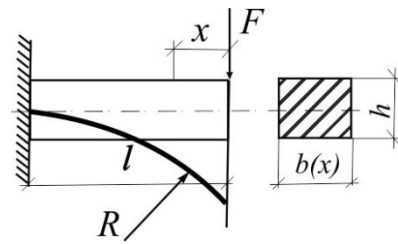


Рис.4.4

Ответ:  $b(x) = \frac{FR}{Eh^3} \cdot 12x.$

**4.4. Определить положение опор (соотношение вылета консолей и пролета) балки постоянного сечения из условия минимума объема балки.  $R_{сж} = R_{раст.}$  (рис.4.5).**

Решение

$$M_1 = M_2:$$

$$q \frac{a^2}{2} = q \left( \frac{l^2}{8} - \frac{a^2}{2} \right),$$

$$a^2 = \frac{l^2}{8}.$$

Ответ:  $a = \frac{l\sqrt{2}}{4}.$

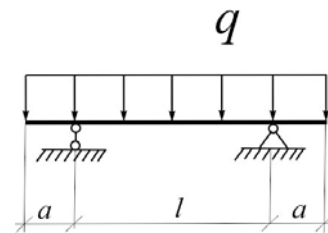


Рис.4.5

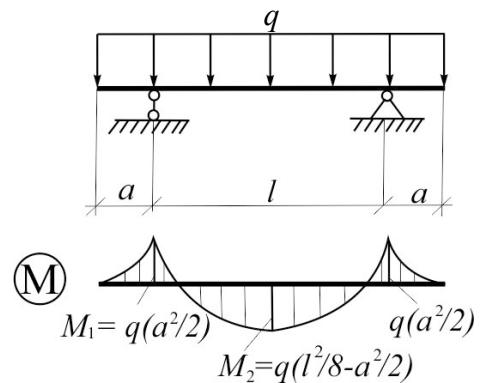
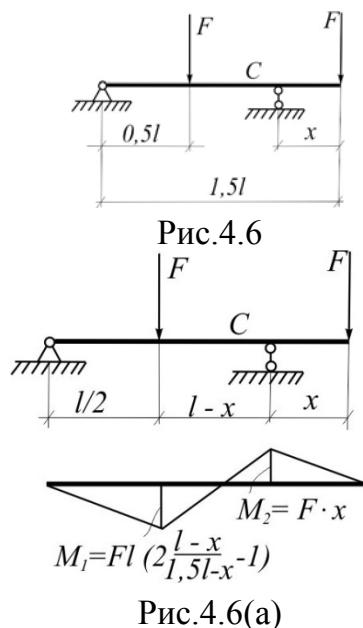


Рис.4.5(a)

4.6. Где следует установить опору  $C$ , чтобы балка обладала наибольшей грузоподъемностью из условия прочности по нормальным напряжениям? (рис.4.6).



Решение

$$M_1 = M_2:$$

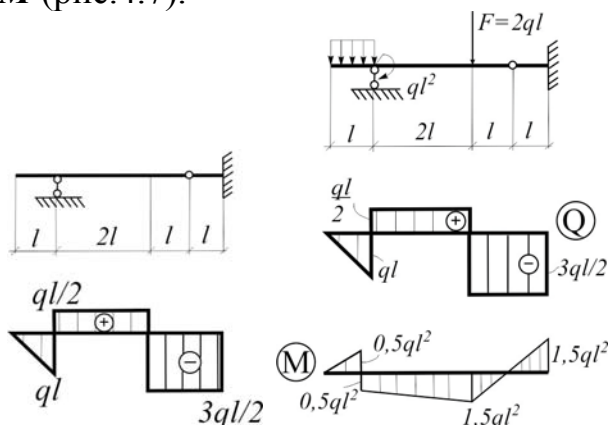
$$Fl \frac{0,5l - x}{1,5 - x} = Fx \begin{cases} 0 < \xi < 1,5; \\ \xi = \frac{x}{l} \end{cases}$$

$$\frac{0,5 - \xi}{1,5 - \xi} = \xi, \quad \xi^2 - 2,5\xi + 0,5 = 0,$$

$$\xi = \frac{2,5 \pm 2,06}{2} \Rightarrow \begin{cases} 2,28 \\ 0,22 \end{cases}, \quad \xi = 0,22$$

Ответ:  $x = 0,22l$ .

4.7. По эююре  $Q$  определить нагрузку на балку и построить эююру  $M$  (рис.4.7).



Решение

$$\Delta Q_i = F_i;$$

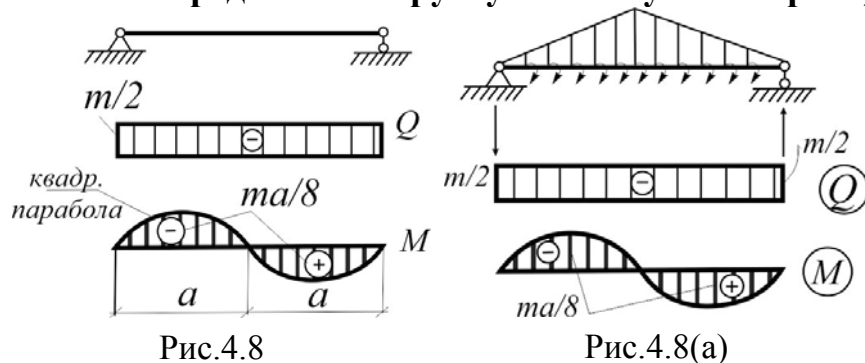
$$\frac{dQ}{dz} = -q, \quad \frac{dM}{dz} = Q;$$

$$\sum_c M^{\text{лев}} = 0:$$

$$q \cdot l \cdot 3,5l + 2ql \cdot l - 1,5ql \cdot 3l - M = 0,$$

$$M = ql^2.$$

4.8. Определить нагрузки на балку по эююрам  $Q$  и  $M$  (рис.4.8).



Решение

$$\frac{dM}{dz} = Q + m;$$

$$\frac{dQ}{dz} = -q: \quad q = 0;$$

$$M = \frac{m}{2a} z^2 - \frac{m}{2} z$$

$$m(z) = \frac{mz}{a}$$

4.9. По заданной эюре  $M$  построить эюру  $Q$  и установить действующую на балку нагрузку (рис.4.11).

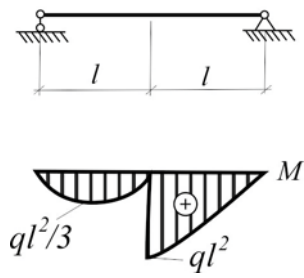


Рис.4.11

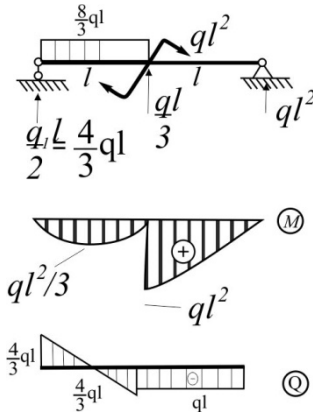


Рис.4.11(a)

Решение

$$\frac{dM}{dz} = Q$$

$$q_1 \frac{l^2}{8} = \frac{ql^2}{3}, \quad q_1 = \frac{8}{3}q.$$

4.12. Установить действующую на балку нагрузку по эюрам  $Q$  и  $M$  (рис.4.12).

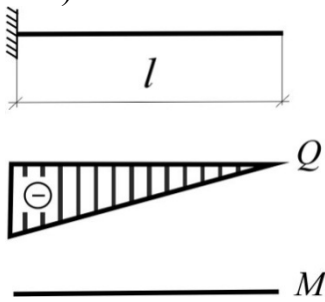
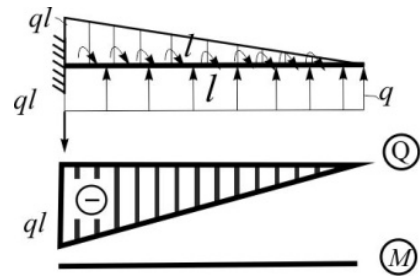


Рис.4.12



Решение

$$\begin{cases} \frac{dM}{dz} = Q + m: m(z) = -Q; \\ \frac{dQ}{dz} = q, \quad \Delta Q = F \end{cases}$$

4.13. По эюрам  $Q$  и  $M$  подобрать нагрузку на балку. Объяснить кажущееся противоречие в эюрах с точки зрения дифференциальных зависимостей при изгибе (рис.4.13).

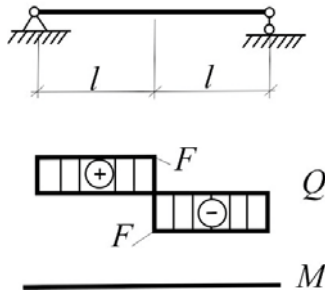


Рис.4.13

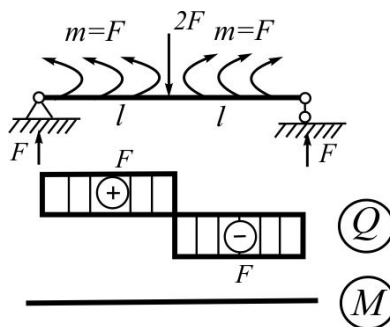


Рис.4.13(a)

Решение

$$\frac{dM}{dz} = Q + m,$$

$$m(z) = -Q$$

$$\Delta Q = F$$

4.14. Для заданной балки (рис.4.14) построить эюры  $Q$  и  $M$ . Как изменятся эюры, если момент  $m$  поместить слева от шарнира  $C$ ?

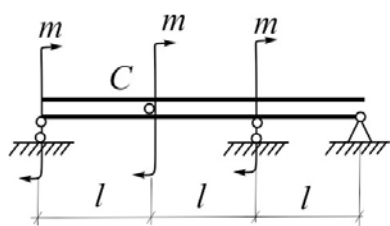


Рис.4.14

Решение

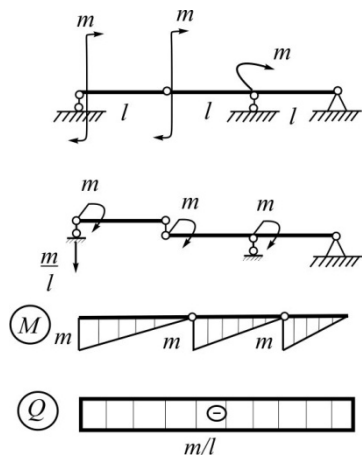


Рис.4.14(а)

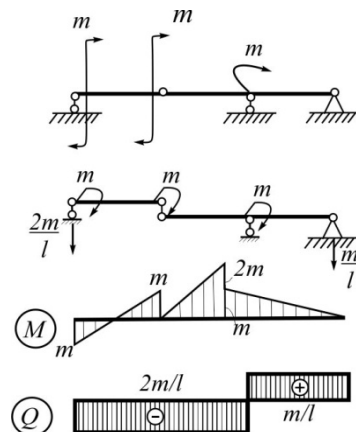


Рис.4.14(б)

4.15. Построить эюры  $Q$  и  $M$  (рис.4.15).

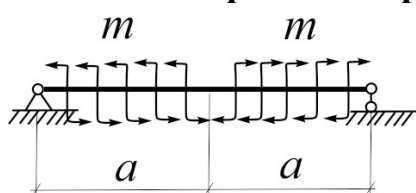


Рис.4.15

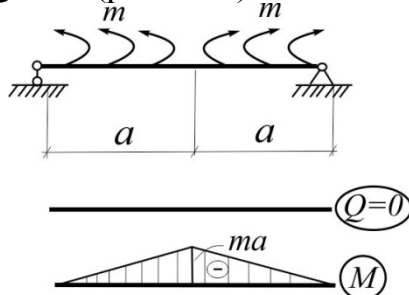


Рис.4.15 (а)

Решение  

$$\frac{dM}{dz} = Q + m$$

4.16. Построить эюры  $Q$  и  $M$  (рис.4.16).

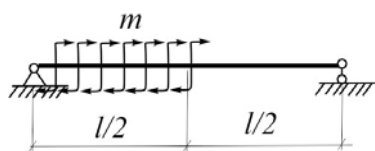


Рис.4.16

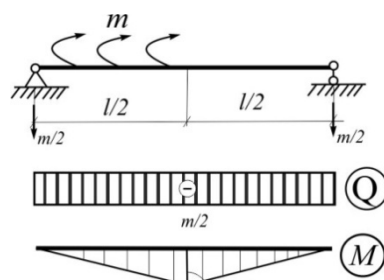


Рис.4.16(а)

Решение

$$\frac{dM}{dz} = Q + m$$

$$\begin{cases} M_1(z) = m \cdot z - \frac{m}{2} \cdot z = \frac{m}{2} \cdot z \\ 0 \leq z \leq l/2 \end{cases}$$

**4.17. Определить положение шарнира C, при котором балка постоянного поперечного сечения обладает наибольшей грузоподъемностью (рис 4.17).**

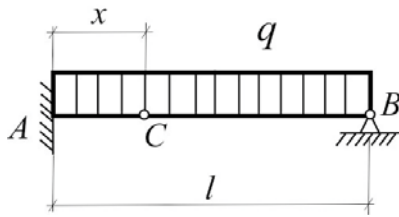


Рис.4.17

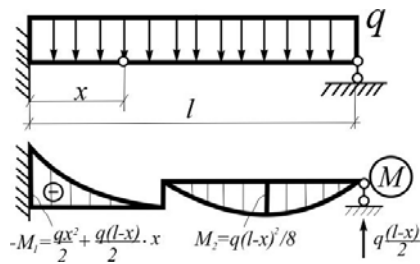


Рис.4.17(а)

Решение

$$-M_1 = M_2 : \frac{x^2}{2} + (l-x)\frac{x}{2} = \frac{(l-x)^2}{8}$$

$$l \cdot x = \left(\frac{l-x}{2}\right)^2; \quad \begin{cases} \xi = x/l \\ 0 < \xi < 1 \end{cases}$$

$$4\xi = (1-\xi)^2, \quad \xi^2 - 6\xi + 1 = 0$$

$$\xi = \frac{6 \pm 4\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \begin{cases} 5,83 \\ 0,17 \end{cases}$$

Ответ:  $x = 0,17 \cdot l$

**4.18. Построить эпюры Q и M (рис.4.18).**

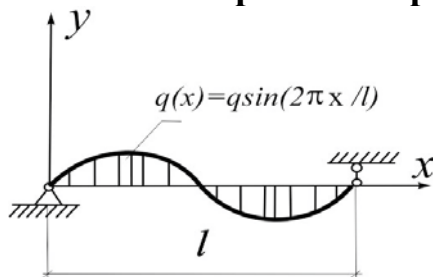


Рис.4.18

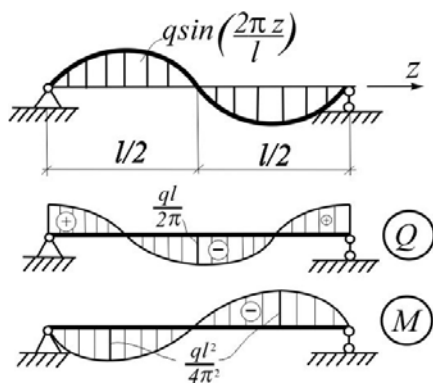


Рис.4.18(а)

Решение

$$\begin{cases} Q = \int -q(z) dz = -\frac{ql}{2\pi} \left(1 - \cos \frac{2\pi z}{l}\right) + Q_0 \\ M = \int Q dz = -\frac{ql}{2\pi} \left(z - \frac{l}{2\pi} \sin \frac{2\pi z}{l}\right) + Q_0 z + M_0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} M(0) = 0: & M_0 = 0 \\ M(l) = 0: & 0 = -\frac{ql^2}{2\pi} + Q_0 l, \quad Q_0 = +\frac{ql}{2\pi} \end{cases}$$

$$\begin{cases} Q(z) = \frac{ql}{2\pi} \cos \frac{2\pi z}{l} \\ M(z) = \frac{ql}{2\pi} \cdot \frac{l}{2\pi} \cdot \sin \frac{2\pi z}{l} \end{cases}$$

4.19. По известной эюре  $Q$  для балки на двух опорах воспроизвести нагрузку и эюру  $M$ , если известно, что распределенная и сосредоточенная моментная нагрузка в пролете отсутствуют, а изгибающий момент на левом конце балки равен нулю (рис.4.19).

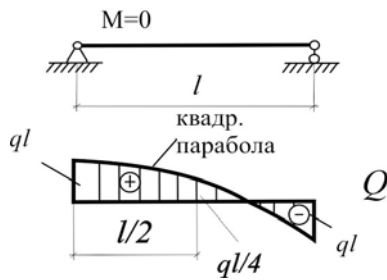


Рис.4.19

Решение

$$\begin{cases} \Delta Q = R: & R_A = R_B = ql; \\ Q(z) = ql - qz - \frac{q}{l}z^2; \end{cases}$$

$$\begin{cases} M(z) = \int Q(z) dz \Rightarrow qlz - q\frac{z^2}{2} - \frac{q}{l}\frac{z^3}{3}; \\ -q(z) = \frac{dQ}{dz} \Rightarrow -q - 2\frac{qz}{l}; \end{cases}$$

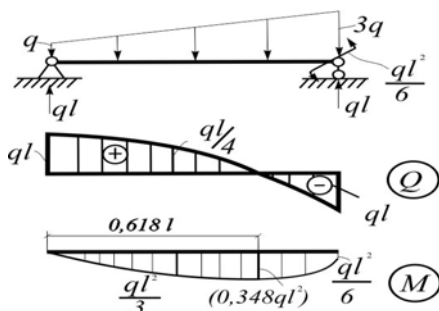


Рис.4.19(a)

$$\begin{cases} M(z) = M_{\max}, \text{ если } Q(z) = 0: \\ \left(\frac{z}{l}\right)^2 + \left(\frac{z}{l}\right) - 1 = 0, \\ \frac{z}{l} = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2} = \begin{cases} -1,618 \\ 0,618 \end{cases}, 0 < \frac{z}{l} < 1 \end{cases}$$

При  $z = 0,618l$ :  $M(z) = M_{\max} = 0,348ql^2$ .

4.20. Написать выражение для  $Q$  и  $M$  в сечении  $z$  (рис. 4.20).

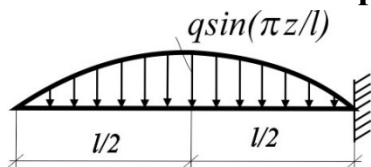


Рис.4.20

Решение

$$\begin{cases} Q = \int -q \sin \frac{\pi z}{l} dz = -q \left( 1 - \cos \frac{\pi z}{l} \right) \frac{l}{\pi} \\ M = \int Q dz = -q \left( z - \frac{l}{\pi} \sin \frac{\pi z}{l} \right) \frac{l}{\pi} \end{cases}$$

4.21. Построить эюры  $Q$  и  $M$  для балки, загруженной изменяющейся моментной распределенной нагрузкой (рис.4.21)

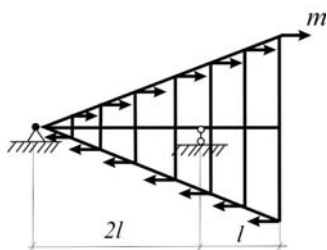


Рис.4.21

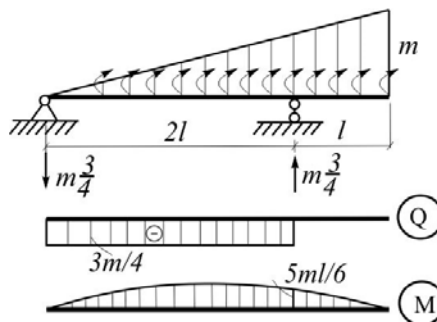


Рис.4.21(a)



Решение

$$R_B = -R_A = \frac{m3l}{2};$$

$$\begin{cases} \frac{dM}{dz} = Q + m = -\frac{3}{4}m \Big|_{z \leq 2l} + \frac{m}{3l}z \Big|_{z \leq 3l} \\ M = \int dm = -\frac{3m}{4}z + \frac{m}{3l} \frac{z^2}{2} \Big|_{z \leq 2l} + \frac{3m}{4}(z - 2l) \Big|_{z \leq 3l} \end{cases}$$

4.22. Указать нагрузку, приложенную к балке на двух опорах, по заданным эюграм  $Q$  и  $M$  (рис. 4.22).

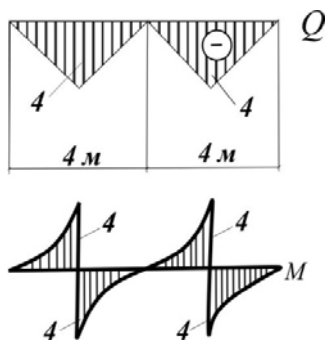


Рис.4.22

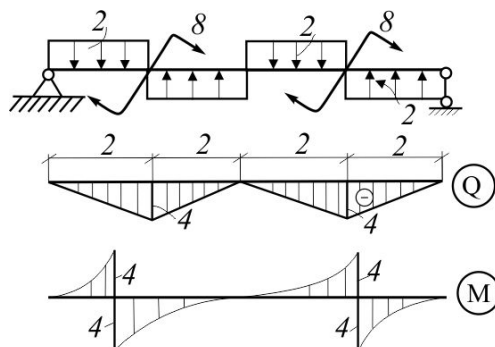


Рис.4.22(a)

Решение:

$$\begin{cases} \frac{dQ}{dz} = -q \\ \Delta M_i = M_i \end{cases}$$

4.23. Найти реакции опор. Построить эюры внутренних усилий  $Q$  и  $M$ . Найти  $M_{\max}$  (рис.4.24).

Решение

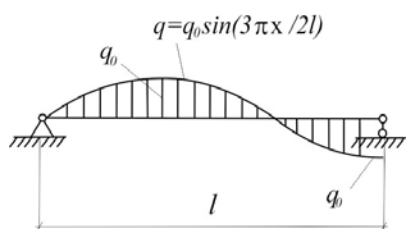


Рис.4.24

$$\begin{cases} Q = -\int q dz \Rightarrow -q_0 \frac{2l}{3\pi} \left( 1 - \cos \frac{3\pi z}{2l} \right) + Q_0 \\ M = \int Q dz \Rightarrow -q_0 \frac{2l}{3\pi} \left( z - \frac{2l}{3\pi} \sin \frac{3\pi z}{2l} \right) + Q_0 z + M_0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} M(0) = 0: M_0 = 0 \\ M(l) = 0: Q_0 = +q_0 \frac{2l}{3\pi} \left( 1 + \frac{2}{3\pi} \right) \end{cases}$$

$$\begin{cases} Q(z) = q_0 \frac{2l}{3\pi} \left( \frac{2}{3\pi} + \cos \frac{3\pi z}{2l} \right); \\ M(z) = q_0 \frac{2l}{3\pi} \left( \frac{2z}{3\pi} + \frac{2l}{3\pi} \sin \frac{3\pi z}{2l} \right); \end{cases}$$

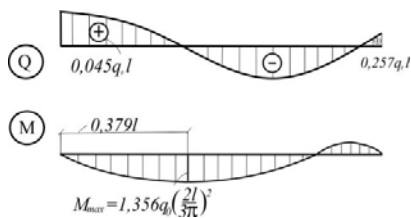


Рис.4.24(a)

$$\Delta Q = R: R_A = q_0 \frac{2l}{3\pi} \left( \frac{2}{3\pi} + 1 \right) \approx 0,257q_0l, \quad R_B = -q_0 \frac{2l}{3\pi} \frac{2}{3\pi} \approx -0,045q_0l;$$

$$Q(z) = 0: \frac{2}{3\pi} = -\cos \frac{3\pi z}{2l}, \quad z \approx 0,379l, \quad M_{\max} \approx 1,356q_0 \left( \frac{2l}{3\pi} \right)^2.$$

4.24. Построить эпюры  $Q$  и  $M$  для заданной балки. Объяснить, почему в этом случае не соблюдается дифференциальная зависимость  $Q = dM/dx$  (рис.4.25).

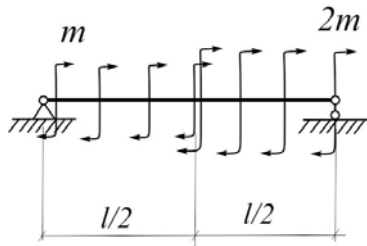


Рис.4.25

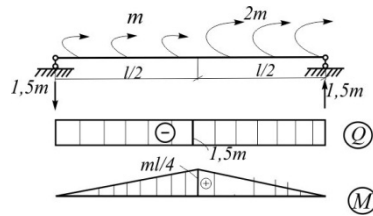


Рис.4.25(а)

Решение

$$\frac{dM}{dz} = Q + m$$

$$R_A = -R_B = -\frac{\frac{ml}{2} + ml}{l} \Rightarrow -1,5m;$$

$$M(z) = -1,5mz + mz \Big|_{z < l/2} + m \left( z - \frac{l}{2} \right) \Rightarrow -\frac{mz}{2} \Big|_{z < l/2} + m \left( z - \frac{l}{2} \right).$$

4.26. По заданной эпюре  $M$  установить нагрузку, действующую на балку, определить опорные реакции и построить эпюру  $Q$  (рис.4.26).

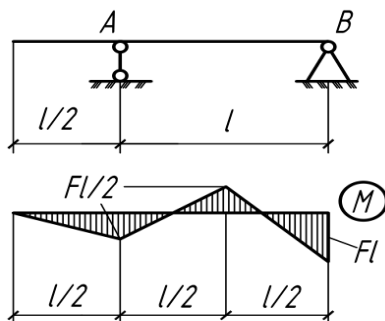


Рис.4.26

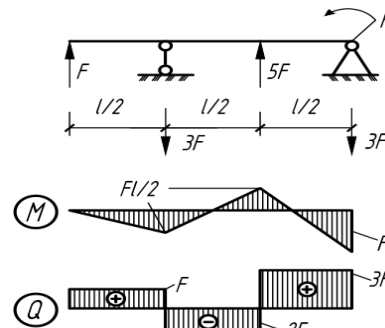


Рис.4.26(а)

Решение

$$а) Q = \frac{dM}{dz} \Rightarrow \frac{M_k - M_n}{l} : Q_1 = \frac{Fl - 0}{l/2}; Q_2 = \frac{-Fl - Fl}{l/2}; Q_3 = \frac{Fl - \left(-\frac{Fl}{2}\right)}{l/2};$$

$$б) \Delta M_i = M_i : M_B = Fl; \Delta Q_j = Q_j : R_A = -3F, R_B = -3F.$$

4.27. Найти  $x$  из условия равнопрочности стержня и балки, выполненных из одинакового материала ( $l/a=18$ ) (рис.4.27).

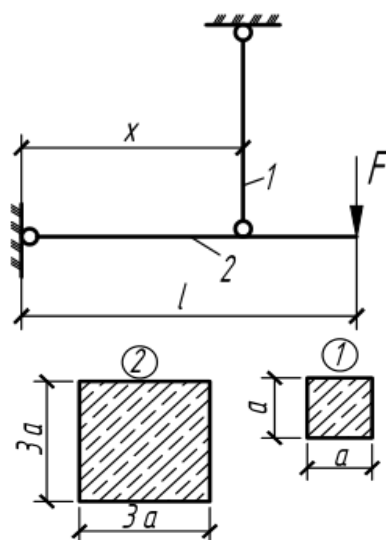


Рис.4.27

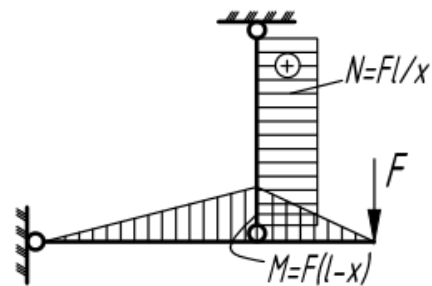


Рис.4.27(а)

Решение

а) из равновесия:  $\sum_A M = 0: N = \frac{Fl}{x};$

б) по условию:  $\sigma_1 = \sigma_2: \frac{N}{A} = \frac{M}{W}: \frac{Fl/x}{a^2} = \frac{F(l-x)}{(3a)^3/6}: \left(\frac{x}{l}\right)^2 - \frac{x}{l} + \frac{1}{4} = 0.$

Ответ:  $x=l/2.$

**4.28. Балка таврового сечения была нагружена распределенной нагрузкой  $q=0,7$  кН/м. Затем, не снимая нагрузки, к нижней части сечения был приварен лист того же материала (на рисунке он незаштрихован). Определить, на сколько процентов можно будет увеличить нагрузку  $q$  после усиления сечения ( $R=200$ МПа) (рис.4.28).**

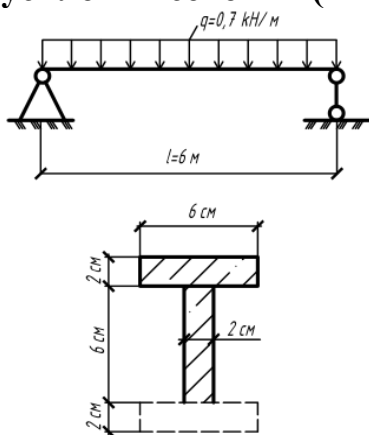


Рис. 4.28

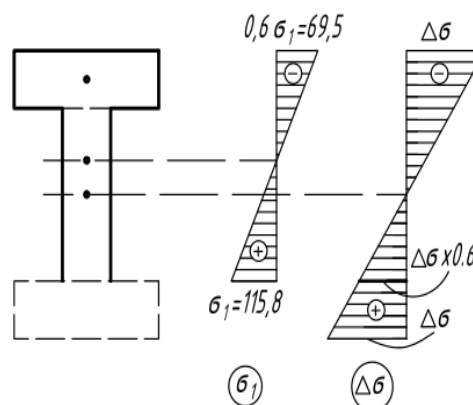


Рис.4.28(а)

Решение

а) от  $q_1 = 0,7$  кН/м:  $M_{\max} = \frac{q_1 \cdot l^2}{8} = 3,15$  кНм;  $y_в = 3$  см,  $y_н = 5$  см;

$I_x = \frac{2 \cdot 6^3}{12} + 12 \cdot 2^2 + \frac{6 \cdot 2^3}{12} + 12 \cdot 2^2 = 136$  см<sup>4</sup>;  $\sigma_1 = \frac{3,15 \text{ кНм}}{136 \text{ см}^4} \cdot 5 \text{ см} = 115,8$  МПа ;

б) от  $\Delta q$ :  $\Delta M_{\max} = \frac{\Delta q \cdot l^2}{8}$ ,  $y_e = y_n = 5 \text{ см}$ ;

$$I_x = \frac{6 \cdot 10^3}{12} - \frac{4 \cdot 6^3}{12} = 428 \text{ см}^4, \quad W_x = \frac{428}{5} = 85,6 \text{ см}^3, \quad \Delta \sigma = \frac{\Delta M_{\max}}{W_x};$$

в) от  $q_2 = q_1 + \Delta q$ :  $\sigma_{\max} \leq R$ :

$$0,6 \cdot \sigma_1 + \Delta \sigma \leq 200, \quad \Delta \sigma \leq 130,5,$$

$$\sigma_1 + 0,6 \cdot \Delta \sigma \leq 200, \quad \Delta \sigma \leq 140,3; \quad \text{тогда } \Delta \sigma \leq 130,5 \text{ МПа}:$$

$$\Delta M_{\max} = \Delta \sigma \cdot W_x = 130,5 \text{ МПа} \cdot 85,6 \text{ см}^3 = 11,17 \text{ кНм},$$

$$k = \frac{\Delta q}{q_1} = \frac{\Delta M_{\max}}{M_{\max}} = \frac{11,17}{3,15} \approx 3,55. \text{ Ответ: на } 355\%.$$

**4.29. Определить прогиб на конце витой балки квадратного сечения  $b \times b$ . Дано:  $F, E, b, l$  (рис.4.29).**

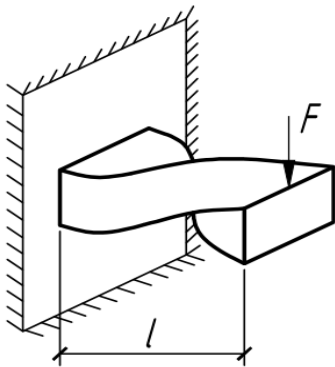


Рис. 4.29

Решение

Для квадрата:

$$I_x = I_y = \frac{b^4}{12} = \text{const}:$$

$$\vartheta_{\max} = \frac{Fl^3}{3EI_x} = \frac{4Fl^3}{Eb^4}$$

Ответ:  $\frac{4Fl^3}{Eb^4}$ .

**4.30. Определить нормальные напряжения в опасной точке поперечного сечения для плавающего прямого бруса, нагруженного в середине. Изменением формы бруса пренебречь (рис.4.30).**

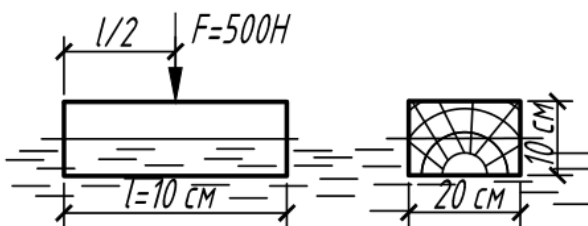


Рис. 4.30

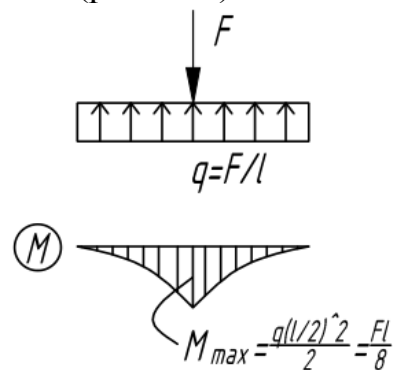


Рис.4.30(а)

Решение

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{W_x} = \frac{Fl/8}{bh^2/6} = \frac{3Fl}{4bh^2} = \frac{3 \cdot 500 \text{ Н} \cdot 10 \text{ м}}{4 \cdot 20 \text{ см} \cdot (10 \text{ см})^2} = 1,875 \text{ МПа}.$$

Ответ: **1,875 МПа.**

4.32. Двутавр изгибается в вертикальной плоскости. Определить доли изгибающего момента и поперечной силы, воспринимаемые материалом стенки и полка двутавра (рис.4.32).

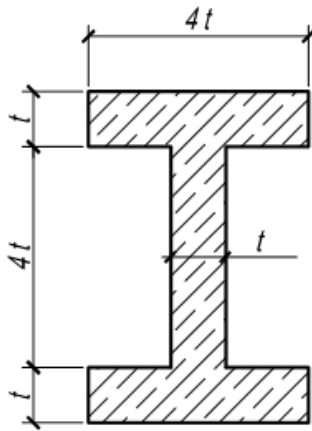


Рис. 4.32

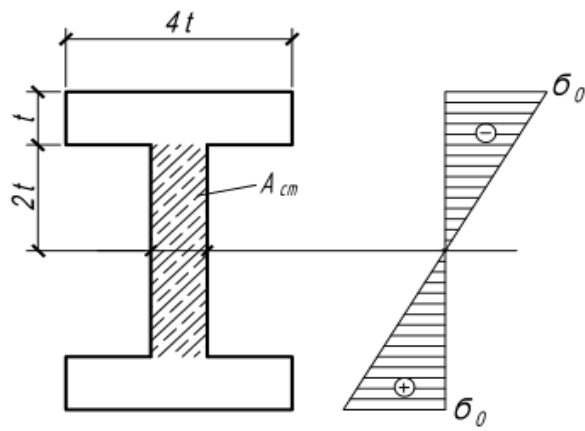


Рис. 4.32(a)

Решение

$$а) I_x = \frac{4t \cdot (6t)^3}{12} - \frac{3t \cdot (4t)^3}{12} = 56t^4, \quad I_{cm} = \frac{t \cdot (4t)^3}{12} = \frac{16}{3}t^4, \quad \frac{I_x}{I_{cm}} = 10,5;$$

$$\sigma = \frac{M}{I_x} y: \quad M_{cm} = \int_{A_{cm}} \sigma dA y = \frac{M}{I_x} I_{cm} \approx 0,095M, \quad M_n = M - M_{cm} \approx 0,905M;$$

$$б) \tau = \frac{Q}{I_x} \frac{S_x^{орс}}{b_y}: \quad Q_{cm} = \int_{A_{cm}} \tau dA = \int_{-2t}^{+2t} \frac{Q}{I_x} \frac{(12t^2 - 0,5y^2)t}{t} t dy = \frac{Qt^4}{56t^4} \left( 48 - \frac{8}{3} \right) \approx 0,81Q$$

ОТВЕТ:  $M_{cm} \approx 0,095M$ ,  $M_n \approx 0,905M$ ;  $Q_{cm} \approx 0,81Q$ ,  $Q_n \approx 0,19Q$ .

4.34. Балка заданного сечения подвергается изгибу в двух вариантах: в плоскости вертикальной оси симметрии и в плоскости наклонной оси симметрии. Определить отношение максимальных нормальных напряжений при этих вариантах (рис.4.34).

Решение

$$I_x = I_y = I = \text{const}:$$

$$\sigma_1 = \frac{M}{I} \cdot 1,5a, \quad \sigma_2 = \frac{M}{I} \cdot \sqrt{2}a;$$

$$\frac{\sigma_1}{\sigma_2} = \frac{1,5}{\sqrt{2}} \approx 1,06.$$

ОТВЕТ:  $\frac{1,5}{\sqrt{2}} \approx 1,06$ .

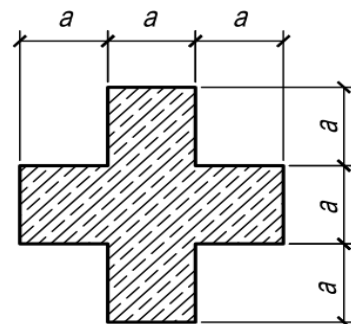


Рис. 4.34

4.35. На каком расстоянии  $x$  следует установить правую опору, чтобы прочность балки по нормальным напряжениям была наибольшей? (рис.4.35)

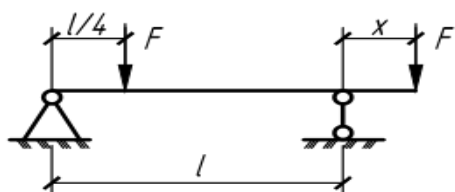


Рис. 4.35

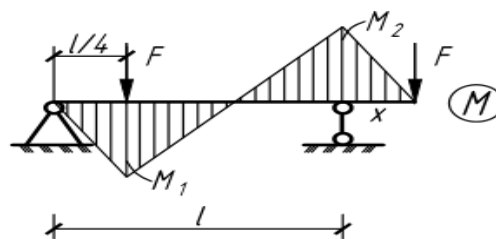


Рис. 4.35(a)

Решение

$$\sum_B M = 0: R_A(l-x) + Fx - F\left(\frac{3l}{4} - x\right) = 0, \quad R_A = \frac{F}{l-x}\left(\frac{3l}{4} - 2x\right);$$

$$M_1 = M_2: R_A \cdot \frac{l}{4} = F \cdot x, \quad \left(\frac{3l}{4} - 2x\right) \frac{l}{4} = (l-x)x.$$

Пусть  $\beta = \frac{x}{l}$ , где  $0 < \beta < 1$ , тогда  $\beta^2 - 1,5\beta + 0,1875 = 0$ ,

$$\beta = \frac{1,5 \pm \sqrt{1,5}}{2} \Rightarrow \frac{1,5 - \sqrt{1,5}}{2}.$$

Ответ:  $x \approx 0,138l$ .

4.36. Консольная балка прямоугольного сечения площадью  $A$  изгибается силой, приложенной на ее свободном конце. Указать, как с помощью тензометра, наклеенного на балку, определить модуль сдвига материала балки (рис.4.36).

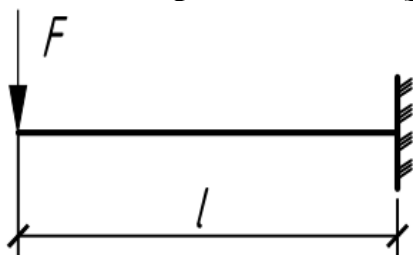


Рис. 4.36

Решение

В поперечном сечении на нейтральном слое:

$$\sigma = 0; \quad \tau_{\max} = \frac{3F}{2A}; \quad \text{это чистый сдвиг,}$$

$$\text{т.е. } \sigma_1 = \tau_{\max}; \quad \sigma_3 = -\tau_{\max}; \quad (\alpha = 45^\circ).$$

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{E}(\sigma_1 - \nu\sigma_3) = \frac{\tau_{\max}}{E}(1 + \nu) \rightarrow \frac{\tau_{\max}}{2G} = \frac{1,5F/A}{2G}$$

Ответ:  $G = \frac{3F}{4A\varepsilon_1}$ , где  $\varepsilon_1$  измеряется на нейтральном слое под  $\alpha=45^\circ$ .

4.37. Определить размеры  $h$  и  $a$  таврового сечения балка из условия её равнопрочности по  $\sigma$ , если  $R_{сж} = 90$  МПа,  $R_p = 30$  МПа.

Балка испытывает чистый изгиб ( $M = -0,18$  МН·м) (рис.4.37).

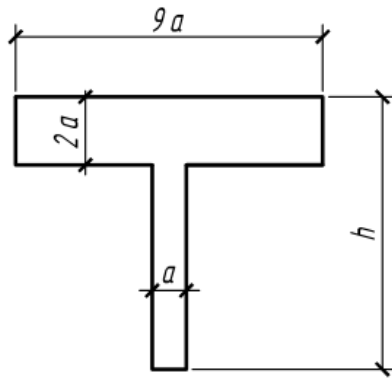


Рис. 4.37

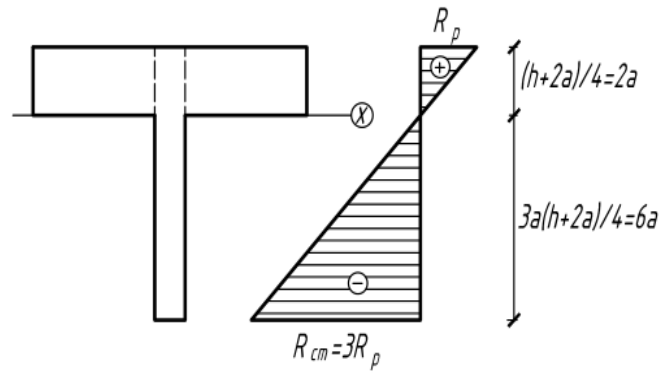


Рис. 4.37(а)

### Решение

Нейтральная ось  $x$  на границе полки со стенкой:

$$N = 0: \quad R_{сж} \cdot a \cdot \frac{h-2a}{2} = R_p \cdot 2a \cdot \frac{9a}{2}, \quad h = \frac{2 \cdot 9a}{R_{сж} / R_p} + 2a = 8a.$$

$$I_x = \frac{9a \cdot (2a)^3}{3} + \frac{a \cdot (h-2a)^3}{3} = 96a^4;$$

$$\sigma_{\max} = \frac{M}{I_x} 2a \leq R_p, \quad a \geq \sqrt[3]{\frac{M}{48 \cdot R_p}} = \sqrt[3]{\frac{0,18 \text{ МНм}}{48 \cdot 30 \text{ МПа}}} \Rightarrow 5 \text{ см}, \quad h = 8a \Rightarrow 40 \text{ см}.$$

Ответ:  $h=40$  см,  $a=5$  см.

**4.38.** Вывести приближенные формулы для  $\sigma$  и  $\tau$  при изгибе двутавровой балки, если расстояние между центрами тяжести поясов площадью  $A_1$  и  $A_2$  и высота стенки толщиной  $t$  приняты равными  $h$ . При вычислении статического момента и момента инерции не принимать во внимание сечение стенки, а сечения поясов считать сосредоточенными в их центрах тяжести. Считать, что  $M$  воспринимается только поясами, а  $Q$  – только стенкой (рис.4.38).

### Решение

Положение нейтральной оси  $x$ :

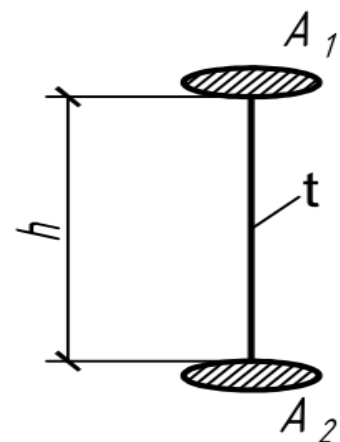
$$A = A_1 + A_2: \quad y_1 = \frac{A_2 \cdot h}{A}, \quad y_2 = \frac{A_1 \cdot h}{A}.$$

$$I_x = A_1 y_1^2 + A_2 y_2^2 = \frac{A_1 \cdot A_2}{A} h^2.$$

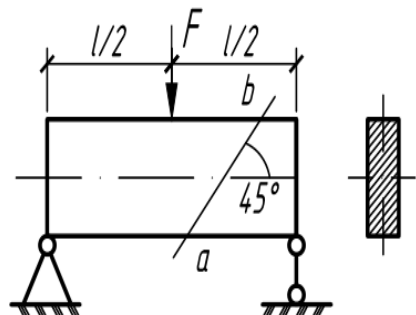
$$\sigma_1 = \frac{M}{I_x} y_1 = \frac{M}{A_1 \cdot h}, \quad \sigma_2 = \frac{M}{I_x} y_2 = \frac{M}{A_2 \cdot h};$$

$$\tau = \frac{Q S_x^{\text{отс}}}{I_x t} = \frac{Q \cdot A}{A_1 \cdot A_2 \cdot h^2} \frac{A_1 \cdot y_1}{t} = \frac{Q}{h \cdot t}.$$

Ответ:  $\sigma_1 = \frac{M}{A_1 \cdot h}, \quad \sigma_2 = \frac{M}{A_2 \cdot h}; \quad \tau = \frac{Q}{h \cdot t}.$



4.39. В точке нейтрального слоя балки прямоугольного поперечного сечения замерена линейная деформация в направлении линии  $ab$ :  $\varepsilon_{ab} = 0,5 \cdot 10^{-4}$ . Определить модуль сдвига материала балки, если площадь поперечного сечения  $A = 10 \text{ см}^2$ , а сила  $F = 20 \text{ кН}$ .



Решение

В поперечном сечении на нейтральном слое:

$$\sigma = 0; \tau_{\max} = \frac{3F/2}{2A} : \text{это чистый сдвиг,}$$

$$\text{т.е. } \sigma_1 = \tau_{\max}; \sigma_3 = -\tau_{\max}; (\alpha = 45^\circ).$$

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{E}(\sigma_1 - \nu\sigma_3) = \frac{\tau_{\max}}{E}(1 + \nu) \rightarrow \frac{\tau_{\max}}{2G} = \frac{1,5F/A}{4G}$$

$$G = \frac{3F}{8A\varepsilon_1} = \frac{3 \cdot 20 \text{ кН}}{8 \cdot 10 \text{ см}^2 \cdot 0,5 \cdot 10^{-4}} = 150 \text{ ГПа}.$$

Ответ:  $G = 150 \text{ ГПа}$ .

4.40. Две лежащие одна на другой доски несут равномерно распределенную нагрузку. Показать, что наибольшие нормальные напряжения будут пропорциональны толщинам досок, если трением между досками пренебречь (рис.4.40).

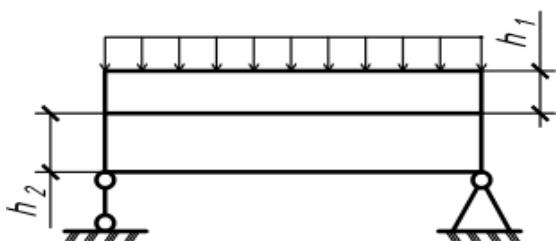


Рис. 4.40

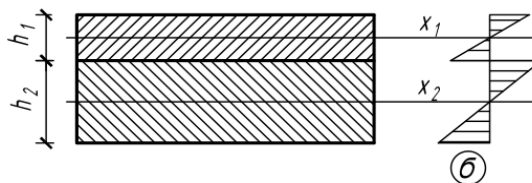


Рис. 4.40(а)

Решение

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M_1}{EI_1} = \frac{M_2}{EI_2} = \frac{M}{EI},$$

где  $M = M_1 + M_2$ ,  $I = I_1 + I_2$ :

$$M_1 = \frac{M \cdot I_1}{I}, \quad M_2 = \frac{M \cdot I_2}{I};$$

$$\sigma_{1\max} = \frac{M_1}{I_1} \frac{h_1}{2} = \frac{M}{2I} h_1; \quad \sigma_{2\max} = \frac{M_2}{I_2} \frac{h_2}{2} = \frac{M}{2I} h_2.$$

Ответ:  $\sigma_{1\max} = \frac{M}{2I} h_1$ ;  $\sigma_{2\max} = \frac{M}{2I} h_2$ .



**4.41.** Кусок высокопрочной стальной проволоки длиной  $l = 3,14$  м упруго сгибается в окружность. Определить наибольший диаметр поперечного сечения проволоки, при котором после изгиба в ней не возникают остаточные деформации, если предел упругости материала  $\sigma_y = 400$  МПа,  $E = 2 \cdot 10^5$  МПа.

Решение

$$R = \frac{l}{2\pi} \cdot \frac{1}{R} = \frac{M}{EI} \cdot \sigma_{\max} = \frac{M d}{I 2} \leq \sigma_y :$$

$$d \leq 2\sigma_y \frac{I}{M} = 2\sigma_y \frac{R}{E} = \frac{\sigma_y l}{\pi E} = \frac{400 \text{ МПа} \cdot 3,14 \text{ м}}{\pi \cdot 2 \cdot 10^5 \text{ МПа}} \approx 2 \text{ мм.}$$

Ответ:  $d = 2$  мм.

**4.43.** Определить  $\sigma_{\max}$  в опорном поперечном сечении, если материал имеет разные модули упругости на растяжение и сжатие. Дано:  $F = 20$  кН,  $l = 1$  м,  $E_p = 10^4$  МПа,  $E_c = 2 \cdot 10^5$  МПа,  $b = 12$  см,  $h = 20$  см.

Решение

$$\sigma_i = E_i \cdot \varepsilon = E_i \cdot \frac{1}{\rho} \cdot y, \quad M_{\max} = Fl = 20 \text{ кНм};$$

а) положение нейтральной оси:

$$N = \int_A \sigma dA = 0: E_c S_x^c = E_p S_x^p \rightarrow E_c h_c^2 = E_p h_p^2,$$

$$h = h_c + h_p: \quad h_c = \frac{h}{1 + \sqrt{E_c / E_p}} \approx 3,655 \text{ см};$$

$$h_p = \frac{h}{1 + \sqrt{E_p / E_c}} \approx 16,345 \text{ см};$$

б) кривизна нейтральной оси:

$$M = \int_A \sigma dAy = \frac{1}{\rho} (E_c I_x^c + E_p I_x^p) \rightarrow \frac{1}{\rho} \cdot \frac{b}{3} (E_c h_c^3 + E_p h_p^3): \quad \frac{1}{\rho} = M \cdot \frac{3}{bh} \cdot \frac{1}{E_c h_c^2};$$

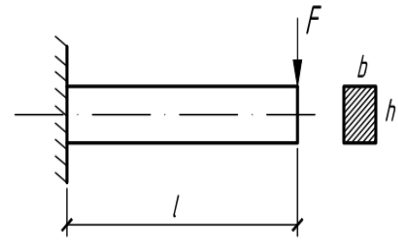
$$\sigma_{\max}^c = E_c \cdot \frac{1}{\rho_{\min}} \cdot h_c \rightarrow M_{\max} \cdot \frac{3}{bh} \cdot \frac{1}{h_c} \approx$$

$$\text{в) } \approx 20 \text{ кНм} \cdot \frac{3}{12 \text{ см} \cdot 20 \text{ см} \cdot 3,655 \text{ см}} = 68,4 \text{ МПа};$$

$$\sigma_{\max}^p = E_p \cdot \frac{1}{\rho_{\min}} \cdot h_p \rightarrow M_{\max} \cdot \frac{3}{bh} \cdot \frac{1}{h_p} \approx$$

$$\approx 20 \text{ кНм} \cdot \frac{3}{12 \text{ см} \cdot 20 \text{ см} \cdot 16,345 \text{ см}} = 15,3 \text{ МПа.}$$

Ответ:  $\sigma_{\max}^c = 68,4$  МПа;  $\sigma_{\max}^p = 15,3$  МПа.



4.44. При нагружении балки с помощью тензометра определена деформация  $\varepsilon$ . Вычислить величину момента  $M$ , если упругие характеристики материала известны (рис.4.44).

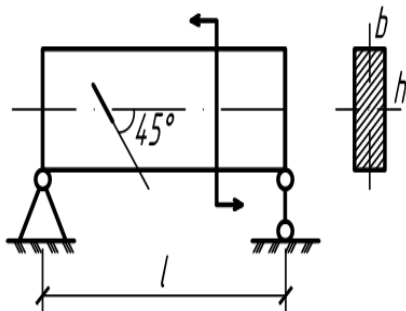


Рис. 4.44

Решение

$$\sum_B M = 0: R_A = \frac{M}{l}; Q = \frac{M}{l}.$$

На нейтральной оси в поперечном сечении:

$$\sigma = 0, \tau = \frac{3Q}{2bh} \rightarrow \text{это чистый сдвиг, т.е.}$$

$$\sigma_1 = \tau, \sigma_3 = -\tau, \alpha = 45^\circ: \varepsilon = \frac{\tau(1+\nu)}{E}, \frac{3M}{2bhl} = \frac{E\varepsilon}{1+\nu}$$

Ответ:  $M = \frac{2bhlE\varepsilon}{3(1+\nu)}$ .

4.45. Швеллерная балка изгибается в вертикальной плоскости. Какова должна быть толщина балки  $t$ , чтобы напряжения в верхних и нижних волокнах балки относились как 3:1?

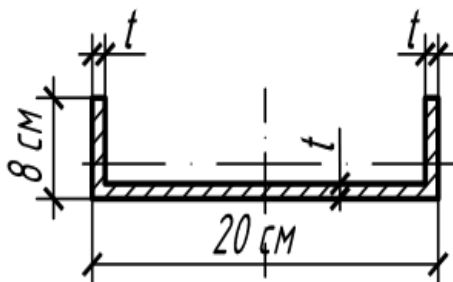


Рис. 4.45

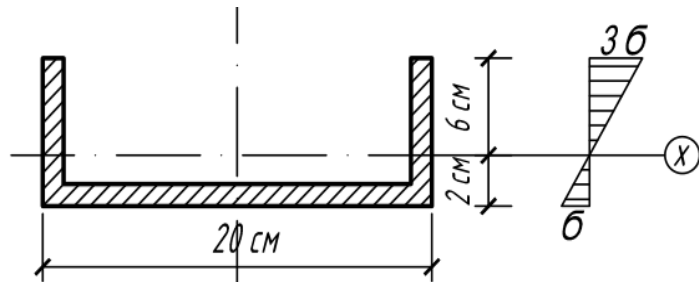


Рис. 4.45(a)

Решение

$$\sigma = E \frac{1}{\rho} y; N = \int_A \sigma dA = 0 \rightarrow S_x = 0:$$

$$20 \cdot 2 \cdot 1 - (20 - 2t) \frac{(2-t)^2}{2} = 2t \cdot 6 \cdot 3, \quad t \approx 0,6 \text{ см.}$$

Ответ:  $t \approx 0,6$  см.

4.47. Стальная балка сечением 6×10 см выдерживает нагрузку  $P=10$  кН. На расстоянии 2,05 м от левой опоры требуется просверлить круглое отверстие. Определить наибольший диаметр отверстия, при котором грузоподъемность балки не меняется. Концентрацию напряжений не учитывать.

Решение

Из симметрии:

$$R_A = R_B = \frac{F}{2} = 5 \text{ кН.}$$

а) сечение в середине пролета:

$$M_{\max} = R_A \cdot 4 \text{ м} = 20 \text{ кНм,}$$

$$\sigma_{\max} = \frac{6M_{\max}}{bh^2};$$

б) сечение m-n:

$$M_x = R_A \cdot 2,05 \text{ м} = 10,25 \text{ кНм;} \quad W_x = \frac{J_x}{y_{\max}} \Rightarrow \frac{bh^2}{6}(1-\beta^3),$$

где  $\beta = \frac{d}{h}$ ;

$$в) \frac{M_x}{W_x} \leq \sigma_{\max} : \quad W_x \geq \frac{M_x}{\sigma_{\max}} \Rightarrow \frac{bh^2}{6} \frac{M_x}{M_{\max}}, \quad \beta \leq \sqrt[3]{1 - \frac{M_x}{M_{\max}}} \approx 0,787.$$

Ответ:  $d_{\max} = \beta_{\max} \cdot h \approx 7,87 \text{ см.}$

**4.48. Призматическая балка с сечением в форме трапеции подвергается изгибу, вызывающему сжатие в верхней части. Вычислить соотношение  $\gamma = b_1 / b_2$  при котором вес балки минимален, если  $R_p / R_c = \beta$  (рис.4.48).**

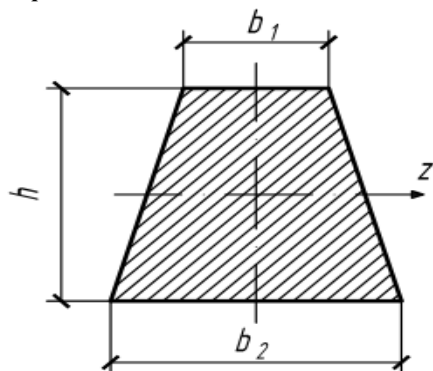


Рис. 4.48

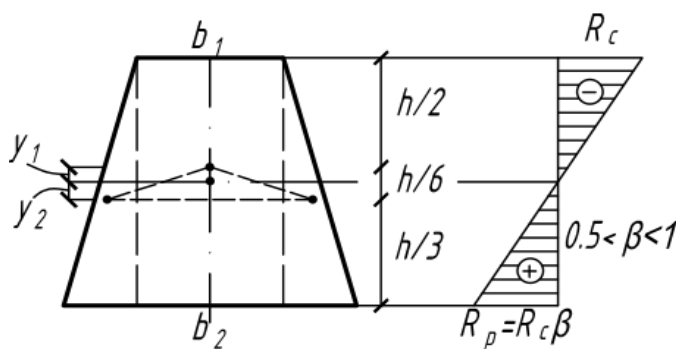


Рис. 4.48(a)

Решение

$$0 \leq \gamma \leq 1; \quad \sigma = \frac{M_x}{I_x} \cdot y.$$

а)  $x$  = нейтральная ось, т.е. центр тяжести сечения (рис. 4.48(a)):

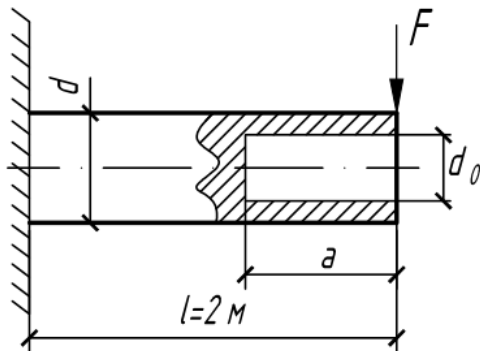
$$y_1 = \frac{(b_2 - b_1) \cdot \frac{h}{2} \cdot \frac{h}{6}}{(b_2 + b_1) \cdot \frac{h}{2}} = \frac{1 - \gamma}{1 + \gamma} \cdot \frac{h}{6}, \quad y_2 = \frac{b_1 \cdot h \cdot \frac{h}{6}}{(b_2 + b_1) \cdot \frac{h}{2}} = \frac{\gamma}{1 + \gamma} \cdot \frac{h}{3};$$

б) условие равнопрочности сечения:  $\frac{R_p}{\sigma_{p,\max}} = \frac{R_c}{\sigma_{c,\max}}, \frac{R_p}{y_{p,\max}} = \frac{R_c}{y_{c,\max}},$

$$\frac{\beta R_c}{\frac{h}{3} + y_2} = \frac{R_c}{\frac{h}{2} + y_1}, \quad \beta = \frac{\frac{h}{3} + y_2}{\frac{h}{2} + y_1} \Rightarrow \frac{1 + 2\gamma}{2 + \gamma}, \quad \gamma = \frac{2\beta - 1}{2 - \beta}.$$

Ответ:  $\frac{b_1}{b_2} = \frac{2\beta - 1}{2 - \beta}.$

**4.49.** Стальная балка круглого сплошного сечения диаметром  $d=100$  мм выдерживает нагрузку  $F=5$  кН. Со стороны свободного конца в балке делается отверстие диаметром  $d_0 = 84$  мм. Определить  $a_{\max}$  ослабленной части балки, при которой её грузоподъемность не изменяется.



Решение

а) без ослабления:

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{W_x} \Rightarrow Fl \cdot \frac{32}{\pi d^3};$$

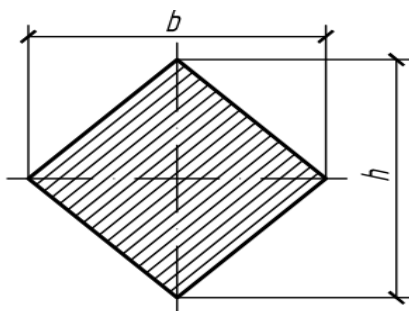
б) с ослаблением:

$$\sigma_{o,\max} = \frac{M_{o,\max}}{W_{o,x}} \Rightarrow Fa \cdot \frac{32}{\pi d^3} \cdot \frac{1}{1 - (d_0/d)^4};$$

в) условие равнопрочности:  $\sigma_{o,\max} \leq \sigma_{\max}, \quad a \leq l \cdot (1 - (d_0/d)^4) \approx 1,004$  м.

Ответ:  $a_{\max} \approx 1,004$  м.

**4.50.** Балка имеет поперечное сечение в форме ромба. Используя в первом приближении формулу Д.И. Журавского, установить распределение  $\tau$  по высоте сечения и вычислить  $\tau_{\max}$ .



Решение

$$I_x = \frac{bh^3}{48}; \quad 0 \leq y \leq +\frac{h}{2};$$

$$S_x^{\text{отс}} = \frac{1}{2} b y \left( \frac{h}{2} - y \right) \cdot \left( y + \frac{1}{3} \left( \frac{h}{2} - y \right) \right),$$

$$\tau = \frac{QS_x^{\text{отс}}}{I_x b y} \Rightarrow \frac{8Q}{bh^3} \left( \frac{h}{2} - y \right) \left( \frac{h}{2} + 2y \right);$$

$$\tau = \tau_{\max}, \quad \text{когда} \quad \frac{d\tau}{dy} = 0: \quad y = \frac{h}{8} \rightarrow \tau_{\max} = \frac{9Q}{4bh}.$$

Ответ:  $\tau = \frac{8Q}{bh^3} \left( \frac{h}{2} - y \right) \left( \frac{h}{2} + 2y \right), \quad \tau_{\max} = \frac{9Q}{4bh}$  при  $y = \pm \frac{h}{8}$ .

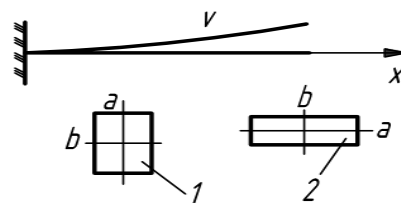
**4.51. Каково соотношение между наибольшими нормальными напряжениями в балках 1 и 2? Уравнения изогнутых осей  $\vartheta(x)$  одинаковы.**

Решение

По условию:

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M_1}{EI_1} = \frac{M_2}{EI_2} \rightarrow \frac{M_1}{I_1} = \frac{M_2}{I_2};$$

$$\frac{\sigma_{1,\max}}{\sigma_{2,\max}} = \frac{\frac{M_1}{I_1} \cdot \frac{b}{2}}{\frac{M_2}{I_2} \cdot \frac{a}{2}} = \frac{b}{a}. \text{ Ответ: } \frac{\sigma_{1,\max}}{\sigma_{2,\max}} = \frac{b}{a}.$$



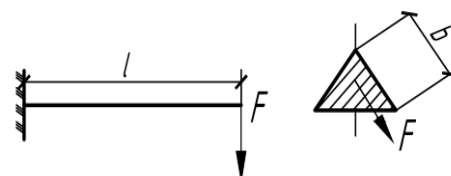
**4.52. Определить наибольшие нормальные напряжения, возникающие в балке, поперечное сечение которой равносторонний треугольник. Сила  $F$  приложена в центре тяжести сечения параллельно одной из сторон треугольника.**

Решение

Для равностороннего треугольника:

$$I_x = I_y = I_{x_0} \Rightarrow \frac{(b\sqrt{3}/2)b^3}{48} = \frac{b^4\sqrt{3}}{96}. M_{\max} = Fl.$$

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{I_{x_0}} \cdot \frac{b}{2}. \text{ Ответ: } \sigma_{\max} = \frac{48Fl}{b^3\sqrt{3}}.$$



**4.53. Консоль прямоугольного поперечного сечения нагружена на конце силой  $F$ . Определить нормальное  $\sigma_\alpha$  и касательное  $\tau_\alpha$  напряжения в точке К вертикального сечения, составляющего с поперечным сечением угол  $\alpha$  (рис.4.53).**

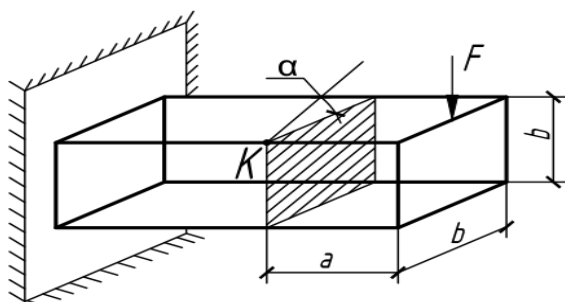


Рис. 4.53

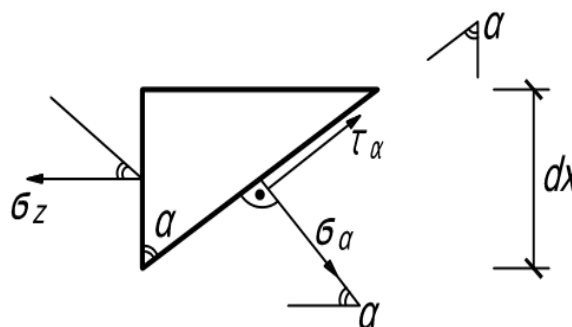


Рис. 4.53(a)

Решение

$$\text{В точке К поперечного сечения: } \sigma_z = \frac{M_x}{W_x} \Rightarrow Fa \cdot \frac{6}{bh^3}, \tau_{zy} = 0.$$

Из равновесия:  $\tau_{zy} \cdot dx = \tau_{\alpha y} \cdot \frac{dx}{\cos(\alpha)}$ ,  $\tau_{\alpha y} = \tau_{zy} \cos(\alpha) = 0$ ;

$$\sigma_z \cdot dx \cdot \sin(\alpha) = \tau_{\alpha} \cdot \frac{dx}{\cos(\alpha)}, \quad \tau_{\alpha} = \sigma_z \frac{\sin(2\alpha)}{2};$$

$$\sigma_z \cdot dx \cdot \cos(\alpha) = \sigma_{\alpha} \cdot \frac{dx}{\cos(\alpha)}, \quad \sigma_{\alpha} = \sigma_z \cos^2(\alpha).$$

Полное касательное напряжение:  $\tau = \sqrt{\tau_{\alpha y}^2 + \tau_{\alpha}^2} \Rightarrow \tau_{\alpha}$ .

Ответ:  $\sigma_{\alpha} = \frac{6Fa}{bh^3} \cos^2(\alpha)$ ;  $\tau_{\alpha} = \frac{6Fa \sin(2\alpha)}{bh^3} \cdot 2$ .

**4.55. К деревянному брусу сечением 10×18 см снизу прикреплена стальная полоса 10×0,4 см. Определить наибольшие нормальные напряжения в брусе и полосе, если  $q=4,8$  кН/м,  $E_c = 20E_d$  (рис.4.55).**

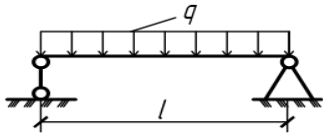


Рис. 4.55

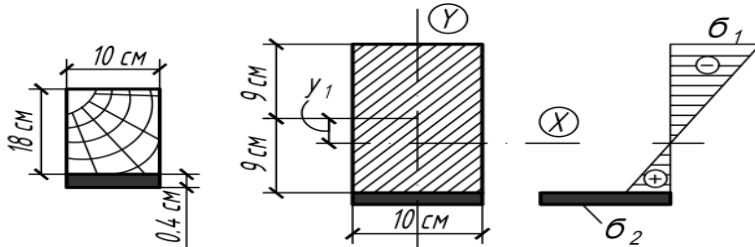


Рис. 4.55(а)

**Решение**

$$\sigma_i = E_i \varepsilon = E_i \frac{y}{\rho}; \quad A_1 = 180 \text{ см}^2; \quad A_2 = 4 \text{ см}^2; \quad \frac{E_d A_1}{E_c A_2} = 2,25;$$

а) положение нейтральной оси  $X$ :  $N = \int_A \sigma_i dA \Rightarrow 0$ ,

$$\frac{1}{\rho} (E_d S_{1,x} + E_c S_{2,x}) = 0, \quad E_d A_1 Y_1 = E_c A_2 (9 - Y_1 + 0,2), \quad Y_1 \approx 2,83 \text{ см};$$

$$\text{б) } M_x = \int_A \sigma_i dA \cdot y \Rightarrow \frac{1}{\rho} (E_d I_{1,x} + E_c I_{2,x}), \quad \frac{1}{\rho} = \frac{M_x}{E_d I_{np}},$$

где  $I_{1,x} = \frac{10 \cdot 18^3}{12} + A_1 Y_1^2 \approx 6302 \text{ см}^4$ ,  $I_{2,x} \approx A_2 (9,2 - Y_1)^2 \approx 162,3 \text{ см}^4$ ,

$$I_{np} = I_{1,x} + \frac{E_c}{E_d} I_{2,x} \approx 9548 \text{ см}^4; \quad M_{\max} = \frac{ql^2}{8} = 9,6 \text{ кНм};$$

в)  $\sigma_{1,\max} = E_d \frac{1}{\rho_{\min}} (9 + Y_1) \Rightarrow \frac{M_{\max}}{I_{np}} 11,83 \text{ см} \approx 11,9 \text{ МПа}$  (сжатие);

$$\sigma_{2,\max} = E_c \frac{1}{\rho_{\min}} (9,2 - Y_1) \Rightarrow \frac{E_c}{E_\delta} \frac{M_{\max}}{I_{np}} 6,37 \text{ см} \approx 128,1 \text{ МПа (раст.)}.$$

Ответ:  $\sigma_d \approx -11,9 \text{ МПа}$ ;  $\sigma_c \approx 128,1 \text{ МПа}$ .

**4.56.** Деревянная балка из трех досок сечением 40×80 мм для повышения несущей способности усиливается стальным листом толщиной  $\delta=1\text{мм}$ . Оценить повышение грузоподъемности балки за счет усиления, если  $R_c = 200 \text{ МПа}$ ,  $R_\delta = 10 \text{ МПа}$ ,  $E_c = 20E_\delta$  (рис.4.56).

Решение

а) без учета усиления стальным листом:

$$W_x = 3 \frac{8 \cdot 4^2}{6} = 64 \text{ см}^3, M_1 \leq W_x R_\delta = 640 \text{ Нм};$$

б) с учетом усиления стальным листом:

$$\sigma_i = E_i \varepsilon = E_i \frac{y}{\rho}, \quad -2 \text{ см} \leq y \leq 2 \text{ см},$$

$$M_2 = \int_A \sigma_i dA \cdot y = \frac{1}{\rho} (E_\delta I_1 + E_c I_2) = \frac{1}{\rho} \cdot E_\delta I_{np},$$

$$I_{np} = I_1 + \frac{E_c}{E_\delta} I_2 = 3 \frac{8 \cdot 4^3}{12} + 20 \left( 4 \frac{\delta \cdot 4^3}{12} + 2 \cdot 16 \cdot \delta \cdot 2^2 \right) \approx 426,7 \text{ см}^4;$$

из условий прочности определяем минимальную кривизну:

$$\sigma_\delta = E_\delta \frac{y_{\max}}{\rho} \leq R_\delta : \frac{1}{\rho} \leq \frac{R_\delta}{E_\delta y_{\max}},$$

$$\sigma_c = E_c \frac{y_{\max}}{\rho} \leq R_c : \frac{1}{\rho} \leq \frac{R_c}{E_c y_{\max}} = \frac{R_\delta}{E_\delta y_{\max}};$$

$$\text{тогда } M_2 \leq \frac{R_\delta}{E_\delta y_{\max}} \cdot E_\delta I_{np} \Rightarrow \frac{R_\delta I_{np}}{y_{\max}} \approx \frac{10 \text{ МПа} \cdot 426,7 \text{ см}^4}{2 \text{ см}} \approx 2133,3 \text{ Нм};$$

$$\text{в) } \frac{M_2}{M_1} \approx 3,33.$$

Ответ: грузоподъемность увеличится в 3,33 раза.

**4.57.** Составная консоль склеена из двух стержней размерами  $b=6 \text{ см}$ ,  $h=5 \text{ см}$  каждый. Определить допускаемую нагрузку  $F$ , если  $R=200 \text{ МПа}$ , расчетное сопротивление клея на срез  $R_{cp} = 5 \text{ МПа}$ .

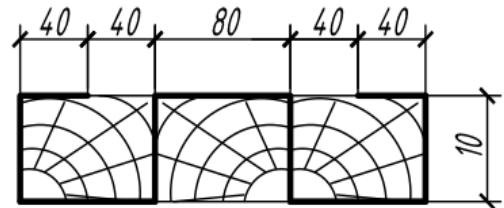
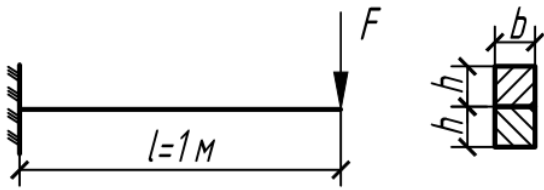


Рис. 4.56

Решение

а) из условия прочности по  $\sigma$  (балка):



$$F \leq \frac{W_x R}{l} = \frac{b(2h)^2}{6} \frac{R}{l} = 20 \text{ кН};$$

б) из условия прочности по  $\tau$  (по шву):

$$F \leq \frac{2AR_{cp}}{3} = \frac{4bhR_{cp}}{3} = 20 \text{ кН}.$$

Ответ:  $F \leq 20 \text{ кН}$ .

4.59. Тонкая нерастяжимая лента, выдерживающая при испытаниях на разрыв усилие  $F$ , наклеена на верхнюю поверхность бруса прямоугольного сечения, сделанного из резины. Определить, на основе гипотезы плоских сечений, при каком значении моментов, изгибающих конструкцию, произойдет разрыв ленты. Считать, что толщина ленты  $t$  мала по сравнению с  $h$  (рис.4.59).

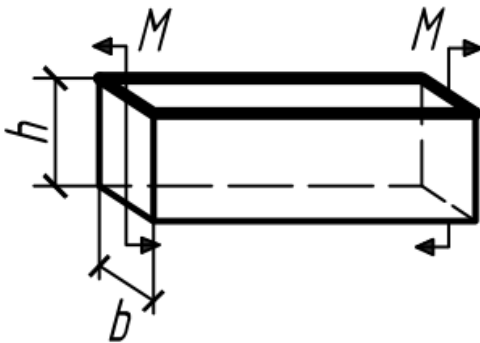


Рис. 4.59

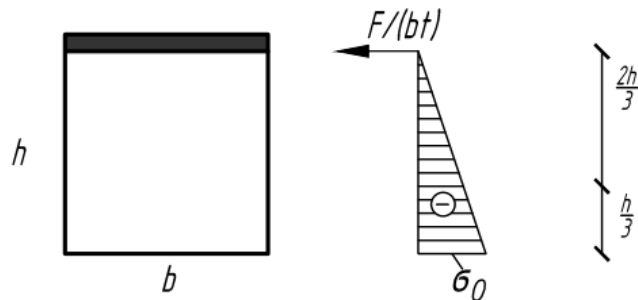


Рис. 4.59(а)

Решение

По условию лента нерастяжимая  $\rightarrow$  нейтральный слой  $X$  совпадает с лентой.

При изгибе  $N = 0$ :  $F = \frac{\sigma_0 h}{2} b$ . Тогда  $M_x = F \cdot \frac{2h}{3}$ .

Ответ:  $M_x = F \cdot \frac{2h}{3}$ .

4.60. Составной стержень круглого поперечного сечения изгибается моментами  $M$ . Проскальзывания сердечника в трубчатой части стержня не происходит. Построить эпюру нормальных напряжений по высоте сечения при  $E_1 = 8E_2$ . Определить угол взаимного поворота концевых сечений (рис.4.60).





Рис. 4.60

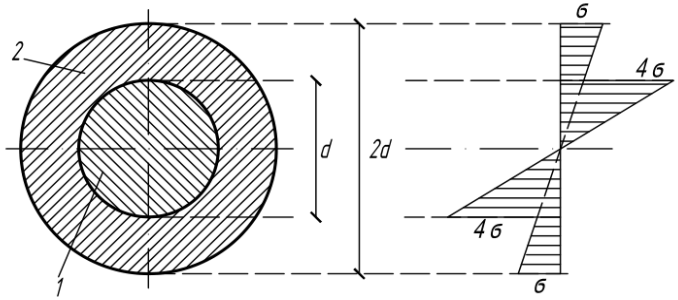


Рис. 4.60(a)

### Решение

Нейтральная ось  $X$  совпадает с осью симметрии сечения.

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M_1}{E_1 I_1} = \frac{M_2}{E_2 I_2} \Rightarrow \frac{M}{E_1 I_1 + E_2 I_2}, \quad \text{т.к. } M = M_1 + M_2,$$

$$I_1 = \frac{\pi d^4}{64} \rightarrow I, \quad I_2 = \frac{\pi (2d)^4}{64} - \frac{\pi d^4}{64} = \frac{15}{64} \pi d^4 \rightarrow 15I.$$

$$\sigma_{1,\max} = \frac{M_1}{W_1} = M \frac{E_1 I_1}{E_1 I_1 + E_2 I_2} \cdot \frac{d/2}{I_1} = \frac{M}{I + \frac{E_2}{E_1} 15I} \cdot \frac{d}{2} = \frac{256}{23} \frac{M}{\pi d^3} \Rightarrow 4\sigma;$$

$$\sigma_{2,\max} = \frac{M_2}{W_2} = M \frac{E_2 I_2}{E_1 I_1 + E_2 I_2} \cdot \frac{d}{I_2} = \frac{M}{\frac{E_1}{E_2} I + 15I} \cdot d = \frac{64}{23} \frac{M}{\pi d^3} \Rightarrow \sigma;$$

$$\Delta\varphi_{AB} = \int \frac{M\bar{M}}{E_2 I_{np}} dz = \frac{M \cdot l \cdot 1}{E_1 I_1 + E_2 I_2} = \frac{M \cdot l}{E_2 \cdot 23I} = \frac{64Ml}{23E_2 \pi d^4}.$$

Ответ:  $\sigma_{1,\max} = \frac{256}{23} \frac{M}{\pi d^3}$ ;  $\sigma_{2,\max} = \frac{64}{23} \frac{M}{\pi d^3}$ ;  $\Delta\varphi_{AB} = \frac{64Ml}{23E_2 \pi d^4}$ .

**4.61. Построить эпюру нормальных напряжений по высоте сечения балки, состоящей из двух разных материалов. Изгиб происходит в вертикальной плоскости. Для сечения в целом считать применимой гипотезу плоских сечений (рис.4.61).**

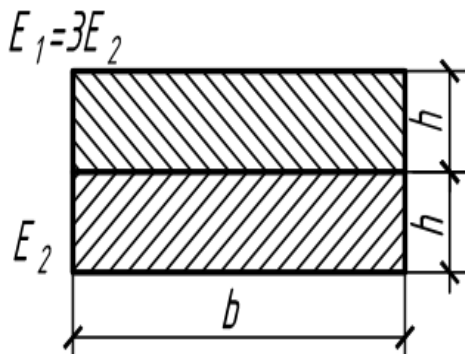


Рис. 4.61

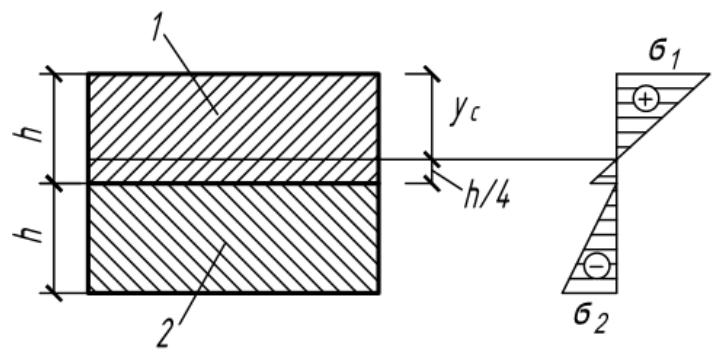


Рис. 4.61(a)

Решение

$$\sigma_i = E_i \varepsilon = E_i \frac{y}{\rho}; \quad A_1 = A_2 = bh;$$

а) положение нейтральной оси  $X$ :  $N = \int_A \sigma_i dA = 0$ :

$$\frac{1}{\rho} \cdot (E_1 S_{1,x} + E_2 S_{2,x}) = 0, \quad E_1 A_1 \left( Y_c - \frac{h}{2} \right) = E_2 A_2 \left( \frac{3}{2} h - Y_c \right), \quad Y_{1c} = \frac{3h}{4};$$

б)  $M_x = \int_A \sigma_i dA \cdot y = \frac{1}{\rho} \cdot (E_1 I_{1,x} + E_2 I_{2,x}), \quad \frac{1}{\rho} = \frac{M_x}{E_2 I_{np}},$

$$I_{1,x} = \frac{b \cdot h^3}{12} + A_1 \left( \frac{h}{4} \right)^2 = \frac{7bh^3}{48}, \quad I_{2,x} = \frac{b \cdot h^3}{12} + A_2 \left( \frac{3h}{4} \right)^2 = \frac{31bh^3}{48},$$

$$I_{np} = \frac{E_1}{E_2} I_{1,x} + I_{2,x} = \frac{13bh^3}{12};$$

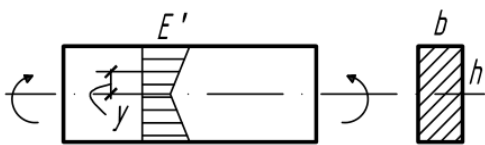
в)  $\sigma_1 = E_1 \cdot \frac{1}{\rho} \cdot \frac{3h}{4} \Rightarrow \frac{E_1}{E_2} \cdot \frac{M_x}{I_{np}} \cdot \frac{3h}{4} = \frac{27}{13} \cdot \frac{M_x}{bh^2}$  (раст.);

$$\sigma_2 = E_2 \cdot \frac{1}{\rho} \cdot \frac{5h}{4} \Rightarrow \frac{M_x}{I_{np}} \cdot \frac{5h}{4} = \frac{15}{13} \cdot \frac{M_x}{bh^2}$$
 (сжатие).

Ответ:  $\sigma_1 = \frac{27}{13} \cdot \frac{M_x}{bh^2}; \quad \sigma_2 = \frac{15}{13} \cdot \frac{M_x}{bh^2}.$

4.62. Определить наибольшее нормальное напряжение в балке прямоугольного сечения, модуль упругости материала которой изменяется по высоте балки по закону  $E(y) = E(1 + 2|y|/h)$ .

Решение



$$\sigma = E \varepsilon = E(y) \cdot \frac{1}{\rho} \cdot y, \quad -\frac{h}{2} \leq y \leq \frac{h}{2};$$

Нейтральная ось  $X \rightarrow$  ось симметрии сечения.

$$M_x = \int_A \sigma dA \cdot y = 2 \frac{1}{\rho} \int_{A/2} E(y) \cdot y^2 dA \Rightarrow \frac{2Eb}{\rho} \int_0^{\frac{h}{2}} \left( 1 + 2 \frac{y}{h} \right) \cdot y^2 dy = \frac{7}{48} \frac{Ebh^3}{\rho};$$

$$\sigma_{\max} = E(y_{\max}) \cdot \frac{1}{\rho} \cdot y_{\max} \Rightarrow 2E \cdot \frac{48M_x}{7Ebh^3} \cdot \frac{h}{2}.$$

Ответ:  $\sigma_{\max} = \frac{8}{7} \cdot \frac{6M_x}{bh^2}.$

4.64. Деревянный брус, имеющий сечение в виде равностороннего треугольника со стороной  $a = 20$  см, обит стальным листом толщиной  $\Delta\delta = 0,1$  см. Учитывая гипотезу плоских сечений, определить, какой

изгибающий момент выдерживает брус, если  $R_c = 210$  МПа,  $R_d = 14$  МПа,  $E_c = 20E_d$ .

Решение

Нейтральная ось  $X \rightarrow$  центр тяжести треугольника.

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M_1}{E_d I_1} = \frac{M_2}{E_c I_2} = \frac{M}{E_d I_{np}}, \text{ т.к. } M = M_1 + M_2;$$

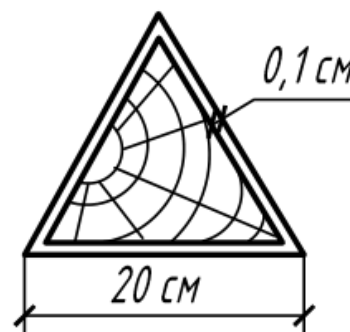
$$I_1 \cong \frac{a^4 \sqrt{3}}{96}, I_2 \cong \frac{\delta a^3}{4}, I_{np} = I_1 + \frac{E_c}{E_d} I_2, y_{\max} = \frac{a}{\sqrt{3}};$$

$$\frac{M_1}{I_1} y_{\max} \leq R_d: \frac{1}{\rho} \leq \frac{R_d}{E_d y_{\max}},$$

$$\frac{M_2}{I_2} y_{\max} \leq R_c: \frac{1}{\rho} \leq \frac{R_c}{E_c y_{\max}} = \frac{15 R_d}{20 E_d y_{\max}} = \frac{3}{4} \cdot \frac{R_d}{E_d y_{\max}};$$

$$M \leq E_d I_{np} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{R_d}{E_d y_{\max}} = \frac{3}{4} \cdot \frac{R_d I_{np}}{y_{\max}} \approx 6,262 \text{ кНм.}$$

Ответ:  $M \leq 6,262$  кНм.



4.65. Деревянный брус переменного сечения удерживает груз  $F$  на плаву. Определить  $\sigma_{\max}$  в среднем сечении балки. Как изменятся эти напряжения при замене данной балки брусом постоянного сечения с шириной  $b$ , обладающим той же плавучестью?



Решение

а) брус с высотой по квадратной параболе:

$$y(z) = h \left( 1 - \left( \frac{2z}{l} \right)^2 \right), \quad -\frac{l}{2} \leq z \leq \frac{l}{2}; \quad F = 2 \int_0^{l/2} \gamma \cdot y(z) b dz \Rightarrow \Delta \gamma \cdot \frac{2}{3} h b l;$$

$$M_{\max} = \int_0^{l/2} \gamma \cdot y(z) b dz \cdot z \Rightarrow \frac{3}{32} F l; \quad \sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{W_x} = \frac{3}{32} F l \cdot \frac{6}{b h^2} \Rightarrow \frac{9}{16} \cdot \frac{F l}{b h^2};$$

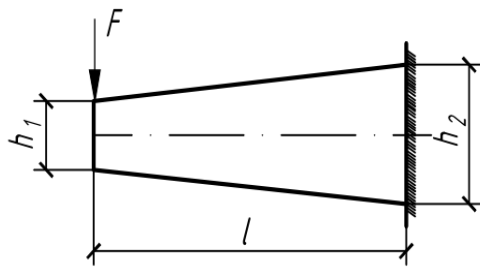
б) брус постоянного сечения:

$$\Delta \gamma \cdot \frac{2}{3} h b l = \Delta \gamma \cdot h_o b l, \quad h_o = \frac{2}{3} h;$$

$$M_{\max} = \int_0^{l/2} \Delta\gamma \cdot h_0 b dz \cdot z \Rightarrow \frac{4}{32} Fl; \quad \sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{W_x} = \frac{4}{32} Fl \cdot \frac{6}{bh_0^2} \Rightarrow \frac{27}{16} \cdot \frac{Fl}{bh^2}.$$

Ответ:  $\sigma_{\max} = \frac{9}{16} \cdot \frac{Fl}{bh^2}$ ; они возрастут в 3 раза.

**4.66.** Балка-консоль прямоугольного поперечного сечения нагружена на конце силой  $F$ . Ширина балки  $b$  постоянна, а высота меняется по линейному закону от  $h_1$  до  $h_2 = 3h_1$ . Установить положение опасного (по  $\sigma$ ) сечения и определить величину  $\sigma_{\max}$ .



Решение

$$0 \leq z \leq l: \quad M_x(z) = Fz,$$

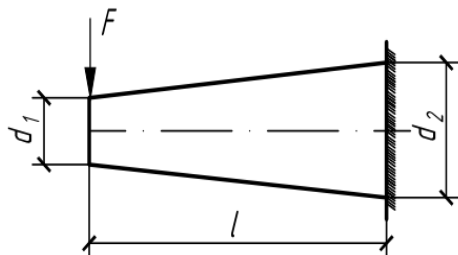
$$h(z) = h_1 \left(1 + \frac{2z}{l}\right), \quad W_x(z) = \frac{bh_1^2}{6} \left(1 + \frac{2z}{l}\right)^2,$$

$$\sigma_{\max}(z) = \frac{M_x(z)}{W_x(z)} \Rightarrow \frac{Fz \cdot 6}{bh_1^2 \left(1 + \frac{2z}{l}\right)^2}; \quad \frac{d\sigma_{\max}(z)}{dz} = 0:$$

$$\left(1 + \frac{2z}{l}\right)^2 - z \cdot 2 \left(1 + \frac{2z}{l}\right) \frac{2}{l} = 0, \quad z = \frac{l}{2}.$$

Ответ:  $\sigma_{\max} \left(\frac{l}{2}\right) = \frac{3}{4} \cdot \frac{Fl}{bh_1^2}$ .

**4.67.** Балка-консоль, нагруженная силой на свободном конце, имеет форму усеченного кругового конуса с диаметрами оснований  $d_1$  и  $d_2$ . При каких соотношениях  $d_1 / d_2$  наибольшее нормальное напряжение возникает в заделке?



Решение

$$z \geq 0: \quad d(z) = d_1 + (d_2 - d_1) \frac{z}{l},$$

$$M_x(z) = Fz, \quad W_x(z) = \frac{\pi}{32} \left(d_1 + (d_2 - d_1) \frac{z}{l}\right)^3,$$

$$\sigma_{\max}(z) = \frac{M_x(z)}{W_x(z)}; \quad \frac{d\sigma_{\max}(z)}{dz} = 0:$$

$$d_1 + \frac{(d_2 - d_1)z}{l} - z \cdot 3 \frac{(d_2 - d_1)}{l} = 0, \quad \frac{z}{l} = \frac{d_1}{2(d_2 - d_1)}.$$

При  $0 \leq \frac{z}{l} \leq \frac{d_1}{2(d_2 - d_1)}$ ,  $\sigma_{\max}(z) \rightarrow$  возрастает.

Если  $\frac{z}{l} \geq 1$  или  $\frac{d_1}{d_2} \geq \frac{2}{3}$ , то  $\sigma_{max}(z)$  в заделке.

Ответ:  $\frac{d_1}{d_2} \geq \frac{2}{3}$ .

**4.68.** По верхней и нижней поверхностям консольной балки прямоугольного поперечного сечения действует касательная нагрузка интенсивностью  $q_z$ , распределенная вдоль оси балки  $z$  по линейному закону, а по ширине  $b$  – равномерно. Установить характер изменения касательных напряжений в произвольном сечении.

Решение

$$0 \leq z \leq l: q_z(z) = qb \frac{z}{l},$$

$$m(z) = -2 \cdot q_z(z) \cdot \frac{h}{2} \Rightarrow -qbh \frac{z}{l}.$$

Из равновесия:

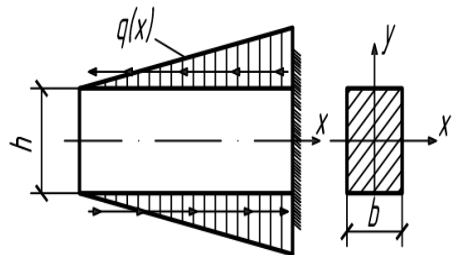
$$Q(z) = 0, \quad M(z) = \frac{m(z) \cdot z}{2} = -qbh \frac{z^2}{2l}; \quad \frac{dM}{dz} = Q + m.$$

$$-\frac{h}{2} \leq y \leq \frac{h}{2}: \quad \tau(z, y) = \frac{q_z(z)}{b} + \frac{dM}{dz} \cdot \frac{S_x^{\text{отс}}}{I_x \cdot b} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{q_z(z)}{b} \cdot \left( 1 - \frac{h \cdot S_x^{\text{отс}}}{I_x} \right) = q \frac{z}{l} \cdot \left( 1 - \frac{6}{h^2} \left( \left( \frac{h}{2} \right)^2 - y^2 \right) \right),$$

где  $I_x = \frac{bh^3}{12}$ ,  $S_x^{\text{отс}} = \frac{b}{2} \left( \left( \frac{h}{2} \right)^2 - y^2 \right)$ .

Ответ:  $\tau = q \frac{z}{l} \cdot \left( 6 \left( \frac{y}{h} \right)^2 - \frac{1}{2} \right)$ .



**4.69.** Для консольной балки вывести формулу для определения касательных напряжений, действующих в поперечном сечении, и построить их эпюру. Считать  $q_z$  поверхностной касательной нагрузкой, равномерно распределенной по ширине  $b$  и по длине  $l$  балки (рис.4.69).

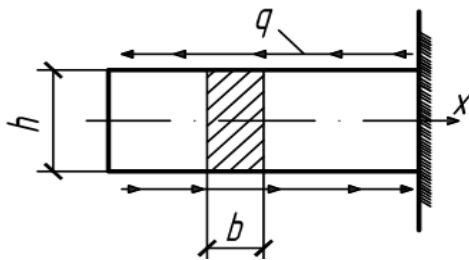


Рис. 4.69

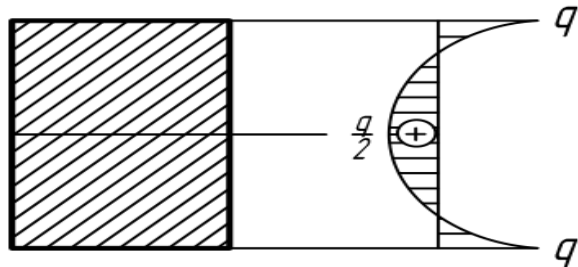


Рис. 4.69(а)

Решение

$$0 \leq z \leq l: q_z(z) = qb, \quad m(z) = 2 \cdot q_z(z) \cdot \frac{h}{2} \Rightarrow qbh.$$

$$\text{Из равновесия: } Q(z) = 0, \quad M(z) = m(z) \cdot z = qbh \cdot z; \quad \frac{dM}{dz} = Q + m.$$

$$\begin{aligned} -\frac{h}{2} \leq y \leq \frac{h}{2}: \quad \tau(z, y) &= -\frac{q_z(z)}{b} + \frac{dM}{dz} \cdot \frac{S_x^{\text{отс}}}{I_x \cdot b} \Rightarrow -q \cdot \left( 1 - \frac{h \cdot S_x^{\text{отс}}}{I_x} \right) \Rightarrow \\ &\Rightarrow -q \cdot \left( 1 - \frac{6}{h^2} \left( \left( \frac{h}{2} \right)^2 - y^2 \right) \right), \end{aligned}$$

$$\text{где } I_x = \frac{bh^3}{12}, \quad S_x^{\text{отс}} = \frac{b}{2} \left( \left( \frac{h}{2} \right)^2 - y^2 \right).$$

$$\text{Ответ: } \tau = q \cdot \left( \frac{1}{2} - 6 \left( \frac{y}{h} \right)^2 \right) \text{ (рис. 4.69(a)).}$$

**4.70. Вывести формулу для касательных напряжений, возникающих в прямоугольном поперечном сечении балки и построить их эпюру. Считать  $q_z$  поверхностной касательной нагрузкой, равномерно распределенной по ширине  $b$  и по длине  $l$  балки (рис.4.70).**

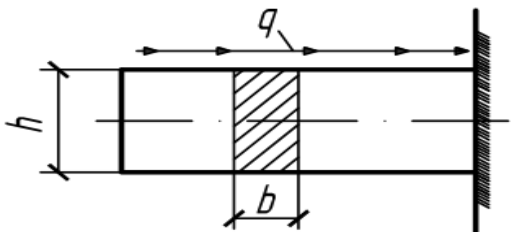


Рис. 4.70

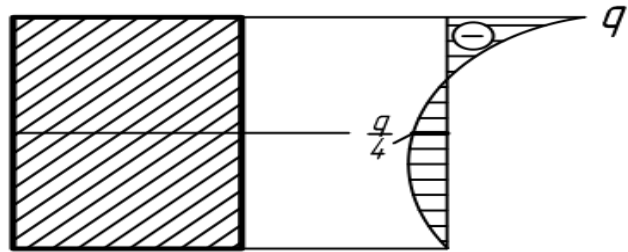


Рис. 4.70(а)

Решение

$$0 \leq z \leq l: q_z(z) = qb, \quad m(z) = q_z(z) \cdot \frac{h}{2} \Rightarrow \frac{qbh}{2}.$$

Из равновесия:

$$N(z) = -q_z(z) \cdot z = -qbz, \quad Q(z) = 0, \quad M(z) = m(z) \cdot z = \frac{qbh}{2} z;$$

$$\frac{dN}{dz} = -q_z(z) \Rightarrow -qb,$$

$$\frac{dM}{dz} = Q + m \Rightarrow \frac{qbh}{2}.$$

$$-\frac{h}{2} \leq y \leq \frac{h}{2}:$$

из равновесия отсеченной части элемента  $dz$ :

$$(q + \tau)b \cdot dz + \int_{A^{\text{отс}}} \left( \frac{dN}{A} - \frac{dM}{I_x} y \right) dA = 0,$$

$$\tau = -q - \frac{dN}{dz} \cdot \frac{A^{\text{отс}}}{A \cdot b} + \frac{dM}{dz} \cdot \frac{S_x^{\text{отс}}}{I_x \cdot b} \Rightarrow q \cdot \left( \frac{h S_x^{\text{отс}}}{2 I_x} + \frac{A^{\text{отс}}}{A} - 1 \right),$$

где  $I_x = \frac{bh^3}{12}$ ,  $A = bh$ ,  $S_x^{\text{отс}} = \frac{b}{2} \left( \left( \frac{h}{2} \right)^2 - y^2 \right)$ ,  $A^{\text{отс}} = b \left( \frac{h}{2} - y \right)$ .

Ответ:  $\tau = q \cdot \left( \frac{1}{4} - \frac{y}{h} - 3 \left( \frac{y}{h} \right)^2 \right)$  (рис. 4.70(a)).

**4.71.** Записать выражения для напряжений  $\sigma$  и  $\tau$  в произвольной точке балки. Считать  $q$  поверхностной касательной нагрузкой, равномерно распределенной по ширине  $b$  и по длине  $l$  балки.

Решение

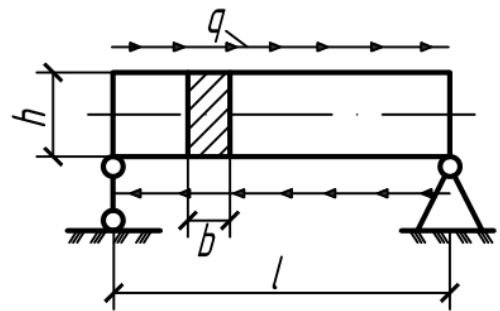
$$m = 2qb \frac{h}{2};$$

$$R_B = -R_A = \frac{ml}{l}; Q(z) = R_A = -m;$$

$$M(z) = 0: \quad \sigma = \frac{M(z)}{I_x} y \Rightarrow 0;$$

$$\frac{dM}{dz} = Q + m = 0: \quad \tau = \frac{dM}{dz} \cdot \frac{S_x^{\text{отс}}}{I_x \cdot b} - q \Rightarrow -q.$$

Ответ:  $\sigma = 0$ ;  $\tau = -q$ .



**4.72.** Две стальные балки сечения  $b \times b$  свободно уложены друг на друга. После загрузки нагрузкой  $q$  балки по длине свариваются. Как распределяются остаточные напряжения в балках после снятия нагрузки? (рис.4.72).

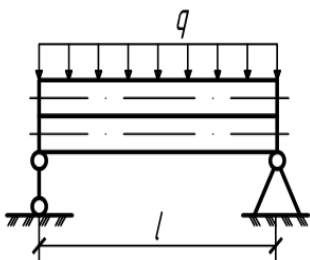


Рис. 4.72

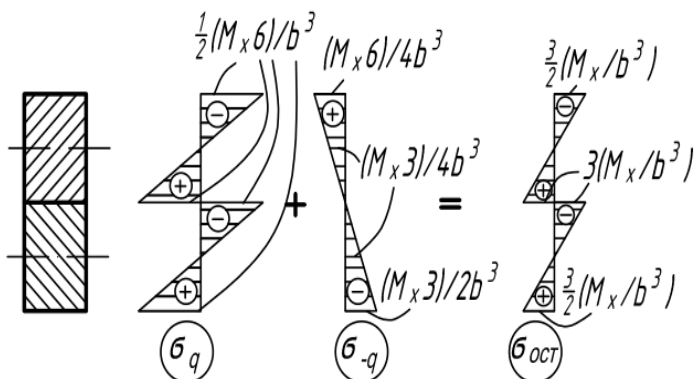


Рис. 4.72(a)

Решение

а) несваренные балки от  $q(z) = q$ :

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M_1}{EI_1} = \frac{M_2}{EI_2} \Rightarrow \frac{M_x}{EI_1 + EI_2}, \quad \text{т.к. } M_x = M_1 + M_2,$$

$$I_1 = I_2 = \frac{b^4}{12}; \quad M_1 = M_2 = \frac{M_x}{2} \Rightarrow \frac{1}{2} \cdot \frac{ql^2}{2} \left( \frac{z}{l} - \left( \frac{z}{l} \right)^2 \right), \quad M_{x,\max} = \frac{ql^2}{8};$$

$$\sigma_i = \frac{M_i}{W_i}, \quad W_i = \frac{b^3}{6}, \quad M_i = \frac{M_x}{2}, \quad i = 1, 2;$$

б) сваренные балки от  $q(z) = -q$ :

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M_x}{EI_x}, \quad I_x = \frac{8b^4}{12}, \quad M_x = -\frac{ql^2}{2} \left( \frac{z}{l} - \left( \frac{z}{l} \right)^2 \right), \quad M_{x,\max} = -\frac{ql^2}{8};$$

$$\sigma = \frac{M_x}{W_x}, \quad W_x = \frac{4b^3}{6};$$

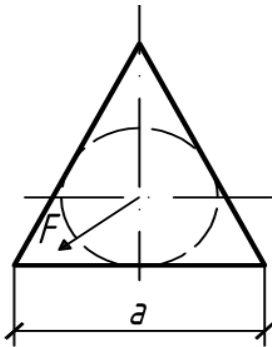
в) сваренные балки от  $q(z) = q - q = 0$  (остаточные напряжения):

$$-b \leq y \leq b: \quad \text{при } y = \pm b, \quad \sigma_{\text{ост}} = \pm \frac{3}{2} \cdot \frac{M_{x,\max}}{b^3};$$

$$\text{при } y = 0, \quad \sigma_{\text{ост}} = \pm 3 \cdot \frac{M_{x,\max}}{b^3}.$$

$$\text{Ответ: } y = \pm b: \quad \sigma_{\text{ост}} = \pm \frac{3ql^2}{16b^3}; \quad y = 0: \quad \sigma_{\text{ост}} = \pm \frac{6ql^2}{16b^3}.$$

**4.73.** Стальная шарнирно опертая по концам балка имеет сечение в форме равностороннего треугольника со стороной  $a$ . Балка загружена силой  $F$ , приложенной в среднем сечении и медленно вращающейся в плоскости этого сечения. Найти  $a$ , если  $R = 200$  МПа,  $F = 30$  кН,  $l = 2$  м.



Решение

$$I_x = I_y = I_u = \frac{a^4 \sqrt{3}}{96}; \quad M_{\max} = \frac{Fl}{4}; \quad y_{\max} = \frac{2}{3} \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a}{\sqrt{3}};$$

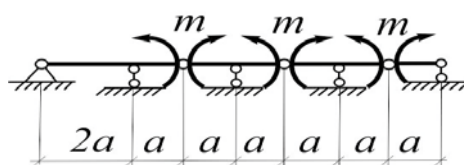
$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{I_x} y_{\max} = \frac{8Fl}{a^3} \leq R: \quad a \geq \sqrt[3]{\frac{8Fl}{R}} \approx 13,4 \text{ см.}$$

Ответ:  $a \geq 13,4$  см.

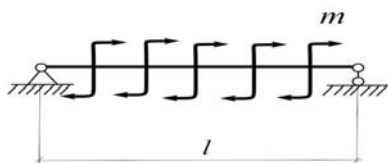


## Задачи для самостоятельного решения

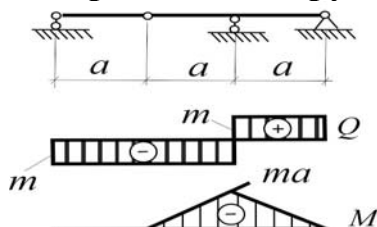
1. Для заданной балки построить эпюры  $Q$  и  $M$ .



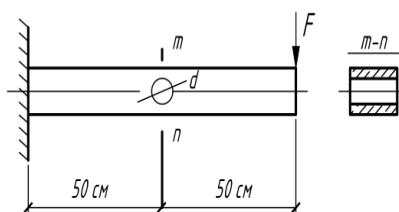
2. Построить эпюры  $Q$  и  $M$ . Объяснить, почему в этом случае соблюдается дифференциальная зависимость  $Q = dM/dx$ .



3. Для заданной балки определить нагрузку по эпюрам  $Q$  и  $M$ .

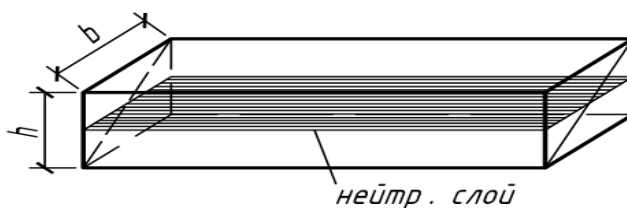


4. Деревянный брус квадратного сечения  $6 \times 6$  см выдерживает нагрузку  $360$  Н. Снизится ли несущая способность балки, если в ней просверлить отверстие диаметром  $d=4$  см в сечении  $m-n$ ? Концентрацию напряжения не учитывать.

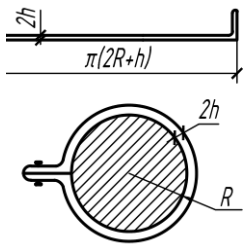


Ответ: нет, т.к.  $\sigma_1 > \sigma_2$ .

5. Балка склеена из двух треугольных призм (рис.4.33). Определить касательное напряжение в плоскости склейки на уровне нейтрального слоя.

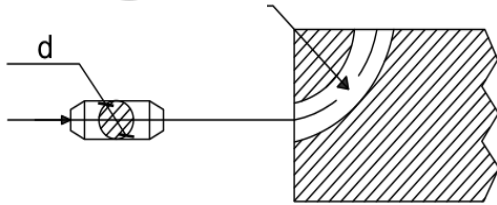


Ответ:  $\tau_\alpha = \tau_{\max} \frac{b}{\sqrt{h^2 + b^2}}$ .



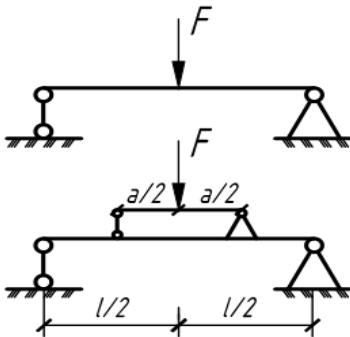
6. Найти максимальное напряжение в стальной ленте толщиной  $2h=1$  мм и длиной  $\pi(2R+h)$ , огибающий цилиндр радиуса  $R = 100$  см, если  $E = 2 \cdot 10^5$  МПа.

Ответ:  $\sigma_{\max} = 150$  МПа.



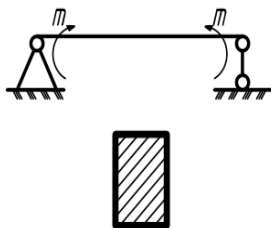
7. Круглый стержень диаметром  $d$  проталкивается по криволинейному каналу  $r$ , сделанному в абсолютно твердом теле. Каков должен быть  $r_{\min}$ , чтобы в стержне не возникали напряжения более чем  $\sigma_{\max}$ ? Трением пренебречь.

Ответ:  $r_{\min} = \frac{Ed}{2\sigma_{\max}}$ .



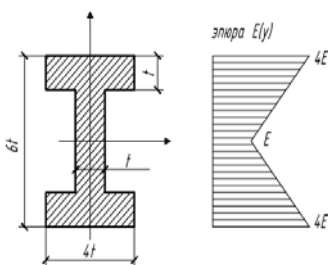
8. Наибольшие нормальные напряжения в поперечном сечении балки, нагруженной силой  $F$ , на 25% выше расчетного сопротивления  $R$ . Чтобы снять напряжение, устанавливается вспомогательная балочка. Найти ее минимальную необходимую длину  $a$ , считая величину  $l$  заданной.

Ответ:  $a_{\min} = 0,2l$ .



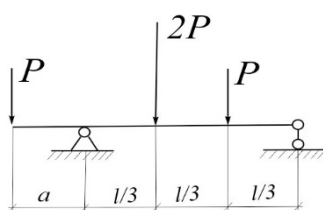
9. Резиновый брус прямоугольного сечения  $10 \times 15$  см плотно помещен в стальную обойму толщиной  $\delta=2$  мм. Пользуясь гипотезой плоских сечений, определить значение изгибающего момента, разрушающего обойму, если предел прочности материала обоймы  $\sigma_u=500$  МПа.

Ответ:  $M_{\max} = 23,5$  кНм.



10. Модуль упругости материала балки двутаврового поперечного сечения изменяется по указанному на рисунке закону. Какой наибольший изгибающий момент может выдержать такая балка по условию прочности при чистом изгибе в плоскости наибольшей жесткости?

Ответ:  $M_x \leq \frac{97}{6} Rt^3$ .



11. Найти соотношение длин  $a/l$ , при котором значение максимального изгибающего момента в балке будет наименьшим.

Ответ:  $a = \frac{l}{3}$ .

## Глава 5. ПЛОСКИЙ ПОПЕРЕЧНЫЙ ИЗГИБ (ПЕРЕМЕЩЕНИЯ)

### Краткие теоретические сведения

#### Основные понятия и обозначения

Параметры, определяющие поле перемещений в балках:

- $\vartheta = \vartheta(z) \rightarrow$  прогиб, т.е. поперечные перемещения точек на оси стержня;
- $\varphi = \varphi(z) \rightarrow$  угол поворота поперечного сечения стержня.

Рассматриваются малые, упругие деформации. Справедлива Г.П.С.:

$$\varphi(z) \approx \frac{d\vartheta}{dz} \quad (\text{без учета деформаций сдвига } \gamma);$$

$$\varphi(z) \approx \frac{d\vartheta}{dz} - \gamma_{cp}(z) = \frac{d\vartheta}{dz} - k \frac{\tau_{cp}(z)}{G} = \frac{d\vartheta}{dz} - k \frac{Q(z)}{GA}.$$

Приближенное дифференциальное уравнение изогнутой оси балки:

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M}{EI} \approx \pm \frac{d^2\vartheta}{dz^2}, \quad \text{где } d\varphi \cdot \rho = dz, \text{ т.е. } d\varphi = \frac{1}{\rho} \cdot dz,$$

$\rho = \rho(z) \rightarrow$  радиус кривизны нейтрального слоя стержня.

Универсальное уравнение изогнутой оси балки при  $EI_x = \text{const}$ :

$$EI\vartheta(z) = EI\vartheta_0 + EI\varphi_0 z + \sum M_i \frac{(z - z_i)^2}{2} + \sum Q_j \frac{(z - z_j)^3}{6} + \sum q_k \frac{(z - z_k)^4}{24}.$$

Определение перемещений методом Мора:

$$\delta_{iF} = \sum \int \bar{M}_i \left( \frac{M_F}{EI} + \frac{\alpha_t \cdot t}{h} \right) dz,$$

где  $\delta_{iF} \rightarrow$  проекция полного перемещения на  $i$ -е направление от внешней нагрузки  $F$  и  $\Delta t = t_e - t_n$  (причина);

$M_F \rightarrow$  "грузовая" эпюра  $M$  от внешней нагрузки  $F$ ;

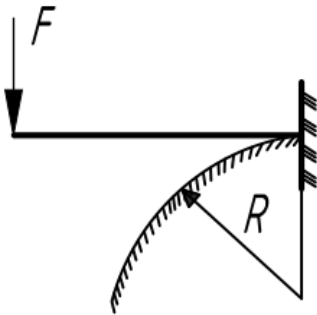
$\bar{M}_i \rightarrow$  "единичная" эпюра  $M$  от единичного усилия по  $i$ -му направлению  
(при определении  $\Delta \Rightarrow \text{от } \bar{F} = 1, \quad \varphi \Rightarrow \text{от } \bar{M} = 1$ );

$EI \rightarrow$  "изгибная" жесткость стержня;  $h \rightarrow$  толщина стержня.

*Примечание.* При определении взаимного перемещения двух точек необходимо построить эпюру  $\bar{M}_i$  от единичных усилий, приложенных одновременно в этих точках в противоположных направлениях.

## Примеры решения задач

**5.2.** Плоская стальная пластина толщиной  $\delta = 2$  мм изгибается силой  $F$ , касаясь при этом круглого цилиндра радиуса  $R = 1$  м. Определить наибольшее нормальное напряжение в изогнутой пластине.



Решение

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M}{EI_x}, \quad \rho = R \Rightarrow M = \frac{EI_x}{R};$$

$$\sigma_{\max} = \frac{M}{W_x} = \frac{E}{R} \cdot \frac{I_x}{W_x} = \frac{E}{R} \cdot y_{\max} =$$

$$= \frac{E}{R} \cdot \frac{\delta}{2} = \frac{200 \text{ ГПа}}{1 \text{ м}} \cdot 1 \text{ мм}.$$

Ответ:  $\sigma_{\max} = 200$  МПа.

**5.3.** Какую первоначальную форму следует придать стальной пластине прямоугольного сечения  $6 \times 1$  см и длиной  $2l = 2$  м, чтобы под действием силы  $F = 480$  Н она полностью соприкасалась с гладким жестким основанием и давление равномерно распределялось по длине балки? Чему равно  $\sigma_{\max}$ ? (рис.5.3).

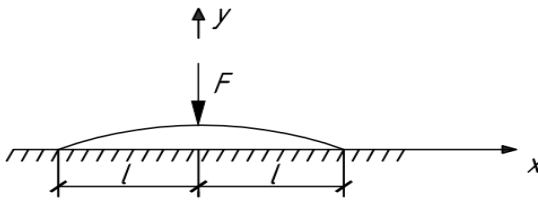


Рис. 5.3

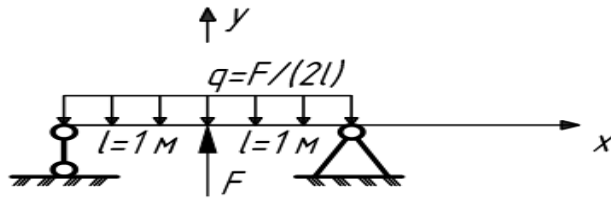


Рис. 5.3(a)

Решение

Обратная задача: Положение изогнутой оси (до изгиба ось прямая), если

$$F = 480 \text{ Н}, \quad q = \frac{F}{2l} \Rightarrow 240 \text{ Н/м}, \quad R_A = R_B = 0.$$

Начало координат на оси симметрии:  $0 \leq x \leq l$ ,

$$q_0 = -q, \quad Q_0 = \frac{F}{2}, \quad M_0 = -\frac{ql^2}{2} = -\frac{Fl}{4}, \quad \varphi_0 = 0, \quad y_0 \neq 0;$$

$$Q(l) = 0, \quad M(l) = 0, \quad \varphi(l) \neq 0, \quad y(l) = 0.$$

Универсальное уравнение изогнутой оси балки (М.Н.П.):

$$EIy(x) = EIy_0 + EI\varphi_0 x + M_0 \frac{x^2}{2} + Q_0 \frac{x^3}{6} + q_0 \frac{x^4}{24} \Rightarrow EIy_0 + \frac{Fx^2}{4} \cdot \left( -\frac{l}{2} + \frac{x}{3} - \frac{x^2}{12l} \right);$$

$$y(l) = 0: \quad EIy_0 = \frac{Fl^3}{16} \Rightarrow EIy(x) = \frac{Fl^3}{16} + \frac{Fx^2}{4} \cdot \left( -\frac{l}{2} + \frac{x}{3} - \frac{x^2}{12l} \right).$$

$$\sigma_{\max} = \frac{|M_0|}{W} = \frac{Fl}{4} \cdot \frac{6}{bh^2} = \frac{480 \text{ Н} \cdot 1 \text{ м}}{4} \cdot \frac{6}{6 \cdot 1^2 \text{ см}^3} = 120 \text{ МПа.}$$

ОТВЕТ:  $EIy(x) = \frac{Fl^3}{16} + \frac{Fx^2}{4} \cdot \left( -\frac{l}{2} + \frac{x}{3} - \frac{x^2}{12l} \right)$ ;  $\sigma_{\max} = 120 \text{ МПа.}$

5.4. При каком значении осадки средней опоры  $\Delta$  изгибающий момент в сечении балки над этой опорой равен нулю? (рис.5.4).

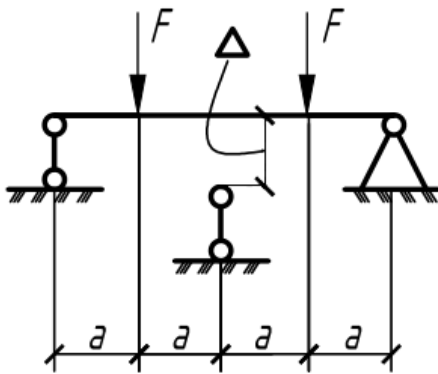


Рис. 5.4

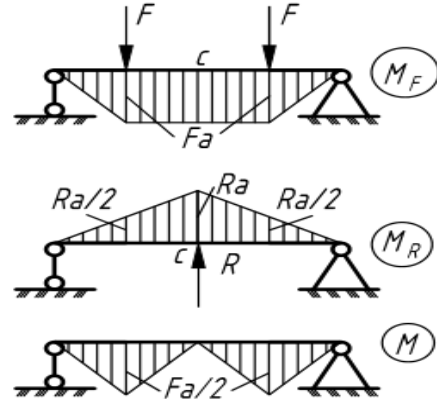


Рис. 5.4(a)

Решение

$$M = M_F + M_R: \quad M_c = 0, \quad Ra = Fa, \quad R = F.$$

$$\delta_c = \int \frac{M \cdot \bar{M}_R}{EI} dz = \frac{1}{EI} \left[ 2 \cdot \frac{2a}{2} \cdot \frac{Fa}{2} \cdot \frac{1a}{2} \right] = \frac{Fa^3}{2EI}, \quad \text{где } \bar{M}_R \text{ от } \bar{R} = 1.$$

ОТВЕТ:  $\Delta = \frac{Fa^3}{2EI}$  вниз.

5.6. Абсолютно жесткий однородный брус  $CD$  весом  $F$  жестко соединен с деформируемыми невесомыми стержнями  $AC$  и  $BD$ , изгибная жесткость которых равна  $EI$ . Определить вертикальное перемещение точки  $D$  (рис.5.6).

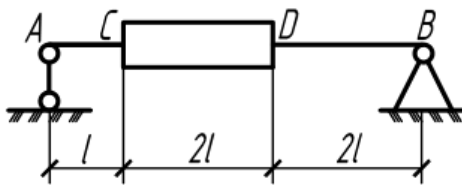


Рис. 5.6

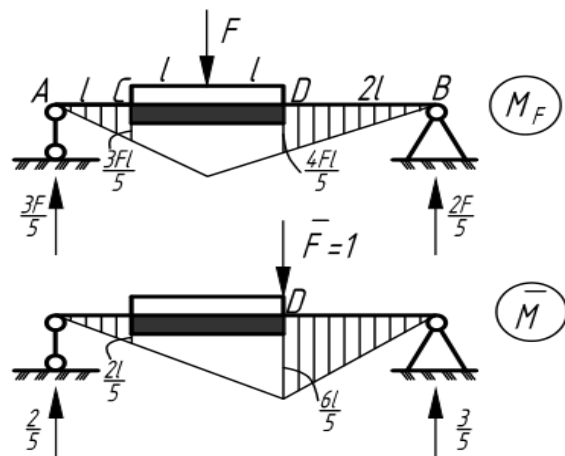


Рис. 5.6(a)

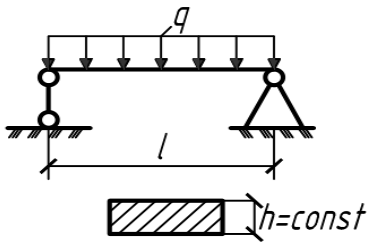
Решение

$$\delta_D = \int \frac{M \cdot \bar{M}}{EI} dz = \frac{1}{EI} \left[ \frac{l}{3} \cdot \frac{3Fl}{5} \cdot \frac{2l}{5} + \frac{2l}{3} \cdot \frac{4Fl}{5} \cdot \frac{6l}{5} \right] = \frac{Fl^3}{EI} \cdot \frac{18}{25}.$$

Ответ:  $\delta_D = \frac{Fl^3}{EI} \cdot \frac{18}{25}.$

5.7. Стальная балка равного сопротивления изгибу пролетом  $l = 4$  м имеет прямоугольное сечение с постоянной высотой  $h = 20$  см. Интенсивность нагрузки  $q = 200$  кН/м. Принимая  $R = 200$  МПа,  $E = 200$  ГПа, найти наибольшую ширину  $b_{\max}$ , а также наибольший прогиб  $\vartheta_{\max}$ .

Решение:



а)  $0 \leq z \leq l,$

$$M(z) = \frac{ql^2}{2} \left( \frac{z}{l} - \left( \frac{z}{l} \right)^2 \right); \quad M_{\max} = M\left(\frac{l}{2}\right) = \frac{ql^2}{8};$$

$$W(z) = \frac{b(z) \cdot h^2}{6}; \quad I(z) = W(z) \cdot \frac{h}{2}.$$

По условию,  $\sigma_{\max}(z) = \frac{M(z)}{W(z)} = R: \quad b(z) = \frac{M(z)}{R} \cdot \frac{6}{h^2};$

$$b_{\max} = b\left(\frac{l}{2}\right) = \frac{M_{\max}}{R} \cdot \frac{6}{h^2} = \frac{200 \text{ кН/м} \cdot 16 \text{ м}^2}{8 \cdot 200 \text{ МПа}} \cdot \frac{6}{400 \text{ см}^2} = 30 \text{ см}.$$

б)  $\frac{d^2 \vartheta}{dz^2} \approx \frac{M(z)}{EI(z)} = \frac{R}{E} \cdot \frac{2}{h}, \quad \vartheta(z) = \frac{2R}{Eh} \cdot \frac{z^2}{2} + \varphi_0 \cdot z + \vartheta_0.$

Условия закрепления:  $\vartheta(0) = 0 \Rightarrow \vartheta_0 = 0; \quad \vartheta(l) = 0 \Rightarrow \varphi_0 = -\frac{Rl}{Eh}.$

$$\vartheta(z) = \frac{Rl^2}{Eh} \cdot \left( \left( \frac{z}{l} \right)^2 - \frac{z}{l} \right).$$

$$\vartheta_{\max} = \vartheta\left(\frac{l}{2}\right) = -\frac{Rl^2}{4Eh} = -\frac{200 \text{ МПа} \cdot 16 \text{ м}^2}{4 \cdot 200 \text{ ГПа} \cdot 0,2 \text{ м}} = -20 \text{ мм}.$$

Ответ:  $b_{\max} = 30 \text{ см}; \quad |\vartheta_{\max}| = 2 \text{ см вниз}.$

5.8. Определить прогиб  $\vartheta$  и угол поворота  $\varphi$  произвольного сечения в пролете балки с постоянной жесткостью сечения, загруженной равномерно распределенной моментной нагрузкой интенсивностью  $m$  (рис.5.8).

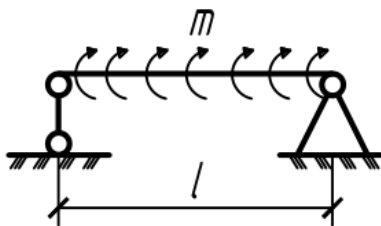


Рис.5.8

Решение

$$-R_A = R_B = m, \quad Q(z) = R_A \Rightarrow -m;$$

$$\frac{dM}{dz} = Q + m, \quad M(z) \Rightarrow 0.$$

$$\frac{d^2\vartheta}{dz^2} \approx \frac{M(z)}{EI} = 0, \quad \vartheta(z) = \varphi_0 \cdot z + \vartheta_0 \Rightarrow 0,$$

где  $\vartheta(0) = 0 \Rightarrow \vartheta_0 = 0$ ;  $\vartheta(l) = 0 \Rightarrow \varphi_0 = 0$ .

$$\varphi(z) \approx \frac{d\vartheta}{dz} - \gamma_{cp}(z) = 0 - k \frac{\tau_{cp}(z)}{G} = -k \frac{Q(z)}{GA} \Rightarrow k \frac{m}{GA}.$$

Ответ:  $\vartheta(z) = 0$ ;  $\varphi(z) = k \frac{m}{GA}$  по часовой стрелке.

**5.9.** Стальной стержень прямоугольного сечения размерами  $b \times h$  и длиной  $l$  свободно лежит на плоской опорной поверхности. Определить стрелу прогиба  $f$  при нагревании стержня, если температура по высоте стержня изменяется линейно и разность температур нижней и верхней грани равна  $\Delta t$  градусов (рис.5.9).

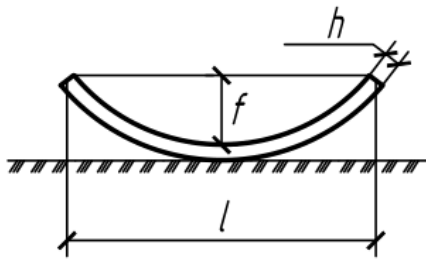


Рис. 5.9

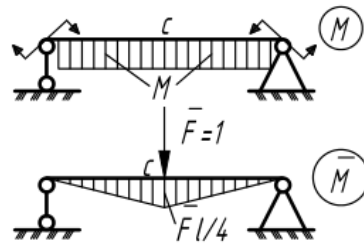


Рис. 5.9(a)

Решение

$$0 \leq z \leq l, \quad \Delta t(z) = \Delta t = t_h - t_g; \quad \frac{1}{\rho} = \frac{M(z)}{EI};$$

$$-\frac{h}{2} \leq y \leq \frac{h}{2}, \quad \varepsilon_{\Delta t} = \alpha_t \cdot \frac{\Delta t(z)}{h} \cdot y \Leftrightarrow \varepsilon = \frac{1}{\rho} \cdot y; \quad \frac{1}{\rho} = \alpha_t \cdot \frac{\Delta t(z)}{h};$$

$$\frac{M(z)}{EI} = \alpha_t \cdot \frac{\Delta t(z)}{h}; \quad \frac{M}{EI} = \alpha_t \cdot \frac{\Delta t}{h}.$$

$$f = \delta_c = \int \frac{M \cdot \bar{M}}{EI} dz = \frac{1}{EI} \left[ \frac{l}{2} \cdot \frac{1l}{4} \cdot M \right] = \frac{M}{EI} \cdot \frac{l^2}{8} = \alpha_t \cdot \frac{\Delta t}{h} \cdot \frac{l^2}{8}.$$

Ответ:  $f = \frac{\alpha_t \cdot \Delta t \cdot l^2}{8 \cdot h}$ .

5.11. При какой длине консоли  $a$  угол поворота на правой опоре балки равен нулю? Чему равен в этом случае прогиб на конце консоли?

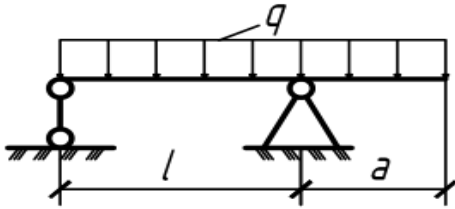


Рис. 5.11

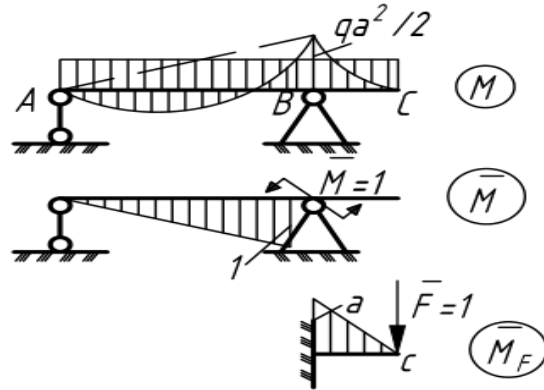


Рис. 5.11(a)

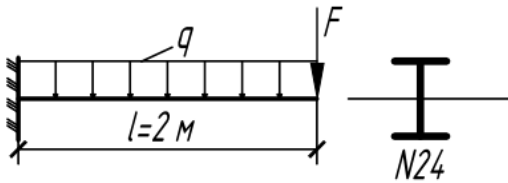
Решение

$$\varphi_B = \int \frac{M \cdot \bar{M}}{EI} dz = \frac{1}{EI} \left[ \frac{2}{3} l \cdot \frac{ql^2}{8} \cdot \frac{1}{2} - \frac{l}{3} \cdot \frac{qa^2}{2} \cdot 1 \right], \quad \varphi_B = 0: \quad a = \frac{l}{2}.$$

$$\vartheta_B = 0, \quad \varphi_B = 0 \text{ при } a = \frac{l}{2}: \quad \vartheta_C = \int \frac{M \cdot \bar{M}_F}{EI} dz = \frac{1}{EI} \left[ \frac{a}{3} \cdot \frac{qa^2}{2} \cdot \frac{3}{4} a \right] = \frac{ql^4}{128EI}.$$

Ответ:  $a = \frac{l}{2}$ ;  $\vartheta_C = \frac{ql^4}{128EI}$  вниз.

5.12. Какую силу  $F$  можно приложить в дополнение к распределенной нагрузке  $q = 6$  кН/м, чтобы наибольшие нормальные напряжения не превышали 160 МПа, а наибольший прогиб (от тех же нагрузок) не превосходил  $1/250$  пролета балки?



Решение  
Двутавр N24:  $W_x = 289 \text{ см}^3$   $I_x = 3460 \text{ см}^4$ .

$$\text{а) } M_{\max} = \left( \frac{ql^2}{2} + Fl \right) \leq \sigma_{\max} W_x,$$

$$F \leq \frac{\sigma_{\max} W_x}{l} - \frac{ql}{2} \Rightarrow \frac{160 \text{ МПа} \cdot 289 \text{ см}^3}{2 \text{ м}} - \frac{6 \text{ кН/м} \cdot 2 \text{ м}}{2} = 17,12 \text{ кН};$$

$$\text{б) } \vartheta_{\max} = \left( \frac{ql^4}{8EI_x} + \frac{Fl^3}{3EI_x} \right) \leq \frac{l}{250},$$

$$F \leq \frac{3EI_x}{250 \cdot l^2} - \frac{3ql}{8} \Rightarrow \frac{3 \cdot 200 \text{ ГПа} \cdot 3460 \text{ см}^4}{250 \cdot 4 \text{ м}^2} - \frac{3 \cdot 6 \text{ кН/м} \cdot 2 \text{ м}}{8} = 16,26 \text{ кН}.$$

Ответ:  $F \leq 16,26 \text{ кН}$ .



5.13. При каком значении коэффициента  $\beta$  прогибы концов балки будут одинаковы? (рис.5.13).

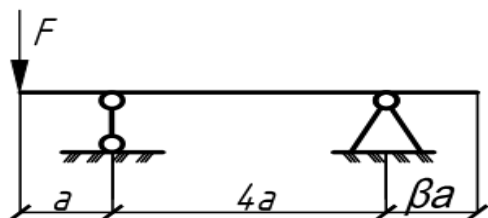


Рис. 5.13

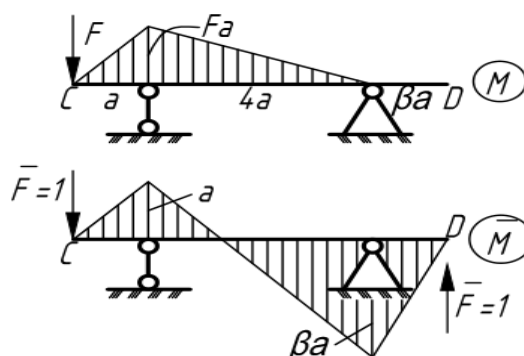


Рис. 5.13(a)

Решение

$$\Delta \vartheta_{CD} = \int \frac{M \cdot \bar{M}}{EI} dz = \frac{1}{EI} \left[ \frac{a \cdot Fa \cdot 1a}{3} + \frac{Fa \cdot 4a}{2} \left( \frac{2a}{3} - \frac{\beta a}{3} \right) \right] = 0: 1 + 2 \cdot (2 - \beta) = 0.$$

Ответ:  $\beta=2,5$ .

5.15. Определить коэффициент  $k$ , при котором прогиб конца консоли равен нулю. Чему при этом равен прогиб под силой  $F$ ? (рис.5.15).

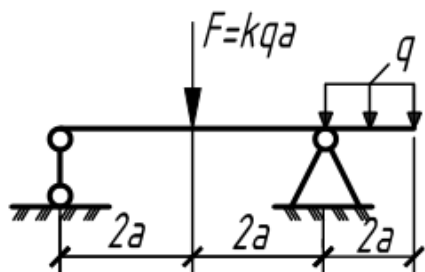


Рис. 5.15

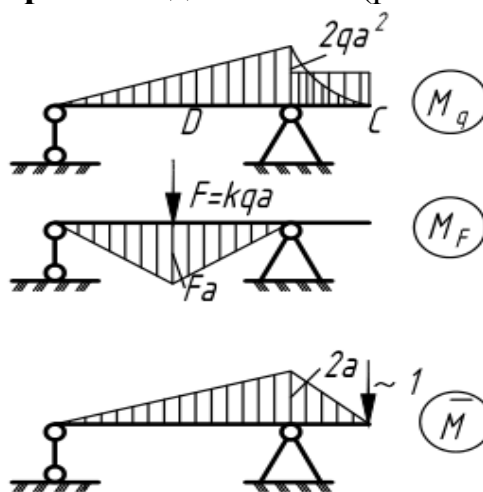


Рис. 5.15(a)

Решение

$$\begin{aligned} \text{a) } \vartheta_C &= \int \frac{(M_q + M_F) \bar{M}}{EI_x} dz = \\ &= \frac{1}{EI_x} \left[ \frac{4a \cdot 2qa^2 \cdot 2a}{3} + \frac{2a}{3} \cdot 2qa^2 \cdot \frac{3}{4} \cdot 2a - \frac{4a \cdot kqa^2}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot 2a \right]; \\ \vartheta_C &= \frac{qa^4}{EI_x} \left[ 2 + \frac{16}{3} - 2k \right] \Rightarrow 0: \quad k = \frac{11}{3}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{б) } \vartheta_D &= \int \frac{(M_F + M_q) \overline{M}_F}{EI_x} dz = \\ &= \frac{1}{EI_x} \left[ \frac{4a \cdot kqa^2 \cdot 1a}{3} - \frac{4a \cdot kqa^2}{2} \cdot \frac{1}{2} 2qa^2 \right] = \frac{qa^4}{EI_x} \left[ \frac{44}{9} - 2 \right]. \end{aligned}$$

Ответ:  $k = \frac{11}{3}$ ;  $\vartheta_D = \frac{26}{9} \cdot \frac{qa^4}{EI_x}$  вниз.

**5.16.** Найти отношение длин  $a/b$ , при котором соотношение углов поворота на опорах  $\varphi_A / \varphi_B = 2/3$  (рис.5.16).

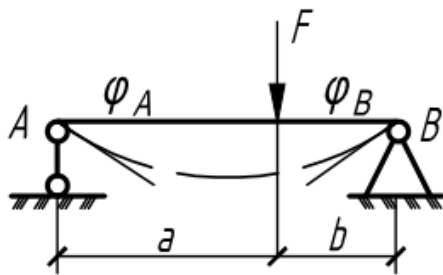


Рис. 5.16

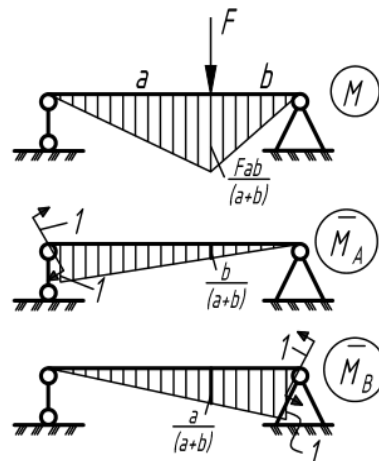


Рис. 5.16(а)

Решение

$$\varphi_A = \int \frac{M \cdot \overline{M}_A}{EI_x} dz = \frac{1}{EI_x} \left[ \frac{Fab}{a+b} \cdot \frac{a+2b}{6} \right];$$

$$\varphi_B = \int \frac{M \cdot \overline{M}_B}{EI_x} dz = \frac{1}{EI_x} \left[ \frac{Fab}{a+b} \cdot \frac{b+2a}{6} \right];$$

$$\frac{\varphi_A}{\varphi_B} = \frac{a+2b}{b+2a}; \quad \frac{\varphi_A}{\varphi_B} = \frac{2}{3}; \quad a = 4b.$$

Ответ:  $\frac{a}{b} = 4$ .

**5.17.** При каком значении координаты  $x$  подвижной нагрузки  $F$  прогиб конца консоли будет наибольшим? (рис.5.17).

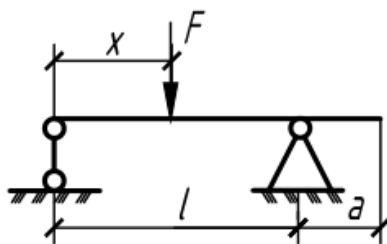


Рис. 5.17

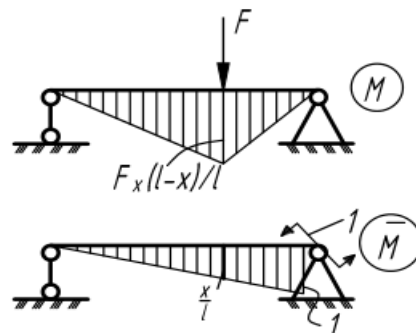


Рис. 5.17(а)

Решение

$$\vartheta_C = \varphi_B \cdot a, \quad 0 \leq x \leq l;$$

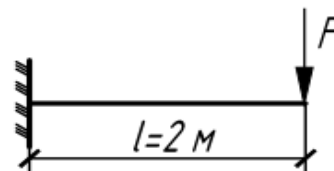
$$\varphi_B = \int \frac{M \cdot \bar{M}}{EI_x} dx = \frac{1}{EI_x} \left[ \frac{Fx(l-x)}{l} \cdot \frac{l+x}{6} \right] = \frac{F}{6l \cdot EI_x} \cdot x \cdot (l^2 - x^2);$$

$$\frac{d\varphi_B}{dx} = \frac{F}{6l \cdot EI_x} \cdot (l^2 - 3x^2); \quad \frac{d\varphi_B}{dx} = 0: \quad x = \frac{l}{\sqrt{3}};$$

при  $x = \frac{l}{\sqrt{3}}$ :  $\varphi_B = \varphi_{\max}$ , тогда  $\vartheta_C = \vartheta_{\max}$ .

Ответ:  $x = \frac{l}{\sqrt{3}} \approx 0,577l$ .

**5.19.** Балка симметричного (относительно горизонтальной оси) сечения высотой  $h = 20$  см изгибается под действием силы  $F$ . Наибольшие нормальные напряжения в поперечном сечении  $\sigma_{\max} = 150$  МПа. Найти прогиб и угол поворота на свободном конце, полагая  $E = 10^5$  МПа.



Решение

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{I_x} \cdot \frac{h}{2}; \quad I_x = \frac{Fl}{\sigma_{\max}} \cdot \frac{h}{2};$$

$$\vartheta_{\max} = \frac{Fl^3}{3E \cdot I_x} \Rightarrow \frac{2\sigma_{\max} l^2}{3Eh} = \frac{2 \cdot 150 \text{ МПа} \cdot 4 \text{ м}^2}{3 \cdot 10^5 \text{ МПа} \cdot 0,2 \text{ м}} = 2 \text{ см};$$

$$\varphi_{\max} = \frac{Fl^2}{2E \cdot I_x} \Rightarrow \frac{\sigma_{\max} l}{Eh} = \frac{150 \text{ МПа} \cdot 2 \text{ м}}{10^5 \text{ МПа} \cdot 0,2 \text{ м}} = 0,015 \text{ рад}.$$

Ответ:  $\vartheta_{\max} = 2$  см вниз;  $\varphi_{\max} = 0,015$  рад по часовой стрелке.

**5.20.** Балка  $l = 1$  м, свободно лежащая концами на двух опорах, под действием некоторой нагрузки изгибается по дуге окружности. При этом прогиб среднего сечения равен  $\vartheta_{\max} = 6,25$  мм. Определить величину модуля упругости материала и радиус кривизны оси при условии, что  $\sigma_{\max} = 10$  МПа, высота сечения  $h = 10$  см.

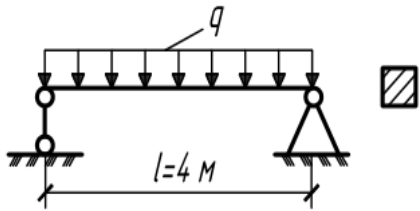
Решение

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M}{EI_x} = \text{const}, \quad \vartheta_{\max} = \frac{M \cdot l^2}{EI_x \cdot 8} = \frac{1}{\rho} \cdot \frac{l^2}{8}, \quad \rho = \frac{l^2}{8 \cdot \vartheta_{\max}} \Rightarrow \frac{1 \text{ м}^2}{8 \cdot 6,25 \text{ мм}} = 20 \text{ м};$$

$$\frac{M}{I_x} \Rightarrow \frac{E}{\rho} = \frac{2}{h} \cdot \sigma_{\max}, \quad E = \frac{\rho 2 \sigma_{\max}}{h} \Rightarrow \frac{20 \text{ м} \cdot 2 \cdot 10 \text{ МПа}}{0,1 \text{ м}} = 4 \text{ ГПа}.$$

Ответ:  $\rho = 20$  м;  $E = 4$  ГПа.

5.21. Балка квадратного сечения находится под действием распределенной нагрузки  $q=8$  кН/м. Определить максимальный прогиб балки и радиус кривизны оси в среднем сечении, если в этом сечении  $\sigma_{\max}=12$  МПа, а модуль упругости  $E=10$  ГПа.



Решение  
 $0 \leq z \leq l, \quad M\left(\frac{l}{2}\right) = M_{\max} = \frac{ql^2}{8} = 16 \text{ кНм};$

$$W_x \Rightarrow \frac{M_{\max}}{\sigma_{\max}} = \frac{a^3}{6} : \quad a = \sqrt[3]{\frac{6 \cdot M_{\max}}{\sigma_{\max}}} = 20 \text{ см};$$

$$\frac{M_{\max}}{I_x} \Rightarrow \frac{E}{\rho} = \frac{2}{a} \sigma_{\max}, \quad \rho = \frac{Ea}{2\sigma_{\max}} \Rightarrow \frac{10 \text{ ГПа} \cdot 0,2 \text{ м}}{12 \text{ МПа} \cdot 2} = 83,3 \text{ м}.$$

$$\vartheta_{\max} = \frac{5ql^4}{384EI_x} \Rightarrow \frac{5 \cdot 8 \text{ кН/м} \cdot (4 \text{ м})^4 \cdot 12}{384 \cdot 10 \text{ ГПа} \cdot (0,2 \text{ м})^4} = 2 \text{ см}.$$

Ответ:  $\vartheta_{\max} = 2$  см;  $\rho = 83,3$  м.

5.22. Стальная двутавровая балка нагружена сосредоточенным моментом  $M$ , вызывающим  $\sigma_{\max} = 100$  МПа. Определить величину момента, радиус окружности  $\rho$ , по которой изгибается балка, и прогиб на свободном конце  $\vartheta_{\max}$  (рис. 5.22).

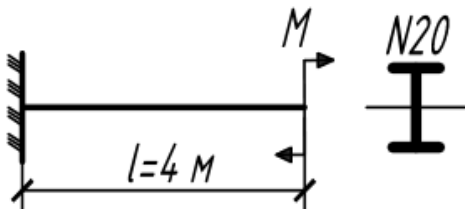


Рис. 5.22

Решение:

Двутавр N20:

$$W_x = 184 \text{ см}^3, \quad I_x = 1840 \text{ см}^4;$$

$$M = \sigma_{\max} W_x \Rightarrow 100 \text{ МПа} \cdot 184 \text{ см}^3 = 18,4 \text{ кНм};$$

$$\rho = \frac{EI_x}{M} \Rightarrow \frac{200 \text{ ГПа} \cdot 1840 \text{ см}^4}{18,4 \text{ кНм}} = 200 \text{ м};$$

$$\vartheta_{\max} = \frac{Ml^2}{2EI_x} = \frac{l^2}{2\rho} \Rightarrow \frac{16 \text{ м}^2}{2 \cdot 200 \text{ м}} = 4 \text{ см}.$$

Ответ:  $M = 18,4$  кНм;  $\rho = 200$  м;  $\vartheta_{\max} = 4$  см.

5.23. При заданных величинах  $a$  и  $b$  определить отношение  $I_1/I_2$ , при котором прогиб сечения, где приложен момент  $M$ , равен нулю. Чему равен при этом угол поворота этого сечения (рис.5.23)?

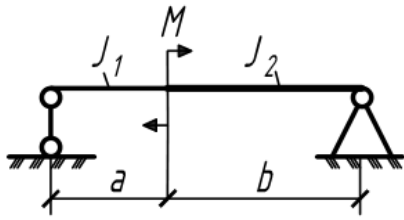


Рис. 5.23

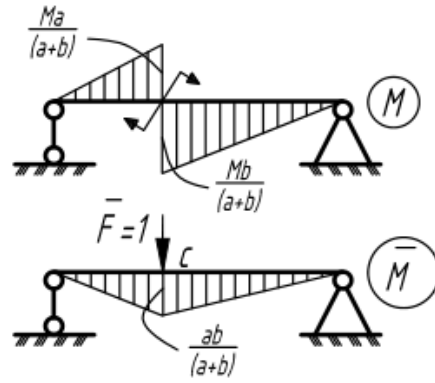


Рис. 5.23(a)

Решение

$$\vartheta_C = \sum \int \frac{M\bar{M}}{EI_i} dz = -\frac{1}{EI_1} \cdot \frac{a}{3} \cdot \frac{Ma}{a+b} \cdot \frac{ab}{a+b} + \frac{1}{EI_2} \cdot \frac{b}{3} \cdot \frac{Mb}{a+b} \cdot \frac{ab}{a+b};$$

$$\vartheta_C = 0: \quad \frac{a^2}{EI_1} = \frac{b^2}{EI_2}, \quad \frac{I_1}{I_2} = \frac{a^2}{b^2};$$

$$\begin{aligned} \varphi_C &= \sum \int \frac{M\bar{M}_M}{EI_i} dz = \frac{1}{EI_1} \cdot \frac{a}{3} \cdot \frac{Ma}{a+b} \cdot \frac{1a}{a+b} + \frac{1}{EI_2} \cdot \frac{b}{3} \cdot \frac{Mb}{a+b} \cdot \frac{1b}{a+b} = \\ &= \frac{Mb^3}{3EI_2(a+b)^2} \left( \frac{a}{b} + 1 \right). \end{aligned}$$

Ответ:  $\frac{I_1}{I_2} = \frac{a^2}{b^2}; \quad \varphi_C = \frac{Mb^2}{3EI_2(a+b)}.$

5.24. Определить прогиб точки приложения силы  $F$  для полу-бесконечной системы одинаковых балок длиной  $l$  и жесткостью  $EI$  (рис.5.24).

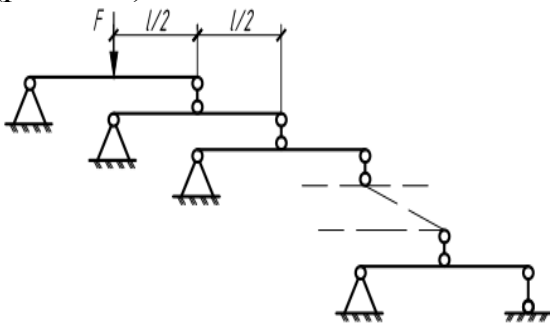


Рис. 5.24

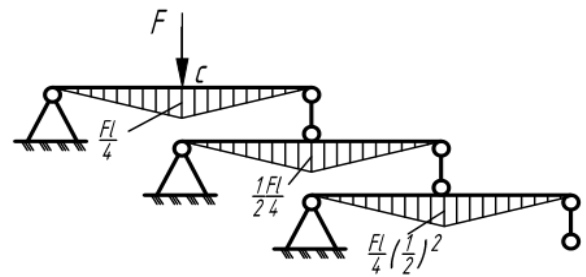


Рис. 5.24(a)

Решение

$$\vartheta_C = \sum \int \frac{M\bar{M}}{EI} dz = \frac{Fl^3}{48EI} \left[ 1 + \left( \frac{1}{2} \right)^2 + \left( \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \right)^2 + \left( \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \right)^2 + \dots \right] =$$

$$= \frac{Fl^3}{48EI} \left[ 1 + \left(\frac{1}{4}\right)^1 + \left(\frac{1}{4}\right)^2 + \left(\frac{1}{4}\right)^3 + \dots \right] = \frac{Fl^3}{48EI} \cdot \frac{1}{1 - 1/4} = \frac{Fl^3}{36EI}.$$

Ответ:  $\vartheta_C = \frac{Fl^3}{36EI}$ .

**5.25.** Балка  $AB$  закреплена по концам. На какие углы  $\varphi$  следует повернуть обе заделки, чтобы после приложения нагрузки  $q$  моменты в сечениях  $A$ ,  $B$  и  $C$  были одинаковы по абсолютной величине? (рис.5.25)

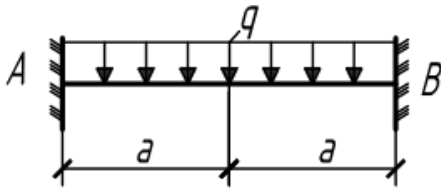


Рис. 5.25

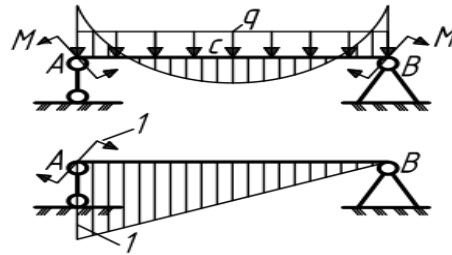


Рис. 5.25(a)

Решение

$$M = M_A = M_B = -M_C: \quad M = \frac{1}{2} \cdot \frac{ql^2}{8} \Rightarrow \frac{q(2a)^2}{16} = \frac{qa^2}{4};$$

$$\varphi_A = \int \frac{(M_q + M_M) \bar{M}_A}{EI} dz = \frac{1}{EI} \left[ \frac{2l}{3} \cdot 2M \cdot \frac{1}{2} - l \cdot M \cdot \frac{1}{2} \right] = \frac{Ml}{6} \Rightarrow \frac{Ma}{3} = \frac{qa^3}{12}.$$

Ответ:  $\varphi_A = \frac{qa^3}{12}$  по  $\curvearrowright$ ;  $\varphi_B = \frac{qa^3}{12}$  по  $\curvearrowleft$ .

**5.26.** Две балки одинаковой жесткости  $EI$  соприкасаются во всех точках до нагружения и в точках  $A$ ,  $B$  – после нагружения. Найти максимальный зазор, который образуется между балками под нагрузкой. Дано:  $F$ ,  $EI$ ,  $l$ . (рис.5.26).

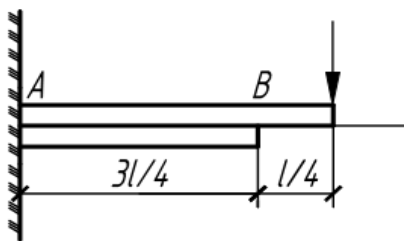


Рис. 5.26

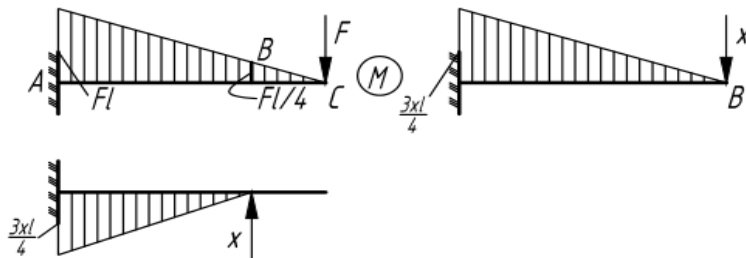


Рис. 5.26(a)

Решение

$$\vartheta_{1,B} = \sum \int \frac{(M_F + M_X) \bar{M}}{EI_1} dz \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1}{EI} \left[ \frac{3l/4}{6} \cdot \left( 2 \cdot Fl \cdot \frac{3l}{4} + \frac{Fl}{4} \cdot \frac{3l}{4} \right) - \frac{3l/4}{3} \cdot X \frac{3l}{4} \cdot \frac{3l}{4} \right] = \frac{1}{EI} \cdot \left[ \frac{F}{2} - \frac{X}{3} \right] \cdot \left( \frac{3l}{4} \right)^3;$$

$$\vartheta_{2,B} = \sum \int \frac{M\bar{M}}{EI_2} dz \Rightarrow \frac{1}{EI} \left[ \frac{3l/4}{3} \cdot X \frac{3l}{4} \cdot \frac{3l}{4} \right] = \frac{1}{EI} \cdot \left[ \frac{X}{3} \right] \cdot \left( \frac{3l}{4} \right)^3;$$

$$\vartheta_{1,B} = \vartheta_{2,B}: \quad X = \frac{3}{4}F;$$

$$R_{1,A} = \frac{1}{4}F, \quad M_{1,A} = -\frac{7}{16}Fl, \quad EI_1\vartheta_1(z) = -\frac{7}{16}Fl \frac{z^2}{2} + \frac{1}{4}F \frac{z^3}{6};$$

$$R_{2,A} = \frac{3}{4}F, \quad M_{2,A} = -\frac{9}{16}Fl, \quad EI_2\vartheta_2(z) = -\frac{9}{16}Fl \frac{z^2}{2} + \frac{3}{4}F \frac{z^3}{6};$$

$$\Delta\vartheta = \vartheta_1 - \vartheta_2, \quad EI \cdot \vartheta(z) = \frac{2}{16}Fl \frac{z^2}{2} - \frac{1}{2}F \frac{z^3}{6}; \quad EI \frac{d \cdot \vartheta}{dz} = \frac{2}{16}Flz - \frac{1}{2}F \frac{z^2}{2};$$

$$\frac{d \cdot \vartheta}{dz} = 0: \quad z = \frac{l}{2}, \quad \Delta\vartheta_{\max} = \Delta\vartheta\left(\frac{l}{2}\right) = \frac{1}{EI} \cdot \left[ Fl^3 \left( \frac{1}{16} \cdot \frac{1}{4} - \frac{1}{12} \cdot \frac{1}{8} \right) \right] = \frac{Fl^3}{192EI}.$$

$$\text{Ответ: } \Delta\vartheta_{\max} = \frac{Fl^3}{192EI}.$$

**5.27. Определить модуль упругости материала балки, радиус кривизны оси балки в сечении  $A$  и угол поворота на свободном конце, если  $\sigma_{\max} = 70$  МПа и прогиб в точке  $B$  равен 2 см (рис.5.27).**

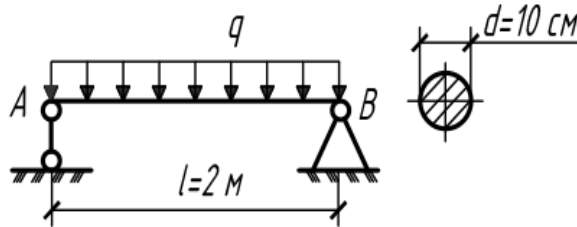


Рис. 5.27

Решение

$$\vartheta_B = \frac{ql^4}{8EI}, \quad \sigma_{\max} = \frac{ql^2}{2I} \cdot \frac{d}{2}, \quad \frac{\sigma_{\max}}{\vartheta_B} = \frac{4E}{l^2} \cdot \frac{d}{2};$$

$$E = \frac{\sigma_{\max}}{\vartheta_B} \cdot \frac{l^2}{2d} = \frac{70 \text{ МПа}}{2 \text{ см}} \cdot \frac{4 \text{ м}^2}{20 \text{ см}} = 70 \text{ ГПа};$$

$$\rho_A = \frac{EI}{M_{\max}} = \frac{E}{\sigma_{\max}} \cdot \frac{d}{2} = \frac{70 \text{ ГПа}}{70 \text{ МПа}} \cdot 5 \text{ см} = 50 \text{ м};$$

$$\varphi_B = \frac{ql^3}{6EI} = \frac{\vartheta_B}{3} \cdot \frac{4}{l} = \frac{2 \text{ см} \cdot 4}{3 \cdot 2 \text{ м}} = 0,013 \text{ рад.}$$

Ответ:  $E = 70$  ГПа;  $\rho_A = 50$  м;  $\varphi_B = 0,013$  рад по  $\curvearrowright$ .

5.28. Длинный гибкий стержень жесткостью  $EI$  лежит на жестком основании и поднимается за середину силой  $F$ . Полагая погонный вес стержня  $q$ , определить длину  $a$  оторвавшейся от основания части. Построить эюру  $Q$  и  $M$  (рис.5.28).

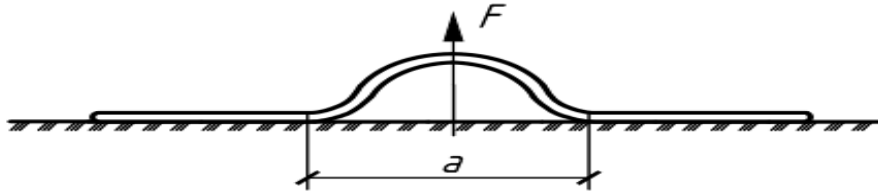


Рис. 5.28

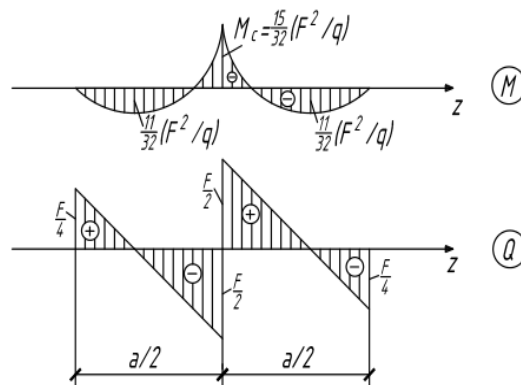


Рис. 5.28(a)

Решение

$$0 \leq z \leq a/2: \varphi_0 = 0, Q_0 = F/2, q_0 = -q;$$

Универсальное уравнение изогнутой оси балки:

$$EI\vartheta(z) = EI\vartheta_0 + EI\varphi_0 z + M_0 \frac{z^2}{2} + Q_0 \frac{z^3}{6} + q_0 \frac{z^4}{24} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow EI\vartheta_0 + M_0 \frac{z^2}{2} + \frac{F}{2} \frac{z^3}{6} - q \frac{z^4}{24};$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \vartheta\left(\frac{a}{2}\right) = 0 \Rightarrow EI\vartheta\left(\frac{a}{2}\right) = 0: \quad 0 = EI\vartheta_0 + M_0 \cdot \frac{a^2}{8} + \frac{F}{2} \cdot \frac{a^3}{48} - q \cdot \frac{a^4}{384}; \\ \varphi\left(\frac{a}{2}\right) = 0 \Rightarrow EI\dot{\vartheta}\left(\frac{a}{2}\right) = 0: \quad 0 = M_0 \cdot \frac{a}{2} + \frac{F}{2} \cdot \frac{a^2}{8} - q \cdot \frac{a^3}{48}; \\ M\left(\frac{a}{2}\right) = 0 \Rightarrow EI\ddot{\vartheta}\left(\frac{a}{2}\right) = 0: \quad 0 = M_0 + \frac{F}{2} \cdot \frac{a}{2} - q \cdot \frac{a^2}{8}; \end{array} \right.$$

$$a = \frac{3}{2} \cdot \frac{F}{q}; \quad M_0 = -\frac{F}{2} \cdot a + q \cdot \frac{a^2}{8} \Rightarrow -\frac{15}{32} \cdot \frac{F^2}{q}; \quad EI\vartheta_0 \Rightarrow \frac{675}{6144} \cdot \frac{F^4}{q^3}.$$

Ответ:  $a = \frac{3}{2} \cdot \frac{F}{q}.$



**5.29.** Определить, при какой нагрузке  $q$  балка жесткостью  $EI$ , опирающаяся на опоры высотой  $\Delta$ , будет иметь сплошное касание на длине  $l/2$  с абсолютно жесткой плитой. Построить эпюры  $Q, M$  по длине балки (рис.5.29).

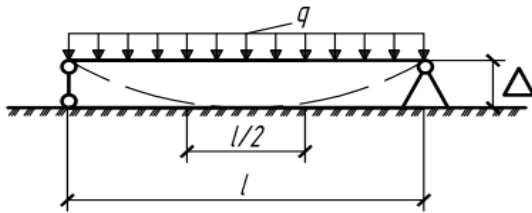


Рис. 5.29

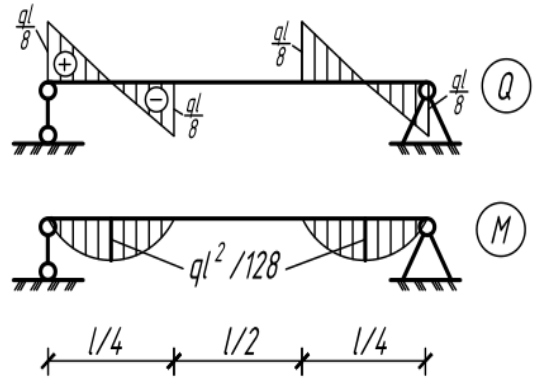


Рис. 5.29(a)

Решение

$$a = \frac{l - l/2}{2} \Rightarrow l/4, \quad 0 \leq z \leq a: \quad \vartheta_0 = \Delta, \quad M_0 = 0; \quad Q_0 = R_A, \quad q_0 = -q;$$

Универсальное уравнение изогнутой оси балки:

$$EI\vartheta(z) = EI\vartheta_0 + EI\varphi_0 z + M_0 \frac{z^2}{2} + Q_0 \frac{z^3}{6} + q_0 \frac{z^4}{24} \Rightarrow EI\Delta + EI\varphi_0 z + R_A \frac{z^3}{6} - q \frac{z^4}{24};$$

$$\begin{cases} \vartheta(a) = 0 \Rightarrow EI\vartheta(a) = 0: & 0 = EI\Delta + EI\varphi_0 \cdot a + R_A \cdot \frac{a^3}{6} - q \cdot \frac{a^4}{24}; \\ \varphi(a) = 0 \Rightarrow EI\dot{\vartheta}(a) = 0: & 0 = EI\varphi_0 + R_A \cdot \frac{a^2}{2} - q \cdot \frac{a^3}{6}; \\ M(a) = 0 \Rightarrow EI\ddot{\vartheta}(a) = 0: & 0 = R_A \cdot a - q \cdot \frac{a^2}{2}; \end{cases}$$

$$R_A = \frac{qa}{2} \Rightarrow \frac{ql}{8}; \quad EI\varphi_0 = -\frac{qa^3}{12} \Rightarrow -\frac{ql^3}{768}; \quad q = \frac{24 \cdot EI\Delta}{a^4} \Rightarrow \frac{6144 \cdot EI\Delta}{l^4}.$$

Ответ:  $q = \frac{6144 \cdot EI\Delta}{l^4}.$

**5.30. Определить угол поворота сечения над левой опорой балки.**  
 Дано:  $q$  – равномерно распределенная по поверхности,  $b, l, E$  (рис.5.30).

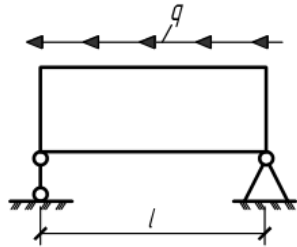


Рис. 5.30

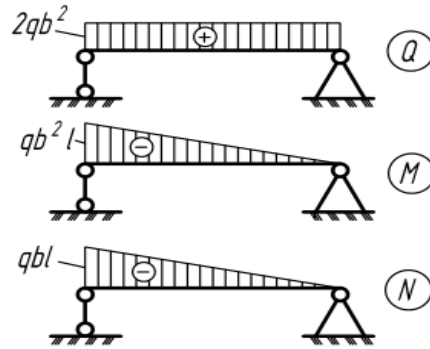


Рис. 5.30(a)

Решение

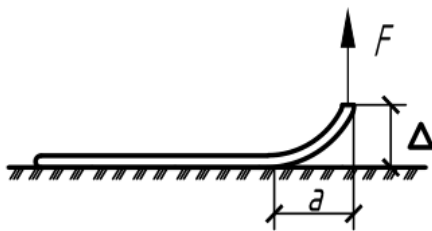
$$m = -qb \cdot b \Rightarrow -qb^2; \quad Q = R_A = \frac{qbl \cdot 2b}{l} \Rightarrow 2qb^2; \quad \frac{dM}{dz} = Q + m \Rightarrow qb^2;$$

$$H_A \Rightarrow qbl; \quad M_A = -H_A b \Rightarrow -qb^2l; \quad I_x = \frac{b(2b)^3}{12} = \frac{2b^4}{3};$$

$$\varphi_A = \int \frac{M \cdot \overline{M}_A}{EI_x} dz = \frac{1}{EI_x} \left[ \frac{l}{3} \cdot qb^2l \cdot 1 \right] = \frac{ql^2}{2Eb^2}.$$

Ответ:  $\varphi_A = \frac{ql^2}{2Eb^2}.$

**5.31. На абсолютно жестком основании лежит полоса прямоугольного сечения  $b \times h$  с погонным весом  $q$ . Определить, на какой длине  $a$  полоса приподнимется над плоскостью при приложении к ее концу силы  $F$  а также перемещение  $\Delta$ .**



Решение

$$0 \leq z \leq a: \vartheta_0 = \Delta, \quad M_0 = 0; \quad Q_0 = F, \quad q_0 = -q;$$

Универсальное уравнение изогнутой оси балки:

$$EI\vartheta(z) = EI\vartheta_0 + EI\varphi_0 z + M_0 \frac{z^2}{2} + Q_0 \frac{z^3}{6} + q_0 \frac{z^4}{24} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow EI\Delta + EI\varphi_0 z + F \frac{z^3}{6} - q \frac{z^4}{24};$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \vartheta(a) = 0, EI\vartheta(a) = 0: 0 = EI\Delta + EI\varphi_0 a + F\frac{a^3}{6} - q\frac{a^4}{24}; \quad \Delta = \frac{Fa^3}{12EI} \Rightarrow \frac{8F^4}{q^3 Ebh^3}; \\ \varphi(a) = 0, EI\dot{\vartheta}(a) = 0: 0 = EI\varphi_0 + F\frac{a^2}{2} - q\frac{a^3}{6}; \quad EI\varphi_0 = -\frac{qa^3}{12}; \\ M(a) = 0, EI\ddot{\vartheta}(a) = 0: 0 = Fa - q\frac{a^2}{2}; \quad a \Rightarrow \frac{2F}{q}; \end{array} \right.$$

Ответ:  $a = \frac{2F}{q}$ ;  $\Delta = \frac{8F^4}{q^3 Ebh^3}$ .

**5.32.** Гибкий весомый стержень (погонный вес  $q$ ) лежит на абсолютно жесткой плоскости. При каком минимальном соотношении  $b/a$  стержень касается плоскости лишь в двух точках – А и В? Определить возникающие опорные реакции (рис.5.32).

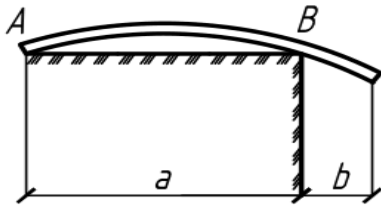


Рис. 5.32

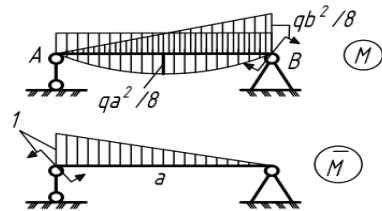


Рис. 5.32(a)

Решение

$$\vartheta_A = 0, \quad \varphi_A \geq 0, \quad R_A \geq 0, \quad M_A = 0;$$

$$\vartheta_B = 0, \quad \varphi_B \leq 0, \quad R_B \geq 0, \quad M_B = -\frac{qb^2}{2}; \quad b \leq a;$$

$$\varphi_A = \int \frac{M \cdot \bar{M}}{EI_x} dz = \frac{1}{EI_x} \left[ \frac{a}{6} \cdot \frac{qb^2}{2} \cdot 1 - \frac{2}{3} a \cdot \frac{qa^2}{8} \cdot \frac{1}{2} \right] = \frac{qa^3}{12} \left( \left( \frac{b}{a} \right)^2 - \frac{1}{2} \right);$$

$$\varphi_A \geq 0: \quad \frac{b}{a} \geq \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

$$R_A = \frac{qa}{2} - \frac{qb^2}{2} \cdot \frac{1}{a} = \frac{qa}{2} \left( 1 - \left( \frac{b}{a} \right)^2 \right);$$

$$R_B = \frac{qa}{2} + \frac{qb^2}{2} \cdot \frac{1}{a} = \frac{qa}{2} \left( 1 + \left( \frac{b}{a} \right)^2 \right);$$

Ответ:  $R_A = \frac{qa}{2} \left( 1 - \left( \frac{b}{a} \right)^2 \right)$ ;  $R_B = \frac{qa}{2} \left( 1 + \left( \frac{b}{a} \right)^2 \right)$ ;  $\frac{\sqrt{2}}{2} \leq \frac{b}{a} \leq 1$ .

5.33. Правая заделка балки постоянной жесткости повернулась на угол  $\theta_{on}$ . Найти угол поворота поперечного сечения, в котором кривизна оси балки равна нулю (рис.5.33).

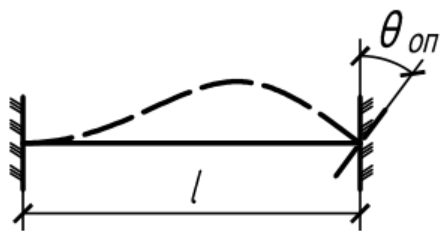


Рис. 5.33

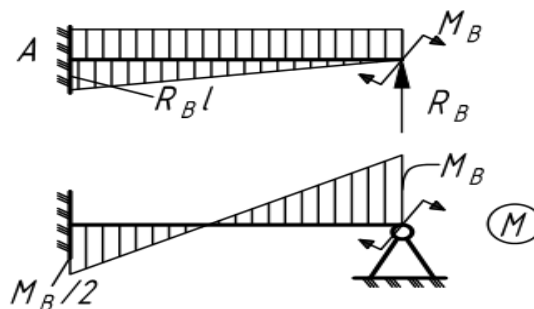


Рис. 5.33(а)

Решение

$$\vartheta_A = 0, \quad \varphi_A = 0, \quad \vartheta_B = 0, \quad \varphi_B = \theta_{on}; \quad R_A = -R_B;$$

$$EI\vartheta(z) = M_A \frac{z^2}{2} + R_A \frac{z^3}{6}; \quad EI\varphi(z) = M_A z + R_A \frac{z^2}{2}; \quad M(z) = M_A + R_A z;$$

$$\vartheta(l) = 0: \quad 0 = M_A \frac{l^2}{2} + R_A \frac{l^3}{6}, \quad R_A = -\frac{3M_A}{l}; \quad M(l) = M_B: \quad M_A = -\frac{M_B}{2};$$

$$\varphi(l) = \theta_{on}: \quad EI\theta_{on} = M_A l + R_A \frac{l^2}{2}, \quad EI\theta_{on} = -\frac{M_A l}{2} \Rightarrow \frac{M_B l}{4};$$

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M}{EI} \Rightarrow 0: \quad z = -\frac{M_A}{R_A} \Rightarrow \frac{l}{3}; \quad EI\varphi\left(\frac{l}{3}\right) = M_A \frac{l}{3} + R_A \frac{l^2}{2 \cdot 9} = \frac{M_A l}{2 \cdot 3} \Rightarrow -\frac{EI\theta_{on}}{3}.$$

$$\text{Ответ: } \varphi\left(\frac{l}{3}\right) = -\frac{\theta_{on}}{3}.$$

5.34. На балку действует равномерно распределенная нагрузка  $q$ . При каком соотношении  $a/l$  прогиб в середине балки будет равен нулю?

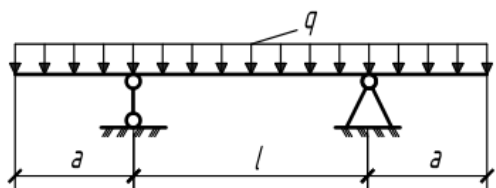


Рис. 5.34

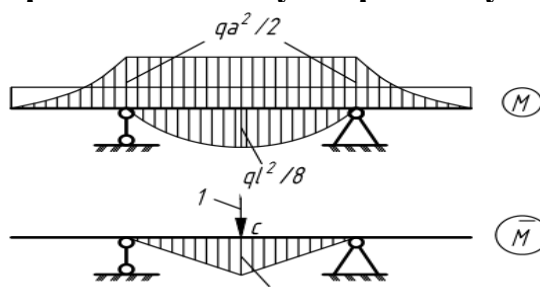


Рис. 5.34(а)

Решение

$$\vartheta_C = \int \frac{M \cdot \bar{M}}{EI_x} dz = \frac{1}{EI_x} \left[ 2 \cdot \frac{l}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{ql^2}{8} \cdot \frac{5l}{8} - \frac{l}{4} \cdot \frac{1l}{4} \cdot \frac{qa^2}{2} \right] = \frac{1}{EI_x} \cdot \frac{ql^2}{16} \cdot \left[ \frac{5l^2}{24} - a^2 \right];$$

$$\vartheta_C = 0:$$

$$\text{Ответ: } \frac{a}{l} = \sqrt{\frac{5}{24}} \approx 0,4564.$$

**5.36. Определить площадь  $\Omega$ , заключенную между первоначальной и изогнутой осью балки.  $F, l, EI$  заданы (рис.5.36).**

Решение

$$\vartheta_A = \vartheta_B \Rightarrow 0, \quad \varphi_A = -\varphi_B;$$

Из симметрии:  $R_A = R_B = \frac{F}{2}; \quad \varphi_C = 0;$

$$EI\vartheta(z) = EI\vartheta_0 z + \frac{F}{2} \cdot \frac{z^3}{6};$$

$$EI\varphi(z) = EI\varphi_0 + \frac{F}{2} \cdot \frac{z^2}{2};$$

$$\varphi\left(\frac{l}{2}\right) = 0: \quad EI\varphi_0 = -\frac{Fl^2}{16};$$

$$\Omega = \int_0^l \vartheta(z) dz \Rightarrow \frac{2}{EI} \int_0^{l/2} \left( -\frac{Fl^2}{16} z + \frac{Fz^3}{12} \right) dz = \frac{F}{2EI} \left[ \frac{z^4}{12} - \frac{l^2}{8} z^2 \right]_0^{l/2} = \frac{5Fl^4}{384EI}.$$

Ответ:  $\Omega = \frac{5Fl^4}{384EI}.$

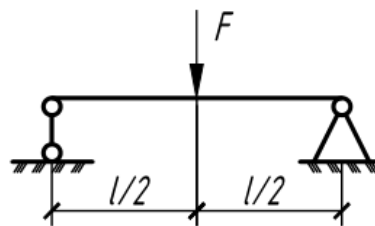


Рис. 5.36

**5.37. Принимая  $a = l/1000$ , установить, при каком значении  $M$  концы балки будут касаться опор  $A$  и  $B$  (рис.5.37).**

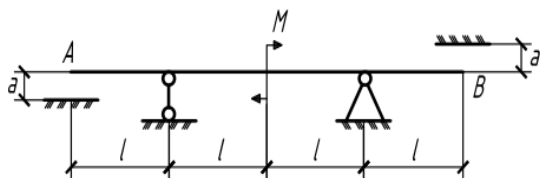


Рис. 5.37

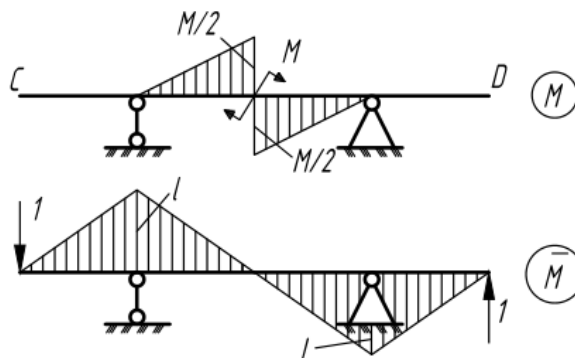


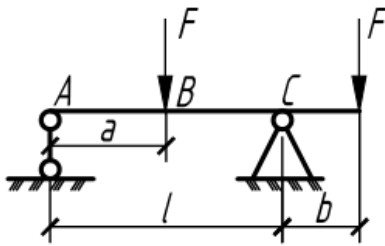
Рис. 5.37(a) CD-AB

Решение

$$\Delta\vartheta_{AB} = \int \frac{M \cdot \bar{M}}{EI_x} dz = \frac{1}{EI_x} \left[ 2 \cdot \frac{l}{6} \cdot \frac{M}{2} \cdot 1l \right] = \frac{1}{EI_x} \cdot \frac{Ml^2}{6} \Rightarrow 2a: \quad M = \frac{12EI}{l} \cdot \frac{a}{l}.$$

Ответ:  $M = 0,012 \frac{EI}{l}.$

5.38. Подобрать размер  $a$  таким образом, чтобы прогиб балки на участке  $AB$  изменялся по линейному закону.



Решение

$$\vartheta_A = 0; \quad M_A = 0;$$

$$\sum M_C = 0: \quad R_A = \frac{F(l-a) - Fb}{l};$$

$$0 \leq z \leq a, \quad EI\vartheta(z) = EI\varphi_0 \cdot z + R_A \cdot \frac{z^3}{6};$$

$$R_A = 0, \quad l - a = b.$$

Ответ:  $a = l - b$ .

5.39. На каком расстоянии  $a$  нужно приложить внешний момент  $M$ , чтобы консольный участок балки остался горизонтальным? (рис.5.39).

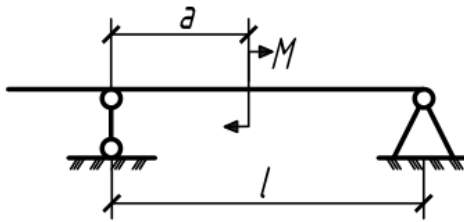


Рис. 5.39

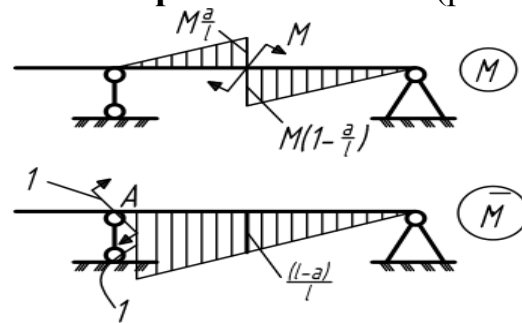


Рис. 5.39(а)

Решение

$$\varphi_A = \int \frac{M \cdot \bar{M}}{EI_x} dz = \frac{1}{EI_x} \left[ \frac{l-a}{3} \cdot \frac{M(l-a)}{l} \cdot \frac{l-a}{l} - \frac{a}{2} \cdot \frac{Ma}{l} \cdot \left( \frac{l-a}{l} + \frac{1}{3} \frac{a}{l} \right) \right];$$

$$\xi = \frac{a}{l} \leq 1;$$

$$\varphi_A = 0: \quad \frac{(1-\xi)^3}{3} = \frac{\xi^2}{2} \left( 1 - \frac{2}{3}\xi \right), \quad \xi^2 - 2\xi + \frac{2}{3} = 0, \quad \xi = 1 \pm \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow 0,423.$$

$$\text{Ответ: } \xi = 1 - \frac{1}{\sqrt{3}} \approx 0,423.$$

5.40. Под действием двух сил  $F$  первоначально искривленная пластинка выпрямляется и плотно соприкасается с плоскостью. По какой кривой должна быть искривлена пластинка, чтобы после выпрямления давление по длине  $l$  распределялось равномерно? (рис.5.40).

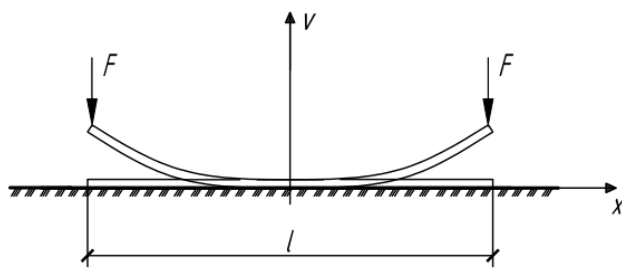


Рис. 5.40

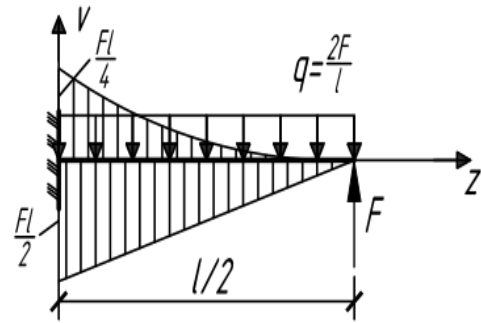


Рис. 5.40(a)

### Решение

Обратная задача:

$$0 \leq z \leq \frac{l}{2}, \quad \vartheta_0 = 0, \quad \varphi_0 = 0, \quad M_0 = \frac{Fl}{4}, \quad Q_0 = 0, \quad q_0 = -\frac{2F}{l}.$$

$$EI\vartheta(z) = EI\vartheta_0 + EI\varphi_0 z + M_0 \frac{z^2}{2} + Q_0 \frac{z^3}{6} + q_0 \frac{z^4}{24} \Rightarrow \frac{Fl}{4} \cdot \frac{z^2}{2} - \frac{2F}{l} \cdot \frac{z^4}{24};$$

$$\text{Ответ: } -\frac{l}{2} \leq z \leq \frac{l}{2}: \quad EI\vartheta(z) = \frac{Fl^3}{24} \left( 3 \left( \frac{z}{l} \right)^2 - 2 \left( \frac{z}{l} \right)^4 \right);$$

**5.41.** Балка длиной  $l$  и весом  $G=ql$  лежит на жесткой плоскости. Определить длину приподнятой части балки и величину наибольших нормальных напряжений при приложении к концу балки момента  $ql^2/8$ . (рис.5.41).

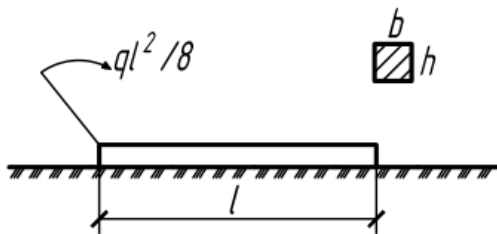


Рис. 5.41

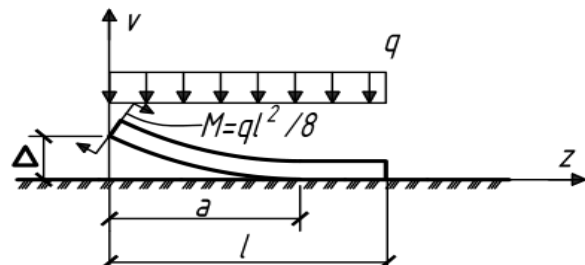


Рис. 5.41(a)

### Решение

$$0 \leq z \leq a, \quad \vartheta_0 = \Delta, \quad \varphi_0 \neq 0, \quad M_0 = \frac{ql^2}{8}, \quad Q_0 = 0, \quad q_0 = -q.$$

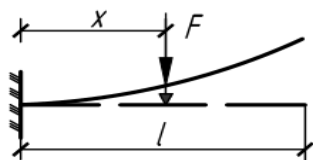
$$EI\vartheta(z) = EI\vartheta_0 + EI\varphi_0 z + M_0 \frac{z^2}{2} + Q_0 \frac{z^3}{6} + q_0 \frac{z^4}{24} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow EI\Delta + EI\varphi_0 z + M_0 \frac{z^2}{2} - q \frac{z^4}{24};$$

$$\begin{cases} EI\vartheta(a) = 0: & 0 = EI\Delta + EI\varphi_0 a + M_0 \frac{a^2}{2} - q \frac{a^4}{24}; & \Delta = \frac{ql^4}{128EI}; \\ EI\dot{\vartheta}(a) = 0: & 0 = EI\varphi_0 + M_0 a - q \frac{a^3}{6}; & EI\varphi_0 = -\frac{ql^3}{24}; \\ EI\vartheta(a) = 0: & 0 = M_0 - q \frac{a^2}{2}; & a = \sqrt{\frac{2M_0}{q}} \Rightarrow \frac{l}{2}; \end{cases}$$

Ответ:  $a = \frac{l}{2}; \quad \sigma_{\max} = \frac{M_0}{W_x} = \frac{3}{4} \cdot \frac{ql^2}{bh^2}.$

5.42. По какой кривой следует первоначально изогнуть балку, чтобы при любом положении силы  $F$  на балке точка приложения силы после деформации оставалась бы на одном уровне?



Решение

Обратная задача:  $F \Rightarrow -F; \quad 0 \leq z \leq l:$

$\vartheta_0 = 0, \varphi_0 = 0, M_0 = Fz, Q_0 = -F, q_0 = 0;$

$$EI\vartheta(z) = Fz \cdot \frac{z^2}{2} - F \frac{z^3}{6} \Rightarrow F \frac{z^3}{3}.$$

Ответ:  $\vartheta(z) = \frac{Fz^3}{3EI}.$

5.43. Двухконсольная балка постоянного сечения загружена как показано на рисунке. При каком расположении опор ( $x = ?$ ) длина верхнего волокна при нагружении не изменяется, т.е. равна  $l$ ? (рис.5.43).

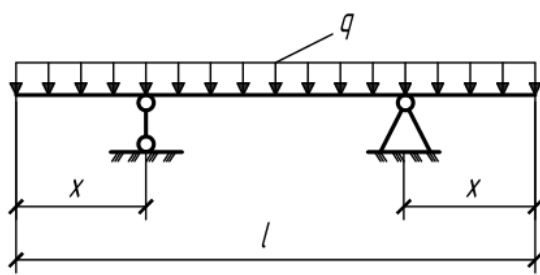


Рис. 5.43

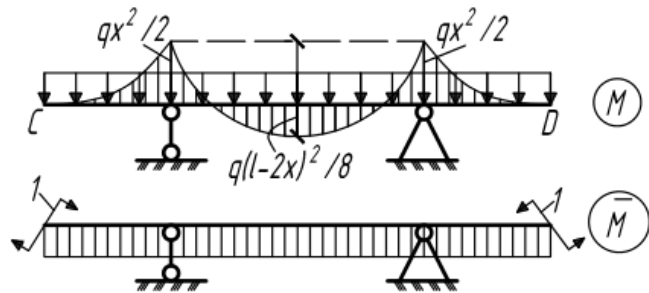


Рис. 5.43(a)

Решение

$$\Delta\varphi_{CD} = \int \frac{M \cdot \bar{M}}{EI} dz = \frac{1}{EI} \left[ -\frac{qx^2}{2} \cdot \left( 2 \cdot \frac{x}{3} + l - 2x \right) \cdot 1 + \frac{q(l-2x)^2}{8} \cdot \frac{2(l-2x)}{3} \cdot 1 \right];$$

$$\Delta\varphi_{CD} = 0: \quad 2x^2(3l - 4x) = (l - 2x)^3, \quad 6x^2 - 6xl + l^2 = 0, \quad \frac{x}{l} = \frac{1 \pm \frac{1}{\sqrt{3}}}{2}$$

Ответ:  $x = \frac{1 - \frac{1}{\sqrt{3}}}{2} l \approx 0,2113l.$

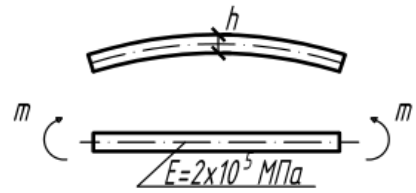


**5.44.** Стальная полоса изготовлена с начальной постоянной кривизной. Каким должен быть радиус кривизны, чтобы после выпрямления  $\sigma_{\max} = 200$  МПа?

Решение

$$\sigma_{\max} = \frac{M}{I} \cdot \frac{h}{2}, \quad M = \sigma_{\max} I \cdot \frac{2}{h};$$

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M}{EI} \Rightarrow \frac{\sigma_{\max}}{E} \cdot \frac{2}{h} = \frac{200 \text{ МПа}}{200 \text{ ГПа}} \cdot \frac{2}{h}, \quad \rho = 500h.$$



Ответ:  $\rho = 500h$ .

**5.45.** Плоская стальная пружина одним концом привинчена к столу. Предварительно пружина изогнута по кривой  $y = kx^3$ . К пружине прикладывается сила  $F$ . Найти  $b$  – длину контакта пружины со столом и величину перемещения точки  $A$  (рис.5.45).

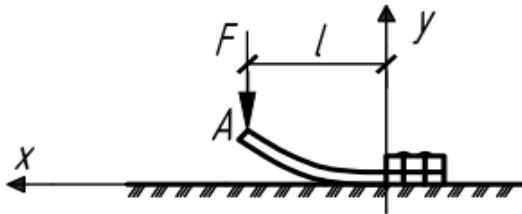


Рис. 5.45

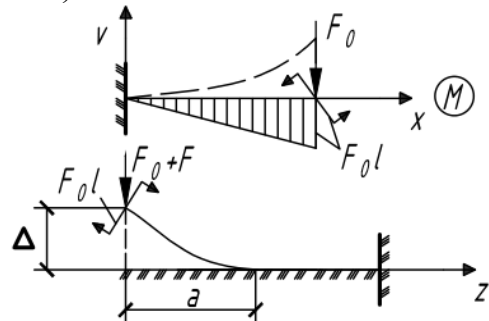


Рис. 5.45(a)

Решение

а)  $0 \leq x \leq l$ ,  $\vartheta(x) = kx^3$ :  $\frac{M(x)}{EI} = 6kx$ ,  $\frac{Q(x)}{EI} = 6k \Rightarrow \frac{M_A}{EI} \Rightarrow 6kl$ ,  $\frac{F_{0,A}}{EI} \Rightarrow 6k$ ;

б)  $z = l - x$ ,  $0 \leq z \leq a$ ;  $\vartheta_0 \Rightarrow \Delta$ ,  $M_A \Rightarrow EI6kl$ ,  $F_A \Rightarrow F + EI6k$ ;

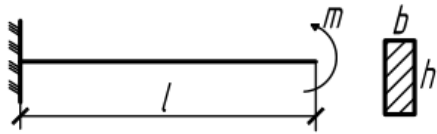
$$EI\vartheta(z) \Rightarrow EI\Delta + EI\varphi_0 z + M_A \frac{z^2}{2} - F_A \frac{z^3}{6};$$

$$\left\{ \begin{array}{l} EI\vartheta(a) = 0: \quad 0 = EI\Delta + EI\varphi_0 a + M_A \frac{a^2}{2} - F_A \frac{a^3}{6}; \quad \Delta = \frac{F_A a^3}{6EI} \Rightarrow \left( \frac{F}{6EI} + k \right) a^3; \\ EI\dot{\vartheta}(a) = 0: \quad 0 = EI\varphi_0 + M_A a - F_A \frac{a^2}{2}; \quad EI\varphi_0 \Rightarrow -F_A \frac{a^2}{2}; \\ EI\vartheta(a) = 0: \quad 0 = M_A - F_A a; \quad a = \frac{M_A}{F_A} \Rightarrow \frac{EI6kl}{F + EI6k}. \end{array} \right.$$

Ответ:  $b = l - a \Rightarrow \frac{Fl}{F + EI6k}$ ;  $\vartheta_A = kl^3 - \Delta \Rightarrow k(l^3 - a^3) + \frac{Fa^3}{6EI}$ .

5.46. Как при одном и том же прогибе  $\vartheta$  на конце балки изменится прочность балки постоянного сечения, если ее высоту увеличить в два раза?

Решение



$$\vartheta_1 = \frac{M_1 l^2}{2EI_1}, \quad \sigma_{1,\max} = \frac{M_1}{I_1} \cdot \frac{h}{2}, \quad \vartheta_1 = \frac{\sigma_{1,\max} l^2}{2E} \cdot \frac{2}{h};$$

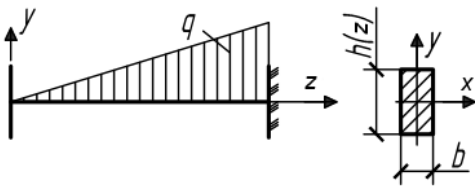
$$\vartheta_2 = \frac{M_2 l^2}{2EI_2}, \quad \sigma_{2,\max} = \frac{M_2}{I_2} \cdot h, \quad \vartheta_2 = \frac{\sigma_{2,\max} l^2}{2E} \cdot \frac{1}{h};$$

$$\vartheta_1 = \vartheta_2: \quad \sigma_{1,\max} \cdot 2 = \sigma_{2,\max}.$$

Ответ: прочность уменьшится в  $\frac{\sigma_{2,\max}}{\sigma_{1,\max}} = 2$  раза.

5.47. Консольная балка длиной  $l$  загружена распределенной по линейному закону нагрузкой. Поперечное сечение балки прямоугольное с постоянной шириной  $b$  и переменной по длине высотой  $h(z)$ . Установить закон изменения высоты сечения по длине балки, если продольная ось изогнулась по дуге окружности радиусом  $\rho$ .

Решение



$$0 \leq z \leq l: \quad M_x(z) = \frac{qz}{l} \cdot \frac{z}{2} \cdot \frac{z}{3}; \quad I_x(z) = \frac{bh^3}{12}.$$

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M_x(z)}{EI_x(z)} = \text{const}, \quad \frac{1}{\rho} = \frac{2qz^3}{Elbh^3}.$$

Ответ:  $h = h(z) = z \cdot \sqrt[3]{2qp / (Ebl)}$ .

5.48. Определить прогиб в середине пролета балки, имеющей постоянную изгибную жесткость сечения  $EI$  и длину  $l$ , если известно, что статический момент части площади эпюры изгибающего момента, лежащей слева от среднего сечения, относительно вертикальной оси, проходящей через опору  $A$ , равен  $S_1$ , а статический момент остальной площади эпюры относительно оси, проходящей через точку  $B$ , равен  $S_2$ .

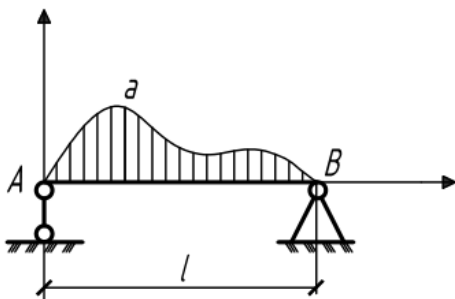


Рис. 5.48

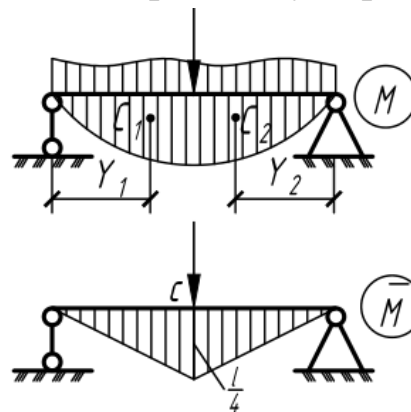


Рис. 5.48(a)

Решение

$$S_1 = \Omega_1 \cdot Y_1; \quad S_2 = \Omega_2 \cdot Y_2$$

$$\vartheta_C = \int \frac{M \cdot \bar{M}}{EI} dz = \frac{1}{EI} \left[ \Omega_1 \cdot \frac{l/4}{l/2} Y_1 + \Omega_2 \cdot \frac{l/4}{l/2} Y_2 \right] = \frac{S_1 + S_2}{2EI}.$$

Ответ:  $\vartheta_C = \frac{S_1 + S_2}{2EI}$ .

5.49. При какой длине консоли  $x$  прогибы балки в точках  $C$  и  $D$  одинаковы по абсолютной величине? (рис.5.49).

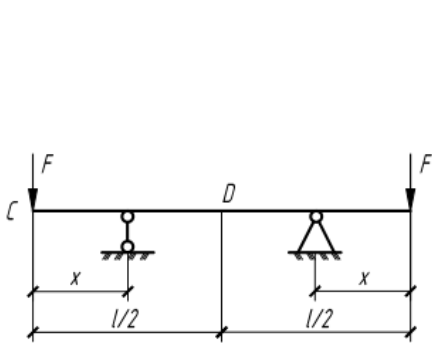


Рис. 5.49

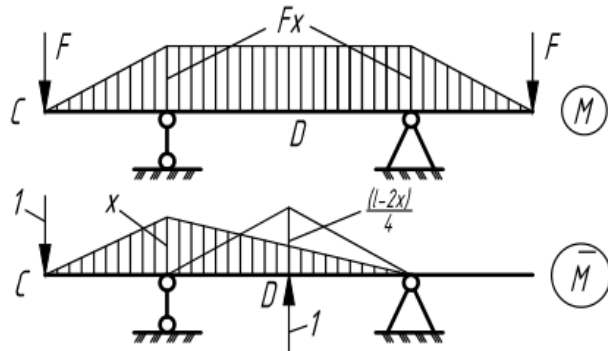


Рис. 5.49(a)

Решение

$$\vartheta_C = \int \frac{M \cdot \bar{M}_C}{EI} dz = \frac{1}{EI} \left[ \frac{Fx^3}{3} + \frac{l-2x}{2} Fx^2 \right];$$

$$\vartheta_D = \int \frac{M \cdot \bar{M}_D}{EI} dz = \frac{1}{EI} \left[ \frac{(l-2x)^2}{8} Fx \right];$$

$$\vartheta_C = \vartheta_D: \quad \frac{x^2}{3} + \frac{x(l-2x)}{2} = \frac{(l-2x)^2}{8}, \quad \left(\frac{x}{l}\right)^2 - \frac{6}{7}\left(\frac{x}{l}\right) + \frac{3}{28} = 0, \quad \frac{x}{l} = \frac{6 \pm \sqrt{15}}{14}.$$

Ответ:  $x = \frac{6 - \sqrt{15}}{14} l \approx 0,152l$ .

5.50. Стержень  $ABC$  с постоянной жесткостью  $EI$  шарнирно закреплен на абсолютно жестких стержнях 1, 2, 3. Определить горизонтальное перемещение стержня  $ABC$  при действии момента  $M$ .

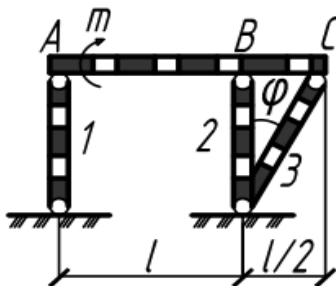


Рис. 5.50

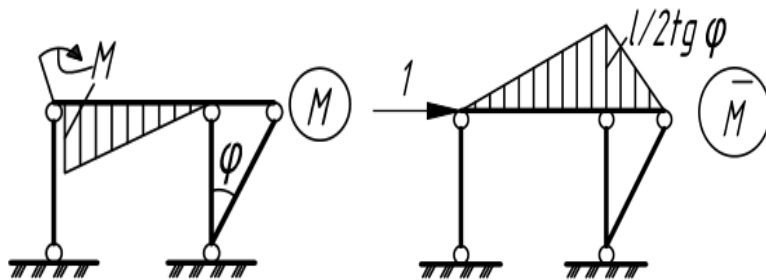


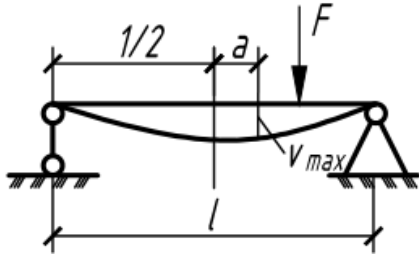
Рис. 5.50(a)

Решение

$$\Delta_X = \int \frac{M \cdot \bar{M}}{EI} dz = \frac{1}{EI} \left[ -\frac{l}{6} \cdot M \cdot \frac{l}{2 \tan \varphi} \right].$$

Ответ:  $\Delta_X = \frac{Ml^2}{12EI \tan \varphi}$  влево.

5.52. На балку действует сосредоточенная сила  $F$ . Определить величину  $a_{\max}$  – наибольшего удаления сечения с максимальным прогибом от середины балки. Какому нагружению это соответствует?



Решение

Нагружение:  $F$  на расстоянии  $dz$  от опоры

В, т.е. от  $M = F \cdot dz$ ;  $R_A = \frac{F \cdot dz}{l} \Rightarrow \frac{M}{l}$ .

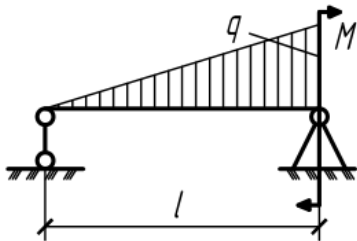
$$EI\vartheta(z) = EI\varphi_0 z + R_A \frac{z^3}{6}, \quad \vartheta(l) = 0: EI\varphi_0 = -R_A \frac{l^2}{6};$$

$$EI\varphi(z) = -R_A \frac{l^2}{6} + R_A \frac{z^2}{2}, \quad \varphi(z) = 0: z = \frac{l}{\sqrt{3}};$$

$$\vartheta(z) = \vartheta_{\max}, \text{ когда } \dot{\vartheta} = \varphi(z) \Rightarrow 0: a = \frac{l}{\sqrt{3}} - \frac{l}{2} \Rightarrow \left( \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{2} \right) l.$$

Ответ:  $a_{\max} \approx 0,07735l$  от  $M$  на левой опоре.

5.53. Дано:  $q, l$ . Найти значение момента  $M$ , при котором максимальный прогиб будет в среднем сечении.



Решение

$$\vartheta_0 \Rightarrow 0; \quad Q_0 = R_A \Rightarrow \frac{ql}{2} \cdot \frac{1}{3} - \frac{M}{l}; \quad q_0 \Rightarrow 0.$$

$$EI\vartheta(z) = EI\varphi_0 z + R_A \frac{z^3}{6} - \frac{q}{l} \frac{z^5}{120};$$

$$\vartheta(l) = 0: \quad EI\varphi_0 = -R_A \frac{l^2}{6} + \frac{ql^3}{120} \Rightarrow \frac{Ml}{6} - \frac{7ql^3}{360};$$

$$EI\varphi(z) = EI\varphi_0 + R_A \frac{z^2}{2} - \frac{q}{l} \frac{z^4}{24};$$

$$\vartheta\left(\frac{l}{2}\right) = \vartheta_{\max}, \text{ когда } \dot{\vartheta} = \varphi\left(\frac{l}{2}\right) \Rightarrow 0:$$

$$0 = \frac{Ml}{6} - \frac{7ql^3}{24 \cdot 15} + \left( \frac{ql}{6} - \frac{M}{l} \right) \frac{l^2}{8} - \frac{ql^3}{24 \cdot 16}, \quad M = \frac{7ql^2}{15 \cdot 16}.$$

Ответ:  $M = \frac{7ql^2}{240}$ .

5.54. Клин с малым углом  $\alpha$  перемещается под действием силы  $P$  на величину  $\Delta$ , поднимая конец балки. Не учитывая силы трения, установить зависимость  $P = f(\Delta)$  при условии, что угол поворота концевое сечения балки не превышает  $\alpha$  (рис.5.54).

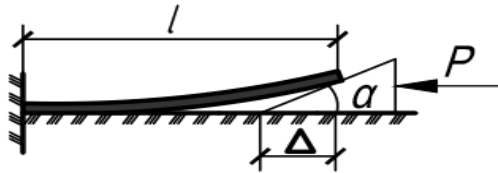


Рис. 5.54

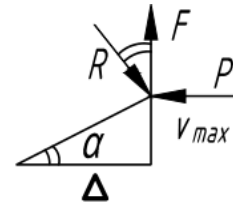


Рис. 5.54(a)

Решение

Из равновесия:  $\sum X = 0: R \sin \alpha = P; \sum Y = 0: F = R \cos \alpha; F = \frac{P}{\tan \alpha}.$

$$\vartheta_{\max} = \frac{Fl^3}{3EI}; \quad \vartheta_{\max} = \tan \alpha; \quad P = \frac{3EI \cdot \Delta \cdot \tan^2 \alpha}{l^3}.$$

Ответ:  $P = \frac{3EI \cdot \Delta \cdot \tan^2 \alpha}{l^3}.$

5.55. Поперечное сечение консольной балки, нагруженной на конце моментом  $M$  и изготовленной из двух материалов, показано на рисунке. Найти прогиб в точке  $A$ , если модуль упругости  $E_2 = 2E_1$ . Проскальзывание между брусками исключено.

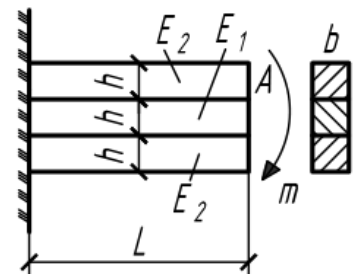
Решение

Нейтральная ось  $X \rightarrow$  ось симметрии сечения.

$$\sigma = E_i \varepsilon = E_i \cdot \frac{1}{\rho} \cdot y, \quad -\frac{3h}{2} \leq y \leq \frac{3h}{2};$$

$$I_1 = \frac{bh^3}{12}; \quad I_2 = I_1 + bh \cdot h^2 \Rightarrow 13I_1;$$

$$EI_{np} = E_1 I_1 + 2E_2 I_2 \Rightarrow 53E_1 I_1;$$

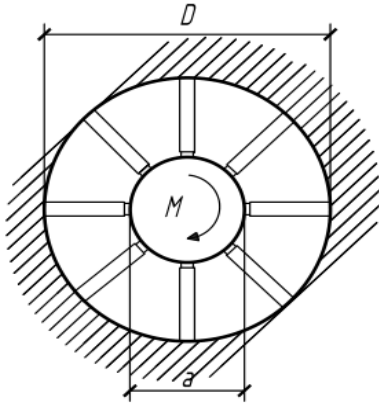


$$M_x = \int_A \sigma dA \cdot y \Rightarrow \frac{1}{\rho} \left( \int_{A_1} E_1 y^2 dA + 2 \int_{A_2} E_2 y^2 dA \right) = \frac{EI_{np}}{\rho};$$

$$\vartheta_{\max} = \frac{Ml^2}{2EI_{np}} \Rightarrow \frac{Ml^2}{106E_1 I_1} = \frac{12Ml^2}{106E_1 bh^3} \approx 0,1132 \frac{Ml^2}{E_1 bh^3}.$$

Ответ:  $\vartheta_{\max} \approx 0,1132 \frac{Ml^2}{E_1 bh^3}.$

5.56. К абсолютно жесткому диску диаметром  $a$  шарнирно прикреплены спицы – круглые стержни диаметром  $d$ , второй конец которых жестко зашпелен. Определить угол поворота диска от действия момента  $M$  в плоскости этого диска.



Решение

$$M = 8F \frac{a}{2}; \quad \theta \frac{a}{2} = \Delta, \quad \theta = \Delta \frac{2}{a};$$

$$\Delta = \frac{Fl^3}{3EI_x}, \quad l = \frac{D-a}{2}, \quad I_x = \frac{\pi d^4}{64};$$

$$\theta = \frac{M}{4a} \cdot \left( \frac{D-a}{2} \right)^3 \cdot \frac{64}{3E\pi d^4} \cdot \frac{2}{a} \Rightarrow \frac{4}{3} \cdot \frac{M(D-a)^3}{E\pi a^2 d^4}.$$

Ответ:  $\theta = \frac{4}{3} \cdot \frac{M(D-a)^3}{E\pi a^2 d^4}.$

5.57. При каком расстоянии  $x$  на левом пролете балки отсутствуют прогибы? (рис.5.57).

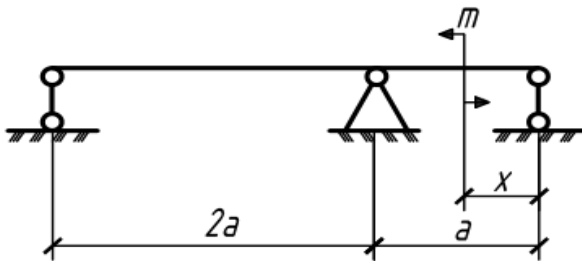


Рис. 5.57

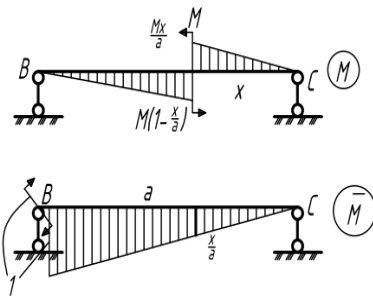


Рис. 5.57(a)

Решение

$$\vartheta_A = \vartheta_B = \vartheta_C \Rightarrow 0; \quad \vartheta_{AB} = 0, \text{ если } \varphi_B = 0;$$

$$\varphi_B = \int \frac{M \cdot \bar{M}}{EI} dz = \frac{1}{EI} \left[ \frac{a-x}{6} \cdot M \left( 1 - \frac{x}{a} \right) \cdot \left( 2 \frac{x}{a} + 1 \right) - \frac{x}{3} \cdot M \frac{x}{a} \cdot \frac{x}{a} \right];$$

$$\varphi_B = 0: \quad \frac{(1-\xi)^2}{2} \cdot (2\xi+1) - \xi^3 = 0, \quad \xi = \frac{x}{a} \Rightarrow \pm \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Ответ:  $x = \frac{a}{\sqrt{3}} \approx 0,57735a.$

5.59. Мост через реку, несущей конструкцией которого является балка  $AB$ , усилен с помощью понтона  $D$ . Определить  $A$  – площадь понтона в плане, при которой воспринимаемая им нагрузка составит 25% от полной нагрузки моста (рис.5.59).

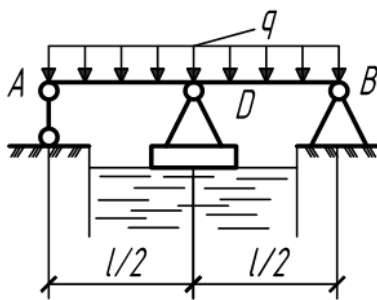


Рис. 5.59

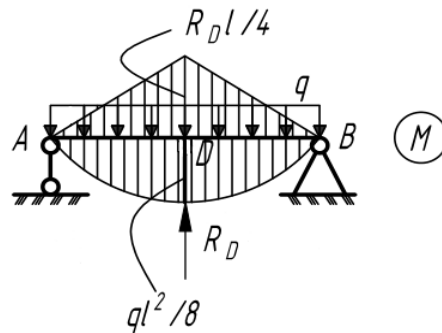


Рис. 5.59(a)

Решение

$$\vartheta_A = 0, \quad \vartheta_B = 0; \quad R_D = 0,25ql \quad (\text{по условию});$$

$$\vartheta_D = \int \frac{M \cdot \bar{M}}{EI} dz = \vartheta_q - \vartheta_{R_D} = \frac{5ql^4}{384EI} - \frac{R_D l^3}{48EI} \Rightarrow \frac{ql^4}{128EI};$$

$$R_D = \gamma \cdot A \cdot \vartheta_D: \quad A = \frac{R_D}{\gamma \cdot \vartheta_D} \Rightarrow \frac{32EI}{\gamma l^3}.$$

Ответ:  $A = \frac{32EI}{\gamma l^3}.$

**5.60.** Требуется экспериментально определить угол поворота сечения  $C$ . Однако конструкция установки позволяет замерять углы поворота только на опорах. Как определить искомый угол  $\varphi_c$  при заданной нагрузке? (рис.5.60).

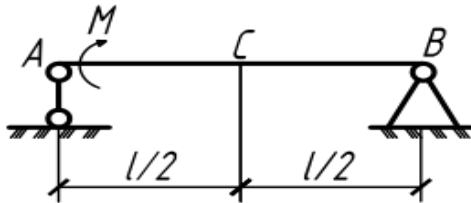


Рис. 5.60

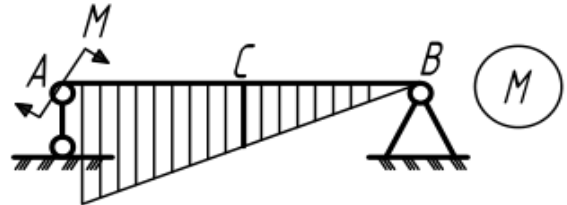


Рис. 5.60(a)

Решение

$$\varphi_A = \int \frac{M \cdot \bar{M}_A}{EI} dz \Rightarrow \frac{Ml}{3EI}; \quad \varphi_B = \int \frac{M \cdot \bar{M}_B}{EI} dz \Rightarrow -\frac{Ml}{6EI} = -\frac{\varphi_A}{2};$$

$$\varphi_C = \int \frac{M \cdot \bar{M}_C}{EI} dz \Rightarrow -\frac{Ml}{24EI} = -\frac{\varphi_A}{8} = \frac{\varphi_B}{4}.$$

Ответ:  $\varphi_C = -\frac{\varphi_A}{8} = \frac{\varphi_B}{4}.$

**5.61.** Определить прогиб  $\vartheta_B$  в балке, выполненной из разномодульных материалов. Дано:  $F, l, h, b, E_1, E_2$ .

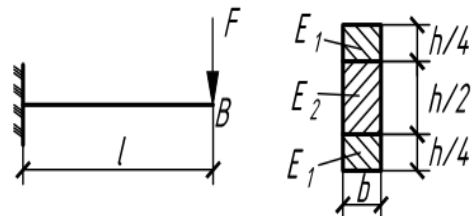
Решение

Нейтральная ось  $X \rightarrow$  ось симметрии сечения.

$$\sigma = E_i \varepsilon = E_i \cdot \frac{1}{\rho} y, \quad -\frac{h}{2} \leq y \leq \frac{h}{2};$$

$$I_2 = \frac{b \left(\frac{h}{2}\right)^3}{12} \Rightarrow \frac{bh^3}{96};$$

$$I_1 = \frac{b \left(\frac{h}{4}\right)^3}{12} + \frac{bh}{4} \cdot \left(\frac{3h}{8}\right)^2 = \frac{7bh^3}{192} \Rightarrow \frac{7}{2} I_2;$$



$$EI_{np} = 2E_1I_1 + E_2I_2 \Rightarrow E_2I_2 \left( 7 \frac{E_1}{E_2} + 1 \right);$$

$$M_x = \int_A \sigma dA \cdot y \Rightarrow \frac{1}{\rho} \left( \int_{A_2} E_2 y^2 dA + 2 \int_{A_1} E_1 y^2 dA \right) = \frac{EI_{np}}{\rho};$$

$$\vartheta_B = \vartheta_{\max} = \frac{Fl^3}{3EI_{np}} \Rightarrow \frac{Fl^3}{3E_2I_2 \left( 7 \frac{E_1}{E_2} + 1 \right)} = \frac{32Fl^3}{E_2bh^3 \left( 7 \frac{E_1}{E_2} + 1 \right)}.$$

Ответ:  $\vartheta_B = \frac{32Fl^3}{E_2bh^3 \left( 7 \frac{E_1}{E_2} + 1 \right)}.$

**5.63.** При каком значении  $a$  изгибающий момент в поперечном сечении  $K$  балки равен нулю? (рис.5.63).

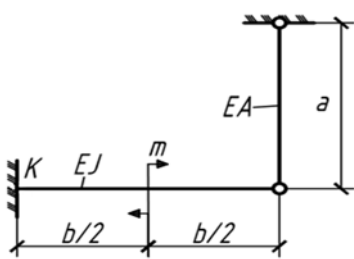


Рис. 5.63

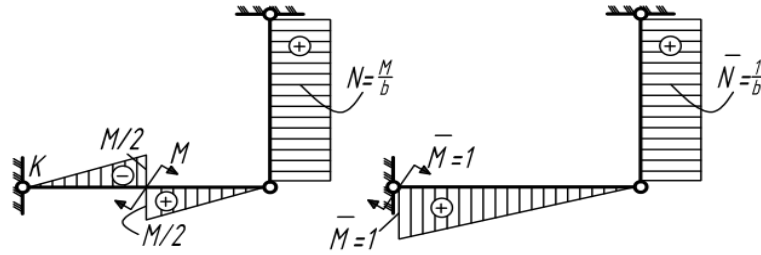


Рис. 5.63(а)

Решение

$\vartheta_K = 0, \varphi_K = 0; M_K = 0 \rightarrow$  по условию, т.е. как в шарнире рис.5.63(а).

$$\varphi_K = \int \frac{M \cdot \bar{M}}{EI} ds + \int \frac{N \cdot \bar{N}}{EA} ds =$$

$$= \frac{1}{EI} \left[ -\frac{b/2}{6} \cdot \frac{M}{2} \cdot \left( 2 \cdot \frac{1}{2} + 1 \right) + \frac{b/2}{3} \cdot \frac{M}{2} \cdot \frac{1}{2} \right] + \frac{1}{EA} \left[ a \cdot \frac{M}{b} \cdot \frac{1}{b} \right];$$

$$\varphi_K = 0: \frac{1}{EI} \cdot \frac{b}{24} = \frac{1}{EA} \cdot \frac{a}{b^2}.$$

Ответ:  $a = \frac{A}{I} \cdot \frac{b^3}{24}.$

**5.64.** В разрез тонкого кольца, радиус средней линии которого равен  $R$ , помещен небольшой брусок толщиной  $\Delta$ . Определить наибольший изгибающий момент, возникающий в кольце (рис.5.64).



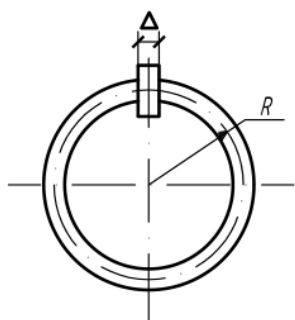


Рис. 5.64

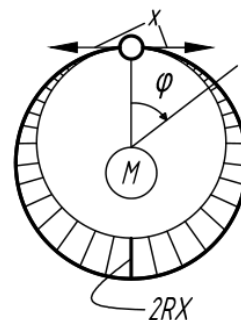


Рис. 5.64(a)

**Решение**

$$0 \leq \varphi \leq 2\pi, \quad ds = R d\varphi;$$

$$M(\varphi) = X \cdot (1 - \cos \varphi) \cdot R, \quad M_{\max} = M(\pi) \Rightarrow 2XR;$$

$$\Delta_C = \int \frac{M \cdot \bar{M}}{EI} ds = 2 \int_0^\pi \frac{X(1 - \cos \varphi)^2 R^3}{EI} d\varphi \Rightarrow \frac{2XR^3}{EI} \cdot \left[ \varphi - 2\sin \varphi + \frac{\varphi}{2} + \frac{\sin 2\varphi}{4} \right]_0^\pi;$$

$$\Delta_C = \Delta: \quad \Delta = \frac{2XR^3}{EI} \cdot \frac{3\pi}{2}, \quad 2XR \Rightarrow \frac{2EI\Delta}{3\pi R^2}.$$

Ответ:  $M_{\max} = \frac{2EI\Delta}{3\pi R^2}.$

**5.65.** В двух плоских параллельных дисках *A* и *B* жестко заделаны симметрично расположенные относительно продольной оси *n* круглых стержней диаметром *d* и длиной *l*. Считая диски абсолютно жесткими и упругие постоянные материала стержней известными, определить взаимный угол поворота дисков  $\varphi$  при нагружении системы двумя скручивающими моментами *M* (рис.5.65).

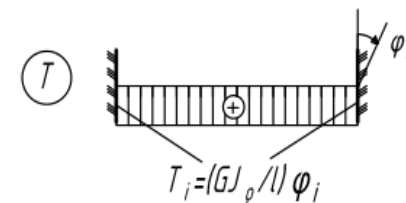
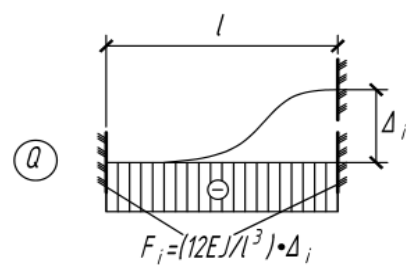
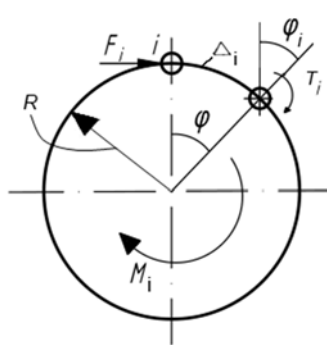
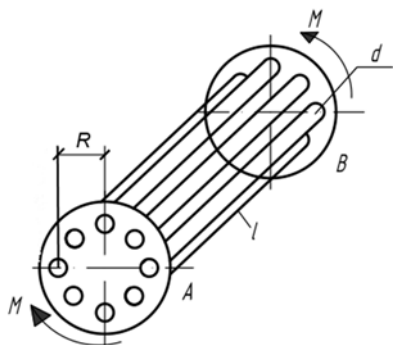


Рис 5.65

Рис. 5.65(a)

Решение

$$i = 1, 2, \dots, n: \quad \varphi_i = \varphi, \quad \Delta_i = \varphi \cdot R,$$

$$M = M_i \cdot n, \quad M_i = M_{i,u} + T_i; \quad 2I = I_\rho \Rightarrow \frac{\pi d^4}{32}; \quad \frac{E}{2(1+\nu)} = G;$$

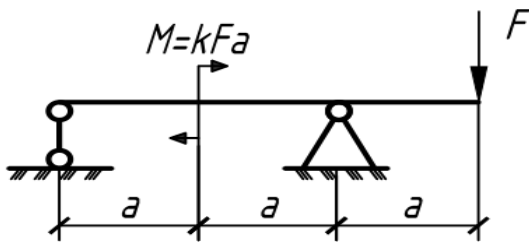
$$M_{i,u} = F_i \cdot R \Rightarrow \frac{12EI}{l^3} \Delta_i \cdot R \Rightarrow \frac{12EIR^2}{l^3} \cdot \varphi; \quad T_i \Rightarrow \frac{GI_\rho}{l} \cdot \varphi_i \Rightarrow \frac{GI_\rho}{l} \cdot \varphi;$$

$$\frac{M}{n} = \frac{12EIR^2}{l^3} \cdot \varphi + \frac{GI_\rho}{l} \cdot \varphi;$$

$$\text{Ответ: } \varphi = \frac{MI^3}{n(12EIR^2 + GI_\rho l^2)} \Rightarrow \frac{32MI}{nE\pi d^4 \left( 12 \left( \frac{R}{l} \right)^2 + \frac{1}{1+\nu} \right)}.$$

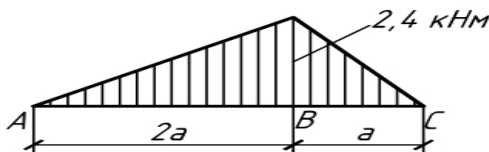
Задачи для самостоятельного решения

5.1. При каком значении коэффициента  $K$  прогиб конца консоли равен нулю? Чему при этом равен угол поворота этого же сечения?



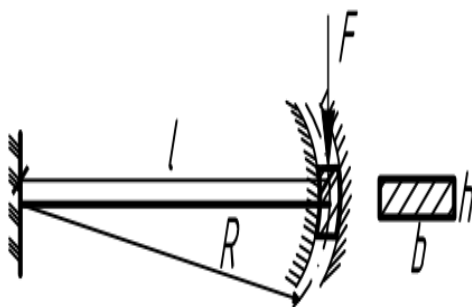
$$\text{Ответ: } k = 12; \quad \varphi_c = \frac{Fa^2}{6EI_x}.$$

5.5. По заданной эпюре изгибающего момента определить угол поворота сечения С балки, если прогибы в сечениях А и В равны нулю,  $EI = 200 \text{ кН}\cdot\text{м}^2$ ,  $a=1 \text{ м}$ . (рис.5.5).



Ответ: 0,014 рад по часовой стрелке.

5.10. Один конец стальной балки ( $b = 60 \text{ мм}$ ,  $h = 20 \text{ мм}$ ) жестко за-



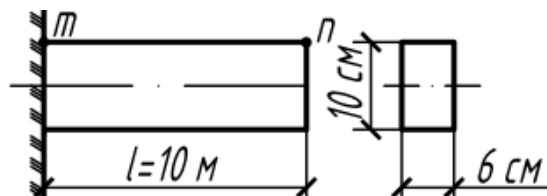
землен, а другой жестко заделан в ползун, движущийся по окружности радиуса  $R = l$ . Определить  $\sigma_{\max}$  в балке, а также прогиб и угол поворота конечного сечения, если  $F = 1,5 \text{ кН}$ ,  $R = 0,5 \text{ м}$ ,  $E=200 \text{ ГПа}$ .

$$\text{Ответ: } \sigma_{\max} = 125 \text{ МПа};$$

$$\vartheta_B = 3,9 \text{ мм}; \quad \varphi_B = 0,0078 \text{ рад}.$$

5.14. Стальная балка изгибается под действием собственного веса. Найти деформацию верхнего волокна  $m$ , если наибольшее напряжение в балке равно 240 МПа, а  $E = 200$  ГПа (рис.5.14).

Ответ:  $\Delta l_{mn} = 4$  мм удлинение.

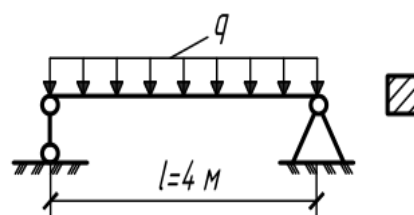


5.18. От момента  $M = 100$  Нм, приложенного на конце консоли  $l = 2$  м, в среднем сечении  $\varphi = 0,04$  рад. Определить радиус кривизны оси балки  $\rho$  и прогиб на свободном конце.

Ответ:  $\rho = 25$  м;  $\vartheta_{\max} = 8$  см вниз.

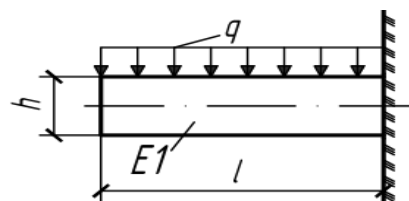
5.21. Балка квадратного сечения находится под действием распределенной нагрузки  $q = 8$  кН/м. Определить максимальный прогиб балки и радиус кривизны оси в среднем сечении, если в этом сечении  $\sigma_{\max} = 12$  МПа, а модуль упругости  $E = 10$  ГПа.

Ответ:  $\vartheta_{\max} = 2$  см;  $\rho = 83,3$  м.



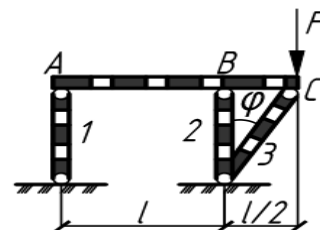
5.35. Найти, чему будет равна разность между длиной верхнего и нижнего волокон балки после изгиба, вызванного нагрузкой  $q$ .

Ответ:  $\Delta l_{BH} = \frac{ql^3 h}{6EI_x}$ .

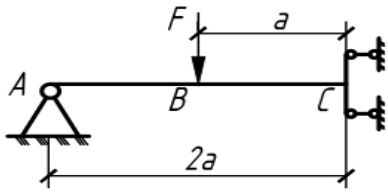


5.51. Стержень  $ABC$  с постоянной жесткостью  $EI$  шарнирно закреплен на абсолютно жестких стержнях 1, 2 и 3. Определить вертикальное и полное перемещение шарнира  $C$  при действии силы  $F$ .

Ответ:  $\Delta_y = \frac{Fl^3}{8EI}$  вниз;  $\Delta = \frac{\Delta_y}{\sin \varphi} = \frac{Fl^3}{8EI \sin \varphi}$ .

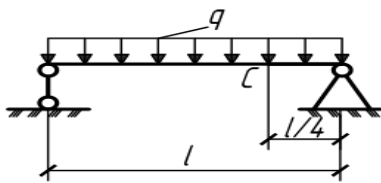


5.58. Найти прогиб сечения  $B$  и опорный момент  $M_C$ . Жесткость балки постоянная.



Ответ:  $\vartheta_B = \frac{4}{3} \cdot \frac{Fa^3}{EI}$  вниз;  $M_C = Fa$ .

5.62. Определить прогиб балки в точке  $C$ , если заданы  $l$  и угол поворота на левой опоре.



Ответ:  $\vartheta_C = \varphi_A l \frac{57}{256}$ .

## Глава 6. СТАТИЧЕСКИ НЕОПРЕДЕЛИМЫЕ СИСТЕМЫ

### Краткие теоретические сведения

#### Основные понятия и обозначения

*СОС* → статически определимая система, т.е. геометрически неизменяемая система, в которой внутренние усилия могут быть определены из уравнений равновесия (уравнений статики).

*СНС* → статически неопределимая система, т.е. система, в которой внутренние усилия нельзя найти только из одних уравнений равновесия (уравнений статики). Для определения внутренних усилий в *СНС* необходимо рассмотреть три стороны задачи: 1) *статическая* → устанавливает связь между внешней нагрузкой и внутренними усилиями, т.е. рассматривает уравнения статического равновесия; 2) *геометрическая* → устанавливает связь между перемещениями и деформациями элементов системы, т.е. уравнения совместности деформаций; 3) *физическая* → устанавливает связь между усилиями и деформациями, при упругой деформации из закона Гука.

*Примечание:* При заданном по условию распределении внутренних усилий в *СНС*, решение задачи возможно без раскрытия статической неопределимости.

*лишняя связь* → дополнительная связь в *СНС* по сравнению со *СОС*;

*степень статической неопределимости* → разность между числом искомых усилий и числом независимых уравнений равновесия, т.е. число лишних связей;

*МС* → метод сил, т.е. один из методов расчета *СНС* по схеме:

1) отбрасываются *i*-е лишние связи, вместо них прикладываются лишние неизвестные усилия  $X_i$  (при этом заданная *СНС* → *СОС*, т.е. получаем *ОС* (*основную систему*) *МС*); 2) разрешающие (канонические) уравнения для усилий  $X_i$  → уравнения совместности деформаций заданной *СНС* и *ОСМС*, это, как правило, отсутствие перемещений в *ОСМС* по направлению отброшенной в *СНС* *i*-й лишней связи.

$\Delta_k = \frac{1}{r_k}$  → податливость упругой опоры  $k$  от единичной силы,  $[\Delta_k] = \begin{bmatrix} \text{М} \\ \text{Н} \end{bmatrix}$ ;

$r_k = \frac{1}{\Delta_k}$  → жесткость опоры  $k$  от единичного смещения,  $[r_k] = \begin{bmatrix} \text{Н} \\ \text{М} \end{bmatrix}$ .

Определение перемещений в *СНС* по формуле Мора, например от  $N$ :

$$\Delta_{iF} = \sum \int \frac{\bar{N}_i \cdot N_F}{EA} ds = \sum \int \frac{\bar{N}_i \cdot N_F^o}{EA} ds = \sum \int \frac{N_i^o \cdot N_F}{EA} ds,$$

где  $\Delta_{iF}$  → проекция полного перемещения на *i*-е направление от внешней нагрузки  $F$  (причина) в заданной *СНС*;

$N_F, \overline{N}_i \rightarrow$  "грузовая" и "единичная" эпюры  $N$  в заданной СНС;

$N_F^o, \overline{N}_i^o \rightarrow$  "грузовая" и "единичная" эпюры  $N$  в любой СОС, из СНС.

*Примечание:*  $\Delta_{iF}$  от внутренних усилий  $M_x, M_y, T$  определяется аналогично.

## Примеры решения задач

**6.1. Определить усилия в стержнях плоской фермы, нагруженной в узлах радиальными силами  $F$ . Жесткость  $EA$  всех стержней одинакова (рис.6.1).**

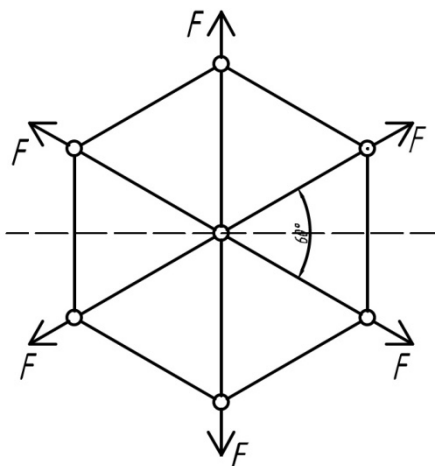


Рис. 6.1

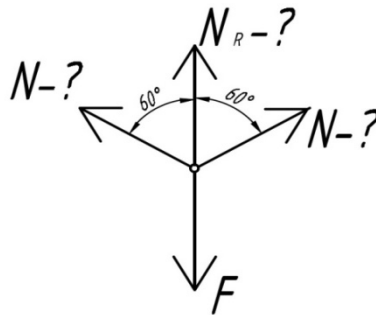


Рис. 6.1(а)

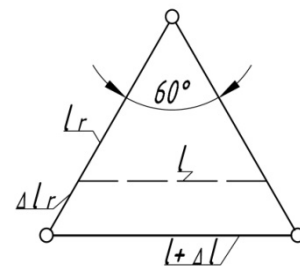


Рис. 6.1(б)

### Решение

а) Статика. Из равновесия:  $\sum Y = 0: F = N_r + 2N \cos 60^\circ \Rightarrow N_r + N$ .

б) Геометрия.  $\Delta l_r = \Delta l$ , (равносторонний треугольник).

в) Физика.  $\Delta l_r = \frac{N_r l_r}{EA_r} \Rightarrow \frac{N_r l}{EA}$ ,  $\Delta l = \frac{Nl}{EA}$ .

Ответ:  $N_r = N \Rightarrow F / 2$ .

**6.2. Абсолютно жесткая плита опирается на четыре стойки одинаковой длины  $L$  и одинаковой площади поперечного сечения  $A$ . Определить усилия в стойках от нагрузки  $F$ , пренебрегая собственным весом плиты и считая, что опорные устройства позволяют стойкам воспринимать растягивающие усилия.**

### Решение

Из симметрии  $\rightarrow XY$  главные центральные оси составного стержня из 4 одинаковых стоек.

$$N = -F; \quad M_y = -F \cdot x; \quad M_x = -F \cdot y.$$

По принципу суперпозиции согласно Г.П.С.:

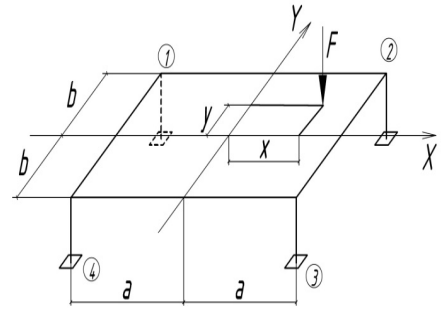
$$N_i = \frac{N}{4} + \frac{M_y}{4x_i} + \frac{M_x}{4y_i} \Rightarrow -\frac{F}{4} - \frac{Fx}{4x_i} - \frac{Fy}{4y_i},$$

где  $x_1 = -a, y_1 = +b;$        $x_2 = +a, y_2 = +b;$   
 $x_4 = -a, y_4 = -b;$        $x_3 = +a, y_3 = -b.$

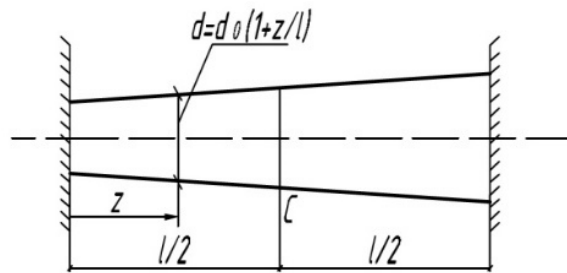
Ответ:

$$N_1 = \frac{F}{4} \left( -1 + \frac{x}{a} - \frac{y}{b} \right); \quad N_2 = \frac{F}{4} \left( -1 - \frac{x}{a} - \frac{y}{b} \right);$$

$$N_4 = \frac{F}{4} \left( -1 + \frac{x}{a} + \frac{y}{b} \right); \quad N_3 = \frac{F}{4} \left( -1 - \frac{x}{a} + \frac{y}{b} \right).$$



**6.3. Определить допускаемое повышение температуры стального бруса конической формы и перемещение среднего сечения С. Дано:  $R = 250$  МПа,  $l = 96$  см,  $\alpha_t = 12,5 \cdot 10^{-6} \frac{1}{\text{град}}$ .**



Решение

$$d(z) = d_0 \left( 1 + \frac{z}{l} \right), \quad A(z) = A_0 \left( 1 + \frac{z}{l} \right)^2, \quad A_0 = \frac{\pi d_0^2}{4};$$

$$\Delta l_t = \alpha_t \cdot \Delta t \cdot l; \quad N(z) = -X = \text{const};$$

$$\Delta l_N = \int_0^l \frac{N(z) dz}{EA(z)} \Rightarrow \left[ \frac{Xl}{EA_0} \cdot \frac{l}{(l+z)} \right]_0^l = -\frac{Xl}{2EA_0};$$

$$\Delta l = \Delta l_t + \Delta l_N \Rightarrow \alpha_t \cdot \Delta t \cdot l - \frac{Xl}{2EA_0};$$

$$\Delta l = 0: \quad X = 2 \cdot \alpha_t \Delta t \cdot EA_0.$$

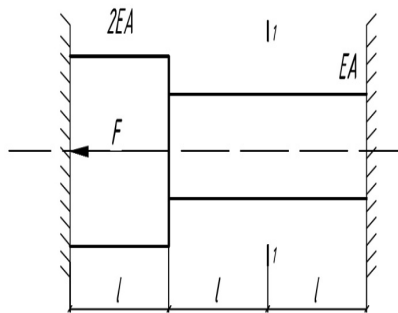
$$\sigma_{\max} = \frac{X}{A_0} \leq R: \quad \Delta t \leq \frac{R}{2 \cdot \alpha_t \cdot E} \Rightarrow \frac{250 \text{ МПа}}{2 \cdot 12,5 \cdot 10^{-6} \cdot 200 \text{ ГПа}} = 50^\circ\text{C}.$$

$$\delta_C = \int_0^{l/2} \Delta dz \Rightarrow \int_0^{l/2} \alpha_t \Delta t \cdot dz - \int_0^{l/2} \frac{X \cdot dz}{EA(z)} = \left[ \alpha_t \Delta t \cdot z + \frac{Xl}{EA_0} \cdot \frac{l}{(l+z)} \right]_0^{l/2} =$$

$$= \alpha_t \Delta t \frac{l}{2} - \frac{Xl}{3EA_0} = -\alpha_t \Delta t \frac{l}{6} = 12,5 \cdot 10^{-6} \cdot 50 \cdot \frac{96 \text{ см}}{6} = -0,1 \text{ мм.}$$

Ответ:  $\Delta t = 50^\circ\text{C}$ ;  $\delta_C = 0,1 \text{ мм влево}$ .

**6.4. Брус, жестко заземленный по концам, равномерно нагрет по всей длине на  $\Delta t$  и нагружен силой  $F$ . Полагая размеры бруса, температурный коэффициент линейного расширения и модуль упругости известными, определить, при каком значении силы  $F$  сечение I—I останется неподвижным.**



Решение

а)  $\Delta l_t = \alpha_t \Delta t \cdot 3l$ ;  $\Delta l_X = \frac{X_A l}{2EA} + \frac{X_A 2l}{EA}$ ;  $\Delta l_F = \frac{F 2l}{EA}$ ;

$$\Delta l_t + \Delta l_X + \Delta l_F = 0: 3\alpha_t \Delta t l + \frac{5X_A l}{2EA} + \frac{2Fl}{EA} = 0.$$

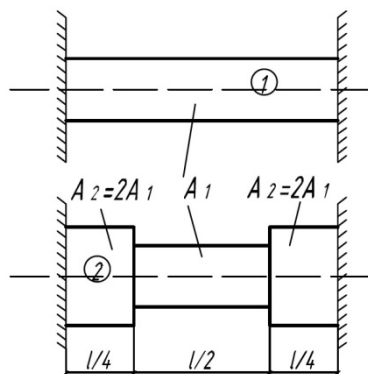
б)  $\Delta l_t = \alpha_t \Delta t \cdot l$ ;  $\Delta l_X = \frac{X_A l}{EA}$ ;  $\Delta l_F = \frac{Fl}{EA}$ ;

$$\Delta l_t + \Delta l_X + \Delta l_F = 0: \alpha_t \Delta t l + \frac{X_A l}{EA} + \frac{Fl}{EA} = 0.$$

в)  $\alpha_t \Delta t l \left( 3 - \frac{5}{2} \right) + \frac{Fl}{EA} \left( 2 - \frac{5}{2} \right) = 0$ ,  $F = \alpha_t \Delta t EA$ .

Ответ:  $F = \alpha_t \Delta t EA$ .

**6.5. В каком из двух стержней (1 или 2) возникает большее напряжение  $\sigma_t$ , вызванное охлаждением каждого стержня на  $\Delta t$ ? Каково отношение  $\sigma_1 / \sigma_{2,\max}$ ?**



Решение

1)  $\varepsilon_t + \varepsilon_N = 0$ :  $\sigma_1 = -E_1 \alpha_t \Delta t$ ;

2)  $\Delta l_t + \Delta l_N = 0$ :  $\alpha_t \Delta t l + 2 \frac{N l/4}{E_2 A_2} + \frac{N l/2}{E_1 A_1} = 0$ ,

$$N = -\frac{4}{3} E_1 A_1 \alpha_t \Delta t, \quad \sigma_{2,\max} = \frac{N}{A_1} \Rightarrow -\frac{4}{3} E_1 \alpha_t \Delta t.$$

Ответ:  $\frac{\sigma_1}{\sigma_{2,\max}} = \frac{3}{4}$ .

**6.6. Длины участков стержня  $a$ ,  $b$  и  $c$  могут изменяться так, чтобы  $a+b+c = \text{const}$ . При некоторых значениях длины  $c$ , изменяя размеры  $a$  и  $b$ , можно добиться, чтобы  $N_1 = |N_2|$ . Установить, для каких длин  $c$  возможно выполнить это условие.**



Решение

а)  $N_1 = R_A$ ,  $N_2 = -R_A \rightarrow$  по условию;

$$\Delta N \Rightarrow -2R_A = -F: \quad R_A = F/2;$$

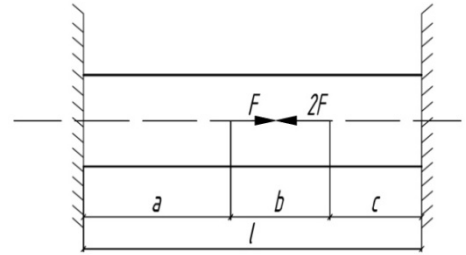
$$N_3 = R_B = R_A - F + 2F \Rightarrow 3F/2;$$

б)  $\Delta l = \frac{N_1 a}{EA} + \frac{N_2 b}{EA} + \frac{N_3 c}{EA} \Rightarrow 0: a - b + 3c = 0;$

в)

$$b = l - a - c: 2a + 4c = l, c = \frac{l}{4} - \frac{a}{2}; a \geq 0: c \leq l/4.$$

Ответ:  $0 \leq c \leq l/4$ .



**6.7. Квадратный стержень ( $2a \times 2a$ ) состоит из двух половинок, изготовленных из разных материалов ( $E_1 > E_2$ ). Считая концевую пластину 3 абсолютно жесткой, определить эксцентриситет приложения силы  $P$ , при котором каждый стержень будет находиться в состоянии осевого растяжения.**

Решение

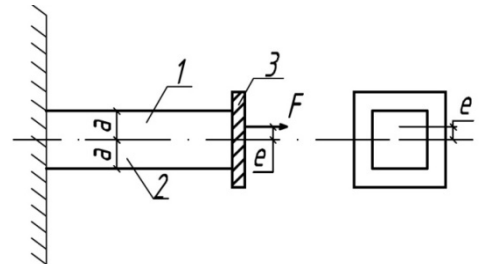
Положение нейтральной оси  $X$  при изгибе:

$$\sigma = E_i \varepsilon \Rightarrow E_i \frac{1}{\rho} y, \quad -(a+e) \leq y \leq (a-e);$$

$$N = \int_A \sigma dA = \int_{A_1} \sigma dA + \int_{A_2} \sigma dA \Rightarrow 0:$$

$$\frac{1}{\rho} \cdot (E_1 S_{1,X} + E_2 S_{2,X}) = 0, \quad E_1 2a^2 \left( \frac{a}{2} - e \right) - E_2 2a^2 \left( \frac{a}{2} + e \right) = 0.$$

Ответ:  $e = \frac{a(E_1 - E_2)}{2(E_1 + E_2)}$ .



**6.9. Под каким углом  $\phi$  нужно приложить силу  $F$  к узлу, чтобы его перемещение было направлено по вертикали? Материал стержней один и тот же.**

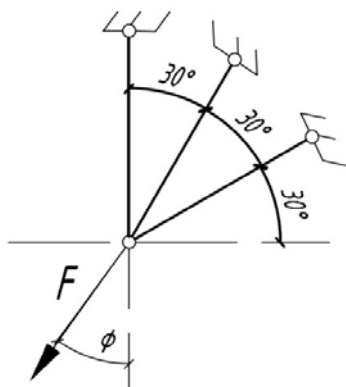


Рис. 6.9

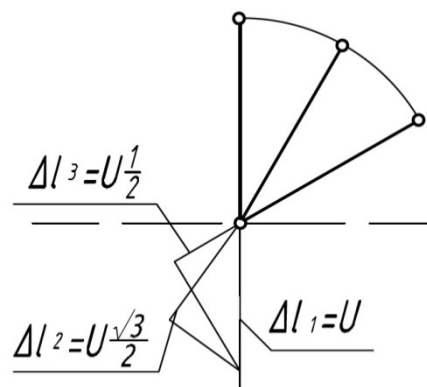


Рис. 6.9(а)

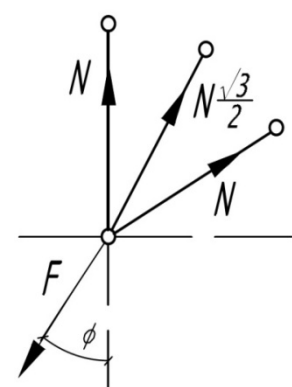


Рис. 6.9(б)

Решение

а) Статика. Из равновесия узла:

$$\begin{aligned} \sum X = 0: F \sin \varphi &= N_2 \sin 30^\circ + N_3 \sin 60^\circ; \\ \sum Y = 0: F \cos \varphi &= N_1 + N_2 \cos 30^\circ + N_3 \cos 60^\circ. \end{aligned}$$

б) Геометрия. По условию,  $u = \delta_y$ :

$$\Delta l_1 = u, \quad \Delta l_2 = u \cos 30^\circ, \quad \Delta l_3 = u \cos 60^\circ;$$

$$\Delta l_2 = \Delta l_1 \frac{\sqrt{3}}{2}; \quad \Delta l_3 = \Delta l_1 \frac{1}{2}.$$

в) Физика.  $\Delta l_1 = \frac{N_1 l}{EA_1} \Rightarrow \frac{N_1 l}{EA}, \quad \Delta l_2 = \frac{N_2 l}{EA_2} \Rightarrow \frac{N_2 l}{EA}; \quad \Delta l_3 = \frac{N_3 l}{EA_3} \Rightarrow \frac{N_3 l}{2EA}.$

Тогда,  $N_3 = N_1 \Rightarrow N; \quad N_2 = N_1 \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow N \frac{\sqrt{3}}{2};$

$$F \sin \varphi = N_1 \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{2} + N_1 \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow N_1 \frac{3\sqrt{3}}{4}; \quad F \cos \varphi = N_1 + N_1 \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + N_1 \frac{1}{2} \Rightarrow N_1 \frac{9}{4}.$$

Ответ:  $\tan \varphi = \frac{1}{\sqrt{3}}, \quad \varphi = 30^\circ.$

**6.10. Стержни  $AB$  и  $BC$  выполнены из одного материала. Углы  $\varphi$  и  $\psi$  заданы. Найти соотношение между длинами  $l_1$  и  $l_2$ , при котором в стержнях фермы не возникают температурные усилия от нагревания стержней  $AB$  и  $BC$  на  $\Delta t$ .**

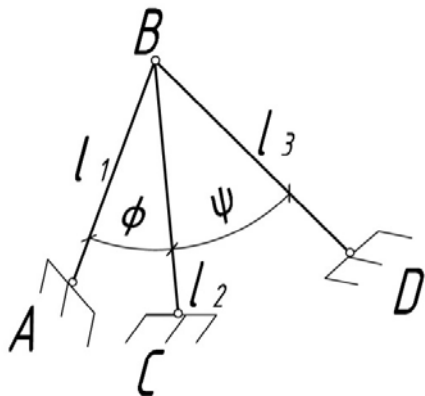


Рис. 6.10

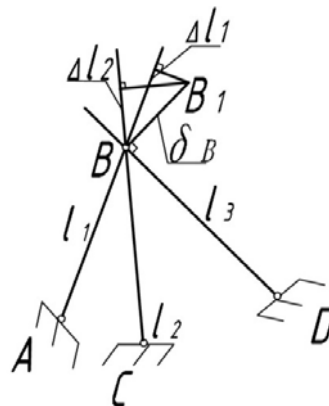


Рис. 6.10(a)

**Решение**

$$N_1 = N_2 = N_3 \Rightarrow 0, \text{ если } \Delta l_3 = 0, \text{ т.е. } \delta_B \perp l_3.$$

$$\Delta l_1 = \delta_B \cos\left(\varphi + \psi - \frac{\pi}{2}\right) = \delta_B \sin(\varphi + \psi) \Rightarrow \alpha_t \Delta t l_1, \quad l_1 = \frac{\delta_B \sin(\varphi + \psi)}{\alpha_t \Delta t};$$

$$\Delta l_2 = \delta_B \cos\left(\frac{\pi}{2} - \psi\right) = \delta_B \sin \psi \Rightarrow \alpha_t \Delta t l_2, \quad l_2 = \frac{\delta_B \sin \psi}{\alpha_t \Delta t}.$$

Ответ:  $l_1 / l_2 = \sin(\varphi + \psi) / \sin \psi.$

**6.12. Абсолютно жесткий брус поддерживается  $k$  стержнями ( $k$  – произвольное число), изготовленными из одного материала и одинаковой площади ( $l_1 = a, l_2 = 2a, l_k = ka$ ). Определить усилия в стержнях.**

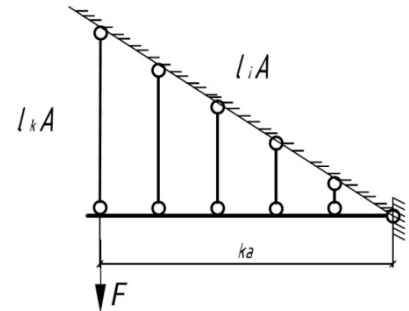
Решение

$$l_i = i \cdot a, \quad i = 1, 2, \dots, k;$$

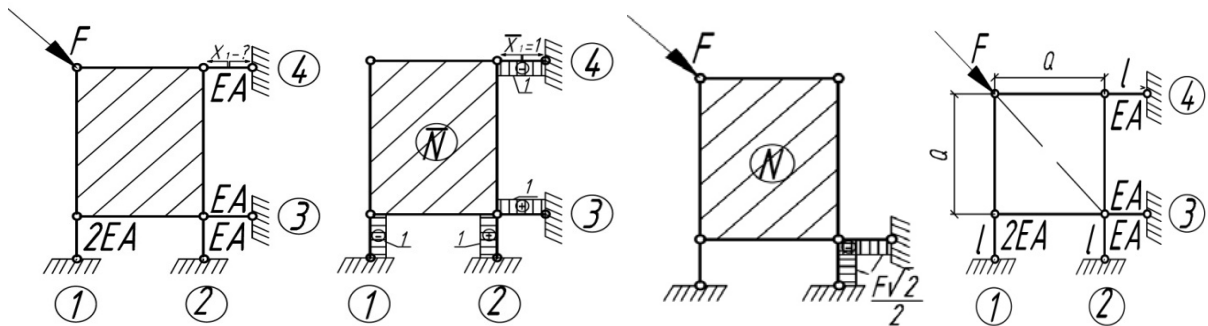
$$\Delta l_i = d\varphi \cdot ia = d\varphi \cdot l_i \Rightarrow \frac{N_i \cdot l_i}{EA}: \quad N_i = d\varphi \cdot EA = N;$$

$$F \cdot ka = \sum_1^k N_i \cdot ia \Rightarrow Na \cdot \sum_1^k i = Na \cdot \frac{k(k+1)}{2}.$$

Ответ:  $N_i = \frac{2F}{k+1}.$



**6.13. Определить усилия в стержнях, поддерживающих абсолютно жесткую плиту.**



Решение

Система один раз статически неопределима:  $\delta_{11}X_1 + \Delta_{1F} = 0.$

$$\delta_{11} = \sum \int \frac{\bar{N} \cdot \bar{N}}{EA_i} ds \Rightarrow \frac{l^2}{EA} \cdot 3 + \frac{l^2}{2EA} = \frac{7l}{2EA};$$

$$\Delta_{1F} = \sum \int \frac{\bar{N} \cdot N}{EA_i} ds \Rightarrow \frac{-F\sqrt{2} \cdot l \cdot 1}{2 \cdot EA} \cdot 2 = \frac{-Fl\sqrt{2}}{EA};$$

$$X_1 = -\frac{\Delta_{1F}}{\delta_{11}} \Rightarrow \frac{2\sqrt{2}}{7} F; \quad N = \bar{N} \cdot X_1 + N_F.$$

Ответ:  $N_1 = N_4 = -\frac{2\sqrt{2}}{7} F; \quad N_2 = N_3 = -\frac{3\sqrt{2}}{14} F.$

**6.14. Абсолютно жесткая рама  $ABCD$  закреплена, как показано на рисунке. Определить усилия в стержнях 1 и 2 при действии на раму сосредоточенного момента  $M$ , если известно, что жесткости стержней одинаковы:  $E_1A_1 = E_2A_2 = EA$ , а их длины  $l_1 = a, l_2 = c$ .**

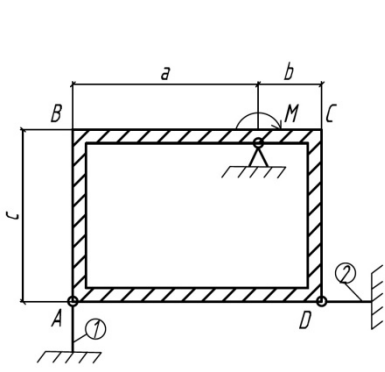


Рис. 6.14

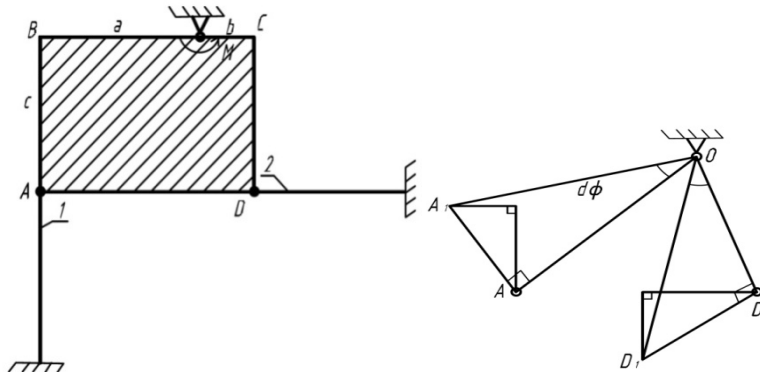


Рис. 6.14(a)

### Решение

$$\delta_A \perp l_{AM}: \Delta l_1 = \delta_A \cdot \frac{a}{\sqrt{a^2 + c^2}} \Rightarrow d\varphi \sqrt{a^2 + c^2} \cdot \frac{a}{\sqrt{a^2 + c^2}} = d\varphi \cdot a \Rightarrow \frac{N_1 \cdot a}{E_1 A_1};$$

$$\delta_D \perp l_{DM}: \Delta l_2 = \delta_D \cdot \frac{c}{\sqrt{b^2 + c^2}} \Rightarrow d\varphi \sqrt{b^2 + c^2} \cdot \frac{c}{\sqrt{b^2 + c^2}} = d\varphi \cdot c \Rightarrow \frac{N_2 \cdot c}{E_2 A_2}.$$

$$\sum M = 0: M = N_1 \cdot a + N_2 \cdot c; \quad N_1 = N_2 = N: \quad N = \frac{M}{a + c}.$$

Ответ:  $N_1 = N_2 = \frac{M}{a + c}$ .

**6.15.** Стержневая система состоит из двух параллельных абсолютно жестких балок  $AB$  и  $CD$ , соединенных четырьмя упругими вертикальными стержнями, имеющими одинаковые жесткости на растяжение. Определить усилия в стержнях, возникающие после приложения к балкам в точках  $B$  и  $C$  одинаковых по величине моментов  $M$ .

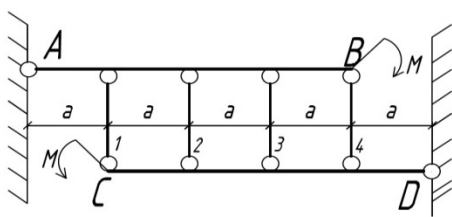


Рис. 6.15

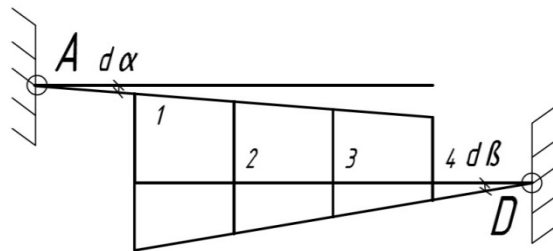


Рис. 6.15(a)

### Решение

Статика.

$$\sum_A M = 0: N_1 \cdot 1 + N_2 \cdot 2 + N_3 \cdot 3 + N_4 \cdot 4 = -M / a;$$

$$\sum_D M = 0: N_1 \cdot 4 + N_2 \cdot 3 + N_3 \cdot 2 + N_4 \cdot 1 = +M / a.$$

$$N_1 + N_2 + N_3 + N_4 = 0;$$

$$(N_1 - N_4) \cdot 3 + N_2 - N_3 = 2M / a.$$

Геометрия.

$$\Delta l_1 = d\beta \cdot 4a - d\alpha \cdot 1a; \quad \Delta l_2 = d\beta \cdot 3a - d\alpha \cdot 2a;$$

$$\Delta l_4 = d\beta \cdot 1a - d\alpha \cdot 4a; \quad \Delta l_3 = d\beta \cdot 2a - d\alpha \cdot 3a.$$

$$\Delta l_1 + \Delta l_4 = \Delta l_2 + \Delta l_3;$$

$$\Delta l_1 - \Delta l_4 = (\Delta l_2 - \Delta l_3) \cdot 3.$$

Физика.

$$\Delta l_1 = \frac{N_1 a}{EA}; \quad \Delta l_2 = \frac{N_2 a}{EA}; \quad \Delta l_3 = \frac{N_3 a}{EA}; \quad \Delta l_4 = \frac{N_4 a}{EA}.$$

$$N_1 + N_4 = N_2 + N_3;$$

$$N_1 - N_4 = (N_2 - N_3) \cdot 3.$$

$$N_1 = -N_4;$$

$$N_2 = -N_3;$$

$$N_1 = 0,3M / a; \quad N_2 = 0,1M / a.$$

Ответ:  $N_1 = 0,3M / a$ ;  $N_2 = 0,1M / a$ ;  $N_3 = -0,1M / a$ ;  $N_4 = -0,3M / a$ .

**6.16. В четырех одинаковых стержнях созданы одинаковые начальные усилия  $N_0$ . Определить усилия в стержнях 1, 2, 3, которые возникнут после удаления стержня 4. Балку  $OA$  считать абсолютно жесткой.**

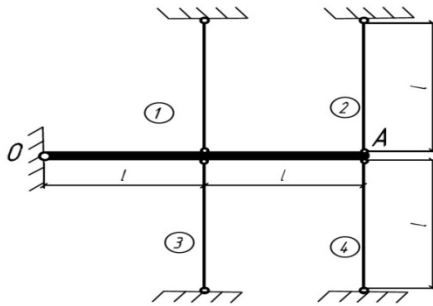


Рис. 6.16

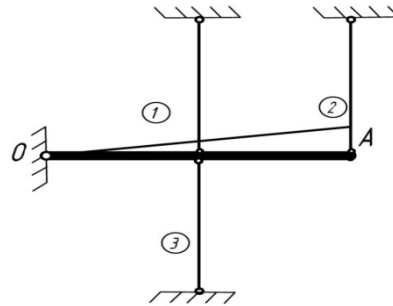


Рис. 6.16(a)

### Решение

Статика:  $\sum_A M = 0: (N_1 + N_0) \cdot 1l - (N_3 + N_0) \cdot 1l + (N_2 + N_0) \cdot 2l = 0;$

$$N_1 - N_3 + N_2 \cdot 2 = -N_0 \cdot 2.$$

Геометрия:

$$-\Delta l_1 = \Delta l_3; \quad \Delta l_1 \cdot 2 = \Delta l_2.$$

Физика:

$$\Delta l_1 = \frac{N_1 l}{EA}; \quad \Delta l_2 = \frac{N_2 l}{EA}; \quad \Delta l_3 = \frac{N_3 l}{EA}.$$

$$-N_1 = N_3; \quad N_1 \cdot 2 = N_2.$$

$$N_1 = -\frac{N_0}{3}; \quad N_2 = -\frac{2N_0}{3}; \quad N_3 = \frac{N_0}{3}.$$

Ответ:  $N_{i,ок} = N_i + N_0$ :  $N_{1,ок} = \frac{2N_0}{3}$ ;  $N_{2,ок} = \frac{N_0}{3}$ ;  $N_{3,ок} = \frac{4N_0}{3}$ .

**6.18. Сила  $F$  приложена в центре колеса, имеющего 12 одинаковых (по длине  $l$ , площади  $A$  и материалу  $E$ ) спиц, делящих окружность на равные секторы. Считая обод колеса**

абсолютно жестким, определить опускание точки приложения силы  $F$ .

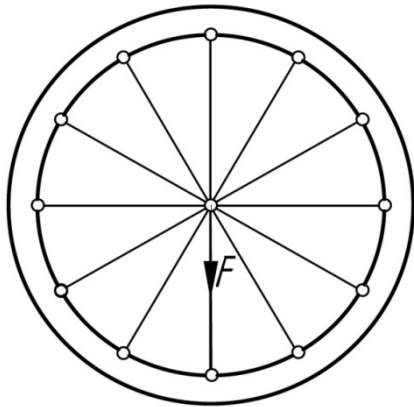


Рис. 6.18

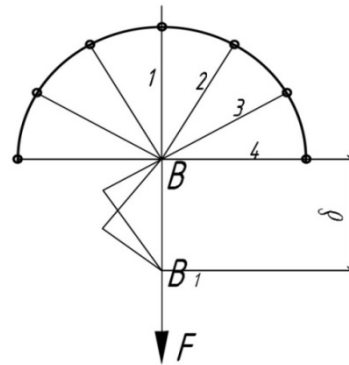


Рис. 6.18(a)

**Решение**

Ось  $Y \rightarrow$  симметричная, а ось  $X \rightarrow$  кососимметричная деформации спиц.

Статика:  $\sum Y = 0: 2 \cdot N_1 + 4 \cdot N_2 \cdot \cos \frac{\pi}{6} + 4 \cdot N_3 \cdot \cos \frac{\pi}{3} + 2 \cdot 0 = F.$

$$N_1 + N_2 \sqrt{3} + N_3 = F / 2.$$

Геометрия:  $\Delta l_2 = \Delta l_1 \cos \frac{\pi}{6} = \Delta l_1 \frac{\sqrt{3}}{2}; \quad \Delta l_3 = \Delta l_1 \cos \frac{\pi}{3} = \Delta l_1 \frac{1}{2}; \quad \Delta l_4 = 0.$

$$\Delta l_1 + \Delta l_3 = \Delta l_2 \cdot 2.$$

Физика:  $\Delta l_i = \frac{N_i l}{EA}; \quad N_2 = N_1 \frac{\sqrt{3}}{2}; \quad N_3 = N_1 \frac{1}{2}; \quad N_4 = 0.$

$$N_1 = F / 6; \quad N_2 = F \sqrt{3} / 12; \quad N_3 = F / 12; \quad N_4 = 0.$$

$$\delta_B = \sum \int \frac{N \cdot \bar{N}}{EA} ds = \frac{l}{EA} \sum N_i \cdot \bar{N}_i \Rightarrow \frac{Fl}{EA} \left[ 2 \left( \frac{1}{6} \right)^2 + 4 \left( \frac{\sqrt{3}}{12} \right)^2 + 4 \left( \frac{1}{12} \right)^2 + 2 \cdot 0^2 \right].$$

Ответ:  $\delta_B = \frac{Fl}{6EA}.$

**6.19.** К крайнему узлу  $O$  полубесконечной стержневой системы приложена сила  $F$ . Определить перемещение этого узла, если длины всех стержней  $l$  и жесткости  $EA$  одинаковы.

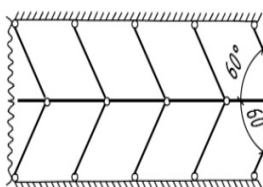


Рис. 6.19

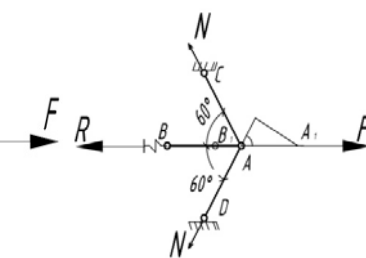


Рис. 6.19(a)

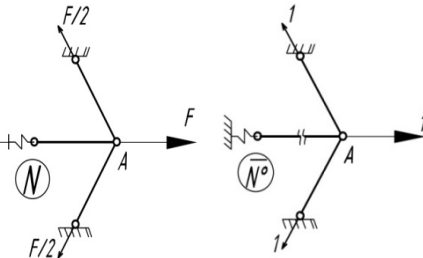


Рис. 6.19(б)

### Решение

Статика:  $\sum X = 0: F = R + 2N \cos 60^\circ = R + N.$

Геометрия:  $\delta_A = F \cdot \Delta_k, \delta_B = R \cdot \Delta_k, \Delta_k = \frac{1}{r_k} \rightarrow$  податливость системы.

$$\delta_A = AA_1; \quad \delta_B = BB_1 \quad (\text{рис 6.19(a)}).$$

$$\delta_A - \delta_B = \Delta l_{AB}: \quad (F - R) \cdot \Delta_k \Rightarrow N \cdot \Delta_k = \Delta l_{AB};$$

$$\delta_A \cos 60^\circ = \Delta l_{AD}, \quad (F \cdot \Delta_k) \cdot \frac{1}{2} = \Delta l_{AD}.$$

Физика:  $\Delta l_{AB} = \frac{Rl}{EA}: \quad N \cdot \Delta_k = \frac{(F - N)l}{EA};$

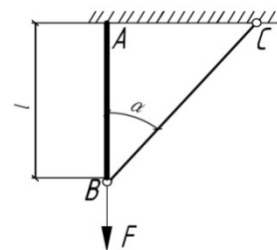
$$\Delta l_{AD} = \frac{Nl}{EA}: \quad \frac{F}{2} \cdot \Delta_k = \frac{Nl}{EA}.$$

$$\frac{2N}{F} = \frac{F - N}{N}, \quad N = \frac{F}{2}; \quad R = \frac{F}{2}.$$

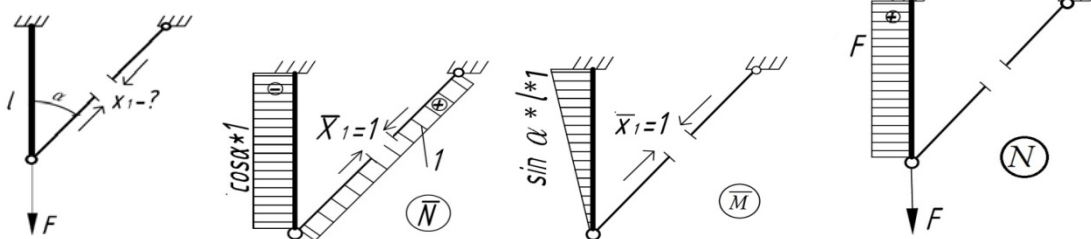
$$\delta_A = \sum \int \frac{N \cdot \bar{N}^o}{EA} ds = \frac{l}{EA} \cdot \sum N_i \cdot \bar{N}_i^o \Rightarrow \frac{1}{EA} \cdot \left[ 2 \cdot \frac{F}{2} \cdot l \cdot 1 \right] \quad (\text{рис 6.19(б)}).$$

Ответ:  $\delta_A = \frac{Fl}{EA}.$

**6.20. Вертикальный стержень  $AB$  заделан концом  $A$  в потолок и растягивается силой  $F$ . Конец стержня  $AB$  поддерживается тягой  $BC$ , направленной к нему под углом  $\alpha$ . Для стержня  $AB$   $l, A, I, E$  и для тяги  $BC$   $E, A$  заданы. Определить усилие в тяге  $BC$ .**



### Решение



Система один раз статически неопределима:  $\delta_{11}X_1 + \Delta_{1F} = 0.$

$$\delta_{11} = \sum \int \frac{\bar{N} \cdot \bar{N}}{EA_i} ds + \sum \int \frac{\bar{M} \cdot \bar{M}}{EI} ds \Rightarrow \frac{(-1 \cos \alpha)^2 \cdot l}{EA} + \frac{l^2 \cdot l}{EA \cos \alpha} + \frac{l(l \sin \alpha)^2}{3EI};$$

$$\Delta_{1F} = \sum \int \frac{\bar{N} \cdot N_F}{EA_i} ds \Rightarrow \frac{F \cdot l \cdot (-1 \cos \alpha)}{EA};$$

$$X_1 = -\frac{\Delta_{1F}}{\delta_{11}} \Rightarrow \frac{F \cos \alpha}{\cos^2 \alpha + 1/\cos \alpha + Al^2 \sin^2 \alpha / (3I)}$$

Ответ:  $N_{BC} = \frac{F \cos \alpha}{\cos^2 \alpha + 1/\cos \alpha + Al^2 \sin^2 \alpha / (3I)}$ .

**6.21. Балка, шарнирно-опертая по концам, изгибается силой  $F$ , после чего повернутые концевые сечения защемляются для предотвращения последующих поворотов. Построить эпюру изгибающих моментов, действующих в балке после снятия нагрузки  $F$ .**

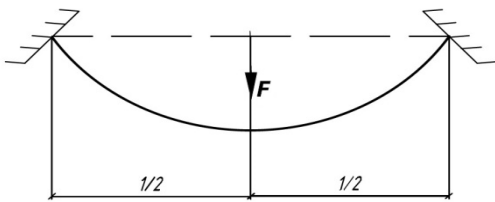


Рис. 6.21

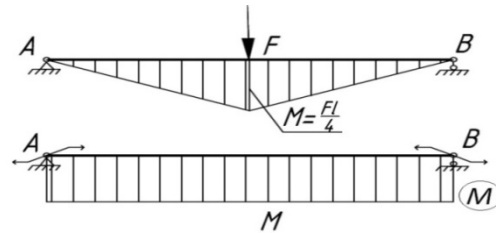


Рис. 6.21(а)

**Решение**

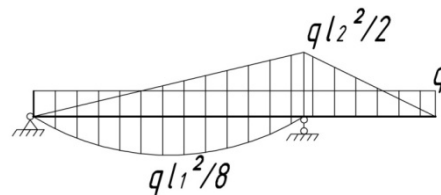
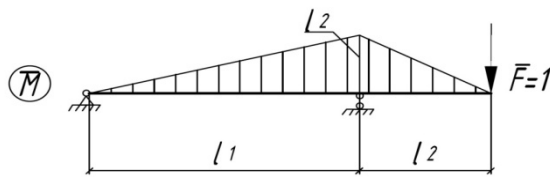
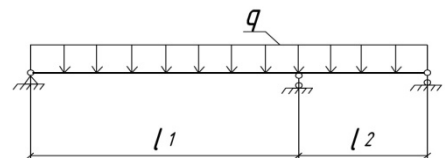
$$\varphi_{AB}^F = \sum \int \frac{M_F \cdot \bar{M}_M}{EI} ds \Rightarrow \frac{1}{EI} \left[ \frac{Fl}{4} \cdot \frac{l}{2} \cdot 1 \right]; \quad \varphi_{AB}^M = \sum \int \frac{M_M \cdot \bar{M}_M}{EI} ds \Rightarrow \frac{1}{EI} [M \cdot l \cdot 1].$$

$$\varphi_{AB}^F = \varphi_{AB}^M :$$

Ответ:  $M = Fl / 8$ .

**6.22. При каком соотношении длин пролетов  $l_1/l_2$  реакция правой опоры балки будет равна нулю?**

**Решение**



$R_C = 0 \rightarrow$  по условию, т.е. при отсутствии опоры  $C$ :

$$\vartheta_C = \sum \int \frac{M \cdot \bar{M}}{EI} ds \Rightarrow \frac{1}{EI} \left[ \frac{l_2}{3} \cdot \frac{ql_2^2}{2} \cdot \frac{3}{4} l_2 + \frac{l_1}{3} \cdot \frac{ql_2^2}{2} \cdot l_2 - \frac{2l_1}{3} \cdot \frac{ql_1^2}{8} \cdot \frac{1}{2} l_2 \right].$$

$$\vartheta_C = 0: \quad \frac{ql_2^4}{24EI} \cdot \left( 3 + 4 \cdot \left( \frac{l_1}{l_2} \right) - \left( \frac{l_1}{l_2} \right)^3 \right) = 0.$$

Ответ:  $l_1 / l_2 \approx 2,3028$ .



**6.24.** На какую величину по вертикали надо сместить правую опору, чтобы наибольший изгибающий момент в балке имел бы возможно меньшее значение?

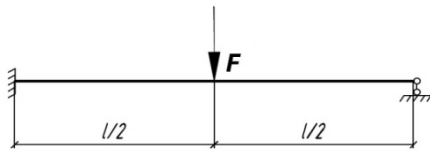


Рис. 6.24

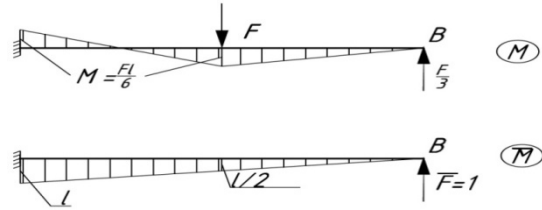


Рис. 6.24(а)

**Решение**

$$M_C = -M_A: \quad R_B \frac{l}{2} = -R_B l + F \frac{l}{2}, \quad R_B = F/3; \quad M_C = \frac{Fl}{6}.$$

$$\vartheta_B = \sum \int \frac{M \cdot \bar{M}}{EI} ds \Rightarrow \frac{1}{EI} \left[ \frac{l/2}{3} \cdot \frac{Fl}{6} \cdot \frac{l}{2} + \frac{l/2}{6} \frac{Fl}{6} \left( 2 \cdot \left( \frac{l}{2} - l \right) + \left( l - \frac{l}{2} \right) \right) \right] = \frac{Fl^3}{24 \cdot 6}.$$

Ответ:  $\delta_B = \frac{Fl^3}{144}$  вверх.

**6.25.** Для балки  $ABCD$ , нагруженной распределенной нагрузкой  $q(z)$  на пролетах  $BC$  и  $CD$ , найти отношение моментов в надпорных сечениях  $A$  и  $B$ .

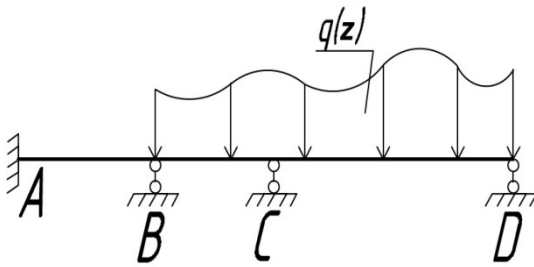


Рис. 6.25

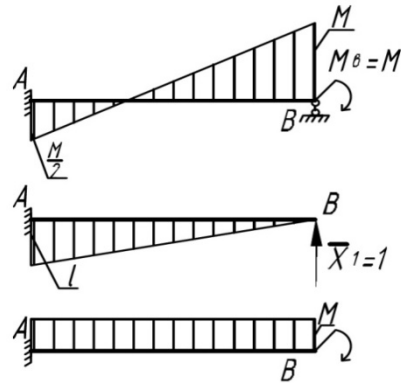


Рис. 6.25(а)

**Решение**

$\vartheta_A = 0, \varphi_A = 0; \quad \vartheta_B = 0, \varphi_B \neq 0, M_B = M \rightarrow$  шарнирная опора в  $B$ .

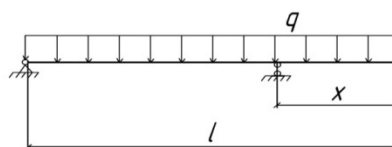
Балка один раз статически неопределима:  $\delta_{11} X_1 + \Delta_{1F} = 0$ .

$$\delta_{11} = \sum \int \frac{\bar{M} \cdot \bar{M}}{EI} ds \Rightarrow \frac{l^3}{3EI}; \quad \Delta_{1F} = \sum \int \frac{M \cdot \bar{M}}{EI} ds \Rightarrow -\frac{Ml^2}{2EI}; \quad X_1 = -\frac{\Delta_{1F}}{\delta_{11}} \Rightarrow \frac{3M}{2l}.$$

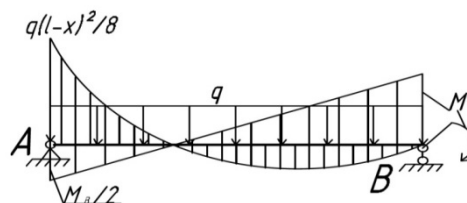
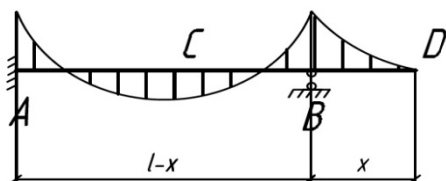
$$M_A = M - X_1 l \Rightarrow -M/2.$$

Ответ:  $M_B / M_A = -2$ .

6.26. При каком положении шарнирной опоры балка постоянного сечения обладает наибольшей грузоподъемностью из условия прочности по нормальным напряжениям.



Решение



$$M_B = M_A, \quad \text{где} \quad M_B = -\frac{qx^2}{2}, \quad M_A \Rightarrow -\frac{M_B}{2} - \frac{q(l-x)^2}{8};$$

$$M_B = M_A: \quad \frac{3x^2}{4} = \frac{(l-x)^2}{8}, \quad x = \frac{l}{1+\sqrt{6}} \rightarrow M_{\max}: \quad M_A = M_B \approx ql^2 \cdot 0,042;$$

$$\text{Ответ: } x = \frac{l}{1+\sqrt{6}} \approx 0,29l.$$

6.27. Как распределяется сила  $F$  между двумя балками прямоугольного сечения, которые различаются только высотой?

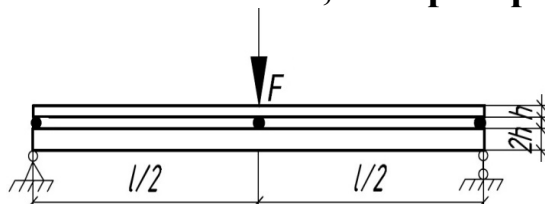


Рис. 6.27

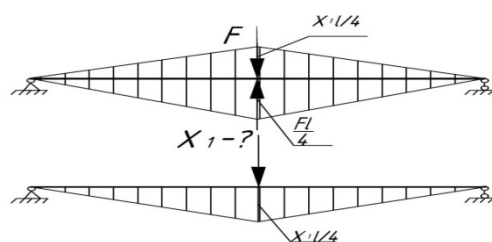


Рис. 6.27(а)

Решение

$$\vartheta_A = \vartheta_B \Rightarrow 0; \quad \Delta\vartheta_C = 0. \quad I_1 = \frac{bh^3}{12} \Rightarrow I, \quad I_2 = \frac{b(2h)^2}{12} \Rightarrow 8I.$$

Система один раз статически неопределима:  $\delta_{11}X_1 + \Delta_{1F} = 0$ .

$$\delta_{11} = \sum \int \frac{\bar{M} \cdot \bar{M}}{EI_i} ds \Rightarrow \frac{2}{EI_1} \left[ \frac{1}{3} \cdot \frac{l}{2} \cdot \left(\frac{1l}{4}\right)^2 \right] + \frac{2}{EI_2} \left[ \frac{1}{3} \cdot \frac{l}{2} \cdot \left(\frac{1l}{4}\right)^2 \right] = \frac{9}{8} \cdot \frac{l^3}{48EI};$$

$$\Delta_{1F} = \sum \int \frac{M \cdot \bar{M}}{EI} ds \Rightarrow -\frac{2}{EI_1} \left[ \frac{1}{3} \cdot \frac{l}{2} \cdot \frac{Fl}{4} \cdot \frac{1l}{4} \right] = -\frac{Fl^3}{48EI}; \quad X_1 = -\frac{\Delta_{1F}}{\delta_{11}} \Rightarrow \frac{8F}{9}.$$

$$\text{Ответ: } F_1 = F - X_1 \Rightarrow F/9; \quad F_2 = X_1 \Rightarrow 8F/9.$$

6.29. Между двумя консольными балками  $AB$  и  $CD$  установлен абсолютно жесткий каток. До нагружения зазор между балками равен диаметру катка  $d$ . Определить наибольшее

значение  $\lambda$ -зазора при нагружении верхней балки на свободном конце сосредоточенной силой  $F$ , если изгибная жесткость сечения верхней балки равна  $EI$ , а нижней –  $4EI$ .

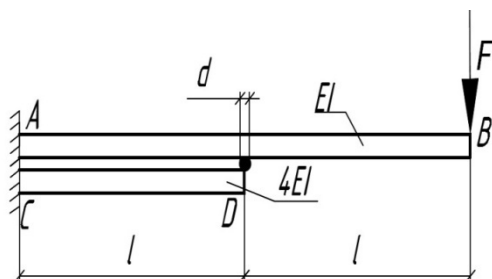


Рис. 6.29

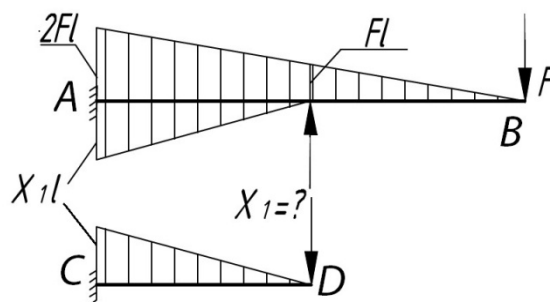


Рис. 6.29(a)

### Решение

$$\vartheta_A = \vartheta_C = 0, \quad \varphi_A = \varphi_C = 0; \quad \Delta\vartheta_D = 0. \quad I_1 = I, \quad I_2 = 4I.$$

Система один раз статически неопределима:  $\delta_{11}X_1 + \Delta_{1F} = 0$ .

$$\delta_{11} = \sum \int \frac{\bar{M} \cdot \bar{M}}{EI_i} ds \Rightarrow \frac{1}{EI_1} \left[ \frac{l}{3} \cdot (1l)^2 \right] + \frac{1}{EI_2} \left[ \frac{l}{3} \cdot (1l)^2 \right] = \frac{5l^3}{12EI};$$

$$\Delta_{1F} = \sum \int \frac{M \cdot \bar{M}}{EI} ds \Rightarrow -\frac{1}{EI_1} \left[ \frac{l}{6} \cdot Fl \cdot (2 \cdot 2 \cdot 1l + 1l) \right] = -\frac{5Fl^3}{6EI}; \quad X_1 = -\frac{\Delta_{1F}}{\delta_{11}} \Rightarrow 2F.$$

$$M_A \Rightarrow 0, \quad R_A \Rightarrow -F: \quad EI_1 \vartheta_1(z) = -F \frac{z^3}{6};$$

$$M_C \Rightarrow -2Fl, \quad R_C \Rightarrow 2F: \quad EI_2 \vartheta_2(z) = -2Fl \frac{z^2}{2} + 2F \frac{z^3}{6}.$$

$$\lambda(z) = \vartheta_1(z) - \vartheta_2(z) + d \Rightarrow \frac{1}{EI} \left[ \frac{Fl}{2} \cdot \frac{z^2}{2} - \frac{3F}{2} \cdot \frac{z^3}{6} \right] + d.$$

$$\dot{\lambda} = \frac{1}{EI} \left[ \frac{Fl}{2} \cdot z - \frac{3F}{2} \cdot \frac{z^2}{2} \right] \Rightarrow 0: \quad z = \frac{2}{3}l; \quad \lambda_{\max} = \lambda\left(\frac{2l}{3}\right) \Rightarrow \frac{Fl^3}{27EI} + d.$$

Ответ:  $\lambda_{\max} = \frac{Fl^3}{27EI} + d.$

**6.30. Свободные концы консольных балок длиной  $l_1$  и  $l_2$  соединены абсолютно жестким стержнем. Определить  $A$  – работу силы  $F$  при статическом нагружении, считая жесткости сечений балок  $E_1I_1$  и  $E_2I_2$  известными.**

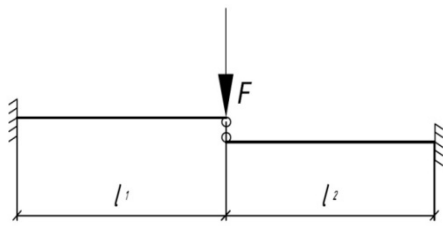


Рис. 6.30

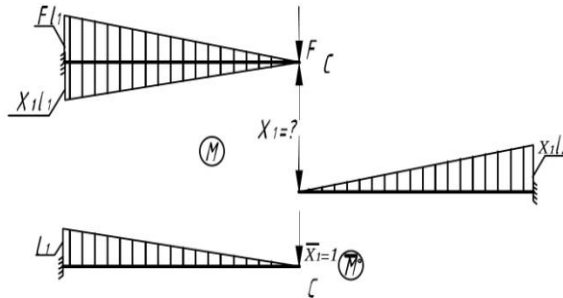


Рис. 6.30(a)

**Решение**

$$\vartheta_A = \vartheta_B = 0, \quad \varphi_A = \varphi_B = 0; \quad \Delta\vartheta_C = 0.$$

Система один раз статически неопределима:  $\delta_{11}X_1 + \Delta_{1F} = 0$ .

$$\delta_{11} = \sum \int \frac{\bar{M} \cdot \bar{M}}{E_i I_i} ds \Rightarrow \frac{1}{E_1 I_1} \left[ \frac{l_1}{3} \cdot (1l_1)^2 \right] + \frac{1}{E_2 I_2} \left[ \frac{l_2}{3} \cdot (1l_2)^2 \right] = \frac{l_1^3}{3E_1 I_1} + \frac{l_2^3}{3E_2 I_2};$$

$$\Delta_{1F} = \sum \int \frac{M \cdot \bar{M}}{E_i I_i} ds \Rightarrow -\frac{1}{E_1 I_1} \left[ \frac{l_1}{3} \cdot Fl_1 \cdot 1l_1 \right] = -\frac{Fl_1^3}{3E_1 I_1};$$

$$X_1 = -\frac{\Delta_{1F}}{\delta_{11}} \Rightarrow \frac{F \cdot E_2 I_2 l_1^3}{E_2 I_2 l_1^3 + E_1 I_1 l_2^3}.$$

$$\delta_C = \sum \int \frac{M \cdot \bar{M}^o}{E_i I_i} ds \Rightarrow \frac{1}{E_1 I_1} \left[ \frac{l_1}{3} \cdot Fl_1 \cdot 1l_1 - \frac{l_1}{3} \cdot X_1 l_1 \cdot 1l_1 \right] = \frac{l_1^3}{3E_1 I_1} (F - X_1).$$

$$A = \frac{F \cdot \delta_C}{2} \Rightarrow \frac{F^2 l_1^3 l_2^3}{6(E_2 I_2 l_1^3 - E_1 I_1 l_2^3)}.$$

Ответ:  $A = \frac{F^2 l_1^3 l_2^3}{6(E_2 I_2 l_1^3 - E_1 I_1 l_2^3)}.$

**6.31. Абсолютно жесткая плита весом  $Q$  установлена на две консоли и удерживается на них силами трения. Консоли изготовлены из одного материала с расчетным сопротивлением  $R = 160$  МПа и имеют различные диаметры поперечных сечений, равные  $d_1 = 4$  см,  $d_2 = 6$  см. Определить допускаемый вес плиты при  $b = 130$  см.**

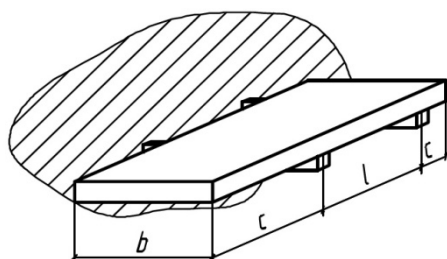


Рис. 6.31

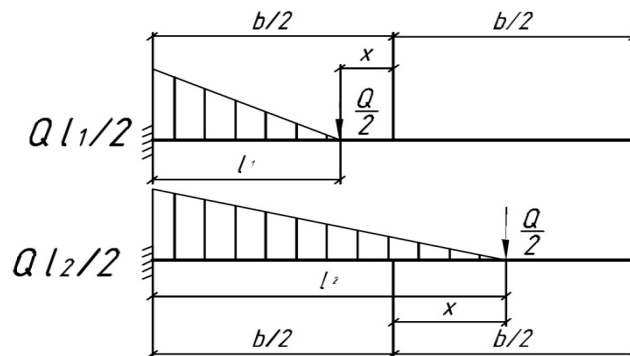


Рис. 6.31(a)

### Решение

$$M_i = \frac{Q}{2} l_i, \quad I_i = \frac{\pi d_i^4}{64}, \quad W_i = \frac{\pi d_i^3}{32}, \quad \varphi_{1,\max} = \varphi_{2,\max}.$$

$$l_1 = \frac{b}{2} - x, \quad \varphi_{1,\max} = \frac{Q}{2} \cdot \frac{l_1^2}{2EI_1}; \quad l_2 = \frac{b}{2} + x, \quad \varphi_{2,\max} = \frac{Q}{2} \cdot \frac{l_2^2}{2EI_2};$$

$$\varphi_{1,\max} = \varphi_{2,\max} : \quad \frac{l_1}{l_2} = \left( \frac{d_1}{d_2} \right)^2 : \quad x = \frac{1 - \left( \frac{d_1}{d_2} \right)^2}{1 + \left( \frac{d_1}{d_2} \right)^2} \cdot \frac{b}{2} \Rightarrow \frac{5}{13} \cdot \frac{b}{2}.$$

$$\frac{M_1}{W_1} \leq R : \quad Q \leq \frac{2}{l_1} R W_1 = \frac{13 R \pi d_1^3}{64 b} \Rightarrow 5027 \text{ Н}.$$

Ответ:  $Q \leq \frac{13 R \pi d_1^3}{64 b} \Rightarrow 5027 \text{ Н}.$

**6.32. Абсолютно жесткая балка AB весом G поддерживается двумя стержнями, материал и поперечное сечение которых одинаковы. Каков должен быть зазор  $\Delta$ , чтобы напряжения в стержнях после сборки стали равными: а) по алгебраической величине; б) по модулю?**

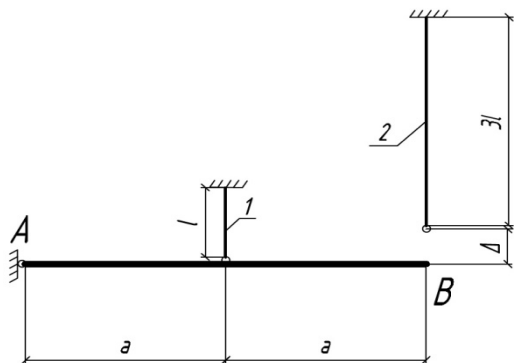


Рис. 6.32

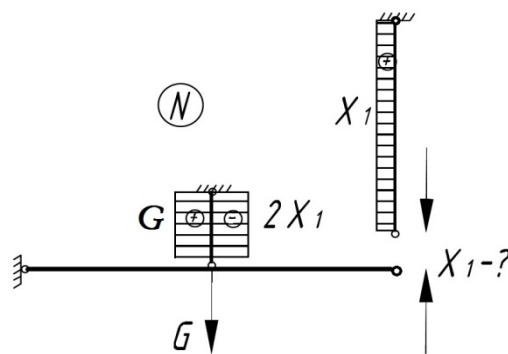


Рис. 6.32(а)

### Решение

Система один раз статически неопределима:  $\delta_{11} X_1 + \Delta_{1F} = \Delta$ .

$$\delta_{11} = \sum \int \frac{\bar{N} \cdot \bar{N}}{E_i A_i} ds \Rightarrow \frac{1}{E_1 A_1} [l \cdot (-2)^2] + \frac{1}{E_2 A_2} [3l \cdot (1)^2] = \frac{7l}{EA};$$

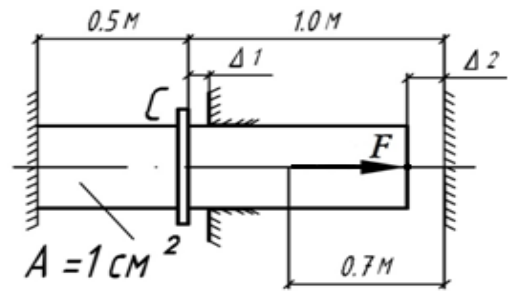
$$\Delta_{1F} = \sum \int \frac{N_G \cdot \bar{N}}{E_i A_i} ds \Rightarrow \frac{1}{E_1 A_1} [l \cdot G \cdot (-2)] = -\frac{2Gl}{EA}; \quad X_1 = \frac{\Delta - \Delta_{1F}}{\delta_{11}} \Rightarrow \frac{EA}{7l} \cdot \Delta + \frac{2G}{7}.$$

$$N_i = N_G + \bar{N} \cdot X_1 : \quad N_1 = G - 2X_1 \Rightarrow \frac{3G}{7} - \frac{EA}{7l} \cdot 2\Delta; \quad N_2 = X_1 \Rightarrow \frac{2G}{7} + \frac{EA}{7l} \cdot \Delta.$$

$$\begin{aligned}
 \text{а) } \sigma_1 = \sigma_2: \quad & \frac{1}{A_1} \cdot (G - 2X_1) = \frac{1}{A_2} \cdot X_1, \quad X_1 = G/3, \quad \Delta = \frac{Gl}{3EA}; \\
 \text{б) } -\sigma_1 = \sigma_2: \quad & -\frac{1}{A_1} \cdot (G - 2X_1) = \frac{1}{A_2} \cdot X_1, \quad X_1 = G, \quad \Delta = \frac{5Gl}{EA}.
 \end{aligned}$$

ОТВЕТ: а)  $\Delta = \frac{Gl}{3EA}$ ; б)  $\Delta = \frac{5Gl}{EA}$ .

**6.33.** Определить силу  $F_1$ , при которой буртик  $C$  стального стержня коснется опоры. При каком значении  $F_2$  правый торец стержня коснется опоры? Построить эпюры продольных сил и перемещений от сил  $F_1, F_2$ . Дано:  $\Delta_1 = 0,1$  мм,  $\Delta_2 = 0,25$  мм.



Решение

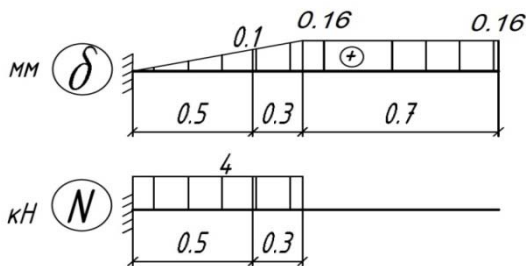


Рис. а) от  $F_1$

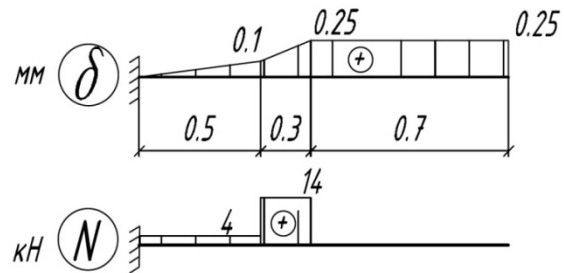


Рис. б) от  $F_2$

$$\text{а) } \delta_A = 0: \quad \Delta_1 = \Delta_{AC}, \quad \Delta F_1 = \frac{EA \cdot \Delta_1}{0,5 \text{ м}} \Rightarrow \frac{200 \text{ ГПа} \cdot 1 \text{ см}^2 \cdot 0,1 \text{ мм}}{0,5 \text{ м}} = 4 \text{ кН};$$

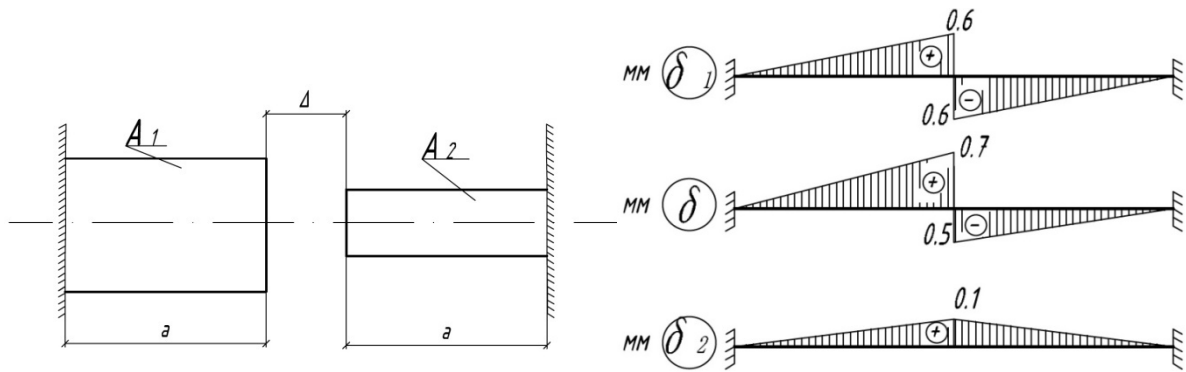
$$\text{б) } \Delta \delta_C = 0: (\Delta_2 - \Delta_1) = \Delta_{CD},$$

$$\Delta F_2 = \frac{EA \cdot (\Delta_2 - \Delta_1)}{(1 - 0,7) \text{ м}} \Rightarrow \frac{200 \text{ ГПа} \cdot 1 \text{ см}^2 \cdot 0,15 \text{ мм}}{0,3 \text{ м}} = 10 \text{ кН};$$

$$F_1 = \Delta F_1 \Rightarrow 4 \text{ кН}; \quad F_2 = F_1 + \Delta F_2 \Rightarrow 14 \text{ кН}.$$

ОТВЕТ:  $F_1 = 4$  кН;  $F_2 = 14$  кН.

**6.34.** Построить эпюру продольных перемещений поперечных сечений стальных стержней при их нагреве на  $\Delta t = 120^\circ$ . Рассмотреть два случая: в момент закрытия зазора и после нагрева на  $\Delta t = 120^\circ$ . Дано:  $A_1 = 2,5 \text{ см}^2$ ,  $A_2 = 2 \text{ см}^2$ ,  $\Delta = 1,2 \text{ мм}$ ,  $a = 1 \text{ м}$ ,  $\alpha_t = 12,5 \cdot 10^{-6}$ .



Решение

$$\delta_A = \delta_B \Rightarrow 0; \quad l_1 = l_2 \Rightarrow a; \quad \Delta \ll a.$$

$$1) \alpha_t \cdot \Delta t_1 \cdot (l_1 + l_2) = \Delta : \quad \Delta t_1 = \frac{\Delta}{\alpha_t \cdot 2 \cdot a} \Rightarrow \frac{1,2 \text{ мм}}{12,5 \cdot 10^{-6} \cdot 2 \cdot 1 \text{ м}} = 48^\circ;$$

$$2) \Delta t_2 = \Delta t - \Delta t_1 \Rightarrow 72^\circ;$$

$$\Delta l_t + \Delta l_N = 0: \quad \alpha_t \cdot \Delta t_2 \cdot (l_1 + l_2) - X \left( \frac{l_1}{EA_1} + \frac{l_2}{EA_2} \right) = 0,$$

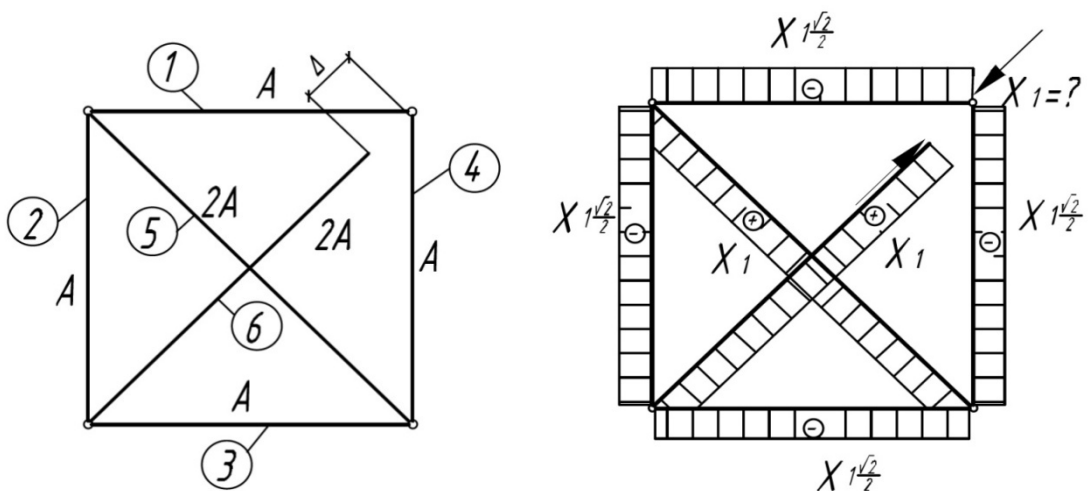
$$X = \frac{\alpha_t \cdot \Delta t_2 \cdot 2 \cdot E \cdot A_1 \cdot A_2}{(A_1 + A_2)} \Rightarrow \frac{12,5 \cdot 10^{-6} \cdot 72 \cdot 2 \cdot 200 \text{ ГПа} \cdot 2,5 \text{ см}^2 \cdot 2 \text{ см}^2}{(2,5 + 2) \text{ см}^2} = 40 \text{ кН};$$

$$\delta_C = \Delta l_1 = \alpha_t \cdot \Delta t_2 \cdot l_1 - \frac{X l_1}{EA_1} \Rightarrow 12,5 \cdot 10^{-6} \cdot 72 \cdot 1 \text{ м} - \frac{40 \text{ кН} \cdot 1 \text{ м}}{200 \text{ ГПа} \cdot 2,5 \text{ см}^2} = 0,1 \text{ мм}.$$

Ответ: 1)  $\delta_{C_1} = \frac{\Delta}{2} \Rightarrow 0,6 \text{ мм вправо}; \quad \delta_{C_2} = \frac{\Delta}{2} \Rightarrow 0,6 \text{ мм влево};$

2)  $\delta_{C_1} = \frac{\Delta}{2} + \delta_C \Rightarrow 0,7 \text{ мм вправо}; \quad \delta_{C_2} = \frac{\Delta}{2} - \delta_C \Rightarrow 0,5 \text{ мм влево}.$

6.36. Определить монтажные напряжения в стержнях, если один из диагональных стержней сделан на 0,1% короче проектного размера.



Решение

$$l_i = l \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad A_i = A, \quad i=1, \dots, 4; \quad l_i = l, \quad A_i = 2A, \quad i=5, 6.$$

$$\Delta = 0,1 \cdot 10^{-2} l.$$

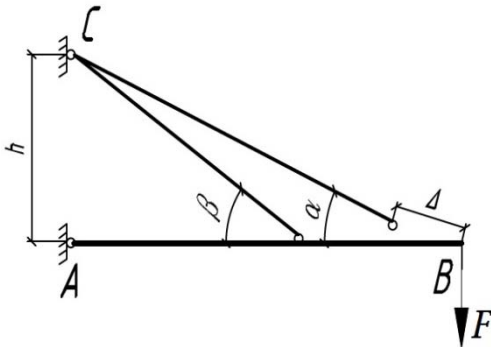
Система один раз статически неопределима:  $\delta_{11} X_1 + \Delta_{1F} = \Delta$ .

$$\delta_{11} = \sum \int \frac{\bar{N} \cdot \bar{N}}{EA_i} ds \Rightarrow \frac{1}{EA} \left[ l \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \left( -1 \frac{\sqrt{2}}{2} \right)^2 \right] \cdot 4 + \frac{1}{E2A} [l \cdot (1)^2] \cdot 2 = \frac{1 + \sqrt{2}}{EA} l;$$

$$\Delta_{1F} = \sum \int \frac{N \cdot \bar{N}}{EA_i} ds \Rightarrow 0; \quad X_1 = \frac{\Delta - \Delta_{1F}}{\delta_{11}} \Rightarrow \frac{EA}{1 + \sqrt{2}} \cdot \frac{\Delta}{l} = \frac{EA}{1 + \sqrt{2}} \cdot 10^{-3}. \quad \sigma_i = \frac{N_i}{A_i}.$$

$$\text{Ответ: } \sigma_i = -\frac{E\sqrt{2}}{2(1 + \sqrt{2})} \cdot 10^{-3}, \quad i=1, \dots, 4; \quad \sigma_i = \frac{E}{2(1 + \sqrt{2})} \cdot 10^{-3}, \quad i=5, 6.$$

**6.37. Определить величину монтажного зазора  $\Delta$  из условия, чтобы усилие в стержне  $BC$  после монтажа и приложения силы  $F$  стало равным нулю. Материал и сечения стержней одинаковы и заданы, размер  $h$  и величины углов  $\alpha$  и  $\beta$  считать известными.**



Решение

$$l_\alpha = \frac{h}{\sin \alpha} - \Delta; \quad l_\beta = \frac{h}{\sin \beta}.$$

По условию  $N_\alpha = 0$ .  $\sum_A M = 0$ :

$$N_\beta = F \frac{h}{\tan \alpha} \cdot \frac{1}{h \cos \beta} \Rightarrow \frac{F}{\tan \alpha \cdot \cos \beta};$$

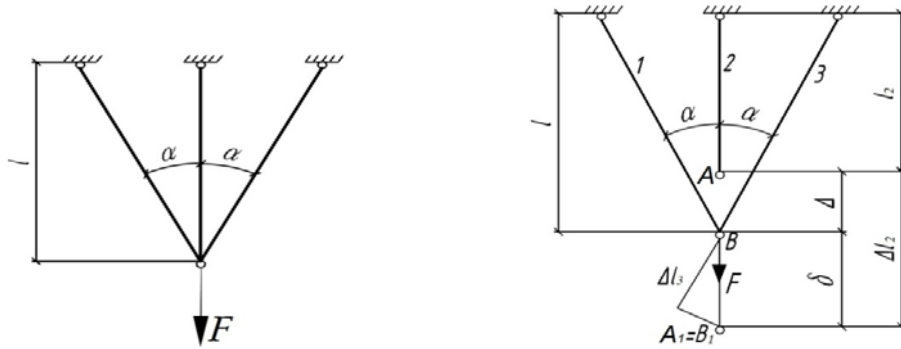
$$\delta_B = \sum \int \frac{N_\beta \cdot \bar{N}_\beta}{EA} ds \Rightarrow \frac{1}{EA} \left[ l_\beta \cdot \frac{F \cdot 1}{(\tan \alpha \cdot \cos \beta)^2} \right] = \frac{2Fh}{EA} \cdot \left[ \frac{\cos^2 \alpha}{\sin 2\beta \cdot \sin^2 \alpha \cdot \cos \beta} \right].$$

$$\Delta = -\delta_B \cdot \sin \alpha.$$

$$\text{Ответ: } \Delta = \frac{-2Fh}{EA} \cdot \left[ \frac{\cos^2 \alpha}{\sin 2\beta \cdot \sin \alpha \cdot \cos \beta} \right].$$

**6.39. Определить величину монтажного зазора  $\Delta$  среднего стержня, при которой после монтажа и приложения силы  $F$  нормальные напряжения во всех стержнях были бы равными. Сечения стержней одинаковые. Угол  $\alpha$  и размер  $l$  считать заданными.**





Решение

$$l_2 = l - \Delta, \quad l_1 = l_3 = l / \cos \alpha.$$

Статика:  $\sigma_i = \text{const}$ ,  $N_i = \sigma_i \cdot A_i = \text{const}$ ;

$$\sum Y = 0: 2N_1 \cos \alpha + N_2 = F, \quad N_i = \frac{F}{1 + 2 \cos \alpha}.$$

Геометрия:  $\Delta l_1 = \delta \cos \alpha$ ,  $\Delta l_2 = \Delta + \delta$ ;  $\Delta = \Delta l_2 - \frac{\Delta l_1}{\cos \alpha}$ .

Физика:

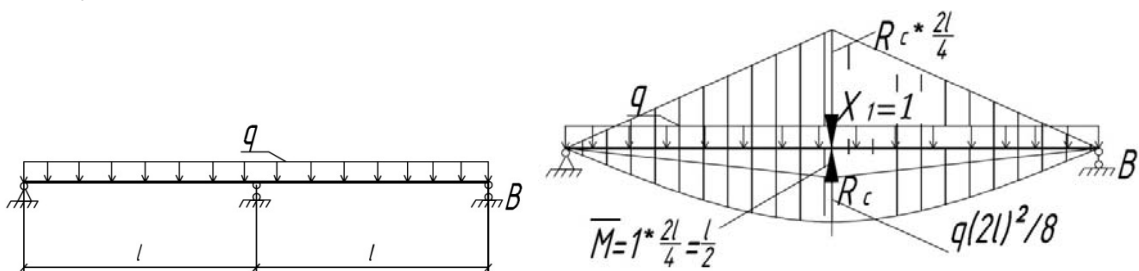
$$\Delta l_1 = \frac{N_1 \cdot l_1}{EA_1} = \frac{F \cdot l / \cos \alpha}{(1 + 2 \cos \alpha) \cdot EA}, \quad \Delta l_2 = \frac{N_2 \cdot l_2}{EA_2} = \frac{Fl}{(1 + 2 \cos \alpha) \cdot EA} \cdot \left(1 - \frac{\Delta}{l}\right);$$

$$\Delta = \frac{Fl}{(1 + 2 \cos \alpha) \cdot EA} \cdot \left(1 - \frac{\Delta}{l} - \frac{1}{\cos^2 \alpha}\right) \approx \frac{Fl}{(1 + 2 \cos \alpha) \cdot EA} \cdot \left(1 - \frac{1}{\cos^2 \alpha}\right).$$

$$\text{Ответ: } \Delta = -\frac{Fl}{EA} \cdot \frac{\tan^2 \alpha}{1 + 2 \cos \alpha} \cdot \frac{1}{1 + F / [EA(1 + 2 \cos \alpha)]} \approx -\frac{Fl}{EA} \cdot \frac{\tan^2 \alpha}{1 + 2 \cos \alpha},$$

т.е. на  $\Delta$  увеличить длину среднего стержня.

**6.40. Определить величину осадки средней опоры  $\Delta_C$ , при которой изгибающие моменты над этой опорой и в серединах пролетов равны по модулю.**



Решение

$$\vartheta_A = \vartheta_B \Rightarrow 0.$$

Из симметрии:  $R_A = R_B$ .  $\sum Y = 0: 2R_A + R_C = 2ql$ .

По условию:

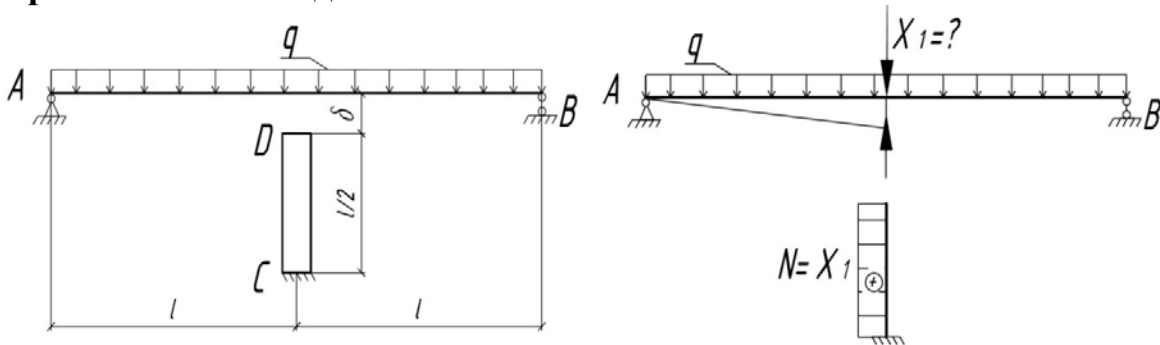
$$-M(l) = M\left(\frac{l}{2}\right), \quad -\left(R_A l - \frac{ql^2}{2}\right) = R_A \frac{l}{2} - \frac{q(l/2)^2}{2}, \quad R_A \Rightarrow \frac{5}{12} ql.$$

Тогда  $R_C \Rightarrow \frac{14}{12}ql$ ,  $M_C = M(l) \Rightarrow -\frac{ql^2}{12}$ .

$$\Delta_C = \sum \int \frac{M \cdot \bar{M}}{EI} ds \Rightarrow \frac{2}{EI} \left[ l \cdot \frac{2q(2l)^2}{3 \cdot 8} \cdot \frac{5l}{8 \cdot 2} - \frac{l}{3} \cdot \frac{14}{12}ql \cdot \frac{2l}{4} \cdot \frac{l}{2} \right] = \frac{ql^4}{72EI}.$$

Ответ: На  $\Delta_C = \frac{ql^4}{72EI}$  вниз.

6.41. До приложения нагрузки  $q$  между балкой  $AB$  и стойкой  $CD$  имеется зазор  $\delta$ . Какова его величина, если после нагружения изгибающий момент в середине балки  $AB$  оказался равным нулю? Материал стержней  $AB$  и  $CD$  одинаков.



Решение

$$\vartheta_A = \vartheta_B \Rightarrow 0.$$

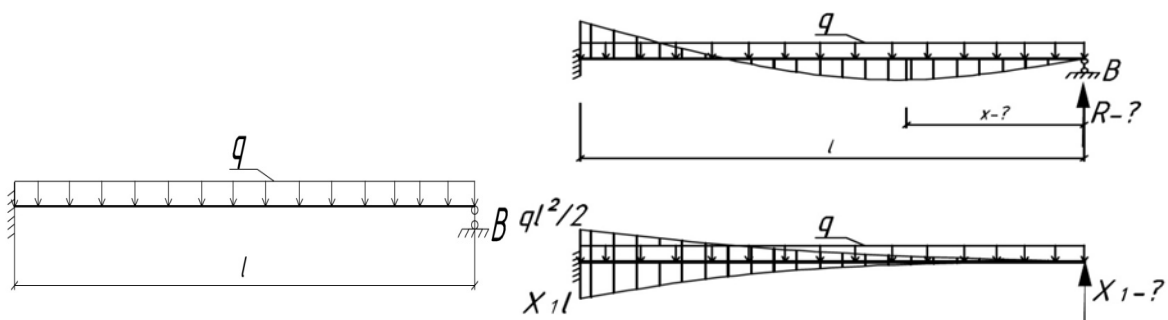
Из симметрии:  $R_A = R_B$ . Из равновесия:  $2R_A + R_C = 2ql$ .

По условию  $M_C = 0$ :  $R_A l - \frac{ql^2}{2} = 0$ ,  $R_A \Rightarrow \frac{1}{2}ql$ .  $R_C \Rightarrow ql$ .

$$\delta = \sum \int \frac{M \cdot \bar{M}}{EI} ds + \sum \int \frac{N \cdot \bar{N}}{EA_0} ds \Rightarrow \frac{2}{EI} \left[ l \cdot \frac{2ql^2}{3 \cdot 8} \cdot \frac{11 \cdot 2l}{2 \cdot 4} \right] + \frac{1}{EA_0} \cdot \left[ \frac{l}{2} \cdot (-ql) \cdot 1 \right].$$

Ответ:  $\delta = \frac{ql^4}{24EI} - \frac{ql^2}{2EA_0}$ .

6.43. Для балки постоянного по длине поперечного сечения определить величину предварительного смещения опорного сечения  $B$ , при котором вес балки будет наименьшим.



Решение

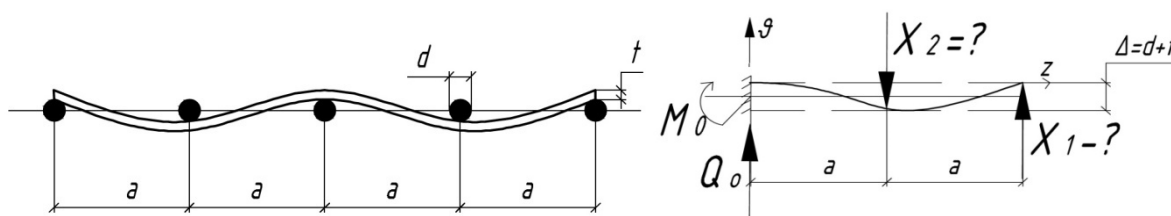
$$\vartheta_A = 0, \varphi_A = 0. \text{ По условию: } -M_A = M_C : -\left(R_B l - \frac{ql^2}{2}\right) = R_B x - \frac{qx^2}{2}.$$

$$Q_C \Rightarrow 0: x = \frac{R_B}{q}. \quad R_B^2 + R_B(2ql) - (ql)^2 = 0, \quad R_B \Rightarrow (\sqrt{2} - 1) \cdot ql.$$

$$\Delta_B = \sum \int \frac{M \cdot \bar{M}}{EI} ds \Rightarrow \frac{1}{EI} \left[ \frac{l}{3} \cdot R_B l \cdot 1l - l \cdot \frac{1}{3} \frac{ql^2}{2} \cdot \frac{3}{4} 1l \right] = \frac{ql^4}{EI} \left( \frac{\sqrt{2} - 1}{3} - \frac{1}{8} \right).$$

Ответ: На  $\Delta_B \approx \frac{ql^4}{EI} \cdot 0,0131$  вверх.

**6.44.** Через пять равноудаленных друг от друга роликов диаметров  $d$ , центры которых лежат на одной прямой, протянута полоса толщиной  $t=d$  и шириной  $b$ . Определить давление полосы на ролики, если  $d \ll a$ .



Решение

Начало координат на оси симметрии.

$$\vartheta_0 = 0, \varphi_0 = 0, M_0 = X_1 \cdot 2a - X_2 \cdot a, Q_0 = -X_1 + X_2.$$

Универсальное уравнение изогнутой оси балки:

$$EI\vartheta(z) = M_0 \frac{z^2}{2} + Q_0 \frac{z^3}{6} - X_2 \frac{(z-a)^3}{6}.$$

$$\vartheta(a) \Rightarrow -2d: \quad -2d \cdot EI = M_0 \frac{a^2}{2} + Q_0 \frac{a^3}{6}, \quad -2d \cdot EI = X_1 \cdot \frac{5a^3}{6} - X_2 \cdot \frac{2a^3}{6};$$

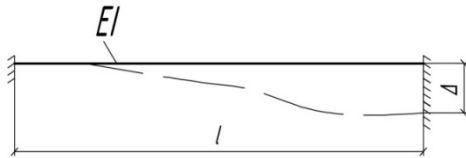
$$\vartheta(2a) \Rightarrow 0: \quad 0 = M_0 \frac{(2a)^2}{2} + Q_0 \frac{(2a)^3}{6} - X_2 \frac{(a)^3}{6}, \quad 0 = X_1 \cdot \frac{16a^3}{6} - X_2 \cdot \frac{5a^3}{6}.$$

Ответ:  $F_1 = F_5 \Rightarrow -X_1 = -\frac{60}{7} \cdot \frac{EId}{a^3}$ , т.е. вниз;

$$F_2 = F_4 \Rightarrow +X_2 = \frac{192}{7} \cdot \frac{EId}{a^3}, \text{ т.е. вверх;}$$

$$F_3 \Rightarrow -2Q_0 = -\frac{264}{7} \cdot \frac{EId}{a^3}, \text{ т.е. вниз.}$$

**6.45.** Балка закреплена обоими концами. Одна из опор получает линейное смещение  $\Delta=0,004l$ . Считая  $EI = \text{const}$ , найти угол поворота среднего сечения.



Решение  
 $\vartheta_0 = 0, \varphi_0 = 0.$

Универсальное уравнение изогнутой оси балки:

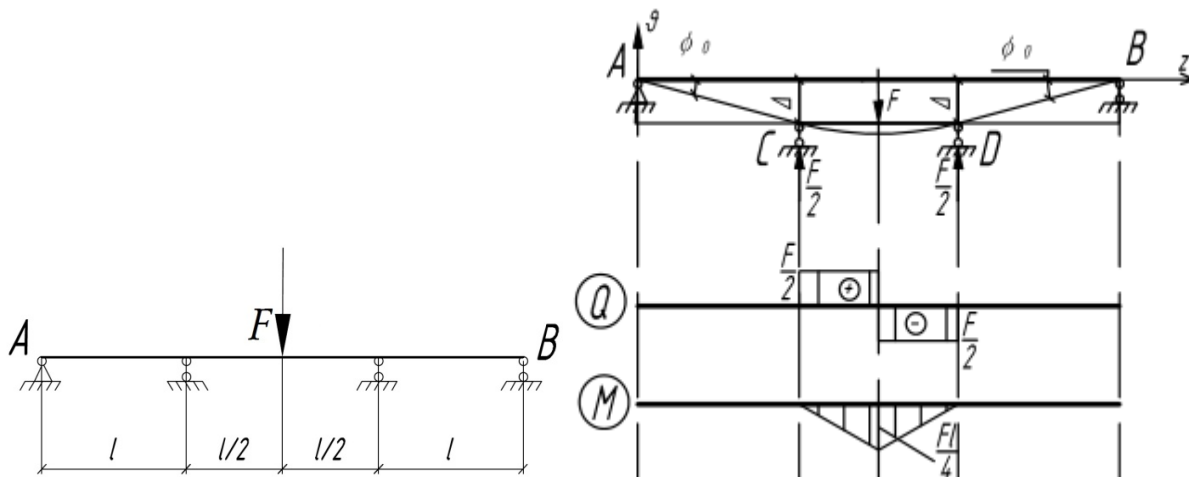
$$EI\vartheta(z) = M_0 \frac{z^2}{2} + Q_0 \frac{z^3}{6}; \quad EI\varphi(z) = M_0 z + Q_0 \frac{z^2}{2}.$$

$$\vartheta(l) \Rightarrow -\Delta: \quad -\Delta \cdot EI = M_0 \frac{l^2}{2} + Q_0 \frac{l^3}{6}, \quad M_0 = -\frac{6EI\Delta}{l^2};$$

$$\varphi(l) \Rightarrow 0: \quad 0 = M_0 \cdot l + Q_0 \frac{l^2}{2}, \quad Q_0 = \frac{12EI\Delta}{l^3}.$$

Ответ:  $\varphi\left(\frac{l}{2}\right) \Rightarrow \frac{1}{EI} \cdot \left[ M_0 \frac{l}{2} + Q_0 \frac{(l/2)^2}{2} \right] = -\frac{3}{2} \cdot \frac{\Delta}{l} = -0,006 \text{ рад, т.е. } \curvearrowright.$

**6.46. На какую величину  $\Delta$  необходимо опустить средние опоры балки постоянного сечения, чтобы изгибающие моменты в сечениях над этими опорами обратились в нуль? Построить эпюры  $Q, M$  по длине балки.**



Решение

Деформация системы  $\rightarrow$  симметричная.

По условию над средней опорой  $M_C = R_A \cdot l \Rightarrow 0$ , т.е.  $R_A = 0$ :

в крайних пролетах  $M = 0, Q = 0 \rightarrow \Delta = \varphi_0 \cdot l$ .

$$\vartheta_0 = 0, M_0 = 0, Q_0 = 0; \quad R_C \Rightarrow \frac{F}{2}.$$

Универсальное уравнение изогнутой оси балки:

$$EI\vartheta(z) = EI\varphi_0 z \left[ + R_C \frac{(z-l)^3}{6} \right]; \quad EI\varphi(z) = EI\varphi_0 \left[ + R_C \frac{(z-l)^2}{2} \right].$$

$$\varphi\left(\frac{3}{2}l\right) \Rightarrow 0: \quad 0 = EI\varphi_0 + \frac{F}{2} \frac{(l/2)^2}{2}, \quad EI\varphi_0 = -\frac{Fl^2}{16}.$$

Ответ:  $\Delta = -\frac{Fl^3}{16EI}$ , т.е. вниз.

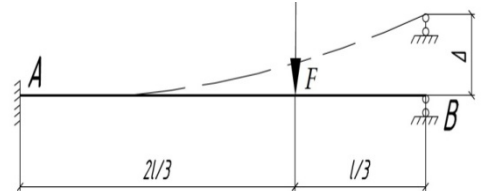
**6.47. На какую величину  $\Delta$  надо поднять опору  $B$ , чтобы нормальные напряжения в сечении  $A$  были равны нулю?**

Решение:

По условию  $\sigma = 0$ :  $M_A \Rightarrow 0$ ,

тогда  $R_A = \frac{F \cdot l/3}{l} \Rightarrow \frac{F}{3}$ .

$$\vartheta_0 = 0, \quad \varphi_0 = 0, \quad M_0 = 0, \quad Q_0 = \frac{F}{3}.$$

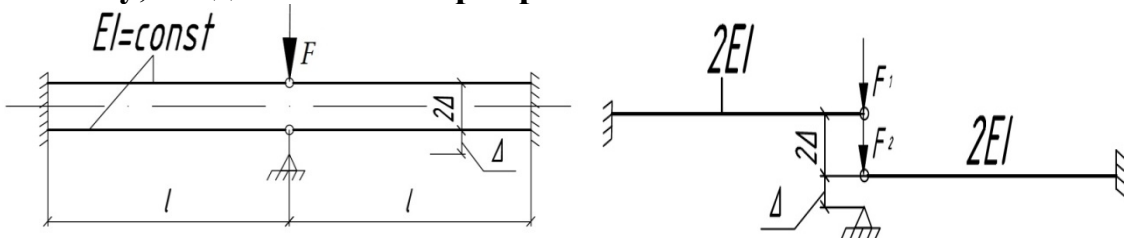


Универсальное уравнение изогнутой оси балки:

$$EI\vartheta(z) = Q_0 \frac{z^3}{6} - F \frac{(z - 2l/3)^3}{6}. \quad \vartheta(l) \Rightarrow \Delta: \quad EI\Delta = \frac{F}{3} \frac{l^3}{6} - F \frac{(l/3)^3}{6}.$$

Ответ:  $\Delta = \frac{4Fl^3}{81EI}$ .

**6.48. Определить работу силы  $F$ , приложенной к верхней балке, к моменту, когда нижний шарнир коснется земли. Считать  $\Delta \ll l$ .**



Решение

$$F = F_1 + F_2; \quad F_i = F_i(\vartheta_i). \quad EI_i \Rightarrow 2EI.$$

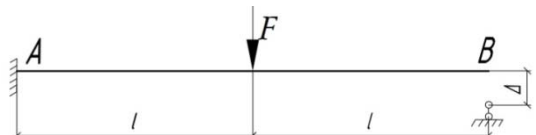
консольная балка:  $\vartheta_i = \frac{F_i \cdot l^3}{3EI_i} \Rightarrow \frac{F_i \cdot l^3}{6EI}$ ,  $F_i = \frac{6EI \cdot \vartheta_i}{l^3}$ ;  $A_i = \frac{F_i \cdot \vartheta_i}{2} \Rightarrow \frac{3EI \cdot \vartheta_i^2}{l^3}$ .

$$2\Delta \leq \vartheta \leq 3\Delta: \quad \vartheta_1 = \vartheta, \quad \vartheta_2 = \vartheta - 2\Delta;$$

$$A = A_1 + A_2 = \frac{3EI \cdot \vartheta_1^2}{l^3} + \frac{3EI \cdot \vartheta_2^2}{l^3} \Rightarrow \frac{3EI \cdot (3\Delta)^2}{l^3} + \frac{3EI \cdot \Delta^2}{l^3}.$$

Ответ:  $A = \frac{30EI \cdot \Delta^2}{l^3}$ .

**6.49. При какой величине смещения опоры  $\Delta$  реакция правой опоры будет в четыре раза меньше, чем в заделке?**



Решение

По условию  $R_A = 4R_B \Rightarrow \frac{4}{5}F$ , тогда  $M_A \Rightarrow R_B \cdot 2l - F \cdot l$ .

$$\vartheta_0 = 0, \quad \varphi_0 = 0, \quad M_0 \Rightarrow -\frac{3}{5}Fl, \quad Q_0 \Rightarrow \frac{4}{5}F.$$

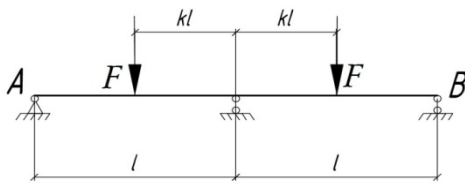
Универсальное уравнение изогнутой оси балки:

$$EI\vartheta(z) = M_0 \frac{z^2}{2} + Q_0 \frac{z^3}{6} \left[ -F \frac{(z-l)^3}{6} \right].$$

$$\vartheta(2l) \Rightarrow -\Delta: \quad -EI\Delta = -\frac{3}{5}Fl \frac{(2l)^2}{2} + \frac{4}{5}F \frac{(2l)^3}{6} - F \frac{l^3}{6} \Rightarrow \frac{3Fl^3}{10EI}.$$

Ответ:  $\Delta = 0,3 \frac{Fl^3}{EI}$  вниз.

**6.50. Определить величину необходимой осадки  $\Delta$  средней опоры, при которой объем балки постоянного поперечного сечения будет наименьшим.**



Решение

Деформация системы  $\rightarrow$  симметричная.

$$\vartheta_A = 0; \quad \vartheta_C = \Delta, \quad \varphi_C = 0.$$

$$2R_A + R_C = 2F. \quad M_{np} = R_A \cdot l(1-k).$$

$$M_C = R_A l - Fkl.$$

По условию:  $M_{np} = -M_C: \quad R_A = F \frac{k}{2-k}; \quad R_C = 4F \frac{1-k}{2-k}.$

$$\vartheta_0 = 0, \quad M_0 = 0, \quad Q_0 \Rightarrow R_A = F \frac{k}{2-k}.$$

Универсальное уравнение изогнутой оси балки:

$$EI\vartheta(z) = EI\varphi_0 z + R_A \frac{z^3}{6} \left[ -F \frac{(z-l+kl)^3}{6} \right].$$

$$EI\varphi(z) = EI\varphi_0 + R_A \frac{z^2}{2} \left[ -F \frac{(z-l+kl)^2}{2} \right].$$

$$\varphi(l) \Rightarrow 0: \quad 0 = EI\varphi_0 + R_A \frac{l^2}{2} - F \frac{(kl)^2}{2}, \quad EI\varphi_0 \Rightarrow -\frac{Fl^2}{2} \cdot \frac{k(k-1)^2}{2-k}.$$

$$\vartheta(l) \Rightarrow \Delta: \quad EI\Delta \Rightarrow -\frac{Fl^2}{2} \cdot \frac{k(k-1)^2}{2-k} l + F \frac{k}{2-k} \cdot \frac{l^3}{6} - F \frac{(kl)^3}{6}.$$

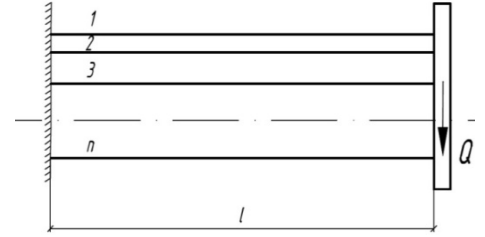
Ответ:  $\Delta = \frac{Fl^3}{6EI} \cdot \frac{k \cdot (k^3 - 5k^2 + 6k - 2)}{2-k}$ , если  $\Delta > 0$ , то вверх.

**6.51.** Плоская плита весом  $Q$  удерживается с помощью  $n$  одинаковых стержней длиной  $l$ , которые жестко соединены с плитой. Определить вертикальное перемещение  $\Delta$  плиты под действием веса  $Q$ .

Решение

$$\vartheta_0 = 0, \quad \varphi_0 = 0, \quad Q_0 \Rightarrow \frac{Q}{n}.$$

Универсальное уравнение изогнутой оси каждой  $n$ -ой балки:



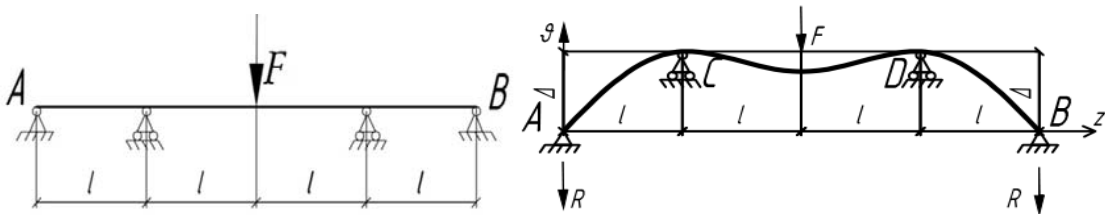
$$EI\vartheta(z) = M_0 \frac{z^2}{2} + Q_0 \frac{z^3}{6}, \quad EI\varphi(z) = M_0 z + Q_0 \frac{z^2}{2}.$$

$$\varphi(l) \Rightarrow 0: \quad 0 = M_0 l + Q_0 \frac{l^2}{2}, \quad M_0 \Rightarrow -\frac{Ql}{2n}.$$

$$\vartheta(l) \Rightarrow \Delta: \quad EI\Delta = -\frac{Ql}{2n} \cdot \frac{l^2}{2} + \frac{Q}{n} \cdot \frac{l^3}{6} \Rightarrow -\frac{Ql^3}{12n}.$$

Ответ:  $\Delta = -\frac{Ql^3}{12nEI}$ , т.е. вниз.

**6.53.** На какую величину  $\Delta$  необходимо поднять средние опоры, чтобы при нагружении системы силой  $F$  углы поворота сечений над этими опорами были равными нулю? Изгибная жесткость сечения балки постоянна и равна  $EI$ .



Решение

Деформация системы  $\rightarrow$  симметричная.

$$\vartheta_A = 0; \quad \vartheta_C = \Delta, \quad \varphi_C = 0; \quad \varphi_{np} = 0.$$

$$2R_A + 2R_C = F. \quad R_A = -R, \quad R_C = R + F/2.$$

Универсальное уравнение изогнутой оси балки:

$$EI\vartheta(z) = EI\varphi_0 z + R_A \frac{z^3}{6} + R_C \frac{(z-l)^3}{6}. \quad EI\varphi(z) = EI\varphi_0 + R_A \frac{z^2}{2} + R_C \frac{(z-l)^2}{2}.$$

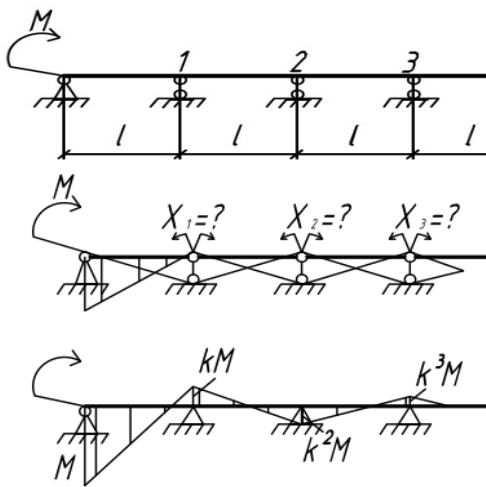
$$\varphi(l) \Rightarrow 0: \quad 0 = EI\varphi_0 - R \frac{l^2}{2}, \quad EI\varphi_0 \Rightarrow \frac{Fl^2}{8};$$

$$\varphi(2l) \Rightarrow 0: \quad 0 = EI\varphi_0 - R \frac{(2l)^2}{2} + R_C \frac{l^2}{2}, \quad R \Rightarrow \frac{F}{4};$$

$$\vartheta(l) \Rightarrow \Delta: \quad EI\Delta = EI\varphi_0 l - R \cdot \frac{l^3}{6} \Rightarrow \frac{Fl^3}{12}.$$

Ответ: На  $\Delta = \frac{Fl^3}{12EI}$  вверх.

**6.54. Построить эпюру изгибающих моментов для неразрезной балки с бесконечным числом пролетов, загруженной на левом конце моментом  $M$ . Все пролеты имеют одинаковую длину  $l$  и жесткость  $EI$ .**



Решение

ОСМС  $\rightarrow$  разрезная балка:

$$\sum_{j=1}^{\infty} \delta_{ij} X_j + \Delta_{iF} = 0, \quad i=1, \dots, \infty,$$

$$\delta_{ij} = \sum \int \frac{\bar{M}_i \cdot \bar{M}_j}{EI} ds \Rightarrow \frac{1}{EI} \cdot \frac{4l}{6}, \quad i=j;$$

$$\Delta_{iF} = \sum \int \frac{\bar{M}_i \cdot M_F}{EI} ds \Rightarrow \frac{1}{EI} \cdot \frac{Ml}{6}, \quad i=1;$$

$$\Rightarrow \frac{1}{EI} \cdot \frac{l}{6}, \quad i=j \pm 1; \Rightarrow 0.$$

$$\Rightarrow 0.$$

$$4X_1 + X_2 + M = 0, \quad i=1; \quad X_{i-1} + 4X_i + X_{i+1} = 0, \quad i=2, \dots, \infty.$$

Обозначим  $X_0 = M$ :  $X_{i-1} + 4X_i + X_{i+1} = 0, \quad i=1, \dots, \infty.$

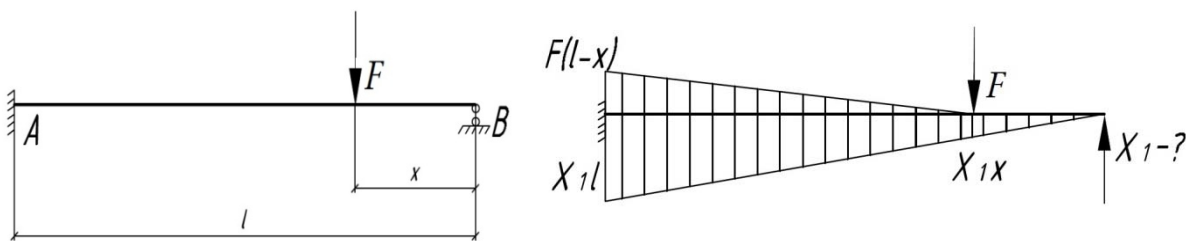
Так как  $X_{i+1} = k \cdot X_i$ , где  $i=0, 1, \dots, \infty$ , причём  $-\frac{1}{2} < k < 0$ .

Тогда  $X_{i-1} \cdot (1 + 4k + k^2) = 0, \quad i=1, \dots, \infty.$

$$k = -2 \pm \sqrt{3} \Rightarrow -2 + \sqrt{3} \approx -0,268.$$

Ответ:  $M_{i+1} = k \cdot M_i, \quad k = -2 + \sqrt{3} \approx -0,268, \quad i=0, 1, \dots, \infty.$

**6.55. Сила  $P$  может находиться в любом месте балки  $AB$ . При каком значении  $x$  изгибающий момент под силой  $F$  будет максимальным?**



Решение

Система один раз статически неопределима:  $\delta_{11} X_1 + \Delta_{1F} = 0.$

$$\delta_{11} = \sum \int \frac{\bar{M} \cdot \bar{M}}{EI} ds \Rightarrow \frac{l^3}{3EI}; \quad \Delta_{1F} = \sum \int \frac{M \cdot \bar{M}}{EI} ds \Rightarrow -\frac{F(l-x)^2}{2EI} \left( x + \frac{2}{3}(l-x) \right);$$

$$X_1 = -\frac{\Delta_{1F}}{\delta_{11}} \Rightarrow \frac{F(l-x)^2}{2l^3} (2l+x). \quad M = X_1 \cdot x \Rightarrow \frac{F}{2l^3} \cdot (l-x)^2 \cdot (2lx+x^2).$$

$$\dot{M} = 0: \quad \frac{F}{2l^3} \cdot \left[ -2(l-x)(2lx+x^2) + (l-x)^2(2l+2x) \right] = 0,$$

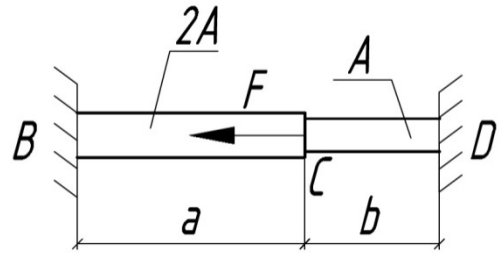


$$(l-x) \cdot (x^2 + xl - l^2 / 2) = 0, \quad x = \frac{-1 \pm \sqrt{3}}{2} l \Rightarrow \frac{-1 + \sqrt{3}}{2} l \approx 0,366l.$$

Ответ:  $x = \frac{-1 + \sqrt{3}}{2} l \approx 0,366l.$      $M \approx 0,174Fl.$

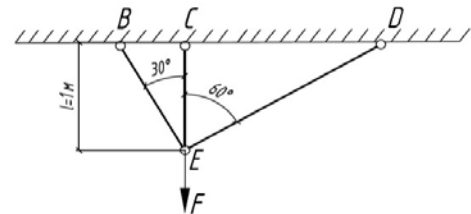
### Задачи для самостоятельного решения

6.8. Для материала бруса, жестко заземленного обоими концами, расчетное сопротивление на сжатие в два раза больше, чем на растяжение:  $R_{сж}=2R_p$ . Определить соотношение между длинами  $a$  и  $b$ , при котором участки  $BC$  и  $CD$  будут равнопрочными.



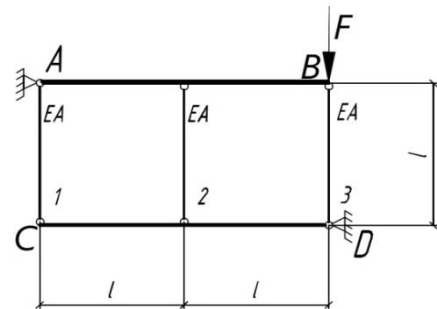
Ответ:  $\frac{a}{b} = \frac{1}{2}.$

6.11. Три стержня шарнирно скреплены в одной точке. Стержень  $BE$  абсолютно жесткий, а стержни  $CE$  и  $ED$  выполнены из стали ( $E = 2 \cdot 10^5$  МПа) и имеют одинаковые площади  $A = 1$  см<sup>2</sup>. Под действием силы  $F$  вертикальная составляющая перемещения точки  $E$  оказалась равной 0,05 мм. Определить величину силы  $F$ .



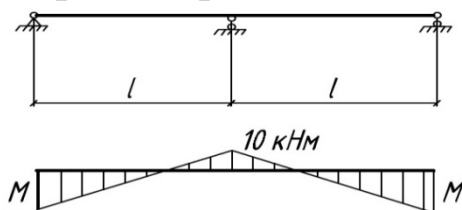
Ответ:  $F = 3$  кН.

6.17. Два абсолютно жестких стержня  $AB$  и  $CD$  соединены с помощью трех упруго деформируемых стержней одинаковой жесткости  $EA$  как показано на рисунке. Определить усилия в стержнях 1, 2, 3 от загрузки конструкции силой  $F$ .



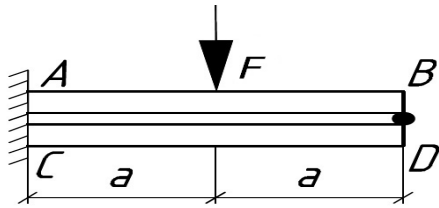
Ответ:  $N_1 = F/6; N_2 = -F/3; N_3 = -5F/6.$

6.23. Для двухпролетной неразрезной балки задана форма эпюры изгибающего момента и значение момента над средней опорой. Определить величину неизвестного момента  $M$ .



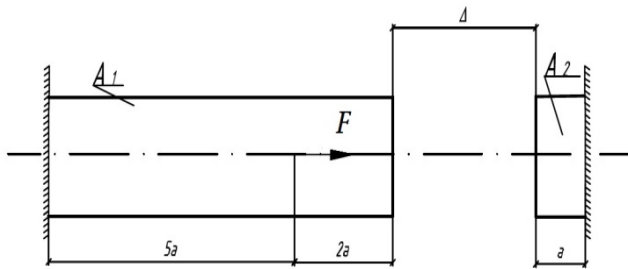
Ответ:  $M = 20$  кНм.

6.28. Две консольные балки ( $AB$  и  $CD$ ), нагруженные силой  $F$ , взаимодействуют посредством катка, расположенного в точке  $B$ . Жесткости при изгибе обеих балок равны. Найти силу взаимодействия между балками в точке  $B$ .



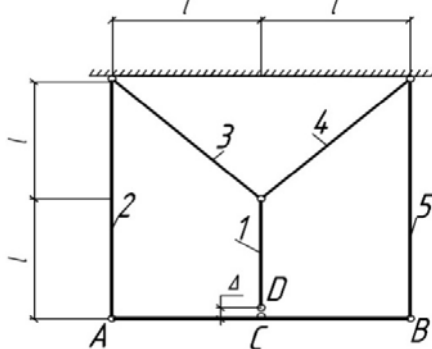
Ответ:  $R_B = 5F / 32$ .

6.35. Определить величину зазора  $\Delta$ , при котором во всех сечениях стержня нормальные напряжения по абсолютной величине будут одинаковы. Дано:  $a, F, EA$ .



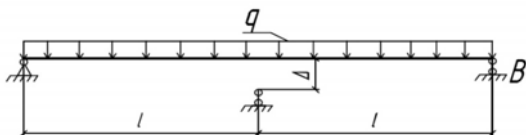
Ответ:  $\Delta = \frac{Fa}{EA}$ .

6.38. Стержни 1-5 плоской фермы изготовлены из одного материала и имеют одинаковую площадь поперечного сечения. Определить монтажное усилие в стержне 1, если он выполнен короче проектного размера на величину  $\Delta$ . Брус  $AB$  считать абсолютно жестким.



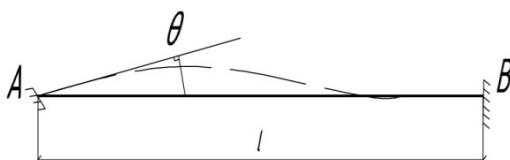
Ответ:  $N_1 \approx \frac{EA \cdot \Delta}{l(2 + \sqrt{2})}$ .

6.42. При каком значении осадки средней опоры  $\Delta_C$  все три реакции будут равными между собой?



Ответ: На  $\Delta_C = \frac{7ql^4}{72EI}$  вниз.

6.52. Для заделанной по обоим концам балки  $AB$ , имеющей постоянную изгибную жесткость  $EI$ , задан поворот левой опоры на малый угол  $\Theta$ . Определить опорные реакции.



Ответ:  $M_A = -\frac{4EI\theta}{l}$ ;  $M_B = \frac{2EI\theta}{l}$ ;  
 $R_A = \frac{6EI\theta}{l^2}$ ;  $R_B = -\frac{6EI\theta}{l^2}$ .

## БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Александров, А.В. Сопротивление материалов [Текст]: учебник для вузов / А.В. Александров, В.Д. Потапов, Б.П. Державин. – М.: Высш. шк., 1995. – 560 с.
2. Сборник задач по сопротивлению материалов [Текст] / под ред. А.В. Александрова. – М.: Стройиздат, 1977. – 336 с.
3. Сборник олимпиадных задач по сопротивлению материалов [Текст] / М.Х. Ахметзянов [и др.]. – Новосибирск: СГАПС, 1995. – 79 с.

## ОГЛАВЛЕНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ .....	3
Глава 1. РАСТЯЖЕНИЕ (СЖАТИЕ) ПРЯМОГО СТЕРЖНЯ .....	4
Глава 2. НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОЕ СОСТОЯНИЕ В ТОЧКЕ .....	24
Глава 3. ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ПЛОСКИХ ФИГУР .....	45
Глава 4. ПЛОСКИЙ ПОПЕРЕЧНЫЙ ИЗГИБ (УСИЛИЯ И НАПРЯЖЕНИЯ).....	65
Глава 5. ПЛОСКИЙ ПОПЕРЕЧНЫЙ ИЗГИБ (ПЕРЕМЕЩЕНИЯ).....	99
Глава 6. СТАТИЧЕСКИ НЕОПРЕДЕЛИМЫЕ СИСТЕМЫ .....	133
БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК .....	163

Учебное издание

Волков Владимир Павлович

### СОПРОТИВЛЕНИЕ МАТЕРИАЛОВ

Учебно-методическое пособие

для практических занятий по направлениям подготовки

08.05.01 «Строительство уникальных зданий и сооружений»,

08.03.01 «Строительство»

В авторской редакции

Верстка Н.В. Кучина

---

Подписано в печать 16.11.16. Формат 60×84/16.

Бумага офисная «Снегурочка». Печать на ризографе.

Усл. печ. л. 9,53. Уч.-изд.л. 10,25. Тираж 80 экз.

Заказ № 707.

---

Издательство ПГУАС.  
440028, г.Пенза, ул. Германа Титова, 28.