МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Федеральное государственное бюджетное
образовательное учреждение высшего образования
"Пензенский государственный университет
архитектуры и строительства"
(ПГУАС)

А.И. Шеин, М.Б. Зайцев

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА

Учебно-методическое пособие
для курсовой работы
по направлению подготовки 08.03.01 «Строительство»

Пенза 2016

УДК 539.3
ББК 30.121
Ш39

Рекомендовано Редсоветом университета
Рецензент – кандидат технических наук, доцент кафедры «Механика» В.В.Зернов (ПГУАС)

Шеин А.И.

Ш39 Теоретическая механика: учеб.-метод. пособие для курсовой работы по направлению подготовки 08.03.01 «Строительство» / А.И. Шеин, М.Б. Зайцев. – Пенза: ПГУАС, 2016. – 96 с.

Приведены задания и типовые примеры для выполнения курсовой работы. Предложены контрольные вопросы для самопрверки.

Подготовлено на кафедре «Механика» и предназначено для использования студентами, обучающимися по направлению подготовки 08.03.01 «Строительство», при изучении дисциплины «Теоретическая механика».

ВВЕДЕНИЕ

Курсовая работа (КР) – задание, которое выполняется студентами в определённый срок и по определённым требованиям. В состав КР входит: выполненное задание и пояснительная записка к решению. Выполнение работ предусмотрено во 2-м и 3-м семестрах. Работа рассчитана на закрепление и применение полученных навыков в процессе учёбы.

Общие положения и требования к выполнению курсовой работы:

1. Студенты 1-х и 2-х курсов, обучающийся по направлению 08.03.01 «Строительство», выполняют в течение 2-го и 3-го семестров курсовые работы. Каждая курсовая работа состоит из нескольких задач(заданий).

2. Исходные данные для курсовых работ берутся из данного пособия.

3. Прежде чем приступить к задаче, следует обстоятельно изучить или повторить соответствующий теоретический материал курса.

4. Не следует проводить вычисления с большим числом значащих цифр. Сохранение трёх значащих цифр после запятой обеспечивает необходимую точность.

5. Все чертежи необходимо выполнять карандашом, а записи вести ручкой или карандашом, соблюдая чертёжные шрифты. Схемы, чертежи и другие рисунки должны быть выполнены с соблюдением масштабных соотношений, с помощью чертёжных инструментов.

6. В начале каждой задачи должны быть приведены её тема и номер, текст условия, расчётная схема и таблица исходных данных. Далее следует расположить текст решения и ответы. Все выкладки должны представлять собой стройную логическую последовательность и сопровождаться лаконичным пояснительным текстом. Сокращение слов не допускается.

7. Каждый пункт решения должен при необходимости содержать вспомогательные чертежи или эскизы, расчётную формулу в общем виде, числовое повторение (подстановку) этой формулы и ответ. В промежуточных и окончательных ответах необходимо проставлять единицы измерения получаемых величин.

8. Каждая задача оформляется отдельно со своим титульным листом, а содержательная часть должна быть оформлена на стандартных листах. Страницы должны быть пронумерованы. Титульный лист оформляется в соответствии требованиям норм.

Работы, выполненные не по личному варианту, не рецензируются**.**

Выполнение курсовой работы по курсу «Теоретическая механика» позволит сформировать у обучающихся следующие компетенции:

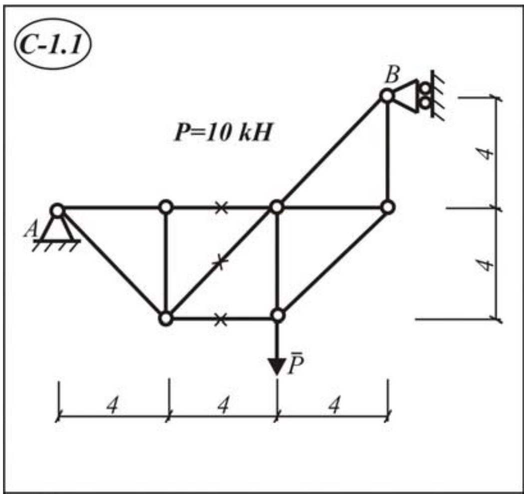
– способность использовать основные законы естественнонаучных дисциплин в профессиональной деятельности, применять методы математического анализа и математического (компьютерного) моделирования, теоретического и экспериментального исследования.

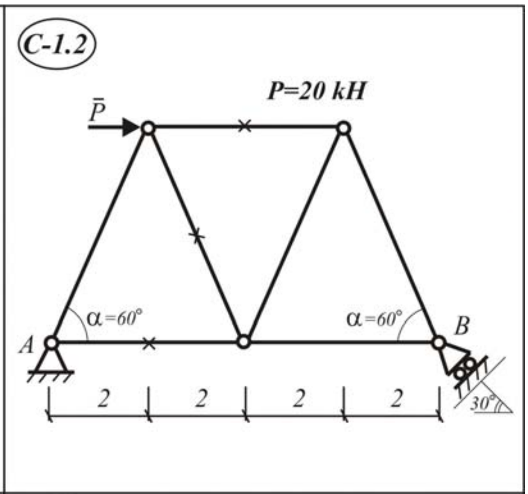
Раздел I. СТАТИКА

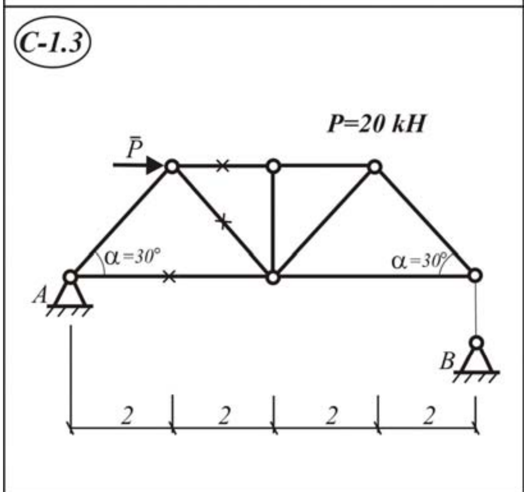
I.1. Плоская система сходящихся сил

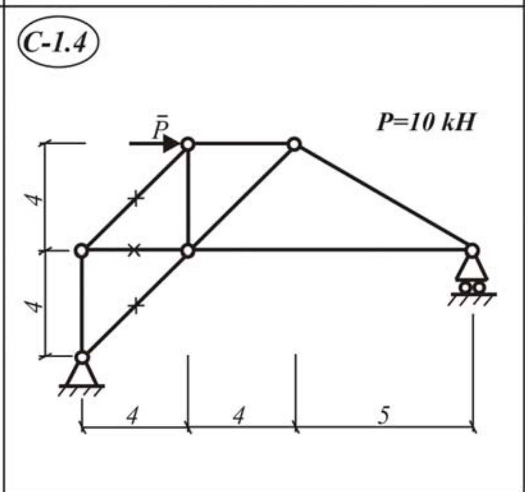
Задание С-1. Расчет плоских ферм

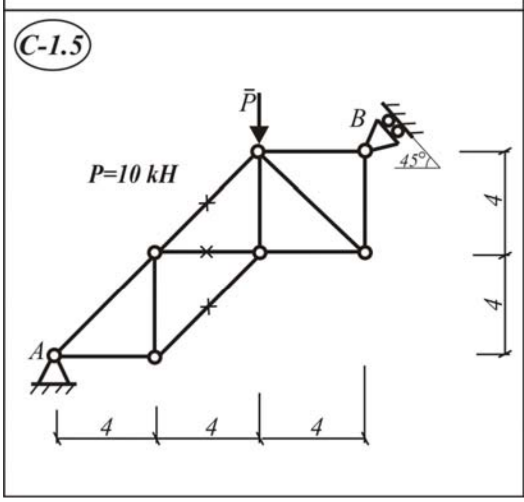
Статически определимая ферма (С-1.1-С-1.30) закреплена в точках A и B. Опора A – шарнирно-неподвижная, опора B – шарнирно-подвижная. К одному из ее узлов приложена сила $\overline{P}$.

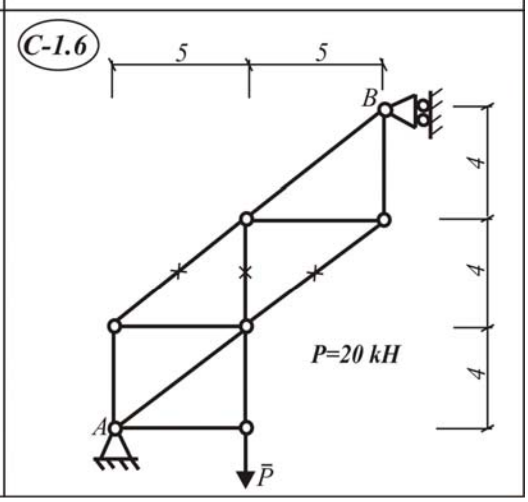






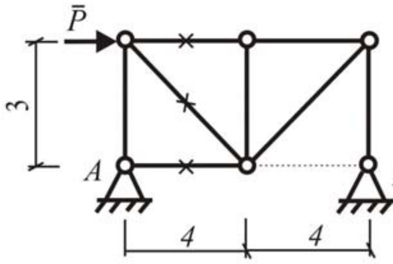






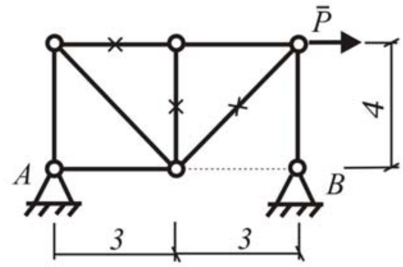
C-1.7

P=20 kH



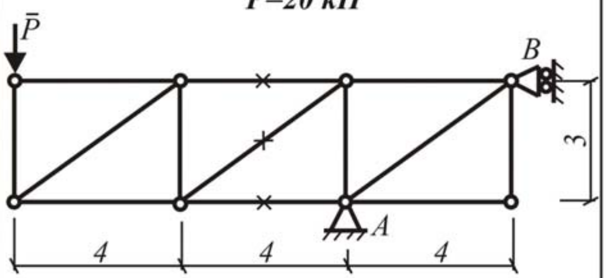
C-1.8

P=20 kH



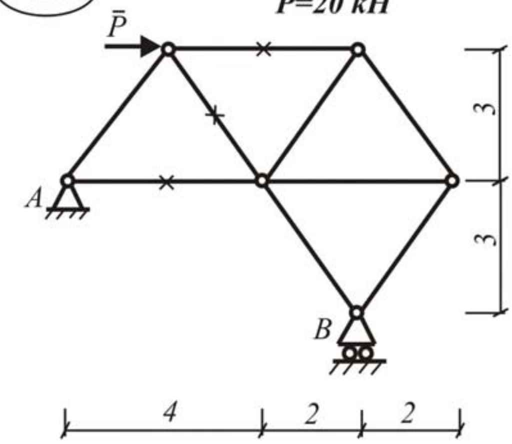
C-1.9

P=20 kH



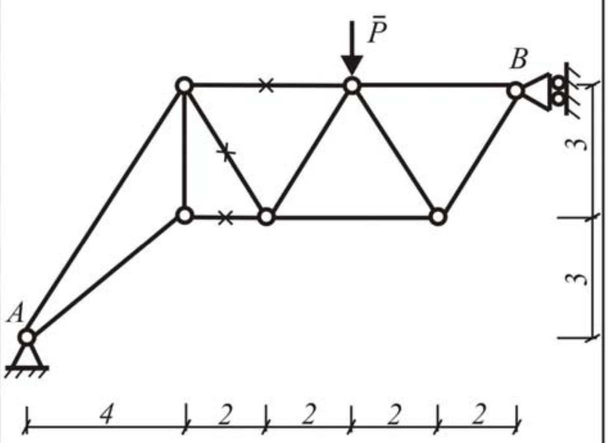
C-1.10

P=20 kH



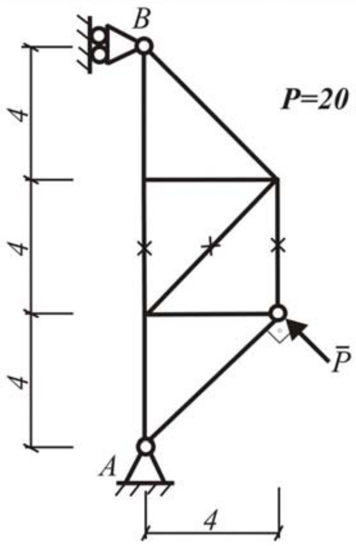
C-1.11

$\bar{P}$=20 kH

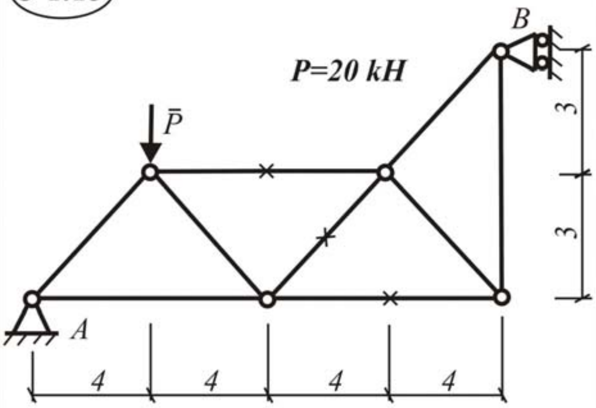


C-1.12

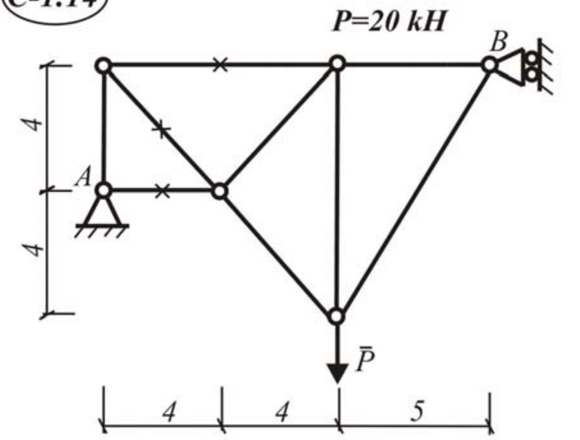
P=20 kH



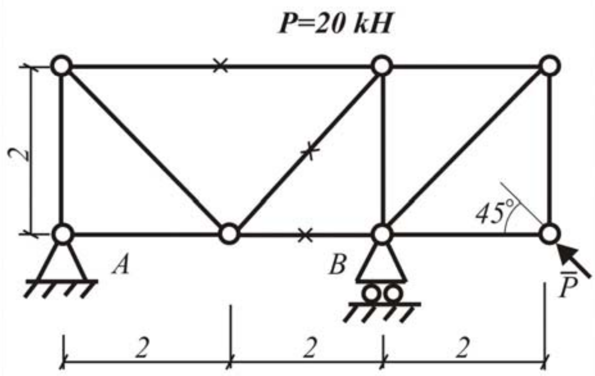
C-1.13



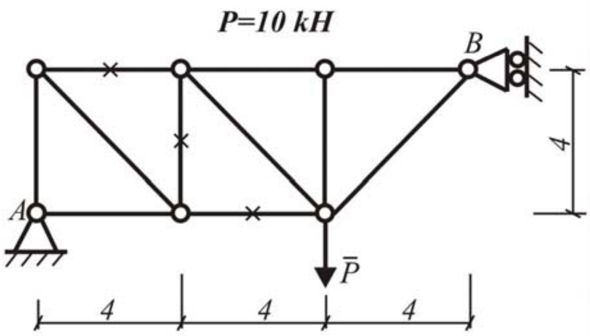
C-1.14



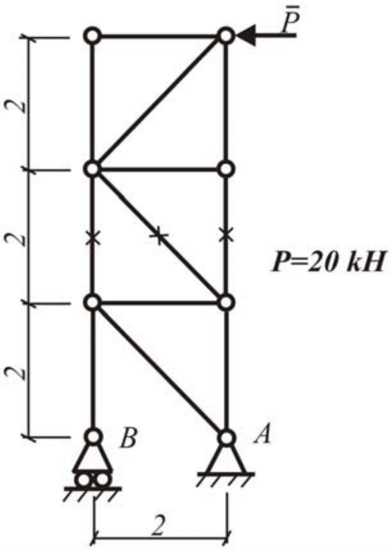
C-1.15



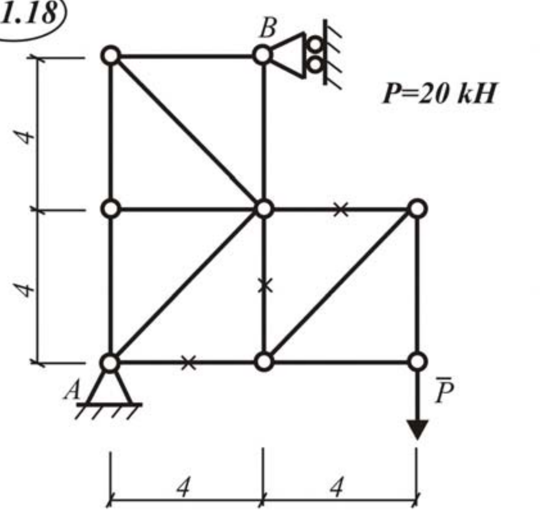
C-1.16



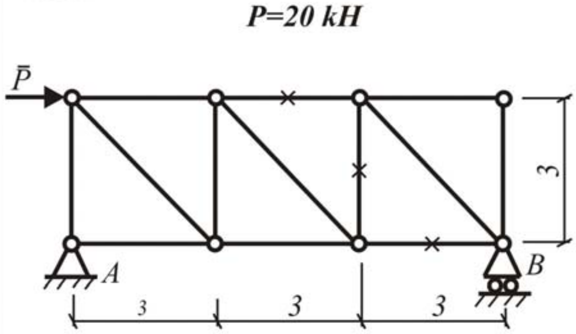
C-1.17



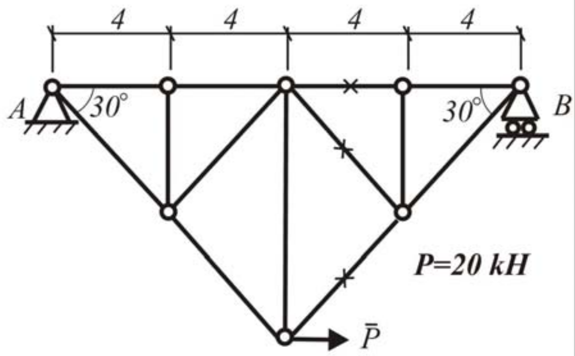
C-1.18



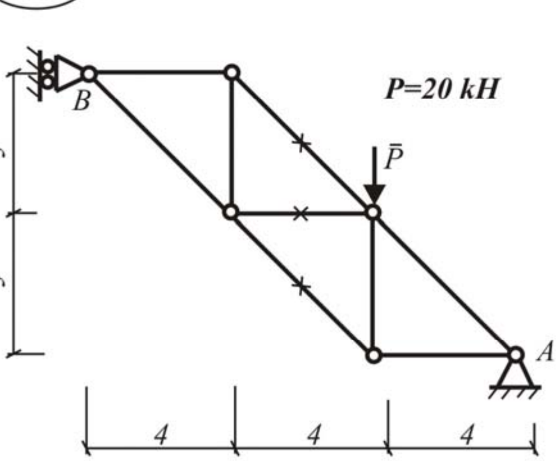
C-1.19



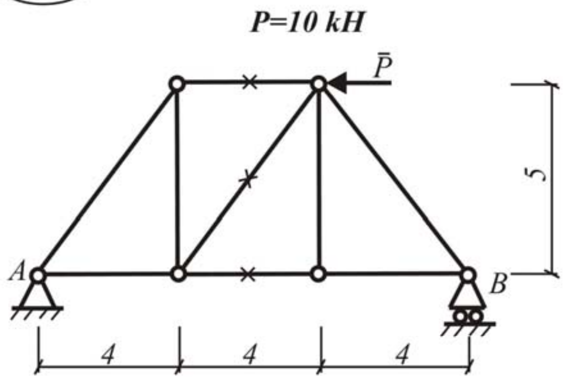
C-1.20



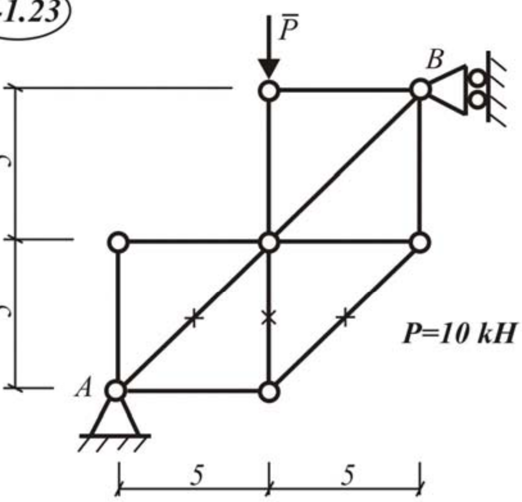
C-1.21



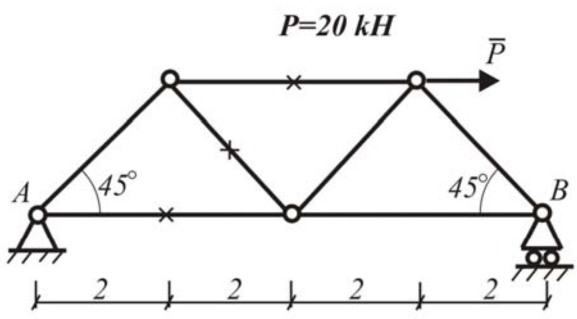
C-1.22



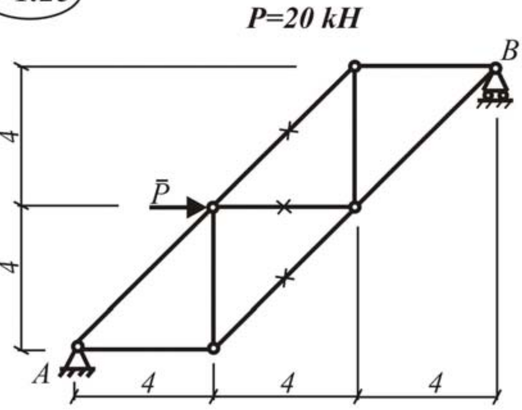
C-1.23



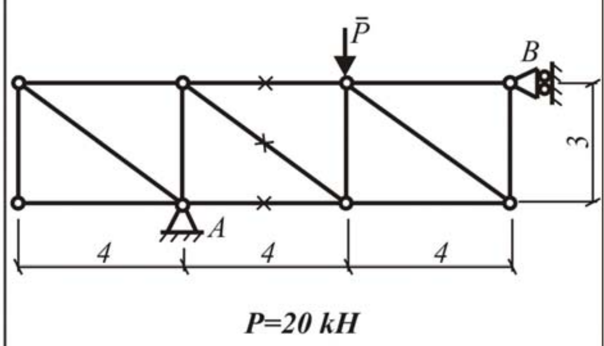
C-1.24



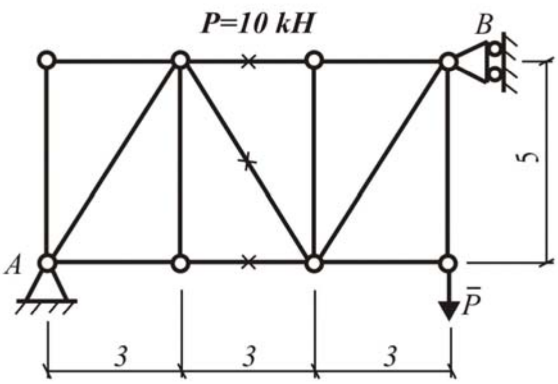
C-1.25



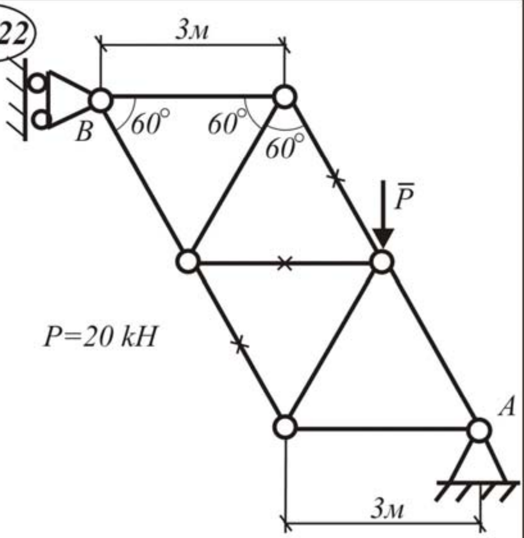
C-1.26



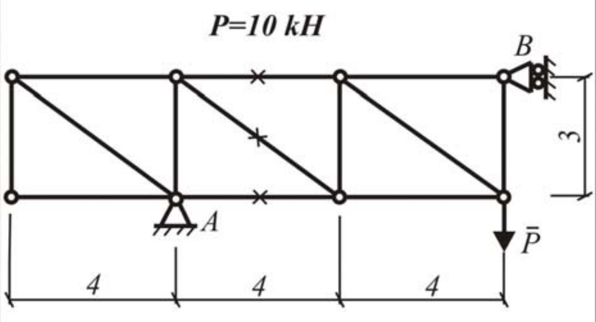
C-1.27



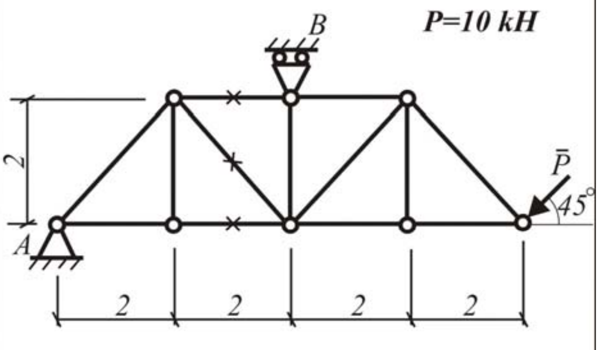
C-1.22



C-1.29



C-1.30



Найти:

1. Реакции в опорах А и В с применением теоремы о трех силах.

2. Усилия во всех стержнях фермы методом вырезания узлов.

3. Реакции в опорах А и В при помощи трех уравнений равновесия для произвольной плоской системы сил.

4. Усилия в трех стержнях фермы, отмеченных на схемах крестиками методом Риттера.

Результаты расчета свести в таблицу.

Пример выполнения С-1

Дано: $P = 10$ кН.

Найти: реакции в опорах А и В и усилия в стержнях фермы (рис. I.1.1).

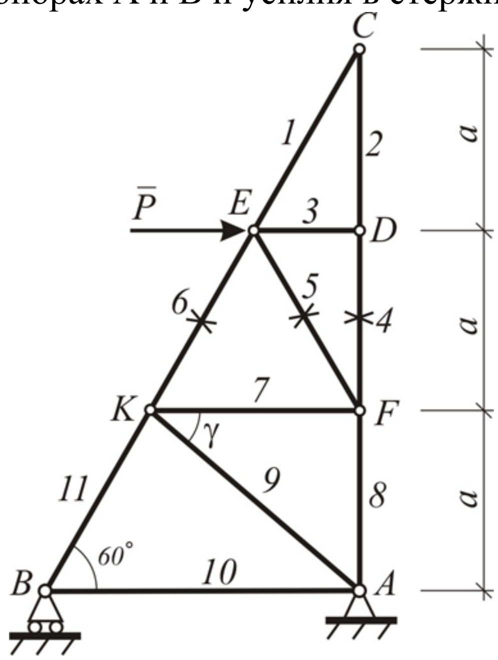


Рис. I.1.1

Р е ш е н и е :

1.Определим реакции в опорах A и B с применением теоремы о трех силах. При определении реакций в опорах A и B рассмотрим ферму как одно абсолютно твердое тело (рис. I.1.2а). Реакцию в шарнирно-подвижной опоре $\bar{R}_B$ направим перпендикулярно площадке, поддерживающей эту опору. Затем найдем точку пересечения (т. O) линий действия заданной силы $\bar{P}$ и реакции $\bar{R}_B$. На основании теоремы о трех силах линия действия реакции $\bar{R}_A$ совпадает с прямой OA.

Для определения модулей и истинных направлений реакций $\bar{R}_A$ и $\bar{R}_B$ воспользуемся геометрическим, графоаналитическим и аналитическим способами.

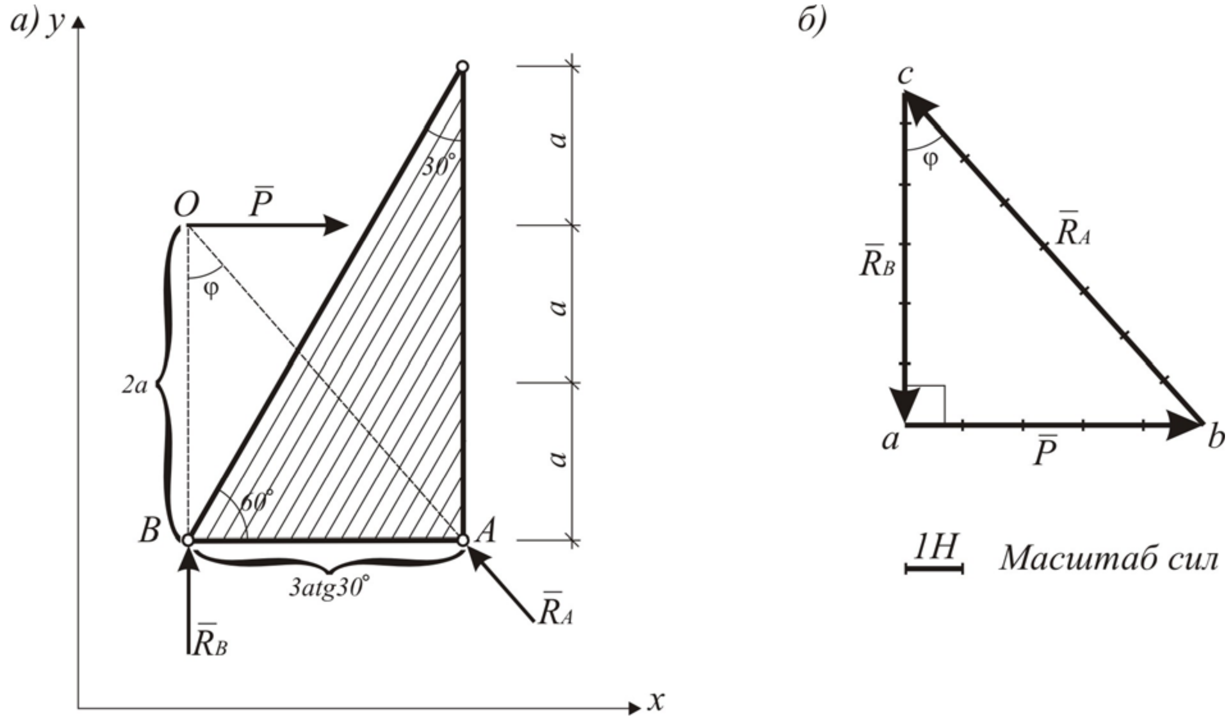


Рис. I.1.2

а) Графический способ.

Выбираем масштаб сил, например 1 см соответствует 2 кН. Далее в выбранном масштабе изображаем заданную силу $\overline{P}$ в виде направленного отрезка $\overline{ab}$ и по известному правилу строим силовой треугольник abc (рис. I.1.2б). Пользуясь масштабом сил, находим

$$R_A = bc = 15{,}3\ \text{кН},$$

$$R_B = ca = 11{,}5\ \text{кН}.$$

б) Графоаналитический способ.

Из рис.I.1.2а видно, что

$$AB = 3a\,\mathrm{tg}\,30°,$$

тогда

$$\mathrm{tg}\,\varphi = \frac{3a\,\mathrm{tg}\,30°}{2a} = 1{,}5 \cdot 0{,}577 = 0{,}8655;$$

$$\varphi = 40°88';\quad \sin\varphi = 0{,}654;\quad \cos\varphi = 0{,}756.$$

Треугольники OAB и abc подобные, так как их соответствующие стороны параллельны. Поэтому угол $acb = \varphi$. Тогда из прямоугольного силового треугольника acb найдем

$$R_B = \frac{P}{\mathrm{tg}\,\varphi} = \frac{10}{0{,}865} = 11{,}56\ \text{кН},$$

$$R_A = \frac{P}{\sin\varphi} = \frac{10}{0,654} = 15,29 \text{ кН}.$$

в) Аналитический способ.

Для определения $\overline{R}_A$ и $\overline{R}_B$ аналитическим способом выберем направление осей декартовой системы координат x и y (рис. I.1.2а) и составим уравнения равновесия для плоской системы сходящихся сил:

$$\sum F_x = 0; P - R_A \sin\varphi = 0,$$

$$\sum F_y = 0; R_B + R_A \cos\varphi = 0,$$

$$R_A = \frac{P}{\sin\varphi} = \frac{10}{0,654} = 15,69 \text{ кН},$$

$$R_B = -R_A \cos\varphi = -15,69 \cdot 0,756 = -11,56 \text{кН}.$$

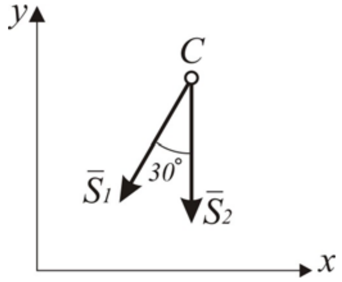
В ответе знак (-) показывает, что истинное направление реакции $\overline{R}_B$ противоположно тому, которое показано на рис. I.1.2а.

2. Определение усилий в стержнях фермы методом вырезания узлов.

При расчете фермы таким способом будем рассматривать равновесие каждого узла в определенной последовательности, а именно, чтобы число неизвестных усилий, приложенных к узлу, не превышало двух. А также предположим, что все стержни растянуты, усилия в них направлены от узлов и считаются со знаком (+).

До составления уравнений равновесия оси координат x и y целесообразнее направить так, чтобы большинство неизвестных усилий в стержнях фермы проектировались в истинную величину.

Узел *C*.

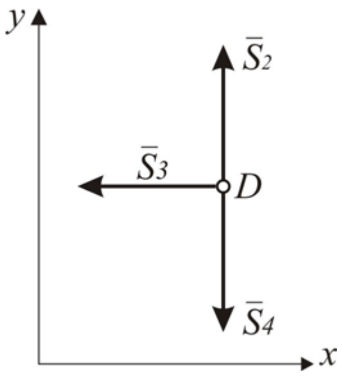


$$\left.\begin{aligned} &\sum F_x = 0; -S_1 \cdot \sin 30^\circ = 0;\ S_1 = 0; \\ &\sum F_y = 0;\ -S_2 - S_1 \cdot \cos 30^\circ = 0;\ S_2 = 0. \end{aligned}\right\}$$

Рис. I.1.3

Первый и второй стержни не напряжены.

Узел *D*.

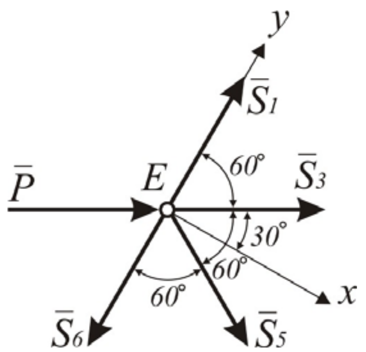


$$\left.\begin{aligned}&\sum F_x = 0; -S_3 = 0;\ S_3 = 0;\\ &\sum F_y = 0;\ S_2 - S_4 = 0;\ S_4 = 0.\end{aligned}\right\}$$

Рис. I.1.4

Третий и четвертый стержни не напряжены.

Узел *E*.



$$\sum F_{kx} = 0;\ P\cdot\cos 30° + S_5\cdot\cos 30° + S_3\cos 30° = 0;$$

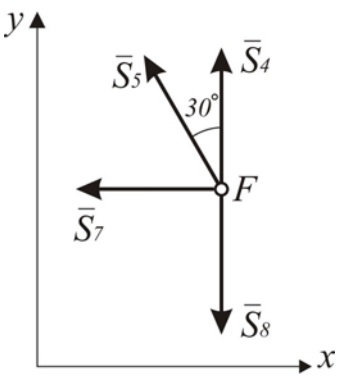
$$\sum F_{ky} = 0;\ P\cdot\sin 30° - S_5\cdot\sin 30° + S_3\cdot\sin 30° + S_1 - S_6 = 0.$$

$$S_5 = -P = -10\text{ кН},\quad S_6 = 2P\sin 30° = 10\text{ кН}.$$

Рис. I.1.5

Пятый стержень сжат, шестой –растянут.

Узел *F*.



$$\sum F_{kx} = 0;\ -S_7 + S_5\sin 30° = 0;$$

$$\sum F_{ky} = 0;\ S_4 + S_5\cos 30° - S_8 = 0.$$

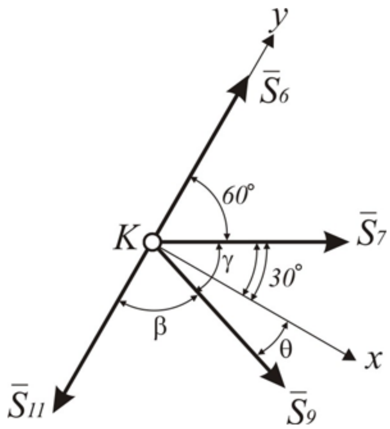
$$S_7 = -S_5\sin 30° = 5\text{ кН}.$$

$$S_8 = -8{,}66\text{ кН}.$$

Рис. I.1.6

Седьмой стержень растянут, восьмой – сжат.

Узел *K*.



$$\operatorname{tg}\gamma = \frac{a}{2a\operatorname{tg}30^\circ} = \frac{1}{2\cdot 0,577} = 0,867;$$

$$\gamma = 40,91^\circ;\ \sin\gamma = 0,655;\ \cos\gamma = 0,766.$$

$$\beta = 79,09^\circ;\ \sin\beta = 0,982;\ \cos\beta = 0,189.$$

$$\theta = \gamma - 30^\circ = 40,91^\circ - 30^\circ = 10,91^\circ.$$

Рис. I.1.7

$$\sum F_{kx} = 0;\ S_7\cdot\cos 30^\circ + S_9\cos 10,91^\circ = 0;$$

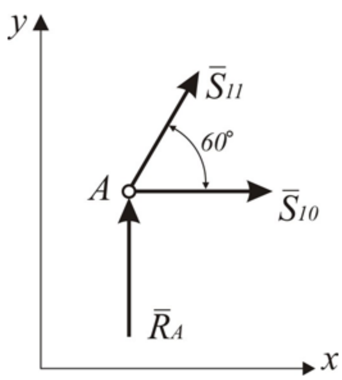
$$\sum F_{ky} = 0;\ S_6 - S_{11} + S_7\cdot\sin 30^\circ - S_9\cdot\sin 10,91^\circ = 0.$$

$$S_9 = -\frac{5\cdot 0,866}{0,982} = -4,41\ \text{кН};$$

$$S_{11} = 10 + 5\cdot 0,5 - 4,41\cdot 0,189 = 13,339\ \text{кН}.$$

Девятый стержень сжат, одиннадцатый – растянут.

Узел *A*.



$$\sum F_{kx} = 0;\ S_{10} + S_{11}\cdot\cos 60^\circ = 0;$$

$$\sum F_{ky} = 0;\ R_A + S_{11}\cdot\sin 60^\circ = 11,56 + 13,333\cdot 0,866 = -0,02.$$

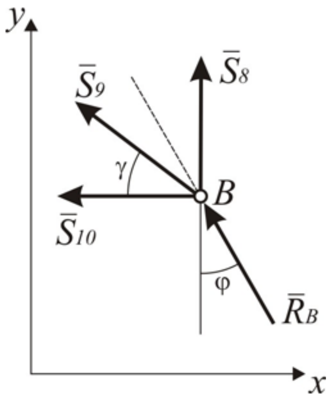
$$S_{10} = -S_{11}\cdot\cos 60^\circ = -6,65\ \text{кН}.$$

Рис. I.1.8

Относительная ошибка: $\Delta\% = \dfrac{-0,02\cdot 100\%}{11,54} < 1\%.$

Узел B.

Уравнения, составленные для узла B, являются проверочными:



$$\sum F_{kx} = 0;$$
$$\sum F_{ky} = 0;$$
$$-S_{10} - S_9 \cos\gamma - R_B \sin\varphi =$$
$$= 6,665 + 4,41 \cdot 0,756 - 15,29 \cdot 0,654 = 9,99 - 9,99 = 0;$$
$$S_9 \sin\gamma + S_8 + R_B \cos\varphi =$$
$$= -4,41 \cdot 0,655 - 8,66 + 15,29 \cdot 0,756 = -11,47 + 11,47 = 0.$$

Рис. I.1.9

Расчет фермы методом вырезания узлов выполнен верно.

3. Определение реакций в опорах A и B при помощи 3 уравнений равновесия для произвольной плоской системы сил.

Реакцию в шарнирно-неподвижной опоре A представим в виде двух составляющих сил, направленных параллельно координатным осям, приложенных к точке A (рис I.1.10).

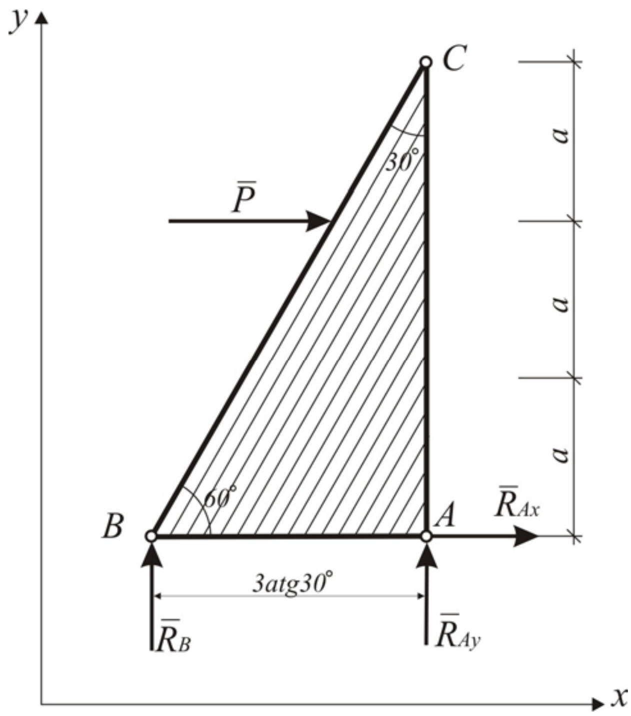


Рис. I.1.10

Составим уравнения равновесия сил, приложенных к ферме:

$$\sum F_x = 0;\; P + R_{AX} = 0;$$
$$\sum m_A(\overline{F}_k) = 0; - R_B \cdot 3a\,\mathrm{tg}\,30° - P \cdot 2a = 0;$$
$$\sum m_B(\overline{F}_k) = 0;\; R_{AY} \cdot 3a\,\mathrm{tg}\,30° - P \cdot 2a = 0.$$

Подставляя исходные данные в эти три уравнения и решая их относительно искомых неизвестных, получим:

$$R_{AX} = -10 \text{ Н},$$
$$R_B = -11{,}56 \text{ Н},$$
$$R_{Ay} = 11{,}56 \text{ Н},$$
$$R_A = \sqrt{(R_{AX})^2 + (R_{Ay})^2} = \sqrt{(-10)^2 + (11{,}56)^2} = 15{,}29 \text{ Н}.$$

Результаты по нахождению $\overline{R}_A$ различными способами совпадают.

4. Определение усилий в стержнях 4, 5, 6 фермы методом Риттера.

Эффективность способа Риттера состоит в том, усилие в каждом стержне определяется из отдельного уравнения и не приходится его выражать через неизвестные усилия в других стержнях.

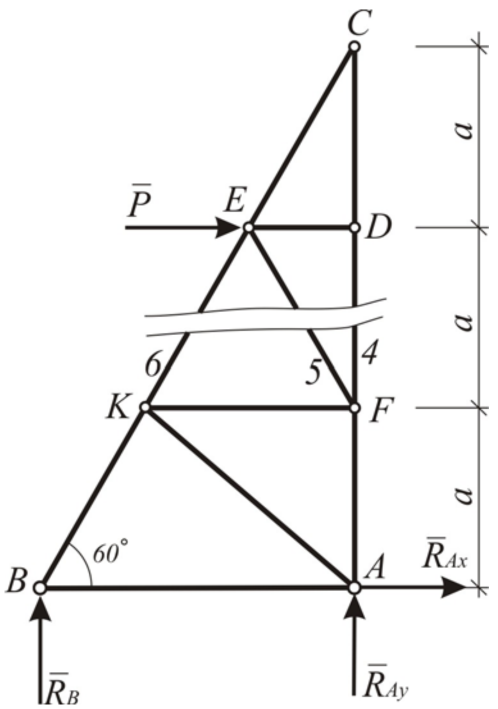


Рис. I.1.11.

Такого эффекта можно достичь, решая задачу в следующей последовательности:

а) Разрезаем ферму так, чтобы в сечение I-I входило не более трех неизвестных усилий в стержнях (рис. I.1.11).

б) Отбрасываем одну из частей фермы, например, нижнюю.

в) Заменяем действие отброшенной части фермы на рассматриваемую (верхнюю) усилиями в рассеченных стержнях $\overline{S}_4, \overline{S}_5, \overline{S}_6$ (рис. I.1.12).

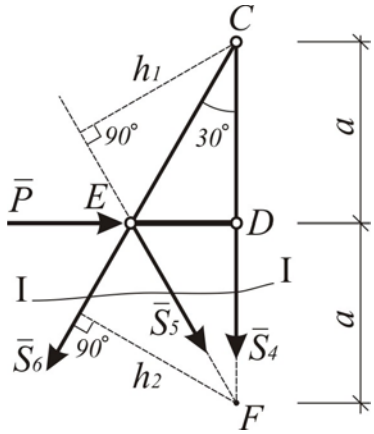


Рис. I.1.12

По прежнему условно предполагаем, все стержни растянутыми. Знак (-) в ответе будет указывать на то, что стержень сжат.

Находим точки Риттера *E, C, F* то есть точки пересечения линий действия неизвестных усилий. Затем составляем уравнения равновесия в виде суммы моментов всех сил относительно точек *E, C, F*:

$$\sum m_E(\overline{F}) = 0; -S_4 \cdot ED = 0;$$
$$\sum m_C(\overline{F}) = 0; P \cdot a + S_5 \cdot h_1 = 0;$$
$$\sum m_F(\overline{F}) = 0; -P \cdot a + S_6 \cdot h_2 = 0.$$

Подставляя исходные данные в эти уравнения, получим:

$$S_4 = 0; S_5 = -10кН; S_6 = 10кН.$$

Если два неизвестных усилия (вектора) будут параллельны между собой, то в этом случае пришлось бы составить уравнение в виде суммы проекций всех сил на ось, перпендикулярной к этим усилиям (векторам).

Результаты расчета сведем в табл.I.1.1.

Таблица I.1.1

№ стержня	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
Знак усилия					-	+	-	-	-	-	+
По методу вырезания узлов, *кН*	0	0	0	0	10	10	5	8,66	4,41	6,65	13,339
По методу Риттера, *кН*					10	10					

Контрольные вопросы

1. Что называется фермой?

2. Что называется пролётом фермы?

3. Что называется узлом фермы?

4. Что собой представляет условие жёсткости фермы и её статической определимости?

5. Перечислить ограничения, наложенные на плоскую ферму.

6. Что дают ограничения, наложенные на ферму?

7. Какие существуют методы для определения усилий в стержнях фермы?

8. Какую систему сил представляет собой каждый узел плоской фермы? Сколько условий равновесия можно записать для каждого узла?

9. В чём заключается суть способа вырезания узлов?

10. В чём заключаются достоинства этого метода?

11. Как должны записываться условия равновесия каждого узла в векторном виде, чтобы определить усилия в стержнях при применении графического метода вырезания узлов?

12. Как определить знак усилия в стержне из построенного силового многоугольника узла?

13. В чём заключается суть метода сквозных сечений?

14. В чём заключаются достоинства метода сквозных сечений?

15. В чём заключаются недостатки этого метода?

16. Что называют точкой Риттера?

17. Возможно ли определить усилие в каждом стержне фермы при классическом сечении фермы по трём стержням?

18. Как определить усилие в одном из стержней при классическом сечении, если два других параллельны?

19. В любом ли стержне произвольной плоской фермы усилие можно найти методом сквозных сечений?

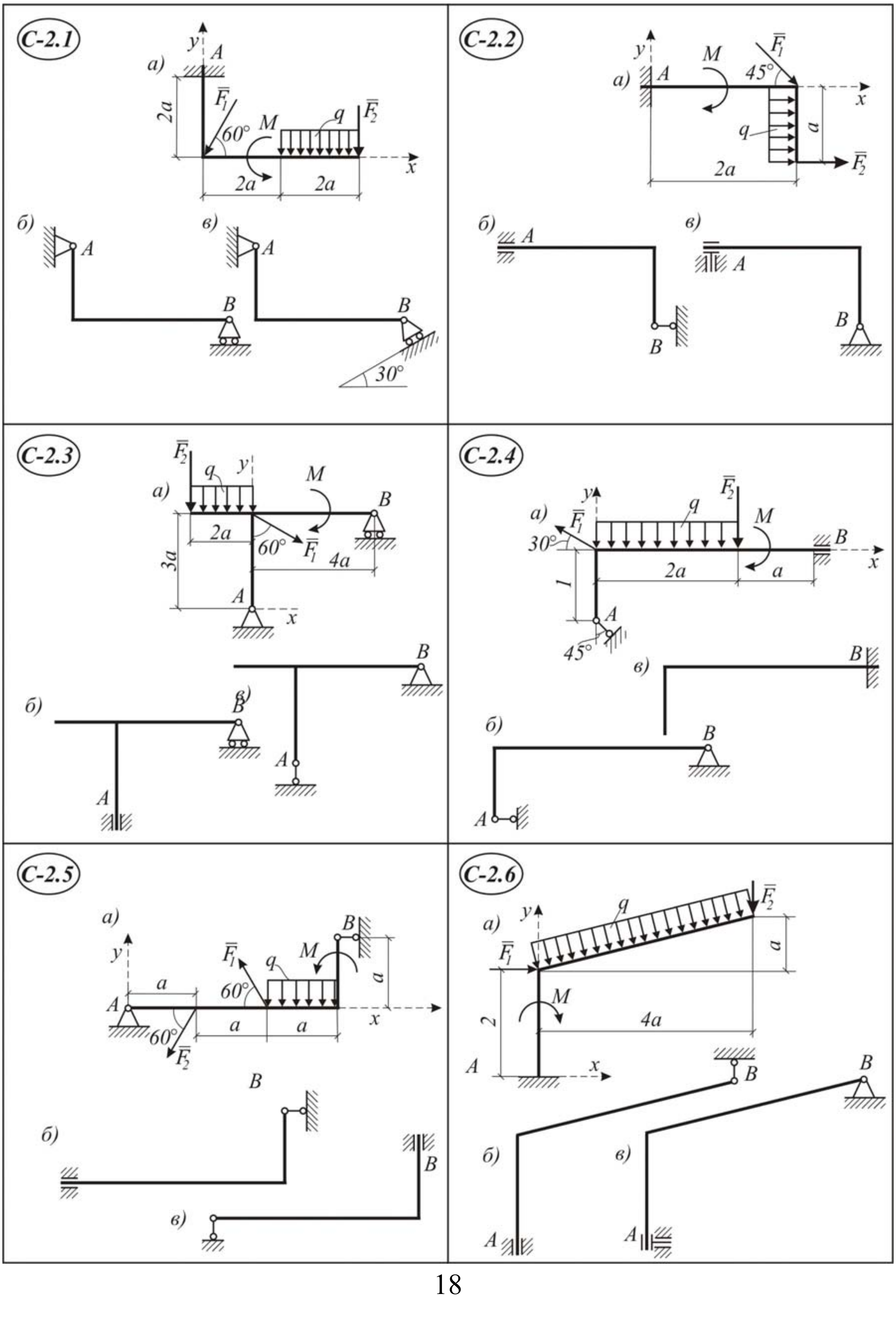
20. В чём заключается суть ограничений, наложенных на метод сквозных сечений?

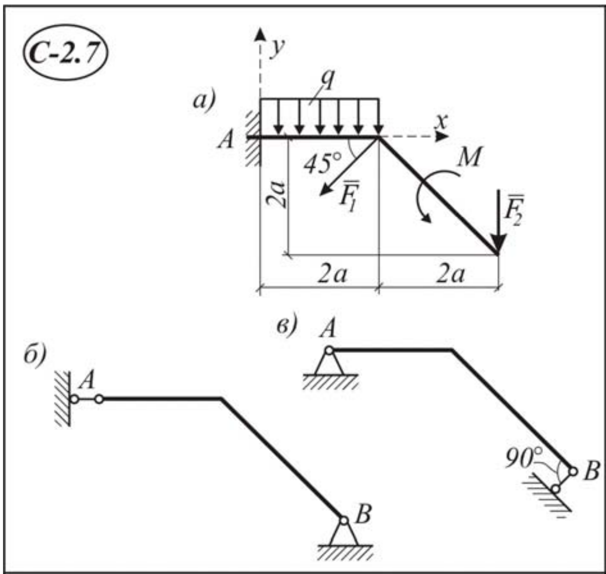
21. В каких случаях возможно определение усилия в стержне фермы при рассечении фермы более чем по трём стержням?

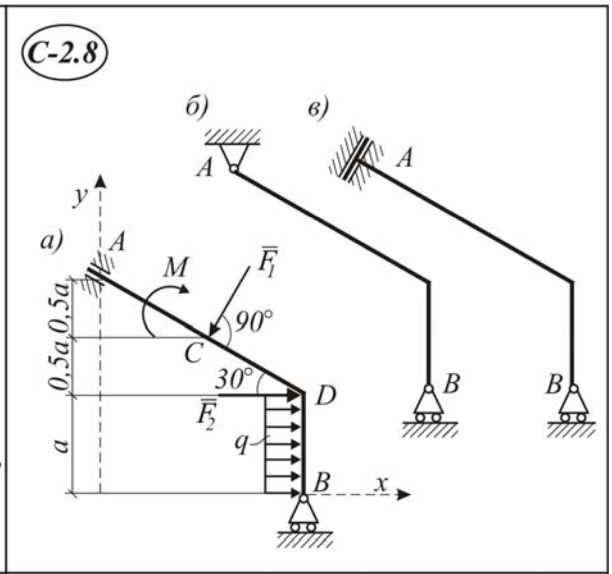
I.2. Произвольная плоская система сил

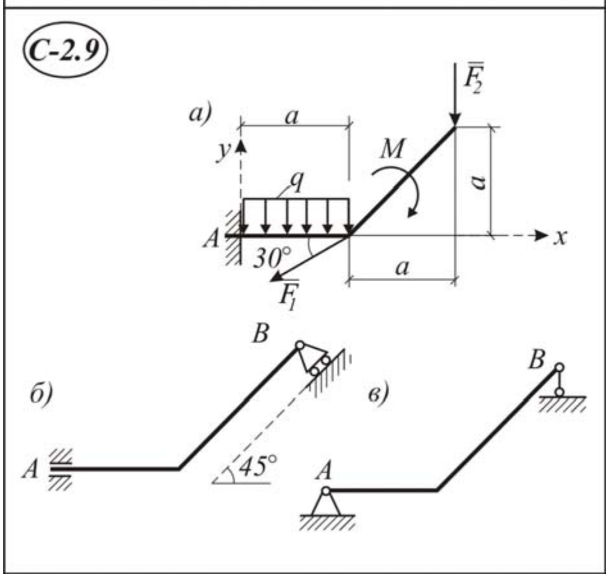
Задание С-2. Определение опор твердого тела

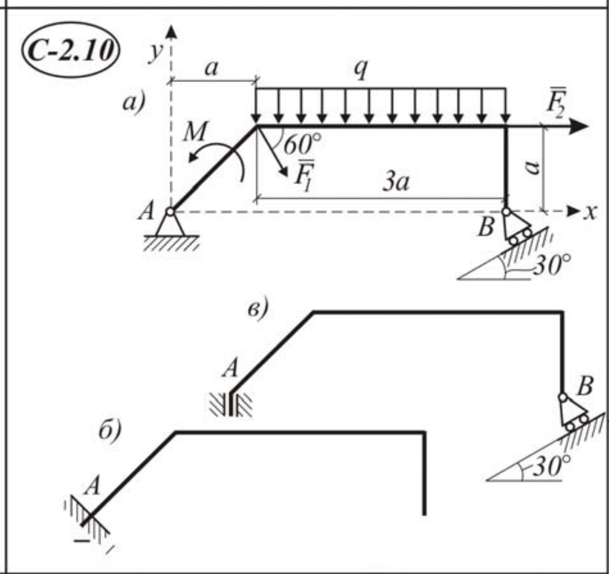
На схемах С-2.1-С-2.30 показаны три способа закрепления бруса с ломаной осью.

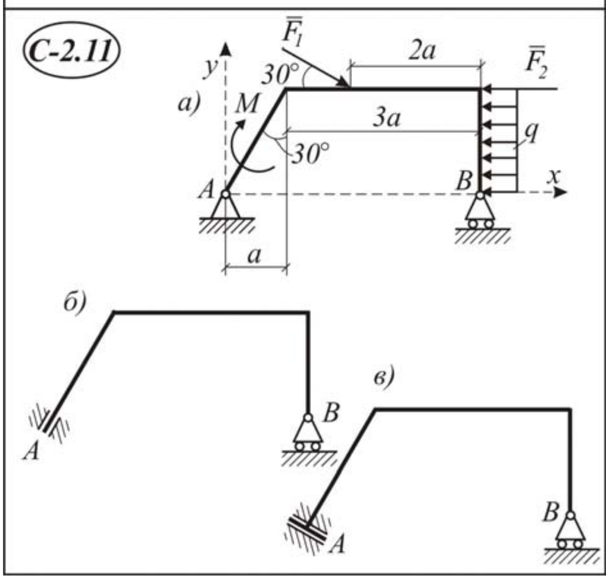


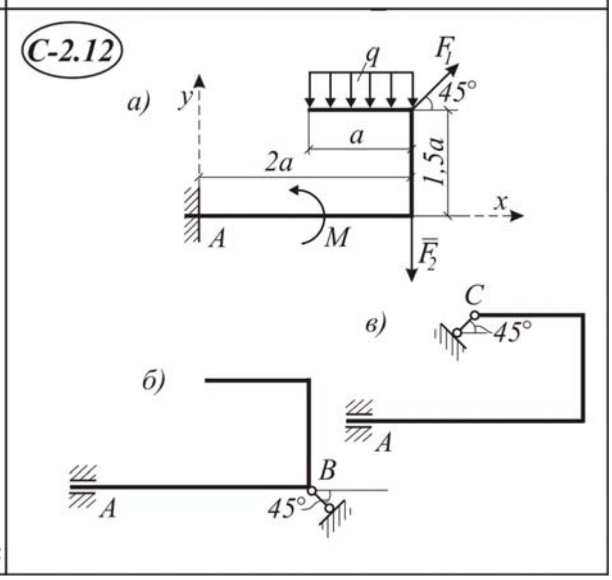

С-2.7
а)
y
q
x
A
45°
M
$\overline{F}_1$
$\overline{F}_2$
2a
2a
2a
б)
A
B
в)
A
90°
B

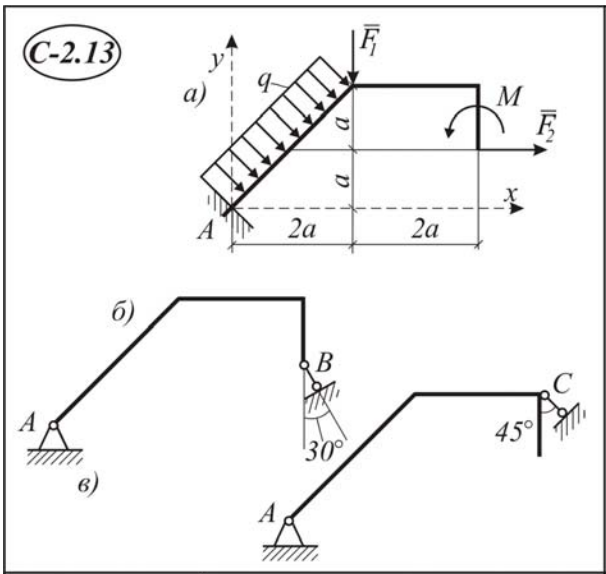

С-2.8
б)
в)
A
A
B
B
y
а)
A
M
$\overline{F}_1$
0,5a
0,5a
90°
C
30°
D
$\overline{F}_2$
q
a
B
x

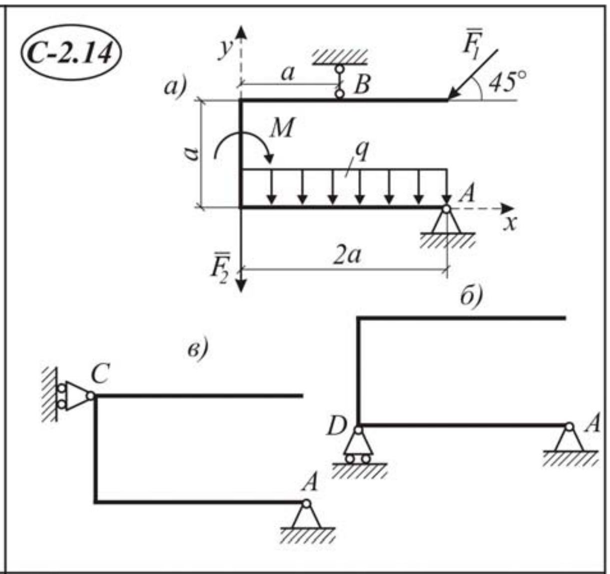

С-2.9
а)
a
$\overline{F}_2$
M
y
q
a
A
x
30°
$\overline{F}_1$
a
B
б)
в)
A
45°
B
A

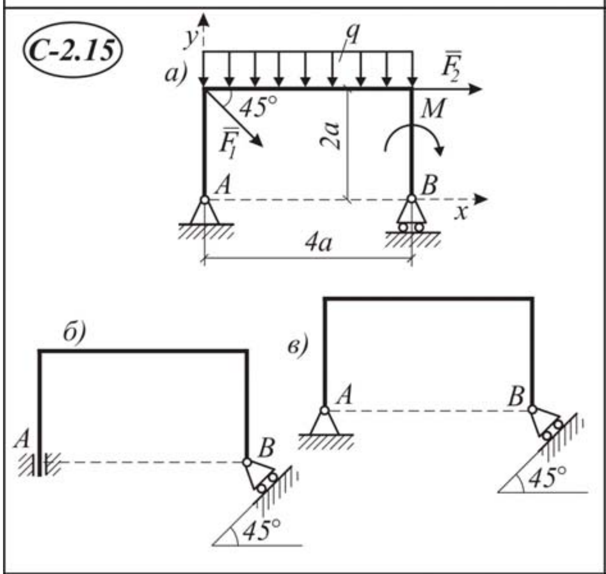

С-2.10
y
a
q
а)
$\overline{F}_2$
M
60°
$\overline{F}_1$
3a
a
A
B
x
30°
в)
A
B
б)
A
30°

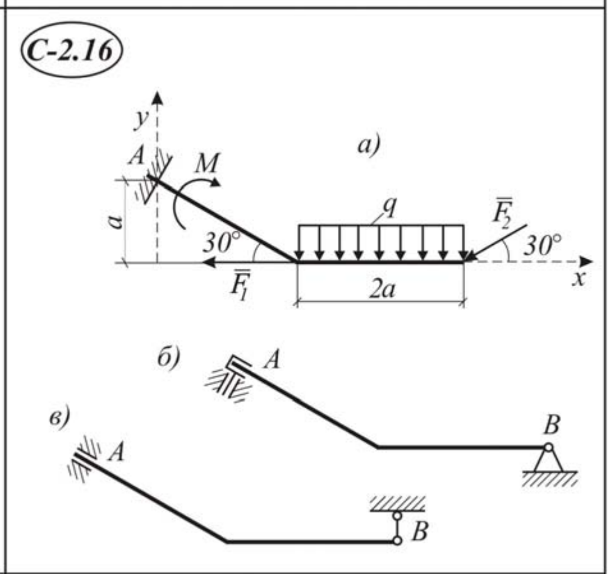

С-2.11
$\overline{F}_1$
2a
y
30°
$\overline{F}_2$
а)
M
3a
q
30°
A
B
x
a
б)
B
A
в)
B
A

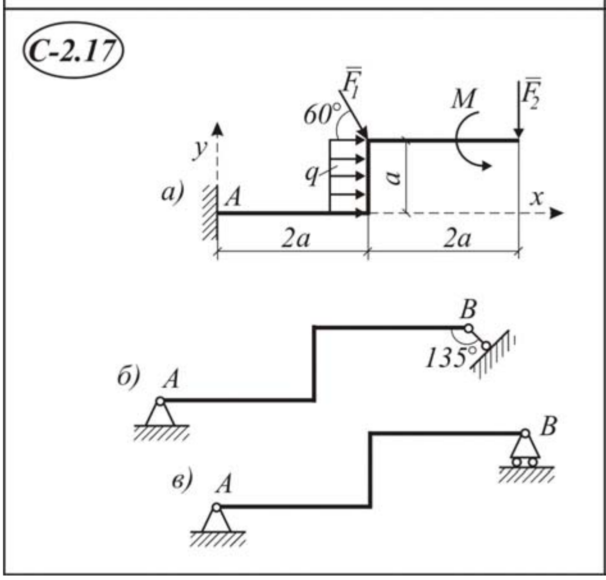

С-2.12
q
F_1
45°
а)
y
a
2a
1,5a
x
A
M
$\overline{F}_2$
C
в)
45°
б)
A
B
A
45°

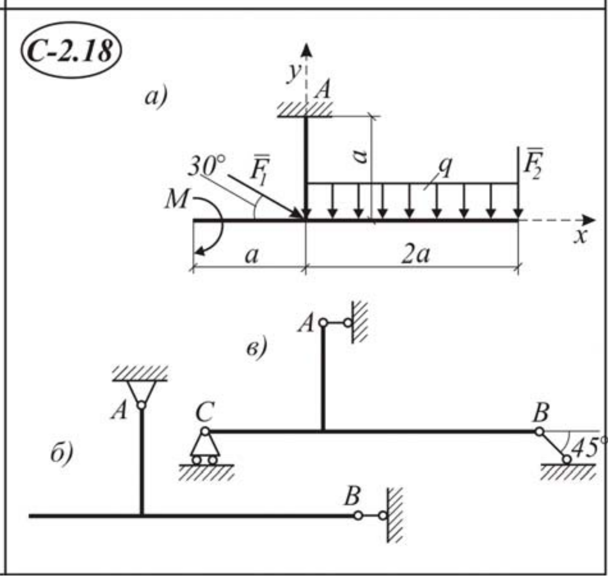

С-2.13
а)
б)
в)
y
x
q
A
B
C
M
a
2a
30°
45°


С-2.14
а)
б)
в)
y
x
a
2a
A
B
C
D
M
q
45°

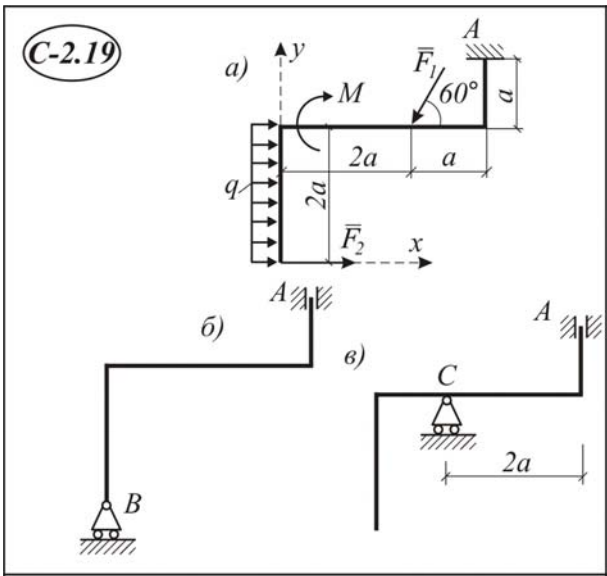

С-2.15
а)
б)
в)
y
x
q
45°
M
2a
4a
A
B


С-2.16
а)
б)
в)
y
x
A
B
M
q
a
2a
30°

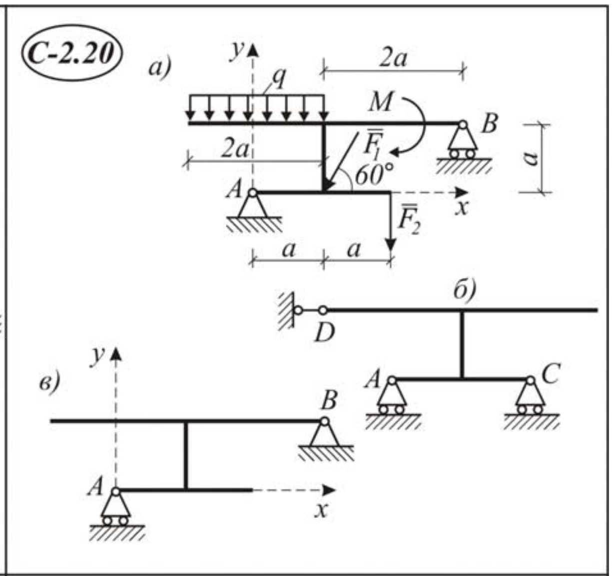

С-2.17
а)
б)
в)
y
x
60°
M
q
a
2a
A
B
135°


С-2.18
а)
б)
в)
y
x
A
B
C
a
2a
30°
M
q
45°

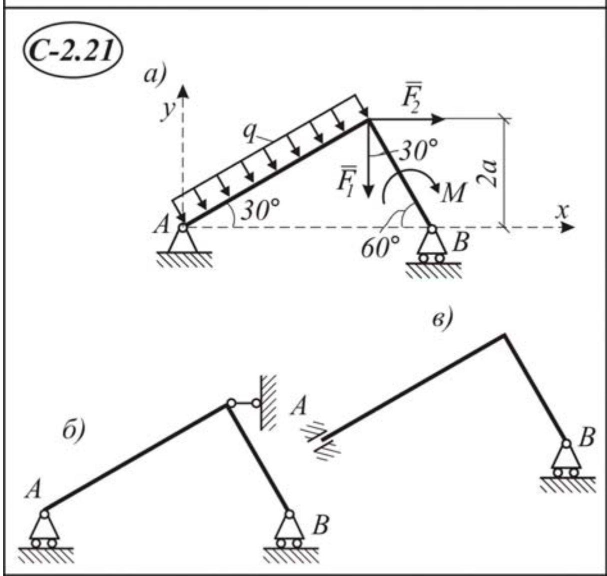
С-2.19



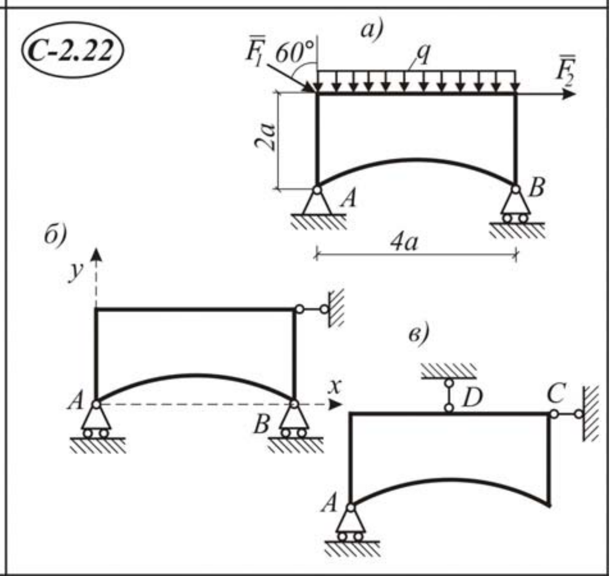
С-2.20



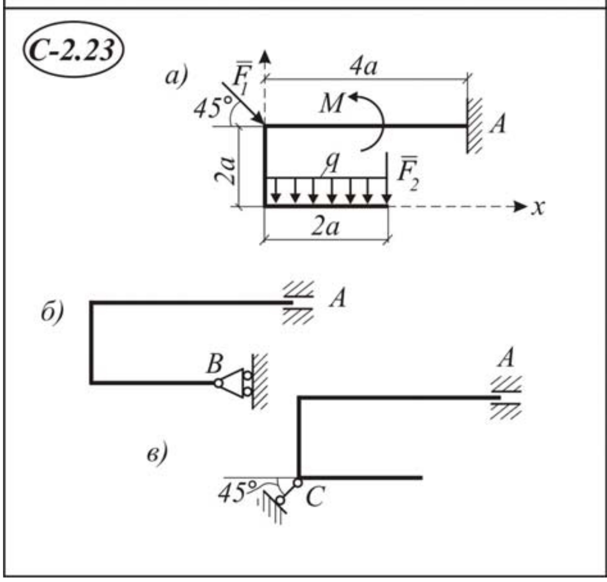
С-2.21



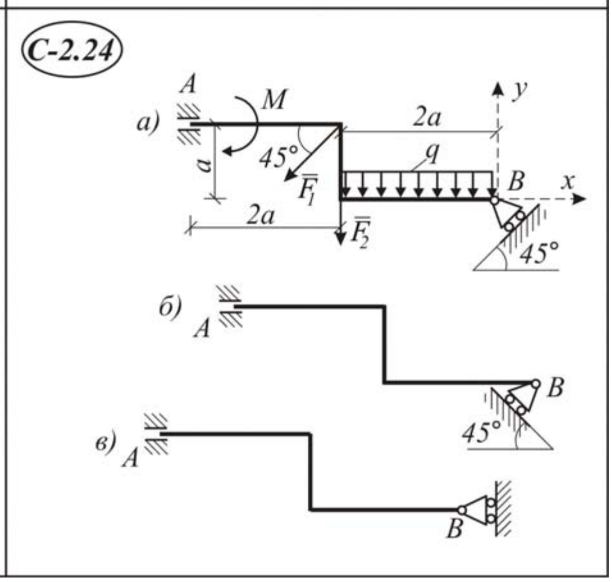
С-2.22

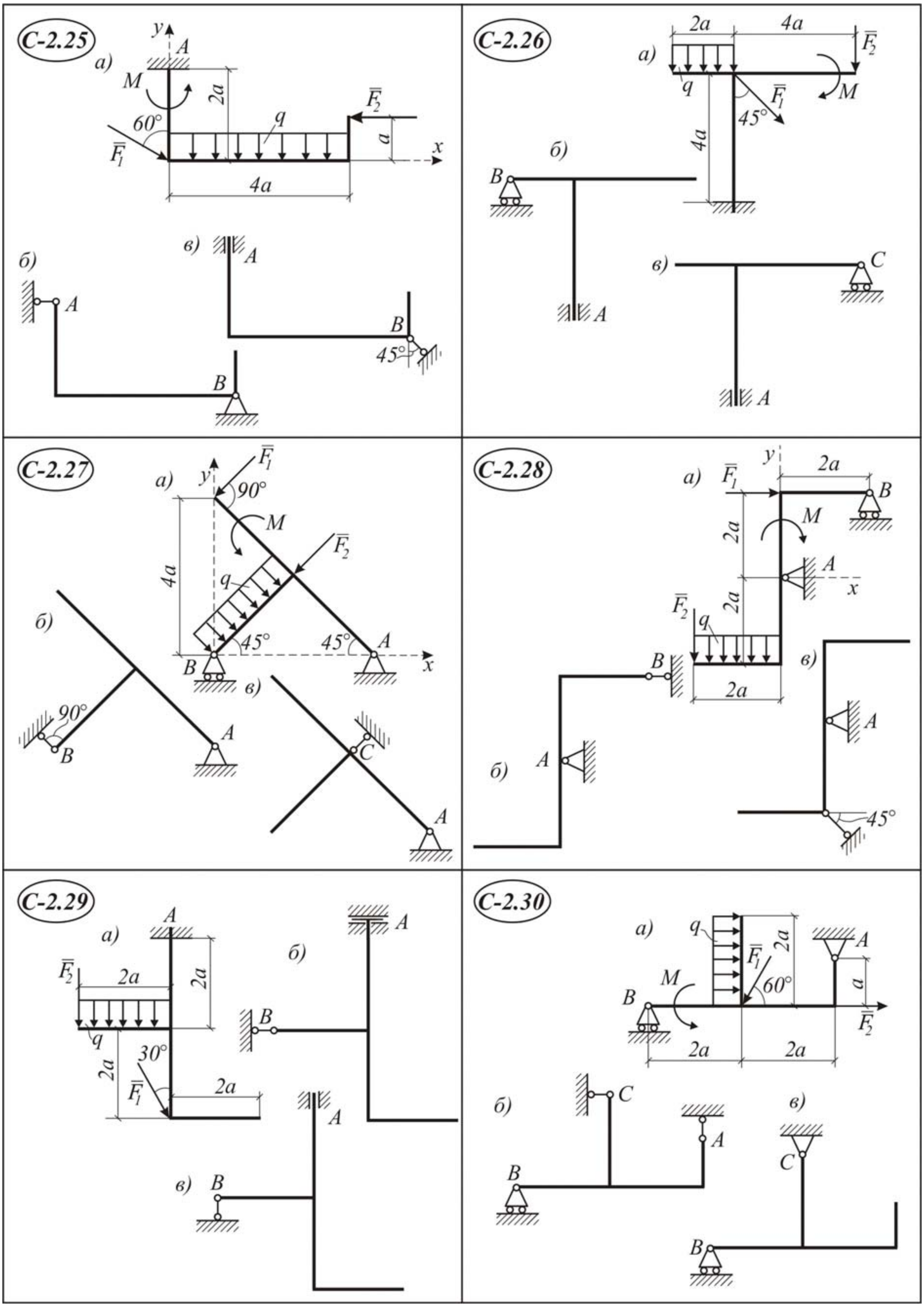


С-2.23



С-2.24





Для всех трех случаев заданная нагрузка (табл. I.2.1) и размеры одинаковы.

Т а б л и ц а I.2.1.

Номер варианта	F_1 (кН)	F_2 (кН)	M (кНм)	q (кН/м)	Исслед. реакция	Номер варианта	F_1 (кН)	F_2 (кН)	M (кНм)	q (кН/м)	Исслед. реакция
1	2	3	4	5	6	1	2	3	4	5	6
1	18	14	19	1,8	Y_A	16	21	17	19	2,1	M_A
2	16	12	17	1,6	M_A	17	35	31	14	3,5	Y_A
3	14	10	15	1,4	Y_B	18	20	16	18	2,0	X_A
4	22	18	23	2,2	Y_B	19	15	11	12	1,5	M_A
5	28	24	12	2,8	X_B	20	10	14	18	1,0	Y_A
6	30	26	24	3,0	M_A	21	30	26	16	3,0	Y_B
7	12	16	14	1,2	X_A	22	18	14	12	1,8	Y_A
8	8	12	15	1,8	R_B	23	24	20	19	2,4	M_A
9	14	18	11	1,4	Y_A	24	32	28	16	3,2	Y_A
10	30	26	24	1,9	X_A	25	26	22	14	2,6	X_A
11	25	21	21	2,5	R_B	26	14	10	16	14	M_A
12	15	11	18	1,5	Y_A	27	21	17	19	2,1	X_A
13	32	28	8	32	Y_A	28	30	26	22	3,0	Y_A
14	28	24	12	2,8	Y_A	29	34	30	15	3,4	M_A
15	17	19	11	1,7	X_A	30	20	16	21	2,0	R_B

Найти реакции опор для такого способа закрепления бруса, при котором реакция, указанная в табл. I.2.1, имеет наименьший модуль. При расчете принять a=1 м.

Пример выполнения С-2.

Дано: схемы закрепления бруса (рис. I.2.1а,б,в); F=10 кН; q=3 кН/м; M=6 кНм; a=1 м.

Найти реакции опор для того способа закрепления, при котором момент M_A в опоре A имеет наименьшее числовое значение.

Р е ш е н и е.

1. Действие связей на конструкцию заменяем их реакциями: в схеме *а* – M_A, $\overline{X}_A, \overline{Y}_A$; в схеме *б* – $\overline{Y}'_A$, M'_A *и* R_B; в схеме *в* – M_A, X_B, Y_B.

Рассмотрим систему уравновешивающихся сил, приложенных к конструкции с различными вариантами закрепления (рис. I.2.2 а,б,в).

Равномерно распределенную нагрузку заменим равнодействующей силой

$$Q = g \cdot 2 = 6 \text{ кН}.$$

Силу $\overline{F}$ разложим на две составляющие

$$F_X = F \cdot \cos 45^{\circ} = 10 \cdot 0,707 = 7,07 \text{ кН},$$

$$F_y = F \cdot \sin 45^{\circ} = 10 \cdot 0,707 = 7,07 \text{ кН}.$$

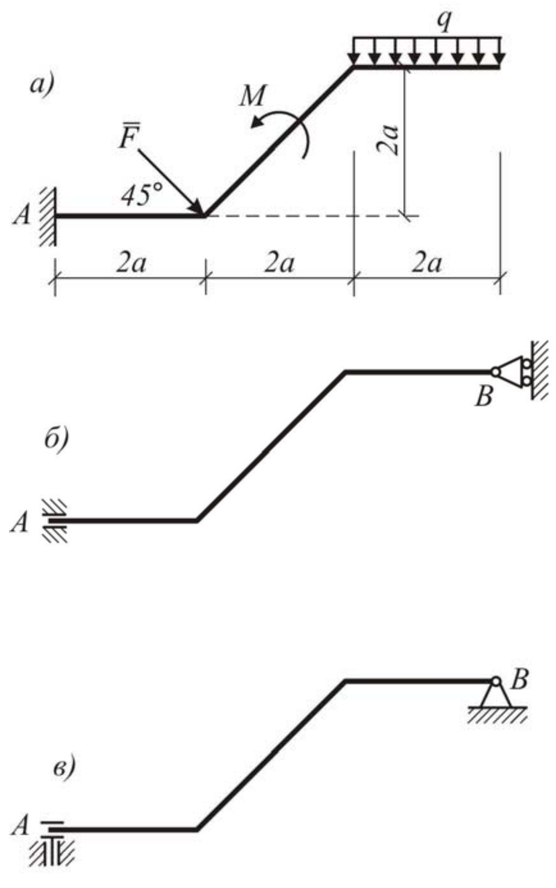


Рис. I.2.1

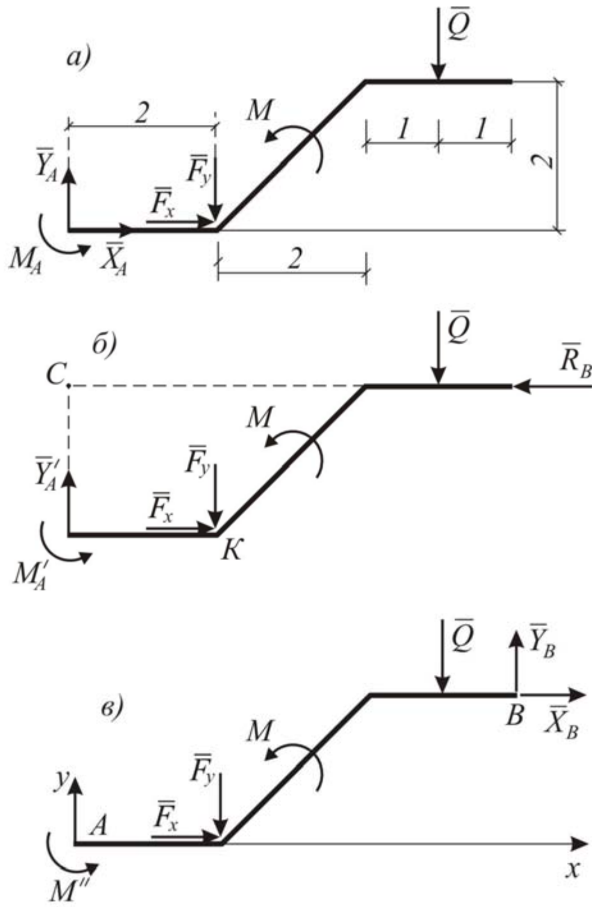


Рис. I.2.2

Чтобы выяснить, в каком случае момент, в опоре *A* является наименьшим, найдем его для всех трех схем (рис I.2.2 а,б,в), не определяя пока остальных реакций.

Для схемы – *«а»*

$$\sum m_A(\overline{F}_к) = 0;\; M_A + M - Q \cdot 5 - F_y \cdot 2 = 0;\; M_A = 38,4 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

Для схемы – «*б*»

$$\sum m_c(\overline{F}_к) = 0;\; M'_A + F_x \cdot 2 + M - F_y \cdot 2 - Q \cdot 5 = 0;\; M'_A = 24,00 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

Для схемы – «*в*»

$$\sum m_B(\bar{F}_к)=0;\ M''_A+F_x\cdot 2+F_y\cdot 4+M+Q\cdot 1=0;\ M''_A=-54,42\ \text{кН}\cdot\text{м}.$$

Таким образом, наименьший момент в заделке получается при закреплении бруса по схеме «*б*». Определим остальные реакции для этой схемы.

$$\sum F_x=0;\ F_x-R_B=0;\ \text{откуда}\ R_B=3,54\ \text{кН};$$

$$\sum F_y=0;\ Y'_A-F_y-Q=0;\ \text{откуда}\ Y'_A=5,94\ \text{кН}.$$

Проверка

Для проверки правильности вычислений реакций $R_B, Y'_A\, и\, M'_A,$ составим сумму моментов всех сил приложенных к ломанному брусу по схеме *б* относительно любой другой точки, например точки *К*.

$$\sum m_к(F)=0;\ M'_A-Y'_A\cdot 2+M-Q\cdot 3+R_B\cdot 2=0;$$

$$24-13,07\cdot 2+6-18+7,07\cdot 2=0,$$

$$0=0.$$

Результаты проверки приведены в табл. I.2.2.

Т а б л и ц а I.2.2

Схемы	Моменты M_A, M'_A, M''_A (кН · м)	Силы, кН	
		Y'_A	R_B
а	38,4	–	–
б	24,00	13,07	7,07
в	-54,42	-	-

Задание С-3. Равновесие системы двух тел

Конструкция состоит из двух тел.(схемы С-3.1-С-3.30), которые в т.*C* соединены друг с другом шарнирно. Внешними связями являются или шарнирно-неподвижная опора или жесткая заделка в точке *A*; в точке *B* – или шарнирно-неподвижная или шарнирно-подвижная.

На конструкцию действуют:

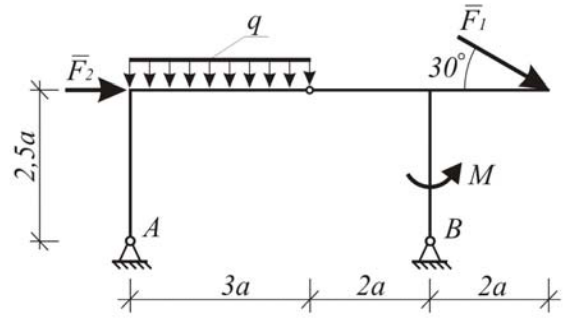
пара сил с моментом *M*, равномерно-распределенная нагрузка с интенсивностью q и еще две силы $\overline{F}_1$ и $\overline{F}_2$.

Определить реакции связей в точках *A, B, C*, вызванные заданными нагрузками при исходных данных, приведенных в табл. I.3.1. Во всех вариантах принять a=1 м.

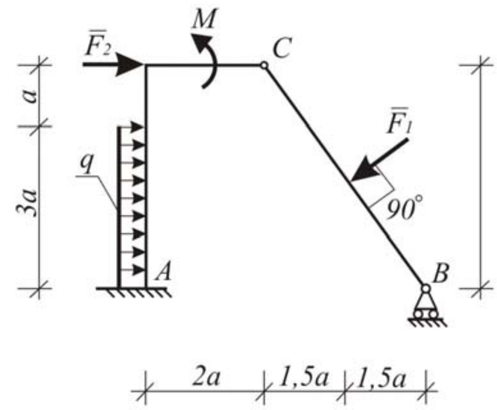
Т а б л и ц а I.3.1

Номер варианта	F_1, кН	F_2, кН	M, кН·м	q, кН/м	Номер варианта	F_1, кН	F_2, кН	M, кН·м	q, кН/м
1	2	3	4	5	1	2	3	4	5
1	18	14	19	1,8	16	21	17	19	2,1
2	16	12	17	1,6	17	35	31	14	3,5
3	14	10	15	1,4	18	20	16	18	2,0
4	22	18	23	2,2	19	15	11	12	1,5
5	28	24	12	2,8	20	10	14	18	1,0
6	30	26	24	3,0	21	30	26	16	3,0
7	12	16	14	1,2	22	18	14	12	1,8
8	8	12	15	1,8	23	24	20	19	2,4
9	14	18	11	1,4	24	32	28	16	3,2
10	30	26	24	1,9	25	26	22	14	2,6
11	25	21	21	2,5	26	14	10	16	1,4
12	15	11	18	1,5	27	21	17	19	2,1
13	32	28	8	3,2	28	30	26	22	3,0
14	28	24	12	2,8	29	34	30	15	3,4
15	17	19	11	1,7	30	20	16	21	2,0

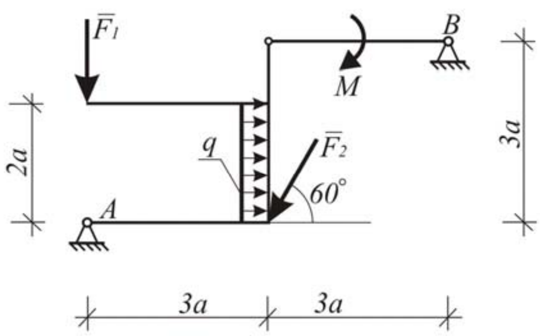
C-3.1



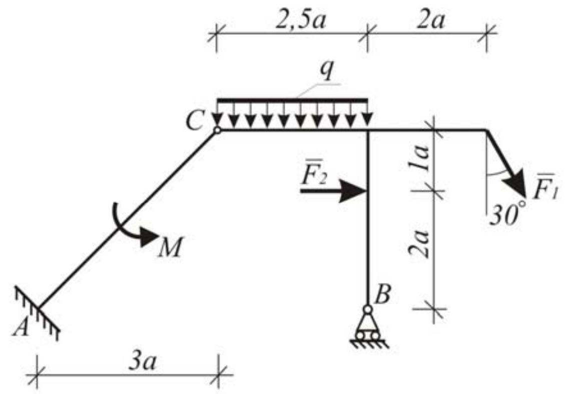
C-3.2



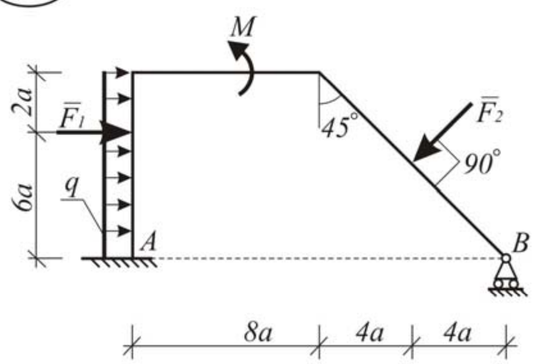
C-3.3



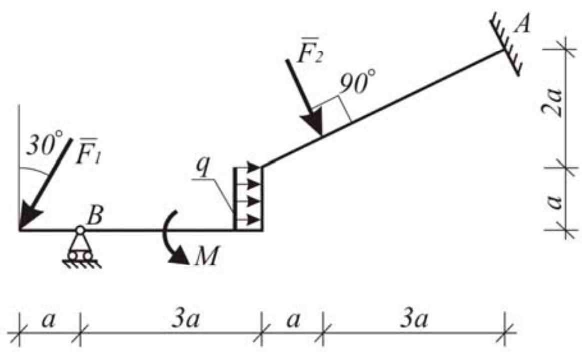
C-3.4



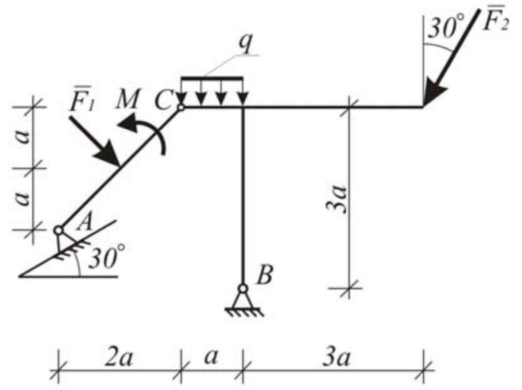
C-3.5



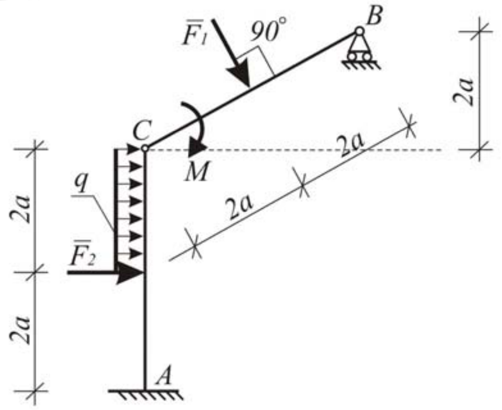
C-3.6



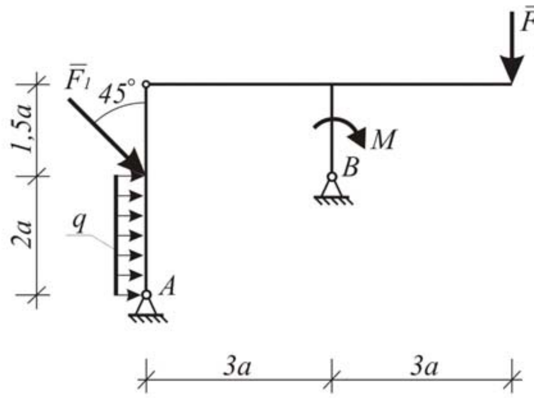
C-3.7



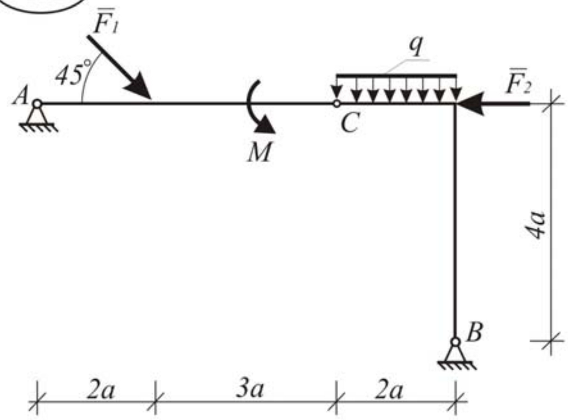
C-3.8



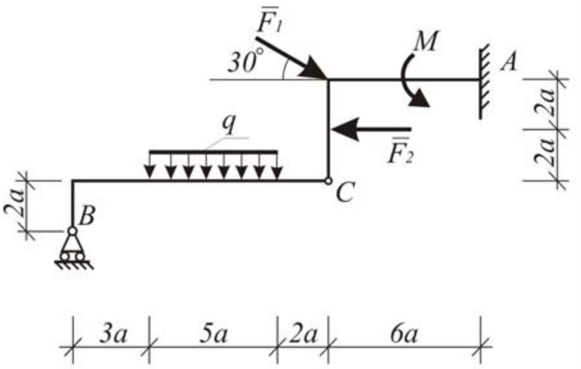
C-3.9



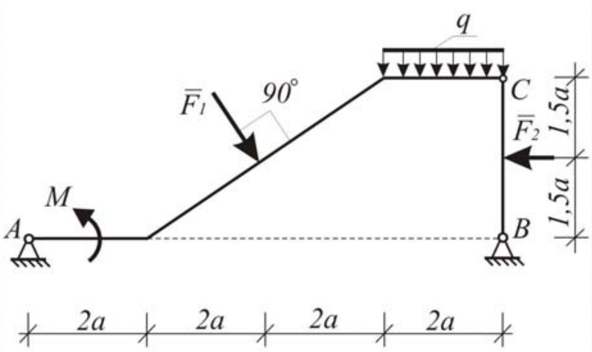
C-3.10



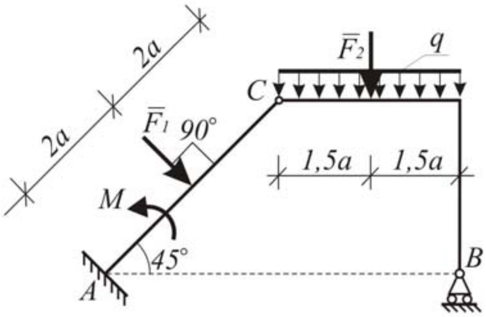
C-3.11



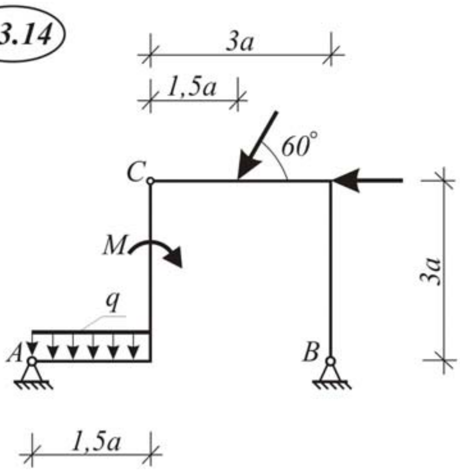
C-3.12



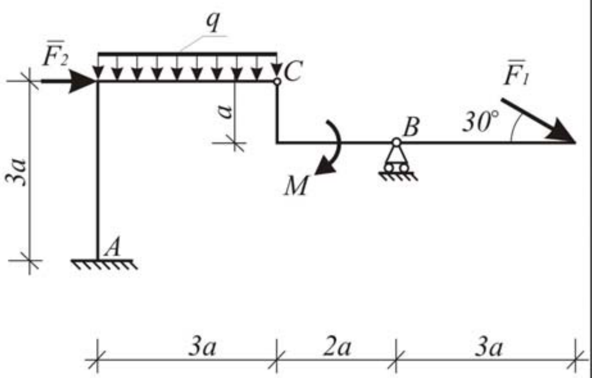
C-3.13



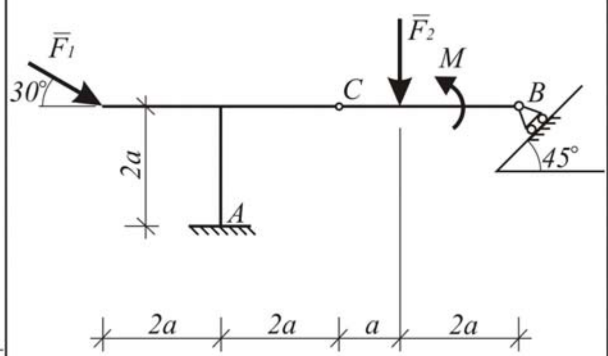
C-3.14



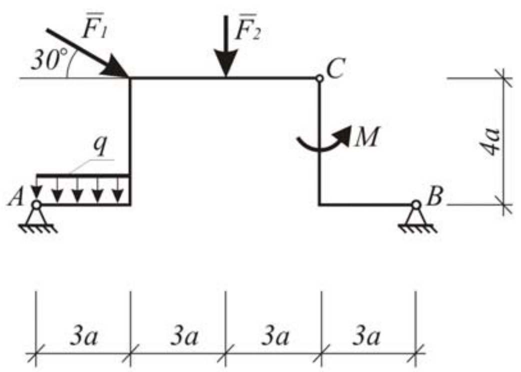
C-3.15



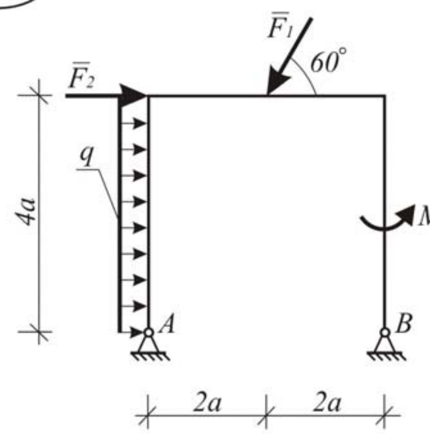
C-3.16



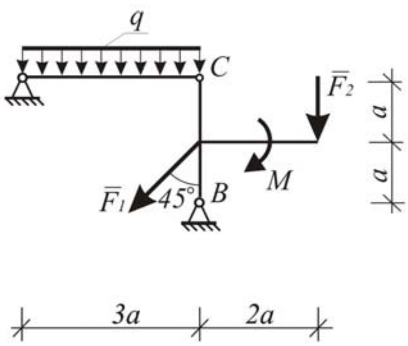
C-3.17



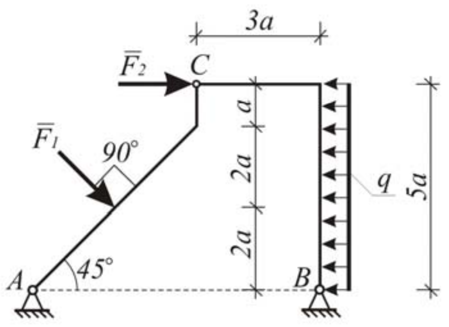
C-3.18



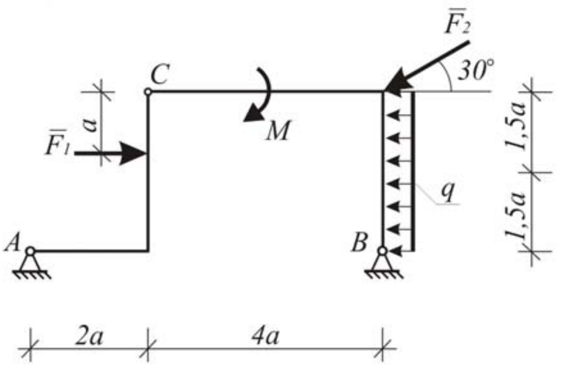
C-3.19



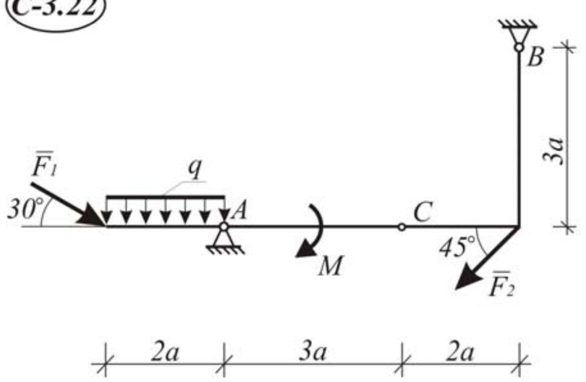
C-3.20



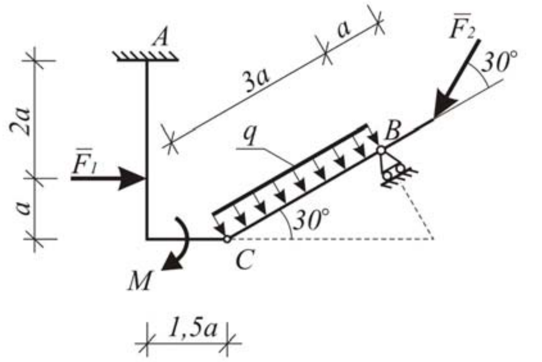
C-3.21



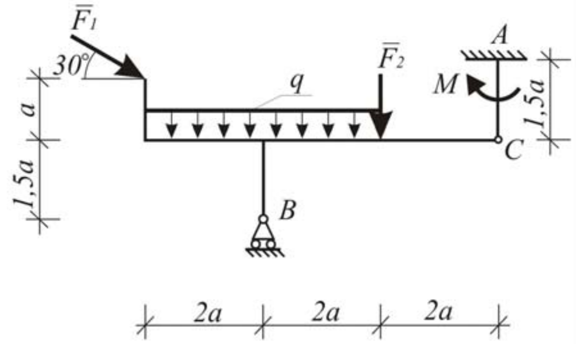
C-3.22



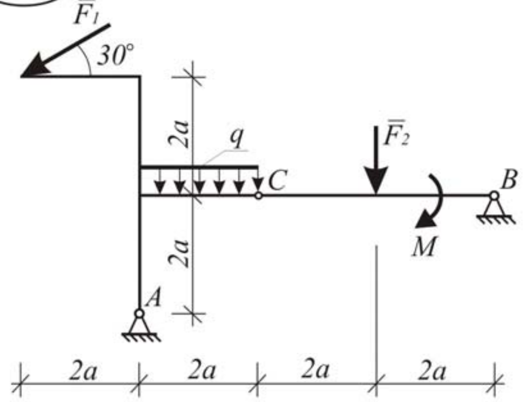
C-3.23



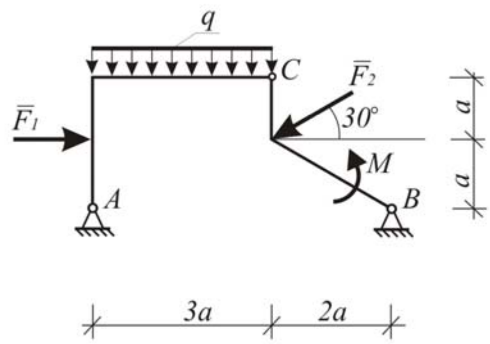
C-3.24



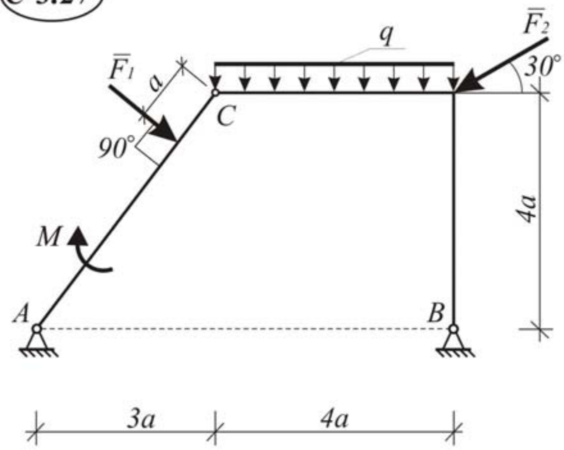
C-3.25



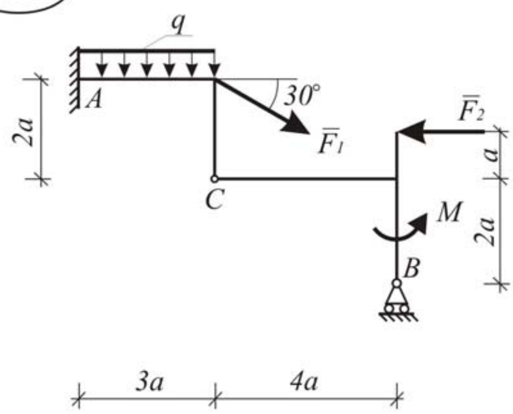
C-3.26



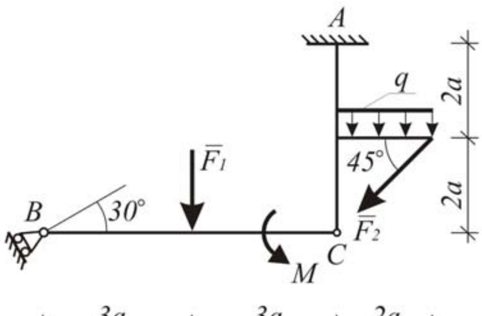
C-3.27



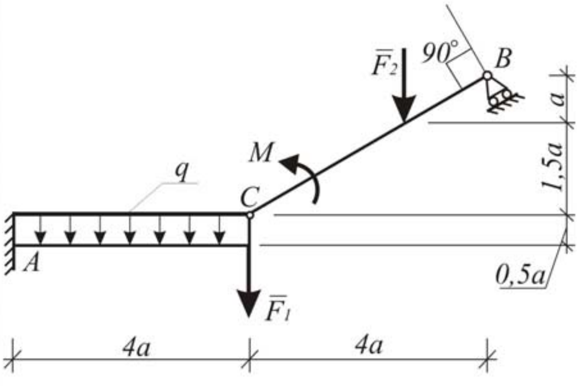
C-3.28



C-3.29



C-3.30



Пример выполнения С-3.

Дано: $F_1 = 10$ кН; $F_2 = 12$ кН; $q = 1{,}6$ кН/м; $m = 17$ кН $\cdot$ м; $a = 1$ м.

Найти: реакции в опорах *A* и *B* и давление в шарнире *C* (рис. I.3.1).

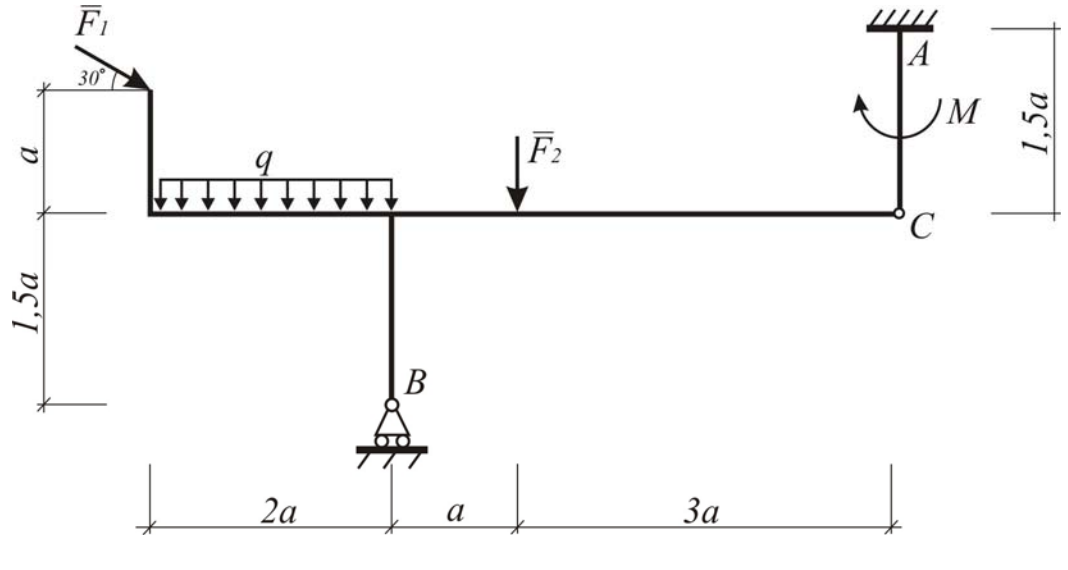


Рис. I.3.1

Р е ш е н и е :

1.Опора *A* – жесткая заделка, реакцию в этой опоре представим двумя неизвестными по величине и направлению силами $\overline{X}_A$ и $\overline{Y}_A$, и парой сил, с моментом *M*, который тоже неизвестен. Силы $\overline{X}_A$ и $\overline{Y}_A$ направим в произвольном направлении, но для удобства, параллельно координатным осям *x* и *y*.

Опора *B* – шарнирно-подвижная, реакцию $\overline{R}_B$ направим перпендикулярно площадке, которая поддерживает эту опору.

Равномерно-распределенную нагрузку заменим одной сосредоточенной силой.

$$Q = q \cdot 2a = 1{,}6 \cdot 2 \cdot 1 = 3{,}2 \text{ кН}.$$

Для того, чтобы легче составлять уравнения равновесия, силу $\overline{F}_1$ разложим на составляющие, параллельные координатным осям, сохраняя при этом точку ее приложения:

$$F_{1,x} = F_1 \cdot \cos 30° = 10 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 8{,}66 \text{ кН};$$

$$F_{1,y} = F_1 \cdot \sin 30° = 10 \cdot \frac{1}{2} = 5 \text{ кН}.$$

Задачу решим методом «расчленения», то есть разрезаем конструкцию по шарниру *C* на две части и рассматриваем равновесие каждой в отдельности с учетом закона равенства действия и противодействия $\overline{X}_C = -\overline{X}'_C$ и

$\bar{Y}_C = -\bar{Y}'_C$ (рис.3.2 и 3.3); где $\bar{X}_C$ и $\bar{Y}_C$ – составляющие реакции в шарнире *C*, приложенные к левой части конструкций.

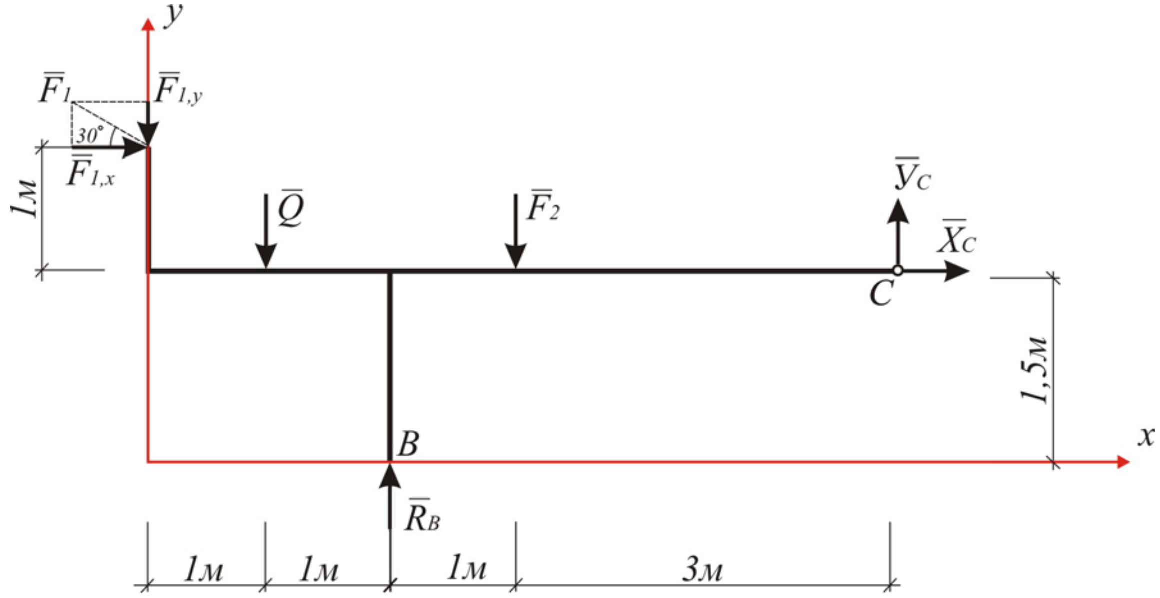


Рис. I.3.2

2. Сначала рассмотрим систему уравновешивающихся сил, приложенных к телу *BC* (рис. I.3.2).

Систему уравнений равновесия для сил, изображенных на рис. 3.32 запишем в виде:

$$\sum F_{kx} = 0;\ F_{1,x} + X_c = 0; \tag{3.1}$$

$$\sum F_{ky} = 0;\ -F_{1,y} - Q - F_2 + Y_c + R_B = 0; \tag{3.2}$$

$$\sum m_C(F_k) = 0;\ -R_B \cdot 4 + F_2 \cdot 3 + Q \cdot 5 + F_{1,y} \cdot 6 - F_{1,x} \cdot 1 = 0\,. \tag{3.3}$$

Подставляя исходные данные в уравнения (3.1)-(3.3) получим искомые неизвестные.

$$X_C = -8{,}66\ \text{кН};\ Y_C = 1{,}9\ \text{кН};\ R_B = 18{,}3\ \text{кН}.$$

3. Теперь рассмотрим систему сил $\bar{X}'_C$, $\bar{Y}'_C$, $\bar{X}'_A$, $\bar{Y}'_A$ и пары сил с моментами M_A и M, действующих на тело *AC*.

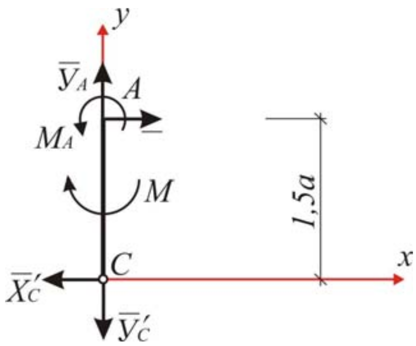


Рис. I.3.3

Запишем уравнения равновесия для произвольной плоской системы сил (рис.I.3.3), приложенных к телу *AC*.

$$\sum F_{kx} = 0;\ X_A - X'_C = 0; \tag{3.4}$$

$$\sum F_{ky} = 0;\ Y_A - Y'_C = 0; \tag{3.5}$$

$$\sum m_A(F)=0;\ M_A - M - X'_C \cdot 1{,}5 = 0. \qquad (3.6)$$

После подстановки исходных данных в уравнения (3.4)-(3.6) получим:

$$X_C = -8{,}66\ \text{кН};\quad Y_A = +1{,}9\ \text{кН};\quad M_A = 4\ \text{кН}\cdot\text{м}.$$

4. Для проверки правильности следует убедиться, что соблюдаются уравнения равновесия сил, приложенных ко всей конструкции (рис. I.3.4).

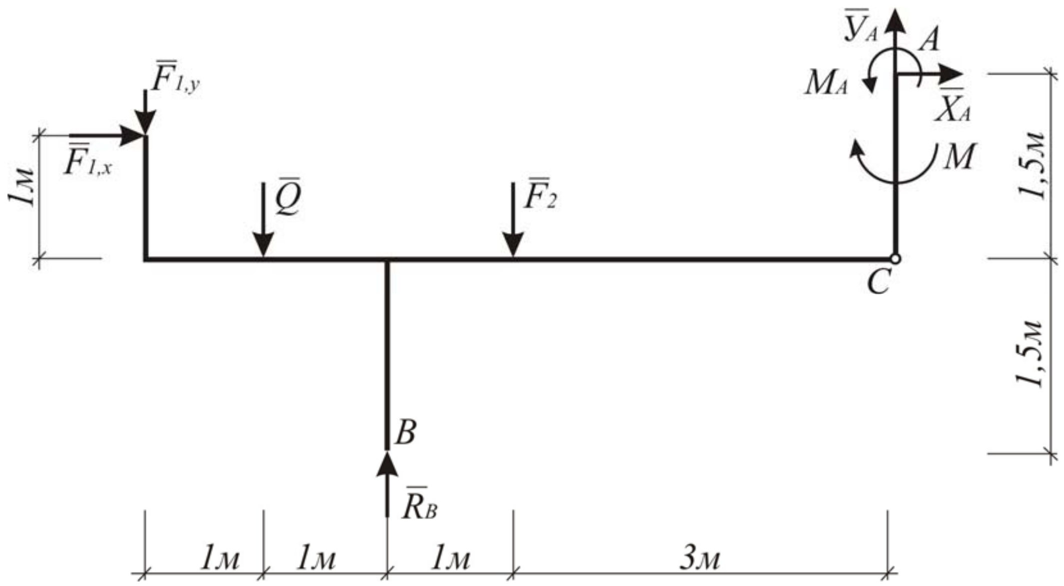


Рис. I.3.4

$$\sum m_B(\bar{F})=0;$$

$$-F_{1,x}\cdot 2{,}5 + F_{1,y}\cdot 2 + Q\cdot 1 - F_2\cdot 1 - X_A\cdot 3 + Y_A\cdot 4 + M_A - M = 0;$$

$$-8{,}66\cdot 2{,}5 + 5\cdot 2 + 3{,}2\cdot 1 - 12\cdot 1 + 8{,}66\cdot 3 + 1{,}9\cdot 4 + 4 - 17 = 0;$$

$$0 = 0\,/$$

Задача решена верно.

В ответе знак (-) показывает, что реакции $\bar{X}_A, \bar{X}_C$ направлены противоположно тем направлениям, которые показаны на рисунках.

Контрольные вопросы

1. Чему равен момент силы относительно точки, расположенной на линии действии силы?

2. Чему равно плечо силы относительно произвольно расположенной точки?

3. Зависят ли величина и направления главного вектора от положения центра приведения?

4. Укажите все возможные случаи приведения к точке плоской системы произвольно расположенных сил.

5. В каком случае главный вектор совпадает с равнодействующей?

6. В каких случаях плоская система сил может быть уравновешена одной силой? Как находится линия ее действия?'

7. При каком значении главного вектора и главного момента система сил находится в равновесии?

8. Какие силы называются внешними?

9. Какие силы называются внутренними?

10. Что называется реакцией связи?

11. Что называется распределенной нагрузкой?

12. Что называется шарнирной заделкой?

13. Какое условие должно соблюдаться, чтобы составная конструкция находилась в положении равновесия?

14. Сколько уравнений равновесия можно составить для каждого тела составной конструкции?

15. Сколько уравнений равновесия можно составить для составной конструкции?

I.3. Произвольная пространственная система сил

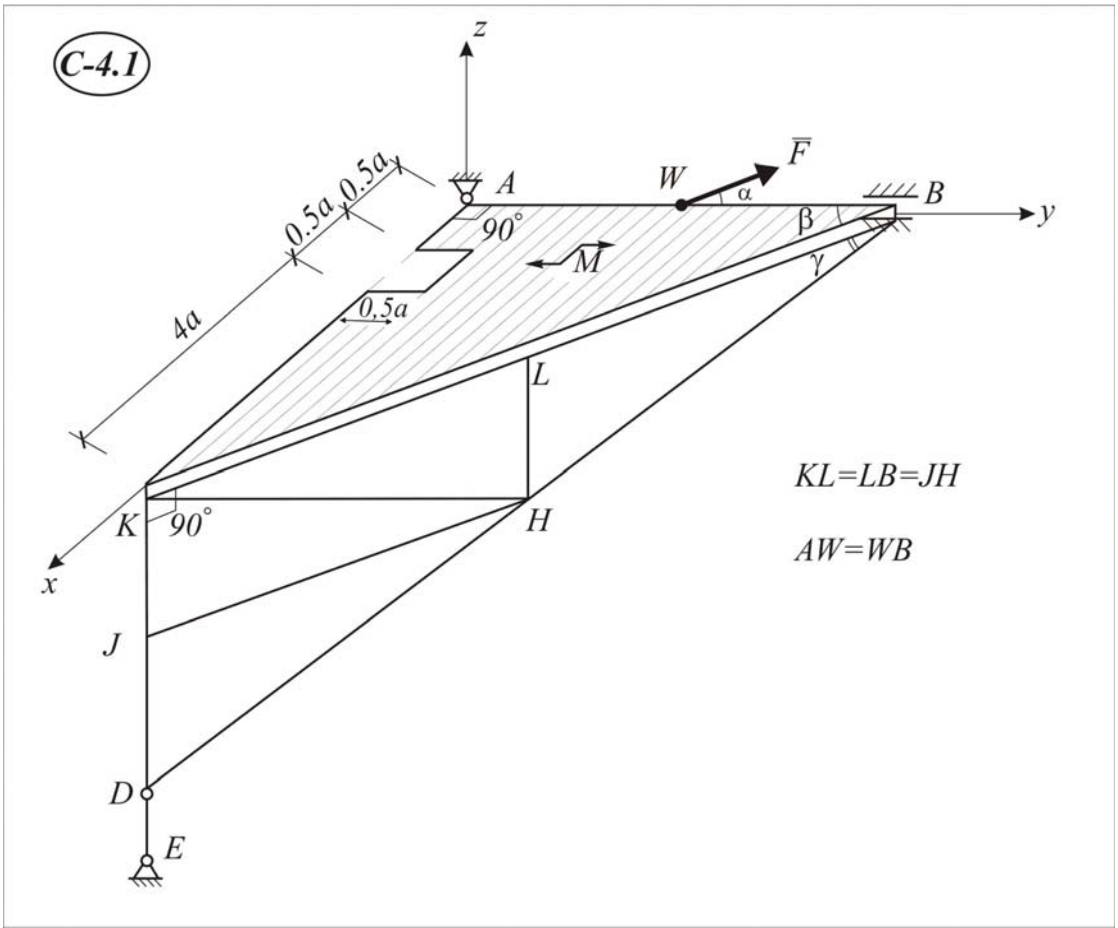
Задание С-4. Определение положения центра тяжести и реакций опор пространственной конструкции

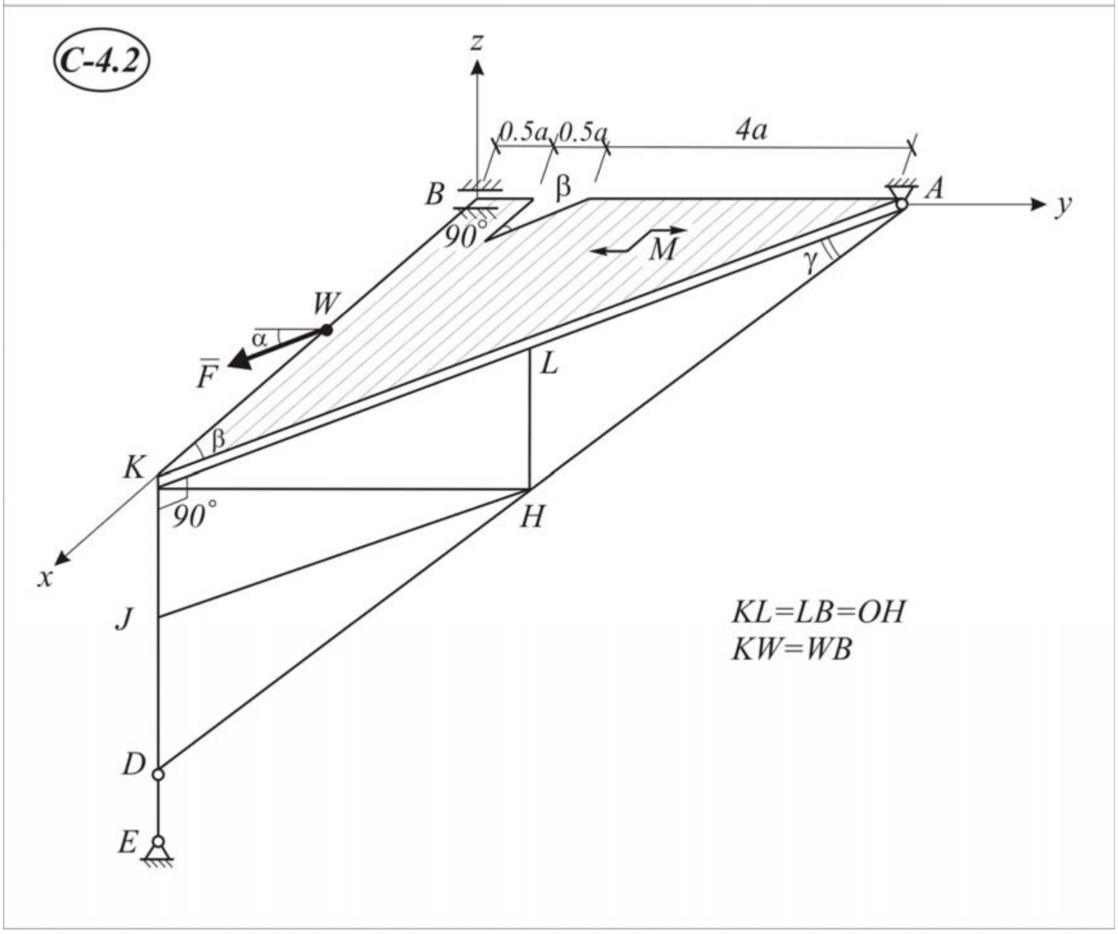
Конструкция, состоящая из плиты весом $P_п$ и фермы весом $P_ф$, закреплена сферическим шарниром в точке A, цилиндрическим шарниром (подшипником) в точке B и невесомым стержнем DE. Плита и ферма жестко соединены между собой под прямым углом. На плиту в плоскости $x\ y$, действует сила F, расположенная под углом α к оси y или ей параллельной и пары сил с моментом M (Схемы С-4.1-С-4.30).

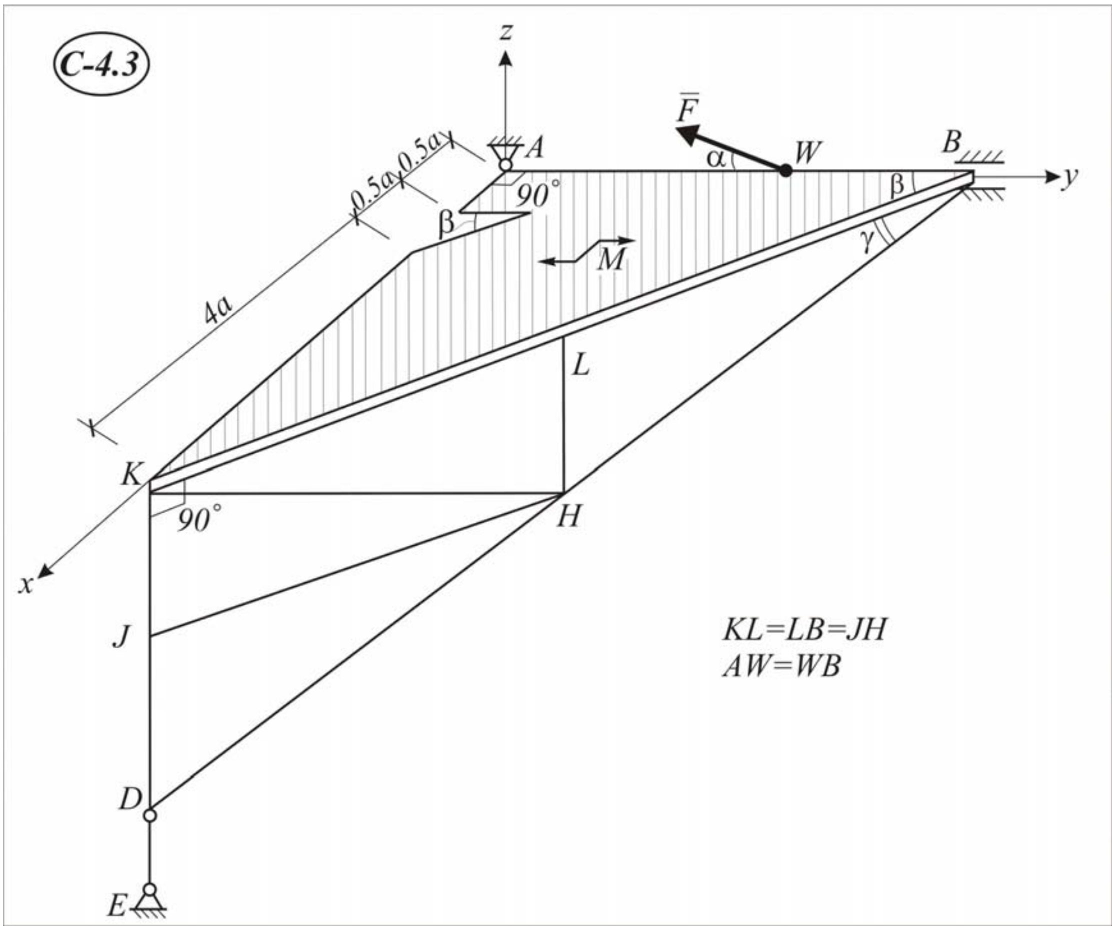
Найти центр тяжести всей конструкции, а также реакции в опорах при исходных данных, приведенных в табл. 4.1. В расчетах принять a=1 м.

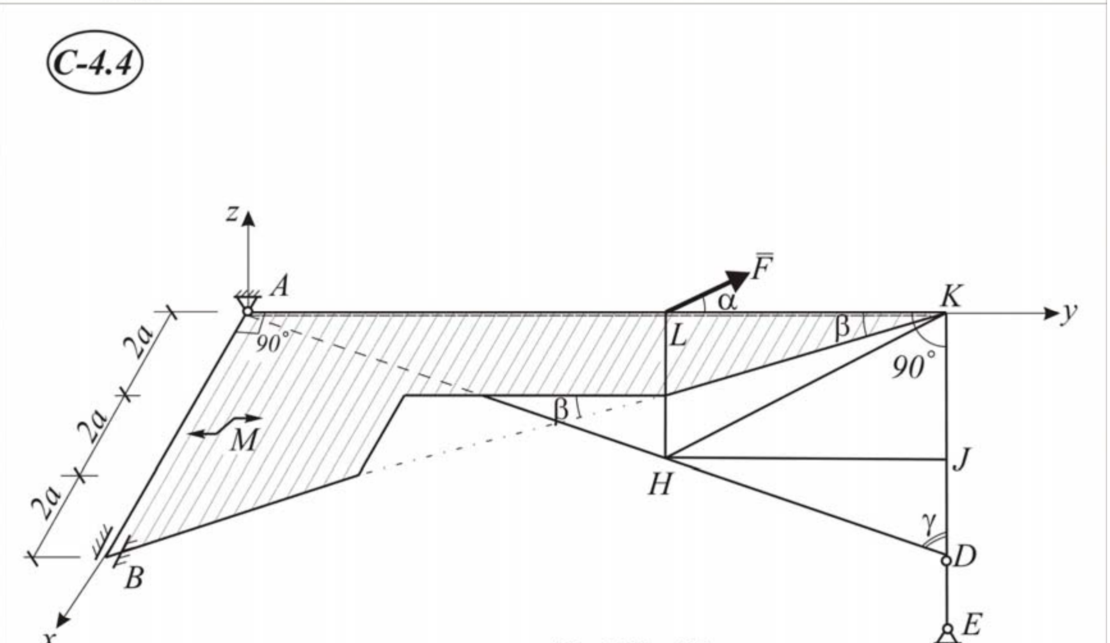
Таблица I.3.1

Номер варианта	$P_{п}$, кН	$P_{ф}$, кН	M, кН·м	F, кН	α, град	β, град	γ, град
1	2	3	4	5	6	7	8
1	10	6	7	6	30	30	30
2	15	8	10	9	60	60	60
3	20	9	6	5	45	45	45
4	18	10	5	4	30	45	60
5	17	11	4	3	60	30	45
6	11	10	12	11	45	45	60
7	9	6	14	13	30	60	30
8	25	11	9	8	60	30	60
9	30	18	7	6	45	60	30
10	19	10	11	10	30	60	60
11	16	7	14	13	90	30	60
12	14	6	7	6	90	30	60
13	23	5	10	9	90	60	60
14	26	4	6	5	90	30	45
15	27	3	5	4	45	60	60
16	8	8	4	7	30	30	30
17	9	12	12	11	30	45	60
18	11	11	14	13	45	30	60
19	14	13	9	8	60	45	60
20	17	14	7	6	30	60	60
21	29	9	11	10	60	30	30
22	15	10	14	13	45	60	30
23	17	6	7	6	90	30	30
24	21	7	10	9	90	60	45
25	25	8	6	5	90	30	45
26	12	10	5	4	90	60	30
27	18	3	4	3	90	45	45
28	20	5	12	11	90	30	60
29	22	8	14	13	90	-	45
30	24	12	9	8	60	-	45

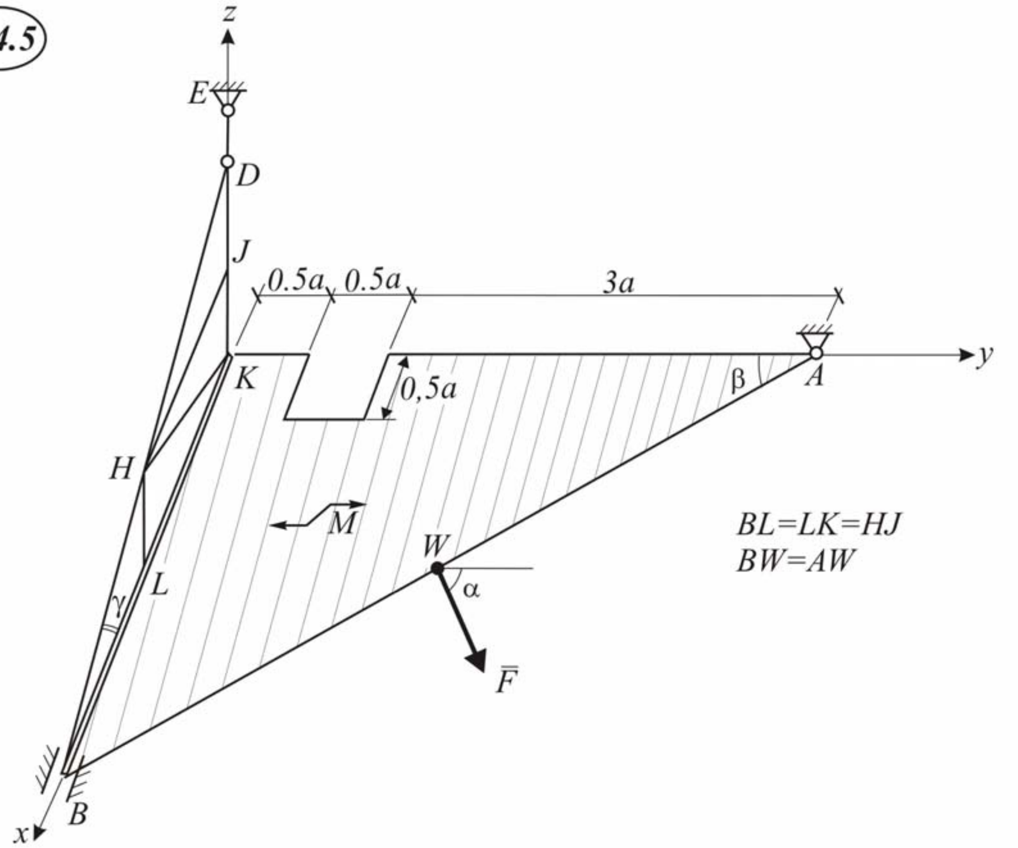

C-4.1
z
0.5a
0.5a
A
W
F
α
B
y
90°
β
M
γ
0,5a
4a
L
KL=LB=JH
AW=WB
K
90°
H
x
J
D
E


C-4.2
z
0.5a
0.5a
4a
B
β
A
y
90°
M
W
γ
α
F
L
K
β
90°
H
x
J
KL=LB=OH
KW=WB
D
E


C-4.3
z
A
F
W
B
y
α
β
90°
β
0.5a
0.5a
4a
M
γ
L
K
90°
H
x
J
KL=LB=JH
AW=WB
D
E

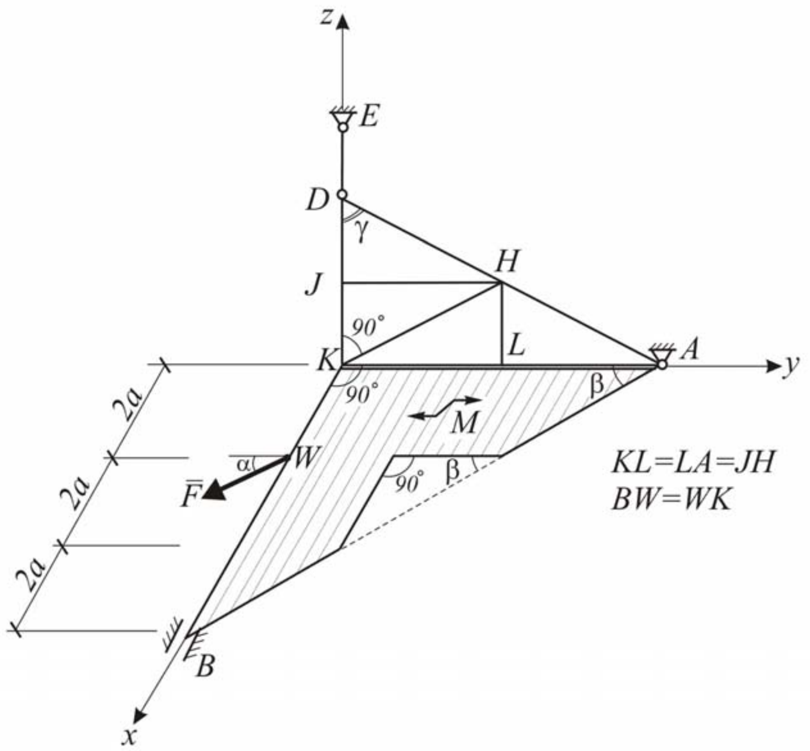

C-4.4
z
A
F
K
y
α
β
L
90°
2a
2a
2a
90°
β
M
H
J
γ
D
B
E
x
AL=LK=JH

C-4.5



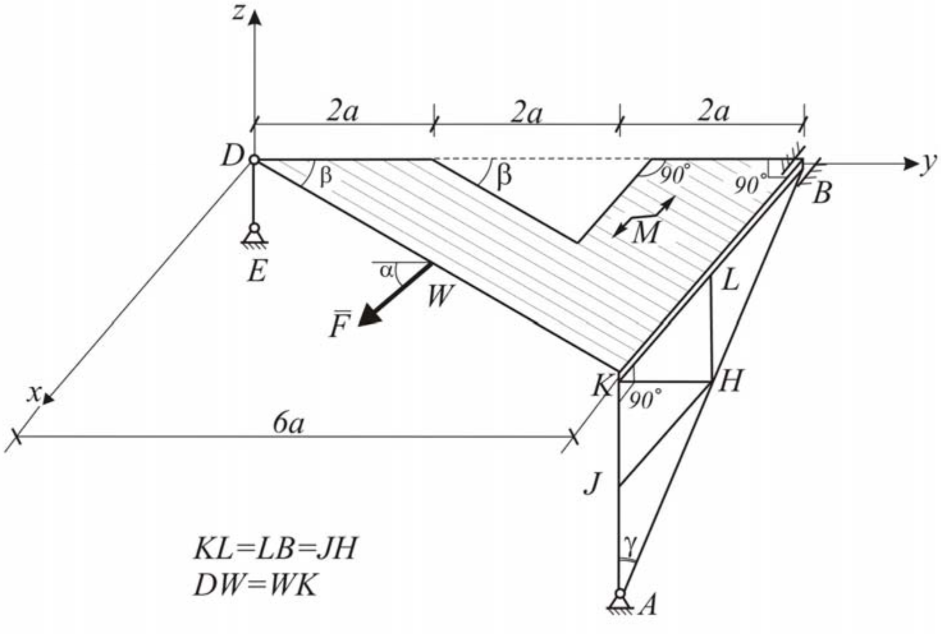
z
E
D
J
0.5a
0.5a
3a
y
K
0,5a
β
A
H
M
W
BL=LK=HJ
BW=AW
L
α
γ
F
B
x

C-4.6



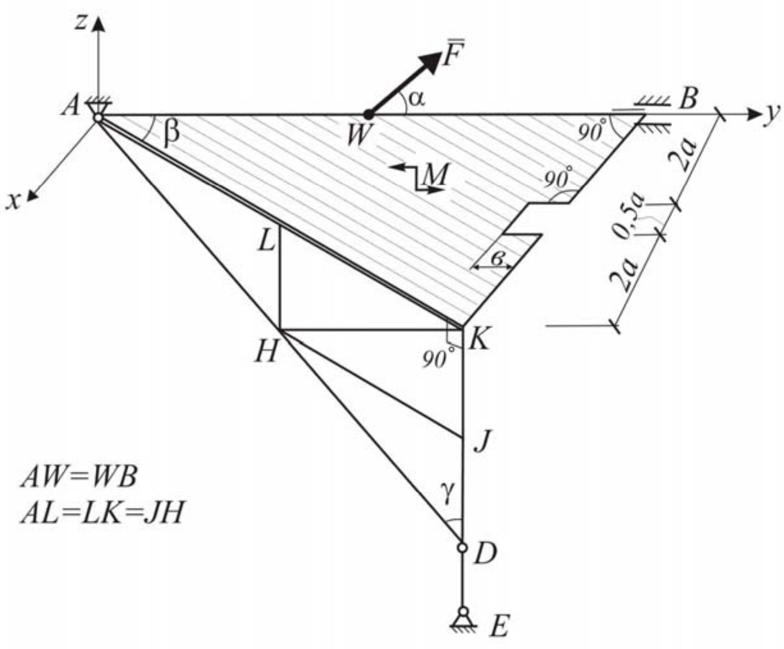
z
E
D
γ
H
J
90°
L
K
A
y
2a
90°
β
M
2a
α
W
90°
β
KL=LA=JH
BW=WK
F
2a
B
x

C-4.7

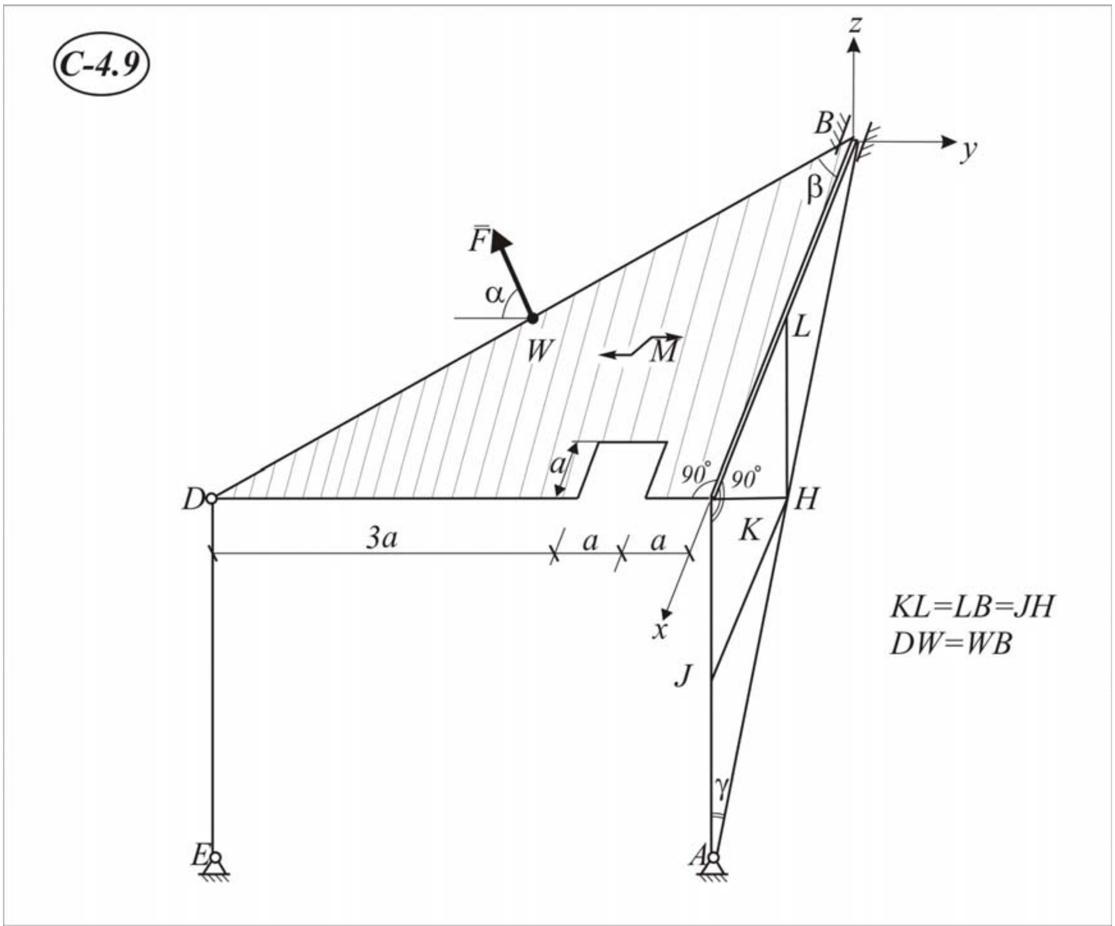


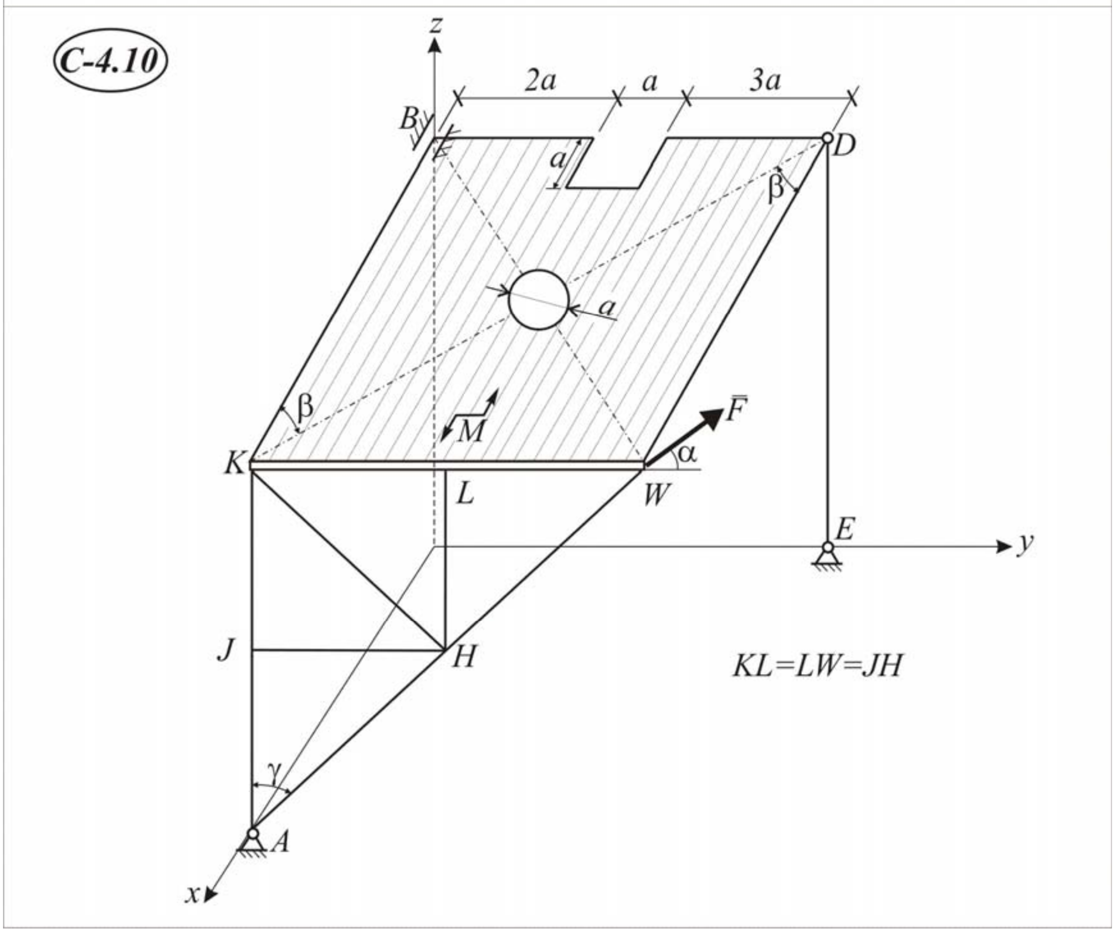
KL=LB=JH
DW=WK

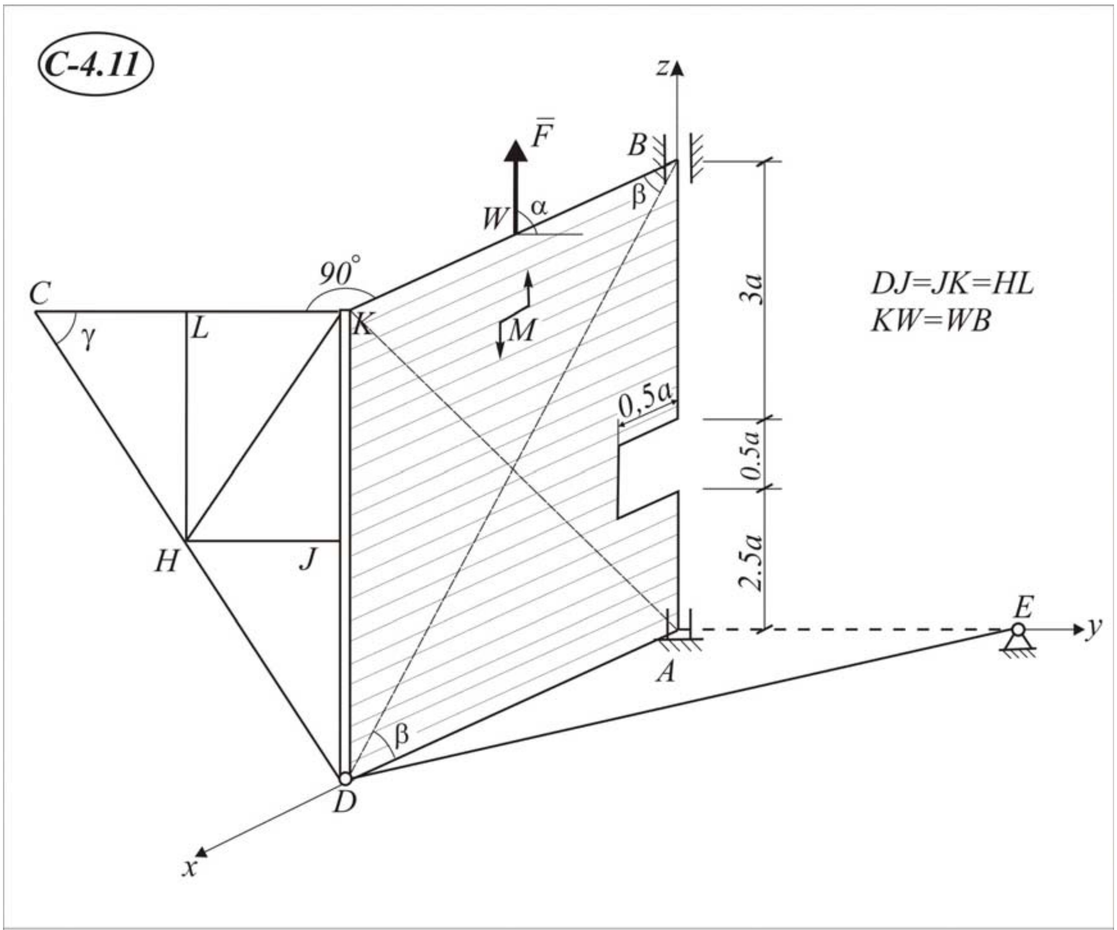
C-4.8

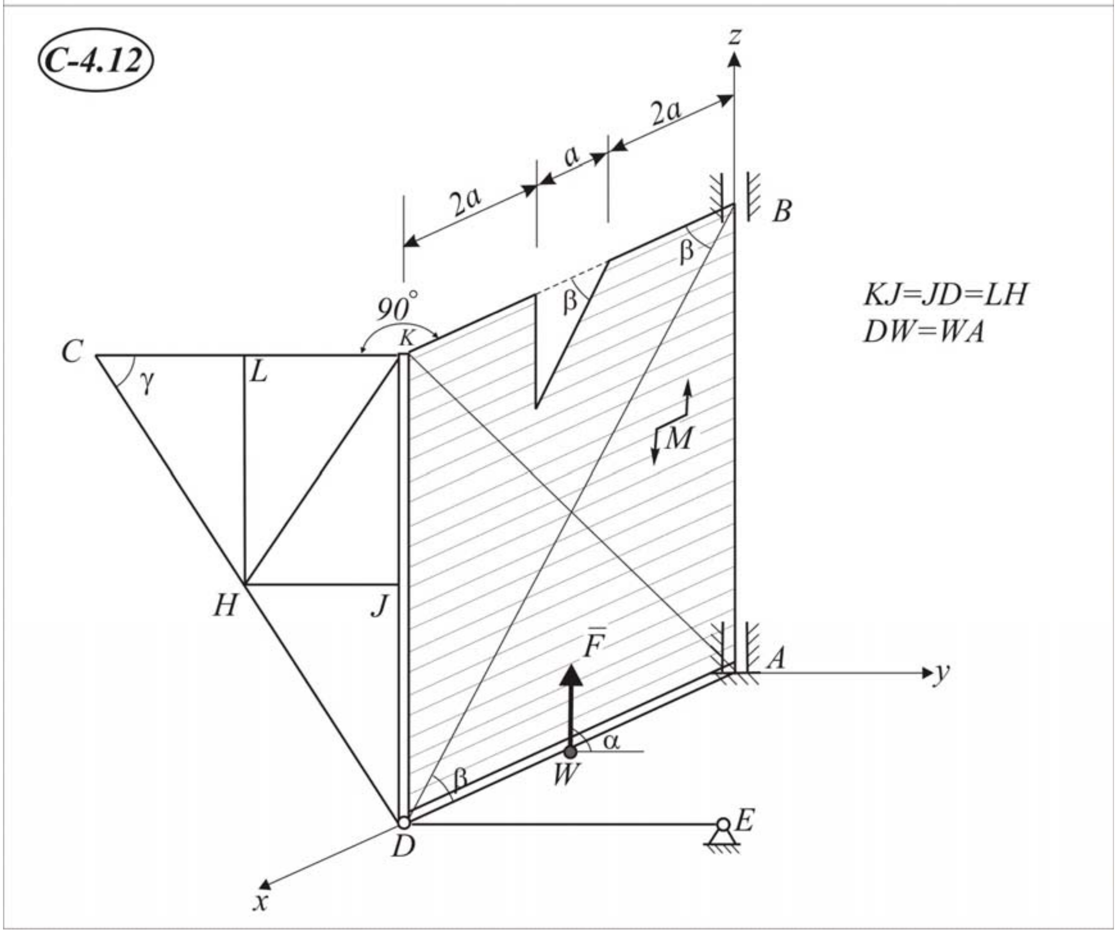


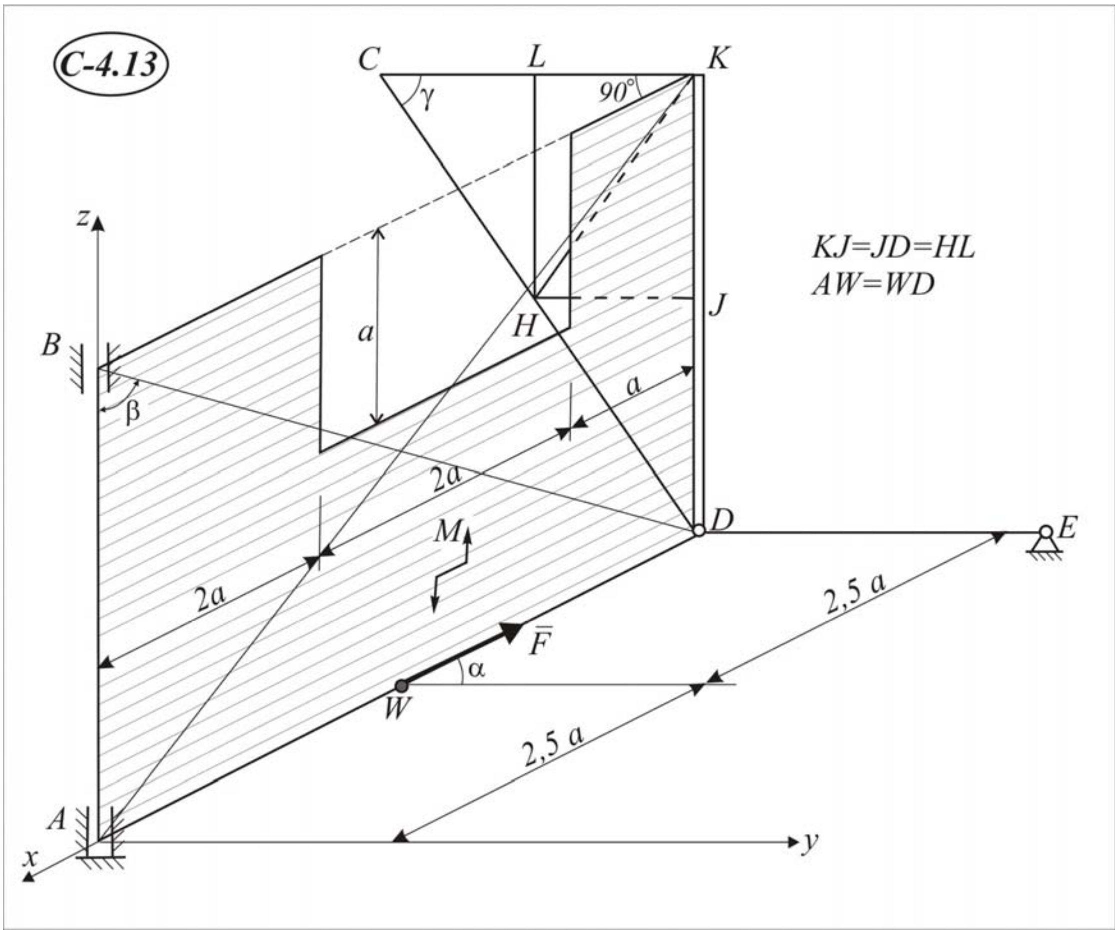
AW=WB
AL=LK=JH

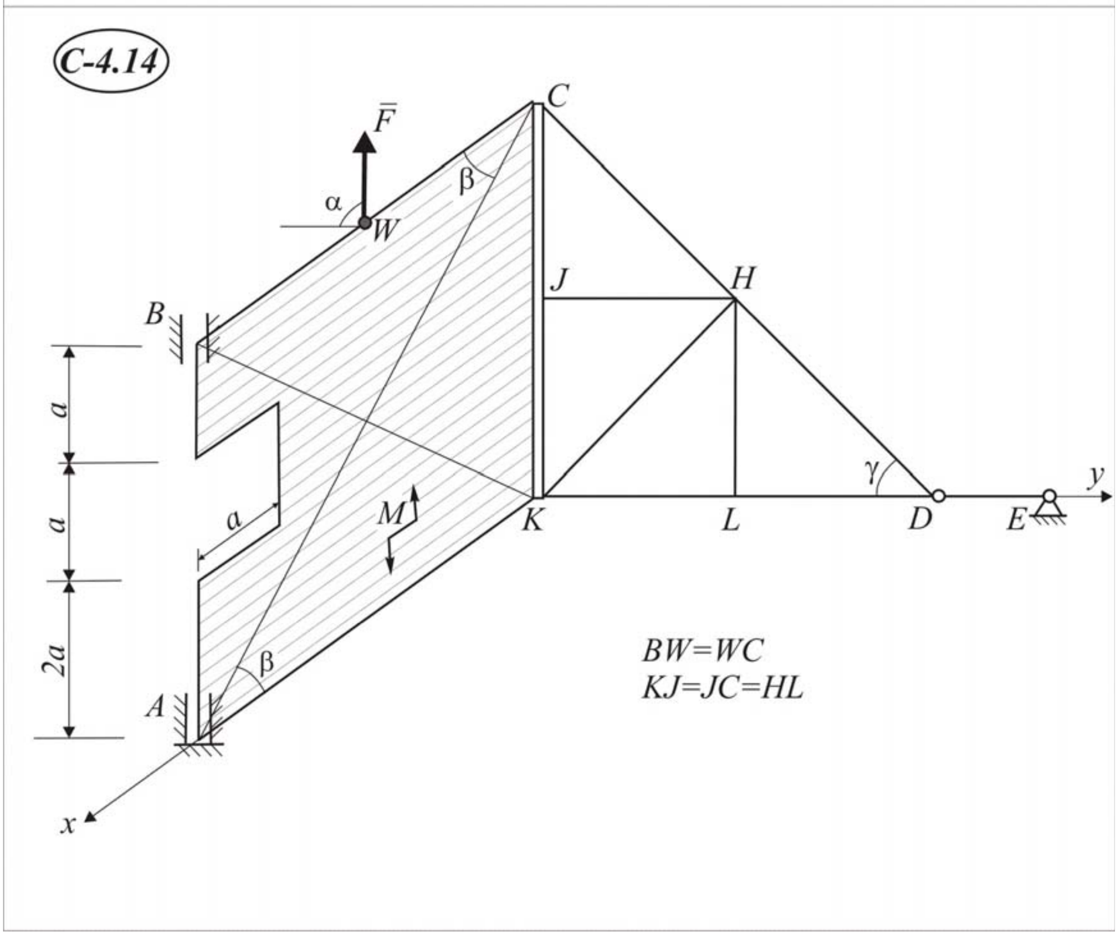

C-4.9
z
y
B
β
F
α
W
M
L
a
D
90°
90°
H
K
3a
a
a
x
KL=LB=JH
DW=WB
J
γ
E
A


C-4.10
z
2a
a
3a
B
D
a
β
a
β
F
M
α
K
W
L
E
y
J
H
KL=LW=JH
γ
A
x

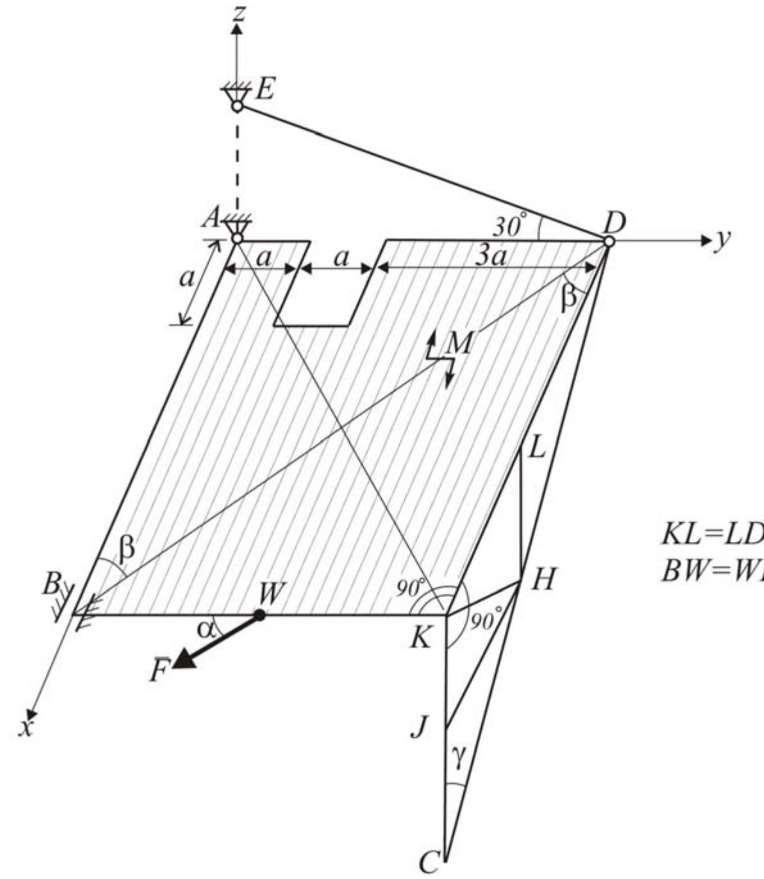

C-4.11
z
F̄
B
β
W
α
90°
C
K
γ
L
M
3a
0,5a
0.5a
H
J
2.5a
E
y
A
β
D
x
DJ=JK=HL
KW=WB


C-4.12
z
2a
a
2a
B
β
β
90°
K
C
γ
L
M
H
J
F̄
A
y
α
W
β
D
E
x
KJ=JD=LH
DW=WA

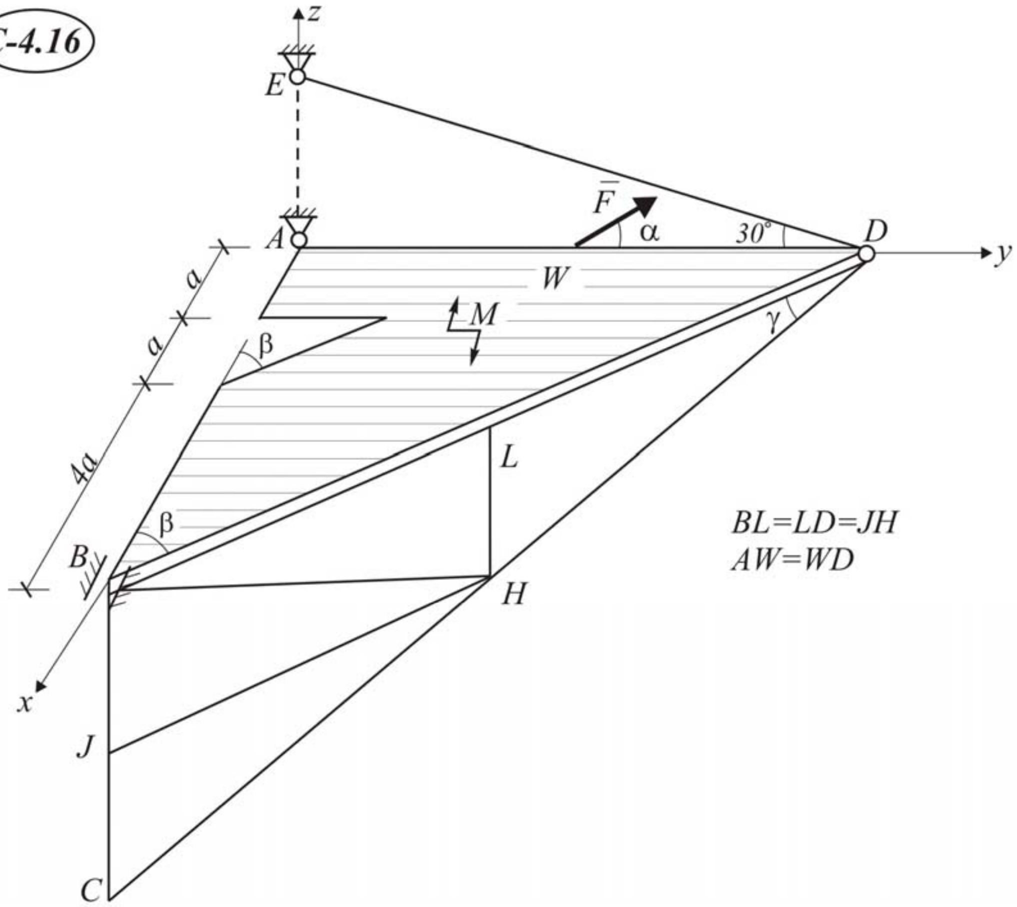

C-4.13
C
L
K
γ
90°
z
KJ=JD=HL
AW=WD
a
H
J
B
β
a
2a
D
E
M
2a
2,5 a
F
α
W
2,5 a
A
x
y


C-4.14
C
F
β
α
W
J
H
B
a
a
a
M
K
L
γ
D
E
y
2a
β
A
BW=WC
KJ=JC=HL
x

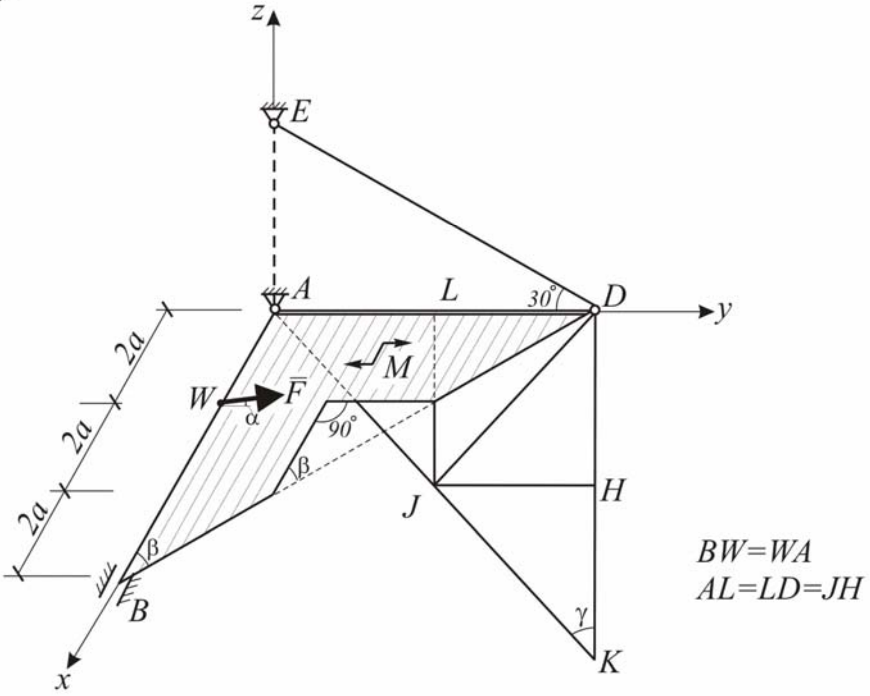
C-4.15


z
E
A
D
y
30°
a
a
a
3a
β
M
L
KL=LD=JH
BW=WK
β
B
W
90°
H
α
K
90°
F
x
J
γ
C

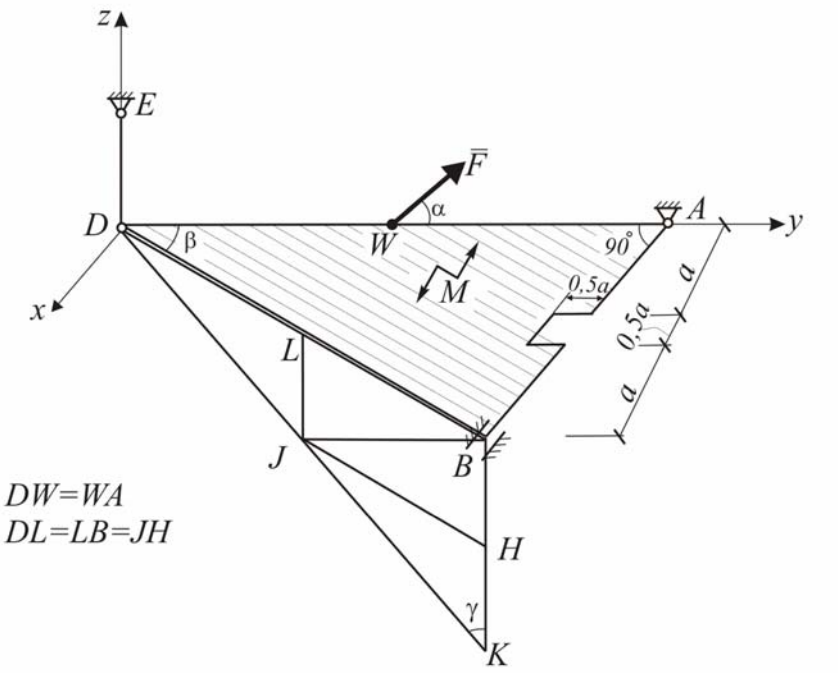
C-4.16

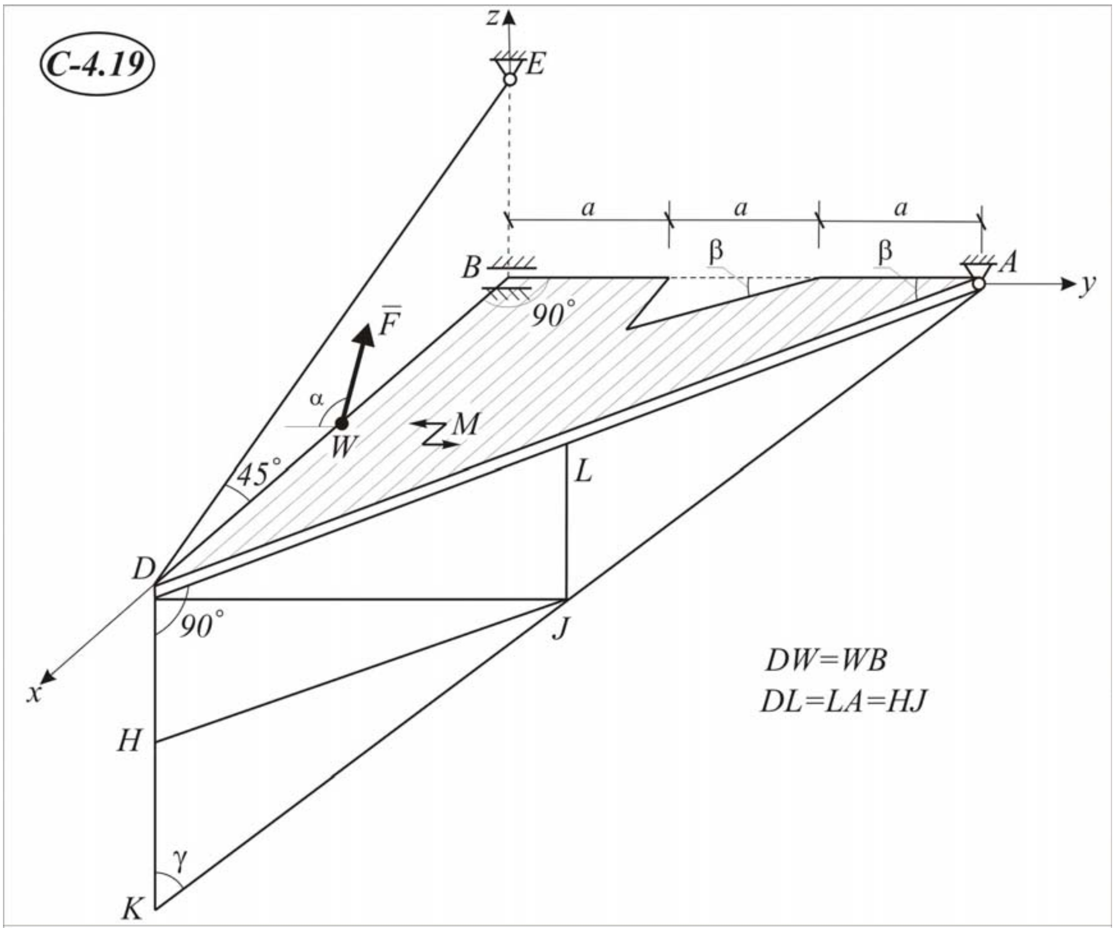

z
E
F
A
α
30°
D
y
a
W
a
M
a
β
γ
4a
L
β
BL=LD=JH
AW=WD
B
H
x
J
C

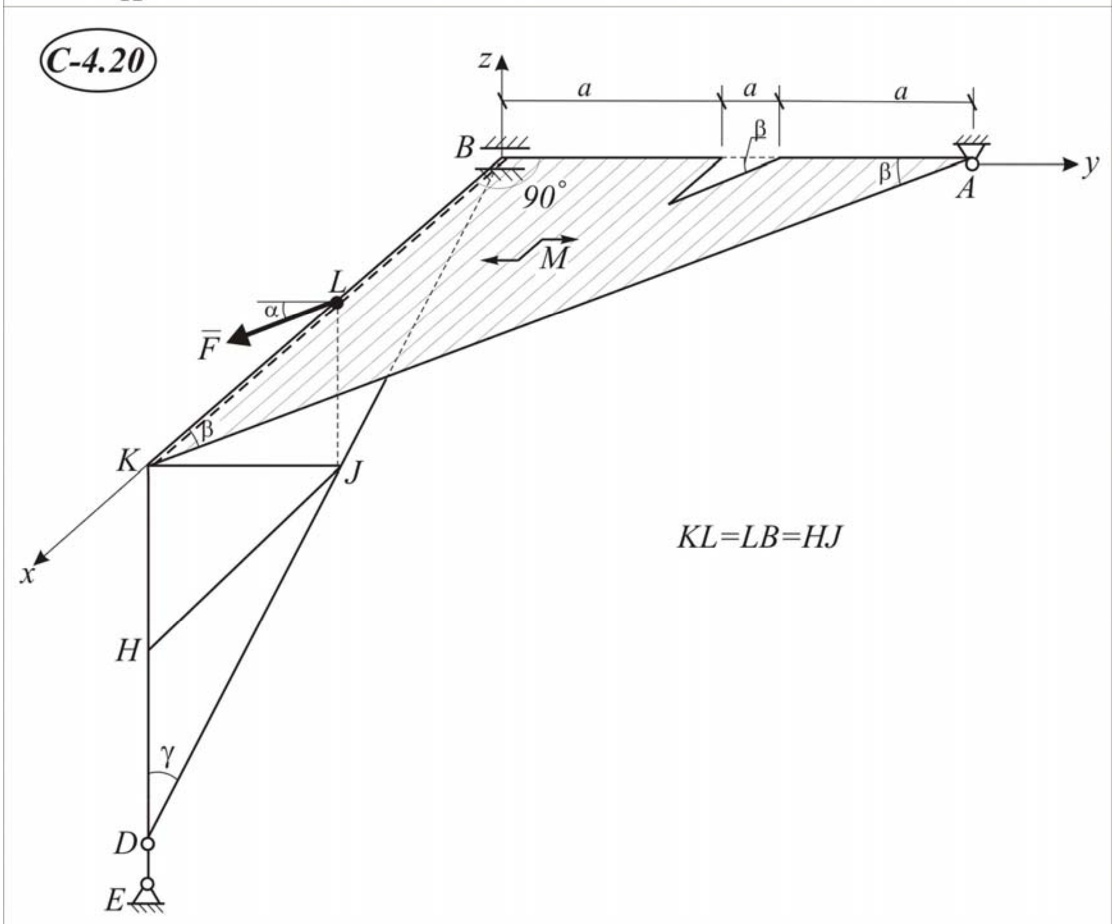
C-4.17

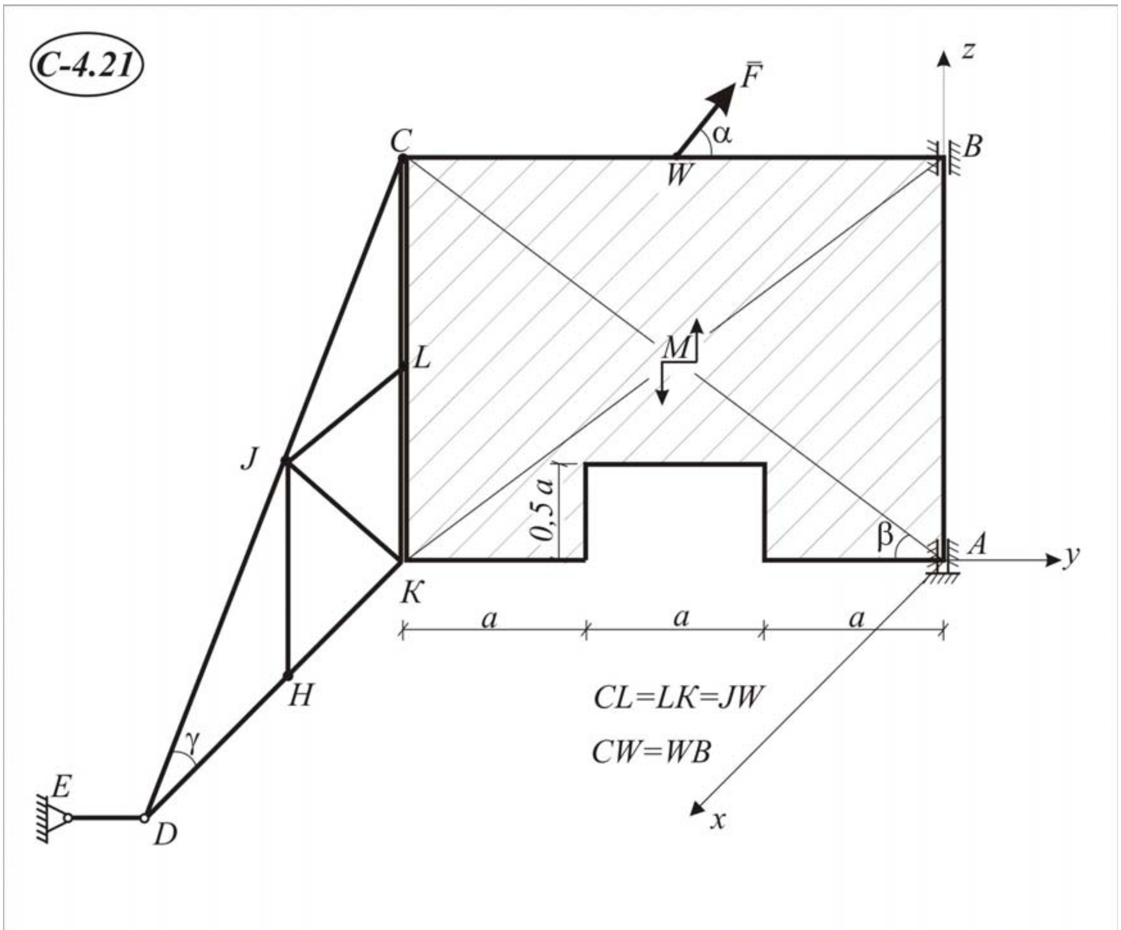

z
E
A
L
30°
D
y
2a
2a
2a
W
F̄
M̄
α
90°
β
β
H
J
B
x
γ
K
BW=WA
AL=LD=JH

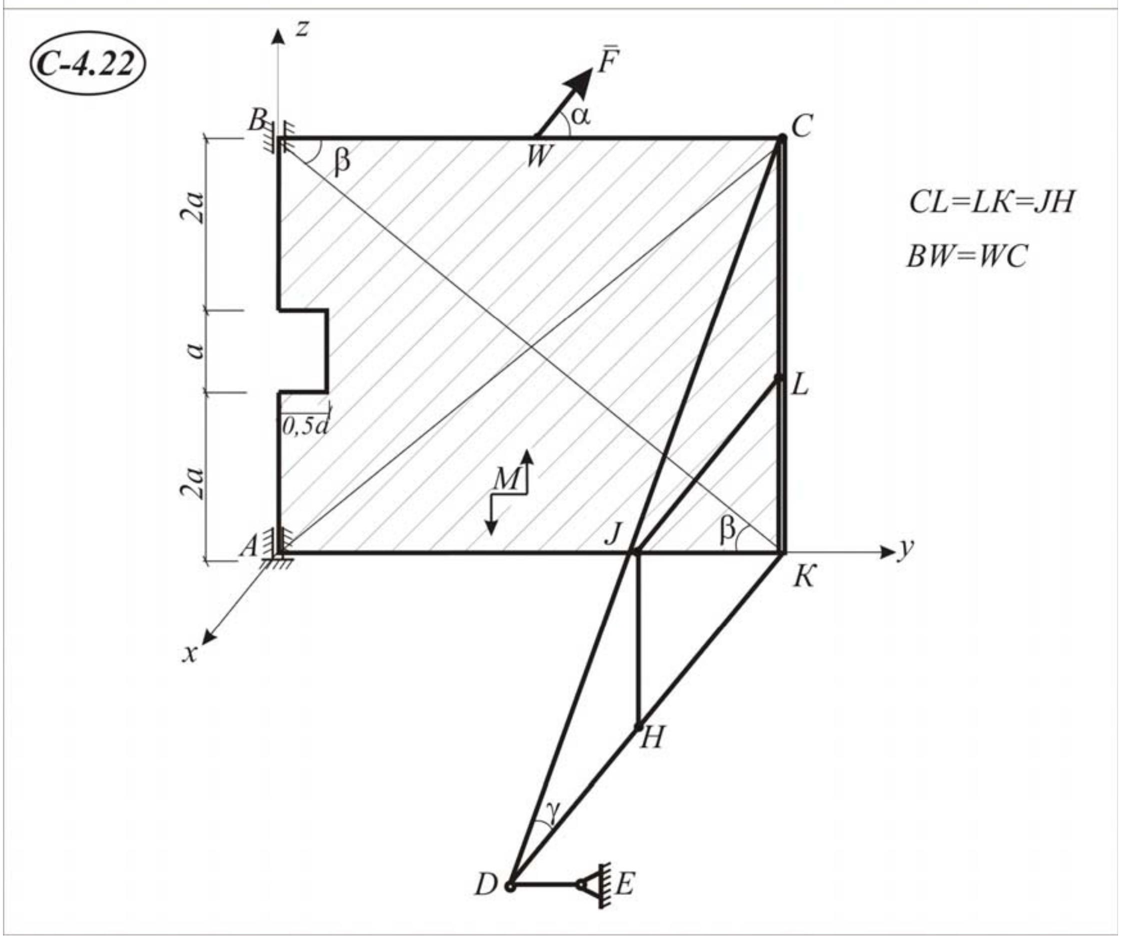
C-4.18

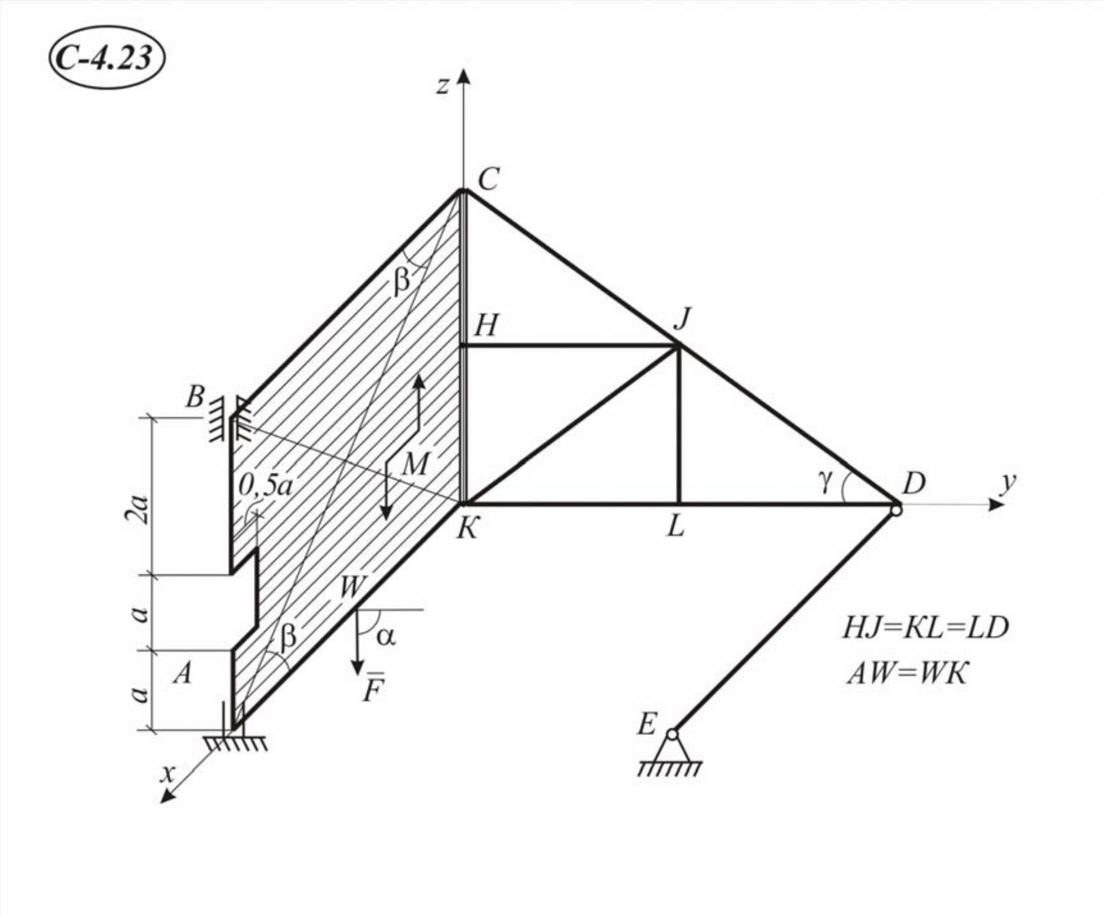

z
E
F̄
D
α
A
y
β
W
90°
x
M̄
0,5a
a
0,5a
L
a
J
B
DW=WA
DL=LB=JH
H
γ
K

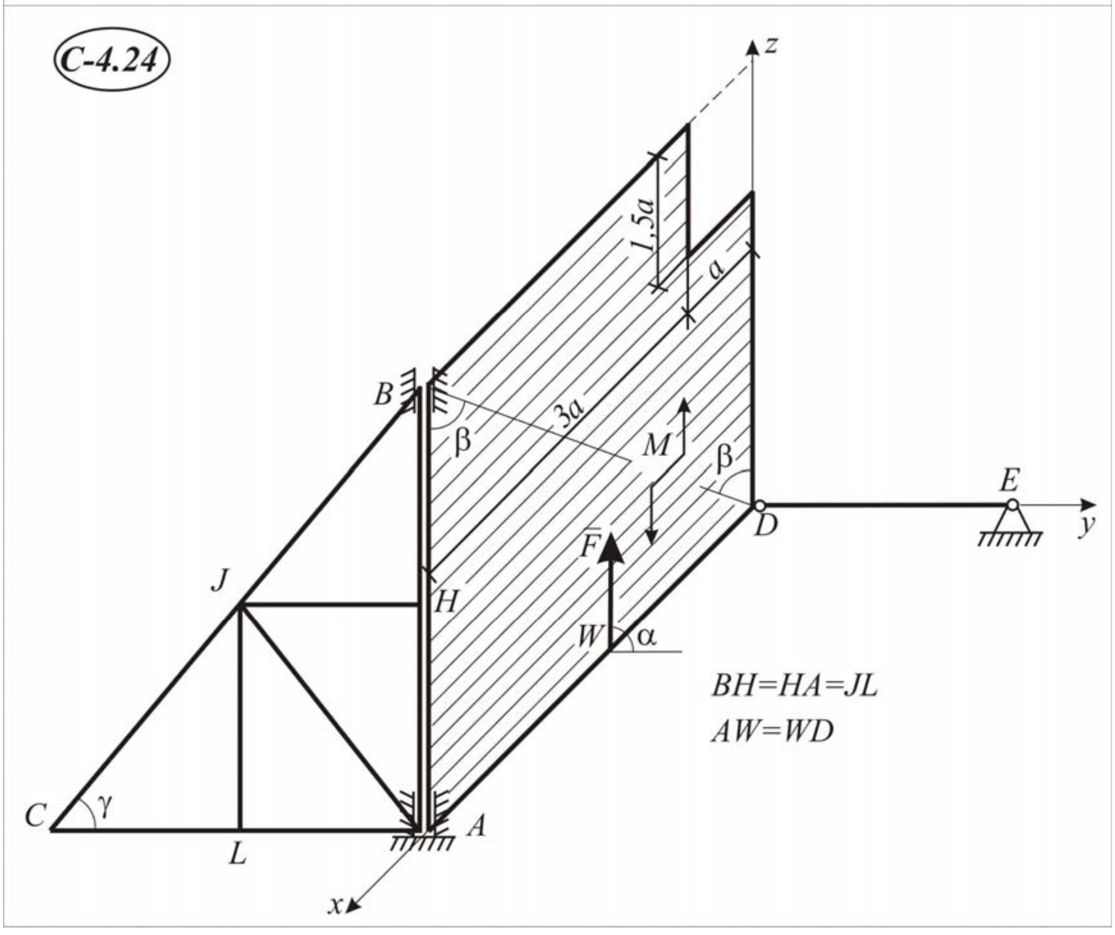

C-4.19
z
E
a
a
a
β
β
B
A
y
90°
F
α
W
M
L
45°
D
90°
J
x
DW=WB
DL=LA=HJ
H
γ
K

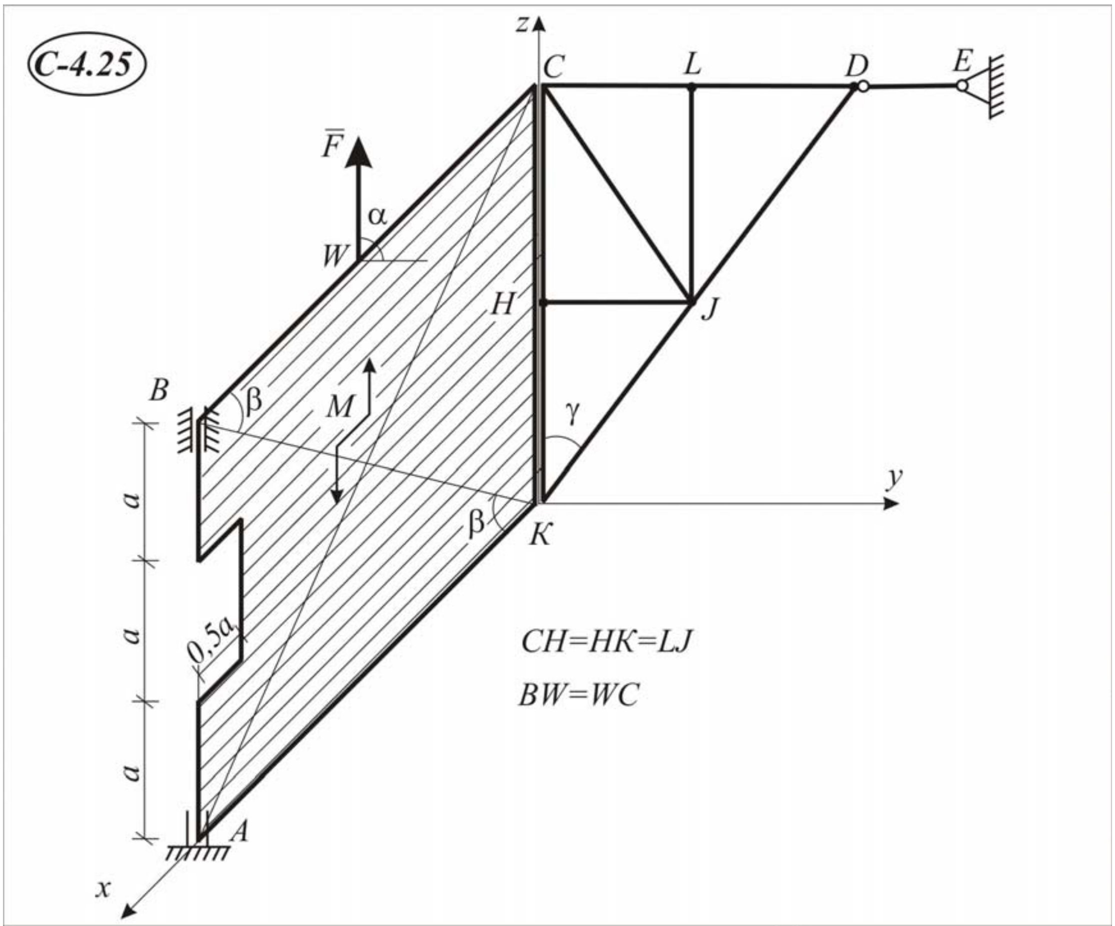

C-4.20
z
a
a
a
β
B
90°
β
A
y
M
L
α
F
β
K
J
KL=LB=HJ
x
H
γ
D
E

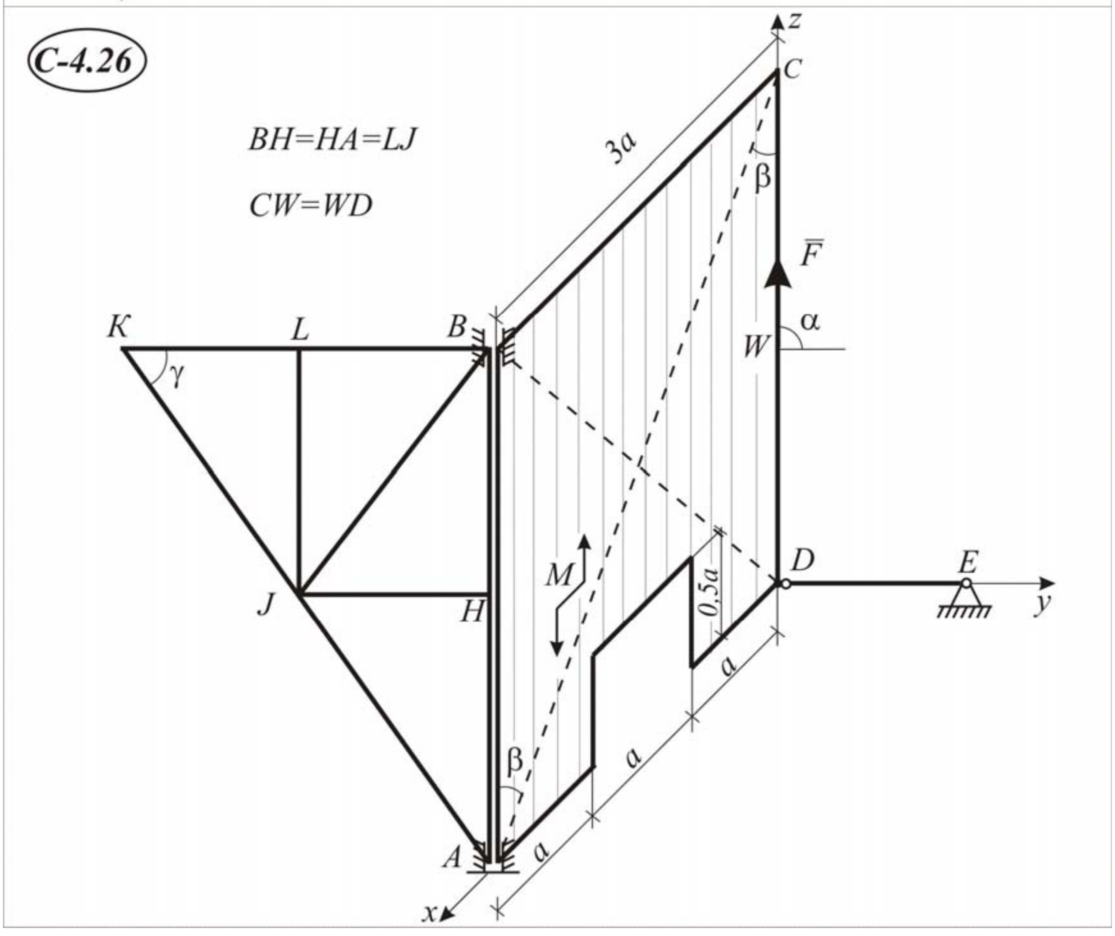

C-4.21
z
F
α
C
W
B
M
L
J
0,5 a
β
A
y
K
a
a
a
H
CL=LK=JW
CW=WB
γ
E
D
x

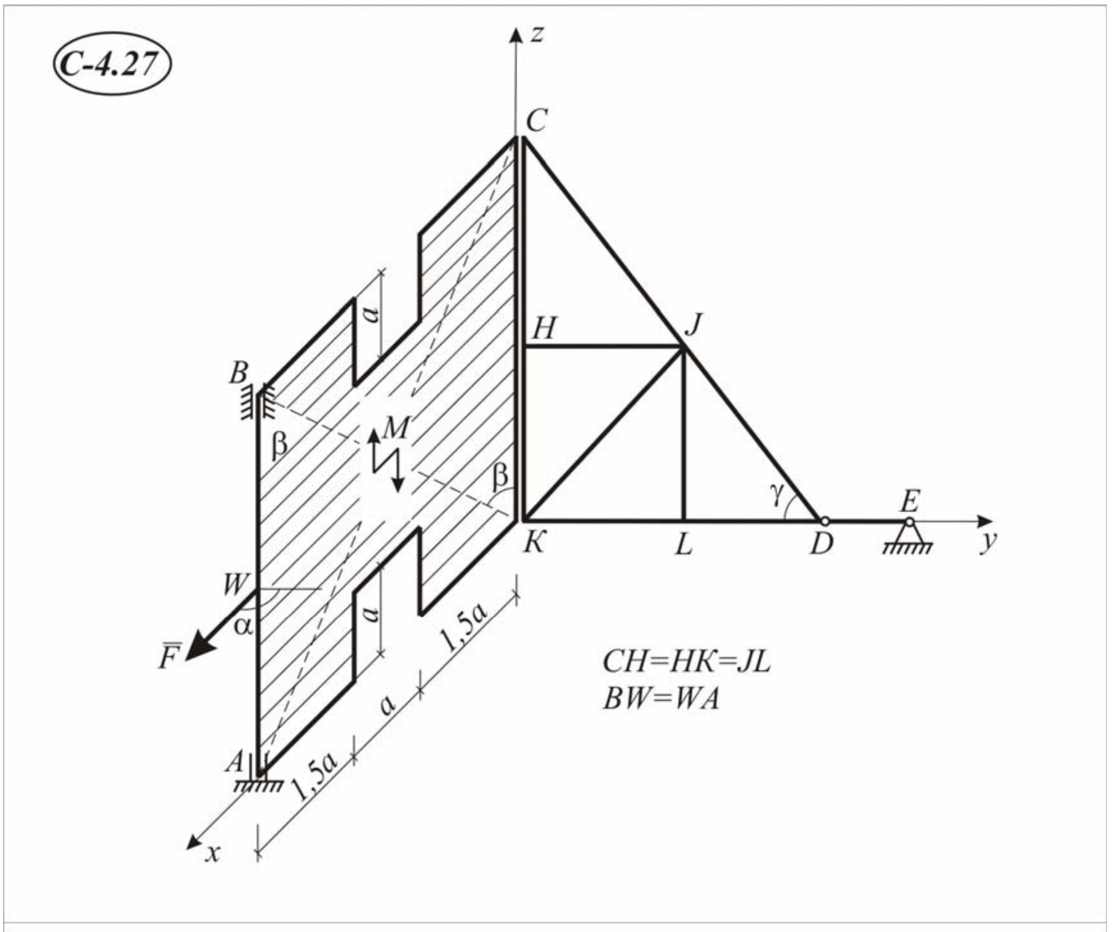

C-4.22
z
F
B
α
β
W
C
2a
CL=LK=JH
BW=WC
a
L
0,5a
2a
M
J
β
A
y
K
x
H
γ
D
E

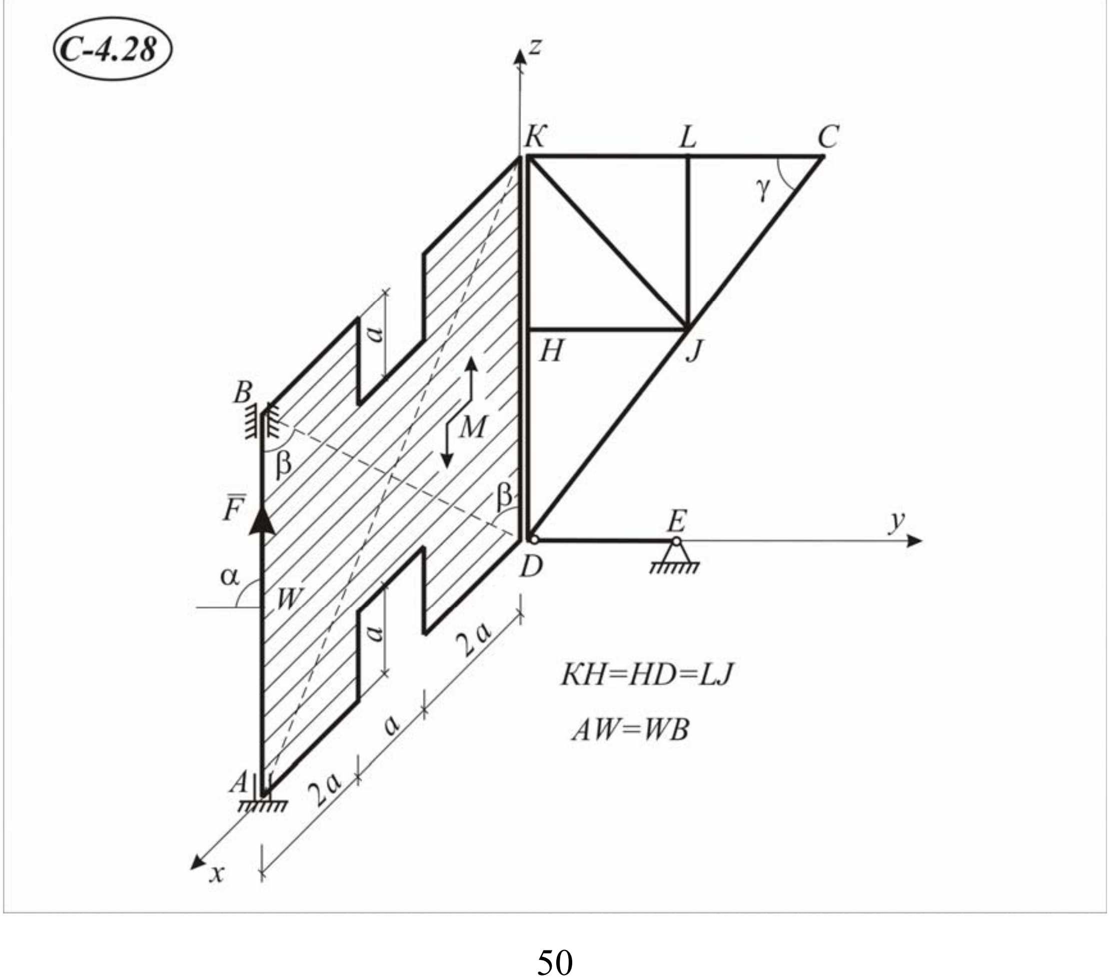

C-4.23
z
C
β
H
J
B
M
2a
0,5a
γ
D
y
K
L
W
a
α
β
HJ=KL=LD
AW=WK
a
A
F
E
x

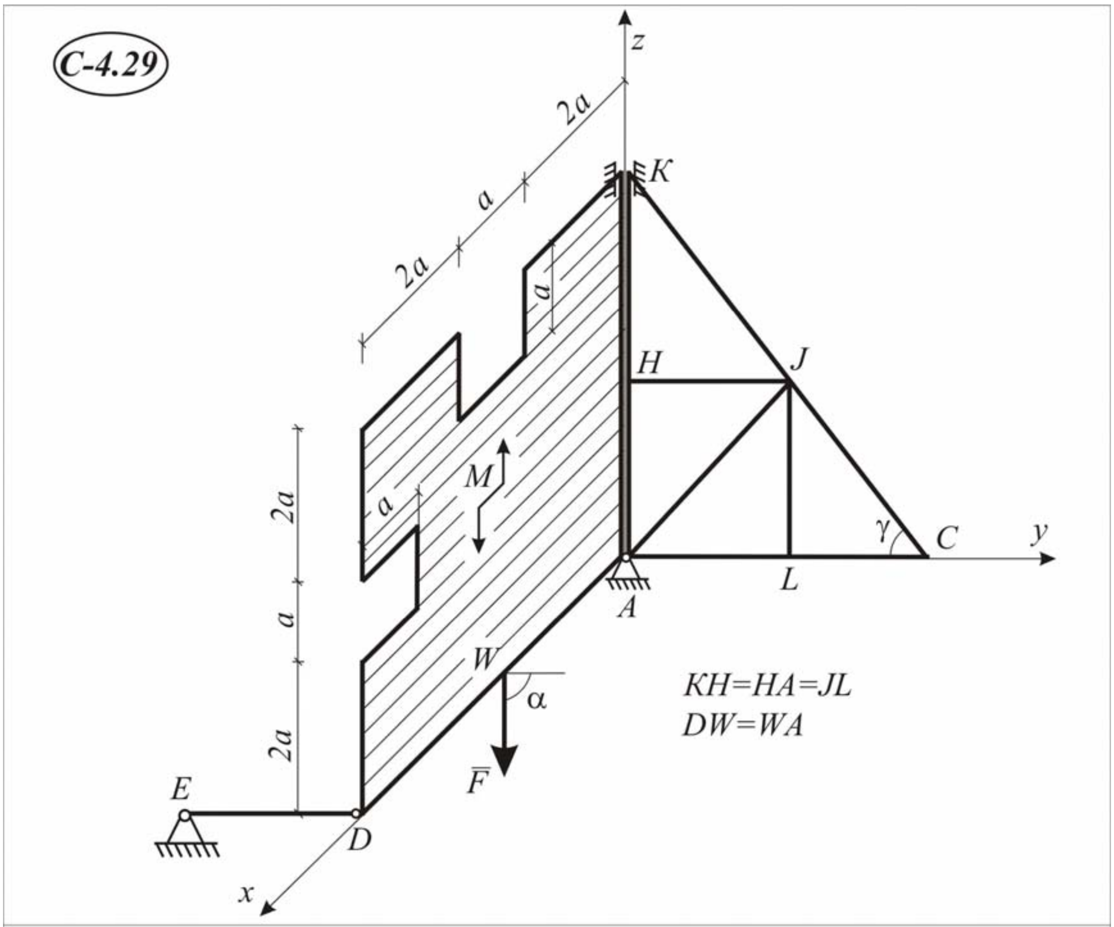

C-4.24
z
1,5a
a
B
3a
M
β
β
E
D
y
F
J
H
W
α
BH=HA=JL
AW=WD
C
γ
A
L
x

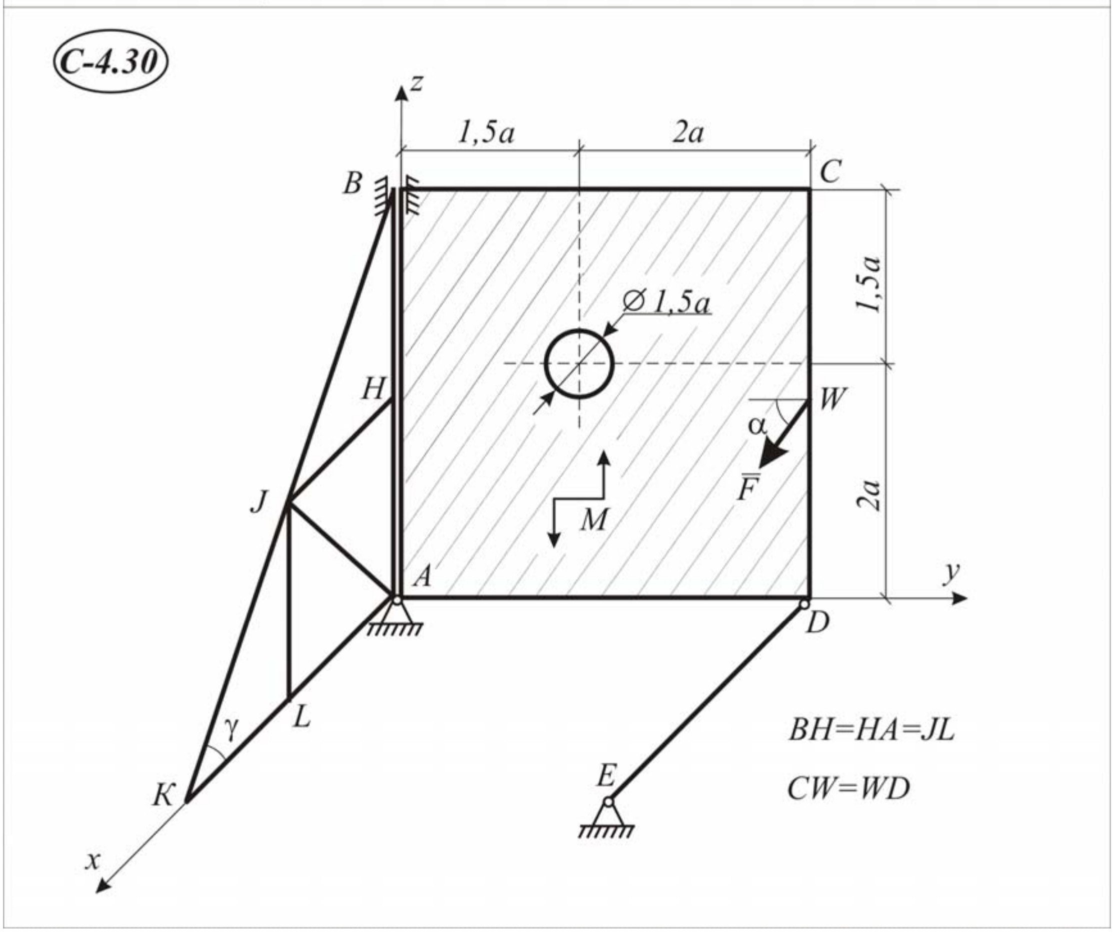

C-4.25
z
C
L
D
E
F
α
W
H
J
B
β
M
γ
y
a
β
K
a
0,5a
CH=HK=LJ
BW=WC
a
A
x


C-4.26
z
C
BH=HA=LJ
3a
β
CW=WD
F
K
L
B
α
W
γ
M
D
E
0,5a
J
H
y
a
a
β
A
a
x


C-4.27
z
C
H
J
B
M
β
β
γ
E
K
L
D
y
W
a
a
α
F
1,5a
a
1,5a
A
x
CH=HK=JL
BW=WA


C-4.28
z
K
L
C
γ
a
H
J
B
M
β
β
F
E
y
α
D
W
a
2a
a
2a
A
x
KH=HD=LJ
AW=WB


C-4.29
z
2a
a
2a
a
K
H
J
M
a
2a
a
2a
γ
C
y
L
A
W
α
KH=HA=JL
DW=WA
F
E
D
x


C-4.30
z
1,5a
2a
B
C
1,5a
∅ 1,5a
H
W
α
F
2a
J
M
A
y
D
L
γ
BH=HA=JL
K
E
CW=WD
x

Пример выполнения С-4

Дано: $P_п$=10 кН; $P_ф$=5 кН; F=8 кН; M=12 кН м; α=45°; a=1 м; АИ=ИВ; AL=LD=ЖН (рис. I.4.1).

Определить: реакции опор A, B и невесомого стержня DE, а также координаты центра тяжести всей конструкции.

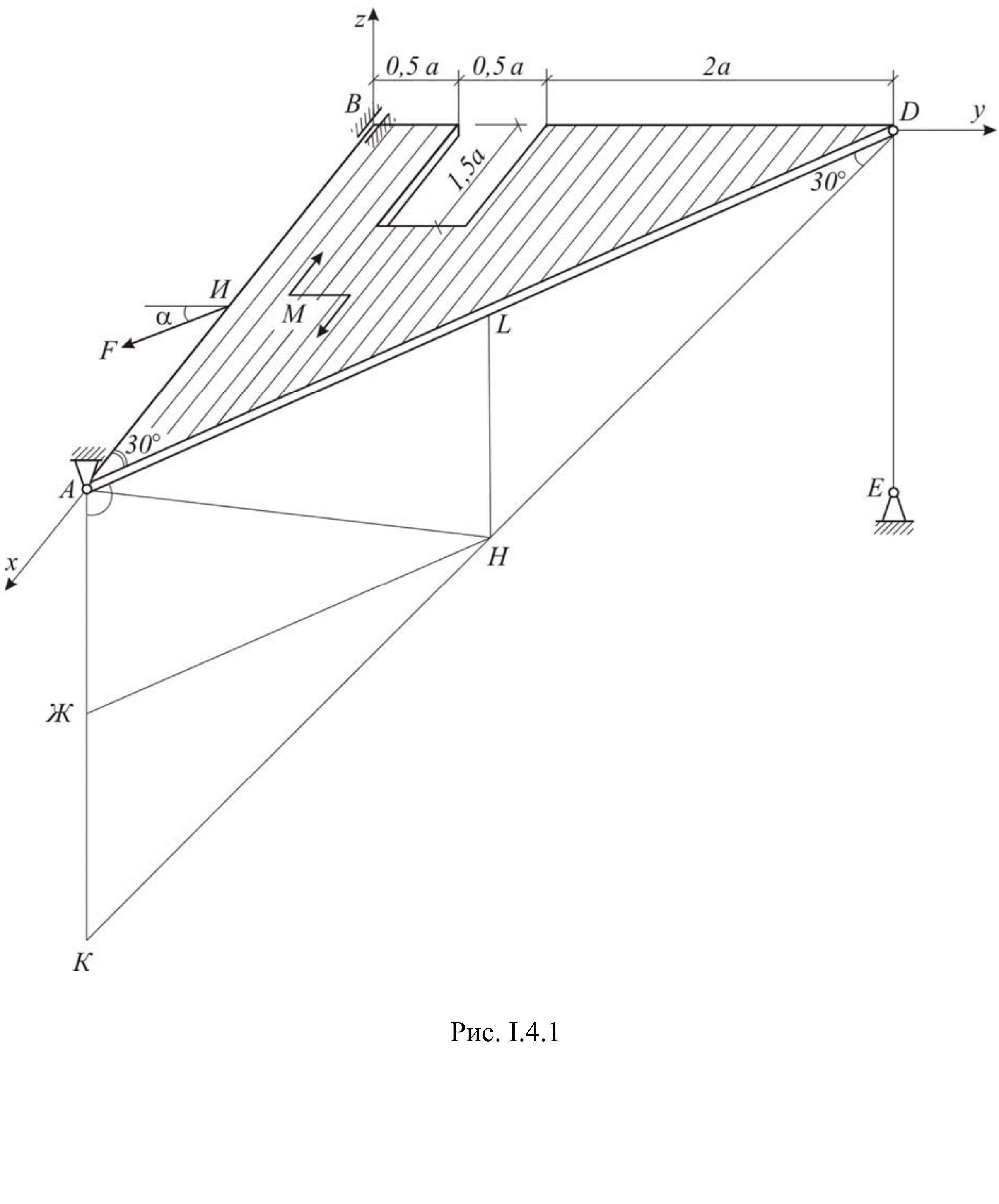


Рис. I.4.1

Р е ш е н и е

4.1. Прежде, чем найти реакции в опорах нужно определить координаты точек приложения сил тяжести плиты и фермы, состоящей из девяти стержней.

а) Определение положения центра тяжести плиты.

Координаты центра тяжести тонкой плиты ABD определяем по формулам:

$$x_{Cn} = \frac{\Sigma A_i x_i}{A}; \; y_{Cn} = \frac{\Sigma A_i y_i}{A}; \qquad (4.1)$$

где x_i, y_i – координаты центра тяжести i-й части плиты площадью A_i; A – площадь всей плиты.

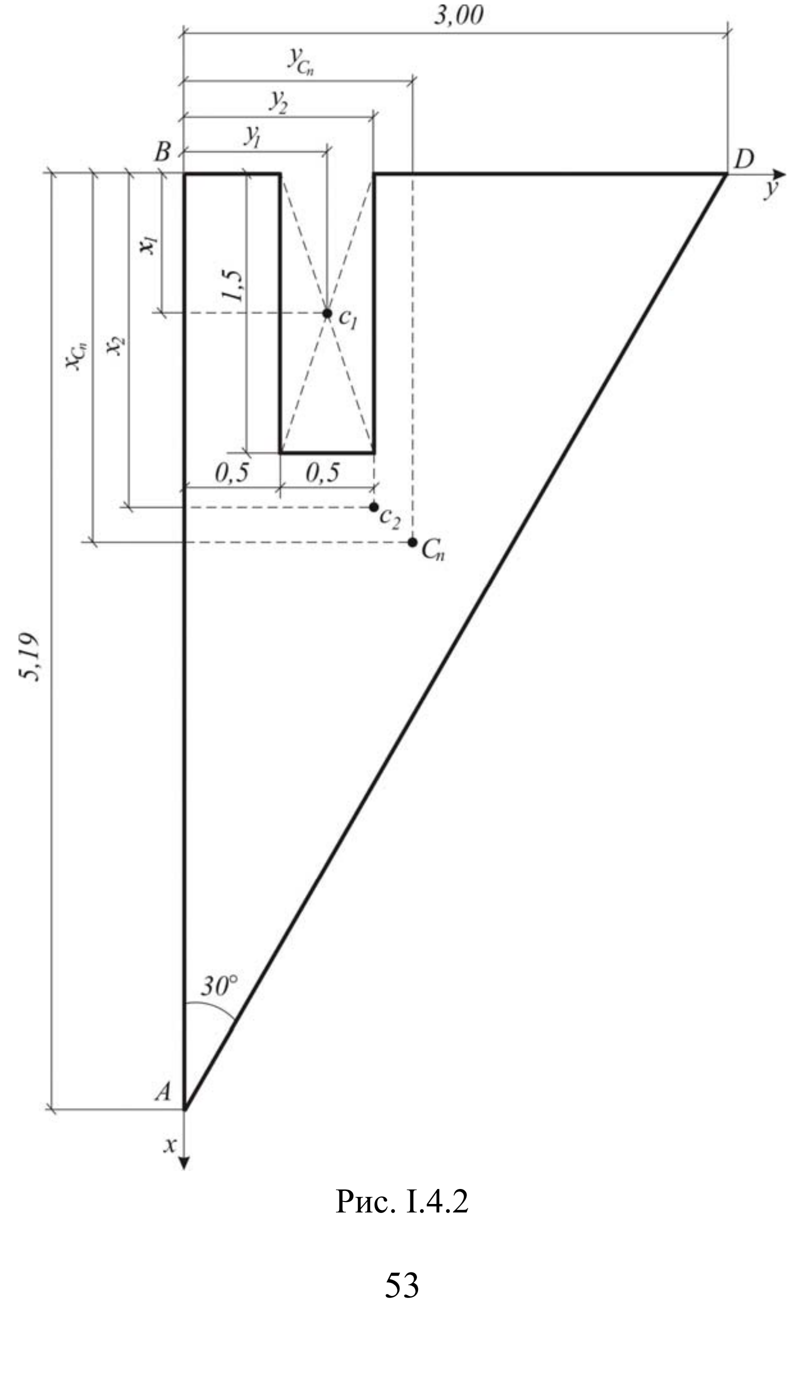


Рис. I.4.2

Так как положение центра тяжести тела (точка *Cn*) не зависит от выбора осей координат, то проведем их на рис. 4.2 произвольно, например по взаимно перпендикулярным сторонам *AB* и *BD*.

Чтобы воспользоваться формулами (1) площадь плиты делим на отдельные части, положения центров тяжести которых известны. В данном случае такими частями являются: треугольник *ABD* и прямоугольник.

Площадь прямоугольника, вырезанного из плиты, считаем отрицательной.

Из прямоугольного треугольника *ABD* определяем

$$AB = BD \cdot \mathrm{ctg}\,30° = 3 \cdot \sqrt{3} = 5{,}19\,\text{м}.$$

Площадь прямоугольника.

$$A_1 = -0{,}5 \cdot 1{,}5 = -0{,}75\ \text{м}^2.$$

Площадь треугольника *ABD*

$$A_2 = \frac{1}{2} 5{,}19 \cdot 3 = 7{,}785\ \text{м}^2.$$

Центры тяжести рассматриваемых частей плиты c_1 и c_2 имеют следующие координаты:

для прямоугольника

$$x_1 = 0{,}75\,\text{м};\quad y_1 = 0{,}5 + \frac{1}{2} 0{,}5 = 0{,}75\ \text{м};$$

для треугольника

$$x_2 = \frac{1}{3} AB = \frac{1}{3} 5{,}19 = 1{,}73\ \text{м};\quad y_2 = \frac{1}{3} BD = \frac{1}{3} 3 = 1\ \text{м}.$$

По формулам (4.1) вычисляем координаты центра тяжести плиты.

$$x_{Cn} = \frac{-A_1 \cdot x_1 + A_2 \cdot x_2}{-A_1 + A_2} = \frac{-0{,}75 \cdot 0{,}75 + 7{,}785 \cdot 1{,}73}{-0{,}75 + 7{,}785} = \frac{12 \cdot 905}{7{,}035} = 1{,}83\ \text{м};$$

$$y_{Cn} = \frac{-A_1 \cdot y_1 + A_2 \cdot y_2}{-A_1 + A_2} = \frac{-0{,}75 \cdot 0{,}75 + 7{,}785 \cdot 1}{-0{,}75 + 7{,}785} = \frac{7{,}222}{7{,}035} = 1{,}03\ \text{м}.$$

Центр тяжести плиты C_n указан на рис. I.4.2.

б) Определение положения центра тяжести фермы (рис. I.4.3).

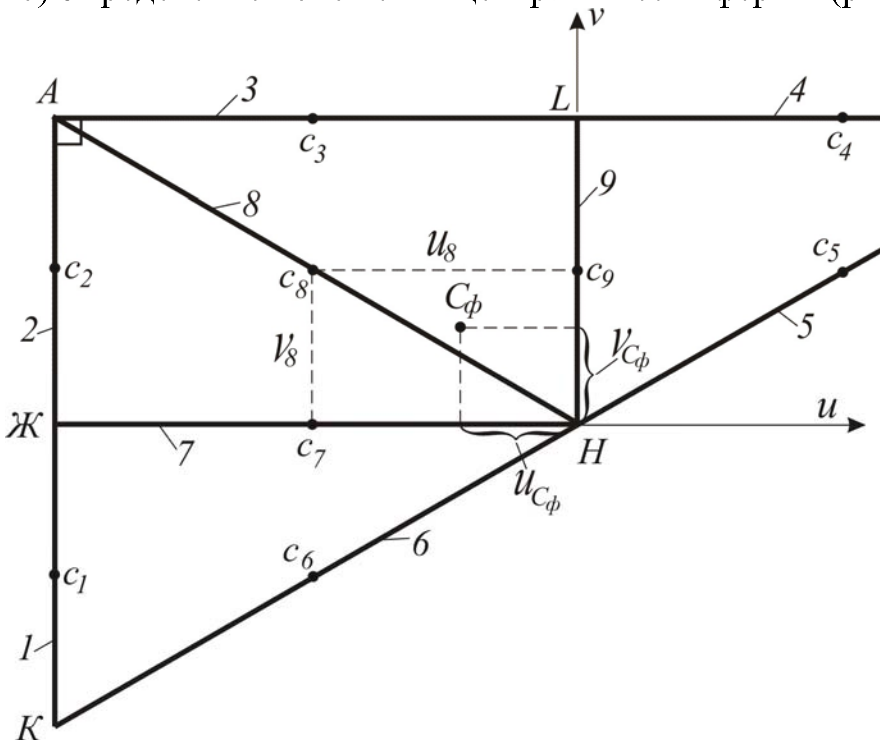


Рис. I.4.3

По условию задачи LH- средняя линия прямоугольного треугольника *AKD*, поэтому:

$$l_6 = l_8 = l_5.$$

Координаты центра тяжести фермы (точка $C_ф$) относительно осей u и ν, проведенных произвольным образом на рис. 4.3 определяется по следующим формулам:

$$u_{Cф} = \frac{\Sigma l_i \cdot u_i}{\Sigma l_i}; \;\; \nu_{Cф} = \frac{\Sigma l_i \cdot \nu_i}{\Sigma l_i}.$$

Здесь l_i – длина *i*-го стержня.

u_i; ν_i – координаты центра тяжести *i*-го стержня.

Σl_i – сума длин всех стержней фермы.

Найдем стороны треугольника *ADK*.

Из рис. I.4.3 видно, что:

$$AD = AB / \cos 30° = 5{,}19 / 0{,}866 = 6 \text{ м}.$$

Катет и гипотенуза прямоугольного треугольника *ADK* (рис. I.4.3) определяются

$$AK = AD \cdot \operatorname{tg} 30° = 6\frac{1}{\sqrt{3}} = 3{,}464 \text{ м}.$$

$$KD = \frac{AD}{\cos 30°} = \frac{6}{0{,}866} = 6{,}928 \text{ м}.$$

Длины и координаты центров тяжести стержней сведены в табл. I.4.2

Т а б л и ц а I.4.2

Номер стержня	l_i	u_i	ν_i	$l_i \cdot u_i$	$l_i \cdot \nu_i$
1	1,732	-3	-0,866	-5,2	-1,5
2	1,732	-3	+0,866	-5,2	+1,5
3	3	-1,5	+1,732	-4,5	+5,2
4	3	+1,5	+1,732	+4,5	+5,2
5	3,5464	+1,5	+0,866	+5,2	+3
6	3,464	-1,5	-0,866	-5,2	-3
7	3	-1,5	0	-4,5	0
8	3,464	-1,5	+0,866	-5,2	+3
9	1,732	0	+0,866	0	+1,5
Σ=	**24,588**			**-20,1**	**+14,9**

По формулам (4.2) определяем координаты центра тяжести фермы:

$$u_{\text{сф}} = \frac{-20,1}{24,588} = -0,817 \text{ м};$$

$$\nu_{\text{сф}} = \frac{14,9}{24,588} = 0,606 \text{ м}$$

4.2 Определение реакции в опорах *A*, *B* и невесомом стержне *DE*.

а) Рассмотрим равновесие плиты с фермой (рис. I.4.4). На эту конструкцию действуют заданные силы $\overline{F}, P_n, P_{cp}$ и пара сил с моментом *M*, а также реакции связей. Реакцию сферического шарнира разложим на три составляющие $\overline{X}_A, \overline{Y}_A, \overline{Z}_A$, цилиндрического (подшипника)– на две составляющие $\overline{Y}_B, \overline{Z}_B$ (в плоскости, перпендикулярной оси подшипника); реакцию опор *N* стержня направляем вдоль стержня от *D* к *E*, предполагая, что он растянут.

При решении задачи заданную силу $\overline{F}$ целесообразно разложить на две составляющие силы $\overline{F}_x$ и $\overline{F}_y$ параллельные соответствующим осям координат.

$$\overline{F}_x = F \cdot \cos 45° = 8 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 5,656 \text{ кН},$$

$$\overline{F}_y = F \cdot \sin 45° = 8 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 5,656 \text{ кН}.$$

На рис. 4.4 показаны точки приложения сил тяжести плиты и фермы. Координаты этих точек равны:

$$X_{C_n} = 1,83\text{ м};\ Y_{C_n} = 1,03\text{ м};\ Z_{C_n} = 0\text{м};$$

$$X_{C\text{ф}} = AB - A3 \cdot \cos 30° = AB - (AL - u_{C\text{ф}})\cos 30° =$$

$$= 5,19 - (3 - 0,817) \cdot 0,866 = 3,3\text{м};$$

$$Y_{C\text{ф}} = A3 \cdot \sin 30° = (AL - u_{C\text{ф}})\sin 30° = (3 - 0,817) \cdot 0,5 = 1,09\text{ м};$$

$$Z_{C\text{ф}} = -(HL - \nu_{C\text{ф}}) = -(1,732 - 0,606) = -1,126\text{ м}.$$

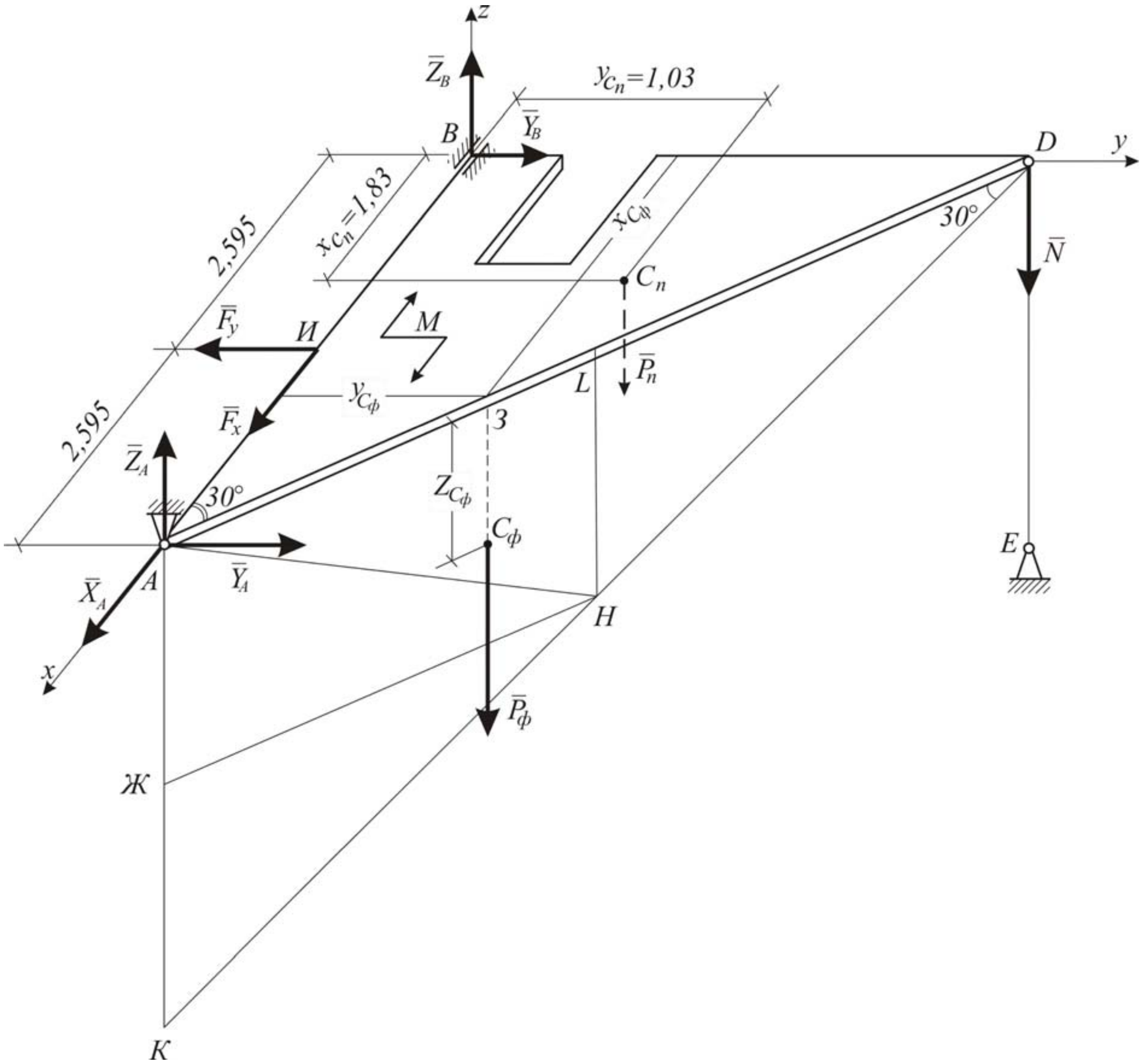


Рис. I.4.4

б) Для определения шести неизвестных реакций составляем шесть уравнений равновесия действующей на конструкцию пространственной системы сил действующей на конструкцию (плита + ферма):

$$\Sigma F_x = 0;\ X_A + F_x = 0; \tag{4.3}$$

$$\Sigma F_y = 0;\ Y_A + Y_B + F_y = 0; \tag{4.4}$$

$$\Sigma F_z = 0;\ Z_A + Z_B - N - P_ф - P_п = 0; \tag{4.5}$$

$$\Sigma M_x(\overline{F}_k) = 0;\ -P_ф \cdot Y_{Cф} - P_п \cdot 1{,}03 - N \cdot BD = 0; \tag{4.6}$$

$$\Sigma M_y(\overline{F}_k) = 0;\ +P_п \cdot 1{,}83 + P_ф \cdot X_{Cф} - Z_A \cdot AB = 0; \tag{4.7}$$

$$\Sigma M_z(\overline{F}_k) = 0;\ -M - F_y \cdot 2{,}595 + Y_A \cdot AB = 0. \tag{4.8}$$

Подставив в составленные уравнения (4.3)–(4.8) числовые значения всех заданных величин и решив эти уравнения, найдем искомые реакции.

Ответ: $X_A = -5{,}656$ кН;
$Y_A = +5{,}14$ кН;
$Z_A = +6{,}705$ кН;
$Y_B = +0{,}516$ кН;
$Z_B = +3{,}032$ кН;
$N = -5{,}263$ кН.

Знак (-) в ответе указывает, что реакции $\overline{X}_A$, и $\overline{N}$ направлены противоположно тем направлениям, которые показаны на рис. I.4.4.

4.3. Определение координат центра тяжести всей конструкции.

Для определения положения центра тяжести всей конструкции воспользуемся следующими формулами:

$$X_C = \frac{\sum P_i \cdot x_i}{\sum P_i} = \frac{P_п \cdot x_{Cп} + P_ф \cdot x_{Cф}}{P_п + P_ф} = \frac{10 \cdot 1{,}83 + 5 \cdot 3{,}3}{10+5} = 2{,}32 \text{ м}, \tag{4.9}$$

$$Y_C = \frac{\sum P_i \cdot y_i}{\sum P_i} = \frac{P_п \cdot y_{Cп} + P_ф \cdot y_{Cф}}{P_п + P_ф} = \frac{10 \cdot 1{,}03 + 5 \cdot 1{,}09}{10+5} = 1{,}05 \text{ м}, \tag{4.10}$$

$$Z_C = \frac{\sum P_i \cdot z_i}{\sum P_i} = \frac{P_п \cdot z_{Cп} + P_ф \cdot z_{Cф}}{P_п + P_ф} = \frac{10 \cdot 0 + 5 \cdot (-1{,}126)}{10+5} = -0{,}375 \text{ м}. \tag{4.11}$$

Здесь P_i – вес i-й части конструкции;
x_i, y_i, z_i – координаты центра тяжести;
ΣP_i – вес всей конструкции.

Контрольные вопросы

1. Можно ли рассматривать силу тяжести тела как равнодействующую системы параллельных сил?

2. Может ли располагаться центр тяжести вне самого тела?

3. В чем сущность опытного определения центра тяжести плоской фигуры?

4. Как определяется центр тяжести сложной фигуры, состоящей из нескольких простых фигур?

5. Как следует рационально производить разбиение фигуры сложной формы на простые фигуры при определении центра тяжести всей фигуры?

6. Какой знак имеет площадь отверстия в формуле для определения центра тяжести?

7. На пересечении каких линий треугольника находится его центр тяжести?

8. Если фигуру трудно разбить на небольшое число простых фигур, какой способ определения центра тяжести может дать наиболее быстрый ответ?

9. Дайте определение момента силы относительно оси.

10. При каком условии момент силы относительно данной оси имеет наибольшее числовое значение? При каком условии момент относительно оси равен нулю?

11. Что называется главным вектором и главным моментом произвольной системы сил в пространстве?

12. Запишите уравнения равновесия произвольной системы сил в пространстве.

Раздел II. КИНЕМАТИКА

II.1. Определение скорости и ускорения точки по заданному закону движения

Задание К1. Определение скорости и ускорения точки по заданному закону движения

По данной теме предлагается решить две задачи: К1а и К1б.

Задачи относятся к кинематике точки и решаются с помощью формул, по которым определяются скорость и ускорение точки в декартовых координатах (координатный способ задания движения), а также формул, по которым определяются скорость, касательное и нормальное ускорения точки при естественном способе задания её движения.

Задача К1а. Определение скорости и ускорения точки, если закон движения точки задан координатным способом

Точка движется в плоскости xy. Закон движения точки задан уравнениями: $x = f(t)$, $y = f(t)$, где x и y выражены в сантиметрах, t – в секундах.

Найти уравнение траектории точки; для момента времени t_1 найти положение точки на траектории, её скорость, полное, касательное и нормальное ускорения, а также радиус кривизны в соответствующей точке траектории.

Необходимые для решения данные приведены в табл. II.1.

Таблица II.1

Номер варианта	Закон движения		t, с
	$x=f(t)$, см	$y=f(t)$, см	
1	2	3	4
1	$-2t^2+3$	$-5t$	½
2	$4\cos^2(\pi t/3)+2$	$4\sin^2(\pi t/3)$	1
3	$-\cos(\pi t^2/3)+3$	$\sin(\pi t^2/3)-1$	1
4	$4t+4$	$-4/(t+1)$	2
5	$2\sin(\pi t/3)$	$-3\cos(\pi t/3)+4$	1
6	$3t^2+2$	$-4t$	½
7	$3t^2-t+1$	$5t^2-5t/3-2$	1
8	$7\sin(\pi t^2/6)+3$	$2-7\cos(\pi t^2/6)$	1
9	$-3/(t+2)$	$3t+6$	2
10	$-4\cos(\pi t/3)$	$-2\sin(\pi t/3)-3$	1
11	$4t^2+1$	$-3t$	½
12	$5\sin^2(\pi t/6)$	$-5\cos^2(\pi t/6)-3$	1
13	$5\cos(\pi t^2/3)$	$-5\sin(\pi t^2/3)$	1

Окончание табл. II.1

1	2	3	4
14	$-2t-2$	$-2/(t+1)$	2
15	$4\cos(\pi t/3)$	$-3\sin(\pi t/3)$	1
16	$3t$	$4t^2+1$	½
17	$7\sin^2(\pi t/6)-5$	$-7\cos^2(\pi t/6)$	1
18	$1+3\cos(\pi t^2/3)$	$3\sin(\pi t^2/3)+3$	1
19	$-5t^2-4$	$3t$	1
20	$2-3t-6t^2$	$3-3t/2-3t^2$	0
21	$6\sin(\pi t^2/6)+3$	$6\cos(\pi t^2/6)+3$	1
22	$7t^2-3$	$5t$	¼
23	$3-3t^2+t$	$4-5t^2+5t/3$	1
24	$-4\cos(\pi t/3)-1$	$-4\sin(\pi t/3)$	1
25	$-6t$	$-2t^2-4$	1
26	$8\cos^2(\pi t/6)+2$	$-8\sin^2(\pi t/6)-7$	1
27	$-3-9\sin(\pi t^2/6)$	$-9\cos(\pi t^2/6)+5$	1
28	$-4t^2+1$	$-3t$	1
29	$5t^2+5t/3-3$	$3t^2+t+3$	1
30	$2\cos(\pi t^2/3)-2$	$-2\sin(\pi t^2/3)+3$	1

Пример К1а. Определение скорости и ускорения точки, если закон движения точки задан координатным способом

Задан закон движения точки двумя уравнениями:

$$x=-2\cos\left(\frac{\pi}{4}t\right)+3,\ y=2\sin\left(\frac{\pi}{8}t\right)-1$$

(x, y – в сантиметрах, t – в секундах).

Определить уравнение траектории точки; для момента времени t_1=1 с, найти скорость и ускорение точки, а также ее касательное и нормальное ускорения, и радиус кривизны в соответствующей точке траектории.

Решение. 1. Для определения уравнения траектории точки исключим из заданных уравнений движения время t. Поскольку t входит в аргументы тригонометрических функций, где один аргумент вдвое больше другого, используем формулу

$$\cos 2a=1-2\sin^2\alpha \quad \text{или} \quad \cos\left(\frac{\pi}{4}t\right)=1-2\sin^2\left(\frac{\pi}{8}t\right). \qquad (1)$$

Из уравнений движения находим выражение соответствующих функций и подставляем в равенство (1). Получим

$$\cos\left(\frac{\pi}{4}t\right)=\frac{3-x}{2},\sin\left(\frac{\pi}{8}t\right)=\frac{y+1}{2},$$

следовательно,

$$\frac{3-x}{2}=1-2\frac{(y+1)^2}{4}.$$

Отсюда окончательно находим следующее уравнение траектории точки (параболы, рис. II.1.1):

$$x = (y+1)^2 + 1. \tag{2}$$

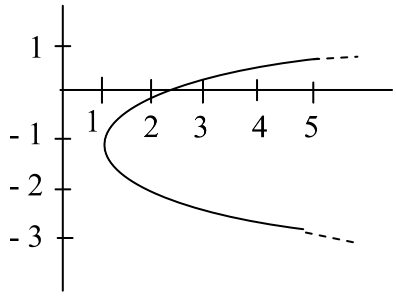


Рис. II.1.1 Траектория движения точки

2. Скорость точки найдем по ее проекциям на координатные оси:

$$v_x=\frac{dx}{dt}=\frac{\pi}{2}\sin\left(\frac{\pi}{4}t\right),$$

$$v_y=\frac{dy}{dt}=\frac{\pi}{4}\cos\left(\frac{\pi}{8}t\right);$$

$$v=\sqrt{v_x^2+v_y^2}$$

и при t_1=1с

$$v_{1x} = 1{,}11 \text{ см/с},\ v_{1y} = 0{,}73 \text{ см/с},\ v_1 = 1{,}33 \text{ см/с}. \tag{3}$$

3. Аналогично найдем ускорение точки:

$$a_x=\frac{dv_x}{dt}=\frac{\pi^2}{8}\cos\left(\frac{\pi}{4}t\right),\ a_y=\frac{dv_y}{dt}=-\frac{\pi}{32}\sin\left(\frac{\pi}{8}t\right);$$

$$a=\sqrt{a_x^2+a_y^2}$$

и при t_1 = 1 с

$$a_{1x} = 0{,}87 \text{ см/с}^2,\ a_{1y} = -\,0{,}12 \text{ см/с}^2,\ a_1 = 0{,}88 \text{ см/с}^2. \tag{4}$$

4. Касательное ускорение вычислим, дифференцируя по времени равенство $v^2=v_x^2+v_y^2$. Получим

$$2v\frac{dv}{dt}=2v_x\frac{dv_x}{dt}+2v_y\frac{dv_y}{dt},$$

откуда

$$a_\tau=\frac{dv}{dt}=\frac{v_xa_x+v_ya_y}{v}. \tag{5}$$

Числовые значения всех величин, входящих в правую часть выражения (5), определены и даются равенствами (3) и (4). Подставив в (5) эти числа, найдем сразу, что при t_1 = 1с $a_{1\tau}$ = 0,66 см / с^2.

5. Нормальное ускорение точки $a_n = \sqrt{a^2 - a_\tau^2}$. Подставляя сюда найденные числовые значения a_1 и a_τ, получим, что при t_1 = 1с a_{1n} = 0,58 см/с^2.

6. Радиус кривизны траектории $\rho = v^2/a_n$. Подставляя сюда числовые значения v_1 и a_{1n}, найдем, что при t_1 = 1с ρ_1 = 3,05 см.

Ответ: v_1 = 1,33 см/с, a_1 = 0,88 см/с^2, $a_{1\tau}$ = 0,66 см/с^2, a_{1n} = 0,58 см/с^2, ρ_1 = 3,05 см.

На рис. II.1.2 показано положение точки M:

– в начале движения (при t=0) – это M_0 с координатами (1;-1);

– в заданный момент времени (при t=1 с) – это M_1 с координатами (1,58;-0,23). Вектор $\bar{v}$ строим по составляющим v_x и v_y, причём этот вектор должен по направлению совпадать с касательной к траектории. Вектор $\bar{a}$ строим по составляющим a_x и a_y, а затем раскладываем на составляющие $\bar{a}_\tau$ и $\bar{a}_n$. При правильном решении составляющие вектора $\bar{a}$, найденные графически, должны совпадать со значениями, вычисленными по формулам.

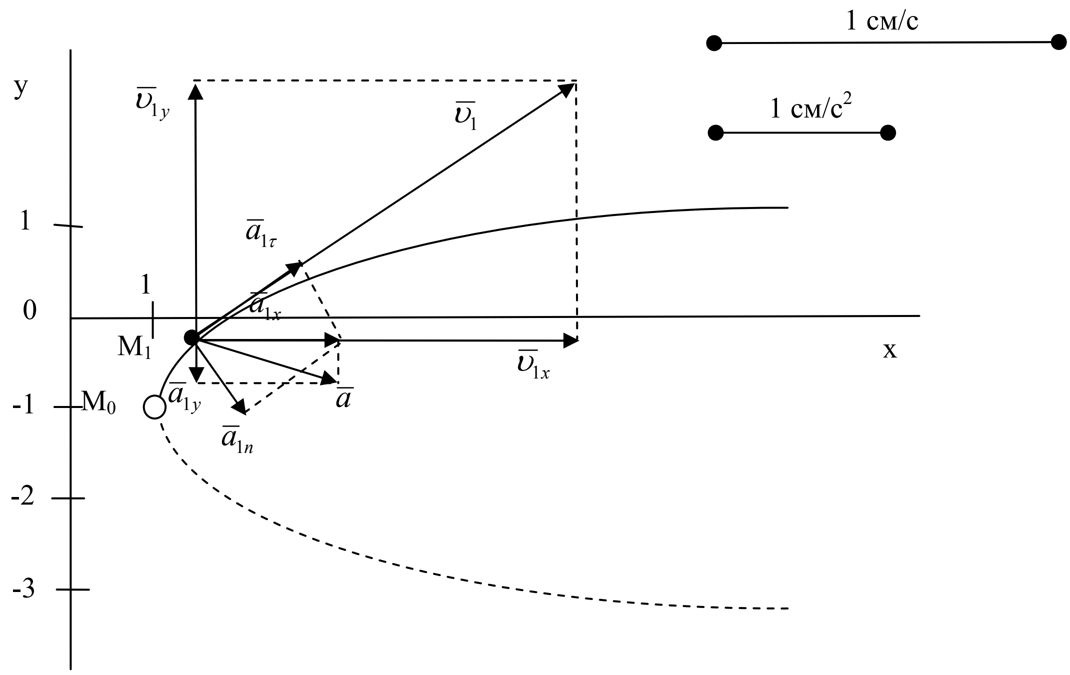


Рис. II.1.2 Кинематические характеристики точек в момент времени t_1

Задача К1б. Определение скорости и ускорения точки, если закон движения точки задан естественным способом

Точка движется по дуге окружности радиуса $R = 2$ м по закону $S = f(t)$, заданному в табл. 2 (S – в метрах, t – в секундах), где $S = A\breve{M}$ – расстояние от некоторого начала A до точки M, измеренное вдоль дуги окружности. Определить скорость и ускорение точки в момент времени $t_1 = 1$ с. Изобразить на рисунке векторы $\bar{v}$ и $\bar{a}$, считая, что точка в этот момент находится в положении M_1, а положительное направление отсчета S – от A к M.

Таблица II.2

Номер условия	$S = f(t)$	Номер условия	$S = f(t)$
1	$12\sin\left(\frac{\pi}{6}t\right)$	16	$4\cos\left(\frac{\pi}{6}t\right)$
2	$-6\cos\left(\frac{\pi}{3}t\right)$	17	$6\cos^2\left(\frac{\pi}{6}t\right)$
3	$-3\sin^2\left(\frac{\pi}{6}t\right)$	18	$4\cos\left(\frac{\pi}{3}t\right)$
4	$9\sin\left(\frac{\pi}{6}t\right)$	19	$10\cos\left(\frac{\pi}{6}t\right)$
5	$3\cos\left(\frac{\pi}{3}t\right)$	20	$-4\cos^2\left(\frac{\pi}{6}t\right)$
6	$10\sin\left(\frac{\pi}{6}t\right)$	21	$12\cos\left(\frac{\pi}{3}t\right)$
7	$6\sin^2\left(\frac{\pi}{6}t\right)$	22	$-3\cos\left(\frac{\pi}{6}t\right)$
8	$-2\sin\left(\frac{\pi}{6}t\right)$	23	$-8\cos\left(\frac{\pi}{3}t\right)$
9	$9\cos\left(\frac{\pi}{3}t\right)$	24	$9\cos\left(\frac{\pi}{6}t\right)$
10	$-8\sin\left(\frac{\pi}{6}t\right)$	25	$-6\cos\left(\frac{\pi}{3}t\right)$
11	$2t^2+2$	26	$3t^2-10t$
12	$8\sin\left(\frac{\pi}{4}t\right)$	27	$2\sin\left(\frac{\pi}{3}t\right)$
13	$2-3t^2$	28	$6t-2t^2$
14	$2t^3$	29	$-2\sin\left(\frac{\pi}{6}t\right)$
15	$2\cos\left(\frac{\pi}{4}t\right)$	30	$2-t^2$

Пример К1б. Определение скорости и ускорения точки, если закон движения точки задан естественным способом

Точка движется по дуге окружности, радиус которой R=2 м. Закон движения точки $S = 2\sin\frac{\pi t}{4}$, где S – расстояние от точки A до точки M вдоль дуги окружности (в метрах); t – время (в секундах).

Определить скорость и ускорение точки в момент времени t_1=1с.

Решение.

Определяем скорость точки:

$$v = \frac{dS}{dt} = \frac{\pi}{2}\cos\frac{\pi t}{4}.$$

При t_1=1 с получим $\upsilon_1 = \frac{3,14}{2}\cos\frac{\pi}{4} = 1,11$ м/с.

Ускорение находим по его касательной и нормальной составляющим:

$$a_\tau = \frac{dv}{dt} = -\frac{\pi^2}{8}\sin\frac{\pi t}{4}, \quad a_n = \frac{v^2}{\rho} = \frac{v^2}{R}.$$

При t=1 с и R=2 м , получим:

$$a_{1\tau} = -\frac{\pi^2}{8}\sin\frac{\pi}{4} = -\frac{3,14^2}{8}0,707 = -0,87 \text{ м/с}^2,$$

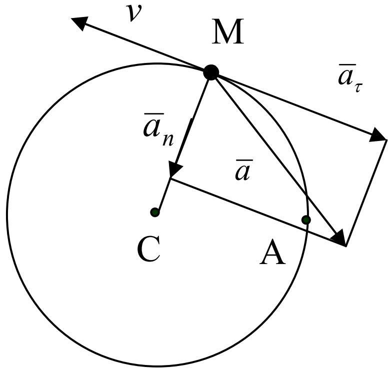
$$a_{1n} = \frac{v_1^2}{2} = \frac{1,11^2}{2} = 0,62 \text{ м/с}^2.$$

Тогда ускорение точки при t=1с:

$$a_1 = \sqrt{a_{1\tau}^2 + a_{1n}^2} = 1,07 \text{ м/с}^2.$$

Изобразим на рисунке векторы $\bar{v}_1$ и $\bar{a}_1$, учитывая знаки v_1 и $a_{1\tau}$, и считая положительным направление от A к M.

$$\angle ACM = \frac{S_1}{R}$$



При t_1=1 с $S_1 = 2\sin\frac{\pi}{4} = 14,14$ м,

следовательно

$$\angle ACM = \frac{14,14}{2} = 0.707 \text{ рад} = 40,5°$$

Рис. II.1.3. Скорость и ускорение точки M в момент времени t_1

Контрольные вопросы

1. Какие способы задания движения точки применяются в кинематике и в чем они состоят?

2. Какая зависимость существует между радиус-вектором движущейся точки и вектором скорости этой точки?

3. Как направлен вектор скорости криволинейного движения точки по отношению к её траектории?

4. Как определяется скорость точки при координатном способе задания движения?

5. Какая зависимость существует между радиус-вектором движущейся точки и вектором ускорения точки?

6. Как направлен вектор ускорения криволинейного движения точки по отношению к её траектории, в какой плоскости он лежит?

7. Как определяется ускорение точки при координатном способе задания движения?

8. Какие оси называются естественными осями координат?

9. Дайте определение нормальной и соприкасающейся плоскости. Изобразите их на чертеже.

10. Чему равны проекции вектора скорости точки на естественные оси?

11. Чему равны проекции вектора ускорения точки на естественные оси?

12. Напишите формулу для определения касательного ускорения точки, укажите в каких случаях оно равно нулю? Что характеризует касательное ускорение точки.

13. Напишите формулу для определения нормального ускорения точки, укажите в каких случаях оно равно нулю? Что характеризует нормальное ускорение точки.

14. Можно ли утверждать в общем случае, что в те моменты, когда скорость точки равна нулю, её ускорение также обязательно равно нулю?

II.2. Поступательное и вращательное движения твёрдого тела

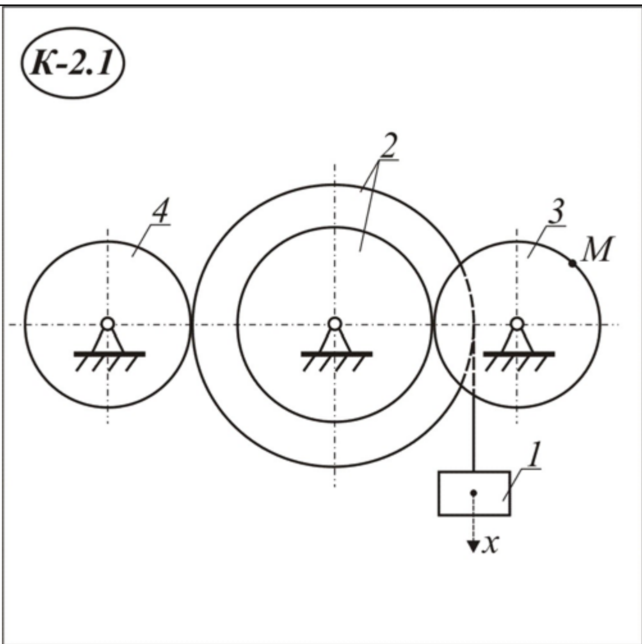
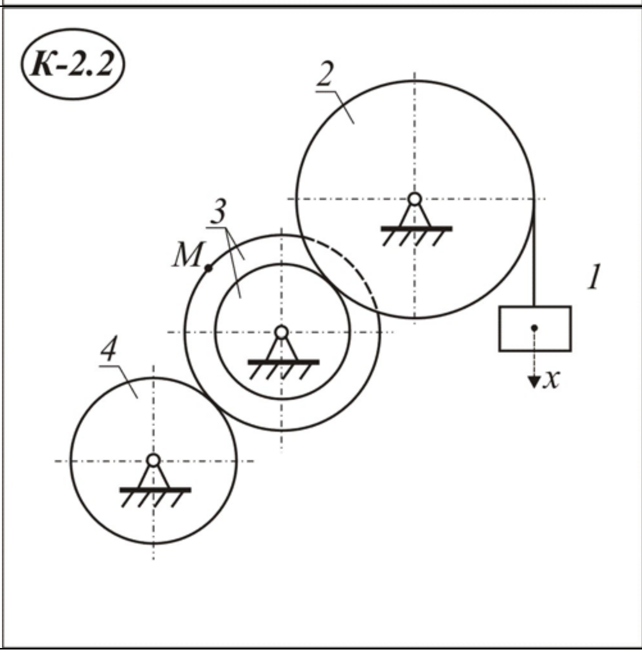
Задание К.2. Определение скоростей и ускорений точек твёрдого тела при поступательном и вращательном движениях

Дано. Механизм состоит из нескольких колёс, находящихся в зацеплении или связанных ременной передачей, и груза 1, привязанного к концу нити, намотанной на одно из колёс. Движение груза 1 описывается уравнением $x = \frac{at^2}{2} + v_0 t + x_0$, где t – время; a – ускорение груза; v_0 – скорость груза в начальный момент времени; x_0 – координата груза в начальный момент времени. При $t=t_2$ координата груза равна x_2.

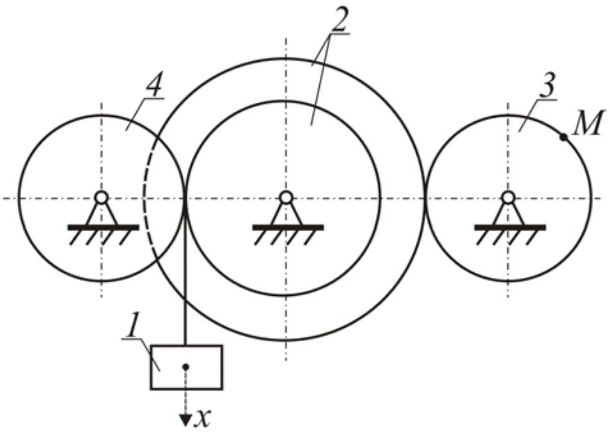
Определить в момент времени $t=t_1$ скорость и ускорение груза; скорость и ускорение точки M одного из колёс механизма, угловые скорости и ускорения всех колёс механизма.

Схемы механизмов и необходимые данные приведены в табл. II.3.

Указания. При решении задачи учесть, что когда два колеса находятся в зацеплении, скорость точки зацепления каждого колеса одна и та же. Когда два колеса связаны ременной передачей, то скорости всех точек ремня и, следовательно, точек, лежащих на ободе каждого из этих колёс, в данный момент времени численно одинаковы; при этом считается, что ремень по ободу колеса не скользит.

	Радиусы: R_2=60 см r_2=45 см R_3=36 см R_4=36 см При t=0: x_0=2 см, v_0=12 см/с При $t=t_2$: x_2=173 см ***Расчётные моменты времени:*** t_2=3 с, t_1=2 с. Закон движения груза 1: $x=\frac{at^2}{2}+v_0t+x_0$
	Радиусы: R_2=80 см r_3=45 см R_3=60 см R_4=40 см При t=0: x_0=5 см, v_0=10 см/с При $t=t_2$: x_2=41 см ***Расчётные моменты времени:*** t_2=2 с, t_1=1 с. Закон движения груза 1: $x=\frac{at^2}{2}+v_0t+x_0$

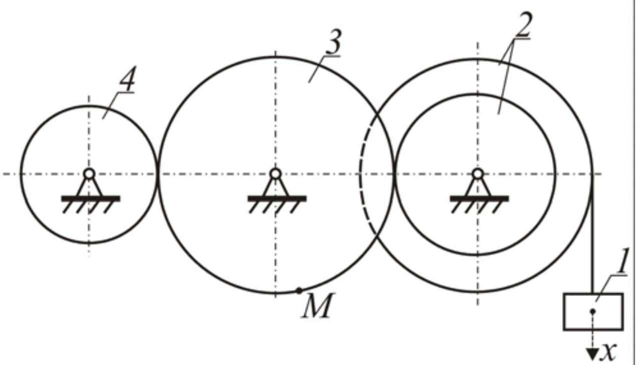
К-2.3



Радиусы:
R_2=100 см
r_2=60 см
R_3=75 см
R_4=40 см
При t=0: x_0=8 см, v_0 =6 см/с
При $t=t_2$: x_2=40 см
Расчётные моменты времени:
t_2=4 с, t_1=2 с.
Закон движения груза 1:

$$x=\frac{at^2}{2}+v_0t+x_0$$

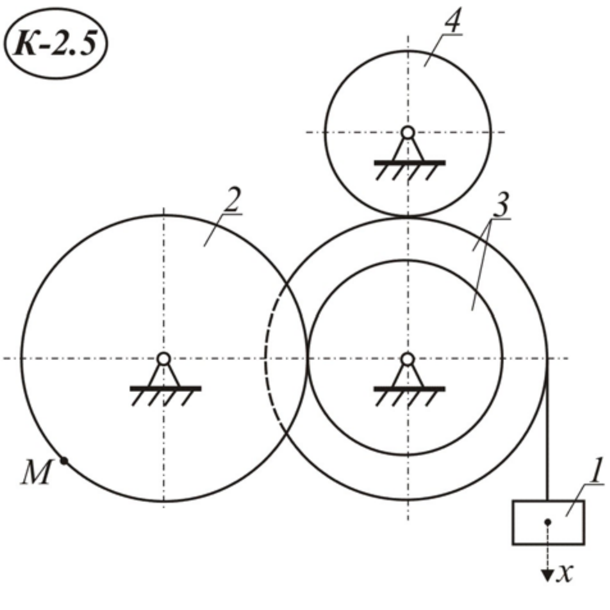
К-2.4



Радиусы:
R_2=58 см
r_2=45 см
R_3=60 см
R_4=40 см
При t=0: x_0=4 см, v_0=4 см/с
При $t=t_2$: x_2=172 см
Расчётные моменты времени:
t_2=4 с, t_1=3 с.
Закон движения груза 1:

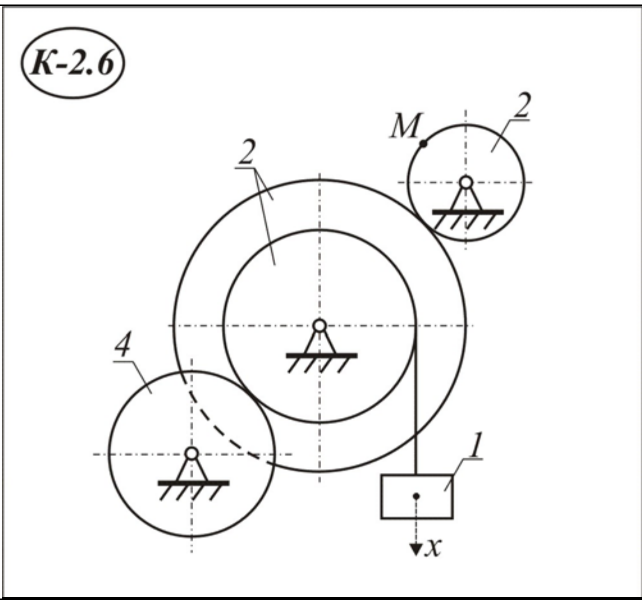
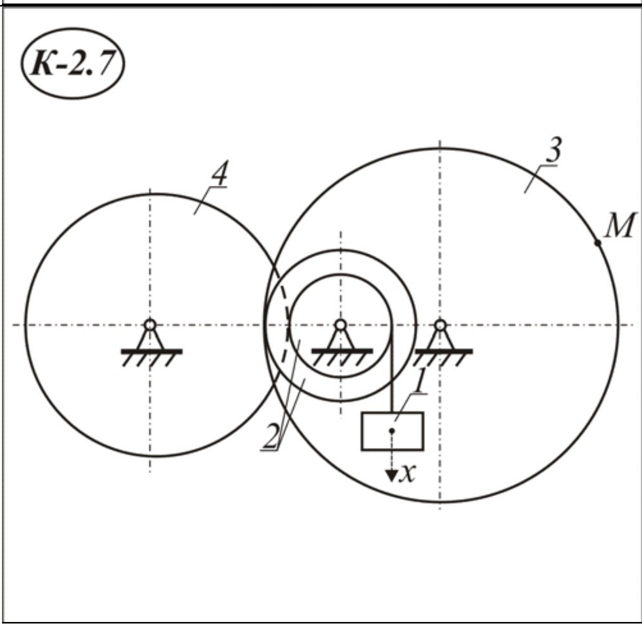
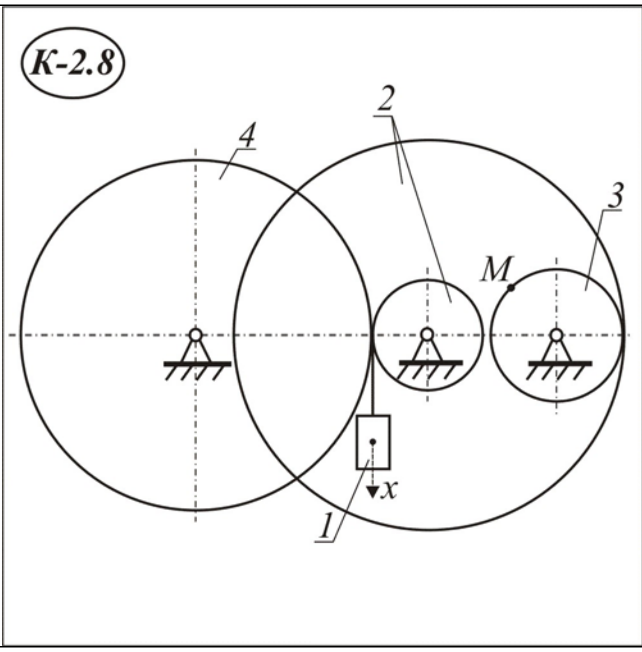
$$x=\frac{at^2}{2}+v_0t+x_0$$

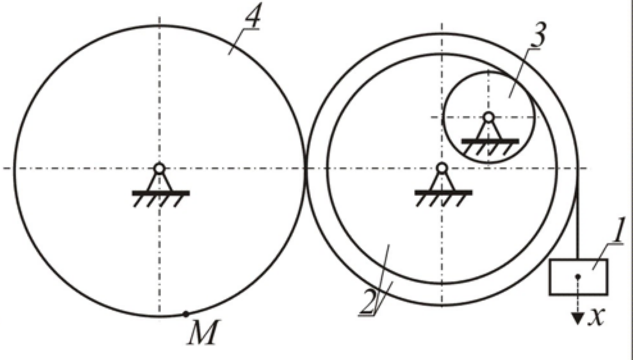
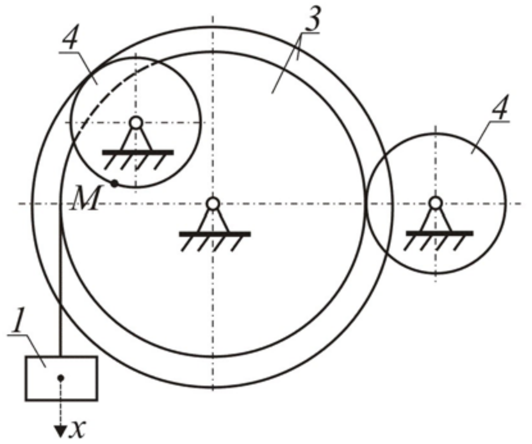
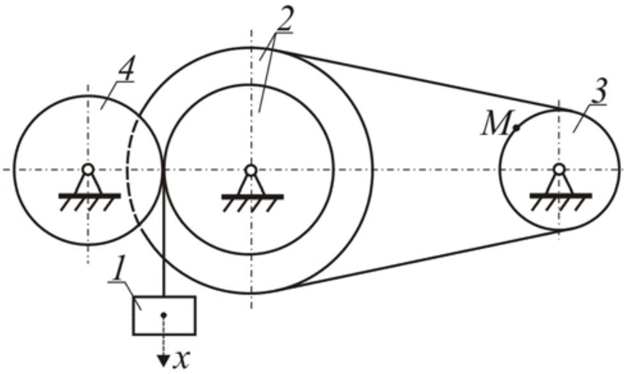
К-2.5

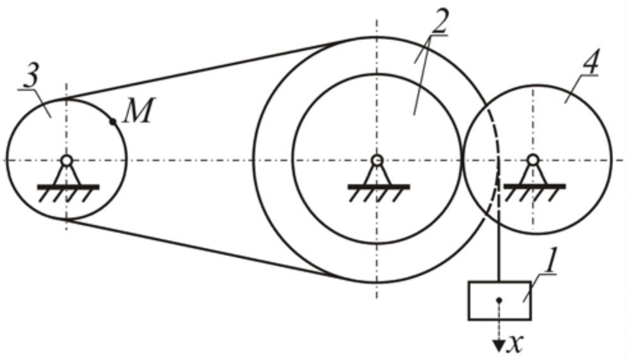
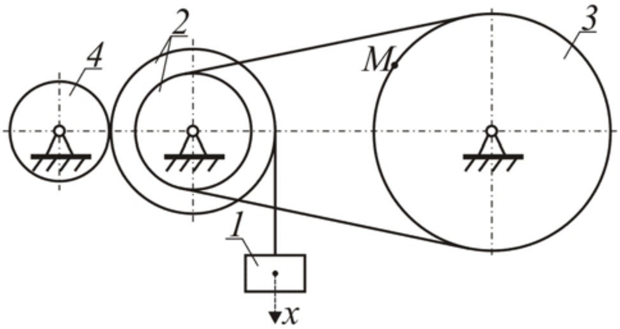
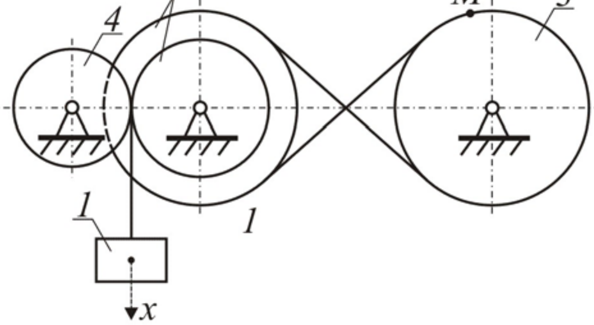


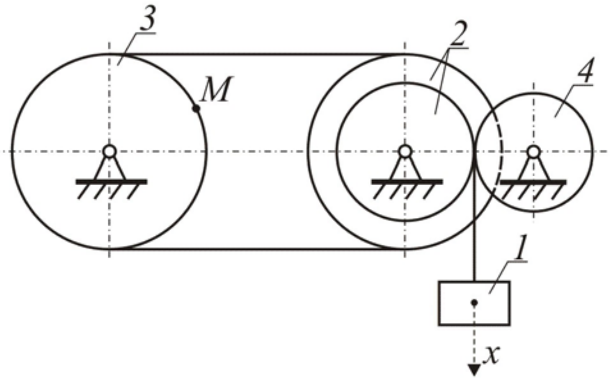
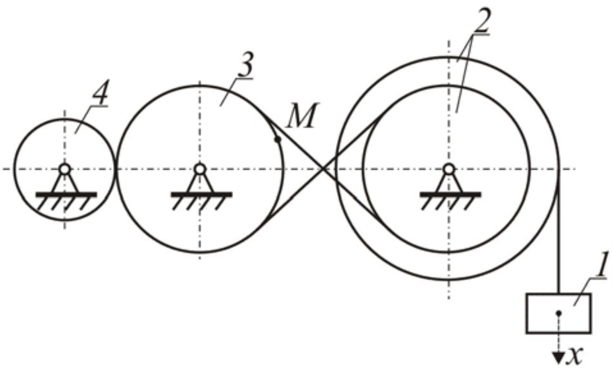
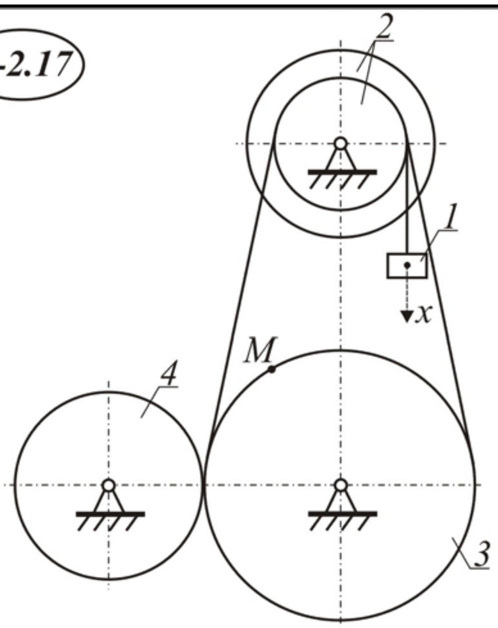
Радиусы:
R_2=80 см
r_3=30 см
R_3=45 см
R_4=40 см
При t=0: x_0=3 см, v_0=15 см/с
При $t=t_2$: x_2=102 см
Расчётные моменты времени:
t_2=3 с, t_1=2 с.
Закон движения груза 1:

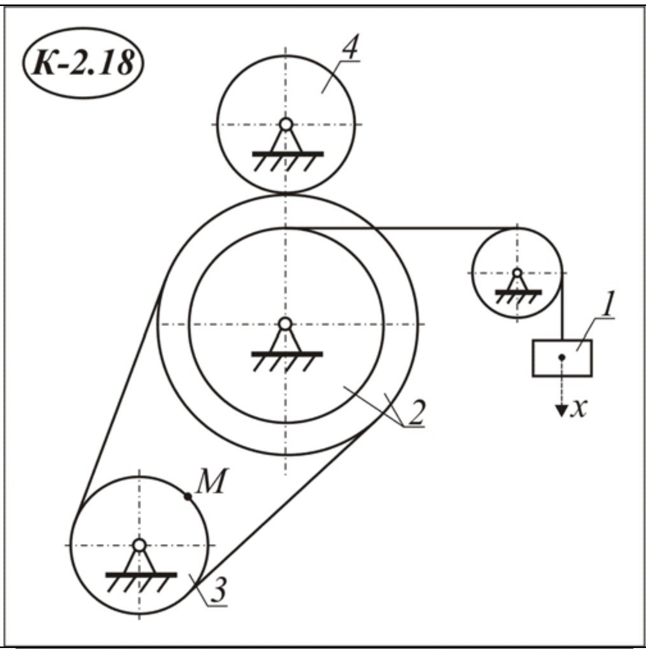
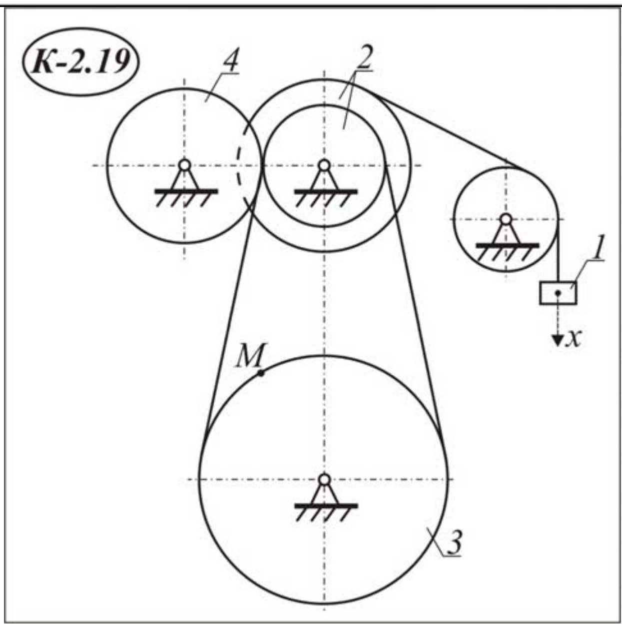
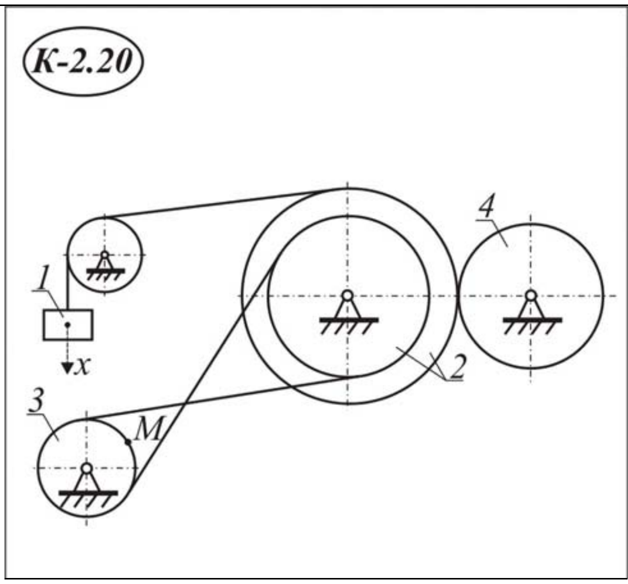
$$x=\frac{at^2}{2}+v_0t+x_0$$

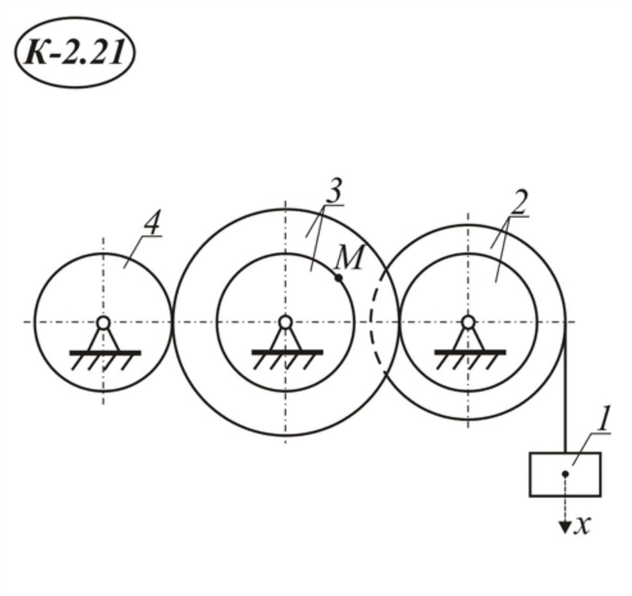
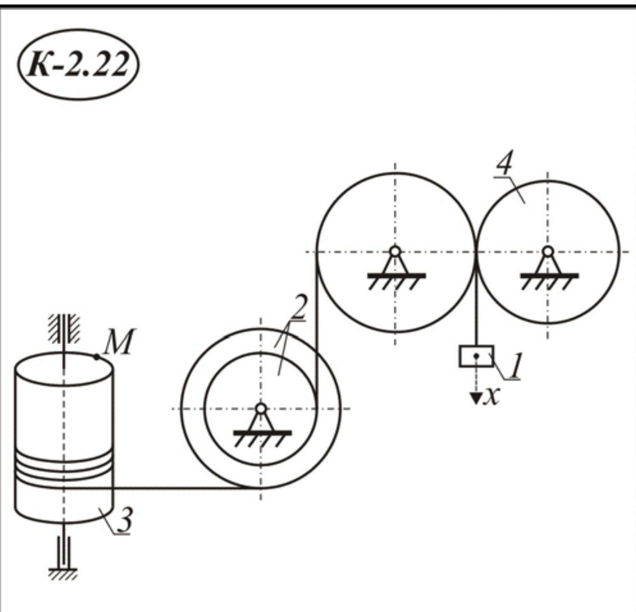
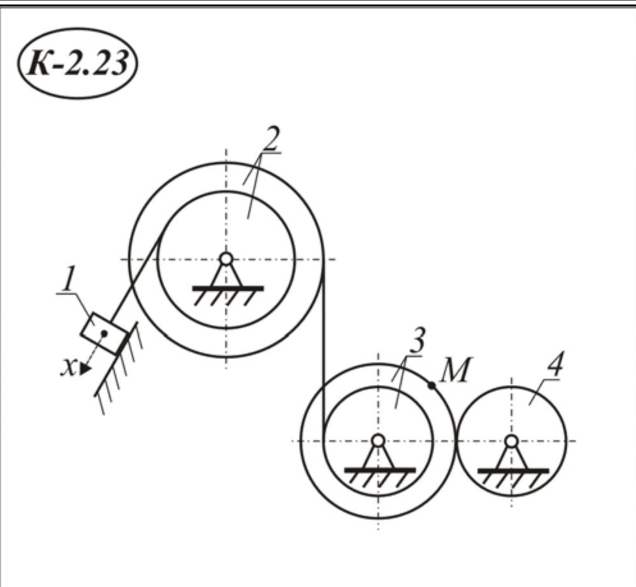
	Радиусы: R_2=100 см r_2=60 см R_3=20 см R_4=40 см При t=0: x_0=7 см, v_0=16 см/с При t=t_2: x_2=215 см ***Расчётные моменты времени:*** t_2=4 с, t_1=2 с. Закон движения груза 1: $x = \dfrac{at^2}{2} + v_0 t + x_0$
	Радиусы: R_2=45 см r_2=35 см R_3=105 см R_4=60 см При t=0: x_0=8 см, v_0=5 см/с При t=t_2: x_2=124 см ***Расчётные моменты времени:*** t_2=4 с, t_1=3 с. Закон движения груза 1: $x = \dfrac{at^2}{2} + v_0 t + x_0$
	Радиусы: R_2=35 см r_2=10 см R_3=15 см R_4=30 см При t=0: x_0=6 см, v_0=2 см/с При t=t_2: x_2=111 см ***Расчётные моменты времени:*** t_2=3 с, t_1=2 с. Закон движения груза 1: $x = \dfrac{at^2}{2} + v_0 t + x_0$

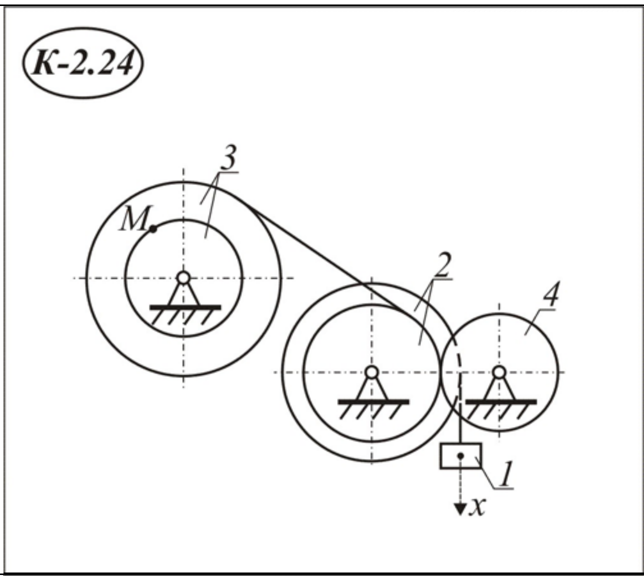
К-2.9 	Радиусы: R_2=40 см r_2=30 см R_3=15 см R_4=50 см При t=0: x_0=10 см, v_0=7 см/с При t=t_2: x_2=48 см ***Расчётные моменты времени:*** t_2=2 с, t_1=1 с. Закон движения груза 1: $x = \frac{at^2}{2} + v_0 t + x_0$
К-2.10 	Радиусы: R_2=15 см r_3=35 см R_3=40 см R_4=20 см При t=0: x_0=5 см, v_0=3 см/с При t=t_2: x_2=129 см ***Расчётные моменты времени:*** t_2=4 с, t_1=3 с. Закон движения груза 1: $x = \frac{at^2}{2} + v_0 t + x_0$
К-2.11 	Радиусы: R_2=40 см r_2=25 см R_3=20 см R_4=30 см При t=0: x_0=9 см, v_0=8 см/с При t=t_2: x_2=65 см ***Расчётные моменты времени:*** t_2=2 с, t_1=1 с. Закон движения груза 1: $x = \frac{at^2}{2} + v_0 t + x_0$

K-2.12 	Радиусы: R_2=20 см r_2=15 см R_3=10 см R_4=10 см При t=0: x_0=5 см, v_0=10 см/с При t=t_2: x_2=179 см ***Расчётные моменты времени:*** t_2=3 с, t_1=2 с. Закон движения груза 1: $$x = \frac{at^2}{2} + v_0 t + x_0$$
K-2.13 	Радиусы: R_2=30 см r_2=20 см R_3=40 см R_4=10 см При t=0: x_0=7 см, v_0=0 см/с При t=t_2: x_2=557 см ***Расчётные моменты времени:*** t_2=5 с, t_1=2 с. Закон движения груза 1: $$x = \frac{at^2}{2} + v_0 t + x_0$$
K-2.14 	Радиусы: R_2=15 см r_2=10 см R_3=15 см R_4=5 см При t=0: x_0=6 см, v_0=3 см/с При t=t_2: x_2=80 см ***Расчётные моменты времени:*** t_2=2 с, t_1=1 с. Закон движения груза 1: $$x = \frac{at^2}{2} + v_0 t + x_0$$

К-2.15  	Радиусы: R_2=20 см r_2=15 см R_3=20 см R_4=10 см При t=0: x_0=5 см, v_0=2 см/с При t=t_2: x_2=189 см ***Расчётные моменты времени:*** t_2=4 с, t_1=2 с. Закон движения груза 1: $x = \dfrac{at^2}{2} + v_0 t + x_0$
К-2.16  	Радиусы: R_2=20 см r_2=15 см R_3=15 см R_4=10 см При t=0: x_0=4 см, v_0=6 см/с При t=t_2: x_2=220 см ***Расчётные моменты времени:*** t_2=4 с, t_1=3 с. Закон движения груза 1: $x = \dfrac{at^2}{2} + v_0 t + x_0$
К-2.17  	Радиусы: R_2=15 см r_2=10 см R_3=20 см R_4=10 см При t=0: x_0=8 см, v_0=4 см/с При t=t_2: x_2=44 см ***Расчётные моменты времени:*** t_2=2 с, t_1=1 с. Закон движения груза 1: $x = \dfrac{at^2}{2} + v_0 t + x_0$

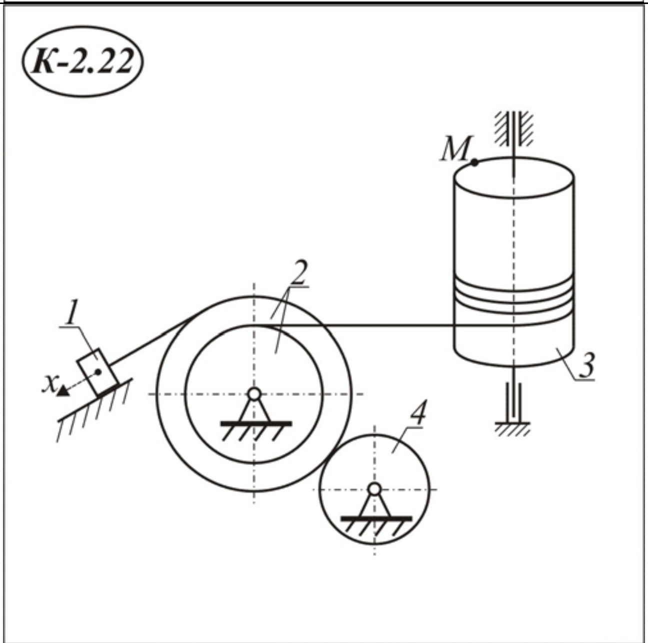
	Радиусы: R_2=20 см r_2=15 см R_3=10 см R_4=10 см При t=0: x_0=3 см, v_0=12 см/с При t=t_2: x_2=211 см ***Расчётные моменты времени:*** t_2=4 с, t_1=1 с. Закон движения груза 1: $x=\dfrac{at^2}{2}+v_0t+x_0$
	Радиусы: R_2=15 см r_2=10 см R_3=20 см R_4=15 см При t=0: x_0=5 см, v_0=10 см/с При t=t_2: x_2=505 см ***Расчётные моменты времени:*** t_2=5 с, t_1=3 с. Закон движения груза 1: $x=\dfrac{at^2}{2}+v_0t+x_0$
	Радиусы: R_2=25 см r_2=15 см R_3=10 см R_4=10 см При t=0: x_0=10 см, v_0=8 см/с При t=t_2: x_2=277 см ***Расчётные моменты времени:*** t_2=3с, t_1=1с. Закон движения груза 1: $x=\dfrac{at^2}{2}+v_0t+x_0$

	Радиусы: R_2=20 см r_2=10 см R_3=30 см r_3=10см R_4=10 см При t=0: x_0=6 см, v_0=5 см/с При t=t_2: x_2=356 см ***Расчётные моменты времени:*** t_2=5 с, t_1=2 с. Закон движения груза 1: $x = \frac{at^2}{2} + v_0 t + x_0$
	Радиусы: R_2=40 см r_2=20 см R_3=35 см R_4=10 см При t=0: x_0=7 см, v_0=6 см/с При t=t_2: x_2=103 см ***Расчётные моменты времени:*** t_2=2 с, t_1=1 с. Закон движения груза 1: $x = \frac{at^2}{2} + v_0 t + x_0$
	Радиусы: R_2=40 см r_2=30 см R_3=30 см r_3=15см R_4=10 см При t=0: x_0=5 см, v_0=9 см/с При t=t_2: x_2=194 см ***Расчётные моменты времени:*** t_2=3с, t_1=2с. Закон движения груза 1: $x = \frac{at^2}{2} + v_0 t + x_0$



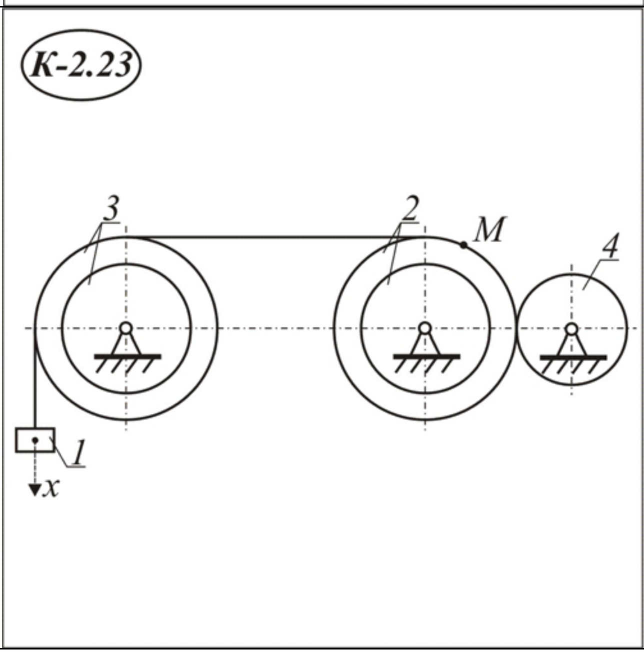
Радиусы:
R_2=30 см
r_2=15 см
R_3=40 см
R_4=10 см
При t=0: x_0=9 см, v_0=8 см/с
При t=t_2: x_2=105 см
Расчётные моменты времени:
t_2=4 с, t_1=2 с.
Закон движения груза 1:

$$x = \frac{at^2}{2} + v_0 t + x_0$$



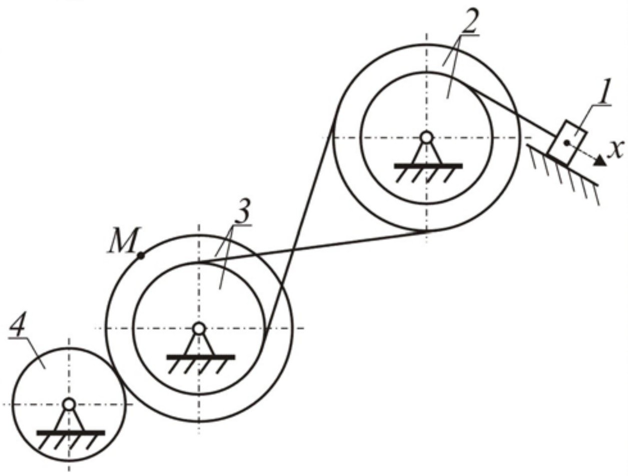
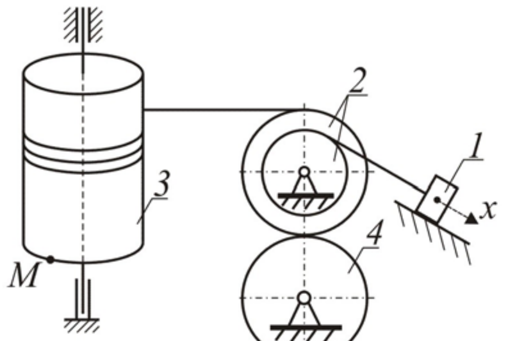
Радиусы:
R_2=50 см
r_2=20 см
R_3=60 см
R_4=10 см
При t=0: x_0=8 см, v_0=4 см/с
При t=t_2: x_2=119 см
Расчётные моменты времени:
t_2=3 с, t_1=2 с.
Закон движения груза 1:

$$x = \frac{at^2}{2} + v_0 t + x_0$$



Радиусы:
R_2=32 см
r_2=16 см
R_3=32 см
r_3=16см
R_4=10 см
При t=0: x_0=6 см, v_0=14 см/с
При t=t_2: x_2=862 см
Расчётные моменты времени:
t_2=4 с, t_1=2 с.
Закон движения груза 1:

$$x = \frac{at^2}{2} + v_0 t + x_0$$

К-2.24  	Радиусы: R_2=40 см r_2=18 см R_3=40 см r_3=18см R_4=10 см При t=0: x_0=5 см, v_0=10 см/с При t=t_2: x_2=193 см ***Расчётные моменты времени:*** t_2=2 с, t_1=1 с. Закон движения груза 1: $x = \frac{at^2}{2} + v_0 t + x_0$
К-2.30  	Радиусы: R_2=30 см r_2=15 см R_3=20 см $R_4 = 25$ *см.* При t=0: x_0=10 см, v_0=7 см/с При t=t_2: x_2=128 см ***Расчётные моменты времени:*** t_2=2 с, t_1=1 с. Закон движения груза 1: $x = \frac{at^2}{2} + v_0 t + x_0$

Пример выполнения К-2

Дано: схема механизма (рис. II.2.1).

$$R_2 = 16\,\text{см},\quad r_2 = 8\,\text{см},\quad R_3 = 14\,\text{см},\quad r_3 = 10\,\text{см},$$

$$R_4 = 8\,\text{см},\quad x_0 = 2\text{ см},\quad v_0 = 4\text{ см/с},\quad x_2 = 320\text{ см},$$

$$t_2 = 5\text{ с}.$$

Закон движения груза $x = \frac{at^2}{2} + V_0 t + x_0$.

Определить в момент времени $t_1 = 2$ с скорость и ускорение груза, скорость и ускорение точки M одного из колес механизма, угловые скорости и ускорения всех колес механизма.

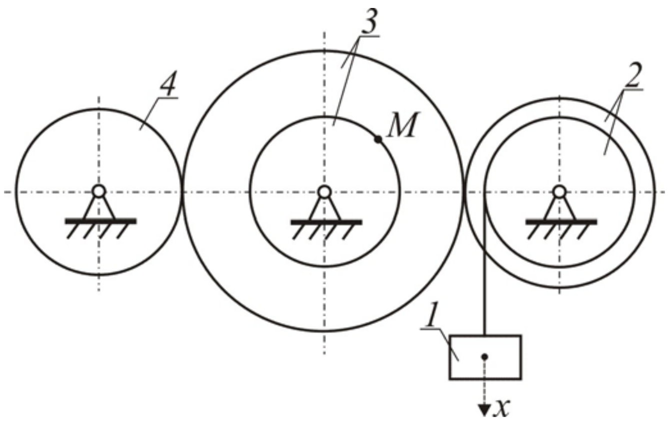


Рис. II.2.1. Заданная схема механизма

Решение:

1) По закону движения груза найдем ускорение груза a.

При $t_2 = 5$ с: $320 = \dfrac{a \cdot 5^2}{2} + 4 \cdot 5 + 2 \quad \Rightarrow \quad a = 23,84$ см/с^2.

Скорость груза

$$v = \frac{dx}{dt} = \dot{x}.$$

Так как $x = \dfrac{at^2}{2} + v_0 t + x_0 = 11,92t^2 + 4t + 2$, то $v = 23,84t + 4$

При $t_1 = 2$ с: $\quad v = 23,84 \cdot 2 + 4 = 51,68$ см/с; $\quad a = \text{const} = 23,84$ см/с^2.

2) Определяем угловые скорости и ускорения всех колес.

$$\omega_2 = \frac{v}{r_2} = \frac{23,84t + 4}{8} = 2,98t + 0,5,$$

при $t_1 = 2$ с $\quad \omega_2 = 6,46$ рад/с.

Для определения угловой скорости третьего колеса запишем уравнение, связывающее искомую величину с известной угловой скоростью второго колеса:

$$R_2\omega_2 = R_3\omega_3,$$

следовательно

$$\omega_3 = \frac{R_2\omega_2}{R_3} = \frac{16(2,98t + 0,5)}{14} = 3,4t + 0,57.$$

При $t_1 = 2$ с $\quad \omega_3 = 7,37$ рад/с.

Угловую скорость четвертого колеса найдём, зная, что при зацеплении колёс угловые скорости ω обратно пропорциональны радиусам R:

$$\frac{\omega_4}{\omega_3} = \frac{R_3}{R_4} = \frac{14}{8} = 1,75, \quad \omega_4 = 1,75(3,4t + 0,57) = 5,95t + 1$$

при $\quad t_1 = 2$ с $\quad \omega_4 = 12,9$ рад/с .

Так как значение углового ускорения тела в данный момент времени равно первой производной от угловой скорости, то

$$\varepsilon_2 = \dot{\omega}_2 = 2,98 \text{ рад/с}^2,$$

$$\varepsilon_3 = \dot{\omega}_3 = 3,4 \text{ рад/с}^2,$$

$$\varepsilon_4 = \dot{\omega}_4 = 5,95 \text{ рад/с}^2.$$

3) Скорость и ускорение точки M при $t_1 = 2$ с

$$v_M = r_3\omega_3 = 10 \cdot 7,37 = 73,7 \text{ см/с},$$

$$a_M^\tau = r_3 \cdot \varepsilon_3 = 10 \cdot 3,4 = 34 \text{ см/с}^2,$$

$$a_M^n = r_3 \cdot \omega_3^2 = 10 \cdot 7,37^2 = 543,17 \text{ см/с}^2,$$

$$a_M = \sqrt{\left(a_M^\tau\right)^2 + \left(a_M^n\right)^2} = 544,23 \text{ см/с}^2.$$

Покажем найденные величины на рис. II.2.2.

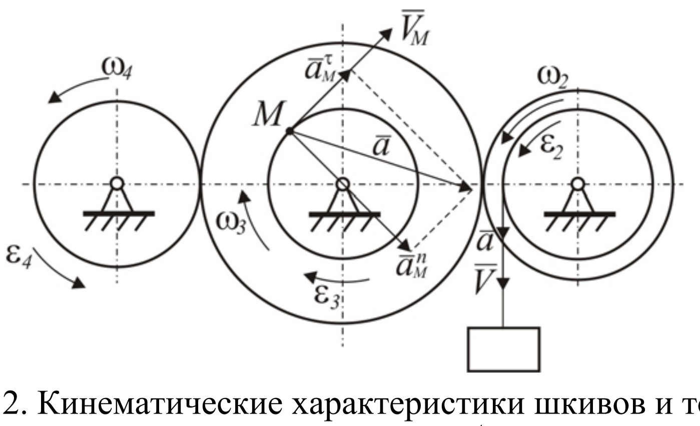


Рис.II.2.2. Кинематические характеристики шкивов и точки M в момент времени t_1

Контрольные вопросы

1. Какое движение твердого тела называется поступательным?
2. Перечислите свойства поступательного движения твердого тела.
3. Какое движение твердого тела называется вращательным?

4. Что называется угловой скоростью и угловым ускорением тела? Напишите формулы для их вычисления.

5. Какое вращение твердого тела называется равномерным, какое равномерно-переменным?

6. Запишите законы равномерного и равнопеременного вращательного движения твердого тела.

7. Какая зависимость существует между угловой скоростью вращающегося тела и числом его оборотов в минуту?

8. Как изображается угловая скорость тела в виде вектора, как этот вектор направлен?

9. Как выражается зависимость между угловой скоростью вращающегося тела и линейной скоростью какой-нибудь точки этого тела?

10. Как выражаются касательное и нормальное ускорения точки твердого тела, вращающегося вокруг неподвижной оси?

11. Напишите векторные формулы для скоростей и ускорений точек тела, вращающегося вокруг неподвижной оси.

Раздел III. ДИНАМИКА

III.1. Колебательное движение

Задание Д2. Исследование колебательного движения материальной точки

Варианты 1-5 (схемы Д-2.1- Д-2.5). Найти уравнение движения груза D массой m_D (варианты 2 и 4) или системы грузов D и E массами m_D и m_E (варианты 1, 3, 5), отнеся их движение к оси x; начало отсчета совместить с положением покоя груза D или соответственно системы грузов D и E (при статической деформации пружин). Стержень, соединяющий грузы считать невесомым и недеформируемым.

Вариант 1. Груз D ($m_D = 2$ кг) прикреплен к бруску AB, подвешенному к двум одинаковым параллельным пружинам, коэффициент жесткости каждой из которых $C = 3$ Н/см. Точка прикрепления груза D находится на равных расстояниях от осей пружин.

В некоторые моменты времени к грузу D подвешивают груз E ($m_E = 1$ кг). Сопротивление движению системы двух грузов пропорционально скорости: $R = 12v$, Н, где v – скорость, м/с.

Массой абсолютно жесткого бруска AB и массой части демпфера, прикрепленной к бруску, пренебречь.

Вариант 2. В момент времени, когда стержень, соединяющий грузы D ($m_D = 1$ кг) и E ($m_E = 2$ кг), перерезают, точка B (верхний конец последовательно соединенных пружин) начинает совершать движение по закону $\xi = 1{,}5\sin 18t$ (см) (ось ξ направлена вертикально вниз). Коэффициенты жесткости пружин $C_1 = 12$ Н/см, $C_2 = 36$ Н/см.

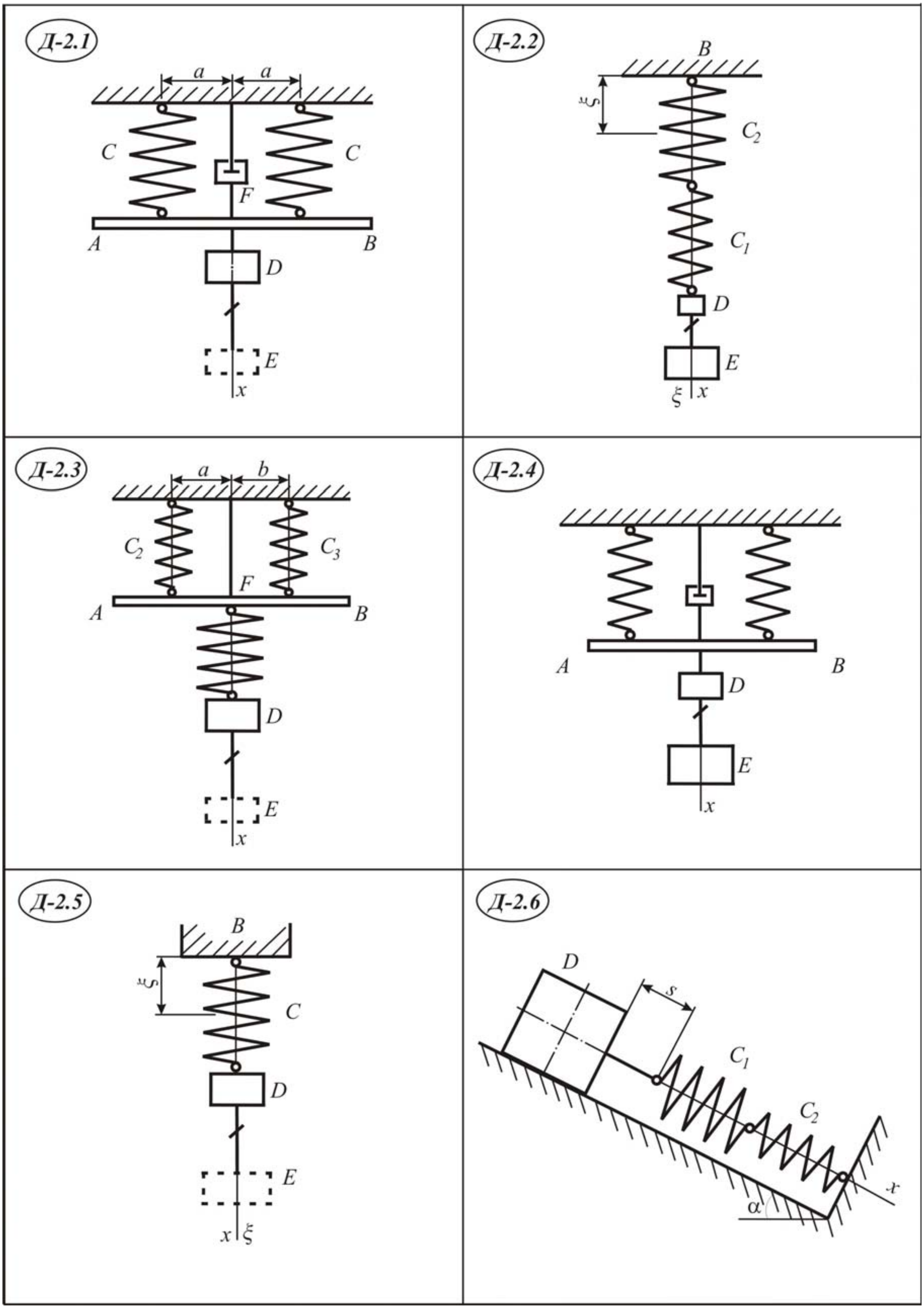
Вариант 3. Груз D ($m_D = 2$ кг) висит на пружине, прикрепленной к точке F бруска AB и имеющей коэффициент жесткости $C_1 = 10$ Н/см. Брусок подвешен к двум параллельным пружинам, коэффициенты жесткости которых $C_2 = 4$ Н/см и $C_3 = 6$ Н/см; точка F находится на расстояниях a и b от осей этих пружин: $a/b = C_3/C_2$.

В некоторый момент времени к грузу D подвешивают груз E ($m_E = 1{,}2$ кг). В этот же момент системе грузов сообщают скорость $v_0 = 0{,}2$ м/с, направленную вниз. Массой абсолютно жесткого бруска AB пренебречь.

Вариант 4. Статическая деформация двух одинаковых параллельных пружин под действием грузов D ($m_D = 0{,}5$ кг) и E ($m_E = 1{,}5$ кг) $f_{ст} = 4$ см. Грузы подвешены к пружинам с помощью абсолютно жесткого бруска AB.

В некоторый момент времени стержень, соединяющий грузы, перерезают. Сопротивление движению груза D пропорционально скорости: $R = 6v$, где v – скорость. Массой бруска и массой прикрепленной к бруску части демпфера пренебречь.

Вариант 5. Одновременно с подвешиванием к грузу D ($m_D = 1{,}6$ кг), висящему на пружине, коэффициент жесткости которой $C = 4$ Н/см, груза E ($m_E = 2{,}4$ кг) точка B (верхний конец пружины) начинает совершать движение по закону $\xi = 2\sin 5t$ (ось ξ направлена вертикально вниз).



Варианты 6-10 (схемы Д-2.6-Д-2.10). Найти уравнение движения груза D массой m по гладкой наклонной плоскости, составляющей с горизонтом угол α, с момента соприкасания груза с пружиной или с системой пружин, предполагая, что дальнейшем движении груз от пружин не отделяется. Движение груза отнести к оси x, приняв за начало отсчета положение покоя груза (при статической деформации пружин).

Вариант 6. Пройдя без начальной скорости по наклонной плоскости ($\alpha = 30°$) расстояние $s = 0{,}1$ м, груз D ($m = 4$ кг) ударяется о недеформированные, последовательно соединенные пружины, имеющие коэффициенты жесткости $C_1 = 48$ Н/см и $C_2 = 24$ Н/см.

Вариант 7. В некоторый момент времени груз D ($m = 2$ кг) присоединяют без начальной скорости к концу A недеформированных последовательно соединенных пружин, имеющих коэффициенты жесткости $C_1 = 12$ Н/см, $C_2 = 6$ Н/см. В тот же момент времени ($t = 0$) другой конец пружин B начинает совершать движение вдоль наклонной плоскости ($\alpha = 45°$) по закону $\xi = 0{,}02\sin 20t$ (м) (ось ξ направлена вдоль наклонной плоскости вниз).

Вариант 8. Две параллельные пружины 1 и 2, имеющие коэффициенты жесткости $C_1 = 4$ Н/см, соединены абсолютно жестким бруском AB, к точке K которого прикреплена пружина 3 с коэффициентом жесткости $C_3 = 15$ Н/см.

Точка K находится на расстояниях a и b от осей пружин 1 и 2: $a/b = C_2/C_1$.

Пружины 1, 2 и 3 не деформированы. Груз B массой 1,5 кг присоединяют к концу N пружины 3; в тот же момент грузу B сообщают скорость $v_0 = 0{,}5$ м/с, направленную вниз параллельно наклонной плоскости ($\alpha = 45°$).

Массой бруска AB пренебречь.

Вариант 9. Груз D ($m = 1{,}2$ кг), пройдя без начальной скорости по наклонной плоскости ($\alpha = 30°$) расстояние $S = 0{,}2$ м, ударяется о недеформируемую пружину, коэффициент жесткости которой $C = 4{,}8$ Н/см.

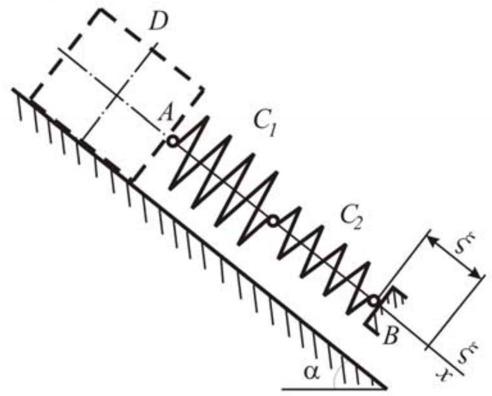
В этот же момент ($t = 0$) точка B (нижний конец пружины) начинает совершать вдоль наклонной плоскости движение по закону $\xi = 0{,}03\sin 12t$ (м) (ось ξ направлена вдоль наклонной плоскости вниз).

Вариант 10. Груз D ($m = 1$ кг) прикрепляют в середине абсолютно жесткого бруска AB, соединяющего концы двух одинаковых параллельных пружин, не сообщая начальной скорости; пружины не деформированы. Коэффициенты жесткости пружин $C = 1{,}5$ Н/см. Сопротивление движению груза пропорционально скорости: $R = 8v$, где v – скорость, $\alpha = 60°$. Массой бруска AB и массой прикрепленной к бруску части демпфера пренебречь.

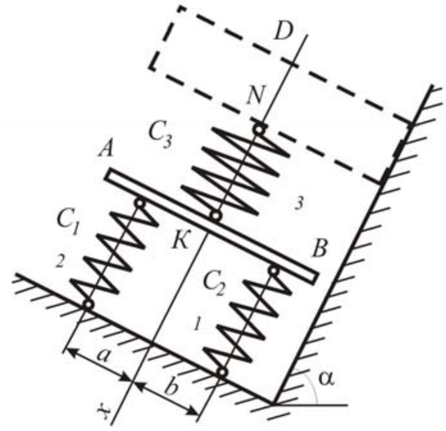
Варианты 11–15 (схемы Д-2.11-Д-15) Груз D массой m укреплен на конце невесомого стержня, который может вращаться в горизонтальной плоскости вокруг оси E. Груз соединен с пружиной или с системой пружин;

положение покоя стержня, показанное на схемах Д 2.11-15, соответствует недеформированным пружинам. Считая, что груз *D*, принимаемый за материальную точку, движется по прямой, определить уравнение движения этого груза (трением скольжения груза по плоскости пренебречь). Движение отнести к оси *x*, за начало отсчета принять точку, соответствующую положению покоя груза.

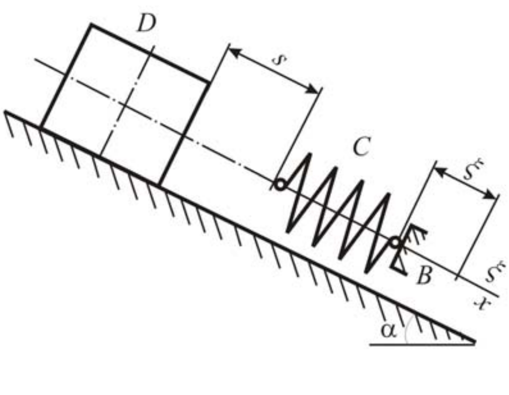
Д-2.7



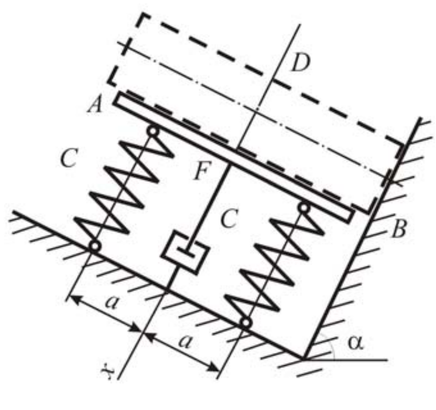
Д-2.8



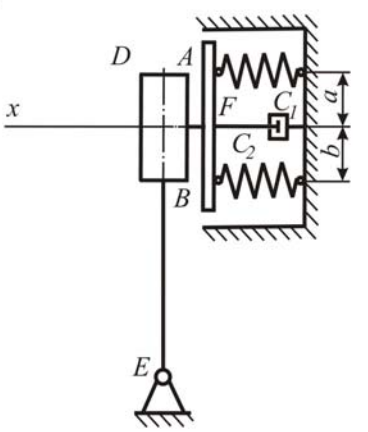
Д-2.9



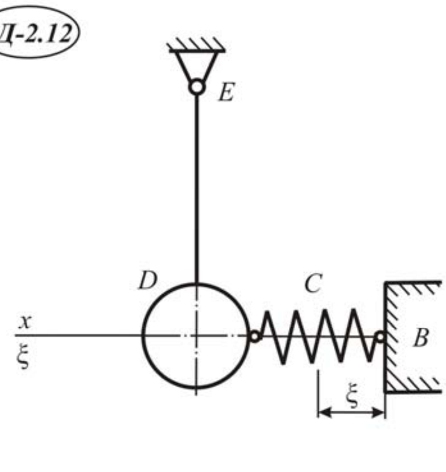
Д-2.10



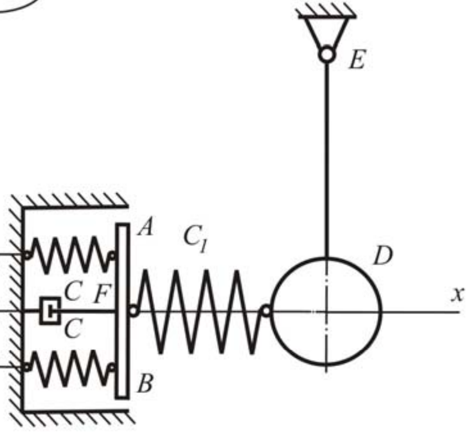
Д-2.11



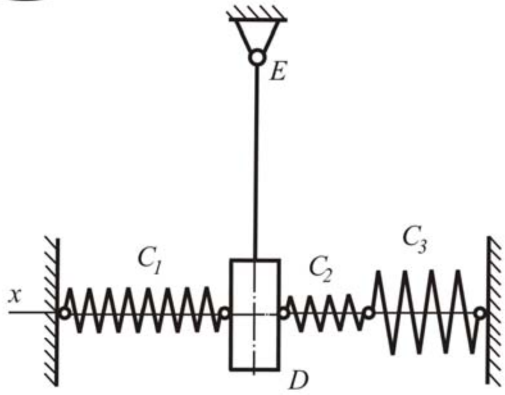
Д-2.12



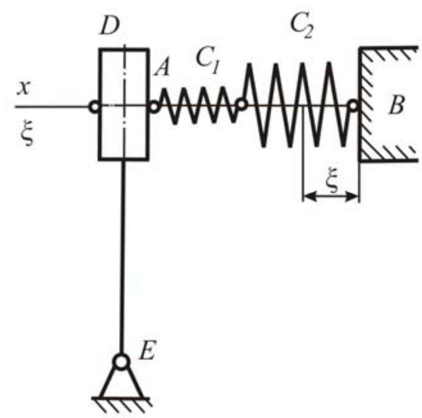
Д-2.13



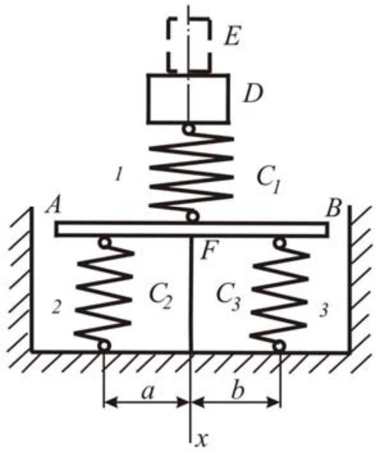
Д-2.14



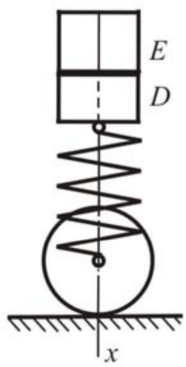
Д-2.15



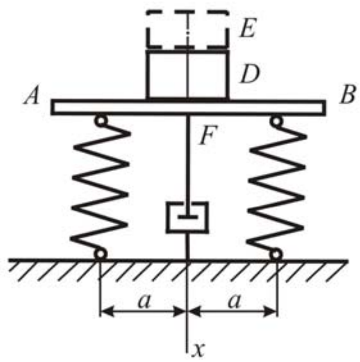
Д-2.16



Д-2.17



Д-2.18



В а р и а н т 1 1 . Груз D ($m = 2{,}4$ кг) соединен с точкой F бруска AB, связывающего концы двух параллельных пружин, коэффициенты жесткости которых $C_1 = 1$ Н/см и $C_2 = 1{,}4$ Н/см. Точка F находится на расстояниях a и b от осей пружин: $a/b = C_2/C_1$.

Груз D отклоняют на величину $\lambda = 2$ см влево от положения, показанного на схеме Д 2.11, и отпускают без начальной скорости. Сопротивление движению груза пропорционально скорости: $R = 6v$, где v – скорость.

Массой абсолютно жесткого бруска AB и массой демпфера пренебречь.

В а р и а н т 1 2 . В некоторый момент времени груз D ($m = 3$ кг), Удерживаемый в положении, при котором пружина сжата на величину $\lambda = 2$ см, отпускают без начальной скорости. Коэффициент жесткости пружины $c = 9$ Н/см. Одновременно ($t = 0$) точка B (правый конец пружины) начинает совершать движение по закону $\xi = 1{,}2\sin 8t$ (м) (ось ξ направлена влево).

В а р и а н т 1 3 . Груз D ($m = 1$ кг) прикреплен к концу пружины, имеющей коэффициент жесткости $C_1 = 12$ Н/см и соединенной другим концом с точкой F бруска AB. Брусок AB связывает концы двух параллельных пружин, коэффициент жесткости каждой из которых $C = 3$ Н/см. Точка F находится на равных расстояниях от осей параллельных пружин. Грузу в положении стержня, показанном на схеме Д 2.13, сообщают скорость $v_0 = 0{,}5$ м/с, направленную вправо.

Сопротивление движению груза пропорционально скорости: $R = 12v$, где v – скорость.

Шток демпфера пропущен через отверстие в невесомом брусе AB и соединен с грузом D.

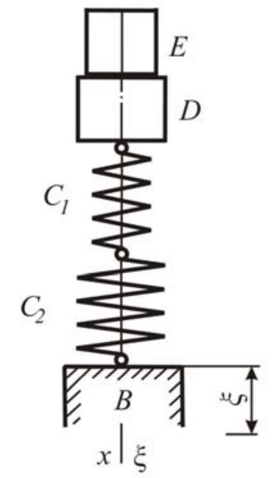
В а р и а н т 1 4 . Груз D ($m = 1{,}5$ кг) прикреплен одной стороной к концу пружины, имеющей коэффициент жесткости $C_1 = 4{,}4$ Н/см, а другой стороной – к концу двух последовательно соединенных пружин, коэффициенты жесткости которых $C_2 = 2$ Н/см, $C_3 = 8$ Н/см.

Груз отклоняют на величину $\lambda = 2{,}5$ см влево от его положения, показанного на рис. 2.3, и отпускают, одновременно сообщая грузу начальную скорость $v_0 = 0{,}5$ м/с, направленную вправо.

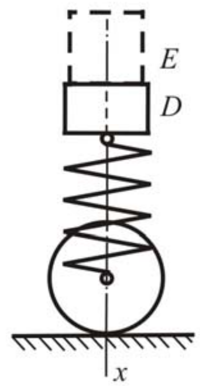
В а р и а н т 1 5 . Груз D ($m = 1$ кг) прикреплен к концу A последовательно соединенных пружин. Другой конец B пружин движется по закону $\xi = 1{,}8\sin 12t$ (см) (ось ξ направлена влево). Коэффициенты жесткости пружин $C_1 = 4$ Н/см, $C_2 = 12$ Н/см. При $t = 0$ груз находится в положении покоя, соответствующем недеформированным пружинам.

Варианты 16-20 (схемы Д 2.16-20). Найти уравнение движения груза D массой m_D (варианты 17 и 19) или системы грузов D и E массами m_D и m_E (варианты 16, 18, 20), отнеся движение к оси x; начало отсчета совместить с положением покоя груза D или соответственно системы грузов D и E (при статической деформации пружин). Предполагается, что грузы D и E при совместном движении не отделяются.

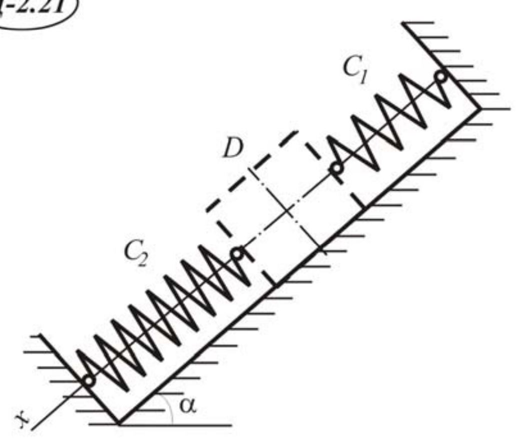
Д-2.19



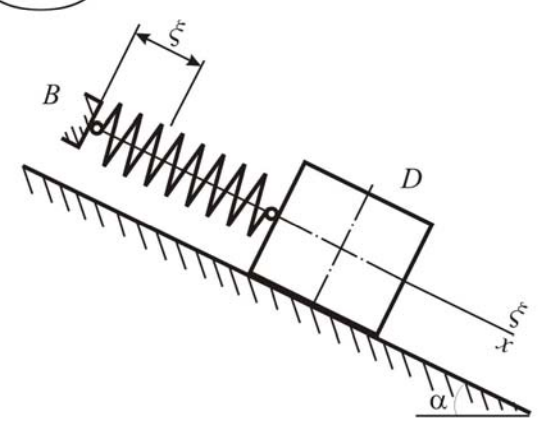
Д-2.20



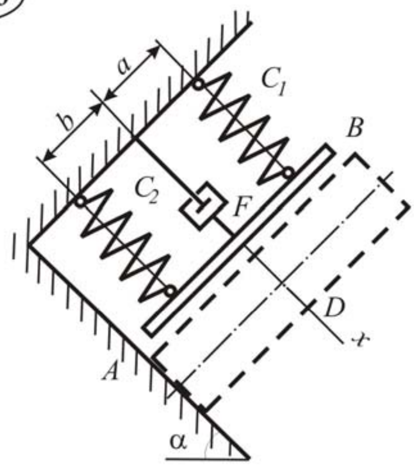
Д-2.21



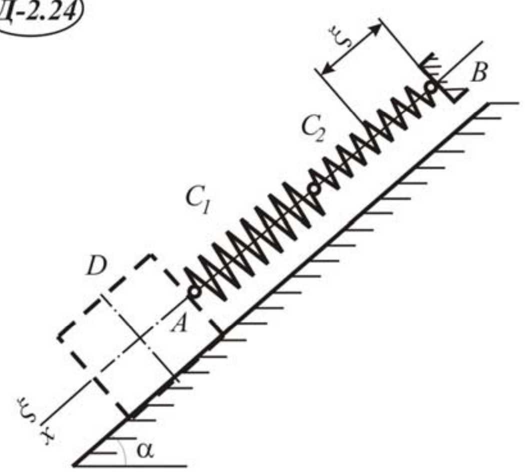
Д-2.22



Д-2.23



Д-2.24



В а р и а н т 1 6 . Пружина l, на которой покоится груз D ($m_D = 10$ кг), опирается в точке F на брусок AB, соединяющий концы двух параллельных пружин 2 и 3. Коэффициенты жесткости (Н/см) пружин 1, 2 и 3: $C_1 = 200$, $C_2 = 160$, $C_3 = 140$.

Точка F находится на расстояниях a и b от осей пружин 2 и 3: $a/b = C_3/C_2$.

В некоторый момент времени на груз D устанавливают груз E ($m_E = 20$ кг); одновременно системе грузов сообщают скорость $v_0 = 0{,}4$ м/с, направленную вниз. Массой абсолютно жесткого бруска AB пренебречь.

В а р и а н т 1 7 . В некоторый момент времени груз E снимают с груза D (оба груза находятся в состоянии покоя, соответствующем статической деформации пружины). Циклическая частота собственных колебаний системы грузов D и E на пружине $k = 20$ рад/с, отношение масс $m_D/m_E = 2/3$.

В а р и а н т 1 8 . Статическая деформация каждой из двух одинаковых параллельных пружин под действием груза D ($m_D = 20$ кг) равна $f_{стD} = 2$ см. В некоторый момент времени на груз D устанавливают груз E ($m_E = 10$ кг). Сопротивление движению грузов пропорционально скорости: $R = 60\sqrt{3}v$, где v – скорость. Массой абсолютно жесткого бруска AB и части демпфера, связанной с ним, пренебречь.

В а р и а н т 1 9 . Два груза D и E ($m_D = 15$ кг, $m_E = 25$ кг) покоятся на последовательно соединенных пружинах, имеющих коэффициенты жесткости $C_1 = 250$ Н/см, $C_2 = 375$ Н/см. В момент, когда снимают груз E, точка B опирания пружин начинает совершать движение по закону $\xi = 0{,}5\sin 30t$ (ось ξ направлена вертикально вниз).

В а р и а н т 2 0 . На груз D, находящийся в состоянии покоя, соответствующем статической деформации пружины, в некоторый момент времени устанавливают груз E. В этот же момент времени системе двух грузов сообщают скорость $v_0 = 0{,}3$ м/с, направленную вниз. Циклическая частота собственных колебаний груза D на пружине $k_D = 24$ рад/с, отношение масс $m_E/ m_D = 3$.

Варианты 21-25 (схемы Д-2.21-Д-2.25) Найти уравнение движения груза D массой m по гладкой наклонной плоскости, составляющей с горизонтом угол α, отнеся движение к оси x; за начало отсчета принять положение покоя груза (при статической деформации пружин).

В а р и а н т 2 1 . В некоторый момент времени груз D ($m = 2$ кг) прикрепляют к концам недеформированных пружин, имеющих коэффициенты жесткости $C_1 = 7$ Н/см, $C_2 = 3$ Н/см; одновременно грузу сообщают скорость $v_0 = 0{,}4$ м/с, направленную вдоль наклонной плоскости ($\alpha = 45°$) вниз.

В а р и а н т 2 2 . Груз D находится на наклонной плоскости ($\alpha = 30°$) в состоянии покоя, соответствующем статической деформации пружины $f_{ст} = 2$ см. В некоторый момент времени ($t = 0$) точка B (верхний конец пружины) начинает совершать движение по закону $\xi = 0{,}01\sin 10t$ (м) (ось ξ направлена вдоль наклонной плоскости вниз).

В а р и а н т 2 3 . Груз D ($m = 3$ кг) прикрепляют к точке F бруска AB, соединяющего концы двух недеформированных параллельных пружин, и отпускают без начальной скорости. Коэффициенты жесткости пружин $C_1 = 2$ Н/см, $C_2 = 34$ Н/см. Точка F находится на расстояниях a и b от осей пружины: $a/b = C_2/C_1$; $\alpha = 60°$.

Сопротивление движению груза пропорционально скорости: $R = 12v$, где v – скорость. Массой бруска AB и массой демпфера пренебречь.

В а р и а н т 2 4 . В некоторый момент времени груз D ($m = 1$ кг) прикрепляют к концу A недеформированных последовательно соединенных пружин, имеющих коэффициенты жесткости $C_1 = 12$ Н/см, $C_2 = 4$ Н/см, и отпускают без начальной скорости.

Одновременно ($t = 0$) другой конец пружин B начинает совершать движение по закону $\xi = 1{,}5\sin 10t$ (см). Ось ξ направлена вдоль наклонной плоскости вниз ($\alpha = 30°$).

В а р и а н т 2 5 . Концы двух одинаковых пружин соединены бруском AB. Статическая деформация каждой из пружин под действием груза D ($m = 1{,}5$ кг), находящегося на наклонной плоскости ($\alpha = 30°$), $f_{ст} = 4{,}9$ см. В некоторый момент грузу D сообщают скорость $v_0 = 0{,}3$ м/с, направленную вверх вдоль наклонной плоскости. Сопротивление движению груза пропорционально скорости груза: $R = 6v$, где v – скорость.

Массой абсолютно жесткого бруска AB и массой демпфера, связанного с бруском, пренебречь.

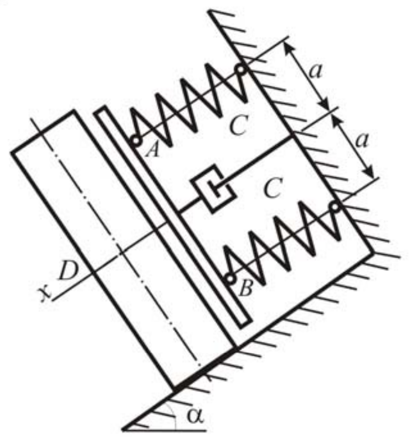
Варианты 26-30 (схемы Д 2.26-30). Пренебрегая массой плиты и считая ее абсолютно жесткой, найти уравнение движения груза D массой m с момента соприкасания его с плитой, предполагая, что при дальнейшем движении груз от плиты не отделяется.

Движение груза отнести к оси x, приняв за начало отсчета положение покоя этого груза (при статической деформации пружин).

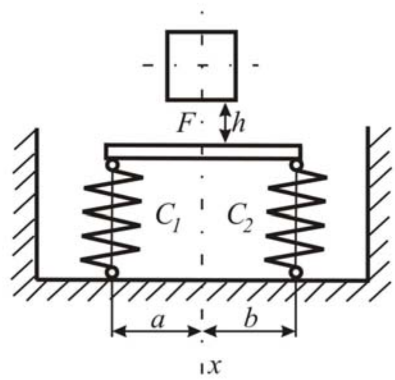
В а р и а н т 2 6 . Плита лежит на двух параллельных пружинах, имеющих коэффициенты жесткости $C_1 = 600$ Н/см, $C_2 = 400$ Н/см. Груз D ($m = 50$ кг) падает без начальной скорости с высоты $h = 0{,}1$ м в точку F плиты, находящуюся на расстояниях a и b от осей пружины: $a/b = C_2/C_1$.

В а р и а н т 2 7 . Коэффициент жесткости каждой из двух параллельных пружин, на которых лежит плита, $C_1 = 130$ Н/см. Груз D ($m = 40$ кг) устанавливают на середину плиты и отпускают без начальной скорости при недеформированных пружинах. Сопротивление движению груза пропорционально скорости: $R = 400v$, где v – скорость. Массой плиты и демпфера пренебречь.

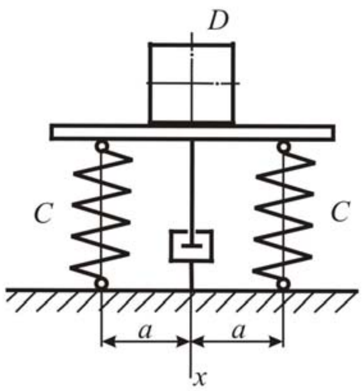
Д-2.25



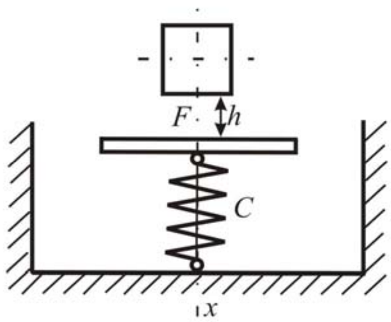
Д-2.26



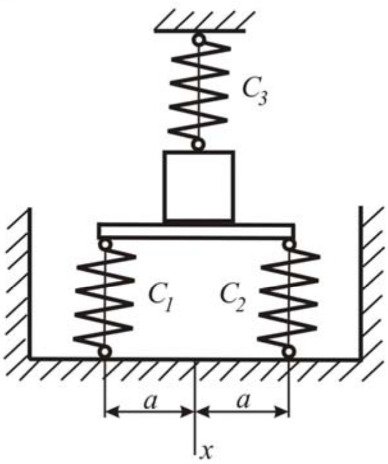
Д-2.27



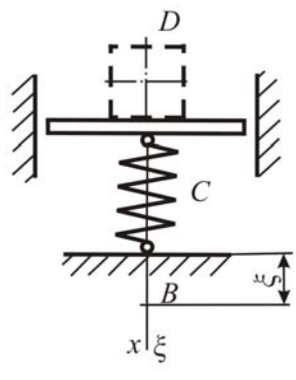
Д-2.28



Д-2.29



Д-2.30



В а р и а н т 2 8 . Груз D падает на плиту с высоты $h = 5$ см. Статический прогиб пружины под действием этого груза $f_{ст} = 1$ см.

В а р и а н т 2 9 . Плита лежит на двух одинаковых параллельных пружинах 1 и 2, коэффициенты жесткости которых $C_1 = C_2 = C = 400$ Н/см. В некоторый момент времени груз D ($m = 200$ кг) устанавливают на середину плиты и одновременно прикрепляют к недеформированной пружине 3, имеющей коэффициент жесткости $C_3 = 200$ Н/см. В тот же момент времени (при недеформированных пружинах) грузу сообщают скорость $v_0 = 0{,}6$ м/с, направленную вниз.

В а р и а н т 3 0 . В некоторый момент времени груз D ($m = 100$ кг) устанавливают на плиту и отпускают (при недеформированной пружине) без начальной скорости. В этот же момент времени точка B (нижний конец пружины) начинает совершать движение по вертикали согласно закону $\xi = 0{,}5\sin 20t$ (см) (ось ξ направлена вниз). Коэффициент жесткости пружины $C = 2000$ Н/см.

Пример выполнения Д-2

На горизонтальном столе лежат две последовательно соединённые пружины с жесткостями $C_1 = 4$ Н/см и $C_2 = 12$ Н/см (рис. III.1.1). Они колеблются по закону $\xi = d\sin pt$, где $d = 4$ см, $p = 8\ \text{с}^{-1}$. К ним прикреплен груз с массой $m = 1$ кг. Колебание происходит в сторону положительного направления оси x. Начальная скорость $v_0 = 0$.

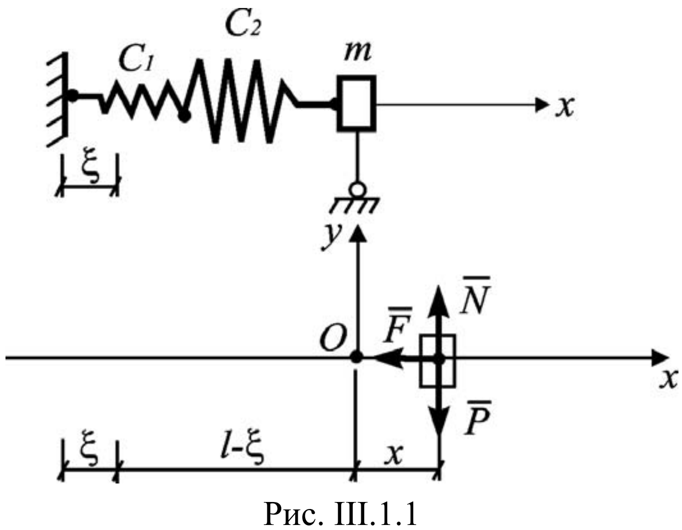


Рис. III.1.1

Решение:

При последовательном соединении пружин:

$$C = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2} = \frac{4 \cdot 12}{4 + 12} = 3\ \text{Н/см} = 300\ \text{Н/м}.$$

Сила тяжести mg и реакция N представляет собой уравновешенную систему сил.

$$(m\bar{g}, \bar{N}) \equiv 0.$$

$$m\ddot{x} = -F_{\text{упр}}; \quad F_{\text{упр}} = C\Delta,\ \Delta = x - \xi;,$$

$$m\ddot{x} = -C(x - \xi),$$

где C – жесткость пружины;
$(x - \xi)$ – деформация пружины.

$$m\ddot{x} + Cx = d\sin pt/m;$$

$$\ddot{x} + C/mx = \frac{cd}{n}\sin pt.$$

Обозначим: $C/m = k^2 = 300$ м/с^2; $\dfrac{Cd}{m} = n = \dfrac{300 \cdot 0,04}{1} = 12$ м/с^2.

Получим: $\ddot{x} + k^2 x = n\sin pt$ – неоднородное дифференциальное уравнение II порядка. Решение этого уравнения:

$$x = x_0 + x_1,$$

где $x_0 = c_1\cos kt + c_2\sin kt = A\sin(kt + \alpha)$ – решение однородного дифференциального уравнения (c_1, c_2 – постоянные интегрирования);

$x_1 = B\sin pt$ – частное решение неоднородного дифференциального уравнения;

$x = A\sin(kt + \alpha) + B\sin pt$ – решение неоднородного дифференциального уравнения.

Продифференцируем дважды:

$$\dot{x}_1 = Bp\cos pt; \quad \ddot{x}_2 = -Bp^2\sin pt;$$

$$-p^2 B\sin pt + k^2 B\sin pt = n\sin pt.$$

$B(k^2 - p^2) = n \Rightarrow B = \dfrac{n}{k^2 p^2} = \dfrac{12}{300 \cdot 64} = 0,051$ – амплитуда вынужденных колебаний.

При $t = 0$

$$x_0 = 0; \quad \dot{x}_0 = 0.$$

$$x = c_1\cos kt + c_2\sin kt + B\sin pt;$$

$$0 = c_1 + 0 + 0;$$

$$c_1 = 0.$$

$$\dot{x} = -k\sin kt + kc_2\cos kt + pB\cos pt;$$

$$0 = kc_2 + pB \Rightarrow c_2 = \frac{-pB}{k} = \frac{-8 \cdot 0,051}{\sqrt{300}} = -0,023 \text{ м};$$

$$x = 0,05\sin 8t - 0,023\sin 17,32t.$$

$A = \mu \Delta_0$ – амплитуда вынужденных колебаний, где μ – коэффициент динамичности.

$$\Delta_0 = d.$$

$$\mu = \frac{1}{1 - p^2 / k^2} = \frac{1}{1 - 8^2 / 17{,}3^2} = 1{,}27.$$

$$A = 0{,}04 \cdot 1{,}27 = 0{,}0508 \text{ м}.$$

$$T_{\text{св}} = 2\pi / k = 2 \cdot 3{,}14 / \sqrt{300} = 0{,}363 \text{ с}.$$

$$T_{\text{вын}} = 2\pi / p = 2 \cdot 3{,}14 / 8 = 0{,}785 \text{ с}.$$

$x = 5\sin 8t - 2{,}3\sin 17{,}32t$ см – закон колебаний груза.

График колебаний представлен на рис. III.1.2.

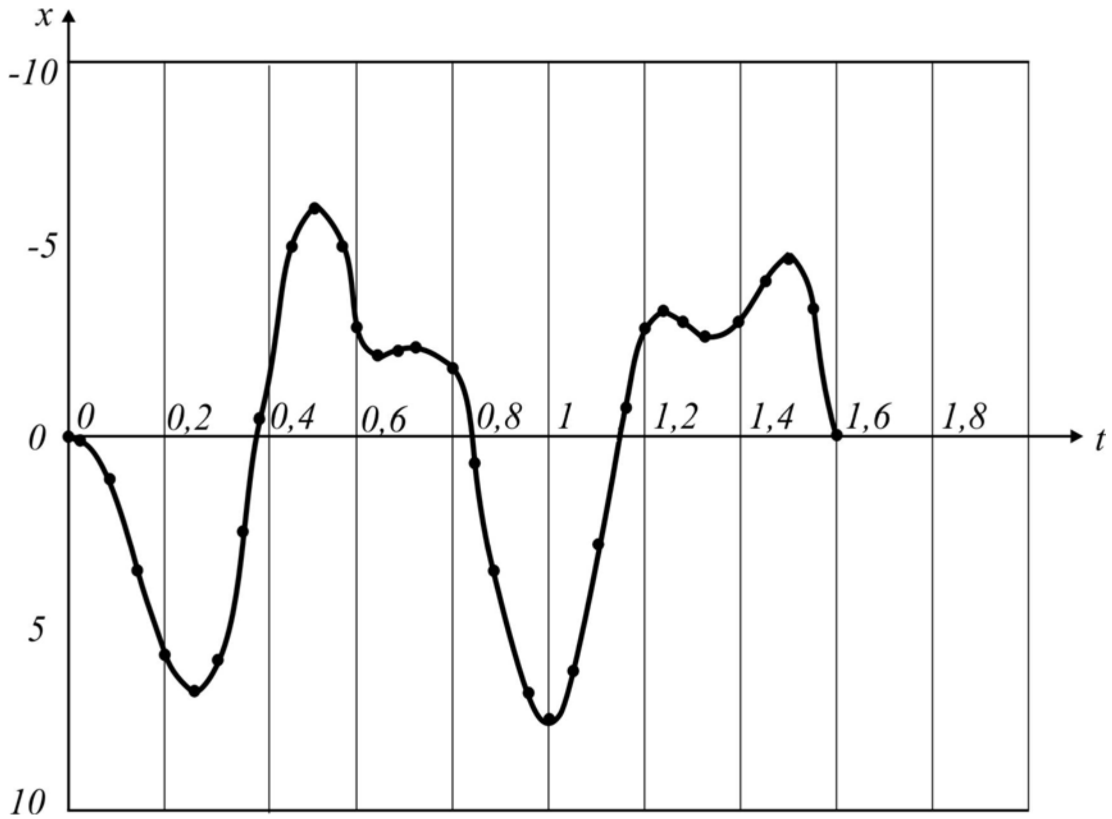


Рис. III.1.2.

Контрольные вопросы

1. Какая сила называется восстанавливающей?

2. Записать дифференциальное уравнение движение точки под действием восстанавливающей силы.

3. Какое движение совершает точка под действием восстанавливающей силы?

4. Записать уравнение свободных гармонических колебаний.

5. Начертить график свободных гармонических колебаний.

6. Что называется амплитудой свободных гармонических колебаний?

7. Что называется начальной фазой гармонических колебаний?

8. Чему равна частота гармонических колебаний?

9. Что называется периодом гармонических колебаний?

10. Какие из перечисленных величин зависят от начальных условий: амплитуда, начальная фаза, частота, период гармонических колебаний?

11. Под действием каких сил точка совершает затухающие колебания?

12. Начертите график затухающих колебаний.

13. Записать дифференциальное уравнение затухающих колебаний.

14. Записать уравнение движения точки при затухающих колебаниях.

15. Что называется амплитудой затухающих колебаний?

16. Чему равен период затухающих колебаний?

17. Сравните период гармонических колебаний с периодом затухающих колебаний.

18. Что называется декрементом колебаний?

19. Как движется точка под действием восстанавливающей силы в случае большого сопротивления?

20. Какое движение называется апериодическим?

21. Под действием каких сил точка совершает вынужденные колебания?

22. Что называется восстанавливающей силой?

23. Записать дифференциальные уравнения вынужденных колебаний без учета сил сопротивления.

24. Записать уравнение вынужденных колебаний.

25. С какой частотой происходят вынужденные колебания точки?

26. Что называется резонансом?

27. Начертите график изменения амплитуды для вынужденных колебаний при отсутствии сил сопротивления.

28. Как влияет на резонанс сила сопротивления?

29. Что называется биениями?

30. Под действием каких сил и при каких начальных условиях возникают биения?

КРИТЕРИИ ОЦЕНКИ КУРСОВОЙ РАБОТЫ

Оценка «**отлично**» ставится студенту, который правильно выполнил курсовую работу, самостоятельно решил дополнительную задачу, уверенно, логично, последовательно и аргументировано изложил свое решение.

Оценка «**хорошо**» ставится, если студент правильно выполнил курсовую работу и основном правильно решил дополнительную задачу, уверенно, логично, последовательно и аргументировано излагал свое решение.

Оценка «**удовлетворительно**» ставится, если студент допустил несущественные ошибки при выполнении курсовой работы, в основном правильно решил дополнительную задачу, слабо аргументируя свое решение.

Оценка «**неудовлетворительно**» ставится, если студент не выполнил курсовую работу.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Шеин, А.И. Теоретическая механика [Текст]: курс лекций по направлению подготовки 08.03.01 «Строительство» / А.И. Шеин. – Пенза: ПГУАС, 2016.

2. Шеин, А.И. Теоретическая механика. Практикум [Текст]/ А.И. Шеин. – Пенза: ПГУАС, 2016.

3. Шеин, А.И. Теоретическая механика. Сборник заданий для выполнения расчетно-графических и курсовых работ [Текст]/ А.И. Шеин. – Пенза: ПГУАС, 2016.

О Г Л А В Л Е Н И Е

Учебное издание

Шеин Александр Иванович
Зайцев Михаил Борисович

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА
Учебно-методическое пособие для курсовой работы
по направлению подготовки 08.03.01 «Строительство»

В авторской редакции
Верстка Н.А. Сазонова

Подписано в печать 19.09.16. Формат 60×84/16.
Бумага офисная «Снегурочка». Печать на ризографе.
Усл.печ.л. 5,58. Уч.-изд.л. 6,0. Тираж 80 экз.
Заказ № 653.

Издательство ПГУАС.
440028. г. Пенза, ул. Г. Титова, 28.