

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Федеральное государственное бюджетное
образовательное учреждение высшего образования
"Пензенский государственный университет
архитектуры и строительства"
(ПГУАС)

А.И. Шеин, О.Г. Земцова

СТРОИТЕЛЬНАЯ МЕХАНИКА

Учебно-методическое пособие
к практическим занятиям
по направлению подготовки
08.03.01 «Строительство»

Пенза 2016

УДК 624.04/.07(075.8)

ББК 38.112

ШЗ9

Рекомендовано Редсоветом университета

Рецензент – доктор технических наук, профессор,
зав. кафедрой «Строительные конструкции» Н.Н. Ласьков (ПГУАС)

Шеин А.И.

ШЗ9

Строительная механика: учеб.-метод. пособие к практическим занятиям по направлению подготовки 08.03.01 «Строительство»/ А.И. Шеин, О.Г. Земцова. – Пенза: ПГУАС, 2016. – 104 с.

Рассмотрены примеры решения типовых задач по строительной механике. Приведены задачи для самостоятельной аудиторной работы студентов.

Учебно-методическое пособие подготовлено на кафедре «Механика» и предназначено для студентов, обучающихся по направлению 08.03.01 «Строительство».

© Пензенский государственный университет
архитектуры и строительства, 2016

© Шеин А.И., Земцова О.Г., 2016

ПРЕДИСЛОВИЕ

Данное издание содержит методические рекомендации к практическим занятиям, примеры решения задач по дисциплине «Строительная механика» и задачи для самостоятельного решения. Учебно-методическое пособие предназначено для студентов, обучающихся по направлению подготовки 08.03.01 «Строительство».

Цель пособия: направление и оказание помощи учащимся в выполнении практических работ по предмету «Строительная механика».

Процесс изучения дисциплины направлен на формирование следующих компетенций:

– способности использовать основные законы естественнонаучных дисциплин в профессиональной деятельности, применять методы математического анализа и математического (компьютерного) моделирования, теоретического и экспериментального исследования.

– способности выявить естественнонаучную сущность проблем, возникающих в ходе профессиональной деятельности, привлечь для их решения соответствующий физико-математический аппарат.

Учебно-методическое пособие состоит из девяти глав. Особое внимание уделено методикам расчета статически определимых и статически неопределимых систем. Рассмотрены основы метода конечных элементов (МКЭ). По всем рассматриваемым вопросам приведены основные расчетные зависимости, примеры решения типовых задач с пояснениями и рисунками, задачи для самостоятельного решения.

ВВЕДЕНИЕ

Все создаваемые человеком инженерные сооружения (здания, мосты, плотины, корабли, самолеты и т.д.) требуют предварительного расчета, обеспечивающего надежность и долговечность их эксплуатации. Наука о методах расчета сооружений на прочность, жесткость и устойчивость называется строительной механикой. Задача строительной механики состоит в определении напряженно-деформированного состояния в любом интересующем нас сечении каждого из элементов реального сооружения. Широта вопросов, охватываемых строительной механикой, определяется спецификой расчетов на статические, динамические, тепловые воздействия, проверкой устойчивости равновесия. При этом та или иная задача может рассматриваться в линейной или нелинейной постановке, в детерминированном или вероятностном виде (т.е. при вполне определенных исходных параметрах или при наличии разбросов, относящихся к геометрическим размерам, физическим характеристикам и внешним воздействиям).

Строительная механика является постоянно развивающейся прикладной наукой, призванной обеспечить современными методами расчета строительство все усложняющихся инженерных сооружений. В связи с этим в ее развитии большое значение имеет опыт строительства и экспериментальные исследования, позволяющие оценить точность теоретических предпосылок и расчетов. При этом все теснее становится связь строительной механики с проектированием конструкций и вычислительной математикой.

Для того чтобы освоить методы строительной механики и изучить работу сооружений под нагрузкой, рассмотрим стержневые системы. Изучение линейных стержневых систем является первой ступенью в освоении строительной механики.

МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ К ПРАКТИЧЕСКИМ ЗАНЯТИЯМ

Учебным планом подготовки бакалавров по направлению 08.03.01 «Строительство» предусмотрено проведение практических занятий по дисциплине «Строительная механика». Практические занятия – метод репродуктивного обучения, обеспечивающий связь теории и практики, содействующий выработке у студентов умений и навыков применения знаний, полученных на лекции и в ходе самостоятельной работы.

Цели практических занятий:

- помочь обучающимся систематизировать, закрепить и углубить знания теоретического характера;
- научить студентов приемам решения практических задач, способствовать овладению навыками и умениями выполнения расчетных, графических и других видов заданий;
- научить работать с учебной, справочной и научной литературой;
- сформировать умение овладевать методами, способами и приемами самообучения, саморазвития и самоконтроля.

К каждому практическому занятию студенты должны проработать материал по конспекту лекций и/или по учебникам [3-9, 12]. После изучения теоретических основ следует ответить на вопросы для самоконтроля по каждой теме. Если количество правильных ответов меньше 50 %, необходимо повторно изучить материал, желательно воспользоваться дополнительными источниками литературы.

Непосредственно на практическом занятии студенты под руководством преподавателя разбирают предложенные примеры типовых задач. При этом преподаватель демонстрирует применение полученных теоретических знаний к решению практических вопросов, объясняет методику постановки и решения задачи, уточняет возможные нюансы и типичные ошибки, отвечает на дополнительные вопросы студентов по теме занятия.

После рассмотрения типовой задачи необходимо самостоятельно решить предложенные в учебно-методическом пособии варианты и/или задачи из [1, 2, 10, 11, 13, 14].

1. РАСЧЕТ СТАТИЧЕСКИ ОПРЕДЕЛИМЫХ СИСТЕМ НА НЕПОДВИЖНУЮ НАГРУЗКУ

1.1. Расчет статически определимых систем на неподвижную нагрузку. Эпюры внутренних усилий

Продольная сила N в сечении равна сумме проекций всех внешних сил, приложенных по одну сторону от сечения на касательную к оси стержня в рассматриваемом сечении. Продольная сила считается положительной, когда она вызывает в стержне растяжение, и отрицательной, когда вызывает сжатие.

Поперечная сила Q равна сумме проекций всех внешних сил, приложенных по одну сторону от рассматриваемого сечения, на нормаль к оси стержня в рассматриваемом сечении. Поперечная сила в сечении считается положительной, если касательная к эпюре моментов разворачивается по отношению к оси по часовой стрелке.

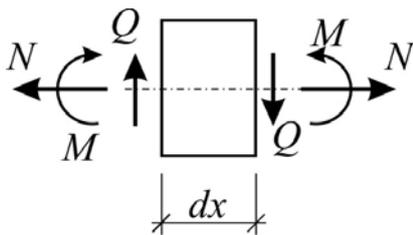


Рис. 1.1. Положительные направления усилий

Изгибающий момент M равен сумме моментов всех внешних сил, расположенных по одну сторону от рассматриваемого сечения, относительно точки сечения, лежащей на оси стержня. Ординаты эпюры изгибающих моментов откладываются со стороны растянутых волокон стержня.

Положительные направления усилий, приложенных к бесконечно малому элементу горизонтально ориентированного стержня, показаны на рис. 1.1.

Пример №1.

Построить эпюры M , Q , N в балке с осью ломаного очертания (рис. 1.2).

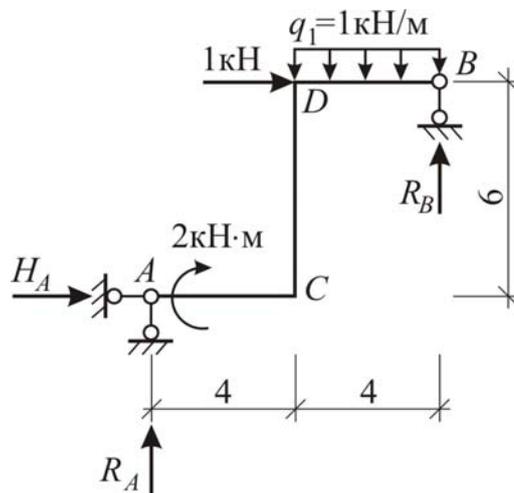


Рис. 1.2. Расчетная схема балки

Проведем проверку геометрической неизменяемости.

Количество дисков $D=1$.

Количество шарниров $Ш=0$.

Количество опорных связей $C_0=3$.

$$W = 3D - 2Ш - C_0 = 3 \cdot 1 - 2 \cdot 0 - 3 = 0.$$

Три связи не параллельны и не пересекаются в одной точке, значит, система статически определима и геометрически неизменяема.

Определим опорные реакции.

$$\sum M_A = 0: -2 - 1 \cdot 6 - 1 \cdot 4 \cdot 6 + R_B \cdot 8 = 0; \quad R_B = \frac{32}{8} = 4;$$

$$\sum F_{kx} = 0: H_A + 1 = 0; \quad H_A = -1;$$

$$\sum F_{ky} = 0: R_A + 4 - 1 \cdot 4 = 0; \quad R_A = 0.$$

Построим эпюры внутренних усилий M , Q , N . На левом горизонтальном участке бруса:

$$M_I = \sum M_{\text{лев}} = 2(\text{кН} \cdot \text{м});$$

$$Q_I = \sum F_{ky, \text{лев}} = 0(\text{кН});$$

$$N_I = \sum F_{kx, \text{лев}} = 1(\text{кН}).$$

Аналогично рассуждаем для вертикального участка и для правого горизонтального участка. По полученным значениям строим эпюры (рис. 1.3).

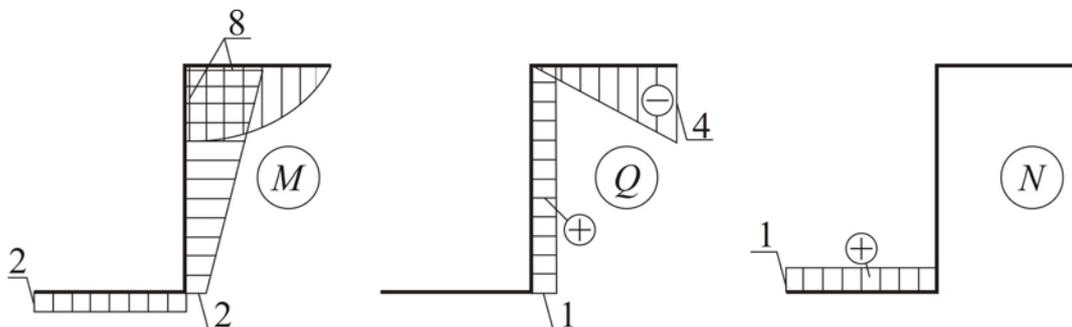


Рис. 1.3. Эпюры внутренних сил

Эпюру поперечных можно строить по эпюре моментов. При этом на линейных участках изменения момента поперечная сила $Q = \Delta M / \Delta l$, т.е. перепад момента надо поделить на длину участка. На криволинейных участках эпюры моментов эпюру поперечных сил получаем на основе принципа независимости действия сил, путем сложения эпюры от линейного изменения момента с эпюрой от распределенной нагрузки (см. рис. 1.4).

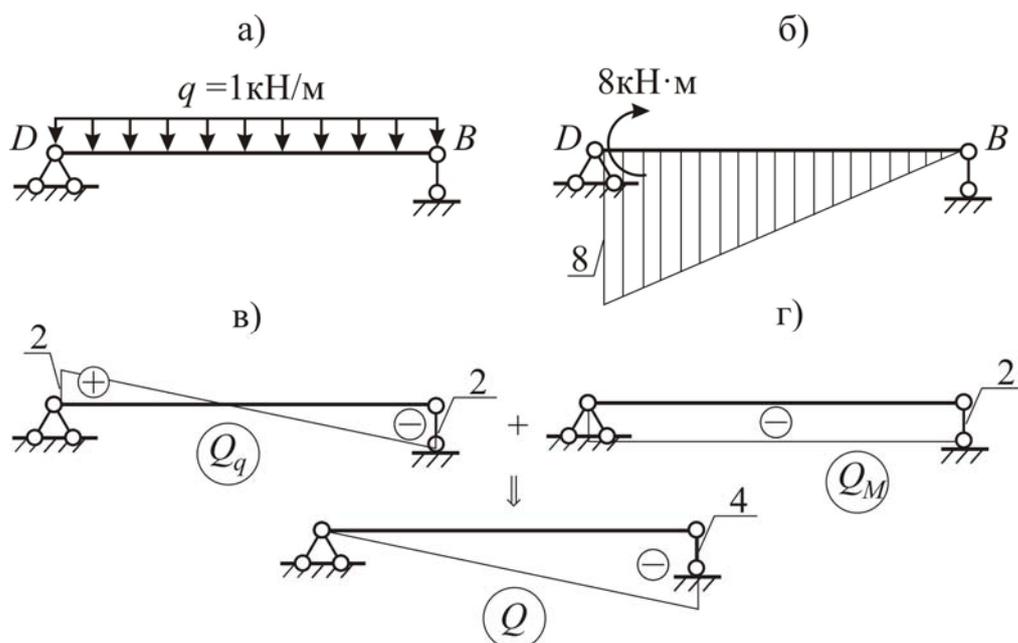


Рис. 1.4. Построение эпюры поперечных сил на участке с криволинейным характером изменения эпюры моментов

Пример №2.

Построить эпюры M , Q , N в балке (рис. 1.5).

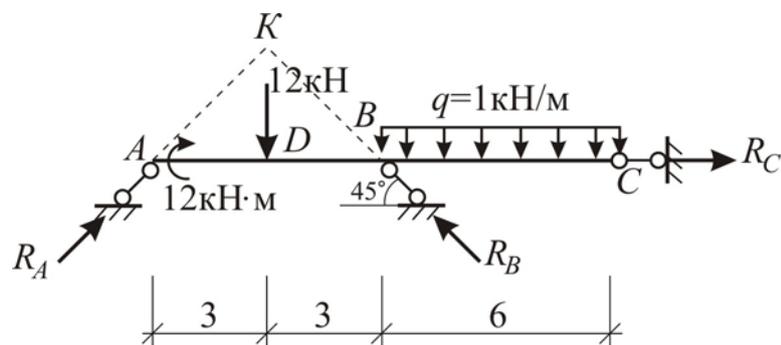


Рис. 1.5. Расчетная схема балки

Определяем опорные реакции:

$$\sum M_K = 0: -12 - 1 \cdot 6 \cdot 6 + R_C \cdot 3 = 0; \quad R_C = \frac{48}{3} = 16;$$

$$\sum M_A = 0: R_B \cdot 0.707 \cdot 6 - 12 \cdot 3 - 1 \cdot 6 \cdot 9 - 12 = 0; \quad R_B = \frac{102}{4.242} = 24.045;$$

$$\sum F_{ky} = 0: R_A \cdot 0.707 + R_B \cdot 0.707 - 12 - 1 \cdot 6 = 0; \quad R_A = \frac{1}{0.707} = 1.414.$$

Проверка:

$$\sum F_{kx} = 0: R_A \cdot 0.707 - R_B \cdot 0.707 + 16 = 0; \quad 1 - 17 + 16 = 0; \quad 0 = 0, \text{ верно.}$$

Строим эпюры внутренних усилий (рис. 1.6).

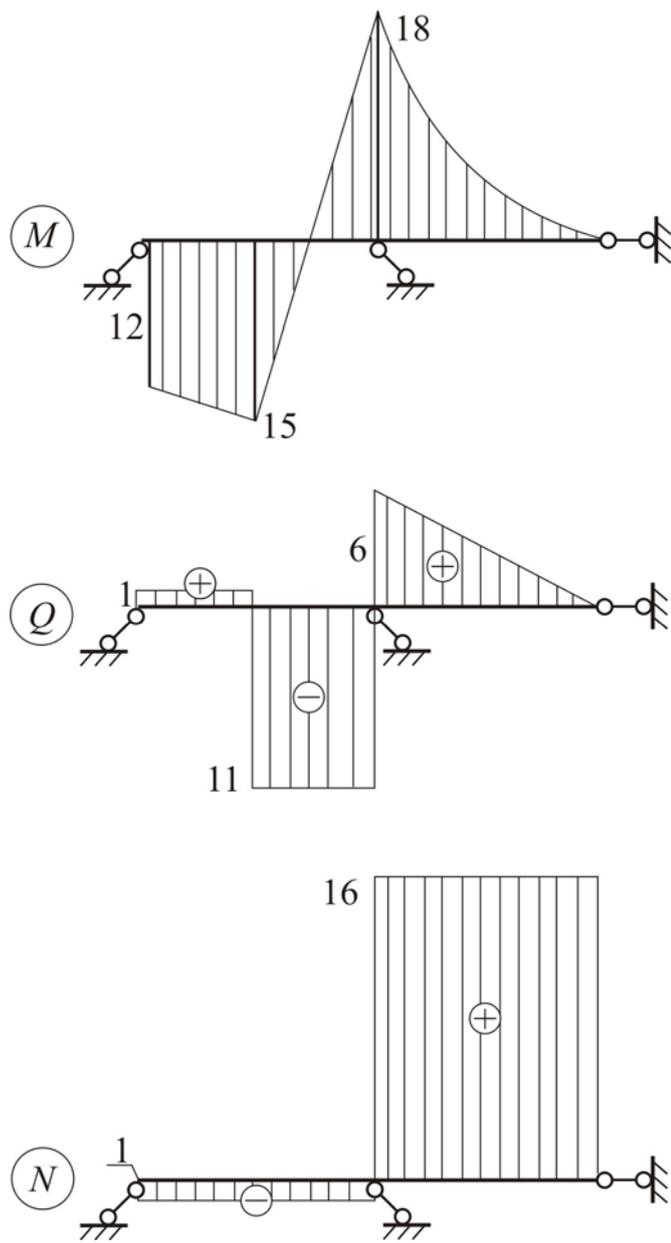


Рис. 1.6. Эпюры M, Q, N

1.2. Кинематический анализ сооружений

Пример №1.

Произвести проверку геометрической неизменяемости многопролетной балки (рис. 1.7, а).

Подсчитываем число степеней свободы системы по формуле

$$W = 3Д - 2Ш - C_0.$$

Для рассматриваемого примера: $Д=3$, $Ш=2$ (шарниры C и E), $C_0=5$ (две связи в опоре A и по одной в опорах B, D и F). Следовательно

$$W = 3Д - 2Ш - C_0 = 3 \cdot 3 - 2 \cdot 2 - 5 = 0.$$

Т.е. необходимое условие геометрической неизменяемости выполняется. Так как это условие не является достаточным, проведем структурный анализ схемы образования системы (рис. 1.7, б).

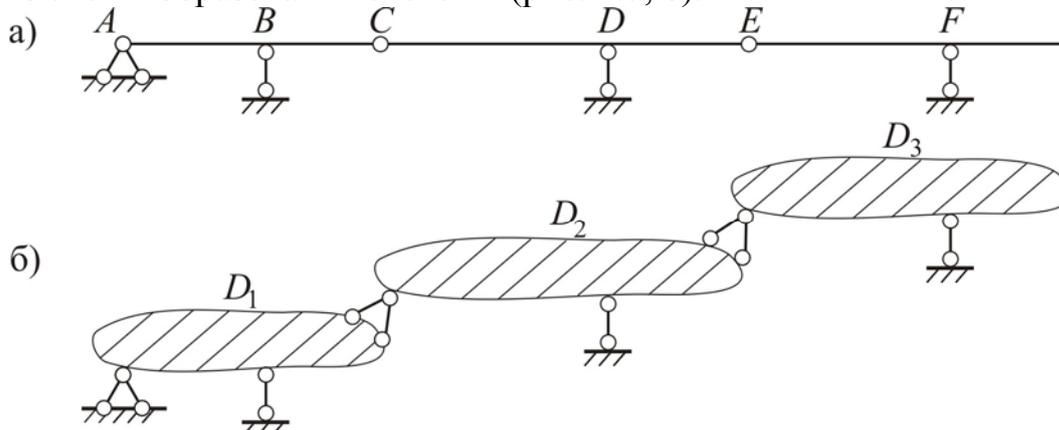


Рис. 1.7. Кинематический анализ многопролетной балки

Выделим основной диск, неизменяемость которого определяется непосредственно из его закрепления. Таким диском в данной задаче является балка ABC (диск D_1). Диск D_1 в точках A и B прикреплен к земле тремя связями, не параллельными и не сходящимися в одной точке, поэтому геометрически неизменяем. Диск D_2 в точке C связан с диском D_1 шарниром или двумя одиночными связями, а третьей связью – с землей в точке D . Таким образом, соединение дисков D_1 и D_2 является геометрически неизменяемым. Диск D_3 имеет аналогичное прикрепление. Следовательно, заданная система является геометрически неизменяемой и статически определимой.

Пример №2.

Произвести проверку геометрической неизменяемости многопролетной балки (рис. 1.8,а).

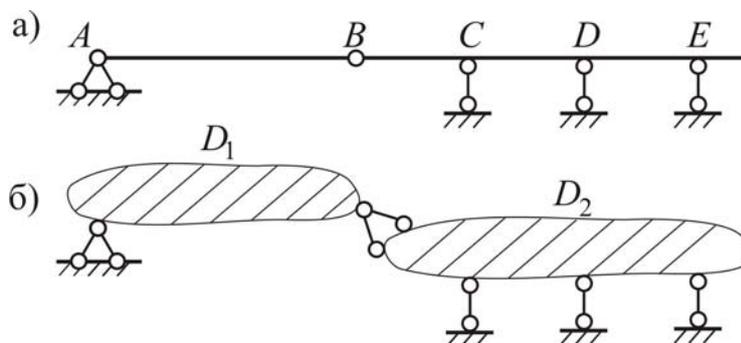


Рис. 1.8. Кинематический анализ многопролетной балки

Здесь $D=2$ (AB и $BCDE$), $Ш=1$ (шарнир в т. B), $C_0=5$ (две связи в опоре A и по одной в опорах C, D и E). Следовательно

$$W = 3D - 2Ш - C_0 = 3 \cdot 2 - 2 \cdot 1 - 5 = -1,$$

т.е. система является один раз статически неопределимой.

Произведем структурный анализ системы. Диск D_2 (рис. 1.8, б) является основным, так как он связан с землей тремя вертикальными связями в точках C , D и E и одной горизонтальной – в точке A через диск D_1 . Диск D_2 является геометрически неизменяемым. Диск D_1 также является геометрически неизменяемым, так как в точке A он связан с землей двумя связями, а в точке B опирается на диск D_2 при помощи шарнира, или двух одиночных связей. Таким образом, в целом рассматриваемая система геометрически неизменяема.

Пример №3.

Выполнить кинематический анализ многопролетной балки (рис. 1.9).

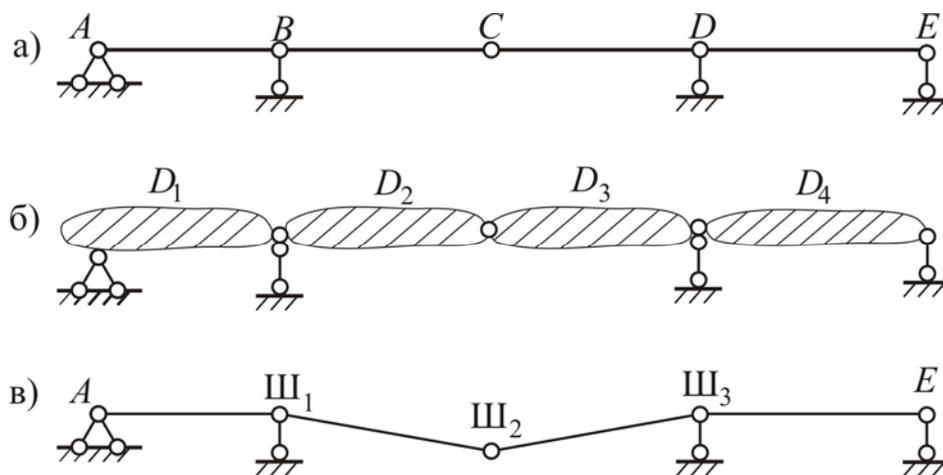


Рис. 1.9. Кинематический анализ многопролетной балки

Для рассматриваемого примера $D=4$, $\text{Ш}=3$, $C_0=5$:

$$W = 3D - 2\text{Ш} - C_0 = 3 \cdot 4 - 2 \cdot 3 - 5 = 1.$$

Балка геометрически изменяема. Действительно, балки AB и DE (диски D_1 и D_4) являются в данной конструкции основными и геометрически неизменяемыми (рис. 1.9, б), а диски D_2 и D_3 представляют собой изменяемую часть конструкции, так как шарниры Ш₁, Ш₂ и Ш₃ лежат на одной прямой (рис. 1.9, в).

Пример №4.

Произвести проверку геометрической неизменяемости рамы (рис. 1.10).

Количество дисков $D=8$; количество шарниров $\text{Ш}=8$; количество опорных связей $C_0=8$ (рис. 1.11, а):

$$W = 3D - 2\text{Ш} - C_0 = 3 \cdot 8 - 2 \cdot 8 - 8 = 0,$$

т.е. необходимое условие геометрической неизменяемости выполнено.

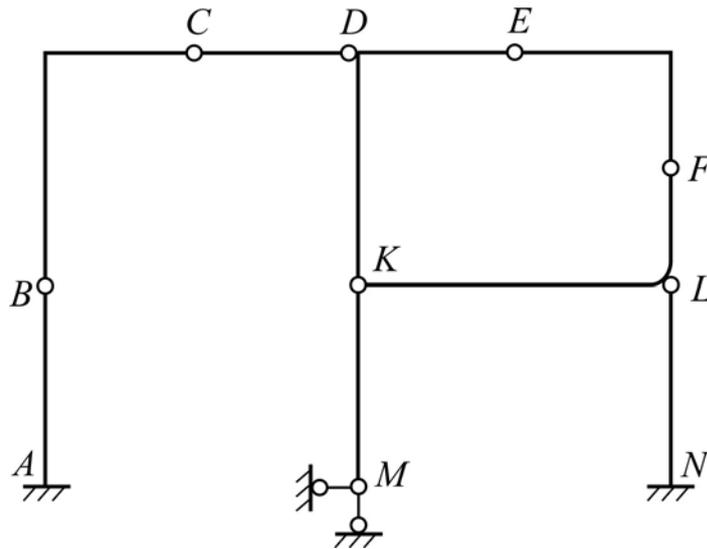


Рис. 1.10. Расчетная схема рамы

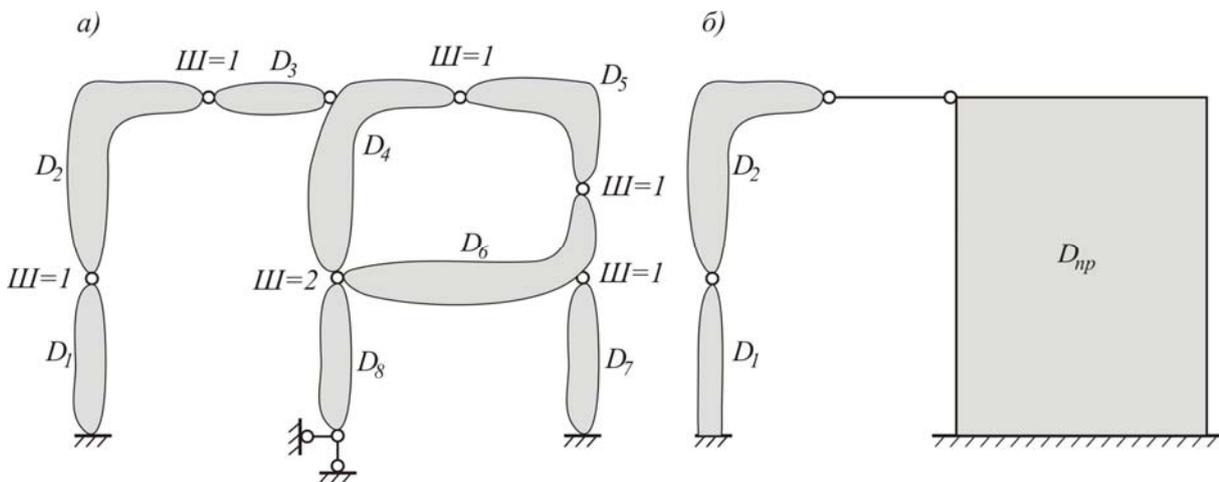


Рис. 1.11. Кинематический анализ рамы

Проведем структурный анализ. Диски D_4 , D_5 , D_6 образуют геометрически неизменяемый треугольник, т.к. соединены шарнирами, не лежащими на одной прямой. Диск D_7 является основным, так как он связан с землей тремя связями. Шарнирный треугольник соединен с основным диском D_7 в точке L при помощи шарнира и при помощи единичной связи (D_8) с землей. Таким образом, указанная система дисков представляет собой неизменяемую часть конструкции $D_{пр}$ (рис. 1.11, б). Диск D_1 также является основным (он однотипен с диском D_7), а диск D_3 можно считать одиночной связью.

Таким образом, прикрепление диска D_2 производится к основному диску D_1 при помощи шарнира и к неизменяемой части $D_{пр}$ при помощи одиночной связи D_3 , также соединение обеспечивает его геометрическую неизменяемость. Так как доказана геометрическая неизменяемость отдельных частей системы, то и вся система является геометрически неизменяемой.

Пример №5.

Произвести проверку геометрической неизменяемости плоской фермы (рис. 1.12).

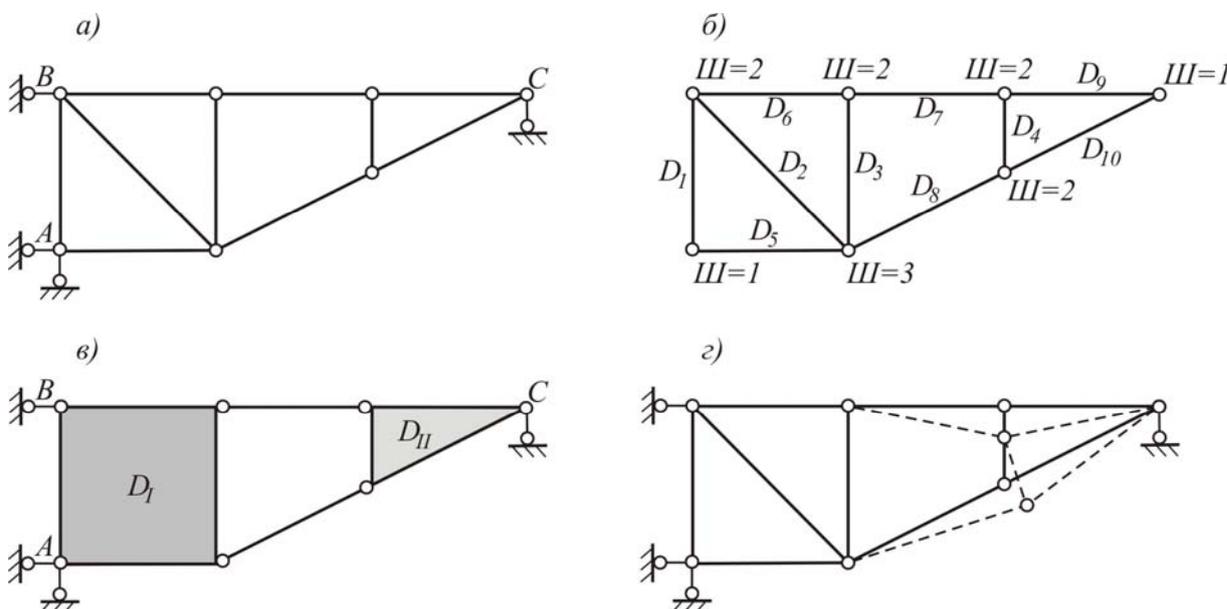


Рис. 1.12. Проверка геометрической неизменяемости плоской фермы

Для подсчета количества дисков и количества шарниров рассмотрим ферму отдельно от связей (рис. 1.12, б). Количество дисков $D=10$; количество шарниров $Ш=13$; количество опорных связей $C_0=4$;

$$W = 3D - 2Ш - C_0 = 3 \cdot 10 - 2 \cdot 13 - 4 = 0.$$

Т.е. необходимый признак геометрической неизменяемости выполняется.

Диски (стержни) D_1, D_2, D_3, D_5 и D_6 образуют неизменяемый диск D_I , который прикреплен к земле тремя связями.

Диски D_4, D_9, D_{10} образуют неизменяемый шарнирный треугольник D_{II} , прикрепленный двумя связями к основному диску D_I и одной связью к основанию. Однако расположение этих связей не удовлетворяет условиям прикрепления одного диска, так как оси связей пересекаются в одной точке C . Поэтому диск D_{II} может повернуться (рис. 1.12, г) вокруг точки C . Следовательно, данная ферма геометрически изменяема.

1.3. Расчет статически определимой многопролетной балки

Пример №1 (рис. 1.13, а).

Количество степеней свободы:

$$W = 3D - 2Ш - C_0 = 3 \cdot 4 - 2 \cdot 3 - 6 = 0.$$

Данная балка статически определима и геометрически неизменяема.

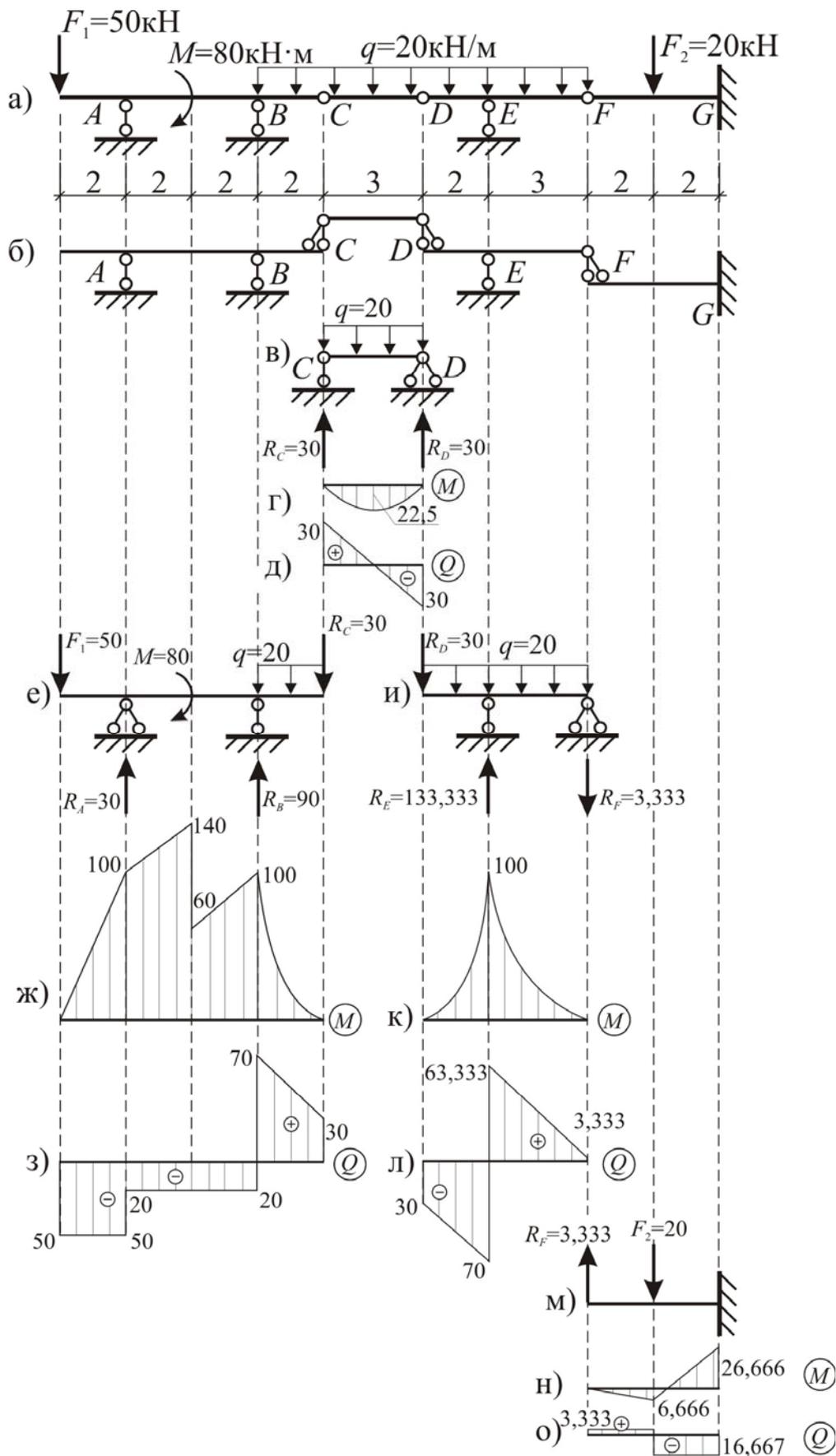


Рис. 1.13. Расчет статически определимой многопролетной балки

Поэтажная схема взаимодействия элементов балки показана на рис. 1.13, б. Начиная с самой верхней балки по поэтажной схеме, последовательно определяем реакции опор и строим эпюры внутренних усилий для каждой простой балки (рис. 1.13, в-о).

В конце расчета строим общие эпюры изгибающих моментов и поперечных сил для всей балки (рис. 1.14).

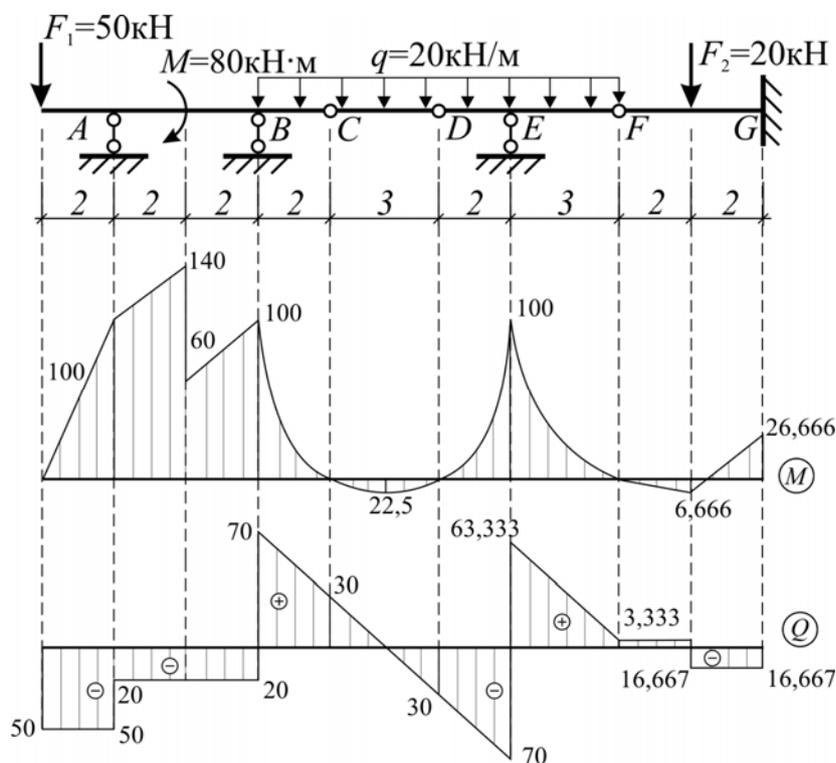


Рис. 1.14. Общие эпюры M и Q для статически определимой многопролетной балки

1.4. Расчет статически определимой трехшарнирной рамы

Пример №1.

Построить эпюры M , Q , N для трехшарнирной рамы (рис. 1.15) от заданной нагрузки: $P=28$ кН; $M=48$ кН·м; $q=12$ кН/м.

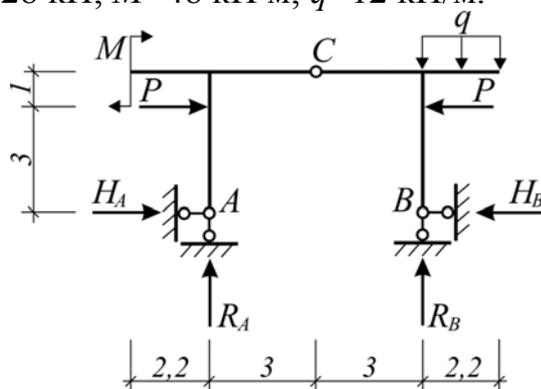


Рис. 1.15. Расчетная схема трехшарнирной рамы

Определение опорных реакций.

$$\sum M_B = 0: -R_A \cdot 6 - P \cdot 3 + P \cdot 3 - M - q \cdot 2,2 \cdot 1,1 = 0;$$

$$R_A = \frac{-M - q \cdot 2,2 \cdot 1,1}{6} = \frac{-48 - 12 \cdot 2,2 \cdot 1,1}{6} = -12,84 \text{ кН}.$$

$$\sum M_A = 0: R_B \cdot 6 - P \cdot 3 + P \cdot 3 - M - q \cdot 2,2 \cdot 7,1 = 0;$$

$$R_B = \frac{M + q \cdot 2,2 \cdot 7,1}{6} = \frac{48 + 12 \cdot 2,2 \cdot 7,1}{6} = 39,24 \text{ кН}.$$

Проверка правильности нахождения вертикальных составляющих опорных реакций:

$$\sum F_{ky} = 0: R_A + R_B - q \cdot 2,2 = 0; -12,84 + 39,24 - 12 \cdot 2,2 = 0; 0=0, \text{ верно}.$$

Определение распора (горизонтальные составляющие опорных реакций):

$$\sum M_{C, \text{лев}} = 0: -R_A \cdot 3 - M + P \cdot 1 + H_A \cdot 4 = 0;$$

$$H_A = \frac{R_A \cdot 3 + M - P \cdot 1}{4} = \frac{-12,84 \cdot 3 + 48 - 28 \cdot 1}{4} = -4,63 \text{ кН}.$$

$$\sum M_{C, \text{прав}} = 0: -H_B \cdot 4 - P \cdot 1 - q \cdot 2,2 \cdot 4,1 + R_B \cdot 3 = 0;$$

$$H_B = \frac{-P \cdot 1 - q \cdot 2,2 \cdot 4,1 + R_B \cdot 3}{4} = \frac{-28 \cdot 1 - 12 \cdot 2,2 \cdot 4,1 + 39,24 \cdot 3}{4} = -4,63 \text{ кН}.$$

Проверка правильности нахождения горизонтальных составляющих опорных реакций:

$$\sum F_{kx} = 0: P - P + H_A - H_B = 0; 28 - 28 + (-4,63) - (-4,63) = 0; 0=0, \text{ верно}.$$

После определения опорных реакций строим эпюры изгибающих моментов (рис. 1.16) и поперечных сил (рис. 1.17).

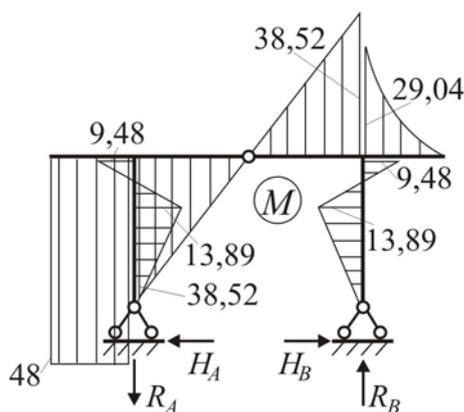


Рис. 1.16. Эпюра M для трехшарнирной рамы

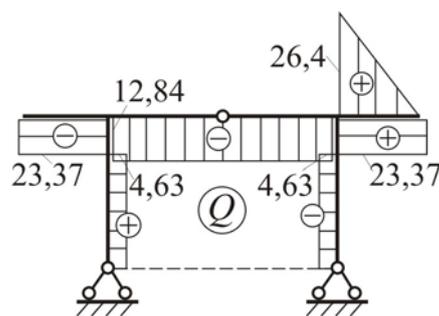


Рис. 1.17. Эпюра Q для трехшарнирной рамы

Для построения эпюры N (рис. 1.19) вырезаем два верхних узла рамы и по эпюре Q из условий равновесия определяем продольные силы (рис. 1.18).

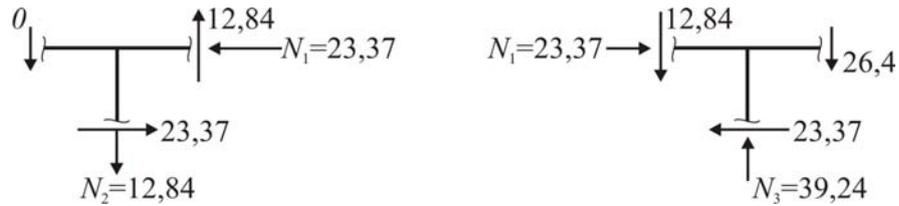


Рис. 1.18. Вырезание узлов для построения эпюры продольных сил

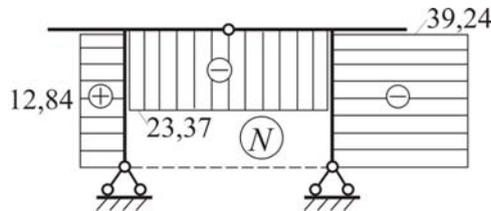


Рис. 1.19. Эпюра N для трехшарнирной рамы

1.5. Расчет систем, содержащих замкнутый контур

Для определения усилий в системе, содержащей замкнутый контур, необходимо расчленить его на образующие диски. При «раскрытии» контура сечения целесообразно проводить в местах соединения дисков единичными или шарнирными связями. При этом в местах сечений появятся соответственно, одна или две неизвестные силы.

Пример №1.

Построить эпюры M , Q , N в системе с замкнутым контуром (рис. 1.20).

Кинематический анализ:

$$W = 3Д - 2Ш - C_0 = 3 \cdot 3 - 2 \cdot 3 - 3 = 0.$$

Необходимый признак геометрической неизменяемости выполняется. Структурный анализ показывает, что система состоит из трех дисков, соединенных тремя шарнирами C , D и B , не лежащих на одной прямой, и прикреплена к основанию тремя связями, не параллельными и не пересекающимися в одной точке, т.е. данная система геометрически неизменяема.

Расчленяем систему на образующие диски (рис. 1.21).

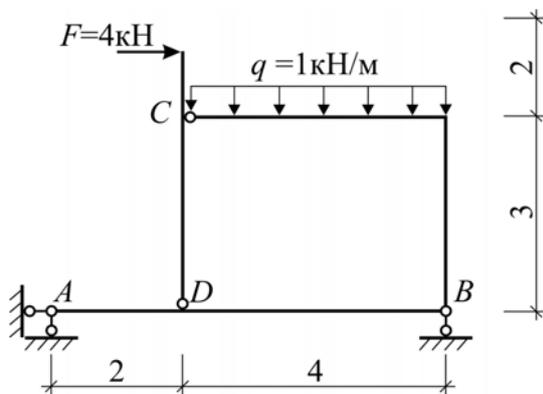


Рис. 1.20. Система с замкнутым контуром

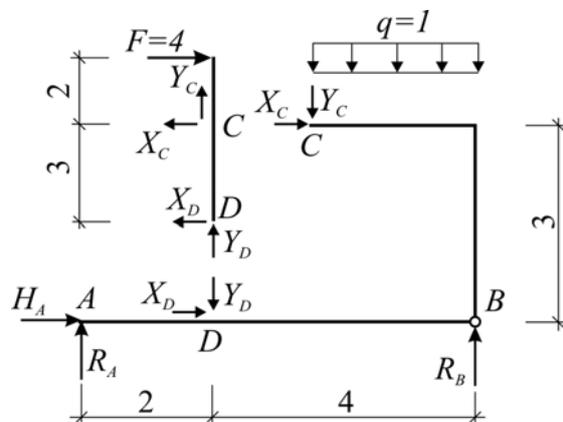


Рис. 1.21. Расчетная схема раскрытия замкнутого контура

Опорные реакции определим из всей системы целиком:

$$\sum M_A = 0: -F \cdot 5 + R_B \cdot 6 - q \cdot 4 \cdot 4 = 0;$$

$$R_B = \frac{F \cdot 5 + q \cdot 4 \cdot 4}{6} = \frac{4 \cdot 5 + 1 \cdot 4 \cdot 4}{6} = \frac{36}{6} = 6 \text{ кН.}$$

$$\sum M_B = 0: -F \cdot 5 - R_A \cdot 6 + q \cdot 4 \cdot 2 = 0;$$

$$R_A = \frac{-F \cdot 5 + q \cdot 4 \cdot 2}{6} = \frac{-4 \cdot 5 + 1 \cdot 4 \cdot 2}{6} = -\frac{12}{6} = -2 \text{ кН.}$$

$$\sum F_{kx} = 0: F + H_A = 0;$$

$$H_A = -F = -4 \text{ кН.}$$

Стержень CD .

$$\sum M_D = 0: -F \cdot 5 + X_C \cdot 3 = 0;$$

$$X_C = \frac{F \cdot 5}{3} = \frac{4 \cdot 5}{3} = \frac{20}{3} \text{ кН.}$$

$$\sum M_C = 0: -F \cdot 2 - X_D \cdot 3 = 0;$$

$$X_D = -\frac{F \cdot 2}{3} = -\frac{4 \cdot 2}{3} = -\frac{8}{3} \text{ кН.}$$

Диск BC .

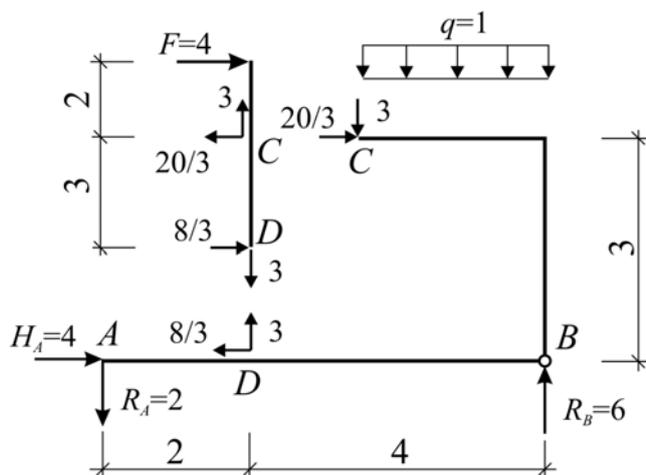
$$\sum M_B = 0: -X_C \cdot 3 + Y_C \cdot 4 + q \cdot 4 \cdot 2 = 0;$$

$$Y_C = \frac{X_C \cdot 3 - q \cdot 4 \cdot 2}{4} = \frac{\frac{20}{3} \cdot 3 - 1 \cdot 4 \cdot 2}{4} = \frac{12}{4} = 3 \text{ кН.}$$

Стержень CD .

$$\sum F_{ky} = 0: Y_C + Y_D = 0;$$

$$Y_D = -Y_C = -3 \text{ кН.}$$



На рис. 1.22 показаны значения и верные направления реакций опор и связей. С учетом внешних сил и реакций строим эпюры внутренних усилий в системе с замкнутым контуром (рис. 1.23).

Рис. 1.22. Реакции опор и связей в системе с замкнутым контуром

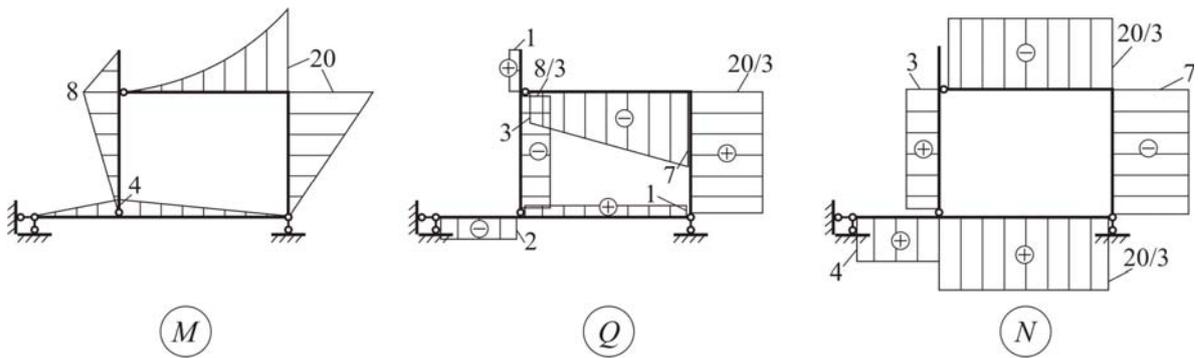


Рис. 1.23. Эпюры внутренних усилий в системе с замкнутым контуром

Задачи для самостоятельного решения

Выполнить кинематический анализ систем, показанных на рис. 1.24.

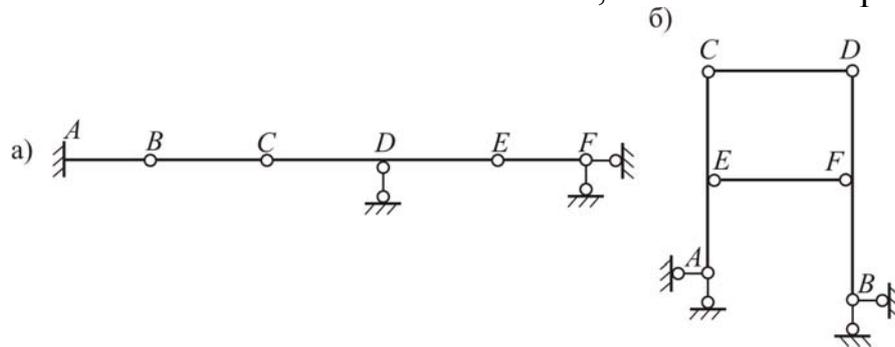


Рис. 1.24. Задачи для самостоятельного решения

Построить эпюры внутренних усилий для конструкций, изображенных на рис. 1.25.

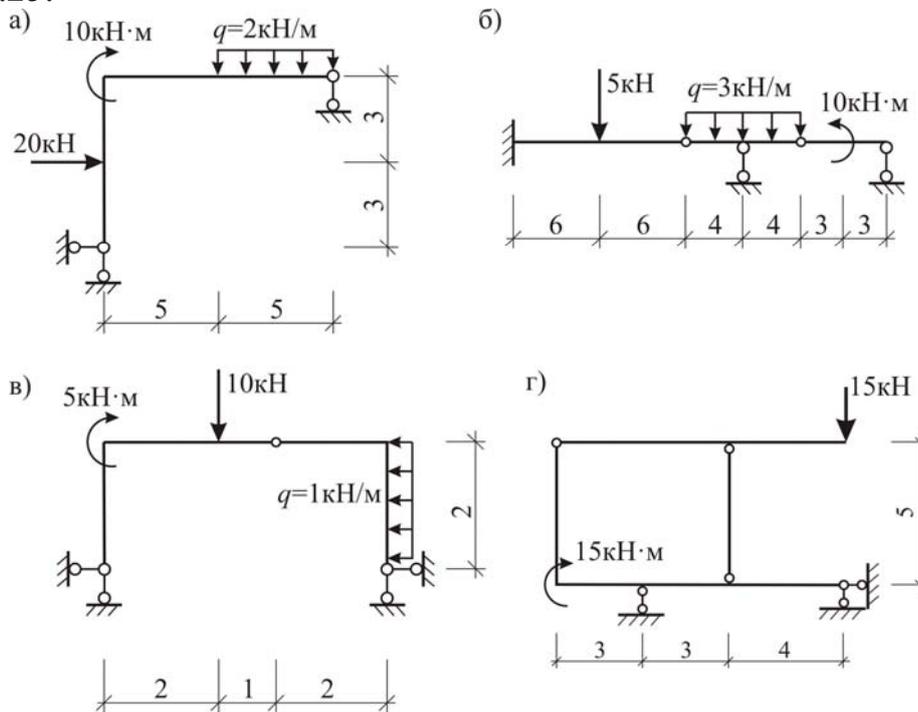


Рис. 1.25. Задачи для самостоятельного решения

2. РАСЧЕТ СТАТИЧЕСКИ ОПРЕДЕЛИМЫХ СИСТЕМ НА ПОДВИЖНУЮ НАГРУЗКУ

2.1. Расчет статически определимой многопролетной балки на подвижную нагрузку

График, отражающий изменение усилия в зависимости от положения единичного подвижного груза, называется линией влияния этого усилия. Линии влияния в многопролетных балках строятся с использованием поэтажной схемы. Вначале строится линия влияния для простой балки, которой принадлежит рассматриваемое усилие. Затем линия влияния распространяется на вышележащие по поэтажной схеме балки.

Пример №1.

Для многопролетной балки (рис. 2.1) построить линии влияния опорных реакций R_A , R_B и R_E , линии влияния поперечной силы и изгибающего момента в сечениях I-I и II-II.

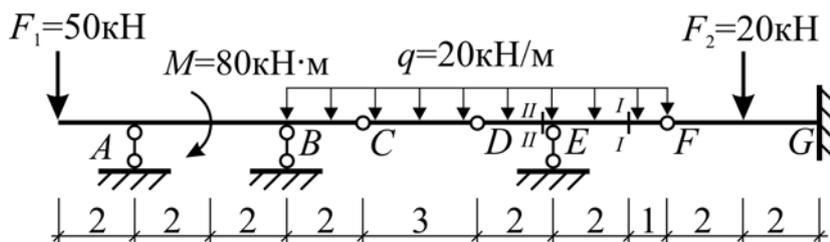


Рис. 2.1. Расчетная схема многопролетной балки

Линия влияния опорной реакции простой балки на двух шарнирных опорах строится по двум точкам: ордината линии влияния равна 1 в точке приложения расчетной реакции; ордината линии влияния равна 0 в точке второй опоры. Через две полученных точки проводим линию на всю длину простой балки, которой принадлежит расчетная опорная реакция, затем распространяем на вышележащие балки по поэтажной схеме (рис. 2.2, б). Линии влияния опорных реакций R_A , R_B и R_E приведены на рис. 2.2, в-д.

Построение линии влияния поперечной силы в сечении I-I.

Поперечная сила в сечении равна сумме проекций на нормаль к оси всех внешних сил, приложенных к отсеченной части балки. Поперечную силу считаем положительной, если равнодействующая внешних сил вращает отсеченную часть по часовой стрелке. Рассмотрим возможные случаи положения подвижного груза на простой балке EF , которой принадлежит расчетное сечение I-I (рис. 2.3).

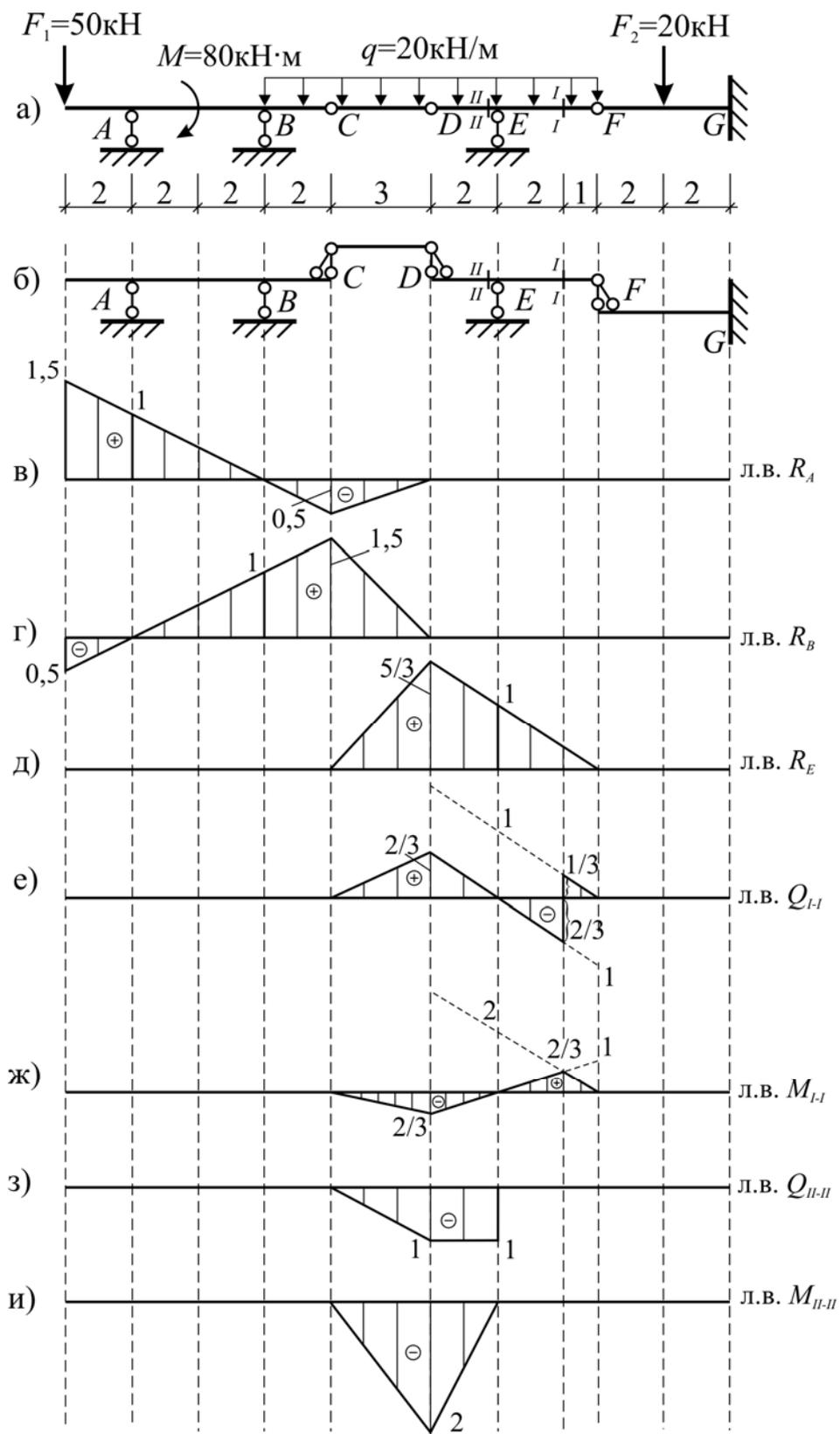


Рис. 2.2. Построение линий влияния в многопролетной балке

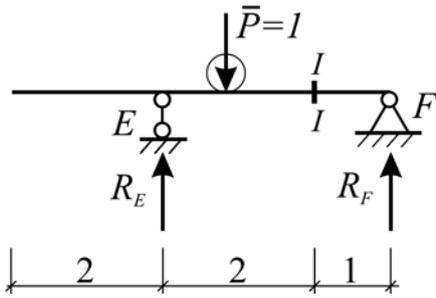


Рис. 2.3. Расчетная схема простой балки EF

Груз слева от сечения I-I:

$$Q_{I-I}^{\text{прав.}} = -R_F;$$

$$\text{л.в. } Q_{I-I} = -\text{л.в. } R_F.$$

Груз справа от сечения I-I:

$$Q_{I-I}^{\text{лев.}} = R_E;$$

$$\text{л.в. } Q_{I-I} = \text{л.в. } R_E.$$

Действительная часть линии влияния строится там, где был груз. Затем распространяется на вышележащие балки по поэтажной схеме. Линия влияния поперечной силы в сечении I-I приведена на рис. 2.2, е.

Построение линии влияния изгибающего момента в сечении I-I.

Изгибающий момент в сечении равен сумме моментов внешних сил, приложенных к отсеченной части балки, относительно точки сечения, лежащей на оси. Изгибающий момент примем положительным, если он растягивает нижние волокна балки.

Рассмотрим возможные случаи положения подвижного груза на простой балке EF , которой принадлежит расчетное сечение I-I (рис. 2.3).

Груз слева от сечения I-I:

$$M_{I-I}^{\text{прав.}} = R_F \cdot 1;$$

$$\text{л.в. } M_{I-I} = \text{л.в. } R_F \times 1.$$

Груз справа от сечения I-I:

$$M_{I-I}^{\text{лев.}} = R_E \cdot 2;$$

$$\text{л.в. } M_{I-I} = \text{л.в. } R_E \times 2.$$

Действительная часть линии влияния строится там, где был груз. Затем распространяется на вышележащие балки по поэтажной схеме. Линия влияния изгибающего момента в сечении I-I приведена на рис. 2.2, ж.

Построение линии влияния поперечной силы в сечении II-II.

Рассмотрим возможные случаи положения подвижного груза на простой балке EF , которой принадлежит расчетное сечение II-II (рис. 2.4).

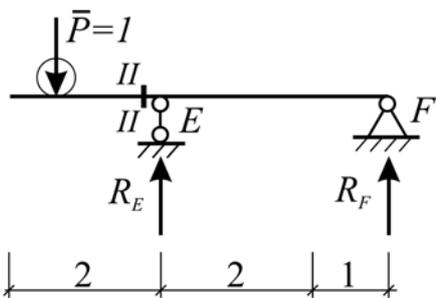


Рис. 2.4. Расчетная схема простой балки EF

Груз слева от сечения II-II:

$$Q_{I-I}^{\text{лев.}} = -\bar{P} = -1;$$

$$\text{л.в. } Q_{I-I} = -1.$$

Груз справа от сечения II-II:

$$Q_{I-I}^{\text{лев.}} = 0;$$

$$\text{л.в. } Q_{I-I} = 0.$$

Линия влияния поперечной силы в сечении II-II приведена на рис. 2.2,з.

Построение линии влияния изгибающего момента в сечении II-II.

Рассмотрим возможные случаи положения подвижного груза на простой балке EF , которой принадлежит расчетное сечение II-II (рис. 2.4).

$$Q_{I-I}^{\text{лев.}} = -\bar{P} = -1;$$

$$\text{л.в. } Q_{I-I} = -1.$$

$$Q_{I-I}^{\text{лев.}} = 0;$$

$$\text{л.в. } Q_{I-I} = 0.$$

Груз слева от сечения II-II:

$$M_{I-I}^{\text{лев.}} = -\bar{P} \cdot z = -1 \cdot z, \text{ где } z=0 \dots 2;$$

$$\text{л.в. } M_{I-I} = -1 \cdot z, \text{ где } z=0 \dots 2.$$

Груз справа от сечения II-II:

$$M_{I-I}^{\text{лев.}} = 0;$$

$$\text{л.в. } M_{I-I} = \text{л.в. } 0.$$

Линия влияния изгибающего момента в сечении II-II приведена на рис. 2.2, и.

Вычисление усилий по линиям влияния.

$$S = \sum F_i \cdot y_i + \sum q_i \cdot \omega_i + \sum M_i \cdot \text{tg} \alpha_i,$$

где S – искомое усилие;

F – внешняя сосредоточенная сила;

y – ордината линии влияния под соответствующей внешней силой;

q – интенсивность равномерно-распределенной нагрузки;

ω – площадь участка линии влияния под распределенной нагрузкой;

M – внешний сосредоточенный момент;

$\text{tg} \alpha$ – тангенс угла наклона линии влияния под внешним моментом.

Правило знаков для величин в этой формуле следующее. Сосредоточенная сила и распределенная нагрузка положительны, если они направлены вниз, т.е. по направлению единичного груза. Внешний момент положителен, если направлен против часовой стрелки. Ордината y и площадь ω берутся со своими знаками на линиях влияния. Тангенс угла наклона линии влияния $\text{tg} \alpha$ положителен, если угол α образуется вращением оси балки до совмещения с линией влияния по часовой стрелке.

Необходимые дополнительные значения на линиях влияния находятся из подобия треугольников (рис. 2.2).

$$R_A = 50 \cdot 1,5 + 20 \cdot \left(-\frac{1}{2} \cdot 0,5 \cdot 5 \right) - 80 \cdot \frac{1}{4} = 30 \text{ кН};$$

$$R_B = 50 \cdot (-0,5) + 20 \cdot \frac{1+1,5}{2} \cdot 2 + 20 \cdot \frac{1}{2} \cdot 1,5 \cdot 3 - 80 \cdot \left(-\frac{1}{4} \right) = 90 \text{ кН};$$

$$R_E = 20 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{5}{3} \cdot 8 = 133,333 \text{ кН};$$

$$Q_{I-I} = 20 \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot 5 - \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot 2 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot 1 \right) = 23,333 \text{ кН};$$

$$M_{I-I} = 20 \cdot \left(-\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot 5 + \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot 3 \right) = -13,333 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

$$Q_{II-II} = 20 \cdot \left(-\frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 3 - 1 \cdot 2 \right) = -70 \text{ кН};$$

$$M_{II-II} = 20 \cdot \left(-\frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 5 \right) = -100 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

Полученные значения расчетных усилий полностью совпадают с величинами в п.1.3.

Задачи для самостоятельного решения

Для многопролетной балки, изображенной на рис. 2.5, построить линии влияния опорных реакций R_B , R_C , поперечной силы и изгибающего момента в сечениях I-I, II-II. По построенным линиям влияния вычислить расчетные усилия.

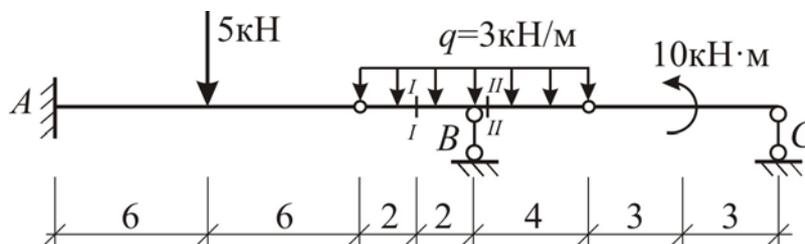


Рис. 2.5. Задачи для самостоятельного решения

3. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ В СТАТИЧЕСКИ ОПРЕДЕЛИМЫХ СИСТЕМАХ

3.1. Вычисление интеграла Мора по правилу Верещагина

Перемещение по направлению силы $P_m=1$ вызванное заданной нагрузкой n определяется по формуле Мора (или с помощью интеграла Мора):

$$\Delta_{mn} = \sum \int_0^l \frac{\bar{M}_m M_n}{EI} dx + \sum \int_0^l \frac{\bar{N}_m N_n}{EF} dx + \sum \int_0^l \frac{\bar{Q}_m Q_n}{GF} \mu dx.$$

При практическом использовании формулы Мора для изгибаемых систем оставляют только первое слагаемое, для систем, работающих на растяжение-сжатие, используют только второе слагаемое.

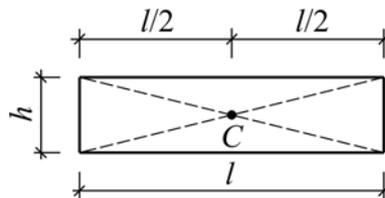
Правило Верещагина: результат перемножения двух эпюр равен произведению площади одной из них на ординату другой (прямолинейной) эпюры, взятую под центром тяжести площади первой эпюры:

$$\int_0^l \bar{M}_m M_n dx = \omega_n y_C.$$

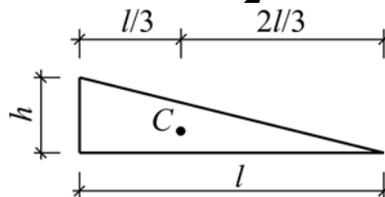
Правило знаков: если обе эпюры лежат по одну сторону от оси элемента, то результат перемножения будет положительным.

Площади и координаты центра тяжести простейших фигур:

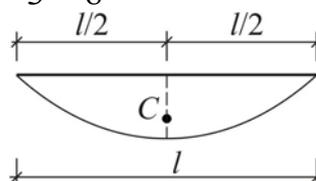
а) прямоугольник: $\omega = h \cdot l$.



б) прямоугольный треугольник: $\omega = \frac{1}{2} \cdot h \cdot l$.

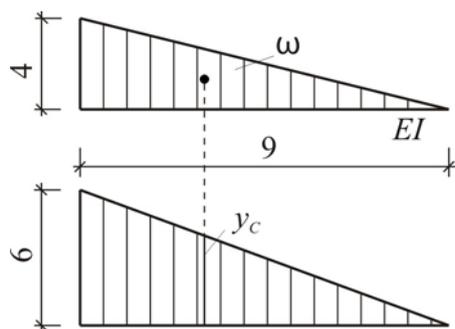


б) простая парабола: $\omega = \frac{2}{3} \cdot \frac{ql^3}{8}$.



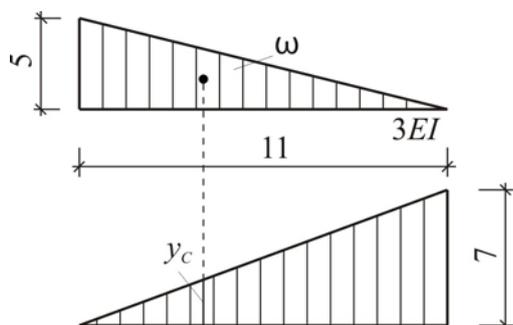
Примеры перемножения эпюр:

1)



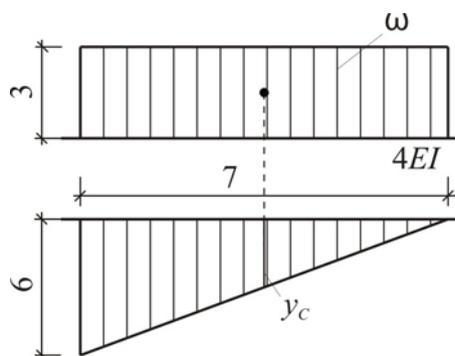
$$\Delta = \frac{1}{EI} \cdot \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 9 \cdot \frac{2}{3} \cdot 6$$

2)



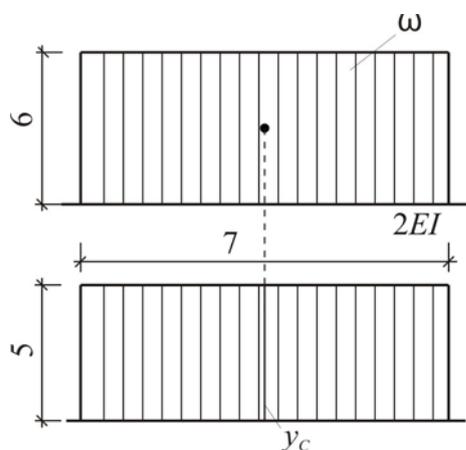
$$\Delta = \frac{1}{3EI} \cdot \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 11 \cdot \frac{1}{3} \cdot 7$$

3)



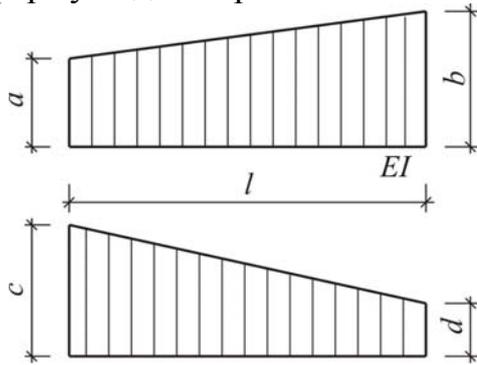
$$\Delta = -\frac{1}{4EI} \cdot 3 \cdot 7 \cdot \frac{1}{2} \cdot 6$$

4)



$$\Delta = \frac{1}{2EI} \cdot 6 \cdot 7 \cdot 5$$

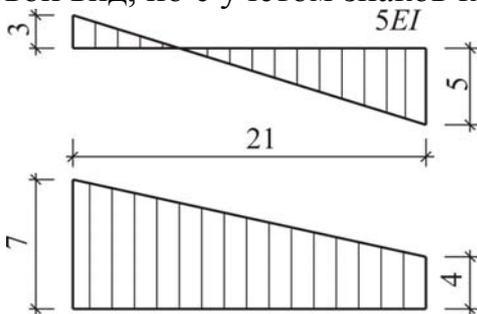
5) формула для перемножения эюр, имеющих вид трапеций



$$\Delta = \frac{1}{EI} \cdot \frac{l}{6} \cdot (2ac + 2bd + ad + bc)$$

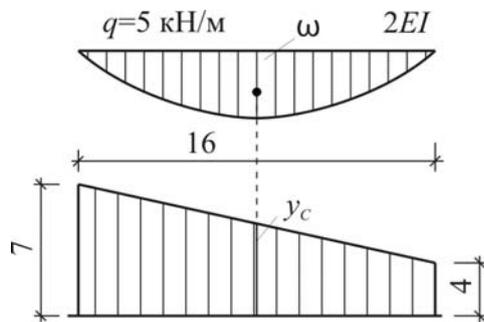
Эта формула универсальна для перемножения любых прямолинейных эюр.

6) для «перекрученных» трапеций предыдущая формула сохраняет свой вид, но с учетом знаков каждого слагаемого в скобках



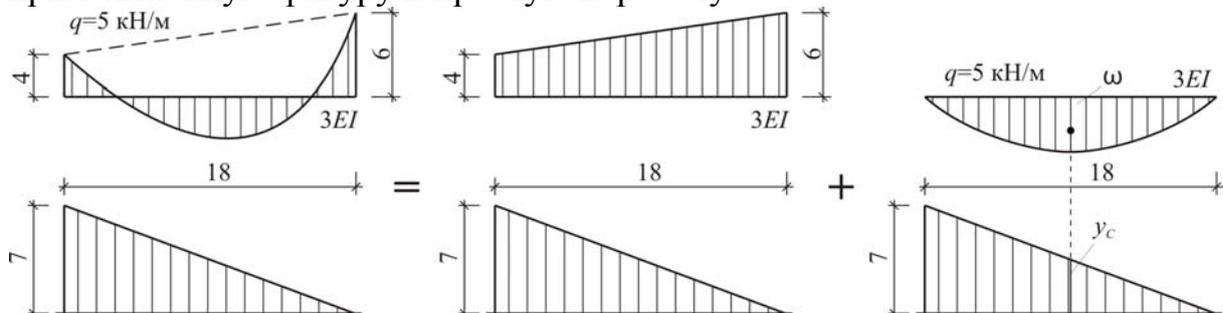
$$\Delta = \frac{1}{5EI} \cdot \frac{21}{6} \cdot (2 \cdot 3 \cdot 7 - 2 \cdot 5 \cdot 4 + 3 \cdot 4 - 5 \cdot 7)$$

7)



$$\Delta = -\frac{1}{2EI} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{5 \cdot 16^3}{8} \cdot \frac{4+7}{2}$$

8) сложную параболу при перемножении необходимо разбить на прямолинейную фигуру и простую параболу



$$\Delta = \frac{1}{3EI} \cdot \frac{18}{6} \cdot (2 \cdot 4 \cdot 7 + 2 \cdot 6 \cdot 0 + 4 \cdot 0 + 6 \cdot 7) - \frac{1}{3EI} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{5 \cdot 18^3}{8} \cdot \frac{7}{2}$$

3.2. Определение перемещений в статически определимых системах

3.2.1. Определение перемещений от силового воздействия в статически определимых системах

Пример №1.

Определить вертикальное и горизонтальное перемещение точки K , угол поворота узла B (рис. 3.1, а).

В заданной статически определимой системе строим эпюру изгибающих моментов от действия внешней нагрузки – грузовую эпюру M_p (рис. 3.1, б)

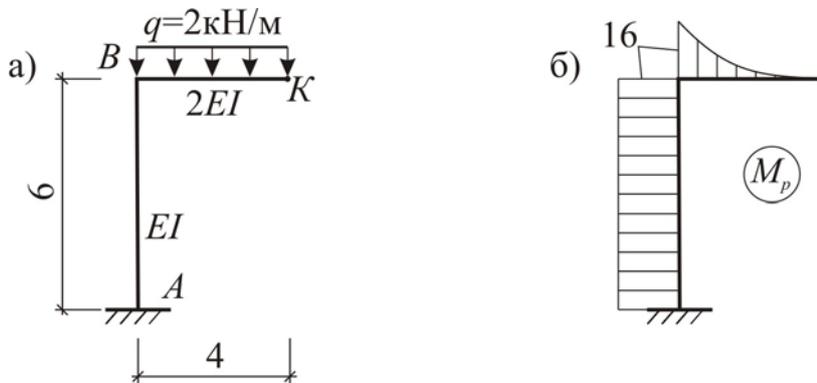


Рис. 3.1. Расчетная схема и грузовая эпюра

Для определения каждого из линейных перемещений необходимо построить единичную эпюру от единичной силы, приложенной в т. K по направлению искомого перемещения (рис. 3.2).

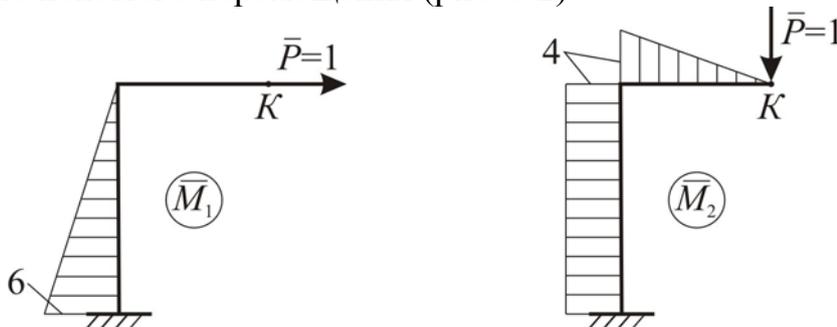


Рис. 3.2. Единичные эпюры

Горизонтальное перемещение:

$$\Delta_1 = \sum \int_0^l \frac{M_p \cdot \bar{M}_1}{EI} dx = \frac{1}{EI} \cdot \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 6 \cdot 16 = \frac{288}{EI} \text{ (м)}.$$

Вертикальное перемещение:

$$\Delta_2 = \sum \int_0^l \frac{M_p \cdot \bar{M}_2}{EI} dx = \frac{1}{EI} \cdot 16 \cdot 6 \cdot 4 + \frac{1}{2EI} \cdot \frac{1}{2} \cdot 16 \cdot 4 \cdot \frac{2}{3} \cdot 4 - \frac{1}{2EI} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2 \cdot 4^3}{8} \cdot \frac{4}{2} = \frac{416}{EI} \text{ (м)}.$$

Для определения угла поворота строим эпюру от единичного момента, приложенного в узле B (рис. 3.3, а-б). Схема деформации конструкции показана на рис.3.3, в.

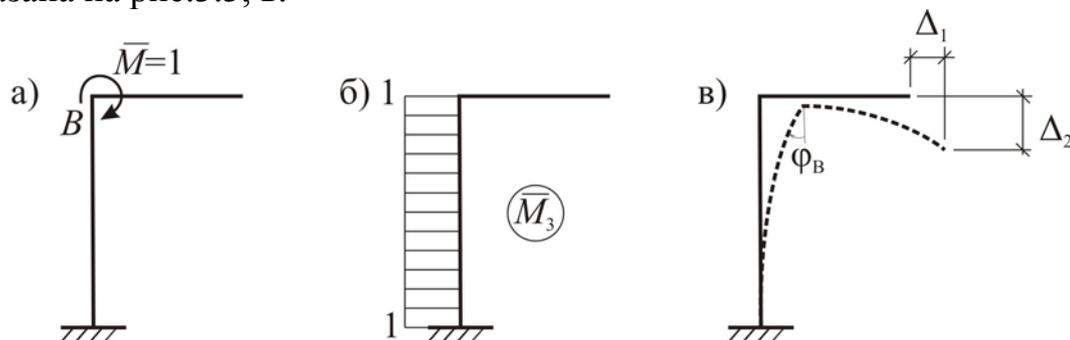


Рис. 3.3. Эпюра от единичного момента и схема деформации

Угол поворота узла B :

$$\varphi_B = \sum \int_0^l \frac{M_p \cdot \bar{M}_3}{EI} dx = \frac{1}{EI} \cdot 1 \cdot 6 \cdot 16 = \frac{96}{EI} \text{ (рад)}.$$

3.2.2. Определение перемещений от температурного воздействия в статически определимых системах

Для прямолинейных стержней постоянного сечения перемещение сечения от температурного воздействия рассчитывается по формуле:

$$\Delta_{Kt} = \sum \alpha \frac{\Delta t}{h} \omega_{\bar{M}} + \sum \alpha t_0 \omega_{\bar{N}},$$

- где α – коэффициент линейного расширения материала стержня;
 $\Delta t = t_1 - t_2$ – перепад температуры между верхними и нижними волокнами;
 t_1, t_2 – температура верхних и нижних волокон, соответственно;
 h – высота поперечного сечения;
 t_0 – температура центра тяжести сечения, для симметричного по высоте сечения: $t_0 = \frac{t_1 + t_2}{2}$;

$\omega_{\bar{M}}, \omega_{\bar{N}}$ – площади единичных эпюр изгибающих моментов и продольных сил, соответственно.

Правило знаков: если деформации элемента от температуры и от единичной силы аналогичны, то знак соответствующего члена формулы будет положительным, и наоборот. Т.е. положительные знаки будут тогда, когда изгибающие моменты и продольные силы фиктивного состояния вызывают одинаковые деформации волокон с температурными деформациями стержней.

Пример №1.

Отыскать горизонтальное перемещение точки C (рис. 3.4, а), если внутри температура повысилась до 10°C . Высота поперечного сечения стержней $h=0,2$ м.

По направлению искомого перемещения в т. C прикладываем единичную силу $\bar{P}=1$ и строим единичные эпюры \bar{M} и \bar{N} (рис 3.4, б, в).

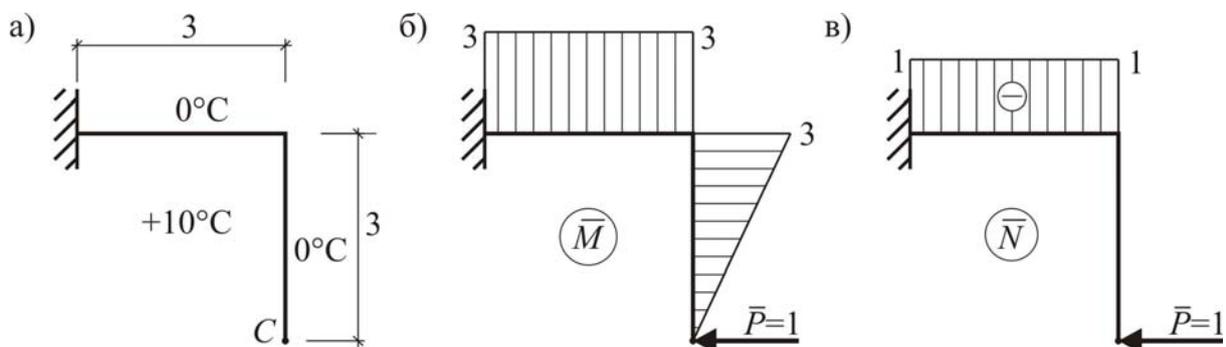


Рис. 3.4. Расчетная схема и единичные эпюры

Перемещение точки C от температурного воздействия:

$$\Delta_{Ct} = \left[-\alpha \cdot \frac{(10-0)}{0,2} \cdot \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 3 - \alpha \cdot \frac{(10-0)}{0,2} \cdot 3 \cdot 3 \right] + \left[-\alpha \cdot \frac{10+0}{2} \cdot 1 \cdot 3 \right] = -690\alpha.$$

Пример №2.

Отыскать горизонтальное перемещение точки B (рис. 3.5а), если внутри температура повысилась до 20°C . Высота сечений стоек – $0,4$ м, высота сечения ригеля – $0,5$ м.

По направлению искомого перемещения в т. B прикладываем единичную силу $\bar{P}=1$ и строим единичные эпюры \bar{M} и \bar{N} (рис 3.5б, в).

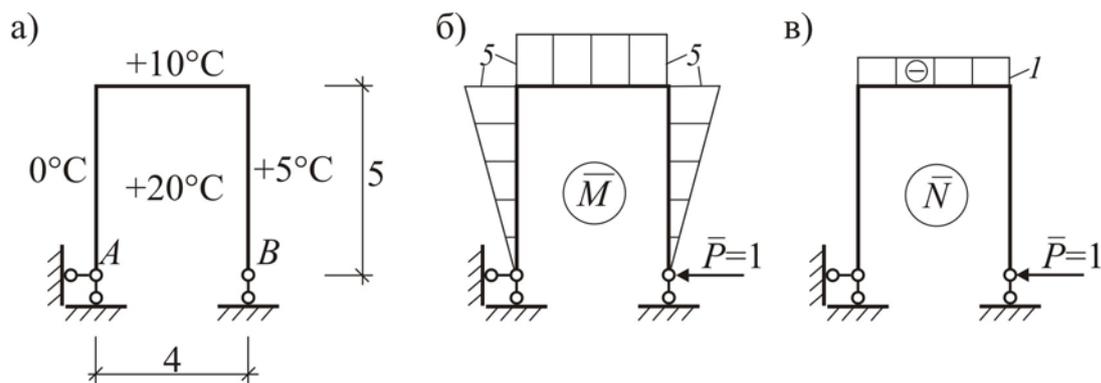


Рис. 3.5. Расчетная схема рамы и единичные эпюры

Перемещение точки B от температурного воздействия:

$$\Delta_{Bt} = \left[-\alpha \cdot \frac{20-0}{0,4} \cdot \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 5 - \alpha \cdot \frac{20-10}{0,5} \cdot 5 \cdot 4 - \alpha \cdot \frac{20-5}{0,4} \cdot \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 5 \right] + \left[-\alpha \cdot \frac{20+10}{2} \cdot 1 \cdot 4 \right] = 1553,75\alpha.$$

3.2.3. Определение перемещений от неравномерной осадки опор в статически определимых системах

На основе принципа возможных перемещений перемещение от неравномерной осадки опор в статически определимой системе можно найти по формуле

$$\Delta_{K\Delta} = -\sum R_i \cdot \Delta_i,$$

где R_i – опорные реакции в заданной системе, возникающие от единичной нагрузки, приложенной по направлению искомого перемещения;

Δ_i – перемещения, полученные опорами.

Правило знаков: произведение под знаком суммы будет положительным, если направление перемещения совпадает с направлением реакции.

Пример №1.

Найти горизонтальное перемещение т.А и т.К в статически определимой системе (рис. 3.6), опора которой получила перемещения: $c_1=0,05$ м, $c_2=0,03$ м, $c_3=0,1$ рад.

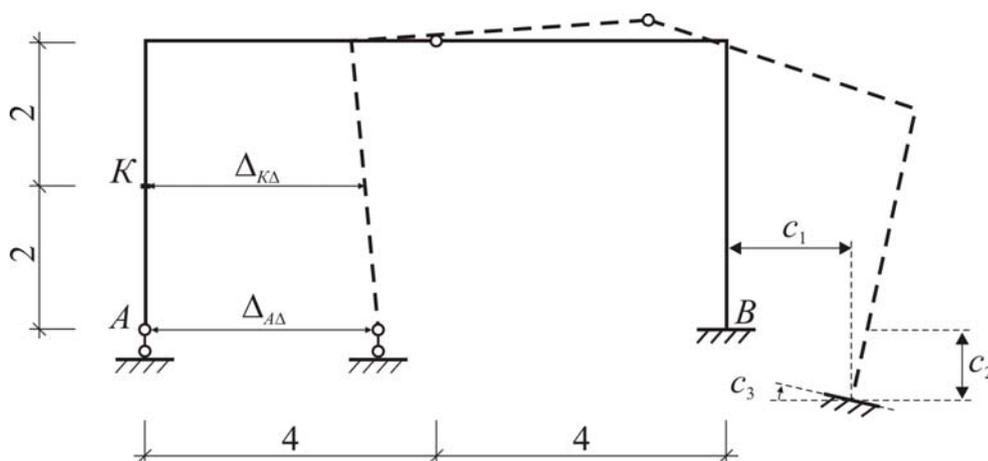


Рис. 3.6. Статически определимая рама с неравномерной осадкой опор

Приложим в точках, перемещение которых надо найти, единичные силы $\bar{P}=1$ в направлении искомого перемещения и определим опорные реакции в заданной системе (рис. 3.7, а, б).

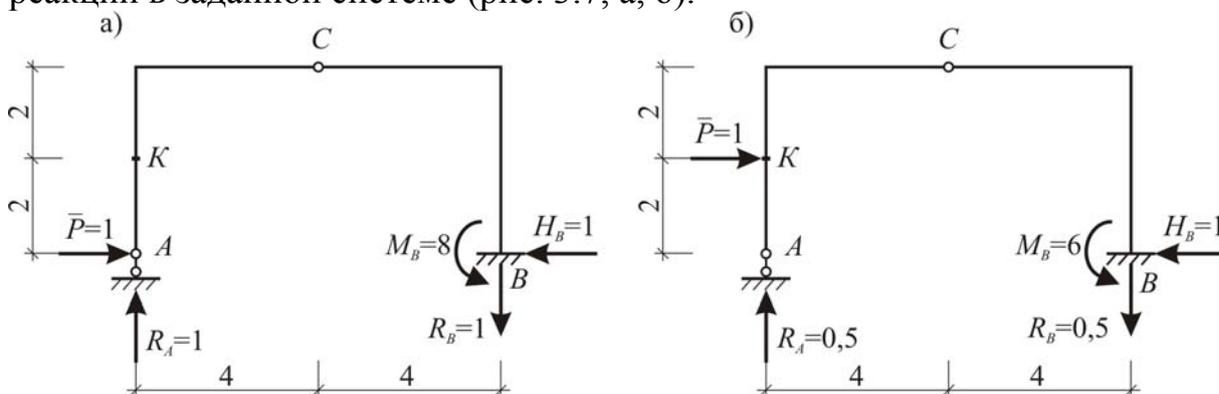


Рис. 3.7. Опорные реакции от единичной нагрузки

Определение горизонтального перемещения т.А:

Опорные реакции (рис. 3.7, а):

$$\sum F_{kx} = 0: \bar{P} - H_B = 0; \quad H_B = \bar{P} = 1 \text{ (кН)};$$

$$\sum M_C^{\text{л.ч.}} = 0: \bar{P} \cdot 4 - R_A \cdot 4 = 0; \quad R_A = \frac{\bar{P} \cdot 4}{4} = \bar{P} = 1 \text{ (кН)};$$

$$\sum F_{ky} = 0: R_A - R_B = 0; \quad R_B = R_A = 1 \text{ (кН)};$$

$$\sum M_B = 0: M_B - R_A \cdot 8 = 0; \quad M_B = R_A \cdot 8 = 1 \cdot 8 = 8 \text{ (кН}\cdot\text{м)}.$$

Горизонтальное перемещение т.А:

$$\Delta_{A\Delta} = -(-H_B \cdot c_1 + R_B \cdot c_2 - M_B \cdot c_3) = -(-1 \cdot 0,05 + 1 \cdot 0,03 - 8 \cdot 0,1) = 0,82 \text{ (м)}.$$

Определение горизонтального перемещения т.К:

Опорные реакции (рис. 3.7, б):

$$\sum F_{kx} = 0: \bar{P} - H_B = 0; \quad H_B = \bar{P} = 1 \text{ (кН)};$$

$$\sum M_C^{\text{л.ч.}} = 0: \bar{P} \cdot 2 - R_A \cdot 4 = 0; \quad R_A = \frac{\bar{P} \cdot 2}{4} = \frac{\bar{P}}{2} = \frac{1}{2} = 0,5 \text{ (кН)};$$

$$\sum F_{ky} = 0: R_A - R_B = 0; \quad R_B = R_A = 0,5 \text{ (кН)};$$

$$\sum M_B = 0: M_B - R_A \cdot 8 - \bar{P} \cdot 2 = 0; \quad M_B = R_A \cdot 8 + \bar{P} \cdot 2 = 0,5 \cdot 8 + 1 \cdot 2 = 6 \text{ (кН}\cdot\text{м)}.$$

Горизонтальное перемещение т.К:

$$\Delta_{K\Delta} = -(-H_B \cdot c_1 + R_B \cdot c_2 - M_B \cdot c_3) = -(-1 \cdot 0,05 + 0,5 \cdot 0,03 - 6 \cdot 0,1) = 0,635 \text{ (м)}.$$

Задачи для самостоятельного решения

Найти перемещение т.К от силового воздействия, от температурного воздействия и от неравномерной осадки опор рамы (рис. 3.8).

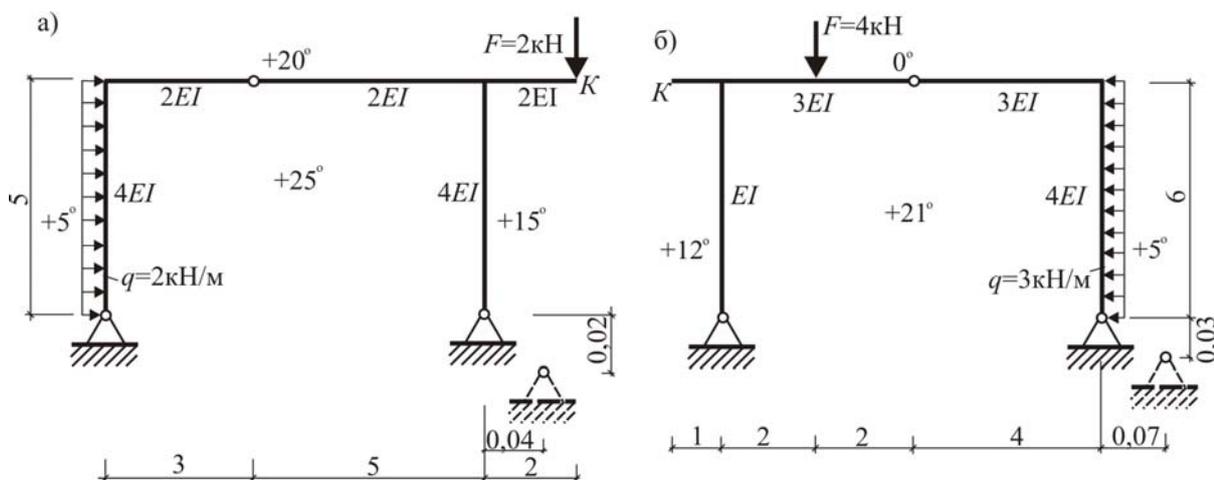


Рис. 3.8. Задачи для самостоятельного решения

4. РАСЧЕТ СТАТИЧЕСКИ НЕОПРЕДЕЛИМЫХ СИСТЕМ МЕТОДОМ СИЛ

4.1. Расчет статически неопределимой системы с одним неизвестным методом сил

Пример №1.

Рассчитать статически неопределимую раму (рис. 4.1) методом сил.

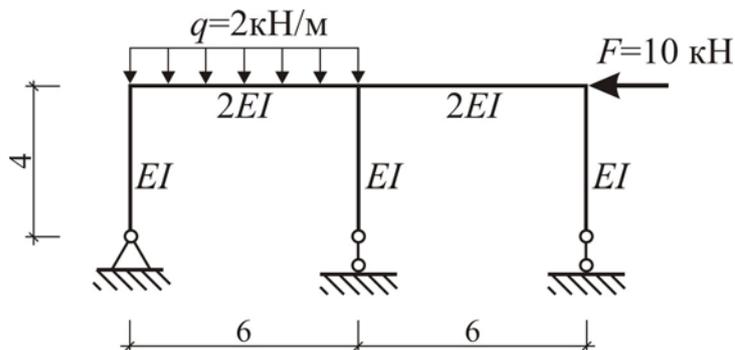


Рис. 4.1. Расчетная схема рамы

1) Количество неизвестных (количество лишних связей):

$$\lambda = -W = -3Д + 2Ш + C_0 = -3 \cdot 1 + 2 \cdot 0 + 4 = 1.$$

2) Основная система метода сил (О.С.М.С.) получается из заданной путем отбрасывания лишней связи (рис. 4.2). Действие отброшенной связи заменяется неизвестной силой X_1 .

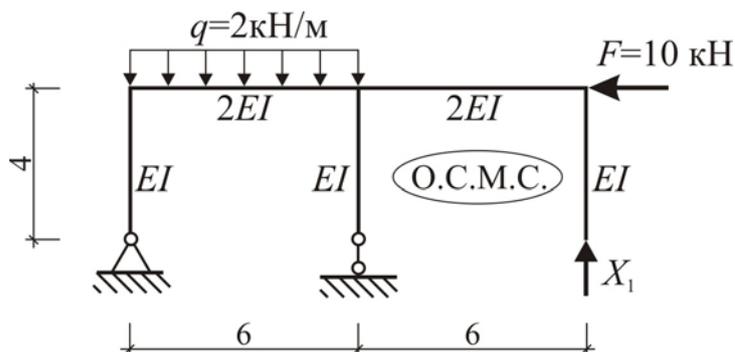


Рис. 4.2. Основная система метода сил

3) Уравнение метода сил с одним неизвестным имеет вид:

$$\delta_{11} \cdot X_1 + \Delta_{1p} = 0.$$

4) Единичная эпюра (рис. 4.3а). Единичная эпюра строится в основной системе от действия силы $\bar{X}_1 = 1$.

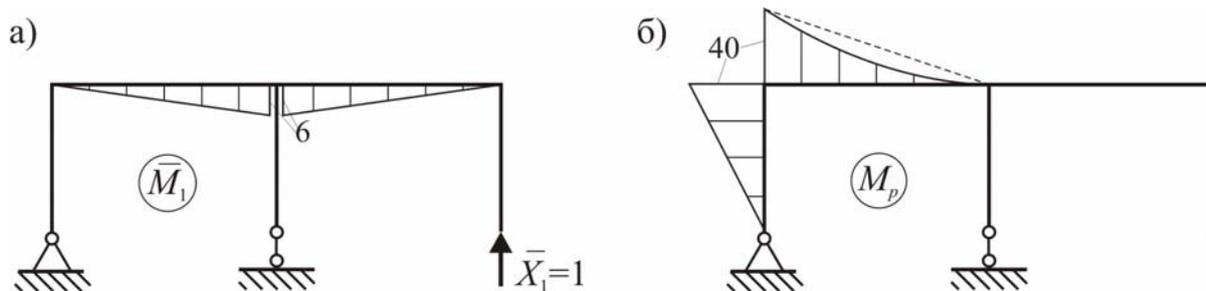


Рис. 4.3. Единичная и грузовая эпюры

5) Вычисление коэффициента при неизвестном.

$$\delta_{11} = \sum \int \frac{\bar{M}_1 \cdot \bar{M}_1}{EI} dx = \frac{1}{2EI} \cdot \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 6 \cdot \frac{2}{3} \cdot 6 \times 2 = \frac{72}{EI}.$$

6) Грузовая эпюра (рис. 4.3б). Грузовая эпюра строится в основной системе от действия внешней нагрузки.

7) Вычисление свободного члена уравнения.

$$\Delta_{1p} = \sum \int \frac{\bar{M}_1 \cdot M_p}{EI} dx = -\frac{1}{2EI} \cdot \frac{1}{2} \cdot 40 \cdot 6 \cdot \frac{1}{3} \cdot 6 + \frac{1}{2EI} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2 \cdot 6^3}{8} \cdot \frac{1}{2} \cdot 6 = -\frac{66}{EI}.$$

8) Решение уравнения методом сил

$$\frac{72}{EI} \cdot X_1 - \frac{66}{EI} = 0;$$

$$X_1 = \frac{66 \cdot EI}{EI \cdot 72} = \frac{66}{72} = \frac{11}{12} = 0,9167 \text{ (кН)}.$$

9) Исправленная эпюра $M_1^и = \bar{M}_1 \cdot X_1$ (рис. 4.4).

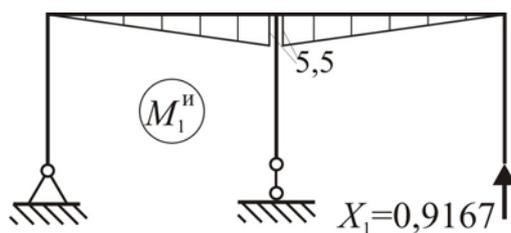


Рис. 4.4. Исправленная эпюра

10) Окончательная эпюра моментов и кинематическая проверка.

Окончательная эпюра моментов (рис. 4.5) строится в заданной системе и получается путем сложения грузовой и исправленной эпюр:

$$M_{ок} = M_p + M_1^и.$$

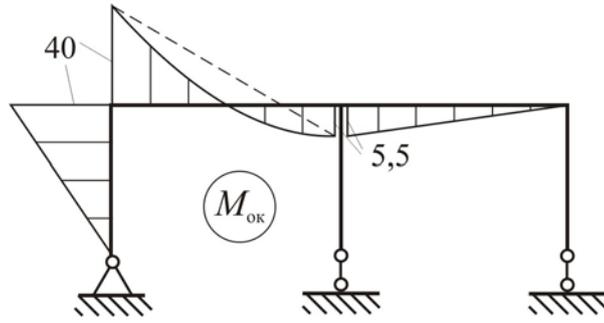


Рис. 4.5. Окончательная эпюра моментов

Кинематическая проверка заключается в равенстве нулю возможных перемещений в заданной системе по направлению отброшенных связей.

$$\Delta = \sum \int \frac{M_{ок} \cdot \bar{M}_1}{EI} dx = \frac{1}{2EI} \cdot \frac{6}{6} \cdot (2 \cdot 0 \cdot 40 + 2 \cdot 6 \cdot 5,5 + 0 \cdot 5,5 - 6 \cdot 40) +$$

$$+ \frac{1}{2EI} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2 \cdot 6^3}{8} \cdot \frac{1}{2} \cdot 6 + \frac{1}{2EI} \cdot \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 6 \cdot \frac{2}{3} \cdot 5,5 = 0,$$

$$0=0, \text{ верно.}$$

11) Эпюры поперечных и продольных сил, статическая проверка.

Эпюра поперечных сил (рис. 4.6, а) строится по эпюре изгибающих моментов (рис. 4.5); эпюра продольных сил (рис. 4.6, б) строится по эпюре поперечных сил методом вырезания узлов.

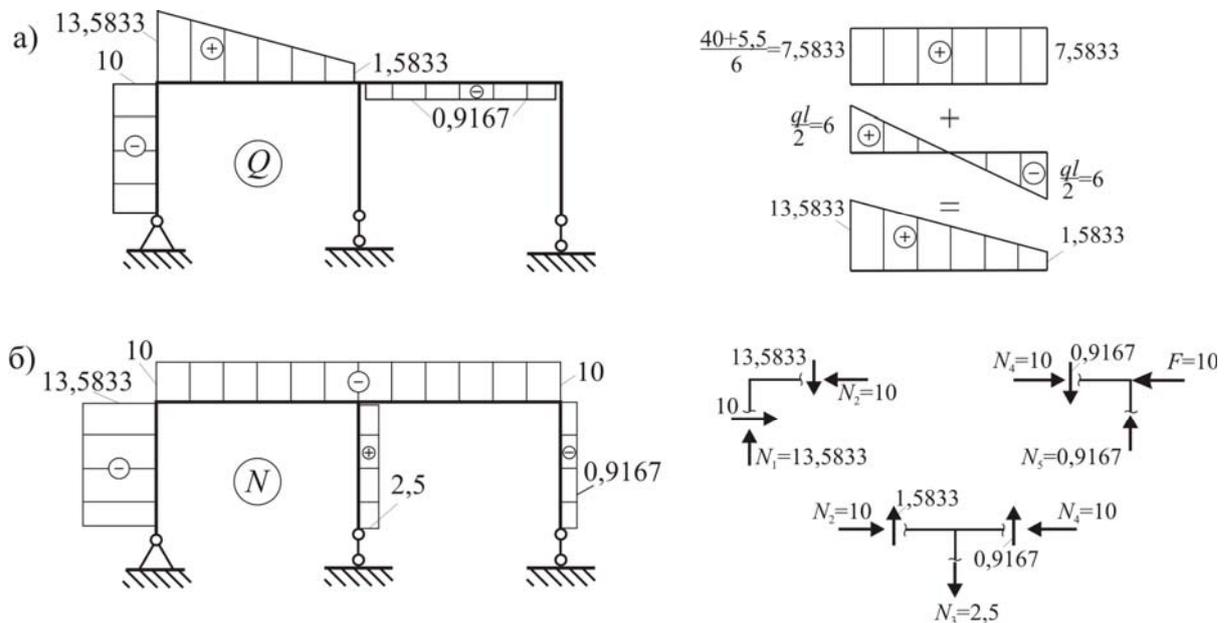


Рис. 4.6. Эпюры поперечных и продольных сил

Статическая проверка (рис. 4.7):

$$\sum F_{kx} = 0: 10 - 10 = 0; 0=0, \text{ верно.}$$

$$\sum F_{ky} = 0: 13,5833 - 2 \cdot 6 - 2,5 + 0,9167 = 0; 0=0, \text{ верно.}$$

$$\sum M_A = 0: -2 \cdot 6 \cdot 3 + 10 \cdot 4 - 2,5 \cdot 9 + 0,9167 \cdot 12 = 0; 0=0, \text{ верно.}$$

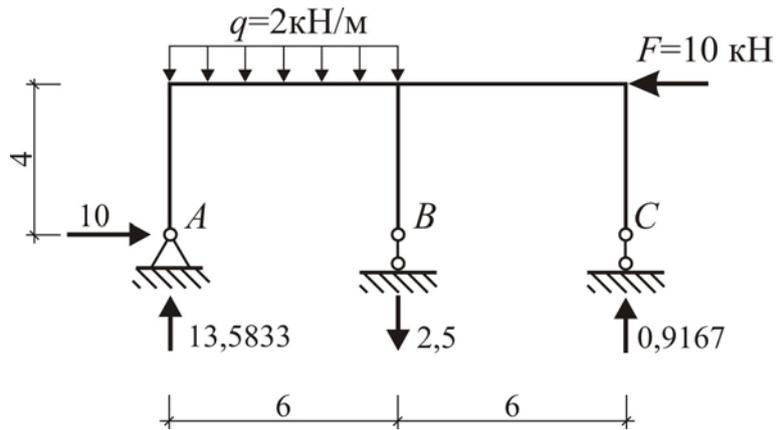


Рис. 4.7. Статическая проверка

4.2. Расчет статически неопределимой системы с двумя неизвестными методом сил

Пример №1.

Рассчитать статически неопределимую раму (рис. 4.8а) методом сил.

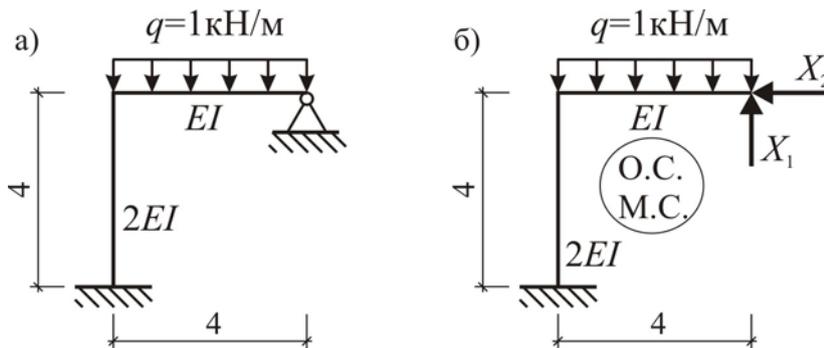


Рис. 4.8. Расчетная схема рамы и основная система метода сил

1) Количество неизвестных (количество лишних связей):

$$\lambda = -W = -3D + 2Ш + C_0 = -3 \cdot 1 + 2 \cdot 0 + 5 = 2.$$

2) Основная система метода сил (О.С.М.С.) показана на рис. 4.8, б.

3) Система канонических уравнений метода сил:

$$\left. \begin{aligned} \delta_{11} \cdot X_1 + \delta_{12} \cdot X_2 + \Delta_{1p} &= 0 \\ \delta_{21} \cdot X_1 + \delta_{22} \cdot X_2 + \Delta_{2p} &= 0 \end{aligned} \right\}.$$

4) Единичные эпюры (рис. 4.9, а, б).

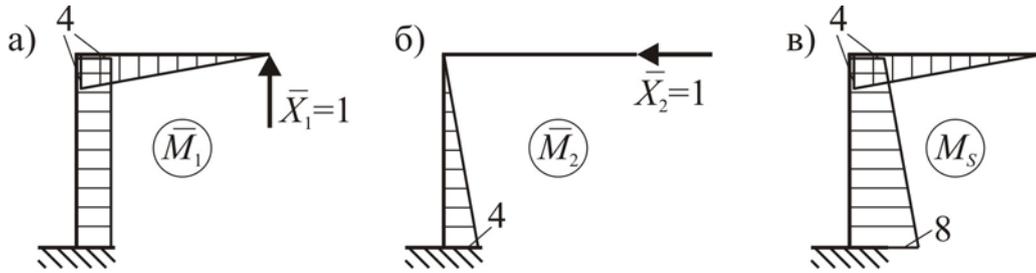


Рис. 4.9. Единичные и суммарная эпюры

5) Вычисление коэффициентов при неизвестных и их проверка.

$$\delta_{11} = \sum \int \frac{\bar{M}_1 \cdot \bar{M}_1}{EI} dx = \frac{1}{2EI} \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 + \frac{1}{EI} \cdot \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 4 \cdot \frac{2}{3} \cdot 4 = \frac{53,333}{EI};$$

$$\delta_{12} = \delta_{21} = \sum \int \frac{\bar{M}_1 \cdot \bar{M}_2}{EI} dx = \frac{1}{2EI} \cdot 4 \cdot 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot 4 = \frac{16}{EI};$$

$$\delta_{22} = \sum \int \frac{\bar{M}_2 \cdot \bar{M}_2}{EI} dx = \frac{1}{2EI} \cdot \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 4 \cdot \frac{2}{3} \cdot 4 = \frac{10,667}{EI}.$$

Для проверки коэффициентов используется суммарная эпюра (рис. 4.9, в), которая получается путем сложения единичных эпюр: $M_S = \bar{M}_1 + \bar{M}_2$.

Проверка правильности вычисления коэффициентов при неизвестных:

$$\sum \int \frac{M_S \cdot M_S}{EI} dx = \sum \delta_{ij}.$$

$$\sum \int \frac{M_S \cdot M_S}{EI} dx = \frac{1}{2EI} \cdot \frac{4}{6} \cdot (2 \cdot 4 \cdot 4 + 2 \cdot 8 \cdot 8 + 4 \cdot 8 + 8 \cdot 4) + \frac{1}{EI} \cdot \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 4 \cdot \frac{2}{3} \cdot 4 = \frac{96}{EI};$$

$$\sum \delta_{ij} = \delta_{11} + 2 \cdot \delta_{12} + \delta_{22} = \frac{53,333}{EI} + 2 \cdot \frac{16}{EI} + \frac{10,667}{EI} = \frac{96}{EI};$$

$$\sum \int \frac{M_S \cdot M_S}{EI} dx = \sum \delta_{ij} = \frac{96}{EI}, \text{ верно.}$$

6) Грузовая эпюра (рис. 4.10).

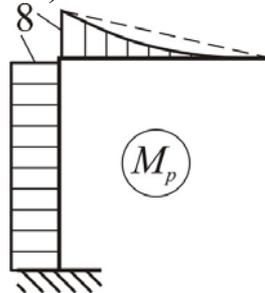


Рис. 4.10. Грузовая эпюра

7) Вычисление свободных членов уравнений и их проверка.

$$\Delta_{1p} = \sum \int \frac{\bar{M}_1 \cdot M_p}{EI} dx = -\frac{1}{2EI} \cdot 8 \cdot 4 \cdot 4 - \frac{1}{EI} \cdot \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 4 \cdot \frac{2}{3} \cdot 4 + \frac{1}{EI} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1 \cdot 4^3}{8} \cdot \frac{1}{2} \cdot 4 = -\frac{96}{EI},$$

$$\Delta_{2p} = \sum \int \frac{\bar{M}_2 \cdot M_p}{EI} dx = -\frac{1}{2EI} \cdot 8 \cdot 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot 4 = -\frac{32}{EI}.$$

Проверка правильности вычисления свободных членов:

$$\sum \int \frac{M_p \cdot M_S}{EI} dx = \sum \Delta_{ip}.$$

$$\sum \int \frac{M_p \cdot M_S}{EI} dx = \frac{1}{2EI} \cdot \frac{4}{6} \cdot (-2 \cdot 4 \cdot 8 - 2 \cdot 8 \cdot 8 - 8 \cdot 8 - 8 \cdot 4) - \frac{1}{EI} \cdot \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 4 \cdot \frac{2}{3} \cdot 4 + \frac{1}{EI} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1 \cdot 4^3}{8} \cdot \frac{1}{2} \cdot 4 = -\frac{128}{EI};$$

$$\sum \Delta_{ip} = \Delta_{1p} + \Delta_{2p} = -\frac{96}{EI} - \frac{32}{EI} = -\frac{128}{EI};$$

$$\sum \int \frac{M_p \cdot M_S}{EI} dx = \sum \Delta_{ip} = -\frac{128}{EI}, \text{ верно.}$$

8) Решение системы уравнений метода сил

$$\left. \begin{aligned} \frac{53,333}{EI} \cdot X_1 + \frac{16}{EI} \cdot X_2 - \frac{96}{EI} &= 0 \\ \frac{16}{EI} \cdot X_1 + \frac{10,667}{EI} \cdot X_2 - \frac{32}{EI} &= 0 \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} \times EI \\ \times 1,5 EI \end{array};$$

$$\left. \begin{aligned} 53,333 \cdot X_1 + 16 \cdot X_2 - 96 &= 0 \\ 24 \cdot X_1 + 16 \cdot X_2 - 48 &= 0 \end{aligned} \right\};$$

$$29,333 \cdot X_1 + 0 \cdot X_2 - 48 = 0;$$

$$X_1 = \frac{48}{29,333} = 1,6364 \text{ (кН)};$$

$$X_2 = \frac{-24 \cdot X_1 + 48}{16} = \frac{-24 \cdot 1,6364 + 48}{16} = 0,5455 \text{ (кН)}.$$

9) Исправленные эпюры (рис. 4.11а, б): $M_1^И = \bar{M}_1 \cdot X_1$, $M_2^И = \bar{M}_2 \cdot X_2$.

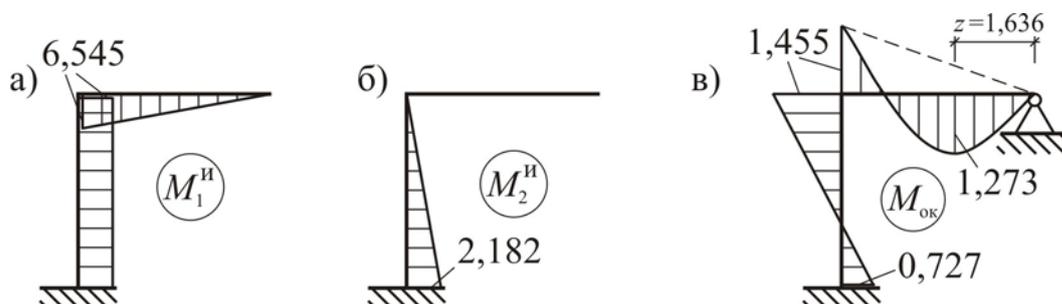


Рис. 4.11. Исправленные и окончательная эпюры

10) Окончательная эпюра моментов и кинематическая проверка.

Окончательная эпюра моментов (рис. 4.11в) строится в заданной системе и получается путем сложения грузовой и исправленных эпюр:

$$M_{ок} = M_p + M_1^И + M_2^И.$$

Кинематическая проверка заключается в равенстве нулю возможных перемещений в заданной системе по направлению отброшенных связей.

$$\Delta = \sum \int \frac{M_{ок} \cdot M_S}{EI} dx = \frac{1}{2EI} \cdot \frac{4}{6} \cdot (2 \cdot 0,727 \cdot 8 - 2 \cdot 1,455 \cdot 4 + 0,727 \cdot 4 - 1,455 \cdot 8) -$$

$$-\frac{1}{EI} \cdot \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 1,455 \cdot \frac{2}{3} \cdot 4 + \frac{1}{EI} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1 \cdot 4^3}{8} \cdot \frac{1}{2} \cdot 4 = -0,003;$$

$$-0,003 \approx 0, \text{ верно.}$$

11) Эпюры поперечных и продольных сил, статическая проверка.

Эпюра поперечных сил (рис. 4.12а) строится по эпюре изгибающих моментов (рис. 4.11в); эпюра продольных сил (рис. 4.12б) строится по эпюре поперечных сил методом вырезания узлов.

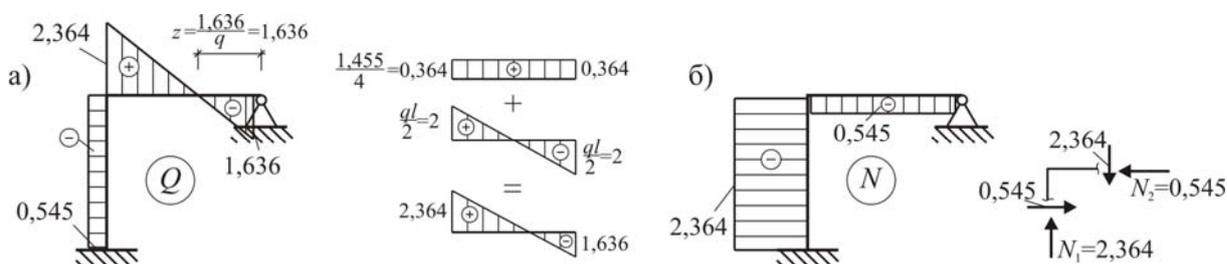


Рис. 4.12. Эпюры поперечных и продольных сил

Статическая проверка (рис. 4.13):

$$\sum F_{kx} = 0: 0,545 - 0,545 = 0; 0=0, \text{ верно.}$$

$$\sum F_{ky} = 0: 2,364 - 1 \cdot 4 + 1,636 = 0; 0=0, \text{ верно.}$$

$$\sum M_A = 0: -0,727 - 1 \cdot 4 \cdot 2 + 1,636 \cdot 4 + 0,545 \cdot 4 = -0,003; -0,003 \approx 0, \text{ верно.}$$

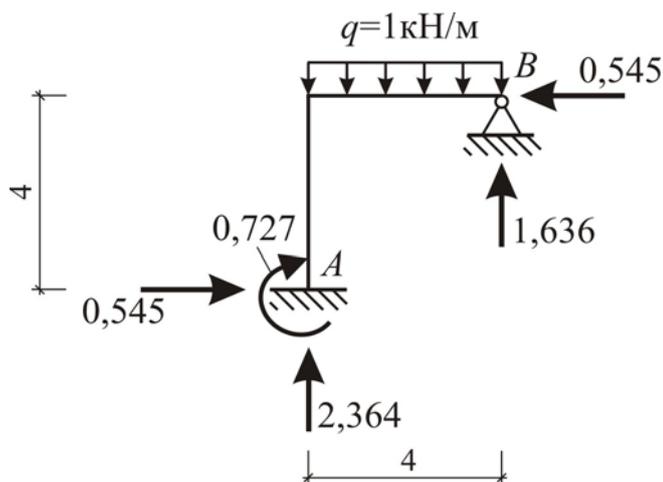


Рис. 4.13. Статическая проверка

4.3. Использование симметрии при расчете методом сил

Стержневая система является симметричной, если симметричны не только оси и опорные закрепления (геометрическая симметрия), но и жесткости (упругая симметрия). При этом внешняя нагрузка может быть и несимметричной.

При выборе основной системы неизвестные следует выбирать в виде симметричных и обратносимметричных сил. Симметричные неизвестные создают симметричные единичные эпюры моментов, а обратносимметричные неизвестные – кососимметричные единичные эпюры. Такие эпюры обладают свойством взаимной ортогональности, т.е. результат их перемножения равен нулю:

$$\delta_{ij} = \sum \int \frac{\bar{M}_i^{\text{сим.}} \cdot \bar{M}_j^{\text{кососим.}}}{EI} dx = 0$$

Пример №1.

Рассчитать статически неопределимую раму методом сил с использованием симметрии (рис. 4.14, а).

Ортогонализация эпюр может достигаться путем расположения неизвестных метода сил на оси симметрии рамы.

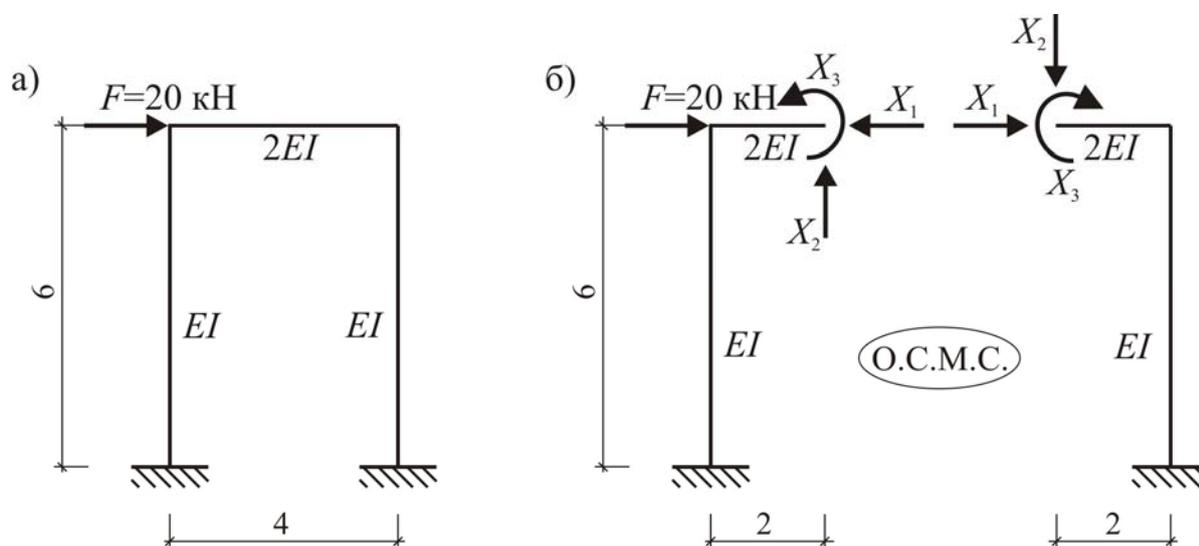


Рис. 4.14. Расчетная схема рамы и основная система метода сил

1) Количество неизвестных (количество лишних связей):

$$\lambda = -W = -3Д + 2Ш + C_0 = -3 \cdot 1 + 2 \cdot 0 + 6 = 3.$$

2) Основная система метода сил (О.С.М.С.) получена рассечением рамы по оси симметрии (рис. 4.14б). Здесь: X_1 и X_3 – симметричные неизвестные, X_2 – обратносимметричные неизвестные.

3) Система канонических уравнений метода сил:

$$\left. \begin{aligned} \delta_{11} \cdot X_1 + \delta_{12} \cdot X_2 + \delta_{13} \cdot X_3 + \Delta_{1p} &= 0 \\ \delta_{21} \cdot X_1 + \delta_{22} \cdot X_2 + \delta_{23} \cdot X_3 + \Delta_{2p} &= 0 \\ \delta_{31} \cdot X_1 + \delta_{32} \cdot X_2 + \delta_{33} \cdot X_3 + \Delta_{3p} &= 0 \end{aligned} \right\}$$

4) Единичные эпюры (рис. 4.15, а, б, в).

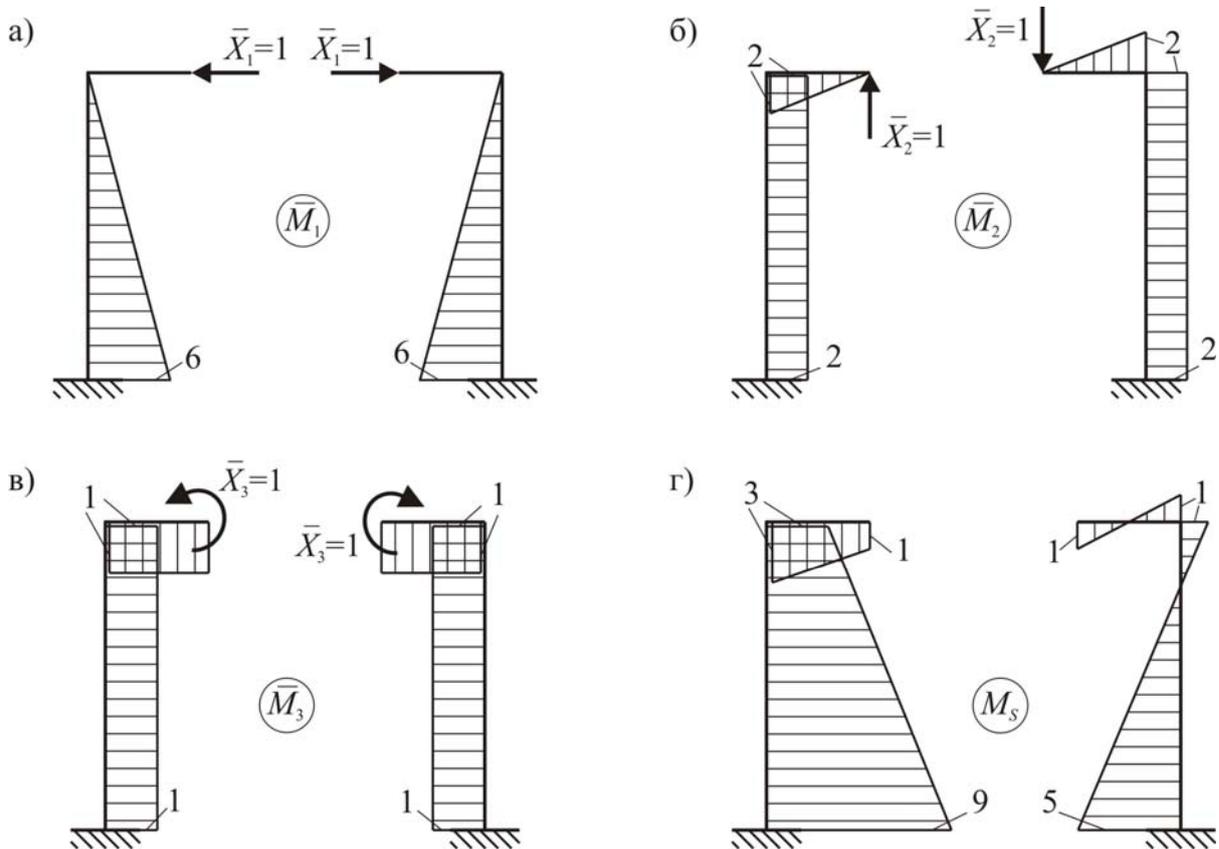


Рис. 4.15. Единичные и суммарная эпюры

5) Вычисление коэффициентов при неизвестных и их проверка.

$$\delta_{11} = \sum \int \frac{\bar{M}_1 \cdot \bar{M}_1}{EI} dx = \frac{1}{EI} \cdot \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 6 \cdot \frac{2}{3} \cdot 6 \times 2 = \frac{144}{EI};$$

$$\delta_{12} = \delta_{21} = \sum \int \frac{\bar{M}_1 \cdot \bar{M}_2}{EI} dx = \frac{1}{EI} \cdot \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 6 \cdot 2 - \frac{1}{EI} \cdot \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 6 \cdot 2 = 0;$$

$$\delta_{13} = \delta_{31} = \sum \int \frac{\bar{M}_1 \cdot \bar{M}_3}{EI} dx = \frac{1}{EI} \cdot \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 6 \cdot 1 + \frac{1}{EI} \cdot \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 6 \cdot 1 = \frac{36}{EI};$$

$$\delta_{22} = \sum \int \frac{\bar{M}_2 \cdot \bar{M}_2}{EI} dx = \frac{1}{EI} \cdot 2 \cdot 6 \cdot 2 \times 2 + \frac{1}{2EI} \cdot \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 2 \cdot \frac{2}{3} \cdot 2 \times 2 = \frac{50,667}{EI};$$

$$\delta_{23} = \delta_{32} = \sum \int \frac{\bar{M}_2 \cdot \bar{M}_3}{EI} dx = \frac{1}{EI} \cdot 2 \cdot 6 \cdot 1 + \frac{1}{2EI} \cdot \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 2 \cdot 1 - \frac{1}{EI} \cdot 2 \cdot 6 \cdot 1 -$$

$$- \frac{1}{2EI} \cdot \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 2 \cdot 1 = 0;$$

$$\delta_{33} = \sum \int \frac{\bar{M}_3 \cdot \bar{M}_3}{EI} dx = \frac{1}{EI} \cdot 1 \cdot 6 \cdot 1 \times 2 + \frac{1}{2EI} \cdot 1 \cdot 2 \cdot 1 \cdot \times 2 = \frac{14}{EI}.$$

Коэффициенты δ_{12} , δ_{21} , δ_{23} , δ_{32} как результаты перемножения симметричных и кососимметричных эпюр равны нулю.

Суммарная эпюра показана на рис. 4.15, г. Проверка правильности вычисления коэффициентов при неизвестных:

$$\sum \int \frac{M_S \cdot M_S}{EI} dx = \sum \delta_{ij}.$$

$$\sum \int \frac{M_S \cdot M_S}{EI} dx = \frac{1}{EI} \cdot \frac{6}{6} \cdot (2 \cdot 9 \cdot 9 + 2 \cdot 3 \cdot 3 + 3 \cdot 9 + 9 \cdot 3) + \frac{1}{2EI} \cdot \frac{2}{6} \cdot (2 \cdot 3 \cdot 3 + 2 \cdot 1 \cdot 1 +$$

$$+ 3 \cdot 1 + 1 \cdot 3) + \frac{1}{2EI} \cdot \frac{2}{6} \cdot (2 \cdot 1 \cdot 1 + 2 \cdot 1 \cdot 1 - 1 \cdot 1 - 1 \cdot 1) + \frac{1}{EI} \cdot \frac{6}{6} \cdot (2 \cdot 1 \cdot 1 + 2 \cdot 5 \cdot 5 -$$

$$- 1 \cdot 5 - 5 \cdot 1) = \frac{280,667}{EI};$$

$$\sum \delta_{ij} = \delta_{11} + \delta_{22} + \delta_{33} + 2 \cdot \delta_{12} + 2 \cdot \delta_{13} + 2 \cdot \delta_{23} =$$

$$= \frac{144}{EI} + \frac{50,667}{EI} + \frac{14}{EI} + 2 \cdot 0 + 2 \cdot \frac{36}{EI} + 2 \cdot 0 = \frac{280,667}{EI}$$

$$\sum \int \frac{M_S \cdot M_S}{EI} dx = \sum \delta_{ij} = \frac{280,667}{EI}, \text{ верно.}$$

6) Грузовая эпюра (рис. 4.16).

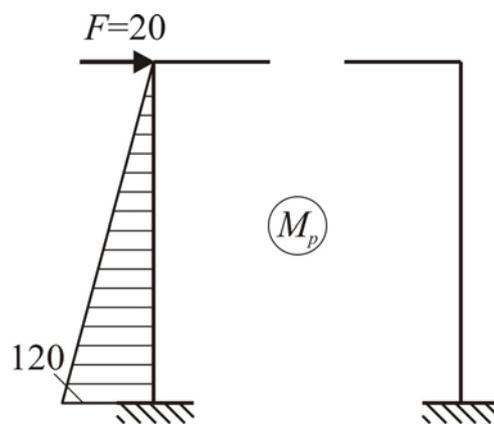


Рис. 4.16. Грузовая эпюра

7) Вычисление свободных членов уравнений и их проверка.

$$\Delta_{1p} = \sum \int \frac{\bar{M}_1 \cdot M_p}{EI} dx = -\frac{1}{EI} \cdot \frac{1}{2} \cdot 120 \cdot 6 \cdot \frac{2}{3} \cdot 6 = -\frac{1440}{EI};$$

$$\Delta_{2p} = \sum \int \frac{\bar{M}_2 \cdot M_p}{EI} dx = -\frac{1}{EI} \cdot \frac{1}{2} \cdot 120 \cdot 6 \cdot 2 = -\frac{720}{EI};$$

$$\Delta_{3p} = \sum \int \frac{\bar{M}_3 \cdot M_p}{EI} dx = -\frac{1}{EI} \cdot \frac{1}{2} \cdot 120 \cdot 6 \cdot 1 = -\frac{360}{EI}.$$

Проверка правильности вычисления свободных членов:

$$\sum \int \frac{M_p \cdot M_S}{EI} dx = \sum \Delta_{ip}.$$

$$\sum \int \frac{M_p \cdot M_S}{EI} dx = \frac{1}{EI} \cdot \frac{6}{6} \cdot (-2 \cdot 0 \cdot 3 - 2 \cdot 120 \cdot 9 - 0 \cdot 9 - 120 \cdot 3) = -\frac{2520}{EI};$$

$$\sum \Delta_{ip} = \Delta_{1p} + \Delta_{2p} + \Delta_{3p} = -\frac{1440}{EI} - \frac{720}{EI} - \frac{360}{EI} = -\frac{2520}{EI};$$

$$\sum \int \frac{M_p \cdot M_S}{EI} dx = \sum \Delta_{ip} = -\frac{2520}{EI}, \text{ верно.}$$

8) Решение системы уравнений метода сил. Система трех уравнений с тремя неизвестными за счет равенства нулю коэффициентов δ_{12} , δ_{21} , δ_{23} , δ_{32} преобразуется в систему двух уравнений и одно независимое уравнение:

$$\left. \begin{aligned} \frac{144}{EI} \cdot X_1 + 0 \cdot X_2 + \frac{36}{EI} \cdot X_3 - \frac{1440}{EI} = 0 \\ 0 \cdot X_1 + \frac{50,667}{EI} \cdot X_2 + 0 \cdot X_3 - \frac{720}{EI} = 0 \\ \frac{36}{EI} \cdot X_1 + 0 \cdot X_2 + \frac{14}{EI} \cdot X_3 - \frac{360}{EI} = 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left. \begin{aligned} \frac{144}{EI} \cdot X_1 + \frac{36}{EI} \cdot X_3 - \frac{1440}{EI} = 0 \\ \frac{36}{EI} \cdot X_1 + \frac{14}{EI} \cdot X_3 - \frac{360}{EI} = 0 \\ \frac{50,667}{EI} \cdot X_2 - \frac{720}{EI} = 0 \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} \times EI \\ \times 4EI \end{array};$$

Из независимого уравнения получаем:

$$X_2 = \frac{720}{50,667} = 14,2105;$$

Решаем систему двух уравнений:

$$\left. \begin{aligned} 144 \cdot X_1 + 36 \cdot X_3 - 1440 = 0 \\ 144 \cdot X_1 + 56 \cdot X_3 - 1440 = 0 \end{aligned} \right\};$$

$$0 \cdot X_1 - 20 \cdot X_3 + 0 = 0; \quad -20 \cdot X_3 = 0$$

$$X_3 = 0;$$

$$X_1 = \frac{-36 \cdot X_3 + 1440}{144} = \frac{-36 \cdot 0 + 1440}{144} = 10.$$

$$\begin{cases} X_1 = 10 \\ X_2 = 14,2105 \\ X_3 = 0 \end{cases}$$

9) Исправленные эпюры (рис. 4.17а, б, в): $M_1^n = \bar{M}_1 \cdot X_1$, $M_2^n = \bar{M}_2 \cdot X_2$, $M_3^n = \bar{M}_3 \cdot X_3$.

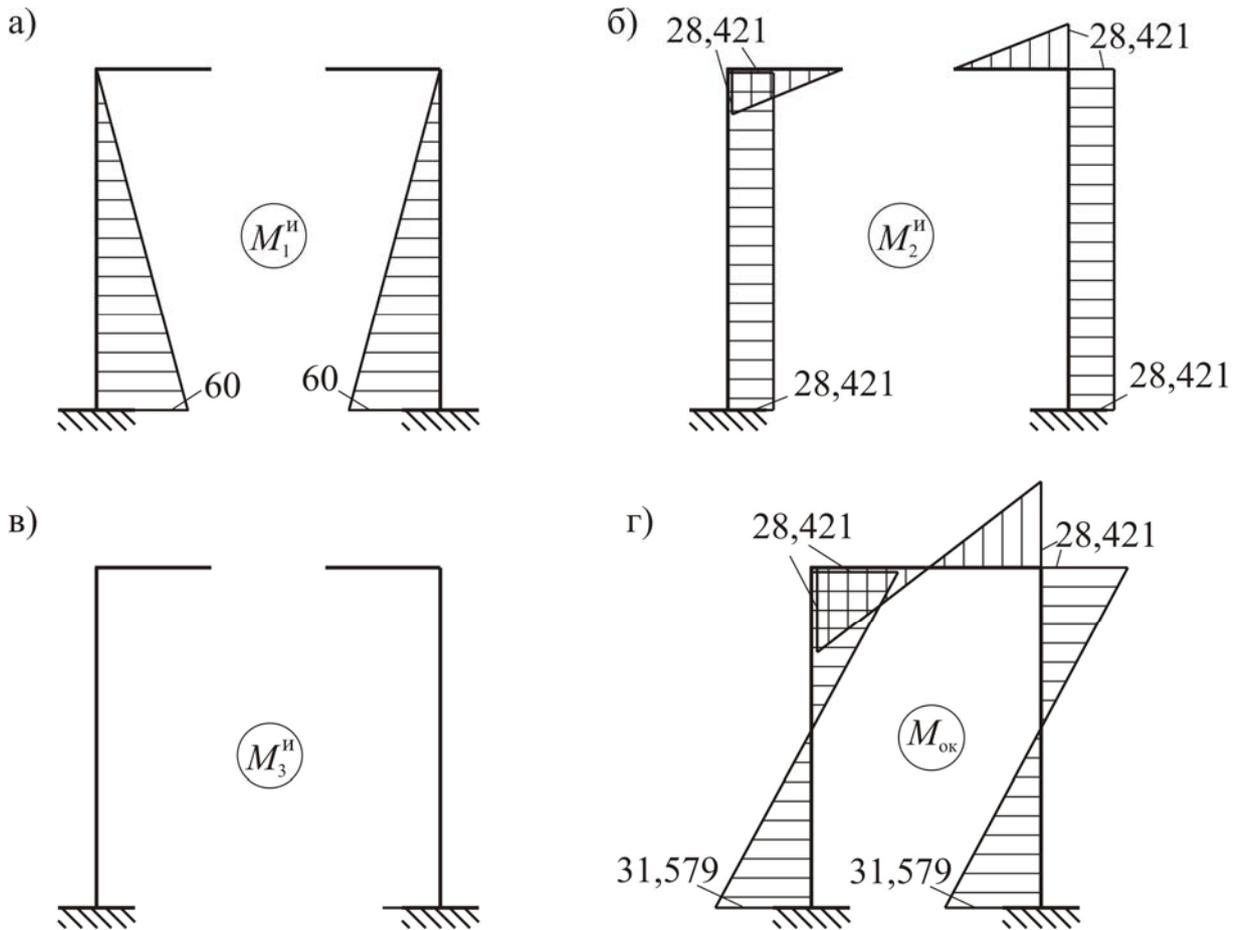


Рис. 4.17. Исправленные и окончательная эпюры

10) Окончательная эпюра моментов и кинематическая проверка.

Окончательная эпюра моментов (рис. 4.17г) строится в заданной системе и получается путем сложения грузовой и исправленных эпюр:

$$M_{\text{ок}} = M_p + M_1^{\text{И}} + M_2^{\text{И}} + M_3^{\text{И}}.$$

Кинематическая проверка:

$$\begin{aligned} \Delta = \sum \int \frac{M_{\text{ок}} \cdot M_S}{EI} dx &= \frac{1}{EI} \cdot \frac{6}{6} \cdot (-2 \cdot 31,579 \cdot 9 + 2 \cdot 28,421 \cdot 3 - 31,579 \cdot 3 + \\ &+ 28,421 \cdot 9) + \frac{1}{2EI} \cdot \frac{2}{6} \cdot (2 \cdot 28,421 \cdot 3 + 28,421 \cdot 1) + \\ &+ \frac{1}{2EI} \cdot \frac{2}{6} \cdot (2 \cdot 28,421 \cdot 1 - 28,421 \cdot 1) + \\ &+ \frac{1}{EI} \cdot \frac{6}{6} \cdot (2 \cdot 31,579 \cdot 5 + 2 \cdot 28,421 \cdot 1 - 31,579 \cdot 1 - 28,421 \cdot 5) = -0,001; \end{aligned}$$

$-0,001 \approx 0$, верно.

11) Эпюры поперечных и продольных сил (рис. 4.18), статическая проверка (рис. 4.19).

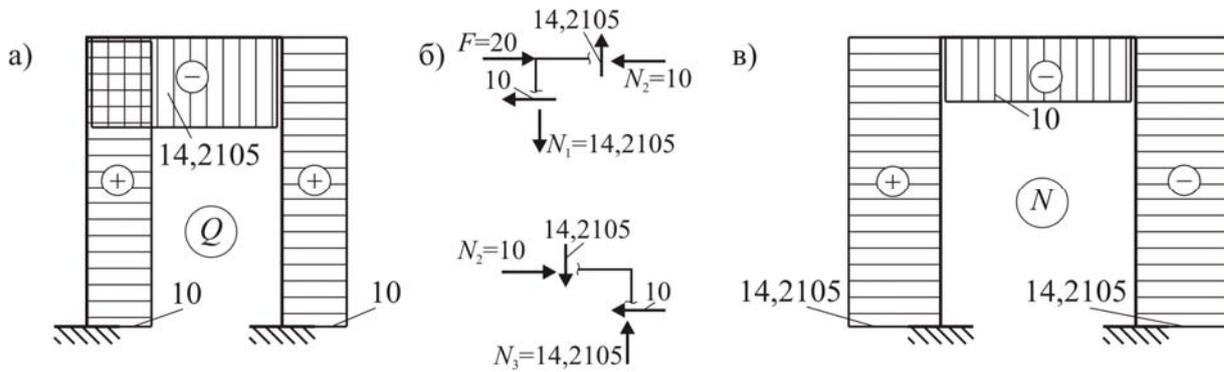


Рис. 4.18. Эпюра поперечных сил, схемы вырезанных узлов, эпюра продольных сил

Статическая проверка (рис. 4.19):

$$\sum F_{kx} = 0: 20 - 10 - 10 = 0; 0 = 0, \text{ верно.}$$

$$\sum F_{ky} = 0: -14,2105 + 14,2105 = 0; 0 = 0, \text{ верно.}$$

$$\sum M_A = 0: 31,579 + 31,579 + 14,2105 \cdot 4 - 20 \cdot 6 = 0; 0 = 0, \text{ верно.}$$

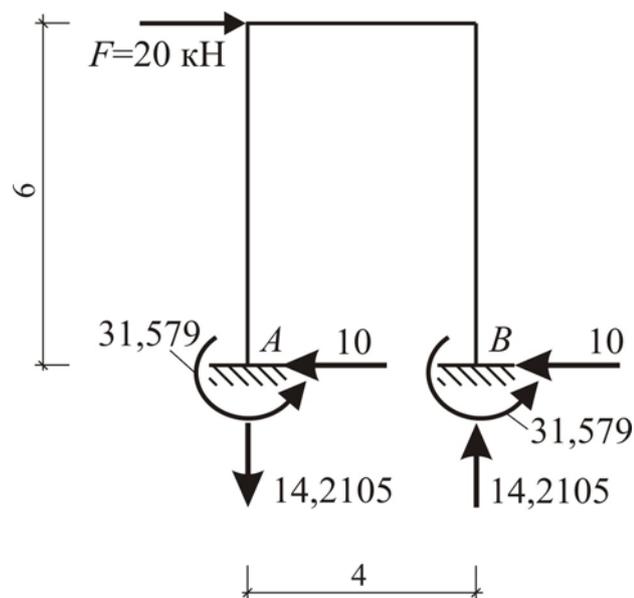


Рис. 4.19. Статическая проверка

Пример №2

Рассчитать статически неопределимую раму методом сил с использованием симметрии (рис. 4.20, а).

В тех случаях, когда нельзя расположить неизвестные на оси симметрии, ортогонализация эпюр достигается с помощью группировки неизвестных метода сил.

1) Количество неизвестных (количество лишних связей):

$$\lambda = -W = -3Д + 2Ш + C_0 = -3 \cdot 1 + 2 \cdot 0 + 5 = 2.$$

2) Основная система метода сил (О.С.М.С.) получена группировкой неизвестных (рис. 4.20, б). Здесь:
$$\begin{cases} X_1 = z_1 + z_2 \\ X_2 = z_1 - z_2 \end{cases}$$

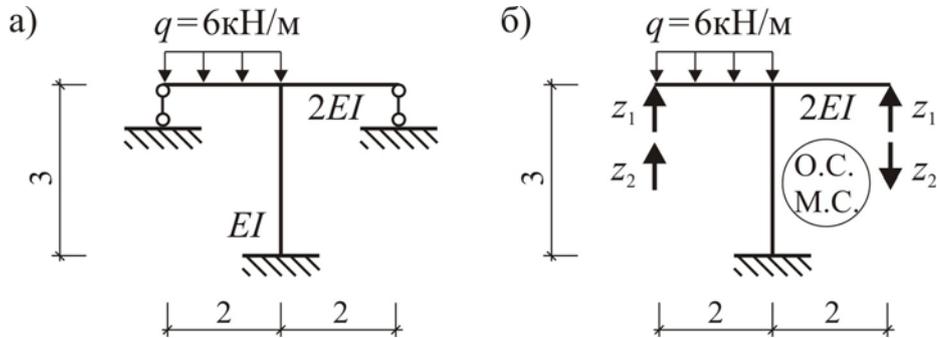


Рис. 4.20. Расчетная схема рамы и основная система метода сил

3) Система канонических уравнений метода сил:

$$\begin{cases} \delta_{11} \cdot z_1 + \delta_{12} \cdot z_2 + \Delta_{1p} = 0 \\ \delta_{21} \cdot z_1 + \delta_{22} \cdot z_2 + \Delta_{2p} = 0 \end{cases}$$

4) Единичные эпюры (рис. 4.21, а, б).

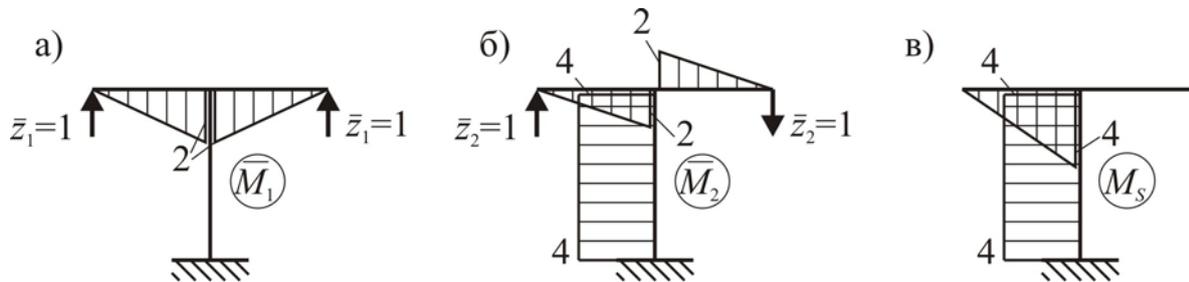


Рис. 4.21. Единичные и суммарная эпюры

5) Вычисление коэффициентов при неизвестных и их проверка.

Т.к. z_1 – симметричные неизвестные, z_2 – антисимметричные неизвестные, то $\delta_{12} = \delta_{21} = 0$

$$\delta_{11} = \sum \int \frac{\bar{M}_1 \cdot \bar{M}_1}{EI} dx = \frac{1}{2EI} \cdot \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 2 \cdot \frac{2}{3} \cdot 2 \times 2 = \frac{2,667}{EI};$$

$$\delta_{22} = \sum \int \frac{\bar{M}_2 \cdot \bar{M}_2}{EI} dx = \frac{1}{2EI} \cdot \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 2 \cdot \frac{2}{3} \cdot 2 \times 2 + \frac{1}{EI} \cdot 4 \cdot 3 \cdot 4 = \frac{50,667}{EI}.$$

Суммарная эпюра показана на рис. 4.21, в. Проверка правильности вычисления коэффициентов при неизвестных:

$$\sum \int \frac{M_s \cdot M_s}{EI} dx = \sum \delta_{ij}.$$

$$\sum \int \frac{M_s \cdot M_s}{EI} dx = \frac{1}{2EI} \cdot \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 2 \cdot \frac{2}{3} \cdot 4 + \frac{1}{EI} \cdot 4 \cdot 3 \cdot 4 = \frac{53,333}{EI};$$

$$\sum \delta_{ij} = \delta_{11} + 2 \cdot \delta_{12} + \delta_{22} = \frac{2,667}{EI} + 2 \cdot 0 + \frac{50,667}{EI} = \frac{53,334}{EI};$$

$$\sum \int \frac{M_S \cdot M_S}{EI} dx = \sum \delta_{ij} = \frac{53,333}{EI}, \text{ верно.}$$

б) Грузовая эпюра (рис. 4.22).

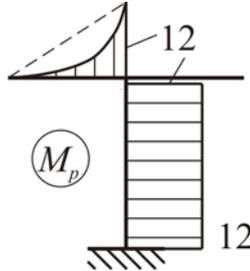


Рис. 4.22. Грузовая эпюра

7) Вычисление свободных членов уравнений и их проверка.

$$\Delta_{1p} = \sum \int \frac{\bar{M}_1 \cdot M_p}{EI} dx = -\frac{1}{2EI} \cdot \frac{1}{2} \cdot 12 \cdot 2 \cdot \frac{2}{3} \cdot 2 + \frac{1}{2EI} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{6 \cdot 2^3}{8} \cdot \frac{1}{2} \cdot 2 = -\frac{6}{EI};$$

$$\Delta_{2p} = \sum \int \frac{\bar{M}_2 \cdot M_p}{EI} dx = -\frac{1}{2EI} \cdot \frac{1}{2} \cdot 12 \cdot 2 \cdot \frac{2}{3} \cdot 2 + \frac{1}{2EI} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{6 \cdot 2^3}{8} \cdot \frac{1}{2} \cdot 2 -$$

$$-\frac{1}{EI} \cdot 12 \cdot 3 \cdot 4 = -\frac{150}{EI}.$$

Проверка правильности вычисления свободных членов:

$$\sum \int \frac{M_p \cdot M_S}{EI} dx = \sum \Delta_{ip}.$$

$$\sum \int \frac{M_p \cdot M_S}{EI} dx = -\frac{1}{2EI} \cdot \frac{1}{2} \cdot 12 \cdot 2 \cdot \frac{2}{3} \cdot 4 + \frac{1}{2EI} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{6 \cdot 2^3}{8} \cdot \frac{1}{2} \cdot 4 - \frac{1}{EI} \cdot 12 \cdot 3 \cdot 4 = -\frac{156}{EI};$$

$$\sum \Delta_{ip} = \Delta_{1p} + \Delta_{2p} = -\frac{6}{EI} - \frac{150}{EI} = -\frac{156}{EI};$$

$$\sum \int \frac{M_p \cdot M_S}{EI} dx = \sum \Delta_{ip} = -\frac{156}{EI}, \text{ верно.}$$

8) Решение системы уравнений метода сил, благодаря равенству нулю побочных коэффициентов, сводится к решению двух независимых уравнений.

$$\left. \begin{aligned} \frac{2,667}{EI} \cdot X_1 + 0 \cdot X_2 - \frac{6}{EI} &= 0 \\ 0 \cdot X_1 + \frac{50,667}{EI} \cdot X_2 - \frac{150}{EI} &= 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left. \begin{aligned} \frac{2,667}{EI} \cdot X_1 - \frac{6}{EI} &= 0 \\ \frac{50,667}{EI} \cdot X_2 - \frac{150}{EI} &= 0 \end{aligned} \right\};$$

$$X_1 = \frac{6 \cdot EI}{EI \cdot 2,667} = 2,25;$$

$$X_2 = \frac{150 \cdot EI}{EI \cdot 50,667} = 2,9605.$$

9) Исправленные эпюры (рис. 4.23а, б): $M_1^и = \bar{M}_1 \cdot X_1$, $M_2^и = \bar{M}_2 \cdot X_2$.

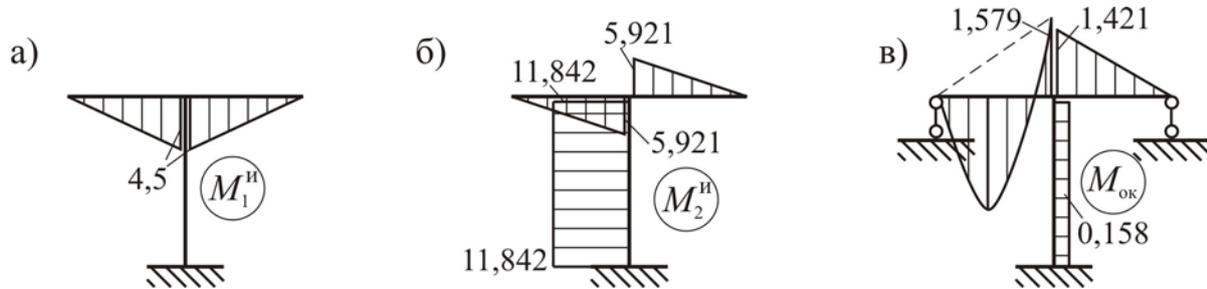


Рис. 4.23. Исправленные и окончательная эпюры

10) Окончательная эпюра моментов и кинематическая проверка.

Окончательная эпюра моментов (рис. 4.23, в) строится в заданной системе и получается путем сложения грузовой и исправленных эпюр:

$$M_{ок} = M_p + M_1^и + M_2^и.$$

Кинематическая проверка:

$$\Delta = \sum \int \frac{M_{ок} \cdot M_S}{EI} dx = -\frac{1}{2EI} \cdot \frac{1}{2} \cdot 1,579 \cdot 2 \cdot \frac{2}{3} \cdot 4 + \frac{1}{2EI} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{6 \cdot 2^3}{8} \cdot \frac{1}{2} \cdot 4 -$$

$$-\frac{1}{EI} \cdot 0,158 \cdot 3 \cdot 4 = -0,001;$$

$$-0,001 \approx 0, \text{ верно.}$$

11) Эпюры поперечных и продольных сил (рис. 4.24), статическая проверка.

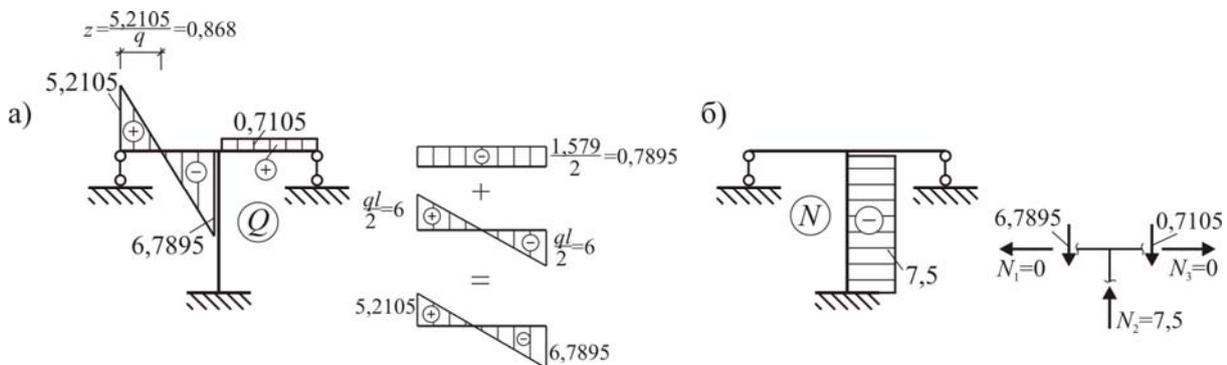


Рис. 4.24. Эпюры поперечных и продольных сил

Статическая проверка (рис. 4.25):

$$\sum F_{kx} = 0: 0 = 0; \text{ верно.}$$

$$\sum F_{ky} = 0: 5,2105 + 7,5 - 0,7105 - 6 \cdot 2 = 0; 0=0, \text{ верно.}$$

$$\sum M_A = 0: -6 \cdot 2 \cdot 1 - 0,158 + 7,5 \cdot 2 - 0,7105 \cdot 4 = 0; 0=0, \text{ верно.}$$

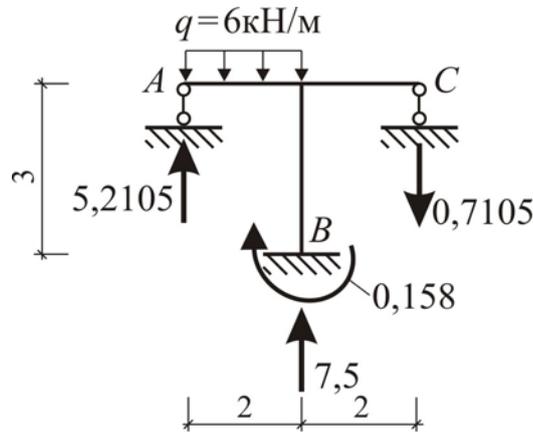


Рис. 4.25. Статическая проверка

4.4. Определение перемещений в статически неопределимых системах

Перемещение в статически неопределимой системе можно найти тремя способами:

1. Единичная (от единичной нагрузки, приложенной по направлению искомого перемещения) и грузовая (от внешней нагрузки) эпюры строятся в статически неопределимых системах:

$$\Delta = \sum \int \frac{M_{\text{ед.нагр.}}^{\text{ст.неопр.}} \cdot M_{\text{вн.нагр.}}^{\text{ст.неопр.}}}{EI} dx.$$

2. Единичная эпюра строится в статически определимой системе, грузовая эпюра – в статически неопределимой системе:

$$\Delta = \sum \int \frac{M_{\text{ед.нагр.}}^{\text{ст.опр.}} \cdot M_{\text{вн.нагр.}}^{\text{ст.неопр.}}}{EI} dx.$$

3. Единичная эпюра строится в статически неопределимой системе, грузовая эпюра – в статически определимой системе:

$$\Delta = \sum \int \frac{M_{\text{ед.нагр.}}^{\text{ст.неопр.}} \cdot M_{\text{вн.нагр.}}^{\text{ст.опр.}}}{EI} dx.$$

Пример №1.

Определить угол поворота центрального узла рамы (рис. 4.26) от действия внешней нагрузки.

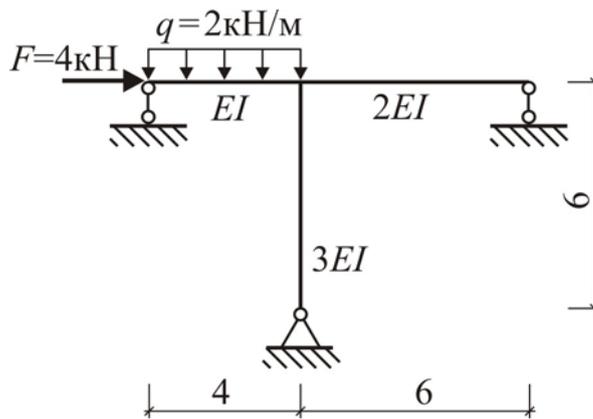


Рис. 4.26. Расчетная схема рамы

Система статически неопределима. Найдем угол поворота всеми тремя способами. Для этого дважды рассчитаем данную раму методом сил: на заданную внешнюю нагрузку и на единичную нагрузку, приложенную по направлению искомого перемещения (единичный момент в центральном узле рамы).

I. Расчет рамы методом сил на действие заданной внешней нагрузки (рис. 4.26)

I.1) Количество неизвестных (количество лишних связей):

$$\lambda = -W = -3D + 2Ш + C_0 = -3 \cdot 1 + 2 \cdot 0 + 4 = 1.$$

I.2) Основная система метода сил (О.С.М.С.) показана на рис. 4.27.

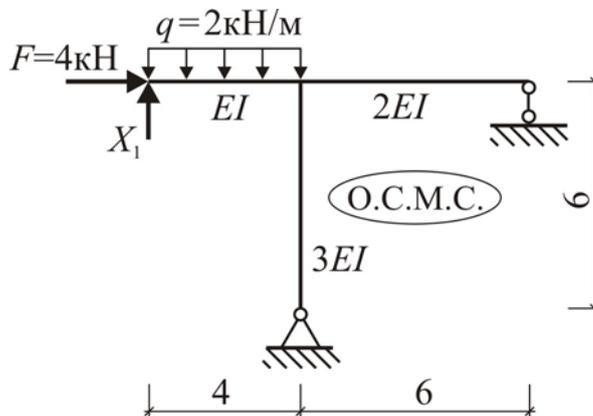


Рис. 4.27. Основная система метода сил

I.3) Уравнение метода сил с одним неизвестным имеет вид:

$$\delta_{11} \cdot X_1 + \Delta_{1p} = 0.$$

I.4) Единичная эпюра (рис. 4.28, а). Единичная эпюра строится в основной системе от действия силы $\bar{X}_1 = 1$.

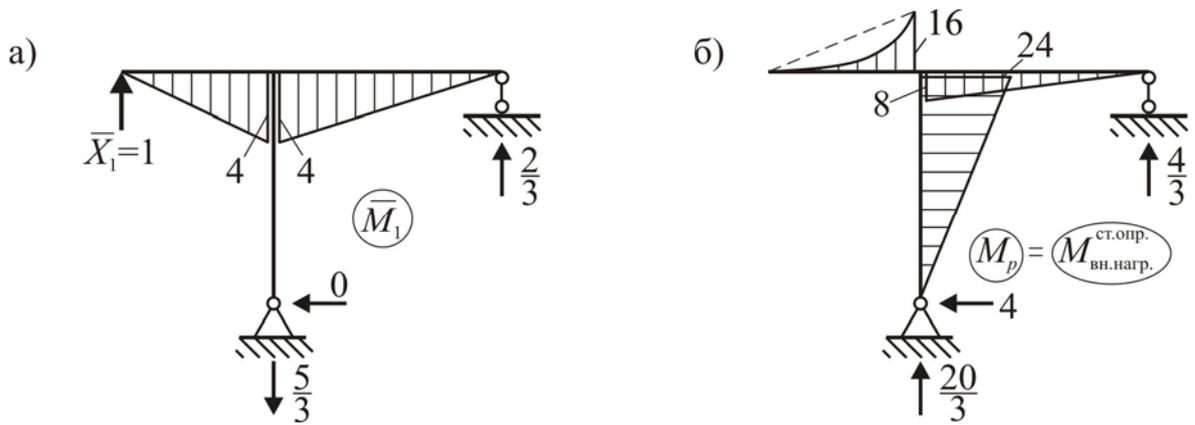


Рис. 4.28. Единичная и грузовая эпюры

I.5) Вычисление коэффициента при неизвестном.

$$\delta_{11} = \sum \int \frac{\bar{M}_1 \cdot \bar{M}_1}{EI} dx = \frac{1}{EI} \cdot \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 4 \cdot \frac{2}{3} \cdot 4 + \frac{1}{2EI} \cdot \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 6 \cdot \frac{2}{3} \cdot 4 = \frac{37,333}{EI}.$$

I.6) Грузовая эпюра (рис. 4.28, б). Грузовая эпюра строится в статически определимой основной системе от действия внешней нагрузки, т.е. является эпюрой $M_{\text{вн.нагр.}}^{\text{ст.опр.}}$ для третьего способа вычисления перемещения.

I.7) Вычисление свободного члена уравнения.

$$\Delta_{1p} = \sum \int \frac{\bar{M}_1 \cdot M_p}{EI} dx = -\frac{1}{EI} \cdot \frac{1}{2} \cdot 16 \cdot 4 \cdot \frac{2}{3} \cdot 4 + \frac{1}{EI} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2 \cdot 4^3}{8} \cdot \frac{1}{2} \cdot 4 + \frac{1}{2EI} \cdot \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 6 \cdot \frac{2}{3} \cdot 4 = -\frac{32}{EI}.$$

I.8) Решение уравнения метода сил

$$\frac{37,333}{EI} \cdot X_1 - \frac{32}{EI} = 0;$$

$$X_1 = \frac{32 \cdot EI}{EI \cdot 37,333} = 0,8571 (\text{кН}).$$

I.9) Исправленная эпюра $M_1^{\text{и}} = \bar{M}_1 \cdot X_1$ (рис. 4.29, а).

I.10) Окончательная эпюра моментов (рис. 4.29, б) получается путем сложения грузовой и исправленной эпюр: $M_{\text{ок}} = M_p + M_1^{\text{и}}$, и является эпюрой от внешней нагрузки, построенной в статически неопределимой системе $M_{\text{вн.нагр.}}^{\text{ст.неопр.}}$.

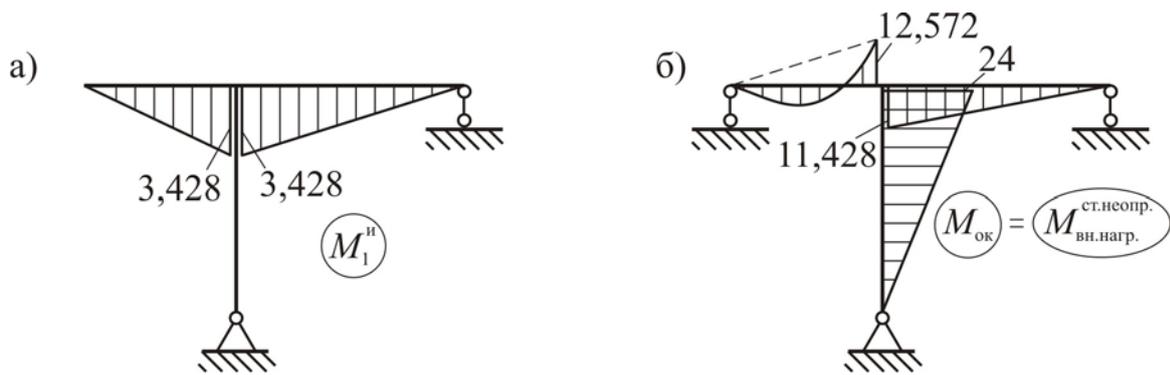


Рис. 4.29. Исправленная и окончательная эпюры

II. Расчет рамы методом сил на действие единичной нагрузки, приложенной по направлению искомого перемещения (рис. 4.30, а)

II.1) Количество неизвестных (количество лишних связей):

$$\lambda = -W = -3D + 2Ш + C_0 = -3 \cdot 1 + 2 \cdot 0 + 4 = 1.$$

II.2) Основная система метода сил (О.С.М.С.) показана на рис. 4.30, б.

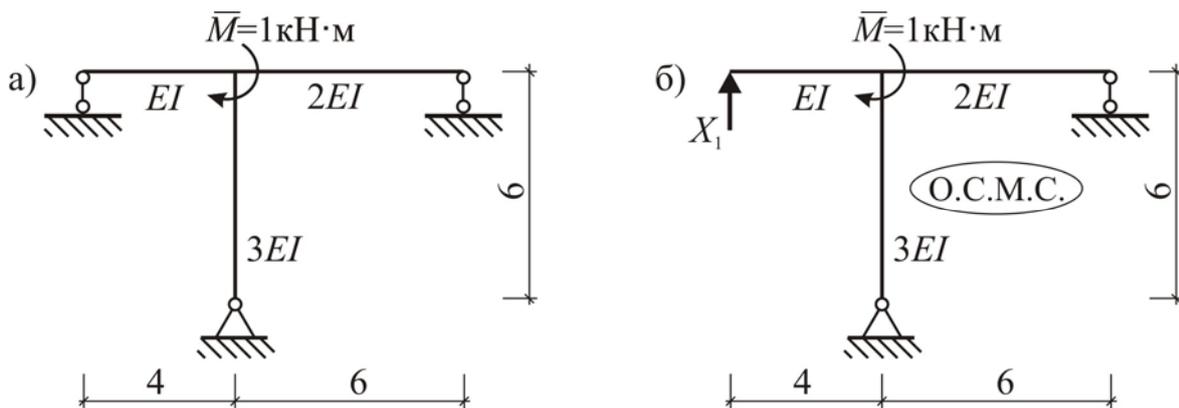


Рис. 4.30. Расчетная схема рамы и основная система метода сил

II.3), II.4), II.5) Так же, как в расчете I.

II.6) Грузовая эпюра (рис. 4.31). Грузовая эпюра строится в статически определимой основной системе от действия единичного момента, т.е. является эпюрой $M_{\text{ед.нагр.}}^{\text{ст.опр.}}$ для второго способа вычисления перемещения.

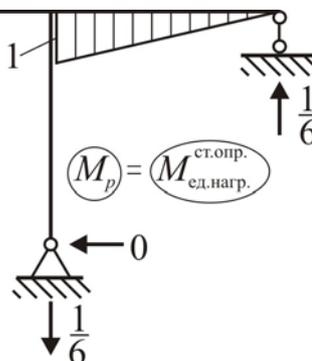


Рис. 4.31. Грузовая эпюра

II.7) Вычисление свободного члена уравнения.

$$\Delta_{1p} = \sum \int \frac{\bar{M}_1 \cdot M_p}{EI} dx = \frac{1}{2EI} \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 6 \cdot \frac{2}{3} \cdot 4 = \frac{4}{EI}.$$

II.8) Решение уравнения метода сил

$$\frac{37,333}{EI} \cdot X_1 + \frac{4}{EI} = 0;$$

$$X_1 = \frac{-4 \cdot EI}{EI \cdot 37,333} = -0,10714 \text{ (кН)}.$$

II.9) Исправленная эпюра $M_1^n = \bar{M}_1 \cdot X_1$ (рис. 4.32, а).

II.10) Окончательная эпюра моментов (рис. 4.32, б) получается путем сложения грузовой и исправленной эпюр: $M_{ок} = M_p + M_1^n$, и является эпюрой от единичного момента, построенной в статически неопределимой системе $M_{ед.нагр.}^{ст.неопр.}$.

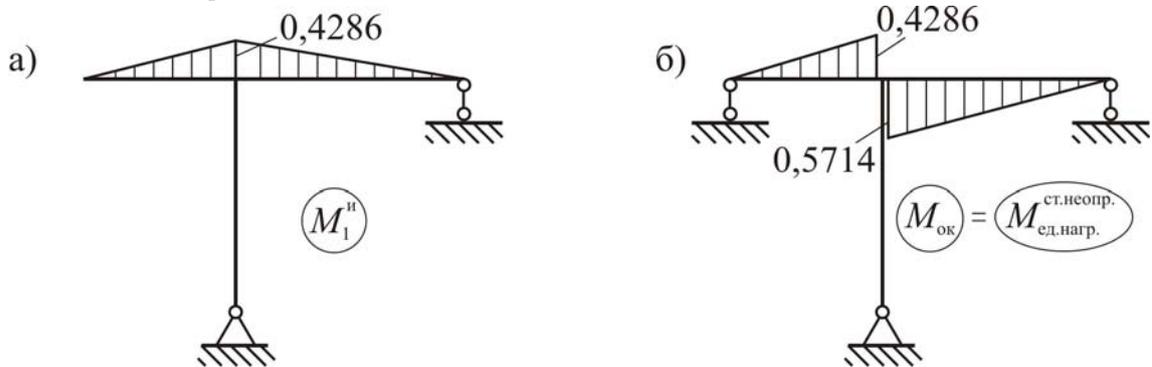


Рис. 4.32. Исправленная и окончательная эпюры

Определение угла поворота центрального узла рамы:

1 способ:

$$\phi = \sum \int \frac{M_{ед.нагр.}^{ст.неопр.} \cdot M_{вн.нагр.}^{ст.неопр.}}{EI} dx = \frac{1}{EI} \cdot \frac{1}{2} \cdot 12,572 \cdot 4 \cdot \frac{2}{3} \cdot 0,4286 - \frac{1}{EI} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2 \cdot 4^3}{8} \cdot \frac{1}{2} \cdot 0,4286 + \frac{1}{2EI} \cdot \frac{1}{2} \cdot 11,428 \cdot 6 \cdot \frac{2}{3} \cdot 0,5714 = \frac{11,428}{EI}.$$

2 способ:

$$\phi = \sum \int \frac{M_{ед.нагр.}^{ст.опр.} \cdot M_{вн.нагр.}^{ст.неопр.}}{EI} dx = \frac{1}{2EI} \cdot \frac{1}{2} \cdot 11,428 \cdot 6 \cdot \frac{2}{3} \cdot 1 = \frac{11,428}{EI}.$$

3 способ:

$$\phi = \sum \int \frac{M_{ед.нагр.}^{ст.неопр.} \cdot M_{вн.нагр.}^{ст.опр.}}{EI} dx = \frac{1}{EI} \cdot \frac{1}{2} \cdot 16 \cdot 4 \cdot \frac{2}{3} \cdot 0,4286 - \frac{1}{EI} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2 \cdot 4^3}{8} \cdot \frac{1}{2} \cdot 0,4286 + \frac{1}{2EI} \cdot \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 6 \cdot \frac{2}{3} \cdot 0,5714 = \frac{11,428}{EI}.$$

Результаты вычислений по всем трем способам совпадают.

Задачи для самостоятельного решения

Рассчитать статически неопределимую раму (рис. 4.33) методом сил и найти горизонтальное перемещение т.К.

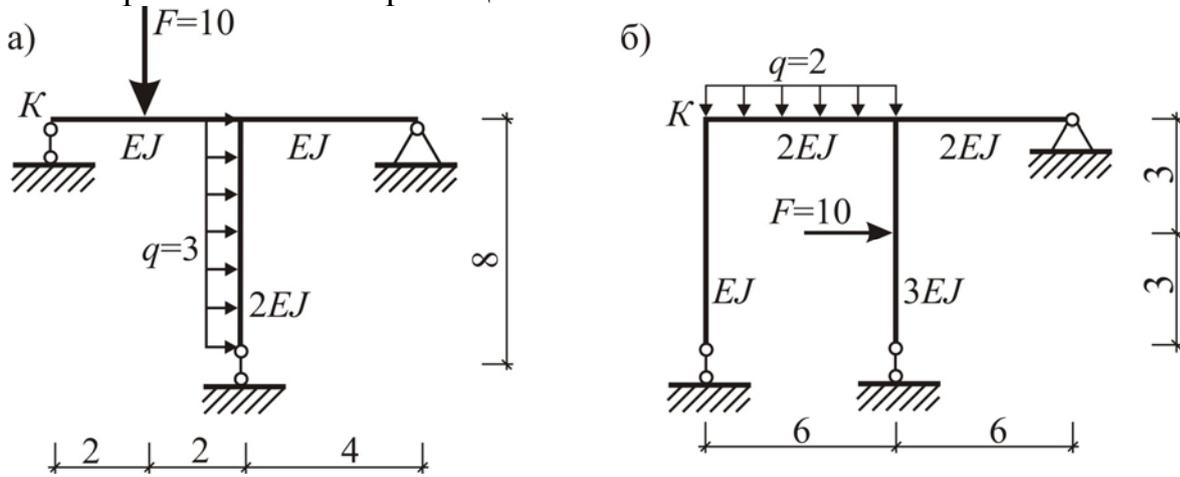


Рис. 4.33. Задачи для самостоятельного решения

5. РАСЧЕТ КОНСТРУКЦИЙ НА СОЧЕТАНИЕ НАГРУЗОК

Если кроме постоянной нагрузки имеются временные, то необходимо находить такое сочетание нагрузок, которое вызывает наибольшие и наименьшие изгибающие моменты, поперечные и продольные силы.

Эпюры, построенные по максимальным и минимальным значениям внутренних усилий, называются объемлющими эпюрами. С помощью этих эпюр можно подбирать сечения балок с двухсторонней оценкой несущей способности.

Для определения максимального момента в данном сечении к моменту от постоянной нагрузки прибавляют все положительные моменты от временных нагрузок в данном сечении. Для определения минимального момента к моменту от постоянной нагрузки прибавляют все отрицательные моменты от временной нагрузки:

$$M_{\max} = M_{\text{пост}} + \sum M_{\text{вр}+};$$

$$M_{\min} = M_{\text{пост}} + \sum M_{\text{вр}-}.$$

Аналогично для поперечных сил:

$$Q_{\max} = Q_{\text{пост}} + \sum Q_{\text{вр}+};$$

$$Q_{\min} = Q_{\text{пост}} + \sum Q_{\text{вр}-}.$$

Пример №1.

Построить объемлющую эпюру моментов для балки (рис. 5.1, а) от постоянных и временных нагрузок.

Данная балка трижды статически неопределима. При расчете методом сил рационально выбрать основную систему, показанную на рис. 5.1, б. Расчеты выполняются отдельно на постоянную нагрузку и на каждый вид временной нагрузки. Окончательная эпюра моментов от постоянной нагрузки показана на рис. 5.1, в; окончательные эпюры моментов от временных нагрузок – на рис. 5.1, г-ж.

Для построения объемлющей эпюры значения изгибающих моментов в характерных сечениях удобно вынести в таблицу. Положительным будем считать изгибающий момент, растягивающий нижние волокна в сечении.

Номер сечения	$M_{\text{пост}}$, кН·м	M от временной нагрузки, кН·м				M_{\max} , кН·м	M_{\min} , кН·м
		$M_{q\text{вр}}$	$M_{M\text{вр}}$	$M_{P1\text{вр}}$	$M_{P2\text{вр}}$		
0	-5,2	-10,98	-0,31	-0,57	+0,25	-4,95	-17,06
а	+2,6	+5,48	+0,15	+0,28	-0,12	+8,51	+2,48
1	-7,6	-5,06	+0,62	+1,13	-0,5	-5,85	-13,16
б	+5,65	-1,9	-4,02/+3,98	-1,83	+0,81	6,46/10,44	-2,1/+1,92
2	-13,1	+1,26	-0,66	-4,78	+2,13	-9,71	-18,54
в	+7,45	+0,63	-0,33	+9,61	-2,93	+17,69	+4,19
3	-4	0	0	0	-8,0	-4,0	-12,0

Объемлющая эпюра моментов для заданной балки показана на рис. 5.2.

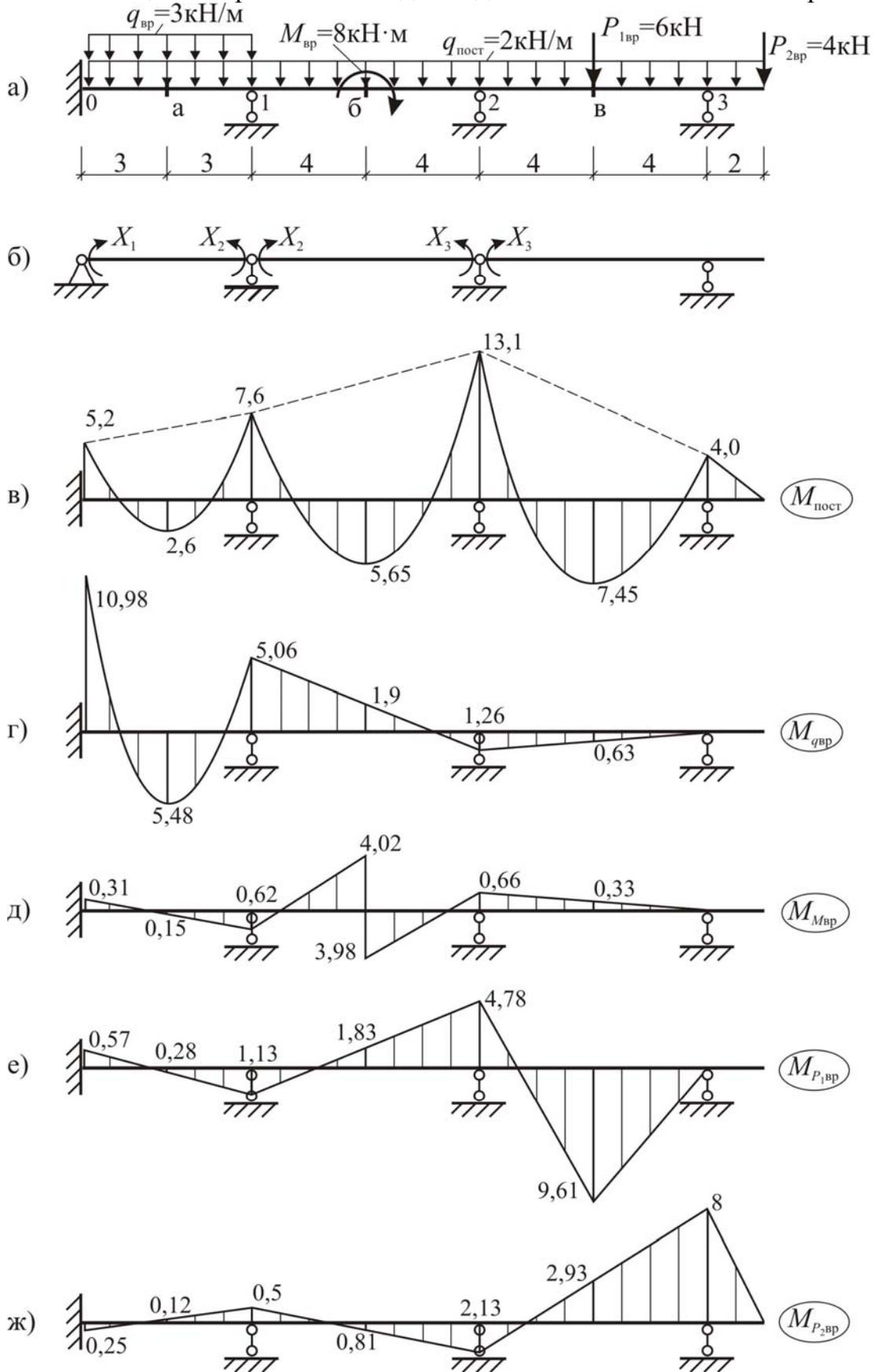


Рис. 5.1. Расчет балки на сочетание нагрузок

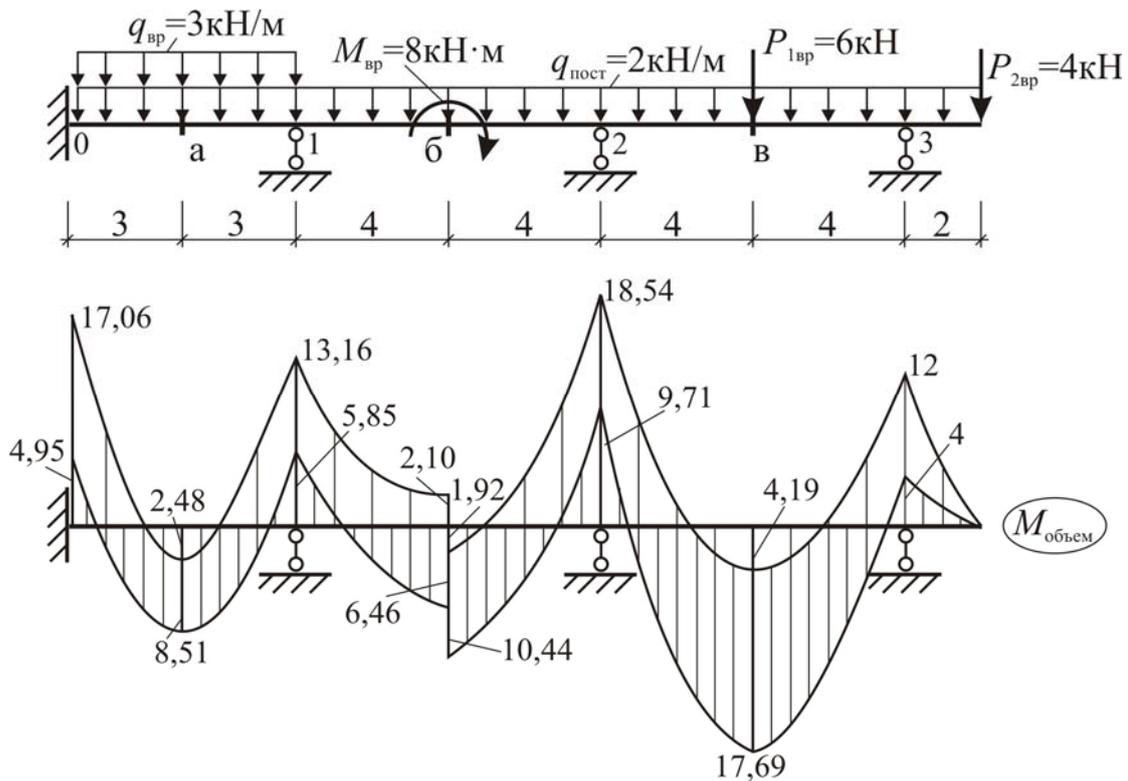


Рис. 5.2. Объемлющая эпюра изгибающих моментов

Задачи для самостоятельного решения

Построить объемлющую эпюру моментов для балки (рис. 5.3) от постоянных и временных нагрузок.

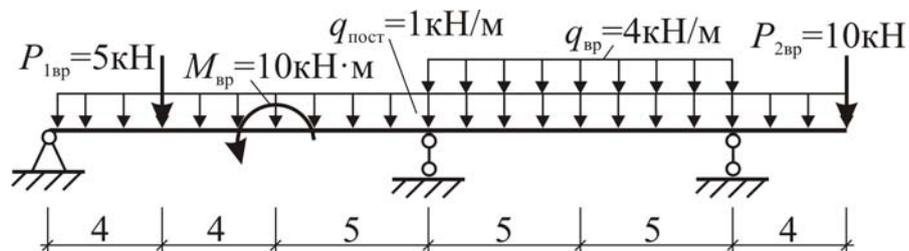


Рис. 5.3. Задачи для самостоятельного решения

6. ТЕОРИЯ ПРЕДЕЛЬНОГО РАВНОВЕСИЯ

6.1. Расчет многопролетных балок на основе теории предельного равновесия

6.1.1. Расчет многопролетных балок на основе теории предельного равновесия статическим способом

Пример №1.

Рассчитать балку постоянного сечения (рис. 6.1, а) на основе теории предельного равновесия статическим способом.

Статический способ расчета предполагает рассмотрение балки в момент, предшествующий ее разрушению. Предельная эпюра изгибающих моментов (рис. 6.1, б) вписывается в границы, обозначающие несущую способность верхних и нижних волокон, так, чтобы во всех опасных сечениях величина момента достигала предельного значения.

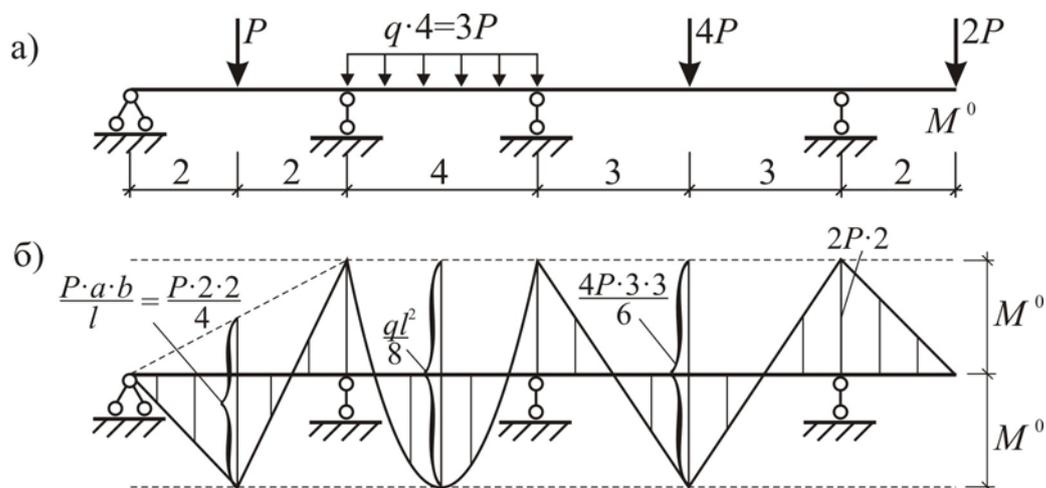


Рис. 6.1. Расчет многопролетной балки на основе теории предельного равновесия статическим способом

Для каждого опасного сечения вычисляем предельное значение параметра загрузки P :

$$\frac{P \cdot 2 \cdot 2}{4} = M^0 + 0,5M^0; \quad P = 1,5M^0 \Rightarrow P_{\text{пр},I} = 1,5M^0;$$

$$\frac{q \cdot 4^2}{8} = M^0 + M^0; \quad \frac{(q \cdot 4) \cdot 4}{8} = \frac{(3P) \cdot 4}{8} = 1,5P = 2M^0 \Rightarrow P_{\text{пр},II} = 1,333M^0;$$

$$\frac{4P \cdot 3 \cdot 3}{6} = M^0 + M^0; \quad 6P = 2M^0 \Rightarrow P_{\text{пр},III} = 0,333M^0;$$

$$2P \cdot 2 = M^0; \quad 4P = M^0 \Rightarrow P_{\text{пр},IV} = 0,25M^0.$$

Прочность всей балки оценивается по самому слабому сечению, т.е. для всей конструкции в целом предельная нагрузка равна

$$P_{\text{пр}} = P_{\text{min}} = P_{\text{пр,IV}} = 0,25M^0.$$

Пример №2.

Рассчитать балку переменного сечения (рис. 6.2, а) на основе теории предельного равновесия статическим способом.

Предельная эпюра изгибающих моментов (рис. 6.2, б) строится с учетом того, что несущая способность двухстержневого узла оценивается по менее прочному из сходящихся в нем стержней.

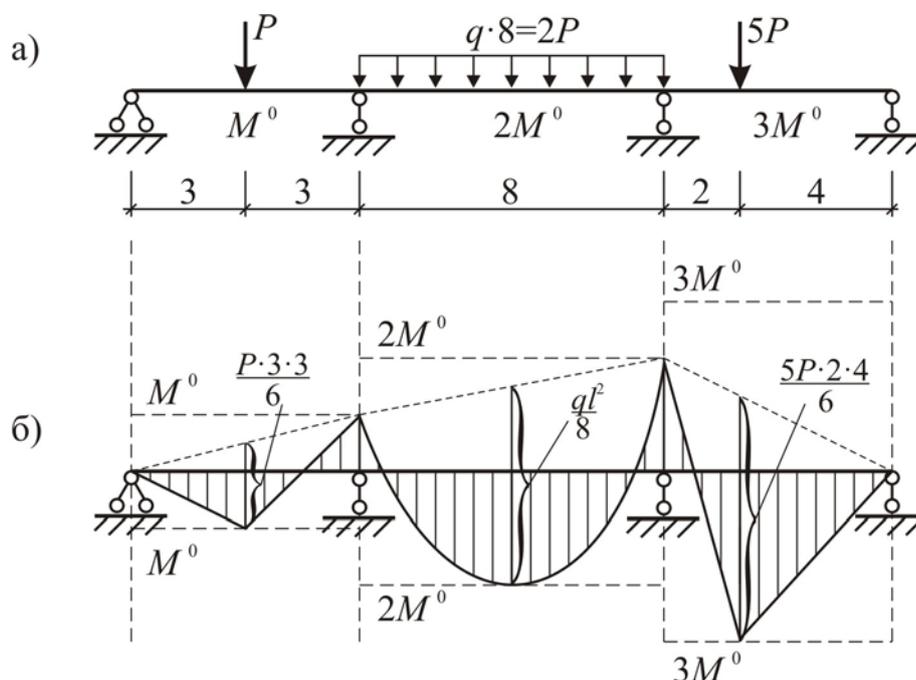


Рис. 6.2. Расчет многопролетной балки на основе теории предельного равновесия статическим способом

Вычисляем предельное значение параметра загрузки P для каждого пролета:

$$\frac{P \cdot 3 \cdot 3}{6} = M^0 + 0,5M^0; \quad 1,5P = 1,5M^0 \Rightarrow P_{\text{пр,I}} = M^0;$$

$$\frac{q \cdot 8^2}{8} = 2M^0 + \frac{M^0 + 2M^0}{2}; \quad q \cdot 8 = 2P = 3,5M^0 \Rightarrow P_{\text{пр,II}} = 1,75M^0;$$

$$\frac{5P \cdot 2 \cdot 4}{6} = 3M^0 + \frac{4}{6} \cdot 2M^0; \quad \frac{20}{3}P = \frac{13}{3}M^0 \Rightarrow P_{\text{пр,III}} = \frac{13}{20}M^0 = 0,65M^0.$$

Для всей конструкции в целом предельная нагрузка равна

$$P_{\text{пр}} = P_{\text{min}} = P_{\text{пр,III}} = 0,65M^0.$$

6.1.2. Расчет многопролетных балок

на основе теории предельного равновесия кинематическим способом

Пример №1.

Расчитать балку постоянного сечения (рис. 6.3, а) на основе теории предельного равновесия кинематическим способом.

Кинематический способ расчета предполагает рассмотрение балки в следующий после разрушения момент времени. Рассмотрим возможные механизмы разрушения пролетов и консоли балки (рис. 6.3, б-д).

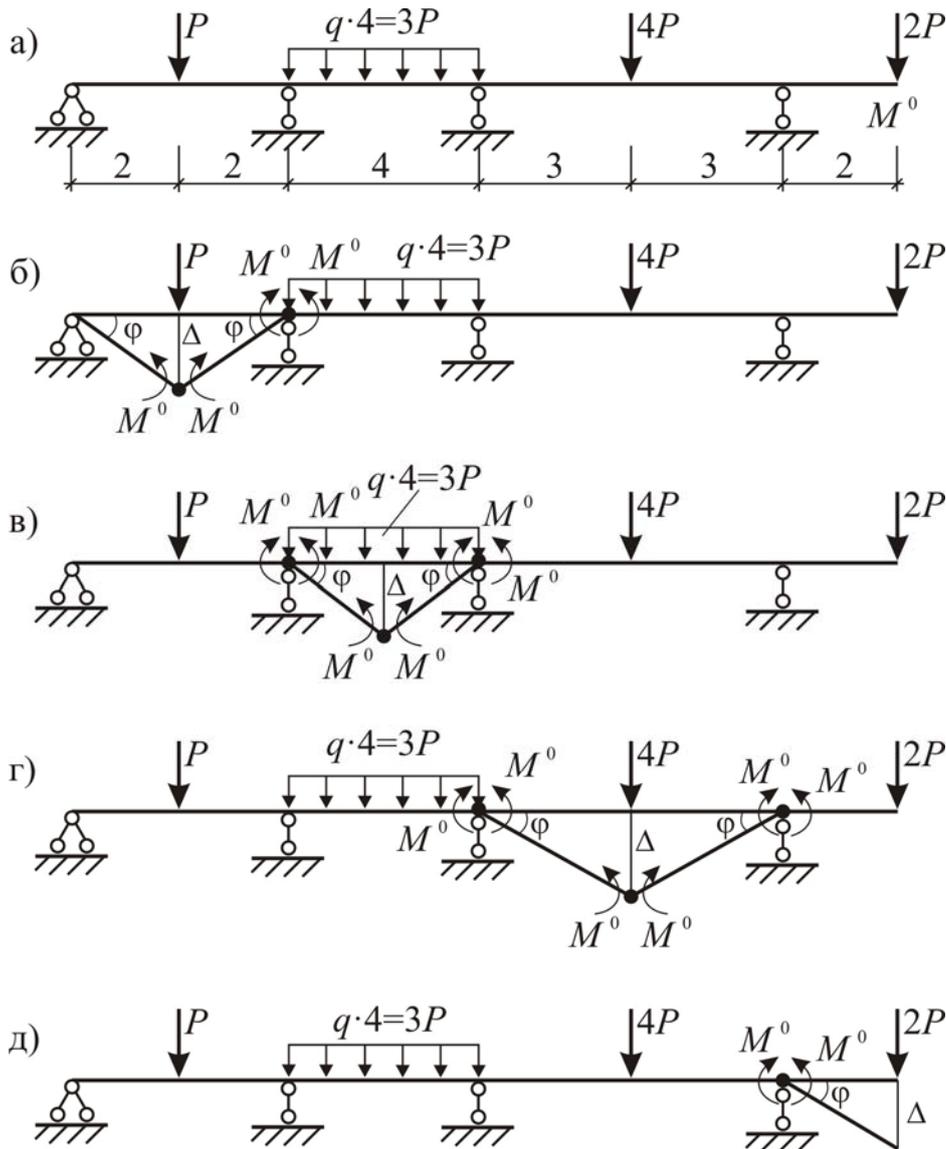


Рис. 6.3. Расчет многопролетной балки на основе теории предельного равновесия кинематическим способом

Для каждого механизма разрушения на основе принципа возможных перемещений вычисляем предельное значение параметра загрузки P :

$$I) P \cdot \Delta - M^0 \cdot \varphi - 2M^0 \cdot \varphi = 0 \text{ (рис. 6.3, б);}$$

$$\varphi \approx \operatorname{tg} \varphi = \frac{\Delta}{2} \Rightarrow \Delta = 2 \cdot \varphi;$$

$$P \cdot 2 \cdot \varphi - 3M^0 \cdot \varphi = 0; \quad P = \frac{3M^0 \cdot \varphi}{2 \cdot \varphi} = 1,5M^0 \Rightarrow P_{\text{пр, I}} = 1,5M^0.$$

$$II) q \cdot 2 \cdot \frac{\Delta}{2} + q \cdot 2 \cdot \frac{\Delta}{2} - 2M^0 \cdot \varphi - 2M^0 \cdot \varphi = 0 \text{ (рис. 6.3, в);}$$

$$\varphi \approx \operatorname{tg} \varphi = \frac{\Delta}{2} \Rightarrow \Delta = 2 \cdot \varphi;$$

$$3P \cdot \frac{2 \cdot \varphi}{2} - 4M^0 \cdot \varphi = 0; \quad P = \frac{4M^0 \cdot \varphi}{3 \cdot \varphi} = 1,333M^0 \Rightarrow P_{\text{пр, II}} = 1,333M^0.$$

$$III) 4P \cdot \Delta - 2M^0 \cdot \varphi - 2M^0 \cdot \varphi = 0 \text{ (рис. 6.3, г);}$$

$$\varphi \approx \operatorname{tg} \varphi = \frac{\Delta}{3} \Rightarrow \Delta = 3 \cdot \varphi;$$

$$4P \cdot 3 \cdot \varphi - 4M^0 \cdot \varphi = 0; \quad P = \frac{4M^0 \cdot \varphi}{12 \cdot \varphi} = 0,333M^0 \Rightarrow P_{\text{пр, III}} = 0,333M^0.$$

$$IV) 2P \cdot \Delta - M^0 \cdot \varphi = 0 \text{ (рис. 6.3, д);}$$

$$\varphi \approx \operatorname{tg} \varphi = \frac{\Delta}{2} \Rightarrow \Delta = 2 \cdot \varphi;$$

$$2P \cdot 2 \cdot \varphi - M^0 \cdot \varphi = 0; \quad P = \frac{M^0 \cdot \varphi}{4 \cdot \varphi} = 0,25M^0 \Rightarrow P_{\text{пр, IV}} = 0,25M^0.$$

Для всей конструкции в целом предельная нагрузка равна

$$P_{\text{пр}} = P_{\text{min}} = P_{\text{пр, IV}} = 0,25M^0.$$

Действительный механизм разрушения – рис. 6.3, д.

Результаты расчета полностью совпадают с результатами расчета статическим способом.

Пример №2.

Рассчитать балку переменного сечения (рис. 6.4, а) на основе теории предельного равновесия кинематическим способом.

Возможные балочные механизмы разрушения пролетов показаны на рис. 6.4, б-г. При расчете балок переменного сечения следует учитывать, что в двухстержневом узле пластический шарнир образуется в более слабом стержне.

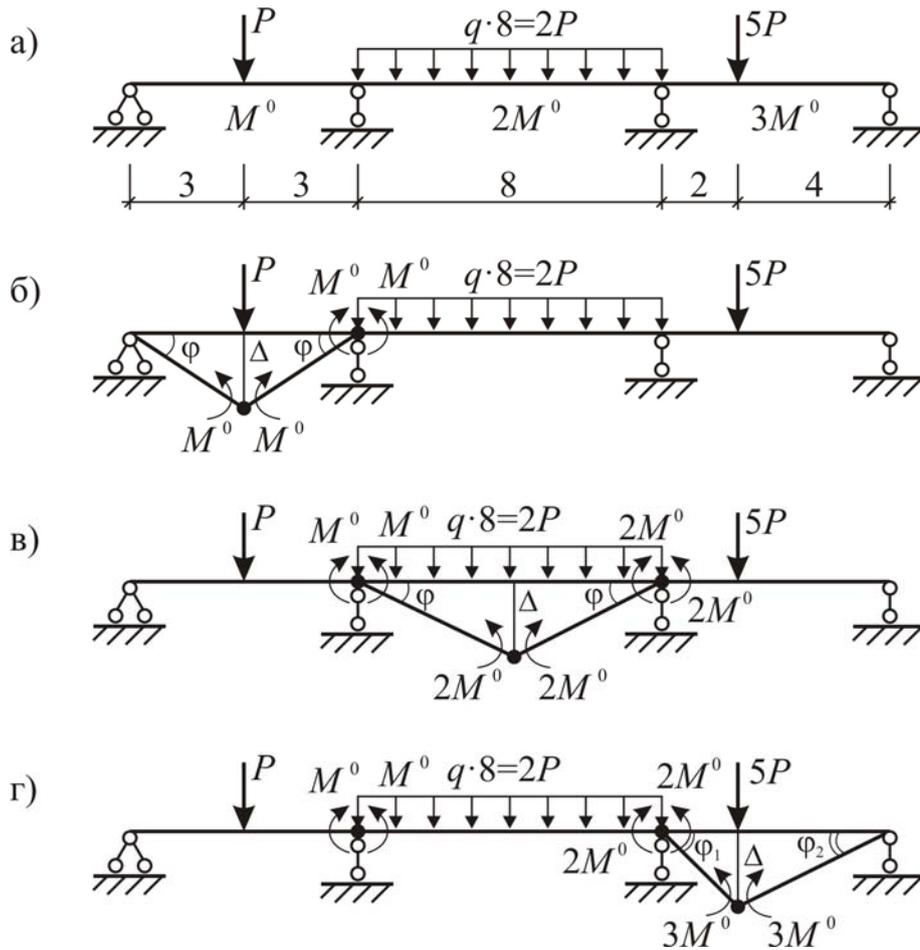


Рис. 6.4. Расчет многопролетной балки на основе теории предельного равновесия кинематическим способом

Для каждого механизма разрушения на основе принципа возможных перемещений вычисляем предельное значение параметра загрузки P :

$$I) P \cdot \Delta - M^0 \cdot \varphi - 2M^0 \cdot \varphi = 0 \text{ (рис. 6.4, б);}$$

$$\varphi \approx \operatorname{tg} \varphi = \frac{\Delta}{3} \Rightarrow \Delta = 3 \cdot \varphi;$$

$$P \cdot 3 \cdot \varphi - 3M^0 \cdot \varphi = 0; \quad P = \frac{3M^0 \cdot \varphi}{3 \cdot \varphi} = M^0 \Rightarrow P_{\text{пр, I}} = M^0.$$

$$II) q \cdot 4 \cdot \frac{\Delta}{2} + q \cdot 4 \cdot \frac{\Delta}{2} - 3M^0 \cdot \varphi - 4M^0 \cdot \varphi = 0 \text{ (рис. 6.4, в);}$$

$$\varphi \approx \operatorname{tg} \varphi = \frac{\Delta}{4} \Rightarrow \Delta = 4 \cdot \varphi;$$

$$2P \cdot \frac{4 \cdot \varphi}{2} - 7M^0 \cdot \varphi = 0; \quad P = \frac{7M^0 \cdot \varphi}{4 \cdot \varphi} = 1,75M^0 \Rightarrow P_{\text{пр, II}} = 1,75M^0.$$

$$III) 5P \cdot \Delta - 5M^0 \cdot \varphi_1 - 3M^0 \cdot \varphi_2 = 0 \text{ (рис. 6.4, г);}$$

$$\varphi_1 \approx \operatorname{tg} \varphi_1 = \frac{\Delta}{2} \Rightarrow \Delta = 2 \cdot \varphi_1;$$

$$\varphi_2 \approx \operatorname{tg} \varphi_2 = \frac{\Delta}{4} \Rightarrow \Delta = 4 \cdot \varphi_2;$$

$$\Delta = 2 \cdot \varphi_1 = 4 \cdot \varphi_2; \quad \varphi_1 = 2 \cdot \varphi_2;$$

$$\varphi_2 = \varphi; \quad \varphi_1 = 2 \cdot \varphi; \quad \Delta = 2 \cdot \varphi_1 = 4 \cdot \varphi_2 = 4 \cdot \varphi;$$

$$5P \cdot 4 \cdot \varphi - 5M^0 \cdot 2 \cdot \varphi - 3M^0 \cdot \varphi = 0;$$

$$20 \cdot P \cdot \varphi - 13 \cdot M^0 \cdot \varphi = 0; \quad P = \frac{13 \cdot M^0 \cdot \varphi}{20 \cdot \varphi} = 0,65M^0 \Rightarrow P_{\text{пр,III}} = 0,65M^0.$$

Для всей конструкции в целом предельная нагрузка равна

$$P_{\text{пр}} = P_{\text{min}} = P_{\text{пр,III}} = 0,65M^0.$$

Действительный механизм разрушения – рис. 6.4, г.

Результаты расчета полностью совпадают с результатами расчета статическим способом.

6.2. Расчет рам на основе теории предельного равновесия

Пример №1.

Найти параметр предельной нагрузки $P_{\text{пр}}$ для рамы (рис. 6.5) с одинаковым поперечным сечением элементов.

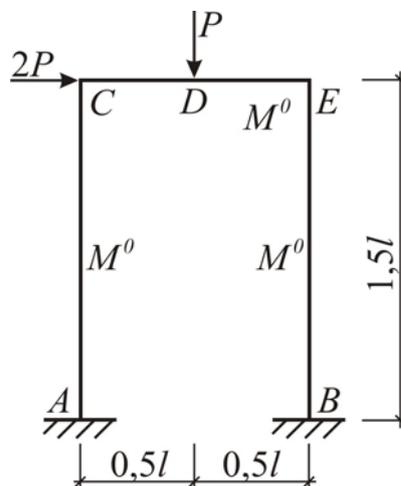


Рис. 6.5. Расчетная схема рамы

Для отыскания $P_{\text{пр}}$ воспользуемся кинематическим методом. Рассмотрим несколько вариантов разрушения – превращения рамы в механизм. Опасные сечения – возле жестких заделок (A , B), в узлах и под сосредоточенными силами (C , D , E).

а) балочный механизм разрушения ригеля – пластические шарниры образуются в сечениях C, D, E (рис. 6.6).

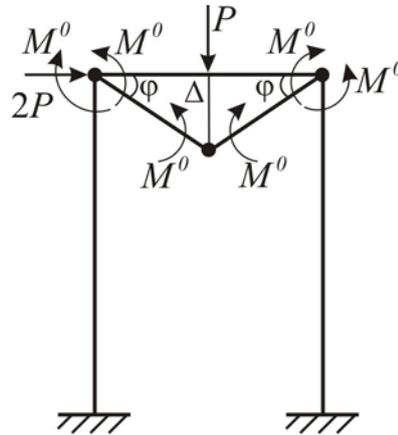


Рис. 6.6. Балочный механизм разрушения ригеля рамы

$$P \cdot \Delta - 2M^0 \cdot \varphi - 2M^0 \cdot \varphi = 0;$$

$$\varphi \approx \operatorname{tg} \varphi = \frac{\Delta}{0,5l} \Rightarrow \Delta = 0,5l \cdot \varphi;$$

$$P \cdot 0,5l \cdot \varphi - 4M^0 \cdot \varphi = 0; \quad P = \frac{4M^0 \cdot \varphi}{0,5l \cdot \varphi} = \frac{8M^0}{l} \Rightarrow P_{\text{пр, I}} = \frac{8M^0}{l}.$$

б) пластические шарниры образуются в сечениях A, B, C, E (рис. 6.7).

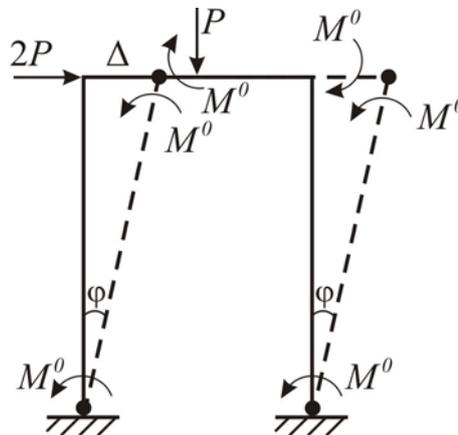


Рис. 6.7. Механизм разрушения рамы

$$2P \cdot \Delta - 2M^0 \cdot \varphi - 2M^0 \cdot \varphi = 0;$$

$$\varphi \approx \operatorname{tg} \varphi = \frac{\Delta}{1,5l} \Rightarrow \Delta = 1,5l \cdot \varphi;$$

$$2P \cdot 1,5l \cdot \varphi - 4M^0 \cdot \varphi = 0; \quad P = \frac{4M^0 \cdot \varphi}{3l \cdot \varphi} = \frac{1,333M^0}{l} \Rightarrow P_{\text{пр, II}} = \frac{1,333M^0}{l}.$$

в) комбинированный механизм разрушения – пластические шарниры образуются в сечениях A, B, D, E (рис. 6.8).

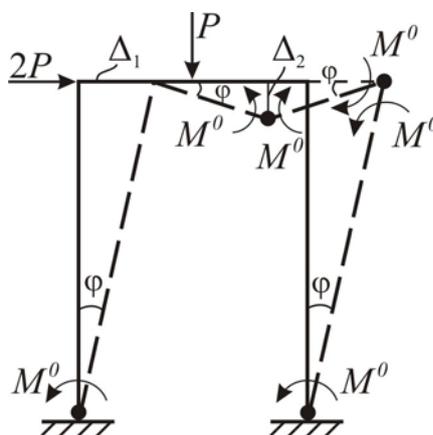


Рис. 6.8. Комбинированный механизм разрушения рамы

$$2P \cdot \Delta_1 + P \cdot \Delta_2 - M^0 \cdot \varphi - M^0 \cdot \varphi - 2M^0 \cdot \varphi - 2M^0 \cdot \varphi = 0;$$

$$\varphi \approx \operatorname{tg} \varphi = \frac{\Delta_1}{1,5l} = \frac{\Delta_2}{0,5l} \Rightarrow \Delta_1 = 1,5l \cdot \varphi; \quad \Delta_2 = 0,5l \cdot \varphi;$$

$$2P \cdot 1,5l \cdot \varphi + P \cdot 0,5l \cdot \varphi - 6M^0 \cdot \varphi = 0; \quad P = \frac{6M^0 \cdot \varphi}{3,5l \cdot \varphi} = \frac{1,714M^0}{l} \Rightarrow P_{\text{пр,III}} = \frac{1,714M^0}{l}.$$

Предельная нагрузка для рамы равна

$$P_{\text{пр}} = P_{\text{min}} = P_{\text{пр,II}} = \frac{1,333M^0}{l}.$$

Действительный механизм разрушения – рис. 6.7.

Проверка правильности решения. Согласно статической теореме при $P_{\text{пр}}$ должны выполняться уравнения равновесия (рис. 6.9).

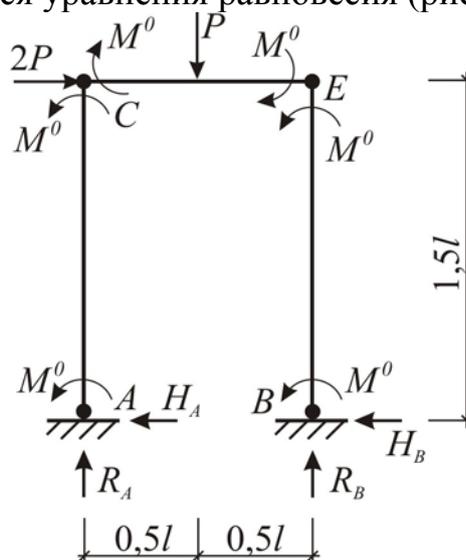


Рис. 6.9. Проверка по статической теореме

$$\sum M_A = 0: -2P \cdot 1,5l - P \cdot 0,5l + 2M^0 + R_B \cdot l = 0; \quad (1)$$

$$\sum M_C^{\text{пр.ч.}} = 0: -P \cdot 0,5l + R_B \cdot l - H_B \cdot 1,5l = 0; \quad (2)$$

$$\sum M_E^{\text{пр.ч.}} = 0: 2M^0 - H_B \cdot 1,5l = 0; \quad (3)$$

Из (3): $H_B \cdot 1,5l = 2M^0$.

Тогда (2): $-P \cdot 0,5l + R_B \cdot l - 2M^0 = 0 \Rightarrow R_B \cdot l = P \cdot 0,5l + 2M^0$.

Подставляя в (1): $-2P \cdot 1,5l - P \cdot 0,5l + 2M^0 + P \cdot 0,5l + 2M^0 = 0$;

$$-3Pl + 4M^0 = 0 \Rightarrow P = \frac{4M^0}{3l} = \frac{1,333M^0}{l},$$

т.е. кинематически возможное состояние является и статически возможным, следовательно, этот механизм разрушения является действительным

и $P_{\text{пр}} = \frac{1,333M^0}{l}$.

Пример №2.

Рассчитать раму (рис. 6.10) методом предельного равновесия. Определить предельную нагрузку на раму.

Рассмотрим возможные механизмы разрушения рамы (рис. 6.11).

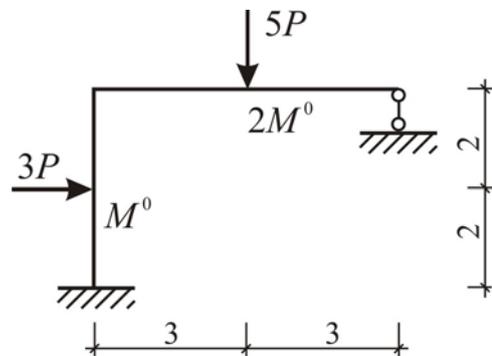


Рис. 6.10. Расчетная схема рамы

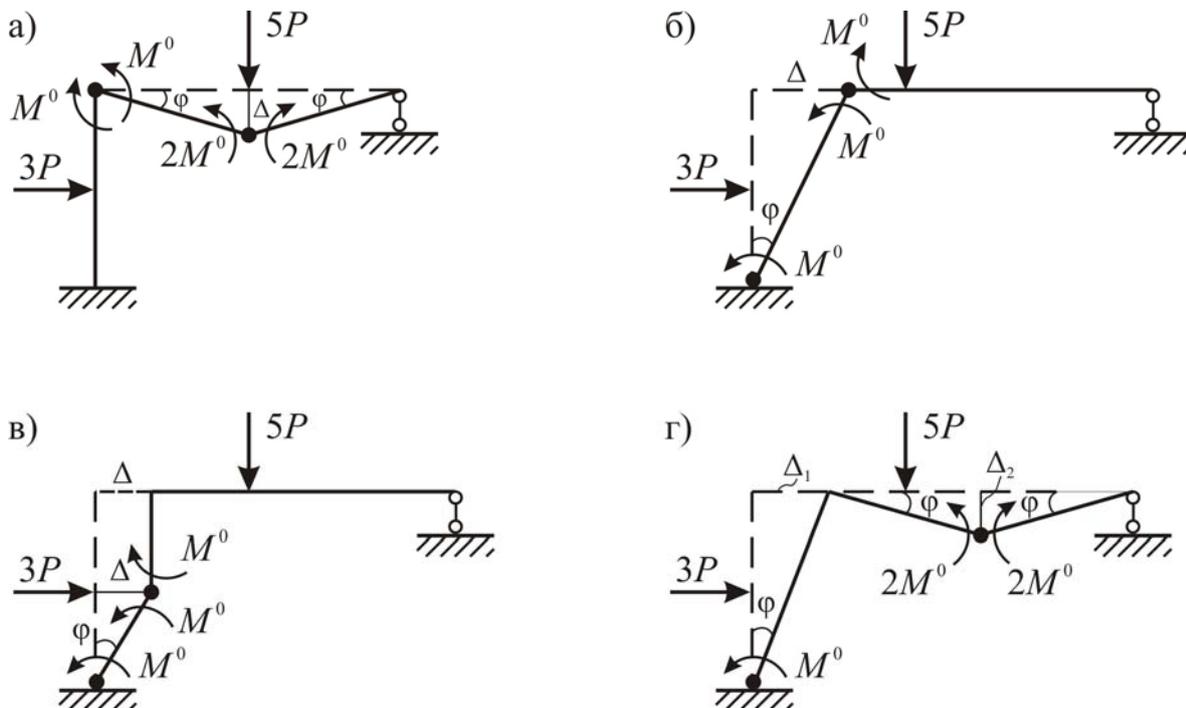


Рис. 6.11. Возможные механизмы разрушения рамы

$$I) 5P \cdot \Delta - 3M^0 \cdot \varphi - 2M^0 \cdot \varphi = 0 \text{ (рис. 6.11, а);}$$

$$\varphi \approx \operatorname{tg} \varphi = \frac{\Delta}{3} \Rightarrow \Delta = 3 \cdot \varphi;$$

$$5P \cdot 3 \cdot \varphi - 5M^0 \cdot \varphi = 0; \quad P = \frac{5M^0 \cdot \varphi}{15 \cdot \varphi} = \frac{M^0}{3} \Rightarrow P_{\text{пр, I}} = 0,333M^0.$$

$$II) 3P \cdot \frac{\Delta}{2} - 2M^0 \cdot \varphi = 0 \text{ (рис. 6.11, б);}$$

$$\varphi \approx \operatorname{tg} \varphi = \frac{\Delta}{4} \Rightarrow \Delta = 4 \cdot \varphi;$$

$$3P \cdot \frac{4 \cdot \varphi}{2} - 2M^0 \cdot \varphi = 0; \quad P = \frac{2M^0 \cdot \varphi}{6 \cdot \varphi} = \frac{M^0}{3} \Rightarrow P_{\text{пр, II}} = 0,333M^0.$$

$$III) 3P \cdot \Delta - 2M^0 \cdot \varphi = 0 \text{ (рис. 6.11, в);}$$

$$\varphi \approx \operatorname{tg} \varphi = \frac{\Delta}{2} \Rightarrow \Delta = 2 \cdot \varphi;$$

$$3P \cdot 2 \cdot \varphi - 2M^0 \cdot \varphi = 0; \quad P = \frac{2M^0 \cdot \varphi}{6 \cdot \varphi} = \frac{M^0}{3} \Rightarrow P_{\text{пр, III}} = 0,333M^0$$

$$IV) 3P \cdot \frac{\Delta_1}{2} + 5P \cdot \Delta_2 - M^0 \cdot \varphi - 2M^0 \cdot \varphi - 2M^0 \cdot \varphi = 0 \text{ (рис. 6.11, г);}$$

$$\varphi \approx \operatorname{tg} \varphi = \frac{\Delta_1}{4} = \frac{\Delta_2}{3} \Rightarrow \Delta_1 = 4 \cdot \varphi; \quad \Delta_2 = 3 \cdot \varphi;$$

$$3P \cdot \frac{4 \cdot \varphi}{2} + 5P \cdot 3 \cdot \varphi - 5M^0 \cdot \varphi = 0; \quad P = \frac{5M^0 \cdot \varphi}{21 \cdot \varphi} = 0,238M^0 \Rightarrow P_{\text{пр, IV}} = 0,238M^0.$$

Предельная нагрузка для рамы равна

$$P_{\text{пр}} = P_{\text{min}} = P_{\text{пр, IV}} = 0,238M^0.$$

Действительный механизм разрушения – рис. 6.11, г.

Задачи для самостоятельного решения

Рассчитать конструкцию (рис. 6.12) на основе теории предельного равновесия статическим и кинематическим способами.

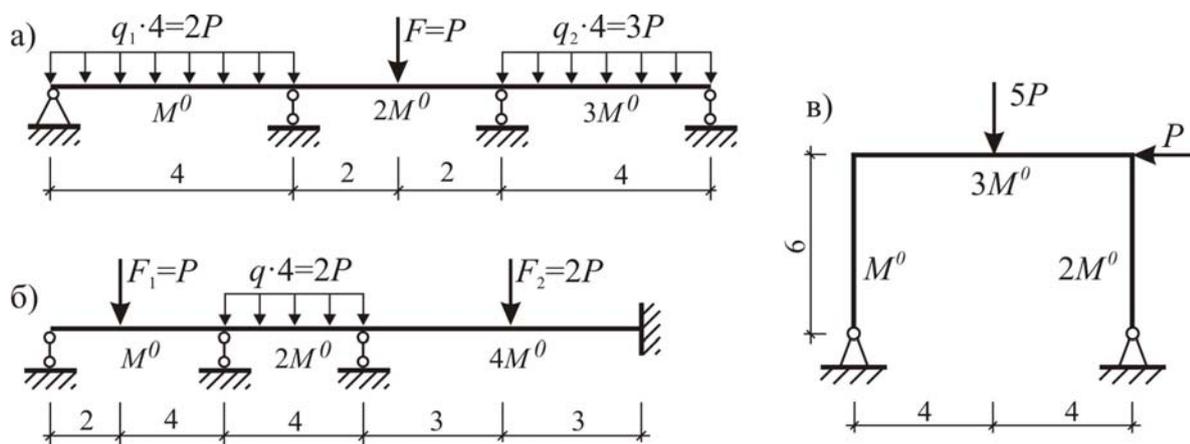


Рис. 6.12. Задачи для самостоятельного решения

7. РАСЧЕТ КИНЕМАТИЧЕСКИ НЕОПРЕДЕЛИМЫХ СИСТЕМ МЕТОДОМ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ

7.1. Таблица реакций метода перемещений

Произведем расчет нескольких отдельных статически неопределимых балок на кинематические и грузовые воздействия. Для расчета используем метод сил.

Пример №1.

Построить эпюру изгибающих моментов для стержня (рис. 7.1, а), нагруженного сосредоточенной силой в середине пролета.

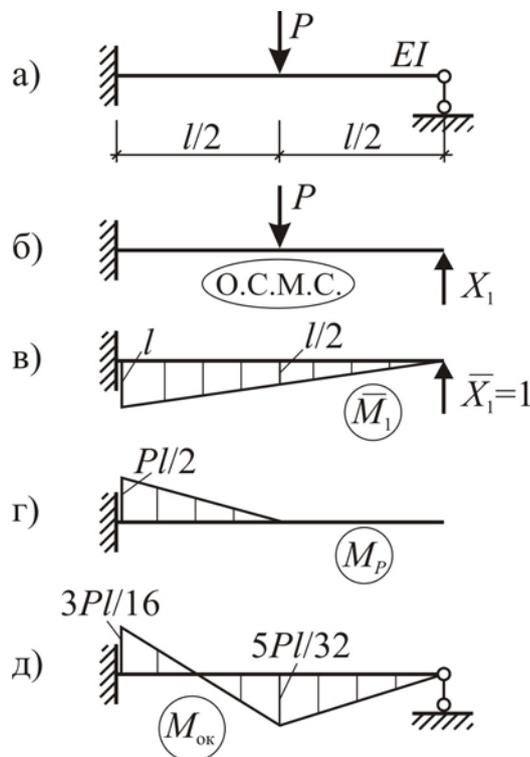


Рис. 7.1. Расчет стержня, нагруженного сосредоточенной силой

Количество неизвестных:

$$\lambda = -W = -3Д + 2Ш + C_0 = -3 \cdot 1 + 2 \cdot 0 + 4 = 1.$$

Основная система метода сил (О.С.М.С.) показана на рис. 7.1, б.

Уравнение метода сил с одним неизвестным имеет вид:

$$\delta_{11} \cdot X_1 + \Delta_{1p} = 0.$$

Единичная эпюра показана на рис. 7.1, в, грузовая эпюра – на рис. 7.1, г.

Вычисление коэффициентов уравнения:

$$\delta_{11} = \sum \int \frac{\bar{M}_1 \cdot \bar{M}_1}{EI} dx = \frac{1}{EI} \cdot \frac{1}{2} \cdot l \cdot l \cdot \frac{2}{3} \cdot l = \frac{l^3}{3EI}.$$

$$\Delta_{1p} = \sum \int \frac{\bar{M}_1 \cdot M_p}{EI} dx = \frac{1}{EI} \cdot \frac{l}{2 \cdot 6} \cdot \left(-2 \cdot l \cdot \frac{Pl}{2} - \frac{l}{2} \cdot \frac{Pl}{2} \right) =$$

$$= \frac{l}{12EI} \cdot \left(\frac{-4Pl^2 - Pl^2}{4} \right) = -\frac{5Pl^3}{48EI}.$$

Решение уравнения метода сил:

$$\frac{l^3}{3EI} \cdot X_1 - \frac{5Pl^3}{48EI} = 0;$$

$$X_1 = \frac{5Pl^3 \cdot 3EI}{48EI \cdot l^3} = \frac{5P}{16} \text{ (кН)}.$$

Окончательная эпюра моментов (рис. 7.1, д) получается путем сложения грузовой и исправленной эпюр: $M_{ок} = M_p + \bar{M}_1 \cdot X_1$.

Пример №2.

Построить эпюру изгибающих моментов в балке (рис. 7.2, а), вызванную взаимным смещением опор на $\Delta=1$.

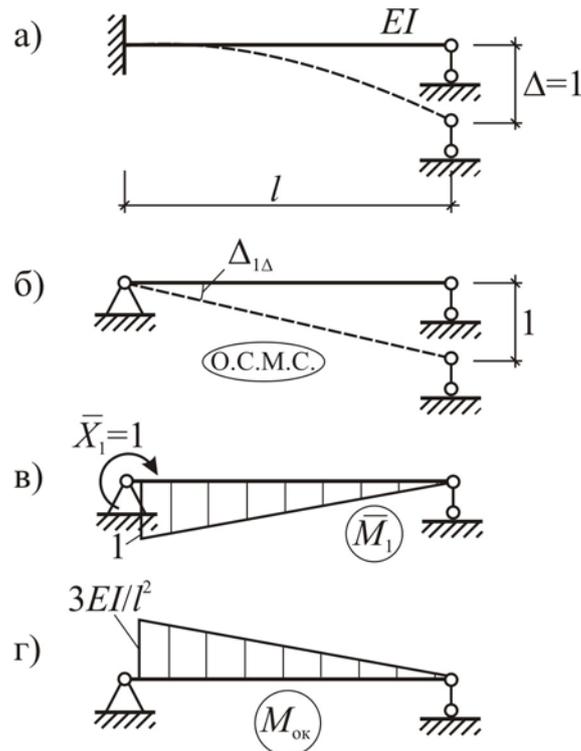


Рис. 7.2. Расчет балки со взаимным смещением опор на $\Delta=1$

Количество неизвестных:

$$\lambda = -W = -3D + 2Ш + C_0 = -3 \cdot 1 + 2 \cdot 0 + 4 = 1.$$

Основная система метода сил (O.C.M.C.) показана на рис. 7.2, б, единичная эпюра – на рис. 7.2, в.

Уравнение метода сил примет вид:

$$\delta_{11} \cdot X_1 + \Delta_{1\Delta} = \Delta_1.$$

Здесь:

$$\delta_{11} = \sum \int \frac{\bar{M}_1 \cdot \bar{M}_1}{EI} dx = \frac{1}{EI} \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot l \cdot \frac{2}{3} \cdot 1 = \frac{l}{3EI};$$

$$\Delta_{1\Delta} = 1/l; \Delta_1 = 0.$$

Тогда:

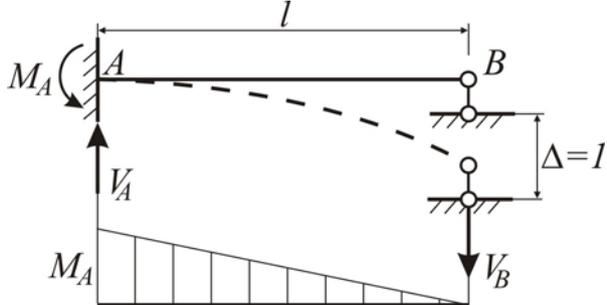
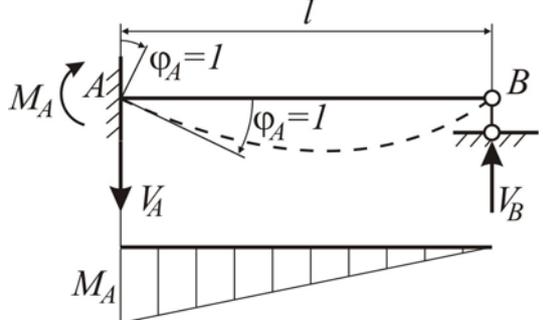
$$\frac{l}{3EI} \cdot X_1 + 1/l = 0 \Rightarrow X_1 = -\frac{1 \cdot 3EI}{l \cdot l} = -\frac{3EI}{l^2}.$$

Окончательная эпюра моментов (рис. 7.2, г) получается путем исправления единичной эпюры: $M_{ок} = \bar{M}_1 \cdot X_1$.

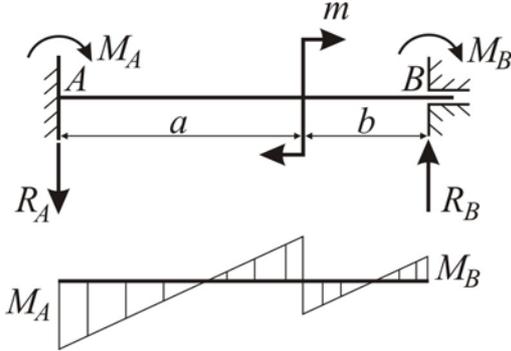
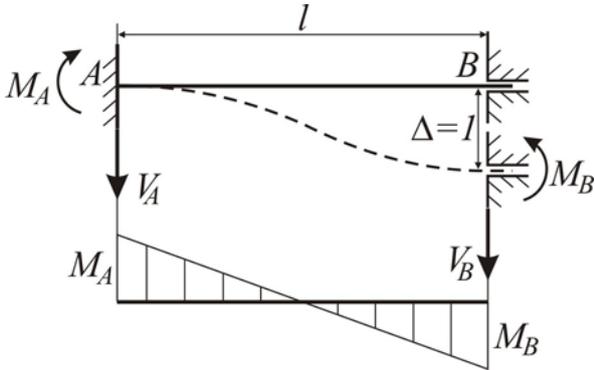
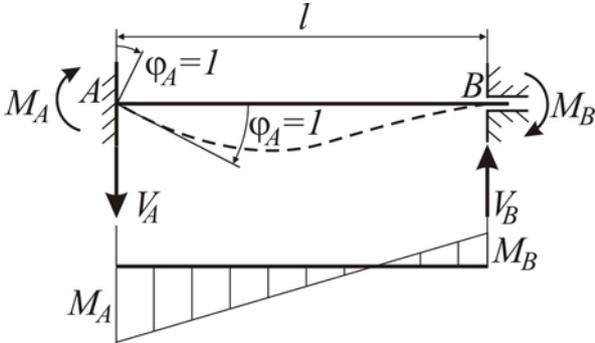
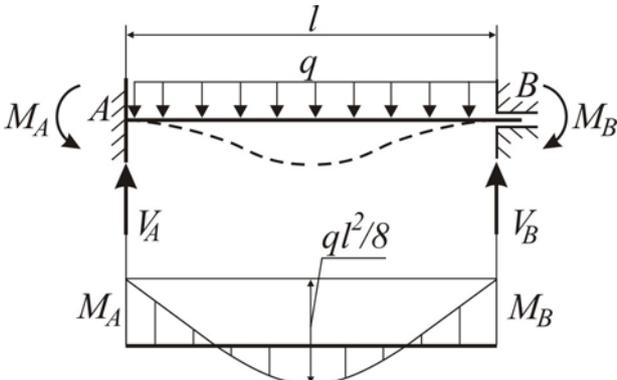
Аналогично строятся эпюры моментов и определяются концевые реакции и для других случаев загрузки или перемещения одного из узлов балки. Найденные решения приведены в таблице метода перемещений (табл. 7.1).

Т а б л и ц а 7.1

Таблица метода перемещений

№ п/п	Схемы балок и эпюры изгибающих моментов	Формулы моментов и реакций
1	2	3
1		$i = \frac{EI}{l}$ $M_A = \frac{3i}{l}$ $V_A = V_B = \frac{3i}{l^2}$
2		$M_A = 3i$ $V_A = V_B = \frac{3i}{l}$

1	2	3
3		$M_A = \frac{ql^2}{8}$ $V_A = \frac{5}{8}ql$ $V_B = \frac{3}{8}ql$
4		$M_A = \frac{Fl}{2}v(1-v^2)$ $V_A = \frac{Fv}{2}(3-v^2)$ $V_B = \frac{Fu^2}{2}(3-u)$
5		$M_A = \frac{m(l^2 - 3b^2)}{2l^2}$ $V_A = V_B = \frac{3m(l^2 - b^2)}{2l^3}$
6		$M_A = \frac{Pab^2}{l^2}$ $M_B = \frac{Pa^2b}{l^2}$ $R_A = \frac{Pb^2}{l^2} \left(1 + \frac{2a}{l} \right)$ $R_B = \frac{Pa^2}{l^2} \left(1 + \frac{2b}{l} \right)$

1	2	3
7		$M_A = \frac{mb}{l^2}(2l - 3b)$ $M_B = \frac{ma}{l^2}(2l - 3a)$ $R_A = R_B = \frac{6ab}{l^3}m$
8		$M_A = M_B = \frac{6i}{l}$ $V_A = V_B = \frac{12i}{l^2}$
9		$M_A = 4i$ $M_B = 2i$ $V_A = V_B = \frac{6i}{l}$
10		$M_A = M_B = \frac{ql^2}{12}$ $V_A = V_B = \frac{ql}{2}$

7.2. Расчет кинематически неопределимой системы с одним неизвестным методом перемещений

Пример №1.

Построить эпюры внутренних усилий для рамы с помощью метода перемещений (рис. 7.3, а).

Найдем соотношение погонных жесткостей для стержневой рамы:

$$i_1 = \frac{EI}{6} = i;$$

$$i_2 = \frac{2EI}{4} = \frac{EI}{2} = \frac{EI \cdot EI \cdot 6}{2 \cdot 6 \cdot EI} = \frac{6}{2} \cdot \frac{EI}{6} = 3i.$$

1) Количество неизвестных:

$$n = n_y + n_{\text{л}}.$$

где n_y – количество угловых перемещений, равно количеству жестких узлов: $n_y = 1$;

$n_{\text{л}}$ – количество линейных перемещений, равно количеству степеней свободы шарнирной схемы.

Шарнирная схема получается из заданной системы путем введения шарниров во все узлы, включая опорные:



$$n_{\text{л}} = W_{\text{ш.с.}} = 3Д - 2Ш - C_0 = 3 \cdot 2 - 2 \cdot 1 - 4 = 0.$$

$$n = n_y + n_{\text{л}} = 1 + 0 = 1.$$

2) Основная система метода перемещений (О.С.М.П.) получается из заданной системы путем введения дополнительных связей (рис. 7.3, б).

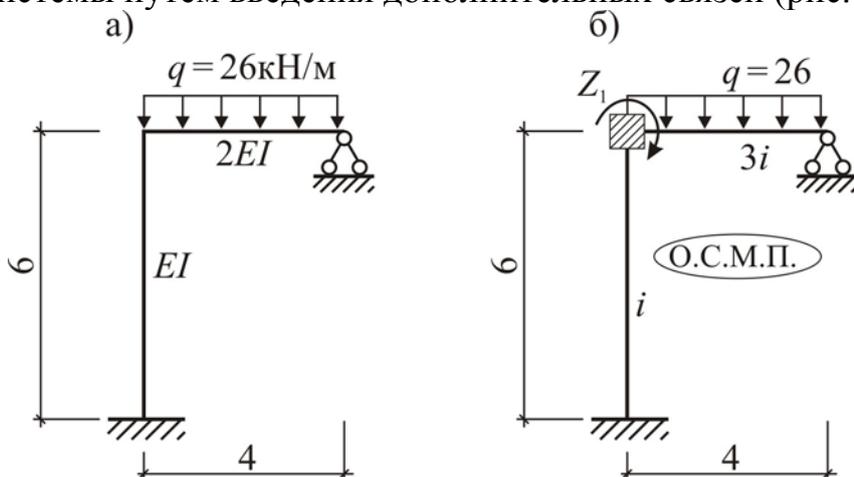


Рис. 7.3. Расчетная схема и основная система метода перемещений

3) Уравнение метода перемещений с одним неизвестным имеет вид:

$$r_{11} \cdot Z_1 + R_{1p} = 0.$$

4) Единичная эпюра строится в основной системе с использованием таблицы метода перемещений (табл. 7.1) от единичного перемещения $\bar{Z}_1 = 1$ (рис. 7.4, а,б).

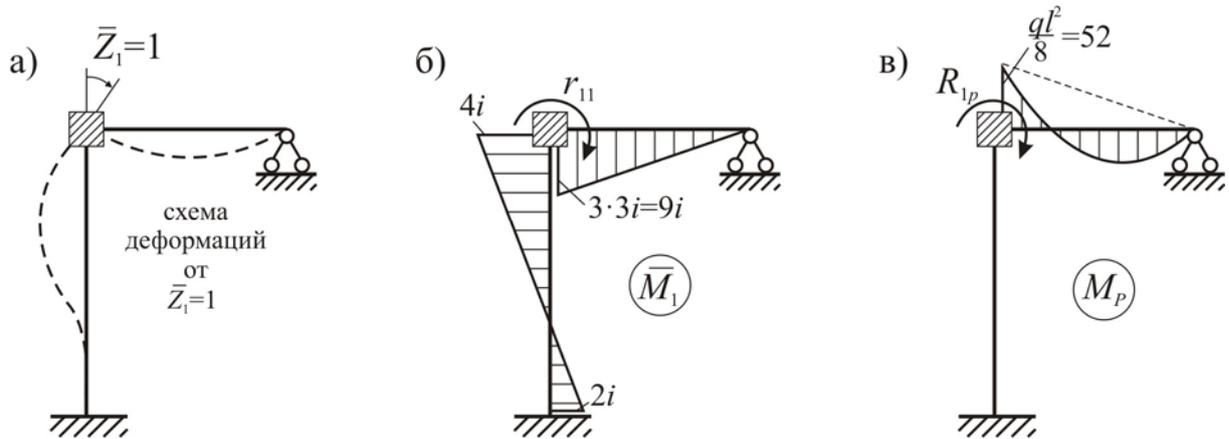
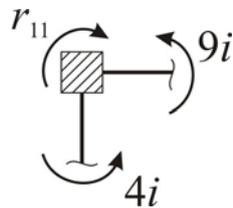


Рис. 7.4. Единичная и грузовая эпюры

5) Вычисление коэффициента при неизвестном выполняется статическим способом (для реакций в дополнительно введенных защемлениях используется метод вырезания узлов):

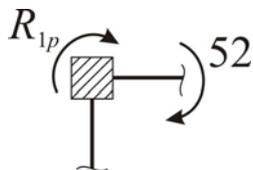


$$\sum M_{\text{узел}} = 0: 9i + 4i - r_{11} = 0;$$

$$r_{11} = 9i + 4i = 13i.$$

6) Грузовая эпюра (рис. 7.4, в) строится в основной системе с помощью таблицы метода перемещений от действия внешней нагрузки.

7) Вычисление свободного члена уравнения статическим способом:



$$\sum M_{\text{узел}} = 0: -52 - R_{1p} = 0;$$

$$R_{1p} = -52.$$

8) Решение уравнения метода перемещений:

$$13i \cdot Z_1 - 52 = 0;$$

$$Z_1 = \frac{52}{13i} = \frac{4}{i}.$$

9) Исправленная эпюра $M_1^n = \bar{M}_1 \cdot Z_1$ (рис. 7.5, а).

10) Окончательная эпюра моментов (рис. 7.5, б) строится в заданной системе и получается путем сложения грузовой и исправленной эпюр:
 $M_{ок} = M_p + M_1^n$.

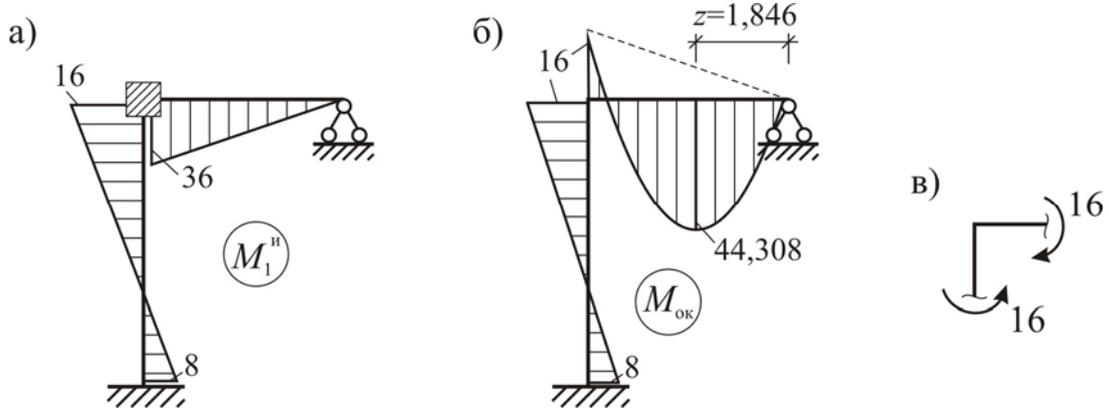


Рис. 7.5. Исправленная и окончательная эпюры

Статическая проверка окончательной эпюры моментов заключается в равновесии вырезанного жесткого узла (рис. 7.5, в):

$$\sum M_{узн} = 0: 16 - 16 = 0; 0 = 0, \text{ верно.}$$

11) Эпюры поперечных (рис. 7.6, а) и продольных (рис. 7.6, б) сил, статическая проверка (рис. 7.6, в).

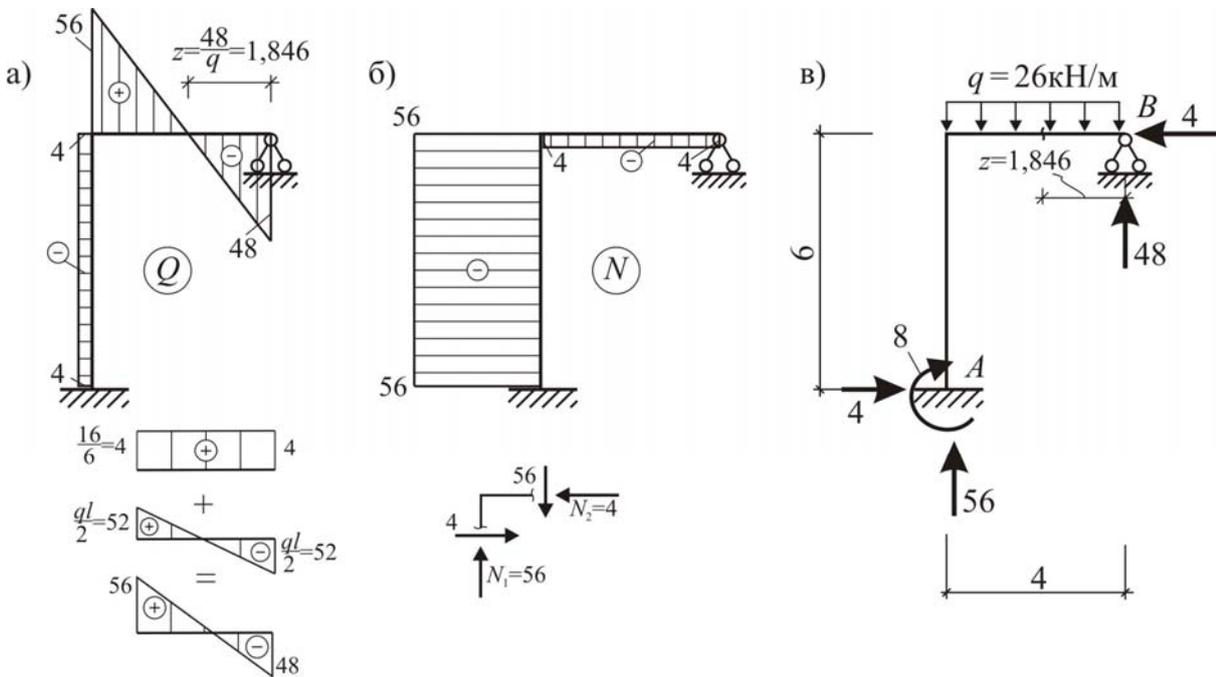


Рис. 7.6. Эпюры поперечных и продольных сил, статическая проверка

$$\sum F_{кx} = 0: 4 - 4 = 0; 0 = 0, \text{ верно.}$$

$$\sum F_{ky} = 0: 56 - 26 \cdot 4 + 48 = 0; 0=0, \text{ верно.}$$

$$\sum M_A = 0: -26 \cdot 4 \cdot 2 + 4 \cdot 6 + 48 \cdot 4 - 8 = 0; 0=0, \text{ верно.}$$

$$M_{\max} = 48 \cdot 1,846 - 26 \cdot 1,846 \cdot \frac{1,846}{2} = 44,308.$$

7.3. Расчет кинематически неопределимой системы с двумя неизвестными методом перемещений

Пример №1.

Построить эпюры внутренних усилий для рамы с помощью метода перемещений (рис. 7.7, а).

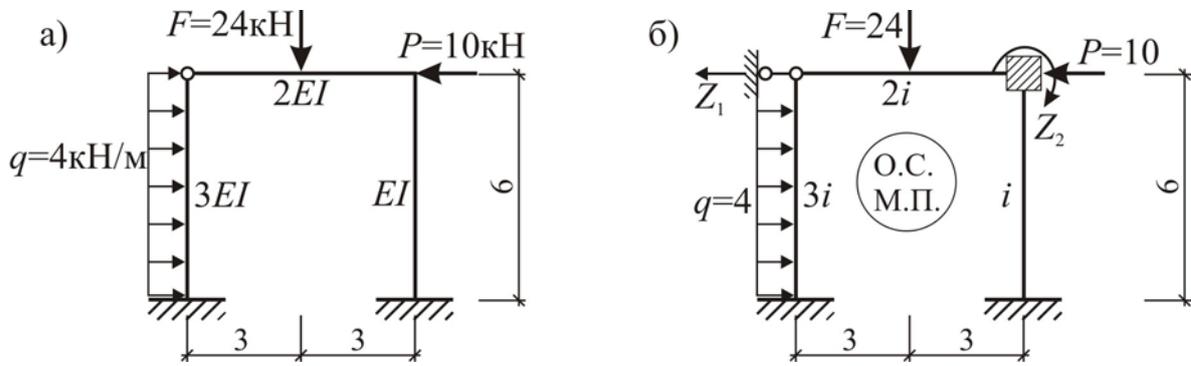


Рис. 7.7. Расчетная схема и основная система метода перемещений

Найдем соотношение погонных жесткостей для стержневой рамы:

$$i_1 = \frac{3EI}{6} = 3i;$$

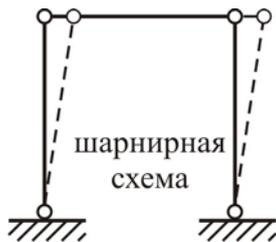
$$i_2 = \frac{2EI}{6} = 2i;$$

$$i_3 = \frac{EI}{6} = i.$$

1) Количество неизвестных:

$$n = n_y + n_{\pi}.$$

$n_y = 1$ (количество жестких узлов);



$$n_{\pi} = W_{\text{ш.с.}} = 3Д - 2Ш - C_O = 3 \cdot 3 - 2 \cdot 2 - 4 = 1.$$

$$n = n_y + n_{\pi} = 1 + 1 = 2.$$

2) Основная система метода перемещений (О.С.М.П.) показана на рис. 7.7, б.

3) Система уравнений метода перемещений с двумя неизвестными:

$$\left. \begin{aligned} r_{11} \cdot Z_1 + r_{12} \cdot Z_2 + R_{1p} &= 0 \\ r_{21} \cdot Z_1 + r_{22} \cdot Z_2 + R_{2p} &= 0 \end{aligned} \right\}$$

4) Единичные эпюры (рис. 7.8).

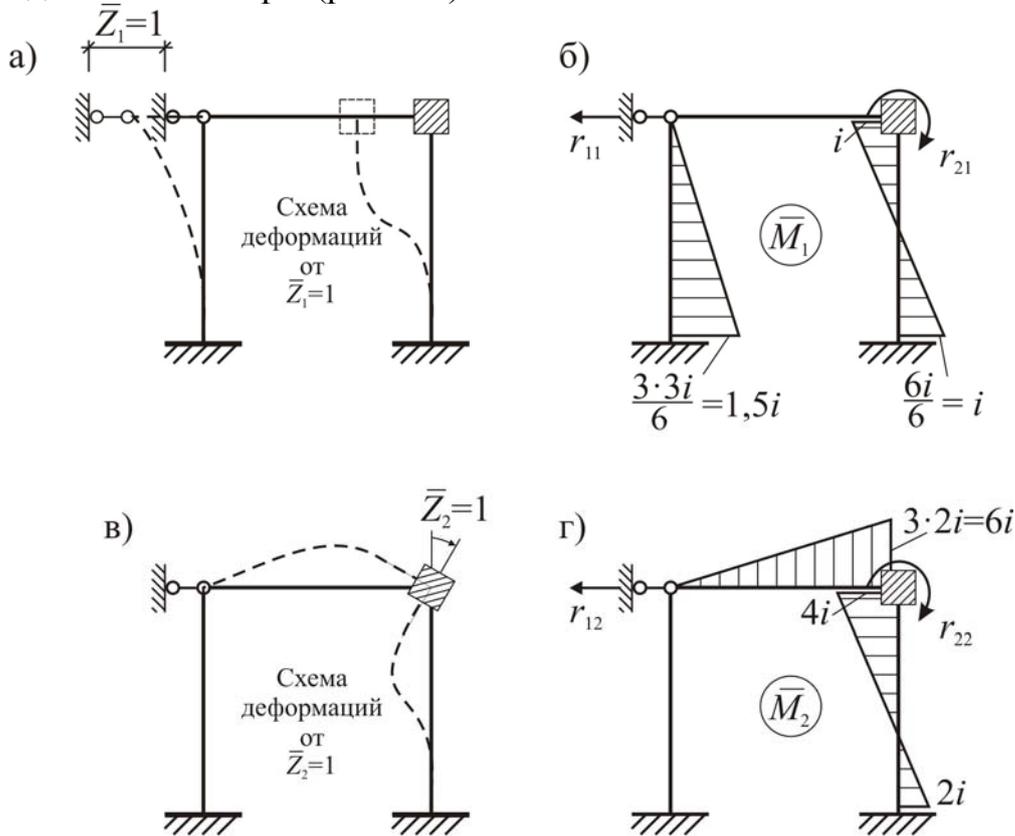
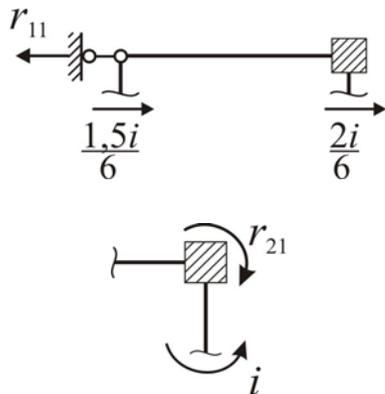


Рис. 7.8. Единичные эпюры

5) Вычисление коэффициентов при неизвестных выполняется статическим способом (для реакций в дополнительно введенных защемлениях используется метод вырезания узлов; для реакций в дополнительно введенных линейных связях проводится сечение, параллельное реакции, так, чтобы в отсеченной части была только одна неизвестная сила):

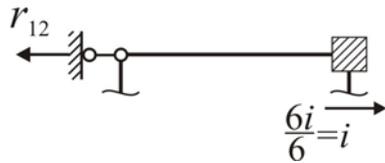


$$\sum x = 0: \frac{1,5i}{6} + \frac{2i}{6} - r_{11} = 0;$$

$$r_{11} = \frac{1,5i}{6} + \frac{2i}{6} = \frac{3,5i}{6}.$$

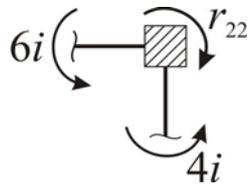
$$\sum M_{\text{узн}} = 0: i - r_{21} = 0;$$

$$r_{21} = i.$$



$$\sum x = 0: i - r_{12} = 0;$$

$$r_{12} = i.$$



$$\sum M_{\text{узл}} = 0: 6i + 4i - r_{22} = 0;$$

$$r_{22} = 6i + 4i = 10i.$$

б) Грузовая эпюра (рис. 7.9, а) строится только от пролетной внешней нагрузки.

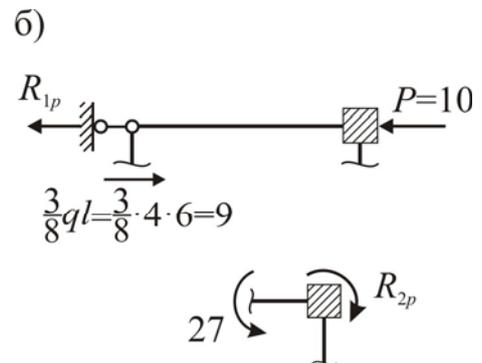
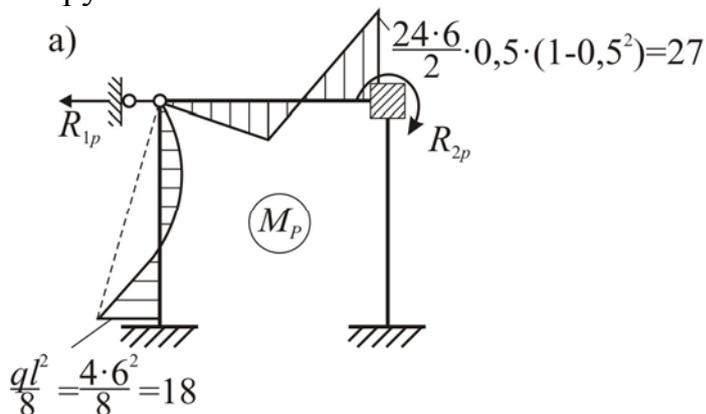


Рис. 7.9. Грузовая эпюра и вычисление свободных коэффициентов

7) Вычисление свободных коэффициентов уравнений статическим способом (рис. 7.9, б):

$$\sum x = 0: 9 - R_{1p} - 10 = 0; R_{1p} = 9 - 10 = -1.$$

$$\sum M_{\text{узл}} = 0: 27 - R_{2p} = 0; R_{2p} = 27.$$

8) Решение системы уравнений метода перемещений:

$$\left. \begin{array}{l} \frac{3,5i}{6} \cdot Z_1 + i \cdot Z_2 - 1 = 0 \\ i \cdot Z_1 + 10i \cdot Z_2 + 27 = 0 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \times 10 \\ + \\ \times (-1) \end{array} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} \frac{35i}{6} \cdot Z_1 + 10i \cdot Z_2 - 10 = 0 \\ -\frac{6i}{6} \cdot Z_1 - 10i \cdot Z_2 - 27 = 0 \end{array} \right\}$$

$$\frac{29i}{6} \cdot Z_1 - 37 = 0; Z_1 = \frac{37 \cdot 6}{29i} = \frac{7,6552}{i}.$$

$$Z_2 = \frac{-27 - i \cdot Z_1}{10i} = \frac{-27 - i \cdot \frac{7,6552}{i}}{10i} = -\frac{3,4655}{i}.$$

9) Исправленные эпюры $M_1^H = \bar{M}_1 \cdot Z_1$, $M_2^H = \bar{M}_2 \cdot Z_2$ (рис. 7.10, а, б).

10) Окончательная эпюра моментов (рис. 7.10, в) получается путем сложения грузовой и исправленных эпюр: $M_{ок} = M_p + M_1'' + M_2''$.

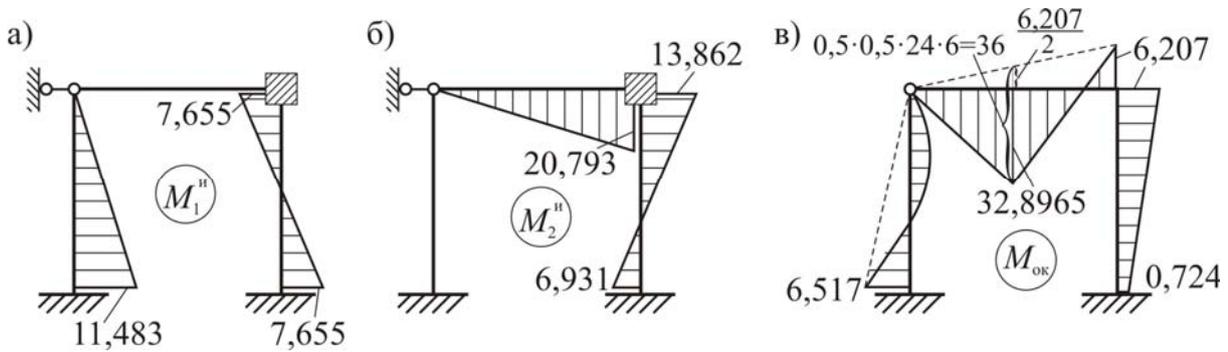


Рис. 7.10. Исправленные и окончательная эпюры

Статическая проверка окончательной эпюры моментов заключается в равновесии вырезанного жесткого узла:

$$\sum M_{узн} = 0: 6,207 - 6,207 = 0; \\ 0 = 0, \text{ верно.}$$

11) Эпюры поперечных (рис. 7.11, а) и продольных (рис. 7.11, б) сил, статическая проверка (рис. 7.11, в).

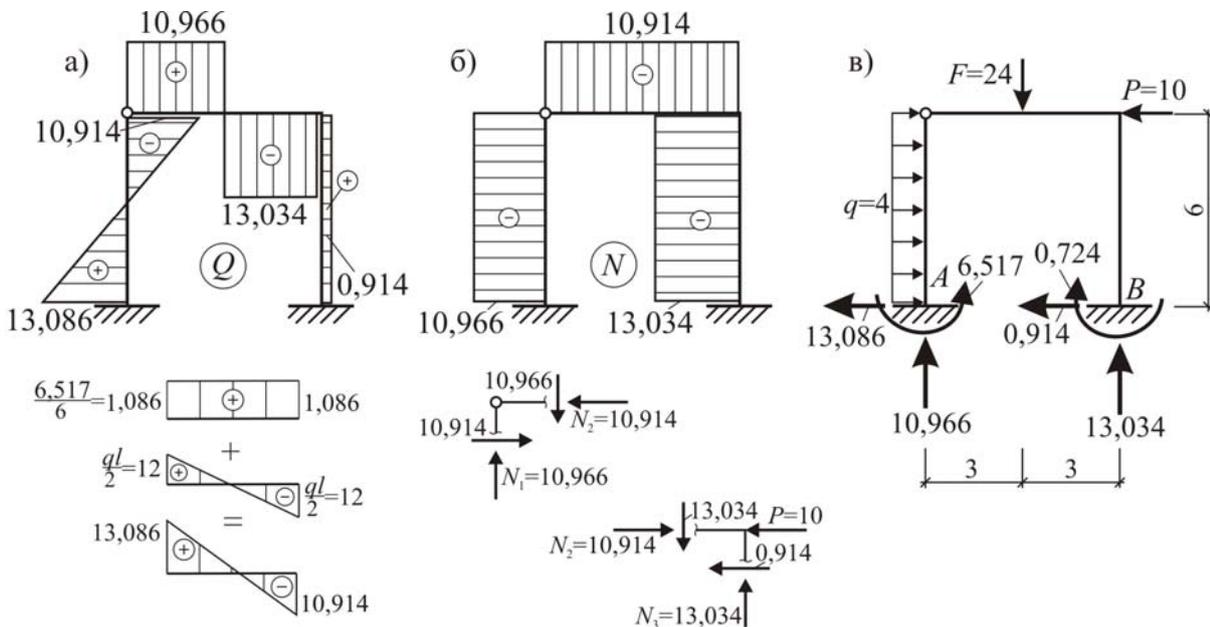


Рис. 7.11. Эпюры поперечных и продольных сил, статическая проверка

$$\sum F_{kx} = 0: -13,086 - 0,914 + 4 \cdot 6 - 10 = 0; 0=0, \text{ верно.}$$

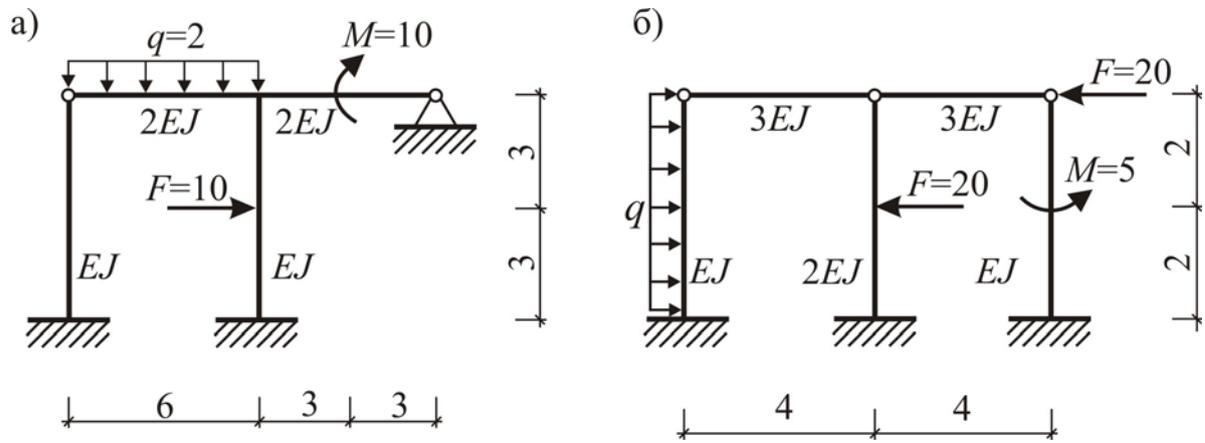
$$\sum F_{ky} = 0: 10,966 + 13,034 - 24 = 0; 0=0, \text{ верно.}$$

$$\sum M_A = 0: 6,517 - 4 \cdot 6 \cdot 3 - 24 \cdot 3 + 10 \cdot 6 - 0,724 + 13,034 \cdot 6 = 0;$$

$$-0,003 \approx 0, \text{ верно.}$$

Задачи для самостоятельного решения

Рассчитать раму (рис. 7.12) методом перемещений.



8. МАТРИЧНАЯ ФОРМА РАСЧЕТА СТЕРЖНЕВЫХ СИСТЕМ МЕТОДОМ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ

8.1. Расчет рамы с узловой нагрузкой матричным методом перемещений

Пример №1.

Построить эпюру изгибающих моментов для рамы с узловой нагрузкой (рис. 8.1а), используя матричный метод перемещений. Характеристики материала и поперечного сечения стержней: модуль упругости $E=2 \cdot 10^{11}$ Н/м², площадь поперечного сечения $F=20 \cdot 10^{-4}$ м², момент инерции $I=11 \cdot 10^{-6}$ м⁴.

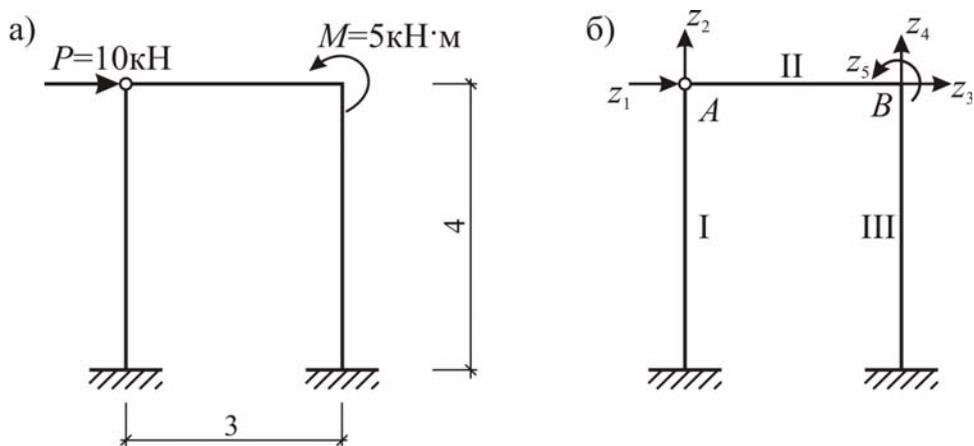


Рис. 8.1. Расчетная схема рамы и схема узловых перемещений

Рассматриваемая рама в общем случае (с учетом продольных перемещений) пять раз кинематически неопределима, т.е. степень ее свободы $n = 5$ (рис. 8.1, б). Схемы внутренних усилий в стержнях и узлах рамы показаны на рис. 8.2, 8.3.

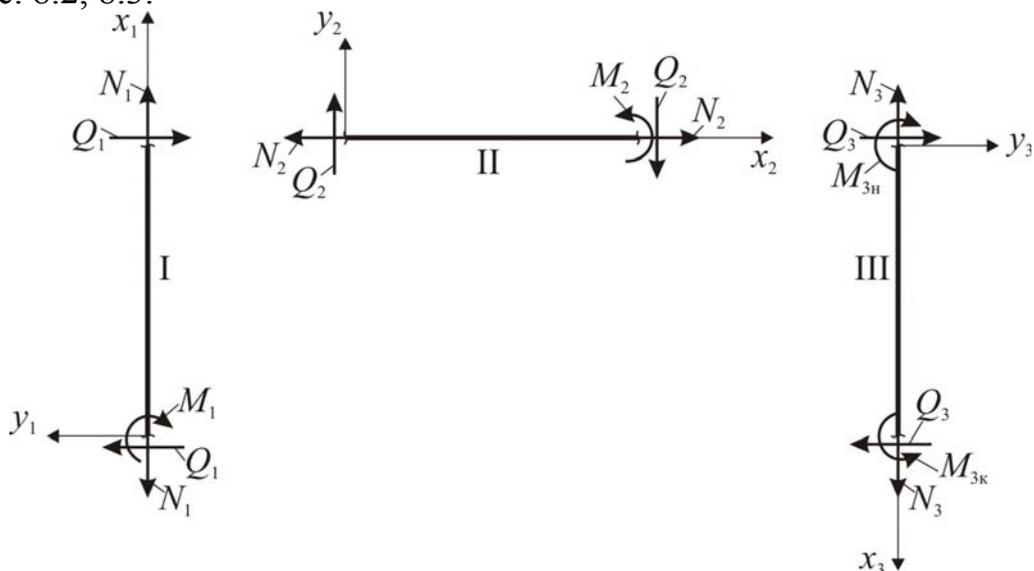


Рис. 8.2. Схема внутренних усилий в стержнях фермы

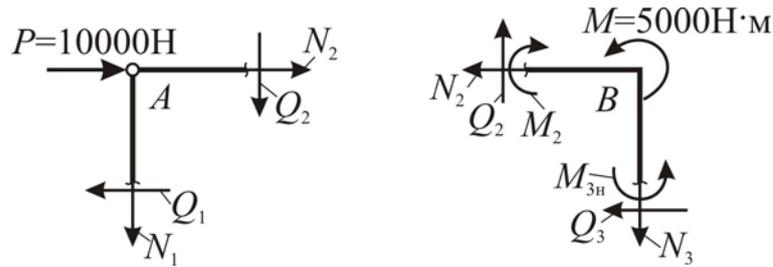


Рис. 8.3. Вырезанные узлы

Составим уравнения равновесия вырезанных узлов (рис. 8.3).

Узел *A*:

$$\sum F_{kx} = 0: -Q_1 + N_2 + 10000 = 0;$$

$$\sum F_{ky} = 0: -N_1 - Q_2 = 0.$$

Узел *B*:

$$\sum F_{kx} = 0: -N_2 - Q_3 = 0;$$

$$\sum F_{ky} = 0: Q_2 - N_3 = 0;$$

$$\sum M_{\text{узел}} = 0: -M_2 + M_{3н} + 5000 = 0.$$

Выразим поперечные силы через изгибающие моменты, составляя для каждого стержня уравнение моментов относительно точки начала (рис. 8.2):

$$-M_1 - Q_1 \cdot 4 = 0 \Rightarrow Q_1 = -\frac{M_1}{4};$$

$$M_2 - Q_2 \cdot 3 = 0 \Rightarrow Q_2 = \frac{M_2}{3};$$

$$-M_{3н} + M_{3к} - Q_3 \cdot 4 = 0 \Rightarrow Q_3 = \frac{M_{3к} - M_{3н}}{4}.$$

Перепишем уравнения равновесия вырезанных узлов с учетом полученных выражений:

$$\frac{M_1}{4} + N_2 + 10000 = 0;$$

$$-N_1 - \frac{M_2}{3} = 0.$$

$$-N_2 - \frac{M_{3к} - M_{3н}}{4} = 0;$$

$$\frac{M_2}{3} - N_3 = 0;$$

$$-M_2 + M_{3н} + 5000 = 0.$$

Уравнения равновесия в матричной форме имеют вид:

$$AS + P = 0.$$

Тогда вектор внутренних усилий

$$S = [N_1 \quad M_1 \quad N_2 \quad M_2 \quad N_3 \quad M_{3н} \quad M_{3к}]^T;$$

вектор внешней нагрузки

$$P = [10000 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 5000]^T;$$

статическая матрица (матрица коэффициентов при неизвестных)

$$A = \begin{matrix} & \begin{matrix} N_1 & M_1 & N_2 & M_2 & N_3 & M_{3н} & M_{3к} \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{4} & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & -\frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

Для формирования матрицы внутренней жесткости запишем матрицы жесткости каждого стержня рамы:

$$k_1 = \begin{bmatrix} \frac{EF}{4} & 0 \\ 0 & \frac{3EI}{4} \end{bmatrix}, \quad k_2 = \begin{bmatrix} \frac{EF}{3} & 0 \\ 0 & \frac{3EI}{3} \end{bmatrix}, \quad k_3 = \begin{bmatrix} \frac{EF}{4} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{4EI}{4} & -\frac{2EI}{4} \\ 0 & -\frac{2EI}{4} & \frac{4EI}{4} \end{bmatrix}.$$

Тогда матрица внутренней жесткости всей системы:

$$k = \begin{bmatrix} \frac{EF}{4} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3EI}{4} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{EF}{3} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{3EI}{3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{EF}{4} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{4EI}{4} & -\frac{2EI}{4} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{2EI}{4} & \frac{4EI}{4} \end{bmatrix}$$

С помощью системы компьютерной алгебры MathCad определим перемещения и внутренние усилия:

$$Z = (A \cdot k \cdot A^T)^{-1} \cdot P; S = -k \cdot A^T \cdot Z.$$

Получим следующие значения:

$$Z = \begin{bmatrix} 0,0252 \\ 2,6132 \cdot 10^{-5} \\ 0,0251 \\ -2,6132 \cdot 10^{-5} \\ -3,5809 \cdot 10^{-3} \end{bmatrix}; S = \begin{bmatrix} 2613,216 \\ -10381,719 \\ -7404,57 \\ -7839,647 \\ -2613,216 \\ -12839,647 \\ 16778,634 \end{bmatrix}.$$

По полученным значениям строим эпюру изгибающих моментов (рис. 8.4).

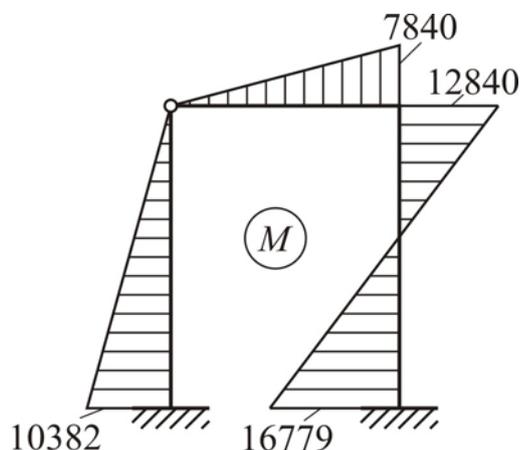


Рис. 8.4. Эпюра изгибающих моментов

8.2. Расчет рамы с пролетной нагрузкой матричным методом перемещений

Пример №1.

Построить эпюру изгибающих моментов для рамы с пролетной нагрузкой (рис. 8.5), используя матричный метод перемещений. Характеристики материала и поперечного сечения стержней: модуль упругости $E=2 \cdot 10^{11}$ Н/м², площадь поперечного сечения $F=20 \cdot 10^{-4}$ м², момент инерции $I=11 \cdot 10^{-6}$ м⁴.

С помощью таблицы метода перемещений строим эпюру S_0 от внешней нагрузки (т.е. грузовую эпюру) и приводим пролетную нагрузку к узловой (рис. 8.6).

На рис. 8.7 представлена схема узловых перемещений системы, схемы внутренних усилий в стержнях и узлах рамы показаны на рис. 8.8, 8.9.

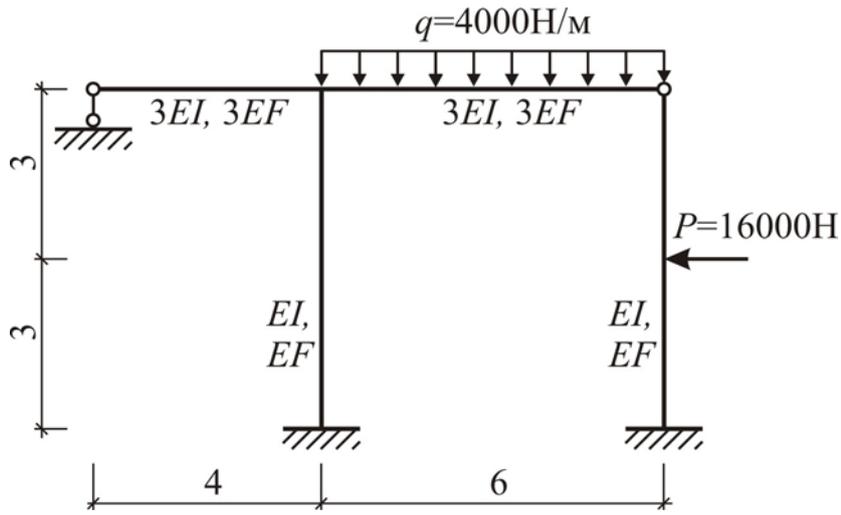


Рис. 8.5. Расчетная схема рамы

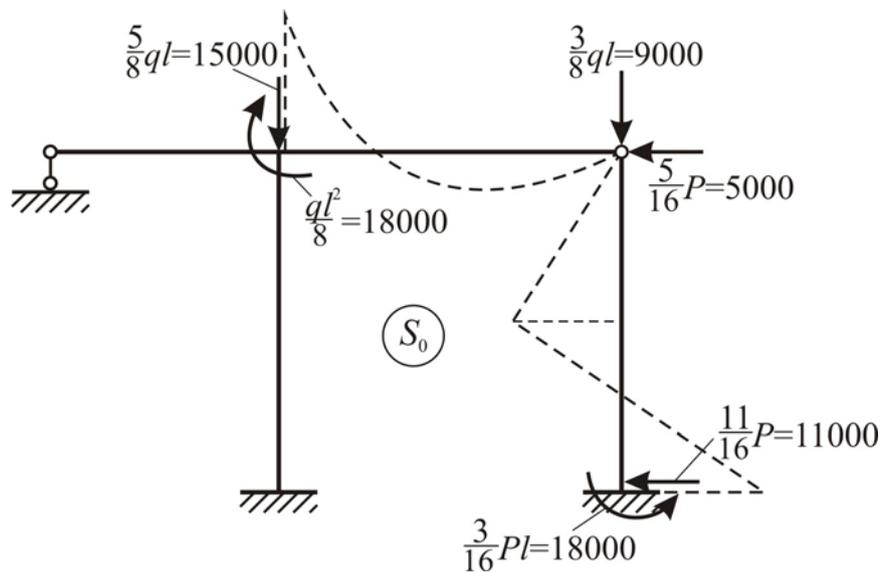


Рис. 8.6. Эпюра моментов от пролетной нагрузки

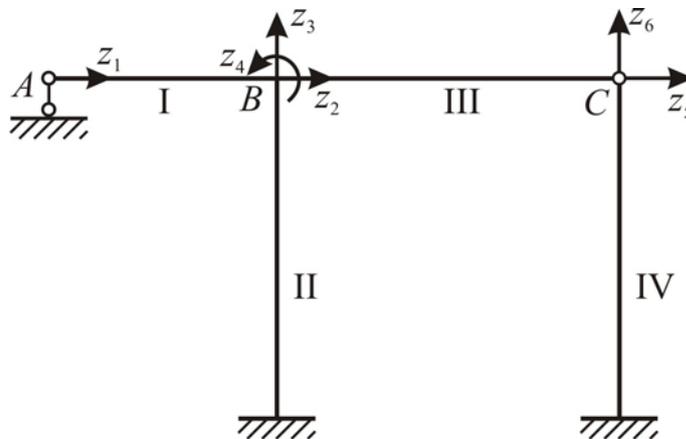


Рис. 8.7. Схема узловых перемещений

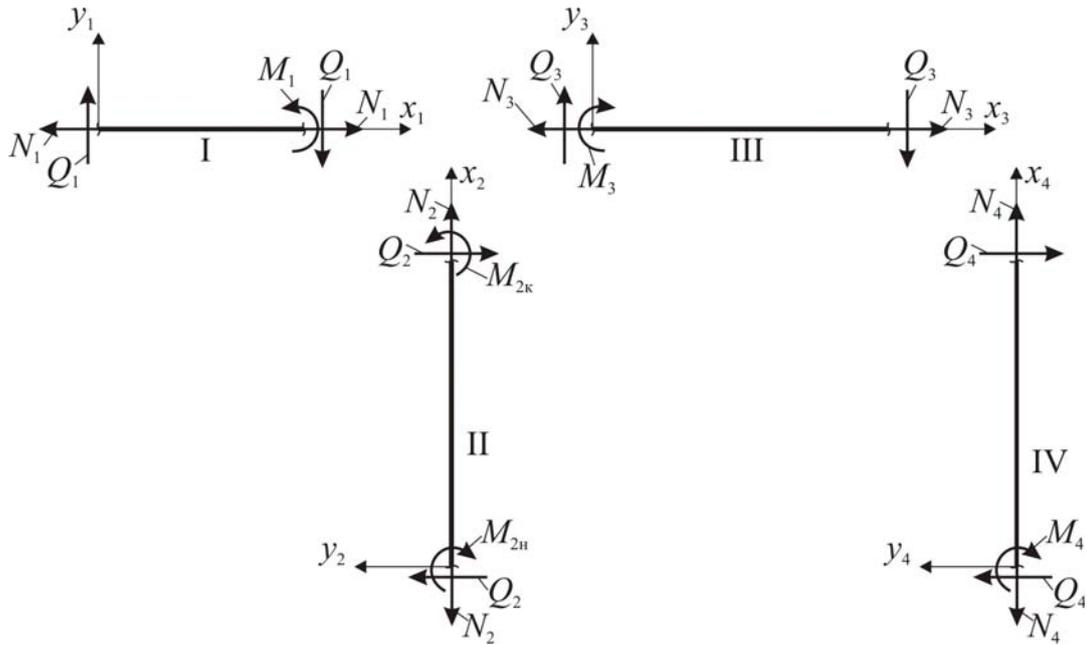


Рис. 8.8. Схема внутренних усилий в стержнях фермы

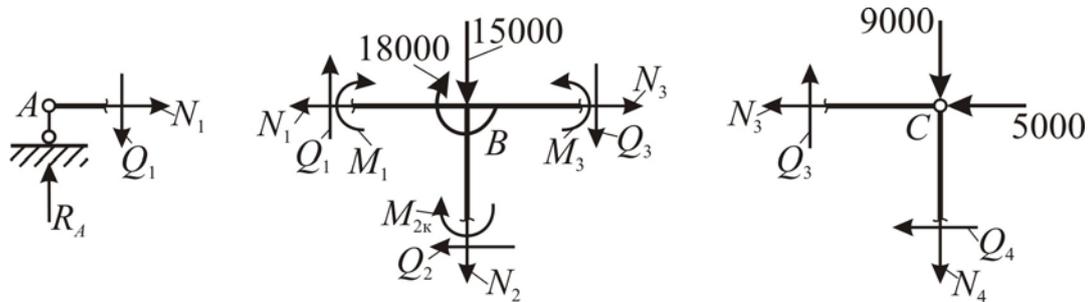


Рис. 8.9. Вырезанные узлы

Составим шесть уравнений равновесия (рис. 8.9), соответствующих шести возможным перемещениям рамы (рис. 8.7):

Узел *A*:

$$\sum F_{kx} = 0: N_1 = 0.$$

Узел *B*:

$$\sum F_{kx} = 0: -N_1 - Q_2 + N_3 = 0;$$

$$\sum F_{ky} = 0: Q_1 - N_2 - Q_3 - 15000 = 0;$$

$$\sum M_{\text{узел}} = 0: -M_1 - M_{2к} + M_3 - 18000 = 0.$$

Узел *C*:

$$\sum F_{kx} = 0: -N_3 - Q_4 - 5000 = 0;$$

$$\sum F_{ky} = 0: Q_3 - N_4 - 9000 = 0.$$

Выразим поперечные силы через изгибающие моменты, составляя для каждого стержня уравнение моментов относительно точки начала (рис. 8.8):

$$M_1 - Q_1 \cdot 4 = 0 \Rightarrow Q_1 = \frac{M_1}{4};$$

$$-M_{2H} + M_{2K} - Q_2 \cdot 6 = 0 \Rightarrow Q_2 = \frac{M_{2K} - M_{2H}}{6};$$

$$-M_3 - Q_3 \cdot 6 = 0 \Rightarrow Q_3 = -\frac{M_3}{6};$$

$$-M_4 - Q_4 \cdot 6 = 0 \Rightarrow Q_4 = -\frac{M_4}{6}.$$

Перепишем уравнения равновесия вырезанных узлов с учетом полученных выражений:

$$N_1 = 0;$$

$$-N_1 - \frac{M_{2K} - M_{2H}}{6} + N_3 = 0;$$

$$\frac{M_1}{4} - N_2 + \frac{M_3}{6} - 15000 = 0;$$

$$-M_1 - M_{2K} + M_3 - 18000 = 0$$

$$-N_3 + \frac{M_4}{6} - 5000 = 0;$$

$$-\frac{M_3}{6} - N_4 - 9000 = 0.$$

Уравнения равновесия в матричной форме имеют вид:

$$AS + P = 0.$$

Тогда вектор внутренних усилий

$$S = [N_1 \quad M_1 \quad N_2 \quad M_{2H} \quad M_{2K} \quad N_3 \quad M_3 \quad N_4 \quad M_4]^T;$$

вектор внешней нагрузки

$$P = [0 \quad 0 \quad -15000 \quad -18000 \quad -5000 \quad -9000]^T;$$

статическая матрица (матрица коэффициентов при неизвестных)

$$A = \begin{matrix} & \begin{matrix} N_1 & M_1 & N_2 & M_{2H} & M_{2K} & N_3 & M_3 & N_4 & M_4 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{6} & -\frac{1}{6} & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{4} & -1 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{6} & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & \frac{1}{6} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{6} & -1 & 0 \end{bmatrix} \end{matrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{matrix}$$

Для формирования матрицы внутренней жесткости запишем матрицы жесткости каждого стержня рамы:

$$k_1 = \begin{bmatrix} \frac{3EF}{4} & 0 \\ 0 & \frac{3 \cdot 3EI}{4} \end{bmatrix}, k_2 = \begin{bmatrix} \frac{EF}{6} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{4EI}{6} & -\frac{2EI}{6} \\ 0 & -\frac{2EI}{6} & \frac{4EI}{6} \end{bmatrix},$$

$$k_3 = \begin{bmatrix} \frac{3EF}{6} & 0 \\ 0 & \frac{3 \cdot 3EI}{6} \end{bmatrix}, k_4 = \begin{bmatrix} \frac{EF}{6} & 0 \\ 0 & \frac{3EI}{6} \end{bmatrix}$$

Тогда матрица внутренней жесткости всей системы:

$$k = \begin{bmatrix} \frac{3EF}{4} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{9EI}{4} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{EF}{6} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{4EI}{6} & -\frac{2EI}{6} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{2EI}{6} & \frac{4EI}{6} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{3EF}{6} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{9EI}{6} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{EF}{6} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{3EI}{6} \end{bmatrix}$$

С помощью системы компьютерной алгебры MathCad определим перемещения и внутренние усилия:

$$Z = (A \cdot k \cdot A^T)^{-1} \cdot P; S = -k \cdot A^T \cdot Z.$$

Получим следующие значения:

$$Z = \begin{bmatrix} -0,031 \\ -0,031 \\ -2,3108 \cdot 10^{-4} \\ -7,0591 \cdot 10^{-4} \\ -0,031 \\ -1,4095 \cdot 10^{-4} \end{bmatrix}; S = \begin{bmatrix} 0 \\ -3208,281 \\ -15405,558 \\ 11894,981 \\ -12412,647 \\ -4051,271 \\ 2379,072 \\ -9396,512 \\ 5692,371 \end{bmatrix}.$$

По полученным значениям строим эпюру изгибающих моментов S (рис. 8.10).

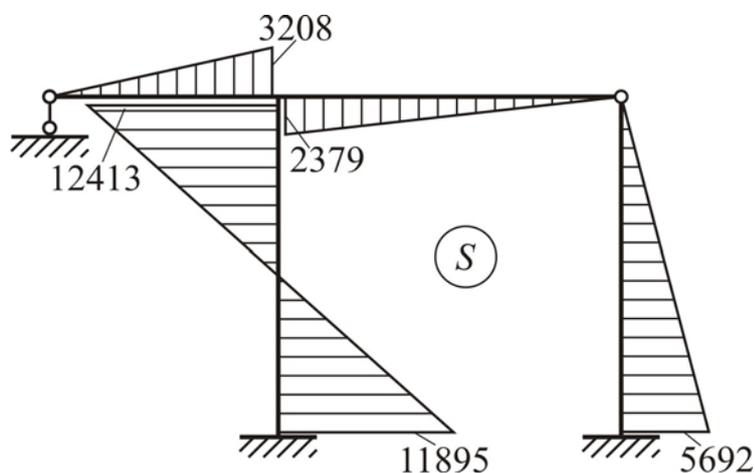


Рис. 8.10. Эпюра изгибающих моментов от узловой нагрузки

Окончательная эпюра моментов находится путем сложения двух эпюр: $M_{ок} = S_0 + S$. Эта эпюра показана на рис. 8.11.

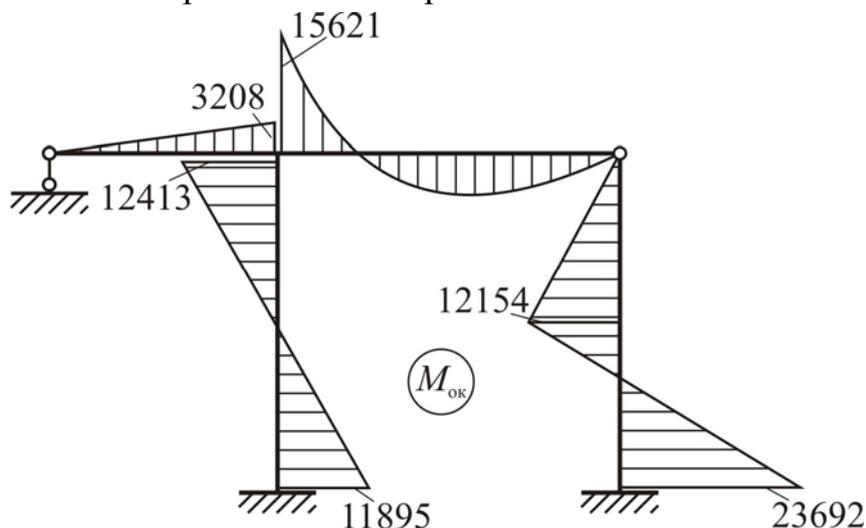


Рис. 8.11. Окончательная эпюра моментов

Задачи для самостоятельного решения

Рассчитать раму (рис. 8.12) методом перемещений в матричной форме.

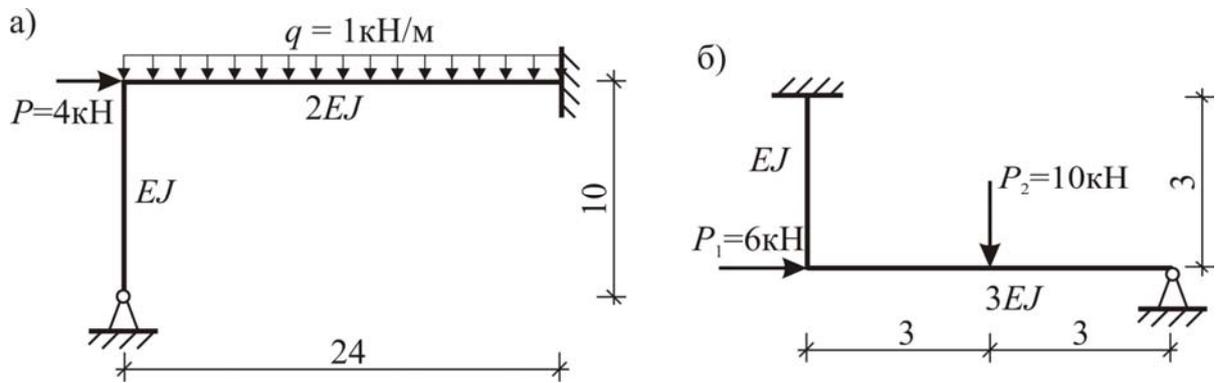


Рис. 8.12. Задачи для самостоятельного решения

9. МЕТОД КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

9.1. Расчет фермы методом конечных элементов

Пример №1.

Выполнить расчет фермы (рис. 9.1) методом конечных элементов (МКЭ).

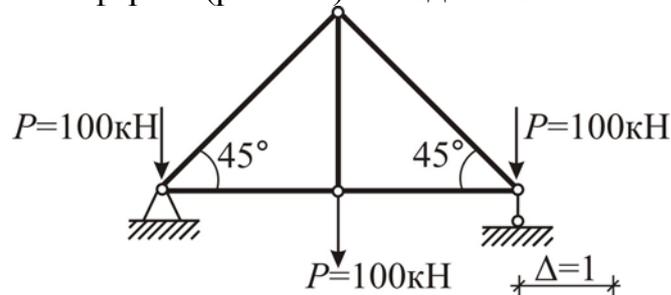


Рис. 9.1. Расчетная схема фермы

Пронумеруем последовательно узлы, стержни и узловые перемещения фермы (рис. 9.2, а). Узловые силы индексируем в соответствии с номерами перемещений (рис. 9.2, б).

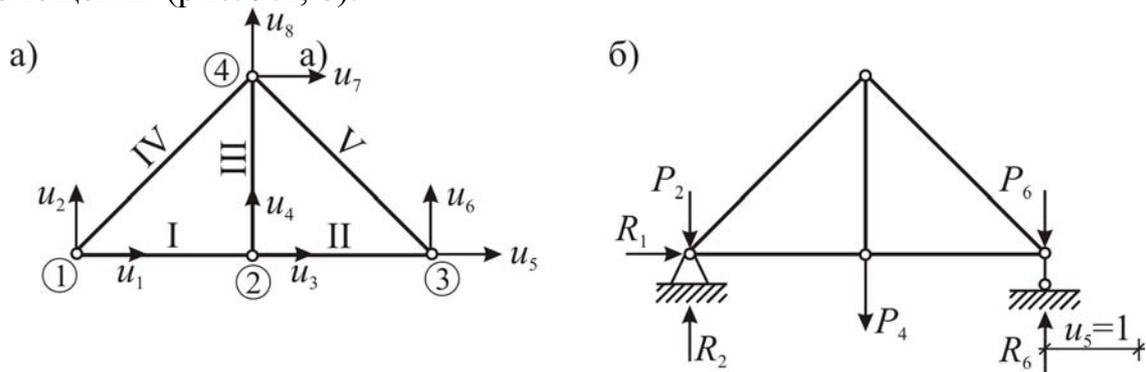


Рис. 9.2. Схема узловых перемещений и узловых сил

Уравнение МКЭ имеет вид: $P = K \cdot U$. Для заданной фермы вектор перемещений

$$U = [u_1 \quad u_2 \quad u_3 \quad u_4 \quad u_5 \quad u_6 \quad u_7 \quad u_8]^T;$$

вектор узловых нагрузок

$$P = [P_1 \quad P_2 \quad P_3 \quad P_4 \quad P_5 \quad P_6 \quad P_7 \quad P_8]^T = \\ = [R_1 \quad R_2 - 100 \quad 0 \quad -100 \quad 0 \quad R_6 - 100 \quad 0 \quad 0]^T;$$

матрица жесткости каждого стержня составляется по формуле

$$k = \frac{EF}{l} \begin{bmatrix} cc & cs & -cc & -cs \\ sc & ss & -sc & -ss \\ -cc & -cs & cc & cs \\ -sc & -ss & sc & ss \end{bmatrix},$$

где c и s – соответственно косинус и синус угла наклона стержня к горизонтальной оси.

Для заданной фермы: стержень I: $\alpha=0^\circ$, $c=1$, $s=0$; стержень II: $\alpha=0^\circ$, $c=1$, $s=0$; стержень III: $\alpha=90^\circ$, $c=0$, $s=1$; стержень IV: $\alpha=45^\circ$, $c=0,7071$, $s=0,7071$; стержень V: $\alpha=135^\circ$, $c=-0,7071$, $s=0,7071$. Примем $EF_i/l_i=2$, тогда матрицы жесткости отдельных элементов:

$$\begin{array}{c}
 k_{\text{I}}= \\
 \begin{array}{c|cccc}
 & 1 & 2 & 3 & 4 \\
 \hline
 1 & 2 & 0 & -2 & 0 \\
 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 3 & -2 & 0 & 2 & 0 \\
 4 & 0 & 0 & 0 & 0
 \end{array}
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{c}
 k_{\text{II}}= \\
 \begin{array}{c|cccc}
 & 3 & 4 & 5 & 6 \\
 \hline
 3 & 2 & 0 & -2 & 0 \\
 4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 5 & -2 & 0 & 2 & 0 \\
 6 & 0 & 0 & 0 & 0
 \end{array}
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{c}
 k_{\text{III}}= \\
 \begin{array}{c|cccc}
 & 3 & 4 & 7 & 8 \\
 \hline
 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 4 & 0 & 2 & 0 & -2 \\
 7 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 8 & 0 & -2 & 0 & 2
 \end{array}
 \end{array}$$

$$\begin{array}{c}
 k_{\text{IV}}= \\
 \begin{array}{c|cccc}
 & 1 & 2 & 7 & 8 \\
 \hline
 1 & 1 & 1 & -1 & -1 \\
 2 & 1 & 1 & -1 & -1 \\
 7 & -1 & -1 & 1 & 1 \\
 8 & -1 & -1 & 1 & 1
 \end{array}
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{c}
 k_{\text{V}}= \\
 \begin{array}{c|cccc}
 & 5 & 6 & 7 & 8 \\
 \hline
 5 & 1 & -1 & -1 & 1 \\
 6 & -1 & 1 & 1 & -1 \\
 7 & -1 & 1 & 1 & -1 \\
 8 & 1 & -1 & -1 & 1
 \end{array}
 \end{array}$$

Матрица жесткости фермы представляет собой сумму матриц жесткостей её элементов:

$$\begin{array}{c}
 K= \\
 \begin{array}{c|cccccccc}
 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\
 \hline
 1 & 3 & 1 & -2 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 \\
 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 \\
 3 & -2 & 0 & 4 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 \\
 4 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & -2 \\
 5 & 0 & 0 & -2 & 0 & 3 & -1 & -1 & 1 \\
 6 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & -1 \\
 7 & -1 & -1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 2 & 0 \\
 8 & -1 & -1 & 0 & -2 & 1 & -1 & 0 & 4
 \end{array}
 \end{array}$$

Уравнения равновесия можно записать в развернутом виде:

$$\begin{cases}
 P_1 = 3u_1 + 1u_2 - 2u_3 + 0u_4 + 0u_5 + 0u_6 - 1u_7 - 1u_8 \\
 P_3 = 1u_1 + 1u_2 + 0u_3 + 0u_4 + 0u_5 + 0u_6 - 1u_7 - 1u_8 \\
 P_3 = -2u_1 + 0u_2 + 4u_3 + 0u_4 - 2u_5 + 0u_6 + 0u_7 + 0u_8 \\
 P_4 = 0u_1 + 0u_2 + 0u_3 + 2u_4 + 0u_5 + 0u_6 + 0u_7 - 2u_8 \\
 P_5 = 0u_1 + 0u_2 - 2u_3 + 0u_4 + 3u_5 - 1u_6 - 1u_7 + 1u_8 \\
 P_6 = 0u_1 + 0u_2 + 0u_3 + 0u_4 - 1u_5 + 1u_6 + 1u_7 - 1u_8 \\
 P_7 = -1u_1 - 1u_2 + 0u_3 + 0u_4 - 1u_5 + 1u_6 + 2u_7 + 0u_8 \\
 P_8 = -1u_1 - 1u_2 + 0u_3 - 2u_4 + 1u_5 - 1u_6 + 0u_7 + 4u_8
 \end{cases}$$

Для вычисления перемещений u_3, u_4, u_7, u_8 систему уравнений перепишем в виде:

$$\begin{cases} P_3 = -2u_1 + 4u_3 - 2u_5 = 0 \\ P_4 = 2u_4 - 2u_8 = -100 \\ P_7 = -1u_1 - 1u_2 - 1u_5 + 1u_6 + 2u_7 = 0 \\ P_8 = -1u_1 - 1u_2 - 2u_4 + 1u_5 - 1u_6 + 4u_8 = 0 \end{cases}$$

Из условий закрепления здесь $u_1=u_2=u_6=0$, по условию задачи $u_5=1$.

$$\begin{cases} 4u_3 - 2 = 0 \\ 2u_4 - 2u_8 = -100 \\ -1 + 2u_7 = 0 \\ -2u_4 + 1 + 4u_8 = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} u_3 = 0,5 \\ u_7 = 0,5 \\ u_8 = -50,5 \\ u_4 = -100,5 \end{cases}$$

9.2. Преобразование координат.

Расчет рамы методом конечных элементов

Для некоторых конечных элементов матрицы жесткости выводятся в местной системе координат, оси которой ориентированы отлично от общей системы. Поэтому при формировании общей матрицы жесткости, общего вектора перемещений и общего вектора узловых сил необходимо сделать переход от местной к общей системе координат. Матрица преобразования координат:

$$T = \begin{bmatrix} c & s & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -s & c & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c & s & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -s & c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

где c и s – соответственно косинус и синус угла наклона между локальной и глобальной системами координат.

Преобразования имеют вид:

$$K = T^T K' T;$$

$$U_i = T_i^T U'_i;$$

$$P_i = T_i^T P'_i.$$

Пример №1.

Рассчитать раму (рис. 9.3) методом конечных элементов.

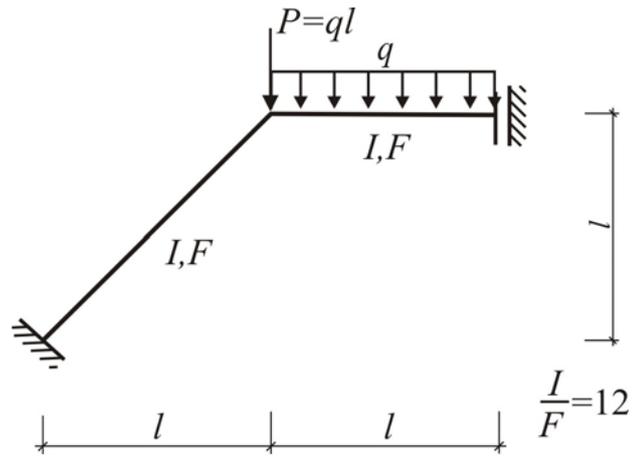


Рис. 9.3. Расчетная схема рамы

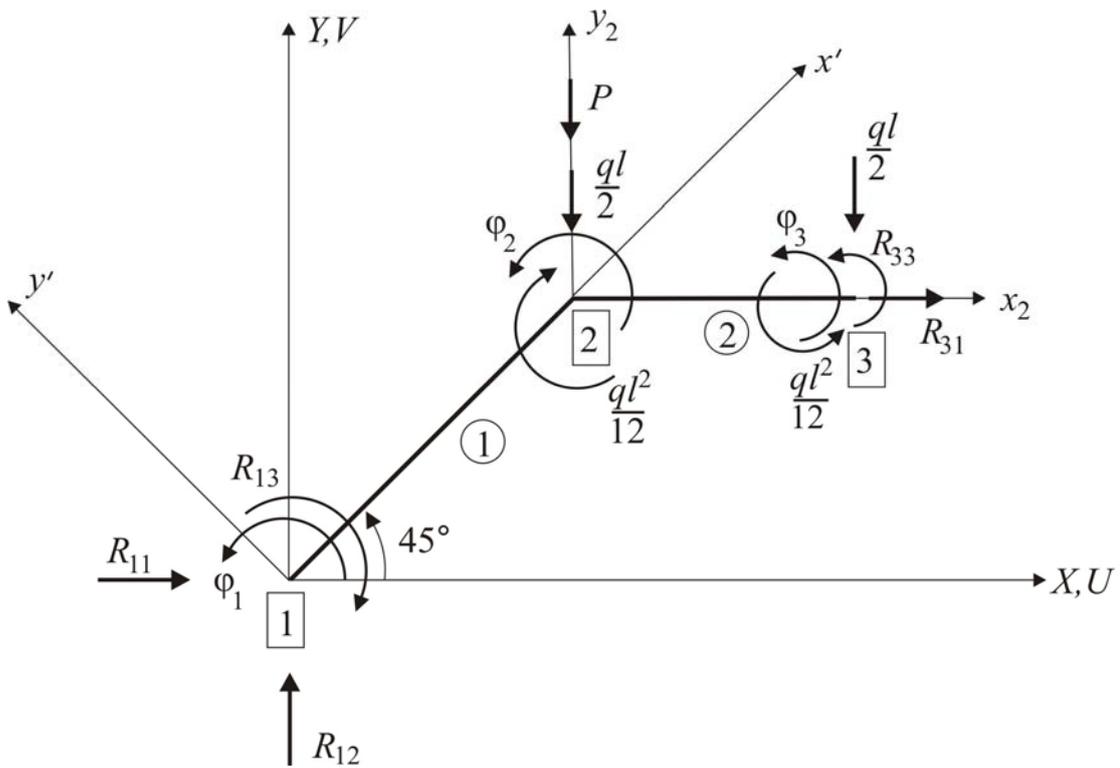


Рис. 9.4. Схема узловых перемещений и узловых нагрузок

Вектор угловых перемещений 1-го элемента:

$$U_1 = [u_1 \quad v_1 \quad \varphi_1 \quad u_2 \quad v_2 \quad \varphi_2]^T.$$

Матрица жесткости кинематического 1-го элемента:

$$k_1' = \begin{bmatrix} \frac{EF}{l_1} & 0 & 0 & -\frac{EF}{l_1} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{l_1^3} & \frac{6EI}{l_1^2} & 0 & -\frac{12EI}{l_1^3} & \frac{6EI}{l_1^2} \\ & & \frac{4EI}{l_1^3} & 0 & -\frac{6EI}{l_1^2} & \frac{2EI}{l_1} \\ & & & \frac{EF}{l_1} & 0 & 0 \\ & \text{симметрично} & & & \frac{12EI}{l_1^3} & -\frac{6EI}{l_1^2} \\ & & & & & \frac{4EI}{l_1} \end{bmatrix}.$$

Учитывая, что $l_1 = l / \frac{\sqrt{2}}{2} = l\sqrt{2}$, $\frac{F}{I} = 12$ получим

$$k_1' = \begin{bmatrix} 6\sqrt{2}l^2 & 0 & 0 & -6\sqrt{2}l^2 & 0 & 0 \\ & 3\sqrt{2} & 3l & 0 & -3\sqrt{2} & 3l \\ & & 2\sqrt{2}l^2 & 0 & -3l & \sqrt{2}l^2 \\ & & & 6\sqrt{2}l^2 & 0 & 0 \\ & \text{симметрично} & & & 3\sqrt{2} & -3l \\ & & & & & 2\sqrt{2}l^2 \end{bmatrix} \frac{EI}{l^3};$$

$$k_2' = k_2 = \begin{bmatrix} 12l^2 & 0 & 0 & -12l^2 & 0 & 0 \\ & 12 & 6l & 0 & -12 & 6l \\ & & 4l^2 & 0 & -6l & 2l^2 \\ & & & 12l^2 & 0 & 0 \\ & \text{симметрично} & & & 12 & -6l \\ & & & & & 4l^2 \end{bmatrix} \frac{EI}{l^3}.$$

Матрица преобразования координат 1-го стержня имеет вид:

$$T = \begin{bmatrix} c & s & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -s & c & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c & s & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -s & c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Тогда:

$$k_1 = T^T k_1' T$$

$$k_1 = \begin{bmatrix} 3\sqrt{2}\left(l^2 + \frac{1}{2}\right) & 3\sqrt{2}\left(l^2 - \frac{1}{2}\right) & -\frac{3\sqrt{2}}{2}l & -3\sqrt{2}\left(l^2 + \frac{1}{2}\right) & -3\sqrt{2}\left(l^2 - \frac{1}{2}\right) & -\frac{3\sqrt{2}}{2}l \\ & 3\sqrt{2}\left(l^2 + \frac{1}{2}\right) & \frac{\sqrt{3}}{2}l & -3\sqrt{2}\left(l^2 - \frac{1}{2}\right) & -3\sqrt{2}\left(l^2 + \frac{1}{2}\right) & \frac{3\sqrt{2}}{2}l \\ & & 2\sqrt{2}l^2 & \frac{3\sqrt{2}}{2}l & -\frac{3\sqrt{2}}{2}l & \sqrt{2}l^2 \\ \text{симметрично} & & & 3\sqrt{2}\left(l^2 + \frac{1}{2}\right) & 3\sqrt{2}\left(l^2 - \frac{1}{2}\right) & \frac{3\sqrt{2}}{2}l \\ & & & & 3\sqrt{2}\left(l^2 + \frac{1}{2}\right) & -\frac{3\sqrt{2}}{2}l \\ & & & & & 2\sqrt{2}l^2 \end{bmatrix} \frac{EI}{l^3}.$$

Поскольку локальная система координат 2-го элемента совпадает с глобальной системой, то матрицу жесткости 2-го элемента не следует трансформировать ($k_2 = k_2'$).

Матрица жесткости K образуется внесением на соответствующие позиции элементов матриц k_1 и k_2 , их суммированием, когда на той же позиции появятся элементы обеих матриц:

$$K = \begin{bmatrix} 3\sqrt{2}\left(l^2 + \frac{1}{2}\right) & 3\sqrt{2}\left(l^2 - \frac{1}{2}\right) & -\frac{3\sqrt{2}}{2}l & -3\sqrt{2}\left(l^2 + \frac{1}{2}\right) & -3\sqrt{2}\left(l^2 - \frac{1}{2}\right) & -\frac{3\sqrt{2}}{2}l & 0 & 0 & 0 \\ & 3\sqrt{2}\left(l^2 + \frac{1}{2}\right) & \frac{3\sqrt{2}}{2}l & -3\sqrt{2}\left(l^2 - \frac{1}{2}\right) & -3\sqrt{2}\left(l^2 + \frac{1}{2}\right) & \frac{3\sqrt{2}}{2}l & 0 & 0 & 0 \\ & & (2\sqrt{2}l^2) & \frac{3\sqrt{2}}{2}l & -\frac{3\sqrt{2}}{2}l & (\sqrt{2})l^2 & 0 & 0 & 0 \\ & & & 3\sqrt{2}\left(l^2 + \frac{1}{2}\right) + 12l^2 & 3\sqrt{2}\left(l^2 - \frac{1}{2}\right) & \frac{3\sqrt{2}}{2}l & -12l^2 & 0 & 0 \\ & \text{симметрично} & & & 3\sqrt{2}\left(l^2 + \frac{1}{2}\right) + 12 & -\frac{3\sqrt{2}}{2}l + 6l & 0 & 12 & 6l \\ & & & & & 2\sqrt{2}l^2 + 4l^2 & 0 & -6l & 2l^2 \\ & & & & & & 12l^2 & 0 & 0 \\ & & & & & & & 12 & -6l \\ & & & & & & & & 4l^2 \end{bmatrix} \frac{EI}{l^3}.$$

Подобным же образом получается вектор узловых сил системы:

$$P = \begin{bmatrix} 0 + R_{11} \\ 0 + R_{12} \\ 0 + R_{13} \\ 0 \\ -\left(\frac{1}{2}ql + P\right) \\ -\frac{1}{12}ql^2 \\ 0 + R_{31} \\ -\frac{1}{2}ql \\ \frac{1}{12}ql^2 + R_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -1,5 \\ -\frac{1}{12}l \\ 0 \\ -0,5 \\ \frac{1}{10} \end{bmatrix} ql + R.$$

Принимая $l=4$ м и разделяя систему уравнений $KU = P$ согласно неизвестным, а так же известным величинам в векторе параметров перемещений, получаем следующую систему уравнений:

$$\frac{EI}{l^3} \begin{bmatrix} 262,004 & 65,761 & 8,485 & 0 & | & -70,004 & -65,761 & 8,845 & -192 & 0 \\ 65,761 & 82,004 & 15,515 & -12 & | & -65,761 & -70,004 & -8,485 & 0 & 24 \\ 8,485 & 15,515 & 109,255 & -24 & | & -8,485 & 8,485 & 22,627 & 0 & 32 \\ 0 & -12 & -24 & 12 & | & 0 & 0 & 0 & 0 & -24 \\ \hline -70,004 & -65,761 & -8,485 & 0 & | & 70,004 & 65,761 & -8,485 & 0 & 0 \\ -65,761 & -70,004 & 8,485 & 0 & | & 65,761 & 70,004 & 8,485 & 0 & 0 \\ 8,485 & -8,485 & 22,627 & 0 & | & -8,485 & 8,485 & 45,255 & 0 & 0 \\ -192 & 0 & 0 & 0 & | & 0 & 0 & 0 & 192 & 0 \\ 0 & 24 & 32 & -24 & | & 0 & 0 & 0 & 0 & 64 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_2 \\ V_2 \\ \varphi_2 \\ V_3 \\ U_1 \\ V_1 \\ \varphi_1 \\ U_3 \\ \varphi_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1,5 \\ -0,33 \\ -0,5 \\ \hline 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0,33 \end{bmatrix} ql + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ R_{11} \\ R_{11} \\ R_{13} \\ R_{31} \\ R_{33} \end{bmatrix}.$$

Решая систему из четырех линейных алгебраических уравнений с четырьмя неизвестными:

$$\frac{EI}{l^3} \begin{bmatrix} 262,004 & 65,761 & 8,485 & 0 \\ 65,761 & 82,004 & 15,515 & -12 \\ 8,485 & 15,515 & 109,255 & -24 \\ 0 & -12 & -24 & 12 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_2 \\ V_2 \\ \varphi_2 \\ V_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1,5 \\ -0,333 \\ -0,5 \end{bmatrix} ql,$$

получаем значения неизвестных параметров перемещений в узлах системы:

$$\begin{bmatrix} U_2 \\ V_2 \\ \varphi_2 \\ V_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,0118 \\ -0,0432 \\ -0,0294 \\ -0,1436 \end{bmatrix} \frac{ql^4}{EI}.$$

Затем определяем реакции опор:

$$\begin{bmatrix} R_{11} \\ R_{12} \\ R_{13} \\ R_{31} \\ R_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -70,004 & -65,761 & -8,485 & 0 \\ -65,761 & -70,004 & 8,485 & 0 \\ 8,485 & -8,485 & 22,627 & 0 \\ -192 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 24 & 32 & -24 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0,0118 \\ -0,0432 \\ -0,0294 \\ -0,1436 \end{bmatrix} ql - \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0,333 \end{bmatrix},$$

соответственно

$$\begin{bmatrix} R_{11} \\ R_{12} \\ R_{13} \\ R_{31} \\ R_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2,264 \\ 2,000 \\ -0,198l \\ -2,265 \\ 1,136l \end{bmatrix} ql.$$

Задачи для самостоятельного решения

Рассчитать конструкцию (рис. 9.5) методом конечных элементов.
Исходные данные для схемы а): $P = 10000 \text{ Н}$; $EA = 4 \cdot 10^8 \text{ Н}$; $\Delta = 0,1 \text{ м}$.
Исходные данные для схемы б): $P = 5000 \text{ Н}$; $q = 2000 \text{ Н/м}$; $EI = 2 \cdot 10^5 \text{ Н} \cdot \text{м}^2$.

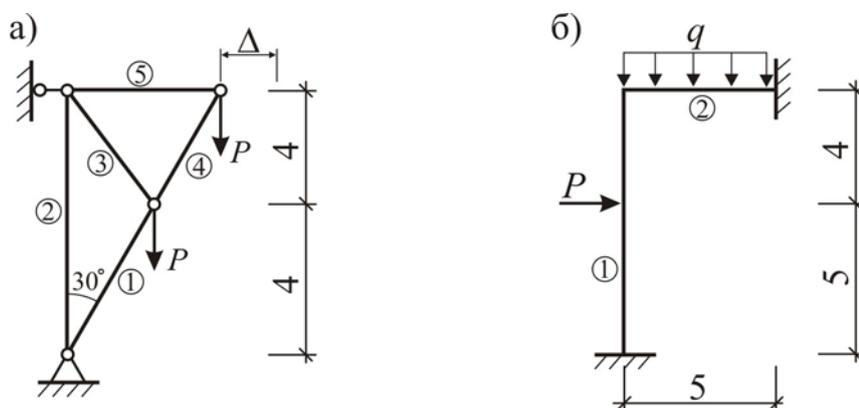


Рис. 9.5. Задачи для самостоятельного решения

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Анохин, Н.Н. Строительная механика в примерах и задачах [Электронный ресурс]: в 2 ч. Ч. 1. Статически определимые системы / Н.Н. Анохин. – М.: АСВ, 1999. – 335 с. – URL: <http://www.twirpx.com/file/410964/>
2. Анохин Н.Н. Строительная механика в примерах и задачах [Электронный ресурс]: в 2 ч. Ч. 2. Статически неопределимые системы / Н.Н. Анохин. – М.: АСВ, 2000. – 464 с. – URL: <http://www.twirpx.com/file/196032/>
3. Буланов, В.Е. Строительная механика [Электронный ресурс]: учеб. пособие / В.Е. Буланов, А.Н. Гузачев. – Тамбов: ТГТУ, 2012. – Ч.1. – 80 с. – URL: <http://window.edu.ru/resource/059/80059>
4. Дарков, А.В. Строительная механика [Электронный ресурс] / А.В. Дарков, Н.Н. Шапошников. – СПб: Лань, 2010. – 656 с. – URL: <http://www.twirpx.com/file/972291/>
5. Зенкевич, О. Метод конечных элементов в технике [Электронный ресурс] / О. Зенкевич. – М.: Мир, 1975. – 543 с. – URL: <http://www.twirpx.com/file/14253/>
6. Леонтьев, Н.Н. Основы строительной механики стержневых систем [Электронный ресурс] / Н.Н. Леонтьев, Д.Н. Соболев, А.А. Амосов. – М.: АСВ, 1996. – 541 с. – URL: <http://www.twirpx.com/file/1805566/>
7. Ржаницын, А.Р. Строительная механика [Электронный ресурс]: учебное пособие для вузов / А.Р. Ржаницын. – М.: Высш. школа, 1982. – 400 с. – URL: <http://www.twirpx.com/file/558677/>
8. Строительная механика. Стержневые системы [Электронный ресурс] / А.Ф. Смирнов, А.В. Александров, Б.Я. Лащеников, Н.Н. Шапошников. – М.: Стройиздат, 1981. – 512 с. – URL: <http://www.twirpx.com/file/628050/>
9. Снитко, Н.К. Строительная механика [Электронный ресурс]: учебник для вузов / Н.К. Снитко. – 3-е изд., перераб. – М.: Высш. школа, 1980. – 431 с. – URL: <http://www.twirpx.com/file/337353/>
10. Строительная механика [Электронный ресурс]: контрольные задания и методические указания к их выполнению. – Электрон. текстовые данные. – Йошкар-Ола: Марийский государственный технический университет, Поволжский государственный технологический университет, ЭБС АСВ, 2011. – 124 с. – URL: <http://www.iprbookshop.ru/22597>. – ЭБС «IPRbooks», по паролю
11. Строительная механика [Электронный ресурс]: методические указания. – Электрон. текстовые данные. – СПб.: Санкт-Петербургский государственный архитектурно-строительный университет, ЭБС АСВ, 2013. – 28 с. – URL: <http://www.iprbookshop.ru/19041>. – ЭБС «IPRbooks», по паролю

12. Шеин, А.И. Курс строительной механики [Текст]: учебник / А.И. Шеин. – Пенза: ПГУАС, 2014. – 312 с.

13. Шеин, А.И. Задачи по строительной механике для текущего контроля знаний студентов [Текст]: учеб. пособие / А.И. Шеин, Е.Д. Маркина. – Пенза: ПГУАС, 2012. – 116 с.

14. Шеин, А.И. Сборник заданий по строительной механике [Текст]: учеб. пособие / А.И. Шеин, Е.Д. Маркина. – Пенза: ПГУАС, 2009. – 136 с.

О Г Л А В Л Е Н И Е

ПРЕДИСЛОВИЕ.....	3
ВВЕДЕНИЕ.....	4
МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ К ПРАКТИЧЕСКИМ ЗАНЯТИЯМ.....	5
1. РАСЧЕТ СТАТИЧЕСКИ ОПРЕДЕЛИМЫХ СИСТЕМ НА НЕПОДВИЖНУЮ НАГРУЗКУ.....	6
1.1. Расчет статически определимых систем на неподвижную нагрузку. Эпюры внутренних усилий.....	6
1.2. Кинематический анализ сооружений.....	9
1.3. Расчет статически определимой многопролетной балки.....	13
1.4. Расчет статически определимой трехшарнирной рамы.....	15
1.5. Расчет систем, содержащих замкнутый контур.....	17
Задачи для самостоятельного решения.....	19
2. РАСЧЕТ СТАТИЧЕСКИ ОПРЕДЕЛИМЫХ СИСТЕМ НА ПОДВИЖНУЮ НАГРУЗКУ.....	20
2.1. Расчет статически определимой многопролетной балки на подвижную нагрузку.....	20
Задачи для самостоятельного решения.....	24
3. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ В СТАТИЧЕСКИ ОПРЕДЕЛИМЫХ СИСТЕМАХ.....	25
3.1. Вычисление интеграла Мора по правилу Верещагина.....	25
3.2. Определение перемещений в статически определимых системах.....	28
3.2.1. Определение перемещений от силового воздействия в статически определимых системах.....	28
3.2.2. Определение перемещений от температурного воздействия в статически определимых системах.....	29
3.2.3. Определение перемещений от неравномерной осадки опор в статически определимых системах.....	31
Задачи для самостоятельного решения.....	32
4. РАСЧЕТ СТАТИЧЕСКИ НЕОПРЕДЕЛИМЫХ СИСТЕМ МЕТОДОМ СИЛ.....	33
4.1. Расчет статически неопределимой системы с одним неизвестным методом сил.....	33
4.2. Расчет статически неопределимой системы с двумя неизвестными методом сил.....	36
4.3. Использование симметрии при расчете методом сил.....	40
4.4. Определение перемещений в статически неопределимых системах.....	49
Задачи для самостоятельного решения.....	54
5. РАСЧЕТ КОНСТРУКЦИЙ НА СОЧЕТАНИЕ НАГРУЗОК.....	55
Задачи для самостоятельного решения.....	57
6. ТЕОРИЯ ПРЕДЕЛЬНОГО РАВНОВЕСИЯ.....	58
6.1. Расчет многопролетных балок на основе теории предельного равновесия.....	58
6.1.1. Расчет многопролетных балок на основе теории предельного равновесия статическим способом.....	58
6.1.2. Расчет многопролетных балок на основе теории предельного равновесия кинематическим способом.....	60

6.2. Расчет рам на основе теории предельного равновесия	63
Задачи для самостоятельного решения	67
7. РАСЧЕТ КИНЕМАТИЧЕСКИ НЕОПРЕДЕЛИМЫХ СИСТЕМ МЕТОДОМ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ	69
7.1. Таблица реакций метода перемещений	69
7.2. Расчет кинематически неопределимой системы с одним неизвестным методом перемещений	74
7.3. Расчет кинематически неопределимой системы с двумя неизвестными методом перемещений	77
Задачи для самостоятельного решения	81
8. МАТРИЧНАЯ ФОРМА РАСЧЕТА СТЕРЖНЕВЫХ СИСТЕМ МЕТОДОМ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ	82
8.1. Расчет рамы с узловой нагрузкой матричным методом перемещений	82
8.2. Расчет рамы с пролетной нагрузкой матричным методом перемещений	85
Задачи для самостоятельного решения	91
9. МЕТОД КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ	92
9.1. Расчет фермы методом конечных элементов	92
9.2. Преобразование координат. Расчет рамы методом конечных элементов	94
Задачи для самостоятельного решения	100
БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК	101

Учебное издание

Шеин Александр Иванович
Земцова Ольга Григорьевна

СТРОИТЕЛЬНАЯ МЕХАНИКА

Учебно-методическое пособие к практическим занятиям
по направлению подготовки 08.03.01 «Строительство»

В авторской редакции
Верстка Н.А. Сазонова

Подписано в печать 15.08.16. Формат 60×84/16.
Бумага офисная «Снегурочка». Печать на ризографе.
Усл.печ.л. 6,045. Уч.-изд.л. 6,5. Тираж 80 экз.
Заказ № 492.

Издательство ПГУАС.
440028, г. Пенза, ул. Германа Титова, 28.