

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Федеральное государственное бюджетное
образовательное учреждение высшего образования
"Пензенский государственный университет
архитектуры и строительства"
(ПГУАС)

А.И. Шеин

СТРОИТЕЛЬНАЯ МЕХАНИКА

Учебно-методическое пособие
к лабораторным работам
по направлению подготовки 08.05.01 «Строительство уникальных зданий»
(специализация № 1 «Строительство высотных
и большепролетных зданий и сооружений»)

Пенза 2016

УДК 624.04/.07(075.8)

ББК 38.112я73

ШЗ9

Рекомендовано Редсоветом университета

Рецензент – доктор технических наук, профессор
С.В. Бакушев (ПГУАС)

Шеин А.И.

ШЗ9 Строительная механика: учеб.-метод. пособие к лабораторным работам по направлению подготовки 08.05.01 «Строительство уникальных зданий» (специализация № 1 «Строительство высотных и большепролетных зданий и сооружений») / А.И. Шеин. – Пенза: ПГУАС, 2016. – 64 с.

Изложена методика выполнения лабораторных работ. Приведены варианты заданий для каждой лабораторной работы.

Подготовлено на кафедре «Механика» и предназначено для использования студентами, обучающимися по направлению подготовки 08.05.01 «Строительство уникальных зданий» (специализация № 1 «Строительство высотных и большепролетных зданий и сооружений»), при изучении дисциплины «Строительная механика».

© Пензенский государственный университет
архитектуры и строительства, 2016

© Шеин А.И., 2016

ПРЕДИСЛОВИЕ

Процесс изучения дисциплины «Строительная механика» направлен на формирование следующих компетенций:

умение использовать основные законы естественнонаучных дисциплин в профессиональной деятельности, применять методы математического анализа и математического (компьютерного) моделирования, теоретического и экспериментального исследования.

Планируемые результаты обучения (показатели достижения заданного уровня освоения компетенции). Студент должен:

знать:

- современные методы научно-исследовательской деятельности в области расчета сооружений на прочность, жесткость и устойчивость;
- основные законы естественнонаучных дисциплин;
- основы математического моделирования и экспериментальных исследований;

уметь:

- разрабатывать физические и математические (компьютерные) модели работы строительных конструкций при совместном действии различных факторов;
- применять методы математического анализа и математического моделирования;

владеть:

- навыками проведения теоретических и экспериментальных исследований, методиками оценки результатов;
- навыками применения естественнонаучных законов при решении профессиональных задач.

В пособии приведены 8 лабораторных работ по строительной механике.

Лабораторная работа №1

РАСЧЕТ СТАТИЧЕСКИ НЕОПРЕДЕЛИМОЙ РАМЫ МЕТОДОМ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ (1 УГЛОВОЕ НЕИЗВЕСТНОЕ)

Цель работы:

1. Определить число неизвестных по методу перемещений, обращая внимание, как влияет жесткость равная ∞ на выбор О.С.М.П.
2. Выбрать основную систему М.П.
3. Сделать расчет рамы М.П.

Оборудование: ПЭВМ, таблицы метода перемещений.

Программное обеспечение:
пакет Mathcad.

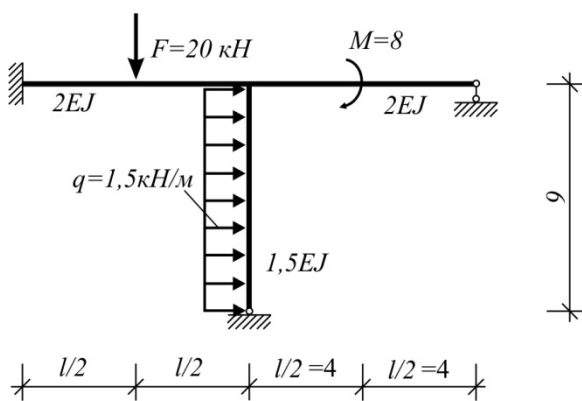


Рис. 1.1

Выполним расчет рамы, изображенной на рис. 1.1.

Определим степень статистической неопределимости:

$$n = 3 \cdot K - C_{уд} = 3 \cdot 2 - 3 = 3.$$

Число неизвестных по методу перемещений определяем следующим образом:

– число угловых неизвестных равно числу жестких узлов, в данной задаче один жесткий узел, в который при выборе О.С.М.П поставим жесткую заделку, которая не препятствует линейному перемещению узлов;

– число линейных перемещений определяют визуально или из анализа шарнирной схемы рамы; по направлению линейного перемещения при выборе О.С.М.П поставим стержень.

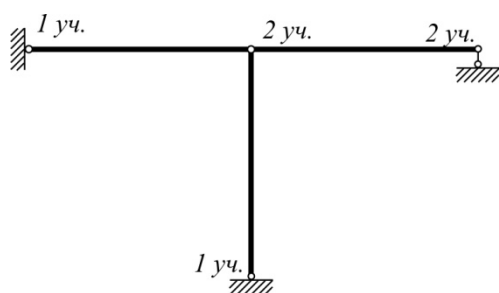


Рис. 1.2

$$л.п = -(3 \cdot K - C_{уд}) = -(3 \cdot 2 - 6) = 0$$

Основная система метода перемещений
 При введении, жесткой заделки в ней возникает реактивный момент, но в заданной схеме (рис. 1.3) его нет, поэтому накладываем условие: реактивный момент равен нулю от совместного действия внешней нагрузки и Z_1 (угла поворота).

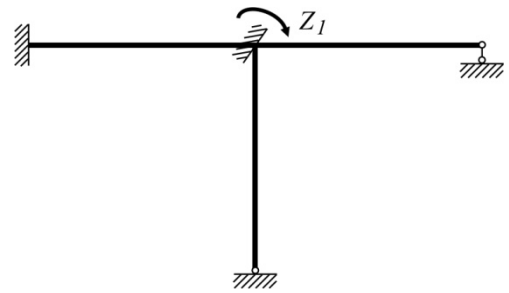


Рис. 1.3

Это условие записывается в виде канонического уравнения метода перемещений:

$$z_1 \cdot r_{11} + R_{1p} = 0, \longrightarrow z_1 = -\frac{R_{1p}}{r_{11}}$$

Строим единичную эпюру \overline{M}_1 от $Z_1 = 1$ в О.С.М.П.

О.С.М.П представляет ряд однопролетных балок соединенных между собой для которых на основе метода сил составлены таблицы. В жесткой заделке возник реактивный момент r_{11} , направляем его, как поворачивали жесткую заделку.

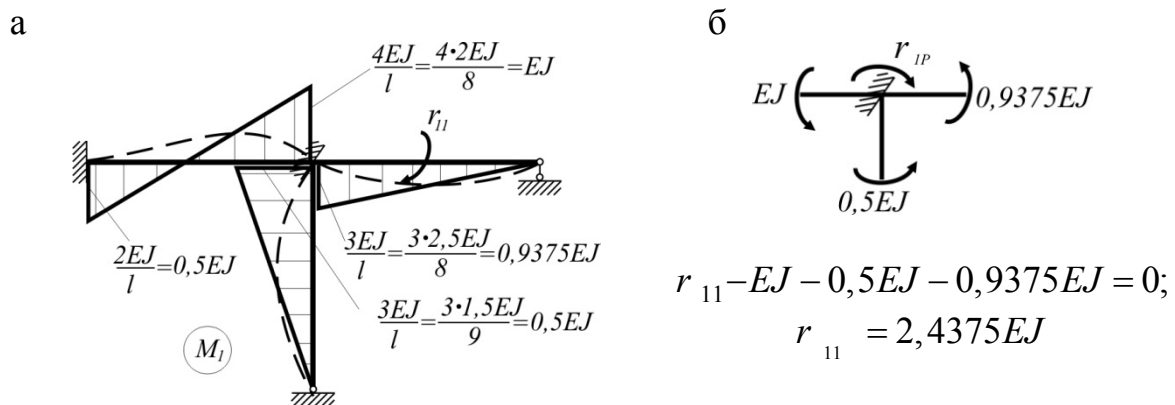


Рис. 1.4

Строим грузовую эпюру в О.С.М.П.

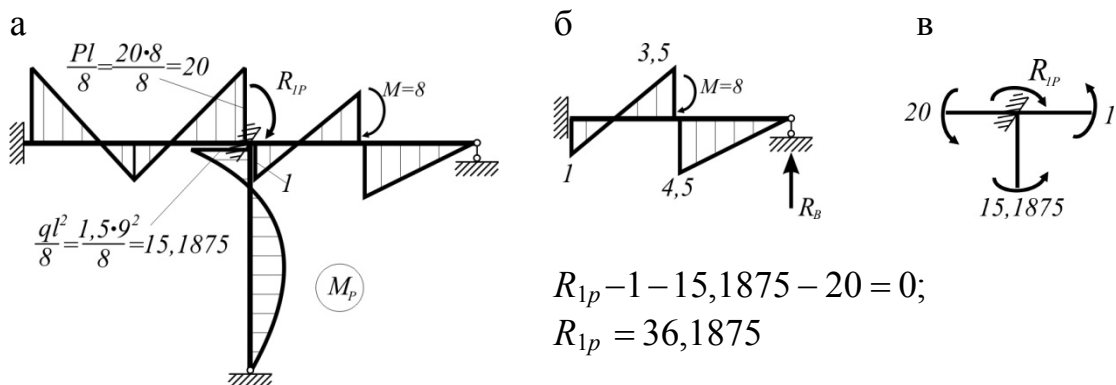


Рис. 1.5

$$Z_1 = -\frac{R_{1p}}{r_{11}} = -\frac{36,1875}{2,4375} = -\frac{14,846}{EJ}.$$

Строим исправленную эюру, учитывая знак у Z_1 :

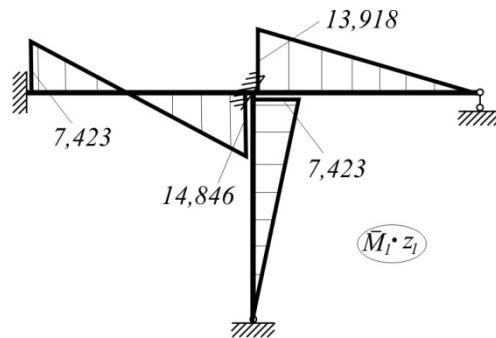
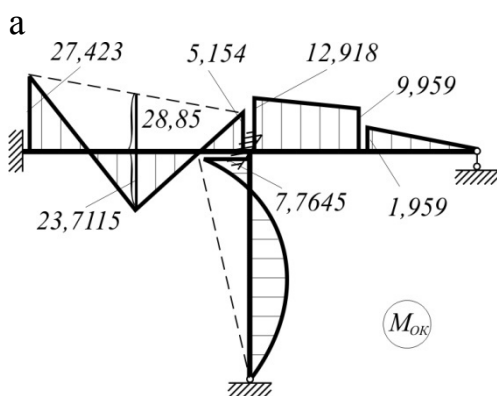


Рис. 1.6

Окончательная эюра $M_{ок} = M_p + \overline{M}_1 \cdot z_1$.



б

$$\sum M_{\text{узн}} = 0$$

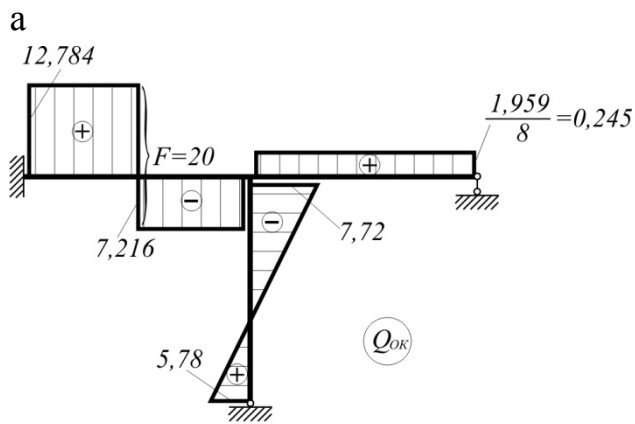
$$12,9185 - 7,7645 - 5,154 = 0$$

Рис. 1.7

Для проверки $M_{ок}$ достаточной проверкой является равновесия узла, т.к. на предыдущих эюрах узел не находился в равновесии.

По эюре $M_{ок}$ строим $Q_{ок}$ по формуле

$$Q = \pm Q_{\delta} + \frac{M_{\text{пр}} - M_{\text{лев}}}{e}.$$



б Построение $Q_{ок}$ по стойке:

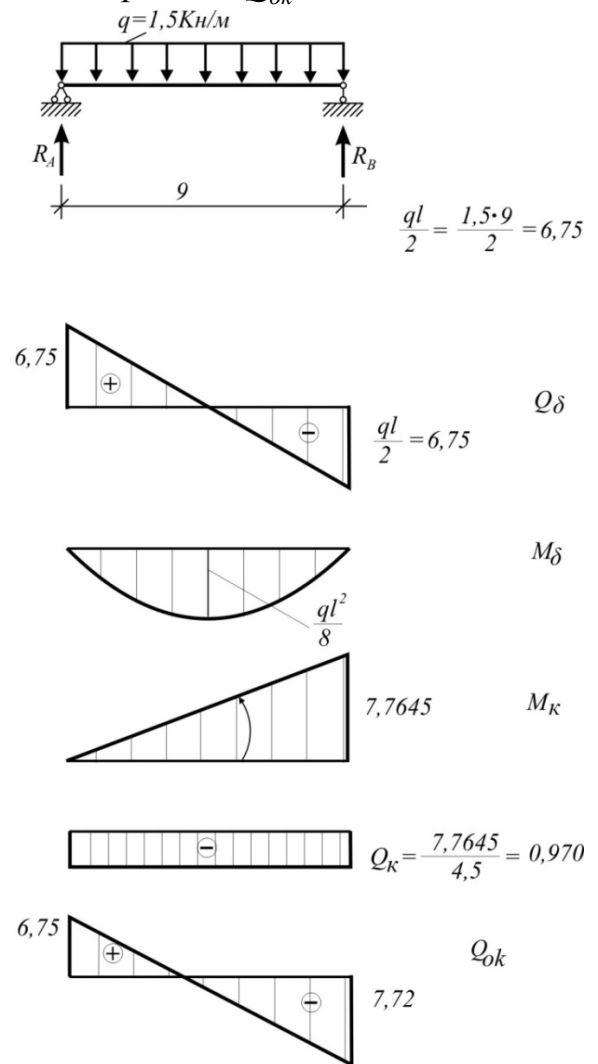


Рис. 1.8

По эюре $Q_{ок}$, строим $N_{ок}$

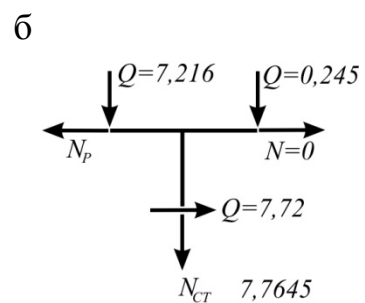
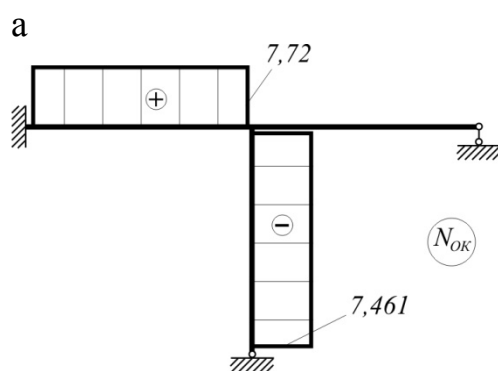
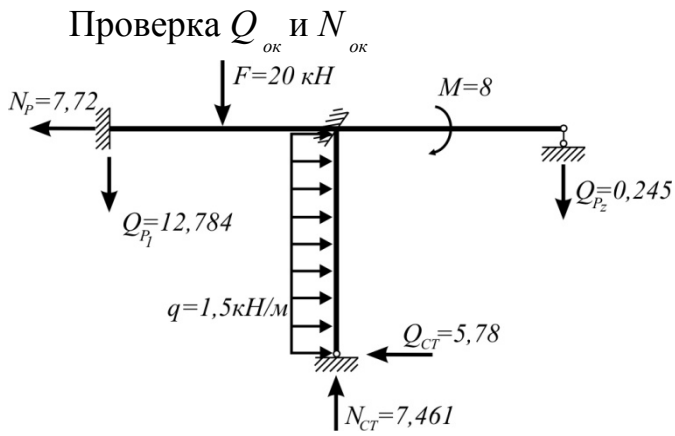


Рис. 1.9



$$\sum X(F) = 0;$$

$$q \cdot 9 - N_p - Q_{cm} = 0;$$

$$1,59 - 7,72 - 5,78 = 0.$$

$$\sum y(F) = 0;$$

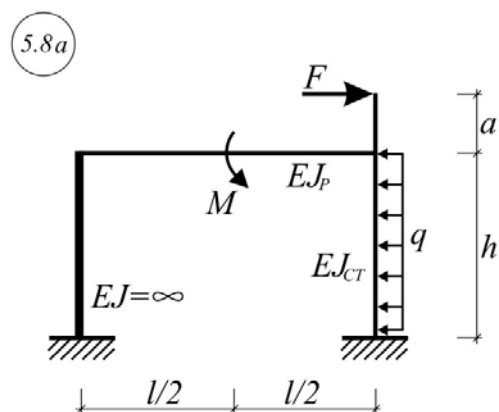
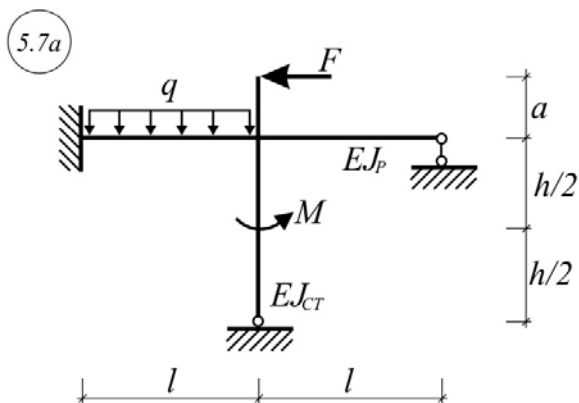
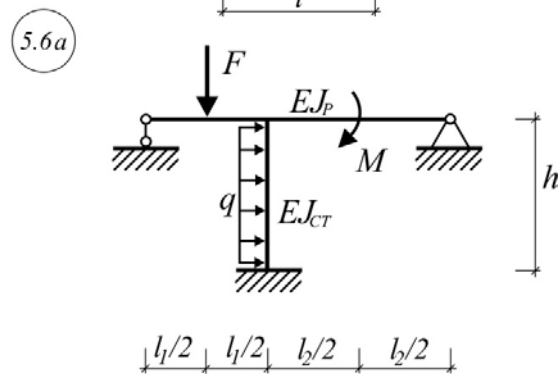
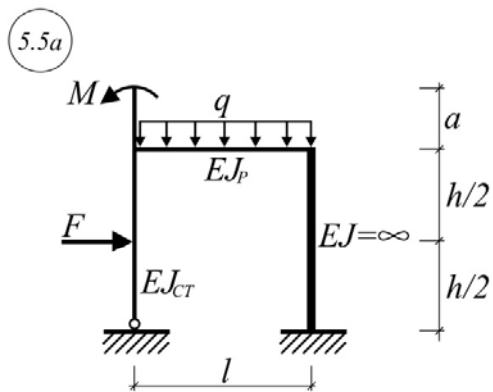
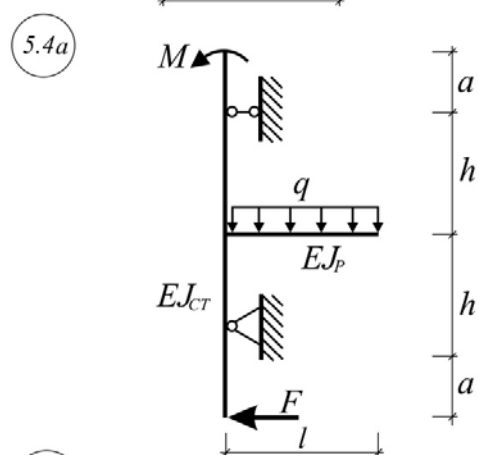
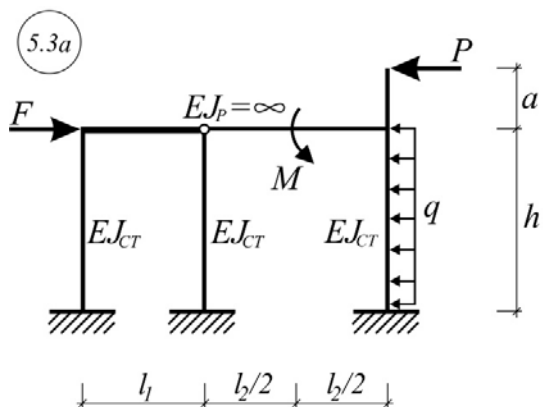
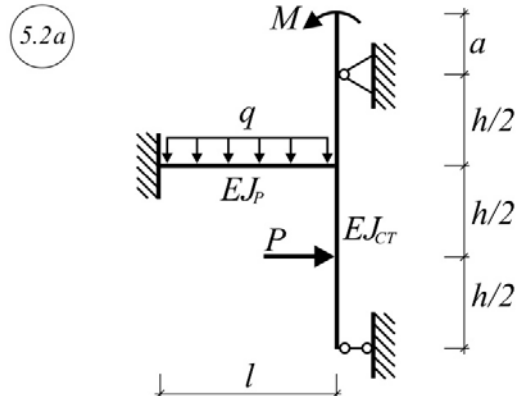
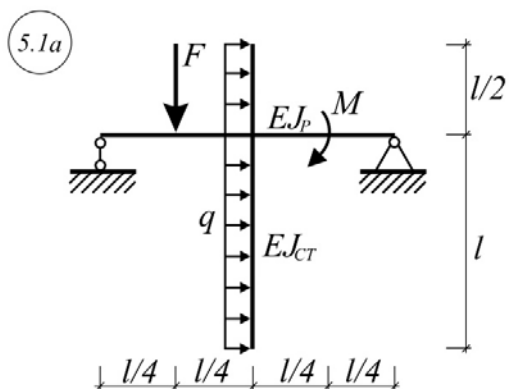
$$N_{cm} + Q_{p1} - Q_{p2} - F = 0;$$

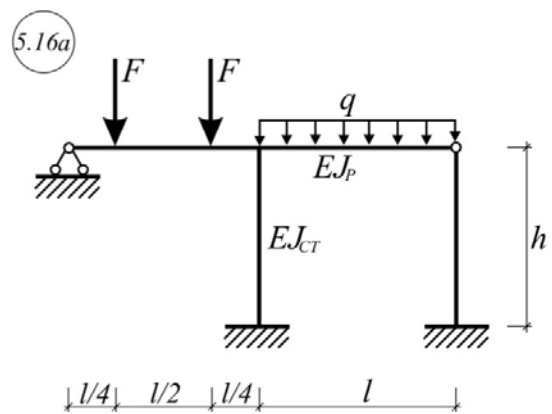
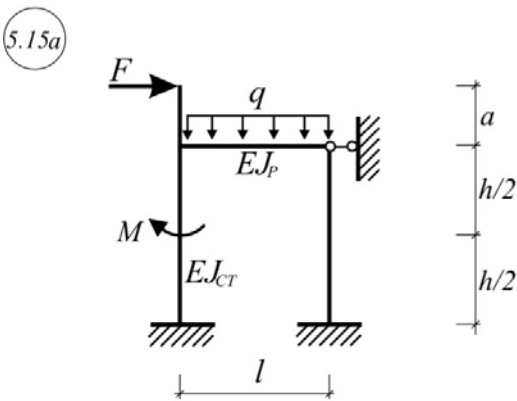
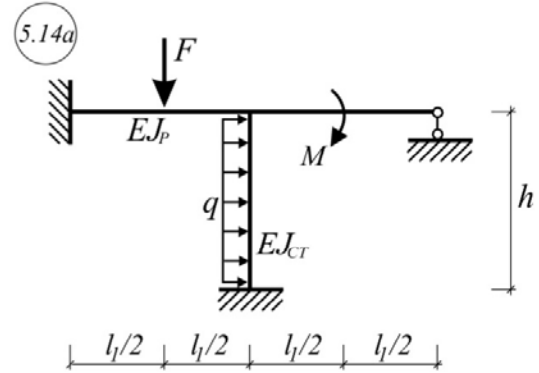
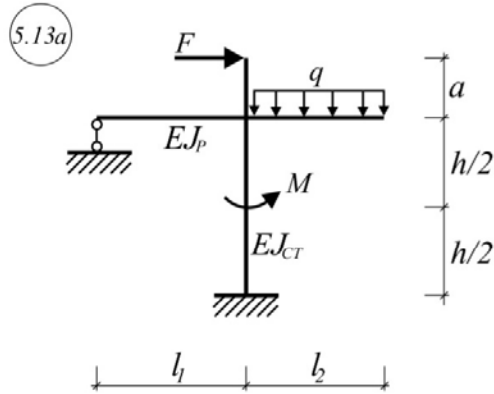
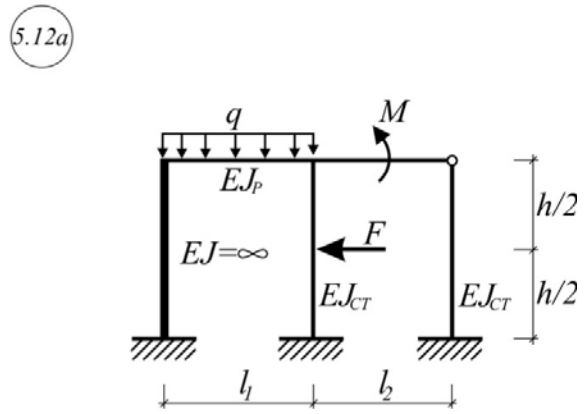
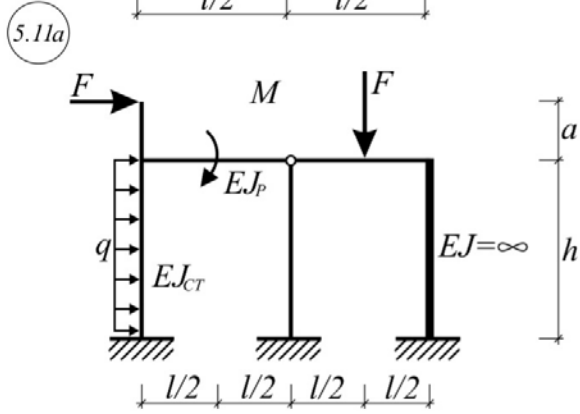
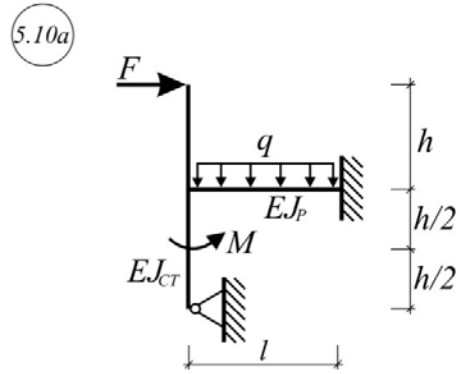
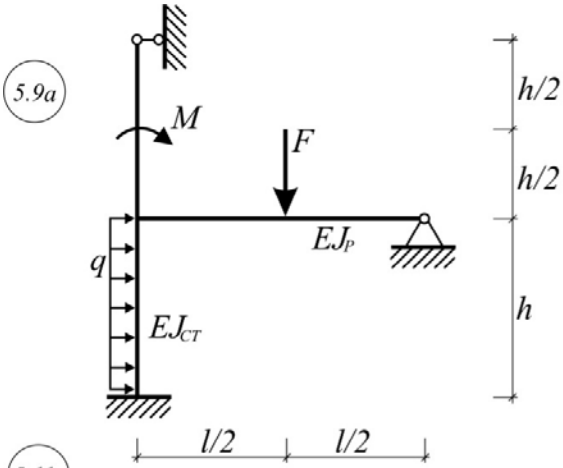
$$7,461 + 12,784 - 0,245 - 20 = 0.$$

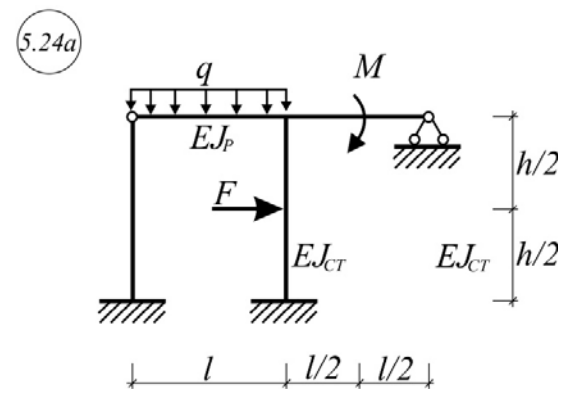
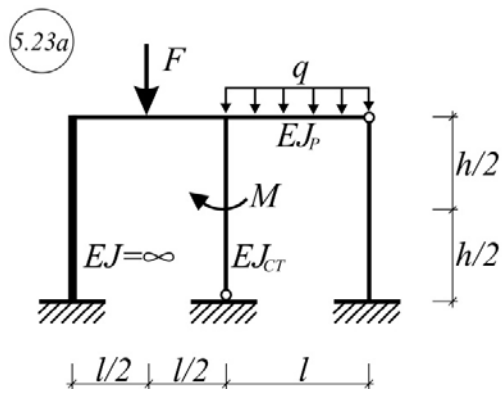
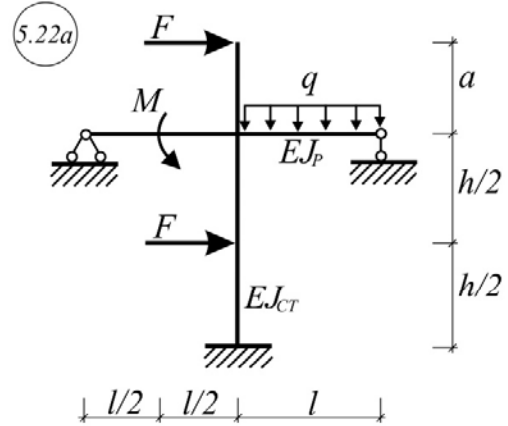
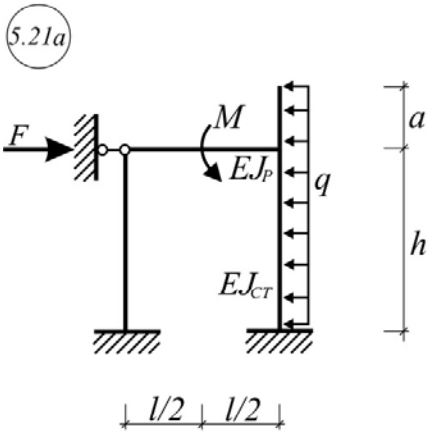
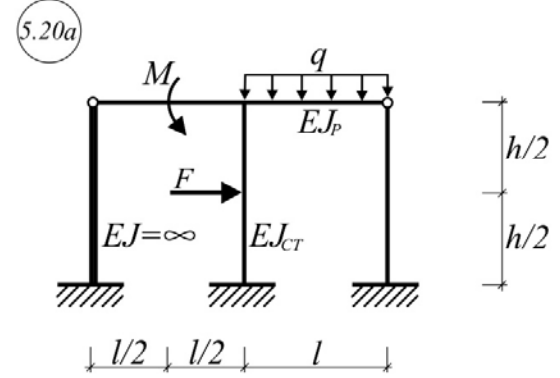
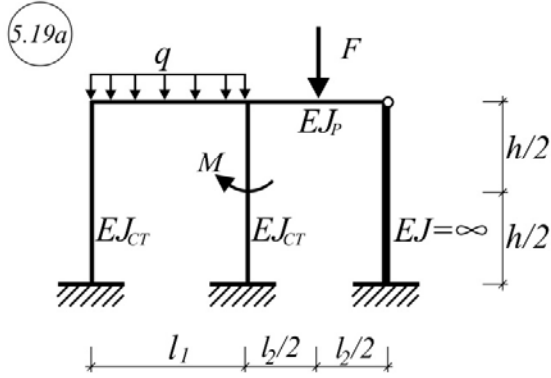
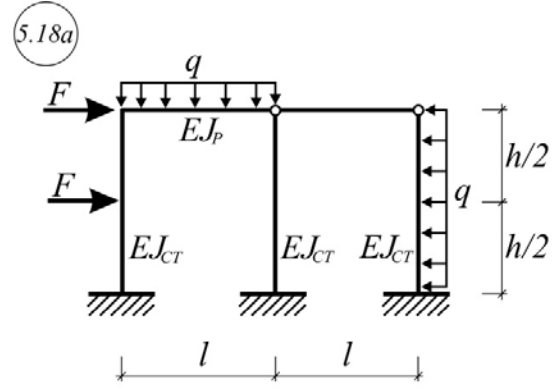
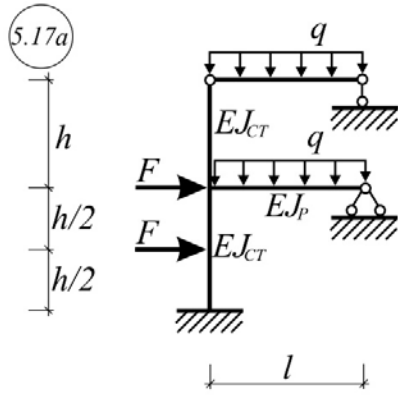
Рис. 1.10

Варианты заданий по выполнению 1-й лабораторной работы

Задачи метода перемещений угловое.







Контрольные вопросы

1. Каков физический смысл уравнений метода перемещений (МП)?
2. Что такое основная система метода перемещений?
3. Как определить число угловых неизвестных метода перемещений ?
4. Как строятся эпюры МП?
5. Как делается проверка правильности решений МП?

Лабораторная работа №2 МЕТОД ПЕРЕМЕЩЕНИЙ (1 ЛИНЕЙНОЕ ПЕРЕМЕЩЕНИЕ)

Цель работы:

4. Определить число неизвестных по методу перемещений, обращая внимание, как влияет жесткость равная ∞ на выбор О.С.М.П.
5. Выбрать основную систему М.П.
6. Сделать расчет рамы М.П.

Оборудование: ПЭВМ, таблицы метода перемещений.

Программное обеспечение:
пакет Mathcad.

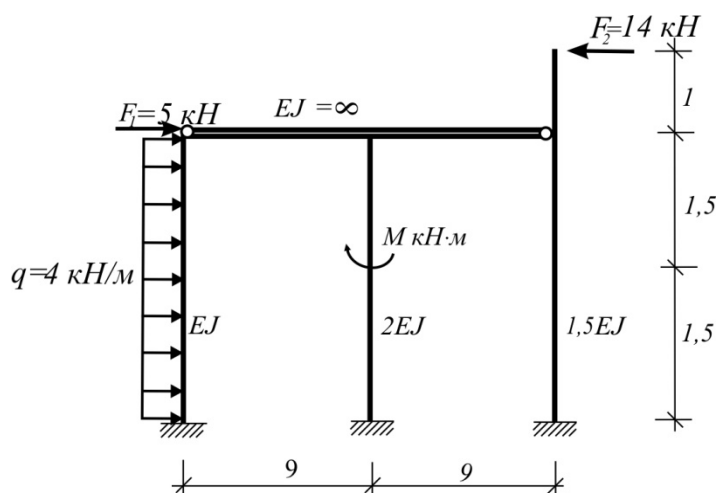


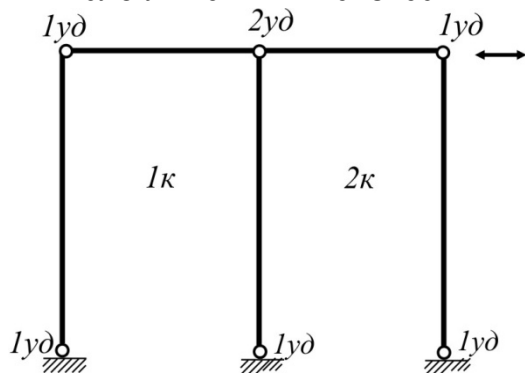
Рис. 2.1

Определяем степень статической неопределимости рамы:

$$n = 3 \cdot K - C_{\text{уд}} = 3 \cdot 2 - 2 = 4.$$

Определяем число неизвестных по методу перемещений, консоль мысленно отбрасываем и отмечаем, что ригель жесткий и углового неизвестного нет.

Число линейных неизвестных определим в шарнирной схеме.



$$\text{л.п} = -(3 \cdot K - C_{\text{уд}}) = -(3 \cdot 2 - 7) = 1$$

Рис. 2.2.

Выбираем основную систему метода перемещений, в направлении линейного перемещения ставим опорный стержень, в котором возникает реактивная сила. Эта сила должна равняться нулю от совместного действия внешней нагрузки и от линейного перемещения узлов, т.к. в заданной системе ее нет, как и стержня.

Это условие записывается каноническим уравнением:

$$Z_1, r_{11} + R_{1p} = 0, \longrightarrow Z_1 = -\frac{R_{1p}}{r_{11}}$$

Строим единичную эпюру \overline{M}_1 от $Z_1 = 1$ в О.С.М.П.

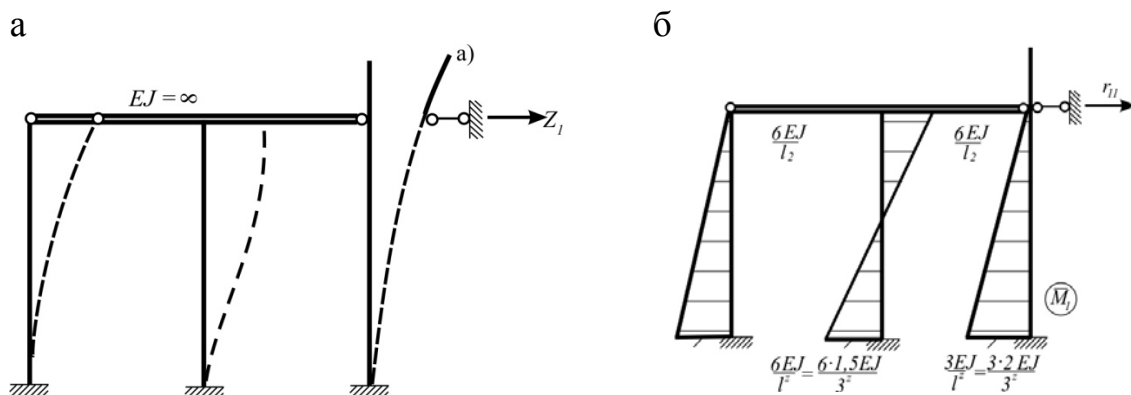


Рис. 2.3

Строим эпюру моментов со стороны растянутых волокон, используя таблицу метода перемещений (рис. 2.3) r_{11} определяем, как сумму поперечных сил по стойкам, делая сечение близко к ригелю и рассматривая верхнюю отсеченную часть рамы:

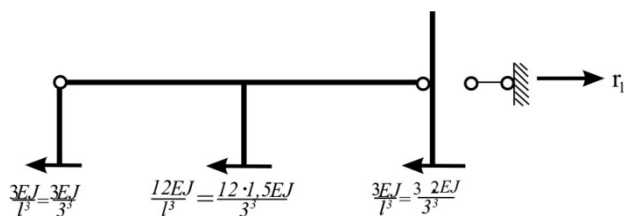


Рис. 2.4

$$\sum X(F) = r_{11} - \frac{3EJ}{3^3} - \frac{12 \cdot 1,5EJ}{3^3} - \frac{3 \cdot 2EJ}{3^3} = 0;$$

$$r_{11} = \frac{27EJ}{27} = EJ.$$

Строим грузовую эпюру в О.С.М.С.

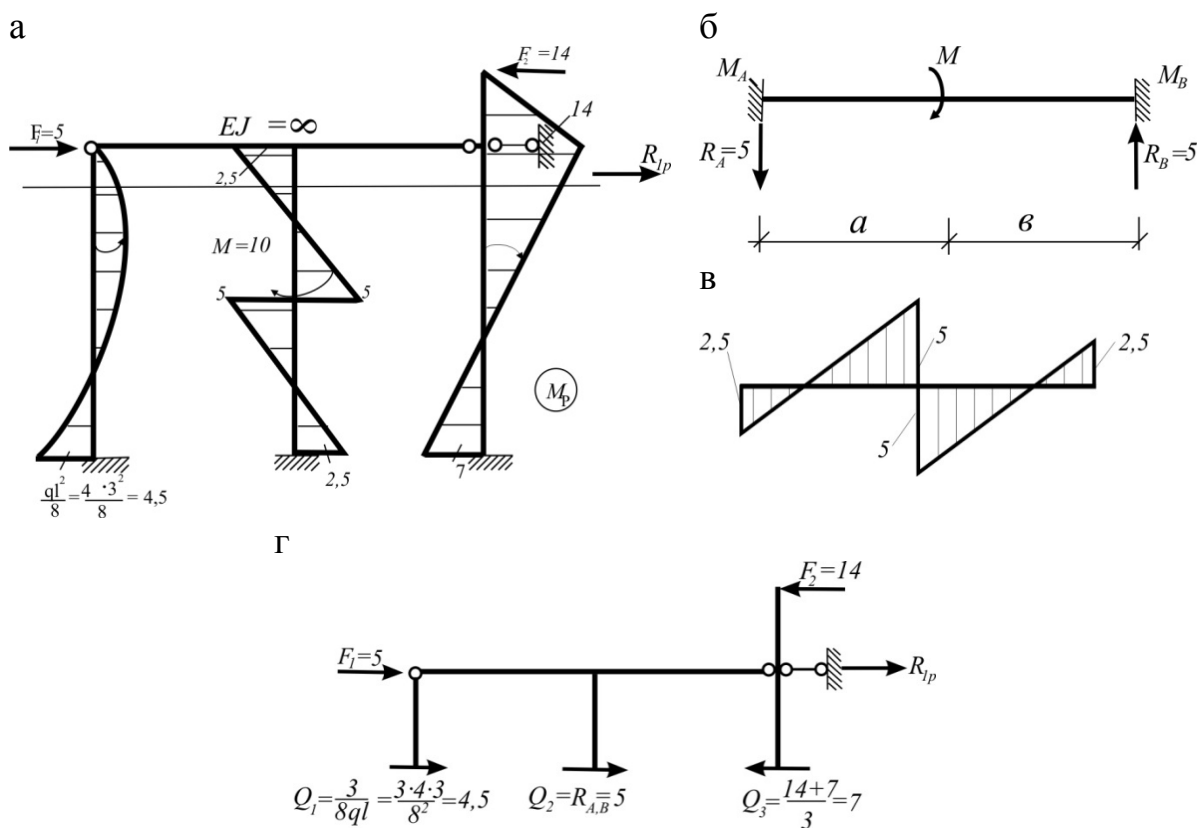


Рис. 2.5

$$R_B = \frac{6 \cdot a \cdot b}{l^3} M = \frac{6 \cdot 1,5 \cdot 1,5}{3^3} \cdot 10 = 5;$$

$$M_B = \frac{M \cdot a}{l^2} (2l - 3 \cdot a) = \frac{10 \cdot 1,5}{3^2} (2 \cdot 3 - 3 \cdot 1,5) = \frac{10 \cdot 1,5 \cdot 1,5}{9} = 2,5.$$

$$\sum X(F) = 0;$$

$$Q_1 + Q_2 - Q_3 + F_1 - F_2 + R_{1p} = 0;$$

$$R_{1p} = -Q_1 - Q_2 + Q_3 - F_1 + F_2 = -4,5 - 5 + 7 + 5 - 14 = 14,5 - 21 = +6,5.$$

Определяем $Z_1 = -\frac{R_{1p}}{r_{11}} = -\frac{+6,5}{EJ} = \frac{-6,5}{EJ}$.

Строим исправленную эпюру $\overline{M}_1 \cdot Z_1$ (рис. 2.6 б) и $M_{ок} = M_p + \overline{M}_1 \cdot z_1$ (рис. 1.6 а).

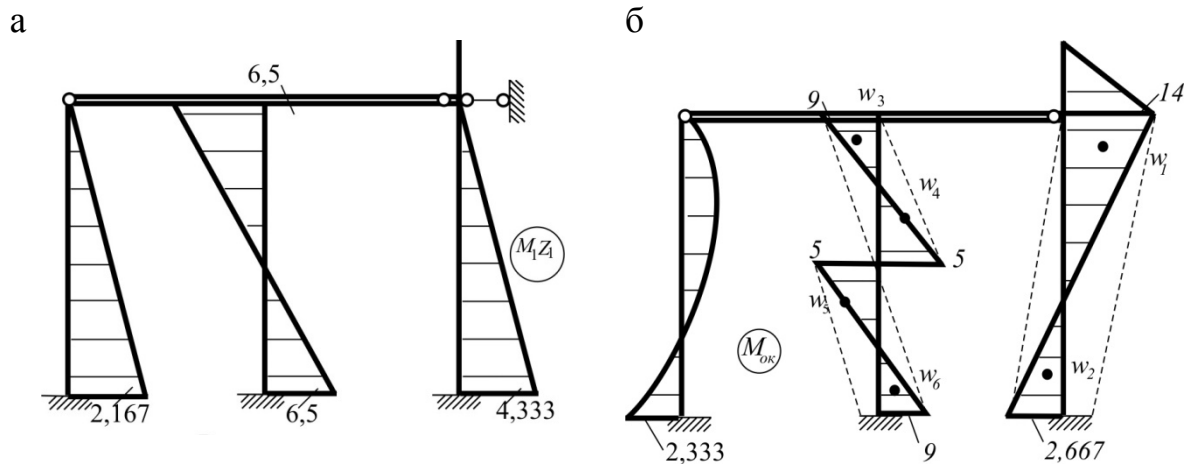


Рис. 2.6

Проверка $M_{ок}$. В данной задаче нет жестких узлов, которые находятся в равновесии, поэтому делаем проверку $\sum \int \frac{M_{ок} \overline{M}_i^0}{EJ} dx = 0$ (где \overline{M}_i^0 – эюра моментов, построенная в любой О.С. метода сил, $i=1,2...n, S$).

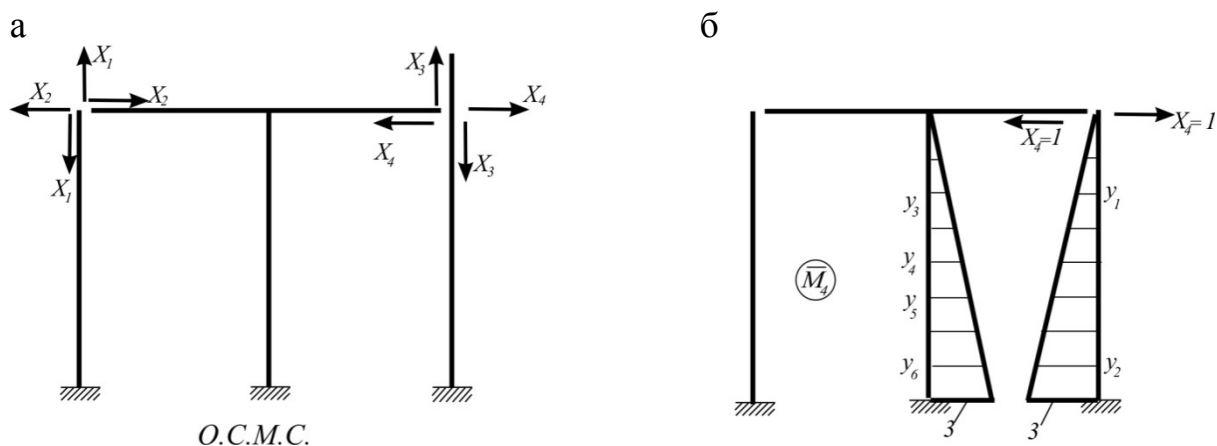
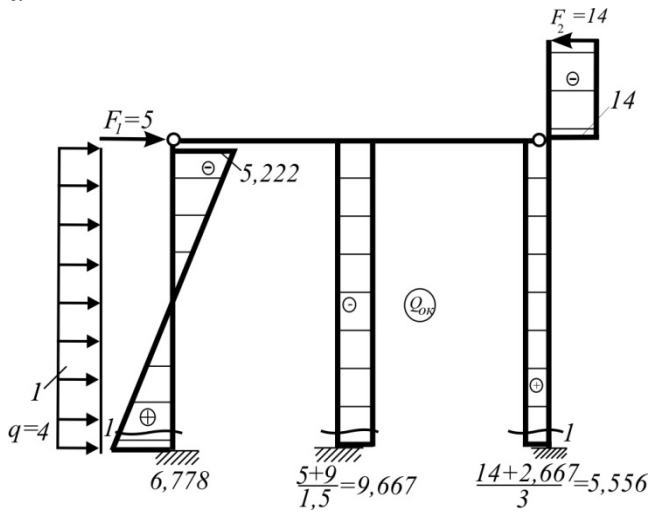


Рис. 2.7

$$\begin{aligned} \sum \int \frac{M_{ок} M_4^0}{EJ} dx &= -\frac{1}{2} \cdot 14 \cdot 3 \cdot \frac{1}{3} \cdot 3 \cdot \frac{1}{2EJ} + \frac{1}{2} \cdot 2,667 \cdot 3 \cdot \frac{2}{3} \cdot 3 \cdot \frac{1}{2EJ} + \\ &+ \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 9 \cdot \frac{1}{3} \cdot 1,5 \cdot \frac{1}{1,5EJ} + \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 1,5 \cdot \frac{2}{3} \cdot 1,5 \cdot \frac{1}{1,5EJ} - \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 1,5 \left(\frac{2}{3} \cdot 1,5 + \frac{1}{3} \cdot 3 \right) \cdot \frac{1}{1,5EJ} + \\ &+ \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 9 \left(\frac{2}{3} \cdot 3 + \frac{1}{3} \cdot 1,5 \right) \cdot \frac{1}{1,5EJ} = -10,5 + 4 + 1,5 + 2,5 - 5 + 7,5 = 15,5 + 15,5 = 0. \end{aligned}$$

Построение $Q_{ок}$ по $M_{ок}$.

а



б

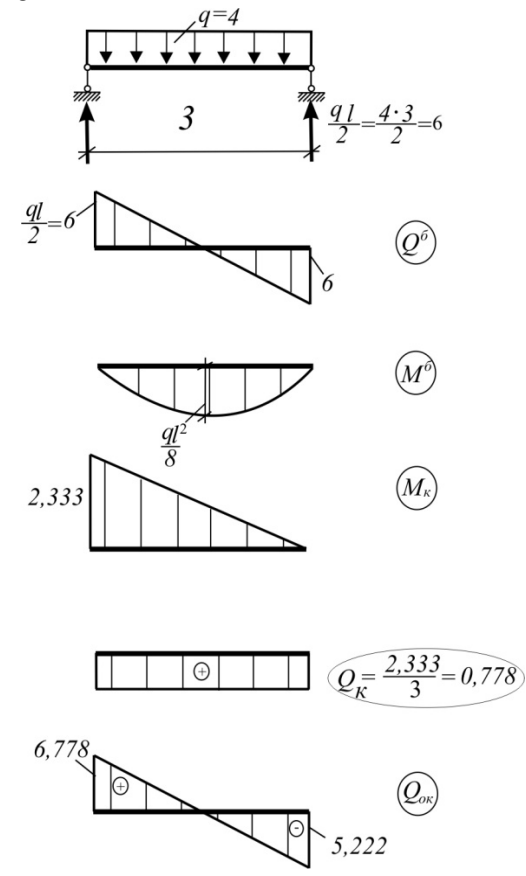


Рис. 2.8

Проверка $Q_{ок}$.
Сечение 1-1

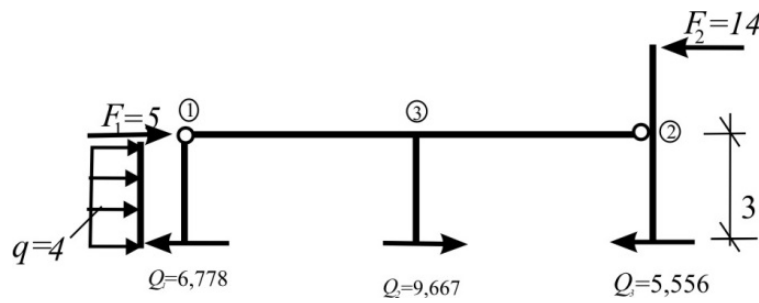


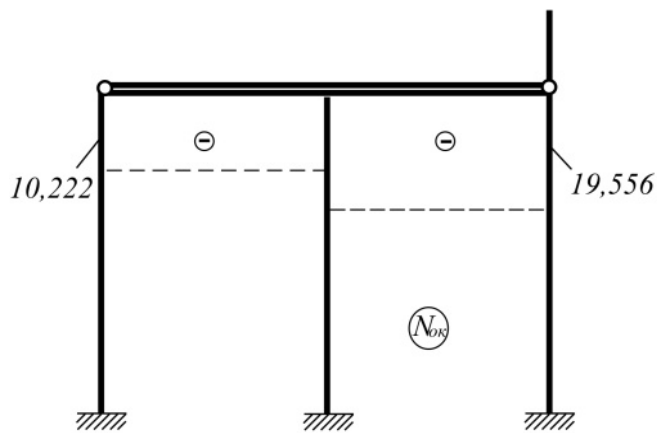
Рис. 2.9

$$\sum X(F) = q \cdot 3 + F_1 - Q_1 + Q_2 - Q_3 - F_2 =$$

$$= 4 \cdot 3 + 5 - 6,778 + 9,667 - 5,556 - 14 = 26,666 - 26,334.$$

По эюре $Q_{ок}$ строим $N_{ок}$.

а



б

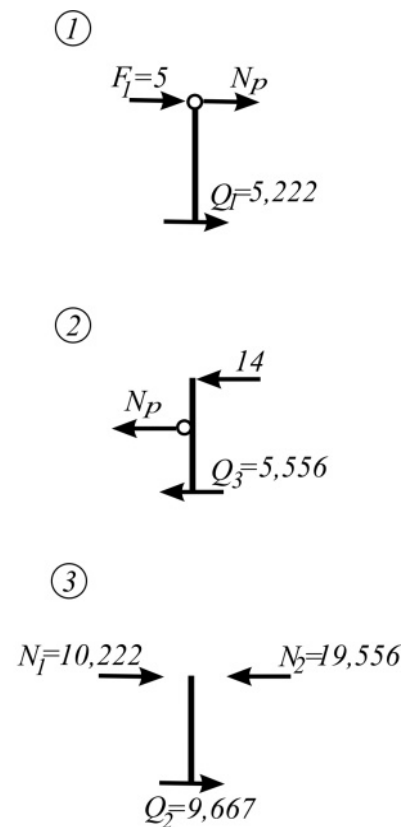


Рис. 2.10

$$\sum X(F) = 0;$$

$$N_p + F_1 + Q_1 = 0;$$

$$N_p = -10,222.$$

$$\sum X(F) = 0;$$

$$-N_p - 14 - Q_3 = 0;$$

$$N_p = -19,556.$$

$$\sum X(F) = 0;$$

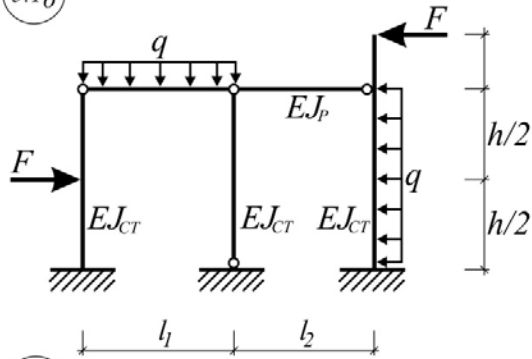
$$N_1 + Q_2 - N_2 = 0;$$

$$10,222 + 9,667 + 19,556 \approx 0.$$

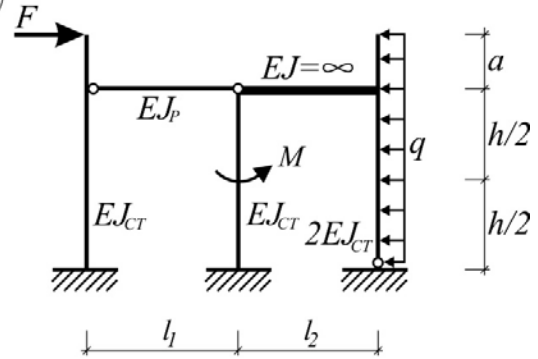
Варианты к выполнению 2-й лабораторной работы

Задачи метода перемещений
с одним линейным неизвестным.

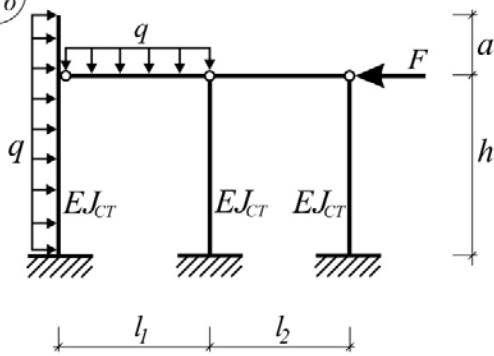
5.16



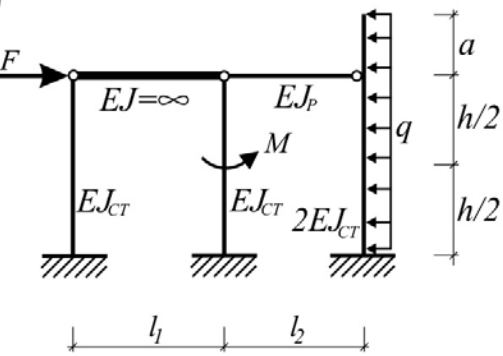
5.26



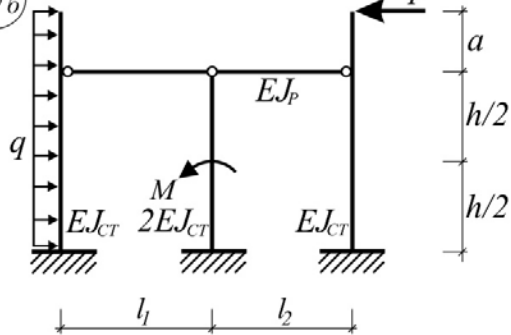
5.36



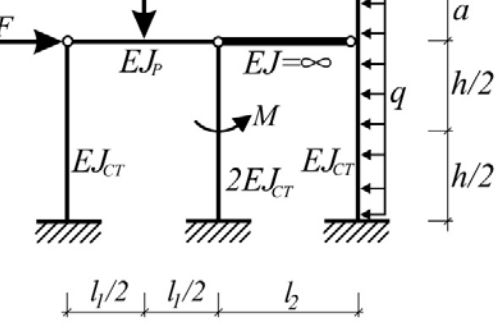
5.46



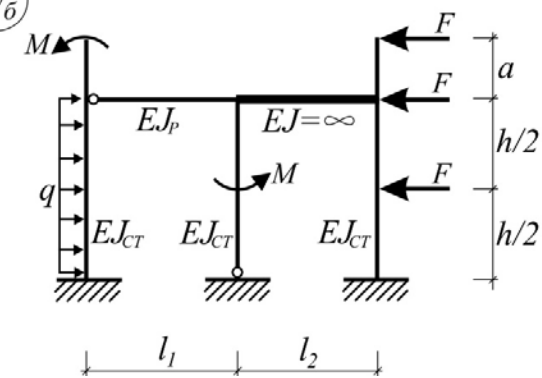
5.56



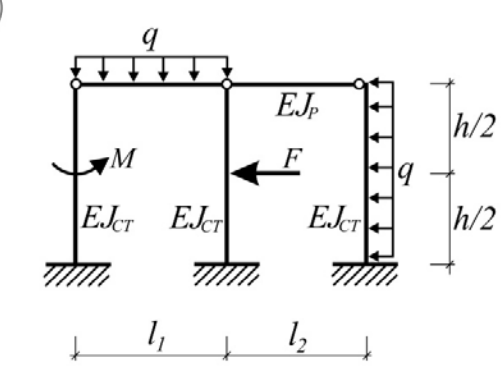
5.66

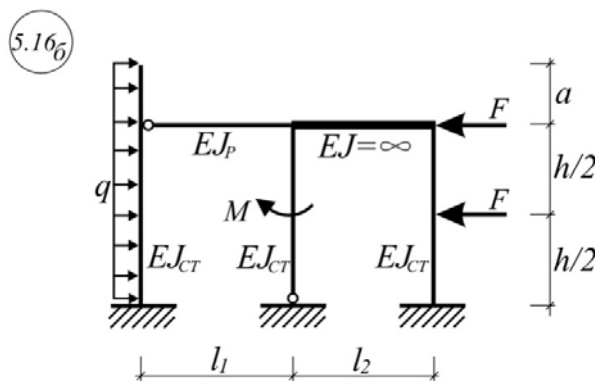
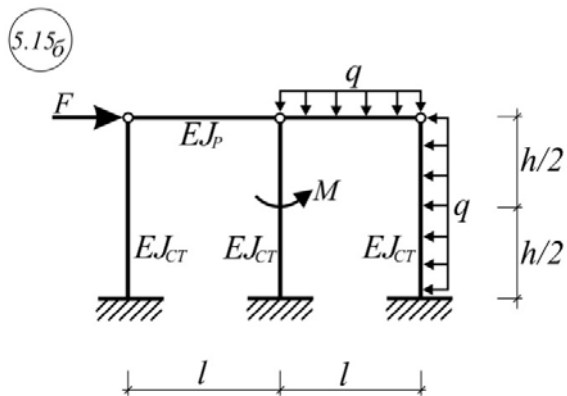
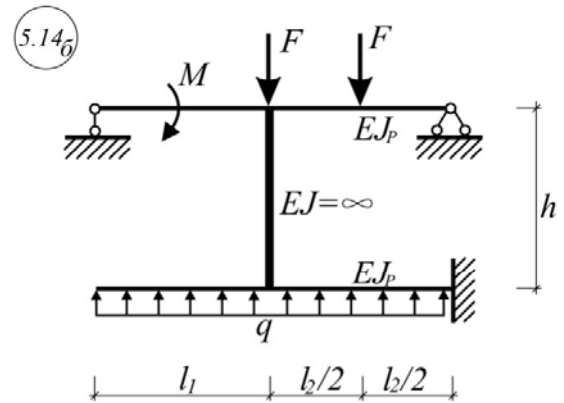
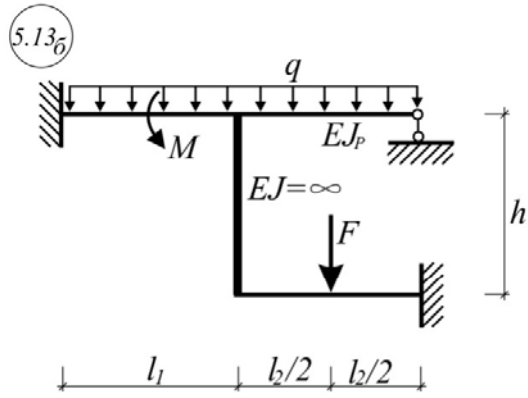
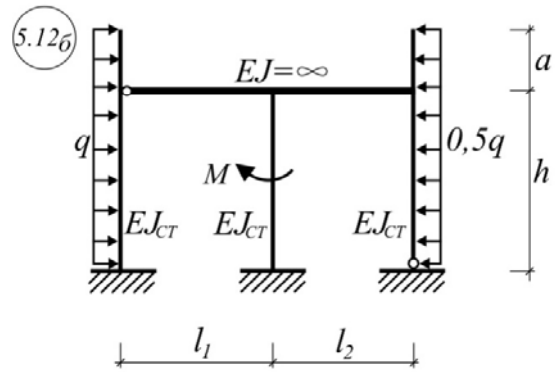
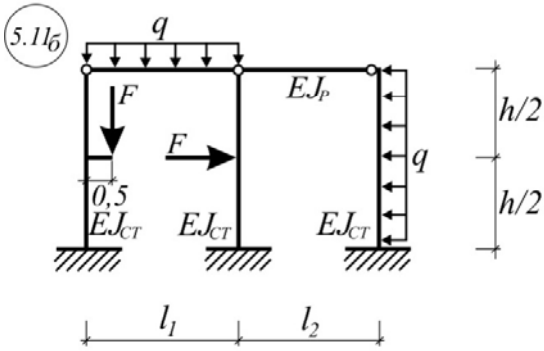
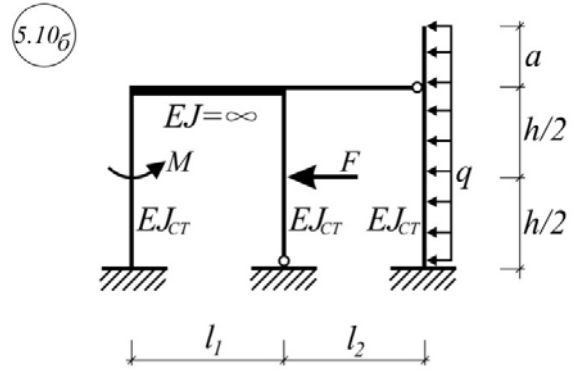
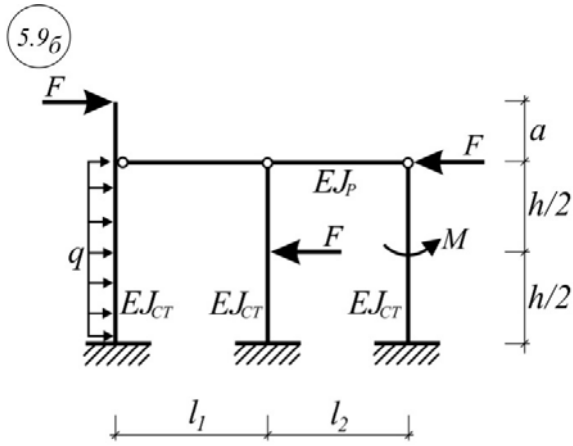


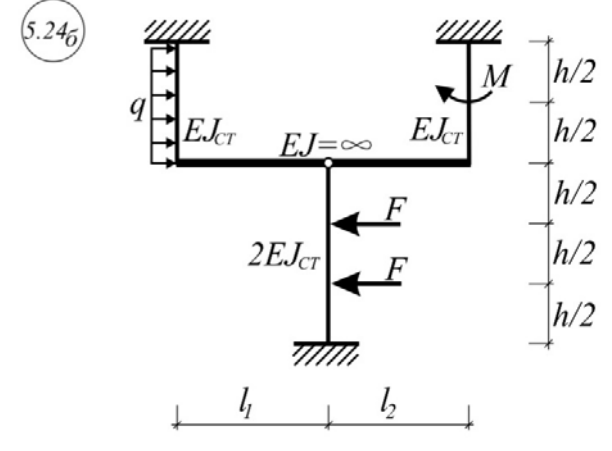
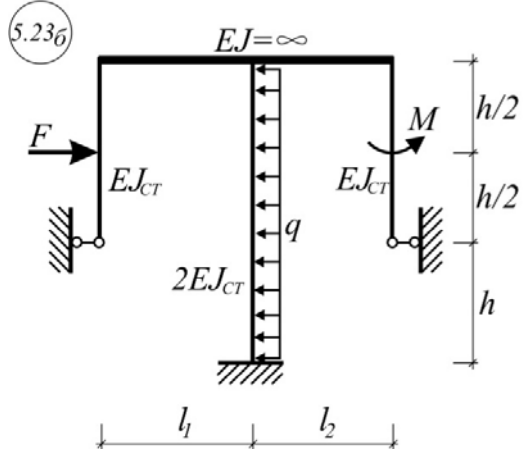
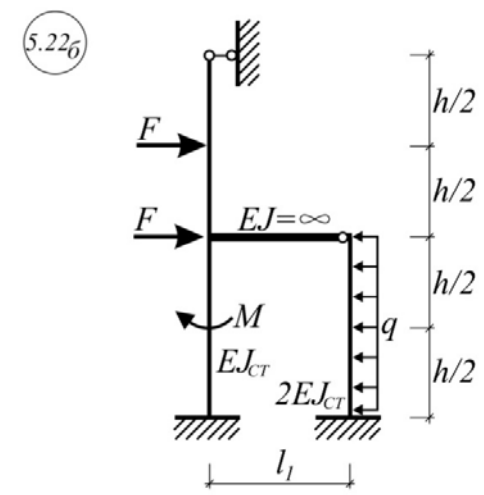
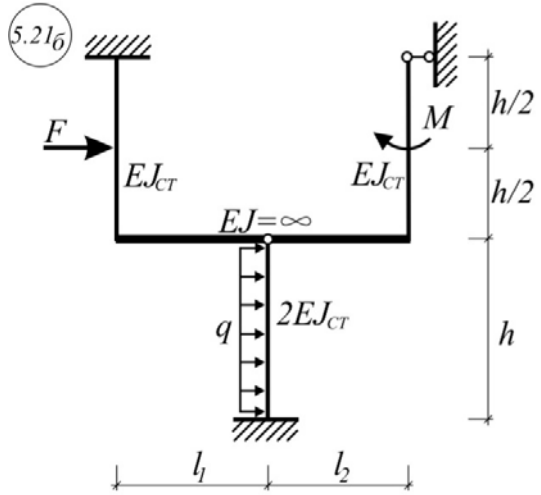
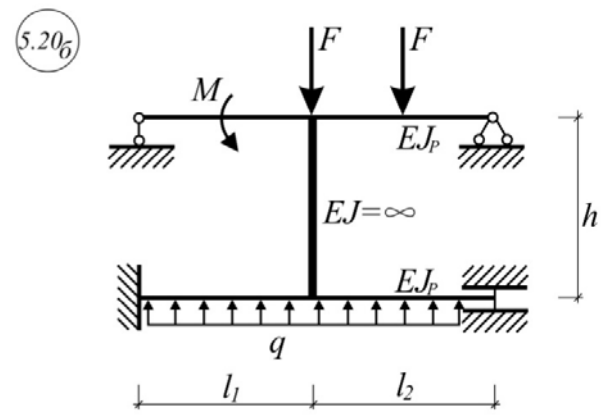
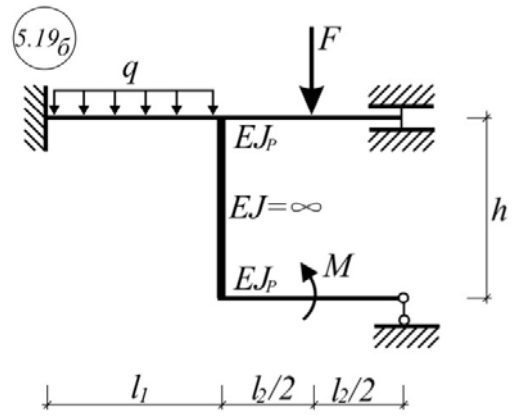
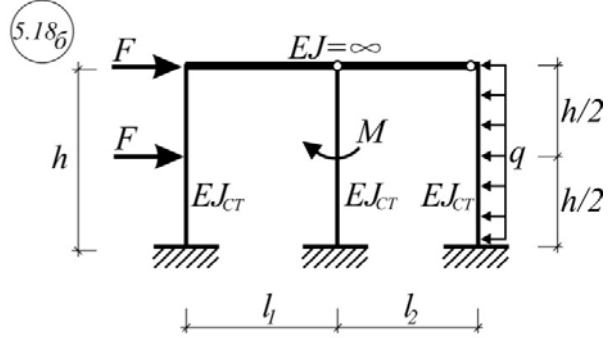
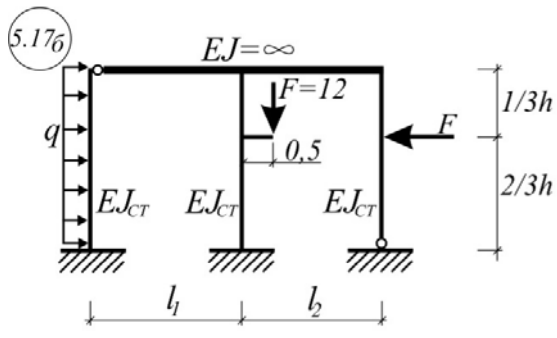
5.76



5.86







Контрольные вопросы

1. Каков физический смысл уравнений МП?
2. Как определить число линейных неизвестных МП?
3. Как строятся эпюры МП?
4. Как делается проверка правильности решений МП?

Лабораторная работа №3 РАСЧЕТ РАМ С НАКЛОННЫМИ СТОЙКАМИ

Цель работы:

1. Определить число неизвестных по методу перемещений, обращая внимание, как влияет жесткость равная ∞ на выбор О.С.М.П.
2. Выбрать основную систему М.П.
3. Сделать расчет рамы М.П.

Расчет рам с наклонными стойками имеет некоторые особенности. Здесь при определении единичных и грузовых реакций нужно учитывать продольные силы, возникающие в стойках. Кроме того, здесь при горизонтальных смещениях узлов происходят и вертикальные перемещения. Рассматриваемая рама дважды кинематически неопределима. Ее основная система показана на рис. 3.1б. Система уравнений метода перемещений имеет вид:

$$\left. \begin{aligned} r_{11}Z_1 + r_{12}Z_2 + R_{1P} &= 0; \\ r_{21}Z_1 + r_{22}Z_2 + R_{2P} &= 0. \end{aligned} \right\}$$

Для определения коэффициентов и свободных членов уравнений строим эпюры рис. 3.1 в, 3.3 б, 3.4 а.

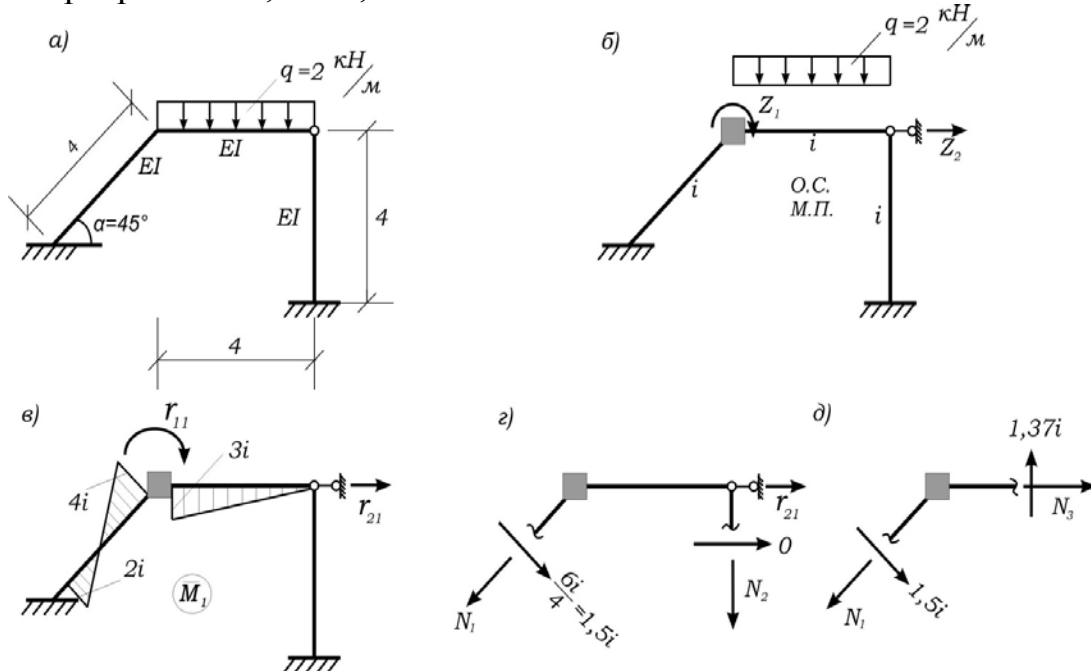


Рис. 3.1

Для определения реакции r_{21} отделим ригель (рис.3.1г) и составим уравнения равновесия:

$$\sum F_{ky} = 0:$$

$$0,75i - 1,5i \cdot \cos \alpha - N_1 \cdot \sin \alpha = 0,$$

$$N_1 = \frac{0,75i - 1,5i \cdot 0,707}{\sin \alpha} = 0,439i.$$

$$\sum F_{kx} = 0:$$

$$r_{21} + \frac{6i}{4} \cdot \sin \alpha - N_1 \cdot \cos \alpha = 0,$$

$$r_{21} = -1,5 \cdot 0,707i - 0,439 \cdot 0,707i = -1,605i - 0,3103i = -1,37i.$$

Реакцию r_{11} определяем из равновесия узла (рис. 3.2):

$$r_{11} = 3i + 4i = 7i.$$

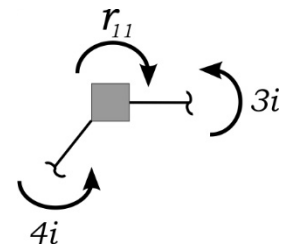


Рис. 3.2

Схема деформаций рамы от единичного линейного смещения $Z_2 = 1$ приведена на рис. 3.3 а.

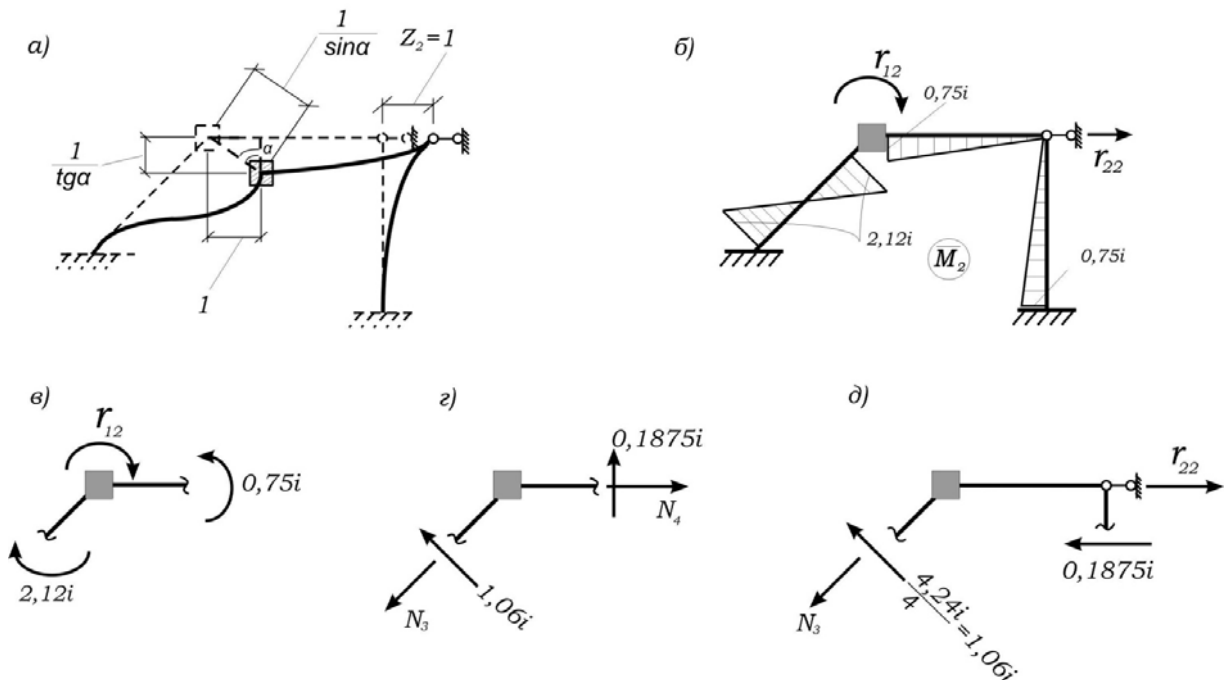


Рис. 3.3

Составляя уравнения равновесия по рис. 3.3 в,г,д, находим реакции r_{12} , r_{22} .

$$\begin{aligned} \sum M_0 &= 0, \\ r_{12} &= -2,12i + 0,75i = 1,37i, \\ \sum F_{ky} &= 0, \\ 0,1875i + 1,06 \cdot 0,707 - N_3 \sin \alpha &= 0, \\ N_3 &= \frac{0,1875i + 1,06i \cdot 0,707}{\sin \alpha} = 1,325i, \\ \sum F_{kx} &= 0, \\ r_{22} - 0,1875i - 1,06i \cdot 0,707 - N_3 \cdot 0,707 &= 0, \\ r_{22} &= 0,1875i + (1,06 + 1,325)i \cdot 0,707 = 1,874i. \end{aligned}$$

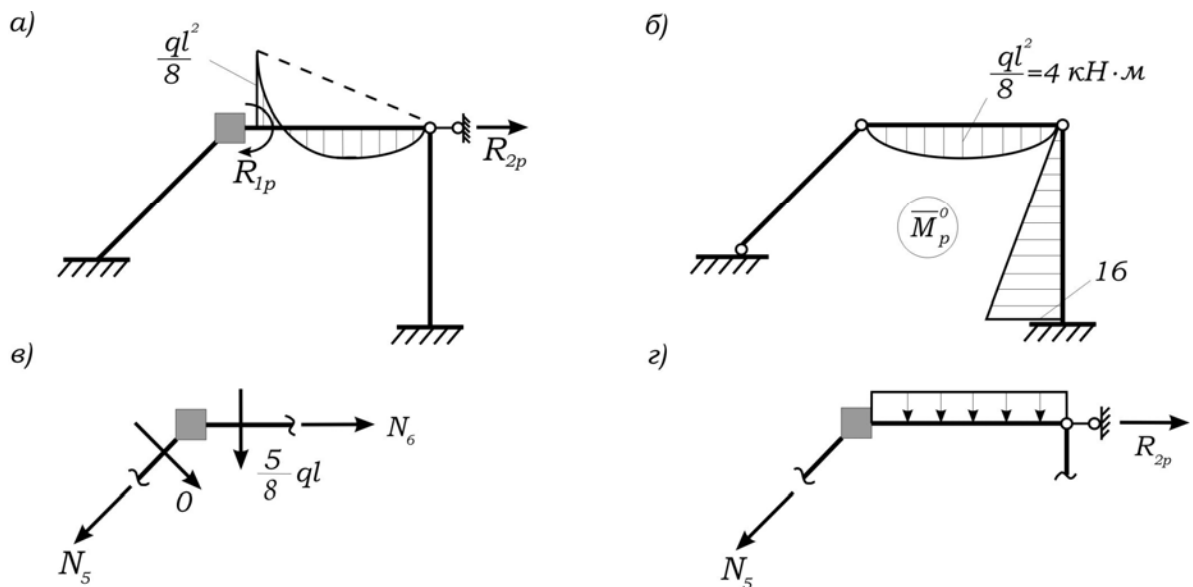


Рис. 3.4

Грузовые реакции можно определить из равновесия узлов рис. 3.4в,г:

$$\begin{aligned} \sum M_0 &= 0, \\ R_{1p} &= -4 \text{ кН} \cdot \text{м}. \\ \sum F_{ky} &= 0, \\ N_5 &= \frac{-(5/8)ql}{\sin \alpha} = -\frac{5}{\sin \alpha}. \\ \sum F_{kx} &= 0, \\ R_{2p} &= N_5 \cdot \cos \alpha = -5. \end{aligned}$$

Грузовые коэффициенты можно определить, также, по формуле Гвоздева:

$$R_{ip} = -\sum \frac{\overline{M}_i \cdot M_p^0}{EI} dx.$$

$$\begin{aligned} R_{2p} &= -\sum \int \frac{M_p^0 \overline{M}_2}{EI} dx = -\frac{1}{EI} \left(\frac{2}{3} \cdot 4 \cdot 4 \cdot 0,375i + \frac{1}{4} \cdot 16 \cdot 4 \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4} i \right) = \\ &= \frac{(4+16)i}{EI} = -\frac{20i}{EI} \text{ кН} = -\frac{20}{4} \text{ кН} = -5 \text{ кН}. \end{aligned}$$

Дальнейшее решение выполняется обычным образом.

Контрольные вопросы

1. Каков физический смысл уравнений МП?
2. Как определить число линейных и угловых неизвестных МП?
3. Как определять реакции в линейных связях для рам с наклонными стойками?
4. Как строятся эпюры МП?
5. Как делается проверка правильности решений МП?

Лабораторная работа №4 РАСЧЕТ РАМЫ МАТРИЧНЫМ МЕТОДОМ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ

Цель работы:

1. Определить число неизвестных по методу перемещений.
2. Выбрать основную систему матричного М.П.
3. Построить диаграммы $P-z$ и $S-e$.
4. Сделать расчет рамы матричным М.П.

Оборудование: ПЭВМ, таблицы метода перемещений.

Программное обеспечение:

пакет Mathcad.

В качестве первого примера рассмотрим расчет рамы (рис. 4.1) на действие заданной узловой нагрузки.

Рассматриваемая рама в общем случае (с учетом продольных перемещений) пять раз кинематически неопределима, т.е. степень свободы ее $n = 5$ (см. рис. 4.1). Стержни рамы содержат семь искоемых внутренних усилий (рис. 4.2), которыми являются изгибающие моменты в жестких узлах и

продольные силы, в связи с чем $m = 7$. $m - n = 2$, следовательно, данная рама 2 раза статически неопределима.

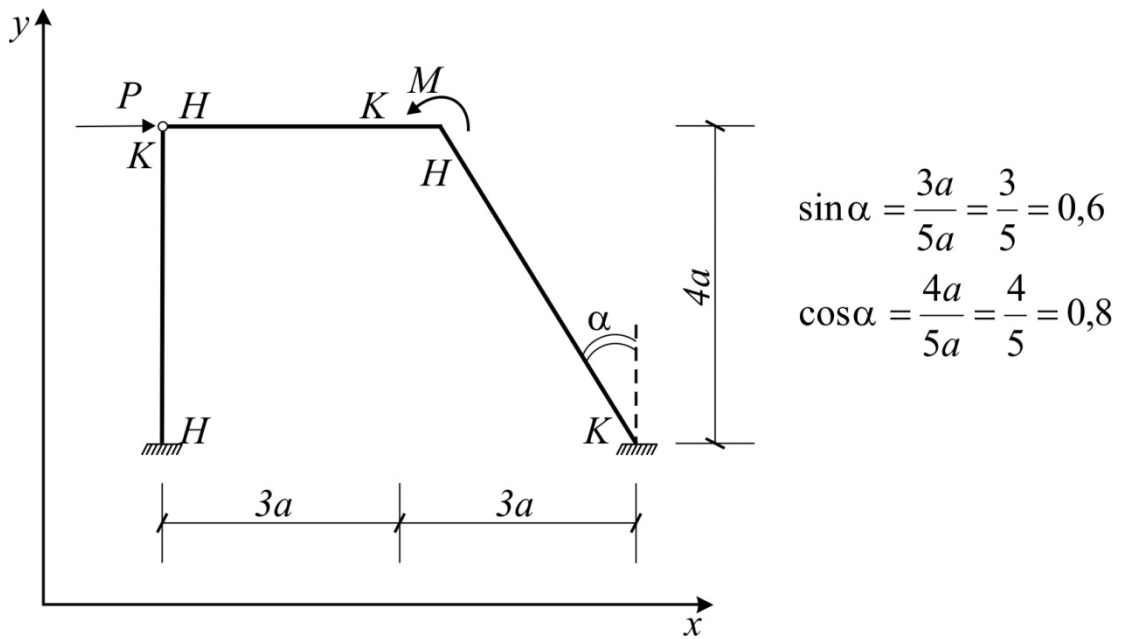


Рис. 4.1

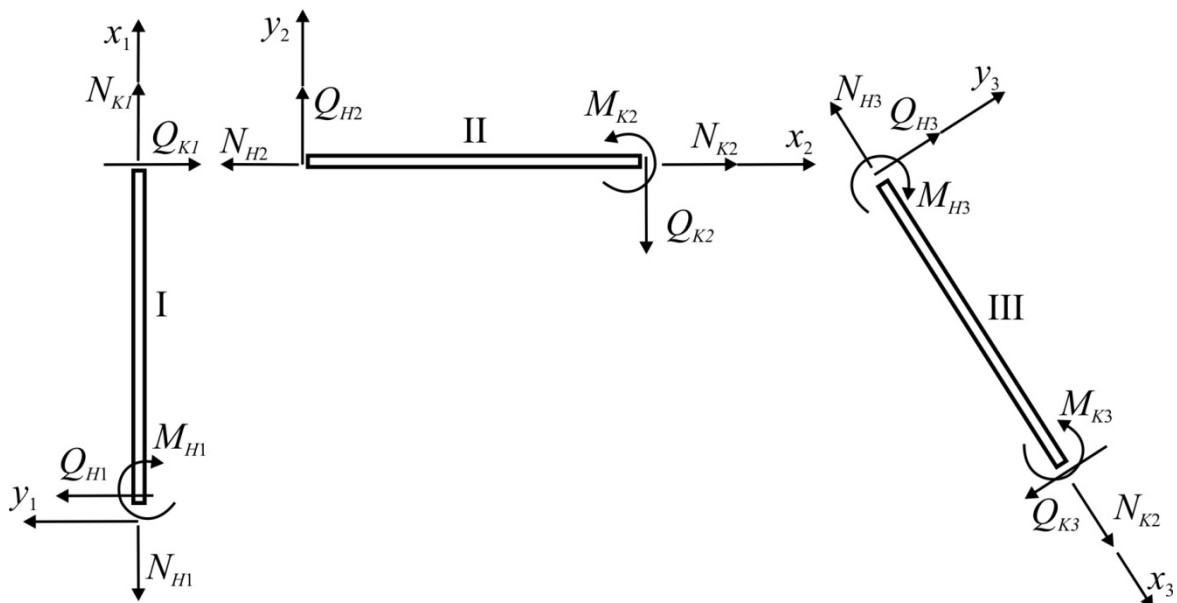


Рис. 4.2

На рис.4.2,а и 4.3 приведены диаграммы $P-z$ и $S-e$, на которых показаны номера и принятые за положительные направления перемещения узлов рамы, а также сечения, в которых вычисляются моменты S_j , и их положительные направления.

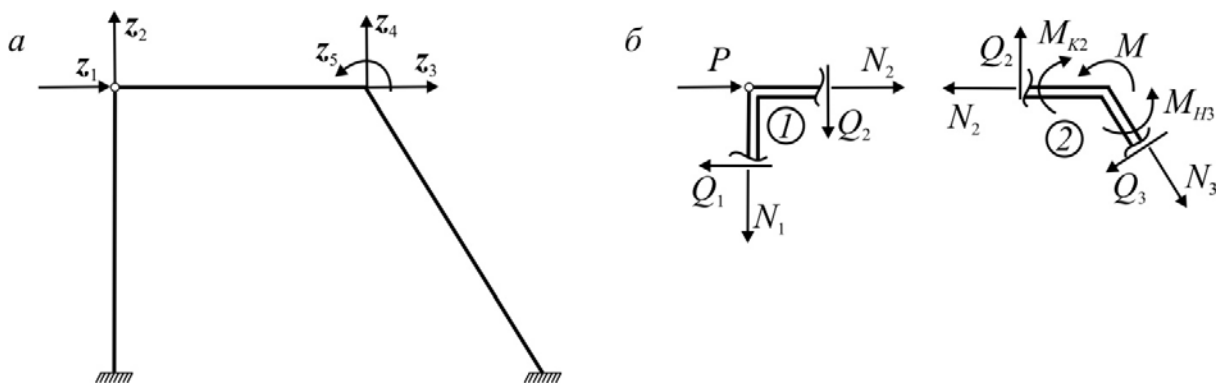


Рис. 4.3

Составим пять уравнений равновесия, соответствующие пяти возможным перемещениям узлов рамы (рис. 4.3,б):

$$\text{Узел I. } \sum F_{KX} = 0, -Q_1 + N_2 + P = 0; \Rightarrow \frac{M_{H1}}{4a} + N_2 + P = 0.$$

$$\sum F_{KY} = 0, -N_1 - Q_2 = 0; \Rightarrow -N_1 - \frac{M_{K2}}{3a} = 0.$$

$$\text{Узел II. } \sum F_{KX} = 0, -N_2 - Q_3 \cos \alpha + N_3 \cdot \sin \alpha = 0, \Rightarrow$$

$$-N_2 - \frac{M_{K3} - M_{H3}}{5a} \cdot 0.8 + N_3 \cdot 0.6 = 0.$$

$$\sum F_{KY} = 0, Q_2 - N_3 \cdot \cos \alpha - Q_3 \sin \alpha = 0, \Rightarrow$$

$$\frac{M_{K2}}{3a} - N_3 \cdot 0.8 - \frac{M_{K3} - M_{H3}}{5a} \cdot 0.6 = 0.$$

$$\sum M = 0, M_{K2} + M_{H3} + M = 0.$$

Запишем уравнение равновесия в матричной форме:

$$AS + P = 0, \quad (*)$$

$$S = \{s_1^T s_2^T s_3^T\};$$

$$s_1 = \{N_1 M_{H1}\}^T; \quad s_2 = \{N_2 M_{K2}\}^T; \quad s_3 = \{N_2 M_{H3} M_{K3}\}^T;$$

$$P = \{P \ 0 \ 0 \ 0 \ M\}^T.$$

		s_1		s_2		s_3		P	
		N_1	M_{H1}	N_2	M_{K2}	N_3	M_{H3}	M_{K3}	
Уз.1	ΣF_{KX}		$0,25/a$	1					P
	ΣF_{KY}	-1			$-0,333/a$				0
Уз.2	ΣF_{KX}			-1		$0,6$	$0,16/a$	$-0,16/a$	0
	ΣF_{KY}				$0,333/a$	$-0,8$	$0,12/a$	$-0,12/a$	0
	ΣM				-1		1		M

Матрица коэффициентов уравнений равновесия, или статическая матрица:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0,25/a & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & -0,333/a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0,6 & 0,16/a & -0,16/a \\ 0 & 0 & 0 & 0,333/a & -0,8 & 0,12/a & -0,12/a \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Для формирования матрицы внутренней жесткости запишем матрицы жесткости каждого стержня рамы:

$$k_1 = \begin{bmatrix} \frac{EF}{4a} & 0 \\ 0 & \frac{3EI}{4a} \end{bmatrix}, \quad k_2 = \begin{bmatrix} \frac{EF}{3a} & 0 \\ 0 & \frac{3EI}{3a} \end{bmatrix}, \quad k_3 = \begin{bmatrix} \frac{EF}{5a} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{4EI}{5a} & \frac{-2EI}{5a} \\ 0 & \frac{-2EI}{5a} & \frac{4EI}{5a} \end{bmatrix}.$$

Матрица внутренней жесткости может быть теперь представлена в виде:

$$k = \begin{bmatrix} \frac{EF}{4a} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3EI}{4a} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{EF}{3a} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{3EI}{3a} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{EF}{5a} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{4EI}{5a} & \frac{-2EI}{5a} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{-2EI}{5a} & \frac{4EI}{5a} \end{bmatrix}.$$

Здесь $k = [K]$..

Уравнения равновесия перепишем в виде:

$$A[K]A^T Z = P,$$

или

$$KZ = P.$$

Решим систему уравнений:

$$Z = K^{-1}P = (A[K]A^T)^{-1}P.$$

При $a=1$ м, $E=210^{11}$ Н/м², $P=10000$ Н, $M=10000$ Н·м, $F=20 \cdot 10^{-4}$ м², $I=11 \cdot 10^{-6}$ м⁴ получим:

$$Z = [0,017 \quad 1,629 \cdot 10^{-5} \quad 0,017 \quad 0,013 \quad 2,032 \cdot 10^{-3}]^T.$$

Внутренние усилия от узловой нагрузки имеют величину:

$$S = -kA^T Z = [1629 \quad -7117 \quad -8221 \quad -4892 \quad -6296 \quad -14892 \quad 13100]^T.$$

Эпюра изгибающих моментов показана на рис. 4.4.

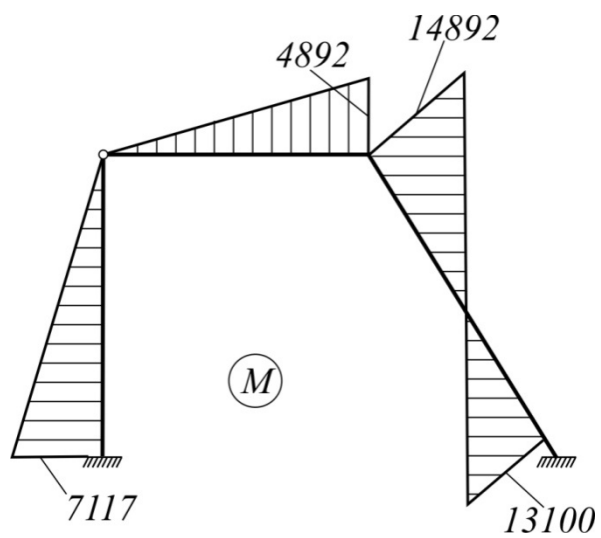
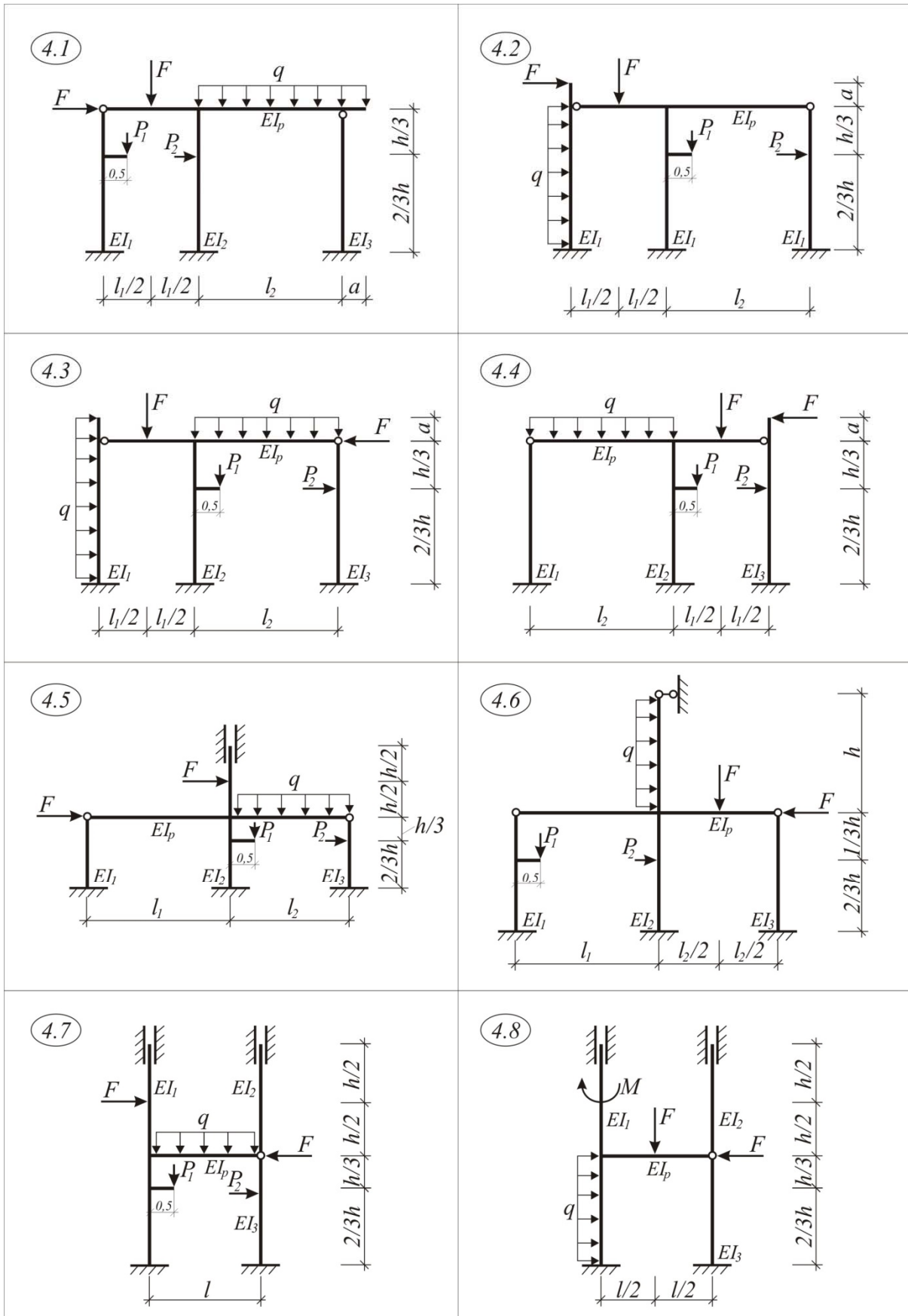
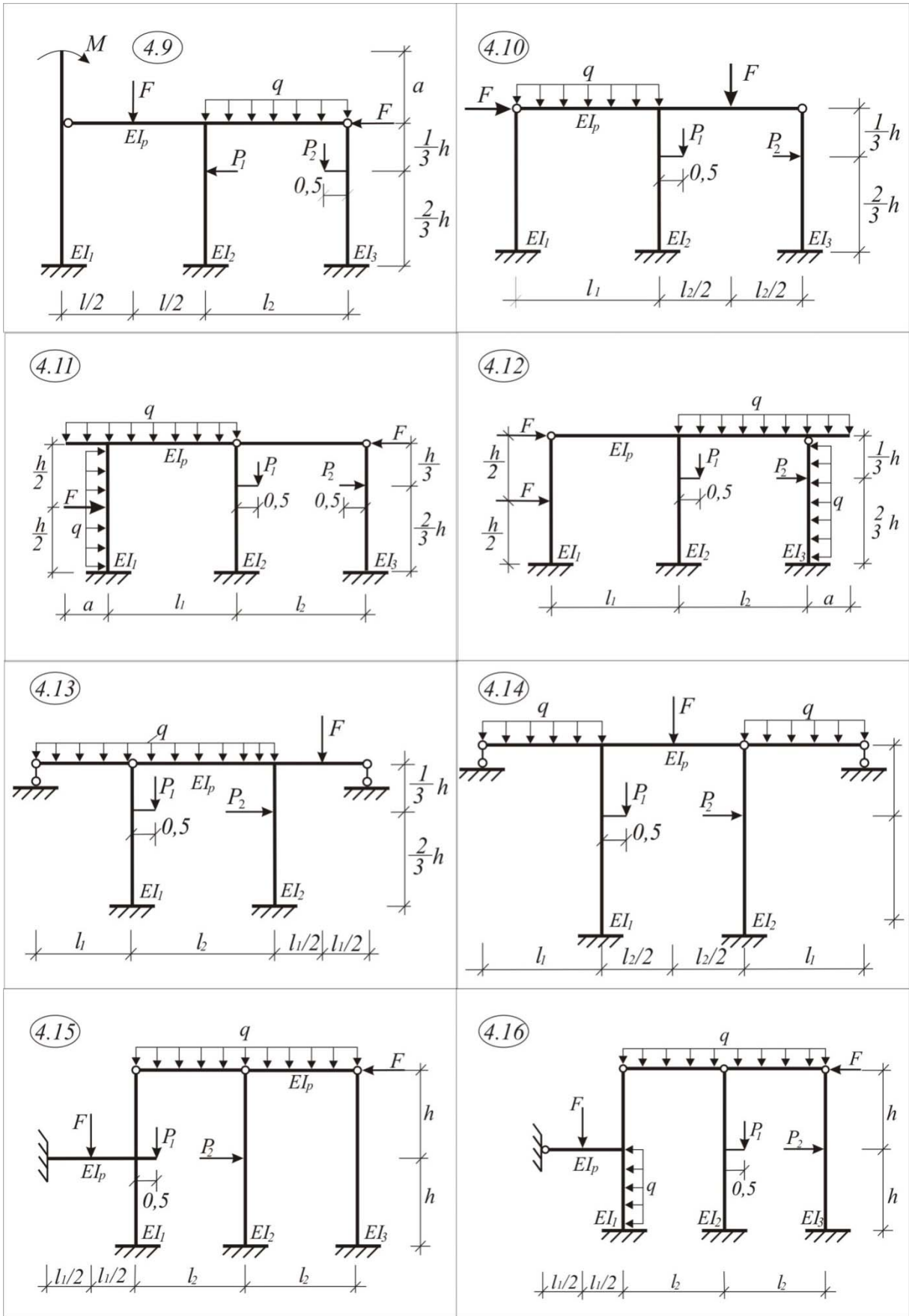
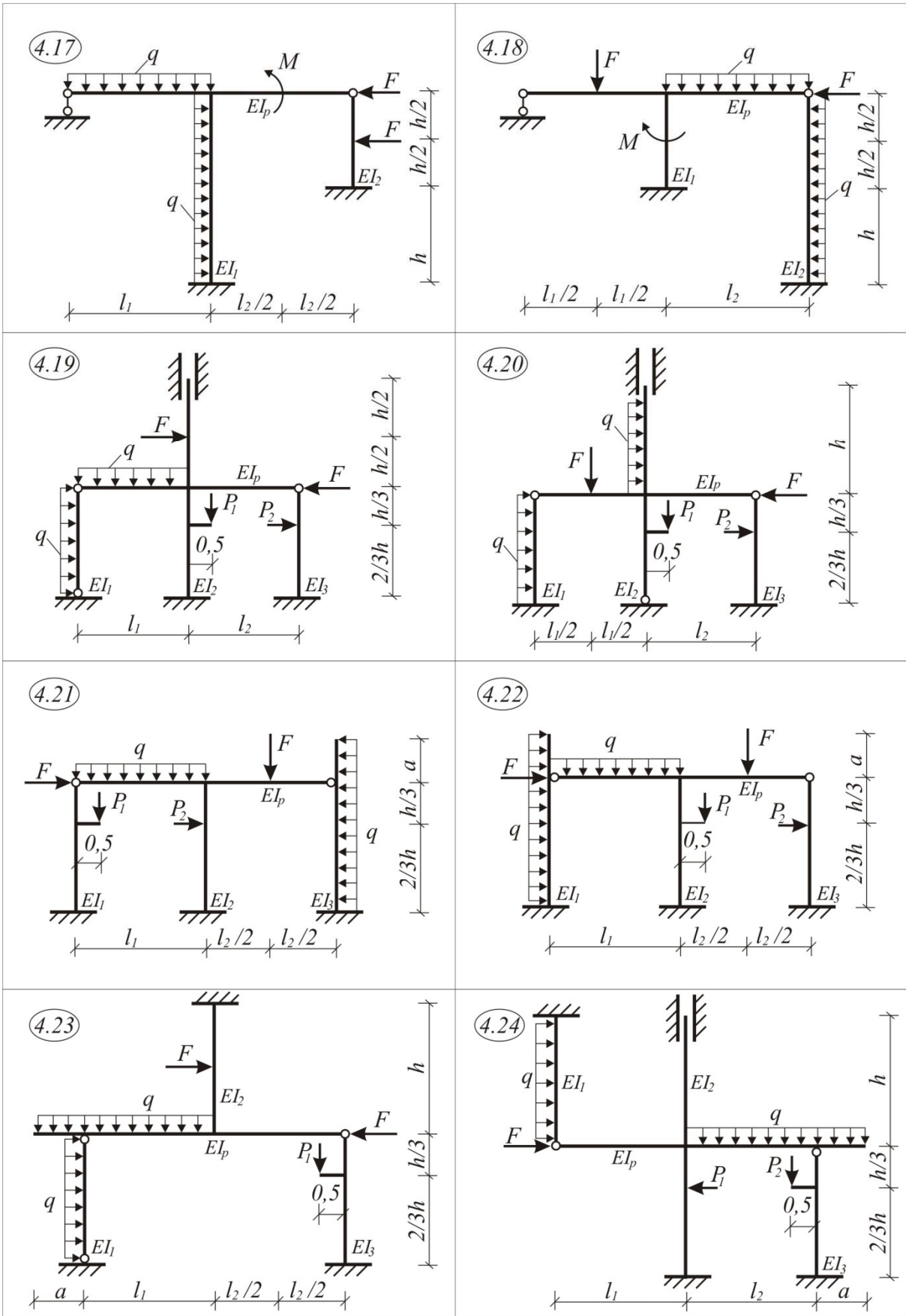


Рис. 4.4

Варианты для лабораторной работы №4







Исходные данные к заданию 4

№ п/п	Длины, м				Соотношение жесткостей				Нагрузки				
	a	h	l_1	l_2	$\frac{n_1 EI}{n_1=}$	$\frac{n_2 EI}{n_2=}$	$\frac{n_3 EI}{n_3=}$	$\frac{n_p EI}{n_p=}$	F	q	M	P_1	P_2
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
1	2	6	9	6	1	2	3	4	16	2	20	10	12
2	1	4,5	6	12	1,5	2	2,5	3	10	3	22	8	14
3	3	9	6	8	1	2	1,5	4	12	2,5	16	18	6
4	1,5	6	8	12	2	3	2,5	3	18	1	18	12	14
5	2	3	6	8	1,5	3	1	3	20	1,5	20	24	20
6	2,5	3	4	9	1	1,5	1	2	12	3	22	10	24
7	2	3	12	8	1,5	2,5	2	4	10	2,5	24	6	32
8	1	4,5	8	6	0,8	22,4	1,2	3,6	22	2	18	8	24
9	3	9	6	8	0,6	1,4	0,8	2	12	1,2	20	10	28
10	2,5	6	6	12	1,2	1,8	1,4	2,4	14	1,6	16	14	14
11	1,5	4,5	8	8	1,4	1,6	2	2,6	16	2	25	16	24
12	1	6	9	8	1,5	2,2	2	2,8	10	1,8	30	15	20
13	2	9	12	6	1,6	2	1,8	2,8	24	1,5	32	24	28
14	3	6	8	8	1	2	3	4	20	2	18	30	34
15	1,5	3	8	10	1,5	2	2,5	3	18	2,2	20	28	30
16	2,5	3	6	12	1	2	1,5	4	10	2,4	26	24	26
17	2	4	6	8	2	3	2,5	3	12	2,6	16	10	12
18	3	3	4	10	1,5	3	1	3	8	2,5	14	8	14
19	2,5	4,5	12	9	1	1,5	1	2	16	1,5	12	24	30
20	1,5	3	8	6	1,5	2,5	2	4	22	1	20	10	24
21	1	6	8	10	0,8	2,4	1,2	3,6	14	1,8	28	6	32
22	2	4,5	6	9	0,6	1,4	0,8	2	10	2,4	30	10	28
23	3	4,5	8	6	1,5	2,2	2	2,8	16	2	22	14	30
24	2,5	3	6	8	1,6	2	1,8	3	20	2,2	18	15	32

Контрольные вопросы

1. Каков физический смысл уравнений МП?
2. Как определить число линейных и угловых неизвестных матричного МП?
3. Какие виды матриц используется в матричном МП?
4. Какие взаимобращаемые матрицы Вы знаете?
5. Как делается проверка правильности решений матричным МП?
6. Как определяются перемещения в матричном МП?
7. Как определяются усилия в матричном МП?

Лабораторная работа №5 РАСЧЕТ ФЕРМЫ МКЭ

Цель работы:

1. Определить число неизвестных по МКЭ.
2. Построить диаграммы $P-z$.
3. Построить матрицы жесткостей КЭ.
4. Построить глобальную матрицу жесткости.
5. Произвести расчет фермы МКЭ

Оборудование: ПЭВМ, таблицы матриц.

Программное обеспечение:
пакет Mathcad.

Пример. Произведем расчет фермы МКЭ (рис. 5.1).

Вектор перемещений данной системы имеет вид:

$$u = \{ u_1 \ u_2 \ u_3 \ u_4 \ u_5 \ u_6 \ u_7 \ u_8 \}^T.$$

Примем $EF_i / l_i = 2$.

Матрицы жесткости отдельных элементов можно записать в виде следующих таблиц:

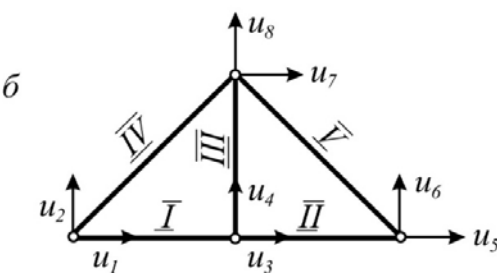
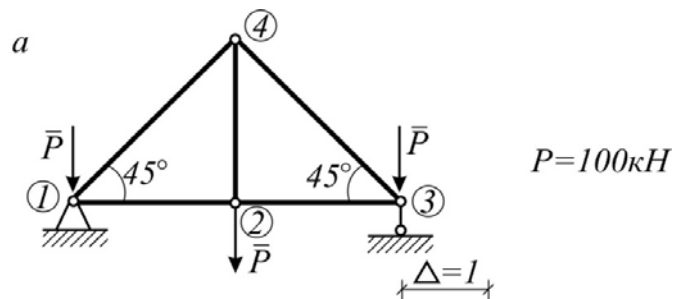


Рис. 5.1

I					II				III					
	1	2	3	4		3	4	5	6		3	4	7	8
1	2	0	-2	0	3	2	0	-2	0	3	0	0	0	0
2	0	0	0	0	4	0	0	0	0	4	0	2	0	-2
3	-2	0	2	0	5	-2	0	2	0	7	0	0	0	0
4	0	0	0	0	6	0	0	0	0	8	0	-2	0	2

IV					V				
	1	2	7	8		5	6	7	8
1	1	1	-1	-1	5	1	-1	-1	1
2	1	1	-1	-1	6	-1	1	1	-1
7	-1	-1	1	1	7	-1	1	1	-1
8	-1	-1	1	1	8	1	-1	-1	1

Матрица жесткости фермы представляет собой сумму матриц жестко-стей её элементов:

$$K = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 3 & 1 & -2 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ -2 & 0 & 4 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 3 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & -2 & 1 & -1 & 0 & 4 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

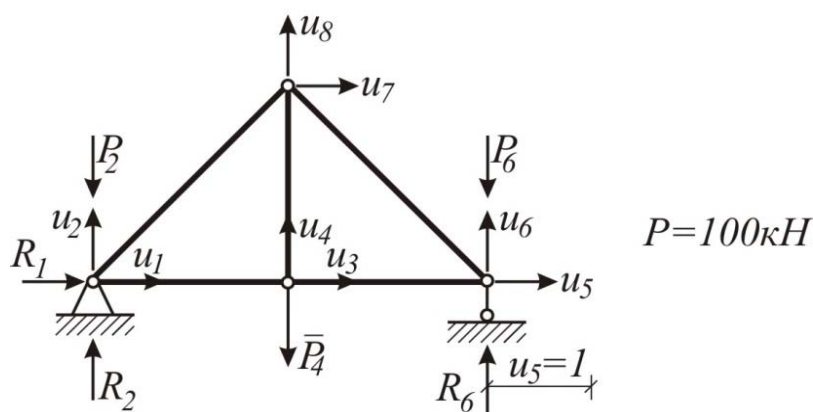


Рис. 5.2

Уравнения равновесия можно записать в виде:

$$\begin{aligned} P_1 &= +3u_1 + 1u_2 - 2u_3 + 0u_4 + 0u_5 + 0u_6 - 1u_7 - 1u_8; \\ P_2 &= +1u_1 + 1u_2 + 0u_3 + 0u_4 + 0u_5 + 0u_6 - 1u_7 - 1u_8; \\ P_3 &= -2u_1 + 0u_2 + 4u_3 + 0u_4 - 2u_5 + 0u_6 + 0u_7 + 0u_8; \\ P_4 &= 0u_1 + 0u_2 + 0u_3 + 2u_4 + 0u_5 + 0u_6 + 0u_7 - 2u_8; \\ P_5 &= +0u_1 + 0u_2 - 2u_3 + 0u_4 + 3u_5 - 1u_6 - 1u_7 + 1u_8; \\ P_6 &= +0u_1 + 0u_2 + 0u_3 + 0u_4 - 1u_5 + 1u_6 + 1u_7 - 1u_8; \\ P_7 &= -1u_1 - 1u_2 + 0u_3 + 0u_4 - 1u_5 + 1u_6 + 2u_7 + 0u_8; \\ P_8 &= -1u_1 - 1u_2 + 0u_3 - 2u_4 + 1u_5 - 1u_6 + 0u_7 + 4u_8. \end{aligned}$$

При этом вектор

$$P = \begin{Bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \\ P_4 \\ P_5 \\ P_6 \\ P_7 \\ P_8 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 + R_1 \\ -100 + R_2 \\ 0 \\ -100 \\ 0 \\ -100 + R_6 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}.$$

Для вычисления перемещений u_3, u_4, u_7, u_8 систему уравнений перепишем в виде:

$$\begin{cases} P_3 = -2u_1 + 0u_2 + 4u_3 + 0u_4 - 2u_5 + 0u_6 + 0u_7 + 0u_8; \\ P_4 = 0u_1 + 0u_2 + 0u_3 + 2u_4 + 0u_5 + 0u_6 + 0u_7 - 2u_8; \\ P_7 = -1u_1 - 1u_2 + 0u_3 + 0u_4 - 1u_5 + 1u_6 - 2u_7 + 0u_8; \\ P_8 = -1u_1 - 1u_2 + 0u_3 - 2u_4 + 1u_5 - 1u_6 + 0u_7 + 4u_8. \end{cases}$$

Здесь $u_1 = u_2 = u_6 = 0, u_5 = 1$.

Подставляя P_i и u_i , получим следующий вид системы уравнений:

$$\begin{cases} 2 = 4u_3 + 0u_4 + 0u_7 + 0u_8; \\ -100 = 0u_3 + 2u_4 + 0u_7 - 2u_8; \\ 1 = 0u_3 + 0u_4 + 2u_7 + 0u_8; \\ -1 = 0u_3 - 2u_4 + 0u_7 + 4u_8. \end{cases}$$

Откуда

$$u_3 = 0,5; u_7 = 0,5; u_8 = -50,5; u_4 = -100,5.$$

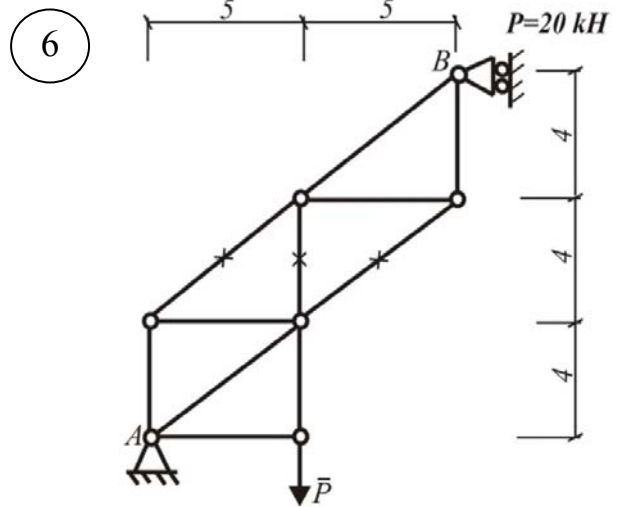
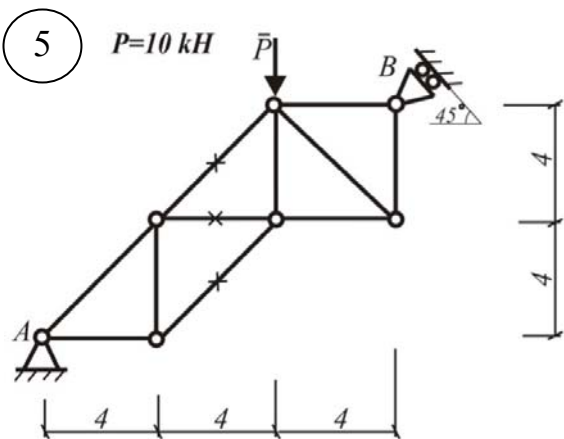
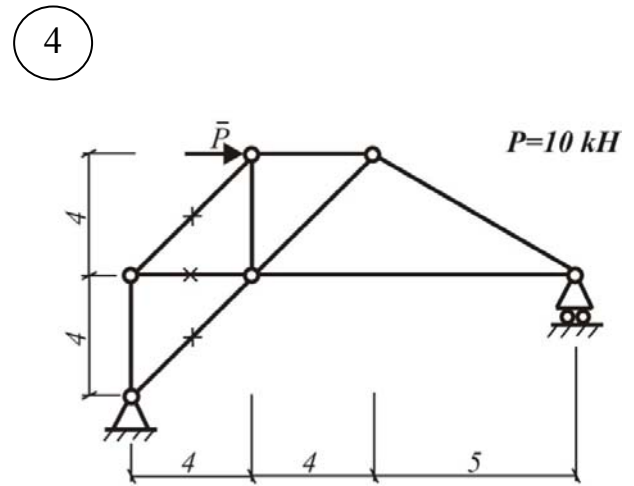
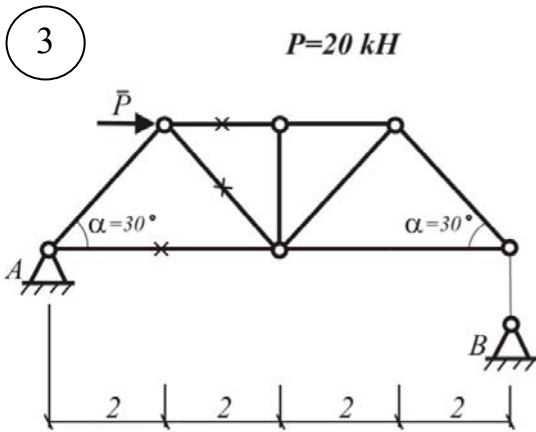
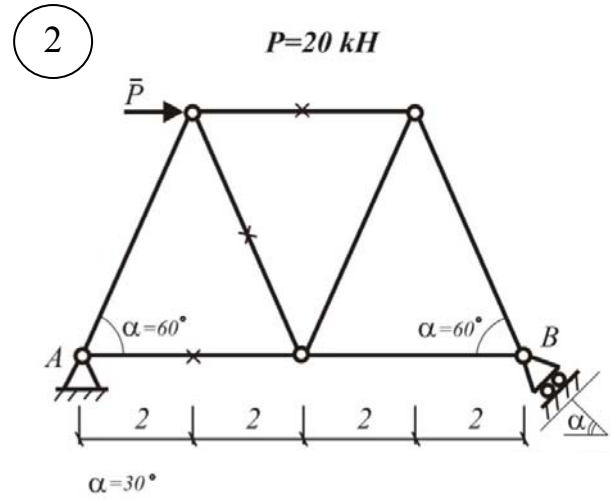
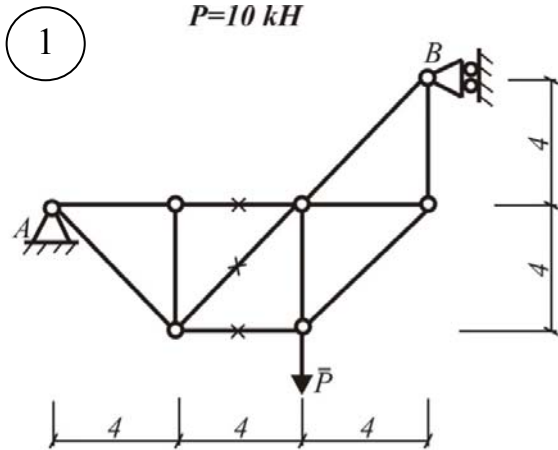
Определение усилий в элементах производится по формуле:

$$N = \frac{EF}{l} \Delta l = \frac{EF}{l} [(u_2 - u_1)c + (v_2 - v_1)s].$$

Например, для стержня IV получим:

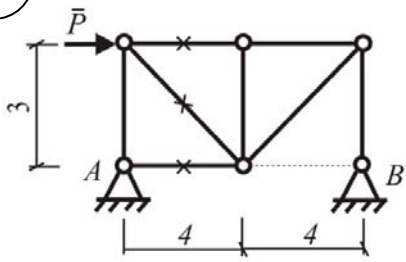
$$\begin{aligned} N &= 2[(u_7 - u_1)0,707 + (u_8 - u_2)0,707] = \\ &= 2 \cdot 0,5 \cdot 0,707 + (-50,5) \cdot 0,707 = -70,7. \end{aligned}$$

Задания к лабораторной работе № 5



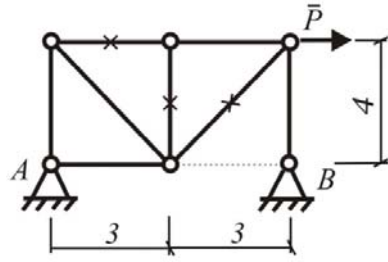
7

$P=20 \text{ kH}$



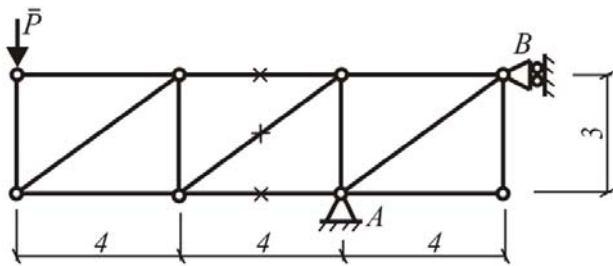
8

$P=20 \text{ kH}$



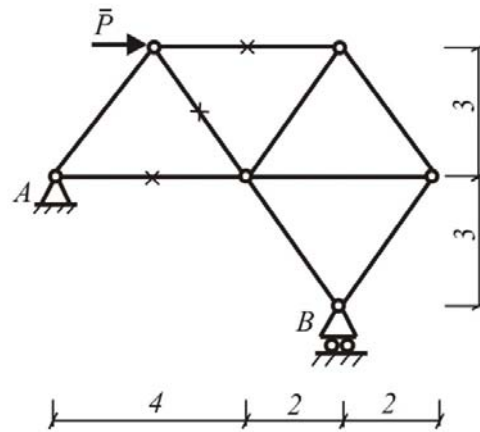
9

$P=20 \text{ kH}$



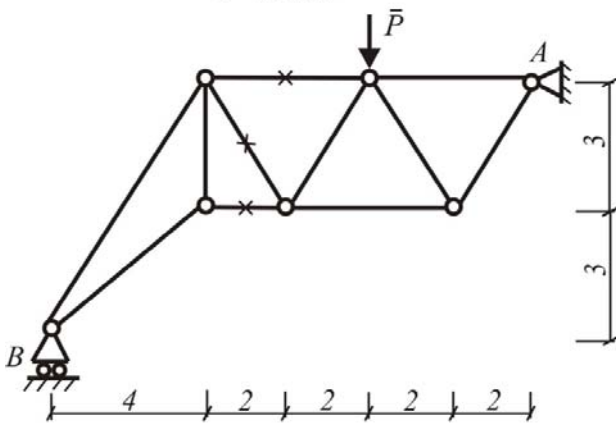
10

$P=20 \text{ kH}$



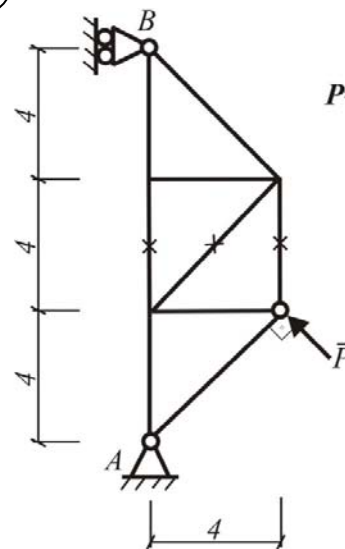
11

$P=20 \text{ kH}$

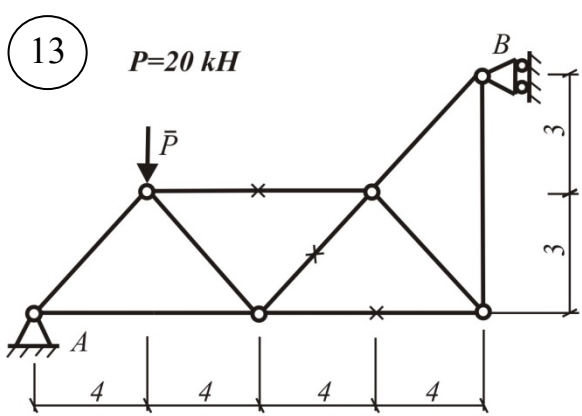


12

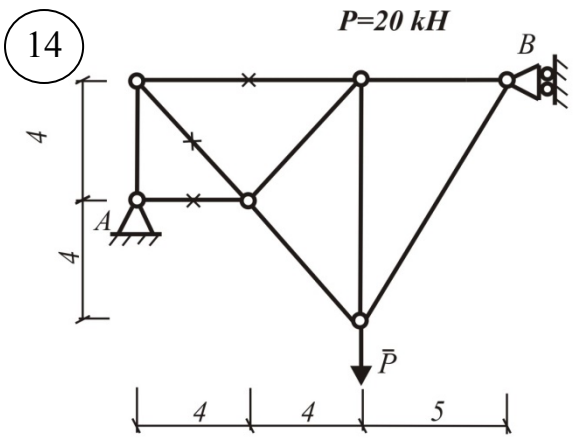
$P=20 \text{ kH}$



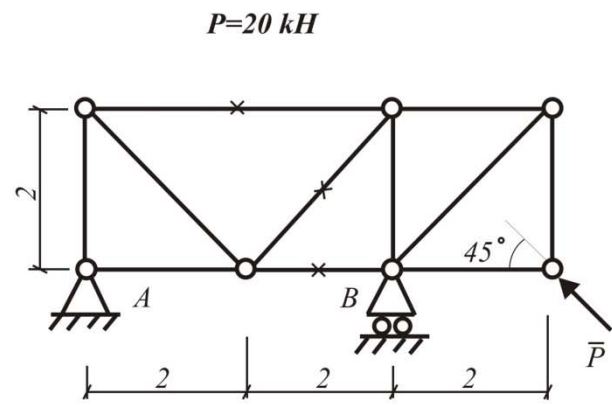
13



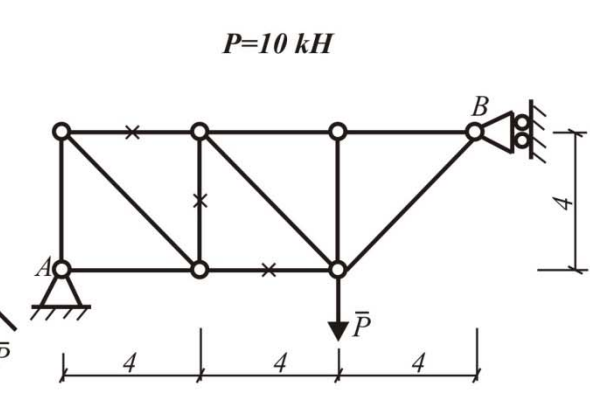
14



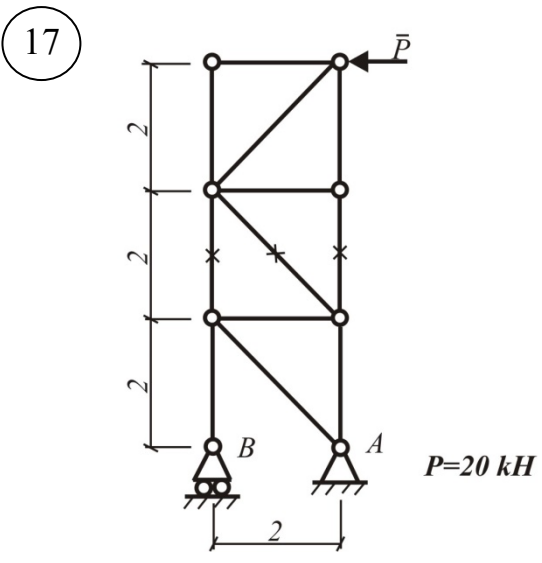
15



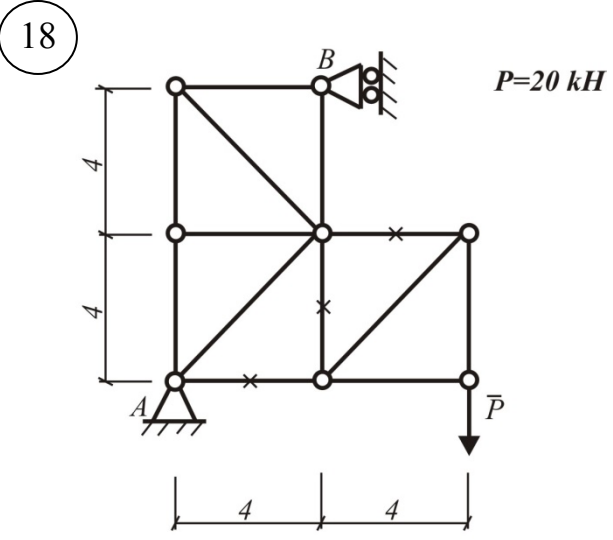
16



17

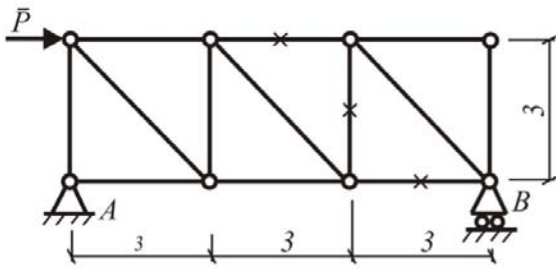


18



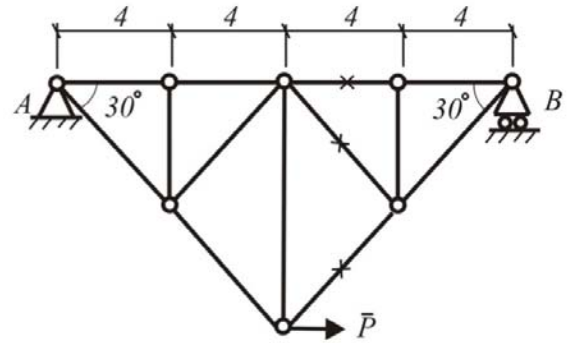
19

$P=20 \text{ kH}$



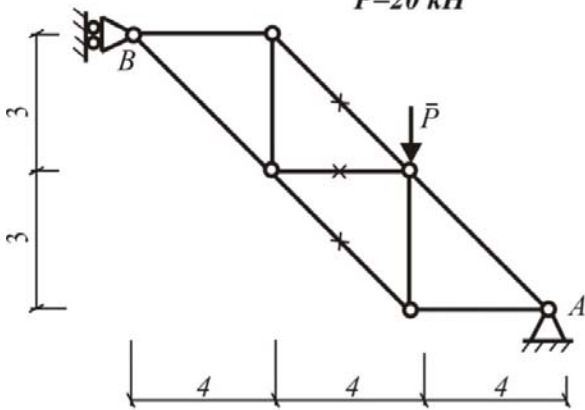
20

$P=20 \text{ kH}$



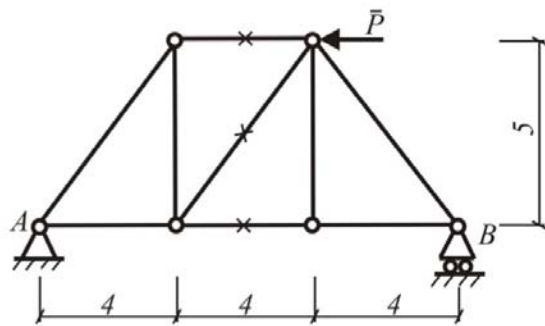
21

$P=20 \text{ kH}$



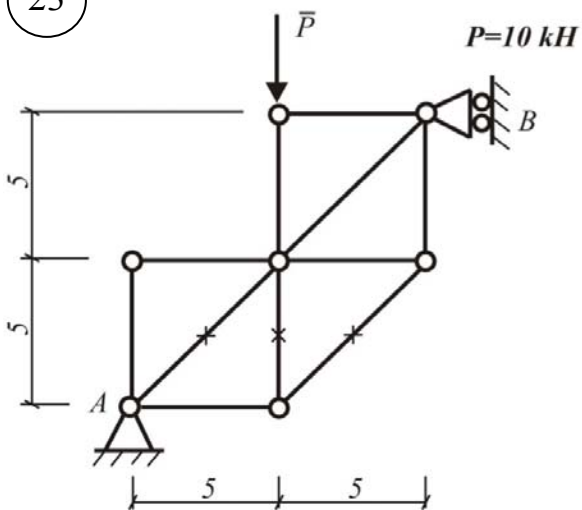
22

$P=10 \text{ kH}$



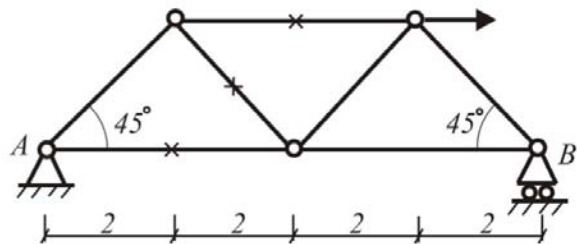
23

$P=10 \text{ kH}$



24

$P=20 \text{ kH}$



Контрольные вопросы

1. Каков физический смысл уравнений МКЭ?
2. Как определить число неизвестных МКЭ?
3. Как выглядит матрица жесткости шарнирно-стержневого элемента в МКЭ?
4. Как определяются перемещения в МКЭ?
5. Как определяются усилия в МКЭ?

Лабораторная работа № 6 РАСЧЕТ БАЛКИ МКЭ

1. Определить число неизвестных по МКЭ.
2. Построить диаграммы $P-z$.
3. Построить матрицы жесткостей КЭ.
4. Построить глобальную матрицу жесткости.
5. Произвести расчет балки МКЭ

Оборудование: ПЭВМ, таблицы матриц.

Программное обеспечение:

пакет Mathcad.

Матрица жесткости балки с упругими узлами:

$$k = \frac{2EJ}{l^3} \begin{bmatrix} 6 & 3l & -6 & 3l \\ 3l & 2l^2 & -3l & l^2 \\ -6 & -3l & 6 & -3l \\ 3l & l^2 & -3l & 2l^2 \end{bmatrix}.$$

Матрица жесткости для элемента с тремя степенями свободы [сначала (предположим, слева) – жесткий узел, справа – шарнирный узел] будет иметь вид:

$$k = \begin{bmatrix} \frac{3EI}{l^3} & \frac{3EI}{l^2} & -\frac{3EI}{l^3} \\ \frac{3EI}{l^2} & \frac{3EI}{l} & -\frac{3EI}{l^2} \\ -\frac{3EI}{l^3} & -\frac{3EI}{l^2} & \frac{3EI}{l^3} \end{bmatrix}.$$

Если слева (сначала) – шарнир, а справа – жесткий узел, то матрица жесткости такого конечного элемента имеет вид:

$$k = \begin{bmatrix} \frac{3EI}{l^3} & -\frac{3EI}{l^3} & \frac{3EI}{l^2} \\ -\frac{3EI}{l^3} & \frac{3EI}{l^3} & -\frac{3EI}{l^2} \\ \frac{3EI}{l^2} & -\frac{3EI}{l^2} & \frac{3EI}{l} \end{bmatrix}.$$

Пример расчета балки МКЭ

Вычислим перемещения балки, изображенной на рис.10.7. Разобьем балку на четыре конечных элемента одинаковой длины. Поскольку балка и нагрузка на нее симметричны, рассмотрим только половину, т.е. два конечных элемента из четырех. Матрицы жесткости (без коэффициента $\frac{2EI}{l^3}$) приведены ниже:

$$k_1 = \begin{matrix} & \begin{matrix} w_1 & \varphi_1 & w_2 & \varphi_2 \end{matrix} \\ \begin{matrix} w_1 \\ \varphi_1 \\ w_2 \\ \varphi_2 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 6 & 3l & -6 & 3l \\ 3l & 2l^2 & -3l & l^2 \\ -6 & -3l & 6 & -3l \\ 3l & l^2 & -3l & 2l^2 \end{bmatrix} \end{matrix};$$

$$k_2 = \begin{matrix} & \begin{matrix} w_2 & \varphi_2 & w_3 & \varphi_3 \end{matrix} \\ \begin{matrix} w_2 \\ \varphi_2 \\ w_3 \\ \varphi_3 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 6 & 3l & -6 & 3l \\ 3l & 2l^2 & -3l & l^2 \\ -6 & -3l & 6 & -3l \\ 3l & l^2 & 3l & 2l^2 \end{bmatrix} \end{matrix}.$$

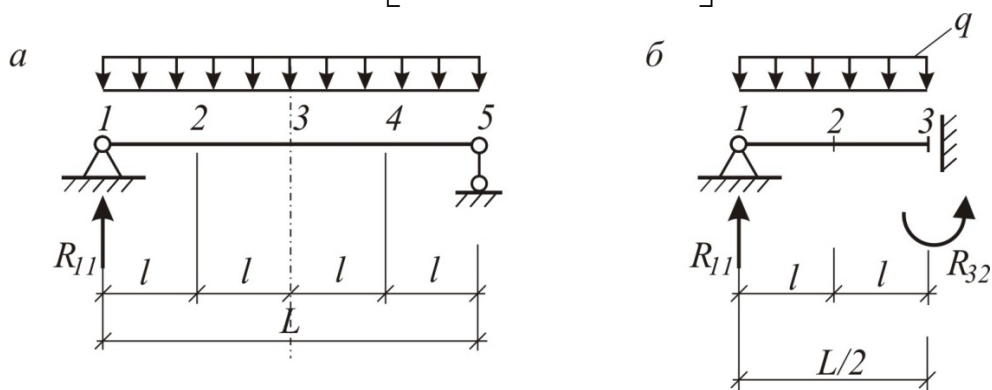


Рис. 6.1

Матрица жесткости балки (половины) будет иметь вид:

$$K = \frac{2EI}{l^3} \begin{bmatrix} 6 & 3l & -6 & 3l & 0 & 0 \\ 3l & 2l^2 & -3l & l^2 & 0 & 0 \\ -6 & -3l & 12 & 0 & -6 & 3l \\ 3l & l^2 & 0 & 4l^2 & -3l & l^2 \\ 0 & 0 & -6 & -3l & 6 & -3l \\ 0 & 0 & 3l & l^2 & -3l & 2l^2 \end{bmatrix}.$$

Уравнения равновесия в матричной форме записаны в виде:

$$KU = P.$$

Здесь вектор P формируется из приведенных к узлам сил и моментов от равномерно распределенной нагрузки (рис.10.8,а,б):

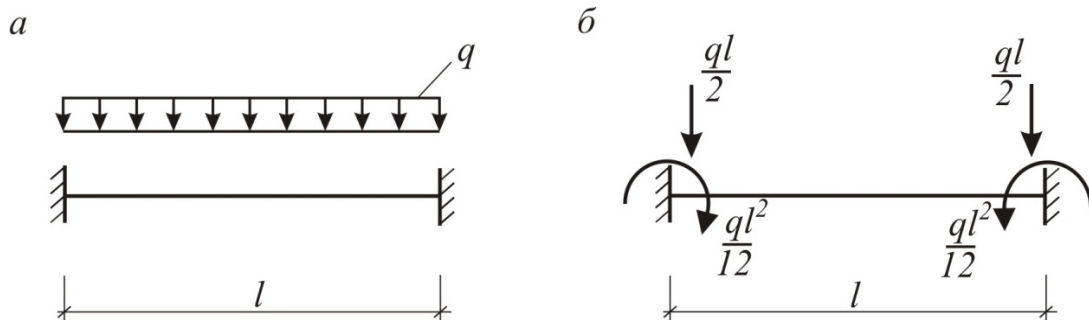


Рис. 6.2

$$P_1 = \begin{bmatrix} -1/2 \\ -(1/12)l \\ -1/2 \\ (1/12)l \end{bmatrix} ql, \quad P_2 = \begin{bmatrix} -1/2 \\ -(1/12)l \\ -1/2 \\ (1/12)l \end{bmatrix} ql.$$

Вектор узловых сил для рассчитываемой балки:

$$P = \begin{bmatrix} -1/2 \\ -(1/12)l \\ -1 \\ 0 \\ -1/2 \\ (1/12)l \end{bmatrix} ql + R,$$

где R – вектор реакций,

$$R_1 = \begin{bmatrix} R_{11} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}; R_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ R_{32} \end{bmatrix}; R = \begin{bmatrix} R_{11} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ R_{32} \end{bmatrix}.$$

Итак, уравнение $KU = P$ будет иметь вид:

$$\frac{2EI}{l^3} \begin{bmatrix} 6 & 3l & -6 & 3l & 0 & 0 \\ 3l & 2l^2 & -3l & l^2 & 0 & 0 \\ -6 & -3l & 12 & 0 & -6 & 3l \\ 3l & l^2 & 0 & 4l^2 & -3l & l^2 \\ 0 & 0 & -6 & -3l & 6 & -3l \\ 0 & 0 & 3l & l^2 & -3l & 2l^2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} w_1 \\ \varphi_1 \\ w_2 \\ \varphi_2 \\ w_3 \\ \varphi_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -01/2 \\ -(1/12)l \\ -1 \\ 0 \\ -1/2 \\ (1/12)l \end{bmatrix} ql + \begin{bmatrix} R_{11} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ R_{32} \end{bmatrix}.$$

Исключив уравнения, содержащие реакции, получим:

$$\begin{bmatrix} 2l^2 & -3l & l^2 & 0 \\ -3l & 12 & 0 & -6 \\ l^2 & 0 & 4l^2 & -3l \\ 0 & -6 & -3l & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varphi_1 \\ w_2 \\ \varphi_2 \\ w_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -(1/12)l \\ -1 \\ 0 \\ -1/2 \end{bmatrix} \frac{ql^3}{2EI}.$$

Отсюда

$$\begin{bmatrix} \varphi_1 \\ w_2 \\ \varphi_2 \\ w_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{16}{3} \\ -\frac{38}{8}l \\ -\frac{22}{6} \\ -\frac{20}{3}l \end{bmatrix} \frac{ql^3}{2EI}.$$

Затем можно определить реакции:

$$\begin{bmatrix} R_{11} \\ R_{32} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3l & -6 & 3l & 0 \\ 0 & 3l & l^3 & -3 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -\frac{16}{3} \\ -\frac{38}{8}l \\ -\frac{22}{6} \\ -\frac{20}{3}l \end{bmatrix} q - \begin{bmatrix} -1/2 \\ (1/12)l \end{bmatrix} ql,$$

$$\begin{bmatrix} R_{11} \\ R_{32} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2l \end{bmatrix} ql.$$

Пример расчета балки с шарнирным конечным элементом МКЭ

В случае, когда определять угол поворота балки над левой опорой не надо, можно воспользоваться матрицей жесткости для элемента с шарниром на одном из концов.. Тогда вектор перемещений $U = [v_1 \ v_2 \ \varphi_2 \ v_3 \ \varphi_3]^T$.

$$\text{Вектор узловых сил } P = \left[-\frac{3ql}{8} \quad -\frac{9ql}{8} \quad +\frac{ql^2}{24} \quad -\frac{ql}{2} \quad +\frac{ql^2}{12} \right]^T.$$

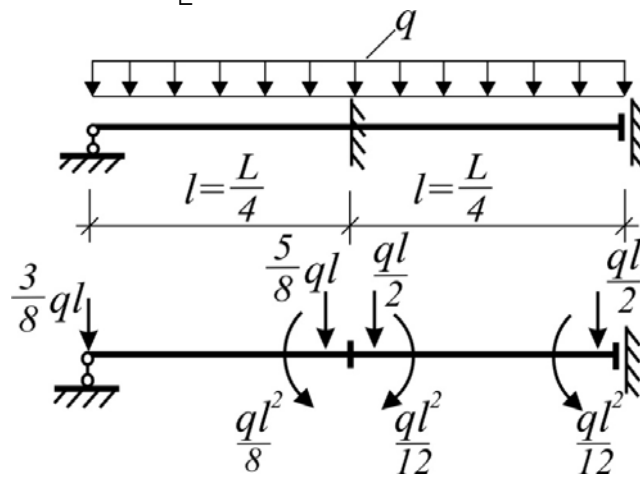


Рис. 6.3

$$k_1 = \frac{2EI}{l^3} \begin{bmatrix} 1.5 & -1.5 & 1.5l \\ -1.5 & 1.5 & -1.5l \\ 1.5 & -1.5l & 1.5l^2 \end{bmatrix}.$$

Складываем матрицы k_1 и k_2 . Поскольку перемещения v_1 и φ_3 известны, определяем перемещения $v_2 \ \varphi_2 \ v_3$. Система уравнений решается в Mathcad:

Given

$$\left(\frac{15 \cdot w_2}{l^2} + \frac{3}{l} \cdot \varphi_2 - \frac{12}{l^2} \cdot w_3 \right) \cdot \frac{EI}{1} = -9 \cdot q \cdot \frac{1}{8}$$

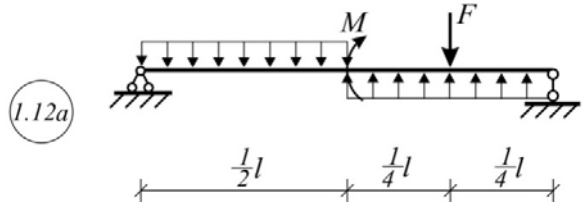
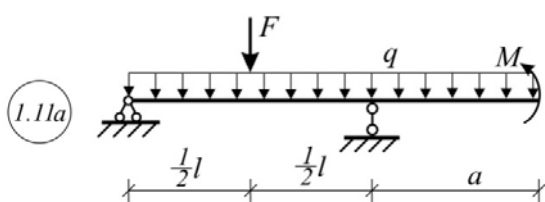
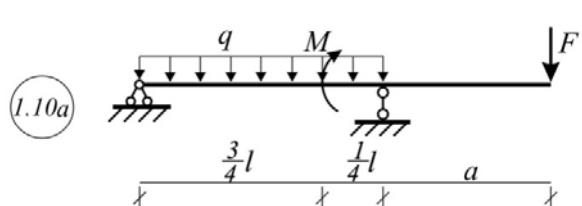
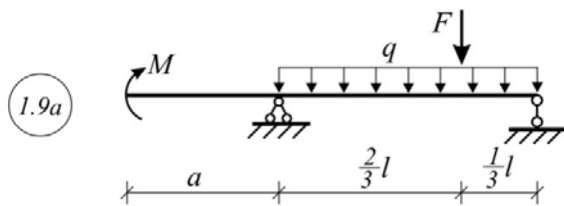
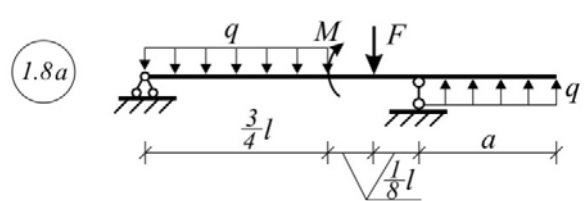
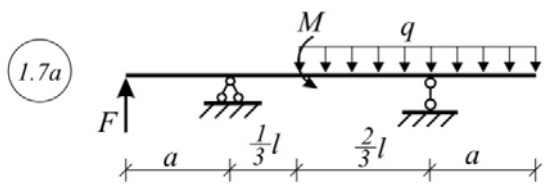
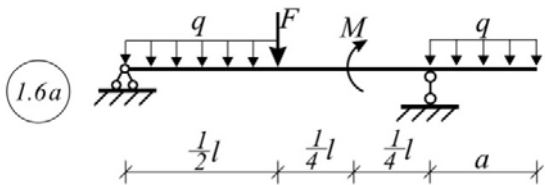
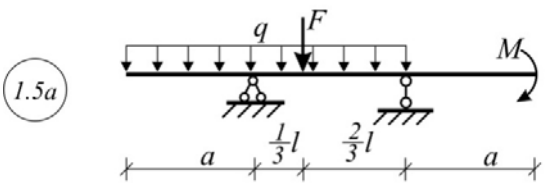
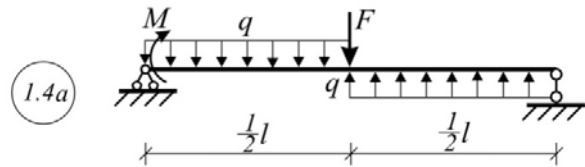
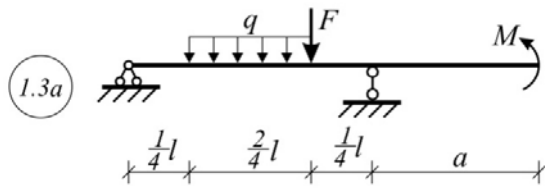
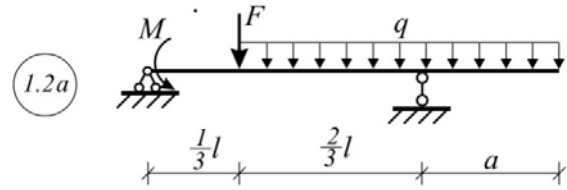
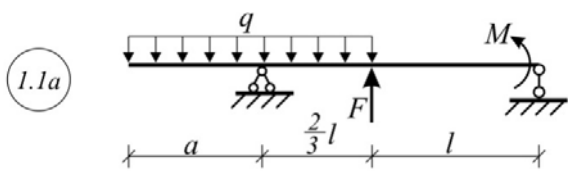
$$\left(\frac{3}{l} w_2 + 7 \cdot \varphi_2 - \frac{6}{l} \cdot w_3 \right) \cdot \frac{EI}{1} = q \cdot \frac{l^2}{24}$$

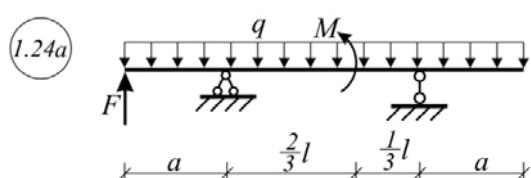
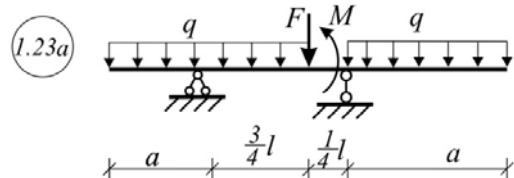
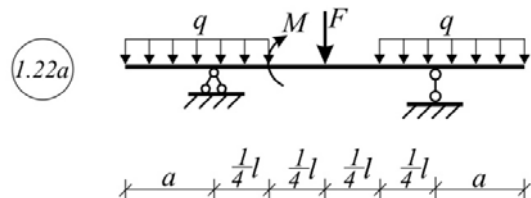
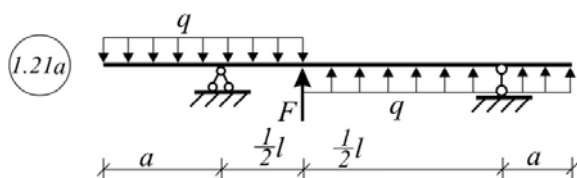
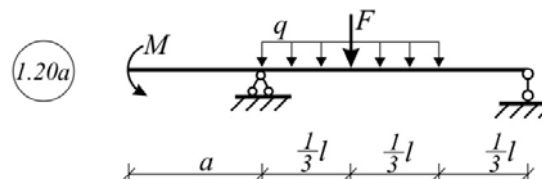
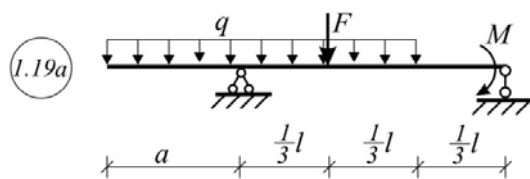
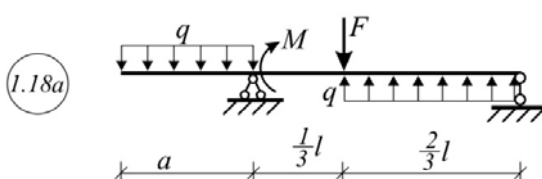
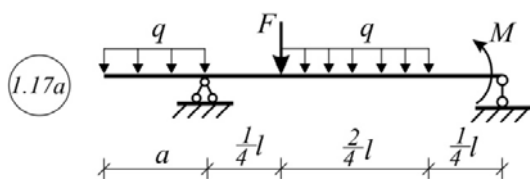
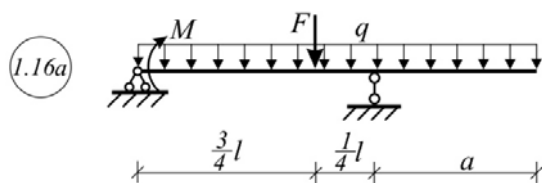
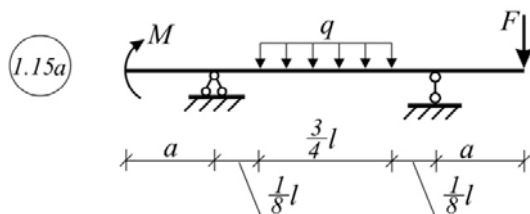
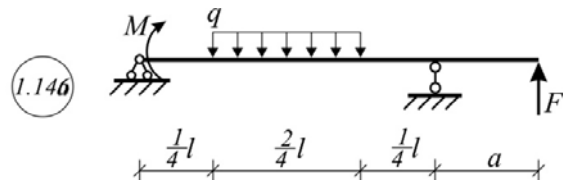
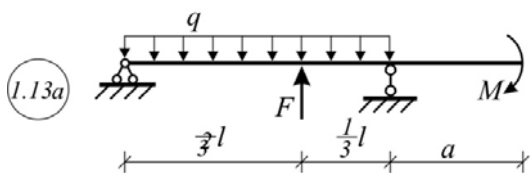
$$\left(\frac{-12}{l^2} \cdot w_2 - \frac{6}{l} \cdot \varphi_2 + \frac{12}{l^2} \cdot w_3 \right) \cdot \frac{EI}{1} = -q \cdot \frac{1}{2}$$

$$\text{Find}(w_2, \varphi_2, w_3) \rightarrow \begin{pmatrix} -\frac{19 \cdot l^4 \cdot q}{8 \cdot EI} \\ -\frac{11 \cdot l^3 \cdot q}{6 \cdot EI} \\ -\frac{10 \cdot l^4 \cdot q}{3 \cdot EI} \end{pmatrix}.$$

Результаты решения те же.

Варианты для выполнения лабораторной работы №6





Контрольные вопросы

1. Каков физический смысл уравнений МКЭ?
2. Как определить число неизвестных МКЭ?
3. Как выглядит матрица жесткости балочного элемента в МКЭ?
4. Как определяются перемещения в балках МКЭ?
5. Как определяются усилия в балках МКЭ?

Лабораторная работа №7 РАСЧЕТ РАМЫ МКЭ

1. Определить число неизвестных по МКЭ.
2. Построить диаграммы $P-z$.
3. Построить матрицы жесткостей КЭ.
4. Построить глобальную матрицу жесткости.
5. Произвести расчет рамы МКЭ

Оборудование: ПЭВМ, таблицы матриц.

Программное обеспечение:

пакет Mathcad.

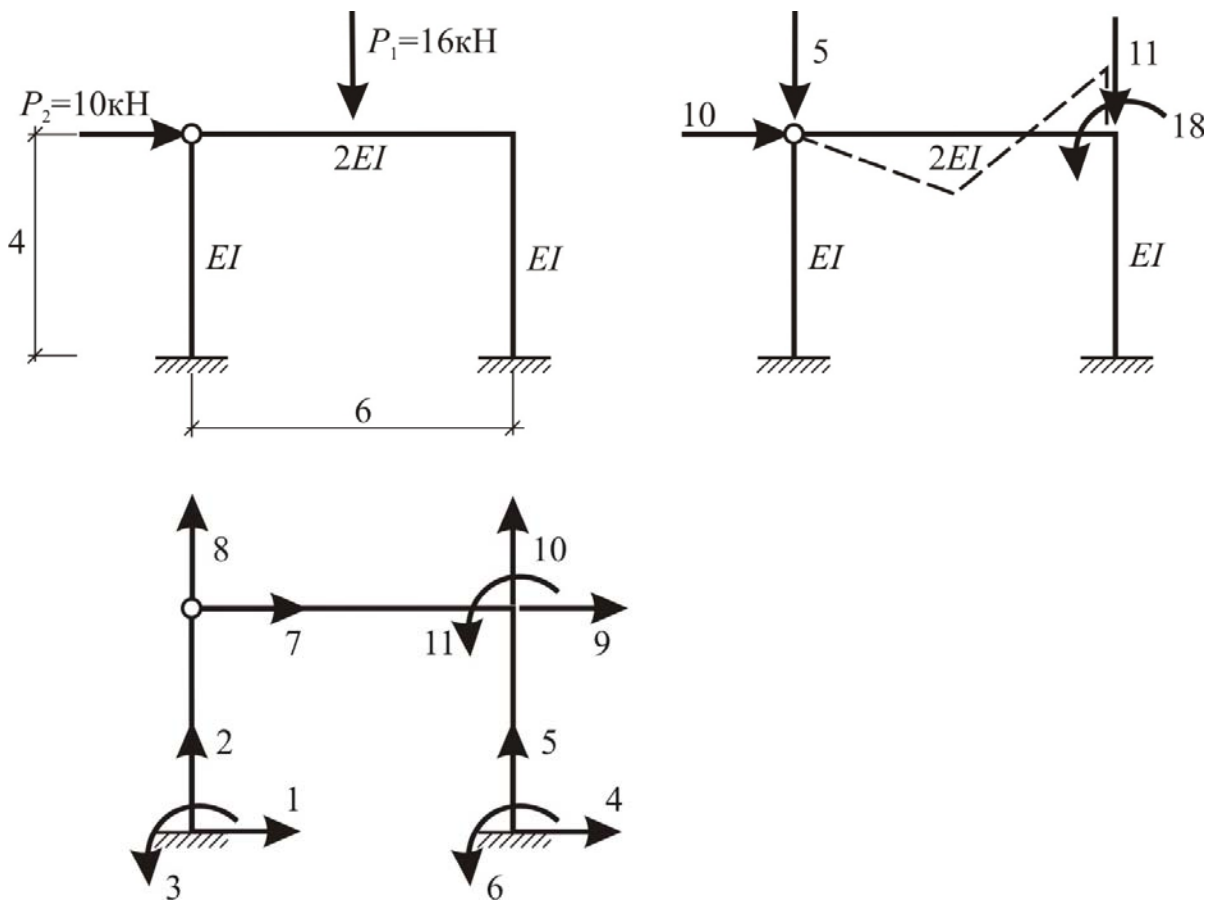


Рис. 7.1

$$P = \{R_1 \ R_2 \ R_3 \ R_4 \ R_5 \ R_6 \ 10000 \ -5000 \ 0 \ -11000 \ 18000\}^T.$$

$$U = \{u_1 \ u_2 \ u_3 \ u_4 \ u_5 \ u_6 \ u_7 \ u_8 \ u_9 \ u_{10} \ u_{11}\}^T.$$

$$kg1 =$$

	6	7	8	9	10
1	0	$-4.922 \cdot 10^5$	0	0	0
2	0	0	$-1.066 \cdot 10^8$	0	0
3	0	$1.969 \cdot 10^6$	0	0	0
4	0	0	0	0	0
5	0	0	0	0	0
6	0	0	0	0	0
7	0	$4.922 \cdot 10^5$	0	0	0
8	0	0	$1.066 \cdot 10^8$	0	0
9	0	0	0	0	0
10	0	0	0	0	0
11	0	0	0	0	...

$$k2 := \begin{pmatrix} E \cdot \frac{A}{L2} & 0 & -E \cdot \frac{A}{L2} & 0 & 0 \\ 0 & 3 \cdot E \cdot \frac{II2}{L2^3} & 0 & -3 \cdot E \cdot \frac{II2}{L2^3} & 3 \cdot E \cdot \frac{II2}{L2^2} \\ -E \cdot \frac{A}{L2} & 0 & E \cdot \frac{A}{L2} & 0 & 0 \\ 0 & -3 \cdot E \cdot \frac{II2}{L2^3} & 0 & 3 \cdot E \cdot \frac{II2}{L2^3} & -3 \cdot E \cdot \frac{II2}{L2^2} \\ 0 & 3 \cdot E \cdot \frac{II2}{L2^2} & 0 & -3 \cdot E \cdot \frac{II2}{L2^2} & 3 \cdot E \cdot \frac{II2}{L2} \end{pmatrix}$$

$$O2 := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$O2^T \cdot k2 \cdot O2 =$$

	1	2	3	4	5
1	0	0	0	0	0
2	0	0	0	0	0
3	0	0	0	0	0
4	0	0	0	0	0
5	0	0	0	0	0
6	0	0	0	0	0
7	0	0	0	0	0
8	0	0	0	0	0
9	0	0	0	0	0
10	0	0	0	0	0
11	0	0	0	0	...

$$kg2 := O2^T \cdot k2 \cdot O2$$

	7	8	9	10	11
1	0	0	0	0	0
2	0	0	0	0	0
3	0	0	0	0	0
4	0	0	0	0	0
5	0	0	0	0	0
6	0	0	0	0	0
7	$7.105 \cdot 10^7$	0	$-7.105 \cdot 10^7$	0	0
8	0	$2.917 \cdot 10^5$	0	$-2.917 \cdot 10^5$	$1.75 \cdot 10^6$
9	$-7.105 \cdot 10^7$	0	$7.105 \cdot 10^7$	0	0
10	0	$-2.917 \cdot 10^5$	0	$2.917 \cdot 10^5$	$-1.75 \cdot 10^6$
11	0	$1.75 \cdot 10^6$	0	$-1.75 \cdot 10^6$...

$$\begin{aligned}
 \mathbf{k}_3 := & \begin{bmatrix} E \cdot \frac{A}{L^3} & 0 & 0 & -\left(E \cdot \frac{A}{L^3}\right) & 0 & 0 \\ 0 & 12E \cdot \frac{I_3}{L^3} & 6E \cdot \frac{I_3}{L^3} & 0 & -12E \cdot \frac{I_3}{L^3} & 6E \cdot \frac{I_3}{L^3} \\ 0 & 6E \cdot \frac{I_3}{L^3} & 4E \cdot \frac{I_3}{L^3} & 0 & -6E \cdot \frac{I_3}{L^3} & 2E \cdot \frac{I_3}{L^3} \\ -\left(E \cdot \frac{A}{L^3}\right) & 0 & 0 & E \cdot \frac{A}{L^3} & 0 & 0 \\ 0 & -12E \cdot \frac{I_3}{L^3} & -6E \cdot \frac{I_3}{L^3} & 0 & 12E \cdot \frac{I_3}{L^3} & -6E \cdot \frac{I_3}{L^3} \\ 0 & 6E \cdot \frac{I_3}{L^3} & 2E \cdot \frac{I_3}{L^3} & 0 & -6E \cdot \frac{I_3}{L^3} & 4E \cdot \frac{I_3}{L^3} \end{bmatrix} \\
 \mathbf{T}_3 := & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
 \mathbf{O}_3 := & \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

$$\mathbf{k}_{gl3} := \mathbf{O}_3^T \cdot \mathbf{T}_3^T \cdot \mathbf{k}_3 \cdot \mathbf{T}_3 \cdot \mathbf{O}_3$$

	1	2	3	4	5
1	0	0	0	0	0
2	0	0	0	0	0
3	0	0	0	0	0
4	0	0	0	$1.969 \cdot 10^6$	0
5	0	0	0	0	$1.066 \cdot 10^8$
6	0	0	0	$-3.938 \cdot 10^6$	0
7	0	0	0	0	0
8	0	0	0	0	0
9	0	0	0	$-1.969 \cdot 10^6$	0
10	0	0	0	0	$-1.066 \cdot 10^8$
11	0	0	0	$-3.938 \cdot 10^6$...

$$\text{KGL} := \text{kgl3} + \text{kgl2} + \text{kgl1}$$

	1	2	3	4	5
1	$4.922 \cdot 10^5$	0	$-1.969 \cdot 10^6$	0	0
2	0	$1.066 \cdot 10^8$	0	0	0
3	$-1.969 \cdot 10^6$	0	$7.875 \cdot 10^6$	0	0
4	0	0	0	$1.969 \cdot 10^6$	0
5	0	0	0	0	$1.066 \cdot 10^8$
6	0	0	0	$-3.938 \cdot 10^6$	0
7	$-4.922 \cdot 10^5$	0	$1.969 \cdot 10^6$	0	0
8	0	$-1.066 \cdot 10^8$	0	0	0
9	0	0	0	$-1.969 \cdot 10^6$	0
10	0	0	0	0	$-1.066 \cdot 10^8$
11	0	0	0	$-3.938 \cdot 10^6$...

$$\text{OO} := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{KR} := \text{OO} \cdot \text{KGL} \cdot \text{OO}^T = \begin{pmatrix} 7.154 \times 10^7 & 0 & -7.105 \times 10^7 & 0 & 0 \\ 0 & 1.069 \times 10^8 & 0 & -2.917 \times 10^5 & 1.75 \times 10^6 \\ -7.105 \times 10^7 & 0 & 7.302 \times 10^7 & 0 & 3.938 \times 10^6 \\ 0 & -2.917 \times 10^5 & 0 & 1.069 \times 10^8 & -1.75 \times 10^6 \\ 0 & 1.75 \times 10^6 & 3.938 \times 10^6 & -1.75 \times 10^6 & 2.1 \times 10^7 \end{pmatrix}$$

$$P := \begin{pmatrix} 10000 \\ -5000 \\ 0 \\ -11000 \\ 18000 \end{pmatrix}$$

$$U := KR^{-1} \cdot P = \begin{pmatrix} 3.937 \times 10^{-3} \\ -4.929 \times 10^{-5} \\ 3.823 \times 10^{-3} \\ -1.008 \times 10^{-4} \\ 1.36 \times 10^{-4} \end{pmatrix}$$

Сравним с расчетом обычным методом перемещений (см. рис. 7.2).

$$\begin{cases} r_{11}Z_1 + r_{12}Z_2 + R_{1p} = 0, \\ r_{21}Z_1 + r_{22}Z_2 + R_{2p} = 0. \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2EI \cdot Z_1 + \frac{3}{8}EI \cdot Z_2 + 18 = 0, \\ \frac{3}{8}EI \cdot Z_1 + \frac{9}{64}EI \cdot Z_2 + 10 = 0. \end{cases}$$

$$\text{Откуда } Z_1 = \frac{-1,428}{EI}, \quad Z_2 = \frac{-40,383}{EI}.$$

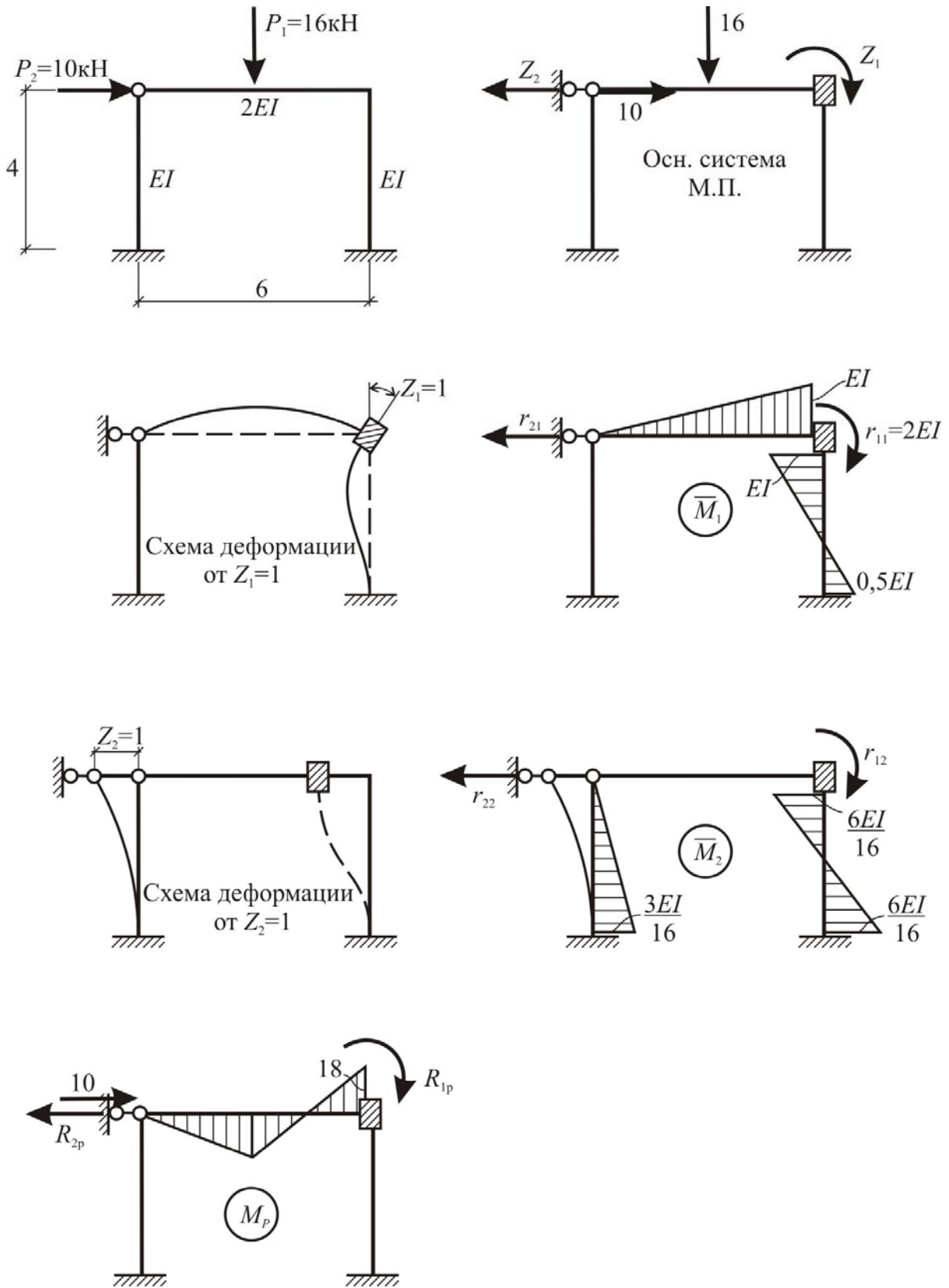


Рис. 7.2 (начало)

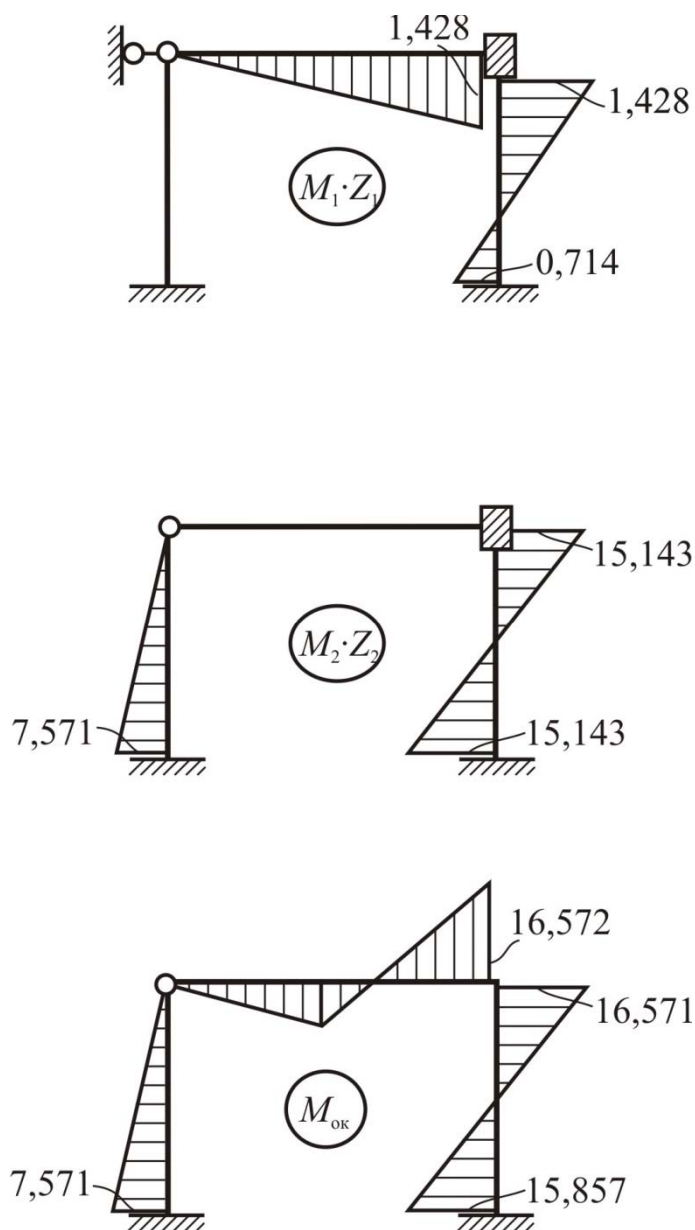


Рис. 7.2 (окончание)

Численные значения перемещений:

$$\frac{1.428 \cdot 1000}{(E \cdot \Pi I)} = 1.36 \times 10^{-4}, \quad \frac{40.381}{(E \cdot \Pi I)} = 3.846 \times 10^{-6},$$

совпадают с решением МКЭ.

Контрольные вопросы

1. Каков физический смысл уравнений МКЭ?
2. Как определить число неизвестных МКЭ для рам?
3. Как выглядит матрица жесткости изгибаемо-растянутого элемента в МКЭ?
4. Как определяются перемещения в МКЭ для рам?
5. Как определяются усилия в МКЭ для рам?

Лабораторная работа №8 РАСЧЕТ ПЛОСКОЙ КОМБИНИРОВАННОЙ КОНСТРУКЦИИ МКЭ

1. Определить число неизвестных по МКЭ.
2. Построить диаграммы $P-z$.
3. Построить матрицы жесткостей КЭ.
4. Построить глобальную матрицу жесткости.
5. Произвести расчет плоской системы МКЭ.

Оборудование: ПЭВМ, таблицы матриц.

Программное обеспечение:

пакет Mathcad.

Конструкция состоит из плоского диска и одного стержня (рис.8.1, а). Конструкцию можно разделить на следующие конечные элементы: диск можно «разбить» на три плоских треугольных конечных элемента (I,II,III) и один конечный элемент будет элемент стержневого типа IV (рис. 8.1, б).

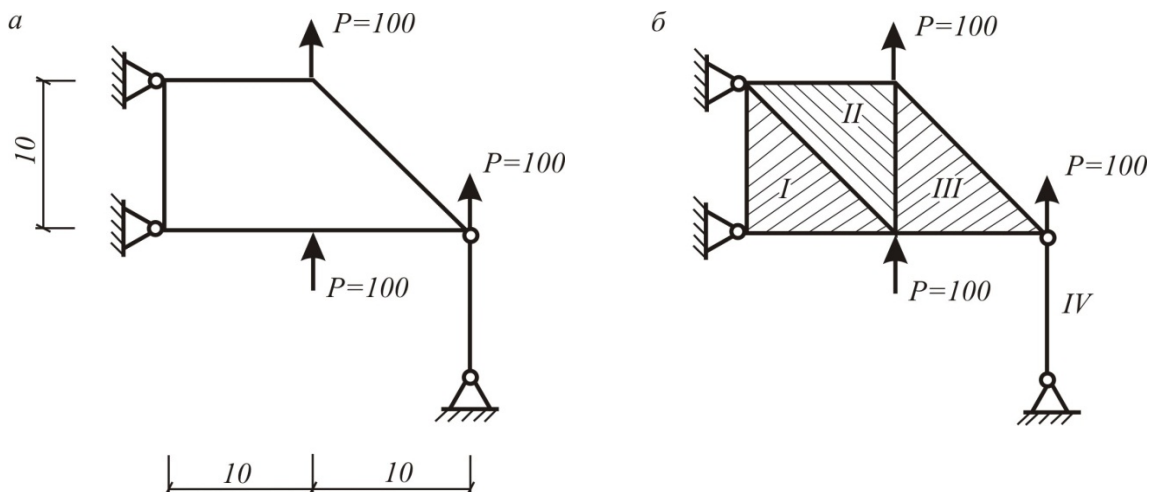


Рис. 8.1

Пронумеруем узлы и узловые перемещения (рис. 8.2).

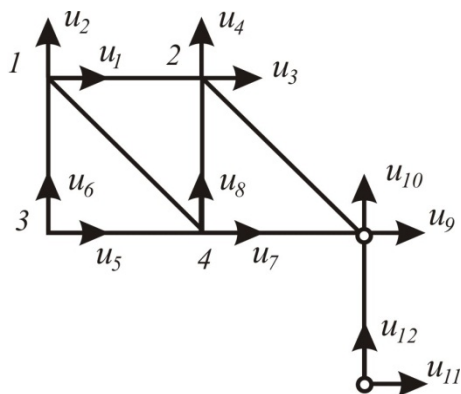


Рис. 8.2

Для упрощения процесса формирования матриц жесткости элементов, примем:

$$\frac{G\delta}{4} = 0,5; \quad \frac{EA}{l} = 1; \quad \nu = \frac{1}{3}.$$

С помощью формул вычислим матрицы жесткости плоских треугольных конечных элементов.

В данном случае плоский диск состоит из конечных элементов двух типов (рис. 8.3, а, б).

$c_1 = s_2 = b;$	$c_1 = s_2 = -b;$
$c_2 = s_1 = a;$	$c_2 = s_1 = -a;$
$c_3 = s_4 = -b;$	$c_3 = s_4 = b;$
$c_4 = s_3 = 0;$	$c_4 = s_3 = 0;$
$c_5 = s_6 = 0;$	$c_5 = s_6 = 0;$
$c_6 = s_5 = -a.$	$c_6 = s_5 = a.$

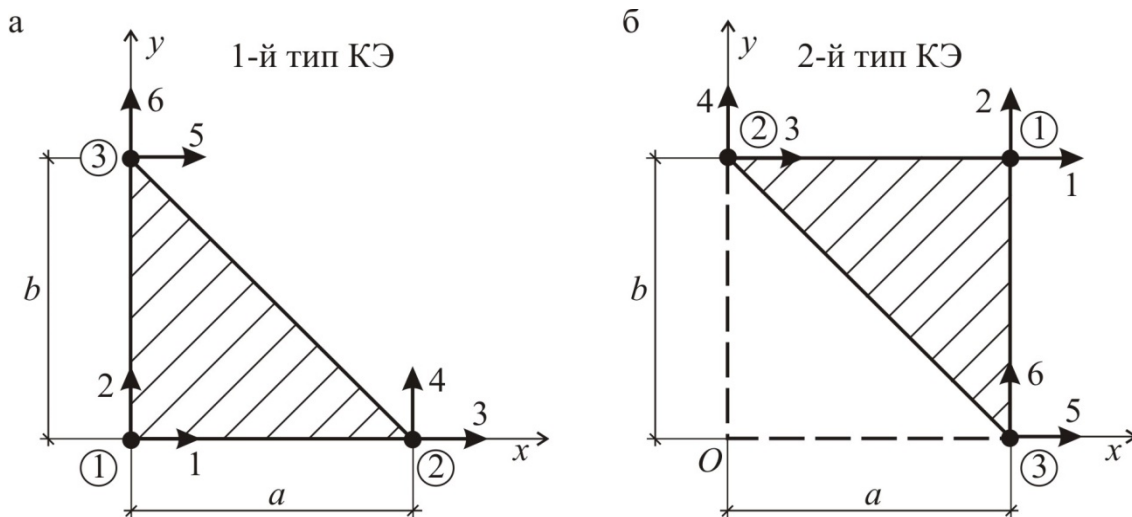


Рис. 8.3

Обозначим буквой \bar{k} матрицу жесткости, соответствующую перемещениям, показанным на рис. 8.3,а, а буквой k , матрицу жесткости, соответствующую перемещениям рассчитываемой системы рис. 8.3,б.

Тогда можно записать

$$\begin{aligned} \bar{k}_{11} = k_{55}^I = k_{77}^{II} &= \frac{G\delta}{4 \cdot A} \left\{ \left[\frac{1+\nu}{1-\nu} + (-1)^{i+j} \right] \cdot c_i \cdot c_j + s_i \cdot s_j \right\} = \\ &= \frac{0,5}{\frac{1}{2} a \cdot b} \left\{ \left[\frac{1+\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{3}} + (-1)^{1+1} \right] \cdot c_1 \cdot c_1 + s_1 \cdot s_1 \right\} = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{0,5}{\frac{1}{2}100 \cdot 100} \left\{ \left[\frac{4/3}{2/3} + (-1)^2 \right] \cdot 100 \cdot 100 + 100 \cdot 100 \right\} = \\
&= \frac{1}{100 \cdot 100} \left\{ [2 + (-1)^2] \cdot 100 \cdot 100 + 100 \cdot 100 \right\} = \{ [2 + 1] \cdot 1 + 1 \} = 4; \\
\bar{k}_{12} = k_{56}^I = k_{78}^{II} &= \frac{0,5}{\frac{1}{2}100 \cdot 100} \left\{ [2 + (-1)^{1+2}] \cdot 100 \cdot 100 + 100 \cdot 100 \right\} = \{ [2 - 1] \cdot 1 + 1 \} = 2;
\end{aligned}$$

и т. д.

Матрицы жесткости элементов примут вид:

$$\begin{array}{c}
\begin{array}{c} 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \\ 1 \\ 2 \end{array} K_{I=} \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|} \hline 5 & 6 & 7 & 8 & 1 & 2 \\ \hline 4 & 2 & -3 & -1 & -1 & -1 \\ \hline 2 & 4 & -1 & -1 & -1 & -3 \\ \hline -3 & -1 & 3 & 0 & 0 & 1 \\ \hline -1 & -1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ \hline -1 & -1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ \hline -1 & -3 & 1 & 0 & 0 & 3 \\ \hline \end{array}
\end{array}
\quad
\begin{array}{c}
\begin{array}{c} 3 \\ 4 \\ 1 \\ 2 \\ 7 \\ 8 \end{array} K_{II=} \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|} \hline 3 & 4 & 1 & 2 & 7 & 8 \\ \hline 4 & 2 & -3 & -1 & -1 & -1 \\ \hline 2 & 4 & -1 & -1 & -1 & -3 \\ \hline -3 & -1 & 3 & 0 & 0 & 1 \\ \hline -1 & -1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ \hline -1 & -1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ \hline -1 & -3 & 1 & 0 & 0 & 3 \\ \hline \end{array}
\end{array}$$

$$\begin{array}{c}
\begin{array}{c} 7 \\ 8 \\ 9 \\ 10 \\ 3 \\ 4 \end{array} K_{III=} \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|} \hline 7 & 8 & 9 & 10 & 3 & 4 \\ \hline 4 & 2 & -3 & -1 & -1 & -1 \\ \hline 2 & 4 & -1 & -1 & -1 & -3 \\ \hline -3 & -1 & 3 & 0 & 0 & 1 \\ \hline -1 & -1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ \hline -1 & -1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ \hline -1 & -3 & 1 & 0 & 0 & 3 \\ \hline \end{array}
\end{array}
\quad
\begin{array}{c}
\begin{array}{c} 9 \\ 10 \\ 11 \\ 12 \end{array} K_{IV=} \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 9 & 10 & 11 & 12 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 & -1 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & -1 & 0 & 1 \\ \hline \end{array}
\end{array}$$

Матрицу жесткости всей конструкции получим, складывая элементы матриц, соответствующие одинаковым номерам степеней свободы (номерам узловых перемещений).

$$K = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \\ 9 \\ 10 \\ 11 \\ 12 \end{matrix} & \left[\begin{array}{cccccccccccc} 4 & 0 & -3 & -1 & -1 & -1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & -1 & -1 & -1 & -3 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & -1 & 5 & 2 & 0 & 0 & -2 & -2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 2 & 7 & 0 & 0 & -2 & -6 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 & 4 & 2 & -3 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -3 & 0 & 0 & 2 & 4 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & -2 & -3 & -1 & 8 & 2 & -3 & -1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -2 & -6 & -1 & -1 & 2 & 8 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -3 & -1 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{array} \right]. \end{matrix}$$

Уравнение МКЭ в форме метода перемещений имеет вид:

$$P = K \cdot U.$$

Составим данные выражения, учитывая, что

$$u_1 = u_2 = u_5 = u_6 = u_{11} = u_{12} = 0,$$

и, следовательно, исключая строки с этими перемещениями из системы уравнений, получим:

$$\left\{ \begin{array}{l} P_3 = 0 = 5u_3 + 2u_4 - 2u_7 - 2u_8 + 0 \cdot u_9 + 1u_{10}; \\ P_4 = +100 = 2u_3 + 7u_4 - 2u_7 - 6u_8 + 1u_9 + 0 \cdot u_{10}; \\ P_7 = 0 = -2u_3 - 2u_4 + 8u_7 + 2u_8 - 3u_9 - 1u_{10}; \\ P_8 = +100 = -2u_3 - 6u_4 + 2u_7 + 8u_8 - 1u_9 - 1u_{10}; \\ P_9 = 0 = 0 \cdot u_3 + 1u_4 - 3u_7 - 1u_8 + 3u_9 + 0 \cdot u_{10}; \\ P_{10} = +100 = 1u_3 + 0 \cdot u_4 - 1u_7 - 1u_8 + 0 \cdot u_9 + 2 \cdot u_{10}. \end{array} \right.$$

Решение данной системы уравнений дает следующие значения перемещений:

$$\begin{array}{lll} u_3 = -20,42; & u_4 = +112,5; & u_7 = +17,71; \\ u_8 = +104,38; & u_9 = +15; & u_{10} = +121,25. \end{array}$$

Зная перемещения узлов, можно для каждого отдельного элемента найти напряжения σ_x, σ_y и τ_{xy} . При $G = 4$; $\delta = 0,5$; $\nu = \frac{1}{3}$ напряжения будут

иметь следующие значения:

Элемент	I	II	III
σ_x	-21,25	-21,23	0
σ_y	7,08	1,58	8,65
τ_{xy}	41,75	29,27	-8,43

Контрольные вопросы

1. Каков физический смысл уравнений МКЭ?
2. Как определить число неизвестных МКЭ для плоской задачи теории упругости?
3. Как выглядит матрица жесткости элемента для плоской задачи теории упругости в МКЭ?
4. Как определяются перемещения в МКЭ для рам?
5. Как определяются напряжения в МКЭ в плоской задаче ТУ?

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Шеин, А.И. Курс строительной механики [Текст]: учебник / А.И. Шеин. – Пенза: ПГУАС, 2014. – 312 с.
2. Буланов В.Е., Гузачев А.Н. Строительная механика [Электронный ресурс]: учеб. пособие. – Тамбов: ТГТУ, 2012. – Ч.1. – 80 с. – Режим доступа: <http://window.edu.ru/resource/059/80059>
3. Строительная механика [Электронный ресурс]: метод. указания. – Электрон. текстовые данные. – СПб.: Санкт-Петербургский государственный архитектурно-строительный университет, ЭБС АСВ, 2013. – 28 с. – Режим доступа: <http://www.iprbookshop.ru/19041>. – ЭБС «IPRbooks», по паролю.
4. Дарков, А.В. Строительная механика [Электронный ресурс] / А.В. Дарков, Н.Н. Шапошников. – СПб: Лань, 2010. – 656 с. – Режим доступа: <http://www.twirpx.com/file/972291/>
5. Анохин Н.Н. Строительная механика в примерах и задачах [Электронный ресурс]: в 2 ч. Ч. 2. Статически неопределимые системы / Н.Н. Анохин. – М.: АСВ, 2000. – 464 с. – Режим доступа: <http://www.twirpx.com/file/196032/>
6. Снитко, Н.К. Строительная механика [Электронный ресурс]: учебник для вузов / Н.К. Снитко. – 3-е изд., перераб. – М.: Высш. школа, 1980. – 431 с. – Режим доступа: <http://www.twirpx.com/file/337353/>
7. Ржаницын, А.Р. Строительная механика [Электронный ресурс]: учебное пособие для вузов / А.Р. Ржаницын. – М.: Высш. школа, 1982. – 400 с. – Режим доступа: <http://www.twirpx.com/file/558677/>

О Г Л А В Л Е Н И Е

ПРЕДИСЛОВИЕ	3
Лабораторная работа №1. РАСЧЕТ СТАТИЧЕСКИ НЕОПРЕДЕЛИМОЙ РАМЫ МЕТОДОМ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ (1 УГЛОВОЕ НЕИЗВЕСТНОЕ).....	4
Лабораторная работа №2. МЕТОД ПЕРЕМЕЩЕНИЙ (1 ЛИНЕЙНОЕ ПЕРЕМЕЩЕНИЕ)	12
Лабораторная работа №3. РАСЧЕТ РАМ С НАКЛОННЫМИ СТОЙКАМИ.....	21
Лабораторная работа №4. РАСЧЕТ РАМЫ МАТРИЧНЫМ МЕТОДОМ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ.....	24
Лабораторная работа №5. РАСЧЕТ ФЕРМЫ МКЭ	34
Лабораторная работа № 6. РАСЧЕТ БАЛКИ МКЭ.....	41
Лабораторная работа №7. РАСЧЕТ РАМЫ МКЭ	48
Лабораторная работа №8. РАСЧЕТ ПЛОСКОЙ КОМБИНИРОВАННОЙ КОНСТРУКЦИИ МКЭ.....	56
БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК	61

Учебное издание

Шеин Александр Иванович

СТРОИТЕЛЬНАЯ МЕХАНИКА

Учебно-методическое пособие к лабораторным работам
по направлению подготовки 08.05.01 «Строительство уникальных зданий»
(специализация № 1 «Строительство высотных и большепролетных зданий
и сооружений»)

В авторской редакции

Верстка Н.А. Сазонова

Подписано в печать 2.09.16. Формат 60×84/16.

Бумага офисная «Снегурочка». Печать на ризографе.

Усл.печ.л. 3,72. Уч.-изд.л. 4,0. Тираж 80 экз.

Заказ № 569.

Издательство ПГУАС.
440028, г. Пенза, ул. Германа Титова, 28.