

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Федеральное государственное бюджетное
образовательное учреждение высшего образования
"Пензенский государственный университет
архитектуры и строительства"
(ПГУАС)

А.И. Шейн

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА

КУРС ЛЕКЦИЙ

Рекомендовано Редсоветом университета
в качестве учебного пособия для студентов,
обучающихся по направлению подготовки 08.03.01 «Строительство»

Пенза 2016

УДК 531 (075.8)
ББК 22.21я73
ШЗ9

Рецензент – доктор технических наук, профессор
В.А. Монахов (ПГУАС)

Шеин А.И.

ШЗ9 Теоретическая механика: курс лекций по направлению подготовки 08.03.01 «Строительство» / А.И. Шеин. – Пенза: ПГУАС, 2016. – 216 с.

Изложен курс теоретической механики применительно к стандарту по направлению «Строительство». В основу курса положен опыт преподавания теоретической механики в ПГУАС. Приведены поясняющие примеры.

Подготовлено на кафедре «Механика» и предназначено для использования студентами, обучающимися по направлению подготовки 08.03.01 «Строительство», при изучении дисциплины «Теоретическая механика».

© Пензенский государственный университет
архитектуры и строительства, 2016
© Шеин А.И., 2016

ПРЕДИСЛОВИЕ

Современный учебный план подготовки специалистов – бакалавров, инженеров, магистров – по направлению «Строительство» насыщен очень большим количеством разнообразных дисциплин. В связи с этим возникла потребность оптимизировать учебный курс по теоретической механике так, чтобы в компактной форме изложить основные вопросы соответствующего стандарта и, таким образом, создать условия для целенаправленного усвоения необходимых разделов механики.

Курс изложен в двух книгах. Теоретическая часть рассмотрена в учебнике «Теоретическая механика. Курс лекций». Практические вопросы и разбор задач представлен в «Практикуме по теоретической механике».

Пособие подготовлено в соответствии с программой изучения дисциплины и направлено на освоение студентами следующих компетенций:

- способности к самоорганизации и самообразованию;
- способности выявлять естественнонаучную сущность проблем, возникающих в ходе профессиональной деятельности, привлекать для их решения соответствующий физики-математический аппарат;
- овладения эффективными правилами, методами и средствами сбора, обмена, хранения и обработки информации, навыками работы с компьютером как средством управления информацией.

При изучении теоретической механики может быть полезна следующая дополнительная литература:

а) для усвоения теоретического материала:

1. Яблонский А.А., Никифорова В.М. Курс теоретической механики. Ч.1. М.: Высшая школа, 1984.

2. Яблонский А.А. Курс теоретической механики. Ч.2. М.: Высшая школа, 1984.

3. Никитин Н.Н. Курс теоретической механики. М.: Высшая школа, 1990.

4. Тарг С.М. Краткий курс теоретической механики. М.: Высшая школа, 1963 и последующие издания.

б) для практического освоения курса и выполнения заданий:

Сборник заданий по теоретической механике / Под ред. проф. А.А.Яблонского. М., 1968 и последующие издания.

в) для приобретения навыков решения задач:

1. Мещерский И.В. Сборник задач по теоретической механике. М., 1952 и последующие издания.

2. Бать М.И., Джанелидзе Г.Ю., Кельзон А.С. Теоретическая механика в примерах и задачах. Ч. I и II. М., 1961 и последующие издания.

ВВЕДЕНИЕ

Теоретическая механика – это наука о движении материальных тел, т.е. перемещениях тел в пространстве относительно друг друга. Движение в механике рассматривают в трехмерном евклидовом пространстве по отношению к какой-либо системе отсчета.

С точки зрения значимости теоретической механики необходимо отметить, что:

– во-первых, теоретическая механика – это отдельная наука, являющаяся фундаментом современной техники и строительства;

– во-вторых, теоретическая механика – это ключевая область научного прогресса, которая определяет укрепление обороноспособности страны, освоение космоса, разработку новых типов транспортных средств.

Теоретическая механика является основной при изучении таких дисциплин, как сопротивление материалов, теория упругости, строительная механика, строительные конструкции.



Теоретическая механика
как база инженерной подготовки строителя

Основоположником механики как науки считается древнегреческий ученый Архимед. Он создал учение о рычаге, ввел понятие «центр тяжести», сформулировал закон о силах, действующих на тело, погруженное в жидкость.

Быстрое развитие механики начинается с эпохи Возрождения. Блестящим представителем этого периода является гениальный итальянский художник, физик, механик, инженер Леонардо да Винчи (1451-1519). Он

изучал движение падающего тела, движение тела по наклонной плоскости, трение, ввел понятие момента силы.

Николай Коперник (1473-1543) разработал и обосновал гелиоцентрическую систему мира. Кеплер (1571-1630) сформулировал законы движения планет.

Наибольший вклад в развитие механики внесли итальянский ученый Галилео Галилей (1564-1642) и англичанин Исаак Ньютон (1643-1727). Ньютон сформулировал основные законы механики в книге «Математика начала натуральной философии», изданной в 1687 г.

Дальнейшее развитие механики связано с именами таких ученых, как Гюйгенс, Даламбер, Эйлер, Лагранж и многие другие.

Большой вклад в развитие современной механики внесли русские ученые: Н.Е.Жуковский, С.А. Чаплыгин, К.Э. Циолковский, А.Ю. Ишлинский и многие другие.

Курс теоретической механики обычно подразделяют на три раздела:

1. Статика – раздел, в котором изучается частный случай движения – покой.

2. Кинематика – раздел, в котором рассматривается движение тел без учета действующих на них сил.

3. Динамика – раздел, где изучается движение тел под действием сил.

1. СТАТИКА

Статика – это раздел механики, в котором изучаются методы преобразования систем сил в эквивалентные системы и устанавливаются условия равновесия сил, приложенных к твердому телу. Термин «статика» происходит от греческого слова *statike*, что означает находящийся в покое.

В теоретическом курсе статики решаются две основные задачи:

1. Преобразование заданной системы сил к более простому виду.
2. Вывод условий равновесия данной системы сил.

1.1. Основные понятия и аксиомы статики

1.1.1. Основные понятия статики

1. *Абсолютно твердое тело* – тело, расстояние между точками которого не меняется.

2. *Свободное тело* – тело, перемещения которого в пространстве ничем не ограничены.

3. *Связь* – все то, что ограничивает перемещения данного тела в пространстве в том или ином направлении.

4. *Сила* – векторная мера механического взаимодействия тел. Сила характеризуется: 1) величиной; 2) направлением; 3) точкой приложения.

Например (рис.1.1):

1) $F=10$ кН, 2) $\alpha=45^\circ$, 3) сила приложена в точке A .

5. *Линия действия силы* – линия, по которой направлена сила.

6. *Система сил* – совокупность действующих на тело сил.

7. *Равнодействующая сила* – сила, которая одна заменяет данную систему сил.

8. *Эквивалентные системы сил* – две системы сил называются эквивалентными, если они оказывают на свободное твердое тело одинаковое действие.

9. *Уравновешенная система сил* – система сил, которая не изменяет состояние покоя или равномерного прямолинейного движения свободного тела.

10. *Реакция связи* – сила, с которой данная связь действует на тело, препятствуя его перемещениям.

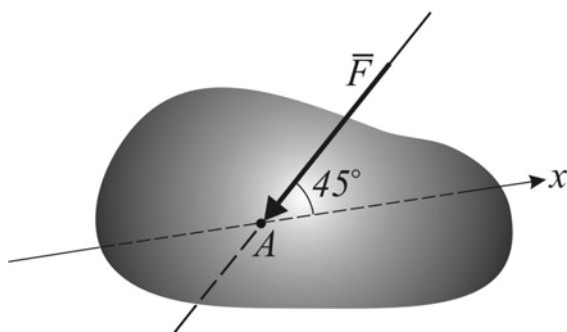


Рис. 1.1. Сила как вектор

1.1.2. Аксиомы статики

Вся статика базируется на нескольких аксиомах, из которых получают все необходимые следствия и теоремы. Сформулируем эти аксиомы.

1. *Аксиома двух сил.* Если тело находится в равновесии под действием двух сил, то эти силы равны и противоположно направлены по одной прямой. Такая система сил называется простейшей уравновешенной системой сил (рис. 1.2).

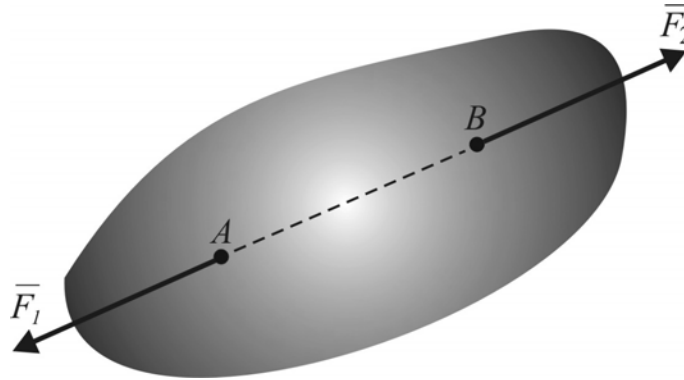


Рис.1.2. Простейшая уравновешенная система сил $\vec{F}_1 = -\vec{F}_2$

2. *Аксиома добавления уравновешенной системы сил.* Равновесие данной системы сил не изменится, если к ней добавить или отнять уравновешенную систему сил.

С л е д с т в и е : силу, не изменяя ее действия, можно перенести по линии действия в любую точку тела.

Д о к а з а т е л ь с т в о . Пусть на тело в точке A действует сила \vec{F} . Приложим в некоторой точке B , находящейся на линии действия силы \vec{F} , уравновешенную систему сил \vec{F}_1 и \vec{F}'_1 . При этом уравновешенные силы направим по линии действия силы \vec{F} и примем их равными этой силе по величине: $F_1 = F'_1 = F$.

Отбросим уравновешенную систему сил \vec{F}_1 и \vec{F}'_1 . Получаем, что теперь на тело действует сила \vec{F} , приложенная в точке B .

3. *Аксиома параллелограмма сил.* Равнодействующая двух действующих в одной точке сил \vec{F}_1 и \vec{F}_2 , равна по величине и направлению диагонали параллелограмма, построенного на этих силах как на сторонах (рис. 1.4):

$$\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2;$$

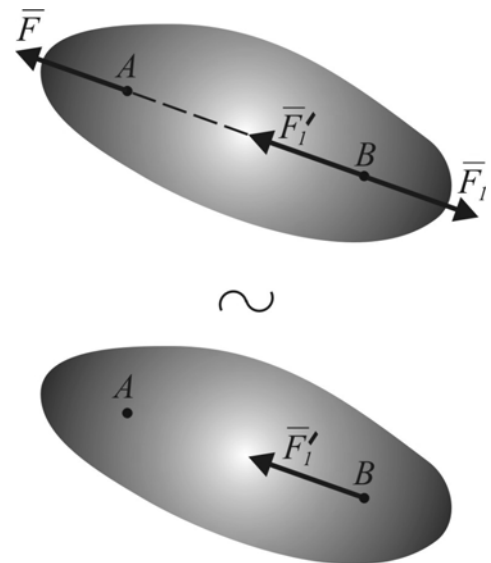


Рис.1.3. Эквивалентное перемещение силы по линии её действия

$$R = \sqrt{F_1^2 + F_2^2 + 2F_1 \cdot F_2 \cdot \cos \alpha} .$$

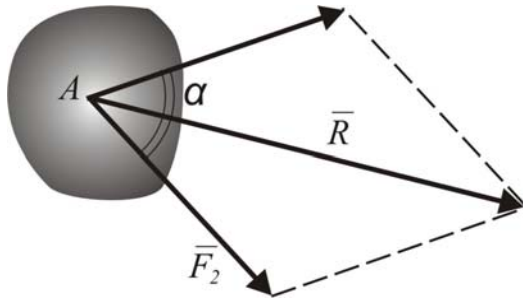


Рис. 1.4. Определение равнодействующей двух сил

4. *Третий закон Ньютона.* Всякому действию одного тела на другое соответствует равное и противоположно направленное противодействие.

5. *Аксиома связей.* Несвободное тело можно рассматривать как свободное, если отбросить связи, а их действие заменить действием реакций этих связей (рис. 1.5).

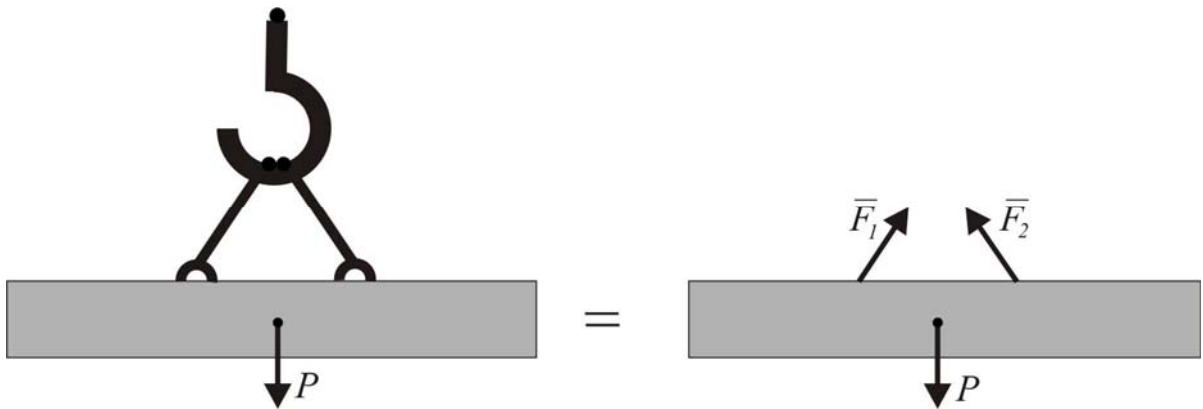


Рис. 1.5. Замена несвободного тела свободным

6. *Аксиома отвердевания.* Равновесие деформируемого тела (или системы твердых тел) не изменится, если его (или ее) считать абсолютно твердым. Например (рис. 1.6, 1.7).



Рис. 1.6. Статическая эквивалентность растянутой нити и жесткого стержня

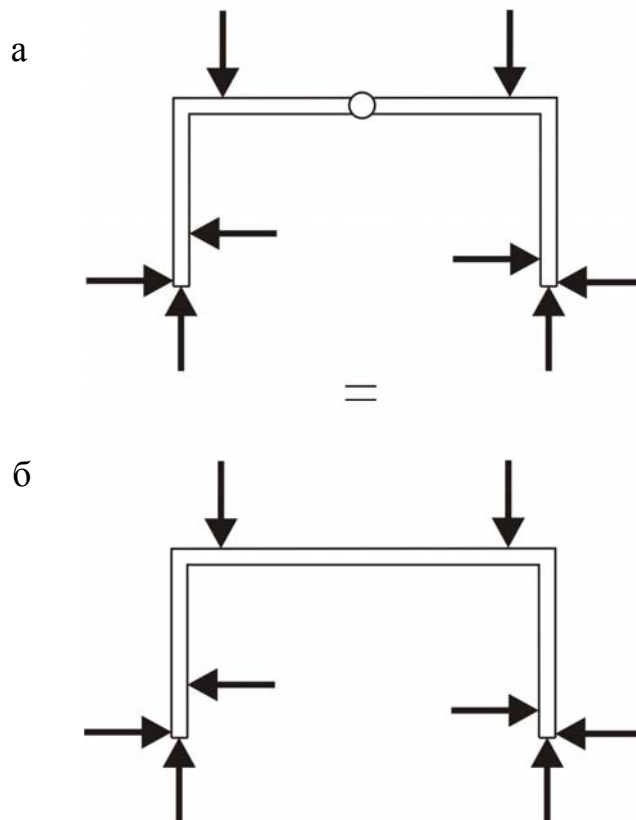


Рис. 1.7. Эквивалентность изменяемой равновесной системы (а) и твердого тела (б)

1.2. Плоская система сходящихся сил

1.2.1. Приведение плоской системы сходящихся сил к простейшему виду

Системой сходящихся сил называют систему сил, линии действия которых пересекаются в одной точке.

Пусть все сходящиеся силы лежат в одной плоскости (рис. 1.8,а). Перенесем все силы по линиям их действия в т. O (рис. 1.8,б) и последовательно сложим по правилу параллелограмма. Получим, что система сходящихся сил заменяется одной силой – равнодействующей (рис. 1.8,в). При этом равнодействующая равна геометрической сумме слагаемых сил

$$\bar{R} = \bar{F}_1 + \bar{F}_2 + \dots + \bar{F}_n, \quad (1.2.1)$$

или

$$\bar{R} = \sum \bar{F}_k. \quad (1.2.1')$$

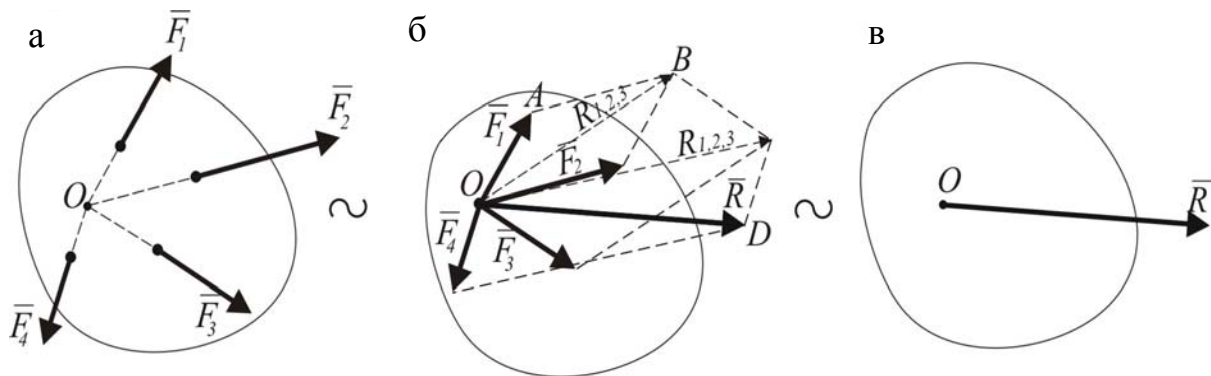


Рис. 1.8. Замена системы сходящихся сил равнодействующей силой

Итак, система сходящихся сил эквивалентна одной силе – равнодействующей.

Это же сложение сил можно выполнить по-другому: последовательно прикладывая к концу одной силы начало другой (рис. 1.9).

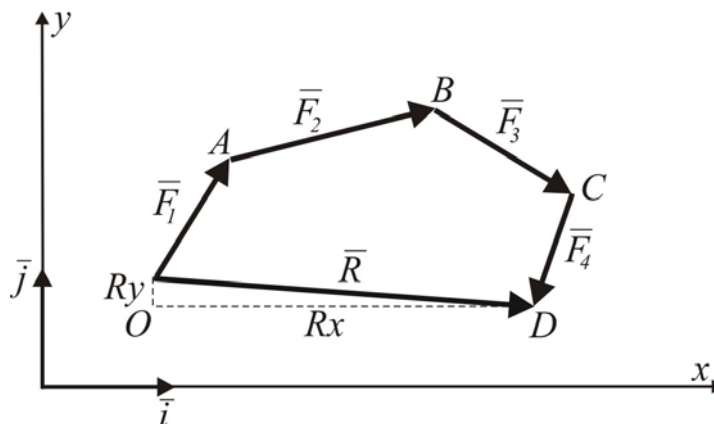


Рис. 1.9. Силовой многоугольник, эквивалентный равнодействующей силе

Спроецируем уравнение (1.2.1') на координатные оси:

$$\left. \begin{aligned} R_x &= \sum F_{kx}, \\ R_y &= \sum F_{ky}. \end{aligned} \right\} \quad (1.2.2)$$

Величину равнодействующей найдем через проекции по формуле

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2} = \sqrt{(\sum F_{kx})^2 + (\sum F_{ky})^2}. \quad (1.2.3)$$

Направление равнодействующей можно определить с помощью направляющих косинусов:

$$\cos(\bar{R}, \bar{i}) = R_x / R, \quad \cos(\bar{R}, \bar{j}) = R_y / R. \quad (1.2.4)$$

1.2.2. Условия равновесия плоской системы сходящихся сил

Очевидно, что для равновесия необходимо, чтобы равнодействующая равнялась нулю. В векторном виде

$$\bar{R} = 0, \quad (1.2.5)$$

или

$$\sum \bar{F}_k = 0, \quad (1.2.6)$$

т.е. силовой многоугольник должен быть замкнут.

Условия равновесия в аналитическом виде, или в виде проекций, на координатные оси можно записать на основе уравнения (1.2.3). Подкоренное выражение, содержащее сумму квадратов двух величин, может быть равно нулю, если одновременно равны нулю оба слагаемых под корнем, т.е.

$$\left. \begin{aligned} R_x = \sum F_{kx} = 0, \\ R_y = \sum F_{ky} = 0. \end{aligned} \right\} \quad (1.2.7)$$

Итак, уравнения (1.2.7) выражают условия равновесия плоской системы сходящихся сил в аналитическом виде.

1.3. Теорема о трех непараллельных силах

Теорема: если тело находится в равновесии под действием трех непараллельных сил, то линии действия этих сил пересекаются в одной точке.

Доказательство.

Пусть тело находится в равновесии под действием трех сил – \bar{F}_1 , \bar{F}_2 и \bar{F}_3 (рис. 1.10,а). Перенесем силы \bar{F}_2 и \bar{F}_3 в точку пересечения их линий действия – точку O . Сложим две силы \bar{F}_2 и \bar{F}_3 (рис. 1.10,б).

Получаем, что тело находится в равновесии под действием двух сил – \bar{F} и \bar{F}_1 (рис. 1.10, в). Следовательно, по первой аксиоме, эти силы направлены вдоль одной прямой. То есть сила \bar{F}_1 также проходит через точку O .

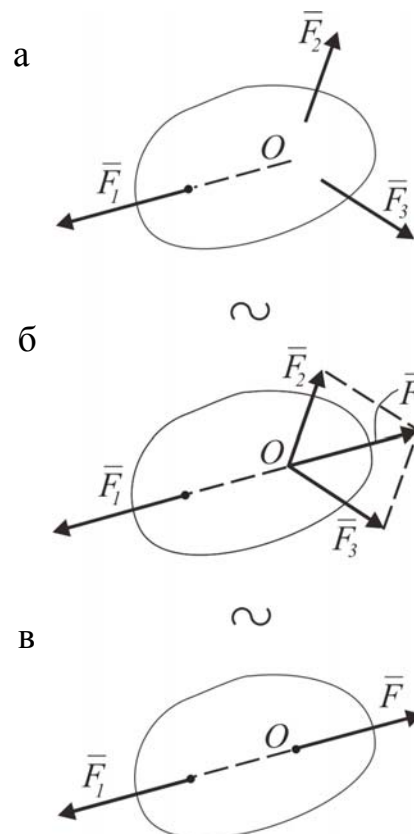


Рис. 1.10. Преобразование системы трех сходящихся сил

1.4. Расчет шарнирных ферм методом вырезания узлов

1.4.1. Понятие о ферме и терминология

Шарнирные фермы – это неизменяемые (жесткие) конструкции, образованные прямыми стержнями, соединенными по концам шарнирами. Если все стержни лежат в одной плоскости, ферма называется *плоской*. Места соединения стержней фермы называют *узлами*.

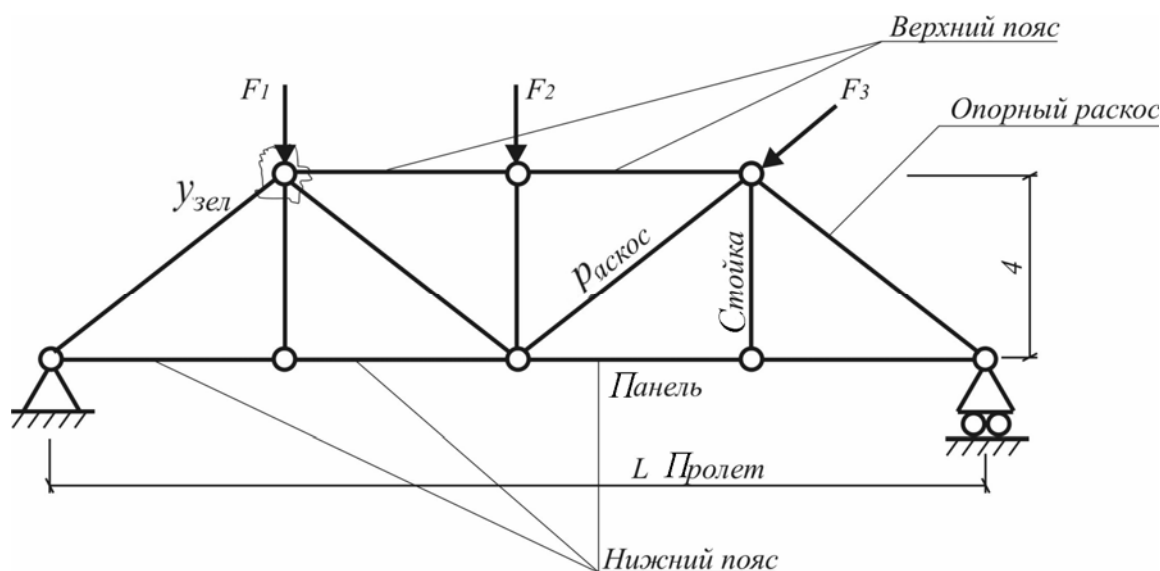


Рис. 1.11. Расчетная схема шарнирной фермы

Все внешние нагрузки к ферме прикладываются только в узлах. Будем считать стержни фермы невесомыми, а шарниры идеальными, т.е. без трения. Тогда можно считать, что на каждый из стержней фермы действуют две силы, приложенные к его концам, которые при равновесии могут быть направлены только вдоль стержня. Таким образом, стержни таких идеальных ферм работают только на растяжение или сжатие.

Все стержни, образующие ферму, разделяются на поясные и решетку. Поясными называются стержни, расположенные по внешнему контуру фермы. Они подразделяются на верхний пояс, очерчивающий верхнюю часть контура фермы, и нижний пояс, очерчивающий нижнюю часть контура фермы. Узловые шарниры на схемах ферм часто не показывают.

Решеткой называются внутренние стержни, служащие для соединения верхнего и нижнего поясов фермы. В решетке различаются вертикальные стержни или стойки и раскосы.

По характеру очертания контура фермы подразделяются на:

1) фермы с параллельными поясами, в которых оба пояса образованы двумя параллельными прямыми (рис.1.12):

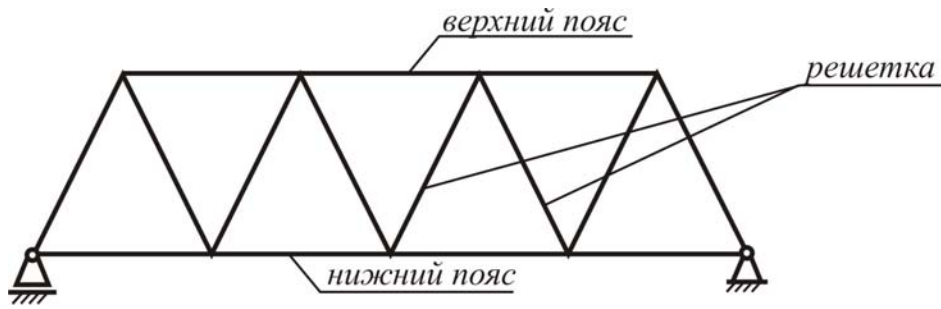


Рис. 1.12. Ферма с параллельными поясами

2) фермы с ломаным поясом (рис. 1.13):

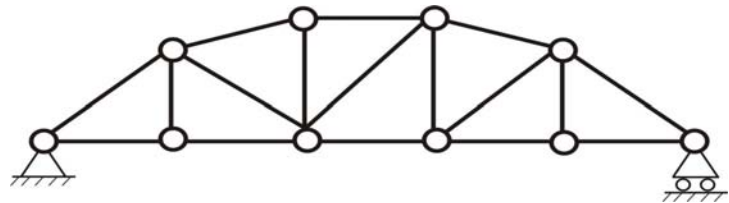


Рис. 1.13. Ферма с ломаным поясом

3) стропильные фермы (рис. 1.14):

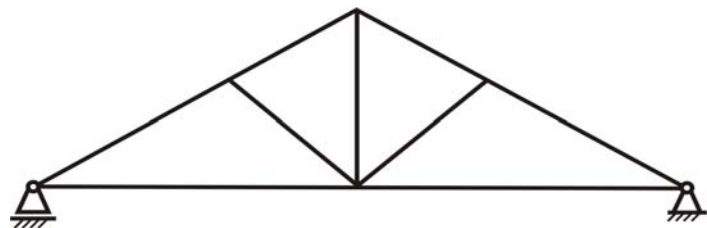


Рис. 1.14. Стропильная ферма

По виду решетки фермы подразделяются на:

1) *решетчатые*, в которых решетка состоит из стоек или вертикалей и раскосов между ними (рис. 1.11).

2) *раскосные*, в которых решетка состоит только из наклонных стержней (см. рис. 1.12);

3) *с полураскосной решеткой* (рис. 1.15) (в панели вместо одного длинного раскоса делается два полураскоса):

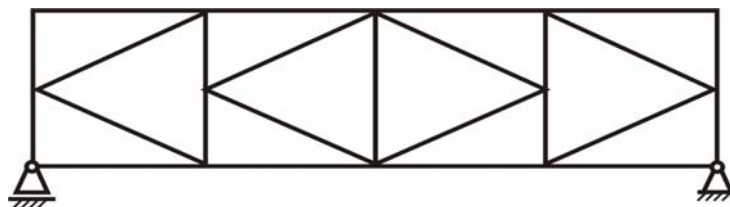


Рис. 1.15. Полураскосная ферма

Все рассмотренные фермы известны под названием *простых ферм*, они получаются путем последовательного построения многоугольника из треугольников.

Зависимость $k = 2n - 3$ между числом шарниров n и числом стержней k устанавливает число возможных уравнений равновесия, необходимых для определения связевых усилий между шарнирами.

Если число стержней $k < 2n - 3$, то это соотношение показывает, что число стержней, служащих связью между шарнирами, меньше, чем это нужно для обеспечения неподвижности n шарниров; следовательно, ферма изменяема.

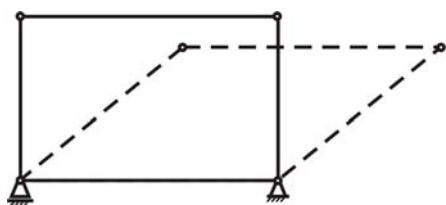


Рис. 1.16. Изменяемая система

Примером изменяемой системы служит четырехугольник, в котором $k=4$, $4 < 2 \cdot 4 - 3 = 5$ (рис. 1.16); приведение ее к неизменяемому виду может быть сделано путем дополнения пятого стержня – диагонали. Такая неизменяемая статически определимая система ($k=5$) приведена на рис. 1.17. Введение второй диагонали (рис. 1.18) будет служить только для

лишнего закрепления и без того неизменяемой системы. Однако теперь число стержней $k < 2n - 3$, а число уравнений, необходимых для определения равновесия усилий в ферме, не изменится, и их будет недостаточно для определения усилий во всех стержнях.

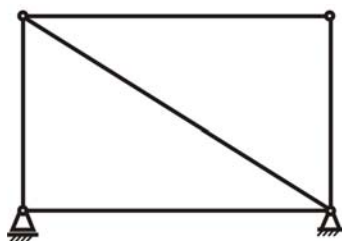


Рис. 1.17. Неизменяемая статически определимая система

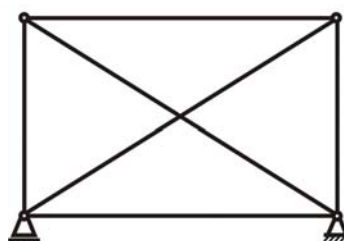


Рис. 1.18. Неизменяемая статически неопределимая система

1.4.2. Применение теоремы о трех силах к определению реакций опор ферм

Если на ферму действует одна внешняя сила, опорные реакции можно определить с помощью теоремы о равновесии трех непараллельных сил (рис. 1.19) – \bar{P} , \bar{R}_A и \bar{R}_B .

Определим реакции в опорах. Так как опора A – подвижная, то линия действия \bar{R}_A известна, она направлена перпендикулярно основанию опоры A . Направление \bar{R}_B определим по теореме о трех силах – она направлена из т. B в точку пересечения сил линий действия \bar{R}_A и P – точку C .

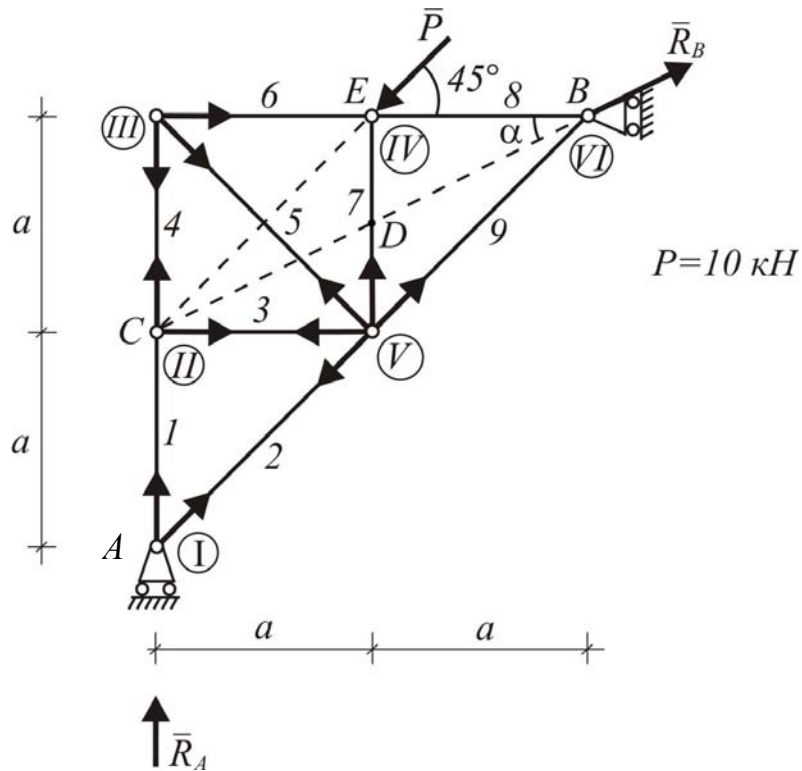


Рис. 1.19. Расчетная схема фермы

Строим замкнутый силовой треугольник (рис. 1.20). Его построение начнем с силы P .

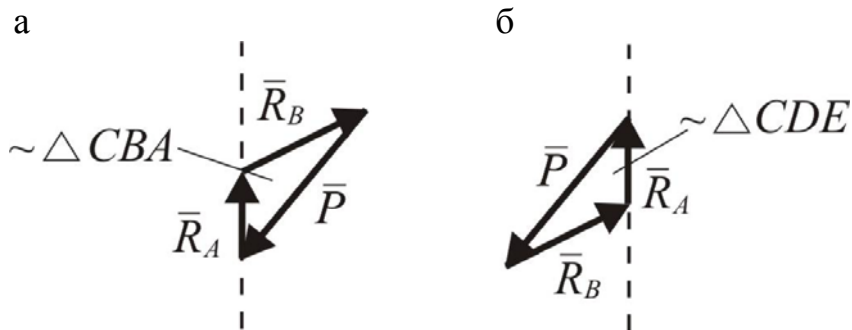


Рис. 1.20. Силовой треугольник

Из подобия силового многоугольника треугольнику CDE находим опорные реакции R_A и R_B :

$$\frac{P}{CE} = \frac{R_A}{DE} = \frac{R_B}{CD};$$

$$EC = a\sqrt{2}, \quad CD = a\sqrt{\frac{5}{4}}, \quad ED = \frac{a}{2};$$

$$R_A = \frac{P \cdot \frac{a}{2}}{a\sqrt{2}} = 3,535 \text{ кН}, \quad R_B = \frac{P \cdot a\sqrt{\frac{5}{4}}}{a\sqrt{2}} = 7,906 \text{ кН}.$$

Аналитическое определение реакций. Условия равновесия всей фермы под действием трех сходящихся сил приведены на рис. 1.21.

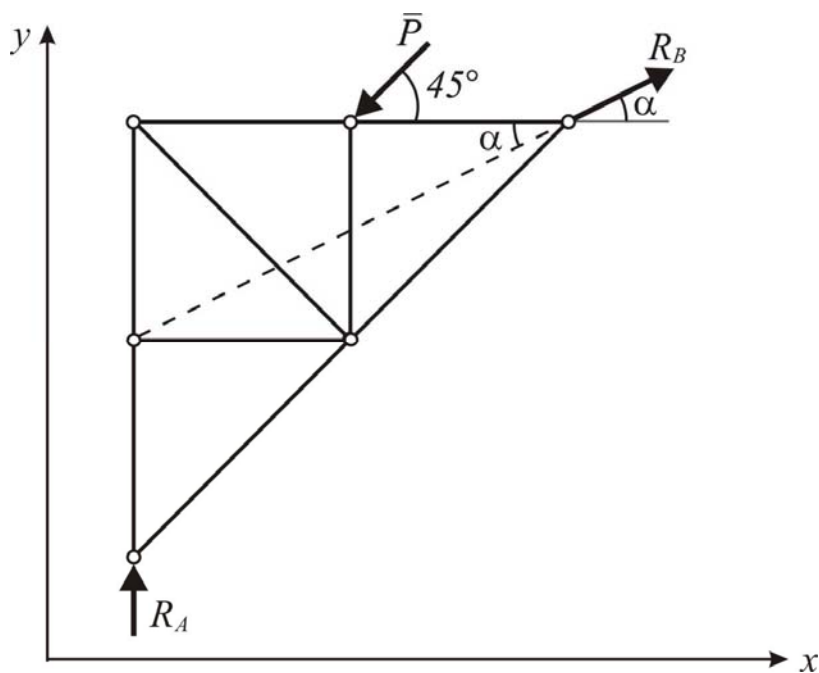


Рис. 1.21. Равновесие фермы как твердого тела

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{a}{2a} = 0,5; \quad \alpha = \operatorname{arctg} 0,5 = 26,565^\circ;$$

$$\sin \alpha = 0,447; \quad \cos \alpha = 0,894.$$

$$\begin{cases} \sum F_{KX} = 0, & -P \cdot \cos 45^\circ + R_B \cdot \cos \alpha = 0, \\ \sum F_{KY} = 0, & -P \cdot \sin 45^\circ + R_B \cdot \sin \alpha = 0. \end{cases}$$

$$R_B = \frac{P \cdot \cos 45^\circ}{0,894} = \frac{7,07}{0,894} = 7,905 \text{ кН.}$$

$$R_A = 10 \cdot 0,707 - 7,905 \cdot 0,447 = 3,536 \text{ кН.}$$

Далее определяем усилия в стержнях фермы.

1.4.3. Определение усилий в стержнях методом вырезания узлов

Этим методом удобно пользоваться, если надо найти усилия во всех стержнях фермы. Пронумеруем узлы римскими цифрами, а стержни – арабскими. Искомые усилия обозначим S_1, S_2 и т.д. соответственно номеру стержня. Отрежем мысленно все узлы со сходящимися в них стержнями от остальной фермы. Действие отброшенных частей стержней заменим силами, которые будут направлены вдоль соответствующих стержней и численно равны искомым усилиям $S_1, S_2 \dots$

Изображая силы «вырезанного» узла на рисунке, направляем их от узлов, т.е. считая все стержни растянутыми. Если в результате расчета величина усилия в каком-нибудь стержне получается отрицательной, это означает, что данный стержень не растянут, а сжат.

Для сил, сходящихся в каждом узле, составляем уравнение равновесия

$$\sum F_{kx} = 0, \quad \sum F_{ky} = 0.$$

Первым вырезается тот узел, в котором сходится не более двух стержней.

Начинаем с узла I:

$$\begin{aligned} \sum F_{kx} = 0, \quad S_2 \sin 45 = 0, \quad \Rightarrow S_2 = 0. \\ \sum F_{ky} = 0, \quad R_A + S_1 = 0, \quad \Rightarrow S_1 = -R_A = -3,535 \text{ кН}. \end{aligned}$$

Зная S_1 , переходим к узлу II:

$$\begin{aligned} \sum F_{kx} = 0, \quad S_3 = 0. \\ \sum F_{ky} = 0, \quad -S_1 + S_4 = 0. \\ S_4 = S_1 = -3,535 \text{ кН}. \end{aligned}$$

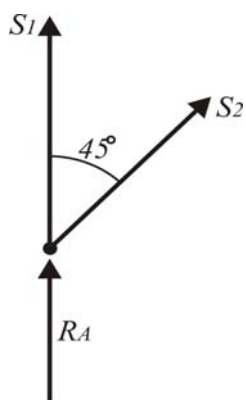


Рис.1.22. Узел I



Рис. 1.23. Узел II

Дальнейший расчет (узел III, узел IV и т.д.) производим аналогично.

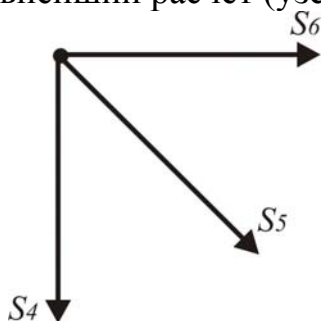


Рис.1.24. Узел III

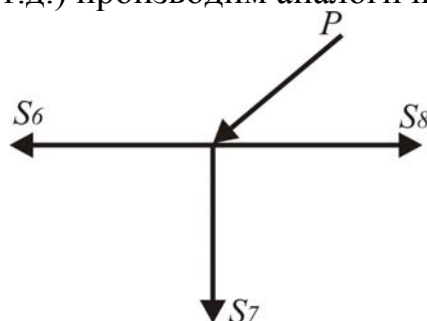


Рис.1.25. Узел IV

Порядок вырезания узлов должен быть таким, чтобы в рассматриваемом узле было не более 2 неизвестных усилий.

Если в узле, не загруженном внешними силами, сходятся три стержня, из которых два направлены вдоль одной прямой, то усилие в третьем стержне равно нулю (например, $S_3=0$ узел II).

Расчет методом вырезания узлов может производиться графически в той же последовательности. Для этого, отсекая от фермы каждый из ее узлов, находят усилия в стержнях и строят соответствующие замкнутые силовые многоугольники. Построения производятся в определенном масштабе (рис. 1.26, 1.27, 1.28).



Рис. 1.26. Векторный многоугольник для узла I ($|\bar{S}_1| = |\bar{R}_A|$)

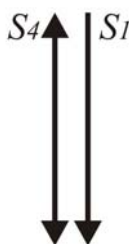


Рис. 1.27. Векторный многоугольник для узла II ($|\bar{S}_4| = |\bar{S}_1|$)

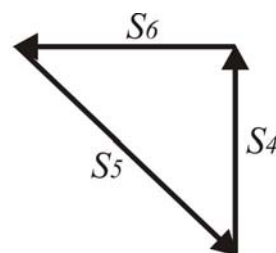


Рис. 1.28. Векторный многоугольник для узла III

$$\left. \begin{aligned} \sum X_i = 0; \quad X_0 + \sum_{i=1}^n X_i = 0; \\ \sum Y_i = 0; \quad Y_0 + \sum_{i=1}^n Y_i = 0; \\ \sum M_0 = 0; \quad \sum_{i=1}^n M_{i0} = 0. \end{aligned} \right\}$$

Значение усилий определяется измерением соответствующего отрезка в силовом многоугольнике. Знак усилия находится сравнением направления вектора на силовом многоугольнике и на исходном вырезанном узле. Если направление совпадает – знак «+», не совпадает – знак «-».

Окончательные результаты расчета сводятся в таблицу (табл. 1.1).

Т а б л и ц а 1 . 1

Таблица усилий в стержнях фермы

№ стержня	1	2	3	4	...	n
Усилия, кН	-3,535	0	0	-3,535		

1.5. Система параллельных сил

1.5.1. Параллельные силы, направленные в одну сторону

Пусть \vec{F}_1 и \vec{F}_2 параллельные силы, приложенные в точках A и B , причем $F_1 > F_2$ (рис. 1.29). Приложим в точках A и B уравновешенную систему сил \vec{P}_1 и \vec{P}_2 ($\vec{P}_1 = -\vec{P}_2$).

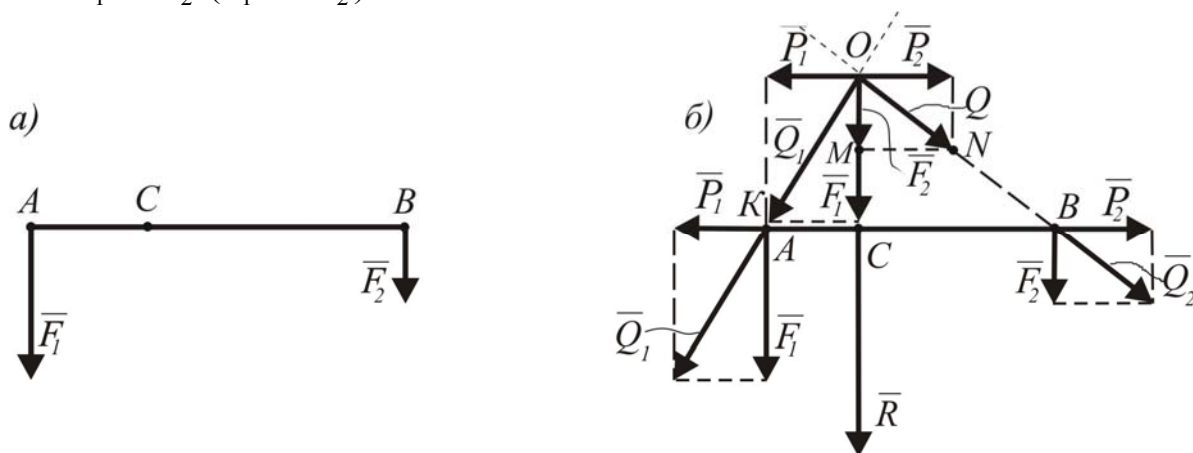


Рис. 1.29. Сложение параллельных сил, направленных в одну сторону

Сложим силы \vec{P}_1 и \vec{F}_1 , а также \vec{P}_2 и \vec{F}_2 . Получим силы $\vec{Q}_1 = \vec{F}_1 + \vec{P}_1$ и $\vec{Q}_2 = \vec{F}_2 + \vec{P}_2$. Перенесем силы \vec{Q}_1 и \vec{Q}_2 в точку пересечения их линий действия O и разложим их на прежние составляющие. Отбросим силы \vec{P}_1 и \vec{P}_2 как взаимно уравновешенные и сложим силы \vec{F}_1 и \vec{F}_2 . $\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$, и $R = F_1 + F_2$,

Перенесем полученную силу \vec{R} по линии ее действия в точку C , лежащую на пересечении линии действия этой силы с отрезком AB . Таким образом, система параллельных сил заменяется одной силой – равнодействующей. Величина равнодействующей равна сумме модулей слагаемых сил.

Определим местоположение точки приложения равнодействующей – точки C .

$$\triangle AOC \sim \triangle KOL,$$

$$\triangle COB \sim \triangle MON.$$

Из подобия треугольников следует:

$$\frac{AC}{P_1} = \frac{OC}{F_1}, \quad (1.5.1)$$

$$\frac{BC}{P_2} = \frac{OC}{F_2}, \quad (1.5.2)$$

или

$$\left. \begin{aligned} P_1 \cdot OC &= F_1 \cdot AC, \\ P_2 \cdot OC &= F_2 \cdot BC. \end{aligned} \right\} \quad (1.5.3)$$

Выражая из обоих уравнений OC и приравнявая полученные правые части, запишем

$$F_1 \cdot AC = F_2 \cdot BC, \quad (1.5.4)$$

или

$$\frac{F_1}{F_2} = \frac{BC}{AC}. \quad (1.5.5)$$

Т.е. точка приложения равнодействующей делит отрезок между силами в соотношении, обратно пропорциональном к этим силам.

1.5.2. Параллельные силы, направленные в противоположные стороны

Примем для определенности $F_1 > F_2$. Пусть сила \vec{F}_1 приложена в точке B , а сила $\vec{M}_0 = \vec{r} \times \vec{F}$ – в точке A (рис. 1.30).

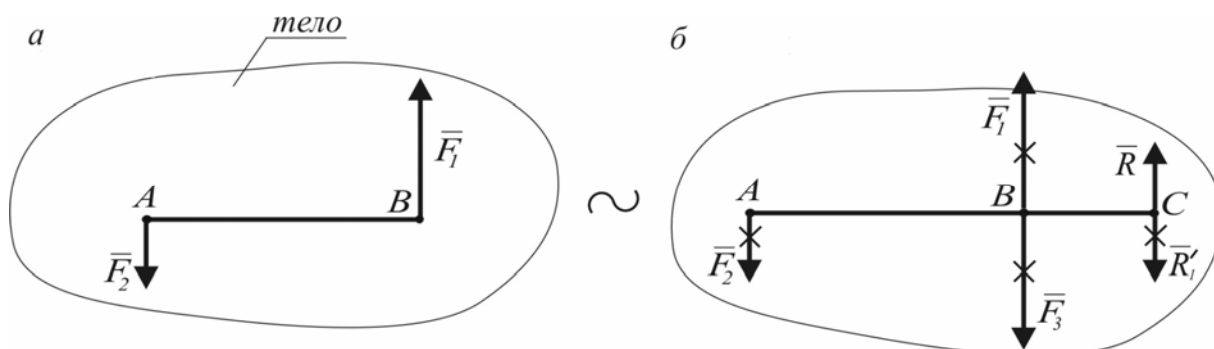


Рис. 1.30. Сложение параллельных сил, направленных в разные стороны

Приложим в некоторой точке C , лежащей на продолжении прямой AB со стороны большей силы, уравновешенную систему сил \vec{R} и \vec{R}' . Пусть уравновешенные силы по величине составляют:

$$R = F_2 - F_1, \quad (1.5.6)$$

а положение точки C приложения \vec{R} и \vec{R}' подчиняется соотношению

$$\frac{R'}{F_2} = \frac{AB}{BC}. \quad (1.5.7)$$

Силы \vec{R}' и F_2 можно заменить их равнодействующей F_3 : $F_3 = R' + F_2 = F_1 - F_2 + F_3 = F_1$; причем сила F_3 , согласно соотношению (1.5.7),

должна быть приложена в точке B . Силы \bar{F}_3 и \bar{F}_1 образуют уравновешенную систему сил, которую отбросим.

Преобразуем соотношение (1.5.7):

$$\frac{F_1 - F_2}{F_2} = \frac{AB}{BC}, \quad \text{или} \quad \frac{F_1}{F_2} - 1 = \frac{AB}{BC},$$

$$\text{или} \quad \frac{F_1}{F_2} = \frac{AB}{BC} + \frac{BC}{BC}.$$

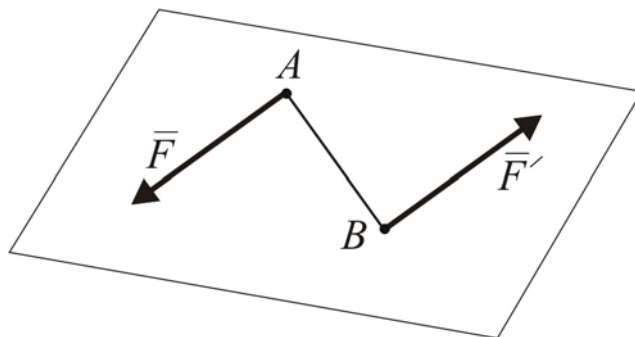
Окончательно получим:

$$\frac{F_1}{F_2} = \frac{AC}{BC}. \quad (1.5.8)$$

Итак, данная система сил заменяется одной силой \bar{R} – равнодействующей. Величина равнодействующей равна разности слагаемых сил. Равнодействующая направлена в сторону большей силы, а положение точки ее приложения – точки C – подчиняется соотношению (1.5.8).

1.5.3. Теория пар сил на плоскости

Свойства пар сил. Парой сил называются две равные, противоположно направленные параллельные силы, не лежащие на одной прямой (рис. 1.31).



$$F = F', \quad \bar{F} \parallel \bar{F}'$$

Рис. 1.31. Пара сил

Основные свойства пар сил:

- 1) пара сил не имеет равнодействующей;
- 2) действие пары сил на свободное тело сводится к вращательному эффекту;
- 3) под действием пары сил свободное тело не может находиться в равновесии.

Момент силы. Момент пары сил. Моментом силы относительно точки на плоскости (рис. 1.32) называется алгебраическая величина равная про-

изведению модуля силы на плечо. Плечо – это перпендикуляр, опущенный из точки на линию действия силы.

$$M_A(F) = -F \cdot h. \quad (1.5.9)$$

Примем следующее правило знаков: момент относительно точки на плоскости считается положительным, если его вращательный эффект направлен против часовой стрелки. В противном случае момент отрицателен.

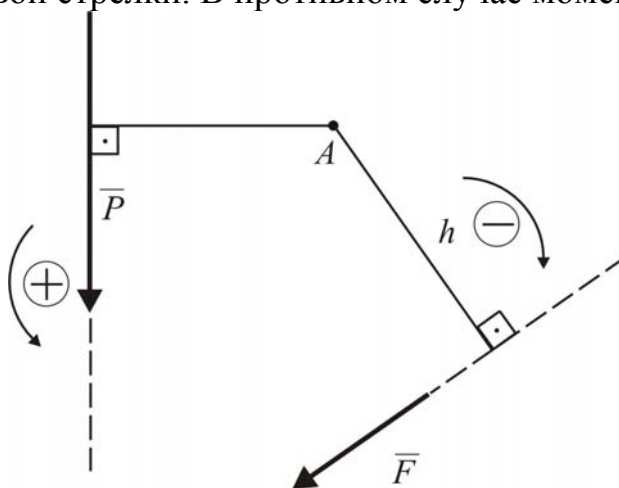


Рис. 1.32. Момент силы относительно точки на плоскости

Момент пары сил относительно любой точки плоскости, в которой лежит данная пара, есть величина постоянная и равная произведению модуля одной из сил на кратчайшее расстояние между этими силами.

До к а з а т е л ь с т в о . Запишем момент пары сил относительно произвольной точки плоскости O (рис. 1.33):

$$M_O(\vec{F}, \vec{F}') = -F'h_1 + F(h_1 + d) = -F'h_1 + Fh + Fd = Fd.$$

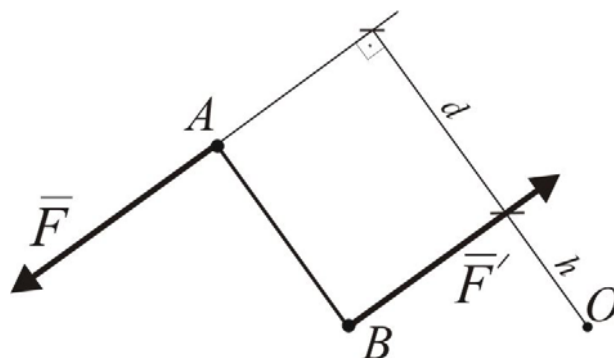


Рис. 1.33. Момент пары сил на плоскости

Итак, момент пары сил

$$M_O(\vec{F}, \vec{F}') = Fd. \quad (1.5.10)$$

Теорема об эквивалентности пар сил. Пару сил, не изменяя оказываемого ею действия, можно заменить другой парой, лежащей в той же плоскости и имеющей тот же момент.

Пусть \bar{F} и \bar{F}' – пара сил с моментом $M = Fd$.

Приложим уравновешенную систему сил $\bar{M}(\bar{F}, \bar{F}')$ так, как это показано на рис. 1.34. Сложим \bar{P} и \bar{F} ; \bar{P}' и \bar{F}' . Силы \bar{Q} и \bar{Q}' образуют новую пару сил. Перенесем силы \bar{Q} и \bar{Q}' по линиям действия в другое место плоскости. Мы получили новую пару сил, эквивалентную заданной:

$$(\bar{Q} \text{ и } \bar{Q}') \sim (\bar{F} \text{ и } \bar{F}').$$

$$M(F, F') = Fd, \quad (1.5.9)$$

$$M(\bar{Q}, \bar{Q}') = Qh = \frac{F}{\sin \alpha} \cdot d \sin \alpha = Fd = M(\bar{F}, \bar{F}'), \quad (1.5.10)$$

так как

$$Q = \frac{F}{\sin \alpha}, \quad h = d \cdot \sin \alpha.$$

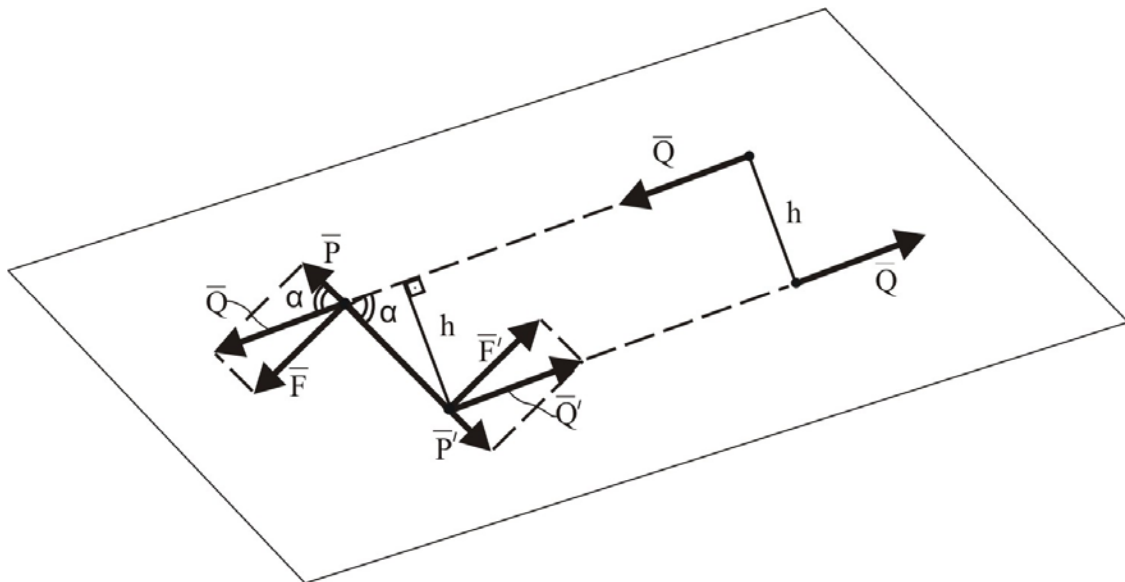


Рис. 1.34. Преобразование пары сил

С л е д с т в и я :

1) у пары сил можно как угодно изменять величину плеча и сил, оставляя при этом момент постоянным.

2) пары сил статически эквивалентны, если их моменты равны (если обе пары сил лежат в одной плоскости).

Сложение пар сил. Пусть \bar{F}_1 и \bar{F}'_1 , \bar{F}_2 и \bar{F}'_2 , \bar{F}_3 и \bar{F}'_3 – три пары сил с моментами M_1, M_2, M_3 (рис. 1.35).

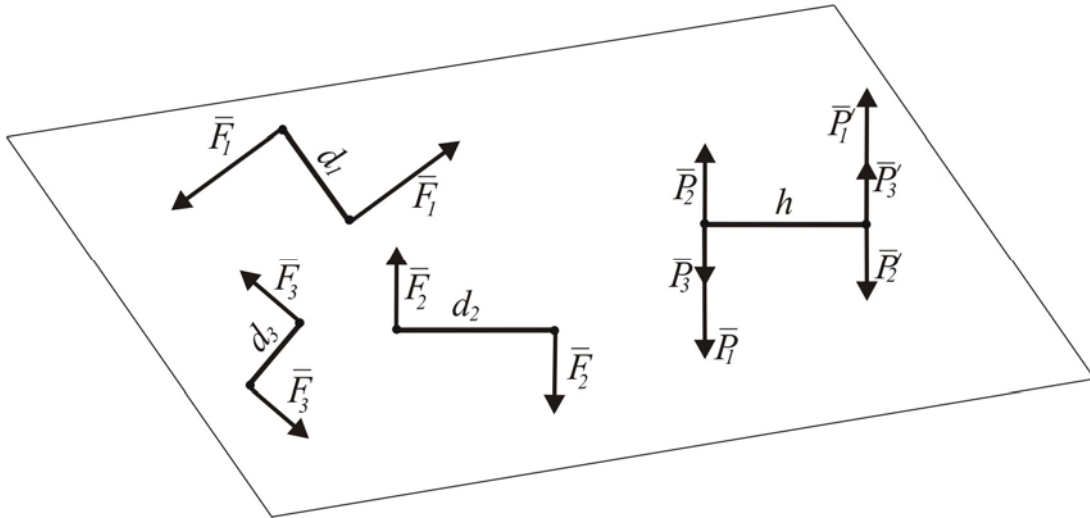


Рис. 1.35. Сложение пар сил в плоскости

Приведём все пары к одному плечу h :

$$P_1 = \frac{M_1}{h}; \quad P_2 = \frac{M_2}{h}; \quad P_3 = \frac{M_3}{h}.$$

Совместим плечи всех пар. Сложив силы P_1, P_2 и P_3 , а также силы P_1', P_2' и P_3' , получим новую пару сил \bar{P} и \bar{P}' . При этом

$$P = P_1 - P_2 + P_3. \quad (1.5.11)$$

Умножим последнее уравнение на h :

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum F_{kx} = 0, \\ \sum F_{ky} = 0, \\ \sum F_{kz} = 0, \\ \sum M_x = 0, \\ \sum M_y = 0, \\ \sum M_z = 0. \end{array} \right. \quad (1.5.12)$$

Но $M_1 = P_1 h$, $M_2 = P_2 h$, $M_3 = P_3 h$, следовательно,

$$M^* = M_1 - M_2 + M_3 \quad (1.5.13)$$

или

$$M^* = \sum M_k. \quad (1.5.14)$$

Систему пар сил можно заменить одной парой. Момент результирующей пары равен алгебраической сумме моментов слагаемых пар.

Условие равновесия системы пар сил на плоскости. Для покоя тела, находящегося под действием плоской системы пар сил, необходимо и до-

статочно, чтобы алгебраическая сумма моментов пар сил равнялась нулю. Следовательно, уравнение равновесия системы пар имеет вид

$$\sum M_k = 0. \quad (1.5.15)$$

1.6. Произвольная плоская система сил

Плоской произвольной системой сил называется система таких сил, линии действия которых как угодно расположены в одной плоскости.

Произведем упрощение этой системы сил и установим для нее условия равновесия. Ранее, рассматривая систему сходящихся сил (рис. 1.36,а), мы начинали упрощение с того, что переносили их в одну точку. При упрощении параллельных сил (рис. 1.36,б) мы вначале приводили их к сходящимся силам, а затем опять переносили их в одну точку.

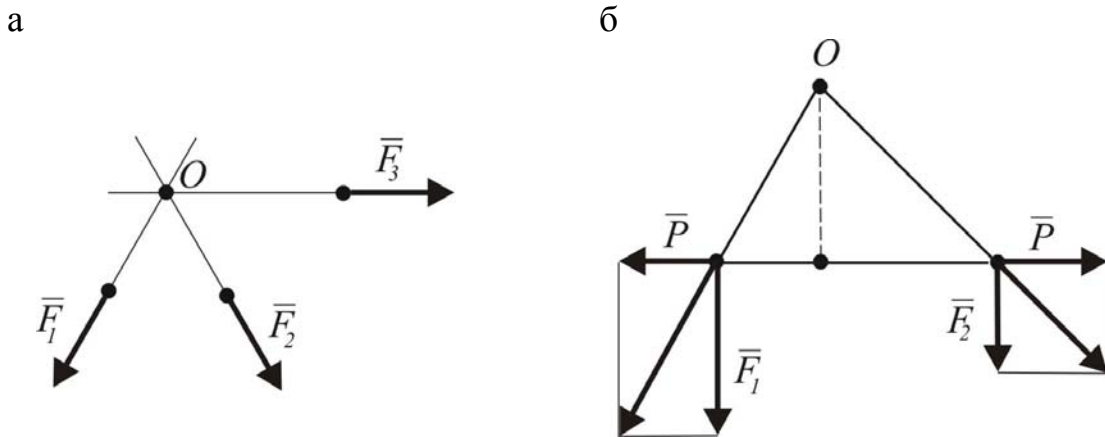


Рис. 1.36. Сложение сходящихся и параллельных сил

Очевидно, что и задачу упрощения плоской произвольной системы сил было бы проще решать, если бы мы знали способ эквивалентного переноса этих сил в одну точку.

Такой способ переноса сил в одну точку дает следующая теорема.

1.6.1. Теорема о параллельном переносе силы

Теорема: силу можно переносить параллельно самой себе в любую точку твердого тела, добавляя при этом пару сил, с моментом, равным моменту переносимой силы относительно новой точки приложения.

Доказательство:

а) пусть на тело действует сила \vec{F} , приложенная в точке A (рис. 1.37,а);

б) добавим в точке B уравновешенную систему сил \vec{F}' , \vec{F}'' , равных по величине заданной силе \vec{F} и параллельно ей направленных (рис. 1.37,б).

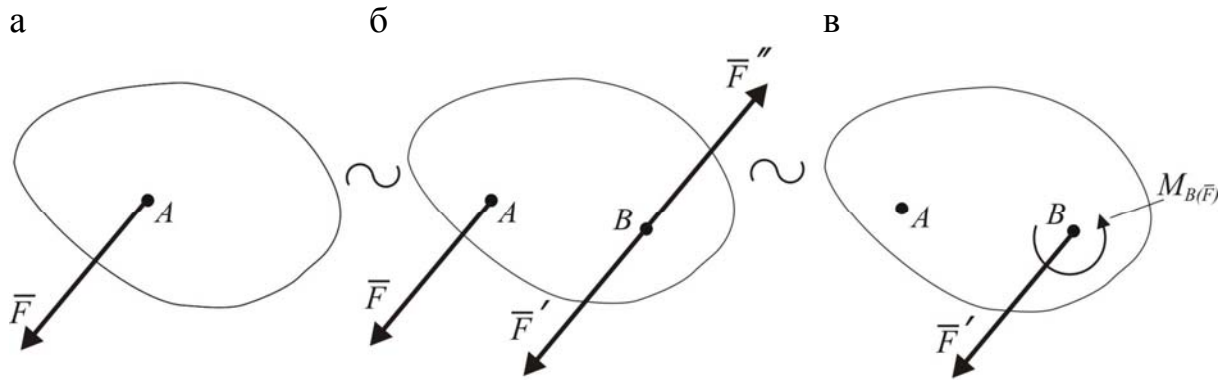


Рис. 1.37. Параллельный перенос силы

Система сил \vec{F} и F'' образует пару сил с моментом

$$M(\vec{F}, \vec{F}'') = M_B(\vec{F}). \quad (1.6.1)$$

Теорема доказана.

Систему сил \vec{F} и F'' называют присоединенной парой, а процесс переноса силы \vec{F} из точки A в точку B – приведением силы \vec{F} к заданному центру B .

По теореме об эквивалентности пар сил, пару \vec{F} и F'' можно заменить любой другой парой с моментом $M_B(\vec{F})$.

1.6.2. Приведение плоской системы сил к заданному центру

Пусть на тело действует произвольная плоская система сил $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n$ (рис. 1.38). Назовем точку O центром приведения. Перенесем все силы параллельно в точку O , добавляя соответствующие пары сил.

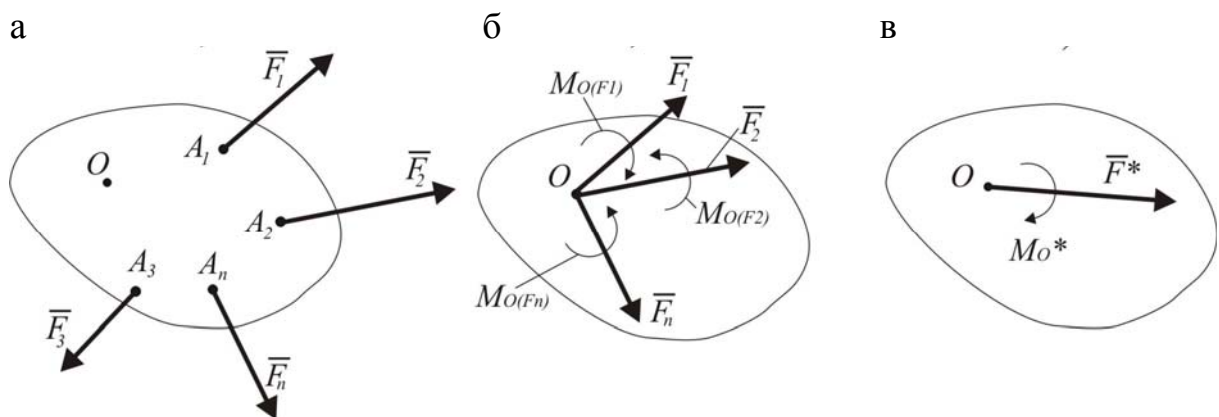


Рис. 1.38. Упрощение произвольной плоской системы сил

Сложим силы, приложенные в точке O , как силы, сходящиеся в одной точке.

$$\bar{F}^* = \bar{F}_1 + \bar{F}_2 + \dots + \bar{F}_n = \sum F_k. \quad (1.6.2)$$

Сложим пары сил, приложенные к телу:

$$M_o^* = M_{o(\bar{F}_1)} + M_{o(\bar{F}_2)} + M_{o(\bar{F}_3)} + \dots + M_{o(\bar{F}_n)} = \sum M_{o(\bar{F}_k)}. \quad (1.6.3)$$

Таким образом, плоская произвольная система сил приводится к одной силе \bar{F}^* , называемой *главный вектор системы сил*, и одной паре сил M_o^* , называемой *главный момент системы сил относительно точки O* .

1.6.3. Частные случаи приведения произвольной плоской системы сил к простейшему виду

Вид, к которому может быть приведена плоская система сил, зависит от главного вектора и главного момента.

I. $F^*=0, M^*\neq 0$. Данная система сил приводится к одной паре с моментом M^* . В этом случае величина главного момента не зависит от выбора центра приведения (согласно теореме об эквивалентности пар), так как иначе мы получили бы, что одна система сил заменяется разными парами, что невозможно (момент пары есть величина постоянная и неизменная).

II. $F^*\neq 0, M_o^*=0$. В этом случае заданная система сил приводится к одной силе – равнодействующей системы сил, равной по величине и направлению её главному вектору и приложенной в центре приведения O .

III. $F^*\neq 0, M^*\neq 0$. Представим пару сил с моментом M^* , двумя силами \bar{F}' и \bar{F}'' , с плечом $\bar{R} = \sum \bar{F}_k = \sum \bar{u} \cdot F_k = \bar{u} \sum F_k$. Причем $\bar{F}'' = \bar{F}^*$, $\bar{F}' = -\bar{F}^*$.

Тогда \bar{F}^* и \bar{F} – взаимно уравновешенные силы, и их можно отбросить.

Таким образом, заданная система сил (рис. 1.39, а) приводится к равнодействующей (рис. 1.39,б), равной по величине и направлению главному вектору системы, и приложенной в точке, отстоящей от центра приведения

на расстоянии $h = \frac{M^*}{F^*}$.

В ы в о д : плоская система сил может быть заменена в одних случаях парой сил, в других – равнодействующей.

Из частного случая III следует теорема Вариньона: *момент равнодействующей плоской системы сил относительно любой точки, лежащей в плоскости действия данных сил, равен алгебраической сумме моментов составляющих сил относительно той же точки.*

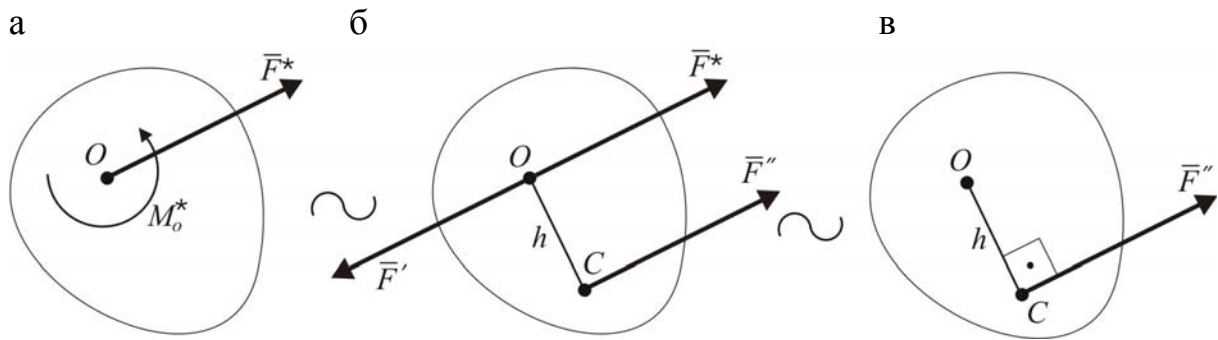


Рис. 1.39. Приведение к равнодействующей

Доказательство:

$$M_o(\bar{F}'') = F'' \cdot h = F' \frac{M^*}{F^*} = M^* = \sum M_o(\bar{F}_k), \text{ так как } F^* = F''.$$

1.6.4. Условия равновесия плоской произвольной системы сил

Если на тело действует \bar{F}^* – тело движется ускоренно и прямолинейно, если действует M^* – тело ускоренно вращается. То есть силы уравновешиваются, и тело находится в покое только в следующем случае:

$$\left. \begin{aligned} \bar{F}^* &= 0, \\ M_o^* &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (1.6.4)$$

Или в проекциях на координатные оси:

$$\left\{ \begin{aligned} \sum F_{kx} &= 0, \\ \sum F_{ky} &= 0, \\ \sum M_o &= 0. \end{aligned} \right. \quad (1.6.5)$$

Эти уравнения образуют *основную форму уравнений равновесия* произвольной плоской системы сил.

2-я форма уравнений равновесия плоской произвольной системы сил:

$$\left. \begin{aligned} \sum M_A &= 0, \\ \sum M_B &= 0, \\ \sum F_{kx} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (1.6.6)$$

Покажем, что эти уравнения образуют достаточное количество уравнений равновесия.

Для удовлетворения первых двух уравнений системы (1.6.6) равнодействующая сила должна проходить через точки A и B (рис. 1.40).

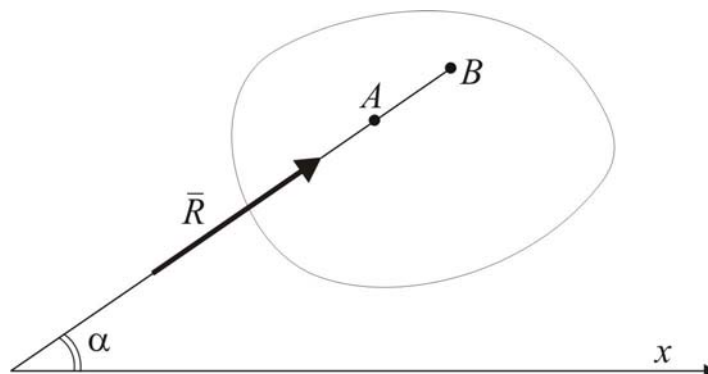


Рис. 1.40

Произвольно расположенные на плоскости силы приводятся или к паре сил, или к равнодействующей. Первые два уравнения могут удовлетворяться, если система сил приводится к равнодействующей, проходящей через точки A и B . (Если система сил приводится к паре, то, так как пары сил одинаковы для всех точек системы, $M_o^* = 0$, условия равновесия выполняются.) Ось x не перпендикулярна AB , поэтому равнодействующая должна иметь проекцию на ось x . Но третье уравнение системы дает

$$\sum F_{kx} = R_x = 0. \quad (1.6.7)$$

Следовательно, $R=0$.

3-я форма уравнений равновесия плоской произвольной системы сил:

$$\left. \begin{aligned} \sum M_A &= 0, \\ \sum M_B &= 0, \\ \sum M_C &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (1.6.8)$$

При этом точки A , B и C не лежат на одной прямой.

На самом деле, если данная система сил приводится к паре, то $M_o^* = 0$. Пусть система сил приводится к равнодействующей \bar{R} . Но сила имеет момент относительно точки, равный нулю только в том случае, когда она проходит через эту точку. Так как точки A , B и C не лежат на одной прямой, то сила \bar{R} не может иметь равные нулю моменты относительно всех этих точек. Следовательно, она сама должна быть равна нулю.

Пример №1. Найти реакции опор бруса с ломаной осью (рис. 1.41,а).

Дано: $q = 3$ кН/м; $P = 10$ кН; $M = 6$ кН·м.

Найти: реакции опор.

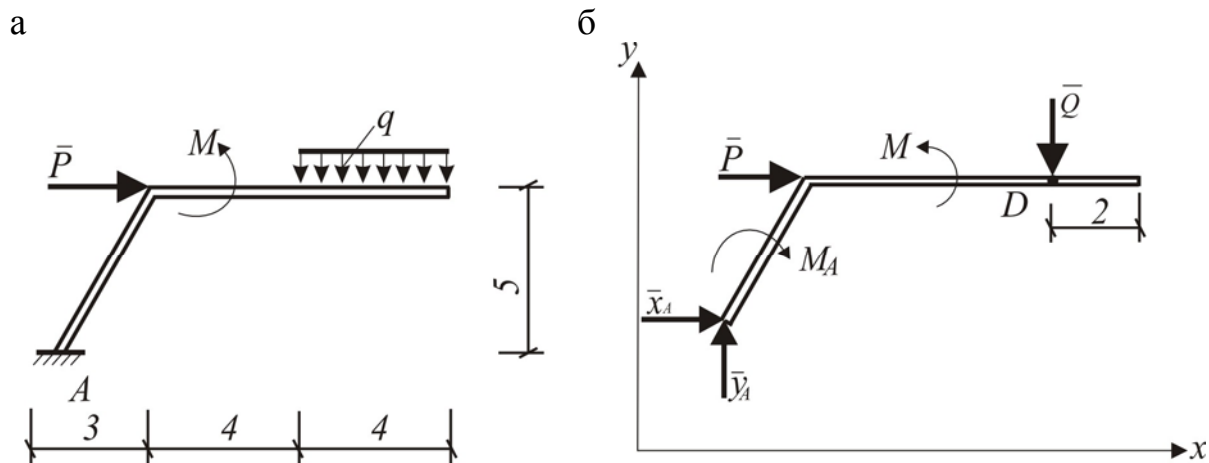


Рис. 1.41

Решение.

$$Q = q \cdot 4 = 3 \cdot 4 = 12 \text{ кН.}$$

Отделим тело от связей (рис. 1.41,б). Условия равновесия:

$$\begin{cases} \sum F_{kx} = 0; X_A + P = 0, \\ \sum F_{ky} = 0; Y_A - Q = 0, \\ \sum M_A = 0; -M_A - P \cdot 5 + M - Q \cdot 9 = 0. \end{cases}$$

$$X_A = -P = -10 \text{ кН,}$$

$$Y_A = Q = 12 \text{ кН,}$$

$$M_A = -50 + 6 - 108 = -152 \text{ кН} \cdot \text{м.}$$

Проверка:

$$\sum M_D = 0,$$

$$M - M_A + X_A \cdot 5 - Y_A \cdot 9 = 6 + 152 - 50 - 108 = 0.$$

1.7. Равновесие системы твердых тел

Рассмотрим задачу о равновесии сочлененной системы материальных тел, т.е. совокупности твердых тел, касающихся друг друга своими поверхностями или соединенных друг с другом шарнирами, гибкими нитями или стержнями (рис.1.42).

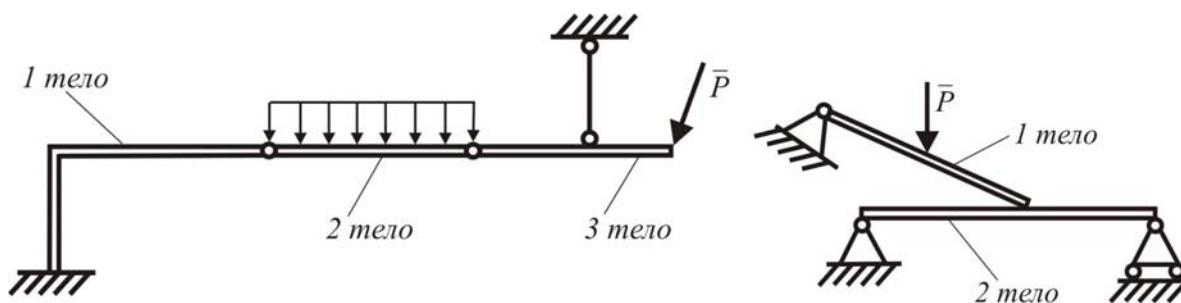


Рис. 1.42. Системы трех и двух твердых тел

При определении реакций связей системы тел основным является способ расчленения, при котором наряду с равновесием всей системы тел рассматривается равновесие отдельных тел. При этом все остальные тела системы и соответствующие связи мысленно отбрасываются, а их действие на тело, равновесие которого рассматривается, заменяется реакциями.

Если возьмем равновесие всей механической системы, то реакции связей между телами, как силы внутренние, взаимно уравновешенные, не учитываются. При рассмотрении каждого тела в отдельности или какой-нибудь группы тел, входящих в систему, реакции тех связей, которые были мысленно удалены, становятся внешними силами и входят в уравнения равновесия.

Пример. Определить реакции опор составной конструкции (рис. 1.43), которая представляет собой трехшарнирную арку.

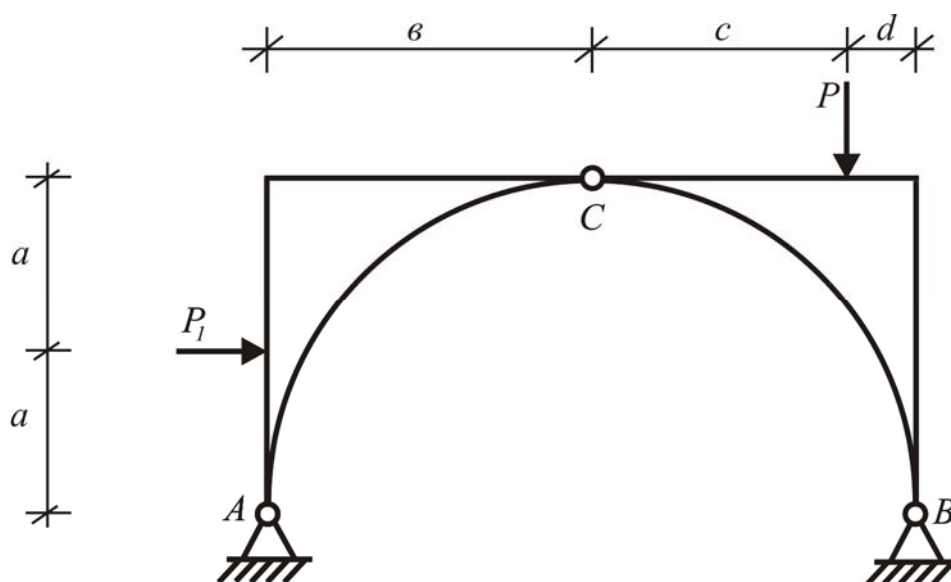


Рис. 1.43. Конструкция, состоящая из двух тел

Решение. Освобождаем арку от внешних связей.

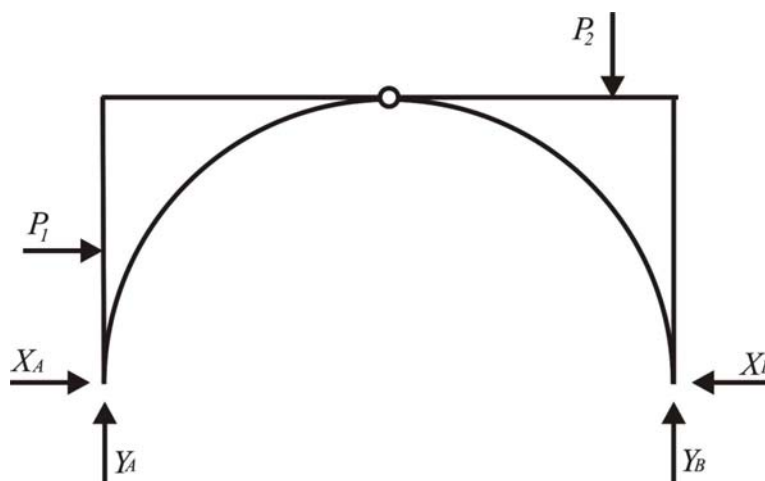


Рис. 1.44. Вся конструкция с отброшенными внешними связями

Здесь 4 неизвестные силы и 3 уравнения равновесия.

Рассмотрим равновесие какой-либо одной полуарки. Отбрасываем мысленно шарниры A и C вместе с другой полуаркой.

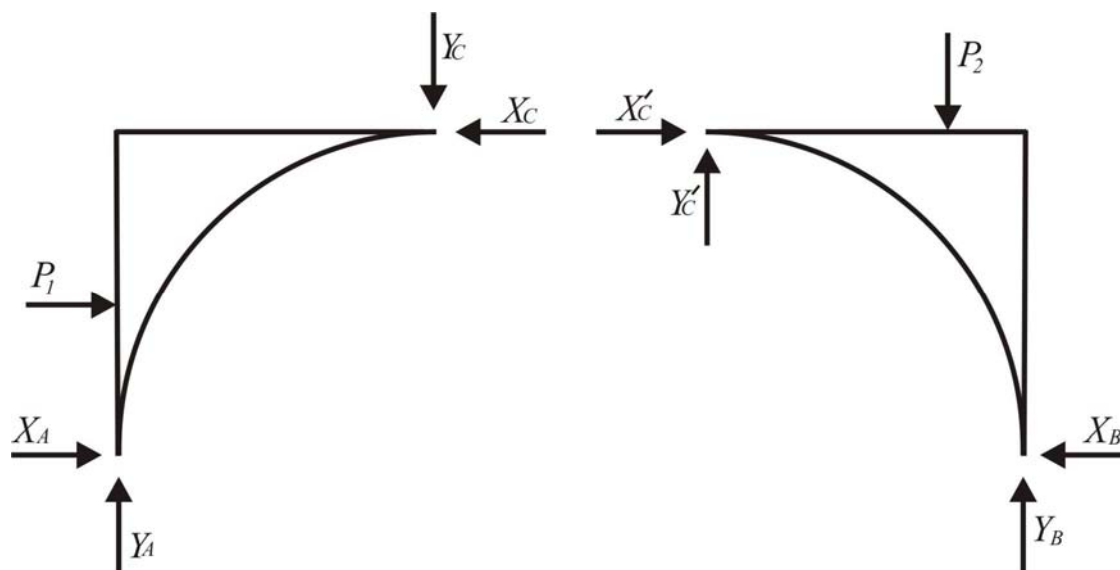


Рис. 1.45. Конструкция, разделенная на два твердых тела

Для каждого твердого тела, находящегося под действием произвольной плоской системы сил можно составить 3 уравнения равновесия. Для двух полуарок – 6 уравнений. Здесь 6 неизвестных реакций, т.е. задача определения реакций статически определима.

Составим уравнения равновесия. При этом используем, например, всю конструкцию и левую часть арки.

Для всей системы:

- 1) $\sum F_{kx} = 0, X_A + P_1 - X_B = 0;$
- 2) $\sum F_{ky} = 0, Y_A + Y_B - P_2 = 0;$
- 3) $\sum M_B = 0, P_2 \cdot d - P_1 \cdot a - Y_A(b + c + d) = 0.$

Для левой части:

- 4) $\sum M_C = 0, P_2 \cdot a + X_A \cdot 2a - Y_A b = 0;$
- 5) $\sum F_{kx} = 0, X_A + P_1 - X_C = 0;$
- 6) $\sum Y = 0, Y_A - Y_C = 0.$

Решение удобно начать с третьего уравнения, так как оно содержит одно неизвестное Y_A :

$$Y_A = (P_2 \cdot d - P_1 \cdot a) / (b + c + d).$$

Далее из второго уравнения получаем:

$$Y_B = -Y_A + P_2;$$

из четвертого:

$$X_A = (Y_A \cdot b - P_2 \cdot a) / (2a);$$

из пятого:

$$X_C = X_A + P_1;$$

из шестого:

$$Y_C = Y_A;$$

и, наконец, из первого:

$$X_B = X_A + P_1.$$

1.8. Алгоритмизация расчета ферм методом вырезания узлов

1.8.1. Традиционный ручной расчет

Расчет ферм методом вырезания узлов сводится к последовательному рассмотрению условий равновесия сил, сходящихся в каждом из узлов фермы.

Рассмотрим в качестве примера ферму, изображенную на рис. 1.46.

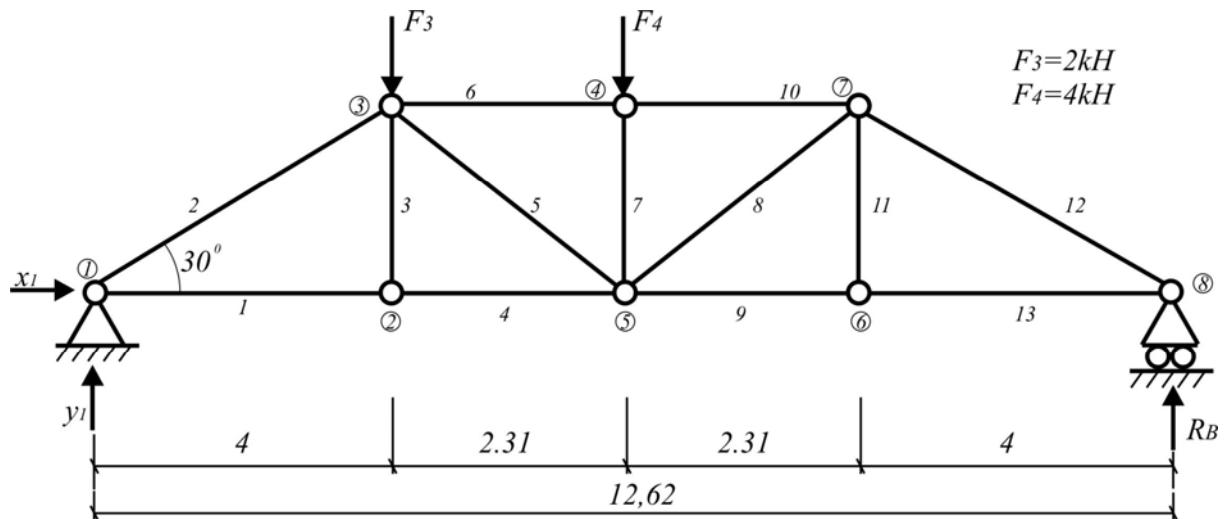


Рис. 1.46. Расчетная схема фермы

Число узлов $n = 8$. Число стержней $m = 13$.

Проверим соотношение $m = 2n - 3$. Получаем: $13 = 2 \cdot 8 - 3$. Значит, $13 = 13$ – соотношение выполняется; следовательно, ферма из треугольников неизменяема и статически определима.

Решение, как правило, начинается с определения опорных реакций. Составляем уравнения равновесия для фермы в целом:

$$\begin{aligned} 1. \sum F_{KX} &= 0; & X_A &= 0; \\ 2. \sum F_{KY} &= 0; & Y_1 - F_3 - F_4 + R_B &= 0; \\ 3. \sum M_1 &= 0; & -F_3 \cdot 4 - F_4 \cdot 6,31 + R_B \cdot 12,62 &= 0. \end{aligned}$$

Из 3-го уравнения:

$$R_B = \frac{8 + 4 \cdot 6,31}{12,62} = 2,63 \text{ кН.}$$

Из 2-го уравнения:

$$Y_1 = 2 + 4 - 2,63 = 3,37 \text{ кН.}$$

Проверка:

$$\begin{aligned} \sum M_8 &= 0, \\ F_2 \cdot 6,31 + F_1 \cdot 8,62 - Y_1 \cdot 12,62 &= 4 \cdot 6,31 + 2 \cdot 8,62 - 3,37 \cdot 12,62 = \\ &= 42,48 - 42,52 = -0,04. \end{aligned}$$

Ошибка вычислений составляет:

$$\frac{0,04 \cdot 100}{42,48} = 0,09 \text{ \%}.$$

Для определения 13 неизвестных внутренних усилий необходимо составить 13 уравнений равновесия. Для плоской системы сходящихся сил уравнения равновесия записываются в виде суммы проекций сил на любые две непараллельные оси:

$$\begin{aligned}\sum F_{kx} &= 0; \\ \sum F_{ky} &= 0.\end{aligned}$$

Будем последовательно отделять от фермы один узел за другим, рассматривая условия их равновесия. Начинаем с узла 1, где сходятся два стержня, так как из двух уравнений равновесия можно определить только два неизвестных усилия.

У з е л 1 :

$$\left. \begin{aligned}1. \sum F_{kx} &= 0; \quad S_1 + S_2 \cos 30^\circ = 0, \\ 2. \sum F_{ky} &= 0; \quad Y_1 + S_2 \sin 30^\circ = 0.\end{aligned}\right\}$$

$$S_2 = -6,74 \text{ кН (сжат);}$$

$$S_1 = 5,837 \text{ кН (растянут).}$$

У з е л 2 :

$$3. \sum F_{kx} = 0; \quad -S_1 + S_4 = 0;$$

$$4. \sum F_{ky} = 0; \quad S_3 = 0.$$

$$S_4 = 5,837 \text{ кН.}$$

У з е л 3 :

$$5. \sum F_{kx} = 0; \quad S_6 + S \cos 45^\circ - S_2 \cos 30^\circ = 0;$$

$$6. \sum F_{ky} = 0; \quad -S_2 \sin 30^\circ - S_3 - F_{3y} - S_5 \sin 45^\circ = 0.$$

$$S_4 = 5,837 \text{ кН.}$$

Из 6-го уравнения:

$$S_5 = \frac{+3,37 - 2}{0,707} = 1,638 \text{ кН.}$$

Из 5-го уравнения:

$$S_6 = -6,74 \cdot 0,866 - 1,938 \cdot 0,707 = -7,207 \text{ кН.}$$

У з е л 4 и т.д.

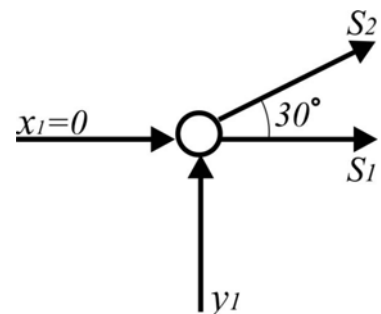


Рис. 1.47. Узел 1

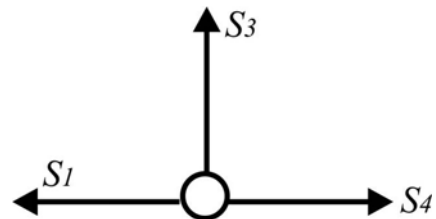


Рис. 1.48. Узел 2

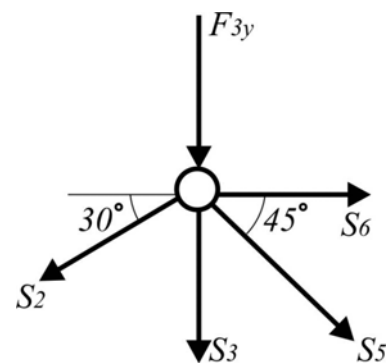


Рис. 1.49. Узел 3

Четырнадцатое, пятнадцатое и шестнадцатое уравнения, составляемые для узлов 7 и 8, служат для проверки результатов.

Окончательные результаты сводятся в табл. 1.2.

Т а б л и ц а 1 . 2

№ стержня	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
Усилия, кН	5,84	-6,74	0	5,84	1,938	-7,207	4,0	-3,72	4,555	-7,2	0	-5,26	4,555

Усилия в стержнях 7–13 целесообразно проверить самостоятельно.

Недостаток МВУ – погрешность при вычислении какой-нибудь силы отражается на значениях последующих определяемых сил.

Для определения усилий в стержнях можно не находить предварительно реакции опор, а составить и решить систему из 16 уравнений (по два для 8 узлов), в которых неизвестными будут 13 усилий в стержнях и 3 опорные реакции.

1.8.2. Алгоритмизация расчета для ЭВМ

Составленные уравнения равновесия могут быть записаны в матричной форме:

$$A\bar{S} = \bar{P},$$

$$\text{где } A = \begin{bmatrix} 1 & \cos 30 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \sin 30 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \cos 30 & 0 & 0 & \cos 45 & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \sin 30 & 1 & 0 & \sin 45 & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{bmatrix}$$

есть квадратная матрица размерностью 13×13 , ($m \times m$), составленная из коэффициентов перед внутренними усилиями;

\bar{S} – вектор внутренних усилий размерностью m ,

$$\bar{S} = [S_1 \ S_2 \ S_3 \ S_4 \ \dots \ S_{13}]^T;$$

\bar{P} – вектор внешних сил размерностью m .

$$\bar{P} = [x_1 \ y_1 \ 0 \ 0 \ F_{3x} \ F_{3y} \ \dots]^T.$$

Для того чтобы ЭВМ могла сформировать уравнения равновесия узлов фермы, следует ввести в нее необходимые данные. Рассмотрим некоторый узел l .

Уравнение равновесия для этого узла имеет вид:

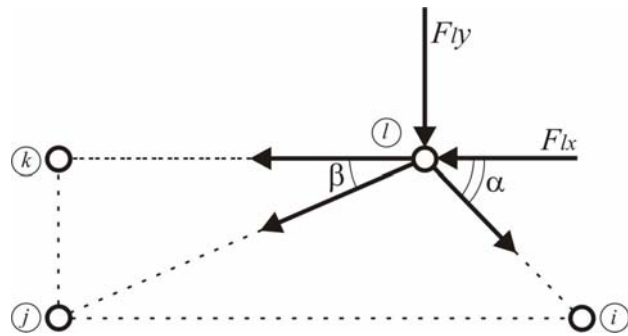


Рис. 1.50. Узел фермы

$$\sum F_{kx} = 0;$$

$$S_{l-k} \cdot \cos 180^\circ + S_{l-j} \cos(180^\circ - \beta) + S_{l-i} \cos \alpha - F_{lx} = 0.$$

$$\sum F_{ky} = 0;$$

$$-S_{l-j} \sin(180^\circ - \beta) - S_{l-i} \sin \alpha - F_{ly} = 0.$$

Т.е. для составления уравнений проекций должны быть известны:

- 1) проекции действующих на узел l внешних сил;
- 2) узлы, с которыми узел l соединен стержнями;
- 3) узлы наклона стержней к осям.

Кроме того, должно быть известно общее количество стержней и узлов. Эту информацию можно дать следующим образом: пронумеруем все узлы фермы в последовательности, соответствующей порядку расчета методом вырезания узлов. Составим матрицу связей C , в которой показывается, какие узлы связаны между собой. Например, для фермы, представленной на рис. 1.51: $n = 6$, $m = 9$.

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \\ 2 & 3 \\ 2 & 4 \\ 3 & 4 \\ 3 & 5 \\ 4 & 5 \\ 4 & 6 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}.$$

Размерность этой матрицы $2 \times m$. Сформируем вектор-столбец нагрузок

$$D = [F_{1x} F_{1y} x_2 y_2 \ 0 \ 0 \dots]^T.$$

Компоненты этого вектора – проекции внешних сил на оси. Размерность его равна m .

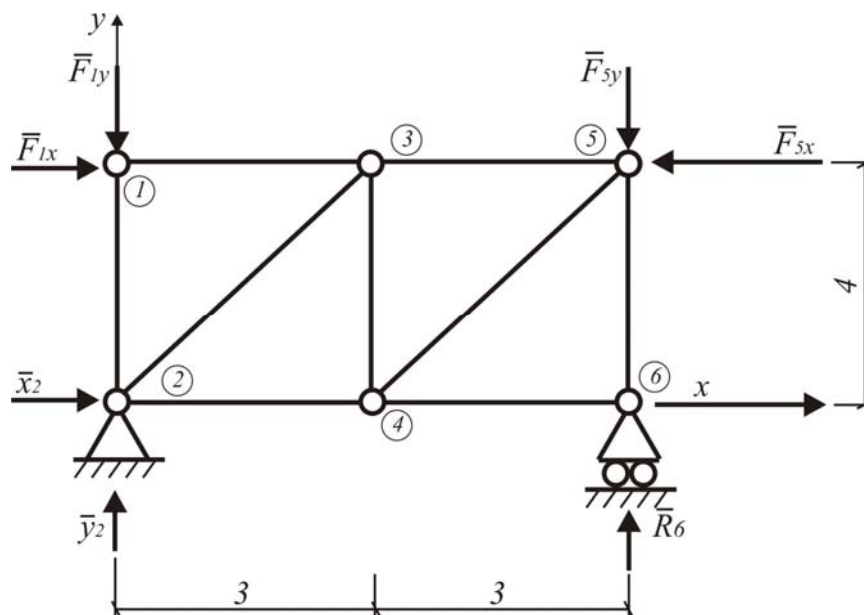


Рис. 1.51. Расчетная ферма

Нанесем на ферму декартову систему координат. Сформируем матрицу координат узлов размерностью (n узлов) \times (2 координаты):

$$B = \begin{matrix} & \begin{matrix} x_k & y_k \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} 0 & 4 \\ 0 & 0 \\ 3 & 4 \\ 3 & 0 \\ 6 & 4 \\ 6 & 0 \end{bmatrix} & \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{matrix} \end{matrix}$$

С помощью этой матрицы и матрицы C определяются углы наклона стержней к осям.

Таким образом, исходная информация для ЭВМ содержит числа m , n и три указанные матрицы.

Алгоритм расчета может быть построен по следующей схеме:

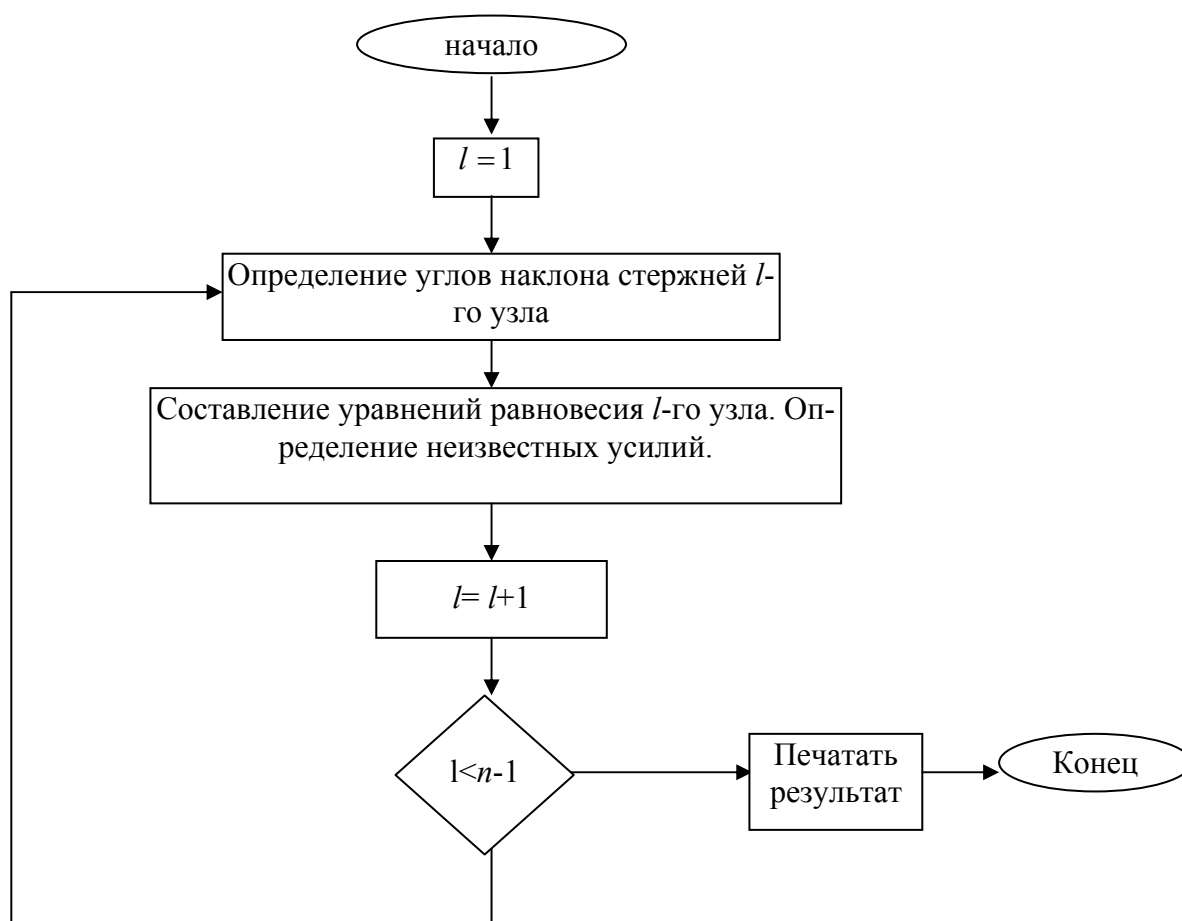


Рис. 1.52. Блок-схема расчета фермы методом вырезания узлов

1.9. Статически определимые и статически неопределимые задачи

Статически определимыми называются задачи, которые можно решать методами статики твердого тела, т.е. задачи, в которых число неизвестных не превышает числа уравнений равновесия сил.

Статически неопределимыми называют задачи с числом неизвестных, превышающим число уравнений равновесия сил, т.е. задачи, которые нельзя решать методом статики твердого тела. Для решения нужно учитывать деформацию тела под нагрузкой.

Для плоской произвольной системы сил можно для тела составить три уравнения равновесия. Следовательно, в этом случае задача статически разрешима при числе неизвестных сил не более трех.

Для системы сходящихся сил можно составить два уравнения равновесия. Значит, решение возможно при числе неизвестных не более двух.

Если рассматривается система n тел, нагруженная силами, произвольно расположенными на плоскости, то общее число уравнений статики $3n$.

Значит, количество неизвестных сил в задачах статики для n тел $m \leq 3n$.

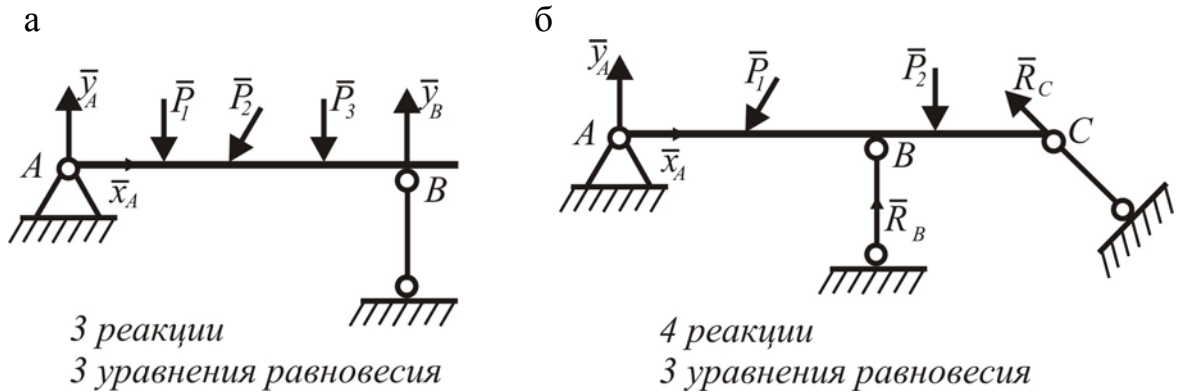


Рис. 1.53. Статически определимая (а) и статически неопределимая (б) балки

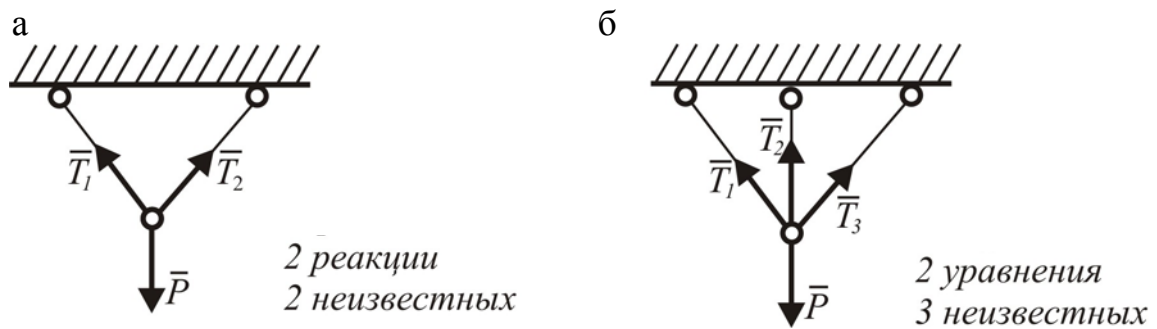


Рис. 1.54. Статически определимая (а) и статически неопределимая (б) подвески

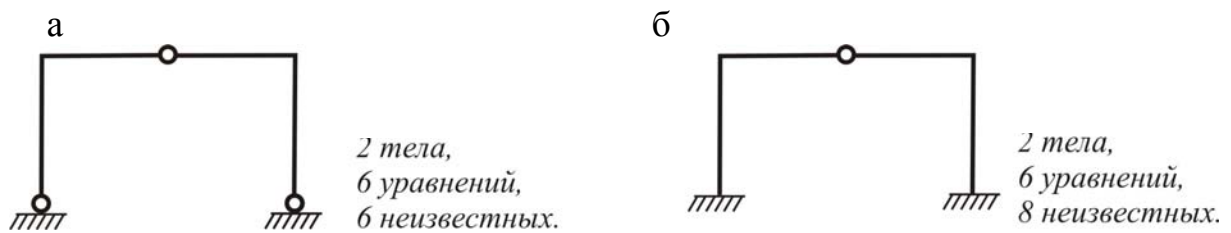


Рис. 1.55. Статически определимая (а) и статически неопределимая (б) рамы

1.10. Устойчивость при опрокидывании

Для тела, нежестко закрепленного наложенными на него связями, возникает важный вопрос об устойчивости равновесия.

Рычагом называется твердое тело, имеющее неподвижную ось вращения и находящееся под действием сил, лежащих в плоскости, перпендикулярной этой оси. Такой рычаг изображен на рис. 1.56. Через опорную точку O проходит ось вращения. На рычаг действуют силы P_1, \dots, P_n .

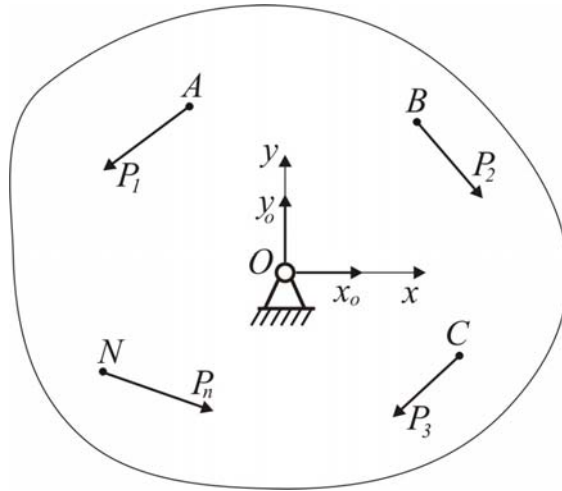


Рис. 1.56. Рычаг

Реакцию рычага разложим на две составляющие силы $-X_0$ и Y_0 . Составим условие равновесия сил, действующих на рычаг:

$$\left. \begin{aligned} \sum X_i = 0; \quad X_0 + \sum_{i=1}^n X_i = 0; \\ \sum Y_i = 0; \quad Y_0 + \sum_{i=1}^n Y_i = 0; \\ \sum M_0 = 0; \quad \sum_{i=1}^n M_{i0} = 0. \end{aligned} \right\} \quad (1.10.1)$$

Рычаг находится в равновесии, если алгебраическая сумма моментов всех заданных сил, приложенных к рычагу, относительно опорной точки равна нулю:

$$\sum_{i=1}^n M_{i0} = 0. \quad (1.10.2)$$

Это уравнение является условием устойчивости тел при опрокидывании.

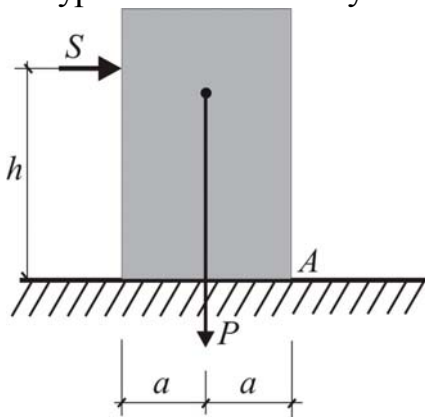


Рис. 1.57. Проверка устойчивости параллелепипеда

Пример № 1. Рассмотрим задачу об устойчивости на опрокидывание на примере прямоугольного параллелепипеда (рис. 1.57), стоящего на шероховатой плоскости.

Считается, что сила S не может сдвинуть тело. Рассмотрим вопрос устойчивости при опрокидывании путем поворота вокруг ребра A . Сила S – опрокидывает, сила P – препятствует опрокидыванию.

$$\begin{aligned} \sum M_{iA} &= 0, \\ -Sh + Pa &= 0; \\ Pa &= Sh. \end{aligned}$$

Здесь $M_{\text{опр}} = Sh$ – опрокидывающий момент;

$Pa = M_{\text{уд}}$ – удерживающий момент.

На границе устойчивости

$$M_{\text{уд}} = M_{\text{опр}}. \quad (1.10.3)$$

Устойчивость часто определяется отношением удерживающего момента к опрокидывающему:

$$K = M_{\text{уд}} / M_{\text{опр}}, \quad (1.10.4)$$

где K – коэффициент запаса устойчивости.

Условие устойчивости $K > 1$. Предельное равновесие будет достигнуто при $K = 1$.

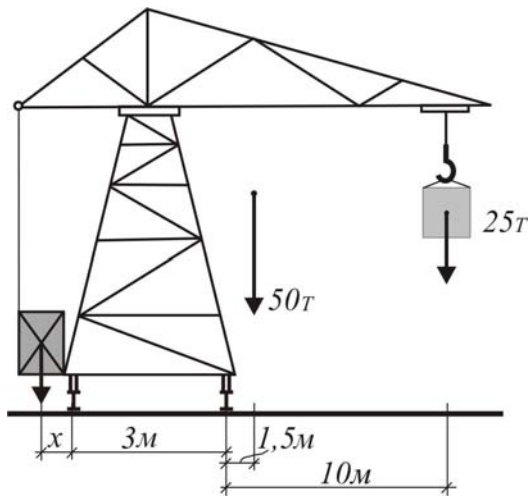


Рис. 1.58. Устойчивость крана

Пример №2. Рассмотрим задачу расчета на устойчивость при опрокидывании крана. Вес крана 50 т. Его размеры показаны на рис. 1.58. Грузоподъемность крана 25 т. Определить необходимый вес противовеса Q и его расположение (относительно правого рельса на рис. 1.58)

Дано: $P = 50$ т.

Найти: вес противовеса Q_{\min} и x_{\max} .

Решение. Здесь возможны два варианта опрокидывания: поворот вокруг правого рельса и опрокидывание путем поворота вокруг левого рельса (без груза).

$$\begin{cases} Q \cdot x - 50 \cdot 4,5 = 0; \\ 25 \cdot 10 + 50 \cdot 1,5 - Q(3 + x) = 0. \end{cases}$$

Решая систему, находим:

$$Q \cdot 3 = 100;$$

$$Q = 33 \text{ (т)}; \quad x = 6,75 \text{ (м)}.$$

1.11. Статика в пространстве

1.11.1. Момент силы относительно центра как вектор

Вращательный эффект силы \vec{F} относительно точки O в пространстве (рис. 1.59) определяется тремя характеристиками:

- 1) плоскостью поворота OAB ,
- 2) модулем момента силы Fh в плоскости поворота;
- 3) направлением поворота этой плоскости.

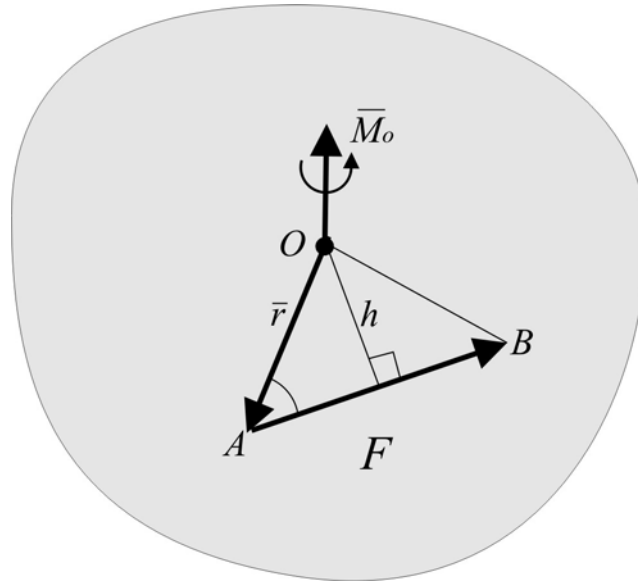


Рис. 1.59. Момент силы относительно точки как вектор

Положение плоскости в пространстве можно задать отрезком, перпендикулярным этой плоскости. Если задать величину этого отрезка, равную модулю момента ($|\vec{M}_0| = Fh$), и направить этот отрезок так, чтобы его направление определяло направление поворота (например, в сторону, откуда вращение представляется против часовой стрелки), то такой вектор полностью определит все три элемента момента силы в пространстве.

Покажем, что

$$\vec{M}_0 = \vec{r} \times \vec{F} \quad (1.11.1)$$

есть вектор, равный по величине и направлению моменту силы \vec{F} относительно центра O .

В самом деле, модуль момента силы \vec{F} составляет:

$$M_0 = Fh. \quad (1.11.2)$$

Модуль векторного произведения

$$|\vec{r} \times \vec{F}| = rF \sin(\widehat{\vec{r}, \vec{F}}) = Fh. \quad (1.11.3)$$

Следовательно, эти величины равны. Сравним направления.

Вектор \vec{M}_0 направлен перпендикулярно плоскости OAB в сторону, откуда поворот \vec{F} относительно точки O происходит против часовой стрелки. Векторное произведение $\vec{r} \times \vec{F}$ – это вектор, направленный перпендикулярно плоскости (\vec{r}, \vec{F}) в сторону, откуда вектор \vec{r} совмещается с вектором \vec{F} при повороте против часовой стрелки на угол $< 180^\circ$.

Следовательно,

$$\vec{M}_0 = \vec{r} \times \vec{F}. \quad (1.11.4)$$

1.11.2. Момент силы относительно оси

Как известно, радиус-вектор и вектор силы можно представить через проекции в виде

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}, \quad (1.11.5)$$

$$\vec{F} = F_x\vec{i} + F_y\vec{j} + F_z\vec{k}. \quad (1.11.6)$$

Перемножая эти векторы, получим:

$$\vec{M}_0 = \vec{i}(yF_z - zF_y) + \vec{j}(zF_x - xF_z) + \vec{k}(xF_y - yF_x). \quad (1.11.7)$$

Это же уравнение можно получить, используя теорию векторной алгебры:

$$\vec{M}_0 = \vec{r} \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x & y & z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} = \vec{i} \begin{vmatrix} y & z \\ F_y & F_z \end{vmatrix} - \vec{j} \begin{vmatrix} x & z \\ F_x & F_z \end{vmatrix} + \vec{k} \begin{vmatrix} x & y \\ F_x & F_z \end{vmatrix}. \quad (1.11.8)$$

С другой стороны известно, что

$$\vec{M}_0 = \vec{i}M_x + \vec{j}M_y + \vec{k}M_z. \quad (1.11.9)$$

Следовательно,

$$\left. \begin{aligned} M_x &= yF_z - zF_y, \\ M_y &= zF_x - xF_z, \\ M_z &= xF_y - yF_x. \end{aligned} \right\} \quad (1.11.10)$$

где M_x, M_y, M_z – моменты силы относительно соответствующих осей.

Действительно, определим момент силы \vec{F} , например, относительно оси z (рис. 1.60).

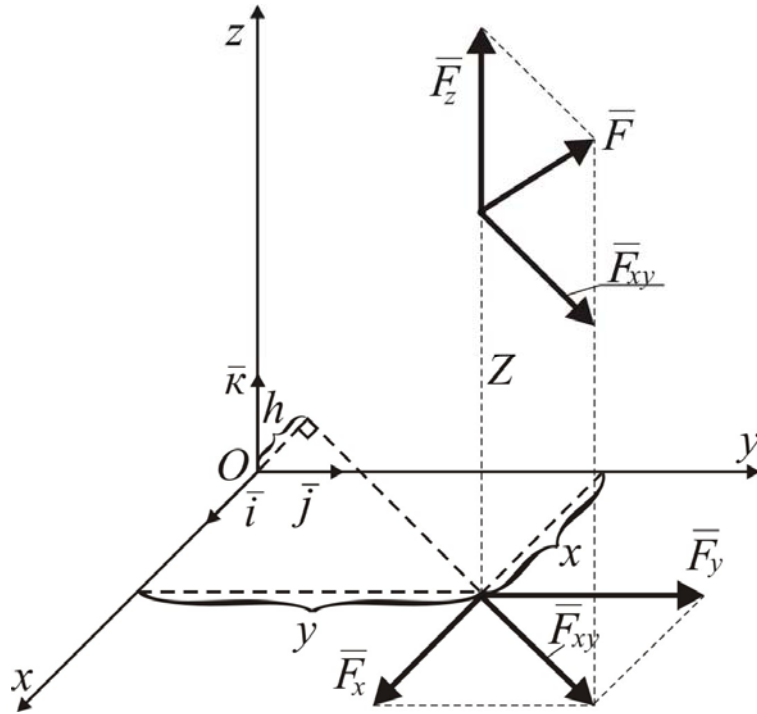


Рис. 1.60. Момент силы относительно оси

Разложим силу \vec{F} на две составляющие: силу \vec{F}_z , параллельную оси z , и силу \vec{F}_{xy} , параллельную плоскости xoy . Сила \vec{F}_z не имеет вращательного эффекта относительно оси z . Следовательно,

$$M_z(F) = M_z(F_{xy}) = -F_{xy}h = xF_y - yF_x. \quad (1.11.11)$$

Аналогичным образом можно показать справедливость выражений (1.11.10) относительно осей x и y . Для вычисления момента силы относительно некоторой оси силу проектируют на плоскость, перпендикулярную этой оси, и находят момент этой проекции относительно точки пересечения оси и плоскости.

1.11.3. Момент пары как вектор

Момент пары сил \vec{F} и \vec{F}' — $\vec{M}(\vec{F}, \vec{F}')$ — удобно записывать относительно одной из точек A или B (рис. 1.61):

$$\vec{M} = \vec{AB} \times \vec{F}, \quad (1.11.12)$$

направляя этот вектор перпендикулярно плоскости вращения пары в сторону, откуда вращение представляется против хода часовой стрелки. При этом очевидно, что величина момента, вычисленного относительно точки A , будет такой же, как величина момента пары сил относительно точки B :

$$M = M_A(\vec{F}') = M_B(\vec{F}). \quad (1.11.13)$$

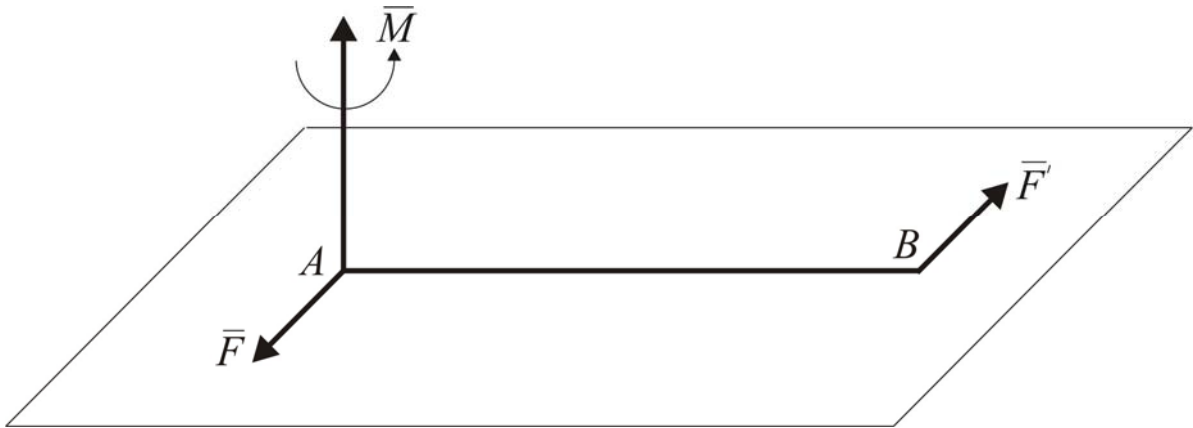


Рис. 1.61. Момент пары как вектор

1.11.4. Сложение пар сил в пространстве

Пусть в плоскости I действует пара сил \vec{P}_1 и \vec{P}'_1 с моментом $M_1 = P_1 h_1$, а в плоскости II – пара сил \vec{P}_2 и \vec{P}'_2 с моментом $M_2 = P_2 h_2$.

Приведем пары к одному плечу AB . Получим пару \vec{F}_1 и \vec{F}'_1 ($\vec{M}_1 = \overline{AB} \times \vec{F}_1$) и пару \vec{F}_2 и \vec{F}'_2 ($\vec{M}_2 = \overline{AB} \times \vec{F}_2$). Сложим силы F_1 и F_2 , а также F'_1 и F'_2 . Получим результирующую пару сил \vec{R} и \vec{R}' . Момент новой пары

$$\vec{M} = \overline{AB} \times \vec{R} = \overline{AB} \times (\vec{F}_1 + \vec{F}_2) = \overline{AB} \times \vec{F}_1 + \overline{AB} \times \vec{F}_2 = \vec{M}_1 + \vec{M}_2. \quad (1.11.14)$$

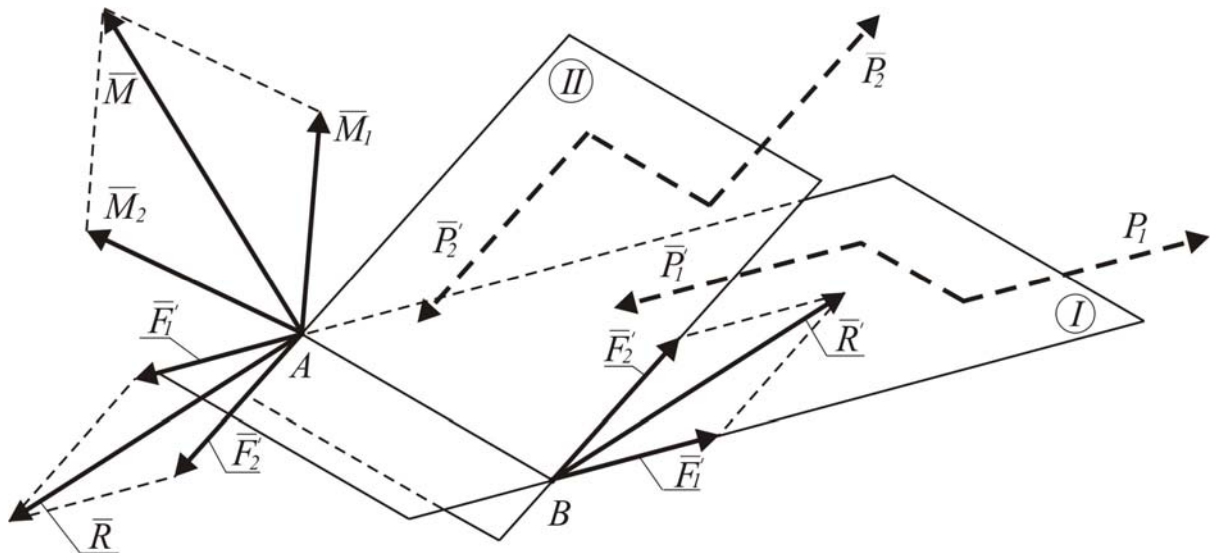


Рис. 1.62. Сложение пар сил в пространстве

Таким образом, сложить пары в пространстве – это значит геометрически сложить векторы-моменты этих пар.

1.11.5. Приведение произвольной пространственной системы сил

Теорема о параллельном переносе силы \vec{F} (рис. 1.63) полностью сохраняет свой смысл. Только момент присоединенной пары будет векторной величиной.

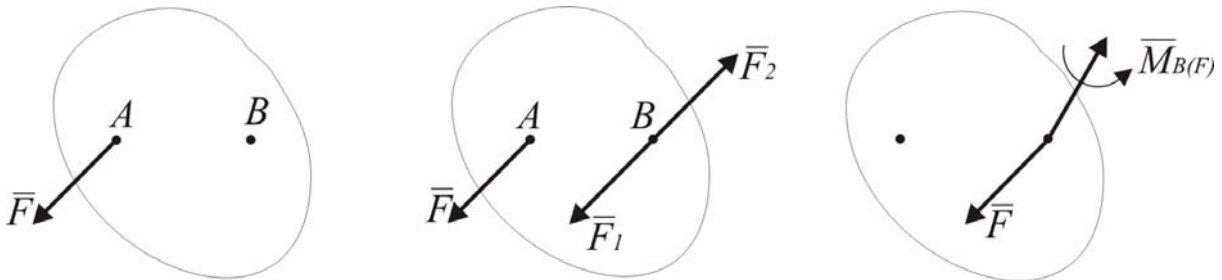


Рис. 1.63. Теорема о параллельном переносе силы в пространстве

Рассмотрим произвольную пространственную систему сил $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n$ (рис. 1.64,а). Перенесем силы $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n$ в заданный центр O , добавляя соответствующие пары сил (рис. 1.64,б).

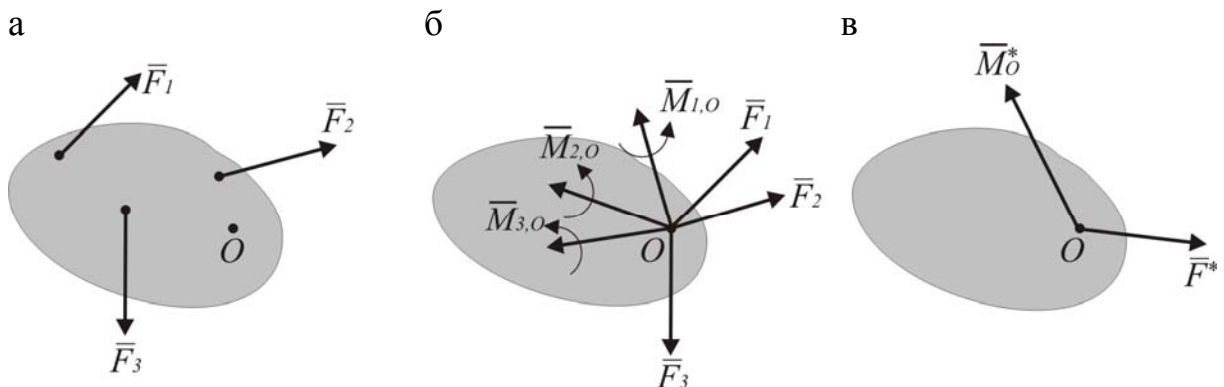


Рис.1.64. Приведение произвольной пространственной системы сил

Складывая силы и пары (векторы-моменты) в точке O , получим, что произвольная пространственная система сил приводится к одной силе (главный вектор системы сил) и к одному вектору-моменту (главный момент системы сил) (рис. 1.64,в).

$$\begin{cases} \vec{F}^* = \sum \vec{F}_k, \\ \vec{M}_0^* = \sum \vec{M}_{k(0)}. \end{cases} \quad (1.11.15)$$

1.11.6. Условия равновесия произвольной пространственной системы сил

Для равновесия произвольной пространственной системы сил необходимо и достаточно, чтобы одновременно были равны нулю главный вектор и главный момент системы сил:

$$\left. \begin{aligned} \vec{F}^* &= 0, \\ \vec{M}_0^* &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (1.11.16)$$

Проецируя эти уравнения на координатные оси, получим условия равновесия в аналитическом виде:

$$\begin{cases} \sum F_{kx} = 0, \\ \sum F_{ky} = 0, \\ \sum F_{kz} = 0, \\ \sum M_x = 0, \\ \sum M_y = 0, \\ \sum M_z = 0. \end{cases} \quad (1.11.17)$$

Пример № 1.

Определить реакции в защемлении балки с ломаной (под прямыми углами) осью (рис. 1.65).

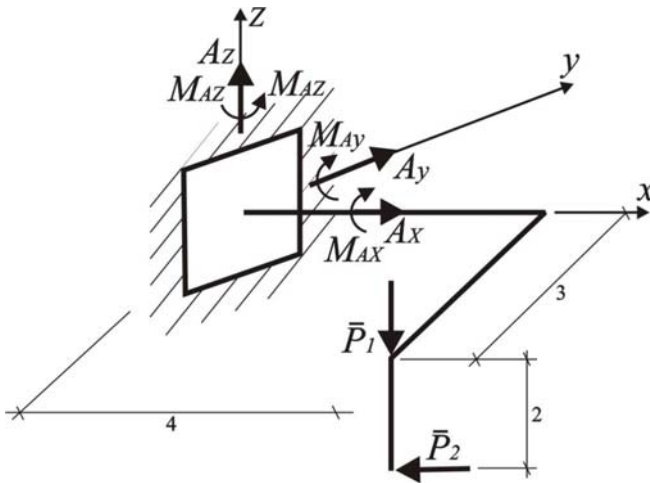


Рис. 1.65. Брус с ломаной осью, один конец которого защемлен

Для решения этой задачи мысленно отбросим связи, а их действие заменим действием реакций. Составим условия равновесия полученной пространственной системы сил:

$$\begin{aligned} \sum F_{kx} = 0; & \quad A_x - P_2 = 0; \\ \sum F_{ky} = 0; & \quad A_y = 0; \\ \sum F_{kz} = 0; & \quad A_z - P_1 = 0; \\ \sum M_x = 0; & \quad P_1 \cdot 3 - M_{Ax} = 0; \\ \sum M_y = 0; & \quad P_2 \cdot 2 + P_1 \cdot 4 - M_{Ay} = 0; \\ \sum M_z = 0; & \quad -M_{Az} + P_2 \cdot 3 = 0. \end{aligned}$$

Из этих уравнений и определим неизвестные реакции A_x , A_y , A_z , M_{Ax} , M_{Ay} , M_{Az} .

Пример № 2. Определить реакции опор плиты, изображенной на рис. 1.65.

Дано:

$$P_1 = P, \quad P_2 = 2P.$$

Найти: реакции в шарнирной опоре и усилия в стержнях 1, 2, 3 (см. рис. 1.66).

Решение. Отделим плиту от связей (рис. 1.67) и запишем уравнения равновесия:

$$\begin{cases} \sum F_{kx} = 0, & X_A + N_3 = 0, \\ \sum F_{ky} = 0, & Y_A - P_1 = 0, \\ \sum F_{kz} = 0, & Z_A - N_1 - N_2 + P_2 = 0, \\ \sum M_{AX} = 0, & -N_1 \cdot 2a + P_1 \cdot a + P_2 \cdot 2a = 0, \\ \sum M_{AY} = 0, & N_2 \cdot 3a - P_2 \cdot 3a + N_3 a = 0, \\ \sum M_{AZ} = 0, & -N_3 \cdot 2a = 0. \end{cases}$$

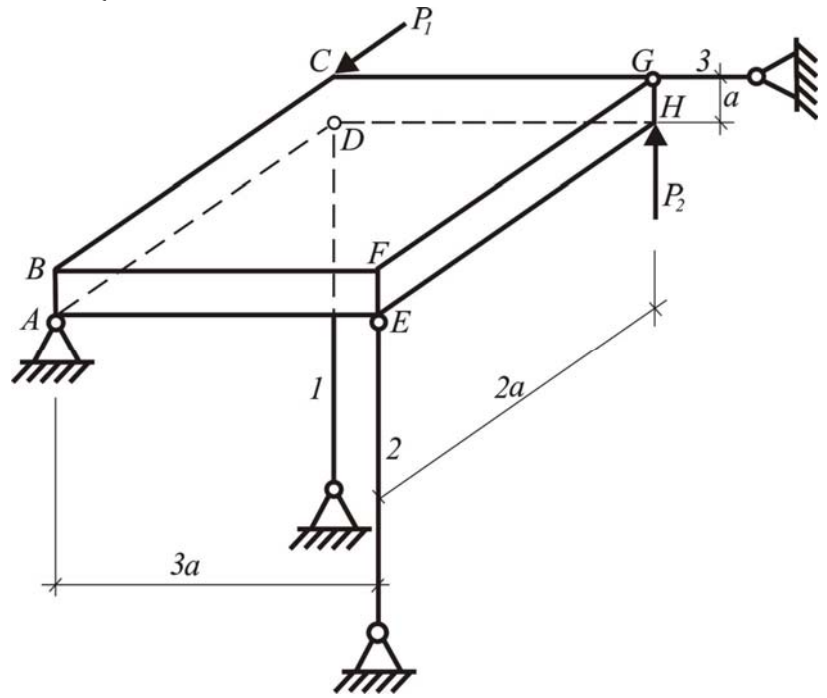


Рис. 1.66. Пространственная плита

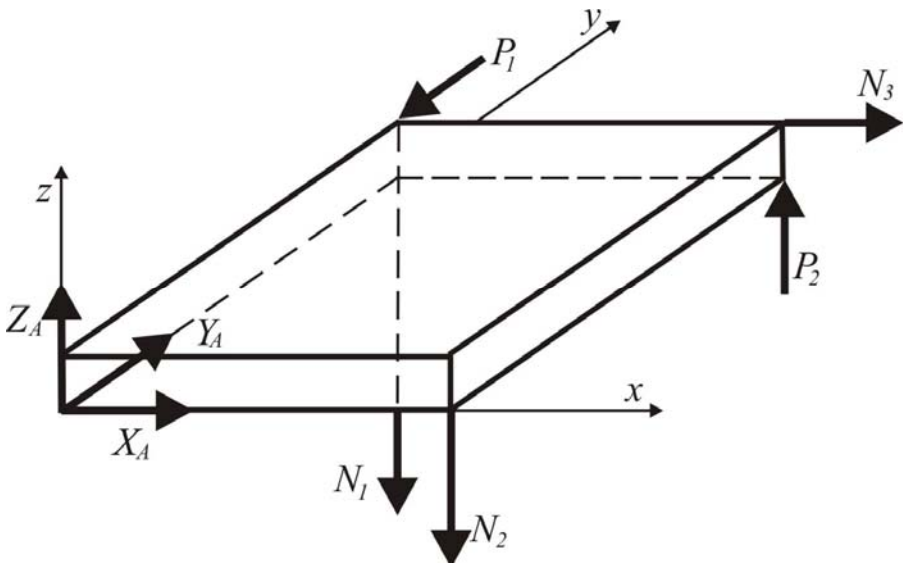


Рис. 1.67. Плита как свободное тело

Отсюда

$$N_1 = \frac{5}{2}P; N_2 = 2P; N_3 = 0; X_A = 0; Y_A = P; Z_A = \frac{5}{2}P.$$

1.12. Центр тяжести

1.12.1. Понятие центра тяжести

В механике имеется ряд фундаментальных понятий. О некоторых мы уже говорили – это, например, сила, пара сил, твердое тело. Некоторые, такие, как *центр тяжести*, *статический момент инерции*, нам еще предстоит изучить.

Родоначальником понятия центр тяжести является великий древнегреческий мыслитель Архимед. Еще в III в до н. э. он обнаружил возможность решить ряд задач на равновесие и доказать новые математические факты с помощью свойств центра тяжести. Например, так была доказана теорема о пересечении медиан в треугольнике, выведено правило рычага. В дальнейшем эти соображения были использованы и развиты многими механиками, геометрами и другими учёными. Был разработан так называемый барицентрический метод (бари означает тяжесть), имеющий приложения во многих областях естествознания (проективная геометрия Мебиуса, топология, вычислительная математика (при интерполировании сложных функций)).

При определении центра тяжести возникает задача определения положения центра параллельных сил. Рассмотрим ее.

1.12.2. Центр параллельных сил

Рассмотрим систему параллельных сил $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n$ с фиксированными точками приложения A_1, A_2, \dots, A_n (рис. 1.68) и покажем, что линии действия равнодействующей всегда проходят через одну и ту же точку C при одновременном повороте всех сил на один и тот же угол.

Равнодействующая двух сил \vec{F}_1 и \vec{F}_2 составляет:

$$R_{1,2} = F_1 + F_2 \quad (1.12.1)$$

и приложена в точке C_1 , положение которой определяется из соотношения

$$\frac{A_1 C_1}{C_1 A_2} = \frac{F_2}{F_1}. \quad (1.12.2)$$

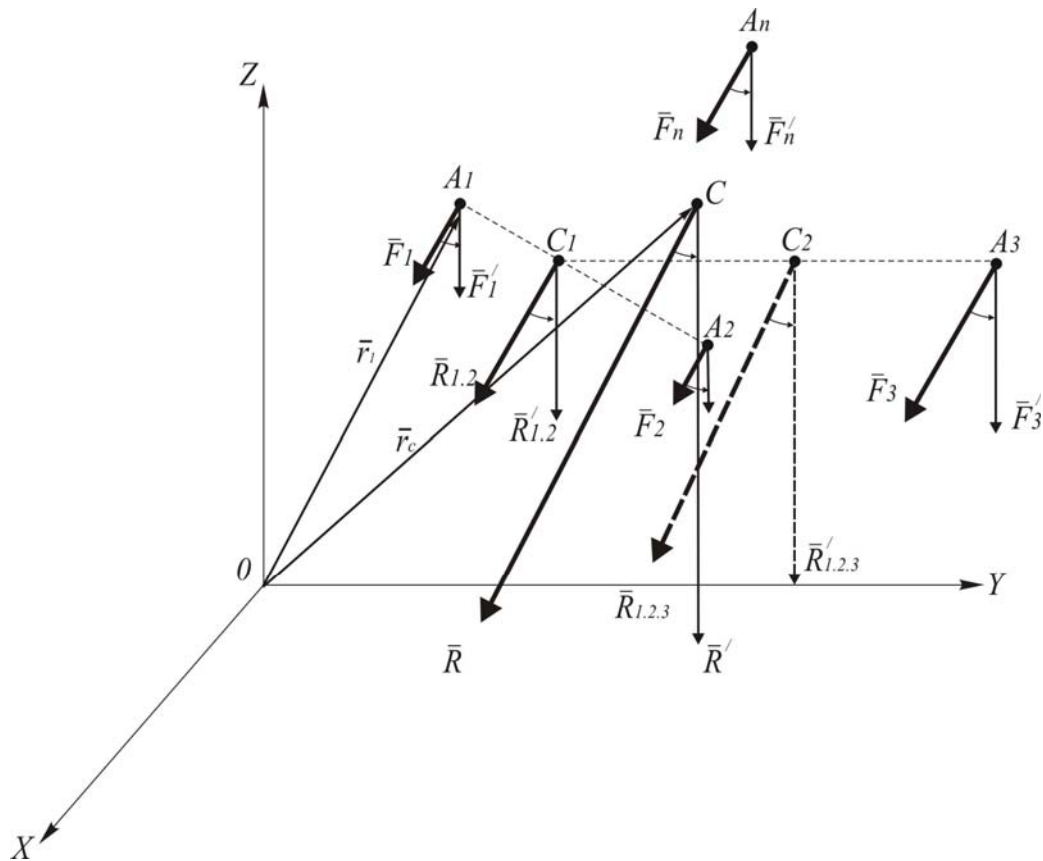


Рис. 1.68. Определение центра параллельных сил

Равнодействующая трех сил \bar{F}_1 , \bar{F}_2 и \bar{F}_3

$$R_{1,2,3} = F_1 + F_2 + F_3 \quad (1.12.3)$$

и приложена в точке C_2 , положение которой вычисляется по формуле

$$\frac{C_1 C_2}{C_2 A_3} = \frac{F_3}{R_{1,2}}. \quad (1.12.4)$$

И так далее. Равнодействующая всей системы параллельных сил

$$R = \sum F_k \quad (1.12.5)$$

и приложена в точке C .

Повернем все силы вокруг точки их приложения в одну сторону на одинаковый угол. Последовательно складывая силы новой системы, получим:

$$R'_{1,2} = R_{1,2} = F'_1 + F'_2, \quad (1.12.1')$$

$$R'_{1,2,3} = F'_1 + F'_2 + F'_3 = R_{1,2,3}, \quad (1.12.3')$$

$$R = \sum F_k. \quad (1.12.5')$$

Положение же точек C_1, C_2, \dots, C , определенное соотношением между силами

$$\frac{A_1 C_1}{C_1 A_2} = \frac{F_2}{F_1}, \quad (1.12.2')$$

$$\frac{C_1 C_2}{C_2 A_3} = \frac{F_3}{R_{1,2}}, \quad (1.12.4')$$

остается неизменным, так как не изменились ни модули сил, ни соотношение между силами.

Точка C , через которую проходит линия действия равнодействующей системы параллельных сил при любых поворотах всех сил системы на один и тот же угол, называется центром параллельных сил.

Выведем формулу для определения координат центра параллельных сил. Согласно теореме Вариньона имеем:

$$\bar{M}_0(\bar{R}) = \sum_{k=1}^n M_0(\bar{F}_k). \quad (1.12.6)$$

Здесь
$$\sum \bar{M}_0(\bar{F}_k) = \sum \bar{r}_k \times \bar{F}_k, \quad (1.12.7)$$

$$\bar{M}_0(\bar{R}) = \bar{r}_c \times \bar{R}. \quad (1.12.8)$$

Пусть \bar{u} – единичный вектор, параллельный заданной системе сил, тогда

$$\bar{F}_k = \bar{u} \cdot F_k, \quad (1.12.9)$$

$$\bar{R} = \sum \bar{F}_k = \sum \bar{u} \cdot F_k = \bar{u} \sum F_k, \quad (1.12.10)$$

$$\bar{r}_c \times \bar{u} \cdot \sum F_k = \sum \bar{r}_k \times \bar{u} \cdot F_k, \quad (1.12.11)$$

$$(\bar{r}_c \cdot \sum F_k - \sum \bar{r}_k \cdot F_k) \times \bar{u} = 0. \quad (1.12.12)$$

Так как положение центра параллельных сил не зависит от угла поворота сил и вектора \bar{u} , то нулю должно равняться выражение в скобках:

$$\bar{r}_c \cdot \sum F_k - \sum \bar{r}_k \cdot F_k = 0. \quad (1.12.13)$$

Отсюда

$$\bar{r}_c = \frac{\sum \bar{r}_k F_k}{\sum F_k}. \quad (1.12.14)$$

Проецируя это уравнение на координатные оси, получим:

$$\left. \begin{aligned} X_c &= \frac{\sum X_k F_k}{\sum F_k}, \\ Y_c &= \frac{\sum Y_k F_k}{\sum F_k}, \\ Z_c &= \frac{\sum Z_k F_k}{\sum F_k}, \end{aligned} \right\} \quad (1.12.15)$$

где X_k, Y_k, Z_k – координаты точек приложения сил F_k ;

X_c, Y_c, Z_c – координаты точки приложения равнодействующей.

Если система сил лежит в одной плоскости, например в XOY , то суммы произведений

$$\left. \begin{aligned} \sum Y_k F_k &= S_{ox}, \\ \sum X_k F_k &= S_{oy} \end{aligned} \right\} \quad (1.12.16)$$

называются статическими моментами относительно координатных осей.

1.12.3. Центр тяжести

На любую частицу тела, находящуюся вблизи земной поверхности, действует направленная вертикально вниз сила, называемая силой тяжести. Для тел, размеры которых очень малы по сравнению с Землей, силы тяжести, действующие на частицы тела, можно считать параллельными силами и сохраняющими свою величину при любых поворотах тела.

Равнодействующая сил тяжести $\bar{P}_1, \bar{P}_2, \dots, \bar{P}_n$, действующих на частицы данного тела, называется силой тяжести тела:

$$\bar{P} = \sum \bar{P}_k. \quad (1.12.17)$$

При любых поворотах тела силы \bar{P}_k остаются приложенными в одних и тех же точках тела и параллельны друг другу.

Следовательно, равнодействующая \bar{P} сил \bar{P}_k будет при любых положениях тела проходить через одну и ту же точку C , являющуюся центром параллельных сил тяжести \bar{P}_k . Эта точка и называется центром тяжести тела. Таким образом, *центром тяжести твердого тела называется точка, через которую проходит линия действия равнодействующей сил тяжести частиц данного тела, при любом положении тела в пространстве.*

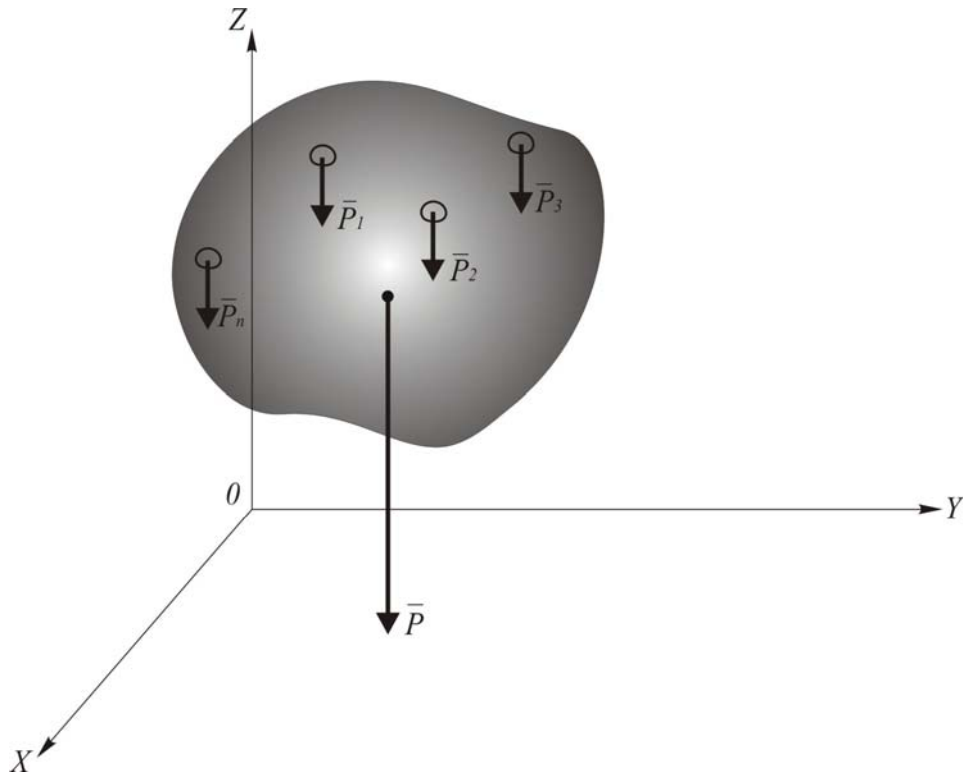


Рис. 1.70. Центр тяжести

Координаты центра тяжести как центра параллельных сил определяются по формулам:

$$\begin{cases} X_c = \frac{\sum X_k P_k}{\sum P_k}, \\ Y_c = \frac{\sum X_k P_k}{P}, \\ Z_c = \frac{\sum X_k P_k}{P}. \end{cases} \quad (1.12.18)$$

где X_k, Y_k, Z_k – координаты точек приложения сил тяжести частиц тела.

1.12.4. Координаты центра тяжести однородных тел

Для однородных тел

$$P_k = V_k \gamma, \quad (1.12.19)$$

$$P = V \gamma, \quad (1.12.20)$$

где γ – объемный вес вещества.

Следовательно формулы (1.9.18) можно упростить:

$$\left. \begin{aligned} X_c &= \frac{\gamma \sum X_k V_k}{\gamma \sum V_k} = \frac{\sum X_k V_k}{V}; \\ Y_c &= \frac{\sum Y_k V_k}{V}; \\ Z_c &= \frac{\sum Z_k V_k}{V}. \end{aligned} \right\} \quad (1.12.21)$$

Для пластин, плоских тел и, вообще, если V_k пропорционально A_k , то

$$V_k = A_k \cdot \delta, \quad (1.12.22)$$

$$\left. \begin{aligned} X_c &= \frac{\sum X_k A_k}{A}, \\ Y_c &= \frac{\sum Y_k A_k}{A}. \end{aligned} \right\} \quad (1.12.23)$$

Здесь A_k – площадь k -го элемента.

Если площадь поперечного сечения тела δ по всей длине мала и постоянна, то

$$V_k = l_k \cdot \delta, \quad (1.12.24)$$

$$\left. \begin{aligned} X_c &= \frac{\sum X_k l_k}{\sum l_k}, \\ Y_c &= \frac{\sum Y_k l_k}{l}, \\ Z_c &= \frac{\sum Z_k l_k}{\sum l_k}. \end{aligned} \right\} \quad (1.12.25)$$

Центр тяжести тела, имеющего ось симметрии

Если тело имеет плоскость, ось или центр симметрии, то центр тяжести его лежит соответственно в плоскости, на оси или в центре симметрии.

Доказательство. Возьмем частицу A_1 весом Q_1 , ей соответствует частица A_2 весом Q_2 , их равнодействующая лежит в середине отрезка A_1A_2 , т.е. в плоскости симметрии. Аналогично доказываются случаи, когда тело имеет ось или центр симметрии.

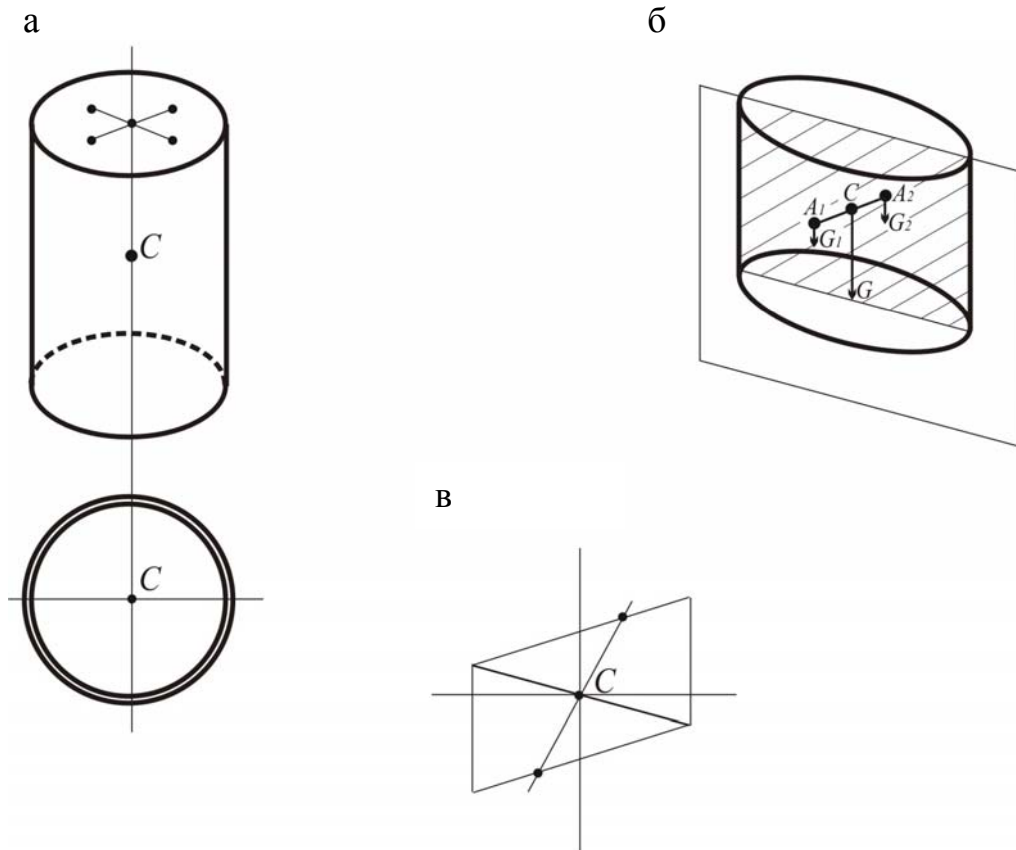


Рис. 1.71. Центр тяжести симметричных тел

1.12.5. Положение центра тяжести некоторых тел

Треугольник.

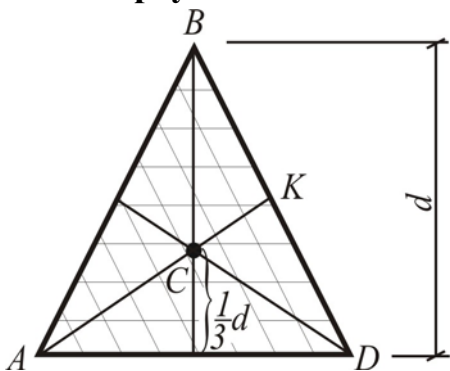


Рис.1.72. Центр тяжести треугольника

Разобьем треугольник прямыми на очень большое число узких полосок, параллельных одной из его сторон. Центр тяжести каждого отрезка лежит в середине; следовательно, центр тяжести треугольника лежит где-то на медиане.

Разбив треугольник также на полоски, параллельные его другой стороне, получим, что центр тяжести также должен лежать на медиане.

Следовательно, центр тяжести треугольника находится на пересечении медиан, на расстоянии $\frac{1}{3}$ трети длины медианы от точки пересечения ее со стороной треугольника.

ния ее со стороной треугольника.

Центр тяжести дуги окружности

$$X_C = \lim \frac{\sum X_k l_k}{\sum X_k} = \frac{\int_0^s x ds}{s},$$

$$x = R \cos \varphi,$$

$$ds = R d\varphi, \quad s = R 2\alpha,$$

$$X_C = \frac{\int_{-\alpha}^{\alpha} R^2 \cos \varphi d\varphi}{2R\alpha},$$

$$X_C = \frac{R \sin \alpha}{\alpha}.$$

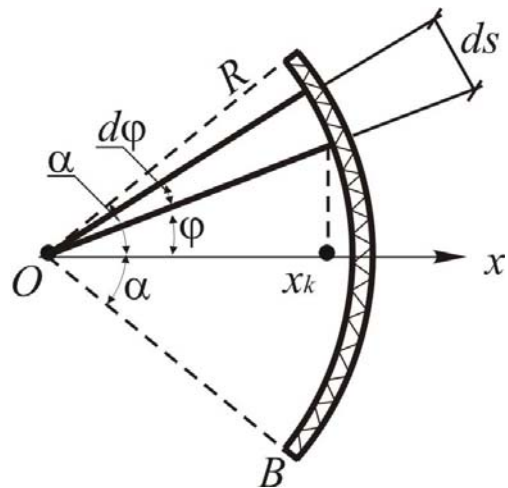


Рис. 1.73. Центр тяжести дуги

Центр тяжести сектора

Центры тяжести элементарных треугольников образуют дугу AB радиуса $r = \frac{2}{3}R$. След-

овательно, центр тяжести сектора имеет координату, равную координате центра тяжести данной дуги:

$$X_C = \frac{(2/3)R \sin \alpha}{\alpha}.$$

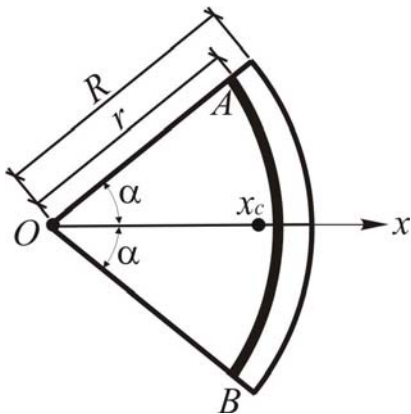


Рис. 1.74. Центр тяжести сектора

1.12.6. Определение положения центра тяжести сложной фигуры

1. Аналитический способ.

Таблица 1.3

№ п/п	X_k	Y_k	A_k
1	4,5	4	72
2	8	4	-4
3	3	10	27
вся	3,92	5,7	95

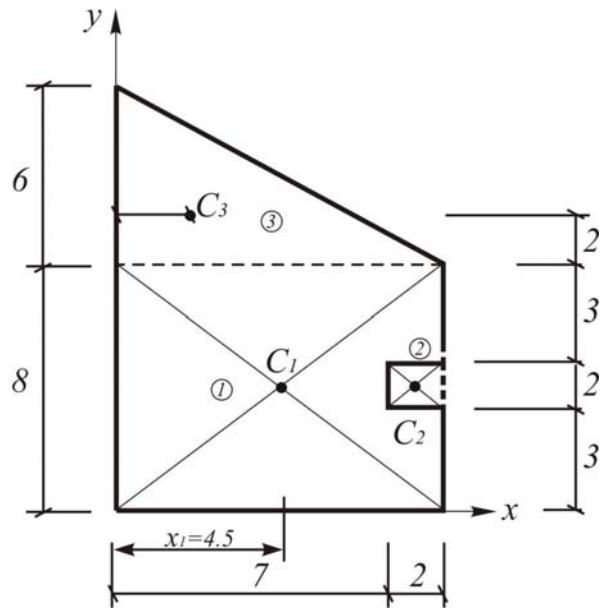


Рис. 1.75. Центр тяжести сложной пластины

$$X_C = \frac{4,5 \cdot 72 - 8 \cdot 4 + 3 \cdot 27}{95} = 3,92;$$

$$Y_C = \frac{72 \cdot 4 - 4 \cdot 4 + 27 \cdot 10}{95} = 5,7.$$

2. Экспериментальные способы.

2а. Подвешивание.

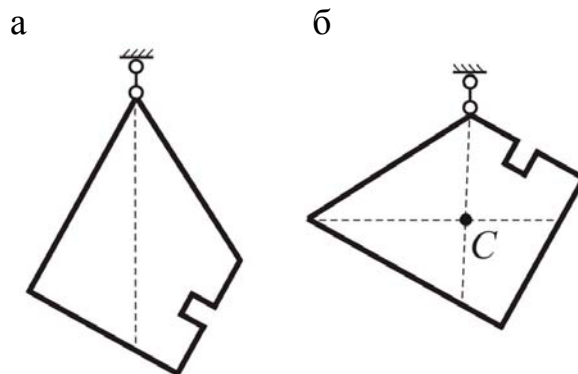


Рис. 1.76. Определение положения центра тяжести подвешиванием

2б. Взвешивание.

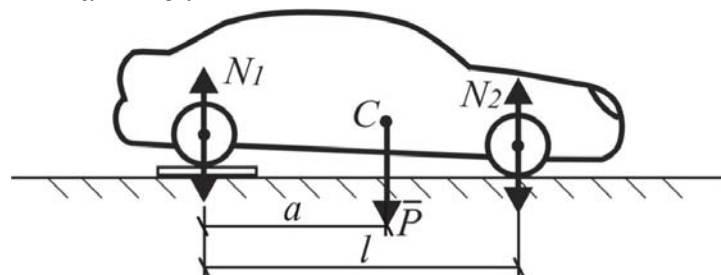


Рис. 1.77. Определение положения центра тяжести взвешиванием

1) Определяем взвешиванием N_1 ;

2) Определяем взвешиванием N_2 .

Далее находим расстояние от задней оси до центра тяжести:

$$N_1 \cdot a = N_2 (l - a),$$

$$a = \frac{N_2 l}{N_1 + N_2}.$$

1.13. Трение

1.13.1. Трение скольжения

При стремлении двигать одно тело по поверхности другого возникает сила сопротивления их относительному скольжению, называемая *силой трения скольжения*.

Возникновение трения обусловлено прежде всего шероховатостью поверхностей, создающей сопротивление перемещению, и наличием сцепления у прижатых друг к другу тел.

Исследованием трения впервые занимался Леонардо да Винчи. Законы трения, приемлемые для инженерных расчетов, были сформулированы французским физиком Кулоном (1736-1806) во второй половине 18 века.

Законы трения скольжения:

1) При стремлении сдвинуть одно тело по поверхности другого в плоскости соприкосновения тел возникает сила трения $F_{\text{тр}}$ (или сила сцепления), величина которой может принимать значения от 0 до F_{max} . Сила F_{max} , соответствующая началу движения, называется предельной силой сцепления. Сила трения всегда направлена противоположно направлению сдвига тела.

2) Величина предельной силы трения равна произведению статического коэффициента трения на нормальное давление:

$$F_{\text{max}} = f \cdot N, \quad (1.13.1)$$

где f – безразмерный коэффициент, определяется опытным путем, зависит от материалов соприкасающихся поверхностей и состояния этих поверхностей (обработка, смазка и т.д.).

3) Величина предельной силы трения в довольно широких пределах не зависит от размеров соприкасающихся поверхностей.

Итак, при равновесии имеем

$$F_{\text{тр}} \leq f \cdot N. \quad (1.13.2)$$

Экспериментально коэффициент трения можно определить с помощью простого прибора (рис. 1.78).

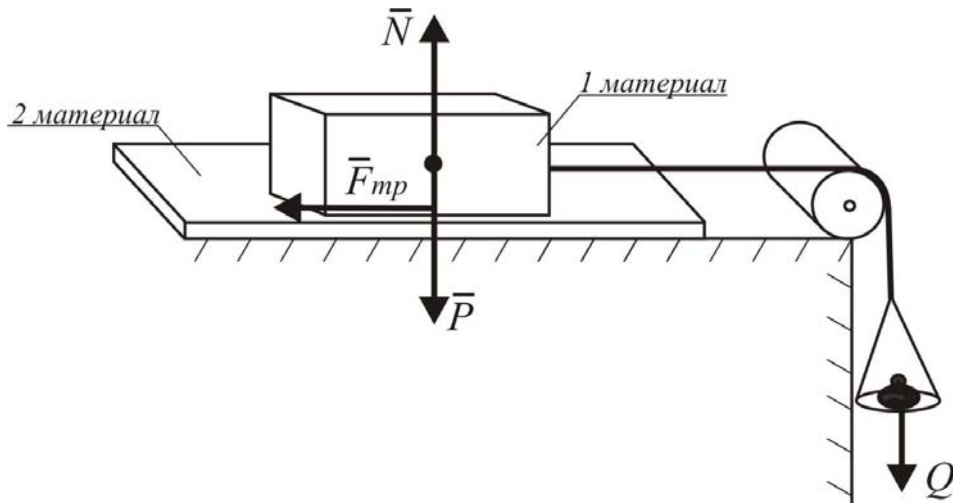


Рис. 1.78. Экспериментальное определение коэффициента трения

Брусок движется с места при силе Q . Меняем брусок P , изменяется и Q .

$$\begin{aligned}
 F_{\max} &= Q, \\
 N \cdot f &= F_{\max} = Q, \\
 N &= P, \\
 f &= \frac{Q}{P}.
 \end{aligned}$$

При этом $f \approx \text{const}$. Меняем площади соприкосновения. Подтверждаем 2-й и 3-й законы.

Реакция шероховатой поверхности, в отличие от реакции идеальной поверхности, имеет две составляющие: нормальную реакцию и силу сцепления. Полная реакция R (рис.1.79) направлена под некоторым углом к нормальной реакции N . При этом тангенс угла наклона можно определить из соотношения

$$\frac{F_{\text{тр}}}{N} = \frac{F_{\text{тр}}}{P} = \text{tg } \varphi,$$

где φ – угол между полной реакцией R и нормальной составляющей реакции N .

$$\begin{aligned}
 \frac{F_{\max}}{P} &= \text{tg } \varphi = f. \\
 (1.13.3) & \\
) &
 \end{aligned}$$

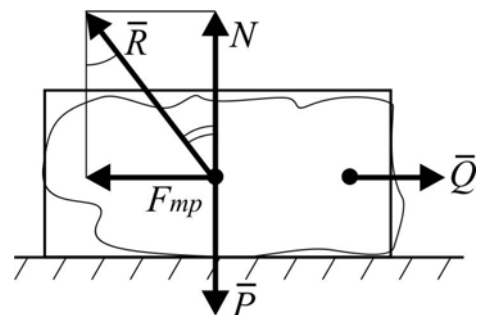


Рис. 1.79. Статическое равновесие

Угол φ , образованный полной реакцией с нормалью, называется углом трения.

Если перемещать тело по всем направлениям касательной к поверхности опирания то образуется конус трения (рис.1.80).

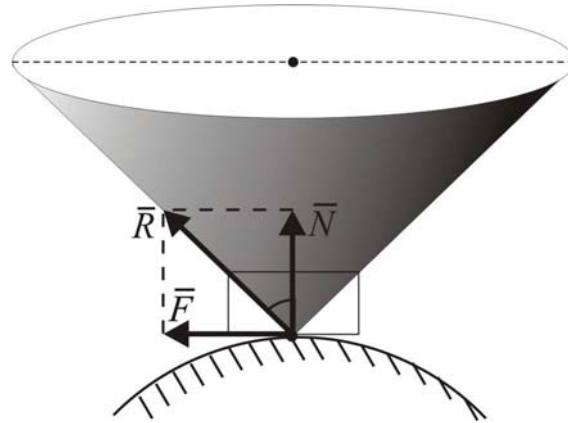


Рис. 1.80. Конус трения

Коэффициенты трения некоторых материалов приведены в табл. 1.4.

Т а б л и ц а 1 . 4

Коэффициенты трения скольжения некоторых материалов

№ п/п	Материалы	Коэффициент трения
1	Дерево по дереву	$f=0,4-0,7$
2	Металл по металлу	$f=0,15-0,25$
3	Сталь по льду	$f=0,027$

Выше говорилось о покое или равновесии, вплоть до критического, после чего начинается скольжение. При скольжении

$$F_{\text{тр}} = f_{\text{дин}} \cdot N,$$

где $f_{\text{дин}}$ — динамический коэффициент трения скольжения. Обычно $f_{\text{дин}} < f_{\text{тр. покоя}}$.

Реакция шероховатой поверхности, в отличие от реакции идеальной поверхности, имеет две составляющие: нормальную реакцию и силу сцепления.

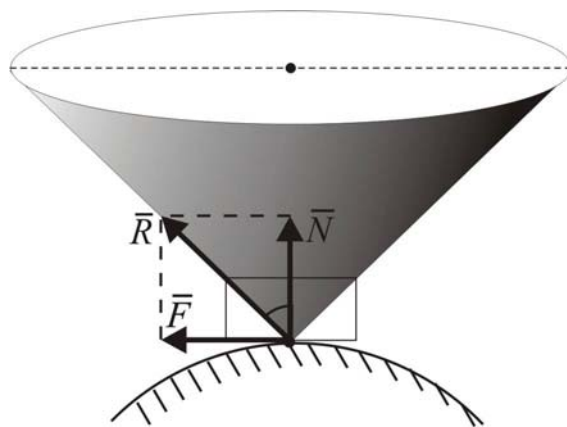


Рис. 1.80. Конус трения

Угол φ , образованный полной реакцией с нормалью, называется углом трения.

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{F}{N};$$

$$\operatorname{tg} \varphi_{\max} = f;$$

$$\varphi_{\max} = \operatorname{arc} \operatorname{tg} f.$$

Угол трения и одновременно коэффициент трения можно определить с помощью простого прибора (рис. 1.81) с градуированной, как транспортёр, шкалой.

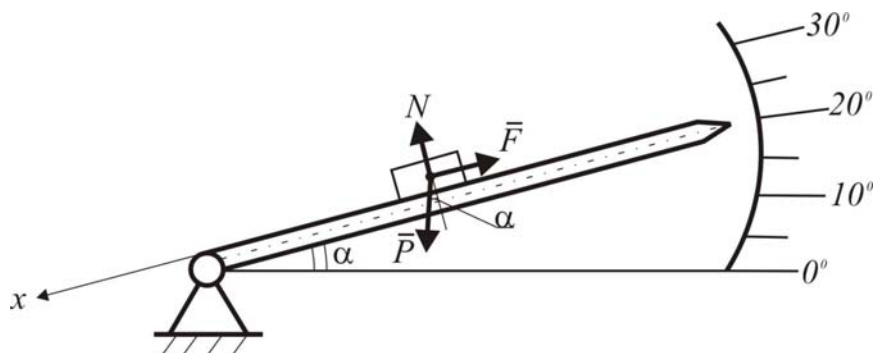


Рис. 1.81. Определение угла трения

Коэффициент трения определяется из условия равновесия:

$$\sum F_{kx} = 0,$$

$$F = P \cdot \sin \alpha,$$

$$Pf \cos \alpha = P \sin \alpha,$$

$$f = \operatorname{tg} \alpha = \operatorname{tg} \varphi.$$

Пример. Определить величину груза Q , удерживающего тело на наклонной плоскости.

Дано: $\alpha > \varphi, f$ – задан.

Решение.

1) от скольжения вниз удерживает груз Q_{\min}

$$\begin{aligned} \sum F_{kx} &= 0, \\ P \cdot \sin \alpha - Q - P \cdot f \cdot \cos \alpha &= 0. \\ Q &= P(\sin \alpha - f \cdot \cos \alpha). \end{aligned}$$

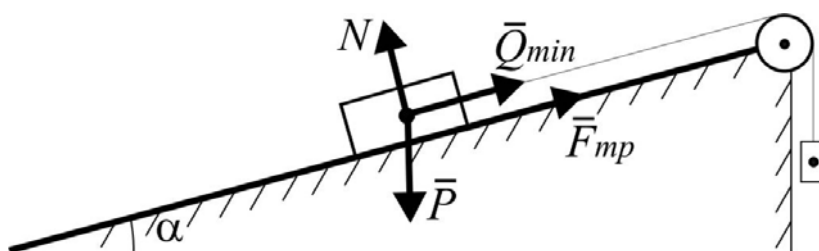


Рис. 1.82. Предполагается скольжение вниз

2) скольжение вверх обеспечивает груз Q_{\max} (рис. 1.83).

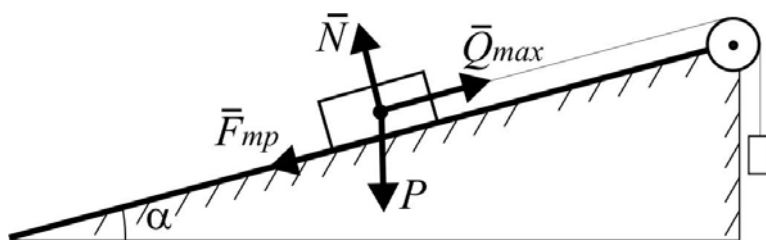


Рис. 1.83. Предполагается скольжение вверх

Величину груза Q_{\max} определяем из соотношений:

$$\begin{aligned} \sum F_x &= 0, \\ P \cdot \sin \alpha + P \cdot f \cdot \cos \alpha - Q &= 0. \end{aligned}$$

Отсюда

$$Q = P(\sin \alpha + f \cdot \cos \alpha).$$

1.13.2. Трение качения

Рассмотрим круглый цилиндрический каток, лежащий на шероховатой поверхности (рис. 1.84).

Вследствие деформаций поверхностей катка и плоскости касание происходит не в точке, а на некоторой площадке. При этом равнодействующая нормальной реакции смещается в сторону направления качения. Возникает момент сопротивления качению. Следовательно, трение качения это способность круглых тел сопротивляться качению.

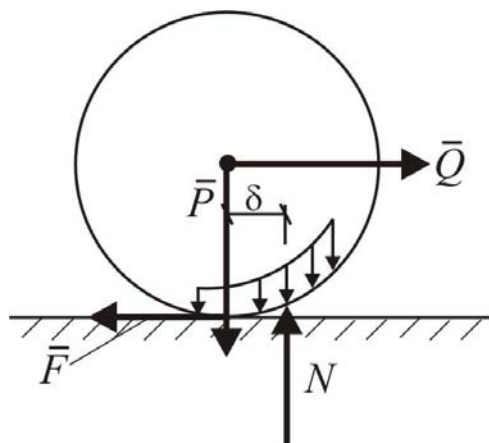


Рис. 1.84. Качение тяжелого цилиндрического катка

При некотором значении силы Q колесо может покатиться. Условие предельного равновесия:

$$Q \cdot R = P \cdot \delta. \quad (1.13.4)$$

Отсюда

$$\delta = \frac{Q \cdot R}{P}, \quad (1.13.5)$$

где δ – коэффициент трения качения. При этом значении силы Q колесо может покатиться.

Пример. Определить, при каких значениях угла α цилиндр радиусом R , лежащий на наклонной плоскости (рис. 1.85), остается в покое, если коэффициент трения качения равен δ .

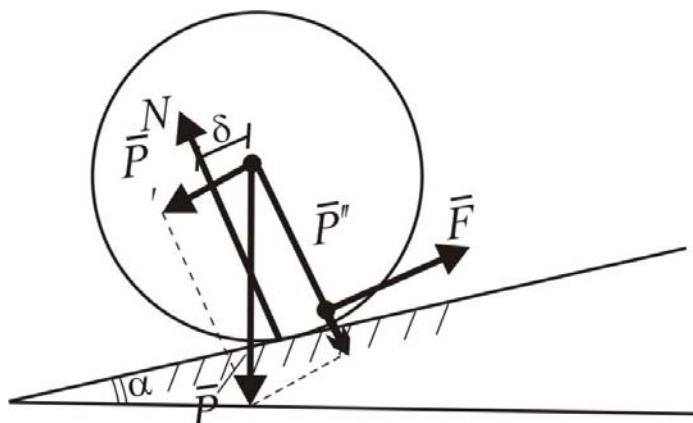


Рис.1.85. Определение предельного угла наклона плоскости

Решение.

Критическое равновесие при

$$M_{\text{вращ}} = M_{\text{уд}}.$$

Или

$$P' \cdot R = P'' \cdot \delta.$$

Отсюда находим

$$P \cdot \sin \alpha \cdot R = P \cdot \cos \alpha \cdot \delta,$$

$$\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{\delta}{R},$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\delta}{R},$$

$$\alpha = \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{\delta}{R}.$$

Равновесие возможно при $\alpha < \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{\delta}{K}$.

Контрольные вопросы

1. Что называется системой сходящихся сил?
2. Каковы геометрические и аналитические условия равновесия системы сходящихся сил?
3. При каком условии уравниваются три непараллельные силы, приложенные к одному телу?
4. Что вкладывается в понятие «шарнирная ферма»?
5. В чем заключается сущность способа вырезания узлов?
6. Что называется парой сил?
7. Что называется моментом силы относительно точки на плоскости?
8. Что называется моментом пары сил?
9. Что означает сложить пары сил на плоскости?
10. При каком условии система пар сил на плоскости будет находиться в равновесии?
11. Что называется произвольной плоской системой сил?
12. В чем суть теоремы о параллельном переносе силы?
13. К чему приводится плоская произвольная система сил?
14. В чем суть теоремы Вариньона?
15. Какие существуют формы записи аналитических условий равновесия плоской произвольной системы сил?
16. Что называется статически неопределимой системой?
17. Как вычисляется коэффициент запаса устойчивости на опрокидывание?

18. Что называется моментом силы относительно точки в пространстве?
19. Как вычисляется момент силы относительно оси?
20. Как сложить пары сил в пространстве?
21. К чему приводится произвольная пространственная система сил?
22. Каковы условия равновесия произвольной пространственной системы сил?
23. Каким свойством обладает центр параллельных сил?
24. Что такое «центр тяжести тела»?
25. Что называется трением скольжения?
26. Как вычисляется сила трения скольжения?
27. Что называется трением качения?
28. Как вычисляется момент сопротивления качению?

2. КИНЕМАТИКА

2.1. Основные понятия.

Векторный и координатный способы задания движения

2.1.1. Основные понятия кинематики

Кинематикой называется раздел теоретической механики, в котором изучается движение материальных тел вне связи с силами, вызывающими это движение. Слово «кинематика» происходит от греческого kinematos, что означает движение.

Механическое движение – это взаимное перемещение тел. Движение тел происходит в общем случае в трехмерном евклидовом *пространстве*. Для определения положения тела *системы координат* связывают с какими-либо неподвижными или движущимися телами. *Время* во всех системах координат или во всех *системах отсчета* протекает одинаково. Время является скалярной, положительной величиной. Отсчет времени ведется от некоторого начального момента ($t_0 = 0$).

Движущаяся точка описывает в пространстве некоторую линию. Эта линия называется *траекторией* движения точки.

Закон движения – уравнение, согласно которому происходит движение точки в данной системе отсчета.

Скорость точки – вектор, характеризующий быстроту изменения координат. Обозначение – \vec{v} , размерность – [м/с].

Ускорение точки – вектор, характеризующий быстроту изменения скорости по величине и направлению. Ускорение обычно обозначается \vec{a} . Размерность ускорения – [м/с²].

2.1.2. Определение кинематических характеристик точки при векторном способе задания движения

Будем описывать положение точки по отношению к выбранной системе отсчета с помощью радиуса-вектора \vec{r} . Движение точки считается заданным, если известен ее радиус-вектор как функция времени

$$\vec{r} = \vec{r}(t). \quad (2.1.1)$$

Уравнение (2.1.1) называется «закон движения в векторном виде». При этом траекторией точки будет геометрическое место концов радиуса-вектора.

За время $\Delta t = t_1 - t$ радиус-вектор перейдет из положения OM в положение OM_1 (рис. 2.1), при этом он изменится на величину

$$\Delta \vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}. \quad (2.1.2)$$

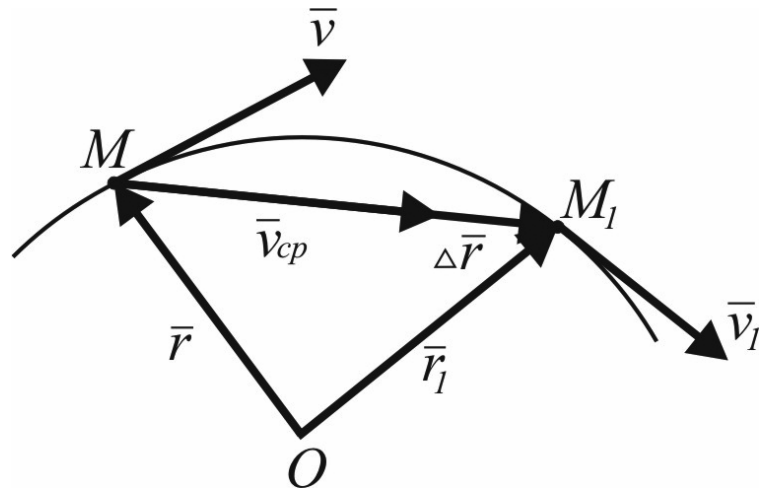


Рис. 2.1. Определение скорости при векторном способе задания движения

Средней скоростью точки \vec{v}_{cp} за промежуток времени Δt называется следующее отношение:

$$\vec{v}_{cp} = \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t}. \quad (2.1.3)$$

Устремляя промежуток времени Δt к нулю, находим скорость точки в момент времени t :

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt},$$

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}. \quad (2.1.4)$$

Скорость точки равна первой производной от её радиуса-вектора по времени. Предельное направление секущей $\Delta \vec{r}$ – это касательная. Поэтому вектор \vec{v} направлен по касательной к траектории в сторону движения точки.

Пусть в некоторый момент времени t движущаяся точка имеет скорость \vec{v} , а в момент времени $t_1 = t + \Delta t$ – скорость \vec{v}_1 (рис. 2.2).

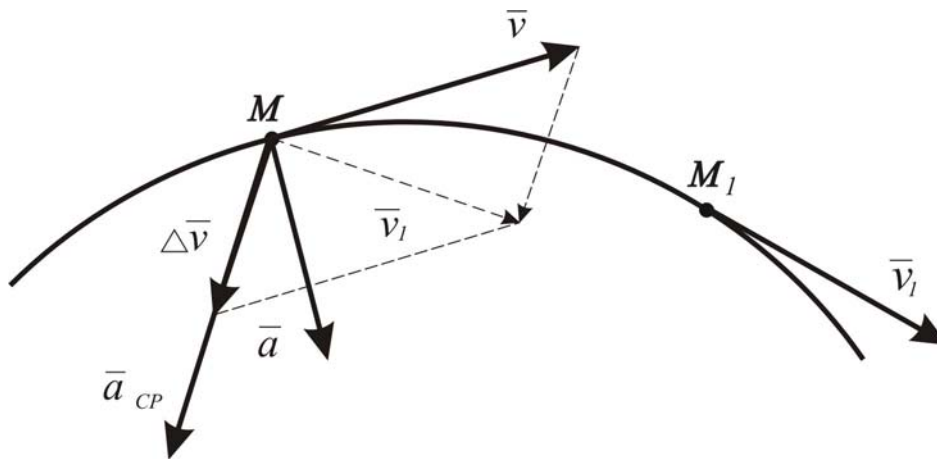


Рис. 2.2. Определение ускорения при векторном способе задания движения

За время Δt скорость точки изменилась на величину

$$\Delta \bar{v} = \bar{v}_1 - \bar{v}. \quad (2.1.5)$$

Средним ускорением точки называют отношение:

$$\bar{a}_{cp} = \frac{\Delta \bar{v}}{\Delta t}. \quad (2.1.6)$$

Вектор среднего ускорения \bar{a}_{cp} не имеет конкретной точки приложения.

Переходя к пределу, получим ускорение точки в данный момент времени:

$$\bar{a} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \bar{v}}{\Delta t} = \frac{d\bar{v}}{dt} = \frac{d^2 \bar{r}}{dt^2}. \quad (2.1.7)$$

Ускорение точки равно первой производной от вектора скорости по времени. Вектор приращения скорости $\Delta \bar{v}$ всегда направлен в сторону вогнутости траектории, поэтому вектор ускорения \bar{a} также направлен в сторону вогнутости траектории. Это правило не соблюдается только в той точке траектории, в которой скорость точки изменяется на противоположную (крайние положения маятника).

2.1.3. Координатный способ изучения движения

Исследуем движение в декартовых координатах. Движение в декартовых координатах считается заданным, если известны координаты точки как функции времени:

$$x = f_1(t); y = f_2(t); z = f_3(t). \quad (2.1.8)$$

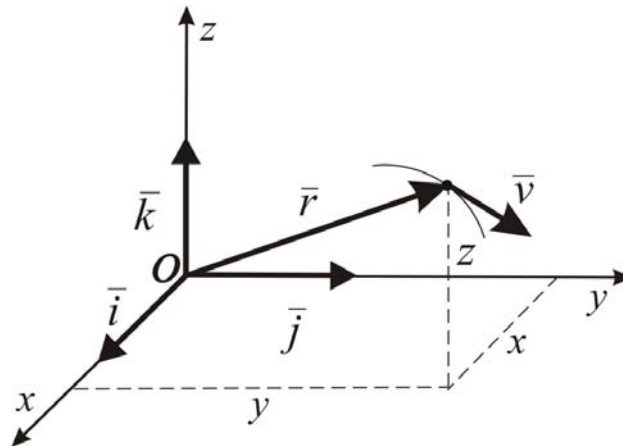


Рис. 2.3. Определение положения точки при координатном способе задания движения

По уравнениям (2.1.8) можно в зависимости от параметра t построить траекторию. В ряде случаев можно, исключив время t из уравнений движения $t = f_4(x)$, представить их в форме уравнений поверхностей:

$$F_1(x, y) = 0; F_2(x, z) = 0. \quad (2.1.9)$$

Уравнения (2.1.9) не содержат параметра времени, и их совместное решение дает линию пересечения этих поверхностей или уравнение траектории.

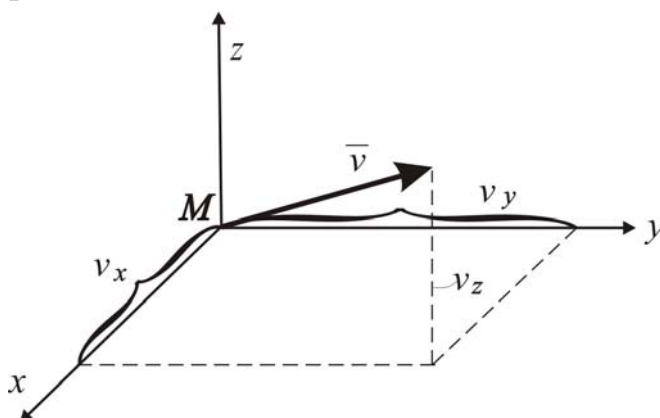


Рис. 2.4. Вектор скорости и его проекции

Разложим радиус-вектор \vec{r} и скорость точки \vec{v} на составляющие:

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}, \quad (2.1.10)$$

$$\vec{v} = v_x\vec{i} + v_y\vec{j} + v_z\vec{k}. \quad (2.1.11)$$

Здесь $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ – единичные орты; v_x, v_y, v_z – проекции скорости на оси координат.

С учетом выражения (2.1.10) уравнение (2.1.4) можно представить в виде

$$\bar{v} = \frac{d\bar{r}}{dt} = \frac{dx}{dt} \bar{i} + \frac{dy}{dt} \bar{j} + \frac{dz}{dt} \bar{k}. \quad (2.1.12)$$

Сопоставляя уравнения (2.1.12) и (2.1.11), получаем:

$$\left. \begin{aligned} v_x &= \frac{dx}{dt} = \dot{x}; \\ v_y &= \frac{dy}{dt} = \dot{y}; \\ v_z &= \frac{dz}{dt} = \dot{z}. \end{aligned} \right\} \quad (2.1.13)$$

Проекция скорости на координатную ось равна первой производной от соответствующей координаты по времени.

Полная величина скорости

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2} = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}. \quad (2.1.14)$$

Направление вектора скорости определяем с помощью направляющих косинусов:

$$\cos(\bar{v}, \hat{x}) = \frac{v_x}{v}; \quad \cos(\bar{v}, \hat{y}) = \frac{v_y}{v}; \quad \cos(\bar{v}, \hat{z}) = \frac{v_z}{v}. \quad (2.1.15)$$

Вектор ускорения точки также можно записать через проекции:

$$\bar{a} = a_x \bar{i} + a_y \bar{j} + a_z \bar{k}, \quad (2.1.16)$$

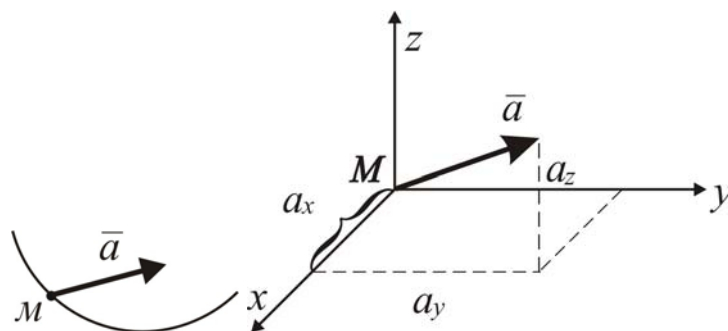


Рис. 2.5. Ускорение точки и его проекции

С другой стороны, дифференцируя уравнение (2.1.12) по времени, получаем:

$$\bar{a} = \frac{d\bar{v}}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2} \bar{i} + \frac{d^2y}{dt^2} \bar{j} + \frac{d^2z}{dt^2} \bar{k}. \quad (2.1.17)$$

Сопоставляя выражения (2.1.17) и (2.1.16), записываем:

$$\left. \begin{aligned} a_x &= \frac{dv_x}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}; \\ a_y &= \frac{dv_y}{dt} = \frac{d^2y}{dt^2}; \\ a_z &= \frac{dv_z}{dt} = \frac{d^2z}{dt^2}. \end{aligned} \right\} \quad (2.1.18)$$

Проекция ускорения на какую-либо ось равна второй производной от соответствующей координаты по времени.

Величина ускорения точки M определяется из выражения

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}. \quad (2.1.19)$$

Направление вектора ускорения определяем с помощью направляющих косинусов:

$$\cos(\bar{a}, \hat{x}) = \frac{a_x}{a}; \quad \cos(\bar{a}, \hat{y}) = \frac{a_y}{a}; \quad \cos(\bar{a}, \hat{z}) = \frac{a_z}{a}. \quad (2.1.20)$$

Пр и м е р . Уравнения движения точки имеют вид:

$$\begin{aligned} x &= 10 \sin \frac{\pi}{3} t, \text{ см,} \\ y &= 5 \cos \frac{\pi}{3} t, \text{ см.} \end{aligned}$$

Найти траекторию точки, \bar{v} и \bar{a} в момент времени $t_1 = 1$ с.

Решение.

Возведя обе части каждого уравнения в квадрат и сложив полученные уравнения, имеем:

$$\frac{x^2}{10^2} + \frac{y^2}{5^2} = 1.$$

Таким образом, уравнение траектории точки – эллипс (рис. 2.6).

При $t_1 = 1$ с $x_1 = 8,66$ см, $y_1 = 2,5$ см.

Проекции скорости:

$$\left. \begin{aligned} v_x &= \frac{dx}{dt} = 10 \frac{\pi}{3} \cos \frac{\pi}{3} t = 5,233 \text{ см/с,} \\ v_y &= \frac{dy}{dt} = -5 \frac{\pi}{3} \sin \frac{\pi}{3} t = -4,532 \text{ см/с.} \end{aligned} \right\}$$

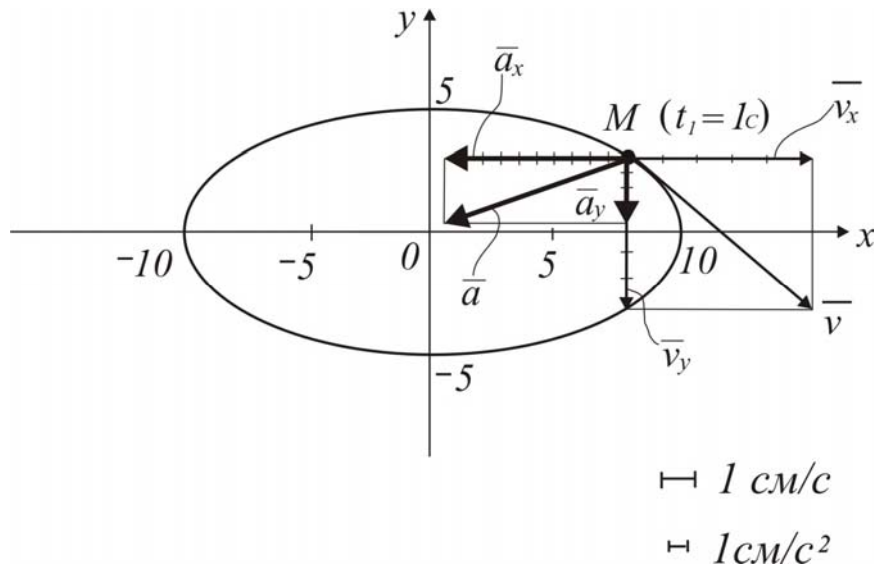


Рис. 2.6. Траектория движения и кинематические характеристики движения точки в момент времени $t_1=1$ с

Величина скорости точки M :

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = 6,922 \text{ см/с}.$$

Проекции ускорения:

$$a_x = \frac{dv_x}{dt} = -10 \frac{\pi^2}{9} \sin \frac{\pi}{3} t = -9,487 \text{ см/с}^2;$$

$$a_y = \frac{dv_y}{dt} = -5 \frac{\pi^2}{9} \cos \frac{\pi}{3} t = -2,738 \text{ см/с}^2.$$

Величина ускорения точки:

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = 9,87 \text{ см/с}^2.$$

2.2. Определение скорости и ускорения точки при естественном способе задания движения

2.2.1. Естественный способ задания движения точки

Если известна траектория точки, то удобно движение задавать в следующем виде. Будем отсчитывать расстояния s от некоторой точки траектории O до движущейся точки M :

$$s=s(t). \quad (2.2.1)$$

Здесь s – дуговая координата точки;

$s(t)$ – дважды дифференцируемая непрерывная функция от времени.

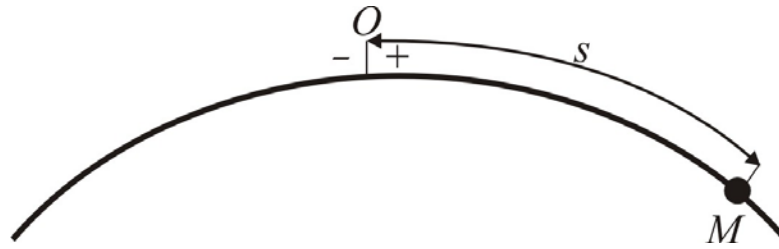


Рис. 2.7. Естественный способ задания движения точки

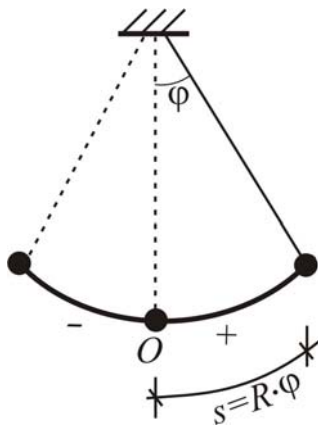


Рис. 2.8. Дуговая координата точки не равна ее пути

Расстояние s в одну сторону от точки O считается положительным, в другую – отрицательным. Точку O удобно брать в том месте траектории движения, где точка находится в начальный момент времени. Расстояние $s=OM$ может быть не равно пути, пройденному точкой. Например, при колебаниях маятника дуговая координата многократно равна 0, в то время как путь, пройденный точкой, непрерывно увеличивается.

Траектория движения может быть задана или уравнениями, или словесно, или в виде графика.

Между заданиями движения в декартовой и естественной формах легко установить связь. Как известно, дифференциал дуги кривой

$$ds = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2}, \quad (2.2.2)$$

тогда

$$s = \int_0^t \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2}. \quad (2.2.3)$$

Так как

$$\left. \begin{aligned} x &= f_1(t), \\ y &= f_2(t), \\ z &= f_3(t), \end{aligned} \right\} \quad (2.2.4)$$

$$\left. \begin{aligned} dx &= f_1'(t)dt, \\ dy &= f_2'(t)dt, \\ dz &= f_3'(t)dt, \end{aligned} \right\} \quad (2.2.5)$$

значит,

$$s = \int_0^t \sqrt{(f_1'(t))^2 + (f_2'(t))^2 + (f_3'(t))^2} dt. \quad (2.2.6)$$

2.2.2. Скорость точки при естественном способе задания движения

Пусть известны траектории точки и закон движения точки по траектории $s=s(t)$. Определим скорость точки.

Пусть в момент времени t точка занимает положение M , а в момент времени $t_1 = t + \Delta t$ – положение M_1 (рис. 2.10). Проведем из неподвижной точки O_1 радиусы-векторы \vec{r} и \vec{r}_1 , определяющие положение точки в моменты времени t и t_1 . Как было установлено ранее,

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}. \quad (2.2.7)$$

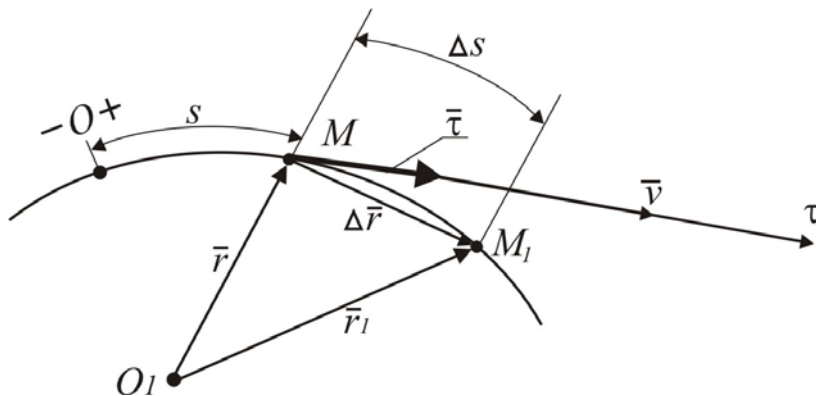


Рис. 2.10. Скорость точки при естественном способе задания движения

Перепишем уравнение (2.2.7) в виде

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{ds} \cdot \frac{ds}{dt}. \quad (2.2.7')$$

Тогда

$$\frac{d\vec{r}}{ds} = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta s} = \vec{\tau}. \quad (2.2.8)$$

При $\Delta s \rightarrow 0$

$$|\vec{\tau}| = 1. \quad (2.2.9)$$

Направление вектора $\vec{\tau}$ не зависит от знака соотношения $\frac{\Delta \vec{r}}{\Delta s}$. На самом деле, при $\Delta s < 0$ знак отношения отрицательный, то есть $\frac{\Delta \vec{r}}{\Delta s} = -\frac{\Delta \vec{r}}{|\Delta s|}$ (рис.

2.11). При этом вектор $\vec{\tau}$ направлен положительно.

При $\Delta s > 0$ $\frac{\Delta \vec{r}}{\Delta s} = +\frac{\Delta \vec{r}}{|\Delta s|}$ и $\vec{\tau}$ опять направлен в положительном направлении. Значит, единичный вектор $\vec{\tau}$ всегда направлен по касательной к траектории в сторону возрастающих (положительных) расстояний дуговой координаты.

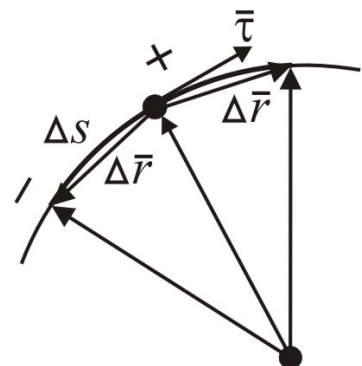


Рис. 2.11. Направление вектора $\vec{\tau}$

Итак,

$$\bar{v} = \bar{\tau} \cdot \frac{ds}{dt}. \quad (2.2.10)$$

При $\frac{ds}{dt} > 0$ вектор скорости точки \bar{v} направлен в сторону возрастающих расстояний дуговой координаты.

При $\frac{ds}{dt} < 0$ вектор скорости точки \bar{v} направлен в сторону убывающих расстояний дуговой координаты.

Величину

$$v = \frac{ds}{dt} \quad (2.2.10)$$

называют алгебраической скоростью точки или проекцией скорости на касательную ось. Касательная ось направлена так же, как и $\bar{\tau}$ (единичный вектор).

2.2.3. Элементы геометрии кривой

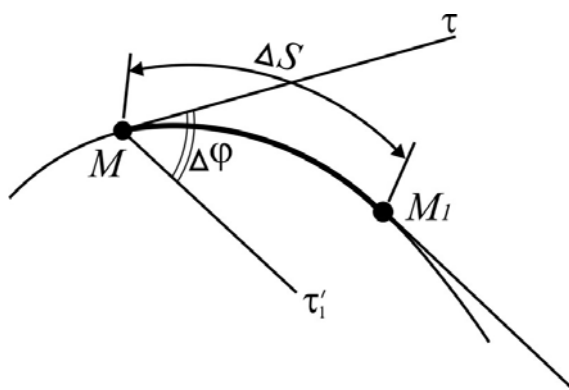


Рис. 2.11. Угол смежности

Пусть в моменты времени t и $(t+\Delta t)$ точка занимает на траектории соответственно положения M и M_1 . При этом касательные оси τ и τ_1 — соответственно (рис. 2.11). Расстояние между точками M и M_1 равно Δs .

В общем случае пространственной кривой касательные $M\tau$ и $M_1\tau_1$ скрещиваются. Угол между $M\tau$ и $M\tau'_1$ называют *углом смежности*. *Кривизной кривой* в точке M называют предел отношения угла смежности к расстоянию Δs при стремлении Δs к нулю:

$$k = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta \varphi}{\Delta s} = \frac{d\varphi}{ds}. \quad (2.2.11)$$

Радиусом кривизны в точке M называют величину, обратную кривизне:

$$\rho = \frac{1}{k} = \frac{ds}{d\varphi}. \quad (2.2.12)$$

Для окружности радиус кривизны совпадает с радиусом окружности. В самом деле, для окружности

$$s = R\varphi, \quad \rho = \frac{ds}{d\varphi} = R \frac{d\varphi}{d\varphi} = R.$$

2.2.4. Естественные оси

Проведем через $M\tau$ и $M\tau'_1$ (рис. 2.11) плоскость. При стремлении $\Delta s \rightarrow 0$, $M_1 \rightarrow M$ плоскость займет некоторое предельное положение – положение *соприкасающейся плоскости*, т.е. соприкасающаяся плоскость пройдет через касательные к кривой в двух соседних точках.

Проведем (рис.2.12) в соприкасающейся плоскости из точки M ось $n \perp \tau$. Эту ось направим в сторону вогнутости траектории. Ось n называется *главной нормалью*. Перпендикулярно к соприкасающейся плоскости проведем ось b в ту сторону, глядя откуда ближайшее совмещение

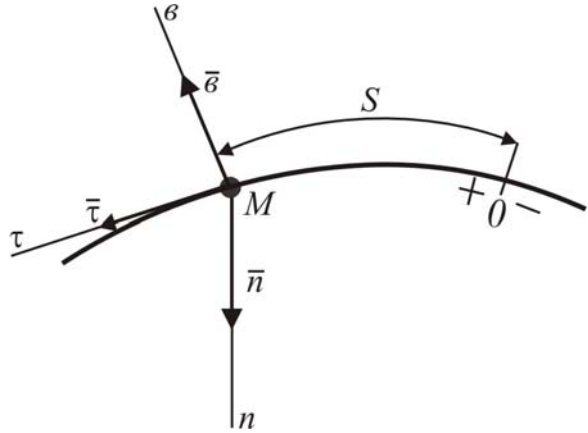


Рис. 2.12. Естественные оси

τ с n будет казаться направленным против хода часовой стрелки. Ось b называют *бинормалью*. Итак, оси τ , n , b называются естественными осями кривой. При движении точки по кривой собственный трехгранник движется вместе с точкой, поворачиваясь вокруг нее. Единичные векторы $\bar{\tau}$, \bar{n} и \bar{b} , направленные вдоль осей τ , n и b , называются единичными ортами.

2.2.5. Дифференцирование единичного вектора

Вычислим производную единичного вектора по скалярному аргументу $\frac{d\bar{\tau}}{dt}$.

Известно, что

$$\bar{\tau} \cdot \bar{\tau} = 1. \quad (2.2.13)$$

Тогда

$$\frac{d\bar{\tau}}{dt} \cdot \bar{\tau} + \bar{\tau} \cdot \frac{d\bar{\tau}}{dt} = 0 \quad (2.2.14)$$

или

$$\frac{2d\bar{\tau}}{dt} \cdot \bar{\tau} = 0. \quad (2.2.15)$$

Но оба сомножителя здесь не равны нулю:

$$\bar{\tau} \neq 0, \quad \frac{d\bar{\tau}}{dt} \neq 0 \Rightarrow \bar{\tau} \perp \frac{d\bar{\tau}}{dt}.$$

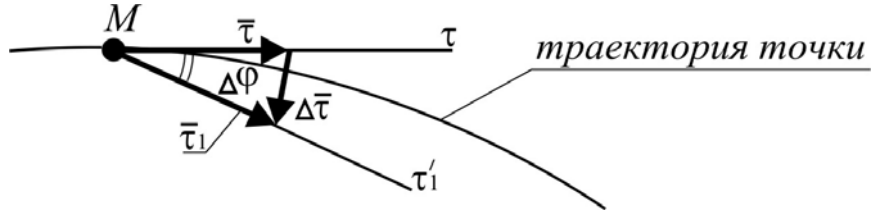


Рис. 2.13. Направление $\Delta \bar{r}$

Так как $\Delta \bar{r}$ в пределе лежит в соприкасающейся плоскости, то вектор $\frac{d\bar{r}}{dt}$ находится в соприкасающейся плоскости, он перпендикулярен вектору \bar{r} и направлен в сторону вогнутости траектории; следовательно, $\frac{d\bar{r}}{dt}$ направлен также, как \bar{n} .

Можно записать:

$$\frac{d\bar{r}}{dt} = \left| \frac{d\bar{r}}{dt} \right| \cdot \bar{n}. \quad (2.2.16)$$

$$|\Delta \bar{r}| = |\bar{r}| \cdot \sin \Delta \varphi$$

или

$$|\Delta \bar{r}| = 1 \cdot \Delta \varphi, \quad (2.2.17)$$

$$\left| \frac{d\bar{r}}{dt} \right| = \lim \left| \frac{\Delta \bar{r}}{\Delta t} \right| = \lim \left| \frac{\Delta \varphi}{\Delta t} \right| = \left| \frac{d\varphi}{dt} \right|,$$

$$\frac{d\bar{r}}{dt} = \left| \frac{d\varphi}{dt} \right| \cdot \bar{n} = \frac{d\varphi}{ds} \cdot \frac{ds}{|dt|} \cdot \bar{n} = \frac{v}{\rho} \cdot \bar{n},$$

$$\frac{d\bar{r}}{dt} = \frac{v}{\rho} \cdot \bar{n}. \quad (2.2.18)$$

2.2.6. Ускорение точек при естественной форме задания движения

Дифференцируя выражение для скорости $\bar{v} = \bar{r} \cdot \frac{ds}{dt}$, получим:

$$\bar{a} = \frac{d\bar{v}}{dt} = \frac{d\bar{r}}{dt} \cdot \frac{ds}{dt} + \bar{r} \cdot \frac{d^2s}{dt^2} = \frac{v^2}{\rho} \cdot \bar{n} + \frac{dv}{dt} \cdot \bar{\tau}. \quad (2.2.19)$$

Касательная составляющая ускорения

$$\bar{a}_\tau = \frac{dv}{dt} \cdot \bar{\tau}, \quad (2.2.20)$$

нормальная составляющая ускорения

$$\bar{a}_n = \frac{v^2}{\rho} \cdot \bar{n}, \quad (2.2.21)$$

полное ускорение

$$\bar{a} = \bar{a}_\tau + \bar{a}_n. \quad (2.2.22)$$

Проекция ускорения на касательную ось

$$a_\tau = \frac{dv}{dt}, \quad (2.2.23)$$

проекция ускорения на нормальную ось

$$a_n = \frac{v^2}{\rho}, \quad (2.2.24)$$

проекция ускорения на бинормаль равна нулю:

$$a_b = 0. \quad (2.2.25)$$

Величина ускорения

$$a = \sqrt{(a_\tau)^2 + (a_n)^2}. \quad (2.2.26)$$

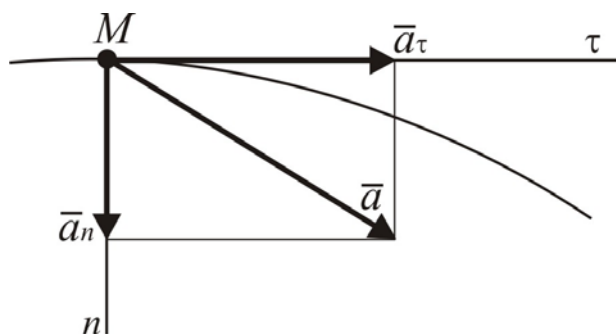


Рис. 2.14. Разложение ускорения на нормальную и касательную составляющие

В самом деле, соприкасающаяся плоскость $n\tau$ проведена через векторы скорости двух соседних точек.

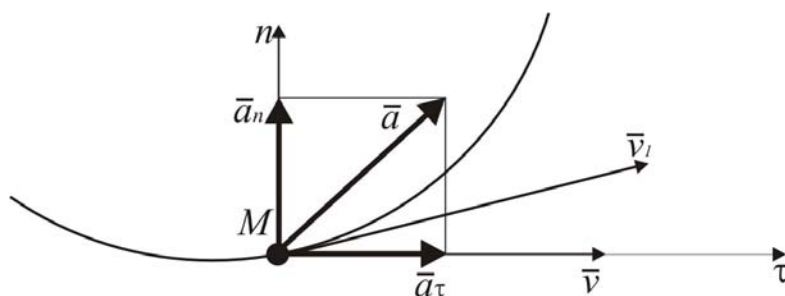


Рис. 2.15. Ускорение лежит в соприкасающейся плоскости

Вектор ускорения

$$\bar{a} = \frac{d\bar{v}}{dt} = \lim \frac{\Delta\bar{v}}{\Delta t} = \lim \frac{\bar{v}_1 - \bar{v}}{\Delta t},$$

как \bar{v}_1 и \bar{v} , лежит в соприкасающейся плоскости. Следовательно, ускорение не может проектироваться на ось b . Значит, $a_b = 0$.

Итак,

$$\begin{cases} a_\tau = \frac{dv}{dt}, \\ a_n = \frac{v^2}{\rho}, \\ a_b = 0. \end{cases}$$

$$a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2}.$$

Если $\begin{cases} \ddot{s} < 0, \dot{s} < 0 \\ \ddot{s} > 0, \dot{s} > 0 \end{cases}$ } – ускоренное движение;

если $\begin{cases} \ddot{s} < 0, \dot{s} > 0 \\ \ddot{s} > 0, \dot{s} < 0 \end{cases}$ } – замедленное движение.

Пример. Точка движется по окружности $R=10$ см по закону $s = 4t^2$ см. Определить скорость и ускорение точки в момент времени $t = 1$ с.

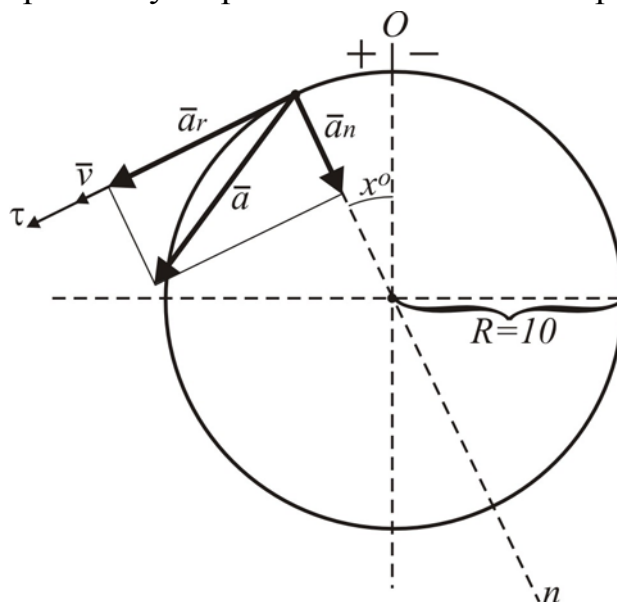


Рис. 2.16. Положение точки на траектории и ее скорость и ускорение в данный момент времени

Положение точки на траектории определим из следующих соображений:

$$s = 4t^2 = 4 \text{ см},$$

составим пропорцию:

$$\left. \begin{array}{l} \pi r - 180^\circ \\ s - x^\circ \end{array} \right\}$$

откуда

$$x = \frac{720}{31,4} = 23^\circ.$$

Скорость и ускорение точки вычислим с помощью следующих соотношений:

$$v = \frac{ds}{dt} = 8 \text{ м/с},$$

$$v = 8 \text{ м/с}.$$

$$a_\tau = \frac{dv}{dt} = 8 \text{ м/с}^2,$$

$$a_n = \frac{v^2}{\rho} = \frac{v^2}{R} = \frac{64}{10} = 6,4 \text{ м/с}^2,$$

$$a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2} = \sqrt{64 + 40,96} = 10,24 \text{ м/с}^2.$$

2.2.7. Частные случаи движения точки

1. Ускоренное прямолинейное движение.

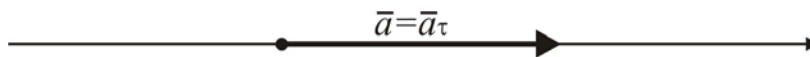


Рис. 2.17. Прямолинейное движение

$$\rho = \infty, \quad a_n = \frac{v^2}{\rho} = 0, \quad a = a_\tau = \frac{dv}{dt}.$$

Ускорение меняется только по величине; следовательно, a_τ характеризует изменение скорости по величине.

2. Равномерное криволинейное движение.

$$v_1 = v_2 = v = \text{const},$$

$$a_\tau = \frac{dv}{dt} = 0,$$

$$a_n = \frac{v^2}{\rho} = a. \quad a_{1n} = \frac{v^2}{\rho_1}, \quad a_{2n} = \frac{v^2}{\rho_2}.$$

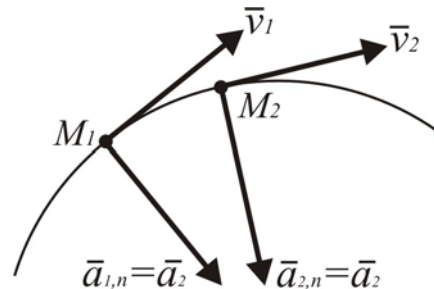


Рис. 2.18. Равномерное криволинейное движение

Скорость меняется только по направлению; следовательно, нормальное ускорение характеризует изменение скорости по направлению.

Найдем закон равномерного криволинейного движения:

$$v = \frac{ds}{dt} = \text{const},$$

$$ds = v \cdot dt.$$

Интегрируя

$$\int_{s_0}^s ds = v \int_0^t dt,$$

получим:

$$s - s_0 = vt,$$

или

$$s = s_0 + vt.$$

Если $s_0 = 0$,

$$s = vt, \quad v = \frac{s}{t}.$$

3. Равномерное прямолинейное движение.



Рис. 2.19. Равномерное прямолинейное движение

$a_n = 0$, так как $\rho = \infty$; $a_\tau = 0$, так как $\frac{dv}{dt} = 0$. Следовательно, $a=0$.

Единственным движением, в котором ускорение может равняться все время нулю, является равномерное прямолинейное движение.

4. Равнопеременное криволинейное движение точки.

Это такое движение, при котором касательное ускорение a_τ все время остается постоянной величиной ($a_\tau = \text{const}$).

Пусть при $t = 0$ $s = s_0$, $v = v_0$, тогда

$$\pm a_\tau = \frac{dv}{dt},$$

где знак плюс относится к ускоренному движению, а знак минус – к замедленному.

Разделяя переменные и интегрируя

$$\int_{v_0}^v dv = \pm a_\tau \int_0^t dt,$$

получим:

$$v - v_0 = \pm a_\tau \cdot t,$$

$$v = v_0 \pm a_\tau t,$$

$$\frac{ds}{dt} = v_0 \pm a_\tau t.$$

Разделяя переменные и интегрируя

$$\int_{s_0}^s ds = v_0 \int_0^t dt \pm a_\tau \int_0^t t \cdot dt,$$

получим:

$$s = s_0 + v_0 t \pm \frac{a_\tau t^2}{2}.$$

Пример. Автомобиль движется равнозамедленно по закруглению радиусом 1 км. В начале участка длиной 560 м его скорость $v=36$ км/ч и ускорение $a_0=0,125$ м/с². Определить скорость и ускорение в конце пути.

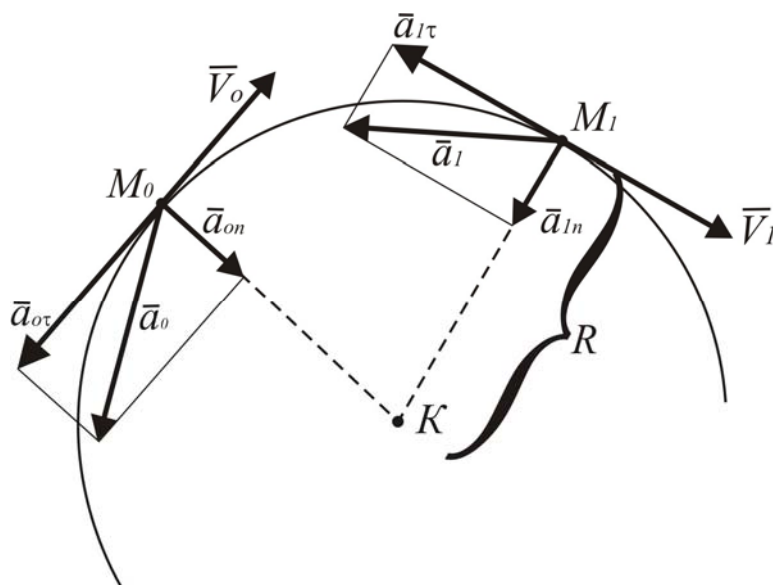


Рис. 2.20. Скорость и ускорение автомобиля в начале и конце пути

Дано:

$$s = 560 \text{ м}, \quad \rho = R = 1000 \text{ м}, \quad v_0 = 10 \text{ м/с}, \quad a_0 = 0,125 \text{ м/с}^2.$$

Найти: v_1 и \bar{a}_1

Решение:

$$a_{on} = \frac{v_0^2}{R} = \frac{100}{1000} = 0,1 \text{ м/с}^2,$$
$$a_{0\tau} = \sqrt{a_0^2 - a_{on}^2} = \sqrt{0,125^2 - 0,1^2} = 0,075 \text{ м/с}^2,$$
$$a_\tau = \text{const} = 0,075 \text{ м/с}^2.$$

$$\left. \begin{aligned} s &= s_0 + v_0 t - \frac{a_\tau t^2}{2}, \\ v &= v_0 - a_\tau t. \end{aligned} \right\}$$

$$\left. \begin{aligned} 560 &= 10t - \frac{0,075t^2}{2}, \\ v &= 10 - 0,075t. \end{aligned} \right\}$$

Из первого уравнения системы находим t :

$$0,075t^2 - 20t + 1120 = 0,$$
$$t = \frac{10 \pm \sqrt{100 - 1120 \cdot 0,075}}{0,075} = \frac{10 \pm 4}{0,075};$$

$$0 = v_0 - a_\tau t_{\text{ост}},$$
$$t_{\text{ост}} = \frac{v_0}{a_\tau} = \frac{10}{0,075}.$$

Большой корень превышает момент остановки, поэтому берем меньший корень

$$t = \frac{6}{0,075} = 80 \text{ с.}$$
$$v_1 = v_0 - a_\tau t = 10 - 0,075 \cdot 80 = 4 \text{ м/с.}$$
$$a_{n1} = \frac{v_1^2}{R} = \frac{16}{1000} = 0,016 \text{ м/с}^2.$$
$$a_1 = \sqrt{a_{1\tau}^2 + a_{1m}^2} = \sqrt{0,075^2 + 0,016^2} = 0,0767 \text{ м/с}^2.$$

2.3. Движения твердого тела

Различают пять видов движения твердого тела:

1. Поступательное.
2. Вращательное.
3. Плоское, или плоскопараллельное.
4. Сферическое.
5. Общий случай движения.

Поступательное и вращательное движения называют простейшими движениями твердого тела. Но именно из этих движений, как мы увидим, складываются все остальные виды движений твердого тела.

2.3.1. Поступательное движение твердого тела

Поступательным называется такое движение твердого тела, при котором любая проведенная в теле прямая перемещается параллельно самой себе. Например: движение любой прямой (CD) шарнира AB ($O_1A = O_2B$, $O_1A \parallel O_2B$).

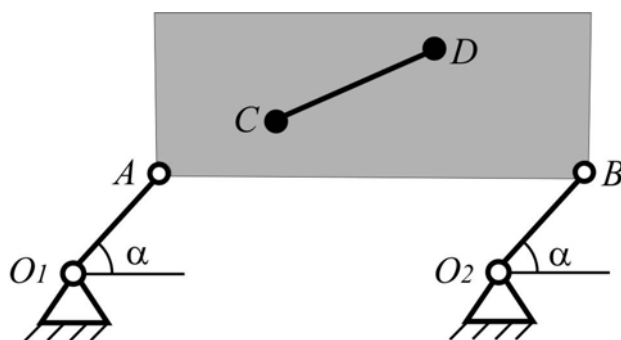


Рис. 2.21. Пример поступательного движения тела

Свойства поступательного движения твердого тела определяются следующей теоремой.

Т е о р е м а . При поступательном движении твердого тела все его точки описывают одинаковые (при наложении совпадающие) траектории и имеют в каждый момент времени одинаковые по модулю и направлению скорости и ускорения.

Доказательство:

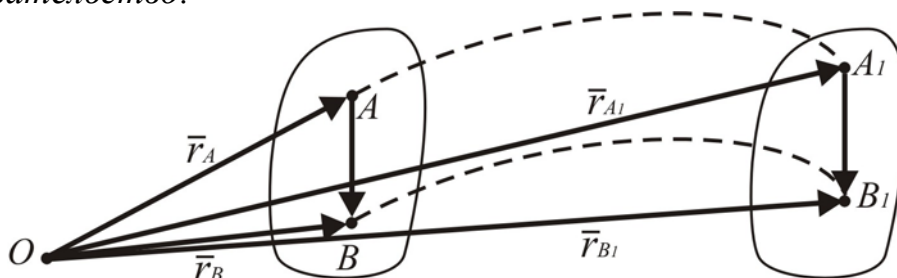


Рис. 2.22. Иллюстрация поступательного движения тела

Соединим две точки тела прямой AB . Возьмем начало отсчета в некоторой точке O . Тогда

$$\vec{r}_B = \vec{r}_A + \overline{AB} \quad (2.3.1)$$

Положение точки B всегда можно найти из положения т. A , сместившись по направлению \overline{AB} на величину AB . Так как \overline{AB} – вектор, постоянный по величине и направлению, то траектории точек A и B будут одинаковыми кривыми.

Продифференцируем уравнение (2.3.1):

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{r}_B}{dt} &= \frac{d\vec{r}_A}{dt} + \frac{d(\overline{AB})}{dt}. \\ \frac{d\vec{r}_B}{dt} &= \vec{v}_B; \quad \frac{d\vec{r}_A}{dt} = \vec{v}_A; \\ \frac{d(\overline{AB})}{dt} &= 0. \end{aligned} \quad (2.3.2)$$

Следовательно,

$$\vec{v}_B = \vec{v}_A, \quad (2.3.3)$$

т.е. скорости всех точек тела в каждый момент времени равны.

Продифференцируем уравнение (2.3.3) по времени:

$$\frac{d\vec{v}_B}{dt} = \frac{d\vec{v}_A}{dt},$$

или

$$\vec{a}_B = \vec{a}_A, \quad (2.3.4)$$

т.е. ускорения всех точек тела в каждый момент времени равны.

Теорема доказана.

Из теоремы следует, что для изучения поступательного движения твердого тела достаточно знать, как движется одна его точка, т.е. кинематика поступательного движения тела сводится к кинематике точки.

2.3.2. Вращательное движение твердого тела. Угловые кинематические характеристики тела

Вращательным называется такое движение твердого тела, при котором все его точки описывают окружности в плоскостях, перпендикулярных некоторой прямой. Эта прямая называется осью вращения тела.

Для определения положения тела (рис. 2.23) проведем через ось вращения две плоскости – неподвижную плоскость I и связанную с телом плоскость II. Тогда положение тела будет определяться углом φ между этими плоскостями. Угол φ будем считать положительным, если он отложен от неподвижной плоскости в направлении против часовой стрелки (если смотреть от конца оси вращения к началу). Угол φ должен измеряться в радианах. Положение тела в любой момент времени определяется уравнением

$$\varphi = \varphi(t). \quad (2.3.5)$$

Уравнение (2.3.5) – это закон вращательного движения тела.

Кинематические характеристики вращательного движения тела должны отражать быстроту изменения угла поворота и показывать, происходит ли это изменение равномерно или нет. Для этого вводятся понятия угловой скорости и углового ускорения.

Пусть за промежуток времени $\Delta t = t_1 - t$ тело совершает поворот на угол $\Delta\varphi = \varphi_1 - \varphi$. Средняя угловая скорость

$$\omega_{\text{ср}} = \frac{\Delta\varphi}{\Delta t}. \quad (2.3.6)$$

Переходя к пределу, получаем угловую скорость тела в данный момент времени t :

$$\omega = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} = \frac{d\varphi}{dt},$$

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt}. \quad (2.3.7)$$

Угловая скорость тела равна первой производной от угла поворота по времени. Если $\frac{d\varphi}{dt} > 0$, угол увеличивается, и вращение происходит против часовой стрелки.

Размерность угловой скорости $[\omega] = \frac{\text{рад}}{\text{время}} = \frac{1}{\text{с}}$, так как радиан – величина безразмерная.

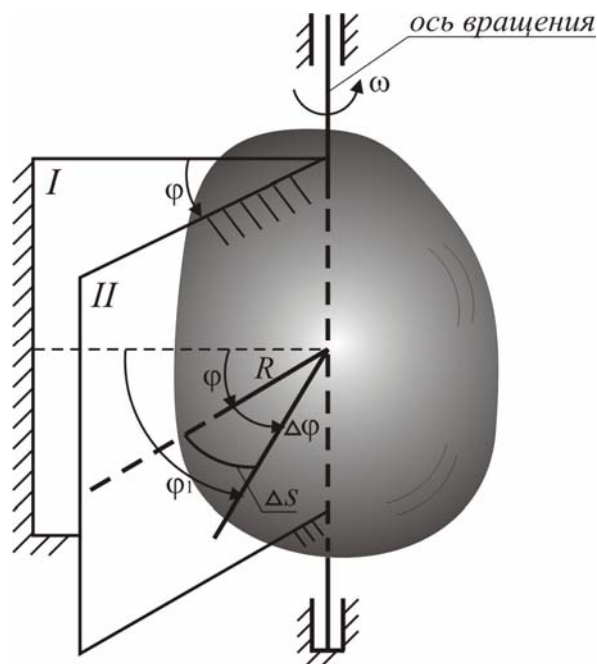


Рис. 2.23. Определение положения твердого тела при вращательном движении

Угловое ускорение характеризует изменение угловой скорости тела с течением времени. Если за промежуток времени $\Delta t = t_1 - t$ угловая скорость изменилась на величину $\Delta\omega = \omega_1 - \omega$, то среднее угловое ускорение

$$\varepsilon_{\text{cp}} = \frac{\Delta\omega}{\Delta t}. \quad (2.3.8)$$

Переходя к пределу, находим угловое ускорение в данный момент времени:

$$\varepsilon = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\varphi}{dt^2},$$

или

$$\varepsilon = \frac{d\omega}{dt}. \quad (2.3.9)$$

Угловое ускорение тела равно первой производной от угловой скорости по времени. Если $|\omega|$ возрастает – ускоренное вращение. Если $|\omega|$ убывает – замедленное вращение. Размерность углового ускорения $[\varepsilon] = \frac{1}{\text{с}^2} = \text{с}^{-2}$.

2.3.3. Скорость и ускорение точки тела при вращательном движении

Рассмотрим точку, находящуюся на расстоянии R от оси. За промежуток времени $\Delta t = t_1 - t$ радиус R повернется на угол $\Delta\varphi = \varphi_1 - \varphi$.

Приращение дуговой координаты:

$$\Delta s = s_1 - s.$$

Средняя скорость точки M :

$$v_{\text{cp}} = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{R\Delta\varphi}{\Delta t}.$$

Переходя к пределу, получаем:

$$v = \frac{ds}{dt} = \frac{d(R\varphi)}{dt} = R \frac{d\varphi}{dt} = R\omega,$$

или

$$v = R \cdot \omega. \quad (2.3.10)$$

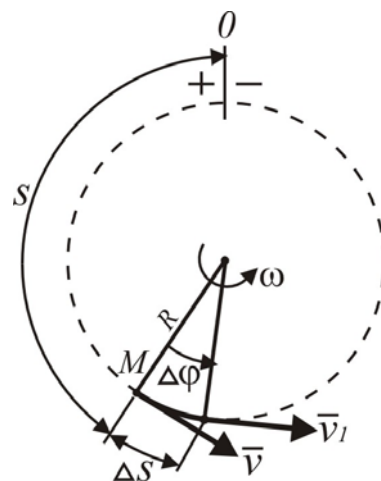


Рис. 2.24. К определению скорости точки при вращательном движении тела

Определим ускорение точки:

$$a_{\tau} = \frac{dv}{dt} = R \frac{d\omega}{dt} = R\varepsilon.$$

$$a_n = \frac{v^2}{\rho} = \frac{R^2\omega^2}{R} = R\omega^2.$$

Окончательно получаем:

$$a_{\tau} = R\varepsilon. \quad (2.3.11)$$

$$a_n = R\omega^2. \quad (2.3.12)$$

$$a = \sqrt{a_{\tau}^2 + a_n^2} = R\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}. \quad (2.3.13)$$

2.3.4. Частные случаи вращения

1. Вращение с постоянной угловой скоростью $\omega = \text{const}$; $\varepsilon = 0$.

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt};$$

$$d\varphi = \omega dt.$$

Интегрируя, получаем:

$$\int_{\varphi_0}^{\varphi} d\varphi = \omega \int_0^t dt,$$

$$\varphi = \varphi_0 + \omega t. \quad (2.3.14)$$

Это закон равномерного вращения.

Если тело делает n оборотов в минуту и $\varphi_0 = 0$, то $\varphi = \omega t = \omega \cdot 60$. В то же время $\varphi = 2\pi n$. Следовательно, $\omega \cdot 60 = 2\pi n$. Отсюда $\omega = \frac{2\pi n}{60}$,

Окончательно получаем:

$$\omega = \frac{\pi n}{30}. \quad (2.3.15)$$

Это уравнение связывает ω и n .

2. Равнопеременное вращение, $\varepsilon = \text{const}$.

$$\pm\varepsilon = \frac{d\omega}{dt};$$

$$d\omega = \pm\varepsilon dt.$$

Здесь знак «плюс» соответствует ускоренному вращению, а знак «минус» – замедленному.

Интегрируя, получаем:

$$\omega = \omega_0 \pm \varepsilon t. \quad (2.3.16)$$

$$\frac{d\varphi}{dt} = \omega_0 \pm \varepsilon t;$$

$$\varphi = \varphi_0 + \omega_0 t \pm \frac{\varepsilon t^2}{2}. \quad (2.3.17)$$

Уравнение (2.3.17) представляет собой закон равнопеременного вращения.

Пример. Вал за 20 с при равноускоренном вращении сделал 100 оборотов. Найти угловую скорость вращения в конце этого промежутка времени.

Решение. Используем уравнение равнопеременного движения при $\omega_0 = 0$, $\varphi_0 = 0$.

$$\varphi = \frac{\varepsilon t^2}{2};$$

$$\varphi = 2\pi \cdot 100.$$

Сопоставляя эти два выражения для угла поворота, находим:

$$\varepsilon = \frac{2 \cdot 2\pi \cdot 100}{400} = \pi \frac{1}{c^2},$$

$$\omega = \varepsilon t = \pi \cdot 20 = 20\pi \frac{1}{c}.$$

2.4. Векторные выражения для скоростей и ускорений точек при вращательном движении тела

2.4.1. Векторы угловой скорости и углового ускорения

Угловую скорость тела и угловое ускорение тела можно представить в виде векторов $\vec{\omega}$ и $\vec{\varepsilon}$.

Вектор угловой скорости должен характеризовать:

- 1) ось вращения;
- 2) направление вращения;
- 3) быстроту вращения.

Условимся откладывать вектор угловой скорости вращения тела от любой точки оси вращения по этой оси, направляя его в ту сторону, откуда вращение нам будет представляться против хода часовой стрелки.

Модуль этого вектора равен значению угловой скорости ω , определяемому по выражению $\omega = \left| \frac{d\varphi}{dt} \right|$.

Вектор углового ускорения $\bar{\varepsilon}$ характеризует изменение вектора угловой скорости в зависимости от времени: $\bar{\varepsilon} = \frac{d\bar{\omega}}{dt}$. Направление такого вектора совпадает с предельным направлением приращения $\Delta\bar{\omega}$, а так как $\bar{\omega}$ имеет постоянное направление, то направление его приращения $\Delta\bar{\omega}$ совпадает с направлением самого вектора $\bar{\omega}$ при ускоренном вращении и противоположно $\bar{\omega}$ при замедленном вращении, т.е. вектор $\bar{\varepsilon}$ направлен так, как показано на рис. 2.26.

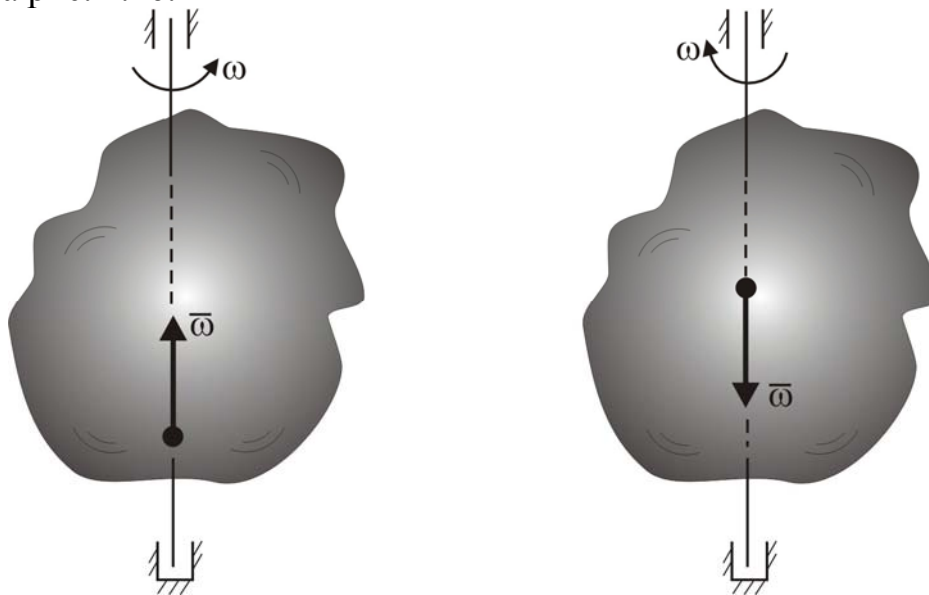


Рис.2.25. Вектор угловой скорости направлен в ту сторону, откуда вращение представляется против хода часовой стрелки

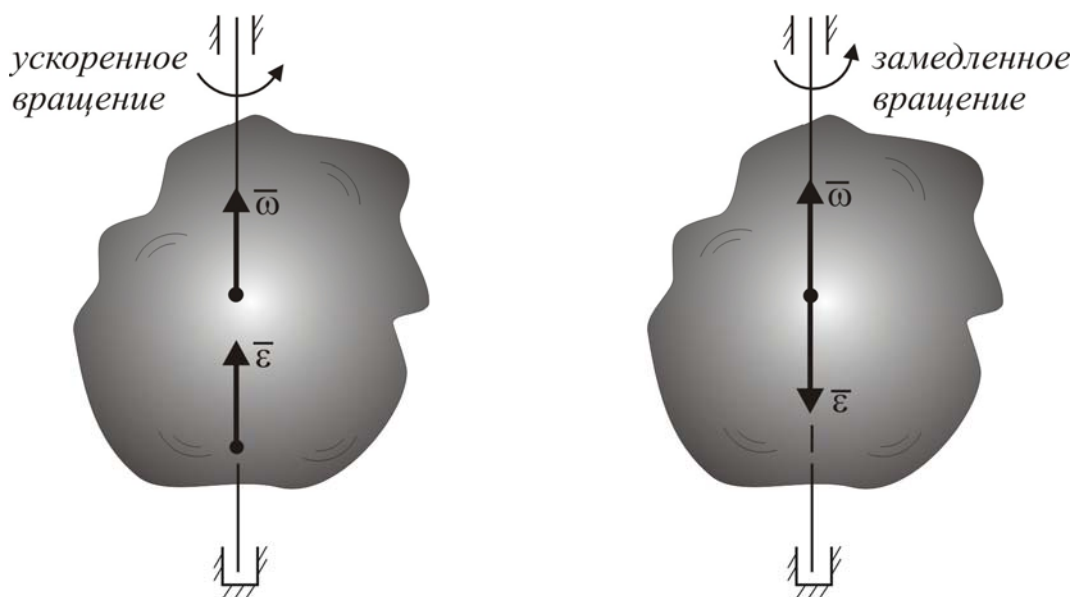


Рис.2.26. Ускоренное и замедленное вращение тела

Модуль $\bar{\varepsilon}$ равен абсолютному значению углового ускорения: $\varepsilon = \left| \frac{d\omega}{dt} \right|$.

Так как точкой приложения векторов $\bar{\omega}$ и $\bar{\varepsilon}$ может быть любая точка оси, то векторы $\bar{\omega}$ и $\bar{\varepsilon}$ называются *скользящими*.

Пользуясь понятием векторов $\bar{\omega}$ и $\bar{\varepsilon}$, легко получить выражение для векторов скорости и ускорения точки тела при его вращательном движении.

2.4.2. Скорость и ускорение точки

Возьмем на оси вращения произвольную точку O и отложим от нее вектор $\bar{\omega}$. Соединим точку M тела радиусом-вектором \bar{r} с точкой O . Отложим вращательную скорость \bar{v} точки M .

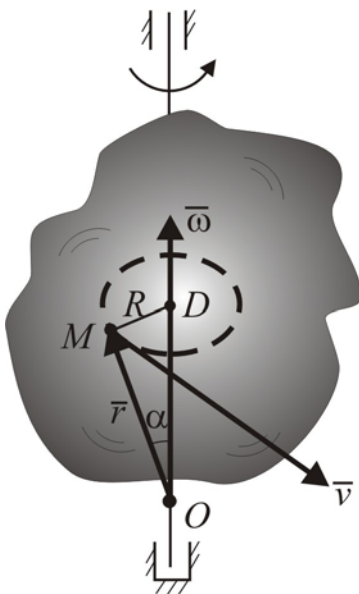


Рис. 2.27. Вектор скорости точки

Модуль вращательной скорости

$$v = \omega \cdot R = \omega \cdot r \sin \alpha,$$

где α – угол между векторами $\bar{\omega}$ и \bar{r} .

Модуль векторного произведения

$$|\bar{\omega} \times \bar{r}| = \omega \cdot r \sin \alpha.$$

Таким образом, модуль вращательной скорости \bar{v} и модуль векторного произведения $\bar{\omega} \times \bar{r}$ равны между собой.

Вращательная скорость \bar{v} направлена перпендикулярно плоскости OMD . Вектор, равный произведению $\bar{\omega} \times \bar{r}$, направлен перпендикулярно плоскости, в которой лежат $\bar{\omega}$ и \bar{r} , в сторону, откуда совмещение $\bar{\omega}$ с \bar{r} видно в направлении против часовой стрелки, т.е. направления \bar{v} и векторного произведения $\bar{\omega} \times \bar{r}$ совпадают.

Таким образом, векторы \bar{v} и $\bar{\omega} \times \bar{r}$ имеют одинаковые величины и направления, т.е.

$$\bar{v} = \bar{\omega} \times \bar{r} \quad (2.4.1)$$

Следовательно, вектор скорости точки при вращательном движении тела вокруг неподвижной оси равен векторному произведению вектора угловой скорости тела на радиус-вектор точки относительно любой точки оси вращения.

Выведем формулы для вращательного и центростремительного ускорений. Продифференцируем выражение $\bar{v} = \bar{\omega} \times \bar{r}$:

$$\frac{d\bar{v}}{dt} = \frac{d\bar{\omega}}{dt} \times \bar{r} + \bar{\omega} \times \frac{d\bar{r}}{dt}. \quad (2.4.2)$$

Учитывая, что $\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{a}$; $\frac{d\vec{\omega}}{dt} = \vec{\varepsilon}$; $\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{\omega} \times \vec{r}$, перепишем уравнение (2.4.2) в виде

$$\vec{a} = \vec{\varepsilon} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}). \quad (2.4.3)$$

Покажем, что первое слагаемое есть вектор касательного ускорения, а второе слагаемое – вектор нормального ускорения.

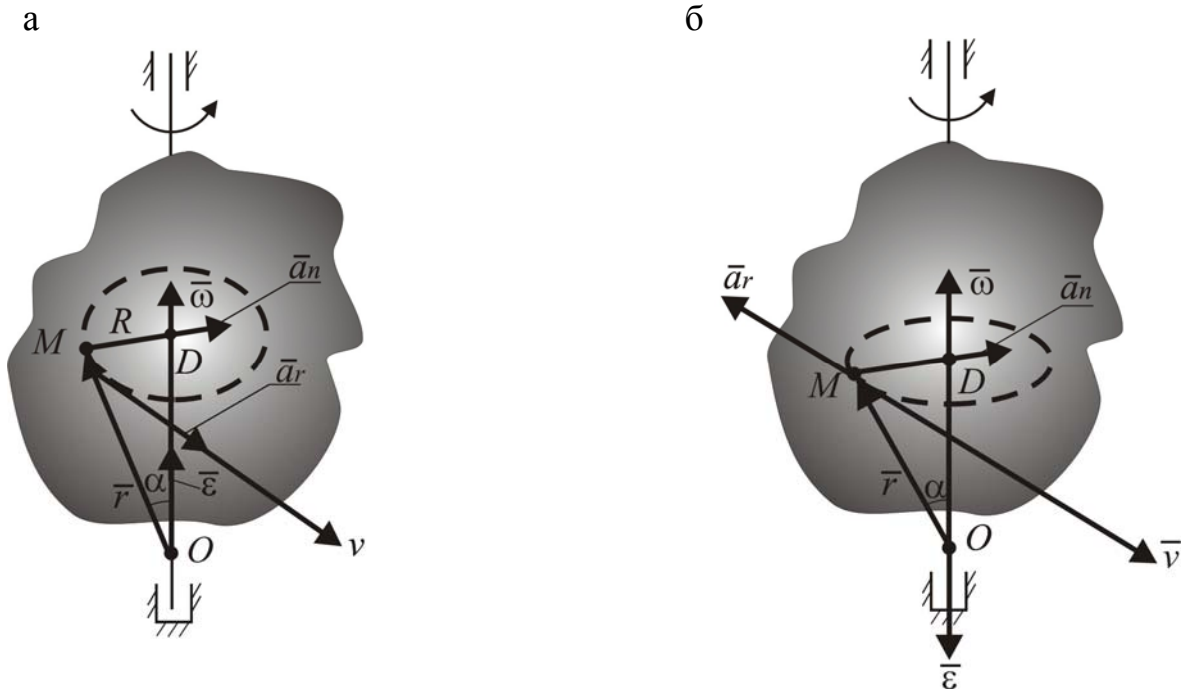


Рис. 2.28. Векторы касательного и нормального ускорений:
а – ускоренное вращение; б – замедленное вращение

Модуль вращательного (касательного) ускорения

$$a_\tau = \varepsilon R = \varepsilon \cdot r \cdot \sin \alpha.$$

Модуль векторного произведения

$$|\vec{\varepsilon} \times \vec{r}| = \varepsilon \cdot r \cdot \sin \alpha.$$

Следовательно, величины касательного ускорения и векторного произведения $(\vec{\varepsilon} \times \vec{r})$ равны между собой:

$$a_\tau = |\vec{\varepsilon} \times \vec{r}|.$$

Касательное ускорение \vec{a}_τ направлено перпендикулярно плоскости треугольника OMD . Вектор, равный векторному произведению $\vec{\varepsilon} \times \vec{r}$, направлен перпендикулярно плоскости $\vec{\varepsilon}$ и \vec{r} в сторону, откуда совмещение $\vec{\varepsilon}$ с \vec{r} должно быть в направлении против часовой стрелки, т.е. направле-

ния касательного ускорения \bar{a}_τ и вектора, равного векторному произведению $\bar{\omega} \times \bar{r}$, совпадают. Итак,

$$\bar{a}_\tau = \bar{\omega} \times \bar{r}. \quad (2.4.4)$$

Касательное ускорение точки твердого тела, вращающегося вокруг неподвижной оси, равно векторному произведению вектора угловой скорости тела и радиуса-вектора точки тела, отложенного от любой точки оси вращения.

Модуль нормального (центростремительного) ускорения

$$a_n = \omega^2 R = \omega(\omega \cdot R) = \omega \cdot v.$$

Модуль векторного произведения

$$|\bar{\omega} \times (\bar{\omega} \times \bar{r})| = |\bar{\omega} \times \bar{v}| = \omega \cdot v \sin(\bar{\omega}, \bar{v}) = \omega \cdot v = \omega^2 \cdot R,$$

т.е.

$$a_n = |\bar{\omega} \times \bar{v}|.$$

Вектор нормального ускорения направлен к оси вращения от точки M к D . Вектор, равный векторному произведению $\bar{\omega} \times \bar{v}$, направлен перпендикулярно плоскости $\bar{\omega} - \bar{v}$ в сторону, откуда совмещение $\bar{\omega}$ с \bar{v} видно в направлении против часовой стрелки, т.е. от т. M к центру.

Следовательно, направления \bar{a}_n и $\bar{\omega} \times \bar{v}$ совпадают. Итак,

$$\bar{a}_n = \bar{\omega} \times \bar{v} = \bar{\omega} \times (\bar{\omega} \times \bar{r}). \quad (2.4.5)$$

$$\bar{a} = \bar{a}_\tau + \bar{a}_n. \quad (2.4.6)$$

2.5. Плоское движение твердого тела

2.5.1. Понятие плоского движения

Плоским, или *плоскопараллельным*, движением твердого тела называется такое его движение, при котором все его точки движутся в плоскостях, параллельных некоторой неподвижной плоскости.

Плоская фигура, образованная сечением тела этой неподвижной плоскостью Q , во все время движения остается в этой плоскости. Проведем перпендикулярно к плоскости Q отрезок MM_1M_2 (рис. 2.28). Точка M_1 движется в плоскости Q_1 , точка M_2 – в плоскости Q_2 . При движении тела все точки сечения s остаются в плоскости Q , следовательно, и отрезок M_1M_2 остается перпендикулярным плоскости Q , т.е. остается параллельным своему начальному положению. Значит, перпендикуляр M_1M_2 движется поступательно, поэтому все его точ-

ки описывают одинаковые траектории и имеют равные скорости и ускорения, т.е. $\cup CD \sim \cup C_1D_1 \sim \cup C_2D_2$, $v_M = \bar{v}_{M_1} = \bar{v}_{M_2}$, $\bar{a}_M = \bar{a}_{M_1} = \bar{a}_{M_2}$.

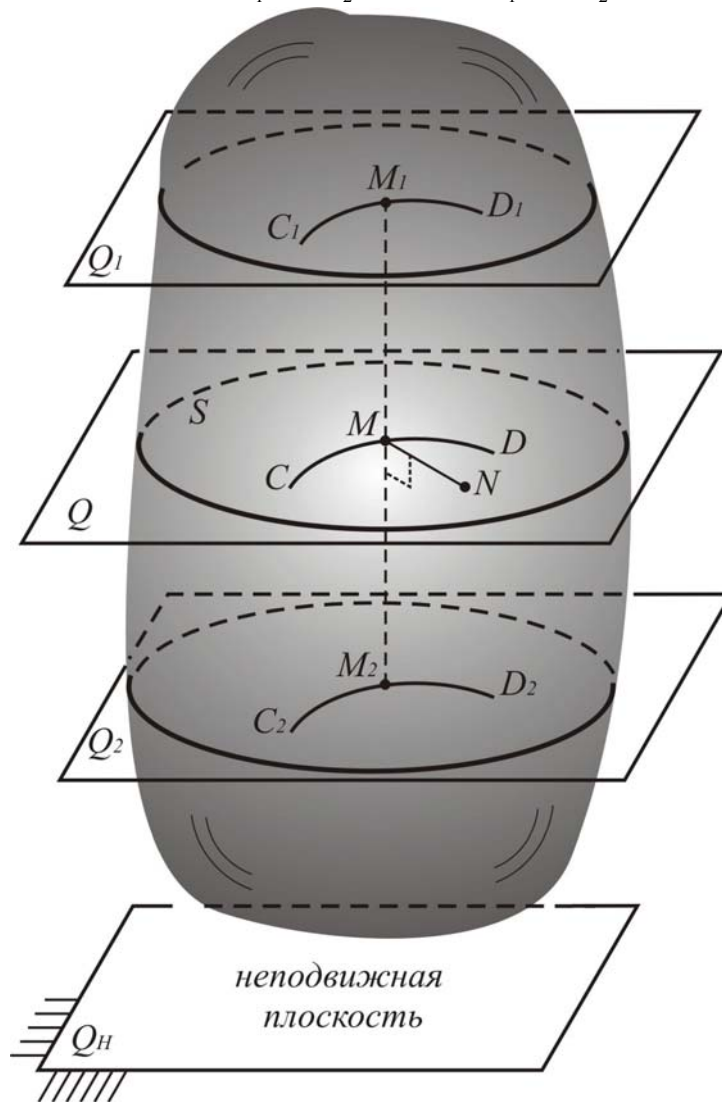


Рис. 2.29. Плоское движение тела

Так как все точки перпендикуляра M_1M_2 движутся одинаково, то достаточно знать, как движется точка M . Аналогично можно рассуждать для любого другого перпендикуляра к сечению s в другой точке.

Следовательно, при изучении движения твердого тела достаточно знать, как движется сечение s этого тела, образованное плоскостью, параллельной некоторой неподвижной плоскости Q .

Итак, изучаем движение плоской фигуры s . Положение плоской фигуры s в ее плоскости

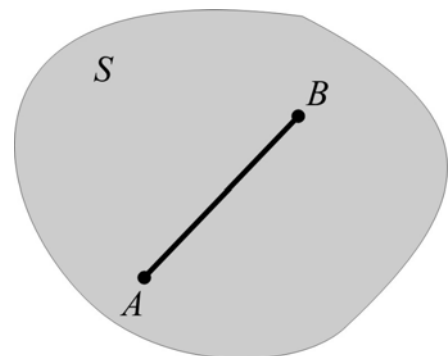


Рис. 2.29. Плоское движение тела идентично движению плоской фигуры

вполне определяется положением двух ее точек или положением отрезка AB .

Поэтому изучение плоского движения твердого тела сводится к изучению движения отрезка, лежащего в плоскости, параллельной той неподвижной плоскости, относительно которой тело описывает плоское движение.

Примеры плоского движения:

1. Колесо катится по плоской кривой.
2. Движение шатуна AB кривошипно-шатунного механизма.

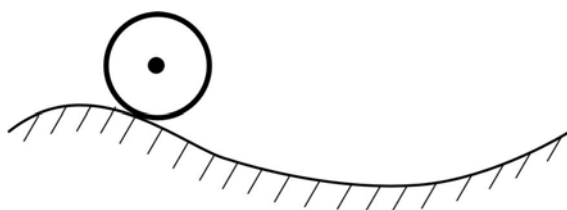


Рис. 2.30. Качение колеса по плоской кривой

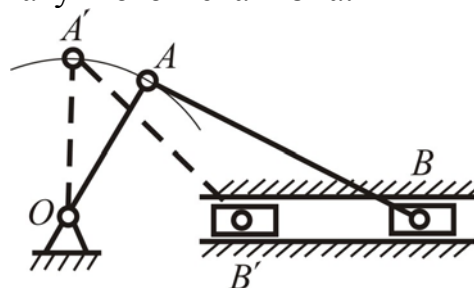


Рис. 2.31. Движение шатуна кривошипно-шатунного механизма

2.5.2. Уравнения плоского движения

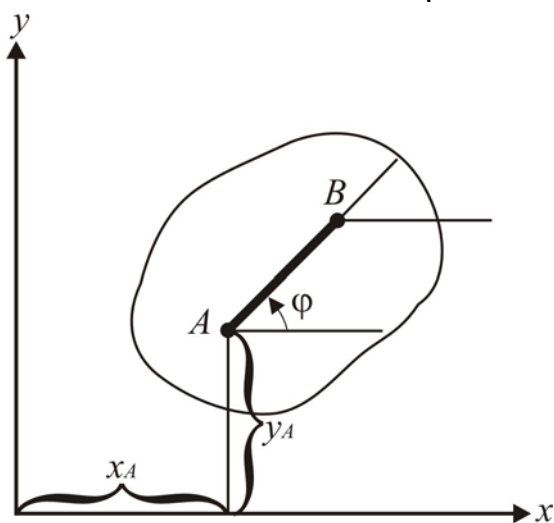


Рис. 2.33. Представление плоского движения как движения полюса и вращения вокруг полюса

Чтобы описать плоское движение, надо описать движение отрезка AB . Это движение можно рассматривать как движение полюса (например точки A) и вращение отрезка вокруг полюса. Зададим движение точки A :

$$\begin{cases} X_A = f_1(t), \\ Y_A = f_2(t). \end{cases} \quad (2.5.1)$$

Эти уравнения одновременно являются и уравнениями поступательного движения тела. Направление отрезка AB определяется в зависимости от угла поворота $\varphi = f_3(t)$, который откладывается, например, от линии, параллельной одной из осей.

Итак, уравнения плоского движения:

$$\left. \begin{aligned} X_A &= f_1(t), \\ Y_A &= f_2(t), \\ \varphi &= f_3(t). \end{aligned} \right\} \quad (2.5.2)$$

Основными кинематическими характеристиками плоского движения являются скорость и ускорение поступательного движения.

$$\left. \begin{aligned} \bar{v}_{\text{пост}} &= \bar{v}_A, \\ \bar{a}_{\text{пост}} &= \bar{a}_A; \end{aligned} \right\} \quad (2.5.3)$$

а также угловая скорость и угловое ускорение вращательного движения тела:

$$\left. \begin{aligned} \omega &= \frac{d\varphi}{dt}, \\ \varepsilon &= \frac{d^2\varphi}{dt^2}. \end{aligned} \right\} \quad (2.5.4)$$

2.5.3. Разложение плоского движения фигуры на поступательное и вращательное

Пусть плоская фигура переместилась из положения I в положение II (рис. 2.32). Покажем, что перемещение фигуры можно осуществить совокупностью двух движений – поступательного и вращательного. На рис. 2.32 показано, что в конечное положение A_1B_1 можно прийти путем сложения двух перемещений: $AB \rightarrow A_1B'_1$ – поступательное перемещение, $A_1B'_1 \rightarrow A_1B_1$ – поворот, или $AB \rightarrow A'_1B_1$ – поступательное перемещение, $A'_1B_1 \rightarrow A_1B_1$ – поворот. При этом углы поворота в обоих случаях одинаковы.

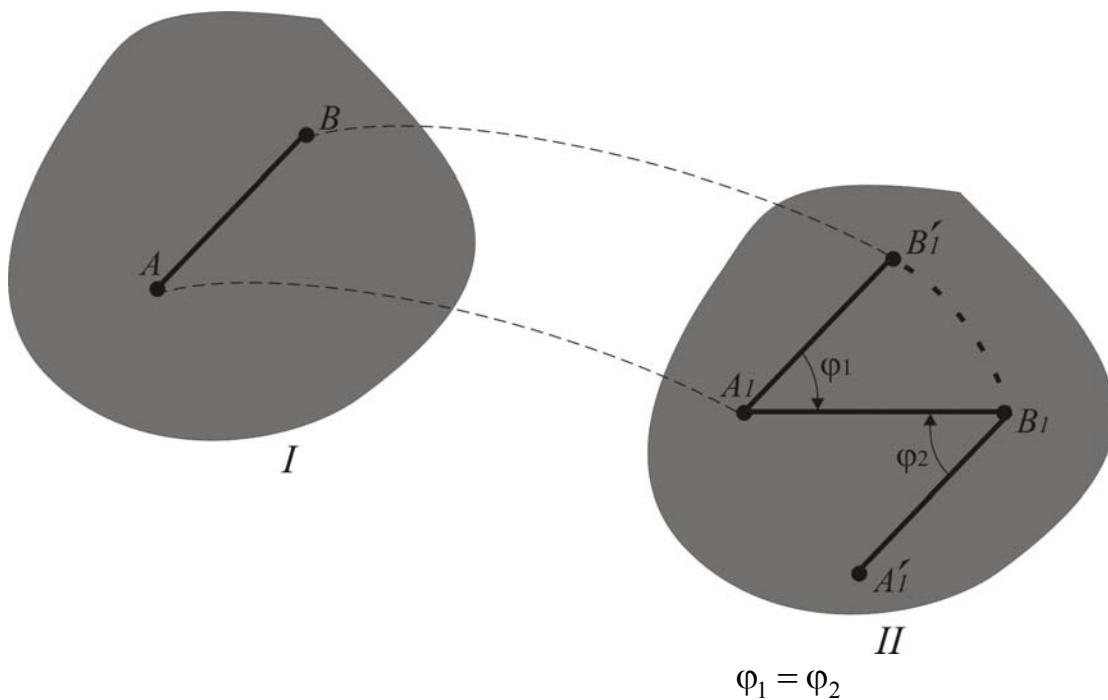


Рис. 2.32. Разложение плоского движения на поступательное и вращательное

Итак, перемещение плоской фигуры в ее плоскости в общем случае можно рассматривать как поступательное перемещение вместе с полюсом и поворот вокруг полюса. При этом поступательное перемещение зависит от выбора полюса, а величина угла поворота от выбора полюса не зависит.

Движение плоской фигуры также можно рассматривать как совокупность поступательного движения и вращения.

2.5.4. Теорема о скоростях точек плоской фигуры

Теорема: скорость любой точки плоской фигуры равна геометрической сумме скоростей: скорости полюса и скорости этой точки во вращательном движении вокруг полюса.

Доказательство. Пусть т. O_1 – неподвижная точка плоскости. Примем точку O плоской фигуры за полюс. Тогда

$$\vec{r}_A = \vec{r}_0 + \overline{OA}. \quad (2.5.5)$$

$$|OA| = \text{const}. \quad (2.5.6)$$

Дифференцируя уравнение (2.5.6), получаем:

$$\frac{d\vec{r}_A}{dt} = \frac{d\vec{r}_0}{dt} + \frac{d\overline{OA}}{dt}, \quad (2.5.7)$$

где

$$\frac{d\vec{r}_A}{dt} = \vec{v}_A; \quad (2.5.8)$$

$$\frac{d\vec{r}_0}{dt} = \vec{v}_0. \quad (2.5.8)$$

Так как $|OA| = \text{const}$, а направление его при повороте фигуры вокруг т. O меняется, то производная $\frac{d\overline{OA}}{dt}$ представляет собой скорость точки A во вращательном движении вокруг полюса O :

$$\frac{d\overline{OA}}{dt} = \vec{v}_{AO}. \quad (2.5.10)$$

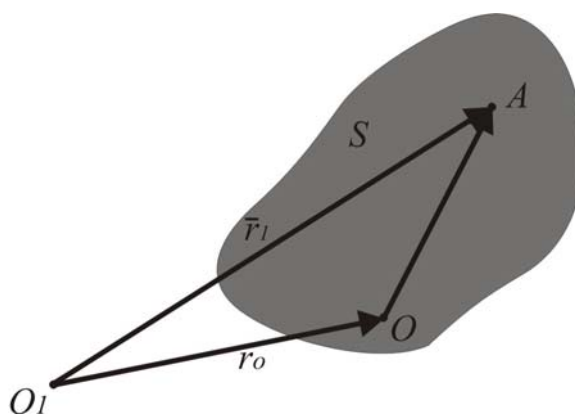


Рис. 2.34. Радиусы-векторы, определяющие положение точки A плоской фигуры

Радиус AO совершает вращательные движения вокруг точки O . При этом

$$\begin{aligned}\bar{v}_{AO} &= \bar{\omega} \times \overline{OA}, \\ OA &\perp \bar{v}_{AO}.\end{aligned}$$

Следовательно, вращательная скорость точки A

$$v_{AO} = \omega \cdot OA.$$

Вектор \bar{v}_{AO} направлен перпендикулярно OA в сторону вращения плоской фигуры вокруг полюса O .

Итак,

$$\bar{v}_A = \bar{v}_O + \bar{v}_{AO}. \quad (2.5.11)$$

Теорема доказана.

Иллюстрация теоремы о сложении скоростей приведена на рис. 2.35. Здесь \bar{v}_A – диагональ параллелограмма, построенная на \bar{v}_O и \bar{v}_{AO} как на сторонах.

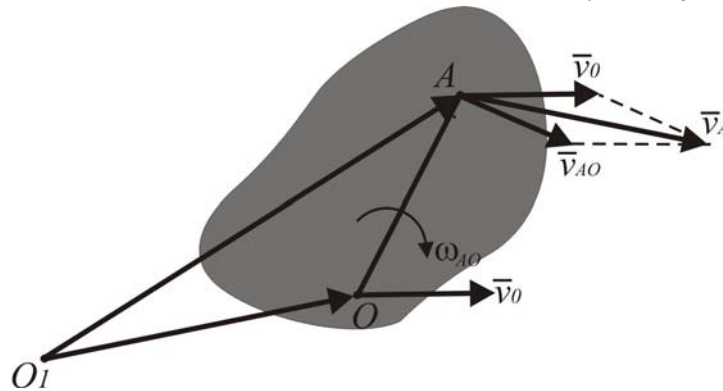


Рис. 2.35. Иллюстрация теоремы о сложении скоростей

2.5.5. Теорема о проекциях скоростей точек плоской фигуры

Теорема: проекции скоростей двух точек плоской фигуры на ось, проходящую через эти точки, равны.

Доказательство. Пусть известна скорость \bar{v}_B точки B . Примем точку B за полюс. Тогда на основании теоремы о сложении скоростей запишем

$$\bar{v}_A = \bar{v}_B + \bar{v}_{BA}.$$

Спроецируем это уравнение на линию AB :

$$(\bar{v}_A)_{AB} = (\bar{v}_B)_{AB} + (\bar{v}_{BA})_{AB}. \quad (2.5.12)$$

Но $\bar{v}_{BA} \perp AB$, следовательно, $(\bar{v}_{BA})_{AB} = 0$. Тогда

$$(\bar{v}_A)_{AB} = (\bar{v}_B)_{AB}. \quad (2.5.13)$$

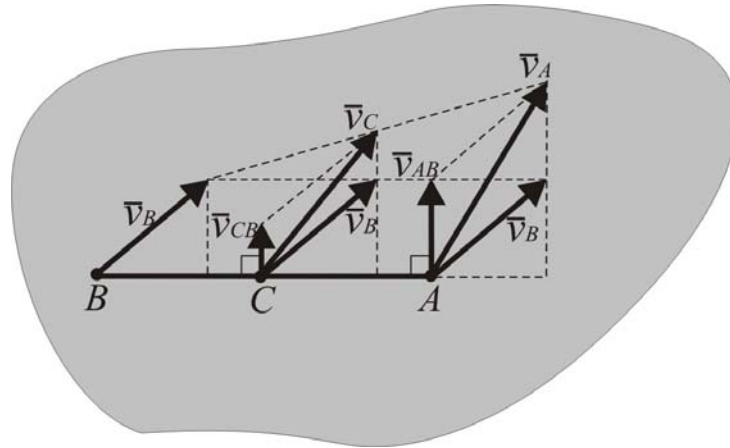


Рис. 2.36. Иллюстрация теоремы о проекциях скоростей двух точек плоской фигуры

Аналогичным будет решение и для любой другой точки прямой AB , например точки C (рис. 2.36): $(\bar{v}_A)_{AB} = (\bar{v}_C)_{AB}$.

2.5.6. Мгновенный центр скоростей

Мгновенным центром скоростей называется точка сечения s или его продолжения, скорость которой в данный момент времени равна нулю.

Пусть в некоторый момент времени t точки A и B сечения s имеют скорости \bar{v}_A и \bar{v}_B .

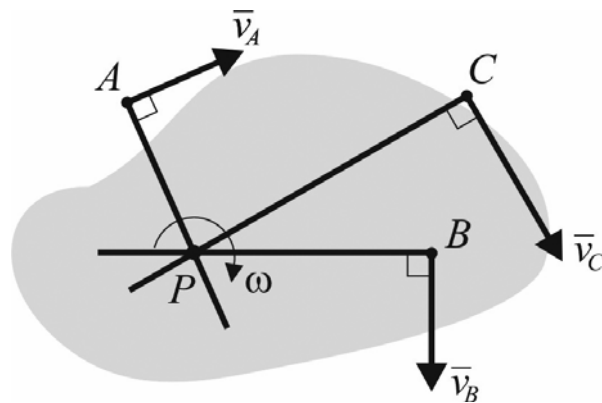


Рис. 2.37. Определение мгновенного центра скоростей

Тогда точка P , лежащая на пересечении перпендикуляров к \bar{v}_A и \bar{v}_B и будет мгновенным центром скоростей ($v_P = 0$). В самом деле, если $v_P \neq 0$, то согласно теореме о проекциях $(\bar{v}_P)_{AP} = (\bar{v}_A)_{AP} = 0$, т.е. $\bar{v}_P \perp AP$ или $v_P = 0$. В то же время $(\bar{v}_P)_{BP} = (\bar{v}_B)_{BP} = 0$, т.е. $\bar{v}_P \perp BP$, или $v_P = 0$. Так как \bar{v}_P не может быть одновременно перпендикулярен AP и BP , то $v_P = 0$.

Пусть $t. P$ – полюс, тогда

$$\bar{v}_C = \bar{v}_P + \bar{v}_{CP},$$

но

$$v_P = 0,$$

следовательно,

$$\bar{v}_C = \bar{v}_{CP}. \quad (2.5.14)$$

Т.е. скорость любой точки тела равна ее скорости при вращательном движении вокруг мгновенного центра скоростей (МЦС).

Величина этой скорости

$$v_{CP} = \omega \cdot CP. \quad (2.5.15)$$

Т.е. скорости точек тела пропорциональны расстояниям до МЦС.

П р и м е р ы определения МЦС.

$$\begin{aligned} \omega &= \frac{v_0}{R}; \\ v_B &= BP \cdot \omega; \\ v_E &= EP \cdot \omega \dots \\ v_K &= 2R \cdot \omega = 2v_0. \end{aligned}$$

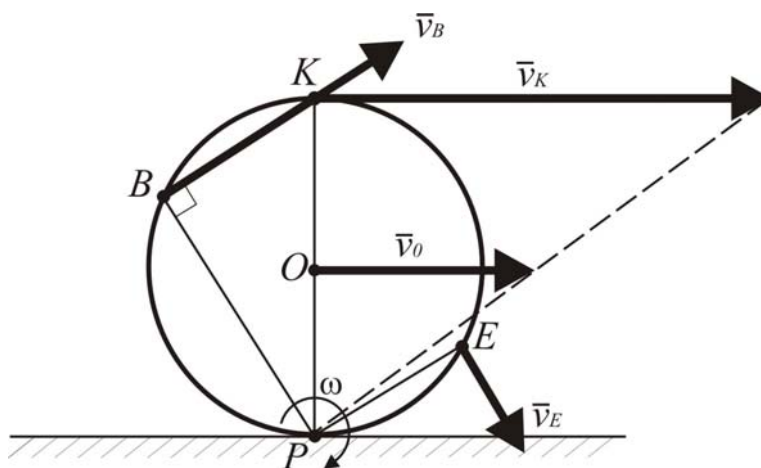


Рис. 2.38. МЦС катящегося колеса

$$\begin{aligned} \omega_{AB} &= \frac{v_A}{AP}; \\ v_B &= \omega_{AB} \cdot BP. \end{aligned}$$

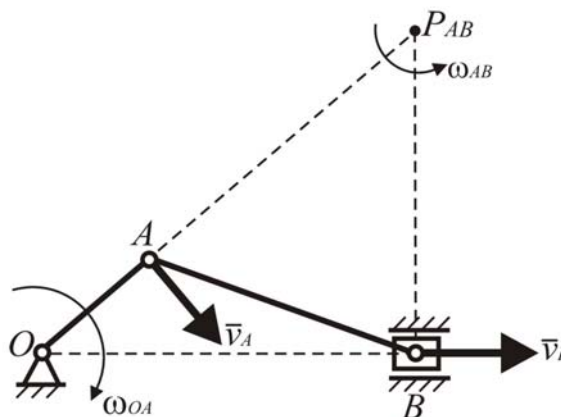


Рис. 2.39. МЦС шатуна кривошипно-шатунного механизма

2.5.7. Определение ускорений точек тела при плоском движении

Плоское движение твердого тела можно рассматривать как совокупность двух движений: поступательного движения тела вместе с полюсом и его вращения вокруг полюса.

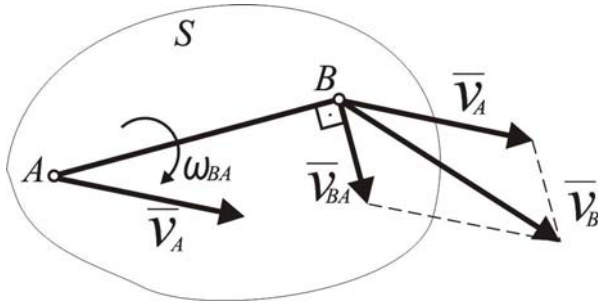


Рис. 2.40. Скорость точки B и полюса A

Теорема: ускорение любой точки плоской фигуры равно геометрической сумме ускорения полюса и ускорения этой точки во вращательном движении этой фигуры вокруг полюса.

Доказательство. Рассмотрим движение плоской фигуры S в своей плоскости или движение отрезка AB.

Как известно,

$$\bar{v}_B = \bar{v}_A + \bar{v}_{BA}, \quad (2.5.16)$$

где $\bar{v}_{BA} = \bar{\omega} \times \overline{AB}$.

Продифференцируем уравнение (2.5.16) по времени:

$$\frac{d\bar{v}_B}{dt} = \frac{d\bar{v}_A}{dt} + \frac{d\bar{v}_{BA}}{dt} \quad (2.5.17)$$

Но $\frac{d\bar{v}_B}{dt} = \bar{a}_B$, $\frac{d\bar{v}_A}{dt} = \bar{a}_A$, $\frac{d\bar{v}_{BA}}{dt} = \bar{a}_{BA}$. Т.е. уравнение (2.5.17) можно переписать в виде:

$$\bar{a}_B = \bar{a}_A + \bar{a}_{BA}. \quad (2.5.18)$$

Теорема доказана. Рассмотрим подробнее последнюю производную из выражения (2.5.17):

$$\begin{aligned} \frac{d\bar{v}_{BA}}{dt} &= \frac{d(\bar{\omega}_{AB} \times \overline{BA})}{dt} = \frac{d\bar{\omega}}{dt} \times \overline{BA} + \bar{\omega} \times \frac{d\overline{BA}}{dt} = \bar{\varepsilon} \times \overline{BA} + \bar{\omega} \times \bar{v}_{BA} = \\ &= \bar{\varepsilon} \times \overline{BA} + \bar{\omega} \times (\bar{\omega} \times \overline{BA}) = \bar{a}_{BA}^r + \bar{a}_{BA}^n. \end{aligned}$$

или

$$\bar{a}_{BA} = \bar{a}_{BA}^r + \bar{a}_{BA}^n. \quad (2.5.19)$$

Величины касательного и нормального ускорения определяются из соотношений:

$$a_{BA}^r = \varepsilon_{AB} \cdot AB, \quad (2.5.20)$$

$$a_{BA}^n = \omega_{AB}^2 \cdot AB. \quad (2.5.21)$$

Таким образом, ускорение точки B удобно определять с помощью соотношения

$$\bar{a}_B = \bar{a}_A + \bar{a}_{BA}^r + \bar{a}_{BA}^n. \quad (2.5.22)$$

Если одна (A или B) или обе точки совершают движение по окружности (или по кривой), то уравнение (2.5.22) решают в виде:

$$\bar{a}_B = \bar{a}_A^n + \bar{a}_A^\tau + \bar{a}_{BA}^\tau + \bar{a}_{BA}^n, \quad (2.5.22a)$$

или
$$\bar{a}_B^n + \bar{a}_B^\tau = \bar{a}_A^n + \bar{a}_A^\tau + \bar{a}_{BA}^\tau + \bar{a}_{BA}^n, \quad (2.5.22б)$$

или
$$\bar{a}_B^n + \bar{a}_B^\tau = \bar{a}_A^n + \bar{a}_A^\tau + \bar{a}_{BA}^\tau + \bar{a}_{BA}^n. \quad (2.5.22в)$$

Неизвестное ускорение находят, проецируя уравнение (2.5.22) на координатные оси.

Теорему о сложении ускорений иллюстрирует рис. 2.41.

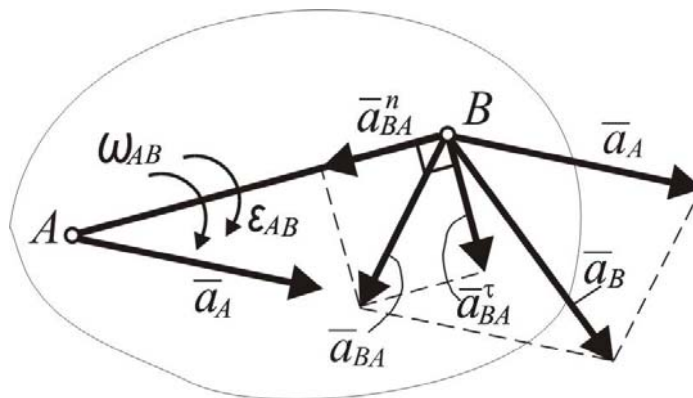


Рис. 2.41. Определение ускорения точки B через ускорение полюса A

Пример 1. Найти ускорение ползуна кривошипно-шатунного механизма и угловое ускорение шатуна в момент, когда $OA \perp AB$.

Дано:

$$\omega_{OA} = 4 \frac{1}{c} = \text{const},$$

$$OA = 10 \text{ см},$$

$$AB = 17,32 \text{ см}.$$

Найти: a_B, ε_{AB} .

Решение:

$$v_A = \omega_{OA} \cdot OA = 4 \cdot 10 = 40 \text{ см/с}.$$

$$\omega_{AB} = \frac{v_A}{AP_{AB}} = \frac{40}{30} = 1,333 \frac{1}{c}.$$

$$\bar{a}_B = \bar{a}_A^n + \bar{a}_A^\tau + \bar{a}_{BA}^n + \bar{a}_{BA}^\tau, \quad (*)$$

$$a_A = a_A^n = \omega_{OA}^2 \cdot OA = 16 \cdot 10 = 160 \text{ см/с}^2,$$

$$a_A^\tau = 0;$$

$$a_{BA}^n = \omega_{AB}^2 \cdot AB = \frac{16}{9} \cdot 17,32 = 30,79 \text{ см/с}^2.$$

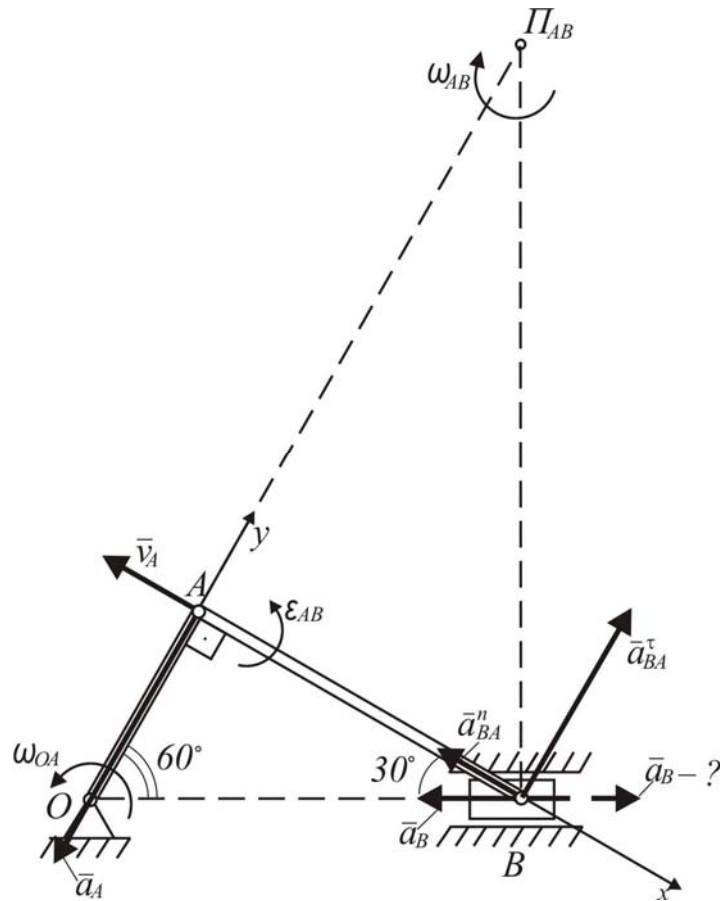


Рис. 2.42. Определение ускорения ползуна

Проецируем уравнение (*) на координатные оси:
на ось x :

$$a_B \cdot \cos 30^\circ = 0 + 0 - a_{BA}^n + 0.$$

$$a_B = -\frac{a_{BA}^n}{\cos 30^\circ} = -\frac{30,79}{0,866} = -35,555 \text{ см/с}^2.$$

на ось y :

$$a_B \cdot \sin 30^\circ = -a_A + 0 + 0 + a_{BA}^\tau.$$

$$a_{BA}^\tau = a_B \sin 30^\circ + a_A = -35,555 \cdot 0,5 + 160 = 142,222 \text{ см/с}.$$

$$\epsilon_{AB} = \frac{a_{BA}^\tau}{AB} = \frac{142,222}{17,32} = 8,211 \frac{1}{\text{с}^2}.$$

Геометрическая проверка. Для проверки построим векторный многоугольник ускорений по уравнению (*) (рис. 2.43).

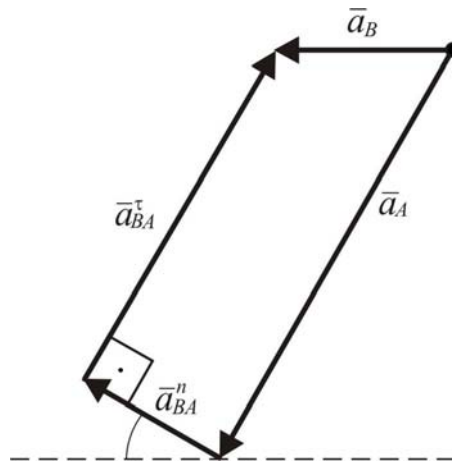


Рис. 2.43. Графическая проверка

Пример 2. Определить ускорение точки B и угловое ускорение звена AB механизма.

Дано:

$$O_1A = 20 \text{ см}$$

$$AB = 20 \text{ см}$$

$$O_2B = 10 \text{ см}$$

$$\omega_{O_1A} = 2 \frac{1}{\text{с}}$$

$$\varepsilon_{O_1A} = 3 \frac{1}{\text{с}^2}$$

Найти: a_B, ε_{AB}

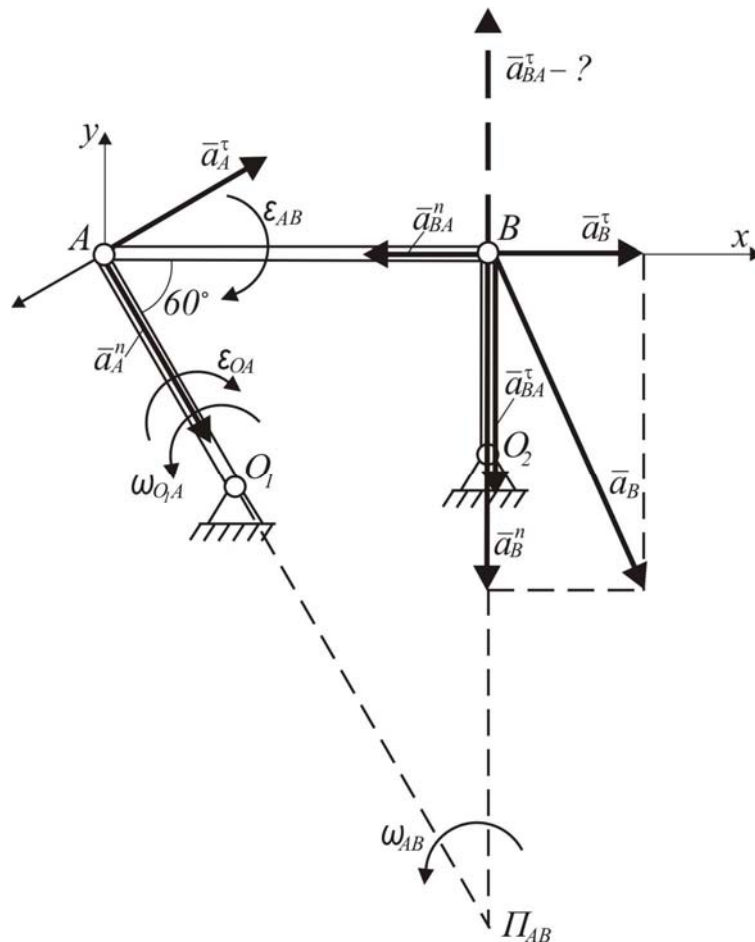


Рис. 2.44. Определение ускорения точки B механизма

Решение: скорость точки A

$$v_A = \omega_{O_1A} \cdot O_1A = 2 \cdot 20 = 40 \text{ см/с.}$$

Проведя перпендикуляры к скоростям точек A и B , найдем МЦС звена AB . Угловая скорость этого звена

$$\omega_{AB} = \frac{v_A}{AP_{AB}} = \frac{40}{40} = 1 \frac{1}{\text{с}}.$$

$$v_B = \omega_{AB} \cdot BP_{AB} = 1 \cdot 20 \cdot 1,732 = 34,64 \text{ см/с.}$$

$$\omega_{O_2B} = \frac{v_B}{O_2B} = \frac{34,64}{10} = 3,464 \frac{1}{\text{с}}.$$

$$\bar{a}_B^n + \bar{a}_B^\tau = \bar{a}_A^n + \bar{a}_A^\tau + \bar{a}_{BA}^n + \bar{a}_{BA}^\tau \quad (**)$$

$$a_B^n = \omega_{O_2B}^2 \cdot O_2B = 3,464^2 \cdot 10 = 119,993 \frac{\text{см}}{\text{с}^2}.$$

$$a_A^n = \omega_{O_1A}^2 \cdot O_1A = 4 \cdot 20 = 80 \text{ см/с}^2$$

$$a_A^\tau = \varepsilon_{O_1A} \cdot O_1A = 3 \cdot 20 = 60 \text{ см/с}^2$$

$$a_{BA}^n = \omega_{AB}^2 \cdot AB = 1 \cdot 20 = 20 \text{ см/с}^2$$

Проецируем уравнение (**) на координатные оси:

на ось x :

$$0 + a_B^\tau = a_A^n \cdot \cos 60^\circ + a_A^\tau \cdot \cos 30^\circ - a_{BA}^n + 0,$$

$$a_B^\tau = 80 \cdot 0,5 + 60 \cdot 0,866 - 20 = 71,96 \text{ см/с}^2;$$

на ось y :

$$-a_B^n + 0 = -a_A^n \cdot \sin 60^\circ + a_A^\tau \cdot \sin 30^\circ + 0 + a_{BA}^\tau.$$

$$a_{BA}^\tau = 80 \cdot 0,866 - 60 \cdot 0,5 - 119,993 = -80,713 \text{ см/с}^2,$$

$$a_B = \sqrt{(a_B^n)^2 + (a_B^\tau)^2} = 139,4 \text{ см/с}^2,$$

$$\varepsilon_{AB} = \frac{a_{BA}^\tau}{AB} = \frac{80,713}{20} = 4,036 \text{ 1/с}^2.$$

Геометрическая проверка.

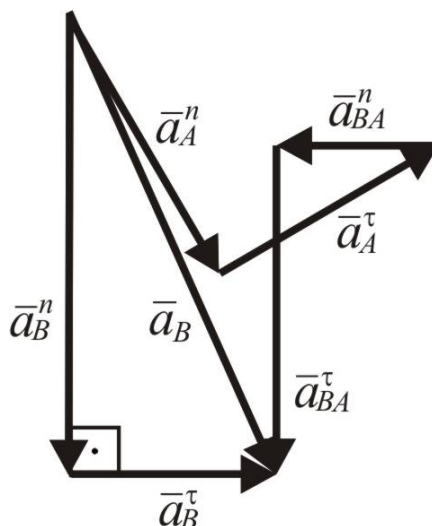


Рис. 2.45. Графическая проверка

2.6. Сложное движение точки

2.6.1. Понятие о сложном движении точки

До сих пор мы рассматривали движение точки или тела по отношению к одной системе отсчета. Однако в ряде случаев оказывается целесообразным рассматривать движение точки по отношению к двум и более системам отсчета, движущимся относительно друг друга. Движение, совершаемое при этом точкой (или телом) называется составным или сложным. В простейшем случае сложное движение точки состоит из относительного и переносного.

Примеры сложного движения:

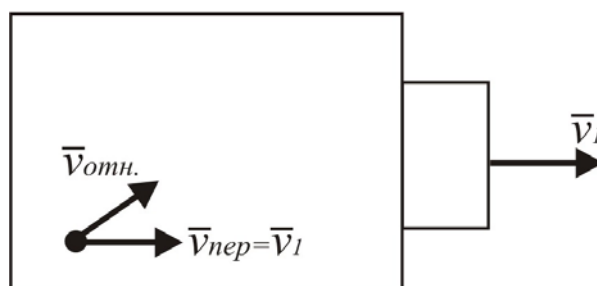


Рис. 2.46. Шар, катящийся по кузову движущегося грузового автомобиля

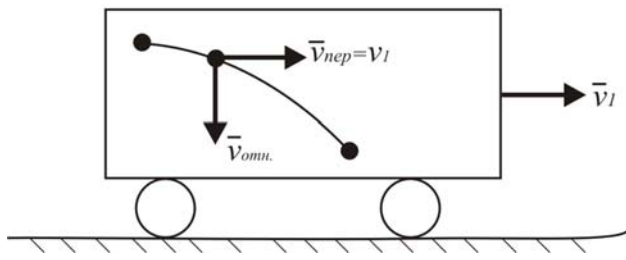


Рис. 2.47. Шарик, падающий в движущемся вагоне

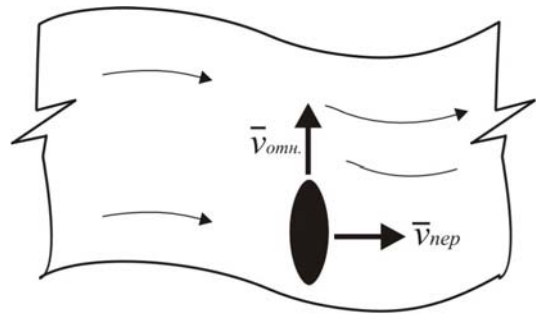


Рис. 2.48. Лодка, пересекающая реку

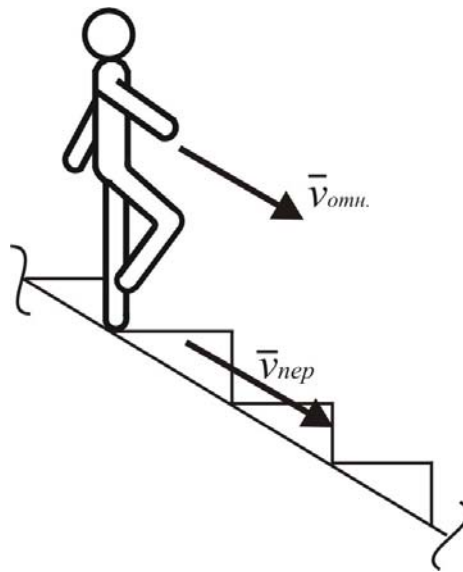


Рис. 2.49. Человек, идущий по эскалатору

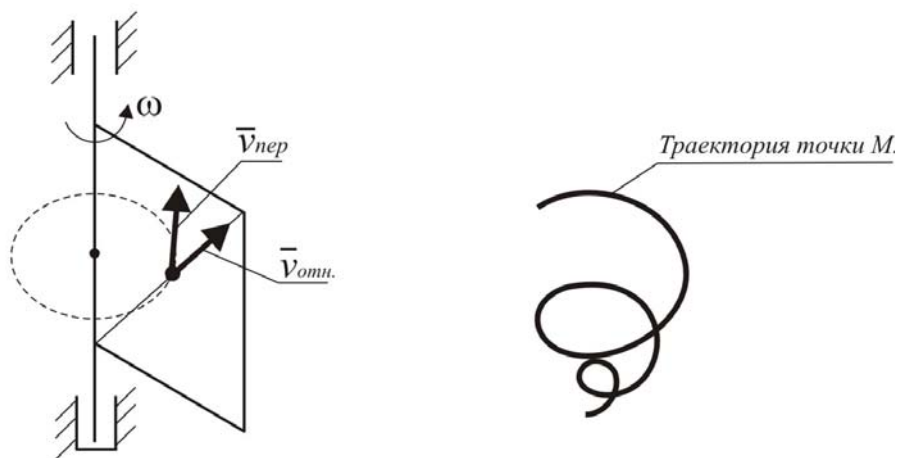


Рис. 2.50. Точка, движущаяся по диагонали вращающейся рамки

Определим понятия *относительного, переносного и абсолютного* движений. Пусть имеются две системы отсчета, движущиеся относительно друг друга. Если одну из этих систем $O_1x_1y_1z_1$ принять за неподвижную, то вторая система $Oxyz$ будет двигаться относительно первой.

Движение точки относительно подвижной системы отсчета $Oxyz$ называется *относительным*. Скорость и ускорение точки в относительном движении называют относительной скоростью $\bar{v}_{отн}$ и относительным ускорением $\bar{a}_{отн}$.

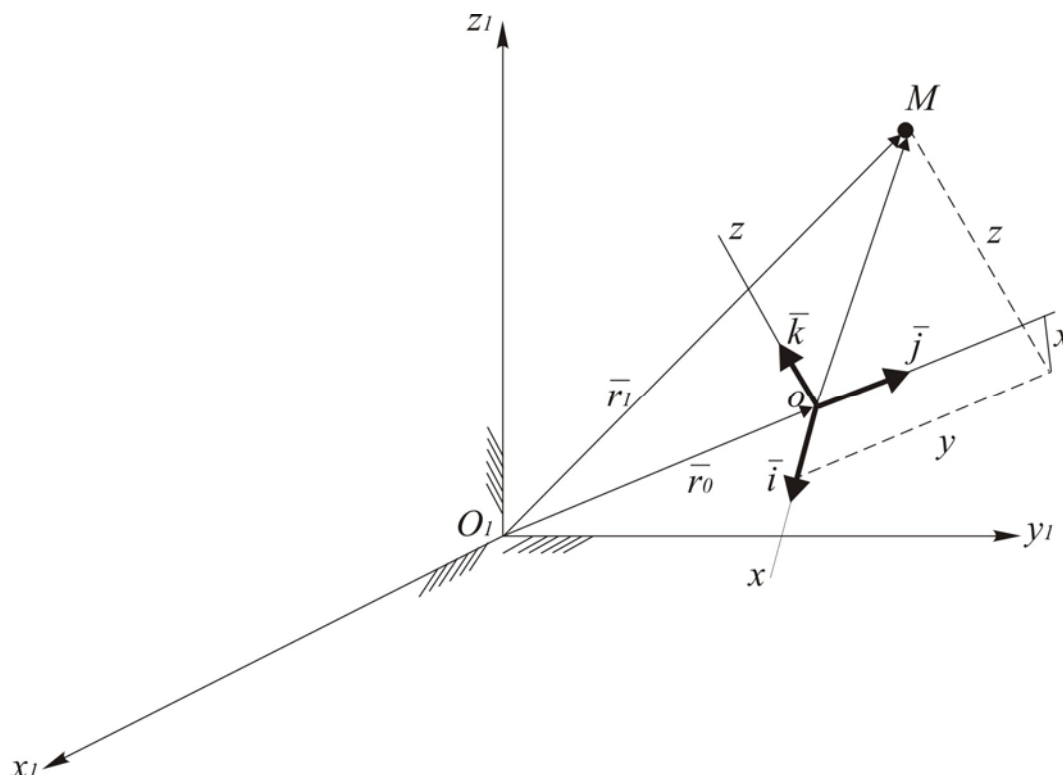


Рис. 2.51. Положение точки относительно двух систем координат

Движение точки относительно неподвижной системы отсчета $Oxyz$ называется *абсолютным или сложным*. Траектория, скорость и ускорение этого движения называются абсолютными траекторией, скоростью и ускорением $\bar{v}_{абс}, \bar{a}_{абс}$, или \bar{v}, \bar{a} (без индексов).

Движение, совершаемое подвижной системой отсчета $Oxyz$ и всеми неизменно связанными с ней точками пространства по отношению к неподвижной системе отсчета $O_1x_1y_1z_1$ является для точки M *переносным движением*. Скорость и ускорение той точки m , которая неизменно связана с подвижными осями $Oxyz$ и с которой в данный момент совпадает движущаяся точка M , называются переносными скоростью $\bar{v}_{пер}$ и ускорением $\bar{a}_{пер}$ точки.

Относительное движение точки определяется радиусом-вектором \bar{r} , положение точки относительно неподвижной системы отсчета – радиусом-вектором \bar{r}_1 . Переносное движение точки складывается из вектора \bar{r}_0 (характеризующего движение полюса), определяющего положение начала координат подвижной системы отсчета и постоянного по величине вектора \bar{r} , скрепленного с подвижной, вращающейся вокруг точки O системой координат $Oxyz$.

2.6.2. Теорема о сложении скоростей

Т е о р е м а . Абсолютная скорость точки равна геометрической сумме переносной и относительной скоростей.

Во все время движения точки радиусы-векторы \bar{r}_1 , \bar{r}_0 и \bar{r} связаны зависимостью

$$\bar{r}_1 = \bar{r}_0 + \bar{r}; \quad (2.6.1)$$

здесь
$$\bar{r} = x\bar{i} + y\bar{j} + z\bar{k} \quad (2.6.2)$$

Вектор абсолютной скорости точки M

$$\bar{v} = \frac{d\bar{r}_1}{dt}. \quad (2.6.3)$$

Дифференцируя выражение (2.6.1) с учетом (2.6.2), получаем:

$$\bar{v} = \frac{d\bar{r}_1}{dt} = \frac{d\bar{r}_0}{dt} + x \frac{d\bar{i}}{dt} + y \frac{d\bar{j}}{dt} + z \frac{d\bar{k}}{dt} + \left(\frac{dx}{dt} \bar{i} + \frac{dy}{dt} \bar{j} + \frac{dz}{dt} \bar{k} \right). \quad (2.6.4)$$

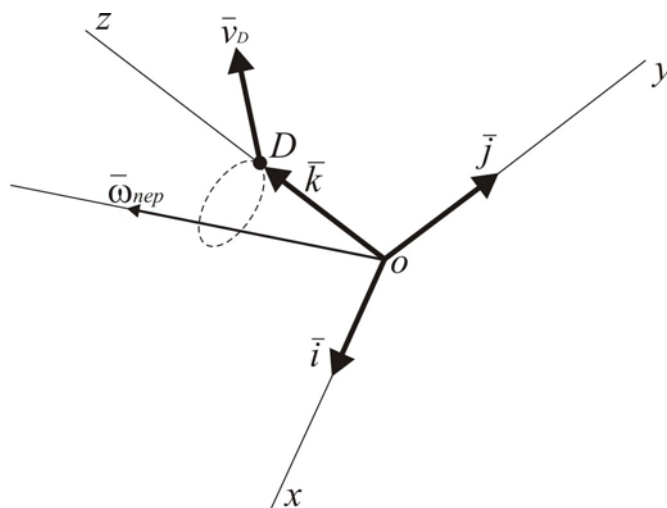


Рис. 2.52. Скорость конца единичного орта

Производная от каждого орта по времени представляет собой линейную скорость точек, для которой орт является радиусом-вектором:

$$\bar{v}_D = \frac{d\bar{k}}{dt}. \quad (2.6.5)$$

Движение подвижной системы вокруг точки O – серия вращений вокруг мгновенных осей вращения. Тогда линейную скорость \bar{v}_D можно записать в виде:

$$\bar{v}_D = \bar{\omega}_{пер} \times \bar{k}, \quad (2.6.6)$$

или

$$\frac{d\bar{k}}{dt} = \bar{\omega}_{\text{пер}} \times \bar{k}. \quad (2.6.7)$$

Следовательно,

$$\frac{d\bar{j}}{dt} = \bar{\omega}_{\text{пер}} \times \bar{j}; \quad (2.6.9)$$

$$\frac{d\bar{i}}{dt} = \bar{\omega}_{\text{пер}} \times \bar{i}. \quad (2.6.10)$$

Выражение в скобках уравнения (2.6.4) – это относительная скорость

$$\frac{dx}{dt} \cdot \bar{i} + \frac{dy}{dt} \cdot \bar{j} + \frac{dz}{dt} \cdot \bar{k} = \bar{v}_{\text{отн}}. \quad (2.6.11)$$

Первое слагаемое в правой части уравнения (2.6.4) – это скорость точки O :

$$\frac{d\bar{r}_0}{dt} = \bar{v}_0; \quad (2.6.12)$$

Итак,

$$\bar{v} = \bar{v}_0 + \bar{\omega}_{\text{пер}} \times (x\bar{i} + y\bar{j} + z\bar{k}) + \bar{v}_{\text{отн}}, \quad (2.6.13)$$

или

$$\bar{v} = (\bar{v}_0 + \bar{\omega}_{\text{пер}} \times \bar{r}) + \bar{v}_{\text{отн}}. \quad (2.6.14)$$

Выражение в скобках из (2.6.14) представляет собой скорость точки, неподвижно связанной с той точкой подвижной системы отсчета, с которой в данный момент совпадает движущаяся точка M , т.е. переносную скорость точки:

$$\bar{v}_{\text{пер}} = \bar{v}_0 + \bar{\omega}_{\text{пер}} \times \bar{r}, \quad (2.6.15)$$

следовательно,

$$\bar{v} = \bar{v}_{\text{пер}} + \bar{v}_{\text{отн}} \quad (2.6.16)$$

т.е. абсолютная скорость точки равна геометрической сумме относительной и переносной скоростей.

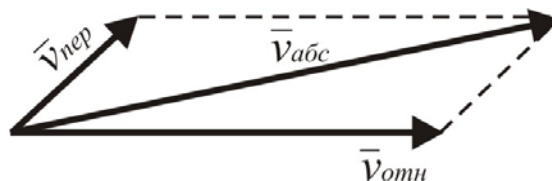


Рис. 2.53. Иллюстрация теоремы о сложении скоростей

Величину абсолютной скорости (рис. 2.54) можно вычислить по формуле

$$v_{\text{абс}} = \sqrt{v_{\text{пер}}^2 + v_{\text{отн}}^2 + 2v_{\text{пер}} \cdot v_{\text{отн}} \cos\left(\widehat{\bar{v}_{\text{пер}}}, \widehat{\bar{v}_{\text{отн}}}\right)}. \quad (2.6.17)$$

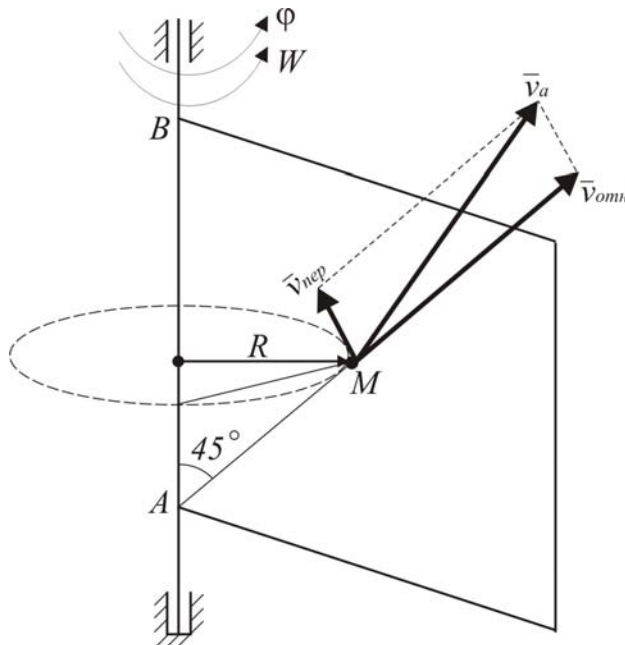


Рис. 2.54. Абсолютная скорость точки M

Пример. Рамка вращается по закону $\varphi = 2t^2$ рад. По диагонали рамки от положения A движется точка M по закону $AM = s = 2 \sin \frac{\pi t}{6}$ (м).

Определить абсолютную скорость точки в момент времени $t = 1$ с.

Решение. Рамка – подвижная система отсчета.

$$s = 2 \cdot 0,5 = 1 \text{ м.}$$

$$v_{\text{отн}} = \frac{ds}{dt} = 2 \frac{\pi}{6} \cos \frac{\pi t}{6} = 0,906 \text{ м/с.}$$

$$\omega_{\text{пер}} = \frac{d\varphi}{dt} = 4t = 4 \frac{1}{\text{с.}}$$

$$v_{\text{пер}} = \omega_{\text{пер}} \cdot R = 4 \cdot 1 \cdot \sin 45^\circ = 2,828 \text{ м/с.}$$

$$v = \sqrt{v_{\text{пер}}^2 + v_{\text{отн}}^2 + 2v_{\text{пер}} \cdot v_{\text{отн}} \cos 90^\circ} = \sqrt{v_{\text{пер}}^2 + v_{\text{отн}}^2} = 2,97 \text{ м/с.}$$

2.6.3. Сложение ускорений в сложном движении

Теорема. В случае непоступательного переносного движения абсолютное ускорение точки равно геометрической сумме переносного, относительного и кориолисова ускорений.

Относительное движение:

$$\begin{cases} \text{постоянные} - \bar{i}, \bar{j}, \bar{k}; \\ \text{переменные} - x, y, z. \end{cases}$$

Переносное движение:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{постоянные - } x, y, z; \\ \text{переменные - } \bar{i}, \bar{j}, \bar{k}, \\ \quad \quad \quad - r_{O_1O}, \\ \quad \quad \quad - \text{направление } \bar{r}_{OM}. \end{array} \right.$$

Выражения для радиуса-вектора точки и абсолютной скорости:

$$\bar{r} = \bar{r}_{O_1O} + \bar{r}_{OM} = \bar{r}_{O_1O} + (\bar{i}x + \bar{j}y + \bar{k}z).$$

$$\bar{v}_{\text{абс}} = \frac{d\bar{r}}{dt} = \left(\bar{v}_O + \frac{d\bar{i}}{dt}x + \frac{d\bar{j}}{dt}y + \frac{d\bar{k}}{dt}z \right) + \left(\bar{i} \frac{dx}{dt} + \bar{j} \frac{dy}{dt} + \bar{k} \frac{dz}{dt} \right).$$

Дифференцируя последнее уравнение по времени, получаем:

$$\begin{aligned} \bar{a}_{\text{абс}(M)} = \frac{d\bar{v}_{\text{абс}}}{dt} = & \left(\frac{d\bar{v}_O}{dt} + x \frac{d^2\bar{i}}{dt^2} + y \frac{d^2\bar{j}}{dt^2} + z \frac{d^2\bar{k}}{dt^2} \right) + \\ & + \left(\frac{d^2x}{dt^2}\bar{i} + \frac{d^2y}{dt^2}\bar{j} + \frac{d^2z}{dt^2}\bar{k} \right) + 2 \left(\frac{d\bar{i}}{dt} \frac{dx}{dt} + \frac{d\bar{j}}{dt} \frac{dy}{dt} + \frac{d\bar{k}}{dt} \frac{dz}{dt} \right). \end{aligned} \quad (2.6.18)$$

Производные от единичных векторов $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$ вычисляем по следующим формулам:

$$\frac{d\bar{i}}{dt} = \bar{\omega}_{\text{пер}} \times \bar{i}, \quad (2.6.19)$$

$$\frac{d^2\bar{i}}{dt^2} = \frac{d}{dt}(\bar{\omega}_{\text{пер}} \times \bar{i}) = \bar{\varepsilon}_{\text{пер}} \times \bar{i} + \bar{\omega}_{\text{пер}} \times (\bar{\omega}_{\text{пер}} \times \bar{i}). \quad (2.6.20)$$

Выражение в первой скобке уравнения (2.6.18):

$$\begin{aligned} & \left(\frac{d^2\bar{v}_O}{dt^2} + \frac{d^2\bar{i}}{dt^2}x + \frac{d^2\bar{j}}{dt^2}y + \frac{d^2\bar{k}}{dt^2}z \right) = \\ & = \bar{a}_O + \bar{\varepsilon}_{\text{пер}} \times \bar{r}_{OM} + \bar{\omega}_{\text{пер}} \times (\bar{\omega}_{\text{пер}} \times \bar{r}_{OM}) = \bar{a}_O + \bar{a}_{MO} = \bar{a}_{\text{пер}}. \end{aligned} \quad (2.6.21)$$

Выражение во второй скобке уравнения (2.6.18):

$$\frac{d^2x}{dt^2}\bar{i} + \frac{d^2y}{dt^2}\bar{j} + \frac{d^2z}{dt^2}\bar{k} = a_x^{\text{отн}}\bar{i} + a_y^{\text{отн}}\bar{j} + a_z^{\text{отн}}\bar{k} = \bar{a}_{\text{отн}}. \quad (2.6.22)$$

Выражение в третьей скобке уравнения (2.6.18):

$$\begin{aligned} & 2 \left(\bar{\omega}_{\text{пер}} \times \bar{i} \frac{dx}{dt} + \bar{\omega}_{\text{пер}} \times \bar{j} \frac{dy}{dt} + \bar{\omega}_{\text{пер}} \times \bar{k} \frac{dz}{dt} \right) = \\ & = 2\bar{\omega}_{\text{пер}} \times (v_x^{\text{отн}}\bar{i} + v_y^{\text{отн}}\bar{j} + v_z^{\text{отн}}\bar{k}) = 2\bar{\omega}_{\text{пер}} \times \bar{v}_{\text{отн}} = \bar{a}_{\text{кор}}. \end{aligned} \quad (2.6.23)$$

Это ускорение называют дополнительным или кориолисовым ускорением.

Таким образом, абсолютное ускорение точки M является геометрической суммой трех ускорений:

$$\bar{a}_{\text{абс}} = \frac{d\bar{v}_{\text{абс}}}{dt} = \bar{a}_{\text{пер}} + \bar{a}_{\text{отн}} + \bar{a}_{\text{кор}}. \quad (2.6.24)$$

Теорема доказана.

Величина кориолисова ускорения равна модулю векторного произведения $2\bar{\omega}_{\text{пер}} \bar{v}_{\text{отн}}$:

$$a_{\text{кор}} = 2\omega_{\text{пер}} \cdot v_{\text{отн}} \sin(\bar{\omega}, \bar{v}_{\text{отн}}). \quad (2.6.25)$$

Кориолисово ускорение есть результат:

- 1) изменения переносной скорости за счет относительного движения;
- 2) изменения относительной скорости за счет переносного движения.

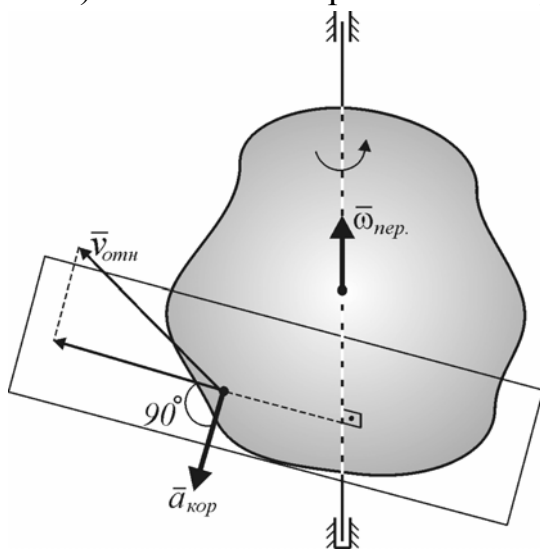


Рис. 2.55. Определение направления ускорения Кориолиса

Направление кориолисова ускорения определяется по следующему правилу: $v_{\text{отн}}$ проецируется на плоскость, перпендикулярную оси переносного вращения, и поворачивается на 90° в сторону вращения – это и есть направление $a_{\text{кор}}$.

Кориолисово ускорение равно нулю ($\bar{a}_{\text{кор}} = 0$) в трех случаях:

- 1) переносное движение – поступательное движение ($\bar{\omega}_{\text{пер}} = 0$);
- 2) при относительном покое ($v_{\text{отн}} = 0$);
- 3) $\bar{\omega}_{\text{пер}} \parallel \bar{v}_{\text{отн}}$.

2.6.4. Природа кориолисова ускорения

Рассмотрим движение точки по радиусу вращающейся платформы.

Проанализируем значения скоростей точки в двух положениях платформы. Скорость относительного движения точки $\bar{v}_{\text{отн}}$ изменилась за счет переносного движения, скорость переносного движения $\bar{v}_{\text{пер}}$ – за счет относительного движения; это взаимное влияние переносного движения на относительную скорость и относительного движения на переносную скорость и вызывает кориолисово ускорение.

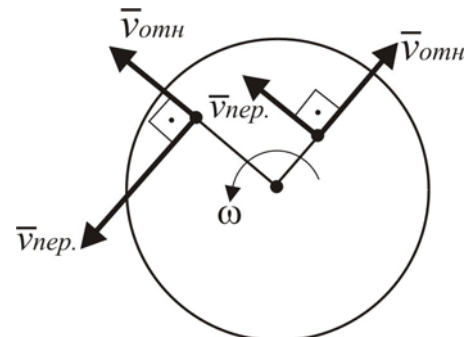


Рис. 2.56. Изменение относительной скорости в переносном движении и изменение переносной скорости в относительном движении

Пример. Точка движется по гипотенузе AC треугольника ABC (рис. 2.57) по закону $s = 2t^2$ см. Треугольник вращается вокруг катета AB с постоянной угловой скоростью $\omega = 3 \frac{1}{c}$. Найти абсолютное ускорение т. M при $t=2$ с.

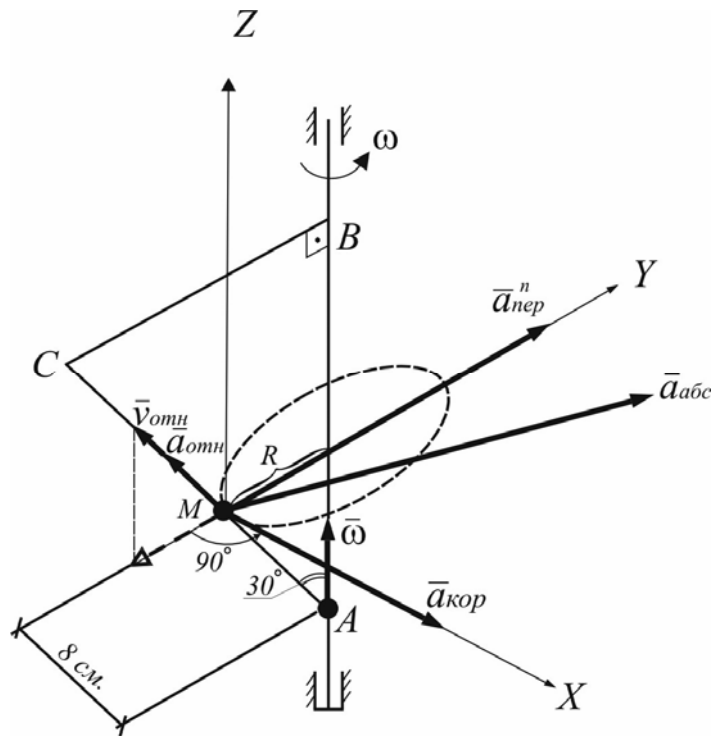


Рис. 2.57. Определение абсолютного ускорения точки

При $t=2$ с имеем: $s=AM=8$ см, $v_{отн}=4t=8$ см/с,

$$v_{пер} = \omega R = 3 \cdot 4 = 12 \text{ см/с},$$

$$a_{отн} = \frac{dv_{отн}}{dt} = 4 \text{ см/с}^2;$$

$$a_{пер} = a_{пер}^n = \omega^2 R = 9 \cdot 4 = 36 \text{ см/с}^2.$$

$$a_{кор} = 2\omega_{пер} \cdot v_{отн} \sin(\bar{\omega}, \hat{v}) = 2 \cdot 2 \cdot 12 \sin 30 = 24 \text{ см/с}^2;$$

$$a_x = a_{кор} = 24 \text{ см/с}^2;$$

$$a_y = a_{пер} - a_{отн} \sin 30^\circ = 36 - 4 \cdot 0,5 = 34 \text{ см/с}^2;$$

$$a_z = a_{отн} \cos 30^\circ = 4 \cdot 0,866 = 3,464 \text{ см/с}^2;$$

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} = \sqrt{24^2 + 34^2 + 3,464^2} = \\ = \sqrt{576 + 1156 + 12} = 41,76 \text{ см/с}^2.$$

2.7. Сферическое движение твердого тела

2.7.1. Уравнения движения

Пусть одна точка тела во все время движения остается неподвижной. Тогда все остальные точки могут двигаться по сферическим поверхностям, центры которых совпадают с неподвижной точкой. Такое движение тела называют сферическим, например движение волчка (рис. 2.58).

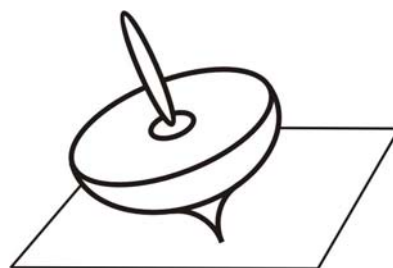


Рис. 2.58. Движение волчка – пример сферического движения

Для определения положения тела в любой момент времени воспользуемся двумя системами осей координат: неподвижной системой $Ox_1y_1z_1$ и подвижной, т.е. связанной с телом, системой координат $OXYZ$ с общим началом координат в неподвижной точке O .

Положение тела можно определить с помощью трех углов:

- 1) угла ψ между осями Ox и OJ , который лежит в плоскости, перпендикулярной оси Z_1 ;
- 2) угла θ между осями OZ и OZ_1 , который лежит в плоскости, перпендикулярной линии OJ ;
- 3) угла φ между осями OJ и Ox , который лежит в плоскости, перпендикулярной оси Z .

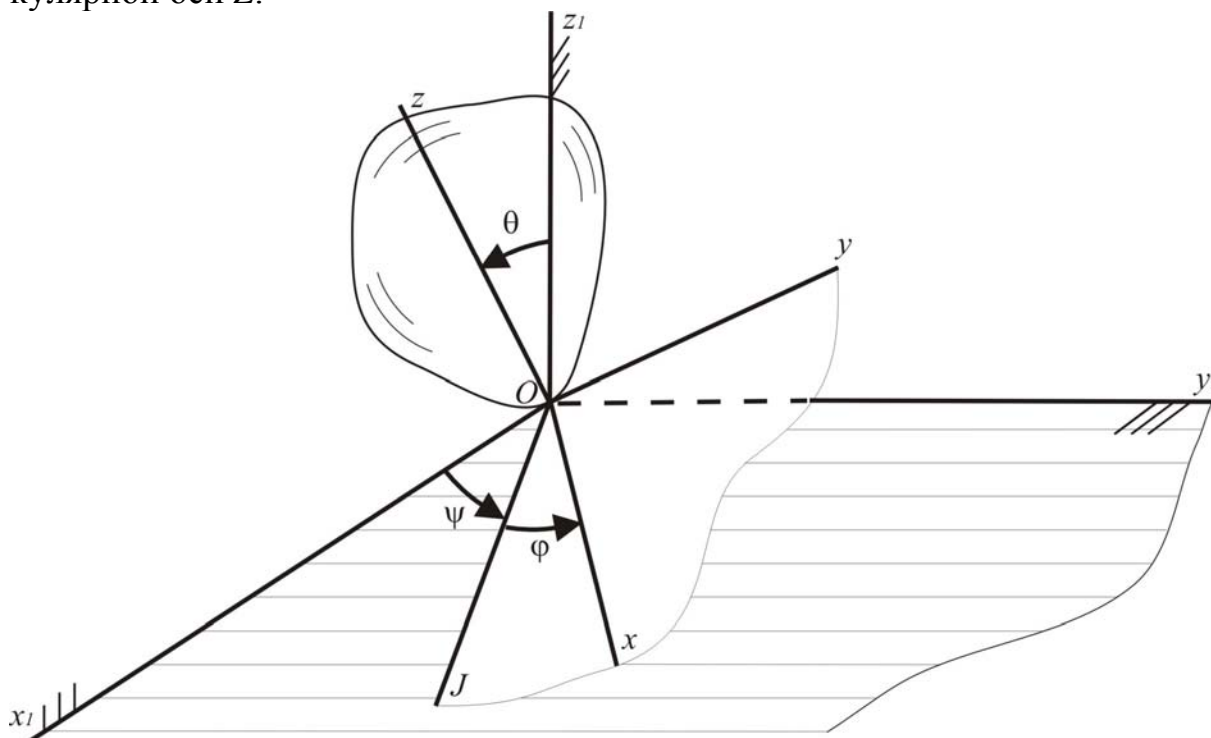


Рис. 2.59. Определение положения тела с помощью трех углов Эйлера

Углы положительны, если, глядя навстречу осям Z_1, OJ, Z , можно видеть эти углы отложенными от осей X_1, Z_1, J в сторону, противоположную вращению часовой стрелки.

Заданием углов ψ, θ и φ однозначно определяется положение тела. Углы ψ, θ и φ называют эйлеровыми углами. Названия углов заимствованы из астрономии, а именно:

- угол ψ – угол прецессии;
- угол θ – угол нутации;
- угол φ – угол собственного вращения.

При прецессии ось Z описывает коническую поверхность, одновременно она может совершать нутационные колебания.

При движении тела углы ψ, θ и φ непрерывно изменяются во времени, поэтому функции

$$\left. \begin{aligned} \psi &= f_1(t), \\ \theta &= f_2(t), \\ \varphi &= f_3(t); \end{aligned} \right\} \quad (2.7.1)$$

называют уравнениями сферического движения твердого тела.

2.7.2. Определение скоростей и ускорений точек тела

При сферическом движении ось вращения тела постоянно изменяет свое положение и поэтому называется мгновенной осью вращения. Скорости точек твердого тела определяются как их вращательные скорости при вращении вокруг мгновенной оси:

$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}. \quad (2.7.2)$$

Модуль векторного произведения

$$|\vec{\omega} \times \vec{r}| = \omega \cdot r \cdot \sin \alpha = \omega \cdot h = v, \quad (2.7.3)$$

т.е. равен модулю вектора скорости, а направление вектора, равного векторному произведению $\vec{\omega} \times \vec{r}$, как и вектора скорости \vec{v} , перпендикулярно плоскости $(\vec{\omega}, \vec{r})$.

Ускорение точки M найдем, дифференцируя выражение для скорости

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{\varepsilon} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times \vec{v}. \quad (2.7.4)$$

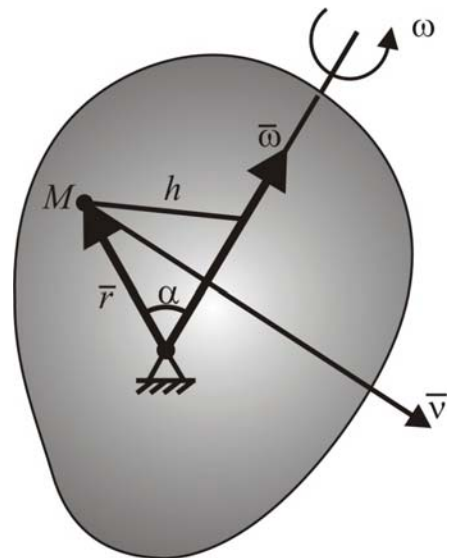


Рис. 2.60. Определение скорости в сферическом движении

Здесь первое слагаемое – касательное ускорение, второе слагаемое – нормальное ускорение (рис. 2.61), т.е.

$$\bar{a} = \bar{a}_\tau + \bar{a}_n. \quad (2.7.5)$$

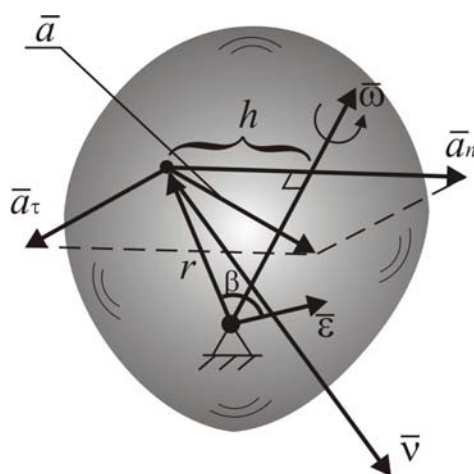
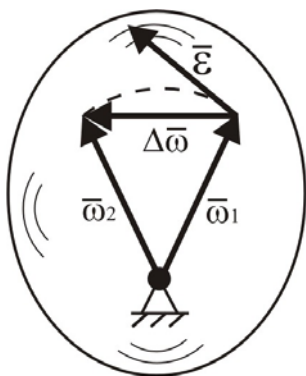


Рис. 2.61. Определение ускорения в сферическом движении



Определим направление векторов $\bar{\varepsilon}$ и \bar{a}_τ . Вектор $\bar{\varepsilon}$ занимает предельное положение вектора $\Delta\bar{\omega}$ (рис. 2.62):

$$\bar{\varepsilon}_{cp} = \frac{\Delta\bar{\omega}}{\Delta t}, \quad (2.7.6)$$

$$\bar{\varepsilon} = \frac{d\bar{\omega}}{dt}. \quad (2.7.7)$$

Вектор \bar{a}_τ направлен перпендикулярно плоскости $\bar{\varepsilon}, \bar{r}$ в сторону, откуда ближайшее совмещение $\bar{\varepsilon}$ с \bar{r} путем поворота на наименьший угол видится против часовой стрелки.

$$a_\tau = |\bar{\varepsilon} \times \bar{r}| = \varepsilon \cdot r \cdot \sin \beta. \quad (2.7.8)$$

$$\begin{aligned} a_n &= |\bar{\omega} \times (\bar{\omega} \times \bar{r})| = |\bar{\omega} \times \bar{v}| = \\ &= \omega \cdot v \cdot \sin(\bar{\omega}, \bar{v}) = \\ &= \omega \cdot \omega \cdot r \cdot \sin \alpha = \omega^2 h. \end{aligned} \quad (2.7.9)$$

Рис. 2.62. Угловое ускорение в сферическом движении

$$a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2 + 2a_\tau \cdot a_n \cdot \cos(\bar{a}_\tau \wedge \bar{a}_n)}. \quad (2.7.10)$$

2.8. Общий случай движения твердого тела

Любое движение твердого тела можно представить как совокупность поступательного движения тела вместе с полюсом O и сферического движения вокруг полюса.

Система $OZ_1Y_1X_1$ поступательно движется относительно системы $O_2X_2Y_2Z_2$. Система координат $OXYZ$ движется вместе с телом.

Положение полюса можно определить по трем уравнениям:

$$\left. \begin{aligned} x_2 &= f_1(t), \\ y_2 &= f_2(t), \\ z_2 &= f_3(t). \end{aligned} \right\} \quad (2.8.1)$$

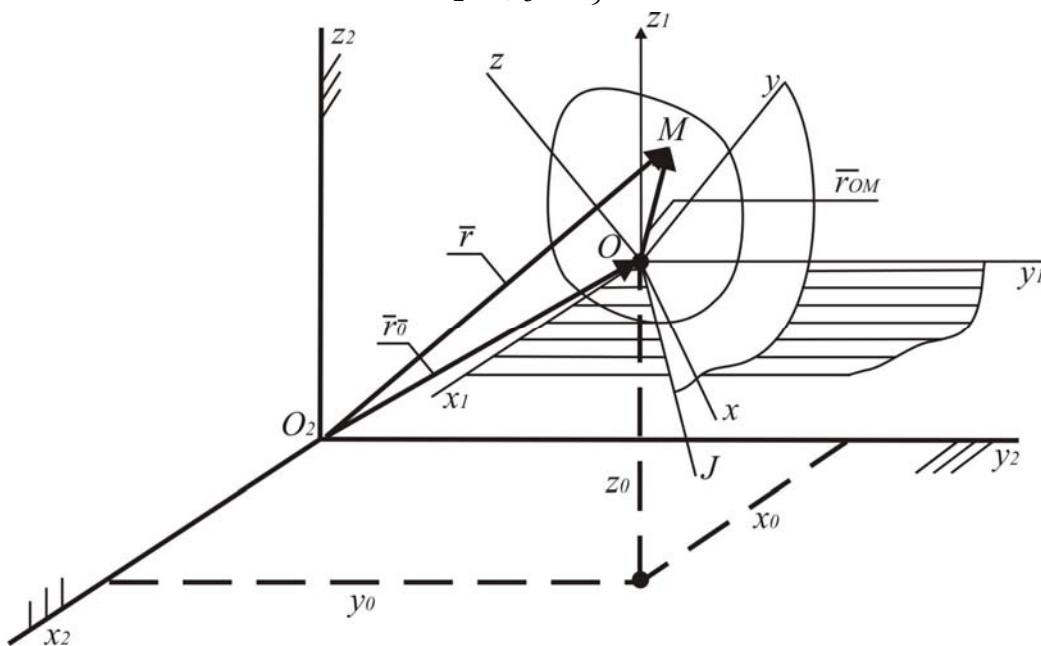


Рис. 2.63. Определение положения тела в общем случае движения

Положение тела по отношению к полюсу и осям $OX_1Y_1Z_1$ определяется тремя углами Эйлера

$$\left. \begin{aligned} \psi &= f_4(t), \\ \theta &= f_5(t), \\ \varphi &= f_6(t). \end{aligned} \right\} \quad (2.8.2)$$

То есть всего мы имеем 6 уравнений движения свободного тела.

Выражение для скорости точки M получим, дифференцируя выражение для радиуса-вектора:

$$\bar{r} = \bar{r}_{O_2O} + \bar{r}_{OM}, \quad (2.8.3)$$

где

$$|\bar{r}_{OM}| = \text{const}. \quad (2.8.4)$$

Получим:

$$\bar{v} = \bar{v}_0 + \bar{v}_{MO}, \quad (2.8.5)$$

или

$$\bar{v} = \bar{v}_0 + \bar{\omega} \times \bar{r}_{OM}. \quad (2.8.6)$$

Дифференцируя выражение для скорости, получим соотношения для ускорения точки M тела:

$$\bar{a} = \bar{a}_0 + \bar{\varepsilon} \times \bar{r} + \bar{\omega} \times (\bar{\omega} \times \bar{r}). \quad (2.8.7)$$

Контрольные вопросы

1. Что называется скоростью точки?
2. Что называется ускорением точки?
3. Какие существуют способы кинематического задания движения точки?
4. Как вычисляются скорость и ускорение точки при том или ином способе задания движения?
5. Каковы признаки поступательного движения тела?
6. Какое движение тела называется вращательным?
7. По каким формулам определяются угловая скорость и угловое ускорение?
8. По каким формулам определяются скорость и ускорение точки при вращательном движении?
9. Какое движение твердого тела называют плоским или плоскопараллельным?
10. Как определяется скорость любой точки плоской фигуры через скорость полюса?
11. В чем заключается суть теоремы о проекциях скоростей двух точек плоской фигуры на линию, соединяющую эти точки?
12. Что такое «мгновенный центр скоростей» плоской фигуры?
13. Как определяется ускорение точки плоской фигуры?
14. Когда движение точки называют сложным?
15. Каковы признаки относительного, переносного и абсолютного движений точки?
16. Как вычисляется скорость точки в сложном движении?
17. Как вычисляется ускорение точки в сложном движении?
18. Какова природа ускорения Кориолиса?
19. Как определяется направление ускорения Кориолиса?
20. С помощью каких параметров определяют положение тела в сферическом движении?
21. Сколько систем декартовых координат требуется для описания положения тела в общем случае его движения?
22. По каким формулам можно определить скорость и ускорение точки тела в сферическом движении и в общем случае движения?

3. ДИНАМИКА

3.1. Основные понятия и законы динамики

3.1.1. Основные понятия и определения

Динамикой (от греческого *dinamicos* – относящийся к силе) называется раздел теоретической механики, в котором изучается движение тел в зависимости от действующих на них сил.

Материальная точка – тело любой формы, размерами которого в данной задаче можно пренебречь.

Сила \vec{F} – мера механического взаимодействия тел. Сила характеризуется величиной, направлением и точкой приложения. В динамике силы могут быть переменными по модулю и направлению.

Кроме того, в динамике силы оцениваются по вызванным ими изменениям характеристик движения материальных объектов.

Масса m – количественная мера инертности поступательного движения тела. В классической механике $m = \text{const}$, $[m] = \text{кг}$.

Скорость \vec{v} – вектор, характеризующий быстроту изменения координат точки по времени, $[v] = \text{м/с}$.

Ускорение \vec{a} – вектор, характеризующий быстроту изменения скорости точки по величине и направлению, $[a] = \text{м/с}^2$.

Закон движения – уравнение, согласно которому происходит движение материальной точки (или тела).

Ряд других понятий динамики будет сформулирован в процессе изложения соответствующих разделов.

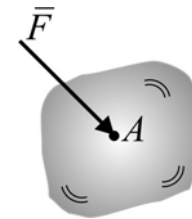


Рис. 3.1. Действие силы на тело

3.1.2. Основные законы динамики

Законы динамики в систематическом виде впервые сформулировал И. Ньютон. Приведем эти законы в современной трактовке.

1. Закон инерции. *Материальная точка сохраняет состояние покоя или равномерного прямолинейного движения до тех пор, пока действие других тел не изменит это состояние.*

Первый закон установлен Галилеем. Он характеризует *стремление тела сохранять неизменной скорость своего движения*. Это свойство тела называется *инертностью*.

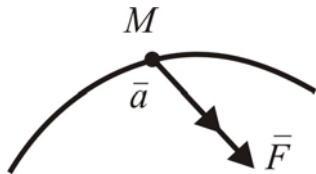


Рис. 3.2. Направление действующей на точку силы совпадает с направлением сообщаемого ей ускорения

2. Основной закон динамики. Ускорение материальной точки пропорционально приложенной к ней силе и имеет одинаковое с ней направление.

$$m\bar{a} = \bar{F}. \quad (3.2.1)$$

Коэффициент пропорциональности m называется *инертной массой тела*. Массу тела можно определить через вес тела и ускорение свободного падения:

$$m\bar{g} = \bar{G}, \quad m = \frac{G}{g}.$$

Поскольку масса измеряется в килограммах, а ускорение – в метрах в секунду, то единица силы составляет:

$$1 \text{ Н} = 1 \text{ кг} \times 1 \text{ м/с}^2,$$

$$\text{Н} = \frac{\text{кг} \times \text{м}}{\text{с}^2}.$$

3. Закон равенства действия и противодействия. Всякому действию одного тела на другое соответствует равное и противоположно направленное противодействие.

Этот закон устанавливает, что при взаимодействии двух тел силы взаимодействия, приложенные к каждому из них, равны по величине и противоположно направлены по одной прямой.

Эти силы не образуют уравновешенной системы сил, так как они приложены к разным телам.

4. Закон независимости действия сил. Несколько одновременно действующих на точку сил сообщают ей такое ускорение, какое сообщила бы ей одна сила, равная их геометрической сумме.

Пусть на точку действуют силы $\bar{F}_1, \bar{F}_2, \dots, \bar{F}_n$ (рис. 3.4). Каждая из них в отдельности сообщает точке ускорения

$$\left. \begin{aligned} \bar{a}_1 m &= \bar{F}_1, \\ \bar{a}_2 m &= \bar{F}_2, \\ \bar{a}_3 m &= \bar{F}_3, \\ &\dots\dots\dots, \\ \bar{a}_n m &= \bar{F}_n. \end{aligned} \right\} \quad (3.2.2)$$

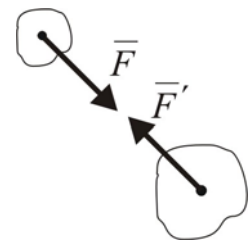


Рис. 3.3. Равенство действия и противодействия

Согласно четвертому закону

$$\bar{a}m = \bar{F}_1 + \bar{F}_2 + \dots + \bar{F}_n, \quad (3.2.3)$$

или

$$\bar{a}m = \bar{a}_1m + \bar{a}_2m + \dots + \bar{a}_nm. \quad (3.2.4)$$

Сокращая массу, получаем:

$$\bar{a} = \bar{a}_1 + \bar{a}_2 + \dots + \bar{a}_n. \quad (3.2.5)$$

Четвертый закон динамики равносильно утверждению, что ускорение \bar{a} , получаемое точкой от одновременного действия всех сил, равно геометрической сумме ускорений, сообщаемых ей каждой силой в отдельности.

Законы динамики справедливы для инерциальных систем отсчета или абсолютно неподвижных систем отсчета. Для большинства технических задач такой системой можно считать связанную с Землей систему координат.

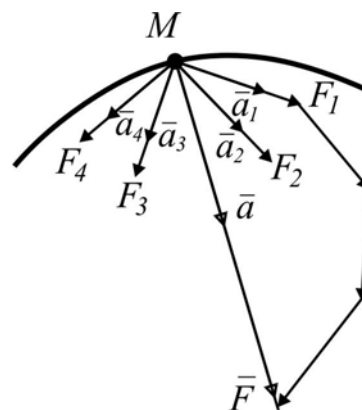


Рис. 3.4. Сложение сил и ускорений

3.2. Дифференциальные уравнения движения точки

3.2.1. Дифференциальные уравнения движения точки в декартовой системе координат

Согласно второму закону динамики, записанному в виде равенства (3.2.3):

$$m\bar{a} = \bar{F}_1 + \bar{F}_2 + \dots + \bar{F}_n, \quad (3.3.1)$$

или

$$m\bar{a} = \sum \bar{F}_k. \quad (3.3.2)$$

Это уравнение называют основным уравнением динамики.

Проецируя это уравнение на декартовы координатные оси, получаем:

$$\begin{cases} ma_x = F_{1x} + F_{2x} + \dots + F_{nx} = \sum F_{kx}, \\ ma_y = \sum F_{ky}, \\ ma_z = \sum F_{kz}. \end{cases} \quad (3.3.3)$$

Проекции ускорений равны вторым производным от соответствующих функций координат по времени:

$$a_x = \ddot{x}, \quad a_y = \ddot{y}, \quad a_z = \ddot{z}. \quad (3.3.4)$$

Тогда

$$\begin{cases} m\ddot{x} = \sum \bar{F}_{kx}, \\ m\ddot{y} = \sum \bar{F}_{ky}, \\ m\ddot{z} = \sum \bar{F}_{kz}. \end{cases} \quad (3.3.5)$$

Уравнения (3.3.5) называются *дифференциальными уравнениями движения материальной точки* в декартовой системе координат.

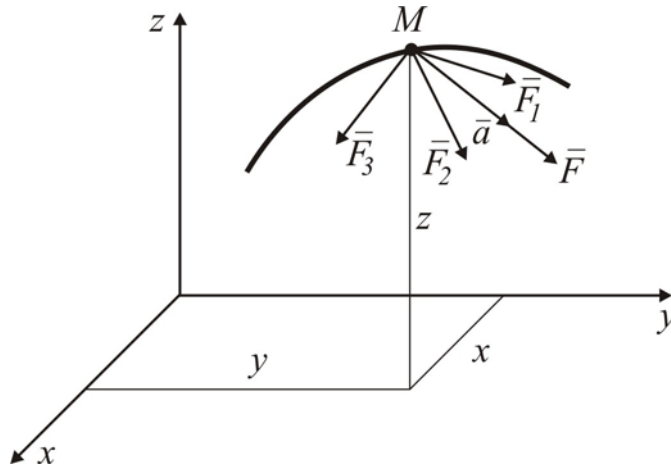
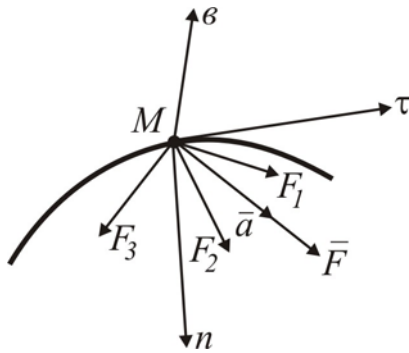


Рис. 3.5. Движение точки в декартовой системе координат

3.2.1. Дифференциальные уравнения движения точки в естественной системе координат

Если используется естественная система координат $M\tau nb$ (рис. 3.6), то уравнения проекций будут иметь вид



$$\begin{cases} ma_{\tau} = \sum F_{k\tau}, \\ ma_n = \sum F_{kn}, \\ 0 = \sum F_{kb}; \end{cases} \quad (3.3.6)$$

где

$$a_{\tau} = \frac{dv}{dt}, \quad (3.3.7)$$

$$a_n = \frac{v^2}{\rho}, \quad (3.3.8)$$

$$a_b = 0. \quad (3.3.9)$$

Рис. 3.6. Движение точки в естественной системе координат

3.3. Две основные задачи динамики

3.3.1. Первая задача динамики

Зная массу m точки и уравнения ее движения $x = f_1(t)$, $y = f_2(t)$, $z = f_3(t)$, найти модуль и направление равнодействующей сил, приложенных к точке (или определить какую-либо неизвестную силу, действующую на точку).

Эта задача легко решается так:

$$\left. \begin{aligned} F_x &= m\ddot{x}, \\ F_y &= m\ddot{y}, \\ F_z &= m\ddot{z}; \end{aligned} \right\} \quad (3.3.10)$$

или

$$\left. \begin{aligned} F_x &= m \frac{d^2 f_1}{dt^2}, \\ F_y &= m \frac{d^2 f_2}{dt^2}, \\ F_z &= m \frac{d^2 f_3}{dt^2}. \end{aligned} \right\} \quad (3.3.11)$$

Величина силы определяется из уравнения

$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2}, \quad (3.3.12)$$

а направление – с помощью направляющих косинусов:

$$\cos(\bar{F} \wedge \bar{i}) = \frac{F_x}{F}, \quad \cos(\bar{F} \wedge \bar{j}) = \frac{F_y}{F}, \quad \cos(\bar{F} \wedge \bar{k}) = \frac{F_z}{F}. \quad (3.3.13)$$

Пример. Уравнения движения точки имеют вид: $x = a \cos kt$, $y = b \sin kt$. Определить равнодействующую приложенных к точке сил.

Решение. Определим траекторию точки. Преобразуем уравнения движения следующим образом: $x/a = \cos kt$, $y/b = \sin kt$.

Возводя обе части каждого уравнения в квадраты и складывая уравнения, получим:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

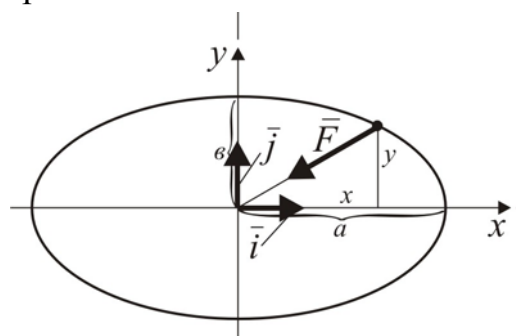


Рис. 3.7. Искомая сила, направленная к центру

Т.е. траектория точки – эллипс, центр которого совпадает с началом координат.

Дифференцируя заданные уравнения движения точки дважды по времени, найдем проекции вектора ускорения:

$$\ddot{x} = -ak^2 \cos kt = -k^2 x,$$

$$\ddot{y} = -ak^2 \sin kt = -k^2 y.$$

Согласно системе (3.3.10) дифференциальные уравнения движения материальной точки можно записать в виде

$$\left. \begin{aligned} F_x &= m\ddot{x}, \\ F_y &= m\ddot{y}. \end{aligned} \right\}$$

Следовательно, модуль силы, действующей на точку,

$$F = m\sqrt{\ddot{x}^2 + \ddot{y}^2} = mk^2\sqrt{x^2 + y^2} = mk^2 r.$$

Косинусы углов наклона силы к осям координат:

$$\cos(\bar{F} \wedge \bar{i}) = \frac{F_x}{F} = \frac{-k^2 mx}{mk^2 r} = -\frac{x}{r},$$

$$\cos(\bar{F} \wedge \bar{j}) = \frac{F_y}{F} = \frac{-k^2 my}{mk^2 r} = -\frac{y}{r}.$$

Отсюда можно заключить, что сила \bar{F} направлена по радиусу r к началу координат.

3.3.2. Вторая задача динамики

По заданной массе и действующей на точку силе определить движение точки.

Дано: m, F .

Найти: x, y, z .

Решение. Так как силы, действующие на точку, могут быть переменными, то $F = f(t, x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z})$

$$\left\{ \begin{aligned} m\ddot{x} &= F_x, \\ m\ddot{y} &= F_y, \\ m\ddot{z} &= F_z. \end{aligned} \right. \quad (3.3.14)$$

Для определения из (3.3.14) уравнений движения x, y и z необходимо дважды проинтегрировать каждое дифференциальное уравнение системы. При интегрировании трех уравнений 2-го порядка появится шесть посто-

янных интегрирования. Значения этих постоянных определяются по начальным условиям: при $t=0$

$$x = x_0, y = y_0, z = z_0, \dot{x} = \dot{x}_0, \dot{y} = \dot{y}_0, \dot{z} = \dot{z}_0. \quad (3.3.15)$$

C_1, \dots, C_6 являются функциями $f(x_0, \dots, \dot{z}_0)$. Следовательно,

$$\begin{aligned} x &= f_1(t, x_0, y_0, z_0, \dot{x}_0, \dot{y}_0, \dot{z}_0), \\ y &= f_2(t, x_0, y_0, z_0, \dot{x}_0, \dot{y}_0, \dot{z}_0), \\ z &= f_3(t, x_0, y_0, z_0, \dot{x}_0, \dot{y}_0, \dot{z}_0). \end{aligned} \quad (3.3.16)$$

3.3.3. Интегрирование дифференциальных уравнений движения при постоянных силах

Интегрирование рассмотрим на примере движения тела, брошенного под углом к горизонту. Определим уравнения этого движения.

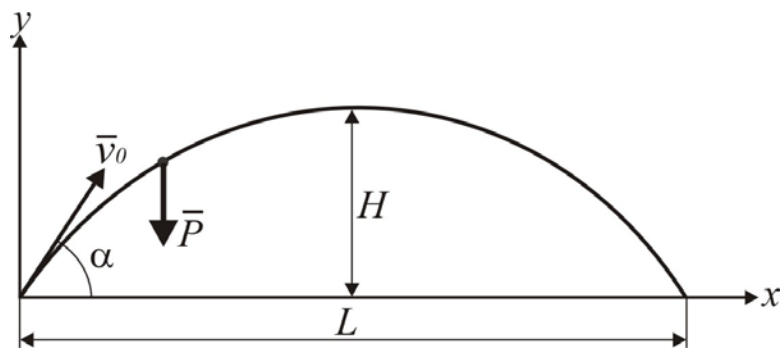


Рис. 3.8. Движение тела, брошенного под углом к горизонту

Дано: начальная скорость – v_0 , угол наклона начальной скорости к оси x – α .

Найти: уравнения движения, высоту подъема H , дальность полета L .

Решение: при $t = 0$

$$x = 0, y = 0, v_x = v_0 \cos \alpha, v_y = v_0 \sin \alpha.$$

Дифференциальные уравнения движения

$$\begin{cases} m\ddot{x} = \sum F_{kx}, \\ m\ddot{y} = \sum F_{ky} \end{cases}$$

для данной задачи примут вид

$$\begin{cases} m\ddot{x} = 0, \\ m\ddot{y} = -mg. \end{cases}$$

Или после сокращения на массу:

$$\begin{cases} \ddot{x} = 0, \\ \ddot{y} = -g. \end{cases} \quad (\text{A})$$

Интегрируем дважды первое уравнение системы (A):

$$\begin{cases} \dot{x} = c_1, \\ x = c_1 t + c_2. \end{cases}$$

Постоянные интегрирования определяем с помощью начальных условий: при $t = 0$

$$x = 0, \quad v_x = v_0 \cos \alpha.$$

Получаем:

$$\begin{cases} v_0 \cos \alpha = c_1, \\ 0 = c_1 \cdot 0 + c_2. \end{cases}$$

Отсюда $c_1 = v_0 \cos \alpha$, $c_2 = 0$. Уравнения движения относительно оси x примут вид

$$\begin{aligned} \dot{x} &= v_0 \cos \alpha, \\ x &= v_0 t \cos \alpha. \end{aligned}$$

Интегрируем дважды второе уравнение системы (A):

$$\begin{aligned} \ddot{y} &= \frac{dv_y}{dt} = -g, \\ dv_y &= -g dt, \\ v_y &= -gt + c_3, \\ \dot{y} &= -gt + c_3, \\ y &= -\frac{gt^2}{2} + c_3 t + c_4. \end{aligned}$$

Или

$$\begin{cases} v_y = -gt + c_3, \\ y = -\frac{gt^2}{2} + c_3 t + c_4. \end{cases}$$

Постоянные интегрирования определяем с помощью начальных условий: при $t = 0$

$$y = 0, \quad v_y = v_0 \sin \alpha.$$

Получаем:

$$\begin{cases} \dot{y} = -gt + v_0 \sin \alpha, \\ y = -\frac{gt^2}{2} + v_0 t \sin \alpha. \end{cases}$$

Максимальную высоту подъема находим из условия $\dot{y} = 0$:

$$0 = -gt + v_0 \cdot \sin \alpha,$$

$$t = \frac{v_0 \sin \alpha}{g},$$

$$H = -\frac{g}{2} \cdot \frac{v_0^2 \cdot \sin^2 \alpha}{g^2} + v_0 \cdot \frac{v_0 \sin \alpha}{g} \sin \alpha.$$

Или

$$H = \frac{v_0^2 \sin^2 \alpha}{2g}.$$

Дальность полета определяем из условия $y=0$.

$$0 = -\frac{gt^2}{2} + v_0 t \sin \alpha.$$

Сокращая на t (корень $t=0$ соответствует началу движения), получаем:

$$t = 2v_0 \sin \alpha / g,$$

$$L = v_0 \cos \alpha \cdot 2v_0 \sin \alpha / g = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g}.$$

3.4. Интегрирование уравнений движения при переменных силах

Если на материальную точку действуют переменные силы, то процедуре интегрирования, как правило, предшествуют преобразования, ведущие к разделению переменных.

3.4.1. Сила, зависящая от расстояния

Рассмотрим задачу определения уравнения движения материальной точки по каналу, прорытому сквозь Землю. Считаем, что Земля имеет форму шара радиусом R . Сопротивление движению не учитываем. Движение начинается из точки A . Схема движения представлена на рис. 3.9.

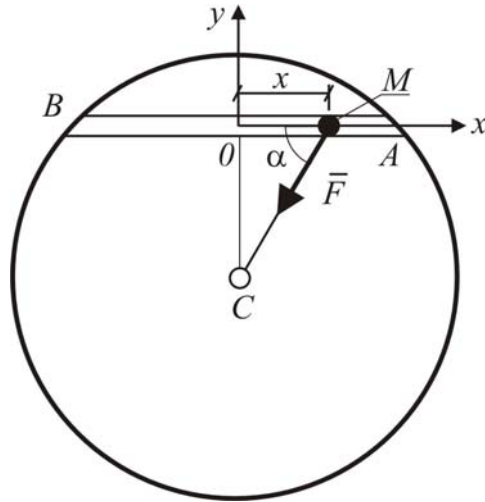


Рис. 3.9. Схема движения точки в канале

Дано: $R=6370$ км, $OA=a$, $MC=r$. Если сила тяжести на поверхности Земли $F_1=mg$, то на расстоянии r от центра $F = mg \frac{r}{R}$.

Найти уравнение движение материальной точки в канале AB : $x=f(t)$.

Решение. Дифференциальное уравнение движения имеет вид:

$$m\ddot{x} = \sum F_{kx}.$$

Для нашей задачи, проецируя действующие на точку силы, запишем это уравнение в виде:

$$m\ddot{x} = -F \cos \alpha,$$

или

$$m\ddot{x} = -mg \frac{r}{R} \cos \alpha.$$

Сокращая на массу и учитывая, что $x = r \cos \alpha$, получим:

$$\ddot{x} = -\frac{g}{R} x.$$

Введем обозначение:

$$\frac{g}{R} = k^2.$$

Вторую производную от координаты по времени запишем в виде

$$\ddot{x} = \frac{dv_x}{dt} = \frac{dv}{dx} \cdot \frac{dx}{dt} = \frac{v dv}{dx}.$$

Тогда дифференциальное уравнение движения точки примет вид

$$\frac{v dv}{dx} = -k^2 x.$$

Разделяя переменные v и x , получим:

$$v dv = -k^2 x dx .$$

Проинтегрируем это уравнение:

$$\frac{1}{2} v^2 = -\frac{1}{2} k^2 x^2 + c_1 .$$

Постоянную интегрирования определим из начальных условий:
при $t = 0$

$$x = a ,$$

значит,

$$c_1 = \frac{1}{2} k^2 a^2 ,$$

$$v = \pm k \sqrt{a^2 - x^2} .$$

Учитывая, что $v = dx / dt$, произведем вторичное интегрирование уравнения:

$$\frac{dx}{dt} = k \sqrt{a^2 - x^2} ;$$

$$\frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = k dt .$$

$$kt = \arccos \frac{x}{a} + c_2 .$$

При $t = 0$

$$x = a ,$$

значит,

$$c_2 = -\arccos 1 = 0 .$$

$$kt = \arccos \frac{x}{a} ; \quad \frac{x}{a} = \cos kt ;$$

$$x = a \cdot \cos kt .$$

3.4.2. Сила, зависящая от скорости (Падение тела при учете силы сопротивления движению)

Примем силу сопротивления пропорциональной скорости движения:

$$R = \alpha v.$$

Исходное дифференциальное уравнение движения имеет вид

$$m\ddot{x} = \sum F_{kx}.$$

Для нашей задачи это уравнение примет вид:

$$m\ddot{x} = mg - \alpha \dot{x}.$$

Сокращая на массу и вводя обозначение $k = \alpha / m$, получим:

$$\ddot{x} = g - k\dot{x},$$

или

$$\frac{dv}{dt} = g - kv.$$

Разделяя переменные, получим:

$$\frac{dv}{g - kv} = dt. \quad (*)$$

Введем обозначение:

$$U = g - kv.$$

Тогда

$$\begin{aligned} dU &= -kdv, \\ dv &= -\frac{dU}{k}. \end{aligned}$$

Теперь уравнение (*) можно переписать в виде:

$$\frac{dU}{U} = -kdt.$$

Интегрируя, получаем:

$$\begin{aligned} \ln U &= -kt + C_1, \\ \ln(g - kv) &= -kt + C_1. \end{aligned}$$

При $t = 0$ $v_0 = 0$, $\Rightarrow C_1 = \ln g$.

$$\ln \frac{g - kv}{g} = -kt.$$



Рис. 3.10. Падение тела при учете силы сопротивления движению

Потенцируя последнее выражение и делая элементарные преобразования, получаем:

$$\frac{g - kv}{g} = e^{-kt},$$

$$g - kv = ge^{-kt},$$

$$v = \frac{g}{k} - \frac{ge^{-kt}}{k}.$$

$$x = \frac{g}{k}t + \frac{g}{k^2}e^{-kt} + C_2.$$

Определим постоянную интегрирования C_2 : при $t = 0$

$$x = 0, \quad C_2 = -\frac{g}{k^2}.$$

Уравнение движения получает вид

$$x = \frac{g}{k}t + \frac{g}{k^2}(1 - e^{-kt}).$$

Интерес представляет частный случай: при $t \rightarrow \infty$ $v = g/k$, т.е. с течением времени скорость точки становится постоянной.

3.5. Колебания материальной точки

Колебательное движение материальной точки происходит при условии, если на точку, отклоненную от положения покоя, действует сила, стремящаяся вернуть точку в это положение. Такая сила называется *восстанавливающей* (рис. 3.10).

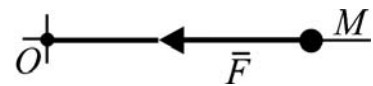


Рис. 3.10. Восстанавливающая сила

Рассмотрим практически важный случай, когда восстанавливающая сила пропорциональна отклонению точки от положения покоя: $F = c \cdot OM$, где c – коэффициент пропорциональности. Например, сила упругости пружины (рис. 3.11).

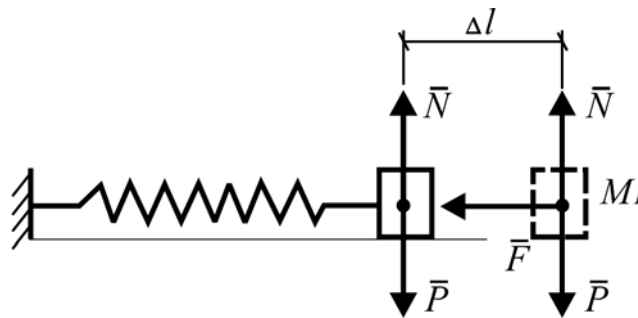


Рис. 3.11. Сила упругости пружины $F_{\text{упр}} = c \cdot \Delta l$

Определим физический смысл коэффициента c для упругой пружины. Этот коэффициент называется *жесткостью* пружины. Восстанавливающая сила, или сила упругости, $F = c \cdot \Delta l$, где Δl – удлинение или укорочение пружины. При $\Delta l=1$, $F=c$. Следовательно, жесткость пружины численно равна силе, необходимой для растяжения или сжатия пружины на единицу длины.

В зависимости от характера и совокупности переменных сил, действующих на материальную точку, различают четыре основных вида колебательного движения точки:

- 1) свободные колебания – под действием только восстанавливающей силы;
- 2) затухающие колебания – под действием восстанавливающей силы и силы сопротивления движению;
- 3) вынужденные колебания – под действием восстанавливающей силы и силы периодического характера, называемой возмущающей силой;
- 4) вынужденные колебания при наличии сопротивления движению. Здесь действуют восстанавливающая сила, сила сопротивления движению, возмущающая сила.

3.5.1. Свободные колебания

Поместим начало координат в положение покоя точки O , а ось x направим вдоль прямолинейного отклонения OM точки M , тогда восстанавливающая сила (рис. 3.12)

$$F = c \cdot OM = c \cdot x. \quad (3.5.1)$$

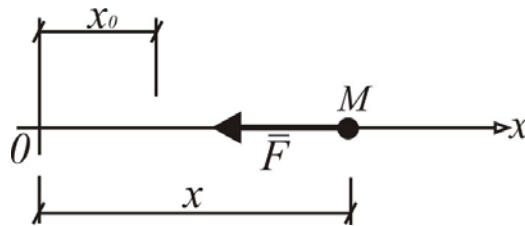


Рис. 3.12. Восстанавливающая сила

Дифференциальное уравнение движения будет иметь вид

$$m\ddot{x} = -F. \quad (3.5.2)$$

Подставив восстанавливающую силу, выраженную через координату, получим:

$$m\ddot{x} = -cx, \quad (3.5.3)$$

или

$$\ddot{x} + \frac{c}{m}x = 0. \quad (3.5.4)$$

Введем обозначение

$$k^2 = \frac{c}{m}, \quad (3.5.5)$$

тогда уравнение движения примет вид

$$\ddot{x} + k^2 x = 0. \quad (3.5.6)$$

Это уравнение называется *дифференциальным уравнением свободных колебаний*.

Его решение ищем в виде:

$$x = e^{zt}. \quad (3.5.7)$$

Подставив это выражение в уравнение движения, получим:

$$\begin{aligned} z^2 e^{zt} + k^2 e^{zt} &= 0, \\ e^{zt} (z^2 + k^2) &= 0. \end{aligned} \quad (3.5.8)$$

Выражение в скобках называется характеристическим уравнением. Его решение

$$\begin{aligned} z_1 &= ik, \\ z_2 &= -ik \end{aligned}$$

или

$$z_{1,2} = \alpha \pm ik,$$

где $\alpha = 0$.

Таким образом, имеем два независимых решения:

$$x_{1,2} = e^{(\alpha \pm ik)t},$$

или

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= e^{\alpha t} \sin kt, \\ x_2 &= e^{\alpha t} \cos kt. \end{aligned} \right\} \quad (3.5.9)$$

Общее решение дифференциального уравнения можно представить в виде линейной комбинации двух независимых решений

$$x = Ax_1 + Bx_2, \quad (3.5.10)$$

или

$$x = A \sin kt + B \cos kt. \quad (3.5.11)$$

Взяв производную по времени, получим выражение для скорости движения:

$$\dot{x} = Ak \cos kt - Bk \sin kt. \quad (3.5.12)$$

При $t = 0$

$$x = x_0, \quad \dot{x} = v_0.$$

Подставив эти начальные условия в уравнения (3.5.11) и (3.5.12), получим:

$$\left. \begin{aligned} x_0 &= B, \\ v_0 &= Ak, \end{aligned} \right\} \quad (3.5.13)$$

$$A = \frac{v_0}{k}. \quad (3.5.13)$$

Подставив в уравнение (3.5.11) вместо A и B их значения, выраженные через начальные условия, получим окончательно:

$$x = \frac{v_0}{k} \sin kt + x_0 \cos kt. \quad (3.5.14)$$

Уравнению (3.5.11) можно придать другой, амплитудный вид, сделав замену постоянных A и B другими постоянными α и β :

$$A = a \cos \beta, \quad (3.5.15)$$

$$B = a \sin \beta. \quad (3.5.16)$$

Тогда

$$x = a \cos \beta \cdot \sin kt + a \sin \beta \cdot \cos kt, \quad (3.5.17)$$

или

$$x = a \sin(kt + \beta). \quad (3.5.18)$$

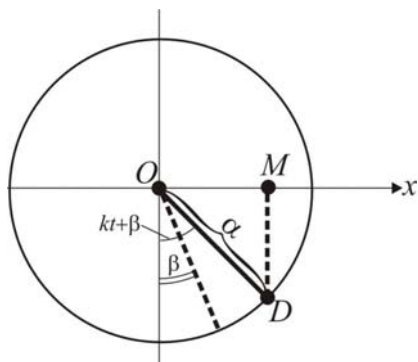


Рис. 3.13. Круговая аналогия

Если колебания совершаются по закону синуса (или косинуса), то такое движение называется гармоническими колебаниями; следовательно, *свободные колебания – гармонические колебания*.

Здесь можно увидеть аналогию с вращательным движением отрезка OD вокруг точки O .

Значение координаты x точки D

$$x = OM = a \sin(kt + \beta).$$

- Здесь β – начальный угол движения, или начальная фаза колебаний;
- a – максимальная координата x точки D , или амплитуда колебаний;
- $kt + \beta$ – фаза колебаний;
- k – угловая скорость вращения, или круговая частота колебаний.

Период колебаний (время, за которое точка приходит в одно и то же положение с одной и той же стороны), или время одного оборота отрезка OD , определим из соотношений

$$\begin{aligned} kt_1 + \beta - (kt_2 + \beta) &= 2\pi, \\ k(t_1 - t_2) &= 2\pi, \\ kT &= 2\pi, \\ T &= \frac{2\pi}{k}. \end{aligned} \quad (3.5.19)$$

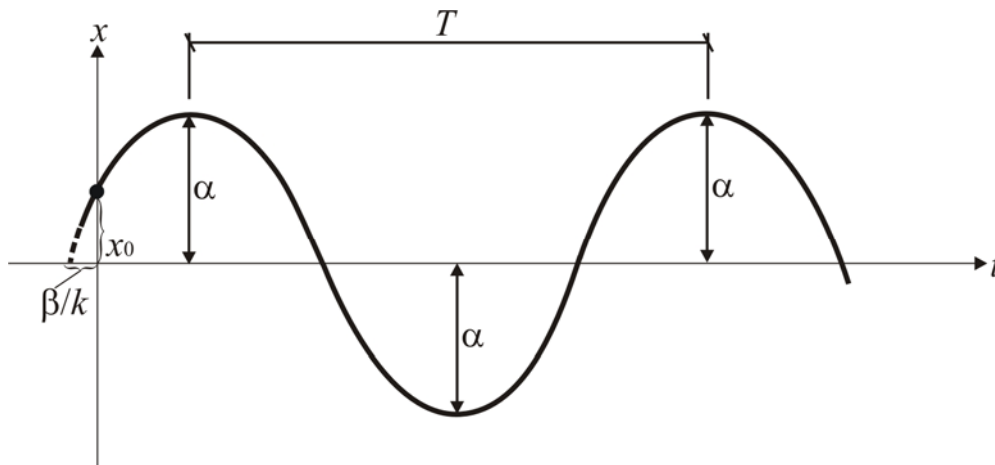


Рис. 3.14. График свободных колебаний

Постоянные a и β определим из начальных условий: при $t=0$

$$x = x_0, \quad \dot{x} = v_0.$$

Выражение для скорости точки получим из уравнения (3.5.18), дифференцируя его по времени:

$$\dot{x} = ak \cos(kt + \beta). \quad (3.5.20)$$

Подстановка начальных условий в уравнение (3.5.18) и выражение для скорости (3.5.20) дает:

$$\left. \begin{aligned} x_0 &= a \sin \beta, \\ v_0 &= ak \cos \beta. \end{aligned} \right\} \quad (3.5.21)$$

Таким образом, постоянные a и β можно представить в виде

$$a = \sqrt{x_0^2 + \frac{v_0^2}{k^2}}, \quad (3.5.22)$$

$$\sin \beta = x_0 / a, \quad \cos \beta = v_0 / (ak). \quad (3.5.23)$$

При свободных колебаниях частота и период определяются из соотношений

$$\begin{cases} k = \sqrt{\frac{c}{m}}, \\ T = \frac{2\pi}{\sqrt{c/m}}. \end{cases} \quad (3.5.24)$$

Эти соотношения показывают, что период и частота свободных колебаний от начальных условий не зависят.

Пример. Груз массой $m=10$ кг, подвешенный на пружине жесткостью $c=1960$ Н/м, отвели на 2 см вниз и отпустили. Найти уравнение колебательного движения груза.

Решение. На рис. 3.15 изображены: а) недеформированная пружина; б) груз в положении статического равновесия; в) промежуточное положение колеблющегося на пружине груза; г) силы, действующие на колеблющуюся массу в промежуточном положении.

По рис. 3.15,г составим уравнение движения:

$$m\ddot{x} = P - F,$$

где

$$F = c(f_{ст} + x).$$

Следовательно,

$$m\ddot{x} = P - cf_{ст} - cx.$$

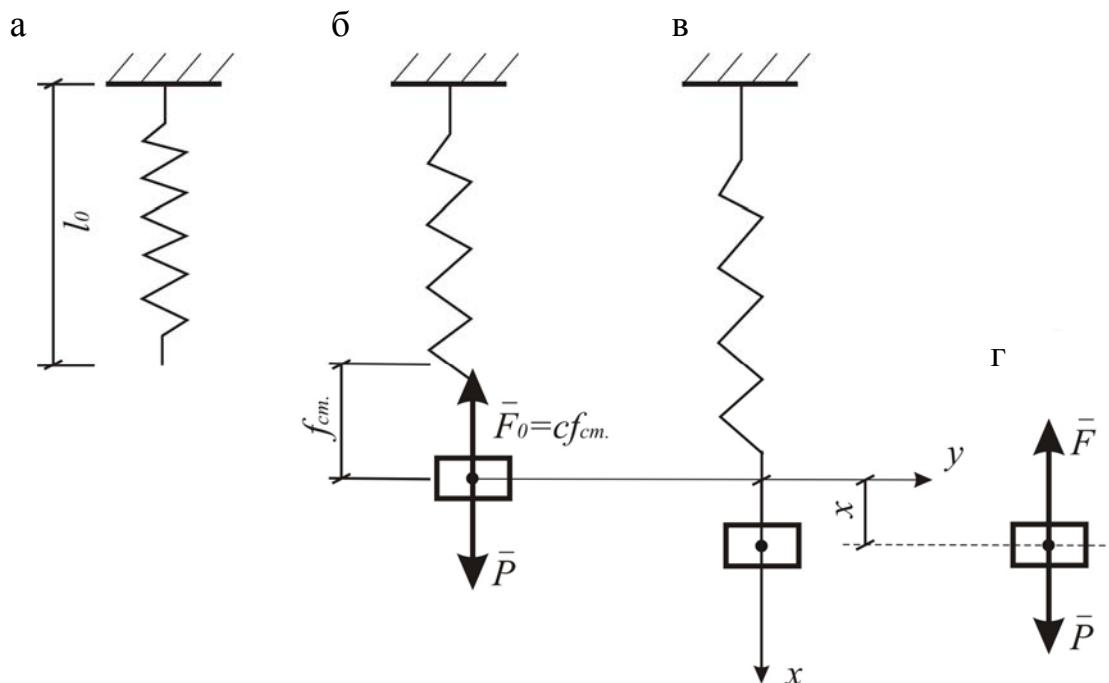


Рис. 3.15. Иллюстрация положений груза

В положении статического равновесия $P = F_{\text{уп}} = cf_{\text{ст}}$; следовательно,

$$m\ddot{x} + cx = 0,$$

$$\ddot{x} + \frac{c}{m}x = 0.$$

Введем обозначение:

$$k^2 = \frac{c}{m}.$$

Тогда

$$\ddot{x} + k^2x = 0.$$

Это дифференциальное уравнение свободных колебаний. Его решение:

$$x = a \sin(kt + \beta).$$

$$a = \sqrt{x_0^2 + \frac{v_0^2}{k^2}} = \sqrt{0,02^2 + 0} = 0,02 \text{ м.}$$

$$\text{tg } \beta = \infty, \beta = \frac{\pi}{2}.$$

$$k = \sqrt{1960/10} = 14 \text{ с}^{-1}.$$

Таким образом, уравнение движения принимает вид

$$x = 0,02 \sin\left(14t + \frac{\pi}{2}\right).$$

Период свободных колебаний $T = \frac{2\pi}{14} = \frac{6,28}{14} = 0,45 \text{ с.}$

График колебательного движения представлен на рис. 3.16.

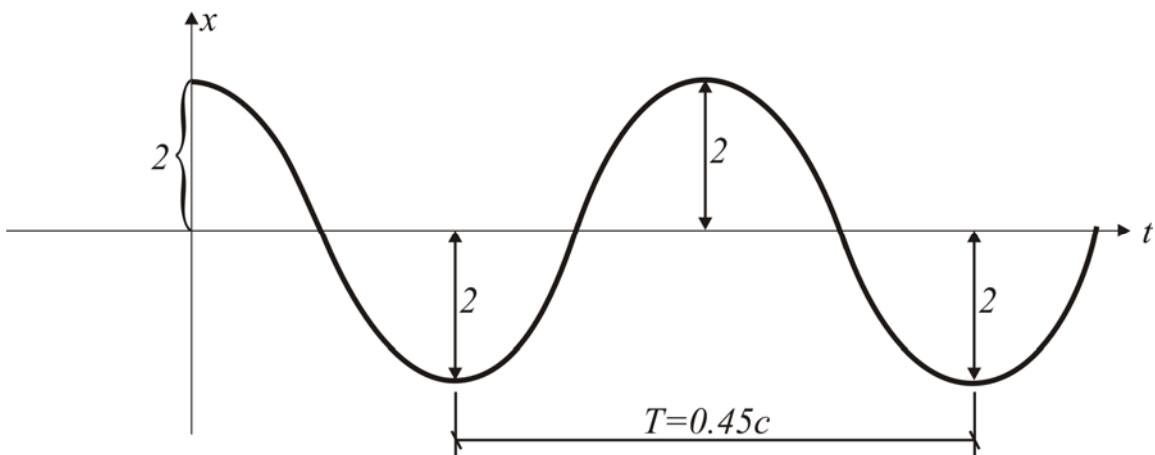


Рис. 3.16. График свободных колебаний груза для данного примера

3.5.2. Затухающие колебания материальной точки

Рассмотрим влияние сил сопротивления на колебательное движение точки, а также выясним характер этого движения в зависимости от величины силы сопротивления.

В реальных условиях колебательный процесс всегда проходит при сопротивлении движению (трение, сопротивление воздуха и т.д.). Это означает, что кроме восстанавливающей силы, направленной к центру колебаний, на точку действует сила сопротивления, направленная в сторону, противоположную движению. Закон изменения величины силы сопротивления зависит от природы этой силы. Например, модуль силы трения скольжения можно принять постоянным, а величину силы сопротивления воздуха или жидкости при невысоких скоростях – пропорциональной скорости движения.



Рис. 3.17. На движущую точку действуют восстанавливающая сила и сила сопротивления движению

Рассмотрим последний случай, когда сила сопротивления движению пропорциональна скорости:

$$R = \mu v. \quad (3.5.25)$$

Дифференциальное уравнение движения $m\ddot{x} = \sum F_{kx}$ примет вид

$$m\ddot{x} = -F - R, \quad (3.5.26)$$

или

$$m\ddot{x} = -cx - \mu\dot{x}, \quad (3.5.27)$$

$$\ddot{x} + \frac{\mu}{m}\dot{x} + \frac{c}{m}x = 0. \quad (3.5.28)$$

Введем обозначения:

$$\frac{\mu}{m} = 2n, \quad (3.5.29)$$

$$\frac{c}{m} = k^2. \quad (3.5.30)$$

Таким образом, дифференциальное уравнение движения приобретет вид

$$\ddot{x} + 2n\dot{x} + k^2x = 0. \quad (3.5.31)$$

Решение этого дифференциального уравнения будем искать в виде:

$$x = e^{zt}. \quad (3.5.32)$$

Подставив в дифференциальное уравнение движения, получим:

$$e^{zt} (z^2 + 2nz + k^2) = 0, \quad z^2 + 2nz + k^2 = 0. \quad (3.5.33)$$

Корни этого характеристического уравнения

$$z_{1,2} = -n \pm \sqrt{n^2 - k^2}. \quad (3.5.34)$$

В зависимости от соотношения величин n^2 и k^2 возможны различные решения.

1) $n < k, k^2 - n^2 < 0$ – **корни мнимые.**

Введем обозначение:

$$k_1 = \sqrt{k^2 - n^2}. \quad (3.5.35)$$

Теперь корни характеристического уравнения можно переписать в виде

$$\left. \begin{aligned} z_1 &= -n + ik_1, \\ z_2 &= -n - ik_1. \end{aligned} \right\} \quad (3.5.36)$$

Решение дифференциального уравнения движения в этом случае имеет вид

$$x = e^{-nt} (A \cos k_1 t + B \sin k_1 t). \quad (3.5.37)$$

Заменяя постоянные интегрирования A и B выражениями

$$\left. \begin{aligned} A &= a \sin \beta, \\ B &= a \cos \beta, \end{aligned} \right\} \quad (3.5.38)$$

перейдем к амплитудной форме записи решения дифференциального уравнения:

$$x = a e^{-nt} \sin(k_1 t + \beta). \quad (3.5.39)$$

Это уравнение *затухающих колебаний*.

Так как $|\sin(k_1 t + \beta)| \leq 1$, значит, $|x| \leq |a e^{-nt}|$, и, следовательно, график затухающих колебаний (рис. 3.18) заключен между двумя симметричными кривыми $x = a e^{-nt}$ и $x = -a e^{-nt}$.

Дифференцируя уравнение движения (3.5.39), получаем уравнение для скорости движения:

$$\dot{x} = -nx + a k_1 e^{-nt} \cos(k_1 t + \beta). \quad (3.5.40)$$

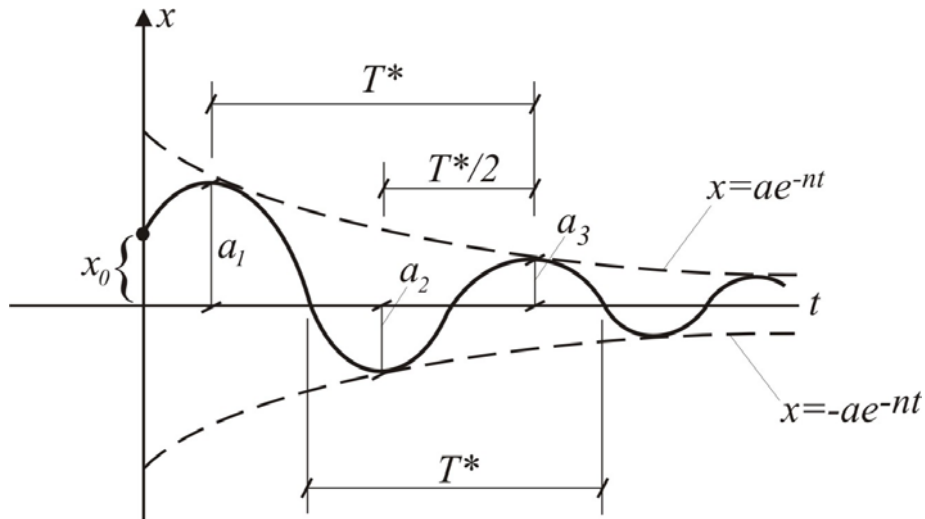


Рис. 3.18. График затухающих колебаний

Постоянные интегрирования a и β определяем, подставляя в уравнения (3.5.39) и (3.5.40) начальные условия: при $t=0$ $x=x_0$, $v=v_0$.

$$\left. \begin{aligned} x_0 &= a \sin \beta, \\ v_0 &= -nx_0 + ak_1 \cos \beta. \end{aligned} \right\}$$

Откуда

$$a = \sqrt{x_0^2 + \left(\frac{v_0 + nx_0}{k_1} \right)^2}, \quad (3.5.41)$$

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{x_0 k_1}{v_0 + nx_0}, \quad (3.5.42)$$

$$\sin \beta = x_0 / a. \quad (3.5.43)$$

Частота затухающих колебаний определяется соотношением

$$k_1 = \sqrt{k^2 - n^2}. \quad (3.5.44)$$

Период затухающих колебаний вычисляем по формуле

$$T^* = \frac{2\pi}{k_1} = \frac{2\pi}{k\sqrt{\frac{n^2}{k^2}}} = \frac{T}{\sqrt{\frac{n^2}{k^2}}} > T. \quad (3.5.45)$$

Рассмотрим отношение амплитуд колебаний двух соседних отклонений – a_i и a_{i+1} – в моменты времени t_i и $t_i + \frac{T^*}{2}$:

$$\frac{a_{i+1}}{a_i} = \frac{ae^{-nt_i - \frac{T^*}{2}n}}{ae^{-nt_i}} = e^{-\frac{T^*}{2}n}.$$

Величина $e^{-\frac{T^*}{2}n}$ называется *декрементом затуханий*, а показатель степени $-\frac{nT^*}{2}$ – *логарифмическим декрементом затухания*. Коэффициент n ($n = \frac{\mu}{2m}$) имеет название *коэффициент затухания*.

Анализ графика (см. рис. 3.18) показывает, что сопротивление уменьшает амплитуду колебаний с течением времени.

2) $n > k$ – **большое сопротивление**.

$$z_{1,2} = -n \pm \sqrt{n^2 - k^2},$$

или

$$z_{1,2} = -n \pm k_2,$$

где $k_2 = \sqrt{n^2 - k^2} > 0$.

Корни действительные и различные. В этом случае решение дифференциального уравнения приобретает вид

$$x = Ae^{(-n+k_2)t} + Be^{(-n-k_2)t},$$

или

$$x = e^{-nt} (Ae^{k_2t} + Be^{-k_2t}).$$

Проведя ниже ряд дополнительных преобразований

$$A = \frac{D_1 + D_2}{2}, \quad B = \frac{D_1 - D_2}{2},$$

$$x = e^{-nt} \left(D_1 \frac{e^{k_2t} + e^{-k_2t}}{2} + D_2 \frac{e^{k_2t} - e^{-k_2t}}{2} \right),$$

$$x = e^{-nt} [D_1 ch(k_2t) + D_2 sh(k_2t)],$$

$$D_1 = D sh\beta, \quad D_2 = D ch\beta,$$

придем к уравнению вида

$$x = De^{-nt} sh(k_1t + \beta).$$

Это уравнение показывает, что в данном случае движение не будет колебательным, так как гиперболический синус не является периодической функцией. Графики этого движения при различных начальных условиях показаны на рис. 3.19.

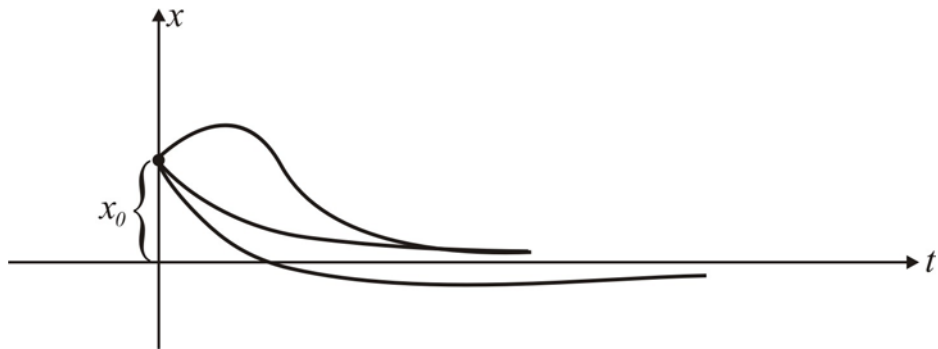


Рис. 3.19. Графики движения точки при большом сопротивлении движению

$$3) n = k, k_3 = \sqrt{n^2 - k^2} = 0.$$

$$\left. \begin{array}{l} z_1 = -n, \\ z_2 = -n; \end{array} \right\} \text{— корни равные.}$$

Решение дифференциального уравнения (3.5.31) будет в этом случае иметь вид

$$x = e^{-nt} (At + B).$$

Это уравнение также описывает неперiodическое движение.

Пример. Груз отклонили (приподняли) вверх на 2 см (рис. 3.20) и затем толкнули вверх со скоростью 1 м/с. Найти уравнение движения груза.

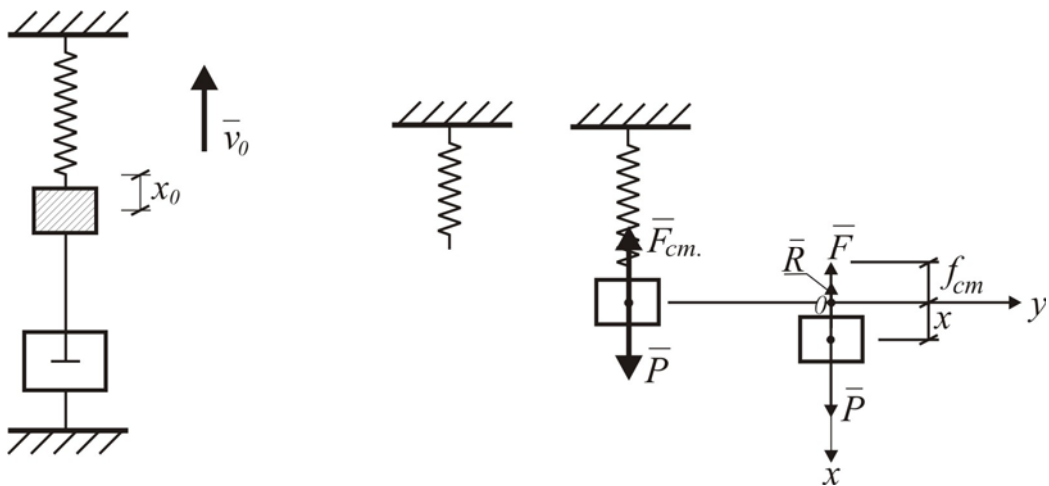


Рис. 3.20. Расчетная схема задачи

Дано: $x_0 = -0,02$ м, $v_0 = -1$ м/с, $c = 1000$ Н/м, $m = 1$ кг, $\mu = 2$. $R = \mu v$.

Найти: $x = f(t)$.

Решение. Используя рис. 3.20, составим дифференциальное уравнение:

$$m\ddot{x} = -F - R + P.$$

Здесь $F = c(f_{\text{ст}} + x) = cf_{\text{ст}} + cx$. В положении равновесия вес груза уравновешивается силой упругости $P = F_{\text{ст}} = cx$. Перепишем дифференциальное уравнение

$$m\ddot{x} = -cf_{\text{ст}} - cx - \mu\dot{x} + P,$$

или

$$m\ddot{x} = -cx - \mu\dot{x}.$$

Сделаем использованные выше преобразования:

$$\ddot{x} + 2n\dot{x} + k^2x = 0;$$

$$n = \frac{\mu}{m} = \frac{2}{2} = 1;$$

$$k = \sqrt{\frac{c}{m}} = 31,62;$$

$$k > n? \quad 31,62 > 1.$$

Следовательно, дифференциальное уравнение – дифференциальное уравнение затухающих колебаний. Его решение:

$$x = ae^{-nt} \sin(k_1t + \beta),$$

где $k_1 = \sqrt{k^2 - n^2} = 31,6$.

Постоянные интегрирования определяются по формулам:

$$a = \sqrt{x_0^2 + \left(\frac{v_0 + nx_0}{k_1}\right)^2} = \sqrt{4 + \left(\frac{-100 + 1(-2)}{31,6}\right)^2} = 3,796 = 3,8 \text{ см};$$

$$\text{tg}\beta = \frac{-2 \cdot 31,6}{-100 + (1(-2))} = 0,62;$$

$$\sin\beta = \frac{x_0}{a} = -\frac{2}{3,796} = -0,527;$$

$$\beta = 0,555 + 3,14 = 3,695 \text{ рад.}$$

Таким образом, уравнение затухающих колебаний имеет вид

$$x = 3,8e^{-t} \sin(31,6t + 3,695).$$

График этого уравнения изображен на рис. 3.21.

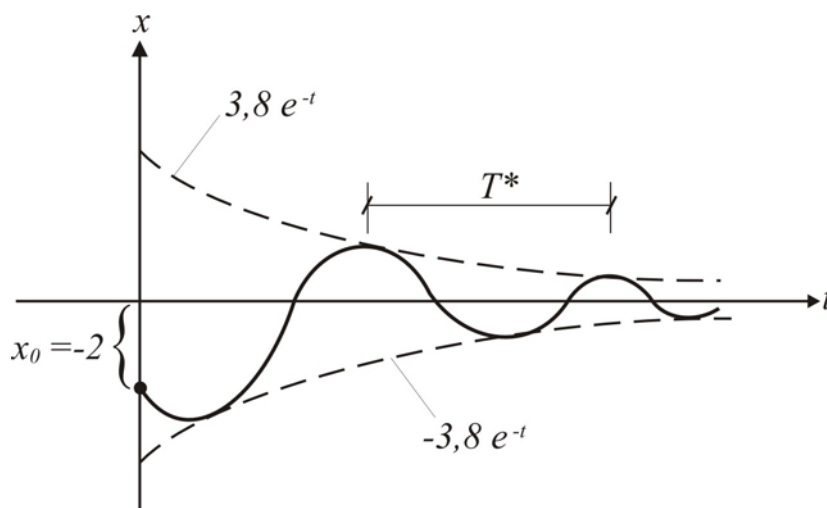


Рис. 3.21. График затухающих колебаний

$$T^* = \frac{6,28}{31,6} = 0,199 \text{ с.}$$

3.5.3. Вынужденные колебания материальной точки

Если на материальную точку действует кроме восстанавливающей силы еще одна периодическая сила, способная отклонять ее от положения покоя, то она будет совершать вынужденные колебания.

Эта периодическая сила называется *возмущающей силой*. Рассмотрим практически важный случай, когда возмущающая сила изменяется по гармоническому закону:

$$Q_x = Q_0 \cdot \sin(pt + \delta), \quad (3.5.46)$$

где Q_0 – амплитудное значение возмущающей силы;

p – частота изменения возмущающей силы;

$pt + \delta$ – фаза изменения возмущающей силы;

δ – начальная фаза изменения возмущающей силы.

По такому закону изменяется, например, центробежная сила, возникающая в нецентрированных частях электродвигателей (см. рис. 3.22).

$$Q_x = Q_0 \cdot \sin(\omega t + \delta). \quad (3.5.47)$$

где

$$Q_0 = m\omega^2 R, \quad (3.5.48)$$

$$p = \omega. \quad (3.5.49)$$

Амплитуда возмущающей силы равна модулю центробежной силы инерции груза, а частота изменения возмущающей силы – угловой скорости вращения стержня. Здесь действуют переменные по величине и направлению периодическая сила Q_x и восстанавливающая сила F .

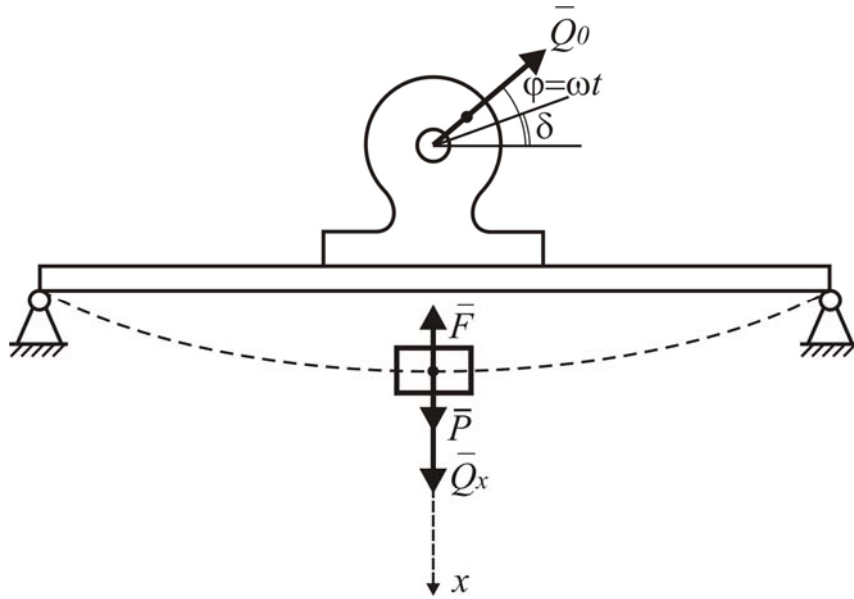


Рис.3.22. Колебания балки под действием центробежной силы электродвигателя

Кроме силового возбуждения вынужденных колебаний может быть и кинематическое возбуждение, например в случае, когда задано гармоническое движение заземленного конца пружины:

$$\xi = \xi \sin(pt + \delta). \quad (3.5.50)$$

В этом случае сила упругости будет состоять одновременно из восстанавливающей и возмущающей составляющих.

В дальнейшем ограничимся рассмотрением случая силового возбуждения вынужденных колебаний.

Рассмотрим прямолинейное движение материальной точки под действием восстанавливающей силы \bar{F} и возмущающей силы Q_x . Основное уравнение динамики в проекции на ось x будет иметь вид

$$m\ddot{x} = -F + Q_x, \quad (3.5.51)$$

где восстанавливающая сила и проекция возмущающей силы могут быть представлены в виде

$$F = cx, \quad (3.5.52)$$

$$Q = Q_0 \sin(pt + \delta). \quad (3.5.53)$$

Тогда дифференциальное уравнение примет вид

$$m\ddot{x} = -cx + Q_0 \sin(pt + \delta), \quad (3.5.54)$$

или

$$\ddot{x} + \frac{c}{m} \cdot x = \frac{Q_0}{m} \sin(pt + \delta). \quad (3.5.55)$$

Обозначив $k^2 = c / m$, $h = Q_0 / m$, получим окончательно:

$$\ddot{x} + k^2 x = h \sin(pt + \delta). \quad (3.5.56)$$

Данное уравнение представляет собой неоднородное дифференциальное уравнение второго порядка. Его решение ищем в виде

$$x = x_1 + x_2, \quad (3.5.57)$$

где x_1 – общее решение однородного уравнения

$$\ddot{x} + k^2 x = 0, \quad (3.5.58)$$

имеющее вид

$$x_1 = a \sin(kt + \beta); \quad (3.5.59)$$

x_2 – частное решение дифференциального уравнения (3.5.56). Будем искать x_2 в виде

$$x_2 = A_D \cdot \sin(pt + \delta). \quad (3.5.60)$$

Определим постоянную A_D подстановкой (3.5.60) в уравнение (3.5.56):

$$-A_D p^2 \sin(pt + \delta) + k^2 A_D \sin(pt + \delta) = h \cdot \sin(pt + \delta). \quad (3.5.61)$$

Откуда

$$A_D = \frac{h}{k^2 - p^2}, \quad (3.5.62)$$

$$x_2 = \frac{h}{k^2 - p^2} \cdot \sin(pt + \delta). \quad (3.5.63)$$

Итак, решение уравнения (3.5.56) имеет вид

$$x = a \sin(kt + \beta) + \frac{h}{k^2 - p^2} \cdot \sin(pt + \delta). \quad (3.5.64)$$

Это уравнение называется *уравнением вынужденных колебаний*.

При одновременном действии восстанавливающей и возмущающей сил материальная точка совершает сложное движение, представляющее собой результат наложения собственных и вынужденных колебаний.

Амплитуда вынужденных колебаний

$$A_D = \frac{h}{k^2 - p^2} \quad (3.5.65)$$

определяет динамическое отклонение под действием силы \bar{Q} . От статического действия силы Q_0 может возникнуть статическое отклонение

$$A_{ст} = \frac{Q_0}{C} = \frac{Q_0/m}{C/m} = \frac{h}{k^2}. \quad (3.5.66)$$

Отношение динамической амплитуды к статическому отклонению называют коэффициентом динамичности η :

$$\eta = \frac{A_D}{A_{ст}} = \frac{h}{k^2 - p^2} \cdot \frac{k^2}{h} = \frac{1}{1 - \frac{p^2}{k^2}}. \quad (3.5.67)$$

Изменение коэффициента динамичности в зависимости от соотношения частот p/k представлено на рис. 3.23.

При $p=k$ $\eta=\infty$. Этот случай называется явлением резонанса.

Для определения постоянных интегрирования в уравнении вынужденных колебаний запишем выражение для определения скорости точки:

$$v = ak \cdot \cos(kt + \beta) + \frac{hp}{k^2 - p^2} \cos(pt + \delta). \quad (3.5.68)$$

При $t=0$ $x=x_0$, $v=v_0$.

$$\left. \begin{aligned} x_0 &= a \sin \beta + \frac{h}{k^2 - p^2} \sin \delta; \\ v_0 &= ak \cdot \cos \beta + \frac{hp}{k^2 - p^2} \cos \delta. \end{aligned} \right\} \quad (3.5.69)$$

$$\left. \begin{aligned} a &= \sqrt{\left(x_0 - \frac{h}{k^2 - p^2} \sin \delta\right)^2 + \left(\frac{v_0 - \frac{hp}{k^2 - p^2} \cos \delta}{k}\right)^2}, \\ \sin \beta &= \frac{x_0 - \frac{h}{k^2 - p^2} \sin \delta}{k}, \\ \cos \beta &= \frac{v_0 - \frac{hp}{k^2 - p^2} \cos \delta}{ak}. \end{aligned} \right\} \quad (3.5.70)$$

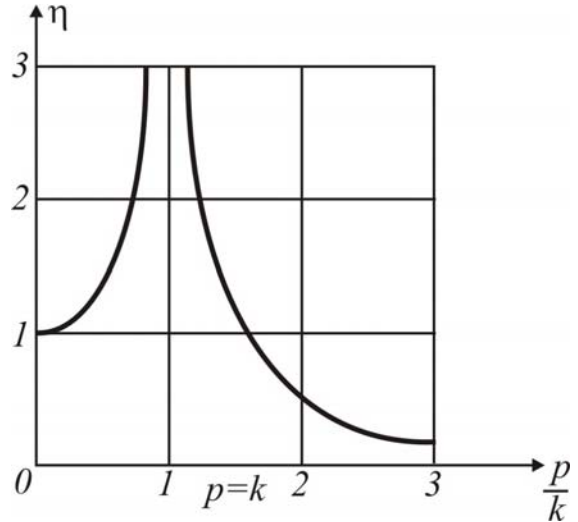


Рис. 3.23. Резонанс

При $\delta=0$ имеем:

$$\left. \begin{aligned} a &= \sqrt{x_0^2 + \left(\frac{v_0}{k} - \frac{hp}{(k^2 - p^2)k} \right)^2}, \\ \sin \beta &= \frac{x_0}{a}, \\ \cos \beta &= \frac{v_0 - \frac{hp}{k^2 - p^2}}{ak}. \end{aligned} \right\} \quad (3.5.71)$$

3.5.4. Явление резонанса

При совпадении частоты собственных и вынужденных колебаний ($p=k$) возникает явление резонанса. Частое решение дифференциального уравнения:

$$\ddot{x} + k^2 x = h \sin(pt + \delta) \quad (3.5.72)$$

в форме (3.5.60) теряет смысл, так как $A_D = \infty$. Частное решение x_2 должно быть линейно независимо от x_1 . Поэтому ищем это решение в виде:

$$x_2 = Bt \cos(kt + \delta). \quad (3.5.73)$$

Подставив (3.5.73) в (3.5.72), найдем B :

$$-Bk \cdot \sin(kt + \delta) - Bk \cdot \sin(kt + \delta) = h \sin(kt + \delta), \quad (3.5.74)$$

$$B = -\frac{h}{2k}. \quad (3.5.75)$$

$$x_2 = -\frac{h}{2k} t \cos(kt + \delta). \quad (3.5.76)$$

$$x = a \sin(kt + \beta) - \frac{h}{2k} t \cos(kt + \delta), \quad (3.5.77)$$

или

$$x = a \sin(kt + \delta) + \frac{h}{2k} t \sin\left(kt + \delta - \frac{\pi}{2}\right). \quad (3.5.78)$$

График вынужденных колебаний при резонансе приведен на рис. 3.24.

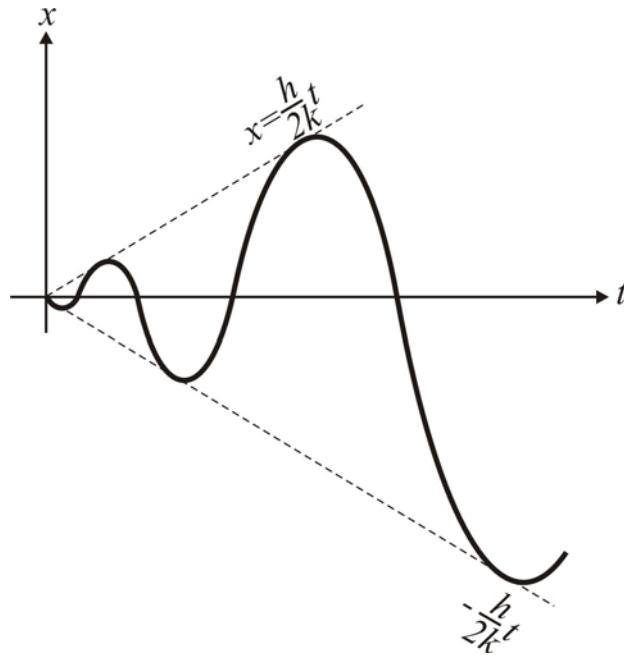


Рис. 3.24. График вынужденных колебаний при резонансе

3.5.5. Вынужденные колебания при сопротивлении движению

Если на материальную точку кроме восстанавливающей и возмущающей сил действует также и сила сопротивления движению

$$R = \alpha v = \alpha \dot{x}, \quad (3.5.79)$$

то дифференциальное уравнение движения примет вид

$$\ddot{x} + 2n\dot{x} + k^2x = h \sin(pt + \delta). \quad (3.5.80)$$

Частное решение этого уравнения имеет вид

$$x_2 = \frac{h}{\sqrt{4n^2p^2 + (k^2 - p^2)^2}} \cdot \sin(pt + \delta - \varepsilon). \quad (3.5.81)$$

(В самом деле

$$x_2 = D \sin(pt + \delta) + E \cdot \cos(pt + \delta),$$

$$\dot{x}_2 = p[D \cos(pt + \delta) - E \sin(pt + \delta)],$$

$$\ddot{x}_2 = -p^2[D \sin(pt + \delta) + E \cos(pt + \delta)],$$

$$(k^2D - p^2D - 2npE) \sin(pt + \delta) +$$

$$+(k^2E - p^2E + 2npD) \cos(pt + \delta) = h \sin(pt + \delta).$$

$$D = \frac{h(k^2 - p^2)}{(k^2 - p^2)^2 + 4n^2p^2}, \quad E = -\frac{2nph}{(k^2 - p^2)^2 + 4n^2p^2}.$$

$$x_2 = \frac{h}{(k^2 - p^2)^2 + 4n^2p^2} \left[(k^2 - p^2) \sin(pt + \delta) - 2np \cos(pt + \delta) \right].$$

Полагая

$$\frac{k^2 - p^2}{\sqrt{(k^2 - p^2)^2 + 4n^2 p^2}} = \cos \varepsilon,$$

$$\frac{2np}{\sqrt{(k^2 - p^2)^2 + 4n^2 p^2}} = \sin \varepsilon,$$

т.е.

$$\operatorname{tg} \varepsilon = \frac{2np}{k^2 - p^2},$$

получим:

$$x_2 = A_D \sin(pt + \delta - \varepsilon).$$

Здесь ε – сдвиг фазы вынужденных колебаний по отношению к фазе возмущающей силы;

A_D – динамическая амплитуда,

$$A_D = \frac{h}{\sqrt{4n^2 p^2 + (k^2 - p^2)^2}}, \quad (3.5.82)$$

Коэффициент динамичности в этом случае

$$\eta = \frac{A_D}{A_{ст}}, \quad (3.5.83)$$

или

$$\eta = \frac{k^2}{\sqrt{4n^2 p^2 + (k^2 - p^2)^2}}. \quad (3.5.84)$$

На рис. 3.25 показан график изменения коэффициента динамичности в зависимости от соотношения частот.

График показывает, что в данном случае амплитуда колебаний не возрастает до бесконечности при совпадении частот собственных и вынужденных колебаний.

Влияние сопротивления на вынужденные колебания выражается в сдвиге фазы колебаний по отношению к фазе возмущающей силы и в уменьшении амплитуды вынужденных колебаний по мере увеличения со-

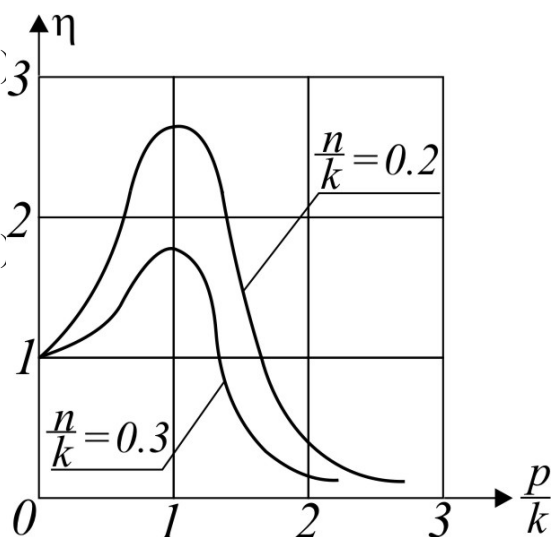


Рис. 3.25. Изменение коэффициента динамичности η в зависимости от отношения p/k

противления. Вынужденные колебания при наличии сопротивления не затухают.

При сопротивлении движению решение дифференциального уравнения уравнения можно представить в виде

$$x = x_1 + x_2, \quad (3.5.85)$$

$$\text{где} \quad \left. \begin{aligned} x_1 &= a \sin(kt + \beta), \quad (n = 0); \\ x_1 &= a \cdot e^{-nt} \sin(k_1 t + \beta), \quad (n < k), \quad k_1 = \sqrt{k^2 - n^2}; \\ x_1 &= e^{-nt} (A \cdot e^{-k_2 t} + B \cdot e^{-k_2 t}), \quad (n > k), \quad k_2 = \sqrt{n^2 - k^2}; \\ x_1 &= e^{-nt} (At + B), \quad n = k. \end{aligned} \right\} \quad (3.5.86)$$

В случае малого сопротивления ($n < k$) общий интеграл примет вид:

$$x = e^{-nt} \left(A \cos(\sqrt{k^2 - n^2} \cdot t) + B \sin(\sqrt{k^2 - n^2} \cdot t) \right) + A_D \sin(pt + \delta - \varepsilon). \quad (3.5.87)$$

Если при $t = 0$ $x = x_0, \dot{x} = \dot{x}_0$, то последнее уравнение примет вид:

$$x = e^{-nt} \left(x_0 \cos \sqrt{k^2 - n^2} \cdot t + \frac{nx_0 + \dot{x}_0}{\sqrt{k^2 - n^2}} \sin \sqrt{k^2 - n^2} \cdot t \right) - ae^{-nt} \left[\begin{aligned} &\sin(\delta - \varepsilon) \cos \sqrt{k^2 - n^2} \cdot t + \\ &+ \frac{p \cos(\delta - \varepsilon) + n \sin(\delta - \varepsilon)}{\sqrt{k^2 - n^2}} \sin \sqrt{k^2 - n^2} \cdot t \end{aligned} \right] + A_D \sin(pt + \delta - \varepsilon). \quad (3.5.88)$$

Здесь первое слагаемое – затухающие свободные колебания, происходящие вследствие начального отклонения системы от положения равновесия.

Второе слагаемое – затухающие колебания, возникающие от возмущающей силы.

Третье слагаемое – вынужденные колебания с частотой возмущающей силы.

При $t \rightarrow \infty$ $e^{-nt} \rightarrow 0$ и с течением времени можно учитывать лишь установившиеся вынужденные колебания:

$$x = A_D \sin(pt + \delta - \varepsilon).$$

Пример. Вынужденные колебания материальной точки.

Груз отклоняют вправо на 2 см от положения равновесия и отпускают. Одновременно основание пружины начинает колебаться по закону

$\xi = 4 \sin 10t$ (см). Найти уравнение движения и построить график колебательного движения точки при $p = 10 \frac{1}{c}$; $\delta = 0$; $c = 1000$ Н/м; $m = 5$ кг.

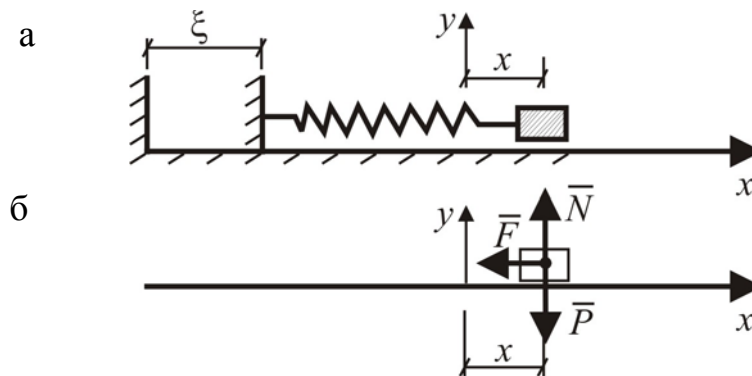


Рис. 3.26. Кинематическое возбуждение колебаний

Возьмем начало координат в положении равновесия груза, т.е. при недеформированной пружине. Для промежуточного положения движущейся точки можно записать:

$$\begin{aligned}
 m\ddot{x} &= -F, \\
 F &= c\Delta l = c(x - \xi), \\
 m\ddot{x} &= -cx + c\xi, \\
 \ddot{x} + \frac{c}{m}x &= \frac{c}{m}\xi.
 \end{aligned}$$

Введем обозначения:

$$\frac{c}{m} = k^2, \quad k = \sqrt{\frac{c}{m}} = \sqrt{\frac{1000}{5}} = 14,14 \frac{1}{c}; \quad \frac{c}{m} \cdot 0,04 = h = \frac{1000}{5} \cdot 0,04 = 8 \frac{M}{c^2}.$$

Тогда дифференциальное уравнение примет вид:

$$\ddot{x} + k^2x = h \sin pt.$$

Это дифференциальное уравнение вынужденных колебаний. Его решение:

$$\left. \begin{aligned}
 x &= a \sin(kt + \beta) + \frac{h}{k^2 - p^2} \sin pt; \\
 \dot{x} &= ak \cos(kt + \beta) + \frac{hp}{k^2 - p^2} \cos pt.
 \end{aligned} \right\}$$

$$\frac{h}{k^2 - p^2} = \frac{8}{200 - 100} = 0,08 = 8 \text{ см.}$$

$$\left. \begin{aligned} x_0 &= a \sin \beta, \\ v_0 &= ak \cos \beta + \frac{hp}{k^2 - p^2}. \end{aligned} \right\}$$

$$a = \sqrt{x_0^2 + \left(\frac{v_0 - \frac{hp}{k^2 - p^2}}{k} \right)^2} = \sqrt{2^2 + \frac{8^2 \cdot 100}{200}} = \sqrt{36} = 6 \text{ см.}$$

$$\left. \begin{aligned} \sin \beta &= \frac{x_0}{a} = \frac{2}{6} = 0,333 > 0 \\ \cos \beta &= \frac{v_0 - \frac{hp}{k^2 - p^2}}{ak} < 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow 2 \text{ квадрант,}$$

$$\beta_0 = 0,34 \text{ рад, } \beta = \pi - 0,34 = 2,8 \text{ рад.}$$

Уравнение вынужденных колебаний:

$$x = 6 \sin(14,14t + 2,8) + 8 \sin 10t,$$

$$T_{\min} = \frac{2\pi}{k} = \frac{6,28}{14,14} = 0,444 \text{ с.}$$

Интервал исследования движения должен быть $\Delta T > T_{\max} = 2\pi / p = 0,628$.

График движения изображен на рис. 3.27.

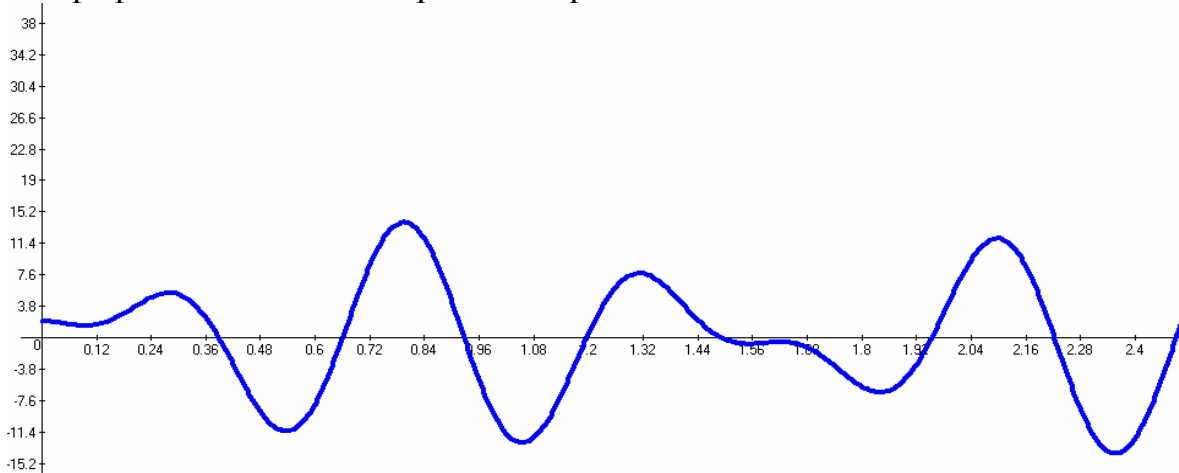


Рис. 3.27. График вынужденных колебаний

3.6. Относительное движение материальной точки

Во многих задачах динамики рассматривается движение материальной точки по отношению к системе отсчета, движущейся относительно инерциальной системы. Дифференциальные уравнения движения материальной точки относительно неинерциальных систем отсчета получают на основе теоремы Кориолиса:

$$\bar{a} = \bar{a}_{\text{пер}} + \bar{a}_{\text{отн}} + \bar{a}_{\text{кор}}. \quad (3.6.1)$$

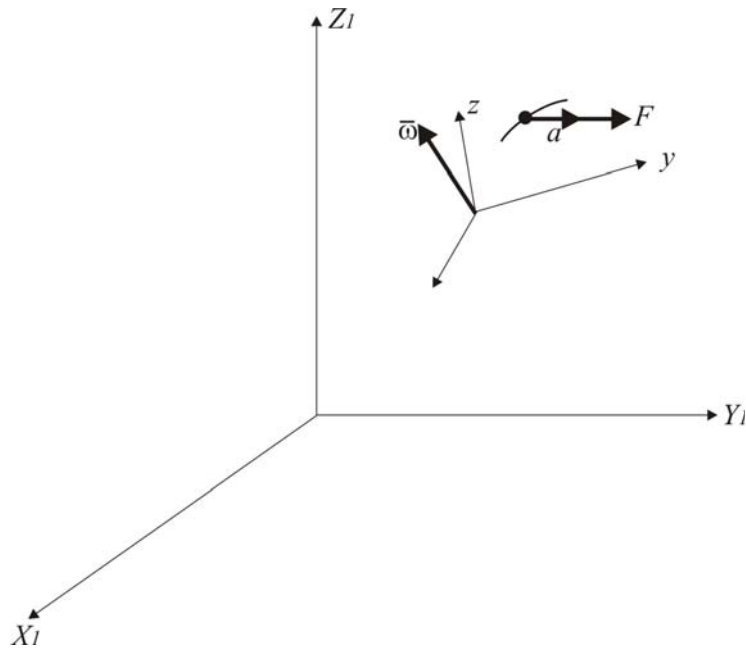


Рис. 3.28. Движение точки по отношению к двум системам отсчета

Напомним, что *относительное движение* – это движение точки по отношению к подвижной системе отсчета. *Переносное движение* – движение точки вместе с подвижной системой координат по отношению к неподвижной системе координат. *Абсолютное движение* – движение точки по отношению к неподвижной системе отсчета. Ускорение Кориолиса вычисляется по формуле

$$a_{\text{кор}} = 2\omega_{\text{пер}} \cdot v_{\text{отн}} \sin(\widehat{\bar{\omega}, \bar{v}_{\text{отн}}}). \quad (3.6.2)$$

При поступательном переносном движении

$$a_{\text{кор}} = 0. \quad (3.6.3)$$

Согласно второму закону Ньютона

$$m\bar{a} = \bar{F}. \quad (3.6.4)$$

Подставляя вместо \bar{a} выражение (3.6.1) и выполняя элементарные перестановки, получаем:

$$m\bar{a}_{\text{отн}} = \bar{F} - m\bar{a}_{\text{пер}} + m\bar{a}_{\text{кор}}. \quad (3.6.5)$$

Введем обозначения:

$$-m\bar{a}_{\text{пер}} = \bar{\Phi}_{\text{пер}}, \quad (3.6.6)$$

$$-m\bar{a}_{\text{кор}} = \bar{\Phi}_{\text{кор}}. \quad (3.6.7)$$

Тогда уравнение (3.6.5) примет вид

$$m\bar{a}_{\text{отн}} = \bar{F} + \bar{\Phi}_{\text{пер}} + \bar{\Phi}_{\text{кор}}. \quad (3.6.8)$$

Если переносное движение поступательное, то

$$\bar{\Phi}_{\text{кор}} = 0,$$

и

$$m\bar{a}_{\text{отн}} = \bar{F} + \bar{\Phi}_{\text{пер}}, \quad (3.6.9)$$

или

$$\begin{cases} m\ddot{x}_{\text{отн}} = \sum F_{kx} + \Phi_{\text{пер}x}, \\ m\ddot{y}_{\text{отн}} = \sum F_{ky} + \Phi_{\text{пер}y}, \\ m\ddot{z}_{\text{отн}} = \sum F_{kz} + \Phi_{\text{пер}z}. \end{cases} \quad (3.6.10)$$

Пример. Лифт поднимается по закону $x_1 = 3t^2$ м. В лифте падает груз (рис. 3.29). Найти относительное ускорение груза.

Решение. Начальные условия движения груза: $\dot{x}_0 = 0, x_0 = 0$.

Дифференциальное уравнение относительного движения груза

$$m\ddot{x}_{\text{отн}} = -P - \Phi_{\text{пер}}$$

преобразуем к виду

$$\Phi_{\text{пер}} = m \cdot \ddot{x}_1 = 6m.$$

Отсюда находим:

$$m\ddot{x} = -mg - 6m,$$

$$\ddot{x} \approx -16 \text{ (м/с}^2\text{)},$$

$$\dot{x} = -16t + c_1, \quad c_1 = 0,$$

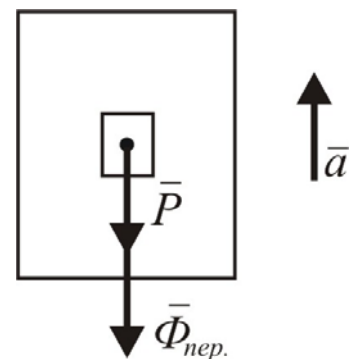


Рис. 3.29. Падение груза в движущемся лифте

$$x = 16 \frac{t^2}{2} + c_2, \quad c_2 = 0.$$

$$x = 8t^2.$$

3.7. Механическая система

3.7.1. Механическая система. Силы внешние и внутренние

Механической системой называют мысленно выделенную совокупность материальных точек, каким-либо образом взаимодействующих между собой.

Все силы, действующие на точки механической системы, можно разделить на внешние и внутренние.

Внешними называются силы, действующие на точки системы со стороны материальных точек, не входящих в состав данной системы.

Внутренними силами называют силы взаимодействия между материальными точками данной механической системы.

Внешние силы обозначим \bar{F}_k^e , а внутренние – \bar{F}_k^i .

Одни и те же силы могут быть как внешними, так и внутренними, в зависимости от того, какая механическая система рассматривается.

Движение точек механической системы зависит и от внешних, и от внутренних сил. Например, быстрота вращения вала двигателя зависит от величины внешнего момента и от внутренних сил сопротивления в подшипниках в системе вал – опоры.



Рис. 3.30. Внешние и внутренние силы системы вал – опоры

Однако внутренние силы любой системы обладают одной особенностью: так как, по третьему закону Ньютона, каждому действию соответствует равное и противоположно направленное противодействие, то каждой внутренней силе соответствует другая внутренняя сила, равная ей по модулю и противоположно направленная. Поэтому главный вектор всех внутренних сил

$$\bar{F}_*^i = \sum \bar{F}_k^i = 0, \quad (3.7.1)$$

или в проекциях

$$\left. \begin{aligned} \sum F_{kx}^i &= 0, \\ \sum F_{ky}^i &= 0, \\ \sum F_{kz}^i &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (3.7.2)$$

Аналогичным образом равен нулю главный момент всех внутренних сил

$$\bar{M}_*^i = \sum \bar{M}_k^i = 0, \quad (3.7.3)$$

или в проекциях

$$\left. \begin{aligned} \sum M_{kx}^i &= 0, \\ \sum M_{ky}^i &= 0, \\ \sum M_{kz}^i &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (3.7.4)$$

Хотя уравнения (3.7.1) и (3.7.3) имеют вид уравнений равновесия, внутренние силы на самом деле не уравновешиваются, так как приложены к разным точкам или телам системы и могут вызывать взаимные перемещения этих тел.

3.8. Геометрия масс механической системы

3.8.1. Центр масс механической системы

Движение механической системы кроме действующих на нее сил зависит от ее суммарной массы и от распределения масс внутри системы.

Масса системы равна сумме масс всех точек или тел, образующих систему

$$m = \sum m_K. \quad (3.8.1)$$

Положение каждой точки M_K с массой m_K определяется в пространстве радиусом-вектором \bar{r}_K (рис. 3.31) или координатами x_K, y_K, z_K .

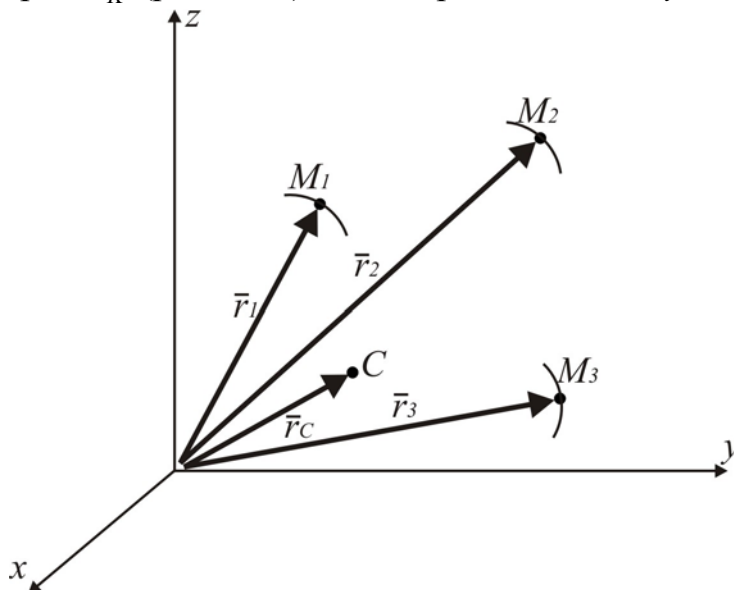


Рис. 3.31. Центр масс механической системы

Центром масс системы называется точка, радиус-вектор которой \bar{r}_C определяется по формуле

$$\bar{r}_C = \frac{\sum m_K \cdot \bar{r}_K}{m}. \quad (3.8.2)$$

Или в координатной форме:

$$\left. \begin{aligned} x_C &= \frac{\sum m_K \cdot x_K}{m}; \\ y_C &= \frac{\sum m_K \cdot y_K}{m}; \\ z_C &= \frac{\sum m_K \cdot z_K}{m}. \end{aligned} \right\} \quad (3.8.2')$$

Центр тяжести тела или системы тел одновременно является и центром масс этой системы:

$$x_C = \frac{\sum P_K x_K}{\sum P_K} = \frac{\sum m_K g x_K}{\sum m_K g} = \frac{\sum m_K x_K}{m}.$$

Дифференциальные уравнения движения точек системы, имеющие вид

$$m_K \bar{a}_K = \bar{F}_K^e + \bar{F}_K^i, \quad (3.8.3)$$

можно просуммировать; тогда

$$\sum m_K \bar{a}_K = \sum \bar{F}_K^e + \sum \bar{F}_K^i, \quad (3.8.4)$$

Второе слагаемое в правой части уравнения (3.8.4) есть сумма внутренних сил системы. Для любой механической системы сумма внутренних сил равна нулю:

$$\sum \bar{F}_K^i = 0. \quad (3.8.5)$$

Левую часть уравнения (3.8.4) преобразуем следующим образом:

$$\sum m_K \bar{a}_K = \sum m_K \frac{d^2 \bar{r}_K}{dt^2} = \frac{d^2}{dt^2} (\sum m_K \bar{r}_K) = \frac{d^2}{dt^2} (m \cdot \bar{r}_C) = m \frac{d^2 \bar{r}_C}{dt^2} = m \bar{a}_C. \quad (3.8.6)$$

Таким образом, уравнение (3.8.4) можно заменить уравнением

$$m \bar{a}_C = \sum \bar{F}_K^e. \quad (3.8.7)$$

Уравнение (3.8.5) выражает теорему о движении центра масс механической системы: *центр масс механической системы движется как материальная точка, на которую действуют все внешние силы системы.*

В проекциях на координатные оси уравнение (3.8.7) будет иметь вид

$$\left. \begin{aligned} m\ddot{x}_C &= \sum F_{Kx}^e \\ m\ddot{y}_C &= \sum F_{Ky}^e \\ m\ddot{z}_C &= \sum F_{Kz}^e \end{aligned} \right\} \quad (3.8.8)$$

С л е д с т в и е : если сумма проекций внешних сил на какую-либо ось во все время движения равна нулю и в начальный момент времени центр масс системы находится по отношению к этой координате в покое, то данная координата центра масс остается постоянной. Т.е. если $\sum F_{Kx}^e = 0$, $m\ddot{x}_C = 0$, $v_{Cx} = \text{const}$ и если $v_{Cx(0)} = 0$, то $x_C = \text{const}$.

П р и м е р . Механическая система состоит из двух грузов 1 и 2, соединенных между собой нерастяжимой нитью, и призмы 3, лежащей на гладкой поверхности (рис.3.32). Система находится в покое. Определить смещение призмы 3, если система грузов 1-2 переместилась так, что груз 1 поднялся по вертикали на высоту h .

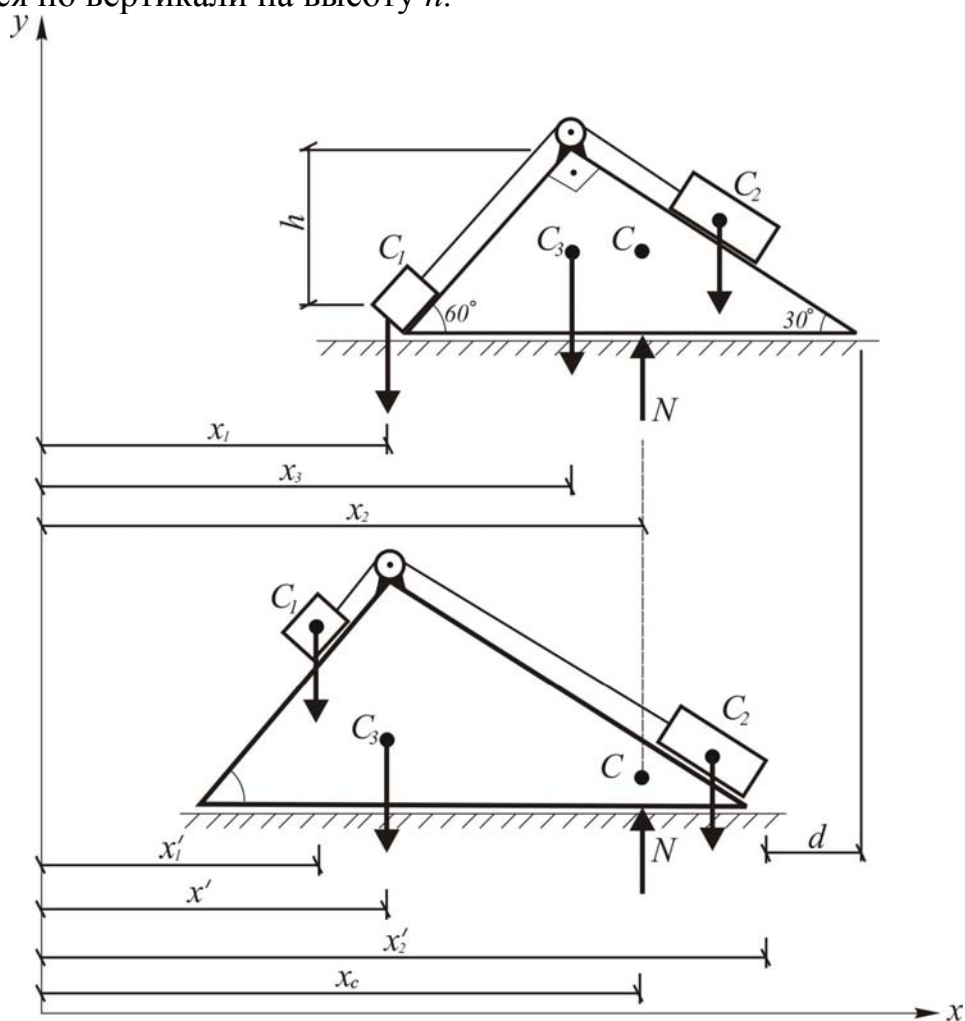


Рис. 3.32. При движении этой системы центр масс остается в покое

Решение. Пусть d – смещение призмы. Здесь $\sum F_{kx}^e = 0$, $v_{ok} = 0$; следовательно, $x_c = \text{const}$.

До перемещения координата центра масс

$$x_{c(1)} = \frac{m_1 \cdot x_1 + m_2 \cdot x_2 + m_3 \cdot x_3}{m_1 + m_2 + m_3}.$$

Горизонтальное перемещение груза 1:

$$b = h \cdot \text{tg} 30^\circ.$$

Горизонтальное перемещение груза 2:

$$e = (h / \cos 30^\circ) \cos 30^\circ = h.$$

После перемещения координату центра масс можно записать в виде

$$x_{c(2)} = \frac{m_1(x_1 + h \cdot \text{tg} 30^\circ - d) + m_2(x_2 + h - d) + m_3(x_3 - d)}{m_1 + m_2 + m_3}.$$

Так как $x_{c(1)} = x_{c(2)}$, то, приравнявая выражения для координат центра масс в первом и втором положениях системы, получаем:

$$\frac{m_1 x_1 + m_2 x_2 + m_3 x_3}{m_1 + m_2 + m_3} = \frac{m_1(x_1 + h \text{tg} 30^\circ - d) + m_2(x_2 + h - d) + m_3(x_3 - d)}{m_1 + m_2 + m_3}.$$

Сокращая подобные члены, приходим к уравнению

$$h \cdot \text{tg} 30^\circ + h - 3d = 0,$$

откуда

$$d = \frac{h \text{tg} 30^\circ + h}{3}.$$

3.8.2. Момент инерции механической системы

Положение центра масс характеризует распределение масс системы не полностью. Например, рассмотрим вращательное движение следующей системы: система двух равных и равноудаленных от оси грузов вращается с угловой скоростью ω (рис. 3.33). Увеличим расстояние h от оси до шариков на одну и ту же величину. При этом угловая скорость уменьшится, хотя положение центра масс не изменилось, а распределение масс – изменилось.

Для изучения распределения масс во вращательном движении и вводится еще одна характеристика распределения масс – момент инерции.

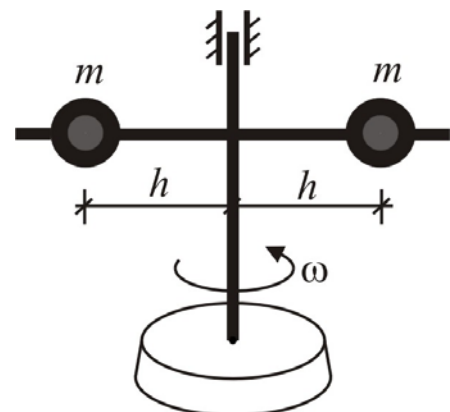


Рис. 3.33. Влияние распределения масс на движение системы

Моментом инерции тела относительно данной оси называется скалярная величина, равная сумме произведений масс всех точек тела (системы) на квадраты их расстояний от этой оси:

$$J_z = \sum m_K \cdot r_K^2. \quad (3.8.9)$$

Радиусом инерции называется расстояние от оси до той точки, где надо сосредоточить всю массу системы, чтобы момент инерции этой системы был равен моменту инерции этой точки. Пусть i – радиус инерции системы. Тогда

$$J_z = Mi^2. \quad (3.8.10)$$

Для сложных тел (рис. 3.35) при подсчете момента инерции суммирование заменим интегрированием:

$$J_z = \sum m_K r_K^2 = \int_V r^2 dm = \rho \int_V r^2 dv. \quad (3.8.11)$$

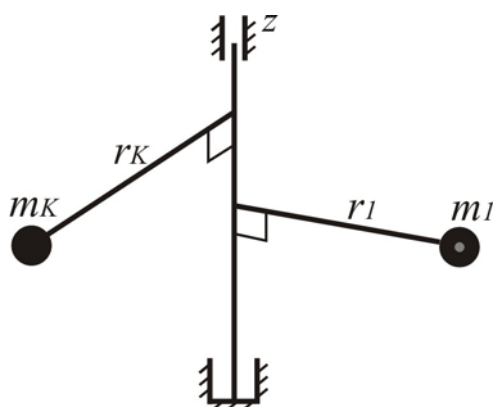


Рис. 3.34. К определению момента инерции относительно оси

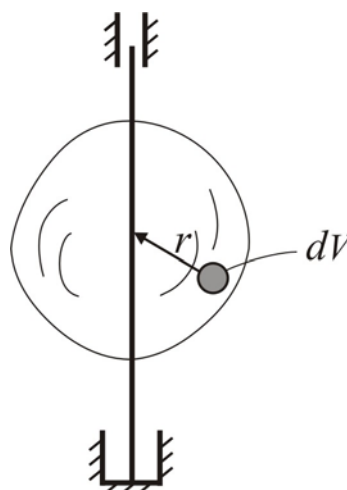


Рис. 3.35. К вычислению момента инерции тела относительно оси

3.8.3. Момент инерции относительно параллельных осей. (Теорема Штейнера)

Теорема: момент инерции системы относительно какой-либо оси равен моменту инерции относительно параллельной оси, проходящей через центр масс, плюс произведение массы тела на квадрат расстояния между осями.

Доказательство. Пусть ось z (рис.3.36) проходит через центр масс тела, а ось z' – некоторая параллельная ось, отстоящая от оси z на расстоянии d .

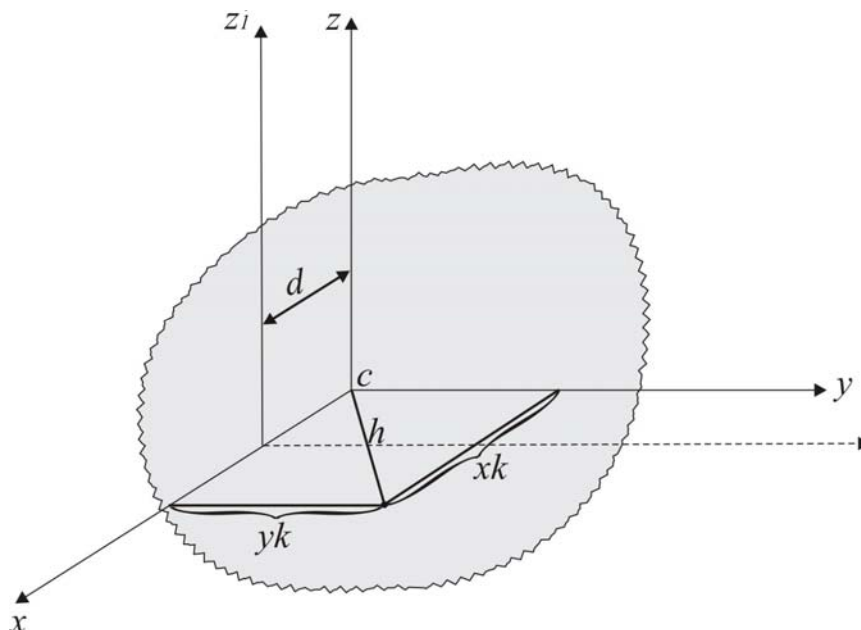


Рис. 3.36. К вычислению момента инерции тела относительно параллельной оси

Момент инерции тела составляет:
относительно оси CZ

$$J_{CZ} = \sum m_k h_k^2 = \sum m_k (x_k^2 + y_k^2). \quad (3.8.12)$$

относительно оси z_1

$$J_{Cz_1} = \sum m_k [(x_k - d)^2 + y_k^2] = \sum m_k (x_k^2 + y_k^2) - \sum m_k 2x_k d + \sum m_k d^2. \quad (3.8.13)$$

Так как $\sum m_k x_k = Mx_C = 0$, то

$$J_{Cz_1} = J_{CZ} + Md^2. \quad (3.8.14)$$

3.8.4. Центробежные моменты инерции

Момент инерции тела относительно оси также не полностью характеризует распределение масс. Рассмотрим, например, вращение двух равных и равноудаленных от оси грузов, расположенных на наклонном стержне (рис.3.37). При наклоне стержня с грузами центр масс остался на прежнем месте. Момент инерции системы грузов относительно оси вращения J_x также не изменился. Однако вращательное движение этой системы вызывает дополнительные реакции в подшипниках.

Для учета подобного асимметричного воздействия масс вводится понятие *центробежный момент инерции*.

Центробежные моменты инерции подсчитываются по формуле

$$\left. \begin{aligned} J_{xy} &= \sum m_k x_k y_k, \\ J_{yz} &= \sum m_k y_k z_k, \\ J_{xz} &= \sum m_k x_k z_k. \end{aligned} \right\} \quad (3.8.15)$$

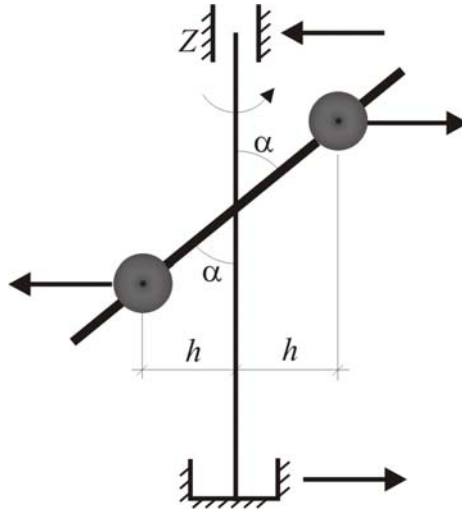


Рис. 3. 37. При одинаковом осевом моменте инерции наклон первоначально горизонтального стержня с грузами (с одновременной их раздвижкой) изменяет горизонтальные реакции подшипников оси

При этом

$$J_{xy} = J_{yx}. \quad (3.8.16)$$

Для тел, имеющих ось симметрии (например ось z), центробежные моменты инерции, не содержащие в индексах название этой оси, равны нулю:

$$J_{xy} = J_{yx} = 0. \quad (3.8.17)$$

Ось z в этих случаях называют *главной осью инерции*. И, вообще, если центробежные моменты инерции относительно некоторой оси равны нулю, то данная ось является главной осью инерции.

Если тело имеет плоскость симметрии (рис.3.38), то любая прямая, перпендикулярная этой плоскости, – главная ось. На рис. 3.38 ось z – главная ось.

Для нее $J_{xz} = J_{yz} = 0$.

Главные оси, проведенные через центр масс, есть *главные центральные оси инерции*. Ось z_1 – главная центральная ось инерции.

Уравнения механики, построенные для главных центральных осей, значительно проще уравнений относительно произвольных осей.

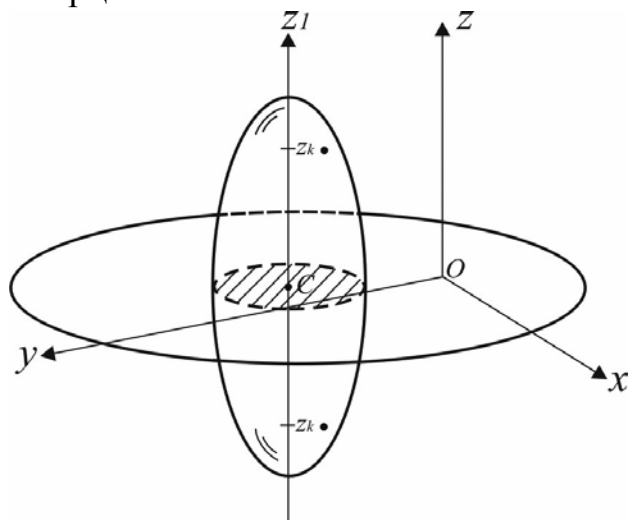


Рис. 3.38. Ось z – главная ось инерции

3.8.5. Вычисление моментов инерции некоторых однородных тел

1. Тонкий однородный стержень длиной l , массой $M = \rho Al$. Здесь ρ – плотность материала стержня.

Масса части тела определяется выражением $m_k = \rho V_k$. Масса элементарного участка стержня (рис.3.39) $dm = \rho A dx$. Момент инерции стержня относительно оси z составляет:

$$J_z = \int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} x^2 \cdot dm = \int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} \rho A x^2 \cdot dx = \rho A \frac{x^3}{3} \Big|_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} = \rho A \frac{l^3}{12} = \frac{Ml^2}{12}.$$

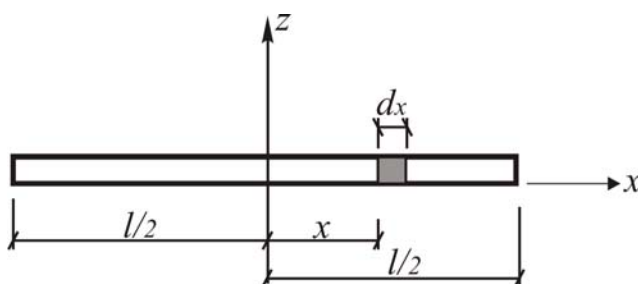


Рис. 3.39. К определению момента инерции стержня

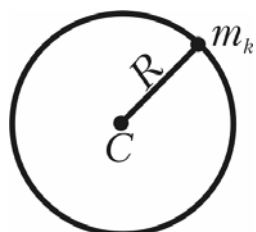


Рис. 3.40. К определению момента инерции кольца

2. Тонкое кольцо радиусом R . Момент инерции кольца относительно оси cz , перпендикулярной плоскости кольца (рис. 3.40):

$$J_{cz} = \sum m_k R^2 = \left(\sum m_k \right) R^2 = MR^2.$$

3. Круглая однородная пластина или цилиндр радиусом R и массой M (рис. 3.41).

Площадь элементарного кольца $2\pi r dr$,
масса кольца $dm_1 = \rho 2\pi r dr$.

$$J_{oz} = \int_0^R r^2 \cdot \rho 2\pi r dr = 2\pi\rho \int_0^R r^3 dr =$$

$$= \frac{2\pi\rho R^4}{4} = \frac{\rho\pi R^4}{2}$$

$$M = \pi R^2 \cdot \rho; \quad J_{cz} = \frac{MR^2}{2}.$$

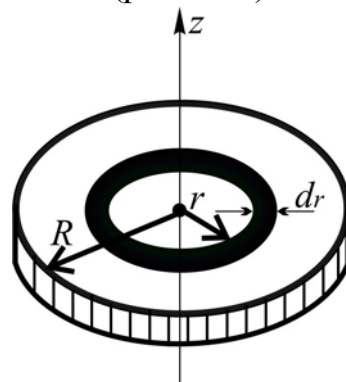


Рис. 3.41. Определение момента инерции пластины

4. Однородный круглый цилиндр (рис. 3.42).

$$M = \rho H \pi R^2.$$

$$J_{cz} = \sum \Delta J_{cz} = \frac{\rho \pi R^4}{2} H = \frac{MR^2}{2} = 0,5MR^2.$$

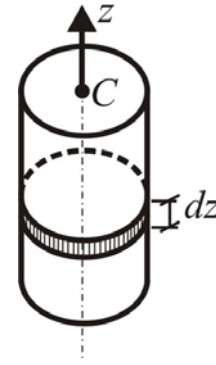


Рис. 3.42. Момент инерции цилиндра относительно оси z

5. Прямоугольная пластина (рис. 3.43).

$$dm = \rho a dy. \quad M = \rho ab.$$

$$J_x = \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} y^2 \cdot dm = \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} y^2 \cdot \rho a dy =$$

$$= \rho a \frac{y^3}{3} \Big|_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} = \rho a \frac{b^3}{12} = \frac{Mb^2}{12}.$$

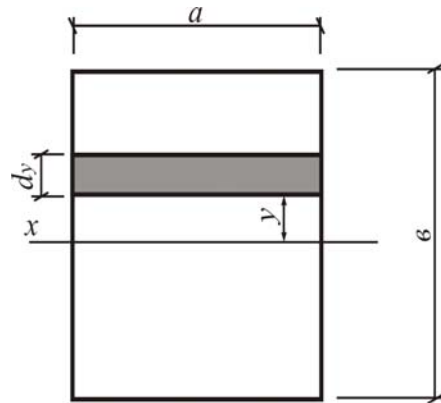


Рис. 3.43. Момент инерции прямоугольной пластины относительно оси x

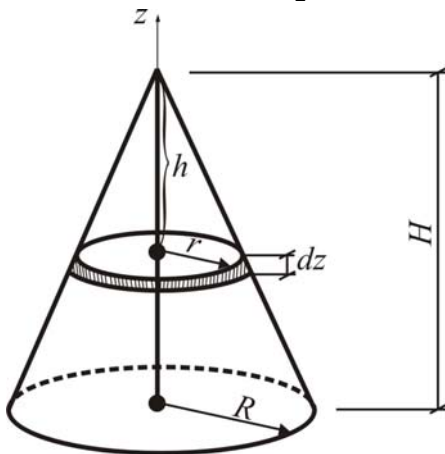


Рис. 3.44. Момент инерции конуса

6. Конус (рис.3.44).

$$dm_i = \rho \pi r^2 dz; \quad \frac{r_k}{R} = \frac{h_k}{H}; \quad r_k = h_k \frac{R}{H}.$$

$$\Delta J_{cz} = \frac{m_i r_i^2}{2} = \frac{\rho \pi r_i^4 dz}{2} = \rho \pi z^4 \frac{R^4}{H^4} dz.$$

$$J_{cz} = \int_0^H \frac{R^4}{H^4} \frac{\rho \pi r z^4 dz}{2} = 0,1R^4 H \rho \pi = \frac{1}{3} \rho \pi R^2 H = M.$$

$$J_{cz} = 0,3MR^2.$$

7. Шар (рис. 3.45).

$$J_{cz} = \frac{2}{5} MR^2 = 0,4MR^2.$$

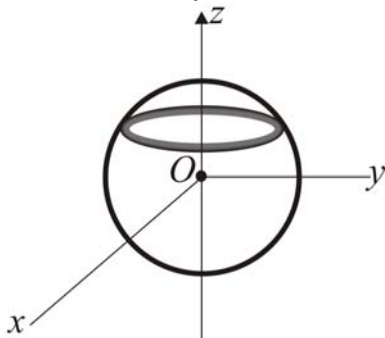


Рис. 3.45. Момент инерции шара относительно оси z

3.9. Теоремы об изменении количества движения и момента количества движения

3.9.1. Импульс силы

Пусть \vec{F} – постоянная по направлению и модулю сила. Тогда за время $\tau = t_2 - t_1$ импульс этой силы

$$\vec{s} = \vec{F} \cdot \tau. \quad (3.9.1)$$

Импульс силы характеризует передачу материальной точке движения со стороны действующей на нее силы за данный промежуток времени.

Для переменной силы элементарный импульс

$$\Delta \vec{s} = \vec{F} \cdot \Delta t, \quad (3.9.2)$$

где Δt – элементарная часть промежутка времени $t_2 - t_1$.

Полный импульс силы вычислим, суммируя элементарные импульсы:

$$\vec{s} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \sum \vec{F} \Delta t = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F} dt. \quad (3.9.3)$$

Определим проекции импульса силы на координатные оси:

$$s_x = \int_{t_1}^{t_2} F_x dt, \quad s_y = \int_{t_1}^{t_2} F_y dt, \quad s_z = \int_{t_1}^{t_2} F_z dt. \quad (3.9.4)$$

3.9.2. Теорема об изменении количества движения материальной точки

Количество движения материальной точки записывается в виде $m\vec{v}$. Основной закон динамики

$$m\vec{a} = \sum \vec{F}_k \quad (3.9.5)$$

перепишем в виде

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = \sum \vec{F}_k. \quad (3.9.6)$$

Разделяя переменные и интегрируя

$$m \int_{\vec{v}_1}^{\vec{v}_2} d\vec{v} = \sum \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}_k dt, \quad (3.9.7)$$

получаем:

$$m\vec{v}_2 - m\vec{v}_1 = \sum \vec{s}_k. \quad (3.9.8)$$

Это уравнение является математической записью следующей теоремы: *изменение количества движения материальной точки за некоторый промежуток времени равно геометрической сумме импульсов действующих на точку сил.*

В проекциях на координатные оси уравнение (3.9.8) примет вид

$$\left. \begin{aligned} mv_{2x} - mv_{1x} &= \sum S_{kx}, \\ mv_{2y} - mv_{1y} &= \sum S_{ky}, \\ mv_{2z} - mv_{1z} &= \sum S_{kz}. \end{aligned} \right\} \quad (3.9.9)$$

Пример. Тело весом $G=280$ Н движется поступательно вверх по негладкой наклонной плоскости (рис. 3.46) под действием силы P , которая наклонена к плоскости под углом 30° . Коэффициент трения тела о плоскость $f_{\text{тр}}=0,5$. Чему равен модуль силы P , если через 10 с, тело получило скорость $v=2$ м/с?

Решение. Согласно теореме об изменении количества движения материальной точки

$$mv_{1x} - mv_{0x} = s_x. \quad (*)$$

Так как силы постоянны, то

$$s_x = \left(\sum F_x \right) \cdot t = (P \cdot \cos 30^\circ - G \cdot \sin 45^\circ - F) t.$$

Из уравнения равновесия относительно оси y определим реакцию плоскости N :

$$\begin{aligned} \sum F_{ky} &= 0, \\ N - G \cos 45^\circ + P \cdot \sin 30^\circ &= 0, \\ N &= G \cos 45^\circ - P \sin 30^\circ. \end{aligned}$$

Сила трения

$$F = N f_{\text{тр}} = (G \cos 45^\circ - P \sin 30^\circ) f_{\text{тр}}.$$

Начальная и конечная скорости движения тела в проекции на ось x составляют соответственно: $v_{0x} = 0$, $v_{1x} = v$. Подставив выражение для v_{0x} , v_{1x} и F в уравнение (*), получим:

$$\frac{G}{g} v = [P \cdot \cos 30^\circ - G \sin 45^\circ - (G \cos 45^\circ - P \sin 30^\circ) f_{\text{тр}}] t,$$

откуда

$$\begin{aligned} P &= \frac{G [v + gt(\sin 45^\circ + f_{\text{тр}} \cos 45^\circ)]}{gt(\cos 30^\circ + f_{\text{тр}} \sin 45^\circ)} = \\ &= \frac{280 [2 + 9,81 \cdot 10 (0,707 + 0,5 \cdot 0,707)]}{9,81 \cdot 10 (0,866 + 0,5 \cdot 0,707)} \approx 248 \text{ Н}. \end{aligned}$$

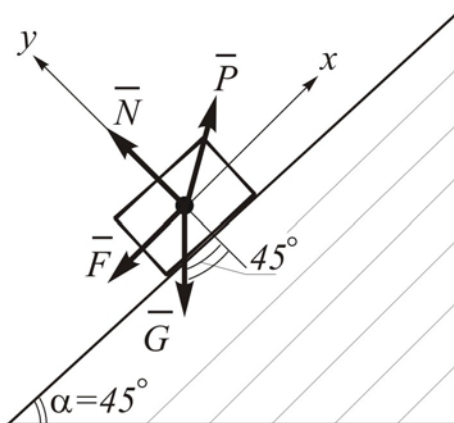


Рис. 3.46. Движение тела вверх по наклонной плоскости

3.9.3. Теорема об изменении момента количества движения материальной точки

Момент силы относительно некоторого центра O

$$\bar{M}_0 = \bar{r} \times \bar{F}. \quad (3.9.10)$$

Момент количества движения материальной точки относительно того же центра

$$\bar{L}_0 = \bar{r} \times m\bar{v}. \quad (3.9.11)$$

Возьмем производную по времени от момента количества движения:

$$\begin{aligned} \frac{d\bar{L}_0}{dt} &= \frac{d\bar{r}}{dt} \times m\bar{v} + \bar{r} \times \frac{d(m\bar{v})}{dt} = \\ &= \bar{v} \times m\bar{v} + \bar{r} \times m\bar{a} = 0 + \bar{r} \times \bar{F} = \bar{M}_0. \end{aligned} \quad (3.9.12)$$

Или, в случае действия на материальную точку нескольких сил,

$$\frac{d\bar{L}_0}{dt} = \sum \bar{M}_{k0}. \quad (3.9.13)$$

Уравнение (3.9.13) является математической записью следующей теоремы: *производная по времени от момента количества движения точки относительно некоторого центра равна геометрической сумме моментов действующих на нее сил относительно этого же центра.*

В проекциях на координатные оси:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dL_x}{dt} &= \sum M_{kx}, \\ \frac{dL_y}{dt} &= \sum M_{ky}, \\ \frac{dL_z}{dt} &= \sum M_{kz}. \end{aligned} \right\} \quad (3.9.14)$$

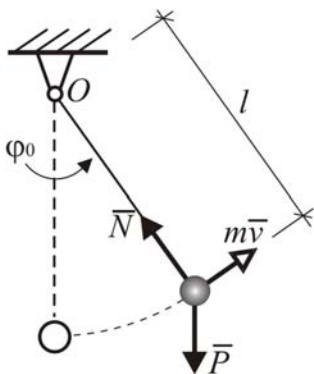


Рис. 3.47. Движение маятника

Пример. Найти закон колебательного движения маятника, если ему, находящемуся в положении покоя, сообщили начальную скорость $\dot{\varphi}_0$. Ось z вращения маятника проходит через точку O перпендикулярно плоскости чертежа (рис. 3.47).

Решение. Момент количества движения маятника

$$L_z = mvl = ml\omega \cdot l = ml^2\omega = ml^2 \frac{d\varphi}{dt}.$$

Дифференцируя выражение для момента количества движения по времени, получаем:

$$\frac{dL_z}{dt} = \frac{P}{g} l^2 \ddot{\varphi}.$$

Момент внешних сил относительно оси Oz

$$\sum M_z = -Pl \sin \alpha.$$

Согласно теореме об изменении момента количества движения точки, получаем:

$$\frac{P}{g} l^2 \ddot{\varphi} + Pl \sin \varphi = 0,$$

или

$$\ddot{\varphi} + \frac{g}{l} \sin \varphi = 0.$$

Разложим $\sin \varphi$ в ряд: $\sin \varphi = \varphi - \frac{\varphi^3}{3!} + \frac{\varphi^5}{5!} - \dots$. Примем $\sin \varphi \approx \varphi$, $\frac{g}{l} = k^2$.

Тогда

$$\ddot{\varphi} + k^2 \varphi = 0.$$

Это однородное дифференциальное уравнение второго порядка относительно φ . Его решение

$$\varphi = A \sin kt + B \cos kt.$$

Выражение для скорости изменения угла поворота

$$\dot{\varphi} = Ak \cos kt - Bk \sin kt.$$

Постоянные A и B определим из начальных условий: при $t=0$

$$\varphi = 0, \quad \dot{\varphi} = \dot{\varphi}_0.$$

Тогда

$$\left. \begin{aligned} 0 &= 0 + B, \\ \dot{\varphi}_0 &= Ak. \end{aligned} \right\}$$

Откуда $B = 0$, $A = \frac{\dot{\varphi}_0}{k}$.

Таким образом, закон движения маятника примет вид

$$\varphi = \frac{\dot{\varphi}_0}{k} \sin kt.$$

При этом частота колебаний определяется из уравнения

$$k = \sqrt{\frac{g}{l}}.$$

3.10. Работа силы и мощность

Эффект действия сил можно оценить с помощью работы сил. Работа постоянной силы \vec{F} на прямолинейном перемещении точки ее приложения (рис. 3.48) равна скалярному произведению векторов силы и перемещения:

$$A = \vec{F} \cdot \vec{u} = F \cdot u \cdot \cos \alpha. \quad (3.10.1)$$

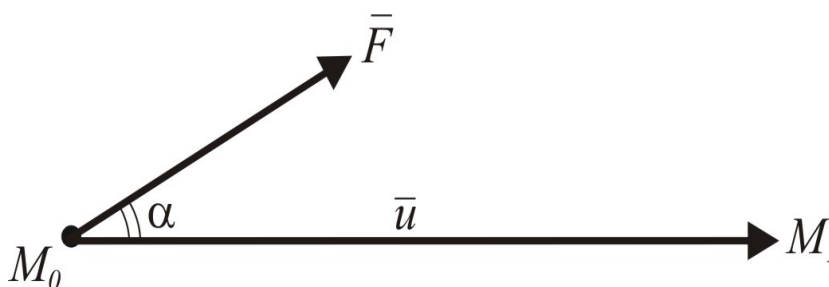


Рис. 3.48. Работа постоянной силы на прямолинейном перемещении

Если $\alpha < 90^\circ$, то $A > 0$; если $\alpha = 90^\circ$, то $A = 0$; если $\alpha > 90^\circ$, то $A < 0$. Размерность работы – Дж. $[A] = \text{Дж} = 1 \text{ Н} \cdot 1 \text{ м}$.

При вычислении работы переменных сил на криволинейных перемещениях (и в некоторых других случаях) пользуются понятием «элементарная работа». Пусть точка приложения переменной силы \vec{F} перемещается по кривой M_0M_1 . Разобьем траекторию на элементарные участки ds и вычислим работу силы \vec{F} на элементарном участке как работу постоянной силы на прямолинейном перемещении:

$$\delta A = F \cdot ds \cdot \cos(\vec{F}, \hat{v}) \quad (3.10.2)$$

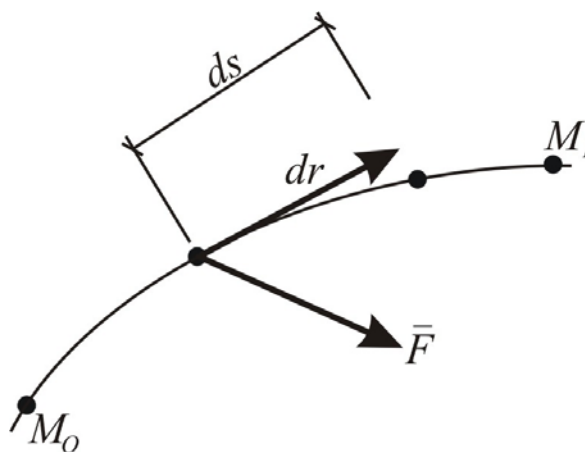


Рис. 3.49. Работа силы на элементарном перемещении

Учитывая, что

$$|d\vec{r}| = ds, \quad (3.10.3)$$

получим:

$$\delta A = \vec{F} \cdot d\vec{r}. \quad (3.10.4)$$

Если вместо векторов силы и перемещения подставить их выражения через проекции

$$\begin{aligned} \vec{F} &= F_x \vec{i} + F_y \vec{j} + F_z \vec{k}, \\ d\vec{r} &= dx \vec{i} + dy \vec{j} + dz \vec{k}, \end{aligned}$$

то получим элементарную работу силы в виде

$$\delta A = F_x dx + F_y dy + F_z dz. \quad (3.10.5)$$

Работа силы на конечном перемещении

$$A = \int_{M_0}^M (F_x dx + F_y dy + F_z dz). \quad (3.10.6)$$

Изменение работы силы, отнесенное к единице времени, называется мощностью силы

$$N = \frac{\delta A}{dt} = \frac{\vec{F} d\vec{r}}{dt} = \vec{F} \cdot \vec{v}. \quad (3.10.7)$$

Мощность силы равна скалярному произведению векторов силы и скорости ее точки приложения.

В проекциях

$$N = F_x v_x + F_y v_y + F_z v_z. \quad (3.10.8)$$

Уравнение (3.10.7) в расчетах обычно представляют в виде

$$N = F \cdot v \cdot \cos(\vec{F}, \vec{v}). \quad (3.10.9)$$

Единица измерения мощности N – ватт:

$$[\text{ватт}] = \frac{\text{Дж}}{\text{с}} = \frac{\text{Н} \cdot \text{м}}{\text{с}}.$$

Работу часто измеряют в кВт·ч, а мощность в кВт.

3.10.1. Работа силы при повороте тела

Элементарная работа силы \vec{F} при повороте тела (рис. 3.50)

$$\delta A = \vec{F} \cdot d\vec{r}. \quad (3.10.10)$$

В данном случае поворот производится вокруг вертикальной оси z .

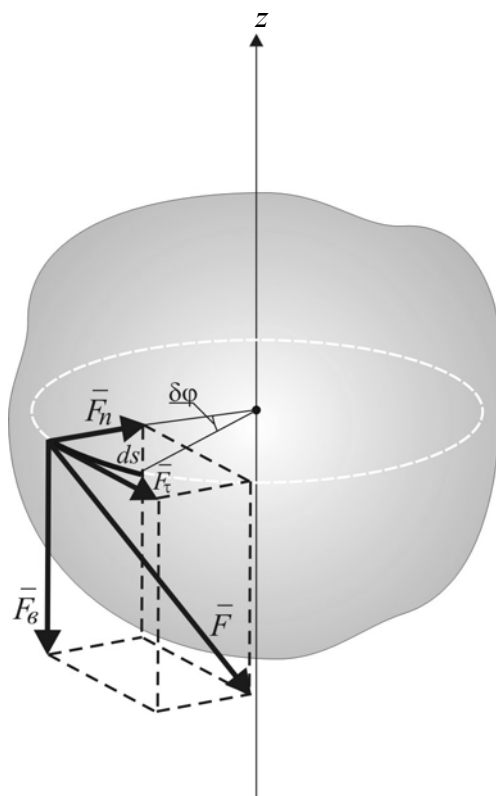


Рис. 3.50. Работа силы при повороте тела

Учитывая, что дифференциал дуги равен $d\vec{r}$, преобразуем уравнение для элементарной работы к виду

$$\delta A = F \cdot ds \cdot \cos(\vec{F}, \hat{v}) = F_\tau \cdot ds = F_\tau \cdot R \cdot d\varphi = M_z d\varphi. \quad (3.10.11)$$

Полная работа силы при повороте тела

$$A = \int_0^\varphi M_z d\varphi. \quad (3.10.12)$$

При

$$M_z = \text{const} \quad (3.10.13)$$

$$A = M_z \varphi = M_z(\vec{F})\varphi. \quad (3.10.14)$$

3.10.2. Работа силы тяжести

Работа силы тяжести

$$\delta A = F_x dx + F_y dy + F_z dz. \quad (3.10.15)$$

В данном случае (рис. 3.51):

$$\left. \begin{aligned} F_x &= 0, \\ F_y &= 0, \\ F_z &= -P. \end{aligned} \right\} \quad (3.10.16)$$

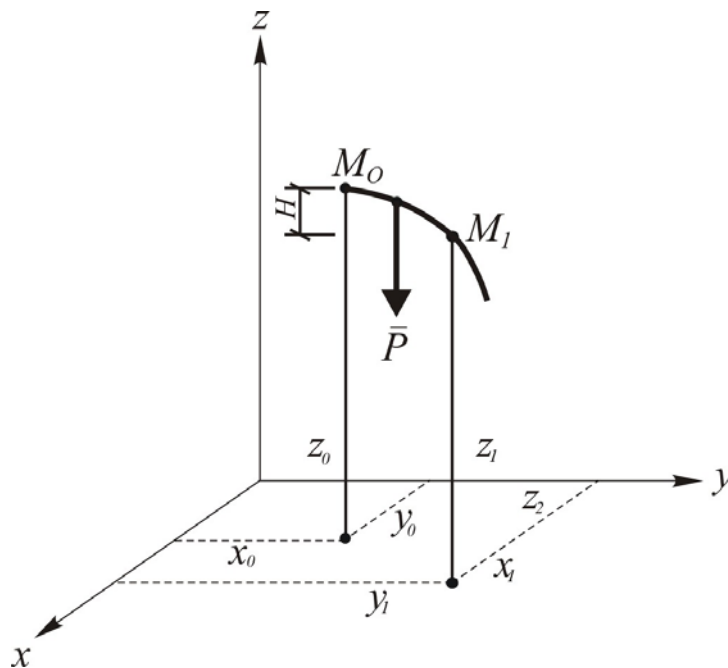


Рис. 3.51. Работа силы тяжести

Следовательно,

$$\delta A = -P \cdot dz, \quad (3.10.17)$$

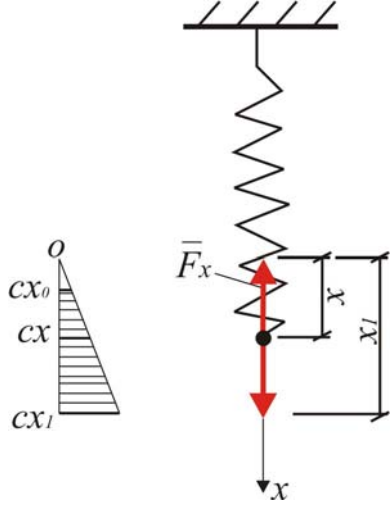
$$A = \int_{M_0}^{M_1} -P \cdot dz = - \int_{z_0}^{z_1} P \cdot dz = P(z_0 - z_1) = \pm PH. \quad (3.10.18)$$

Если материальная точка с действующей на нее силой тяжести опускается, работа силы тяжести имеет знак "+", если поднимается – знак "-".
Итак,

$$A = \pm PH. \quad (3.10.19)$$

3.10.3. Работа силы упругости

Выражение для работы силы



$$A = \int_{M_0}^M (F_x dx + F_y dy + F_z dz)$$

при силе упругости, равной (рис. 3.52)

$$F_x = -cx, \quad (3.10.20)$$

примет вид

$$A = -\int_{x_0}^{x_1} cx dx = -\frac{cx^2}{2} \Big|_{x_0}^{x_1} = -\frac{c}{2}(x_1^2 - x_0^2). \quad (3.10.22)$$

При $x_0=0$ и удлинении пружины, равном Δ , работа силы упругости

$$A = -\frac{c\Delta^2}{2}. \quad (3.10.23)$$

Рис. 3.52. Работа силы упругости

Работа силы упругости отрицательна, когда деформация увеличивается, и положительна, когда деформация уменьшается.

3.11. Теорема об изменении кинетической энергии

3.11.1. Теорема об изменении кинетической энергии точки

Пусть точка массой m движется по траектории M_0M_1 под действием сил $\bar{F}_1, \bar{F}_2, \dots, \bar{F}_n$ (рис. 3.53). Установим связь между работой этих сил и изменением кинетической энергии точки $\frac{mv^2}{2}$.

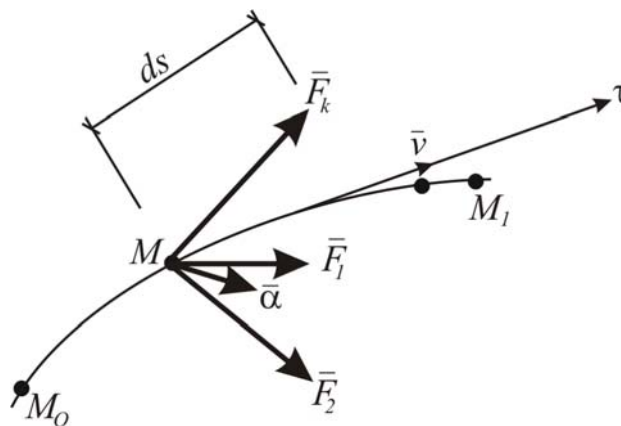


Рис. 3.53. Движение точки M под действием сил

Запишем основной закон динамики:

$$m\bar{a} = \sum \bar{F}_k. \quad (3.11.1)$$

Проецируя это уравнение на касательную ось τ , получаем:

$$ma_\tau = \sum F_{k\tau}.$$

Последнее уравнение можно переписать в виде

$$ma_\tau = \sum F_k \cdot \cos(\bar{F}_k, \wedge \bar{v}). \quad (3.11.2)$$

Здесь \bar{v} – вектор скорости точки.

Касательное ускорение выразим следующим образом:

$$a_\tau = \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{ds} \cdot \frac{ds}{dt} = \frac{v dv}{ds}. \quad (3.11.3)$$

Тогда уравнение (3.11.2) можно представить в виде

$$mvdv = \sum F_k ds \cdot \cos(\bar{F}_k, \wedge \bar{v}). \quad (3.11.4)$$

Проинтегрируем обе части этого уравнения в соответствующих пределах:

$$m \int_{v_0}^{v_1} v dv = \sum_{M_0}^{M_1} \int F_k ds \cdot \cos(\bar{F}_k, \wedge \bar{v}). \quad (3.11.5)$$

Интеграл в правой части представляет собой сумму работ действующих на точку сил. Таким образом, после интегрирования получим:

$$\frac{mv_1^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2} = \sum A_k. \quad (3.11.6)$$

Уравнение (3.11.6) является математической записью следующей теоремы: *изменение кинетической энергии точки на некотором ее перемещении равно алгебраической сумме работ всех действующих на эту точку сил.*

Пример № 1. Груз, подвешенный на нити длиной 1 м отклоняют от вертикали на угол φ_0 и отпускают (рис.3.54). Найти скорость груза при угле наклона нити φ .

Решение.

$$\frac{mv_1^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2} = \sum A_k.$$

$$\frac{mv_1^2}{2} = PH,$$

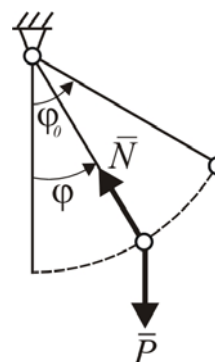


Рис. 3.54. Движение маятника

$$\frac{mv_1^2}{2} = P(l \cos \varphi - l \cos \varphi_0),$$

$$v_1 = \sqrt{2gl(\cos \varphi - \cos \varphi_0)}.$$

Пример № 2.

Дано: l_0 – длина недеформированной пружины, $l_0=6$ см. При полностью открытом клапане $l=4$ см. Высота подъема клапана $s=0,6$ см. Жесткость пружины $c=0,1$ кг/см=1 Н/см. Вес клапана $P=0,4$ кг =4 Н.

Определить скорость клапана в момент его закрытия, пренебрегая силой тяжести.

Решение.

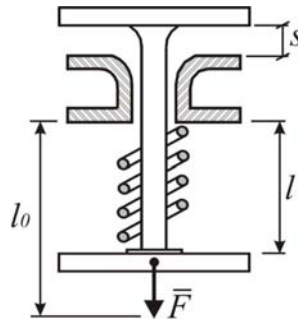


Рис. 3.55. Движение клапана

Согласно теоремы об изменении кинетической энергии точки

$$\frac{mv_1^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2} = \sum A_k. \quad (**)$$

Начальная скорость клапана $v_0 = 0$, его масса $m = \frac{P}{g}$.

$$\sum A_k = A_{\text{упр}} = \frac{c}{2} [(\Delta l_{\text{нач}})^2 - (\Delta l_{\text{кон}})^2].$$

Подставив эти данные в уравнение (**), получим:

$$\frac{Pv_1^2}{g \cdot 2} = \frac{c}{2} [(\Delta l_{\text{нач}})^2 - (\Delta l_{\text{кон}})^2],$$

$$\Delta l_{\text{нач}} = l_0 - l = 6 - 4 = 2 \text{ см};$$

$$\Delta l_{\text{кон}} = l_0 - l - s = 1,4 \text{ см}.$$

$$v_1 = \sqrt{\frac{gc}{P} [(\Delta l_{\text{нач}})^2 - (\Delta l_{\text{кон}})^2]} = \sqrt{\frac{9,81}{4} (0,04 - 0,0196)} = 0,22 \text{ м/с};$$

Итак, $v_1 = 0,22$ м/с.

3.11.2. Теорема об изменении кинетической энергии механической системы

1. Кинетическая энергия системы и твердого тела.

Кинетической энергией механической системы называется скалярная величина, равная сумме кинетических энергий всех точек системы:

$$T = \sum \frac{m_k v_k^2}{2}, \quad (3.11.7)$$

$$T > 0.$$

Если система состоит из n тел, то кинетическая энергия системы

$$T = \sum_{j=1}^n T_j. \quad (3.11.8)$$

Рассмотрим, как вычисляется кинетическая энергия при различных видах движения твердого тела.

а) Поступательное движение. Точка C – центр масс.

$$\begin{aligned} T_{\text{пост}} &= \sum \frac{m_k v_k^2}{2} = \frac{v_C^2}{2} \sum m_k = \frac{M v_C^2}{2}, \\ v_k &= v_C, \\ M &= \sum m_k, \\ T_{\text{пост}} &= \frac{M v_C^2}{2}. \end{aligned} \quad (3.11.9)$$

б) Кинетическая энергия тела при вращательном движении.

$$\begin{aligned} T_{\text{вр}} &= \sum \frac{m_k v_k^2}{2} = \sum m_k \frac{(h_k \omega)^2}{2} = \frac{\omega^2}{2} \sum m_k h_k^2 = \frac{J_z \omega^2}{2}; \\ T_{\text{вр}} &= \frac{1}{2} J_z \omega^2. \end{aligned} \quad (3.11.10)$$

здесь h_k – расстояние от оси вращения до точки k .

в) Кинетическая энергия при плоском движении твердого тела (рис.3.56).

$$\begin{aligned} T_{\text{вр}} &= \frac{1}{2} J_p \omega^2 = \frac{1}{2} (J_c + M d^2) \omega^2 = \\ &= \frac{1}{2} M v_c^2 + \frac{1}{2} J_c \omega^2. \end{aligned}$$

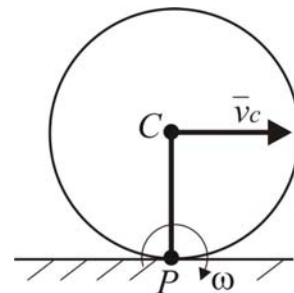


Рис. 3.56. Плоское движение твердого тела

Здесь $d=R=h$. Итак,

$$T_{\text{вр}} = \frac{1}{2} M v_C^2 + \frac{1}{2} J_C \omega^2. \quad (3.11.11)$$

2. Теорема об изменении кинетической энергии системы.

Разделим силы, действующие на точки системы, на внешние и внутренние. Для любой точки системы

$$\frac{m_k v_{k(1)}^2}{2} - \frac{m_k v_{k(0)}^2}{2} = A_k^E + A_k^i, \quad (3.11.12)$$

где $k=1, 2, \dots, n$.

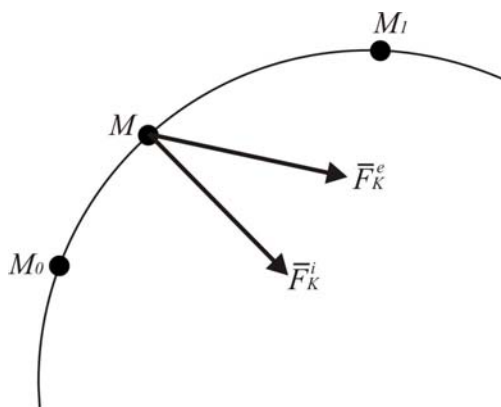


Рис. 3.57. Движение точки под действием внешней и внутренней сил

Суммируя n равенств, получаем:

$$\sum \frac{m_k v_{k(1)}^2}{2} - \sum \frac{m_k v_{k(0)}^2}{2} = \sum A_k^E + \sum A_k^i, \quad (3.11.13)$$

или

$$T_1 - T_0 = \sum A_k^E + \sum A_k^i. \quad (3.11.14)$$

Соотношение (3.11.14) является математической записью следующей теоремы: *изменение кинетической энергии механической системы равно сумме работ всех действующих на нее внешних и внутренних сил.*

Для твердого тела сумма работ всех внутренних сил равна нулю:

$$A_k^i = 0. \quad (3.11.15)$$

Следовательно, для твердого тела теорема об изменении кинетической энергии системы примет вид:

$$T_1 - T_0 = \sum A_k^e. \quad (3.11.16)$$

Пример. Тележка (рис. 3.58) под действием силы Q начинает двигаться вверх по наклонной плоскости. Q – движущая сила, P_1 – вес тележки, P_2 – вес колеса. Определить скорость тележки, когда она пройдет путь, равный 4 м.

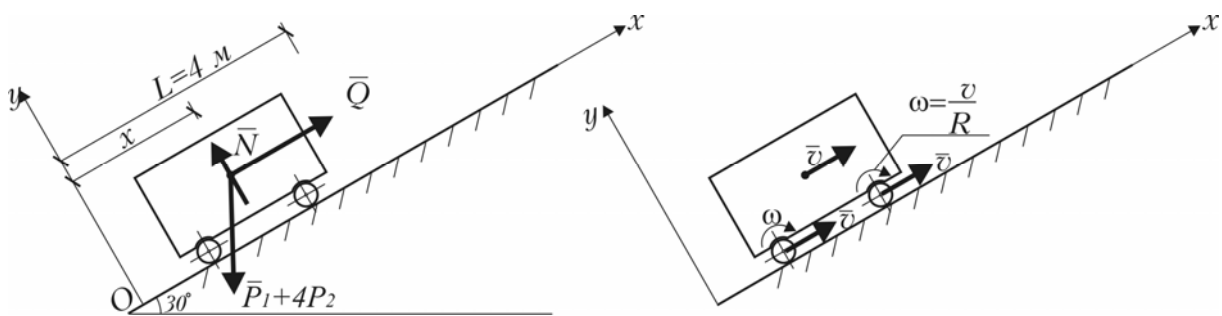


Рис. 3.58. Движение тележки вверх по наклонной плоскости

Дано: $P_1=180$ Н, $P_2=20$ Н, $Q=160$ Н, $\alpha=30^\circ$, $v_0=0$, $l=4$ м.

Найти: v_1 .

Решение. Согласно теореме об изменении кинетической энергии механической системы

$$T_1 - T_0 = \sum A_k^E + \sum A_k^i.$$

Так как система начинает движение из состояния покоя и состоит из твердых тел, соединенных нерастяжимыми связями, то

$$T_0 = 0, \quad \sum A_k^i = 0.$$

Следовательно, исходное уравнение можно переписать в виде

$$T_1 = \sum A_k^e.$$

Кинетическая энергия данной системы состоит из кинетической энергии тележки и кинетической энергии четырех колес:

$$T_1 = \frac{m_1 v_1^2}{2} + 4 \left(\frac{m_2 v_1^2}{2} + \frac{m_2 R^2}{2} \left(\frac{v_1}{R} \right)^2 \right) = \frac{1}{2g} (P_1 + 6P_2) v_1^2.$$

Работа внешних сил

$$\sum A_k = -(P_1 + 4P_2)H + Ql = -(P_1 + 4P_2)l \sin 30^\circ + Ql.$$

(Реакции опор перпендикулярны перемещению тележки.)

Подставив в исходное уравнение, получим:

$$\frac{1}{2g} (P_1 + 6P_2) v_1^2 = -(P_1 + 4P_2)l \sin 30^\circ + Ql.$$

Отсюда определим скорость тележки:

$$v_1 = \sqrt{\frac{2gl[Q - (P_1 + 4P_2) \sin 30^\circ]}{P_1 + 6P_2}} = 2,8 \text{ м/с.}$$

3.12. Принцип возможных перемещений

3.12.1. Возможные перемещения системы. Число степеней свободы

Возможными, или виртуальными, перемещениями несвободной механической системы называются воображаемые бесконечно малые перемещения, допускаемые в данный момент наложенными на систему связями.

Например, возможными перемещениями рычага (рис. 3.59) является поворот на бесконечно малый угол $\delta\varphi$ вокруг точки O . При этом повороте точки A и B должны переместиться по дугам окружностей AA_1 и BB_1 . Однако, так как возможные перемещения являются бесконечно малыми, дуги окружностей заменяем прямолинейными отрезками, отложенными по касательным к траекториям: т.е. $\cup AA_1 = \delta s_A \approx AA'$; $\cup BB_1 = \delta s_B \approx BB'$.

$$\delta s_A = OA \cdot \operatorname{tg} \delta\varphi = AO \cdot \delta\varphi, \quad \delta s_B = OB \delta\varphi.$$

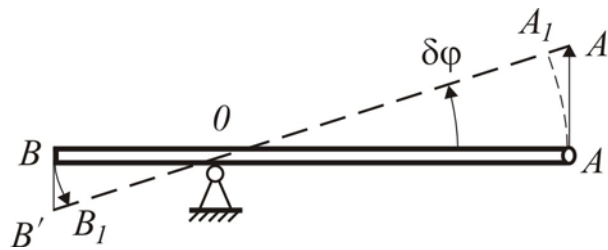


Рис. 3.59. Возможное перемещение шарнирно-неподвижно закрепленного в одной точке стержня (рычага)

Возможными перемещениями кривошипно-шатунного механизма (рис. 3.59) являются следующие: поворот кривошипа на бесконечно малый угол $\delta\varphi$ вокруг оси вала O ; возможное перемещение $AA' = \delta s_A$ пальца кривошипа $AA' = OA \cdot \delta\varphi_1$; возможное перемещение ползуна B : $BB' = \delta s_B = PB \cdot \delta\varphi_2$.

В общем случае для точек и тел системы может существовать множество возможных различных перемещений. Однако для каждой системы в зависимости от наложенных на нее связей можно указать определенное число таких независимых между собой перемещений, при которых всякое другое перемещение будет получаться как их геометрическая сумма.

Например, шарик по плоскости может перемещаться по множеству направлений, однако любое возможное перемещение δs можно получить как сумму двух перемещений ($\delta \bar{s}_1$ и $\delta \bar{s}_2$) вдоль двух взаимно перпендикулярных осей.

Число независимых между собой возможных перемещений системы называется числом степеней свободы этой системы. Если положение шарика на плоскости вполне определяется двумя координатами (рис. 3.60), следовательно, точка на плоскости имеет 2 степени свободы.

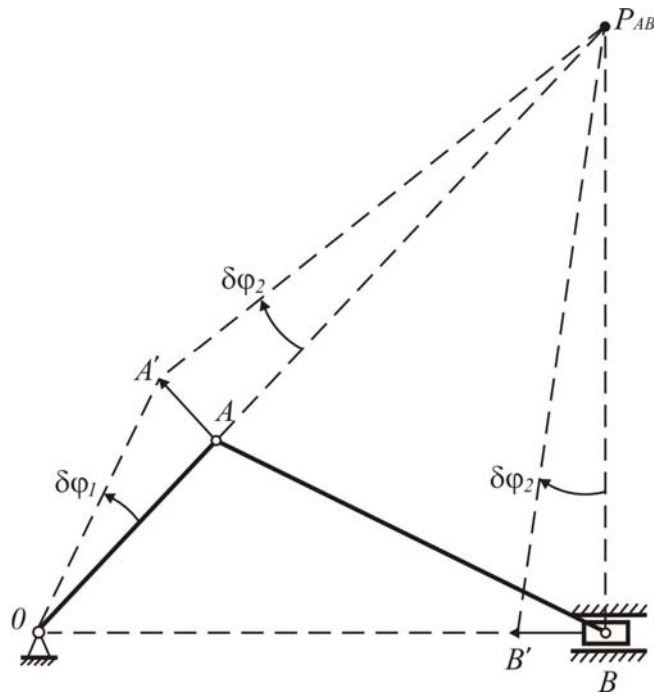


Рис. 3.59. Возможные перемещения кривошипно-шатунного механизма

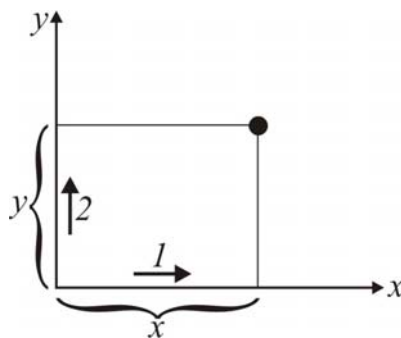


Рис. 3.60. Возможные перемещения шарика на плоскости, определяемые двумя координатами

Шар на плоскости (рис. 3.61) имеет уже 5 степеней свободы.

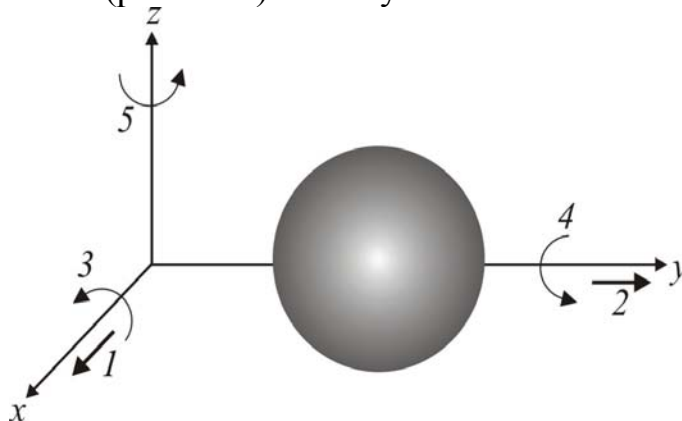


Рис. 3.61. Возможные перемещения шара на плоскости, определяемые пятью параметрами

Кривошипно-шатунный механизм (см. рис. 3.59) имеет одну степень свободы.

3.12.2. Идеальные связи

Все силы, действующие на несвободную систему, можно разделить на активные силы и реакции связей.

Активные силы стремятся вызвать движение системы. Реакции связей выражают действие связей, т.е. ограничивают движение механической системы. Пусть механическая система из M_1, M_2, \dots, M_n точек подчинена связям с реакциями R_1, R_2, \dots, R_n . Возможные перемещения точек обозначим $\delta s_1, \delta s_2, \dots, \delta s_n$. Вычислим сумму работ реакций связей на этих перемещениях.

Если сумма работ реакций связей на любом возможном перемещении системы равна нулю, то такие связи называются идеальными.

$$\sum R_i \delta s_i \cos(\bar{R}_i, \delta \vec{s}_i) = 0. \quad (3.12.1)$$

Например: 1) скольжение между гладкими поверхностями (рис. 3.62), $N_1 \delta s \cos 90^\circ = 0$.

2) колесо катится по шероховатой поверхности (рис. 3.61),

$$\sum R_i \delta s_i \cos(\bar{R}_i, \delta \vec{s}_i) = N \cdot 0 + F \cdot 0 = 0.$$

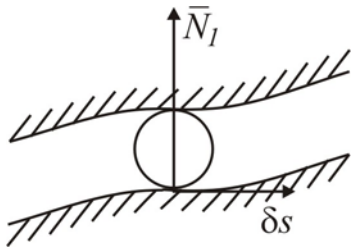


Рис. 3.62. Движение тела по гладкой поверхности

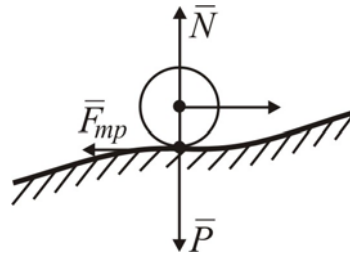


Рис. 3.63. Качение колеса

3) катковая опора (рис. 3.64) $N \cdot \delta s = 0$.

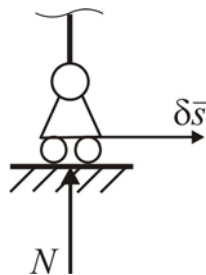


Рис. 3.64. Работа реакции катковой опоры

3.12.3. Принцип возможных перемещений

Рассмотрим механическую систему, находящуюся в состоянии покоя. Действующие на нее силы уравновешены. Разделим силы на активные и реакции связей. Для k -й точки (рис. 3.65):

$$\bar{F}_k + \bar{R}_k = 0. \quad (3.12.1)$$

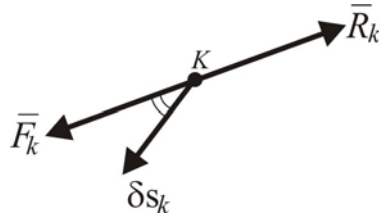


Рис. 3.65. Возможное перемещение покоящейся точки

Мысленно сообщим рассматриваемой системе возможные перемещения. Пусть $\delta s_1, \delta s_2, \dots, \delta s_n$ – возможные перемещения точек $1, 2, \dots, n$.

Вычислим сумму работ сил, приложенных к каждой точке системы, на возможном перемещении этой системы. Для рассматриваемой точки k :

$$\bar{F}_k \cdot \delta \bar{s}_k + \bar{R}_k \cdot \delta \bar{s}_k = 0, \quad (3.12.2)$$

или

$$F_k \cdot \delta s_k \cos(\bar{F}_k, \wedge \delta s_k) + R_k \cdot \delta s_k \cos(\bar{R}_k, \wedge \delta s_k) = 0. \quad (3.12.3)$$

Суммируя уравнения (3.12.2) для всех точек системы, получаем:

$$\sum F_k \cdot \delta s_k \cos(\bar{F}_k, \wedge \delta s_k) + \sum R_k \cdot \delta s_k \cos(\bar{R}_k, \wedge \delta s_k) = 0. \quad (3.12.4)$$

Но для идеальных связей сумма элементарных работ реакций на возможных перемещениях системы равна нулю:

$$\sum R_k \cdot \delta s_k \cos(\bar{R}_k, \wedge \delta s_k) = 0. \quad (3.12.5)$$

Значит,

$$\sum F_k \cdot \delta s_k \cos(\bar{F}_k, \wedge \delta s_k) = 0, \quad (3.12.6)$$

или

$$\sum \delta A_k^a = 0. \quad (3.12.7)$$

Т.е. для равновесия механической системы с идеальными связями необходимо и достаточно, чтобы сумма элементарных работ всех действующих на нее активных сил при любом возможном перемещении системы была равна нулю.

3.12.4. Решение задач

с помощью принципа возможных перемещений

Для системы с одной степенью свободы уравнение (3.12.7) сразу дает условие равновесия системы. Если система имеет несколько степеней свободы, то нужно составить уравнения (3.12.7) для каждого из независимых перемещений в отдельности, т.е. надо составить столько уравнений, сколько степеней свободы имеет система.

Пример № 1. Найти зависимость между моментом пары M , действующей на кривошип кривошипно-шатунного механизма, и силой давления P на поршень при равновесии.

$$OA = R, \quad \angle AOB = \varphi, \quad \angle OAB = 90^\circ.$$

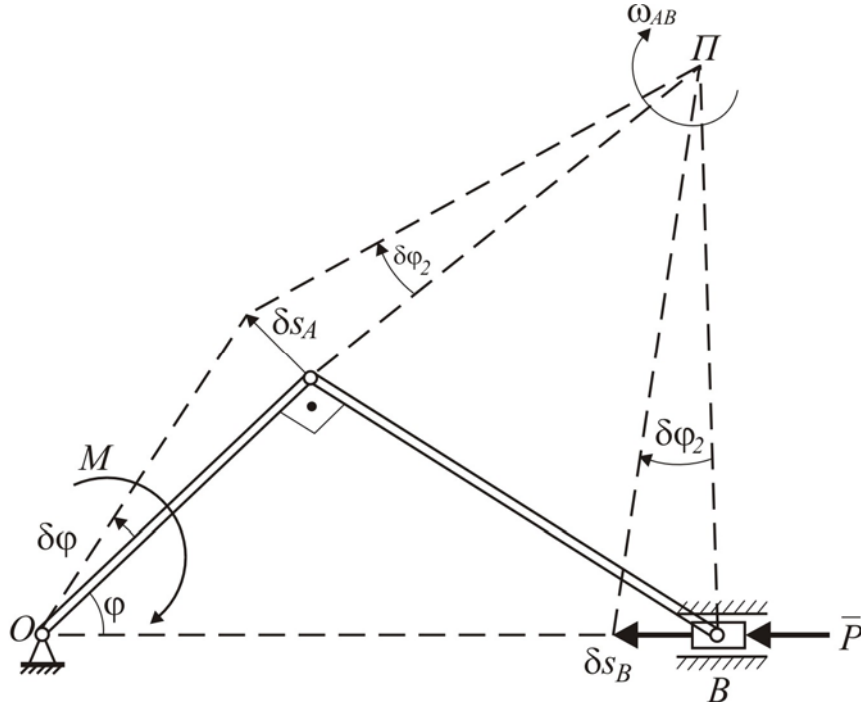


Рис. 3.66. Схема возможных перемещений кривошипно-шатунного механизма

Решение. Данная механическая система имеет одну степень свободы, и уравнение возможных работ (3.12.7) для нее можно записать в виде

$$P \cdot \delta s_B - M \delta \varphi_1 = 0.$$

$$\delta s_B = PB \cdot \delta \varphi_2 = \frac{l}{\cos \varphi} \delta \varphi_2;$$

Пусть $AB=l$, тогда

$$\frac{\delta \varphi_2}{\delta \varphi_1} = \frac{R}{AP} = \frac{R}{l \operatorname{tg} \varphi}; \quad \delta \varphi_2 = \frac{R}{l \operatorname{tg} \varphi} \delta \varphi_1.$$

Уравнение возможных работ примет вид

$$P \cdot \frac{l}{\cos \varphi} \cdot \frac{R}{l \operatorname{tg} \varphi} \delta \varphi_1 - M \delta \varphi_1 = 0,$$

или после сокращения на $\delta \varphi$

$$P \cdot \frac{R}{\sin \varphi} - M = 0.$$

Откуда получаем искомую зависимость M от P :

$$M = P \cdot \frac{R}{\sin \varphi}.$$

Пример № 2. Найти зависимость между силами P и Q в подъемном механизме (домкрат), если известно, что при одном повороте рукояткой ($AB = l$) винт D выдвигается на величину h (рис. 3.67).

Решение. Уравнение возможных работ (3.12.7) запишем в виде

$$Pl \cdot \delta\varphi_{AB} - Q \cdot \delta s_D = 0.$$

Составим соотношение между возможными перемещениями:

$$\frac{\delta\varphi_{AB}}{2\pi} = \frac{\delta s_D}{h},$$

$$\delta\varphi_{AB} = \frac{2\pi}{h} \delta s_D.$$

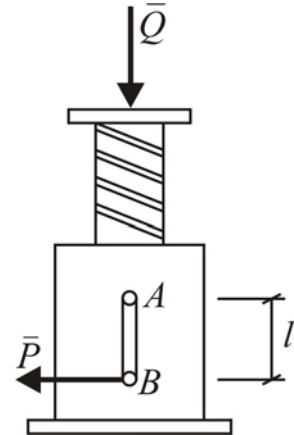


Рис. 3.67. Возможные перемещение домкрата

Подставив вместо $\delta\varphi_{AB}$ правую часть последнего выражения и сократив на δs_D , получим:

$$\frac{2\pi}{h} Pl - Q = 0.$$

Откуда

$$Q = \frac{2\pi l}{h} P.$$

3.13. Принцип Даламбера. Общее уравнение динамики

3.13.1. Принцип Даламбера для материальной точки

Современное выражение принципа Даламбера для материальной точки не отличается по содержанию от уравнений движения материальной точки, но для многих задач оно более удобно.

Согласно второму закону Ньютона

$$m\bar{a} = \sum \bar{F}_k, \quad (3.13.1)$$

или

$$m\bar{a} = \bar{F}^*, \quad (3.13.2)$$

где \bar{F}^* – главный вектор действующих на точку сил (рис. 3.68).

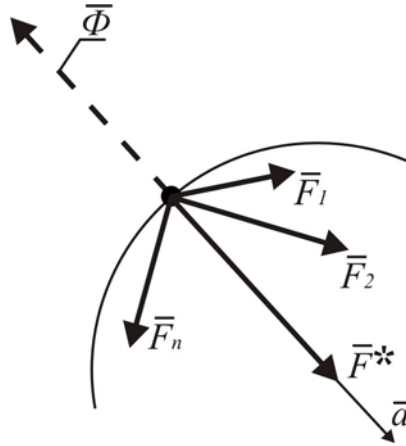


Рис. 3.68. Сила инерции, направленная противоположно ускорению

Назовем произведение

$$-m\bar{a} = \bar{\Phi} \quad (3.13.3)$$

силой инерции материальной точки. Тогда уравнение (3.13.2) можно представить в виде

$$\bar{F}^* + \bar{\Phi} = 0. \quad (3.13.4)$$

Главный вектор действующих на точку сил удобно переписать в виде суммы двух равнодействующих сил:

$$\bar{F}^* = \bar{F} + \bar{R}, \quad (3.13.5)$$

где \bar{F} – равнодействующая активных сил;
 \bar{R} – равнодействующая реакций связей.

Тогда уравнение (3.12.4) примет вид

$$\bar{F} + \bar{R} + \bar{\Phi} = 0. \quad (3.13.6)$$

Это уравнение равновесия и выражает принцип Даламбера для точки: при движении материальной точки активные силы, реакции связей и сила инерции образуют равновесную систему сил.

Уравнение (3.13.6) в проекциях на декартовы оси имеет вид:

$$\left. \begin{aligned} F_{kx} + R_{kx} + \Phi_x &= 0, \\ F_{ky} + R_{ky} + \Phi_y &= 0, \\ F_{kz} + R_{kz} + \Phi_z &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (3.13.7)$$

где $F_x = \sum F_{kx}$, $F_y = \sum F_{ky}$, $F_z = \sum F_{kz}$ – суммы проекций на координатные оси активных сил; $R_x = \sum R_{kx}$, $R_y = \sum R_{ky}$, $R_z = \sum R_{kz}$ – суммы проекций на координатные оси реакций связей; $\Phi_x = -m\ddot{x}$, $\Phi_y = -m\ddot{y}$, $\Phi_z = m\ddot{z}$ – проекции силы инерции на координатные оси.

Уравнение (3.13.6) в проекциях на естественные оси (рис. 3.69):

$$\left. \begin{aligned} \sum F_{k\tau} + \sum R_{k\tau} + \Phi_{\tau} &= 0, \\ \sum F_{kn} + \sum R_{kn} + \Phi_n &= 0, \\ \sum F_{kb} + \sum R_{kb} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (3.13.8)$$

где $\sum F_{k\tau}$, $\sum F_{kn}$, $\sum F_{kb}$ —

суммы проекций на естественные оси активных сил;

$\sum R_{k\tau}$, $\sum R_{kn}$, $\sum R_{kb}$ — суммы проекций на естественные координатные оси реакций связей,

$$\left. \begin{aligned} \Phi_{\tau} &= -ma_{\tau}, \\ \Phi_n &= -m \frac{v^2}{\rho}, \\ \Phi_b &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (3.13.9)$$

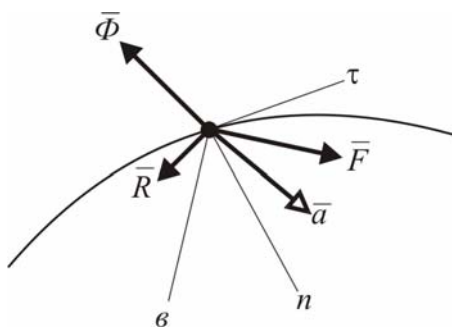


Рис. 3.69. Принцип Даламбера в естественных осях

Пример. Лифт весом 7350 Н поднимается равноускоренно (рис. 3.70) и в первые 5 с проходит 25 м. Найти натяжение троса.

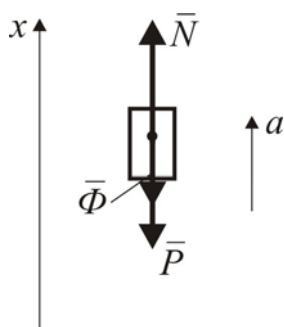


Рис. 3.70. Ускоренное движение лифта

Согласно принципу Даламбера

$$\bar{N} + \bar{P} + \bar{\Phi} = 0.$$

Проецируя это уравнение на ось x , получаем:

$$N - \Phi - P = 0,$$

$$N = P + \Phi.$$

Сила инерции

$$\Phi = \frac{P}{g} a = \frac{P}{g} \frac{2H}{t^2},$$

так как $H = at^2 / 2$. Следовательно, натяжение троса

$$N = P + \frac{P}{g} \frac{2H}{t^2} = 7350 + 1500 = 8850 \text{ (Н)}.$$

3.13.2. Принцип Даламбера для системы материальных точек

Рассмотрим систему материальных точек.

Для любой точки

$$\bar{F}_k + \bar{R}_k + \bar{\Phi}_k = 0. \quad (3.13.10)$$

Умножим уравнение (3.12.10) слева на \bar{r}_k :

$$\bar{r}_k \times \bar{F}_k + \bar{r}_k \times \bar{R}_k + \bar{r}_k \times \bar{\Phi}_k = 0. \quad (3.13.11)$$

Суммируя уравнения (3.13.10) и (3.13.11) для всех точек системы, получаем:

$$\left. \begin{aligned} \sum \bar{F}_k + \sum \bar{R}_k + \sum \bar{\Phi}_k &= 0, \\ \sum \bar{r}_k \times \bar{F}_k + \sum \bar{r}_k \times \bar{R}_k + \sum \bar{r}_k \times \bar{\Phi}_k &= 0; \end{aligned} \right\} \quad (3.13.12)$$

или

$$\left. \begin{aligned} \bar{F}^* + \bar{R}^* + \bar{\Phi}^* &= 0, \\ \bar{M}_F^* + \bar{M}_R^* + \bar{M}_\Phi^* &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (3.13.13)$$

Т.е. при движении механической системы в любой момент времени геометрические суммы главных векторов активных сил, реакций связей и сил инерции системы, а также главных моментов активных сил, реакций связей и сил инерции относительно любого центра равны нулю.

Уравнения (3.13.13) образуют в проекции на декартовы оси систему из 6 уравнений равновесия.

3.13.3. Приведение сил инерции к главному вектору и главному моменту

Главный вектор сил инерции от центра приведения не зависит, т.е.

$$\sum \bar{\Phi}_k = \bar{\Phi}^* = -\sum m_k \bar{a}_k = -m \bar{a}_C, \quad (3.13.14)$$

где
$$\sum m_k \bar{a}_k = \sum m_k \frac{d^2 \bar{r}_k}{dt^2} = \frac{d^2}{dt^2} \sum m_k \bar{r}_k = \sum \frac{d^2}{dt^2} (m \cdot \bar{r}_C) = m \cdot \bar{a}_C;$$

здесь m – масса системы, $m = \sum m_k$;

\bar{a}_C – ускорение центра масс.

Главный момент сил инерции

$$\bar{M}_\Phi^* = \sum \bar{M}_k^\Phi = \sum \bar{r}_k \times m_k \bar{a}_k, \quad (3.13.15)$$

т.е. главный момент сил инерции зависит от вида движения тела и от точки приведения.

Поступательное движение. Приведем силы инерции к центру масс – точке C . Тогда главный момент сил инерции

$$\begin{aligned} \bar{M}_\Phi^* &= \sum \bar{M}_k^\Phi = \sum \bar{r}_k \times \bar{\Phi}_k = -\sum \bar{r}_k \times m_k \bar{a}_k = \\ &= -(\sum \bar{r}_k m_k) \times \bar{a}_k = -m \bar{r}_C \times \bar{a}_C = 0 \end{aligned}, \quad (3.13.16)$$

так как $\bar{r}_C = 0$.

Уравнение (3.13.6) имеет тот естественный смысл, что при поступательном движении тело не совершает вращения вокруг центра масс.

Вращение тела, имеющего плоскость симметрии, вокруг неподвижной оси, перпендикулярной к этой плоскости (рис. 3.71). Главный вектор сил инерции

$$\bar{\Phi}^* = m \bar{a}_C. \quad (3.13.17)$$

Главный момент сил инерции

$$\bar{M}_\Phi^* = \sum \bar{r}_k \times \bar{\Phi}_k = -\sum \bar{r}_k \times m_k \bar{a}_k = -\sum \bar{r}_k \times m_k \bar{a}_k^\tau. \quad (3.13.18)$$

Величина главного момента сил инерции вычисляется по формуле

$$M_\Phi^* = \sum m_k a_k^\tau \cdot r_k = \sum m_k r_k \cdot \varepsilon \cdot r_k = \sum m_k r_k^2 \varepsilon = J_z \varepsilon. \quad (3.13.19)$$

В векторном виде

$$\bar{M}_\Phi^* = -J_z \bar{\varepsilon}. \quad (3.13.20)$$

Итак, инерционные воздействия на данное тело сводятся к главному вектору сил инерции и главному моменту сил инерции:

$$\left. \begin{aligned} \bar{\Phi}^* &= -m \bar{a}_C, \\ \bar{M}_\Phi^* &= -J_{oz} \bar{\varepsilon}. \end{aligned} \right\} \quad (3.13.21)$$

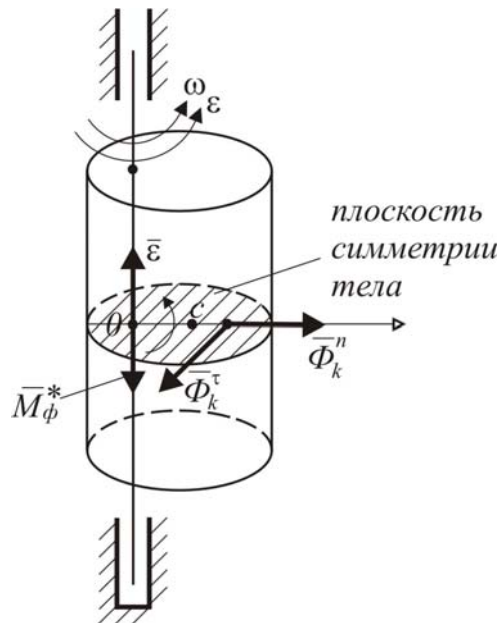


Рис. 3.71. Момент сил инерции относительно оси

Вращение тела, имеющего плоскость симметрии, вокруг оси, проходящей через центр масс перпендикулярно плоскости симметрии. В этом случае главный вектор сил инерции равен нулю:

$$\bar{\Phi}^* = -m\bar{a}_C = 0, \quad (3.13.22)$$

а главный момент сил инерции относительно главной центральной оси

$$\bar{M}_\Phi^* = -J_{Cz}\bar{\epsilon}. \quad (3.13.23)$$

Плоское движение тела имеющего плоскость материальной симметрии. Если твердое тело, имеющее плоскость симметрии, движется параллельно этой плоскости, то силы инерции точек тела приводятся к главному вектору сил инерции, приложенному в центре масс [см. формулу (3.13.17)] и паре сил инерции, лежащей в плоскости симметрии и вычисляемой по формуле (3.13.23).

Пример. Стержень, шарнирно закрепленный в точке A и присоединенный нитью к оси вращения на противоположном конце, вращается вокруг этой оси с постоянной угловой скоростью $\omega = \text{const}$. Найти натяжение нити T .

Решение. Сила инерции, действующая на элементарный участок стержня:

$$\Phi_k = \Delta m \cdot a_k^n = \Delta m \cdot \omega^2 r_k = m_k x_k \omega^2.$$

Равнодействующая сил инерции

$$\Phi^* = m a_C = m \frac{l}{2} \sin(\alpha) \omega^2.$$

Распределенные силы инерции масс стержня образуют треугольник (рис. 3.72). Поэтому равнодействующая сил инерции приложена на высоте $h = \frac{2}{3}l \cos \alpha$.

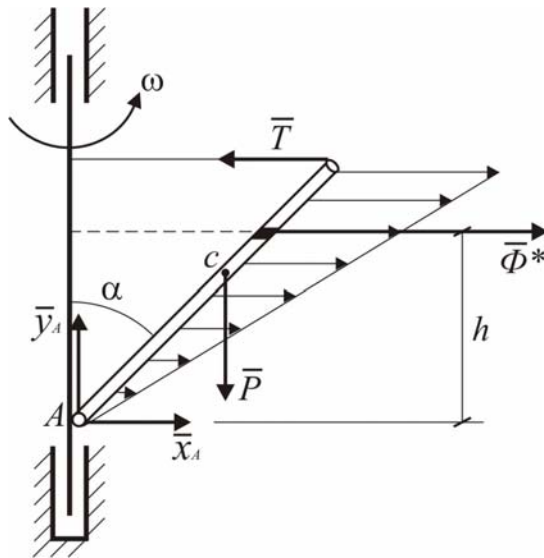


Рис. 3.72. Применение принципа Даламбера к решению задачи о вращении тела

Уравнение равновесия стержня в виде суммы моментов всех сил относительно шарнира A :

$$\sum M_A = 0;$$

$$Tl \cos \alpha - P \frac{l}{2} \sin \alpha - \frac{P l}{g 2} \sin \alpha \cdot \omega^2 h = 0.$$

Откуда

$$T = \frac{P}{3g} l \omega^2 \sin \alpha + \frac{P}{2} \operatorname{tg} \alpha.$$

3.13.4. Общее уравнение динамики

Согласно принципу Даламбера для любой точки механической системы:

$$\vec{F}_k + \vec{R}_k + \vec{\Phi}_k = 0. \quad (3.13.24)$$

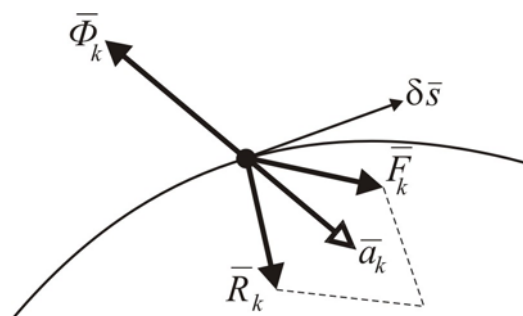


Рис. 3.73. Возможное перемещение движущейся точки

Умножая уравнение (3.13.24) скалярно на возможное перемещение точки δs_k и суммируя затем уравнения для всех точек системы, получаем следующее уравнение возможных работ:

$$\sum \bar{F}_k \cdot \delta \bar{s}_k + \sum \bar{R}_k \cdot \delta \bar{s}_k + \sum \bar{\Phi}_k \cdot \delta \bar{s}_k = 0, \quad (3.13.25)$$

или

$$\sum \delta A_k^a + \sum \delta A_k^R + \sum \delta A_k^\Phi = 0. \quad (3.13.26)$$

Учитывая, что для систем с идеальными связями сумма элементарных работ реакций $\sum \delta A_k^R = 0$, перепишем уравнение возможных работ в виде

$$\sum \delta A_k^a + \sum \delta A_k^\Phi = 0. \quad (3.13.27)$$

Это уравнение называют *общим уравнением динамики*, так как оно позволяет решать очень большой круг задач. Это уравнение выражает *принцип Даламбера – Лагранжа*: в любой момент движения системы с идеальными связями сумма элементарных работ активных сил и сил инерции точек системы на любом возможном перемещении системы равна нулю.

Пример. Механическая система, состоящая из груза 1, блока 2 и катка 3, приходит в движение под действием силы тяжести груза 1. Считая силы тяжести тел системы и коэффициент трения качения катка известными, определить ускорение груза 1.

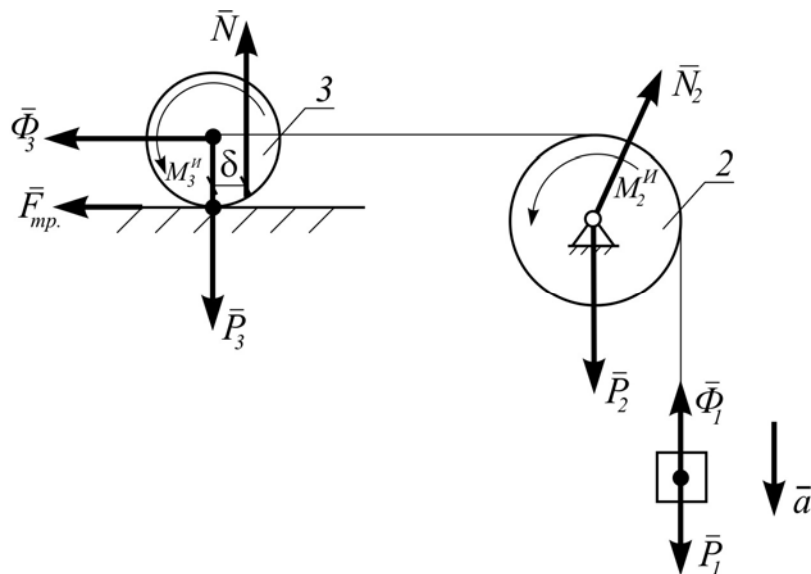


Рис. 3.74. Возможное перемещение механизма из положения динамического равновесия

Дано: P_1, P_2, P_3, δ .

Найти: a_1 .

Решение. Дадим системе возможное перемещение (груз 1 перемещается вниз, блок 2 поворачивается по часовой стрелке, каток 3 катится вправо). Составим общее уравнение динамики

$$(P_1 - \Phi_1) \delta s - M_2'' \delta \varphi_2 - M_3'' \delta \varphi_2 - \Phi_3 \delta \varphi_3 - N \cdot \delta \cdot \delta \varphi_3 = 0.$$

Силы инерции и моменты сил инерции:

$$\Phi_1 = \frac{P_1}{g} a_1; \quad M_2'' = I_{C2} \varepsilon_2 = \frac{\frac{P_2}{g} R_2^2}{2} \cdot \frac{a_1}{R_2};$$

$$M_3'' = I_{C2} \varepsilon_2 = \frac{\frac{P_3}{g} R_3^2}{2} \cdot \frac{a_1}{R_3}; \quad \Phi_3 = \frac{P_3}{g} a_1.$$

Возможные перемещения системы связаны соотношениями

$$\delta \varphi_2 = \frac{\delta s_1}{R_2}; \quad \delta \varphi_3 = \frac{\delta s_1}{R_3}; \quad \delta s_3 = \delta s_1.$$

Подставив выражения для инерционных воздействий и возможные перемещения, выраженные через δs_1 , в общее уравнение динамики, получим:

$$\left(P_1 - \frac{P_1}{g} a_1 \right) \delta s_1 - \frac{\frac{P_2}{g} R_2^2}{2} \cdot \frac{a_1}{R_2} \cdot \frac{\delta s_1}{R_2} - \frac{P_3 / g \cdot R_3^2}{2} \frac{a_1}{R_3} \cdot \frac{\delta s_1}{R_3} -$$

$$- \frac{P_3}{g} \cdot a_1 \cdot \delta s_1 - P_3 \cdot \delta \cdot \frac{\delta s_1}{R_3} = 0.$$

Сокращая на δs_1 , найдем

$$a_1 = \frac{P_1 - P_3 \cdot \delta / R_3}{\frac{P_1}{g} + \frac{1}{2} \frac{P_2}{g} + \frac{1}{2} \frac{P_3}{g} + \frac{P_3}{g}}.$$

3.14. Динамика движений твердого тела

3.14.1. Дифференциальные уравнения поступательного движения твердого тела

При поступательном движении твердого тела все его точки движутся одинаково, как и его центр масс. Поэтому дифференциальные уравнения движения центра масс тела являются дифференциальными уравнениями поступательного движения твердого тела.

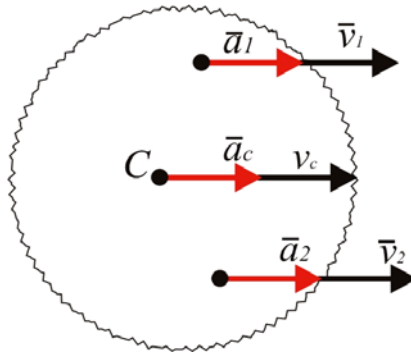


Рис. 3.75. Поступательное движение тела

$$\left. \begin{aligned} m\ddot{X}_C &= \sum F_{kx}^e, \\ m\ddot{Y}_C &= \sum F_{ky}^e, \\ m\ddot{Z}_C &= \sum F_{kz}^e, \end{aligned} \right\} \quad (3.14.1)$$

где m – масса всего тела;
 X_C, Y_C, Z_C – координаты центра масс тела;
 F_k^e – внешние силы.

Следовательно, изучение поступательного движения тела сводится к изучению движения отдельной точки, имеющей массу равную массе тела.

3.14.2. Дифференциальное уравнение вращательного движения тела вокруг неподвижной оси

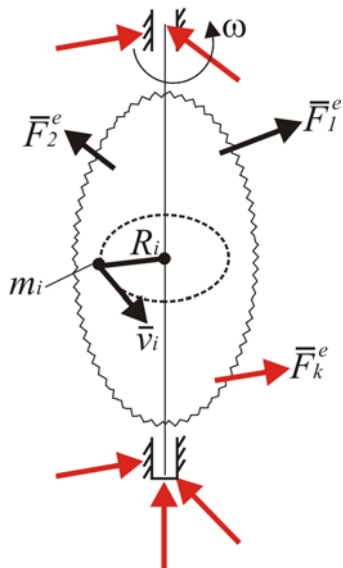


Рис. 3.76. Вращение тела

Пусть тело вращается вокруг неподвижной оси Z с угловой скоростью ω (рис. 3.76).

Момент количества движения любой точки M_i относительно оси вращения

$$L_{iz} = m_i v_i R_i = m_i R_i^2 \omega. \quad (3.14.2)$$

Кинетический момент всего твердого тела

$$L_z = \sum L_{iz} = \omega \sum m_i R_i^2 = J_z \omega. \quad (3.14.3)$$

Согласно теореме об изменении кинетического момента механической системы имеем:

$$\frac{dL}{dt} = \sum M_{kz}^e. \quad (3.14.4)$$

Так как

$$L_z = J_z \omega = J_z \dot{\phi}, \quad (3.14.5)$$

то

$$\frac{dL_z}{dt} = J_z \frac{d\omega}{dt} = J_z \ddot{\phi} \quad (3.14.6)$$

и

$$J_z \ddot{\phi} = \sum M_{kz}^e. \quad (3.14.7)$$

Уравнение (3.14.7) называется *дифференциальным уравнением вращения твердого тела вокруг оси Z*.

Сопоставляя это уравнение с уравнением для поступательного движения тела (3.14.1), можно заключить: *момент инерции является характеристикой инертности тела при вращательном движении*.

Если $\sum M_{kz}^e > 0$ – ускоренное вращение. Если $\sum M_{kz}^e = 0$, то $\varepsilon = \ddot{\phi} = 0$, $\omega = \text{const}$, т.е. вращение тела равномерное (по инерции).

Пример. Дано: натяжение ремней шкива (рис. 3.77) 40 Н и 20 Н. $P = 80$ Н, $R = 30$ см, $i = 25$ см. Найти уравнение движения шкива.

Решение.

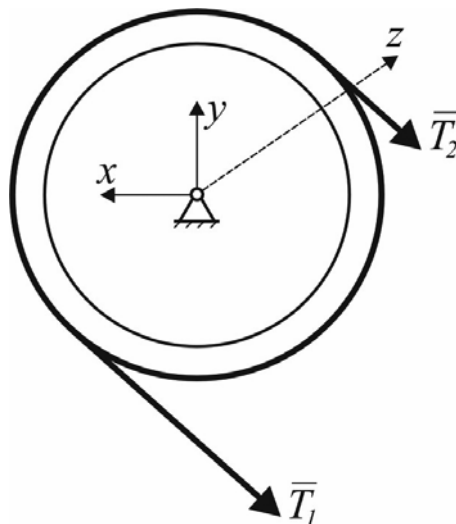


Рис. 3.77. Вращение шкива

Дифференциальное уравнение вращательного движения шкива

$$J_z \ddot{\phi} = \sum M_{kz}^e.$$

Момент внешних сил

$$\sum M_{kz}^e = (T_1 - T_2)R = 6 \text{ Нм.}$$

Момент инерции шкива

$$J_z = mi_z^2 = \frac{P}{g} i_z^2 = \frac{80}{9,81} \cdot 0,25^2 = 0,51 \text{ кг} \cdot \text{м}^2.$$

Подставляя эти значения в дифференциальное уравнение вращения и дважды интегрируя, получаем:

$$\left. \begin{aligned} 0,51\ddot{\varphi} &= 6; \\ \ddot{\varphi} &= 11,76 \quad (c^{-2}), \\ \dot{\varphi} &= 11,76t + C_1, \\ \varphi &= 5,88t^2 + C_1t + C_2. \end{aligned} \right\}$$

Постоянные интегрирования найдем из начальных условий: при $t=0$

$$\varphi_0 = 0, \quad \dot{\varphi}_0 = 0.$$

Подставляя в два последних уравнения, находим константы $C_1 = C_2 = 0$. Следовательно, уравнение движения шкива имеет вид

$$\varphi = 5,88t^2.$$

3.14.3. Физический маятник

Математический маятник – это точечная масса на невесомой нити. Он колеблется по гармоничному закону.

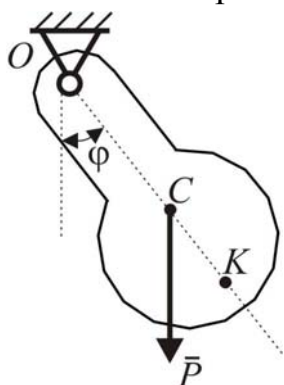


Рис. 3.78. Физический маятник

Физический маятник – это маятник с распределенной массой, т.е. тело, которое может совершать колебания вокруг неподвижной горизонтальной оси под действием силы тяжести.

Пусть вес тела \bar{P} ; $a=OC$, J_0 – момент инерции тела относительно оси OZ . Дифференциальное уравнение вращательного движения, составленное относительно точки подвеса O , имеет вид

$$J_0\ddot{\varphi} = \sum M_{kz}^e.$$

Момент внешних сил

$$M_{kz}^e = M_o^e = -Pa \sin \varphi.$$

Подставив в дифференциальное уравнение, получим:

$$J_0\ddot{\varphi} = -Pa \sin \varphi.$$

Введем обозначение:

$$\frac{Pa}{J_0} = k^2.$$

Тогда уравнение движения примет вид

$$\ddot{\varphi} + k^2 \sin \varphi = 0.$$

Ограничимся случаем малых колебаний. При $\varphi < 10^\circ$ $\varphi \approx \sin \varphi$. Тогда дифференциальное уравнение колебания маятника примет вид линейного однородного дифференциального уравнения второго порядка

$$\ddot{\varphi} + k^2 \varphi = 0.$$

Его решение

$$\varphi = C_1 \cos kt + C_2 \sin kt.$$

Если $\varphi_0 = 0$ и маятник отпущен без начальной скорости, то $\omega_0 = \dot{\varphi} = 0$, и уравнение колебательных движений принимает вид

$$\varphi = \varphi_0 \cos kt,$$

т.е. вид уравнения гармонических колебаний с частотой k и периодом $T = 2\pi / k = 2\pi \sqrt{J_0 / Pa}$.

Используя формулу для периода колебаний физического маятника, можно экспериментально определить момент инерции тела (рис. 3.79). При этом выполняется следующая последовательность вычислений:

1) определяется период колебаний T подвешенного в некоторой точке тела;

2) измеряется расстояние от точки подвеса до центра тяжести $OC = a$;

3) вычисляется момент инерции:

$$J_{oz} = \frac{T^2 Pa}{4\pi^2}.$$

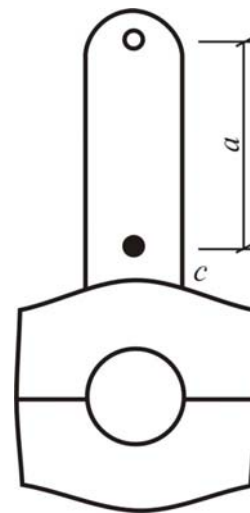


Рис. 3.79. Экспериментальное определение момента инерции тела

3.14.4. Плоскопараллельное движение твердого тела

При плоскопараллельном движении тела его положение определяется координатами полюса X_C , Y_C и углом поворота относительно полюса φ . В динамике за полюс принято брать центр масс тела. Тогда согласно теореме о движении центра масс и с учетом уравнения вращательного движения тела получим:

$$\left. \begin{aligned} m\ddot{x}_C &= \sum F_{kx}^e, \\ m\ddot{y}_C &= \sum F_{ky}^e, \\ J_{CZ}\ddot{\varphi} &= \sum M_{kx}^e. \end{aligned} \right\} \quad (3.14.8)$$

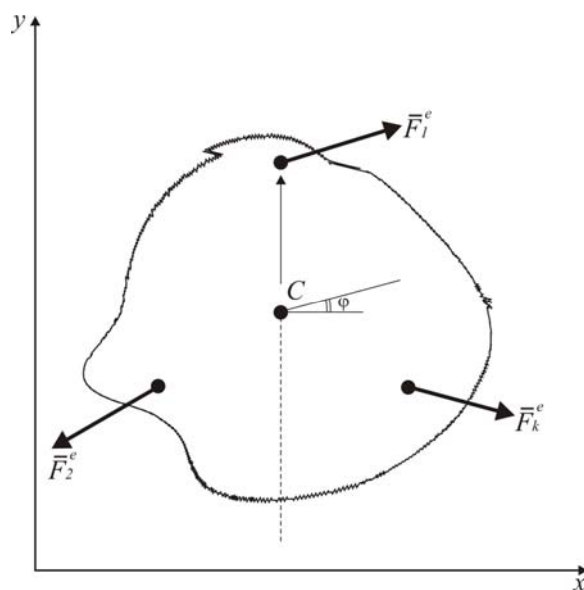


Рис. 3.80. Плоское движение тела

Три этих уравнения образуют систему дифференциальных уравнений плоскопараллельного движения твердого тела.

Пример. Диск катится по наклонной плоскости, имеющей коэффициент сцепления $f_{\text{сц}}$ (рис.3.81).

Определить ускорение центра масс и вычислить угол наклона плоскости к горизонту, при превышении которого начнется скольжение.

Решение.

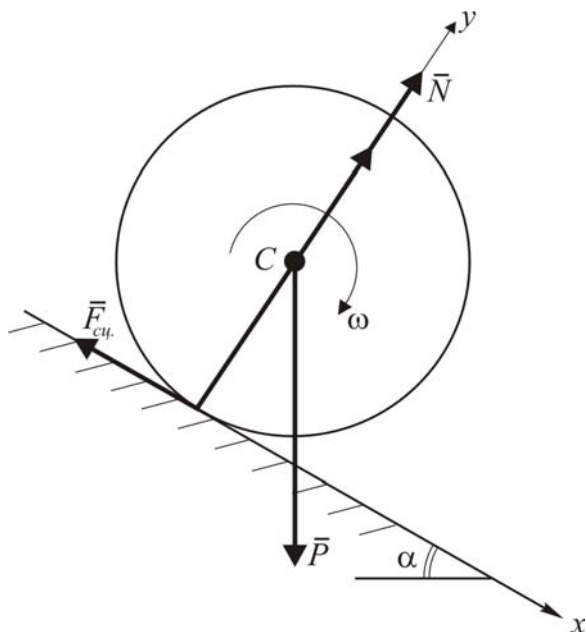


Рис. 3.81. Плоское движение тела – качение колеса

Система дифференциальных уравнений плоского движения

$$\left. \begin{aligned} m\ddot{x}_C &= \sum F_{kx}^e, \\ m\ddot{y}_C &= \sum F_{ky}^e, \\ J_{CZ}\ddot{\phi} &= \sum M_{kx}^e \end{aligned} \right\}$$

примет вид

$$\begin{aligned} m\ddot{x}_C &= P \sin \alpha - \bar{F}_{\text{сц}} \\ 0 &= P \cos \alpha - N, \\ J_{CZ}\ddot{\phi} &= -F_{\text{сц}} \cdot r. \end{aligned}$$

Здесь ω со знаком минус, так как диск вращается по часовой стрелке. Второе уравнение дает $N = P \cos \alpha$, следовательно, систему можно переписать в виде

$$\left. \begin{aligned} m\ddot{x}_C &= P \sin \alpha - F_{\text{сц}}, \\ -\frac{mr^2}{2} \cdot \frac{\ddot{x}_C}{r} &= -F_{\text{сц}} \cdot r. \end{aligned} \right\}$$

Из второго уравнения имеем

$$\frac{m\ddot{x}_C}{2} = F_{\text{цн}}.$$

Подставив $F_{\text{цн}}$ в первое уравнение, получим:

$$3m\ddot{x}_C = 2mg \sin \alpha;$$

$$\ddot{x}_C = \frac{2}{3}g \sin \alpha;$$

$$F_{\text{цн}} = \frac{1}{3}P \sin \alpha.$$

Т.е. центр масс диска движется равноускоренно с ускорением $a_c = \ddot{x}_c = \frac{2}{3}g \cdot \sin \alpha$.

Угол наклона, при котором еще не начнется скольжение, определим из следующего условия:

$$F_{\text{цн}} \leq f_{\text{цн}} \cdot N.$$

Тогда

$$\frac{1}{3}P \sin \alpha \leq f_{\text{цн}} \cdot P \cdot \cos \alpha,$$

откуда определяем угол наклона плоскости:

$$\text{tg } \alpha \leq 3f_{\text{цн}}, \text{ или } \alpha \leq \text{arctg } 3f_{\text{цн}}.$$

3.15. Определение динамических реакций подшипников при вращении твердого тела вокруг неподвижной оси

Рассмотрим твердое тело, вращающееся вокруг неподвижной оси z под действием приложенных к нему внешних активных сил \bar{F}_k^e .

Пусть в данный момент тело имеет угловую скорость $\bar{\omega}$ и угловое ускорение $\bar{\varepsilon}$. Приложим к каждой точке тела силу инерции $\bar{\Phi}_k$, ($\bar{\Phi}_k^{\tau}$ и $\bar{\Phi}_k^n$).

Запишем уравнения равновесия для определения реакций подшипников:

$$\left. \begin{aligned} \bar{F}^e + \bar{R}_A + \bar{R}_B + \bar{\Phi}^* &= 0, \\ \bar{M}_A^e + \bar{M}_A^{R_A} + \bar{M}_A^{R_B} + \bar{M}_A^{\Phi} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (3.15.1)$$

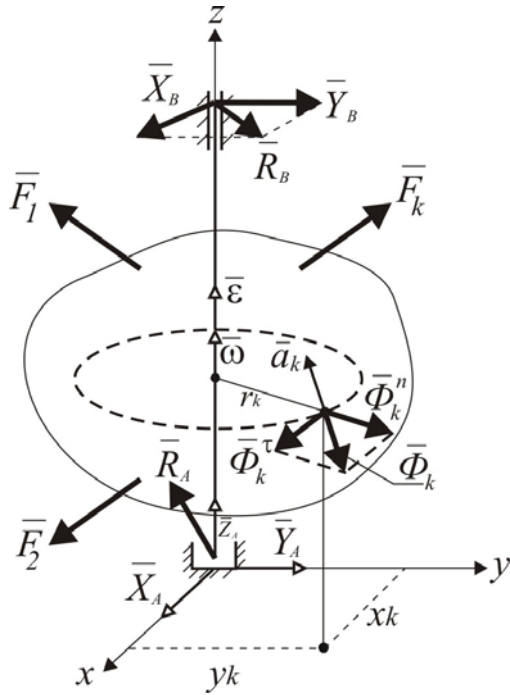


Рис. 3.82. Динамические реакции точек и их проекции подшипников

Для тела в пространстве имеем шесть уравнений равновесия в проекциях:

$$\left. \begin{aligned} \sum F_{kx}^e + X_A + X_B + \sum \Phi_{kx} &= 0, \\ \sum F_{ky}^e + Y_A + Y_B + \sum \Phi_{ky} &= 0, \\ \sum F_{kz}^e + Z_A &= 0, \\ \sum M_{kx}^e - Y_B \cdot h + \sum M_{kx}^\Phi &= 0, \\ \sum M_{ky}^e + X_B \cdot h + \sum M_{ky}^\Phi &= 0, \\ \sum M_{kz}^e + \sum M_{kz}^\Phi &= 0. \end{aligned} \right\} (3.15.2)$$

Силы инерции действуют в плоскостях, перпендикулярных оси вращения тела.

Вычислим составляющие сил инерции

$$\left. \begin{aligned} \Phi_k^n &= m_k r_k \omega^2; \\ \Phi_k^\tau &= m_k r_k \varepsilon. \end{aligned} \right\} (3.15.3)$$

$$\left. \begin{aligned} \Phi_{kx}^n &= \Phi_k^n \cos(\bar{\Phi}_k^n, \wedge \bar{i}) = m_k \omega^2 r_k \cdot \frac{x_k}{r_k} = m_k x_k \omega^2; \\ \Phi_{ky}^n &= \Phi_k^n \cos(\bar{\Phi}_k^n, \wedge \bar{j}) = m_k \omega^2 r_k \cdot \frac{y_k}{r_k} = m_k y_k \omega^2; \\ \Phi_{kx}^\tau &= \Phi_k^\tau \cos(\bar{\Phi}_k^\tau, \wedge \bar{i}) = m_k r_k \varepsilon \cdot \frac{y_k}{r_k} = m_k y_k \varepsilon; \\ \Phi_{ky}^\tau &= \Phi_k^\tau \cos(\bar{\Phi}_k^\tau, \wedge \bar{j}) = m_k r_k \varepsilon \cdot \frac{x_k}{r_k} = m_k x_k \varepsilon. \end{aligned} \right\} (3.15.4)$$

$$\left. \begin{aligned}
\sum \Phi_{kx} &= \sum m_k x_k \omega^2 + \sum m_k y_k \varepsilon = \omega^2 \sum m_k x_k + \varepsilon \sum m_k y_k = \omega^2 m x_C + \varepsilon m y_C; \\
\sum \Phi_{ky} &= \omega^2 m y_C + \varepsilon m x_C; \\
\sum M_{kx}^\Phi &= \sum M_{kx}^{\Phi n} + \sum M_{kx}^{\Phi \tau} = - \sum \Phi_{ky}^n \cdot Z_k + \sum \Phi_{ky}^\tau \cdot Z_k = \\
&= \sum m_k y_k z_k \omega^2 + \sum m_k x_k z_k \varepsilon = -J_{yz} \omega^2 + J_{xz} \varepsilon; \\
\sum M_{ky}^\Phi &= \sum \Phi_{kx}^n \cdot Z_k + \sum \Phi_{kx}^\tau \cdot Z_k = \sum m_k x_k z_k \omega^2 + \sum m_k y_k z_k \varepsilon = \\
&= J_{zx} \omega^2 + J_{yz} \varepsilon; \\
\sum M_{kz}^\Phi &= -J_{oz} \varepsilon.
\end{aligned} \right\}$$

(3.15.5)

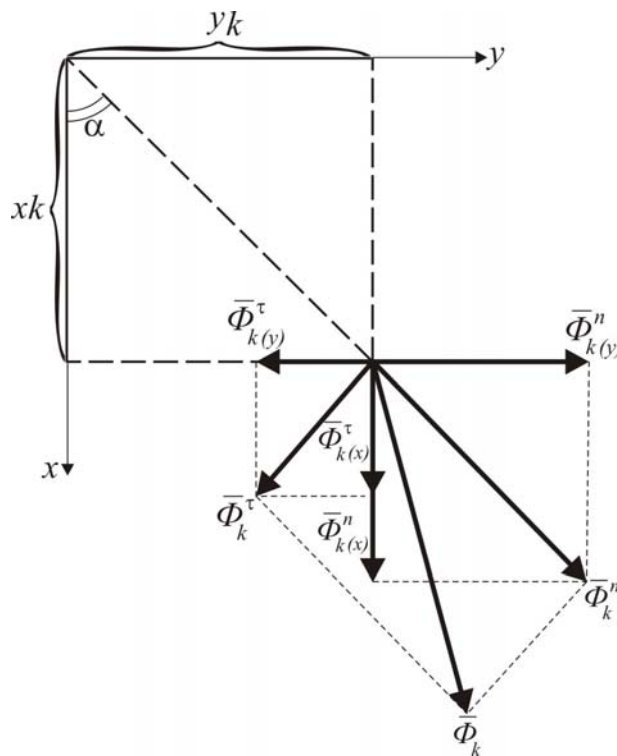


Рис. 3.83. Силы инерции в проекциях на декартовы оси

Тогда уравнения динамического равновесия тела можно переписать в виде:

$$\left. \begin{aligned}
\sum F_{kx}^e + X_A + X_B + m x_C \omega^2 + m y_C \varepsilon &= 0; \\
\sum F_{ky}^e + Y_A + Y_B + m y_C \omega^2 + m x_C \varepsilon &= 0; \\
\sum F_{kz}^e + Z_A &= 0; \\
\sum M_{kx}^e - Y_B \cdot h - J_{yz} \omega^2 + J_{xz} \varepsilon &= 0; \\
\sum M_{ky}^e + X_B \cdot h + J_{xz} \omega^2 + J_{yz} \varepsilon &= 0; \\
\sum M_{kz}^e + J_z \varepsilon &= 0.
\end{aligned} \right\}$$

(3.15.6)

В последнее уравнение реакции не входят. Пять реакций x_A, y_A, z_1, x_B и y_B определяются из первых пяти уравнений.

Условия, при которых динамические реакции равны статическим:

$$\left. \begin{aligned} mx_C \omega^2 + my_C \varepsilon &= 0, \\ my_C \omega^2 + J_{xz} \cdot \varepsilon &= 0, \\ J_{xz} \omega^2 + J_{yz} \cdot \varepsilon &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (3.15.7)$$

Эти уравнения удовлетворяются при

$$\left. \begin{aligned} X_C &= 0, \\ Y_C &= 0, \\ J_{yz} &= 0, \\ J_{xz} &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (3.15.8)$$

т.е. если ось вращения – главная центральная ось инерции тела.

3.16. Теория удара

3.16.1. Явление удара и основное уравнение

Под действием обычных сил скорости материальных точек изменяются непрерывно.

Явление, при котором скорости точек тела за ничтожно малый промежуток времени изменяются на конечную величину, называется ударом.

Например, удар мяча о стенку, столкновение автомобилей, действие взрывной волны на здание и т.д.

Значительное изменение скорости тела или точки за ничтожно малый промежуток времени происходит потому, что модули сил, которые развиваются при ударе, весьма велики, вследствие чего импульсы этих сил являются конечными величинами. Такие силы называются мгновенными или *ударными*.

Пусть на точку действует сила \bar{F} , и в некоторый момент времени t_1 начинает действовать ударная сила $\bar{F}_{уд}$, которая действует τ (секунд), где τ – время удара ($\bar{\tau}$ – мало). Определим изменение количества движения точки за время τ :

$$m\bar{v}_2 - m\bar{v}_1 = \bar{s} + \bar{s}_{уд}. \quad (3.16.1)$$

Здесь \bar{s} – малая величина (импульс силы \bar{F}), и ею можно пренебречь.

Тогда

$$m\bar{v}_2 - m\bar{v}_1 = \bar{s}_{\text{уд}}. \quad (3.16.2)$$

$$\bar{s}_{\text{уд}} = \int_0^{\tau} \bar{F}_{\text{уд}} dt = \bar{F}_{\text{уд}}^{\text{cp}} \cdot \tau \quad (3.16.3)$$

Если ударных импульсов несколько, то уравнение (3.16.2) можно переписать в виде

$$m(\bar{v}_2 - \bar{v}_1) = \sum \bar{s}_{\text{уд}}. \quad (3.16.4)$$

Это и есть *основное уравнение удара*. Оно играет в теории удара такую же роль, как основной закон динамики $m\bar{a} = \bar{F}$ при изучении движений материальной точки под действием неударных сил.

Изменение скорости в момент удара

$$\bar{v}_2 - \bar{v}_1 = \frac{\bar{s}_{\text{уд}}}{m}. \quad (3.16.5)$$

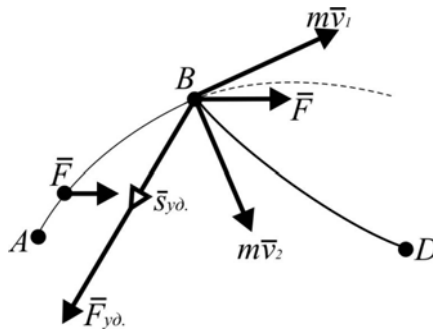


Рис. 3.84. Изменение траектории при ударе

В положении B под действием ударной силы происходит резкое изменение траектории – ABD . Перемещением тела за время удара можно пренебречь. Дальнейшее движение происходит под действием силы \bar{F} .

Итак:

- 1) действием неударных сил за время удара можно пренебречь;
- 2) перемещение $v_{\text{cp}}\tau$ – малая величина, и ею можно пренебречь;
- 3) результат действия ударной силы на материальную точку выражается в конечном изменении ее скорости [см. уравнение (3.16.5)].

3.16.2. Общие теоремы теории удара

Теорема об изменении количества движения системы при ударе. Так как импульсами обычных сил пренебрегаем, то

$$m_K \bar{v}_{2(K)} - m_K \bar{v}_{1(K)} = \bar{s}_{K(\text{уд})}^{(e)} + \bar{s}_{K(\text{уд})}^{(i)}, \quad (3.16.6)$$

где индексы e относятся к импульсам внешних сил, а индексы i – к импульсам внутренних сил.

Суммируя уравнения (3.16.6) для всех точек системы, получаем:

$$\bar{\kappa}_2 - \bar{\kappa}_1 = \sum \bar{s}_K^{(e)}, \quad (3.16.7)$$

т.е. изменение количества движения системы при ударе равно сумме всех внешних ударных импульсов, действующих на систему.

В проекциях на координатные оси:

$$\kappa_{2x} - \kappa_{1x} = \sum s_{Kx}^{(e)}. \quad (3.16.8)$$

Теорема об изменении кинетического момента механической системы при ударе.

$$m_K \bar{v}_{2(\bar{K})} - m_K \bar{v}_{1(K)} = \bar{s}_{K(\text{уд})}^{(e)} + \bar{s}_{K(\text{уд})}^{(i)}. \quad (3.16.9)$$

Умножая слева на $\bar{r}_{K(O)}$ и суммируя, получаем:

$$\bar{L}_{O(2)} - \bar{L}_{O(1)} = \sum \bar{M}_0 \left(\bar{s}_{K(\text{уд})}^e \right), \quad (3.16.10)$$

т.е. изменение кинетического момента механической системы относительно любого центра при ударе равно геометрической сумме моментов импульсов всех внешних ударных импульсов относительно того же центра.

В проекциях

$$L_{x(2)} - L_{x(1)} = \sum M_x \left(\bar{s}_{K(\text{уд})}^e \right) \quad (3.16.11)$$

3.16.3. Коэффициент восстановления при ударе

Рассмотрим прямой удар шара массой m о массивную поверхность. Различают две фазы этого удара:

1. Шар деформируется до тех пор, пока скорость его не станет равной нулю. Время τ_1 . Кинетическая энергия $\frac{1}{2}mv^2$ переходит в потенциальную энергию деформации и частично расходуется на нагревание.

2. Под действием сил упругости шар частично восстанавливает свою первоначальную форму. Время τ_2 .

Из-за остаточных деформаций и нагревания шара первоначальная кинетическая энергия полностью не восстанавливается; поэтому шар отделяется от поверхности со скоростью \bar{u} , имея кинетическую энергию $\frac{1}{2}m\bar{u}^2$.

$$|\bar{u}| \leq |\bar{v}|. \quad (3.16.12)$$

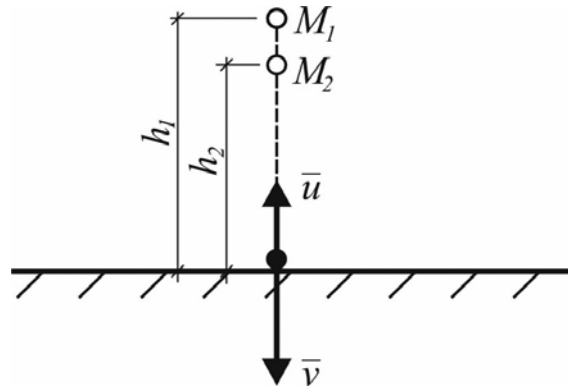


Рис. 3.85. Определение коэффициента восстановления при ударе

Отношение модуля скорости в конце удара к модулю скорости в начале удара называется коэффициентом восстановления при ударе:

$$k = \frac{u}{v}. \quad (3.16.13)$$

Приближенно считают, что коэффициент восстановления зависит от материала, хотя очевидно, что коэффициент зависит и от формы соударяющихся тел, и от соотношения их масс.

Коэффициент восстановления k определяют из простого опыта:

$$\left. \begin{array}{l} v = \sqrt{2gh_1}, \\ u = \sqrt{2gh_2}; \end{array} \right\} \Rightarrow k = \frac{u}{v} = \sqrt{\frac{h_2}{h_1}}.$$

Для стекла $k = 15/16$, для слоновой кости $k = 8/9$, для дерева $k = 1/2$. При неупругом ударе $u = 0$, $k = 0$.

3.16.4. Прямой и косой удар тела о неподвижную поверхность

1. Прямой удар.

$$\bar{K}_1 = m\bar{v}, \quad \bar{K}_2 = m\bar{u}.$$

Уравнение проекции на нормаль:

$$mu_n - mv_n = s_n.$$

$$v_n = -v.$$

$$u_n = u.$$

$$s_n = s.$$

$$m(u + v) = s.$$

$$u = kv.$$

$$s = m(k + 1)v.$$

Ударный импульс тем больше, чем больше коэффициент восстановления.

2. Косой удар.

Угол падения – α . Угол отражения – β .

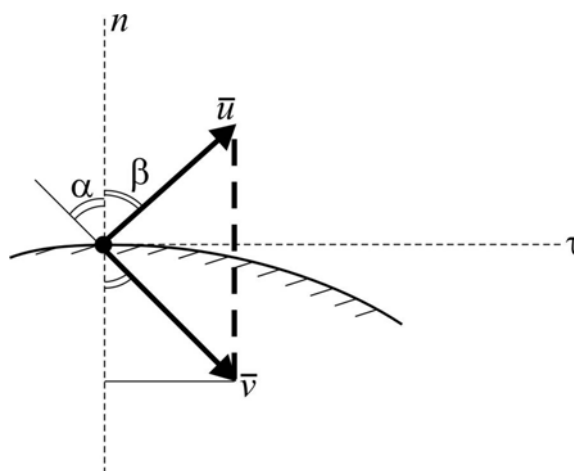


Рис. 3.86. Косой удар

$$m(\bar{u} - \bar{v}) = \bar{s}.$$

Пусть тело ударяется о гладкую поверхность. В этом случае реакция поверхности направлена по нормали.

$$s_{\tau} = 0,$$

$$m(u_{\tau} - v_{\tau}) = 0,$$

$$u_{\tau} = v_{\tau},$$

$$u \sin \beta = v \sin \alpha.$$

При абсолютно упругом ударе угол падения равен углу отражения:

$$\beta = \alpha.$$

Если удар неупругий, то

$$u < v,$$

$$\sin \beta > \sin \alpha,$$

$$\beta > \alpha;$$

т.е. угол отражения больше угла падения.

3.16.5. Прямой центральный удар двух тел

Нормаль к поверхности проходит через центры масс шаров. Скорости шаров перед ударом \bar{v}_1 и \bar{v}_2 , после удара – \bar{u}_1 и \bar{u}_2 , ($v_1 > v_2$).

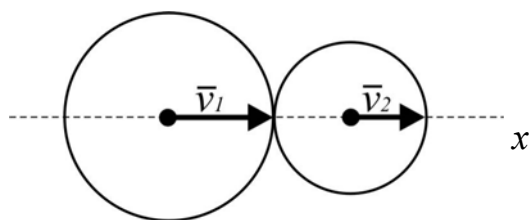


Рис. 3.87. Прямой центральный удар

$$s_{k(x)}^e = 0,$$

$$K_{2x} - K_{1x} = 0.$$

Следовательно,

$$m_1 v_{1x} + m_1 v_{2x} = m_1 u_{1x} + m_1 u_{2x}.$$

В этом уравнении две неизвестные величины. Второе уравнение даст коэффициент восстановления:

$$k = \left| \frac{u_{1x} - u_{2x}}{v_{1x} - v_{2x}} \right| = -\frac{u_{1x} - u_{2x}}{v_{1x} - v_{2x}}, \quad (u_{1x} \leq u_{2x})$$

$$u_{1x} - u_{2x} = -k(v_{1x} - v_{2x}).$$

Ударный импульс, действующий на соударяющиеся тела, найдем, составив уравнения для одного из тел:

$$m_1(u_{1x} - v_{1x}) = s_{1x} \quad (s_{1x} = -s_{2x}).$$

а) Абсолютно неупругий удар ($k = 0$).

$$u_{1x} = u_{2x} = \frac{m_1 v_{1x} + m_2 v_{2x}}{m_1 + m_2},$$

$$s_{2x} = -s_{1x} = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} (v_{1x} - v_{2x}).$$

б) Абсолютно упругий удар ($k = 1$).

$$s_{2x} = -s_{1x} = \frac{2m_1 m_2}{m_1 + m_2} (v_{1x} - v_{2x}).$$

Т.е. при абсолютно упругом ударе ударный импульс вдвое больше, чем при абсолютно неупругом.

Контрольные вопросы

1. В чем смысл основного закона динамики?
2. В чем смысл первой и второй задач динамики?
3. Что может вызвать затруднение при решении второй задачи динамики в случае действия на точку переменных сил?
4. В чем заключается процесс колебаний материальной точки?
5. Какая сила обуславливает свободные колебания точки?

6. Какой вид имеют дифференциальное уравнение свободных колебаний материальной точки и его решение в амплитудном виде?
7. От каких факторов зависят частота, период, амплитуда и начальная фаза свободных колебаний материальной точки?
8. Каков вид графиков свободных колебаний, затухающих колебаний и апериодического движения материальной точки?
9. Какие силы вызывают вынужденные колебания материальной точки?
10. Какой вид имеют дифференциальное уравнение вынужденных колебаний и его решение?
11. С какой частотой происходят установившиеся вынужденные колебания материальной точки?
12. При каких условиях возможен резонанс?
13. Что называют коэффициентом динамичности?
14. Как сказывается сопротивление движению на колебательном процессе?
15. Что называется механической системой?
16. Каким свойством обладают внутренние силы механической системы?
17. Как определяется положение центра масс механической системы?
18. В чем суть теоремы о движении центра масс?
19. Что называется моментом инерции механической системы относительно оси вращения?
20. Как вычисляется момент инерции твердого тела относительно параллельной оси?
21. Как вычисляется работа постоянной силы на прямолинейном перемещении ее точки приложения?
22. Как вычисляется элементарная работа силы?
23. Как вычисляется работа переменной силы на криволинейном перемещении ее точки приложения?
24. Как вычисляется работа силы тяжести?
25. Как вычисляется работа силы упругости?
26. Как вычисляется работа силы при повороте тела?
27. Что называется импульсом силы?
28. Что называется количеством движения материальной точки?
29. Что называется моментом количества движения материальной точки относительно центра и относительно оси?
30. Что называется кинетической энергией материальной точки?
31. Сформулируйте теорему об изменении количества движения материальной точки.
32. Сформулируйте теорему об изменении момента количества движения материальной точки.

33. Сформулируйте теорему об изменении кинетической энергии материальной точки.

34. Сформулируйте теорему об изменении кинетической энергии механической системы.

35. Что называется количеством степеней свободы твердого тела?

36. Что называется возможным перемещением точки механической системы?

37. Что называется идеальной связью?

38. Как формулируется принцип возможных перемещений?

39. Как формулируется принцип Даламбера для материальной точки?

40. Как формулируется принцип Даламбера для механической системы?

41. Как формулируется общее уравнение динамики?

42. Что представляет собой явление удара?

43. Запишите основное уравнение удара.

44. Что называют ударной силой?

45. Что называют коэффициентом восстановления при ударе?

46. Как соотносятся угол падения и угол отражения при ударе о гладкую неподвижную поверхность?

Итак, читатель дошел до последней страницы книги, в которой автор в меру своих сил постарался в краткой форме изложить постулаты и образы классической механики. Прочтение книги должно послужить одной из ступеней в процессе познания материальной действительности, которая, в свою очередь, послужит основой для усвоения наук о прочности и жесткости строительных конструкций и принципах работы машин и механизмов.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Яблонский, А.А. Курс теоретической механики [Текст] / А.А. Яблонский, В.М. Никифорова. – М.: Высшая школа, 1984. – Ч.1.
2. Яблонский, А.А. Курс теоретической механики [Текст] / А.А. Яблонский. – М.: Высшая школа, 1984. – Ч.2.
3. Никитин, Н.Н. Курс теоретической механики [Текст] / Н.Н. Никитин. – М.: Высшая школа, 1990.
4. Тарг, С.М. Краткий курс теоретической механики [Текст] / С.М. Тарг. – М.: Высшая школа, 1963 и последующие издания.

ОГЛАВЛЕНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ	3
ВВЕДЕНИЕ.....	4
1. СТАТИКА.....	6
1.1. Основные понятия и аксиомы статики.....	6
1.1.1. Основные понятия статики.....	6
1.1.2. Аксиомы статики.....	7
1.2. Плоская система сходящихся сил.....	9
1.2.1. Приведение плоской системы сходящихся сил к простейшему виду	9
1.2.2. Условия равновесия плоской системы сходящихся сил	11
1.3. Теорема о трех непараллельных силах	11
1.4. Расчет шарнирных ферм методом вырезания узлов.....	12
1.4.1. Понятие о ферме и терминология.....	12
1.4.2. Применение теоремы о трех силах к определению реакций опор ферм ...	14
1.4.3. Определение усилий в стержнях методом вырезания узлов	16
1.5. Система параллельных сил.....	19
1.5.1. Параллельные силы, направленные в одну сторону.....	19
1.5.2. Параллельные силы, направленные в противоположные стороны.....	20
1.5.3. Теория пар сил на плоскости	21
1.6. Произвольная плоская система сил	25
1.6.1. Теорема о параллельном переносе силы.....	25
1.6.2. Приведение плоской системы сил к заданному центру	26
1.6.3. Частные случаи приведения произвольной плоской системы сил к простейшему виду	27
1.6.4. Условия равновесия плоской произвольной системы сил	28
1.7. Равновесие системы твердых тел.....	30
1.8. Алгоритмизация расчета ферм методом вырезания узлов.....	33
1.8.1. Традиционный ручной расчет.....	33
1.8.2. Алгоритмизация расчета для ЭВМ.....	36
1.9. Статически определимые и статически неопределимые задачи	39
1.10. Устойчивость при опрокидывании.....	40
1.11. Статика в пространстве.....	43
1.11.1. Момент силы относительно центра как вектор.....	43
1.11.2. Момент силы относительно оси	44
1.11.3. Момент пары как вектор.....	45
1.11.4. Сложение пар сил в пространстве	46
1.11.5. Приведение произвольной пространственной системы сил	47
1.11.6. Условия равновесия произвольной пространственной системы сил.....	47
1.12. Центр тяжести.....	50
1.12.1. Понятие центра тяжести	50
1.12.2. Центр параллельных сил	50
1.12.3. Центр тяжести.....	53
1.12.4. Координаты центра тяжести однородных тел.....	54
1.12.5. Положение центра тяжести некоторых тел	56
1.12.6. Определение положения центра тяжести сложной фигуры	57
1.13. Трение.....	59
1.13.1. Трение скольжения	59
1.13.2. Трение качения	64

Контрольные вопросы.....	65
2. КИНЕМАТИКА.....	67
2.1. Основные понятия. Векторный и координатный способы задания движения....	67
2.1.1. Основные понятия кинематики.....	67
2.1.2. Определение кинематических характеристик точки при векторном способе задания движения.....	67
2.1.3. Координатный способ изучения движения.....	70
2.2. Определение скорости и ускорения точки при естественном способе задания движения.....	73
2.2.1. Естественный способ задания движения точки.....	73
2.2.2. Скорость точки при естественном способе задания движения.....	75
2.2.3. Элементы геометрии кривой.....	76
2.2.4. Естественные оси.....	77
2.2.5. Дифференцирование единичного вектора.....	77
2.2.6. Ускорение точек при естественной форме задания движения.....	78
2.2.7. Частные случаи движения точки.....	81
2.3. Движения твердого тела.....	85
2.3.1. Поступательное движение твердого тела.....	85
2.3.2. Вращательное движение твердого тела. Угловые кинематические характеристики тела.....	86
2.3.3. Скорость и ускорение точки тела при вращательном движении.....	88
2.3.4. Частные случаи вращения.....	89
2.4. Векторные выражения для скоростей и ускорений точек при вращательном движении тела.....	90
2.4.1. Векторы угловой скорости и углового ускорения.....	90
2.4.2. Скорость и ускорение точки.....	92
2.5. Плоское движение твердого тела.....	94
2.5.1. Понятие плоского движения.....	94
2.5.2. Уравнения плоского движения.....	96
2.5.3. Разложение плоского движения фигуры на поступательное и вращательное.....	97
2.5.4. Теорема о скоростях точек плоской фигуры.....	98
2.5.5. Теорема о проекциях скоростей точек плоской фигуры.....	99
2.5.6. Мгновенный центр скоростей.....	100
2.5.7. Определение ускорений точек тела при плоском движении.....	101
2.6. Сложное движение точки.....	107
2.6.1. Понятие о сложном движении точки.....	107
2.6.2. Теорема о сложении скоростей.....	110
2.6.3. Сложение ускорений в сложном движении.....	112
2.6.4. Природа кориолисова ускорения.....	114
2.7. Сферическое движение твердого тела.....	116
2.7.1. Уравнения движения.....	116
2.7.2. Определение скоростей и ускорений точек тела.....	117
2.8. Общий случай движения твердого тела.....	119
Контрольные вопросы.....	120
3. ДИНАМИКА.....	121
3.1. Основные понятия и законы динамики.....	121
3.1.1. Основные понятия и определения.....	121
3.1.2. Основные законы динамики.....	121

3.2. Дифференциальные уравнения движения точки	123
3.2.1. Дифференциальные уравнения движения точки в декартовой системе координат.....	123
3.2.1. Дифференциальные уравнения движения точки в естественной системе координат	124
3.3. Две основные задачи динамики	125
3.3.1. Первая задача динамики	125
3.3.2. Вторая задача динамики	126
3.3.3. Интегрирование дифференциальных уравнений движения при постоянных силах.....	127
3.4. Интегрирование уравнений движения при переменных силах	129
3.4.1. Сила, зависящая от расстояния.....	129
3.4.2. Сила, зависящая от скорости (Падение тела при учете силы сопротивления движению).....	132
3.5. Колебания материальной точки.....	133
3.5.1. Свободные колебания	134
3.5.2. Затухающие колебания материальной точки	140
3.5.3. Вынужденные колебания материальной точки.....	146
3.5.4. Явление резонанса.....	150
3.5.5. Вынужденные колебания при сопротивлении движению	151
3.6. Относительное движение материальной точки.....	156
3.7. Механическая система.....	158
3.7.1. Механическая система. Силы внешние и внутренние	158
3.8. Геометрия масс механической системы	159
3.8.1. Центр масс механической системы	159
3.8.2. Момент инерции механической системы	162
3.8.3. Момент инерции относительно параллельных осей. (Теорема Штейнера).....	163
3.8.4. Центробежные моменты инерции	164
3.8.5. Вычисление моментов инерции некоторых однородных тел.....	166
3.9. Теоремы об изменении количества движения и момента количества движения	168
3.9.1. Импульс силы	168
3.9.2. Теорема об изменении количества движения материальной точки.....	168
3.9.3. Теорема об изменении момента количества движения материальной точки	170
3.10. Работа силы и мощность.....	172
3.10.1. Работа силы при повороте тела.....	174
3.10.2. Работа силы тяжести	175
3.10.3. Работа силы упругости	176
3.11. Теорема об изменении кинетической энергии	176
3.11.1. Теорема об изменении кинетической энергии точки	176
3.11.2. Теорема об изменении кинетической энергии механической системы..	179
3.12. Принцип возможных перемещений.....	182
3.12.1. Возможные перемещения системы. Число степеней свободы	182
3.12.2. Идеальные связи.....	184
3.12.3. Принцип возможных перемещений	184
3.12.4. Решение задач с помощью принципа возможных перемещений.....	185
3.13. Принцип Даламбера. Общее уравнение динамики	187
3.13.1. Принцип Даламбера для материальной точки	187

3.13.2. Принцип Даламбера для системы материальных точек	190
3.13.3. Приведение сил инерции к главному вектору и главному моменту	191
3.13.4. Общее уравнение динамики	193
3.14. Динамика движений твердого тела.....	195
3.14.1. Дифференциальные уравнения поступательного движения твердого тела.....	195
3.14.2. Дифференциальное уравнение вращательного движения тела вокруг неподвижной оси.....	196
3.14.3. Физический маятник	198
3.14.4. Плоскопараллельное движение твердого тела	199
3.15. Определение динамических реакций подшипников при вращении твердого тела вокруг неподвижной оси	201
3.16. Теория удара	204
3.16.1. Явление удара и основное уравнение.....	204
3.16.2. Общие теоремы теории удара	205
3.16.3. Коэффициент восстановления при ударе.....	206
3.16.4. Прямой и косой удар тела о неподвижную поверхность	207
3.16.5. Прямой центральный удар двух тел	209
Контрольные вопросы.....	209
БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК.....	212

Учебное издание

Шеин Александр Иванович

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА

Курс лекций

по направлению подготовки 08.03.01 «Строительство»

Редактор М.А. Сухова

Верстка Н.А. Сазонова

Подписано в печать 6.09.16. Формат 60×84/16.

Бумага офисная «Снегурочка». Печать на ризографе.

Усл.печ.л. 12,55. Уч.-изд.л. 13,5. Тираж 80 экз.

Заказ № 568.

Издательство ПГУАС.
440028. г. Пенза, ул. Г. Титова, 28.