МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Федеральное государственное бюджетное
образовательное учреждение высшего образования
«Пензенский государственный университет
архитектуры и строительства»
(ПГУАС)

МАТЕМАТИКА

Методические указания
к самостоятельной работе студентов
по направлению подготовки 08.03.01 «Строительство»

Пенза 2016

УДК 51
ББК 22.1
М34

Рекомендовано Редсоветом университета

Рецензент – доктор педагогических наук, профессор, проректор по научной работе В.В.Усманов (ПГУАС)

Математика: метод. указания к самостоятельной работе сту-
М34 дентов по направлению подготовки 08.03.01 «Строительство» / И.А. Гарькина, А.М. Данилов. – Пенза: ПГУАС, 2016. – 16 с.

Приводятся организационно-методические основы выполнения студентами самостоятельной работы.

Подготовлены на кафедре «Математика и математическое моделирование» и предназначены для использования студентами, обучающимися по направлению подготовки 08.03.01 «Строительство», при изучении дисциплины «Математика».

ВВЕДЕНИЕ

Дисциплина «Математика» является **базовой** частью **общепрофессионального модуля Б1.Б.2.1 ООП.**

Изучение дисциплины «Математика» направлено на формирование следующих компетенций:

– **использование основных законов естественнонаучных дисциплин в профессиональной деятельности, применение методов математического анализа и математического (компьютерного) моделирования, теоретического и экспериментального исследования.**

Планируемые результаты обучения (показатели достижения заданного уровня освоения компетенции):

знать:

– основные математические формулы и понятия;

– основные методы решения математических задач;

– элементы вычислительной математики;

– технологию сбора анализа и обработки математической информации;

– основные методы математического моделирования в решении прикладных задач;

уметь:

– использовать методы математического моделирования;

– применять методы физико-математического анализа к решению конкретных естественнонаучных и технических проблем;

– анализировать и синтезировать поставленную математическую задачу и принимать на этой основе рациональные решения;

владеть:

– основными способами и методами решения математических задач для решения естественнонаучных задач;

– навыками создания математического шаблона для его дальнейшего использования в решении профессиональных задач;

– методами обработки и интерпретирования результатов эксперимента;

– приемами использования методов математического моделирования в профессиональной деятельности;

иметь представление:

– о методах решения математических задач в профессиональной деятельности;

– о математических подходах к решению задач строительной отрасли;

– о связи математических моделей с моделируемыми материальными явлениями.

– **способность выявить естественнонаучную сущность проблем, возникающих в ходе профессиональной деятельности, привлечь их для решения соответствующий физико-математический аппарат.**

Планируемые результаты обучения (показатели достижения заданного уровня освоения компетенции):

знать:

– математическую символику и основные математические формулы;

– основные виды математических моделей;

– алгоритмы решения математических задач;

– основные принципы выбора математических составляющих при решении профессиональных задач;

уметь:

– применять математические методы для решения практических задач;

– использовать стандартные схемы решения в новых математических задачах;

– анализировать этапы решения математических и прикладных задач;

владеть:

– основами математической теории;

– методами решения прикладных задач;

– спецификой исследования математических моделей с учетом их иерархической структуры и оценки пределов применимости полученных результатов;

иметь представление:

– о применении математического аппарата в решении профессиональных задач;

– о связи математических моделей с моделируемыми материальными явлениями.

– **владение эффективными правилами, методами и средствами сбора, обмена, хранения и обработки информации, навыками работы с компьютером как средством управления информацией**

Планируемые результаты обучения (показатели достижения заданного уровня освоения компетенции):

знать:

– современные тенденции развития информатики, вычислительной техники, компьютерных технологий;

– статистические методы исследования и обработки информации;

– элементы вычислительной математики;

– технологию сбора анализа и обработки математической информации;

уметь:

– использовать математическую символику для выражения количественных и качественных отношений объектов;

– выполнять самостоятельный поиск информации необходимой для решения математических и прикладных задач;

владеть:

– методами обработки и интерпретирования результатов эксперимента;

– основными методами, способами и средствами получения, хранения и переработки информации;

– основами работы с компьютером как средством управления информации на уровне, позволяющем использовать компьютерную технику и специализированные компьютерные программы в своей профессиональной деятельности;

иметь представление:

– о применении компьютерных технологий при проведении работ в области математических исследований;

– о статистических методах исследования и обработки информации.

– способность осуществлять поиск, хранение, обработку и анализ информации из различных источников и баз данных, представлять ее в требуемом формате с использованием информационных, компьютерных и сетевых технологий.

Планируемые результаты обучения (показатели достижения заданного уровня освоения компетенции):

знать:

– технологию сбора анализа и обработки математической информации;

– сущность работы с компьютером как средством управления информацией;

уметь:

– выполнять самостоятельный поиск информации необходимой для решения математических и прикладных задач;

– использовать, хранить и перерабатывать информацию с применением вычислительной техники;

– работать с математической литературой;

– получать информацию из глобальных сетей, позволяющую расширить свой уровень знаний;

владеть:

– навыками исследовательской работы;

– современными математическими инструментами анализа и способа исследования экспериментальных данных;

– основами работы с компьютером как средством управления информации на уровне, позволяющем использовать компьютерную технику и специализированные компьютерные программы в своей профессиональной деятельности;

иметь представление:

– о видах, формах и методах математической обработки экспериментальных данных.

МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ

Целью самостоятельной работы студентов является овладение фундаментальными знаниями, профессиональными умениями и навыками деятельности по профилю, опытом творческой, исследовательской деятельности. Самостоятельная работа студентов (СРС) способствует развитию самостоятельности, ответственности и организованности, творческого подхода к решению проблем учебного и профессионального уровня.

Задачами СРС являются:

– систематизация и закрепление полученных теоретических знаний и практических умений студентов;

– углубление и расширение теоретических знаний;

– формирование умений использовать нормативную, справочную документацию и специальную литературу;

– развитие познавательных способностей и активности студентов: творческой инициативы, самостоятельности, ответственности и организованности;

– формирование самостоятельности мышления, способностей к саморазвитию, самосовершенствованию и самореализации;

– развитие исследовательских умений.

Самостоятельная работа – планируемая учебная, учебно-исследовательская, научно-исследовательская работа студентов, выполняемая во внеаудиторное (аудиторное) время по заданию и при методическом руководстве преподавателя, но без его непосредственного участия (при частичном непосредственном участии преподавателя, оставляющем ведущую роль за работой студентов). Играет значительную роль в рейтинговой технологии обучения. Государственным стандартом предусматривается, как правило, 50 % часов из общей трудоемкости дисциплины на самостоятельную работу студентов. В связи с этим, обучение в вузе включает в себя две, практически одинаковые по объему и взаимовлиянию части – процесса обучения и процесса самообучения. Поэтому СРС должна стать эффективной и целенаправленной работой студента.

К современному специалисту общество предъявляет достаточно широкий перечень требований, среди которых немаловажное значение имеет наличие у выпускников определенных способностей и умения самостоятельно добывать знания из различных источников, систематизировать полученную информацию. Формирование такого умения происходит в течение всего периода обучения через участие студентов в практических занятиях, выполнение контрольных заданий и тестов, подготовку рефератов, докладов, статей.

Выделяются два вида самостоятельной работы – аудиторная (выполняется на учебных занятиях под непосредственным руководством преподавателя и по его заданию) и внеаудиторная (выполняется студентом по заданию преподавателя, но без его непосредственного участия). Самостоятельная работа студентов без участия преподавателей включает:

– усвоение содержания конспекта лекций на базе рекомендованной лектором учебной литературы, включая информационные образовательные ресурсы;

– написание рефератов, докладов, статей;

– выполнение домашних заданий в виде решения отдельных задач, проведения типовых расчетов, расчетно-графических и индивидуальных работ по отдельным разделам дисциплины и т.д.;

– текущий самоконтроль и контроль успеваемости на базе электронных обучающих и аттестующих тестов.

ПРОГРАММА САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ СТУДЕНТОВ

Код формируемой компетенции	Тема	Форма самостоятельной работы	Объем учебной работы (часов)	Форма контроля
1	2	3	4	5
ОПК-1 ОПК-2	ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА И АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ	Проработка конспектов лекций, работа с дополнительной литературой; подготовка реферата	32	Тестирование, сдача реферата
ОПК-1 ОПК-2 ОПК-4 ОПК-6	МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИЙ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ	Проработка конспектов лекций, работа с дополнительной литературой; подготовка к выполнению контрольной работы, подготовка реферата	28	сдача реферата; контрольная работа
ОПК-1 ОПК-2	ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИЙ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ	Проработка конспектов лекций, работа с дополнительной литературой; подготовка реферата	12	Тестирование, сдача реферата
ОПК-1 ОПК-2	НЕОПРЕДЕЛЕННЫЙ И ОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛЫ	Проработка конспектов лекций, работа с дополнительной литературой; подготовка к выполнению контрольной работы, подготовка реферата	28	сдача реферата; контрольная работа
ОПК-1 ОПК-2	КРАТНЫЕ И КРИВОЛИНЕЙНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ	Проработка конспектов лекций, работа с дополнительной литературой; подготовка реферата	24	устный опрос, домашнее задание
ОПК-1 ОПК-2 ОПК-4 ОПК-6	ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ	Проработка конспектов лекций, работа с дополнительной литературой; подготовка реферата	20	Коллоквиум, сдача реферата

1	2	3	4	5
ОПК-1 ОПК-2	РЯДЫ	Проработка конспектов лекций, работа с дополнительной литературой; подготовка к выполнению контрольной работы, подготовка реферата	10	сдача реферата; контрольная работа
ОПК-1 ОПК-2	РЯДЫ ФУРЬЕ. ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ УРАВНЕНИЙ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ	Проработка конспектов лекций, работа с дополнительной литературой; подготовка реферата	10	сдача реферата
ОПК-1 ОПК-2 ОПК-4 ОПК-6	ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА	Проработка конспектов лекций, работа с дополнительной литературой; подготовка реферата	34	Коллоквиум, сдача реферата

ТЕМЫ КОНТРОЛЬНЫХ РАБОТ

1	Дифференцирование функций одной переменной
2	Интегрирование функций одной переменной
3	Ряды

Примерный вариант контрольной работы №1 с решением

1. Найти производные от функций:

а) $y=\dfrac{2x^2-x-1}{3\sqrt{2+4x}}$.

Воспользуемся правилом дифференцирования дроби:

$$\left(\frac{U}{V}\right)'=\frac{U'V-UV'}{V^2},\ V\neq 0.$$

Для всех $2+4x>0$; $x>-\dfrac{1}{2}$ имеем:

$$y'=\frac{(4x-1)3\sqrt{2+4x}-(2x^2-x-1)3\dfrac{1}{2\sqrt{2+4x}}4}{9(2+4x)}=$$

$$=\frac{(4x-1)3(2+4x)-(2x^2-x-1)6}{9(2+4x)\sqrt{2+4x}}=$$

$$=\frac{3(16x^2+4x-2-4x^2+2x+2)}{9(2+4x)\sqrt{2+4x}}=\frac{9x(4x+2)}{9(2+4x)\sqrt{2+4x}}=\frac{x}{\sqrt{2+4x}}.$$

б) $y=\text{ctg}\sqrt[3]{5}-\frac{1}{8}\frac{\cos^2 4x}{\sin 8x}$,

$$y'=0-\frac{1}{8}\frac{2\cos 4x(-\sin 4x)4\sin 8x-\cos^2 4x\sin 8x 8}{\sin^2 8x}=$$

$$=\frac{4\sin^2 8x+8\sin 8x\cos^2 4x}{8\sin^2 8x}=\frac{\sin 8x+2\cos^2 4x}{2\sin 8x};$$

в) $y=(\arcsin x)^{e^x}$

Это показательно-степенная функция. Воспользуемся логарифмическим дифференцированием функции. Для этого прологарифмируем обе части:

$$\ln y=\ln(\arcsin x)^{e^x}; \quad \ln y=e^x\cdot\ln(\arcsin x).$$

Продифференцируем обе части:

$$\frac{y'}{y}=e^x\ln\arcsin x+\frac{e^x}{(\arcsin x)\sqrt{1-x^2}}.$$

Получим

$$y'=e^x(\ln\arcsin x+\frac{1}{(\arcsin)\sqrt{1-x^2}})(\arcsin x)^{e^x};$$

г) $2x^2+xy-y^3-5=0$ – это неявно заданная функция.

Продифференцировав по x обе части, найдем:

$$2\cdot 2\cdot x+y+xy'-3y^2y'=0, \quad 4x+y+y'(x-3y^2)=0.$$

Откуда $y'=-\frac{4x+y}{x-3y^2}$.

2. Найти вторые производные от функций:

а) $y=\frac{4x+7}{2x+3}$,

$$y'=\frac{4(2x+3)-2(4x+7)}{(2x+2)^2}=\frac{8x+12-8x-14}{(2x+2)^2}=-\frac{2}{(2x+3)^2};$$

$$y''=\frac{2}{(2x+3)^4}2(2x+3)2=\frac{8}{(2x+3)^3};$$

б) $\begin{cases} x=\sin^2 t, \\ y=\dfrac{1}{\cos^2 t} \end{cases}$ (параметрически заданная функция).

Здесь

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t}, \quad y'_t = -\frac{1}{\cos^4 t} 2\cos t(-\sin t) = \frac{2\sin t}{\cos^3 t}, \quad x'_t = 2\sin t\cos t,$$

$$y'_x = \frac{2\sin t}{\cos^3 t 2\sin t\cos t} = \frac{1}{\cos^4 t}; y''_x = \frac{(y'_x)'_t}{x'_t},$$

$$(y'_x)'_t = -\frac{1}{\cos^8 t}(4\cos^3 t(-\sin t)) = \frac{4\sin t}{\cos^5 t},\ y''_{xx} = \frac{4\sin t}{\cos^5 t 2\sin t\cos t} = \frac{2}{\cos^6 t}.$$

3. Найти дифференциал функции $y = x^2 \operatorname{arctg}\sqrt{x^2-1} - \sqrt{x^2-1}$

Имеем:

$$dy = y'dx,$$

$$y' = 2x\operatorname{arctg}\sqrt{x^2-1} + \frac{x^2}{1+x^2-1}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x^2-1}}2x - \frac{1}{2\sqrt{x^2-1}}2x = 2x\operatorname{arctg}\sqrt{x^2-1},$$

$$dy = 2x\operatorname{arctg}\sqrt{x^2-1}dx.$$

4. Вычислить приближенно с помощью дифференциала $y = \arcsin x$, $x = 0,08$.

Имеем:

$$f(x_0+\Delta x) \approx f(x_0) + f'(x_0)\Delta x$$

При $x_0 = 0, \Delta x = 0,08$ получим:

$$f(x_0) = \arcsin 0 = 0; f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, f'(x_0) = \frac{1}{\sqrt{1-0}} = 1.$$

Откуда $\arcsin 0,08 \approx 0 + 1\cdot 0,08 = 0,08$.

5. Составить уравнения касательной и нормали к графикам функций, заданных а) явно и б) параметрически:

а) $y = x + \sqrt{x^3}$ в точке $x_0 = 1$.

Уравнения касательной и нормали имеют соответственно вид:

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0); \quad y = f(x_0) - \frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0).$$

Справедливо:

$$f(x_0) = 1+1 = 2, f'(x) = 1 + \frac{3}{2}\sqrt{x}, f'(x_0) = 1 + \frac{3}{2}\sqrt{1} = \frac{5}{2},$$

откуда уравнение касательной:

$$y = 2 + \frac{5}{2}(x-1), \quad y = 2 + \frac{5}{2}x - \frac{5}{2}, \quad y = \frac{5}{2}x - \frac{1}{2};$$

уравнение нормали:

$$y = 2 - \frac{2}{5}(x-1), \quad y = 2 - \frac{2}{5}x + \frac{2}{5}, \quad y = -\frac{2}{5}x + \frac{12}{5}.$$

б) $\begin{cases} x = 2t - t^2, \\ y = 3t - t^3 \end{cases}$ (в точке $t_0 = -2$).

При $t_0 = -2$ получим $x_0 = -8, \quad y_0 = 2$.

Имеем:

$$x'_t = 2 - 2t,$$

$$y'_t = 3 - 3t^2.$$

$$y'_x = \frac{3 - 3t^2}{2 - 2t}, \; y'_x(-2) = \frac{3 - 3 \cdot 4}{2 + 4} = -\frac{9}{6}.$$

Откуда уравнение касательной:

$$y = 2 - \frac{9}{6}(x + 8), \;\; y = -\frac{3}{2}x - 10;$$

уравнение нормали:

$$y = 2 + \frac{6}{9} \cdot (x + 8), \; y = \frac{2}{3}x + \frac{22}{3}.$$

6. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $y = \dfrac{2(x^2 + 3)}{x^2 - 2x + 5}$ на отрезке $[-3;3]$.

Найдем первую производную:

$$y' = \frac{4x(x^2 - 2x + 5) - (2x^2 + 6)(2x - 2)}{(x^2 - 2x + 5)^2} =$$

$$= \frac{4x^3 - 8x^2 + 20x - 4x^3 - 12x + 4x^2 + 12}{(x^2 - 2x + 5)^2} = \frac{-4x^2 + 8x + 12}{(x^2 - 2x + 5)^2} = \frac{-4(x^2 - 2x - 3)}{(x^2 - 2x + 5)^2}.$$

Приравняем ее к нулю. Получим:

$$x^2 - 2x - 3 = 0, \;\; x_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{4 + 12}}{2} = \frac{2 \pm 4}{2}; x_1 = 3; x_2 = -1.$$

Найдем значения функции в граничных точках заданного интервала и в точках, где первая производная равна нулю:

$$y = (-3) = \frac{2(9+3)}{9+6+5} = \frac{24}{24} = \frac{6}{5}; y(3) = \frac{2(9+3)}{9-6+5} = \frac{24}{8} = 3; y(-1) = \frac{2(1+3)}{1+2+5} = \frac{8}{8} = 1.$$

Выберем среди этих значений наибольшее и наименьшее. Откуда: $y(3) = 3$ – наибольшее значение, $y(-1) = 1$ – наименьшее значение.

Примерный вариант контрольной работы №2 с решением

1. $\int \frac{\cos x}{\sqrt{9-\sin^2 x}}dx$.

Сделаем подстановку $\sin x = t$, тогда $\cos x dx = dt$, следовательно, $d(\sin x) = \cos x dx$. Согласно формуле $\int \frac{dU}{\sqrt{a^2-U^2}} = \arcsin\frac{U}{a} + C$, находим:

$$\int \frac{\cos x}{\sqrt{9-\sin^2 x}}dx = \int \frac{d(\sin x)}{\sqrt{3^2-(\sin x)^2}} = \arcsin\frac{\sin x}{3} + C.$$

2. $\int \cos\frac{7x}{2}\cdot\cos\frac{4x}{5}dx$.

Применяя формулу $\cos\alpha\cdot\cos\beta = \frac{1}{2}\left[\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)\right]$, будем иметь:

$$\int = \frac{1}{2}\int\left[\cos\left(\frac{7x}{2}+\frac{4x}{5}\right)+\cos\left(\frac{7x}{2}-\frac{4x}{5}\right)\right]dx =$$

$$= \frac{1}{2}\int\left(\cos\frac{43x}{10}+\cos\frac{28}{10}x\right)dx = \frac{1}{2}\int\cos\frac{43x}{10}dx + \frac{1}{2}\int\cos\frac{28x}{10}dx =$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{10}{43}\sin\frac{43x}{10} + \frac{1}{2}\cdot\frac{10}{28}\cdot\sin\frac{28x}{10} + C = \frac{5}{43}\sin\frac{43x}{10} + \frac{5}{28}\sin\frac{28x}{10} + C.$$

3. $\int (x-1)\sin 2x dx$.

Примем $U = x-1,\ dV = \sin 2x dx$, тогда $dU = dx, V = -\frac{1}{2}\cos 2x$.

Используя формулу интегрирования по частям $\int UdV = UV - \int VdU$, получим:

$$\int (x-1)\sin 2x dx = \left|\begin{matrix} U = x-1 \\ dV = \sin 2x dx \end{matrix}\right| \left.\begin{matrix} dU = dx \\ V = -\frac{1}{2}\cos 2x \end{matrix}\right| =$$

$$= -\frac{x-1}{2}\cos 2x + \frac{1}{2}\int\cos 2x dx = \frac{1-x}{2}\cos 2x + \frac{1}{4}\sin 2x + C.$$

4. $\int (1-2x)e^{3x}dx$.

Примем $U = 1-2x$, $dV = e^{3x}dx$, тогда $dU = -2dx, V = \frac{1}{3}e^{3x}$.

Используя формулу интегрирования по частям $\int UdV = UV - \int VdU$, получим:

$$\int (1-2x)e^{3x}dx = \begin{vmatrix} U = 1-2x & dU = -2dx \\ dV = e^{3x}dx & V = \dfrac{1}{3}e^{3x} \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{1-2x}{3}e^{3x} + \frac{2}{3}\int e^{3x}dx = \frac{1-2x}{3}e^{3x} + \frac{2}{9}e^{3x} + C.$$

5. $\int \dfrac{(2x-1)dx}{\sqrt{x^2+2x+3}}$.

Выделим в числителе производную подкоренного выражения и разложим полученный интеграл на разность двух интегралов. Применяя формулы $\int \dfrac{dU}{\sqrt{U}} = 2\sqrt{U} + C$ и $\int \dfrac{dU}{\sqrt{U^2+a^2}} \ln\left|U + \sqrt{U^2+a^2}\right| + C$, получим:

$$\int \frac{(2x-1)dx}{\sqrt{x^2+2x+3}} = \int \frac{(2x+2)-3}{\sqrt{x^2+2x+3}}dx = \int \frac{(2x+2)dx}{\sqrt{x^2+2x+3}} - 3\int \frac{dx}{\sqrt{(x+1)^2+2}} =$$

$$= 2\sqrt{{}^2 + 2x + 3} - 3\ln\left|x + 1 + \sqrt{x^2+2x+3}\right| + C.$$

6. $\int \dfrac{dx}{x^2\sqrt{4+x^2}}$.

Применяя подстановку $x = 2\operatorname{tg}t$, $dx = \dfrac{2dt}{\cos^2 t}$,

$$\operatorname{tg}t = \frac{x}{2} \Rightarrow \frac{\sin t}{\cos t} = \frac{x}{2} \Rightarrow \frac{\sin t}{\sqrt{1-\sin^2 t}} = \frac{x}{2} \Rightarrow \frac{\sin^2 t}{1-\sin^2 t} = \frac{x^2}{4} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sin^2 t = \frac{x^2}{4} - \frac{x^2}{4}\sin^2 t \Rightarrow \sin^2 t\left(1 + \frac{x^2}{4}\right) = \frac{x^2}{4} \Rightarrow \sin^2 t = \frac{\frac{x^2}{4}}{1 + \frac{x^2}{4}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sin^2 t = \frac{x^2}{4+x^2} \Rightarrow \sin t = \sqrt{\frac{x^2}{4+x^2}},\ \text{получим:}$$

$$\int \frac{dx}{x^2\sqrt{4+x^2}} = \int \frac{2dt}{\cos^2 t \cdot 4\operatorname{tg}^2 t\sqrt{4+4\operatorname{tg}^2 t}} = \frac{1}{4}\int \frac{dt}{\sin^2 t\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 t}} =$$

$$= \frac{1}{4}\int \frac{dt}{\sin^2 t\sqrt{\dfrac{\cos^2 t + \sin^2 t}{\cos^2 t}}} = \frac{1}{4}\int \frac{\cos dt}{\sin^2 t} = \frac{1}{4}\int \frac{d(\sin t)}{\sin^2 t} = -\frac{1}{4}(\sin t)^{-1} + C =$$

$$= -\frac{1}{4\sin t} + C = -\frac{1}{4\sqrt{\frac{x^2}{4+x^2}}} + C.$$

7. $\int \frac{16xdx}{\left(2x^2 - x\right)\left(x+1\right)}$.

Разложим знаменатель на произведение линейных множителей и представим рациональную дробь в виде суммы простейших дробей:

$$\frac{16x}{x\left(2x-1\right)\left(x+1\right)} = \frac{16}{\left(2x-1\right)\left(x+1\right)} = \frac{A}{2x-1} + \frac{B}{x+1}.$$

Должны иметь $16 = Ax + A + 2Bx - B$ или $16 = \left(A + 2B\right)x + A - B$.

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x, получим систему уравнений:

$$\begin{cases} A + 2B = 0 \\ A - B = 16 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = -2B \\ -2B - B = 16. \end{cases}$$

Решив систему, найдем $A = \frac{32}{3}$ и $B = -\frac{16}{3}$.

Интеграл представляется разностью двух интегралов:

$$\int \frac{16xdx}{\left(2x^2 - x\right)\left(x+1\right)} = \int \frac{\frac{32}{3}}{2x-1}dx - \int \frac{\frac{16}{3}}{x+1}dx =$$

$$= \frac{32}{3} \cdot \frac{1}{2}\ln\left|2x-1\right| - \frac{16}{3}\ln\left|x+1\right| + C =$$

$$= \frac{16}{3}\left(\ln\left|2x-1\right| - \ln\left|x+1\right|\right) + C = \frac{16}{3}\ln\left|\frac{2x-1}{x+1}\right| + C.$$

8. Вычислить определенный интеграл $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2a}} \left(x+3\right)\sin axdx$.

$$\int\limits_0^{\frac{\pi}{2a}} \left(x+3\right)\sin axdx = \left|\begin{matrix} U = x+3 \\ dV = \sin axdx \end{matrix}\right| \left.\begin{matrix} du = dx \\ V = -\frac{1}{a}\cos ax \end{matrix}\right| =$$

$$= -\frac{x+3}{a}\cos ax\Big|_0^{\frac{\pi}{2a}} + \frac{1}{a}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2a}} \cos axdx = -\frac{x+3}{a}\cos ax\Big|_0^{\frac{\pi}{2a}} + \frac{1}{a^2}\sin ax\Big|_0^{\frac{\pi}{2a}} =$$

$$=-\frac{\frac{\pi}{2a}+3}{a}\cos\left(a\cdot\frac{\pi}{2a}\right)+\frac{0+3}{a}\cos 0^\circ+\frac{1}{a^2}\sin\left(a\cdot\frac{\pi}{2a}\right)-\frac{1}{a}\sin 0=\frac{3}{a}+\frac{1}{a^2}=\frac{3a+1}{a^2}.$$

9. Вычислить определенный интеграл $\int\limits_0^5\frac{xdx}{\sqrt{1+3x}}$.

Примем $\sqrt{1+3x}=t$. Найдем пределы интегрирования для t:
если x=0, то t=1; если x=5, то t=4.

Выразим x: $1+3x=t^2$, $x=\frac{t^2-1}{3}$ и найдем дифференциал обеих частей выражения $dx=\frac{2tdt}{3}$. Подставив x, dx и найденные пределы интегрирования в интеграл, получим:

$$\int\limits_0^5\frac{xdx}{\sqrt{1+3x}}=\left|\begin{array}{l}\sqrt{1+3x}=t,\quad dx=\frac{2tdt}{3}\\ x=0,\,t=1\\ x=5,\,t=4\end{array}\right|=$$

$$=\int\limits_1^4\frac{(t^2-1)}{3\cdot t}\frac{2t}{3}dt=\frac{2}{9}\int\limits_1^4\left(t^2-1\right)dt=\frac{2}{9}\int\limits_1^4\left(t^2-1\right)dt=$$

$$=\frac{2}{9}\left(\frac{t^3}{3}-t\right)\Bigg|_1^4=\frac{2}{9}\left(\frac{64}{3}-4-\frac{1}{3}+1\right)=\frac{2}{9}\left(\frac{63}{3}-3\right)=\frac{2}{9}\cdot 18^2=4.$$

10. Вычислить несобственный интеграл или установить его расходимость $\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{x^2+1}$.

Рассмотрим предел:

$$\lim_{\alpha\to-\infty}\int\limits_\alpha^0\frac{dx}{x^2+1}+\lim_{\beta\to\infty}\int\limits_0^\beta\frac{dx}{x^2+1}=\lim_{\alpha\to-\infty}\operatorname{arctg}x\Big|_\alpha^0+\lim_{\beta\to\infty}\operatorname{arctg}x\Big|_0^\beta=$$

$=-\operatorname{arctg}(-\infty)+\operatorname{arctg}(+\infty)=-\left(-\frac{\pi}{2}\right)+\frac{\pi}{2}=\pi$. $\Rightarrow$ Несобственный интеграл $\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{x^2+1}$ сходится.

11. Вычислить интеграл $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx$ с помощью формулы Симпсона

$$\int\limits_a^b f(x)dx \approx \frac{h}{3}\left[y_0 + y_{2m} + 2\left(y_2 + y_4 + \ldots + y_{2m-2}\right) + 4\left(y_1 + y_3 + \ldots + y_{2m-1}\right)\right].$$

с точностью до 0,00001.

Полагая погрешность $\delta(n) < 10^{-5}$, имеем $\dfrac{(b-a)^5}{180n^4} y^{(4)}_{\text{наиб}} < 10^{-5}$.

Подставляя a=0, b=$\dfrac{\pi}{2}$, $y^{(4)}_{\text{наиб}} = 1$ – наибольшее значение $\left|y^{(4)}\right| = \cos x$ в интервале $\left[0; \dfrac{\pi}{2}\right]$, получим: $\dfrac{\pi^5}{2^5 \cdot 180 \cdot n^4} < 10^{-5} \Rightarrow n > 5a\sqrt[4]{\dfrac{\pi}{36}} = 8{,}5$.

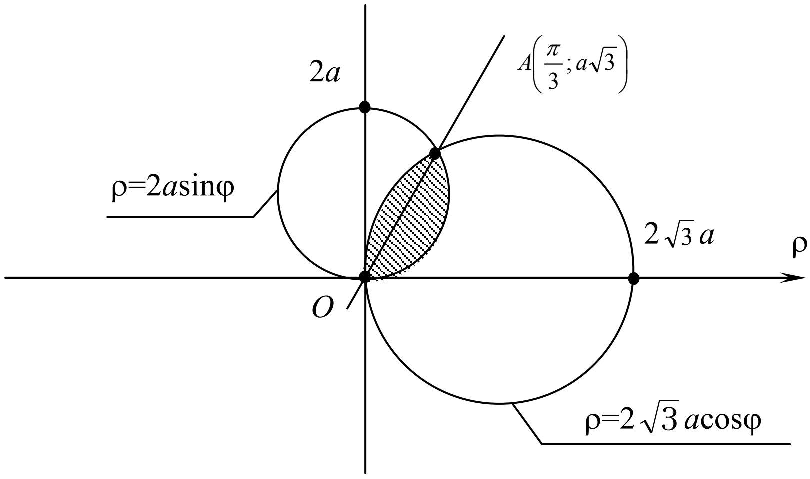
Полагая n=10 (ближайшее четное число, большее 8,5), определим точки деления x_i и соответствующие им значения y_i подынтегральной функции y=cos$x$ (с одним лишним десятичным знаком $\pi \approx 3{,}141592$):

$x_0 = 0{,}000000$	$y_0 = 1{,}000000$
$x_1 = 0{,}157080$	$y_1 = 0{,}987688$
$x_2 = 0{,}3141592$	$y_2 = 0{,}951057$
$x_3 = 0{,}471239$	$y_3 = 0{,}891007$
$x_4 = 0{,}628318$	$y_4 = 0{,}809017$
$x_5 = 0{,}785398$	$y_5 = 0{,}707107$
$x_6 = 0{,}942478$	$y_6 = 0{,}587785$
$x_7 = 1{,}099557$	$y_7 = 0{,}453991$
$x_8 = 1{,}256637$	$y_8 = 0{,}309017$
$x_9 = 1{,}413716$	$y_9 = 0{,}156435$
$x_{10} = 1{,}570796$	$y_{10} = 0{,}000000$

Подставим в формулу Симпсона:

$$\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx \approx 0{,}0523599\left(1 + 4 \cdot 3{,}196228 + 2 \cdot 2{,}656876\right) \approx 1{,}000000.$$

12. Вычислить площадь фигуры, ограниченной окружностями $\rho = 2\sqrt{3}a\cos\varphi$ и $\rho = 2a\sin\varphi$.



Решение

Точки пересечения окружностей определятся из условия $\sqrt{3}\cos\varphi = \sin\varphi$, Откуда $\operatorname{tg}\varphi = \sqrt{3} \Rightarrow \varphi = \frac{\pi}{3}$, $\rho = 2a\sin\frac{\pi}{3} = a\sqrt{3}$, $A\left(\frac{\pi}{3}; a\sqrt{3}\right)$.

$$S = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{3}} \rho^2 d\varphi + \frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \rho^2 d\varphi = 2a^2\int_0^{\frac{\pi}{3}} \sin^2\varphi d\varphi + 6a^2\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2\varphi d\varphi =$$

$$= a^2\int_0^{\frac{\pi}{3}} (1-\cos 2\varphi) d\varphi + 3a^2\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} (1+\cos 2\varphi) d\varphi =$$

$$= a^2\left(\varphi - \frac{1}{2}\sin 2\varphi\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{3}} + 3a^2\left(\varphi + \frac{1}{2}\sin 2\varphi\right)\Bigg|_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} = a^2\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{4}\right) + 3a^2\left(\frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{4}\right) =$$

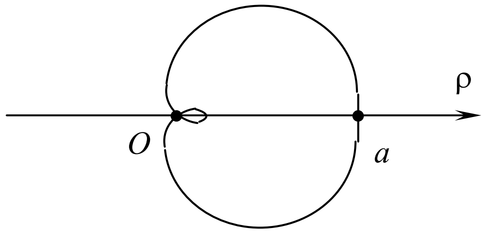
$$a^2\left(\frac{5\pi}{6} - \sqrt{3}\right) \approx 0{,}89 \text{ кв. ед.}$$

13. Вычислить длину дуги кривой $\rho = a\cos^3\frac{\varphi}{3}$.

Решение

$$L = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} dL,$$

$$dL = \sqrt{\rho^2 + (\rho')^2}\, d\varphi,$$



$$\rho' = -3a\cos^2\frac{\varphi}{3}\cdot\sin\frac{\varphi}{3}\cdot\frac{1}{3} = -a\cos^2\frac{\varphi}{3}\sin\frac{\varphi}{3},$$

$$dL = \sqrt{a^2\cos^6\frac{\varphi}{3} + a^2\cos^4\frac{\varphi}{3}\sin^2\frac{\varphi}{3}}d\varphi = a\cos^2\frac{\varphi}{3}\sqrt{\cos^2\frac{\varphi}{3} + \sin^2\frac{\varphi}{3}}d\varphi =$$

$$a\cos^2\frac{\varphi}{3}d\varphi.$$

$$L = 2a\int_0^{\frac{3}{2}\pi}\cos^2\frac{\varphi}{3}d\varphi = a\int_0^{\frac{3}{2}\pi}\left(1+\cos\frac{2\varphi}{3}\right)d\varphi = a\left(\varphi + \frac{3}{2}\sin\frac{\varphi}{3}\right)\Bigg|_0^{\frac{3}{2}\pi} =$$

$$= a\left(\frac{3}{2}\pi + \frac{3}{2}\sin\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{2}\pi - 0 - 0\right) = a\left(\frac{3}{2}\pi + 0\right) = \frac{3a}{2}\pi.$$

14. Вычислить объем тела, образованного вращением фигуры, ограниченной одной аркой циклоиды $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1-\cos t)$ вокруг оси Ox.

$$V = \pi\int_a^b y^2dx = \pi\int_0^{2\pi}a^3(1-\cos t)^2(1-\cos t)dt = \pi a^3\int_0^{2\pi}(1-\cos t)^3dt =$$

$$= \pi a^3\int_0^{2\pi}\left(1 - 3\cos t + 3\cos^2 t - \cos^3 t\right)dt =$$

$$= \pi a^3\int_0^{2\pi}\left(1 - 3\cos t + 3\frac{1+\cos 2t}{2} - \cos t\left(1-\sin^2 t\right)\right)dt =$$

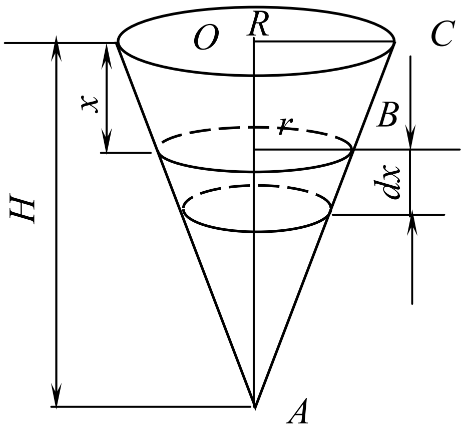
$$= \pi a^3\int_0^{2\pi}\left(\frac{5}{2} - 3\cos t + \frac{3}{2}\cos 2t - \cos t + \sin^2 t\cdot\cos t\right)dt =$$

$$= \pi a^3\int_0^{2\pi}\left(\frac{5}{2} - 4\cos t + \frac{3}{2}\cos 2t + \sin^2 t\cdot\cos t\right)dt =$$

$$= \pi a^3\left(\frac{5}{2}t - 4\sin 2\pi + \frac{3}{4}\sin 2t + \frac{\sin^3 t}{3}\right)\Bigg|_0^{2\pi} =$$

$$= \pi a^3\left(\frac{5}{2}2\pi - 4\sin 2\pi + \frac{3}{4}\sin 4\pi + \frac{\sin^3 2\pi}{3} - 0\right) = \pi a^3\cdot 5\pi = 5\pi^2a^3 \text{ куб. ед.}$$

15. Вычислить работу, которую надо произвести, чтобы выкачать воду из резервуара конической формы с вершиной, обращенной книзу (см. рисунок). Резервуар наполнен доверху водой. Радиус основания конуса R=1 м, высота конуса H=2 м.



Выделим на глубине x горизонтальный слой высотой dx. Работа A, совершаемая на поднятие слоя воды весом P, зависит от высоты его подъема x. Изменение глубины x на малую величину dx вызовет изменение объема V на величину $\Delta V = \pi r^2 dx$ (элементарный слой примем за цилиндр ввиду малости dx, r – радиус основания слоя). Выразим r через переменную x и постоянные R и H. Из подобия треугольников AOC и AO_1B имеем $r : R = \left(H - x\right) : H$. Откуда $r = \frac{R}{H}\left(H - x\right) = R - \frac{R}{H}x$. Подставив в выражение для ΔV, получим:

$$\Delta V = \pi\left(R - \frac{R}{H}x\right)^2 dx.$$

Вес ΔP слоя воды в объеме ΔV составляет:

$$\Delta P = 9807\pi\left(R - \frac{R}{H}x\right)^2 dx.$$

При изменении P на величину ΔP совершаемая работа A изменится на величину

$$dA = 9807\pi\left(R - \frac{R}{H}x\right)^2 xdx.$$

Проинтегрировав это равенство при изменении x от 0 до H, получим:

$$A = \int_0^H 9807\pi\left(R - \frac{R}{H}x\right)^2 xdx = \int_0^H 9807\pi R^2\left(x - \frac{2x^2}{H} + \frac{x^3}{H^2}\right)dx =$$

$$= 9807\pi R^2\left[\frac{x^2}{2} - \frac{2x^3}{3H} + \frac{x^4}{4H^2}\right]_0^H = \frac{9807}{12}\pi R^2 H^2.$$

Подставив числовые значения R и H, найдем: $A = 9807\pi l^2 \frac{2^2}{12} = 3269\pi$.

Примерный вариант контрольной работы №3 с решением

1. Найти сумму ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\left(n+1\right)}$.

Для нахождения суммы ряда надо найти предел при $n\to\infty$ n-й частичной суммы:

$$S_n=\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\cdots+\frac{1}{n\left(n+1\right)}.$$

Для того чтобы придать S_n более удобный вид для перехода к пределу, воспользуемся тождеством, предварительно найдя коэффициенты A и B.

$$\frac{1}{k\left(k+1\right)}=\frac{A}{k}+\frac{B}{k+1},$$

$$1=A\left(k+1\right)+Bk\Rightarrow\left(A+B\right)k+A=1\Rightarrow$$

$$\begin{cases}A+B=0\\ A=1\end{cases}\Rightarrow B=-A=-1.$$

$$\frac{1}{k\left(k+1\right)}=\frac{1}{k}+\frac{1}{k+1}.$$

Полагая здесь k=1, 2, 3,…, n, получим:

$$\frac{1}{1\cdot 2}=1-\frac{1}{2},$$

$$\frac{1}{2\cdot 3}=\frac{1}{2}-\frac{1}{3},$$

$$\frac{1}{3\cdot 4}=\frac{1}{3}-\frac{1}{4},$$

$$\cdots$$

$$\frac{1}{n\left(n+1\right)}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}.$$

Следовательно, $S_n=\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right).$

Очевидно, что в этой сумме все слагаемые попарно уничтожаются, кроме первого и последнего, поэтому

$$S_n=1-\frac{1}{n+1},\ \text{откуда}\ \lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)=1,$$

т.е. ряд сходится, и его сумма равна 1.

2.Исследовать сходимость числовых рядов:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n\cdot 4^n}{(2n-1)!}$.

Это числовой ряд с положительными членами.

Воспользуемся признаком Даламбера. Имеем:

$$\rho=\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)\cdot 4^{n+1}\cdot(2n-1)!}{(2n+1)!\cdot n\cdot 4^n}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n}\lim_{n\to\infty}\frac{4\cdot 1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot(2n-1)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot(2n-1)\cdot 2n(2n+1)}=0.$$

Так как $\rho<1$, ряд сходится;

б) $\sum\frac{3^n n!}{n^n}$.

Используем признак Даламбера

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=l.$$

Если l<1 – ряд сходится, l>1 – ряд расходится, l=1 – ?

$$u_n=\frac{3^n\cdot n!}{n^n};$$

$$u_{n+1}=\frac{3^{n+1}\cdot(n+1)!}{(n+1)^{n+1}};$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{3^{n+1}\cdot(n+1)!n^n}{(n+1)^{n+1}\cdot 3^n\cdot n!}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{3(n+1)n^n}{(n+1)^{n+1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{3n^n}{(n+1)^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{3}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}=\frac{3}{e}>1,$$

а потому ряд расходится.

в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\cdot\frac{2n+3}{5n^2-4}$.

Это знакочередующийся ряд.

Условия теоремы Лейбница выполняются:

$$\lim_{n\to\infty}u_n=\lim_{n\to\infty}\frac{2n+3}{5n^2-4}=\lim_{n\to\infty}\frac{2+\frac{3}{n}}{5n-\frac{4}{n}}=0,$$

$$u_n - u_{n+1} = \frac{2n+3}{5n^2-4} - \frac{2(n+1)+3}{5(n+1)^2-4} =$$

$$= \frac{(2n+3)\left(5n^2+10n+1\right)+(2n+5)\left(5n^2-4\right)}{\left(5n^2-4\right)\left(5n^2+10n+1\right)} = \frac{10n^2+40n+23}{\left(5n^2-4\right)\left(5n^2+10n+1\right)} > 0;$$

$$U_n > U_{n+1} \forall n \in N.$$

Так что ряд сходящийся.

Рассмотрим ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ из абсолютных величин членов данного ряда и сравним его с расходящимся гармоническим рядом $\sum_{n=1}^{\infty} v_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$. Имеем $\lim_{n\to\infty} \frac{u_n}{v_n} = \frac{2}{5} \neq 0$, так что ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ расходится. Следовательно, ряд $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \left(\frac{2n+3}{5n^2-4}\right)$ сходится условно.

г) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}$.

Воспользуемся признаком Лейбница.

Члены данного знакочередующегося ряда убывают по абсолютному значению

$$1 > \left|\frac{-1}{3}\right| > \frac{1}{5} > \left|-\frac{1}{7}\right| > \ldots$$

$$\text{и } \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2n-1} = 0.$$

Поэтому, согласно признаку Лейбница, данный ряд сходится. Установим, сходится ли этот ряд абсолютно или неабсолютно (условно). Для этого исследуем положительный ряд $\sum \frac{1}{2n-1}$, составленный из абсолютных значений членов данного ряда.

Применяя интегральный признак

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{2x-1} dx = \frac{1}{2} \lim_{\beta\to+\infty} \int_1^{\beta} \frac{d(2x-1)}{2x-1} = \frac{1}{2} \lim_{\beta\to+\infty} \ln(2x-1)\Big|_1^{\beta} =$$

$$= \frac{1}{2} \lim_{\beta\to+\infty} \ln(2\beta-1) = +\infty,$$

заключаем, что ряд с положительными членами расходится. Следовательно, данный ряд сходится неабсолютно.

3. Найти интервал сходимости степенных рядов

а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x+9)^n}{n^2\cdot 6^n}$.

Воспользуемся признаком Даламбера для ряда из абсолютных величин. Имеем:

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(x+9)^{n+1}\cdot n^2\cdot 6^n}{(n+1)^2\cdot 6^{n+1}\cdot (x+9)^n}\right|=\left|\frac{x+9}{6}\right|.$$

Ряд сходится, если $\frac{|x+9|}{6}<1$, т.е. $|x+9|<6$,

$$-6<x+9<6,\ -15<x<-3.$$

В указанном промежутке данный ряд абсолютно сходится.

Проверим граничные точки.

1) $x=-15$: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-15+9)^n}{6^n\cdot n^2}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-6)^n}{n^2\cdot 6^n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}$.

Составив ряд из абсолютных величин членов знакочередующегося ряда, получим ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$, который сходится, как обобщенный гармонический ряд вида $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$ при $p = 2$.

Следовательно, ряд $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\cdot\frac{1}{n^2}$ абсолютно сходится.

2) $x=-3$: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{6^n}{n^2\cdot 6^n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$.

Полученный ряд сходится.

Итак, областью сходимости ряда является $[-15, -3]$.

б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x+8)^{3n}}{n^2}$.

Используем признак Даламбера:

$$u_n=\frac{(x+8)^{3n}}{n^2},\quad u_{n+1}=\frac{(x+8)^{3n+3}}{(n+1)^2};$$

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|<1.$$

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(x+8)^{3n+3}n^2}{(n+1)^2(x+8)^{3n}}\right|=|x+8|^3\lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{(n+1)^2}=|x+8|^3<1.$$

$$|x+8|<1\Rightarrow -1<x+8<1\Rightarrow -9<x<-7.$$

Границы найденного интервала исследуем особо.

При $x=-7$ получим ряд с положительными членами $\sum\frac{1}{n^2}$.

Исследуем его по интегральному признаку:

$$\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^2}=\lim_{\beta\to+\infty}\int_1^{\beta}x^{-2}=\lim_{\beta\to+\infty}\left(-\frac{1}{x}\right)\Bigg|_1^{\beta}=$$

$$=\lim_{\beta\to+\infty}\left(1=\frac{1}{\beta}\right)=1,$$

т.е. ряд сходится.

При $x=-9$ получим знакочередующийся ряд с общим членом

$$a_n=\frac{(-1)^{3n}}{n^2}=\frac{(-1)^n}{n^2},$$

который сходится согласно признаку Лейбница. Следовательно, интервалом сходимости данного ряда является отрезок $-9\le x\le -7$.

4. Вычислить определенный интеграл $\int_0^{0,25}\sqrt[4]{1+2x^2}\cdot dx$ с точностью до 0,001, разложив подынтегральную функцию в ряд и почленно его проинтегрировав. Подынтегральная функция может быть представлена в виде биномиального ряда

$$(1+x)^m=1+mx+\frac{m(m-1)}{2!}x^2+\frac{m(m-1)(m-2)}{3!}x^3+\ldots$$

При замене в нем x на $2x^2$ и $m=\frac{1}{4}$:

$$\sqrt[4]{1+2x^2}=\left(1+2x^2\right)^{\frac{1}{4}}=1+\frac{1}{2}x^2+\frac{\frac{1}{4}\left(-\frac{3}{4}\right)\cdot 2^2}{2!}x^4+$$

$$+\frac{\frac{1}{4}\cdot\left(-\frac{3}{4}\right)\cdot\left(-\frac{7}{4}\right)}{3!}\cdot 2^3\cdot x^6+\ldots=1+\frac{1}{2}x^2-\frac{3}{8}x^4+\frac{7}{16}x^6-\ldots.$$

Проинтегрируем этот ряд.

$$\int_0^{\frac{1}{4}}\left(1+\frac{1}{2}x^2-\frac{3}{8}x^4+\frac{7}{16}x^6-\ldots\right)dx=$$

$$=\left(x+\frac{x^3}{6}-\frac{3x^5}{40}+\frac{7x^7}{112}-\ldots\right)\Bigg|_0^{\frac{1}{4}}=\frac{1}{4}+\frac{1}{6\cdot 4^3}-\frac{3}{40\cdot 4^5}+\frac{1}{16\cdot 4^7}\ldots=$$

$$=\frac{1}{4}+\frac{1}{384}-\frac{3}{40960}+\ldots$$

В соответствии с теоремой Лейбница ошибка вычисления определенного интеграла будет меньше 0,001 при отбрасывании членов полученного ряда, начиная с третьего.

Окончательно имеем:

$$\int_0^{0,25}\sqrt[4]{1+2x^2}\cdot dx\approx\frac{1}{4}+\frac{1}{384}\approx 0,2526\approx 0,253.$$

5. Найти три первых, отличных от нуля, члена разложения в степенной ряд решения $y = y(x)$ дифференциального уравнения, удовлетворяющего данному начальному условию:

$$y'=xy^2+1,\;\; y(1)=0.$$

Искомое решение запишем в виде ряда Тейлора при $x_0=1$:

$$y=y(x_0)+y'(x_0)\cdot(x-x_0)+\frac{y''(x_0)}{2!}\cdot(x-x_0)^2+\;\ldots$$

$$+\frac{y^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+\;\ldots$$

Из начального условия $y(x_0)=0$.

Найдем значения производных при $x_0=1$:

$$y'(1)=1;\;\; y''=y^2+x\cdot 2y\cdot y',\;\; y''(1)=0;$$

$$y'''=2y\cdot y'+2yy'+2xy'^2+2xyy''=4y\cdot y'+2xy'^2+2xyy'',$$

$$y'''=(1)=2.$$

$$y^{\mathrm{IV}}=4y'^2+4yy''+2y'^2+2x\cdot 2y'\cdot y''+2yy''+2xy'y''+2xyy''',$$

$$y^{\mathrm{IV}}(1)=6.$$

Таким образом,

$$y\approx x-1+\frac{2}{3!}(x-1)^3+\frac{6}{4!}(x-1)^4$$

или

$$y \approx x-1+\frac{1}{3}\left(x-1\right)^3+\frac{1}{4}\left(x-1\right)^4.$$

6. Разложить данную функцию $f\left(x\right)=x^2+2$ в интервале ($-\pi$; π) в ряд Фурье.

Так как функция $f\left(x\right)=x^2+2$ четная, то ряд Фурье и коэффициенты Фурье имеют вид:

$$f\left(x\right)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cdot\cos nx,$$

$$a_0=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f\left(x\right)\cdot dx;\ a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f\left(x\right)\cdot\cos nx\cdot dx\Rightarrow$$

$$a_0=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\left(x^2+2\right)dx=\frac{2}{\pi}\left(\frac{x^3}{3}+2x\right)\Bigg|_0^{\pi}=\frac{2}{\pi}\left(\frac{\pi^3}{3}+2\pi\right)=\frac{2}{3}\pi^2+4.$$

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\left(x^2+2\right)\cdot\cos nxdx=\left|\begin{matrix}u=x^2+2\\ dv=\cos nxdx\end{matrix}\right|\begin{matrix}du=2xdx\\ v=\frac{1}{n}\sin nx\end{matrix}\Bigg|=$$

$$=\frac{2}{\pi}\left(\frac{x^2+2}{n}\cdot\sin nx\Bigg|_0^{\pi}-\frac{2}{n}\int_0^{\pi}x\cdot\sin nxdx\right)=$$

$$=-\frac{4}{n\pi}\int_0^{\pi}x\cdot\sin nxdx=\left|\begin{matrix}u=x\\ dv=\sin nxdx\end{matrix}\right|\begin{matrix}du=dx\\ v=-\frac{1}{n}\cos nx\end{matrix}\Bigg|=$$

$$=-\frac{4}{n\pi}\left(-\frac{x}{n}\cdot\cos nx\Big|_0^{\pi}+\frac{1}{n}\int_0^{\pi}\cos nxdx\right)=$$

$$=\frac{4}{n^2\pi}\left(\pi\cdot\cos n\pi\right)-\frac{4}{n^2\pi}\cdot\frac{1}{n}\sin nx\Big|_0^{\pi}=\frac{4\cos n\pi}{n^2}.$$

Так как $\cos n\pi=\left(-1\right)^n$, получим: $a_n=\left(-1\right)^n\cdot\frac{4}{n^2}.$

Окончательно: $x^2+2=\frac{\pi^2}{3}+2+\sum_{n=1}^{\infty}\left(-1\right)^n\cdot\frac{4}{n^2}\cdot\cos nx.$

ТВОРЧЕСКИЕ ЗАДАНИЯ.
ТЕМЫ РЕФЕРАТОВ, ДОКЛАДОВ

1. Сущность линейной зависимости векторов
2. Билинейные и квадратичные формы. Матрицы квадратичной формы. Приведение квадратичной формы к каноническому виду. Формулировка закона инерции. Критерий Сильвестра положительной определенности квадратичной формы.
3. Сопряженные операторы в евклидовом пространстве и их свойства. Построение ортонормированного базиса. Ортогональные операторы, их свойства. Ортогональные матрицы.
4. Полярная система координат.
5. Гиперболические функции, свойства и графики.
6. Вычисление производных гиперболических функций.
7. Интерполирование функций
8. Пределы и производные: сущность, значение, вычисление
9. Интегралы Коши, Римана, Лебега.
10. Линейная аппроксимация
11. Условный экстремум. Метод множителей Лагранжа
12. Несобственные кратные интегралы.
13. Поверхностные интегралы
14. Элементы теории поля
15. Производная сложной функции нескольких переменных
16. Особые решения дифференциальных уравнений.
17. Дифференциальные уравнения в механике
18. Разностные методы решения обыкновенных дифференциальных уравнений
19. Приложения рядов к приближенным вычислениям
20. Ряд и интеграл Фурье.
21. Временные ряды. Методы наименьших квадратов и скользящей средней.
22. Численные методы решения задач математической физики: конечно-разностные схемы решения краевой задачи для уравнения Пуассона, конечно-разностные явные и неявные схемы решения задач для волнового уравнения и уравнения теплопроводности.
23. Решение краевых задач для уравнения Пуассона и смешанных задач для волнового уравнения и уравнения теплопроводности в цилиндрических областях.
24. Многомерные случайные величины
25. Функция распределения системы двух случайных величин. Совместная плотность распределения.

26. Исследование закона распределения случайной величины по эксплуатационным данным.

27. Исследование зависимостей методами регрессионного анализа

28. Исследование взаимосвязей методами корреляционного анализа.

ТРЕБОВАНИЯ К КАЧЕСТВУ ВЫПОЛНЕНИЯ РЕФЕРАТОВ ИЛИ ДОКЛАДОВ

Реферат или доклад выполняются по единой структуре: введение, основную часть, заключение, список литературы. *Во введении* излагается научный аппарат, которым руководствуется исследователь, выполняя поисковую работу. Введение должно содержать оценку современного состояния отражаемого в реферате вопроса; цели, задачи выполнения реферата и обоснование выбираемых источников для изучения, краткую историю вопроса или раскрывать значимость темы реферата. ***Основная часть исследования*** – содержательная часть реферата или доклада. Чаще всего реферат не имеет глав, а только параграфы; может и не иметь вообще никакого деления на части. Определяющим является содержание, раскрывающее достижение поставленной цели. В реферате приводятся основные теоретические, экспериментальные описательные результаты; предпочтение отдаются новым результатам, важным для решения практических вопросов. Допускается излагать содержание источника с большей или меньшей детализацией. Следует ограничиваться основной темой и результатами, изложенными в реферируемом источнике. Изложение материала должно быть кратким и точным. Следует употреблять синтаксические конструкции, свойственные языку научных документов; избегать сложных грамматических оборотов; применять стандартизованную терминологию. *Заключение* должно содержать: краткие выводы по теме реферата; оценку полноты решения поставленных задач; оценку достижения цели реферата; рекомендации по конкретному использованию результатов выполнения реферата. *Библиографический список* должен содержать сведения об источниках, использованных при составлении реферата. Количество использованных источников должно быть не менее трех.

ФОРМЫ КОНТРОЛЯ И ОЦЕНКИ ВЫПОЛНЕНИЯ ЗАДАНИЯ

Эффективность самостоятельной работы студентов в значительной мере зависит от организации ее контроля со стороны преподавателя.

Цель контроля – помочь студенту методически правильно, с минимальными затратами времени осваивать теоретический материал и приобретать навыки решения определенного класса задач по учебным дисциплинам.

Виды контроля самостоятельной работы студентов: текущий (оперативный); рубежный; итоговый; самоконтроль.

В качестве форм отчета о самостоятельной работе могут быть представлены:

– оценка устного ответа на вопрос, сообщения, доклада на практическом занятии;

– реферат, выполненный по теме, изучаемой самостоятельно;

– представленные тексты контрольных работ и их защита;

– тестирование, Интернет-экзамен, выполнение письменной контрольной работы по изучаемой теме или дисциплине в целом;

– балльно-рейтинговая система в оценке знаний студентов;

– курсовые экзамены и зачеты;

– статьи, тезисы выступления и др. в научном, научно-популярном, учебном издании по итогам самостоятельной работы и научно-исследовательской работы.

Важнейшую роль в руководстве самостоятельной работой студентов играют индивидуальные собеседования преподавателя и студента. Регулярные консультации обеспечивают устойчивую обратную связь с обучаемыми и позволяют, при необходимости, быстро проводить коррекцию в организации учебного процесса по отношению к отдельному студенту или к конкретной группе.

СИСТЕМА ТРЕНИНГА И САМОПРОВЕРКИ ЗНАНИЙ. ТЕСТЫ

1. Если **A** = $\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 4 & -5 \end{bmatrix}$ и **B** = $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$, то матрица **C**=2**A** + **B** имеет вид:

1) $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 8 & -8 \end{bmatrix}$; 2) $\begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 8 & -8 \end{bmatrix}$; 3) $\begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 8 & -8 \end{bmatrix}$; 4) $\begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 4 & -3 \end{bmatrix}$.

2. Определитель $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \end{vmatrix}$ равен:

1) -1; 2) 5; 3) -5; 4) 1.

3. Прямая проходит через точки O $(0;0)$ и B $(5;-15)$. Тогда ее угловой коэффициент равен:

1) -5; 2) 3; 3) 5; 4) -3.

4. Если уравнение гиперболы имеет вид $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{9}=1$, то длина её действительной полуоси равна:

1) 2; 2) 4; 3) 9; 4) 3.

5. Нормальный вектор плоскости $x+2y+z-15=0$ имеет координаты:

1) $(2;1;-15)$; 2) $(1;1;-15)$; 3) $(1;2;1)$; 4) $(1;2;-15)$.

6. Предел $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg} 2x}{\sin 3x}$ равен:

1) $\frac{2}{3}$; 2) $\frac{1}{6}$; 3) $\frac{3}{2}$; 4) 6.

7. В пространстве имеется отрезок, соединяющий две точки с абсциссами одинаковых знаков. Тогда этот отрезок не может пересекать…

1) плоскость *Oxy;* 2) плоскость *Ozy;* 3) плоскость *Oxz;* 4) прямую *Ox*.

8. Производная функции $y=\cos(x^2-1)$ имеет вид:

1) $2x\sin(x^2-1)$; 2) $x\sin(x^2-1)$;

3) $-2x\sin(x^2-1)$; 4) $-\sin(x^2-1)$.

9. Горизонтальная асимптота для графика функции $y = \frac{5 - 8x^2}{2x^2 + 2x + 3}$ имеет вид…

1) $x = -\frac{1}{4}$; 2) $y = -\frac{1}{4}$; 3) $y = -4$; 4) $y = \frac{3}{4}$.

10. Частная производная функции $z = x^4 \cos y$ по переменной y в точке $M\left(1; \frac{\pi}{2}\right)$ равна:

1) 1; 2) -1; 3) 0; 4) 4.

11. Множество первообразных функции $f(x) = e^{6x+2}$ имеет вид:

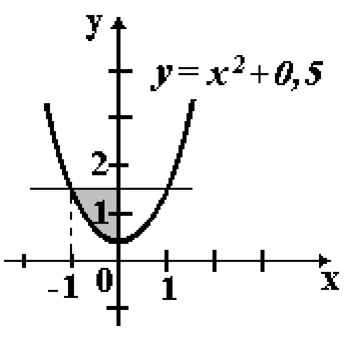
1) $6e^{6x+2} + C$; 2) $e^{6x+2} + C$;

3) $-6e^{6x+2} + C$; 4) $\frac{1}{6}e^{6x+2} + C$.

12. Градиент скалярного поля $u = x^2 - xz + yz$ в точке A(0; 1; 1) имеет вид:

1) $\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$; 2) $-\vec{i} + \vec{j} + 2\vec{k}$; 3) $-\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$; 4) $-\vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k}$.

13. Площадь фигуры, изображенной на рисунке, определяется интегралом:



1) $\int_{-1}^{0}\left(x^2 - 1\right)dx$; 2) $\int_{-1}^{0}\left(x^2 + 0{,}5\right)dx$;

3) $\int_{0}^{2}\left(1{,}5 - x^2\right)dx$; 4) $\int_{-1}^{0}\left(1 - x^2\right)dx$.

14. Если $z_1 = 1 - i, \quad z_2 = 2 + i$, то $z_1 \cdot z_2$ равно:

1) $U = \ln\left(3x - y^2 + 2z^3\right)$; 2) $3 - i$; 3) $3 + 3i$; 4) $2 - 3i$.

15. Модуль комплексного числа $z = 2 - 3i$ равен

1) $\sqrt{13}$; 2) $-\sqrt{13}$; 3) -5; 4) 1.

16. Дифференциальное уравнение $y' - \dfrac{3}{x} y = x$ является:

1) однородным дифференциальным уравнением;
2) линейным неоднородным дифференциальным уравнением;
3) дифференциальным уравнением с разделяющимися переменными;
4) уравнением Бернулли.

17. Дано дифференциальное уравнение $y' = (3k - 1)x^2$, тогда функция $y = \dfrac{2}{3}x^3$ является его решением при k, равным:

1) 1; 2) 2; 3) 0; 4) 3.

18. Дано линейное однородное дифференциальное уравнение $y'' - 4y' + 3y = 0$, тогда его общее решение имеет вид:

1) $C_1 e^{x} + C_2 e^{3x}$; 2) $C_1 e^{x} + C_2 e^{-3x}$;
3) $C_1 e^{-x} + C_2 e^{-3x}$; 4) $C_1 e^{-x} + C_2 e^{3x}$.

19. Общий член последовательности $1, \dfrac{2}{3}, \dfrac{3}{5}, \dfrac{4}{7}, \ldots$ имеет вид:

1) $a_n = (-1)^{n+1} \dfrac{n}{2n+1}$; 2) $a_n = (-1)^{n} \dfrac{n}{2n-1}$;

3) $a_n = \dfrac{n}{2n-1}$; 4) $a_n = \dfrac{n}{2n+1}$.

20. Укажите правильное утверждение относительно сходимости числовых рядов

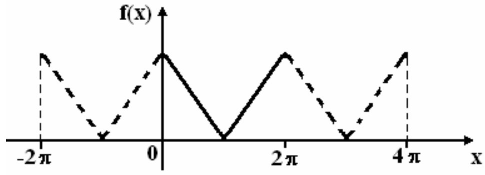
$$\text{А) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{4^n} \text{ и В) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{5}{\sqrt{n+2}}$$

1) А – расходится, В – сходится;
2) А и В сходятся;
3) А – сходится, В – расходится;
4) А и В расходятся.

21. Радиус сходимости степенного ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{x^{3n}}{125^n}$

1) 2; 2) $\dfrac{1}{5}$; 3) 5; 4) ∞.

22. Функция $f(x)$ при $x \in [0; 2\pi]$ и её периодическое продолжение заданы на рисунке.



Тогда ряд Фурье для этой функции имеет вид:

1) $\dfrac{a_0}{2} + \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx$; 2) $\dfrac{a_0}{2} + \sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx$;

3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx$; 4) $\dfrac{a_0}{2} + \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx$.

23. Дана функция $f(x) = 3x$, $x \in [-\pi; \pi]$. Тогда коэффициент a_4 разложения $f(x)$ в ряд Фурье равен:

1) $\dfrac{3}{\pi}$; 2) 0; 3) π; 4) $\dfrac{3\pi}{2}$.

24. Несовместные события A, B, C образуют полную группу, если…

1) $P(A) = \dfrac{1}{3}$, $P(B) = \dfrac{1}{4}$, $P(C) = \dfrac{5}{12}$;

2) $P(A) = \dfrac{1}{3}$, $P(B) = \dfrac{1}{3}$, $P(C) = \dfrac{1}{3}$;

3) $P(A) = \dfrac{5}{14}$, $P(B) = \dfrac{1}{2}$, $P(C) = \dfrac{2}{14}$;

4) $P(A) = \dfrac{1}{8}$, $P(B) = \dfrac{1}{4}$, $P(C) = \dfrac{1}{8}$.

25. Игральная кость бросается один раз. Тогда вероятность того, что на верхней грани выпадет *не более пяти очков*, равна:

1) $\dfrac{1}{6}$; 2) $\dfrac{2}{3}$; 3) $\dfrac{5}{6}$; 4) 1.

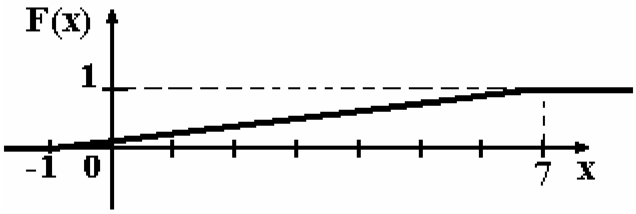
26. Дискретная случайная величина X задана законом распределения вероятностей:

X	-1	0	3
p_i	0,1	0,3	0,6

Тогда математическое ожидание случайной величины $Y = 3X$ равно:

1) 6; 2) 4,7; 3) 5,7; 4) 5,1.

27. График функции распределения вероятностей непрерывной случайной величины X имеет вид:



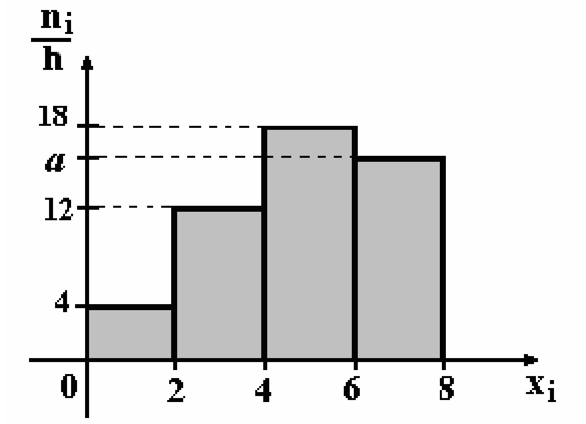
Тогда математическое ожидание X равно:

1) 8; 2) 4; 3) 3; 4) 7.

28. Непрерывная случайная величина подчинена нормальному закону распределения с функцией плотности $f(x)=\frac{1}{2\sqrt{\pi}}e^{-\frac{(x-1)^2}{4}}$. Найти $D[3X-5]$.

1) 4; 2) 18; 3)2; 4) 1.

29. По выборке объема n=100 построена гистограмма частот:



Тогда значение a равно:

1) 66; 2) 15; 3) 17; 4) 16.

30. Мода вариационного ряда 5, 6, 7, 9, 9, 12, 13 равна …

СПИСОК РЕКОМЕНДУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Письменный, Д.Т. Конспект лекций по высшей математике [Текст]: в 2 ч. / Д.Т. Письменный. –М.: Айрис-Пресс, 2011. – Ч.1. – 288 с.

2. Письменный Д.Т. Конспект лекций по высшей математике [Текст]: в 2 ч. / Д.Т. Письменный. – М.: Айрис-Пресс, 2015. – Ч.2. – 256 с.

3. Данко, П.Е. Высшая математика в упражнениях и задачах [Текст] / П.Е. Данко, А.Г. Попов, Т.Я. Кожевникова. – М.: АСТ, Мир и образование, 2014. – 816 с.

4. Шипачев, В.С. Высшая математика: полный курс [Текст]: учебник для бакалавров / В.С. Шипачев; под ред. А.Н. Тихонова. – 4-е изд., испр. и доп. – М.: Юрайт, 2015. – 608 с.

5. Гнеденко, Б.В. Элементарное введение в теорию вероятностей [Текст] / Б.В. Гнеденко, А.Я. Хинчин. – М.: Либроком, 2013. – 208 с.

6. Лунгу, К.Н. Сборник задач по высшей математике. 1 курс [Текст] / К.Н. Лунгу, Д.Т. Письменный. –М.: Айрис-Пресс, 2013. – 592 с.

7. Лунгу, К.Н. Сборник задач по высшей математике. 2 курс [Текст] / К.Н. Лунгу, Д.Т. Письменный. – М.: Айрис-Пресс, 2013. – 576 с.

8. Беклемишева, Л.А. Сборник задач по аналитической геометрии и линейной алгебре [Текст] / Л.А. Беклемишева, А.Ю. Петрович, И.А. Чубаров. – М.: Физматлит, 2014. – 496 с.

9. Клетеник, Д.В. Сборник задач по аналитической геометрии [Текст] / Д.В. Клетеник. – М.: Лань, Профессия, 2010. – 224 с.

10. Кудрявцев, Л.Д. Курс математического анализа [Текст]: учебник: в 3 т. / Л.Д. Кудрявцев. – М.: Юрайт, 2015. – Т.1. – 704 с.

11. Кудрявцев, Л.Д. Курс математического анализа [Текст]: учебник: в 3 т. / Л.Д. Кудрявцев. – М.: Юрайт, 2014. – Т.2. – 720 с.

12. Бугров, Я.С. Высшая математика [Текст]: задачник / Я.С. Бугров, С.М. Никольский. –М.: Юрайт, 2015. – 192 с.

13. Лунгу, К.Н. Руководство к решению задач [Текст]: в 2 ч. / К.Н. Лунгу, Е.А. Макаров. – М.: Физматлит, 2014. – Ч.1. – 216 с.

14. Лунгу К.Н., Макаров Е.А. Руководство к решению задач [Текст]: в 2 ч. / К.Н. Лунгу, Е.А. Макаров. – М.: Физматлит, 2015. – Ч.2. – 384 с.

15. Запорожец, Г.И. Руководство к решению задач по математическому анализу [Текст]: учеб. пособие / Г.И. Запорожец. – Изд. 6-е, стер. – СПб.: Лань, 2010. – 460 с.

16. Выгодский, М.Я. Справочник по высшей математике [Текст] / М.Я. Выгодский. – М.: АСТ: Астрель, 2010. – 703 с.

17. Теория вероятностей и математическая статистика в задачах [Текст] / В.А. Ватутин, Г.И. Ивченко, Ю.И. Медведев, В.П. Чистяков. – М.: Ленанд, 2015. – 386 с.

18. Гмурман В.Е. Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике [Текст] / В.Е. Гмурман. – М.: Юрайт, 2015. – 418 с.

19. Гарькина, И.А. Тесты по математике с тезисным изложением теоретического материала [Текст] / И.А. Гарькина, А.М. Данилов, А.Н. Круглова. – Пенза: ПГУАС, 2013. – 392 с.

О Г Л А В Л Е Н И Е

Учебное издание

Гарькина Ирина Александровна
Данилов Александр Максимович

МАТЕМАТИКА

Методические указания
к самостоятельной работе студентов
по направлению подготовки 08.03.01 «Строительство»

В авторской редакции
Верстка; Н.А. Сазонова

Подписано в печать 30.06.16. Формат 60×84/16.
Бумага офисная «Снегурочка». Печать на ризографе.
Усл. печ. л. 0,93. Уч.-изд. л. 1,0. Тираж 80 экз.
Заказ № 453.

Издательство ПГУАС.
440028, г.Пенза, ул. Германа Титова, 28.