

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Федеральное государственное бюджетное
образовательное учреждение высшего образования
«Пензенский государственный университет
архитектуры и строительства»
(ПГУАС)

Л.А. Найниш

ИНЖЕНЕРНАЯ ГРАФИКА

Рекомендовано Редсоветом университета
в качестве учебного пособия для студентов,
обучающихся по направлению подготовки 08.03.01 «Строительство»

Пенза 2016

УДК 515 (07)
ББК 22.151.3 я 73
Н20

Рецензенты: доктор педагогических наук, профессор, заведующий кафедрой «Теория и методика обучения математики и информатики» М.А. Родионов ();
доцент кафедры «Прикладная информатика» Л.Ю. Ремонтова (ПензГТУ)

Найниш Л.А.

Н20 Инженерная графика: учеб. пособие по направлению подготовки 08.03.01 «Строительство»/ Л.А. Найниш . – Пенза: ПГУАС, 2016. – 184 с.

Даны примеры решения основных позиционных и метрических задач, построения контуров собственных и падающих теней геометрических элементов различных реальных объектов. Выявлен и сформулирован закон построения плоских изображений трехмерных объектов. Установлены условия, при которых плоские изображения сохраняют всю геометрическую информацию исходных объектов, становясь геометрическими моделями.

Подготовлено на кафедре «Начертательная геометрия и графика» и предназначено для использования студентами, обучающимися по направлению подготовки 08.03.01 «Строительство», при изучении дисциплины «Инженерная графика».

ПРЕДИСЛОВИЕ

В основе изучения законов построения плоских изображений трехмерных объектов для нужд техники и строительства и приемов работы с ними лежит инновационный системный подход, позволяющий изучать одновременно все существующие методы построения таких плоских изображений как перспектива, аксонометрия, эпюр Монжа. В пособии представлены примеры решения основных позиционных и метрических задач, построения контуров собственных и падающих теней геометрических элементов различных реальных объектов. Предложенный подход способствует развитию способов интеллектуальной деятельности, которая развивает одновременно логическое и образное виды мышления.

Формирование мотивации к освоению инженерной графики способствует раскрытию значения изображений в жизни человека, как способ фиксации и хранения информации. В работе выявлен и сформулирован закон построения плоских изображений трехмерных объектов, установлены условия, при которых плоские изображения сохраняют всю геометрическую информацию исходных объектов, становясь геометрическими моделями.

Предлагаемое учебное пособие ориентировано на формирование у студентов следующей компетенции:

владением основными законами геометрического формирования, построения и взаимного пересечения моделей плоскости и пространства, необходимыми для выполнения и чтения чертежей зданий, сооружений, конструкций, составления конструкторской документации и деталей

В результате освоения компетенции студент должен:

з н а т ь :

основные законы геометрического формирования, построения и взаимного пересечения моделей плоскости и пространства, необходимыми для

выполнения и чтения чертежей зданий, сооружений, конструкций, составления конструкторской документации и деталей

у м е т ь :

строить и взаимное пересечение моделей плоскости и пространства, необходимыми для выполнения и чтения чертежей зданий, сооружений, конструкций, составления конструкторской документации и деталей

в л а д е т ь :

основными законами геометрического формирования, построения и взаимного пересечения моделей плоскости и пространства, необходимыми для выполнения и чтения чертежей зданий, сооружений, конструкций, составления конструкторской документации и деталей.

Выявление логической структуры учебного курса позволило сформировать доказательную базу предлагаемого варианта учебного курса. Это, в свою очередь, существенно облегчает его восприятие.

ВВЕДЕНИЕ

Введение в любой курс начинается с определения его цели и задач. Чтобы сформулировать цель и задачи учебного курса «Технический рисунок», необходимо ввести ряд определений.

Геометрическая информация – это сведения о размерах, форме и относительном положении объекта в пространстве. Эту информацию доставляют почти все известные человеку объекты. Поэтому получение и переработка такой информации является важной стороной деятельности человека.

Каждый объект доставляет его наблюдателю различную информацию. Понятно, что мы отличаем один объект от другого потому, что каждый из них доставляет нам различную информацию. Но среди этой информации можно найти области одинаковой информации, которая принадлежит различным объектам. Если наблюдателя интересует именно эта информация, то не возникает принципиальных различий, от какого объекта ее можно получить. Это дает возможность заменить один объект другим. В результате можно говорить о процессе моделирования.

Моделирование – это процесс замены одного объекта другим по циклу одинаковой информации. Объект, которым заменяют, называют – *моделью*. Объект, который заменяют, – *исходным*. Если основанием для замены является геометрическая информация, то мы имеем дело с процессом *геометрического моделирования* [3].

Получить геометрическую информацию можно непосредственно наблюдая объект. Но, к сожалению, это не всегда возможно. Наблюдаемый объект может быть недостижим или вообще отсутствовать. Например, возникла необходимость восстановить разрушенное здание. Как определить его размеры, форму, взаимное расположение деталей? Или: как будет выглядеть проектируемый объект, которого пока еще нет? Каковы его размеры и форма? На все эти вопросы можно получить ответ, если есть что-то, что может предоставить необходимую геометрическую информацию, заменив собой объект. Таким заменителем обычно оказываются макеты, фотографии, чертежи, рисунки и т.д., которые дают наблюдателю необходимую геометрическую информацию об исходном объекте.

Геометрической информацией обладают почти все окружающие нас объекты, поэтому процесс получения и переработки геометрической информации является широко распространенной процедурой. Это обуславливает большую значимость геометрического моделирования в жизни людей.

Изучением процесса построения геометрических моделей занимается инженерная графика, **основной целью** которой является построение геометрических моделей. Конкретная реализация этой цели определяется следующими **задачами**:

- изучение закона построения геометрических моделей,

- освоение приемов работы с геометрическими моделями.

Для решения этих задач необходимо освоить теоретические знания по темам, указанным в схеме на рис. 1, приобрести навыки в моделировании различных геометрических объектов (точек, линий, плоскостей и поверхностей) и освоить приемы при решении позиционных и метрических задач.

Схема на рис. 1 представляет собой моноструктуру. Она отражает логическую связность дидактических единиц учебного курса «Инженерная графика» [12]. Все дидактические единицы связаны друг с другом так, что каждый последующий шаг опирается на прочное знание всего предыдущего учебного материала. Сначала нужно изучить устройство проекционного аппарата и алгоритм его работы применительно к общему случаю и частным вариантам (перспективе, аксонометрии и эпюру Монжа). Затем научиться строить модели основных геометрических объектов (точек, линий, плоскостей и поверхностей). Затем освоить приемы работы с этими моделями.

При этом моделирование каждой последующей группы геометрических объектов опирается на теоретический и практический материал, который описывает процесс построения моделей предыдущей группы. Учебный материал, описывающий процесс построения плоских моделей всех геометрических объектов, является основой для изучения приемов решения первой группы позиционных задач, которые, в свою очередь, являются базовыми для решения второй группы этих задач. После освоения раздела «Позиционные задачи» можно приступать к построению теней. Обе группы позиционных задач оказываются основой для решения метрических задач, на которых основано построение разверток геометрических поверхностей.

Такая логическая структура учебного курса накладывает жесткие требования на методику его освоения, характерной чертой которой является регулярность в контроле качества знаний и максимально возможная индивидуализация обучения. Результатом освоения этого учебного курса является формирование алгоритмического мышления, которое гармонично сочетает в себе образ и логику. Эта гармония образного и логического мышления выгодно отличает инженерную графику от многих других дисциплин технического вуза.



Рис. 1. Логическая структура учебного курса «Инженерная графика»

Следует обратить внимание на значение изображений в жизни человека, как технических,

С давних пор человечество владеет языком изображений. Этот язык является универсальным средством общения. Такую универсальность обеспечивают следующие особенности изображений:

1. Они понятны людям любой национальности. Язык изображений является средством межнационального общения. С помощью изображений земляне пытаются установить общение с жителями иных планет.

2. Язык изображений является также средством межвременного общения. Современному человеку понятны изображения, которые сделаны несколько тысячелетий назад. Мы получаем информацию об уровне развития древнейших цивилизаций по изображениям, которые они нам оставили. Такую же информацию получают о нас наши потомки, которые будут жить много веков спустя.

3. Изображения являются информационно насыщенными в большей степени, чем письменность. Это обстоятельство обеспечило широкое применение изображений в технике и строительстве. Без чертежей невозможно создание и эксплуатация различных технических устройств и строительных сооружений

4. Неоценимую роль играют изображения как средство фиксации, хранения и обработки геометрической информации. Поскольку геометрической информацией обладают почти все реальные объекты, то фиксация этой информации в изображениях является важной составляющей человеческого бытия.

В зависимости от особенностей фиксируемой информации и целей ее использования все существующие изображения можно поделить на два вида: художественные и технические. Технические изображения, в свою очередь подразделяются на перспективу, аксонометрию, эпюр Монжа, проекции с числовыми отметками (рис. 2).

Процесс создания этих изображений предполагает следующие отличия. Создание художественных изображений называется рисованием или живописью. Его характерной чертой является игнорирование использования специальных инструментов для проведения линий. Процесс создания технических изображений называется черчением, где проведение различных линий требует использования специальных инструментов.

Из перечисленных видов изображений раньше всех применялась перспектива. Есть сведения, что египетские пирамиды, храмы древней Греции и Рима были построены по изображениям, которые напоминают перспективные. Попытки объяснить построение перспективных изображений с геометрических позиций были еще в трудах древнегреческого ученого Эсхила (525 – 456 гг. до н. э.).



Рис. 2. Виды изображений

Использовал геометрию для описания процесса построения перспективных изображений и древнегреческий ученый Демокрит (460 – 370 гг. до н.э.). В конце первого века до новой эры греческий ученый Витрувий обобщил труды Эсхила и Демокрита. Это позволило сформулировать правила построения перспективы. Первые попытки сформулировать правила построения теней отмечены во втором веке новой эры в работах еще одного древнегреческого ученого – Птолемея [14]. В результате перспектива раньше всех остальных подвидов изображений обрела теоретическую базу.

Новый толчок в своем развитии теория перспективы получила в эпоху возрождения. Исследования в области построения перспективных изображений подхватили такие ученые, как Филиппо Брунеллески (1377–1446), Лоренцо Гильберти (1378–1455), Леон Батиста Альберти (1404–1472) и Пьеро дель Борго. Наибольший вклад в построение теории перспективы внесли титаны Возрождения – Леонардо да Винчи и Альбрехт Дюрер.

Успешно развивалась теория перспектива в трудах русских ученых и художников, таких как А.Г. Венецианов, С.К. Зарянка, П.П. Чистяков, А.П. Сапожников, Я.А. Савостьянов, Н.А. Рынин, Н.И. Чечелев, Н.Н. Чернецов, И.П. Машков, и многих других. В настоящее время эта теория используется художниками, скульпторами, архитекторами и дизайнерами при изображении трехмерных объектов на плоскости.

Необходимость построения изображений, обладающих не только наглядностью, но и точностью, вызвала к жизни аксонометрию, впервые использованную в XVI веке для иллюстрации работ Г. Агриколы. Примерно

в то же время Жирар Дезарг предложил строить перспективу по координатам. Тем самым он положил начало методу аксонометрических проекций, который до сих пор применяется как средство выражения технической и архитектурной мысли. [6].

Бурное развитие техники требовало изображений, которые сохраняли форму и размеры исходных объектов. Это требование было удовлетворено Гаспаром Монжем в VIII в. Он предложил такой способ построения изображений, который позволял максимально возможно сохранять форму и размеры исходных объектов, это достоинство сочетается с существенным недостатком: эти изображения мало напоминали те, которые воспринимает глаз человека. В настоящее время, несмотря на указанный недостаток, такой способ широко используется в самых различных областях науки и техники.

Эпоха путешествий требовала создания изображений, в которых нужно было фиксировать геометрическую информацию об объектах, имеющих большие размеры длины и ширины по сравнению с высотой. Это были рельефы различной местности. Они изображались с помощью проекций с числовыми отметками. Этот метод лег в основу создания навигационных карт.

В результате можно сказать, что изображения являются очень важной частью жизни человека. Это способ фиксации и хранения информации. Изображения обладают большей информационной насыщенностью по сравнению с письменностью. В настоящее время, когда объем информации растет с катастрофической быстротой, фиксация информации в изображениях имеет несомненное преимущество.

Это обстоятельство обостряет проблему, связанную с обучением способам создания плоских изображений трехмерных объектов. К ним относятся черчение и рисование.

В настоящее время бытует мнение, что рисовать может научиться только человек, обладающий соответствующими способностями. Но если бросить взгляд назад, мы увидим, что были времена, когда читать и писать могли только избранные. Все остальные считались, как бы неспособными обучиться этим премудростям. Прошло не так уж много времени, и неграмотный человек стал вызывать удивление. Но вот отношение к обучению рисованию с тех времен мало изменилось, хотя попытки обучать всех поголовно изображению трехмерного мира на плоскости все-таки существуют. В школах введены уроки рисования. Но результаты этой попытки для многих оканчиваются плачевно. Они получают пожизненный приговор: к рисованию не способен. Этот приговор конечно не смертелен, и человек может с ним жить долгую жизнь, не понимая, что многие аспекты реальной действительности остались за пределами его сознания.

С черчением, на первый взгляд, дело обстоит несколько лучше. Это объясняется жесткой необходимостью владения способами построения технических изображений. В соответствующих учебных заведениях изучается теоретическая основа создания таких изображений (начертательная геометрия). Но почему-то в школе изучают ее прикладную составляющую: черчение. Таким образом нарушается логика в освоении способа построения технических изображений. В результате у большинства людей складывается впечатление, что черчение – это лишь умение проводить линии в соответствии с требованиями стандартов.

Как же обучить людей способам создания плоских изображений трехмерных объектов? Существующие методики обучения рисованию и черчению пока не дают. Причиной этому оказывается отсутствие понимания основных законов построения плоских изображений трехмерных объектов.

1. Что общего в возникновении художественных и технических изображений? Иначе говоря, существуют ли закономерности этого процесса?

2. Что нужно сделать, чтобы в них сохранялась вся геометрическая информация исходного объекта? Иначе говоря, какие существуют условия узнаваемости исходного объекта на его изображении?

3. Какие существуют приемы работы с созданными изображениями?

Ответ на эти вопросы позволяет создать алгоритмическую методику, благодаря которой можно каждого человека обучить процессу рисования и черчения.

Чтобы этот процесс стал понятен для подавляющего числа обучающихся, нужно выбрать соответствующий язык. Такой язык был выбран достаточно давно. Им оказалась геометрия. С помощью геометрии объясняли процесс возникновения перспективных изображений еще титаны возрождения. Но геометрия достаточно развитая область человеческого знания. Она содержит много различных разделов. Какой из них наиболее соответствует для описания процесса создания плоских изображений трехмерных объектов? Наиболее соответствует задачам этого процесса проективная геометрия. Она позволяет с общих позиций рассматривать интересующий процесс. Это существенно упрощает понимание многих его закономерностей. Но проективная геометрия не изучается в школе. В результате это осложняет понимание процесса создания плоских изображений трехмерных объектов.

Предлагаемый учебный курс разработан на основе алгоритмической методики освоения процесса создания плоских изображений трехмерных объектов. В него включены базовые геометрические знания проективной геометрии, что, по мнению автора, облегчит его усвоение.

Контрольные вопросы

1. Что такое геометрическая информация?
2. Дать определение процессу моделирования.
3. Какой объект называется исходным?
4. Какой объект принято называть моделью?
5. Что называется процессом геометрического моделирования?
6. Привести примеры известных Вам геометрических моделей.
7. Что является основной задачей начертательной геометрии?

1. БАЗОВЫЕ ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ЗНАНИЯ

Поскольку начертательная геометрия пользуется геометрией для описания процесса возникновения изображений, то для ее освоения необходимы базовые геометрические знания. Они складываются из школьных знаний геометрии и фундаментальных разделов многомерной проективной геометрии. Рассмотрим эти разделы.

1.1. Геометрическое пространство

Геометрическим пространством принято считать бесконечное множество геометрических элементов. Например, прямую можно считать пространством, если она представляется как множество точек. Плоскость как пространство является множеством точек или прямых. Этот ряд примеров можно продолжать достаточно долго, что обеспечивается универсальностью определения пространства.

Распространенным способом образования пространства является кинематический. Суть его заключается в том, что некоторый элемент, например точка, или прямая, или плоскость, перемещаясь по какому-либо закону, образует это пространство. Например, результатом перемещения точки является линия. Прямолинейное перемещение образует прямую линию, криволинейное – кривую линию. Перемещение прямой или кривой линии образует плоскость, поверхность или пространство и т. д.

Геометрическое пространство отличают следующие свойства, которые необходимо учитывать при работе с ним:

- относительность;
- абстрактность;
- размерность;
- проективность.

Относительность. Любой геометрический элемент может являться одновременно пространством, и наоборот, любое пространство может оказаться элементом. Здесь важно понять, что принцип относительности действует и в геометрии. Любое определение не является жестко фиксированным по отношению к определяемому объекту. Например, прямая может быть представлена как множество точек, тогда она представляет собой пространство. Если она мыслится как неделимый объект, тогда она может быть элементом плоскости или другого пространства.

Абстрактность. Геометрическое пространство является математическим объектом, и, как любой математический объект, оно не существует в реальной действительности. Действительно, любой геометрический объект является неким свойством, которое присуще большому множеству реальных объектов. Например, свойство «быть малым» обладают большое коли-

чество реальных объектов. Если отвлечься от реальности, то оно превращается в геометрическое понятие «точка», которая вообще не имеет размеров. В жизни не существует идеально прямолинейных объектов, но это свойство в своем идеальном варианте порождает геометрическую прямую. Такой же вывод можно сделать о любом геометрическом объекте. Поскольку пространство представляет собой множество таких объектов, то оно тоже не существует в реальности, т.е. абстрактно.

Размерность. Одной из распространенных операций над геометрическими пространствами является выделение элемента этого пространства. Для этого в пространстве фиксируется система координат и намечается процедура соотнесения элементов с этой системой. В результате образуется некий набор чисел, который принято считать размерностью этого пространства.

Рассмотрим несколько примеров применительно к линейным пространствам. Положению произвольных точек A и B на прямой l (рис. 3) ставится в соответствие набор из одного числа. Это расстояние от выбранной точки до некоторой фиксированной точки O , играющей роль координатной системы. В результате прямая, как множество точек, представляет собой одномерное пространство.

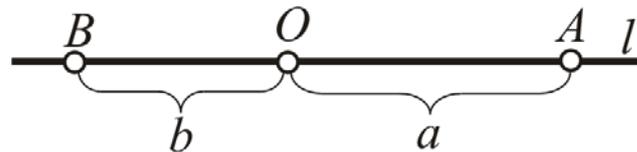


Рис. 3. Выделение точки из множества точек прямой

Положению точки A в плоскости ставится в соответствие набор из двух чисел (рис. 4), которые считываются на координатных осях x и y . Процедура сопоставления заключается в проведении через точку прямых, параллельных осям координат. Множество точек плоскости – двухмерное пространство.

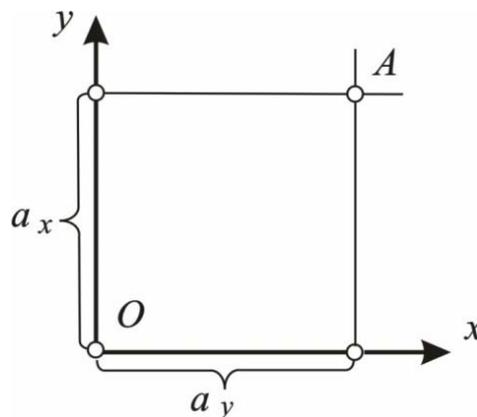


Рис. 4. Выделение точки из множества точек в плоскости

Положению точки A в трехмерном пространстве соответствует набор из трех чисел (рис. 5). Для того чтобы ее выделить, необходимо выполнить известную процедуру. Через заданную точку провести три плоскости α, β, γ . Каждая из этих плоскостей пересечет ось координат, которой она перпендикулярна, и выделит на ней точку. Расстояние от этой точки до начала координат измеряется конкретными числами ax, ay, az . В результате получим три числа, которые позволяют выделить в трехмерном пространстве одну точку из бесконечного множества ей подобных.

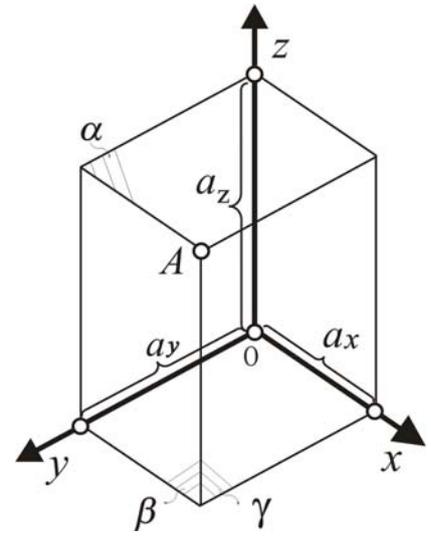


Рис. 5. Выделение точки из множества точек в трехмерном пространстве

Исходя из требования рациональности, набор чисел должен быть минимальным. Это требование является неременным условием при выделении геометрического элемента из множества ему подобных. Поэтому, выделяя одну прямую из множества прямых плоскости, достаточно набора из двух чисел, поскольку положение прямой определяется двумя точками, но взять их нужно на координатных осях (рис. 6). В результате плоскость, как множество прямых, оказывается двумерным пространством.

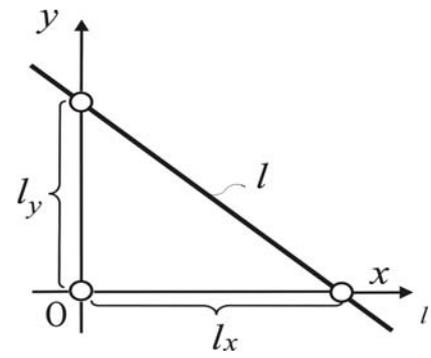


Рис. 6. Выделение одной прямой из множества прямых в плоскости

Положение прямой в трехмерном пространстве соответствует набору из четырех чисел, так как две ее точки целесообразно взять в координатных плоскостях (рис. 7). Следовательно, множество прямых трехмерного пространства образует четырехмерное пространство. Возникающая здесь риторическая тавтология связана с традицией в наименовании пространств, но она не искажает существо рассматриваемой ситуации.

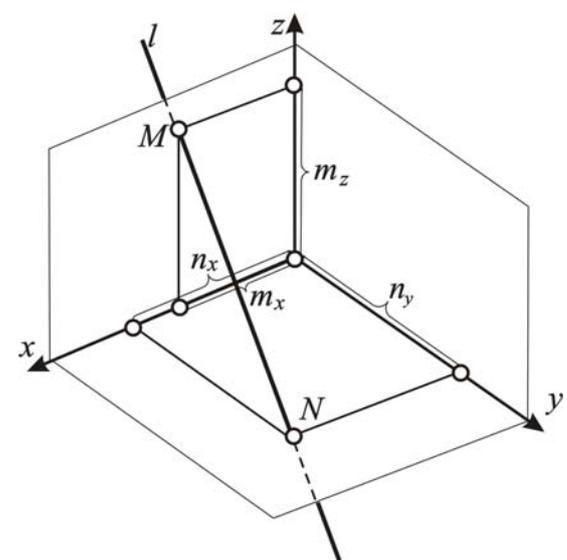


Рис. 7. Выделение одной прямой из множества прямых трехмерного пространства

Три точки, определяющие положение плоскости в трехмерном пространстве, лучше всего выбрать на координатных осях. Таким образом, положению плоскости в пространстве соответствуют три числа (рис. 8).

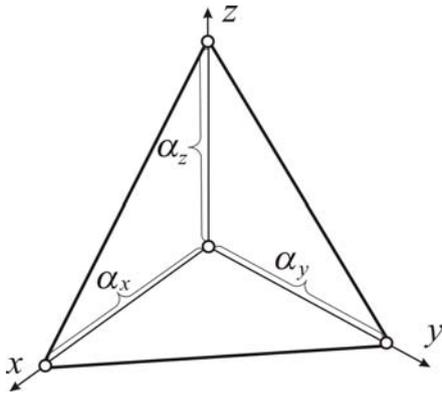


Рис. 8. Выделение одной плоскости из множества плоскостей трехмерного пространства

Очевидно, что этот ряд примеров можно продолжать достаточно долго, и в каждом случае положение элемента в пространстве соответствует набору чисел. С этим соответствием связано понятие о размерности пространства. Сколько чисел входит в набор, такова и размерность пространства. Таким образом, прямолинейный ряд точек имеет размерность, равную единице (R^1), плоское поле точек и прямых двумерно (R^2), трехмерное пространство (R^3) как множество точек имеет размерность, равную трем, но как множество прямых оно уже четырехмерно (R^4).

Обобщая сказанное, можно сделать вывод: размерность – это минимальный набор чисел, который определяет положение элемента в пространстве.

Проективность. Основная цель, которая определяла необходимость создания геометрии как науки – конструирование геометрических моделей реальности. Историческая ретроспектива показывает, что период ее существования накопил много вариантов геометрии, которые описывают те или иные аспекты реальности. Это геометрии Евклида, Лобачевского, Римана (многомерная, аффинная и проективная геометрии). Следует заметить, что глаз человека устроен так, что он не видит параллельных объектов. Поэтому для описания процесса возникновения изображений, аналогичных тем, которые видит глаз человека, целесообразно использовать проективную геометрию. Она, как и глаз человека, не видит различия между параллельными и непараллельными объектами. Геометрическое пространство в этой геометрии обладает свойством проективности. Его обеспечивает наличие бесконечно удаленных элементов. Чтобы понять, что это такое, рассмотрим пример на рис. 9.

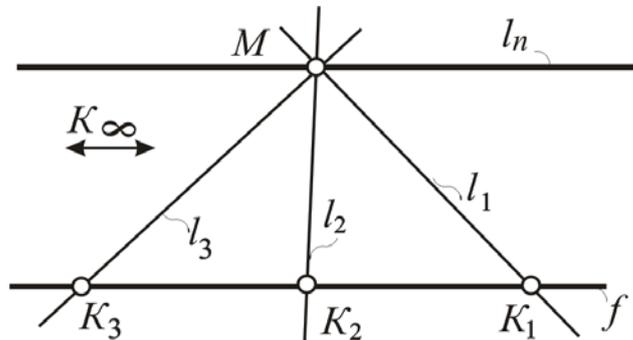


Рис. 9. Выявление бесконечно удаленной точки прямой

В плоскости зафиксированы точка M и прямая f . Через точку M проведем прямую l , которая пересечет прямую f в точке K . Вращая прямую l вокруг точки M по часовой стрелке (можно и против часовой стрелки), будем следить за движением точки K . Она пробежит по всем точкам прямой f . В случае, когда прямая l окажется параллельной прямой f , мы увидим точку K в бесконечности, если посмотрим влево. Если посмотрим право, то также увидим общую точку этих прямых. Но здесь возникает парадоксальная ситуация: известно, что две не совпавшие прямые имеют только одну общую точку. А у нас их две. Это противоречит одному из базовых положений геометрии Евклида. Чтобы ликвидировать это противоречие, объединим эти точки в одну. В результате получим проективную прямую, которая оказывается замкнутой на бесконечности одной точкой. В этой точке с ней будут пересекаться и другие параллельные ей прямые. Таким образом, все прямые, которые лежат в одной плоскости, пересекаются друг с другом. Только точки пересечения параллельных прямых находятся в бесконечности.

Повысим размерность всех элементов на единицу. В результате получим конструкцию, которая состоит из двух плоскостей α, β и двух прямых m, k (рис. 10). Плоскость β будем вращать вокруг прямой m и следить за перемещением прямой k . В случае, когда плоскости α и β станут параллельными друг другу, прямая k уйдет в бесконечность. Плоскость α (как и плоскость β) окажется замкнутой на бесконечности одной прямой. По этой прямой будут пересекаться все плоскости параллельные α и β . Таким образом, все плоскости, которые принадлежат одному трехмерному пространству, пересекаются друг с другом. Только линии пересечения параллельных плоскостей находятся в бесконечности.

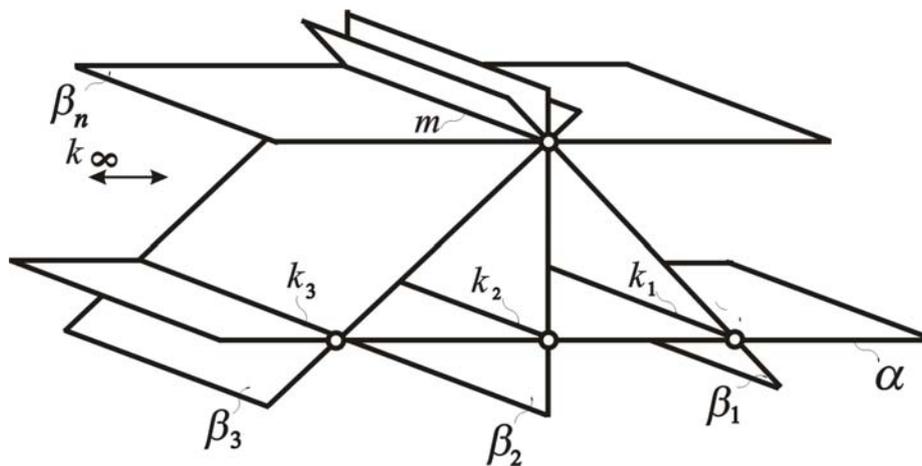


Рис. 10. Выявление бесконечно удаленной прямой плоскости

Символическая запись выявленной ситуации выглядит следующим образом:

$$R^1 \supset \text{одна } R^0,$$

$$\begin{aligned}
 R^2 &\supset \text{одна } R^1, \\
 R^3 &\supset \text{одна } R^2, \\
 &\dots\dots\dots \\
 R^n &\supset \text{одно } R^{n-1}.
 \end{aligned}$$

Она позволяет логически обобщить принадлежность бесконечно удаленных элементов их пространствам. Словесное описание этой символической записи выглядит так:

- прямая, как проективное пространство, содержит одну бесконечно удаленную точку;
- плоскость, как проективное пространство, содержит одну бесконечно удаленную прямую;
- трехмерное проективное пространство содержит одну бесконечно удаленную плоскость.

Обобщая сказанное, дадим определение проективному пространству.

Проективное геометрическое пространство содержит одно бесконечно удаленное подпространство, размерность которого на единицу меньше размерности самого пространства.

В существующей литературе бесконечно удаленные элементы еще называют несобственными.

Между пространствами или их элементами существует два типа отношений: позиционные и метрические.

Позиционные отношения геометрических элементов возникают тогда, когда они характеризуются без применения чисел, а только с использованием таких терминов, как “принадлежит”, “пересекается”, “объединяется” и т.п. Выявление позиционных характеристик связано с решением позиционных задач, таких, как установление принадлежности элементов пространству или выявление третьего элемента (пространства), который является результатом расположения двух данных элементов (пространств). Например, очень распространенной задачей является установление принадлежности точки к прямой, плоскости или поверхности; линии к плоскости или поверхности. Очень часто встречаются задачи на объединение двух элементов (пространств): через две точки нужно провести прямую, через три точки – плоскость и т.д. Результатом взаимного расположения пространств может быть точка пересечения прямой с плоскостью или поверхностью, а также линия пересечения двух поверхностей и т.п. Целесообразно поделить все позиционные задачи на две группы:

- 1) выявление взаимной принадлежности элемента и пространства;
- 2) определение третьего пространства (элемента) как результата расположения двух данных.

Первая группа задач является наиболее простой и лежит в основе решения второй группы задач. Основными операциями, которые приходится

выполнять при решении этих задач, являются пересечение и объединение. Используя символическую запись, данную в таблице, можно очень подробно записать решение любой задачи.

Метрические отношения геометрических элементов возникают тогда, когда к оценке их взаимного расположения привлекаются числа. Для их выявления решаются такие метрические задачи, как определение расстояния от одного элемента до другого, угла между двумя элементами и натуральной величины плоской фигуры.

Задача освоения приемов работы с геометрическими моделями конкретизируется в решении позиционных и метрических задач (рис. 1). Алгоритмы решения указанных задач нашли практическое применение в построении теней (позиционные задачи) и разверток (метрические задачи).

Решение как позиционных, так и метрических задач представляет собой последовательность действий (алгоритм). Эту последовательность целесообразно записывать. Запись может быть текстовая и символическая. Последняя отличается лаконичностью и образностью. В табл. 1 даны условные обозначения элементов пространства и их отношений.

Т а б л и ц а 1

Условные обозначения

Элементы пространства или отношения элементов	Условные обозначения	Примеры
Точки	Прописные буквы латинского алфавита	A, B, C, \dots
Линии	Строчные буквы латинского алфавита	a, b, c, \dots
Плоскости, поверхности, углы	Строчные буквы греческого алфавита	$\alpha, \beta, \gamma, \dots$
Тождественное совпадение элементов	\equiv	$A \equiv B$
Принадлежность одного элемента другому	\supset, \subset	$A \subset \alpha, l \supset M$
Пересечение элементов	\cap	$m \cap n$
Объединение элементов	\cup	$M \cup f$
Непересечение элементов	\nexists	$k \nexists r$
Результат операции	$=$	$m \cap n = K$

Геометрические пространства могут иметь различную организацию. Традиционно некоторые из них имеют названия. Множество точек прямой

называется **прямолинейным рядом точек**. Точки, заполняющие кривую линию, образуют **криволинейный ряд точек**. Плоскость как множество точек называется **плоским полем точек**, а как множество прямых – **плоским полем прямых**.

Если в плоскости зафиксировать точку, то множество прямых, принадлежащих ей, образует **пучок прямых**. В случае, когда точка зафиксирована в трехмерном пространстве, то множество прямых, проходящих через нее, образует **связку прямых**. Множество плоскостей, принадлежащих фиксированной точке трехмерного пространства, образует **связку плоскостей**. Множество плоскостей, содержащих одну фиксированную прямую, образует **пучок плоскостей**.

Контрольные вопросы

1. Дать определение геометрического пространства.
2. Как объяснить относительность геометрического пространства?
3. Почему геометрическое пространство абстрактно?
4. Что такое размерность геометрического пространства?
5. Какое пространство считают проективным?
6. Какие отношения геометрических элементов считают позиционными?
7. Какие отношения геометрических элементов считают метрическими?
8. Что такое прямолинейный ряд точек?
9. Что такое криволинейный ряд точек?
10. Какое множество называют плоским полем точек?
11. Что такое пучок прямых?
12. Какое множество называют пучком плоскостей?
13. Что такое связка прямых?
14. Какое множество называют связкой плоскостей?

1.2. Линии

Результатом перемещения точки является линия. В геометрии описано и рассматривается очень большое разнообразие различных линий. Чтобы ориентироваться в этом многообразии эти линии классифицируют.

Общепринятая классификация линий представлена схемой на рис. 11.



Рис. 11. Схема классификации линий

Основаниями для классификации линий являются следующие положения:

1. Линии делятся в зависимости от способа перемещения точки на прямые и кривые. Прямолинейное перемещение точки образует прямую линию, криволинейное – кривую.

2. В зависимости от того, как точки кривой линии относятся к плоскости, все кривые делятся на плоские и пространственные. Все точки плоских кривых принадлежат одной плоскости. Пространственные кривые имеют с плоскостью только несколько общих точек.

3. Способы изображения разделяют линии на лекальные и коробовые. Лекальные кривые вычерчиваются по точкам с помощью кривой линейки (лекало). Коробовые кривые являются результатом сопряжения дуг окружностей.

Одной из характеристик кривой линии является ее порядок. Геометрически порядок кривой определяется максимальным количеством точек пересечения с прямой, если кривая плоская, или с плоскостью, если кривая пространственная. Аналитически порядок кривой соответствует порядку уравнения, которым она описывается.

Плоские лекальные кривые. Самыми распространенными плоскими кривыми являются: окружность, эллипс, парабола и гипербола, которые называются лекальными кривыми. Учитывая их проективные характеристики, необходимо знать, как эти линии расположены по отношению к несобственной прямой плоскости. Окружность и эллипс не пересекают эту прямую, парабола касается ее, а гипербола пересекает ее в двух точках. Если к несобственной прямой плоскости относиться как к любой другой прямой, то названные выше кривые линии принципиально не отличаются друг от друга.

Эллипс. Сумма расстояний от любой точки эллипса до двух фиксированных точек (фокусов F_1, F_2) есть величина постоянная. Наименьшее расстояние между двумя противоположными точками эллипса принято считать малой осью, наибольшее – большой осью. Малая и большая ось взаимно перпендикулярны и, пересекаясь, делят друг друга пополам.

Если даны фокусы эллипса, то построение его точек (M, K) показано на рис. 12. Делим расстояние между ними пополам, получаем точку O . Восстанавливаем перпендикуляр к прямой F_1F_2 и берем на нем произвольную точку A . При этом отрезок AO не должен быть больше отрезка FO . Сумма расстояний от точки A до точек F_1F_2 определит построение до любой другой точки эллипса. Множество полученных таким образом точек соединяются линейкой, которая называется лекалом.

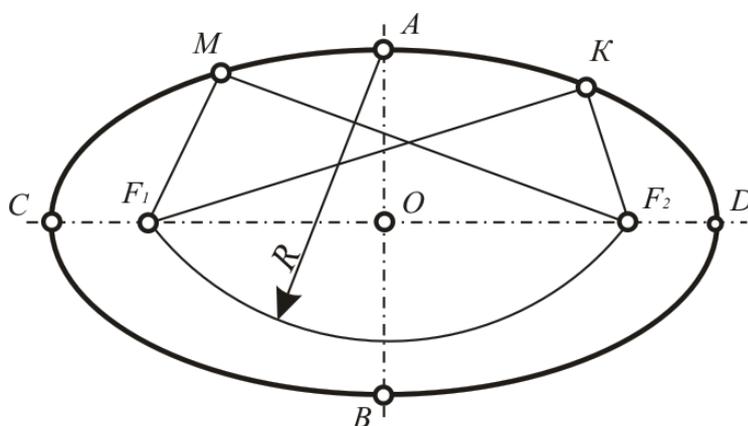


Рис. 12. Построение эллипса с заданными фокусами

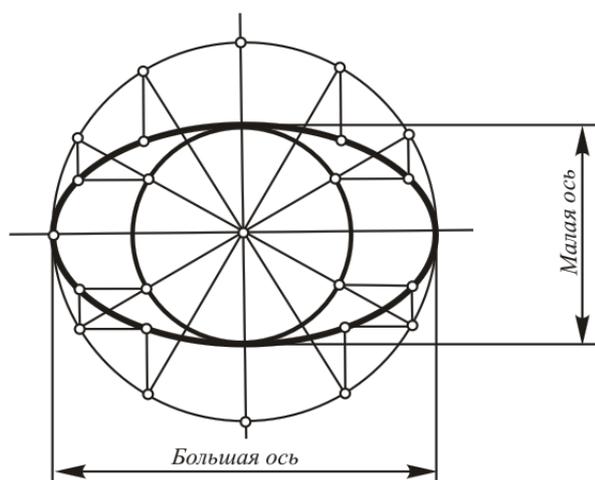


Рис. 13. Эллипс

Построение эллипса по малой и большой осям представлено на рис. 13. Проводят две concentric окружности. Диаметр одной равен малой оси эллипса, диаметр другой – большой оси. Делят окружности на равные части. В рассмотренном примере – на двенадцать. Через точки деления на малой окружности проводят горизонтальные прямые, через аналогичные точки на большой окружности – вертикальные. Точки пересечения этих

прямых принадлежат эллипсу, которые соединяют кривой линейкой (лекалом).

Парабола. Каждая точка параболы расположена на одинаковом расстоянии от фиксированной прямой f (директрисы) и от фиксированной

точки F (фокуса). Ось симметрии параболы проходит через ее фокус и перпендикулярна ее директрисе. Вершина параболы (точка A) делит отрезок FE на две равные части. Построение параболы, основанное на этом свойстве, показано на рис. 14. От вершины параболы на ее оси откладывают несколько отрезков, через которые проводят прямые, параллельные директрисе. На каждой из этих прямых располагаются по две точки параболы. Их расстояния от директрисы до фокуса равны.

Если заданы вершина параболы, некоторая ее точка M и направление оси, то построение остальных точек продемонстрировано на рис. 14. Из точки M проводят прямую, параллельную оси, из точки A – прямую, перпендикулярную оси. Эти прямые пересекаются в некоторой точке B . Отрезки AB и BM делят на равное число частей, которые на каждом отрезке равны между собой. Дальнейшее построение видно из рис. 15.

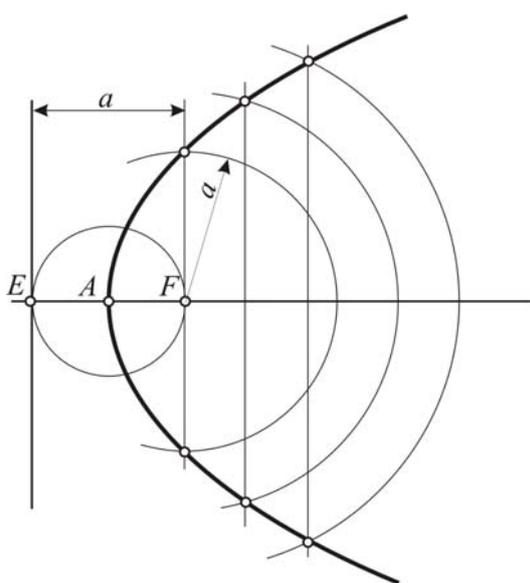


Рис. 14. Построение параболы, основанное на свойствах ее точек

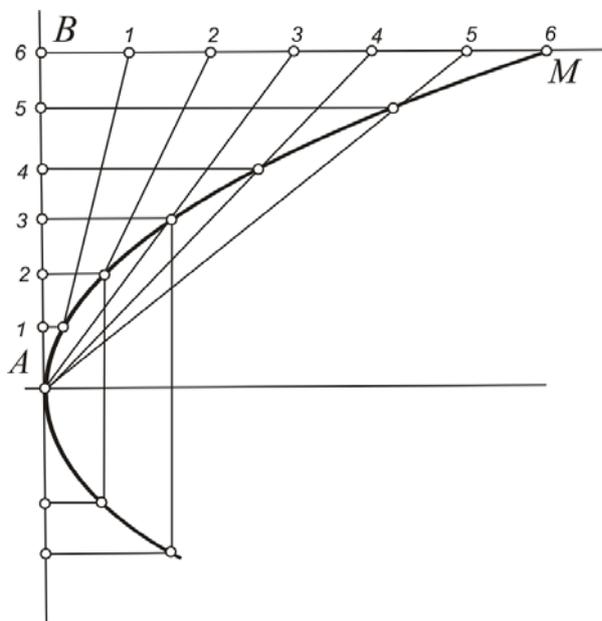


Рис. 15. Построение параболы по ее вершине и произвольной точке

Гипербола. Гиперболой называется плоская кривая линия, у которой разность расстояний от каждой точки до двух фиксированных точек F_1, F_2 (фокусов) есть величина постоянная и равная расстоянию между вершинами гиперболы (см. рис. 15).

Гипербола симметрична относительно двух взаимно перпендикулярных осей. Ось, которая содержит фокусы, называется действительной, другая ось – мнимой. Точка пересечения осей называется центром гиперболы. Прямые, проходящие через центр гиперболы и касающиеся ее в бесконечно удаленных точках, называются асимптотами.

На рис. 16 показано построение точек гиперболы, основанное на приведенном выше определении. В этом случае в качестве исходных элементов даны действительная ось, фокусное расстояние и вершины M_1, M_2 .

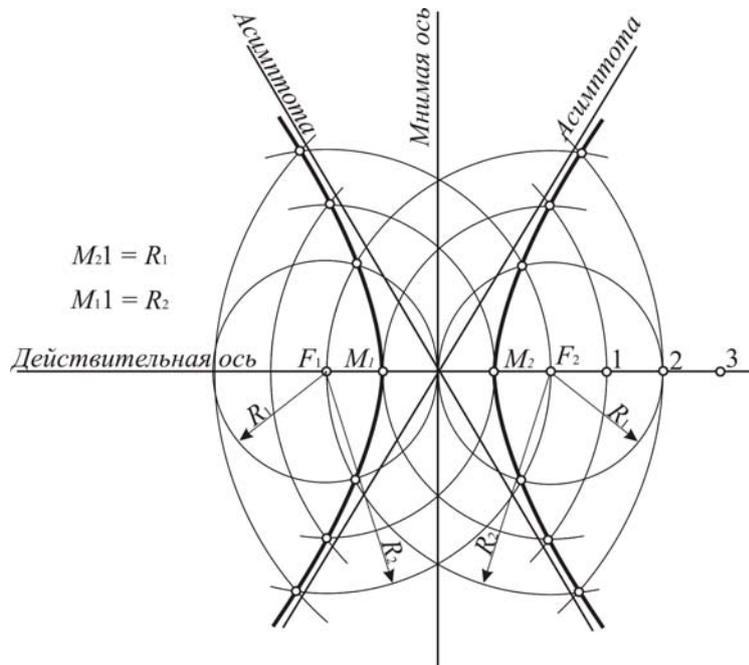


Рис. 16. Построение гиперболы, основанное на свойствах ее точек

На действительной оси наносят точки, расстояние между которыми увеличивается по мере удаления от фокуса. Из фокусов проводят дуги радиусом, равным расстоянию от точки 1 до вершины M_1 или M_2 . Точки пересечения этих дуг принадлежат гиперболе.

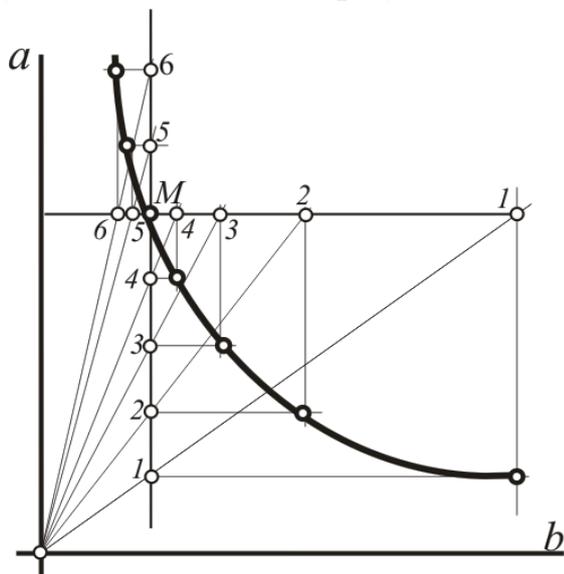


Рис. 17. Построение одной ветви гиперболы по произвольной точке и двум взаимно перпендикулярным асимптотам

Если асимптоты гиперболы взаимно перпендикулярны и являются биссектрисами углов, образованных осями, то для ее построения достаточно иметь эти асимптоты и одну произвольную точку гиперболы. На рис. 17 через произвольную точку M проведены две взаимно перпендикулярные прямые, которые параллельны асимптотам a и b . На вертикальную прямую нанесены произвольные точки: 1, 2, 3, 4, 5... Дальнейшее построение ясно из рис. 17.

Рассмотренные линии эллипс, гиперболы, парабола и еще окружность образуют группу линий, которые на-

зываются кониками. Такое название они получили потому, что каждую из них можно получить в результате сечения прямого кругового конуса плоскостью.

Если коника задана двумя касательными и тремя точками, что на практике бывает достаточно часто, точки этой кривой строят по алгоритму, представленному на рис. 18. Исходными являются точки A , B и C , касательные прямые m и n , пересекающиеся в точке D , и прямые a и b , которые соединяют точки A и B с точкой C . Последовательность графических построений отмечена цифрами. Первую прямую можно провести через точку A или точку B под любым углом. Последующие операции видны на рис. 18.

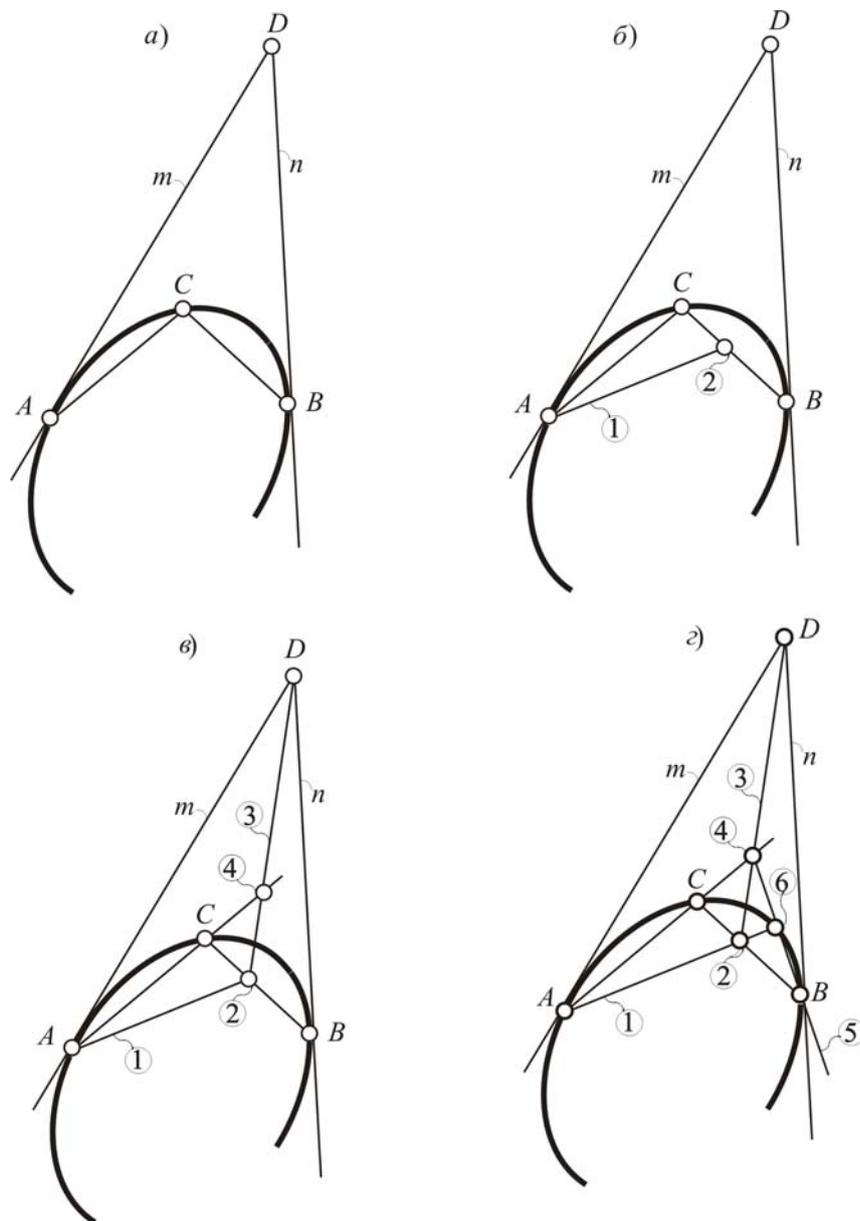


Рис. 18. Построение кривой второго порядка по трем точкам и двум касательным

Контрольные вопросы

1. Каким способом образуются прямые и кривые линии?
2. Что считается порядком кривой?
3. Какие кривые линии называются плоскими?
4. Какие кривые линии считаются пространственными?
5. Дайте определение лекальных кривых.
6. Дайте характеристику эллипсу.
7. Какая линия называется параболой?
8. Что такое гипербола?
9. Воспроизведите алгоритм построения плоских кривых второго порядка.

1.3. Поверхности

Особую группу геометрических множеств составляют поверхности. Самым распространенным способом образования поверхностей является кинематический. Сущность его сводится к следующему. Выделяется некоторая линия, которая, перемещаясь по заранее заданному закону, образует поверхность.

Наиболее распространенной является классификация, которая представлена в виде схемы на рис. 19. Основанием для деления поверхностей на линейчатые и нелинейчатые является возможность или невозможность выделения на ней прямой линии. Поверхности, на которых можно выделить прямую линию, называются **линейчатыми**. Если на поверхности невозможно выделить прямую линию, поверхность называется **нелинейчатой**.

Способы образования поверхностей являются основанием для деления их на поверхности вращения и перемещения по направляющим. На схеме видно, что линейчатые и нелинейчатые поверхности могут быть образованы как вращением, так и другими способами.

Одной из важных характеристик поверхностей является их порядок. **Порядком поверхности** считается максимальное количество ее точек, общих с прямой, что соответствует порядку алгебраического уравнения, описывающего эту поверхность. Из всех рассмотренных выше поверхностей второй порядок имели цилиндрическая, коническая, призматическая, пирамидальная, а также сфера, эллипсоид, параболоид и гиперболоид. Остальные поверхности имели более высокий порядок.

Рассмотрим образование наиболее распространенных геометрических поверхностей. Зафиксируем в трехмерном пространстве точку T и некоторую кривую линию f (рис. 20,а). Проведем через точку T прямую l , которая пересекает линию f . Прямая l , перемещаясь в пространстве таким образом, что она скользит по линии f и проходит через точку T , образует **кониче-**

скую поверхность. Прямая l называется образующей, точка T – вершиной, кривая f – направляющей.



Рис. 19. Классификация поверхностей

В зависимости от характера направляющей и расположения вершины возникают следующие поверхности (табл. 2):

- 1) **коническая** – вершина T на конечном расстоянии, направляющая f – кривая (рис. 20,б);
- 2) **цилиндрическая** – вершина T бесконечно удалена, направляющая f – кривая (рис. 20,б);
- 3) **пирамидальная** – вершина T – на конечном расстоянии, направляющая f – ломаная (рис. 20,в);
- 4) **призматическая** – вершина T бесконечно удалена, направляющая f – ломаная (рис. 20,г).

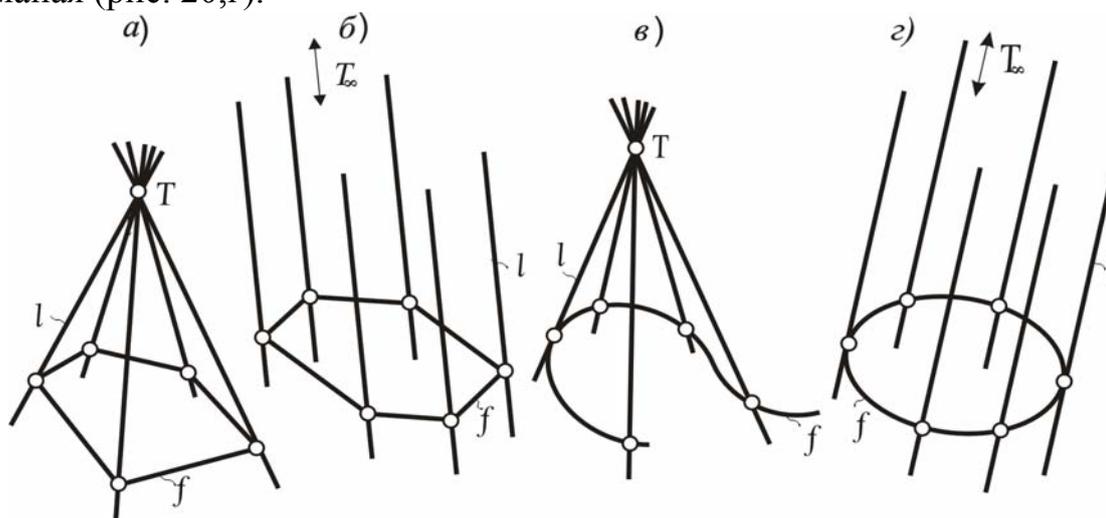


Рис. 20. Образование класса конических поверхностей

Класс конических поверхностей

Название поверхности	Расположение вершины	Вид направляющей	Вид образующей
Собственно коническая поверхность	На конечном расстоянии	Кривая линия	Прямая линия
Цилиндрическая поверхность	В бесконечности		
Пирамидальная поверхность	На конечном расстоянии	Ломаная линия, состоящая из прямых отрезков	
Призматическая поверхность	В бесконечности		

Поверхности могут быть образованы вращением образующей вокруг оси i . Так возникают коническая (рис. 21,а) и цилиндрическая поверхности вращения (рис. 21,б).

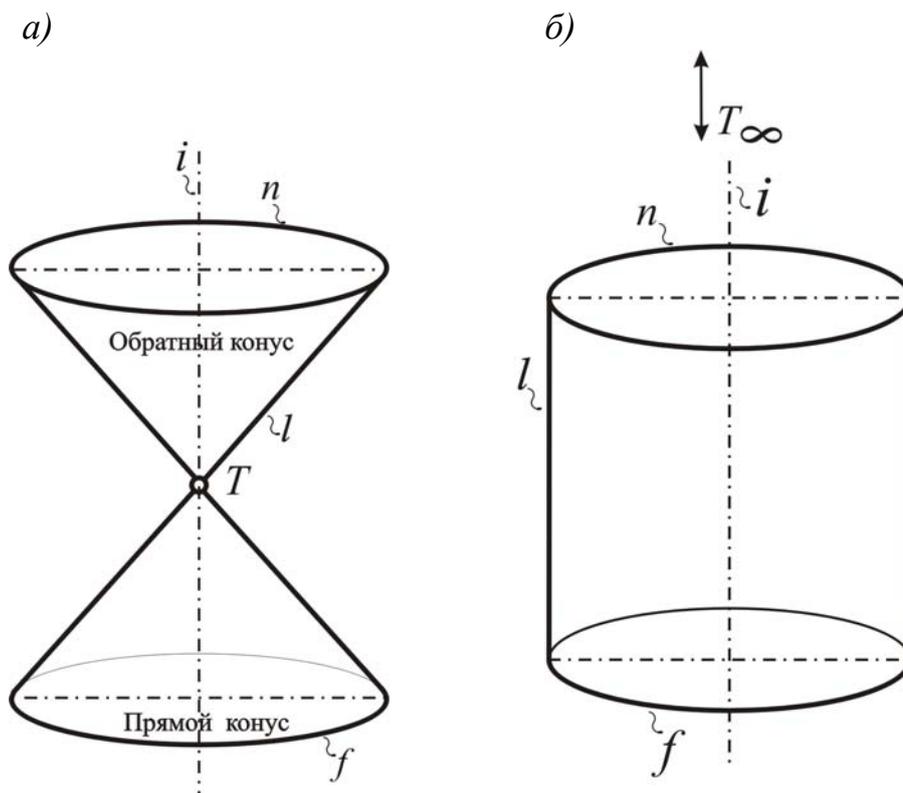


Рис. 21. Образование поверхностей вращения (коническая, цилиндрическая)

Вместо прямой вокруг оси может вращаться и другая линия, например окружность или эллипс. При вращении окружности вокруг оси, совпадающей с одним из ее диаметров, образуется сфера (рис. 22).

Вокруг оси i могут вращаться гипербола, парабола или эллипс (рис. 23). При условии, что ось вращения тождественно совпадает с осью этих кривых линий, образуются соответственно гиперболоид (рис. 23,а, б), параболоид (рис. 23,в) или эллипсоид (рис. 23,г). При совмещении оси i с мнимой осью гиперболы возникает однополостный гиперболоид вращения (рис. 36,а). Если ось i совпадает с действительной осью гиперболы, образуется двуполостный гиперболоид.

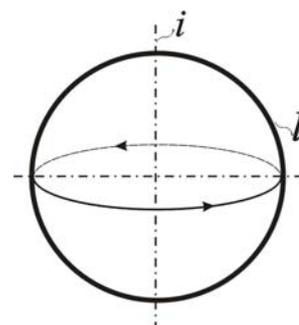


Рис. 22. Образование сферы

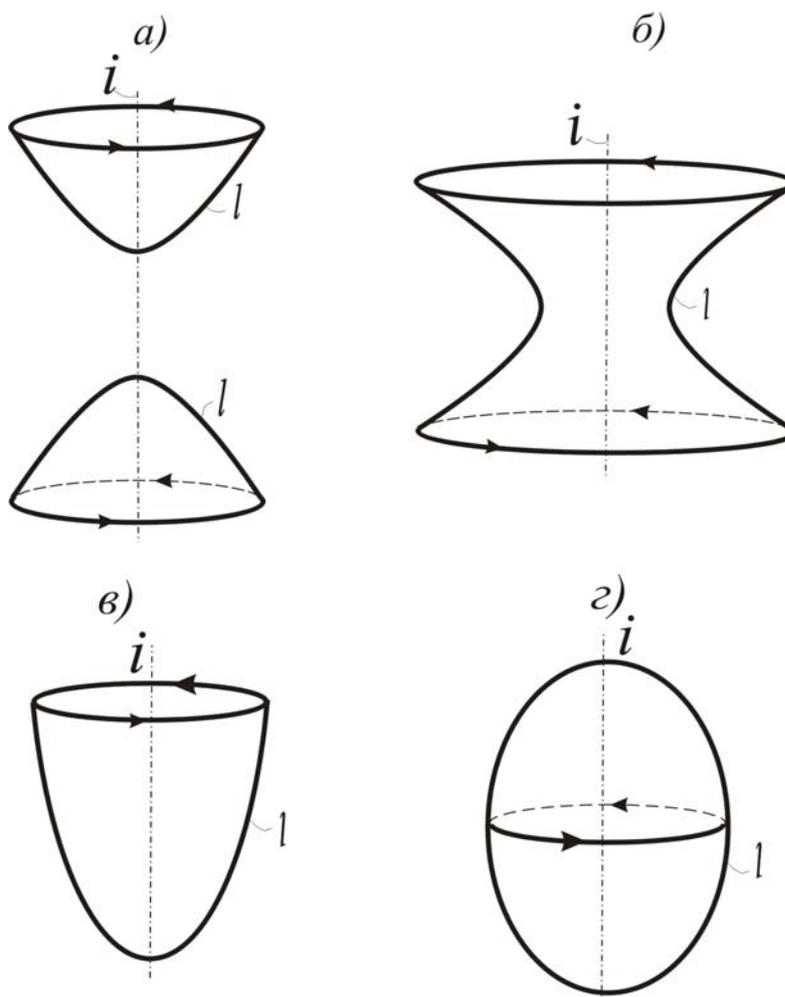


Рис. 23. Образование гиперболоида, параболоида и эллипсоида

Контрольные вопросы

1. Охарактеризовать способ образования поверхностей.
2. Что называется образующей поверхности?
3. Какая линия играет роль направляющей?
4. Что такое вершина поверхности?

5. Какие поверхности называются линейчатыми?
6. Какие поверхности называются нелинейчатыми?
7. Что такое порядок поверхности?
8. Какие поверхности называются поверхностями вращения? Привести примеры?
9. Как образуются поверхности, принадлежащие к классу конических? Перечислить эти поверхности.

2. ЗАКОН ПОСТРОЕНИЯ ПЛОСКИХ ИЗОБРАЖЕНИЙ ТРЕХМЕРНЫХ ОБЪЕКТОВ

Возникновение плоского изображения трехмерного объекта подчиняется **закону**, который определяется двумя составляющими:

- 1) структурой проекционного аппарата,
- 2) алгоритмом его работы.

Рассмотрим подробно эти составляющие.

2.1. Структура проекционного аппарата

Проекционным аппаратом принято считать устройство, с помощью которого возникают изображения. Посмотрим с точки зрения геометрии, как возникает изображение в реально существующих проекционных аппаратах, таких, как глаз человека, фотоаппарат, кинопроектор и т.п. Все они содержат некоторое устройство (хрусталик, объектив), которое собирает лучи в точку, и все они имеют некоторую плоскость (или поверхность), на которой возникает изображение (рис. 24).

Если отвлечься от конкретного устройства объектива, хрусталика и поверхности, получим **структуру геометрического проекционного аппарата**, которую составляют точка S и плоскость (или поверхность) π (рис. 25).

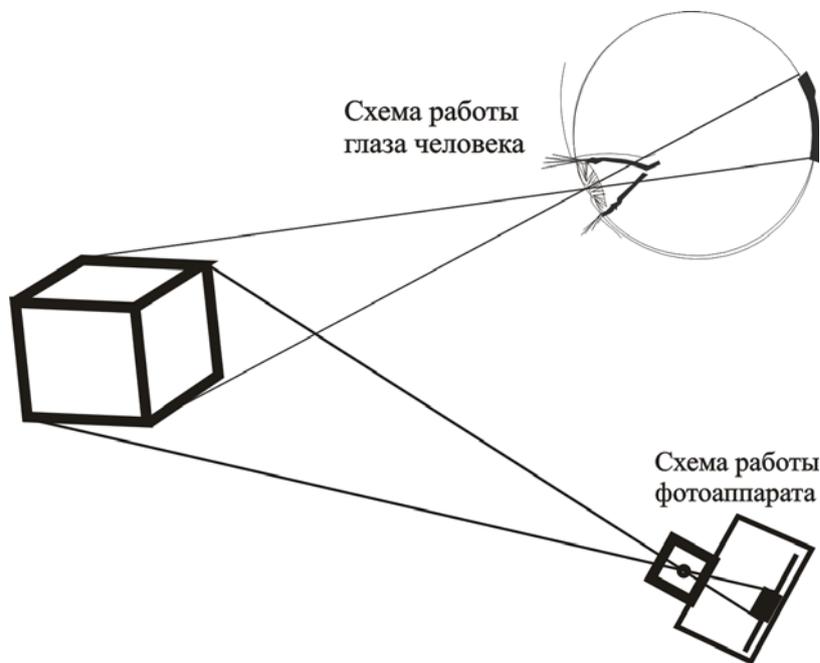


Рис. 24. Схема работы проекционных аппаратов

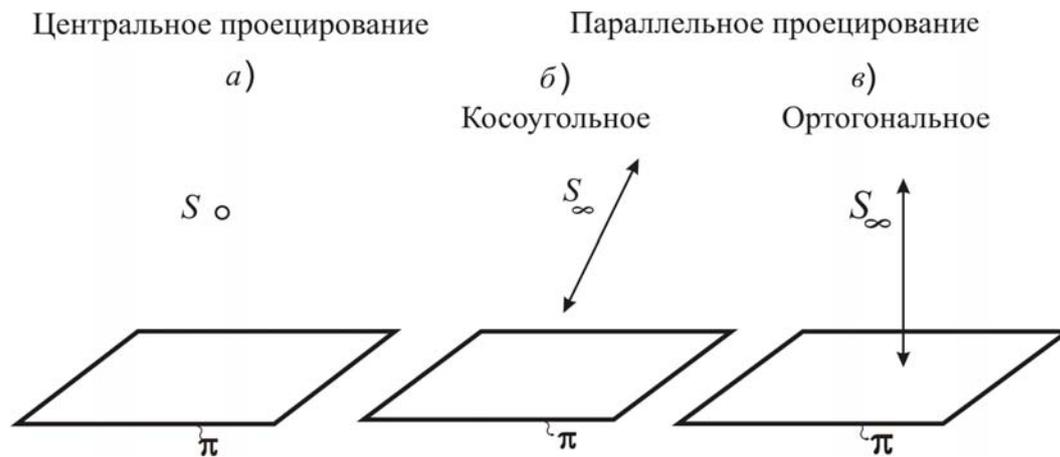


Рис. 25. Структура проекционных аппаратов

Точка S называется **центром проецирования**, плоскость (или поверхность) π -**картиной**. В дальнейшем чаще всего будет использоваться плоская картина.

В зависимости от взаимного расположения центра S по отношению к картине π выделяют два вида проецирования: **центральное** (рис. 25,а) и **параллельное** (рис. 25,б, в). При параллельном проецировании центр S бесконечно удален. Направление, в котором он удален по отношению к картине, может быть различным. Если направление удаления центра S составляет с картиной угол, не равный девяноста градусам, то проецирование называется **косоугольным** (рис. 25,б). Если же центр S удален в бесконечность в направлении, перпендикулярном картине, проецирование называется **ортогональным** (рис. 25,в).

Традиционно процесс работы алгоритма называется **проецированием**, а плоское изображение **проекцией**.

2.2. Алгоритм работы проекционного аппарата

Для того чтобы построить плоское изображение, необходимо использовать следующий алгоритм (рис. 26):

1. Объединить исходный объект с центром проецирования. В результате получим проецирующий объект.
2. Пересечь проецирующий объект с картиной и получить плоское изображение исходного объекта.

В качестве проецирующих объектов в примерах на рис. 26 возникают пирамида и цилиндр.

Таким образом, чтобы построить плоское изображение трехмерного объекта, необходимо наличие проекционного аппарата, который, создавая плоские изображения, работает по рассмотренному выше алгоритму. Это происходит всегда. Поэтому можно считать законом в возникновении плоских изображений трехмерных объектов.

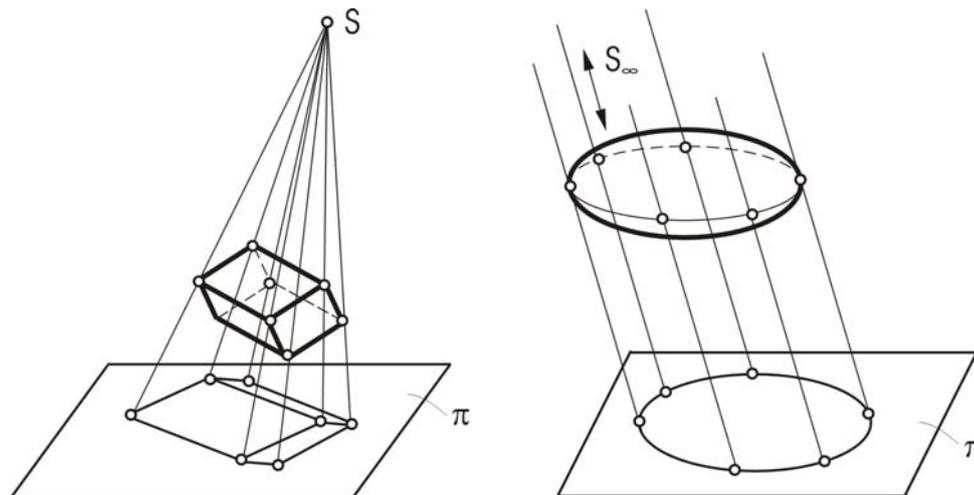


Рис. 26. Примеры работы алгоритма при построении плоских изображений трехмерных объектов

2.3. Инварианты проецирования

Очевидно, что какие-то элементы исходных объектов видоизменяются в проекциях, другие – сохраняются, то есть остаются инвариантными.

Первый инвариант проецирования. Если проецировать точку исходного пространства, то проецирующим образом оказывается прямая, которая пересекается с картиной тоже в точке (рис. 27). Таким образом, проекцией точки является точка.

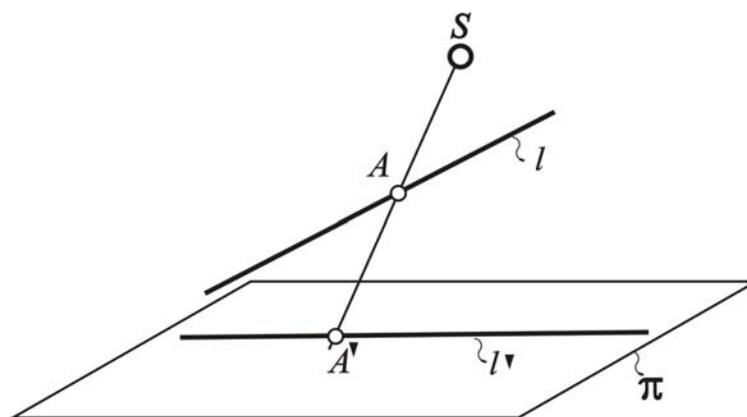


Рис. 27. Первый инвариант проецирования

Второй инвариант. Проекцией прямой в общем случае является прямая, так как проецирующим образом здесь оказывается плоскость, которая пересекает картину по прямой (рис. 28). Исключение составляют только прямые, проходящие через центр проецирования. Они изображаются точкой (рис. 29).

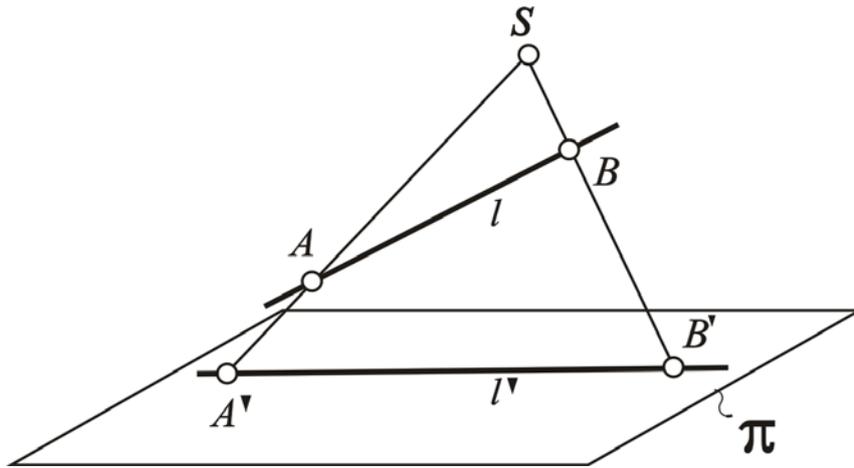


Рис. 28. Второй инвариант проецирования

Третий инвариант. Проецирование сохраняет взаимную принадлежность элементов друг другу. Рассмотрим пример со взаимной принадлежностью точки и прямой (рис. 29). Знания школьного курса геометрии делает это очевидным.

Перечисленные три инварианта относятся как к центральному, так и к параллельному проецированию. При параллельном проецировании возникают еще два инварианта.

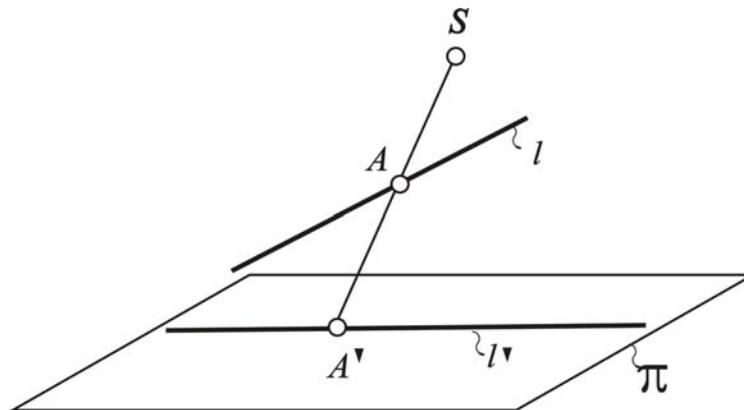


Рис. 29. Третий инвариант проецирования

Четвертый инвариант. Параллельное проецирование сохраняет параллельность элементов друг другу. Например, возьмем две параллельные прямые m и n . Вместе с центром проецирования они образуют две параллельные проецирующие плоскости $\alpha = m \cup S$ и $\beta = n \cup S$, которые пересекаются с картиной π по двум параллельным прямым (рис. 30).

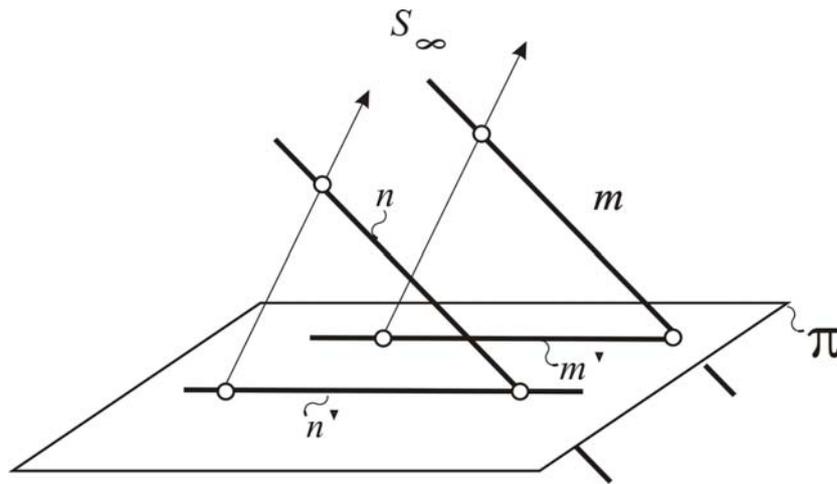


Рис. 30. Четвертый инвариант проецирования

Пятый инвариант. При параллельном проецировании сохраняется пропорциональность. Это легко доказать на примере проецирования прямой l , содержащей отрезок AB . Продолжим эту прямую до пересечения с картиной π (рис. 31). Получаем две пересекающиеся прямые, одна из которых исходная, другая – ее проекция. Проецирующие лучи делят их в одном и том же отношении (теорема Фаллеса).

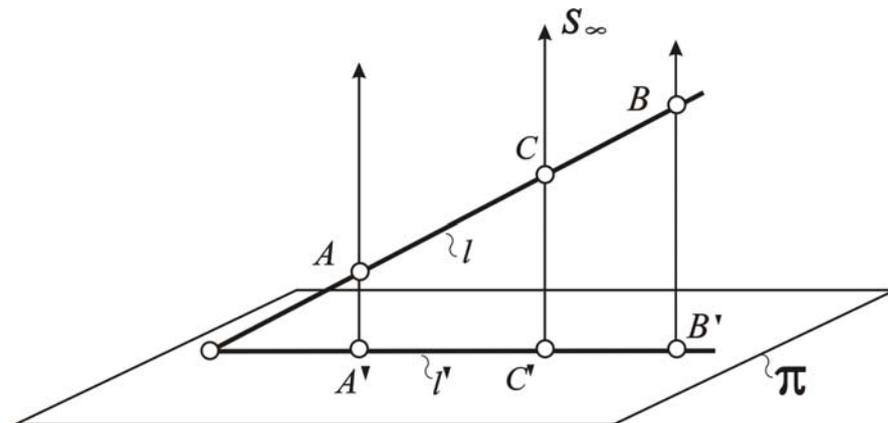


Рис. 31. Пятый инвариант проецирования

2.4. Основное требование к плоским изображениям трехмерных объектов

Посмотрим, могут ли плоские изображения трехмерных объектов, построенные на основании выявленного закона, являться геометрическими моделями исходных объектов? Для этого нужно ответить на другой вопрос: сохраняют ли они всю геометрическую информацию исходных объектов? Если ответ окажется положительным, то замена возможна, при отрицательном – нет. Итак, **основное требование**, которое предъявляется к геометрическим моделям, – это сохранение всей геометрической информа-

ции исходного объекта. Иначе говоря, объект на своем изображении должен быть узнаваем.

Пусть в качестве исходного объекта будет точка A на рис. 32. Она не имеет никакой геометрической информации, кроме положения в пространстве. Можно ли определить это положение, имея проекцию точки A и проекционный аппарат? Ответ очевиден: этого сделать нельзя. Можно лишь указать проецирующую прямую $l = A \cup S$.

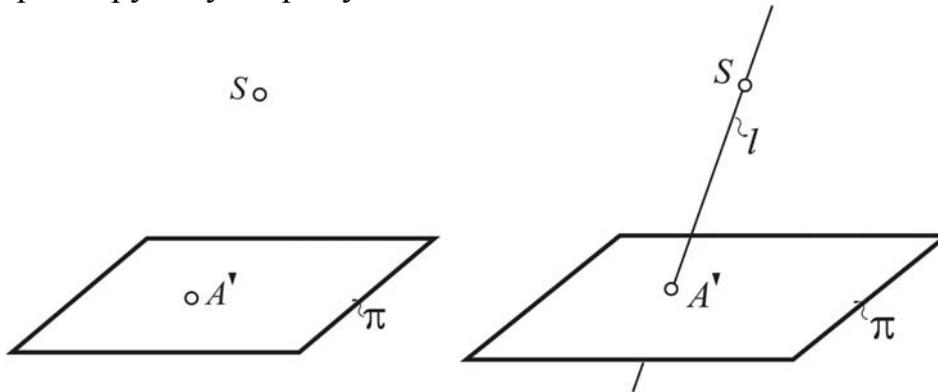


Рис. 32. Определение положения точки в трехмерном пространстве по ее плоскому изображению

Аналогичный вывод можно сделать, если восстанавливать положение прямой l в исходном пространстве (рис. 33). Для общего случая можно лишь указать проецирующую плоскость, которая содержит эту прямую. Причина станет ясна, если сравнить размерности картинного и исходного пространств.

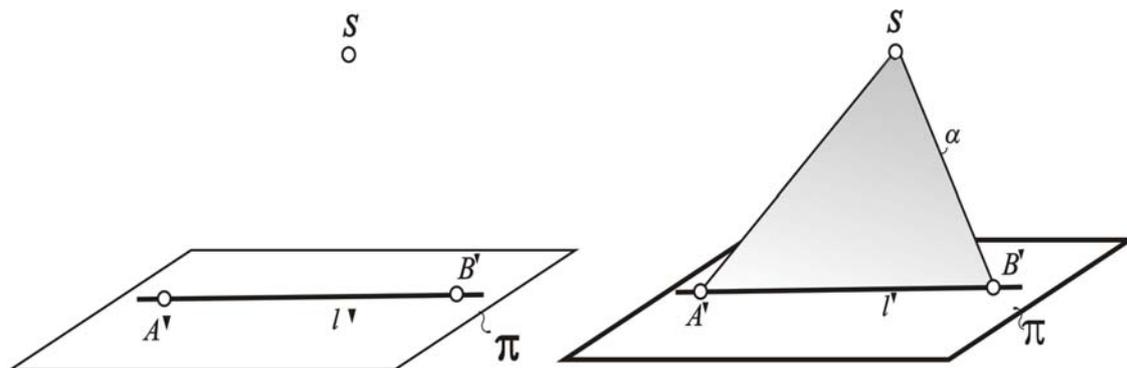


Рис. 33. Определение положения прямой в трехмерном пространстве по ее плоскому изображению

Рассмотрим еще один пример. На рис. 34 изображена окружность. Вопрос: какой трехмерный объект здесь изображен? Ответ дан на рис. 34. Это может быть сфера, конус или цилиндр или любой другой объект, которого проецирующие прямые будут касаться по окружности.

Ряд таких примеров можно продолжать достаточно долго. И каждый раз мы будем отмечать невозможность узнавания исходного объекта по одному плоскому изображению. Можем указать только некую группу объектов. В первом примере (рис. 32) – множество точек проецирующей прямой, во втором примере (рис. 33) – множество прямых проецирующей плоскости, в третьем (рис. 34) – множество объектов, касающихся проецирующего конуса.

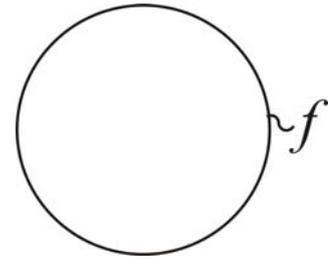


Рис. 34. Какой трехмерный объект здесь изображен?

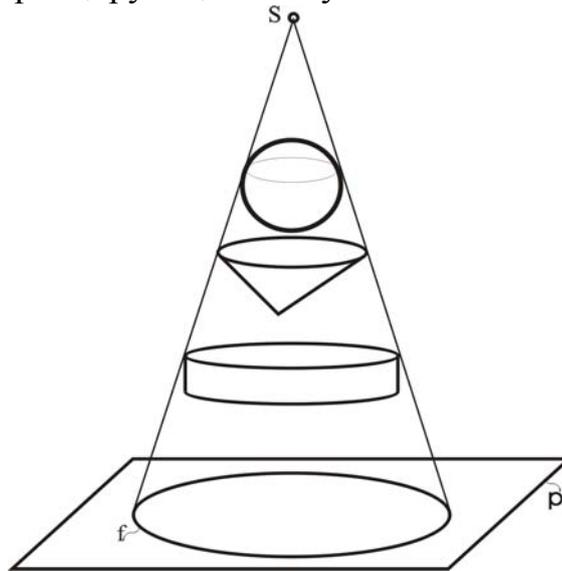


Рис. 35. Множество объектов, имеющих изображение в виде окружности

Причина здесь в разнице размерностей исходного (трехмерного) пространства и картинного (двухмерного). Для того чтобы выделить точку в исходном трехмерном пространстве, нужно затратить три параметра, в картинной плоскости – два параметра. На выделение прямой в трехмерном пространстве нужно затратить четыре параметра, в плоскости – два. В третьем примере эта разница увеличивается. В результате плоское изображение утрачивает часть своей размерности, а вместе с ней и часть геометрической информации. Вывод напрашивается сам собой: чтобы изображение сохранило всю геометрическую информацию исходного объекта (стало его моделью), необходимо равенство размерностей исходного и картинного пространств. В этом случае модель сохранит всю геометрическую информацию исходного объекта. Такая модель называется однозначной.

Если размерности картинного и исходного пространств одинаковы, то модель сохраняет всю геометрическую информацию об исходном объекте. Пусть исходным и картинным пространствами будут соответственно прямолинейные ряды точек l и k (рис. 36). Проецируя произвольную точку A , принадлежащую прямой l , на прямую k из центра S , получим проекцию

точки A' на прямой k . Очевидно, что в этом случае легко решается обратная задача.

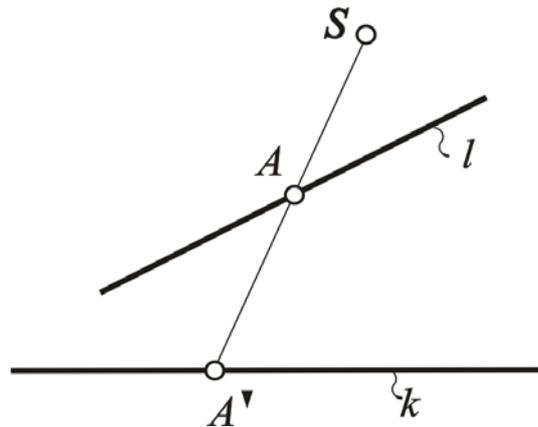


Рис. 36. Построение геометрических моделей в случае, когда размерность исходного и картинного пространств равна единице

Так же легко решается аналогичная задача при сопоставлении плоских полей α и β (рис. 37). Любая точка A и прямая a , которые принадлежат плоскости α , восстанавливаются в исходном пространстве по их проекциям, данным в картинном пространстве β .

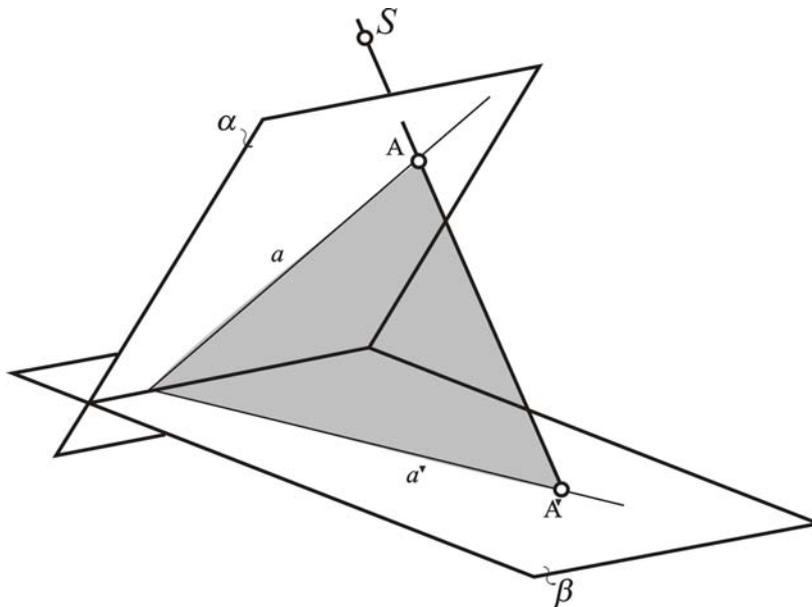


Рис. 37. Построение геометрических моделей в случае, когда размерность исходного и картинного пространств равна двум

Итак, чтобы геометрическая модель сохранила всю информацию исходного объекта, необходимо равенство размерностей исходного и картинного пространств. Если же размерность исходного пространства равна трем, картинного – двум, то решение проблемы заключается в удвоении проекционного аппарата. Такое решение было подсказано самой

природой: все, что имеет глаза, имеет их в количестве, равном двум. Это позволяет сохранить всю геометрическую информацию исходного трехмерного объекта на его плоской модели. Данное утверждение будет доказано далее на примере моделирование различных геометрических элементов.

Контрольные вопросы

1. Какому закону подчиняется возникновение плоских изображений трехмерных объектов?
2. Назвать элементы составляющие структуру проекционного аппарата.
3. Перечислить варианты проекционных аппаратов, которые зависят от взаимного расположения элементов проекционного аппарата?
4. Какое проецирование называется центральным, косоугольным, ортогональным?
5. Из каких операций складывается алгоритм работы проекционного аппарата?
6. Назвать инварианты проецирования.
7. В чем состоит основное требование, которое предъявляется к плоским изображениям трехмерных объектов?
8. Каково условие сохранения этого требования?
9. . Благодаря чему обеспечивается равенство размерностей исходного и картинного пространств, при построении геометрических моделей трехмерных объектов на плоскости?

3. МЕТОД ДВУХ ИЗОБРАЖЕНИЙ

3.1. Характеристика проекционного аппарата.

Общий случай

В практической деятельности человека очень часто возникают задачи, связанные с изображением трехмерных объектов на плоскости. Как говорилось выше, разница размерностей исходного и картинного пространств порождает проблемы, которые связаны с утратой геометрической информации. Они решаются, если удвоить проекционный аппарат. Выберем в трехмерном пространстве две произвольные точки: S_1, S_2 и две произвольные плоскости: π_1, π_2 .

Точки играют роль центров проецирования, плоскости – роль картин (рис. 38). Однозначность полученных с помощью такого проекционного аппарата моделей будет доказана ниже. А пока рассмотрим более подробно его структуру.

Прямая u , которая проходит через центры S_1, S_2 , называется исключенной прямой. Точки пересечения исключенной прямой с картинками ($U_1 = u \cap \pi_1; U_2 = u \cap \pi_2$) исключенными точками.

В зависимости от взаимного расположения картин и центров проецирования выделяют частные случаи метода двух изображений: перспектива, аксонометрия и эпюр Монжа.

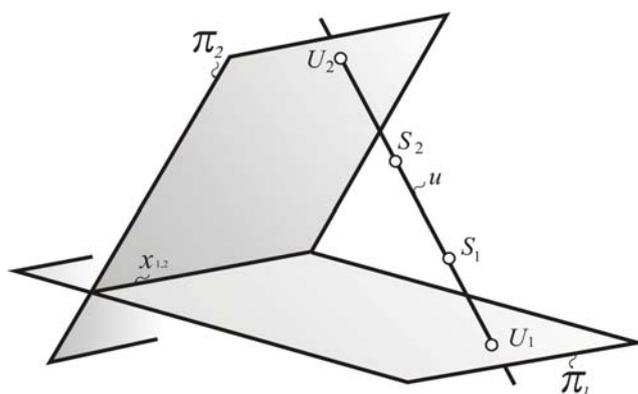


Рис. 38. Проекционный аппарат метода двух изображений

В зависимости от взаимного расположения элементов проекционного аппарата выделяю изображения, построенные следующими видами проекционных аппаратов:

1. Перспектива, позволяющая получить плоские изображения очень похожие на те, которые видит глаз человека. Отличительной чертой таких изображений является пересечение параллельных прямых. Это приводит к искажению величин отрезков и углов объекта.

2. Аксонометрия дает изображения очень похожие на воспринимаемые глазом человека, но параллельность элементов на них сохраняется. Искажение величин отрезков и углов также велико.

3. Эпюр Монжа, названный в честь великого французского математика Гаспара Монжа, который его разработал. Изображения, полученные с помощью этого проекционного аппарата, существенно отличаются от тех, которые видит глаз человека. Но их преимуществом является сохранение большинства размеров объекта.

Рассмотрим устройство этих проекционных аппаратов более подробно.

3.2. Характеристика проекционного аппарата. Перспектива

Этот вид характеризуется следующими особенностями (рис. 39):

- 1) центр проецирования S_2 располагается на конечном расстоянии;
- 2) центр S_1 бесконечно удален, проецирование из него на картину π_1 ортогональное;
- 3) картины π_1 и π_2 взаимно перпендикулярны.

Особенности проекционного аппарата перспективы определяется спецификой восприятия глазом человека реальных объектов. Они состоят в следующем:

1. Глаз человека имеет определенную область, в которой наблюдаемые объекты воспринимаются четко. Эта четкость зависит от близости по отношению к главному лучу. Это теоретическая прямая, проходящая через хрусталик глаза и примерный центр глазного яблока. В проекционном аппарате – это главный луч p .

2. Восприятие реальности глазами человека ограничено. Человек не может видеть объекты, находящиеся у него за головой, с левого и правого бока, над головой и внизу. (Для того чтобы увидеть объекты, которые расположены в перечисленных зонах, ему необходимо поворачивать голову. Проекционный аппарат такой особенностью не обладает). Для разграничения области восприятия и области, где человек не видит объекты, в проекционный аппарат вводится нейтральная плоскость.

Эти особенности усложняют проекционный аппарат перспективы за счет введения следующих элементов:

- 1) точка зрения – S_2 ;
- 2) главный луч – p ($p \supset S_2, p \perp \pi_2$);
- 3) главная точка картины – $P_2 = p \cap \pi_2$;
- 4) плоскость горизонта – γ ($\gamma \supset S_2, \gamma \perp \pi_1$);
- 5) линия горизонта – $h_2 = \gamma \cap \pi_2$;
- 6) нейтральная плоскость – v ($v \supset S_2, v \perp \pi_2$);
- 7) главная вертикаль – $c = U_2 \cup P_2$;

тоgonальным или косоугольным; угол между картинами π_1 , π_2 – произвольный; исключенная прямая удалена в бесконечность (рис. 41). На рис. 42 приведен пример изображения архитектурного объекта в аксонометрии.

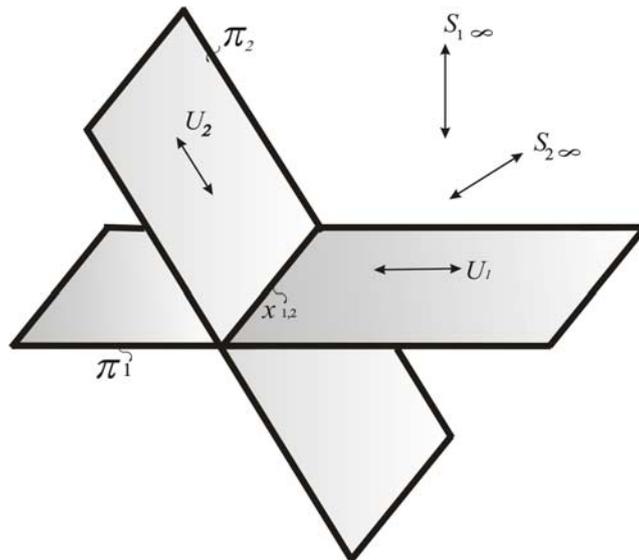


Рис. 41. Проекционный аппарат аксонометрии

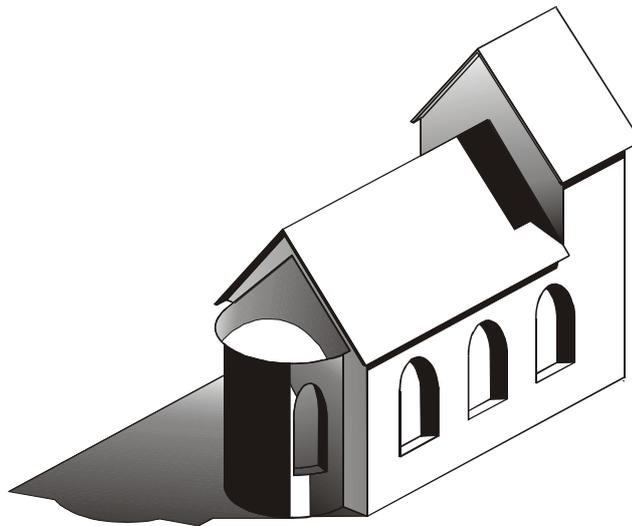


Рис. 42. Изображение архитектурного объекта в аксонометрии

3.4. Характеристика проекционного аппарата. Эпюр Монжа

Проекционный аппарат этого варианта метода двух изображений обладает следующими особенностями: угол между картинами π_1 и π_2 равен 90° . Центры S_1 и S_2 удалены в бесконечность, проецирование из них ортогональное. Линия пересечения плоскостей называется осью проекций и обозначается символом $x_{1,2}$ (рис. 43). На рис. 44 приведен пример изображения архитектурного объекта на эпюре Монжа.

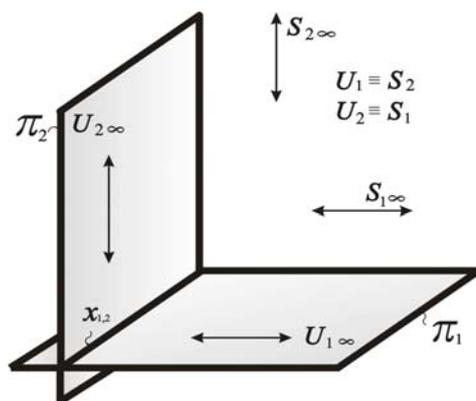


Рис. 43. Проекционный аппарат эпюра Монжа

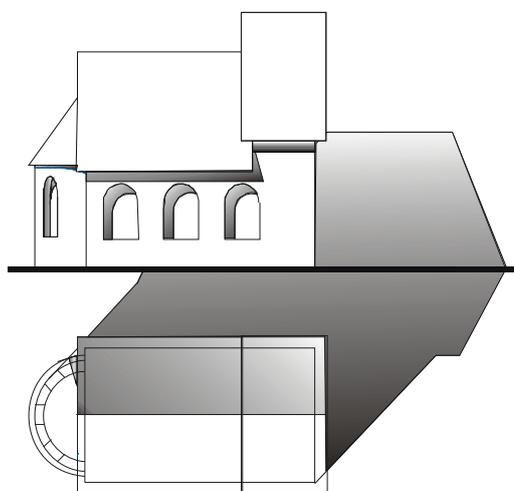


Рис. 44. Изображение архитектурного объекта на эпюре Монжа

Контрольные вопросы

1. Перечислить элементы, которые составляют удвоенный проекционный аппарат общего вида.
2. Назвать частные случаи метода двух изображений, зависящие от взаимного расположения картин и центров проецирования.
3. Перечислите элементы, составляющие проекционный аппарат перспективы, и дайте характеристику их взаимного расположения.
4. Чем отличаются проекционные аппараты перспектив на наклонной картине с высоким горизонтом и низким горизонтом?
5. Каковы особенности проекционного аппарата перспективы на вертикальной картине?
6. Перечислите элементы, составляющие проекционный аппарат аксонометрии, и дайте характеристику их взаимного расположения.
7. Дайте характеристику проекционного аппарата эпюра Монжа.

3.5. Модель точки

На рис.55, 57, 59, 61, 63 плоские изображения трехмерного объекта построены с помощью линий. Каждая линия – это множество точек, которые ограничивают линию, превращая ее в отрезок или дугу. Работая с этими изображениями, приходится выделять на линиях точки. В связи с этим необходимо знать, как строится модель точки, какие задачи нужно решать при работе с этой моделью. Поэтому рассмотрим процедуру возникновения модели точки, построенной методом двух изображений, и приемы решения задач, которые необходимо решать, работая с этой моделью.

3.5.1. Общий случай

Возьмём произвольную точку A трехмерного пространства и построим её модель, используя метод двух изображений (рис. 45).

Плоскость α – плоскость в пучке проецирующих плоскостей с осью u . Прямые a_1 и a_2 называются линиями связи, а прямые m_1 и m_2 – проецирующими прямыми.

Аналогично возникают изображения любой другой точки трёхмерного пространства. Множество таких точек M, N, \dots и исключенная прямая u порождают пучок проецирующих плоскостей (рис. 46). Эти пучки пересекаются картинками по пучкам прямых – линиям связи с вершинами в исключенных точках U_1 и U_2 .

Таким образом, моделью точки трёхмерного пространства является два её изображения (проекции), расположенные на соответствующих линиях связи.

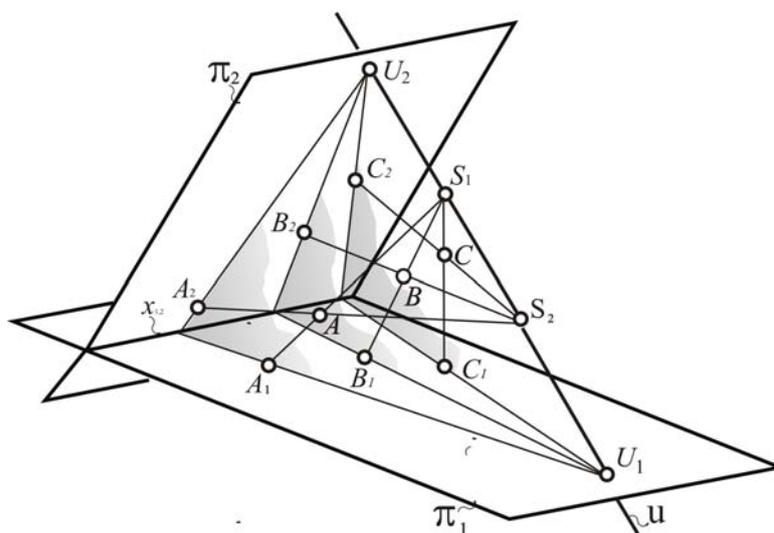


Рис. 45. Моделирование точек трехмерного пространства

Алгоритм этой процедуры составят следующие операции:

- 1) $A \cup u = \alpha$ – проецирующая плоскость;
- 2) $\alpha \cap \pi_1 = a_1$ – линия связи;

- 3) $\alpha \cap \pi_2 = a_2$ – линия связи;
- 4) $A \cup S_1 = m_1$ – проецирующая прямая;
- 5) $A \cup S_2 = m_2$ – проецирующая прямая;
- 6) $m_1 \cap a_1 = A_1$ – первая проекция точки A ;
- 7) $m_2 \cap a_2 = A_2$ – вторая проекция точки A .

Докажем, что такая модель является однозначной, т.е. сохраняет всю геометрическую информацию исходной точки. Такой информацией будет только положение в пространстве, так как точка не имеет ни размеров, ни формы. Для этого через центры проецирования (S_1, S_2) и изображения точки (A_1, A_2) достаточно провести проецирующие прямые, которые, пересекаясь, восстановят положение исходной точки в исходном пространстве. Кроме того, если сравнить размерность исходного и картинного пространств, то она окажется одинаковой. Действительно, на выделение одной точки из множества точек трехмерного пространства затрачивается три параметра и на выделение пары точек, которые принадлежат соответствующим лучам двух пучков, – также три параметра: один параметр тратится на то, чтобы выделить один луч в пучке прямых, другой – на выделение на этом луче проекции исходной точки, еще один параметр нужно затратить, чтобы выделить на другом луче другую проекцию точки.

Исключением из этого правила окажутся точки, принадлежащие прямой u . Моделью любой точки этой прямой будут только точки U_1 и U_2 . Поэтому прямая названа исключенной, а точки U_1, U_2 – исключенными.

Полученная модель, как было доказано, однозначна, но не удобна в работе, так как представляет собой громоздкую конструкцию, состоящую из двух плоскостей. Для устранения этого неудобства был предложен переход к однокартинному чертежу. Он заключается в перепроецировании изображений с одной картины на другую из дополнительного центра, который, в частности, может совпадать с одним из заданных центров проецирования.

Для каждого из частных случаев метода двух изображений, о которых будет сказано ниже, предлагается свой конкретный переход к однокартинному чертежу. В итоге во всех случаях возникает совмещенная картинная плоскость, каждая точка которой является представителем двух точек различных картин. Поэтому появилась необходимость приписывать индексы проекциям точек, которые показывают первоначальную принадлежность той или иной картине. При этом, после совмещения тождественно совпадают исключенные точки и линии связи. Двойные элементы, имеющие один и тот же символ, но разные индексы, помечаются двойным индексом.

В результате плоской моделью точки трехмерного пространства окажется две ее проекции, которые располагаются на двойной линии связи, проходящей через двойную исключенную точку.

Работа с моделью точки заключается в решении следующих задач:

- 1) построение модели любой точки трёхмерного пространства;

2) определение положения точки относительно проекционного аппарата по её модели.

В сущности, решение этих задач сводится к установлению принадлежности точки к одной из групп, на которые делятся точки исходного пространства. Основанием для такой классификации служит положение точки относительно проекционного аппарата. В результате выделяются следующие группы точек:

1. Точки частного положения:
 - а) принадлежащие картинам π_1, π_2 ;
 - б) бесконечно удаленные;
 - с) принадлежащие нейтральной плоскости.
2. общего положения – все остальные.

Работа с моделью точки обеспечивается системой знаний, представленной в идее схемы на рис. 46. Для построения модели любой точки трехмерного пространства, необходимо знание устройства проекционного аппарата и алгоритм его работы. Для определения положения точки по отношению к проекционному аппарату необходимо умение провести процедуру обратную той, которая позволяет построить модель. Эту процедуру облегчает знание характерных признаков моделей точек частного положения.

Рассмотрим решение обеих, выше указанных задач, на примере моделирования точек общего и частного положения в перспективе, аксонометрии и на эюре Монжа.

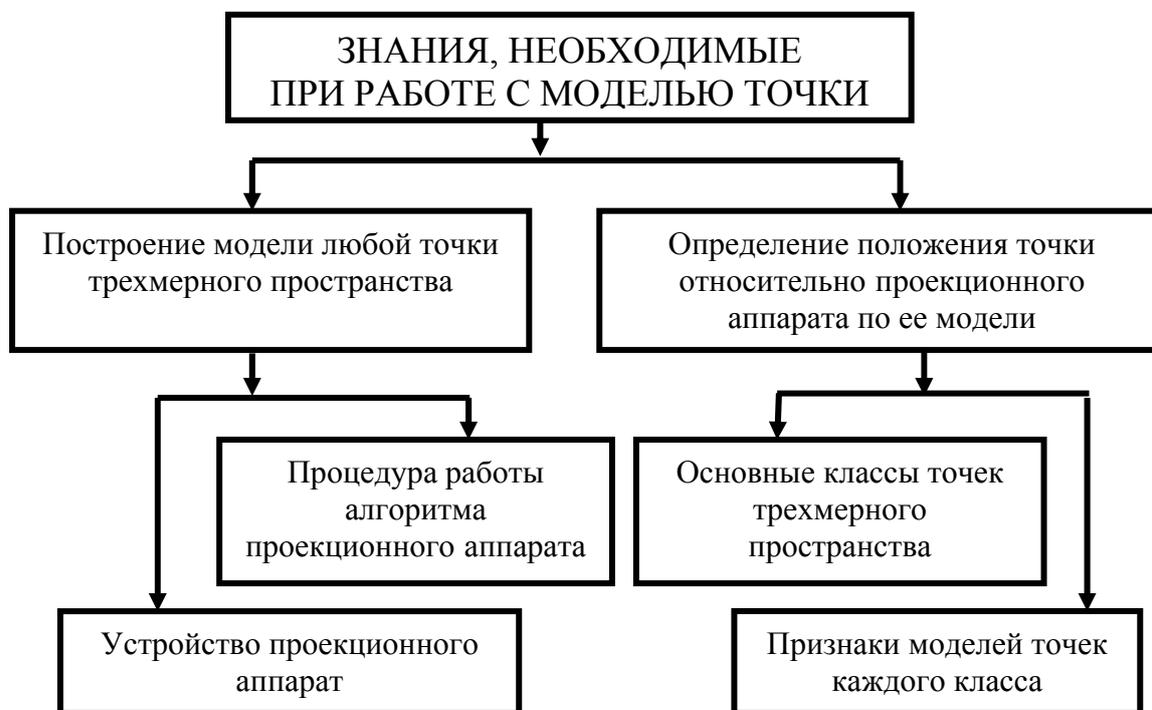


Рис. 46. Знания, необходимые при работе с моделью точки

- 5) $A \cup S_2 = m_2$;
- 6) $m_1 \cap a_1 = A'_1$;
- 7) $m_2 \cap a_2 = A_2$;
- 8) $A'_1 \cup S_2 = m_3$;
- 9) $m_3 \cap a_2 = A_1$.

Окончательный вариант модели точки в перспективе показан на рис. 48.

Аксонометрия. На рис. 49 приведены пример построения модели точки трехмерного пространства в аксонометрии. Порядок операций осуществляется в соответствии со следующим алгоритмом:

- 1) $A \cup S_1 \cup S_2 = \alpha$;
- 2) $\alpha \cap \pi_1 = a_1$;
- 3) $\alpha \cap \pi_2 = a_2$;
- 4) $A \cup S_1 = m_1$;
- 5) $A \cup S_2 = m_2$;
- 6) $m_1 \cap a_1 = A'_1$;
- 7) $m_2 \cap a_2 = A_2$;
- 8) $A'_1 \cup S_2 = m_3$;
- 9) $m_3 \cap a_2 = A_1$.

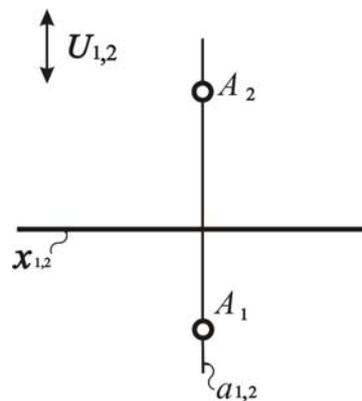


Рис. 48. Модель точки в перспективе

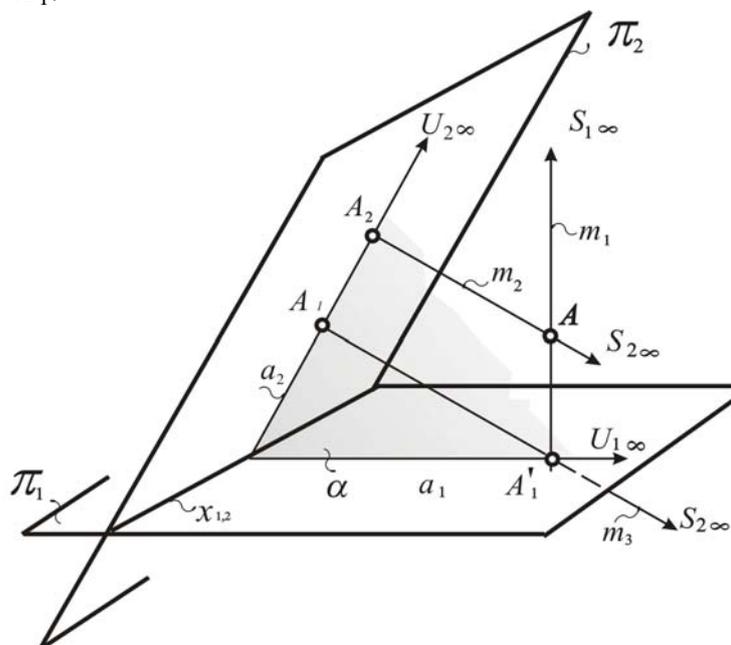


Рис. 49. Моделирование точки трехмерного пространства в аксонометрии

Сравнивая модели точки, полученные в перспективе, аксонометрии и на эюре Монжа, мы не находим ни каких отличий. Они возникают только при моделировании точек частного положения.

3.5.3. Моделирование точек частного положения в стандартных вариантах метода двух изображений

Рассмотрим характерные признаки моделей точек частного положения, которые возникают в перспективе аксонометрии и на эюре Монжа.

Характерные признаки моделей точек, принадлежащих картине π_1 :

1) в перспективе и аксонометрии обе проекции точки тождественно совпадают;

2) при моделировании на эюре Монжа характерным признаком модели точки является принадлежность второй проекции точки оси $x_{1,2}$.

Докажем, опираясь на алгоритм построения модели точки и структуру проекционного аппарата.

1. Перспектива. Если точка A принадлежит картине π_1 (рис. 53), это приводит к незначительным изменениям в алгоритме, которые не влияют на количество и качество операций. Первая проекция точки A тождественно совпадает с самой точкой. В результате тождественно совпадают проецирующие прямые m_2 и m_3 . Это приводит к тождественному совпадению первой и второй проекций точки A (рис. 54).

1) $A \cup S_1 \cup S_2 = \alpha$;

2) $\alpha \cap \pi_1 = a_1$;

3) $\alpha \cap \pi_2 = a_2$;

4) $A \cup S_1 = m_1$;

5) $A \cup S_2 = m_2$;

6) $m_1 \cap a_1 = A'_1 \equiv A$;

7) $m_2 \cap a_2 = A_2$;

8) $A'_1 \cup S_2 = m_3 \equiv m_2$;

9) $m_3 \cap a_2 = A_1 \equiv A_2$.

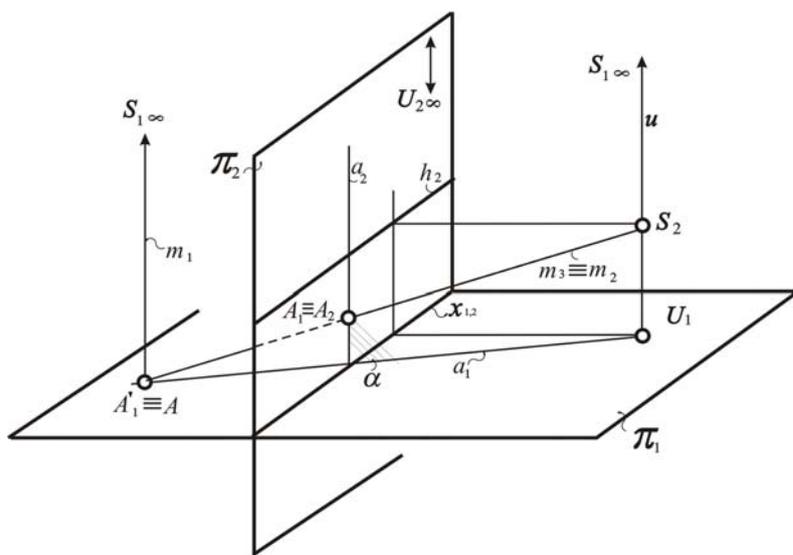


Рис. 53. Моделирование точки, принадлежащей картине π_1 , в перспективе

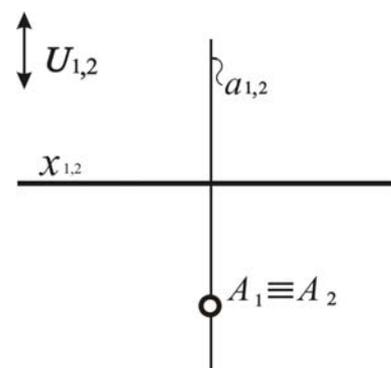


Рис. 54. Модель точки, принадлежащей картине π_1 , в перспективе

2. Аксонометрия. В аксонометрии принадлежность точки A к картине π_1 (рис. 55), приводит к аналогичным изменениям в алгоритме. Это, в свою очередь, приводит к аналогичному конечному результату: тождественному совпадению первой и второй проекций точки A (рис. 56).

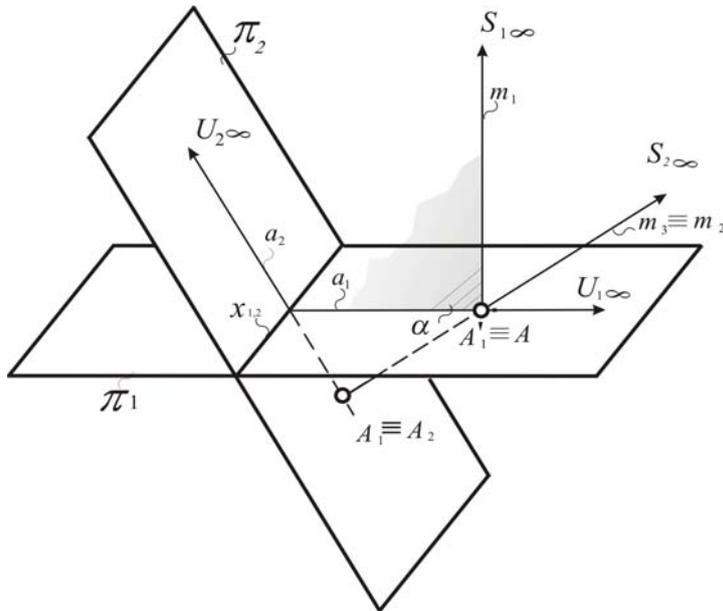


Рис. 55. Моделирование точки, принадлежащей картине π_1 , в аксонометрии

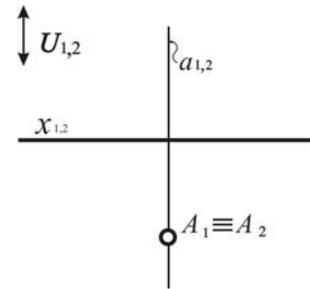


Рис. 56. Модель точки, принадлежащей картине π_1 , в аксонометрии

3. Эпюр Монжа. Принадлежность точки A принадлежит к картине π_1 (рис. 57) приводит также к незначительным изменениям в алгоритме, которые также не влияют на количество и качество операций. Изменения заключаются в тождественном совпадении проецирующей прямой m_2 и линии связи a_1 , которое приводит к принадлежности второй проекции исходной точки к оси проекций $x_{1,2}$ (рис. 58).

- 1) $A \cup S_1 \cup S_2 = \alpha$;
- 2) $\alpha \cap \pi_1 = a_1$;
- 3) $\alpha \cap \pi_2 = a_2$;
- 4) $A \cup S_1 = m_1$;
- 5) $A \cup S_2 = m_2 \equiv a_1$;
- 6) $m_1 \cap a_1 = A'_1 \equiv A$;
- 7) $m_2 \cap a_2 = A_2 \subset x_{1,2}$;
- 8) $A'_1 \cup S_3 = m_3$;
- 9) $m_3 \cap a_2 = A_1$.

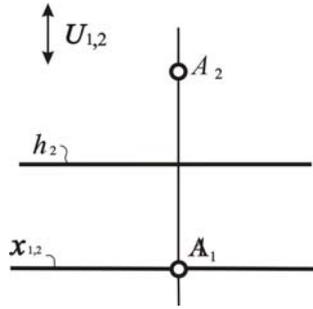


Рис. 60. Модель точки, принадлежащей картине π_2 , в перспективе

Перспектива, эюр Монжа. Если точка A принадлежит картине π_2 (рис. 61, 62, 6), это приводит к тому, что вторая линия связи тождественно совпадает с проецирующей прямой m_1 . Это, в свою очередь, приводит принадлежности первой проекция точки оси $x_{1,2}$ (рис. 53, 54).

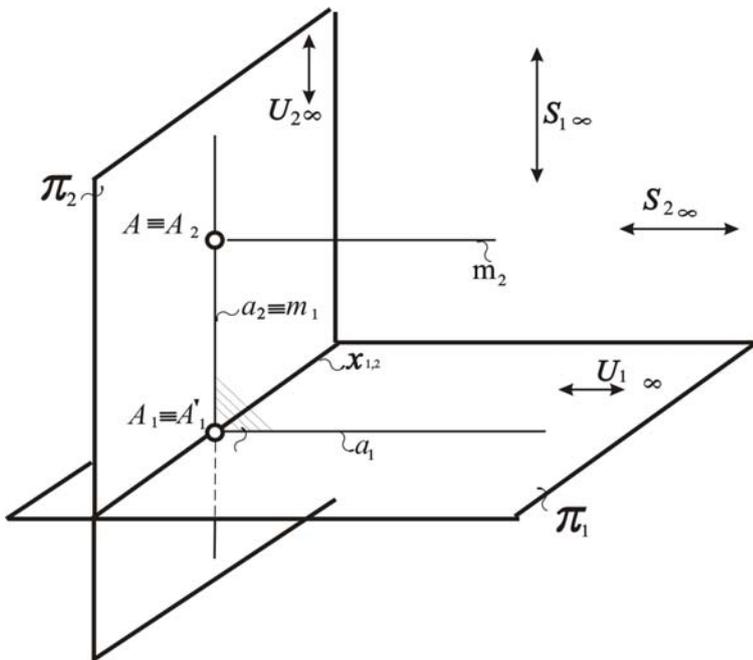


Рис. 61. Моделирование точки, принадлежащей картине π_2 , на эюре Монжа

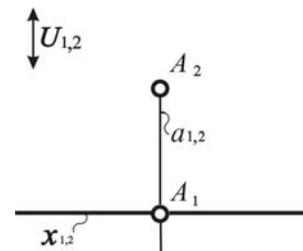


Рис. 62. Модель точки, принадлежащей картине π_2 , на эюре Монжа

Характерные признаки моделей бесконечно удаленных точек:

- 1) в аксонометрии и на эюре Монжа первая проекция точки бесконечно удалены;
- 2) при моделировании в перспективе первая проекция точки принадлежит линии горизонта h_2 .

Аксонометрия, эюр Монжа. Если точка A находится в бесконечности (см. рис. 58, 59), то проецирующая ее плоскость также бесконечно удалена, потому что проходит через три бесконечно удаленные точки: S_1 , S_2 , A . Это приводит к тому, что все операции алгоритма реализуются в беско-

нечности. В результате обе проекции точки A оказываются бесконечно удаленными (см. рис. 60).

В **перспективе** центр S_2 находится на конечном расстоянии. Это приводит к тому, что проецирующая плоскость α со всеми элементами (проецирующими прямыми, линиями связи и проекциями точки) также находится на конечном расстоянии (см. рис. 61). Исключение составляют одна проецирующая прямая m_1 , потому что проходит через бесконечно удаленные точки A и S_1 . В результате первая проекция в ее первоначальном положении оказывается бесконечно удалена. Это приводит к тому, что проецирующая прямая m_3 принадлежит плоскости горизонта и пересекает картину π_2 , в точке, которая принадлежит линии горизонта h_2 (см. рис. 62).

Характерные признаки моделей точек, принадлежащих нейтральной плоскости:

1) на эюре Монжа и в аксонометрии нейтральная плоскость существует. В обоих случаях она совпадает с бесконечно удаленной плоскостью трехмерного пространства и не имеет практической значимости. Моделирование точек, принадлежащих этой плоскости уже рассматривалось выше;

2) при моделировании в перспективе обе проекции точки находятся в бесконечности.

Посмотрим, как выглядит модель точки, которая принадлежит нейтральной плоскости v , в **перспективе**. Процесс моделирования отражен на рис. 63 и приведенном ниже алгоритме. В этом случае происходит тождественное совпадение нейтральной плоскости v и проецирующей плоскости α . Это обстоятельство приводит к тому, что линия связи a_2 удаляется в бесконечность вместе с проекциями точки. В результате характерным признаком точки, которая лежит в нейтральной плоскости, в перспективе на вертикальной картине является удаленность в бесконечность обеих ее проекций (рис. 64).

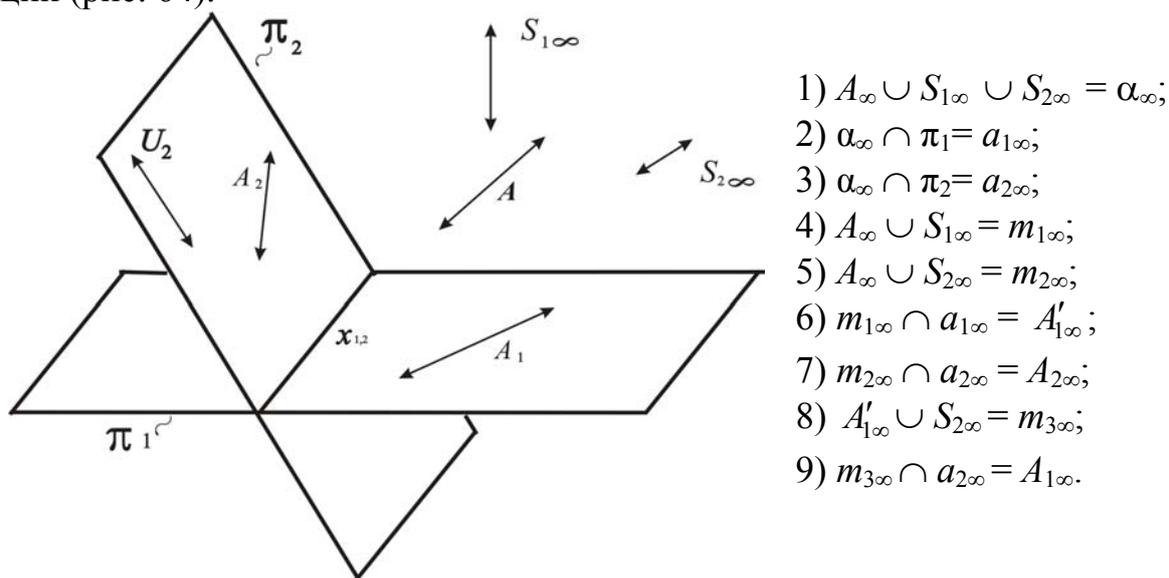


Рис. 63. Моделирование бесконечно удаленной точки в аксонометрии

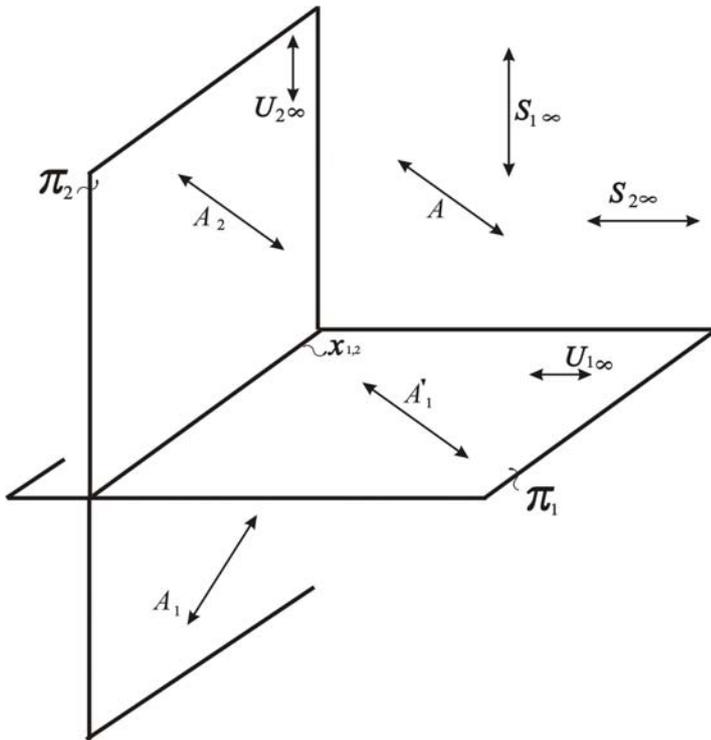


Рис. 64. Моделирование бесконечно удаленной точки на эюре Монжа

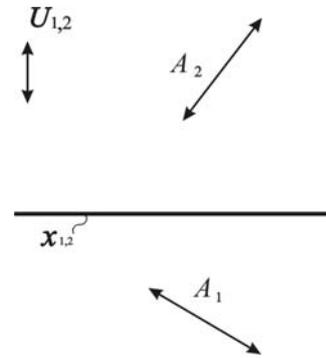
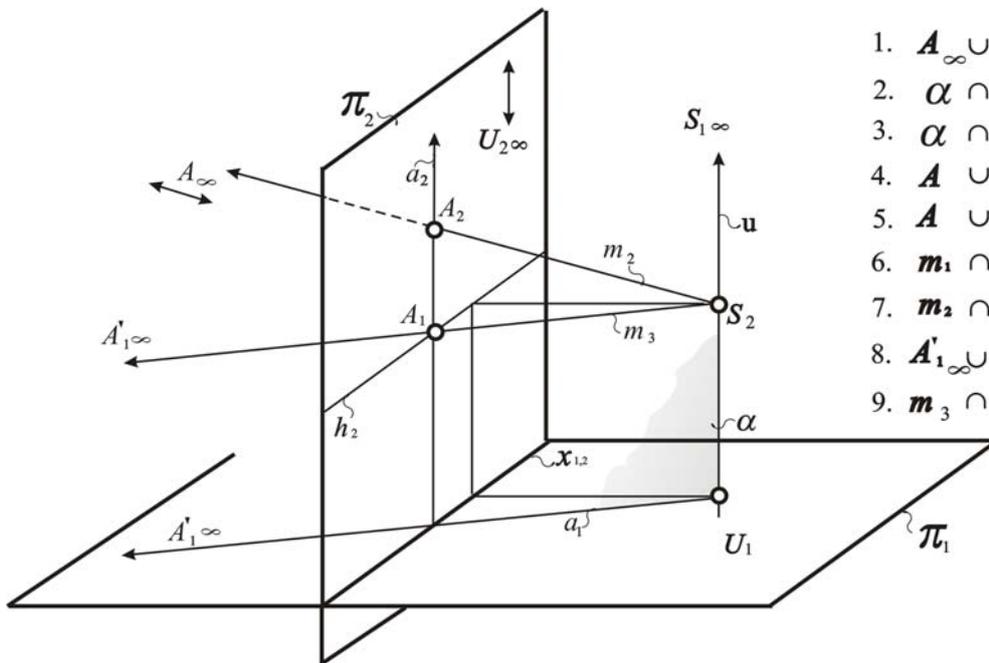


Рис. 65. Модель бесконечно удаленной точки на эюре Монжа и аксонометрии



1. $A_{\infty} \cup S_{1\infty} \cup S_2 = \alpha$
2. $\alpha \cap \pi_1 = a_1$
3. $\alpha \cap \pi_2 = a_2$
4. $A \cup S_1 = m_1\infty$
5. $A \cup S_2 = m_2$
6. $m_1 \cap a_1 = A'_1\infty$
7. $m_2 \cap a_2 = A_2$
8. $A'_1\infty \cup S_2 = m_3$
9. $m_3 \cap a_2 = A_1 \subset h_2$

Рис. 66. Моделирование бесконечно удаленной точки в перспективе

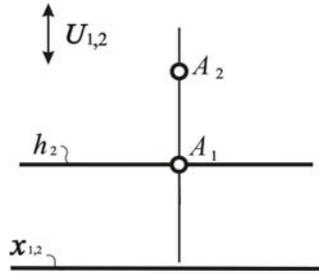


Рис. 67. Модель бесконечно удаленной точки в перспективе

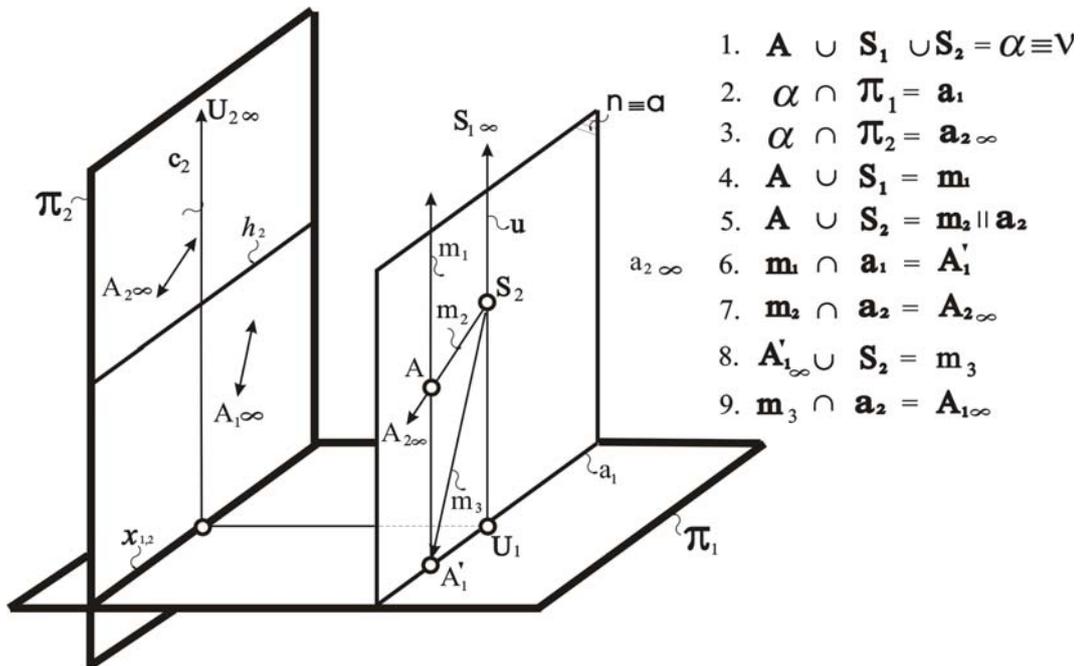


Рис. 68. Моделирование точки, принадлежащей нейтральной плоскости, в перспективе

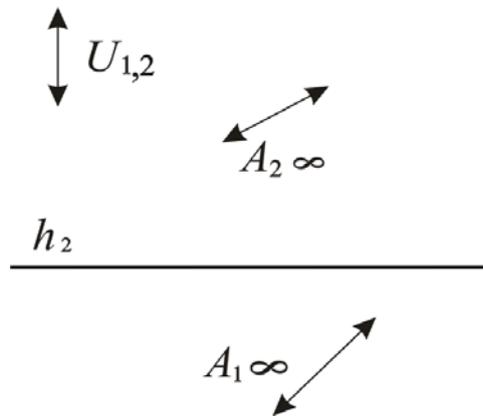


Рис. 69. Модель точки, принадлежащей нейтральной плоскости, в перспективе на вертикальной картине

Контрольные вопросы

1. Каковы операции алгоритма по построению модели точки, построенной методом двух изображений?
2. Как называется плоскость, образованная произвольной точкой трехмерного пространства и центрами проецирования?
3. Как называются линии пересечения этой плоскости с картинками?
4. Как называются прямые, проходящие через произвольную точку трехмерного пространства и центры проецирования?
5. Как называются изображения точки на картинках?
6. Почему необходим и как осуществляется переход к однокартинному чертежу?
7. Дайте определение плоской модели точки трехмерного пространства, построенной методом двух изображений.
8. Приведите доказательство, что полученная модель сохраняет всю геометрическую информацию исходной точки.
9. Положение каких точек не возможно восстановить в исходном пространстве по их модели?
10. Из решения каких задач складывается работа с моделью точки?
11. Перечислить точки, которые занимают частное положение по отношению к проекционному аппарату.
12. Каков характерный признак модели точки, которая принадлежит картине π_1 в перспективе, аксонометрии, на эпюре Монжа?
13. Каков характерный признак модели точки, которая принадлежит картине π_2 в перспективе, аксонометрии, на эпюре Монжа?
14. Что характерного в модели точки, которая бесконечно удалена в перспективе, аксонометрии, на эпюре Монжа?
15. Чем отличается модель точки, которая принадлежит нейтральной плоскости в перспективе?

3.6. Модель прямой

Выше были рассмотрены плоские изображения трехмерного объекта, построены с преобладанием прямых линий. Они по-разному расположены относительно проекционного аппарата. В связи с этим их модели обладают различными характерными признаками, которые приводят к некоторым особенностям при работе с этими моделями. Чтобы понять возникновение этих признаков, необходимо знать, как строится модель прямой и какие задачи нужно решать при работе с этой моделью. Поэтому рассмотрим процедуру возникновения модели прямой, построенной методом двух изображений, характерные признаки моделей прямых частного положения и приемы решения задач, которые необходимо решать, работая с этими моделями.

Чтобы построить модель произвольной прямой l трехмерного пространства (рис. 70), выполним следующие операции алгоритма:

$$l \cup S_1 = \alpha;$$

$$l \cup S_2 = \beta;$$

$$\alpha \cap \pi_1 = l'_1;$$

$$\beta \cap \pi_2 = l'_2.$$

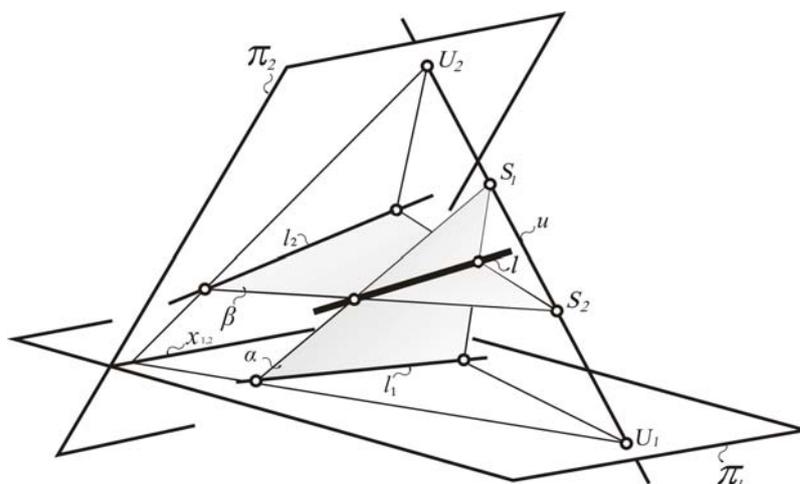


Рис. 70. Моделирование прямой трехмерного пространства методом двух изображений (общий случай)

После того как построены изображения прямой, осуществим переход к однокартинному чертежу, используя тот прием, который присущ конкретному частному варианту. В результате **моделью прямой в общем случае окажутся две ее проекции, произвольно расположенные на плоскости.**

Однозначность такой модели легко доказать. Достаточно восстановить положение проецирующих плоскостей – они пересекутся по исходной прямой l . Этот факт подтвердится, если подсчитать размерность множества пар прямых, моделирующих исходную прямую. Для выделения двух произвольных прямых плоскости необходимо затратить четыре параметра. Столько же параметров нужно затратить, чтобы выделить прямую в трехмерном пространстве.

Работа с моделью прямой заключается в решении следующих задач:

- 1) моделирование любой прямой трехмерного пространства;
- 2) определение положения прямой относительно проекционного аппарата по ее модели;
- 3) построение одной из проекций точки, принадлежащей прямой, если дана другая ее проекция;
- 4) построение точек пересечения прямой с картинками;
- 5) построение точек схода прямой (бесконечно удаленная точка прямой).

При решении этих задач необходимо учитывать их взаимосвязь, которая представлена графом на рис. 71. Для создания этого графа было выделено множество, составленное из перечисленных выше задачами, и соответствующих сведений из предыдущих разделов. Отношение, которое задано на этом множестве, выглядит следующим образом: «элемент X не может быть освоен без знания элемента Y ».



Рис. 71. Взаимосвязь знаний, умений и навыков, обеспечивающих работу с моделью прямой

В результате видим, что построение модели любой прямой трехмерного пространства не возможно без знания закона, который обуславливают структура проекционного аппарата и алгоритм его работы. Для определения положения прямой относительно проекционного аппарата, необходимо знание закона построения модели прямой, классов прямых трехмерного пространства и характерных признаков моделей прямых частного положения. Задачи на построение модели прямой и определения ее положения относительно проекционного аппарата необходимы при решении остальных задач. Кроме этого важны еще знания раздела «модель точки». Они обеспечивают возможность при нахождении точек пересечения прямой с картинами ее точки схода.

Классификация прямых происходит в зависимости от их положения относительно проекционного аппарата. В результате выделяю следующие два класса:

1. Прямые частного положения:

- а) **проецирующие** прямые: они содержат один из центров проецирования;
- б) **прямые уровня** – это прямые, которые параллельны одной из картин. Если прямая параллельна π_1 , она называется горизонталью, если параллельна π_2 , – фронталью;

в) **профильные прямые.** К этим прямым относят такие, которые пересекают исключенную прямую.

2. **Прямые общего положения.** К этой группе относятся все остальные прямые.

Примеры моделей прямых, различным образом расположенных относительно проекционного аппарата, даны на рис. 72–74. Прямая a содержит центр проецирования S_1 , прямая n пересекает исключенную прямую, прямая m параллельна картине π_1 , прямая l занимает общее положение.

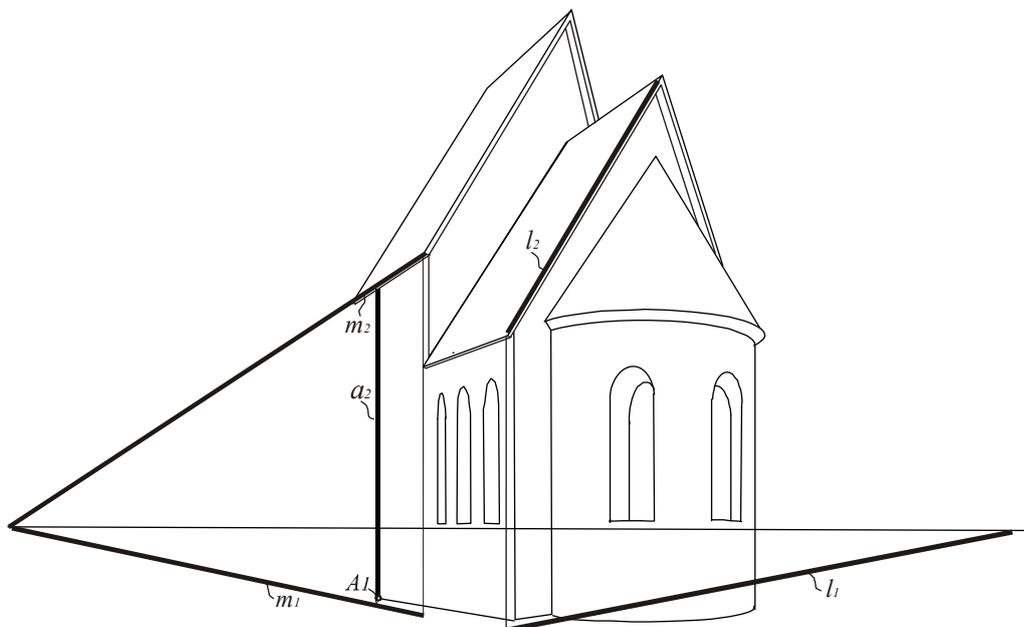


Рис. 72. Модели прямых на плоском изображении трехмерного объекта (перспектива на вертикальной картине)

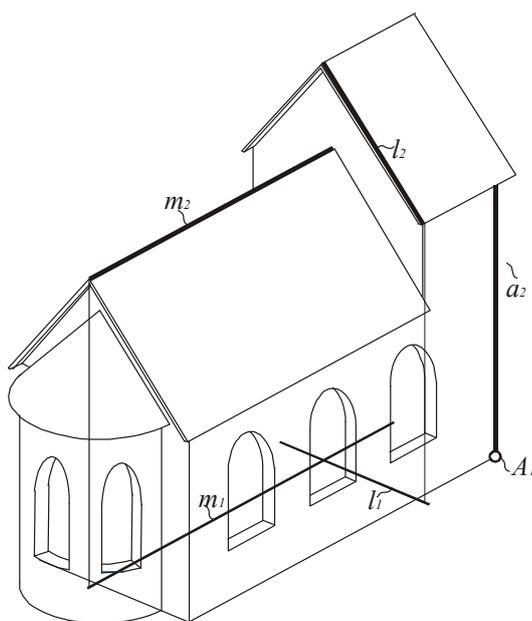


Рис. 73. Модели на плоском изображении трехмерного объекта (аксонометрия)

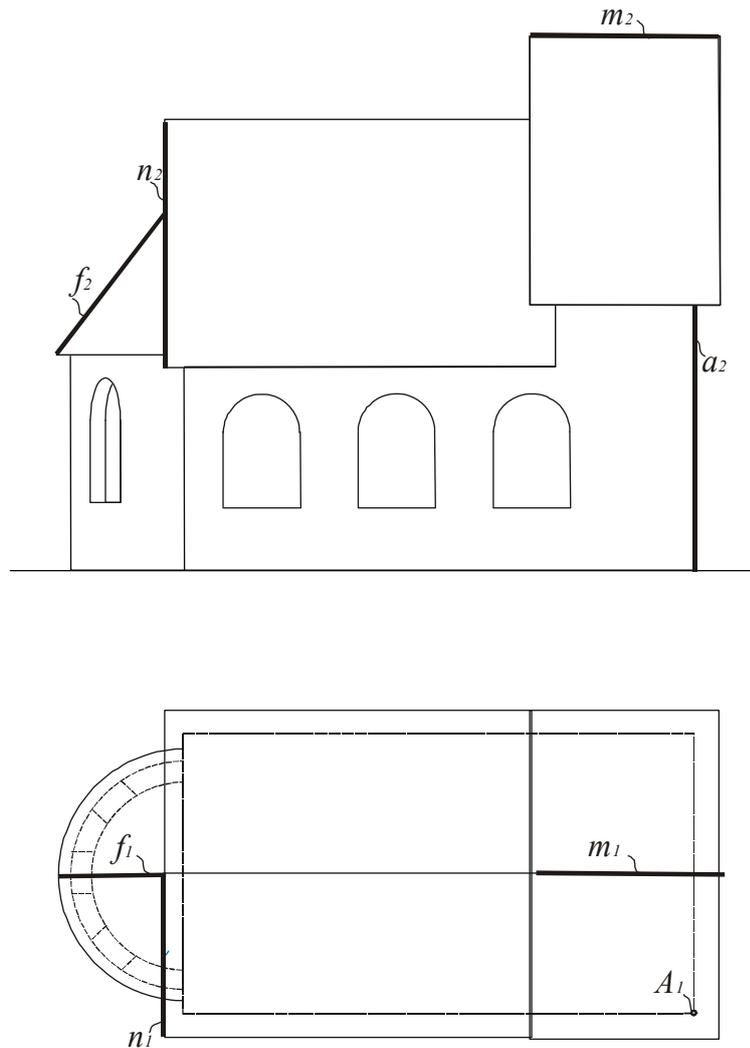


Рис. 74. Модели прямых на плоском изображении трехмерного объекта (эпюр Монжа)

3.6.1. Моделирование прямых общего положения

Рассмотрим решение выделенных выше задач, из которых складывается работа с моделью прямой.

Задача 1. В трехмерном пространстве выделена прямая. Построить ее модель, используя метод двух изображений.

Рассмотрим примеры построения моделей прямых общего положения в перспективе, аксонометрии и на эпюре Монжа. Количество операций алгоритма в этом случае возрастает на две за счет перепроецирования изображения прямой с картины π_1 на картину π_2 .

В перспективе и аксонометрии перепроецирование происходит благодаря плоскости γ , возникающей в результате объединения первой проекции прямой с центром проецирования S_2 . Это отражено на приведенном ниже алгоритме:

$$l \cup S_1 = \alpha;$$

$$l \cup S_2 = \beta;$$

$$\alpha \cap \pi_1 = l'_1;$$

$$\beta \cap \pi_2 = l_2;$$

$$l'_1 \cup S_2 = \gamma;$$

$$\gamma \cap \pi_2 = l_1.$$

На рис. 75–78, показаны соответственно примеры моделирования прямой общего положения в перспективе и аксонометрии. Результаты перехода к однокартинному чертежу в перспективе демонстрирует рис. 75, в аксонометрии – на рис. 77.

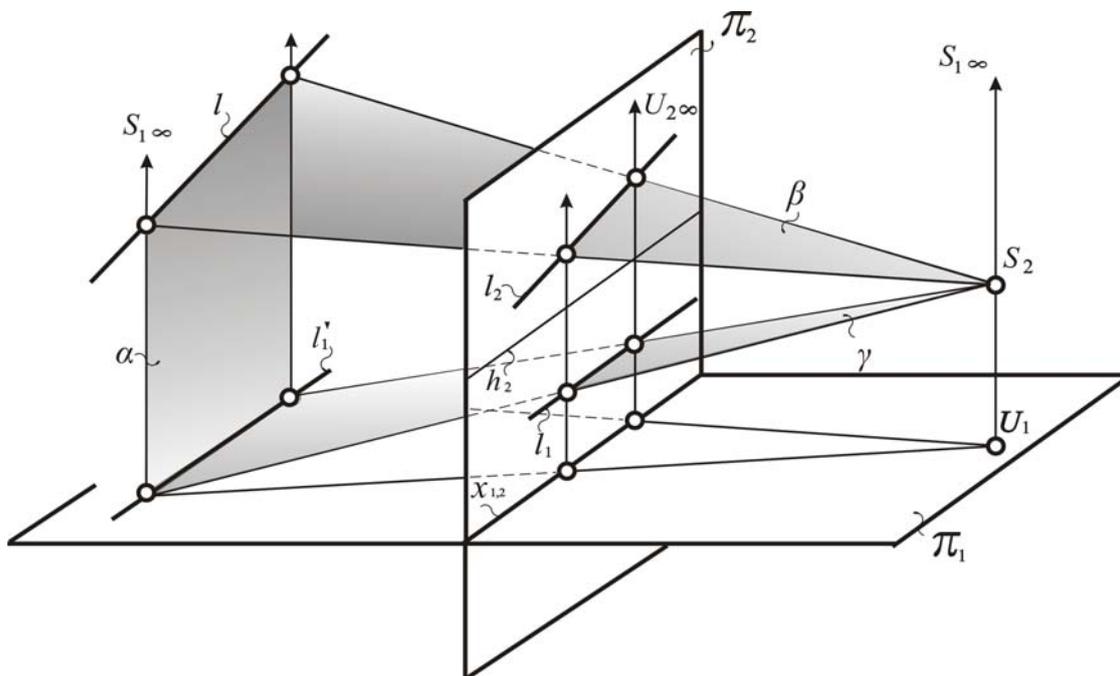


Рис. 75. Моделирование прямой общего положения в перспективе

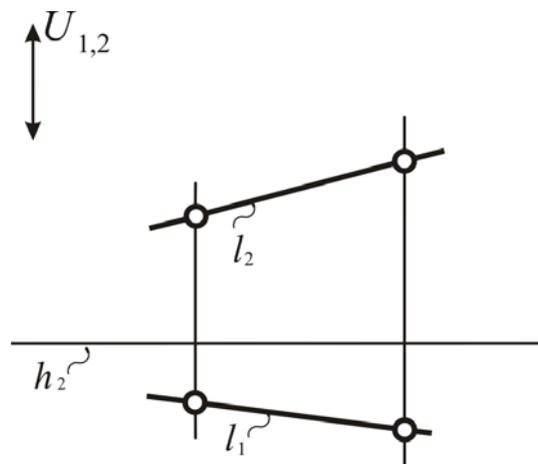


Рис. 76. Модель прямой общего положения в перспективе

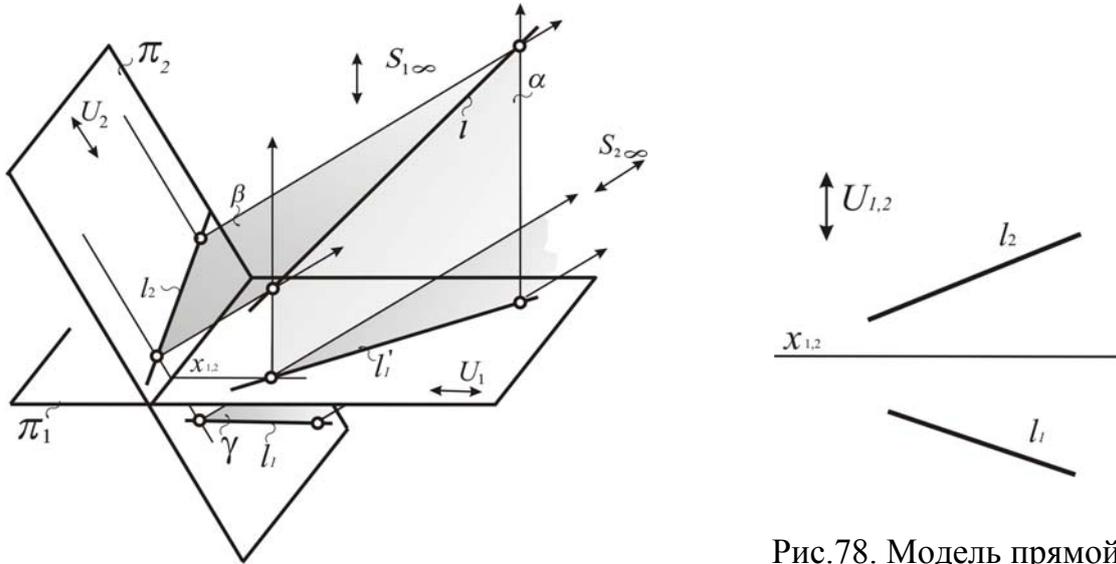


Рис. 77. Моделирование прямой общего положения в аксонометрии

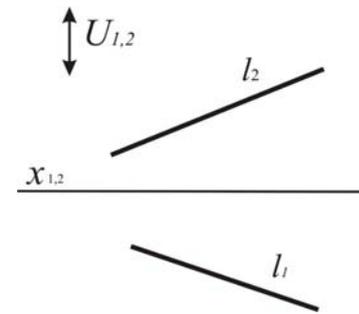


Рис.78. Модель прямой общего положения в аксонометрии

На эюре Монжа совмещение картин происходит также благодаря плоскости γ . Но она возникает в результате объединения первой проекции прямой с центром проецирования S_3 . Это также отражено на приведенном ниже алгоритме. Процесс моделирования и его результат показаны на рис. 79, 80.

- $l \cup S_1 = \alpha$;
- $l \cup S_2 = \beta$;
- $\alpha \cap \pi_1 = l'_1$;
- $\beta \cap \pi_2 = l_2$;
- $l'_1 \cup S_3 = \gamma$;
- $\gamma \cap \pi_2 = l_1$.

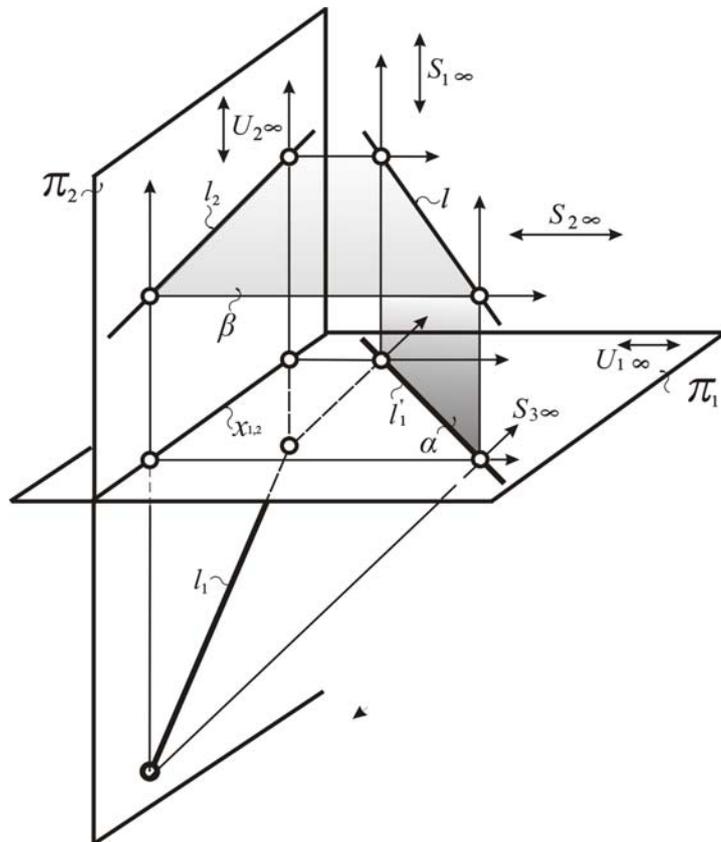


Рис. 79. Моделирование прямой общего положения на эюре Монжа

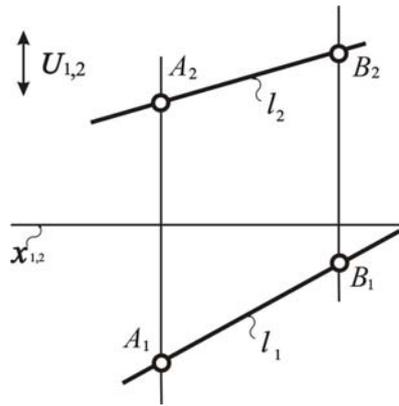


Рис.80. Модель прямой общего положения на эюре Монжа

Задача 2. Определить положение прямой относительно проекционного аппарата по ее модели.

Определение положения прямой относительно проекционного аппарата по ее модели сводится к выявлению ее принадлежности к одному из классов, которые приведены выше. Иначе говоря, необходимо определить относится ли промоделированная прямая к общему положению или к частному. Если к частному, то указать к какому. А также является прямая проецирующей, уровня или профильной.

Для поиска ответа, можно выбрать любой из двух способов:

1. Восстановить положение прямой в исходном пространстве. Для этого проделать процедуру, обратную процедуре проецирования.
2. Ориентироваться на характерные признаки моделей прямых частного положения.

Более простым оказывается второй путь. Поэтому рассмотрим, какими характерными признаками обладают модели прямых частного положения.

3.6.2. Моделирование прямых частного положения

Проецирующие прямые. Характерным признаком проецирующей прямой является изображение одной ее проекции в виде точки, которая принадлежит другой проекции, совпадающей с линией связи. На рис. 81 приведен пример моделирования прямой l , которая содержит центр S_1 . Общей вариант метода двух изображений показывает, что при моделировании такой прямой исчезает одна из проецирующих плоскостей. А оставшаяся плоскость содержит исключенную прямую. В результате одна из проекций совпадает с соответствующей линией связи, а другая – превращается в точку, которая принадлежит другой линии связи. Такие проекции обозначают термином: «вырождается в точку».

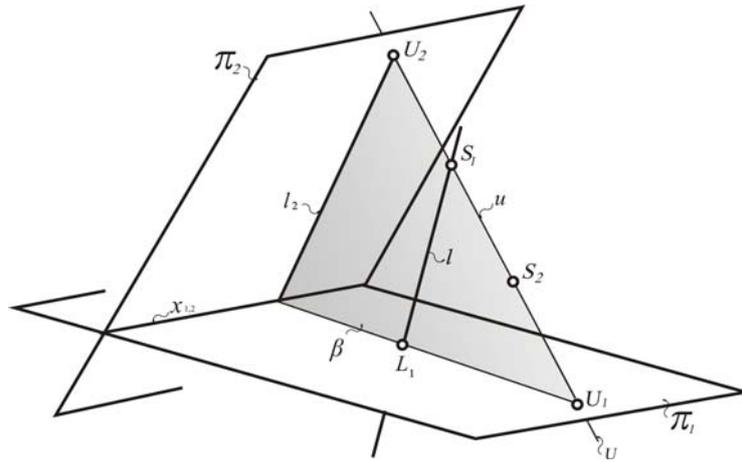


Рис. 81. Моделирование проецирующей прямой (общий случай)

Для стандартных вариантов метода двух изображений алгоритм проецирования прямой, содержащей центр проецирования S_1 выглядит следующим образом:

$$l \cup S_1 = l;$$

$$l \cup S_2 = \beta;$$

$$l \cap \pi_1 = L'_1;$$

$$\beta \cap \pi_2 = l_2;$$

$$L'_1 \cup S_2 = m_3;$$

$$m_3 \cap \pi_2 = L_1.$$

На рис. 82 приведен пример построения в перспективе прямой, которая содержит центр S_1 . Из проецирующих плоскостей здесь присутствует только плоскость β . Это приводит к вырождению первой проекции прямой в точку. Вторая проекция проходит через исключенную точку и, после совмещения картин, содержит вырожденную проекцию этой прямой. Модель проецирующей прямой показана на рис. 83.

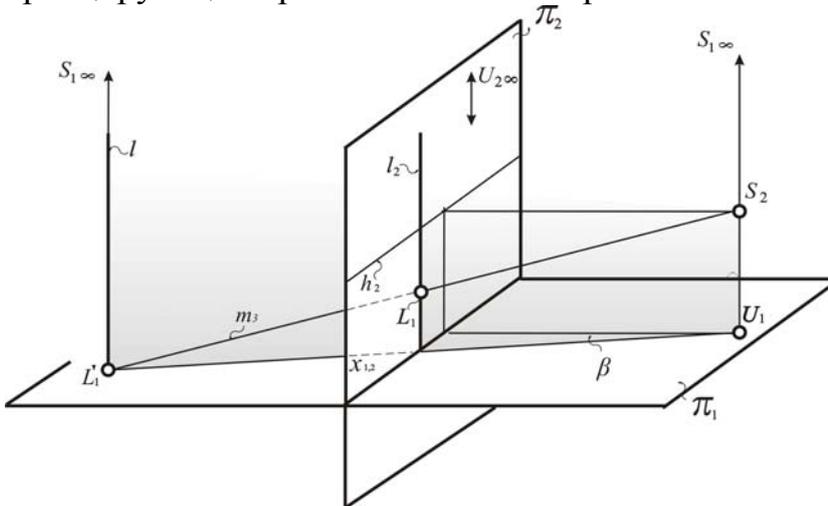


Рис. 82. Моделирование проецирующей прямой в перспективе

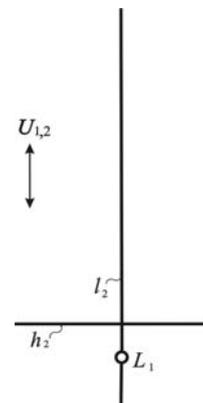


Рис. 83. Модель проецирующей прямой в перспективе на вертикальной картине

Моделирование прямой, содержащей центр проецирования S_2 , в перспективе избегают. Это объясняется тем, что перспектива строится с целью показать объект таким, каким его видят глаза человека. Жизненный опыт человека показал, что человек лучше воспринимает невырожденное изображение. Поэтому вырождение главных изображений объектов нежелательно.

Эта особенность применима и для аксонометрии. Здесь также нежелательно иметь вырожденные изображения объектов, которое является главным на π_2 . Но прямые, которые содержат центр проецирования S_1 , изображаются достаточно часто.

Процесс моделирования проецирующей прямой, содержащей центр проецирования S_1 , показан на рис. 84 и приведенном выше алгоритме. Полученная модель изображена на рис 85.

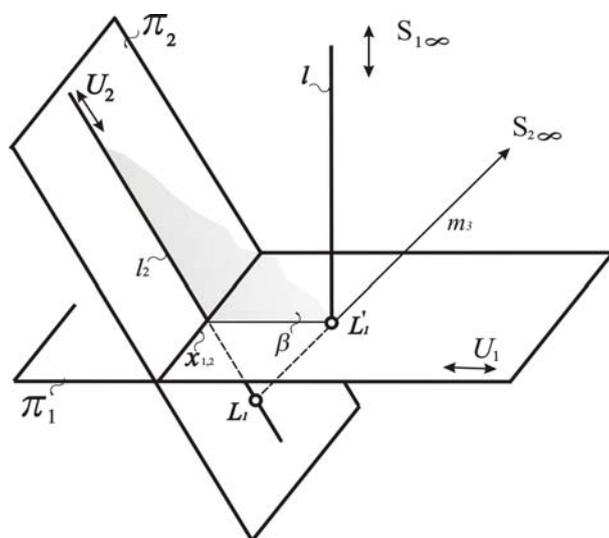


Рис. 84. Моделирование проецирующей прямой в аксонометрии

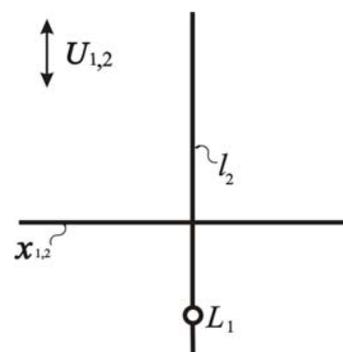


Рис. 85. Модель проецирующей прямой в аксонометрии

На эюре Монжа моделируются прямые, содержащие как центр проецирования S_1 , так и центр S_2 . На рис. 86 приведен пример моделирования прямой, которая содержит центр проецирования S_1 , а на рис. 88 – содержащей центр S_2 . Полученные в итоге модели изображены на рис. 87, 89.

Прямые уровня. Характерные признаки прямых уровня в различных вариантах метода двух изображений различаются.

Рассмотрим, какие характерные признаки возникают при моделировании горизонтали в перспективе, аксонометрии и на эюре Монжа.

Из определения горизонтали следует, что она пересекает картину π_1 в бесконечно удаленной точке. Модель этой точки окажется двойной и будет принадлежать как модели прямой, так и линии горизонта. Следовательно, характерным признаком модели горизонтали в перспективе является принадлежность точки пересечения ее проекций линии горизонта. В примере на рис. 90 прямая l пересекает картину π_1 в точке K . Модель такой прямой приведена на рис. 91.

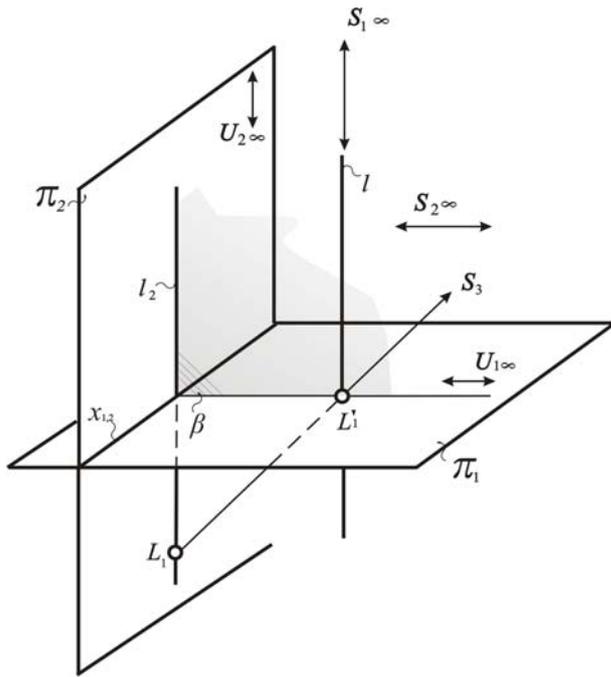


Рис. 86. Моделирование проецирующей прямой, которая содержит центр S_1 , на эюре Монжа

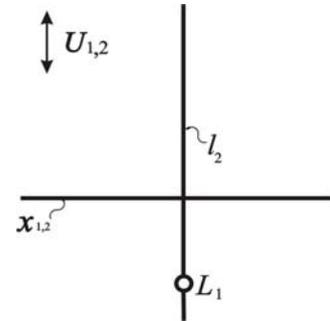


Рис. 87. Модель на эюре Монжа проецирующей прямой, которая содержит центр S_1

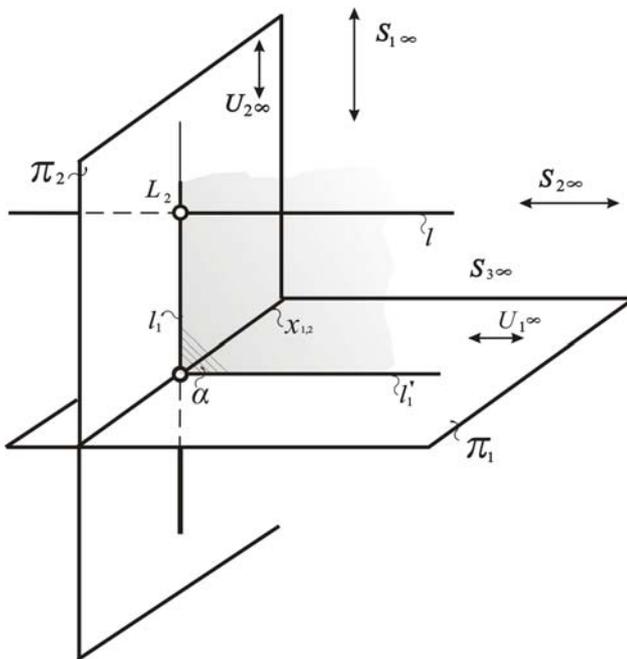


Рис. 88. Моделирование проецирующей прямой, которая содержит центр S_2 , на эюре Монжа

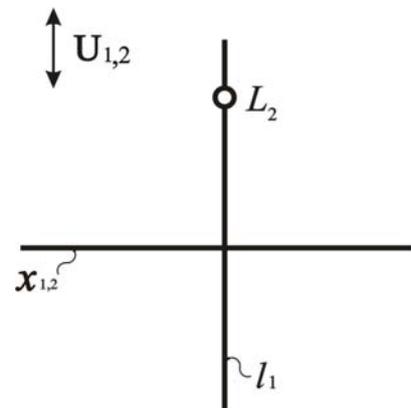


Рис. 89. Модель проецирующей прямой, которая содержит центр S_2 , на эюре Монжа

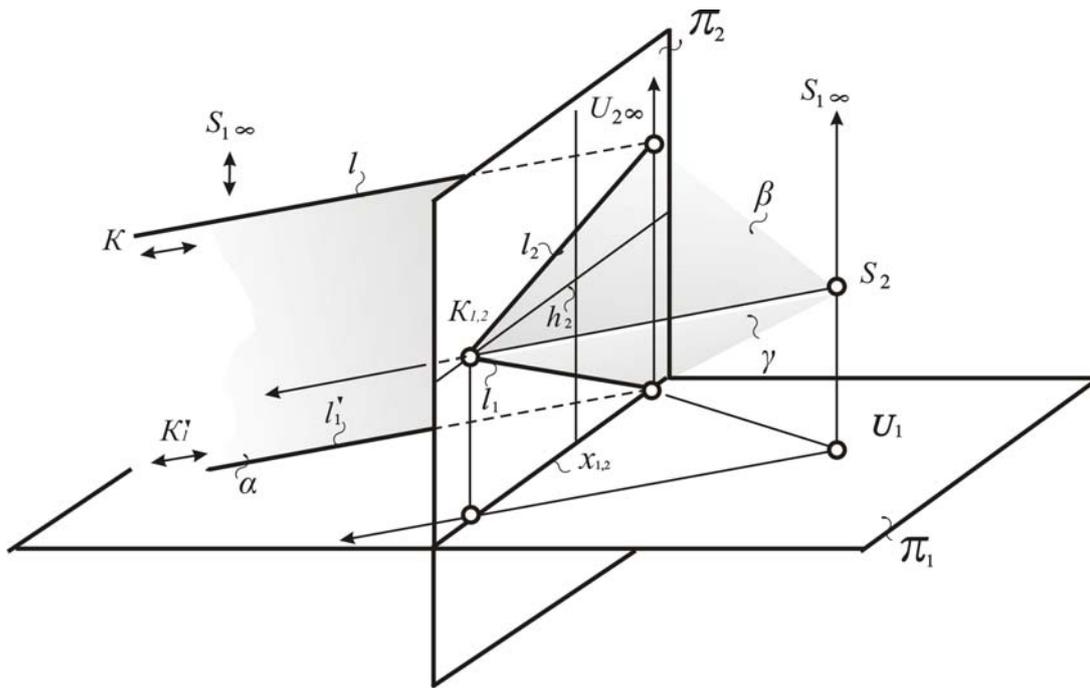


Рис. 90. Моделирование горизонтали в перспективе

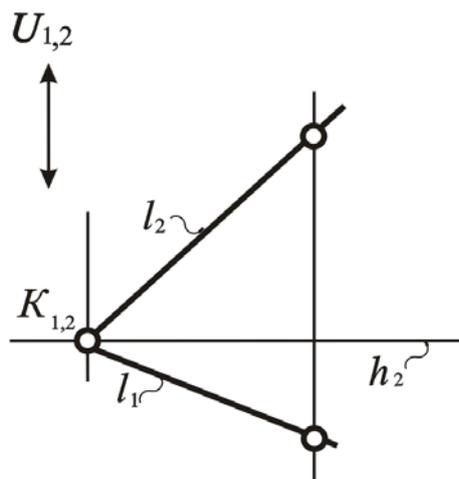


Рис. 91. Модель горизонтали в перспективе

Отличительным признаком модели горизонтали в аксонометрии является параллельность ее проекций друг другу. Он возникает благодаря тому, что проецирующие плоскости β и γ оказываются параллельны друг другу (рис.92). Параллельность обусловлена общей для них бесконечно удаленной прямой, которая проходит через центр S_1 и точку пересечения прямых l и l_1 . Последовательность операций показана ниже.

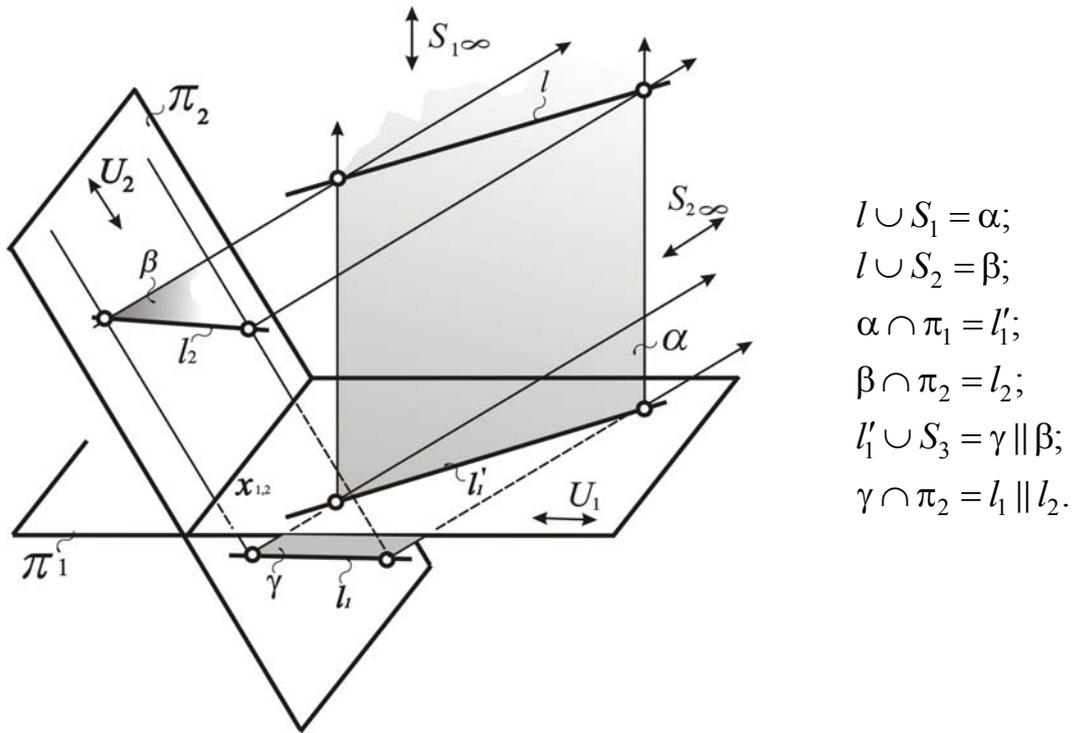


Рис. 92. Моделирование горизонтали в аксонометрии

Модель горизонтали в аксонометрии изображена на рис.93.

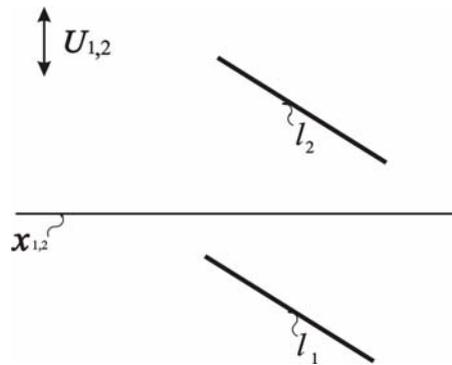


Рис. 93. Модель горизонтали в аксонометрии

При моделировании горизонтали на эюре Монжа (рис.94) проецирующая плоскость β оказывается параллельна картине π_1 . Это обстоятельство порождает следующий характерный признак: вторая проекция горизонтали параллельна оси проекций $x_{1,2}$ (рис. 95).

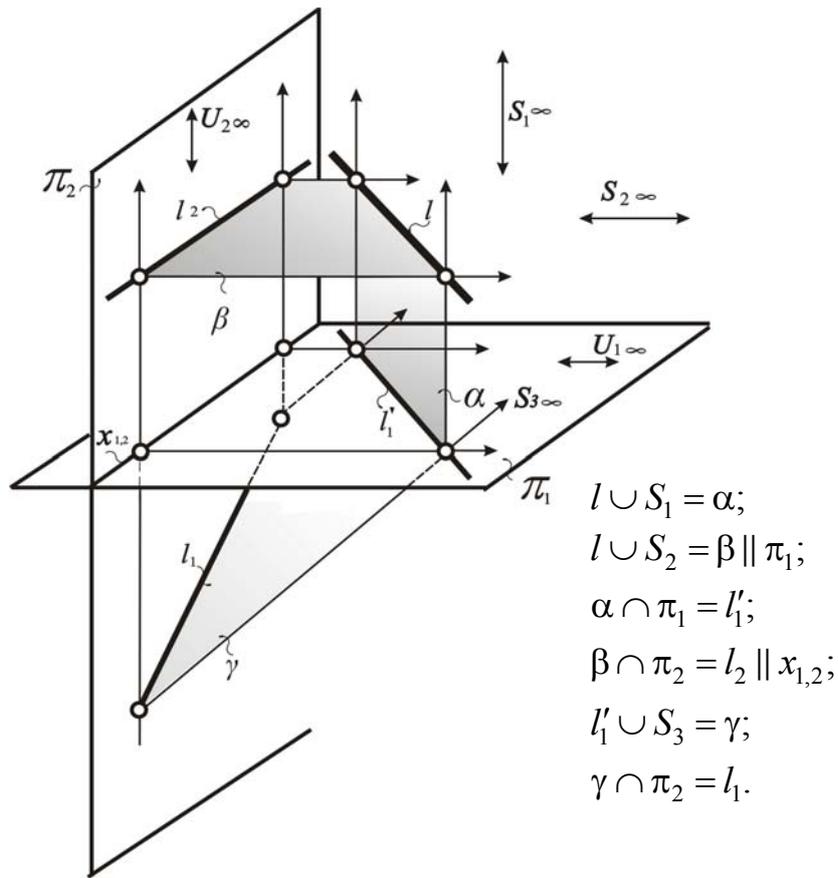


Рис. 94. Моделирование горизонтали на эюре Монжа

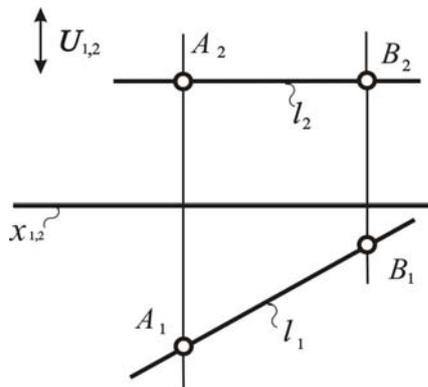
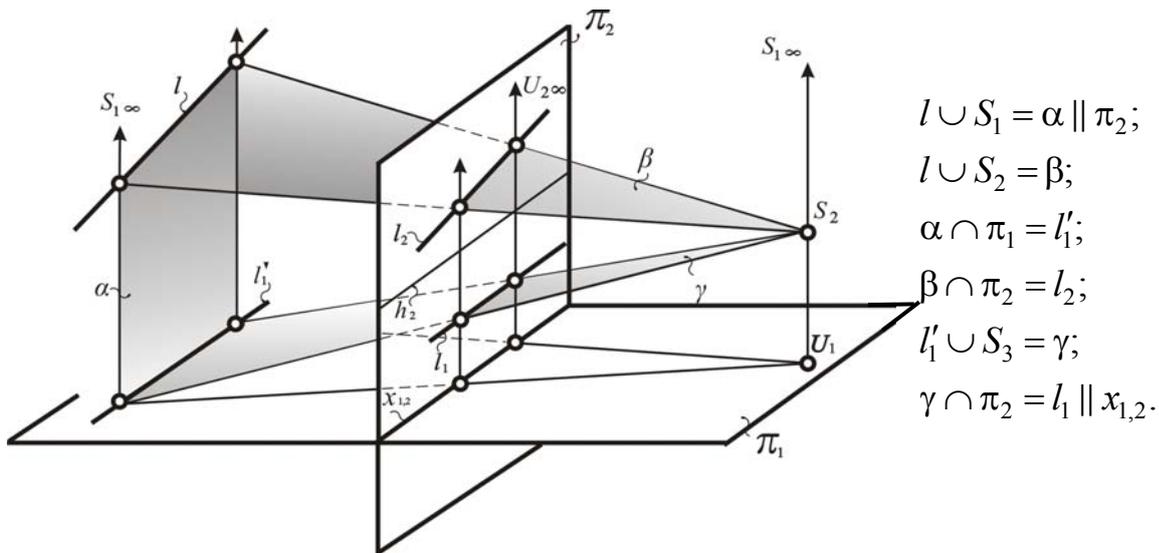


Рис. 95. Модель горизонтали на эюре Монжа

Аналогичный признак модели фронтали возникает при ее моделировании в перспективе на вертикальной картине (рис. 96). Он обуславливается параллельностью проецирующей плоскости α и картины π_2 . На рис. 97 приведен пример модели фронтали, которая получена в перспективе на вертикальной картине.



$$\begin{aligned}
 l \cup S_1 &= \alpha \parallel \pi_2; \\
 l \cup S_2 &= \beta; \\
 \alpha \cap \pi_1 &= l'_1; \\
 \beta \cap \pi_2 &= l_2; \\
 l'_1 \cup S_3 &= \gamma; \\
 \gamma \cap \pi_2 &= l_1 \parallel x_{1,2}.
 \end{aligned}$$

Рис. 96. Моделирование фронтали в перспективе

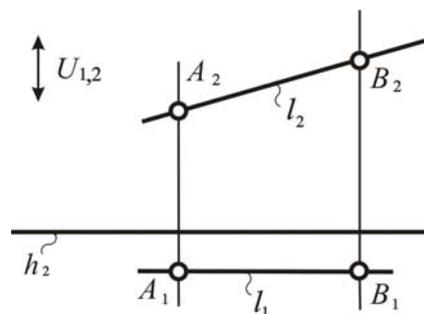


Рис. 97. Модель фронтали в перспективе

При моделировании фронтали в перспективе на наклонной картине и в аксонометрии ее модель не имеет характерных признаков.

При моделировании фронтали на эюре Монжа (рис.98) проецирующая плоскость α оказывается параллельна картине π_2 . Это обстоятельство порождает следующий характерный признак: первая проекция фронтали параллельна оси проекций $x_{1,2}$ (рис. 99).

Характерные признаки модели профильной прямой лишают ее модель наглядности. Поэтому ее избегают изображать в перспективе и аксонометрии, а работают с ней в основном на эюре Монжа, где она встречается достаточно часто. На рис. 100 и приведенном ниже алгоритме показан процесс моделирования профильной прямой.

Поскольку профильная прямая пересекает исключенную прямую, то все проецирующие плоскости α , β , и γ тождественно совпадают друг с другом. В конечном счете это приводит к совпадению обеих проекций прямой, но при этом проекции точек не совпадают. В рассмотренном примере это подтверждают проекции точек A и B (рис. 101).

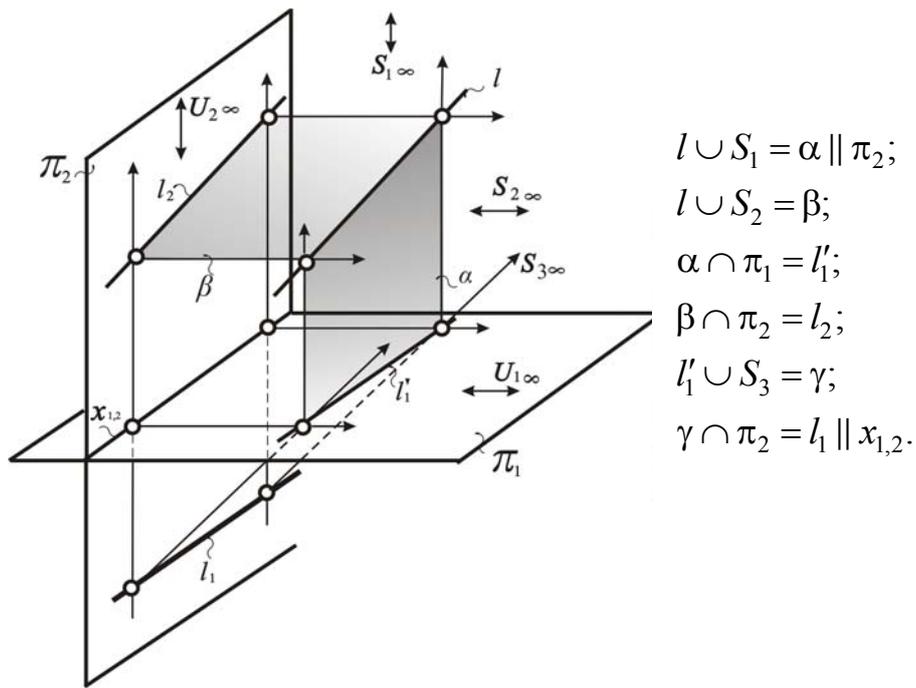


Рис. 98. Моделирование фронтали на эюре Монжа

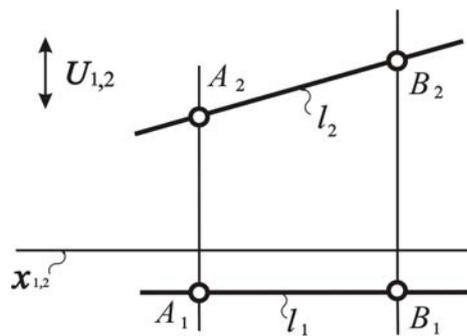


Рис. 99. Модель фронтали на эюре Монжа

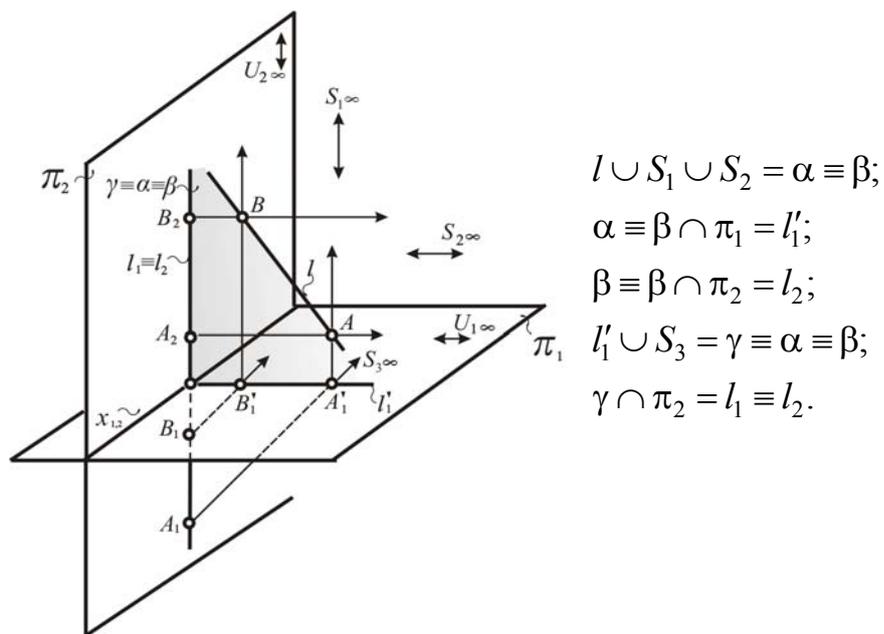


Рис. 100. Моделирование профильной прямой на эюре Монжа

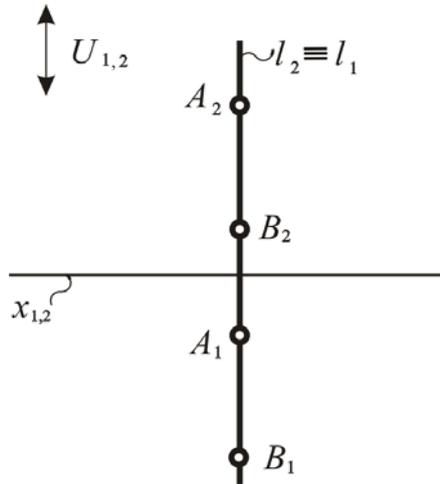


Рис. 101. Модель профильной прямой на эпюре Монжа

3.6.3. Приемы работы с моделью прямой

Задача 3. Дана одна проекция точки, которая принадлежит прямой. Построить другую проекцию точки.

Рассмотрим решение третьей задачи. Не зависимо от того, где она решается в перспективе, аксонометрии или на эпюре Монжа, алгоритм ее решения одинаков, если дана модель прямой l (рис. 102, а). На одной проекции дана точка $C \in l$. Построить другую проекцию точки C .

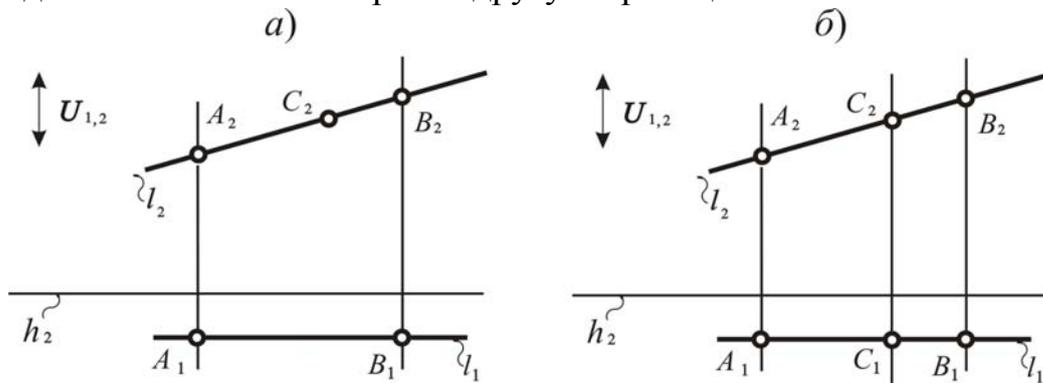


Рис. 102. Построение точки C , которая лежит на прямой l , по одной из заданных проекций

Решение определяется следующими положениями:

- 1) Проецирование сохраняет взаимную принадлежность элементов друг другу (инварианты проецирования).
- 2) Две проекции точки располагаются на соответственных друг другу линиях связи исключенных пучков (определение модели точки).

Алгоритм решения:

1. Через заданную проекцию точки C проведем линию связи.
2. Пересечем линией связи другую проекцию прямой l . Получим искомую проекцию точки C (рис. 102, б).

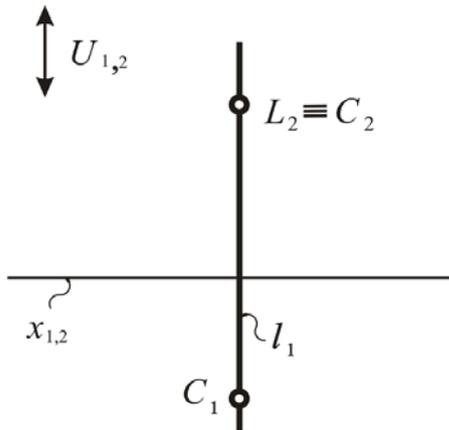


Рис. 103. Построение точки C , которая лежит на прямой l , по одной из заданных проекций (прямая занимает проецирующее положение)

На рис. 103 дан второй вариант условия, при котором прямая занимает проецирующее положение. Искомая проекция точки определяется по этому же алгоритму. Только линия связи совпадает с невырожденной проекцией прямой, а искомая проекция точки тождественно совпадает с вырожденной проекцией прямой.

В случае, когда прямая занимает проецирующее положение и заданная проекция точки принадлежит вырожденной проекции прямой, задача решения не имеет.

В случае с профильной прямой решение задачи усложняется. При ее решении на эпюре Монжа необходимо опираться на

пятый инвариант проецирования. Выполним следующие операции алгоритма (рис. 104):

1. Через один из концов проекции отрезка прямой, на котором отсутствует модель точки, под произвольным углом проведем вспомогательную прямую.

2. Отложим на ней другую проекцию отрезка вместе с заданной проекцией точки.

3. Соединим свободные концы отрезков прямой.

4. Через заданную проекцию точки на вспомогательном отрезке проведем прямую, параллельную той, которая соединила свободные концы отрезков. Получим искомую проекцию точки.

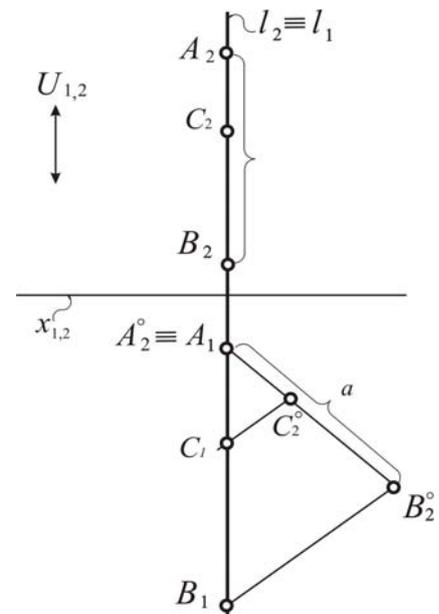


Рис. 104. Построение точки C , которая лежит на прямой l , по одной из заданных проекций (прямая занимает профильное положение)

Задача 4. Дана модель прямой. Построить точки ее пересечения с картинами.

При решении этой задачи необходимо иметь в виду характерные признаки моделей точек, которые принадлежат картинам.

Если точка промоделирована в перспективе (рис. 105) или в аксонометрии (рис. 106), то характерным признаком модели точки, лежащей в π_1 , является тождественное совпадение ее проекций. Поэтому, найдя общую точку проекций, определим общую точку прямой и картины π_1 . В приведенных примерах это точка D .

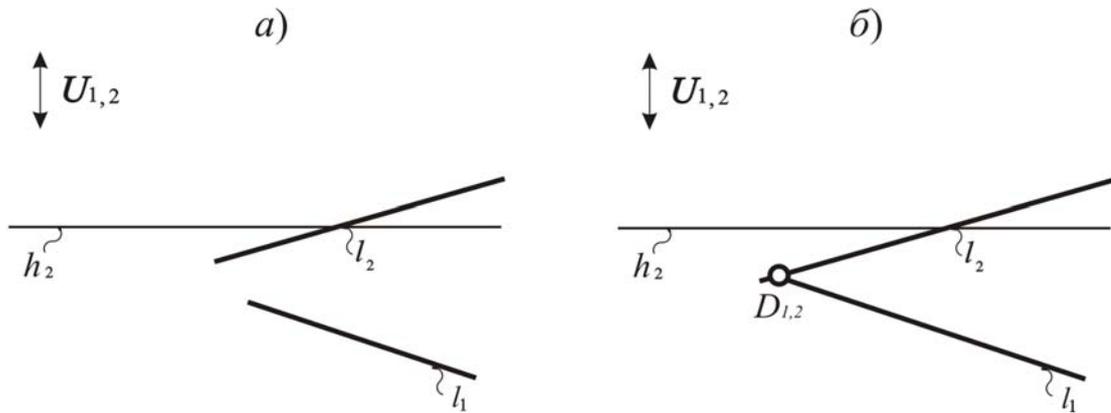


Рис. 105. Построение точек пересечения прямой l с картиной π_1 (перспектива)

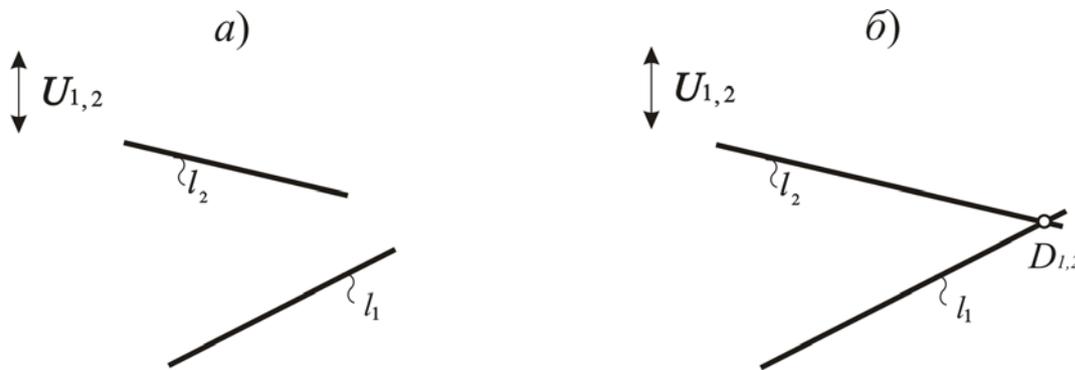


Рис. 106. Построение точек пересечения прямой l с картиной π_1 (аксонометрия)

Если аналогичная задача решается на эюре Монжа (рис.107, а), то характерным признаком точки, лежащей в картине π_1 , является принадлежность ее второй проекции оси $x_{1,2}$. Принадлежность точки к картине π_2 располагает ее первую проекцию на оси $x_{1,2}$, поэтому пересекаем первую проекцию прямой l с осью $x_{1,2}$ и получаем модель точки N , в которой прямая пересекает π_1 (рис. 107, б). Для определения общей точки прямой l и картины π_2 , необходимо начать с пересечения второй проекции прямой l с осью $x_{1,2}$. Получаем модель точки M .

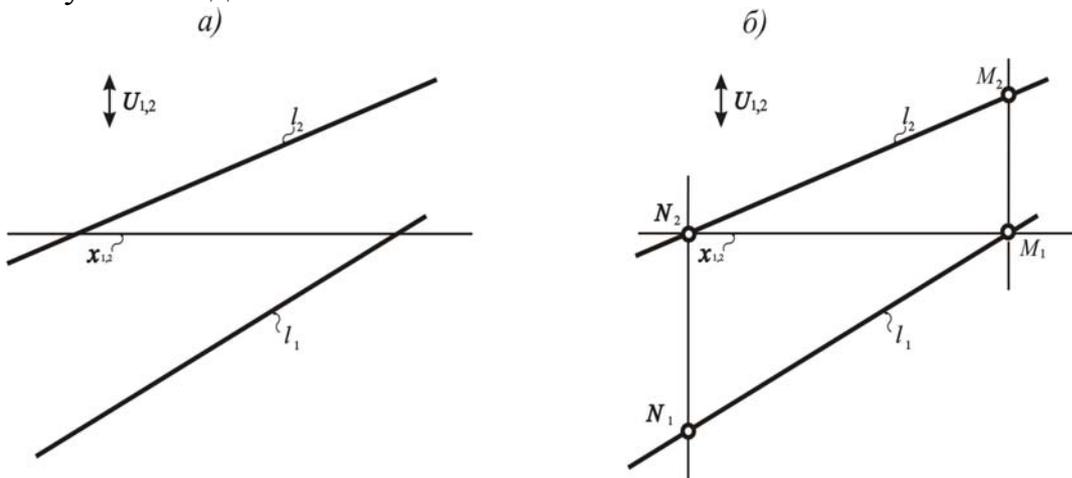


Рис. 107 Построение точек пересечения прямой с картиной π_1 на эюре Монжа

Задача 5. Дана модель прямой. Построить точку схода этой прямой.

Рассмотрим построение точки схода при общем положении прямой l (рис. 108, а). Характерной особенностью модели бесконечно удаленной точки в перспективе является принадлежность ее первой проекции к линии горизонта h_2 . Поэтому продолжим первую проекцию прямой l до пересечения с линией горизонта. Получим точку K , которая является точкой схода прямой l (рис. 108, б).

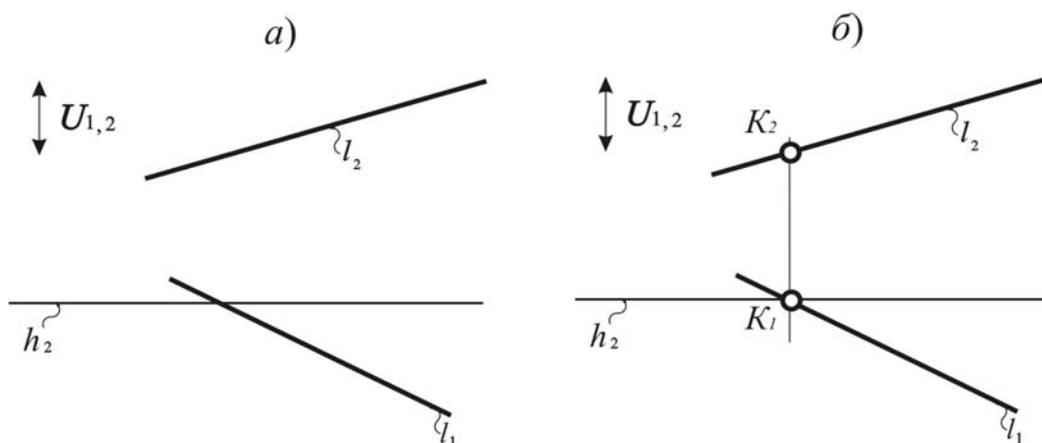


Рис. 108. Построение точки схода прямой общего положения

Если прямая проходит через центр S_1 , то точка схода тождественно совпадает с исключенной точкой $U_{1,2}$ (рис. 109). Это происходит потому, что прямая, проецирующая бесконечно удаленную точку проецирующей прямой, совпадает с исключенной прямой $u_{1,2}$.

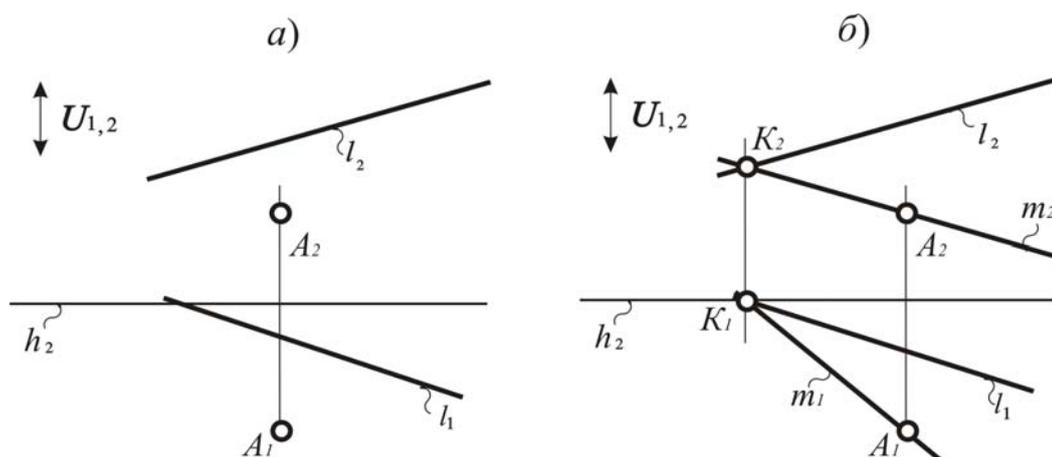


Рис. 109. Построение параллельных прямых общего положения (перспектива)

Четвертый инвариант проецирования позволяет утверждать, что точка схода прямой в аксонометрии и на эюре Монжа всегда остается в бесконечности. Построение точки схода прямой актуально только для перспективы.

Задача 5. Дана модель прямой l и точка A , которая не принадлежит прямой. Провести через точку A прямую f параллельную прямой l (рис. 109,а; 110, а; 111, а).

Все параллельные прямые в перспективе содержат одну точку схода. Поэтому для проведения прямой, параллельной l , необходимо найти ее точку схода K . Через полученную точку схода K и точку A пройдет искомая прямая f (рис. 109, б).

При построении прямой параллельной данной в аксонометрии и на эюре Монжа нет необходимости строить точки схода. На основании четвертого инварианта проецирования параллельное проецирование сохраняет параллельность. Поэтому она решается одинаково как в аксонометрии и на эюре Монжа (рис. 110, б; 111 б).

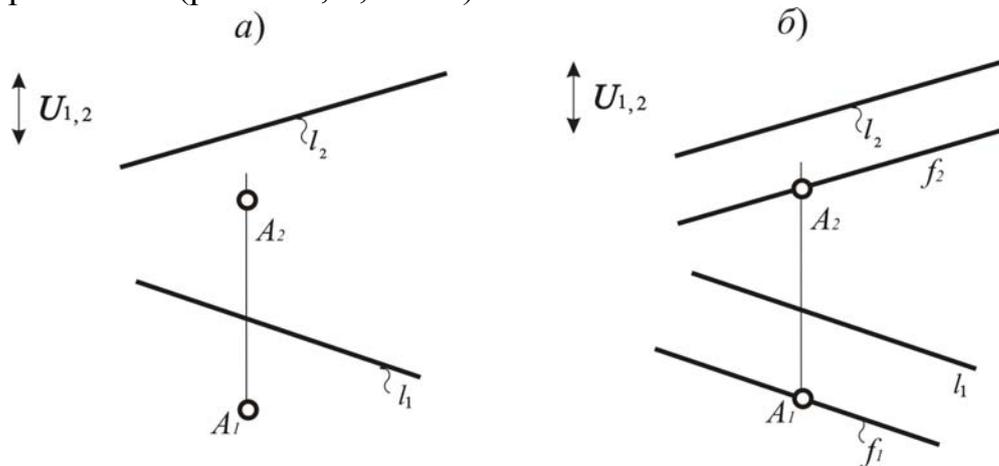


Рис. 110. Построение параллельных прямых общего положения (аксонометрия)

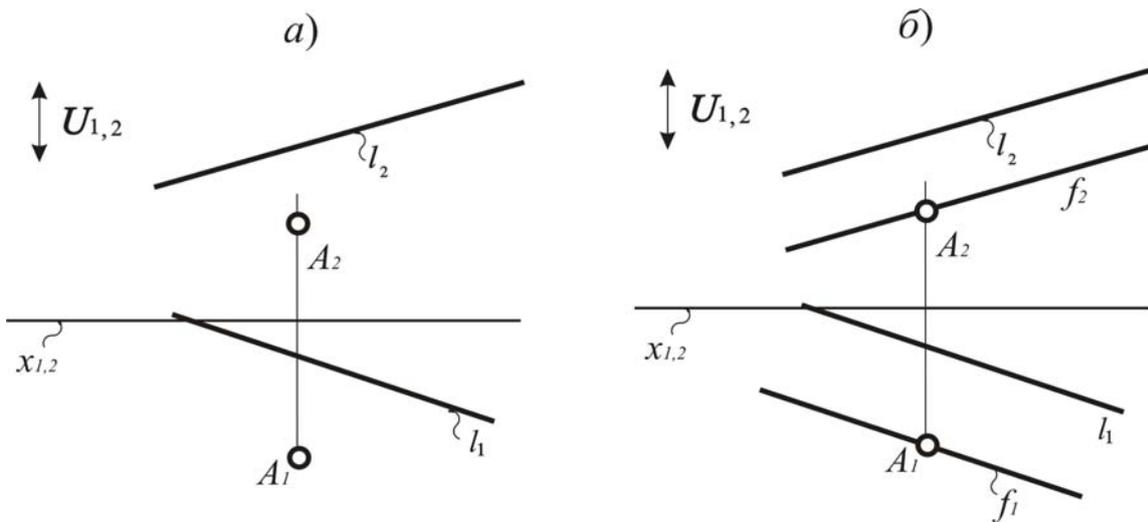


Рис. 111. Построение параллельных прямых общего положения (эюр Монжа)

Контрольные вопросы

1. Каковы операции алгоритма по построению модели прямой, построенной методом двух изображений?
2. Как называются прямые, проходящие через произвольную точку трехмерного пространства и центры проецирования?
3. Дайте определение плоской модели прямой трехмерного пространства, построенной методом двух изображений на совмещенных картинах.
4. Приведите доказательство, что полученная модель сохраняет всю геометрическую информацию исходной прямой.
5. Из решения каких задач складывается работа с моделью прямой?
6. Перечислить прямые, которые занимают частное положение по отношению к проекционному аппарату.
7. Каков характерный признак модели прямой, которая содержит центр проецирования S_1 в перспективе, аксонометрии, на эпюре Монжа?
8. Каков характерный признак модели прямой, которая содержит центр проецирования S_2 в перспективе, аксонометрии, на эпюре Монжа?
9. Каков характерный признак модели прямой, которая параллельна картине π_1 в перспективе, аксонометрии, на эпюре Монжа?
10. Каков характерный признак модели прямой, которая параллельна картине π_2 в перспективе, аксонометрии, на эпюре Монжа?
11. Каков характерный признак модели прямой, которая пересекает исключенную прямую?
12. Каков алгоритм построения проекции точки, принадлежащей прямой, если дана одна ее проекция? Как изменяется алгоритм решения этой задачи при частных положениях прямой?
13. Каков алгоритм построения проекций общих точек прямой и картин? Как изменяется алгоритм решения этой задачи при частных положениях прямой?
14. Что такое точка схода прямой?
15. Каков алгоритм построения точки схода на модели прямой?
16. Как провести прямую параллельную данной в перспективе, аксонометрии, на эпюре Монжа?

3.7. Модель плоскости

Моделированию плоскости определяется рассмотренным выше законом построения плоских моделей трехмерных объектов. Следуя ему, необходимо объединить центры проецирования с заданной плоскостью. В результате проецирующим элементом окажется все трехмерное пространство, которое невозможно пересечь с картиной, так как оно содержит картинную плоскость. Поэтому будем проецировать точки и прямые заданной плоскости на картины π_1, π_2 из центров S_1, S_2 . В результате их проекции заполнят все плоские поля этих картин. После перехода к однокартинному чертежу получим совмещенное плоское поле точек и прямых, которое можно считать моделью плоскости. Но работать с такой моделью крайне затруднительно. Чтобы снять эти трудности, необходимо выявить какие-то элементы в виде точек и прямых, которые бы однозначно определяли промоделированную плоскость. Для этого обратимся к трехмерному пространству.

Чтобы выделить плоскость из множества плоскостей трехмерного пространства, необходим минимальный набор элементов, который называется **репером**.

Реперами могут служить следующие наборы:

1. Три точки, которые не лежат на одной прямой.
2. Точка и прямая, не содержащая эту точку.
3. Две пересекающиеся (параллельные) прямые.
4. Треугольник или другая плоская фигура.

Учитывая, что метод двух изображений позволяет однозначно моделировать трехмерные объекты на плоскости, можно утверждать, что **моделью плоскости, построенной методом двух изображений, является модель одного из ее реперов.**

Работа с моделью плоскости складывается из решения следующих задач:

- 1) моделирования любой плоскости трехмерного пространства;
- 2) определения положения плоскости относительно проекционного аппарата по заданной модели;
- 3) построения проекций прямых, принадлежащих плоскости, по одной проекции;
- 4) построения проекций точек, принадлежащих плоскости, по одной заданной проекции;
- 5) построение линии схода плоскости.

Линия схода – это бесконечно удаленная прямая плоскости. При моделировании в аксонометрии и эюре Монжа линия схода изображается бесконечно удаленной прямой, но в перспективе она находится на конеч-

ном расстоянии и играет важную роль при работе с перспективными изображениями.



Рис. 112. Система знаний, необходимых для освоения раздела «Модель плоскости»

Для решения этих задач необходима система всех предыдущих знаний, которая представлена графом на рис. 112.

3.7.1. Решение задач при работе с моделью плоскости

Задача 1. Исходя из определения модели плоскости, процесс ее моделирования складывается из моделирования точек и прямых трехмерного пространства. Эта процедура рассматривалась выше. Примеры моделей плоскостей, заданных различными реперами, даны в на рис. 113.

На рис. 113, *а, б, в* плоскости промоделированы на совмещенной модели перспективы и эпюра Монжа. Реперы этих плоскостей представляют собой соответственно три точки, две пересекающиеся прямые и треугольник. Плоскости, заданные прямой и точкой промоделированы в аксонометрии (рис. 113, *в*).

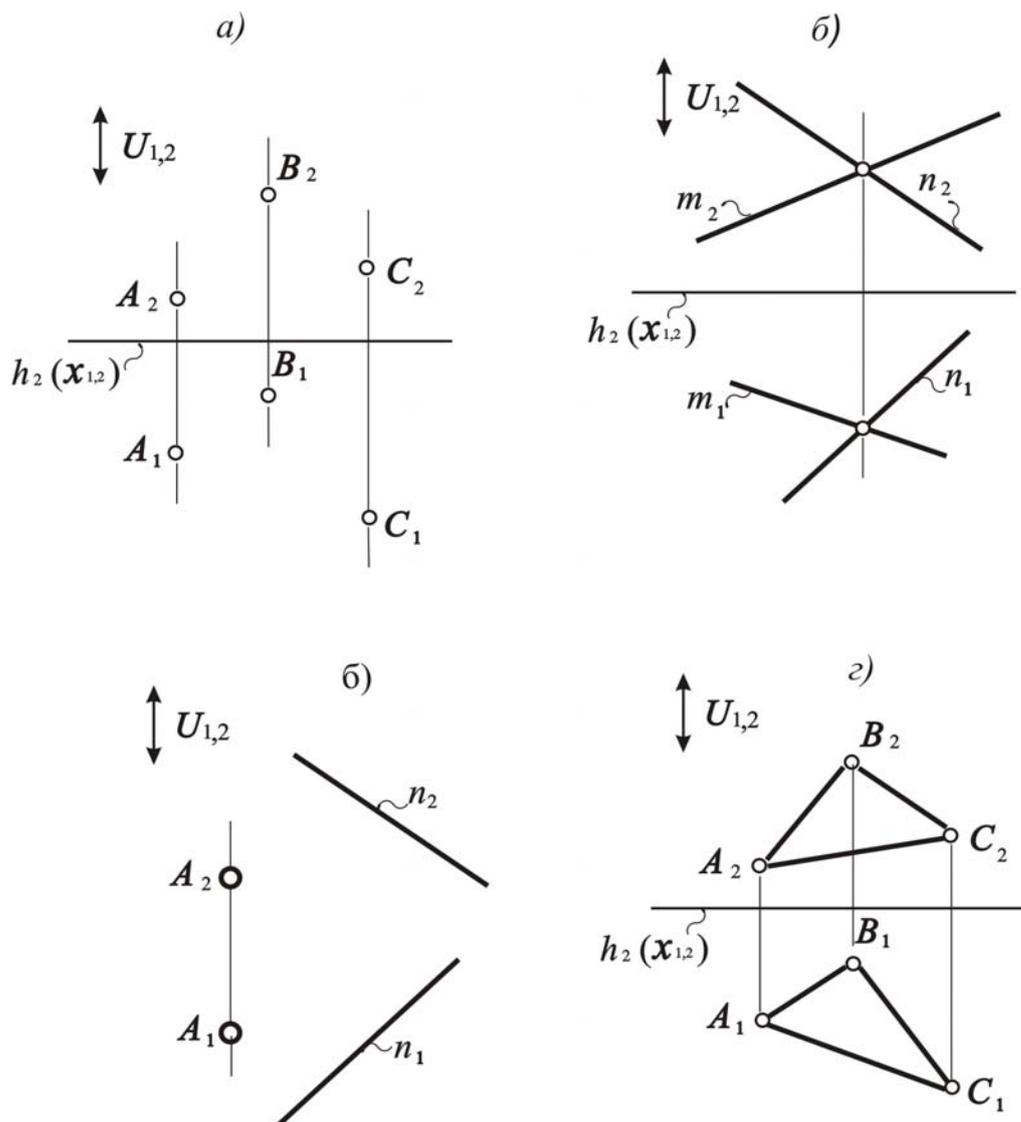


Рис. 113. Примеры моделей плоскостей, заданных различными реперами

Задача 2. Определение положения плоскости относительно проекционного аппарата по заданной модели, связано с отнесением ее к одной из групп плоскостей трехмерного пространства.

Основанием к делению на эти группы является расположение плоскости в исходном пространстве относительно проекционного аппарата. В результате получим следующие группы плоскостей:

1. Плоскости частного положения.

- Проецирующие. К ним относятся такие плоскости, которые содержат один центр проецирования, т.е. принадлежат связке плоскостей с центром в точке S_1 или S_2 .

- Плоскости уровня. Это плоскости, параллельные одной из картин. Плоскость, параллельная π_1 , называется горизонтальной плоскостью уровня, параллельная π_2 , – фронтальной плоскостью уровня.

- Профильные плоскости – это плоскости, которые принадлежат пучку с осью u (исключенная прямая). Иначе говоря, содержат оба центра проецирования.

2. Плоскости общего положения. К ним относятся все остальные плоскости. Примеры модели этих плоскостей приведены на рис. 113.

Модели плоскостей частного положения обладают характерными признаками, по которым их легко отличить от моделей плоскостей общего положения.

Характерной особенностью модели проецирующей плоскости является вырождение одной из ее проекций в прямую линию. Например, если плоскость содержит центр S_1 (рис. 114), то в прямую линию вырождается ее первая проекция. Примеры моделей таких проецирующих плоскостей приведены на совмещенной модели перспективы и эпюра Монжа (рис. 114, *a, б, в*), аксонометрии (рис. 114, *г*).

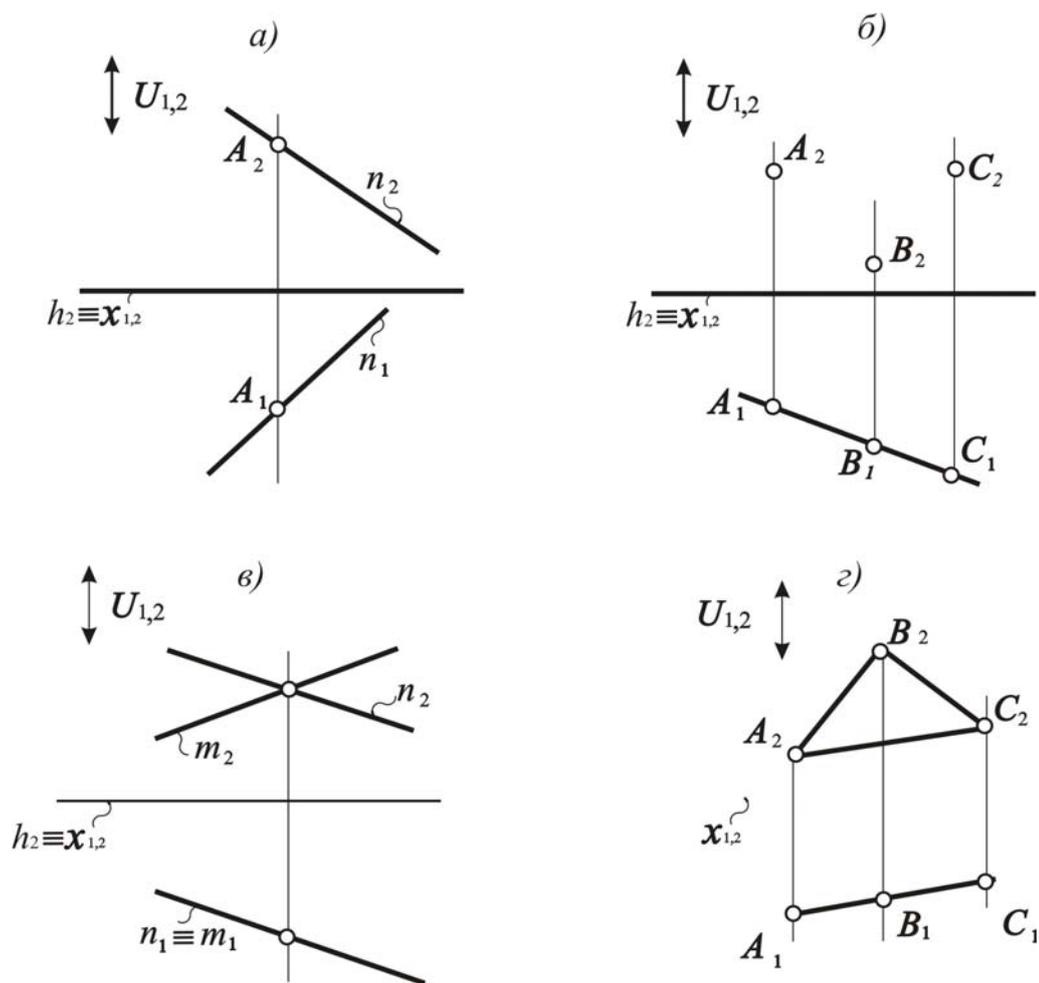


Рис. 114. Примеры моделей проецирующих плоскостей, которые содержат центр проецирования S_1

Плоскость, содержащая центр S_2 , имеет вторую проекцию в виде прямой. В перспективе и аксонометрии обычно избегают пользоваться моделями таких плоскостей. Хотя работать с ними можно, но они не отвечают основному требованию – наглядности, которое предъявляется к этим изображениям в перспективе и аксонометрии, где основную смысловую функцию несет второе изображение. Примеры моделей на эюре Монжа проецирующих плоскостей, содержащих центр S_2 , даны на рис. 115. Плоскости заданы всеми вариантами реперов.

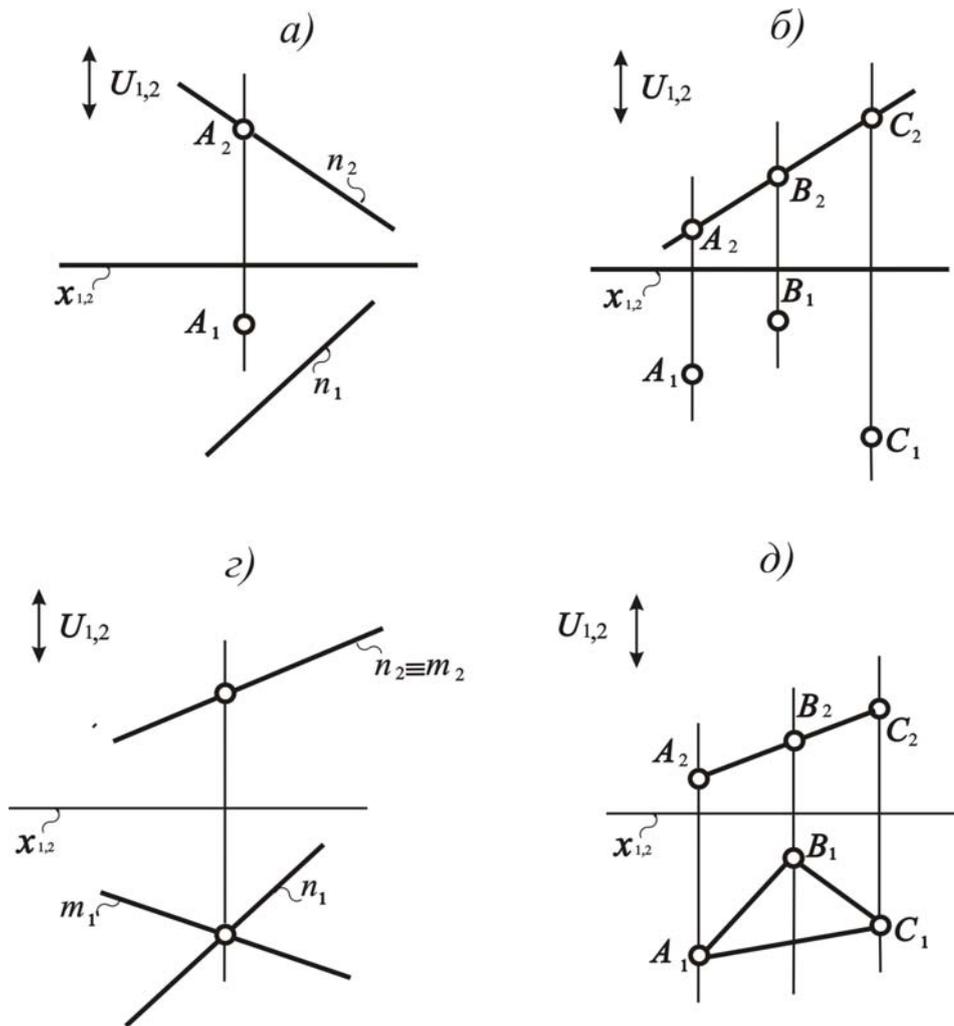


Рис. 115. Примеры моделей проецирующих плоскостей, которые содержат центр проецирования S_2

Характерные особенности, возникающие при моделировании **плоскостей уровня**, определяются конкретным устройством проекционного аппарата. Поскольку проекционные аппараты перспективы, аксонометрии и эюра Монжа имеют некоторые отличия, то рассмотрим процесс построения модели плоскостей уровня для каждого случая отдельно.

Перспектива. В случае, когда плоскость параллельна картине π_1 , то все прямые, которые ей принадлежат, оказываются горизонталями. Это

подтверждают примеры на рис. 116, где горизонтальная плоскость уровня задана треугольником (рис. 116, а), фронтальная плоскость уровня – двумя пересекающимися прямыми (рис. 116, б).

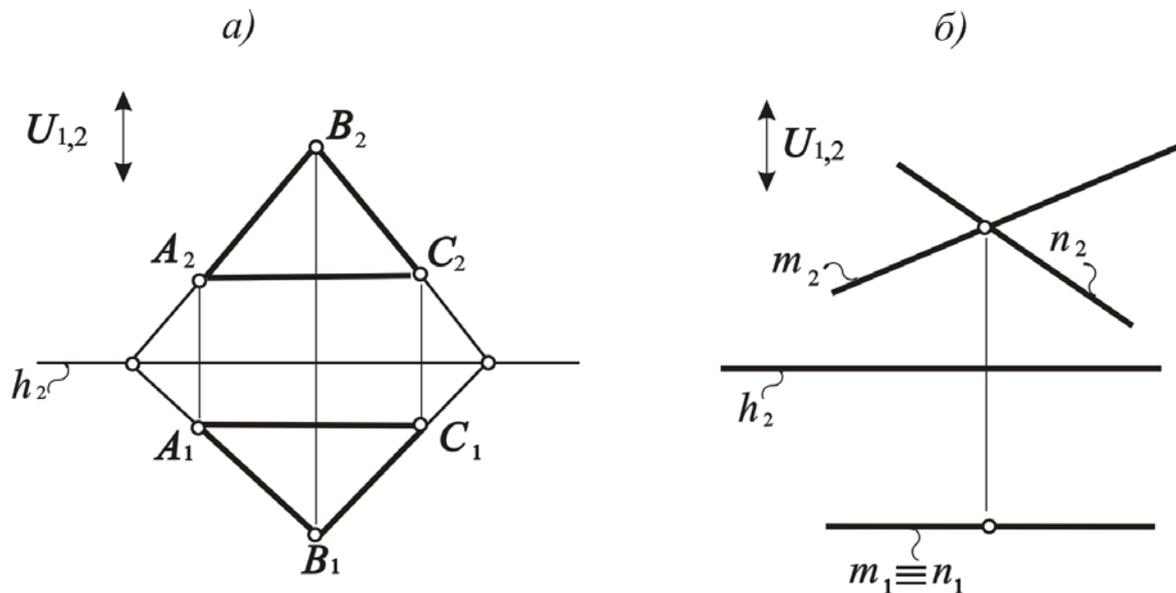


Рис. 116. Модели плоскостей уровня (перспектива)

Аксонометрия. Модель плоскости, параллельной картине π_2 , в аксонометрии не имеет характерных признаков и не отличается от модели плоскости общего положения. Плоскость, параллельная π_1 , содержит прямые, которые являются только горизонталями. В результате возникает характерный признак, выделяющий модель этой плоскости (рис. 117.), который состоит в том, что обе проекции элементов ее репера параллельны друг другу.

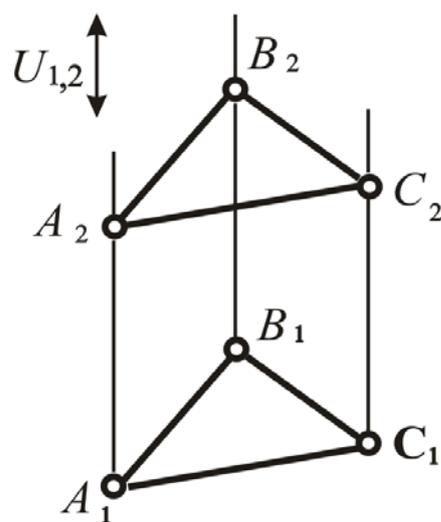


Рис. 117. Модель горизонтальной плоскости уровня (аксонометрия)

Эпюр Монжа. Если плоскость параллельна какой-либо картине эпюра Монжа, то она содержит центр проецирования. При параллельности картине π_1 плоскость содержит центр S_2 (рис. 118, а). В случае параллельности заданной плоскости картине π_2 она содержит центр проецирования S_1 (рис. 118, б). В результате соответствующие проекции вырождаются в прямые линии, которые параллельны оси $x_{1,2}$. Это оказывается отличительной чертой моделей плоскостей уровня на эпюре Монжа. При этом, если плоскость задана плоской фигурой, то ее невырожденная проекция изображается в натуральную величину.

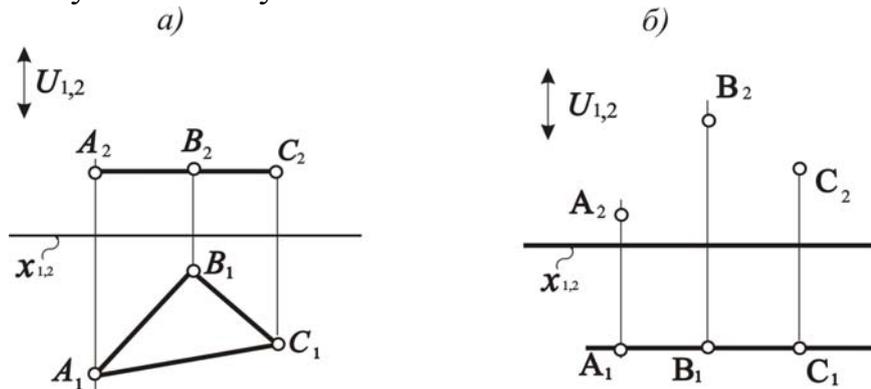


Рис. 118. Модель плоскостей уровня (эпюр Монжа)

Характерной особенностью модели профильной плоскости является вырождение в прямые линии обеих ее проекций, которые совпадают с линиями связи (рис. 119). Это происходит потому, что плоскость содержит оба центра проецирования. Иначе говоря, профильная плоскость оказывается дважды проецирующей. При этом проецирует сама себя.

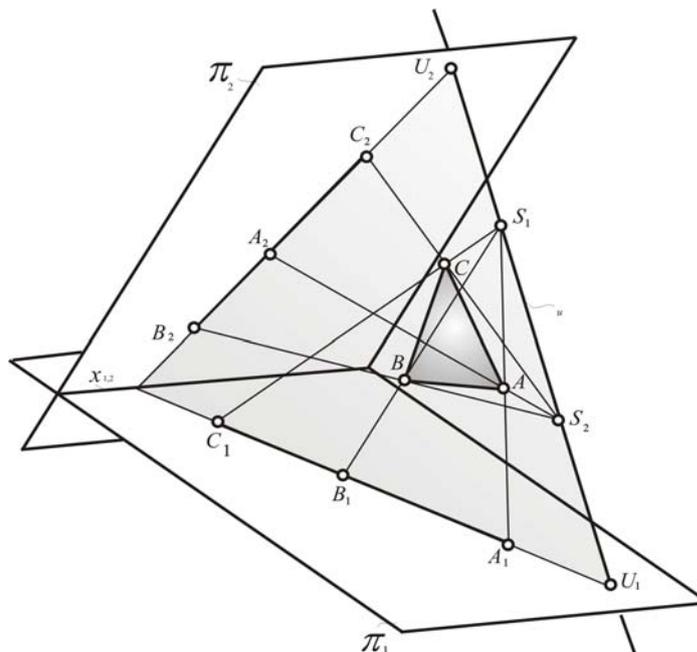


Рис. 119. Моделирование профильной плоскости

После перехода к однокартинному чертежу обе вырожденные проекции совпадают друг с другом и проходят через исключенную точку. Но тождественного совпадения здесь не происходит, т.к. проекции точек в общем случае не совпадают друг с другом. Построенная таким образом модель профильной плоскости очень неудобна в ее использовании. Поэтому ее, по возможности, избегают изображать. Изредка она встречается на эюре Монжа (рис. 120).

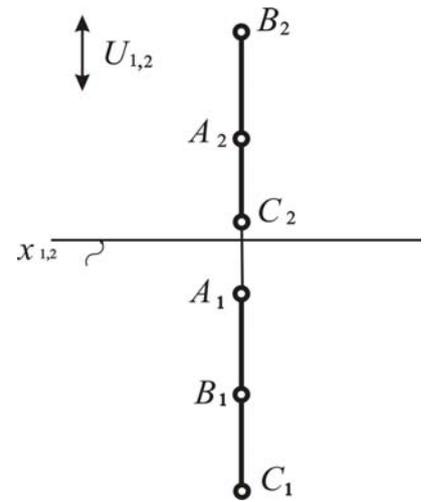


Рис. 120. Модель профильной плоскости (репер – треугольник)

Примеры моделей плоскостей, различным образом расположенных относительно проекционного аппарата, приведены на рис. 121–123. Здесь они заданы различными плоскими фигурами и являются элементами изображения архитектурного объекта. Плоскость α занимает общее положение, плоскость μ содержит центр проецирования S_1 , плоскость γ параллельна картине π_2 , плоскость β пересекает исключенную прямую, плоскость ψ параллельна картине π_1 .

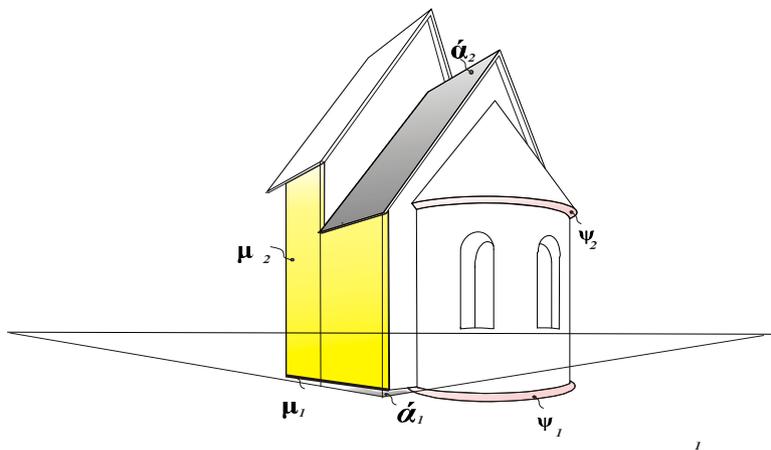


Рис. 121. Примеры моделей плоскостей, различным образом расположенных относительно проекционного аппарата (перспектива на вертикальной картине)

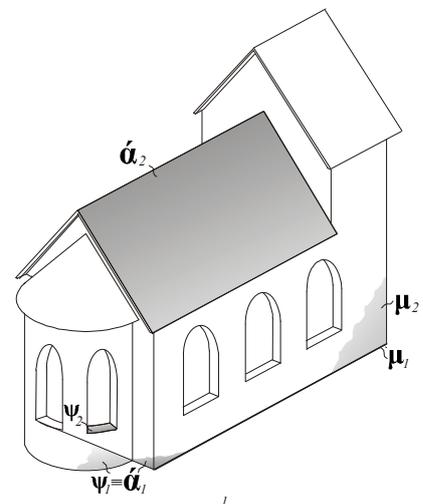


Рис. 122. Примеры моделей плоскостей, различным образом расположенных относительно проекционного аппарата (аксонометрия)

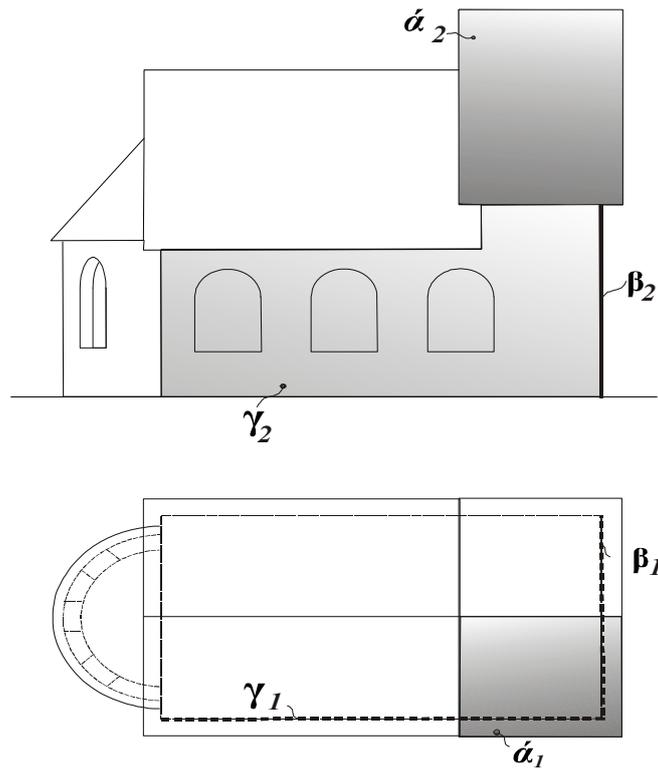


Рис. 123. Примеры моделей плоскостей, различным образом расположенных относительно проекционного аппарата (эпюр Монжа)

Задача 3. Построение проекции прямой, которая принадлежит плоскости, когда дана одна ее проекция (рис. 124), основано на знаниях следующих разделов:

1. Модель прямой.
2. Модели точки.
3. Признак принадлежности прямой к плоскости.
4. Третий инвариант проецирования.
5. Алгоритм решения задачи на построение проекции точки, принадлежащей прямой, в случае, когда дана одна ее проекция.

Моделью прямой являются два ее изображения. Поэтому если дана одна проекция прямой, есть и другая. Чтобы ее найти, воспользуемся признаком принадлежности прямой к плоскости и третьим инвариантом проецирования. Для этого возьмем на заданной проекции прямой две точки, которые принадлежат не только прямой, но и плоскости. В примере на рис. 124 это точки M и N . В этих точках l_1 пересекает соответственно прямые m и n , представляющие плоскость. Теперь необходимо построить недостающие проекции этих точек.

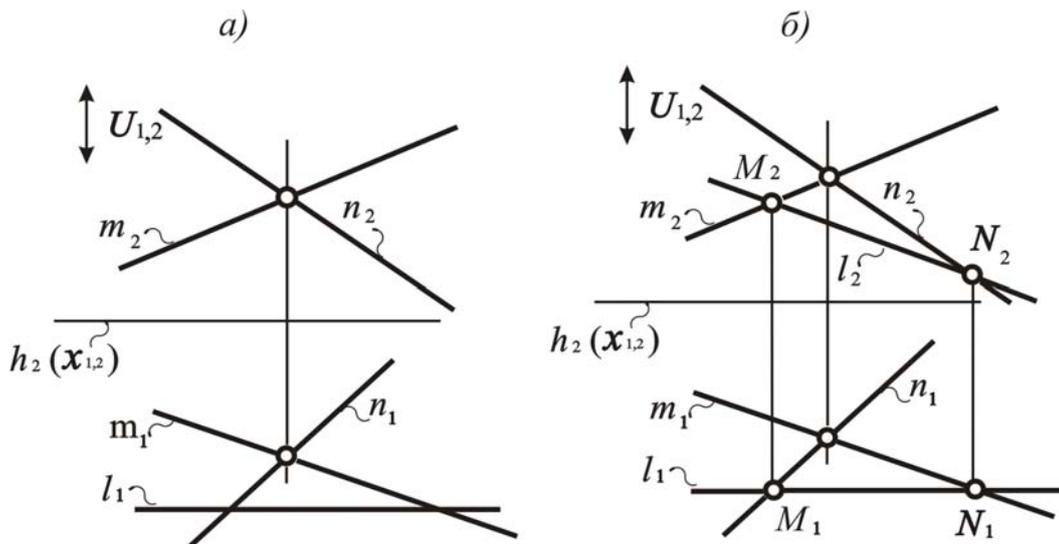


Рис. 124. Построение проекции прямой, которая лежит в плоскости, по одной ее проекции (репер – две пересекающиеся прямые)

Они определяют положение искомой проекции прямой. Приведенное рассуждение справедливо и в случае, когда исходной является не только первая проекция прямой, но и вторая. Алгоритм решения этой задачи для обоих вариантов расположения исходной проекции прямой приведен ниже.

$$l_{1(2)} \cap m_{1(2)} = M_{1(2)};$$

$$l_{1(2)} \cap n_{1(2)} = N_{1(2)};$$

$$M_{1(2)} \rightarrow M_{2(1)};$$

$$N_{1(2)} \rightarrow N_{2(1)};$$

$$M_{2(1)} \cup N_{2(1)} = l_{2(1)}.$$

Некоторые затруднения может вызвать решение этой задачи в случае, когда плоскость промоделирована прямой и точкой. Тогда необходимо перейти к другому варианту репера, в котором должны быть хотя бы две прямые.

Если плоскость занимает проецирующее положение и исходная проекция прямой задана на невырожденной проекции плоскости, то решение задачи упрощается (рис. 125). Искомая проекция прямой принадлежит вырожденной проекции плоскости. В случае, когда исходная проекция принадлежит вырожденной проекции плоскости, задача решения не имеет.

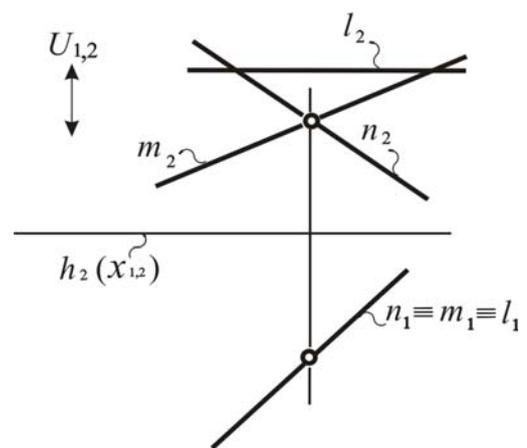


Рис. 125. Построение проекции прямой, которая лежит в проецирующей плоскости, по одной ее проекции

Задача 4. Построение проекции точки, которая принадлежит плоскости, по одной заданной проекции основано на знаниях их следующих разделов:

1. Определение модели точки.
2. Признак принадлежности точки к плоскости.
3. Третий инвариант проецирования.
4. Алгоритм решения задачи 3 настоящего раздела.

На рис. 126 представлен пример решения этой задачи одновременно во всех вариантах метода двух изображений. Дана первая проекция точки K (рис. 126,а), может быть дана и вторая проекция. Любая точка плоскости может быть определена в результате пересечения двух линий. Исходя из определения модели точки, через заданную проекцию точки K проведем линию связи. Другой линией будет произвольная прямая l , которая лежит в плоскости и содержит точку K . Построим другую проекцию этой прямой. Она, пересекаясь с проведенной линией связи, определит положение искомой проекции точки (рис. 126,б). Эта последовательность действий отражена в приведенном ниже алгоритме.

$$K_{1(2)} \in l_{1(2)};$$

$$l_{1(2)} \rightarrow l_{2(1)};$$

$$K_{1(2)} \rightarrow K_{2(1)}.$$

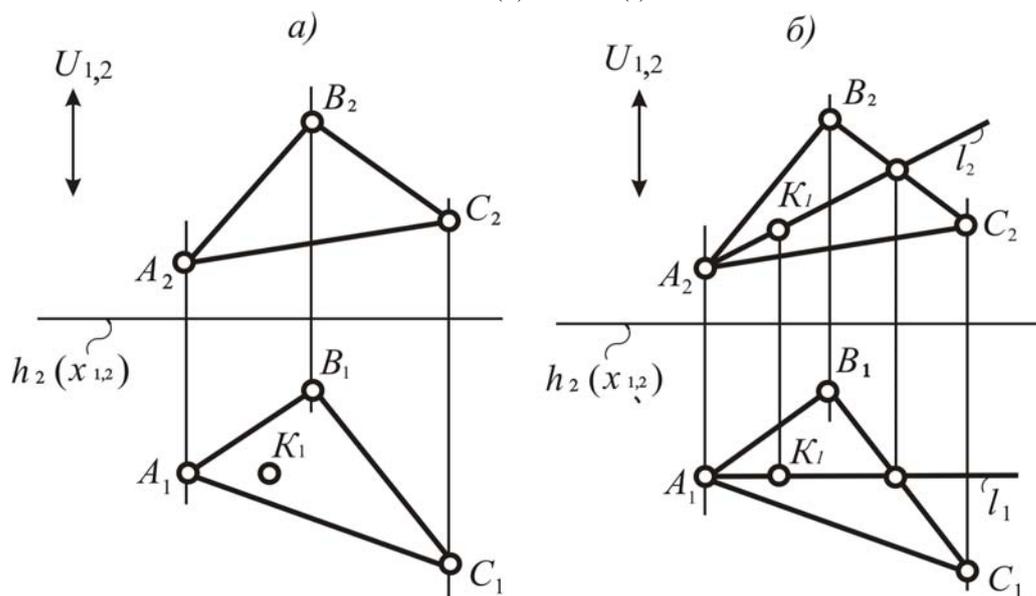


Рис. 126. Построение проекции точки, которая лежит в плоскости, по одной ее проекции

Если плоскость занимает проецирующее положение и исходная проекция точки K задана на невырожденной проекции плоскости, то решение задачи упрощается (рис. 127). Искомая проекция точки K принадлежит вырожденной проекции плоскости. В случае когда исходная проекция точки принадлежит вырожденной проекции плоскости, задача решения не имеет.

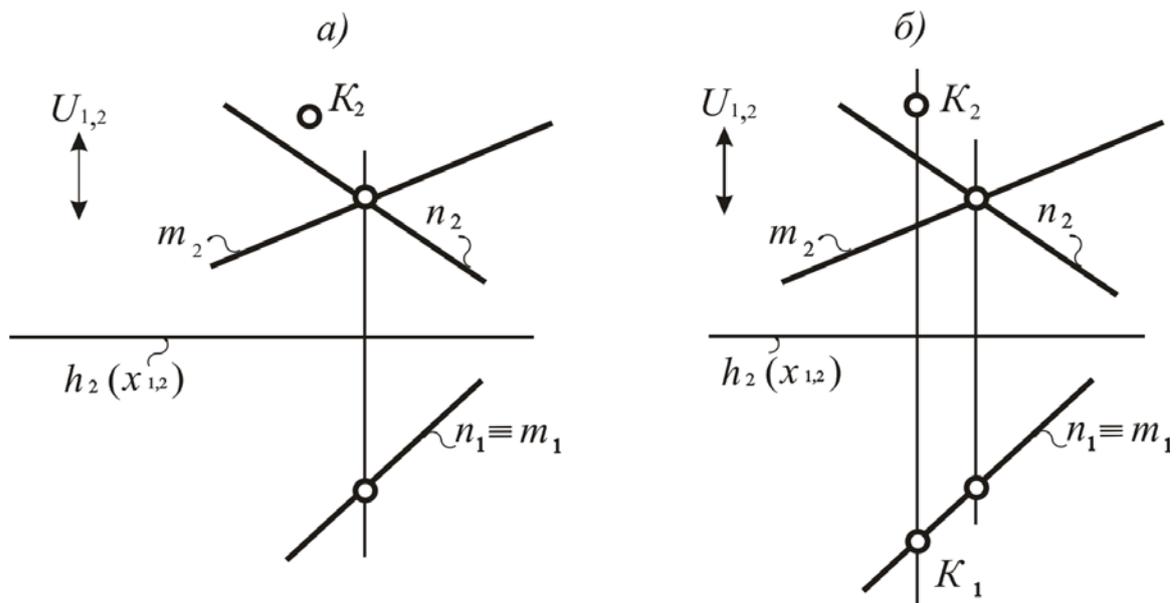


Рис. 127. Построение проекции точки, которая лежит в проецирующей плоскости, по одной ее проекции

Задача 5. Имеется модель плоскости. Построить ее линию схода.

Линия схода плоскости строится обычно в перспективе. При ее построении необходимо учитывать знания их следующих разделов:

1. Определения модели точки и прямой.
2. Характерные признаки модели прямой и точки, которые бесконечно удалены.
3. Признак принадлежности точки к плоскости.
4. Третий инвариант проецирования.
5. Алгоритм решения задачи по определению точки схода прямой на ее модели.

В примере на рис. 128 построена линия схода на модели плоскости α общего положения. Она выделена репером из двух пересекающихся прямых m и n (рис. 128). Находим точки схода каждой из этих прямых. Получаем точки K и R , которые принадлежат соответственно прямым m и n . Через них пройдет линия схода плоскости (рис. 128). При этом ее первая проекция всегда будет принадлежать линии горизонта.

Это обстоятельство позволяет сделать вывод о том, что бесконечно удаленная плоскость трехмерного пространства занимает проецирующее положение. Кроме того, если вспомнить структуру проекцион-

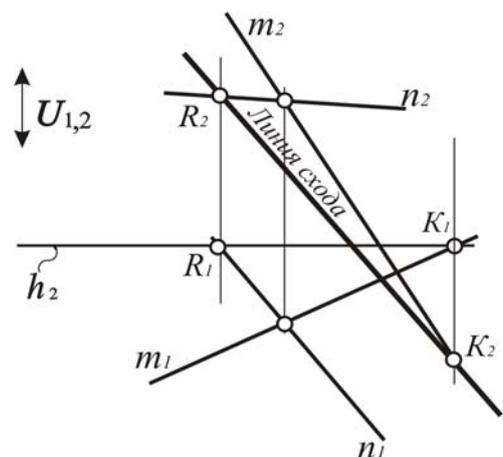


Рис. 128. Построение линии схода плоскости общего положения

13. В чем состоят особенности построения проекции точки, принадлежащей плоскости, по одной заданной проекции, когда плоскость занимает проецирующее положение?

14. Перечислить операции алгоритма по построению линии схода, плоскости.

15. В чем состоят особенности построения линии схода плоскость в случае, когда плоскость занимает проецирующее положение?

3.8. Моделирование плоских кривых второго порядка

Если в трехмерном пространстве дана плоская кривая второго порядка f , то, проведя через ее точки и центр проецирования прямые, получим коническую (центр проецирования на конечном расстоянии) или цилиндрическую (центр проецирования бесконечно удален) поверхности, которые пересекутся с картинами по плоским кривым линиям второго порядка. В результате на картинах π_1 и π_2 возникают два изображения плоской кривой второго порядка (рис. 130).

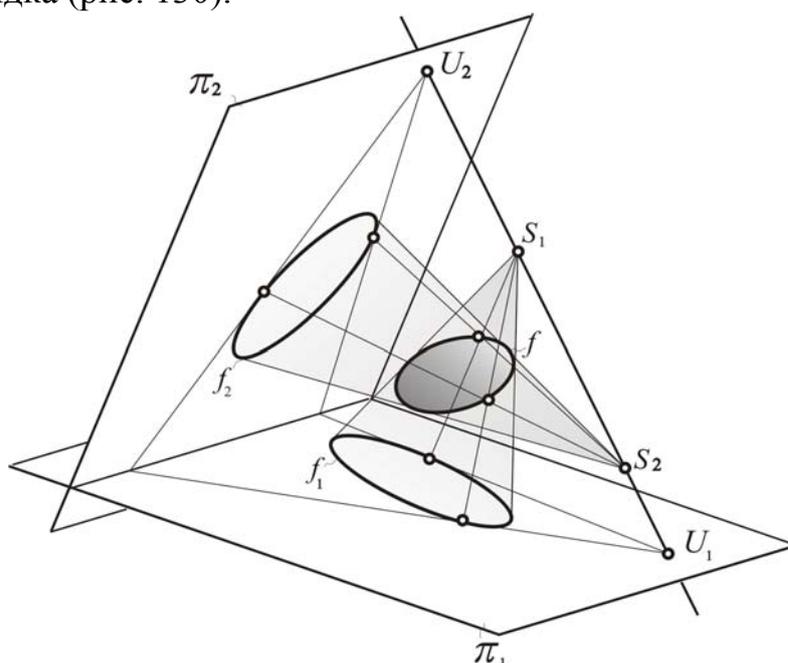


Рис. 130. Моделирование плоской кривой линии методом двух изображений

Таким образом, **моделью плоской кривой линии** являются два ее изображения.

Чтобы задать модель плоской кривой второго порядка достаточно промоделировать три ее точки и две касательные. В качестве касательных могут использоваться линии связи. В этом случае можно использовать алгоритм, который описан в разделе «Линии».

Работа с моделью плоской кривой линии второго порядка предполагает решение следующих задач:

- 1) моделирование любой плоской кривой второго порядка с помощью метода двух изображений;
- 2) определение по модели ее характера и положения относительно проекционного аппарата;
- 3) построение точек кривой линии на ее модели по одной заданной проекции.

Задача 1. Процесс моделирования любой плоской кривой второго порядка с помощью метода двух изображений рассмотрено выше (рис. 130).

Задача 2. Определяя, какая кривая линия второго порядка промоделирована методом двух изображений, следует учитывать, по какой линии пересекает проецирующая поверхность картину. Поскольку проецирующей является коническая или цилиндрическая поверхности, то их сечение плоскостью картины даст также плоскую кривую второго порядка. На рис. 131 приведен пример модели плоской кривой второго порядка на совмещенной модели: перспектива, аксонометрия, эпюр Монжа.

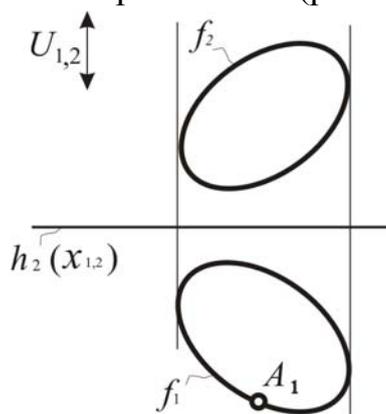


Рис. 131. Модель плоской кривой второго порядка (совмещенная модель: перспектива, аксонометрия, эпюр Монжа)

При проецирующем положении плоскости моделируемой кривой проходящая через соответствующий центр поверхность вырождается в плоскость, а проекция линии окажется прямой. На рис. 132 это модель кривой n и модель кривой m на эпюре Монжа. Таким образом, характерным признаком модели кривой второго порядка, которая лежит в проецирующей плоскости, является вырождение одной проекции в прямую линию. Это утверждение справедливо для всех частных случаев метода двух изображений.

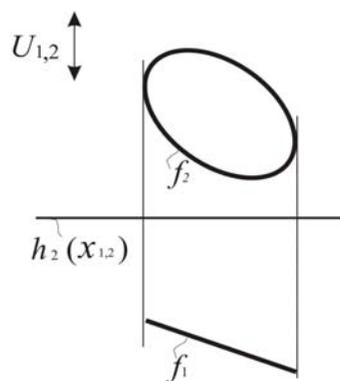


Рис. 132. Модель плоских кривых линий второго порядка, которая принадлежит проецирующей плоскости (совмещенная модель: перспектива, аксонометрия, эпюр Монжа)

Задача 3. Алгоритм построения проекции точки, которая принадлежит плоской кривой линии второго порядка, принципиально не отличается от алгоритма построения точки, принадлежащей прямой. Решение этой задачи осуществляется одинаково в перспективе, аксонометрии и на эюре Монжа.

Рассмотрим пример построения точки A , принадлежащей кривой f , когда дана одна из ее проекций. Если плоскость, содержащая кривую, занимает общее положение (рис. 133, а, проекция A_1), возникают два варианта искомой проекции (рис. 133,б). Какую из них следует выбрать, решает конкретная дополнительная информация.

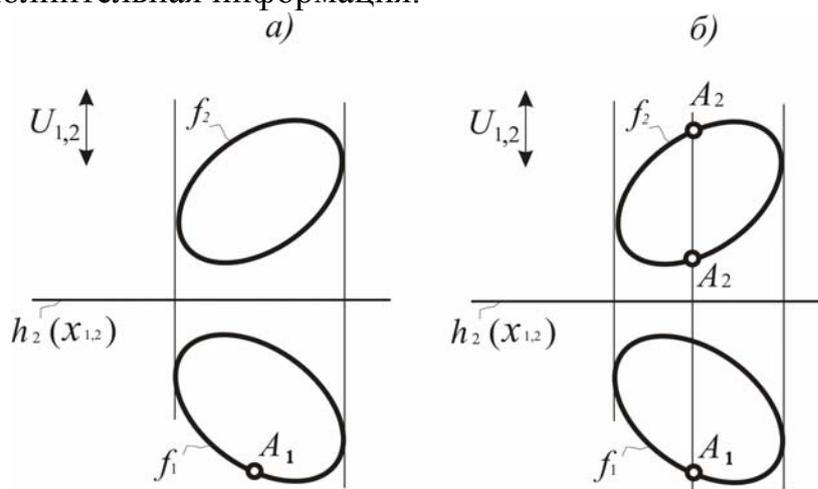


Рис. 133. Построение проекции точки A , которая принадлежит плоской кривой второго порядка, принадлежащей плоскости общего положения (совмещенная модель: перспектива, аксонометрия, эюр Монжа)

Эта проблема не возникает, если плоскость занимает проецирующее положение (рис. 134).

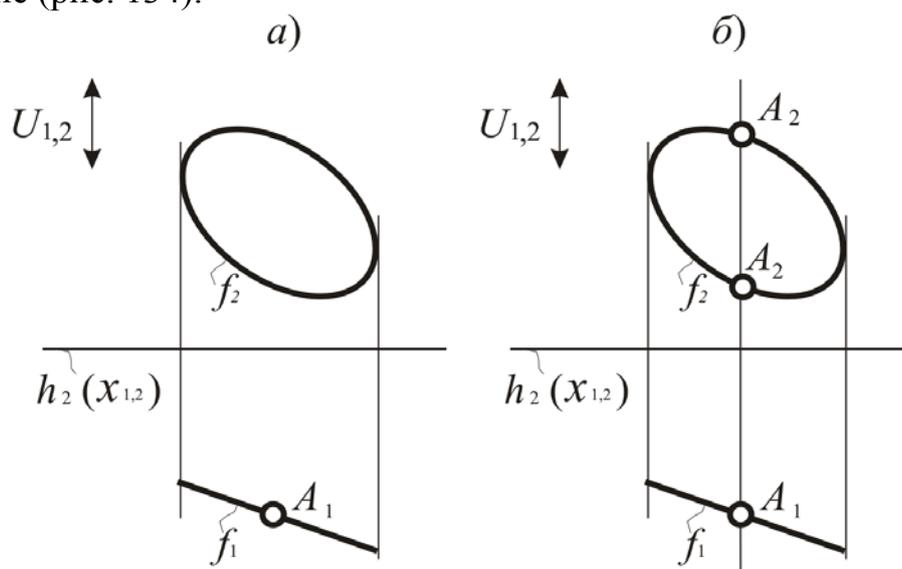


Рис. 134. Построение проекции точки A , которая принадлежит плоской кривой второго порядка, принадлежащей проецирующей плоскости (совмещенная модель: перспектива, аксонометрия, эюр Монжа)

Контрольные вопросы

1. Какие геометрические поверхности проецируют плоские кривые линии второго порядка на картины π_1, π_2 ?
2. Какие изображения возникают в результате этого проецирования на картинах?
3. Что является моделью плоской кривой второго порядка?
4. Решением каких задач определяется работа с моделью плоской кривой второго порядка?
5. Назвать отличительный признак модели плоской кривой второго порядка, лежащей в проецирующей плоскости.

3.9. Моделирование поверхностей

Процесс моделирования поверхностей определяется законом построения плоских моделей трехмерных объектов на плоскости. Действуя в рамках этого закона, выделим два множества проецирующих прямых, которые касаются исходной поверхности и получим две проецирующие поверхности. Если центр проецирования находится на конечном расстоянии, то поверхность оказывается конической или пирамидальной. Если центр S_1 или S_2 удален в бесконечность, то получаем цилиндрическую или призматическую поверхности.

Проекция линии касания проецирующей поверхности ограничивает изображение ее модели и называется **очерком**.

Проекция двух очерков в общем случае образует **модель поверхности**, которая построена методом двух изображений. Частный случай возникает при моделировании многогранников. Здесь к очерку добавляются, кроме очерковых, еще изображения остальных ребер и вершин.

Полученная таким образом модель поверхности оказывается не только однозначной, но и наглядной, т.е. узнаваемой.

В зависимости от положения поверхности относительно проекционного аппарата разделим все поверхности на две группы:

1. Поверхности частного положения. Их вершины тождественно совпадают с одним из центров проецирования. Из рассмотренных выше поверхностей частное положение могут занимать цилиндры или призмы.

2. Поверхности общего положения – все остальные.

Работа с их моделями складывается из решения следующих задач:

- 1) моделирование любой поверхности трехмерного пространства с помощью метода двух изображений;

- 2) определение характера поверхности и положения относительно проекционного аппарата по ее модели;

3) выделение на поверхности графически простых линий (прямых, окружностей);

4) построение любого числа точек поверхности по одной заданной проекции;

5) построение линий поверхности по заданной проекции.

Чтобы успешно решать выделенные задачи необходимы следующие знания, которые представляют собой систему, представленную графом на рис. 135. Для его создания было выделено множество, составленное перечисленными выше задачами и необходимыми знаниями из предыдущих разделов. Отношение, которое задано на этом множестве выглядит следующим образом: «элемент X не может быть освоен без знания элемента Y ». Граф показывает, что умения в моделировании поверхности и работе с ее моделью невозможно без соответствующих знаний законов построения геометрических моделей, способов образования поверхностей, разновидностей их плоских сечений.

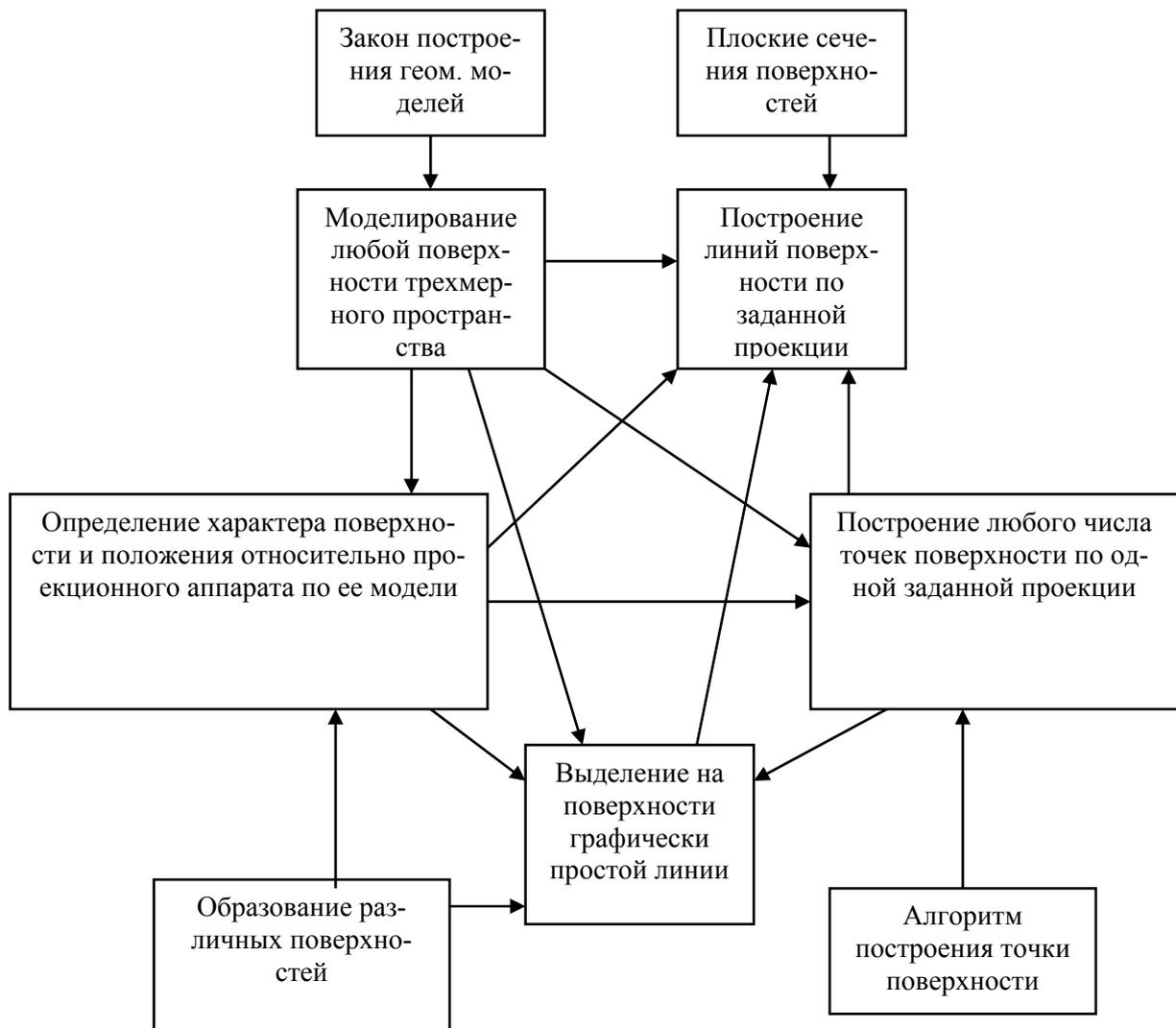


Рис. 135. Взаимосвязь знаний, необходимых при работе с моделью плоскости

Кроме того, решение всех вышеперечисленных задач находится во взаимосвязи. Так без умения создать модель поверхности невозможно решение никакой из них, а без умения выделить графически простую линию невозможно построить точки на поверхности, без умения строить точку на поверхности невозможно построить на ней линию. Таким образом, для освоения этого раздела необходимы прочные знания по всем предыдущим разделам.

3.9.1. Моделирование поверхностей в стандартных вариантах метода двух изображений

Рассмотрим решения всех выделенных задач, учитывая их взаимосвязь **Задача 1. В трехмерном пространстве дана поверхность. Построить ее модель методом двух изображений.**

Рассмотрим моделирование самых распространенных поверхностей.

Моделирование сферы. При моделировании сферы в перспективе через центры проецирования проводят прямые, касательные к поверхности сферы. Они образуют коническую или цилиндрическую поверхности, которые, пересекаясь с картиной, образуют очерки (рис. 136). Таким образом, вид очерка сферы зависит от взаимного расположения проецирующей поверхности и картины. Это обстоятельство необходимо учитывать при работе с моделью сферы, так как ее очерком может быть любая линия конического сечения: окружность, эллипс, парабола или гипербола. Окружность возникает только тогда, когда главный луч проходит через центр сферы.

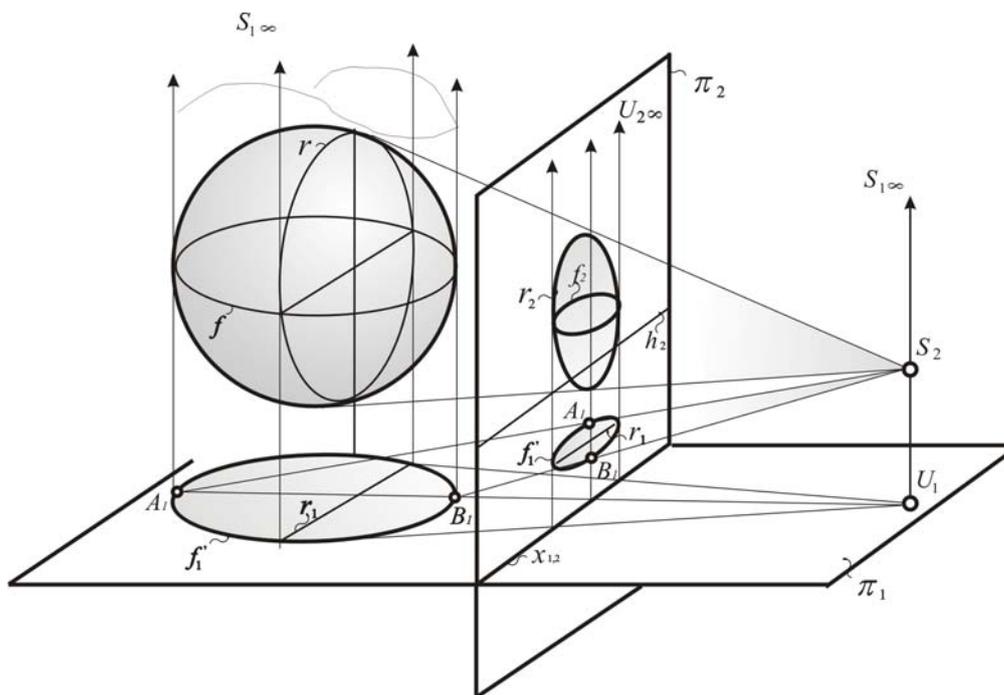


Рис. 136. Моделирование поверхности сферы в перспективе

Если очерком оказывается линия, отличающаяся от окружности, то на практике обычно пренебрегают точностью и в качестве очерка сферы используют окружность, что соответствует восприятию сферы глазом человека. Этот прием используется в перспективе, где модель сферы оказывается приближенной (рис. 137).

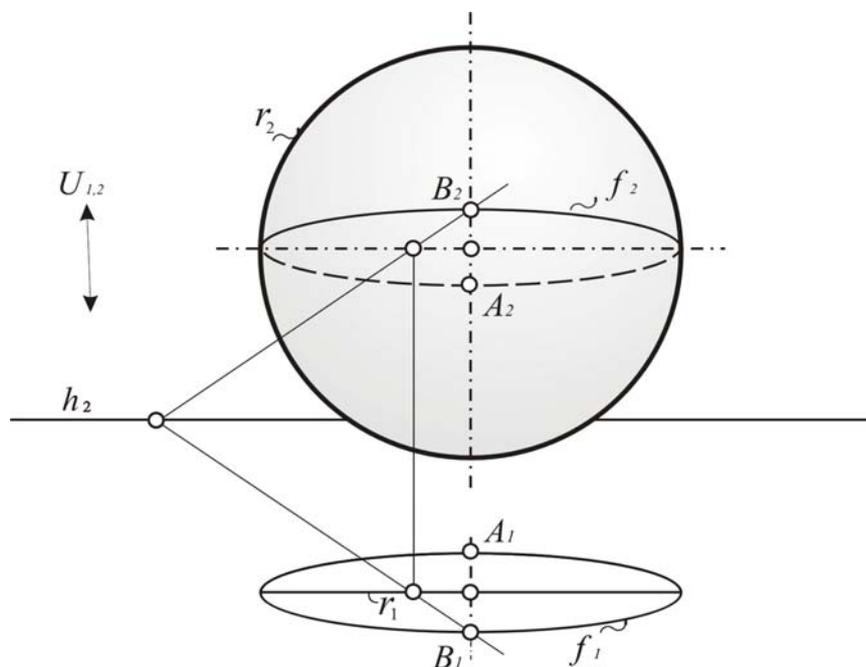


Рис. 137. Модель поверхности сферы в перспективе

Для работы с такой моделью необходимо изобразить и ее экватор (окружность f). Первая и вторая проекции этой линии связаны параллельным переносом. Но в перспективе параллельный перенос не сохраняет размеры плоской фигуры. Поэтому при его изображении необходимо исходить из следующих обстоятельств. Величина малой оси измеряется отрезком AB . Его проекция на картине π_1 делится большой осью эллипса пополам и перпендикулярна ей. Эта же взаимосвязь сохраняется на второй проекции, но величина малой оси здесь может быть другой. Это зависит от высоты, на которой находится исходная сфера по отношению к плоскости горизонта.

Через один из концов малой оси проводим горизонталь. На рис. 137 горизонталь проведена через точку B . Используя точку пересечения горизонтали с большой осью и ее точку схода, построим ее вторую проекцию. В результате получим B_2 , которая позволит определить величину малой оси эллипса, являющегося второй проекцией экватора.

В аксонометрии очерком сферы оказывается линия, которая является плоским сечением проецирующего цилиндра (рис. 138). Он образован проецирующими прямыми касаящимися сферы и проходящими через центр S_2 . Чаще всего это бывает эллипс, который обычно заменяют на окруж-

ность по причине сохранения наглядности. Таким образом, модель сферы в аксонометрии оказывается приближенной (рис. 139).

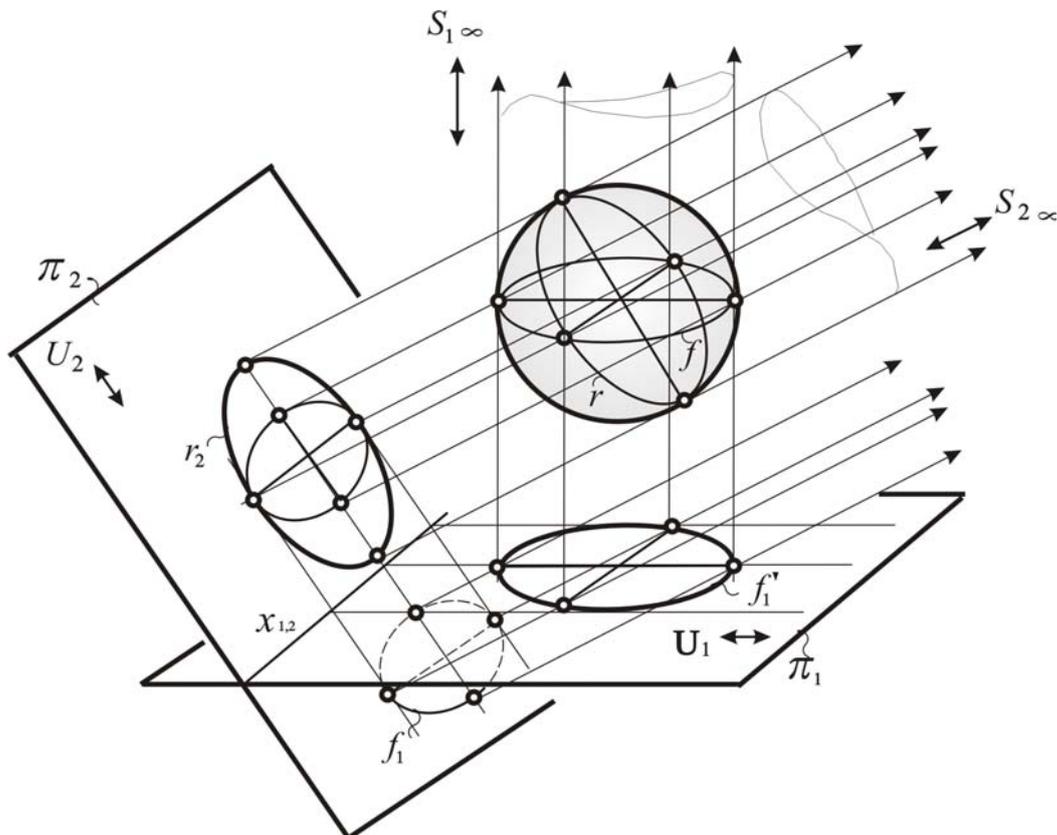


Рис. 138. Моделирование поверхности сферы в аксонометрии

Для работы с такой моделью необходимо изобразить и ее экватор (окружность f). Первая и вторая проекции этой линии оказываются эллипсами, которые связаны параллельным переносом. В аксонометрии параллельный перенос размеры не меняет. Чтобы построить вторую проекцию экватора достаточно выполнить этот перенос. На рис. 139 он выполнен тоже благодаря горизонтали, которая проведена через точку B . Используя точку пересечения горизонтали с большой осью и ее характерный признак, построим ее вторую проекцию, получим B_2 , которая позволит определить величину малой оси эллипса, являющегося второй проекцией экватора.

При моделировании сферы на эпюре Монжа возникает две проецирующие цилиндрические поверхности, которые пересекают картины по окружностям (рис. 140). Одна из них экватор f , другая – главный меридиан r . Радиусы этих окружностей равны друг другу. При переходе к однокартинному чертежу получаем модель сферы, которая представляет собой две равные окружности (рис. 141).

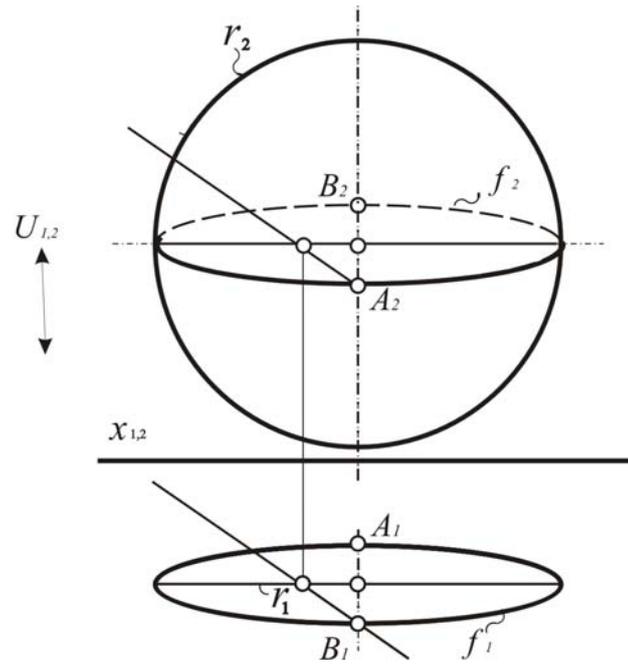


Рис. 139. Модель поверхности сферы в аксонометрии

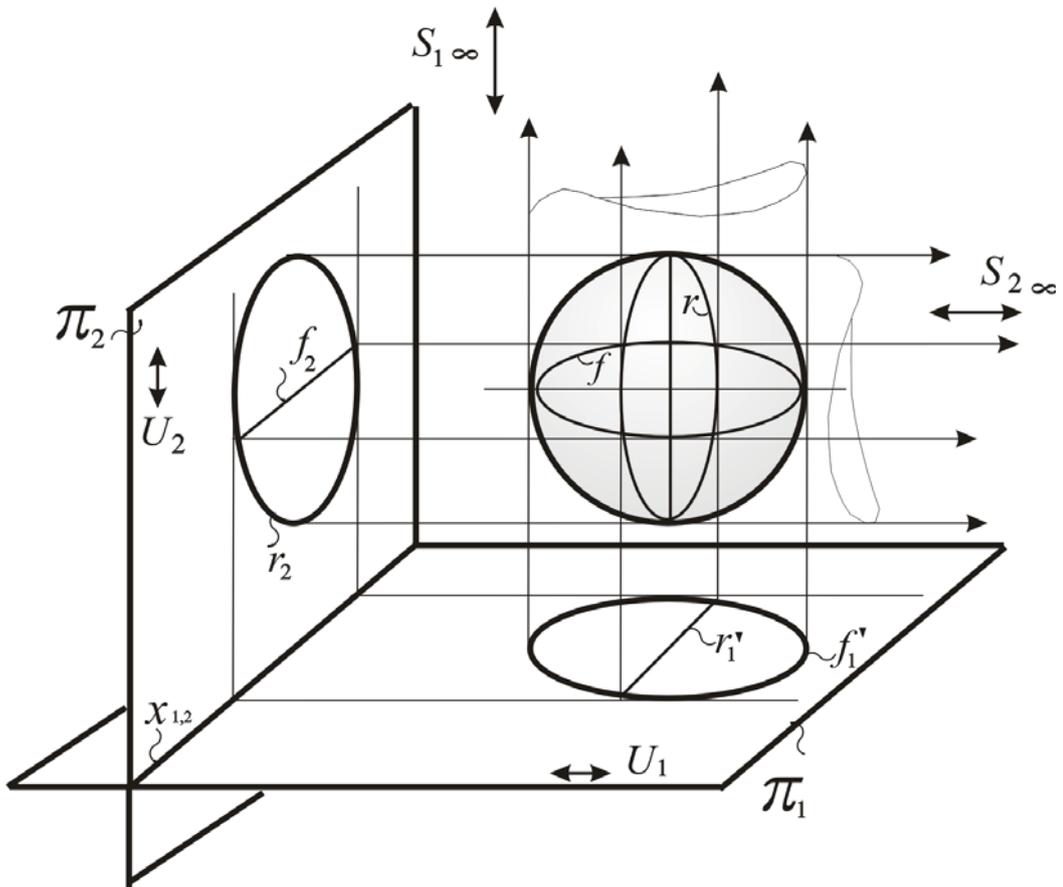


Рис. 140. Моделирование поверхности сферы на эюре Монжа

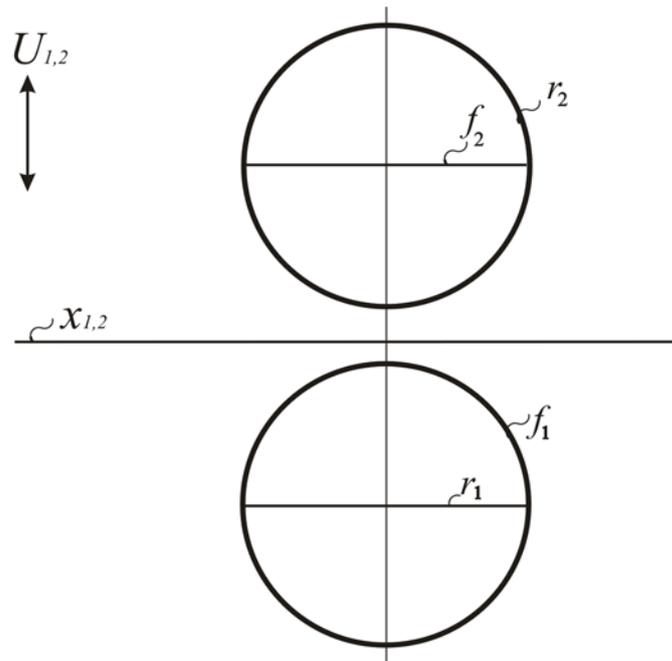


Рис. 141. Модель поверхности сферы на эпюре Монжа

Моделируя конус, мы получаем два очерка, которые составляют ее модель. На рис. 142 – 144 даны примеры моделей различных конусов. Прямой круговой конус (рис. 142, а; 143, а, б; 144, а), обратный конус (рис. 142, б; 144, б) и наклонный конус (рис. 143, в; 144, в). Прямые круговые конусы располагаются таким образом, что их основания принадлежат картине π_1 . Исключение составляет конус на рис. 143, б. Его основание параллельно картине π_1 . На модели изображены очерковые образующие m и n . Положение этих образующих необходимо знать при решении задач, которые будут рассмотрены ниже.

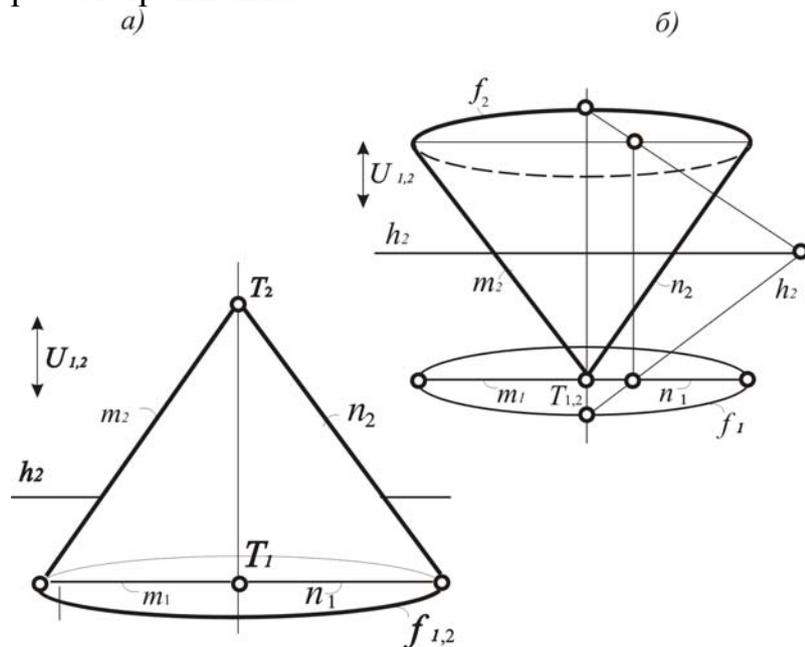


Рис. 142. Модель конуса в перспективе

При моделировании обратного конуса и конуса, у которого основание находится над картиной π_1 , вторая и первая его проекции связаны параллельным переносом в перспективе и аксонометрии (рис.142, б; 143, б).

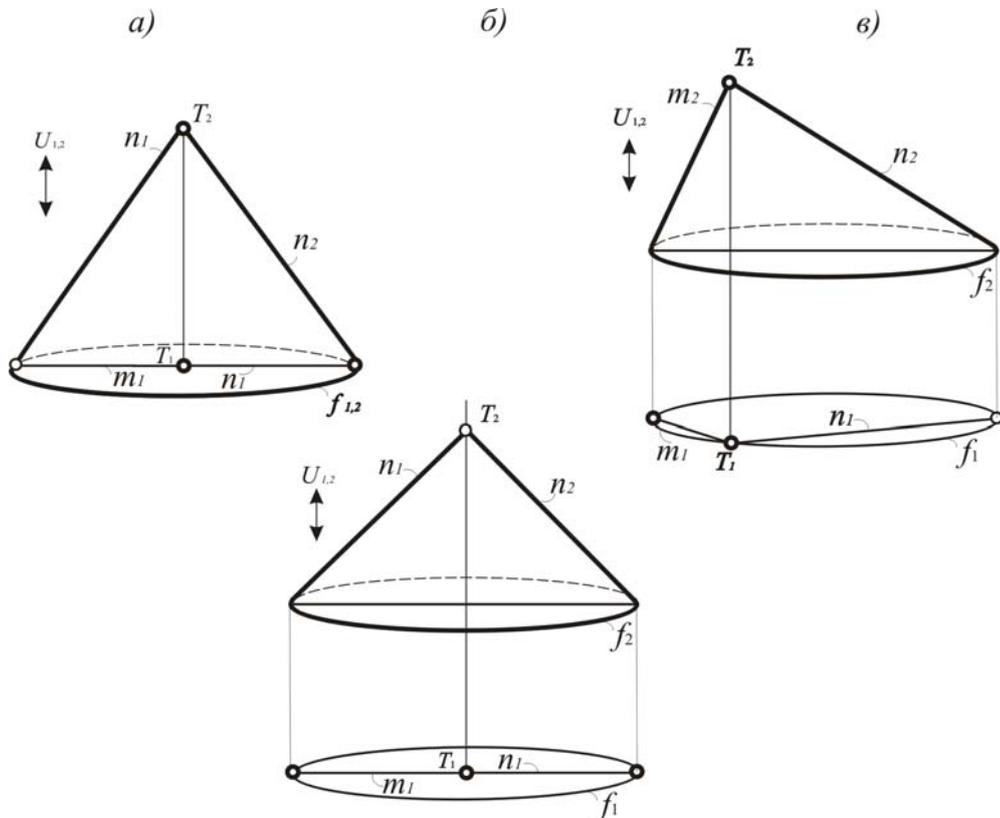


Рис. 143. Модель конуса в аксонометрии

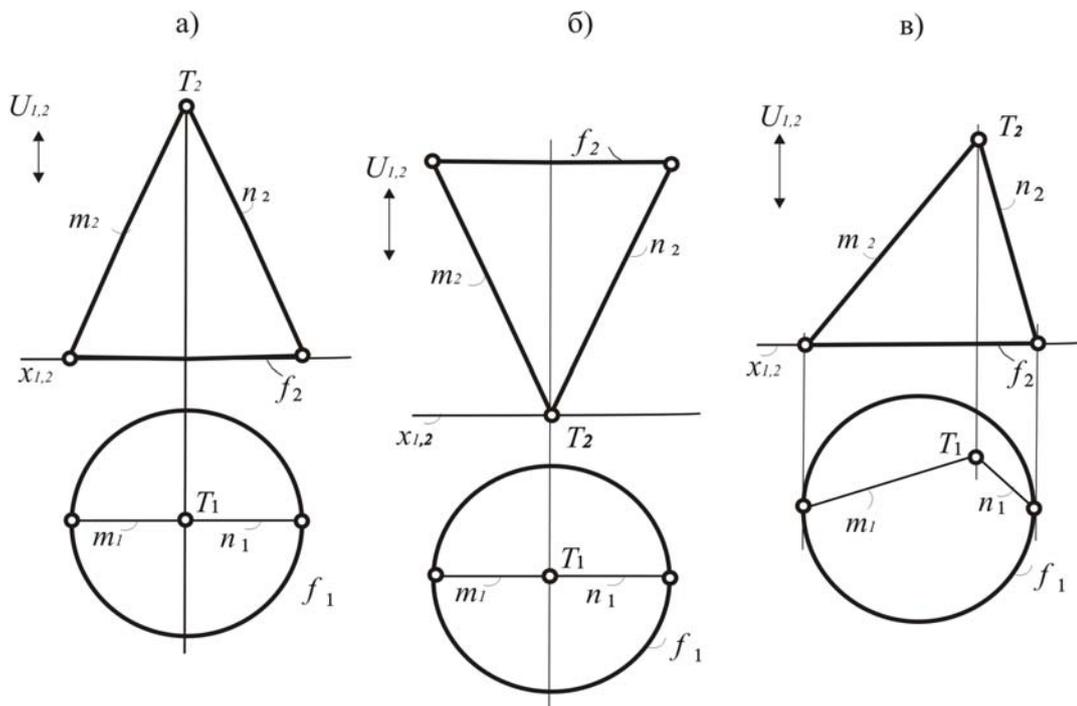


Рис. 144. Модель конуса на эюре Монжа

Моделирование цилиндра. Известно, что цилиндрическая поверхность – это коническая с бесконечно удаленной вершиной. В результате она может совпадать с одним из центров проецирования. Это приводит к вырождению соответствующей проекции цилиндра в линию (рис. 145,а; 146,а; 147,а). Такой цилиндр называют проецирующим. При моделировании цилиндра с параллельными основаниями следует учитывать, что они связаны параллельным переносом.

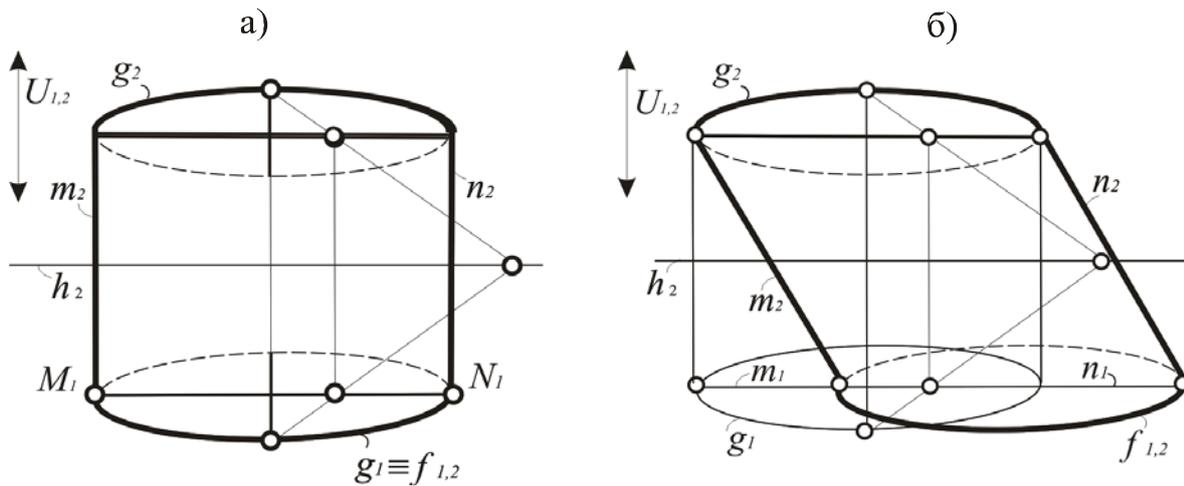


Рис. 145. Модель цилиндра в перспективе

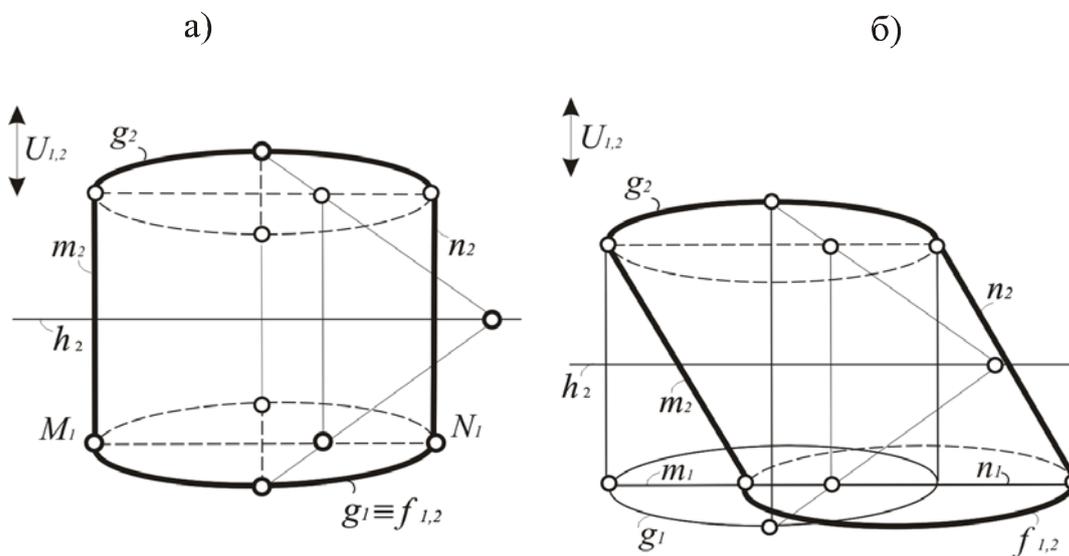


Рис. 146. Модель цилиндра в аксонометрии

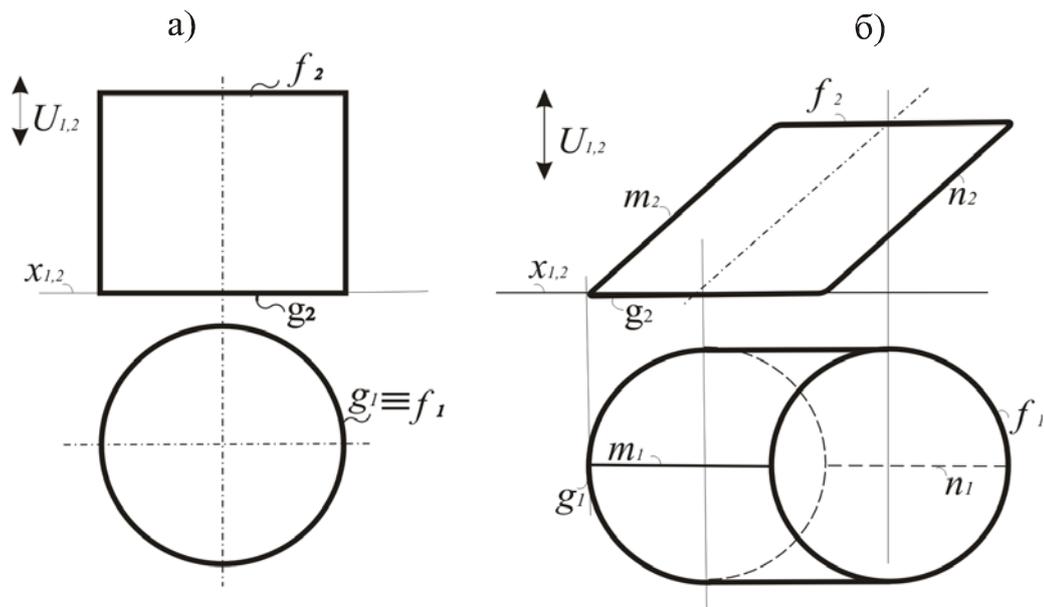


Рис. 147. Модель цилиндра на эпюре Монжа

Моделирование пирамиды. Из раздела «Образование поверхностей» известно, что пирамида отличается от конуса только характером направляющей. Поэтому все положения, касающиеся моделирования конической поверхности, относятся и к пирамидальной. Примеры моделей различных пирамид даны на рис. 148–150. На этих рисунках промоделированы пирамиды, основания которых принадлежат картине π_1 . На рис. 148,б, 149,б ребро TA занимает проецирующее положение. Соответственно две смежные грани также занимают проецирующее положение. Все остальные грани (кроме основания) занимают общее положение. Такое же положение занимают боковые грани остальных пирамид.

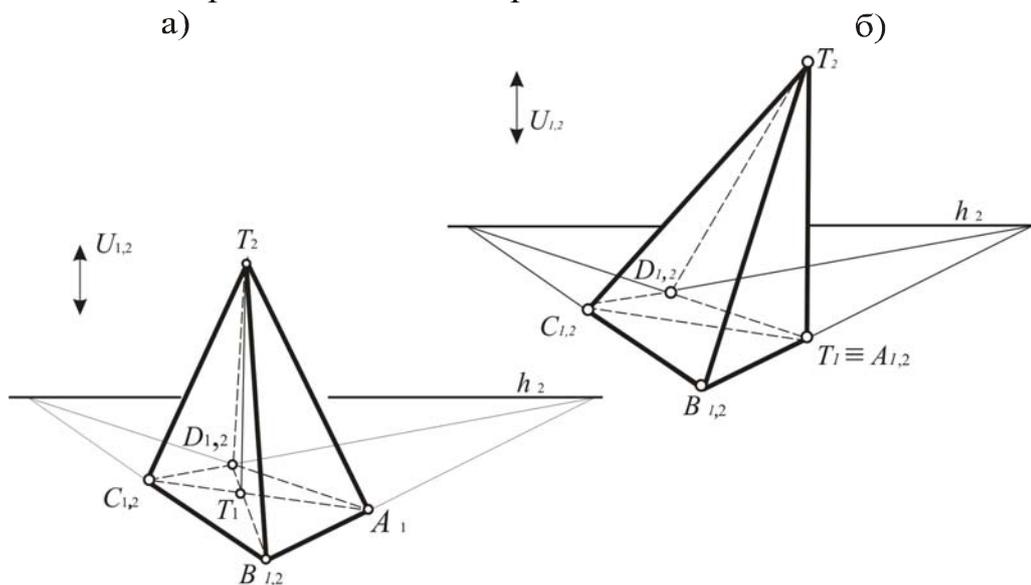


Рис. 148. Модель пирамиды в перспективе

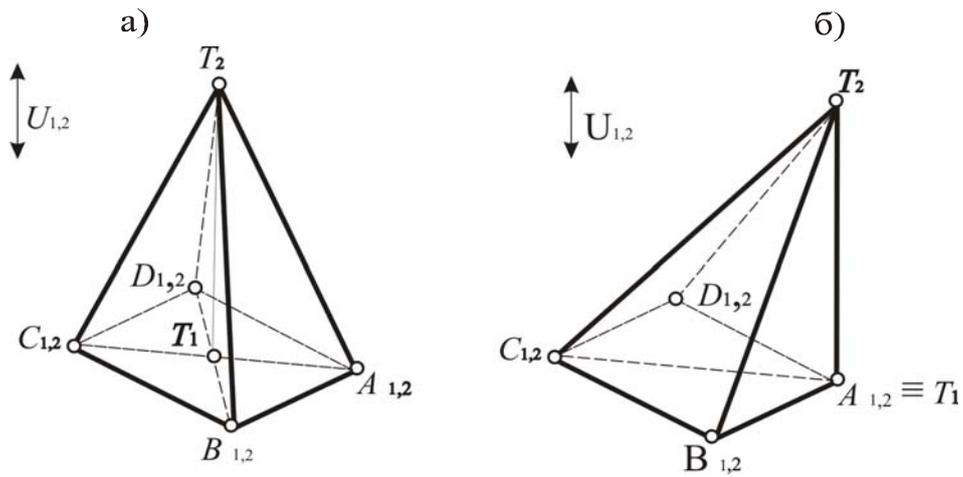


Рис. 149. Модель пирамиды в аксонометрии

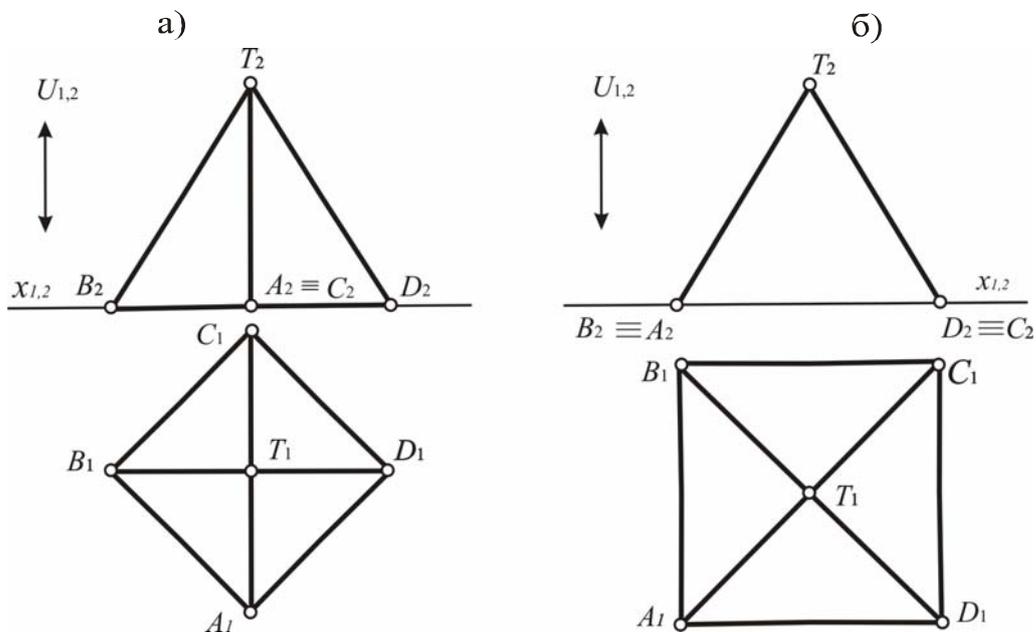


Рис. 150. Модель пирамиды на эюре Монжа

Моделирование призмы. Известно, что призматическая поверхность отличается от пирамидальной тем, что ее вершина удалена в бесконечность. В результате она может совпадать с одним из центров проецирования. Это приводит к вырождению соответствующей проекции призмы в линию. Такая призма называется проецирующей. При моделировании призмы с параллельными основаниями следует учитывать, что они связаны параллельным переносом. На рис. 151,а; 152,а; 153,б изображены призмы, занимающие общее положение. Вершины призм на рис. 151,б; 152,б тождественно совпадают с центром проецирования S_1 . Поэтому их первые проекции вырождаются в линии. Это легко увидеть, если обратить внимание на обозначения вершин. На рис. 153,а изображена призма, вершина которой тождественно совпала с центром проецирования S_2 . Ее вторая проекция вырождается в треугольник.

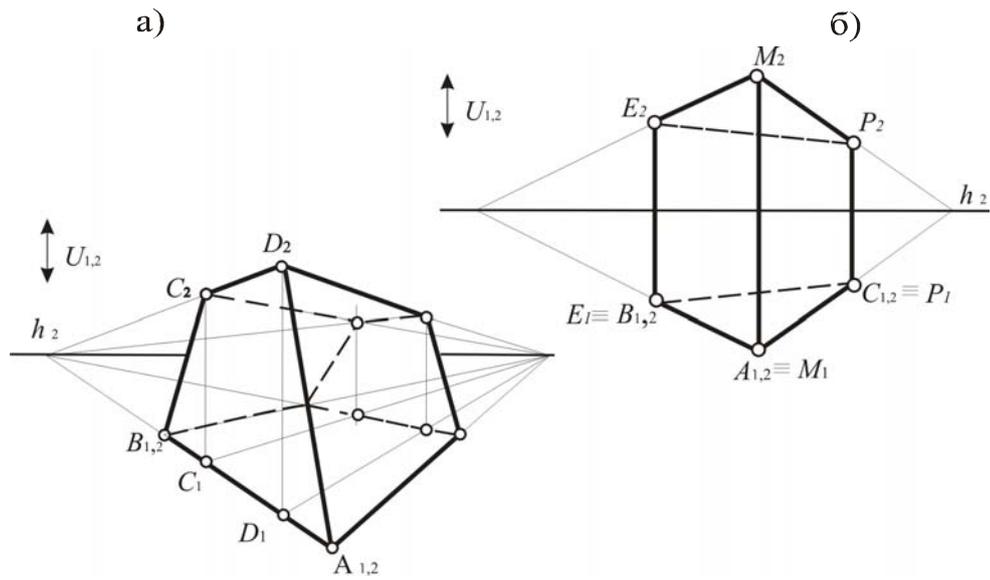


Рис. 151. Модель призмы в перспективе

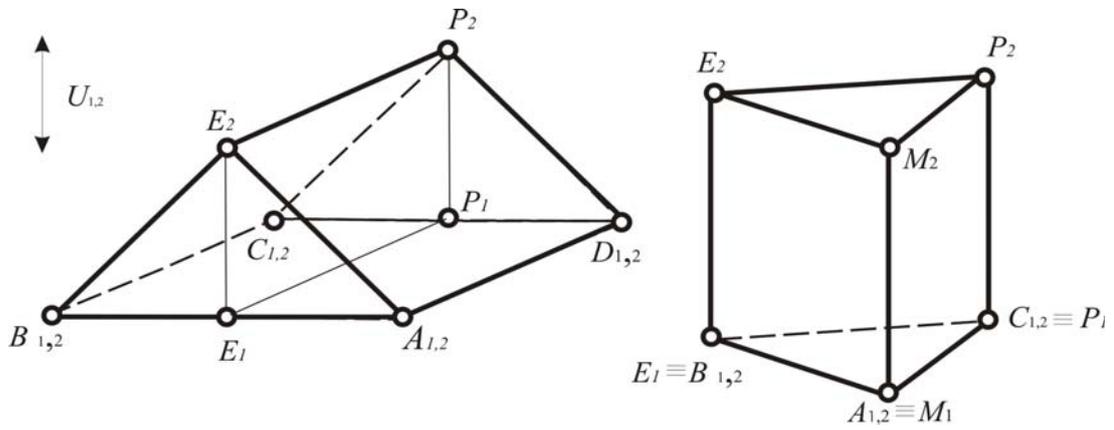


Рис. 152. Модель призмы в аксонометрии

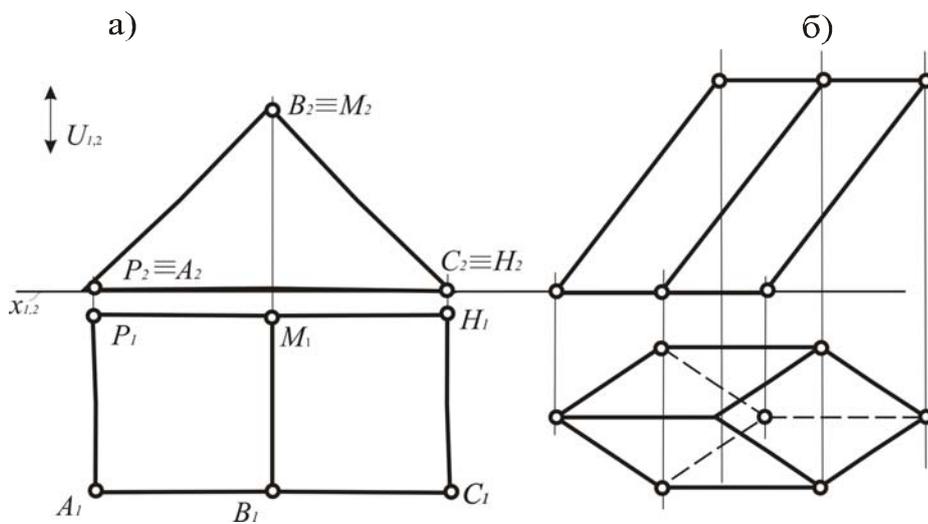


Рис. 153. Модель призмы на эюре Монжа

Рассмотренные поверхности являются наиболее востребованными в формообразовании различных рукотворных объектов. Рассмотрим пример на рис. 154. дана геометрическая модель архитектурного объекта. Преобладающие поверхности, которые ее образуют, – это призмы. Они участвуют в образовании стен здания и части оконных ниш (четырёхугольные призмы). Двухскатные крыши здания можно представить как трехгранные призмы. Кроме призм формообразующими поверхностями оказываются цилиндрическая и коническая поверхности. Цилиндрические поверхности образуют и оконные ниши в цилиндрической части здания. Причем, в верхней части располагается цилиндрическая поверхность с горизонтальными направляющими. Нижнюю часть этой ниши представляют по две в каждой нише цилиндрические поверхности с вертикальными образующими. Одна с наружной стороны, другая – с внутренней.



Рис. 154. Геометрические поверхности, образующие архитектурный объект

Знание процесса образования той или иной поверхности, умение их моделировать и работать с моделями является основой для грамотного построения плоских изображений трехмерных объектов.

3.9.2. Определение положения поверхности относительно проекционного аппарата по ее модели

Задача 2. Определить какая промоделирована поверхность и какое положение она занимает относительно проекционного аппарата.

Если модель поверхности содержит очерк, то установить, какая поверхность промоделирована, не составит труда. В этом случае поверхность легко узнаваема на своей модели. На рисунках, рассмотренных в этом разделе, любая поверхность, которая там изображена, легко узнаваема. На них даны примеры моделей сферы, конуса, цилиндра, пирамиды и призмы, которые построены в перспективе, аксонометрии и на эюре Монжа.

Чтобы определить положение поверхности по отношению к проекционному аппарату, достаточно выяснить, совпадает вершина поверхности с одним из центров проецирования или нет. Очевидно, что это касается только тех поверхностей, которые имеют бесконечно удаленную вершину. Если окажется, что вершина совпадает с S_1 или S_2 , то соответственная проекция поверхности вырождается в линию.

3.9.3. Построение на модели поверхности графически простых линий

Задача 3. Выделить на модели поверхности графически простые линии (прямые, окружности).

Табл. 2 показывает, что для решения этой задачи, необходимы знания из раздела «Образование поверхностей». В этом разделе еще важны умения отличать линейчатую поверхность от нелинейчатой. При этом необходимо учитывать, что графически простая линия должна изображаться без искажения.

В табл. 3 рассмотрены условия получения графически простой линии на самых распространенных поверхностях.

Т а б л и ц а 3

Условия получения графически простой линии

№ п/п	Наименование поверхности	
1	Сфера	Окружность, полученная при сечении поверхности плоскостью, которая параллельна одной из картин
2	Конус	Прямая, полученная при сечении поверхности плоскостью, которая проходит через вершину
3	Цилиндр	
4	Конус	Окружность, полученная при сечении конуса, плоскостью, которая параллельна одной из картин
5	Цилиндр	Окружность, полученная при сечении цилиндра, плоскостью, которая параллельна одной из картин
6	Пирамида	Прямая, полученная при сечении одной из граней любой плоскостью
7	Призма	

Из определения графически простой линии ясно, что плоские линии возникают при сечении поверхности плоскостью. Приведенные ранее способы образования поверхностей позволили разделить все поверхности на те, у которых можно выделить прямую линию (линейчатые) и те, у которых это сделать невозможно (нелинейчатые). Из рассматриваемых поверхностей на конусе, цилиндре и многогранниках можно выделить прямую линию, а на сфере невозможно. Но эта поверхности образованы вращением окружности, каждая точка которой при этом описывает окружность. Если она лежит в плоскости уровня, то изображается на соответствующей картине без искажения. Это обстоятельство поможет выделять окружности на сфере.

На рис. 155–157 показано построение окружности l , которая получена при сечении сферы плоскостью, параллельной картине π_2 в перспективе на вертикальной картине и аксонометрии. Точка A позволяет определить положение ее горизонтального диаметра, точка B является ее центром. На рис. 157 видно, что на эюре Монжа окружность l может возникнуть при сечении сферы как фронтальной, так и горизонтальной плоскостями уровня. Точка B является ее центром. Во всех других случаях выделить окружность на поверхности сферы невозможно. Достаточно вспомнить как происходит моделирование этих поверхностей.

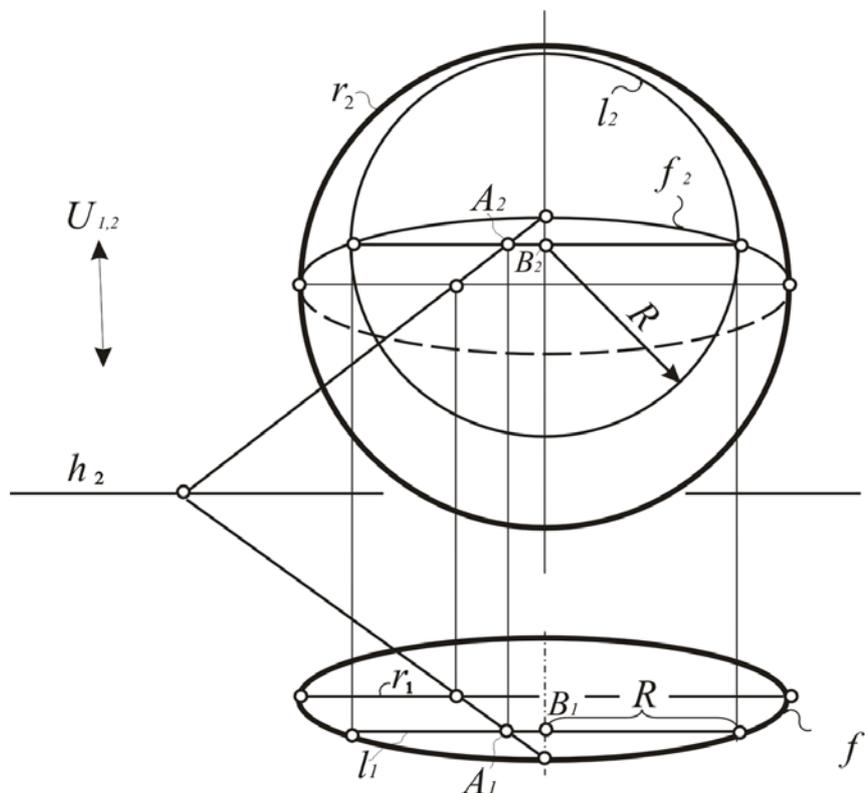


Рис. 155. Окружность, полученная при сечении сферы плоскостью, которая параллельна картине π_2 (перспектива)

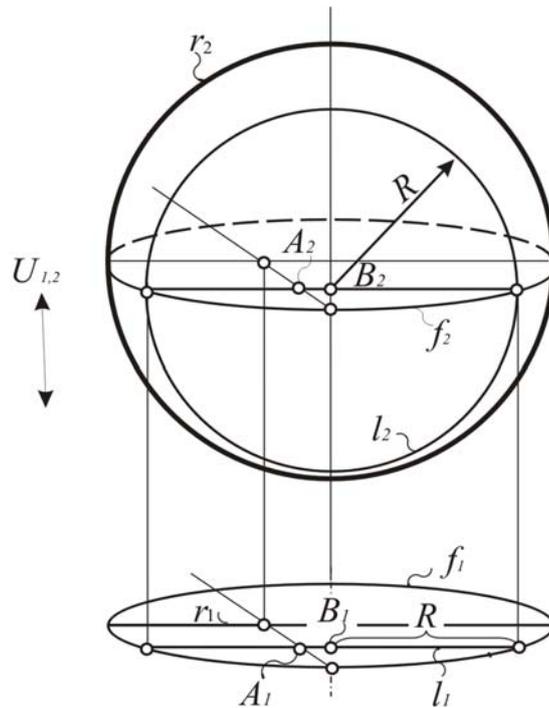


Рис. 156 Окружность, полученная при сечении сферы плоскостью, которая параллельна картине π_2 (аксонометрия)

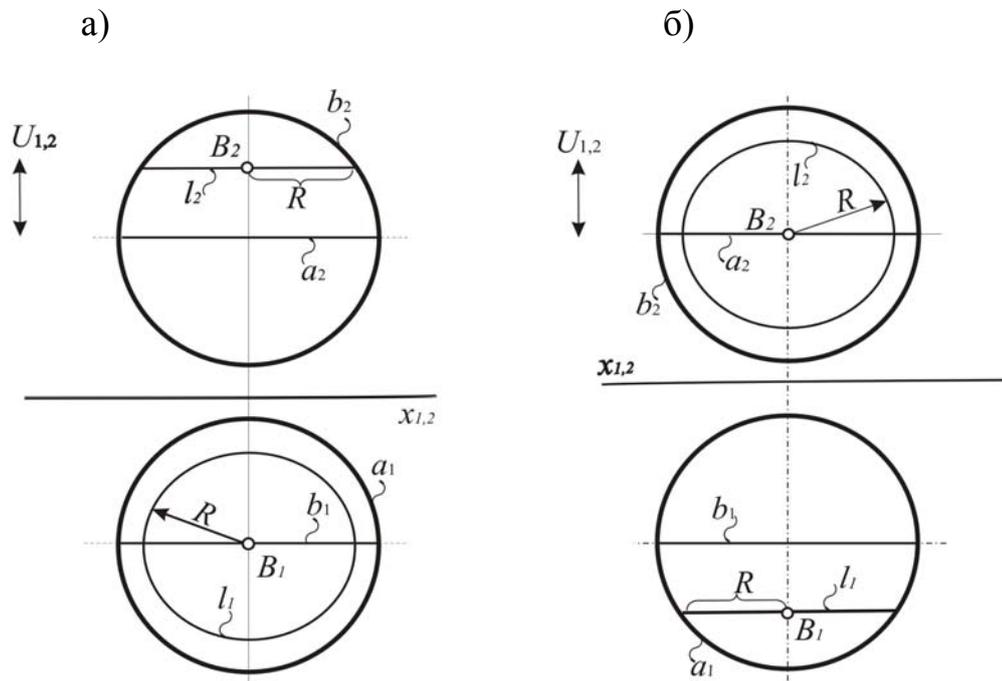


Рис. 157. Окружность, полученная при сечении сферы плоскостью, которая параллельна одной из картин (эпюр Монжа)

Чтобы получить прямую на поверхности конуса достаточно рассечь его плоскостью, которая проходит через вершину. Примеры построения прямой l на конической поверхности даны на рис. 158. Поскольку цилиндр –

это конус с бесконечно удаленной вершиной, то выделение на его поверхности прямой l не имеет принципиальных отличий (рис. 159). Если модель сохраняет параллельность, то все образующие цилиндра параллельны друг другу.

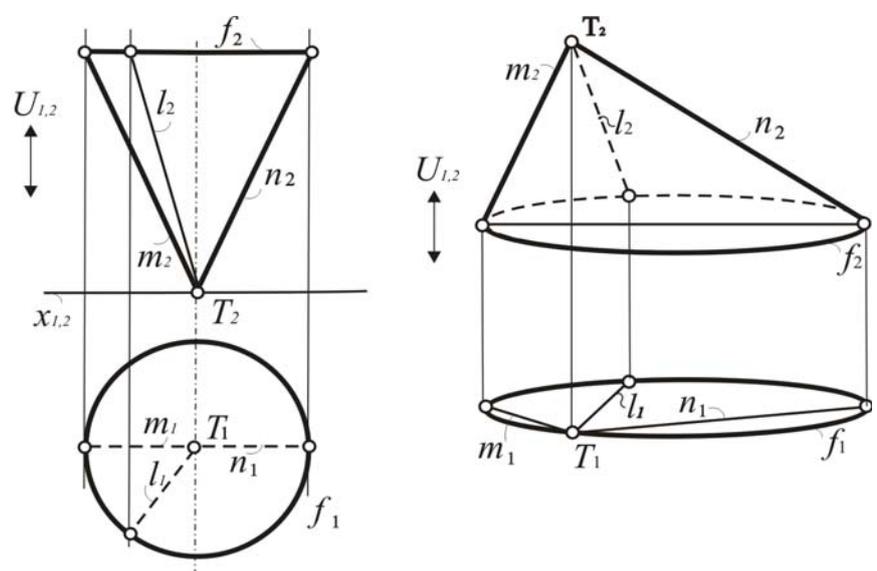


Рис. 158. Прямая, полученная при сечении конуса плоскостью, которая проходит через его вершину (эпюр Монжа, аксонометрия)

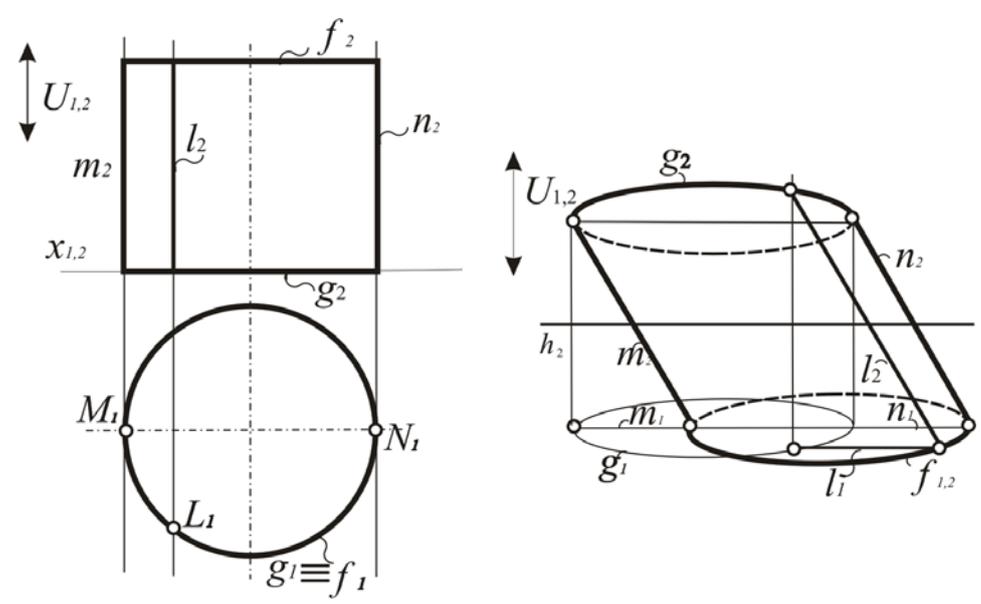


Рис. 159. Прямая, полученная при сечении цилиндра плоскостью, которая проходит через его вершину (эпюр Монжа, перспектива)

На конической и цилиндрической поверхностях помимо прямой можно выделить окружность. Примеры построения таких окружностей даны на рис. 160 и 161.

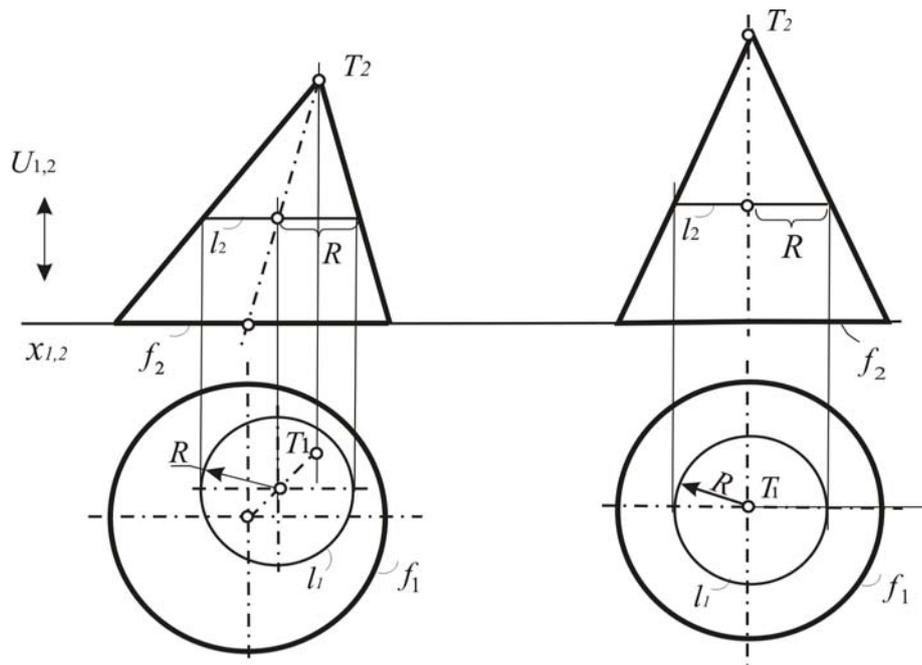


Рис. 160. Окружность, полученная при сечении конуса плоскостью, которая параллельна картине π_1 (эпюр Монжа)

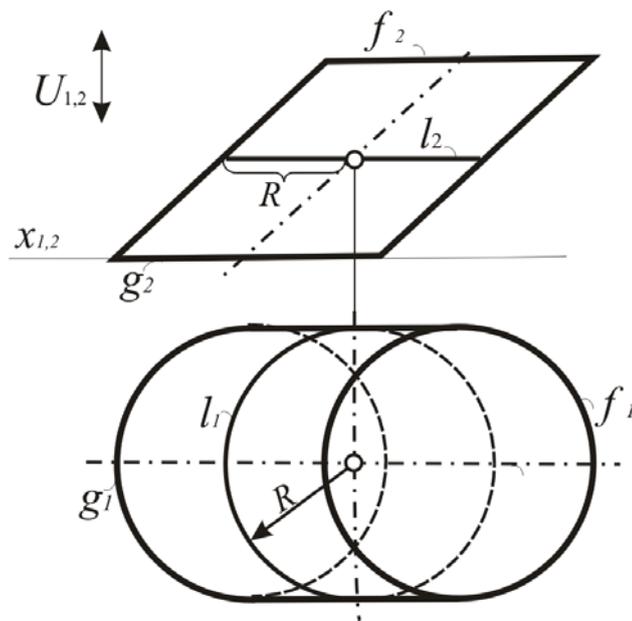


Рис. 161. Окружность, полученная при сечении цилиндра плоскостью, которая параллельна картине π_1 (эпюр Монжа)

Любая грань многогранника – это плоская фигура (многоугольник). А в плоскости, как известно, можно выделить бесконечно много прямых, как угодно расположенных. Рис. 162 демонстрирует выделение прямой l на пирамиде и призме.

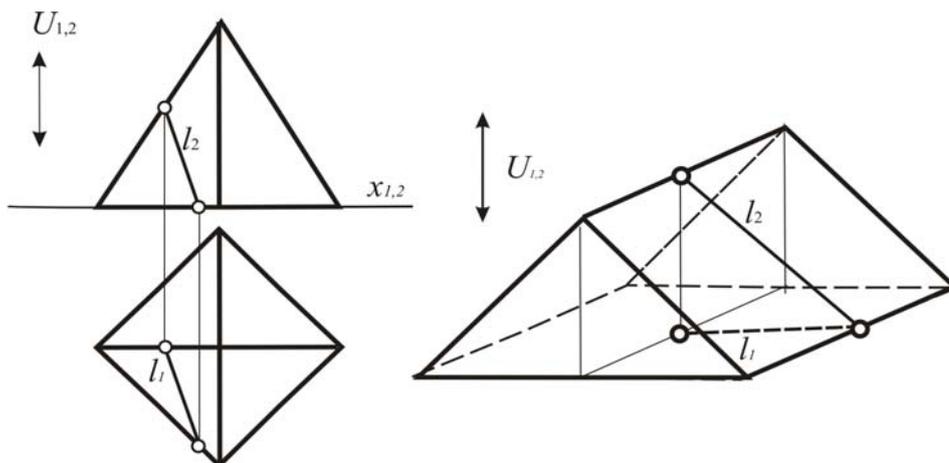


Рис. 162. Прямая l , полученная при сечении одной из граней любой плоскостью (эпюр Монжа, аксонометрия)

3.9.4. Приемы работы с моделью поверхности

Задача 4. Дана одна проекция точки M , которая лежит на поверхности, построить другую проекцию этой точки.

Алгоритм построения модели точки поверхности по одной заданной проекции имеет следующие операции:

1. Через заданную проекцию точки необходимо провести графически простую вспомогательную линию, принадлежащую поверхности.
2. Построить другую проекцию вспомогательной линии.
3. На построенной вспомогательной линии найти положение искомой проекции точки.

Для построения точки M на всех линейчатых поверхностях в качестве вспомогательной линии выбрана прямая линия l (рис. 163, 164), на сфере – окружность (рис. 165).

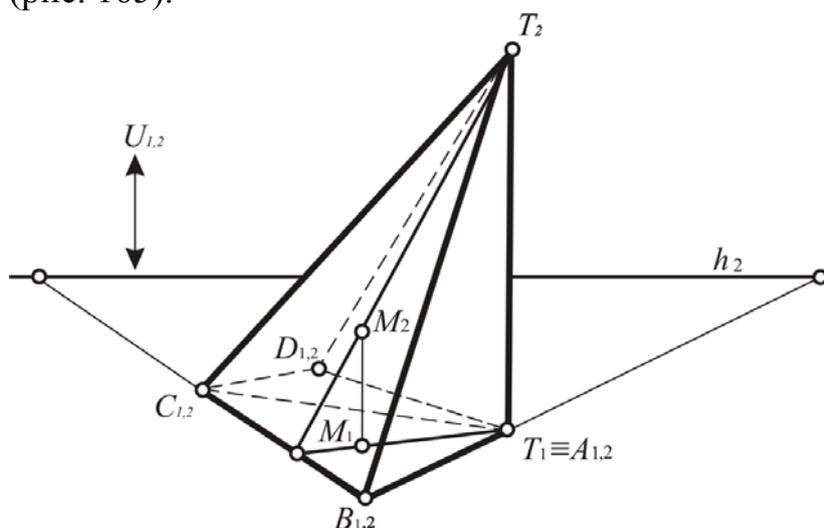


Рис. 163. Построение точки M поверхности пирамиды по заданной проекции M_1 (перспектива)

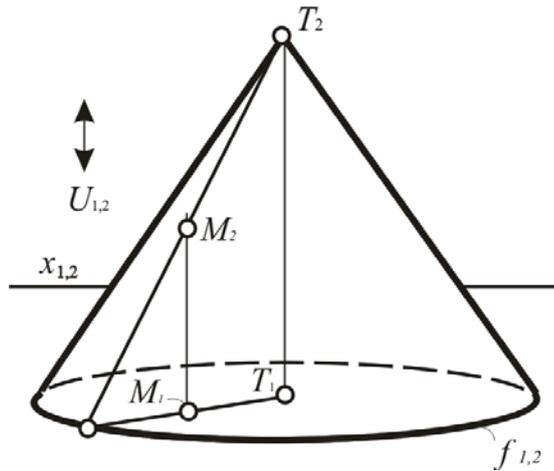


Рис. 164. Построение точки M поверхности конуса по заданной проекции M_1 (аксонометрия)

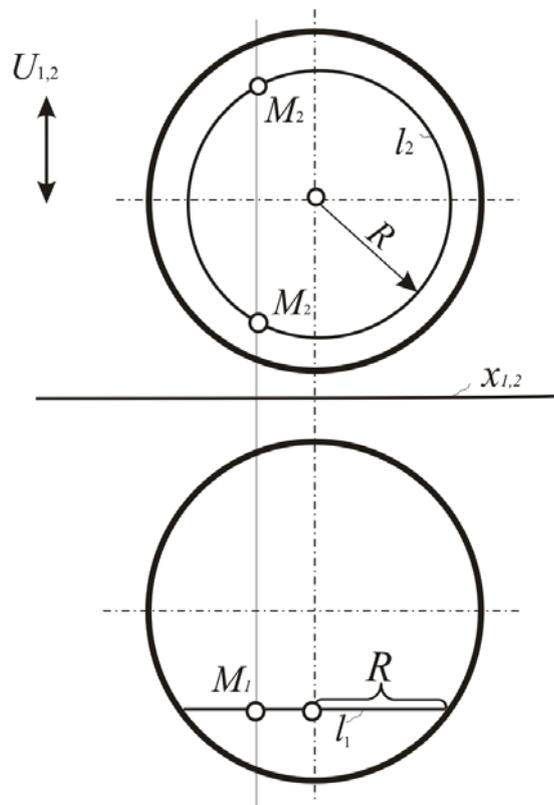


Рис. 165. Построение точки M поверхности сферы по заданной проекции M_1 (эпюр Монжа)

В случае, когда поверхность занимает проецирующее положение (рис. 166), следует учитывать следующие обстоятельства:

1. Если заданная проекция точки принадлежит невырожденной проекции поверхности, то решение задачи упрощается. Достаточно провести через эту проекцию точки линию связи и пересечь ее с вырожденной проекцией поверхности.

2. Если заданная проекция точки принадлежит вырожденной проекции поверхности, то задача решения не имеет.

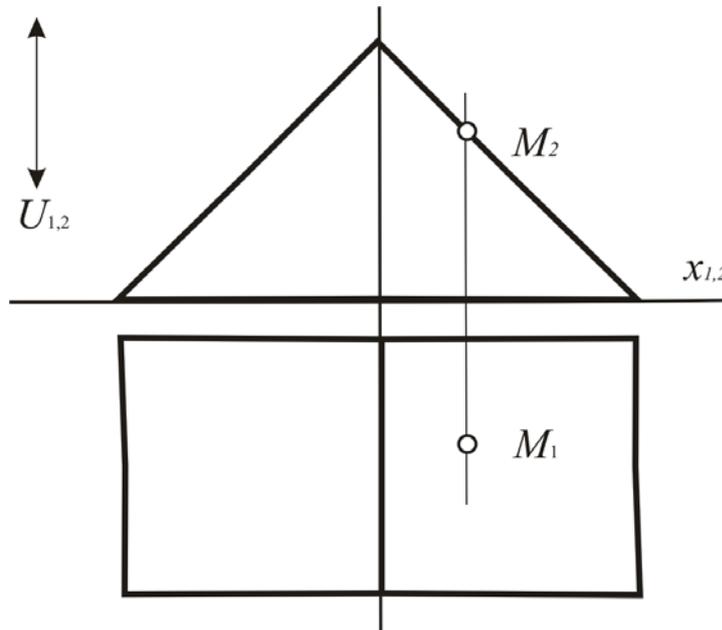


Рис. 166. Построение точки M поверхности проецирующей по заданной проекции M_1 (эпюр Монжа)

Задача 5. На модели поверхности дана одна проекция линии l , которая является ее плоским сечением. Построить другую проекцию этой линии.

Наиболее востребованными являются сечения, полученные проецирующей плоскостью, поэтому рассмотрим только этот вариант.

Алгоритм построения модели плоского сечения поверхности по одной заданной проекции имеет следующие операции:

1. Определить, какое плоское сечение поверхности представляет собой искомая линия.
2. Выявить ее характерные и, если необходимо, случайные точки.
3. Построить искомые проекции выявленных точек. Для чего необходимо количество раз решить задачу 3 этого раздела. Соединить полученные точки с учетом сведений, полученных в п. 1.
4. Установить видимый и невидимый участки построенной линии.

На рис. 167 – 176 приведены примеры нескольких вариантов построения линии l , принадлежащей поверхности, если дана одна ее проекция. Она получена от сечения поверхности проецирующей плоскостью.

Чтобы реализовать первый пункт алгоритма, необходимо знание плоских сечений поверхностей.

Плоские сечения поверхностей:

1. Коническая поверхность, у которой в качестве направляющей окружность или эллипс, имеет следующие плоские сечения:

- Гипербола образуется, если секущая плоскость параллельна двум образующим поверхности (рис. 161). При этом вторая ветвь гиперболы возникает на другой части конуса. В данном случае – на обратном конусе.

- Парабола возникает, когда секущая плоскость параллельна одной образующей конуса (рис. 162).

- Окружность или эллипс получают при пересечении плоскостью всех образующих конической поверхности (рис. 163).

- Две прямые выделяют на поверхности плоскость, которая проходит через вершину конической поверхности (рис. 164).

2. Цилиндрическая поверхность, у которой в качестве направляющей окружность или эллипс, имеет следующие плоские сечения:

- Окружность или эллипс получают при пересечении плоскостью всех образующих цилиндрической поверхности (рис. 165).

- Две прямые выделяет на поверхности плоскость, которая проходит через вершину цилиндрической поверхности (рис. 166).

3. Любое сечение сферы плоскостью представляет собой окружность (рис. 168, 169).

5. Плоское сечение многогранника – многоугольник (рис. 169, 170).

Характерные точки линии поверхности – это точки, которые принадлежат очеркам и ребрам поверхностей. Остальные точки, определяющие линию, называются случайными или промежуточными.

Если заранее известно, какая линия окажется в сечении поверхности, то, как правило, для построения искомой проекции линии достаточно только опорных точек (рис. 167, 170, 173, 175, 176). Если необходимо уточнить искомую проекцию линии, то выбирают еще случайные точки (рис. 169, 174). При построении проекции линии на многограннике необходимо взять точки только на его ребрах и построить их другие проекции (рис. 175, 176).

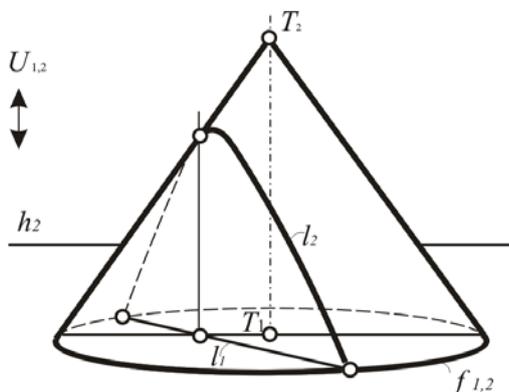


Рис. 167. Построение гиперболы l , которая лежит на поверхности конуса, по заданной проекции l_1 (перспектива)

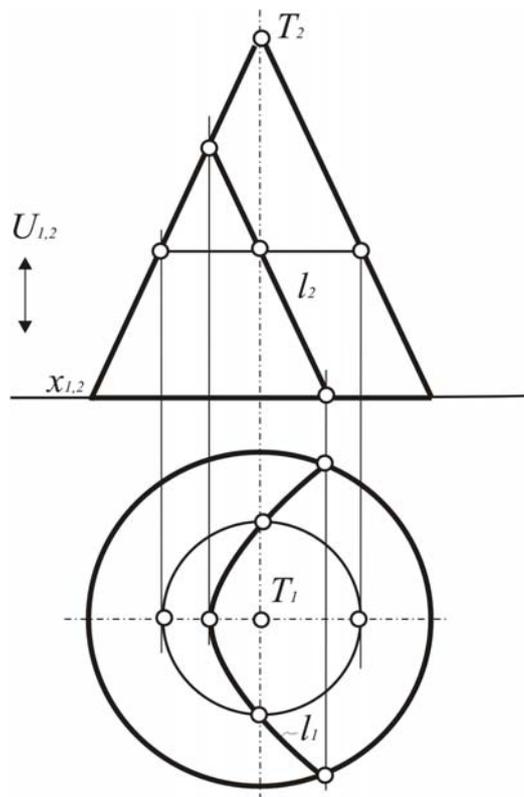


Рис. 168. Построение параболы l , которая лежит на поверхности конуса, по заданной проекции l_2 (эпюр Монжа)

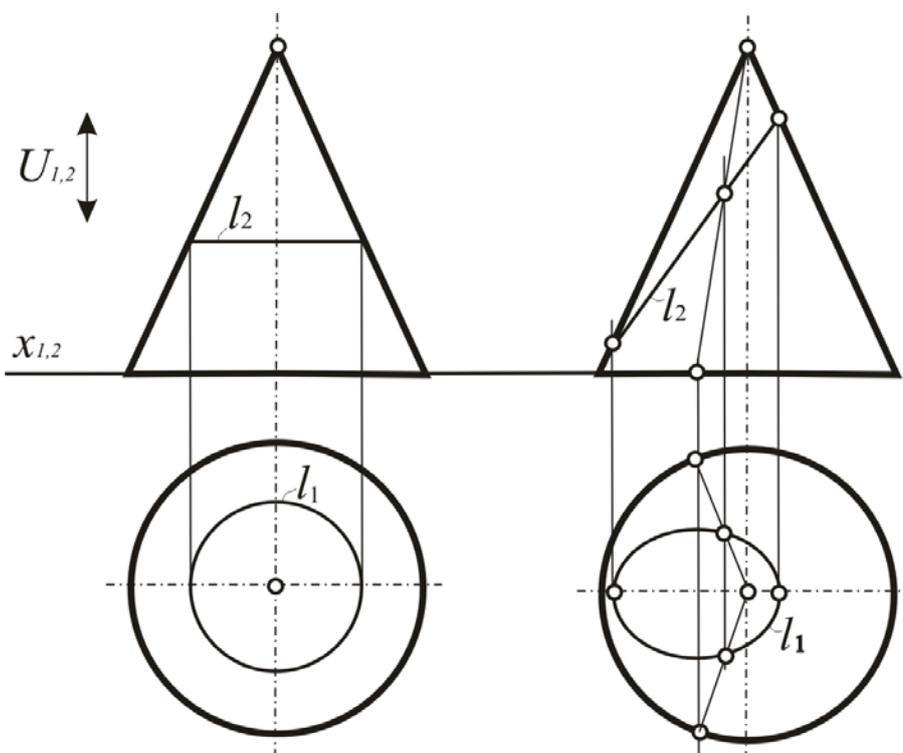


Рис. 169. Построение окружности l и эллипса l_2 , которые лежат на поверхности конуса, по заданной проекции l_2 (эпюр Монжа)

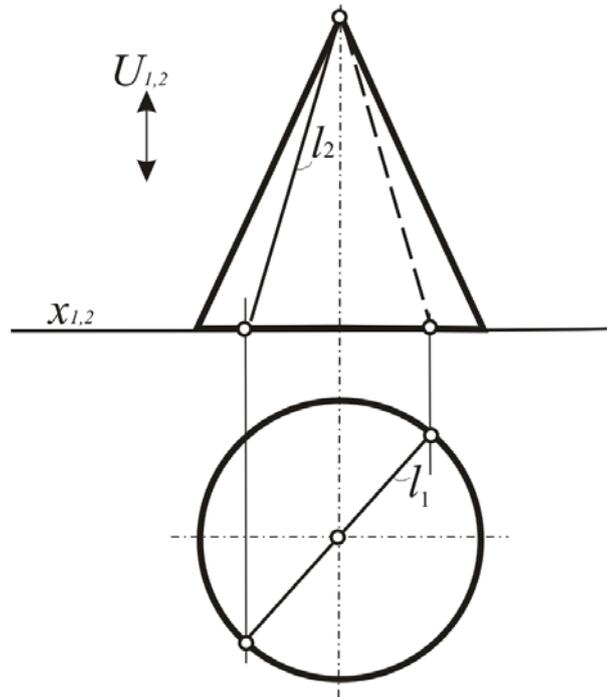


Рис. 170. Построение прямых l , которые лежат на поверхности конуса, по заданной проекции l_1 (эпюр Монжа)

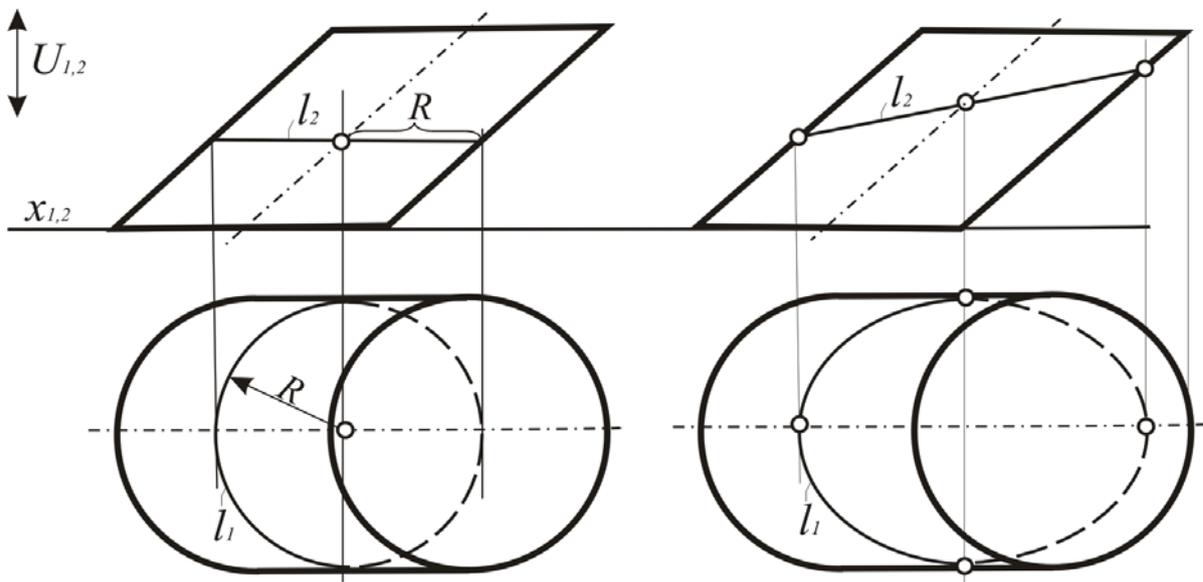


Рис. 171. Построение окружности l и эллипса l , которые лежат на поверхности цилиндра, по заданной проекции l_2 (эпюр Монжа)

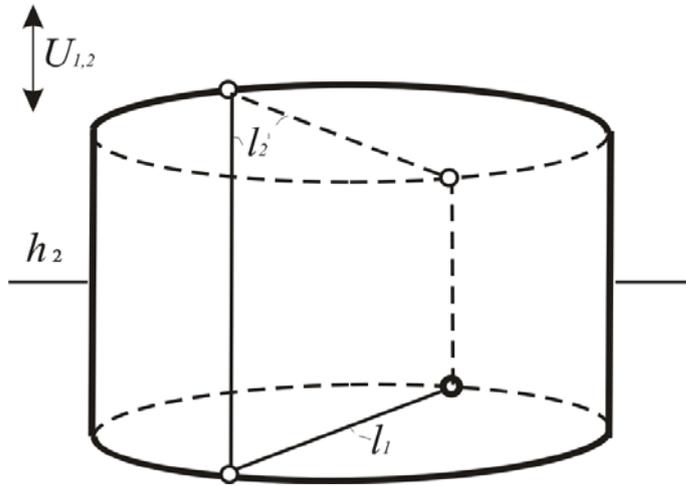


Рис. 172. Построение прямой l , которая лежит на цилиндрической поверхности, по заданной проекции l_1 (перспектива)

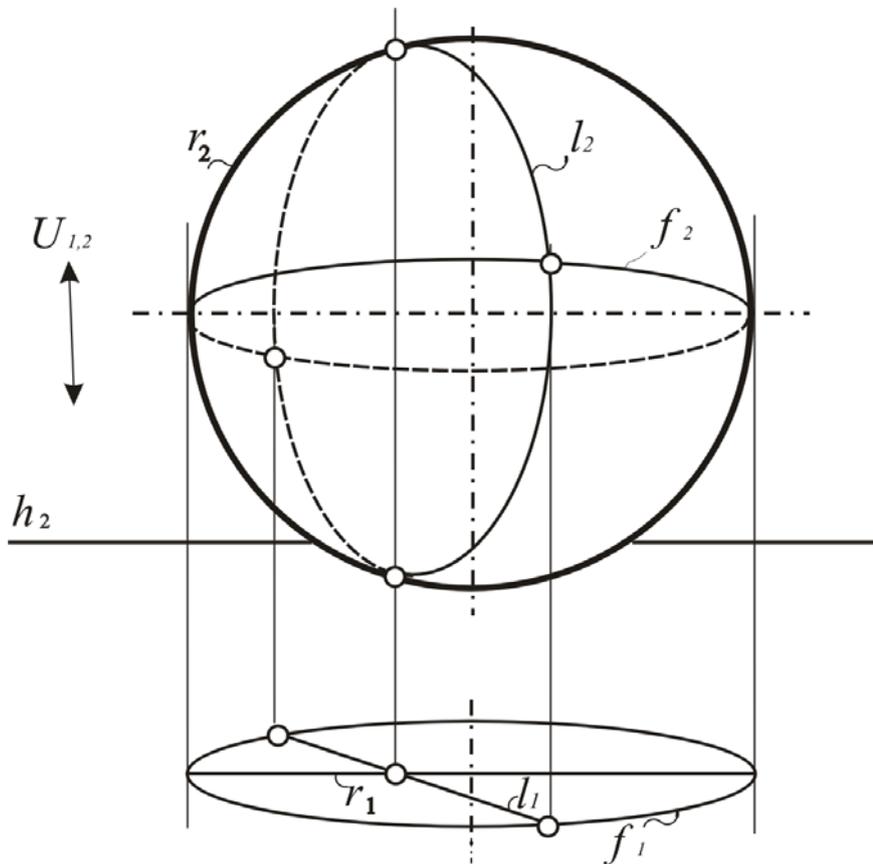


Рис. 173. Построение окружности l , которая лежит на поверхности сферы, по заданной проекции l_1 (перспектива)

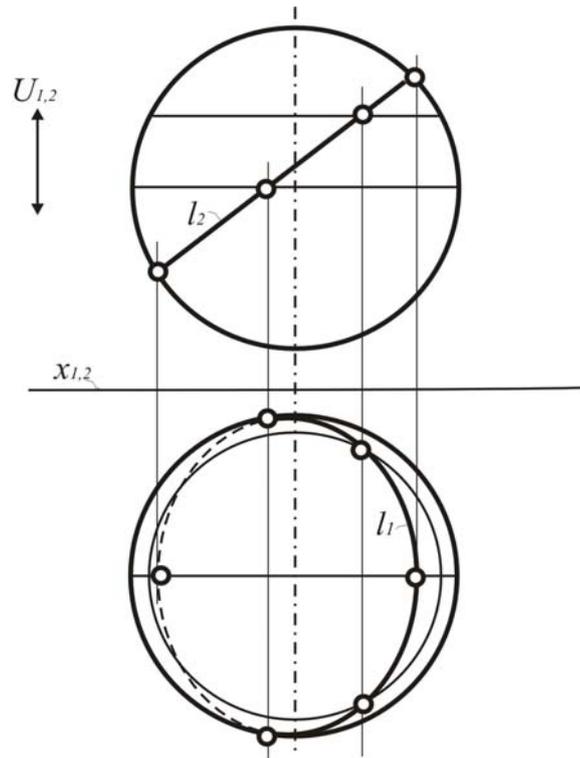


Рис. 174. Построение модели окружности l , которая лежит на поверхности сферы, по заданной проекции l_2 (эпюр Монжа)

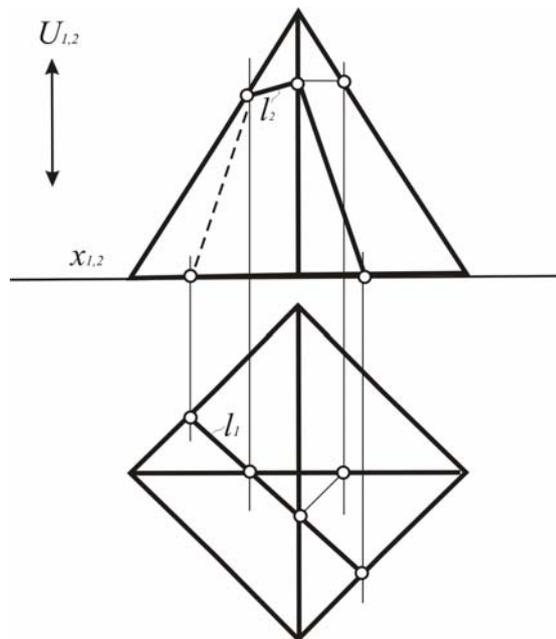


Рис. 175. Построение многоугольника l , который лежит на поверхности пирамиды, по заданной проекции l_1 (эпюр Монжа)

При построении линии на проецирующей поверхности следует учитывать, что проекция любой ее линии тождественно совпадает с вырожденной проекцией поверхности (рис. 176).

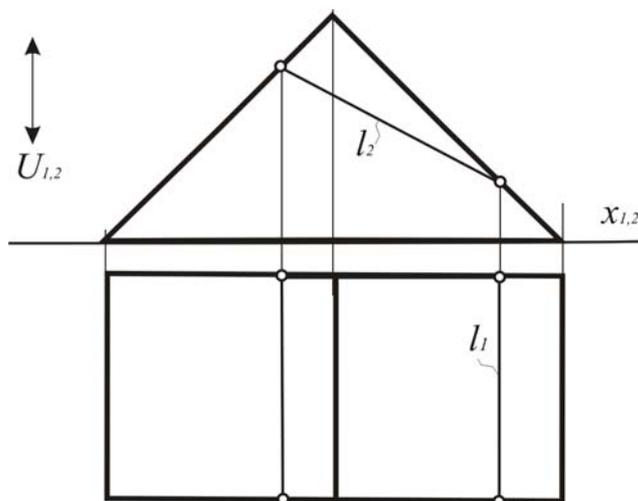


Рис. 176. Построение многоугольника l , который лежит на поверхности призмы, по заданной проекции l_1 (эпюр Монжа)

В рассмотренных примерах линии строились с использованием характерных точек. Случайные точки, как правило, не требуются, если заранее известно, как выглядит плоское сечение. Построение этих точек осуществлялось с помощью решения задачи 3 этого раздела.

Видимый и невидимый участки построенной линии разделяются точками, лежащими на очерках.

Контрольные вопросы

1. Что называется очерком поверхности?
2. Дайте определение модели поверхности.
3. Перечислить задачи, из решения которых складывается работа с моделью поверхности.
4. В каких случаях поверхность может занимать частное положение?
5. Почему модель сферы в перспективе и аксонометрии считаются приближенными?
6. Как называются очерки сферы при моделировании ее на эюре Монжа?
7. Какие линии считаются графически простыми?
8. Перечислить операции алгоритма по построению проекции точки, если она принадлежит промоделированной поверхности и дана одна ее проекция?
9. В каких случаях алгоритм по построению проекции точки, если она принадлежит промоделированной поверхности и дана одна ее проекция, упрощается?

10. Перечислить плоские сечения конуса и указать при каких условиях они возникают.
11. Перечислить плоские сечения цилиндра и указать при каких условиях они возникают.
12. Что является плоским сечением сферы?
13. Что является плоским сечением многогранника?
14. Перечислить опорные точки линии, которые принадлежат линии поверхности.

4. ПОЗИЦИОННЫЕ ЗАДАЧИ

Работа с геометрическими моделями, как было сказано выше, складывается из решения позиционных и метрических задач. Причем на практике чаще всего приходится иметь дело с позиционными задачами. Они являются также основой при решении метрических задач и построения теней на моделях различных объектов. Это условие определяет доминирующий характер позиционных задач в курсе начертательной геометрии. Общая характеристика и классификация позиционных задач была дана в разд. 2.

Позиционными задачами называют такие, которые позволяют определить взаимную принадлежность или непринадлежность геометрических элементов друг другу или выявить третий элемент, возникающий как следствие взаимного расположения двух других элементов.

В зависимости от числа элементов, между которыми устанавливаются позиционные характеристики, все позиционные задачи делятся на две группы задач, где:

- 1) выясняется взаимная принадлежность двух элементов друг другу;
- 2) выявляется третий элемент как результат расположения двух данных элементов. В этой группе выделяют следующие подгруппы:

- задачи на пересечение;
- задачи на объединение элементов.

Примером первой группы задач являются задачи на определение принадлежности прямой плоскости или поверхности, принадлежности точки прямой, плоскости или поверхности. Примером второй группы позиционных задач являются задачи на пересечение прямой с плоскостью или поверхностью, пересечение поверхностей, проведение прямой через две точки или плоскости через три точки и т.п. Очевидно, что для решения задач на объединение не требуется знания специальных приёмов. Но когда дана задача на пересечение, то для поиска общего элемента двух заданных геометрических элементов необходимо выполнить специальные построения. Основными задачами этой группы являются задачи по определению точки пересечения прямой с плоскостью или поверхностью. Умение решать их позволит осуществлять решение более сложных: пересечение плоскостей и пересечение поверхностей. Причем последняя требует умения решать все остальные, которые в той или иной комбинации позволяют найти общую линию двух и более поверхностей. Следует заметить, что задачи на объединение элементов участвуют как базовые в решении всей группы задач на пересечение. На рис. 200 отражена взаимозависимость всех групп позиционных задач.

Все остальные задачи на пересечение можно представить как многократное решение этих задач. Поэтому для успешного освоения настоящего учебного курса необходимы прочные навыки в решении этих позиционных

задач. Но кроме указанных знаний здесь необходимы знания всего без исключения предыдущего учебного материала. Схема, отражающая взаимосвязь дидактических единиц, способствующих освоению раздела «позиционные задачи», представлена на рис. 178.

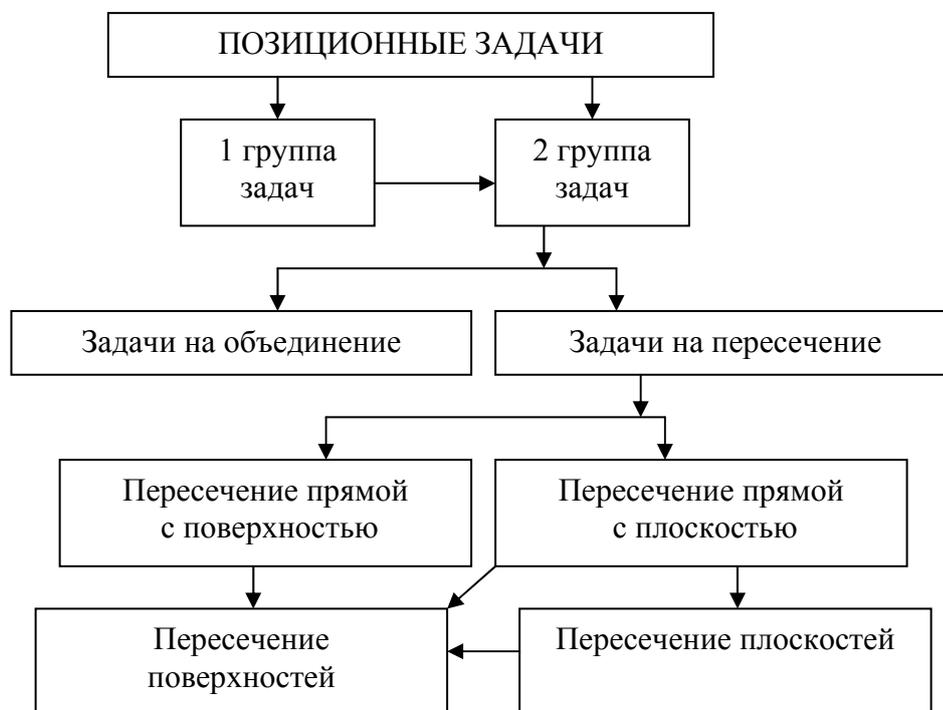


Рис. 177. Схема взаимозависимости позиционных задач

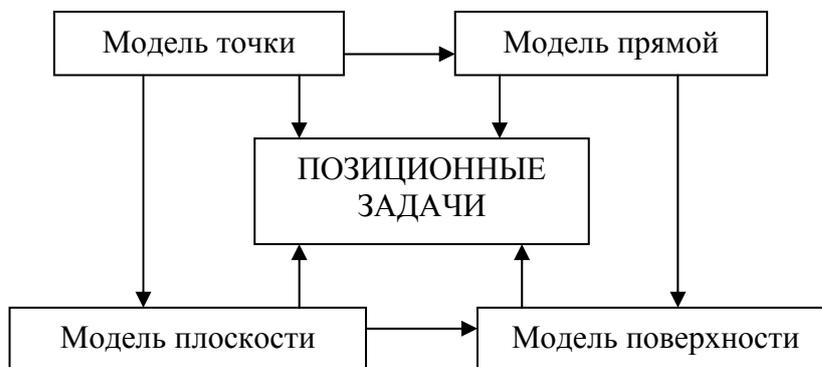


Рис. 178. Схема, отражающая взаимосвязь дидактических единиц, влияющих на освоение раздела «позиционные задачи»

4.1. Пересечение прямой с плоскостью

В настоящем разделе рассмотрено решение одной из самых распространенных задач: пересечение прямой с плоскостью. Успех в решении этой задачи определяется, с одной стороны, умением свободно обращаться с моделями геометрических элементов, с другой стороны – знанием специальных приемов, обусловленных спецификой плоской модели.

Задача по определению общей точки прямой и плоскости встречается на практике в самых различных вариантах. Она входит как составной элемент во многие другие задачи. Поэтому ее нужно научиться решать быстро и безотказно. Общность в структурах проекционных аппаратов перспективы, аксонометрии и эпюра Монжа приводит к тому, что поиск общей точки прямой и плоскости осуществляется одинаково. Поэтому рассмотрим решение этой задачи на примере модели, полученной на эпюре Монжа.

В трехмерном пространстве плоскость и прямая, пересекаясь, определяют положение некоторой точки. Иное дело, когда нам дана плоская модель этих объектов (рис. 179, а).

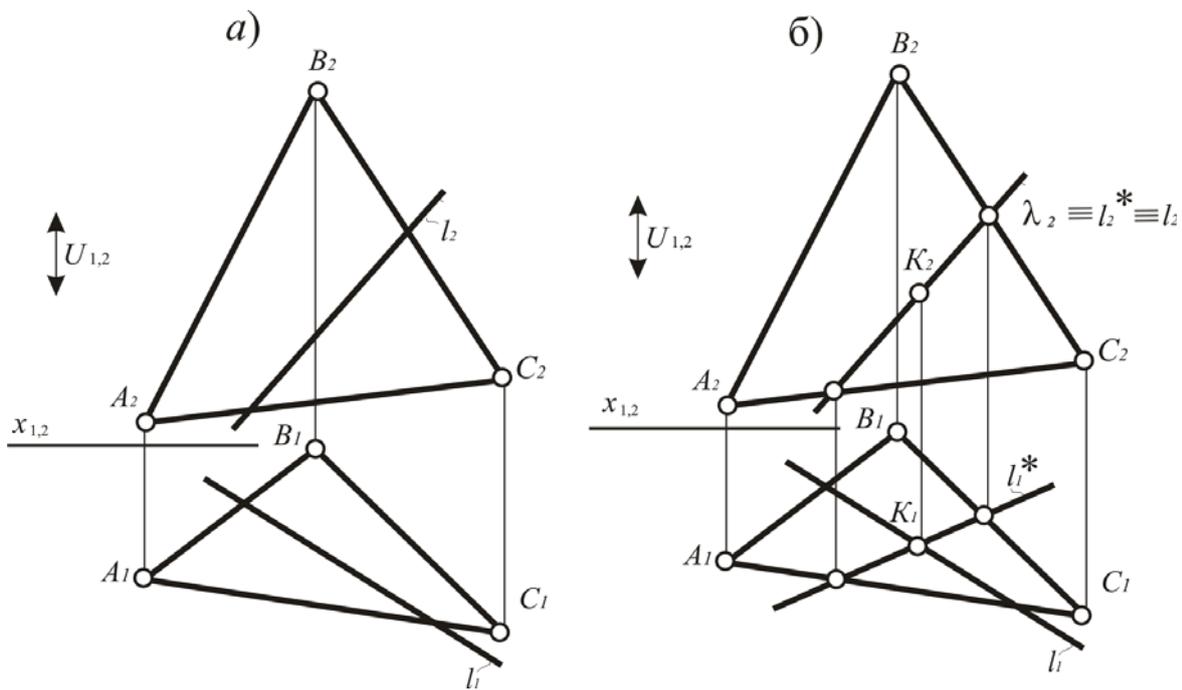


Рис. 179. Определение точки пересечения прямой с плоскостью на плоской модели (эпюр Монжа)

Общая точка K прямой l и плоскости α , которая задана треугольником ABC , здесь присутствует, но не выявлена. Чтобы ее найти, нужно учесть плоский характер модели, а именно то обстоятельство, что точка на плоскости определяется как результат пересечения линий.

Одной такой линией будет заданная прямая l , другой – вспомогательная l^* . Последняя возникает в результате пересечения двух плоскостей: заданной α и вспомогательной λ , которая проведена через прямую l и один из центров проецирования (рис. 180).

Проецирующее положение плоскости λ приводит к тому, что на одной из картин тождественно совпадают ее вырожденная проекция и одноименные по нижнему индексу проекции прямых l и l^* . Например, на рис. 203 плоскость λ содержит S_2 . Из чего следует: $\lambda_2 \equiv l_2 \equiv l_2^*$. Построив первую проекцию l_1^* , пересечём её с l_1 и получим первую проекцию искомой точки

мом примере вспомогательная плоскость проходит через вершину A треугольника ABC , которым задана плоскость и центр проецирования S_1 . На рис 180, а дано условие задачи, на рис. 180,б – ее решение.

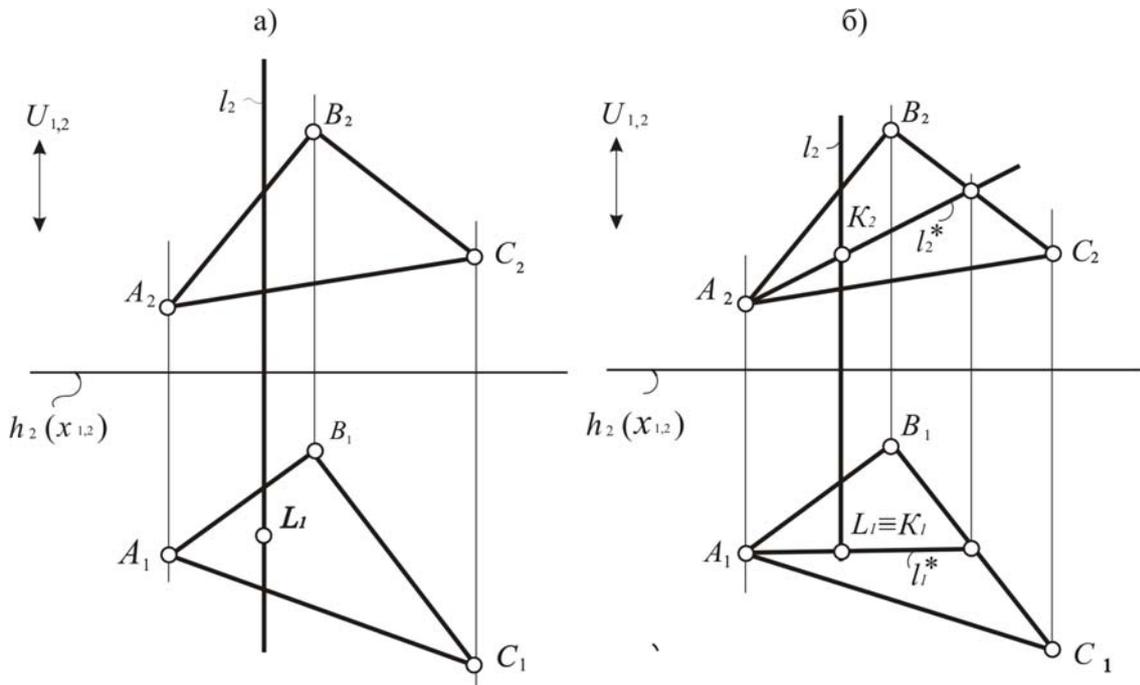


Рис. 180. Определение точки пересечения проецирующей прямой с плоскостью общего положения на плоской модели (эпюр Монжа, перспектива, аксонометрия)

Проецирующее положение заданной плоскости α (рис. 181) не меняет существо алгоритма, но существенно упрощает решение задачи. Потому что точка пересечения видна на той картине, где плоскость вырождается в прямую линию.

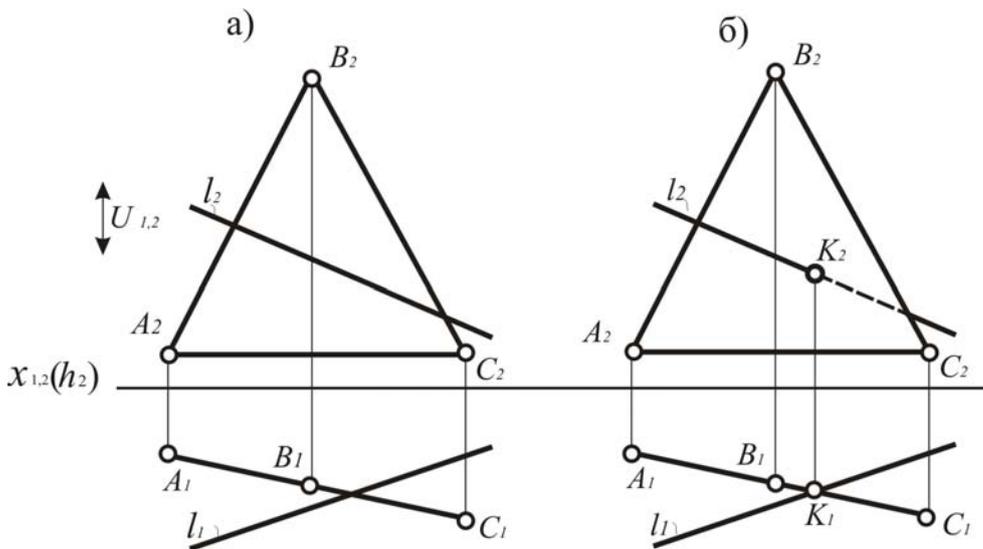


Рис. 181. Определение точки пересечения общего положения прямой с проецирующей плоскостью на плоской модели (эпюр Монжа, перспектива на вертикальной картине)

4.2. Пересечение прямой с поверхностью

Пересечение прямой с поверхностью также является фундаментальной позиционной задачей. Кроме того, она входит как составной элемент в решение более сложных позиционных задач, таких, как пересечение плоскости с поверхностью, пересечение поверхностей и построение теней.

Принцип, лежащий в основе решения задачи на определение точки пересечения прямой с плоскостью, сохраняется и в случае определения общих точек прямой и поверхности (рис. 182–184). Через прямую l проводится вспомогательная плоскость λ , которая пересекает поверхность по вспомогательному сечению l^* . Это сечение, пересекаясь с заданной прямой l , выделяет на ней искомые точки M и N .

Поскольку через прямую l можно провести бесконечно много плоскостей, выберем такие, с которыми удобно работать. Критерием такого удобства является:

1. Графически простое сечение поверхности вспомогательной плоскостью.
2. Проецирующее положение вспомогательной плоскости.

Решение задачи рекомендуется проводить по следующему алгоритму:

- 1) определить, какие сечения поверхности представляют собой графически простые линии;
- 2) через заданную прямую и один из центров проецирования провести секущую плоскость λ так, так чтобы она пересекала поверхность по графически простой линии l^* (если это возможно);
- 3) осуществить построение точек пересечения прямой l с полученным сечением l^* .

На рис. 182 приведен пример построения точек пересечения прямой l с пирамидой $TABC$. Прямая l занимает общее положение. Вспомогательная секущая плоскость λ содержит прямую l и проходит через центр проецирования S_1 . Сечение l^* представляет собой многоугольник. Если вспомогательная секущая плоскость пройдет через центр S_2 , то решение задачи принципиально не изменится. Изменится только форма многоугольника, полученного от сечения плоскостью λ .

Проецирующее положение прямой l дано в примере на рис. 207, где l содержит центр S_1 и пересекает конус. Из бесконечного множества плоскостей выберем ту, которая даст самое простое коническое сечение – прямую AT . Это плоскость λ , проходящая через вершину T , которая пересечет еще и основание конуса по прямой AB . Эти две прямые входят в сечение l^* , позволяющего выявить точки, общие как для конуса, так и для прямой l .

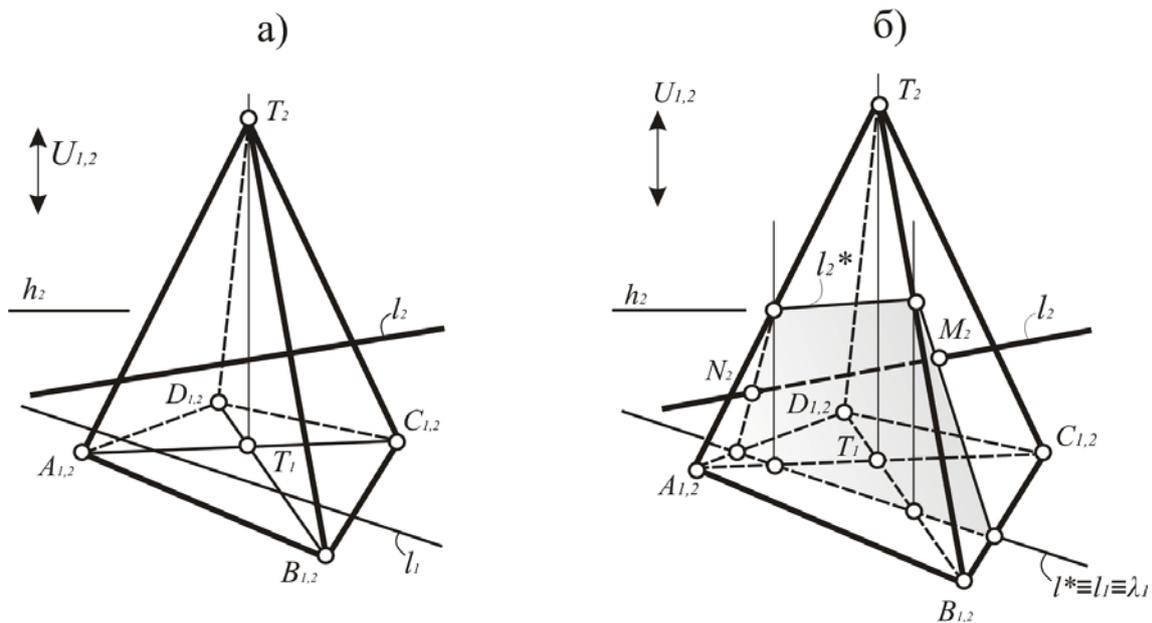


Рис. 182. Определение точки пересечения прямой с поверхностью на плоской модели (перспектива)

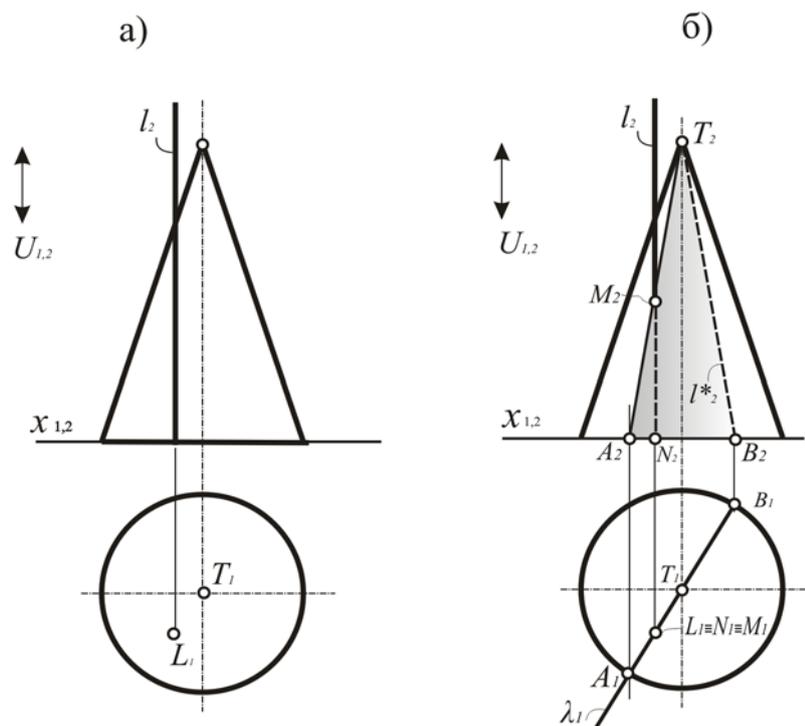


Рис. 183. Определение точки пересечения проецирующей прямой с поверхностью на плоской модели (эпюр Монжа)

Если поверхность занимает проецирующее положение, плоскость λ можно не проводить. Общие точки видны сразу на той картине, на которой поверхность вырождается в линию. В примере на рис. 208 проецирующее положение занимает цилиндр. Его вершина тождественно совпадает с центром проецирования S_1 , и первая проекция вырождается в линию. Её достаточно пересечь с l_1 , чтобы получить точки M и N , в которых прямая l пе-

ресекает цилиндр. Хотя в этом случае секущая плоскость λ все-таки существует. Она проходит через центр S_1 и прямую l . На рис. 208, *a* дано исходное условие задачи, на рис. 208, *б* – результат.

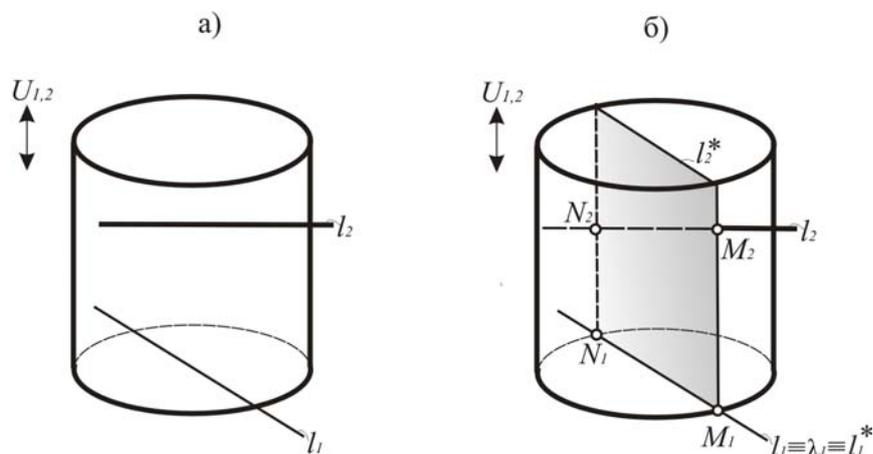


Рис. 184. Определение точки пересечения прямой общего положения с проецирующей поверхностью на плоской модели (аксонометрия)

Сравнивая алгоритмы решения задачи на пересечение прямой с плоскостью и с поверхностью, мы видим, что они не имеют принципиального различия. Оно возникает только тогда, когда речь заходит о вспомогательном сечении. На поверхности это сложная линия, а на плоскости – прямая.

4.3. Пересечение плоскостей

Другой часто встречающейся позиционной задачей является построение линии пресечения плоскостей. На рис. 185 приведены примеры решения этой задачи на эюре Монжа. Даны две плоскости $\alpha = A \cup B \cup C$ и $\beta = m \cap n$, которые занимают общее положение (рис. 185, *a*). В этом случае линия пересечения l определяется по двум точкам M и N , в которых прямые m и n , принадлежащие плоскости β , пересекают плоскость α (рис. 185, *б*). Очевидно, что для определения этих точек необходимо два раза решить задачу на пересечение прямой с плоскостью.

Если одна из плоскостей занимает проецирующее положение, то решение задачи несколько упрощается, так как одна из проекций l тождественно совпадает с вырожденной проекцией плоскости. В примере на рис. 186 проецирующее положение занимает плоскость β . Она содержит центр проецирования S_1 и ее первая проекция представляет собой прямую линию, с которой тождественно совпадает первая проекция линии пересечения.

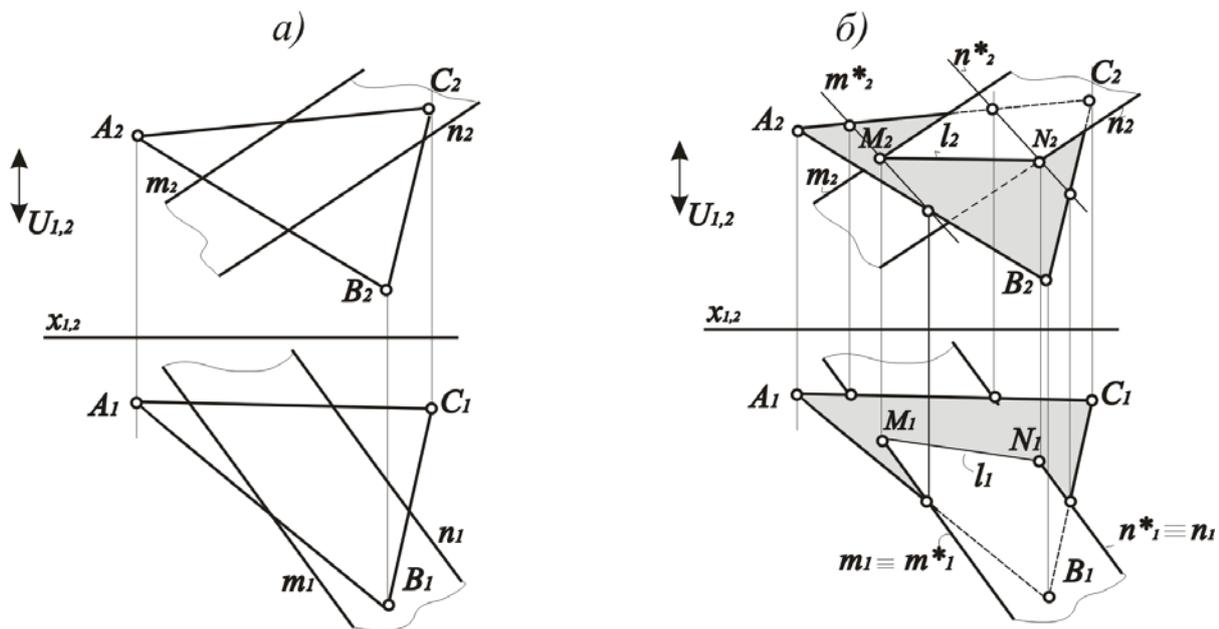


Рис. 185. Построение линии пересечения двух плоскостей общего положения

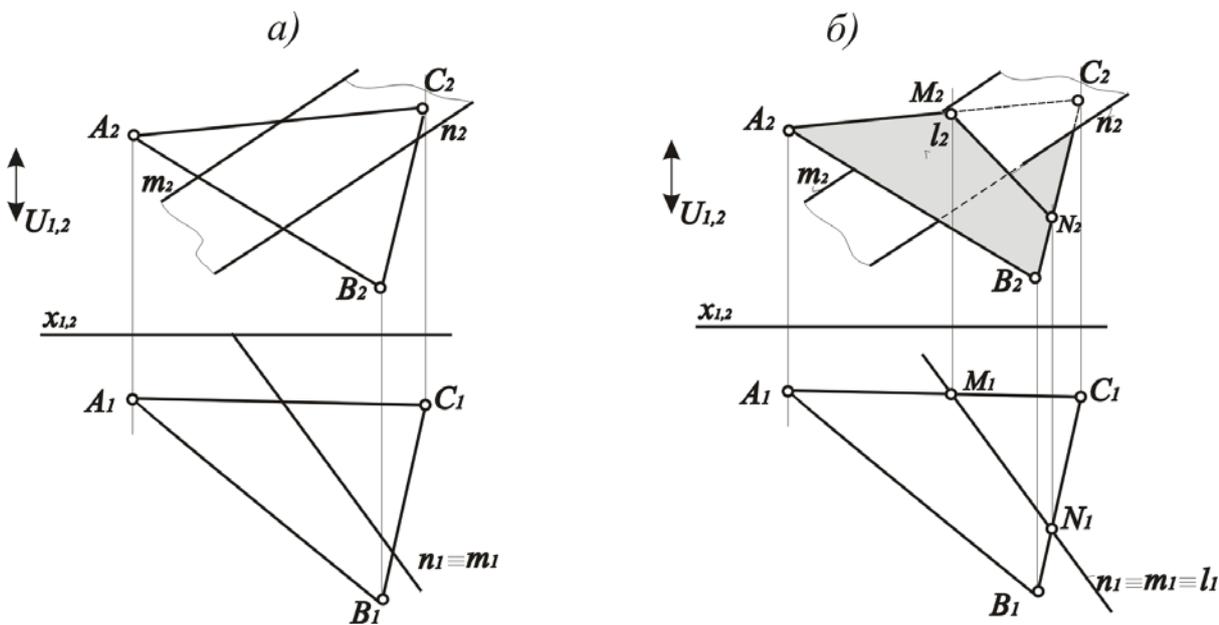


Рис. 186. Построение линии пересечения двух плоскостей, одна из которых занимает проецирующее положение

В случае, когда обе плоскости содержат один и тот же центр проецирования, то через тот же центр пройдет и линия пересечения. На рис. 187 плоскости α и β обе содержат центр S_1 , через него пройдет и линия пересечения плоскостей l .

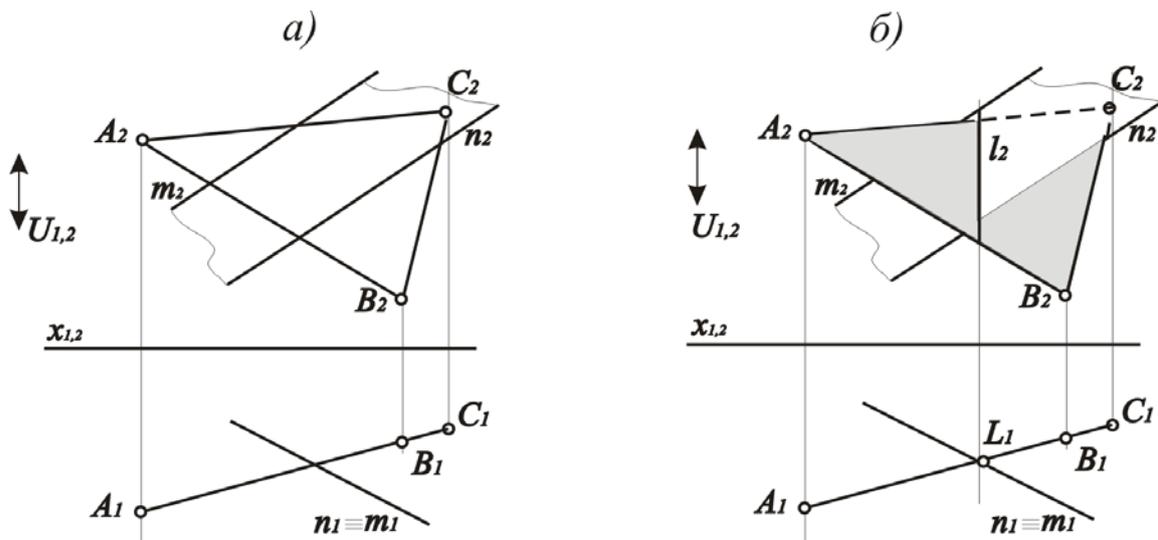


Рис. 187. Построение линии пересечения двух проецирующих плоскостей

4.4. Пересечение поверхностей

Самыми сложными в группе позиционных задач оказываются задачи на пересечение поверхностей. Их сложность обуславливается тем, что приходится многократно решать более простые позиционные задачи, которые необходимо выделить, четко сформулировать, а затем уже решать.

Небольшая по объему теоретическая часть этого раздела дает необходимые, но достаточные сведения по построению линии пересечения поверхностей. Владение искусством построения этих линий постигается на практике. Причем каждый раз может возникать какая-то своя нестандартная ситуация. Поэтому так важно наличие не только хороших знаний всего предыдущего теоретического материала, но и прочных навыков в решении задач, рассмотренных выше.

Результатом взаимного расположения двух поверхностей является некоторая линия, точки которой принадлежат одновременно обеим поверхностям. На плоской модели линию пересечения приходится строить по точкам. Чтобы правильно их соединить, нужно заранее знать, как она выглядит.

Для предварительного определения вида общей линии поверхностей разделим последние на два класса:

- многогранные поверхности,
- кривые поверхности второго порядка.

В результате пересечения этих поверхностей возникают следующие линии:

1. Если пересекаются два многогранника, то их общая линия представляет собой пространственную ломаную, которая состоит из прямых отрезков. Точки излома принадлежат ребрам многогранников.

2. При пересечении многогранника и кривой поверхности второго порядка возникает пространственная ломаная линия, которая состоит из дуг кривых второго порядка. Точки излома принадлежат ребрам многогранника.

3. Две кривые поверхности второго порядка в качестве общей линии имеют кривую четвертого порядка, которая может распадаться на две плоские кривые второго порядка.

Рассмотрим примеры пересечения двух многогранников (рис. 188). Пересечение двух плоских граней дает отрезок прямой, из совокупности этих отрезков образуются пространственные линии. Поскольку с учетом требований практики рассматриваются замкнутые поверхности, то эти совокупности представляют собой замкнутые линии. Количество замкнутых ломаных линий обычно не превышает двух. Начинать решение задачи рекомендуется с определения ребер, участвующих в пересечении.

В примере на рис. 189 пересекаются призма и пирамида. Каждая поверхность занимает общее положение. Отрезки AM , MC и BN , ND образуют общую линию этих поверхностей.

В точках A , B , C и D пересекаются стороны оснований, которые лежат в одной плоскости. Точки M и N определены в результате пересечения ребра l призмы с пирамидой.

Если одна из поверхностей занимает проецирующее положение, то одна из проекций линии пересечения тождественно совпадает с вырожденной проекцией поверхности. В задаче на рис. 189 вершина призмы содержит центр проецирования S_1 . Ее первая проекция вырождается в линию, с которой совпадает первая проекция их общей линии. Для построения второй проекции достаточно провести линии связи. На соответствующих ребрах возникнут вторые проекции точек, принадлежащих линии пересечения.

Если пересекаются многогранник и кривая поверхность второго порядка, то, как сказано выше, ломаную линию пересечения образуют дуги кривых второго порядка. В частности, на линии пересечения могут возникать отдельные прямые участки, а также замкнутые плоские кривые второго порядка.

Все эти линии являются сечениями кривой поверхности плоскими гранями многогранника. В примере на рис. 190 построена линия пересечения проецирующей призмы с цилиндром. Она представляет собой замкнутую ломаную линию. Точки излома A , B , C и D принадлежат соответствующим ребрам призмы. Для их определения четыре раза решалась задача по пересечению прямой с поверхностью.

Через проецирующие ребра призмы a , b , c и d проведены секущие плоскости $\alpha \supset c$, d и $\beta \supset a$, b , которые совпадают с гранями призмы. Они пересекают цилиндр по образующим k и l , которые, в свою очередь, пересекаясь с ребрами, дают упомянутые выше точки A , B , C и D . Чтобы определить характер кривых линий, по которым грани призмы пересекают цилиндр, придется несколько раз решать задачу на пересечение прямой с поверхностью. Например, пересечение образующей f с поверхностью призмы дает точки E и I .

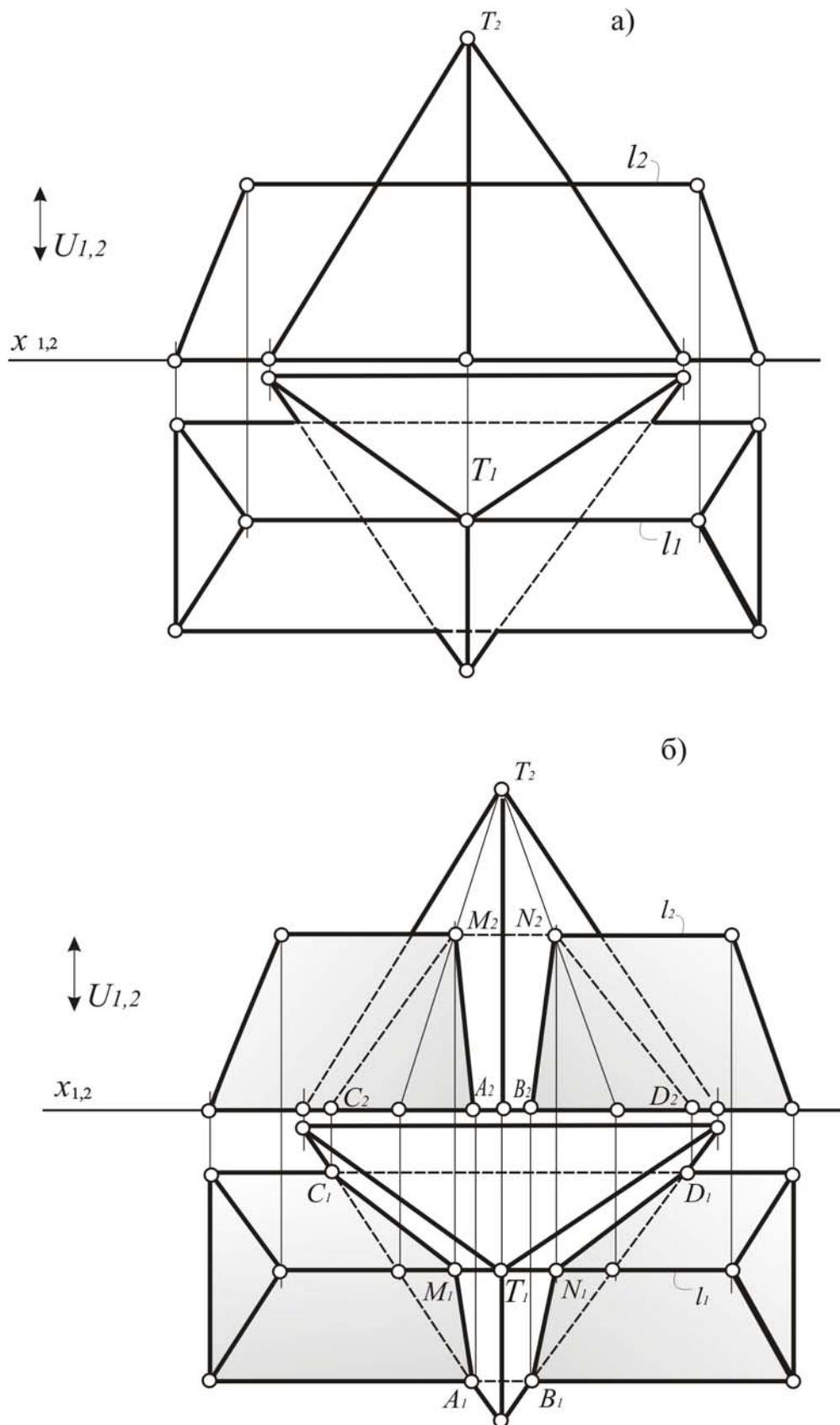


Рис. 188. Пересечение многогранников общего положения (эпюр Монжа)

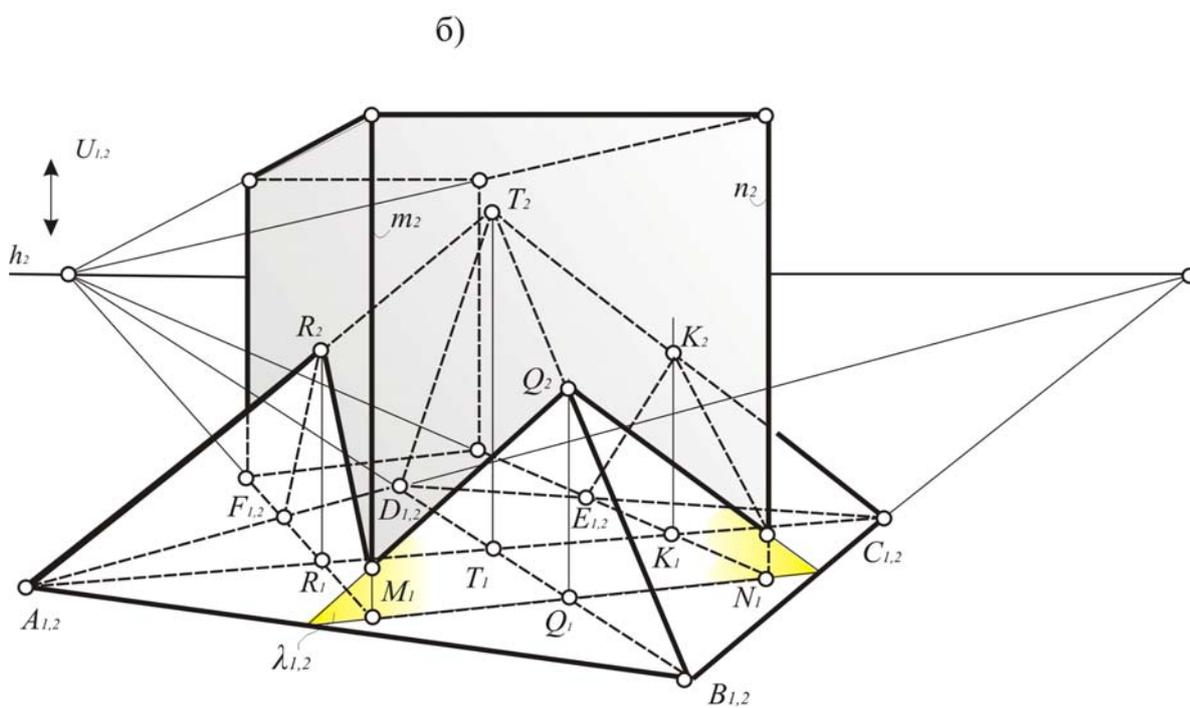
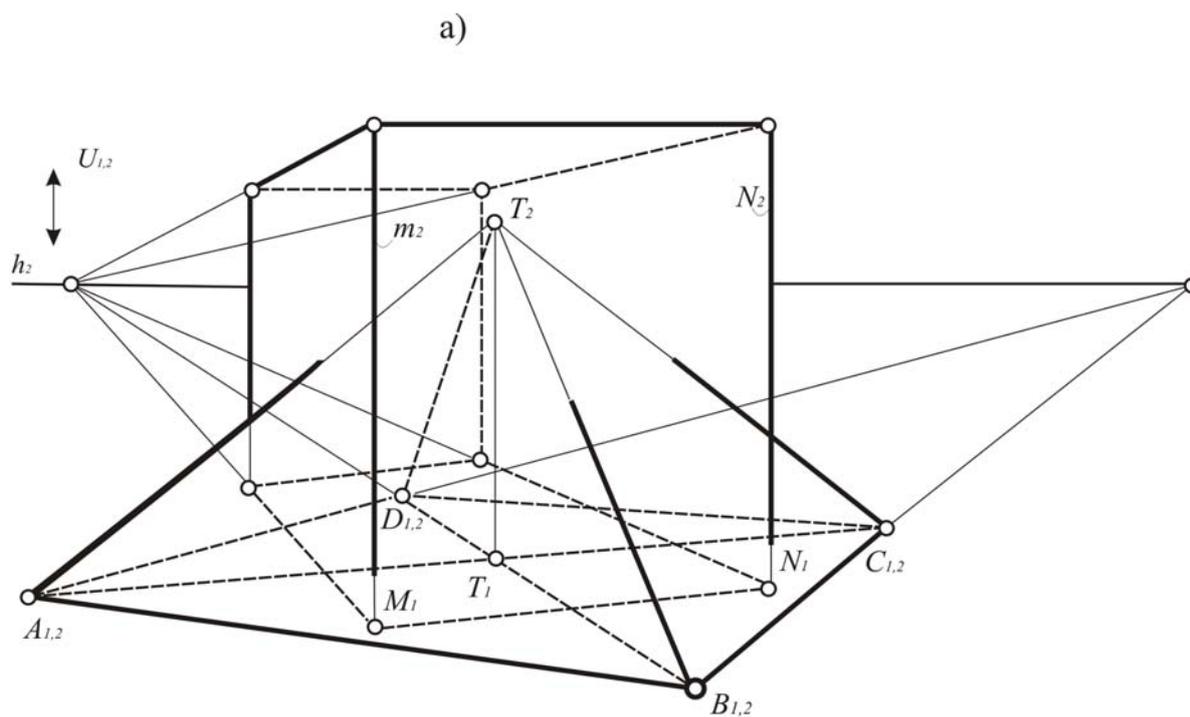


Рис. 189. Пересечение многогранника общего положения с проецирующим многогранником (перспектива)

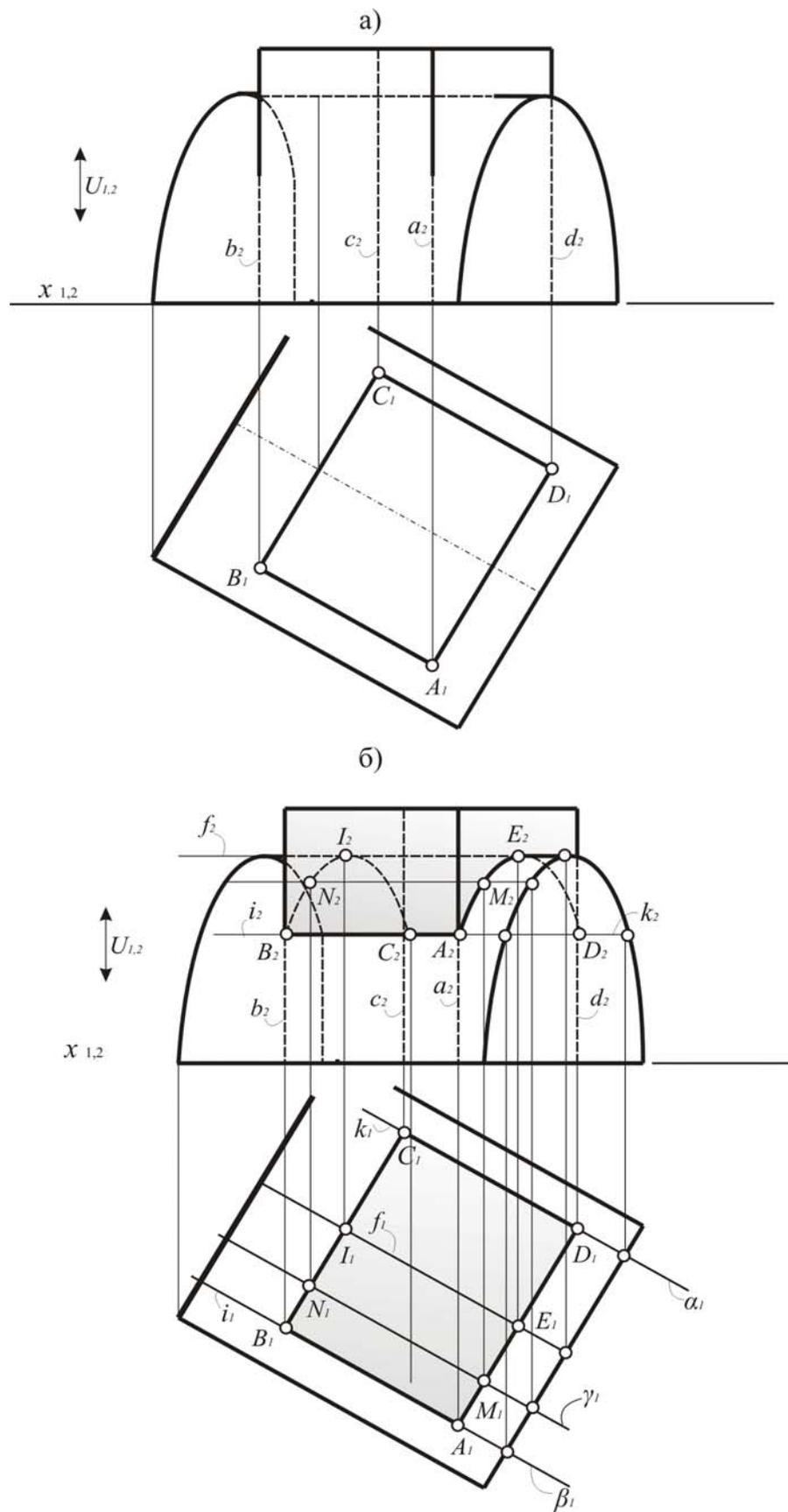


Рис. 190. Пересечение проецирующей призмы с цилиндром (эпюр Монжа)

Следует заметить, что множество вспомогательных секущих плоскостей образуют в данном случае пучок. Ось этого пучка – прямая i проходит через вершины поверхностей T и R . Еще одна плоскость γ в этом пучке позволила получить промежуточные точки M и N , которые также помогают выявить характер криволинейных участков линии пересечения.

При пересечении двух кривых поверхностей второго порядка в общем случае возникает кривая четвертого порядка. В частных случаях она может распадаться в различных сочетаниях на кривые третьего, второго порядка и прямые.

На рис. 191 приведен пример построения линии пересечения двух цилиндров. Все общие точки поверхностей найдены в результате пересечения образующих одного цилиндра с поверхностью другого. Характерными являются точки A , A^* , B и C , которые расположены на очерковых образующих. Вспомогательные секущие плоскости, β , γ , δ , проходящие через эти образующие, целесообразно провести так, чтобы они пересекали и другой цилиндр также по образующим. В результате секущие плоскости образуют пучок с осью i , которая проходит через вершины цилиндров S_1 и T . Плоскости этого пучка позволяют найти еще ряд точек, конкретизирующих характер линии пересечения ($K \subset k$, $R \subset r$). Плоскости α и ε касаются цилиндра с вершиной S_1 по образующим d и f , которые, пересекаясь с другим цилиндром, дают точки D и F .

На рис. 192 цилиндр и конус имеют основания, лежащие в одной плоскости. Общие точки этих оснований A и B принадлежат линии пересечения заданных поверхностей. Эта линия представляет кривую четвертого порядка. Чтобы построить такую кривую, будем многократно решать задачу на пересечение двух прямых. Это прямолинейные образующие цилиндра и конуса. Каждую пару образующих получим, пересекая обе поверхности плоскостью, которая проходит одновременно через обе вершины поверхностей. В результате возникнет пучок секущих плоскостей с осью $i = T \cup S_1$. Пересечем i с плоскостью, которая содержит общее основание поверхностей, и получим точку M .

Построение линии пересечения начнем с опорных точек C и D , которые принадлежат очеркам поверхностей. Для этого в выделенном пучке плоскостей выберем плоскости, которые содержат указанные очерки (плоскости α и β). Точка D также является самой левой точкой линии пересечения. Самую ближнюю точку K получим, используя плоскость ζ . Плоскость γ позволяет определить одну из случайных точек.

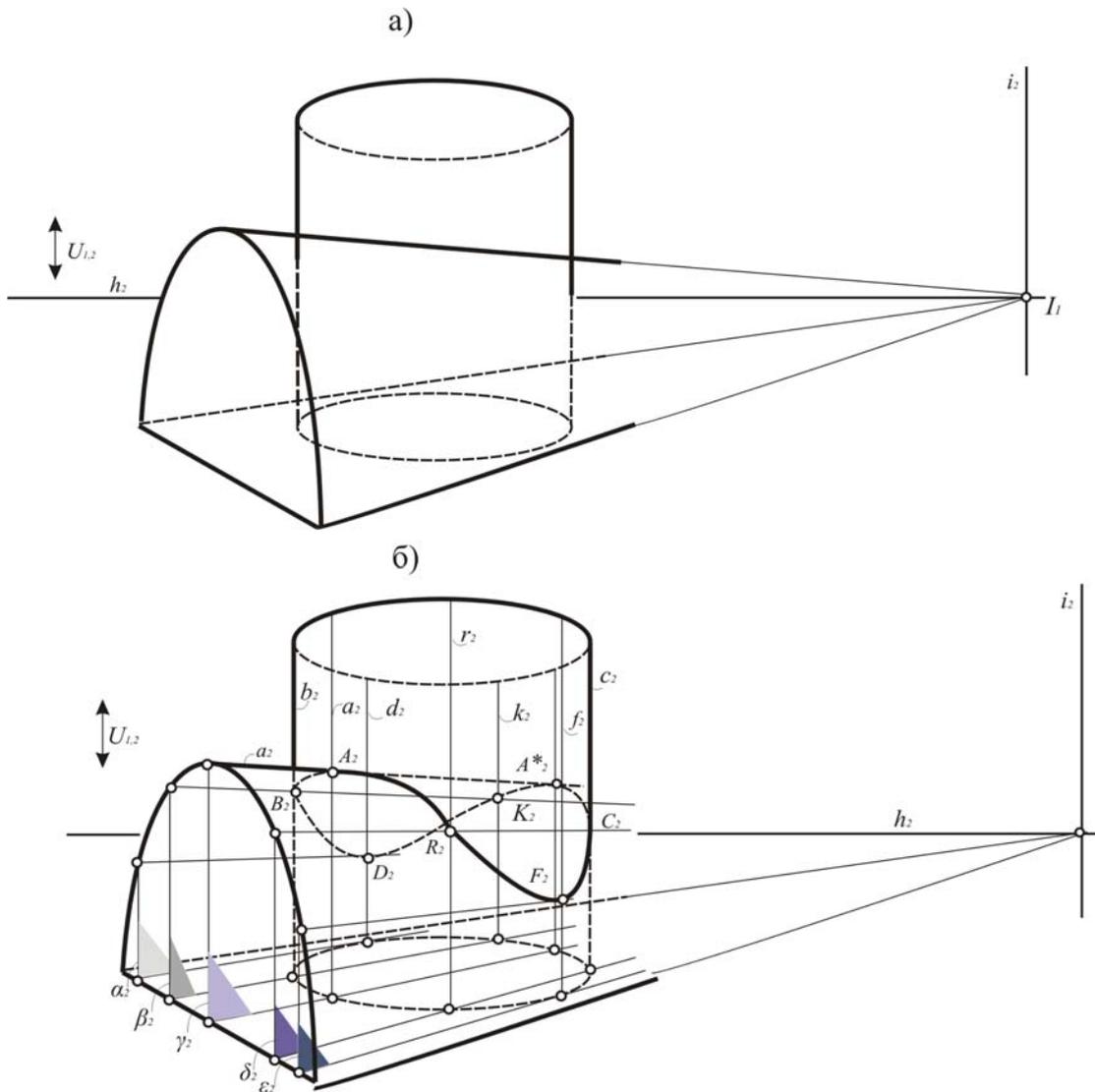


Рис. 191. Пересечение двух цилиндров (перспектива)

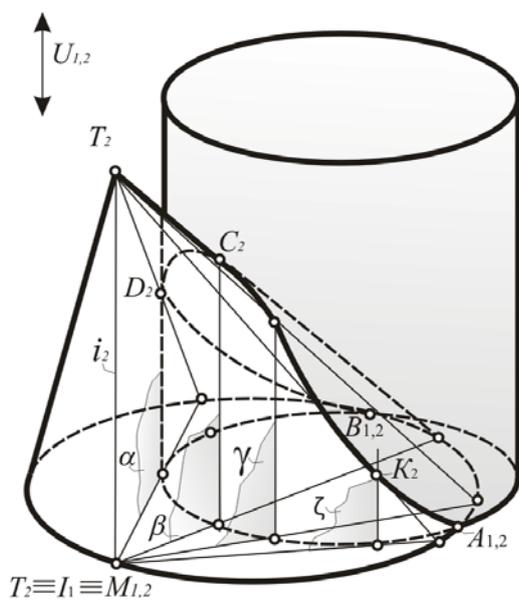


Рис.192. Пересечение проецирующего цилиндра с конусом

Идея одновременного сечения поверхностей вспомогательными плоскостями широко используется для построения линии пересечения как линейчатых поверхностей, так и нелинейчатых. Основным критерием выбора секущих плоскостей является одновременное сечение поверхностей по графически простым линиям. Например, линия пересечения двух эллипсоидов построена по точкам, которые найдены в результате сечения обеих поверхностей по окружностям (рис. 193). Эти окружности получены при одновременном сечении каждой поверхности пучком параллельных плоскостей. Одна из таких плоскостей показана на рис. 193. На рис. 194 показано решение этой задачи на эюре Монжа. Здесь кроме плоскости α используется еще плоскость β .

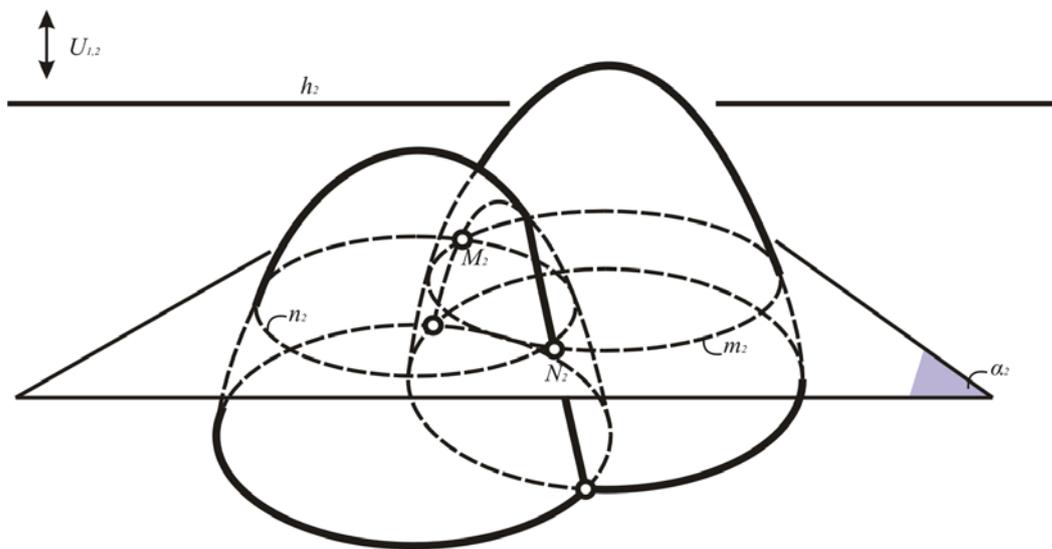


Рис. 193. Плоскость α одновременно рассекает оба эллипсоида по графически простым линиям

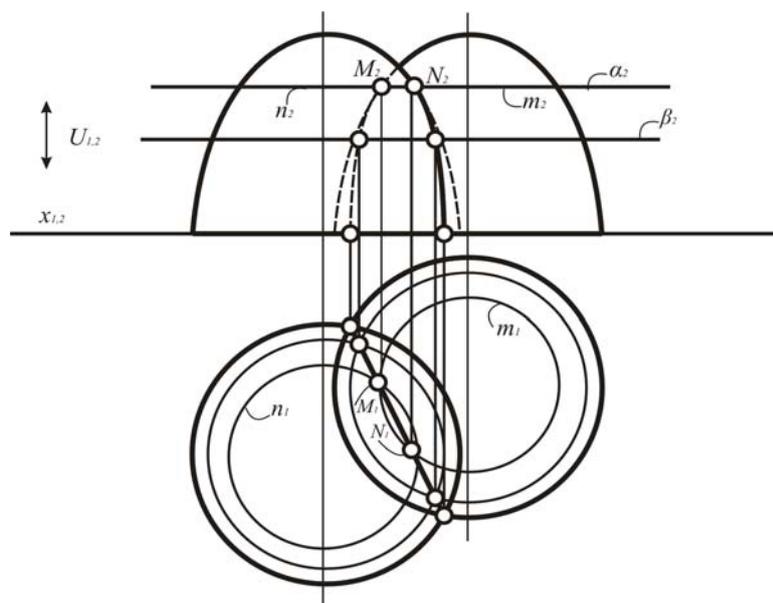


Рис. 194. Пересечение двух эллипсоидов

Контрольные вопросы

1. Какие задачи называются позиционными?
2. Перечислить и дать характеристику основным группам позиционных задач.
3. Перечислить операции алгоритма, который позволяет определить точку пересечения прямой с плоскостью.
4. Как видоизменяется этот алгоритм в случае, когда прямая или плоскость занимает проецирующее положение?
5. Перечислить операции алгоритма, который позволяет определить точку пересечения прямой с поверхностью.
6. Как видоизменяется этот алгоритм в случае, когда прямая или поверхность занимает проецирующее положение?
7. Как определяются точки, принадлежащие линии пересечения двух плоскостей?
8. Если одна из заданных плоскостей занимает проецирующее положение, то как это отражается на решении задачи?
9. Как изображается линия пересечения плоскостей в случае, когда обе эти плоскости проходят через один и тот же центр проецирования?
10. Что представляет собой линия пересечения двух многогранников?
11. Как выглядит линия пересечения многогранника и кривой поверхности второго порядка?
12. По какой линии пересекаются две кривые поверхности второго порядка?
13. Как распадается общая линия двух кривых поверхностей второго порядка?
14. Какие существуют критерии в выборе положения вспомогательных секущих плоскостей, которые упрощают решение задачи?
15. Перечислить условия, благодаря которым упрощается построение линии пересечения поверхностей.

5. ПОСТРОЕНИЕ АКСОНОМЕТРИИ ПО ЭПЮРУ МОНЖА

5.1. Общие положения

Слово «аксонометрия» – греческое, состоит из двух слов: «*ахон*» – ось, «*метрео*» – измеряю, в переводе означает «*измерение по осям*». Аксонометрическое изображение должно отвечать двум основным требованиям:

- 1) быть *наглядным*, то есть таким, каким воспринимает объект глаз человека (или близким к этому);
- 2) сохранить всю геометрическую информацию об исходном объекте, чтобы по нему можно было изготовить изображенный объект.

Эти свойства аксонометрии позволяют ее использовать в строительной практике при изображении различных объектов строительства или их деталей.

Поскольку основная геометрическая информация об объекте строительства доставляется через эпюр Монжа, который не обладает указанной наглядностью, то достаточно часто возникает необходимость осуществить переход от изображения объекта на эпюре Монжа к его аксонометрии. Для этого разработан специальный прием, основанный на использовании координатной системы. Прямоугольная система координат, которая состоит из трех пучков плоскостей, параллельных координатным плоскостям. Это позволяет поставить в соответствие каждой точке три конкретные координаты. Затем эта система координат моделируется в аксонометрических проекциях. Но тут необходимо иметь ответы на следующие вопросы:

1. Под каким углом изобразятся координатные оси в аксонометрии?
2. Как искажутся величины единичных отрезков координатных осей?

Поиск ответа на эти вопросы позволил выявить причины, которые влияют на взаимное положение изображений координатных осей и коэффициентов искажения единичных отрезков. Такими причинами оказались:

- 1) расположение системы координат по отношению к проекционному аппарату аксонометрии;
- 2) угол наклона картины π_2 к картине π_1 ;
- 3) направление, в который удален центр проецирования S_2 по отношению к картине π_2 .

Обобщая полученные результаты, немецкий геометр К. Польке (K. Pohlke) в 1860 впервые была сформулирована (без доказательства) основная теорема аксонометрии: *три произвольных отрезка, выходящих из одной точки на плоскости проекций, можно принять за изображение координатного трёхосника с одинаковыми масштабными отрезками на его осях*. Элементарное доказательство этой теоремы было дано другим немецким математиком Г. Шварцем в 1864 году. С тех пор эта теорема называется теоремой Польке — Шварца формулируется так: *всякий невырож-*

дающийся полный четырёхугольник можно рассматривать как параллельную проекцию тетраэдра наперёд заданной формы. Следовательно, аксонометрий существует бесконечное множество. На практике же используются ограниченным числом аксонометрий, которое зафиксирована ГОСТ 2.317-69.

Практика использования аксонометрических проекций выделила следующие основания для классификации:

1) направление проецирования координатной системы из центра S_2 на картину π_2 . Если проецирование из центра S_2 на картину π_2 происходит под углом 90° , то аксонометрия называется прямоугольной (ортогональной), если же этот угол не равен 90° , то аксонометрия называется косоугольной;

2) положение координатной системы по отношению к проекционному аппарату. Одна из координатных плоскостей может располагаться параллельно картине π_2 (фронтальная аксонометрия) или параллельно картине π_1 (горизонтальная аксонометрия). При этом направление, в котором удален центр S_2 , должно быть таким, что после перепроецирования с картины π_1 на картину π_2 , величина проекции не изменилась. Схема этой классификации представлена на рис.195;

3) соотношения коэффициентов искажения по координатным осям. Если коэффициенты искажения по всем осям равны друг другу, получаем изометрию. При равенстве двух коэффициентов искажения возникает диметрия. Триметрия образуется, когда коэффициенты искажения по всем осям неравны (рис. 196).

Из схемы на рис. 195 видно, что горизонтальной и фронтальной может быть только косоугольная аксонометрия. Это происходит потому, что при прямоугольном проецировании ось z , будет содержать центр проецирования S_1 и ее первая проекция будет вырождаться в точку. Для работы такая аксонометрия окажется не

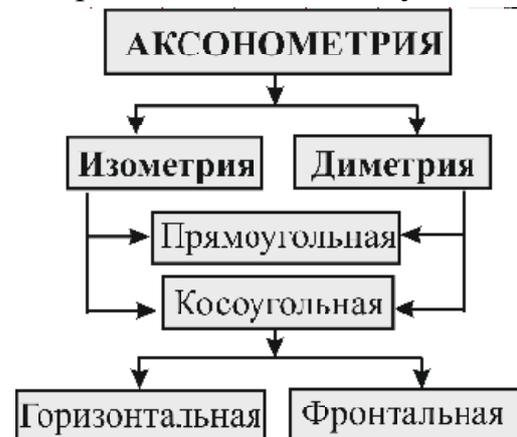


Рис. 195. Схема классификации изометрий по положению координатных осей по отношению к проекционному аппарату



Рис. 196. Схема классификации изометрий по коэффициентам искажения

пригодной. На рис. 196 символами u , v , w помечены соответственно коэффициенты искажения по осям x , y , z .

На изображения, выполняемых в аксонометрических проекциях, существует ГОСТ 2.317-69, который предусматривает следующие виды аксонометрии: прямоугольная изометрия, прямоугольная диметрия, косоугольная фронтальная изометрия, косоугольная фронтальная диметрия, косоугольная горизонтальная изометрия. Отсутствует косоугольная горизонтальная диметрия. Причина такого отсутствия состоит в том, что по ГОСТ 2.317-69 все диметрические проекции имеют коэффициент искажения по оси y : $v = 0,5$. Но если использовать косоугольную горизонтальную диметрию, то все, что принадлежит координатной плоскости xu должно изображаться без искажения. Следовательно, коэффициенты искажения по осям x и u должны быть равны, а отличаться должен только коэффициент по оси z . ГОСТ 2.317-69 такое соотношение коэффициентов искажения не предусматривает. Поэтому косоугольная горизонтальная диметрия обычно не рассматривается.

5.2. Изображение координатной системы в стандартных аксонометриях

Прямоугольная (ортогональная) изометрия. В прямоугольной изометрической проекции аксонометрические оси образуют между собой углы в 120° , ось z направлена вертикально. Коэффициенты искажения по всем осям имеют числовое значение 0,82. Как правило, для упрощения построений изометрической проекции коэффициент искажения принимают равным по всем осям единице. В результате изометрическое изображение увеличивается в 1,22 раза (рис. 197).

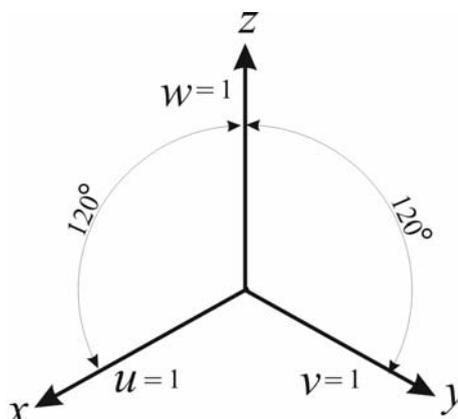


Рис. 197. Расположение осей и коэффициенты искажения в прямоугольной изометрии

Косоугольная фронтальная изометрия. Ось z направлена вертикально, угол между осью x и z равен 90° , ось y с углом наклона к горизонтальной прямой 45° , или 30° , или 60° (рис. 198, а, б, в). Коэффициенты по искажения осям x , y и z равны единице. Плоские фигуры, параллельные картине π_2 , проецируются без искажений.

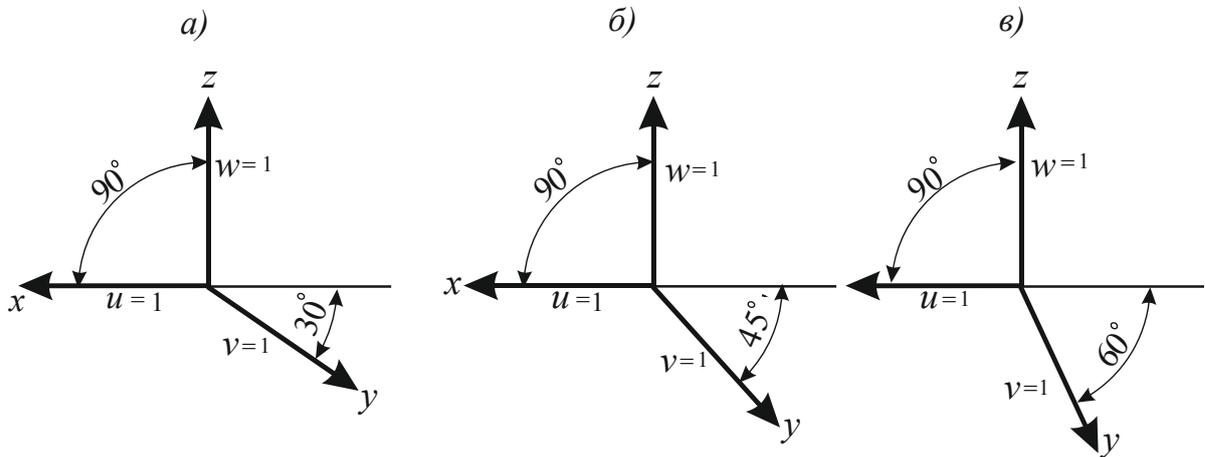


Рис. 198. Расположение осей и коэффициенты искажения в косоугольной фронтальной изометрии

Косоугольная горизонтальная изометрия. Ось z направлена вертикально, угол между осью x и y равен 90° . Ось y с углом наклона к горизонтальной прямой 45° , или 30° , или 60° (рис.199, а, б, в). Коэффициенты по искажения осям x , y и z равны единице. Плоские фигуры, параллельные картине π_1 , проецируются без искажений.

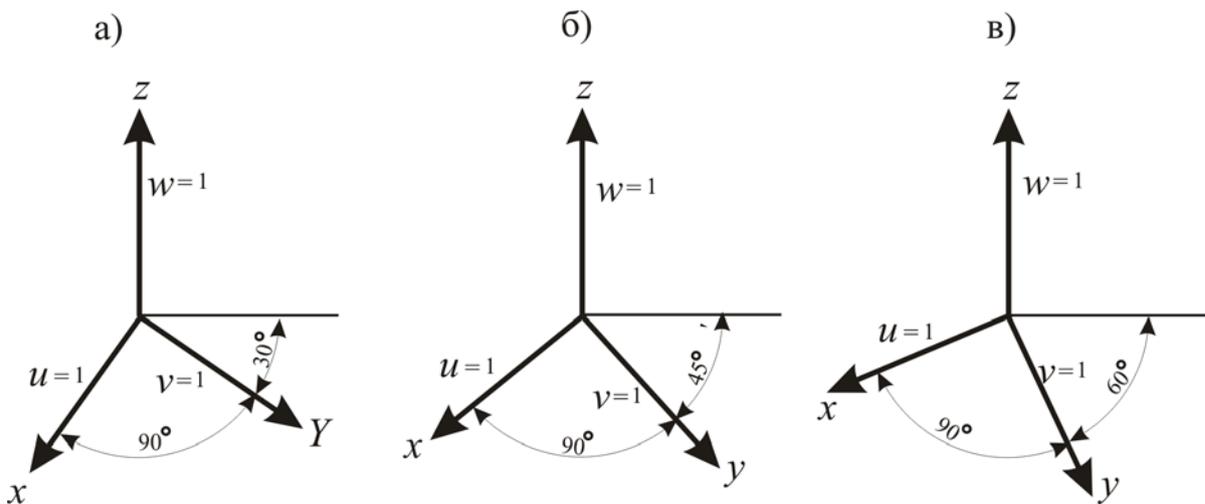


Рис. 199. Расположение осей и коэффициенты искажения в косоугольной горизонтальной изометрии

Прямоугольная диметрия, характерна тем, что ось z направлена вертикально. Угол между осью x и горизонтальной прямой составляет $7^{\circ}10'$. Ось y и горизонтальная прямая составляют угол $41^{\circ}25'$ (рис. 200). Коэффициенты искажения осей x и z равны 0,94 по оси y – 0,47. Как правило, коэффициенты искажения по оси y округляют до 0,5, по осям x и z — до 1.

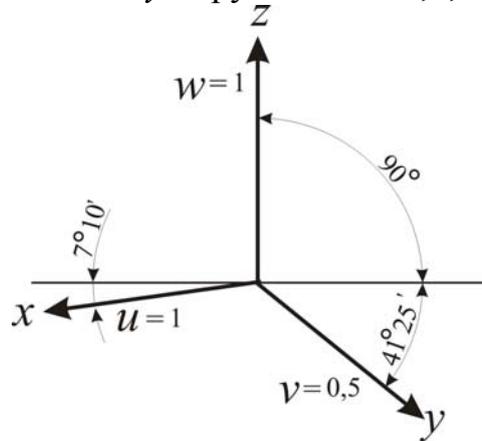


Рис. 200. Расположение осей и коэффициенты искажения в прямоугольной диметрии

Косоугольная фронтальная диметрия. Положение аксонометрических осей приведено на рис. 201. Угол наклона оси y к горизонтальной линии равен 45° . Между осями x и z – 90° . Коэффициент искажения по оси y равен 0,5, по осям x и z – 1.

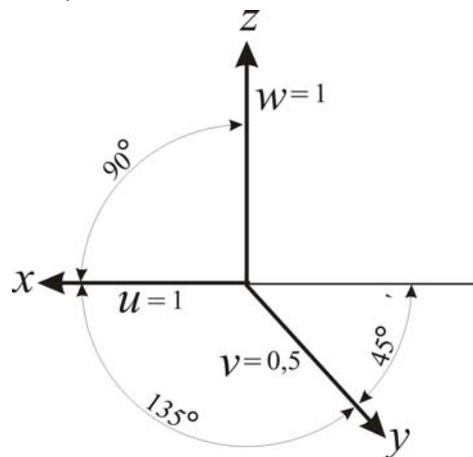


Рис. 201. Расположение осей и коэффициенты искажения в косоугольной фронтальной диметрии

5.3. Изображение окружности в стандартных аксонометриях

Прямоугольная изометрия. Окружности, лежащие в координатных плоскостях, или плоскостях параллельных им плоскостям проекций, изображаются равными эллипсами. Большие оси эллипсов равны 1,22, а малые 0,71 диаметра исходной окружности (рис. 202). Малые оси этих эллипсов параллельны отсутствующим координатным осям. Если эллипс принадле-

жит плоскости $x y$, малая ось параллельна оси z . Когда эллипс располагается в плоскости $z y$, малая ось параллельна оси x . Если же эллипс принадлежит плоскости $z x$, малая ось параллельна оси y .

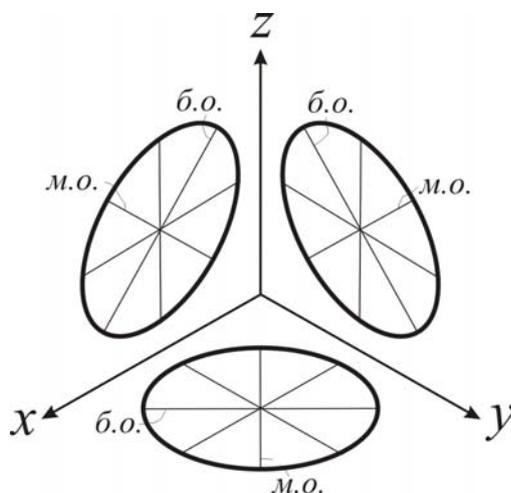


Рис. 202. Изображение окружности в прямоугольной изометрии

Косоугольная фронтальная изометрия. Окружности, лежащие в плоскостях, параллельных картине π_2 (координатная плоскость $x z$), проецируются без искажения. Окружности, лежащие в плоскостях, параллельных двум другим координатным плоскостям – в эллипсы (203). Их малые оси оказываются биссектрисами тупых углов между координатными осями $x y$ и yz . Большие оси ориентированы к каждой паре осей (x, y и y, z) под углами $22^\circ 30'$. Коэффициент искажения малой оси равен 0,54 диаметра исходной окружности. Величина большой оси этих эллипсов равен 1,3 диаметра исходной окружности.

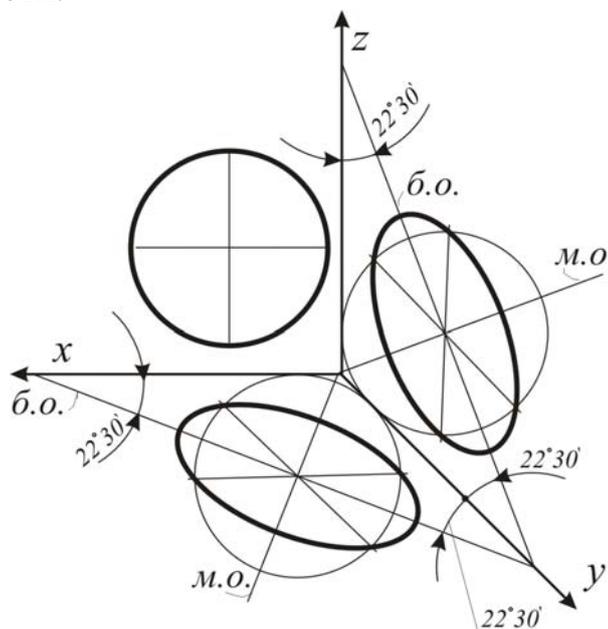


Рис. 203. Изображение окружности в косоугольной фронтальной изометрии

Косоугольная горизонтальная изометрия. Окружности, лежащие в плоскостях, параллельных картине π_1 (координатная плоскость xu), процируются без искажения. Окружности, лежащие в плоскостях, параллельных двум другим координатным плоскостям – в эллипсы (204). Их малые оси оказываются биссектрисами тупых углов между координатными осями xz и yz , которые образуют соответственно углы 150° и 120° . Большие оси ориентированы к каждой паре осей (x, z и y, z) соответственно под углами 15° и 30° . Коэффициент искажения малой оси эллипса, который изображает окружность координатной плоскости xz равен $0,37$ диаметра исходной окружности. Коэффициент искажения большой оси этого эллипса равен $1,37$. Если эллипс изображает окружность в координатной плоскости yz , то его малая ось искажает коэффициент $0,71$, а большую – $1,22$.

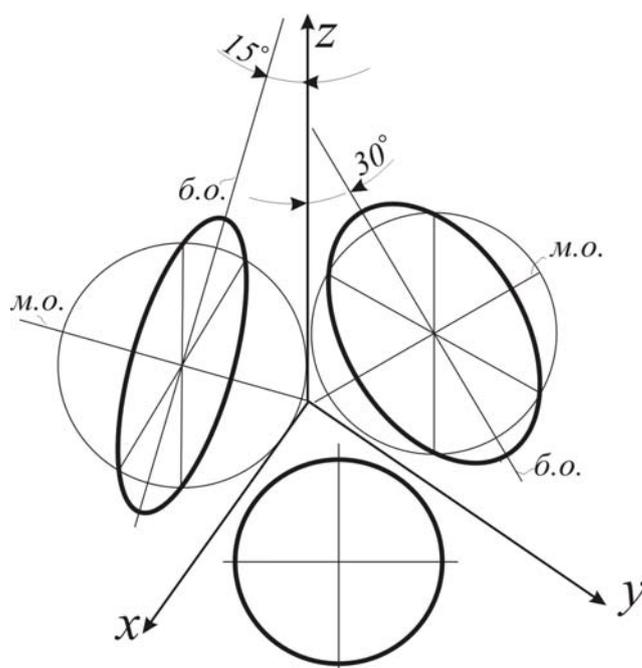


Рис. 204. Изображение окружности в косоугольной горизонтальной изометрии

Прямоугольная диметрия. Окружности, лежащие в координатных плоскостях, или плоскостях параллельных им изображаются эллипсами. Малые оси этих эллипсов параллельны отсутствующим координатным осям. Окружности, лежащие в координатных плоскостях xu , и yz изображаются эллипсами, одинаковой величины. Величина малой оси $0,35$ диаметра исходной окружности, большая ось – $1,06$ диаметра этой окружности. Такую же величину имеет большая ось третьего эллипса, который располагается в координатной плоскости xz . Но малая ось этого эллипса равна $0,95$ диаметра окружности (рис. 205).

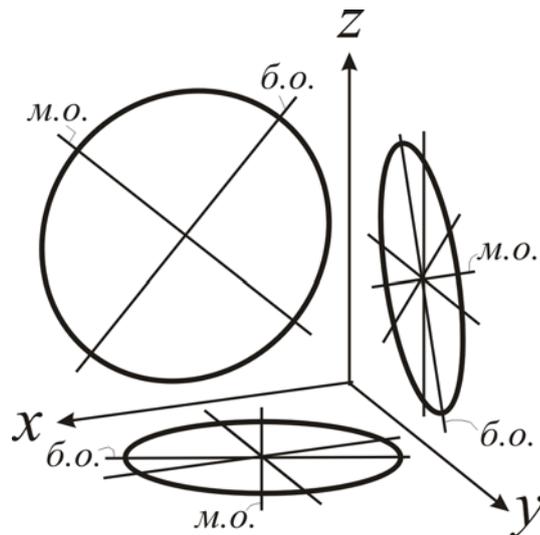


Рис. 205. Изображение окружностей в прямоугольной диметрии

Косоугольная фронтальная диметрия. Окружности, лежащие в координатной плоскости xz или плоскостях параллельных им, изображаются без искажения. Окружности, лежащие в координатных плоскостях $xу$ и $zу$ или плоскостях параллельных им, изображаются эллипсами одинаковой величины. Малые оси этих эллипсов имеют коэффициент искажения 0,33, большие – 1,07. Большие оси этих эллипсов наклонены к оси $у$ под одинаковыми углами, величина которых составляет 38° (рис.206).

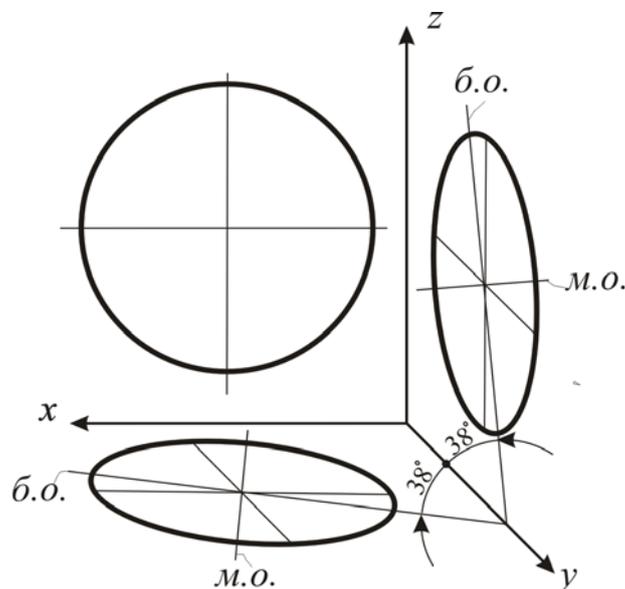


Рис. 206. Изображение окружностей в косоугольной фронтальной диметрии

5.4. Выбор аксонометрической проекции

Вид аксонометрической проекции определяется сложностью и особенностью *формы* изображаемого предмета, необходимостью обеспечить наилучшую наглядность и выразительность изображения, достаточную видимость всех элементов.

Нецелесообразно изображать в прямоугольной изометрии предметы, имеющие форму куба, правильной четырёхугольной призмы или пирамиды, так как некоторые их грани могут вырождаться в одну линию, что ухудшает восприятие изображения. Для изображения таких объектов целесообразно использовать диметрии (прямоугольную или косоугольную).

Прямоугольная диметрия позволяет получить наиболее удачные наглядные изображения предметов.

В тех случаях, когда необходимо сохранить натуральные размеры объектов, имеющих сложное криволинейное очертание (окружности, сопряжения, лекальные кривые и т.п.). Это могут быть детали различных механизмов, сложные архитектурные сооружения, застройки жилых кварталов, планировки площадей, комплекс промышленных сооружений и т.п. Их располагают в плоскостях, которые параллельны картинам π_1 или π_2 и изображают соответственно в горизонтальной или фронтальной аксонометрии.

Следует учитывать, что *при изображении деталей, имеющих поверхности тел вращения* (цилиндра, конуса, шара, тора), используют только *прямоугольные аксонометрические проекции*, в которых они наиболее наглядны.

Предмет всегда изображают в привычном положении. На изображении должно быть видно наибольшее число составных частей предмета, выявляющих его форму в целом. Отдельные части предмета не должны полностью загоразивать другие его части.

5.5. Способы построения аксонометрических проекций

В практике выработано несколько способов, в которых алгоритмизировано построение аксонометрических проекций объектов. В каждом конкретном случае выбирают наиболее целесообразный способ, учитывая форму предмета и количество геометрической информации, которую необходимо показать. К наиболее распространенным относят следующие:

1) сначала строят первую проекцию основания объекта, а затем путём «наращивания» элементов достраивают изображение всего объекта;

2) объект мысленно вписывают в поверхность какого-либо простого геометрического тела. Затем отсекают лишнее;

3) этот способ применяют, когда предмет образован сочетанием тел вращения. Строят изображения координатных осей в аксонометрии. На них намечают проекции центров окружностей, по которым одна поверх-

ность касается другой. Затем строят эллипсы – изображения этих окружностей. Далее проводят очерковые линии и обводят изображение объекта.

5) этот способ построения используют, когда выполняют вырез для выявления внутренней формы изделия. При этом сечения используют как основу для построения аксонометрии объекта. Вырез получают путём условного рассечения объекта двумя взаимно перпендикулярными плоскостями, параллельными координатным плоскостям, и условного удаления части объекта, расположенной между ними.

По своей сути все существующие способы заключаются в построении точки трехмерного пространства по координатам. Исходный объект вписывают в оптимальную пространственную сетку, образованную тремя пучками плоскостей. Каждый пучок параллелен одной из координатных плоскостей. Тройка координат выделяет в каждом пучке по одной плоскости. Они, пересекаясь друг с другом, определяют положение одной точки в исходном пространстве.

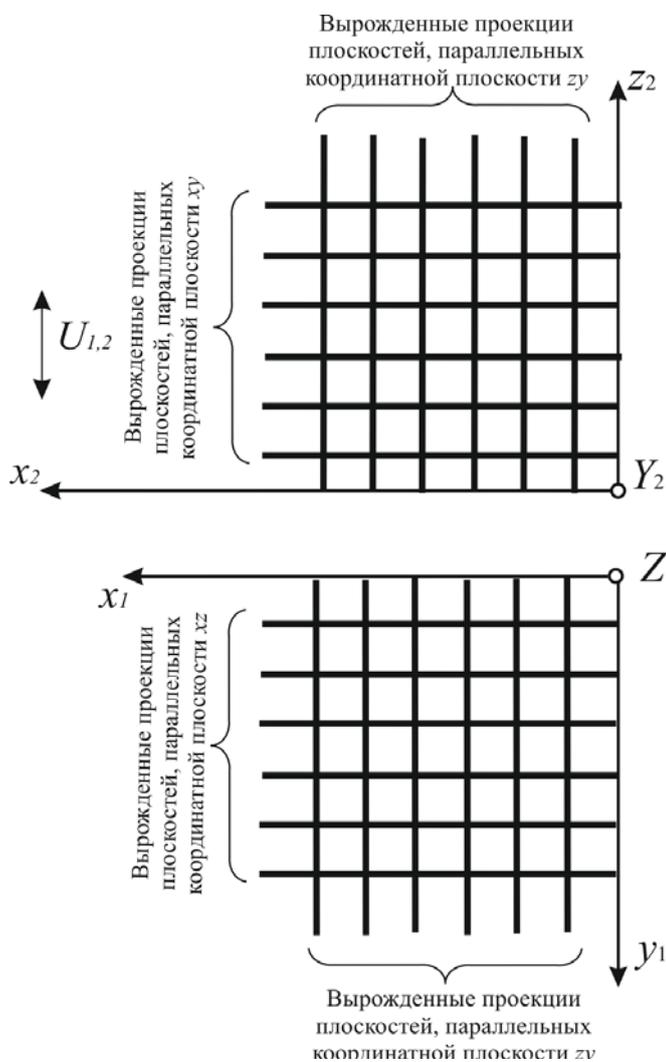


Рис. 207. Проекция трех пучков плоскостей, параллельных координатным плоскостям

Чтобы было удобно пользоваться изображениями этих плоскостей, оси координат располагают так, что две оси z и y занимают проецирующее положение, содержа соответственно центры проецирования S_1 и S_2 . Это приводит к тому, что все три координатные плоскости окажутся проецирующими. Такое же положение займут и плоскости упомянутых пучков. В результате на каждой картине плоскости двух пучков вырождаются в прямые линии. Эти линии, пересекаясь, фиксируют положение одной проекции точки. На картине π_1 в линии вырождаются плоскости пучков, которые параллельны координатным плоскостям xz и yz , на картине π_2 – координатным плоскостям xy и yz . На рис. 207 показаны вырожденные проекции упомянутых пучков плоскостей. Здесь они изображены произвольном порядке. Ниже будет показана координатная сетка, в которую вписывается изображение объектов.

5.5. Пример построения аксонометрии объектов по их изображению на эюре Монжа

Рассмотрим пример построения аксонометрии по изображениям объекта на эюре Монжа. В качестве примера возьмем пересекающиеся конус и призму (рис. 208). На этом изображении линия пересечения не построена. Она будет построена непосредственно на аксонометрическом изображении. Выбранные объекты позволяют использовать прямоугольную изометрию, как одну из самых простых в использовании.

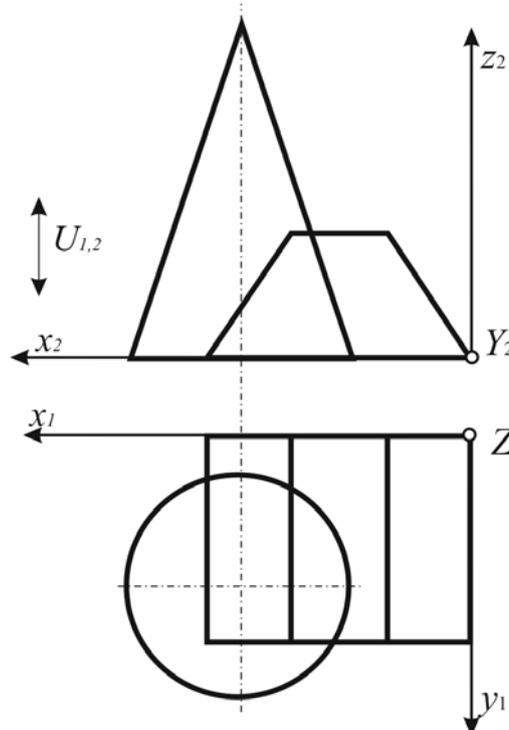


Рис. 208. Изображение на эюре Монжа конуса и призмы

Расположим координатную систему на эюре Монжа (рис. 209). Оси y и z занимают проецирующее положение. Ось x параллельна одновременно обеим картинам.

Проведем вырожденные проекции плоскостей, параллельны координатной плоскости xz через ближнюю и удаленную грани призмы, ось конуса и касательно его основания. Получим четыре плоскости, которые помечены цифрами 1–4 (рис. 209). Через проецирующие ребра призмы, ось конуса и касательно к основанию конуса справа проведем координатные плоскости, которые параллельны zy . На рис 209 они помечены числами 4–9. Вырожденные проекции плоскостей, параллельны координатной плоскости xu , проведем вершину конуса, верхнее и нижнее основания призмы. Получим три плоскости, помеченные числами 10–12. Таким образом, получим пространственную сетку, которая позволит построить аксонометрию исходных объектов. Получим на каждой из картин сетку взаимно перпендикулярных линий, в которые вписываются изображения объектов. Предложенное расположение плоскостей позволяет считать такую сетку оптимальной.

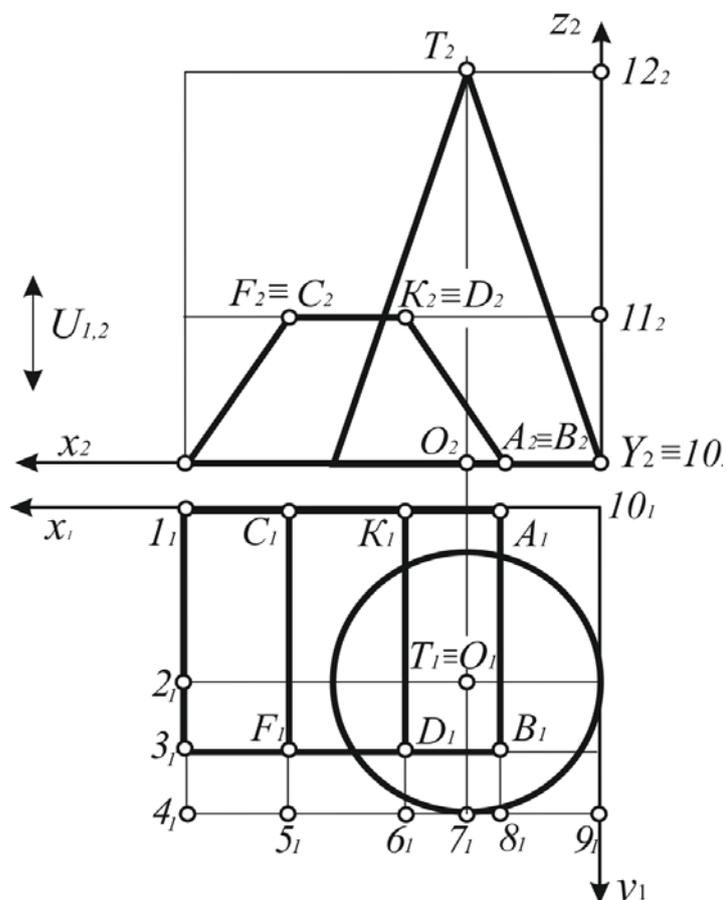


Рис. 209. Изображение на эюре Монжа координатной пространственной сетки

Построим изображение координатной системы в прямоугольной изометрии (рис. 210).

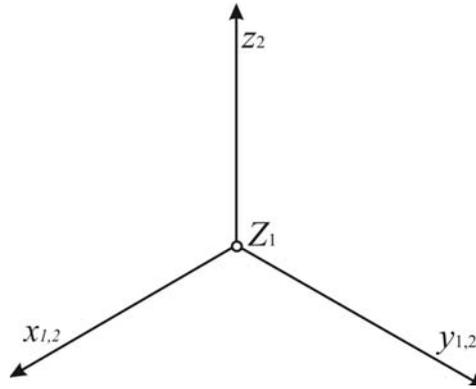


Рис. 210. Изображение координатной системы в прямоугольной изометрии

Нанесем изображения сетки, полученной на картине π_1 , в прямоугольной изометрии (рис.211). Для этого на оси x отложим отрезки, равные расстоянию от начала координат до точки 1 , а оси y – от начала координат до точки 9 . Через точки $1, 9$ проведем прямые, параллельные осям x и y . Получим параллелограмм, который изображает сетку на картине π_1 , построенную на эюре Монжа. На проекцию оси z , нанесем еще пометки $10, 11, 12$.

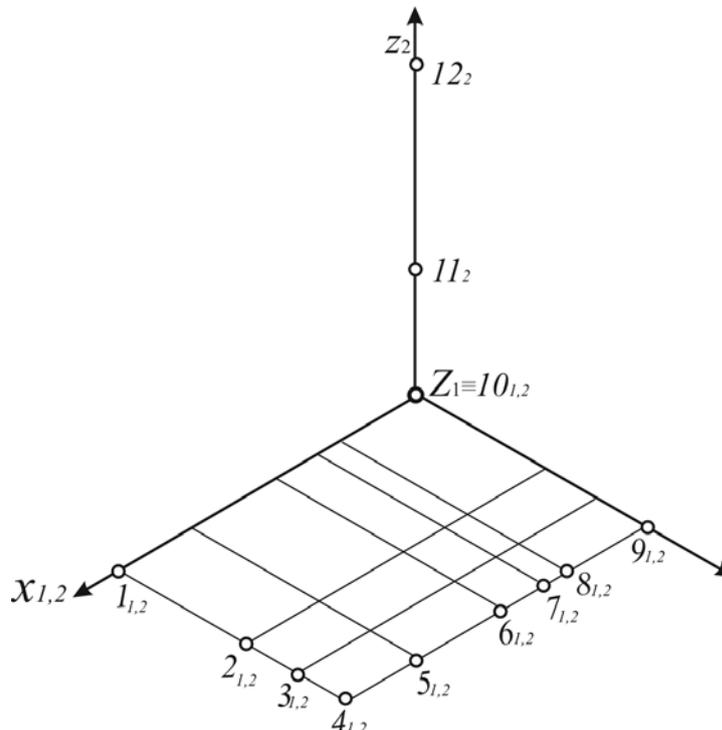


Рис. 211. Изображение в прямоугольной изометрии сетки, полученной на картине π_1 на эюре Монжа

Впишем в полученную сетку первую проекцию призмы, которая имеется на эюре Монжа (рис. 212). Это изображение играет роль основания этой призмы.

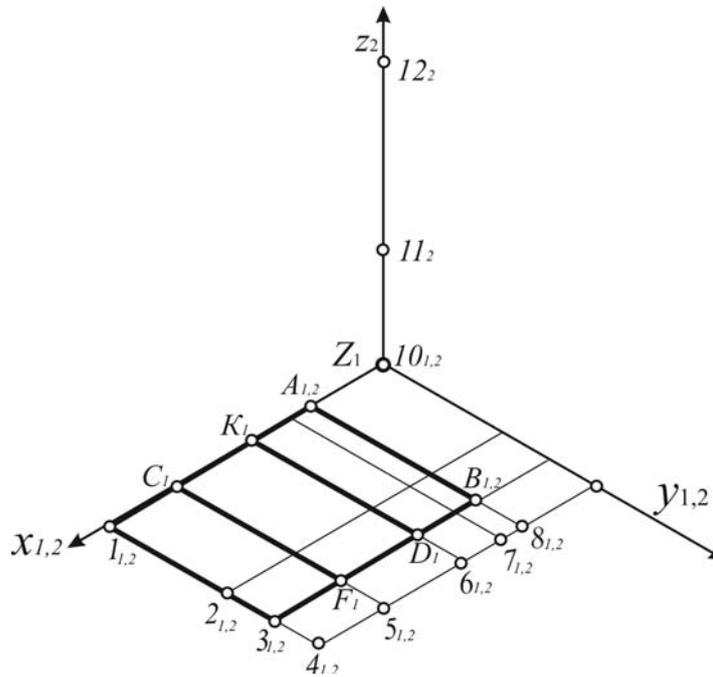


Рис. 212. Изображение в прямоугольной изометрии первой проекции призмы

Определим положение второй проекции одной из точек верхнего основания. В примере на рис. 213 это точка K . Ее координата по оси z соответствует положению плоскости 10 . Эта плоскость изображена ее линиями пересечения с координатной плоскостью xz . Она проходит через точку 11 и параллельна оси x . Ее пересечение с линией связи, идущей от точка K_1 , определяет положение точки K_2 .

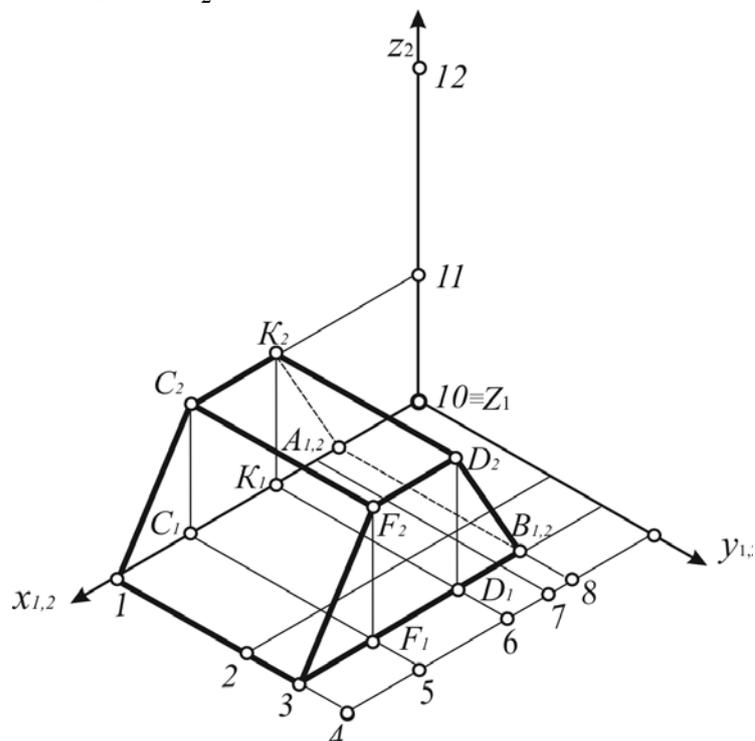


Рис. 213. Построение в прямоугольной изометрии второй проекции призмы

Определив положение точки K , построим остальные точки верхнего основания. Для этого необходимо воспользоваться правилом: *параллельность геометрических элементов в аксонометрии сохраняется*. Из первых проекций точек C, F, D проведем линии связи. Они пересекутся с прямыми, которые параллельны координатным осям x и y . Начинать нужно с точки K_2 .

Теперь рассмотрим построение конуса. Сначала определим положение центра окружности его основания. В данном примере это точка O (рис. 213). Она выделяется линиями пересечения плоскостей 2 и 7 с координатной плоскостью xu . Расстояние от O_1 до оси y соответствует величине радиуса. Отложим его от точки O_1 по прямым, параллельным осям x и y . Получим четыре точки, принадлежащие эллипсу, который изображает окружность основания конуса. Затем определим величину большой и малой осей этого эллипса и получим еще две точки. В полученные шесть точек впишем эллипс. Для этого можно воспользоваться любым способом, которые рассматривались в разделе «Линии» настоящего пособия.

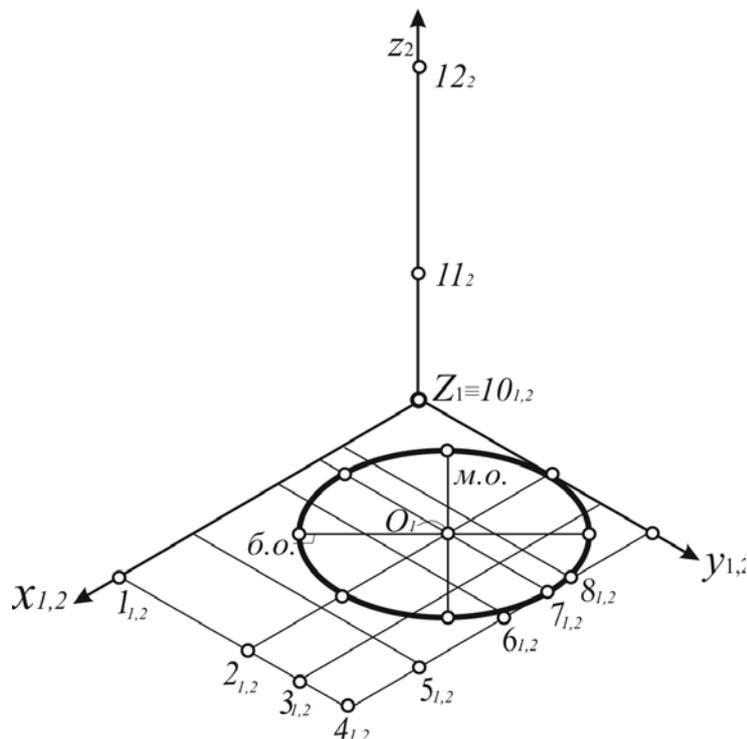


Рис. 214. Построение в прямоугольной изометрии первой проекции конуса

Определим положение второй проекции вершины конуса: точки T (рис. 215). Ее первая проекция совпадает с проекцией основания: точкой O . проведем через эту точку линию связи, которую пересечем с плоскостью 12, параллельной координатной плоскости xu . Она изображена линиями пересечения с координатной плоскостью zu и плоскостью 7. Получив точку T_2 , проведем через нее очерковые образующие конуса (рис. 216).

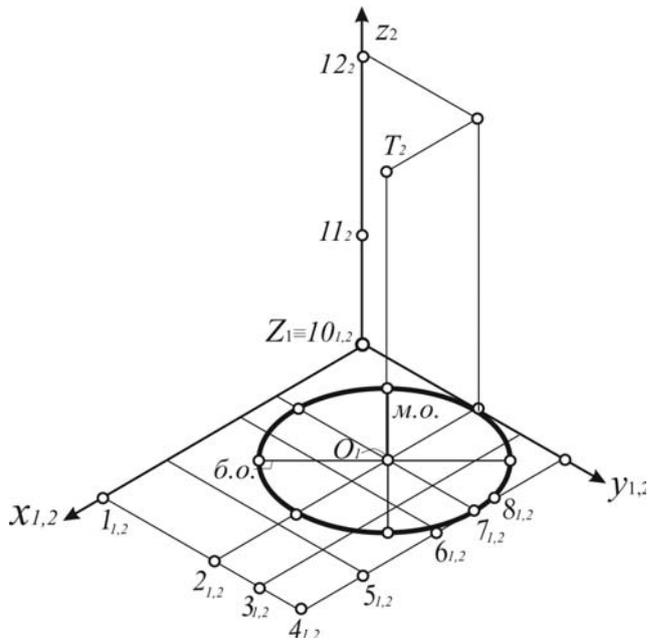


Рис. 215. Построение в прямоугольной изометрии второй проекции вершины конуса

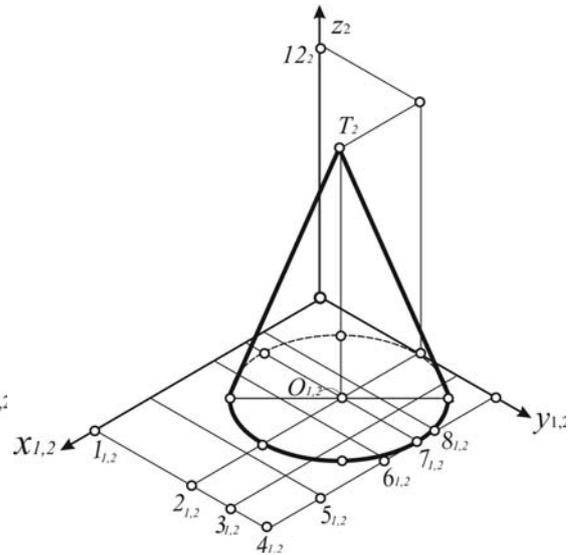


Рис. 216. Построение в прямоугольной изометрии конуса

Чтобы получить легко читаемые чертежи, построение изометрии призмы и конуса были рассмотрены отдельно. В действительности они строятся на одном чертеже, где последним этапом является построение линии пересечения этих объектов. Подробно это рассматривалось в разделе «Позиционные задачи». Поэтому здесь только будет отмечено, что она распадается на две дуги различных эллипсов и дугу гиперболы. Один эллипс изображает дугу окружности, в которой верхнее основание призмы пересекает конус. Другая дуга эллипса является общей для конуса и удаленной боковой грани. В рассмотренном примере она не видна, поэтому не построена. Дуга гиперболы возникает при пересечении ближней вертикальной грани призмы с конусом (рис.217).

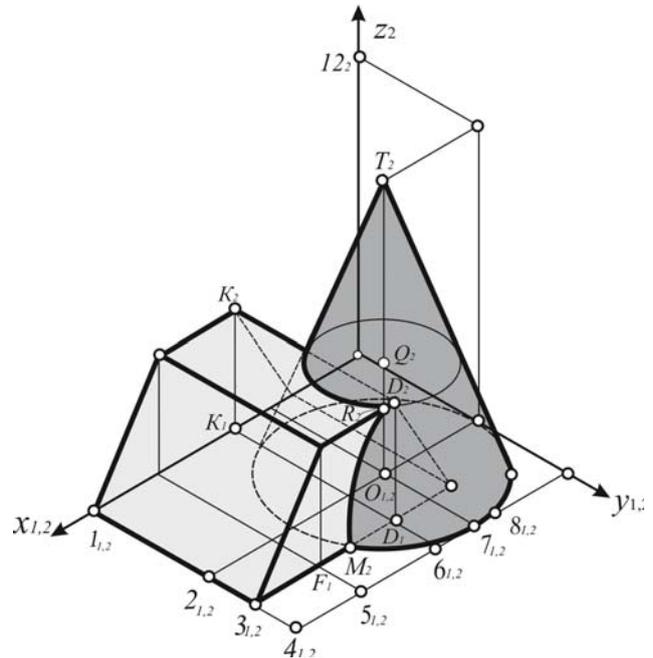


Рис. 217. Построение в прямоугольной изометрии призмы и конуса

Контрольные вопросы

1. Сформулируйте основную теорему аксонометрии – теорему Польке-Шварца.
2. Какие выводы о произволе выбора аксонометрических систем следуют из теории Польке-Шварца?
3. Какие косоугольные аксонометрические проекции практически применяются при построении наглядных изображений?
4. Дайте характеристику расположения координатных осей в стандартных видах аксонометрии.
5. Назовите коэффициенты искажения в косоугольных аксонометрических проекциях.
6. Как изображаются окружности по ГОСТ 2.317-69 во фронтальной косоугольной изометрической проекции.
7. Как изображаются окружности по ГОСТ 2.317-69 во фронтальной косоугольной диметрической проекции?
8. Как изображаются окружности по ГОСТ 2.317-69 в горизонтальной косоугольной изометрической проекции?
9. От чего зависят построения малых и больших осей эллипсов, изображающих окружности, в аксонометриях?

6. ПОСТРОЕНИЕ ПЕРСПЕКТИВЫ ПО ЭПЮРУ МОНЖА

6.1. Структура проекционного аппарата

В строительной практике достаточно часто возникает необходимость осуществить переход от изображения объекта на эпюре Монжа к его перспективе. Для этого разработан специальный прием, основанный на совмещении их проекционных аппаратов. Чтобы отличать их одинаковые элементы, припишем пометки в виде верхнего индекса π всем составляющим проекционного аппарата перспективы (рис. 218).

Совмещенные проекционные аппараты обладают следующими особенностями:

- 1) тождественно совмещаются друг с другом картины π_1 и центры S_1 ;
- 2) центр проецирования S_2^π находится на конечном расстоянии, S_2 удален в бесконечность ортогонально картине π_2 эпюра Монжа;
- 3) исключенная прямая u^π находится на конечном расстоянии, u – в бесконечности;
- 4) через два центра проецирования S_2^π и S_2 проходит третья исключенная прямая v ;
- 5) тождественно совпадает исключенная точка U_2 с центрами проецирования S_1^π и S_1 , а исключенная точка U_1 – с центром S_2 , точка U_1^π находится на конечном расстоянии;
- 6) исключенная прямая v , пересекает картины π_2 и π_2^π соответственно по двум исключенным точкам V_2 и V_2^π ;
- 7) картины π_2 и π_2^π пересекаются по прямой $x_{2,2}$;
- 8) картины π_1 и π_2^π пересекаются по прямой $x_{1,2}^\pi$.

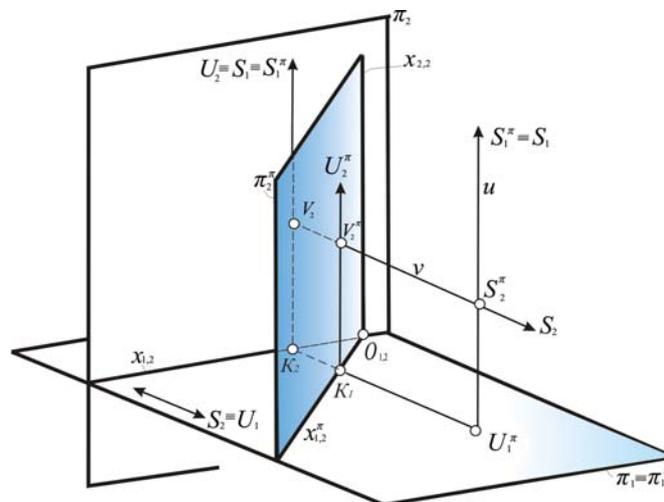


Рис.218. Совмещение проекционных аппаратов перспективы и эпюра Монжа

Взаимосвязи, которые обуславливает структура совмещенного проекционного аппарата перспективы и эюра Монжа, определяют алгоритм построения перспективы точки по ее ортогональным проекциям. Его идея исходит из геометрического описания построения перспективы. Она заключается в том, что множество проецирующих прямых, которые исходят из центра S_2^π , пересекаются с картиной π_2^π , образуя на ней перспективное изображение объекта как множества точек (рис. 219).

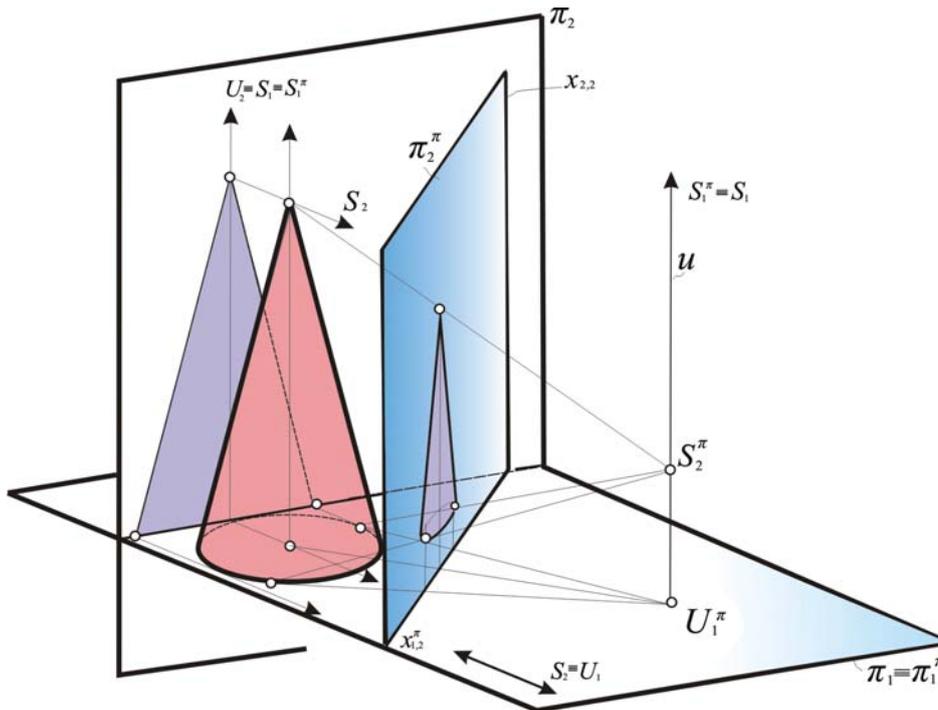


Рис. 219. Построение изображения на совмещенных проекционных аппаратах перспективы и эюра Монжа

6.2. Построение перспективы точки по эюру Монжа

Рассмотрим построение перспективного изображения точки. Известно, что любая точка на плоскости возникает как результат пересечение двух линий. Чтобы определить эти линии, выделим соответственные пучки прямых на всех трех картинах (рис. 220). Соответственными считаются такие пучки прямых, которые пересекаются по одной прямой (ось пучка). Прямые, имеющие общую точку на оси пучка, также считаются соответственными.

Любая точка A трехмерного пространства, объединяясь с исключенной прямой, образует проецирующую плоскость. В объединенном проекционном аппарате для одной точки таких плоскостей всего три: $\alpha = A \cup v$, $\beta = A \cup u^\pi$, $\gamma = A \cup u^\infty$. Множество точек трехмерного пространства образует три пучка проецирующих плоскостей соответственно с осями: $x_{2,2}$,

$x_{1,2}^\pi$, $x_{1,2}$. Пересекаясь с картинами, они образуют в каждой паре картин следующие пучки соответственных прямых:

1. Картины $\pi_2 - \pi_2^\pi$ содержат два соответственных пучка прямых с общей вершиной в точке U_2 , тождественно совпавшей с точкой U_2^π . Их ось находится в бесконечности. Этим же картинам принадлежат еще два соответственных пучка с вершинами в точках V_2 и V_2^π . Эти пучки пересекаются по оси $x_{2,2}$.

2. Паре картин $\pi_1^\pi - \pi_2^\pi$ принадлежат соответственные пучки прямых с вершинами в точках U_1 и U_2 , которые пересекаются по оси $x_{1,2}^\pi$.

3. В картинах $\pi_1 - \pi_2$ также располагаются соответственные пучки с вершинами $U_1 - U_1^\pi$, которые связывает ось $x_{1,2}$.

Проекции точки в картине π_2^π возникают в результате пересечения прямых пучков V_2^π и U_2^π .

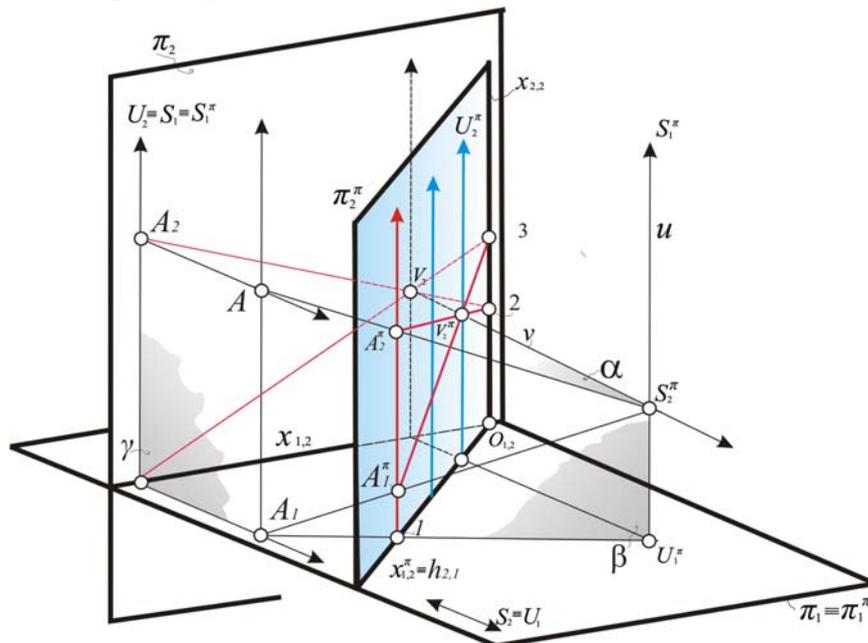


Рис. 220. Взаимосвязь между проекциями точек в перспективе и на эюре Монжа при совмещенных проекционных аппаратах

Выделенные соответственные пучки прямых позволяют по двум ортогональным проекциям точки строить ее изображение в перспективе. Но для этого необходимо изъять картину π_2^π из совмещенного проекционного аппарата и изобразить отдельно.

В результате возникает необходимость изобразить картину π_2^π в натуральную величину или в масштабе, как правило, в увеличенном. Чтобы построить на ней перспективное изображение необходимо нанести следую-

щие элементы: оси $x_{2,2}$, $x_{1,2}^\pi$ и вершины пучков V_2^π , U_2^π . Важными атрибутами для построения перспективы оказываются также линия горизонта h_2 , главная точка P_2 , исключенная точка V_2^π .

Кроме этого, чтобы строить точки в перспективе по их проекциям на эюре Монжа, необходимо постоянно выделять соответственные прямые в пучках $V_2-V_2^\pi$ и $U_1-U_2^\pi$, которые принадлежат разным плоскостям. В результате точки, выделяющие эти прямые изображаются дважды: сначала на картинах $\pi_1 - \pi_2$, затем на картине π_2^π . Прямые на картинах $\pi_1 - \pi_2$ выделяют на осях $x_{1,2}^\pi$, $x_{2,2}$ точки, которые нужно перенести на соответствующие оси картины π_2^π , замерив их расстояния от какой-то точки, выбранной за начало отсчета. Таким точками целесообразно взять точки P_2 и M_2 .

Чтобы нанести эти элементы на картину π_2^π , нужно измерить на эюре Монжа три величины: a , b , c (рис. 221). Величина a – это расстояние от оси $x_{1,2}$ до линии горизонта h_2 . Она изображается без искажения на обеих картинах π_2^π и π_2 . Расстояния b и c изобразятся без искажения на картинах π_2^π и π_1 . На эюре Монжа картина π_2^π занимает проецирующее положение. Ее вырожденная проекция тождественно совпадает с осью $x_{1,2}^\pi$. На ней эти величины изобразятся без искажения.

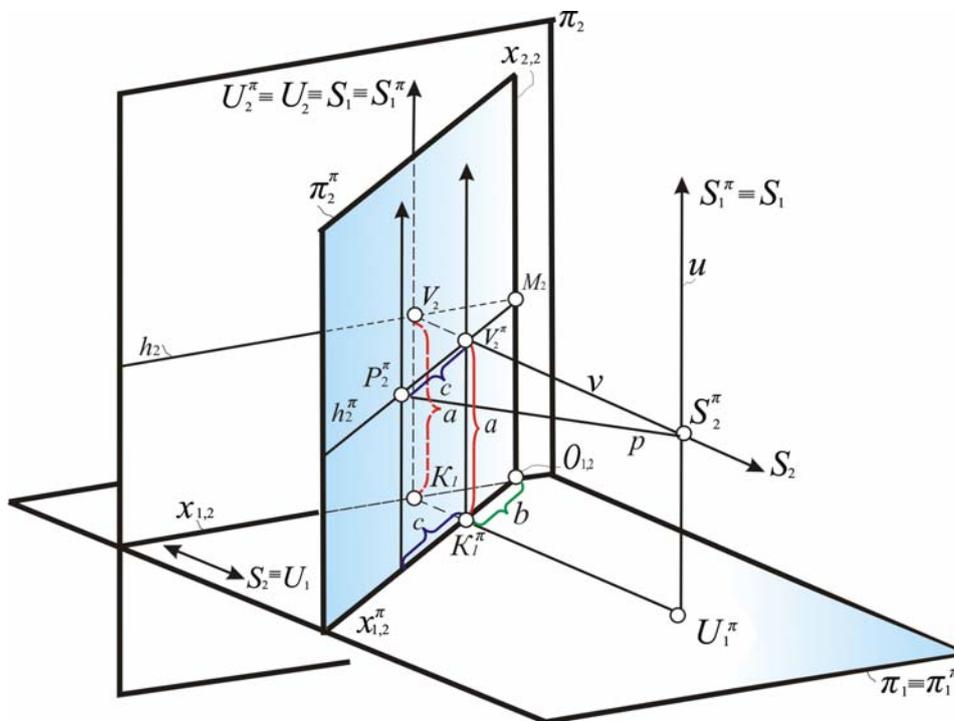


Рис. 221. Взаимное расположение основных элементов, которые необходимо нанести на картину π_2^π

На том месте, где предполагается построение перспективы, изобразим линию горизонта h_2^π (рис. 222). Параллельно ей на расстоянии a проведем ось $x_{1,2}$. Главная точка P_2 является центром изображения по его ширине. Это определяет приоритет в ее расположении на линии горизонта. На расстоянии c от нее строим точку V_2^π . От точки V_2^π на расстоянии b помечаем точку M_2 . Через точки M_2 и U_2^π проводим прямую $x_{2,2}$.

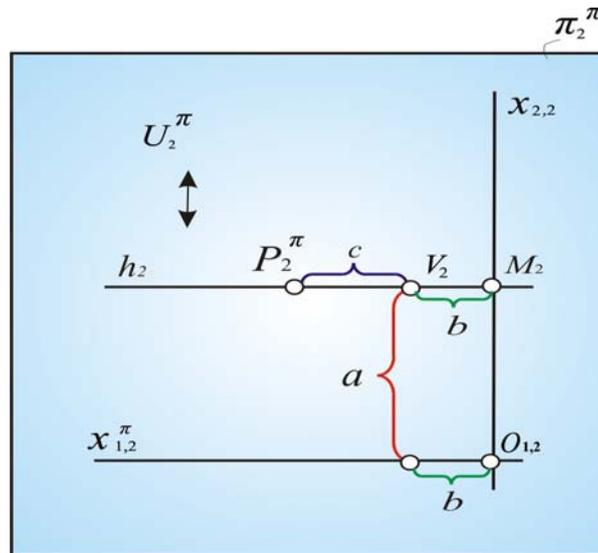


Рис. 222. Взаимное расположение основных элементов в картине π_2^π

Установленная взаимосвязь элементов совмещенного проекционного аппарата позволяет определить **алгоритм построения модели точки в перспективе по ее модели на эюре Монжа**.

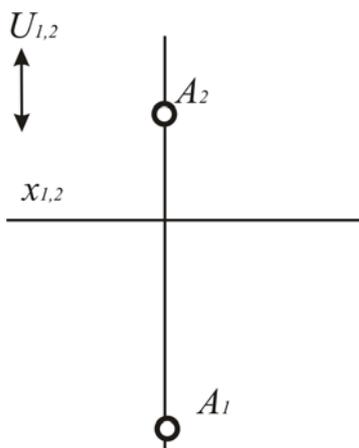


Рис. 223. Модель точки A на эюре Монжа

Пусть дана модель точки A на эюре Монжа (рис. 223). Необходимо построить ее модель в перспективе.

Изобразим на эюре Монжа картину π_2^π ее осями $x_{1,2}^\pi$, $x_{2,2}$ и исключенными точками $U_{1,2}^\pi$, V_2 (рис. 224). Пока нет ни каких ограничений эти элементы изображаются произвольно. Из точки $U_{1,2}^\pi$ проводим главный луч перпендикулярно оси $x_{1,2}^\pi$ и получаем на ней главную точку P_2 . Через исключенную точку V_2^π проводим линию горизонта. Она пересекает ось $x_{2,2}$ в точке M_2 .

- 4) в картине π_2^π построить прямую, которая пройдет через точки 1 и U_2^π ;
- 5) в картине π_2^π построить прямую, которая пройдет через точки 2 и V_2^π ;
- 6) пересечь прямые, построенные в картине π_2^π , получив вторую проекцию точки в перспективе;
- 7) для построения первой проекции точки в перспективе используются соответственные прямые пучков $V_2^\pi - U_2^\pi$. Точка 3 устанавливает соответствие между прямыми пучков $V_2^\pi - V_2$.

6.3. Условия выбора точки зрения и картины π_2^π

При построении перспективы по эпюру Монжа следует специально сказать об ограничениях, которые накладываются на выбор центра S_2^π и картины π_2^π .

Положение точки зрения S_2^π выбирается, исходя из следующих условий:

- 1) художественная или конструкторская целесообразность подачи изображаемого объекта;
- 2) физиологические особенности человеческого глаза.

Первое условие носит специфический характер и определяется исполнителем в соответствии с их профессиональными задачами. Второе же условие влияет на качество перспективного изображения. Если выбор точки зрения и картины π_2^π , не соответствуют физиологическим особенностям человеческого глаза, то на изображении появляются неприятные искажения.

Лучи, отраженные от объекта, собираются в точку хрусталиком глаза человека. В результате возникает геометрическая поверхность, которую называют **условный конус зрения**. Проекция конуса зрения на картину π_1 называется **горизонтальным углом зрения**, на π_2 – **вертикальным углом зрения**.

Условный конус зрения имеет ось, которая относительно равноудалена от его поверхности. Эта ось по отношению к глазу человека называется **главным лучом** (рис. 226). Это гипотетическая прямая, которая проходит через зрачок и примерный центр глазного яблока. Чем ближе к главному лучу располагается рассматриваемый объект, тем четче он виден. Чтобы охватить объект, не перемещая взгляда, максимальный угол между образующими условного конуса зрения составит 60° . Если же объект достаточно велик и не вписывается в указанный условный конус зрения, то глаз начинает перемещаться. Но однажды зафиксированная точка зрения не обладает таким свойством. Чтобы хорошо рассмотреть объект, не пере-

меща взгляд, е величина указанных углов обычно принимается в диапазоне $30^\circ\text{--}40^\circ$.

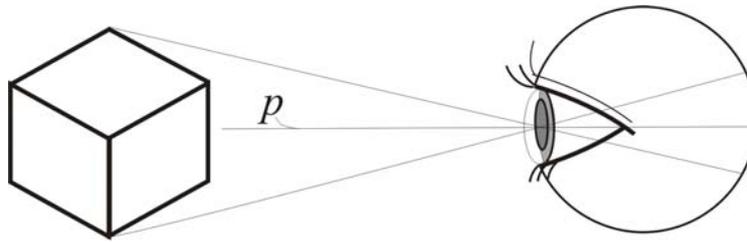


Рис. 226. Условный конус зрения

Учитывая ограничения, о которых было сказано выше, проекции точки зрения должны выбираться так, чтобы вертикальный и горизонтальный углы зрения не превышали указанных выше пределов. Если это правило будет нарушено, то на перспективном изображении возникнут неприятные искажения.

Следующим условием, которое позволяет избежать неприятных искажений является перпендикулярность «оси конуса зрения» к плоскости π_2^π . Роль «оси конуса зрения» в совмещенном проекционном аппарате играет главный луч p . Его точка пересечения с картиной π_2^π (главная точка картины) оказывается центром изображения.

На картинах проекции главного луча обычно изображается биссектрисой углов зрения. Исключение составляет перспектива на вертикальной картине, где главный луч одновременно является горизонталью. Поэтому его вторая проекция изображается параллельно оси проекций $x_{1,2}$. Но положение точки зрения далеко не всегда выбирается на середине объекта, если рассматривать его вертикальные размеры. В этом случае условный конус зрения используется не полностью. В результате, вопреки требованиям, вертикальный угол зрения не делится главным лучом на две равные части. Чтобы определить его размеры, необходимо взять от главного луча его большую часть и принять за половину.

6.4. Алгоритм построения каркаса перспективного изображения по эюру Монжа

Алгоритм построения каркаса перспективного изображения объекта по эюру Монжа рассмотрим на примере.

На эюре Монжа промоделированы два геометрических тела (рис. 227). Построить их перспективное изображение на вертикальной картине.

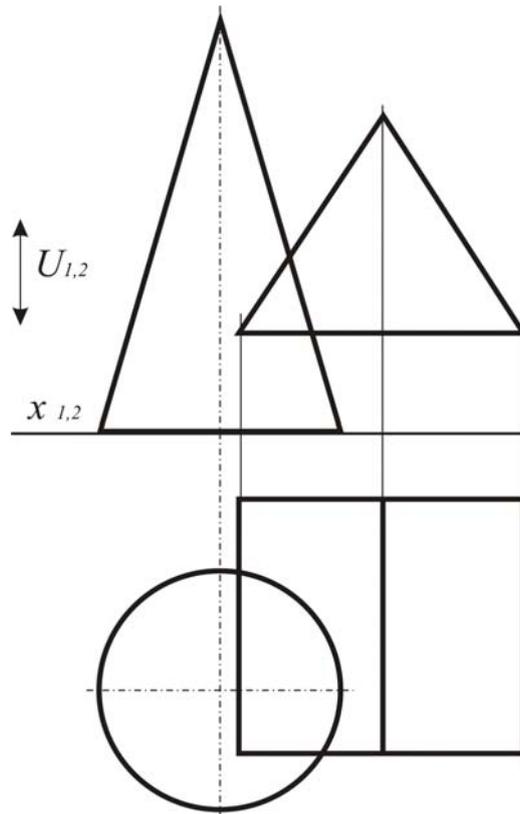


Рис. 227. Модели на эюре Монжа двух геометрических тел

Исходя из рассмотренных выше условий, можно определить последовательность операций построения перспективы по эюру Монжа.

1. Выбор положения точки зрения S_2^π ;
2. Построение изображений углов зрения главного луча p и определение величины вертикального и горизонтального углов зрения.
3. Коррекция положения точки зрения, если это необходимо.
4. Построение картины π_2^π на эюру Монжа.
5. Изображение элементов, необходимых для работы алгоритма по построению перспективы точки в том месте, где предполагается построение перспективы.
6. Построение каркаса перспективного изображения объекта.
7. Построение деталей перспективного изображения объекта.

1. Выбор точки зрения и картины π_2^π . За точку зрения, как указывалось выше, выбирают S_2^π . На совмещенном чертеже ей соответствуют проекции V_2^π , U_2^π , которые являются моделью центра проецирования (рис. 228).

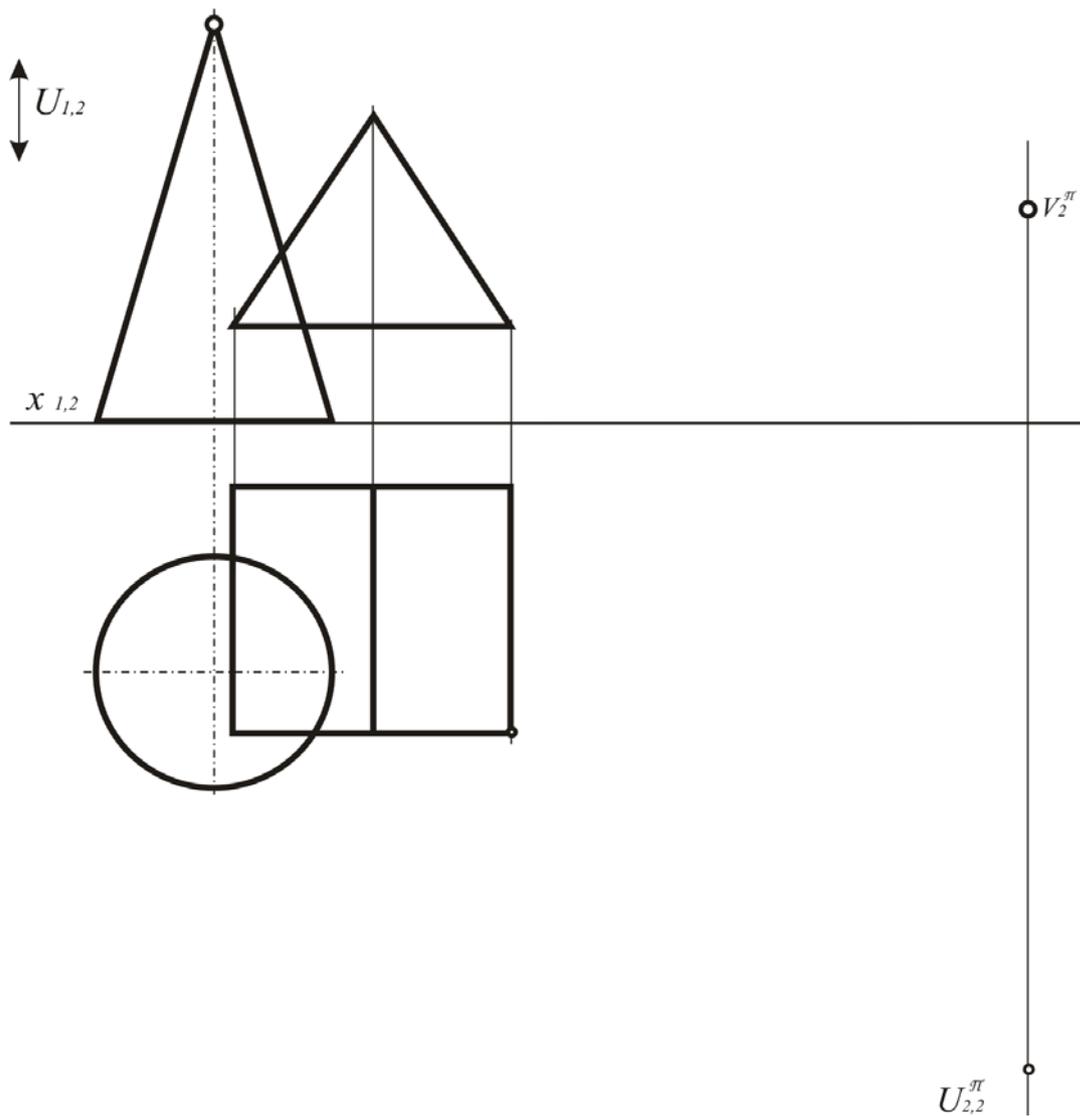


Рис. 228. Выбор положения точки зрения

2. Построение изображений углов зрения главного луча p и определение величины углов зрения. Из проекций точки зрения проведем прямые касательные к проекциям объекта (рис. 229). Они образуют вертикальный и горизонтальный углы зрения. Построим проекции главного луча. Его первая проекция – биссектриса горизонтального угла зрения и параллельна оси $x_{1,2}$. Вторая параллельна оси $x_{1,2}$. Замеряем величину горизонтального угла зрения и большую часть от главного луча вертикального угла зрения. Если их величины не более 60° , то оставляем все без изменений.

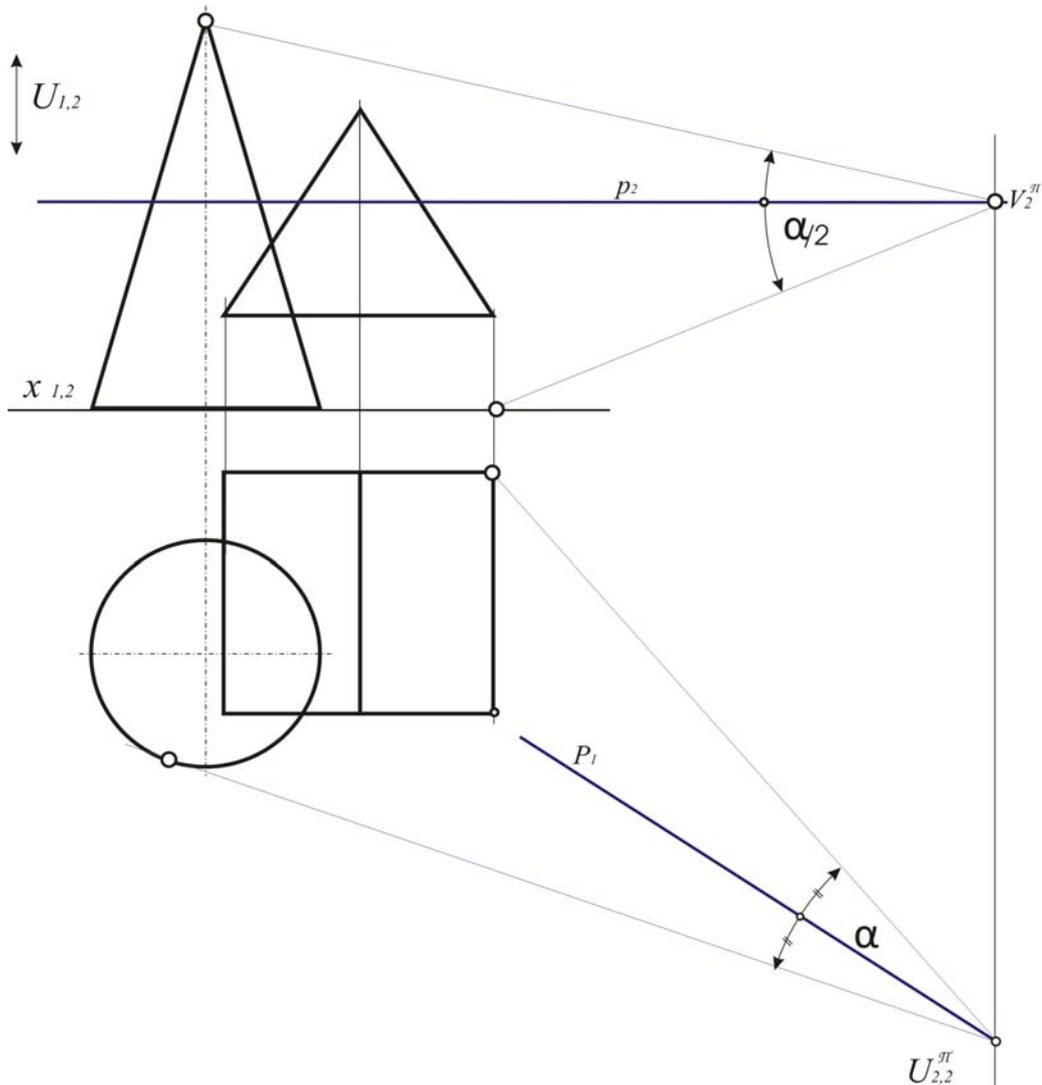


Рис. 229. Построение изображений углов зрения главного луча p и определение величины углов зрения

3. Коррекция положения точки зрения, необходима в том случае, когда величина угла зрения превышает норму или очень мала. Когда указанная величина больше нормы, необходимо переместиться по главному лучу дальше от объекта, если очень маленькая – то приблизится.

4. Построение картины π_2^π на эпюре Монжа осуществляется с помощью следующих элементов: вырожденной проекции картины π_2^π , линии горизонта h_2^π , главной точки картины P_2 и точек схода основных горизонтальных направлений F^π, R^π (рис. 230).

Вырожденную проекцию картины π_2^π располагаем перпендикулярно главному лучу. В остальном произвольно. С ней тождественно совпадет первая проекция линии горизонта. Вторая проекция линии горизонта проходит через вторую проекцию главного луча.

Линия пересечения картин π_2^π и π_2 ось $x_{2,2}$ проходит через точку M_1 , в которая является общей для вырожденной проекции картины π_2^π и оси $x_{1,2}$. Вторая проекция точки M принадлежит линии горизонта h_2 .

В объекте присутствует два главных горизонтальных направления ребер призмы. Параллельно им проводим прямые из точки зрения. Они пересекают линию горизонта в точках $R_1^\pi F_1^\pi$ – это горизонтальные проекции искомых точек схода.

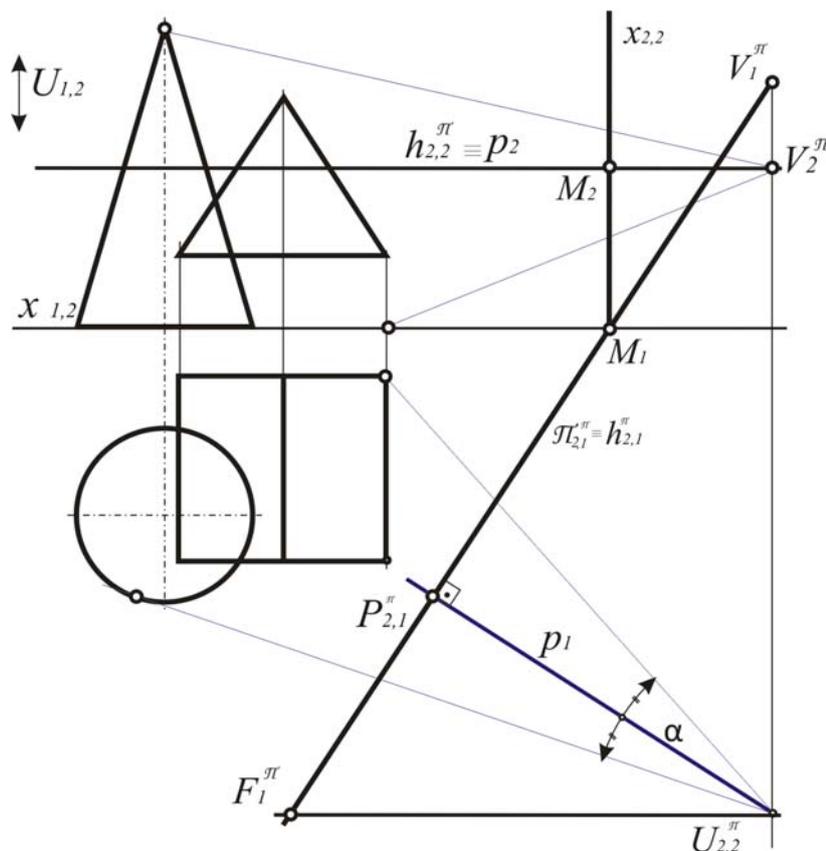


Рис. 230. Построение картины π_2^π на эюре Монжа

5. Изображение элементов, необходимых для работы алгоритма по построению перспективы точки в том месте, где предполагается построение перспективы начинается с нанесения изображения линии горизонта (рис. 231).

Ось $x_{1,2}^\pi$ фактически дублирует линию горизонта так, как все измерения на них одинаковы. Но линия горизонта играет более важную роль, поэтому можно ограничиться только изображением линии горизонта со всеми ее точками (M_2, P_2, U_2, F_2, R_2). Все расстояния изображаются без искажения на вырожденной проекции картины π_2^π .

Через точку M_2 проводим ось $x_{2,2}$ перпендикулярно линии горизонта.

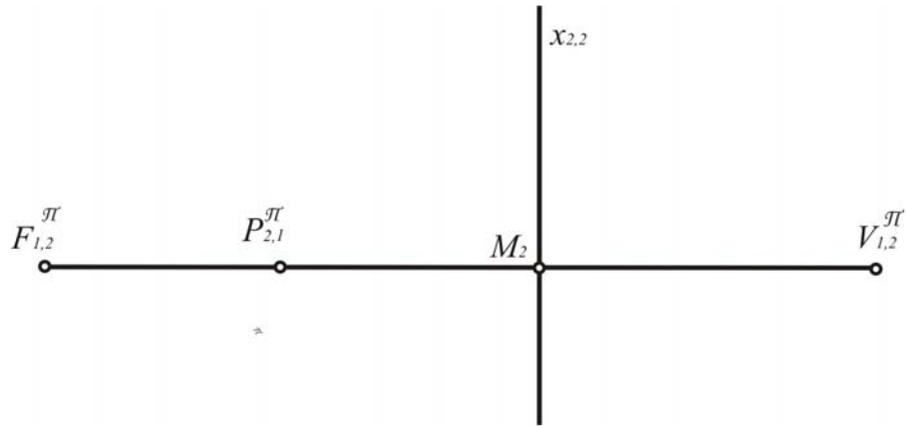


Рис. 231. Изображение элементов, необходимых для работы алгоритма по построению перспективы точки

6. Построение каркаса перспективного изображения объекта. В качестве каркаса объекта обычно берут описанный вокруг объекта параллелепипед (рис. 232). В предложенном примере – это параллелепипед. Для его изображения в перспективе достаточно четверки выделенных точек $ABCD$.

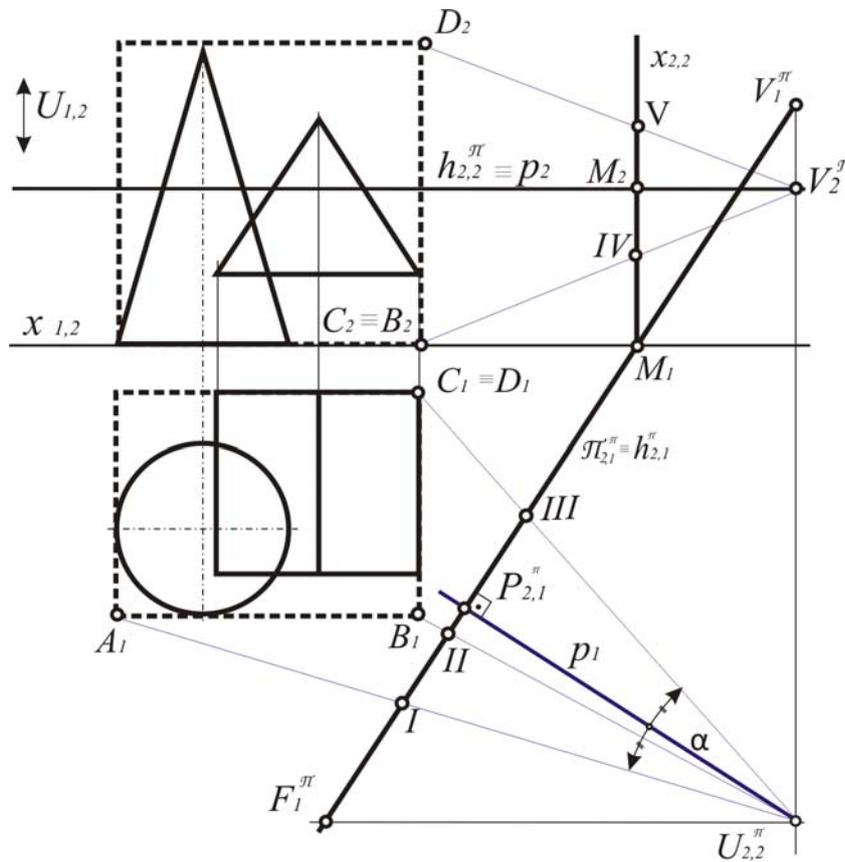


Рис. 232. Изображение каркаса объекта

Через первые и вторые проекции этих точек и соответствующие вершины пучков (проекции точки зрения) проведем прямые, которые выделяют на линии горизонта точки I, II, III , а на оси $x_{2,2}$ – точки IV, V . Замерив расстояния от точки P_2^π до точек I, II, III , нанесем их на изображение линии горизонта в перспективе (рис. 187) На оси $x_{2,2}$ от точки M_2 отложим расстояния до точек IV, V , замеренные на эюре Монжа. Прядок в расположении точек нужно не нарушать.

Через полученные точки и соответствующие вершины пучков проводим прямые: точки I, II, III , и вершину пучка $U_{1,2}^\pi$, через точки IV, V и вершину $V_{1,2}^\pi$. Каждая из выделенных вершин параллелепипеда устанавливает соответствие между прямыми двух различных пучков, пересекая, которые получим изображения точек в перспективе (рис.233).

Точка B получается при пересечении прямых, проходящих через отметки II и IV , точку C определяют прямые III и IV , D – прямые, которые проходят через II и V . Точку A получим, используя точку схода $F_{1,2}^\pi$. Остальные вершины каркасного параллелепипеда получены в результате проведения параллельных прямых в пучках с вершинами $F_{1,2}^\pi$ и $V_{1,2}^\pi$.

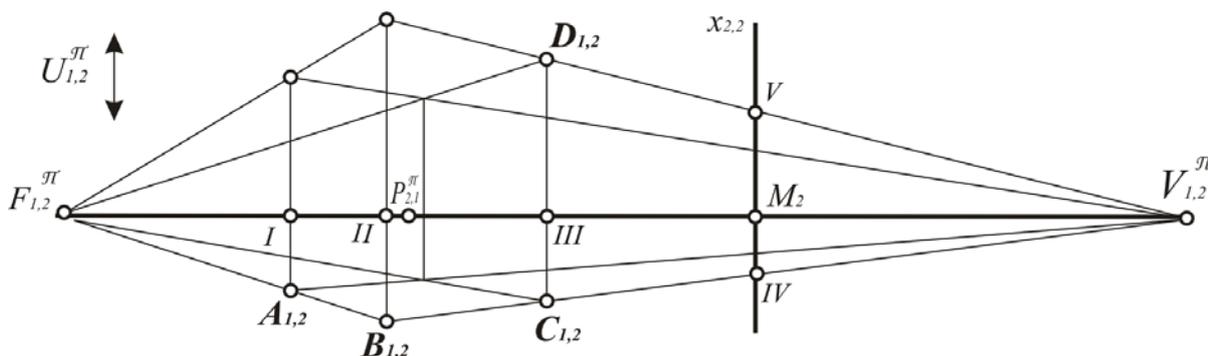


Рис. 233. Построение каркаса перспективного изображения объекта

6. Построение деталей перспективного изображения объекта можно осуществлять благодаря рассмотренному выше алгоритму, но высокой точности достичь очень трудно. Неточности приводят к искажениям изображения, которые влияют на восприятие перспективы объекта.

подавляющее большинство окружностей в перспективе изображаются эллипсами. Известно, что любой эллипс имеет большую и малую оси, которые взаимно перпендикулярны и, пересекаясь, делятся пополам. Величину большой оси эллипса определяют точки касания T и N , малую – точки K и E (рис. 234). Точка O окажется центром эллипса. Для его построения достаточно найти перспективу трех точек, одна из которых центр эллипса, две другие концы большой и малой оси. В рассмотренном примере это точки O, T, E .

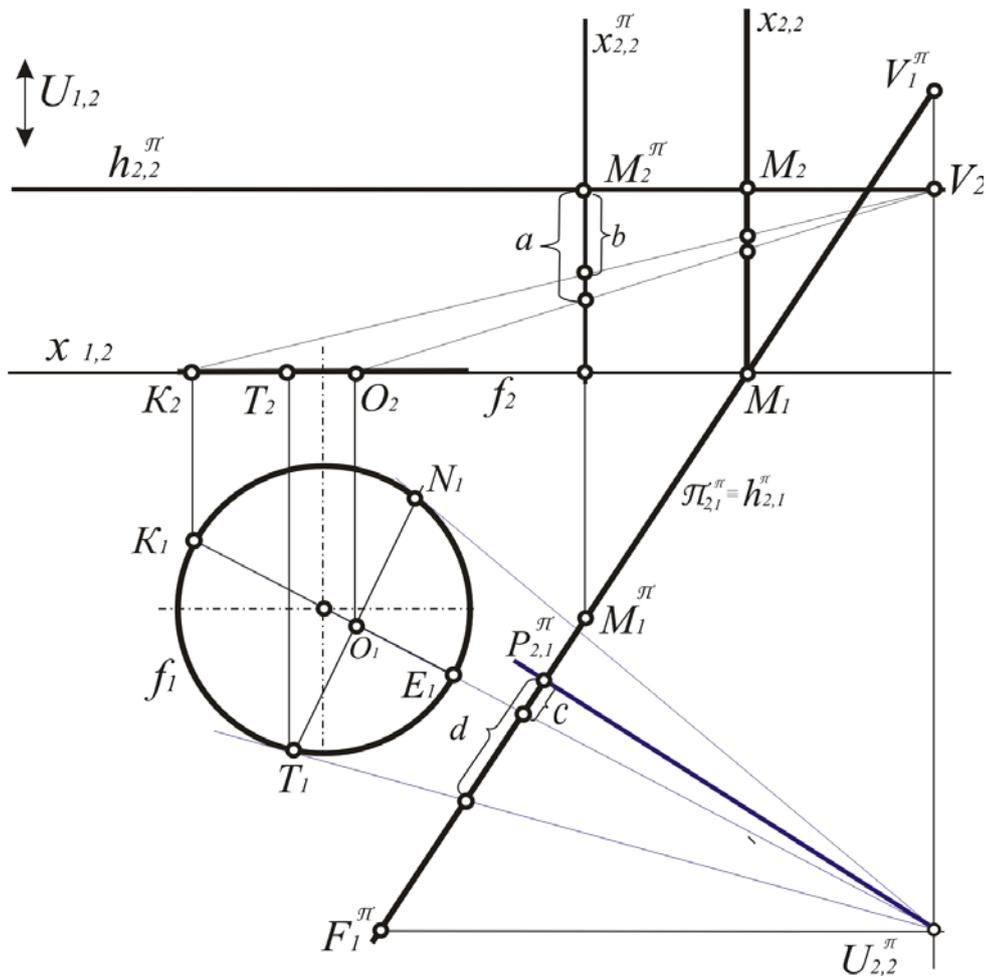


Рис. 234. Выделение точек на окружности для построения ее перспективного изображения

При этом часто возникает ситуация, когда большая ось эллипса, изображающего окружность, оказывается наклонена по отношению к линии горизонта. Такое изображение окружности, принадлежащей горизонтальной плоскости, кажется человеку не естественным, потому что в глазу человека изображение проецируется на сферическую поверхность, а не на плоскость. В этом случае положение большой оси корректируется из наклонного положения в горизонтальное. Коррекция не требуется только тогда, когда центр окружности принадлежит вертикальной плоскости, содержащей главный луч. Тогда большая ось эллипса оказывается параллельна линии горизонта.

В рассмотренном примере показана еще одна ситуация, когда точки на оси $x_{2,2}$ располагаются слишком близко друг от друга (рис. 234). Это существенно снижает точность построения. Чтобы избежать этой ситуации, можно заменить ось $x_{2,2}$ любой прямой, которая ей параллельна и принадлежит картине π_2^π . В данном примере это прямая $x_{2,2}^\pi$ (рис. 235). Она пересекает линию горизонта в точке M_2^π и выполняет те же функции, что и ось $x_{2,2}$.

2) соединяем свободные концы этих ребер и находим точки схода полученных прямых. Для прямых, соединяющих точки A и C , точки схода оказываются на линии горизонта ($R_{1,2}, L_{1,2}$), для прямой, проходящей через точки D, D_2 , – в бесконечности;

3) через полученные точки схода и пометки на исходных отрезках проводим прямые, которые, пересекаясь с соответствующим ребрами параллелепипеда, нанося на них пометки от 1 до 11.

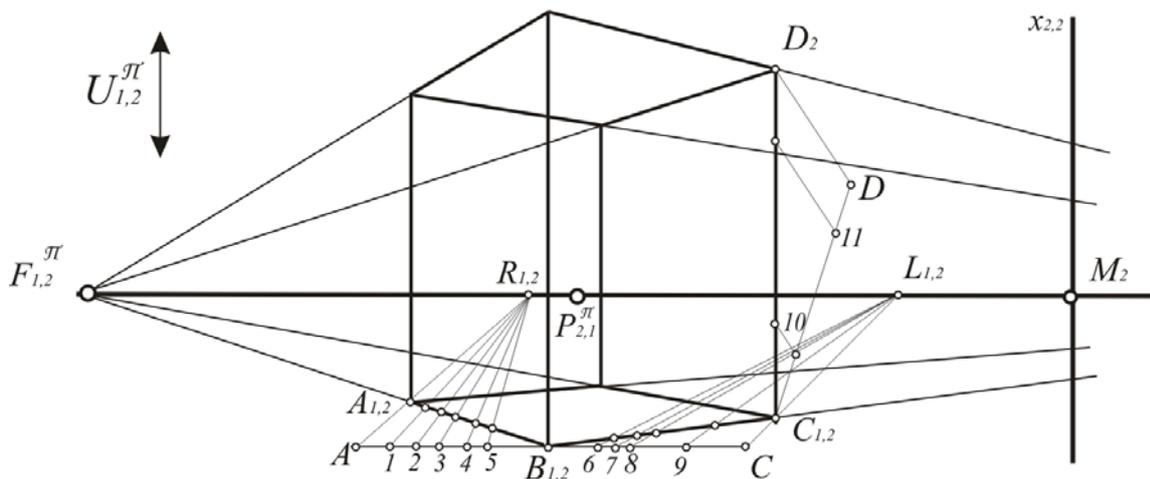


Рис. 237. Нанесение пометок на перспективные изображения шкал

Чтобы построить любую точку объекта, необходимо знать ее координаты. Три плоскости, соответствующие координатным пометкам, выделяют в пучках координатных плоскостей. Эти плоскости пересекаются в искомой точке. Рассмотрим этот прием на примере построения вершины призмы E (рис. 238). Ее координаты соответствуют пометкам 3, 6, 11. Через эти пометки и соответствующие оси координатных пучков проводим три плоскости. Линии пересечения двух вертикальных плоскостей с картиной π_1^{π} определяют первую проекцию точки E . А общая линия этих плоскостей, пересекаясь с горизонтальной плоскостью определяет вторую проекцию точки E .

Рассмотренный случай объясняет построение точки в перспективе с позиций трехмерного пространства. На деле же приходится работать на плоской модели, где любая точка определяется как результат пересечения двух линий. Чаще всего используются линии пересечения координатных плоскостей с гранями каркасного параллелепипеда. Рассмотрим этот прием на примере построения перспективы вершины конуса T (рис. 239).

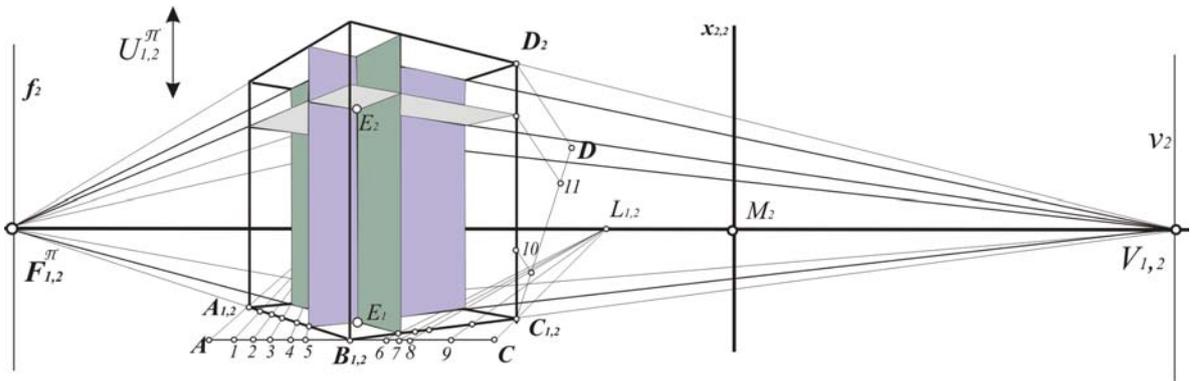


Рис.238 . Построение точки E в перспективе благодаря пересечению координатных плоскостей

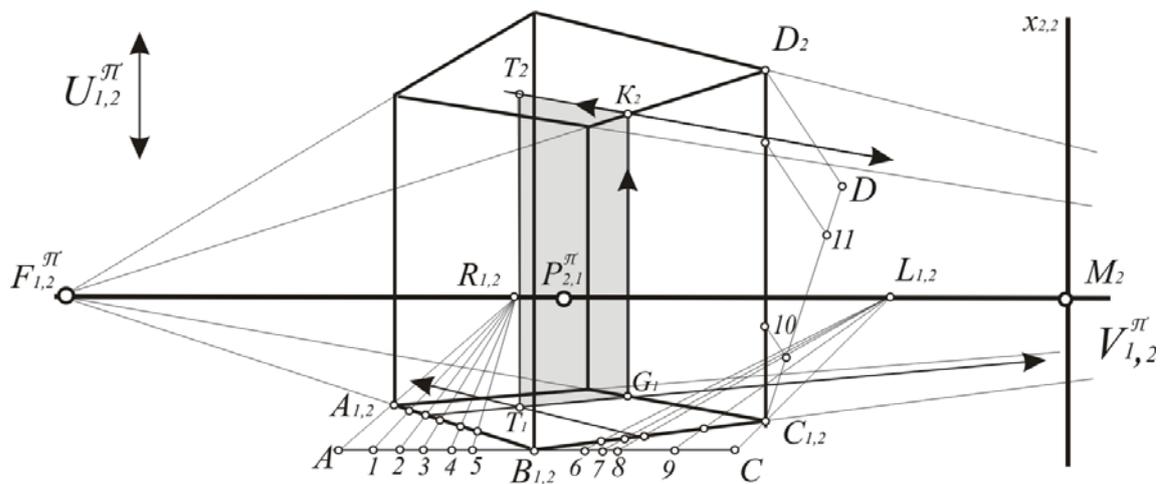


Рис. 239. Построение вершины конуса в перспективе с использованием пространственной оптимальной сетки

Ее координаты определяются следующими пометками: 2, 8, D . Координатные плоскости, проходящие через пометки 2 и 8, пересекают картину π_1^π по прямым, которые проходят через точки схода $F_{1,2}^\pi, V_{1,2}^\pi$. Пересекаясь, они определяют первую проекцию точки T . Чтобы найти вторую проекцию этой точки достаточно использовать линию пересечения одной из вертикальных координатных плоскостей с гранями каркасного параллелепипеда. Например, с задней правой, в которой возникает прямая GK . Через точки $K_2 V_{1,2}^\pi$ пройдет прямая, по которой эта координатная плоскость пересечет верхнюю грани параллелепипеда, являющейся одновременно координатной плоскостью для точки T . Определение положения T_2 ясно из рисунка.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Предложенный учебный курс «технический рисунок» позволяет изучить основные приемы построения геометрических моделей, которыми являются плоские изображения трехмерных объектов. Эти изображения оказываются одной из составляющих профессиональной деятельности, которая тесно связана с различными изображениями.

Авторы будут признательны читателю за полученные от него отзывы и замечания. Они позволят внести необходимые коррективы при переиздании учебника.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

Основная литература

1. Вавилова, И.И. Краткий курс начертательной геометрии [Текст]: учебное пособие / И.И. Вавилова. – Воронеж: Изд. ВВВАИУ ВИ, 2006. – 106 с.
2. Королев, Ю.И. Начертательная геометрия [Текст]: учебник / Ю.И. Королев. – СПб.: Питер, 2010. – 256 с.
3. Лапшов, А.Ю. Проекция с числовыми отметками [Текст]: методические указания к самостоятельной работе студентов / А.Ю. Лапшов, Л.Л. Сидоровская, В.И. Чурбанов. – Ульяновск: УлГТУ, 2007. – 41 с.
4. Найниш, Л.А. Теория построения изображений [Текст]: учебное пособие / Л.А. Найниш, Г.Л. Виноградова, Л.В. Ремонтова, С.А. Кочерова. – Пенза: ПГТА, 2010. – 168 с.
5. Фролов, С.А. Начертательная геометрия [Текст]: учебник / С.А. Фролов. – М.: Инфра-М, 2013. – 257 с.
6. Чекмарев, А.А. Начертательная геометрия и черчение [Текст]: учебник для бакалавров / А.А. Чекмарев. – 4-е изд., испр. и доп. – М.: Юрайт, 2012. – 231 с.

Дополнительная литература

1. Вавилов, С. И. Глаз и солнце [Текст]: монография / С. И. Вавилов. – М.: Наука, 1981. – 167 с.
2. Вальков, К. И. Курс начертательной геометрии [Текст]: учебник / К.И. Вальков – Л.: ЛИСИ, 1970. – 245 с.
3. Вальков, К.И. Лекции по основам геометрического моделирования [Текст]: учебник / К.И. Вальков. – Л.: ЛГУ, 1975. – 278 с.
4. Глаголев, Н.А. Проективная геометрия [Текст]: учебник / Н. А. Глаголев. – М.: Высшая школа, 1963. – 126 с.
5. Глазунов, Е.А. Аксонометрия [Текст]: учебник / Н.Ф. Четверухин, Е.А. Глазунов. – М.: Гостехиздат, 1954. – 363 с.
6. Демидов, В.Е. Как мы видим то, что видим [Текст]: монография / В.Е. Демидов. – М.: Знание, 1987. – 196 с.
7. Дюрер, А. Дневники, письма, трактаты [Текст]: сочинения / А. Дюрер. – М.: Искусство, 1957. – 231 с.
8. Еремеев, А.Ф. Первобытная культура [Текст]: монография / А.Ф. Еремеев. – Саранск, 1997. – 153 с.
9. Лихачев, Д.С. Русское искусство от древности до авангарда [Текст]: монография / Д.С. Лихачев. – М.: Наука, 1992. – 311 с.
10. Монж, Г. Начертательная геометрия [Текст]: учебник / Г. Монж. – М.: Изд-во АН СССР, 1947. – 322 с.

11. Найниш, Л.А. Структурный анализ курса начертательной геометрии [Текст]: монография / Л.А. Найниш. – Пенза: ПГАСА, 2000. – 198 с.
12. Раушенбах, Б.В. Система перспективы в изобразительном искусстве: Общая теория перспективы [Текст]: монография / Б.В. Раушенбах. – М.: Наука, 1986. – 254 с.
13. Флоренский, П.А. Обратная перспектива / П.А. Флоренский // В кн. «Избранные труды по искусству». – М.: Изобразительное искусство, 1996. – 285 с.
14. Хория, Т. Перспектива. [Текст]: учебник / Т. Хория. – Бухарест, 1964. – 324 с.
15. Линейная перспектива на плоскости. [Текст]: учебник / А. Г. Яблонский. – М.: Просвещение, 1966. – 296 с.

ОГЛАВЛЕНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ	3
ВВЕДЕНИЕ	4
1. БАЗОВЫЕ ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ЗНАНИЯ.....	13
1.1. Геометрическое пространство.....	13
1.2. Линии	20
1.3. Поверхности	26
2. ЗАКОН ПОСТРОЕНИЯ ПЛОСКИХ ИЗОБРАЖЕНИЙ ТРЕХМЕРНЫХ ОБЪЕКТОВ	31
2.1. Структура проекционного аппарата.....	31
2.2. Алгоритм работы проекционного аппарата.....	32
2.3. Инварианты проецирования	33
2.4. Основное требование к плоским изображениям трехмерных объектов.....	35
3. МЕТОД ДВУХ ИЗОБРАЖЕНИЙ	40
3.1. Характеристика проекционного аппарата. Общий случай	40
3.2. Характеристика проекционного аппарата. Перспектива.....	41
3.3. Характеристика проекционного аппарата. Аксонометрия.....	42
3.4. Характеристика проекционного аппарата. Эпюр Монжа	43
3.5. Модель точки	45
3.5.1. Общий случай	45
3.5.2. Моделирование точек общего положения в стандартных вариантах метода двух изображений	48
3.5.3. Моделирование точек частного положения в стандартных вариантах метода двух изображений	51
3.6. Модель прямой.....	58
3.6.1. Моделирование прямых общего положения	62
3.6.2. Моделирование прямых частного положения.....	65
3.6.3. Приемы работы с моделью прямой	74
3.7. Модель плоскости.....	80
3.7.1. Решение задач при работе с моделью плоскости.....	81
3.8. Моделирование плоских кривых второго порядка	93
3.9. Моделирование поверхностей.....	96
3.9.1. Моделирование поверхностей в стандартных вариантах метода двух изображений.....	98
3.9.2. Определение положения поверхности относительно проекционного аппарата по ее модели	109
3.9.3. Построение на модели поверхности графически простых линий	109
3.9.4. Приемы работы с моделью поверхности	114

4. ПОЗИЦИОННЫЕ ЗАДАЧИ	124
4.1. Пересечение прямой с плоскостью	125
4.2. Пересечение прямой с поверхностью	129
4.3. Пересечение плоскостей	131
4.4. Пересечение поверхностей	133
5. ПОСТРОЕНИЕ АКСОНОМЕТРИИ ПО ЭПЮРУ МОНЖА	142
5.1. Общие положения	142
5.2. Изображение координатной системы в стандартных аксонометриях	144
5.3. Изображение окружности в стандартных аксонометриях	146
5.4. Выбор аксонометрической проекции	150
5.5. Способы построения аксонометрических проекций	150
5.5. Пример построения аксонометрии объектов по их изображению на эпюре Монжа	152
6. ПОСТРОЕНИЕ ПЕРСПЕКТИВЫ ПО ЭПЮРУ МОНЖА	159
6.1. Структура проекционного аппарата	159
6.2. Построение перспективы точки по эпюру Монжа	160
6.3. Условия выбора точки зрения и картины π_2^π	165
6.4. Алгоритм построения каркаса перспективного изображения по эпюру Монжа	166
ЗАКЛЮЧЕНИЕ	179
БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК	180

Учебное издание

Найниш Лариса Алексеевна

ИНЖЕНЕРНАЯ ГРАФИКА

Учебное пособие

по направлению подготовки 08.03.01 «Строительство»

В авторской редакции

Верстка Н.А. Сазонова

Подписано в печать 15.09.16. Формат 60×84/16.

Бумага офисная «Снегурочка». Печать на ризографе.

Усл.печ.л. 10,7. Уч.-изд.л. 11,5. Тираж 80 экз.

Заказ № 581.

Издательство ПГУАС.
440028, г. Пенза, ул. Германа Титова, 28.