МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Федеральное государственное бюджетное образовательное
учреждение высшего образования
«Пензенский государственный
университет архитектуры и строительства»
(ПГУАС)

Р.В. Тарасов, Д.В. Тарасов

МЕТОДЫ ОПТИМИЗАЦИИ В ТЕХНОЛОГИЧЕСКИХ И ТЕХНИЧЕСКИХ ЗАДАЧАХ

Учебно-методическое пособие
для практических занятий по направлению подготовки 27.03.01
«Стандартизация и метрология»

Пенза 2016

УДК 62:519.8(075.8)
ББК 30:22.1я73
Т19

Рекомендовано Редсоветом университета

Рецензенты: кандидат технических наук, доцент
Л.В. Макарова (ПГУАС);
кандидат физико-математических наук,
доцент А.Н. Тында (ПГУ)

Тарасов Р.В.

Т19 Методы оптимизации в технологических и технических задачах: учебно-методическое пособие для практических занятий по направлению подготовки 27.03.01 «Стандартизация и метрология»/ Р.В. Тарасов, Д.В. Тарасов. – Пенза: ПГУАС, 2016. – 156 с.

Представлены основные методы оптимизации в технологических и технических задачах, а именно рассмотрены постановки задач линейного программирования (алгоритм симплекс-метода, понятие двойственности и задачи целочисленного программирования), постановки задачи транспортной модели по критериям стоимости и времени (алгоритмы, позволяющие находить базовые решения методами северо-западного угла, минимальных элементов, а также метод потенциалов для поиска оптимального решения), базовые понятия теории графов и сетевого планирования (алгоритмы построения минимального остовного дерева, задача поиска кратчайшего пути).

Учебно-методическое пособие подготовлено на кафедрах «Управление качеством и технология строительного производства» и «Высшая и прикладная математика» и предназначено для бакалавров, обучающихся по направлению подготовки 27.03.01 «Стандартизация и метрология». Оно также может быть полезным инженерно-техническим работникам, занимающимся алгоритмами поиска оптимальных решений и задачами оптимизации.

ПРЕДИСЛОВИЕ

В соответствии с федеральным государственным образовательным стандартом по направлению 27.03.01 – Стандартизация и метрология (уровень бакалавриата), на кафедре «Управление качеством и технологии строительного производства» ФГБОУ ВО «Пензенский государственный университет архитектуры и строительства» и на кафедре «Высшая и прикладная математика» ФГБОУ ВО «Пензенский государственный университет» разработано учебно-методическое пособие по выполнению курсовой работы для обучающихся по направлению подготовки 27.03.01 «Стандартизация и метрология» по дисциплине «Методы оптимизации в технологических и технических задачах».

В учебно-методическом пособии представлен перечень практических занятий по методам оптимизации, в частности, методов линейного программирования.

Оптимальное программирование обеспечивает получение практически ценных результатов, так как по своей природе оно вполне соответствует характеру исследуемых технико-экономических процессов и явлений.

В результате освоения дисциплины студент должен овладеть следующими компетенциями:

– способностью принимать участие в моделировании процессов и средств измерений, испытаний и контроля с использованием стандартных пакетов и средств автоматизированного проектирования;

– способностью проводить эксперименты по заданным методикам с обработкой и анализом результатов, составлять описания проводимых исследований и подготавливать данные для составления научных обзоров и публикаций.

В результате изучения дисциплины обучающийся должен:

Знать

– основные определения, понятия, теоремы и типовые методы решения оптимизационных задач;

– математическую постановку задач линейного программирования и методы их решения;

– основные виды оптимизационных задач и алгоритмы их решения;

– основы сетевого планирования и управления.

Уметь

– обоснованно выбирать методы оптимизации;

– строить и использовать модели для описания и прогнозирования различных явлений, осуществлять их качественный и количественный анализ;

– с необходимой степенью достоверности анализировать и прогнозировать результаты практической деятельности в различных областях отраслей производства;

– использовать инструментальные (программные) средства аналитического и численного решения оптимизационных задач.

Владеть

– навыками исследования моделей с учетом их иерархической структуры и оценкой пределов применимости полученных результатов;

– методами построения математической модели типовых технологических процессов и содержательной интерпретации полученных результатов;

– навыками использования компьютерных технологий реализации методов исследования операций и методов оптимизации.

ВВЕДЕНИЕ

Методы оптимизации – это дисциплина, охватывающая широкий круг как классических экстремальных задач (без ограничений и с ними), так и зачастую алгоритмы линейного программирования (симплекс-метод и двойственность, целочисленное программирование), нелинейного программирования, а также транспортные и сетевые модели, методы прогнозирования и принятия решений, стохастические методы управления запасами.

Задачи линейного программирования были первыми подробно изученными задачами поиска экстремума функций при наличии ограничений типа неравенств. В 1820 г. Фурье и затем в 1947 г. Данциг предложили метод направленного перебора смежных вершин в направлении возрастания целевой функции – симплекс-метод, ставший основным при решении задач линейного программирования.

Присутствие в названии дисциплины термина «программирование» объясняется тем, что первые исследования и первые приложения линейных оптимизационных задач были в сфере экономики, так как в английском языке слово «programming» означает планирование, составление планов или программ. Вполне естественно, что терминология отражает тесную связь, существующую между математической постановкой задачи и ее экономической интерпретацией. Термин «линейное программирование» был предложен Данцигом в 1949 г. для изучения теоретических и алгоритмических задач, связанных с оптимизацией линейных функций при линейных ограничениях.

Выделение класса экстремальных задач, определяемых линейным функционалом на множестве, задаваемом линейными ограничениями, следует отнести к 1930-м гг. Одними из первых, кто исследовали в общей форме задачи линейного программирования, были Джон фон Нейман – математик и физик, доказавший основную теорему о матричных играх и изучивший экономическую модель, носящую его имя, и Л.В. Канторович –

советский академик, лауреат Нобелевской премии (1975), сформулировавший ряд задач линейного программирования и предложивший в 1939 г. метод их решения (метод разрешающих множителей), незначительно отличающийся от симплекс-метода.

Линейное программирование успешно применяется в военной области, индустрии, сельском хозяйстве, транспортной отрасли, экономике, системе здравоохранения и даже в социальных науках. Широкое использование этого метода подкрепляется высококвалифицированными компьютерными алгоритмами, реализующими данный метод.

В 1931 г. венгерский математик Б. Эгервари рассмотрел математическую постановку и решил задачу линейного программирования, имеющую название «проблема выбора»; метод решения получил название «венгерский метод».

Канторовичем Л.В. совместно с М.К. Гавуриным в 1949 г. разработан метод потенциалов, который применяется при решении транспортных задач. В последующих работах Л.В. Канторовича, В.В. Новожилова, А.Л. Лурье, А. Брудно, Д.Б. Юдина, Е.Г. Гольштейна и других математиков и экономистов получили дальнейшее развитие как математическая теория линейного и нелинейного программирования, так и приложение ее методов к исследованию различных экономических проблем.

Выделение транспортной задачи в отдельную часть обусловлено тем, что она имеет специфическую экономико-математическую модель и при ее решении не используется универсальный симплекс-метод.

Одновременно с развитием линейного программирования большое внимание уделялось задачам нелинейного программирования, в которых либо целевая функция, либо ограничения, либо то и другое нелинейны. В 1951 г. была опубликована работа Г. Куна и А. Таккера, в которой приведены необходимые и достаточные условия оптимальности для решения задач нелинейного программирования. Эта работа послужила основой для последующих исследований в данной области.

Практическое занятие № 1
ПОСТАНОВКА И КЛАССИФИКАЦИЯ ЗАДАЧ ОПТИМИЗАЦИИ

Цель занятия: рассмотреть основы использования методов оптимизации при решении практических задач в математическом анализе, математическом программировании, информационных технологиях, экономике.

1. Содержание термина оптимизация

Оптимизация и оптимальное управление является основными задачами науки об управлении. Управление рассматривается как специально организованное воздействие на объект управления с целью получения желаемого результата. Под объектом управления подразумевается объект, в котором протекает управляемый процесс. Если специально организованное воздействие на объект управления приводит к получению наилучшего в определенном смысле результата, то такое воздействие называется оптимальным управлением. Процесс нахождения оптимального управления называется оптимизацией. Для решения задачи оптимального управления необходимо иметь в той или иной форме математическое описание оптимизируемого объекта и метод определения оптимальных управлений (решений). Для решения задачи оптимального управления объектами используется метод математического моделирования.

Таким образом, рассматривая техническую или экономическую систему как объект управлении, решение задачи оптимального управления системой сводится к:

1) разработке ее математической модели;

2) моделированию режимов ее функционирования с использованием соответствующих методов оптимизации для определения оптимальных управлений (решений).

2. Оптимизация в математическом анализе, математическом программировании, информационных технологиях, экономике

Итак, оптимизация – это выбор наилучшего варианта из множества возможных. Если критерий выбора известен и вариантов немного, то решение может быть найдено путем перебора и сравнения всех вариантов. Однако часто бывает так, что число возможных вариантов настолько велико, что полный перебор практически невозможен. В таких случаях приходится формулировать задачу на языке математики и применять специальные методы поиска оптимального решения, т.е. методы оптимизации.

Все задачи оптимизации делятся на два больших класса:

1) задачи математического программирования;

2) задачи оптимального управления.

Первые называют еще статическими задачами, а вторые динамическими. Если говорить кратко, то различие между этими классами задач состоит в том, что в задаче математического программирования необходимо найти оптимальное число (в общем случае вектор), а в задаче оптимального управления – оптимальную функцию. С формально-математической точки зрения, это различие существенное, но в прикладном плане оно зачастую оказывается весьма условным.

Далее мы будем рассматривать задачи математического программирования. Во-первых, потому, что именно к ним сводится большинство реальных задач планирования и управления в экономике; а во-вторых, потому, что многие задачи оптимального управления могут быть сформулированы при условии, что временная характеристика дискретна, и сведены таким образом к задачам математического программирования.

В общем случае задача математического программирования состоит в нахождении вектора $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$, при котором достигается наибольшее или наименьшее значение непрерывной скалярной функции $f(x)$, при условии, что $x \in M$, где M – допустимая область, представляющая собой некоторое подмножество n-мерного евклидова пространства R^n.

Математическая форма записи этой задачи (для определенности сформулируем ее как задачу максимизации) такова: $\max\limits_{x \in M} f(x)$.

Функцию $f(x)$ называют целевой, а условия, описывающие множество M, – системой ограничений. В зависимости от вида этой функции и свойств допустимой области M задача математического программирования относится к тому или иному классу. Существуют различные принципы классификации задач математического программирования.

Наиболее важный классификационный признак – выпуклость. По этому признаку все задачи математического программирования разделяются на выпуклые и невыпуклые.

Определение. Задача математического программирования называется выпуклой, если состоит в максимизации (минимизации) выпуклой вверх (вниз) целевой функции на выпуклом множестве, в противном случае задача является невыпуклой.

Выпуклые задачи занимают особое место среди прочих задач математического программирования. Чтобы решить задачу $\max\limits_{x \in M} f(x)$, нужно найти все точки локальных максимумов, а затем, сравнив значения целевой функции в них, определить точку глобального максимума. В общем случае это очень сложная задача, поскольку локальных максимумов может быть много и поиск каждого из них может быть проблематичен. Однако если задача является выпуклой, то ситуация существенно упрощается.

Линейное программирование принято рассматривать как самостоятельный раздел математического программирования ввиду той особой роли, которую оно играет в экономической теории и практике.

Линейное программирование имеет развитую теорию. Существует много эффективных методов решения задач линейного программирования. Кроме того, существуют приемы, позволяющие расширить область применения методов решения задач линейного программирования. Некоторые задачи математического программирования, формально не относящиеся к линейным, могут быть преобразованы и решены методами, используемыми для решения линейных задач. Это относится, например, к задачам дробно-линейного программирования.

Важную роль в теории и практике математического программирования играют также задачи целочисленного (дискретного) программирования.

Определение. *Если на переменные задачи* $\max\limits_{x \in M} f(x)$ *накладывается условие целочисленности, то она называется задачей целочисленного программирования.*

В экономике большое число задач носит целочисленный характер. Это связано с физической неделимостью многих объектов расчета. Но интерес к целочисленному программированию обусловлен еще и тем, что многие нелинейные невыпуклые задачи могут быть сведены к задачам линейного программирования с дополнительным требованием целочисленности. Теория целочисленного программирования используется также для разработки методов решения комбинаторных задач, например для составления расписаний.

Перейдем к рассмотрению методов решения задач математического программирования. Методы, которые применяют для решения задач математического программирования, не менее разнообразны, чем модели. Как правило, метод решения определенного класса задач имеет несколько модификаций. Например, для решения задач линейного программирования используют симплекс-метод. Кроме простого симплекс-метода, существуют еще симплекс-метод с обратной матрицей, двойственный симплекс-метод, метод последовательного сокращения невязок и ряд других модификаций.

Вместе с тем между моделями и методами нет взаимно однозначного соответствия. Одна и та же задача может решаться разными методами, и один и тот же метод может быть использован для решения задач, относящихся к разным категориям.

Несмотря на разнообразие, все методы решения задач математического программирования имеют некоторые общие черты. Во-первых, практически все они являются численными. То есть представляют собой алгоритмы, ориентированные на компьютерную реализацию. Во-вторых, любой алгоритм, как бы он ни был сложен или оригинален, представляет собой реализацию одного из трех основных принципов:

- последовательное приближение;
- последовательный анализ вариантов;

• случайный поиск.

Большинство методов решения задач математического программирования основаны на принципе последовательного приближения: в некоторой точке пространства переменных определяется допустимое направление возрастания (или убывания – в зависимости от постановки задачи) целевой функции и делается шаг в этом направлении. Затем анализируется результат, т.е. проверяется, не является ли новая точка искомым решением. Если нет, то вся процедура повторяется вновь. По этому принципу построены, например, градиентные методы, а также один из наиболее часто применяемых и эффективных методов математического программирования – симплексный метод. Как правило, методы этой группы очень эффективны. Недостаток этих методов состоит в том, что они могут найти только локальный экстремум. Если задача невыпуклая (многоэкстремальная), то мы не будем иметь гарантию, что найденное таким способом решение действительно оптимально.

Другую группу составляют методы последовательного анализа вариантов. Сюда относятся такие известные методы, как динамическое программирование, метод ветвей и границ и ряд других. Содержанием этих методов является построение правил отбраковки подмножеств допустимых вариантов, среди которых не может содержаться оптимального решения. Сама эта процедура, как правило, существенно учитывает специфику задачи. Поэтому здесь трудно разработать стандартные алгоритмы, которые могли бы применяться для решения широкого круга прикладных задач. Но зато эти методы могут быть использованы для решения невыпуклых и комбинаторных задач.

Еще один возможный принцип, лежащий в основе методов решения задач математического программирования, – случайный поиск: формируется некоторый случайный вариант решения (для этого используются компьютерные программы, генерирующие псевдослучайные числа) и вычисляется соответствующее значение целевой функции. Новый вариант сравнивается с лучшим, из ранее достигнутых. Если сравнение в пользу нового варианта, то он запоминается вместо того, который был раньше, и процедура повторяется. Эффективность метода определяется скоростью, с которой компьютер генерирует и оценивает варианты. А это обычно происходит очень быстро. Кроме того, сама процедура генерирования вариантов может быть не совсем случайной, а лишь носить элемент случайности. Но, разумеется, гарантии нахождения оптимума нет. Поэтому эти методы применяют лишь тогда, когда нет более надежных и эффективных; а также в тех нередких на практике случаях, когда нужно найти не обязательно оптимальный, а хотя бы достаточно хороший результат.

3. Взаимосвязь понятий оптимального решения в разделах анализа, прикладной математики и в предметных областях

Далее перейдем ко второму классу задач – задачам оптимального управления. Оптимальное управление – это задача проектирования системы, обеспечивающей для заданного объекта управления или процесса закон управления или управляющую последовательность воздействий, обеспечивающих максимум или минимум заданной совокупности критериев качества системы.

При оптимальном управлении иерархическими многоуровневыми системами, например, крупными химическими производствами, металлургическими и энергетическими комплексами, применяются многоцелевые и многоуровневые иерархические системы оптимального управления. В математическую модель вводятся критерии качества управления для каждого уровня управления и для всей системы в целом, а также координация действий между уровнями управления.

Если управляемый объект или процесс является детерминированным, то для его описания используются *дифференциальные уравнения*. Наиболее часто используются обыкновенные дифференциальные уравнения вида $\dot{x}(t)=a\left[x(t),u(t),t\right]$, где $x(t)$ – функция описывающая систему, $u(t)$ – управление как функция времени, t – время. В более сложных математических моделях (для систем с распределёнными параметрами) для описания объекта используются дифференциальные уравнения в частных производных. Если управляемый объект является стохастическим, то для его описания используются стохастические дифференциальные уравнения.

Если решение поставленной задачи оптимального управления не является непрерывно зависящим от исходных данных (некорректная задача), то такая задача решается специальными численными методами.

Система оптимального управления, способная накапливать опыт и улучшать на этой основе свою работу, называется обучающейся системой оптимального управления.

Иногда (например, при управлении сложными объектами, такими как доменная печь в металлургии или при анализе экономической информации) в исходных данных и знаниях об управляемом объекте при постановке задачи оптимального управления содержится неопределённая или нечёткая информация, которая не может быть обработана традиционными количественными методами. В таких случаях можно использовать алгоритмы оптимального управления на основе математической теории нечётких множеств (Нечёткое управление). Используемые понятия и знания преобразуются в нечёткую форму, определяются нечёткие правила вывода принимаемых решений, затем производится обратное преобразование нечётких принятых решений в физические управляющие переменные.

В оптимальном управлении можно выделить следующую структуру методов и разделов:

1) Оптимальное управление детерминированными системами:

а) Системы с обыкновенными параметрами:

– задача оптимального управления;

– вариационное исчисление;

– принцип максимума Понтрягина;

– метод динамического программирования;

– достаточные условия оптимальности;

б) оптимальное управление системами с распределёнными параметрами:

– задача оптимального управления

– принцип максимума для систем с распределёнными параметрами

2) Оптимальное управление стохастическими системами.

Вопросы для самоподготовки

1. Понятие оптимизация и оптимального решения.
2. Классификация задач оптимизации.
3. Условия применимости методов оптимизации в виде задач линейного программирования и возможности данного подхода.
4. В чем заключается существенное отличие задач линейного программирования от задач оптимального управления?

Практическое занятие № 2
МЕТОДЫ ОПТИМИЗАЦИИ

Цель занятия: ознакомиться с классификацией объектов и методов оптимизации.

1. Роль методов оптимизации

Важнейшими средствами решения задач исследования, проектирования и управления технологическими процессами и системами на всех стадиях жизненного цикла являются методы математического моделирования и оптимизации.

Математическое моделирование – это процесс исследования свойств объекта на его математической модели.

Математическая модель – это отображение интересующих исследователя свойств объекта, представленное в математической форме.

Оптимизация – получение наилучших результатов в заданных условиях.

2. Объекты оптимизации и критерии оптимальности

В общем случае, задача оптимизации ставится следующим образом. Для некоторого объекта (процесса) необходимо найти наилучшие решения внутри заданных ограничений.

Эта задача требует наличия следующих элементов:

– математической модели объекта оптимизации

– ресурсов оптимизации (степеней свободы)

– критерия оптимизации

– ограничений

1) Наличие объекта оптимизации

В качестве объекта оптимизации рассматривается математическая модель реального объекта.

При формировании модели следует учитывать только важнейшие характеристики системы. Модель должна быть настолько детализирована, насколько это необходимо для целей исследования, для которого её создали. Полезно использовать метод постепенного совершенствования модели и методов оптимизации. Начав с самой простой модели, её последовательно доводят до такого уровня сложности, когда точность полученного значения оптимума соответствует точности используемой в модели информации.

2) Наличие ресурсов оптимизации

Должна быть возможность изменения значений некоторых параметров объекта оптимизации.

Для этого объект должен обладать определенными степенями свободы – управляющими воздействиями (их называют независимыми, управляющими, варьируемыми, поисковыми, оптимизирующими параметрами или переменными).

3) Наличие цели оптимизации – критерия оптимизации

Критерий оптимизации (эффективности) характеризует степень приспособления объекта к выполнению поставленных перед нею задач. Он должен иметь количественную оценку. Различают экономические и технологические критерии.

Экономические критерии: себестоимость, прибыль, приведённый доход, приведённые затраты и др.

Технологические критерии: конверсия, селективность, качество продукции, отбор от потенциала, термодинамический к.п.д. и др. показатели.

4) Учет ограничений

Ограничения в задаче оптимизации накладываются из технологических (условия физической реализуемости процесса, условия пожаровзрывоопасности и др.), так и экологических (качество продукции, выброс загрязняющих веществ в атмосферу и водоемы) и экономических (к примеру производительность, себестоимость, прибыль) соображений.

3. Формулировка и классификация задач математического программирования

Формулировка и классификация задач математического программирования на примере задач оптимизации, решаемых на каждой стадии жизненного цикла химического предприятия

Предпроектные НИР. Построение математической модели исследуемого процесса и использование методов оптимизации для решения «обратных» задач, которые заключаются в идентификации параметров математических моделей исследуемых процессов, обеспечивающих адекватность математической модели исследуемого процесса его оригиналу. На адекватной модели процесса с использованием методов оптимизации ищутся условия введения процесса, при которых некоторый критерий эффективности принимает экстремальное значение (максимальная производительность, конверсия, селективность, качество разделения, отбор от потенциала и др.).

Проектирование объекта. При проектировании оптимальных химико-технологических процессов и систем решается задача поиска компромисса между капитальными и энергетическими затратами, который обеспечивает минимальные суммарные приведенные капитальные и эксплуатационные затраты.

Задача проектирования (синтеза) оптимальных химико-технологических систем является многовариантной. Проектируемая система может иметь различное топологическое и аппаратурное оформление. Задача проектировщика заключается в выборе из множества технологических схем наилучшей, с точки зрения принятого критерия оптимальности.

Перечисленные задачи, как правило, решаются с применением методов нелинейного непрерывного и дискретного математического программирования.

Функционирование объекта. При функционировании действующих химических производств важно найти и обеспечить такие режимы работы, при которых выполняются условия регламента и критерий оптимальности (производительность, затраты материальных и энергетических ресурсов, прибыль и др.) принимает минимальное значение.

Вследствие нелинейности технологических процессов и математических моделей, их описывающих, эти задачи решаются с применением методов нелинейного программирования.

Если математическая модель линейная, то для оптимизации применяются методы линейного программирования.

4. Математическое программирование: качество системы, целевая функция, факторное пространство

Для решения задачи оптимального управления строится математическая модель управляемого объекта или процесса, описывающая его поведение с течением времени под влиянием управляющих воздействий и собственного текущего состояния. Математическая модель для задачи оптимального управления включает в себя: формулировку цели управления, выраженную через критерий качества управления; определение дифференциальных или разностных уравнений, описывающих возможные способы движения объекта управления; определение ограничений на используемые ресурсы в виде уравнений или неравенств.

Все задачи оптимального управления можно рассматривать как задачи математического программирования и в таком виде решать их численными методами.

Целевая функция – вещественная или целочисленная функция нескольких переменных, подлежащая оптимизации (минимизации или максимизации) в целях решения некоторой оптимизационной задачи.

Для грамотной постановки целевой функции и определении ограничений, накладываемых на математическую модель процесса, стоит сказать об еще одном таком важном понятии как факторное пространство.

Факторное пространство – анализ факторный – группа методов исследования структуры и снижения размерности пространства переменных. Модель А.Ф. предполагает, что значение любой измеряемой переменной зависит от небольшого числа латентных (скрытых) факторов. Основной целью анализа является определение латентных факторов по результатам реальных измерений и снижение размерности за счет замены набора исходных переменных выделенными факторами. В большинстве случаев предполагается, что факторы статистически независимы, т.е. не коррелируют друг с другом.

Основными этапами анализа являются первоначальное выделение факторов, вращение факторной структуры, ее интерпретация и факторное шкалирование. Первоначальное выделение факторов осуществляется методами собственно анализа, либо методом главных компонент. На этом этапе определяются также размерность факторного пространства, факторная структура, информативность каждого фактора и структуры в целом. Факторная структура представляется в виде матрицы факторных нагрузок.

Всегда необходимо стремиться к снижению мерности факторного пространства до 3–5. Снижение мерности факторного пространства достигается за счет более полного использования априорной информации по построенным аналогичным сооружениям. Таким образом, при поиске оптимальных конструкций роль априорной информации (практического опыта и опыта инженера) очень велика, так как позволяет выявить минимум основных факторов. Все факторы учесть невозможно, поэтому учитывают только основные факторы, влияние которых на стоимость и работоспособность конструкции в конкретных условиях строительства существенно.

5. Математическое программирование как наука о методах отыскания экстремальных значений качества на допустимом множестве

Математическое программирование – это область математики, разрабатывающая теорию, численные методы решения многомерных задач с ограничениями. В отличие от классической математики, математическое программирование занимается математическими методами решения задач нахождения наилучших вариантов из всех возможных.

В процессе проектирования ставится обычно задача определения наилучших, в некотором смысле, структуры или значений параметров объектов. Такая задача называется оптимизационной. Если оптимизация связана с расчётом оптимальных значений параметров при заданной структуре объекта, то она называется параметрической оптимизацией. Задача выбора оптимальной структуры является структурной оптимизацией.

Стандартная математическая задача оптимизации формулируется таким образом. Среди элементов χ, образующих множества X, найти такой элемент χ^*, который доставляет минимальное значение $f(\chi^*)$ заданной функции $f(\chi)$. Для того, чтобы корректно поставить задачу оптимизации, необходимо задать:

1. Допустимое множество – множество

$$X = \left\{ \vec{x} \middle| g\left(\vec{x}_i\right) \le 0, i = 1,...,m \right\} \subset R^n;$$

2. Целевую функцию — отображение $f : X \to R$;

3. Критерий поиска (max или min).

Тогда решить задачу $f(x) \to \min\limits_{\vec{x} \in X}$ означает одно из:

1. Показать, что $X = \varnothing$.

2. Показать, что целевая функция $f(\vec{x})$ не ограничена снизу.

Найти $\vec{x}^* \in X \quad f(\vec{x}^*) = \min\limits_{\vec{x} \in X} f(\vec{x})$.

Если не существует $\vec{x}^*$, то найти $\inf\limits_{\vec{x} \in X} f(\vec{x})$.

Если минимизируемая функция не является выпуклой, то часто ограничиваются поиском локальных минимумов и максимумов: точек x_0 таких, что всюду в некоторой их окрестности $f(x) \geq f(x_0)$ для минимума и $f(x) \leq f(x_0)$ для максимума.

Если допустимое множество $X = R^n$, то такая задача называется задачей безусловной оптимизации, в противном случае – задачей условной оптимизации.

Вопросы для самоподготовки

1. Назовите все необходимые объекты для формулировки задачи оптимизации.

2. Назовите определение целевой функции. Объясните основную идею факторного анализа.

3. Как вы понимаете предложение «Математическое программирование как наука о методах отыскания экстремальных значений качества на допустимом множестве» .

Практическое занятие № 3
ВВЕДЕНИЕ В ЛИНЕЙНОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ. ОБЩАЯ, КАНОНИЧЕСКАЯ И СТАНДАРТНАЯ ЗАДАЧИ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ (ЛП)

Цель занятия: ознакомить с примерами практических задач линейного программирования и моделями линейного программирования с двумя переменными.

1. Практические задачи, приводящие к необходимости отыскания экстремума линейной функции на множестве, ограниченном гиперплоскостями

1.1. Задача об использовании сырья

При производстве n видов продукции используется m видов сырья. Известны запасы сырья каждого вида – b_i $(i = 1, 2, \ldots, m)$; количество единиц i-го сырья, затрачиваемого на изготовление единицы j-й продукции – a_{ij} $(i = 1, 2, \ldots, m; j = 1, 2, \ldots, n)$; прибыль, получаемая при реализации единицы j-й продукции – c_j $(j = 1, 2, \ldots, n)$.

Требуется составить план выпуска продукции, обеспечивающий максимальную прибыль.

Задача (модель) линейного программирования. Пусть x_j – количество единиц j-й продукции, которое необходимо произвести. Тогда, учитывая количество единиц сырья, затрачиваемого на изготовление единицы продукции, а также запасы сырья, получим систему ограничений:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \le b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \le b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \le b_m, \end{cases}$$

$$x_j \ge 0 \ (j = 1, 2, \ldots, n).$$

Получение максимальной прибыли при реализации продукции выразим как функцию $Z = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n$, максимальное значение которой надо найти при данных ограничениях.

1.2. Задача составления рациона

При откорме каждое животное ежедневно должно получить m видов питательных веществ. Для составления рациона используют n видов кормов. Известны количество питательных веществ каждого вида, не менее которого животное должно получить ежедневно – b_i $(i=1,2,\ldots,m)$; количество единиц питательного вещества, содержащегося в единице j-го корма – a_{ij} $(i=1,2,\ldots,m; j=1,2,\ldots,n)$; стоимость единицы j-го корма – c_j $(j=1,2,\ldots,n)$.

Требуется составить дневной рацион нужной питательности, затраты на который минимальны.

Задача (модель) линейного программирования. Пусть x_j – количество единиц j-го корма в дневном рационе. Тогда, учитывая количество единиц питательного вещества в единице корма и условие, что дневной рацион удовлетворяет требуемой питательности только в случае, если количество единиц питательных веществ не менее предусмотренного, получим систему ограничений:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \le b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \le b_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \le b_m, \end{cases}$$

$$x_j \ge 0 \ (j=1,2,\ldots,n).$$

Получение минимальных затрат на дневной рацион нужной питательности выразим как функцию $Z = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n$, минимальное значение которой нужно найти при данных ограничениях.

1.3. Задача об использовании посевных площадей

Для засева n сельскохозяйственных культур имеется m земельных угодий (полей).

Известны площадь каждого поля – a_i $(i=1,2,\ldots,m)$, план производства каждой сельскохозяйственной культуры – b_j $(j=1,2,\ldots,n)$, урожайность на i-м поле j-й культуры – a_{ij} $(i=1,2,\ldots,m; j=1,2,\ldots,n)$, закупочные цены на каждую сельскохозяйственную культуру – c_j $(j=1,2,\ldots,n)$.

Необходимо составить план засева посевных площадей, обеспечивающий максимальный доход от продажи сельскохозяйственной продукции.

Задача (модель) линейного программирования. Пусть x_{ij} – площадь на i-м поле, занятая j-й культурой. Тогда, учитывая урожайность каждой культуры на каждом поле и заданный план производства, получим систему ограничений:

$$\begin{cases} a_{11}x_{11} + a_{21}x_{21} + \dots + a_{m1}x_{m1} \ge b_1, \\ a_{12}x_{12} + a_{22}x_{22} + \dots + a_{m2}x_{m2} \ge b_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{1n}x_{1n} + a_{2n}x_{2n} + \dots + a_{mn}x_{mn} \ge b_n, \\ x_{11} + x_{12} + \dots + x_{1n} = a_1, \\ x_{21} + x_{22} + \dots + x_{2n} = a_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ x_{m1} + x_{m2} + \dots + x_{mn} = a_m, \end{cases}$$

$$x_{ij} \ge 0 \ (i = 1, 2, \dots, m; j = 1, 2, \dots, n).$$

Получение максимального дохода от продажи сельскохозяйственной продукции выразим как функцию

$$Z = c_1(a_{11}x_1 + a_{21}x_{21} + \dots + a_{m1}x_{m1}) +$$

$$+c_2(a_{12}x_{12} + a_{22}x_{22} + \dots + a_{m2}x_{m2}) + \dots + c_n(a_{1n}x_1 + a_{2n}x_{2n} + \dots + a_{mn}x_{mn}),$$

максимальное значение которой надо найти при данных ограничениях.

В каждой из рассмотренных задач переменные $x_1, x_2, \dots, x_n$ входят в функцию Z и в систему ограничений в первой степени, а показатели a_{ij}, b_i, c_j $(i = 1, 2, \dots, m; j = 1, 2, \dots, n)$ в первых двух задачах, a_{ij}, a_i, b_j, c_j $(i = 1, 2, \dots, m;\ j = 1, 2, \dots, n)$ в третьей задаче являются постоянными, поэтому рассмотренные задачи представляют собой типичные задачи линейного программирования.

Построенная линейная функция Z выражает конечную цель оптимального планирования, поэтому называется ***целевой функцией*** (***или линейной формой***). Эта функция совместно с системой ограничений образует математическую модель.

Математическая модель – это приближенное описание какого-либо класса явлений, выраженное с помощью математической символики.

2. Основные элементы задачи линейного программирования

В общем случае задача линейного программирования сводится к отысканию такого решения $X = (x_1; x_2; \dots; x_n)$ системы m линейных уравнений с n переменными (***системы ограничений***)

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m, \end{cases} \tag{1}$$

$$x_{ij} \geq 0 \ \left(j = 1, 2, \ldots, n\right),$$

при котором ***целевая функция*** (линейная форма) $Z = c_1x_1 + c_2x_2 + \ + \ldots + c_nx_n$ принимает оптимальное (максимальное или минимальное) значение.

Всякое неотрицательное решение системы (1) называется ***допустимым решением***, или ***планом***.

Решение $X = (x_1; x_2; \ldots; x_n)$, при котором функция Z обращается в оптимум, называется ***оптимальным решением*** или ***оптимальным планом***. В отыскании этого оптимального решения и состоит задача линейного программирования.

Как правило, оптимальное решение единственно. Однако это не всегда так. Возможны случаи, когда оптимальных решений оказывается бесконечное множество.

В задачах линейного программирования коэффициенты a_{ij}, b_j, c_j – заданные постоянные величины, а число уравнений меньше числа переменных, т.е. $m<n$ (согласно теореме Кронекера – Капелли для совместности системы линейных алгебраических уравнений необходимо и достаточно, чтобы ранг матрицы системы равнялся рангу расширенной матрицы этой системы. Этот общий ранг не может превосходить числа n неизвестных. При $m = n$ решение системы единственно).

Без ограничения общности можно считать, что все правые части системы неотрицательны, т.е. $b_i \geq 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, m)$. Если в некоторых уравнениях системы это условие нарушено, то можно умножить обе части таких уравнений на –1.

В более короткой форме задача линейного программирования записывается так: найти решение $X = (x_1; x_2; \ldots; x_n)$ системы ограничений

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i \left(i = 1, 2, \ldots, m\right),$$

приводящее к оптимуму линейную форму

$$Z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

при условии, что $x_j \geq 0 \ (j = 1, 2, \ldots, n)$.

Эта же система может быть записана в ***векторной форме***:

$$A_1x_1 + A_2x_2 + \ldots + A_nx_n = B, \;\; Z = C \cdot X,$$

где символ « $\cdot$ » – знак скалярного произведения

$$C = \left(c_1; c_2; \ldots; c_n\right), X = \left(x_1; x_2; \ldots; x_n\right),$$

$$A_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \cdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} a_{21} \\ a_{22} \\ \cdots \\ a_{m2} \end{pmatrix}, \ldots, A_n = \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \cdots \\ a_{mn} \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \cdots \\ b_m \end{pmatrix}.$$

Еще для записи системы ограничений используется ***матричная форма***: $Z = C \cdot X$ при ограничениях $AX = B$, где

$$C = (c_1 \; c_2 \ldots c_n) \text{ (матрица-строка)},$$

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdots \\ x_n \end{pmatrix} \left(\text{матрица-столбец}\right), \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \cdots \\ b_m \end{pmatrix} \left(\text{матрица-столбец}\right),$$

$$A = \left(a_{ij}\right) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \ldots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \cdots a_{2n} \\ \vdots & \vdots \;\; \ddots \;\; \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} \ldots a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Матрицу A называют матрицей условий задач, B – матрицей ограничений.

Задача линейного программирования, система ограничений которой задана в виде системы уравнений (1), называется ***канонической***.

В большинстве задач ограничения задаются не в виде системы уравнений, а в виде системы линейных неравенств:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \le b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \le b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \le b_m \end{cases} \qquad (2)$$

или

$$
\begin{cases}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \geq b_1, \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \geq b_2, \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \geq b_m.
\end{cases} \tag{3}
$$

Наконец, система ограничений может быть смешанной: часть ограничений – неравенства типа (2), часть – типа (3), часть задана в виде уравнений.

Однако любую систему ограничений можно привести к системе уравнений вида (1). Для этого достаточно к левой части каждого неравенства (2) прибавить (отнять, если система задана в виде (3)) какое-то неотрицательное число – добавочную переменную, чтобы каждое неравенство обратилось в уравнение:

$$
\begin{cases}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n + x_{n+1} = b_1, \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n + x_{n+2} = b_2, \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n + x_{n+m} = b_m,
\end{cases}
$$

где $x_{n+i} \geq 0 \ (i = 1, 2, \ldots, m)$.

В результате вместо системы неравенств (2) получили систему ограничений, аналогичную системе (1).

В случае смешанных систем ограничений число добавочных переменных равно $(m - t)$, где m – общее число ограничений системы, t – число ограничений в виде уравнений.

Таким образом, как бы ни были первоначально заданы ограничения задачи линейного программирования, их всегда можно привести к системе линейных уравнений, используя для этой цели добавочные переменные, т.е. свести задачу к канонической.

Будем считать, что все m уравнений системы (1) линейно независимы. В противном случае из системы можно исключить часть уравнений так, чтобы уравнения системы стали линейно независимыми.

Совместная система m линейных уравнений с n переменными $(m < n)$ имеет бесконечное множество решений, в том числе и допустимых (не имеющих отрицательных компонент).

Допустимым базисным решением является решение, содержащее m неотрицательных основных (базисных) переменных и $(n - m)$ неосновных (небазисных, или свободных). Неосновные переменные в базисном решении равны нулю.

Основные переменные, как правило, отличны от нуля, т.е. являются положительными числами.

Если хотя бы одна из основных переменных принимает нулевое значение, то соответствующее базисное решение называется ***вырожденным***.

Любое неотрицательное базисное решение системы ограничений задачи линейного программирования, заданной в канонической форме, называется ***опорным решением*** или ***опорным планом***.

Опорный план называется ***невырожденным***, если он содержит m положительных компонент, в противном случае опорный план называется ***вырожденным***.

3. Понятие допустимости решения

Теорема 1. *Множество всех допустимых решений системы ограничений задачи линейного программирования является выпуклым.*

Доказательство. Необходимо показать, что выпуклая комбинация двух допустимых решений задачи линейного программирования также является ее допустимым решением.

Предположим, что задача имеет по крайней мере два допустимых решения:

$$X^{(1)} = \left(x_1^{(1)}; x_2^{(1)}; \cdots; x_n^{(1)}\right) \text{ и } X^{(2)} = \left(x_1^{(2)}; x_2^{(2)}; \cdots; x_n^{(2)}\right),$$

а условия заданы в матричной форме. Тогда $AX^{(1)} = B$, $AX^{(2)} = B$. Пусть $X = \alpha X^{(1)} + (1-\alpha)X^{(2)}$ при $0 \le \alpha \le 1$ – произвольная выпуклая комбинация $X^{(1)}$ и $X^{(2)}$. Покажем, что X также является решением системы ограничений:

$$AX = A\left[\alpha X^{(1)} + \left(1-\alpha\right)X^{(2)}\right] = \alpha AX^{(1)} + \left(1-\alpha\right)AX^{(2)} = \alpha B + B - \alpha B = B.$$

Так как компоненты $X = (x_1; x_2; \ldots; x_n)$ служат линейной комбинацией положительных компонент $X^{(1)}$ и $X^{(2)}$ с неотрицательными коэффициентами α и $(1-\alpha)$, то все эти компоненты неотрицательны, следовательно, $X = (x_1; x_2; \ldots; x_n)$ – допустимое решение задачи. Теорема доказана.

Множество решений задачи линейного программирования определяется конечной совокупностью линейных ограничений, поэтому такое множество геометрически представляет собой выпуклый многогранник или неограниченную многогранную область, за исключением тех случаев, когда система ограничений несовместна.

Теорема 2. *Если существует и притом единственное оптимальное решение задачи линейного программирования, то оно совпадает с одной из угловых точек множества допустимых решений.*

Доказательство. Пусть для некоторой задачи, в которой требуется найти максимум линейной формы Z, область допустимых решений есть выпуклый многогранник, имеющий s угловых точек $A_1, A_2, \ldots, A_s$, которым соответствует s векторов $X_1, X_2, \ldots, X_s$ (на рис. 3.1 приведен пример такого множества – пятиугольник $A_1A_2A_3A_4A_5$ на плоскости).

Обозначим искомое оптимальное решение через X_0, тогда по условию $Z(X_0) = Z_{\max}$, т.е. $Z(X_0) \geq Z(X_i)$, где X_i – любая точка области решений.

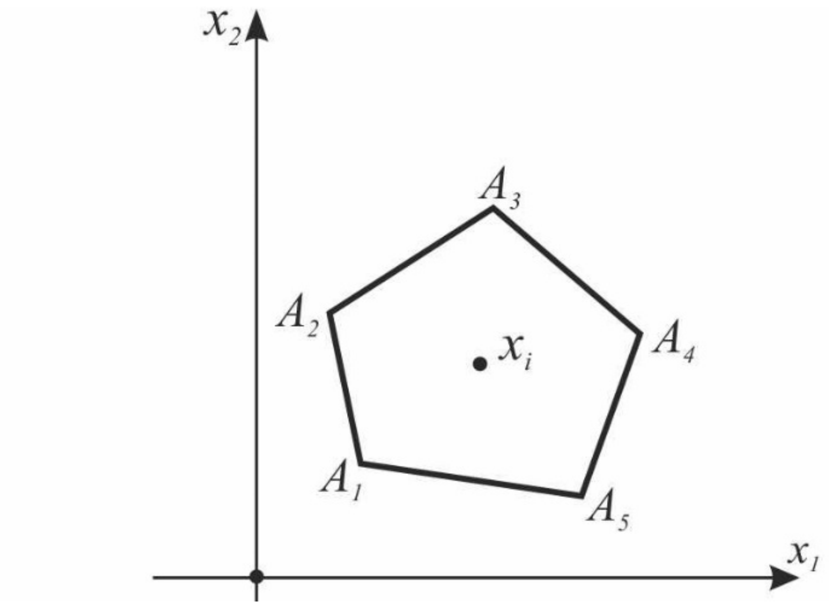


Рис. 3.1. Пример множества

Если X_0 совпадает с одной из угловых точек $A_1, A_2, \ldots, A_s$, то доказываемое утверждение выполнено.

Предположим, что X_0 не является угловой точкой. Тогда ее можно представить в виде выпуклой линейной комбинации угловых точек, т.е.

$$X_0 = \alpha_1 A_1 + \alpha_2 A_2 + \ldots + \alpha_s A_s,$$

где $\alpha_j \geq 0$ $(j = 1, 2, \ldots, s)$ и $\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_s = 1$.

Используя свойства линейных функций и рассматривая каждую точку A_j как соответствующий вектор X_j, функцию Z можно записать в виде

$$Z = Z(X_0) = Z(\alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2 + \ldots + \alpha_s X_s) =$$
$$= \alpha_1 Z(X_1) + \alpha_2 Z(X_2) + \ldots + \alpha_s Z(X_s).$$

Поскольку все $\alpha_j \geq 0$, сумма не уменьшится, если все $Z(X_j)$ $(j = 1, 2, \ldots, s)$ заменить максимальным из них. Пусть, например,

$$\max_j Z\left(x_j\right) = Z\left(x_3\right).$$

Учитывая, что $\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_s=1$, и заменяя все X_j на X_3, получим

$$Z(X_0)\le\alpha_1 Z(X_3)+\alpha_2 Z(X_3)+\ldots+\alpha_s Z(X_3)=$$
$$=(\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_s)Z(X_3)=Z(X_3)\,.$$

Так как, по предположению, $Z(X_0)\ge Z(X_i)$ для всех X_i из области решений, в частности и для всех угловых точек, то получим два неравенства $Z(X_0)\ge Z(X_3)$ и $Z(X_0)\le Z(X_3)$, из которых следует, что $Z(X_0)=Z(X_3)$. Таким образом, вектор X_3 (угловая точка A_3) является оптимальным решением.

С помощью очевидных изменений доказательство теоремы переносится и на тот случай, когда линейную форму нужно минимизировать.

Доказанная теорема позволяет сделать вывод, что поиски оптимального решения можно ограничить перебором конечного числа угловых точек.

Теорема 3. *Каждому допустимому базисному решению задачи линейного программирования (опорному плану) соответствует угловая точка области допустимых решений системы ограничений*.

Доказательство. Пусть $X=(x_1;x_2;\ldots;x_m;0;0;\ldots;0)$ – опорный план. Докажем, что вектор X соответствует угловой точке множества допустимых решений системы ограничений. При этом будем предполагать, что взятое базисное решение – невырожденное.

По определению базисного решения, векторы $A_1, A_2,\ldots, A_m$, соответствующие первым m компонентам, линейно независимы и образуют базис m-мерного пространства.

Предположим противное, т.е. допустим, что точка X не является угловой. Тогда ее можно представить как выпуклую комбинацию угловых точек, например, $X^{(1)}$ и $X^{(2)}$, т.е.

$$X=\alpha X^{(1)}+(1-\alpha)X^{(2)},$$

где $0\le\alpha\le1$.

Если $\alpha=0$, то $X=X^{(2)}$; если же $\alpha=1$, то $X=X^{(1)}$, тем самым теорема доказана. Рассмотрим случай, когда $\alpha\ne0$ и $\alpha\ne1$, т.е. $0<\alpha<1$. Так как первые m компонент вектора X положительны, а остальные $(n-m)$ равны нулю и $0<\alpha<1$, то угловые точки $X^{(1)}$ и $X^{(2)}$ принадлежат области допустимых решений, а все их компоненты, начиная с $(m+1)$-й, также равны нулю (это утверждение основано на определении суммы двух векторов и умножения вектора на число). Таким образом, можно записать

$$X^{(1)}=\left(x_1^{(1)};x_2^{(1)};\ldots;x_m^{(1)};0;0;\ldots;0\right),X^2=\left(x_1^{(2)};x_2^{(2)};\ldots;x_m^{(2)};0;0;\ldots;0\right).$$

Так как $X^{(1)}$ и $X^{(2)}$ являются решениями системы ограничений, которая в векторной форме имеет вид

$$A_1 x_1 + A_2 x_2 + \ldots + A_n x_n = B,$$

то, подставляя компоненты этих решений в векторное уравнение, получим:

$$A_1 x_1^{(1)} + A_2 x_2^{(1)} + \ldots A_m x_m^{(1)} = B,$$

$$A_1 x_1^{(2)} + A_2 x_2^{(2)} + \ldots A_m x_m^{(2)} = B.$$

Остальные $(n-m)$ слагаемых в векторном уравнении отсутствуют из-за равенства нулю всех компонент, начиная с $(m+1)$-й. Вектор $X = (x_1; x_2; \ldots; x_m; 0; 0; \ldots; 0)$ по условию также является решением системы ограничений, поэтому $A_1 x_1 + A_2 x_2 + \ldots + A_m x_m = B$. Вычтем из этого уравнения одно из ранее полученных, например первое:

$$A_1\left(x_1 - x_1^{(1)}\right) + A_2\left(x_2 - x_2^{(1)}\right) + \ldots + A_m\left(x_m - x_m^{(1)}\right) = 0.$$

Векторы $A_1, A_2, \ldots, A_m$ линейно независимы, поэтому их линейная комбинация равна нулю только в том случае, если все коэффициенты при них равны нулю, т.е.

$$x_1 - x_1^{(1)} = 0, x_2 - x_2^{(1)} = 0, \ldots, x_m - x_m^{(1)} = 0,$$

откуда

$$x_1 = x_1^{(1)}, x_2 = x_2^{(1)}, \ldots, x_m - x_m^{(1)}.$$

Следовательно, точка X совпадает с точкой $X^{(1)}$. То же самое можно доказать и для точки $X^{(2)}$ (если вместо первого уравнения вычесть второе).

Итак, X нельзя представить как выпуклую комбинацию двух угловых точек, следовательно, точка X сама является угловой.

Теорема 4 (обратная). *Каждой угловой точке множества допустимых решений системы ограничений соответствует опорный план*.

Доказательство. Пусть $X = (x_1; x_2; \ldots; x_m; \ldots; x_n)$ – угловая точка, не имеющая отрицательных компонент. Представим X как линейную комбинацию векторов $A_1, A_2, \ldots, A_n$, входящих в систему ограничений, т.е. векторов

$$A_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{pmatrix}, \ldots, A_n = \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix}$$

с положительными коэффициентами $x_1, x_2, \ldots, x_n$:

$$X = A_1 x_1 + A_2 x_2 + \ldots + A_n x_n.$$

Так как область решений есть многогранник m-мерного пространства, то в этой линейной комбинации только m коэффициентов при m линейно независимых векторах отличны от нуля, а остальные $(n-m)$ равны нулю. Для простоты предположим, что первые m компонент не равны нулю, тогда X можно представить в виде $X = A_1 x_1 + A_2 x_2 + \ldots + A_m x_m$, а $(x_1; x_2; \ldots; x_m; 0; 0; \ldots; 0)$ – компоненты исходной угловой точки.

Докажем линейную независимость векторов $A_1, A_2, \ldots, A_m$, соответствующих первым m переменным. Допустим, что эти векторы зависимы. Тогда можно найти такие постоянные $k_1, k_2, \ldots, k_m$, из которых не все равны нулю, чтобы выполнялось равенство

$$k_1 A_1 + k_2 A_2 + \ldots + k_m A_m = 0.$$

Умножив это равенство на $\pm\varepsilon$ и сложив с предыдущим, получим:

$$X = (x_1 + \varepsilon k_1) A_1 + (x_2 + \varepsilon k_2) A_2 + \ldots + (x_m + \varepsilon k_m) A_m;$$

$$X = (x_1 - \varepsilon k_1) A_1 + (x_2 - \varepsilon k_2) A_2 + \ldots + (x_m - \varepsilon k_m) A_m.$$

Возьмем ε таким, чтобы все множители при A_i $\left(i = 1, 2, \ldots, m\right)$ оставались положительными. Тогда векторы

$$X^{(1)} = (x_1 + \varepsilon k_1; x_2 + \varepsilon k_2; \ldots; x_m + \varepsilon k_m; 0; 0; \ldots; 0)$$

и

$$X^{(2)} = (x_1 - \varepsilon k_1; x_2 - \varepsilon k_2; \ldots; x_m - \varepsilon k_m; 0; 0; \ldots; 0)$$

также являются допустимыми базисными решениями. Исходную угловую точку $X = (x_1; x_2; \ldots; x_m; 0; 0; \ldots; 0)$ можно представить как выпуклую комбинацию векторов $X^{(1)}$ и $X^{(2)}$: $X = 0{,}5X^{(1)} + 0{,}5X^{(2)}$, что противоречит определению угловой точки. Это противоречие свидетельствует о том, что векторы $A_1, A_2, \ldots, A_m$ линейно независимы. Таким образом, угловая точка X имеет компоненты $(x_1; x_2; \ldots; x_m; 0; 0; \ldots; 0)$, что соответствует допустимому базисному решению.

Следствие. *Если существует и притом единственное оптимальное решение задачи линейного программирования, то оно совпадает с одним из опорных решений системы ограничений*.

Справедливость этого утверждения вытекает из теорем 2 и 4.

Итак, оптимум линейной формы следует искать среди конечного числа опорных решений.

4. Модели линейного программирования с двумя переменными

Примеры модели линейного программирования с двумя переменными в двух постановках: для максимума и минимума целевой функции.

Найти максимум функции $Z = x_1 - x_2$ при ограничениях

$$\begin{cases} -2x_1 + 3x_2 \le 12, \\ x_1 + x_2 \le 9, \\ 3x_1 - 5x_2 \le 3, \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0. \end{cases}$$

Найти минимум функции $Z = 2x_1 + x_2$ при ограничениях

$$\begin{cases} -2x_1 + 3x_2 \le 12, \\ x_1 + x_2 \le 9, \\ x_1 + 2x_2 \ge 10, \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0. \end{cases}$$

Вопросы для самоподготовки

1. Что представляет собой модель линейного программирования? Как Вы понимаете выражение: «Целевая функция как конечная цель оптимального планирования»?

2. Поясните, что означает опорное решение (опорный план) задачи линейного программирования?

3. Понятие выпуклости и его применение к задачам линейного программирования.

4. Составите математическую задачу линейного программирования для следующей задачи, представленной в экономической постановке. Фирма изготовляет два вида красок для наружных (A) и внутренних (B) работ. Для их производства используют исходные продукты: пигмент и олифу. Расходы исходных продуктов и максимальные суточные запасы указаны в табл. 3.1.

Таблица 3.1

Исходные данные

Исходный продукт	Затраты ресурса на единицу товара, денежных единиц		Суточный запас, т
	Краска *А*	Краска *Б*	6
Пигмент	2	1	12
Олифа	3	2	
Прибыль, денежных единиц	2	3	

Изучение рынка сбыта показало, что спрос на краску для внутренних B работ никогда не превышает 4 т. в сутки. Цена продажи 1 т. краски для наружных *A* работ – 2 ден.ед., для внутренних *B* работ – 3 ден.ед. Определить какое количество краски каждого вида должна производить фирма, чтобы доход от реализации продукции был максимальным.

5. Из пункта А в пункт Б ежедневно отправляются пассажирские и скорые поезда. В таблице 3.2 указаны наличный парк вагонов разных типов, из которых ежедневно можно комплектовать данные поезда, и количество пассажиров, вмещающихся в каждом из вагонов.

1) Определить оптимальные количества скорых и пассажирских поездов, при которых число перевозимых пассажиров достигает максимума.

2) Определить оптимальное число поездов (скорых и пассажирских), обеспечивающих максимальное количество перевозимых пассажиров, при условии, что в день железная дорога не может пропускать более шести пассажирских поездов.

Таблица 3.2

Исходные данные

Поезда	Багаж.	Почтов.	Плацк.	Купейный	Мягкий
Количество вагонов в скором поезде	1	1	5	6	3
Количество вагонов в пассажирском поезде	1	–	8	4	1
Число пассажиров	–	–	58	40	32
Парк вагонов	12	8	81	70	26

Практическое занятие № 4
ВВЕДЕНИЕ В ЛИНЕЙНОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

Цель занятия: овладеть навыками решения задач линейного программирования.

1. Графическое решение задачи линейного программирования

Графический метод решения задачи линейного программирования состоит из двух этапов:

1. Построение пространства допустимых решений, удовлетворяющих всем ограничениям модели.

2. Поиск оптимального решения среди всех точек пространства допустимых решений.

Применение графического метода удобнее рассмотреть на конкретных примерах в двух постановках: для максимума и минимума целевой функции.

Пример 1. Найти максимум функции $Z = x_1 - x_2$ при ограничениях

$$\begin{cases} -2x_1 + 3x_2 \le 12, \\ x_1 + x_2 \le 9, \\ 3x_1 - 5x_2 \le 3, \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0. \end{cases}$$

Изобразим область допустимых решений данной системы неравенств. Так, неравенство $-2x_1 + 3x_2 \le 12$ определяет ту часть полуплоскости, которой принадлежит начало координат, так как точка $(0;0)$ ему удовлетворяет. Построив решения остальных неравенств, получим выпуклый многоугольник $OABCD$, имеющий пять угловых точек: $O(0;0)$, $A(0;4)$, $B(3;6)$, $C(6;3)$, $D(1;0)$ (рис. 4.1).

Координаты точки B служат решением системы уравнений:

$$\begin{cases} -2x_1 + 3x_2 = 12, \\ x_1 + x_2 = 9; \end{cases}$$

точки A – решением системы:

$$\begin{cases} -2x_1 + 3x_2 = 12, \\ x_1 = 0; \end{cases}$$

точки C – решением системы:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 9, \\ 3x_1 - 5x_2 = 3; \end{cases}$$

точки D – решением системы:

$$\begin{cases} 3x_1 - 5x_2 = 3, \\ x_2 = 0. \end{cases}$$

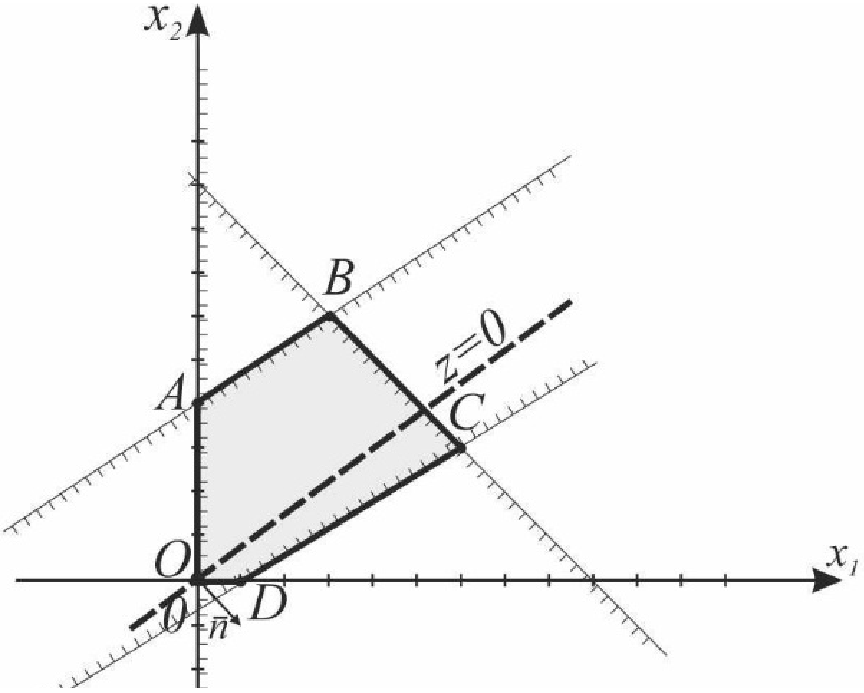


Рис. 4.1. Область допустимых решений

Множество допустимых решений в рассматриваемом примере выпукло. Требуется найти такую точку этого многоугольника, которая бы максимизировала линейную форму $Z = x_1 - x_2$, являющуюся линейной функцией координат точек на плоскости. Форму Z приравняем какой-то постоянной величине, т.е. $Z = \text{const} = a$.

Это приводит к уравнению $x_1 - x_2 = a$, которое является уравнением прямой на плоскости. Следовательно, прямая $x_1 - x_2 = a$ является множеством точек, в которых функция Z принимает значение, равное a. Меняя величину a, получим семейство параллельных прямых. Каждую из прямых этого семейства принято называть ***линией уровня*** (***линией равных значений функции***).

На рис. 4.1 построена линия уровня $x_1 - x_2 = 0$, соответствующая значению $Z = 0$. При переходе от одной линии уровня к другой значение функции Z изменяется. Из аналитической геометрии известно, что коэффициенты при переменных в уравнении прямой служат координатами вектора $\overline{n}$, перпендикулярного прямой. В данном случае $\overline{n} = (1;-1)$. Из рис. 4.1 видно, что значения функции Z возрастают при перемещении исходной линии уровня в направлении вектора $\overline{n}$, и максимальное значение линейной формы на многоугольнике решений будет достигнуто в точке $C(6;3)$, в которой линия уровня при дальнейшем передвижении выйдет из этого многоугольника. Подставив координаты точки C в выражение Z, найдем максимальное значение функции $Z_{\max} = Z(C) = 6 - 3 = 3$.

Если бы требовалось найти минимум функции Z, то исходную линию уровня следовало бы передвигать в сторону, противоположную $\overline{n}$.

До сих пор полученные выводы были основаны на том, что множество решений задач линейного программирования есть замкнутый многоугольник, система ограничений совместна и линейно независима (нет лишних ограничений) и оптимальное решение единственно.

Рассмотрим такие примеры, когда эти требования нарушаются.

Пример 2. Найти максимум функции $Z = x_1 + x_2$ при ограничениях

$$\begin{cases} -2x_1 + 3x_2 \le 12, \\ 3x_1 - 5x_2 \le 3, \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0. \end{cases}$$

На рис. 4.2 изображены: неограниченная многогранная область решений данной системы ограничений-неравенств, линия уровня $x_1 + x_2 = 2$, вектор $\overline{n} = (1;1)$. Функция Z может неограниченно возрастать при заданной системе ограничений, поэтому $Z_{\max} = \infty$..

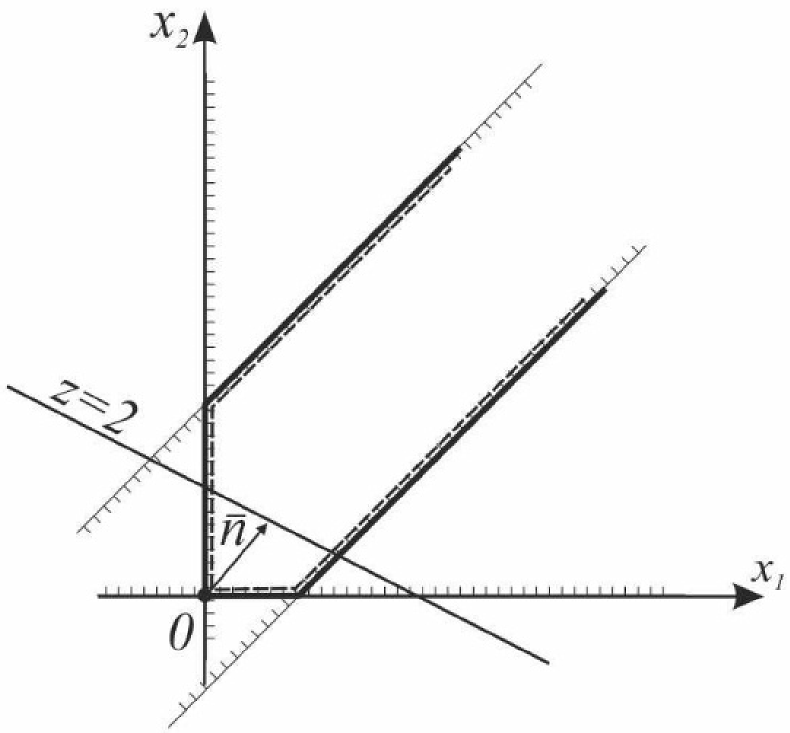


Рис. 4.2. Неограниченная многогранная область решений

Пример 3. Найти максимум функции $Z = x_1 - x_2$ при ограничениях

$$\begin{cases} -2x_1 + 3x_2 \le 12, \\ x_1 + x_2 \le 9, \\ 3x_1 - 5x_2 \ge 3, \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0. \end{cases}$$

Изображенная на рис. 4.3 область не содержит ни одной общей точки, которая удовлетворяла бы всем неравенствам системы ограничений, т.е. система ограничений противоречива и не может содержать ни одного решения, в том числе и оптимального.

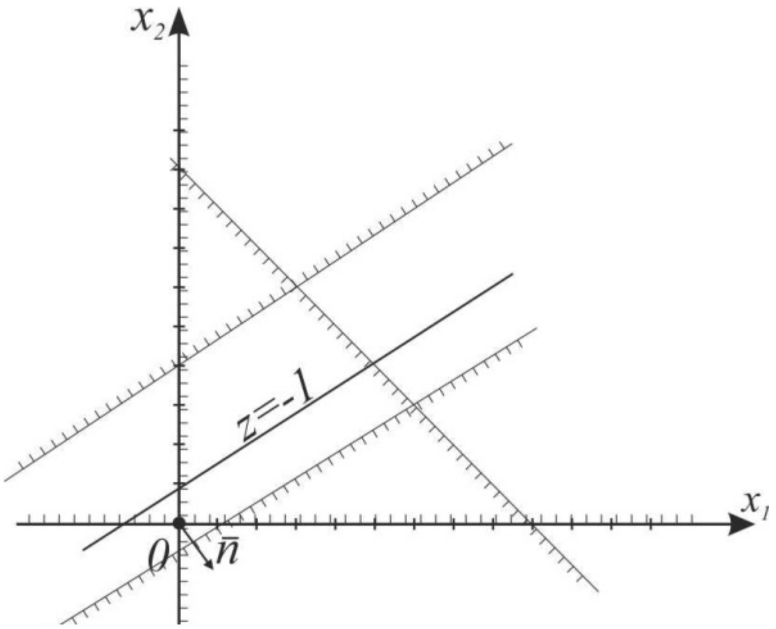


Рис. 4.3. Область решений

Пример 4. Найти максимум функции $\mathrm{Z} = x_1 - x_2$ при ограничениях

$$\begin{cases} -2x_1 + 3x_2 \le 12, \\ x_1 + x_2 \le 9, \\ 3x_1 - 5x_2 \ge 3, \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0. \end{cases}$$

Всем неравенствам системы ограничений удовлетворяют точки треугольника *ABC*, который и является областью решений (рис. 4.4). Максимальное значение $Z_{\max} = Z(C) = 9$. При построении треугольника *ABC* не использовали прямые $-2x_1 + 3x_2 = 12$ и $x_2 = 0$, хотя все точки этого треугольника удовлетворяют неравенствам $-2x_1 + 3x_2 \le 12$ и $x_2 \ge 0$. Таким образом, эти неравенства лишние в системе ограничений.

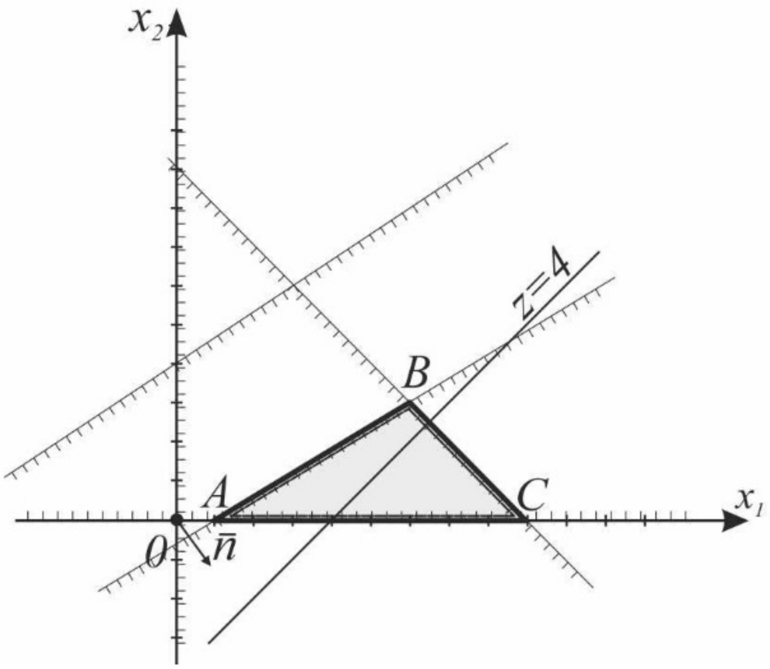


Рис. 4.4. Область решений (пример 4)

Пример 5. Найти максимум функции $Z = x_1 - x_2$ при ограничениях

$$\begin{cases} -2x_1 + 3x_2 \le 12, \\ x_1 + x_2 \le 9, \\ x_1 - x_2 \le 3, \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0. \end{cases}$$

На рис. 4.5 изображены область решений системы ограничений и линия уровня $Z = -1$. Если передвигать линию уровня параллельно исходной в направлении вектора $\bar{n} = (1;-1)$, то она выйдет из области решений не в одной точке, а сольется с прямой CD ($C(6;3), D(3;0)$), которая является граничной линией области решений. Все точки отрезка CD дают одно и то же значение функции Z, которое и служит ее оптимальным значением $Z_{\max} = 3$.

Этот пример показывает, что в некоторых случаях (весьма редких) единственность оптимального решения нарушается.

Пример 6. Найти минимум функции $Z = 2x_1 + x_2$ при ограничениях

$$\begin{cases} -2x_1 + 3x_2 \le 12, \\ x_1 + x_2 \le 9, \\ x_1 + 2x_2 \ge 10, \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0. \end{cases}$$

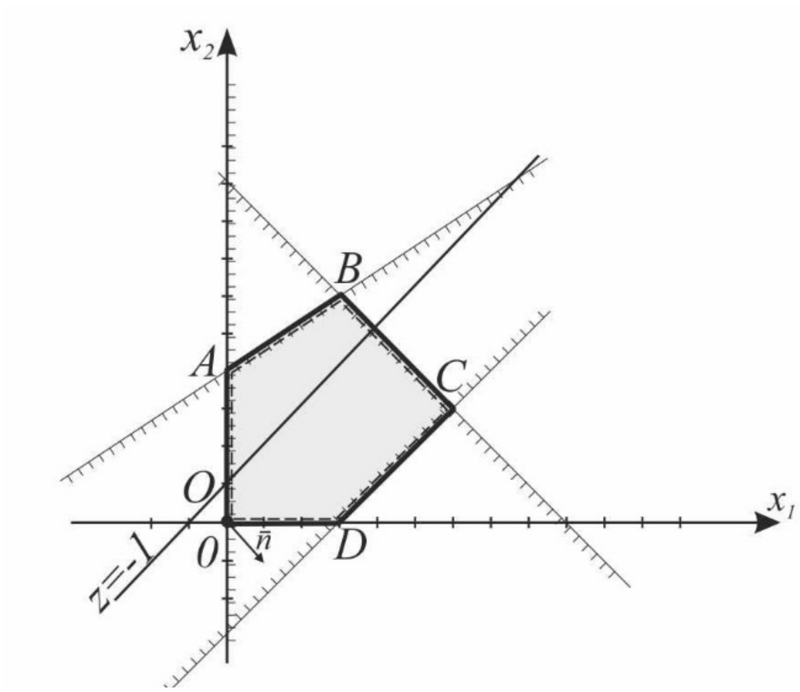


Рис. 4.5. Область решений системы ограничений и линия уровня $Z = -1$

Областью решений данной системы ограничений является треугольник ABC (рис. 4.6).

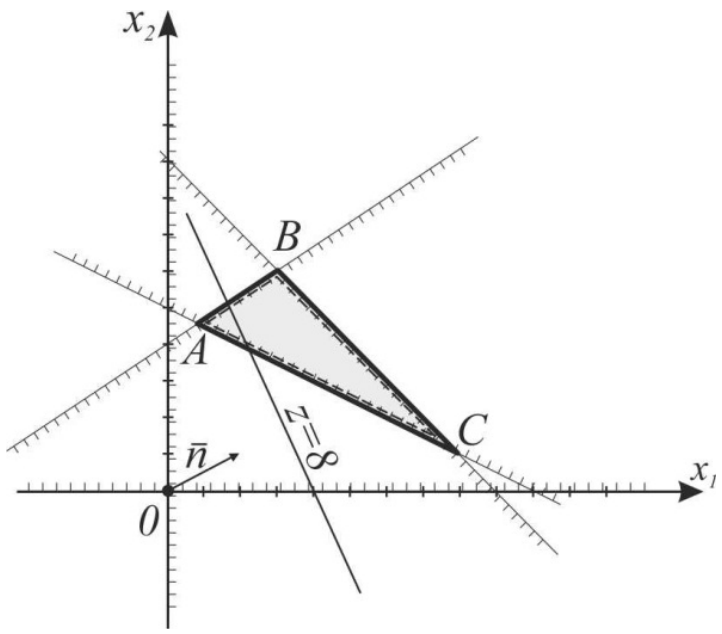


Рис. 4.6. Область решений (пример 6)

На рис. 4.6 также изображены исходная линия уровня $Z = 8$ и вектор $\bar{n} = (2;1)$. Так как требуется найти минимум функции, то будем передвигать исходную линию уровня в сторону, противоположную $\bar{n}$. Минимум функции достигается в угловой точке A, координаты которой служат решением системы уравнений

$$\begin{cases} -2x_1 + 3x_2 = 12, \\ x_1 + 2x_2 = 10, \end{cases}$$

т.е. $A\left(\frac{6}{7};\frac{32}{7}\right)$ и $Z_{\min} = Z(A) = \frac{44}{7}$.

Опорной прямой называется линия уровня, которая имеет хотя бы одну общую точку с областью допустимых решений и по отношению к которой эта область находится в одной из полуплоскостей.

Область допустимых решений любой задачи имеет не более двух опорных прямых, на одной из которых может находиться оптимальное решение.

На основании приведенных примеров и определения опорной прямой запишем *этапы нахождения решения задачи линейного программирования с двумя переменными графическим методом*:

1. Изображаем область допустимых решений.

2. Если область допустимых решений является пустым множеством, то задача не имеет решения ввиду несовместности системы ограничений.

3. Если область допустимых решений является непустым множеством, то изображаем нормальный вектор $\overline{n} = (c_1; c_2)$ линий уровня и одну из линий уровня, имеющую общие точки с этой областью.

4. Линию уровня перемещаем до опорной прямой в задаче на максимум в направлении нормали, в задаче на минимум – в противоположном направлении.

5. Если при перемещении линии уровня по области допустимых решений в направлении, соответствующем приближению к максимуму (минимуму) целевой функции, линия уровня уходит в бесконечность, то $Z_{\max} = \infty$ $(Z_{\min} = -\infty)$.

6. Если задача линейного программирования имеет оптимальное решение, то для его нахождения решаем систему из уравнений прямых, ограничивающих область допустимых решений и имеющих общие точки с соответствующей опорой прямой. Если целевая функция достигает экстремума в двух угловых точках, то задача имеет бесконечное множество решений. Оптимальным решением является любая выпуклая линейная комбинация этих точек.

7. Вычисляем значение целевой функции на оптимальном решении.

Графическим методом решаются задачи линейного программирования, записанные в каноническом виде и удовлетворяющие условию $n - r \leq 2$, где n – число неизвестных системы ограничений; r – ранг системы векторов условий. Если уравнения системы ограничений линейно независимы, то ранг r равен числу уравнений системы m.

Пример 7. Найти минимум функции $Z = -x_1 - x_2 + x_3 + 3x_4 + 7x_5$ при ограничениях

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 - 3x_5 = 4, \\ x_1 + x_2 + 4x_3 + x_4 - 8x_5 = 3, \\ x_2 + x_3 \quad -4x_5 = -4. \end{cases}$$

$$x_j \geq 0, j = 1,2,3,4,5.$$

Метод применим, так как $n - r = 5 - 3 = 2$.

Методом Жордана – Гаусса приведем систему уравнений-ограничений задачи к равносильной разрешенной (табл. 4.1). Одновременно исключим разрешенные неизвестные из целевой функции.

Таблица 4.1

Система уравнений

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b
Система уравнений-ограничений	–1	1	1	2	–3	4
	1	1	4	1	–8	3
	0	1	1	0	–4	–4
Целевая функция	–1	–1	1	3	7	0
	–1	1	1	2	–3	4
	2	0	3	–1	–5	–1
	1	0	0	–2	–1	–8
	–2	0	2	5	4	4
	0	1	1	0	–4	–4
	0	0	3	3	–3	15
	1	0	0	–2	–1	–8
	0	0	2	1	2	–12
	0	1	0	–1	–3	–9
	0	0	1	1	–1	5
	1	0	0	–2	–1	–8
	0	0	0	–1	4	–22

Используя последнюю часть табл. 4.1, запишем задачу линейного программирования в преобразованном виде:

$$Z = -x_4 + 4x_5 + 22 \to \min,$$

$$\begin{cases} x_2 \quad - x_4 - 3x_5 = -9, \\ x_3 + x_4 - x_5 = 5, \\ x_1 \quad -2x_4 - x_5 = -8, \end{cases}$$

$$x_j \geq 0, j = 1,2,3,4,5.$$

Отбросим в уравнениях-ограничениях неотрицательные разрешенные неизвестные x_1, x_2, x_3 и заменим знак равенства знаками неравенства «≤», получим вспомогательную задачу линейного программирования с двумя переменными

$$Z = -x_4 + 4x_5 + 22 \to \min,$$

$$\begin{cases} -x_4 - 3x_5 \le -9, \\ x_4 - x_5 \le 5, \\ -2x_4 - x_5 \le -8, \end{cases}$$

$$x_4 \ge 0, x_5 \ge 0.$$

На рис. 4.7 изображены область решений системы ограничений и вектор $\overline{n} = (-1; 4)$. Минимум функции достигается в угловой точке C, координаты которой являются решением системы

$$\begin{cases} -x_4 - 3x_5 = 9, \\ x_4 - x_5 = 5. \end{cases}$$

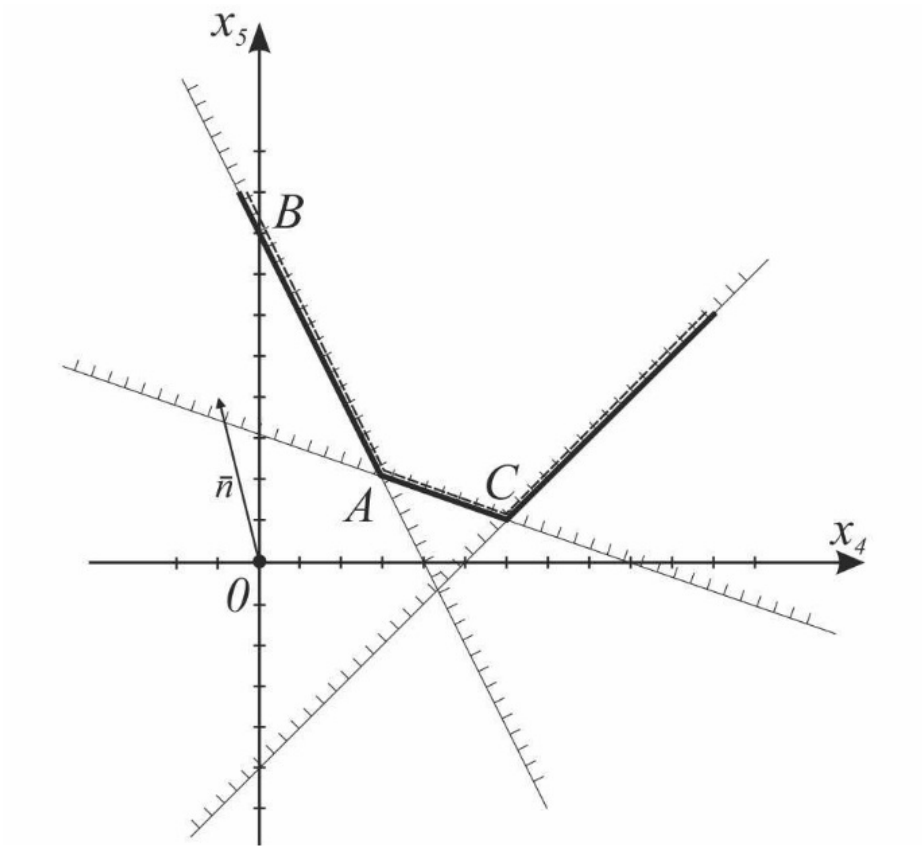


Рис. 4.7. Область решений системы ограничений и вектор $\overline{n} = (-1; 4)$

Получаем $C(6;1)$. Вычисляем минимальное значение целевой функции $Z_{\min} = Z(C) = -6 + 4 \cdot 1 + 22 = 20$.

Чтобы найти оптимальное решение исходной задачи, воспользуемся системой ограничений в разрешенном виде:

$$\begin{cases} x_2 - x_4 - 3x_5 = -9, \\ x_3 + x_4 - x_5 = 5, \\ x_1 - 2x_4 - x_5 = -8, \end{cases}$$

откуда

$$\begin{cases} x_2 = -9 + x_4 + 3x_5, \\ x_3 = 5 - x_4 + x_5, \\ x_1 = -8 + 2x_4 + x_5. \end{cases}$$

При $x_4 = 6,\ x_5 = 1$ получим $x_2 = 0, x_3 = 0, x_1 = 5,$ т.е. $X = (5;0;0;6;1)$.

Как видно из представленных примеров, оптимальное решение расположено в угловой точке области допустимых решений, где пересекаются две прямые. Если мы изменим наклон функции Z (за счет изменения ее коэффициентов), то увидим, что в любом случае решение достигается в одной из угловых точек (или одновременно в нескольких угловых точках). В этом и заключается основная идея построения общего алгоритма – симплекс-метода.

2. Симплекс-метод

Симплекс-метод является универсальным методом, которым можно решить любую задачу линейного программирования.

Его идея состоит в следующем. Используя систему ограничений, приведенную к общему виду, т.е. к системе m уравнений с n переменными $(m < n)$, находят ее любое базисное решение, по возможности наиболее простое. Если первое же найденное базисное решение оказалось допустимым, то проверяют его на оптимальность. Если оно не оптимально, то переходят к другому допустимому базисному решению. Симплексный метод гарантирует, что при этом новом решении линейная форма, если не достигнет оптимума, то приблизится к нему (в случае перехода к вырожденному базисному решению значение линейной формы не изменится). С новым допустимым базисным решением поступают так же, пока не находят решение, которое является оптимальным.

Если первое найденное базисное решение окажется недопустимым, то с помощью симплексного метода осуществляют переход к другим базисным решениям, которые позволяют приблизиться к области допустимых решений, пока на каком-то шаге не получится допустимое базисное решение. К нему применяют тот же механизм.

Таким образом, применение симплексного метода распадается на два этапа:

1) нахождение опорного решения системы ограничений;

2) нахождение оптимального решения.

При этом каждый этап включает несколько шагов, соответствующих тому или иному базисному решению. Так как число базисных решений всегда ограничено, то ограничено и число шагов симплекс-метода.

Пример 8. Найти максимум функции $Z = 2x_1 + 3x_2$ при ограничениях

$$\begin{cases} x_1 \le 40, \\ x_2 \le 30, \\ x_1 + x_2 \le 60, \\ x_1 + 2x_2 \le 80, \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0. \end{cases}$$

Для сведения системы ограничений-неравенств к системе уравнений прибавим к левой части каждого неравенства добавочные неотрицательные переменные x_3, x_4, x_5, x_6:

$$\begin{cases} x_1 + x_3 = 40, \\ x_2 + x_4 = 30, \\ x_1 + x_2 + x_5 = 60, \\ x_1 + 2x_2 + x_6 = 80, \end{cases} \qquad (4)$$

$$x_j \ge 0 \ (j = 1, 2, \ldots, 6).$$

Система ограничений есть система четырех независимых уравнений с шестью переменными, поэтому число основных переменных должно равняться четырем, а число неосновных – двум.

Для решения задачи симплексным методом прежде всего нужно найти любое базисное решение. В данном случае для этого достаточно взять в качестве основных добавочные переменные x_3, x_4, x_5, x_6, так как коэффициенты при этих переменных образуют единичную матрицу. Считая неосновные переменные x_1 и x_2 равными нулю, получим базисное решение $(0; 0; 40; 30; 60; 80)$, которое к тому же оказалось опорным. Переходим сразу ко второму этапу – поиску оптимального решения.

I шаг. Основные переменные: x_3, x_4, x_5, x_6; неосновные переменные: x_1, x_2. В системе (4) основные переменные выразим через неосновные. Через них выразим и линейную форму (в данном случае она уже выражена через x_1 и x_2).

Получим

$$\begin{cases} x_3 = 40 - x_1, \\ \underline{x_4 = 30 - x_2,} \\ x_5 = 60 - x_1 - x_2, \\ x_6 = 80 - x_1 - 2x_2, \end{cases} \tag{5}$$

$$Z = 2x_1 + 3x_2.$$

При $x_1 = x_2 = 0$ имеем $x_3 = 40, x_4 = 30, x_5 = 60, x_6 = 80$, что дает базисное решение $(0;\ 0;\ 40;\ 30;\ 60;\ 80)$, которое мы приняли за исходное. При этом базисном решении значение линейной формы равно $Z = 2x_1 + 3x_2 = 0$.

Теперь от этого первоначального решения нужно перейти к другому, при котором значение линейной формы увеличится. Ее значение возрастает при увеличении значений переменных x_1 и x_2, поэтому эти переменные невыгодно считать неосновными, т.е. равными нулю, их нужно перевести в число основных. Это и означает переход к новому базисному решению. При симплексном методе на каждом шаге решения предполагается перевод в число основных только одной из свободных переменных. Переведем в число основных переменную x_2, так как она входит в выражение линейной формы с наибольшим коэффициентом.

Как только одна из свободных переменных переходит в число основных, одна из основных должна быть переведена на ее место в число неосновных. Значение x_2 необходимо сделать как можно большим, так как это соответствует конечной цели – максимизации *Z*. Однако увеличение x_2 может продолжаться только до тех пор, пока не нарушится требование неотрицательности переменных. Из второго уравнения системы (5) следует, что $x_2 \le 30$ (если $x_2 > 30$, то $x_4 < 0$), из третьего: $x_2 \le 60$, из четвертого: $x_2 \le \frac{80}{2}$, т.е. $x_2 \le 40$ (в первое уравнение x_2 не входит). Всем этим условиям удовлетворяет $x_2 \le 30$, т.е. нужно принять

$$x_2 = \min\left\{\frac{30}{1}; \frac{60}{1}; \frac{80}{2}\right\} = 30.$$

Тогда $x_4 = 0$ и x_4 переходит в число неосновных переменных, а x_3 и x_5 останутся положительными.

II шаг. Основные переменные: x_2, x_3, x_5, x_6, неосновные переменные: x_1, x_4. Выразим основные переменные и линейную форму через неосновные. В системе (2) берем то уравнение, из которого получено минимальное значение отношения свободного числа к коэффициенту при x_2 (уравнение подчеркнуто). Выразим из этого уравнения x_2: $x_2 = 30 - x_4$. Подставим это выражение x_2 во все остальные уравнения системы (5) и в линейную форму Z, получим

$$\begin{cases} x_2 = 30 - x_4, \\ x_3 = 40 - x_1, \\ x_5 = 30 - x_1 + x_4, \\ \underline{x_6 = 20 - x_1 + 2x_4,} \end{cases} \tag{6}$$

$$Z = 90 + 2x_1 - 3x_4.$$

При $x_1 = x_4 = 0$ имеем $Z = 90$. Это уже лучше, чем на I шаге, но не искомый максимум. Дальнейшее увеличение функции Z возможно за счет введения переменной x_1 в число основных (ее увеличение приводит к увеличению линейной формы). Примем $x_1 = \min\left\{\frac{40}{1}; \frac{30}{1}; \frac{20}{1}\right\} = 20$, тогда $x_6 = 0$ и x_6 переходит в число неосновных переменных. Первое уравнение не используется при нахождении указанного минимума, так как x_1 не входит в это уравнение.

III шаг. Основные переменные: x_1, x_2, x_3, x_5; неосновные переменные: x_4, x_6. Выразим основные переменные и линейную форму через неосновные. Из последнего уравнения системы (оно подчеркнуто) имеем $x_1 = 20 + 2x_4 - x_6$. Подставляя это выражение в остальные уравнения и в линейную форму, получим

$$\begin{cases} x_1 = 20 + 2x_4 - x_6, \\ x_2 = 30 - x_4, \\ x_3 = 20 - 2x_4 + x_6, \\ \underline{x_5 = 10 - x_4 + x_6,} \end{cases} \tag{7}$$

$$Z = 130 + x_4 - 2x_6.$$

Из выражения линейной формы следует, что ее максимальное значение еще не получено, так как возможно увеличение Z за счет введения в основные переменной x_4, $x_4 = \min\left\{\frac{30}{1}; \frac{20}{2}; \frac{10}{1}\right\} = 10$.

Переменная x_4 входит в выражение для x_1 (первое уравнение системы (7)), но имеет положительный коэффициент и при любом возрастании x_4 переменная x_1 не может стать отрицательной, поэтому при выборе из минимальных значений первое уравнение не рассматриваем.

Также мы получили два одинаковых минимальных значения, равные 10. Если $x_4 = 10$, то $x_3 = 0$ и $x_5 = 0$. В этом случае одну из переменных (x_3 или x_5) оставляют в числе основных, но при этом ее значение считают равным нулю, т.е. полученное на следующем шаге базисное решение оказывается вырожденным. Оставим, например, x_3 в числе основных переменных, а x_5 переведем в число неосновных.

IV шаг. Основные переменные: x_1, x_2, x_3, x_4; неосновные переменные: x_5, x_6. Выразим основные переменные и линейную форму Z через неосновные. В итоге получим

$$\begin{cases} x_1 = 40 - 2x_5 + x_6, \\ x_2 = 20 + x_5 - x_6, \\ x_3 = 2x_5 - x_6, \\ x_4 = 10 - x_5 + x_6, \end{cases}$$

$$Z = 140 - x_5 - x_6 .$$

Так как в выражение линейной формы переменные x_5 и x_6 входят с отрицательными коэффициентами, то увеличение Z за счет этих переменных невозможно.

Отсутствие на каком-то шаге симплексного метода в выражении линейной формы Z, максимум которой ищется, неосновных переменных с положительными коэффициентами является критерием оптимальности.

Следовательно, на IV шаге критерий оптимальности достигнут и задача решена. Оптимальным служит решение $(40;20;0;10;0;0)$ при котором $Z_{\max} = 140$.

В рассмотренном примере первое же полученное базисное решение оказалось допустимым. В других случаях его можно найти не сразу, а через некоторое число шагов.

2.1. Нахождение опорного решения

На первом этапе симплексного метода, т.е. при нахождении какого-либо допустимого решения, линейная форма в расчет не берется, а все преобразования относятся только к системе ограничений.

Пусть задана каноническая задача линейного программирования. Выбираем группу m основных переменных, которые позволяют найти исходное базисное решение (можем считать, что основными являются первые m переменных). Выразим эти основные переменные через неосновные:

$$\begin{cases} x_1 = k_1 + b_{1\,m+1}x_{m+1} + \ldots + b_{1n}x_n, \\ x_2 = k_2 + b_{2\,m+1}x_{m+1} + \ldots + b_{2n}x_n, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_i = k_i + b_{i\,m+1}x_{m+1} + \ldots + b_{in}x_n, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_m = k_m + b_{m\,m+1}x_{m+1} + \ldots + b_{mn}x_n. \end{cases} \tag{8}$$

Этому способу разбиения переменных соответствует базисное решение $(k_1; k_2; \ldots; k_i; \ldots; k_m; 0; 0; \ldots; 0)$. Рассмотрим случай, когда это решение является недопустимым. От полученного базисного решения следует сначала перейти к какому-нибудь опорному решению, причем не обязательно, чтобы этот переход осуществлялся сразу, в один шаг.

Если система ограничений не противоречива, то через конечное число шагов будет осуществлен переход к опорному решению.

Так как исходное базисное решение недопустимо (по предположению), среди свободных членов системы ограничений (8) имеется хотя бы один отрицательный (число отрицательных свободных членов этой системы совпадает с числом отрицательных компонент исходного базисного решения). Пусть им является свободный член k_i i-го уравнения, т.е. основная переменная x_i в соответствующем базисном решении отрицательна.

Это уравнение показывает, что переменная x_i возрастает при возрастании тех неосновных переменных, коэффициенты которых в этом уравнении положительны. Следовательно, в основные можно переводить те неосновные переменные, которые в уравнении системы (8) с отрицательным свободным членом имеют положительные коэффициенты.

Возможны три случая:

1. В i-м уравнении системы (8) нет неосновных переменных с положительными коэффициентами, т.е. все коэффициенты b_{ij} отрицательны (как и свободный член k_i). В этом случае данная система ограничений несовместна – она не имеет ни одного допустимого решения. Действительно, вследствие неотрицательности всех переменных, в том числе $x_{m+1}, \ldots, x_n$, из i-го уравнения, в котором свободный член k_i и все коэффициенты $b_{i\,m+1}, \ldots, b_{in}$ отрицательны, следует, что переменная x_i не может принимать неотрицательных значений. Значит, нет и оптимального решения.

2. В i-м уравнении имеется одна переменная x_{m+j}, коэффициент при которой положителен. В этом случае именно эта переменная переходит в основные.

3. В i-м уравнении имеется несколько переменных с положительными коэффициентами. В этом случае в основные можно перевести любую из них.

Для того чтобы установить, какая основная переменная должна быть переведена в число неосновных, находят отношения свободных членов к коэффициентам при переменной, переводимой в основные, из всех уравнений, где знаки свободных членов и указанных коэффициентов противоположны, а затем рассматривают абсолютную величину этих отношений и из них выбирают наименьшую (если в некоторых уравнениях знаки свободных членов и коэффициентов совпадают или в каких-то уравнениях переменная, переводимая в основные, отсутствует, то отношение не рассматривают).

Уравнение, из которого получено наименьшее отношение, выделяют. Выделенное уравнение показывает, какая из основных переменных должна быть переведена в неосновные. Выразив новые основные переменные через неосновные, переходят к следующему базисному решению, которое ближе к опорному. Если оно окажется недопустимым, то к нему следует применить ту же схему еще раз. В результате через конечное число шагов получится опорное решение.

Пример 9. Найти опорное решение при заданных ограничениях

$$\begin{cases} -x_1 + 2x_2 \geq 2, \\ x_1 + x_2 \geq 4, \\ x_1 - x_2 \leq 2, \\ x_2 \leq 6, \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0.$$

Вводим добавочные неотрицательные переменные x_3, x_4, x_5, x_6 и сводим данную систему неравенств к эквивалентной ей системе уравнений:

$$\begin{cases} -x_1 + 2x_2 - x_3 = 2, \\ x_1 + x_2 - x_4 = 4, \\ x_1 - x_2 + x_5 = 2, \\ x_2 + x_6 = 6, \end{cases}$$

$$x_j \geq 0 \ (j = 1, 2, \ldots, 6).$$

Введенные добавочные переменные принимаем за основные, так как в этом случае базисное решение системы легко находится. Тогда x_1 и x_2 – неосновные переменные. Описанные выше действия по нахождению опорного плана удобно выполнять методом Жордана – Гаусса (табл. 4.2) (так как исключение одной переменной из основных и включение в нее другой описанным способом соответствует этому методу).

Таблица 4.2

Симплекс-таблица

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	b	Δ_1	Δ_2	
–1	2	–1	0	0	0	2			
1	1	0	–1	0	0	4			
1	–1	0	0	1	0	2			
0	1	0	0	0	1	6			
1	–2	1	0	0	0	–2	–	(1)	Базисное решение (0;0;–2;–4;2;6)
–1	–1	0	1	0	0	–4	4	4	
1	–1	0	0	1	0	2	(2)	–	
0	1	0	0	0	1	6	–	6	
$-\frac{1}{2}$	1	$-\frac{1}{2}$	0	0	0	1	–		Базисное решение (0;1;0;–3;3;5)
$-\frac{3}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	1	0	0	–3	(2)		
$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	0	1	0	3	6		
$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	0	0	1	5	10		
0	1	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	0	0	2			Базисное решение (2;2;0;0;2;4)
1	0	$\frac{1}{3}$	$-\frac{2}{3}$	0	0	2			
0	0	$-\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	1	0	2			
0	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	0	1	4			

Данному разбиению переменных соответствует базисное решение $(0;0;-2;-4;2;6)$ (вторая итерация в табл. 4.2), которое является недопустимым (две переменные отрицательны), а поэтому оно неоптимальное. От этого базисного решения перейдем к улучшенному.

Чтобы решить, какую переменную следует перевести из неосновных в основные, рассмотрим любое из двух имеющихся уравнений последней системы с отрицательными свободными членами, например второе. Оно показывает, что в основные переменные можно перевести x_1 и x_2, так как в этом уравнении они имеют отрицательные коэффициенты (при их увеличении переменная x_4 увеличится $x_4 = -4 + x_1 + x_2$).

Найдем абсолютную величину наименьшего отношения свободных членов системы к коэффициентам при x_1; имеем $x_1 = \min\left\{\frac{4}{1};\frac{2}{1}\right\} = 2$ (в табл. 4.2 обозначено Δ1) (мы писали, что если при нахождении данного отношения знаки свободных членов и коэффициентов совпадают, то оно не рассматривается. В методе Жордана – Гаусса переменные перенесены в одну сторону, поэтому не рассматриваются соответствующие отношения с разными знаками). Оно получено из третьего уравнения, показывающего, что в неосновные нужно перевести переменную x_5, которая в исходном базисном решении положительна. Следовательно, полученное базисное решение, как и исходное, содержит две отрицательные компоненты, т.е. при переходе к такому базисному решению улучшения не произойдет.

Если же перевести в основные переменную x_2, то $x_2 = \min\left\{\frac{2}{2};\frac{4}{1};\frac{6}{1}\right\} = 1$ (в табл. 4.2 обозначено Δ2). Оно получено из первого уравнения, в котором свободный член отрицателен. Следовательно, переводя x_2 в основные, а x_3 в неосновные переменные, получим базисное решение, в котором число отрицательных компонент на единицу меньше, чем в исходном, поэтому основные переменные: x_2, x_4, x_5, x_6; неосновные переменные: x_1, x_3. Имеем новое базисное решение $(0;1;0;-3;3;5)$, которое также является недопустимым, а поэтому неоптимальным. Уравнение с отрицательным свободным членом – второе. Оно показывает, что в основные переменные можно перевести x_1 и x_3. Переведем x_1:

$$x_1 = \min\left\{\frac{3}{\frac{3}{2}};\frac{3}{\frac{1}{2}};\frac{5}{\frac{1}{2}}\right\} = 2.$$

Значит, в неосновные переменные нужно перевести .

Новое базисное решение имеет вид $(2;2;0;0;2;4)$. Оно является опорным.

Решение задачи симплекс-методом, рассмотренное подробно, удобнее проводить, если условия задачи и первоначальные данные, полученные после определения первого опорного плана, записать в симплексную таблицу.

Рассмотрим на примере этой же задачи: найти максимум функции $Z = 2x_1 + 3x_2$ при ограничениях

$$\begin{cases} x_1 + x_3 = 40, \\ x_2 + x_4 = 30, \\ x_1 + x_2 + x_5 = 60, \\ x_1 + 2x_2 + x_6 = 80. \end{cases}$$

Напомним, что система ограничений может быть записана в векторной форме:

$$A_1x_1 + A_2x_2 + \ldots + A_nx_n = B,$$

где

$$A_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{pmatrix}, \cdots, A_n = \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}.$$

Предположим, что система ограничений содержит m единичных векторов. Без ограничения общности можно положить, что единичными являются первые m векторов. В первом столбце записываются базисные векторы, в столбце «C базиса» – коэффициенты целевой функции, соответствующие векторам базиса. В столбце A_0 – первоначальный опорный план X_0, в нем же в результате вычислений получаем оптимальный план, в столбцах A_j $(j = 1, 2, \ldots, n)$ – коэффициенты разложения j-го вектора по базису $(x_{1j}A_1 + x_{2j}A_2 + \ldots + x_{mj}A_m = A_j)$. Обозначим их X_j. В последней строке в столбце A_0 – значение целевой функции $Z(X_0)$, которое она принимает при найденном опорном плане, а в столбцах A_j – значения оценок $Z_j - C_j$.

Функции $Z(X_0)$ и $Z_j = Z(X_j)$ находим, подставляя в линейную функцию соответственно компоненты опорного плана и коэффициенты разложения j-го вектора по векторам базиса, поэтому эти значения можно получить как скалярное произведение:

$$Z(X_0) = C_б \cdot X_0 = \sum_{i=1}^{m} C_i x_i, \;\; Z_j = C_б \cdot X_j = \sum_{i=1}^{m} C_i x_{ij}, \;\; j = 1, 2, \ldots, n,$$

где C_i – коэффициенты линейной функции, соответствующие векторам базиса.

В данной задаче

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \; A_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \; A_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \; A_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \; A_5 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \; A_6 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} 40 \\ 30 \\ 60 \\ 80 \end{pmatrix}.$$

Единичные векторы A_3, A_4, A_5, A_6 образуют базис (табл. 4.3); $Z = 2x_1 + 3x_2$, или $Z - 2x_1 - 3x_2 = 0$.

Таблица 4.3

Симплекс-таблица

Базис	C базиса	A_0	$C_1 = 2$	$C_2 = 3$	$C_3 = 0$	$C_4 = 0$	$C_5 = 0$	$C_6 = 0$	Δi
			A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	
A_3	0	40	1	0	1	0	0	0	–
A_4	0	30	0	1	0	1	0	0	(30)
A_5	0	60	1	1	0	0	1	0	60
A_6	0	80	1	2	0	0	0	1	40
$Z_j - C_j$		0	–2	(–3)	0	0	0	0	
A_3	0	40	1	0	1	0	0	0	40
A_2	3	30	0	1	0	1	0	0	–
A_5	0	30	1	0	0	–1	1	0	30
A_6	0	20	1	0	0	–2	0	1	(20)
$Z_j - C_j$		90	(–2)	0	0	3	0	0	
A_3	0	20	0	0	1	2	0	–1	10
A_2	3	30	0	1	0	1	0	0	30
A_5	0	10	0	0	0	1	1	–1	10
A_1	2	20	1	0	0	–2	0	1	–
$Z_j - C_j$		130	0	0	0	(–1)	0	2	
A_3	0	0	0	0	1	0	–2	1	
A_2	3	20	0	1	0	0	–1	1	
A_5	0	10	0	0	0	1	1	–1	
A_1	2	40	1	0	0	0	2	–1	
$Z_j - C_j$		140	0	0	0	0	1	1	

$Z_{max} = 140$

Критерием оптимальности в задаче на максимум будет выполнение условия $Z_j - C_j \geq 0 \ (j = 1, 2, \ldots, n)$.

Переменная x_2 входит в выражение линейной формы с наибольшим коэффициентом, поэтому выбирается наибольшая по абсолютной величине отрицательная оценка в последней строке. Этим определяется тот вектор, который должен перейти в базис. В примере это вектор A_2, поэтому находим

$\Delta_2 = \min_i \left\{ \frac{b_i}{a_{i2}} \right\}$ для всех i, для которых $a_{i2} > 0$ (последний столбец таблицы).

В нашем случае это $30 = \frac{b_2}{a_{22}}$. Это означает, что вектор A_4, находящийся во второй строке, переходит в число небазисных.

Столбец, показывающий, какой вектор должен перейти в базис, называется ***направляющим (ведущим) столбцом***. Строка, показывающая, какой вектор должен перейти в небазисные, называется ***направляющей строкой***. Элемент, стоящий на пересечении направляющей строки и направляющего столбца, называется ***разрешающим***.

Сделаем вектор A_2 базисным единичным так, чтобы единица стояла на месте разрешающего элемента. Это можно сделать методом Жордана – Гаусса. Получим вторую часть симплекс-таблицы, в последней строке которой один отрицательный элемент, показывающий, что вектор A_1 должен перейти в базисные,

$$\Delta_1 = \min_i \left\{ \frac{b_i}{a_{i1}} \right\} = \min\{40;30;20\} = 20,$$

т.е. вектор A_6 должен быть переведен в небазисные. Процесс продолжается до тех пор, пока не будет достигнут критерий оптимальности. В нашем случае он заканчивается на четвертой части симплекс-таблицы.

Пример 10. Найти минимальное значение функции $Z = x_1 - x_2 - 3x_3$ при ограничениях

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 \le 1, \\ 4x_1 - 2x_2 + x_3 \ge -2, \\ 3x_1 + x_3 \le 5, \end{cases}$$

$$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, x_3 \ge 0.$$

Сведем задачу к канонической форме:

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = 1, \\ -4x_1 + 2x_2 - x_3 + x_5 = 2, \\ 3x_1 + x_3 + x_6 = 5, \end{cases}$$

$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0,\ x_3 \ge 0;$$

$$A_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix},\ A_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix},\ A_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix},\ A_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},\ A_5 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},\ A_6 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Единичные векторы A_4, A_5, A_6 выберем в качестве базиса. Получим опорный план $(0;0;0;1;2;5)$. Составим симплекс-таблицу (табл. 4.4). *Критерием оптимальности задачи на минимум является выполнение условия* $Z_j - C_j \le 0$ $(j = 1,2,\ldots,n)$ (так как минимизация целевой функции Z равносильна максимизации целевой функции $-Z$, $Z(X) \to \max \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow -Z(X) \to \min$). В остальном симплексный процесс аналогичен процессу отыскания максимального значения целевой функции.

Таблица 4.4

Симплекс-таблица

Базис	C базиса	A_0	$C_1 = 1$ A_1	$C_2 = -1$ A_2	$C_3 = -3$ A_3	$C_4 = 0$ A_4	$C_5 = 0$ A_5	$C_6 = 0$ A_6	Δi
A_4	0	1	2	–1	1	1	0	0	(1)
A_5	0	2	–4	2	–1	0	1	0	–
A_6	0	5	3	0	1	0	0	1	5
$Z_j - C_j$		0	–1	1	(3)	0	0	0	
A_3	–3	1	2	–1	1	1	0	0	–
A_5	0	3	–2	1	0	1	1	0	(3)
A_6	0	4	1	1	0	–1	0	1	4
$Z_j - C_j$		–3	–7	(4)	0	–3	0	0	
A_3	–3	4	0	0	1	2	1	0	–
A_2	–1	3	–2	1	0	1	1	0	–
A_6	0	1	3	0	0	–2	–1	1	1/3
$Z_j - C_j$		–15	(1)	0	0	–7	–4	0	
A_3	–3	4	0	0	1	2	1	0	
A_2	–1	11/3	0	1	0	–1/3	1/3	2/3	
A_1	1	1/3	1	0	0	–2/3	–1/3	1/3	
$Z_j - C_j$		$-\frac{46}{3}$	0	0	0	$-\frac{19}{3}$	$-\frac{11}{3}$	$-\frac{1}{3}$	

$Z_{\min} = -\frac{46}{3}$. Оптимальный план $\left(\frac{1}{3}; \frac{11}{3}; 4\right)$.

Пример 11. Найти максимум функции $Z = x_1 + x_2$ при ограничениях

$$\begin{cases} -2x_1 + 3x_2 \le 12, \\ 3x_1 - 5x_2 \le 3, \end{cases}$$

$$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0.$$

Каноническая задача имеет вид

$$\begin{cases} -2x_1 + 3x_2 + x_3 = 12, \\ 3x_1 - 5x_2 + x_4 = 3, \end{cases}$$

$$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0.$$

Составим симплекс-таблицу (табл. 4.5).

Таблица 4.5

Симплекс-таблица

Базис	C базиса	A_0	$C_1 = 1$	$C_2 = 1$	$C_3 = 0$	$C_4 = 0$	Δi
			A_1	A_2	A_3	A_4	
A_3	0	12	–2	3	1	0	(4)
A_4	0	3	3	–5	0	1	–
$Z_j - C_j$		0	–1	(–1)	0	0	
A_2	1	4	$-\frac{2}{3}$	1	$\frac{1}{3}$	0	
A_4	0	23	$-\frac{1}{3}$	0	$\frac{5}{3}$	1	
$Z_j - C_j$		4	$\left(-\frac{5}{3}\right)$	0	$\frac{1}{3}$	0	

Из оценки $Z_j - C_j$ следует, что вектор A_1 следует перевести в базисные, но так как все числа в этом столбце отрицательные, заключаем, что переменная x_1 может возрастать неограниченно. Значит, и функция Z, максимум который требуется найти, также может неограниченно возрастать. Поэтому $Z_{\max} = \infty$.

Пример 12. Найти максимум функции $Z = x_1 - x_2$ при ограничениях

$$\begin{cases} -2x_1 + 3x_2 \ge 12, \\ x_1 + x_2 \le 9, \\ 3x_1 - 5x_2 \ge 3, \end{cases}$$

$$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0.$$

Сведем задачу к канонической:

$$\begin{cases} -2x_1 + 3x_2 - x_3 = 12, \\ x_1 + x_2 + x_4 = 9, \\ 3x_1 - 5x_2 - x_5 = 3, \end{cases}$$

$$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0.$$

Соответствующее базисное решение $(0;0;-12;9;-3)$ недопустимо. Воспользуемся симплекс-методом для нахождения опорного решения (табл. 4.6).

Таблица 4.6

Нахождение опорного решения

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	b	Δ_1
–2	3	–1	0	0	0	12	
1	1	0	1	0	0	9	
3	–5	0	0	–1	0	3	
2	–3	1	0	0	0	–12	–
1	1	0	1	0	0	9	9
–3	5	0	0	1	0	–3	(1)
0	$\frac{1}{3}$	1	0	$\frac{2}{3}$	0	–14	
0	$\frac{8}{3}$	0	1	$\frac{1}{3}$	0	8	
1	$-\frac{5}{3}$	0	0	$-\frac{1}{3}$	0	1	

Вектор A_1 перевели в базисный, в первой строке все коэффициенты, кроме свободного члена, положительны. Это является признаком того, что система несовместна ($x_3 = -14 - \frac{1}{3}x_2 - \frac{2}{3}x_5$).

Пример 13. Найти максимум функции $Z = x_1 - x_2$ при ограничениях

$$\begin{cases} -2x_1 + 3x_2 \le 12, \\ x_1 + x_2 \le 9, \\ x_1 - x_2 \le 3, \end{cases}$$

$$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0.$$

Каноническая задача примет вид

$$\begin{cases} -2x_1 + 3x_2 + x_3 = 12, \\ x_1 + x_2 + x_4 = 9, \\ x_1 - x_2 + x_5 = 3, \end{cases}$$

$$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0.$$

Составим симплекс-таблицу (табл. 4.7).

В предыдущих примерах нулевыми являлись только оценки, соответствующие базисным векторам, и тогда оптимальное решение было единственным. В этом случае нулевая оценка соответствует также небазисному вектору A_2. Попробуем перевести A_2 в базис (табл. 4.7).

Т а б л и ц а 4 . 7

Симплекс-таблица

Базис	C базиса	A_0	$C_1 = 1$	$C_2 = -1$	$C_3 = 0$	$C_4 = 0$	$C_5 = 0$	Δi
			A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	
A_3	0	12	–2	3	1	0	0	–
A_4	0	9	1	1	0	1	0	9
A_5	0	3	1	–1	0	0	1	(3)
$Z_j - C_j$		0	(–1)	1	0	0	0	
A_3	0	18	0	1	1	0	2	18
A_4	0	6	0	2	0	1	–1	(3)
A_1	1	3	1	–1	0	0	1	–
$Z_j - C_j$		3	0	0	0	0	1	
A_4 исключаем из базиса, A_2 переводим в базис								
A_3	0	15	0	0	1	–1/2	5/2	
A_2	–1	3	0	1	0	1/2	–1/2	
A_1	0	6	1	0	0	1/2	1/2	
$Z_j - C_j$		3	0	0	0	0	1	

На втором шаге оптимальное решение имело компоненты $(3;0;18;6;0)$, на третьем – $(6;3;15;0;0)$. Однако оба оптимальных решения дают одно и то же максимальное значение $Z_{\max} = 3$. Следовательно, единственность оптимального решения может нарушаться. Это происходит в том случае, когда нулевая оценка соответствует не только базисному вектору.

2.2. Алгоритм симплексного метода

1. В системе ограничений (уравнений или неравенств) переносят свободные члены в правые части. Если среди этих свободных членов окажутся отрицательные, то соответствующее уравнение или неравенство умножают на -1.

2. Если система ограничений задана системой неравенств, то вводят добавочные неотрицательные переменные и тем самым сводят систему неравенств к эквивалентной системе уравнений, т.е. сводят задачу к канонической.

3. От данной или полученной после выполнения п. 2 системы уравнений с n переменными ($m < n$) переходят к системе ограничений в векторной форме и выбирают m базисных векторов. Проще всего за базисные взять векторы, компоненты которых являются коэффициентами при добавочных переменных. Находят соответствующее базисное решение, придавая небазисным векторам нулевые значения.

Если найденное базисное решение окажется опорным, то переходят к п. 5, если оно окажется недопустимым, то предварительно выполняют п. 4.

4. От полученного недопустимого базисного решения переходят к опорному или устанавливают, что система ограничений данной задачи противоречива.

5. Получив опорное решение, приводят базисные векторы к единичным и переходят к симплекс-таблице (схема симплекс-таблицы приведена в табл. 4.8).

Таблица 4.8

Симплекс-таблица

Базис	C базиса	A_0	C_1	C_2	…	C_n	Δi
			A_1	A_2	…	A_n	
$Z_j - C_j$							

Если отыскивается максимум (минимум) целевой функции и среди оценок $Z_j - C_j$, $j = 1, 2, \ldots, n$ (последняя строка), нет отрицательных (положительных) чисел, то критерий оптимальности выполнен и полученное опорное решение служит оптимальным, т.е. решение окончено.

6. Если при нахождении максимума (минимума) целевой функции среди оценок имеется одна или несколько отрицательных (положительных), то переходят к новому опорному решению. Из отрицательных (положительных) оценок выбирают наибольшую по абсолютной величине (наибольшую). Тем самым выбран направляющий столбец, например j.

7. В направляющем столбце находят отношения $\frac{b_i}{a_{ij}}$ для всех i, для которых $a_{ij} > 0$, и выбирают наименьшее. Выбрана направляющая строка.

8. Выбирают разрешающий элемент и проводят преобразования Жордана – Гаусса.

9. Повторяют п. 6–8 до тех пор, пока не будет достигнут критерий оптимальности (п. 5). Записывают оптимум целевой функции.

10. Если критерий оптимальности выполнен, а среди оценок нулевые соответствуют не только базисным вектором, то полученное оптимальное решение не единственное.

11. Если среди оценок имеются отрицательные в случае максимизации (положительные – в случае минимизации), а все числа этого столбца отрицательные или нулевые, то целевая функция не ограничена, т.е. $Z_{\max} = \infty$ ($Z_{\min} = -\infty$).

2.3. Метод искусственного базиса

Во многих задачах линейного программирования получение опорного плана описанным выше способом затруднительно. В этом случае для решения задач применяется метод искусственного базиса.

Пусть требуется найти максимум (минимум) функции $Z = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n$ при ограничениях $(m < n)$:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m, \end{cases}$$

$$x_j \geq 0 \ (j = 1, 2, \ldots, n)$$

и среди векторов

$$A_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}, \ A_2 = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{pmatrix}, \ \cdots, \ A_n = \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix}$$

нет m единичных.

Задача, состоящая в определении максимального (или минимального) значения

$$Z = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n - Mx_{n+1} - \ldots - Mx_{n+m}$$

(или, соответственно, $Z = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n + Mx_{n+1} + \ldots + Mx_{n+m}$)
при условиях

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n + x_{n+1} = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n + x_{n+2} = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n + x_{n+m} = b_m, \end{cases}$$

$$x_j \geq 0 \ (j = 1, 2, \ldots, n+m),$$

где M – некоторое достаточно большое положительное число, конкретное значение которого обычно не задается, называется ***расширенной по отношению к исходной***.

Расширенная задача имеет опорный план $(0; 0; \ldots; 0; b_1; b_2; \ldots; b_m)$, определяемый единичными векторами $A_{n+1}, A_{n+2}, \ \ldots, A_{n+m}$, образующими базис. Этот базис называется ***искусственным***, как и переменные x_{n+i} $(i = 1, 2, \ldots, m)$.

Так как расширенная задача имеет опорный план, ее решение может быть найдено симплекс-методом.

Теорема 5. *Если в оптимальном плане* $(x_1; x_2; \ldots; x_n; 0; \ldots; 0)$ *расширенной задачи искусственные переменные* $x_{n+i} = 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, m)$, *то план* $(x_1; x_2; \ldots; x_m)$ *является оптимальным планом исходной задачи*.

Применение симплексного метода к расширенной задаче обеспечивает построение плана, в котором каждая из искусственных переменных $x_{n+i} = 0$. Если первоначальная задача не обладает планами (т.е. она несовместна), то оптимальное решение расширенной задачи содержит по крайне мере одну переменную $x_{n+i} > 0$.

Пример 14. Найти максимальное значение функции $Z = 5x_1 + 3x_2 + 4x_3 - x_4$ при ограничениях

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 3, \\ 2x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = 3, \end{cases}$$

$$x_j \geq 0 \ (j = 1, 2, 3, 4).$$

Решим задачу методом искусственного базиса:

$$Z = 5x_1 + 3x_2 + 4x_3 - x_4 - Mx_5 - Mx_6,$$

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 2x_4 + x_5 = 3, \\ 2x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 + x_6 = 3, \end{cases}$$

$$x_j \geq 0 \ (j = 1, 2, \ldots, 6).$$

Выберем единичные векторы A_5 и A_6 в качестве базиса, который является искусственным. Составим симплекс-таблицу, содержащую на одну строку больше (табл. 4.9). Для удобства процесса в $(m+1)$-ю строку записываем слагаемое, независимое от *M*, а в $(m+2)$-ю – только коэффициенты при *M*. В $(m+2)$-й строке имеются отрицательные оценки, поэтому опорный план расширенной задачи не является оптимальным и его можно улучшить. В силу выбора величины *M* векторы A_5 и A_6 уже не могут попасть в базис, поэтому в последующих шагах симплекс-таблицы их можно исключить.

После третьего шага $(m+2)$-ю строку можно исключить, а дальнейший процесс проводить по $(m+1)$-й строке. На четвертом шаге находим оптимальный план $(1;0;1;0)$ и $Z_{\max} = 9$.

Таблица 9

Симплекс-таблица

Базис	C базиса	A_0	$C_1 = 5$	$C_2 = 3$	$C_3 = 4$	$C_4 = -1$	$C_5 = -M$	$C_6 = -M$	Δi
			A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	
A_5	$-M$	3	1	3	2	2	1	0	(1)
A_6	$-M$	3	2	2	1	1	0	1	3/2
$Z_j - C_j$		0	–5	–3	–4	1	0	0	
		–6	–3	(–5)	–3	–3	0	0	
A_2	3	1	1/3	1	2/3	2/3	1/3	0	3
A_6	$-M$	1	4/3	0	–1/3	–1/3	–2/3	1	(3/4)
$Z_j - C_j$		3	–4	0	–2	3	1	0	
		–1	(–4/3)	0	1/3	1/3	5/3	0	
A_2	3	3/4	0	1	3/4	3/4	1/2	–1/4	(1)
A_1	5	3/4	1	0	–1/4	–1/4	–1/2	3/4	–
$Z_j - C_j$		6	0	0	(–3)	2	–1	3	
		0	0	0	0	0	1	1	
A_3	4	1	0	4/3	1	1	2/3	–1/3	
A_1	5	1	1	1/3	0	0	–1/3	2/3	
$Z_j - C_j$		9	0	4	0	5	1	2	
		0	0	0	0	0	1	1	

Если в системе ограничений, заданной в векторной форме, среди векторов $A_1, A_2, \ldots, A_n$ есть $k < m$ единичных базисных векторов, то в этом случае нужно ввести $(m-k)$ искусственных переменных.

2.4. Двойственные задачи

Рассмотрим две задачи линейного программирования:

Максимизировать функцию:

$$Z = c_1x_1 + \ldots + c_nx_n$$

при ограничениях

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n \le b_1, \\ a_{21}x_1 + \cdots + a_{2n}x_n \le b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n \le b_m, \end{cases}$$

$$x_j \ge 0 \ (j = 1, 2, \ldots, n).$$

Минимизировать функцию:

$$F = b_1y_1 + \ldots + b_my_m$$

при ограничениях

$$\begin{cases} a_{11}y_1 + \cdots + a_{m1}y_m \ge c_1, \\ a_{21}y_1 + \cdots + a_{m2}y_m \ge c_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{1n}y_1 + \cdots + a_{mn}y_m \ge c_n, \end{cases}$$

$$y_i \ge 0 \ (i = 1, 2, \ldots, m).$$

Эти задачи обладают следующими свойствами:

1. В одной задаче ищется максимум линейной формы, а в другой – минимум.

2. Коэффициенты при переменных в линейной форме одной задачи являются свободными членами системы ограничений другой задачи, наоборот, свободные члены системы ограничений одной задачи – коэффициентами при переменных в линейной форме другой задачи.

3. В каждой задаче система ограничений задается в виде неравенств, причем все они одного смысла, а именно: при нахождении максимума линейной формы эти неравенства имеют вид «≤», а при нахождении минимума – вид «≥».

4. Коэффициенты при переменных в системах ограничений записываются матрицами:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \ldots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \cdots a_{2n} \\ \vdots & \vdots \ \ddots \ \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} \ldots a_{mn} \end{pmatrix}$$

и

$$A' = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} \ldots a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} \cdots a_{m2} \\ \vdots & \vdots \ \ddots \ \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} \ldots a_{mn} \end{pmatrix},$$

которые являются транспонированными относительно друг друга.

5. Число неравенств в системе ограничений одной задачи совпадает с числом переменных другой задачи.

6. Условия неотрицательных переменных сохраняются в обеих задачах.

Две задачи линейного программирования, удовлетворяющие указанным условиям, называются ***симметричными взаимно двойственными задачами***.

Таким образом, каждой задаче линейного программирования можно поставить в соответствие симметричную двойственную задачу. Первоначальная задача называется исходной или прямой. Прямая и двойственная ей задача, взятые вместе, образуют пару взаимно двойственных задач, причем любую из них можно рассматривать как исходную, тогда другая окажется двойственной ей.

Для задачи, заданной в канонической форме, также можно поставить двойственную задачу:

Максимизировать функцию

$$Z = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n$$

при ограничениях

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + \cdots + a_{2n}x_n = b_{2,} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n = b_{m,} \end{cases}$$

$$x_j \geq 0 \ (j = 1, 2, \ldots, n)$$

Минимизировать функцию

$$F = b_1y_1 + b_2y_2 + \ldots + b_my_m$$

при ограничениях

$$\begin{cases} a_{11}y_1 + \cdots + a_{m1}y_m \geq c_1, \\ a_{12}y_1 + \cdots + a_{m2}y_m \geq c_{2,} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{1n}y_1 + \cdots + a_{mn}y_m \geq c_{n.} \end{cases}$$

$$y_i \geq 0 \ (i = 1, 2, \ldots, m).$$

или

Минимизировать функцию

$$Z = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n$$

при ограничениях

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + \cdots + a_{2n}x_n = b_{2,} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n = b_{m,} \end{cases}$$

$$x_j \geq 0 \ (j = 1, 2, \ldots, n).$$

Максимизировать функцию

$$F = b_1y_1 + b_2y_2 + \ldots + b_my_m$$

при ограничениях

$$\begin{cases} a_{11}y_1 + \cdots + a_{m1}y_m \leq c_1, \\ a_{12}y_1 + \cdots + a_{m2}y_m \leq c_{2,} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{1n}y_1 + \cdots + a_{mn}y_m \leq c_{n,} \end{cases}$$

$$y_i \geq 0 \ (i = 1, 2, \ldots, m).$$

Теорема 6. *Если одна из задач линейного программирования имеет конечный оптимум, то и двойственная к ней также имеет конечный оптимум, причем оптимальные значения линейных форм обеих задач совпадают, т.е.* $Z_{\max} = F_{\min}$ *или* $Z_{\min} = F_{\max}$. *Если же линейная форма одной из двойственных задач не ограничена, то условия другой задачи противоречивы.*

Рассмотрим систему ограничений прямой и двойственной симметричных задач. При решении симплекс-методом исходной задачи для сведения системы неравенств к эквивалентной ей системе уравнений нужно ввести *m* добавочных неотрицательных переменных $x_{n+1}, x_{n+2}, \ldots, x_{n+m}$. Система ограничений двойственной задачи состоит из *n* неравенств, содержащих *m* переменных. Если решать эту задачу симплексным методом, то следует ввести *n* добавочных неотрицательных переменных y_{m+1}, $y_{m+2}, \ldots, y_{m+n}$.

Установим следующее соответствие между переменными в исходной и двойственной задачах:

$$\begin{array}{cccccccccc} x_1 & x_2 & & x_n & x_{n+1} & x_{n+2} & & x_{n+m} \\ \updownarrow & \updownarrow & \ldots & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \ldots & \updownarrow \\ y_{m+1} & y_{m+2} & & y_{m+n} & y_1 & y_2 & & y_m \end{array}$$

То есть каждой первоначальной переменной исходной задачи x_j $(j=1,2,\ldots,n)$ ставится в соответствие добавочная переменная y_{m+j}, введенная в j-е неравенство двойственной задачи, а каждой добавочной переменной x_{n+i} исходной задачи $(i=1,2,\ldots,m)$, введенной в i-е неравенство исходной задачи, – первоначальная переменная y_i двойственной задачи.

Теорема 7. *Компоненты оптимального решения одной из задач (прямой или двойственной) равны абсолютным величинам коэффициентов при соответствующих переменных в выражении линейной формы другой задачи (двойственной или прямой) при достижении ею оптимума и при условии, что полученное оптимальное решение не является вырожденным*.

Из теорем 6 и 7 следует, что если решить одну из взаимно двойственных задач, т.е. найти ее оптимальное решение и оптимум линейной формы, то можно записать оптимальное решение и оптимум линейной формы другой задачи.

Пример 15. Для производства трех видов изделий *A*, *B* и *C* используется три различных вида сырья. Каждый из видов сырья может быть использован в количестве, соответственно не большем 140, 250 и 244 кг. Нормы затрат каждого из видов сырья на единицу продукции данного вида и цена единицы продукции каждого вида приведены в табл. 4.10. Определить план выпуска продукции, при котором обеспечивается ее максимальная стоимость.

Таблица 4.10

Исходные данные

Вид сырья	Нормы затрат сырья (кг) на единицу продукции		
	A	*B*	*C*
I	4	2	1
II	3	1	3
III	1	2	5
Цена единицы продукции (тыс. руб.)	10	14	12

Пусть производится x_1 изделий A, x_2 изделий B и x_3 изделий C. Найти максимальное значение функции $Z=10x_1+14x_2+12x_3$ при следующих условиях:

$$\begin{cases} 4x_1+2x_2+x_3\le 140, \\ 3x_1+x_2+3x_3\le 250, \\ x_1+2x_2+5x_3\le 244, \end{cases}$$

$$x_1\ge 0,\ x_2\ge 0,\ x_3\ge 0.$$

В каноническом виде система ограничений примет вид

$$\begin{cases} 4x_1+2x_2+x_3+x_4=140, \\ 3x_1+x_2+3x_3+x_5=250, \\ x_1+2x_2+5x_3+x_6=244, \end{cases}$$

$$x_j\ \ge 0\ (j=1,2,\ldots,6).$$

Решим задачу симплекс-методом (табл. 4.11): $Z_{\max} = 1110$, оптимальный план $(0;57;26)$. При данном плане производства остается неиспользованным 115 кг сырья второго вида.

Двойственная задача: найти минимум функции $F = 140y_1 + 250y_2 + 244y_3$ при ограничениях

$$\begin{cases} 4y_1 + 3y_2 + y_3 \geq 10, \\ 2y_1 + y_2 + 2y_3 \geq 14, \\ y_1 + 3y_2 + 5y_3 \geq 12, \end{cases}$$

$$y_1 \geq 0, y_2 \geq 0, y_3 \geq 0.$$

На основании приведенных теорем, оптимальным решением двойственной задачи является $\left(\frac{23}{4};0;\frac{5}{4}\right)$, а $F_{\min} = 1110$.

Таблица 4.11

Симплекс-таблица

Базис	C базиса	A_0	$C_1 = 10$	$C_2 = 14$	$C_3 = 12$	$C_4 = 0$	$C_5 = 0$	$C_6 = 0$	Δi
			A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	
A_4	0	140	4	2	1	1	0	0	(70)
A_5	0	250	3	1	3	0	1	0	250
A_6	0	244	1	2	5	0	0	1	122
$Z_j - C_j$		0	–10	(–14)	–12	0	0	0	
A_2	14	70	2	1	1/2	1/2	0	0	140
A_5	0	180	1	0	5/2	–1/2	1	0	72
A_6	0	104	–3	0	4	–1	0	1	26
$Z_j - C_j$		980	18	0	(–5)	7	0	0	
A_2	14	57	19/8	1	0	5/8	0	–1/8	
A_5	0	115	23/8	0	0	1/8	1	–5/8	
A_3	12	26	–3/4	0	1	–1/4	0	1/4	
$Z_j - C_j$		1110	$\frac{57}{4}$	0	0	$\frac{23}{4}$	0	$\frac{5}{4}$	

Двойственная задача оценивает каждый из видов сырья, используемых для производства продукции. Оценки, приписываемые каждому из видов сырья, такие, что оценка всего используемого сырья минимальна, а суммарная оценка сырья, используемого на производство единицы продукции каждого вида, – не меньше цены единицы продукции данного вида. Переменные y_1 и y_3 обозначают условные двойственные оценки сырья I и III видов соответственно. Эти оценки отличны от нуля, а сырье I и III видов полностью используется при оптимальном плане производства продукции. Двойственная оценка единицы сырья II вида равна нулю. Этот вид сырья не полностью используется при оптимальном плане производства продукции.

Таким образом, положительную двойственную оценку имеют лишь те виды сырья, которые полностью используются при оптимальном плане производства изделий. Поэтому двойственные оценки определяют дефицитность используемого предприятием сырья.

Кроме того, величина данной двойственной оценки показывает, на сколько возрастает максимальное значение целевой функции прямой задачи при увеличении количества сырья соответствующего вида на 1 кг. Увеличение количества сырья I вида на 1 кг приведет к тому, что появится возможность найти новый оптимальный план производства изделий, при котором общая стоимость изготовляемой продукции увеличится на $\frac{23}{4}$ тыс. руб. и станет равной 1110 + 5,75 = 1115,75. При этом числа, стоящие в столбце вектора A_4 (табл. 11), показывают, что указанное увеличение общей стоимости изготовляемой продукции может быть достигнуто за счет увеличения выпуска изделий B на $\frac{5}{8}$ ед. и сокращения выпуска изделий C на $\frac{1}{4}$ ед. Вследствие этого использование сырья II вида уменьшится на $\frac{1}{8}$ кг. Точно так же увеличение на 1 кг сырья III вида позволит найти новый оптимальный план производства, при котором общая стоимость возрастет на $\frac{5}{4}$ тыс. руб. из-за увеличения выпуска изделий C на $\frac{1}{4}$ ед. и уменьшения изготовления изделий B на $\frac{1}{8}$ ед., причем объем используемого сырья II вида возрастет на $\frac{5}{8}$ кг.

При подстановке оптимальных двойственных оценок в систему ограничений двойственной задачи первое выполняется как строгое неравенство. Это означает, что двойственная оценка сырья, используемого на производство одного изделия вида A, выше цены этого изделия и, следовательно, выпускать изделие вида A невыгодно. Его производство и не предусмотрено оптимальным планом прямой задачи. Второе и третье ограничения являются равенствами. Это означает, что двойственные оценки сырья, используемого для производства единицы изделий B и C соответственно, равны в точности их ценам, поэтому выпускать их экономически целесообразно, что и предусмотрено оптимальным планом прямой задачи.

2.5. Двойственный симплекс-метод

Двойственный симплекс-метод, как и симплекс-метод, используется при нахождении решения задачи линейного программирования, записанной в каноническом виде, для которой среди векторов $A_j (j = 1, 2, \ldots, n)$ имеется m единичных. Вместе с тем двойственный симплекс-метод можно применять при решении задачи линейного программирования, свободные члены системы уравнений которой могут быть любыми числами (при решении задачи симплекс-методом в случае отрицательности хотя бы одного из этих чисел сначала искали опорное решение, а потом переходили к симплекс-таблице). При двойственном симплекс-методе сразу составляется симплекс-таблица. Если в столбце вектора A_0 имеются отрицательные числа, то выбирают наибольшее по абсолютной величине отрицательное число. В том случае, когда таких чисел несколько, берут какое-нибудь одно из них. Выбор этого числа определяет вектор, исключаемый из базиса. Пусть, например, это вектор A_l. Чтобы определить, какой вектор следует ввести в базис, находим

$$\min\left\{-\frac{Z_j - C_j}{a_{lj}}\right\} \text{ в задаче на максимум и}$$

$$\max\left\{-\frac{Z_j - C_j}{a_{lj}}\right\} \text{ в задаче на минимум,}$$

где $a_{lj} < 0$.

Тем самым определяется разрешающий элемент, и переход к новому шагу симплекс-таблицы производится по обычным правилам симплексного метода. Итерационный процесс продолжают до тех пор, пока в столбце вектора A_0 не будет отрицательных чисел. Затем оптимальный план находят обычным симплексным методом. Если на некотором шаге окажется, что в i-й строке симплекс-таблицы в столбце вектора A_0 стоит отрицательное число, а среди остальных элементов этой строки нет отрицательных чисел, то исходная задача не имеет решения.

Пример 16. Найти двойственным симплекс-методом максимальное значение функции $Z = x_1 + x_2 + 2x_3$ при условиях

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 8, \\ x_1 - x_2 \geq 4, \\ x_1 + 2x_2 \geq 6, \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0.$$

В каноническом виде система ограничений примет вид

$$
\begin{cases}
x_1 + x_2 + x_3 = 8, \\
x_1 - x_2 - x_4 = 4, \\
x_1 + 2x_2 - x_5 = 6,
\end{cases}
$$

$$x_j \ \geq 0 \, (j = 1, 2, \ldots, 5) \, .$$

Умножим второе и третье уравнения на –1 и перейдем к симплекс-таблице (табл. 4.12).

Выбираем третью строку (–6 – наибольшее по абсолютной величине отрицательное число), находим

$$\min\left\{ -\frac{Z_j - C_j}{a_{3j}} \right\} = \min\left\{ \frac{1}{1}; \frac{1}{2} \right\} = \frac{1}{2} \, .$$

Таблица 4.12

Симплекс-таблица

Базис	C базиса	A_0	$C_1 = 1$	$C_2 = 1$	$C_3 = 2$	$C_4 = 0$	$C_5 = 0$	$-\frac{Z_j - C_j}{a_{lj}}$	
			A_1	A_2	A_3	A_4	A_5		
A_3	2	8	1	1	1	0	0		
A_4	0	–4	–1	1	0	1	0		
A_5	0	(–6)	–1	–2	0	0	1	1	(1/2)
$Z_j - C_j$		16	1	1	0	0	0		
A_3	2	5	1/2	0	1	0	1/2		
A_4	0	(–7)	–3/2	0	0	1	1/2		
A_2	1	3	1/2	1	0	0	–1/2		
$Z_j - C_j$		13	1/2	0	0	0	1/2		
A_3	2	8/3	0	0	1	1/3	2/3		
A_1	1	14/3	1	0	0	–2/3	–1/3		
A_2	1	2/3	0	1	0	1/3	–1/3		
$Z_j - C_j$		32/3	0	0	0	1/3	2/3		

То есть из базиса выводим вектор A_5 и вводим A_2. Теперь в столбце A_0 стоит одно отрицательное число, рассмотрим элементы второй строки. Среди этих чисел есть одно отрицательное, выводим из базиса A_4 и вводим A_1. Найден оптимальный план $(14/3; 2/3; 8/3)$ и $Z_{\max} = 32/3$.

Вопросы для самоподготовки

1. Назовите достоинства и недостатки графического метода. Что представляет собой пространство допустимых решений и где на графике можно увидеть опорные решения?

2. Решить графическим методом задачу линейного программирования:

а) $Z(x) = x_1 + 2x_2 \to \max,$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \ge 1, \\ -2x_1 + x_2 \le 2, \\ x_1 + x_2 \le 4, \\ x_1 \le 3, \end{cases}$$

$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0.$

б) $Z(x) = 3x_1 + 4x_2 \to \max,$

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - 6 \ge 0, \\ 3x_1 - 2x_2 + 7 \ge 0, \\ 2x_1 - 4x_2 - 8 \le 0, \\ x_1 - 1 \ge 0, \end{cases}$$

$x_2 \ge 0.$

в) $Z(x) = 3x_1 - 15x_2 \to \min,$

$$\begin{cases} -x_1 + 3x_2 \le 9, \\ 2x_1 + x_2 \ge 10, \\ -x_1 + 4x_2 \ge 0, \end{cases}$$

$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0.$

г) $Z(x) = 2x_1 - x_2 \to \min,$

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 - 4 \ge 0, \\ x_1 + x_2 - 3 \ge 0, \\ x_1 + x_2 - 7 \le 0, \\ x_1 - 2 \le 0, \end{cases}$$

$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0.$

3. Назовите достоинства симплекс-метода и его недостатки. Как в процессе выполнения симплекс-метода определить, что полученный опорный план является оптимальным.

4. Решить симплексным методом следующие задачи

а) $Z(x) = x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 - 6 \to \max,$

$$\begin{cases} -x_1 + 5x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 10, \\ 2x_1 - x_2 + x_3 - 3x_4 = 6, \\ 10x_2 + x_3 + 2x_4 + 3x_5 = 25, \end{cases}$$

$x_j \ge 0, j = 1,2,\ldots,5.$

б) $Z(x) = -2x_1 - 4x_2 - 2x_3 \to \min,$

$$\begin{cases} -2x_1 + x_2 + x_3 \le 4, \\ -x_1 + x_2 + 3x_3 \le 6, \\ x_1 - 3x_2 + x_3 \le 2, \end{cases}$$

$x_j \ge 0, j = 1,2,3.$

в) $Z(x) = 6x_1 - 2x_2 - 8x_3 \to \min,$

$$\begin{cases} x_2 - x_3 \ge -2, \\ -5x_1 + x_2 + x_3 = 4, \\ -8x_1 + x_2 + 2x_4 + 3x_5 = 25, \end{cases}$$

$x_j \ge 0, j = 1,2,3.$

г) $Z(x) = x_1 + 2x_2 + x_4 + x_5 \to \max,$

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 - x_3 = -1, \\ x_2 + x_4 = 6, \\ x_1 + x_2 - x_5 = 25, \end{cases}$$

$x_j \ge 0, j = 1,2,\ldots,5.$

5. Когда необходимо применение следующих методов: двойственный симплекс-метод и метод искусственного базиса. Чем вызвано их применение?

6. Решить двойственный симплекс-методом и методом искусственного базиса следующие задачи

а)

$$Z(x) = x_1 + 2x_2 + 4x_3 + x_4 \to \min,$$
$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = 2, \\ x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4 = 8, \end{cases}$$
$$x_j \ge 0,\ j = 1,2,3,4.$$

б)

$$Z(x) = x_1 + 3x_2 - x_3 + 2x_4 - x_5 \to \max,$$
$$\begin{cases} x_1 - x_3 + x_4 = 2, \\ 2x_1 - 2x_2 - x_4 + x_5 = 2, \\ 3x_1 - 2x_2 - x_3 + x_5 = 4, \end{cases}$$
$$x_j \ge 0,\ j = 1,2,\dots,5.$$

в)

$$Z(x) = 2x_1 + 2x_2 - 5x_3 \to \min,$$
$$\begin{cases} 2x_1 - 2x_2 + 3x_3 \ge 12, \\ -x_1 + x_2 - x_3 \le 2, \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 = 24, \end{cases}$$
$$x_j \ge 0,\ j = 1,2,3.$$

г)

$$Z(x) = 3x_1 + 2x_2 - 2x_3 + 3x_4 + x_5 \to \max,$$
$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 2, \\ -x_1 + x_2 + 2x_3 + x_5 = 4, \\ 2x_1 - 3x_3 + x_4 + x_5 = 4, \end{cases}$$
$$x_j \ge 0,\ j = 1,2,\dots,5.$$

7. Фабрика производит три основных типа товара. Изделию типа I требуется 3 единицы сырья А и единица сырья В; оно приносит прибыль в 3 единицы. Изделию типа II требуется 4 единицы сырья А и 3 единицы сырья В; оно приносит прибыль в 6 единиц. Изделию типа III требуется единица сырья А и 2 единицы сырья В; оно приносит прибыль в 2 единицы. Найдите оптимальный план производства, если доступны всего 20 единиц сырья А и 10 единиц сырья В. Если окажется доступной еще одна единица сырья А (или В), какую наибольшую цену следует за нее платить?

8. Сформулируйте понятие двойственной задачи и правила ее составления. Необходимость использования двойственной задачи: достоинства и недостатки.

9. Для каждой из следующих задач составить двойственную и, решая одну из них, определить решения обеих задач

а)

$$Z(x) = 6x_1 + 6x_2 + 8x_3 \to \max,$$
$$\begin{cases} 9x_1 + 3x_2 + 3x_3 \le 1053, \\ 15x_1 + 9x_2 + 10x_3 \le 1170, \\ x_1 + 5x_2 + 5x_3 \le 325, \end{cases}$$
$$x_j \ge 0,\ j = 1,2,3.$$

б) $Z(x) = x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 - 6 \to \max,$

$$\begin{cases} -x_1 + 5x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 10, \\ 2x_1 - x_2 + x_3 - 3x_4 = 6, \\ 10x_2 + x_3 + 2x_4 + 3x_5 = 25, \end{cases}$$
$$x_j \ge 0,\ j = 1,2,\dots,5.$$

в)

$$Z(x) = x_1 - x_2 - x_3 - 3x_3 \to \min,$$
$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 \le 1, \\ 4x_1 - 2x_2 + x_3 \ge -2, \\ 3x_1 + 2x_2 \le 5, \end{cases}$$
$$x_j \ge 0,\ j = 1,2,3.$$

г)

$$Z(x) = x_1 - x_2 - x_3 + x_4 - 2x_5 + x_6 \to \min,$$
$$\begin{cases} x_1 + 2x_4 - 3x_5 - 2x_6 = 5, \\ x_2 + 3x_4 - 2x_5 - 4x_6 = 6, \\ x_3 - 4x_4 - x_5 + 2x_6 = 3, \end{cases}$$
$$x_j \ge 0,\ j = 1,2,\dots,6$$

Практическое занятие № 5
ТРАНСПОРТНЫЕ ЗАДАЧИ. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ

Цель занятия: ознакомиться с теорией формулирования и решения транспортных задач.

1. Математическая модель. Основные определения

Простейшими транспортными задачами являются задачи о перевозках некоторого однородного груза из пунктов отправления (от поставщиков) в пункты назначения (к потребителям) при обеспечении минимальных затрат на перевозки. Под однородными грузами понимаются грузы, которые могут быть перевезены одним и тем же составом.

Обычно начальные условия таких задач записывают в таблицу (табл. 5.1). Например, для m поставщиков и n потребителей такая таблица имеет следующий вид, где показатели C_{ij} – стоимость перевозки единицы груза от каждого i-го поставщика ($i = 1, 2, \ldots, m$) каждому j-му потребителю ($j = 1, 2, \ldots, n$); a_i – мощность (запасы) i-го поставщика в планируемый период; b_j – спрос j-го потребителя на этот же период.

Таблица 5.1

Начальные условия транспортной задачи

a_i \ b_j	b_1	b_2	…	b_n
a_1	C_{11}	C_{12}	…	C_{1n}
a_2	C_{21}	C_{22}	…	C_{2n}
…	…	…	…	…
a_m	C_{m1}	C_{m2}	…	C_{mn}

Обозначим через x_{ij} поставку (объем груза), которая планируется к перевозке от i-го поставщика к j-му потребителю.

Математическая модель транспортной задачи имеет вид

$$Z(x) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} C_{ij} x_{ij} \to \min$$

при ограничениях

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i, \ i = 1, 2, \ldots, m, \\ \sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j, \ j = 1, 2, \ldots, n, \end{cases} \qquad (1)$$

$$x_{ij} \geq 0, \ i = 1, 2, \ldots, m, \ \ j = 1, 2, \ldots, n.$$

Первая группа из m уравнений описывает тот факт, что запасы всех m поставщиков вывозятся полностью. Вторая группа из n уравнений выражает требование полностью удовлетворить запросы всех n потребителей.

Если к ограничениям (1) добавить еще одно:

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j, \tag{2}$$

т.е. суммарная мощность поставщиков равна суммарному спросу потребителей, то такая задача называется ***задачей с правильным балансом***, а ее модель – ***закрытой***. Задача, в которой ограничение (2) отсутствует, т.е.

$$\sum_{i=1}^{m} a_i \neq \sum_{j=1}^{n} b_j,$$

называется задачей с ***неправильным балансом***, а ее модель – ***открытой***.

Число переменных x_{ij}, входящих в целевую функцию и в систему уравнений (1), равно $m \cdot n$, т.е. числу клеток таблицы. Система ограничений (1) есть система из $m+n$ уравнений с $m \cdot n$ переменными.

Любое решение транспортной задачи $(x_{11}, x_{12}, \ldots, x_{mn})$ называется ***распределением поставок***. Оно может быть записано и в виде матрицы:

$$\begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & \ldots & x_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_{m1} & x_{m2} & \ldots & x_{mn} \end{pmatrix}.$$

Так как поставки не могут быть отрицательными, то речь может идти только о допустимых решениях.

Теорема. *Любая транспортная задача, у которой суммарная мощность поставщиков равна суммарному спору потребителей, имеет решение.*

Доказательство. Пусть

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j = M > 0,$$

тогда величины $x_{ij} = \dfrac{a_i b_j}{M}$ $\left(i = 1, 2, ..., m,\ j = 1, 2, ..., n\right)$ являются планом, так как они удовлетворяют системе ограничений (1). Действительно, подставляя значения x_{ij} в (1), находим

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = \sum_{j=1}^{n} \frac{a_i b_j}{M} = \frac{a_i}{M} \sum_{j=1}^{n} b_j = \frac{a_i}{M} \cdot M = a_i,$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = \sum_{i=1}^{m} \frac{a_i b_j}{M} = \frac{b_j}{M} \sum_{i=1}^{m} a_i = \frac{b_j}{M} \cdot M = b_j.$$

Выберем из значений C_{ij} наибольшее $C' = \max C_{ij}$ и заменим в целевой функции $Z(X)$ все коэффициенты на C'. Учитывая, что $\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i$, получим

$$Z(X) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} C_{ij}x_{ij} \le C'\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = C'\sum_{i=1}^{m} a_i = C'M.$$

Выберем из значений C_{ij} наименьшее $C'' = \min C_{ij}$ и заменим в целевой функции $Z(X)$ все коэффициенты на C''. Учитывая, что $\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = a_i$, получим

$$Z(X) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} C_{ij}x_{ij} \ge C''\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = C''\sum_{i=1}^{m} a_i = C''M.$$

Объединяя два последних неравенства в одно двойное, окончательно получаем

$$C''M \le Z \le C'M,$$

т.е. линейная функция ограничена на множестве планов транспортной задачи и существует хотя бы один план задачи. Тем самым теорема доказана.

2. Нахождение начального базисного решения: метод северо-западного угла, метод наименьшей (минимальной) стоимости, метод Фогеля

Как и для других задач линейного программирования, итерационный процесс по отысканию оптимального плана транспортной задачи начинают с опорного плана.

Рассмотрим задачи, которые имеют закрытую модель. Если сложить все m первых уравнений, относящихся к поставщикам, и все n уравнений, относящихся к потребителям, и учесть, что $\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j$, то получим полное совпадение левых и правых частей составленных таких образом сумм. Это свидетельствует о том, что система (1) в закрытых моделях линейно зависима. Если же из системы исключить одно (безразлично какое) уравнение, то она становится линейно независимой.

Таким образом, если каким-либо способом получен невырожденный опорный план транспортной задачи, то в матрице (x_{ij}) ($i = 1, 2, ..., m$; $j = 1, 2, ..., n$) значений его компонент (табл. 5.2) положительными являются только $m + n - 1$, а остальные равны нулю.

Таблица 5.2

Транспортная задача

b_j / a_i	b_1	b_2	…	b_n
a_1	C_{11} $\boldsymbol{x_{11}}$	C_{12} $\boldsymbol{x_{12}}$	…	C_{1n} $\boldsymbol{x_{1n}}$
a_2	C_{21} $\boldsymbol{x_{21}}$	C_{22} $\boldsymbol{x_{22}}$	…	C_{2n} $\boldsymbol{x_{2n}}$
…	…	…	…	…
a_m	C_{m1} $\boldsymbol{x_{m1}}$	C_{m2} $\boldsymbol{x_{m2}}$	…	C_{mn} $\boldsymbol{x_{mn}}$

Если условия транспортной задачи и ее опорный план записаны в виде табл. 5.2, то клетки, в которых находятся отличные от нуля перевозки, называются ***занятыми***, остальные – ***незанятыми***. Занятые клетки соответствуют базисным неизвестным, и для невырожденного опорного плана их количество равно $m+n-1$.

Циклом называется такая последовательность клеток таблицы транспортной задачи $(i_1.j_1)$, $(i_1.j_2)$, $(i_2.j_2)$, …, $(i_m.j_1)$, в которой две и только две соседние клетки расположены в одном столбце или строке таблицы, причем последняя клетка находится в той же строке или столбце, что и первая.

Опорность плана при записи условий транспортной задачи в виде табл. 5.2 заключается в его ацикличности, т.е. в таблице нельзя построить замкнутый цикл, все вершины которого лежат в занятых клетках. Построение циклов начинают с какой-либо занятой клетки и переходят по столбцу (строке) к следующей занятой клетке. Если такой возврат возможен, то получен цикл и план не является опорным. Клетки, в которых происходит поворот под прямым углом, определяют вершины цикла. В противном случае план является опорным.

Всякий план транспортной задачи, содержащий более $m+n-1$ занятых клеток, не является опорным, так как ему соответствует линейно зависимая система векторов. При таком плане в таблице всегда можно построить замкнутый цикл, с помощью которого уменьшают число занятых клеток до $m+n-1$.

Если к занятым клеткам, определяющим опорный невырожденный план, следовательно и ацикличный, присоединить какую-либо незанятую клетку, то план становится неопорным, появляется единственный цикл, все вершины которого, за исключением одной, лежат в занятиях клетках.

Существует несколько простых схем построения первоначального опорного плана транспортной задачи. Рассмотрим их на примерах.

2.1. Метод северо-западного угла

Согласно данному методу запасы очередного поставщика используются для обеспечения запросов очередных потребителей до тех пор, пока не будут исчерпаны полностью, после чего используются запасы следующего по номеру поставщика.

Заполнение таблицы начинается с клетки (1.1) – северо-западного угла. В нее заносится меньшее из чисел a_1 и b_1, т.е. $x_{11} = \min\{a_1; b_1\}$.

Если $a_1 > b_1$ $(a_1 < b_1)$, то $x_{11} = b_{11}$ $(x_{11} = a_1)$ и первый столбец «закрыт» (первая строка «закрыта»), т.е. потребности первого потребителя удовлетворены полностью (предложение первого поставщика полностью исчерпано). Двигаемся далее по первой строке (по первому столбцу), записывая в соседнюю клетку (1.2) (или (2.1)) меньшее из чисел $a_1 - b_1$ и b_2 (или $b_1 - a_1$ и a_2), т.е. $x_{12} = \min\{a_1 - b_1; b_2\}$ (или $x_{21} = \min\{b_1 - a_1; a_2\}$).

Процесс продолжается до тех пор, пока на каком-то шаге не исчерпываются ресурсы a_m и потребности b_n.

Пример 1. Пусть условия транспортной задачи заданы в табл. 5.3.

Данная задача является задачей с правильным балансом, поскольку суммарные объемы ресурсов и потребностей равны:

$$200 + 250 + 120 + 130 + 200 = 100 + 300 + 180 + 320.$$

В первую клетку записываем $x_{11} = \min\{100; 200\} = 100$, первая строка закрыта (табл. 5.4).

Таблица 5.3

Транспортная задача

a_i \ b_j	200	250	120	130	200
100	10	7	2	5	5
300	4	9	8	1	3
180	5	12	16	8	7
320	7	4	6	3	11

Таблица 5.4

Транспортная задача

a_i \ b_j	200	250	120	130	200
100	10 **100**	7	2	5	5
300	4 **100**	9 **200**	8	1	3
180	5	12 **50**	16 **120**	8 **10**	7
320	7	4	6	3 **120**	11 **200**

Переходим к клетке (2.1): $x_{21} = \min\{200 - 100; 300\} = 100$, первый столбец закрыт. Далее переходим к клетке (2.2): $x_{22} = \min\{300 - 100; 250\} = 200$, вторая строка закрыта. Переходим к клетке (3.2): $x_{32} = \min\{250 - 200; 180\} = 50$, второй столбец закрыт. Переходим к клетке (3.3): $x_{33} = \min\{180 - 50; 120\} = 120$, закрыт третий столбец; $x_{34} = \min\{180 - 50 - 120; 130\} = 10$, третья строка закрыта; $x_{44} = \min\{200; 320 - 120\} = 200$. Таблица заполнена.

Проверим, является ли план, построенный в табл. 5.4, опорным. Если начать движение от занятой клетки (1.1), вернуться не только в нее, но и в любую другую занятую клетку, двигаясь только по занятым клеткам, невозможно. Следовательно, план является опорным. Он также является и невырожденным, так как содержит точно $m + n - 1 = 4 + 5 - 1 = 8$ занятых клеток. План имеет вид

$$X_1 = \begin{pmatrix} 100 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 100 & 200 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 50 & 120 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 120 & 200 \end{pmatrix}.$$

При составлении первоначального опорного плана методом северо-западного угла стоимость перевозки единицы груза не учитывалась, поэтому построенный план не является оптимальным.

Стоимость перевозок по этому плану равна

$$Z(X_1) = 100 \cdot 10 + 100 \cdot 4 + 200 \cdot 9 + 50 \cdot 12 + 120 \cdot 16 +$$
$$+ 10 \cdot 8 + 120 \cdot 3 + 200 \cdot 11 = 8360.$$

2.2. Метод минимальной стоимости

Суть метода минимальной стоимости заключается в том, что из всей таблицы стоимостей выбирают наименьшую и в клетку, которая ей соответствует, помещают меньшее из чисел a_i или b_j (если таких клеток несколько, то выбирают любую из них). Затем из рассмотрения исключают либо строку, соответствующую поставщику, запасы которого полностью израсходованы, либо столбец, соответствующий потребителю, потребности которого полностью удовлетворены, либо строку и столбец, если израсходованы запасы поставщика и удовлетворены потребности потребителя. Из оставшейся части таблицы снова выбирают наименьшую стоимость, и процесс распределения запасов продолжают, пока все запасы не будут распределены, а потребности удовлетворены.

Пример 2. Определить опорный план по методу минимальной стоимости для транспортной задачи из примера 1 (табл. 5.5).

Минимальная стоимость $C_{24} = 1$ (табл. 5.5), $x_{24} = \min\{130; 300\} = 130$. Исключаем из рассмотрения четвертый столбец (он закрыт). Для оставшихся клеток минимальная стоимость $C_{13} = 2$, $x_{13} = \min\{100; 120\} = 100$, первая строка закрыта.

Таблица 5.5

Транспортная задача

a_i \ b_j	200	250	120	130	200
100	10	7	2 **100**	5	5
300	4	9	8	1 **130**	3 **170**
180	5 **180**	12	16	8	7
320	7 **20**	4 **250**	6 **20**	3	11 **30**

В оставшейся таблице минимальная стоимость $C_{25} = 3$, $x_{25} = \min\{300 - 130; 200\} = 170$, вторая строка закрыта. Для оставшихся клеток минимальная стоимость $C_{42} = 4$, $x_{42} = \min\{320; 250\} = 250$, второй столбец закрыт. Теперь минимальным элементом является $C_{13} = 5$, $x_{13} = \min\{180; 200\} = 180$, четвертая строка закрыта. В оставшейся части таблицы минимальная стоимость $C_{53} = 6$, $x_{53} = \min\{320 - 250;\ 120 - 100\} = 20$, третий столбец закрыт. Далее минимальная стоимость $C_{51} = 7$, $x_{51} = \min\{320 - 250 - 20; 200 - 180\} = 20$, первый столбец закрыт. Для оставшейся клетки $x_{54} = \min\{320 - 20 - 250 - 20; 200 - 170\} = 30$. План не содержит циклов и является невырожденным (8 занятых клеток). Он имеет вид

$$X_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 100 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 130 & 170 \\ 180 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 20 & 250 & 20 & 0 & 30 \end{pmatrix}.$$

Стоимость перевозок по этому плану

$$Z(X_2) = 100 \cdot 2 + 130 \cdot 1 + 170 \cdot 3 + 180 \cdot 5 + 20 \cdot 7 + 250 \cdot 4 + 20 \cdot 6 + 30 \cdot 11 = 3330$$

значительно меньше, поэтому он ближе к оптимальному.

2.3. Метод аппроксимации Фогеля

При определении опорного плана транспортной задачи методом Фогеля на каждой итерации по всем столбцам и по всем строкам находят разность между двумя записанными в них минимальными тарифами (под тарифом понимается стоимость перевозки единицы груза). Эти разности записывают в специально отведенных для этого строке и столбце. Среди указанных разностей выбирают наибольшую. В строке (или в столбце), которой данная разность соответствует, определяют минимальный тариф. Клетку, в которой он записан, заполняют на данной итерации.

Если минимальный тариф одинаков для нескольких клеток данной строки (столбца), то для заполнения выбирают ту клетку, которая расположена в столбце (строке), соответствующем наибольшей разности между двумя минимальными тарифами, находящимися в данном столбце (строке).

В методе аппроксимации Фогеля используются штрафы, взимаемые за неудачный выбор маршрута. Разности между двумя уровнями затрат на перевозки являются штрафами за неверно выбранный маршрут перевозки.

Этот метод наиболее трудоемкий, однако начальный план перевозок, построенный с его использованием, обычно бывает близок к оптимальному, а иногда является оптимальным планом.

Пример 3. Определить опорный план по методу аппроксимации Фогеля для транспортной задачи из примера 1.

Для каждой строки и столбца таблицы условий найдем разности между двумя минимальными тарифами, записанными в данной строке или столбце, и поместим их в соответствующем дополнительном столбце или дополнительной строке табл. 5.6.

Минимальный тариф в первой строке равен 2, следующий наименьший равен 5 (их два). Разность между ними $5-2=3$. Во второй строке наименьший тариф 1, следующий 3. Разность $3-1=2$. В третьей строке разность $7-5=2$, в четвертой разность $4-3=1$.

В первом столбце наименьший тариф 4. Следующий наименьший 5, разность $5-4=1$. Для второго, третьего, четвертого и пятого тарифов разности соответственно равны 3, 4, 2 и 2.

Наибольшая из всех разностей находится в третьем столбце. В этом столбце минимальный тариф записан в первой строке. Заполняем клетку (1.3): $x_{13}=\min\{100;120\}=100$, предложение первого поставщика полностью исчерпано. Первая строка закрыта. Повторяем предыдущие действия без учета первой строки.

Во второй строке минимальный тариф 1. Следующий 3, разность $3-1=2$. Для третьей и четвертой строк разности равны 2 и 1 соответственно.

Т а б л и ц а 5 . 6

Транспортная задача

<table>
<tr><td>a_i \ b_j</td><td>200</td><td>250</td><td>120</td><td>130</td><td>200</td><td colspan="6">Разности по строкам</td></tr>
<tr><td>100</td><td>10</td><td>7</td><td>2
100</td><td>5</td><td>5</td><td>3</td><td>–</td><td>–</td><td>–</td><td>–</td><td>–</td></tr>
<tr><td>300</td><td>4</td><td>9</td><td>8</td><td>1
100</td><td>3
200</td><td>2</td><td>2</td><td>2</td><td>(3)</td><td>–</td><td>–</td></tr>
<tr><td>180</td><td>5
180</td><td>12</td><td>16</td><td>8</td><td>7</td><td>2</td><td>2</td><td>2</td><td>(3)</td><td>3</td><td>3</td></tr>
<tr><td>320</td><td>7
20</td><td>4
250</td><td>6
20</td><td>3
30</td><td>11</td><td>1</td><td>1</td><td>3</td><td>(3)</td><td>4</td><td>4</td></tr>
<tr><td rowspan="6">Разности по столбцам</td><td>1</td><td>3</td><td>(4)</td><td>2</td><td>2</td></tr>
<tr><td>1</td><td>(5)</td><td>2</td><td>2</td><td>4</td></tr>
<tr><td>1</td><td>–</td><td>2</td><td>2</td><td>(4)</td></tr>
<tr><td>1</td><td>–</td><td>2</td><td>2</td><td>–</td></tr>
<tr><td>2</td><td>–</td><td>(10)</td><td>5</td><td>–</td></tr>
<tr><td>2</td><td>–</td><td>–</td><td>(5)</td><td>–</td></tr>
</table>

В третьем столбце минимальный тариф 6, следующий 8, разность $8-6=2$. В первом, втором, четвертом и пятом тарифах разности соответственно равны 1, 5, 2 и 4. Максимальная из всех разностей находится во втором столбце. Минимальный тариф в этом столбце находится в четвертой строке. Заполняем клетку (4.2): $x_{42}=\min\{250;320\}=250$. Второй потребитель полностью удовлетворил свой спрос. Второй столбец закрыт.

Повторяем все действия без учета первой строки и второго столбца. Разности во второй, третьей и четвертой строках соответственно равны 2, 2, 3; в первом, третьем, четвертом и пятом столбцах – соответственно 1, 2, 2 и 4. Максимальная разность равна 4 и находится в пятом столбце. Минимальный тариф для этого столбца находится в клетке (2.5), поэтому

$x_{25} = \min\{200; 300\} = 200$. Спрос пятого потребителя удовлетворен, пятый столбец закрыт.

Вновь составляем разности для оставшихся строк и столбцов.

Максимальная разность равна 3 и стоит во второй, третьей и четвертой строках. Минимальный из оставшихся тарифов в этих строках равен 1 и находится в клетке (2.4), поэтому $x_{24} = \min\{300 - 200; 130\} = 100$. Исчерпано предложение второго поставщика. Вторая строка не рассматривается.

Для оставшихся строк и столбцов максимальная разность равна 10, минимальный тариф в этом столбце 6, поэтому $x_{43} = \min\{120 - 100; 320 - 250\} = 20$; третий потребитель полностью удовлетворил свой спрос. Закрываем третий столбец.

Снова составляем разности. Максимальная равна 5 и находится в четвертом столбце. Наименьший тариф находится в клетке (4.4): $x_{44} = \min\{130 - 100; 320 - 250 - 20\} = 30$ и четвертый столбец закрыт. Остался один первый столбец. В нем сначала заполняем клетку с наименьшим тарифом $x_{31} = \min\{200; 180\} = 180$. В единственную свободную клетку записываем $x_{41} = \min\{200 - 180; 320 - 250 - 20 - 30\} = 20$.

План является опорным и имеет вид

$$X_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 100 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 100 & 200 \\ 180 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 20 & 250 & 20 & 30 & 0 \end{pmatrix}.$$

Стоимость перевозок по этому плану равна

$$Z(X_3) = 100 \cdot 2 + 100 \cdot 1 + 200 \cdot 3 + 180 \cdot 5 + 20 \cdot 7 + 250 \cdot 4 + 20 \cdot 6 + 30 \cdot 3 = 3150.$$

Вопросы для самоподготовки

1. Сформулируйте постановку транспортной задачи. Что означает понятие сбалансированная (несбалансированная) задача.

2. Возможно, ли решать транспортную задачу симплекс-методом? Если транспортная задача относится к линейному программированию, то почему их выделяют в отдельный класс задач?

3. Решите транспортные задачи

а)

b_j / a_i	11	7	8	4
9	2	5	8	1
16	8	3	9	2
5	7	4	6	3

б)

b_j / a_i	200	400	400	800
200	1	6	9	3
400	3	2	2	4
600	4	5	4	7
200	1	4	3	9

в)

b_j / a_i	10	15	15	10	10
5	3	4	5	4	6
10	1	5	7	1	5
15	4	6	6	3	4
10	2	7	4	7	2

г)

b_j / a_i	300	150	300	150
150	2	1	3	1
250	8	3	7	4
250	6	4	9	3
150	5	2	4	2

4. На четырех базах имеется товар в количестве соответственно 72, 72, 68, 60 единиц. Пять магазинов могут реализовать ежедневно соответственно 30, 10, 80, 40, 100 единиц.

Стоимость перевозки одной единицы товара от каждой базы до всех магазинов задается матрицей

$$C = \begin{pmatrix} 20 & 36 & 6 & 27 & 5 \\ 30 & 40 & 3 & 30 & 9 \\ 10 & 28 & 5 & 47 & 7 \\ 10 & 32 & 7 & 42 & 3 \end{pmatrix}.$$

Указать план перевозок товаров от баз в магазины, который минимизировал бы транспортные расходы, и указать эти расходы. Решение осуществлять методом минимальной стоимости, северо-западного угла, Фогеля. Сравните полученные решения и дайте им оценку.

Практическое занятие № 6
ТРАНСПОРТНЫЕ ЗАДАЧИ.
АЛГОРИТМ РЕШЕНИЯ ТРАНСПОРТНОЙ ЗАДАЧИ

Цель занятия: овладеть алгоритмом решения транспортных задач и особенностями их практического применения.

1. Методы решения транспортных задач

С помощью рассмотренных методов построения первоначального плана можно получить вырожденный или невырожденный опорный план, который можно было бы довести до оптимального с помощью симплексного метода. Однако из-за громоздкости симплексных таблиц (содержится $m \cdot n$ неизвестных) для получения оптимального плана используют более простые методы. Самыми распространенными являются ***метод потенциалов*** и ***метод дифференциальных рент***.

1.1. Метод потенциалов

Теорема. Если план $X^* = \left(x_{ij}^*\right)\left(i = 1, 2, \ldots, m;\ j = 1, 2, \ldots, n\right)$ транспортной задачи является оптимальным, то ему соответствует система из $m + n$ чисел u_i^* и v_j^*, удовлетворяющих условиям

$$u_i^* + v_j^* = C_{ij} \text{ для } x_{ij}^* \geq 0$$

и

$$u_i^* + v_j^* \leq C_{ij} \text{ для } x_{ij}^* = 0$$

$$\left(i = 1, 2, \ldots, m;\ j = 1, 2, \ldots, n\right).$$

Числа u_i^* и v_j^* называются ***потенциалами соответственно поставщиков*** и ***потребителей***.

Доказательство. Транспортную задачу минимизации линейной функции $Z = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} C_{ij} x_{ij}$ при ограничениях

$$\begin{cases} x_{i1} + x_{i2} + \ldots + x_{in} = a_i, & i = 1, 2, \ldots, m, \\ x_{1j} + x_{2j} + \ldots + x_{jm} = b_j, & j = 1, 2, \ldots, n, \end{cases}$$

$$x_{ij} \geq 0 \left(i = 1, 2, \ldots, m;\ j = 1, 2, \ldots, n\right)$$

можно рассматривать как двойственную некоторой исходной задачи линейного программирования.

Если каждому ограничению вида $x_{i1} + x_{i2} + \ldots + x_{in} = a_i$ в исходной задаче соответствует переменная u_i $(i = 1, 2, \ldots, m)$, а каждому ограничению вида $x_{1j} + x_{2j} + \ldots + x_{jm} = b_j$ переменная v_j $(j = 1, 2, \ldots, n)$, то двойственная задача – максимизировать линейную функцию $F(Y) = \sum_{i=1}^{m} a_i u_i + \sum_{j=1}^{n} b_j v_j$ при ограничениях $u_i + v_j \le C_{ij}$ $\left(i = 1, 2, \ldots, m;\ j = 1, 2, \ldots, n\right)$. План X^* является оптимальным планом двойственной задачи, поэтому план $Y^* = \left(u_i^*, v_j^*\right)$ является планом исходной задачи и $\max F = \min Z$, или

$$\sum_{i=1}^{m} a_i u_j^* + \sum_{j=1}^{n} b_j v_j^* = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} C_{ij} x_{ij}^*, \text{ где } x_{ij}^* \ge 0.$$

На основании теоремы из теории двойственности (если при подстановке компонент оптимального плана в систему ограничений исходной задачи *i*-е ограничение обращается в неравенство, то *i*-я компонента оптимального плана двойственной задачи равна нулю; если *i*-я компонента оптимального плана двойственной задачи положительна, то *i*-е ограничение исходной задачи удовлетворяется ее оптимальным решением как строгое равенство), получаем $u_i^* + v_j^* = C_{ij}$ для $x_{ij}^* \ge 0$, $u_i^* + v_j^* \le C_{ij}$ для $x_{ij}^* = 0$.

Из доказанной теоремы следует, что для оптимальности начального опорного плана необходимо выполнение следующих условий:

1) для каждой занятой клетки сумма потенциалов должна быть равна стоимости единицы перевозки, стоящей в этой клетке: $u_i + v_j = C_{ij}$;

2) для каждой незанятой клетки сумма потенциалов должна быть меньше или равна стоимости единицы перевозки, стоящей в этой клетке: $u_i + v_j \le C_{ij}$.

Алгоритм метода потенциалов

1. Построение системы потенциалов. Используем условие $u_i + v_j = C_{ij}$, где C_{ij} – тариф на перевозку из пункта *i* в пункт *j* для занятых клеток.

Систему потенциалов можно построить только для невырожденного опорного плана. Он содержит $m + n - 1$ занятых клеток, поэтому для него можно составить систему из $m + n - 1$ линейно независимых уравнений с $m + n$ неизвестными. Она является неопределенной, поэтому одному неизвестному придают нулевое значение. Обычно полагают $u_i = 0$. После этого остальные потенциалы определяются однозначно.

Если опорный план является вырожденным, то количество занятых клеток дополняют до $m + n - 1$, вводя нулевые перевозки. Клетки, в которые введены нулевые перевозки, называются ***фиктивно занятыми***.

При вырожденном опорном плане построение системы потенциалов прерывается, какие-то потенциалы для занятых клеток, например u_p и v_q, остаются неопределенными. Фиктивно занятой целесообразно сделать н-езанятую клетку либо строки p, либо столбца q, в которой стоит наименьшая стоимость.

2. Проверка выполнения условия оптимальности для незанятых клеток. Суммируем потенциалы, на пересечении которых стоит незанятая клетка, сумму сравниваем со стоимостью, стоящей в ней (тарифом). Такой тариф называется ***косвенным***, т.е. это тариф для маршрутов, по которым не осуществляются перевозки при данном плане.

Если для всех незанятых клеток $u_i + v_j \le C_{ij}$, то план является оптимальным; если хотя бы для одной клетки $u_i + v_j > C_{ij}$, то план может быть улучшен. Для каждой клетки, в которой не выполняется условие оптимальности, находим разность $\Delta_{ij} = \left(u_i + v_j\right) - C_{ij} > 0$.

3. Выбор клетки, в которую необходимо послать перевозку. Такой клеткой является та, которой соответствует $\max \Delta_{ij}$. Если имеется несколько одинаковых значений, то из них выбирается любое.

4. Построение цикла и определение величины перераспределения груза. Строим цикл, начинающийся и заканчивающийся в выбранной свободной клетке, остальные вершины находятся в занятых клетках. Этот цикл единственный. В свободной клетке условно ставят знак «+», а в остальных вершинах цикла, чередуясь, ставят «–» или «+». Затем осуществляется перераспределение продукции по циклу. Для этого выбирают клетку со знаком «–», которой соответствует наименьшее число единиц продукции. Это значение прибавляют к значениям, стоящим в клетках со знаком «+», и отнимают от значений, стоящих в клетках со знаком «–». При таком распределении общий баланс не меняется. Свободная клетка заполняется, а клетка со знаком «–», которой соответствует наименьшее количество продукции, становится свободной; соответствующую ей переменную исключают из списка базисных.

Все действия повторяются для нового плана.

Пример 4. Найти оптимальный план перевозок для транспортной задачи из примера 1.

В качестве начального опорного плана выберем план, найденный по методу минимальной стоимости (табл. 6.1).

Таблица 6.1

Опорный план

a_i \ b_j	200	250	120	130	200
100	10	7	2 100	5	5
300	4	9	8	1 **130** −	3 **170** +
180	5 **180**	12	16	8	7
320	7 **20**	4 **250**	6 **20**	3 + ●	11 − **30**

1. Построим систему потенциалов:

$$\begin{cases} u_1 + v_3 = 2, \\ u_2 + v_4 = 1, \\ u_2 + v_5 = 3, \\ u_3 + v_1 = 5, \\ u_4 + v_1 = 7, \\ u_4 + v_2 = 4, \\ u_4 + v_3 = 6, \\ u_4 + v_5 = 11, \end{cases} \Rightarrow$$

Пусть $u_1 = 0$, тогда $v_3 = 2$. Найдем остальные:

$$v_4 = 5,\quad u_2 = -4,\quad u_3 = 2,\quad v_1 = 3,\quad v_2 = 0,\quad u_4 = 4,\quad v_5 = 7.$$

2. Суммируем потенциалы, на пересечении которых стоит незанятая клетка:

$u_1 + v_1 = 0 + 3 = 3 < 10$,

$u_1 + v_2 = 0 + 0 = 0 < 7$,

$u_1 + v_4 = 0 + 5 = 5 = 5$,

$u_1 + v_5 = 0 + 7 = 7 > 5$,

$u_2 + v_1 = -4 + 3 = -1 < 4$,

$u_2 + v_2 = -4 + 0 = -4 < 9$,

$u_2 + v_3 = -4 + 2 = -2 < 8$,

$u_3 + v_2 = 2 + 0 = 2 < 12$,

$u_3 + v_3 = 2 + 2 = 4 < 16$,

$u_3 + v_4 = 2 + 5 = 7 < 8$,

$u_3 + v_5 = 2 + 7 = 9 > 7$,

$u_4 + v_4 = 4 + 5 = 9 > 3$.

Для клеток (1.5), (3.5) и (4.4) не выполняется условие оптимальности: $\Delta_{15} = 7 - 5 = 2$, Δ_{35}=9 – 7=2, $\Delta_{44} = 9 - 3 = 6$.

3. $\max\{\Delta_{15}; \Delta_{35}; \Delta_{44}\} = 6$. Выбираем клетку (4.4).

4. Строим цикл, начинающийся и заканчивающийся в клетке (4.4). Вершинами цикла являются также клетки (2.4), (2.5) и (4.5). В клетке (4.4) ставим знак «+», в клетке (2.4) – знак «–», в (2.5) – знак «+», в (4.5) – знак «–»; $\min\{130; 30\} = 30$. Отнимаем 30 от значений, стоящих в клетках со знаком «–», и прибавляем к значениям, стоящим со знаком «+».

Получаем новый план перевозок (табл. 6.2).

Таблица 6.2

План перевозок

a_i \ b_j	200	250	120	130	200
100	10	7	2 **100**	5	5
300	4 +	9	8	1 – **100**	3 **200**
180	5 **180**	12	16	8	7
320	7 – **20**	4 **250**	6 **20**	3 + **30**	11

Проверим новый план на оптимальность.

1. Построим систему потенциалов:

$u_1 + v_3 = 2$,

$u_2 + v_4 = 1$,

$u_2 + v_5 = 3$,

$u_3 + v_1 = 5$,

$u_4 + v_1 = 7$,

$u_4 + v_2 = 4$,

$u_4 + v_3 = 6$,

$u_4 + v_4 = 3$.

Пусть $u_1 = 0$, тогда $v_3 = 2$, $u_4 = 4$, $v_4 = -1$, $v_2 = 0$, $v_1 = 3$, $u_3 = 2$, $u_2 = 2$, $v_5 = 1$.

2. Для незанятых клеток:

$u_1 + v_1 = 0 + 3 = 3 < 10$,

$u_1 + v_2 = 0 + 0 = 0 < 7$,

$u_1 + v_4 = 0 - 1 = -1 < 5$,

$u_1 + v_5 = 0 + 1 = 1 < 5$,

$u_2 + v_1 = 2 + 3 = 5 > 4$,

$u_2 + v_2 = 2 + 0 = 2 < 9$,

$u_2 + v_3 = 2 + 2 = 4 < 8$,

$u_3 + v_2 = 2 + 0 = 2 < 12$,

$u_3 + v_3 = 2 + 2 = 4 < 16$,

$u_3 + v_4 = 2 - 1 = 1 < 8$,

$u_3 + v_5 = 2 + 1 = 3 < 7$,

$u_4 + v_5 = 4 + 1 = 5 < 13$.

Для клетки (2.1) не выполняется условие оптимальности $\Delta_{21} = 5 - 4 = 1$.

3. Выбираем клетку (2.1).

4. Строим цикл, начинающийся и заканчивающийся в клетке (2.1). Он содержит также клетки (2.4), (4.4) и (4.1); $\min\{100; 20\} = 20$. Производим перераспределение по циклу и получаем новый план (табл. 6.3).

Таблица 6.3

План перевозок

a_i \ b_j	200	250	120	130	200
100	10	7	2 **100**	5	5
300	4 **20**	9	8	1 **80**	3 **200**
180	5 **180**	12	16	8	7
320	7	4 **250**	6 **20**	3 **50**	11

Проверим новый план на оптимальность.

1. Построим систему потенциалов:

$u_1 + v_3 = 2$, $\quad u_1 = 0$, $v_3 = 2$,

$u_2 + v_1 = 4$, $\quad v_1 = 2$,

$u_2 + v_4 = 1$, $\quad u_2 = 2$,

$u_2 + v_5 = 3$, $\quad v_5 = 1$,

$u_3 + v_1 = 5$, $\quad \Rightarrow \quad u_3 = 3$,

$u_4 + v_2 = 4$, $\quad v_2 = 0$,

$u_4 + v_3 = 6$, $\quad u_4 = 4$,

$u_4 + v_4 = 3$, $\quad v_4 = -1$.

2. Для незанятых клеток:

$u_1 + v_1 = 0 + 2 = 2 < 10$,

$u_1 + v_2 = 0 + 0 = 0 < 7$,

$u_1 + v_4 = 0 - 1 = -1 < 5$,

$u_1 + v_5 = 0 + 1 = 1 < 5$,

$u_2 + v_2 = 2 + 0 = 2 < 9$,

$u_2 + v_3 = 2 + 2 = 4 < 8$,

$u_3 + v_2 = 3 + 0 = 3 < 12$,

$u_3 + v_3 = 3 + 2 = 5 < 16$,

$u_3 + v_4 = 3 - 1 = 2 < 8$,

$u_3 + v_5 = 3 + 1 = 4 < 7$,

$u_4 + v_1 = 4 + 2 = 6 < 7$,

$u_4 + v_5 = 4 + 1 = 5 < 11$.

Следовательно, получен оптимальный план

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 100 & 0 & 0 \\ 20 & 0 & 0 & 80 & 200 \\ 180 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 250 & 20 & 50 & 0 \end{pmatrix}.$$

Оптимальные затраты равны:

$$Z(X) = 100 \cdot 2 + 20 \cdot 4 + 80 \cdot 1 + 200 \cdot 3 + 180 \cdot 5 + 250 \cdot 4 + 20 \cdot 6 + 50 \cdot 3 = 3130.$$

Ответ: $\min Z(X) = 3130$ при

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 100 & 0 & 0 \\ 20 & 0 & 0 & 80 & 200 \\ 180 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 250 & 20 & 50 & 0 \end{pmatrix}.$$

Далее рассмотрим действия по определению оптимального плана, если в качестве начального опорного плана взять план, найденный по методу северно-западного угла (табл. 6.4).

1. Построим систему потенциалов:

$u_1 + v_1 = 10$, $\quad u_1 = 0$, $v_1 = 10$,

$u_2 + v_1 = 4$, $\quad u_2 = -6$,

$u_2 + v_2 = 9$, $\quad\Rightarrow\quad$ $v_2 = 15$,
$u_3 + v_2 = 12$, $\quad$ $u_3 = -3$,
$u_3 + v_3 = 16$, $\quad$ $v_3 = 19$,
$u_3 + v_4 = 8$, $\quad$ $v_4 = 11$,
$u_4 + v_4 = 3$, $\quad$ $u_4 = -8$,
$u_4 + v_5 = 11$. $\quad$ $v_5 = 19$,

Таблица 6.4

Опорный план (метод северо-западного угла)

a_i \ b_j	200	250	120	130	200
100	10 **100** –	7	2 +	5	5
300	4 **100** +	9 **200** –	8	1	3
180	5	12 **50** +	16 **120** –	8 **10**	7
320	7	4	6	3 **120**	11 **200**

2. Для незанятых клеток:

$u_1 + v_2 = 0 + 15 = 15 > 7$,
$u_1 + v_3 = 0 + 19 = 19 > 2$,
$u_1 + v_4 = 0 + 11 = 11 > 5$,
$u_1 + v_5 = 0 + 19 = 19 > 5$,
$u_2 + v_3 = -6 + 19 = 13 > 8$,
$u_2 + v_4 = -6 + 11 = 5 > 1$,
$u_2 + v_5 = -6 + 19 = 13 > 3$,
$u_3 + v_1 = -3 + 10 = 7 > 5$,
$u_3 + v_5 = -3 + 19 = 16 > 7$,
$u_4 + v_1 = -8 + 10 = 2 < 7$,
$u_4 + v_2 = -8 + 15 = 7 > 4$,
$u_4 + v_3 = -8 + 19 = 11 > 6$.

Условие оптимальности не выполняется для клеток (1.2), (1.3), (1.4), (1.5), (2.3), (2.4), (2.5), (3.1), (3.5), (4.2) и (4.3):

$$\Delta_{12} = 8,\ \Delta_{13} = 17,\ \Delta_{14} = 6,\ \Delta_{15} = 14,\ \Delta_{23} = 5,\ \Delta_{24} = 4,$$

$$\Delta_{25}=10,\ \Delta_{31}=2,\ \Delta_{35}=9,\ \Delta_{42}=3,\ \Delta_{43}=5.$$

3. $\max\{\Delta_{12},\Delta_{13},\Delta_{14},\Delta_{15},\Delta_{23},\Delta_{24},\Delta_{25},\Delta_{31},\Delta_{35},\Delta_{42},\Delta_{43}\}=17$. Выбираем клетку (1.3).

4. Строим цикл. Вершинами цикла являются клетки (1.3), (1.1), (2.1), (2.2), (3.2) и (3.3), $\min\{100; 200; 120\}=100$. Получаем новый опорный план перевозок (табл. 6.5).

Таблица 6.5

Новый опорный план

a_i \ b_j	200	250	120	130	200
100	10	7	2 **100**	5	5
300	4 **200**	9 **100**	8	1	3
180	5	12 **150**	16 **20**	8 **10**	7
320	7	4	6	3 **120**	11 **200**

Продолжая процесс, через некоторое конечное число шагов получим оптимальный план.

Циклы могут также иметь, например, вид, изображенный на рис. 6.1.

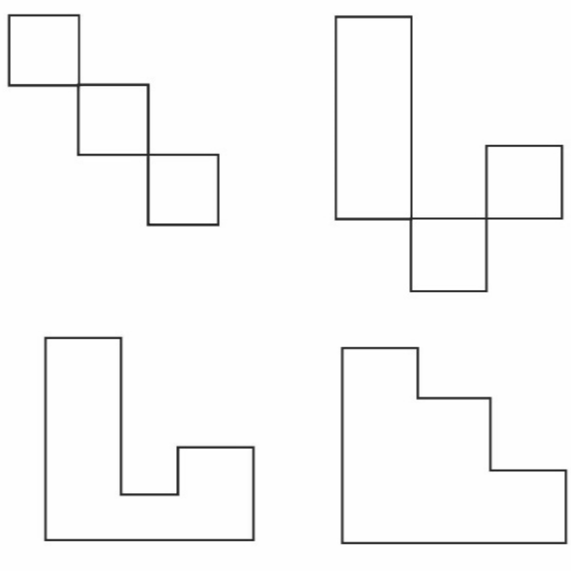


Рис. 6.1. Вид циклов

1.2. Метод дифференциальных рент

При определении оптимального плана транспортной задачи методом потенциалов сначала находится какой-нибудь ее опорный план, а затем он улучшается. При нахождении решения транспортной задачи методом дифференциальных рент сначала наилучшим образом распределяют между пунктами назначения часть груза (так называемое ***условно оптимальное распределение***) и на последующих итерациях постепенно уменьшают общую величину нераспределенных поставок. Первоначальный вариант распределения груза определяют следующим образом. В каждом из столбцов таблицы данных находят минимальный тариф. Найденные числа заключают в скобки, а клетки заполняют. В них записывают максимально возможные числа. В результате получают некоторое распределение поставок груза в пункты назначения. Это распределение в общем случае не удовлетворяет ограничениям исходной транспортной задачи, поэтому в результате последующих шагов следует постепенно сокращать нераспределенные поставки груза так, чтобы при этом общая стоимость перевозок оставалась минимальной. Для этого сначала определяют избыточные и недостаточные строки.

Строки, соответствующие поставщикам, запасы которых полностью распределены, а потребности пунктов назначения, связанных с данными потребителями запланированными поставками, не удовлетворены, называются ***недостаточными***. Эти строки иногда называют отрицательными. Строки, запасы которых исчерпаны не полностью, называются ***избыточными***. Иногда их называют положительными.

После определения избыточных и недостаточных строк для каждого из столбцов находят разности между числом в скобке и ближайшим к нему тарифом, записанным в избыточной строке. Если число в скобке находится в положительной строке, то разность не определяют. Среди полученных чисел находят наименьшее. Это число называется ***промежуточной рентой***. После этого переходят к новой таблице, которая получается из предыдущей прибавлением к соответствующим тарифам в отрицательных строках промежуточной ренты. Остальные элементы остаются прежними. При этом все клетки новой таблицы считают свободным. После построения новой таблицы начинают заполнение ее клеток. Теперь число заполняемых клеток на одну больше, чем на предыдущем этапе. Эта дополнительная клетка находится в столбце, в котором была записана промежуточная рента. Все остальные клетки находятся по одной в каждом из столбцов и в них записаны наименьшие для данного столбца числа, заключенные в скобки. Заключены в скобки и два одинаковых числа, стоящих в столбце, в котором в предыдущей таблице была записана промежуточная рента.

В новой таблице число заполняемых клеток больше, чем число столбцов, поэтому при заполнении клеток следует пользоваться правилом, которое состоит в следующем. Выбирают некоторый столбец (строку), в котором имеется одна клетка с помещенной в ней скобкой. Эту клетку заполняют и исключают из рассмотрения данный столбец (строку). Затем берут некоторую строку (столбец), в которой имеется одна клетка с помещенной в ней скобкой. Эту клетку заполняют и исключают из рассмотрения данную строку (столбец). Продолжая так, после конечного числа шагов заполняют все клетки, в которых помещены скобки с заключенными в них числами. Если удается распределить весь груз, имеющийся в пунктах отправления, между пунктами назначения, то получают оптимальный план транспортной задачи. Если же оптимальный план не получен, то переходят к новой таблице. Для этого находят избыточные и недостаточные строки и промежуточную ренту. При этом могут возникнуть затруднения при определении знака строки, когда ее нераспределенный остаток равен нулю. В этом случае строку считают положительной при условии, что вторая заполненная клетка, стоящая в столбце, связанном с данной строкой еще одной заполненной клеткой, расположена в положительной строке.

После конечного числа описанных итераций нераспределенный остаток становится равным нулю. В результате получают оптимальный план данной транспортной задачи.

Этот метод имеет более простую логическую схему расчетов, чем метод потенциалов.

Пример 5. Найти оптимальный план перевозок методом дифференциальных рент для транспортной задачи из примера 1 (табл. 6.6).

Таблица 6.6

Метод дифференциальных рент

a_i \ b_j	200	250	120	130	200	
100	10	7	(2) **120**	5	5	–20
300	(4) **200**	9	8	(1) **130**	(3) **200**	–230
180	5	12	16 **20**	8	7	+180
320	7	(4) **250**	6	3	11	+70
	1	–	4	2	2	

В каждом из столбцов табл. 6.6 находим минимальные тарифы и заключаем их в скобки. Заполняем клетки, в которых стоят указанные числа. Для этого в каждую из них записываем максимально допустимое число. Получили условно оптимальный план. Определяем избыточные и недостаточные строки. Строки 3 и 4 являются избыточными, поскольку ресурсы не исчерпаны полностью, при этом величина избытка строки 3 равна 180, а строки 4 равна 70. Строки 1 и 2 недостаточные. Общая величина избытка $180+70$ совпадает с общей величиной недостатка, равной $230+20$. Находим для каждого из столбцов разности между числом в скобке и ближайшим к нему тарифом, записанным в избыточной строке. Для второго столбца разность не определяем, так как число в скобке находится в положительной строке. В первом столбце число, стоящее в скобке, равно 4, а в избыточных строках в клетках данного столбца наименьшим является число 5. Следовательно, разность для данного столбца равна $5-4=1$. Аналогично находим разности для других столбцов (для третьего: $6-2=4$, для четвертого: $3-1=2$, для пятого: $7-5=2$).

Выбираем наименьшую из найденных разностей, которая является промежуточной рентой. Промежуточная рента равна 1 (находится в первом столбце). Переходим к новой таблице (табл. 6.7).

Таблица 6.7

Метод дифференциальных рент

a_i \ b_j	200	250	120	130	200	
100	11	8	(3) **120**	6	6	–20
300	(5) **20**	10	9	(2) **130**	(4) **200**	–50
180	(5) **180**	12	16 **20**	8	7	–0
320	7	(4) **250**	6	3	11	+70
	2	–	3	1	7	

В табл. 6.7 в недостаточные строки прибавляем к соответствующим тарифам промежуточную ренту, т.е. 1. В таблице 6.7 число заполняемых клеток возросло на одну, так как в первом столбце теперь имеются два минимальных элемента 5. Эти числа заключают в скобки. Сначала заполняем клетки (4.2), (1.3), (2.4) и (2.5), так как они являются единственными клетками для заполнения во втором, третьем, четвертом и пятом столбцах. После этого заполняем клетку (3.1), поскольку она является единственной для заполнения в третьей строке, а затем и клетку (2.1). Четвертая строка является избыточной, первая и вторая – недостаточными. Третья (нулевая) строка считается отрицательной, так как вторая заполненная клетка, стоящая в столбце, связанном с данной строкой еще одной заполненной клеткой (клетка (2.1)), расположена в отрицательной строке.

Для второго столбца разность не определена, потому что число, записанное в скобке в данном столбце, находится в положительной строке. В первом столбце числа, стоящие в скобках, равны 5, а в избыточной строке находится число 7, разность равна $7-5=2$. Аналогично находим разности для других столбцов. Для третьего $6-3=3$, для четвертого $3-2=1$, для пятого $11-4=7$. Промежуточная рента равна 1. Переходим к табл. 6.8. В ней к тарифам первой, второй и третьей строк добавляем промежуточную ренту 1. В табл. 6.8 число заполняемых клеток снова возросло на одну.

Таблица 6.8

Метод дифференциальных рент

a_i \ b_j	200	250	120	130	200	
100	12	9	(4) **120**	7	7	–20
300	(6) **20**	11	10	(3) **80**	(5) **200**	+0
180	(6) **180**	13	17	9	7	+0
320	7	(4) **250**	6	(3) **50**	11	+20
	–	–	2	–	–	

Сначала заполняем клетки (4.2), (1.3) и (2.5) – они единственные для заполнения во втором, третьем и пятом столбцах, затем клетку (3.1) – единственная для заполнения в третьей строке, далее клетку (2.1), потом (2.4). Четвертая строка снова избыточная. Находим разности. Вторая и третья строки считаются положительными (клетка (4.4) расположена в положительной строке, следовательно, вторая строка положительна, клетка

(2.1) находится в положительной строке, поэтому и третья строка положительна). Переходим к следующей таблице (табл. 6.9).

Таблица 6.9

Метод дифференциальных рент

a_i \ b_j	200	250	120	130	200	
100	14	11	(6) **100**	9	9	0
300	(6) **20**	11	10	(3) **80**	(5) **200**	0
180	(6) **180**	13	17	9	8	0
320	7	(4) **250**	(6) **20**	(3) **50**	11	0

В табл. 6.9 число заполненных клеток 8. К тарифам первой строки прибавляем промежуточную ренту 2. Сначала заполняем клетки (4.2) и (2.5), затем (3.1), потом (2.1), (2.4), (4.4), (4.3) и (1.3).

Получили оптимальный план задачи.

Вопросы для самоподготовки

1. Сформулируйте алгоритм метода потенциалов.

2. Метод дифференциальных рент: достоинства и недостатки в сравнении с методом потенциалов.

3. Решите транспортные задачи методом потенциалов и методом дифференциальных рент

а)

a_i \ b_j	20	20	40	40	40
20	4	5	2	4	3
40	3	1	3	5	2
80	2	7	6	8	6
40	3	3	1	4	9
20	1	6	9	2	7

б)

a_i \ b_j	5	5	10	10	5
5	3	4	6	5	13
5	6	3	7	6	10
10	10	5	2	2	6
15	9	4	4	9	5
10	4	6	2	3	4

4. На четырех складах A, B, C, D находится соответственно 32, 30, 18, 20 т горючего, а в пунктах 1, 2, 3, 4, 5, 6 потребляют это горючее в количествах 9, 10, 14, 20, 21, 26 т соответственно. Перевозка 1 т горючего со складов A, B, C, D в пункты 1, 2, 3, 4, 5, 6 задается тарифной матрицей

$$T = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 8 & 9 & 2 & 5 \\ 2 & 9 & 7 & 2 & 5 & 3 \\ 12 & 2 & 6 & 10 & 7 & 4 \\ 9 & 3 & 5 & 10 & 3 & 6 \end{pmatrix}.$$

Составить такой план перевозки горючего, при котором транспортные расходы будут минимальными, и указать эти расходы.

5. В резерве трех железнодорожных станций A, B, C находятся соответственно 90, 40, 30 вагонов. Составить оптимальный план перегона части этих выгонов к четырем пунктам погрузки хлеба, если пункту № 1 необходимо 60 вагонов, № 2 – 40 вагонов, № 3 – 30 вагонов, № 4 – 20 вагонов. Стоимость перегонов одного вагона:

– со станции A в указанные пункты соответственно равна 200, 300, 100, 400 руб.;

– со станции B – 400, 300, 300, 200 руб.;

– со станции C – 200, 300, 100, 400 руб.

В ответе указать стоимость перегона вагонов.

Практическое занятие № 7
ТРАНСПОРТНЫЕ ЗАДАЧИ. РЕШЕНИЕ ТРАНСПОРТНЫХ ЗАДАЧ С ОГРАНИЧЕНИЯМИ

Цель занятия: овладеть алгоритмом решения транспортных задач с ограничениями.

1. Математическая модель транспортной задачи

При рассмотрении открытой модели транспортной задачи исследователь может столкнуться с двумя случаями:

1) суммарное предложение больше суммарного спроса $\sum_{i=1}^{m} a_i > \sum_{j=1}^{n} b_j$;

2) суммарное предложение меньше суммарного спроса $\sum_{i=1}^{m} a_i < \sum_{j=1}^{n} b_j$.

Линейная функция одинакова в обоих случаях, изменяется только вид системы ограничений.

Требуется найти минимальное значение линейной функции $Z = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} C_{ij} x_{ij}$ при ограничениях

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} x_{ij} \le a_i, \ \ i = 1, 2, \ldots, m, \\ \sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j, \ \ j = 1, 2, \ldots, n; \end{cases} \qquad \text{(случай 1)}$$

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i, \ \ i = 1, 2, \ldots, m, \\ \sum_{i=1}^{m} x_{ij} \le b_j, \ \ j = 1, 2, \ldots, n; \end{cases} \qquad \text{(случай 2)}$$

$$x_{ij} \ge 0 \ \ \left(i = 1, 2, \ldots, m; \ j = 1, 2, \ldots, n\right).$$

Открытая модель решается приведением к закрытой модели.

В первом случае вводят фиктивного $(n+1)$-го потребителя, спрос которого $b_{n+1} = \sum_{i=1}^{m} a_i - \sum_{j=1}^{n} b_j$, а тариф на перевозку этому потребителю от всех поставщиков равен нулю $C_{in+1} = 0,\ \ i = 1,2,\dots,m$. Неравенство первой системы переходит в равенство $\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n+1} b_j$.

Во втором случае вводят фиктивного $(m+1)$-го поставщика, предложение которого $a_{m+1} = \sum_{j=1}^{n} b_j - \sum_{i=1}^{m} a_i$, тариф на перевозку от этого поставщика всем потребителям равен нулю $C_{m+1j} = 0,\ \ j = 1,2,\dots,n$. Неравенство системы (2) переходит в равенство $\sum_{i=1}^{m+1} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j$.

Пример 1. Найти оптимальное распределение поставок при следующих исходных данных (табл. 7.1).

Таблица 7.1

Исходные данные

a_i \ b_j	45	35	55	65
40	4	1	3	5
60	2	2	3	7
90	4	3	5	3

Суммарное предложение: $\sum_{i=1}^{3} a_i = 40 + 60 + 90 = 190$, суммарный спрос: $\sum_{j=1}^{4} b_j = 45 + 35 + 55 + 65 = 200$, поэтому введем фиктивного поставщика с запасами $200 - 190 = 10$. Исходную таблицу дополняем еще одной строкой (табл. 7.2).

Найдем опорный план методом аппроксимации Фогеля (табл. 7.3).

Наибольшая разность соответствует столбцам 3 и 4. Выберем, например, третий столбец. В нем минимальный тариф записан в четвертой строке. Заполним клетку (4.3). Четвертая строка закрыта. Снова найдем разности между оставшимися двумя минимальными тарифами. Наибольшая разность соответствует первому и четвертому столбцам и первой строке. Выбираем первую строку.

Таблица 7.2

Исходные данные

a_i \ b_j	45	35	55	65
40	4	1	3	5
60	2	2	3	7
90	4	3	5	3
10	0	0	0	0

Таблица 7.3

Опорный план

a_i \ b_j	45	35	55	65	Разности по строкам			
40	4	1 **35**	3 **5**	5	2	2	1	2
60	2 **45**	2	3 **15**	7	0	0	1	4
90	4	3	5 **25**	3 **65**	0	0	1	2
10	0	0	0 **10**	0	0	–	–	–
Разности по столбцам	2	1	3	3				
	2	1	0	2				
	2	–	0	2				
	–	–	0	2				

Минимальный тариф в этой строке записан в клетку (1.2), заполним ее. Второй столбец закрыт. Продолжая итерационный процесс, выбираем первый столбец. Заполняем клетку (2.1). Первый столбец закрыт. Далее выбираем вторую строку и заполняем клетку (2.3). Потом заполняем клетки (1.3), (3.3) и (3.4) в указанном порядке.

Количество заполненных клеток соответствует норме $4+4-1=7$.

Проверим найденный опорный план на оптимальность методом потенциалов:

1. Построим систему потенциалов:

$$\begin{array}{lcl} u_1+v_2=1, & & u_1=0,\ v_2=1, \\ u_1+v_3=3, & & v_3=3, \\ u_2+v_1=2, & & u_2=0,\ v_1=2, \\ u_2+v_3=3, & \Rightarrow & u_3=2,\ v_4=1, \\ u_3+v_3=5, & & u_4=-3, \\ u_3+v_4=3, & & \\ u_4+v_3=0. & & \end{array}$$

2. Для свободных клеток:

$u_1+v_1=0+2=2<4$,

$u_1+v_4=0+1=1<5$,

$u_2+v_2=0+1=1<2$,

$u_2+v_4=0+1=1<7$,

$u_3+v_1=2+2=4=4$,

$u_3+v_2=2+1=3=3$,

$u_4+v_1=-3+2=-1<0$,

$u_4+v_2=-3+1=-2<0$,

$u_4+v_4=-3+1=-2<0$.

Найденный опорный план является оптимальным:

$$X=\begin{pmatrix} 0 & 35 & 5 & 0 \\ 45 & 0 & 15 & 0 \\ 0 & 0 & 25 & 65 \end{pmatrix}.$$

При оптимальном распределении третий потребитель недополучит 10 ед. груза, и минимальное значение целевой функции составит

$$Z_{\min}=35\cdot1+5\cdot3+45\cdot2+15\cdot3+25\cdot5+65\cdot3=505.$$

Оптимальное распределение не является единственным, так как для свободных клеток имеются равенства.

Пример 2. Найти оптимальное распределение поставок при следующих исходных данных (табл. 7.4).

Таблица 7.4

Исходные данные

b_j / a_i	55	45	125	55
150	2	4	6	7
70	4	4	5	2
80	5	9	3	2

Суммарное предложение: $\sum_{i=1}^{3} a_i = 150 + 70 + 80 = 300$, суммарный спрос: $\sum_{j=1}^{4} b_j = 55 + 45 + 125 + 55 = 280$, поэтому введем фиктивного потребителя со спросом $300 - 280 = 20$. Исходную таблицу дополняем еще одним столбцом (табл. 7.5).

Таблица 7.5

Исходные данные

b_j / a_i	55	45	125	55	20
150	2 **55**	4 **45**	6 **30**	7	0 20
70	4	4	5 **15**	2 **55**	0
80	5	9	3 **80**	2	0

Найдем начальный опорный план методом минимальной стоимости. Заполняем клетки (1.1), (2.4), (3.3), (1.2), (2.3), (1.3) и (1.5) в указанной последовательности.

Проверим на оптимальность методом потенциалов.

1. Построим систему потенциалов:

$u_1 + v_1 = 2$, $\qquad$ $u_1 = 0$, $v_1 = 2$,

$u_1 + v_2 = 4$, $\qquad$ $v_2 = 4$,

$$u_1 + v_3 = 6, \qquad\qquad\qquad v_3 = 6,$$
$$u_1 + v_5 = 0, \qquad \Rightarrow \qquad v_5 = 0,$$
$$u_2 + v_3 = 5, \qquad\qquad\qquad u_2 = -1,$$
$$u_2 + v_4 = 2, \qquad\qquad\qquad v_4 = 3,$$
$$u_3 + v_3 = 0, \qquad\qquad\qquad u_3 = -3.$$

2. Для свободных клеток:

$u_1 + v_4 = 0 + 3 = 3 < 7$,

$u_2 + v_1 = -1 + 2 = 1 < 4$,

$u_2 + v_2 = -1 + 4 = 3 < 4$,

$u_2 + v_5 = -1 + 0 = -1 < 0$,

$u_3 + v_1 = -3 + 2 = -1 < 5$,

$u_3 + v_2 = -3 + 4 = 1 < 9$,

$u_3 + v_4 = -3 + 3 = 0 < 2$,

$u_3 + v_5 = -3 + 0 = -3 < 0$.

Найденный опорный план является оптимальным:

$$X = \begin{pmatrix} 55 & 45 & 30 & 0 \\ 0 & 0 & 15 & 55 \\ 0 & 0 & 80 & 0 \end{pmatrix}.$$

При этом распределении у первого поставщика останется 20 ед. груза, и минимальное значение целевой функции составит

$$Z_{\min} = 55 \cdot 2 + 45 \cdot 4 + 30 \cdot 6 + 15 \cdot 5 + 55 \cdot 2 + 80 \cdot 3 = 895.$$

2. Вырождение в транспортных задачах

Вырождение в линейном программировании означает обращение в нуль по крайней мере одной из основных переменных базисного решения.

Рассмотрим, как это проявляется в ходе решения конкретной транспортной задачи.

Пример 3. Решить транспортную задачу, данные которой приведены в табл. 7.6.

Так как $\sum_{i=1}^{4} a_i = \sum_{j=1}^{3} b_j = 40 + 60 + 100 + 20 = 80 + 20 + 120$, то модель задачи закрытая.

Первоначальное распределение поставок выполним по методу северо-западного угла (табл. 7.7).

В табл. 7.7 баланс по строкам и по столбцам соблюден и первоначальное распределение поставок закончено.

Т а б л и ц а 7 . 6

Исходные данные

a_i \ b_j	80	20	120
40	6	9	10
60	2	5	7
100	3	6	8
20	7	1	5

Т а б л и ц а 7 . 7

Первоначальное распределение поставок

a_i \ b_j	80	20	120
40	6 **40**	9	10
60	2 **40**	5 **20**	7
100	3	6 **0** –	8 + **100**
20	7	1 +	5 – **20**

Число заполненных клеток должно равняться $4+3-1=6$, а в табл. 7.7 заполненных клеток только 5.

Для устранения вырожденности дополним количество занятых клеток до $m+n-1$, вводя нулевые перевозки. В данной задаче нужно ввести только одну клетку.

При распределении поставок в табл. 7.7 произошло нарушение ступенчатости, которая характерна для распределения поставок по методу северо-западного угла. Запись нулевой поставки в клетку (3.2) или клетку

(2.3) восстанавливает эту ступенчатость. Выбираем клетку (3.2), так как в ней тариф меньше, чем в клетке (2.3).

Проверим опорный план на оптимальность, построив систему потенциалов:

$$\left.\begin{aligned} u_1 + v_1 &= 6, \\ u_2 + v_1 &= 2, \\ u_2 + v_2 &= 5, \\ u_3 + v_2 &= 6, \\ u_3 + v_3 &= 8, \\ u_4 + v_3 &= 5. \end{aligned}\right. \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} &u_1 = 0,\ v_1 = 6, \\ &u_2 = -4, \\ &v_2 = 9, \\ &u_3 = -3, \\ &v_3 = 11, \\ &u_4 = -6, \end{aligned}$$

и для свободных клеток определив значения:

$$u_1 + v_2 = 0 + 9 = 9 = 9,$$
$$u_1 + v_3 = 0 + 11 = 11 > 10,$$
$$u_2 + v_3 = -4 + 11 = 7 = 7,$$
$$u_3 + v_1 = -3 + 6 = 3 = 3,$$
$$u_4 + v_1 = -6 + 6 = 0 < 7,$$
$$u_4 + v_2 = -6 + 9 = 3 > 1.$$

Далее осуществим выбор клетки, в которую необходимо послать перевозку: $\Delta_{13} = 11 - 10 = 1$, $\Delta_{42} = 3 - 1 = 2$, $\max\{\Delta_{13}; \Delta_{42}\} = 2$, следовательно, заполняем клетку (4.2). Цикл будет содержать клетки (4.2), (3.2), (3.3), (4.4). Чтобы не нарушать принятого алгоритма решения задачи, передвинем в цикле для клетки (4.2) нулевую поставку, клетка (3.2) стоит свободной, поставки в клетках (3.3) и (4.3) сохранятся. Новое распределение поставок записано в табл. 7.8.

Таблица 7.8

Новое распределение поставок

a_i \ b_j	80	20	120
40	6 **40** −	9	10 ● +
60	2 **40** +	5 − **20**	7
100	3	6	8 **100**
20	7	1 + **0**	5 − **20**

Проверим опорный план на оптимальность, построив систему потенциалов:

$$
\begin{aligned}
&u_1+v_1=6, && u_1=0,\ v_1=6,\\
&u_2+v_1=2, && u_2=-4,\\
&u_2+v_2=5, \qquad \Rightarrow && v_2=9,\\
&u_3+v_3=8, && u_3=-5\\
&u_4+v_2=1, && u_4=-8,\\
&u_4+v_3=5. && v_3=13,
\end{aligned}
$$

и для свободных клеток определив значения:

$u_1+v_2=0+9=9=9$,

$u_1+v_3=0+13=13>10$,

$u_2+v_3=-4+13=9>7$,

$u_3+v_1=-5+6=1<3$,

$u_3+v_2=-5+9=4<6$,

$u_4+v_1=-8+6=-2<7$.

Далее осуществим выбор клетки, в которую необходимо послать перевозку: $\Delta_{13}=13-10=3$, $\Delta_{23}=9-7=2$, $\max\{\Delta_{13};\Delta_{23}\}=3$. Заполняем клетку (1.3). Цикл будет содержать клетки (1.3), (1.1), (2.1), (2.2), (4.2), (4.3), $\min\{40;20;20\}=20$. Получаем следующую таблицу (табл. 7.9).

Таблица 7.9

Новое распределение поставок

a_i \ b_j	80	20	120
40	6 **20** −	9	10 + **20**
60	2 **60**	5	7
100	3 +	6	8 − **100**
20	7	1 **20**	5

Выстраиваем систему потенциалов для проверки опорного план на оптимальность:

$$
\begin{aligned}
&u_1+v_1=6, && u_1=0,\ v_1=6,\\
&u_1+v_3=10, && v_3=10,
\end{aligned}
$$

$$u_2 + v_1 = 2, \qquad u_2 = -4,$$
$$u_3 + v_3 = 8, \quad \Rightarrow \quad u_3 = -2,$$
$$u_4 + v_2 = 1, \qquad v_2 = 6,$$
$$u_4 + v_3 = 5. \qquad u_4 = -5;$$

для свободных клеток:

$$u_1 + v_2 = 0 + 6 = 6 < 9,$$
$$u_2 + v_2 = -4 + 6 = 2 < 5,$$
$$u_2 + v_3 = -4 + 10 = 6 < 7,$$
$$u_3 + v_1 = -2 + 6 = 4 > 3,$$
$$u_3 + v_2 = -2 + 6 = 4 < 6,$$
$$u_4 + v_1 = -5 + 6 = 1 < 7.$$

Таким образом, клетка, в которую необходимо послать перевозку: $\Delta_{31} = 1$. Заполним клетку (3.1). Цикл будет содержать клетки (3.1), (1.1), (1.3) и (3.3), $\min\{20;100\} = 20$. Новое распределение поставок представлено в табл. 7.10.

Таблица 7.10

Новое распределение поставок

a_i \ b_j	80	20	120
40	6	9	10 **40**
60	2 **60**	5	7
100	3 **20**	6	8 **80**
20	7	1 **20**	5 **0**

Выстраиваем систему потенциалов для проверки опорного план на оптимальность:

$$u_1 + v_3 = 10, \qquad u_1 = 0,\ v_3 = 10,$$
$$u_2 + v_1 = 2, \qquad u_2 = -3,$$
$$u_3 + v_1 = 3, \qquad v_1 = 5,$$
$$u_3 + v_3 = 8, \quad \Rightarrow \quad u_3 = -2,$$
$$u_4 + v_2 = 1, \qquad v_2 = 6,$$
$$u_4 + v_3 = 5. \qquad u_4 = -5;$$

для свободных клеток:

$u_1+v_1=0+5=5<6$,

$u_1+v_2=0+6=6<9$,

$u_2+v_2=-3+6=3<5$,

$u_2+v_3=-3+10=7=7$,

$u_3+v_2=-2+6=4<6$,

$u_4+v_1=-5+5=0<7$.

Оптимальный план:

$$X=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 40 \\ 60 & 0 & 0 \\ 20 & 0 & 80 \\ 0 & 20 & 0 \end{pmatrix}.$$

Стоимость перевозки:

$$Z(x)=40\cdot 10+60\cdot 2+20\cdot 3+80\cdot 8+20\cdot 1=1240.$$

3. Алгоритм решения транспортной задачи

Обобщая материал от постановки математической модели транспортной задачи до составления первоначального опорного плана и построения оптимального плана, можно предложить следующий алгоритм решения транспортной задачи.

1. Определяют модель задачи. В случае открытой модели вводят фиктивного потребителя (если спрос меньше предложения) или фиктивного поставщика (если спрос больше предложения). Спрос фиктивного потребителя устанавливают равным превышению предложения над спросом, а резервы фиктивного поставщика – превышению спроса над предложением. Тарифы на перевозки к фиктивному потребителю или от фиктивного поставщика считают равными нулю.

2. Составляют исходный (первоначальный) план распределения поставок (по любому методу) или используют метод дифференциальных рент.

3. Проверяют полученный план на оптимальность методом потенциалов. В случае метода дифференциальных рент: если удалось распределить весь груз, имеющийся в пунктах отправления, между пунктами назначения, то получен оптимальный план.

4. Если план не является оптимальным, то для получения нового, улучшенного распределения поставок строят цикл перераспределения для клетки, имеющей наибольшую разность. В методе дифференциальных рент находят избыточные и недостаточные строки, промежуточную ренту.

Новое распределение поставок записывают в таблицу и снова используют метод потенциалов или проверяют, весь ли груз распределен (в случае метода дифференциальных рент).

5. Переходя от одной таблицы к другой, повторяют п. 3 и 4, пока на каком-то этапе не будет выполнено условие оптимальности или распределен весь груз (метод дифференциальных рент).

6. Вычисляют минимальные затраты на перевозки.

4. Алгоритм решения транспортных задач по критерию времени

Транспортная задача по критерию времени возникает при перевозке срочных грузов (например, быстро портящихся продуктов, в чрезвычайных ситуациях и т.п.), когда общая стоимость перевозок имеет второстепенное значение, а на первое место выходит время. Рассмотрим решение таких задач на примере.

Пример 4. Найти минимальное время на осуществление всех перевозок для следующей задачи (табл. 7.11).

Таблица 7.11

Исходные данные

a_i \ b_j	5	10	20	15
10	8	3	5	2
15	4	1	6	7
25	1	9	4	3

В табл. 7.11 даны промежутки времени, за которые грузы от i-го поставщика доставляются j-му потребителю. Такая задача называется ***транспортной задачей по критерию времени*** и связана со срочными перевозками грузов.

Составим начальное опорное решение X_1 методом северо-западного угла (табл. 7.12). Модель задачи закрытая.

Максимальное значение тарифа для заполненных клеток $\max\{8; 3; 1; 6; 4; 3\} = 8$ достигается в клетке (1.1). Исключим из рассмотрения (перечеркнем) клетку (3.2), так как $t_{32} > 8$ (если таких клеток несколько, то перечеркиваются все). Занимать эту клетку нецелесообразно, потому что увеличится значение целевой функции. Чтобы уменьшить ее значение, необходимо освободить клетку (1.1). Для этого строят так называемые ***разгрузочные*** циклы, которые могут включать в свой состав несколько свободных клеток. В каждом разгрузочном цикле, начиная с разгружаемой клетки, расставляются поочередно знаки «–» и «+» и осуществляется сдвиг на величину $\min\limits_{«-»}\left\{x_{ij}\right\}$. Если удается эту клетку разгрузить, то она исключается из рассмотрения (зачеркивается). Получается новое опорное решение X_2, на котором значение целевой функции меньше, чем на X_1. Процесс продолжается до тех пор, пока возможность разгрузить соответствующую клетку не исчезнет.

Таблица 7.12

Начальное опорное решение

a_i \ b_j	5	10	20	15
10	8 **5**	3 **5**	5	2
15	4	1 **5**	6 **10**	7
25	1	9	4 **10**	3 **15**

В нашем случае разгрузочный цикл включает клетки (2.1), (1.1), (1.2) и (2.2) (табл. 7.13), $\min\{5; 5\} = 5$. Осуществляя сдвиг по циклу, получаем второе опорное решение X_2 (табл. 7.14).

Таблица 7.13

Разгрузочный цикл

a_i \ b_j	5	10	20	15
10	8 **5** –	3 + **5**	5	2
15	4 +	1 – **5**	6 **10**	7
25	1	~~9~~	4 **10**	3 **15**

Максимальное значение тарифа для заполненных клеток $\max\{3; 4; 6; 4; 3\} = 6$ достигается в клетке (2.3). Перечеркиваем клетку (2.4), разгружаем клетку (2.3) с помощью цикла (2.2), (1.2), (1.4), (3.4), (3.3) и (3.2) (табл. 7.15), $\min\{10;10;15\}=10$. Осуществляя сдвиг по циклу, получаем третье опорное решение X_3 (табл. 7.16).

Таблица 7.14

Второе опорное решение

a_i \ b_j	5	10	20	15
10	8	3 **10**	5	2
15	4 **5**	1	6 **10**	7
25	1	9	4 **10**	3 **15**

Таблица 7.15

Разгрузочный цикл

a_i \ b_j	5	10	20	15
10	8	3 **10** −	5	2 +
15	4 **5**	1 +	6 − **10**	7
25	1	9	4 + **10**	3 − **15**

Максимум целевой функции на этом опорном решении $\max\{2;4;1;4;3\}=4$ достигается в клетках (2.1) и (3.3). Перечеркиваем клетку (1.3), в которой время больше. С помощью оставшихся невычеркнутых клеток разгрузить клетки (2.1) и (3.3) не удается, поэтому X_3 является оптимальным решением.

Ответ: $\min Z(X)=4$ при $X=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 10 \\ 5 & 10 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 20 & 5 \end{pmatrix}$.

Таблица 7.16

Третье опорное решение

a_i \ b_j	5	10	20	15
10	8	3	5	2 **10**
15	4 **5**	1 **10**	6	7
25	1	9	4 **20**	3 **5**

Пример 5. На предприятии имеется четыре группы станков, каждый из которых может выполнять пять видов элементарных операций по обработке детали, причем операции могут производиться в любом порядке. Максимальное время работы каждой из групп станков соответственно равно 320, 400, 240 и 400 ч; каждая операция соответственно должна выполняться в течение 336, 224, 224, 288 и 288 ч (табл. 7.17).

Таблица 7.17

Исходные данные

a_i \ b_j	336	224	224	288	288
320	4	3	6	2	5
400	3	4	3	5	2
240	2	5	4	3	4
400	3	6	5	4	3

Необходимо определить, сколько времени и на какой операции нужно использовать каждую группу станков, чтобы обработать максимальное количество деталей, если производительность каждого станка группы известна и равна C_{ij} ($i = 1,2,3,4$; $j = 1,2,3,4,5$). Все значения C_{ij} берем со знаком «–» и решаем транспортную задачу методом дифференциальных рент.

В каждом из столбцов табл. 7.18 находим минимальные тарифы и заключаем их в скобки.

Заполняем клетки, в которых стоят указанные числа. Для этого в каждую из них записываем максимально допустимое число. Получаем условно оптимальный план. Определяем избыточные и недостаточные строки. Общая величина избытка $112+240+176$ совпадает с общей величиной недостатка, равной 528. Находим для каждого из столбцов разности между числом в скобке и ближайшим к нему тарифом, записанным в избыточной строке. Для второго и четвертого столбцов разность не определяем, так как число в скобке находится в положительной строке.

Таблица 7.18

Нахождение минимальных тарифов

a_i \ b_j	336	224	224	288	288	
320	(–4) **336**	–3	(–6) **224**	–2	(–5) **288**	–528
400	–3	–4	–3	(–5) **288**	–2	+112
240	–2	–5	–4	–3	–4	+240
400	–3	(–6) **224**	–5	–4	–3	+176
	1	–	1	–	1	

Промежуточная рента равна 1 (разность одинакова во всех столбцах). Переходим к новой таблице (табл. 7.19).

В первой строке ко всем тарифам прибавляем единицу. Сначала заполняем клетки (4.2), (2.4) и (3.5), так как они являются единственными клетками для заполнения во втором и четвертом столбцах, а также третьей строке; затем заполняем клетки (2.1) и (1.5); потом (1.3), (1.1) и (4.1) в указанном порядке (в клетку (4.3) записали 0, так как число заполненных клеток должно быть равно $4+5-1=8$). Получили оптимальный план.

Таким образом, чтобы обработать максимальное количество деталей, необходимо, чтобы первая группа станков выполняла первую операцию 48 ч, третью операцию – 224 ч, пятую операцию – 48 ч, а вторая группа станков выполняла первую операцию 112 ч, четвертую операцию – 288 ч и т.д. При этом будут обработаны: на 1-й операции – 1056 деталей, на 2-й операции – 1344 детали, на 3-й операции – 1344 детали, на 4-й операции – 1440 деталей, на 5-й операции – 1200 деталей, т.е. полностью можно обработать 1056 деталей.

Таблица 7.19

Окончательная таблица

a_i \ b_j	336	224	224	288	288
320	(–3) **48**	–2	(–5) **224**	–1	(–4) **48**
400	(–3) **112**	–4	–3	(–5) **288**	–2
240	–2	–5	–4	–3	(–4) **240**
400	(–3) **176**	(–6) **224**	(–5) **0**	–4	–3

Вопросы для самоподготовки

1. Поясните, как вы понимаете понятия «фиктивный поставщик» и «фиктивный потребитель». Каково их назначение, цель использования в транспортных задачах?

2. Поясните возможность применения метода потенциалов, в случае решения задач с ограничениями.

3. Решите транспортные задачи с учетом ограничений на перевозки грузов

а) $x_{24} \leq 500$; $x_{32} \geq 500$

a_i \ b_j	500	1000	500	1500
500	1	3	1	2
1500	1	6	4	3
1000	2	5	3	4
1500	3	5	4	3

б) $x_{44} \leq 200$; $x_{33} \geq 100$

a_i \ b_j	300	300	300	300
100	7	2	3	1
200	2	4	4	7
300	3	4	5	5
400	4	3	3	2

в) $x_{41} \le 20$; $x_{32} \ge 30$

$a_i \backslash b_j$	30	60	30	90
30	1	2	4	1
30	2	5	10	6
60	3	3	13	7
60	3	4	11	4

4. Вырождение в транспортных задачах и пути его устранения.

5. Дайте словесную формулировку алгоритма решения транспортной задачи по критерию времени.

6. Решить транспортные задачи по критерию минимума времени:

а)

$a_i \backslash b_j$	20	40	50	70
30	13	8	7	11
40	6	7	9	8
50	5	12	5	10
60	19	6	14	4

б)

$a_i \backslash b_j$	200	200	200	200
200	8	7	6	5
100	7	6	5	7
200	4	5	6	7
300	5	7	6	4

Практическое занятие № 8
ЗАДАЧА О НАЗНАЧЕНИЯХ

Цель занятия: овладеть навыками формулирования и решения задач о назначении.

1. Постановка задачи

Цель задачи – найти оптимальное (минимальной стоимости) распределение работников по всем заявленным видам работам.

Общая задача назначения *n* работников на *n* работ представлена в табл. 8.1.

Таблица 8.1

Общий вид задачи о назначениях

		Работы				
		1	2	…	*n*	
Работники	1	c_{11}	c_{12}	…	c_{1n}	1
	2	c_{21}	c_{22}	…	c_{2n}	2
	…	…	…	…	…	…
	n	c_{n1}	c_{n2}	…	c_{nn}	1
		1	1	…	1	

Коэффициент c_{ij} равен стоимости назначения работника *i* на работу *j* (*i*, *j*= 1, 2, ... *n*). То, что количество работников равно количеству работ, не является ограничением общности, поскольку всегда можно ввести в модель фиктивных работников или фиктивные работы.

Задача о назначениях является частным случаем транспортной задачи, в которой работники соответствуют пунктам отправления, а работы – пунктам назначения. В данном случае все величины спроса и предложения равны 1. Стоимость "транспортировки" рабочего i на работу j равна c_{ij}. Задачу о назначениях можно эффективно решить точно так же, как и транспортную задачу. Вместе с тем тот факт, что все величины спроса и предложения равны 1, привел к разработке упрощенного алгоритма решения, названного венгерским методом. Хотя этот метод не имеет никакого отношения к транспортной задаче, он, как и метод потенциалов, все равно основан на симплекс-методе.

2. Венгерский метод

Рассмотрим алгоритм применения венгерского метода на примере.

Пример 1

Три работника различной квалификации и мастерства могут выполнить три вида работ за различную стоимость (в тыс. руб.) (табл. 8.2). Необходимо распределить работы между работниками с минимальными финансовыми затратами.

Таблица 8.2

Исходные данные

	Вид работы №1	Вид работы №2	Вид работы №3
Работник №1	15	10	9
Работник №2	9	15	10
Работник №3	10	12	8

Решим эту задачу о назначениях венгерским методом.

Этап 1. В исходной матрице стоимостей определим в каждой строке минимальную стоимость и отнимем ее от других элементов строки.

Этап 2. В матрице, полученной на первом этапе, найдем в каждом столбце минимальную стоимость и отнимем ее от других элементов столбца.

Этап 3. Оптимальным назначениям будут соответствовать нулевые элементы, полученные на предыдущем этапе.

Обозначим через p_i и q_i минимальные стоимости соответственно в строке i и столбце j, определенные на первом и втором этапах описанного выше алгоритма. Минимальные стоимости по строкам находятся по исходной матрице стоимостей, как показано в табл. 8.3.

Таблица 8.3

Решение задачи (этап 1)

	Вид работы №1	Вид работы №2	Вид работы №3	
Работник №1	15	10	9	$p_1 = 9$
Работник №2	9	15	10	$p_2 = 9$
Работник №3	10	12	8	$p_3 = 8$

Теперь вычтем минимальные стоимости из элементов соответствующих строк, и в результате получим следующую матрицу (табл. 8.4).

Таблица 8.4

Решение задачи (этап 1)

	Вид работы №1	Вид работы №2	Вид работы №3
Работник №1	6	1	0
Работник №2	0	6	1
Работник №3	2	4	0
	$q_1 = 0$	$q_2 = 1$	$q_3 = 0$

На втором этапе алгоритма находим минимальные значения по столбцам и вычитаем их из элементов соответствующих столбцов. В результате получим матрицу, представленную в виде табл. 8.5.

Таблица 8.5

Матрица с оптимальным распределением по видам работ

	Вид работы №1	Вид работы №2	Вид работы №3
Работник №1	6	0	0
Работник №2	0	5	1
Работник №3	2	3	0

Эти виды работ обойдутся работодателю в 9 + 10 + 8 = 27 тыс. руб.

Алгоритм венгерского метода в предыдущем примере завершен успешно, поскольку нулевые элементы в конечной матрице соответствуют допустимому решению (в том смысле, что каждому ребенку назначена в точности одна работа). В некоторых случаях нулевые элементы, полученные на первом и втором этапах венгерского метода, не позволяют непосредственно получить допустимое решение. Тогда необходимы дополнительные действия.

Пример 2

Предположим, что в примере 1 представлено четыре работника и четыре вида работ. Табл. 8.6 соответствует матрице стоимостей для этой задачи (данные представлены в тыс. руб.).

Таблица 8.6

Исходные данные

	Вид работы №1	Вид работы №2	Вид работы №3	Вид работы №4
Работник №1	1	4	6	3
Работник №2	9	7	10	9
Работник №3	4	5	11	7
Работник №4	8	7	8	5

Применение первого и второго этапов алгоритма к исходной матрице (при этом $p_1 = 1, p_2 = 7, p_3 = 4, p_4 = 5, q_1 = 0, q_2 = 0, q_3 = 3, q_4 = 0$) приводит к следующей матрице (табл. 8.7).

Таблица 8.7

Матрица распределения видов работ (1 и 2 этап)

	Вид работы №1	Вид работы №2	Вид работы №3	Вид работы №4
Работник №1	0	3	2	2
Работник №2	2	0	0	2
Работник №3	0	1	4	3
Работник №4	3	2	0	0

В последней матрице расположение нулевых элементов не позволяет назначить каждому работнику одну работу. Например, если мы назначим первому работнику работу 1, из дальнейшего рассмотрения исключается первый столбец, и тогда в строке третьего работника не окажется нулевых элементов. Подобные проблемы можно разрешить следующим образом.

Если после выполнения первого и второго этапов описанного алгоритма не получено допустимое решение, выполните следующие действия.

1. В последней матрице проведите минимальное число горизонтальных и вертикальных прямых по строкам и столбцам, чтобы вычеркнуть в матрице все нулевые элементы.

2. Найдите наименьший невычеркнутый элемент и вычтите его из остальных невычеркнутых элементов и прибавьте к элементам, стоящим на пересечении проведенных на предыдущем этапе прямых.

3. Если новое распределение нулевых элементов не позволяет построить допустимое решение, повторите этап 1. В противном случае перейдите к третьему этапу алгоритма.

В задаче данного примера выполнение этапа 1 требует проведения трех прямых и приводит к табл. 8.8.

Таблица 8.8

Матрица с вычеркнутыми нулевыми элементами

	Вид работы №1	Вид работы №2	Вид работы №3	Вид работы №4
Работник №1	0	3	2	2
Работник №2	2	0	0	2
Работник №3	0	<u>1</u>	4	3
Работник №4	3	2	0	0

Наименьший невычеркнутый элемент (он подчеркнут) равен 1. Этот элемент вычитаем из остальных невычеркнутых элементов и прибавляем к элементам, стоящим на пересечении прямых. В результате получим матрицу, представленную в виде табл. 8.9.

Таблица 8.9

Матрица с оптимальным распределением по видам работ

	Вид работы №1	Вид работы №2	Вид работы №3	Вид работы №4
Работник №1	<u>0</u>	2	1	1
Работник №2	3	0	<u>0</u>	2
Работник №3	0	<u>0</u>	3	2
Работник №4	4	2	0	<u>0</u>

Оптимальное решение, показанное в таблице подчеркнутыми нулями, предлагает первому работнику работу 1, второму – работу 3, третьему –

работу 2 и четвертому – работу 4. Соответствующее значение целевой функции равно 1+10+5+5=21 тыс.руб. Такое же значение можно получить путем суммирования значений p_i и q_i и значения элемента, наименьшего среди всех невычеркнутых: (1+7+4+5)+(0+0+3+0)+(1) = 21 тыс. руб.

3 Вопросы для самоподготовки

1. Сформулируйте алгоритм венгерского метода для решения задачи и назначениях.

2. Возможно ли применять метод потенциалов для решения задачи о назначениях? Если да, то почему этого не делают, а используют венгерский метод?

3. Решите венгерским методом следующие задачи о назначениях.

а)

3	8	2	10	3
8	7	2	9	7
6	4	2	7	5
8	4	2	3	5
9	10	6	9	10

б)

3	9	2	3	7
6	1	5	6	6
9	4	7	10	3
2	5	4	2	1
9	6	2	4	5

Практическое занятие № 9
ЦЕЛОЧИСЛЕННОЕ ЛИНЕЙНОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ

Цель занятия: овладеть знаниями и умениями в области решения задач целочисленного линейного программирования в экономической и геометрической интерпретации.

1. Экономическая и геометрическая интерпретация задачи целочисленного программирования.

Значительная часть экономических задач, относящихся к задачам линейного программирования, требует целочисленного решения. К ним относятся задачи, у которых переменные величины означают количество единиц неделимой продукции, например, распределение производственных заданий между предприятиями, раскрой материалов, загрузка оборудования, распределение судов по линиям, самолетов по рейсам, а также задачи по производству неделимой продукции. Если единица составляет малую часть всего объема производства, то оптимальное решение находят обычным симплексным методом, округляя его до целых единиц, исходя из смысла задачи. В противном случае округление может привести к решению, далекому от оптимального целочисленного.

В общем случае ***задача целочисленного программирования*** формулируется следующим образом: найти максимум или минимум функции

$$Z(X)=\sum_{j=1}^{n}c_jx_j$$

при условиях

$$\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j=b_i, i=1,2,\ldots,m,$$

$$x_j\geq 0, j=1,2,\ldots,n,$$

$$x_j, j=1,2,\ldots,n - \text{целые числа.}$$

2. Метод ветвей и границ

В общем виде задача целочисленного линейного программирования решается в три этапа:

Шаг 1. "Ослабление" пространства допустимых решений задачи целочисленного линейного программирования путем замены любой двоичной переменной y непрерывным ограничением 0≤y≤1 и отбрасывания требования целочисленности для всех остальных переменных. В результате получается обычная задача линейного программирования.

Шаг 2. Решение задачи линейного программирования и определение ее оптимального решения.

Шаг 3. Имея полученное (непрерывное) оптимальное решение, добавляем специальные ограничения, которые итерационным путем изменяют пространство допустимых решений задачи линейного программирования таким образом, чтобы, в конечном счете получилось оптимальное решение, удовлетворяющее требованиям целочисленности.

Рассмотрим алгоритм решения задачи ЦЛП на примере.

Максимизировать $z = 5x_1 + 4x_2$

при ограничениях

$$x_1 + x_2 \le 5$$
$$10x_1 + 6x_2 \le 45$$
$$x_1, x_2 \ge 0 \text{ и целые}$$

На рис. 9.1 пространство допустимых решений задачи целочисленного линейного программирования представлено точками. Соответствующая начальная задача линейного программирования (ЛП0) получается путем отбрасывания условий целочисленности. Ее оптимальным решением будет $x_1 = 3{,}75$, $x_2 = 1{,}25$ и $z = 23{,}75$.

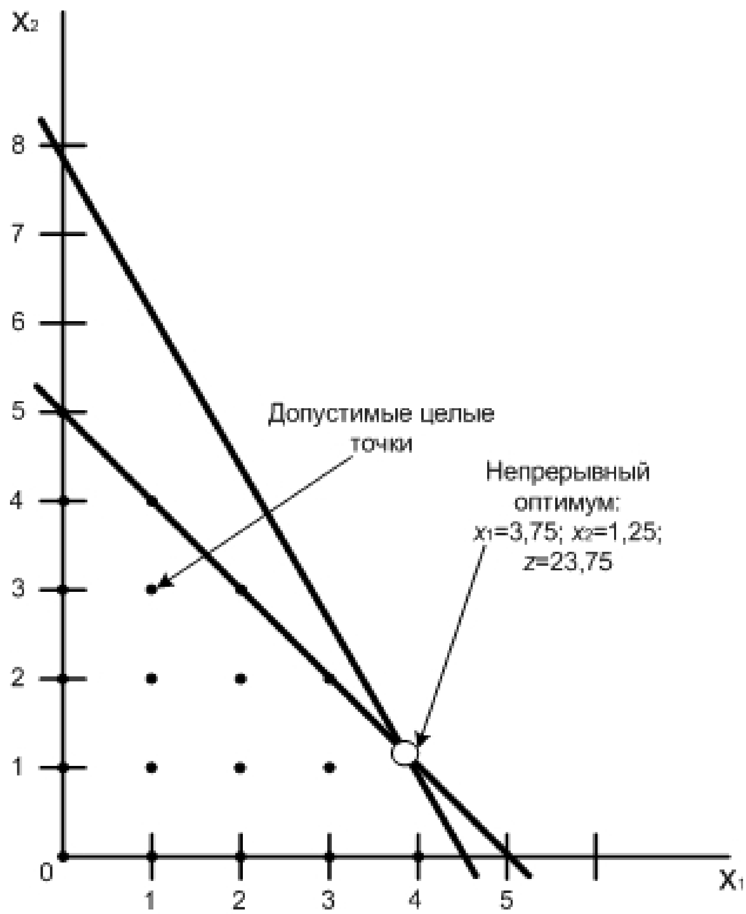


Рис. 9.1. Пространство решений

Так как оптимальное решение задачи ЛП0 не удовлетворяет условию целочисленности, метод ветвей и границ изменяет пространство решений задачи линейного программирования таким образом, что получается оптимальное решение задачи. Для этого выбирается одна из целочисленных переменных, значение которой в оптимальном решении задачи ЛП0 не является целочисленным. Например, выбирая x_1 (= 3,75), замечаем, что область $3 \le x_1 \le 4$ пространства допустимых решений задачи ЛП0 не содержит целочисленных значений переменной x_1 и, следовательно, может быть исключена из рассмотрения, как бесперспективная. Это эквивалентно замене исходной задачи ЛП0 двумя новыми задачами линейного программирования ЛП1 и ЛП2, которые определяются следующим образом:

пространство допустимых решений ЛП1 = пространство допустимых решений ЛП0 + ($x_1 \le 3$),

пространство допустимых решений ЛП2 = пространство допустимых решений ЛП0 + ($x_2 \ge 4$).

На рис. 9.2 изображены пространства допустимых решений задач ЛП1 и ЛП2. Оба пространства содержат все допустимые решения исходной задачи ЦЛП. Это означает, что задачи ЛП1 и ЛП2 "не потеряют" решения начальной задачи ЛП0.

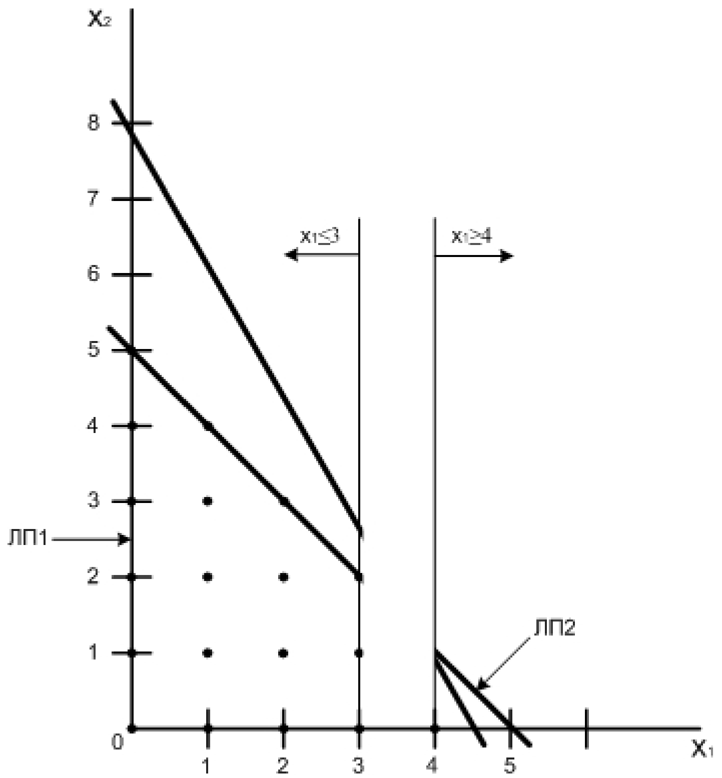


Рис. 9.2. Пространства решений ЛП1 и ЛП2

Если планомерно исключать из рассмотрения области, не содержащие целочисленных решений (такие как $3<x_1<4$), путем введения надлежащих ограничений, то в конечном счете получим задачу линейного программирования, оптимальное решение которой удовлетворяет требованиям целочисленности. Следовательно, необходимо решать задачу ЦЛП путем решения последовательности непрерывных задач линейного программирования.

Новые ограничения $x_1 \leq 3$ и $x_1 \geq 4$ взаимоисключаемы, так что задачи ЛП1 и ЛП2 необходимо рассматривать как независимые задачи линейного программирования, что и показано на рис. 9.3. В этом случае x_1 называется переменной ветвления.

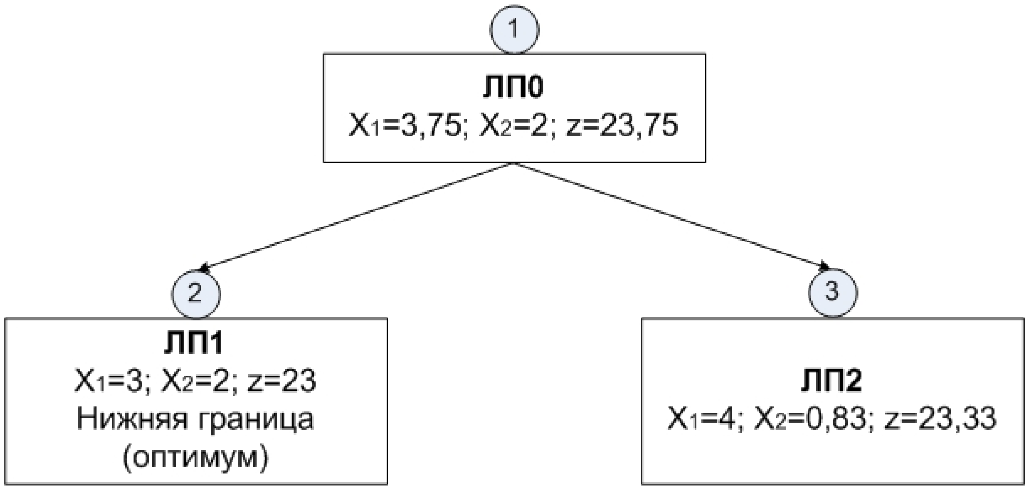


Рис. 9.3. Ветвление по переменной

Оптимальное решение задачи ЦЛП находится в пространстве допустимых решений либо задачи ЛП1, либо ЛП2. Следовательно, обе подзадачи должны быть решены.

Выбираем сначала задачу ЛП1 (выбор произволен), имеющую дополнительное ограничение $x_1 \leq 3$.

Максимизировать $z = 5x_1 + 4x_2$

при ограничениях

$$x_1 + x_2 \leq 5$$

$$10x_1 + 6x_2 \leq 45$$

$$x_1 \leq 3$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

Оптимальным решением задачи ЛП1 (которое можно получить с помощью метода решения задач с ограниченными переменными) является $x_1 = 3$, $x_2 = 2$ и $z = 23$.

Оптимальное решение задачи ЛП1 удовлетворяет требованию целочисленности переменных x_1 и x_2.

На этом этапе нельзя оценить качество целочисленного решения, полученного из рассмотрения задачи ЛП1, ибо решение задачи ЛП2 может привести к лучшему целочисленному решению (с большим значением целевой функции z). На текущий момент можно сказать, что значение z = 23 является нижней границей оптимального (максимального) значения целевой функции исходной задачи ЦЛП. Это значит, что любая нерассмотренная подзадача, которая не может привести к целочисленному решению с большим значением целевой функции, должна быть исключена из рассмотрения, как бесперспективная. Если же нерассмотренная подзадача может привести к лучшему целочисленному решению, то нижняя граница должна быть надлежащим образом изменена.

При значении нижней границы $z = 23$ исследуем задачу ЛП2 (единственную оставшуюся нерассмотренную подзадачу). Так как в задаче ЛП0 оптимальное значение целевой функции равно 23,75 и все ее коэффициенты являются целыми числами, то невозможно получить целочисленное решение задачи ЛП2 (пространство решений которой более узко, чем в задаче ЛП0), которое будет лучше существующего. В результате мы отбрасываем подзадачу ЛП2.

Реализация метода ветвей и границ завершена, так как обе подзадачи ЛП1 и ЛП2 подвергнуты анализу (рассмотрение первой привело к целочисленному решению, а второй – к заключению, что ее возможное целочисленное решение не может быть лучше существующего). Следовательно, мы заключаем, что оптимальным решением задачи ЦЛП является решение, соответствующее нижней границе, а именно $x_1 = 3$, $x_2 = 2$ и $z = 23$.

Могут возникнуть еще два вопроса, связанные с реализацией описанной вычислительной процедуры.

1. Можно ли было в задаче ЛП0 выбрать переменную x_2 в качестве переменной ветвления вместо x_1?

2. Можно ли было при выборе подзадачи для анализа решить сначала задачу ЛП2 вместо ЛП1?

Ответы на оба вопроса положительные. Однако последующие вычисления могут значительно отличаться. Ситуация, когда первой решается задача ЛП2, иллюстрируется схемой вычислений (рис. 9.4), подтверждающей высказанную мысль. Оптимальным решением задачи ЛП2 является $x_1 = 4$, $x_2 = 0{,}83$ и $z = 23{,}33$.

Так как значение переменной x_2 (= 0,83) не является целым числом, задача ЛП2 исследуется дальше. Рассматриваем подзадачи ЛП3 и ЛП4, используя ветви $x_2 \leq 0$ и $x_2 \geq 0$ соответственно. Это означает, что

пространство решений ЛП3 = пространство решений ЛП2 + ($x_2 \leq 0$) = пространство решений ЛП0 + ($x_1 \geq 4$) +($x_2 \leq 0$),

пространство решений ЛП4 = пространство решений ЛП2 + ($x_2 \geq 1$) = пространство решений ЛП0 + ($x_1 \geq 4$) +($x_2 \geq 1$).

В итоге имеются три нерассмотренные подзадачи, которые должны быть решены, – ЛП1, ЛП3 и ЛП4. Предположим, что мы произвольно выбрали первой задачу ЛП4. Эта задача не имеет решения и, следовательно, не требует дальнейшего анализа. В качестве следующей задачи выберем подзадачу ЛП3.

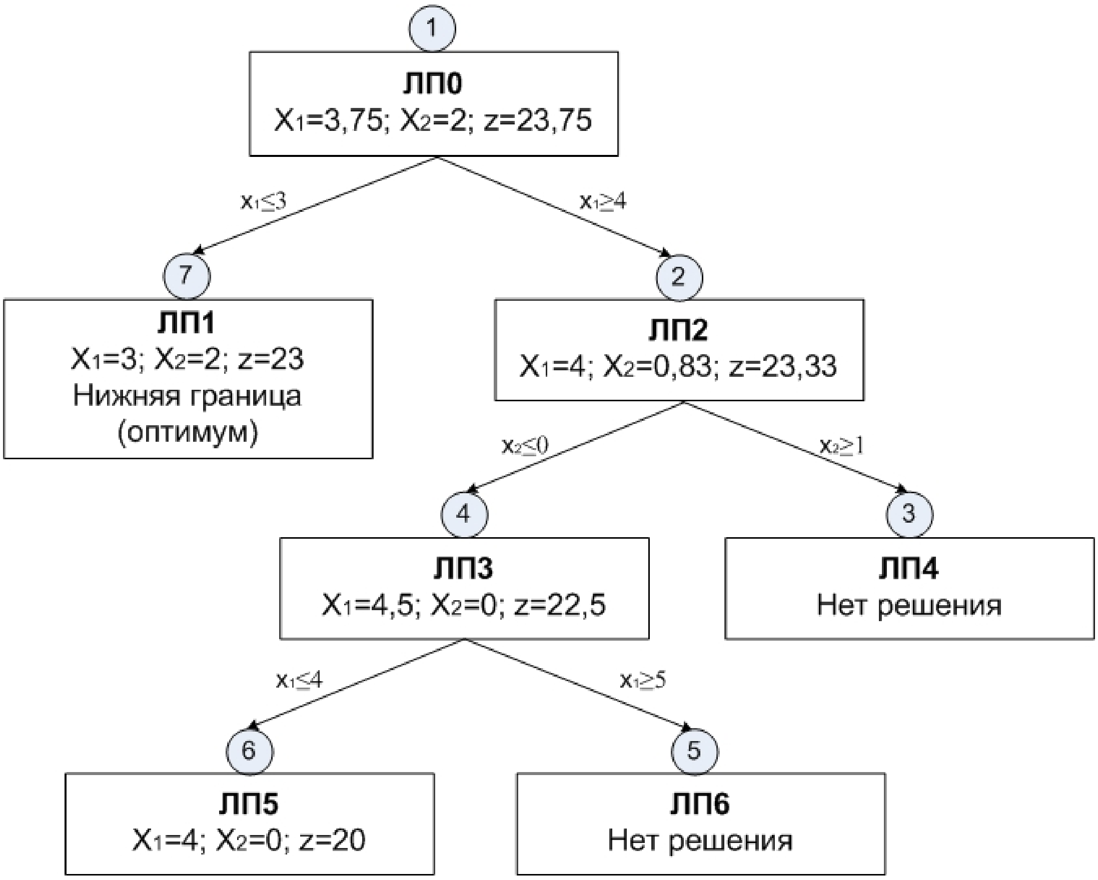


Рис. 9.4. Ветвление по переменной x_2

Ее оптимальным решением является $x_1 = 4{,}5$, $x_2 = 0$ и $x_3 = 22{,}5$. Нецелочисленное значение переменной x_1 (=4,5) порождает две ветви решений при $x_1 \le 4$ и $x_1 \ge 5$ и соответствующие им подзадачи ЛП5 и ЛП6. При этом

пространство решений ЛП5 = пространство решений ЛП0 + ($x_1 \ge 4$) + ($x_2 \le 0$)+ ($x_1 \le 4$) = пространство решений ЛП0 + ($x_1=4$) + ($x_2 \le 0$),

пространство решений ЛП6 = пространство решений ЛП0 + ($x_1 \ge 4$) + ($x_2 \le 0$)+ ($x_1 \ge 5$) = пространство решений ЛП0 + ($x_1 \ge 5$) + ($x_2 \le 0$).

Теперь не рассмотрены подзадачи ЛП1, ЛП5 и ЛП6. Подзадача ЛП6 не имеет допустимых решений. Подзадача ЛП5 имеет целочисленное решение ($x_1 = 4$, $x_2 = 0$, $z = 20$) и, следовательно, порождает нижнюю границу ($z = 20$) оптимального значения целевой функции задачи ЦЛП. Теперь остается лишь подзадача ЛП1, решение которой также является целочисленным ($x_1 = 3$, $x_2 = 2$, $z = 23$). Следовательно, нижнюю границу значений целевой функции полагаем равной 23. Оптимальным решением задачи ЦЛП является решение, соответствующее последней нижней границе, а именно $x_1 = 3$, $x_2 = 2$ и $z = 23$.

Последовательность решения подзадач, показанная на рис. 9.8 (ЛП0, ЛП2, ЛП4, ЛП3, ЛП6, ЛП5, ЛП1), является наихудшей; тем не менее, она встречается на практике. Этот пример указывает на основную слабость метода ветвей и границ: как выбирать следующую подзадачу для исследования и как выбирать для нее переменную ветвления?

В процессе решения, представленного на рис. 9.7, мы случайно наткнулись на хорошую нижнюю границу значений целевой функции на самой первой подзадаче ЛП1, что позволило рассмотреть ЛП2 без детальных исследований и закончить вычисления. По существу, мы завершили вычисления, решив лишь одну подзадачу. В процессе решения, представленном на рис. 9.8, мы были вынуждены исследовать семь подзадач, и лишь тогда завершились вычисления метода ветвей и границ.

3. Метод Гомори решения задач целочисленного программирования

Согласно методу Гомори задача линейного программирования сначала решается симплексным методом без учета целочисленности переменных. Если оптимальное решение оказывается целочисленным, то решение задачи заканчивается. Если оптимальное решение нецелочисленное, то из системы ограничений выбирается уравнение, для которого дробная часть координаты оптимального решения имеет наибольшее значение, и на его основе составляется дополнительное ограничение. Дополнительное ограничение отсекает от области допустимых решений нецелочисленное оптимальное решение, но при этом сохраняет целочисленные вершины этой области.

Пусть i-е ограничение задачи, находящееся в последней симплексной таблице, имеет вид

$$x_i + \sum_{j=m+1}^{n} x_{ij} x_j = x_i^*, \tag{9.1}$$

где x_i – базисная переменная в уравнении;

x_{ij} – коэффициенты при неизвестных (коэффициенты разложений векторов условий по базису опорного решения);

x_j – свободные переменные в системе уравнений;

x_i^* – правая часть уравнения (координата оптимального решения), которая является дробным числом. Тогда дополнительное ограничение имеет вид

$$q_i^* - \sum_{j=m+1}^{n} q_{ij} x_j \le 0, \tag{9.2}$$

где q_i^* – дробная часть x_i^*;

q_{ij} – дробная часть x_{ij}.

Целой частью действительного числа (антье) x_i называется наибольшее целое число, не превосходящее данное; обозначается $[x_i]$.

Дробной частью действительного числа x_i *называется разность между этим числом и его целой частью*; в общем случае обозначается $\{x_i\}$.

Дробная часть q_i числа x_i находится как разность числа и его целой части:

$$q_i = x_i - [x_i].$$

Например, для числа $\frac{7}{4}$ целая часть $\left[\frac{7}{4}\right]=1$, дробная часть равна $\frac{7}{4}-1=\frac{3}{4}$. Для числа $-\frac{9}{5}$ целая часть $\left[-\frac{9}{5}\right]=-2$, дробная равна $-\frac{9}{5}-(-2)=\frac{1}{5}$. Дробная часть числа всегда неотрицательная и меньше единицы.

В неравенство (10) вводится дополнительная переменная x_{n+1}, получается уравнение

$$q_i^* - \sum_{j=m+1}^{n} q_{ij}x_j + x_{n+1} = 0. \tag{9.3}$$

В систему ограничений задачи это ограничение записывается в виде

$$-\sum_{j=m+1}^{n} q_{ij}x_j + x_{n+1} = -q_i^*. \tag{9.4}$$

После этого решение задачи продолжают двойственным симплекс-методом. Если получается целочисленное решение, то процесс решения заканчивается, в противном случае необходимо снова составить дополнительное ограничение.

Задача не имеет целочисленного решения, если оптимальное решение содержит координату с дробной частью и все коэффициенты соответствующего уравнения являются целыми.

Пример 1. Найти оптимальное целочисленное решение задачи

$$Z(X) = 3x_1 - x_2 - 5x_3 \to \max,$$

$$\begin{cases} 5x_1 + x_2 + 4x_3 = 7, \\ 3x_1 + 2x_3 \le 4, \\ x_1 - 3x_3 \le 3, \end{cases}$$

$$x_j \ge 0, x_j - \text{целые}, j = 1,2,3.$$

Приводим задачу к каноническому виду с помощью дополнительных переменных x_4, x_5:

$$Z(X) = 3x_1 - x_2 - 5x_3 + 0x_4 + 0x_5 \to \max,$$

$$\begin{cases} 5x_1 + x_2 + 4x_3 = 7, \\ 3x_1 + 2x_3 + x_4 = 4, \\ x_1 - 3x_3 + x_5 = 3, \end{cases}$$

$$x_j \geq 0, x_j - \text{целые}, j = 1,2,3,4,5,$$

и переходим к симплекс-таблице (табл. 9.1).

На втором шаге получили оптимальное решение $\left(\frac{4}{3};\frac{1}{3};0;0;\frac{5}{3}\right)$ с дробными координатами. Составляем дополнительное ограничение вида (12). Для этого используем ограничение, у которого правая часть имеет большую дробную часть (если они равны между собой, то для составления дополнительного ограничения используем любое уравнение). Находим дробные части правых частей уравнений (координат опорного решения): $4/3-1=1/3$; $1/3-0=1/3$, $5/3-1=2/3$. Большая дробная часть соответствует третьему уравнению. Находим дробные части коэффициентов этого уравнения: $\frac{5}{3}-1=\frac{2}{3}$; $0-0=0$; $-\frac{11}{3}-(-4)=\frac{1}{3}$; $-\frac{1}{3}-(-1)=\frac{2}{3}$; $1-1=0$.

Таблица 9.1

Симплекс-таблица

Базис	C базиса	A_0	$C_1 = 3$	$C_2 = -1$	$C_3 = -5$	$C_4 = 0$	$C_5 = 0$	Δ_i
			A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	
A_2	–1	7	5	1	4	0	0	7/5
A_4	0	4	3	0	2	1	0	(4/3)
A_5	0	3	1	0	–3	0	1	3/1
$Z_j - C_j$		–7	(–8)	0	1	0	0	
A_2	–1	1/3	0	1	2/3	–5/3	0	0
A_1	3	4/3	1	0	2/3	1/3	0	0
A_5	0	5/3	0	0	–11/3	–1/3	1	0
$Z_j - C_j$		11/3	0	0	19/3	8/3	0	0
A_6	0	$-\frac{2}{3}$	0	0	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{2}{3}$	0	1
A_2	–1	2	0	1	3/2	0	0	–5/2
A_1	3	1	1	0	1/2	0	0	1/2
A_5	0	2	0	0	–7/2	0	1	–1/2
A_4	0	1	0	0	1/2	1	0	–3/2
$Z_j - C_j$		1	0	0	5	0	0	4

Составляем дополнительное ограничение: $-\frac{1}{3}x_3-\frac{2}{3}x_4+x_6=-\frac{2}{3}$. Записываем это уравнение после строки оценок. Вектор A_6 включаем в число базисных неизвестных. Опорное решение $\left(\frac{4}{3};\frac{1}{3};0;0;\frac{5}{3};-\frac{2}{3}\right)$ является почти допустимым. Выводим вектор A_6 из базиса, так как дополнительное ограничение имеет в правой части отрицательную величину $\min\left\{-\frac{Z_j-C_j}{a_{6j}}\right\}=\min\left\{\frac{19/3}{1/3};\frac{8/3}{2/3}\right\}=4$. Вводим в базис вектор A_4. Новое опорное решение $(1;2;0;1;2;0)$, содержит целые координаты. Следовательно, это и есть оптимальное решение: $Z_{\max}(X)\ =Z(1;2;0)=1$.

Вопросы для самоподготовки

1. Сформулируйте цели и задачи целочисленного программирования. В чем его особенность по сравнению с обычным линейным программированием?

2. Аудитории и лаборатории университета рассчитаны не более чем на 500 студентов. Университет не принимает более 4000 студентов своей страны, но разрешает прием любого количества иностранных студентов. Персонал университета составляет 440 человек. Для обучения 12 студентов данной страны и 10 иностранных студентов требуется один преподаватель. Необходимо, чтобы 40 % студентов данной страны и 80 % иностранных студентов могли разместиться в аудиториях, где имеется 2800 мест. Университет получает 2000 фунтов стерлингов в год из правительственных средств на каждого студента своей страны и берет плату в размере 3000 фунтов стерлингов в год за каждого иностранного студента. Предположив, что единственной целью университета является максимизация прибыли, определите, какой прием студентов своей страны и иностранных студентов следует планировать. Покажите, что максимальный годовой доход составляет 11850000 фунтов стерлингов в год. Университет может нанять дополнительный персонал с годовым окладом 10000 фунтов стерлингов. Выгодно ли это?

4. Укажите достоинства и недостатки метода ветвей и границ по сравнению с методом Гомори.

3. Решить задачи целочисленного программирования

а) $Z(x)=4x_1+5x_2+x_3\to\max$,

$$\begin{cases}3x_1+2x_2+x_4=10,\\ x_1+4x_2+x_5=11,\\ 3x_1+3x_2+x_3=13,\end{cases}$$

$x_j \geq 0,\ j = 1,2,3,4,\ x_j -$ целые.

б) $Z(x) = x_1 + 4x_2 - 5x_3 - 3x_4 \to \max,$

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 5x_3 - x_4 \leq 10, \\ 3x_1 + 5x_2 - x_3 + x_4 \leq 14, \end{cases}$$

$x_j \geq 0,\ j = 1,2,3,4,\ x_j -$ целые.

в) $Z(x) = 3x_1 + 2x_2 + 10x_3 \to \min,$

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 \geq 2, \\ x_1 + 2x_2 + 4x_3 \geq 5, \\ 3x_1 + 4x_2 + 4x_3 \geq 3, \end{cases}$$

$x_j \geq 0,\ j = 1,2,3,\ x_j -$ целые.

г) $Z(x) = 3x_1 + 2x_2 - 7x_3 \to \min,$

$$\begin{cases} x_1 - 3x_2 + 2x_3 \geq 3, \\ -2x_2 + 3x_3 \leq 4, \\ -3x_2 + 4x_3 \leq 7, \end{cases}$$

$x_j \geq 0,\ j = 1,2,3,\ x_j -$ целые.

Практическое занятие № 10
ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ ТЕОРИИ ГРАФОВ

Цель занятия: овладеть основными понятиями теории графов.

1. Основные понятия

Граф состоит из двух множеств – множества V, элементы которого называются *вершинами*, и множества E, состоящего из пар вершин, эти пары называются *ребрами* графа. Это записывают так: $G = (V, E)$, где G – имя графа.

Один момент в этом определении требует уточнения: считаем ли мы ребра (a,b) и (b,a) различными. Если да (и это распространяется на все ребра), то граф называется *ориентированным* (сокращенно *орграф*), в противном случае – *неориентированным*.

Говорят, что ребро (a,b) *соединяет* вершины a и b. Если такое ребро в графе есть, то говорят, что вершины a и b в нем *смежны*. Заметим, что в графе может быть не более одного ребра, соединяющего данную пару вершин. Ребро типа (a,a), т.е. соединяющее вершину с ней же самой, называют *петлей*.

Говорят, что ребро $e=(a,b)$ *инцидентно* каждой из вершин a и b, а каждая из этих вершин инцидентна ребру e.

В дальнейшем, если не оговаривается иное, под графом понимается неориентированный граф без петель, такие графы называют *обыкновенными*. Для обозначения числа вершин и числа ребер графа будем обычно использовать буквы n и m.

Мультиграф – обобщение понятия графа. В мультиграфе могут быть *кратные ребра*, то есть несколько ребер, соединяющих одну и ту же пару вершин. Иначе говоря, в мультиграфе E является мультимножеством, то есть одна пара может входить в него несколько раз.

2. Способы задания графов

Существует много способов представить граф, назовем только самые распространенные.

1. <u>Перечисление элементов.</u> Исходя из определения, для того, чтобы задать граф, достаточно перечислить его вершины и ребра (т.е. пары вершин).

2. <u>Изображение.</u> Если граф невелик, его можно нарисовать. В неориентированном графе ребра изображаются линиями, в ориентированном – стрелками.

3. <u>Матрица смежности.</u> Пусть G – граф с n вершинами, пронумерованными числами от 1 до n. Матрица смежности – это таблица с n строками и n столбцами, в которой элемент, стоящий на пересечении строки с

номером i и столбца с номером j, равен 1, если вершины с номерами i и j смежны, и 0, если они не смежны.

4. Матрица инцидентности. Пусть G – граф, вершины которого пронумерованы числами от 1 до n, а ребра – числами от 1 до m. В матрице инцидентности строки соответствуют вершинам, а столбцы – ребрам. На пересечении строки с номером i и столбца с номером j стоит 1, если вершина с номерами i инцидентна ребру с номером j смежны, и 0 в противном случае.

5. Списки смежности. Этот способ часто используется для компьютерного представления графов. Состоит он в том, что для каждой вершины задается список всех смежных с ней вершин. В структурах данных, применяемых в программировании, списки смежности могут быть реализованы как массив линейных списков. При решении задач будем эти списки оформлять так: пишется номер или имя вершины и после двоеточия перечисляются все смежные с ней вершины.

3. Окрестности и степени

Множество вершин, смежных с данной вершиной x в некотором графе, называется *окрестностью* этой вершины и обозначается через $N(x)$. Число вершин в $N(x)$ называется *степенью* вершины x и обозначается через $\deg(x)$.

Если сложить степени всех вершин графа, то каждое ребро внесет в эту сумму вклад, равный 2. Следовательно, сумма степеней всех вершин равна удвоенному числу ребер графа:

$$\sum_{x \in V} \deg(x) = 2m .$$

Это утверждение называют теоремой о рукопожатиях.

В ориентированном графе для каждой вершины x можно ввести два числа: $\deg^{+}(x)$ – число заходящих ребер и $\deg^{-}(x)$ – число выходящих. Их называют соответственно полустепенью захода и полустепенью исхода. Аналогом теоремы о рукопожатиях для ориентированного графа является очевидное равенство

$$\sum_{x \in V} \deg^{+}(x) = \sum_{x \in V} \deg^{-}(x) .$$

4. Некоторые специальные графы

Пустой граф – граф, не содержащий ни одного ребра. Пустой граф с множеством вершин $(1,2,\ldots,n\}$ обозначается O_n .

Полный граф – граф, в котором каждые две вершины смежны. Полный граф с множеством вершин $(1,2,\ldots,n\}$ обозначается K_n .

Путь P_n имеет множество вершин $(1,2,\ldots,n\}$, ребрами его являются пары $(i,i+1)$, $i = 1,2,\ldots,n-1$.

Цикл C_n получается из графа P_n добавлением ребра $(1,n)$.

Полный двудольный граф $K_{p,q}$. Множество вершин состоит из двух частей, в одной из них p вершин, в другой q. Любые две вершины из одной части не смежны, любые две вершины из разных частей смежны.

5. Изоморфизм

Графы $G_1 = (V_1, E_1)$ и $G_2 = (V_2, E_2)$ называются *изоморфными*, если существует такая биекция f множества V_1 на множество V_2, что $(a,b) \in E_1$ тогда и только тогда, когда $(f(a), f(b)) \in E_2$. Отображение f в этом случае называется *изоморфизмом* графа G_1 на граф G_2.

Тот факт, что графы G_1 и G_2 изоморфны, записывается так: $G_1 \cong G_2$.

Это определение изоморфизма годится и для ориентированных графов, нужно только обе упоминаемые в нем пары вершин считать упорядоченными.

Изоморфизм – бинарное отношение на множестве графов. Очевидно, это отношение рефлексивно, симметрично и транзитивно, то есть является отношением эквивалентности. Классы эквивалентности называются *абстрактными графами*. Когда говорят, что рассматриваются абстрактные графы, это означает, что изоморфные графы считаются одинаковыми. Абстрактный граф можно представлять себе как граф, у изображения которого стерты имена (пометки) вершин, поэтому абстрактные графы иногда называют также *непомеченными* графами.

Характеристики графов, которые сохраняются при изоморфизме, называются *инвариантами*. Примеры простых инвариантов – число ребер, наличие вершины данной степени, число вершин данной степени, набор степеней (последовательность степеней, упорядоченная по неубыванию), наличие циклов данной длины, число циклов данной длины. Если удается установить, что для двух исследуемых графов некоторый инвариант принимает разные значения, то эти графы неизоморфны. Поиски полной системы легко вычисляемых инвариантов, то есть такой, что совпадение всех этих инвариантов у двух графов гарантировало бы, что эти графы изоморфны, до сих пор не увенчались успехом. Для доказательства того, что два графа изоморфны, необходимо предъявить соответствующую биекцию.

6. Подграфы

Граф $G' = (V', E')$ называется *подграфом* графа $G = (V, E)$, если $V' \subseteq V$, $E' \subseteq E$. Всякий подграф может быть получен из графа удалением некоторых вершин и ребер (при удалении вершины удаляются и все инцидентные ей ребра).

Подграф G' графа G называется *остовным*, если $V' = V$. Остовный подграф получается удалением из графа некоторых ребер, вершины же остаются в неприкосновенности.

Порожденный подграф получается из графа удалением некоторых вершин. Все ребра, которые были в графе между оставшимися вершинами, должны сохраниться в подграфе. Говорят, что подграф порождается оставшимися вершинами.

7. Операции над графами

Для графов $G_1 = (V_1, E_1)$ и $G_2 = (V_2, E_2)$ их *объединение* $G_1 \cup G_2$ определяется как граф $(V_1 \cup V_2, E_1 \cup E_2)$, а *пересечение* $G_1 \cap G_2$ – как граф $(V_1 \cap V_2, E_1 \cap E_2)$.

Дополнением (*дополнительным графом*) к графу $G = (V, E)$ называется граф $\overline{G}$, у которого множество вершин то же, что у G, а множество ребер является дополнением множества E до множества всех неупорядоченных пар вершин. Иначе говоря, две различные вершины смежны в графе $\overline{G}$ тогда и только тогда, когда они не смежны в графе G. Например, $\overline{O}_n = K_n$.

Под *суммой* $G_1 + G_2$ двух абстрактных графов понимают объединение графов с непересекающимися множествами вершин. Точнее говоря, имеется в виду следующее. Сначала вершинам графов-слагаемых присваиваются имена (пометки, номера) так, чтобы множества вершин не пересекались, затем полученные графы объединяются и пометки стираются (т.е. результат операции – тоже абстрактный граф). Операция сложения ассоциативна, то есть $\left(G_1 + G_2\right) + G_3 = G_1 + (G_2 + G_3)$ для любых трех графов. Поэтому можно образовывать сумму любого числа графов, не указывая порядка действий с помощью скобок. Если складываются k экземпляров одного и того же графа G, то полученный граф обозначается через kG. Например, $O_n \cong nK_1$.

Соединением графов G_1 и G_2 называется граф $G_1 \circ G_2$, получаемый из их суммы добавлением всех ребер, соединяющих вершины первого слагаемого с вершинами второго. Например, $K_{p,q} = O_p \circ O_q$. На рис. 10.1 слева изображен граф $C_4 + 2K_2 + 3K_1$ справа – граф $P_3 \circ (P_2 + P_1)$.

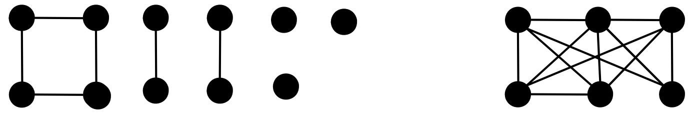


Рис. 10.1. Способы соединения графов

Декартово произведение (далее просто произведение) $G_1 \times G_2$ графов $G_1 = (V_1, E_1)$ и $G_2 = (V_2, E_2)$ определяется следующим образом. Множеством вершин графа $G_1 \times G_2$ является декартово произведение множеств V_1 и V_2, то есть вершины этого графа – упорядоченные пары (x, y), где $x \in V_1$, $y \in V_2$. Вершины (x_1, y_1) и (x_2, y_2) в графе $G_1 \times G_2$ смежны тогда и только тогда, когда $x_1 = x_2$ и y_1 смежна с y_2 в графе G_2, или $y_1 = y_2$ и x_1 смежна с x_2 в графе G_1. С помощью операции произведения можно выразить некоторые важные графы через простейшие. Например, произведение двух путей дает *прямоугольную решетку* (рис. 10.2).

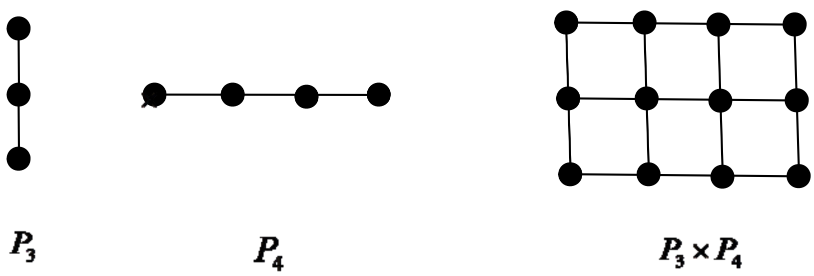


Рис. 10.2. Прямоугольная решетка

Другой пример – k-мерный куб Q_k, определяемый следующим образом. Вершинами его являются всевозможные упорядоченные двоичные наборы длины k. Всего, таким образом, в этом графе 2^k вершин. Вершины $x = (x_1, \ldots, x_k)$ и $y = (y_1, \ldots, y_k)$ смежны в нем тогда и только тогда, когда наборы x и y различаются точно в одной координате. С помощью операции произведения граф Q_k можно определить рекурсивно:

$$Q_1 = K_2,\ Q_k = Q_{k-1} \times K_2.$$

На рис. 10.3 показано, как получается Q_3 из Q_2.

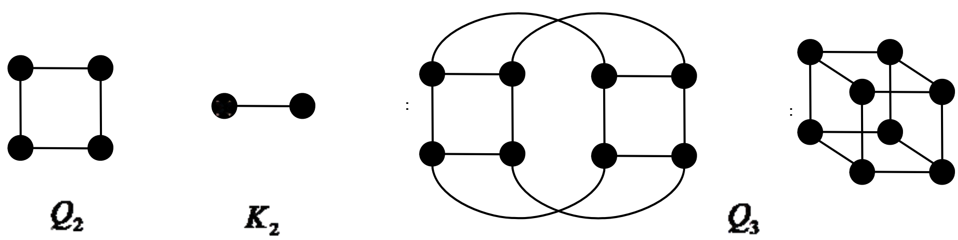


Рис. 10.3. Преобразование

8. Пути, циклы, связность

Путь в графе – это последовательность вершин $x_1, x_2, \dots, x_k$, в которой каждая пара (x_i, x_{i+1}), $i = 1, 2, \dots, k-1$, является ребром, причем все эти ребра различны. Путь *соединяет* вершины x_1 и x_k. Длиной *пути* называется число ребер в нем, т.е. $k-1$.

Цикл – путь, у которого $x_1 = x_k$.

Граф называется *связным*, если для любых двух его вершин имеется путь, соединяющий эти вершины. Если граф несвязен, то он состоит из нескольких связных подграфов, между которыми нет ребер, они называются *компонентами связности*.

Шарнир (*точка сочленения*) в графе – вершина, при удалении которой увеличивается число компонент связности.

Перешеек – ребро, при удалении которого увеличивается число компонент связности. Легко доказать следующее утверждение.

Теорема о перешейках. *Ребро является перешейком тогда и только тогда, когда через него не проходит ни один цикл.*

В ориентированном графе можно определить два типа путей.

Ориентированный путь – это, как и в неориентированном случае, последовательность вершин $x_1, x_2, \dots, x_k$, в которой каждая (упорядоченная) пара (x_i, x_{i+1}), $i = 1, 2, \dots, k-1$, является ребром (и все эти ребра различны).

Неориентированный путь – последовательность вида $x_1, e_1, x_2, e_2, \dots, e_{k-1}, x_k$, где $x_1, x_2, \dots, x_k$ – вершины, а $e_1, e_2, \dots, e_{k-1}$ – ребра графа, причем $e_i = (x_i, x_{i+1})$ или $e_i = (x_{i+1}, x_i)$ для каждого $i = 1, 2, \dots, k-1$.

Орграф называется *связным*, если между любыми двумя вершинами имеется соединяющий их неориентированный путь. Он называется *сильно связным*, если из любой вершины в любую другую имеется ориентированный путь.

9. Расстояния и метрические характеристики

Расстоянием между вершинами в графе называется наименьшая длина соединяющего их пути. Расстояние между вершинами x и y обозначается через $d(x, y)$.

Эксцентриситет вершины – расстояние от нее до самой удаленной вершины:

$$\operatorname{ecc}(x) = \max_{y \in V} d(x, y).$$

Диаметр графа – максимальное расстояние между вершинами, то есть наибольший эксцентриситет:

$$\operatorname{diam}(G) = \max_{x \in V, y \in V} d(x, y) = \max_{x \in V} \operatorname{ecc}(x).$$

Радиус графа – наименьший эксцентриситет:

$$\mathrm{rad}(G) = \min_{x \in V} \mathrm{ecc}(x).$$

Центральная вершина – вершина, эксцентриситет которой равен радиусу графа.

Центр – множество всех центральных вершин.

Диаметр и радиус графа связаны соотношениями:

$$\mathrm{rad}(G) \le \mathrm{diam}(G) \le 2\,\mathrm{rad}(G).$$

10. Графы пересечений

Пусть дано семейство множеств $F = \{S_1, S_2, \ldots, S_n\}$. Графом пересечений этого семейства называется граф с множеством вершин $(1, 2, \ldots, n\}$, в котором вершины i и j смежны тогда и только тогда, когда $S_i \cap S_j \ne \varnothing$. Этот граф обозначается $\Gamma(F)$. Граф $\Gamma(F)$ содержит в компактном виде информацию о том, какие множества из семейства F имеют непустое пересечение. С другой стороны, семейство F можно рассматривать как еще один способ представления графа $\Gamma(F)$. Следующая теорема показывает, что этот способ универсален, то есть любой граф можно представить как граф пересечений некоторого семейства множеств.

Теорема о графах пересечений. *Для любого графа* G *существует такое семейство множеств F, что* $G \cong \Gamma(F)$.

Вопросы для самоподготовки

1. Граф задан множеством вершин $V = \{a, b, c, d, e, f\}$ и множеством ребер $E = \{(a,c), (a,f), (b,c), (c,d), (d,f)\}$. Нарисуйте этот граф, постройте для него матрицы смежности и инцидентности, списки смежности.

2. Постройте матрицу инцидентности для графа, заданного списками смежности: $a: b, d$; $b: a, c, d, f$; $c: b, f$; $d: a, b, f$; $e:$; $f: b, c, d$.

3. В графе 30 вершин и 80 ребер, каждая вершина имеет степень 5 или 6. Сколько в нем
 вершин степени 5?

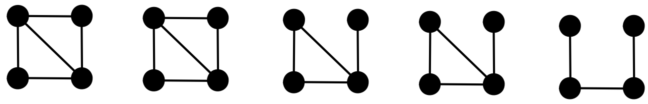
4. В графе каждая вершина имеет степень 3, а число ребер заключено между 16 и 20. Сколько вершин в этом графе?

5. Найдите все абстрактные графы с 4 вершинами.

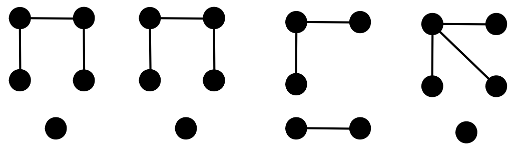
6. Найдите все абстрактные графы с набором степеней а) (2,2,2,3,3,4); б) (2,2,2,3,3,3).

7. Восстановите граф по его:

а) порожденным подграфам, полученным удалением одной вершины:



б) остовным подграфам, полученным удалением одного ребра:



8. Граф G имеет множество вершин $\{1,2,\ldots,n\}$. Число ребер в подграфе, полученном удалением вершины i, равно m_i, $i=1,2,\ldots,n$. Сколько ребер в графе G?

9. Граф задан матрицей смежности:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Постройте для него матрицу расстояний между вершинами, найдите эксцентриситеты вершин, диаметр, радиус, центр. Изоморфны ли этот граф и дополнительный к нему?

Практическое занятие № 11
ОСНОВЫ СЕТЕВОГО ПЛАНИРОВАНИЯ

Цель занятия: овладеть базовыми знаниями о сетевых моделях, правилах построения сетевых графиков и решении задач о кратчайших путях.

1. Сетевая модель и её основные элементы

В рамках теории математического программирования рассматривается большое количество практических задач, которые можно сформулировать и решить как сетевые модели. Приведем несколько конкретных примеров.

1. Проектирование газопровода, соединяющего буровые скважины. Целевая функция соответствующей модели должна минимизировать стоимость строительства газопровода.

2. Поиск кратчайшего маршрута между двумя городами по существующей сети дорог.

3. Составление временного графика строительных работ (определение дат начала и завершения отдельных этапов работ).

Задачи, возникающие при рассмотрении сетевых моделей, можно сформулировать и решать как задачи линейного программирования. Однако специфическая структура этих задач позволяет разработать специальные сетевые алгоритмы, более эффективные, чем стандартный симплекс-метод.

Базовые понятия сетевых моделей базируются на терминологии теории графов и включают в себя прежде всего такие понятия, как вершина (узел) и ребро (дуга). Наглядным способом представления графа является диаграмма, на которой вершины изображаются точками или кружочками, а ребра – линиями, соединяющими изображения вершин реберной пары

Сеть состоит из множества узлов, связанных дугами (или ребрами) (и, по сути, является ничем иным, как графом). Чтобы согласовать используемую здесь терминологию, будем называть дугами только *ориентированные* ребра. Термин «ребро» (как более общее понятие) часто будем употреблять для обозначения как ребер, так и дуг. Также отметим очевидное соответствие между узлом сети и вершиной графа.

Таким образом, сеть описывается парой множеств (N, A), где N – множество узлов, A – множество ребер. Например, сеть, показанная на рис. 11.1, описывается следующим образом:

$$N = \{1, 2, 3, 4, 5\},$$

$$A = \{(1, 2), (1, 3), (2, 3), (2, 5), (3, 4), (3, 5), (4, 2), (4, 5)\}.$$

С каждым типом сети связан определенный тип потоков (например, транспортный поток в сети городских дорог, сети газопроводов региона).

В общем случае потоки в сети ограничены пропускной способностью ее ребер, которая может быть как конечной, так и бесконечной.

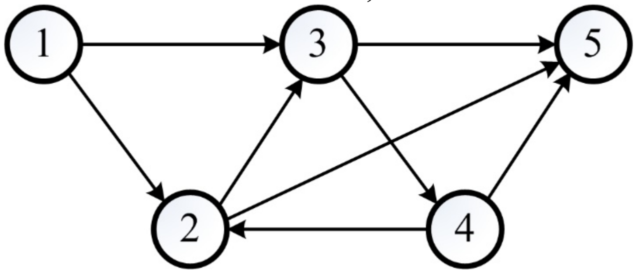


Рис. 11.1. Пример сети

Ребро называется направленным, или ориентированным (и в этом случае ребро будем называть дугой), если в одном направлении возможен только положительный поток, а в противоположном – только нулевой. В ориентированной сети все ребра ориентированы.

Путем называется последовательность различных ребер, соединяющих два узла, независимо от направления потока в каждом ребре. Путь формирует цикл, если начальный и конечный узлы совпадают. Например, на рис. 2 дуги (2, 3), (3, 4) и (4, 2) составляют цикл. Ориентированный цикл – это цикл, в котором все дуги ориентированы в определенном направлении.

Связная сеть – такая сеть, у которой любые два узла связаны по крайней мере одним путем. На рис. 11.1 показан именно такой тип сети. Деревом называется связная сеть, содержащая подмножество узлов исходной сети и не имеющая циклов. Остовное дерево – это дерево, содержащее все узлы сети. На рис. 11.2 показаны дерево и остовное дерево для сети рис. 11.1.

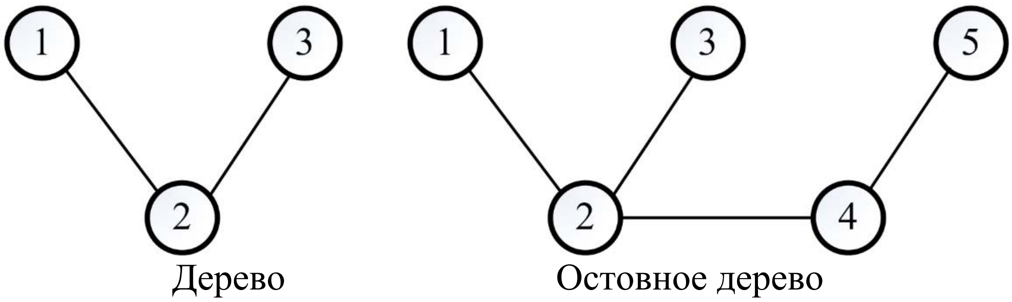


Рис. 11.2. Дерево и остовное дерево для сети рис. 11.1

2. Алгоритм построения минимального остовного дерева

Алгоритм построения минимального остовного дерева предполагает соединение всех узлов сети с помощью путей наименьшей длины. Типичной задачей, для решения которой необходим такой алгоритм, является создание (проектирование) сети дорог с твердым покрытием, соединяющих населенные пункты в сельской местности, где дороги, соединяющие два каких-либо пункта, могут проходить через другие населенные пункты. Наиболее экономичный проект дорожной системы должен минимизировать общую длину дорог с твердым покрытием, при этом желаемый результат можно получить с помощью алгоритма построения минимального остовного дерева.

Опишем процедуру выполнения этого алгоритма. Обозначим через $N = \{1, 2, \ldots, n\}$ множество узлов сети и введем новые обозначения: C_k – множество узлов сети, соединенных алгоритмом после выполнения k-й итерации этого алгоритма, $\overline{C}_k$ – множество узлов сети, не соединенных с узлами множества C_k после выполнения k-й итерации этого алгоритма.

Этап 0. Пусть $C_0 = \varnothing$ и $\overline{C}_0 = N$.

Этап 1. Выбираем любой узел i из множества $\overline{C}_0$ и определяем $C_1 = \{i\}$, тогда $\overline{C}_1 = N - \{i\}$. Полагаем $k = 2$.

Основной этап *k*. В множестве $\overline{C}_{k-1}$ выбираем узел j^*, который соединен самой короткой дугой с каким-либо узлом из множества C_{k-1}. Узел j^* присоединяется к множеству C_{k-1} и удаляется из множества $\overline{C}_{k-1}$. Таким образом,

$$C_k = C_{k-1} + \{j^*\},\ \overline{C}_k = \overline{C}_{k-1} - \{j^*\}.$$

Если множество $\overline{C}_k$ пусто, то выполнение алгоритма заканчивается. В противном случае полагаем $k = k + 1$ и повторяем последний этап.

Пример 1. Телевизионная компания планирует подключение к своей кабельной сети пяти новых районов. На рис. 11.3 показана структура планируемой сети и расстояния (в милях) между районами и телецентром. Необходимо спланировать наиболее экономичную кабельную сеть.

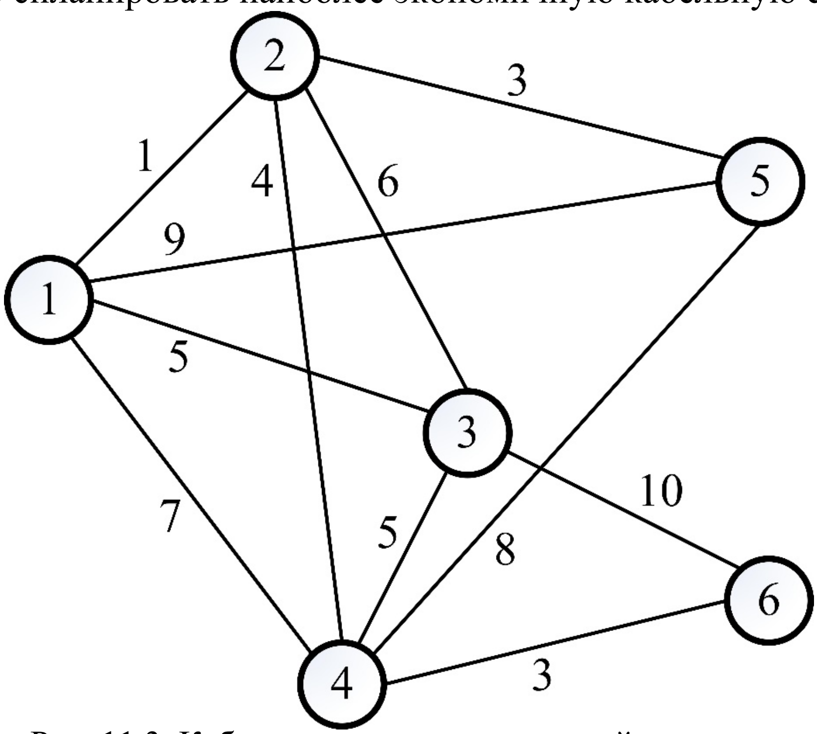


Рис. 11.3. Кабельная сеть телевизионной компании

Чтобы начать выполнение алгоритма построения минимального остовного дерева, выберем узел 1 (или любой другой узел). Тогда $C_1 = \{1\}$ и $\overline{C}_1 = \{2, 3, 4, 5, 6\}$.

Последовательные итерации выполнения алгоритма представлены на рис. 11.4. Здесь тонкими линиями показаны ребра, соединяющие узлы, принадлежащие множествам C_k и $\overline{C}_k$, среди которых ищется ребро с минимальной стоимостью (длиной). Это найденное ребро показано пунктирной линией. Толстыми сплошными линиями обозначены ребра, соединяющие узлы множества C_k (и которые ранее обозначались пунктирными линиями).

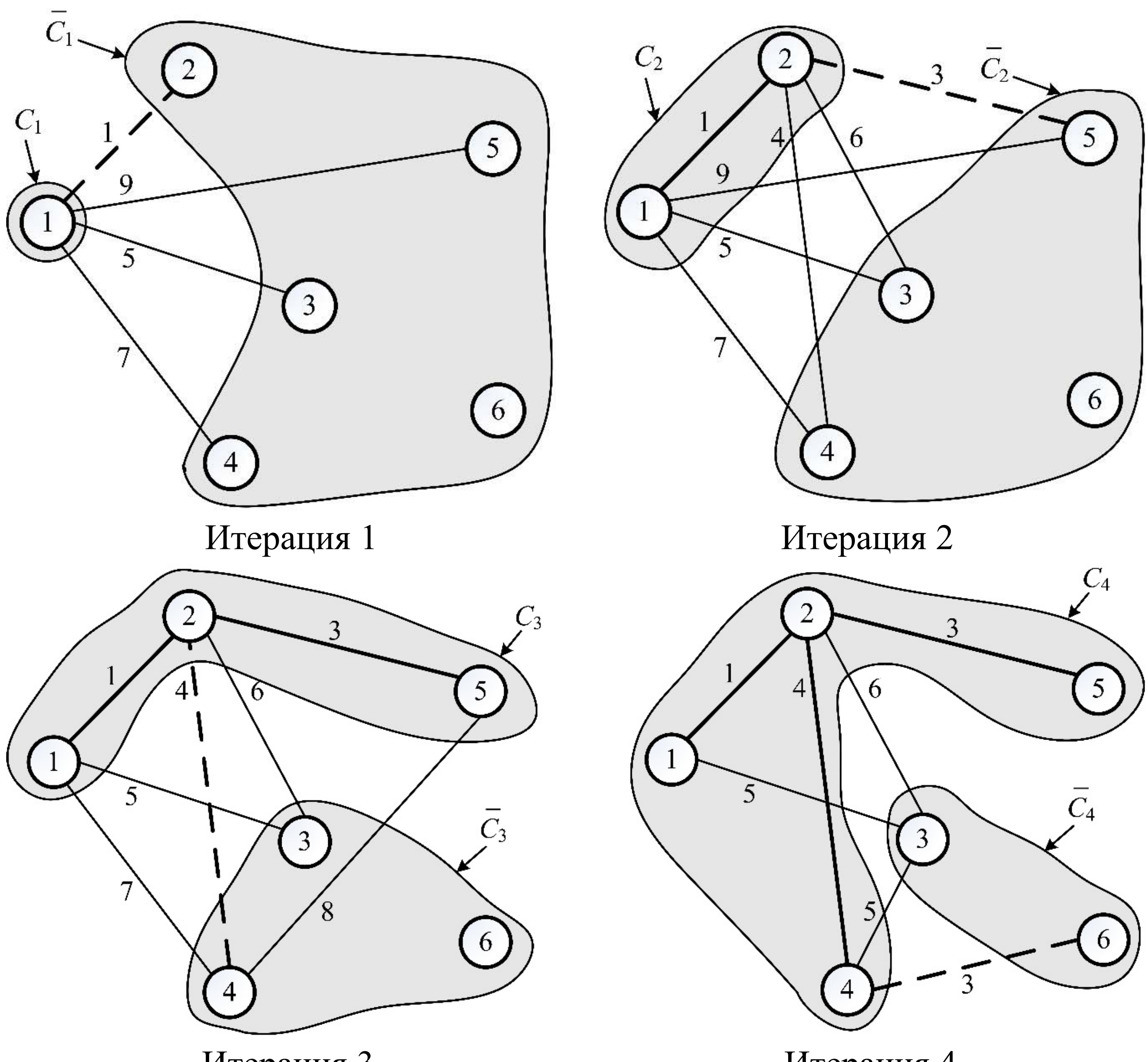


Рис. 11.4. Последовательные итерации выполнения алгоритма построения минимального остовного дерева (начало)

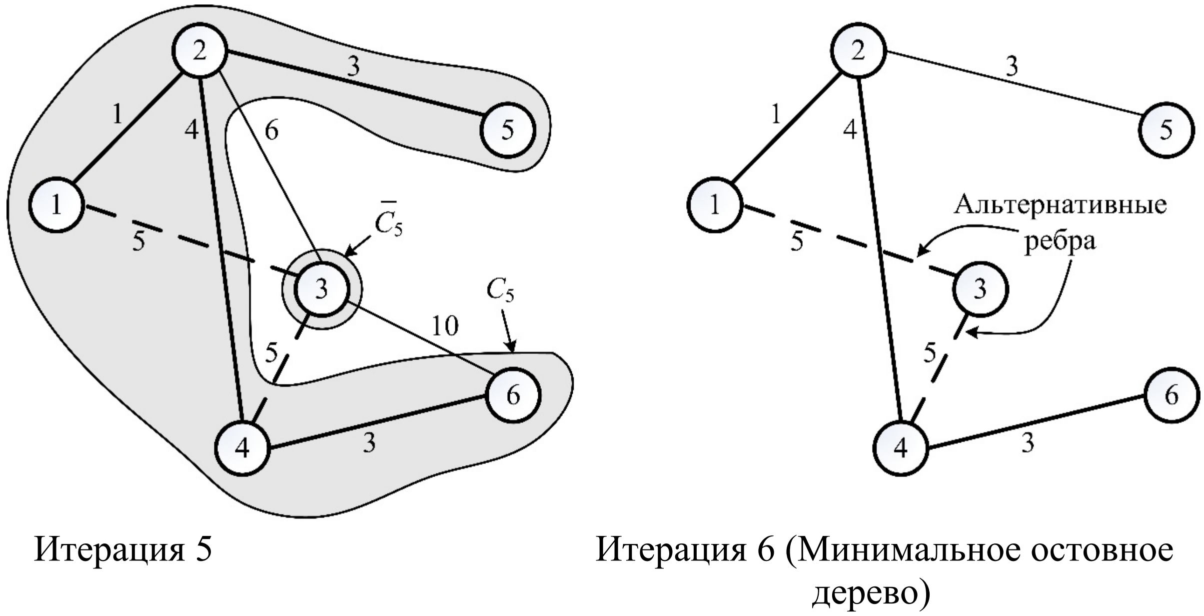


Рис. 11.4. Последовательные итерации выполнения алгоритма построения минимального остовного дерева (окончание)

Например, на первой итерации ребро (1,2) имеет наименьшую стоимость (т.е. наименьшее расстояние между пунктами сети) среди всех других ребер, соединяющих узел 1 с узлами множества $\bar{C}_1$ (отметим, что узел 6 не имеет ребра, непосредственно соединяющего его с узлом 1). Поэтому $j^* = 2$ и $C_2 = \{1, 2\}$, $\bar{C}_2 = \{3, 4, 5, 6\}$.

Решение в виде минимального остовного дерева получено на 6-й итерации (рис. 11.4). Минимальная длина кабеля для построения такой сети равна $1+3+4+3+5=16$ милям.

3. Задачи о кратчайших путях. Алгоритмы Дейкстры и Флойда.

Задача поиска кратчайшего пути состоит в определении в транспортной сети кратчайшего пути между заданными исходным пунктом и пунктом назначения. Такую модель можно использовать для описания разнообразных ситуаций. Например, замену оборудования на производстве можно сформулировать как задачу поиска кратчайшего пути.

Пример 2. Компания по прокату автомобилей разрабатывает план по обновлению парка своих машин на пять лет (2021–2025 гг.). Каждый автомобиль должен проработать не менее одного и не более трех лет. В табл. 11.1 приведена стоимость замены автомобиля в зависимости от года покупки и срока эксплуатации.

Т а б л и ц а 1 1 . 1

Исходные данные

Год покупки	Стоимость замены (долл.) в зависимости от срока эксплуатации		
	1	2	3
2021	4000	5400	9800
2022	4300	6200	8700
2023	4800	7100	–
2024	4900	–	–

Задачу можно сформулировать как сетевую с пятью узлами с номерами от 1 до 5, соответствующими годам 2021–2025. Из узла 1 (2021 г.) дуги идут только к узлам 2, 3 и 4, поскольку автомобиль может эксплуатироваться не менее одного и не более трех лет. Дуги из других узлов интерпретируются аналогично. Стоимости дуг равны стоимостям замены автомобилей. Решение задачи эквивалентно нахождению кратчайшего пути между узлами 1 и 5.

На рис. 11.5 показана построенная сеть, кратчайший путь $1 \to 3 \to 5$ которой показан жирными линиями. Это решение означает, что автомобили, приобретенные в 2021 г. (узел 1), будут эксплуатироваться 2 года, до 2023 г. (узел 3), затем они будут заменены новыми, которые будут эксплуатироваться до конца 2025 г. Общая стоимость замены составит $5400 + 7100 = 12500$ долл.

Как правило, для определения кратчайшего пути применяют алгоритм Дейкстры и алгоритм Флойда. Алгоритм Дейкстры разработан для поиска кратчайшего пути между заданным исходным узлом и любым другим узлом сети. Алгоритм Флойда более общий, поскольку он позволяет одновременно найти минимальные пути между *любыми* двумя узлами сети.

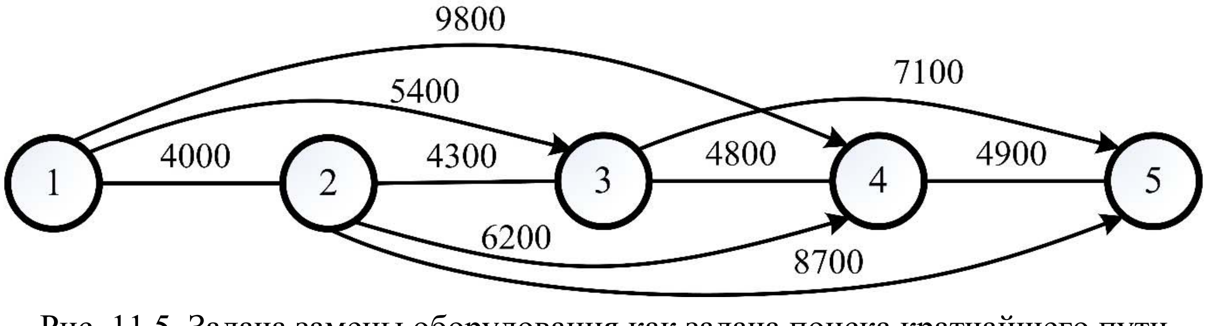


Рис. 11.5. Задача замены оборудования как задача поиска кратчайшего пути

3.1. Алгоритм Дейкстры

В процессе выполнения алгоритма Дейкстры при переходе от узла i к следующему узлу j используется специальная процедура пометки ребер. Обозначим через u_i кратчайшее расстояние от исходного узла 1 до узла i, через d_{ij} – длину ребра (i, j). Тогда для узла j определим метку $[u_j, i]$ следующим образом:

$$[u_j, i] = [u_i + d_{ij}, i],\ d_{ij} \geq 0.$$

Метки узлов в алгоритме Дейкстры могут быть двух типов: ***временные*** и ***постоянные***. Временная метка впоследствии может быть заменена на другую временную, если будет найден более короткий путь к данному узлу. Когда же станет очевидным, что не существует более короткого пути от исходного узла к данному, статус временной метки изменяется на постоянный.

Вычислительная схема алгоритма состоит из следующих этапов:

Этап 0. Исходному узлу (узел 1) присваивается *постоянная* метка [0, –]. Полагаем $i = 1$.

Этап 1:

а) вычисляются *временные* метки $[u_i + d_{ij}, i]$ для всех узлов j, которые можно достичь непосредственно из узла i и *которые не имеют постоянных меток.* Если узел j уже имеет метку $[u_j, k]$, полученную от другого узла k, и, если $u_i + d_{ij} < u_j$, тогда метка $[u_j, k]$ заменяется на $[u_i + d_{ij}, i]$.

б) если *все* узлы имеют *постоянные* метки, процесс вычислений заканчивается. В противном случае выбирается метка $[u_r, s]$ с наименьшим значением расстояния u_r среди всех *временных* меток (если таких меток несколько, то выбор произволен). Полагаем $i = r$ и повторяем этап i.

Пример 3. На рис. 11.6 показана транспортная сеть, состоящая из пяти городов (расстояния между городами (в милях) приведены возле соответствующих дуг сети). Необходимо найти кратчайшие расстояния от города 1 (узел 1) до всех остальных четырех городов.

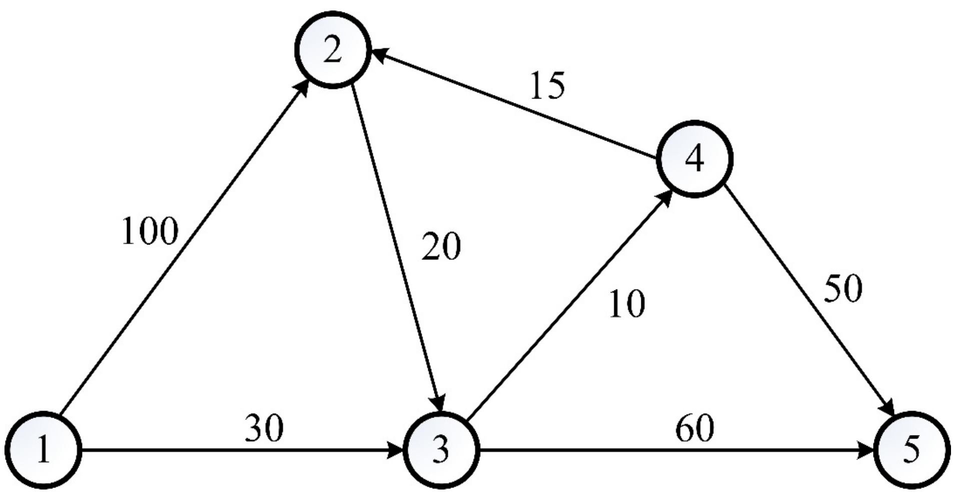


Рис. 11.6. Пример сети для алгоритма Дейкстры

Этап 0. Назначаем узлу 1 *постоянную* метку [0, –].

Этап 1. Из узла 1 можно достичь узлов 2 и 3. Вычисляем метки для этих узлов, в результате получаем следующую таблицу меток (табл. 11.2).

Таблица 11.2

Таблица меток

Узел	Метка	Статус метки
1	**[0, –]**	**Постоянная**
2	[0 + 100, 1] = [100, 1]	Временная
3	[0 + 30, 1] = [30, 1]	Временная

Среди узлов 2 и 3 узел 3 имеет наименьшее значение расстояния ($u_3 = 30$). Поэтому статус метки этого узла изменяется на «постоянная».

Этап 2. Из узла 3 (последнего узла с постоянной меткой) можно попасть в узлы 4 и 5. Получаем следующий список узлов (табл. 11.3).

Таблица 11.3

Список узлов

Узел	Метка	Статус метки
1	**[0, –]**	**Постоянная**
2	[100, 1]	Временная
3	**[30, 1]**	**Постоянная**
4	[30 + 10, 3] = [40, 3]	Временная
5	[30 + 60, 3] = [90, 3]	Временная

Временный статус метки [40, 3] узла 4 заменяется постоянным ($u_4 = 40$).

Этап 3. Из узла 4 можно достичь узлов 2 и 5. После вычисления меток получим следующий их список (табл. 11.4).

Таблица 11.4

Список узлов

Узел	Метка	Статус метки
1	**[0, –]**	**Постоянная**
2	[40 + 15, 4] = [55, 4]	Временная
3	**[30, 1]**	**Постоянная**
4	**[40, 3]**	**Постоянная**
5	[90, 3] или [40 + 50, 4] = [90, 4]	Временная

Временная метка [100, 1], полученная узлом 2 на втором этапе, изменена на [55, 4]. Это указывает на то, что найден более короткий путь к этому узлу (проходящий через узел 4). На третьем этапе узел 5 получает две метки с одинаковым значением расстояния $u_5 = 90$.

Этап 4. Из узла 2 можно перейти только в узел 3, но он уже имеет постоянную метку, которую нельзя изменить. Поэтому на данном этапе получаем такой же список меток, как и на предыдущем, но с единственным изменением: метка узла 2 получает статус постоянной. С временной меткой остается только узел 5, но так как из этого узла нельзя попасть ни в какой другой, процесс вычислений заканчивается.

Алгоритм позволяет проводить вычисления непосредственно на схеме сети, как показано на рис. 11.7.

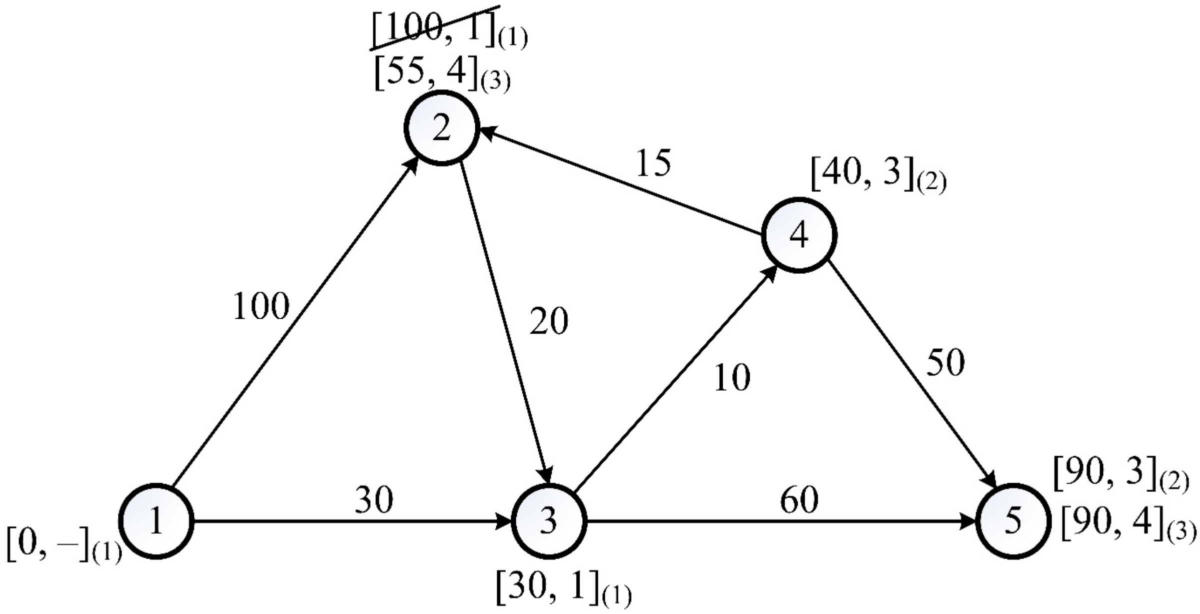


Рис. 11.7. Применение алгоритма Дейкстры
(выражение, идущее за меткой, в круглых скобках обозначает шаг)

Кратчайший маршрут между узлом 1 и любым другим узлом определяется начиная с узла назначения путем прохождения их в обратном направлении с помощью информации, представленной в постоянных метках. Например, для определения кратчайшего маршрута между узлами 1 и 2 получаем такую обратную последовательность узлов:

$$(2) \rightarrow [55,4] \rightarrow (4) \rightarrow [40,3] \rightarrow 3 \rightarrow [30,1] \rightarrow (1).$$

Таким образом, получаем путь $1 \rightarrow 3 \rightarrow 4 \rightarrow 2$ общей длиной 55 миль.

3.2. Алгоритм Флойда

Этот алгоритм более общий по сравнению с алгоритмом Дейкстры, так как он находит кратчайшие пути между *любыми* двумя узлами сети. В этом алгоритме сеть представлена в виде квадратной матрицы с n строками и n столбцами. Элемент (i, j) равен расстоянию d_{ij} от узла i к узлу j, которое имеет конечное значение, если существует дуга (i, j), и равен бесконечности в противном случае.

Покажем сначала основную идею метода Флойда. Пусть есть три узла i, j и k и заданы расстояния между ними (рис. 11.8). Если выполняется неравенство $d_{ij} + d_{jk} < d_{ik}$, то целесообразно заменить путь $i \rightarrow k$ путем

$i \to j \to k$. Такая замена (далее ее будем условно называть треугольным оператором) выполняется систематически в процессе выполнения алгоритма Флойда.

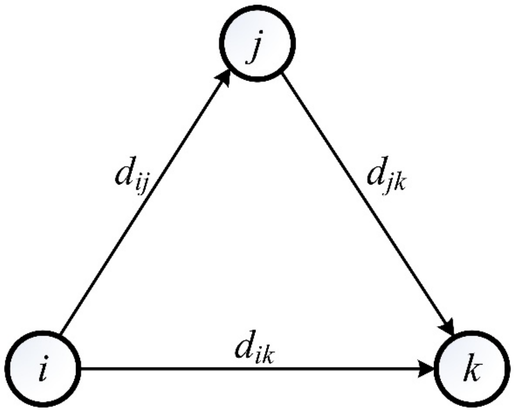


Рис. 11.8. Треугольный оператор Флойда

Алгоритм Флойда требует выполнения следующих действий.

Этап 0. Определяем начальную матрицу расстояний D_0 и матрицу последовательности узлов S_0. Диагональные элементы обеих матриц помечаются знаком «–», показывающим, что эти элементы в вычислениях не участвуют. Полагаем $k = 1$.

Матрица расстояний D_0:

	1	2	…	j	…	n
1	–	d_{12}	…	d_{1j}	…	d_{1n}
2	d_{21}	–	…	d_{2j}	…	d_{2n}
…	…	…	…	…	…	…
i	d_{i1}	d_{i2}	…	–	…	d_{in}
…	…	…	…	…	…	…
n	d_{n1}	d_{n2}	…	d_{nj}	…	–

Матрица последовательности узлов S_0:

	1	2	…	j	…	n
1	–	2	…	j	…	n
2	1	–	…	j	…	n
…	…	…	…	…	…	…
i	1	2	…	–	…	n
…	…	…	…	…	…	…
n	1	2	…	j	…	–

Основной этап *k*. Задаем строку k и столбец k как *ведущую строку* и *ведущий столбец*. Рассматриваем возможность применения *треугольного* *оператора* ко всем элементам d_{ij} матрицы D_{k-1}. Если выполняется неравенство $d_{ik} + d_{kj} < d_{ij}$ $(i \neq k,\ j \neq k, i \neq j)$, то делаем следующее:

а) создаем матрицу D_k путем замены в матрице D_{k-1} элемента d_{ij} суммой $d_{ik} + d_{kj}$;

б) создаем матрицу S_k, меняя в матрице S_{k-1} элемент s_{ij} на *k*. Полагаем $k = k + 1$, повторяем этап *k*.

Поясним действия, выполняемые на *k*-м этапе алгоритма, представив матрицу D_{k-1} так, как она показана на рис. 11.9, где строка *k* и столбец *k* являются ведущими. Строка *i* – любая строка с номером от 1 до $(k-1)$, а строка *p* – произвольная строка с номером от $(k+1)$ до *n*. Аналогично столбец *j* представляет любой столбец с номером от 1 до $(k-1)$, а столбец *q* – произвольный столбец с номером от $(k+1)$ до *n*.

Треугольный оператор выполняется следующим образом. Если сумма элементов ведущих строки и столбца (показанных в квадратиках) меньше элементов, находящихся на пересечении столбца и строки (показаны в кружках), соответствующих рассматриваемым ведущим элементам, то расстояние (элемент в кружке) заменяется суммой расстояний, представленных ведущими элементами.

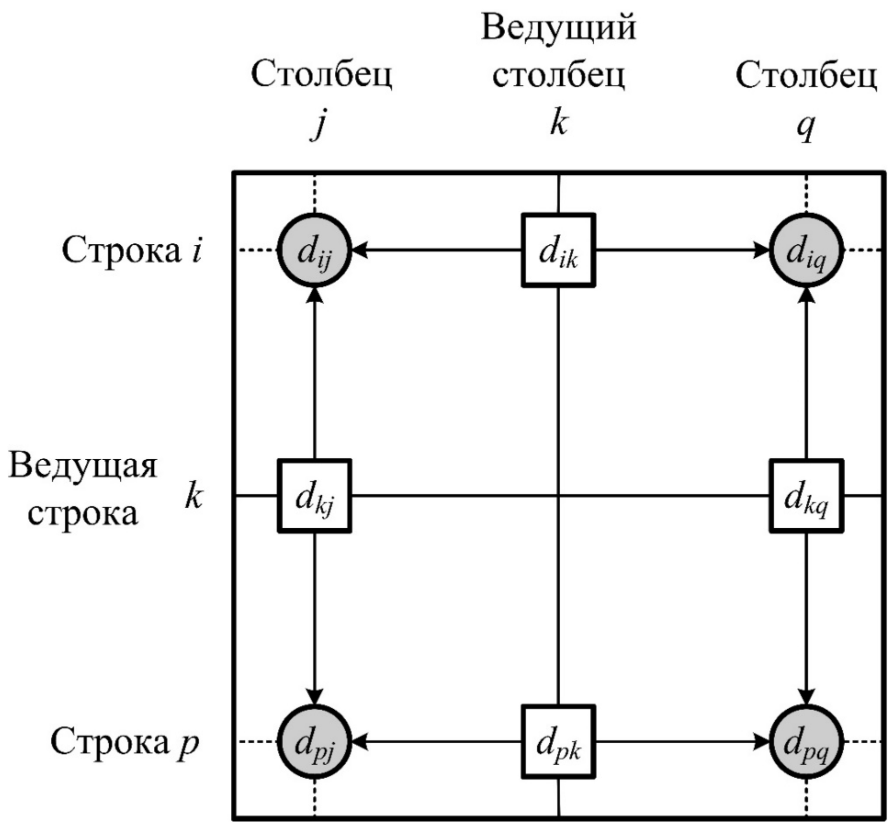


Рис. 11.9. Реализация треугольного оператора

После реализации *n* этапов алгоритма определение по матрицам D_n и S_n кратчайшего пути между узлами *i* и *j* выполняется по следующим правилам:

1. Расстояние между узлами *i* и *j* равно элементу d_{ij} в матрице D_n.

2. Промежуточные узлы пути от узла *i* к узлу *j* определяем по матрице S_n. Пусть $s_{ij} = k$, тогда имеем путь $i \to k \to j$. Если далее $s_{ik} = k$ и $s_{kj} = j$, тогда считаем, что весь путь определен, так как найдены все промежуточные узлы. В противном случае повторяем описанную процедуру для путей от узла *i* к узлу *k* и от узла *k* к узлу *j*.

Пример 4. Найдем для сети, показанной на рис. 11.10, кратчайшие пути между любыми двумя узлами. Расстояния между узлами этой сети проставлены возле соответствующих ребер. Ребро (3, 5) ориентированно, поэтому не допускается движение от узла 5 к узлу 3. Все остальные ребра допускают движение в обе стороны.

Этап 0. Начальные матрицы D_0 и S_0 строятся непосредственно по заданной схеме сети. Матрица D_0 симметрична, за исключением пары элементов d_{35} и d_{53}, где $d_{53} = \infty$ (поскольку невозможен переход от узла 5 к узлу 3).

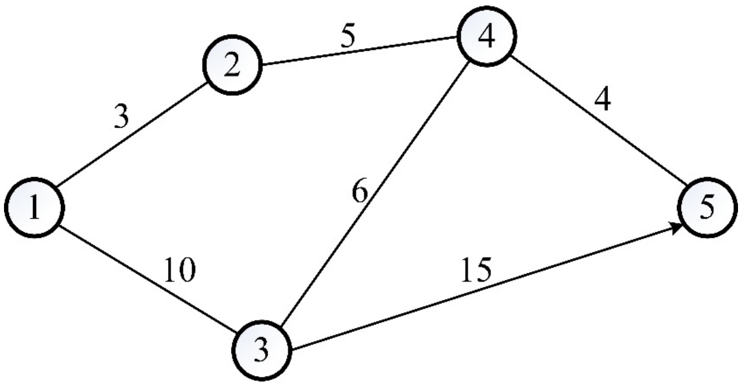


Рис. 11.10. Сеть

Матрица D_0:

	1	2	3	4	5
1	–	3	10	∞	∞
2	3	–	∞	5	∞
3	10	∞	–	6	15
4	∞	5	6	–	4
5	∞	∞	∞	4	–

Матрица S_0:

	1	2	3	4	5
1	–	2	3	4	5
2	1	–	3	4	5
3	1	2	–	4	5
4	1	2	3	–	5
5	1	2	3	4	–

Этап 1. В матрице D_0 выделены ведущие строка и столбец с номером $k=1$. Затемненными представлены элементы d_{23} и d_{32}, единственные среди элементов матрицы D_0, значения которых можно улучшить с помощью треугольного оператора. Таким образом, чтобы на основе матриц D_0 и S_0 получить матрицы D_1 и S_1, выполняем следующие действия.

1. Заменяем d_{23} на $d_{21}+d_{13}=3+10=13$ и устанавливаем $s_{23}=1$.

2. Заменяем d_{32} на $d_{31}+d_{12}=10+3=13$ и устанавливаем $s_{32}=1$. Матрицы D_1 и S_1 имеют следующий вид.

Матрица D_1:

	1	2	3	4	5
1	–	3	10	∞	∞
2	3	–	13	5	∞
3	10	13	–	6	15
4	∞	5	6	–	4
5	∞	∞	∞	4	–

Матрица S_1:

	1	2	3	4	5
1	–	2	3	4	5
2	1	–	1	4	5
3	1	1	–	4	5
4	1	2	3	–	5
5	1	2	3	4	–

Этап 2. Полагаем $k=2$. В матрице D_1 выделены ведущие строка и столбец. Треугольный оператор применяется к элементам матриц D_1 и S_1, выделенным затенением. В результате получаем матрицы D_2 и S_2.

Матрица D_2:

	1	2	3	4	5
1	–	3	10	**8**	∞
2	3	–	13	5	∞
3	10	13	–	6	15
4	**8**	5	6	–	4
5	∞	∞	∞	4	–

Матрица S_2:

	1	2	3	4	5
1	–	2	3	**2**	5
2	1	–	1	4	5
3	1	1	–	4	5
4	**2**	2	3	–	5
5	1	2	3	4	–

Этап 3. Полагаем $k = 3$. В матрице D_2 выделены ведущие строка и столбец. Треугольный оператор применяется к затемненным элементам матриц D_2 и S_2. В результате получаем матрицы D_3 и S_3.

Матрица D_3

	1	2	3	4	5
1	–	3	10	8	25
2	3	–	13	5	28
3	10	13	–	6	15
4	6	5	6	–	4
5	∞	∞	∞	4	–

Матрица S_3

	1	2	3	4	5
1	–	2	3	2	3
2	1	–	1	4	3
3	1	1	–	4	5
4	2	2	3	–	5
5	1	2	3	4	–

Этап 4. Полагаем $k = 4$, ведущие строка и столбец в матрице D_3 выделены. Получаем новые матрицы D_4 и S_4.

Матрица D_4:

	1	2	3	4	5
1	–	3	10	8	12
2	3	–	11	5	9
3	10	11	–	6	10
4	8	5	6	–	4
5	12	9	10	4	–

Матрица S_4:

	1	2	3	4	5
1	–	2	3	2	4
2	1	–	4	4	4
3	1	4	–	4	4
4	2	2	3	–	5
5	4	4	4	4	–

Этап 5. Полагаем $k = 5$, ведущие строка и столбец в матрице D_4 выделены. Никаких действий на этом этапе не выполняем; вычисления закончены.

Конечные матрицы D_4 и S_4 содержат всю информацию, необходимую для определения кратчайших путей между любыми двумя узлами сети. Например, кратчайшее расстояние между узлами 1 и 5 равно $d_{15} = 12$.

Для определения соответствующих маршрутов напомним, что сегмент маршрута (i, j) состоит из ребра (i, j) только тогда, когда $s_{ij} = j$. В противном случае узлы i и j связаны, по крайней мере, через один промежуточный узел. Например, поскольку $s_{15} = 4$ и $s_{45} = 5$, сначала кратчайший маршрут между узлами 1 и 5 будет иметь вид $1 \to 4 \to 5$. Но так как $s_{14} \neq 4$, узлы 1 и 4 в определяемом пути не связаны одним ребром (но в исходной сети они могут быть связаны непосредственно). Далее следует определить промежуточный узел (узлы) между первым и четвертым узлами. Имеем $s_{14} = 2$ и $s_{24} = 4$, поэтому маршрут $1 \to 4$ заменяем $1 \to 2 \to 4$. Поскольку $s_{12} = 2$ и $s_{24} = 4$, других промежуточных узлов нет. Комбинируя определенные сегменты маршрута, окончательно получаем следующий кратчайший путь от узла 1 до узла 5: $1 \to 2 \to 4 \to 5$. Длина этого пути равна 12 милям.

Вопросы для самоподготовки

1. Что такое сетевая модель?

2. Сформулируйте алгоритм построения минимального остовного дерева. Всегда ли возможно построить минимальное основное дерево? Какие ограничения в связи с этим накладываются на сетевую модель?

3. Сравните алгоритмы Дейкстры и Флойда для решения задачи о кратчайших путях. Укажите сильные стороны каждого из алгоритмов. Чем стоит руководствоваться исследователю при выборе одного из этих алгоритмов для решения конкретной задачи?

4. Найти кратчайший путь в транспортной сети, заданной матрицей расстояний, между первым и последним населенным пунктами с помощью алгоритма Дейкстры и алгоритма Флойда (отсутствие числа в таблице означает, что прямой дороги между пунктами нет)

а)

	A	B	C	D	E	F	Z
A		4	9				21
B	4		3				
C	9	3		2		11	20
D			2		4		
E				4			4
F			11				2
Z	21		20		4	2	

б)

	A	B	C	D	E	F	Z
A		4	6				43
B	4		1				
C	6	1		15			32
D			15		4	6	10
E				4			8
F				6			2
Z	43		32	10	8	2	

в)

	A	B	C	D	E	F	Z
A		4	6				33
B	4		1				
C	6	1		5			27
D			5		4	8	10
E				4		1	8
F				8	1		2
Z	33		27	10	8	2	

г)

	A	B	C	D	E	F	Z
A		4	6				30
B			3	4			
C				11			27
D					4	7	10
E						4	8
F							2
Z	29						

д)

	A	B	C	D	E	F
A			3		12	
B			4			5
C	3	4		3		
D			3			3
E	12					2
F		5		3	2	

е)

	A	B	C	D	E	F
A				3	5	
B			1		4	1
C		1				3
D	3				3	
E	5	4		3		1
F		1	3		1	

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Таким образом, поиск оптимального решения в технических и экономических задачах, задачах оптимального управления, безусловно, является достаточно сложной проблемой, и она всегда будет интересна для исследователя. Однако широкий спектр подобных задач порождает целые классы математических постановок задач и предполагает использование соответствующих методов решения.

Основной задачей учебно-методического пособия явилось знакомство читателя с отдельными классами задач математического программирования: линейного, квадратичного, выпуклого, целочисленного, дробно-линейного, параметрического, стохастического, динамического программирования. В данной работе авторы изложили основные алгоритмы и методы наиболее изученного раздела, занимающегося изучением экстремальных задач и разработкой методов их решения – линейного программирования, а также отдельного подкласса задач линейного программирования – транспортных задач. Кроме того, в работе представлен ряд существующих достаточно эффективных методов сетевого планирования и основ теории графов.

Стоит сказать, что знакомство с существующими алгоритмами построено таким образом, что оно не требует от читателя специальной математической подготовки и все представленные методы сопровождаются разобранными примерами, примерами для самостоятельной работы и контрольными вопросами, ответы на которые будут способствовать более глубокому пониманию материала.

Авторы надеются, что данное пособие поможет разобрать в понимании тех проблем, которые возникают при использовании математических методов, и даст возможность приобрести необходимые навыки в решении практических задач. Читатель, заинтересовавшийся рассматриваемыми вопросами, может обратиться к дополнительным публикациям, приведенным в списке литературы.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Акулич, И.Л. Математическое программирование в примерах и задачах [Текст]: учеб. пособие / И.Л. Акулич. – 2-е изд., испр. и доп. – М.: Высш. шк., 1993. –336 с.: ил.

2. Ашманов, С.А. Линейное программирование [Текст] / С.А. Ашманов. – М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1981. – 340 с.

3. Банди, Б. Основы линейного программирования [Текст] / Б. Банди; пер. с англ. – М.: Радио и связь, 1989. – 176 с.

4. Данко, П.Е. Высшая математика в упражнениях и задачах. В 2 ч. Ч.1 [Текст]: учеб. пособие для вузов / П.Е. Данко, А.Г. Попов, Т.Я. Кожевникова. – 6-е изд. – М.: ООО «Издательский дом «ОНИКС 21 век»: ООО «Издательство «Мир и образование», 2003. – 304 с.

5. Калихман, И.Л. Сборник задач по математическому программированию [Текст] / И.Л. Калихман. – 2-е изд., доп. и перераб. – М.: Высш. шк., 1975. – 270 с.: ил.

6. Карасев, А.И. Курс высшей математики для экономических вузов. Ч.II. Теория вероятностей и математическая статистика. Линейное программирование [Текст]: учеб. пособие для студентов вузов / А.И. Карасев, З.М. Аксютина, Т.И. Савельева. – М.: Высш. шк., 1982. – 320 с.

7. Карпелевич, Ф.И. Элементы линейной алгебры и линейного программирования [Текст]: учеб. пособие для технических вузов / Ф.И. Карпелевич и Л.Е. Садовский. – 3-е изд. испр. и доп., – М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1967. – 312 с.

8. Кузнецов, Ю.Н. Математическое программирование [Текст]: учеб. пособие для вузов / Ю.Н. Кузнецов, В.И. Кузубов, А.Б. Волощенко. – М.: Высш. шк., 1976. – 352 с.

9. Лунгу, К.Н. Линейное программирование. Руководство к решению задач [Текст] / К.Н. Лунгу. – М. : ФИЗМАТЛИТ, 2005. –128 с.

10. Микиша, А. М. Математика: основные термины: Толковый словарь: Более 3000 терминов [Текст] / А.М. Микиша. – М.: ООО «Издательство Астрель»: ООО «Издательство АСТ», 2003. – 448 с.

11. Сборник задач по высшей математике для экономистов: учеб. пособие [Текст] / под ред. В.И. Ермакова. – 2-е изд., испр.– М.: ИНФРА-М, 2009. – 575 с. – (Высшее образование).

12. Солодовников, А.С. Введение в линейную алгебру и линейное программирование [Текст] / А.С. Солодовников. – М.: Просвещение, 1966. – 184 с.

13. Таха, Хемди А. Введение в исследование операций [Текст] / Хемди А. Таха. – 7-е изд.; пер. с англ. – М.: Издательский дом «Вильямс», 2005. – 912 с.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Учебное издание

Тарасов Роман Викторович
Тарасов Дмитрий Викторович

МЕТОДЫ ОПТИМИЗАЦИИ
В ТЕХНОЛОГИЧЕСКИХ И ТЕХНИЧЕСКИХ ЗАДАЧАХ

Учебно-методическое пособие
для практических занятий по направлению подготовки 27.03.01
«Стандартизация и метрология»

В авторской редакции
Верстка Н.В. Кучина

Подписано в печать 20.06.16. Формат 60×84/16.
Бумага офисная «Снегурочка». Печать на ризографе.
Усл.печ.л. 9,07. Уч.-изд.л. 9,75. Тираж 80 экз.
Заказ № 441.

Издательство ПГУАС.
440028, г. Пенза, ул. Германа Титова, 28.