МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Федеральное государственное бюджетное образовательное
учреждение высшего образования
«Пензенский государственный
университет архитектуры и строительства»
(ПГУАС)

Р.В. Тарасов, Д.В. Тарасов

МЕТОДЫ ОПТИМИЗАЦИИ В ТЕХНОЛОГИЧЕСКИХ И ТЕХНИЧЕСКИХ ЗАДАЧАХ

Учебно-методическое пособие
для выполнения курсовой работы
по направлению подготовки
27.03.01 «Стандартизация и метрология»

Пенза 2016

УДК 62:519.8(075.8)
ББК 30:22.1я73
Т19

Рекомендовано Редсоветом университета
Рецензенты: кандидат технических наук, доцент
Л.В. Макарова (ПГУАС);
кандидат физико-математических наук,
доцент А.Н. Тында (ПГУ)

Тарасов Р.В.
Т19 Методы оптимизации в технологических и технических задачах: учебно-методическое пособие для выполнения курсовой работы по направлению подготовки 27.03.01 «Стандартизация и метрология»/ Р.В. Тарасов, Д.В. Тарасов. – Пенза: ПГУАС, 2016. – 68 с.

Изложены последовательность выполнения курсовой работы и содержание расчетно-пояснительной записки. Приведены необходимые сведения об общих задачах линейного программирования, симплекс-методе, а также транспортных задачах с изложением базовых алгоритмов решения. Даны примеры решения типовых задач.

Учебно-методическое пособие подготовлено на кафедрах «Управление качеством и технология строительного производства» и «Высшая и прикладная математика» и предназначено для бакалавров, обучающихся по направлению подготовки 27.03.01 «Стандартизация и метрология». при выполнении курсовой работы по дисциплине «Методы оптимизации в технологических и технических задачах».

ПРЕДИСЛОВИЕ

В соответствии с федеральным государственным образовательным стандартом по направлению 27.03.01 – Стандартизация и метрология (уровень бакалавриата), на кафедре «Управление качеством и технологии строительного производства» ФГБОУ ВО «Пензенский государственный университет архитектуры и строительства» и на кафедре «Высшая и прикладная математика» ФГБОУ ВО «Пензенский государственный университет» разработано учебно-методическое пособие по выполнению курсовой работы для обучающихся по направлению подготовки 27.03.01 «Стандартизация и метрология» по дисциплине «Методы оптимизации в технологических и технических задачах».

Учебно-методическое пособие по выполнению курсовой работы позволит овладеть следующими компетенциями:

– способностью принимать участие в моделировании процессов и средств измерений, испытаний и контроля с использованием стандартных пакетов и средств автоматизированного проектирования;

– способностью проводить эксперименты по заданным методикам с обработкой и анализом результатов, составлять описания проводимых исследований и подготавливать данные для составления научных обзоров и публикаций.

В результате изучения дисциплины обучающийся должен:

Знать

– основные определения, понятия, теоремы и типовые методы решения оптимизационных задач;

– математическую постановку задач линейного программирования и методы их решения;

– основные виды оптимизационных задач и алгоритмы их решения;

– основы сетевого планирования и управления.

Уметь

– обоснованно выбирать методы оптимизации;

– строить и использовать модели для описания и прогнозирования различных явлений, осуществлять их качественный и количественный анализ;

– с необходимой степенью достоверности анализировать и прогнозировать результаты практической деятельности в различных областях отраслей производства;

– использовать инструментальные (программные) средства аналитического и численного решения оптимизационных задач.

Владеть

– навыками исследования моделей с учетом их иерархической структуры и оценкой пределов применимости полученных результатов;

– методами построения математической модели типовых технологических процессов и содержательной интерпретации полученных результатов;

– навыками использования компьютерных технологий реализации методов исследования операций и методов оптимизации.

ВВЕДЕНИЕ

Цель курсовой работы – закрепить теоретический материал изучаемой дисциплины, привить обучающимся знания и навыки выполнения инженерных исследований, в том числе и практические умения решения задач оптимизации с использованием методов линейного программирования.

В курсовой работе студенты должны овладеть практическими навыками решения задач линейного программирования.

Основное внимание уделяется:

– задачам линейного программирования с двумя переменными (графический метод, симплекс-метод, метод больших штрафов, двухэтапный метод).

– транспортным задачам (нахождение начального базисного решения, метод потенциалов).

1. ЗАДАНИЕ НА КУРСОВУЮ РАБОТУ

В задании на курсовой проект, которое выдается индивидуально для каждого студента, содержит в себе следующую информацию (приложение):

– исходные данные для расчета задачи линейного программирования графическим методом;

– исходные данные для расчета задачи линейного программирования симплекс-методом;

– исходные данные для расчета задачи линейного программирования методом больших штрафов (или двухэтапным методом);

– транспортную задачу;

– сроки выполнения курсового проекта.

2. СОСТАВ И СОДЕРЖАНИЕ КУРСОВОЙ РАБОТЫ

Курсовая работа состоит из расчетно-пояснительной записки объемом 25-30 машинописных страниц и представляет собой принятое студентом решение поставленной задачи.

Расчетно-пояснительная записка должна быть написана от руки с одной стороны листа бумаги формата А4 или машинописным способом через 1,5 интервала. На каждый лист пояснительной записки наносится карандашом рамка рабочего поля, отстоящая от кромки листа слева на 20 мм, а справа, снизу и сверху – на 5 мм. Расстояние от рамки до границы текста в начале строк – не менее 5 мм, в конце строк не менее – 3 мм; от верхней и нижней строк – не менее 10 мм.

Пояснительная записка должна содержать:

- титульный лист,
- задание на курсовую работу,
- содержание,
- введение,
- основную часть,
- список использованных источников,
- приложение (при необходимости).

Титульный лист выполняется по форме, указанной в прил. 2, стандартным шрифтом.

Пояснительная записка должна излагаться грамотным литературным языком, со сжатыми и четкими формулировками, без лишних подробностей и повторений. Не допускается сокращения слов, кроме общепринятых. Страницы пояснительной записки должны быть пронумерованы. Таблицы, графики и рисунки должны иметь названия.

В расчетно-пояснительной записке предусматриваются разделы:

– введение – 1...2 стр.;

– основная часть – 10...20 стр.;
– заключение – 1...2 стр.
– библиографический список – 1…2 стр.

3. ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЬ ВЫПОЛНЕНИЯ КУРСОВОЙ РАБОТЫ

Рекомендуется следующий порядок разработки проекта:

1. Ознакомиться с индивидуальным заданием, настоящими методическими указаниями и графиком выполнения курсовой работы.
2. Изучить соответствующие разделы рекомендуемой литературы.
3. Произвести необходимые описания и расчеты, в соответствие с заданием.
4. Оформить требуемые разделы расчетно-пояснительной записки согласно методическим указанием по выполнению и оформлению курсовой работы.
5. Подготовить доклад и защитить курсовую работу

4. КОНСУЛЬТАЦИИ И ЗАЩИТА КУРСОВОЙ РАБОТЫ

Основная цель консультаций – привить студентам навыки работы над справочной и нормативной литературой, монографиями, статьями в журналах, учебниками и т.п. На консультациях студенты должны обращаться к преподавателю со своими решениями. Задача преподавателя – оценить решенные вопросы и дать ответы на вопросы частного или принципиального характера.

Обучающийся обязан выполнить отдельные разделы работы в сроки, установленные преподавателем, и явиться в дни обязательных консультаций для контроля выполнения ими индивидуального задания в соответствующие сроки.

Студент защищает свой проект перед преподавателем в присутствии других студентов.

К защите студент предоставляет пояснительную записку. До защиты курсовая работа хранится у студента.

Оценка за проект ставиться по пятибалльной системе. При этом учитывается: глубина проработки курсовой работы; качество оформления; умение докладывать и отвечать на вопросы.

В случае неудовлетворительной оценки студент дорабатывает работу или получает новое задание по усмотрению преподавателя.

Защищенная курсовая работа хранится на кафедре.

5. РАСЧЕТНО-ПОЯСНИТЕЛЬНАЯ ЗАПИСКА

Расчетно-пояснительная записка должна включает в себя следующие основные разделы:

Введение.

1 Задачи линейного программирования с двумя переменными.

1.1 Графический метод.

1.2 Симплекс-метод.

1.3 Двухэтапный метод (или метод больших штрафов).

2 Решение транспортной задачи.

2.1 Нахождение начального базисного решения.

а) Метод северо-западного угла.

б) Метод минимальной стоимости.

в) Метод Фогеля.

2.2 Метод потенциалов.

Заключение.

Список использованных источников.

Введение

Введение расчетно-пояснительной записки должно содержать краткий обзор состояния, перспективы и пути решения поставленных задач. В обзоре необходимо отразить современное состояние развития методов оптимизации, в частности, методов линейного программирования.

Суть методов оптимизации (оптимального программирования) заключается в том, чтобы, исходя из наличия определенных ресурсов, выбрать такой способ их использования (распределения), при котором будет обеспечен максимум или минимум интересующего показателя.

Оптимальное программирование обеспечивает получение практически ценных результатов, так как по своей природе оно вполне соответствует характеру исследуемых технико-экономических процессов и явлений. С математической и статистической точек зрения этот метод применим лишь к тем явлениям, которые выражаются положительными величинами и в своей совокупности образуют объединение взаимозависимых, но качественно различных величин.

Оптимальное программирование можно применять лишь к таким задачам, при решении которых оптимальный результат достигается лишь в виде точно сформулированных целей и при вполне определенных ограничениях, обычно вытекающих из наличных средств (производственных мощностей, сырья, трудовых ресурсов и т.д.). В условия задачи обычно входит некоторая математически сформулированная система взаимозависимых факторов, ресурсы и условия, ограничивающие характер их использования.

Задача становится разрешимой при введении в нее определенных оценок как для взаимозависимых факторов, так и для ожидаемых результатов. Следовательно, оптимальность результата задачи программирования имеет относительный характер. Этот результат оптимален только с точки зрения тех критериев, которыми он оценивается, и ограничений, введенных в задачу.

Отталкиваясь от вышесказанного, для любых задач оптимального программирования характерны три следующих момента:

1) наличие системы взаимозависимых факторов;

2) строго определенный критерий оценки оптимальности;

3) точная формулировка условий, ограничивающих использование наличных ресурсов или факторов.

Из многих возможных вариантов выбирается альтернативная комбинация, отвечающая всем условиям, введенным в задачу, и обеспечивающая минимальное или максимальное значение выбранного критерия оптимальности. Решение задачи достигается применением определенной математической процедуры, которая заключается в последовательном приближении рациональных вариантов, соответствующих выбранной комбинации факторов, к единственному оптимальному плану.

В зависимости от характера функций-ограничений и целевой функции различают разные виды математического программирования:

1) линейное программирование – функции линейны;

2) нелинейного программирования – хотя бы одна из этих функций нелинейна;

3) квадратичного программирования – $f(x)$ является квадратичной функцией, ограничения линейны;

4) сепарабельное программирование – $f(x)$ представляет собой сумму функций, различных для каждой переменной, условия – ограничения могут быть как линейными, так и нелинейными;

5) целочисленное (линейное или нелинейное) программирование – координаты искомой точки x являются только целыми числами;

6) выпуклое программирование – целевая функция – выпуклая, функции – ограничения – выпуклые, то есть рассматриваются выпуклые функции на выпуклых множествах и т. п.

Наиболее простым и часто встречающимся является случай, когда эти функции линейны и каждая из них имеет вид:

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \dots a_nx_n + b,$$

то есть имеет место задача линейного программирования. Подсчитано, что в настоящее время примерно 80-85% всех решаемых на практике задач оптимизации относятся к задачам линейного программирования.

1. Задачи линейного программирования с двумя переменными

Линейное программирование – это метод оптимизации моделей, в которых целевые функции и ограничения строго линейны.

Линейное программирование успешно применяется в военной области, индустрии, сельском хозяйстве, транспортной отрасли, экономике, системе здравоохранения и даже в социальных науках. Широкое использование этого метода подкрепляется высококвалифицированными компьютерными алгоритмами, реализующими данный метод.

В общем случае задача линейного программирования сводится к отысканию такого решения $X=(x_1;x_2;...;x_n)$ системы m линейных уравнений с n переменными (системы ограничений)

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m, \end{cases} \tag{1.1}$$

$$x_{ij} \geq 0\left(j = 1, 2, \ldots, n\right),$$

при котором целевая функция (линейная форма) $Z=c_1x_1+c_2x_2+...+c_nx_n$ принимает оптимальное (максимальное или минимальное) значение.

Всякое неотрицательное решение системы (1.1) называется допустимым решением или планом.

Решение $X=(x_1;\ x_2;\ \ldots;\ x_n)$, при котором функция Z обращается в оптимум, называется оптимальным решением или оптимальным планом. В отыскании этого оптимального решения и состоит задача линейного программирования.

Как правило, оптимальное решение единственно. Однако это не всегда так. Возможны случаи, когда оптимальных решений оказывается бесконечное множество.

В задачах линейного программирования коэффициенты a_{ij}, b_j, c_j – заданные постоянные величины, а число уравнений меньше числа переменных, т.е. $m<n$ (согласно теореме Кронекера – Капелли: для совместности системы линейных алгебраических уравнений необходимо и достаточно, чтобы ранг матрицы системы равнялся рангу расширенной матрицы этой системы. Этот общий ранг не может превосходить числа n неизвестных. При m=n решении системы единственно).

Без ограничения общности можно считать, что все правые части системы неотрицательны, т.е. $b_i \geq 0$ ($i=1,\ 2,\ \ldots,\ m$). Если в некоторых уравнениях системы это условие нарушено, то можно умножить обе части таких уравнений на -1.

В более короткой форме задача линейного программирования записывается так: найти решение $X=(x_1;x_2;\dots;x_n)$ системы ограничений

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i \left(i = 1, 2, \dots, m \right),$$

приводящее к оптимуму линейную форму

$$Z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

при условии, что $x_j \geq 0$ $(j=1,2,\dots,n)$.

Эта же система может быть записана в векторной форме.

$$\boldsymbol{A}_1 x_1 + \boldsymbol{A}_2 x_2 + \dots + \boldsymbol{A}_n x_n = \boldsymbol{B}, \;\; Z = \boldsymbol{C} \cdot \boldsymbol{X},$$

где $\boldsymbol{C} = \left(c_1; c_2; \dots; c_n \right)$, $\boldsymbol{X} = \left(x_1; x_2; \dots; x_n \right)$,

$\boldsymbol{C} \cdot \boldsymbol{X}$ – скалярное произведение,

$$\boldsymbol{A}_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \cdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}, \boldsymbol{A}_2 = \begin{pmatrix} a_{21} \\ a_{22} \\ \cdots \\ a_{m2} \end{pmatrix}, \dots, \boldsymbol{A}_n = \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \cdots \\ a_{mn} \end{pmatrix}, \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \cdots \\ b_m \end{pmatrix}.$$

Ещё для записи системы ограничений используется матричная форма. $Z = CX$ при ограничениях $AX=B$, где $C=(c_1 \;\; c_2 \;\dots\; c_n)$ (матрица – строка),

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdots \\ x_n \end{pmatrix} \left(\text{матрица-столбец}\right), \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \cdots \\ b_m \end{pmatrix} \left(\text{матрица-столбец}\right),$$

$$A = \left(a_{ij} \right) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \dots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \cdots a_{2n} \\ \vdots & \vdots \;\; \ddots \;\; \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} \dots a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Матрицу A называют матрицей условий задач, B – матрицей ограничений.

Задача линейного программирования, система ограничений которой задана в виде системы уравнений (1.1), называется канонической.

В большинстве задач ограничения задаются не в виде системы уравнений, а в виде системы линейных неравенств:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \le b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \le b_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \le b_m \end{cases} \tag{1.2}$$

или

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \ge b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \ge b_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \ge b_m \end{cases} \tag{1.3}$$

Наконец, система ограничений может быть смешанной: часть ограничений – неравенства типа (1.2), часть – типа (1.3), часть задана в виде уравнений.

Однако любую систему ограничений можно привести к системе уравнений вида (1.1). Для этого достаточно к левой части каждого неравенства (1.2) прибавить (отнять, если система задана в виде (1.3)) какое-то неотрицательное число – добавочную переменную, чтобы каждое неравенство обратилось в уравнение:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n + x_{n+1} = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n + x_{n+2} = b_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n + x_{n+m} = b_m, \end{cases}$$

где $x_{n+1} \ge 0$ (i=1,2,…,m).

В результате вместо системы неравенств (1.2) получили систему ограничений, аналогичную системе (1.1).

В случае смешанных систем ограничений число добавочных переменных равно m–t, где m – общее число ограничений системы, t – число ограничений в виде уравнений.

Таким образом, как бы ни были первоначально заданы ограничения задачи линейного программирования, их всегда можно привести к системе линейных уравнений, используя для этой цели добавочные переменные, т.е. свести задачу к канонической.

Будем считать, что все m уравнений системы (1.1) линейно независимы. В противном случае из системы можно исключить часть уравнений так, чтобы уравнения системы стали линейно независимыми.

Совместная система m линейных уравнений с n переменными ($m<n$) имеет бесконечное множество решений, в том числе и допустимых (не имеющих отрицательных компонент).

Допустимым базисным решением является решение, содержащее m неотрицательных основных (базисных) переменных и n-m неосновных (небазисных или свободных). Неосновные переменные в базисном решении равны нулю.

Основные переменные, как правило, отличны от нуля, т.е. являются положительными числами.

Если хотя бы одна из основных переменных принимает нулевое значение, то соответствующее базисное решение называется вырожденным.

Любое неотрицательное базисное решение системы ограничений задачи линейного программирования, заданной в канонической форме, называется опорным решением или опорным планом.

Опорный план называется невырожденным, если он содержит m положительных компонент, в противном случае опорный план называется вырожденным.

1.1. Графический метод

Рассмотрим пример решения задачи линейного программирования графическим методом.

Пример 1.1. Найти максимум функции $Z=x_1-x_2$ при ограничениях

$$\begin{cases} -2x_1+3x_2\le 12, \\ x_1+x_2\le 9, \\ 3x_1-5x_2\le 3, \\ x_1\ge 0, x_2\ge 0. \end{cases}$$

Изобразим область допустимых решений данной системы неравенств. Так, неравенство $-2x_1+3x_2\le 12$ определяет ту часть полуплоскости, которой принадлежит начало координат, так как точка (0;0) ему удовлетворяет. Построив решения остальных неравенств, получим выпуклый многоугольник $OABCD$, имеющий пять угловых точек: O(0;0), A(0;4), B(3;6), C(6;3), D(1;0) (рис. 1.2).

(Координаты точки B служат решением системы уравнений

$$\begin{cases} -2x_1+3x_2=12, \\ x_1+x_2=9; \end{cases}$$

Точки A – решением системы

$$\begin{cases} -2x_1+3x_2=12, \\ x_1=0; \end{cases}$$

Точки C – решением системы

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 9, \\ 3x_1 - 5x_2 = 3; \end{cases}$$

Точки D – решением системы

$$\begin{Bmatrix} 3x_1 - 5x_2 = 3, \\ x_2 = 0 \end{Bmatrix}.$$

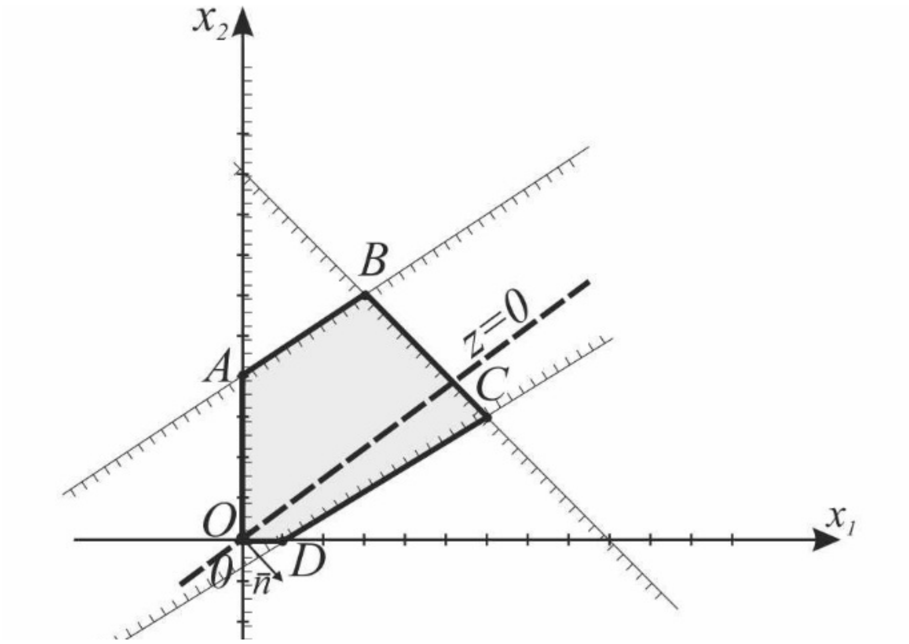

Рис. 1.2. Область допустимых решений

Множество допустимых решений в рассматриваемом примере выпукло. Требуется найти такую точку этого многоугольника, которая бы максимизировала линейную форму $Z=x_1-x_2$, являющуюся линейной функцией координат точек на плоскости. Форму Z приравняем какой-то постоянной величине, т.е. $Z=\text{const}=a$.

Это приводит к уравнению $x_1-x_2=a$, которое является уравнением прямой на плоскости. Следовательно, прямая $x_1-x_2=a$ является множеством точек, в которых функция Z принимает значение, равное a. Меняя величину а, получим семейство параллельных прямых. Каждую из прямых этого семейства принято называть линией уровня (линией равных значений функции).

На рис. 1.2 построена линия уровня $x_1-x_2=0$ соответствующая значению $Z=0$. При переходе от одной линии уровня к другой значение функции Z изменяется. Из аналитической геометрии известно, что коэффициенты при переменных в уравнении прямой служат координатами вектора $\overline{n}$, перпендикулярного прямой. В данном случае $\overline{n}=(1;-1)$. Из рис. 1.2 видно, что значения функции Z возрастают при перемещении исходной линии уровня в направлении вектора $\overline{n}$, и максимальное значение линейной формы на многоугольнике решений будет достигнуто в точке $C(6;3)$, в которой линия уровня при дальнейшем передвижении выйдет из этого многоугольника. Подставив координаты точки C в выражение Z, найдём максимальное значение функции $Z_{max}=Z(C)=6\text{-}3=3$.

Если бы требовалось найти минимум функции Z, то исходную линию уровня следовало бы передвигать в сторону, противоположную $\overline{n}$.

До сих пор полученные выводы были основаны на том, что множество решений задач линейного программирования есть замкнутый многоугольник, система ограничений совместна и линейно независима (нет лишних ограничений) и оптимальное решение единственно.

Рассмотрим такие примеры, когда эти требования нарушаются.

Пример 1.2. Найти максимум функции $Z=x_1+x_2$ при ограничениях

$$\begin{cases} -2x_1+3x_2 \le 12, \\ 3x_1-5x_2 \le 3, \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0 \end{cases}.$$

На рис. 1.3 изображены: неограниченная многогранная область решений данной системы ограничений-неравенств, линия уровня $x_1+x_2=2$, вектор $\overline{n}=(1;1)$. Функция Z может неограниченно возрастать при заданной системе ограничений, поэтому $Z_{max}=\infty$.

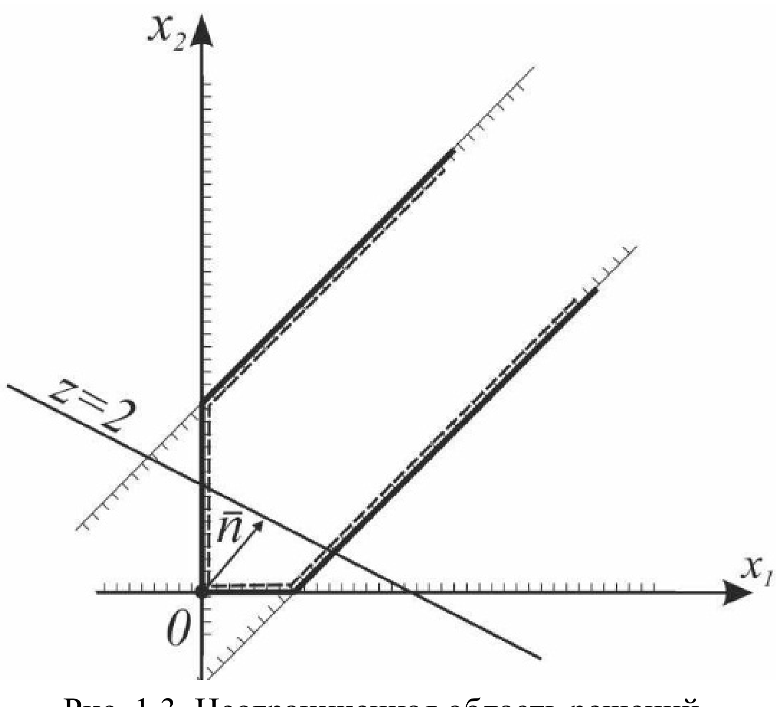

Рис. 1.3. Неограниченная область решений

1.2. Симплекс-метод

Симплекс–метод является универсальным методом, которым можно решить любую задачу линейного программирования.

Его идея состоит в следующем. Используя систему ограничений, приведённую к общему виду, т.е. к системе m уравнений с n переменными ($m<n$), находят её любое базисное решение, по возможности наиболее простое. Если первое же найденное базисное решение оказалось допустимым, то проверяют его на оптимальность. Если оно не оптимально, то переходят к другому допустимому базисному решению. Симплексный метод гарантирует, что при этом новом решении линейная форма если не достигнет оптимума, то приблизится к нему (в случае перехода к вырожденному базисному решению значение линейной формы не изменится). С новым допустимым базисным решением поступают так же, пока не находят решение, которое является оптимальным.

Если первое найденное базисное решение окажется недопустимым, то с помощью симплексного метода осуществляют переход к другим базисным решениям, которые позволяют приблизиться к области допустимых решений, пока на каком-то шаге не получится допустимое базисное решение. К нему применяют тот же механизм.

Таким образом, применение симплексного метода распадается на два этапа: 1) нахождение опорного решения системы ограничений; 2) нахождение оптимального решения. При этом каждый этап включает несколько шагов, соответствующих тому или иному базисному решению. Так как число базисных решений всегда ограничено, то ограничено и число шагов симплекс–метода.

Пример 1.2. Найти максимум функции $Z=2x_1+3x_2$ при ограничениях

$$\begin{cases} x_1 \le 40, \\ x_2 \le 30, \\ x_1 + x_2 \le 60, \\ x_1 + 2x_2 \le 80, \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

Для сведения системы ограничений-неравенств к системе уравнений прибавим к левой части каждого неравенства добавочные неотрицательные переменные x_3, x_4, x_5, x_6:

$$\begin{cases} x_1 + x_3 = 40, \\ x_2 + x_4 = 30, \\ x_1 + x_2 + x_5 = 60, \\ x_1 + 2x_2 + x_6 = 80, \end{cases} \tag{1.4}$$

$$x_j \ge 0 \ (j=1, 2, \ldots, 6)$$

Система ограничений есть система четырёх независимых уравнений с шестью переменными, поэтому число основных переменных должно равняться четырём, а число неосновных – двум.

Для решения задачи симплексным методом прежде всего нужно найти любое базисное решение. В данном случае для этого достаточно взять в качестве основных добавочные переменные x_3, x_4, x_5, x_6, так как коэффициенты при этих переменных образуют единичную матрицу. Считая неосновные переменные x_1 и x_2 равными нулю, получим базисное решение (0; 0; 40; 30; 60; 80), которое к тому же оказалось опорным. Переходим сразу ко второму этапу – поиску оптимального решения.

<u>I шаг.</u> Основные переменные x_3, x_4, x_5, x_6; неосновные переменные: x_1, x_2. В системе (1.4) основные переменные выразим через неосновные. Через них выразим и линейную форму (в данном случае она уже выражена через x_1 и x_2).

Получим

$$\begin{cases} x_3 = 40 - x_1, \\ \underline{x_4 = 30 - x_2,} \\ x_5 = 60 - x_1 - x_2, \\ x_6 = 80 - x_1 - 2x_2, \end{cases} \tag{1.5}$$

$$Z=2x_1+3x_2.$$

При $x_1=x_2=0$ имеем $x_3=40$, $x_4=30$, $x_5=60$, $x_6=80$, что даёт базисное решение (0; 0; 40; 30; 60; 80), которое мы приняли за исходное. При этом базисном решении значение линейной формы $Z=2x_1+3x_2=0$.

Теперь от этого первоначального решения нужно перейти к другому, при котором значение линейной формы увеличится. Её значение возрастает при увеличении значений переменных x_1 и x_2, поэтому эти переменные невыгодно считать неосновными, т.е. равными нулю, их нужно перевести в число основных. Это и означает переход к новому базисному решению. При симплексном методе на каждом шаге решения предполагается перевод в число основных только одной из свободных переменных. Переведём в число основных переменную x_2, так как она входит в выражение линейной формы с наибольшим коэффициентом.

Как только одна из свободных переменных переходит в число основных, одна из основных должна быть переведена на её место в число неосновных. Значение x_2 необходимо сделать как можно большим, так как это соответствует конечной цели – максимизации Z. Однако увеличения x_2 может продолжаться только до тех пор, пока не нарушится требование неотрицательности переменных. Из второго уравнения системы (1.5) следует, что $x_2 \le 30$ (если $x_2>30$, то $x_4<0$), из третьего уравнения следует, что $x_2 \le 60$, из четвёртого – что $x_2 \le \frac{80}{2}$, т.е. $x_2 \le 40$ (в первое уравнение x_2 не входит). Всем этим условиям удовлетворяет $x_2 \le 30$. Т.е. нужно принять

$$x_2 = \min\left\{\frac{30}{1};\frac{60}{1};\frac{80}{2}\right\} = 30.$$

Тогда x_4=0 и x_4 переходит в число неосновных переменных, а x_3 и x_5 останутся положительными.

II шаг. Основные переменные: x_2, x_3, x_5, x_6, неосновные: x_1, x_4. Выразим основные переменные и линейную форму через неосновные. В системе (1.5) берём то уравнение, из которого получено минимальное значение отношения свободного числа к коэффициенту при x_2 (уравнение подчёркнуто). Выразим из этого уравнения x_2: $x_2=30–x_4$. Подставим это выражение x_2 во все остальные уравнения системы (1.5) и в линейную форму Z, получим

$$\begin{cases} x_2 = 30 - x_4, \\ x_3 = 40 - x_1, \\ x_5 = 30 - x_1 + x_4, \\ \underline{x_6 = 20 - x_1 + 2x_4,} \end{cases} \tag{1.6}$$

$$Z=90+2x_1-3x_4.$$

При $x_1=x_4=0$ имеем $Z=90$. Это уже лучше, чем на I шаге, но не искомый максимум. Дальнейшее увеличение функции Z возможно за счёт введения переменной x_1 в число основных (её увеличение приводит к увеличению линейной формы). Примем $x_1 = \min\left\{\frac{40}{1}; \frac{30}{1}; \frac{20}{1}\right\} = 20$, тогда x_6=0 и x_6 переходит в число неосновных переменных. Первое уравнение не используется при нахождении указанного минимума, т.к. x_1 не входит в это уравнение.

III шаг. Основные переменные: x_1, x_2, x_3, x_5; неосновные: x_4, x_6. Выразим основные переменные и линейную форму через неосновные. Из последнего уравнения системы (оно подчёркнуто) имеем $x_1=20+2x_4-x_6$. Подставляя это выражение в остальные уравнения и в линейную форму, получим

$$\begin{cases} x_1 = 20 + 2x_4 - x_6, \\ x_2 = 30 - x_4, \\ x_3 = 20 - 2x_4 + x_6, \\ \underline{x_5 = 10 - x_4 + x_6,} \end{cases} \tag{1.7}$$

$$Z=130+x_4-2x_6.$$

Из выражения линейной формы следует, что её максимальное значение ещё не получено, т.к. возможно увеличение Z за счёт введения в основные переменной x_4. $x_4 = \min\left\{\frac{30}{1}; \frac{20}{2}; \frac{10}{1}\right\} = 10$.

Переменная x_4 входит в выражение для x_1 (первое уравнение системы (1.7)), но имеет положительный коэффициент и при любом возрастании x_4 переменная x_1 не может стать отрицательной, поэтому при выборе из минимальных значений первое уравнение не рассматриваем.

Также мы получили два одинаковых минимальных значения, равные 10. Если x_4=10, то x_3=0 и x_5=0. В этом случае одну из переменных (x_3 или x_5) оставляют в числе основных, но при этом её значение считают равным нулю, т.е. полученное на следующем шаге базисное решение оказывается вырожденным. Оставим, например, x_3 в числе основных переменных, а x_5 переведём в число неосновных.

<u>IV шаг.</u> Основные переменные: x_1, x_2, x_3, x_4; неосновные: x_5, x_6. Выразим основные переменные и линейную форму Z через неосновные. В итоге получим

$$\begin{cases} x_1 = 40 - 2x_5 + x_6, \\ x_2 = 20 + x_5 - x_6, \\ x_3 = 2x_5 - x_6, \\ x_4 = 10 - x_5 + x_6, \end{cases}$$

$$Z=140-x_5-x_6.$$

Так как в выражение линейной формы переменные x_5 и x_6 входят с отрицательными коэффициентами, то увеличение Z за счёт этих переменных невозможно.

Отсутствие на каком-то шаге симплексного метода в выражении линейной формы Z, максимум которой ищется, неосновных переменных с положительными коэффициентами является критерием оптимальности.

Следовательно, на IV шаге критерий оптимальности достигнут и задача решена. Оптимальным служит решение (40; 20; 0; 10; 0; 0) при котором Z_{max}=140.

В рассмотренном примере первое же полученное базисное решение оказалось допустимым. В других случаях его можно найти не сразу, а через некоторое число шагов.

Нахождение опорного решения

На первом этапе симплексного метода, т.е. при нахождении какого-либо допустимого решения, линейная форме в расчёт не берётся, а все преобразования относятся только к системе ограничений.

Пусть задана каноническая задача линейного программирования. Выбираем группу m основных переменных, которые позволяют найти исходное базисное решение (можем считать, что основными являются первые m переменных). Выразим эти основные переменные через неосновные:

$$\begin{cases} x_1 = k_1 + b_{1\,m+1}x_{m+1} + \ldots + b_{1n}x_n, \\ x_2 = k_2 + b_{2\,m+1}x_{m+1} + \ldots + b_{2n}x_n, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_i = k_i + b_{i\,m+1}x_{m+1} + \ldots + b_{in}x_n, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_m = k_m + b_{m\,m+1}x_{m+1} + \ldots + b_{mn}x_n. \end{cases} \qquad (1.8)$$

Этому способу разбиения переменных соответствует базисное решение ($k_1;k_2;\ldots;k_i;\ldots;k_m;0;0;\ldots;0$). Рассмотрим случай, когда это решение является недопустимым. От полученного базисного решения следует сначала перейти к какому-нибудь опорному решению, причём не обязательно, чтобы этот переход осуществлялся сразу, в один шаг.

Если система ограничений не противоречива, то через конечное число шагов будет осуществлён переход к опорному решению.

Так как исходное базисное решение недопустимо (по предположению), среди свободных членов системы ограничений (1.8) имеется хотя бы один отрицательный (число отрицательных свободных членов этой системы совпадает с числом отрицательных компонент исходного базисного решения). Пусть им является свободный член k_i i-го уравнения, т.е. основная переменная x_i в соответствующем базисном решении отрицательна.

Это уравнение показывает, что переменная x_i возрастает при возрастании тех неосновных переменных, коэффициенты которых в этом уравнении положительны. Следовательно, в основные можно переводить те неосновные переменные, которые в уравнении системы (1.8) с отрицательным свободным членом имеют положительные коэффициенты.

<u>Возможны три случая.</u>

1. В i-м уравнении системы (1.8) нет неосновных переменных с положительными коэффициентами, т.е. все коэффициенты b_{ij} отрицательны (как и свободный член k_i). В этом случае данная система ограничений несовместна – она не имеет ни одного допустимого решения. Действительно, вследствие неотрицательности всех переменных, в том числе $x_{m+1},\ldots,x_n$, из i-го уравнения, в котором свободный член k_i и все коэффициенты $b_{i\,m+1},\ldots,b_{in}$ отрицательны, следует, что переменная x_i не может принимать неотрицательных значений. Значит, нет и оптимального решения.

2. В i-м уравнении имеется одна переменная x_{m+j}, коэффициент при которой положителен. В этом случае именно эта переменная переходит в основные.

3. В i-м уравнении имеется несколько переменных с положительными коэффициентами. В этом случае в основные можно перевести любую из них.

Для того чтобы установить, какая основная переменная должна быть переведена в число неосновных, находят отношения свободных членов к коэффициентам при переменной, переводимой в основные, из всех уравнений, где знаки свободных членов и указанных коэффициентов противоположны, а затем рассматривают абсолютную величину этих отношений и из них выбирают наименьшую (если в некоторых уравнениях знаки свободных членов и коэффициентов совпадают или в каких-то уравнениях переменная, переводимая в основные, отсутствует, то отношение не рассматривают).

Уравнение, из которого получено наименьшее отношение, выделяют. Выделенное уравнение показывает, какая из основных переменных должна быть переведена в неосновные. Выразив новые основные переменные через неосновные, переходят к следующему базисному решению, которое ближе к опорному. Если оно окажется недопустимым, то к нему следует применить ту же схему ещё раз. В результате через конечное число шагов получится опорное решение.

Пример 1.3. Найти опорное решение при заданных ограничениях

$$\begin{cases} -x_1 + 2x_2 \geq 2, \\ x_1 + x_2 \geq 4, \\ x_1 - x_2 \leq 2, \\ x_2 \leq 6, \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0.$$

Вводим добавочные неотрицательные переменные x_3, x_4, x_5, x_6 и сводим данную систему неравенств к эквивалентной ей системе уравнений

$$\begin{cases} -x_1 + 2x_2 - x_3 = 2, \\ x_1 + x_2 - x_4 = 4, \\ x_1 - x_2 + x_5 = 2, \\ x_2 + x_6 = 6, \end{cases}$$

$$x_j \geq 0,\ (j=1,2,\ldots,6).$$

Введённые добавочные переменные принимаем за основные, так как в этом случае базисное решение системы легко находится. Тогда x_1 и x_2 – неосновные переменные.

Описание выше действия по нахождению опорного плана удобно выполнять методом Жордана – Гаусса (табл. 1.1) (т.к. исключение одной переменной из основных и включение в неё другой описанным способом соответствует этому методу).

Данному разбиению переменных соответствует базисное решение (0;0;-2;-4;2;6) (2-ая итерация в таблице), которое является недопустимым (две переменные отрицательны), а поэтому оно не оптимальное. От этого базисного решения перейдём к улучшенному.

Чтобы решить, какую переменную следует перевести из неосновных в основные, рассмотрим любое из двух имеющихся уравнений последней системы с отрицательными свободными членами, например, второе. Оно показывает, что в основные переменные можно перевести x_1 и x_2, так как в этом уравнение они имеют отрицательные коэффициенты (при их увеличении переменная x_4 увеличится x_4=-4+x_1+x_2).

Найдём абсолютную величину наименьшего отношения свободных членов системы к коэффициентам при x_1; имеем $x_1 = \min\left\{\frac{4}{1};\frac{2}{1}\right\} = 2$ (в табл. 1.1 обозначено Δ_1). (Мы писали, что если при нахождении данного отношения знаки свободных членов и коэффициентов совпадают, то оно не рассматривается. В методе Жордана – Гаусса переменные перенесены в одну сторону, поэтому не рассматриваются соответствующие отношения с разными знаками).

Таблица 1.1

Нахождение опорного плана

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	b	Δ_1	Δ_2	
-1	2	-1	0	0	0	2			
1	1	0	-1	0	0	4			
1	-1	0	0	1	0	2			
0	1	0	0	0	1	6			
1	-2	1	0	0	0	-2	-	(1)	
-1	-1	0	1	0	0	-4	4	4	(0;0;-2;-4;2;6)
1	-1	0	0	1	0	2	(2)	-	
0	1	0	0	0	1	6	-	6	
$-\frac{1}{2}$	1	$-\frac{1}{2}$	0	0	0	1	-		
$-\frac{3}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	1	0	0	-3	(2)		
$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	0	1	0	3	6		(0;1;0;-3;3;5)
$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	0	0	1	5	10		
0	1	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	0	0	2			
1	0	$\frac{1}{3}$	$-\frac{2}{3}$	0	0	2			
0	0	$-\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	1	0	2			(2;2;0;0;2;4)
0	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	0	1	4			

Оно получено из третьего уравнения, показывающего, что в неосновные нужно перевести переменную x_5, которая в исходном базисном решении положительна. Следовательно, полученное базисное решение, как и исходное, содержит две отрицательные компоненты, т.е. при переходе к такому базисному решению улучшения не произойдёт.

Если же перевести в основные переменную x_2, то $x_2 = \min\left\{\frac{2}{2};\frac{4}{1};\frac{6}{1}\right\} = 1$ (в табл. 1.1 обозначено Δ_2). Оно получено из первого уравнения, в котором свободный член отрицателен. Следовательно, переводя x_2 в основные, а x_3 в неосновные переменные, получим базисное решение, в котором число отрицательных компонент на единицу меньше, чем в исходном, поэтому основные переменные x_2, x_4, x_5, x_6; неосновные: x_1, x_3. Имеем новое базисное решение (0;1;0;-3;3;5), которое также является недопустимым, а поэтому не оптимальным. Уравнение с отрицательным свободным членом – второе.

Оно показывает, что в основные переменные можно перевести x_1 и x_3. Переведём x_1:

$$x_1 = \min\left\{\frac{3}{\frac{3}{2}}; \frac{3}{\frac{1}{2}}; \frac{5}{\frac{1}{2}}\right\} = 2\,.$$

Значит, в неосновные переменные нужно перевести x_4.

Новое базисное решение имеет вид (2;2;0;0;2;4). Оно является опорным.

Решение задачи симплекс–методом, рассмотренное подробно, удобнее проводить, если условия задачи и первоначальные данные, полученные после определения первого опорного плана записать в симплексную таблицу.

Рассмотрим на примере этой же задачи: найти максимум функции Z=2x_1+3x_2 при ограничениях

$$\begin{cases} x_1 + x_3 = 40, \\ x_2 + x_4 = 30, \\ x_1 + x_2 + x_5 = 60, \\ x_1 + 2x_2 + x_6 = 80. \end{cases}$$

Напомним, что система ограничений может быть записана в векторной форме:

$$\boldsymbol{A}_1 x_1 + \boldsymbol{A}_2 x_2 + \ldots + \boldsymbol{A}_n x_n = \boldsymbol{B}\,,$$

где $\boldsymbol{A}_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}, \boldsymbol{A}_2 = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{pmatrix}, \cdots, \boldsymbol{A}_n = \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix}, \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}.$

Предположим, что система ограничений содержит m единичных векторов. Без ограничения общности можно положить, что единичными являются первые m векторов. В первом столбце записываются базисные векторы, в столбце «С базиса» – коэффициенты целевой функции, соответствующие векторам базиса. В столбце A_0 – первоначальный опорный план X_0, в нём же в результате вычислений получаем оптимальный план, в столбцах A_j (j=1,2,…,n) – коэффициенты разложения j-го вектора по базису ($x_{1j}\boldsymbol{A}_1+x_{2j}\boldsymbol{A}_2+\ldots+x_{mj}\boldsymbol{A}_m=\boldsymbol{A}_j$). Обозначим их X_j. В последней строке в столбце A_0 – значение целевой функции $Z(X_0)$, которое она принимает при найденном опорном плане, а в столбцах A_j – значения оценок $Z_j - C_j$.

Функции $Z(X_0)$ и $Z_j=Z(X_j)$ находим, подставляя в линейную функцию соответственно компоненты опорного плана и коэффициенты разложения j-го вектора по векторам базиса, поэтому эти значения можно получить как скалярное произведение: $Z(X_0) = C_б \cdot X_0 = \sum_{i=1}^{m} C_i x_i$, $Z_j = C_б \cdot X_j = \sum_{i=1}^{m} C_i x_{ij}$, $j=1,2,...,n$, где C_i – коэффициенты линейной функции, соответствующие векторам базиса.

В данной задаче

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, A_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, A_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, A_5 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, A_6 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 40 \\ 30 \\ 60 \\ 80 \end{pmatrix}$$

Единичные векторы A_3, A_4, A_5, A_6 образуют базис.

$Z=2x_1+3x_2$ или $Z-2x_1-3x_2=0$ (табл. 1.2).

Таблица 1.2

Симплекс-таблица

Базис	С базиса	A_0	$C_1=2$	$C_2=3$	$C_3=0$	$C_4=0$	$C_5=0$	$C_6=0$	Δi
			A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	
A_3	0	40	1	0	1	0	0	0	-
A_4	0	30	0	1	0	1	0	0	(30)
A_5	0	60	1	1	0	0	1	0	60
A_6	0	80	1	2	0	0	0	1	40
Z_j-C_j		0	-2	(-3)	0	0	0	0	
A_3	0	40	1	0	1	0	0	0	40
A_2	3	30	0	1	0	1	0	0	-
A_5	0	30	1	0	0	-1	1	0	30
A_6	0	20	1	0	0	-2	0	1	(20)
Z_j-C_j		90	(-2)	0	0	3	0	0	
A_3	0	20	0	0	1	2	0	-1	10
A_2	3	30	0	1	0	1	0	0	30
A_5	0	10	0	0	0	1	1	-1	10
A_1	2	20	1	0	0	-2	0	1	-
Z_j-C_j		130	0	0	0	(-1)	0	2	
A_3	0	0	0	0	1	0	-2	1	
A_2	3	20	0	1	0	0	-1	1	
A_5	0	10	0	0	0	1	1	-1	
A_1	2	40	1	0	0	0	2	-1	
Z_j-C_j		140	0	0	0	0	1	1	

$Z_{max}=140$

Критерием оптимальности в задаче на максимум будет выполнение условия $Z_j–C_j≥0$ ($j=1, 2, ..., n$).

Переменная x_2 входит в выражение линейной формы с наибольшим коэффициентом, поэтому выбирается наибольшая по абсолютной величине отрицательная оценка в последней строке. Этим определяется тот вектор, который должен перейти в базис. В примере это вектор A_2, поэтому находим $\Delta_2 = \min\limits_i \left\{ \dfrac{b_i}{a_{i2}} \right\}$ для всех i, для которых $a_{i2}>0$ (последний столбец таблицы). В нашем случае это $30 = \dfrac{b_2}{a_{22}}$. Это означает, что вектор A_4, находящийся во второй строке, переходит в число небазисных.

Столбец, показывающий, какой вектор должен перейти в базис, называется *направляющим столбцом*. Строка, показывающая, какой вектор должен перейти в небазисные, называется *направляющей строкой*. Элемент, стоящий на пересечении направляющей строки и направляющего столбца, называется *разрешающим*.

Сделаем вектор A_2 базисным единичным, так чтобы единица стояла на месте разрешающего элемента. Это можно сделать методом Жордана – Гаусса. Получим вторую часть симплекс–таблицы, в последней строке которой один отрицательный элемент, показывающий, что вектор A_1 должен перейти в базисные.

$$\Delta_1 = \min_i \left\{ \frac{b_i}{a_{i1}} \right\} = min\{40;30;20\} = 20,$$

т.е. вектор A_6 должен быть переведён в небазисные. Процесс продолжается до тех пор, пока не будет достигнут критерий оптимальности. В нашем случае он заканчивается на четвёртой части симплекс-таблицы.

Пример 1.4. Найти минимальное значение функции $Z=x_1-x_2-3x_3$ при ограничениях

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 \le 1, \\ 4x_1 - 2x_2 + x_3 \ge -2, \\ 3x_1 + x_3 \le 5, \end{cases}$$

$$x_1\ge0,\ x_2\ge0,\ x_3\ge0.$$

Сведём задачу к канонической.

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = 1, \\ -4x_1 + 2x_2 - x_3 + x_5 = 2, \\ 3x_1 + x_3 + x_6 = 5, \end{cases}$$

$$x_1\ge0,\ x_2\ge0,\ x_3\ge0.$$

$$A_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, A_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, A_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, A_5 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, A_6 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Единичные векторы A_4, A_5, A_6 выберем за базис. Получим опорный план (0;0;0;1;2;5). Составим симплекс–таблицу (табл. 1.3). *Критерием оптимальности задачи на минимум является выполнение условия* Z_j-C_j≤0 (j=1, 2, ..., n) (т.к. минимизация целевой функции Z равносильна максимизации целевой функции -Z, Z(X)→max⇔-Z(X)→min). В остальном симплексный процесс аналогичен процессу отыскания максимального значения целевой функции.

Таблица 1.3

Симплекс-таблица

Базис	С базиса	A_0	C_1=1	C_2=-1	C_3=-3	C_4=0	C_5=0	C_6=0	Δi
			A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	
A_4	0	1	2	-1	1	1	0	0	(1)
A_5	0	2	-4	2	-1	0	1	0	-
A_6	0	5	3	0	1	0	0	1	5
Z_j-C_j		0	-1	1	(3)	0	0	0	
A_3	-3	1	2	-1	1	1	0	0	-
A_5	0	3	-2	1	0	1	1	0	(3)
A_6	0	4	1	1	0	-1	0	1	4
Z_j-C_j		-3	-7	(4)	0	-3	0	0	
A_3	-3	4	0	0	1	2	1	0	-
A_2	-1	3	-2	1	0	1	1	0	-
A_6	0	1	3	0	0	-2	-1	1	1/3
Z_j-C_j		-15	(1)	0	0	-7	-4	0	
A_3	-3	4	0	0	1	2	1	0	
A_2	-1	11/3	0	1	0	-1/3	1/3	2/3	
A_1	1	1/3	1	0	0	-2/3	-1/3	1/3	
Z_j-C_j		$-\frac{46}{3}$	0	0	0	$-\frac{19}{3}$	$-\frac{11}{3}$	$-\frac{1}{3}$	

$Z_{\min} = -\frac{46}{3}$. Оптимальный план $\left(\frac{1}{3};\frac{11}{3};4\right)$.

Пример 1.5. Найти максимум функции $Z=x_1+x_2$ при ограничениях

$$\begin{cases} -2x_1 + 3x_2 \le 12, \\ 3x_1 - 5x_2 \le 3, \end{cases}$$

$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0.$$

Каноническая задача имеет вид:

$$\begin{cases} -2x_1 + 3x_2 + x_3 = 12, \\ 3x_1 - 5x_2 + x_4 = 3, \end{cases}$$

$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0.$$

Составим симплекс–таблицу (табл. 1.4).

Таблица 1.4

Симплекс-таблица

Базис	С базиса	A_0	$C_1=1$	$C_2=1$	$C_3=0$	$C_4=0$	Δi
			A_1	A_2	A_3	A_4	
A_3	0	12	-2	3	1	0	(4)
A_4	0	3	3	-5	0	1	-
Z_j-C_j		0	-1	(-1)	0	0	
A_2	1	4	-2/3	1	1/3	0	
A_4	0	23	$-\frac{1}{3}$	0	$\frac{5}{3}$	1	
Z_j-C_j		4	$(-\frac{5}{3})$	0	$\frac{1}{3}$	0	

Из оценки Z_j-C_j следует, что вектор A_1 следует перевести в базисные, но так как все числа в этом столбце отрицательные, заключаем, что переменная x_1 может возрастать неограниченно. Значит, и функция Z, максимум который требуется найти, также может неограниченно возрастать. Поэтому $Z_{max}=\infty$ (в примере 1.2 п. 4 дано графическое решение этого примера).

Пример 1.6. Найти максимум функции $Z=x_1$-x_2 при ограничениях

$$\begin{cases} -2x_1+3x_2\geq 12, \\ x_1+x_2\leq 9, \\ 3x_1-5x_2\geq 3, \end{cases}$$

$$x_1\geq 0,\ x_2\geq 0.$$

Сведём задачу к канонической:

$$\begin{cases} -2x_1+3x_2-x_3=12, \\ x_1+x_2+x_4=9, \\ 3x_1-5x_2-x_5=3, \end{cases}$$

$$x_1\geq 0,\ x_2\geq 0.$$

Соответствующее базисное решение (0;0;-12;9;-3) недопустимое. Воспользуемся симплекс–методом для нахождения опорного решения (табл. 1.5).

Вектор A_1 перевели в базисный, в первой строке все коэффициенты, кроме свободного члена, положительны. Это является признаком того, что система несовместна ($x_3=-14-\frac{1}{3}x_2-\frac{2}{3}x_5$; в примере 1.3 п. 4 дано графическое решение).

Таблица 1.5

Симплекс-метод для нахождения опорного решения

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	b	Δ_1
-2	3	-1	0	0	0	12	
1	1	0	1	0	0	9	
3	-5	0	0	-1	0	3	
2	-3	1	0	0	0	-12	-
1	1	0	1	0	0	9	9
-3	5	0	0	1	0	-3	(1)
0	$\frac{1}{3}$	1	0	$\frac{2}{3}$	0	-14	
0	$\frac{8}{3}$	0	1	$\frac{1}{3}$	0	8	
1	$-\frac{5}{3}$	0	0	$-\frac{1}{3}$	0	1	

Пример 1.7. Найти максимум функции $Z=x_1-x_2$ при ограничениях

$$\begin{cases} -2x_1+3x_2\le 12, \\ x_1+x_2\le 9, \\ x_1-x_2\le 3, \end{cases}$$

$$x_1\ge 0,\ x_2\ge 0$$

Каноническая задача примет вид

$$\begin{cases} -2x_1+3x_2+x_3=12, \\ x_1+x_2+x_4=9, \\ x_1-x_2+x_5=3, \end{cases}$$

$$x_1\ge 0,\ x_2\ge 0$$

Составим симплекс–таблицу (табл. 1.6).

Таблица 1.6

Симплекс-таблица

Базис	С базиса	A_0	$C_1=1$	$C_2=-1$	$C_3=0$	$C_4=0$	$C_5=0$	Δi
			A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	
A_3	0	12	-2	3	1	0	0	-
A_4	0	9	1	1	0	1	0	9
A_5	0	3	1	-1	0	0	1	(3)
Z_j-C_j		0	(-1)	1	0	0	0	
A_3	0	18	0	1	1	0	2	18
A_4	0	6	0	2	0	1	-1	(3)
A_1	1	3	1	-1	0	0	1	-
Z_j-C_j		3	0	0	0	0	1	

В предыдущих примерах нулевыми являлись только оценки, соответствующие базисным векторам, и тогда оптимальное решение было единственным. В этом случае нулевая оценка соответствует также небазисному вектору A_2. Попробуем перевести A_2 в базис (продолжение табл. 1.6).

Продолжение табл 1.6

Базис	С базиса	A_0	$C_1=1$	$C_2=-1$	$C_3=0$	$C_4=0$	$C_5=0$	Δi
			A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	
A_3	0	15	0	0	1	-1/2	5/2	
A_2	-1	3	0	1	0	1/2	-1/2	
A_1	0	6	1	0	0	1/2	1/2	
Z_j-C_j		3	0	0	0	0	1	

На втором шаге оптимальное решение имело компоненты (3;0;18;6;0), на третьем – (6;3;15;0;0). Однако оба оптимальных решения дают одно и то же максимальное значение $Z_{\max}=3$. Следовательно, единственность оптимального решения может нарушаться. Это происходит в том случае, когда нулевая оценка соответствует не только базисному вектору (графическое решение дано в примере 1.5 п. 4).

Алгоритм симплексного метода

1. В системе ограничений (уравнений или неравенств) переносят свободные члены в правые части. Если среди этих свободных членов окажутся отрицательные, то соответствующее уравнение или неравенство умножают на –1.

2. Если система ограничений задана системой неравенств, то вводят добавочные неотрицательные переменные и тем самым сводят систему неравенств к эквивалентной системе уравнений, т.е. сводят задачу к канонической.

3. От данной или полученной после выполнения п. 2 системы уравнений с п переменными (т<п) переходят к системе ограничений в векторной форме и выбирают т базисных векторов. Проще всего за базисные взять векторы, компоненты которых являются коэффициентами при добавочных переменных. Находят соответствующее базисное решение, придавая небазисным векторам нулевые значения.

Если найденное базисное решение окажется опорным, то переходят к п.5, если оно окажется недопустимым, то предварительно выполняют п. 4.

4. От полученного недопустимого базисного решения переходят к опорному или устанавливают, что система ограничений данной задачи противоречива.

5. Получив опорное решение, приводят базисные векторы к единичным и переходят к симплекс–таблице (табл. 1.7).

Таблица 1.7

Симплекс-таблица

Базис	С базиса	A_0	C_1	C_2	…	C_n	Δi
			A_1	A_2	…	A_n	
Z_j-C_j							

Если отыскивается максимум (минимум) целевой функции и среди оценок Z_j-C_j, j=1,2,…,n (последняя строка), нет отрицательных (положительных) чисел, то критерий оптимальности выполнен и полученное опорное решение служит оптимальным, т.е. решение окончено.

6. Если при нахождении максимума (минимума) целевой функции среди оценок имеется одна или несколько отрицательных (положительных), то переходят к новому опорному решению. Из отрицательных (положительных) оценок выбирают наибольшую по абсолютной величине (наибольшую). Тем самым выбран направляющий столбец, например j.

7. В направляющем столбце находят отношения $\frac{b_i}{a_{ij}}$ для всех i, для которых $a_{ij}>0$, и выбирают наименьшее. Выбрана направляющая строка.

8. Выбирают разрешающий элемент и проводят преобразования Жордана – Гаусса.

9. Повторяют п.6-8 до тех пор, пока не будет достигнут критерий оптимальности (п. 5). Записывают оптимум целевой функции.

10. Если критерий оптимальности выполнен, а среди оценок нулевые соответствуют не только базисным вектором, то полученное оптимальное решение не единственное.

11. Если среди оценок имеются отрицательные в случае максимизации (положительные – в случае минимизации), а все числа этого столбца отрицательные или нулевые, то целевая функция не ограничена, т.е. $Z_{\max}=\infty$ ($Z_{min}=-\infty$).

Метод искусственного базиса

Во многие задачах линейного программирования получение опорного плана описанным выше способом является затруднительным. В этом случае для решения задач применяется метод искусственного базиса.

Пусть требуется найти максимум (минимум) функции $Z=c_1x_1+c_2x_2+\ldots+c_nx_n$ при ограничениях ($m<n$)

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m, \end{cases}$$

$x_j \geq 0$ (j=1,2,...,n) и среди векторов

$$A_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{pmatrix}, \cdots, A_n = \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix}$$ нет m единичных.

Задача, состоящая в определении максимального (минимального) значения

$$Z=c_1x_1+c_2x_2+\ldots+c_nx_n-Mx_{n+1}-\ldots-Mx_{n+m}$$
$$(Z=c_1x_1+c_2x_2+\ldots+c_nx_n+Mx_{n+1}+\ldots+Mx_{n+m})$$

при условиях

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n+x_{n+1}=b_1, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n+x_{n+2}=b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n+x_{n+m}=b_m, \end{cases}$$
$$x_j \geq 0\ (j=1,2,\ldots,n+m),$$

где M – некоторое достаточно большое положительное число, конкретное значение которого обычно не задаётся, называется расширенной по отношению к исходной. Расширенная задача имеет опорный план $(0;0;\ldots;0;\ b_1;b_2;\ldots;b_m)$, определяемый единичными векторами A_{n+1}, A_{n+2}, ..., A_{n+m}, образующими базис. Этот базис называется искусственным, как и переменные x_{n+i} ($i=1, 2, \ldots, m$). Так как расширенная задача имеет опорный план, её решение может быть найдено симплекс-методом.

Теорема. Если в оптимальном плане $(x_1;x_2;\ldots;x_n;0;\ldots;0)$ расширенной задачи искусственные переменные $x_{n+i}=0$ ($i=1, 2, \ldots, m$), то план $(x_1;x_2;\ldots;x_m)$ является оптимальным планом исходной задачи.

Применение симплексного метода к расширенной задаче обеспечивает построение плана, в котором каждая из искусственных переменных $x_{n+i}=0$. Если первоначальная задача не обладает планами (т.е. она несовместна), то оптимальное решение расширенной задачи содержит по крайне мере одно $x_{n+i}>0$.

Пример 1.8. Найти максимальное значение функции $Z=5x_1+3x_2+4x_3-x_4$ при ограничениях

$$\begin{cases} x_1+3x_2+2x_3+2x_4=3, \\ 2x_1+2x_2+x_3+x_4=3, \end{cases}$$
$$x_j \geq 0\ (j=1,2,3,4).$$

Решим задачу методом искусственного базиса.

$$Z=5x_1+3x_2+4x_3-x_4-Mx_5-Mx_6,$$
$$\begin{cases} x_1+3x_2+2x_3+2x_4+x_5=3, \\ 2x_1+2x_2+x_3+x_4+x_6=3, \end{cases}$$
$$x_j \geq 0\ (j=1,2,\ldots,6).$$

Выберем за базис единичные векторы A_5 и A_6, который является искусственным. Составим симплекс–таблицу, содержащую на одну строку больше (табл. 1.8). Для удобства процесса в $(m+1)$-ю строку записываем слагаемое, независимое от M, а в $(m+2)$-ю – только коэффициенты при М. В (m+2)-й строке имеются отрицательные оценки, поэтому опорный план расширенной задачи не является оптимальным, и его можно улучшить. В силу выбора величины *M* векторы A_5 и A_6 уже не могут попасть в базис, поэтому в последующих шагах симплекс–таблицы их можно исключить.

Таблица 1.8

Симплекс-таблица

Базис	С базиса	A_0	C_1=5	C_2=3	C_3=4	C_4=-1	C_5=-M	C_6=-M	Δi
			A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	
A_5	-M	3	1	3	2	2	1	0	(1)
A_6	-M	3	2	2	1	1	0	1	3/2
Z_j-C_j		0	-5	-3	-4	1	0	0	
		-6	-3	(-5)	-3	-3	0	0	
A_2	3	1	1/3	1	2/3	2/3	1/3	0	3
A_6	-M	1	4/3	0	-1/3	-1/3	-2/3	1	(3/4)
Z_j-C_j		3	-4	0	-2	3	1	0	
		-1	(-4/3)	0	1/3	1/3	5/3	0	
A_2	3	3/4	0	1	3/4	3/4	1/2	-1/4	(1)
A_1	5	3/4	1	0	-1/4	-1/4	-1/2	3/4	-
Z_j-C_j		6	0	0	(-3)	2	-1	3	
		0	0	0	0	0	1	1	
A_3	4	1	0	4/3	1	1	2/3	-1/3	
A_1	5	1	1	1/3	0	0	-1/3	2/3	
Z_j-C_j		9	0	4	0	5	1	2	
		0	0	0	0	0	1	1	

После третьего шага (m+2)-ю строку можно исключить, а дальнейший процесс проводить по (m+1)-й строке. На четвёртом шаге находим оптимальный план (1;0;1;0) и Z_{max}=9.

Если в системе ограничений, заданной в векторной форме, среди векторов A_1, A_2, ..., A_n есть $k<m$ единичных базисных векторов, то в этом случае нужно ввести $m–k$ искусственных переменных.

2. Решение транспортной задачи

Транспортные модели (задачи) – специальный класс задач линейного программирования. Эти модели часто описывают перемещение (перевозку) какого-либо товара из пункта отправления (исходный пункт, например место производства) в пункт назначения (склад, магазин, грузохранилище). Назначение транспортной задачи – определить объем перевозок из пунктов отправления в пункты назначения с минимальной суммарной стоимостью перевозок. При этом должны учитываться ограничения, налагаемые на объемы грузов, имеющихся в пунктах отправления (предложения), и ограничения, учитывающие потребность грузов в пунктах назначения (спрос). В транспортной модели предполагается, что стоимость перевозки по какому-либо маршруту прямо пропорциональна объему груза, перевозимого по этому маршруту.

В общем случае транспортную модель можно применять для описания ситуаций, связанных с управлением запасами, управлением движением капиталов, составлением расписаний, назначением персонала и др.

Хотя транспортная задача может быть решена как обычная задача линейного программирования, ее специальная структура позволяет разработать алгоритм с упрощенными вычислениями, основанный на симплексных отношениях двойственности.

На рис. 2.1 показано общее представление транспортной задачи в виде сети с m пунктами отправления и n пунктами назначения, которые показаны в виде **узлов** сети. **Дуги**, соединяющие узлы сети, соответствуют маршрутам, связывающим пункты отправления и назначения. С дугой (i, j) соединяющей пункт отправления *i* с пунктом назначения *j*, соотносятся два вида данных: стоимость c_{ij} перевозки единицы груза из пункта *i* в пункт *j* и количество перевозимого груза x_{ij}. Объем грузов в пункте отправления *i* равен a_i, а объем грузов в пункте назначения $j - b_j$. Задача состоит в определении неизвестных величин x_{ij}, минимизирующих суммарные транспортные расходы и удовлетворяющих ограничениям, налагаемым на объемы грузов в пунктах отправления (предложения) и пунктах назначения (спрос).

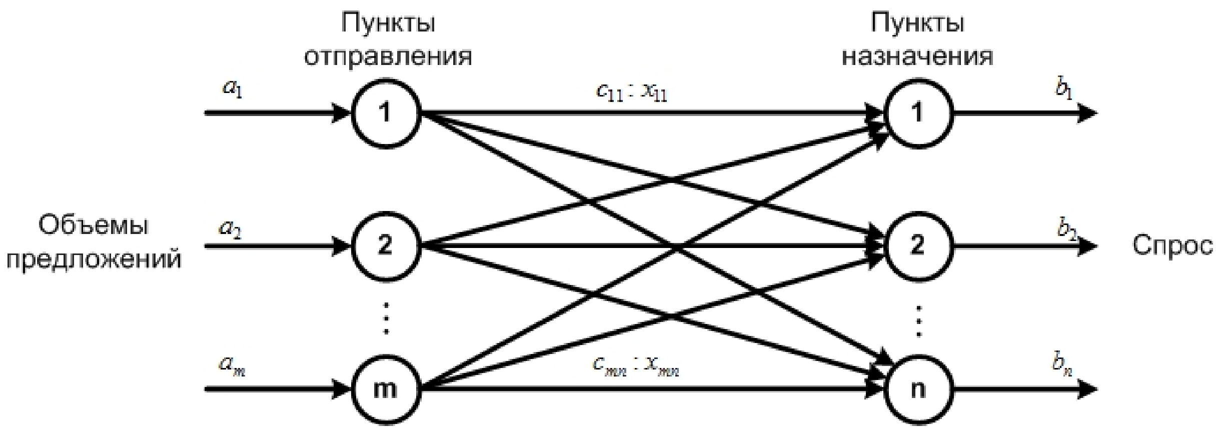

Рис. 2.1. Представление транспортной задачи

Математическая модель транспортной задачи

Простейшими транспортными задачами являются задачи о перевозках некоторого однородного груза из пунктов отправления (от поставщиков) в пункты назначения (к потребителям) при обеспечении минимальных затрат на перевозки. Под однородными грузами понимаются грузы, которые могут быть перевезены одним и тем же составом.

Обычно начальные условия таких задач записывают в таблицу. Например, для m поставщиков и n потребителей такая таблица имеет следующий вид (табл. 2.1), где показатели C_{ij} – стоимость перевозки единицы груза от каждого *i*-го поставщика ($i = 1, 2, \ldots, m$) каждому *j*-му потребителю

($j=1,2,\ldots,n$); a_i – мощность (запасы) i-го поставщика в планируемый период; b_j – спрос j-го потребителя на этот же период.

Таблица 2.1

Начальные условия

a_i \ b_j	b_1	b_2	...	b_n
a_1	C_{11}	C_{12}	...	C_{1n}
a_2	C_{21}	C_{22}	...	C_{2n}
...	...	...	...	...
a_m	C_{m1}	C_{m2}	...	C_{mn}

Обозначим через x_{ij} поставку (объем груза), которая планируется к перевозке от i-го поставщика к j-му потребителю.

Математическая модель транспортной задачи имеет вид

$$Z(x)=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}C_{ij}x_{ij}\to\min$$

при ограничениях

$$\begin{cases}\sum\limits_{j=1}^{n}x_{ij}=a_i,\ i=1,2,\ldots,m,\\ \sum\limits_{i=1}^{m}x_{ij}=b_j,\ j=1,2,\ldots,n,\end{cases}\tag{2.1}$$

$$x_{ij}\ge 0,\ i=1,2,\ldots,m,\ \ j=1,2,\ldots,n.$$

Первая группа из m уравнений описывает тот факт, что запасы всех m поставщиков вывозятся полностью. Вторая группа из n уравнений выражает требование полностью удовлетворить запросы всех n потребителей.

Если к ограничениям (2.1) добавить еще одно:

$$\sum_{i=1}^{m}a_i=\sum_{j=1}^{n}b_j,\tag{2.2}$$

т.е. суммарная мощность поставщиков равна суммарному спросу потребителей, то такая задача называется ***задачей с правильным балансом***, а ее модель – ***закрытой***. Задача, в которой ограничение (2.2) отсутствует, т.е.

$$\sum_{i=1}^{m}a_i\ne\sum_{j=1}^{n}b_j,$$

называется задачей с ***неправильным балансом***, а ее модель – ***открытой***.

Число переменных x_{ij}, входящих в целевую функцию и в систему уравнений (2.1), равно $m \cdot n$, т.е. числу клеток таблицы. Система ограничений (2.1) есть система из $m + n$ уравнений с $m \cdot n$ переменными.

Любое решение транспортной задачи $(x_{11}, x_{12}, \dots, x_{mn})$ называется ***распределением поставок***. Оно может быть записано и в виде матрицы:

$$\begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & \dots & x_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_{m1} & x_{m2} & \dots & x_{mn} \end{pmatrix}.$$

Так как поставки не могут быть отрицательными, то речь может идти только о допустимых решениях.

Теорема. *Любая транспортная задача, у которой суммарная мощность поставщиков равна суммарному спору потребителей, имеет решение.*

Доказательство. Пусть

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j = M > 0,$$

тогда величины $x_{ij} = \dfrac{a_i b_j}{M}$ $\left(i = 1,2,...,m,\ j = 1,2,...,n\right)$ являются планом, так как они удовлетворяют системе ограничений (2.1). Действительно, подставляя значения x_{ij} в (2.1), находим

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = \sum_{j=1}^{n} \frac{a_i b_j}{M} = \frac{a_i}{M} \sum_{j=1}^{n} b_j = \frac{a_i}{M} \cdot M = a_i,$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = \sum_{i=1}^{m} \frac{a_i b_j}{M} = \frac{b_j}{M} \sum_{i=1}^{m} a_i = \frac{b_j}{M} \cdot M = b_j.$$

Выберем из значений C_{ij} наибольшее $C' = \max C_{ij}$ и заменим в целевой функции $Z(X)$ все коэффициенты на C'. Учитывая, что $\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i$, получим

$$Z(X) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} C_{ij} x_{ij} \le C' \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = C' \sum_{i=1}^{m} a_i = C'M.$$

Выберем из значений C_{ij} наименьшее $C'' = \min C_{ij}$ и заменим в целевой функции $Z(X)$ все коэффициенты на C''. Учитывая, что $\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = a_i$, получим

$$Z(X) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} C_{ij} x_{ij} \ge C'' \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = C'' \sum_{i=1}^{m} a_i = C''M.$$

Объединяя два последних неравенства в одно двойное, окончательно получаем

$$C''M \le Z \le C'M ,$$

т.е. линейная функция ограничена на множестве планов транспортной задачи и существует хотя бы один план задачи. Тем самым теорема доказана.

2.1. Нахождение начального базисного решения

Как и для других задач линейного программирования, итерационный процесс по отысканию оптимального плана транспортной задачи начинают с опорного плана.

Рассмотрим задачи, которые имеют закрытую модель. Если сложить все m первых уравнений, относящихся к поставщикам, и все n уравнений, относящихся к потребителям, и учесть, что $\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j$, то получим полное совпадение левых и правых частей составленных таких образом сумм. Это свидетельствует о том, что система (2.1) в закрытых моделях линейно зависима. Если же из системы исключить одно (безразлично какое) уравнение, то она становится линейно независимой.

Таким образом, если каким-либо способом получен невырожденный опорный план транспортной задачи, то в матрице (x_{ij}) ($i = 1, 2, ..., m$; $j = 1, 2, ..., n$) значений его компонент (табл. 2.2) положительными являются только $m + n - 1$, а остальные равны нулю.

Таблица 2.2

Опорный план

b_j / a_i	b_1	b_2	…	b_n
a_1	C_{11} $\mathbf{x_{11}}$	C_{12} $\mathbf{x_{12}}$	…	C_{1n} $\mathbf{x_{1n}}$
a_2	C_{21} $\mathbf{x_{21}}$	C_{22} $\mathbf{x_{22}}$	…	C_{2n} $\mathbf{x_{2n}}$
…	…	…	…	…
a_m	C_{m1} $\mathbf{x_{m1}}$	C_{m2} $\mathbf{x_{m2}}$	…	C_{mn} $\mathbf{x_{mn}}$

Если условия транспортной задачи и ее опорный план записаны в виде табл. 2.2, то клетки, в которых находятся отличные от нуля перевозки, называются ***занятыми***, остальные – ***незанятыми***. Занятые клетки соответствуют базисным неизвестным, и для невырожденного опорного плана их количество равно $m + n - 1$.

Циклом называется такая последовательность клеток таблицы транспортной задачи $(i_1.j_1)$, $(i_1.j_2)$, $(i_2.j_2)$, …, $(i_m.j_1)$, в которой две и только две соседние клетки расположены в одном столбце или строке таблицы, причем последняя клетка находится в той же строке или столбце, что и первая.

Опорность плана при записи условий транспортной задачи в виде табл. 2.2 заключается в его ацикличности, т.е. в таблице нельзя построить замкнутый цикл, все вершины которого лежат в занятых клетках. Построение циклов начинают с какой-либо занятой клетки и переходят по столбцу (строке) к следующей занятой клетке. Если такой возврат возможен, то получен цикл и план не является опорным. Клетки, в которых происходит поворот под прямым углом, определяют вершины цикла. В противном случае план является опорным.

Всякий план транспортной задачи, содержащий более $m+n-1$ занятых клеток, не является опорным, так как ему соответствует линейно зависимая система векторов. При таком плане в таблице всегда можно построить замкнутый цикл, с помощью которого уменьшают число занятых клеток до $m+n-1$.

Если к занятым клеткам, определяющим опорный невырожденный план, следовательно и ацикличный, присоединить какую-либо незанятую клетку, то план становится неопорным, появляется единственный цикл, все вершины которого, за исключением одной, лежат в занятиях клетках.

Существует несколько простых схем построения первоначального опорного плана транспортной задачи. Рассмотрим их на примерах.

а) Метод северо-западного угла

Согласно данному методу запасы очередного поставщика используются для обеспечения запросов очередных потребителей до тех пор, пока не будут исчерпаны полностью, после чего используются запасы следующего по номеру поставщика.

Заполнение таблицы начинается с клетки (1.1) – северо-западного угла. В нее заносится меньшее из чисел a_1 и b_1, т.е. $x_{11}=\min\{a_1;b_1\}$.

Если $a_1>b_1$ $(a_1<b_1)$, то $x_{11}=b_{11}$ $(x_{11}=a_1)$ и первый столбец «закрыт» (первая строка «закрыта»), т.е. потребности первого потребителя удовлетворены полностью (предложение первого поставщика полностью исчерпано). Двигаемся далее по первой строке (по первому столбцу), записывая в соседнюю клетку (1.2) (или (2.1)) меньшее из чисел a_1-b_1 и b_2 (или b_1-a_1 и a_2), т.е. $x_{12}=\min\{a_1-b_1;b_2\}$ (или $x_{21}=\min\{b_1-a_1;a_2\}$).

Процесс продолжается до тех пор, пока на каком-то шаге не исчерпываются ресурсы a_m и потребности b_n.

Пример 1. Пусть условия транспортной задачи заданы в табл. 2.3.

Таблица 2.3

Исходные данные

a_i \ b_j	200	250	120	130	200
100	10	7	2	5	5
300	4	9	8	1	3
180	5	12	16	8	7
320	7	4	6	3	11

Данная задача является задачей с правильным балансом, поскольку суммарные объемы ресурсов и потребностей равны:

$$200+250+120+130+200=100+300+180+320.$$

В первую клетку записываем $x_{11}=\min\{100;200\}=100$, первая строка закрыта (табл. 2.4).

Таблица 2.4

Решение задачи

a_i \ b_j	200	250	120	130	200
100	10 **100**	7	2	5	5
300	4 **100**	9 **200**	8	1	3
180	5	12 **50**	16 **120**	8 **10**	7
320	7	4	6	3 **120**	11 **200**

Переходим к клетке (2.1): $x_{21}=\min\{200-100;300\}=100$, первый столбец закрыт. Далее переходим к клетке (2.2): $x_{22}=\min\{300-100;\ 250\}=200$, вторая строка закрыта. Переходим к клетке (3.2): $x_{32}=\min\{250-200;180\}=50$, второй столбец закрыт. Переходим к клетке (3.3): $x_{33}=\min\{180-50;120\}=120$, закрыт третий столбец; $x_{34}=\min\{180-50-120;130\}=10$, третья строка закрыта; $x_{44}=\min\{200;\ 320-120\}=200$. Таблица заполнена.

Проверим, является ли план, построенный в табл. 2.4, опорным. Если начать движение от занятой клетки (1.1), вернуться не только в нее, но и в любую другую занятую клетку, двигаясь только по занятым клеткам, невозможно. Следовательно, план является опорным. Он также является и невырожденным, так как содержит точно $m+n-1=4+5-1=8$ занятых клеток. План имеет вид

$$X_1 = \begin{pmatrix} 100 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 100 & 200 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 50 & 120 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 120 & 200 \end{pmatrix}.$$

При составлении первоначального опорного плана методом северо-западного угла стоимость перевозки единицы груза не учитывалась, поэтому построенный план не является оптимальным.

Стоимость перевозок по этому плану равна

$$Z(X_1) = 100\cdot 10 + 100\cdot 4 + 200\cdot 9 + 50\cdot 12 + 120\cdot 16 +$$

$$+10\cdot 8 + 120\cdot 3 + 200\cdot 11 = 8360\,.$$

б) Метод минимальной стоимости

Суть метода минимальной стоимости заключается в том, что из всей таблицы стоимостей выбирают наименьшую и в клетку, которая ей соответствует, помещают меньшее из чисел a_i или b_j (если таких клеток несколько, то выбирают любую из них). Затем из рассмотрения исключают либо строку, соответствующую поставщику, запасы которого полностью израсходованы, либо столбец, соответствующий потребителю, потребности которого полностью удовлетворены, либо строку и столбец, если израсходованы запасы поставщика и удовлетворены потребности потребителя. Из оставшейся части таблицы снова выбирают наименьшую стоимость, и процесс распределения запасов продолжают, пока все запасы не будут распределены, а потребности удовлетворены.

Пример 2. Определить опорный план по методу минимальной стоимости для транспортной задачи из примера 1 (табл. 2.5).

Таблица 2.5

Опорный план

a_i \ b_j	200	250	120	130	200
100	10	7	2 **100**	5	5
300	4	9	8	1 **130**	3 **170**
180	5 **180**	12	16	8	7
320	7 **20**	4 **250**	6 **20**	3	11 **30**

Минимальная стоимость $C_{24}=1$ (табл. 2.5), $x_{24}=\min\{130;300\}=130$. Исключаем из рассмотрения четвертый столбец (он закрыт). Для оставшихся клеток минимальная стоимость $C_{13}=2$, $x_{13}=\min\{100;120\}=100$, первая строка закрыта. В оставшейся таблице минимальная стоимость $C_{25}=3$, $x_{25}=\min\{300-130;200\}=170$, вторая строка закрыта. Для оставшихся клеток минимальная стоимость $C_{42}=4$, $x_{42}=\min\{320;250\}=250$, второй столбец закрыт. Теперь минимальным элементом является $C_{13}=5$, $x_{13}=\min\{180;200\}=180$, четвертая строка закрыта. В оставшейся части таблицы минимальная стоимость $C_{53}=6$, $x_{53}=\min\{320-250;\ 120-100\}=20$, третий столбец закрыт. Далее минимальная стоимость $C_{51}=7$, $x_{51}=\min\{320-250-20;200-180\}=20$, первый столбец закрыт. Для оставшейся клетки $x_{54}=\min\{320-20-250-20;200-170\}=30$. План не содержит циклов и является невырожденным (8 занятых клеток). Он имеет вид

$$X_2=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 100 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 130 & 170 \\ 180 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 20 & 250 & 20 & 0 & 30 \end{pmatrix}.$$

Стоимость перевозок по этому плану

$$Z(X_2)=100\cdot 2+130\cdot 1+170\cdot 3+180\cdot 5+20\cdot 7+250\cdot 4+20\cdot 6+30\cdot 11=3330$$

значительно меньше, поэтому он ближе к оптимальному.

в) Метод Фогеля

При определении опорного плана транспортной задачи методом Фогеля на каждой итерации по всем столбцам и по всем строкам находят разность между двумя записанными в них минимальными тарифами (под тарифом понимается стоимость перевозки единицы груза). Эти разности записывают в специально отведенных для этого строке и столбце. Среди указанных разностей выбирают наибольшую. В строке (или в столбце), которой данная разность соответствует, определяют минимальный тариф. Клетку, в которой он записан, заполняют на данной итерации.

Если минимальный тариф одинаков для нескольких клеток данной строки (столбца), то для заполнения выбирают ту клетку, которая расположена в столбце (строке), соответствующем наибольшей разности между двумя минимальными тарифами, находящимися в данном столбце (строке).

В методе аппроксимации Фогеля используются штрафы, взимаемые за неудачный выбор маршрута. Разности между двумя уровнями затрат на перевозки являются штрафами за неверно выбранный маршрут перевозки.

Этот метод наиболее трудоемкий, однако начальный план перевозок, построенный с его использованием, обычно бывает близок к оптимальному, а иногда является оптимальным планом.

Пример 3. Определить опорный план по методу аппроксимации Фогеля для транспортной задачи из примера 1.

Для каждой строки и столбца таблицы условий найдем разности между двумя минимальными тарифами, записанными в данной строке или столбце, и поместим их в соответствующем дополнительном столбце или дополнительной строке табл. 2.6.

Таблица 2.6

a_i \ b_j	200	250	120	130	200	Разности по строкам					
100	10	7	2 **100**	5	5	3	–	–	–	–	–
300	4	9	8	1 **100**	3 **200**	2	2	2	(3)	–	–
180	5 **180**	12	16	8	7	2	2	2	(3)	3	3
320	7 **20**	4 **250**	6 **20**	3 **30**	11	1	1	3	(3)	4	4

Разности по столбцам					
	1	3	(4)	2	2
	1	(5)	2	2	4
	1	–	2	2	(4)
	1	–	2	2	–
	2	–	(10)	5	–
	2	–	–	(5)	–

Минимальный тариф в первой строке равен 2, следующий наименьший равен 5 (их два). Разность между ними $5-2=3$. Во второй строке наименьший тариф 1, следующий 3. Разность $3-1=2$. В третьей строке разность $7-5=2$, в четвертой разность $4-3=1$.

В первом столбце наименьший тариф 4. Следующий наименьший 5, разность $5-4=1$. Для второго, третьего, четвертого и пятого тарифов разности соответственно равны 3, 4, 2 и 2.

Наибольшая из всех разностей находится в третьем столбце. В этом столбце минимальный тариф записан в первой строке. Заполняем клетку (1.3): $x_{13}=\min\{100;120\}=100$, предложение первого поставщика полностью исчерпано. Первая строка закрыта. Повторяем предыдущие действия без учета первой строки.

Во второй строке минимальный тариф 1. Следующий 3, разность $3-1=2$. Для третьей и четвертой строк разности равны 2 и 1 соответственно.

В третьем столбце минимальный тариф 6, следующий 8, разность $8-6=2$. В первом, втором, четвертом и пятом тарифах разности соответственно равны 1, 5, 2 и 4. Максимальная из всех разностей находится во втором столбце. Минимальный тариф в этом столбце находится в четвертой строке. Заполняем клетку (4.2): $x_{42}=\min\{250;320\}=250$. Второй потребитель полостью удовлетворил свой спрос. Второй столбец закрыт.

Повторяем все действия без учета первой строки и второго столбца. Разности во второй, третьей и четвертой строках соответственно равны 2, 2, 3; в первом, третьем, четвертом и пятом столбцах – соответственно 1, 2, 2 и 4. Максимальная разность равна 4 и находится в пятом столбце. Минимальный тариф для этого столбца находится в клетке (2.5), поэтому $x_{25}=\min\{200;300\}=200$. Спрос пятого потребителя удовлетворен, пятый столбец закрыт.

Вновь составляем разности для оставшихся строк и столбцов.

Максимальная разность равна 3 и стоит во второй, третьей и четвертой строках. Минимальный из оставшихся тарифов в этих строках равен 1 и находится в клетке (2.4), поэтому $x_{24}=\min\{300-200;130\}=100$. Исчерпано предложение второго поставщика. Вторая строка не рассматривается.

Для оставшихся строк и столбцов максимальная разность равна 10, минимальный тариф в этом столбце 6, поэтому $x_{43}=\min\{120-100;\ 320-250\}=20$; третий потребитель полностью удовлетворил свой спрос. Закрываем третий столбец.

Снова составляем разности. Максимальная равна 5 и находится в четвертом столбце. Наименьший тариф находится в клетке (4.4): $x_{44}=\min\{130-100;320-250-20\}=30$ и четвертый столбец закрыт. Остался один первый столбец. В нем сначала заполняем клетку с наименьшим тарифом $x_{31}=\min\{200;180\}=180$. В единственную свободную клетку записываем $x_{41}=\min\{200-180;320-250-20-30\}=20$.

План является опорным и имеет вид

$$X_3=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 100 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 100 & 200 \\ 180 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 20 & 250 & 20 & 30 & 0 \end{pmatrix}.$$

Стоимость перевозок по этому плану равна

$$Z(X_3)=100\cdot 2+100\cdot 1+200\cdot 3+180\cdot 5+20\cdot 7+250\cdot 4+20\cdot 6+30\cdot 3=3150.$$

2.2. Метод потенциалов

Теорема. Если план $X^*=\left(x_{ij}^*\right)\left(i=1,2,\ldots,m;\ j=1,2,\ldots,n\right)$ транспортной задачи является оптимальным, то ему соответствует система из $m+n$ чисел u_i^* и v_j^*, удовлетворяющих условиям

$$u_i^*+v_j^*=C_{ij} \text{ для } x_{ij}^*\ge 0$$

и

$$u_i^*+v_j^*\le C_{ij} \text{ для } x_{ij}^*=0$$

$$\left(i=1,2,\ldots,m;\ j=1,2,\ldots,n\right).$$

Числа u_i^* и v_j^* называются ***потенциалами соответственно поставщиков*** и ***потребителей***.

Доказательство. Транспортную задачу минимизации линейной функции $Z=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}C_{ij}x_{ij}$ при ограничениях

$$\begin{cases} x_{i1}+x_{i2}+\ldots+x_{in}=a_i, & i=1,2,\ldots,m, \\ x_{1j}+x_{2j}+\ldots+x_{jm}=b_j, & j=1,2,\ldots,n, \end{cases}$$

$$x_{ij}\ge 0\ \left(i=1,2,\ldots,m;\ j=1,2,\ldots,n\right)$$

можно рассматривать как двойственную некоторой исходной задачи линейного программирования.

Если каждому ограничению вида $x_{i1}+x_{i2}+\ldots+x_{in}=a_i$ в исходной задаче соответствует переменная u_i $(i=1,2,\ldots,m)$, а каждому ограничению вида $x_{1j}+x_{2j}+\ldots+x_{jm}=b_j$ переменная v_j $(j=1,2,\ldots,n)$, то двойственная задача – максимизировать линейную функцию $F\left(Y\right)=\sum_{i=1}^{m}a_iu_i+\sum_{j=1}^{n}b_jv_j$ при ограничениях $u_i + v_j \le C_{ij}$ $\left(i = 1, 2, \ldots, m;\ j = 1, 2, \ldots, n\right)$. План X^* является оптимальным планом двойственной задачи, поэтому план $Y^* = \left(u_i^*, v_j^*\right)$ является планом исходной задачи и $\max F = \min Z$, или

$$\sum_{i=1}^{m} a_i u_j^* + \sum_{j=1}^{n} b_j v_j^* = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} C_{ij} x_{ij}^*, \text{ где } x_{ij}^* \ge 0.$$

На основании теоремы из теории двойственности (если при подстановке компонент оптимального плана в систему ограничений исходной задачи i-е ограничение обращается в неравенство, то i-я компонента оптимального плана двойственной задачи равна нулю; если i-я компонента оптимального плана двойственной задачи положительна, то i-е ограничение исходной задачи удовлетворяется ее оптимальным решением как строгое равенство), получаем $u_i^* + v_j^* = C_{ij}$ для $x_{ij}^* \ge 0$, $u_i^* + v_j^* \le C_{ij}$ для $x_{ij}^* = 0$.

Из доказанной теоремы следует, что для оптимальности начального опорного плана необходимо выполнение следующих условий:

1) для каждой занятой клетки сумма потенциалов должна быть равна стоимости единицы перевозки, стоящей в этой клетке: $u_i + v_j = C_{ij}$;

2) для каждой незанятой клетки сумма потенциалов должна быть меньше или равна стоимости единицы перевозки, стоящей в этой клетке: $u_i + v_j \le C_{ij}$.

Алгоритм метода потенциалов

1. Построение системы потенциалов. Используем условие $u_i + v_j = C_{ij}$, где C_{ij} – тариф на перевозку из пункта i в пункт j для занятых клеток.

Систему потенциалов можно построить только для невырожденного опорного плана. Он содержит $m + n - 1$ занятых клеток, поэтому для него можно составить систему из $m + n - 1$ линейно независимых уравнений с $m + n$ неизвестными. Она является неопределенной, поэтому одному неизвестному придают нулевое значение. Обычно полагают $u_i = 0$. После этого остальные потенциалы определяются однозначно.

Если опорный план является вырожденным, то количество занятых клеток дополняют до $m + n - 1$, вводя нулевые перевозки. Клетки, в которые введены нулевые перевозки, называются ***фиктивно занятыми***.

При вырожденном опорном плане построение системы потенциалов прерывается, какие-то потенциалы для занятых клеток, например u_p и v_q, остаются неопределенными. Фиктивно занятой целесообразно сделать незанятую клетку либо строки p, либо столбца q, в которой стоит наименьшая стоимость.

2. Проверка выполнения условия оптимальности для незанятых клеток. Суммируем потенциалы, на пересечении которых стоит незанятая клетка, сумму сравниваем со стоимостью, стоящей в ней (тарифом). Такой тариф называется ***косвенным***, т.е. это тариф для маршрутов, по которым не осуществляются перевозки при данном плане.

Если для всех незанятых клеток $u_i + v_j \le C_{ij}$, то план является оптимальным; если хотя бы для одной клетки $u_i + v_j > C_{ij}$, то план может быть улучшен. Для каждой клетки, в которой не выполняется условие оптимальности, находим разность $\Delta_{ij} = \left(u_i + v_j\right) - C_{ij} > 0$.

3. Выбор клетки, в которую необходимо послать перевозку. Такой клеткой является та, которой соответствует $\max \Delta_{ij}$. Если имеется несколько одинаковых значений, то из них выбирается любое.

4. Построение цикла и определение величины перераспределения груза. Строим цикл, начинающийся и заканчивающийся в выбранной свободной клетке, остальные вершины находятся в занятых клетках. Этот цикл единственный. В свободной клетке условно ставят знак «+», а в остальных вершинах цикла, чередуясь, ставят «–» или «+». Затем осуществляется перераспределение продукции по циклу. Для этого выбирают клетку со знаком «–», которой соответствует наименьшее число единиц продукции. Это значение прибавляют к значениям, стоящим в клетках со знаком «+», и отнимают от значений, стоящих в клетках со знаком «–». При таком распределении общий баланс не меняется. Свободная клетка заполняется, а клетка со знаком «–», которой соответствует наименьшее количество продукции, становится свободной; соответствующую ей переменную исключают из списка базисных.

Все действия повторяются для нового плана.

Пример 4. Найти оптимальный план перевозок для транспортной задачи из примера 1.

В качестве начального опорного плана выберем план, найденный по методу минимальной стоимости (табл. 2.7).

Таблица 2.7

Опорный план

b_j / a_i	200	250	120	130	200
100	10	7	2 100	5	5
300	4	9	8	1 **130** –	3 **170** +
180	5 **180**	12	16	8	7
320	7 **20**	4 **250**	6 **20**	3 + ●	11 – **30**

1. Построим систему потенциалов:

$u_1 + v_3 = 2$, Пусть $u_1 = 0$, тогда $v_3 = 2$. Найдем остальные:

$$
\left.
\begin{aligned}
&u_2 + v_4 = 1, \\
&u_2 + v_5 = 3, \\
&u_3 + v_1 = 5, \\
&u_4 + v_1 = 7, \\
&u_4 + v_2 = 4, \\
&u_4 + v_3 = 6, \\
&u_4 + v_5 = 11,
\end{aligned}
\right.
\Rightarrow
\begin{aligned}
&v_4 = 5, \\
&u_2 = -4, \\
&u_3 = 2, \\
&v_1 = 3, \\
&v_2 = 0, \\
&u_4 = 4, \\
&v_5 = 7.
\end{aligned}
$$

2. Суммируем потенциалы, на пересечении которых стоит незанятая клетка:

$u_1 + v_1 = 0 + 3 = 3 < 10$,

$u_1 + v_2 = 0 + 0 = 0 < 7$,

$u_1 + v_4 = 0 + 5 = 5 = 5$,

$u_1 + v_5 = 0 + 7 = 7 > 5$,

$u_2 + v_1 = -4 + 3 = -1 < 4$,

$u_2 + v_2 = -4 + 0 = -4 < 9$,

$u_2 + v_3 = -4 + 2 = -2 < 8$,

$u_3 + v_2 = 2 + 0 = 2 < 12$,

$u_3 + v_3 = 2 + 2 = 4 < 16$,

$u_3 + v_4 = 2 + 5 = 7 < 8$,

$u_3 + v_5 = 2 + 7 = 9 > 7$,

$u_4 + v_4 = 4 + 5 = 9 > 3$.

Для клеток (1.5), (3.5) и (4.4) не выполняется условие оптимальности: $\Delta_{15} = 7 - 5 = 2$, $\Delta_{35} = 9 - 7 = 2$, $\Delta_{44} = 9 - 3 = 6$.

3. $\max\{\Delta_{15}; \Delta_{35}; \Delta_{44}\} = 6$. Выбираем клетку (4.4).

4. Строим цикл, начинающийся и заканчивающийся в клетке (4.4). Вершинами цикла являются также клетки (2.4), (2.5) и (4.5). В клетке (4.4) ставим знак «+», в клетке (2.4) – знак «–», в (2.5) – знак «+», в (4.5) – знак «–»; $\min\{130; 30\} = 30$. Отнимаем 30 от значений, стоящих в клетках со знаком «–», и прибавляем к значениям, стоящим со знаком «+».

Получаем новый план перевозок (табл. 2.8).

Таблица 2.8

Новый план перевозок

a_i \ b_j	200	250	120	130	200
100	10	7	2 **100**	5	5
300	4 +	9	8	1 **100** –	3 **200**
180	5 **180**	12	16	8	7
320	7 – **20**	4 **250**	6 **20**	3 + **30**	11

Проверим новый план на оптимальность.

1. Построим систему потенциалов:

$u_1 + v_3 = 2$,

$u_2 + v_4 = 1$,

$u_2 + v_5 = 3$,

$u_3 + v_1 = 5$,

$u_4 + v_1 = 7$,

$u_4 + v_2 = 4$,

$u_4 + v_3 = 6$,

$u_4 + v_4 = 3$.

Пусть $u_1 = 0$, тогда $v_3 = 2$, $u_4 = 4$, $v_4 = -1$, $v_2 = 0$, $v_1 = 3$, $u_3 = 2$, $u_2 = 2$, $v_5 = 1$.

2. Для незанятых клеток:

$u_1 + v_1 = 0 + 3 = 3 < 10$,

$u_1 + v_2 = 0 + 0 = 0 < 7$,
$u_1 + v_4 = 0 - 1 = -1 < 5$,
$u_1 + v_5 = 0 + 1 = 1 < 5$,
$u_2 + v_1 = 2 + 3 = 5 > 4$,
$u_2 + v_2 = 2 + 0 = 2 < 9$,
$u_2 + v_3 = 2 + 2 = 4 < 8$,
$u_3 + v_2 = 2 + 0 = 2 < 12$,
$u_3 + v_3 = 2 + 2 = 4 < 16$,
$u_3 + v_4 = 2 - 1 = 1 < 8$,
$u_3 + v_5 = 2 + 1 = 3 < 7$,
$u_4 + v_5 = 4 + 1 = 5 < 13$.

Для клетки (2.1) не выполняется условие оптимальности $\Delta_{21} = 5 - 4 = 1$.

3. Выбираем клетку (2.1).

4. Строим цикл, начинающийся и заканчивающийся в клетке (2.1). Он содержит также клетки (2.4), (4.4) и (4.1); $\min\{100; 20\} = 20$. Производим перераспределение по циклу и получаем новый план (табл. 2.9).

Таблица 2.9

Новый план

a_i \ b_j	200	250	120	130	200
100	10	7	2 **100**	5	5
300	4 **20**	9	8	1 **80**	3 **200**
180	5 **180**	12	16	8	7
320	7	4 **250**	6 **20**	3 **50**	11

Проверим новый план на оптимальность.

1. Построим систему потенциалов:

$$\left.\begin{array}{l} u_1 + v_3 = 2, \\ u_2 + v_1 = 4, \\ u_2 + v_4 = 1, \\ u_2 + v_5 = 3, \\ u_3 + v_1 = 5, \end{array}\right. \Rightarrow \begin{array}{l} u_1 = 0,\ v_3 = 2, \\ v_1 = 2, \\ u_2 = 2, \\ v_5 = 1, \\ u_3 = 3, \end{array}$$

$u_4 + v_2 = 4$, $\quad v_2 = 0$,

$u_4 + v_3 = 6$, $\quad u_4 = 4$,

$u_4 + v_4 = 3$, $\quad v_4 = -1$.

2. Для незанятых клеток:

$u_1 + v_1 = 0 + 2 = 2 < 10$,

$u_1 + v_2 = 0 + 0 = 0 < 7$,

$u_1 + v_4 = 0 - 1 = -1 < 5$,

$u_1 + v_5 = 0 + 1 = 1 < 5$,

$u_2 + v_2 = 2 + 0 = 2 < 9$,

$u_2 + v_3 = 2 + 2 = 4 < 8$,

$u_3 + v_2 = 3 + 0 = 3 < 12$,

$u_3 + v_3 = 3 + 2 = 5 < 16$,

$u_3 + v_4 = 3 - 1 = 2 < 8$,

$u_3 + v_5 = 3 + 1 = 4 < 7$,

$u_4 + v_1 = 4 + 2 = 6 < 7$,

$u_4 + v_5 = 4 + 1 = 5 < 11$.

Следовательно, получен оптимальный план

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 100 & 0 & 0 \\ 20 & 0 & 0 & 80 & 200 \\ 180 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 250 & 20 & 50 & 0 \end{pmatrix}.$$

Оптимальные затраты равны:

$$Z(X) = 100 \cdot 2 + 20 \cdot 4 + 80 \cdot 1 + 200 \cdot 3 + 180 \cdot 5 + 250 \cdot 4 + 20 \cdot 6 + 50 \cdot 3 = 3130.$$

Ответ: $\min Z(X) = 3130$ при

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 100 & 0 & 0 \\ 20 & 0 & 0 & 80 & 200 \\ 180 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 250 & 20 & 50 & 0 \end{pmatrix}.$$

Далее рассмотрим действия по определению оптимального плана, если в качестве начального опорного плана взять план, найденный по методу северо-западного угла (табл. 2.10).

1. Построим систему потенциалов:

$u_1 + v_1 = 10$, $\quad u_1 = 0$, $v_1 = 10$,

$u_2 + v_1 = 4$, $\quad u_2 = -6$,

$$u_2 + v_2 = 9, \qquad v_2 = 15,$$
$$u_3 + v_2 = 12, \qquad u_3 = -3,$$
$$u_3 + v_3 = 16, \quad \Rightarrow \quad v_3 = 19,$$
$$u_3 + v_4 = 8, \qquad v_4 = 11,$$
$$u_4 + v_4 = 3, \qquad u_4 = -8,$$
$$u_4 + v_5 = 11. \qquad v_5 = 19,$$

Таблица 10

Опорный план

a_i \ b_j	200	250	120	130	200
100	10 **100** –	7	2 ● +	5	5
300	4 + **100**	9 – **200**	8	1	3
180	5	12 + **50**	16 – **120**	8 **10**	7
320	7	4	6	3 **120**	11 **200**

2. Для незанятых клеток:

$u_1 + v_2 = 0 + 15 = 15 > 7$,

$u_1 + v_3 = 0 + 19 = 19 > 2$,

$u_1 + v_4 = 0 + 11 = 11 > 5$,

$u_1 + v_5 = 0 + 19 = 19 > 5$,

$u_2 + v_3 = -6 + 19 = 13 > 8$,

$u_2 + v_4 = -6 + 11 = 5 > 1$,

$u_2 + v_5 = -6 + 19 = 13 > 3$,

$u_3 + v_1 = -3 + 10 = 7 > 5$,

$u_3 + v_5 = -3 + 19 = 16 > 7$,

$u_4 + v_1 = -8 + 10 = 2 < 7$,

$u_4 + v_2 = -8 + 15 = 7 > 4$,

$u_4 + v_3 = -8 + 19 = 11 > 6$.

Условие оптимальности не выполняется для клеток (1.2), (1.3), (1.4), (1.5), (2.3), (2.4), (2.5), (3.1), (3.5), (4.2) и (4.3):

$$\Delta_{12} = 8,\ \Delta_{13} = 17,\ \Delta_{14} = 6,\ \Delta_{15} = 14,\ \Delta_{23} = 5,\ \Delta_{24} = 4,$$

$$\Delta_{25} = 10,\ \Delta_{31} = 2,\ \Delta_{35} = 9,\ \Delta_{42} = 3,\ \Delta_{43} = 5.$$

3. $\max\{\Delta_{12}, \Delta_{13}, \Delta_{14}, \Delta_{15}, \Delta_{23}, \Delta_{24}, \Delta_{25}, \Delta_{31}, \Delta_{35}, \Delta_{42}, \Delta_{43}\} = 17$. Выбираем клетку (1.3).

4. Строим цикл. Вершинами цикла являются клетки (1.3), (1.1), (2.1), (2.2), (3.2) и (3.3), $\min\{100; 200; 120\} = 100$. Получаем новый опорный план перевозок (табл. 2.11).

Таблица 2.11

Новый опорный план перевозок

a_i \ b_j	200	250	120	130	200
100	10	7	2 **100**	5	5
300	4 **200**	9 **100**	8	1	3
180	5	12 **150**	16 **20**	8 **10**	7
320	7	4	6	3 **120**	11 **200**

Продолжая процесс, через некоторое конечное число шагов получим оптимальный план.

Циклы могут также иметь, например, вид, изображенный на рис. 2.2.

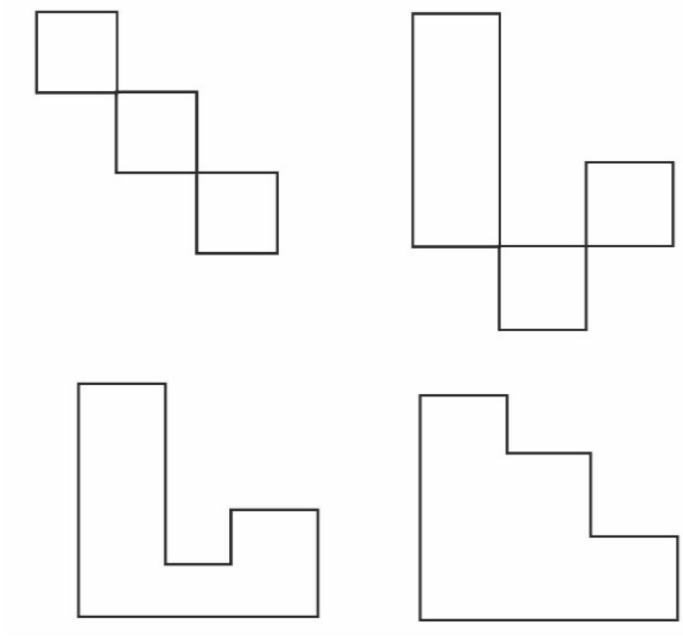

Рис. 2.2. Виды циклов

2.3. Открытая модель транспортной задачи

При рассмотрении открытой модели транспортной задачи исследователь может столкнуться с двумя случаями:

1) суммарное предложение больше суммарного спроса $\sum_{i=1}^{m} a_i > \sum_{j=1}^{n} b_j$;

2) суммарное предложение меньше суммарного спроса $\sum_{i=1}^{m} a_i < \sum_{j=1}^{n} b_j$.

Линейная функция одинакова в обоих случаях, изменяется только вид системы ограничений.

Требуется найти минимальное значение линейной функции $Z = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} C_{ij} x_{ij}$ при ограничениях

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} x_{ij} \le a_i, \ i = 1, 2, \ldots, m, \\ \sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j, \ \ j = 1, 2, \ldots, n; \end{cases} \qquad \text{(случай 1)}$$

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i, \ i = 1, 2, \ldots, m, \\ \sum_{i=1}^{m} x_{ij} \le b_j, \ \ j = 1, 2, \ldots, n; \end{cases} \qquad \text{(случай 2)}$$

$$x_{ij} \ge 0 \ \ (i = 1, 2, \ldots, m; \ j = 1, 2, \ldots, n).$$

Открытая модель решается приведением к закрытой модели.

В первом случае вводят фиктивного $(n+1)$-го потребителя, спрос которого $b_{n+1} = \sum_{i=1}^{m} a_i - \sum_{j=1}^{n} b_j$, а тариф на перевозку этому потребителю от всех поставщиков равен нулю $C_{i\,n+1} = 0$, $i = 1, 2, \ldots, m$. Неравенство первой системы переходит в равенство $\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n+1} b_j$.

Во втором случае вводят фиктивного $(m+1)$-го поставщика, предложение которого $a_{m+1} = \sum_{j=1}^{n} b_j - \sum_{i=1}^{m} a_i$, тариф на перевозку от этого поставщика всем потребителям равен нулю $C_{m+1j} = 0$, $j = 1, 2, \ldots, n$. Неравенство системы (2) переходит в равенство $\sum_{i=1}^{m+1} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j$.

Пример 5. Найти оптимальное распределение поставок при следующих исходных данных (табл. 2.12).

Таблица 2.12

Исходные данные

a_i \ b_j	45	35	55	65
40	4	1	3	5
60	2	2	3	7
90	4	3	5	3

Суммарное предложение: $\sum_{i=1}^{3} a_i = 40 + 60 + 90 = 190$, суммарный спрос: $\sum_{j=1}^{4} b_j = 45 + 35 + 55 + 65 = 200$, поэтому введем фиктивного поставщика с запасами $200 - 190 = 10$. Исходную таблицу дополняем еще одной строкой (табл. 2.13).

Найдем опорный план методом аппроксимации Фогеля (табл. 2.14).

Наибольшая разность соответствует столбцам 3 и 4. Выберем, например, третий столбец. В нем минимальный тариф записан в четвертой строке. Заполним клетку (4.3). Четвертая строка закрыта. Снова найдем разности между оставшимися двумя минимальными тарифами. Наибольшая разность соответствует первому и четвертому столбцам и первой строке. Выбираем первую строку.

Минимальный тариф в этой строке записан в клетку (1.2), заполним ее. Второй столбец закрыт. Продолжая итерационный процесс, выбираем первый столбец. Заполняем клетку (2.1). Первый столбец закрыт. Далее выбираем вторую строку и заполняем клетку (2.3). Потом заполняем клетки (1.3), (3.3) и (3.4) в указанном порядке.

Количество заполненных клеток соответствует норме $4 + 4 - 1 = 7$.

Таблица 2.13

Исходная таблица

a_i \ b_j	45	35	55	65
40	4	1	3	5
60	2	2	3	7
90	4	3	5	3
10	0	0	0	0

Таблица 2.14

Опорный план методом аппроксимации Фогеля

<table>
<tr><th>a_i \ b_j</th><th>45</th><th>35</th><th>55</th><th>65</th><th colspan="4">Разности по строкам</th></tr>
<tr><td>40</td><td>4</td><td>1
35</td><td>3
5</td><td>5</td><td>2</td><td>2</td><td>1</td><td>2</td></tr>
<tr><td>60</td><td>2
45</td><td>2</td><td>3
15</td><td>7</td><td>0</td><td>0</td><td>1</td><td>4</td></tr>
<tr><td>90</td><td>4</td><td>3</td><td>5
25</td><td>3
65</td><td>0</td><td>0</td><td>1</td><td>2</td></tr>
<tr><td>10</td><td>0</td><td>0</td><td>0
10</td><td>0</td><td>0</td><td>–</td><td>–</td><td>–</td></tr>
<tr><td rowspan="4">Разности по столбцам</td><td>2</td><td>1</td><td>3</td><td>3</td></tr>
<tr><td>2</td><td>1</td><td>0</td><td>2</td></tr>
<tr><td>2</td><td>–</td><td>0</td><td>2</td></tr>
<tr><td>–</td><td>–</td><td>0</td><td>2</td></tr>
</table>

Проверим найденный опорный план на оптимальность методом потенциалов:

1. Построим систему потенциалов:

$$\left.\begin{aligned} &u_1+v_2=1,\\ &u_1+v_3=3,\\ &u_2+v_1=2,\\ &u_2+v_3=3,\\ &u_3+v_3=5,\\ &u_3+v_4=3,\\ &u_4+v_3=0. \end{aligned}\right. \quad\Rightarrow\quad \begin{aligned} &u_1=0,\ v_2=1,\\ &v_3=3,\\ &u_2=0,\ v_1=2,\\ &u_3=2,\ v_4=1,\\ &u_4=-3, \end{aligned}$$

2. Для свободных клеток:

$u_1+v_1=0+2=2<4$,

$u_1+v_4=0+1=1<5$,

$u_2+v_2=0+1=1<2$,

$u_2+v_4=0+1=1<7$,

$u_3+v_1=2+2=4=4$,

$u_3+v_2=2+1=3=3$,

$u_4+v_1=-3+2=-1<0$,

$u_4+v_2=-3+1=-2<0$,

$u_4+v_4=-3+1=-2<0$.

Найденный опорный план является оптимальным:

$$X=\begin{pmatrix} 0 & 35 & 5 & 0\\ 45 & 0 & 15 & 0\\ 0 & 0 & 25 & 65 \end{pmatrix}.$$

При оптимальном распределении третий потребитель недополучит 10 ед. груза, и минимальное значение целевой функции составит

$$Z_{\min}=35\cdot 1+5\cdot 3+45\cdot 2+15\cdot 3+25\cdot 5+65\cdot 3=505.$$

Оптимальное распределение не является единственным, так как для свободных клеток имеются равенства.

Пример 6. Найти оптимальное распределение поставок при следующих исходных данных (табл. 19).

Т а б л и ц а 2 . 1 5

Исходные данные

a_i \ b_j	55	45	125	55
150	2	4	6	7
70	4	4	5	2
80	5	9	3	2

Суммарное предложение: $\sum_{i=1}^{3} a_i = 150 + 70 + 80 = 300$, суммарный спрос: $\sum_{j=1}^{4} b_j = 55 + 45 + 125 + 55 = 280$, поэтому введем фиктивного потребителя со спросом $300 - 280 = 20$. Исходную таблицу дополняем еще одним столбцом (табл. 2.16).

Т а б л и ц а 2 . 1 6

Исходная таблица

a_i \ b_j	55	45	125	55	20
150	2 **55**	4 **45**	6 **30**	7	0 20
70	4	4	5 **15**	2 **55**	0
80	5	9	3 **80**	2	0

Найдем начальный опорный план методом минимальной стоимости. Заполняем клетки (1.1), (2.4), (3.3), (1.2), (2.3), (1.3) и (1.5) в указанной последовательности.

Проверим на оптимальность методом потенциалов.

1. Построим систему потенциалов:

$u_1 + v_1 = 2$, $\quad$ $u_1 = 0$, $v_1 = 2$,

$u_1 + v_2 = 4$, $\quad$ $v_2 = 4$,

$u_1 + v_3 = 6$, $\quad$ $v_3 = 6$,

$u_1 + v_5 = 0$, $\Rightarrow$ $v_5 = 0$,

$u_2 + v_3 = 5$, $u_2 = -1$,

$u_2 + v_4 = 2$, $v_4 = 3$,

$u_3 + v_3 = 0$, $u_3 = -3$.

2. Для свободных клеток:

$u_1 + v_4 = 0 + 3 = 3 < 7$,

$u_2 + v_1 = -1 + 2 = 1 < 4$,

$u_2 + v_2 = -1 + 4 = 3 < 4$,

$u_2 + v_5 = -1 + 0 = -1 < 0$,

$u_3 + v_1 = -3 + 2 = -1 < 5$,

$u_3 + v_2 = -3 + 4 = 1 < 9$,

$u_3 + v_4 = -3 + 3 = 0 < 2$,

$u_3 + v_5 = -3 + 0 = -3 < 0$.

Найденный опорный план является оптимальным:

$$X = \begin{pmatrix} 55 & 45 & 30 & 0 \\ 0 & 0 & 15 & 55 \\ 0 & 0 & 80 & 0 \end{pmatrix}.$$

При этом распределении у первого поставщика останется 20 ед. груза, и минимальное значение целевой функции составит

$$Z_{\min} = 55 \cdot 2 + 45 \cdot 4 + 30 \cdot 6 + 15 \cdot 5 + 55 \cdot 2 + 80 \cdot 3 = 895.$$

2.4. Вырождение в транспортных задачах

Вырождение в линейном программировании означает обращение в нуль по крайней мере одной из основных переменных базисного решения.

Рассмотрим, как это проявляется в ходе решения конкретной транспортной задачи.

Пример 7. Решить транспортную задачу, данные которой приведены в табл. 2.17.

Так как $\sum_{i=1}^{4} a_i = \sum_{j=1}^{3} b_j = 40 + 60 + 100 + 20 = 80 + 20 + 120$, то модель задачи закрытая.

Первоначальное распределение поставок выполним по методу северо-западного угла (табл. 2.18).

В табл. 2.18 баланс по строкам и по столбцам соблюден и первоначальное распределение поставок закончено.

Таблица 2.17

Исходные данные

a_i \ b_j	80	20	120
40	6	9	10
60	2	5	7
100	3	6	8
20	7	1	5

Таблица 2.18

Первоначальное распределение поставок по методу северо-западного угла

a_i \ b_j	80	20	120
40	6 **40**	9	10
60	2 **40**	5 **20**	7
100	3	6 **0** −	8 + **100**
20	7	1 +	5 − **20**

Число заполненных клеток должно равняться $4+3-1=6$, а в табл. 22 заполненных клеток только 5.

Для устранения вырожденности дополним количество занятых клеток до $m+n-1$, вводя нулевые перевозки. В данной задаче нужно ввести только одну клетку.

При распределении поставок в табл. 2.18 произошло нарушение ступенчатости, которая характерна для распределения поставок по методу северо-западного угла. Запись нулевой поставки в клетку (3.2) или клетку (2.3) восстанавливает эту ступенчатость. Выбираем клетку (3.2), так как в ней тариф меньше, чем в клетке (2.3).

Проверим опорный план на оптимальность, построив систему потенциалов:

$$\begin{aligned} &u_1+v_1=6, && u_1=0,\ v_1=6,\\ &u_2+v_1=2, && u_2=-4,\\ &u_2+v_2=5, && v_2=9,\\ &u_3+v_2=6, \quad \Rightarrow && u_3=-3,\\ &u_3+v_3=8, && v_3=11,\\ &u_4+v_3=5. && u_4=-6, \end{aligned}$$

и для свободных клеток определив значения:

$$u_1+v_2=0+9=9=9,$$
$$u_1+v_3=0+11=11>10,$$
$$u_2+v_3=-4+11=7=7,$$
$$u_3+v_1=-3+6=3=3,$$
$$u_4+v_1=-6+6=0<7,$$
$$u_4+v_2=-6+9=3>1.$$

Далее осуществим выбор клетки, в которую необходимо послать перевозку: $\Delta_{13}=11-10=1$, $\Delta_{42}=3-1=2$, $\max\{\Delta_{13};\Delta_{42}\}=2$, следовательно, заполняем клетку (4.2). Цикл будет содержать клетки (4.2), (3.2), (3.3), (4.4). Чтобы не нарушать принятого алгоритма решения задачи, передвинем в цикле для клетки (4.2) нулевую поставку, клетка (3.2) стоит свободной, поставки в клетках (3.3) и (4.3) сохранятся. Новое распределение поставок записано в табл. 2.19.

Таблица 2.19

Новое распределение поставок

a_i \ b_j	80	20	120
40	6 **40** −	9	10 ● +
60	2 **40** +	5 − **20**	7
100	3	6	8 **100**
20	7	1 + **0**	5 − **20**

Проверим опорный план на оптимальность, построив систему потенциалов:

$$\begin{array}{lcl} u_1 + v_1 = 6, & & u_1 = 0,\ v_1 = 6, \\ u_2 + v_1 = 2, & & u_2 = -4, \\ u_2 + v_2 = 5, & \Rightarrow & v_2 = 9, \\ u_3 + v_3 = 8, & & u_3 = -5 \\ u_4 + v_2 = 1, & & u_4 = -8, \\ u_4 + v_3 = 5. & & v_3 = 13, \end{array}$$

и для свободных клеток определив значения:

$$u_1 + v_2 = 0 + 9 = 9 = 9,$$
$$u_1 + v_3 = 0 + 13 = 13 > 10,$$
$$u_2 + v_3 = -4 + 13 = 9 > 7,$$
$$u_3 + v_1 = -5 + 6 = 1 < 3,$$
$$u_3 + v_2 = -5 + 9 = 4 < 6,$$
$$u_4 + v_1 = -8 + 6 = -2 < 7.$$

Далее осуществим выбор клетки, в которую необходимо послать перевозку: $\Delta_{13} = 13 - 10 = 3$, $\Delta_{23} = 9 - 7 = 2$, $\max\{\Delta_{13}; \Delta_{23}\} = 3$. Заполняем клетку (1.3). Цикл будет содержать клетки (1.3), (1.1), (2.1), (2.2), (4.2), (4.3), $\min\{40; 20; 20\} = 20$. Получаем следующую таблицу (табл. 2.20).

Таблица 2.20

Новое распределение поставок

a_i \ b_j	80	20	120
40	6 **20** −	9	10 + **20**
60	2 **60**	5	7
100	3 +	6	8 − **100**
20	7	1 **20**	5

Выстраиваем систему потенциалов для проверки опорного план на оптимальность:

$$\begin{array}{ll} u_1 + v_1 = 6, & u_1 = 0,\ v_1 = 6, \\ u_1 + v_3 = 10, & v_3 = 10, \end{array}$$

$$
\begin{aligned}
&u_2 + v_1 = 2, & & u_2 = -4, \\
&u_3 + v_3 = 8, & \Rightarrow \quad & u_3 = -2, \\
&u_4 + v_2 = 1, & & v_2 = 6, \\
&u_4 + v_3 = 5. & & u_4 = -5;
\end{aligned}
$$

для свободных клеток:

$u_1 + v_2 = 0 + 6 = 6 < 9$,

$u_2 + v_2 = -4 + 6 = 2 < 5$,

$u_2 + v_3 = -4 + 10 = 6 < 7$,

$u_3 + v_1 = -2 + 6 = 4 > 3$,

$u_3 + v_2 = -2 + 6 = 4 < 6$,

$u_4 + v_1 = -5 + 6 = 1 < 7$.

Таким образом, клетка, в которую необходимо послать перевозку: $\Delta_{31} = 1$. Заполним клетку (3.1). Цикл будет содержать клетки (3.1), (1.1), (1.3) и (3.3), $\min\{20; 100\} = 20$. Новое распределение поставок представлено в табл. 2.21.

Таблица 2.21

Новое распределение поставок

a_i \ b_j	80	20	120
40	6	9	10 **40**
60	2 **60**	5	7
100	3 **20**	6	8 **80**
20	7	1 **20**	5 **0**

Выстраиваем систему потенциалов для проверки опорного план на оптимальность:

$$
\begin{aligned}
&u_1 + v_3 = 10, & & u_1 = 0,\ v_3 = 10, \\
&u_2 + v_1 = 2, & & u_2 = -3, \\
&u_3 + v_1 = 3, & & v_1 = 5, \\
&u_3 + v_3 = 8, & & u_3 = -2, \quad \Rightarrow \\
&u_4 + v_2 = 1, & & v_2 = 6, \\
&u_4 + v_3 = 5. & & u_4 = -5;
\end{aligned}
$$

для свободных клеток:

$u_1 + v_1 = 0 + 5 = 5 < 6$,

$u_1 + v_2 = 0 + 6 = 6 < 9$,

$u_2 + v_2 = -3 + 6 = 3 < 5$,

$u_2 + v_3 = -3 + 10 = 7 = 7$,

$u_3 + v_2 = -2 + 6 = 4 < 6$,

$u_4 + v_1 = -5 + 5 = 0 < 7$.

Оптимальный план:

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 40 \\ 60 & 0 & 0 \\ 20 & 0 & 80 \\ 0 & 20 & 0 \end{pmatrix}.$$

Стоимость перевозки:

$$Z(x) = 40 \cdot 10 + 60 \cdot 2 + 20 \cdot 3 + 80 \cdot 8 + 20 \cdot 1 = 1240.$$

2.5. Алгоритм решения транспортной задачи

Обобщая материал от постановки математической модели транспортной задачи до составления первоначального опорного плана и построения оптимального плана, можно предложить следующий алгоритм решения транспортной задачи.

1. Определяют модель задачи. В случае открытой модели вводят фиктивного потребителя (если спрос меньше предложения) или фиктивного поставщика (если спрос больше предложения). Спрос фиктивного потребителя устанавливают равным превышению предложения над спросом, а резервы фиктивного поставщика – превышению спроса над предложением. Тарифы на перевозки к фиктивному потребителю или от фиктивного поставщика считают равными нулю.

2. Составляют исходный (первоначальный) план распределения поставок (по любому методу) или используют метод дифференциальных рент.

3. Проверяют полученный план на оптимальность методом потенциалов. В случае метода дифференциальных рент: если удалось распределить весь груз, имеющийся в пунктах отправления, между пунктами назначения, то получен оптимальный план.

4. Если план не является оптимальным, то для получения нового, улучшенного распределения поставок строят цикл перераспределения для клетки, имеющей наибольшую разность. В методе дифференциальных рент находят избыточные и недостаточные строки, промежуточную ренту.

Новое распределение поставок записывают в таблицу и снова используют метод потенциалов или проверяют, весь ли груз распределен (в случае метода дифференциальных рент).

5. Переходя от одной таблицы к другой, повторяют п. 3 и 4, пока на каком-то этапе не будет выполнено условие оптимальности или распределен весь груз (метод дифференциальных рент).

6. Вычисляют минимальные затраты на перевозки.

Заключение

В заключении необходимо привести основные выводы об используемых методах решения задач линейного программирования, описать их преимущества и недостатки с указанием сфер их практического применения.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Гмурман, В.Е. Теория вероятностей и математическая статистика [Текст] / В.Е. Гмурман. – М.: Высшая школа, 2003. – 480 с.

2. Данилов, А.М. Теория вероятностей и математическая статистика [Текст]: учеб. пособие / А.М. Данилов, А.А. Данилов. – Пенза: Пензенский гос. архит.-строит. ин-т, 1996. – 167 с.

3. Зейдель, А. Н. Элементарные оценки ошибок измерений [Текст] / А.Н. Зейдель. – М.: Наука, 1967. – 88 с.

4. Ивченко, Г.И. Сборник задач по математической статистике [Текст]: учеб. пособие / Г.И. Ивченко, Ю.И. Медведев, А.В. Чистяков. – М.: Высшая школа, 1989. – 256 с.

5. Линник, Ю.В. Метод наименьших квадратов и основы теории обработки наблюдений [Текст] / Ю.В. Линник. – М.: Физматгиз, 1962. – 114 с.

6. Налимов, В.В. Применение математической статистики при анализе вещества [Текст] / В.В. Налимов. – М.: Физматгиз, 1960. – 430 с.

7. Супрун, А.Н. Вычислительная математика для инженеров-экологов [Текст]: методическое пособие /А.Н. Супрун, В.В. Найденко. – М.: Изд-во АСВ, 1996. – 391 с.

8. Тейлор, Дж. Введение в теорию ошибок [Текст] / Дж. Тейлор. – М.: Мир, 1985. – 272 с.

9. Щиголев Б.М. Математическая обработка наблюдений [Текст] / Б.М. Щиголев. – М.: Физматгиз, 1962. – 344 с.

10. Адлер, Ю.П. Введение в планирование эксперимента [Текст] / Ю.П. Адлер. – М.: Металлургия, 1969. – 157 с.

11. Львовский, Е.Н. Статистические методы построения эмпирических формул [Текст]: учеб. пособие /Е.Н. Львовский. – М.: Высшая школа,1988. – 239 с.

12. Монтгомери, Д.К. Планирование и анализ данных [Текст] / Д.К. Монтгомери. – Л.: Судостроение, 1980. – 384 с.

13. Кальгин, А.А. Лабораторный практикум по технологии бетонных и железобетонных изделий [Текст] / А.А. Кальгин, Ф.Г. Сулейманов. – М.: Высш. шк., 1994. – 272 с.

14. Королев, Е.В. Организация и проведение научно-исследовательской работы студентов технических специальностей [Текст] / Е.В. Королев, В.И. Логанина, В.С. Демьянова, Р.В. Тарасов. – Пенза: ПГУАС, 2012. – 172 с.

Приложение

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ФГБОУ ВО «ПЕНЗЕНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ АРХИТЕКТУРЫ И СТРОИТЕЛЬСТВА»
КАФЕДРА «Управление качеством и ТСП»

ЗАДАНИЕ НА КУРСОВУЮ РАБОТУ

по курсу «Методы оптимизации в технологических и технических задачах»

Вариант 1

Студент ____________________________________ Группа ___*СиМ*-31

1.Тема: **Решение задач линейного программирования**
2.Срок представления к защите: «   » _______________ 2015 г
3. Содержание пояснительной записки:
Введение.
1 Задачи линейного программирования с двумя переменными
1.1 Графический метод
1.2 Симплекс– метод

$z = 3x_1 + 2x_2 \to \max$

$$\begin{cases} x_2 \le 5 \\ -25x_1 + 10x_2 \le 0 \\ 10x_1 + 6x_2 \le 120 \end{cases}$$

$x_1, x_2 \ge 0$

1.3 Метод больших штрафов

$z = x_1 + 5x_2 + 2x_4 \to \min$

$$\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 - 2x_3 - 2x_4 = 7 \\ 2x_1 + x_2 - 3x_3 - 4x_4 = 3 \end{cases}$$

$x_1, x_2, x_3, x_4 \ge 0$

2 Решение транспортной задачи.
2.1 Нахождение начального базисного решения
а) Метод северо-западного угла
б) Метод минимальной стоимости
в) Метод Фогеля

2.2 Метод потенциалов

a_i / b_j	10	25	15	40	30
30	2	3	4	7	2
50	5	6	1	8	3
10	2	10	3	1	4
30	5	7	5	2	6

Заключение
Список использованных источников.

Руководитель работы: /к.т.н., доцент Р.В Тарасов/
подпись, дата, инициалы, фамилия

Задание принял: ____
подпись, дата

Сроки выполнения работы
25 % – 02.03.15 75 % – 27.04.15 Сдача работы – с 26.05.15 по 7.06.15
50 % – 30.03.15 100 % – 25.05.15

Продолжение приложения

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ФГБОУ ВО «ПЕНЗЕНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ АРХИТЕКТУРЫ И СТРОИТЕЛЬСТВА»

КАФЕДРА «Управление качеством и ТСП»

ЗАДАНИЕ НА КУРСОВУЮ РАБОТУ
по курсу «Методы оптимизации в технологических и технических задачах»
Вариант 2

Студент ____________________________________ Группа *СиМ*-31

1.Тема: **Решение задач линейного программирования**
2.Срок представления к защите: «   »   2015 г
3. Содержание пояснительной записки:
Введение.
1 Задачи линейного программирования с двумя переменными
1.1 Графический метод
1.2 Симплекс– метод

$$z = 2x_1 - 2x_2 \to \max$$

$$\begin{cases} x_2 \le 5 \\ -25x_1 + 10x_2 \le 0 \\ x_1 \le 9 \end{cases}$$

$$x_1, x_2 \ge 0$$

1.3 Двухэтапный метод

$$z = -x_1 + 5x_3 + 5x_4 \to \min$$

$$\begin{cases} 5x_1 + x_2 - 2x_3 - 2x_4 = 6 \\ x_1 + 7x_2 - 3x_3 - 4x_4 = 8 \end{cases}$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4 \ge 0$$

2 Решение транспортной задачи.
2.1 Нахождение начального базисного решения
а) Метод северо-западного угла
б) Метод минимальной стоимости
в) Метод Фогеля

2.2 Метод потенциалов

a_i \ b_j	50	45	15	20	30
20	1	2	6	3	1
40	4	7	5	2	3
50	8	1	5	3	4
50	2	7	3	1	5

Заключение
Список использованных источников.

Руководитель работы: ______________________ */к.т.н., доцент Р.В Тарасов/*
подпись, дата, инициалы, фамилия

Задание принял: ____
подпись, дата

Сроки выполнения работы

25 % – 2.03.15 75% – 27.04.15 Сдача работы – со 26.05.15 по 7.06.15

50 % – 30.03.15 100 % – 25.05.15

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие ...3
Введение ...4
1. Задание на курсовую работу...5
2. Состав и содержание курсовой работы ...5
3. Последовательность выполнения курсовой работы ...6
4. Консультации и защита курсовой работы...6
5. Расчетно-пояснительная записка ...7
Библиографический список ...63
Приложение ...64

Учебное издание

Тарасов Роман Викторович
Тарасов Дмитрий Викторович

МЕТОДЫ ОПТИМИЗАЦИИ
В ТЕХНОЛОГИЧЕСКИХ И ТЕХНИЧЕСКИХ ЗАДАЧАХ

Учебно-методическое пособие
для выполнения курсовой работы по направлению подготовки 27.03.01
«Стандартизация и метрология»

В авторской редакции
Верстка Н.В. Кучина

Подписано в печать 20.06.16. Формат 60×84/16.
Бумага офисная «Снегурочка». Печать на ризографе.
Усл.печ.л. 3,95. Уч.-изд.л. 4,25. Тираж 80 экз.
Заказ № 442.

Издательство ПГУАС.
440028, г. Пенза, ул. Германа Титова, 28.