МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Федеральное государственное бюджетное
образовательное учреждение высшего образования
«Пензенский государственный университет
архитектуры и строительства»
(ПГУАС)

Н.А. Очкина

ФИЗИКА

ФИЗИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ МЕХАНИКИ. МОЛЕКУЛЯРНО-КИНЕТИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ И ТЕРМОДИНАМИКА

Рекомендовано Редсоветом университета
в качестве учебного пособия для студентов,
обучающихся по направлению подготовки 08.05.01 «Строительство
уникальных зданий и сооружений»

Под общей ред. доктора технических наук,
профессора Г.И. Грейсуха

Пенза 2016

УДК 53(075.8)
ББК 22.3я73
О-95

Рецензенты: кандидат технических наук, доцент С.В. Тертычная (ПГУ);
кандидат физико-математических наук, доцент П.П. Мельниченко (ПГУАС)

Очкина Н.А.

О-95 Физика. Физические основы механики. Молекулярно-кинетическая теория и термодинамика: учеб. пособие по направлению подготовки 08.05.01 «Строительство уникальных зданий и сооружений» / Н.А. Очкина; под общ. ред. д-ра техн. наук, проф. Г.И. Грейсуха. – Пенза: ПГУАС, 2016. – 192 с.

В учебном пособии кратко изложен материал по девяти разделам механики и трем разделам молекулярной физики и термодинамики вузовского курса общей физики. Рассмотрены основные вопросы кинематики и динамики поступательного и вращательного движений, элементы механики сплошных сред и специальной теории относительности, законы сохранения, а также основные положения молекулярной физики и термодинамики. Каждая глава содержит основной теоретический материал, краткие выводы по теме, вопросы для самоконтроля и повторения.

Подготовлено на кафедре «Физика и химия» и предназначено для использования студентами, обучающимися по направлению подготовки 08.05.01 «Строительство уникальных зданий и сооружений», при изучении дисциплины «Физика».

ПРЕДИСЛОВИЕ

Настоящее учебное пособие написано в соответствии с программой курса «Физика» ФГОС ВО третьего поколения для направления 08.05.01 «Строительство уникальных зданий и сооружений» и имеет целью совершенствование следующих компетенций:

- готовность к саморазвитию, самореализации, использованию творческого потенциала.
- способность к самоорганизации и самообразованию.
- владение эффективными правилами, методами и средствами сбора, обмена, хранения и обработки информации, навыками работы с компьютером как средством управления информацией.

Пособие содержит двенадцать глав, в которых последовательно излагаются основные вопросы, предусмотренные государственными образовательными стандартами для изучения разделов «Механика» и «Молекулярно-кинетическая теория и термодинамика» по дисциплине «Физика» в высших учебных заведениях.

В каждой главе дается подробное изложение основ теории и приводятся вопросы для самоконтроля, которые помогут студентам самостоятельно оценить качество усвоения теоретического материала.

Систематическая работа с пособием, в учебной аудитории, и во внеаудиторное время способствует формированию у студентов:

знаний сущности основных физических явлений и физических законов в области механики и термодинамики;

умений использовать основные законы механики и термодинамики в профессиональной деятельности; применять методы компьютерного моделирования для теоретического и экспериментального исследований;

вырабатывает способность *владеть* эффективными правилами, методами и средствами сбора, обмена, хранения и обработки информации, навыками работы с компьютером как средством управления информацией; приемами правильной эксплуатации основных приборов и оборудования; методами обработки и интерпретирования результатов эксперимента.

В тексте учебного пособия наиболее важные положения и термины, а также формулировки законов выделены *курсивом*. Это способствует более эффективному усвоению материала студентами.

ВВЕДЕНИЕ

Механика – это один из разделов физики, посвященный изучению закономерностей простейшей формы движения материи – механического движения. *Механическим движением* называется изменение взаимного расположения тел относительно друг друга в пространстве с течением времени. Любое механическое движение относительно.

Механика состоит из трех подразделов: кинематики, динамики и статики.

Кинематика изучает движение тел без учета вызывающих его причин. Она оперирует такими величинами как перемещение, пройденный путь, время, скорость движения и ускорение.

Динамика исследует законы и причины, вызывающие движение тел, т.е. изучает движение материальных тел под действием приложенных к ним сил. К кинематическим величинам в динамике добавляются величины – сила и масса.

В статике исследуют условия равновесия системы тел. Статика излагается в специальных разделах механики и здесь отдельно рассматриваться не будет.

Предметом изучения *молекулярной физики* является движение больших совокупностей молекул. При изучении их используются статистический и термодинамический методы.

Молекулярная физика исходит из представлений о молекулярном строении вещества. Поскольку число частиц в макросистеме велико, закономерности в ней имеют статистический, т.е. вероятностный, характер. На основе определенных моделей молекулярная физика позволяет объяснить наблюдаемые свойства макросистем (систем, состоящих из очень большого числа частиц) как суммарный эффект действий отдельных молекул.

В *термодинамике* используют понятия и физические величины, относящиеся к системе в целом, например, объем, давление и температура. Термодинамика основана на общих принципах, или началах, которые представляют собой обобщение опытных фактов.

Термодинамический и статистический методы изучения макросистем дополняют друг друга. Термодинамический метод позволяет изучать явления без знания их внутренних механизмов. Статистический метод позволяет понять суть явлений, установить связь поведения системы в целом с поведением и свойствами отдельных частиц.

1. КИНЕМАТИКА ПОСТУПАТЕЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ И ТВЕРДОГО ТЕЛА

1.1. Радиус-вектор материальной точки

Материальная точка движется относительно других тел. Тело, по отношению к которому рассматривается данное механическое движение, называется *телом отсчёта*. Тело отсчёта выбирают произвольно в зависимости от решаемых задач.

Для определения положения материальной точки относительно тела отсчета, с ним связывают систему координат, например декартову. Для описания движения необходимо не только определять координаты материальной точки, но и фиксировать соответствующие моменты времени. Для этой цели используют часы.

Система координат, тело отсчета, с которым она связана и прибор для измерения времени образуют *систему отсчета*.

Положение точки M относительно системы отсчета можно задать не только с помощью трех декартовых координат x, y, z, но также с помощью радиус-вектора $\vec{r}$, проведенного из начала координат в эту точку (рис. 1.1).

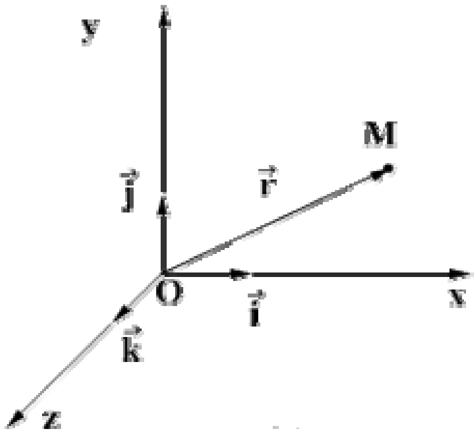


Рис. 1.1

Если $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ – единичные векторы (орты) осей прямоугольной декартовой системы координат, то

$$\vec{r} = \vec{i}x + \vec{j}y + \vec{k}z. \quad (1.1)$$

Модуль радиус-вектора $\vec{r}$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

1.2. Кинематические уравнения движения материальной точки

При движении материальной точки M ее координаты x, y, z и радиус-вектор $\vec{r}$ изменяются с течением времени t. Поэтому для задания закона движения материальной точки необходимо указать либо вид функциональной зависимости всех трех ее координат от времени:

$$x = x(t),\ y = y(t),\ z = z(t), \quad (1.2)$$

либо зависимость радиус-вектора точки от времени

$$\vec{r} = \vec{r}(t). \qquad (1.3)$$

Три скалярных уравнения (1.2) или эквивалентное им одно векторное уравнение (1.3) называются *кинематическими уравнениями движения материальной точки.*

1.3. Траектория материальной точки, путь, перемещение

Траекторией материальной точки называется линия, описываемая этой точкой в пространстве при ее движении. В зависимости от формы траектории различают прямолинейное и криволинейное движения точки. Если все участки траектории точки лежат в одной плоскости, то движение точки называют *плоским.* Уравнения (1.2) и (1.3) задают траекторию точки в так называемой параметрической форме. Роль параметра играет время t. Решая эти уравнения совместно и, исключая из них время t, находят уравнение траектории.

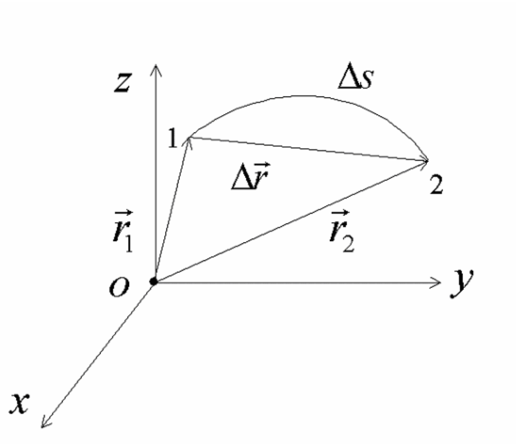


Рис. 1.2

Длина траектории, описанной материальной точкой за некоторый промежуток времени Δt называется путем ΔS, пройденным точкой за это время.

Вектор, проведенный из начального положения (точка 1) в конечное положение (точка 2) называется *перемещением* $\Delta\vec{r}$.

Из рис. 1.2 видно, что вектор перемещения равен приращению радиус-вектора точки за промежуток времени Δt.

$$\Delta\vec{r} = \vec{r}(t + \Delta t) - \vec{r}(t). \qquad (1.4)$$

При прямолинейном движении вектор перемещения совпадает с соответствующим участком траектории. В общем случае $\Delta s \geq |\Delta\vec{r}|$.

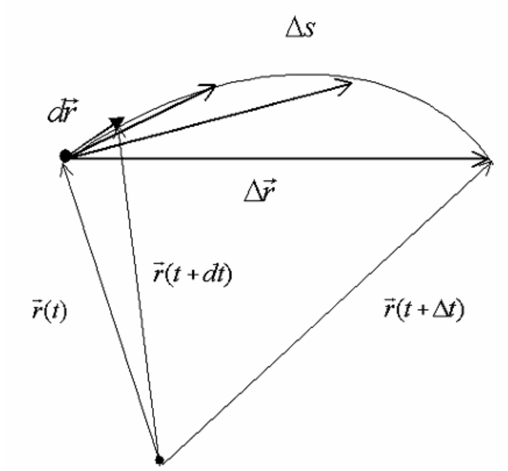


Рис. 1.3

Будем неограниченно уменьшать интервал времени движения Δt. При $\Delta t << t$ интервал времени называется *бесконечно малым* или *элементарным* и обозначается dt. За бесконечно малый интервал времени dt частица проходит бесконечно малый путь ds и совершает бесконечно малое перемещение $d\vec{r}$, которое равно: $d\vec{r} = \vec{r}(t + dt) - \vec{r}(t)$ (рис. 1.3).

В пределе, при $dt \to 0$, вектор $d\vec{r}$ сливается с участком траектории ds, причем вектор $d\vec{r}$ направлен по касательной к траектории и модуль вектора $d\vec{r}$ равен длине элементарного пути ds:

$$\left| d\vec{r} \right| = ds.$$

1.4. Скорость

Для описания движения материальной точки вводят векторную физическую величину – скорость, определяющую как быстроту движения, так и направление движения в данный момент времени.

Пусть материальная точка движется по криволинейной траектории MN так, что в момент времени t она находится в точке M, а в момент времени $t + \Delta t$ в точке N. Радиус-векторы точек M и N соответственно равны $\vec{r}$ и $\vec{r} + \Delta\vec{r}$, а длина дуги MN равна ΔS (рис. 1.4).

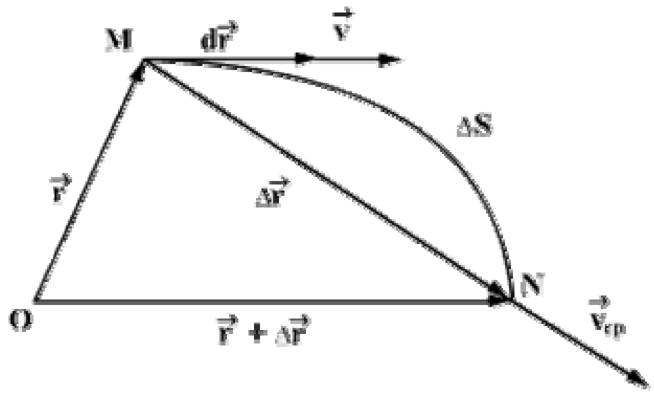


Рис. 1.4

Вектором средней скорости $\langle \vec{\upsilon} \rangle$ *точки в интервале времени от* t *до* $t + \Delta t$ называют отношение вектора перемещения $\Delta\vec{r}$ к промежутку времени Δt, за который это перемещение произошло:

$$\langle \vec{\upsilon} \rangle = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}. \tag{1.5}$$

Вектор средней скорости направлен в сторону вектора перемещения $\Delta\vec{r}$, т.е. вдоль хорды MN.

Предел отношения $\dfrac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}$ при $\Delta t \to 0$ представляет собой вектор скорости $\vec{\upsilon}$ материальной точки в данный момент времени t, то есть в момент прохождения ее через точку M траектории.

$$\vec{\upsilon} = \lim_{\Delta t \to 0} \langle \vec{\upsilon} \rangle = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt}. \tag{1.6}$$

Она называется *мгновенной скоростью.*

В процессе уменьшения величины Δt точка N приближается к точке M, и хорда MN, поворачиваясь вокруг точки M, в пределе совпадает по направлению с касательной к траектории в точке M. Поэтому векторы $d\vec{r}$ и $\vec{\upsilon}$ движущейся точки направлены по касательной к траектории в сторону движения.

Вектор мгновенной скорости $\vec{\upsilon}$ материальной точки можно разложить на три составляющих вектора, направленных вдоль осей прямоугольной декартовой системы координат.

$$\vec{\upsilon} = \vec{\upsilon}_x + \vec{\upsilon}_y + \vec{\upsilon}_z = \upsilon_x \vec{i} + \upsilon_y \vec{j} + \upsilon_z \vec{k}, \tag{1.7}$$

где $\upsilon_x, \upsilon_y, \upsilon_z$ – проекции вектора скорости на оси координат x, y, z.

Подставляя в (1.6) значения для радиус-вектора материальной точки (1.1) и выполнив почленное дифференцирование, получим:

$$\upsilon = \frac{dx}{dt}\vec{i} + \frac{dy}{dt}\vec{j} + \frac{dz}{dt}\vec{k}. \tag{1.8}$$

Из сопоставления выражений (1.7) и (1.8) следует, что проекции вектора мгновенной скорости материальной точки на оси прямоугольной декартовой системы координат равны первым производным по времени от соответствующих координат точки:

$$\upsilon_x = \frac{dx}{dt}, \upsilon_y = \frac{dy}{dt}, \upsilon_z = \frac{dz}{dt}. \tag{1.9}$$

Поэтому модуль мгновенной скорости:

$$\upsilon = \left|\vec{\upsilon}\right| = \sqrt{\upsilon_x^2 + \upsilon_y^2 + \upsilon_z^2} = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2}. \tag{1.10}$$

В системе СИ единица измерения скорости называется *метр в секунду* $\left(\frac{\text{м}}{\text{с}}\right)$.

Движение, при котором направление вектора скорости материальной точки не изменяется, называется *прямолинейным.*

Если численное значение (модуль) мгновенной скорости точки остается во время движения неизменным, то такое движение называется *равномерным.*

Если же за произвольные равные промежутки времени точка проходит разные расстояния, то модуль ее мгновенной скорости с течением времени изменяется. Такое движение называют *неравномерным.*

Такое движение характеризуют средней путевой скоростью $\langle\vec{\upsilon}\rangle_\text{п}$. Величина средней путевой скорости равна численному значению скорости такого равномерного движения, при котором на прохождение пути ΔS затрачивается то же время Δt, что и при заданном неравномерном движении:

$$\langle \vec{\upsilon} \rangle_{\text{п}} = \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t}. \quad (1.11)$$

Так как $\Delta S = |\Delta \vec{r}|$ только в случае прямолинейного движения с неизменной по направлению скоростью, то

$$\langle \vec{\upsilon} \rangle_{\text{п}} = \frac{\Delta S}{\Delta t}. \quad (1.12)$$

В общем случае

$$\langle \upsilon \rangle \neq |\langle \upsilon \rangle_{\text{п}}|.$$

1.5. Закон сложения скоростей

Если материальная точка одновременно участвует в нескольких движениях, то результирующее перемещение $d\vec{r}$ в соответствии с законом независимости движений, равно векторной (геометрической) сумме элементарных перемещений, обусловленных каждым из этих движений в отдельности:

$$d\vec{r} = d\vec{r}_1 + d\vec{r}_2 + \ldots + d\vec{r}_n.$$

В соответствии с определением (1.6):

$$\vec{\upsilon} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d\vec{r}_1}{dt} + \frac{d\vec{r}_2}{dt} + \ldots + \frac{d\vec{r}_n}{dt} = \vec{\upsilon}_1 + \vec{\upsilon}_2 + \ldots + \vec{\upsilon}_n = \sum_{i=1}^{n} \vec{\upsilon}_i. \quad (1.13)$$

Таким образом, вектор скорости $\vec{\upsilon}$ результирующего движения равен геометрической сумме векторов скоростей $\vec{\upsilon}$ всех движений, в которых участвует материальная точка, (это положение носит название *закона сложения скоростей*).

1.6. Ускорение

Ускорение характеризует быстроту изменения скорости, то есть изменение величины скорости за единицу времени.

Вектор среднего ускорения равен отношению вектора изменения скорости $\Delta\vec{\upsilon}$ к промежутку времени Δt, в течение которого это изменение произошло:

$$\langle \vec{a} \rangle = \frac{\Delta \vec{\upsilon}}{dt}.$$

Направление вектора среднего ускорения совпадает с направлением вектора $\Delta\vec{\upsilon}$.

Вектор мгновенного ускорения равен пределу вектора среднего ускорения при стремлении промежутка времени Δt к нулю:

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \langle \vec{a} \rangle = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{\upsilon}}{\Delta t} = \frac{d\vec{\upsilon}}{dt} = \frac{d^2 r}{dt^2}. \qquad (1.14)$$

В проекциях на соответствующие координаты оси:

$$\vec{\alpha} = \alpha_x \vec{i} + \alpha_y \vec{j} + \alpha_z \vec{k},$$

или

$$\vec{\alpha} = \frac{d\upsilon_x}{dt}\vec{i} + \frac{d\upsilon_y}{dt} j + \frac{d\upsilon_z}{dt}\vec{k} = \frac{d^2 x}{dt^2}\vec{i} + \frac{d^2 y}{dt}\vec{j} + \frac{d^2 z}{dt}\vec{k}. \qquad (1.15)$$

В системе СИ единица измерения ускорения называется *метр в секунду за секунду* $\left(\frac{\text{м}}{\text{с}^2}\right)$.

1.7. Криволинейное движение. Тангенциальное и нормальное ускорения

Рассмотрим движение материальной точки по криволинейной плоской траектории. Вектор скорости в любой точке траектории направлен по касательной к ней.

Допустим, что в точке M траектории вектор скорости был равен $\vec{\upsilon}$, а в точке M_1 стал $\vec{\upsilon}_1$ (рис. 1.5).

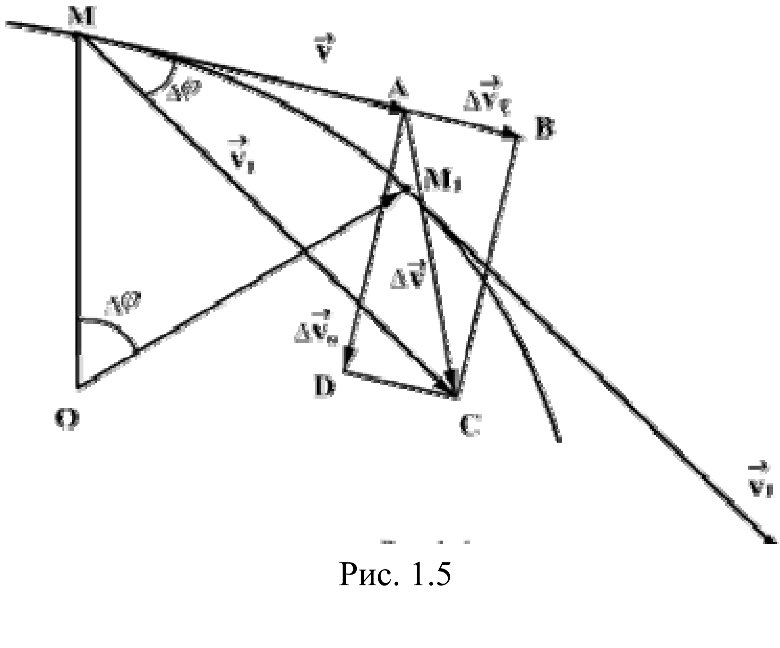


Рис. 1.5

Будем считать, что промежуток времени, за который материальная точка перемещается из положения M в M_1 настолько мал, что изменением величины и направления вектора ускорения можно пренебречь.

Для того, чтобы найти вектор изменения скорости $\Delta\vec{\upsilon}$, необходимо из вектора $\vec{\upsilon}_1$ вычесть вектор $\vec{\upsilon}$:

$$\Delta\vec{\upsilon} = \vec{\upsilon}_1 - \vec{\upsilon}.$$

Для этого перенесем $\vec{\upsilon}_1$ параллельно самому себе, совмещая его начало с точкой M. Разность двух векторов равна вектору $\Delta\vec{\upsilon}$, проведенному из конца вычитаемого к концу уменьшаемого вектор. Модуль вектора $\Delta\vec{\upsilon}$ равен длине отрезка AC.

Разложим вектор $\Delta\vec{\upsilon}$ на два составляющих вектора $\Delta\vec{\upsilon}_\tau$ и $\Delta\vec{\upsilon}_n$, модули которых равны соответственно AB и AD.

$$\Delta\vec{\upsilon} = \Delta\vec{\upsilon}_n + \Delta\vec{\upsilon}_\tau.$$

По определению:

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{\upsilon}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{\upsilon}_\tau}{\Delta t} + \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{\upsilon}_n}{\Delta t} = \vec{a}_\tau + \vec{a}_n \tag{1.16}$$

Тангенциальное ускорение $\vec{a}_\tau$ характеризует быстроту изменения модуля мгновенной скорости.

$$a_\tau = \frac{d\upsilon}{dt}. \tag{1.17}$$

Вектор $\vec{a}_\tau$ направлен по касательной к траектории в сторону вектора скорости, если $\upsilon_1 > \upsilon$, и в сторону, противоположную вектору скорости, если $\upsilon_1 < \upsilon$.

Нормальное ускорение $\vec{a}_n$ характеризует быстроту изменения направления вектора мгновенной скорости.

Вычислим модуль вектора $\vec{a}_n$. Для этого проведем перпендикуляры через точки M и M_1 к касательным к траектории (рис. 1.5). O – точка пересечения перпендикуляров. При достаточно малом Δt участок криволинейной траектории можно считать частью окружности радиуса R, называемого радиусом кривизны траектории в окрестностях данной точки. Треугольники MOM_1 и MBC подобны, потому, что являются равнобедренными треугольниками с одинаковыми углами при вершинах.

Поэтому:

$$\frac{BC}{MM_1} = \frac{MB}{M_1O},$$

или

$$\frac{\Delta\upsilon_n}{\Delta S} = \frac{\upsilon}{R}.$$

Но

$$\Delta S = \langle\upsilon\rangle\Delta t,$$

тогда:

$$\frac{\Delta\upsilon_n}{\langle\upsilon\rangle\Delta t} = \frac{\upsilon}{R}.$$

Переходя к пределу при $\Delta t \to 0$ и учитывая, что при этом $\langle\upsilon\rangle = \upsilon$, находим:

$$a_n = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\upsilon_n}{\Delta t} = \frac{\upsilon^2}{R}. \qquad (1.18)$$

Так как при $\Delta t \to 0$ угол $\Delta\varphi \to 0$, направление вектора $\vec{a}_n$ совпадает с направлением нормали к вектору скорости $\vec{\upsilon}$, т.е. вектор $\vec{a}_n$ перпендикулярен к вектору $\vec{\upsilon}$.

В случае движения тела по окружности *нормальное ускорение* $\vec{a}_n$ называют *центростремительным.*

Вектор полного ускорения $\vec{a}$ определяется векторной суммой тангенциального нормального ускорений (1.16).

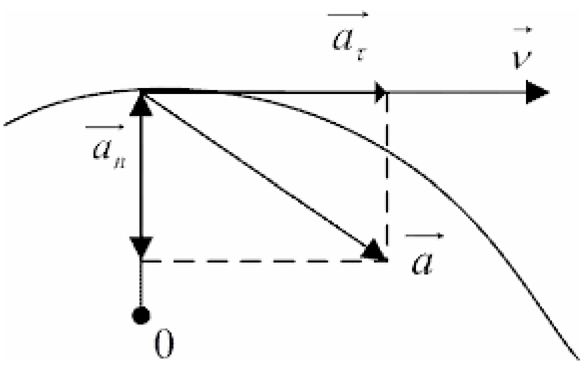


Рис. 1.6

Так как векторы этих ускорений взаимно перпендикулярны, то модуль полного ускорения равен:

$$a = \sqrt{a_n^2 + a_\tau^2} \qquad (1.19)$$

Направление вектора полного ускорения определяется углом между векторам $\vec{a}$ и $\vec{a}_\tau$:

$$tg\alpha = \frac{a_n}{a_\tau}.$$

Проанализируем некоторые частные случаи движения:

а) $a_\tau = 0;\ a_n = 0$.

Так как $a_\tau = \dfrac{d\upsilon_\tau}{dt} = 0,$ то $\upsilon_\tau = const,$ значит, движение равномерное.

Если $a_n = \dfrac{\upsilon^2}{R} = 0,$ при $\upsilon \neq 0$, то $R \to \infty$, значит, траектория движения – прямая линия. Таким образом, в этом случае движение материальной точки *прямолинейное равномерное.*

б) $a_\tau = \text{const}$, $a_n = 0$.

Если $a_\tau = \frac{d\upsilon_\tau}{dt} = const$, то за равные промежутки времени скорость изменяется на одинаковую величину, значит, движение равнопеременное. При $a_n = \frac{\upsilon^2}{R} = 0$ траектория движения представляет собой прямую линию. Таким образом, в данном случае материальная точка совершает *прямолинейное равнопеременное* движение.

в) $a_\tau = 0$, $a_n = \text{const}$.

Если $a_\tau = \frac{d\upsilon_\tau}{dt} = 0$, то движение равномерное. При $a_n = \frac{\upsilon^2}{R} = \text{const}$, $R = \text{const}$, траектория движения – окружность. Значит, в данном случае материальная точка совершает *равномерное движение по окружности*.

г) $a_\tau = 0$, $a_n = f(t)$.

Если a_n является функцией времени, то движение криволинейное. Так как $a_\tau = 0$, то движение равномерное. Таким образом, в этом случае материальная точка совершает *равномерное криволинейное* движение.

д) $a_\tau = f(t)$, $a_n = f(t)$.

Если и тангенциальное, и нормальное составляющие ускорения являются функциями времени, то движение *неравномерное криволинейное*.

1.8. Методические указания к решению задач по кинематике

Анализируя полученные формулы, в кинематике можно выделить четыре основных типа задач:

1. *Общая прямая задача кинематики:*

По известной зависимости радиус-вектора от времени $\vec{r}(t)$ необходимо определить, векторы скорости $\vec{\upsilon}$ и ускорения $\vec{a}$ и их модули υ и a, нормальную $\vec{a}_n$ и тангенциальную $\vec{a}_\tau$ составляющую ускорения, радиус кривизны траектории R.

2. *Общая обратная задача кинематики:*

По известным векторам скорости $\vec{\upsilon}$ или ускорения $\vec{a}$ необходимо определить вид траектории, т.е. найти радиус-вектор $\vec{r}$, а затем все остальные параметры траектории, указанные в пункте 1.

3. *Частная прямая задача кинематики*:

По известной зависимости пути от времени $S(t)$ необходимо найти модуль скорости $\upsilon(t)$ и модуль ускорения $a(t)$ тела:

$$\upsilon = \frac{dS}{dt} \text{ и } a = \frac{d\upsilon}{dt}.$$

Векторы $\vec{r}, \vec{\upsilon}$, $\vec{a}$, а также $\vec{a}_n$ и $\vec{a}_\tau$ в такой задаче не могут быть определены.

4. *Частная обратная задача кинематики*:

По известным зависимостям скорости $\upsilon(t)$ или ускорения $a(t)$ необходимо определить зависимость пути от времени $S(t)$:

$$\upsilon = \int a(t)dt\,, \quad S = \int \upsilon(t)dt\,.$$

Вопросы для самоконтроля

1. Что является предметом изучения механики? Какова структура механики?
2. Что такое физическая модель? Какие физические модели использует механика для описания движения материальных объектов?
3. Что изучает кинематика ?
4. Сформулируйте две основные задачи кинематики.
5. Что называют механическим движением?
6. Какое движение называется поступательным?
7. Что называют телом отсчета?
8. Что представляет собой система отсчета?
9. Опишите два способа задания положения материальной точки.
10. Что называется траекторией точки?
11. Зависит ли вид траектории от выбора системы отсчёта? Приведите примеры.
12. Что такое путь?
13. Что называется вектором перемещения?
14. Всегда ли длина вектора перемещения равна пройденному пути?
15. Какие существуют способы задания движения точки, и в чём заключается каждый из них?
16. Что характеризует скорость?
17. Дайте определения средней скорости и мгновенной скорости.
18. Как направлен вектор средней скорости? Мгновенной скорости?
19. Как связан модуль вектора мгновенной скорости с его проекциями на оси координат?
20. Что характеризует ускорение?
21. Дайте определения среднего ускорения и мгновенного ускорения.
22. Что характеризуют тангенциальная и нормальная составляющие ускорения? Каковы их модули?
23. Как можно классифицировать движения в зависимости от величин тангенциальной и нормальной составляющих ускорения?

24. Что представляют собой следующие интегралы: а) $\int a(t)dt$; б) $\int \upsilon(t)dt$?

25. Почему в случае криволинейного движения точки даже при $\upsilon = \text{const}$ вектор полного ускорения точки отличен от нуля?

26. Известно, что при равномерном прямолинейном движении точки тангенциальное ускорение равно нулю. Имеет ли место обратное заключение?

27. При прямолинейном движении радиус кривизны траектории равен бесконечности, а нормальное ускорение равно нулю. Имеет ли место обратное заключение?

28. В каком случае криволинейного движения точки вектор полного ускорения составляет тупой угол с вектором скорости точки?

2. КИНЕМАТИКА ВРАЩАТЕЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ

2.1. Понятие вращательного движения. Вектор углового перемещения

Абсолютно твердым телом (твердым телом) называется система материальных точек, расстояния между которыми остаются неизменными.

Движение твердого тела, при котором все его точки описывают окружности, центры которых лежат на некоторой прямой, называется *вращением вокруг неподвижной оси*. Ее называют *осью вращения*. Она может проходить через какую-либо точку тела или лежать за его пределами.

При вращательном движении, в отличие от поступательного, скорости $\vec{\upsilon}$ разных точек тела неодинаковы. Поэтому скорость $\vec{\upsilon}$ какой-либо точки вращающегося тела не может служить характеристикой движения всего тела.

Пусть при вращении твердого тела точка M движется по окружности радиуса R с центром O, лежащим на оси вращения O_1O_2 (рис. 2.1).

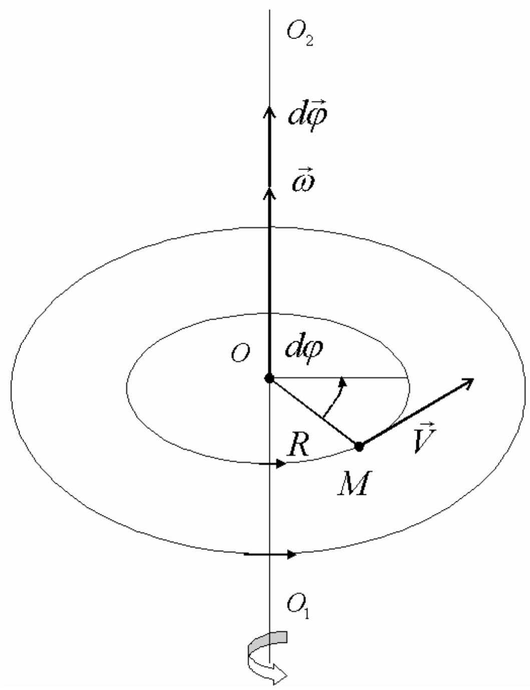


Рис. 2.1

За малый промежуток времени dt радиус R, соединяющий точку M с центром окружности, поворачивается на элементарный угол $d\varphi$, который называется элементарным углом поворота тела. Введем вектор $d\vec{\varphi}$, модуль которого равен элементарному углу поворота, выраженному в радианах ($|d\vec{\varphi}| = d\varphi$, рад). Направим вектор $d\vec{\varphi}$ вдоль оси вращения так, чтобы его направление и направление вращения тела были связаны *правилом правого буравчика*: направление вектора $d\vec{\varphi}$ совпадает с направлением поступательного движения острия правого буравчика, если ось буравчика расположить вдоль оси вращения, а рукоятку поворачивать в направлении вращения тела. Вектор $d\vec{\varphi}$ называется *вектором элементарного углового перемещения*.

Из рисунка видно, что $\vec{v} \perp R$, $R = \text{const}$, длина дуги dS, описанной точкой M за время dt

$$dS = Rd\varphi .$$

$d\vec{\varphi}$ – псевдовектор, он не имеет конкретной точки приложения и может быть проведен из любой точки оси.

2.2. Угловая скорость

Для характеристики быстроты вращательного движения вводится средняя угловая скорость

$$\langle\vec{\omega}\rangle = \frac{\Delta\vec{\varphi}}{\Delta t}.$$

Векторная величина

$$\vec{\omega} = \lim_{\Delta t\to 0}\langle\vec{\omega}\rangle = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\vec{\varphi}}{\Delta t} = \frac{d\vec{\varphi}}{dt}. \qquad (2.1)$$

называется *мгновенной угловой скоростью тела*.

$\vec{\omega}$ – псевдовектор, он направлен вдоль мгновенной оси вращения в сторону, определяемую правилом правого винта, т.е. также как вектор элементарного угла поворота $d\vec{\varphi}$ (рис. 2.2).

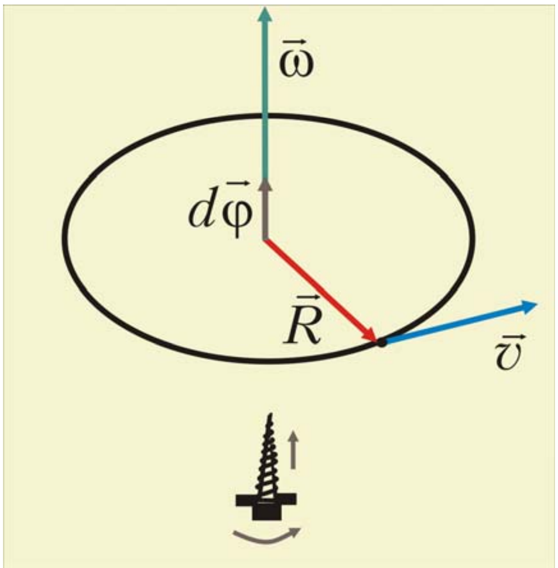


Рис. 2.2

Модуль вектора мгновенной угловой скорости

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt}.$$

В системе СИ единица измерения угловой скорости называется *радиан в секунду* $\left(\frac{рад}{с}\right)$.

Вращение с постоянной угловой скоростью называется *равномерным*, при этом:

$$\omega = \frac{\varphi}{t},$$

т.е. при равномерном вращении ω показывает, на какой угол поворачивается тело за единицу времени.

2.3. Период и частота обращения

Время, за которое тело совершает один полный оборот, т.е. поворачивается на угол, равный 2π, называется *периодом обращения*.

Так как промежутку времени $\Delta t = T$ соответствует угол поворота $\Delta\varphi = 2\pi$, то

$$\omega = \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} = \frac{2\pi}{T},$$

откуда

$$T = \frac{2\pi}{\omega}. \qquad (2.2)$$

Число оборотов ν в единицу времени, называется *частотой обращения*:

$$\nu = \frac{1}{T}, \qquad (2.3)$$

отсюда следует, что угловая скорость

$$\omega = 2\pi\nu. \qquad (2.4)$$

2.4. Угловое ускорение

В случае неравномерного движения мгновенная угловая скорость не остается постоянной.

Величина, характеризующая быстроту изменения мгновенной угловой скорости, называется *средним угловым ускорением*:

$$\langle \vec{\varepsilon} \rangle = \frac{\Delta \vec{\omega}}{\Delta t}. \qquad (2.5)$$

Вектор *мгновенного углового ускорения*:

$$\vec{\varepsilon} = \lim_{\Delta t \to 0} \langle \vec{\varepsilon} \rangle = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{\omega}}{\Delta t} = \frac{d\vec{\omega}}{dt}. \qquad (2.6)$$

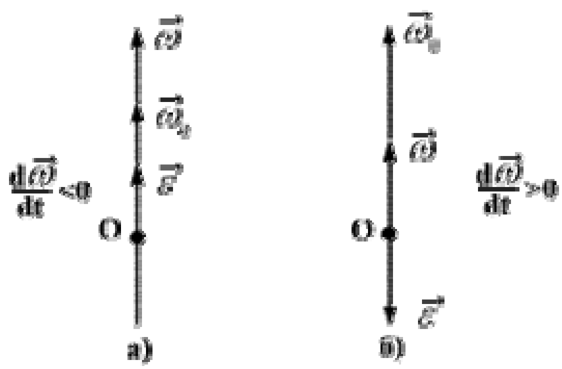


Рис. 2.3

Модуль вектора мгновенного углового ускорения:

$$\varepsilon = \frac{d\omega}{dt}.$$

Вектор $\vec{\varepsilon}$ мгновенного углового ускорения направлен вдоль оси вращения в ту же сторону, что и $\vec{\omega}$ при ускоренном вращении $\left(\frac{d\vec{\omega}}{dt} > 0\right)$ и в сторону, противоположную вектору $\vec{\omega}$ при замедленном вращении $\left(\frac{d\vec{\omega}}{dt} < 0\right)$ (рис 2.3а,б).

В системе СИ единица измерения углового ускорения называется *радиан в секунду за секунду* $\left(\frac{рад}{с^2}\right)$.

2.5. Связь угловых и линейных кинематических характеристик движения

Отдельные точки вращающегося тела имеют различные линейные скорости $\vec{\upsilon}$. Скорость каждой точки, будучи направлена по касательной к соответствующей окружности, непрерывно изменяет свое направление. Величина скорости линейной υ определяется угловой скоростью вращения тела ω и расстоянием R рассматриваемой точки от оси вращения.

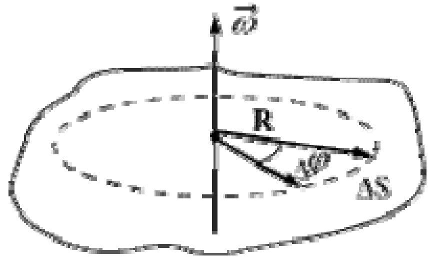


Рис. 2.4

Пусть за малый промежуток времени Δt тело повернулось на угол $\Delta\varphi$ (рис 2.4). Точка, находящаяся на расстоянии R от оси проходит при этом путь, равный

$$\Delta S = R\Delta\varphi .$$

Линейная скорость точки:

$$\upsilon = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta S}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} R\frac{\Delta\varphi}{\Delta t} = R \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} = R\frac{d\varphi}{dt} = \omega R. \qquad (2.7)$$

Найдем линейные ускорения точек вращающегося тела. Нормальное ускорение:

$$a_n = \frac{\upsilon^2}{R}.$$

Подставляя в эту формулу значение скорости из (2.7), получим:

$$a_n = \omega^2 R . \qquad (2.8)$$

Тангенциальное ускорение

$$a_\tau = \frac{d\upsilon}{dt},$$

или

$$a_\tau = \frac{d(\omega R)}{dt} = R\frac{d\omega}{dt} = R\varepsilon. \qquad (2.9)$$

Таким образом, как нормальное, так и, тангенциальное ускорения растут линейно с расстоянием точки от оси вращения.

Модуль полного линейного ускорения:

$$a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2} = \sqrt{\left(R\varepsilon\right)^2 + \left(\omega^2 R\right)^2} = R\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}.$$

Вопросы для самоконтроля

1. Какое движение называется вращательным? Какой вид имеют траектории точек тела, вращающегося вокруг неподвижной оси?
2. Запишите уравнение кинематики вращательного движения.
3. Что называют угловым перемещением?
4. Что называется угловой скоростью? Как направлен вектор угловой скорости?
5. Какое вращение называется равномерным?
6. Что называют периодом? Частотой вращения?
7. Что называется угловым ускорением? Как направлен вектор углового ускорения?
8. По каким формулам определяются модули угловой скорости и углового ускорения вращающегося тела?
9. Какими формулами связаны между собой линейные и угловые характеристики движения?

3. ДИНАМИКА МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ И ПОСТУПАТЕЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ ТВЕРДОГО ТЕЛА

3.1. Первый закон Ньютона (закон инерции)

Свободным называется физическое тело, не взаимодействующее с другими телами или действия других тел на которое полностью скомпенсированы.

Первый закон Ньютона: *всякое свободное тело сохраняет состояние покоя или равномерного прямолинейного движения до тех пор, пока какое-либо внешнее воздействие не заставит его изменить это состояние.*

Первый закон Ньютона показывает, что состояние покоя или равномерного прямолинейного движения не требует для своего поддержания внешних воздействий. В этом проявляется особое динамическое свойство тел, называемое инертностью. Соответственно первый закон Ньютона обычно называют *законом инерции*, а движение тела, свободного от внешних воздействий – *движением по инерции*.

Опыт показывает, что первый закон Ньютона выполняется не во всякой системе отсчета.

Системы отсчета, в которых выполняется закон инерции, называются *инерциальными системами отсчета.* То есть, это такие системы отсчета, относительно которых тело, на которое не действуют другие тела, либо покоится, либо движется равномерно и прямолинейно.

С очень высокой степенью точности инерциальной является гелиоцентрическая система отсчета, связанная с Солнцем. Во многих случаях с достаточной степенью точности можно считать инерциальной систему отсчета, связанную с Землей.

3.2. Второй закон Ньютона

Свойство тела сохранять состояние покоя или равномерного прямолинейного движения называется *инертностью*.

Из опыта известно, что некоторые тела оказывают действие на другие тела. Количественная характеристика действия одного тела на другое называется *силой*. Результат действия зависит как от его интенсивности, так и от направления воздействия и точки приложения. Это указывает на то, что сила $\vec{F}$ является векторной величиной.

При воздействии силы на тело, скорость тела изменяется в соответствии с законом

$$\vec{F}dt = md\vec{\upsilon},$$

где dt – время действия силы; $d\vec{\upsilon}$ – приращение скорости тела в результате действия силы.

Постоянная для данного тела величина m называется *инертной массой* (*массой*) и является количественной мерой инертности тела.

В классической механике масса тела оказывается одной и той же независимо от того покоится тело или движется

$$m = \text{const},$$

тогда

$$\vec{F}dt = md\vec{\upsilon} = d(m\vec{\upsilon}).$$

Импульсом тела называется вектор, равный

$$\vec{p} = m\vec{\upsilon}.$$

Поэтому

$$\vec{F}dt = d\vec{p},$$

откуда

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}.$$

Это математическое выражение второго закона Ньютона: *в инерциальной системе отсчета производная от импульса тела по времени равна силе, действующей на тело.*

Формулу второго закона Ньютона можно записать в другом виде

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d(m\vec{\upsilon})}{dt} = m\frac{d\vec{\upsilon}}{dt} = m\vec{a},$$

откуда

$$\vec{a} = \frac{\vec{F}}{m},$$

ускорение тела прямо пропорционально вызывающей его силе, совпадает с ней по направлению и обратно пропорционально массе тела.

3.3. Третий закон Ньютона

Опыт показывает, что воздействие тел друг на друга всегда является взаимным, *парным* и силы всегда возникают парами. Если тело 1 действует на тело 2 с силой $\vec{F}_{12}$, то, в свою очередь, тело 2 действует на тело 1 с силой $\vec{F}_{21}$, причем силы взаимодействия двух тел равны по величине и направлены в противоположные стороны (рис. 3.1).

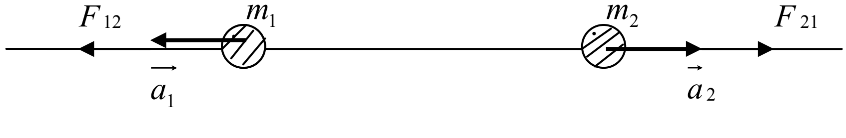


Рис. 3.1

В этом заключается суть *третьего закона Ньютона*: два тела действуют друг на друга с силами, направленными вдоль одной прямой в противоположные стороны и равными по модулю.

$$\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}. \tag{3.1}$$

Складывать эти силы для поиска равнодействующей нельзя, потому, что они приложены к разным телам (материальным точкам).

Для системы n тел или материальных точек взаимодействие сводится к силам парного взаимодействия между ними, которые по третьему закону Ньютона всегда равны по модулю и противоположны по направлению, вследствие чего векторная сумма всех внутренних сил системы равна нулю.

$$\sum_{i=1}^{n} \vec{F}_{i\text{вн}} = 0.$$

3.4. Сложение сил. Принцип суперпозиции

Если на тело одновременно действуют n сил $\vec{F}_1, \vec{F}_2, ..., \vec{F}_i, ..., \vec{F}_n$, приложенных к одной и той же точке тела, то каждая из них действует так, как если бы другие силы отсутствовали. Это утверждение называют *принципом суперпозиции* (или принципом независимости действующих на тело сил). В этом случае силы, действующие на тело, можно заменить одной эквивалентной им по действию силой $\vec{F}$, равной их векторной (геометрической) сумме

$$\vec{F} = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i \tag{3.2}$$

и приложенной в той же точке тела.

Силу $\vec{F}$ называют *результирующей* или *равнодействующей*.

На рис. 3.2 показан метод нахождения вектора $\vec{F}$ равнодействующей двух сил $\vec{F}_1$ и $\vec{F}_2$, приложенных к точке A тела.

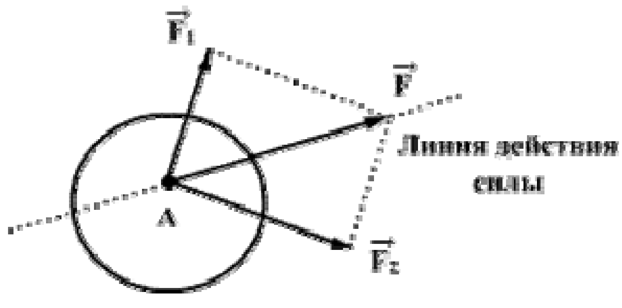


Рис. 3.2

3.5. Некоторые силы, рассматриваемые в механике

Рассмотрим некоторые из сил, широко представленных в природе и технике и играющих важную роль в механических процессах.

1) *Сила тяготения* – сила, взаимного притяжения, действующая между двумя материальными телами (точками). Она обусловлена гравитационным взаимодействием между телами.

Если размеры тел малы по сравнению с расстоянием между ними (материальные точки) или эти тела имеют сферическую форму и однородны, то сила тяготения $\vec{F}$ между ними *прямо пропорциональна произведению масс (*m_1 *и* m_2*) тел и обратно пропорциональной квадрату расстояния* r *между ними*

$$F = G\frac{m_1 \cdot m_2}{r^2}, \tag{3.3}$$

где G – гравитационная постоянная $\left(G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}\,\frac{\text{м}^3}{\text{кг}\cdot\text{с}^2}\right)$.

Уравнение (3.3) – математическое выражение закона всемирного тяготения.

Масса тел в выражении закона всемирного тяготения характеризует не инертные свойства физического тела, а его гравитационные свойства.

В связи с этим возникает вопрос, не следует ли различать инертную массу и массу гравитационную. Ответ на этот вопрос может дать только опыт. Многочисленные эксперименты по определению отношения гравитационной массы к инертной позволяют в настоящее время считать, что инертная и гравитационная массы равны друг другу с точностью, не меньшей 10^{-12} из значения.

Применяя закон всемирного тяготения к случаю взаимодействия земного шара с телом массой m, расположенным вблизи земной поверхности на высоте h, получим

$$F = G\frac{m \cdot M}{(R+h)^2}, \tag{3.4}$$

где R – радиус Земли; M – масса Земли.

Сила гравитационного притяжения тела к Земле (сила тяжести)

$$F = mg, \tag{3.5}$$

где g – ускорение свободного падения.

Величина g зависит от высоты над земной поверхностью

$$g = G\frac{M}{(R+h)^2}. \tag{3.6}$$

2) *Сила упругости* – сила, возникающая при деформации тела, т.е. при изменении его формы или объема, обусловленном действием внешних сил.

Если после прекращения действия внешних сил, вызвавших деформацию, тело полностью восстанавливает свою первоначальную форму и размеры, то оно называется упругим. В таких телах возникают внутренние силы, препятствующие дальнейшему смещению частиц деформируемого тела, в результате чего внешние силы оказываются уравновешенными. Эти внутренние силы называются силами упругости.

Для упругих деформаций справедлив *закон Гука*: упругая сила, возникающая при деформации сжатия или растяжения, пропорциональна величине абсолютной деформации:

$$\vec{F}_{\text{упр}} = -kx,$$

где x – величина абсолютной деформации; k – коэффициент упругости (жесткость), зависящий от природы и геометрии тела.

Знак «–» в формуле закона Гука означает, что направление упругой силы всегда противоположно направлению смещения частей тела (рис. 3.3).

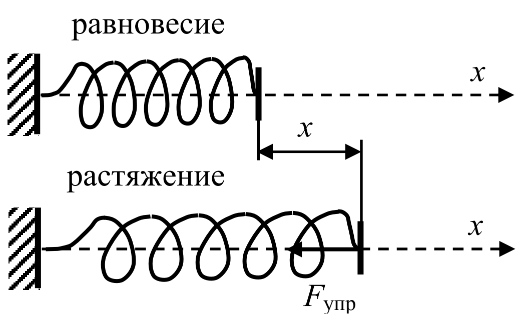


Рис. 3.3

Упругие свойства тел проявляются также при деформациях кручения и изгиба. С упругими силами связаны силы нормальной реакции опоры $\vec{N}$ (например, для тела, лежащего на столе) и силы внешнего трения.

3) *Вес тела* P – сила, с которой другое тело (вследствие притяжения его к Земле) давит на горизонтальную опору или растягивает вертикальный подвес.

Если вертикальная составляющая ускорения тела равна нулю, то

$$P = mg.$$

Вес тела и сила тяжести – различные силы. Во-первых, они приложены к разным телам: вес – к опоре, сила тяжести – к самому телу. Во-вторых, их величины не всегда равны. Так обстоит дело, например, если опора не горизонтальна или движется с ускорением. Наконец, в состоянии невесомости (при свободном падении или в кабине космического корабля) вес равен нулю, а сила тяжести действует и даже определяет характер движения.

4) *Силы трения* появляются при перемещении соприкасающихся тел или их частей друг относительно друга. Трение, возникающее при относительном перемещении двух соприкасающихся тел, называется внешним;

трение между частями одного и того же сплошного тела (например, жидкости или газа) называется внутренним.

Трение между поверхностями двух твердых тел при отсутствии какой-либо прослойки, например смазки между ними, называется *сухим*. Трение между твердым телом и жидкой или газообразной средой, а также между слоями такой среды называется *вязким*. Силы трения направлены по касательной к трущимся поверхностям (или слоям), причем так, что они противодействуют относительному смещению этих поверхностей (слоев).

В случае *сухого трения* сила трения возникает не только при скольжении одной поверхности по другой, но и при попытках вызвать такое скольжение. В этом случае она называется *силой трения покоя*.

Законы сухого трения сводятся к следующему: максимальная сила трения покоя, а также сила трения скольжения не зависят от площади соприкосновения трущихся тел и оказываются приблизительно пропорциональными модулю силы нормального давления F_n, прижимающей трущиеся поверхности друг к другу

$$F_{\text{тр}} = \mu F_n,$$

где μ – коэффициент трения (соответственно, покоя или скольжения).

Сухое трение обычно обусловлено шероховатостью соприкасающихся поверхностей. Главной причиной трения гладких поверхностей становятся силы сцепления между молекулами трущихся поверхностей. Замечательная особенность силы трения скольжения состоит в том, что она слабо зависит от относительной скорости трущихся тел.

Сила вязкого трения, напротив, сильно зависит от относительной скорости трущихся слоев жидкости (газа) или скорости $\vec{\upsilon}$ движения тела. При малых скоростях приближенно выполняется закон

$$\vec{F}_{\text{тр}} = -\alpha\vec{\upsilon},$$

где α – коэффициент вязкого трения, зависящий от формы тела.

Знак «–» в формуле означает, что направление силы вязкого трения противоположно направлению вектора скорости тела.

3.6. Центр масс системы

Центром масс (центром инерции) системы называется точка C, радиус-вектор которой равен:

$$\vec{r}_c = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i\vec{r}_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i},$$

где $m_i, \vec{r}_i$ – масса и радиус-вектор *i*-ой материальной точки (частицы) системы.

Обозначим суммарную массу системы m

$$m = \sum_{i=1}^{n} m_i ,$$

тогда

$$\vec{r}_c = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i \vec{r}_i}{m} = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^{n} m_i \vec{r}_i . \tag{3.7}$$

Соответственно координаты центра масс системы:

$$x_c = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^{n} m_i x_i , \; y_c = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^{n} m_i y_i , \; z_c = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^{n} m_i z_i .$$

Скорость центра масс системы:

$$\upsilon_c = \frac{d\vec{r}_c}{dt} = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^{n} m_i \frac{d\vec{r}_i}{dt} = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^{n} m_i \vec{\upsilon}_i , \tag{3.8}$$

где $m_i \vec{\upsilon}_i$ – импульс i-ой материальной точки системы.

Векторную сумму импульсов всех материальных точек системы $\sum_{i=1}^{n} m_i \vec{\upsilon}_i$ называют *импульсом системы и обозначают буквой* $\vec{p}$:

$$\vec{p} = \sum_{i=1}^{n} m_i \vec{\upsilon}_i ,$$

тогда скорость центра масс системы

$$\vec{\upsilon}_c = \frac{\vec{p}}{m} \tag{3.9}$$

Из уравнения (3.9) следует, что импульс системы равен произведению массы всей системы на скорость ее центра масс:

$$\vec{p} = m \vec{\upsilon}_c . \tag{3.10}$$

Продифференцировав по времени обе части этого выражения, получим: $\frac{d\vec{p}}{dt} = m \frac{d\vec{\upsilon}_c}{dt}$.

Известно, что

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i^{\text{внешн}} .$$

Следовательно

$$m\frac{d\vec{\upsilon}_c}{dt}=\sum_{i=1}^{N}\vec{F}_i^{\text{внешн}}.$$

Это уравнение движения центра масс системы. Из него следует, что центр масс системы материальных точек движется как материальная точка, масса которой равна суммарной массе всей системы, а действующая сила – векторной сумме всех внешних сил, действующих на все точки системы.

Если система замкнута, то $\sum_{i=1}^{n}\vec{F}_i^{\text{внешн}}=0$ и уравнение движения центра масс приобретает вид $\frac{d\vec{\upsilon}_c}{dt}=0$.

Таким образом, центр масс замкнутой системы движется прямолинейно и равномерно или покоится.

3.7. Преобразование координат Галилея. Механический принцип относительности

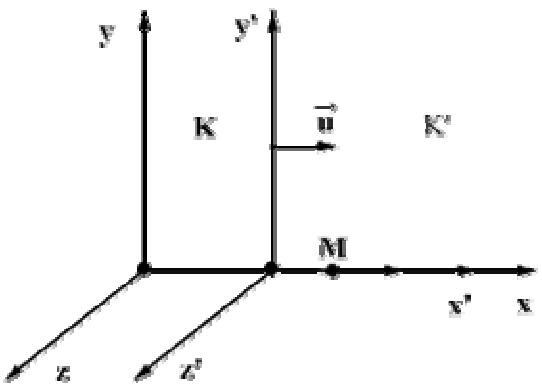


Рис. 3.4

Рассмотрим две системы отсчета: неподвижную (K) и движущуюся относительно (K) вдоль оси X с постоянной скоростью $\vec{u}$ систему (K'). Координаты точки M в системе K: x, y, z, а в системе K' – x', y', z'. Эти координаты связаны между собой соотношениями, которые называются преобразованием Галилея:

$$\begin{cases} x = x' + ut \\ y = y' \\ z = z' \end{cases}$$

Дифференцируя эти уравнения по времени и учитывая, что $\vec{u}=\text{const}$, получим соотношения между скоростями и ускорениями:

$\upsilon_x=\upsilon'_x+u$	$a_x=a'_x$
$\upsilon_y=\upsilon'_y$	$a_y=a'_y$
$\upsilon_z=\upsilon'_z$	$a_z=a'_z$

Таким образом, если в системе K тело имеет ускорение $\vec{a}$, то такое же ускорение оно имеет и в системе K'.

Согласно второму закону Ньютона:

$$\vec{F} = m\vec{a},$$

т.е. второй закон Ньютона одинаков в обеих системах отсчета.

При $a = a' = 0$ (движение по инерции), справедлив и первый закон Ньютона, т.е. рассматриваемая нами подвижная система является инерциальной.

Следовательно, уравнения Ньютона для материальной точки, а также для произвольной системы материальных точек одинаковы во всех инерциальных системах отсчета, т.е. *инвариантны* по отношению к преобразованиям Галилея.

Этот вывод называется *механическим принципом относительности* (принцип относительности Галилея), и формулируется следующим образом: *равномерное и прямолинейное движение замкнутой системы относительно какой-либо инерциальной системы отсчета не влияет на закономерности протекания в ней механических процессов.*

Следовательно, в механике все инерциальные системы отсчета совершенно равноправны. Поэтому никакими механическими опытами внутри системы нельзя обнаружить движется ли система равномерно и прямолинейно или покоится.

3.8. Замкнутая (изолированная) система. Закон сохранения импульса

Закон сохранения импульса является следствием второго и третьего законов Ньютона. Он имеет место в замкнутой (изолированной) системе тел.

Рассмотрим механическую систему, состоящую из n тел, каждое из которых характеризуется некоторой массой m_i и скоростью $\vec{\upsilon}_i$. Пусть $\vec{F}_{i\text{вн}}$ – равнодействующая всех внутренних сил, действующих на i-тое тело системы, $\vec{F}_i$ – равнодействующая всех внешних сил, действующих на i-тое тело системы.

Внутренними называются силы взаимодействия между телами, входящими в состав системы.

Внешними называются силы, действующие на тела системы со стороны тел, не входящих в эту систему.

Запишем второй закон Ньютона для каждого из тел системы:

$$\frac{d(m_i\vec{\upsilon}_i)}{dt} = \frac{d\vec{\rho}_i}{dt} = \vec{F}_{i\text{вн}} + \vec{F}_i.$$

Складывая все уравнения, записанные для n тел системы, получим:

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{d\vec{p}_i}{dt}=\sum_{i=1}^{n}\vec{F}_{i_{\text{вн}}}+\sum_{i=1}^{n}\vec{F}_i. \tag{3.11}$$

Но так как векторная сумма внутренних сил механической системы по третьему закону Ньютона равна нулю, то

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{d\vec{p}_i}{dt}=\sum_{i=1}^{n}\vec{F}_i,$$

или

$$\frac{d\vec{p}}{dt}=\sum_{i=1}^{n}\vec{F}_i, \tag{3.12}$$

где $\vec{\rho}=\sum_{i=1}^{n}\vec{\rho}_i$ – суммарный импульс системы n тел.

Производная по времени от импульса механической системы тел равна векторной сумме внешних сил, действующих на тела системы.

В случае замкнутой системы, т.е. в отсутствии внешних сил

$$\frac{d\vec{p}}{dt}=0,$$

откуда следует, что

$$\vec{\rho}=\sum_{i=1}^{n}\vec{\rho}_i=\text{const}, \tag{3.13}$$

т.е. *суммарный импульс* $\vec{\rho}$ *замкнутой системы тел не изменяется с течением времени.*

В замкнутой системе физических тел векторная сумма импульсов всех тел, остается постоянной величиной при любых взаимодействиях тел этой системы между собой. Это значит, что если у одного из тел в изолированной системе изменился импульс, то это могло произойти только за счет изменения импульсов других тел этой системы.

Так как $\vec{\rho}=m\vec{\upsilon}_c=\text{const}$ то при любых процессах, происходящих в замкнутой системе, скорость центра масс системы сохраняется неизменной.

3.9. Динамика тел с переменной массой. Реактивное движение. Уравнение И.В. Мещерского

Движение некоторых тел сопровождается изменением их массы. Например, масса ракеты уменьшается вследствие истечения газов, образующихся при сгорании топлива (рис. 3.5).

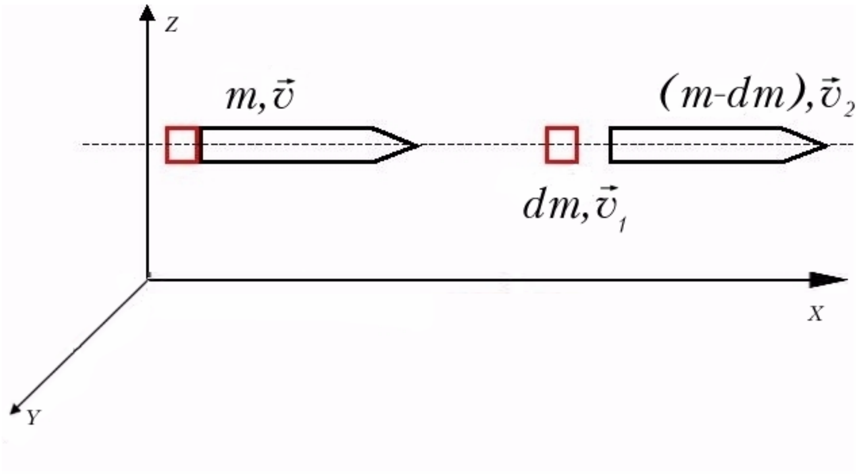


Рис. 3.5

Обозначим: m – первоначальная масса ракеты; $\vec{\upsilon}$ – первоначальная скорость ракеты; $\vec{\upsilon}_1$ – скорость выброшенной массы газов dm; $\vec{\upsilon}_2$ – скорость ракеты после выброса массы dm; $\vec{u}$ скорость движения выброшенной массы относительно ракеты.

Положим, что ракета в результате выброса массы dm приобретает дополнительную скорость $d\vec{\upsilon}$. Тогда скорость ракеты после выброса и скорость выброшенной массы газа связаны уравнением

$$\vec{\upsilon}_2 = \vec{\upsilon} + d\vec{\upsilon},$$

$$\vec{\upsilon}_1 = \vec{\upsilon}_2 + \vec{u}.$$

Здесь учтено, что скорости положительны, если их направления совпадают с направлением оси x.

Для системы «ракета – выбрасываемая масса» запишем закон сохранения импульса

$$m\vec{\upsilon} = \vec{\upsilon}_1 dm + (m - dm)\vec{\upsilon}_2 . \tag{3.14}$$

$$m\vec{\upsilon} = (\vec{\upsilon} + d\vec{\upsilon} + \vec{u})dm + (m - dm)(\vec{\upsilon} + d\vec{\upsilon})$$

$$md\vec{\upsilon} = -\vec{u}dm . \tag{3.15}$$

Уравнение (3.15) – *дифференциальное уравнение динамики тела переменной массы*. Его можно переписать в виде

$$d\vec{\upsilon} = -\vec{u}\frac{dm}{m} . \tag{3.16}$$

Приращение скорости $\Delta\upsilon$, которое получит ракета в результате уменьшения ее массы от значения m_0 до значения m, найдем путем интегрирования уравнения (3.16)

$$\Delta\upsilon = -\int_{m_0}^{m} u\frac{dm}{m} .$$

Если $u = \text{const}$, то

$$\Delta\upsilon = -u \int_{m_0}^{m} \frac{dm}{m},$$

и зависимость скорости ракеты от ее массы будет описываться выражением

$$\upsilon = \upsilon_0 + u \cdot \ln \frac{m_0}{m}, \qquad (3.17)$$

где υ_0 – скорость, которую имела ракета при массе m_0.

Разделив выражение (3.17) на dt:

$$m\frac{d\vec{\upsilon}}{dt} = -\vec{u}\frac{dm}{dt}, \qquad (3.18)$$

получим уравнение, левая часть которого представляет собой произведение массы на ускорение, а правая – силу, называемую *реактивной*.

Для текущего момента времени

$$m\vec{a} = \vec{F}_P, \qquad (3.19)$$

$$\vec{F}_P = -\vec{u}\frac{dm}{dt}.$$

В случае если на систему действуют внешние силы, равнодействующую этих сил $\vec{F}$ следует учесть, введя ее в уравнение (3.19):

$$m\vec{a} = \vec{F}_P + \vec{F}. \qquad (3.20)$$

Уравнение(3.20) впервые было выведено И.В. Мещерским и носит его имя. Оно является наиболее общим уравнением движения тела переменной массы.

3.10. Динамика тел в неинерциальных системах отсчета

Системы отсчета, движущиеся относительно инерциальных с ускорением, называются *неинерциальными*. Законы Ньютона для них, строго говоря, не справедливы. Однако, законы динамики можно применять для таких систем, если дополнительно к силам взаимодействия ввести силы иного рода – так называемые силы *инерции*.

$$m\vec{a}' = \vec{F} + \vec{F}_{\text{ин}}, \qquad (3.21)$$

где m – масса тела, находящегося в неинерциальной системе отсчета; $\vec{a}'$ – ускорение тела относительно неинерциальной системы; $\vec{F}_{\text{ин}}$ – сила инерции; $\vec{F}$ – сила взаимодействия (равнодействующая всех сил, действующих на рассматриваемое тело со стороны других тел), подчиняющаяся второму закону Ньютона

$$\vec{F} = m\vec{a}\,, \tag{3.22}$$

где $\vec{a}$ – ускорение тела в инерциальной системе отсчета.

Уравнение (3.21) называется уравнением динамики для неинерциальных систем отсчета.

Вид силы инерции зависит от характера ускоренного движения системы отсчета. Здесь можно выделить три частных случая.

1. *Сила инерции при ускоренном поступательном движении системы отсчета.*

Рассмотрим появление силы инерции в этом случае. Если тележка (рис. 3.6) движется прямолинейно и равномерно, нить, на которой подвешен шарик, вертикальна. Как только тележка получит ускорение, нить с шариком начнет отклоняться, пока результирующая сила

$$\vec{F} = \vec{P} + \vec{T}\,,$$

(где $\vec{P} = m\vec{g}$ – сила тяжести, а $\vec{T}$ – сила упругости) не обеспечит ускорение $\vec{a}_0$.

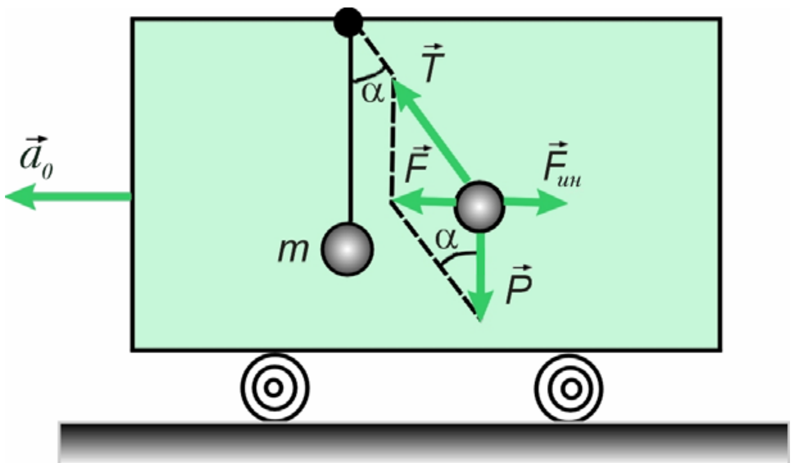


Рис. 3.6

Учитывая это, по второму закону Ньютона для модулей силы и ускорения можно записать:

$$F = mg\,\mathrm{tg}\,\alpha = ma_0;$$

$$\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{a_0}{g}.$$

Если ускорение постоянно, то угол $\alpha = const$, т.е. относительно неинерциальной системы (тележки) шарик будет неподвижен и ускорение $a' = 0$.

Таким образом,

$$\vec{a}' = 0 \text{ при } \alpha = \text{const}, \ (\vec{a}_0 = \text{const}).$$

Используя уравнение (3.21) и учитывая, что $a' = 0$, найдем силу инерции

$$m\vec{a}' = \vec{F} + \vec{F}_{\text{ин}} = 0,$$

откуда

$$\vec{F}_{\text{ин}} = -\vec{F}$$

и

$$\vec{F}_{\text{ин}} = -m\vec{a}_0. \tag{3.23}$$

Сила инерции появляется независимо от других сил.

2. *Сила инерции при равномерном вращении системы отсчета.*

Как только диск начнет вращаться, нити подвеса шариков станут отклоняться (рис. 3.7). Изменение углов отклонения прекратиться тогда, когда результирующая сила, действующая на каждый шарик $\vec{F} = m\vec{g} + \vec{T}$, обеспечит постоянство нормального ускорения, а следовательно, и постоянство радиуса окружности, которую описывает шарик.

$$F = m\omega^2 R = mg\,\mathrm{tg}\,\alpha.$$

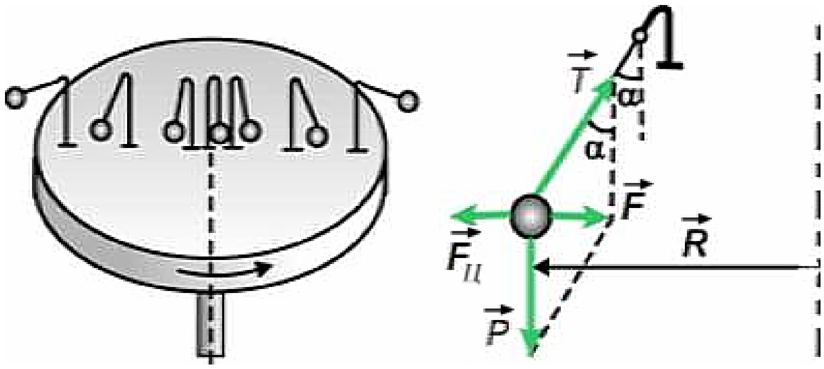


Рис. 3.7

Отсюда

$$\mathrm{tg}\alpha = \frac{\omega^2 R}{g}.$$

Таким образом, при $\omega = \mathrm{const}$, R и α также постоянны, а ускорение в неинерциальной системе $a' = 0$.

Используя уравнение (3.21) для силы инерции, получаем

$$\vec{F}_{\text{ин}} = -\vec{F} = m\omega^2\vec{R}.$$

Сила инерции во вращающейся системе отсчета называется *центробежной силой*.

3. *Сила инерции, действующая на тело, движущееся во вращающейся системе отсчета.*

Пусть шарик массой m катится с постоянной скоростью вдоль радиуса равномерно вращающегося диска (рис. 3.8).

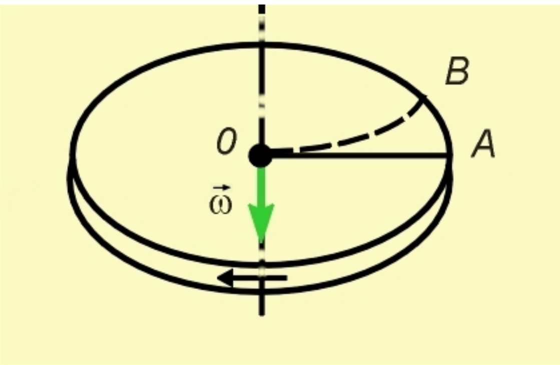


Рис. 3.8

След, оставляемый шариком на диске, в этом случае будет криволинейным. Отсюда следует, что при равномерном движении диска траектория шарика относительно инерциальной системы отсчета – прямая линия $мA$. А эта же траектория в неинерциальной системе отсчета, связанной с диском, – кривая $ме$.

Криволинейная траектория в неинерциальной системе отсчета может образоваться только в результате действия на шарик силы, перпендикулярной вектору скорости. В инерциальной системе нет такой силы. Эта дополнительная сила, появляющаяся только в неинерциальной системе отсчета, и действующая на движущееся в этой системе тело, является силой инерции и называется *кориолисовой* силой $\vec{F}_к$.

Изменим условия эксперимента, сделав в диске желоб (рис. 3.9).

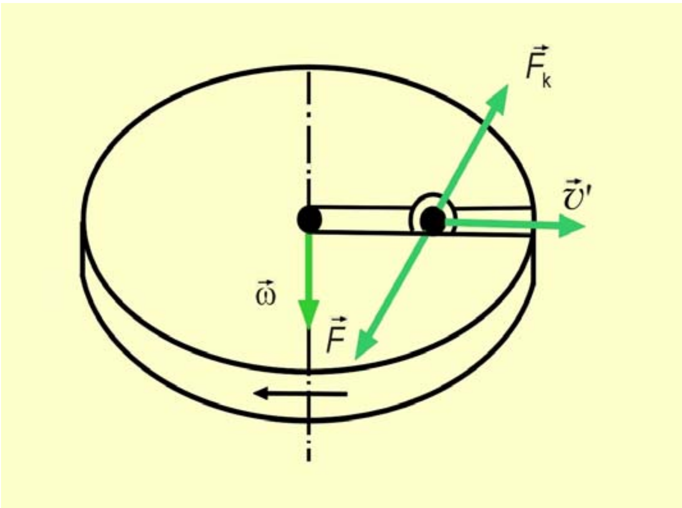


Рис. 3.9

Теперь ситуация стала диаметрально противоположной. Траектория в инерциальной системе отсчета искривляется, а в системе диска остается прямолинейной.

В инерциальной системе отсчета траектория криволинейна потому, что на шарик действует сила упругости со стороны дальней стенки желоба. Вектор этой силы направлен перпендикулярно вектору скорости $\vec{\upsilon}'$. В то же время в неинерциальной системе траектория прямолинейна, значит сила упругости $\vec{F}$ в неинерциальной системе уравновешена равной ей по величине и направленной в противоположную сторону силой инерции, которую мы назвали кориолисовой силой.

$$\vec{F}_{\text{к}} = -\vec{F}\ .$$

Кориолисова сила может быть вычислена по формуле:

$$\vec{F}_{\text{К}} = 2m\left[\vec{\upsilon}' \cdot \vec{\omega}\right].$$

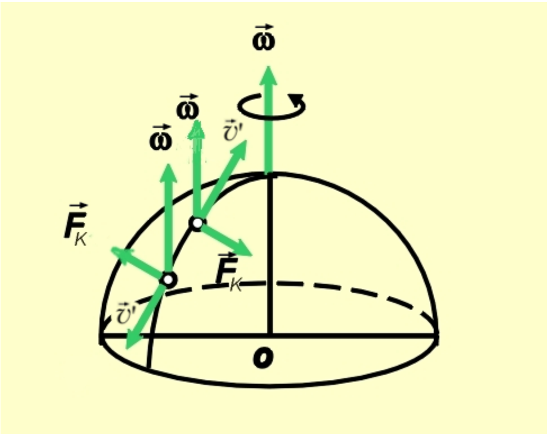


Рис. 3.10

Сила Кориолиса проявляется во всех случаях, когда траектория тела не параллельна земному экватору. Рассмотрим действие кориолисовой силы на тело, движущееся вдоль меридиана в Северном полушарии.

Из рис. 3.10 видно, что в Северном полушарии кориолисова сила всегда действует слева направо по направлению движения. (В результате, например, правый берег рек всегда сильнее подмывается водой и потому более высокий).

3.11. Принцип эквивалентности гравитационных сил и сил инерции

Силы инерции, действующие на тела в неинерциальных системах, пропорциональны массам тел и при прочих равных условиях вызывают одинаковые ускорения. Поэтому в «поле сил инерции» эти тела движутся совершенно одинаково. Тем же свойством обладают тела в поле гравитационных сил. Локально (т.е. в каждой точке пространства) в какое-то определенное время всегда можно создать условия, при которых силы инерции и силы гравитации невозможно отличить. Например, движение тел в равноускоренном лифте происходит точно так же, как и в неподвижном лифте, висящем в однородном поле силы тяжести. Никакой эксперимент, выполненный внутри лифта, не позволяет отличить однородное поле тяготения от однородного поля сил инерции.

Принцип эквивалентности гравитационных и инерциальных сил гласит, что *все физические явления в поле сил инерции и в поле сил тяготения происходят абсолютно одинаково.* Этот принцип лежит в основе общей теории относительности Эйнштейна.

3.12. Методические указания к решению задач по динамике

В классической физике, состояние материальной точки полностью определяется значениями ее координат x, y, z и проекций вектора скорости $\upsilon_x, \upsilon_y, \upsilon_z$ в данный момент времени, т.е. радиусом вектором частицы $\vec{r}$ и вектором ее скорости.

С учетом указанных функциональных зависимостей уравнение второго закона Ньютона имеет вид:

$$m\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \vec{F}(\vec{r}, t). \tag{3.14}$$

Если равнодействующая всех сил, действующих на точку $\vec{F}(t, \vec{r})$ как функция координат и времени известна, то уравнение (3.14) в математической классификации представляет собой векторное дифференциальное уравнение второго порядка по отношению к радиус-вектору $\vec{r}$ точки. Решая уравнение (3.14) с заданной правой частью, можно определить радиус-вектор точки в любой момент времени и, тем самым, установить вид траектории движения тела. При этом, исходя из принципа независимости движений, сложное векторное уравнение (3.14), определяющее в общем случае криволинейное движение тела, заменяют эквивалентной системой трех скалярных уравнений, каждое из которых одновременно описывает прямолинейное движение вдоль соответствующих осей x, y, z.

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = F_x,\ m\frac{d^2y}{dt^2} = F_y,\ m\frac{d^2z}{dt^2} = F_z, \tag{3.15}$$

где F_x, F_y и F_z – проекции вектора $\vec{F}$ на оси координат.

Координаты x, y и z определяют путем двух интегрирований уравнения (3.15). При каждом интегрировании возникает неопределенная постоянная C. Поэтому для однозначного выделения закона движения следует дополнить уравнения движения двумя условиями, определяющими эти постоянные. Эти условия фиксируют, задавая состояние материальной точки в какой-то (обычно в начальный) момент времени, т.е. указывая значения радиус-вектора $\vec{r}_0$ или координат x_0, y_0, z_0 и скорости $\vec{\upsilon}_0$ при $t = 0$.

Таким образом, в результате интегрирования уравнений (3.15) получают координаты точки x, y, z как функции времени и двух констант интегрирования:

$$x = x(t, C_1, C_2),$$
$$y = y(t, C_3, C_4),$$
$$z = z(t, C_5, C_6).$$

Вопросы для самоконтроля

1. Сформулируйте первый закон Ньютона. Какую информацию содержит этот закон?
2. Какие системы отсчета называют инерциальными?
3. Почему следует считать, что первый закон Ньютона указывает на причинную связь между механическими явлениями? Что является причиной изменения состояния покоя или равномерного прямолинейного движения тела в инерциальной системе?
4. Какой физической величиной характеризуется изменение состояния покоя или равномерного прямолинейного движения?
5. Что такое инертность тела? Какая физическая величина служит мерой инертности тела при поступательном движении?
6. Сформулируйте второй закон Ньютона.
7. В чем состоит принцип независимого действия сил (принцип суперпозиции)? Какие следствия вытекают из этого принципа и как они проверяются на опыте?
8. Сформулируйте третий закон Ньютона. Приведите примеры проявления этого закона в окружающей действительности.
9. В чем состоит закон всемирного тяготения? Запишите формулу этого закона.
10. Какие опыты показывают, что инертная и гравитационная массы пропорциональны друг другу? Опишите эти опыты.
11. Что называют весом тела?
12. Какое трение называют сухим и какое – жидким?
13. Что означает сила трения покоя? Как эту силу можно измерить на опыте? Какие значения может принимать эта сила?
14. Как объяснить возникновение скольжения и силы трения скольжения? Как наглядно представить себе, почему сила трения скольжения убывает с увеличением относительной скорости движения?
15. Запишите формулу для расчета силы сухого трения скольжения.
16. Почему при очень хорошем качестве обработки поверхности сила трения скольжения становится больше, чем при плохом качестве?
17. Что называют импульсом тела?
18. Что называют импульсом силы?
19. Запишите связь изменения импульса тела с импульсом силы в дифференциальной форме (для бесконечно малого промежутка времени).
20. Сформулируйте закон сохранения импульса.
21. Докажите, опираясь на третий закон Ньютона, что в замкнутой системе сумма внутренних сил равна нулю.

22. Что такое центр масс системы? Можно ли центр масс определить как такую точку пространства, относительно которой импульс системы равен нулю?

23. Как определяют радиус-вектор и координаты центра масс?

24. Какое движение называют реактивным? Под действием какой силы оно происходит? Как возникает реактивная сила в случае отделения и присоединения массы? (Поясните на простом примере).

25. Выведите формулу для реактивной силы.

26. Запишите уравнение движения тела переменной массы.

27. Выведите формулу Циолковского. Поясните, почему нельзя достичь космических скоростей при помощи одноступенчатой ракеты. В чем состоит преимущество многоступенчатых ракет перед одноступенчатыми?

28. Какие системы отсчета называют неинерциальными? В чем состоит обобщение понятия силы, когда переходят к неинерциальным системам отсчета?

29. Какие силы называют силами инерции и какие – ньютоновскими? Чем они различаются и что у них общее? Как изменяются силы инерции и ньютоновские силы при переходе от одной неинерциальной системы отсчета к другой?

30. По какому правилу подсчитывается сила инерции в неинерциальной системе отсчета движущейся поступательно? Как направлена эта сила? Совершает ли сила инерции работу? Будет ли эта сила консервативной? Можно ли складывать силы инерции с ньютоновскими силами?

31. Напишите уравнение движения (второй закон Ньютона) для тела в неинерциальной системе отсчета.

32. Объясните, почему в неинерциальных системах отсчета не выполняются законы сохранения механической энергии и импульса. Как в этом случае следует записывать закон сохранения механической энергии для системы материальных точек? Укажите в неинерциальной системе отсчета направления, относительно которых сохраняется импульс системы.

33. Какими особенностями обладает поле сил инерции? Какова напряженность этого поля? В чем родство поля сил инерции с полем тяготения? Различимы ли эти поля для наблюдателя, находящегося в неинерциальной системе? В чем состоит принцип суперпозиции полей сил инерции и тяготения и как он проявляется в неинерциальных системах? Чему равна напряженность результирующего поля в неинерциальной системе отсчета?

34. Какие силы инерции действуют во вращающейся системе отсчета? Какую силу называют центробежной? Как вычисляется эта сила? Каково ее направление?

35. Что называют полем центробежных сил? Почему это поле неотличимо от поля гравитации? Когда наложение поля центробежных сил

на поле гравитации приводит к состоянию невесомости? Чем характерно это состояние?

36. Какие силы инерции называют кориолисовыми? Зависит ли сила Кориолиса от скорости движения тела во вращающейся системе? Приведите примеры, показывающие действие кориолисовых сил.

37. Так как сила Кориолиса перпендикулярна к вектору скорости $\vec{\upsilon}'$, то она никакой работы не совершает. Объясните, почему же в таком случае правые берега рек размываются, а правый рельс железной дороги изнашивается больше, чем левый? За счет какой энергии происходит работа по разрушению берегов и рельсов?

4. ДИНАМИКА ВРАЩАТЕЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ ТВЕРДОГО ТЕЛА

4.1. Особенности вращательного движения

Рассмотрим движение твердого тела, имеющею ось вращения $O_{1,}O_2$ под действием произвольно направленной силы $\vec{F}$, приложенной к телу в некоторой точке A. Вектор $\vec{F}$ F можно разложить на два составляющих вектора: вертикальный $\vec{F}_{\text{В}}$ и горизонтальный $\vec{F}_{\Gamma}$ (рис. 4.1). $\vec{F}_{\text{В}}$ может вызывать перемещение тела вдоль оси вращения, поэтому при рассмотрении вращательного движения эту силу можно исключить. Сила $\vec{F}_{\Gamma}$, если она не пересекается с осью O_1O_2, вызывает вращение тела. Действие этой силы зависит от ее числового значения и расстояния линии действия силы от оси вращения тела.

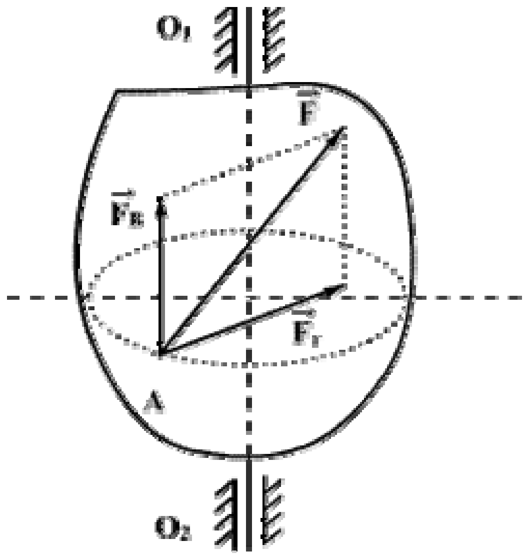


Рис. 4.1

4.2. Вращающий момент (момент силы)

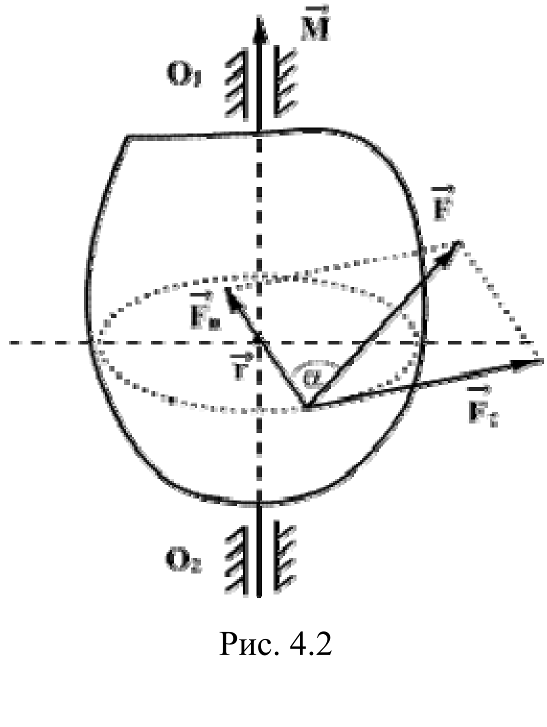


Рис. 4.2

Пусть на тело, в плоскости перпендикулярной к оси вращения O_1O_2 действует сила $\vec{F}$ (рис. 4.2). Разложим ее на две составляющие: $\vec{F}_n$ и $\vec{F}_\tau$.

Сила $\vec{F}_n$ пересекает ось вращения и, следовательно, не вызывает вращение тела. Под действием составляющей $\vec{F}_\tau$ тело будет совершать вращательное движение вокруг оси O_1O_2.

Расстояние r от оси вращения до линии, вдоль которой действует сила $\vec{F}_\tau$, называется *плечом силы* $\vec{F}_\tau$.

Моментом силы $\vec{F}_\tau$ *относительно точки* O называется произведение модуля силы $\vec{F}_\tau$ на плечо r

$$M = F_\tau r.$$

Так как

$$F_x = F\sin\alpha,$$

момент силы

$$M = Fr\sin\alpha.$$

С точки зрения векторной алгебры это выражение представляет собой векторное произведение радиус-вектора $\vec{r}$, проведенного в точку приложения силы $\vec{F}$ на вектор этой силы.

Таким образом, момент силы относительно точки O является векторной величиной, равной

$$\vec{M} = \left[\vec{r}, \vec{F}\right]. \tag{4.1}$$

Вектор момента силы $\vec{M}$ направлен перпендикулярно к плоскости, проведенной через векторы $\vec{r}$ и $\vec{F}$, и образует с ними правую тройку векторов (при наблюдении из конца вектора $\vec{M}$ видно, что вращение по кратчайшему расстоянию от $\vec{r}$ к $\vec{F}$ происходит против часовой стрелки).

4.3. Момент инерции материальной точки относительно неподвижной оси вращения

Согласно второму закону Ньютона, тангенциальная составляющая силы $\vec{F}_{ix}$, действующей на материальную точку массой m, и ускорение $\vec{a}_{ix}$ точки связаны соотношением

$$\vec{F}_{ix} = m_i a_{ix}.$$

С учетом, что

$$\vec{F}_{ix} = F_i \sin\alpha \quad \text{и} \quad a_{ix} = r_i\varepsilon$$

это соотношение можно переписать в виде

$$F_i \sin\alpha = m_i r_i \varepsilon.$$

Умножив обе части последнего равенства на r_i получим

$$r_i F_i \sin\alpha = m_i r_i^2 \varepsilon, \tag{4.2}$$

или

$$\vec{M}_i = m_i r_i^2 \vec{\varepsilon}.$$

Произведение массы материальной точки m_i на квадрат ее расстояния r_i до оси вращения называется *моментом инерции материальной точки относительно оси вращения:*

$$J_i = m_i r_i^2 . \tag{4.3}$$

4.4. Момент инерции твердого тела

Чтобы найти момент инерции тела, надо просуммировать момент инерции всех материальных точек, составляющих тело

$$J = \sum_{i=1}^{n} J_i = \sum_{i=1}^{n} m_i r_i^2 \tag{4.4}$$

В общем случае, если тело сплошное, оно представляет собой совокупность множества точек с бесконечно малыми массами dm, и *момент инерции тела определяется интегралом*

$$J = \int_0^m r^2 dm , \tag{4.5}$$

где r – расстояние от элемента dm до оси вращения тела.

Распределение массы по объему тела можно охарактеризовать с помощью плотности ρ

$$\rho = \frac{m}{V} , \tag{4.6}$$

где m – масса однородного тела; V – его объем.

Для тела с неравномерно распределенной массой

$$\rho = \frac{dm}{dV} .$$

В этом случае

$$J = \int \rho r^2 dV . \tag{4.7}$$

Пределы интегрирования зависят от формы и размеров тела. Интегрирование уравнения (4.7) наиболее просто осуществить для тех случаев, когда ось вращения проходит через центр масс тела.

В табл. 4.1 приведены результаты интегрирования, то есть значения моментов инерции для некоторых однородных тел правильной геометрической формы относительно оси, проходящей через центр масс тела.

Таблица 4.1

Тело	Положение оси вращения	Момент инерции
Сплошной цилиндр или диск массой m и радиусом R	Ось симметрии	$I = \frac{1}{2}mR^2$
Полый тонкостенный цилиндр массой m и радиусом R	Ось симметрии	$I = mR^2$
Прямой тонкий стержень массой m и длиной l	Ось перпендикулярна стержню и проходит через его середину	$I = \frac{1}{12}ml^2$
Шар массой m и радиусом R	Ось проходит через центр шара	$I = \frac{2}{5}mR^2$

Для определения момента инерции тела относительно произвольной оси вращения используют теорему Штейнера:

момент инерции тела относительно произвольной оси ZZ' *равен моменту инерции тела относительно оси* OO', *проходящей через центр масс и параллельной данной оси, сложенному с произведением массы тела на квадрат расстояния между осями:*

$$J_{ZZ'} = J_{OO'} + md^2, \tag{4.8}$$

где m – масса тела; d – расстояние между осями (рис. 4.3).

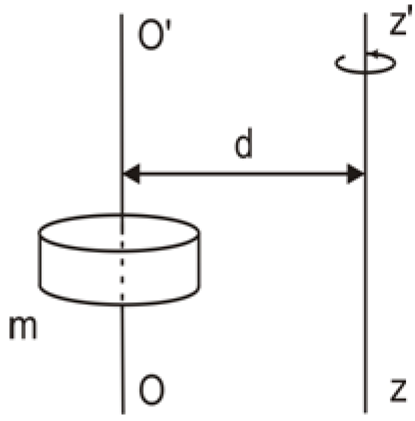


Рис. 4.3

4.5. Основной закон динамики вращательного движения

С учетом (4.2) и (4.3) вращающий момент тела

$$\vec{M} = J\vec{\varepsilon}, \tag{4.9}$$

откуда

$$\vec{\varepsilon} = \frac{\vec{M}}{J}.$$

Это математическое выражение основного закона динамики для вращательного движения:

Угловое ускорение $\vec{\varepsilon}$ *твердого тела при вращении вокруг неподвижной оси прямо пропорционально вращающему моменту* $\vec{M}$ *и обратно пропорционально моменту инерции* I *тела относительно этой оси.*

Из формулы (4.9) следует, что момент инерции J является мерой инертности тела при его вращательном движении вокруг неподвижной оси. В случае поступательного движения мерой инертности, как известно, является масса тела.

4.6. Момент импульса материальной точки и твердого тела

Векторное произведение радиус-вектора $\vec{r}_i$ материальной точки на ее импульс $m_i\vec{\upsilon}_i$ называют *моментом импульса* $\vec{L}_i$ *этой точки относительно точки* O (рис. 4.4).

$$\vec{L}_i = \left[\vec{r}_i \cdot m_i\vec{\upsilon}_i\right].$$

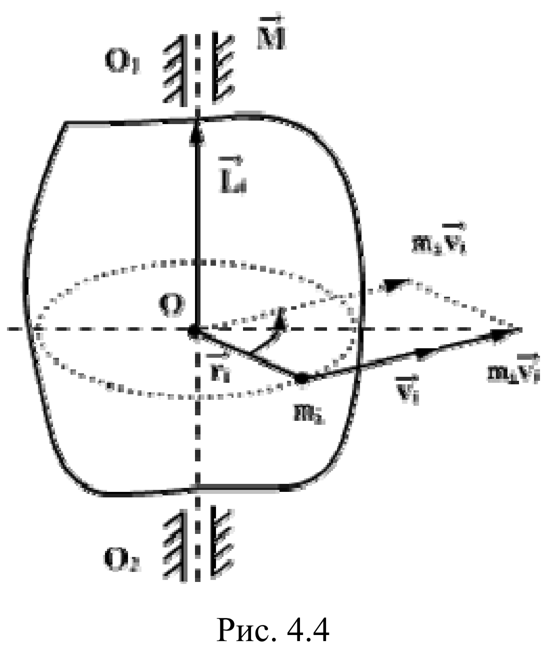


Рис. 4.4

Вектор $\vec{L}_i$ направлен вдоль оси вращения перпендикулярно плоскости, проведенной через векторы $\vec{r}_i$ и $m_i\vec{\upsilon}_i$, и образует с ними правую тройку векторов (при наблюдении из конца вектора $\vec{L}_i$ видно, что вращение по кратчайшему расстоянию от $\vec{r}_i$ к $m_i\vec{\upsilon}_i$ происходит против часовой стрелки).

Векторную сумму моментов импульсов $\vec{L}_i$ всех материальных точек, из которых состоит абсолютно твердое тело, называют *моментом импульса (количества движения)* $\vec{L}$ *тела относительно точки* O:

$$\vec{L} = \sum_{i=1}^{n} \vec{L}_i = \sum_{i=1}^{n} \left[\vec{r}_i \cdot m_i\vec{\upsilon}_i\right].$$

Векторы $\vec{r}_i$ и $m_i\vec{\upsilon}_i$ взаимно перпендикулярны и лежат в плоскости перпендикулярной оси вращения тела.

Поэтому

$$L_i = r_i m_i \upsilon_i \sin\alpha = r_i m_i \upsilon_i .$$

Так как $\upsilon_i = \omega r_i$, то

$$L_i = m_i r_i^2 \omega .$$

Вектор $\vec{L}$ направлен вдоль оси вращения тела в ту же сторону, что и вектор $\vec{\omega}$.

Таким образом.

$$\vec{L}_i = m_i r_i^2 \vec{\omega} = J_i \vec{\omega} .$$

Момент импульса тела относительно оси вращения

$$L = \omega \sum_{i=1}^{n} J_i = J\vec{\omega} . \qquad (4.10)$$

Момент импульса тела относительно оси вращения равен произведению момента инерции тела относительно той же оси на угловую скорость вращения тела вокруг этой оси.

Согласно (4.9) второй закон Ньютона для вращательного движения

$$\vec{M} = J\vec{\varepsilon} .$$

Угловое ускорение тела

$$\vec{\varepsilon} = \frac{d\vec{\omega}}{dt},$$

тогда

$$M = \frac{d(J\vec{\omega})}{dt},$$

или с учетом (4.10)

$$\vec{M} = \frac{d\vec{L}}{dt},$$

откуда

$$\vec{M}dt = d\vec{L} . \qquad (4.11)$$

Это дифференциальный вид *основного уравнения динамики вращательного движения*:

изменение момента количества движения твердого тела $d\vec{L}$, равно импульсу момента $\vec{M}dt$ всех внешних сил, действующих на это тело.

4.7. Закон сохранения момента импульса (количества движения)

Из основного уравнения динамики вращательного движения следует, что

$$\vec{M} = \frac{d\vec{L}}{dt}.$$

Для замкнутой (изолированной) системы результирующий вектор момента $\vec{M}$ всех внешних сил, действующих на тело, равен нулю и

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = 0,$$

или

$$L = \text{const}.$$

Это математическое выражение закона сохранения момента импульса: *если результирующий момент всех внешних сил относительно неподвижной оси вращения тела равен нулю, то момент импульса относительно этой оси не изменяется в процессе движения тела.*

Этот закон может быть обобщен на любую незамкнутую систему тел, если результирующий момент всех внешних сил, приложенных к системе, относительно какой-либо неподвижной оси равен нулю, то момент импульса системы относительно той же оси не изменяется с течением времени.

4.8. Гироскоп. Гироскопический эффект

Гироскопом (или волчком) называют массивное симметричное тело, вращающееся с большой скоростью вокруг оси симметрии (рис. 4.5).

Вектор момента количества движения гироскопа направлен вдоль его оси вращения.

Для того, чтобы изменить направление оси гироскопа, т.е. направление вектора $\vec{L}_i$ необходимо в соответствие основным уравнением динамики вращательного движения $\vec{M}dt = d\vec{L}$ подействовать на него моментом внешних сил $\vec{M}$. Пусть это пара сил $\vec{\mathrm{F}} - \vec{\mathrm{F}}$, создающая вращающий момент относительно оси O_1O_1, лежащей в плоскости чертежа перпендикулярно оси OO (вращение вокруг O_1O_1*).*

При этом наблюдается следующее явление, получившее название *гироскопического эффекта:* под действием пары сил, которые, казалось бы, должны были вызвать поворот оси OO гироскопа вокруг оси O_1O_1, ось гироскопа поворачивается вокруг прямой O_2O_2 перпендикулярно к осям OO и O_1O_1.

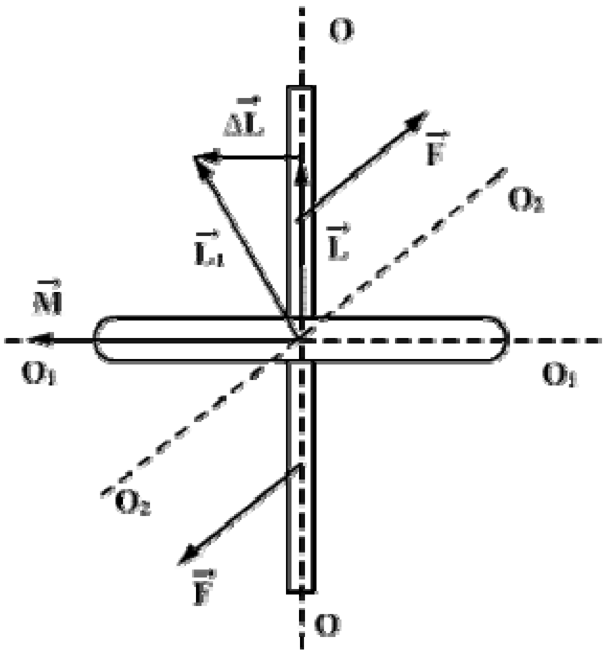


Рис. 4.5

«Противоестественное» на первый взгляд поведение гироскопа оказывается полностью соответствует законам динамики вращательного движения.

Рассмотрим поведение гироскопа под действием момента сил $\vec{M}$ действующего вдоль оси O_1O_1. За время Δt момент импульса гироскопа $\vec{L}$ получит приращение $\Delta\vec{L} = \vec{M}\Delta t$, которое имеет такое же направление, как и $\vec{M}$. Момент количества движения гироскопа спустя время Δt будет равен $\vec{L}_1 = \vec{L} + \Delta\vec{L}$. Вектор $\vec{L}_1$ лежит в плоскости рисунка. Направление вектора $\vec{L}$ совпадает с новым направлением оси вращения гироскопа.

Таким образом, ось гироскопа повернется вокруг оси O_2O_2 (перпендикулярной плоскости чертежа), причем так, что угол между векторами $\vec{M}$ и $\vec{L}$ уменьшится.

Если действовать на гироскоп длительное время постоянным по направлению моментом внешних сил, то ось гироскопа устанавливается, в конце концов, так, что ось и направление собственного вращения совпадают с осью и направлением вращения под действием внешних сил (вектор $\vec{L}$, совпадает по направлению с вектором $\vec{M}$).

Вопросы для самоконтроля

1. Что называется моментом инерции а) материальной точки, б) системы материальных точек, в) твердого тела? Ответ поясните рисунками. Какова роль момента инерции во вращательном движении?

2. Сформулируйте теорему Штейнера. Ответ поясните рисунком.

3. От чего зависит момент инерции тела?

4. Что называется моментом импульса тела относительно некоторой точки? Ответ поясните рисунком.

5. Что называется моментом импульса тела относительно некоторой оси? Ответ поясните рисунком.

6. Как определяется направление вектора момента импульса?

7. Что называется моментом силы относительно некоторой точки? Ответ поясните рисунком.

8. Что называется моментом силы относительно некоторой оси? Ответ поясните рисунком.

9. Как определяется направление момента силы?

10. Какие точки называются а) центром масс тела, б) центром тяжести тела? В каком случае они совпадают?

11. Сформулируйте основной закон динамики вращательного движения и запишите соответствующие формулы а) в случае системы точек, б) в случае абсолютно твёрдого тела.

12. Какое тело называется абсолютно твёрдым?

13. Сформулируйте закон сохранения момента импульса. В каких системах он выполняется?

14. Приведите примеры параметров-аналогов и законов-аналогов в динамике поступательного и вращательного движения.

5. МЕХАНИЧЕСКАЯ ЭНЕРГИЯ И РАБОТА

5.1. Понятие энергии

В природе существуют разнообразные формы движения материи: механическое, хаотическое тепловое, электромагнитное и т.д. Опыт показывает, что эти различные формы движения материи способны к взаимным превращениям. При этом экспериментальным путем установлено, что все взаимные превращения качественно различных форм движения происходят в строго определенных количественных соотношениях. Причем движение бесследно не исчезает, т.е. в процессе взаимодействия материальных объектов одна форма движения может превращаться (переходить) в другую форму, но при этом «исчезновение» одной формы движения, всегда сопровождается «возникновением» эквивалентного количества движения другой формы, что составляет суть всеобщего природного закона о неуничтожимости движения во Вселенной.

Изучение закономерностей превращения одних форм движения материи, в другие, с количественной точки зрения убеждает нас в том, что объективно должна существовать какая-то единая мера различных форм движения материи, одинаковая для всех форм движения и типов взаимодействия, и которая годилась бы и для описания процесса превращения одной формы движения в другую. Долгие поиски такой универсальной (всеобщей) меры, посредством которой можно было бы измерять различные формы движения и их взаимные превращения привели к введению одной из фундаментальных физических величин – *энергии*.

Энергией W называют скалярную физическую величину, представляющую собой единую (универсальную) меру различных форм движения и все возможных типов взаимодействия материальных объектов, и являющуюся однозначной, непрерывной, конечной, дифференцируемой функцией параметров состояния системы физических тел.

$$W = f(x, y, z, \upsilon_x, \upsilon_y, \upsilon_z, p, V, T, q, ...).$$

5.2. Механическая энергия

В связи с тем, что обычно различные формы движения рассматриваются раздельно, представляется разумным каждой отдельной форме движения материи поставить в соответствие свой определенный вид энергии. Тем более что функция энергии обладает свойством аддитивности (от лат. «additives» – прибавленный).

$$f(x, y, z) = f_1(x) + f_2(y) + f_3(z).$$

В дальнейшем при рассмотрении определенной формы движения материи будем говорить о соответствующем виде энергии – механической, внутренней, электромагнитной и т.п.

Энергию, зависящую от параметров механического состояния системы физических тел, принято называть *механической энергией*.

Механическая энергия определяется двумя векторными параметрами:

$$W = f(\vec{r}, \vec{\upsilon})$$

где $\vec{r}$ – *радиус-вектор,* определяющий положение тела относительно других тел, с которыми оно взаимодействует; $\vec{\upsilon}$ – скорость тела, определяющая интенсивность движения тела в пространстве.

В связи с этим представляется возможным разделить механическую энергию на две составляющие, каждая из которых зависит только от одного параметра:

$$W(\vec{r}, \vec{\upsilon}) = W\left(\vec{r}\right) + W\left(\vec{\upsilon}\right).$$

Часть механической энергии, зависящую от взаимного расположения взаимодействующих тел или их частей, называют *потенциальной энергией*

$$W\left(\vec{r}\right) = W_{\Pi}.$$

Часть механической энергии, зависящую от скорости движения тела, называют *кинетической энергией*

$$W\left(\vec{\upsilon}\right) = W_{К}.$$

Сумму кинетической $W_{К}$ и потенциальной энергий принято называть *полной механической энергией тела или системы тел* W

$$W\left(\vec{r}, \vec{\upsilon}\right) = W_{\Pi} + W_{К}.$$

5.3. Механическая работа и ее связь с изменением кинетической энергии

Изменение любого вида энергии, передача ее от одних тел к другим происходит в процессе их взаимодействия и обусловлено действием сил. Изменение энергии системы означает изменение ее движения, изменение параметров ее состояния.

С количественной стороны преобразование движения характеризуется импульсом силы $\vec{F} \cdot \Delta t$, т.е. произведением силы $\vec{F}$ на время Δt ее действия.

Для ответа на вопрос, с чем же связано изменение энергии тела предположим, что на тело с массой m, свободно двигавшееся с некоторой скоростью $\vec{\upsilon}_1$, и обладавшее кинетической энергией $W_{K_1}(\upsilon_1)$, подействовала переменная сила $\vec{F}$, которая за время Δt изменила скорость тела от $\vec{\upsilon}_1$ до $\vec{\upsilon}_2$, а, следовательно, изменила кинетическую энергию тела до значения $W_{K_2}(\upsilon_2)$.

По основному закону динамики для бесконечно малого промежутка времени dt

$$\vec{F} \cdot dt = md\vec{\upsilon} = d\vec{\rho}.$$

Выразим время действия силы dt через параметр кинетической энергии – скорость тела

$$\vec{\upsilon} = \frac{d\vec{s}}{dt},$$

откуда

$$dt = \frac{d\vec{s}}{\vec{\upsilon}},$$

где $d\vec{s}$ – элементарное перемещение, на котором действующую силу $\vec{F}$ можно считать постоянной.

Тогда

$$\vec{F} \cdot dt = \vec{F} \cdot \frac{d\vec{s}}{\vec{\upsilon}} = md\vec{\upsilon},$$

или

$$\vec{F} \cdot d\vec{s} = m\vec{\upsilon}d\vec{\upsilon}.$$

Чтобы оценить изменение энергии тела при изменении его скорости от значения $\vec{\upsilon}_1$ до значения $\vec{\upsilon}_2$, необходимо проинтегрировать обе части последнего уравнения, т.е. другими словами, просуммировать воздействие силы на всем участке траектории, на котором действовала сила $\vec{F}$ (или происходило изменение скорости), т.е.

$$\int_1^2 \vec{F} d\vec{s} = m\int_{\upsilon_1}^{\upsilon_2} \vec{\upsilon} d\vec{\upsilon},$$

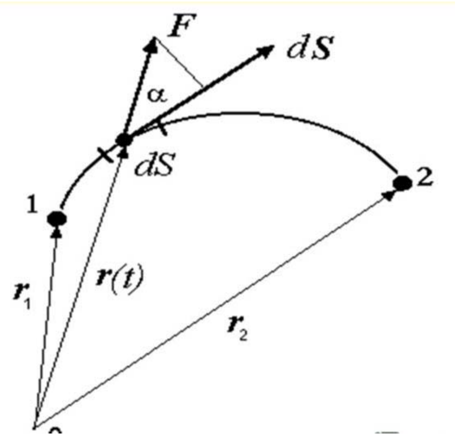


Рис. 5.1

$$\int_1^2 \vec{F} \cdot d\vec{s} = m \cdot \frac{\upsilon^2}{2}\Bigg|_{\upsilon_1}^{\upsilon_2} = \underbrace{\frac{m\upsilon_2^2}{2} - \frac{m\upsilon_1^2}{2}}_{\Delta W_K} = \Delta W_k.$$

$\Delta W_{\text{К}}$ – изменение кинетической энергии тела, выраженное как разность между ее конечным и начальным значениями

$$W_{\text{К}_1}(\upsilon_1) = \frac{m\upsilon_1^2}{2},\ \ W_{\text{К}_2}(\upsilon_2) = \frac{m\upsilon_2^2}{2}.$$

$$\Delta W_{\text{К}} = W_{\text{К}_2} - W_{\text{К}_1}.$$

Величина, выраженная интегралом $\int_1^2 \vec{F}\cdot d\vec{s}$ и являющаяся мерой изменения кинетической энергии тела, называется *работой силы* $\vec{F}$ на участке 1-2.

$$A = \int_1^2 \vec{F}\cdot d\vec{s}.$$

В том случае, когда сила $\vec{F}$, действующая на тело, остается постоянной по величине и направлению $(\vec{F} = \text{const})$

$$A = \vec{F}\cdot\int_1^2 d\vec{s} = \vec{F}\cdot\vec{s},$$

то есть, работа постоянной силы $\vec{F}$ равна скалярному произведению силы $\vec{F}$ на вектор перемещения тела $\vec{s}$.

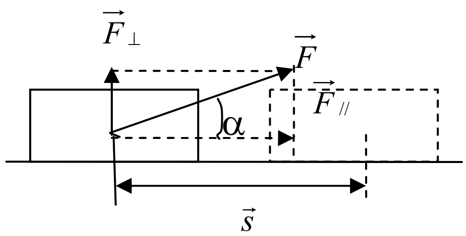


Рис. 5.2

Если сила $\vec{F}$, движущая тело, действует под углом α к направлению перемещения тела $\vec{s}$, то работу совершает только ее составляющая $\vec{F}_{//}$.

$$A = F_{//}\cdot s = F\cos\alpha\cdot s.$$

Таким образом, работу силы $\vec{F}$ можно представить как скалярное произведение векторов силы $\vec{F}$ и перемещения $\vec{s}$.

$$A = \vec{F}\cdot\vec{s}.$$

В общем случае переменной силы

$$\delta A = \vec{F}\cdot d\vec{s},$$

где δA – элементарная работа, совершенная силой на малом участке $d\vec{s}$.

$$A = \int_1^2 \vec{F}\cdot d\vec{s}$$

Механической работой A называют скалярную физическую величину, являющуюся мерой изменения энергии тела в процессе взаимодействия его с другими телами и равную скалярному произведению векторов силы $\vec{F}$ и перемещения $\vec{s}$, совершаемого телом под действием этой силы.

Работа характеризует не движение, или положение в пространстве какого-либо тела, т.е. его энергию, а только изменение энергии. Если в процессе взаимодействия тел, их энергия не изменяется, то и работа равна нулю, или как принято говорить, работа в этом случае не совершается.

Механическая работа не совершается (т.е. механическая энергия тела не изменяется):

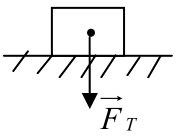
– если в направлении перемещения $\vec{s}$ тела не действует сила ($\vec{F} = 0$).

Пример: движение тела по инерции.

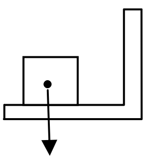
– если нет перемещения тела $\vec{s}$ в направлении действия силы $\vec{F}$, т.е. $\vec{s} = 0$.

Примеры:

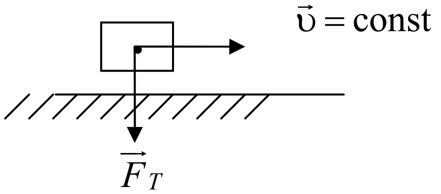
1) тело лежит на подставке



2) рука удерживает груз

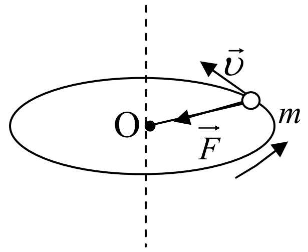


3) тело равномерно без трения движется вдоль горизонтальной поверхности



– если сила $\vec{F}$ действует перпендикулярно вектору перемещения тела $\vec{s}$, т.е. угол $\alpha = \dfrac{\pi}{2}$, следовательно $\cos\alpha = 0$.

Пример: сила удерживающая тело при его равномерном движении по окружности.



Работа – величина алгебраическая, она может быть и положительной и отрицательной:

– если $\alpha < \frac{\pi}{2}$, то работа силы положительна, в этом случае параллельная составляющая силы $\vec{F}$ совпадает по направлению с вектором скорости движущегося тела $\vec{\upsilon}$.

Силу, совершающую положительную работу называют *движущей силой.*

– если $\alpha > \frac{\pi}{2}$, то работа силы отрицательна.

Силу, совершающую отрицательную работу принято называть *силой сопротивления движению.* Например: сила трения.

5.4. Мощность

Для того чтобы охарактеризовать быстроту (скорость) совершения работы, вводят физическую величину, называемую *мощностью*

$$N = \frac{dA}{dt}.$$

Если за время dt сила F совершает работу $dA = F \cdot ds$, то мощность, развиваемая этой силой

$$N = F \cdot \frac{ds}{dt} = F \cdot \upsilon,$$

или в векторном виде

$$N = \vec{F} \cdot \vec{\upsilon}.$$

Мощностью N называют скалярную физическую величину, представляющую собой работу совершаемую силой $\vec{F}$ за единицу времени и равную скалярному произведению векторов силы $\vec{F}$ и скорости $\vec{\upsilon}$, с которой движется тело под действие этой силы.

5.5. Потенциальная энергия механической системы

Найдем выражение для потенциальной энергии, которая представляет собой часть энергии механической системы тел, зависящую от ее конфигурации, т.е. от взаимного расположения тел системы и характера сил взаимодействия между ними. Определим работу, которую совершает сила тяжести $m\vec{g}$, действующая на тело массой m, при его перемещении по произвольной траектории из точки, расположенной на высоте h_1 над поверхностью Земли, в точку, находящуюся на высоте h_2.

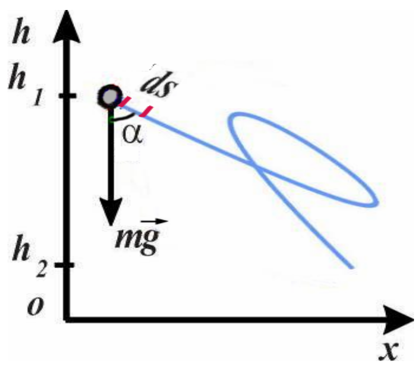


Рис. 5.3

Элементарная работа δA, совершаемая силой тяжести при бесконечно малом перемещении $d\vec{s}$, равна

$$\delta A = mg \cdot ds \cos\alpha .$$

Полная работа на пути S

$$A = \int_S mg \cdot ds \cos\alpha .$$

Т.к. величина и направление вектора силы тяжести в любой точке траектории движения тела остаются неизменными, то

$$A = mg\int_S \cos\alpha \cdot ds .$$

Величина $\cos\alpha \cdot ds$ представляет собой проекцию вектора перемещения $d\vec{s}$ на вертикальную ось, равную dh.

Тогда

$$A = mg\int_{h_1}^{h_2} dh = mg \cdot h\Big|_{h_1}^{h_2} = mg(h_2 - h_1) = -mg(h_1 - h_2) = -(mgh_1 - mgh_2),$$

где $mgh = W_П$ – потенциальная энергия тела массой m в поле силы тяжести.

Поэтому

$$-\left(mgh_1 - mgh_2\right) = -\left(W_{П_1} - W_{П_2}\right) = -\Delta W_П .$$

$\Delta W_П = W_{П_1} - W_{П_2}$ – изменение потенциальной энергии тела.

Знак минус говорит о том, что работа совершается за счет убыли потенциальной энергии тела т.е. $A = -\Delta W_П$.

Потенциальной энергией тела в поле силы тяжести $W_П$ называют скалярную физическую величину характеризующую положение физического тела относительно поверхности Земли, и равную работе, совершаемой против силы тяжести при подъеме тела на высоту h над поверхностью Земли.

Работа, совершаемая силой тяжести при перемещении тела из одного положения в другое, не зависит от формы траектории движения тела, и определяется только начальным и конечным положениями тела относительно поверхности Земли.

Силы, работа, которых не зависит от формы траектории движения тела, принято называть *консервативными.*

Силы, не обладающие таким свойством, называют *неконсервативными или диссипативными.*

Поля, действие которых на физические тела характеризуется консервативной силой принято называть *потенциальными*.

5.6. Связь потенциальной энергии и консервативной силы. Потенциальные кривые

Зная вид функции потенциальной энергии $W_\Pi(x, y, z)$ можно найти консервативную силу, действующую на тело в каждой точке поля

Элементарная работа консервативной силы

$$\delta A = -dW_\Pi .$$

Эта работа совершается за счет убыли потенциальной энергии тела на некоторую величину dW_Π .

Так как

$$\delta A = \vec{F} \cdot d\vec{r} ,$$

то

$$-dW_\Pi = \vec{F} \cdot d\vec{r} ,$$

откуда

$$\vec{F} = -\frac{d}{d\vec{r}} W_\Pi = -\left(\frac{\partial W_\Pi}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial W_\Pi}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial W_\Pi}{\partial z}\vec{k} \right) = -\operatorname{grad} W_\Pi .$$

где $\frac{\partial}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial}{\partial z}\vec{k} -$ линейный дифференциальный оператор 1-го порядка (оператор Гамильтона).

Векторная физическая величина, равная

$$\frac{\partial W_\Pi}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial W_\Pi}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial W_\Pi}{\partial z}\vec{k} ,$$

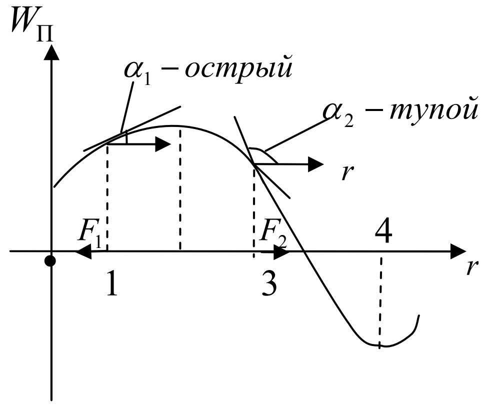
называется градиентом потенциальной энергии тела (grad W_Π).

Таким образом, вектор консервативной силы равен градиенту потенциальной энергии, взятому со знаком «минус».

На рис. 5.4 показана *потенциальная кривая* $\left(W_\Pi\left(r\right)\right)$.

а) в точке 1: $\alpha_1 -$ острый, $\operatorname{tg}\alpha_1 > 0$, $F_1 = -\operatorname{tg}\alpha_1 < 0 -$ это сила притяжения;

б) в точке 2: α_2 – тупой, $\operatorname{tg}\alpha_2 < 0$, $F_2 = -\operatorname{tg}\alpha_2 > 0$ – это сила отталкивания. Сила направлена в сторону спада потенциальной кривой.



$$F = -\frac{dW_п}{dr} = -\operatorname{tg}\alpha$$

(α – угол наклона касательной)

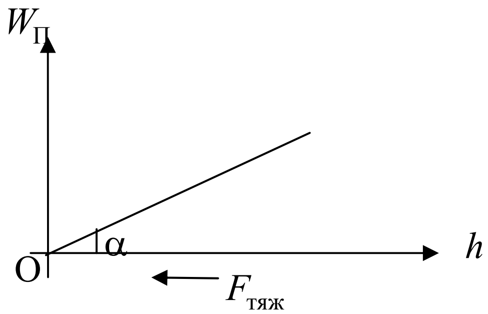
Рис. 5.4

в) в точках 3 и 4: $\alpha = 0$, $tg0 = 0$, $F_{3,4} = 0$ – это точки равновесия.

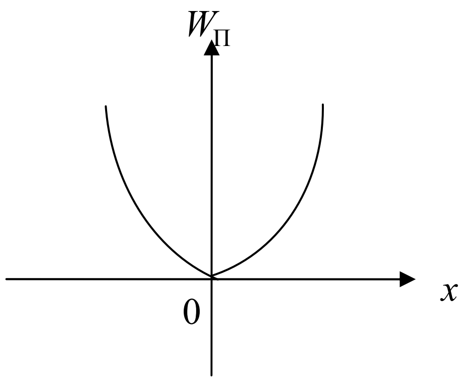
Точка 3 соответствует максимальному значению потенциальной энергии и является положением неустойчивого равновесия $(\max W_П)$; точка 4 соответствует минимальному значению потенциальной энергии и является положением устойчивого равновесия $(\min W_П)$.

Примеры потенциальных кривых:

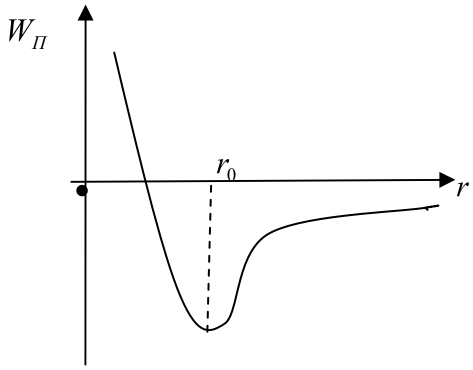
1) $W_{Птяж} = mgh$, $\quad F_m = -\dfrac{dW_П}{dh} = -mg$, $\quad F = -\operatorname{tg}\alpha = \mathrm{const}$.



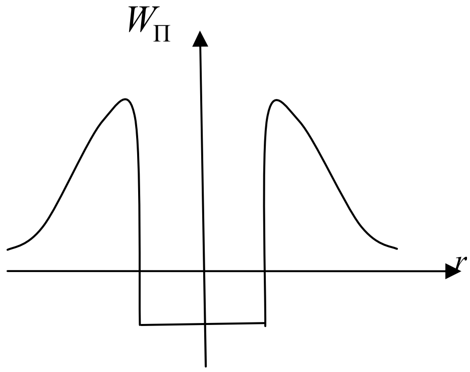
2) $W_{Пупр} = \dfrac{kx^2}{2}$, $\quad F_{упр} = -\dfrac{dW_П}{dx} = -kx$.



3) Межмолекулярное взаимодействие



4) Потенциальная яма для α -частицы в ядре



5.7. Потенциальная энергия упруго деформированного тела

При деформировании (растяжении) пружины некоторой внешней силой $\vec{F}$, в пружине возникает сила упругости

$$\vec{F}_{УПР} = -k\Delta x,$$

где k – жесткость пружины; Δx – абсолютная деформация (растяжение) пружины.

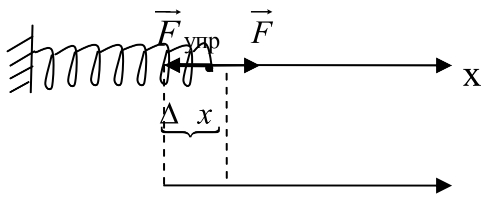


Рис. 5.5

По третьему закону Ньютона деформирующая внешняя сила $\vec{F}$ равна по модулю и противоположна по направлению силе упругости, т.е.

$$\vec{F} = -\vec{F}_{УПР}.$$

Элементарная работа δA, совершаемая внешней силой против силы упругости

$$\delta A = F \cdot dx = kxdx,$$

где dx – бесконечно малая деформация пружины; $F = k \cdot x \approx \text{const}$.

Полная работа

$$A = \int \delta A = k\int_0^x xdx = k\frac{x^2}{2}.$$

Эта работа внешней силы пошла на увеличение потенциальной энергии пружины

$$W_\Pi = \frac{kx^2}{2}.$$

Потенциальной энергией упруго деформированного тела называют скалярную физическую величину равную работе, которую необходимо совершить против силы упругости, чтобы деформировать тело.

5.8. Кинетическая энергия вращающегося тела

Найдем кинетическую энергию абсолютно твердого тела, вращающегося вокруг неподвижной оси. Мысленно разобьём это тело на малые объемы dV с элементарными массами m_i, движущиеся с линейными скоростями

$$\upsilon_i = \omega \cdot r_i,$$

где r_i – расстояние i-й массы от оси вращения.

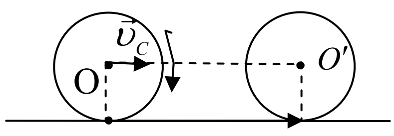
Тогда кинетическая энергия i-й элементарной массы

$$W_{K_i} = \frac{m_i\upsilon_i^2}{2} = \frac{1}{2}m_i\omega^2 r_i^2.$$

Кинетическая энергия всего тела представляет собой *сумму кинетических энергий составляющих его частей (элементарных объемов).*

$$W_K = \sum_{i=1}^{n} W_{k_i} = \frac{1}{2}\omega^2 \underbrace{\sum_{i=1}^{n} m_i r_i^2}_{J} = \frac{1}{2}J\omega^2.$$

где $J = \sum\limits_{i=1}^{n} m_i r_i^2$ – момент инерции тела относительно оси вращения.



Рассмотрим случай плоского движения, т.е. такого движения, при котором все точки тела перемещаются в параллельных плоскостях. Примером такого движения является качание цилиндра по плоскости.

Плоское движение твердого тела можно представить как сумму двух движений:

1) поступательного движения с одинаковой для всех точек тела скоростью $\vec{\upsilon}_C$, называемой скоростью центра масс тела.

2) вращательного движения с одинаковой для всех точек тела угловой скоростью ω вокруг оси, проходящей через центр масс.

Таким образом, кинетическая энергия тела при плоском движении складывается из кинетической энергии поступательного и вращательного движений

$$W_K = \frac{m\upsilon_c^2}{2} + \frac{J\omega^2}{2}.$$

5.9. Работа внешних сил при вращении твердого тела

При вращении твердого тела его потенциальная энергия не изменяется, поэтому элементарная работа δA внешних сил равна приращению кинетической энергии тела, т.е.

$$\delta A = dW_K = d\left(\frac{J\omega^2}{2}\right) = \frac{J}{2}d(\omega^2) = \frac{J}{2}\cdot 2\omega d\omega = J\omega d\omega.$$

Так, как

$$\frac{d\omega}{dt} = \varepsilon,$$

откуда

$$d\omega = \varepsilon \cdot dt,$$

то

$$\delta A = I\omega \cdot \omega dt.$$

Мгновенная угловая скорость

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt},$$

откуда

$$d\varphi = \omega \cdot dt,$$

а, поскольку

$$J \cdot \varepsilon = M,$$

то

$$\delta A = M \cdot d\varphi.$$

Работа внешних сил при повороте тела на некоторый конечный угол $\Delta\varphi$ равна

$$A = \int \delta A = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} M d\varphi,$$

т.е. при вращении твердого тела вокруг оси работа внешних сил определяется моментом этих сил относительно данной оси.

Если момент сил относительно оси равен нулю $(M = 0)$, то эти силы не производят никакой работы, т.е. $A = 0$.

Если $M = \text{const}$, то

$$A = \int \delta A = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} M d\varphi = M \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} d\varphi = M(\varphi_2 - \varphi_1) = M\Delta\varphi .$$

Мощность при вращательном движении

$$N = \frac{\delta A}{dt} = M\frac{d\varphi}{dt} = M\omega .$$

5.10. Закон сохранения механической энергии

Рассмотрим, как изменяются кинетическая и потенциальная энергии замкнутой (изолированной) системы физических тел, т.е. такой системы, на которую не действуют внешние силы.

Уравнение движения для каждого из тел такой системы имеет вид

$$m_i a_i = m_i \frac{d\upsilon_i}{dt} = F_{\text{вн}_i} ,$$

где $F_{\text{вн}_i}$ – суммарная внутренняя сила, действующая на i-е тело системы со стороны всех других тел системы.

Пусть ds – перемещение, совершаемое i-м телом системы за промежуток времени dt. Умножив на ds обе части последнего равенства, получим

$$m_i \frac{d\upsilon_i}{dt} \cdot ds_i = F_i ds .$$

Учтем, что

$$\frac{ds_i}{dt} = \upsilon_i ,$$

тогда

$$m_i \upsilon_i d\upsilon_i = F_i ds ,$$

или

$$d\left(\frac{m_i \upsilon_i^2}{2}\right) = \delta A_i .$$

Складывая аналогичные уравнения, записанные для всех тел системы, получим

$$\sum_{i=1}^{n} d\left(\frac{m_i \upsilon_i^2}{2}\right) = \sum_{i=1}^{n} \delta A_i ,$$

т.е. суммарное изменение кинетической энергии тел замкнутой системы равно работе внутренних сил

$$dW_k = dA .$$

что составляет сущность теоремы о кинетической энергии.

Если внутренние силы консервативные, то их работа равна убыли потенциальной энергии этой системы тел, т. е.

$$dA = -dW_{\text{П}} .$$

Следовательно,

$$dW_{\text{К}} = -dW_{\text{П}} ,$$

или

$$dW_{\text{К}} + dW_{\text{П}} = d(W_{\text{К}} + W_{\text{П}}) = dW = 0 ,$$

где $W = W_{\text{К}} + W_{\text{П}}$ – полная механическая энергия системы тел.

Так как $dW = 0$, то $W = W_{\text{К}} + W_{\text{П}} = \text{const}$.

Закон сохранения механической энергии:

Полная механическая энергия замкнутой системы тел, между которыми действуют только консервативные силы, остается постоянной, т.е. не изменяется с течением времени.

Согласно этому закону в консервативных замкнутых системах кинетическая энергия может превращаться в потенциальную и обратно в эквивалентных количествах так, что полная механическая энергия системы остается неизменной. В системах, в которых действуют также и неконсервативные силы, например, силы трения, полная механическая энергия не сохраняется. Однако, при «исчезновении» (утечке) механической энергии всегда возникает эквивалентное количество энергии другого вида (например, тепловой).

Таким образом: *энергия никогда не исчезает и не появляется вновь, она лишь передается от одного тела к другому, или превращается из одного вида в другой.* В этом и заключается физическая сущность всеобщего закона превращения и сохранения энергии в природе.

5.11. Соударение двух тел

Удар твёрдых тел – это совокупность явлений, возникающих при их столкновении.

Промежуток времени, в течение которого длится удар, обычно очень мал (~ 10^{-4}–10^{-5} с), а ударные силы очень велики. За время удара они изменяются в широких пределах и достигают значений, при которых средние величины давления на площадках контакта имеют порядок 10^4 и даже 10^5 атм. Действие ударных сил приводит к приводит к значительному изменению скоростей точек тел за время удара. Следствиями ударов могут быть также остаточные деформации, нагревание тел, изменение механических свойств их материалов, а при больших скоростях соударения – разрушение тел в месте удара.

Анализ явлений, имеющих место при ударе сплошных тел, довольно сложен, поэтому рассмотрим самый простой случай – центральное соударение двух однородных шаров. В этом случае векторы скоростей шаров до удара направлены вдоль прямой, проходящей через их центры.

Для классификации результата соударения вводят понятие абсолютно упругого и абсолютно неупругого ударов.

Абсолютно упругий удар – столкновение, при котором деформация тел оказывается обратимой, т.е. исчезающей после прекращения взаимодействия.

Например, после абсолютно упругого удара о стенку, футбольный мяч восстанавливает шарообразную форму.

Абсолютно упруго сталкиваются многие элементарные частицы, бильярдные шары, теннисный мяч с ракеткой.

Чтобы удар был абсолютно упругим, взаимодействующие тела должны обладать определенными свойствами. А именно, силы, возникающие при ударе, должны *зависеть от величины деформации* и *не зависеть от её скорости*. К материалам, имеющим такие свойства относятся, в первую очередь, инструментальные сорта стали, слоновая кость.

Их соударение происходит следующим образом. При ударе возникают деформации тел, а значит и силы, сообщающие обоим телам ускорения в противоположных направлениях. В какой-то момент времени скорости шаров становятся равными, деформации достигают максимального значения, силы продолжают действовать, изменяя скорости в тех же направлениях, что и раньше. Поэтому шары будут «отодвигаться» друг от друга, а деформации уменьшаться, пока совсем не исчезнут. К этому моменту времени упругие силы, возникающие в телах, совершат такую же работу, какая была затрачена на деформацию тел. В результате *вся кинетическая энергия, которой обладали тела до удара, снова перейдет в кинетическую энергию тел после удара*.

Силы взаимодействия между сталкивающимися телами (ударные или мгновенные силы) столь велики, что внешними силами, действующими на них можно пренебречь. Это позволяет систему тел в процессе их соударения приближенно рассматривать как замкнутую систему и применять к ней законы сохранения. Для абсолютно упругого удара выполняются закон сохранения импульса и закон сохранения кинетической энергии.

Рассмотрим столкновение двух шаров массами m_1 и m_2, движущихся до удара со скоростями $\vec{\upsilon}_1$ и $\vec{\upsilon}_2$, направленными вдоль линии, соединяющей центры шаров (рис 5.6). Найдём скорости шаров $\vec{\upsilon}_1'$ и $\vec{\upsilon}_2'$ после удара.

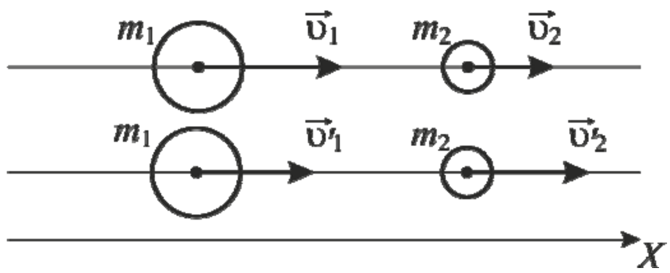


Рис. 5.6

Закон сохранения импульса для шаров

$$m_1\vec{\upsilon}_1 + m_2\vec{\upsilon}_2 = m_1\vec{\upsilon}_1' + m_2\vec{\upsilon}_2',$$

в проекции на горизонтальную ось X имеет вид

$$m_1\upsilon_1 + m_2\upsilon_2 = m_1\upsilon_1' + m_2\upsilon_2'. \tag{5.1}$$

Уравнение (5.1) содержит два неизвестных υ_1' и υ_2'.

Для их однозначного определения требуется ещё одно уравнение – закон сохранения энергии

$$\frac{m_1\upsilon_1^2}{2} + \frac{m_2\upsilon_2^2}{2} = \frac{m_1\upsilon_1'^2}{2} + \frac{m_2\upsilon_2'^2}{2}. \tag{5.2}$$

Решая систему уравнений (5.1) и (5.2), определяют скорости шаров после удара

$$\upsilon_1' = \frac{(\mathrm{m}_1 - m_2)\upsilon_1 + 2m_2\upsilon_2}{m_1 + m_2}, \qquad \upsilon_2' = \frac{(\mathrm{m}_2 - m_1)\upsilon_2 + 2m_1\upsilon_1}{m_1 + m_2}.$$

Абсолютно неупругий удар – столкновение тел, в результате которого, они движутся как единое целое.

Примерами абсолютно неупругого удара являются столкновение метеорита с Землёй, мухи с лобовым стеклом автомобиля, пули с песком, захват нейтрона ядром урана, присоединение электрона ионом и т.д.

После абсолютно неупругого удара скорости соударяющихся тел одинаковы. Это возможно, если тела обладают такими свойствами, что силы, возникающие при их деформации, *зависят не от величины, а от скорости изменения деформации.* Такие свойства присущи, например, мягкой глине, пластилину.

При неупругом соударении происходит следующее. В начальный момент удара скорость деформации велика (шары сжимаются), поэтому возникают значительные силы, сообщающие обоим шарам ускорения, направленные в противоположные стороны. В процессе удара скорости деформации шаров уменьшаются, а сами деформации увеличиваются до тех пор, пока скорости шаров не окажутся равными. В этот момент деформации шаров перестанут изменяться, исчезнут силы, и оба шара будут двигаться с одинаковой скоростью.

При абсолютно неупругом ударе выполняются законы сохранения импульса и полной энергии. Механическая же энергия тел до удара больше механической энергии после удара, так как при ударе она частично (или полностью) переходит во внутреннюю энергию тел и расходуется на работу по деформации тел.

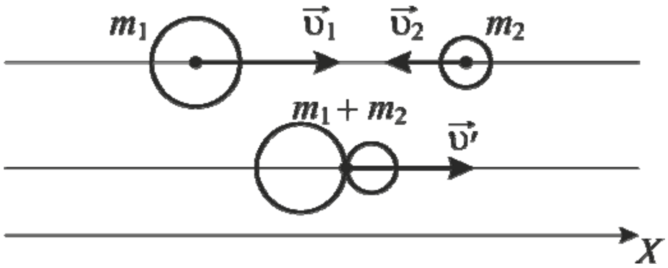


Рис. 5.7

Рассмотрим абсолютно неупругий удар двух шаров, движущихся навстречу друг другу (рис. 5.7).

Если массы шаров m_1 и m_2, их скорости до удара $\vec{\upsilon}_1$ и $\vec{\upsilon}_2$, то используя закон сохранения импульса можно записать

$$m_1\vec{\upsilon}_1 + m_2\vec{\upsilon}_2 = \left(m_1 + m_2\right)\vec{\upsilon}'.$$

В проекции на горизонтальную ось X это уравнение имеет вид

$$m_1\upsilon_1 - m_2\upsilon_2 = \left(m_1 + m_2\right)\upsilon'. \qquad (5.3)$$

После неупругого удара шары движутся вместе в том направлении, в котором до удара двигался шар, с большим импульсом.

Решая уравнение (5.3), определяют величину скорости шаров υ' после удара

$$\upsilon' = \frac{m_1\upsilon_1 - m_2\upsilon_2}{m_1 + m_2}.$$

Закон сохранения энергии для неупругого удара шаров имеет вид:

$$\frac{m_1\upsilon_1^2}{2} + \frac{m_2\upsilon_2^2}{2} = \frac{\left(m_1 + m_2\right)\upsilon'^2}{2} + \Delta K, \qquad (5.4)$$

где ΔK – потеря кинетической энергии, перешедшей в тепловую или другие формы энергии.

Из формулы (5.4) следует, что

$$\Delta \mathrm{K} = \left(\frac{m_1\upsilon_1^2}{2} + \frac{m_2\upsilon_2^2}{2}\right) - \frac{\left(m_1 + m_2\right)\upsilon^2}{2}.$$

На практике абсолютно упругий и абсолютно неупругий удары могут быть реализованы лишь с определенной степенью приближения.

Вопросы для самоконтроля

1. Дайте понятие энергии. Что называется работой силы?
2. Какая из двух величин – энергия и работа – является функцией состояния, а какая – функцией процесса?
3. Как выражается при поступательном движении механическая работа: а) постоянной силы, направленной под углом к вектору перемещения; б) нескольких постоянных сил; в) переменной силы; г) силы упругости; д) силы тяготения?
4. Как выражается работа во вращательном движении: а) при $M = const$; б) при $M = f(t)$?
5. Какая величина называется мощностью?
6. Как выражается при поступательном движении средняя мощность; мгновенная мощность?
7. Каково выражение мощности при вращательном движении?
8. Что называется кинетической энергией тела; системы тел? Как связаны между собой изменение кинетической энергии и работа сил?
9. Что называется потенциальной энергией системы тел? Какова связь изменения потенциальной энергии системы с работой сил?
10. Какие силы называются консервативными? Неконсервативными?
11. Что называется полной механической энергией системы?
12. Какова связь изменения полной механической энергии системы с работой сил?

6. СПЕЦИАЛЬНАЯ ТЕОРИЯ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ

6.1. Постулаты специальной теории относительности

Экспериментальной основой для создания специальной теории относительности (СТО) послужил опыт Майкельсона. Его результаты оказались неожиданными для классической физики своего времени: *независимость скорости света от системы отсчёта*. Попытка проинтерпретировать этот результат в начале XX века вылилась в пересмотр классических представлений и привела к созданию СТО.

Основу СТО, сформулированной в 1905 г. А. Эйнштейном, составляют два постулата (принципа):

1) Принцип относительности Эйнштейна: *все физические процессы при одних и тех же условиях в инерциальных системах отсчета* (*ИСО*) *протекают одинаково*.

Это означает, что *никакими физическими опытами, проведенными внутри замкнутой ИСО, нельзя установить, покоится ли она или движется прямолинейно и равномерно*.

Все ИСО равноправны, а физические законы инвариантны по отношению к выбору ИСО (т.е. уравнения, выражающие эти законы, имеют одинаковый вид во всех инерциальных системах отсчета).

Этот принцип явился обобщением механического принципа относительности Галилея на любые физические явления.

2) Принцип постоянства скорости света: *скорость света в вакууме постоянна и не зависит от скорости движения источника и приемника света. Она одинакова во всех направлениях и во всех инерциальных системах отсчета*.

Скорость света в вакууме — предельная скорость передачи сигнала. Это одна из важнейших физических постоянных, так называемых мировых констант ($c = 300000$ км/с).

Этот принцип противоречит закону сложения скоростей в классической механике.

6.1. Преобразования Лоренца

Исходя из постулатов теории относительности Эйнштейна, можно найти законы преобразований, связывающие межу собой пространственные координаты и время в двух системах отсчета, движущихся прямолинейно и равномерно относительно друг друга.

Пусть x, y, z, t и x', y', z', t' – координаты и время в инерциальных систем отсчета K и K', а $\vec{\upsilon}$ – скорость их относительного движения (рис. 6.1). При этом нет никаких оснований полагать, что время в системе K'

совпадает со временем в системе K, как это безоговорочно принималось в классической физике. Для простоты рассуждений будем считать, что направление вектора $\vec{\upsilon}$ совпадает с направлением осей x и x'.

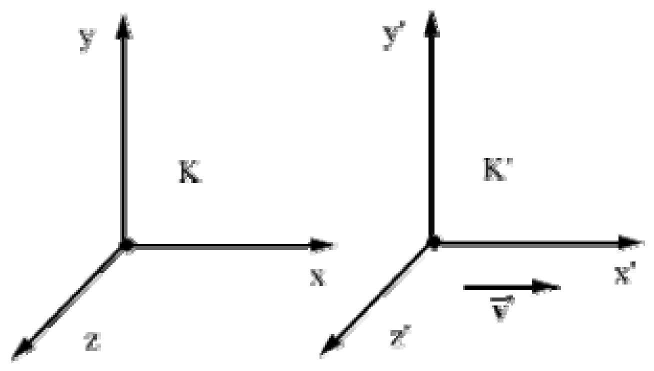


Рис. 6.1

Предположим, что в момент времени t в точке с координатами x, y, z происходит некоторый физический процесс, называемый событием. Определим координаты этого события в системе отсчета K', т.е. найдем величины, x', y', z' t'.

Выберем за начало отсчета времени $(t=0)$ тот момент, в который начало координат системы K' (точка O) совпадает с началом координат системы K. Пусть в момент времени $t=0$ из точки O начала распространяться сферическая электромагнитная волна (рис.6.2).

В системе K уравнение волновой поверхности имеет вид.

$$x^2+y^2+z^2=c^2t^2,$$

или

$$x^2+y^2+z^2-c^2t^2=0. \tag{6.1}$$

Поскольку, согласно принципу относительности Эйнштейна, закон и величина скорости распространения волны должны быть одинаковыми во всех инерциальных системах отсчета, наряду с этим уравнением с равным правом можно написать уравнение сферической волны в системе K'

$$(x')^2+(y')^2+(z')^2-c^2(t')^2=0.$$

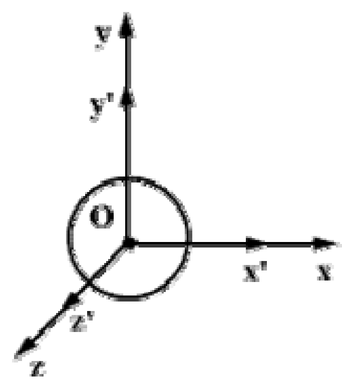


Рис. 6.2.

Так как в начальный момент времени начало координат систем совпадали, то

$$x'^2+y'^2+z'^2-c^2t'^2=x^2+y^2+z^2-c^2t^2 \tag{6.2}$$

Формулы преобразования координат и времени должны, во-первых, не нарушать соотношений (6.1) и (6.2), а, во-вторых, быть линейными. Требование линейности связано с однородностью пространства. Т.к. движение системы K' происходит только вдоль оси x преобразование координат y и z должно иметь вид

$$y' = y, z' = z\,.$$

Закон преобразования x' через x можно написать, исходя из следующего соображения: если в момент времени $t = 0$ начала систем координат K и K' совпадали, то координата x' в системе K запишется $x = \upsilon t$.

Следовательно, в самом общем случае можно написать

$$x' = \alpha(\upsilon)(x - \upsilon t)\,, \tag{6.3}$$

где коэффициент $\alpha(\upsilon)$ может зависеть только от скорости относительного движения систем отсчета.

Не делая никаких произвольных допущений о совпадении времени в двух системах отсчета, можно представить t' в виде линейной однородной функции x и t

$$t' = \beta t + \gamma x\,. \tag{6.4}$$

Коэффициенты β и γ могут, вообще говоря, зависеть от скорости υ. Если бы оказалось, что $\gamma = 0$, а $\beta = 1$, то мы вернулись бы к преобразованиям Галилея. Для определения коэффициентов α, β и γ, отвечающих требованиям принципа относительности Эйнштейна, следует подставить (6.3) и (6.5) в (6.2).

Тогда

$$\alpha^2(x - \upsilon t)^2 + y^2 + z^2 - c^2(\beta t + \gamma x)^2 = x^2 + y^2 + z^2 - c^2 t^2\,.$$

Для выполнения тождества необходимо приравнять коэффициенты при x^2, t^2 и xt.

Раскрыв скобки, и проведя соответствующие преобразования, получим:

$$\alpha^2 - c^2\gamma^2 = 1\,,$$

$$\alpha^2\upsilon^2 - c^2\beta^2 = -c^2\,,$$

$$\alpha^2\upsilon - c^2\beta^2\gamma = 0\,.$$

Из этих трех уравнений находим неизвестные величины α, β и γ:

$$\alpha = \beta = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{\upsilon^2}{c^2}}}\,,$$

$$\gamma = -\frac{\alpha\upsilon}{c^2\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}}.$$

Подставляя значения α, β и γ в преобразования координат (6.3) и (6.4), находим:

$$x' = \frac{x-\upsilon t}{\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}}\ ;\ y' = y;\ z' = z;\ t' = \frac{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}x}{\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}}. \tag{6.5}$$

Эти формулы носят название *преобразований координат Лоренца*.

Формулы обратных преобразований от штрихованных к не штрихованным величинам имеют вид:

$$x = \frac{x'+\upsilon t}{\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}};\ y = y';\ z = z';\ t = \frac{t'+\frac{\upsilon^2}{c^2}x'}{\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}}. \tag{6.6}$$

Преобразования Лоренца приводят к выводам, противоречащим привычным представлениям о свойствах времени и пространства, сложившимся на основе повседневного опыта.

Рассмотрим несколько примеров применения преобразований Лоренца.

6.1.1. Одновременность событий в разных системах отсчета

Пусть в системе K в точках с координатами x_1 и x_2 происходят одновременно два события в момент времени $t_1 = t_2 = t$.

Согласно преобразованиям Лоренца в системе K' этим событиям будут соответствовать координаты

$$x_1' = \frac{x_1-\upsilon t}{\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}};\qquad x_2' = \frac{x_2-\upsilon t}{\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}}$$

и моменты времени

$$t_1' = \frac{t_1-\frac{\upsilon^2}{c^2}x_1}{\sqrt{1-\beta^2}};\qquad t_2' = \frac{t_2-\frac{\upsilon^2}{c^2}x_2}{\sqrt{1-\beta^2}},$$

где $\beta = \frac{\upsilon^2}{c^2}$.

Из записанных формул видно, что в случае, если события в системе K происходят в одном и том же месте пространства $(x_1 = x_2)$, то они будут совпадать в пространстве $(x_1' = x_2')$ и во времени $(t_1' = t_2')$ также в системе K'. Если же события в системе K пространственно разделены $(x_1 \neq x_2)$, то системе K' они также окажутся пространственно разделенными $(x_1 \neq x_2)$, но не будут одновременными.

Знак разности $(t_2' - t_1')$ определяется знаком выражения $\upsilon(x_1 - x_2)$.

Из этого следует, что в различных подвижных системах K', (при разных значениях υ) разность $(t_2' - t_1')$ будет различна по величине и может отличаться по знаку.

Это означает, что в одних системах событие 1 будет предшествовать событию 2, в других системах, наоборот, событие 2 будет предшествовать событию 1. Сказанное относится только к событиям, между которыми отсутствует причинная связь. Причинно связанные события (например, выстрел и попадание пули в мишень) ни в одной системе отсчета не будут одновременными и во всех системах событие, являющееся причиной, будет предшествовать следствию.

6.1.2. Длина тел в разных системах отсчета

Рассмотрим стержень, расположенный вдоль оси x и покоящийся относительно системы K'. Длина его в этой системе равна: $\ell_0 = x_2' - x_1'$, где x_1' и x_2' – не изменяющиеся со временем t' координаты концов стержня. Относительно системы K стержень движется со скоростью υ. Для определения его длины в этой системе нужно отметить координаты концов стержня x_1 и x_2 в один и тот же момент времени $t_1 = t_2 = t$. Их разность $\ell = x_2 - x_1$ даст длину стержня ℓ, измеренную в системе K. Чтобы найти соотношение между ℓ_0 и ℓ, следует взять ту из формул преобразований Лоренца, которая содержит x', x и t, т.е.

$$x_1' = \frac{x_1 - \upsilon t}{\sqrt{1-\beta^2}}; \; x_2' = \frac{x_2 - \upsilon t}{\sqrt{1-\beta^2}},$$

откуда

$$x_2' - x_1' = \frac{x_2 - x_1}{\sqrt{1-\beta^2}},$$

или

$$\ell_0 = \frac{\ell}{\sqrt{1-\beta^2}}.$$

Из последнего равенства следует, что

$$\ell = \ell_0 \sqrt{1 - \frac{\upsilon^2}{c^2}}\,.$$

Таким образом, длина стержня ℓ, измеренная в системе относительно которой он движется, оказывается меньше длины ℓ_0, измеренной в системе, относительно которой он покоится.

Это явление называется *лоренцевым сокращением длины*.

Скорости, при которых сокращение размеров движущихся материальных тел становится заметным, носят название *релятивистских скоростей,* и в настоящее время они достигнуты в крупных масштабах в лабораторной практике и в новых промышленных аппаратах.

В ядерных реакторах атомных электростанций быстрые нейтроны движутся со скоростями, для которых $\sqrt{1-\beta^2} = 0{,}997$, т.е. сокращение длины порядка $0{,}3\%$. Релятивистские частицы, приходящих на Землю космических лучей имеют $\sqrt{1-\beta^2} = 10^{-7}$ и продольные размеры сокращаются в $10 \cdot 10^6$ раз. Для быстро летящих заряженных частиц подобной продольной деформации подвергается сопровождающее их электромагнитное поле (рис. 6.3).

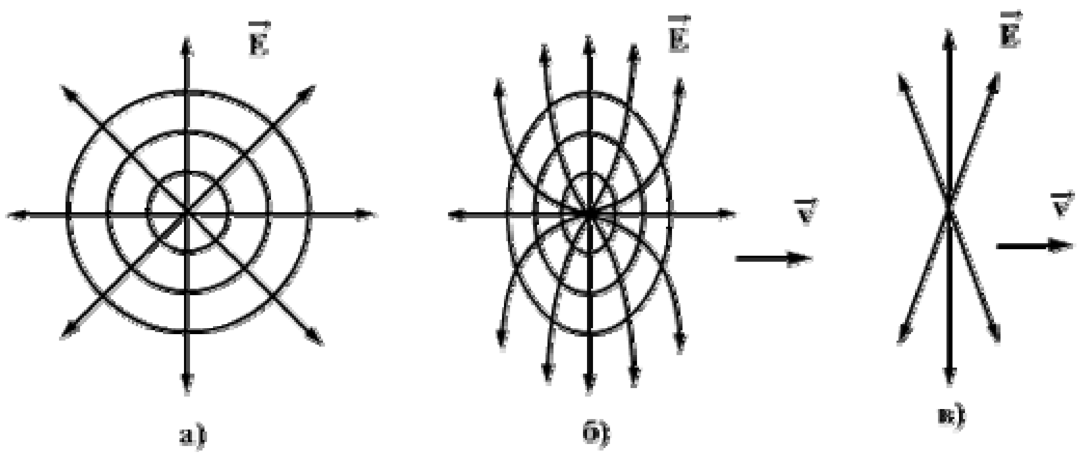


Рис. 6.3

На рис. 6.3,а изображены линии напряженности и постоянного потенциала ($\varphi = \text{const}$) электрического поля точечного заряда, когда он неподвижен.

На рис. 6.3,б тот же заряд, движущийся с не слишком большой скоростью; на рис. 6.3,в – со скоростью, очень близкой скорости света.

Если в первом случае поле сферически симметрично, то в последнем оно практически сжимается в «лепешку», перпендикулярную к направлению движения. Эту деформацию электромагнитного поля можно обнаружить на опыте. Релятивистская частица будет взаимодействовать с неподвижным пробным зарядом q, помещенным на ее пути, лишь в течение очень короткого времени, когда «лепешка» силовых линий проходит через заряд q. Любопытно, что визуально (или на фотографии) изменение формы тела даже при сравнимых со скоростью света скоростях, не может быть обнаружено. Причина этого весьма проста. Наблюдая визуально или фотографируя какое-либо тело, мы регистрируем импульсы света от разных участков тела, достигшие одновременно сетчатки глаза или фотопластинки. Испускаются же эти импульсы не одновременно. Импульсы от более удаленных участков тела были испущены раньше, чем от более близких участков.

Таким образом, если тело движется, на сетчатке глаза получается искаженное изображение тела.

Соответствующий расчет показывает, что следствием искажения будет уничтожение лоренцевого сокращения, так что тела кажутся не искаженными, а лишь повернутыми. Если бы лоренцевого сокращения не было, тела казались бы вытянутыми в направлении движения.

6.1.3. Длительность событий в разных системах отсчета

Пусть в точке x', неподвижной относительно системы K', происходит событие, длительность которого $\Delta t_0 = t'_2 - t'_1$. В этой системе отсчета началу события соответствует координата $x'_1 = x'$ и момент времени t'_1, концу события – координата $x'_2 = x'$ и момент времени t'_2. Относительно системы K точка, в которой происходит событие, перемещается. Согласно преобразованиям Лоренца, в системе K' началу и концу события соответствуют моменты

$$t_1 = \frac{t'_1 + \frac{\upsilon^2}{c^2} x'_1}{\sqrt{1-\beta^2}}; \qquad t_2 = \frac{t'_2 + \frac{\upsilon^2}{c^2} x'_2}{\sqrt{1-\beta^2}},$$

откуда

$$\Delta t = \frac{\Delta t_0}{\sqrt{1-\beta^2}},$$

или

$$\Delta t_0 = \Delta t\sqrt{1-\beta^2}.$$

Время Δt_0, отсчитанное по часам, движущимся вместе с телом, называют *собственным временем этого тела*.

Как видно из полученной формулы, собственное время всегда меньше, чем время, отсчитанное по часам, движущимся относительно тела. Релятивистский эффект замедления хода времени позволяет в принципе осуществить «путешествие в будущее» (но не в прошлое). В самом деле, пусть космический корабль, движущийся со скоростью $\upsilon = \beta c$ (где $\beta = \dfrac{\upsilon}{c}$) относительно Земли, совершает перелет от Земли до некоторой звезды и обратно. Если свет проходит путь ℓ_0 от звезды до Земли за время t_0, то $\ell_0 = ct_0$ и для земного наблюдателя продолжительность перелета равна

$$\tau = \frac{2\ell_0}{\upsilon} = \frac{2t_0}{\beta}.$$

Именно настолько постареют люди на Земле к моменту возвращения космонавтов. С другой стороны, по часам, установленным на космическом корабле, полет займет меньшее время τ_0, равное

$$\tau_0 = \tau\sqrt{1-\beta^2} = \frac{2\ell_0}{\upsilon}\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}} = \frac{2t_0}{\beta}\sqrt{1-\beta^2}.$$

В соответствии с принципом относительности все процессы на космическом корабле (в том числе и процесс старения космонавтов) идут так же, как и на Земле, но не по земным часам, а по часам, установленным на корабле.

Пусть, например, t_0 = 500 лет и β = 0,9999, тогда

$$\tau = \frac{2\cdot 500}{0,9999} = 1000,1 \text{ лет, а } \tau_0 = \frac{2\cdot 500}{0.9999}\sqrt{1-(0,9999)^2} = 14,1 \text{ лет.}$$

6.1.4. Релятивистский закон сложения скоростей

Пусть в системе отсчета K' материальная точка движется вдоль оси x' с постоянной скоростью $\upsilon' = \dfrac{x'}{t}$. Система K' движется относительно системы K в том же направлении со скоростью υ.

Определим, чему равна скорость материальной точки υ_0, относительно системы K, т.е. чему равно $\upsilon_0 = \dfrac{x}{t}$.

Предположим, что в момент времени $t = t' = 0$ материальная точка находится в начале координат, причем $x = x' = 0$.

Для системы K:

$$x = \frac{x' + \upsilon t'}{\sqrt{1-\beta^2}}; \qquad t = \frac{t' + \dfrac{\upsilon^2}{c^2}x'}{\sqrt{1-\beta^2}}.$$

Подставляя x и t в формулу υ_0, запишем

$$\upsilon_0 = \frac{x}{t} = \frac{x' + \upsilon t'}{t' + \frac{\upsilon}{c^2} x'}.$$

Разделим числитель и знаменатель формулы на t', тогда

$$\upsilon_0 = \frac{\frac{x'}{t'} + \upsilon}{1 + \frac{\upsilon}{c^2 t'} x'} = \frac{\upsilon' + \upsilon}{1 + \frac{\upsilon' \upsilon}{c^2}}.$$

Это равенство выражает собой *релятивистский закон сложения скоростей*. При малых значениях скоростей

$$\upsilon' << c \text{ и } \upsilon << c,$$

получим

$$\frac{\upsilon' \upsilon}{c^2} << 1 \text{ и } \upsilon_0 \approx \upsilon' + \upsilon,$$

т.е. релятивистский закон сложения скоростей переходит в классический закон.

6.2. Релятивистский импульс

Уравнения классической механики инвариантны по отношению к преобразованиям Галилея, по отношению же к преобразованиям Лоренца они оказываются неинвариантными. Из теории относительности следует, что уравнение динамики, инвариантное по отношению к преобразованиям Лоренца, имеет вид:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{m_0 \vec{\upsilon}}{\sqrt{1 - \frac{\upsilon^2}{c^2}}} \right) = \vec{F},$$

где m_0 – инвариантная, т.е. одинаковая во всех системах отсчета величина называемая массой покоя частицы; υ – скорость частицы; $\vec{F}$ – сила, действующая на частицу.

Сопоставим это уравнение с классическим уравнением

$$\frac{d}{dt}(\vec{p}) = \vec{F},$$

тогда релятивистский импульс частицы равен

$$\vec{p} = \frac{m_0 \vec{\upsilon}}{\sqrt{1 - \frac{\upsilon^2}{c^2}}}. \tag{6.7}$$

Определив массу частицы m как коэффициент пропорциональности между скоростью и импульсом, получим, что масса релятивистской частицы зависит от ее скорости:

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}}. \qquad (6.8)$$

Полная энергия релятивистской частицы:

$$E = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}}. \qquad (6.9)$$

Покоящаяся частица обладает энергией

$$E_0 = m_0 c^2. \qquad (6.10)$$

Эта величина носит название *энергии покоя* частицы.

Кинетическая энергия релятивистской частицы:

$$E_к = E - m_0 c^2 = m_0 c^2 \left(\frac{1}{\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}} - 1 \right). \qquad (6.11)$$

Так как $m = \dfrac{m_0}{\sqrt{1-\frac{\upsilon}{c}^2}}$, то выражение для полной энергии частицы можно написать в виде

$$E = mc^2. \qquad (6.12)$$

Из формулы (6.12) следует, что энергия и масса тела пропорциональны друг другу. Всякое изменение энергии тела на величину ΔE сопровождается изменением массы тела на величину

$$\Delta m = \frac{\Delta E}{c^2}$$

и, наоборот, всякое изменение массы на величину Δm сопровождается изменением энергии на величину

$$\Delta E = c^2 \Delta m.$$

Это утверждение носит название *закона взаимосвязи или закона пропорциональности массы и энергии.*

Вопросы для самоконтроля

1. В чем заключается физическая сущность механического принципа относительности? Чем отличается принцип относительности Галилея от принципа относительности Эйнштейна?

2. Каковы причины создания специальной теории относительности?

3. Сформулируйте постулаты специальной теории относительности.

4. Запишите преобразования Лоренца. При каких условиях они переходят в преобразования Галилея?

5. В чем заключается релятивистский закон сложения скоростей?

6. Как в релятивистской механике масса движущегося тела зависит от скорости?

7. В чем заключается закон об изменении движущихся масштабов?

8. В чем заключается закон об изменении хода движущихся часов? В какой системе отсчета часы измерят наименьшую длительность процесса?

9. Запишите основное уравнение релятивистской динамики. Чем оно отличается от основного закона ньютоновской механики?

10. Как определяется импульс релятивистской частицы? В чем заключается закон сохранения релятивистского импульса?

11. Что называется полной релятивистской энергией частицы? Как определяется энергия покоя?

12. Как выражается кинетическая энергия в релятивистской механике?

13. Сформулируйте закон взаимосвязи массы и энергии. В чем его физическая сущность?

7. МЕХАНИЧЕСКИЕ КОЛЕБАНИЯ

7.1. Основные понятия и определения

Колебаниями называются процессы, отличающиеся той или иной степенью повторяемости. Например, качания маятника часов, колебания струны или ножек камертона, периодические изменения напряжение между обкладками конденсатора в контуре радиоприемника и т. д.

В зависимости от физической природы повторяющегося процесса различают колебания механические, электромагнитные, электромеханические и т.д.

Колебания широко распространены в природе и технике. Во многих случаях они играют отрицательную роль. Колебания моста, возникающие из-за толчков, сообщаемых ему колесами поезда при прохождении через стыки рельсов; колебания корпуса корабля, вызванные вращением гребного винта; вибрации крыльев самолета, – все эти процессы могут привести к катастрофическим последствиям. В подобных случаях задача заключается в том, чтобы предотвратить возникновение колебаний или, во всяком случае, воспрепятствовать тому, чтобы колебания достигли опасных размеров.

Вместе с тем колебательные процессы лежат в самой основе различных отраслей техники. Например, на колебательных процессах основана вся радиотехника.

В зависимости от характера воздействия на колебательную систему различают свободные (или собственные) колебания, вынужденные колебания, автоколебания и параметрические колебания.

Свободными или собственными называются такие колебания, которые происходят в системе, предоставленной самой себе после того, как ей был сообщен толчок, либо после того, как она была выведена из положения равновесия. Примером могут служить колебания шарика, подвешенного на нити.

Вынужденными называются такие колебания, в процессе которых колеблющаяся система подвергается воздействию внешней периодически изменяющейся силы. Например, колебания маятника настенных часов.

Автоколебания, как и вынужденные колебания, сопровождаются воздействием на колеблющуюся систему внешних сил, однако моменты времени, когда осуществляются эти воздействия, задаются самой колебательной системой – система сама управляет внешним воздействием. Примером автоколебательной системы являются часы, в которых маятник получает толчки за счет энергии поднятой гири или закрученной пружины, причем эти толчки происходят в моменты прохождения маятника через среднее положение.

При *параметрических* колебаниях за счет внешнего воздействия происходит периодическое изменение какого-либо параметра системы, например длины нити, к которой подвешен шарик, совершающий колебания.

Во многих случаях системы совершают колебания, которые можно считать гармоническими.

Гармоническими называют колебания, при которых колеблющаяся величина (смещение тела от положения равновесия) изменяется со временем по закону синуса или косинуса:

$$x = A\sin(\omega_0 t + \varphi_0)\text{, или } x = A\cos(\omega_0 t + \varphi_0)\text{,} \tag{7.1}$$

где x – значение колеблющейся величины в момент времени t; A – амплитуда колебаний (максимальное значение колеблющейся величины).

Величина $(\omega_0 t + \varphi_0)$, стоящая под знаком синуса или косинуса, называется *фазой* колебаний. Она характеризует состояние колеблющейся системы в произвольный момент времени t. Постоянная φ_0, характеризующая состояние системы в начальный момент времени $t = 0$, называется начальной фазой колебаний. Поскольку синус (косинус) – периодическая функция с периодом 2π, различные состояния системы, совершающей гармонические колебания, повторяются через такой промежуток времени T, за который фаза колебаний получает приращение, равное 2π (рис. 7.1).

Этот промежуток времени называется *периодом* колебаний. Он может быть определен из условия

$$\left[\omega_0(t + T) + \varphi_0\right] = \left[\omega_0 t + \varphi_0\right] + 2\pi,$$

откуда

$$T = 2\pi/\omega_0,$$

где ω_0 – циклическая частота колебаний.

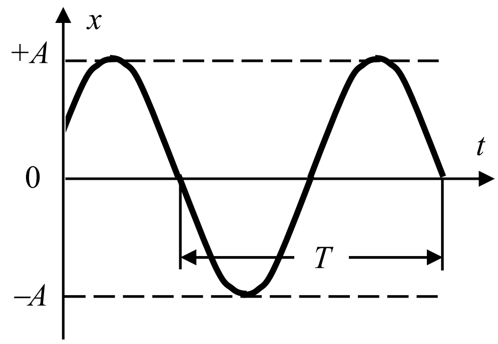


Рис. 7.1

Число колебаний, совершающихся в единицу времени, называется *частотой* колебаний

$$\nu = \frac{1}{T}.$$

Из формулы периода колебаний следует, что

$$\omega_0 = 2\pi/T.$$

Таким образом, ω_0 дает число колебаний за 2π секунд. Она связана с частотой ν соотношением

$$\omega_0 = 2\pi\nu.$$

7.2. Колебания под действием упругой силы (пружинный маятник)

Пружинный маятник состоит из пружины и массивного тела, насаженного на горизонтальный стержень, вдоль которого он может скользить. Пусть на пружине укреплен шарик с отверстием, который скользит вдоль направляющей оси (стержня).

На рис. 7.2,а показано положение шара в состоянии покоя; на рис. 7.2,б – максимальное сжатие и на рис. 7.2,в – положение шарика в произвольно выбранный момент времени t.

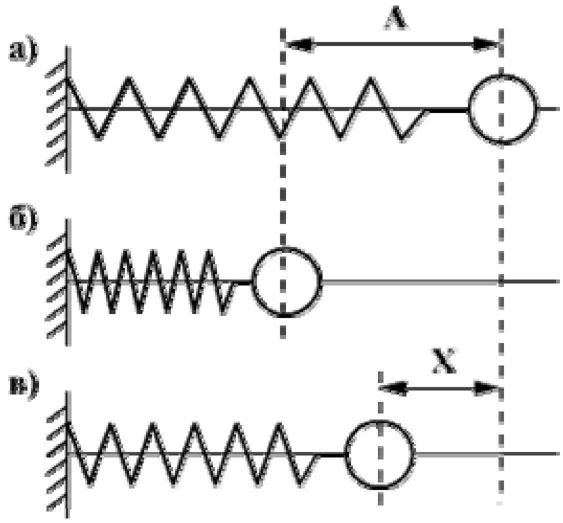


Рис. 7.2

Под действием возвращающей силы, равной силе сжатия, шарик будет совершать колебания. При отсутствии сил сопротивления колебания не затухают.

Сила упругости пружины, вызывающая колебания шарика,

$$\vec{F} = -kx,$$

где k – жесткость пружины.

Знак минус показывает, что направление вектора силы $\vec{F}$ противоположно направлению смещения x шарика.

Потенциальная энергия сжатой пружины

$$W_{\text{п}} = \frac{kx^2}{2},$$

кинетическая энергия движущегося груза

$$W_{\text{к}} = \frac{m\upsilon^2}{2}.$$

Для вывода уравнения движения шарика необходимо связать величины x и t. Воспользуемся законом сохранения энергии.

Полная механическая энергия равна сумме кинетической и потенциальной энергии системы.

В данном случае:

$$W_{\text{п}} + W_{\text{к}} = \frac{kx^2}{2} + \frac{m\upsilon^2}{2}.$$

В положении б)

$$W_{\text{п}} = 0,\ W_{\text{п}} = \max,$$

$$W_{\text{п}} = \frac{kx^2}{2} = \frac{kA^2}{2}.$$

По закону сохранения механической энергии:

$$\frac{kA^2}{2} = \frac{kx^2}{2} + \frac{m\upsilon^2}{2}.$$

Определим отсюда скорость колеблющегося шарика в момент времени t

$$\upsilon = \sqrt{\frac{k}{m}(A^2 - x^2)},$$

но

$$\upsilon = \frac{dx}{dt},$$

следовательно

$$\frac{dx}{dt} = \sqrt{\frac{k}{m}}\sqrt{A^2 - x^2}.$$

Разделим переменные

$$\frac{dx}{\sqrt{(A^2 - x^2)}} = \sqrt{\frac{k}{m}}dt.$$

Интегрируя это уравнение, получим:

$$\arcsin\left(\frac{x}{A}\right) = \sqrt{\frac{k}{m}}t + \varphi_0,$$

где φ_0 – постоянная интегрирования.

Из последнего выражения следует, что

$$x = A\sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t + \varphi_0\right). \tag{7.2}$$

Сравнивая (7.1) с (7.2), получаем

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}};\ T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}. \tag{7.3}$$

Таким образом, под действием упругой силы тело совершает гармонические колебания.

Силы иной природы, чем упругие, но для которых выполняется условие $\vec{F} = -kx$, называются *квазиупругими.*

Под действием этих сил тела тоже совершают гармонические колебания.

При этом:

смещение: $x = A\sin(\omega_0 t + \varphi_0)$

скорость: $\upsilon = \dfrac{dx}{dt} = A\omega\cos(\omega_0 t + \varphi_0)$

ускорение: $a = \dfrac{d\upsilon}{dt} = -A\omega^2\sin(\omega_0 t + \varphi_0)$

7.3. Энергия колеблющегося тела

Кинетическая энергия колеблющегося тела

$$W_к = \frac{m\upsilon^2}{2} = \frac{mA^2\omega_0{}^2\cos^2(\omega_0 t + \varphi_0)}{2}. \qquad (7.4)$$

Потенциальная энергия

$$W_п = \frac{kx^2}{2} = \frac{k}{2}A^2\sin(\omega_0 t + \varphi_0) \qquad (7.5)$$

Учитывая то, что

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}},$$

т.е.

$$k = \omega_0^2 m,$$

последнее выражение можно записать в виде

$$W_n = \frac{m\omega_0^2}{2}A^2\sin(\omega_0 t + \varphi_0).$$

Полная энергия колеблющегося тела равна сумме кинетической и потенциальной энергий

$$W = W_п + W_к = \frac{m\omega_0^2 A^2}{2}.$$

7.4. Основное уравнение гармонических свободных колебаний. (Дифференциальное уравнение свободных незатухающих колебаний)

В случае упругих колебаний возвращающая сила $\vec{F} = -kx$. Если нет других сил, кроме упругой силы, то колебания являются *свободными.*

Согласно второму закону Ньютона

$$ma = \sum_{i=1}^{n} F_i = F_{упр} = -kx,$$

или

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + kx = 0.$$

Разделим обе части последнего уравнения на m:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m}x = 0. \qquad (7.7)$$

Уравнение (7.7) – основное уравнение свободных незатухающих колебаний.

Общее решение этого уравнения имеет вид

$$x = A\sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t + \varphi_0\right),$$

в чем легко убедиться подстановкой значения x в исходное дифференциальное уравнение.

7.5. Математический и физический маятники

7.5.1. Математический маятник

Математическим маятником называется материальная точка, подвешенная на нерастяжимой невесомой нити и совершающая колебательное движение в одной вертикальной плоскости под действием силы тяжести.

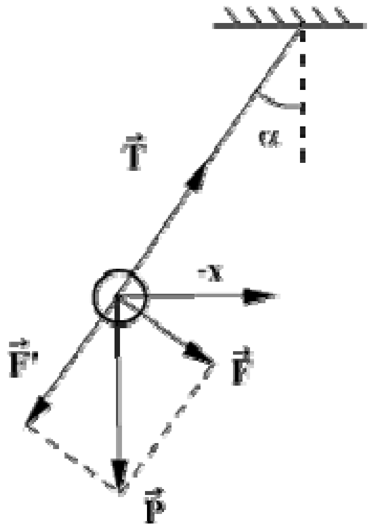


Рис. 7.3

Таким маятником можно считать тяжелый шар массой m, подвешенный на тонкой нити, длина l которой намного больше размеров шара. Если отклонить шар на угол α (рис.7.3.) от вертикали, то под влиянием силы $\vec{F}$ – одной из составляющих силы тяжести $\vec{P}$ он будет совершать колебания. Другая составляющая силы тяжести $\vec{F}'$, направленная вдоль нити, уравновешивается силой натяжения нити $\vec{T}$. При малых углах отклонения $\sin\alpha \cong \alpha$ и, тогда координату x шара можно отсчитывать по горизонтальному направлению.

Из рис.7.3 видно, что составляющая силы тяжести, перпендикулярная нити, равна

$$\vec{F} = -mg\sin\alpha.$$

Знак минус в правой части означает то, что вектор силы $\vec{F}$ направлен в сторону уменьшения угла α.

С учетом малости α

$$F = -mg\alpha.$$

Для вывода закона движения математического и физического маятников используем основное уравнение динамики вращательного движения. Момент силы $\vec{F}$ относительно точки подвеса O:

$$M = Fl,$$

или

$$M = I\varepsilon,$$

где I – момент инерции шара (в данном случае $I = ml^2$); ε – угловое ускорение ($\varepsilon = \frac{d^2\alpha}{dt^2}$).

Тогда

$$-mg\alpha \cdot l = ml^2 \frac{d^2\alpha}{dt^2},$$

или

$$\frac{d^2\alpha}{dt^2} + \frac{g}{l}\alpha = 0. \qquad (7.8)$$

Формула (7.8) – дифференциальное уравнение свободных незатухающих колебаний математического маятника.

Решение этого уравнения имеет вид

$$\alpha = A\sin\left(\sqrt{\frac{g}{l}}t + \varphi_0\right),$$

где

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}}$$

и

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}. \qquad (7.9)$$

Период колебаний математического маятника зависит от длины нити и ускорения силы тяжести и не зависит от амплитуды колебаний.

7.5.2. Физический маятник

Физическим маятником называется твердое тело, закрепленное на неподвижной горизонтальной оси (оси подвеса), не проходящей через центр масс тела, и совершающее колебания относительно этой оси под действием силы тяжести.

В отличие от математического маятника физический маятник нельзя принять за материальную точку.

При небольших углах отклонения α (рис. 7.4) физический маятник так же совершает гармонические колебания. Будем считать, что $\vec{P}$ – сила тяжести, вектор которой приложен к его центру масс (в точке C). Силой, которая возвращает маятник в положение равновесия, является составляющая силы тяжести – $\vec{F}$.

$$\vec{F} = -mg\sin\alpha.$$

Знак минус в правой части означает, что вектор $\vec{F}$ направлен в сторону уменьшения угла α.

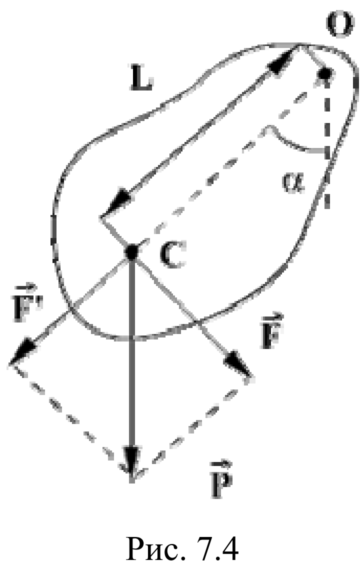


Рис. 7.4

С учетом малости α

$$F = -mg\alpha .$$

Для вывода закона движения физического маятника используем основное уравнение динамики вращательного движения. Момент силы $\vec{F}$ относительно точки подвеса O:

$$M = FL ,$$

или

$$M = I\varepsilon ,$$

где I – момент инерции шара относительно точки O; ε – угловое ускорение ($\varepsilon = \dfrac{d^2\alpha}{dt^2}$).

Тогда

$$-mg\alpha \cdot L = I\frac{d^2\alpha}{dt^2},$$

или

$$\frac{d^2\alpha}{dt^2} + \frac{mgL}{I}\alpha = 0, \qquad (7.10)$$

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{mgL}{I}}; \; T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{mgL}} \qquad (7.11)$$

Уравнение (7.10) – дифференциальное уравнение свободных незатухающих колебаний физического маятника.

Решение этого уравнения имеет вид

$$\alpha = A\sin\left(\sqrt{\frac{mgL}{I}}t + \varphi_0\right)$$

Определим длину l математического маятника, при которой период его колебаний равен периоду колебаний физического маятника, т.е.

$$T_{\text{мат}} = T_{\text{физ}},$$

или

$$2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} = 2\pi\sqrt{\frac{I}{mgL}} .$$

Выразим из этой формулы длину l математического маятника

$$l = \frac{I}{mL} .$$

Полученная формула определяет *приведенную длину* физического маятника, т.е. длину такого математического маятника, период колебаний которого равен периоду колебаний данного физического маятника.

7.6. Сложение механических колебаний

7.6.1. Сложение гармонических колебаний, направленных вдоль одной прямой

Рассмотрим сложение одинаково направленных колебаний одного периода, но отличающихся амплитудой и начальной фазой. Уравнения складываемых колебаний имеют вид:

$$x_1 = A_1 \sin(\omega t + \varphi_{01}),$$

$$x_2 = A_2 \sin(\omega t + \varphi_{02}),$$

где x_1 и x_2 – значения колеблющихся величин в момент времени t; A_1 и A_2 – амплитуды; φ_{01} и φ_{02} – начальные фазы складываемых колебаний.

Амплитуду результирующего колебания удобно определить с помощью векторной диаграммы (рис. 7.5), на которой отложены векторы амплитуд $\vec{A}_1$ и $\vec{A}_2$ складываемых колебаний под углами φ_{01} и φ_{02} к оси x.

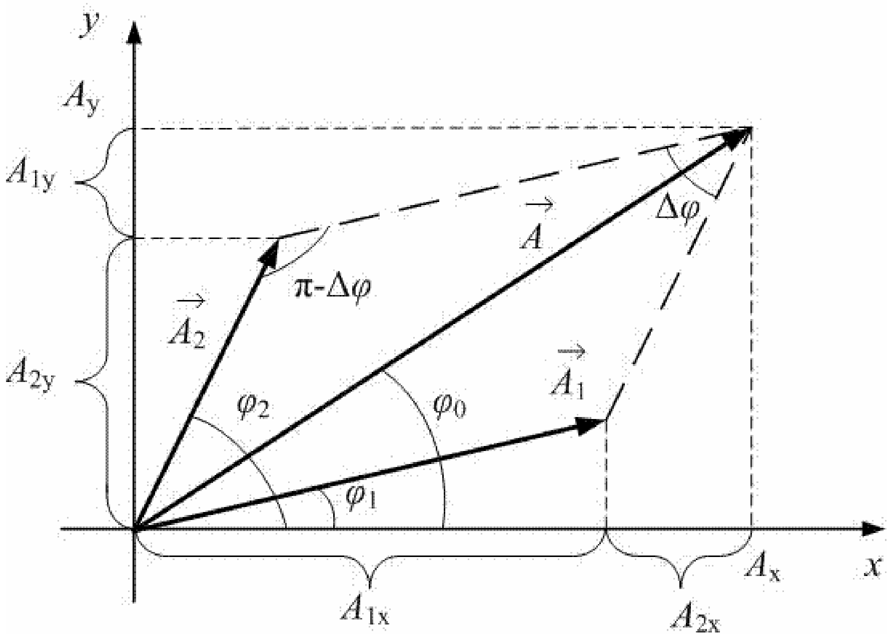


Рис. 7.5

Вектор амплитуды суммарного колебания $\vec{A}$ равен сумме векторов $\vec{A}_1$ и $\vec{A}_2$ определяется диаганалью параллелограмма, построенного на этих векторах. Если равномерно вращать систему векторов (параллелограмм) и проектировать векторы на ось OY, то их проекции будут совершать гармонические колебания в соответствии с заданными уравнениями. Взаимное расположение векторов $\vec{A}_1$, и $\vec{A}_2$ при этом остается неизменным, поэтому колебательное движение проекции результирующего вектора $\vec{A}$ тоже будет гармоническим.

Определим модуль амплитуды A результирующего колебания.

Из рисунка видно, что угол $AOA_1 = \alpha = \left[\pi - \left(\varphi_{02} - \varphi_{01}\right)\right]$.

Следовательно

$$2\left(\varphi_{02} - \varphi_{01}\right) + 2\alpha = 2\pi,$$

отсюда

$$\alpha = \left[\pi - \left(\varphi_{02} - \varphi_{01}\right)\right].$$

Согласно теореме косинусов

$$A^2 = A_1^2 + A_2^2 - 2A_1A_2\cos\left[\pi - \left(\varphi_{02} - \varphi_{01}\right)\right],$$

или

$$A^2 = A_1^2 + A_2^2 - 2A_1A_2\cos\left(\varphi_{02} - \varphi_{01}\right). \tag{7.12}$$

а) Если разность фаз складываемых колебаний $\left(\varphi_{02} - \varphi_{01}\right) = 0$, то амплитуда результирующего колебания $A = A_1 + A_2$.

2. Если $\left(\varphi_{02} - \varphi_{01}\right) = \pm\pi$ т.е. колебания происходят в противофазе, то $A = \left|A_1 - A_2\right|$.

Начальная фаза φ_0 результирующего колебания может быть определена из условия:

$$\operatorname{tg}\varphi_0 = \frac{A_1\sin\varphi_{01} + A_2\sin\varphi_{02}}{A_1\cos\varphi_{01} + A_2\cos\varphi_{02}}.$$

Уравнение результирующего колебания имеет вид

$$x = A\sin(\omega t + \varphi_0).$$

7.6.2. Биения

Рассмотрим случай, когда частоты двух складываемых колебаний мало отличаются друг от друга $\omega_2 - \omega_1 = \Delta\omega$.

Пусть амплитуды колебаний одинаковы и начальные фазы $\varphi_{01} = \varphi_{02} = 0$, тогда уравнения складываемых колебаний имеют вид:

$$x_1 = A\sin(\omega_1 t), \quad x_2 = A\sin(\omega_2 t).$$

Сложим уравнения колебаний

$$x = x_1 + x_2 = A\left[\cos\left(\omega_1 t\right) + \cos\left(\omega_2 t\right)\right] = 2A\left[\cos\left(\frac{\omega_1 t + \omega_2 t}{2}\right)\cos\left(\frac{\omega_1 t - \omega_2 t}{2}\right)\right],$$

или

$$x = 2A\cos\left(\frac{\Delta\omega t}{2}\right)\cos\left(\omega_1 t\right).$$

Так как $\frac{\Delta\omega t}{2}$ все же медленно изменяется, величину $2A\cos\left(\frac{\Delta\omega t}{2}\right)$ нельзя назвать амплитудой в полном смысле этого слова (амплитуда величина постоянная). Условно эту величину можно назвать переменной амплитудой.

График таких колебаний показан на рис. 7.6.

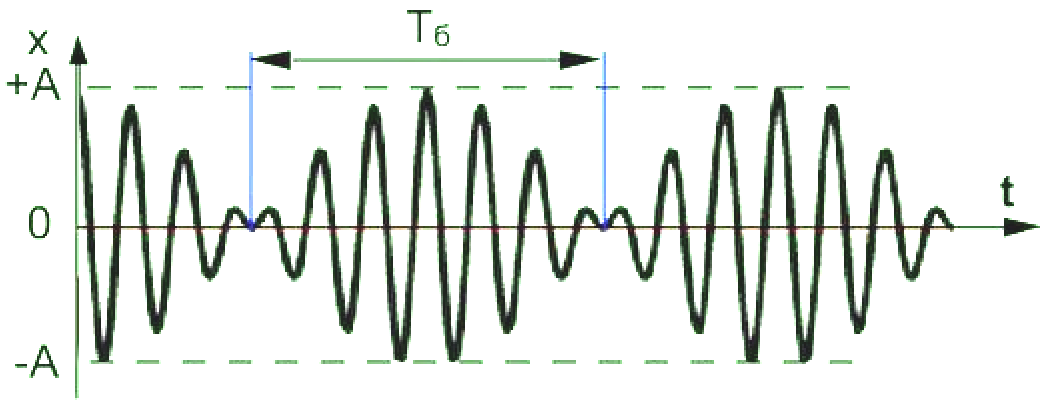


Рис. 7.6

Складываемые колебания имеют одинаковые амплитуды, но различны периоды T_1 и T_2, незначительно отличаются друг от друга. При сложении таких колебаний наблюдаются биения. Число n биений в секунду определяется разностью частот складываемых колебаний, т.е.

$$n = \nu_1 - \nu_2 .$$

Биения можно наблюдать при звучании двух камертонов, если частоты их колебаний близки друг к другу.

7.6.3. Сложение взаимно перпендикулярных колебаний

Пусть материальная точка одновременно участвует в двух гармонических колебаниях, совершающихся с одинаковыми периодами T в двух взаимно перпендикулярных направлениях. С этими направлениями можно связать прямоугольную систему координат XOY, расположив начало координат в положении равновесия точки. Обозначим смещение точки C вдоль осей OX и OY, соответственно, x и y (рис. 7.7).

Рассмотрим несколько частных случаев.

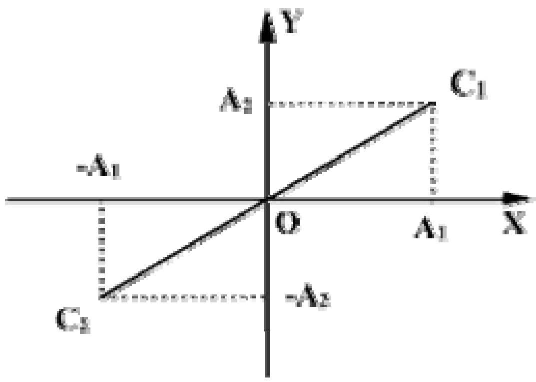


Рис. 7.7

1. Начальные фазы колебаний одинаковы.

Выберем момент начала отсчета времени таким образом, чтобы начальные фазы складываемых колебаний были равны нулю. Тогда смещения вдоль осей OX и OY можно выразить уравнениями:

$$x = A_1 \sin(\omega t)\ y = A_2 \sin(\omega t).$$

Поделив почленно эти равенства, получим уравнение траектории точки C:

$$\frac{x}{y} = \frac{A_1}{A_2},$$

или

$$y = \frac{A_2}{A_1} x.$$

Следовательно, в результате сложения двух взаимно перпендикулярных колебаний точка C колеблется вдоль отрезка C_1C_2 прямой, проходящей через начало координат (рис. 7.7).

2. Разность начальных фаз равна π.

Уравнения колебания в этом случае имеют вид:

$$x = A_1 \sin(\omega t + \pi) = -A_1 \sin(\omega t), \quad y = A_2 \sin(\omega t).$$

Уравнение траектории точки

$$y = -\frac{A_2}{A_1} x. \tag{7.13}$$

Следовательно, точка C колеблется вдоль отрезка C_1C_2 прямой, проходящей через начало координат, но расположенной в других квадрантах, чем в первом случае. Амплитуда A результирующих колебаний в обоих рассмотренных случаях равна

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2}.$$

3. Разность начальных фаз равна $\frac{\pi}{2}$.

Уравнения колебаний имеют вид:

$$x = A_1 \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) = A_1 \sin(\omega t), \quad y = A_2 \sin(\omega t).$$

Разделим первое уравнение на A_1, второе – на A_2, тогда

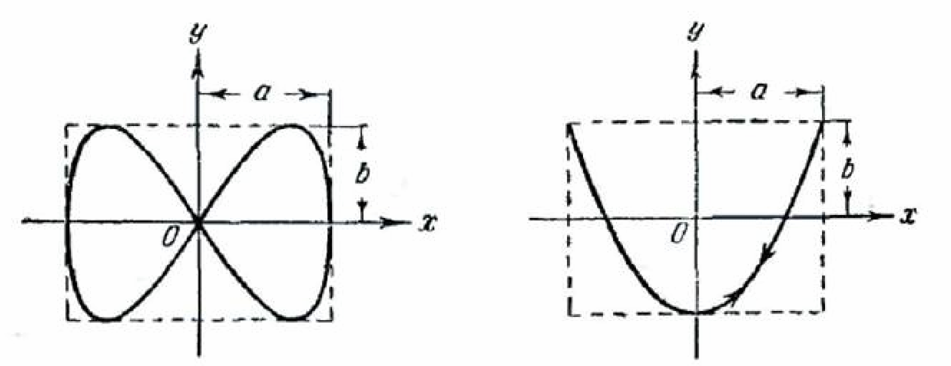
$$\frac{x}{A_1} = \cos(\omega t), \frac{y}{A_2} = \cos(\omega t).$$

Возведем оба равенства в квадрат и сложим. Получим уравнение траектории результирующего движения

$$\frac{x^2}{A_1^2} + \frac{y^2}{A_2^2} = 1 \qquad (7.14)$$

Колеблющаяся точка C движется по эллипсу с полуосями A_1 и. A_2 При равных амплитудах $A_1 = A_2 = A$ траекторией суммарного движения будет окружность $x^2 + y^2 = A^2$.

В общем случае при $\omega_1 \neq \omega_2$, но кратным, т.е. $\omega_1 = k\omega_2$, при сложении, взаимно перпендикулярных колебаний, траектория результирующего движения имеет вид кривых, называемых *фигурами Лиссажу*. Конфигурация этих кривых зависит от соотношения амплитуд, начальных фаз и периодов складываемых колебаний.



а б

Рис. 7.8

На рис. 7.8,а показана одна из простейших фигур, получающаяся при отношении частот 1:2 и разности фаз, равной π/2. При отношении частот 1:2 и разности фаз, равной нулю, траектория вырождается в незамкнутую кривую (рис. 7.8,б), по которой точка движется туда и обратно.

Чем ближе к единице дробь, выражающая отношение частот колебаний, тем сложнее оказывается фигура Лиссажу. На рис. 7.9. показана кривая для отношения частот 3:4 и разности фаз, равной π/2.

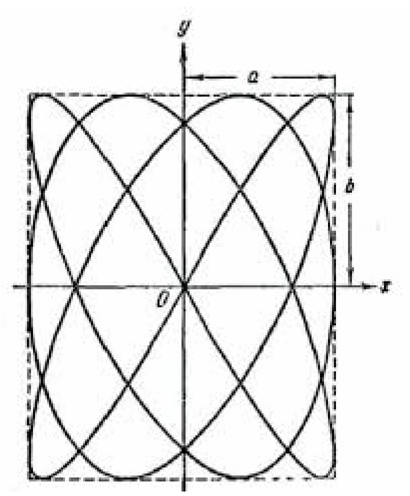


Рис. 7.9

7.7. Затухающие колебания

Во всякой реальной колебательной системе имеются силы сопротивления, действие которых приводит к уменьшению энергии системы. Если убыль энергии не восполняется за счет работы внешних сил, то колебания будут затухать.

Рассмотрим один из наиболее часто встречающихся на практике случаев, когда сила сопротивления пропорциональна скорости материальной точки:

$$F_{\text{сопр}} = -r\upsilon, \tag{7.15}$$

где r – коэффициент сопротивления; υ – скорость движения.

Запишем второй закон Ньютона для затухающих колебаний тела вдоль оси OX

$$ma = -kx - r\upsilon$$

или

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + r\frac{dx}{dt} + kx = 0. \tag{7.16}$$

Перепишем это уравнение в виде:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{r}{m}\frac{dx}{dt} + \frac{k}{m}x = 0$$

и обозначим:

$$\frac{r}{m} = 2\delta; \ \frac{k}{m} = \omega_0^2,$$

где ω_0 – представляет ту частоту, с которой совершались бы свободные колебания системы при отсутствии сил сопротивления, т.е. при $r = 0$. Ее называют *собственной частотой колебаний системы*; δ – коэффициент затухания колебаний.

Тогда

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\delta\frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = 0. \tag{7.17}$$

Формула (7.17) – дифференциальное уравнение свободных затухающих колебаний.

Попытаемся получить решение уравнения (7.17) в виде

$$x = e^{-\delta t}U,$$

где U – некоторая функция от t.

Продифференцируем два раза это выражение по времени t и, подставив значения первой и второй производных в уравнение (7.17), получим

$$\frac{d^2U}{dt^2} + \left(\omega_0^2 - \delta^2\right)U = 0.$$

Решение этого, уравнения существенным образом зависит от знака коэффициента, стоящего при U.

Рассмотрим случай, когда этот коэффициент положительный. Введем обозначение $\omega_0^2 - \delta^2 = \omega^2$, тогда вещественным решением этого уравнения является функция $U = A_0 \sin\left(\omega t + \varphi_0\right)$.

Таким образом, в случае малого сопротивления среды $\left(\delta^2 \langle \omega_0^2\right)$, решением уравнения (7.17) будет функция

$$x = A_0 e^{-\delta t} \sin\left(\omega t + \varphi_0\right). \qquad (7.18)$$

График этой функции показан на рис. 7.10.

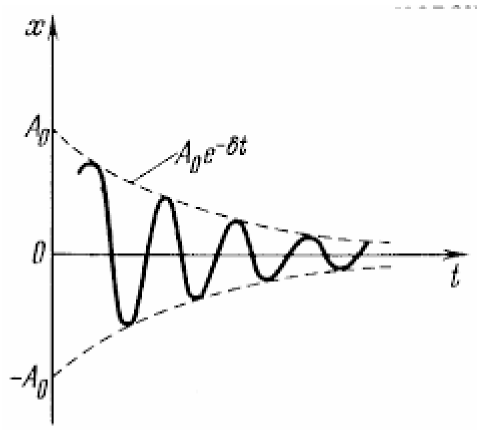


Рис. 7.10

Пунктирными линиями показан график зависимости амплитуды колебаний от времени.

Величину $\omega = \sqrt{\dfrac{k}{m} - \dfrac{r^2}{4m}}$ называют *условной циклической частотой затухающих колебаний системы.*

Затухающие колебания – непериодические колебания, т.к, в них никогда не повторяются, например, максимальные значения, скорости и ускорения колеблющейся величины.

Величину $T = \dfrac{2\pi}{\omega}$ называют *условным периодом затухающих колебаний,*

Натуральный логарифм отношения амплитуд, следующих друг за другом через промежуток времени, равный периоду T, называют *логарифмическим декрементом затухания.*

$$\Lambda = \ln\frac{A_n}{A_{n+1}} = \ln\frac{A_0 e^{-\delta t}\sin\left(\omega t + \phi_0\right)}{A_0 e^{-\delta(1+T)}\sin\left(\omega t + \phi_0\right)} = \ln e^{\delta T} = \delta T.$$

Обозначим буквой τ промежуток времени, за который амплитуда колебаний уменьшается в e раз.

Тогда

$$\frac{A_0}{A_\tau} = e^{\delta T} = e,$$

откуда

$$\delta = \frac{1}{\tau}.$$

Следовательно, коэффициент затухания есть физическая величина, обратная промежутку времени τ, в течение которого амплитуда колебаний убывает в e раз.

Величина τ называется *временем релаксации*.

Пусть N – число колебаний, после которых амплитуда уменьшается в e раз, тогда

$$\Lambda = \delta T = \frac{T}{\tau} = \frac{T}{NT} = \frac{1}{N}.$$

Следовательно, логарифмический декремент затухания Λ есть физическая величина, обратная числу колебаний N, по истечению которого амплитуда убывает в e раз

Часто колебательные системы характеризуют также добротностью Q. Добротностью называют отношение энергии в системе в данный момент времени к убыли энергии за период, умноженное на 2π.

$$Q = \frac{E(t)}{E(t) - E(t+T)} 2\pi.$$

Поскольку энергия $E(t)$ пропорциональна квадрату амплитуды колебаний, то

$$Q = 2\pi \frac{A_0^2 e^{-2\delta t}}{A_0^2 e^{-2\delta t} - A_0^2 e^{-2\delta(t+T)}} = \frac{2\pi}{1 - e^{-2\delta T}}.$$

Так как $\delta T = \Lambda$, то

$$Q = \frac{2\pi}{1 - e^{-2\Lambda}}.$$

Разлагая в ряд $e^{-2\Lambda} = 1 - \frac{2\Lambda}{1!} + \frac{(2\Lambda)^2}{2!} - \frac{(2\Lambda)^3}{3!} + \ldots$ и ограничиваясь первыми двумя членами разложения, получим:

$$Q = \frac{\pi}{\Lambda}.$$

Добротность системы обратно пропорциональна логарифмическому декременту затухания.

Все реальные колебательные системы являются диссипативными. Энергия механических колебаний такой системы постепенно расходуется на работу против сил трения, поэтому свободные колебания всегда затухают, их амплитуда постепенно уменьшается. Во многих случаях, когда отсутствует сухое трение, в первом приближении можно считать, что при небольших скоростях движения силы, вызывающие затухание механических колебаниях, пропорциональны скорости.

7.8. Вынужденные колебания

В случае вынужденных колебаний на систему действует внешняя (вынуждающая) сила, за счет работы которой периодически компенсируются потери энергии системы. Частота вынужденных колебаний (вынуждающая частота) зависит от частоты изменения внешней силы.

Определим амплитуду вынужденных колебаний тела массой m, считая колебания незатухающими вследствие воздействия на тело внешней силы $\vec{F}_{\text{вн}}$.

Пусть эта сила изменяется со временем по закону

$$F_{\text{вн}} = F_0 \cos \Omega t,$$

где F_0 – амплитуда вынуждающей силы $F_{\text{вн}}$; Ω – циклическая частота ее изменения.

Возвращающая сила, вызывающая колебания тела

$$\vec{F}_{\text{упр}} = -kx,$$

сила сопротивления

$$\vec{F}_{\text{сопр}} = -r\vec{\upsilon}.$$

Тогда, согласно второму закону Ньютона

$$ma = -kx - r\upsilon + F_0 \cos \Omega t,$$

или

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\delta\frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = \frac{F_0}{m}\cos \Omega t. \tag{7.19}$$

Выражение (7.19) – дифференциальное уравнение вынужденных колебаний.

Рассмотрим движение, описываемое этим уравнением, исходя из общих физических представлений.

Пусть в начальный момент времени тело покоилось, находясь в положении равновесия. Включение внешней периодически изменяющейся силы приведёт к раскачиванию тела. Работа этой силы будет идти на сообщение телу кинетической энергии и на преодоление силы сопротивления. Сила сопротивления пропорциональна скорости тела. Поэтому увеличение кинетической энергии возможно только до некоторого предела. После этого наступает динамическое равновесие, когда работа внешней силы полностью расходуется на преодоление сопротивления, а амплитуда колебаний остаётся постоянной. Промежутку времени, когда наблюдается постепенное возрастание амплитуды колебаний, соответствует переходный режим. Далее, когда амплитуда колебаний перестаёт возрастать, наступает стационарный режим. Стационарный режим колебаний представляет собой гармоническое колебание с частотой, равной частоте вынуждающей силы Ω. Но благодаря инерции колебания тела будут отставать по фазе от колебаний внешней периодической силы.

Поэтому, в установившемся режиме решение уравнения (7.19) можно представить в виде

$$x = A\sin\left(\Omega t - \varphi\right), \qquad (7.20)$$

где $\varphi -$сдвиг фаз.

Продифференцировав два раза уравнение (7.20) и подставив результат в формулу (7.19), получим:

$$\Omega^2\cos\left(\Omega t - \varphi + \frac{\pi}{2}\right) + 2\delta\Omega\cos\left(\Omega t - \varphi\right) + \omega_0^2\cos\left(\Omega t - \varphi - \frac{\pi}{2}\right) = \frac{F_0}{mA}\cos\left(\Omega t\right).$$

Обозначим

$$A_1 = \Omega^2,\ A_2 = 2\delta\Omega,\ A_3 = \omega_0^2,\ A_4 = \frac{F_0}{mA},$$

тогда последнее равенство можно записать в следующем виде:

$$A_1\cos\left(\Omega t - \varphi + \frac{\pi}{2}\right) + A_2\cos\left(\Omega t - \varphi\right) + A_3\cos\left(\Omega t - \varphi - \frac{\pi}{2}\right) = A\cos\left(\Omega t\right).$$

Правую часть этого выражения можно рассматривать как уравнение некоторого гармонического колебания, получившегося при сложении трех гармонических колебаний, определяемых слагаемыми левой части равенства. Для сложения этих колебаний воспользуемся методом векторных диаграмм. Проведем опорную линию OX (рис. 7.11) и отложим под углами, соответствующими начальным фазам всех четырех колебаний векторы $\vec{A}_1$, $\vec{A}_2$, $\vec{A}_3$, $\vec{A}_4$ их амплитуд таким образом, чтобы $\vec{A}_4 = \vec{A}_1 + \vec{A}_2 + \vec{A}_3$.

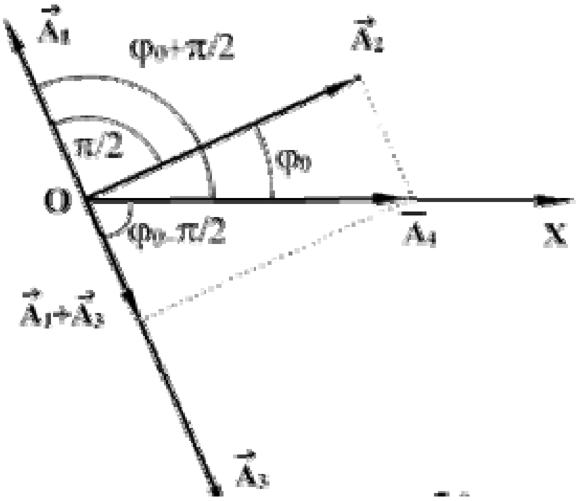


Рис. 7.11

Из рис. 7.11 видно, что

$$A_4^2 = \left(A_3 - A_1\right)^2 + A_2^2.$$

Подставляя в эту формулу значения соответствующих амплитуд, получим:

$$\frac{F_0^2}{m^2A^2} = \left(\omega_0^2 - \Omega^2\right) + 4\Omega^2\delta^2,$$

откуда

$$A = \frac{F_0}{m\sqrt{\left(\omega_0^2 - \Omega^2\right)^2 + 4\Omega^2\delta^2}}. \qquad (7.21)$$

Амплитуда установившихся вынужденных колебаний прямо пропорциональна амплитуде вынуждающей силы F_0, обратно пропорциональна массе m тела и уменьшается с увеличением коэффициента затухания δ.

При постоянных F_0, m и δ амплитуда зависит только от соотношения циклических частот вынуждающей силы Ω и свободных незатухающих колебаний ω_0.

При циклической частоте вынуждающей силы $\Omega = 0$ амплитуда колебаний

$$A = A_0 = \frac{F_0}{m\omega_0^2}$$

В этом случае колебания не совершаются и смещение x равно статической деформации под действием постоянной силы F_0:

$$x = A_0 = \frac{F_0}{m\omega_0^2} = \frac{F_0}{m\frac{k}{m}} = \frac{F_0}{k}.$$

Поэтому отклонение A_0 называют *статической амплитудой.*

Если нет диссипации, т. е $\delta = 0$, то амплитуда колебаний

$$A = \frac{F_0}{m\left(\omega_0^2 - \Omega^2\right)}$$

растет с увеличением циклической частоты Ω вынуждающей силы $F_{\text{ВН}}$ и при $\Omega = \omega_0$ становится бесконечно большой (рис. 7.12). При дальнейшем росте циклической частоты Ω амплитуда A вынужденных колебаний уменьшается, причем $\lim(\omega \to \infty) A = 0$.

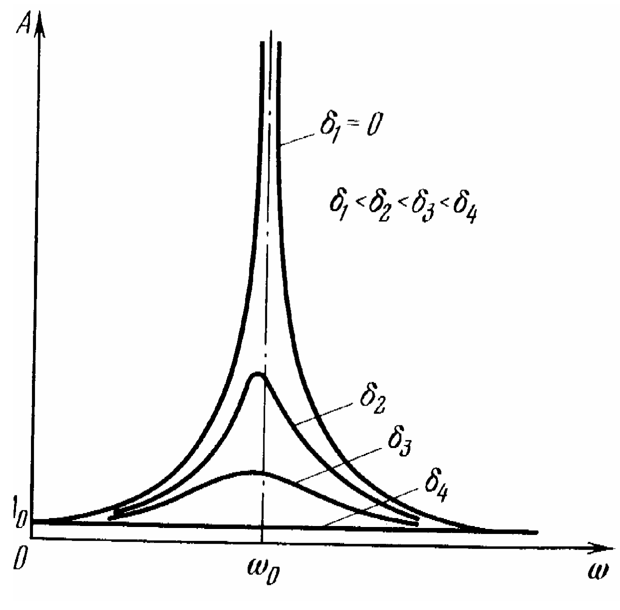


Рис. 7.12

Явление резкого возрастания амплитуды вынужденных колебаний при приближении частоты вынуждающей силы Ω к частоте собственных колебаний системы ω_0 называется *резонансом.*

Если затухание существует $(\delta \neq 0)$, то амплитуда вынужденных колебаний достигает максимального значения, когда знаменатель правой части формулы (7.21) достигает минимума.

Приравнивая нулю первую производную по Ω от подкоренного выражения (7.21), получим условие его минимума, для которого

$$\omega_{\text{рез}} = \sqrt{\omega_0^2 - 2\delta^2},$$

где $\omega_{\text{рез}}$ – называют резонансной частотой.

Величина $\omega_{\text{рез}}$ равна тому значению циклической частоты Ω вынуждающей силы, при котором $A = A_{\max}$.

Из последней формулы следует, что для консервативной системы $(\delta = 0)$, $\omega_{рез} = 0$, а для диссипативной системы $\omega_{\text{рез}}$ несколько меньше собственной циклический частоты ω_0. С увеличением коэффициента затухания δ явление резонанса проявляется все слабее, и, наконец при $\delta \geq \frac{\omega_0}{\sqrt{2}}$ исчезает совсем.

Явление резонанса используется для усиления колебаний, например, электромагнитных. Однако при конструировании различных машин и сооружений необходимо учитывать даже самую небольшую периодическую силу с тем, чтобы предотвратить нежелательные последствия резонанса.

Вопросы для самоконтроля

1. Какое движение называется колебательным? Приведите примеры.
2. Какие колебания называются свободными? Приведите примеры.
3. Какие условия необходимы для совершения свободных колебаний?
4. Приведите примеры колебательных систем.
5. Какие колебания называются гармоническими?
6. Какой вид имеет дифференциальное уравнение свободных незатухающих колебаний? Запишите решение этого уравнения.
7. Что называют амплитудой колебаний?
8. Что называют периодом колебаний? В каких единицах измеряют период колебаний?
9. Что называют частотой колебаний? В каких единицах измеряют частоту колебаний? Запишите формулу циклической и линейной частоты колебаний.

10. Что называют фазой колебания? начальной фазой?

11. Какие характеристики колебаний не зависят от начальных условий?

12. Какой маятник называется математическим?

13. Запишите уравнение свободных незатухающих колебаний математического маятника.

14. Запишите формулы периода свободных незатухающих колебаний математического маятника и циклической частоты.

15. Какой маятник называется пружинным?

16. Запишите уравнение свободных незатухающих колебаний пружинного маятника.

17. Запишите формулы для периода свободных колебаний и циклической частоты пружинного маятника.

18. Опишите процессы превращения энергии при гармонических колебаниях на примере движения математического маятника; пружинного маятника.

19. По какой формуле определяют полную механическую энергию при гармонических колебаниях?

20. Какой маятник называется физическим?

21. Запишите уравнение свободных незатухающих колебаний физического маятника.

22. Запишите формулы для периода свободных колебаний и циклической частоты физического маятника.

23. Постройте график свободных незатухающих колебаний.

24. От чего зависит амплитуда и начальная фаза результирующего колебания, являющегося суммой двух синхронных скалярных гармонических колебаний?

25. Что такое биения? Как они образуются? Являются ли биения гармоническими колебаниями?

26. С какой частотой, и в каких пределах меняется амплитуда при биениях?

27. Что такое фигура Лиссажу?

28. От чего зависит вид фигуры Лиссажу?

29. Почему в реальных условиях свободные колебания маятника затухают? При каких условиях колебания могут стать незатухающими?

30. Какой вид имеет дифференциальное уравнение затухающих колебаний? Запишите его решение?

31. Как определяются мгновенная амплитуда, условная циклическая частота и период затухающих колебаний?

32. Что характеризует декремент затухания колебаний?

33. Во сколько раз период затухающих колебаний материальной точки больше периода ее свободных колебаний, если коэффициент затухания $\delta = 0{,}5$?

34. Изобразите график затухающих колебаний.

35. Какие колебания называются вынужденными? Приведите примеры.

36. Какой вид имеют дифференциальное уравнение вынужденных колебаний? Запишите его решение.

37. Что понимают под механическим резонансом?

38. По какому закону изменяется амплитуда вынужденных колебаний при резонансе?

39. Какой вид имеет график изменения амплитуды вынужденных колебаний при изменении частоты внешней силы?

40. Каково условие наступления резонанса?

41. Приведите примеры вредного и полезного проявления механического резонанса.

42. Что называют автоколебаниями? Приведите примеры.

8. МЕХАНИЧЕСКИЕ ВОЛНЫ

8.1. Распространение волн в упругой среде

Если в каком-либо месте упругой (твердой, жидкой или газообразной) среды возбудить колебания ее частиц, то вследствие взаимодействия между частицами эти колебания начнут распространяться в среде с некоторой скоростью υ.

Процесс распространения колебаний называется *волной.*

Частицы среды, в которой распространяется волна, не переносятся волной, они лишь совершают колебания около своих положений равновесия.

В зависимости от направления колебания частиц по отношению к направлению, в котором распространяется волна, различают продольные и поперечные волны.

В *продольной* волне частицы среды колеблются вдоль направления распространения волны.

В *поперечной* волне частицы среды колеблются в направлениях, перпендикулярных к направлению распространения волны.

Механические поперечные волны могут возникнуть в среде, обладающей сопротивлением сдвигу. Поэтому в жидкой и газообразной средах возможно возникновение только продольных волн. В твердой среде возможно возникновение как продольных, так и поперечных волн. В продольных волнах вследствие совпадения направлений колебаний частиц и волны появляются сжатия и разрежения.

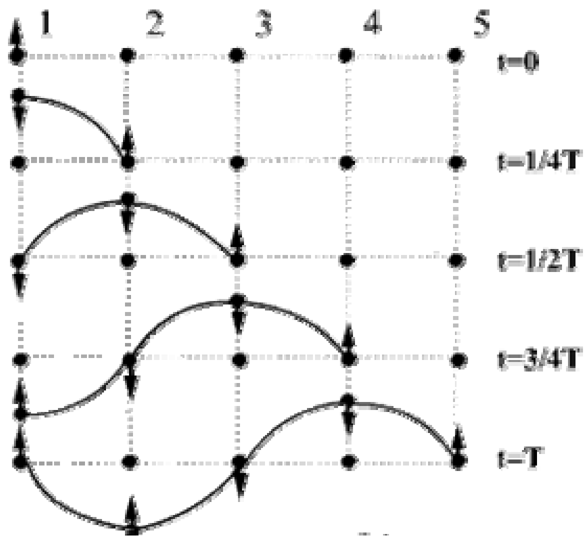


Рис. 8.1

На рис. 8.1 показано движение частиц при распространении в среде поперечной волны. Номерами 1, 2, 3 и т.д. обозначены частицы, расположенные друг от друга на расстоянии, равном расстоянию, проходимому волной за четверть периода колебаний, совершаемых частицами.

В начальный момент времени $(t=0)$ все частицы расположены на прямой в положении равновесия. Приведем частицу 1 в гармоническое колебание с периодом T, направленное перпендикулярно линии $1-5$. Так как частицы среды связаны между собой силами упругости, они тоже приходят в колебания, но с некоторым запаздыванием.

Через четверть периода $\left(t = \frac{1}{4}T\right)$ частица 1 достигнет максимального отклонения от положения равновесия. Колебаться начинают все частицы, лежащие слева от частицы 2.

По истечении промежутка времени $t = \frac{1}{4}T$ частица 2 начнет смещаться вверх.

При $t = \frac{1}{2}T$, первая частица вернется в положение равновесия, вторая достигнет максимального отклонения, колебания достигают точки 3.

К моменту времени $t = \frac{3}{4}T$ частица 1 достигнет максимального отрицательного смещения, частица 2 вернется в положение равновесия и колебания достигнут частицы 4.

Наконец, в момент времени, равный периоду $t = T$, частица 1 вернется в положение равновесия, совершив одно полное колебание. Колебания распространяются до частицы 5, все колеблющиеся частицы образуют волну. При дальнейших колебаниях частиц волновой процесс распространится вправо от частицы 5.

В рассмотренном случае образования поперечной волны каждая частица движется только вверх и вниз. У наблюдателя же создается впечатление, что «волна бежит» вправо, хотя в действительности происходит только передача движения от одной частицы среды к другой. В момент времени равный периоду $(t = T)$, частицы 1 и 5, находящиеся в положении равновесия, имеют одинаковое смещение и одинаковое направление движения (вверх). Поэтому говорят, что они имеют одинаковые фазы. В отличие от этого частицы 1 и 3, хотя смещения у них одинаковы, движутся в противоположные стороны, поэтому говорят, что они находятся в противоположных фазах.

Расстояния между точками 1 и 5 определяет длину волны λ, т.е. *длиной волны* λ называется, расстояние между ближайшими частицами, колеблющимися в одинаковой фазе.

Периодом волны T называют время одного полного колебания частиц.

Величина, обратная периоду, называется *частотой волны*.

Скорость волны определяется скоростью распространения колебаний от одной частицы среды к другой

$$\upsilon = \frac{\lambda}{T}.$$

Так как

$$T = \frac{1}{\nu}$$

то

$$\upsilon = \lambda\nu. \qquad (8.1)$$

Скорость распространения волны тем меньше, чем инертнее среда, т.е. чем больше ее плотность. С другой стороны, она имеет большее значение в более упругой среде, чем в менее упругой.

Скорость продольной волн определяется по формуле

$$\upsilon_{\text{пр}} = \sqrt{\frac{E}{\rho}},$$

поперечной

$$\upsilon_{\text{п}} = \sqrt{\frac{G}{\rho}},$$

где ρ – плотность среды; E – модуль Юнга; G – модуль сдвига.

Так как для большинства твердых тел $E > G$ то скорость продольных волн больше скорости поперечных.

8.2. Уравнение плоской одномерной волны

Получим уравнение, позволяющее находить смещение каждой точки волны в любой момент времени. Пусть в точке B (рис. 8.2) находится источник колебаний. Волна со скоростью $\vec{\upsilon}$ распространяется от источника колебаний вдоль прямой.

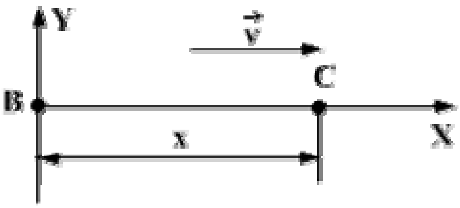


Рис. 8.2

Уравнение колебаний точки B задано в виде:

$$y_B = A\sin(\omega t + \varphi_0).$$

Все точки, лежащие правее B, например точка C, повторяют колебания точки B с некоторым запозданием. Запишем уравнение колебаний точки C. Если точка B колеблется в течение времени t, то колебания дойдут до точки C по истечении времени промежутка t', поэтому время колебаний точки C будет меньше t и составит $(t - t')$.

Тогда уравнение колебаний точки C запишется в виде

$$y_c = A\sin(\omega(t - t') + \varphi_0).$$

Расстояние от точки B до точки C, равное x, волна проходит со скоростью

$$\upsilon = \frac{x}{t'}$$

откуда

$$t' = \frac{x}{\upsilon}.$$

С учетом t' уравнение волны будет иметь вид:

$$y = A\sin\left[\omega\left(t - \frac{x}{\upsilon}\right)\right], \qquad (8.2)$$

или

$$y = A\sin\left[\left(\frac{2\pi}{T}t - \frac{2\pi}{\lambda}x\right) + \varphi_0\right],$$

где λ – длина волны.

Обозначим $\dfrac{2\pi}{\lambda} = k$ – эта величина называется *волновым числом*.

Тогда получим следующее уравнение

$$y = A\sin\left[\left(\omega t - kx\right) + \varphi_0\right], \qquad (8.3)$$

которое называется *уравнением плоской одномерной волны* и определяет смещение точки среды, находящейся в момент времени t на расстоянии x от источника колебаний.

Величина

$$\varphi = \left(\omega t - kx\right) + \varphi_0$$

называется *фазой волны*.

8.3. Фазовая скорость

Зафиксируем какое-либо значение фазы, стоящей в уравнении (8.2), положив ее постоянной для данной точки

$$\left[\omega\left(t - \frac{x}{\upsilon}\right) + \varphi_0\right] = \text{const}.$$

Это выражение устанавливает связь между временем t и координатой x, в которой зафиксированное значение фазы осуществляется в данный момент. Определив $\dfrac{dx}{dt}$, найдем скорость, с которой перемещается данное значение фазы. Дифференцируя это соотношение, получим

$$dt - \frac{1}{\upsilon}dx = 0,$$

откуда

$$\upsilon = \frac{dx}{dt}.$$

Таким образом, скорость распространения волны υ в уравнении (8.2) есть скорость перемещения фазы, в связи с чем, ее называют *фазовой скоростью*.

8.4. Волновая поверхность, фронт волны

Геометрическое место точек, колеблющихся в одной фазе, называется *волновой поверхностью.*

Волновая поверхность, отделяющая часть пространства, в которой колебания происходят, от той части, где еще нет колебаний, называется *фронтом волны*.

Именно фронт волны перемещается со скоростью равной фазовой скорости волны. В случае одномерной синусоидальной волны уравнение волновой поверхности имеет следующий вид:

$$\omega t - kx + \varphi_0 = \varphi .$$

Этому условию в каждый момент времени удовлетворяет только одна точка оси OX, координата x которой равна:

$$x = \frac{\omega t + \varphi_0 - \varphi}{k} .$$

Различным значениям фазы волны φ соответствуют различные волновые поверхности, каждая из которых в одномерных волнах вырождается в точку. Из последней формулы видно, что волновые поверхности с течением времени перемещаются в среде со скоростью, равной

$$\upsilon = \frac{dx}{dt},$$

т.е. фазовой скоростью

$$\upsilon = \frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\omega t + \varphi_0 - \varphi}{k}\right) = \frac{\omega}{k} .$$

Таким образом, для синусоидальной волны скорость распространения поверхности постоянной фазы совпадает со скоростью распространения волны.

8.5. Уравнение плоской волны, распространяющейся в произвольном направлении

Получим уравнение плоской волны, распространяющейся в направлении, образующем с осями координат x, y, z углы α, β, γ.

Пусть колебания в плоскости, проходящей через начало координат, имеют вид

$$S_0 = A\cos\omega t .$$

Рассмотрим волновую поверхность (плоскость), отстоящую от начала координат на расстояние l. Колебания в этой плоскости будут отставать от колебаний в точке O (рис.8.3) на время $t' = \dfrac{l}{\upsilon}$.

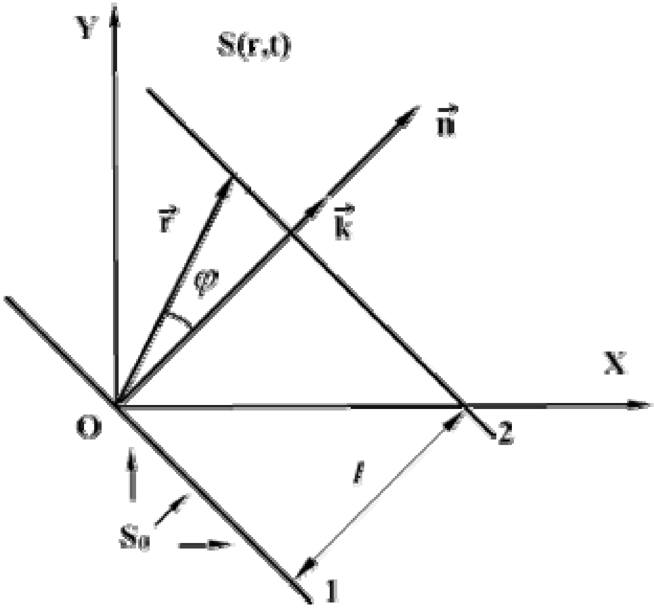


Рис. 8.3

Тогда уравнение волны

$$S = A\cos\omega\left(t - \frac{l}{\upsilon}\right). \qquad (8.4)$$

Выразим расстояние l через радиус-вектор $\vec{r}$ точек рассматриваемой поверхности. Для этого введем единичный вектор $\vec{n}$ нормали к волновой поверхности.

Скалярное произведение

$$\vec{n}\vec{r} = r\cos\varphi = l .$$

Подставим значение l в уравнение (8.4)

$$S = A\cos\left(\omega t - \frac{\omega}{\upsilon}\vec{n}\vec{r}\right).$$

Отношение $\frac{\omega}{\upsilon}$ равно волновому числу k.

Вектор $\vec{k} = k\vec{n}$, равный по модулю волновому числу $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ и направленный вдоль нормали к волновой поверхности называется *волновым вектором*.

Введя вектор $\vec{k}$, получим

$$S(\vec{r}, t) = A\cos\left(\omega t - \vec{k}\vec{r}\right). \tag{8.5}$$

Чтобы перейти от радиус-вектора точки к ее координатам x, y, z, выразим скалярное произведение $\vec{k}\vec{r}$ через проекции векторов на координатные оси :

$$\vec{k}\vec{r} = k_x x + k_y y + k_z z\ .$$

Тогда уравнение плоской волны принимает вид:

$$S(x, y, z, t) = A\cos\left(\omega t - k_x x - k_y y - k_z z\right), \tag{8.6}$$

где

$$k_x = \frac{2\pi}{\lambda}\cos\alpha, \qquad k_y = \frac{2\pi}{\lambda}\cos\beta, \qquad k_z = \frac{2\pi}{\lambda}\cos\gamma\ .$$

8.6. Волновое уравнение

Продифференцируем дважды по каждой переменной уравнение (8.6):

$$\frac{\partial^2 S}{dt^2} = -\omega^2 A\cos\left(\omega t - \vec{k}\vec{r}\right) = -\omega^2 S\,, \tag{8.7}$$

$$\frac{\partial^2 S}{\partial x^2} = -k_x^2 A\cos\left(\omega t - \vec{k}\vec{r}\right) = -k_x^2 S\,,$$

$$\frac{\partial^2 S}{\partial y^2} = -k_y^2 A\cos\left(\omega t - \vec{k}\vec{r}\right) = -k_y^2 S\,,$$

$$\frac{\partial^2 S}{\partial z^2} = -k_z^2 A\cos\left(\omega t - \vec{k}\vec{r}\right) = -k_z^2 S\ .$$

Сложив последние три уравнения, получим

$$\frac{\partial^2 S}{\partial^2 x} + \frac{\partial^2 S}{\partial^2 y} + \frac{\partial^2 S}{\partial^2 z} = -\left(k_x^2 + k_y^2 + k_z^2\right)S = -k^2 S\ .$$

Из (8.7) следует

$$S = -\frac{1}{\omega^2}\frac{\partial^2 S}{\partial t^2},$$

тогда

$$\frac{\partial^2 S}{\partial^2 x} + \frac{\partial^2 S}{\partial^2 y} + \frac{\partial^2 S}{\partial^2 z} = \frac{1}{\upsilon^2}\frac{\partial^2 S}{\partial t^2}. \qquad (8.8)$$

Уравнение (8.8) называется волновым уравнением. Всякая функция, удовлетворяющая этому уравнению, описывает волну.

8.7. Энергия волны

Найдем изменение энергии малого объема dV упругой среды, связанное с распространением в среде плоской волны, уравнение которой имеет вид

$$S = A\sin\left[\omega t - kx + \varphi_0\right]. \qquad (8.9)$$

Ввиду малости объема dV можно считать, что все находящиеся в нем частицы среды колеблются в одной фазе, так что их скорости одинаковы и равны

$$\upsilon_1 = \frac{dS}{dt}.$$

Поэтому кинетическая энергия объема среды dV, связанная с колебательным движением, равна

$$dW_x = \frac{\upsilon_1^2 dm}{2} = \frac{\rho\upsilon_1^2}{2}dV,$$

где ρ – плотность среды.

Из (8.9) следует

$$V_1 = A\omega\cos\left[\omega t - kx + \varphi_0\right].$$

Тогда

$$dW_x = \frac{1}{2}\rho A^2\omega^2\cos^2\left[\omega t - kx + \varphi_0\right]dV. \qquad (8.10)$$

Подсчитывая работу деформации объема dV среды при волновом движении (деформация сдвига в случае поперечной волны и деформации объемного сжатия в случае продольной волны), можно показать, что потенциальная энергия $dW_{\text{п}}$ объема dV среды равна его кинетической энергии.

Полная механическая энергия dW колебательного движения элементарного объема dV упругой среды равна сумме его кинетической и потенциальной энергии.

$$dW = \rho A^2 \omega^2 \cos^2\left[\omega t - kx + \varphi_0\right] dV . \qquad (8.11)$$

Среднее за период значение энергии, переносимой волнами:

$$\left\langle W \right\rangle = \frac{1}{2}\rho \Delta V A^2 \omega^2 . \qquad (8.12)$$

Энергия, переносимая волной в единицу объема, называется *объемной плотностью энергии*

$$\rho_w = \frac{W}{\Delta V} . \qquad (8.13)$$

Ее среднее значение

$$\left\langle \rho_w \right\rangle = \frac{1}{2}\rho A^2 \omega^2 . \qquad (8.14)$$

Перенос энергии волной количественно характеризуется *вектором плотности потока энергии (вектором Умова-Пойтинга)*.

Направление этого вектора совпадает с направлением переноса энергии, а его модуль равен энергии, переносимой волной за единицу времени через единичную площадку, расположенную перпендикулярно к направлению распространения волны. Найдем аналитическое выражение вектора Умова-Пойтинга.

Пусть ΔS – часть фронта волны в некоторый момент времени t (рис. 8.4). За время Δt фронт волны переместится на расстояние $\Delta l = \upsilon \Delta t$, вследствие чего частицы среды в объеме $\Delta V = \Delta S \cdot \Delta l$ придут в колебательное движение. Тогда через единичную площадку в единицу времени волной переносится энергия

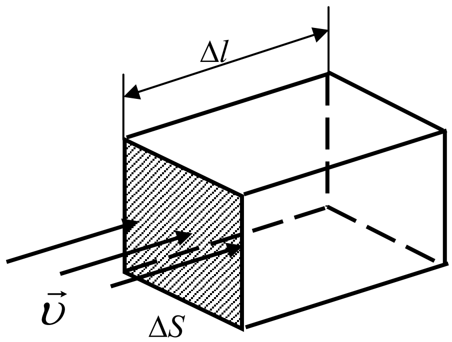


Рис. 8.4

$$s = \frac{\Delta W}{\Delta S \Delta t} , \qquad (8.15)$$

где ΔW – энергия, переносимая волной через площадку ΔS за время Δt.

Предполагая, что в пределах малого объема ΔV энергия распределена однородно, можем записать

$$\Delta W = \rho_w \Delta V = \rho_w \Delta S \Delta l , \qquad (8.16)$$

где ρ_w – объемная плотность потока энергии (энергия, заключенная в единице объема).

Подставив (8.16) в (8.15), получим

$$\vec{s} = \frac{\rho_w \Delta S \Delta l}{\Delta S \Delta t} = \rho_w \vec{\upsilon}.$$

Вектор Умова-Пойтинга направлен в сторону вектора скорости $\vec{\upsilon}$ распространения волны и равен произведению объемной плотности энергии на вектор скорости распространения волны.

8.8. Принцип суперпозиции. Групповая скорость

Если среда, в которой распространяются одновременно несколько волн, линейна, т.е. ее свойства не изменяются под действием возмущений, создаваемых волной, то к волнам применим принцип суперпозиции*: при распространении в линейной среде нескольких волн каждая из них распространяется так, как будто другие волны отсутствуют, а результирующее смещение частицы среды в любой момент времени равно геометрической сумме смещений, которые получают частицы, участвуя в каждом из слагающих волновых процессов.*

Исходя из принципа суперпозиции, любая волна может быть представлена в виде суммы гармонических волн, т.е. в виде волнового пакета, или группы волн.

Волновым пакетом называется суперпозиция волн, мало отличающихся друг от друга по частоте, занимающая в каждый момент времени ограниченную область пространства.

Сконструируем простейший волновой пакет из двух распространяющихся вдоль положительного направления оси x гармонических волн с одинаковыми амплитудами, близкими частотами и волновыми числами, причем $d\omega << \omega$ и $dk << k$ ($d\omega$ – разница этих частот; dk – разница волновых чисел).

Тогда в результате наложения этих волн смещение

$$S = A_0 \cos(\omega t - kx) + A_0 \cos\left[(\omega + d\omega)t + (k + dk)x\right] =$$
$$= 2A_0 \cos\left(\frac{t d\omega - x dk}{2}\right) \cos(\omega t - kx).$$

Полученная волна, отличается от гармонической тем, что ее амплитуда

$$A = \left| 2A_0 \cos\left(\frac{t \mathrm{d}\omega - x \mathrm{d}k}{2}\right) \right|$$

есть медленно изменяющаяся функция координаты x и времени t.

За скорость распространения этой негармонической волны (волнового пакета) принимают скорость перемещения максимума амплитуды волны, рассматривая тем самым максимум в качестве центра волнового пакета. При условии, что $td\omega - xdk = \text{const}$, получим

$$\frac{dx}{dt} = \frac{d\omega}{dk} = u, \tag{8.17}$$

где u – *групповая скорость.*

Ее можно определить как скорость движения группы волн, образующих в каждый момент времени локализованный в пространстве волновой пакет.

Рассмотрим связь между групповой и фазовой скоростями. Учитывая что $\lambda = \frac{2\pi}{k}$, получим

$$u = \frac{d\omega}{dk} = \frac{d(\upsilon k)}{dk} = \upsilon + k\frac{d\upsilon}{dk} = \upsilon + k\left(\frac{d\upsilon}{d\lambda}\frac{d\lambda}{dk}\right) = \upsilon + k\left(-\frac{\lambda}{k}\right)\frac{d\upsilon}{d\lambda},$$

или

$$u = \upsilon - \lambda\frac{d\upsilon}{d\lambda}. \tag{8.18}$$

Из формулы (8.18) следует, что u может быть как меньше, так и больше υ в зависимости от знака $\mathrm{d}v/\mathrm{d}\lambda$. В недиспергирующей среде $\mathrm{d}v/\mathrm{d}\lambda = 0$ и групповая скорость совпадает с фазовой.

Понятие групповой скорости очень важно, так как именно она фигурирует при измерении дальности в радиолокации, в системах управления космическими объектами и т.д.

8.9. Интерференция волн

Согласованное протекание во времени и пространстве нескольких колебательных или волновых процессов связывают с понятием когерентности. Волны называются *когерентными*, если они имеют одинаковую частоту и разность их фаз в каждой точке пространства остается постоянной во времени. При наложении двух когерентных волн в разных его точках получается усиление или ослабление результирующей волны в зависимости от соотношения между фазами этих волн. Это явление называется *интерференцией* волн.

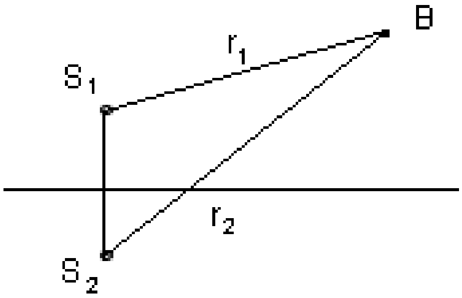


Рис. 8.5

Пусть уравнения двух когерентных сферических волн, распространяющихся в среде от двух источников S_1 и S_2, и накладывающихся друг на друга, заданы в виде

$$\xi\left(r_1,t\right)=A_1\cos\left(\omega t-kr_1+\varphi_{01}\right);$$

$$\xi\left(r_2,t\right)=A_2\cos\left(\omega t-kr_2+\varphi_{02}\right),$$

где r_1 и r_2 – расстояния от источников до интересующей нас точки B.

Учитывая, что мгновенные амплитуды и фазы волн соответственно равны:

$$A_1=\frac{A_0}{r_1};\qquad A_2=\frac{A_0}{r_2},$$

$$\varphi_1=\left(\omega t-kr_1+\varphi_{01}\right);\qquad \varphi_2=\left(\omega t-kr_2+\varphi_{02}\right),$$

перепишем уравнения волн в виде:

$$\xi\left(r_1,t\right)=\frac{A_0}{r_1}\cos\varphi_1;\qquad \xi\left(r_2,t\right)=\frac{A_0}{r_2}\cos\varphi_2.$$

При наложении в одних точках пространства волны взаимно усиливают друг друга, а в других ослабляют. Результат наложений зависит от разности фаз накладывающихся волн:

$$\Delta\varphi=\varphi_2-\varphi_1;$$

$$\Delta\varphi=\left(\omega t-kr_2+\varphi_{02}\right)-\left(\omega t-kr_1+\varphi_{01}\right)=-k\left(r_1-r_2\right)+\left(\varphi_{02}-\varphi_{01}\right);$$

$\left(\varphi_{02}-\varphi_{01}\right)$ – разность начальных фаз источников колебаний.

Так как $\left(\varphi_{02}-\varphi_{01}\right)=\text{const}$, то разность фаз накладываемых волн $\Delta\varphi$ будет зависеть только от величины $\left(r_1-r_2\right)$.

$\left(r_1-r_2\right)=\Delta$ – разность хода волн.

Тогда

$$\Delta\varphi=-k\Delta+\left(\varphi_{02}-\varphi_{01}\right).$$

В точках среды, где

$$\Delta\varphi=\pm 2m\pi\left(m=0,1,2,...\right),$$

то поскольку $A_{рез}^2=A_1^2+A_2^2+2A_1A_2\cos 2\varphi$ $\qquad A_{рез}=A_1+A_2=\dfrac{A_0}{r_1}+\dfrac{A_0}{r_2}$.

В этих точках волны усиливают друг друга, в них наблюдается интерференционный максимум.

$$k\Delta = (\varphi_{02} - \varphi_{01}) \pm 2m\pi; \quad \left(k = \frac{2\pi}{\lambda}\right); \quad \Delta = \frac{(\varphi_{02} - \varphi_{01})\lambda}{2\pi} \pm m\lambda.$$

Если $\varphi_{01} = \varphi_{02}$, то разность хода волн определяется $\Delta = \pm m\lambda$.

В точках среды, где разность фаз

$$\Delta\varphi = \pm(2m+1)\pi(m = 0,1,2,...),$$

$$A_{\text{рез}} = |A_1 - A_2| = \left|\frac{A_0}{r_1} - \frac{A_0}{r_2}\right|.$$

В этих точках колебания ослабляют друг друга, наблюдается интерференционный минимум.

$$k\Delta = (\varphi_{02} - \varphi_{01}) \pm (2m+1)\pi; \quad \Delta = \frac{(\varphi_{02} - \varphi_{01})\lambda}{2\pi} \pm (2m+1)\frac{\lambda}{2};$$

$$\varphi_{01} = \varphi_{02}; \quad \Delta = \pm(2m+1)\lambda.$$

Так как объемная плотность энергии, переносимой волнами $\langle\rho_w\rangle$, пропорциональна A^2, то в близи точки интерференционного максимума, величина $\langle\rho_w\rangle$ больше, а вблизи интерференционного минимума меньше, то есть энергия в среде распределяется неравномерно. Это распределение энергии, если оно не изменяется во времени, может быть обнаружено и изучено и называется интерференционной картиной.

8.10. Стоячие волны

Особым случаем интерференции являются стоячие волны.

Стоячей называется волна, образовавшаяся в результате наложения двух бегущих волн, которые распространяются навстречу друг другу и имеют одинаковые частоты, амплитуды, а в случае поперечных волн – одинаковую поляризацию.

Например: стоячая волна образуется в упругой натянутой нити, один конец которой закреплен, а другой приводится в колебательное движение (рис. 8.6).

В качестве начала отсчета времени выберем тот момент, в который началь-

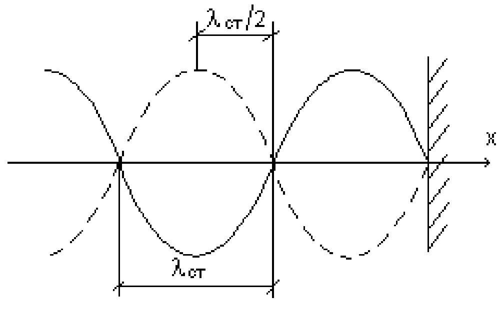


Рис. 8.6

ные фазы бегущей и отраженной волн равны нулю, тогда уравнение бегущей волны:

$$\xi_1 = A\cos(\omega t - kx),$$

уравнение отраженной волны:

$$\xi_2 = A\cos(\omega t + kx).$$

Сложив эти уравнения и учитывая что $\left(k = \dfrac{2\pi}{\lambda}\right)$, получим уравнение стоячей волны:

$$\xi = \xi_1 + \xi_2 = 2A\cos\omega t\cos\frac{2\pi x}{\lambda}; \quad \xi = \left|2A\cos\frac{2\pi x}{\lambda}\right|\cos\omega t.$$

Из этого уравнения следует, что все точки стоячей волны колеблются с той же циклической частотой ω, что и в бегущей и отраженной волнах.

Амплитуда стоячей волны: $A_{\text{ст}} = \left|2A\cos\dfrac{2\pi x}{\lambda}\right|$ является функцией x.

В точках среды, где $\dfrac{2\pi x}{\lambda} = \pm m\pi$ $(m = 0,\ 1,\ 2\ldots)$ значение $A_{\text{ст}} = 2A$. Эти точки стоячей волны называются *пучностями*. Координаты пучностей определяются так:

$$x_n = \pm\frac{m\pi\lambda}{2\pi}; \qquad x_n = \pm\frac{m\lambda}{2}.$$

В точках среды, где $\dfrac{2\pi x}{\lambda} = \pm\left(m + \dfrac{1}{2}\right)\pi$ значение $A_{\text{ст}} = 0$. Эти точки стоячей волны называются *узлами*. Координаты узлов:

$$x_y = \pm\frac{\left(m + \frac{1}{2}\right)\pi\lambda}{2\pi}; \qquad x_y = \pm\frac{\left(m + \frac{1}{2}\right)\lambda}{2}.$$

В стоячей волне расстояние между двумя соседними пучностями (узлами) равно $\dfrac{\lambda}{2}$. Это расстояние называется *длиной стоячей волны*:

$$\lambda_{\text{ст}} = \frac{\lambda}{2}.$$

Расстояние между узлом и пучностью равно $\dfrac{\lambda}{4}$ или $\dfrac{\lambda_{\text{ст}}}{2}$. При распространении стоячей волны переноса энергии не происходит. В пределах участка $\frac{\lambda}{2}$ между двумя узлами энергия волны остается постоянной. На участке между двумя узлами амплитуда стоячей волны изменяется, а фаза остается постоянной. Точки, расположенные по обе стороны от узла колеблются в противофазе.

8.11. Дифракция волн

Принципы Гюйгенса и суперпозиции позволяют решить ряд задач, связанных с распространением волн в неоднородной неизотопной среде. Например, рассмотрим распространение волны в среде, в которой имеется тело не пропускающее этой волны, а поглощающее или отражающее ее. Пусть плоская волна (во всех точках которой амплитуда колебаний одинакова) встречает на своем пути тело *P* «непрозрачное» для этой волны и не пропускающее участок волны *AB*. Применим принцип Гюйгенса в тот момент времени, когда фронт волны занимает положение SS_1.

Проведя огибающие вторичных элементарных волн заметим, что волна заходит в область *C* геометрической тени. Явление проникновения волны в область геометрической тени или явление огибания волнами препятствий или в общем случае отклонение в распространении волн от законов геометрической оптики называется *дифракцией* волн.

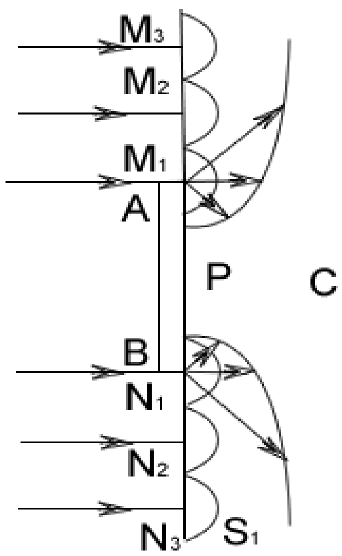


Рис. 8.7

Поскольку принцип Гюйгенса не объясняет явление дифракции, то французский ученый Френель в 1815 году, введя представление о когерентности вторичных волн и их интерференции, сформулировал Гюйгенса по-другому.

Принцип Гюйгенса – Френеля: *возмущение в любой точке среды есть результат интерференции элементарных вторичных волн, возбуждаемых различными точками волновой поверхности.*

8.12. Отражение волн

Пусть на границу раздела двух частиц падает плоская волна.

В тот момент времени, когда первый луч достигает границы раздела в точке *A*, волновой фронт – плоскость *AC* перпендикулярна лучам.

α – угол падения (т.е угол между падающим лучом и перпендикуляром).

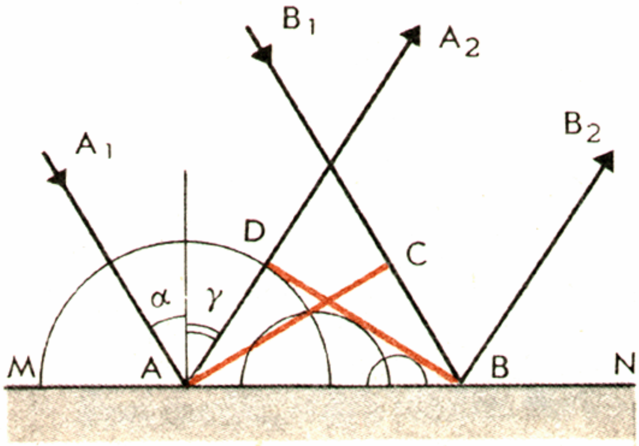


Рис. 8.8

К тому моменту времени, когда первый луч достигает границы, второй луч удален от нее на расстояние $CB = \upsilon\Delta t$. Согласно принципу Гюйгенса точка А, в которой падает первый луч является источником элементарных вторичных волн, причем к моменту времени, когда границы раздела достигает второй луч радиус фронта этой вторичной волны $AD = \upsilon\Delta t$. Огибающая или фронт отраженной волны – плоскость BD.

Отраженные лучи AA_2 и BB_2 перпендикулярны к этому фронту. $\gamma -$ угол отражения (т.е. угол между отраженным лучом и перпендикуляром). Треугольник ACB равен треугольнику ADB, AB – общая, $AD = CB = \upsilon\Delta t$, $\angle CAB = \angle DBA$, $\angle CAB = \alpha$, $\angle DBA = \beta \Rightarrow \alpha = \beta$.

Угол отражения равен углу падения, причем оба луча (падающий и отраженный) и перпендикуляр, восстановленный в точке падения к границе раздела двух сред лежат в одной плоскости.

8.13. Преломление волн

При переходе волны из одной среды в другую изменяется скорость и направление ее распространения.

Обозначим:

$\upsilon_1 -$ скорость распространения волны в первой среде;

$\upsilon_2 -$ скорость распространения волны во второй среде.

BC – разность расстояний, проходимых лучами в первой среде, $BC = \upsilon_1\Delta t$. Точка A, которой достигает первый луч, согласно принципу Гюйгенса становится источником элементарных вторичных сферических волн.

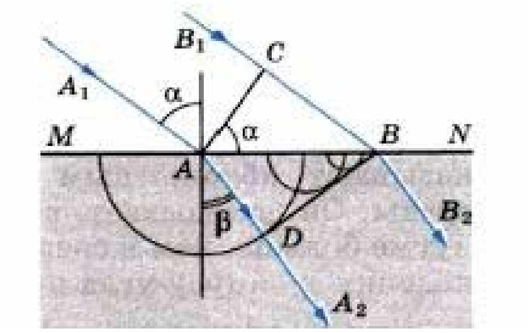


Рис. 8.9

Огибающая вторичных волн – плоскость DB. К моменту времени, когда второй луч достигает границы раздела сред в точке B, радиус сферической волны во второй среде равен AD

$$AD = \upsilon_2 \Delta t\,.$$

Лучи распространяются во второй среде перпендикулярно к поверхности DB. AA_2 – преломленный луч.

β – угол преломления (угол между преломленным лучом и перпендикуляром).

$$\sin\alpha = \frac{BC}{AB} = \frac{\upsilon_1 \Delta t}{AB};\ \sin\beta = \frac{AD}{AB} = \frac{\upsilon_2 \Delta t}{AB};$$

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \frac{\upsilon_1 \Delta t}{AB} \cdot \frac{AB}{\upsilon_2 \Delta t};\quad \frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \frac{\upsilon_1}{\upsilon_2};$$

$\sin\beta$ и $\sin\alpha$ – пропорциональны скорости распространения света в данных средах (оба луча падающий и преломленный и перпендикуляр, восстановленный в точке падения, лежат а одной плоскости).

8.14. Эффект Доплера в акустике

Эффект Доплера описывает сдвиг частоты сигнала в зависимости от относительного движения источника и приемника. Так волна, посланная источником, который удаляется от приемника, будет приниматься им на меньшей частоте по сравнению с волной от неподвижного источника или от источника, приближающегося к приемнику. Если же приемник приближается к неподвижному источнику, то частота принимаемой им волны будет больше по сравнению с неподвижным приемником или приемником, удаляющимся от источника. Это явление обнаружил Христиан Доплер в 1842 году.

Обозначим:

ν_u – частота колебаний источника;

ν – частота волны, распространяющейся в упругой среде;

ν_z – частота, регистрируемая приемником.

1) Пусть источник и приемник неподвижны относительно друг друга. Тогда длина волны, испускаемая источником находится так $\lambda_0 = \dfrac{\upsilon_{зв}}{\nu_u}$.

2) Обозначим υ_u – скорость движения источника, а υ_n – скорость движения приемника. Будем считать, что приемник звука неподвижен, а источник движется.

Движение источника приводит к изменению длины волны.

а) приближение источника к приемнику приводит к уменьшению длины волны на величину расстояния, пройденного источником за время равному периоду его колебаний:

$$\lambda = \lambda_0 - \frac{\upsilon_и}{\nu_и} = \frac{\lambda_0 \nu_и - \upsilon_и}{\nu_и} = \frac{\upsilon_{зв} - \upsilon_и}{\nu_и};$$

б) при удалении источника от приемника длина волны больше на величину расстояния пройденного источником $\frac{\upsilon_и}{\nu_и}$:

$$\lambda = \lambda_0 + \frac{\upsilon_и}{\nu_и} = \frac{\lambda_0 \nu_и + \upsilon_и}{\nu_и} = \frac{\upsilon_{зв} + \upsilon_и}{\nu_и}.$$

3) Если же источник не подвижен (длина волны излучения не изменяется), а приемник движется, то движение приемника приводит к изменению скорости звуковой волны относительно приемника:

$$\bar{\upsilon}_{зв} = \bar{\upsilon}_{зв.отн.прием.} + \bar{\upsilon}_п;$$

а) при приближении приемника к источнику:

$$\upsilon_{зв} = \upsilon_{зв.отн.прием.} - \upsilon_п;$$

$$\upsilon_{зв.отн.прием.} = \upsilon_{зв} + \upsilon_п;$$

б) при удалении приемника от источника:

$$\upsilon_{зв} = \upsilon_{зв.отн.прием.} + \upsilon_п;$$

$$\upsilon_{зв.отн.прием.} = \upsilon_{зв} - \upsilon_п.$$

Поэтому частота звука, регистрируемая приемником

а) при сближении источника и приемника:

$$\nu_п = \frac{\upsilon_{зв} + \upsilon_п}{\upsilon_{зв} - \upsilon_п} \nu_и \qquad (8.19)$$

б) если же источник и приемник удаляются друг от друга, тогда

$$\nu_п = \frac{\upsilon_{зв} - \upsilon_п}{\upsilon_{зв} + \upsilon_п} \nu_и \qquad (8.20)$$

Из формул (8.19) и (8.20) следует, что

$$\nu_п = \frac{\upsilon_{зв} \pm \upsilon_п}{\upsilon_{зв} \mp \upsilon_п} \nu_и.$$

Вопросы для самоконтроля

1. Что называют механической волной?

2. Какая волна называется поперечной? продольной?

3. Каковы особенности волнового движения?

4. В каких средах распространяются продольные волны, а в каких – поперечные? Почему?

5. Что называют длиной волны?

6. Как связана скорость волны с длиной волны и периодом колебаний? С длиной волны и частотой колебаний?

7. Что называют волновым числом?

8. Что называют волновой проерхностью? Волновым фронтом?

9. Какая волна называется бегущей?

10. Выведите уравнение плоской одномерной волны. Нарисуйте график мгновенного смещения частиц среды в бегущей волне. Чему равно расстояние между двумя соседними точками волны, колеблющимися в одной фазе?

11. Покажите, что в формуле плоской волны означает скорость распространения фазы колебаний. Что называют фазовой и групповой скоростью? В каком случае обе скорости совпадают? Выведите соотношение связи между групповой скоростью и фазовой скоростью.

12. Нарисуйте графики мгновенных распределений смещений частиц, их скоростей, ускорений в бегущей волне.

13. Объясните, почему в бегущей волне точкам, проходящим положение равновесия, соответствуют участки среды с наибольшей деформацией.

14. Напишите выражения для кинетической, потенциальной и полной энергии небольшого объема среды, в которой имеется бегущая синусоидальная волна. Нарисуйте графики мгновенного распределения кинетической, потенциальной и полной энергии.

15. Почему волна переносит энергию? Что называется потоком энергии? Плотностью потока энергии?

16. В чем состоит принцип суперпозиции, и каковы границы его применимости?

17. Что называется интерференцией? Какие волны могут интерферировать? Перечислите условия когерентности волн (и источников).

18. Как образуются стоячие волны? Напишите формулу распределения смещений в стоячей волне. Что называется узлами и пучностями?

19. Перечислите свойства, отличающие стоячую волну от бегущей. Почему стоячая волна не переносит энергии?

20. В чем состоит принцип Гюйгенса, принцип Гюйгенса – Френеля? Объясните с помощью принципа Гюйгенса законы отражения и преломления волн.

9. ЭЛЕМЕНТЫ МЕХАНИКИ СПЛОШНЫХ СРЕД

9.1. Упругие деформации и напряжения. Закон Гука. Механическое напряжение

В природе не существует абсолютно твердых тел. Все реальные тела под действием сил изменяют свои форму и размеры, т.е. деформируются.

Деформация называется *упругой*, если после прекращения действия внешних сил тело принимает первоначальные размеры и форму.

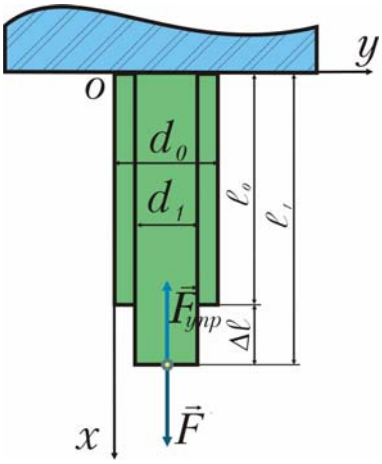


Рис. 9.1

Приложим к однородному стержню длиной ℓ_0 растягивающую силу $\vec{F}$.

В деформированном теле возникает сила упругости

$$\vec{F}_{упр} = -\vec{F}.$$

Экспериментально доказано, что если стержень однороден, сила упругости прямо пропорциональна площади сечения S и обратно пропорциональна длине стержня ℓ_0.

Учитывая это, выражение для силы упругости можно записать в виде

$$F_{упр} = Es\frac{\Delta\ell}{\ell_0} = k\Delta\ell, \tag{9.1}$$

где E – коэффициент пропорциональности (модуль Юнга). Он не зависит от геометрических размеров тела, а зависит от материала; $\Delta\ell = \ell_1 - \ell_0$ – абсолютное изменение длины стержня. При растяжении $\Delta\ell$ положительно, при сжатии – отрицательно; k – коэффициент упругости (жесткость).

Формула (9.1) представляет собой математическое выражение закона Гука для упругой деформации растяжения (сжатия).

$$[E] = \text{Па} = \frac{\text{Н}}{\text{м}^2}.$$

Количественной мерой степени растяжения тела является *относительная продольная деформация.*

$$\varepsilon = \frac{\Delta\ell}{\ell_0}. \tag{9.2}$$

Каждый элемент тела произвольной длины будет иметь такое же относительное удлинение. Поэтому ε характеризует деформацию как тела в целом, так и любой его части.

Относительная поперечная деформация

$$\varepsilon' = \frac{\Delta d}{d_0},$$

где $\Delta d = d_1 - d_0$ – абсолютное поперечное сжатие; d_0 – первоначальный поперечный размер стержня.

Деформации ε и ε' всегда имеют разные знаки. При растяжении стержня его поперечный размер уменьшается. Экспериментально установлено, что величины ε и ε' связаны соотношением:

$$\varepsilon' = -\mu\varepsilon, \tag{9.3}$$

где μ – положительный коэффициент постоянный для данного материала (коэффициент Пуассона).

Сила, действующая на единицу площади поперечного сечения, называется *механическим напряжением* σ:

$$\frac{F}{s} = \sigma.$$

$$\frac{F_{\text{упр}}}{s} = \sigma_{\text{упр}}.$$

$[\sigma] = \text{Па}$.

Тогда, с учетом формул (9.1) и (9.2) закон Гука приобретает вид

$$\sigma_{\text{упр}} = E\varepsilon. \tag{9.4}$$

При малых деформациях упругое напряжение, возникающее в теле, прямо пропорционально относительной деформации.

Из приведенных формул ясно, что модуль Юнга численно равен силе, которую нужно приложить к стержню единичного сечения, чтобы его длина увеличилась в два раза. В этом случае механическое напряжение будет равно модулю Юнга

$$\sigma = E.$$

Но для большинства материалов это невозможно (например, сталь разрушается уже когда $\sigma = 0,002E$. Для стали значение $E = 2\cdot 10^{11}$ Па).

9.2. Деформация сдвига. Модуль сдвига

Деформацию сдвига можно получить, если одну грань образца, имеющего форму параллелепипеда, закрепить, а к противоположной грани приложить касательную силу $\vec{F}_\tau$.

Величина Δs – абсолютное смещение (сдвиг). Абсолютный сдвиг неодинаков для разных слоев. Он тем больше, чем дальше сдвигаемый слой расположен от неподвижного; γ – угол деформации (сдвига); $\operatorname{tg}\gamma$ – относительный сдвиг. Это отношение абсолютного сдвига к расстоянию между сдвигаемым и неподвижным слоями. При малых деформациях относительный сдвиг равен углу сдвига, выраженному в радианах:

$$\operatorname{tg}\gamma \approx \gamma .$$

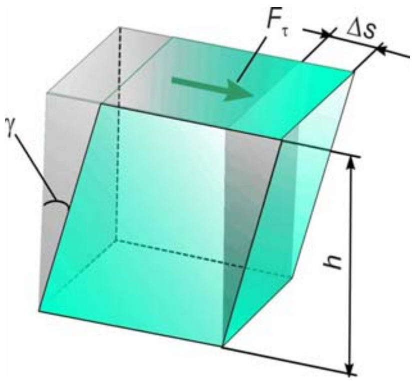


Рис. 9.2

При сдвиге внутри тела возникают упругие силы, которые при статической деформации уравновешивают внешнюю касательную силу:

$$\vec{F}_{\text{упр}} = -\vec{F}_{\tau} .$$

Обозначим $\tau = \dfrac{F_{\text{упр}}}{S}$ – упругое тангенциальное механическое напряжение.

$$\tau = G\gamma , \qquad (9.5)$$

где G – модуль сдвига.

Формула (9.5) – *закон Гука для сдвига*: при малых деформациях упругое тангенциальное напряжение прямо пропорционально относительному сдвигу.

Модули E, G и коэффициент Пуассона μ связаны между собой соотношением

$$G = \frac{E}{2(1+\mu)} .$$

Это позволяет любую деформацию приводить к двум одновременным: либо к растяжению и сжатию, либо к растяжению (сжатию) и сдвигу.

9.3. Энергия упругой деформации

Если после растяжения стержня внешнюю силу убрать, стержень начнет возвращаться в исходное положение. Таким образом, точка приложения силы упругости будет перемещаться под действием этой силы. Следовательно, сила упругости будет совершать работу.

$$\delta A = F_{\text{упр}} dx = -kxdx . \qquad (9.6)$$

$$A = -\int\limits_{\Delta\ell}^{0} kxdx = \frac{k\Delta\ell^2}{2} . \qquad (9.7)$$

Если же упругая сила восстановит форму стержня не полностью, а, скажем, переведет его из состояния x_1 в состояние x_2, то совершенная работа будет равна

$$A = -\int_{x_1}^{x_2} kx dx .$$

$$A = \frac{kx_1^2}{2} - \frac{kx_2^2}{2} . \qquad (9.8)$$

Таким образом, работа равна разности значений одной и той же величины, вычисленной в двух состояниях. Эту величину называют потенциальной энергией упругодеформированного тела

$$n = \frac{k\Delta\ell^2}{2} , \qquad (9.9)$$

или

$$n = \frac{Es}{2\ell}(\Delta\ell)^2 . \qquad (9.10)$$

При переходе из деформированного состояния в недеформированное тело может совершать работу против внешних сил за счет убыли собственной потенциальной энергии

$$A = -(n_2 - n_1) = n_1 - n_2 . \qquad (9.11)$$

9.4. Пластические деформации

Связь между относительной продольной деформацией и механическим напряжением может быть представлена в виде диаграммы напряжений, построенной для металлического образца (рис. 9.3).

Из рисунка видно, что линейная зависимость $\sigma(\varepsilon)$, установленная Гуком, выполняется лишь в узких пределах до так называемого *предела пропорциональности* $\sigma_{п}$. При дальнейшем увеличении напряжения деформация еще упругая, хотя зависимость $\sigma(\varepsilon)$ уже нелинейная и до *предела упругости* $\sigma_{у}$ остаточные деформации не возникают. За пределом упругости в теле возникают остаточные деформации и график, описывающий возвращение тела в первоначальное состояние после прекраще-

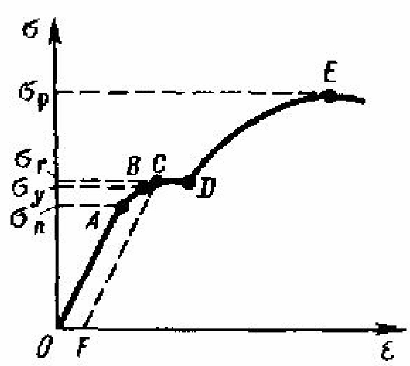


Рис. 9.3

ния действия силы, изобразится не кривой *CO*, а параллельной ей *CF*. Напряжение, при котором появляется заметная остаточная деформация, *называется пределом текучести* $\sigma_{\text{Т}}$. В области *BC* деформация возрастает без увеличения напряжения, т.е. тело как бы «течет». Эта область называется *областью текучести* или *областью пластических деформаций*. Материалы, для которых область текучести значительна, называются *вязкими* или *пластичными*, для которых она практически отсутствует – *хрупкими*. При дальнейшем растяжении происходит разрушение тела. Максимальное напряжение, возникающее в теле до разрушения, называется *пределом прочности* $\sigma_{\text{р}}$.

9.5. Гидромеханика. Общие свойства жидкостей и газов

Гидромеханика – раздел механики, изучающий равновесие и движение жидкостей, их взаимодействие между собой и с обтекаемыми ими твердыми телами.

В механике жидкости и газа пренебрегают молекулярным строением вещества. Его полагают непрерывно распределенным по заданному объему, т.е. сплошной средой. Плотность такой среды есть непрерывная функция координат $\rho = \rho(x, y, z)$.

И жидкость, и газ не противостоят сдвиговым деформациям, а значит, не сохраняют форму. В неподвижном состоянии они принимают форму резервуара, а в подвижном – текут, изменяя форму в соответствии с формой русла. Принципиальное механическое отличие заключается в том, что жидкости сохраняют объем, газы же занимают весь объем резервуара. Реальная жидкость, как и газ, сжимаема, однако степень сжимаемости жидкости много меньше степени сжимаемости газа. Так, для жидкости относительное увеличение плотности $\dfrac{\Delta\rho}{\rho} \approx 0{,}01$ при $p = 200 \cdot 10^5\,\text{Па}$.

Реальная жидкость, как и газ вязкая, что обусловлено внутренним трением.

Очень часто тем или иным свойством реальной жидкости или газа можно пренебречь. Если пренебрегают вязкостью, переходят к модели идеальной жидкости. Если пренебрегают сжимаемостью, получают модель несжимаемой жидкости. На практике часто объединяют эти модели и получают модель идеальной несжимаемой жидкости.

Газ, текущий со скоростью, меньшей скорости звука, движется под действием небольшой разности давлений. Небольшая разность давлений приводит к небольшим изменениям плотности. Поэтому часто текущий газ считают несжимаемым.

9.6. Уравнение гидростатики несжимаемой жидкости

Гидростатика изучает равновесие жидкости и воздействие жидкости на погруженное в нее тело. Одной из важнейших характеристик покоящихся жидкостей является давление.

Давление жидкости – это сила, действующая со стороны жидкости на единицу плоской поверхности в направлении, перпендикулярном к этой поверхности

$$p = \frac{F}{S}.$$

$$[p] = \frac{\text{Н}}{\text{м}^2} = \text{Па}.$$

Рассмотрим произвольную жидкую среду, находящуюся в равновесии и определим давление на высоте z над некоторой точкой отсчета.

Внутри жидкости на высоте z рассмотрим небольшой элемент объема жидкости, имеющий вид пластины бесконечно малой толщины dz и площадью S. Пусть давление, действующее вверх на нижнюю поверхность элемента на высоте z равно $p + dp$, тогда давление, действующее вниз на верхнюю поверхность на высоте $z + dz$, обозначим p.

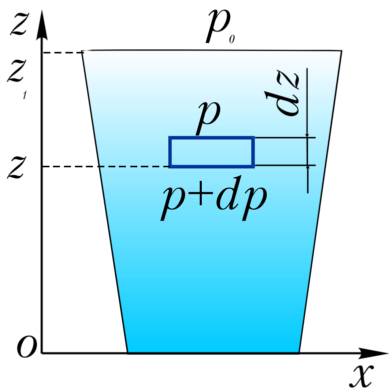


Рис. 9.4

Таким образом, на выбранный элемент объема жидкость давит вверх с силой $(p + dp)S$, а вниз – с силой pS. Кроме того, на него в вертикальном направлении действует сила тяжести $\delta F_{\text{тяж}}$, которую можно представить в виде

$$\delta F_{\text{тяж}} = gdm = \rho g dV = \rho g s dz,$$

где ρ – плотность жидкости на уровне z.

Поскольку жидкость по предположению покоится, элемент объема находится в равновесии, так, что результирующая всех сил равна нулю

$$pS - (p + dp)S + \rho g s dz = 0.$$

После математических преобразований это уравнение принимает вид

$$\frac{dp}{dz} = \rho g. \qquad (9.12)$$

Уравнение (9.12) можно обобщить следующим образом. Нами предполагалось, что давление изменяется вдоль оси z. Если же предположить, что давление меняется вдоль всех трех осей x, y, и z, то вместо одного уравнения (9.12) получим три уравнения, в левых частях которых будут стоять частные производные $\frac{\partial p}{\partial x}$, $\frac{\partial p}{\partial y}$ и $\frac{\partial p}{\partial z}$.

Обратимся теперь к правой части уравнения (9.12). Ускорение свободного падения $g = \frac{F_{\text{тяж}}}{m}$ – есть сила тяжести, действующая на единицу массы вещества. Такую величину называют *массовой силой* f.

В рассматриваемом случае массовой силой является сила тяжести, направленная вдоль оси z. В общем случае, для массовой силы $\vec{f}$, имеющей произвольное направление, можно записать:

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \rho f_x;$$

$$\frac{\partial p}{\partial y} = \rho f_y;$$

$$\frac{\partial p}{\partial z} = \rho f_z,$$

где f_x, f_y, f_z – проекции массовой $\vec{f}$ силы на оси координат.

Три скалярных уравнения можно записать в виде одного векторного

$$\rho \vec{f} = (\frac{\partial p}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial p}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial p}{\partial z}\vec{k}),$$

или

$$\rho \vec{f} = \mathrm{grad} p \,. \qquad (9.13)$$

Это уравнение гидростатики сжимаемой жидкости.

Градиент давления в данной точке покоящейся жидкости равен произведению плотности на вектор массовой силы, вычисленный в этой же точке.

9.7. Закон Паскаля

Если массовые силы равны нулю, то $\mathrm{grad} p = 0$ и, следовательно, $p = \mathrm{const}$.

В отсутствие массовых сил жидкость может находиться в равновесии только тогда, когда давление во всех точках жидкости одинаково.

В противном случае возникает движение жидкости.

Закон Паскаля: внешнее давление, приложенное к жидкости или к газу, передается во все точки внутри объема по всем направлениям равномерно.

Давление, оказываемое жидкостью на стенки резервуара, не имеет тангенциальной составляющей, т.е. составляющей, направленной вдоль стенки.

Давление на заданной глубине жидкости равно весу цилиндрического столба жидкости с площадью основания, равной единице.

$$p = \frac{mg}{S}.$$

Выражая массу жидкости через ее плотность и объем столба,

$$m = \rho V\,;\ V = Sh,$$

получим

$$p = \frac{\rho V g}{S} = \rho g h. \qquad (9.14)$$

Рис. 9.5

Формула (9.14) справедлива, когда жидкость несжимаема ($\rho = \mathrm{const}$). Она не учитывает внешнее давление, т.е. давление атмосферы или поршня на поверхность жидкости.

9.8. Общая формула давления внутри покоящейся несжимаемой жидкости

Из уравнения

$$\frac{dp}{dz} = \rho g$$

получим дифференциальное уравнение для определения давления внутри жидкости, плотность которой зависит от глубины ($\rho = \rho(z)$).

$$dp = \rho g dz. \qquad (9.15)$$

Интегрирование уравнения (9.15) дает

$$\int_{P_1}^{P_2} dp = g\int_{z_1}^{z_2} \rho dz\,;$$

$$p_2 - p_1 = g\int_{z_1}^{z_2} \rho dz,$$

где $p_2 = p_0$ – атмосферное давление.

Если z_1 – расстояние от дна сосуда до поверхности жидкости, а z_2 – расстояние от дна до выделенного элементарного объема, то давление на глубине $h = z_1 - z_2$ равно

$$p_1 = p_0 + g\int_{z_2}^{z_1} \rho dz. \qquad (9.16)$$

Если $\rho = \mathrm{const}$, то формула (9.16) упрощается

$$p_1 = p_0 + \rho g h. \tag{9.17}$$

Внутри покоящейся несжимаемой жидкости, находящейся в поле силы тяжести, давление линейно возрастает с ростом глубины.

9.9. Гидродинамика. Виды течения жидкости

В механике жидкостей применяют два метода описания движения. Один из них называется *методом Лагранжа*. Он заключается в том, что движение жидкости задается путем указания зависимости от времени координат всех ее частиц:

$$x = F_1(a, b, c, t);$$
$$y = F_2(a, b, c, t);$$
$$z = F_3(a, b, c, t).$$

где a, b, c – координаты частицы; t – время.

Величины a, b, c называются *переменными Лагранжа*.

Основным методом гидродинамики является *метод Эйлера*, который состоит в том, что движение жидкости определяется путем задания поля скоростей жидкости в каждый момент времени:

$$\vec{\upsilon} = f(\vec{r}, t),$$

где $\vec{\upsilon} = \upsilon_x \vec{i} + \upsilon_y \vec{j} + \upsilon_z \vec{k}$ – скорость жидкости в момент времени t в точке пространства, определяемой радиус-вектором $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$.

Величины x, y, z называются *переменными Эйлера*.

Движение жидкости называется течением. Совокупность движущихся частиц жидкости (или газа) образует поток. Различают два основных вида течения:

1) При *ламинарном* (или слоистом) течении движение жидкости плавное. Слои скользят друг относительно друга. Каждая частица жидкости движется по гладкой траектории. Траектории частиц не пересекаются.

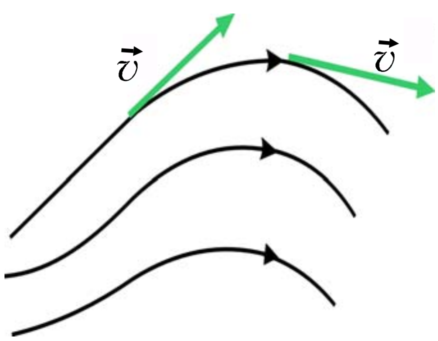


Рис. 9.6

2) *Турбулентное* течение характеризуется наличием беспорядочных водоворотов, т.е. вихрей. Вихри поглощают большое количество энергии из-за внутреннего трения.

Для графического изображения текущей жидкости используют линии тока, касательные к которым в каждой точке совпадают по направлению со скоростью движения частиц этой жидкости. Густота линий пропорциональна модулю скорости в данном сечении.

Часть жидкости, заключенная между линиями тока, называется *трубкой тока*. Если с течением времени линии тока не меняют ни форму, ни густоту, движение называется *установившимся* или *стационарным* (не изменяющимся во времени).

При ламинарном стационарном течении частицы движутся по непересекающимся линиям тока и, следовательно, через боковую поверхность трубки тока жидкость вытекать не может. Таким образом, трубка тока играет роль как бы настоящей трубки.

9.9. Уравнение неразрывности

Рассмотрим течение жидкости по произвольной трубке тока.

Учитывая, что жидкость не может выйти через боковую стенку трубки, массовый расход жидкости через первое сечение $\frac{\Delta m_1}{\Delta t}$ будет равен массовому расходу жидкости через второе сечение $\frac{\Delta m_2}{\Delta t}$.

$$\frac{\Delta m_1}{\Delta t} = \frac{\Delta m_2}{\Delta t}.$$

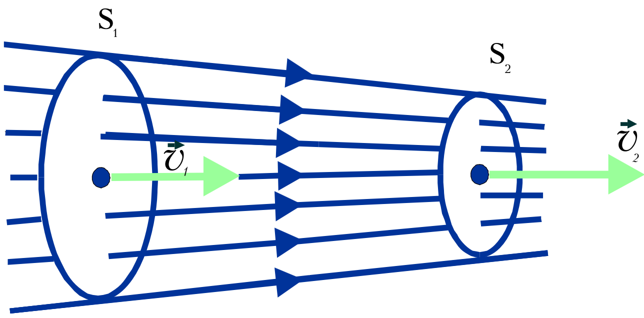


Рис. 9.7

Выражая массу через плотность и объем, а объем – через скорость течения жидкости, получим

$$\Delta m_1 = \rho_1 V_1 = \rho_1 \upsilon_1 S_1 \Delta t;$$

$$\Delta m_2 = \rho_2 V_2 = \rho_2 \upsilon_2 S_2 \Delta t;\ \rho_1 \upsilon_1 S_1 = \rho_2 \upsilon_2 S_2. \qquad (9.18)$$

$$\rho \upsilon S = \text{const}. \qquad (9.19)$$

При $\rho = \text{const}$ ($\rho_1 = \rho_2 = \rho$).

$$\upsilon_1 S_1 = \upsilon_2 S_2, \qquad (9.20)$$

или

$$\upsilon S = \text{const}. \qquad (9.21)$$

Формулы (9.19)-(9.21) являются *уравнениями неразрывности*:

(9.19) – для сжимаемого газа (жидкости);

(9.21) – для несжимаемого газа (жидкости).

Уравнение неразрывности является следствием закона сохранения массы.

$$\upsilon S = \frac{S\Delta\ell}{\Delta t} = \frac{\Delta V}{\Delta t} = Q.$$

Величина Q называется *объемным расходом жидкости*. $[Q] = \frac{\text{м}^3}{\text{с}}$.

Объемный расход показывает, какой объем жидкости протекает в единицу времени через поперечное сечение трубки.

Уравнение неразрывности в форме (9.19) показывает, что в случае несжимаемой жидкости объемный расход во всех сечениях одной и той же трубки тока постоянен.

9.10. Уравнение Бернулли

Рассмотрим течение идеальной несжимаемой жидкости по трубке тока переменного сечения и переменного уровня.

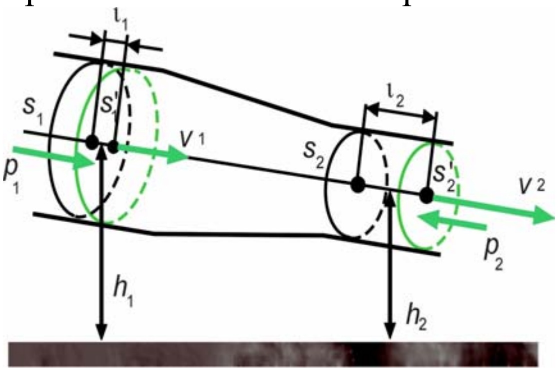


Рис. 9.8

Для того, чтобы заставить течь жидкость в указанном направлении необходимо, чтобы давление $p_1 > p_2$.

Под действием силы $F_1 = p_1 S_1$ за время Δt жидкость проталкивается на расстояние, равное ℓ_1. Если жидкость несжимаемая, то данная сила F_1 совершит работу $A_1 = F_1 \ell_1$, сила $F_2 = p_2 S_2$ – работу $A_2 = -F_2 \ell_2 = -p_2 S_2 \ell_2$.

Суммарная работа сил давления

$$A_P = A_1 + A_2 = p_1 S_1 \ell_1 - p_2 S_2 \ell_2 .$$

Работа силы тяжести

$$A_\text{т} = \Delta m g (z_1 - z_2).$$

По теореме о кинетической энергии работа всех сил $A_\Sigma = A_m + A_m$ идет на увеличение кинетической энергии перемещаемого тела

$$A_\Sigma = E_{\text{к}2} - E_{\text{к}1}.$$

Подставляя в эту формулу выражения для работы и кинетической энергии, получим

$$p_1 S_1 \ell_1 - p_2 S_2 \ell_2 + \Delta m g z_1 - \Delta m g z_2 = \frac{\Delta m \upsilon_2^2}{2} - \frac{\Delta m \upsilon_1^2}{2}, \tag{9.22}$$

$$\Delta m = \rho S_1 \ell_1 = \rho S_2 \ell_2, \tag{9.23}$$

где $S_1 \ell_1 = \Delta V_1$; $S_2 \ell_2 = \Delta V_2$.

Из (9.23) следует, что

$$\Delta V_1 = \Delta V_2 = \Delta V.$$

Разделим обе части уравнения (9.22) на ΔV:

$$p_1 - p_2 + \rho g z_1 - \rho g z_2 = \frac{\rho \upsilon_2^2}{2} - \frac{\rho \upsilon_1^2}{2},$$

или

$$p_1 + \rho g z_1 + \frac{\rho \upsilon_1^2}{2} = p_2 + \rho g z_2 \frac{\rho \upsilon_2^2}{2}.$$

Учитывая, что сечения S_1 и S_2 взяты произвольно, можно записать

$$p + \rho g z + \frac{\rho \upsilon^2}{2} = const. \tag{9.24}$$

Уравнение (9.24) – *уравнение Бернулли* для давления текущей идеальной несжимаемой жидкости.

В каждом сечении трубки тока полное давление складывается из трех слагаемых:

p – статическое давление, обусловленное внешними силами.

$\rho g z$ – гидростатическое давление, обусловленное уровнем жидкости в данном сечении.

$\frac{\rho \upsilon^2}{2}$ – динамический напор. Это давление обусловлено скоростью движения жидкости.

Из уравнения Бернулли следует, что полное давление постоянно, а статическое давление меньше в том сечении трубы, где скорость больше.

$\upsilon_2 > \upsilon_1$,

$p_2 < p_1$.

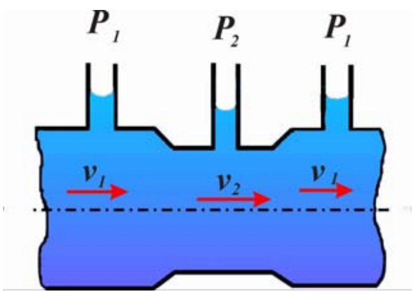


Рис. 9.9

9.11. Формула Торричелли

Определим скорость жидкости при ее течении самотеком из резервуара.

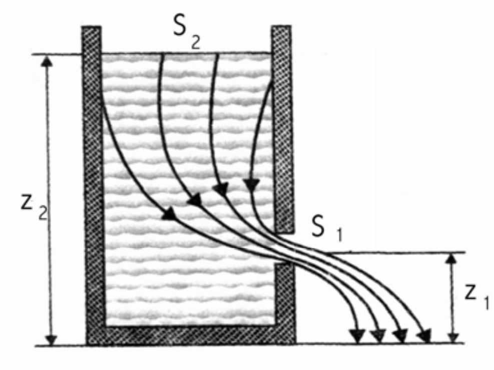


Рис. 9.10

На рис. 9.10 в вертикальный сосуд налита жидкость так, что ее поверхность сообщается с атмосферой. Площадь поверхности жидкости равна S_2. В боковой стенке сосуда имеется отверстие площадью S_1, причем $S_1 << S_2$. Выделим трубку тока с сечениями S_1 и S_2.

Запишем условие неразрывности струи:

$$S_1\upsilon_1 = S_2\upsilon_2 .$$

Выразим скорость жидкость в сечении S_2

$$\upsilon_2 = \upsilon_1 \frac{S_2}{S_1} \quad (\upsilon_1 << \upsilon_2)$$

Запишем уравнение Бернулли сечений S_1 и S_2:

$$p_1 + \rho g z_1 + \frac{\rho \upsilon_1^{\ 2}}{2} = p_2 + \rho g z_2 + \frac{\rho \upsilon_2^{\ 2}}{2} .$$

Давление вблизи сечений S_1 и S_2 равно атмосферному давлению p_a

$$p_2 = p_1 = p_0 , \qquad \upsilon_2 \approx 0.$$

Обозначим $\upsilon_1 = \upsilon,$ тогда

$$\frac{\rho\upsilon^{\ 2}}{2} + p_a + \rho g z_1 = p_a + \rho g z_2 ,$$

или, так как $z_2 - z_1 = h$, то

$$\frac{\rho\upsilon^{\ 2}}{2} = \rho g h ,$$

откуда

$$\upsilon = \sqrt{2gh}.$$

Полученное выражение определяет скорость истечения жидкости из отверстия и называется *формулой Торричелли*.

9.12. Гидродинамика вязкой жидкости. Коэффициент вязкости

Реальная жидкость обладает вязкостью, которая препятствует ее течению.

Поместим между двумя пластинами некоторое количество жидкости и начнем перемещать верхнюю пластину относительно нижней (рис. 9.11).

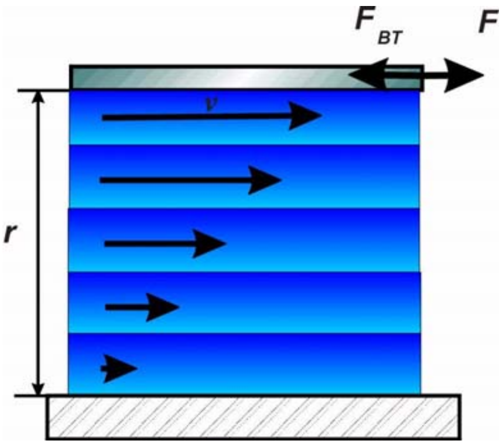


Рис. 9.11

Эксперимент показывает, что для того, чтобы удерживать постоянную скорость верхней пластины, необходимо прикладывать к ней постоянную силу F, причем скорость пропорциональна силе. Чем больше сила, тем больше скорость. Кроме того величина силы, сообщающей верхней пластине постоянную скорость, зависит не только от скорости, но и площади S верхней пластины и толщины r слоя жидкости.

Постоянство скорости в данном эксперименте говорит о том, что кроме силы F на верхнюю пластину действует еще какая-то сила. Эту силу называют силой внутреннего трения $F_{\text{ВТ}}$. Она действует со стороны жидкости на пластину.

$$F_{\text{ВТ}} = \eta \left| \frac{d\upsilon}{dr} \right| S, \tag{9.25}$$

где $F_{\text{ВТ}}$ – модуль силы внутреннего трения; S – площадь слоя, по которому происходит сдвиг; $d\upsilon/dr$ – градиент скорости течения (быстрота изменения скорости от слоя к слою); η – коэффициент динамической вязкости (вязкости).

Формула (9.25) справедлива, если расстояние r между пластинами значительно меньше их линейных размеров. Частицы жидкости, прилегающие к верхней пластине, движутся вместе с нею со скоростью υ (увлекаются пластиной). Напротив, частицы жидкости вблизи нижней (неподвижной) пластины находятся в покое (прилипают к пластине). Представим, что жидкость между пластинами состоит из плоских параллельных слоев, движущихся равномерно. Нетрудно понять, что каждый вышележащий слой увлекает за собой нижний соседний слой с силой F. В свою очередь, этот нижний слой тормозит движение верхнего слоя с той же силой F. На каждый слой действуют сверху и снизу две равные, но противоположно направленные силы. Скорость слоев линейно возрастает от нижнего слоя к верхнему слою, а силы трения, действующие на каждый из слоев, одинаковы. Как результат, усилие F, приложенное к верхней пластине, передается на нижнюю пластину.

Из формулы (9.25) следует, что

$$\eta = \frac{F_{\text{ВТ}}}{S\dfrac{d\upsilon}{dr}}.$$

Динамическая вязкость η численно равна силе внутреннего трения, приходящейся на единицу площади поверхности касания слоев, необходимой для поддержания разности скоростей, равной единице между двумя параллельными слоями жидкости (газа), расстояние между которыми равно единице. Единица динамической вязкости – 1 Па·с.

Чем больше вязкость, тем сильнее жидкость отличается от идеальной, тем больше силы внутреннего трения. Вязкость зависит от температуры, причем характер температурной зависимости для жидкостей и газов различен (для жидкостей вязкость с увеличением температуры уменьшается, а у газов, наоборот, увеличивается). Это указывает на различие в них механизмов внутреннего трения. В жидкостях, где расстояния между молекулами много меньше, чем в газах, вязкость обусловлена в первую очередь межмолекулярным взаимодействием, ограничивающим подвижность молекул. В газах расстояния между молекулами существенно больше радиуса действия молекулярных сил. Поэтому вязкость газов – следствие хаотичного (теплового) движения молекул, в результате которого происходит постоянный обмен молекулами между движущимися друг относительно друга слоями газа. Это приводит к переносу от слоя к слою определенного количества движения, в результате чего медленные слои ускоряются, а более быстрые замедляются. Работа внешней силы, уравновешивающей вязкое сопротивление и поддерживающей установившееся течение, полностью переходит в теплоту. Вязкость газа не зависит от его плотности (давления p), так как при сжатии газа общее количество молекул переходящих из слоя в слой увеличивается, но зато каждая молекула менее глубоко проникает в соседний слой и переносит меньшее количество движения.

Вязкость идеальных газов определяется соотношением:

$$\eta = \frac{1}{3}\rho\langle\upsilon\rangle\langle\ell\rangle,$$

где ρ – плотность газа; $\langle\upsilon\rangle$ – средняя арифметическая скорость теплового движения молекул; $\langle\ell\rangle$ – средняя длина свободного пробега молекулы.

Для очень разреженных газов понятие вязкости теряет смысл.

9.13. Ламинарное течение в трубах. Формула Пуазейля

Рассмотрим ламинарное течение жидкости (газа) в трубе диаметром $d = 2R$. Выделим воображаемый цилиндрический объем радиусом r и толщиной dr (рис. 9.12, а).

а б

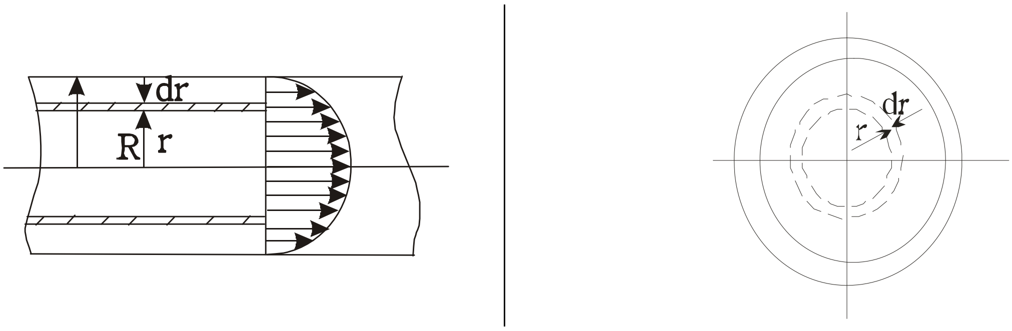


Рис. 9.12

Давления на торцах цилиндра p_1 и p_2. При установившемся ламинарном течении вектор скорости в каждой точке трубы не меняется со временем. Тогда сила давления на выбранный объем, действующая в направлении течения жидкости (газа) и равная по величине $F = pS = \left(p_1 - p_2\right)\pi r^2$, уравновешивается силой внутреннего трения, действующей со стороны наружных слоев жидкости (газ)а на боковую поверхность рассматриваемого объема:

$$\left(p_1 - p_2\right)\pi r^2 = \eta\left|\frac{d\upsilon}{dr}\right|S, \tag{9.26}$$

где S – площадь боковой поверхности цилиндра, $S = 2\pi rL.$

Вследствие трения скорость жидкости (газа) убывает с увеличением расстояния от оси трубы. Следовательно, величина $\frac{d\upsilon}{dr}$ отрицательна и

$$\left(p_1 - p_2\right)\cdot\pi r^2 = -\eta\frac{d\upsilon}{dr}\cdot 2\pi rL. \tag{9.27}$$

Решая уравнение (9.27) методом разделения переменных, получим выражение для скорости движения слоев жидкости (газа)

$$\upsilon = -\frac{\left(p_2 - p_1\right)r^2}{4\eta L} + C. \tag{9.28}$$

Постоянную интегрирования C определяют, используя граничное условие прилипания: при $r = R$, $\upsilon = 0$ (слой жидкости, примыкающий к поверхности трубы, в которой она течет, из-за сил молекулярного сцепления прилипает к ней и остается неподвижным).

В этом случае

$$C = \frac{(p_2 - p_1)R^2}{4\eta L}. \qquad (9.29)$$

Поэтому

$$\upsilon = \frac{(p_1 - p_2)\cdot\left(R^2 - r^2\right)}{4\eta L} = \frac{\Delta p}{4\eta L}\left(R^2 - r^2\right). \qquad (9.30)$$

Из уравнения (9.30) следует, что профиль скорости в трубе параболический (скорости слоев тем больше, чем больше их расстояние до поверхности трубы), причем величина скорости максимальна на оси трубы при $r =$ 0 (рис. 9.12, а).

$$\upsilon_{\max} == \frac{\Delta p}{4\eta L}R^2. \qquad (9.31)$$

Найдем объемный расход жидкости в трубе

$$Q = \frac{dV}{dt}$$

как функцию от разности давлений Δp, длины L и радиуса R трубы, а также вязкости η жидкости

$$Q = \frac{\Delta V}{\Delta t} = f(\Delta p, L, R, \eta).$$

Непостоянство скорости жидкости по сечению исключает использование простой формулы $Q = \upsilon S$ для нахождения объемного расхода. Его надо искать путем интегрирования.

Разобьем поперечное сечение канала на кольца шириной dr (рис. 9.12,б). Тогда весь объем трубы разделится на тонкие трубки тока. Выделим внутри трубы бесконечно тонкую цилиндрическую трубку тока радиуса r. Скорость течения жидкости по всему сечению этой трубки тока будет одинакова и равна υ. Объемный расход dQ жидкости, протекающей через эту трубку, будет равен

$$dQ = \upsilon dS = \frac{\Delta p}{4\eta L}\left(R^2 - r^2\right)\cdot 2\pi r dr.$$

Интегрируя это уравнение, найдем полный расход жидкости в трубе

$$\mathrm{Q} = \frac{\pi\Delta \mathrm{p}}{2\eta L}\int_0^R\left(\mathrm{R}^2 - \mathrm{r}^2\right)\cdot \mathrm{rdr} = \frac{\pi \mathrm{R}^4\Delta \mathrm{p}}{8\eta L}. \qquad (9.32)$$

Уравнение (9.32) – *формула Пуазейля* для объемного расхода жидкости, текущей по трубе.

9.14. Гидродинамическая неустойчивость. Число Рейнсольда

Течение жидкости по трубопроводу с ростом скорости из ламинарного превращается в турбулентное. При этом формула Пуазейля теряет свою справедливость. Объемный расход становится зависящим от давления не линейно. Большая часть энергии насосов тратится на перемешивание (образование вихрей) жидкости и ее нагревание. Таким образом, потери энергии резко увеличиваются. Турбулентное течение жидкости очень невыгодное. Независимо от вида жидкости, характер ее движения можно определить с помощью числа Рейнольдса

$$\mathrm{Re} = \frac{2\langle \upsilon \rangle R\rho}{\eta},$$

где R – радиус трубы (характерный размер тела, обтекаемого жидкостью); ρ – плотность жидкости; $\langle \upsilon \rangle$ – средняя по сечению трубы скорость жидкости.

Рейнольдс показал, что если $\mathrm{Re} \le 1000$ – течение ламинарное по всему сечению. Если $1000 < \mathrm{Re} \le 2000$ – наблюдается переходный режим: в центре течение может быть ламинарным, а у стенок – турбулентным; возникают большие потери на внутреннее трение. При значении $\mathrm{Re} \ge 2300$ наблюдается турбулентное течение жидкости.

9.15. Лобовое сопротивление. Формула Стокса

Когда жидкость движется быстро, на тело, помещенное в нее, действует сила лобового сопротивления.

При ламинарном обтекании сила лобового сопротивления – это практически сила внутреннего трения, и она пропорциональна скорости в первой степени.

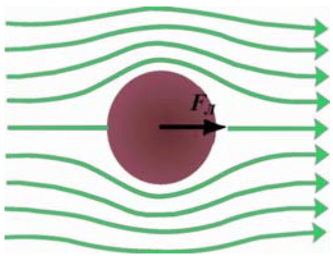


Рис. 9.13

При турбулентном обтекании имеют место как минимум два механизма возникновения силы лобового сопротивления. Первый механизм – вязкость. Второй механизм – возникновение подъемной силы.

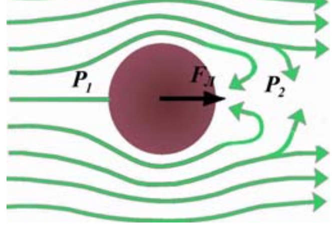


Рис. 9.14

При турбулентном обтекании скорости движения жидкости перед телом (со стороны фронтальной поверхности) и после тела различны. Там, где образуются вихри, давление в соответствии с уравнением Бернулли меньше: $p_2 < p_1$.

При турбулентном обтекании сила лобового сопротивления пропорциональна квадрату скорости.

Если при ламинарном движении жидкости обтекается тело шарообразной формы радиуса R, то формулу для расчета силы лобового сопротивления $F_л$ можно записать в виде

$$F_л = 6\pi R\eta\upsilon, \tag{9.33}$$

где η – коэффициент вязкости.

Формула (9.33) – *формула Стокса*.

Вопросы для самоконтроля

1. Что такое деформация?
2. Какую деформацию называют упругой? пластической?
3. Назовите виды деформаций.
4. Что такое сила упругости? Как она направлена? Какова природа этой силы?
5. Как формулируется и записывается закон Гука для упругой деформации растяжения (сжатия)?
6. Что такое жесткость? Какова единица жесткости в СИ?
7. Начертите схему и объясните опыт, иллюстрирующий закон Гука. Постройте график этого закона.
8. Сделав пояснительный рисунок, опишите процесс растяжения металлической проволоки под нагрузкой.
9. Что называют модулем Юнга? Каков его физический смысл? Какова единица модуля Юнга в СИ?
10. Что называют нормальным механическим напряжением? Какая формула выражает смысл этого понятия?
11. Что называют абсолютным удлинением? относительным удлинением? Какие формулы выражают смысл этих понятий?
12. Какой вид имеет закон Гука в записи, содержащей нормальное механическое напряжение?
13. Что такое коэффициент Пуассона, и каким он бывает? Начертите и объясните диаграмму растяжения металлического образца.
14. Что называют пределом пропорциональности? упругости? текучести? прочности?
15. Получите формулы, по которым определяют работу деформации и потенциальную энергию упруго деформированного тела.
16. Перечислите основные физико-механические свойства жидкостей и газов.
17. В чем отличие жидкостей от твердых тел и газов?

18. Какова взаимосвязь между плотностью и удельным весом жидкости?

19. Что называется коэффициентом объемного сжатия жидкости? Какова его связь с модулем упругости?

20. Что изучает гидростатика?

21. Что такое давление? Назовите единицы измерения давления.

22. Что такое гидростатическое давление, и в каких единицах оно измеряется?

23. Запишите основное уравнение гидростатики. Объясните физический смысл основного уравнения гидростатики.

24. Сформулируйте закон Паскаля.

25. Что такое «идеальная» жидкость, ее свойства? В каких случаях, в практических расчетах, жидкость можно считать идеальной?

26. Что называют линиями тока? Трубкой тока?

27. Какое течение называют стационарным?

28. Получите уравнение неразрывности. Каков физический смысл уравнения неразрывности для несжимаемой жидкости?

29. Приведите вывод уравнения Бернулли. Каков физический смысл входящих в него слагаемых?

30. Какое течение жидкости называется ламинарным и турбулентным?

31. Сформулируйте основные различия ламинарного и турбулентного течения.

32. Что называется вязкостью жидкости?

33. Опишите течение вязкой жидкости. Сформулируйте закон внутреннего трения Ньютона. В чем заключается физический смысл коэффициента динамической вязкости? Какова взаимосвязь динамического и кинематического коэффициентов вязкости? В каких единицах они измеряются?

34. В чем принципиальная разница между силами внутреннего трения в жидкости и силами трения при относительном перемещении твердых тел?

35. Какова связь между динамическим и кинематическим коэффициентами вязкости? Укажите их единицы.

36. Получите закон распределения скорости слоев по сечению трубы.

37. Что называют объемным расходом жидкости? При каких условиях сохраняется постоянство расхода вдоль потока?

38. Получите формулу Пуазейля.

39. Поясните физический смысл и практическое значение критерия Рейнольдса.

40. Какие факторы влияют на критическое значение этого критерия?

41. Запишите и объясните закон Стокса.

10. МОЛЕКУЛЯРНО-КИНЕТИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ

10.1. Статистическая физика и термодинамика

Молекулярная физика – это физика вещества. Она изучает молекулярную или тепловую форму движения материи. Ее задача – на основе представлений о молекулярном движении объяснить физические свойства вещества в различных агрегатных состояниях, явления перехода из одного состояния в другое, а также процессы, происходящие в веществе при различных внешних воздействиях: механических, термических и др.

Свойства макроскопических тел (материальных объектов, состоящих из очень большого числа частиц), находящихся в различном агрегатном состоянии, можно изучать, *пользуясь двумя разными и взаимно дополняющими друг друга методами*:

1) статистическим (молекулярно-кинетическим);
2) термодинамическим.

Молекулярная физика изучает явления, которые составляют результат совокупного действия огромного числа частиц. Такие распространенные явления, как давление газа на стенки сосуда, явления переноса, тепловые явления и др., подчиняются законам больших чисел или, иначе, законам статистики. В основе статистического метода применительно к молекулярной физике лежит несколько утверждений:

а) Совокупность огромного количества молекул имеет такие свойства, каких нет у каждой молекулы в отдельности. Например, свойствами совокупности молекул являются давление, температура, теплопроводность, вязкость, диффузия и др., но нельзя говорить о давлении, температуре, вязкости одной молекулы.

б) Существует определенная количественная связь между свойствами коллектива молекул и средними значениями тех физических величин, которые характеризуют поведение и свойства каждой молекулы в отдельности. Например, средняя кинетическая энергия молекулы газа пропорциональна его абсолютной температуре, являющейся свойством коллектива молекул.

в) Свойства коллектива молекул являются макроскопическими свойствами, а свойства каждой молекулы в отдельности – микроскопическими. Связь между макроскопическими и микроскопическими свойствами устанавливается на основе теории вероятностей.

При термодинамическом подходе к изучению свойств макросистемы не рассматривается ее конкретное строение, механизм микропроцессов, игнорируются структурные элементы системы (частицы). Термодинамика интересуется лишь энергетическими характеристиками вещества. Она изучает способы и формы передачи энергии от одной системы к другой, закономерности превращения одних форм энергии в другие, направления протекания процессов в природе. Основной вопрос термодинамики – получение работы за счет тепловой энергии.

10.2. Термодинамические параметры. Процессы

Термодинамической системой называется совокупность макроскопических тел, которые могут обмениваться между собой энергией и веществом.

Примерами термодинамических систем являются: газ; жидкость и находящийся в соприкосновении с ней пар.

Термодинамическая система может находиться в различных состояниях, отличающихся: температурой $-T$, давлением $-p$, объёмом $-V$, плотностью $-\rho$ и т.д.

Физические величины, характеризующие состояние термодинамической системы, называются *параметрами состояния, или термодинамическими параметрами.*

Термодинамическими параметрами являются: (T, p, V) или (T, ρ, V). Параметры состояния системы не всегда имеют определенные значения.

Состояние термодинамической системы называется *неравновесным,* если хотя бы один из параметров этого состояния не имеет определенного значения. Например, если тело с одной стороны подогревать, а с другой охлаждать, то температура в разных точках тела будет неодинаковой, и тело, как целое, нельзя охарактеризовать определенным значением температуры.

Состояние термодинамической системы называется *равновесным,* если все параметры системы имеют определенные значения, не изменяющиеся с течением времени.

Термодинамическая система, не обменивающаяся с внешней средой ни энергией, ни веществом, называется *замкнутой или изолированной.*

Если термодинамическую систему, находящуюся в неравновесном состоянии, изолировать, то она перейдет в равновесное состояние.

Термодинамическим процессом называется любое изменение в термодинамической системе, связанное с изменением хотя бы одного из её параметров, или под термодинамическим процессом понимают это переход системы из одного состояния в другое. Этот переход связан с нарушением равновесия системы.

Равновесным называется такой процесс, который состоит из ряда следующих друг за другом равновесных состояний. Равновесный процесс – бесконечно медленный процесс. При бесконечно медленном сжатии газа поршнем в цилиндре давление газа будет иметь в каждый момент времени определенное значение, а процесс сжатия будет являться равновесным. При изменении направления равновесного процесса (например, замена сжатия расширением газа) система будет проходить через те же равновесные состояния. Но в обратной последовательности.

Поэтому равновесные процессы называют *обратимыми*. Равновесные процессы – идеализированные процессы.

Процесс, при котором система после ряда изменений возвращается в исходное состояние, называется *круговым процессом* или *циклом*.

10.3. Молекулярно-кинетические представления

10.3.1. Основные положения молекулярно-кинетической теории

Молекулярно-кинетическая теория (МКТ) основана на трех основных положениях:

1) Все вещества состоят из атомов или молекул, размеры которых порядка 10^{-10} м. Атомы и молекулы вещества разделены свободными промежутками. Косвенным подтверждением этого факта является изменяемость объемов тел.

2) Молекулы находятся в непрерывном беспорядочном (хаотическом) движении, интенсивность которого зависит от температуры. Это движение называется *тепловым*. От интенсивности теплового движения молекул и интенсивности их взаимодействия зависит, в каком из возможных агрегатных состояний находится вещество (в твердом, жидком, газообразном или плазменном). По мере увеличения интенсивности теплового движения среднее расстояние между молекулами возрастает, а силы притяжения уменьшаются.

3) Молекулы взаимодействуют между собой. Взаимодействие молекул друг с другом происходит посредством молекулярных сил. На близких расстояниях заметно проявляются силы отталкивания между молекулами, на дальних – силы притяжения.

Опытными подтверждениями первого и второго положений являются диффузия и броуновское движение.

10.3.2. Газообразное состояние вещества. Идеальный газ

Любая реальная макроскопическая система – очень сложный объект, так как состоит из большого числа взаимодействующих частиц.

Для объяснения свойств вещества в газообразном состоянии используют модель *идеального газа*, предложенную в 1847 г. английским физиком Джоном Герапатом.

Идеальным принято считать газ, если:

а) потенциальная энергия взаимодействия его молекул пренебрежимо мала по сравнению с кинетической энергией их хаотического движения;

б) удары молекул о стенки сосуда являются абсолютно упругими;

в) собственный объем молекул пренебрежимо мал по сравнению с объемом сосуда, в котором находится газ;

г) тепловое равновесие по всему объему достигается мгновенно.

Условия, необходимые для того, чтобы реальный газ обрел свойства идеального, осуществляются при соответствующем разряжении реального газа.

10.3.3. Уравнение состояния идеального газа

Уравнением состояния идеального газа называется соотношение между параметрами его состояния. Равновесное состояние идеального газа определяется значениями трех параметров: давления p, объема V и температуры T, поэтому уравнение состояния идеального газа имеет вид

$$f(p,V,T)=0\cdot \qquad (10.1)$$

Будем определять температуру как величину, характеризующую степень нагретости тел. В технике и быту используют температуру, отсчитываемую по шкале Цельсия t °С. В физике пользуются термодинамической температурой, которая определяется средней кинетической энергией, приходящейся на одну молекулу газа. Единицей измерения термодинамической температуры T Кельвин (K). Термодинамическая температура T связана с температурой t_0 по шкале Цельсия соотношением:

$$T=t_0+273{,}15°\cdot \qquad (10.2)$$

Температура, равная $0\ \mathrm{K}$ называется абсолютным нулем. $0\ \mathrm{K}=-273{,}15\ ^{\circ}\mathrm{C}$.

Опытным путем установлено, что при комнатной температуре и атмосферном давлении параметры таких газов как кислород и азот довольно хорошо подчиняются уравнению:

$$\frac{pV}{T}=b, \qquad (10.3)$$

где b – константа, пропорциональная массе газа.

Это соотношение выполняется тем точнее, чем разреженнее газ.

Рассмотрим 1 моль газа. Из закона Авогадро следует, что при $t_0=273{,}15^{\circ}\mathrm{K}$ и давлении $p=1{,}013\cdot 10^5$ Па объём моль любого газа равен $V_\mu=22{,}4\cdot 10^{-3}\,\frac{\text{м}^3}{\text{моль}}$.

Тогда: $pV_\mu=bT$. Обозначив константу b для одного моль газа буквой R $b=R$, получим $pV_\mu=RT$.

Постоянная R называется *молярной газовой постоянной или универсальной газовой постоянной*. Её величина равна: $R = \frac{pV_{\mu}}{T} = 8{,}31\left[\frac{\text{Дж}}{\text{моль} \cdot \text{К}}\right]$.

Для произвольной массы газа уравнение состояния (уравнение Клапейрона-Менделеева) имеет вид:

$$pV = \frac{m}{M}RT, \tag{10.4}$$

где m – масса; M – молярная масса (масса одного моль газа).

Отношение универсальной газовой постоянной к постоянной Авогадро $\mathrm{N_A}$ равно постоянной Больцмана k,

$$\frac{R}{\mathrm{N_A}} = k, \ (k = 1{,}38 \cdot 10^{-23} \frac{\text{Дж}}{\text{К}}).$$

Если умножить и разделить правую часть уравнения (10.4.) на $\mathrm{N_A}$, то оно приобретает вид:

$$pV = kNT. \tag{10.5}$$

Введем концентрацию молекул (число молекул, содержащихся в единице объёма газа):

$$\frac{N}{V} = n, \tag{10.6}$$

тогда выражение (10.5) можно переписать так:

$$p = nkT. \tag{10.7}$$

Уравнения (10.3), (10.4), (10.5) и (10.7) представляют собой разные формы записи уравнения состояния идеального газа.

Уравнение (10.7) показывает, что давление идеального газа при данной температуре определяется только числом молекул в единице объема и не зависит от рода молекул.

10.3.4. Изопроцессы в идеальном газе

Переход газа из одного состояния в другое называют *процессом*.

Процессы, при которых масса газа и один из его параметров остаются постоянными, называются *изопроцессами*. К ним относятся:

1. *Изотермический процесс* – это квазистатический процесс, происходящий в газе при постоянной температуре $(T = \text{const})$.

Из уравнения (10.4) следует, что при постоянной температуре и неизменной массе произведение давления p газа на его объем V остается величиной постоянной.

$$pV = \text{const}. \tag{10.8}$$

Уравнение изотермического процесса было получено из эксперимента английским физиком Р. Бойлем (1662 г.) и независимо от него французским физиком Э. Мариоттом (1676 г.). Поэтому уравнение (10.8) называют законом Бойля-Мариотта.

На диаграмме (p, V) изотермические процессы изображают при различных значениях температур семейством гипербол $p \sim \frac{1}{V}$, которые называются *изотермами*. Так как коэффициент пропорциональности в этом соотношении увеличивается с ростом температуры, то изотермы, соответствующие более высоким значениям температуры, располагаются на графике выше изотерм, соответствующих меньшим значениям температуры (рис. 10.1).

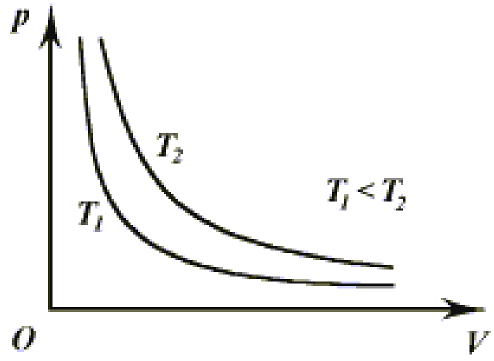


Рис. 10.1

2. *Изобарным процессом* называют квазистатический процесс, происходящий при постоянном давлении $(p = \text{const})$.

Для данной массы газа уравнение изобарного процесса имеет вид

$$\frac{V}{T} = \text{const}. \qquad (10.9)$$

Зависимость объема газа от температуры при неизменном давлении была экспериментально исследована французским физиком Ж. Гей-Люссаком (1862 г.). Поэтому уравнение (10.9) называют законом Гей-Люссака.

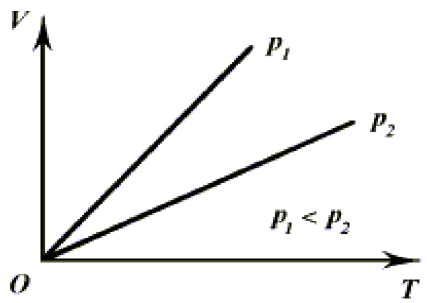


Рис. 10.2

На диаграмме (V, T) изобарные процессы при разных значениях давления изображаются семейством прямых линий (рис. 10.2), которые называются *изобарами*.

3. *Изохорный процесс* – это процесс квазистатического нагревания или охлаждения газа данной массы газа при постоянном объеме $(V = \text{const})$.

Как следует из уравнения (10.4) состояния идеального газа, при этих условиях давление газа p изменяется прямо пропорционально его абсолютной температуре: $p \sim T$ или

$$\frac{p}{T} = \text{const}. \qquad (10.10)$$

Экспериментально зависимость давления газа от температуры исследовал французский физик Ж. Шарль (1787г.). Поэтому уравнение изохорного процесса (10.10) называют законом Шарля.

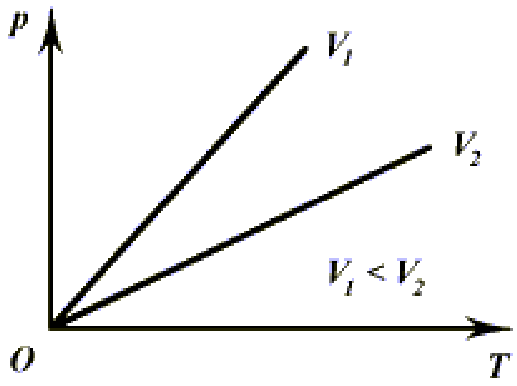


Рис. 10.3

На диаграмме (p, T) изохорные процессы для заданной массы газа при различных значениях объема изображают семейством прямых линий, которые называются изохорами. Большим значениям объема соответствуют изохоры с меньшим наклоном к оси температур (рис. 10.3).

10.3.5. Основное уравнение молекулярно-кинетической теории (уравнение Клаузиуса)

Для вывода основного уравнения молекулярно-кинетической теории рассмотрим идеальный одноатомный газ. Будем считать, что молекулы газа движутся хаотически, число взаимных столкновений между молекулами газа пренебрежимо мало по сравнению с числом ударов о стенки сосуда. Соударения молекул о стенки сосуда абсолютно упругие. Давление газа на стенку сосуда не зависит о формы сосуда.

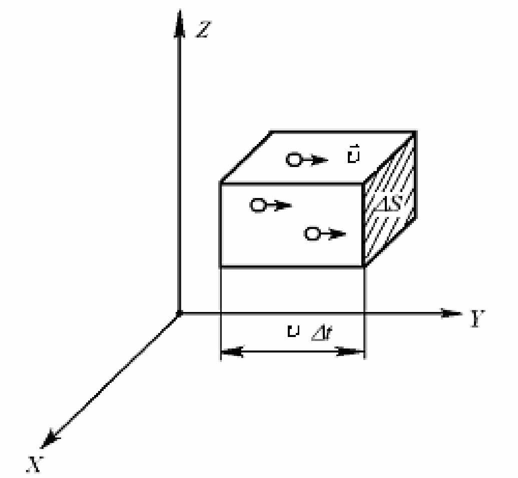


Рис. 10.4

Выделим на стенке сосуда некоторую элементарную площадку ΔS (рис. 10.4) и вычислим давление, оказываемое на эту площадку.

При каждом соударении молекула, движущаяся перпендикулярно площадке, передает ей

$$\Delta p_1 = 2m_0\upsilon, \tag{10.11}$$

где m_0 – масса молекулы; υ – её скорость.

За время Δt площадки ΔS достигнут только те молекулы, которые заключены в объеме параллелепипеда с основанием ΔS и высотой $\upsilon\Delta t$. Число этих молекул $N = nV = n\Delta S\upsilon\Delta t$ ($n = \dfrac{N}{V}$ – концентрация молекул, равная отношению числа молекул к объему занимаемого ими пространства).

Необходимо учитывать, что реально молекулы движутся к площадке ΔS под разными углами и имеют различные скорости, причем скорость молекул при каждом соударении меняется. Для упрощения расчетов хаотическое движение молекул заменяют движением вдоль трех взаимно перпендикулярных направлений, так что в любой момент времени вдоль каждого из них движется 1/3 молекул, причем половина молекул (1/6) движется вдоль данного направления в одну сторону, половина – в противоположную. Тогда число ударов молекул, движущихся в заданном направлении, о площадку ΔS будет равно $\frac{1}{6}n\Delta S\upsilon\Delta t$. При столкновении с площадкой эти молекулы одинаковой массы передадут ей импульс

$$\Delta p = 2m_0\upsilon\frac{1}{6}n\Delta S\upsilon\Delta t = \frac{1}{3}nm_0\Delta S\upsilon^2\Delta t.$$

Тогда давление газа, оказываемое им на стенку сосуда

$$p = \frac{F_{\text{давл}}}{\Delta S}. \qquad (10.12)$$

Величину силы давления найдем по второму закону Ньютона:

$$F_{\text{давл}} = \frac{\Delta p}{\Delta t}, \qquad (10.13)$$

поэтому

$$p = \frac{\Delta p}{\Delta S\Delta t} = \frac{1}{3}nm_0\upsilon^2. \qquad (10.14)$$

Если газ в объёме V содержит N молекул со скоростями υ_1, υ_2, $\upsilon_3\ldots$ υ_N то целесообразно рассматривать среднюю квадратичную скорость, характеризующую всю совокупность молекул в целом:

$$\langle\upsilon_{\text{кв}}\rangle = \left(\frac{1}{N}\right)\sum\upsilon_i^2. \qquad (10.15)$$

Тогда уравнение (10.14) примет вид:

$$p = \left(\frac{1}{3}\right)n\cdot m_0\langle\upsilon_{\text{кв}}\rangle^2, \qquad (10.16)$$

где n – концентрация молекул; m_0 – масса одной молекулы; $\langle\upsilon_{\text{кв}}\rangle$ – средняя квадратичная скорость молекул.

Уравнение (10.16) называют основным уравнением молекулярно-кинетической теории идеальных газов или уравнением Клаузиуса. Точный расчет с учётом движения молекул по всевозможным направлениям даёт ту же формулу.

Учитывая, что

$$n = \frac{N}{V}, \tag{10.17}$$

и обозначив $\left\langle \varepsilon_{k_{\text{пост}}} \right\rangle = \dfrac{m_0 \left\langle \upsilon_{\text{кв}} \right\rangle^2}{2}$, получаем:

$$pV = \left(\frac{1}{3}\right) n \cdot m_0 \left\langle \upsilon_{\text{кв}} \right\rangle^2 V = \frac{\left(\frac{2}{3}\right) N m_0 \left\langle \upsilon_{\text{кв}} \right\rangle^2}{2} = \left(\frac{2}{3}\right) N \left\langle \varepsilon_{k_{\text{пост}}} \right\rangle,$$

$$pV = \left(\frac{2}{3}\right) N \left\langle \varepsilon_{k_{\text{пост}}} \right\rangle, \tag{10.18}$$

где $\left\langle \varepsilon_{k_{\text{пост}}} \right\rangle$ – кинетическая энергия поступательного движения одной молекулы; $N \left\langle \varepsilon_{k_{\text{пост}}} \right\rangle = E$ – суммарная кинетическая энергия поступательного движения N молекул

Формулу (10.18) можно переписать в виде

$$pV = \frac{2}{3} E. \tag{10.19}$$

Из формулы (10.19) следует, что давление равно $\dfrac{2}{3}$ энергии поступательного движения молекул, содержащихся в единице объёма газа.

10.3.6. Средняя энергия молекул. Число степеней свободы

Из формул

$$p = nkT \tag{10.20}$$

и

$$p = \left(\frac{2}{3}\right) N \left\langle \varepsilon_{k_{\text{пост}}} \right\rangle \tag{10.21}$$

получим:

$$nkT = \left(\frac{2}{3}\right) n \left\langle \varepsilon_{k_{\text{пост}}} \right\rangle \Rightarrow \left\langle \varepsilon_{k_{\text{пост}}} \right\rangle = \frac{3kT}{2}. \tag{10.22}$$

Термодинамическая температура является мерой средней кинетической энергии поступательного движения молекул.

Поступательно движутся только молекулы газа, движение молекул в жидких и твердых телах носит иной характер.

Существенно, что средняя кинетическая энергия молекул зависит только от температуры и не зависит от массы молекулы.

Представив среднюю кинетическую энергию молекул в виде

$$\left\langle \varepsilon_{k_{\text{пост}}} \right\rangle = \frac{\left\langle m_0 \upsilon^2 \right\rangle}{2},$$

или

$$\left\langle \varepsilon_{k_{\text{пост}}} \right\rangle = \frac{3kT}{2},$$

получаем:

$$\left\langle \upsilon_{\text{кв}} \right\rangle^2 = \frac{3kT}{m_0}. \qquad (10.23)$$

Но

$$k = \frac{R}{N_A},$$

тогда

$$\left\langle \upsilon_{\text{кв}} \right\rangle = \sqrt{\frac{3RT}{M}}. \qquad (10.24)$$

Корень квадратный из величины $\left(\frac{3kT}{m_0}\right)$ называется *среднеквадратичной скоростью молекул*.

Только поступательно движутся лишь одноатомные молекулы. Двух- и многоатомные молекулы, кроме поступательного, могут совершать также вращательное и колебательное движения. Эти виды движения связаны с некоторым запасом энергии, вычислить который позволяет устанавливаемый классической физикой (т.е. основанный на ньютоновских законах) статистической физикой закон равнораспределения энергии по степеням свободы молекулы.

Числом степеней свободы механической системы называется количество независимых величин, с помощью которых может быть задано положение системы в пространстве.

Положение материальной точки в пространстве определяется значениями трёх её координат. Например декартовых координат x, y, z или сферических координат r, θ, φ и т.д. В соответствии с этим материальная точка имеет *три* степени свободы.

Положение абсолютно твердого тела можно определить с помощью координат x, y, z его центра масс и углов θ, φ и ψ, указывающих ориентацию тела в пространстве (рис. 10.5).

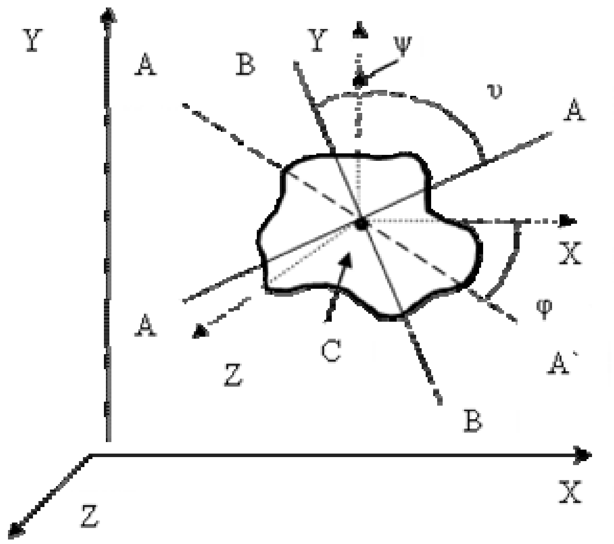


Рис. 10.5

Координаты центра масс C определяются в неподвижной системе отсчёта x, y, z. Вспомогательные координатные оси x', y', z' перемещаются поступательно вместе с телом. Взаимно перпендикулярные оси AA и BB жестко связаны с телом. Прямая $A'A'$ есть проекция оси AA на плоскость $x'z'$. Углы φ и υ определяют ориентацию в пространстве оси AA и $A'A'$. Угол θ определяет ориентацию оси BB.

Следовательно, абсолютно твердое тело имеет *шесть* степеней свободы. При поступательном движении тела изменяются только координаты центра масс, в то время как углы θ, φ и ψ остаются неизменными. Поэтому соответствующие степени свободы называют *поступательными*. (Три степени свободы материальной точки, очевидно, поступательные.) Степени свободы, связанные с вращением тела называются *вращательными*. Например, изменения углов θ, φ и ψ при неподвижном центре масс, обусловлены вращением тела. Таким образом, из шести степеней свободы абсолютно твердого тела три являются поступательными и три вращательными.

Система N материальных точек, между которыми нет жестких связей, имеет 3 степени свободы (положение каждой точки определяется тремя координатами). Каждая жёсткая связь, обусловливающая неизменное расстояние между двумя точками, уменьшает число степеней свободы на единицу. Например, система двух материальных точек с упругой связью имеет три поступательные, две вращательные и одну колебательную степень свободы.

Экспериментально установлено, что при определении числа степеней свободы молекул атомы нужно рассматривать как материальные точки. Соответственно одноатомной молекуле следует приписывать три поступательные степени свободы. Двухатомной молекуле с жесткой связью между атомами нужно приписывать пять степеней свободы – три поступательные и две вращательные.

При любом числе степеней свободы молекулы три из них поступательные, причём ни одна из них не имеет преимущества перед остальными.

Поэтому на каждую из поступательных степеней свободы приходится в среднем одинаковая энергия, равная $\left(\frac{kT}{2}\right)$, на все три поступательные степени свободы приходится энергия, в среднем равная $\left(\frac{3kT}{2}\right)$.

Согласно закону равнораспределения на *каждую степень свободы* (поступательную, вращательную и колебательную) в *среднем приходится одинаковая кинетическая энергия, равная* $\frac{kT}{2}$.

Система, совершающая гармонические колебания (синусоидальные или косинусоидальные), называется *гармоническим осциллятором*.

Колебательное движение (например, качание маятника) связано с наличием у колеблющейся системы не только кинетической, но и потенциальной энергии. В теории колебаний доказывается, что средние значения кинетической и потенциальной энергии гармонического осциллятора одинаковы. Отсюда следует, что колебательная степень свободы молекулы обладает, по сравнению с поступательной или вращательной, удвоенной ёмкостью – на каждую колебательную степень свободы приходится в среднем две половинки kT, одна в виде кинетической энергии, другая в виде потенциальной энергии.

Из закона равнораспределения кинетической энергии по степеням свободы следует, что средняя энергия молекулы определяется по формуле

$$\langle \varepsilon \rangle = \frac{ikT}{2}, \qquad (10.25)$$

где $i -$ сумма числа поступательных, вращательных и удвоенного числа колебательных степеней свободы молекулы:

$$i = i_{\text{пост}} + i_{\text{вращ}} + 2i_{\text{колеб}}. \qquad (10.26)$$

Закон равнораспределения получен на основе классических представлений о характере движения молекул. Поэтому он является приближённым и нарушается в тех случаях, когда становятся существенными квантовые эффекты.

Вопросы для самоконтроля

1. В чем заключается основная задача молекулярной физики?
2. Что такое молекулярно-кинетическая теория?
3. Сформулируйте основные положения молекулярно-кинетической теории.
4. Какие наблюдения и эксперименты подтверждают основные положения молекулярно-кинетической теории?
5. Что называют диффузией? Приведите примеры диффузии в газах, жидкостях и твердых телах.
6. Что называют броуновским движением?
7. Что такое молекула? Атом?
8. Какова порядковая величина диаметра и массы молекулы?
9. Что называют постоянной Авогадро? Чему она равна?
10. Опишите модель идеального газа.
11. Запишите уравнение состояния идеального газа.
12. Какой физический смысл имеет универсальная газовая постоянная и чему она равна?
13. Как связана универсальная газовая постоянная с другими константами?
14. Какой процесс в идеальном газе называется изотермическим? Сформулируйте закон Бойля-Мариотта.
15. Какой процесс в идеальном газе называется изобарным? Сформулируйте закон Гей-Люссака.
16. Какой процесс в идеальном газе называется изохорным? Сформулируйте закон Шарля.
17. Запишите и объясните основное уравнение молекулярно-кинетической теории идеального газа.
18. Каков механизм возникновения давления газа с точки зрения молекулярно-кинетической теории?
19. Какую скорость движения молекул называют средней квадратичной?
20. Что называется числом степеней свободы системы?
21. Чему равно число степеней свободы для одноатомных и многоатомных молекул? Обоснуйте свой ответ.
22. Что утверждает закон равнораспределения?

11. СТАТИСТИЧЕСКИЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

11.1. Распределение Максвелла

Молекулы газа хаотично движутся с различными по величине и направлению скоростями. В результате многократных соударений скорость каждой молекулы изменяется по модулю и направлению. Вследствие хаотичного движения молекул все направления движения являются равновероятными, т.е. в любом направлении в среднем движется одинаковое число молекул.

Из молекулярно-кинетической теории следует, что как бы не изменялись скорости молекул при столкновениях, средняя квадратичная скорость молекул массой m_0 в газе, находящемся в состоянии равновесия при $T = \text{const}$, остается постоянной и равной

$$\left\langle \upsilon_{\text{кв}} \right\rangle = \sqrt{\frac{3kT}{m_0}} = \sqrt{\frac{3RT}{M}}. \tag{11.1}$$

Это объясняется тем, что в газе, находящемся в состоянии равновесия, устанавливается некоторое стационарное, не меняющееся со временем распределение молекул по скоростям, которое подчиняется вполне определенному статистическому закону. Теоретически этот закон выведен Дж. Максвеллом.

Максвелл предполагал, что газ состоит из большого числа N тождественных молекул (они находятся в состоянии хаотического теплового движения при одинаковой температуре) и, что силовые поля на газ не действуют.

Закон Максвелла описывается некоторой функцией $f(\upsilon)$ называемой функцией Максвелла, или функцией распределения молекул по скоростям. Ее вид задается уравнением (11.2):

$$f(\upsilon) = 4\pi\left(\frac{m_0}{2\pi kT}\right)^{3/2} \upsilon^2 e^{-\frac{m_0\upsilon^2}{2kT}}, \tag{11.2}$$

где m_0 – масса молекулы; k – постоянная Больцмана; T – абсолютная температура газа; υ – скорость молекулы.

Величина $f(\upsilon)$ показывает, какая относительная доля молекул имеет скорость в интервале от υ до $\upsilon + d\upsilon$

$$f(\upsilon) = \frac{dN}{Nd\upsilon}.$$

Из уравнения (11.2) видно, что конкретный вид функции зависит от природы газа (массы молекулы m_0) и от параметра состояния (температуры T).

График функции распределения молекул газа по скоростям имеет вид

Из графика видно, что начинаясь из нуля, функция $f(\upsilon)$ достигает максимума при $\upsilon = \upsilon_в$, а затем асимптотически стремится к нулю.

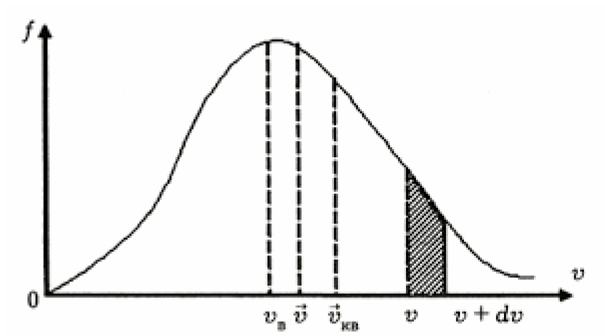


Рис. 11.1

Кривая $f(\upsilon)$ несимметрична относительно $\upsilon_в$.

Относительное число молекул $\frac{dN(\upsilon)}{N}$, скорости которых лежат в интервале от υ до $\upsilon + d\upsilon$, находится как площадь заштрихованной полоски (рис. 11.1).

Площадь, ограниченная кривой $f(\upsilon)$ и осью абсцисс, равна 1.

$\upsilon_в$ – наиболее вероятная скорость молекул. Ее величина определяется из условия

$$\frac{df(\upsilon)}{d\upsilon} = 0,$$

т.е. $\frac{d}{d\upsilon}\left(e^{-\frac{m\upsilon^2}{kT}}\upsilon^2\right) = 0$.

Проведя дифференцирование произведения функций, получим

$$\upsilon_в = \sqrt{\frac{2kT}{m_0}} = \sqrt{\frac{2RT}{M}}.$$

Средняя арифметическая скорость молекул газа:

$$<\upsilon> = \int_0^\infty \upsilon f(\upsilon)d\upsilon = \sqrt{\frac{8kT}{\pi m_0}} = \sqrt{\frac{8RT}{\pi M}}.$$

Ее значение необходимо знать при расчетах коэффициентов диффузии, вязкости и теплопроводности.

Среднюю квадратичную скорость молекул $\upsilon_{кв} = \sqrt{<\upsilon^2>}$ определяют из условия:

$$<\upsilon^2> = \int_0^\infty \upsilon^2 f(\upsilon)d\upsilon = 3\frac{kT}{m_0},$$

откуда $$\langle \upsilon_{\text{кв}} \rangle = \sqrt{\frac{3kT}{m_0}} = \sqrt{\frac{3RT}{M}}.$$

Эта скорость входит в основное уравнение молекулярно-кинетической теории.

Точки, соответствующие значениям скоростей $\upsilon_{\text{в}}$, $<\upsilon>$ и $\langle \upsilon_{\text{кв}} \rangle$ показаны на рис. 11.2.

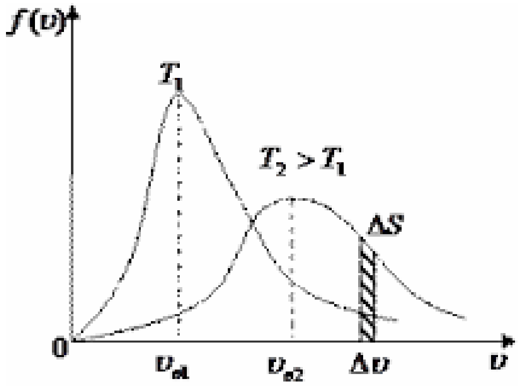


Рис. 11.2

Проанализируем, как будет меняться ход кривой при изменении температуры газа.

Из формулы $\upsilon_{\text{в}} = \sqrt{\frac{2kT}{m_0}}$ видно, что при увеличении температуры газа (или уменьшении массы молекулы) максимум кривой смещается вправо и становится ниже (площадь под кривой $f(\upsilon)$ остаётся неизменной).

11.2. Барометрическая формула

Атмосферное давление p на высоте h обусловлено весом вышележащих слоев газа. Давление на высоте $h + dh$ будет $p + dp$ ($dh > 0$, $dp < 0$, т.к. вес и давление с высотой убывают).

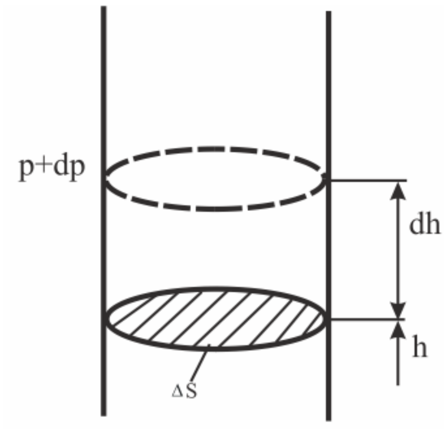


Рис. 11.3

Разность давлений p и $p + dp$ обусловлена весом газа, заключённого в объёме цилиндра, с площадью основания, равной ΔS и высотой dh (рис. 11.3).

$$p - (p + dp) = \rho g dh,$$

где ρ – плотность газа на высоте h, откуда

$$dp = -\rho g dh.$$

При нормальных условиях воздух можно считать идеальным газом. Тогда его плотность ρ можно найти из уравнения состояния идеального газа

$$pV = \frac{m}{M} RT,$$

здесь M – средняя молярная масса воздуха.

Плотность воздуха $\rho = \frac{m}{V} = \frac{pM}{RT}$, тогда $dp = -\frac{pM}{RT} g dh$.

Поделим обе части этого уравнения на p:

$$\frac{dp}{p} = -\frac{Mg}{RT}dh$$

и проинтегрируем:

$$\int_{P_0}^{P}\frac{dp}{p} = -\frac{Mg}{RT}\int_{0}^{h}dh.$$

p_0 – давление воздуха на уровне $h = 0$.

Для случая, когда температура постоянная (изотермическая атмосфера), интегрируя, получим:

$$\ln\frac{p}{p_0} = -\frac{Mg}{RT}h,$$

откуда

$$p = p_0 e^{-\frac{Mgh}{RT}}. \qquad (11.3)$$

Уравнение (11.3) называется барометрической формулой.

Графическая иллюстрация этой формулы на рис. 11.4 Давление убывает с высотой тем быстрее, чем тяжелее газ и чем ниже температура.

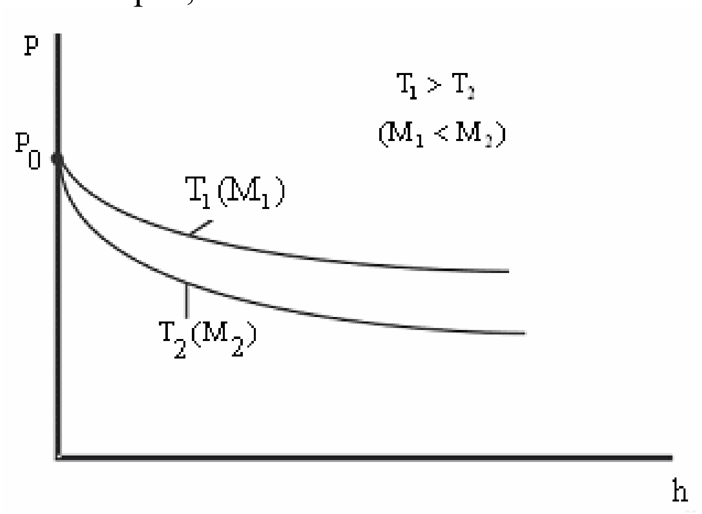


Рис. 11.4

11.3. Распределение Больцмана

В барометрической формуле отношение $\frac{M}{R}$ преобразуем к виду:

$$\frac{M / N_A}{R / N_A} = \frac{m_0}{k},$$

где m_0 – масса одной молекулы; k – постоянная Больцмана.

Подставим в формулу (11.3) значения давлений $p = nkT$ и $p_0 = n_0 kT$, где n – концентрация молекул на высоте h, n_0 – концентрация молекул на высоте $h_0 = 0$.

Тогда получим распределение концентрации молекул воздуха по высоте в поле силы тяжести Земли.

$$n = n_0 e^{-\frac{m_0 gh}{kT}}.$$

Из этой формулы следует, что с понижением температуры число частиц на высотах, отличных от нуля, убывает (рис. 11.5), обращаясь в нуль при $T = 0$ (при абсолютном нуле все молекулы расположились бы на поверхности Земли). При высоких температурах n слабо убывает с высотой, так что молекулы оказываются распределёнными по высоте почти равномерно. Распределение молекул по высоте является результатом конкуренции между притяжением молекул к Земле и тепловым движением, стремящимся разбросать молекулы по всем высотам. На разной высоте молекула обладает различным запасом потенциальной энергии $\varepsilon_p = mgh$.

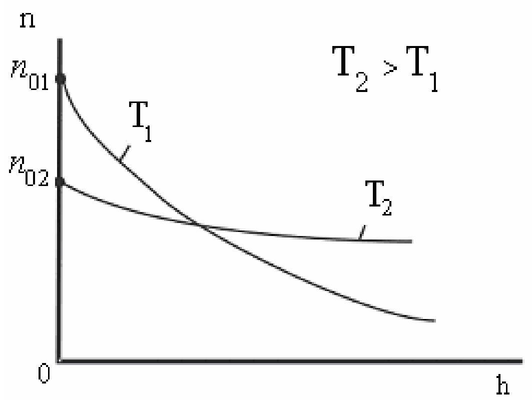


Рис. 11.5

Следовательно, распределение молекул по высоте является и распределением их по значениям потенциальной энергии

$$n = n_0 e^{-\frac{\varepsilon_p}{kT}}, \tag{11.4}$$

где n – концентрация молекул в том месте пространства, где потенциальная энергия молекулы имеет значение ε_p; n_0 – концентрация молекул в том месте, где потенциальная энергия равна 0.

Больцман доказал, что распределение (11.4) справедливо не только в случае потенциального поля сил земного тяготения, но и в любом потенциальном поле сил для совокупности любых одинаковых частиц, находящихся в состоянии хаотического теплового движения.

Таким образом, закон Больцмана (11.4) даёт распределение частиц, находящихся в состоянии хаотического теплового движения, по значениям потенциальной энергии (рис. 11.6).

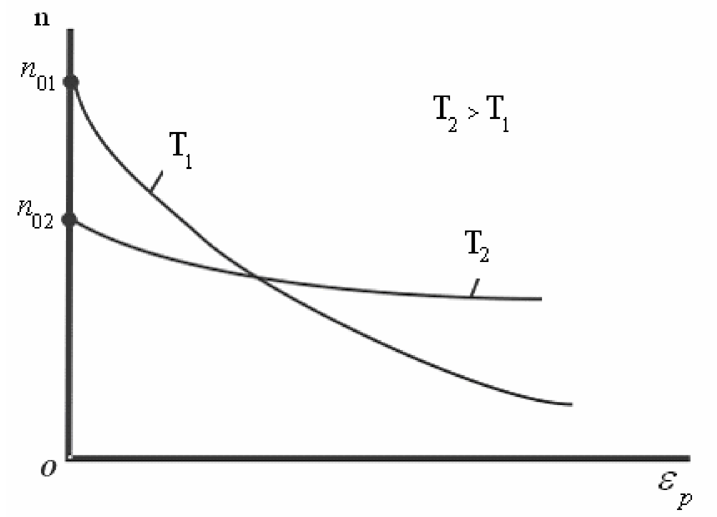


Рис. 11.6

11.3. Среднее число столкновений и средняя длина свободного пробега молекул

Молекулы газа, находясь в состоянии хаотического движения, непрерывно сталкиваются друг с другом. Каждая, отдельно взятая молекула, между двумя последовательными соударениями проходит различные пути, но в среднем, в связи с огромным числом молекул, и их непрерывным хаотичным движением, можно говорит о *средней длине свободного пробега молекул* $\langle l \rangle$.

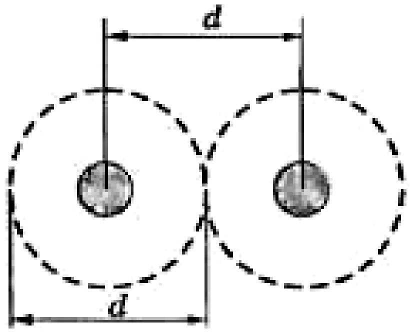


Рис. 11.7

Минимальное расстояние, на которое сближаются при столкновении центры двух молекул, называется *эффективным диаметром* d (рис.11.7).

Он зависит от скорости сталкивающихся молекул, т.е. от температуры газа (несколько уменьшается с ростом температуры).

За 1 секунду, молекула проходит в среднем путь, равный средней арифметической скорости $\langle \upsilon \rangle$, и если $\langle z \rangle$ – среднее число столкновений, испытываемых одной молекулой за 1 с, то среднюю длину свободного пробега можно рассчитать по формуле

$$\langle l \rangle = \frac{(\upsilon)}{(z)}. \qquad (11.5)$$

Для определения $\langle z \rangle$ представим себе молекулу в виде шарика диаметром d, который движется среди других «застывших» молекул. Эта молекула столкнется только с теми молекулами, центры которых находятся на расстояниях, равных или меньших d, т.е. лежащих внутри «ломаного» цилиндра радиусом d (рис.11.8).

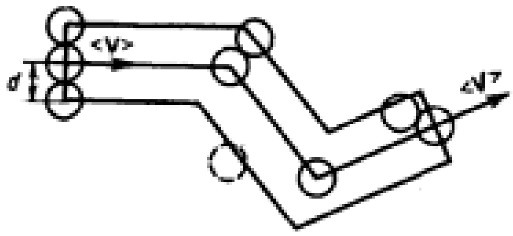


Рис. 11.8

Среднее число столкновений за 1 секунду равно числу молекул в объеме «ломаного» цилиндра:

$$\langle z \rangle = nV \cdot \tag{11.6}$$

где n – концентрация молекул, V – объем цилиндра

$$V = \pi d^2 \langle \upsilon \rangle, \tag{11.7}$$

$\langle \upsilon \rangle$ – средняя скорость молекулы, или путь, пройденный ею за 1 с.

Определим *среднее число столкновений*:

$$\langle z \rangle = n\pi d^2 \langle \upsilon \rangle \cdot \tag{11.8}$$

При учёте движения других молекул получается формула:

$$\langle z \rangle = \sqrt{2} n\pi d^2 \langle \upsilon \rangle \cdot \tag{11.9}$$

Тогда средняя длина свободного пробега молекул будет равна:

$$\langle l \rangle = \frac{1}{\left(\sqrt{2} n\pi d^2\right)} \cdot \tag{11.10}$$

Из формулы (11.10) следует, что *средняя длина свободного пробега молекул обратно пропорциональна концентрации молекул.*

С другой стороны, концентрация связана с давлением, следовательно:

$$\frac{l_1}{l_2} = \frac{n_2}{n_1} = \frac{p_2}{p_1}.$$

11.4. Явления переноса в термодинамически неравновесных системах

В термодинамически неравновесных системах возникают особые необратимые процессы, называемые *явлениями переноса*, в результате которых происходит пространственный перенос энергии, массы, импульса.

Явление, обусловленные переносом энергии, называется *теплопроводностью.*

Явление, обусловленное переносом массы, называется *диффузией.*

Явление, обусловленное переносом импульса, называется *внутренним трением.*

Для простоты ограничимся одномерными явлениями переноса. Систему отсчёта выберем так, чтобы ось x была ориентирована в направлении переноса.

1) *Теплопроводность*. Если в одной области газа средняя кинетическая энергия молекул больше, чем в другой, то с течением времени, вследствие постоянных столкновений молекул происходит процесс выравнивания средних кинетических энергий молекул, т.е., другими словами, процесс выравнивания температур.

Перенос энергии подчиняется закону Фурье:

$$j_E = -\lambda\left(\frac{dT}{dx}\right), \tag{11.11}$$

где j_E – *плотность теплового потока* (величина, определяемая энергией, переносимой в форме теплоты в единицу времени через единичную площадку, перпендикулярную оси x; λ – коэффициент теплопроводности; $\frac{dT}{dx}$ – градиент температуры, равный скорости изменения температуры на единицу длины x в направлении нормали к площадке.

Знак минус показывает, что при теплопроводности энергия переносится в направлении убывания температуры (поэтому вектор $\vec{j}_E$ направлен в сторону, противоположную вектору $\frac{dT}{dx}$).

Коэффициент теплопроводности λ численно равен плотности теплового потока при градиенте температуры равном единице.

Можно показать, что:

$$\lambda = \frac{1}{3} c_V \rho \langle \upsilon \rangle \langle l \rangle, \tag{11.12}$$

где c_V – удельная теплоёмкость при постоянном объёме (количество теплоты, необходимое для нагревания 1 кг газа на 1 К при постоянном объёме)

ρ – плотность газа; $\langle \upsilon \rangle$ – средняя арифметическая скорость теплового движения молекул; $\langle l \rangle$ – средняя длина свободного пробега.

2) *Диффузия*. Явление диффузии заключается в том, что происходит самопроизвольное проникновение и перемешивание частиц двух соприкасающихся газов, жидкостей и даже твёрдых тел. При диффузии осуществляется перенос массы частиц. Этот процесс возникает и продолжается, пока существует градиент плотности. Во время становления молекулярно-кинетической теории по вопросу диффузии возникали противоречия. Так как молекулы движутся с огромными скоростями, диффузия должна происходить очень быстро. Если же открыть в комнате сосуд с пахучим веществом, то запах распространяется достаточно медленно. Однако противоречия здесь нет. Молекулы при атмосферном давлении обладают малой длиной свободного пробега, и, сталкиваясь с другими молекулами, в основном «стоят» на месте.

Явление диффузии для химически однородного газа подчиняется закону Фика:

$$j_m = -D\left(\frac{d\rho}{dx}\right), \tag{11.13}$$

где j_m – *плотность потока массы* (величина, определяемая массой вещества, диффундирующего в единицу времени через единичную площадку, перпендикулярную оси x); D – коэффициент диффузии; $\frac{d\rho}{dx}$ – градиент плотности, равный скорости изменения плотности на единицу длины x в направлении нормали к площадке.

Знак минус показывает, что перенос массы происходит в направлении убывания плотности (поэтому вектор $\vec{j}_m$ направлен в сторону, противоположную вектору $\frac{d\rho}{dx}$).

Коэффициент диффузии D численно равен плотности потока массы при градиенте плотности, равном единице.

Согласно кинетической теории газов:

$$D = \left(\frac{1}{3}\right)\langle \upsilon \rangle \langle l \rangle. \tag{11.14}$$

3) *Внутреннее трение* (вязкость). Механизм возникновения внутреннего трения между параллельными слоями газа (жидкости), движущимися с различными скоростями, заключается в том, что из-за хаотического теплового движения происходит обмен молекулами между слоями, в результате чего импульс слоя, движущегося быстрее, уменьшается, движу-

щегося медленнее – увеличивается, что приводит к торможению слоя, движущегося быстрее, и ускорению слоя, движущегося медленнее.

Сила внутреннего трения между двумя слоями газа (жидкости) подчиняется *закону Ньютона*:

$$F = \eta \left| \frac{d\upsilon}{dx} \right| S, \tag{11.15}$$

где η – динамическая вязкость; $\frac{d\upsilon}{dx}$ – градиент скорости, показывающий быстроту изменения скорости в направлении x, перпендикулярном направлению движения слоёв; S – площадь, на которую действует сила $\vec{F}$.

Взаимодействие двух слоёв согласно второму закону Ньютона можно рассматривать как процесс, при котором от одного слоя к другому в единицу времени передаётся импульс, по модулю равный действующей силе.

Тогда выражение (11.15), можно переписать в виде:

$$j_p = -\eta \left(\frac{d\upsilon}{dx} \right), \tag{11.16}$$

где j_p – *плотность потока импульса* (величина, определяемая полным импульсом, переносимым в единицу времени в положительном направлении оси x через единичную площадку, перпендикулярную оси x; $\frac{d\upsilon}{dx}$ – градиент скорости. Знак минус указывает, что импульс переносится в направлении убывания скорости (поэтому вектор $\vec{j}_p$ направлен в сторону, противоположную вектору $\frac{d\upsilon}{dx}$).

Динамическая вязкость η равна плотности потока импульса при градиенте скорости, равном единице.

Ее можно вычислить по формуле

$$\eta = \frac{1}{3} \rho \langle \upsilon \rangle \langle l \rangle. \tag{11.17}$$

Из сопоставления формул (11.12), (11.14) и (11.17), описывающих явления переноса, следует, что закономерности всех явлений переноса сходны между собой. Эти зависимости были установлены задолго до выводов молекулярно-кинетической теории. Из них вытекают простые зависимости между коэффициентами η, D, λ:

$$\eta = \rho D, \tag{11.18}$$

$$\frac{\lambda}{\eta c_V} = 1\,. \qquad (11.19)$$

Используя эти формулы, можно по найденным из опыта одним величинам рассчитать другие.

Вопросы для самопроверки

1. Запишите математическое выражение функции распределения молекул газа по скоростям.
2. Изобразите график распределения молекул по скоростям (закон Максвелла). Дайте пояснения.
3. Чему равна площадь фигуры под кривой распределения молекул по скоростям?
4. Какая скорость называется средней арифметической, средней квадратичной, наиболее вероятной? Какими формулами выражаются эти скорости?
5. Как изменится кривая распределения молекул по скоростям, если температура газа увеличится?
6. В чем состоит опыт Штерна?
7. Что отражает барометрическая формула?
8. Как изменяется концентрация молекул с высотой в поле тяготения?
9. Изобразите графически зависимость концентрации молекул от высоты в поле тяготения.
10. Как изменяется концентрация молекул в поле тяготения при повышении температуры; при $T \to \infty$; при понижении температуры; при $T \to 0$? Поясните результаты.
11. Что называется средней длиной свободного пробега молекулы?
12. Что понимают под эффективным диаметром молекулы?
13. Приведите формулу для расчета средней длины свободного пробега молекулы. Дайте пояснения.
14. Какие явления называются явлениями переноса? Какова их природа?
15. Дайте понятие градиента физической величины. Приведите примеры.
16. Запишите общее уравнение явлений переноса. Дайте пояснения.
17. В чем состоит явление диффузии? Приведите примеры.
18. Запишите уравнение Фика для диффузии. Дайте пояснения.
19. Каково физическое содержание коэффициента диффузии и его размерность?
20. В чем состоит явление теплопроводности? Приведите примеры.

21. Запишите уравнение Фурье для теплопроводности. Дайте пояснения.

22. Каково физическое содержание коэффициента теплопроводности и какова его размерность?

23. В чем состоит явление вязкости (внутреннего трения)? Приведите примеры.

24. Запишите уравнение внутреннего трения. Дайте пояснения.

25. Каково физическое содержание коэффициента вязкости и его размерность?

12. ЗАКОНЫ ТЕРМОДИНАМИКИ

12.1. Внутренняя энергия термодинамической системы

Важной характеристикой термодинамической системы является ее внутренняя энергия U.

Внутренняя энергия – это энергия теплового движения микрочастиц системы (молекул, атомов, электронов, ядер и т. д.) и энергия взаимодействия этих частиц.

Внутренняя энергия тела складывается из кинетической энергии поступательного движения молекул, кинетической и потенциальной энергий колебательного движения атомов в молекулах, потенциальной энергии взаимодействия между молекулами и внутримолекулярной энергии (т.е. энергии электронных оболочек атомов и внутри ядерной). Кинетическая энергия тела как целого и его потенциальная энергия во внешнем силовом поле во внутреннюю энергию не входят.

В термодинамические формулы входит не сама энергия, а ее изменение, поэтому внутреннюю энергию можно определять с точностью до аддитивной постоянной.

Внутренняя энергия является однозначной функцией состояния системы. Поэтому приращение внутренней энергии при переходе системы из одного состояния в другое, всегда равно разности значений внутренней энергии в конечном и начальном состояниях независимо от способа перехода системы из одного состояния в другое:

$$\Delta U = U_2 - U_1. \tag{12.1}$$

Так как средняя кинетическая энергия одной молекулы:

$$\langle \varepsilon \rangle = \frac{ikT}{2}, \tag{12.2}$$

тогда средняя кинетическая энергия одного моль газа (в идеальном газе молекулы между собой не взаимодействуют) равна внутренней энергии одного моля газа.

$$U_{1\text{моля}} = \frac{ikTN_A}{2}. \tag{12.3}$$

Для произвольной массы газа

$$U = \frac{imRT}{2M}. \tag{12.4}$$

Из формулы (12.4) следует, что внутренняя энергия является функцией температуры $U = f(T)$.

Внутренняя энергия термодинамической системы может изменяться двумя способами:

1. *При совершении механической работы.*

Механическая работа – *это процесс, при котором изменение внутренней энергии тела (или системы тел) происходит за счет энергии упорядоченного движения других тел.*

При совершении работы внутренняя энергия меняется в двух случаях: при трении и при неупругой деформации.

При совершении работы силой трения внутренняя энергия увеличивается за счёт уменьшения механической энергии; трущиеся тела нагреваются. Например, при помощи трения наши предки смогли получить огонь.

В случае неупругого сжатия тела его внутренняя энергия также увеличивается за счёт уменьшения механической энергии. В этом случае говорят – *над телом совершается работа*. При неупругом расширении тела его внутренняя энергия уменьшается и переходит в механическую энергию. В этом случае говорят – *тело совершает работу*.

2. *Путём теплообмена (теплопередачи).*

Теплопередача – *это процесс, при котором изменение внутренней энергии тела (или системы тел) происходит за счёт внутренней энергии других тел.*

В процессе теплопередачи внутренняя энергия системы изменяется без совершения работы. Например, если тело поместить в пламя горелки, его температура изменится, следовательно, изменится и его внутренняя энергия. Однако никакая работа здесь не совершалась, ибо не происходило видимого перемещения ни самого тела, ни его частей.

Существуют три способа теплопередачи: теплопроводность, конвекция и излучение.

Теплопроводностью называется процесс теплообмена между телами (или частями тела) при их непосредственном контакте, обусловленный тепловым хаотическим движением частиц тела.

Передача энергии при теплопроводности осуществляется от молекулы к молекуле по «цепочке». При этом переноса вещества не происходит.

Теплопроводность различных веществ не одинакова. Хорошей теплопроводностью обладают металлы, особенно серебро и медь. Плохая теплопроводность у дерева. Теплопроводность жидкостей меньше, чем у твёрдых тел. Ещё меньшей теплопроводностью обладают газы, в том числе воздух. Наличие в материалах пространств, заполненных воздухом, уменьшает их теплопроводность. Нулевой теплопроводностью обладает вакуум – пространство, в котором отсутствует вещество.

Конвекция – это способ переноса внутренней энергии потоками движущихся жидкости или газа из одних областей занимаемого ими объема в другие.

При нагревании чайника на плите теплопроводность обеспечивает поступление теплоты через дно чайника к нижним (пограничным) слоям воды, однако нагревание внутренних слоев воды является результатом конвекции, приводящей к перемешиванию нагретой и холодной воды.

При конвекции происходит перенос вещества – внутренняя энергия переносится вместе с частицами вещества.

Различают естественную и вынужденную конвекцию.

Естественная конвекция возникает из-за действия Архимедовой силы. Нагретая жидкость или газ расширяются, их плотность уменьшается, а действующая на них Архимедова сила, возрастает. Под действием этой силы нагретое вещество поднимается вверх, унося с собой внутреннюю энергию. На место ушедшего вещества притекает менее нагретое вещество. Затем это вещество нагревается и весь процесс повторяется.

Примерами естественной конвекции являются нагревание воздуха в комнате от батарей водяного отопления, ветры, дующие над поверхностью земного шара.

Вынужденная конвекция происходит при перемешивании жидкости какими-то внешними телами (мешалкой, ложкой, насосом и т.д.).

Тепловое излучение – это перенос внутренней энергии от одного тела к другому посредством электромагнитных волн.

При этом отсутствует механический контакт нагревателя и получателя теплоты. Например, при поднесении руки на небольшое расстояние к лампе накаливания Вы почувствуете ее тепловое излучение. Земля получает энергию от Солнца также за счет теплового излучения.

Электромагнитные волны распространяются вне зависимости от наличия вещества, поэтому излучение может осуществляться и через вакуум, где вещество вообще отсутствует.

Излучает каждое нагретое тело. При этом, чем выше температура тела, тем больше энергии оно излучает. Мощным источником излучения энергии является Солнце, излучающая поверхность которого имеет температуру около 6000°С.

При попадании излучения на поверхность тела оно частично поглощается, а частично отражается. К увеличению внутренней энергии и нагреванию тел приводит поглощение.

Доля отражённого излучения зависит от цвета тела. Лучше всего отражают тела белого и серебристого цвета. Поэтому эти тела меньше всего поглощают излучение и меньше других нагреваются. Чтобы не перегреться в летний день, лучше выбрать одежду и головной убор белого цвета.

Хуже всего отражают тела чёрного цвета. Они поглощают почти всё излучение, и больше всего нагреваются. Например, чтобы вода в бочке сильно нагревалась при поглощении солнечного излучения, бочку красят в чёрный цвет.

12.2. Первое начало термодинамики

В общем случае внутренняя энергия термодинамической системы может изменяться одновременно как за счёт теплообмена с окружающими телами, так и за счёт совершения работы внешними силами.

Первый закон термодинамики (закон сохранения энергии для тепловых процессов) определяет количественное соотношение между изменением внутренней энергии системы ΔU, количеством теплоты Q, подведённым к ней, и суммарной работой внешних сил $A_{вн}$, действующих на систему.

Первый закон термодинамики:

Изменение внутренней энергии системы при её переходе из одного состояния в другое равно сумме количества теплоты, подведённого к системе извне, и работы внешних сил, действующих на неё**:**

$$\Delta U = Q + A_{вн}.$$

Для изолированной системы, которая не обменивается теплотой с окружающими телами ($Q = 0$) и над которой не совершается работа внешних сил ($A_{вн} = 0$),

$$\Delta U = U_2 - U_1 = 0$$

или

$$U_1 = U_2.$$

Внутренняя энергия замкнутой, изолированной системы сохраняется.

В термодинамике наибольший интерес представляет преобразование внутренней энергии в работу, совершаемую системой. Эта работа отличается от работы внешних сил только знаком:

$$A_{вн} = -A.$$

С учётом этого соотношения **первый закон термодинамики** можно сформулировать так:

Количество теплоты, подведённое к системе, идёт на изменение её внутренней энергии и на совершение системой работы над внешними телами.

$$Q = \Delta U + A.$$

Современная жизнь человека невозможна без использования самых разнообразных машин, с помощью которых человек добывает нефть, уголь, руду, обрабатывает землю, собирает урожай, строит дома, дороги, совершает поездки по земле, по воздуху, по воде.

Основным общим свойством всех машин является их способность совершать работу. Многие изобретатели в прошлом пытались построить машину, способную совершать полезную работу без потребления энергии извне и без каких-либо изменений внутри самой машины. Машину с такими свойствами называют *вечным двигателем первого рода*. Все эти попытки окончились неудачей. Невозможность создания вечного двигателя первого рода подтверждает тем самым первый закон термодинамики. Согласно первому закону термодинамики, работа A, произведённая машиной, равна:

$$A = Q - \Delta U.$$

Любая машина может совершать работу над внешними телами только за счёт получения извне некоторого количества теплоты или уменьшения её внутренней энергии.

12.3. Работа газа при изменении его объема

Рассмотрим газ, находящийся в цилиндрическом сосуде, закрытом плотно пригнанным поршнем.

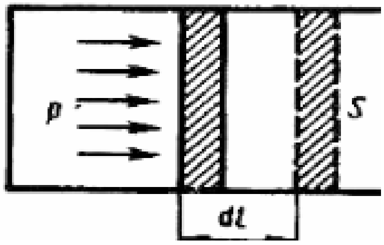


Рис. 12.1

Пусть газ медленно расширяясь, перемещает поршень на столь малое расстояние dl, что давление газа в течение этого процесса можно считать неизменным.

Газ действует на поршень с силой: $F = pS$ и при этом совершает работу над поршнем:

$$\delta A = Fdl = pSdl = pdV. \qquad (12.5)$$

Приращение объема газа может быть как положительным, так и отрицательным. Если $dV>0$, то $dA>0$: газ совершает работу над внешними телами – отдает им часть своей энергии. Если $dV<0$, то и $dA<0$: внешние тела совершают над работу над газом – газ получает энергию извне.

При изменении объема газа от значения V_1 до значения V_2 газ совершает работу

$$A_{12} = \int_{V_2}^{V_1} pdV. \qquad (12.6)$$

Графически работа изображается в координатах p и V площадью, ограниченной кривой $p = f(V)$ и двумя ординатами, соответствующими начальному V_1 и конечному V_2 объемам (рис. 12.2). Элементарная работа газа δA численно равна площади узкой заштрихованной полоски, полная работа A – площади криволинейной трапеции.

Процесс, при котором система, пройдя некоторую последовательность состояний, снова возвращается в исходное состояние, называется круговым процессом (циклом). Вместе с тем, численное значение работы зависит от пути перехода системы из одного состояния в другое. Так, если система переходит из состояния 1 в состояние 2 один раз по пути (a), а другой раз по пути (b) (рис. 12.3), то $A_{1a2} \neq A_{1b2}$. Следовательно, работа, совершаемая при круговом процессе, отлична от нуля. Это означает, что силы давления – неконсервативные силы.

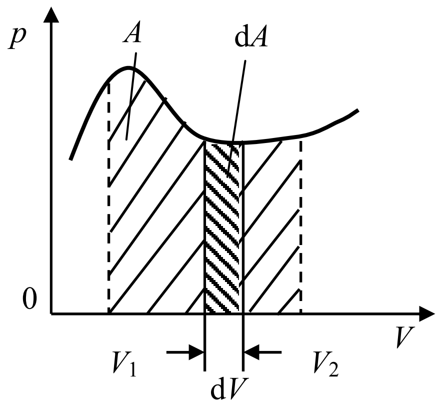


Рис. 12.2

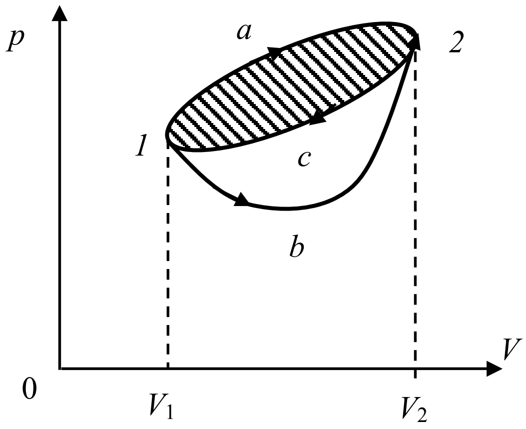


Рис. 12.3

Графически работа при круговом процессе изображается площадью, заключенной внутри кривой процесса (заштрихованная область на рис. 12.3). Работа за цикл положительна (система отдает энергию внешним телам), если цикл обходится по часовой стрелке, и отрицательна (система получает энергию извне), если цикл проходится против часовой стрелки. Действительно, работа, совершаемая системой за цикл $1a2c1$, равна сумме работ, совершаемых на участках $1a2$ и $2c1$:

$$A = A_{1a2} + A_{2c1}.$$

Работа на участке $1a2$ положительна (система расширяется) и по абсолютной величине равна площади криволинейной трапеции V_1aV_2. Работа на участке $2c1$ отрицательна (объем системы уменьшается) и по абсолютной величине равна площади криволинейной трапеции V_1cV_2, которая меньше площади V_1aV_2. Следовательно,

$$A = A_{1a2} + A_{2c1} > 0.$$

Пользуясь общим выражением работы в термодинамике (12.6), найдем работу в изопроцессах.

Изохорный процесс осуществляется при нагревании или охлаждении газа при постоянном объеме сосуда. В этом процессе $dV = 0$ и газ не совершает работы $\delta A = 0$.

Изобарный процесс осуществляется при нагревании или охлаждении газа, находящегося в цилиндре с подвижным поршнем. В изобарическом процессе

$$A_{12} = \int_{V_1}^{V_2} pdV = p\int_{V_1}^{V_2} dV = p\left(V_2 - V_1\right). \qquad (12.6)$$

Графически работа газа в изобарном процессе определяется площадью заштрихованного прямоугольника, приведенного на рис. 12.4.

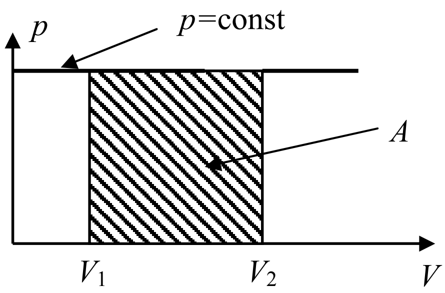


Рис. 12.4

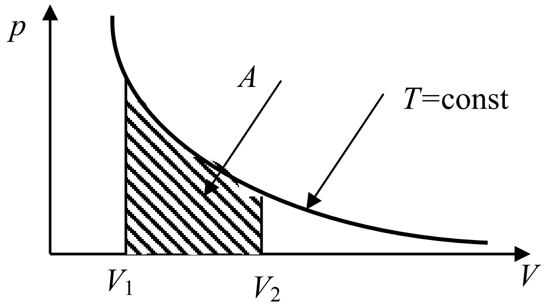


Рис. 12.5

Изотермический процесс должен осуществляться настолько медленно, чтобы теплообмен между газом и окружающей средой не вызвал изменение температуры газа. Совершаемая газом работа в изотермическом процессе равна

$$A = \int_{V_1}^{V_2} p dV = \int_{V_1}^{V_2} \frac{m}{M} RT \frac{dV}{V} = \frac{m}{M} RT \ \ln \frac{V_2}{V_1}. \quad (12.7)$$

Адиабатный процесс происходит без теплообмена между газом и окружающей средой.

$$A_{12} = -(U_2 - U_1) = U_1 - U_2. \quad (12.8)$$

Работа в адиабатном процессе совершается за счёт убыли внутренней энергии идеального газа.

Запишем выражения внутренней энергии двух состояний идеального газа:

$$\begin{cases} U_1 = \dfrac{m}{M} RT_1 \left(\dfrac{i}{2} \right) \\ U_2 = \dfrac{m}{M} RT_2 \left(\dfrac{i}{2} \right) \end{cases} \quad (12.9)$$

Подставив значения внутренней энергии для состояний 1 и 2 в соотношение (12.8) получим формулу для расчёта работы в адиабатном процессе:

$$A_{12} = \frac{m}{M} R \left(\frac{i}{2} \right) (T_1 - T_2) = \left(\frac{i}{2} \right) \left(P_1 V_1 - P_2 V_2 \right). \quad (12.10)$$

Используя формулу связи между числом степеней свободы и показателем адиабаты для идеального газа преобразуем формулу для расчёта работы газа в адиабатном процессе к виду:

$$A_{12} = \frac{P_1V_1 - P_2V_2}{\gamma - 1}, \tag{12.11}$$

или

$$A_{12} = \frac{m}{M} C_V \left(T_1 - T_2 \right). \tag{12.12}$$

12.4. Теплоёмкость газа. Уравнение Майера

Передача тепловой энергии (теплоты) – энергии хаотического движения молекул – зависит от физических свойств системы, характера термодинамического процесса в ней и выражается изменением температуры тел системы. Для характеристики способности тел повышать свою температуру за счет полученного извне тепла вводится понятие теплоемкости.

Теплоёмкостью тела называется величина, равная количеству теплоты, которое необходимо сообщить телу, чтобы повысить его температуру на 1 Кельвин:

$$C = \frac{\delta Q}{dT}, \tag{12.13}$$

где δQ – количество теплоты, сообщение которого телу повышает его температуру на величину dT. Единица теплоемкости $\frac{\text{Дж}}{\text{К}}$

Теплоёмкость единицы массы вещества называется *удельной*. Ее измеряют в $\frac{\text{Дж}}{\text{кг} \cdot \text{К}}$ и определяют так:

$$c = \frac{\delta Q}{m dT}. \tag{12.14}$$

Теплоемкость моль вещества называют *молярной теплоёмкостью*:

$$C_M = \frac{C}{\nu} = \frac{\delta Q}{\nu dT}. \tag{12.15}$$

Единица молярной теплоемкости $\frac{\text{Дж}}{\text{моль} \cdot \text{К}}$

Удельная и молярная теплоёмкости взаимосвязаны между собой соотношением:

$$C_M = cM. \tag{12.16}$$

Теплоёмкость зависит от условий нагревания тела. Для газов наибольший интерес представляют теплоёмкости для случаев нагревания при постоянном давлении и постоянном объеме. В первом случае имеют дело с молярной теплоёмкостью при постоянном давлении (C_p), а во втором – с молярной теплоёмкостью при постоянном объёме (C_V).

Рассмотрим один моль газа ($\nu = 1$) и определим для него молярные теплоёмкости при постоянном объёме и при постоянном давлении.

а) Если процесс в газе изохорный $V = \text{const}$, $m = \text{const}$, $\delta A = 0$, то согласно первому закону термодинамики:

$$\delta Q = dU. \qquad (12.17)$$

По определению молярной теплоёмкости:

$$C_V = \frac{\delta Q}{dT} = \frac{dU}{dT}, \qquad (12.18)$$

где $dU = \nu \frac{i}{2} R dT$.

Тогда:

$$C_V = \frac{i}{2} R. \qquad (12.19)$$

Из формулы (12.19) следует, что *молярная теплоёмкость идеального газа при постоянном объёме зависит только от числа степеней свободы молекул газа (*т.е. для каждого идеального газа молярная теплоёмкость при постоянном объёме является величиной постоянной).

б) Если процесс в газе изобарный $p = \text{const}$, $m = \text{const}$, то

$$\delta Q = dU + \delta A. \qquad (12.20)$$

Для одного моль газа

$$dU = \frac{i}{2} R dT, \qquad (12.21)$$

$$\delta A = R dT. \qquad (12.22)$$

Подставив выражения (12.21), (12.22) в формулу (12.15) получим выражение для расчёта молярной теплоёмкости при постоянном давлении:

$$C_p = \frac{\delta Q}{dT} = \frac{(dU + \delta A)}{dT} = \frac{dU}{dT} + \frac{\delta A}{dT} = C_V + R. \qquad (12.23)$$

Из (12.23) следует, *что молярная теплоёмкость идеального газа при постоянном давлении больше молярной теплоёмкости при постоянном* *объеме на величину универсальной газовой постоянной и зависит только от числа степеней свободы газа.*

$$C_p = \frac{i}{2}R + R = C_V + R. \qquad (12.24)$$

Соотношение (12.24) называют *формулой Майера*.

Отношение молярной теплоёмкости при постоянном давлении к молярной теплоёмкости при постоянном объёме называют показателем адиабаты γ, или коэффициентом Пуассона:

$$\gamma = \frac{C_p}{C_V}, \qquad (12.25)$$

или

$$\gamma = \frac{i+2}{i}. \qquad (12.26)$$

12.5. Применение первого начала термодинамики к изо- и адиабатному процессам

1) *Изохорный процесс* ($V = const$).

Так как $dV = 0$, то $\delta A = pdV = 0$, газ не совершает работы. Поэтому из первого начала термодинамики следует, что в изохорном процессе все количество теплоты, сообщаемое газу, идет на изменение его внутренней энергии:

$$\delta Q = dU. \qquad (12.27)$$

2) *Изобарный процесс* ($p = const$). В этом изопроцессе обмен энергией происходит в форме и работы, и теплоты.

$$\delta Q = dU + \delta A. \qquad (12.28)$$

Подводимое к газу тепло затрачивается на изменение внутренней энергии газа и на совершение им работы.

3) *Изотермический процесс* ($T = const$), $dT = 0$. Следовательно, в изотермическом процессе внутренняя энергия идеального газа не изменяется:

$$dU = \frac{i}{2}\frac{m}{M}RdT = 0,$$

и первое начало термодинамики приобретает вид

$$\delta Q = \delta A, \qquad (12.29)$$

т.е. вся теплота, сообщаемая газу, расходуется только на совершение им работы против внешних сил (изотермический процесс осуществляется с КПД, равным единице).

Теплоемкость газа в изотермическом процессе бесконечна, так как

$$\delta Q \neq 0,\ dT = 0,\ C_T = \frac{\delta Q}{dT} = \pm\infty. \qquad (12.29)$$

4) *Адиабатный процесс.* В этом процессе отсутствует теплообмен между газом и окружающей средой ($\delta Q = 0$).

Из первого начала термодинамики ($\delta Q = dU + \delta A$) для адиабатного процесса следует, что

$$\delta A = -dU, \qquad (12.30)$$

т.е. работа совершается газом за счет уменьшения его внутренней энергии.

Так как $\delta A = pdV$, а $dU = \frac{m}{M}C_V dT$, то при адиабатном расширении dT<0 (так как dV>0, p>0, C_V>0) – происходит охлаждение газа. При адиабатном сжатии – dV<0 и соответственно dT>0 – происходит нагревание газа.

Уравнение адиабатного процесса получим из первого начала термодинамики, в котором заменим δA и dU их выражениями:

$$pdV = -\frac{m}{M}C_V dT \qquad (12.31)$$

Величину $\frac{m}{M}dT$, найдем из уравнения Клапейрона-Менделеева:

$$pdV + Vdp = \frac{m}{M}RdT.$$

Таким образом,

$$p\mathrm{d}V = -\frac{C_V}{R}\left(\mathrm{p}dV + V\mathrm{d}p\right).$$

Учитывая, что для идеального газа $C_V + R = C_p$, получаем

$$C_p pdV + C_V Vdp = 0.$$

Разделив обе части этого уравнения на $C_V pV$ и введя обозначение

$$\gamma = \frac{C_p}{C_V}, \qquad (12.32)$$

(безразмерная величина (12.32), называется *показателем адиабаты*), запишем его в виде:

$$\gamma\frac{\mathrm{d}V}{V}+\frac{\mathrm{d}p}{p}=0,$$

или

$$d\ln V^{\gamma}+d\ln p=0,\ \ d\ln(pV^{\gamma})=0,$$

откуда

$$pV^{\gamma}=\mathrm{const}. \qquad (12.33)$$

Формула (12.33) – уравнение адиабатного процесса. Оно называется *уравнением Пуассона.*

Пользуясь уравнением Клапейрона-Менделеева уравнение (12.33) можно записать по-другому:

$$pT^{\frac{\gamma}{1-\gamma}}=\mathrm{const} \qquad (12.34)$$

или

$$VT^{\frac{1}{\gamma-1}}=\mathrm{const}. \qquad (12.35)$$

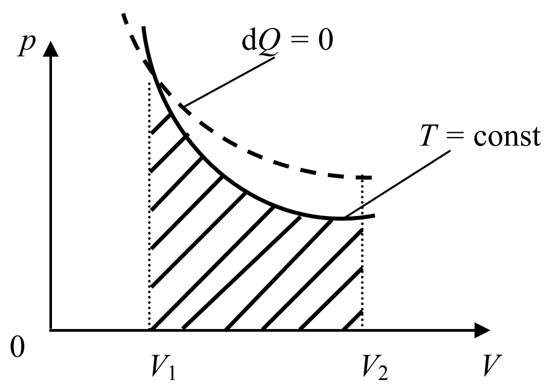


Рис. 12.6

График адиабатного процесса называют *адиабатой*. На рис. 12.6 приведена адиабата в координатах pV. Адиабата проходит круче изотермы так как $\gamma>1$. Объясняется это тем, что при адиабатическом сжатии увеличение давления обусловлено не только уменьшением объема газа, как при изотермическом сжатии, но и увеличением температуры. При адиабатном расширении температура газа уменьшается, поэтому давление газа падает быстрее, чем при изотермическом расширении.

12.6. Политропические процессы

Процессы, в ходе которых теплоемкость тела остается постоянной, называются *политропическими*, т.е. при политропическом процессе газ, кроме уравнения состояния, подчиняется еще дополнительному условию:

$$(C=\mathrm{const}). \qquad (12.36)$$

Для получения уравнения политропы запишем первое начало термодинамики в виде:

$$\delta Q = dU + \delta A, \tag{12.37}$$

но

$$dU = \frac{m}{M}\frac{i}{2}RdT, \tag{12.38}$$

элементарная работа газа

$$\delta A = pdV, \tag{12.39}$$

а

$$\delta Q = \frac{m}{M}CdT. \tag{12.40}$$

Подставим уравнения (12.38), (12.39), (12.40) в формулу (12.37):

$$\frac{m}{M}CdT = \frac{m}{M}C_V dT + pdV. \tag{12.41}$$

Преобразуем это выражение к виду

$$\frac{m}{M}\left(C - C_V\right)RdT = pRdV. \tag{12.42}$$

Из уравнения Клапейрона-Менделеева следует, что:

$$\frac{m}{M}RdT = pdV + Vdp. \tag{12.43}$$

Подставим это выражение в (12.42)

$$\left(C - C_V\right)\left(pdV + Vdp\right) = pRdVp,$$

$$\left(C - C_V\right)pdV + \left(C - C_V\right)Vdp - pRdV = 0,$$

$$\left(C - C_V - R\right)pdV + \left(C - C_V\right)Vdp = 0. \tag{12.44}$$

Разделим (12.44) на pV, получим:

$$\left(C - C_V - R\right)\frac{pdV}{V} + \left(C - C_V\right)\frac{dp}{p} = 0. \tag{12.45}$$

Но $C_V + R = C_p$, тогда:

$$\left(C - C_p\right)\frac{dV}{V} + \left(C - C_V\right)\frac{dp}{p} = 0. \tag{12.46}$$

Выведем величину

$$n = \frac{\left(C - C_p\right)}{\left(C - C_V\right)}. \tag{12.47}$$

тогда умножив (12.46) на $\left(\frac{1}{C}-C_V\right)$, получим:

$$n\frac{dV}{V}+\frac{dp}{p}=0. \tag{12.48}$$

Интегрирование полученного уравнения от V_1 до V_2 и от p_1 до p_2 дает

$$-n\ln\frac{V_2}{V_1}=\ln\frac{p_2}{p_1}, \text{ или } n\ln\frac{V_1}{V_2}=\ln\frac{p_2}{p_1}, \tag{12.49}$$

откуда $\frac{p_2}{p_1}=\left(\frac{V_1}{V_2}\right)n$, или, в самом общем виде:

$$pV^n=\mathrm{const}. \tag{12.50}$$

Формула (12.50) – уравнение политропы идеального газа; $n-$показатель политропы.

Это уравнение можно записать в виде:

$$TV^{n-1}=\mathrm{const}. \tag{12.51}$$

Из уравнения (12.47):

$$C-C_p=nC-C_V \tag{12.52}$$

$$C-nC=C_p-nC_V, \text{ или } C(1-n)=C_p-nC_V$$

$$C=\frac{\left(nC_V-C_p\right)}{n}-1 \tag{12.53}$$

Все процессы (изохорный, изобарный, изотермический, адиабатический) являются политропическими.

Для изобарного процесса – $C_p=\mathrm{const}$.

Для изохорного процесса – $C_V=\mathrm{const}$.

Найдем для изобарного процесса величину n из соотношения (12.53):

если процесс изобарный, то $C=C_p$, тогда

$$n=\frac{0}{C}-C_V=0; \tag{12.54}$$

если процесс изохорный, то $C=C_V$ и

$$n=C-\frac{C_\mu}{0}=\infty. \tag{12.55}$$

При $n=1$ (изотермический процесс) $C=\infty$, при $n=\gamma$ (адиабатный процесс) $C=0$.

12.7. Тепловые двигатели и холодильные машины. Цикл Карно и его КПД

Тепловой двигатель – это периодически действующая машина, в которой происходит преобразование части теплоты, полученной от сгорания топлива в механическую работу.

Принцип действия теплового двигателя приведен на рис. 12.7. От термостата с более высокой температурой T_1 называемого нагревателем, за цикл отнимается количество теплоты Q_1, а термостату с более низкой температурой T_2, называемому холодильником, за цикл передается количество теплоты Q_2. При этом совершается работа

$$A = Q_1 - Q_2 .$$

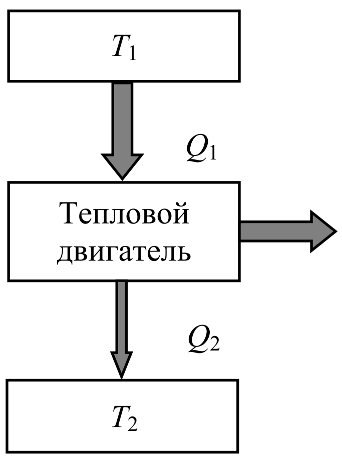


Рис. 12.7

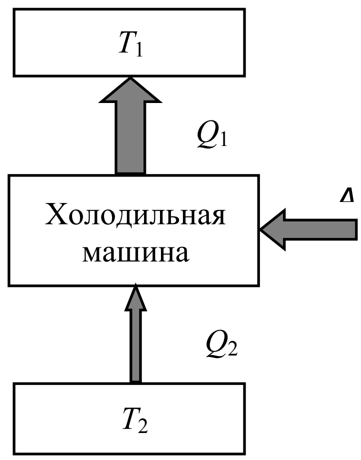


Рис. 12.8

Чтобы термический коэффициент полезного действия теплового двигателя $\eta = 1 - \frac{Q_2}{Q_1}$ был равен единице, должно быть выполнено, условие $Q_2 = 0$, т.е. тепловой двигатель должен иметь один источник теплоты, а это невозможно. Французский физик и инженер Сади Карно показал, что для работы теплового двигателя необходимо не менее двух источников теплоты с различными температурами.

Процесс, обратный происходящему в тепловом двигателе, используется в холодильной машине, принцип действия которой представлен на рис. 12.8. Системой за цикл от термостата с более низкой температурой T_2 отнимается количество теплоты Q_2 и отдается термостату с более высокой температурой T_1 количество теплоты Q_1.

Для кругового процесса, согласно первому закону термодинамики, $Q = A\,Q$, но по условию $Q = Q_2 - Q_1 < 0$, поэтому $A < 0$ и $Q_2 - Q_1 = -A$, или $Q_1 = Q_2 + A$, т.е. количество теплоты Q_1, отданное системой источнику теплоты при более высокой температуре T_1, больше количества теплоты Q_2, полученного от источника теплоты при более низкой температуре T_2, на величину работы, совершенной над системой. Следовательно, без совершения работы нельзя отбирать теплоту от менее нагретого тела и отдавать ее более нагретому телу. Это утверждение есть не что иное, как формулировка второго начала термодинамики (по Клаузиусу).

Однако второе начало термодинамики не следует представлять так, что оно совсем запрещает переход теплоты от менее нагретого тела к более нагретому. Ведь именно такой переход осуществляется в холодильной машине. Но при этом, внешние силы совершают работу над системой, т.е. этот переход не является единственным результатом процесса.

Основываясь на втором начале термодинамики, Карно вывел следующую теорему: *из всех периодически действующих тепловых машин, имеющих одинаковые температуры нагревателей* T_1 *и холодильников* T_2, *наибольшим КПД обладают обратимые машины; при этом КПД обратимых машин, работающих при одинаковых температурах нагревателей и холодильников, равны друг другу и не зависят от природы рабочего тела* (тела, совершающего круговой процесс и обменивающегося энергией с другими телами).

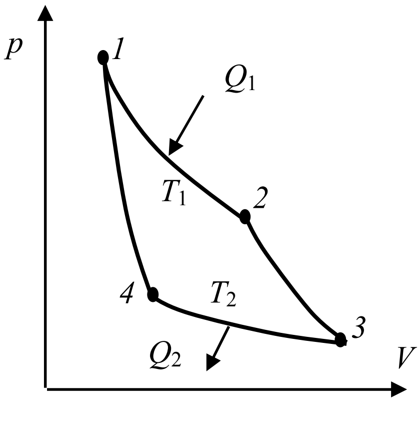


Рис. 12.9

Карно теоретически проанализировал наиболее экономичный обратимый цикл, состоящий из двух изотерм и двух адиабат. Он называется циклом Карно.

Рассмотрим прямой цикл Карно, в котором в качестве рабочего тела используется идеальный газ, заключенный в сосуд с подвижным поршнем.

Цикл Карно изображен на рис. 12.9, где изотермические расширение и сжатие заданы соответственно кривыми *1-2* и *3-4*, а адиабатные расширение и сжатие – кривыми *2-3* и *4-1*.

При изотермическом процессе $U = \text{const}$, поэтому, количество теплоты Q_1, полученное газом от нагревателя, равно работе расширения A_{12}, совершаемой газом при переходе из состояния *1* в состояние *2*:

$$A_{12} = \frac{m}{M} R T_1 \ln\frac{V_2}{V_1} = Q_1. \qquad (12.56)$$

При адиабатном расширении *2-3* теплообмен с окружающей средой отсутствует, и работа расширения A_{23} совершается за счет изменения внутренней энергии:

$$A_{23} = -\frac{m}{M} C_V \left(T_2 - T_1\right).$$

Количество теплоты Q_2, отданное газом холодильнику при изотермическом сжатии, равно работе сжатия A_{34}:

$$A_{34} = \frac{m}{M} RT_2 \ln\frac{V_4}{V_3} = -Q_2. \tag{12.57}$$

Работа адиабатного сжатия

$$A_{41} = -\frac{m}{M} C_V \left(T_1 - T_2\right) = -A_{23}.$$

Работа, совершаемая в результате кругового процесса,

$$A = A_{12} + A_{23} + A_{34} + A_{41} = Q_1 + A_{23} - Q_2 - A_{23} = Q_1 - Q_2$$

и определяется площадью фигуры, показанной на рис. 12.9.

Термический КПД цикла Карно, согласно,

$$\eta = \frac{A}{Q_1} = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1}.$$

Применив уравнение Пуассона для адиабат *2-3* и *4-1*

$$T_1 V_2^{\gamma-1} = T_2 V_3^{\gamma-1}, \qquad T_1 V_1^{\gamma-1} = T_2 V_4^{\gamma-1},$$

получим

$$\frac{V_2}{V_1} = \frac{V_3}{V_4}.$$

Подставим уравнения (12.56) и (12.57) в формулу КПД цикла, получим

$$\eta = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1} = \frac{\frac{m}{M} RT_1 \ln\frac{V_2}{V_1} - \frac{m}{M} RT_2 \ln\frac{V_3}{V_4}}{\frac{m}{M} RT_1 \ln\frac{V_2}{V_1}} = \frac{T_1 - T_2}{T_1}, \tag{12.58}$$

т.е. для цикла Карно КПД действительно определяется только температурами нагревателя и холодильника. Для его повышения необходимо увеличивать разность температур нагревателя и холодильника.

Обратный цикл Карно лежит в основе действия тепловых насосов. В отличие от холодильных машин тепловые насосы должны как можно больше тепловой энергии отдавать горячему телу, например системе отопления.

Теорема Карно послужила основанием для установления термодинамической шкалы температур. Сравнив левую и правую части формулы (12.58), получим

$$\frac{T_2}{T_1}=\frac{Q_2}{Q_1}, \tag{12.59}$$

т.е. для сравнения температур T_1 и T_2 двух тел необходимо осуществить обратимый цикл Карно, в котором одно тело используется в качестве нагревателя, другое – холодильника. Из равенства (12.59) видно, что отношение температур тел равно отношению отданного в этом цикле количества теплоты к полученному. Согласно теореме Карно, химический состав рабочего тела не влияет на результаты сравнения температур, поэтому такая термодинамическая шкала не связано со свойствами какого-то определенного термометрического тела.

12.8. Энтропия и ее статистическое толкование

Для выяснения физического содержания понятия энтропии рассматривают отношение теплоты Q, полученной телом в изотермическом процессе, к температуре T теплоотдающего тела, называемое *приведенным количеством теплоты.*

Приведенное количество теплоты, сообщаемое телу на бесконечно малом участке процесса, равно $\frac{\delta Q}{T}$. Приведенное количество теплоты, сообщаемое телу в любом обратимом круговом процессе, равно нулю:

$$\oint\frac{\delta Q}{T}=0. \tag{12.60}$$

Из равенства нулю интеграла (12.60), следует, что подынтегральное выражение $\frac{\delta Q}{T}$ есть полный дифференциал некоторой функции, которая определяется только состоянием системы и не зависит от способа перехода системы из одного состояния в другое

$$\frac{\delta Q}{T}=\mathrm{d}S. \tag{12.61}$$

Функция состояния, дифференциалом которой является $\frac{\delta Q}{T}$, называется энтропией и обозначается S.

Из формулы (12.60) следует, что для обратимых процессов изменение энтропии равно нулю:

$$\Delta S = 0. \tag{12.62}$$

В термодинамике доказывается, что энтропия системы, совершающей необратимый цикл, возрастает:

$$\Delta S > 0. \tag{12.63}$$

Выражения (12.62) и (12.63) относятся только к замкнутым системам, если система обменивается теплотой с внешней средой, то ее энтропия может вести себя произвольным образом. Соотношения (12.62) и (12.63) можно представить в виде *неравенства Клаузиуса*

$$\Delta S \geq 0, \qquad (12.63)$$

т.е. энтропия замкнутой системы может либо возрастать (в случае необратимых процессов), либо оставаться постоянной (в случае обратимых процессов). Это утверждение является одной из формулировок второго начала термодинамики.

Каждое состояние системы характеризуется определенным значением энтропии S, подобно тому, как оно характеризуется значением внутренней энергии U.

Так как энтропия возрастает только в неравновесном процессе, то ее увеличение происходит до тех пор, пока система не достигнет равновесного состояния. Следовательно, равновесное состояние соответствует максимуму энтропии. С этой точки зрения энтропия является мерой близости системы к состоянию равновесия, то есть к состоянию с минимальной потенциальной энергией.

Энтропия обладает свойством аддитивности: энтропия системы равна сумме энтропий тел, входящих в систему.

Свойством аддитивности обладают также внутренняя энергия, масса, объем (температура и давление таким свойством не обладают).

Более глубокий смысл энтропии вскрывается в статистической физике. Энтропия связывается с термодинамической вероятностью состояния системы.

Термодинамическая вероятность W состояния системы – это число способов, которыми может быть реализовано данное состояние макроскопической системы, или число микросостояний, осуществляющих данное макросостояние.

По определению, $W \geq \mathbf{1}$, т.е. термодинамическая вероятность не является вероятностью в математическом смысле, так как математическая вероятность $\boldsymbol{\omega} \leq \mathbf{1}$.

Согласно Больцману, энтропия S системы и термодинамическая вероятность связаны между собой следующим образом:

$$S = k \ln W, \tag{12.64}$$

где k – постоянная Больцмана.

Таким образом, энтропия определяется логарифмом числа микросостояний, с помощью которых может быть реализовано данное макросостояние. Следовательно, энтропия может рассматриваться как мера вероятности состояния термодинамической системы. Формула Больцмана (12.64) позволяет дать энтропии следующее статистическое толкование: *энтропия является мерой неупорядоченности системы.*

В самом деле, чем больше число микросостояний, реализующих данное макросостояние, тем больше энтропия. В состоянии равновесия – наиболее вероятном состоянии системы – число микросостояний максимально, при этом максимальна и энтропия.

Так как реальные процессы необратимы, то можно утверждать, что все процессы в замкнутой системе ведут к увеличению ее энтропии – *принцип возрастания энтропии*. При статистическом толковании энтропии это означает, что процессы в замкнутой системе идут в направлении увеличения числа микросостояний, иными словами, от менее вероятных состояний к более вероятным, до тех пор, пока вероятность состояния не станет максимальной.

12.9. Второе начало термодинамики

Первое начало термодинамики позволяет определить, возможен ли с энергетической точки зрения тот или иной процесс в замкнутой системе. Но при этом не говорится о возможных направлениях протекания процессов (в частности, самопроизвольных). Так, первое начало термодинамики не запрещает самопроизвольного перехода теплоты от холодного тела к горячему. Но, как известно, в природе такие процессы не наблюдаются. Второе начало термодинамики (его появление вызвано необходимостью дать ответ на вопрос, какие процессы в природе возможны, а какие нет) определяет направление развития процессов.

Используя понятие энтропии и неравенство Клаузиуса, второе начало термодинамики можно сформулировать как закон возрастания энтропии замкнутой системы при необратимых процессах*: любой необратимый процесс в замкнутой системе происходит так, что энтропия системы при этом возрастает.*

Можно дать более краткую формулировку второго начала термодинамики*: в процессах, происходящих в замкнутой системе, энтропия не убывает.* Здесь существенно, что речь идет о замкнутых системах, так как в незамкнутых системах энтропия может вести себя произвольным образом.

Формула Больцмана (12.64) позволяет объяснить постулируемое вторым началом термодинамики возрастание энтропии в замкнутой системе при необратимых процессах: *возрастание энтропии означает переход системы из менее вероятных в более вероятные состояния.* Таким образом, формула Больцмана позволяет дать статистическое толкование второго начала. Это начало, являясь статистическим законом, описывает закономерности хаотического движения большого числа частиц, составляющих замкнутую систему.

Приведем еще две формулировки второго начала термодинамики:

1. По Кельвину: *невозможен круговой процесс, единственным результатом которого является превращение теплоты, полученной от нагревателя, в эквивалентную ей работу*.
2. По Клаузиусу: *невозможен круговой процесс, единственным результатом которого является передача теплоты от менее нагретого тела к более нагретому*.

12.10. Применение второго начала термодинамики для определения изменения энтропии в процессах идеального газа

Второе начало не отрицает, а дополняет первое начало термодинамики, и поэтому должно содержать его в своем определении. Действительно, в определение энтропии входит величина δQ, определяемая первым началом термодинамики:

$$dS = \frac{\delta Q}{T} = \frac{dU + \delta A}{T}. \tag{12.65}$$

Формула (12.65) позволяет определять изменение энтропии в различных процессах идеального газа.

Адиабатный процесс. При адиабатном процессе $\delta Q = 0$. Поэтому изменение энтропии

$$\Delta S = \oint \frac{\delta Q}{T} = 0.$$

Таким образом, в адиабатном процессе энтропия системы не изменяется. Следовательно, адиабатный процесс – изоэнтропийный.

Изобарный процесс. $p = const$; $m = const$.

Проинтегрировав выражение (12.65), определим изменение энтропии идеального газа в изобарном процессе:

$$\Delta S = \int_{T_1}^{T_2} \frac{dU}{T} + \int_{V_1}^{V_2} \frac{\delta A}{T} = \frac{m}{M} C_V \int_{T_1}^{T_2} \frac{dT}{T} + R \int_{V_1}^{V_2} \frac{dV}{V} = \frac{m}{M} \left[C_V \ln\left(\frac{T_2}{T_1}\right) + R \ln\left(\frac{V_2}{V_1}\right) \right]. \quad (12.66)$$

Изотермический процесс. $T = const$; $m = const$.

Тогда

$$\Delta S = \int_1^2 \frac{\delta Q}{T} = \int_{V_1}^{V_2} \frac{\delta A}{T} = \frac{1}{T} \frac{m}{M} RT \ \ln\frac{V_2}{V_1} = \frac{m}{M} R \ \ln\frac{V_2}{V_1}. \quad (12.67)$$

Изохорный процесс. $V = const$; $m = const$.

Тогда

$$\Delta S = \int_1^2 \frac{\delta Q}{T} = \int_{T_1}^{T_2} \frac{dU}{T} = \frac{m}{M} C_V \ \ln\frac{T_2}{T_1}. \quad (12.68)$$

12.11. Третье начало термодинамики (теорема Нернста-Планка)

Первые два начала термодинамики дают недостаточно сведений о поведении термодинамических систем при абсолютном нуле температуры. Они дополняются третьим началом термодинамики: *энтропия всех тел в состоянии равновесия стремится к нулю по мере приближения температуры к нулю Кельвина:*

$$\lim_{T \to 0} S = 0.$$

Так как энтропия определяется с точностью до аддитивной постоянной, то эту постоянную удобно взять равной нулю. Из теоремы Нернста-Планка следует, что при $T = 0K$ теплоемкости C_p и C_V равны нулю.

Вопросы для самоконтроля

1. Что понимают под термодинамической системой?
2. Какое состояние называется термодинамическим равновесием?
3. Что понимают под внутренней энергией? Каковы ее свойства?
4. Что такое теплота? Каковы ее свойства?
5. Что понимают под числом степеней свободы молекулы?
6. Сколькими степенями свободы обладают одно-, двух-, трехатомные и многоатомные молекулы?

7. Как распределяется энергия по степеням свободы? Запишите выражение для энергии, приходящейся на одну степень свободы молекулы.

8. Как выражается: а) полная кинетическая энергия молекулы; б) внутренняя энергия одного моля; в) внутренняя энергия произвольной массы идеального газа?

9. Чему равно изменение внутренней энергии при изотермическом процессе, при других изопроцессах?

10. Как математически выражается работа в термодинамике?

11. В каком случае работа термодинамической системы положительна, отрицательна?

12. Как по графику (p,V) найти работу?

13. Какой термодинамический процесс называется круговым?

14. Как по графику (p,V) найти работу кругового процесса? Когда она положительна, отрицательна?

15. Как выражается работа газа при изобарном процессе, при изотермическом процессе? Как найти в этих случаях работу по графику (p,V)?

16. В чем сходство и в чем различие между работой и теплотой?

17. Что такое теплоемкость?

18. Какая теплоемкость называется удельной, молярной, при постоянном объеме, при постоянном давлении?

19. Как связаны удельная и молярная теплоемкости?

20. Сформулируйте первое начало термодинамики. Дайте пояснения.

21. Запишите уравнение первого начала термодинамики.

22. Что такое вечный двигатель первого рода?

23. Какие практические выводы вытекают из первого начала термодинамики?

24. Какой вид принимает первое начало термодинамики в применении к изотермическому, изобарному, изохорному процессам?

25. Как выражается молярная теплоемкость газов через число степеней свободы: при постоянном объеме, при постоянном давлении?

26. Какая теплоемкость больше – при постоянном давлении или при постоянном объеме – и почему?

27. Каково соотношение между теплоемкостями при постоянном объеме и при постоянном давлении?

28. Чему равна теплоемкость газа в изотермическом процессе? Поясните результат.

29. Какой процесс называется адиабатным?

30. Как изменяется температура газа при адиабатном расширении, при адиабатном сжатии? Объясните результат, пользуясь первым началом термодинамики.

31. Каким уравнением описывается адиабатный процесс?

32. Как определяется работа в адиабатном процессе?

33. При каком процессе происходит более быстрое изменение давления в зависимости от изменения объема – при изотермическом или адиабатном?

34. Изобразите на одном графике в координатах p,V адиабату и изотерму.

35. Чему равна теплоемкость в адиабатном процессе? Поясните результат.

36. Какой процесс называется политропическим?

37. Запишите уравнение политропического процесса. Какие значения может принимать показатель политропы?

38. Запишите выражение работы в политропическом процессе.

39. Запишите выражение теплоемкости в политропическом процессе.

40. Какое значение принимает показатель политропы в адиабатном, изотермическом, изохорном, изобарном процессах?

41. Получите из уравнения политропического процесса уравнения адиабатного, изотермического, изохорного, изобарного процессов.

42. Как из выражения теплоемкости в политропическом процессе получить теплоемкость в адиабатном, изотермическом, изохорном, изобарном процессах?

43. Какие термодинамические системы называют замкнутыми (изолированными)?

44. Какой процесс называется обратимым и какой – необратимым?

45. Приведите примеры обратимых (необратимых) газовых процессов и объясните, почему они обратимы (необратимы).

46. Изложите принцип работы теплового двигателя.

47. При каком условии тепловой двигатель может совершать работу при круговом процессе?

48. Что такое коэффициент полезного действия?

49. Как математически выражается КПД кругового газового процесса?

50. Что называется циклом Карно?

51. Почему цикл Карно называется идеальным?

52. Чему равен КПД цикла Карно?

53. Что дает цикл Карно в теоретическом, практическом отношении?

54. Как соотносятся КПД реального цикла и цикла Карно? Объясните результат.

55. Каков принцип действия холодильной машины?

56. Сформулируйте второе начало термодинамики.

57. Что такое вечный двигатель второго рода? Возможен ли он?

58. Что такое приведенная теплота?

59. Что называется энтропией? Что характеризует эта функция?

60. Как меняется энтропия при обратимом и необратимом процессе?

61. Сформулируйте второе начало термодинамики с точки зрения понятия энтропии.

62. Каков статистический смысл второго начала термодинамики?

63. Что такое термодинамическая вероятность?

64. Какова связь энтропии с термодинамической вероятностью?

65. Каковы статистические формулировки второго начала термодинамики?

66. Перечислите свойства энтропии.

67. Как изменяется энтропия: а) в адиабатном, б) изохорном, в) изотермическом, г) изобарном процессах?

68. Сформулируйте третье начало термодинамики.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В данном разделе курса физики рассмотрены вопросы классической и релятивистской механики, а также молекулярной физики и термодинамики.

Физика играет огромную роль в развитии современной техники (машиностроения, электротехники, электроники, теплотехники, ядерной энергетики и др.) и всех отраслей народного хозяйства. Это определяет ее особое значение для высшего образования, поскольку:

1) физика является базой для всех общеинженерных и технических дисциплин – теоретической механики, сопротивления материалов и теории упругости, теплотехники, электротехники, различных технологических курсов и др.;

2) пути развития любой отрасли современного производства очень тесно переплетаются с физикой; поэтому инженер любого профиля должен владеть ею, чтобы применять новейшие достижения физики в своем производстве.

Физика – это одна из наук о природе. Наряду с другими естественными науками (астрономия, химия, биология и др.) физика изучает свойства окружающего нас мира. Современная физика является наукой о строении материи, о простейших и наиболее общих формах ее движения, о взаимных превращениях форм движения и видов материи. Под материей понимают все то, что существует объективно, т.е. независимо от человеческого сознания, и что познается в чувственном человеческом опыте.

Наиболее важным свойством материи является движение. Движение – способ существования материи. В философском смысле движение – это любое изменение материи, всякий происходящий в природе процесс: физический, химический, биологический, общественный и др. Физика изучает простейшие и в то же время наиболее общие формы движения материи – механическое, тепловое, электромагнитное и т.д., которые содержатся во всех более сложных формах движения.

Целью автора учебного пособия является – сделать для студента фактически доступными основные понятия и закономерности механики и молекулярной физики, порой весьма непростые. Научить студента понимать, размышлять, проверять себя по вопросам для самоконтроля. Максимальное внимание уделять физическому смыслу изучаемого материала.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Трофимова, Т.И. Курс физики [Текст] / Т.И. Трофимова – М.: КноРус, 2015. – 592 с.

2. Бондарев, Б.В. Курс общей физики [Текст] / Б. В. Бондарев, Н.П. Калашников, Г. Г. Спирин. – М.: Юрайт, 2013. – 354 с.

3. Сивухин, Д.В. Общий курс физики [Текст] / Д.В. Сивухин. – М.: Физматлит, 2014. – 560 с.

4. Хавруняк, В.Г. Курс физики [Текст] / В.Г. Хавруняк. – М.: ИНФРА-М, 2014. – 400 с.

5. Грабовский, Р.И. Курс физики [Текст] / Р.И. Грабовский – СПб.: Лань, 2012. – 608 с.

6. Трофимова, Т.И. Сборник задач по курсу физики с решениями [Текст] / Т.И. Трофимова, З.Г. Павлова. – М.: Абрис, 2012. – 312 с.

7. Савельев, И.В. Курс общей физики [Текст]: в 3 т. Т. 2. Электричество и магнетизм. Волны. Оптика / И.В. Савельев. – М.: Лань, 2016. – 495 с.

О Г Л А В Л Е Н И Е

Учебное издание

Очкина Наталья Александровна

ФИЗИКА.
ФИЗИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ МЕХАНИКИ.
МОЛЕКУЛЯРНО-КИНЕТИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ И ТЕРМОДИНАМИКА
Учебное пособие по направлению подготовки 08.05.01 «Строительство уникальных зданий и сооружений»

Под общ. ред. Г.И. Грейсуха

Р е д а к т о р Н.Ю. Шалимова
В е р с т к а Н.А. Сазонова

Подписано в печать 29.09.2016. Формат 60×84/16.
Бумага офисная «Снегурочка». Печать на ризографе.
Усл. печ. л. 11,16. Уч.-изд. л. 12,0. Тираж 80 экз.
Заказ №643.

Издательство ПГУАС.
440028, г.Пенза, ул. Германа Титова, 28.