

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ  
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

---

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение  
высшего профессионального образования  
«Пензенский государственный университет  
архитектуры и строительства»

**М.А. Чиркина**

**МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ  
УСТРОЙСТВ СВЕРХВЫСОКИХ ЧАСТОТ  
НА МАГНИТНЫХ НАНОКОМПОЗИТАХ**

Пенза 2013

УДК 519.87:621.37(035.3)

ББК 22.18:32.84

Ч65

Рецензенты: кандидат технических наук, профессор, заведующий кафедры «Прикладная информатика» А.П. Ремонтов (ПГТА); доктор технических наук, профессор кафедры «Информационно-вычислительные системы» А.Н. Кошев (ПГУАС)

**Чиркина М.А.**

Ч65 Математическое моделирование устройств сверхвысоких частот на магнитных нанокompозитах: моногр. / М.А. Чиркина, 2013. – Пенза: ПГУАС, 2013. – 124 с.  
**ISBN 978-5-9282-0925-4**

Изложен декомпозиционный подход к математическому моделированию устройств сверхвысоких частот (СВЧ) на магнитных нанокompозитах, основанный на методе автономных блоков. Разработана математическая модель магнитного нанокompозита, базирующаяся на решении уравнений Максвелла совместно с уравнением, описывающим изменение намагниченности в форме Ландау-Лифшица. Решение получено для нового вида автономного блока в виде параллелепипеда с диэлектрическими наносферами, магнитными наночастицами и виртуальными каналами Флоке на гранях, что позволяет строить математические модели устройств СВЧ на уровне их наноструктур.

Предложена методика определения эффективных значений диэлектрической и магнитной проницаемостей магнитного нанокompозита, используемых в упрощенных математических моделях. Построены математические модели взаимодействия электромагнитного поля с диэлектрическими наносферами и магнитными наночастицами в прямоугольном волноводе, резонансном вентиле и циркуляторе, учитывающие гетерогенную структуру СВЧ устройств с магнитными нанокompозитами.

Монография подготовлена на кафедре «Информационно-вычислительные системы» и может быть полезна для специалистов в области математического моделирования, а также студентов бакалавриата и магистратуры направления 230400 «Информационные системы и технологии», в том числе для аспирантов.

**ISBN 978-5-9282-0925-4**

© Пензенский государственный университет архитектуры и строительства, 2013

© Чиркина М.А., 2013

## О Г Л А В Л Е Н И Е

ПРЕДИСЛОВИЕ .....	5
ВВЕДЕНИЕ .....	7
Глава 1. МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ПРИКЛАДНОЙ ЭЛЕКТРОДИНАМИКИ И ТЕХНИКИ СВЕРХВЫСОКИХ ЧАСТОТ ...	9
1.1. Анализ математических методов решения задач.....	9
1.2. Целесообразность использования проекционных методов .....	11
1.3. Проекционные методы в прикладных задачах электродинамики.....	15
1.4. Свободные колебания в полых резонаторах .....	20
1.5. Электромагнитные волны в волноводных и периодических структурах .....	21
1.6. Дифракция волн в экранированных системах и свободном пространстве .....	25
1.7. Ключевые задачи дифракции и их решение .....	29
Глава 2. РАЗРАБОТКА АВТОНОМНОГО БЛОКА ДЛЯ МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ МАГНИТНЫХ НАНОКОМПОЗИТОВ НА ОСНОВЕ ОПАЛОВЫХ МАТРИЦ .....	38
2.1. Структура магнитных нанокompозитов .....	38
2.2. Декомпозиционный подход к построению математических моделей.....	41
2.3. Собственные волны каналов Флоке автономного блока .....	47
2.4. Уравнения электродинамики для магнитных наночастиц автономного блока.....	55
2.5. Построение модели автономного блока с магнитными наночастицами и диэлектрическими наносферами.....	60
2.6. Дескрипторы автономных блоков .....	67
Глава 3. ПОСТРОЕНИЕ МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ МАГНИТНЫХ НАНОКОМПОЗИТОВ НА ОСНОВЕ ОПАЛОВЫХ МАТРИЦ.....	71
3.1. Реконструкция дескрипторов автономных блоков с виртуальными каналами Флоке.....	71
3.2. Методика построения декомпозиционных моделей устройств сверхвысоких частот.....	74
3.3. Поля и волны в трехмерных периодических магнитных нанокompозитах на основе опаловых матриц.....	79
3.4. Определение постоянных распространения волн в магнитных нанокompозитах на основе опаловых матриц .....	81

3.5. Экспериментальное подтверждение результатов математического моделирования .....	91
3.6. Методика определения эффективных значений магнитной и диэлектрической проницаемостей магнитного нанокompозита ...	96
Глава 4. ИССЛЕДОВАНИЕ УСТРОЙСТВ СВЕРХВЫСОКИХ ЧАСТОТ НА МАГНИТНЫХ НАНОКОМПОЗИТАХ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ.....	101
4.1. Прямоугольный волновод с поперечно намагниченными магнитными нанокompозитами .....	101
4.2. Резонансный вентиль на магнитных нанокompозитах .....	105
4.3. Волноводный циркулятор на магнитных нанокompозитах .....	106
ЗАКЛЮЧЕНИЕ .....	113
БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК .....	114

## ПРЕДИСЛОВИЕ

Одним из перспективных направлений использования современных нанотехнологий является создание новых конструкционных материалов, обладающих улучшенными эксплуатационными и потребительскими характеристиками. Получаемые в настоящее время с применением наноструктур композиты обладают рядом уникальных свойств: высокой прочностью и пластичностью, термо- и химической стойкостью, высокими магнитными и другими характеристиками. Однако создание нанокompозитов с заданными свойствами не подкреплено адекватным математическим моделированием происходящих в них физических процессов. Это не позволяет на этапе проектирования с достаточной достоверностью прогнозировать характеристики разрабатываемых с их использованием устройств.

Одним из важных направлений развития нанотехнологий является получение магнитных нанокompозитов на основе опаловых матриц из кубических упаковок наносфер двуокиси кремния с межсферическим заполнением пустот матриц магнитными материалами [59]. Исследование физических явлений и эффектов в магнитных нанокompозитах особенно актуально по причине неподверженности магнитных приборов на их основе воздействию радиации. Для применений, требующих реализации невзаимных функций, например, в циркуляторах и вентилях, используемых в технике сверхвысоких частот (СВЧ), нет иной альтернативы, кроме магнитных приборов. Новые устройства и приборы на основе магнитных нанокompозитов способны работать в широком частотном диапазоне (1–160 ГГц) и осуществлять аналоговую обработку и нелинейное преобразование сигналов.

Анализ научной литературы показывает [83], что к перспективным магнитным нанокompозитам относятся опаловые матрицы из кубических упаковок наносфер двуокиси кремния. Опаловые матрицы характеризуются наличием широкого диапазона изменения диаметров наносфер (180–1200 нм), возможностью получения массивных образцов и сравни-

тельно простой технологией изготовления структур, получивших название «инверсных опалов». После заполнения межсферических пустот необходимыми материалами химическими методами вытравливаются сами наносферы, при этом остается трехмерная нанорешетка введенных материалов.

До настоящего времени не существовало адекватных математических моделей магнитных нанокompозитов и устройств СВЧ на основе опаловых матриц, реализующих невзаимные функции, что приводило к значительным временным и материальным затратам при проектировании.

Широко используемые в настоящее время вычислительные методы, например, FEM, FTDM (методы конечных элементов и конечно-разностные методы во временной области), на основе которых реализованы алгоритмы в известных коммерчески доступных пакетах прикладных программ: «High Frequency Structure Simulator» (Ansoft), «Advanced Design System» (Agilent), MSC (MacNeil-Schwendler), Microwave Office, Microwave Studio, FEKO – адекватны информационным технологиям сегодняшнего дня, однако не включают математическое моделирование магнитных нанокompозитов и устройств сверхвысоких частот на их основе.

Численное исследование физических явлений и эффектов в устройствах и приборах на основе магнитных нанокompозитов требует развития новых подходов к электродинамическому моделированию, использующих мощные вычислительные методы современной математики, одним из которых является метод автономных блоков [1].

Необходимость развития новых подходов математического моделирования магнитных приборов следует из-за сложности, а иногда и невозможности, проектирования интегральных конструкций традиционными способами многократных экспериментальных проб на ряде последовательно усложняющихся макетов. Предел экспериментально-эмпирическому подходу к проектированию конструкций приборов сверхвысоких частот на основе магнитных нанокompозитов обусловлен сложностью организации многократного макетирования устройства и недостаточной надежностью экспериментальных методов исследования параметров элементов, входящих в состав устройства.

В настоящей книге обобщены материалы многочисленных публикаций по проблемам математического моделирования магнитных нанокompозитов и устройств СВЧ на их основе, а также результаты многолетних исследований ее авторов.

## ВВЕДЕНИЕ

При декомпозиционном подходе к построению математических моделей устройств и приборов СВЧ наибольшую ценность представляют базовые элементы в виде универсальных автономных блоков, полученных на электродинамическом уровне строгости (краевые задачи для уравнений электродинамики решаются без упрощения краевых условий и уравнений). Такие универсальные автономные блоки позволяют строить дискретные алгоритмические модели для широкого класса устройств и приборов сверхвысоких частот.

Магнитный нанокompозит на основе опаловой матрицы представляет собой трехмерную периодическую структуру с ячейками, содержащими магнитные наночастицы. Построение математических моделей таких периодических структур на основе известных решений: автономных многомодовых блоков [28], минимальных автономных блоков [25] и автономных блоков с виртуальными каналами Флоке [41] весьма проблематично, т.к. эти автономные блоки имеют однородное изотропное заполнение.

Для математического моделирования магнитных нанокompозитов и устройств на его основе необходимо разработать новый автономный блок в виде прямоугольного параллелепипеда с диэлектрическими наносферами, магнитными наночастицами и виртуальными каналами Флоке на гранях. Этот автономный блок также необходим и для создания методики определения эффективных значений диэлектрической и магнитной проницаемостей магнитного нанокompозита, используемой в упрощенных математических моделях.

Таким образом, разработка нового автономного блока в виде прямоугольного параллелепипеда с диэлектрическими наносферами, магнитными наночастицами и виртуальными каналами Флоке на гранях для математического моделирования магнитных устройств и приборов является актуальной.

В первой главе проводится анализ методов решения задач современной прикладной электродинамики и техники СВЧ. Предлагается использовать

декомпозиционный подход к математическому моделированию современных систем и устройств СВЧ из-за сложности их конструкций. Устройства СВЧ рассматриваются как волноводные трансформаторы, режимы которых описываются при помощи дескрипторов – математических описаний в виде матриц проводимости, сопротивления и рассеяния.

Вторая глава посвящена разработке автономного блока для математических моделей магнитных нанокompозитов на основе опаловых матриц из кубических упаковок наносфер двуокиси кремния с межсферическими пустотами, заполненными магнитными частицами.

Третья глава содержит результаты разработки математических моделей магнитных нанокompозитов на основе опаловых матриц. Математическая модель магнитного нанокompозита в целом находится как объединение дескрипторов автономных блоков по правилам, вытекающим из непрерывности касательных составляющих электрического и магнитного полей смежных граней объединяемых блоков.

В заключительной четвертой главе рассмотрены и исследованы математических модели устройств СВЧ с магнитными нанокompозитами, построенные на основе автономных блоков в виде параллелепипедов с диэлектрическими наносферами и магнитными наночастицами, и их приближенные аналитических аналоги на основе полученных эффективных значений компонентов тензора магнитной и скаляра диэлектрической проницаемостей.

Результаты математического моделирования прямоугольного волновода, заполненного на магнитным нанокompозитом, с использованием построенных моделей близки к известным результатам экспериментальных исследований. Это дает основание полагать, что для исследования и проектирования принципиально новых устройств СВЧ на магнитных нанокompозитах целесообразно использовать предложенные математические модели, построенные по методу автономных блоков.



# Глава 1. МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ПРИКЛАДНОЙ ЭЛЕКТРОДИНАМИКИ И ТЕХНИКИ СВЕРХВЫСОКИХ ЧАСТОТ

## 1.1. Анализ математических методов решения задач

Универсальные принципы расчета волноводов, резонаторов и волноводных трансформаторов с неоднородной анизотропной средой, основанные на методе Бубнова-Галеркина («метод собственных функций»), были предложены Никольским В.В. и Каценеленбаумом Б.З. [1, 2] в 1960 году. Большое число примеров применения метода Бубнова-Галеркина к задачам о волноводах, резонаторах и волноводных трансформаторах, содержащих гиромагнитные среды, приводится в [1–7], там же имеется большое количество детализаций и теоретических дополнений.

Название «метод поперечных сечений» дается в [2], где содержится подробная разработка метода применительно к слабо нерегулярным волноводам. Там приводится подробная библиография к работам этого направления до 1961 года. Однако существенное развитие и строгая разработка метода поперечных сечений как проекционного, а также его реализация на электронно-вычислительных машинах (ЭВМ) для широкого круга волноводных задач начинается работами Свешникова А. Г. в 1963 году [3]. Вариационная интерпретация метода поперечных сечений дается в [1]. Отметим одну важную особенность подхода, предложенного Свешниковым А.Г., было показано, что посредством преобразования координат область с нерегулярной границей приводится к такой, граница которой регулярна, причем оператор Максвелла при таком преобразовании может быть сохранен, а изменяются лишь проницаемости среды (в частности, однородная изотропная среда становится неоднородной и анизотропной).

Применение проекционных методов к задачам дифракции и излучения в свободном пространстве начинается работами [4, 5]. Принцип «импедансной трактовки» сформулирован в работах [6, 7], проекционная модель описана в [6, 8]. В [9–11] опубликованы результаты реализации этого алгоритма для задач волноводного типа и объектов в свободном пространстве (сложные объекты дифракции в прямоугольном волноводе, диэлектрические антенны).

В [8] проекционная модель распространена также на открытые волноводы и периодические системы. В [12, 13] построены алгоритмы нового типа.

Так, например, было показано, что выгодно использовать базисы, получаемые при решении однородной задачи с фиксированным оператором импеданса (при частоте, соответствующей режиму возбуждения). Замечательным моментом при этом является совпадение краевых условий

на открытой границе для базисных функций и для искомого решения (базисные функции удовлетворяют условию неасимптотического излучения).

В [14] построена модификация метода Бубнова-Галеркина, приспособленная к классу задач с сильными возмущениями среды в пространственно малых зонах (обычный метод Галеркина в этих случаях неэффективен).

В работе [15] приведено большое количество данных реализации метода поперечных сечений для задач дифракции плоской однородной волны на цилиндре (двумерная скалярная формулировка). Металлический цилиндр окружен неоднородным поглощающим диэлектриком. В [16] рассмотрена двумерно-периодическая система конических диэлектрических стержней, которыми заканчиваются регулярные волноводы. Приведены некоторые промежуточные результаты реализации алгоритма, построенного на основе метода поперечных сечений.

Метод Трефтца (при построении частичных областей) является старейшим в электродинамике, а его применение к задаче о стыке волноводов имеет свою историю. В работах [18, 19] были представлены доказательства сходимости метода для задачи о стыке волноводов. В [20–22] метод Трефтца применен к нерегулярным полосковым объектам.

Результаты комбинированного метода к сложным волноводным системам обсуждаются в [23]. Комбинированный метод применялся и к антенным решеткам: для этой цели понадобилось методом Бубнова-Галеркина построить модель двумерно-периодической системы диэлектрических стержней [24].

Проекционные модели на основе метода минимальных блоков [25, 26] и метода автономных многомодовых блоков [27–30] позволили в полной мере реализовать декомпозиционный подход решения краевых задач прикладной электродинамики и техники сверхвысоких частот. Декомпозиционный подход позволяет строить системы автоматизированного моделирования и проектирования устройств и систем сверхвысоких частот.

С 1990 года впервые Головановым О.А. разрабатываются математические модели устройств и систем сверхвысоких частот с нелинейными средами на основе проекционных методов. Предложена и исследована математическая модель удвоения частоты в экранированной структуре с полосковым проводником и нелинейным диэлектриком [31]. Разработаны нелинейные автономные блоки для исследования нерегулярных волноводов и резонаторов с нелинейными средами [32]. Построен численный алгоритм решения задач дифракции для волноводных устройств СВЧ с нелинейными средами [33]. Разработана методика использования минимальных автономных блоков для построения математических моделей волноводных устройств СВЧ с нелинейными средами [34]. Исследованы на математических моделях электродинамического уровня нерегулярные волноводы и резонаторы с нелинейными средами [35]. Решена задача

дифракции на нелинейном диэлектрике в системе связанных полосковых линий [36]. Проведен электродинамический анализ полосково-щелевых линий с гиротропными нелинейными средами [37]. Построены и исследованы математические модели устройств СВЧ с полупроводниковыми нелинейными средами [38].

В настоящее время проекционные методы широко используются в декомпозиционном подходе решения линейных и нелинейных краевых задач дифракции прикладной электродинамики и техники сверхвысоких частот [39-51]. Область исследуемого устройства и системы сверхвысоких частот разбивается на автономные блоки. Для автономных блоков при помощи проекционного метода [52] определяются дескрипторы – математические описания в виде системы нелинейных уравнений (нелинейные краевые задачи) или матриц рассеяния и проводимости (линейные краевые задачи). Решение краевой задачи электродинамики в целом ищется как объединение дескрипторов автономных блоков.

## 1.2. Целесообразность использования проекционных методов

Пусть некоторая функция  $u$ , определенная в области  $V$ , представляется ортогональным рядом (ряд Фурье) по полной ортонормированной системе  $\{u_n\}$ . Это значит, что находятся коэффициенты  $\{a_n\}$  представления

$$\underline{u} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n u_n, \quad (1.1)$$

где  $\underline{u}$  – обозначение для ряда Фурье функции  $u$ . При этом выполняется требование:

$$(\underline{u}, u_k) = (u, u_k); k = 1, 2, \dots, \infty, \quad (1.2)$$

где скобки означают скалярное произведение. Скалярное произведение определяется по правилу [1]:

$$(u, v) = \int_V uv dV. \quad (1.3)$$

Здесь фигурируют произвольные функции  $u$ ,  $v$ , определенные в  $V$ , принадлежащие комплексному гильбертову пространству. Понятие скалярного произведения определяется при помощи некоторых аксиом (устанавливается, что выражение (1.3) им подчинено). Можно проводить аналогию скалярного произведения в гильбертовом пространстве с «обычным» скалярным произведением, как его понимают в векторной алгебре.

Ортонормированная система  $\{u_n\}$  – это совокупность функций  $u_1, u_2, \dots, u_k, \dots$ , таких, что

$$(u_k, u_n) = \delta_{kn} = \begin{cases} 0, & k \neq n; \\ 1, & k = n, \end{cases} \quad (1.4)$$

где  $\delta_{kn}$  – символ Кронекера. Ортонормированная, т. е. ортогональная и нормированная система включает лишь функции, скалярные произведения которых равны нулю для разных функций (ортогональность) и единице для совпадающих (нормировка).

В трехмерном «физическом» пространстве, как известно, всегда можно построить систему ортов (единичных векторов)  $\vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0$ , отвечающих некоторой декартовой системе координат  $x, y, z$ . Данная система ортов является ортонормированной системой. Обозначив  $\vec{x}_0 = \vec{e}_1, \vec{y}_0 = \vec{e}_2, \vec{z}_0 = \vec{e}_3$ , имеем:

$$(\vec{e}_k, \vec{e}_n) = \delta_{kn}, \quad k, n = 1, 2, 3, \quad (1.5)$$

где скалярное произведение соответствует нормам векторной алгебры. Если в рассматриваемом трехмерном пространстве задан произвольный вектор  $\vec{F}$ , то его можно представить в виде

$$\vec{F} = \vec{x}_0 F_1 + \vec{y}_0 F_2 + \vec{z}_0 F_3 = \sum_{n=1}^3 F_n \vec{e}_n, \quad (1.6)$$

где

$$F_n = (\vec{F}, \vec{e}_n) \quad (n = 1, 2, 3) \quad (1.7)$$

– проекции вектора  $\vec{F}$  на ортогональные направления, которым отвечают векторы  $\vec{e}_n$  ( $n = 1, 2, 3$ ).

Обратимся к ряду Фурье  $u$  (1.1) функции  $u$ . Учитывая равенство (1.2) и ортонормировку (1.4) системы  $\{u_n\}$  находим:

$$a_n = (u, u_n), \quad n = 1, 2, \dots, \infty. \quad (1.8)$$

Это формула служит для вычисления чисел  $a_n$ , называемых коэффициентами рядов Фурье. Структуры выражений (1.7) и (1.8) тождественны, а это означает, что коэффициенты Фурье в свою очередь можно истолковать как проекции. Разлагаемая функция предстает как вектор в бесконечномерном пространстве, проектируемый на «направления», соответствующие элементам ортонормированной системы  $\{u_n\}$ . Итак, разложение в ряд Фурье осмысливается как проектирование в функциональном пространстве.

Затронем проблему полноты системы функций  $\{u_n\}$ . Для сравнения отметим, что систему трех ортов  $\vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0$  можно назвать полной в том смысле, что разложение (1.6) может быть построено для любого вектора  $\vec{F}$ . Очевидно, система двух из этих ортов была бы неполной. Подобно этому полнота системы  $\{u_n\}$  означает разложимость любой квадратично интегрируемой функции в  $V$  в ряд Фурье (1.1). При этом

$$(u - \underline{u}, u - \underline{u}) = \|u - \underline{u}\|^2 = 0, \quad (1.9)$$

где корень из скалярного произведения совпадающих функций, называется нормой, и обозначается символом  $\|v\|$ .

В основе проекционных методов лежит стремление искать решение задачи при помощи операций, прямо или косвенно связанных с проектированием в функциональном пространстве. Рассмотрим обладающий большой общностью подход, называемый методом (процессом) Бубнова – Галеркина.

Поставленную задачу сжато сформулируем в виде соотношения

$$\check{L}u = f, \quad (1.10)$$

где  $\check{L}$  – оператор задачи, например, дифференциальный или интегральный с заданием краевых условий, либо иной; будем полагать его линейным. В правой части выражения – заданная функция  $f$ , выражающая обычно фактор возбуждения исследуемого объекта (вынуждающая сила). Символом  $u$  обозначено неизвестное решение задачи.

Рассмотрим тождественно равную нулю функцию  $\check{L}u - f = 0$ . Разлагая ее в ряд Фурье, мы должны получить все коэффициенты ряда Фурье равными нулю. Взяв систему  $\{u_n\}$  и пользуясь правилом вычисления коэффициентов Фурье (1.8), имеем

$$(\check{L}u - f, u_k) = 0, \quad k = 1, 2, \dots, \infty. \quad (1.11)$$

Приближенное решение задачи будем искать в виде ортогонального представления

$$u^N = \sum_{n=1}^N a_n^N u_n \quad (1.12)$$

(верхний индекс  $N$  характеризует число членов суммы), где коэффициенты  $a_n^N$  – некоторые неизвестные величины; систему  $N$  функций будем называть базисом процесса Бубнова-Галеркина.

Будем считать, что для каждой базисной функции  $u_n$  имеет смысл выражение  $\check{L}u_n$  ( $u_n$  принадлежит области определения оператора  $\check{L}$  или кратко:  $u_n \in D_{\check{L}}$ ). Это необходимо, чтобы представление  $u^N$  (1.12) можно



всяком конкретном  $N$  коэффициенты  $a_n^N$  отличаются от коэффициентов ряда Фурье  $a_n$ . Строгое доказательство сходимости метода Бубнова-Галеркина для того или иного класса задач может оказаться, трудной проблемой. Значительный интерес представляют задачи на собственные значения; в этом случае фигурирует физический объект при отсутствии внешних воздействий. Полагая в (1.10)  $f = 0$ ,  $\tilde{L} = \tilde{A} - \lambda q$ , где  $\lambda$  – параметр;  $q$  – «оператор веса» (функция или константа), получаем формулировку:

$$\tilde{A}u - \lambda qu = 0. \quad (1.17)$$

Задача на собственные значения имеет серию решений  $u = u^1, u = u^2, \dots, u = u^n, \dots$ , которые реализуются при соответствующих значениях параметра  $\lambda: \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n, \dots$ . По определению,  $u^n$  – собственные функции, а отвечающие им  $\lambda_n$  – собственные значения задачи (1.17). Эти величины являются неизвестными и подлежат нахождению при ее решении.

Применяя метод Бубнова-Галеркина, вместо (1.13) имеем:

$$(\tilde{A}u^N - \lambda^N qu^N, u_k) = 0, \quad k = 1, 2, \dots, N, \quad (1.18)$$

где  $\lambda^N$  – означает приближенное значение  $\lambda$ , которое будет получено при проведении процесса Бубнова-Галеркина. Вместо (1.15) имеем однородную линейную систему алгебраических уравнений:

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{a}^N - \lambda^N \mathbf{Q} \cdot \mathbf{a}^N = 0, \quad (1.19)$$

где  $\mathbf{A}, \mathbf{Q}$  – матрицы с элементами  $(Au_n, u_n)$  и  $(Qu_n, u_n)$  соответственно. Из условия совместности системы

$$\text{Det}|\mathbf{A} - \lambda^N \mathbf{Q}| = 0 \quad (1.20)$$

следует характеристическое уравнение относительно  $\lambda^N$  (алгебраическое уравнение степени  $N$ ). Его корни  $\lambda_1^N, \lambda_2^N, \dots$  – приближенные значения искомых величин  $\lambda_1, \lambda_2, \dots$ .

### 1.3. Проекционные методы в прикладных задачах электродинамики

Типичными задачами электродинамики для техники сверхвысоких частот являются исследование дифракции в экранированной или открытой системе (рис. 1.1, а, б, в). В частности, речь может идти о регулярном полом волноводе, внутри которого помещен какой-то элемент, «объект дифракции» (рис. 1.1, а).

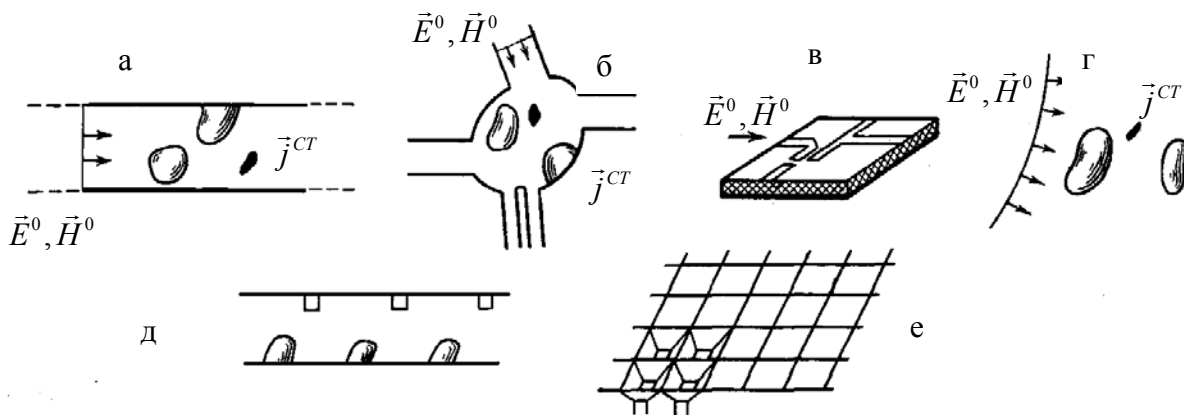


Рис. 1.1. Типичные задачи электродинамики:  
 а, б, в – дифракции в экранированной и открытой системах;  
 г – дифракция в свободном пространстве; д, е – периодические системы

Падающая волна  $\vec{E}^0, \vec{H}^0$  (чаще волна основного типа) возбуждает этот элемент, который «переизлучает» бесконечный спектр нормальных волн в прямом и обратном направлениях. Нахождение комплексных амплитуд этих волн и есть в данном случае цель задачи дифракции. Если к тому же в волноводе имеются ближние источники (область стороннего тока  $\vec{j}^{CT}$  на рис.1.1,а), то они также создают спектр нормальных волн. Геометрически более сложные объекты изображены на рис. 1.1,б,в. Но и в этих случаях суть дифракционной задачи не меняется.

Дифракция в свободном пространстве показана на рис. 1.1,г. Объект дифракций подвергается действию падающей волны  $\vec{E}^0, \vec{H}^0$ , которая является сферической или плоской однородной. В таком виде ставится задача о приемной антенне. При отсутствии падающей волны и задании ближних источников ( $\vec{j}^{CT}$  на рис. 1.1,г) возникает постановка задачи о передающей антенне. Если возбуждение полностью отсутствует, имеем задачу о свободных колебаниях объекта в свободном пространстве, выступающего как открытый резонатор.

Отдельного внимания заслуживают периодические системы. На практике, естественно, встречаются лишь конечные объекты, которые удобно рассматривать, как участки одномерно периодических или двумерно периодических, а иногда трехмерно-периодических (бесконечных) систем. На рис. 1.1,д представлена одномерно периодическая структура на основе полого волновода, а на рис. 1.1,е – двумерно-периодическая структура, представляющая собой антенную решетку

Легко видеть, что некоторые из отмеченных объектов являются энергетически изолированными (экранированными), а другие – энергетически незамкнутыми (открытыми). Постановка задачи дифракции всегда предполагает незамкнутость системы.



Теоретические основы построения математических моделей электродинамических систем (рис.1.1) – это уравнения Максвелла, в справедливости которых не принято сомневаться. Математическая теория макроскопической электродинамики развита в стройную систему, где центральное место занимает формулирование краевых задач для уравнений Максвелла. Любая электродинамическая система (устройство) получает на этом пути свой адекватный математический образ или математическую модель. Необходимо подчеркнуть, что адекватность, т.е. полное соответствие этой модели реальной электродинамической системе, есть качество, непосредственно следующие из физической содержательности уравнений Максвелла, которая признана современной наукой.

Будем рассматривать гармонические во времени процессы. Уравнения Максвелла формулируются при этом относительно комплексных амплитуд  $\vec{E}_m, \vec{H}_m$ , напряженности поля  $\vec{E}, \vec{H}$  находятся как вещественные части комплексных представлений:  $\vec{E} = \text{Re } \vec{E}_m \exp(i\omega t)$  и  $\vec{H} = \text{Re } \vec{H}_m \exp(i\omega t)$ . Для упрощения записи, однако, как это принято, везде будут фигурировать  $\vec{E}, \vec{H}$  в качестве обозначений комплексных амплитуд. Таким образом, уравнения Максвелла пишутся в форме [1]:

$$\begin{cases} \text{rot } \vec{H} = i\omega \epsilon_a \vec{E} + \vec{j}^{\text{CT}}; \\ \text{rot } \vec{E} = -i\omega \mu_a \vec{H}. \end{cases} \quad (1.21)$$

В этой записи  $\epsilon_a$  и  $\mu_a$  понимаются как функции координат, вообще тензоры с комплексными компонентами.

При исключении  $\vec{E}, \vec{H}$  возникают уравнения с дифференциальными операторами  $\mu_a^{-1} \text{rot } \epsilon_a^{-1} \text{rot}$  и соответственно  $\epsilon_a^{-1} \text{rot } \mu_a^{-1} \text{rot}$ . Можно оставить в (1.21) индукции  $\vec{D} = \epsilon_a \vec{E}$  и  $\vec{B} = \mu_a \vec{H}$ . Тогда в уравнениях второго порядка участвуют операторы вида:

$$\text{rot } \mu_a^{-1} \text{rot } \epsilon_a^{-1} \text{ и } \text{rot } \epsilon_a^{-1} \text{rot } \mu_a^{-1}.$$

В ряде случаев для сокращения записи уравнений Максвелла (1.21) удобно использовать следующую формулу:

$$\check{M}F = \omega \pi F + \varphi, \quad (1.22)$$

где

$$F = \begin{pmatrix} \vec{E} \\ \vec{H} \end{pmatrix}; \quad \check{M} = i \begin{pmatrix} 0 & -\text{rot} \\ \text{rot} & 0 \end{pmatrix}; \quad \pi = \begin{pmatrix} \epsilon_a & 0 \\ 0 & \mu_a \end{pmatrix}; \quad \varphi = -i \begin{pmatrix} \vec{j}^{\text{CT}} \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (1.23)$$

Столбец  $F$  будем называть «полем»,  $\check{M}$  – «оператором Максвелла»,  $\pi$  – «проницаемостью»,  $\varphi$  – «источником».

Уравнения Максвелла сами по себе выражают лишь общие принципы теории электромагнетизма и не могут иметь каких-либо определенных решений, пока не произведена математическая формализация, рассматриваемого электродинамического объекта. Формализация включает описание сред (конкретные  $\epsilon_a$  и  $\mu_a$ ), конфигураций (задание границ, на которых должны выполняться краевые условия), а также условий возбуждения (сторонние токи или поля, в частности, падающие волны). Существуют и другие дополнительные требования, налагаемые на отыскиваемые решения электродинамических задач, например условие излучения. Однако не будем останавливаться здесь на вопросах «правильности» постановки задач электродинамики. Отметим только, что для задач о возбуждении полей (к ним относятся задачи дифракции) основным критерием служит принцип единственности решения. Действительно, при полном описании всех факторов определяющих электромагнитный процесс, должно быть получено решение, отвечающее именно этому единственно возможному процессу. Поэтому, если в некоторой постановке задачи единственность решения гарантируется, то тем самым оправдывается данная постановка.

Применительно к уравнениям Максвелла (1.21) проекционная форма (1.11) имеет следующий вид [12]:

$$\begin{aligned} \int_V (\text{rot} \vec{H} - i\omega \epsilon_a \vec{E} - \vec{j}^{\text{CT}}) \cdot \vec{E}_k^* dV &= 0; \\ \int_V (\text{rot} \vec{E} + i\omega \mu_a \vec{H}) \cdot \vec{H}_k^* dV &= 0; k = 1, 2, \dots, \infty, \end{aligned} \quad (1.24)$$

где  $V$  – основная область задачи;  $\vec{E}_k, \vec{H}_k$  – функции принадлежат полным ортонормированным системам  $\{\vec{E}_n\}, \{\vec{H}_n\}$ ; \* – комплексно-сопряженные величины. Заметим, что пока решаемая задача электродинамики не конкретизирована – для этого следует сформулировать краевые условия на поверхности  $S$ , ограничивающей объем  $V$ .

В качестве систем  $\{\vec{E}_n\}, \{\vec{H}_n\}$  удобно использовать системы собственных функций, порождаемых следующей краевой задачей [52]:

$$\left. \begin{aligned} \text{rot} \vec{H}_n &= i\omega_n \epsilon_0 \vec{E}_n; \\ \text{rot} \vec{E}_n &= -i\omega_n \mu_0 \vec{H}_n; \end{aligned} \right\} \text{в области } V_0, \quad (1.25)$$

$$\vec{E}_{n\tau} = 0 \text{ на } S,$$

где  $\epsilon_0, \mu_0$  – диэлектрическая и магнитная постоянные. В простейшем случае объем  $V_0$  совпадает с объемом  $V$ , но  $V$  может быть и частью  $V_0$ . В ряде важных случаев, иногда вместо краевого условия  $\vec{E}_{n\tau} = 0$  берутся дру-

гие краевые условия. Соленоидальные собственные функции  $\vec{E}_n, \vec{H}_n$  (для которых  $\text{div}\vec{E}_n = 0, \text{div}\vec{H}_n = 0$ ) – это в данном случае собственные поля полого резонатора, а отвечающие им величины  $\omega_n$  – соответствующие собственные частоты. Имеются, еще потенциальные собственные функции ( $\text{rot}\vec{E}_n = 0, \text{rot}\vec{H}_n = 0$ ), которым соответствуют собственные значения равные нулю  $\omega_n = 0$ . Функции  $\vec{E}_n, \vec{H}_n$  ортонормируются в виде:

$$\mu_0 \int_{V_0} \vec{H}_k^* \cdot \vec{H}_n dV = \varepsilon_0 \int_{V_0} \vec{E}_k^* \cdot \vec{E}_n dV = \delta_{kn}. \quad (1.26)$$

Эта связь следует из (1.25).

В методе Бубнова – Галеркина неизвестное решение задачи  $\vec{E}, \vec{H}$  представляется в форме:

$$\vec{E}^N = \sum_{n=1}^N a_n^N \vec{E}_n; \quad \vec{H}^N = \sum_{n=1}^N b_n^N \vec{H}_n. \quad (1.27)$$

Прямая подстановка (1.27) в (1.24) допустима далеко не всегда. Это может привести к неверным результатам. Действительно, рассчитывая на сходимость процесса, надо требовать, чтобы подстановка сохраняла смысл при  $N \rightarrow \infty$ , но это значит, что должно быть оправдано почленное дифференцирование (точнее, применение операции  $\text{rot}$ ) по отношению к ортогональным рядам, в которые переходят представления (1.27). Указанную трудность легко обойти, выполнив предварительно в (1.24) интегрирование по частям (для этого используется тождество  $\vec{b} \text{rot} \vec{a} - \vec{a} \text{rot} \vec{b} = \text{rot}(\vec{a} \times \vec{b})$  и формула Остроградского-Гаусса). Преобразуя, таким образом, проекционную форму (1.24) и учитывая (1.25), получаем:

$$\left\{ \begin{array}{l} \omega \int_{V_0} \varepsilon_a \vec{E} \cdot \vec{E}_k^* dV - \omega_k \mu_0 \int_{V_0} \vec{H} \cdot \vec{H}_k^* dV - i \oint_S (\vec{E}_k^* \times \vec{H}) \cdot d\vec{S} - i \int_{V_0} \vec{j}^{\text{CT}} \cdot \vec{E}_k^* dV = 0; \\ -\omega_k \varepsilon_0 \int_{V_0} \vec{E} \cdot \vec{E}_k^* dV + \omega \int_{V_0} \mu_a \vec{H} \cdot \vec{H}_k^* dV - i \oint_S (\vec{E} \times \vec{H}_{k(m)}) \cdot d\vec{S} = 0; \end{array} \right. \quad (1.28)$$

$$k = 1, 2, \dots, \infty.$$

В проекционной форме (1.28) отсутствует почленное дифференцирование. Указанная трудность дифференцирования рядов преодолена.

## 1.4. Свободные колебания в полых резонаторах

Полностью экранированные и некоторые родственные им электродинамические системы являются наиболее простым объектом приложения проекционных методов. Рассмотрим полый резонатор (рис.1.1,в,г) с неоднородной и анизотропной средой (изотропия выступает как частный случай). В простейшем случае резонатор регулярен (задача может быть решена методом разделения переменных), когда внутренняя среда однородна и изотропна. Такие резонаторы будем называть «резонаторы с регулярной оболочкой». Такими резонаторами являются: резонатор прямоугольный (в виде параллелепипеда), круглый (в виде кругового цилиндра), сферический (в виде шара). Для них в аналитическом виде можно построить системы функций  $\{\vec{E}_n\}$  и  $\{\vec{H}_n\}$ , порождаемые краевой задачей (1.25), и удовлетворяющие краевым условиям на внешней границе моделируемого резонатора ( $V_0 = V$ ).

Не выходя за пределы этого класса моделей, и не рассматривая идеально проводящих включений внутри резонаторов, замечаем, что поверхностные интегралы в (1.28) обращаются в нуль ввиду краевых условий для неизвестного решения  $\vec{E}$  и базисных функций  $\vec{E}_n$ . С учетом  $\vec{j}^{\text{CT}} = 0$ , запишем (1.28) в виде [52]:

$$\begin{cases} \omega^N \int_{V_0} \varepsilon_a \vec{E}^N \cdot \vec{E}_k^* dV - \omega_k \mu_0 \int_{V_0} \vec{H}^N \cdot \vec{H}_k^* dV = 0; \\ -\omega_k \varepsilon_0 \int_{V_0} \vec{E}^N \cdot \vec{E}_k^* dV + \omega^N \int_{V_0} \mu_a \vec{H}^N \cdot \vec{H}_k^* dV = 0; k = 1, 2, \dots, \infty, \end{cases} \quad (1.29)$$

где смысл символа  $\omega^N$  тот же, что и  $\lambda^N$  в (1.18).

Внося в (1.29) представления напряженностей (1.27), приходим к следующей системе алгебраических уравнений:

$$\begin{cases} \omega^N \check{\mathbf{A}} \cdot \mathbf{a}^N - \mathbf{\Omega} \cdot \mathbf{b}^N = 0; \\ -\mathbf{\Omega} \cdot \mathbf{a}^N + \omega^N \check{\mathbf{M}} \cdot \mathbf{b}^N = 0, \end{cases} \quad (1.30)$$

где  $\mathbf{a}^N$  и  $\mathbf{b}^N$  – векторы (в смысле алгебры), составленные из коэффициентов  $a^N$  и  $b^N$  представлений (1.27), а  $\check{\mathbf{A}}, \check{\mathbf{M}}, \mathbf{\Omega}$  – матрицы со следующими элементами:

$$\check{\mathbf{A}}_{kn} = \int_V \vec{E}_k^* \cdot \varepsilon_a \vec{E}_n dV; \check{\mathbf{M}}_{kn} = \int_{V_0} \vec{H}_k^* \cdot \mu_a \vec{H}_n dV = 0; \mathbf{\Omega}_{kn} = \delta_{kn} \omega_n, \quad (1.31)$$

где  $\mathbf{\Omega}$  – диагональная матрица.

В более, подробной записи, учитывающей, что системы функций  $\{\vec{E}_n\}$  и  $\{\vec{H}_n\}$  распадаются на соленоидальные и потенциальные подсистемы, имеем:

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{a}^N = \begin{pmatrix} \mathbf{a}_S^N \\ \mathbf{a}_P^N \end{pmatrix}; \quad \mathbf{b}^N = \begin{pmatrix} \mathbf{b}_S^N \\ \mathbf{b}_P^N \end{pmatrix}; \quad \mathbf{\Omega} = \begin{pmatrix} \mathbf{\Omega}_{SS} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix}; \\ \check{\mathbf{A}} = \begin{pmatrix} \check{\mathbf{A}}_{SS} & \check{\mathbf{A}}_{SP} \\ \check{\mathbf{A}}_{PS} & \check{\mathbf{A}}_{PP} \end{pmatrix}; \quad \check{\mathbf{M}} = \begin{pmatrix} \check{\mathbf{M}}_{SS} & \check{\mathbf{M}}_{SP} \\ \check{\mathbf{M}}_{PS} & \check{\mathbf{M}}_{PP} \end{pmatrix}. \end{array} \right. \quad (1.32)$$

Здесь имеется в виду такое упорядочение базиса, что сначала нумеруются соленоидальные функции  $\vec{E}_n = \vec{E}_n^S$  и  $\vec{H}_n = \vec{H}_n^S$  ( $n=1,2,\dots,N^S$ ), а потом – потенциальные  $\vec{E}_n = \vec{E}_n^P$  и  $\vec{H}_n = \vec{H}_n^P$  ( $n=N^S+1, N^S+2,\dots,N^S+N^P=N$ ).

Соответственно этому векторы  $\mathbf{a}^N$ ,  $\mathbf{b}^N$  и матрицы  $\check{\mathbf{A}}, \check{\mathbf{M}}, \mathbf{\Omega}$  распадаются на подвекторы и подматрицы, фигурирующие в (1.32). При этом, например, подматрица  $\check{\mathbf{A}}_{SP}$  имеет элементы  $\check{\mathbf{A}}_{kn}^{SP} = \int_V \vec{E}_k^{S*} \cdot \epsilon_a \vec{E}_n^P dV$  и т.п.

Что касается матрицы  $\mathbf{\Omega}$ , то ее «потенциальная» подматрица  $\mathbf{\Omega}_{PP}$  имеет только нулевые элементы и поэтому матрица  $\mathbf{\Omega}$  не имеет обратной.

Из условия совместности системы (1.30)

$$\text{Det}|\mathbf{W}| = 0, \quad (1.33)$$

где  $\mathbf{W} = \begin{pmatrix} \omega^N \check{\mathbf{A}} & -\mathbf{\Omega} \\ -\mathbf{\Omega} & \omega^N \check{\mathbf{M}} \end{pmatrix}$ , следует характеристическое уравнение относительно  $\omega^N$ . Корни характеристического уравнения относительно  $\omega^N$  дают приближенные значения собственных частот  $\omega_1^N, \omega_2^N, \dots, \omega_N^N$  (более точные для низших номеров). Затем могут быть найдены векторы  $\mathbf{a}^N, \mathbf{b}^N$  из решения системы (1.30) и определены представления полей  $\vec{E}_{(n)}^N$  и  $\vec{H}_{(n)}^N$  (1.27).

## 1.5. Электромагнитные волны в волноводных и периодических структурах

Рассмотрим построение проекционных моделей для волноводов (рис. 1.1,а,б) и периодических структур (рис. 1.1,к,л).

В случае волновода можно сосредоточить внимание на его отрезке длиной  $l$  (рис. 1.2,а). Рассмотрим случай, когда волноводная структура является взаимной. Тогда изучение резонатора, получаемого при «закорачивании» выделенного отрезка, дает информацию о свободных волнах вол-

новода Пусть резонатор — полуволновой ( $l = \Lambda/2$ ), где  $\Lambda$  — для волны  $H_{10}$  в волноводе, тогда его поле  $\vec{E}, \vec{H}$ , а следовательно, и все базисные функции  $\vec{E}_n, \vec{H}_n$  должны иметь компоненты с продольной зависимостью

$$\begin{cases} \cos \\ \sin \end{cases} 2\pi \frac{z}{\Lambda}.$$

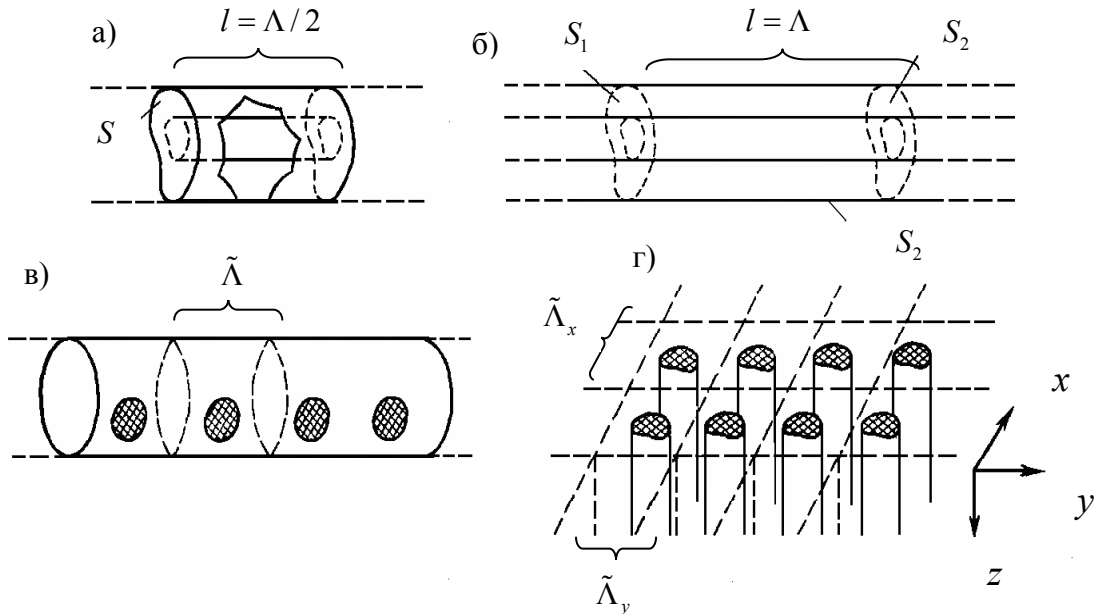


Рис. 1.2. Расчетные схемы волноводных структур: а, б — волноводы; в, г — периодические структуры

Поэтому, например,

$$\check{\mathfrak{A}}_{kn} = \int_V \vec{E}_k^* \cdot \epsilon_a \vec{E}_n dV = \frac{\Lambda}{2} \int_S \vec{E}_k^* \cdot \epsilon_a \vec{E}_n dS,$$

где  $\vec{E}_n, \vec{H}_n$  — векторные функции, составленные из компонент векторов  $\vec{E}_n, \vec{H}_n$ , лишенных продольной зависимости;  $S$  — поперечное сечение волновода. Аналогично преобразуются

$$\check{\mathfrak{M}}_{kn} = \int_V \vec{H}_k^* \cdot \mu_a \vec{H}_n dV = \frac{\Lambda}{2} \int_S \vec{H}_k^* \cdot \mu_a \vec{H}_n dS.$$

Все интегралы (матричные элементы) в (1.30) становятся двукратными. Величина  $\omega^N$  является собственной частотой резонатора, показанного на рис.1.2,а, длина которого равна половине длины волны. Можно взять заранее заданную величину  $\omega$ , подставив ее в (1.30) вместо  $\omega^N$ , а длину резонатора  $l = \Lambda/2$  рассматривать как не известную. Тогда она будет находиться как один из корней характеристического уравнения (1.33). В данном случае неизвестная  $\Lambda = \Lambda^N$  (или  $\Gamma^N = 2\pi/\Lambda^N$ , где  $\Gamma^N$  — постоянная

распространения волны) будет входить в элементы матрицы  $\mathbf{W}$  (1.33), а вместо  $\omega^N$ , надо внести требуемую частоту  $\omega$ .

Распространим теперь этот принцип на любые волноводы (в том числе и невзаимные). Пусть сначала рассматриваемые постоянные распространения  $\Gamma$  (и соответствующие им  $\Lambda$ ) – величины вещественные.

Взяв отрезок волновода длиной  $\Lambda$  (рис.1.2, б), убеждаемся, что поля  $\vec{E}, \vec{H}$  (имеющие продольную зависимость  $\exp(-i\Gamma z)$ ) принимают одинаковые значения на сечениях  $S_1$  и  $S_2$ :  $\vec{E}(S_1) = \vec{E}(S_2)$ ,  $\vec{H}(S_1) = \vec{H}(S_2)$ . Переформулируем задачу (1.25), порождающую базисные функции, задав вместо  $\vec{E}_{n\tau} = 0$  на  $S_0$  следующие краевые условия [52]:

$$\begin{aligned} \vec{E}(S_1) &= \vec{E}(S_2); \quad \vec{H}(S_1) = \vec{H}(S_2); \\ \vec{E}_{n\tau} &= 0 \text{ на } S_{\text{бок}}, \end{aligned} \quad (1.34)$$

где  $S_{\text{бок}}$  – боковая поверхность волновода. Если иметь в виду именно такие базисные функции, то поверхностные интегралы в (1.28), где  $S = S_{\text{бок}} + S_1 + S_2$ , уничтожатся ввиду периодичности подынтегрального выражения при изменении знака нормали на  $S_1$  и  $S_2$ . Тогда из (1.28) опять следует (1.29), где подразумеваются представления (1.27) при той же замене базисных функций.

Сказанное означает, что опять остается неизменной алгебраическая форма (1.30) и все аналогичные формы. Поскольку все базисные функции имеют продольную зависимость  $\exp(-i\Gamma z) = \exp(-i2\pi z/\Lambda)$ , то матричные элементы, как и ранее, сводятся к поверхностным интегралам, например,

$$\begin{aligned} \check{\Theta}_{kn} &= \int_V \vec{E}_k^* \cdot \epsilon_a \vec{E}_n dV = \Lambda \int_S \vec{E}_k^* \cdot \epsilon_a \vec{E}_n dS, \\ \check{M}_{kn} &= \int_V \vec{H}_k^* \cdot \mu_a \vec{H}_n dV = \Lambda \int_S \vec{H}_k^* \cdot \mu_a \vec{H}_n dS. \end{aligned}$$

Подобно предыдущему можно вместо  $\omega^N$  фиксировать (1.27) и других алгебраических формах требуемую частоту  $\omega$ , а  $\Lambda = \Lambda^N$  ( $\Gamma = \Gamma^N$ ) считать неизвестным.

Все рассуждения обобщаются и на комплексные постоянные распространения волн  $\Gamma$ . При этом только учитывается, что функция  $\exp(-i\Gamma z)$  остается периодической, если  $z$  отсчитывать на оси в комплексной плоскости. Этому соответствует комплексная длина волны  $\Lambda$  и комплексная длина отсеченного отрезка волновода; последняя входит в базисные функции  $\vec{E}_n, \vec{H}_n$ , а также в соответствующие собственные значения  $\omega_n$ . Система уравнений (1.27) и другие алгебраические формы не изменяются.

Перейдем к рассмотрению периодических систем. На рис. 1.2,в показана одномерно периодическая система в виде полого волновода с повторяющимися включениями. Можно было бы еще ввести периодические изменения оболочки волновода. Выделив пространственный период системы  $\tilde{\Lambda}$ , констатируем, что свободные электромагнитные поля в ней подчинены теореме Флоке:

$$\vec{E}(x, y, z + \tilde{\Lambda}) = \vec{E}(x, y, z) \exp(-i\varphi); \vec{H}(x, y, z + \tilde{\Lambda}) = \vec{H}(x, y, z) \exp(-i\varphi). \quad (1.35)$$

В представлениях (1.27) будем использовать базисные функции, удовлетворяющие таким же условиям. Они строятся путем введения продольной зависимости  $\exp(-i(\frac{2p\pi}{\tilde{\Lambda}} + \frac{\varphi}{\tilde{\Lambda}})z)$ , где  $p = \dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots$ . Базис, на который производится проектирование в (1.28), берется таким, чтобы множитель  $\exp(-i\frac{\varphi}{\tilde{\Lambda}}z)$  компенсировался. Тогда поверхностные интегралы в (1.28), как и ранее уничтожаются, и опять остается справедливой алгебраическая форма (1.30) и другие формы. Необходимо лишь произвести некоторые уточнения. Величина  $\varphi$  в (1.35), вообще комплексная, входит теперь в используемые базисные функции, которые по-прежнему являются собственными функциями задачи (1.25) (при новых краевых условиях), а также в соответствующие собственные значения  $\omega_n$ . Эта неизвестная величина и подлежит определению при решении характеристического уравнения (1.33).

Обратимся к рис. 1.2,г, на котором показана двумерно периодическая система стержней (например, диэлектрических или гиромангнитных). Подлежат исследованию свободные волны, распространяющиеся вдоль стержней, т. е. поля с продольной зависимостью  $\exp(-i\Gamma z)$ . В поперечной плоскости они удовлетворяют теореме Флоке:

$$\begin{cases} \vec{E}(x + \tilde{\Lambda}_x, y, z) = \vec{E}(x, y, z) \exp(-i\varphi_x); \vec{H}(x + \tilde{\Lambda}_x, y, z) = \vec{H}(x, y, z) \exp(-i\varphi_x), \\ \vec{E}(x, y + \tilde{\Lambda}_y, z) = \vec{E}(x, y, z) \exp(-i\varphi_y); \vec{H}(x, y, z) = \vec{H}(x, y + \tilde{\Lambda}_y, z) \exp(-i\varphi_y). \end{cases}$$

Возьмем базисные функции в (1.27) с компонентами, зависящими от координат, как

$$\exp(-i(\frac{(2m\pi + \varphi_x)x}{\tilde{\Lambda}_x} + \frac{(2n\pi + \varphi_y)y}{\tilde{\Lambda}_y} + \Gamma z)) \quad (m, n = \dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots),$$

а проектирование в (1.28) производится с использованием такого базиса, чтобы зависимость  $\exp(-i(\frac{\varphi_x x}{\tilde{\Lambda}_x} + \frac{\varphi_y y}{\tilde{\Lambda}_y} + \Gamma z))$  компенсировалась. При этом



поверхностные интегралы уничтожаются и снова получаются известные алгебраические формы (1.30).

Аналогично строятся проекционные модели и для трехмерно периодических систем (например, типа искусственного диэлектрика).

## 1.6. Дифракция волн в экранированных системах и свободном пространстве

При различных возможностях толкования понятия дифракции наиболее общим является представление об отклике некоторой электродинамической системы на заданный сигнал в виде приходящей волны или системы волн. Нахождение этого отклика (поля дифракции) требует решения краевой задачи для уравнений Максвелла либо иной математически эквивалентной задачи. Применяя при этом проекционные методы, получают проекционные модели электродинамических систем, выступающих в качестве объекта дифракции.

Вернемся к рассмотрению электродинамических объектов, показанных на рис. 1.1. На рис. 1.1,а,б изображены так называемые волноводные трансформаторы: некоторые тела (радиопрозрачные и металлические) находятся внутри металлической (изолирующей) оболочки с выходом в присоединенные волноводы, а в простейшем случае внутри полого волновода. Аналогичная совокупность объектов в свободном пространстве представлена и на рис. 1.1,г.

Во всех этих случаях речь идет о незамкнутых электродинамических системах, которые имеют внешний канал. По каналу распространяются как прямые (падающие, сходящиеся) волны, направленные в сторону системы, так и обратные (отраженные, расходящиеся) волны, составляющие поле дифракции. Внешний канал волноводного трансформатора (рис. 1.3,а) есть совокупность регулярных волноводов, входные сечения которых ( $S_\alpha$ ,  $\alpha = 1, 2, \dots, P$ ) обозначены пунктиром. Внешним каналом открытой системы (рис. 1.3,б) является свободное пространство, трактуемое как шаровой волновод с входным сечением в виде сферы  $S$ , внутри которой расположены все объекты, образующие электродинамическую систему. Выбор центра сферы произволен.

Описание дифракции в двумерно периодических системах проводится точно так же, как и в случае простейшего волноводного трансформатора [8] (рис. 1.1,а). Это демонстрируется на рис. 1.4. Пространственная ячейка периодической системы может рассматриваться как прямоугольный волновод, на стенках которого выполняются краевые условия типа (1.36), причем фазовые сдвиги  $\varphi_x$  и  $\varphi_y$  определяют исходя из ориентации плоской однородной волны, падающей на систему в свободном пространстве. Такой волновод называют Флоке-каналом. Каждый элемент периодической

системы как бы помещен в свой Флоке-канал (рис. 1.4,б). Здесь выделяются входное и выходное сечения  $S_1$  и  $S_2$  совершенно так же, как в случае обычного волноводного трансформатора (рис. 1.4,а) в виде полого волновода, содержащего объект дифракции.

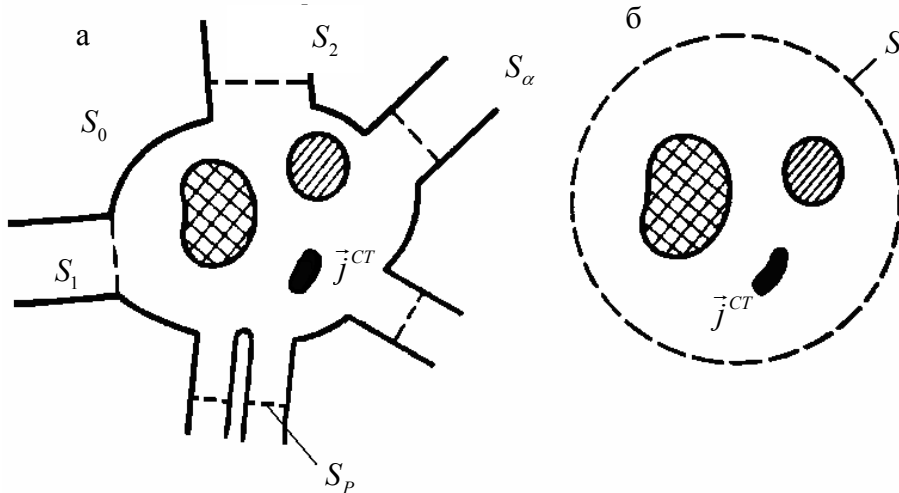


Рис. 1.3. Дифракция волн в электродинамических системах: а – волноводный трансформатор; б – шаровой волновод

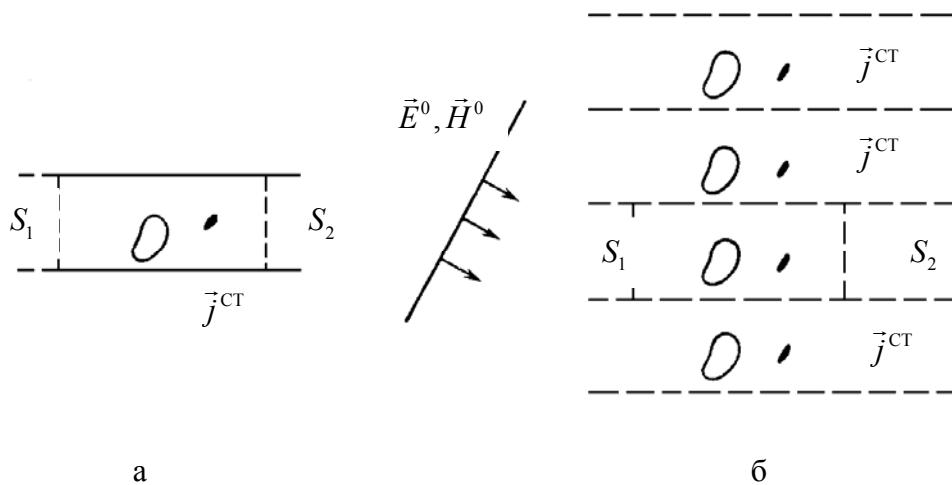


Рис. 1.4. Дифракция в волновых структурах: а – простейший волноводный трансформатор; б – двумерно периодическая система

Единый подход к формализации дифракционных процессов во всех обсуждавшихся, а также аналогичных электродинамических системах основывается на том, что любое электромагнитное поле  $F$  во внешнем канале представимо в виде наложения его нормальных волн обоих направлений  $F_n^\pm$ . При этом любое касательное поле на открытой границе системы (т.е. на всех входных сечениях  $S_\alpha$  волноводного трансформатора или на

сферической границе  $S$  в случае свободного пространства) можно разложить по поперечным составляющим нормальных волн одного направления. Выражая поле во внешнем канале, запишем:

$$F = \left\{ \sum_n c_n^+ F_{n(\alpha)}^+ + \sum_n c_n^- F_{n(\alpha)}^- \right\}_{\alpha=1}^P. \quad (1.36)$$

Здесь подразумевается, что в, общем случае канал – составной, как в случае волноводного трансформатора, и тогда  $F$  есть  $\{F_\alpha\}_{\alpha=1}^P$  – совокупность полей отдельных волноводов  $F_\alpha$ . Для шарового канала  $P = 1$ .

Последовательности коэффициентов  $c_{n(\alpha)}^+$  и  $c_{n(\alpha)}^-$  будем рассматривать как векторы  $\{c_{n(\alpha)}^+\} = c^+$  и  $\{c_{n(\alpha)}^-\} = c^-$ . Назовем их соответственно вектором прямых волн и вектором обратных волн. Введем вектор  $c^\Sigma$ , представляющий собой набор чисел (комплексных амплитуд), характеризующих внутренние источники (возможные распределения  $\vec{j}^{\text{CT}}$ ). Это вектор источников.

В силу принципа излучения отклик электродинамической системы на любое возбуждение, внутреннее или внешнее, проявляется как распространение обратных волн во внешнем канале. Поэтому для линейной электродинамической системы

$$c^- = Sc^+ + Qc^\Sigma, \quad (1.37)$$

где  $S$  и  $Q$  – операторы в виде матриц, первая из которых называется матрицей рассеяния, а вторая – матрицей излучения. Для пассивной системы матрица  $Q$  не определена и соответствующий член в (1.37) опускается (пассивный режим системы общего вида:  $c^\Sigma = 0$ ).

Следует подчеркнуть, что не во всех случаях действующее на систему поле (сигнал) полностью описывается вектором прямых волн  $c^+$ . Так, при дифракции в свободном пространстве сигнал есть волновой процесс, который всегда можно представить системой прямых и обратных волн шарового волновода. Поэтому для характеристики сигнала, кроме  $c^+$  надо еще определить вектор, обозначаемый  $c_0^-$ , который составлен из коэффициентов при полях обратных волн  $F_{n(\alpha)}^-$  в разложении поля сигнала  $F_0$  в форме (1.36). Соотношение (1.37) можно, однако, обобщить посредством замены  $c^- = c_\Sigma^- + c_0^-$ :

$$c_\Sigma^- = Sc^+ - c_0^- + Qc^\Sigma. \quad (1.38)$$

При этом  $c_\Sigma^-$  вектор отклика полностью описывает поле дифракции.

Для описания поля во внешнем канале для каждого волновода имеется локальная система координат с началом на  $S_\alpha$  (ось  $z_\alpha$  направлена в сторону объекта дифракции), а в случае шарового волновода – сферическая система с началом в центре  $S$  (положительным направлением считается  $-r$ ).

Особую роль играют поперечные (касательные к  $S_\alpha$  или  $S$ ) составляющие векторов  $\vec{E}_{n(\alpha)}^\pm$ ,  $\vec{H}_{n(\alpha)}^\pm$  нормальны волн  $F_{n(\alpha)}^\pm$ . Эти векторные функции  $(\vec{E}_{n(\alpha)}^\pm)_\tau = \vec{e}_{n(\alpha)}^\pm$  и  $(\vec{H}_{n(\alpha)}^\pm)_\tau = \vec{h}_{n(\alpha)}^\pm$  образуют полные ортогональные системы. Любые касательные поля на  $S_\alpha$  могут быть разложены в ряды Фурье по  $\{\vec{e}_{n(\alpha)}^+\}$ ,  $\{\vec{h}_{n(\alpha)}^+\}$ ,  $\{\vec{e}_{n(\alpha)}^-\}$ ,  $\{\vec{h}_{n(\alpha)}^-\}$ , например [52]:

$$(\vec{E}_\alpha)_\tau = \sum_m a_{m(\alpha)} \vec{e}_{m(\alpha)}^+, (\vec{H}_\alpha)_\tau = \sum_m b_{m(\alpha)} \vec{h}_{m(\alpha)}^+. \quad (1.39)$$

Рассматривая последовательность  $\{a_{n(\alpha)}\}$  и  $\{b_{n(\alpha)}\}$  как векторы  $\mathbf{a}$  и  $\mathbf{b}$ , можно охарактеризовать электродинамическую систему посредством матрицы сопротивления  $\mathbf{Z}$  или матрицы проводимости  $\mathbf{Y}$ . Определим их следующим образом:

$$\mathbf{a} = \mathbf{Z} \cdot \mathbf{b} \text{ и } \mathbf{b} = \mathbf{Y} \cdot \mathbf{a} \text{ при } c^\Sigma = 0. \quad (1.40)$$

В дальнейшем будет использоваться ортонормировка

$$\int_{S_\alpha} (\vec{e}_{n(\alpha)}^\pm \times \vec{h}_{n(\alpha)}^{\pm*}) \cdot d\vec{S} = \pm \frac{W_{k(\alpha)}^\pm}{|W_{k(\alpha)}^\pm|} \delta_{kn}, \quad (1.41)$$

где  $W_{k(\alpha)}^\pm$  – волновые сопротивления для прямых и обратных волн. В случае обычного волноводного трансформатора  $W_{k(\alpha)}^+ = W_{k(\alpha)}^-$ . Тогда

$$\mathbf{a} = \mathbf{c}^- + \mathbf{c}^+ \text{ и } \mathbf{b} = \mathbf{c}^- - \mathbf{w}^2 \mathbf{c}^+, \quad (1.42)$$

где  $\mathbf{w}^2$  – диагональная матрица с элементами  $w_{mn}^2 = W_{n(\alpha)}^+ / W_{n(\alpha)}^-$ .

При помощи равенств (1.38) и (1.42) можно установить, что в общем случае ( $c^\Sigma \neq 0$ )

$$\begin{cases} \mathbf{a} = \mathbf{Z} \cdot \mathbf{b} + (\mathbf{I} + \mathbf{Z} \cdot \mathbf{w}^2) \cdot \mathbf{Q} \cdot \mathbf{c}^\Sigma, \\ \mathbf{b} = \mathbf{Y} \cdot \mathbf{a} - (\mathbf{w}^2 + \mathbf{Y}) \cdot \mathbf{Q} \cdot \mathbf{c}^\Sigma, \end{cases} \quad (1.43)$$

где  $\mathbf{I}$  – единичная матрица.

Из этих же соотношений или из (1.41) следует

$$\mathbf{Y} = \mathbf{Z}^{-1} \text{ и } \mathbf{Z} = \mathbf{Y}^{-1}, \quad (1.44)$$

когда соответствующие обратные матрицы существуют.

Далее вытекают следующие соотношения, связывающие  $\mathbf{S}$ ,  $\mathbf{Z}$  и  $\mathbf{S}, \mathbf{Y}$ :

$$\mathbf{S} = (\mathbf{Z} \cdot \mathbf{w}^2 + \mathbf{I})^{-1} \cdot (\mathbf{Z} - \mathbf{I}) = (\mathbf{w}^2 + \mathbf{Y})^{-1} \cdot (\mathbf{I} - \mathbf{Y}). \quad (1.45)$$

Матрицы  $\mathbf{Z}$  и  $\mathbf{Y}$  в общем случае менее удобны в сравнении с матрицей  $\mathbf{S}$ . Это объясняется тем, что при рассмотрении дифракции исходной является информация о сигнале, а не о полном электрическом или магнитном поле на открытой границе, включающем также и отклик системы на сигнал. Однако, знание  $\mathbf{Z}$  или  $\mathbf{Y}$  позволяет сопоставить задаче дифракции «эквивалентную цепь», которая может оказаться несложной для дальнейшей зоны.

## 1.7. Ключевые задачи дифракции и их решение

Формулирование задачи дифракции в виде уравнений Максвелла с краевыми условиями на поверхностях всех тел и условием излучения в бесконечности не использует преимуществ, вытекающих из локальной обусловленности процесса. Но этот недостаток может быть устранен. Первая возможность заключается в перенесении условия излучения из бесконечности на некоторую ближнюю границу, например на сферу  $S$  (рис.1.3,б) или на совокупность всех  $S_\alpha$  (рис. 1.3,а). Такое неасимптотическое условие излучения формулируется в виде импедансного операторного краевого условия (импедансная трактовка незамкнутой электродинамической системы) [52].

Пусть  $\vec{E}, \vec{H}$  – полное электромагнитное поле, а  $\vec{E}^+, \vec{H}^+$  – система прямых волн внешнего канала. Тогда неасимптотическое условие излучения, записанное в общей форме, имеет следующий вид:

$$(\vec{E} - \vec{E}^+)_\tau = \vec{W}(\vec{H} - \vec{H}^+)_\tau, \quad (1.45)$$

где оператор импеданса  $\vec{W}$  задан в форме:

$$\vec{W}(\dots) = \left\{ \sum \vec{e}_{n(\alpha)} \frac{W_{n(\alpha)}^-}{|W_{n(\alpha)}^-|} \int_{S_\alpha} (\vec{e}_{n(\alpha)}^* \times \dots) d\vec{S} \right\}_{\alpha=1}^P, \quad (1.46)$$

где  $\vec{e}_{n(\alpha)} = \vec{e}_{n(\alpha)}^- = \vec{e}_{n(\alpha)}^+$  (при интегрировании имеется в виду внешняя нормаль). Здесь, как и ранее, при  $P=1$  (например, в случае свободного пространства) индекс  $\alpha$  и фигурные скобки можно снять.

Импедансная трактовка позволяет сформулировать внутреннюю краевую задачу, эквивалентную задаче дифракции. Это задача для конечной

области  $V$ , ограниченной поверхностью  $S$  (сфера  $S$  на рис. 1.3,б и  $\{S_\alpha\}_{\alpha=1}^P + S_0$  на рис.1.3,а). Формулировка может быть записана так:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{rot } \vec{H} = i\omega\epsilon_a \vec{E} + \vec{j}^{\text{CT}}; \\ \text{rot } \vec{E} = -i\omega\mu_a \vec{H}; \\ \vec{E}_\tau = 0 \text{ на } S_0; \\ (\vec{E} - \vec{E}^+)_\tau = \vec{W}(\vec{H} - \vec{H}^+)_\tau \text{ на } \{S_\alpha\}_{\alpha=1}^P. \end{array} \right\} \text{ в } V \quad (1.47)$$

Поскольку решение внутренней задачи (1.47) определяет и поле внешнего канала, то оно в полной мере описывает процесс дифракции. Краевая задача (1.47) называется ключевой задачей [52]. Вместо нахождения частного поля дифракции, отвечающего определенному полю  $\vec{E}^+$ ,  $\vec{H}^+$  и заданному распределению стороннего тока  $\vec{j}^{\text{CT}}$ , можно получить описание всего класса решений задач дифракции и излучения для рассматриваемой электродинамической системы. Для этого необходимо определить матрицу рассеяния  $\mathbf{S}$  и матрицу излучения  $\mathbf{Q}$  электродинамической системы. Для определения элементов этих матриц применяется метод парциальных режимов [8].

Положим  $\vec{j}^{\text{CT}} = 0$ , а в качестве поля  $\vec{E}^+$ ,  $\vec{H}^+$  в (1.47) зададим одну из нормальных волн внешнего канала  $\vec{E}^+$ ,  $\vec{H}^+$ . Пусть при этом найдено решение задачи (1.47), которое обозначим  $\vec{E}^{n(\beta)}$ ,  $\vec{H}^{n(\beta)}$ . Тогда элементы матрицы рассеяния  $\mathbf{S} = (S_{kn}^{\alpha\beta})$  принадлежащие  $n(\beta)$ -му столбцу, определяются по следующей формуле [52]:

$$S_{kn}^{\alpha\beta} = \frac{W_{k(\alpha)}^-}{|W_{k(\alpha)}^-|_{S_\alpha}} \int_{S_\alpha} (\vec{e}_{k(\alpha)}^* \times (\vec{H}^{n(\beta)} - \vec{H}_{n(\beta)}^+)) \cdot d\vec{S}. \quad (1.48)$$

Перебор падающих волн ( $n=1,2,\dots; \beta=1,2,\dots P$ ) обеспечивает возможность нахождения любых элементов матрицы рассеяния.

Если сторонние токи представляются в базисе  $\{\vec{J}_n\}$ , то, положив  $\vec{E}^+ = 0$ ,  $\vec{H}^+ = 0$  и  $\vec{j}^{\text{CT}} = \vec{J}_n$ , из соответствующего решения задачи (1.47), которое обозначим  $\vec{E}^{n(\Sigma)}$ ,  $\vec{H}^{n(\Sigma)}$ , определим элементы матрицы  $\mathbf{Q} = (Q_{kn}^\alpha)$ :

$$Q_{kn}^\alpha = \frac{W_{k(\alpha)}^-}{|W_{k(\alpha)}^-|_{S_\alpha}} \int_{S_\alpha} (\vec{e}_{k(\alpha)}^* \times \vec{H}^{n(\Sigma)}) \cdot d\vec{S}. \quad (1.49)$$

Другие возможности постановки ключевых задач, связанных с операциями «короткого замыкания» и «холостого хода» для полой электродинамической системы [52].

В первом случае имеется в виду задача:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{rot } \vec{H} = i\omega\epsilon_a \vec{E} + \vec{j}^{\text{CT}}; \\ \text{rot } \vec{E} = -i\omega\mu_a \vec{H}; \\ \vec{E}_\tau = 0 \text{ на } S_0; \\ \vec{E}_\tau = \delta_{\alpha\beta} \vec{E}_\beta \text{ на } S_\alpha; \alpha = 1, 2, \dots, P. \end{array} \right\} \text{ в } V \quad (1.50)$$

Полагая, что  $\vec{j}^{\text{CT}} = 0$  и  $\vec{E}_\beta = \vec{e}_{n(\beta)}$ , задаем парциальный режим  $n(\beta)$ . Полученное решение краевой задачи (1.50) обозначим  $\vec{E}_{\kappa.3}^{n(\beta)}$ ,  $\vec{H}_{\kappa.3}^{n(\beta)}$ . Знание  $\vec{H}_{\kappa.3}^{n(\beta)}$  приводит к определению элементов матрицы проводимости  $Y = (Y_{kn}^{\alpha\beta})$ :

$$Y_{kn}^{\alpha\beta} = -\frac{W_{k(\alpha)}^+}{|W_{k(\alpha)}^+|} \int_{S_\alpha} (\vec{e}_{k(\alpha)}^* \times \vec{H}_{\kappa.3}^{n(\beta)}) \cdot d\vec{S}. \quad (1.51)$$

Во втором случае («холостой ход») формулируется следующая краевая задача:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{rot } \vec{H} = i\omega\epsilon_a \vec{E} + \vec{j}^{\text{CT}}; \\ \text{rot } \vec{E} = -i\omega\mu_a \vec{H}; \\ \vec{E}_\tau = 0 \text{ на } S_0; \\ \vec{H}_\tau = \delta_{\alpha\beta} \vec{H}_\beta \text{ на } S_\alpha; \alpha = 1, 2, \dots, P. \end{array} \right\} \text{ в } V \quad (1.52)$$

Решение задачи (1.52), получаемое для парциального режима, в котором  $\vec{j}^{\text{CT}} = 0$  и  $\vec{H}_\beta = \vec{h}_{n(\beta)}$ , обозначим  $\vec{E}_{x.x}^{n(\beta)}$ ,  $\vec{H}_{x.x}^{n(\beta)}$ . При этом

$$Z_{kn}^{\alpha\beta} = -\frac{W_{k(\alpha)}^{+*}}{|W_{k(\alpha)}^+|} \int_{S_\alpha} (\vec{E}_{\kappa.3}^{n(\beta)} \times \vec{h}_{k(\alpha)}^{+*}) \cdot d\vec{S}. \quad (1.53)$$

К сформулированным выше ключевым задачам может быть применен метод Бубнова – Галеркина. Рассмотрим краевые задачи, сформулированные в виде (1.50) (короткое замыкание). Пусть рассматривается дифракция на радиопрозрачном теле (диэлектрик, гиромангнитная среда и пр.) в одном из простых волноводных трансформаторов или в свободном пространстве (рис. 1.5).

Объекты выбраны так, что основная область  $V$  является регулярной и совпадает с областью  $V_0$ , порождающей базис. Полные системы  $\{\vec{E}_n\}$  и  $\{\vec{H}_n\}$ , порождаемые задачей (1.25), имеются [52].

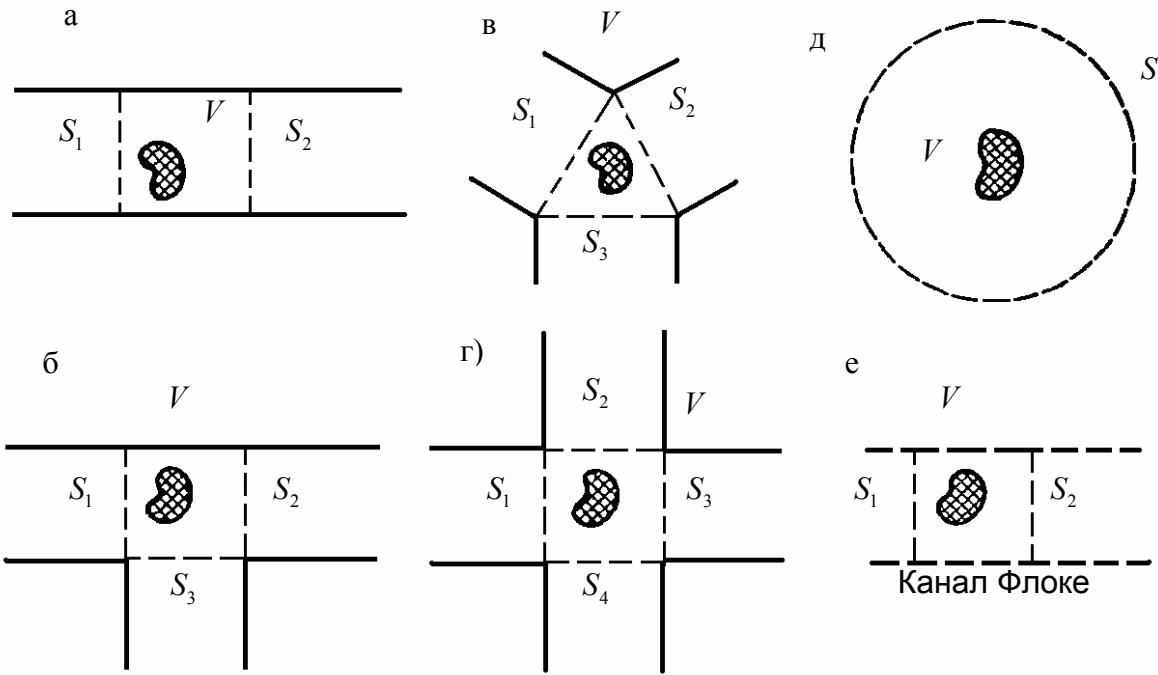


Рис. 1.5. Дифракция на радиопрозрачных телах:  
 а – полый волновод с неоднородностью; б, в, г – волноводные разветвления с неоднородностью; д – дифракция в свободном пространстве;  
 е – канал Флоке с неоднородностью

В соответствии с формулировкой (1.50) решению подлежит задача, получаемая при создании короткого замыкания на всех входных сечениях  $S_\alpha$ , кроме одного  $S_\alpha$ , где создается парциальный режим возбуждения  $\vec{E}_\beta = \vec{e}_{n(\beta)}$ . В случае волноводного трансформатора (рис. 1.5,а) рассматривается возбуждение резонатора через окно (рис. 1.6,а) полем  $\vec{e}_{n(\beta)}$  при  $\beta=1,2$  и  $n=1,2,\dots$ .

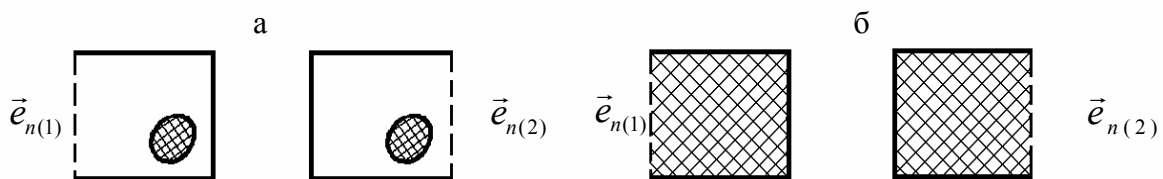


Рис. 1.6. Возбуждение резонатора через «окно»:  
 а – основная задача; б – вспомогательная задача

Экономичный алгоритм для объектов, показанных на рис. 1.6 и аналогичных, базируется на следующих представлениях индукций:

$$\vec{D}^N = \vec{D}^0 + \epsilon_0 \sum_{n=1}^N c_n \vec{E}_n, \quad \vec{B}^N = \vec{B}^0 + \mu_0 \sum_{n=1}^N d_n \vec{H}_n \quad (1.54)$$

с наличием выделенных электромагнитных индукций  $\vec{D}^0$  и  $\vec{B}^0$ . Последние представляют собой решение задачи возбуждения в том же режиме



$\vec{E}_\beta = \vec{e}_{n(\beta)}$ , но при однородном заполнении резонатора средой с проницаемостями  $\epsilon_0, \mu_0$ . Для случая рис. 1.5,а эта вспомогательная задача поясняется при помощи рис. 1.6,б. Для конфигураций, соответствующих рис. 1.5, а, б, г, д, е решение вспомогательной задачи известно в замкнутой форме. Непосредственная выгода представлений (1.54) заключается в том, что в системах  $\{\vec{E}_n\}$  и  $\{\vec{H}_n\}$  исключаются потенциальные функции [9].

Опуская детали вывода, получаем следующую неоднородную систему алгебраических уравнений, левая часть которой не отличается от левой части однородной системы (1.30):

$$\begin{cases} \omega \mathbf{c}^N - \mathbf{\Omega}_{SS} \cdot \mathbf{M}_{SS} \cdot \mathbf{d}^N = \mathbf{f}_1; \\ -\mathbf{\Omega}_{SS} \cdot \mathbf{\Xi}_{SS} \cdot \mathbf{c}^N + \omega \mathbf{d}^N = \mathbf{f}_2. \end{cases} \quad (1.55)$$

В правой части стоят векторы компонентами:

$$\begin{aligned} f_{1k} &= -\omega_k \left( \frac{\mu_0}{\mu_0'} \int_V \vec{B}^0 \cdot \vec{H}_k^* dV - \mu_0 \int_V \mu_a^{-1} \vec{B}^0 \cdot \vec{H}_k^* dV \right); \\ f_{2k} &= -\omega_k \left( \frac{\epsilon_0}{\epsilon_0'} \int_V \vec{D}^0 \cdot \vec{E}_k^* dV - \epsilon_0 \int_V \epsilon_a^{-1} \vec{D}^0 \cdot \vec{E}_k^* dV \right). \end{aligned} \quad (1.56)$$

Решение системы уравнений (1.55) приводит к нахождению из (1.54) поля  $(\vec{H}_{k.z}^{n(\beta)})^N = \mu_a^{-1} \vec{B}^N$  для подстановки в (1.51). Таким путем находится матрица проводимости  $\mathbf{Y}$ .

Применение метода Бубнова-Галеркина для решения ключевой краевой задачи (1.52) (холостой ход) мало отличается от предыдущего. Чтобы воспроизвести аналог алгоритма, рассмотренного выше, следует в представлениях (1.54) в качестве  $\{\vec{E}_n\}$  и  $\{\vec{H}_n\}$  использовать системы соленоидальных собственных функций задачи (1.25) при замене условия  $\vec{E}_{n\tau} = 0$  на  $\vec{H}_{n\tau} = 0$  в области открытой границы. Такие системы пригодны для представления поля  $\vec{E}^{n(\beta)}$  в (1.53). Их будем обозначать  $\{\vec{\tilde{E}}_n\}$  и  $\{\vec{\tilde{H}}_n\}$ .

Рассмотрим применение метода Бубнова – Галеркина к ключевой дифракционной задаче (1.47) (импедансная трактовка.). Задавая парциальный режим дифракции  $\vec{E}^+ = \vec{E}_{n(\beta)}^+, \vec{H}^+ = \vec{H}_{n(\beta)}^+$  (одна нормальная волна внешнего канала), получаем задачу, приводящую непосредственно к определению  $n(\beta)$ -го столбца матрицы рассеяния.

При построении проекционных моделей в данном случае существенно, чтобы представления  $\vec{E}$  и  $\vec{H}$  сходились не только в объеме, но и на

открытой границе. Для этого используются системы функций  $\{\vec{E}_n\}$ ,  $\{\vec{H}_n\}$  и одновременно  $\{\check{\vec{E}}_n\}$ ,  $\{\check{\vec{H}}_n\}$ , причем

$$\vec{E}^M = \sum_{n=1}^M a_n \check{\vec{E}}_n \text{ и } H^N = \sum_{n=1}^N b_n \check{\vec{H}}_n. \quad (1.57)$$

Использование смешанного базиса в конечном итоге приводит к следующей проекционной модели [7]:

$$\begin{cases} \omega \check{\mathbf{a}} \cdot \mathbf{a} - (\check{\mathbf{\Omega}} \check{\mathbf{M}} + \mathbf{Q}) \cdot \mathbf{b} + \boldsymbol{\eta} \cdot \mathbf{s} = \mathbf{f}_1; \\ -\mathbf{\Omega} \cdot \check{\mathbf{a}} \cdot \mathbf{a} + \omega^N \check{\mathbf{M}} \cdot \mathbf{b} + \boldsymbol{\xi} \cdot \mathbf{s} = \mathbf{f}_2; \\ \check{\boldsymbol{\eta}} \cdot \mathbf{a} - (\mathbf{w}^-)^2 \cdot \check{\boldsymbol{\xi}} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{f}_3. \end{cases} \quad (1.58)$$

Третья строка получается при проекционном наложении импедансного условия (1.45) на  $\vec{E}^M$  и  $\vec{H}^N$ . В (1.58) неизвестный вектор включает объединения коэффициентов  $a_n$  и  $b_n$  из (1.57), а также  $n(\beta)$ -й столбец матрицы рассеяния  $\mathbf{S}$ , обозначенный  $\mathbf{s}$ . Элементы подматриц, входящих в (1.58), определяются следующим образом:

$$\begin{cases} \check{\mathcal{E}}_{kn} = \int_V \check{\vec{E}}_k^* \cdot \epsilon_a \check{\vec{E}}_n dV; \quad \check{M}_{kn} = \int_V \check{\vec{H}}_k^* \cdot \mu_a \check{\vec{H}}_n dV; \\ Q_{kn} = i \int_{S_0 + S_M} (\check{\vec{E}}_k^* \times \check{\vec{H}}_n) \cdot d\vec{S}; \\ \bar{\mathcal{E}}_{kn} = \epsilon_0 \int_V \check{\vec{E}}_k^* \cdot \check{\vec{E}}_n dV; \quad \bar{M}_{kn} = \mu_0 \int_V \check{\vec{H}}_k^* \cdot \check{\vec{H}}_n dV; \\ \xi_{kl(\alpha)} = -i \int_{S_\alpha} (\check{\vec{e}}_{l(\alpha)}^* \times \check{\vec{H}}_k^*) \cdot d\vec{S}; \\ \eta_{kl(\alpha)} = -i \int_{S_\alpha} (\check{\vec{E}}_k^* \times \check{\vec{h}}_{l(\alpha)}^-) \cdot d\vec{S}. \end{cases} \quad (1.59)$$

Матрицы  $\check{\mathbf{\Omega}}$  и  $\mathbf{\Omega}$  – диагональные и составлены из собственных частот, отвечающих полям  $\check{\vec{E}}_n$ ,  $\check{\vec{H}}_n$  и  $\vec{E}_n$ ,  $\vec{H}_n$ , при этом потенциальным функциям отвечают нули. В (1.58), и далее  $\mathbf{w}^\pm$  – диагональные матрицы с элементами  $W_{n(\alpha)}^\pm / |W_{n(\alpha)}^\pm|$ . Область  $V$  понимается так же, как в (1.30), за вычетом  $V_M$ . Первые, четыре клетки полной матрицы (1.58) имеют сходство с полной матрицей (1.58). Поверхность  $S_M$  – граница всех металлических тел внутри  $V$ , а  $S_0$ , включает все металлические части границы области  $V$ .

Векторы правой части (1.58) в рассмотренном режиме имеют следующие компоненты:

$$\begin{cases} f_{1k} = -i \int_{S_\beta} (\vec{E}_k^* \times \vec{h}_{n(\beta)}^+) \cdot d\vec{S}; & f_{2k} = -i \int_{S_\beta} (\vec{e}_{n(\beta)} \times \vec{H}_k^*) \cdot d\vec{S}; \\ f_{3k(\alpha)} = iw_{n(\beta)}^- \left( 1 + \frac{w_{n(\beta)}^-}{w_{n(\beta)}^+} \right) \delta_{n(\beta)k(\alpha)}. \end{cases} \quad (1.60)$$

В случае обычного волноводного трансформатора (рис.1.3,а)  $w^- = w^+$ , а при дифракции в свободном пространстве (шаровой внешней канал, рис.1.3,б)  $w^- = (w^+)^*$ .

Для определения элементов матрицы излучения  $\mathbf{Q}$  используются режимы  $\vec{E}^+ = 0$ ,  $\vec{H}^+ = 0$ ,  $\vec{j}^{\text{CT}} = \vec{J}_m$  ( $m=1,2,\dots$ ). В правой части уравнений (1.58) тогда

$$f_{1k} = i \int_V \vec{J}_m \cdot \vec{E}_k^* dV; \quad f_{2k} = 0; \quad f_{3k(\alpha)} = 0. \quad (1.61)$$

Как видно, решение системы уравнений (1.58) приводит к определению элементов матрицы рассеяния  $S_{kn}^{\alpha\beta}$ , а точнее, их приближенных значений  $(S_{kn}^{\alpha\beta})^{MN}$ , которые при  $M \rightarrow \infty$ ,  $N \rightarrow \infty$  стремятся к точным значениям. При этом предполагается, что соответственно числам  $M$  и  $N$  растет также число учитываемых собственных волн внешнего канала (число столбцов матриц  $\xi$  и  $\eta$ ).

## Выводы

По результатам первой главы можно сделать следующие выводы.

1. В прикладной электродинамике системы и устройства сверхвысоких частот рассматриваются как волноводные трансформаторы. Режимы функционирования волноводного трансформатора описываются при помощи дескрипторов – математических описаний в виде многоканальных и много-модовых матриц проводимости, сопротивления и рассеяния. Не достаточно полно изучены вопросы, связанные с методами описания нелинейных режимов функционирования волноводных трансформаторов. Матрицы проводимости, сопротивления и рассеяния имеют весьма ограниченное применение для описания нелинейных режимов функционирования волноводных трансформаторов.

2. Сформулированы краевые задачи дифракции для определения дескрипторов волноводных трансформаторов. Из парциальных режимов определяются элементы столбцов матриц проводимости, сопротивления и рассеяния. Отсутствуют методики определения элементов матриц прово-

димости, сопротивления и рассеяния не по столбцам, а в целом, единым вычислительным процессом.

3. Метод Бубнова – Галеркина решения краевых задач дифракции для волноводных трансформаторов является одним из основных методов в прикладной электродинамике. Он позволяет решать краевые задачи для волноводных трансформаторов с диэлектрическими и магнитными проницаемостями сред заполнения, которые являются тензорами второго ранга. Наибольшее распространение метод Бубнова – Галеркина в прикладной электродинамике получил с использованием смешанного базиса. В настоящее время отсутствуют методики использования метода Бубнова – Галеркина решения краевых задач для волноводных трансформаторов с нелинейно намагниченными средами, описываемые уравнением движения в форме Ландау-Лифшица с учетом обменного поля взаимодействия.

4. Метод поперечных сечений (неполный метод Бубнова – Галеркина) является менее универсальным, чем метод Бубнова – Галеркина, и используется только для решения краевых задач для волноводных трансформаторов с двумя волновыми каналами (волноведущие структуры) или сферических волноводных трансформаторов. Основное достоинство метода поперечных сечений – это использование двумерных базисов при решении трехмерных краевых задач. В настоящее время отсутствуют математические методы, позволяющие решать краевые задачи для волноводных трансформаторов с тремя и более волновыми каналами. Отсутствуют методики использования метода поперечных сечений для решения краевых задач для волноведущих структур с нелинейными средами.

5. Метод Трефтца является одним из старейших методов прикладной электродинамики, а его применение к задаче о стыке волноводов имеет свою историю. Метод Трефтца менее универсальный, чем метод Бубнова-Галеркина и метод поперечных сечений. Это объясняется сложностью построения систем функций, удовлетворяющих внутри частичных областей уравнениям Максвелла. Метод Трефтца является более эффективным по сравнению с методом Бубнова – Галеркина и методом поперечных сечений, поскольку представления в методе уже удовлетворяют уравнениям Максвелла, остается лишь подчинить их краевым условиям, что делается путем проектирования. Метод Трефтца в настоящее время широко используется в построении дескрипторов автономных блоков с однородными заполнениями (автономные многомодовые блоки, минимальные автономные блоки, автономные блоки в виде прямоугольных параллелепипедов с каналами Флоке), которые используются в декомпозиционном подходе построения математических моделей устройств сверхвысоких частот. Метод Трефтца является так же основой построения интегральных уравнений прикладной электродинамики.

6. Декомпозиционный подход математического моделирования современных систем и устройств сверхвысоких частот неизбежен из-за сложности их конструкций. Декомпозиционный подход является также основой построения систем автоматизированного проектирования (моделирования) устройств и систем сверхвысоких частот. Основные принципы декомпозиции и рекомпозиции дескрипторов базовых элементов (автономных блоков) в прикладной электродинамике разработаны и сводятся к матричным преобразованиям.

7. Математическое моделирование магнитного нанокompозита с нелинейно намагниченными средами предпочтительно проводить с использованием декомпозиционного подхода. При этом автономные блоки должны включать в себя магнитную наночастицу, описываемую уравнением Ландау – Лифшица.

## Глава 2. РАЗРАБОТКА АВТОНОМНОГО БЛОКА ДЛЯ МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ МАГНИТНЫХ НАНОКОМПОЗИТОВ НА ОСНОВЕ ОПАЛОВЫХ МАТРИЦ

### 2.1. Структура магнитных нанокomпозитов

Наиболее перспективными структурами магнитных нанокomпозитов являются правильные упаковки наносфер из различных материалов [53–58]. Пока в этой области лидируют опаловидные матрицы – правильные кубические упаковки наносфер  $\text{SiO}_2$  с диаметрами 180-1200 нм. Опаловидные матрицы на основе  $\text{SiO}_2$  характеризуются существенными преимуществами перед другими подобными материалами, а именно: наличием широкого диапазона диаметров наносфер, возможностью получения массивных образцов, сравнительной легкостью изготовления структур, получивших название «инверсных опалов» – после заполнения межсферических пустот необходимыми материалами химическими методами вытравливаются сами наносферы  $\text{SiO}_2$ , при этом остается трехмерная нанорешетка введенных материалов. Такая дешевизна и доступность 0,2 мкм нанолитографии, к тому же в объемной варианте, делает опаловые матрицы наиболее перспективным материалом для создания 3D-фотонных материалов, необходимых для создания СВЧ устройств. Опаловидные матрицы представляют интерес и с той точки зрения, что в России существует опытное производство наиболее высококачественных в мире образцов (последнее подтверждается многочисленными отзывами отечественных и зарубежных специалистов).

Опаловые матрицы с наносферами  $\text{SiO}_2$  диаметром от 200 до 300 нм синтезируются при выполнении следующих технологических операций [59]. Наночастицы аморфного  $\text{SiO}_2$  получены по технологии, основанной на реакции гидролиза тетраэфира ортокремневой кислоты ( $\text{Si}(\text{OC}_2\text{H}_5)_4$ ) с раствором этанола ( $\text{C}_2\text{H}_5\text{OH}$ ) в присутствии гидроксида аммония  $\text{NH}_4\text{OH}$ , который служил катализатором.

Строение типичного образца опаловой матрицы высокого качества (с размером наносфер  $\text{SiO}_2$ , равным 200 нм) представлен на рис. 2.1 (использован растровый электронный микроскоп *LEO1430*).

В процессе синтеза формируются плотные упаковки, в которых наносферы образуют тетраэдрические и октаэдрические пустоты: каждую сферу  $\text{SiO}_2$  диаметром 200 нм окружает по шесть октаэдрических пустот размером ~80 нм и восемь тетраэдрических пустот размером ~40 нм (рис. 2.2).

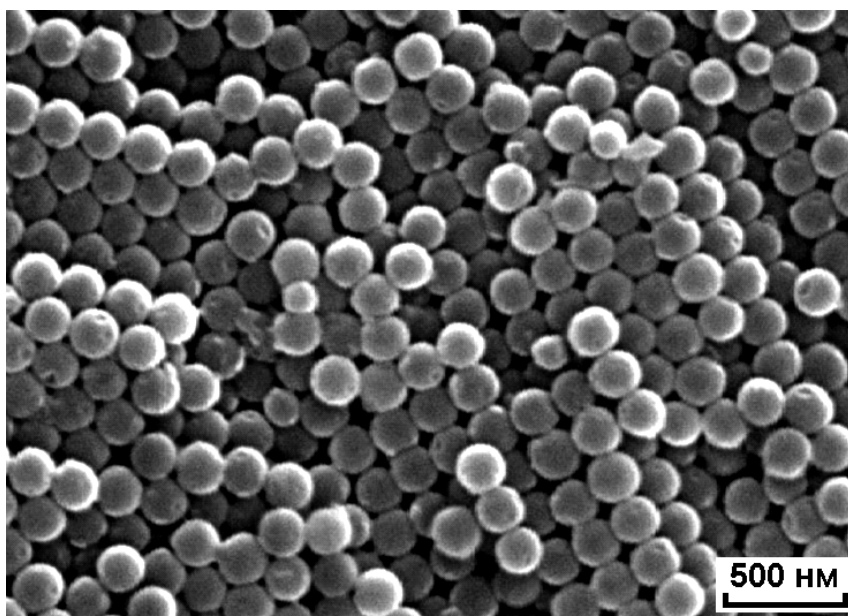


Рис. 2.1. Структура правильной упаковки наносфер  $\text{SiO}_2$  (опаловая матрица)

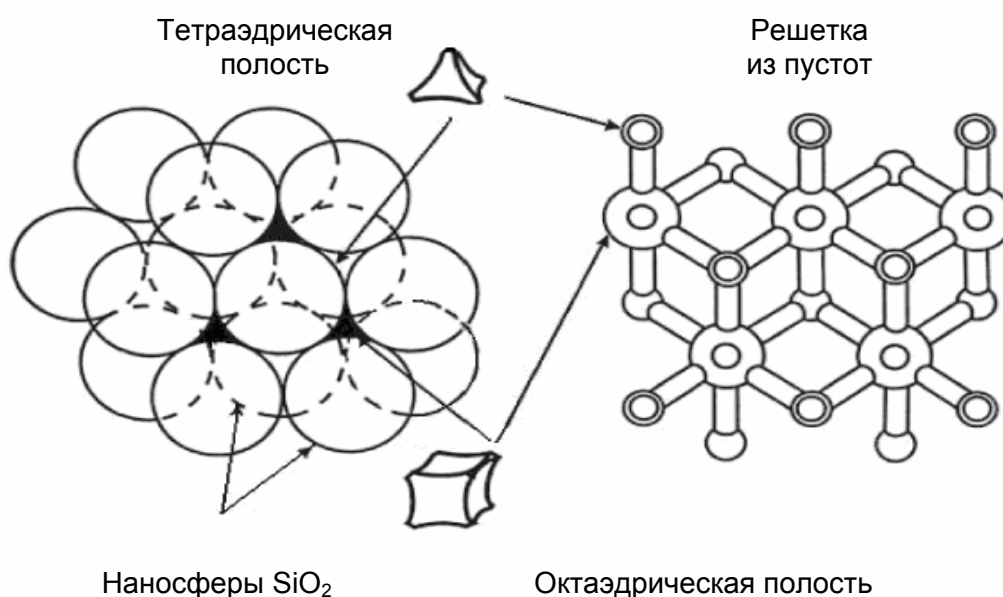


Рис. 2.2. Схема строения опаловой матрицы и подрешетки пустот в опаловой матрице

Одним из наиболее простых и широко применяемых способов введения различных химических элементов (и соединений) в опаловые матрицы является метод пропитки. Метод основан на пропитки опаловой матрицы веществом определенного химического состава (прекурсором) с последующей термообработкой, в процессе которой в межсферических пустотах опаловой матрицы формируется необходимый для получения шпинелевой структуры химический состав. Прекурсоры должны обладать хорошей

растворимостью в воде (или в других растворителях) и переходить в оксиды (или в другие соединения) при заданных условиях термообработки.

В качестве таких веществ можно использовать растворимые соли металлов, например,  $\text{Fe}(\text{NO}_3)\cdot 6\text{H}_2\text{O}$ ,  $\text{Ni}(\text{NO}_3)_2$ ,  $\text{Mn}(\text{NO}_3)_2$ ,  $\text{Zn}(\text{NO}_3)_2$ . В процессе пропитки водные растворы солей самопроизвольно, за счет капиллярного эффекта, заполняют поры опаловой матрицы. Затем в процессе термообработки происходит частичное термическое разложение нитратов и удаляется несвязанная вода. Данная процедура повторяется многократно (до 10-12 раз) для постепенного заполнения межсферического пространства матрицы оксидами, что позволяет получить заданную структуру.

Структура опаловой матрицы до введения в межсферические пустоты магнитных наночастиц представляет собой упорядоченный ансамбль наносфер, образующих плотно упакованную периодическую структуру. После процедуры заполнения электронной микроскопией было установлено, что большая часть внесенного вещества сосредоточена в пространстве между наносферами. Рентгенофазовый анализ показал, что во введенном в нанопустоты веществе есть несколько железосодержащих фаз. В частности, в нанокompозите с Ni-Zn-ферритом большинство рефлексов относятся к фазам типа  $\text{ZnFe}_2\text{O}_4$  и  $(\text{Ni}_x\text{Zn}_{1-x})\text{Fe}_2\text{O}_4$ , имеющих кристаллическую структуру шпинели. Введенные фазы имеют поликристаллическую структуру с частицами неправильной формы размерами от 5 до 70 нм (рис. 2.3). Снимки получены при помощи электронного микроскопа *JEM – 200CX*.

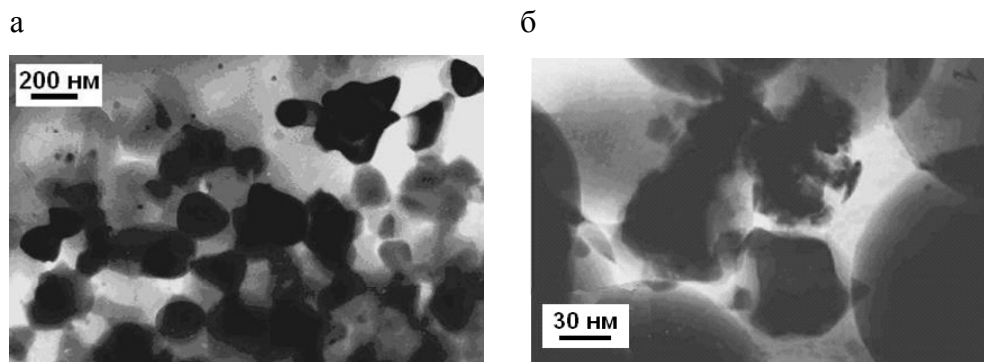


Рис. 2.3. Структура нанокompозита на основе опаловой матрицы, содержащего: а – Mn-Zn-шпинель; б – Ni-Zn-шпинель

Объемная концентрация внесенных фаз не превышает 3–5 %. Полученный композитный материал рассматривается как Ni-Zn-феррит, несмотря на возможное присутствие в нем другой магнитной фазы. Сказанное относится и к нанокompозиту с Mn-Zn-ферритом.

Для успешного применения магнитных нанокompонентов на основе опаловых матриц в управляемых магнитным полем электронных приборах СВЧ-диапазона необходимо решить две проблем. Добиться оптимальных условий взаимодействия электромагнитной волны с опаловой матрицей, чтобы обеспечить наибольший эффект. Выбрать схему включения элемен-



та, содержащего полученную матрицу, в СВЧ-тракт так, чтобы добиться управления с помощью магнитного поля как можно меньшей напряженности. Эти задачи можно успешно решить на этапе проектирования, используя математическое моделирование магнитных нанокompозитов на основе опаловых матриц и устройств СВЧ на их основе. Математические модели будем строить с использованием проекционного метода.

## 2.2. Декомпозиционный подход к построению математических моделей

Математическую модель магнитного нанокompозита на основе опаловой матрицы будем строить при помощи декомпозиционного подхода [60]. Область опаловой матрицы (рис. 2.1) расчлняем условными границами на подобласти (автономные блоки) в виде однотипных прямоугольных параллелепипедов (рис. 2.4).

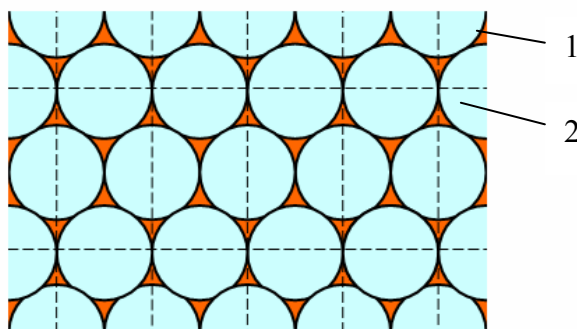


Рис. 2.4. Разбиение магнитного нанокompозита на основе опаловой матрицы на автономные блоки:  
1 – магнитные наночастицы; 2 – диэлектрические наносферы  $\text{SiO}_2$

Для автономных блоков из решения краевых задач дифракции для уравнений Максвелла совместно с уравнением Ландау-Лифшица определяем дескрипторы в виде матриц проводимости или рассеяния. В результате рекомпозиции дескрипторов автономных блоков по правилам, вытекающим из непрерывности касательных составляющих напряженности электрического и магнитного полей на смежных гранях параллелепипедов, получаем математическую модель магнитного нанокompозита на основе опаловой матрицы.

Автономный блок будем рассматривать как волноводный трансформатор [61]. Волноводный трансформатор (рис. 2.5) состоит из основной области  $V_0$  (прямоугольный параллелепипед) с присоединенными волновыми каналами Флоке, которые граничат с основной областью  $V_0$  поперечными входными сечениями  $S_1, S_2, \dots, S_6$  (границ параллелепипеда).

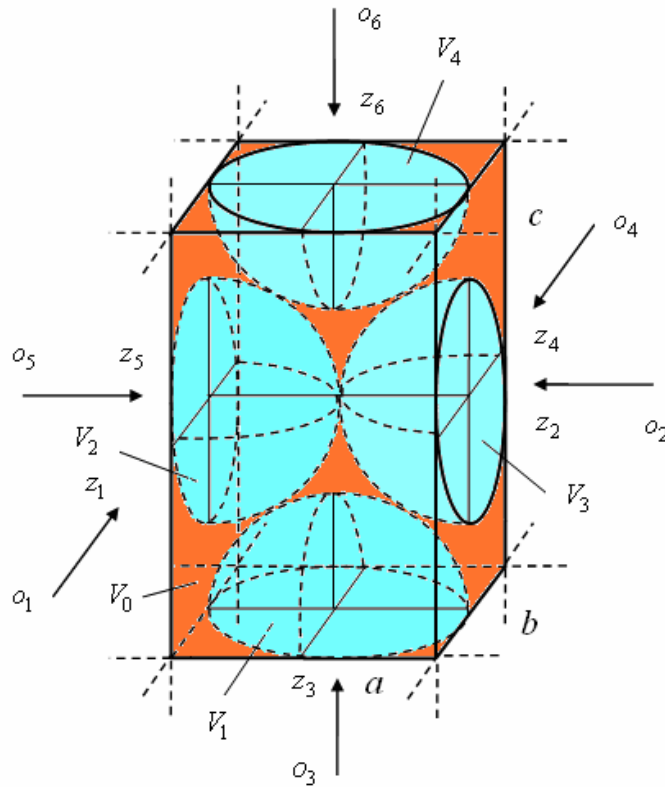


Рис. 2.5. Волноводный трансформатор в виде прямоугольного параллелепипеда с виртуальными каналами Флоке на гранях:

$V_0$  – основная область;  $V = V_1 \cup V_2 \cup V_3 \cup V_4$ , – области диэлектрических наносфер;  $V_0 - V$  – область магнитных наночастиц;  
 $o_\alpha z_\alpha$  ( $\alpha = 1, 2, \dots, 6$ ) – локальные системы координат для входных сечений  $S_\alpha$  (граней);  $a, b, c$  – геометрические размеры параллелепипеда

Основная область  $V_0$  имеет энергетические связи с внешним пространством только через волновые каналы, которые осуществляют прямую (в направлениях осей  $o_\alpha z_\alpha$ ,  $\alpha = 1, 2, \dots, 6$ ) и обратную (в направлениях противоположных осей  $o_\alpha z_\alpha$ ,  $\alpha = 1, 2, \dots, 6$ ) передачу электромагнитной энергии. Прямая передача энергии (падающие волны) будет обозначаться в дальнейшем символом «+», обратная передача энергии (отраженные волны) – «-».

В каждом из волновых каналов Флоке, в общем случае, имеются нестационарные электромагнитные сигналы (прямая и обратная передача электромагнитной энергии)

$$\vec{E}_\alpha^\pm(t) = \vec{E}_\alpha^\pm(x, y, z, t); \vec{H}_\alpha^\pm(t) = \vec{H}_\alpha^\pm(x, y, z, t), \alpha = 1, 2, \dots, 6,$$

где  $\vec{E}_\alpha^\pm(t)$ ,  $\vec{H}_\alpha^\pm(t)$  – напряженности электрического и магнитного полей, распространяющихся в направлениях локальных осей  $o_\alpha z_\alpha$ , и в противоположных направлениях, где  $x, y, z$  – пространственные координаты;  $t$  – время.

Условием распространения электромагнитной энергии в направлении осей  $o_\alpha z_\alpha$ , и в противоположных направлениях является [62]:

$$\pm z_\alpha \times \vec{\Pi}_\alpha^\pm(t) > 0, \quad (2.1)$$

где  $\vec{z}_\alpha$  – единичные орты, направленные вдоль осей  $o_\alpha z_\alpha$ ;  $\vec{\Pi}_\alpha^\pm(t)$  – вектор Пойнтинга, который определяется как

$$\vec{\Pi}_\alpha^\pm(t) = \vec{E}_\alpha^\pm \times \vec{H}_\alpha^\pm, \quad \alpha = 1, 2, \dots, 6.$$

Рассмотрим важный для практики случай, когда нестационарные электромагнитные сигналы  $\vec{E}_\alpha^\pm(t)$ ,  $\vec{H}_\alpha^\pm(t)$  являются гармоническими с частотой  $\omega$  ( $\omega = 2\pi f$ ):

$$\vec{E}_\alpha^\pm(t) = \vec{E}_\alpha^\pm \cos(\omega t + \varphi_\alpha); \quad \vec{H}_\alpha^\pm(t) = \vec{H}_\alpha^\pm \cos(\omega t + \psi_\alpha), \quad \alpha = 1, 2, \dots, 6, \quad (2.2)$$

где  $\varphi_\alpha$ ,  $\psi_\alpha$  – фазы электромагнитных сигналов. Используя формулу Эйлера запишем (2.2) в виде

$$\begin{aligned} \vec{E}_\alpha^\pm(t) &= \frac{1}{2} \left( \vec{E}_\alpha^\pm \exp(i\omega t) + \vec{E}_\alpha^{\pm*} \exp(-i\omega t) \right); \\ \vec{H}_\alpha^\pm(t) &= \frac{1}{2} \left( \vec{H}_\alpha^\pm \exp(i\omega t) + \vec{H}_\alpha^{\pm*} \exp(-i\omega t) \right), \end{aligned} \quad (2.3)$$

$$\alpha = 1, 2, \dots, 6,$$

где  $\vec{E}_\alpha^\pm = \vec{E}_\alpha^\pm \exp(i\varphi_\alpha)$ ,  $\vec{H}_\alpha^\pm = \vec{H}_\alpha^\pm \exp(i\psi_\alpha)$  – комплексные величины;  $i$  – мнимая величина, символом \* обозначены комплексно-сопряженные величины.

С использованием метода комплексных амплитуд [63], при котором косинусоидальные или синусоидальные функциональные зависимости (2.2), заменяются на экспоненциальные зависимости (2.3), что позволяет упрощать аналитические выражения и вычислительные алгоритмы.

Напряженности электромагнитных полей  $\vec{E}_\alpha^\pm$ ,  $\vec{H}_\alpha^\pm$  в выражениях (2.3) в волновых каналах трансформатора представим в виде суммы падающих и отраженных волн [62]:

$$\begin{pmatrix} \vec{E}_\alpha^\pm \\ \vec{H}_\alpha^\pm \end{pmatrix} = \sum_{k=1}^{\infty} c_{k(\alpha)}^\pm \begin{pmatrix} \vec{E}_{k(\alpha)}^\pm \\ \vec{H}_{k(\alpha)}^\pm \end{pmatrix},$$

где  $\vec{E}_{k(\alpha)}^+$ ,  $\vec{H}_{k(\alpha)}^+$  – напряженности электрических и магнитных полей падающих волн;  $\vec{E}_{k(\alpha)}^-$ ,  $\vec{H}_{k(\alpha)}^-$  – напряженности электрических и магнитных полей

отраженных волн;  $c_{k(\alpha)}^+$  – амплитудный коэффициент падающих волн;  $c_{k(\alpha)}^-$  – амплитудный коэффициент отраженных волн. Падающие и отраженные электромагнитные волны определяются следующим образом [62]:

$$\begin{aligned}\vec{E}_{k(\alpha)}^\pm &= \left( \vec{e}_{k(\alpha)} \pm \vec{e}_{k(\alpha)}^z \right) \exp\left(\mp i \Gamma_{k(\alpha)} z_\alpha\right); \\ \vec{H}_{k(\alpha)}^\pm &= \left( \pm \vec{h}_{k(\alpha)} \pm \vec{h}_{k(\alpha)}^z \right) \exp\left(\mp i \Gamma_{k(\alpha)} z_\alpha\right), \\ k &= 1, 2, \dots, \infty; \quad \alpha = 1, 2, \dots, 6,\end{aligned}$$

где  $\vec{e}_{k(\alpha)}$ ,  $\vec{h}_{k(\alpha)}$  – поперечные электрические и магнитные компоненты собственных волн в волновых каналах;  $\vec{e}_{k(\alpha)}^z$ ,  $\vec{h}_{k(\alpha)}^z$  – продольные электрические и магнитные компоненты собственных волн в волновых каналах;  $\Gamma_{k(\alpha)}$  – постоянные распространения собственных волн;  $z_\alpha$  – продольные координаты. Системы функций  $\{\vec{e}_{k(\alpha)}\}$ ,  $\{\vec{h}_{k(\alpha)}\}$  подчинены условиям ортонормировки вида [62]:

$$\int_{S_\alpha} \left( \vec{e}_{k(\alpha)}^z \times \vec{h}_{n(\alpha)}^* \right) \cdot d\vec{S}_\alpha = \delta_{kn}, \quad (2.4)$$

где  $d\vec{S}_\alpha$  – направленный дифференциал поверхности,  $\delta_{kn} = \begin{cases} 1, & \text{если } k = n, \\ 0 & \text{если } k \neq n. \end{cases}$

Любое поперечное электромагнитное поле на входных сечениях  $S_\alpha$  (гранях параллелепипеда) волноводного трансформатора разлагается по этим системам в ортогональные ряды:

$$\vec{E}_\alpha = \sum_{k=1}^{\infty} a_{k(\alpha)} \vec{e}_{k(\alpha)}; \quad \vec{H}_\alpha = \sum_{k=1}^{\infty} b_{k(\alpha)} \vec{h}_{k(\alpha)}. \quad (2.5)$$

Пусть такое разложение произведено на всех входных сечениях (гранях) волнового трансформатора, т.е. можно говорить о коэффициентах Фурье  $a_{k(\alpha)}$  и  $b_{n(\alpha)}$ . Объединяя все эти коэффициенты, составим векторы

$$\mathbf{a} = \left( a_{1(1)}, a_{2(1)}, \dots, a_{1(2)}, a_{2(2)}, \dots \right); \quad \mathbf{b} = \left( b_{1(1)}, b_{2(1)}, \dots, b_{1(2)}, b_{2(2)}, \dots \right).$$

Если среда внутри волноводного трансформатора линейна и пассивна (отсутствуют источники), то векторы  $\mathbf{a}$  и  $\mathbf{b}$  связаны линейной однородной зависимостью так, что можно написать

$$\mathbf{a} = \mathbf{Z} \cdot \mathbf{b} \quad \text{и} \quad \mathbf{b} = \mathbf{Y} \cdot \mathbf{a}, \quad (2.6)$$

где матрицы  $\mathbf{Y}$  и  $\mathbf{Z}$  являются матрицей сопротивления и соответственно матрицей проводимости волноводного трансформатора. Они имеют строение, которое ниже поясняется на примере матрицы  $\mathbf{Z}$ :

$$\mathbf{Z} = \begin{pmatrix} \mathbf{Z}^{11} & \mathbf{Z}^{12} & \dots & \mathbf{Z}^{1P} \\ \mathbf{Z}^{21} & \mathbf{Z}^{22} & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \mathbf{Z}^{P1} & \dots & \dots & \mathbf{Z}^{PP} \end{pmatrix},$$

где

$$\mathbf{Z}^{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} \mathbf{Z}_{11}^{\alpha\beta} & \mathbf{Z}_{12}^{\alpha\beta} & \dots \\ \mathbf{Z}_{21}^{\alpha\beta} & \mathbf{Z}_{22}^{\alpha\beta} & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}; \quad \alpha, \beta = 1, 2, \dots, 6; \quad \mathbf{Z}^{\alpha\beta} - \text{бесконечные матрицы.}$$

Поскольку на каждом входном сечении  $S_\alpha$  электромагнитное поле можно представить также в виде суперпозиции прямых и обратных волн данного волнового канала с поперечными компонентами  $\vec{e}_{k(\alpha)}$  и  $\vec{h}_{k(\alpha)}$ , то вместо (2.5) можно записать:

$$\begin{aligned} \vec{E}_\alpha &= \sum_{k=1}^{\infty} \left( c_{k(\alpha)}^+ \vec{e}_{k(\alpha)} + c_{k(\alpha)}^- \vec{e}_{k(\alpha)} \right); \\ \vec{H}_\alpha &= \sum_{k=1}^{\infty} \left( c_{k(\alpha)}^+ \vec{h}_{k(\alpha)} - c_{k(\alpha)}^- \vec{h}_{k(\alpha)} \right). \end{aligned} \quad (2.7)$$

Совокупность всех коэффициентов  $c_{k(\alpha)}^+$  и  $c_{k(\alpha)}^-$  ( $\alpha = 1, 2, \dots, 6$ ,  $k = 1, 2, \dots$ ) образуют векторы  $\mathbf{c}^+$  и  $\mathbf{c}^-$  такого же типа, как  $\mathbf{a}$  и  $\mathbf{b}$ , причем на основании сопоставления (2.5) и (2.7) имеем

$$\mathbf{a} = \mathbf{c}^+ + \mathbf{c}^-; \quad \mathbf{b} = \mathbf{c}^+ - \mathbf{c}^-. \quad (2.8)$$

В линейном однородном соотношении

$$\mathbf{c}^- = \mathbf{R} \cdot \mathbf{c}^+ \quad (2.9)$$

матрица  $\mathbf{R}$  является матрицей рассеяния. Зная  $\mathbf{R}$ , можно определить амплитуды всех отраженных (уходящих) волн в виде вектора  $\mathbf{c}^-$ , если заданы амплитуды падающих (приходящих) волн, определяемые вектором  $\mathbf{c}^+$ .

Матрица рассеяния имеет такую же структуру, как матрицы  $\mathbf{Z}$  и  $\mathbf{Y}$  в выражении (2.6). Смысл ее элементов заключается в следующем. Пусть все волновые каналы Флоке бесконечны и только по одному из них на сечение  $S_\alpha$  падает волна типа  $n(\beta)$  (вектор  $\mathbf{c}^+$  имеет только одну отличную от нуля

компоненту  $c_{n(\beta)}^+$ ). Согласно выражения (2.9), в этом волновом канале Флоке появляются отраженная волна того же типа с амплитудным коэффициентом  $c_{n(\beta)}^- = R_{nn}^{\beta\beta} c_{n(\beta)}^+$  и отраженные волны других типов с амплитудными коэффициентами  $c_{k(\beta)}^- = R_{kn}^{\beta\beta} c_{n(\beta)}^+$ . На остальных входных сечениях появляются прошедшие волны с амплитудными коэффициентами  $c_{k(\alpha)}^- = R_{kn}^{\alpha\beta} c_{n(\beta)}^+$ . Таким образом, элементы матрицы рассеяния  $R_{kn}^{\beta\beta}$  – это коэффициенты отражения для входных сечений  $S_\beta$ , а элементы  $R_{kn}^{\beta\alpha}$  – это коэффициенты прохождения (передачи) волноводного трансформатора.

Установим связь между матрицами  $\mathbf{R}$ ,  $\mathbf{Z}$  и  $\mathbf{Y}$ . Из выражения (2.6) и (2.8) следует:  $\mathbf{c}^+ + \mathbf{c}^- = \mathbf{Z} \cdot (\mathbf{c}^+ - \mathbf{c}^-)$  и далее, с учетом выражения (2.9) имеем:

$$(\mathbf{I} + \mathbf{R})\mathbf{c}^- = \mathbf{Z}(\mathbf{I} - \mathbf{R})\mathbf{c}^-,$$

где  $\mathbf{I}$  – единичная матрица. На этом основании  $\mathbf{I} + \mathbf{R} = \mathbf{Z}(\mathbf{I} - \mathbf{R})$ , а отсюда  $\mathbf{Z} = (\mathbf{I} + \mathbf{R})(\mathbf{I} - \mathbf{R})^{-1}$  и  $\mathbf{R} = (\mathbf{Z} + \mathbf{I})^{-1}(\mathbf{Z} - \mathbf{I})$ . Аналогично находим  $\mathbf{I} - \mathbf{R} = \mathbf{Y}(\mathbf{I} + \mathbf{R})$ , откуда  $\mathbf{Y} = (\mathbf{I} - \mathbf{R})(\mathbf{I} + \mathbf{R})^{-1}$  и  $\mathbf{R} = (\mathbf{I} + \mathbf{Y})^{-1}(\mathbf{I} - \mathbf{Y})$ . Из выражения (2.6) следует  $\mathbf{Y} = \mathbf{Z}^{-1}$ ,  $\mathbf{Z} = \mathbf{Y}^{-1}$ .

Отметим следующее важное обстоятельство. Хотя в общем случае матрицы  $\mathbf{Z}$ ,  $\mathbf{Y}$ ,  $\mathbf{R}$  бесконечны, всегда можно так расположить входные сечения на волновых каналах Флоке, что матрицы практически будут конечными. Пусть в каждом из присоединенных волновых каналов Флоке характер распространяющейся волны имеет только один тип. Это значит, что если входные сечения  $S_\alpha$  находятся в области регулярного режима (на достаточном расстоянии от полости волноводного трансформатора), то в выражениях (2.5) можно считать равными нулю все коэффициенты, кроме коэффициентов  $a_{1(\alpha)}$  и  $b_{1(\alpha)}$ . Векторы  $\mathbf{a}$  и  $\mathbf{b}$  оказываются только шестимерными:

$$\mathbf{a} = (a_{1(1)}, a_{2(1)}, \dots, a_{1(6)}); \quad \mathbf{b} = (b_{1(1)}, b_{2(1)}, \dots, b_{1(6)}),$$

а в бесконечных клеточных матрицах  $\mathbf{Z}^{\alpha\beta}$  остается по одному элементу  $Z_{11}^{\alpha\beta}$  (это касается и аналогичных матриц  $\mathbf{Y}_{11}^{\alpha\beta}$  и  $\mathbf{R}_{11}^{\alpha\beta}$ ). Таким образом, при отнесении входных сечений  $S_\alpha$  в области регулярного режима матрицы  $\mathbf{Z}$ ,  $\mathbf{Y}$ ,  $\mathbf{R}$  будут иметь порядок равный числу входных сечений волноводного трансформатора, он описывается тогда, как  $2P$ -полюсник в теории цепей.

### 2.3. Собственные волны каналов Флоке автономного блока

Описание собственных волн каналов Флоке необходимы для нахождения дескрипторов (многомодовые многоканальные матрицы рассеяния, проводимости и сопротивления) автономного блока (рис. 2.3). По Флоке осуществляется объединение автономных блоков между собой. Канал Флоке представляет собой прямоугольный волновод (рис. 2.6) с периодическими краевыми условиями на стенках

$$\begin{aligned} \vec{E}\left(-\frac{a}{2}, y\right) &= \vec{E}\left(\frac{a}{2}, y\right), & \vec{H}\left(-\frac{a}{2}, y\right) &= \vec{H}\left(\frac{a}{2}, y\right), \\ \vec{E}\left(x, -\frac{b}{2}\right) &= \vec{E}\left(x, \frac{b}{2}\right), & \vec{H}\left(x, -\frac{b}{2}\right) &= \vec{H}\left(x, \frac{b}{2}\right), \end{aligned}$$

где  $a, b$  – внутренние размеры поперечного сечения волновода.

Запишем уравнения Максвелла для гармонических колебаний [62]

$$\begin{cases} \text{rot } \vec{H}_m = i\omega \epsilon_0 \epsilon \vec{E}_m, \\ \text{rot } \vec{E}_m = -i\omega \mu_0 \mu \vec{H}_m, \end{cases} \quad (2.10)$$

где  $\omega = 2\pi f$  – круговая частота колебаний;  $\epsilon_0, \mu_0$  – электрическая и магнитная постоянные;  $\epsilon, \mu$  – относительные диэлектрическая и магнитная проницаемости среды заполнения.

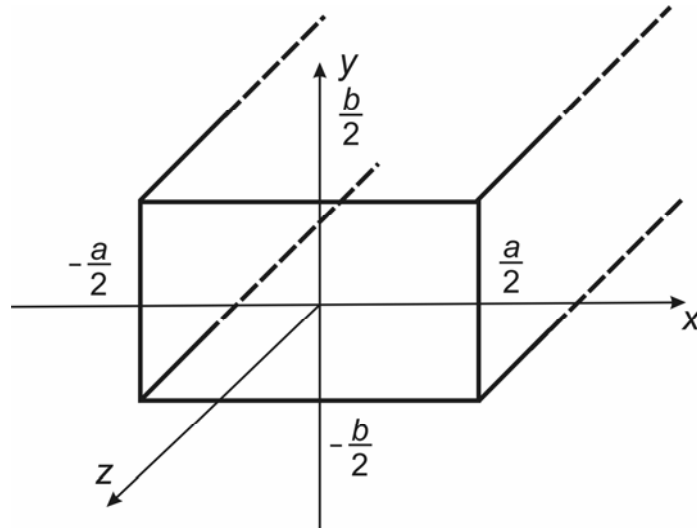


Рис. 2.6. Прямоугольный канал Флоке

Уравнения Максвелла (2.10) в прямоугольной декартовой системе координат примет следующий вид:

$$\begin{cases} \frac{\partial H_{mz}}{\partial y} - \frac{\partial H_{my}}{\partial z} = i\omega \varepsilon_0 \varepsilon E_{mx}, \\ \frac{\partial H_{mz}}{\partial x} - \frac{\partial H_{mx}}{\partial z} = -i\omega \varepsilon_0 \varepsilon E_{my}, \\ \frac{\partial H_{my}}{\partial x} - \frac{\partial H_{mx}}{\partial y} = i\omega \varepsilon_0 \varepsilon E_{mz}; \end{cases} \begin{cases} \frac{\partial E_{mz}}{\partial y} - \frac{\partial E_{my}}{\partial z} = -i\omega \mu_0 \mu H_{mx}, \\ \frac{\partial E_{mz}}{\partial x} - \frac{\partial E_{mx}}{\partial z} = i\omega \mu_0 \mu H_{my}, \\ \frac{\partial E_{my}}{\partial x} - \frac{\partial E_{mx}}{\partial y} = -i\omega \mu_0 \mu H_{mz}; \end{cases} \quad (2.11)$$

здесь  $E_{mx}$ ,  $E_{my}$ ,  $E_{mz}$ ,  $H_{mx}$ ,  $H_{my}$ ,  $H_{mz}$  – соответственно компоненты векторов  $\vec{E}_m$  и  $\vec{H}_m$ .

Решение уравнений Максвелла (2.11) для бесконечно протяженного канала Флоке будем искать в виде плоской неоднородной волны.

$$\vec{E}_m = \vec{E}(x, y) \exp(-i\Gamma z), \quad \vec{H}_m = \vec{H}(x, y) \exp(-i\Gamma z), \quad (2.12)$$

где  $\vec{E}(x, y)$ ,  $\vec{H}(x, y)$  – функции, характеризующие распределение электромагнитного поля на поперечном сечении канала Флоке;  $\Gamma$  – постоянная распределения волны в канале Флоке. Внося выражения (2.12) в системы уравнений (2.11) имеем:

$$\begin{cases} \frac{\partial E_z}{\partial y} + i\Gamma E_y = -i\omega \mu_0 \mu H_x, \\ \frac{\partial E_z}{\partial x} + i\Gamma E_x = i\omega \mu_0 \mu H_y, \\ \frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} = -i\omega \mu_0 \mu H_z; \end{cases} \begin{cases} \frac{\partial H_z}{\partial y} + i\Gamma H_y = i\omega \varepsilon_0 \varepsilon E_x, \\ \frac{\partial H_z}{\partial x} + i\Gamma H_x = -i\omega \varepsilon_0 \varepsilon E_y, \\ \frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} = i\omega \varepsilon_0 \varepsilon E_z, \end{cases} \quad (2.13)$$

где  $E_x$ ,  $E_y$ ,  $E_z$ ,  $H_x$ ,  $H_y$ ,  $H_z$  – соответственно компоненты векторов  $\vec{E}(x, y)$  и  $\vec{H}(x, y)$ .

Поперечные компоненты волн  $E_x$ ,  $E_y$ ,  $H_x$ ,  $H_y$  в уравнениях (2.13) можно выразить через продольные  $E_z$ ,  $H_z$ . Действительно, первая строка в левом столбце и вторая в правом – это система линейных алгебраических уравнений относительно  $E_y$  и  $H_x$ , а вторая строка в левом столбце и правом в первом – такая же система относительно  $E_x$  и  $H_y$ . Запишем решения этих алгебраических систем:

$$\begin{aligned} E_x &= -\frac{i\Gamma}{\chi^2} \frac{\partial E_z}{\partial x} - \frac{i\omega \mu_0 \mu}{\chi^2} \frac{\partial H_z}{\partial y}, & H_x &= \frac{i\omega \varepsilon_0 \varepsilon}{\chi^2} \frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{i\Gamma}{\chi^2} \frac{\partial H_z}{\partial x}, \\ E_y &= -\frac{i\Gamma}{\chi^2} \frac{\partial E_z}{\partial y} + \frac{i\omega \mu_0 \mu}{\chi^2} \frac{\partial H_z}{\partial x}, & H_y &= -\frac{i\omega \varepsilon_0 \varepsilon}{\chi^2} \frac{\partial E_z}{\partial x} - \frac{i\Gamma}{\chi^2} \frac{\partial H_z}{\partial y}. \end{aligned} \quad (2.14)$$



Полученным выражениям (2.14) можно придать более компактный вид. Обозначая поперечные составляющие части векторов  $\vec{E}(x, y)$ ,  $\vec{H}(x, y)$  символами  $\vec{E}_t$ ,  $\vec{H}_t$ :

$$\vec{E}_t = E_x \vec{i} + E_y \vec{j}; \quad \vec{H}_t = H_x \vec{i} + H_y \vec{j},$$

находим

$$\begin{aligned} \vec{E}_t &= -\frac{i\Gamma}{\chi^2} \nabla_{\perp} \vec{E}_z - \frac{i\omega\mu_0\mu}{\chi^2} \text{rot}_{\perp} \vec{H}_z; \\ \vec{H}_t &= \frac{i\omega\varepsilon_0\varepsilon}{\chi^2} \text{rot}_{\perp} \vec{E}_z - \frac{i\Gamma}{\chi^2} \nabla_{\perp} \vec{H}_z, \end{aligned} \quad (2.15)$$

где  $\chi^2 = \omega^2\varepsilon_0\varepsilon\mu_0\mu - \Gamma^2$ ;  $\nabla$  – оператор Набла;  $\perp$  – символ, который обозначает, что операция производится по координатам, лежащим в поперечной плоскости  $z = \text{const}$ ,  $\vec{E}_z = E_z \vec{k}$ ,  $\vec{H}_z = H_z \vec{k}$ ;  $\vec{i}$ ,  $\vec{j}$ ,  $\vec{k}$  – единичные орты, направленные соответственно вдоль координатных осей  $ox$ ,  $oy$ ,  $oz$ .

Как видно из выражений (2.15), поперечные компоненты электромагнитного поля плоской неоднородной волны состоят из двух частей, одна из которых обращается в нуль вместе с продольной составляющей  $\vec{E}_z$ , а другая – с  $\vec{H}_z$ . Частный класс плоских неоднородных волн составляют такие, которые лишены продольной компоненты  $H_z = 0$ . Такие волны называются  $E$ -волны (электрические волны) [62]. Положив в выражениях (2.15)  $H_z = 0$ , с учетом выражений (2.12) получаем следующие выражения для векторов поля для волн этого класса:

$$\begin{cases} \vec{E}_m = \left( \vec{E}_z - \frac{i\Gamma}{\chi^2} \nabla_{\perp} \vec{E}_z \right) \exp(-i\Gamma z); \\ \vec{H}_m = \frac{i\omega\varepsilon_0\varepsilon}{\chi^2} \text{rot}_{\perp} \vec{E}_z \exp(-i\Gamma z). \end{cases} \quad (2.16)$$

Другой частный класс образуют плоские неоднородные волны без продольной электрической компоненты  $E_z = 0$ . Такие волны называются  $H$ -волнами (магнитные волны) [62]. Взяв в выражениях (2.15)  $E_z = 0$ , получаем:

$$\begin{cases} \vec{E}_m = -\frac{i\omega\mu_0\mu}{\chi^2} \text{rot}_{\perp} \vec{H}_z \exp(-i\Gamma z); \\ \vec{H}_m = \left( \vec{H}_z - \frac{i\Gamma}{\chi^2} \nabla_{\perp} \vec{H}_z \right) \exp(-i\Gamma z). \end{cases} \quad (2.17)$$

Третий частный класс включает чисто поперечные волны  $E_z = 0$ ,  $H_z = 0$ , которые называются *ТЕМ*-волнами (поперечно-электромагнитные) [62]. Из выражений (2.15) видно, что если  $E_z = 0$  и  $H_z = 0$ , то при  $\chi^2 \neq 0$  обращаются в нуль все компоненты поля, а это значит, что *ТЕМ*-волны не существуют. Однако данный запрет снимается при  $\chi^2 = 0$ , поскольку выражения всех поперечных компонент становятся при этом неопределенностями вида  $\frac{0}{0}$ , где 0 – бесконечно малые величины. Поле *ТЕМ*-волны можно рассматривать как предельный случай *Е*-волны при  $E_z \rightarrow 0$ ,  $\chi \rightarrow 0$  или *Н*-волны при  $H_z \rightarrow 0$ ,  $\chi \rightarrow 0$ . Поэтому для *ТЕМ*-волн на основании выражений (2.16) и (2.17) имеем следующие выражения:

$$\begin{cases} \vec{E}_m = \nabla_{\perp} \varphi \exp(-i\Gamma z); \\ \vec{H}_m = \sqrt{\frac{\varepsilon_0 \varepsilon}{\mu_0 \mu}} (\vec{k} \times \nabla_{\perp} \varphi) \exp(-i\Gamma z), \end{cases} \quad (2.18)$$

где  $\varphi = \lim_{E_z \rightarrow 0, \chi \rightarrow 0} \frac{-i\Gamma}{\chi^2} E_z$ ,

$$\begin{cases} \vec{E}_m = \sqrt{\frac{\mu_0 \mu}{\varepsilon_0 \varepsilon}} (\nabla_{\perp} \psi \times \vec{k}) \exp(-i\Gamma z); \\ \vec{H}_m = \nabla_{\perp} \psi \exp(-i\Gamma z); \end{cases} \quad (2.19)$$

здесь  $\psi = \lim_{H_z \rightarrow 0, \chi \rightarrow 0} \frac{-i\Gamma}{\chi^2} H_z$ .

Рассмотрим уравнения Максвелла (2.10). Применяя операцию *rot* к первому уравнению и подставляя в него второе уравнение, имеем

$$\text{rot rot } \vec{H}_m = \omega^2 \varepsilon_0 \varepsilon \mu_0 \mu \vec{H}_m. \quad (2.20)$$

Используя дифференциальные формулы векторного анализа [63], из уравнения (2.20) получаем

$$\text{grad div } \vec{H}_m - \nabla^2 \vec{H}_m = \omega^2 \varepsilon_0 \mu_0 \varepsilon \mu \vec{H}_m. \quad (2.21)$$

Применяя операцию *div* ко второму уравнению Максвелла и используя дифференциальные формулы векторного анализа, имеем

$$\text{div } \vec{H}_m = 0. \quad (2.22)$$

С учетом выражения (2.22) уравнение (2.21) имеет вид:

$$\nabla^2 \vec{H}_m + \omega^2 \varepsilon_0 \mu_0 \varepsilon \mu \vec{H}_m = 0. \quad (2.23)$$

Дифференциальное уравнение (2.23) является уравнением электродинамики второго порядка. Аналогично можно получить дифференциальное уравнение второго порядка относительно  $\vec{E}_m$ :

$$\nabla^2 \vec{E}_m + \omega^2 \epsilon_0 \mu_0 \epsilon \mu \vec{E}_m = 0. \quad (2.24)$$

Подставляя выражения (2.12) для плоских неоднородных волн в выражения (2.23) и (2.24) получаем двумерные векторные уравнения Гельмгольца

$$\begin{aligned} \nabla_{\perp}^2 \vec{E}(x, y) + \chi^2 \vec{E}(x, y) &= 0; \\ \nabla_{\perp}^2 \vec{H}(x, y) + \chi^2 \vec{H}(x, y) &= 0, \end{aligned} \quad (2.25)$$

где  $\chi^2 = \omega^2 \epsilon_0 \mu_0 \epsilon \mu - \Gamma^2$ , которые применяются для описания электромагнитных волн в волновых каналах Флоке. Каждое из векторных уравнений (2.25) эквивалентно трем скалярным относительно  $E_x, E_y, E_z$  и  $H_x, H_y, H_z$ .

Поперечные компоненты волн  $E_x, E_y, H_x, H_y$  определяются через продольные  $E_z, H_z$ . Сформулируем и решим краевые задачи для уравнений Гельмгольца относительно  $E_z, H_z$ , а затем используя формулы (2.16)–(2.19) определим поперечные компоненты волн  $E_x, E_y, H_x, H_y$ .

Краевая задача для определения  $E_z$  формулируется в виде

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 E_z(x, y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_z(x, y)}{\partial y^2} + \chi^2 E_z(x, y) = 0; \\ E_z\left(-\frac{a}{2}, y\right) = E_z\left(\frac{a}{2}, y\right); \quad E_z\left(x, -\frac{b}{2}\right) = E_z\left(x, \frac{b}{2}\right). \end{cases} \quad (2.26)$$

Решение краевой задачи (3.36) имеет вид [64]

$$E_z = E_z^{mn} = E_0 \exp\left(i\left(\frac{2\pi m}{a}x + \frac{2\pi n}{b}y\right)\right); \quad (2.27)$$

$$\chi^2 = \chi_{mn}^2 = \left(\frac{2\pi m}{a}\right)^2 + \left(\frac{2\pi n}{b}\right)^2, \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots; \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots,$$

где  $E_0$  – неопределенный амплитудный коэффициент;  $E_z^{mn}$  – собственные функции задачи (2.26);  $\chi_{mn}^2$  – собственные значения, т.е. значения параметра  $\chi^2$  в выражениях (2.36), при которых реализуются решения  $E_z^{mn}$ . Они составляют бесконечное множество, причем каждая из функций  $E_z^{mn}$

характеризует распределение продольной компоненты вектора  $\vec{E}$  той или иной собственной волны на поперечном сечении канала Флоке.

Подставляя выражения (2.37) в систему уравнений (2.16), получаем компоненты поля  $E$ -волн прямоугольного канала Флоке

$$\left\{ \begin{array}{l} E_{mz} = E_0 \exp\left(i\left(\frac{2\pi m}{a}x + \frac{2\pi n}{b}y\right)\right) \exp(-i\Gamma z); \\ E_{mx} = E_0 \frac{\Gamma}{\chi^2} \frac{2\pi m}{a} \exp\left(i\left(\frac{2\pi m}{a}x + \frac{2\pi n}{b}y\right)\right) \exp(-i\Gamma z); \\ E_{my} = E_0 \frac{\Gamma}{\chi^2} \frac{2\pi n}{b} \exp\left(i\left(\frac{2\pi m}{a}x + \frac{2\pi n}{b}y\right)\right) \exp(-i\Gamma z); \\ H_{mx} = -E_0 \frac{\omega\varepsilon_0\varepsilon}{\chi^2} \frac{2\pi n}{b} \exp\left(i\left(\frac{2\pi m}{a}x + \frac{2\pi n}{b}y\right)\right) \exp(-i\Gamma z); \\ H_{my} = E_0 \frac{\omega\varepsilon_0\varepsilon}{\chi^2} \frac{2\pi m}{a} \exp\left(i\left(\frac{2\pi m}{a}x + \frac{2\pi n}{b}y\right)\right) \exp(-i\Gamma z), \end{array} \right. \quad (2.38)$$

где  $\Gamma = \Gamma_{mn} = \sqrt{\omega^2\varepsilon_0\mu_0\varepsilon\mu - \left(\frac{2\pi m}{a}\right)^2 - \left(\frac{2\pi n}{b}\right)^2}$  – постоянная распространения данной  $E$ -волны.

На основании системы уравнений (2.18) при  $m = 0$ ,  $n \rightarrow 0$  или  $n = 0$ ,  $m \rightarrow 0$  поле  $E$ -волны переходит в поле  $TEM$ -волны. Например, при  $n = 0$ ,  $m \rightarrow 0$  поле  $TEM$ -волны имеет следующую структуру:

$$\left\{ \begin{array}{l} E_{mx} = E_0 \Gamma \exp(-i\Gamma z); \\ H_{my} = E_0 \omega\varepsilon_0\varepsilon \exp(-i\Gamma z), \end{array} \right.$$

где  $\Gamma = \omega\sqrt{\varepsilon_0\mu_0\varepsilon\mu}$ .

Краевая задача для определения  $H_z$  формулируется в виде

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 H_z(x, y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 H_z(x, y)}{\partial y^2} + \chi^2 H_z(x, y) = 0; \\ H_z\left(-\frac{a}{2}, y\right) = H_z\left(\frac{a}{2}, y\right); \quad H_z\left(x, -\frac{b}{2}\right) = H_z\left(x, \frac{b}{2}\right). \end{array} \right.$$

Решение краевой задачи имеет вид

$$H_z = H_z^{mn} = H_0 \exp\left(i\left(\frac{2\pi m}{a}x + \frac{2\pi n}{b}y\right)\right); \quad (2.39)$$

$$\chi^2 = \chi_{mn}^2 = \left(\frac{2\pi m}{a}\right)^2 + \left(\frac{2\pi n}{b}\right)^2, \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots; \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

Подставляя выражения (2.39) в систему уравнений (2.17), получаем компоненты поля  $H$ -волн прямоугольного канала Флоке

$$\left\{ \begin{array}{l} H_{mz} = H_0 \exp\left(i\left(\frac{2\pi m}{a}x + \frac{2\pi n}{b}y\right)\right) \exp(-i\Gamma z); \\ H_{mx} = H_0 \frac{\Gamma}{\chi^2} \frac{2\pi m}{a} \exp\left(i\left(\frac{2\pi m}{a}x + \frac{2\pi n}{b}y\right)\right) \exp(-i\Gamma z); \\ H_{my} = H_0 \frac{\Gamma}{\chi^2} \frac{2\pi n}{b} \exp\left(i\left(\frac{2\pi m}{a}x + \frac{2\pi n}{b}y\right)\right) \exp(-i\Gamma z); \\ E_{mx} = H_0 \frac{\omega\mu_0\mu}{\chi^2} \frac{2\pi n}{b} \exp\left(i\left(\frac{2\pi m}{a}x + \frac{2\pi n}{b}y\right)\right) \exp(-i\Gamma z); \\ E_{my} = -H_0 \frac{\omega\mu_0\mu}{\chi^2} \frac{2\pi m}{a} \exp\left(i\left(\frac{2\pi m}{a}x + \frac{2\pi n}{b}y\right)\right) \exp(-i\Gamma z), \end{array} \right. \quad (2.40)$$

где  $\Gamma = \Gamma_{mn} = \sqrt{\omega^2 \varepsilon_0 \mu_0 \varepsilon \mu - \left(\frac{2\pi m}{a}\right)^2 - \left(\frac{2\pi n}{b}\right)^2}$  – постоянная распространения данной  $H$ -волны.

На основании системы уравнений (2.19) при  $m = 0, n \rightarrow 0$  или  $n = 0, m \rightarrow 0$  поле  $H$ -волны переходит в поле  $TEM$ -волны, эти волны взаимно ортогональны. Например при  $n = 0, m \rightarrow 0$  имеем

$$\left\{ \begin{array}{l} H_{mx} = H_0 \Gamma \exp(-i\Gamma z); \\ E_{my} = -H_0 \omega\mu_0\mu \exp(-i\Gamma z), \end{array} \right. \quad (2.41)$$

где  $\Gamma = \omega\sqrt{\varepsilon_0\mu_0\varepsilon\mu}$ .

Компоненты (2.38), (2.40) собственных волн канала Флоке записаны в системе координат  $хоу$ . Запишем собственные волны каналов Флоке в локальных системах координат автономного блока (рис.2.3). Для этого введем индексы  $\alpha, k(\alpha)$ , где индекс  $\alpha$  – номер канала Флоке ( $\alpha = 1, 2, \dots, 6$ ), индекс  $k(\alpha)$  определен на множестве индексов  $\{m_\alpha, n_\alpha\}$  ( $m_\alpha = 0, \pm 1, \dots; n_\alpha = 0, \pm 1, \dots; \alpha = 1, 2, \dots, 6$ ). Поперечные компоненты собственных электромагнитных волн будем обозначать  $\vec{e}_{k(\alpha)}, \vec{h}_{k(\alpha)}$  продольные  $\vec{e}_{k(\alpha)}^z, \vec{h}_{k(\alpha)}^z$ .

Запишем собственные волны каналов Флоке (2.38), (2.40) в локальных системах координат.

*E*-волны:

$$\begin{aligned}\vec{E}_{k(\alpha)}^{\pm} &= \left( \vec{e}_{k(\alpha)} + \vec{e}_{k(\alpha)}^z \right) \exp\left(\mp i \Gamma_{k(\alpha)} z_{\alpha}\right); \\ \vec{H}_{k(\alpha)}^{\pm} &= \pm \vec{h}_{k(\alpha)} \exp\left(\mp i \Gamma_{k(\alpha)} z_{\alpha}\right),\end{aligned}\quad (2.42)$$

где

$$\begin{aligned}\vec{e}_{k(\alpha)} &= N_{k(\alpha)}^E \frac{\Gamma_{k(\alpha)}}{\chi_{k(\alpha)}^2} \left( \frac{2\pi m_{\alpha}}{a_{\alpha}} \vec{i}_{\alpha} + \frac{2\pi n_{\alpha}}{b_{\alpha}} \vec{j}_{\alpha} \right) \exp\left( i \left( \frac{2\pi m_{\alpha}}{a_{\alpha}} x_{\alpha} + \frac{2\pi n_{\alpha}}{b_{\alpha}} y_{\alpha} \right) \right); \\ \vec{h}_{k(\alpha)} &= -N_{k(\alpha)}^E \frac{\omega \epsilon_0 \epsilon}{\chi_{k(\alpha)}^2} \left( \frac{2\pi n_{\alpha}}{b_{\alpha}} \vec{i}_{\alpha} - \frac{2\pi m_{\alpha}}{a_{\alpha}} \vec{j}_{\alpha} \right) \exp\left( i \left( \frac{2\pi m_{\alpha}}{a_{\alpha}} x_{\alpha} + \frac{2\pi n_{\alpha}}{b_{\alpha}} y_{\alpha} \right) \right); \\ \vec{e}_{k(\alpha)}^z &= N_{k(\alpha)}^E \vec{k}_{\alpha} \exp\left( i \left( \frac{2\pi m_{\alpha}}{a_{\alpha}} x_{\alpha} + \frac{2\pi n_{\alpha}}{b_{\alpha}} y_{\alpha} \right) \right);\end{aligned}$$

здесь

$$\chi_{k(\alpha)}^2 = \left( \frac{2\pi m_{\alpha}}{a_{\alpha}} \right)^2 + \left( \frac{2\pi n_{\alpha}}{b_{\alpha}} \right)^2; \quad \Gamma_{k(\alpha)} = \sqrt{\omega^2 \epsilon_0 \mu_0 \epsilon \mu - \chi_{k(\alpha)}^2};$$

$$N_{k(\alpha)}^E = \sqrt{\frac{\chi_{k(\alpha)}^2}{a_{\alpha} b_{\alpha} \omega \epsilon_0 \epsilon \Gamma_{k(\alpha)}}}; \quad \vec{i}_{\alpha}, \vec{j}_{\alpha}, \vec{k}_{\alpha} - \text{единичные орты локальных систем}$$

координат  $x_{\alpha}, y_{\alpha}, z_{\alpha}$ ;  $\epsilon_0, \mu_0$  – электрическая и магнитная постоянные;  $\epsilon, \mu$  – относительные диэлектрическая и магнитная проницаемости среды каналов Флоке;  $a_1 = a_4 = a, a_2 = a_5 = b, a_3 = a_6 = c, b_1 = b_4 = b, b_2 = b_5 = c, b_3 = b_6 = a$ ;  $a, b, c$  – геометрические размеры параллелепипеда (рис. 2.3); «+» – падающие (прямые) волны каналов Флоке; «-» – отраженные (обратные) волны.

При  $m_{\alpha} = 0, n_{\alpha} \rightarrow 0$  или  $n_{\alpha} = 0, m_{\alpha} \rightarrow 0$  поле *E*-волны переходит в поле *TEM*-волны. Эти волны взаимно ортогональны.

*H*-волны:

$$\begin{aligned}\vec{E}_{k(\alpha)}^{\pm} &= \vec{e}_{k(\alpha)} \exp\left(\mp i \Gamma_{k(\alpha)} z_{\alpha}\right); \\ \vec{H}_{k(\alpha)}^{\pm} &= \pm \left( \vec{h}_{k(\alpha)} + \vec{h}_{k(\alpha)}^z \right) \exp\left(\mp i \Gamma_{k(\alpha)} z_{\alpha}\right),\end{aligned}\quad (2.43)$$

где

$$\vec{e}_{k(\alpha)} = N_{k(\alpha)}^H \frac{\omega \mu_0 \mu}{\chi_{k(\alpha)}^2} \left( \frac{2\pi n_{\alpha}}{b_{\alpha}} \vec{i}_{\alpha} - \frac{2\pi m_{\alpha}}{a_{\alpha}} \vec{j}_{\alpha} \right) \exp\left( i \left( \frac{2\pi m_{\alpha}}{a_{\alpha}} x_{\alpha} + \frac{2\pi n_{\alpha}}{b_{\alpha}} y_{\alpha} \right) \right);$$

$$\vec{h}_{k(\alpha)} = N_{k(\alpha)}^H \frac{\Gamma_{k(\alpha)}}{\chi_{k(\alpha)}^2} \left( \frac{2\pi m_\alpha}{a_\alpha} \vec{i}_\alpha + \frac{2\pi n_\alpha}{b_\alpha} \vec{j}_\alpha \right) \exp \left( i \left( \frac{2\pi m_\alpha}{a_\alpha} x_\alpha + \frac{2\pi n_\alpha}{b_\alpha} y_\alpha \right) \right);$$

$$\vec{h}_{k(\alpha)}^z = N_{k(\alpha)}^H \vec{k}_\alpha \exp \left( i \left( \frac{2\pi m_\alpha}{a_\alpha} x_\alpha + \frac{2\pi n_\alpha}{b_\alpha} y_\alpha \right) \right);$$

здесь

$$N_{k(\alpha)}^H = \sqrt{\frac{\chi_{k(\alpha)}^2}{a_\alpha b_\alpha \omega \mu_0 \mu \Gamma_{k(\alpha)}}}, \quad m_\alpha = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \quad n_\alpha = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

При  $m_\alpha = 0, n_\alpha \rightarrow 0$  или  $n_\alpha = 0, m_\alpha \rightarrow 0$  поле  $H$ -волны переходит в поле  $TEM$ -волны. Эти волны взаимно ортогональны.

Собственные волны (2.42), (2.43) в каналах Флоке нормированы (2.4):

$$\int_{S_\alpha} \left( \vec{e}_{k(\alpha)} \times \vec{h}_{n(\alpha)}^* \right) \cdot d\vec{S}_\alpha = \begin{cases} 0, & k \neq n, \\ 1, & k = n, \end{cases}$$

где  $S_\alpha$  – поперечное сечение канала Флоке. Индекс  $n(\alpha)$  определен на множестве индексов  $\{q_\alpha, r_\alpha\}$  ( $q_\alpha = 0, \pm 1, \pm 2, \dots; r_\alpha = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ ).

## 2.4. Уравнения электродинамики для магнитных наночастиц автономного блока

Получим полную систему уравнений электродинамики для магнитных наночастиц, находящихся в области  $V_0 - V$  (рис. 2.3) автономного блока. Материальными уравнениями для магнитных сред является уравнение Ландау-Лифшица [65]

$$\frac{d\vec{M}(t)}{dt} = -\gamma \vec{M}(t) \times \vec{H}_{\text{эф}}(t), \quad (2.44)$$

где  $\vec{H}_{\text{эф}}(t)$  – суммарное эффективное магнитное поле, действующее на магнитный момент частицы;  $\vec{M}(t)$  – макроскопическая намагниченность вещества, т.е. магнитный момент, отнесенный к единице объема;  $\gamma = 2,21 \cdot 10^5 \text{ м/А} \cdot \text{с}$  – гиромагнитное отношение.

Входящее в (2.44) поле  $\vec{H}_{\text{эф}}(t)$  включает в себя действительное магнитное поле и эффективные поля, которыми учитываются различные виды взаимодействия. Для намагниченной до насыщения изотропной среды

$$\vec{H}_{\text{эф}}(t) = \vec{H}(t) + \vec{H}_{\text{обм}}(t), \quad (2.45)$$

где  $\vec{H}(t)$  – внутреннее магнитное поле (для неограниченной среды, т.е. при отсутствии размагничивания оно совпадает с внешним полем);  $\vec{H}_{\text{обм}}(t)$  – эффективное поле обменного взаимодействия. Это поле в свою очередь содержит два члена:

$$\vec{H}_{\text{обм}}(t) = \vec{H}_{\lambda}(t) + \vec{H}_q(t). \quad (2.46)$$

Первый член

$$\vec{H}_{\lambda}(t) = -\lambda \vec{M}_0 \quad (2.47)$$

представляет собой так называемое «молекулярное» поле, или поле Вейсса. Константа  $\lambda$  для кристалла с кубической решеткой может быть приближенно записана [66]:

$$\lambda = \frac{2AN}{M_0^2}, \quad (2.48)$$

где  $A$  – обменный интеграл (отнесенная к одному спину энергия обменного взаимодействия);  $N$  – число элементарных частиц в единице объема;  $M_0$  – намагниченность насыщения. Константа  $\lambda$  связана с температурой Кюри  $T_k$  следующим соотношением [66]:

$$\lambda = \frac{kT_k N}{M_0^2}, \quad (2.49)$$

где  $k = 1,38 \cdot 10^{-23}$  Дж/к – постоянная Больцмана. Оценка по формуле (2.49) приводит для ферромагнетиков, представляющих практический интерес, в том числе и для ферритов, к очень большим значениям  $\vec{H}_{\lambda}(t)$  – порядка  $10^7$  Э. Однако поле  $\vec{H}_{\lambda}(t)$ , параллельное намагниченности  $\vec{M}(t)$ , не входит в уравнение движения намагниченности (2.44).

Второй член эффективного поля (2.5) выражается следующим образом [66]:

$$\vec{H}_q(t) = q \nabla^2 \vec{M}(t), \quad (2.50)$$

где  $\Delta = \nabla^2$  – оператор Лапласа;  $q$  – константа обменного взаимодействия.

Константа обменного взаимодействия  $q$  для кристалла с кубической решеткой может быть записана в виде [66]:

$$q = \frac{2ANa^2}{M_0^2} = \lambda a^2, \quad (2.51)$$

где  $a$  – постоянная решетки.

Поле (2.50) учитывает добавочную обменную энергию, которая возникает в случае непараллельности соседних спинов, т.е. изменения намагниченности  $\vec{M}(t)$  в пространстве. Множитель  $q$  имеет величину порядка  $10^{-9}$ . Следовательно, это поле должно приниматься во внимание лишь при



таких быстрых вариациях намагниченности в пространстве, когда намагниченность существенно изменяется на расстояниях порядка 100 нм. Для магнитных наночастиц, находящихся в полости автономного блока, это условия выполняется. Следовательно, необходимо учитывать в уравнении Ландау – Лифшица эффективное поле обменного взаимодействия.

В реальных ферромагнитных средах всегда имеют место магнитные потери, обусловленные взаимодействием спинов с окружающей средой. Наличие магнитных потерь приводит к тому, что свободная прецессия намагниченности в реальных средах является затухающей. При отсутствии внешнего переменного поля очень скоро устанавливается равновесное состояние, соответствующее статической намагниченности  $\vec{M}_0$ . В случае вынужденной прецессии наличие магнитных потерь приведет к тому, что компоненты тензора магнитной проницаемости будут комплексными, а значения вещественных и мнимых частей этих компонентов будут оставаться конечными при ферромагнитном резонансе.

Одним из путей учета магнитных потерь является предположение [66], что на намагниченность, кроме поля  $\vec{H}_{\text{эф}}(t)$ , действует некоторое эффективное поле «сил трения», поперечное и пропорциональное по величине скорости изменения намагниченности. Тогда уравнение (2.44) заменится на уравнение

$$\frac{d\vec{M}(t)}{dt} = -\gamma\vec{M}(t) \times \vec{H}_{\text{эф}}(t) + \frac{\alpha}{M}\vec{M}(t) \times \frac{d\vec{M}(t)}{dt}, \quad (2.52)$$

где  $\alpha$  – безразмерный параметр, характеризующий потери.

Если потери малы, т.е. второй член в (2.52) мал по сравнению с первым, то  $\frac{d\vec{M}(t)}{dt}$  во втором члене можно приближенно заменить  $\gamma\vec{M}(t) \times \vec{H}_{\text{эф}}(t)$ .

Тогда уравнение (2.52) перейдет в следующее:

$$\frac{d\vec{M}(t)}{dt} = -\gamma\vec{M}(t) \times \vec{H}_{\text{эф}}(t) - \frac{\eta}{M^2}\vec{M}(t) \times (\vec{M}(t) \times \vec{H}_{\text{эф}}(t)), \quad (2.53)$$

где  $\eta = \alpha\gamma M$ .

Это уравнение может быть также записано в виде [65]:

$$\frac{d\vec{M}(t)}{dt} = -\gamma\vec{M}(t) \times \vec{H}_{\text{эф}}(t) - \eta(\vec{H}(t) - \frac{1}{M^2}\vec{M}(t)(\vec{H}_{\text{эф}}(t) \cdot \vec{M}(t))). \quad (2.54)$$

Из уравнения (2.52) или (2.53) следует, что  $\vec{M}(t) \cdot \frac{d\vec{M}(t)}{dt} = 0$ , т.е.

$$M^2 = \text{const}. \quad (2.55)$$

Согласно этим уравнениям прецессия намагниченности и при наличии потерь происходит таким образом, что длина вектора  $\vec{M}(t)$  не изменяется.

Уравнение прецессии намагниченности, не удовлетворяющее этому условию, может быть записано в виде [67]:

$$\frac{d\vec{M}(t)}{dt} = -\gamma(\vec{M}(t) \times \vec{H}_{\text{эф}}(t)) + \omega_r(\chi_0 \vec{H}(t) - \vec{M}(t)), \quad (2.56)$$

где  $\omega_r$  – частота релаксации;  $\chi_0 = \frac{M_0}{H_0}$  – статическая восприимчивость.

В уравнении (2.56) (модифицированное уравнение Блоха), связанная с потерями часть  $\frac{d\vec{M}(t)}{dt}$  пропорциональна отклонению  $\vec{M}(t)$  от того значения намагниченности  $\chi_0 \vec{H}(t)$ , которое установилось бы, если бы магнитное поле перестало изменяться, сохраняя свое мгновенное значение  $\vec{H}(t)$ .

Во всех приведенных уравнениях потери характеризуются одним каким-либо параметром:  $\alpha, \eta, \omega_r$ . Делались попытки применить к ферромагнетикам уравнения с большим числом параметров, характеризующих потери, например уравнения Блоха с двумя временами релаксации [68] или уравнение, отличающиеся от (2.53) наличием дополнительного члена, пропорционального намагниченности  $\vec{M}(t)$  [69]. Однако имеющиеся в настоящее время экспериментальный материал и теоретические соображения [70], не требуют для случая ферромагнетика введения в уравнение прецессии более одного параметра, характеризующего потери.

Магнитные потери учитываются одним из параметров  $\alpha, \eta, \omega_r$ , входящих в уравнения движения вектора намагниченности (2.53), (2.54) и (2.56). В [70] было показано, что все эти три уравнения равносильны с точки зрения учета магнитных потерь. Выбираем уравнение движения вектора намагниченности в форме (2.56), так как его член, учитывающий магнитные потери, не содержит векторного и скалярного произведения векторов. Это упрощает построение математической модели. Система уравнений электродинамики принимает следующий вид:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{rot } H(t) = \epsilon_0 \epsilon \frac{\partial \vec{E}(t)}{\partial t} + \sigma \vec{E}(t); \end{array} \right. \quad (2.57)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{rot } E(t) = -\frac{\partial \vec{B}(t)}{\partial t}; \end{array} \right. \quad (2.58)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{B}(t) = \vec{M}(t) + \mu_0 \vec{H}(t); \end{array} \right. \quad (2.59)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d\vec{M}(t)}{dt} = -\gamma(\vec{M}(t) \times \vec{H}_{\text{эф}}(t)) + \omega_r(\chi_0 \vec{H}(t) - \vec{M}(t)); \end{array} \right. \quad (2.60)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{H}_{\text{эф}}(t) = \vec{H}(t) + \vec{H}_q(t); \end{array} \right. \quad (2.61)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{H}_q(t) = q \nabla^2 \vec{M}(t), \end{array} \right. \quad (2.62)$$

где  $\vec{E}(t), \vec{H}(t)$  – векторы напряженности электрического и магнитного полей;  $\vec{M}(t)$  – вектор намагниченности среды;  $\vec{B}(t)$  – вектор магнитной индукции;  $\vec{H}_{\text{эф}}(t)$  – суммарное эффективное магнитное поле, действующее на магнитный момент частицы;  $\vec{H}_q(t)$  – эффективное магнитное поле обменного взаимодействия;  $\nabla$  – оператор Набла;  $\varepsilon$  – относительная диэлектрическая проницаемость;  $\sigma$  – электропроводность среды;  $\varepsilon_0, \mu_0$  – электрическая и магнитная постоянные;  $\gamma$  – гиромагнитное отношение;  $\omega_r$  – частота релаксации;  $\chi_0$  – статическая восприимчивость;  $q$  – константа обменного взаимодействия.

Используя формулы векторного анализа [63] запишем эффективное поле обменного взаимодействия (2.62) в виде:

$$\vec{H}_q(t) = q(\text{grad div } \vec{M}(t) - \text{rot rot } \vec{M}(t)). \quad (2.63)$$

Учитывая, что  $\text{div } \vec{M}(t) = 0$ , и вводя новую векторную функцию  $\vec{F}(t) = \text{rot } \vec{M}(t)$ , запишем (2.63) в виде

$$\vec{H}_q(t) = -q \text{rot } \vec{F}(t). \quad (2.64)$$

Подставляя (2.59) в (2.58), и учитывая (2.64), запишем полную систему уравнений электродинамики для магнитной наночастицы с учетом поля обменного взаимодействия:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{rot } \vec{H}(t) = \varepsilon_0 \varepsilon \frac{\partial \vec{E}(t)}{\partial t} + \sigma \vec{E}(t), \\ \text{rot } \vec{E}(t) = -\frac{\partial}{\partial t}(\vec{M}(t) + \mu_0 \vec{H}(t)), \\ \frac{d\vec{M}(t)}{dt} = -\gamma(\vec{M}(t) \times (\vec{H}(t) + \vec{H}_q(t)) + \\ \quad + \omega_r(\chi_0 \vec{H}(t) - \vec{M}(t)), \\ \text{rot } \vec{M}(t) = \vec{F}(t), \\ \text{rot } \vec{F}(t) = -q^{-1} \vec{H}_q(t). \end{array} \right. \quad (2.65)$$

Пусть источники электромагнитного поля являются гармоническими, а магнитная среда в общем случае является нелинейной, тогда представляя векторные поля  $\vec{E}(t)$ ,  $\vec{H}(t)$ ,  $\vec{M}(t)$ ,  $\vec{F}(t)$ ,  $\vec{H}_q(t)$  в виде рядов по всевозможным комбинационным частотам  $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_m, \dots$  [31-38]

$$\vec{E}(t) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \vec{E}(\omega_m) \exp(i\omega_m t); \quad \vec{H}(t) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \vec{H}(\omega_m) \exp(i\omega_m t);$$

$$\vec{M}(t) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \vec{M}(\omega_m) \exp(i\omega_m t); \vec{F}(t) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \vec{F}(\omega_m) \exp(i\omega_m t);$$

$$\vec{H}_q(t) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \vec{H}_q(\omega_m) \exp(i\omega_m t)$$

и подставляя эти ряды в (2.65) получаем следующие системы стационарных нелинейных уравнений на каждой из комбинационных частот:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{rot } \vec{H}(\omega_m) = i\omega_m \varepsilon_0 \dot{\vec{E}}(\omega_m); \\ \text{rot } \vec{E}(\omega_m) = -i\omega_m \vec{M}(\omega_m) - i\omega_m \mu_0 \vec{H}(\omega_m); \\ \gamma \sum_{i=-\infty}^{\infty} \sum_{j=-\infty}^{\infty} \gamma_{ij} (\vec{M}(\omega_i) \times (\vec{H}(\omega_j) + \vec{H}_q(\omega_j))) = -(\omega_r + i\omega_m) \vec{M}(\omega_m) + \\ + \omega_r \chi_0 \vec{H}(\omega_m) - \gamma \vec{M}_0 \times \vec{H}(\omega_m) - \gamma \vec{M}_0 \times \vec{H}_q(\omega_m) - \gamma \vec{M}(\omega_m) \times \vec{H}_0; \\ \text{rot } \vec{M}(\omega_m) = \vec{F}(\omega_m); \\ \text{rot } \vec{F}(\omega_m) = -q^{-1} \vec{H}_q(\omega_m); \quad m = \pm 1, \pm 2, \dots, \end{array} \right. \quad (2.66)$$

где  $\omega_m$  ( $\omega_m > 0, \omega_{-m} = -\omega_m, \omega_0 = 0$ ) – комбинационные частоты;  
 $\vec{H}_0 = \vec{H}(\omega_0)$ ;

$$\vec{M}_0 = \vec{M}(\omega_0); \dot{\vec{E}}(\omega_m) = \varepsilon(\omega_m) - i \frac{\sigma(\omega_m)}{\varepsilon_0 \omega_m}; \gamma_{ij} = \begin{cases} 0, & \text{если } \omega_i + \omega_j \neq \omega_m, \\ 1, & \text{если } \omega_i + \omega_j = \omega_m. \end{cases}$$

В области диэлектрических наносфер автономного блока (рис.2.3) уравнения Максвелла имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} \text{rot } \vec{H}(\omega_m) &= i\omega_m \varepsilon_0 \varepsilon_v \vec{E}(\omega_m), \\ \text{rot } \vec{E}(\omega_m) &= -i\omega_m \mu_0 \mu_v \vec{H}(\omega_m), \end{aligned} \quad (2.67)$$

где  $\varepsilon_v, \mu_v$  – относительная диэлектрическая и магнитная проницаемости наносфер.

## 2.5. Построение модели автономного блока с магнитными наночастицами и диэлектрическими наносферами

Построим проекционную модель автономного блока в виде прямоугольного параллелепипеда с включениями в виде магнитных частиц и диэлектрических наносфер (рис. 2.3). Объединяя выражения (2.42) (2.43) в одно, запишем выражения для определения собственных электромагнит-

ных волн виртуальных каналов Флоке автономного блока на комбинационных частотах:

$$\begin{aligned}\vec{E}_{k(\alpha)}^{\pm}(\omega_m) &= \left( \vec{e}_{k(\alpha)}(\omega_m) \pm \vec{e}_{k(\alpha)}^z(\omega_m) \right) \exp\left(\pm i \Gamma_{k(\alpha)}(\omega_m) z_{\alpha}\right); \\ \vec{H}_{k(\alpha)}^{\pm}(\omega_m) &= \left( \pm \vec{h}_{k(\alpha)}(\omega_m) \pm \vec{h}_{k(\alpha)}^z(\omega_m) \right) \exp\left(\pm i \Gamma_{k(\alpha)}(\omega_m) z_{\alpha}\right); \\ k &= 1, 2, \dots, \infty; \quad \alpha = 1, 2, \dots, 6; \quad \omega_m = \pm 1, \pm 2, \dots,\end{aligned}\quad (2.68)$$

где  $\vec{e}_{k(\alpha)}(\omega_m)$ ,  $\vec{h}_{k(\alpha)}(\omega_m)$  – поперечные электрические и магнитные компоненты собственных волн;  $\vec{e}_{k(\alpha)}^z(\omega_m)$ ,  $\vec{h}_{k(\alpha)}^z(\omega_m)$  – продольные электрические и магнитные компоненты собственных волн;  $\Gamma_{k(\alpha)}(\omega_m)$  – постоянные распространения собственных волн;  $\omega_m$  – комбинационные частоты.

Поперечные электрические и магнитные компоненты собственных волн каналов Флоке образуют полную систему ортогональных функций  $\{\vec{e}_{k(\alpha)}(\omega_m), \vec{h}_{k(\alpha)}(\omega_m)\}$  [1]. Любое поперечное электромагнитное поле на входных сечениях  $S_{\alpha}$  автономного блока разлагается по этим системам в ортогональные ряды Фурье:

$$\begin{cases} \vec{E}_{\alpha}(\omega_m) = \sum_{k=1}^{\infty} a_{k(\alpha)}(\omega_m) \vec{e}_{k(\alpha)}(\omega_m); \\ \vec{H}_{\alpha}(\omega_m) = \sum_{k=1}^{\infty} b_{k(\alpha)}(\omega_m) \vec{h}_{k(\alpha)}(\omega_m); \end{cases} \quad \alpha = 1, 2, \dots, 6; \quad m = \pm 1, \pm 2, \dots \quad (2.69)$$

На каждом входном сечении  $S_{\alpha}$  автономного блока касательное электромагнитное поле можно представить также и в виде суперпозиции прямых и обратных волн каналов Флоке [1]:

$$\begin{cases} \vec{E}_{\alpha}(\omega_m) = \sum_{k=1}^{\infty} (c_{k(\alpha)}^+(\omega_m) + c_{k(\alpha)}^-(\omega_m)) \vec{e}_{k(\alpha)}(\omega_m); \\ \vec{H}_{\alpha}(\omega_m) = \sum_{k=1}^{\infty} (c_{k(\alpha)}^+(\omega_m) - c_{k(\alpha)}^-(\omega_m)) \vec{h}_{k(\alpha)}(\omega_m); \end{cases} \quad (2.70)$$

$\alpha = 1, 2, \dots, 6; \quad m = \pm 1, \pm 2, \dots$ ,

где  $c_{k(\alpha)}^+(\omega_m)$ ,  $c_{k(\alpha)}^-(\omega_m)$  – амплитуды падающих и отраженных волн.

Из рядов Фурье (2.69) (2.70) и нормировки

$$\int_{S_{\alpha}} \left( \vec{e}_{k(\alpha)}(\omega_m) \times \vec{h}_{n(\alpha)}^*(\omega_m) \right) \cdot d\vec{S}_{\alpha} = \begin{cases} 0, & k \neq n, \\ 1, & k = n, \end{cases} \quad (2.71)$$

следуют следующие интегральные выражения:

$$a_{k(\alpha)}(\omega_m) = \int_{S_{\alpha}} \left( \vec{E}_{\alpha}(\omega_m) \times \vec{h}_{k(\alpha)}^*(\omega_m) \right) \cdot d\vec{S}_{\alpha}; \quad (2.72)$$

$$b_{k(\alpha)}(\omega_m) = \int_{S_\alpha} (\vec{e}_{k(\alpha)}(\omega_m) \times \vec{H}_\alpha^*(\omega_m)) \cdot d\vec{S}_\alpha; \quad (2.73)$$

$$\int_{S_\alpha} (\vec{E}_\alpha(\omega_m) \times \vec{h}_{k(\alpha)}^*(\omega_m)) \cdot d\vec{S}_\alpha + \int_{S_\alpha} (\vec{e}_{k(\alpha)}(\omega_m) \times \vec{H}_\alpha^*(\omega_m)) \cdot d\vec{S}_\alpha = 2c_{k(\alpha)}^+(\omega_m); \quad (2.74)$$

$$\int_{S_\alpha} (\vec{E}_\alpha(\omega_m) \times \vec{h}_{k(\alpha)}^*(\omega_m)) \cdot d\vec{S}_\alpha - \int_{S_\alpha} (\vec{e}_{k(\alpha)}(\omega_m) \times \vec{H}_\alpha^*(\omega_m)) \cdot d\vec{S}_\alpha = 2c_{k(\alpha)}^-(\omega_m). \quad (2.75)$$

Интегральные выражения (2.72), (2.73), (2.74), (2.75) являются краевыми условиями на гранях автономного блока. В электродинамике эти краевые условия называются условиями неасимптотического излучения [4-5].

Краевая задача электродинамики для автономного блока с магнитными наночастицами и диэлектрическими наносферами (рис.2.3) формулируется следующим образом. Электромагнитное поле в области  $V$  (диэлектрические наносферы) автономного блока должно удовлетворять уравнениям Максвелла (2.67), в области  $V_0 - V$  (магнитные наночастицы) – системе уравнений электродинамики (2.66), на гранях автономного блока (входные сечения  $S_\alpha$ ) одному из условий неасимптотического излучения (2.72)-(2.75).

Замкнутое аналитическое решение сформулированной краевой задачи для автономного блока не существует. Для решения этой краевой задачи будем использовать проекционный метод [52]. В качестве базисных функций  $\{\vec{E}_{k(m)}\}$ ,  $\{\vec{H}_{k(m)}\}$ , где  $k$  – номер базисной функции,  $m$  – номер комбинационной частоты, используем системы собственных функций прямоугольного резонатора с однородно-периодическими краевыми условиями на его гранях. Собственные частоты  $\omega_k$  и собственные функции  $\{\vec{E}_k\}$ ,  $\{\vec{H}_k\}$  резонатора определяются из решения следующей краевой задачи для уравнений Максвелла:

$$\left. \begin{aligned} \text{rot } \vec{H}_k &= i\omega_k \epsilon_0 \epsilon_v \vec{E}_k; \\ \text{rot } \vec{E}_k &= -i\omega_k \mu_0 \mu_v \vec{H}_k, \end{aligned} \right\} \text{ в области } V_0, \quad (2.76)$$

$$\left. \begin{aligned} \vec{E}_k(S_1) &= \vec{E}_k(S_4), \quad \vec{H}_k(S_1) = \vec{H}_k(S_4); \\ \vec{E}_k(S_2) &= \vec{E}_k(S_5), \quad \vec{H}_k(S_2) = \vec{H}_k(S_5); \\ \vec{E}_k(S_3) &= \vec{E}_k(S_6), \quad \vec{H}_k(S_3) = \vec{H}_k(S_6). \end{aligned} \right\} \text{ на гранях,} \quad (2.77)$$

где  $\epsilon_v, \mu_v$  – относительная диэлектрическая и магнитная проницаемости среды диэлектрических наносфер. Геометрические размеры прямоуголь-

ного резонатора (область  $V_0$ ) совпадают с геометрическими размерами автономного блока (рис. 2.5).

Методика решения краевой задачи (2.76), (2.77) предложена в [62]. Используя эту методику, решим краевую задачу и запишем собственные функции прямоугольного резонатора.

$E$  – функции (поля):

$$\begin{aligned}
\vec{E}_k &= N_k \frac{1}{\chi^2} \frac{2\pi m}{a} \frac{2\pi p}{c} \exp\left(i\left(\frac{2\pi m}{a}x + \frac{2\pi n}{b}y + \frac{2\pi p}{c}\right)\right) \vec{i} + \\
&+ N_k \frac{1}{\chi^2} \frac{2\pi n}{b} \frac{2\pi p}{c} \exp\left(i\left(\frac{2\pi m}{a}x + \frac{2\pi n}{b}y + \frac{2\pi p}{c}\right)\right) \vec{j} + \\
&+ N_k \exp\left(i\left(\frac{2\pi m}{a}x + \frac{2\pi n}{b}y + \frac{2\pi p}{c}\right)\right) \vec{k}; \\
\vec{H}_k &= -N_k \frac{\omega_k \varepsilon_0 \varepsilon_v}{\chi^2} \frac{2\pi n}{b} \exp\left(i\left(\frac{2\pi m}{a}x + \frac{2\pi n}{b}y + \frac{2\pi p}{c}\right)\right) \vec{i} + \\
&+ N_k \frac{\omega_k \varepsilon_0 \varepsilon_v}{\chi^2} \frac{2\pi m}{a} \exp\left(i\left(\frac{2\pi m}{a}x + \frac{2\pi n}{b}y + \frac{2\pi p}{c}\right)\right) \vec{j},
\end{aligned} \tag{2.78}$$

где  $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$  – единичные орты прямоугольной декартовой системы координат,

$$\chi^2 = \chi_{mn}^2 = \left(\frac{2\pi m}{a}\right)^2 + \left(\frac{2\pi n}{b}\right)^2, \quad N_k = \frac{\chi^2}{\varepsilon_0 \varepsilon_v \omega_k \sqrt{\mu_0 \mu_v} \sqrt{abc}},$$

$$\omega_k = \omega_{mnp} = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0 \varepsilon \mu}} \sqrt{\left(\frac{2\pi m}{a}\right)^2 + \left(\frac{2\pi n}{b}\right)^2 + \left(\frac{2\pi p}{c}\right)^2},$$

$$m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots; \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots; \quad p = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

$H$  – функции (поля):

$$\begin{aligned}
\vec{H}_k &= M_k \frac{1}{\chi^2} \frac{2\pi m}{a} \frac{2\pi p}{c} \exp\left(i\left(\frac{2\pi m}{a}x + \frac{2\pi n}{b}y + \frac{2\pi p}{c}\right)\right) \vec{i} + \\
&+ M_k \frac{1}{\chi^2} \frac{2\pi n}{b} \frac{2\pi p}{c} \exp\left(i\left(\frac{2\pi m}{a}x + \frac{2\pi n}{b}y + \frac{2\pi p}{c}\right)\right) \vec{j} + \\
&+ M_k \exp\left(i\left(\frac{2\pi m}{a}x + \frac{2\pi n}{b}y + \frac{2\pi p}{c}\right)\right) \vec{k}; \\
\vec{E}_k &= -M_k \frac{\omega_k \mu_0 \mu_v}{\chi^2} \frac{2\pi n}{b} \exp\left(i\left(\frac{2\pi m}{a}x + \frac{2\pi n}{b}y + \frac{2\pi p}{c}\right)\right) \vec{i} + \\
&+ M_k \frac{\omega_k \mu_0 \mu_v}{\chi^2} \frac{2\pi m}{a} \exp\left(i\left(\frac{2\pi m}{a}x + \frac{2\pi n}{b}y + \frac{2\pi p}{c}\right)\right) \vec{j},
\end{aligned} \tag{2.79}$$

где 
$$\chi^2 = \chi_{mn}^2 = \left(\frac{2\pi m}{a}\right)^2 + \left(\frac{2\pi n}{b}\right)^2, \quad M_k = \frac{\chi^2}{\mu_0 \mu_v \omega_k \sqrt{\epsilon_0 \epsilon_v} \sqrt{abc}},$$

$$\omega_k = \omega_{mnp} = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0 \epsilon \mu}} \sqrt{\left(\frac{2\pi m}{a}\right)^2 + \left(\frac{2\pi n}{b}\right)^2 + \left(\frac{2\pi p}{c}\right)^2},$$

$m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots; \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots; \quad p = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

Собственные функции резонатора (2.78), (2.79) ортогональны и нормированы [62]:

$$\mu_0 \mu_v \int_{V_0} \vec{H}_k^* \cdot \vec{H}_n dV = \epsilon_0 \epsilon_v \int_{V_0} \vec{E}_k^* \cdot \vec{H}_n dV = \delta_{kn}. \quad (2.80)$$

Запишем для системы уравнений электродинамики (2.66) проекционную интегральную форму (для этого используются уравнения Максвелла (2.76), тождество  $\vec{b} \operatorname{rot} \vec{a} - \vec{a} \operatorname{rot} \vec{b} = \operatorname{rot}(\vec{a} \times \vec{b})$  и формула Остроградского – Гаусса):

$$\left\{ \begin{array}{l} \oint_S (\vec{E}(\omega_m) \times \vec{H}_{k(m)}^*) \cdot d\vec{S} = -i\omega_m \int_{V_0} \vec{M}(\omega_m) \cdot \vec{H}_{k(m)}^* dV - \\ - i\omega_m \mu_0 \int_{V_0} \vec{H}(\omega_m) \cdot \vec{H}_{k(m)}^* dV - i\omega_k \epsilon_0 \int_{V_0} \vec{E}(\omega_m) \cdot \vec{E}_{k(m)}^* dV; \\ \oint_S (\vec{H}(\omega_m) \times \vec{E}_{k(m)}^*) \cdot d\vec{S} = i\omega_m \epsilon_0 \int_{V_0} \dot{\epsilon}(\omega_m) \vec{E}(\omega_m) \cdot \vec{E}_{k(m)}^* dV + \\ + i\omega_k \mu_0 \int_{V_0} \vec{H}(\omega_m) \cdot \vec{H}_{k(m)}^* dV; \\ \int_{V_0} \vec{F}(\omega_m) \cdot \vec{E}_{k(m)}^* dV + i\omega_k \mu_0 \int_{V_0} \vec{M}(\omega_m) \cdot \vec{H}_{k(m)}^* dV = 0; \\ q^{-1} \int_{V_0} \vec{H}_q(\omega_m) \cdot \vec{H}_{k(m)}^* dV + i\omega_k \epsilon_0 \int_{V_0} \vec{F}(\omega_m) \cdot \vec{E}_{k(m)}^* dV = 0; \\ -(\omega_r + i\omega_m) \int_{V_0} \vec{M}(\omega_m) \cdot \vec{H}_{k(m)}^* dV - \gamma \int_{V_0} (\vec{M}_0 \times \vec{H}(\omega_m)) \cdot \vec{H}_{k(m)}^* dV - \\ - \gamma \int_{V_0} (\vec{M}_0 \times \vec{H}_q(\omega_m)) \cdot \vec{H}_{k(m)}^* dV - \gamma \int_{V_0} (\vec{M}(\omega_m) \times \vec{H}_0) \cdot \vec{H}_{k(m)}^* dV + \\ + \omega_r \chi_0 \int_{V_0} \vec{H}(\omega_m) \cdot \vec{H}_{k(m)}^* dV = \gamma \sum_{i=-\infty}^{\infty} \sum_{j=-\infty}^{\infty} \gamma_{ij} \int_{V_0} (\vec{M}(\omega_i) \times (\vec{H}(\omega_j) + \vec{H}_q(\omega_j))) \cdot \vec{H}_{k(m)}^* dV, \end{array} \right. \quad (2.81)$$

где  $S = S_1 \cup S_2 \cup \dots \cup S_6$ .

Разработаем методику численного определения дескриптора автономного блока, связывающего коэффициенты  $a_{k(\alpha)}(\omega_m)$  с коэффициентами



$b_{k(\alpha)}(\omega_m)$  рядов Фурье (2.69) (линейный аналог – матрица проводимости). Решение краевой задачи ищем в виде рядов Фурье по системам функций  $\{\vec{E}_{n(m)}\}$ ,  $\{\vec{H}_{n(m)}\}$  (собственные функции прямоугольного резонатора),  $\{\vec{e}_{l(\beta)}(\omega_m)\}$ ,  $\{\vec{h}_{l(\beta)}(\omega_m)\}$  (собственные функции каналов Флоке).

В области  $V_0$  автономного блока (рис. 2.3):

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{E}(\omega_m) = \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{a}_n(\omega_m) \vec{E}_{n(m)}; \\ \vec{H}(\omega_m) = \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{b}_n(\omega_m) \vec{H}_{n(m)}; \\ \vec{M}(\omega_m) = \sum_{n=1}^{\infty} d_n(\omega_m) \vec{H}_{n(m)}; \\ \vec{H}_q(\omega_m) = \sum_{n=1}^{\infty} g_n(\omega_m) \vec{H}_{n(m)}; \\ \vec{F}(\omega_m) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(\omega_m) \vec{E}_{n(m)}. \end{array} \right. \quad (2.82)$$

На гранях автономного блока:

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{E}_{\beta}(\omega_m) = \sum_{l=1}^{\infty} a_{l(\beta)}(\omega_m) \vec{e}_{l(\beta)}(\omega_m); \\ \vec{H}_{\beta}(\omega_m) = \sum_{l=1}^{\infty} b_{l(\beta)}(\omega_m) \vec{h}_{l(\beta)}(\omega_m). \end{array} \right. \quad (2.83)$$

Подставляя (2.83), (2.284) в (2.81) и (2.83) в (2.72) и (2.73), учитывая при этом (2.67) и нормировки (2.71), (2.80) получаем следующую систему алгебраических уравнений:

$$\begin{aligned} & \sum_{\beta=1}^6 \sum_{l=1}^L M_{k(m)l(\beta)} b_{l(\beta)}(\omega_m) - \sum_{n=1}^N (i\omega_m \varepsilon_v \delta_{kn} + i\omega_m \varepsilon_0 (\dot{\varepsilon}(\omega_m) - \varepsilon_v)) A_{k(m)n(m)} \times \\ & \quad \times \tilde{a}_n(\omega_m) - i\omega_k \delta_{kn} \tilde{b}_n(\omega_m) = 0; \\ & \quad \sum_{n=1}^N i\omega_k \delta_{kn} \tilde{a}_n(\omega_m) + (i\omega_m \mu_v \delta_{kn} + i\omega_m \mu_0 (1 - \mu_v)) \times \\ & \quad \times B_{k(m)n(m)} \tilde{b}_n(\omega_m) + i\omega_m B_{k(m)n(m)} d_n(\omega_m) = - \sum_{\beta=1}^6 \sum_{l=1}^L N_{k(m)l(\beta)} a_{l(\beta)}(\omega_m); \\ & \quad \sum_{n=1}^N i\omega_k \mu_0 B_{k(m)n(m)} d_n(\omega_m) + A_{k(m)n(m)} f_n(\omega_m) = 0; \\ & \quad \sum_{n=1}^N q^{-1} B_{k(m)n(m)} g_n(\omega_m) + i\omega_k \varepsilon_0 A_{k(m)n(m)} f_n(\omega_m) = 0; \end{aligned} \quad (2.84)$$

$$\sum_{n=1}^N (\gamma X_{k(m)n(m)} - \omega_r \chi_0 B_{k(m)n(m)}) \tilde{b}_n(\omega_m) +$$

$$+ (\gamma Y_{k(m)n(m)} + (\omega_r + i\omega_m) B_{k(m)n(m)}) d_n(\omega_m) + \gamma X_{k(m)n(m)} g_n(\omega_m) = J_{k(m)}(\omega_m);$$

$$J_{k(m)}(\omega_m) = - \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^M \gamma_{ij} \sum_{p=1}^N \sum_{r=1}^N \gamma W_{k(m)p(i)r(j)} d_p(\omega_i) (b_r(\omega_j) + g_r(\omega_j));$$

$$a_{q(\alpha)}(\omega_m) - \sum_{n=1}^N U_{q(\alpha)n(m)} \tilde{a}_n(\omega_m) + R_{q(\alpha)n(m)} \tilde{b}_n(\omega_m) = -b_{q(\alpha)}(\omega_m);$$

$$\alpha = 1, 2, \dots, 6; \quad q, k = 1, 2, \dots, N; \quad m = \pm 1, \pm 2, \dots, M,$$

где  $N$  – количество учтенных членов в рядах Фурье (2.82);  $L$  – количество учтенных членов в рядах Фурье (2.83);  $M$  – количество учтенных комбинационных частот (2.66);

$$\left\{ \begin{array}{l} M_{k(m)n(m)} = \int_{S_\beta} (\vec{h}_{l(\beta)}(\omega_m) \times \vec{E}_{k(m)}^*) \cdot d\vec{S}_\beta; \quad N_{k(m)n(m)} = \int_{S_\beta} (\vec{e}_{l(\beta)}(\omega_m) \times \vec{H}_{k(m)}^*) \cdot d\vec{S}_\beta; \\ A_{k(m)n(m)} = \int_{V_0-V} (\vec{E}_{n(m)} \cdot \vec{E}_{k(m)}^*) dV; \quad B_{k(m)n(m)} = \int_{V_0-V} (\vec{H}_{n(m)} \cdot \vec{H}_{k(m)}^*) dV; \\ X_{k(m)n(m)} = \int_{V_0-V} (\vec{M}_0 \times \vec{H}_{n(m)}) \cdot \vec{H}_{k(m)}^* dV; \quad Y_{k(m)n(m)} = \int_{V_0-V} (\vec{H}_{n(m)} \times \vec{H}_0) \cdot \vec{H}_{k(m)}^* dV; \\ U_{q(\alpha)n(m)} = \int_{S_\alpha} (\vec{E}_{n(m)} \times \vec{h}_{q(\alpha)}^*(\omega_m)) \cdot d\vec{S}_\alpha; \quad R_{q(\alpha)n(m)} = \int_{S_\alpha} ((\vec{e}_{q(\alpha)}(\omega_m) \times \vec{H}_{n(m)}^*)) \cdot d\vec{S}_\alpha; \\ W_{k(m)p(i)r(j)} = \int_{V_0-V} (\vec{H}_{p(i)} \times \vec{H}_{r(j)}) \cdot \vec{H}_{k(m)}^* dV. \end{array} \right. \quad (2.85)$$

Система алгебраических уравнений (2.84), (2.85) (проекционная модель автономного блока) являются нелинейными относительно коэффициентов  $d_p(\omega_i)$ ,  $b_r(\omega_j)$ ,  $g_r(\omega_j)$ , входящих в функцию  $J_{k(m)}(\omega_m)$ . Для решения нелинейной системы алгебраических уравнений используем итерационный метод и метод Ньютона [71].

В итерационном методе на каждой итерации функция  $J_{k(m)}(\omega_m)$  определяется следующим образом:

$$J_{k(m)}^{um}(\omega_m) = - \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^M \gamma_{ij} \sum_{p=1}^N \sum_{r=1}^N \gamma W_{k(m)p(i)r(j)} d_p^0(\omega_i) (b_r^0(\omega_j) + g_r^0(\omega_j)),$$

где  $d_p^0(\omega_i)$ ,  $b_r^0(\omega_j)$ ,  $g_r^0(\omega_j)$  значения коэффициентов, полученных на предыдущей итерации.

В методе Ньютона на каждой итерации функция  $J_{k(m)}(\omega_m)$  определяется как:

$$J_{k(m)}^{MN}(\omega_m) = - \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^M \gamma_{ij} \sum_{p=1}^N \sum_{r=1}^N \gamma W_{k(m)p(i)r(j)} (d_p^0(\omega_i) (b_r^0(\omega_j) + g_r^0(\omega_j)) + d_p^0(\omega_i) b_r(\omega_j) + (b_r^0(\omega_j) + g_r^0(\omega_j)) d_p(\omega_i) + d_p^0(\omega_i) g_r(\omega_j)),$$

где  $d_p^0(\omega_i)$ ,  $b_r^0(\omega_j)$ ,  $g_r^0(\omega_j)$  значения коэффициентов, полученных на предыдущей итерации.

## 2.6. Дескрипторы автономных блоков

Рассмотрим линейные режимы функционирования автономного блока в виде прямоугольного параллелепипеда с магнитными наночастицами, диэлектрическими наносферами и виртуальными каналами Флоке на гранях. Линейные режимы характерны для малых напряженностей электрического и магнитного полей внутри объема параллелепипеда. Эти режимы описываются многоканальными и многомодовыми матрицами проводимости, сопротивления и рассеяния. При значении функции  $J_{k(m)}(\omega_m) = 0$  в (2.84) система нелинейных алгебраических уравнений (2.84) становится линейной. В этом случае комбинационные частоты отсутствуют  $\omega_m = \omega$ . Система линейных алгебраических уравнений имеет вид следующий вид:

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{\beta=1}^6 \sum_{l=1}^L M_{kl(\beta)} b_{l(\beta)} - \sum_{n=1}^N (i\omega \epsilon_v \delta_{kn} + i\omega \epsilon_0 (\dot{\epsilon} - \epsilon_v) A_{kn}) \tilde{a}_n - i\omega_k \delta_{kn} \tilde{b}_n = 0; \\ \sum_{n=1}^{\infty} i\omega_k \delta_{kn} \tilde{a}_n + (i\omega \mu_v \delta_{kn} + i\omega \mu_0 (1 - \mu_v) B_{kn}) \tilde{b}_n + i\omega_m B_{kn} d_n = - \sum_{\beta=1}^6 \sum_{l=1}^L N_{kl(\beta)} a_{l(\beta)}; \\ \sum_{n=1}^N i\omega_k \mu_0 B_{kn} d_n + A_{kn} f_n = 0; \\ \sum_{n=1}^N q^{-1} B_{kn} g_n + i\omega_k \epsilon_0 A_{kn} f_n = 0; \\ \sum_{n=1}^N (\gamma X_{kn} - \omega_r \chi_0 B_{kn}) \tilde{b}_n + (\gamma Y_{kn} + (\omega_r + i\omega) B_{kn}) d_n + \gamma X_{kn} g_n = 0; \\ a_{q(\alpha)} - \sum_{n=1}^N U_{q(\alpha)n} \tilde{a}_n + R_{q(\alpha)n} \tilde{b}_n = -b_{q(\alpha)}; \\ \alpha = 1, 2, \dots, 6; \quad q, k = 1, 2, \dots, N, \end{array} \right. \quad (2.86)$$

где

$$\left\{ \begin{array}{l} M_{kn} = \int_{S_\beta} (\vec{h}_{l(\beta)} \times \vec{E}_k^*) \cdot d\vec{S}_\beta; \quad N_{kn} = \int_{S_\beta} (\vec{e}_{l(\beta)} \times \vec{H}_k^*) \cdot d\vec{S}_\beta; \\ A_{kn} = \int_{V_0-V} (\vec{E}_n \cdot \vec{E}_k^*) dV; \quad B_{kn} = \int_{V_0-V} (\vec{H}_n \cdot \vec{H}_k^*) dV; \\ X_{kn} = \int_{V_0-V} (\vec{M}_0 \times \vec{H}_n) \cdot \vec{H}_k^* dV; \quad Y_{kn} = \int_{V_0-V} (\vec{H}_n \times \vec{H}_0) \cdot \vec{H}_k^* dV; \\ U_{q(\alpha)n} = \int_{S_\alpha} (\vec{E}_n \times \vec{h}_{q(\alpha)}^*) \cdot d\vec{S}_\alpha; \quad R_{q(\alpha)n} = \int_{S_\alpha} ((\vec{e}_{q(\alpha)} \times \vec{H}_n^*) \cdot d\vec{S}_\alpha. \end{array} \right. \quad (2.87)$$

Запишем систему линейных уравнений (2.86) в матричном виде:

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{M}^{(11)} \cdot \tilde{\mathbf{a}} + \mathbf{M}^{(12)} \cdot \tilde{\mathbf{b}} + \mathbf{M}^{(16)} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{0}; \\ \mathbf{M}^{(21)} \cdot \tilde{\mathbf{a}} + \mathbf{M}^{(22)} \cdot \tilde{\mathbf{b}} + \mathbf{M}^{(23)} \cdot \mathbf{d} = \mathbf{M}^{(27)} \cdot \mathbf{a}; \\ \mathbf{M}^{(33)} \cdot \mathbf{d} + \mathbf{M}^{(35)} \cdot \mathbf{f} = \mathbf{0}; \\ \mathbf{M}^{(44)} \cdot \mathbf{g} + \mathbf{M}^{(45)} \cdot \mathbf{f} = \mathbf{0}; \\ \mathbf{M}^{(52)} \cdot \tilde{\mathbf{b}} + \mathbf{M}^{(53)} \cdot \mathbf{d} + \mathbf{M}^{(54)} \cdot \mathbf{g} = \mathbf{0}; \\ \mathbf{M}^{(61)} \cdot \tilde{\mathbf{a}} + \mathbf{M}^{(62)} \cdot \tilde{\mathbf{b}} - \mathbf{I} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{I} \cdot \mathbf{a}, \end{array} \right. \quad (2.88)$$

где  $\mathbf{I}$  – единичная матрица. Элементы матриц  $\mathbf{M}^{(11)}$ ,  $\mathbf{M}^{(12)}$ ,  $\mathbf{M}^{(16)}$ ,  $\mathbf{M}^{(21)}$ ,  $\mathbf{M}^{(22)}$ ,  $\mathbf{M}^{(23)}$ ,  $\mathbf{M}^{(27)}$ ,  $\mathbf{M}^{(33)}$ ,  $\mathbf{M}^{(35)}$ ,  $\mathbf{M}^{(44)}$ ,  $\mathbf{M}^{(45)}$ ,  $\mathbf{M}^{(52)}$ ,  $\mathbf{M}^{(53)}$ ,  $\mathbf{M}^{(61)}$ ,  $\mathbf{M}^{(62)}$  определяются следующим образом:

$$\begin{aligned} M_{kn}^{(11)} &= i\omega\varepsilon_\nu \delta_{kn} + i\omega\varepsilon_0(\dot{\varepsilon} - \varepsilon_\nu) A_{kn}; \quad M_{kn}^{(12)} = -i\omega_k \delta_{kn}; \quad M_{kl(\beta)}^{(16)} = M_{kl(\beta)}; \\ M_{kn}^{(21)} &= i\omega_k \delta_{kn}; \quad M_{kn}^{(22)} = i\omega\mu_\nu \delta_{kn} + i\omega\mu_0(1 - \mu_\nu) B_{kn}; \quad M_{kn}^{(23)} = i\omega B_{kn}; \\ M_{kl(\beta)}^{(27)} &= -N_{kl(\beta)}; \quad M_{kn}^{(33)} = i\omega_k \mu_0 B_{kn}; \quad M_{kn}^{(35)} = A_{kn}; \quad M_{kn}^{(44)} = q^{-1} B_{kn}; \\ M_{kn}^{(45)} &= i\omega_k \varepsilon_0 A_{kn}; \quad M_{kn}^{(52)} = \gamma X_{kn} - \omega_r \chi_0 B_{kn}; \\ M_{kn}^{(53)} &= \gamma Y_{kn} + (\omega_r + i\omega) B_{kn}; \quad M_{kn}^{(54)} = \gamma X_{kn}; \quad M_{q(\alpha)n}^{(61)} = -U_{q(\alpha)n}; \\ M_{q(\alpha)n}^{(62)} &= -R_{q(\alpha)n}. \end{aligned}$$

Компонентами векторов  $\tilde{\mathbf{a}}$ ,  $\tilde{\mathbf{b}}$ ,  $\mathbf{d}$ ,  $\mathbf{g}$ ,  $\mathbf{f}$ ,  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$  являются коэффициенты рядов Фурье (2.82) и (2.83) соответственно равны  $\{\tilde{a}_n\}$ ,  $\{\tilde{b}_n\}$ ,  $\{d_n\}$ ,  $\{g_n\}$ ,  $\{f_n\}$ ,  $\{a_{l(\beta)}\}$ ,  $\{b_{l(\beta)}\}$ .

Исключая векторы  $\tilde{\mathbf{a}}, \tilde{\mathbf{b}}, \mathbf{d}, \mathbf{g}, \mathbf{f}$  из системы линейных алгебраических уравнений (2.88) имеем:

$$\mathbf{b} = (\mathbf{S}_{21} \cdot \mathbf{S}_{11}^{-1} \cdot \mathbf{S}_{12} + \mathbf{I})^{-1} \cdot (\mathbf{S}_{21} \cdot \mathbf{S}_{11}^{-1} \cdot \mathbf{S}_1 - \mathbf{I}) \cdot \mathbf{a}, \quad (2.89)$$

где

$$\mathbf{S}_{11} = \begin{pmatrix} \mathbf{M}^{(11)} & \mathbf{M}^{(12)} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{M}^{(21)} & \mathbf{M}^{(22)} & \mathbf{M}^{(23)} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{M}^{(33)} & \mathbf{0} & \mathbf{M}^{(35)} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{M}^{(44)} & \mathbf{M}^{(45)} \\ \mathbf{0} & \mathbf{M}^{(52)} & \mathbf{M}^{(53)} & \mathbf{M}^{(54)} & \mathbf{0} \end{pmatrix}; \quad \mathbf{S}_{12} = \begin{pmatrix} \mathbf{M}^{(16)} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix};$$

$$\mathbf{S}_{21} = (\mathbf{M}^{(61)} \mathbf{M}^{(62)} \mathbf{0} \mathbf{0} \mathbf{0}).$$

Из (2.89) следует матрица проводимости автономного блока :

$$\mathbf{Y} = (\mathbf{S}_{21} \cdot \mathbf{S}_{11}^{-1} \cdot \mathbf{S}_{12} + \mathbf{I})^{-1} \cdot (\mathbf{S}_{21} \cdot \mathbf{S}_{11}^{-1} \cdot \mathbf{S}_1 - \mathbf{I}). \quad (2.90)$$

Матрица сопротивления и рассеяния могут быть получены из (2.90) (используются формулы пересчета матриц, приведенные в п.2.2):

$$\mathbf{Z} = \mathbf{Y}^{-1}; \quad (2.91)$$

$$\mathbf{R} = (\mathbf{I} + \mathbf{Y})^{-1} (\mathbf{I} - \mathbf{Y}). \quad (2.92)$$

## Выводы

По результатам второй главы можно сделать следующие выводы.

1. Анализ структур магнитных нанокомпозитов на основе опаловых матриц из наносфер  $\text{SiO}_2$  для разработки методики построения математических моделей магнитных наноматериалов показывает, что в уравнении Ландау – Лившица необходимо учитывать эффективное поле обменного взаимодействия.

2. Предложенный декомпозиционный подход построения математических моделей магнитных нанокомпозитов на основе автономных блоков в виде прямоугольных параллелепипедов с магнитными наночастицами, диэлектрическими наносферами и виртуальными каналами Флоке на гранях блока, позволяет решать трехмерные задачи дифракции для магнитных нанокомпозитов.

3. Полученные аналитические выражения для собственных волн каналов Флоке автономного блока и поперечные компоненты собственных волн позволяют строить проекционные модели автономного блока.

4. Получена полная система уравнений электродинамики, адекватно описывающая физические явления электромагнетизма, протекающие в магнитных нанокompозитах на основе опаловых матриц. Система уравнений электродинамики состоит из уравнений Максвелла и уравнения движения намагниченности в форме Ландау – Лифшица с учетом эффективного поля обменного взаимодействия. Математические модели магнитных нанокompозитов на основе опаловых матриц, построенные на основе совместного решения уравнений Максвелла и уравнений Ландау-Лифшица с учетом эффективного поля обменного взаимодействия, получены впервые и являются новыми.

5. Нестационарные нелинейные уравнения полной системы электродинамики для магнитных нанокompозитов преобразованы в стационарные нелинейные уравнения на комбинационных частотах.

6. Сформулирована краевая задача дифракции для автономного блока в виде прямоугольного параллелепипеда с магнитными наночастицами, диэлектрическими наносферами и виртуальными каналами Флоке на гранях. В области магнитных наночастиц электромагнитное поле и намагниченность удовлетворяют уравнениям Максвелла и уравнению Ландау – Лифшица с учетом эффективного поля обменного взаимодействия. На гранях прямоугольного параллелепипеда электромагнитное поле удовлетворяет условиям неасимптотического излучения.

7. Разработана методика численного решения краевой задачи дифракции для автономного блока в виде прямоугольного параллелепипеда с магнитными наночастицами, диэлектрическими наносферами и виртуальными каналами Флоке на гранях. Путем интегрирования по частям уравнений Максвелла и уравнения Ландау – Лифшица получена проекционная форма, из которой определена система нелинейных алгебраических уравнений для математического описания автономного блока.

8. Разработана методика определения математических описаний (дескрипторов) для автономного блока в виде многомодовых многоканальных матриц проводимости, сопротивления и рассеяния из линеаризированной системы нелинейных алгебраических уравнений.

# Глава 3. ПОСТРОЕНИЕ МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ МАГНИТНЫХ НАНОКОМПОЗИТОВ НА ОСНОВЕ ОПАЛОВЫХ МАТРИЦ

## 3.1. Рекомпозиция дескрипторов автономных блоков с виртуальными каналами Флоке

На рис. 3.1 показан фрагмент рекомпозиции дескрипторов автономных блоков. Первый автономный блок соединен со вторым, третий блок необходимо соединить с двумя первыми. Составим из клеток многоканальных матриц проводимости  $Y_A$  и  $Y_B$  сводную матрицу  $Y_C$ . Виртуальные каналы, обозначенные цифрами, остаются несвязанными, а виртуальные каналы, обозначенные буквами, попарно соединены между собой. Объединение объектов  $A, B$  осуществляется по виртуальным каналам, обозначенным  $\beta$  и  $\gamma$ .

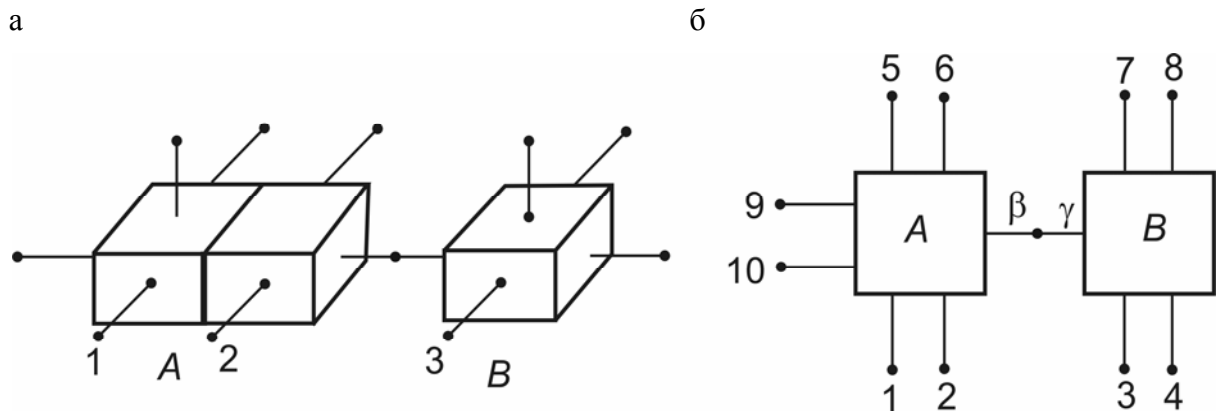


Рис. 3.1. Рекомпозиция дескрипторов автономных блоков:  
а – фрагмент рекомпозиции; б – декомпозиционная схема фрагмента

Представим сводную матрицу  $Y_C$  в виде клеток, разделенных горизонтальными и вертикальными прямыми:

$$Y_C = \begin{pmatrix} & \beta & \gamma & 1 & 2 & 3 & \dots \\ \beta & Y^{\beta\beta} & 0 & Y^{\beta 1} & Y^{\beta 2} & 0 & \dots \\ \gamma & 0 & Y^{\gamma\gamma} & 0 & 0 & Y^{\gamma 3} & \dots \\ Y^c = 1 & Y^{1\beta} & 0 & Y^{11} & Y^{12} & 0 & \dots \\ 2 & Y^{2\beta} & 0 & Y^{21} & Y^{22} & 0 & \dots \\ 3 & 0 & Y^{3\gamma} & 0 & 0 & Y^{33} & \dots \\ \vdots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix} \quad (3.1)$$

Клетки сводной матрицы  $Y_C$ , в которых встречаются сочетания индексов, принадлежащих различным блокам, равны нулю. Совокупность индек-

сов 1, 2, ... обозначим через  $\alpha$ , тогда выражение (3.1) можно записать более компактно:

$$\mathbf{Y}_c = \begin{pmatrix} \mathbf{Y}^{\beta\beta} & \mathbf{0} & \mathbf{Y}^{\beta\alpha} \\ \mathbf{0} & \mathbf{Y}^{\gamma\gamma} & \mathbf{Y}^{\gamma\alpha} \\ \mathbf{Y}^{\alpha\beta} & \mathbf{Y}^{\alpha\gamma} & \mathbf{Y}^{\alpha\alpha} \end{pmatrix}. \quad (3.2)$$

На основании (3.2) в терминах клеточных блочных матриц имеем следующие матричные уравнения:

$$\begin{cases} \mathbf{b}_\beta = \mathbf{Y}^{\beta\beta} \cdot \mathbf{a}_\beta + \mathbf{Y}^{\beta\alpha} \cdot \mathbf{a}_\alpha; \\ \mathbf{b}_\gamma = \mathbf{Y}^{\gamma\gamma} \cdot \mathbf{a}_\gamma + \mathbf{Y}^{\gamma\alpha} \cdot \mathbf{a}_\alpha; \\ \mathbf{b}_\alpha = \mathbf{Y}^{\alpha\beta} \cdot \mathbf{a}_\beta + \mathbf{Y}^{\alpha\gamma} \cdot \mathbf{a}_\gamma + \mathbf{Y}^{\alpha\alpha} \cdot \mathbf{a}_\alpha. \end{cases} \quad (3.3)$$

Наложим на уравнение (3.3) условия связи [72]  $\mathbf{a}_\beta = \mathbf{a}_\gamma$  и  $\mathbf{b}_\beta = -\mathbf{b}_\gamma$ , что соответствуют непрерывности касательных, составляющих  $\vec{E}_\tau^A = \vec{E}_\tau^B$ ,  $\vec{H}_\tau^A = \vec{H}_\tau^B$  на границах сшивания автономных блоков, и исключим векторы  $\mathbf{a}_\beta$ ,  $\mathbf{a}_\gamma$ ,  $\mathbf{b}_\beta$ ,  $\mathbf{b}_\gamma$ . После несложных преобразований имеем

$$\mathbf{b}_\alpha = \left( \mathbf{Y}^{\alpha\alpha} - (\mathbf{Y}^{\alpha\beta} + \mathbf{Y}^{\alpha\gamma}) \cdot (\mathbf{Y}^{\beta\beta} + \mathbf{Y}^{\gamma\gamma})^{-1} \cdot (\mathbf{Y}^{\gamma\alpha} + \mathbf{Y}^{\beta\alpha}) \right) \cdot \mathbf{a}_\alpha. \quad (3.4)$$

Таким образом, матрица проводимости  $\mathbf{Y}$ , полученная объединением объектов  $A, B$ , будет определяться как

$$\mathbf{Y} = \mathbf{Y}^{\alpha\alpha} - (\mathbf{Y}^{\alpha\beta} + \mathbf{Y}^{\alpha\gamma}) \cdot (\mathbf{Y}^{\beta\beta} + \mathbf{Y}^{\gamma\gamma})^{-1} \cdot (\mathbf{Y}^{\gamma\alpha} + \mathbf{Y}^{\beta\alpha}). \quad (3.5)$$

Рекомпозиция дескрипторов автономных блоков, описанных матрицами сопротивления, осуществляется по формуле аналогичной (3.5):

$$\mathbf{Z} = \mathbf{Z}^{\alpha\alpha} - (\mathbf{Z}^{\alpha\beta} + \mathbf{Z}^{\alpha\gamma}) \cdot (\mathbf{Z}^{\beta\beta} + \mathbf{Z}^{\gamma\gamma})^{-1} \cdot (\mathbf{Z}^{\gamma\alpha} + \mathbf{Z}^{\beta\alpha}).$$

Процесс рекомпозиции дескрипторов автономных блоков, которые описываются матрицами рассеяния, включает составление сводной матрицы  $\mathbf{R}_c$ , структура которой аналогична структуре сводной матрицы  $\mathbf{Y}_c$  в выражении (3.2):

$$\mathbf{R}_c = \begin{pmatrix} \mathbf{R}^{\beta\beta} & \mathbf{0} & \mathbf{R}^{\beta\alpha} \\ \mathbf{0} & \mathbf{R}^{\gamma\gamma} & \mathbf{R}^{\gamma\alpha} \\ \mathbf{R}^{\alpha\beta} & \mathbf{R}^{\alpha\gamma} & \mathbf{R}^{\alpha\alpha} \end{pmatrix}. \quad (3.6)$$



В терминах клеточных матриц имеем следующие матричные уравнения, связывающие падающие и отраженные волны в связанных виртуальных каналах:

$$\begin{cases} \mathbf{c}_\beta^- = \mathbf{R}^{\beta\beta} \cdot \mathbf{c}_\beta^+ + \mathbf{R}^{\beta\alpha} \cdot \mathbf{c}_\alpha^+; \\ \mathbf{c}_\gamma^- = \mathbf{R}^{\gamma\gamma} \cdot \mathbf{c}_\gamma^+ + \mathbf{R}^{\gamma\alpha} \cdot \mathbf{c}_\alpha^+; \\ \mathbf{c}_\alpha^- = \mathbf{R}^{\alpha\beta} \cdot \mathbf{c}_\beta^+ + \mathbf{R}^{\alpha\gamma} \cdot \mathbf{c}_\gamma^+ + \mathbf{R}^{\alpha\alpha} \cdot \mathbf{c}_\alpha^+. \end{cases} \quad (3.7)$$

На матричные уравнения (3.7) не наложено никаких условий связи. Написанные в развернутой форме, они в сущности распадаются на системы, каждая из которых характеризует объекты  $A$ ,  $B$ . Наложим на уравнения (3.7) условия связи [72]  $\mathbf{c}_\beta^+ = \mathbf{c}_\gamma^-$ ,  $\mathbf{c}_\beta^- = \mathbf{c}_\gamma^+$  и исключим из них векторы  $\mathbf{c}_\beta^+$ ,  $\mathbf{c}_\beta^-$ ,  $\mathbf{c}_\gamma^+$ ,  $\mathbf{c}_\gamma^-$ . После несложных преобразований имеем

$$\mathbf{R} = \mathbf{R}^{\alpha\alpha} - \begin{pmatrix} \mathbf{R}^{\alpha\beta} & \mathbf{R}^{\alpha\gamma} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\mathbf{R}^{\beta\beta} & \mathbf{I} \\ \mathbf{I} & -\mathbf{R}^{\gamma\gamma} \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{R}^{\beta\alpha} \\ \mathbf{R}^{\gamma\alpha} \end{pmatrix}. \quad (3.8)$$

Краевое условие  $\vec{E}_\tau = 0$  на гранях автономных блоков при использовании матрицы проводимости является фиксированным – оно не накладываеся. Для автономного блока, описанного матрицей сопротивления, фиксированным является краевое условие  $\vec{H}_\tau = 0$ . Рассмотрим наложение этих условий.

Разделим матрицу проводимости  $\mathbf{Y}$  автономного блока горизонтальной и вертикальной прямыми на четыре клетки:

$$\mathbf{Y} = \begin{matrix} & l & \alpha \\ \begin{matrix} l \\ \alpha \end{matrix} & \begin{pmatrix} \mathbf{Y}^{ll} & \mathbf{Y}^{l\alpha} \\ \mathbf{Y}^{\alpha l} & \mathbf{Y}^{\alpha\alpha} \end{pmatrix} \end{matrix} \quad (3.9)$$

Индекс  $l$  соответствуют грани автономного блока, на которых создается краевое условие  $\vec{H}_\tau = 0$ , индексу  $\alpha$  – грани не подлежащие магнитному закорочению. В клеточных терминах на основании выражения (3.9) имеем следующие матричные уравнения:

$$\begin{cases} \mathbf{b}_l = \mathbf{Y}^{ll} \cdot \mathbf{a}_l + \mathbf{Y}^{l\alpha} \cdot \mathbf{a}_\alpha; \\ \mathbf{b}_\alpha = \mathbf{Y}^{\alpha l} \cdot \mathbf{a}_l + \mathbf{Y}^{\alpha\alpha} \cdot \mathbf{a}_\alpha. \end{cases} \quad (3.10)$$

Накладывая на матричные уравнения (3.10) условие  $\mathbf{b}_l = 0$ , что эквивалентно  $\vec{H}_\tau = 0$  на гранях блока, и исключая вектор  $\mathbf{a}_l$ , находим матрицу проводимости автономного блока

$$\mathbf{Y} = \mathbf{Y}^{\alpha\alpha} - \mathbf{Y}^{\alpha l} \cdot (\mathbf{Y}^{ll})^{-1} \cdot \mathbf{Y}^{l\alpha}.$$

Для автономного блока, который описывается матрицей сопротивления, при  $\vec{E}_\tau = 0$  (электрическая стенка) имеем аналогичное выражение

$$\mathbf{Z} = \mathbf{Z}^{\alpha\alpha} - \mathbf{Z}^{\alpha l} \cdot (\mathbf{Z}^{ll})^{-1} \cdot \mathbf{Y}^{l\alpha}.$$

Краевые условия  $\vec{E}_\tau = 0$  (электрическая стенка) и  $\vec{H}_\tau = 0$  (магнитная стенка) для автономного блока, который описывается матрицей рассеяния  $\mathbf{R}$ , накладываются также, как и в случае матриц проводимости и сопротивления. При наложении краевых условий  $\vec{H}_\tau = 0$  матрица рассеяния  $\mathbf{R}$  определяется матричным выражением

$$\mathbf{R} = \mathbf{R}^{\alpha\alpha} + \mathbf{R}^{\alpha l} \cdot (\mathbf{I} - \mathbf{R}^{ll})^{-1} \cdot \mathbf{R}^{l\alpha}, \quad (3.11)$$

при наложении краевых условий  $\vec{E}_\tau = 0$  выражением

$$\mathbf{R} = \mathbf{R}^{\alpha\alpha} + \mathbf{R}^{\alpha l} \cdot (\mathbf{I} + \mathbf{R}^{ll})^{-1} \cdot \mathbf{R}^{l\alpha}. \quad (3.12)$$

### 3.2. Методика построения декомпозиционных моделей устройств сверхвысоких частот

В результате рекомпозиции дескрипторов автономных блоков в виде прямоугольных параллелепипедов с магнитными наночастицами и диэлектрическими наносферами и каналами Флоке на гранях (рис. 3.2) получаем дескриптор (матрица проводимости, сопротивления и рассеяния) базового элемента магнитного нанокompозита на основе опаловой матрицы (рис. 3.2). Дескриптор этого базового элемента записан, относительно входных сечений, в базисах собственных волн каналов Флоке. Разработаем методику преобразования дескриптора базового элемента, записанного в базисе собственных волн каналов Флоке, к дескрипторам в базисах собственных волн других волновых каналов. Такая методика необходима для построения декомпозиционных математических моделей устройств сверхвысоких частот, в состав которых входит базовый элемент магнитного нанокompозита на основе опаловой матрицы.

Базовый элемент магнитного нанокompозита будем рассматривать как волноводный трансформатор с входными сечениями  $S_1, S_2, \dots, S_6$  (рис. 3.2). К входным сечениям присоединены волновые каналы (полосково-щелевые линии, прямоугольные волноводы, расширенные каналы Флоке и т.д.). Волновые каналы волноводного трансформатора стыкуются с каналами Флоке на входных сечениях  $S_1, S_2, \dots, S_6$ . Необходимо решить классическую задачу прикладной электродинамики о стыке волновых каналов с каналами Флоке [18].

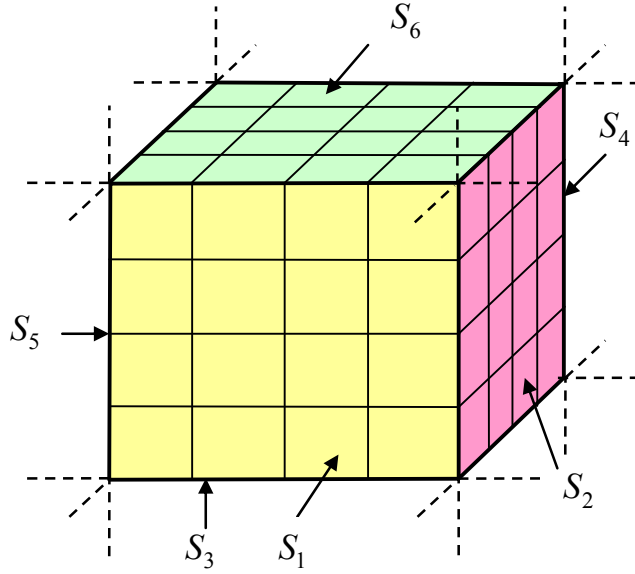


Рис. 3.2. Базовый элемент магнитного нанокompозита на основе опаловой матрицы:  
 $S_1, S_2, \dots, S_6$  – входные сечения с волновыми каналами

Объединим каналы Флоке автономных блоков, принадлежащие входным сечениям  $S_1, S_2, \dots, S_6$  (рис.2.6) волноводного трансформатора, и запишем матрицу проводимости, используя клеточную форму

$$\mathbf{Y} = \begin{pmatrix} \mathbf{Y}^{11} & \mathbf{Y}^{12} & \dots & \mathbf{Y}^{16} \\ \mathbf{Y}^{21} & \mathbf{Y}^{22} & \dots & \mathbf{Y}^{26} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \mathbf{Y}^{61} & \mathbf{Y}^{62} & \dots & \mathbf{Y}^{66} \end{pmatrix}. \quad (3.13)$$

Каждая клетка матрицы  $\mathbf{Y}$  имеет структуру:

$$\mathbf{Y}^{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} \mathbf{Y}_{11}^{\alpha\beta} & \mathbf{Y}_{12}^{\alpha\beta} & \dots & \mathbf{Y}_{1N_\beta}^{\alpha\beta} \\ \mathbf{Y}_{21}^{\alpha\beta} & \mathbf{Y}_{22}^{\alpha\beta} & \dots & \mathbf{Y}_{2N_\beta}^{\alpha\beta} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \mathbf{Y}_{N_\alpha 1}^{\alpha\beta} & \mathbf{Y}_{N_\alpha 2}^{\alpha\beta} & \dots & \mathbf{Y}_{N_\alpha N_\beta}^{\alpha\beta} \end{pmatrix}, \quad (\alpha, \beta = 1, 2, \dots, 6), \quad (3.14)$$

где  $N_\alpha, N_\beta$  – количество граней автономных блоков на входных сечениях  $S_\alpha, S_\beta$  ( $\alpha, \beta = 1, 2, \dots, 6$ ) волноводного трансформатора.

Каждая клетка матрицы  $\mathbf{Y}^{\alpha\beta}$  является многомодовой, ее элементы обозначим  $Y_{l(k)m(n)}^{\alpha\beta}$ ,  $l$  – номер автономного блока, грань которого находится на входном сечении  $S_\alpha$  ( $l = 1, 2, \dots, N_\alpha; \alpha = 1, 2, \dots, 6$ );  $m$  – номер автономного блока, грань которого находится на входном сечении  $S_\beta$  ( $m = 1, 2, \dots, N_\beta; \beta = 1, 2, \dots, 6$ );  $k$  – номер типа волны в канале Флоке (на грани) авто-

номного блока с номером  $l$  на входном сечении  $S_\alpha$ ;  $n$  – номер типа волны в канале Флоке на грани автономного блока с номером  $m$  на входном сечении  $S_\beta$ .

На рис. 3.3 показано разбиение одного из входных сечений  $S_\alpha$  волноводного трансформатора, гранями автономных блоков, которые являются виртуальными каналами Флоке.

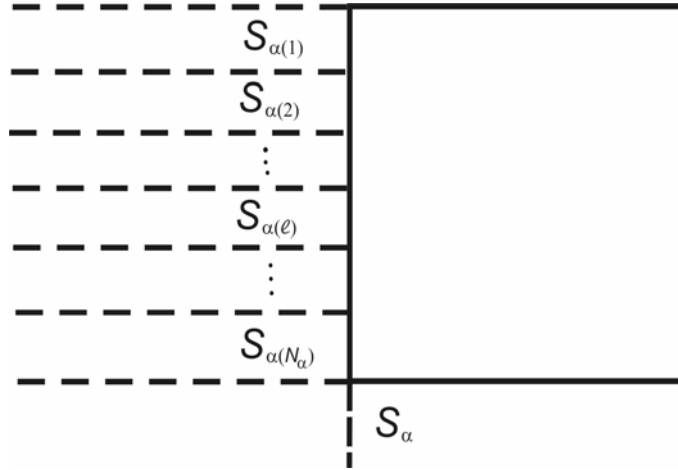


Рис. 3.3. Разбиение входного сечения волноводного трансформатора гранями автономных блоков:

$S_{\alpha(l)}$  – грань автономного блока с номером  $l$  на входном сечении  $S_\alpha$ ;  
 $N_\alpha$  – количество граней на  $S_\alpha$

Поперечное электромагнитное поле на каждом входном сечении  $S_\alpha$  можно разложить в ортогональные ряды Фурье

$$\vec{E}_\alpha = \sum_{k=1}^{\infty} a_{k(\alpha)} \vec{e}_{k(\alpha)}; \quad \vec{H}_\alpha = \sum_{k=1}^{\infty} b_{k(\alpha)} \vec{h}_{k(\alpha)}, \quad (3.15)$$

где  $\vec{e}_{k(\alpha)}$ ,  $\vec{h}_{k(\alpha)}$  – поперечные компоненты собственных волн волновых каналов волноводного трансформатора. Это поперечное поле можно разложить в ряд Фурье (по областям), используя собственные волны каналов Флоке:

$$\vec{E}_\alpha = \sum_{k=1}^{\infty} a_{k(\alpha)l} \vec{e}_{k(\alpha)l}; \quad \vec{H}_\alpha = \sum_{k=1}^{\infty} b_{k(\alpha)l} \vec{h}_{k(\alpha)l}, \quad l=1, 2, \dots, N_\alpha, \quad (3.16)$$

где  $\vec{e}_{k(\alpha)l}$ ,  $\vec{h}_{k(\alpha)l}$  – поперечные компоненты собственных волн каналов Флоке;  $l$  – номер автономного блока, грань которого находится на входном сечении  $S_\alpha$ .

Проецируя выражения (3.15) и (3.16) на базисы  $\{\vec{e}_{n(\beta)}, \vec{h}_{n(\beta)}\}$ ,  $\{\vec{e}_{n(\beta)m}, \vec{h}_{n(\beta)m}\}$  и учитывая  $S_\beta = S_{\beta(1)} \cup S_{\beta(2)} \cup \dots \cup S_{\beta(m)} \cup \dots \cup S_{\beta(N_p)}$ , получаем следующие системы линейных алгебраических уравнений

$$a_{k(\alpha)} = \sum_{\beta=1}^6 \sum_{m=1}^{N_\beta} \sum_{m=1}^{N_\Phi} M_{k(\alpha), n(\beta)m} a_{n(\beta)m}; \quad (3.17)$$

$$b_{k(\alpha)} = \sum_{\beta=1}^6 \sum_{m=1}^{N_\beta} \sum_{k=1}^{N_\Phi} N_{k(\alpha), n(\beta)m} b_{n(\beta)m}, \quad (3.18)$$

$$a_{k(\alpha)l} = \sum_{\beta=1}^6 \sum_{k=1}^{N_\Phi} P_{k(\alpha)l, n(\beta)} a_{n(\beta)}; \quad (3.19)$$

$$b_{k(\alpha)l} = \sum_{\beta=1}^6 \sum_{k=1}^{N_\Phi} Q_{k(\alpha)l, n(\beta)} b_{n(\beta)}, \quad (\alpha = 1, 2, \dots, 6; l = 1, 2, \dots, N_\alpha; k = 1, 2, \dots, N_\beta), \quad (3.20)$$

где  $N_\Phi$  – количество типов учтенных собственных волн в каналах Флоке автономных блоков;  $N_B$  – количество типов учтенных собственных волн в волновых каналах.

Коэффициенты в системах линейных алгебраических уравнений (3.17)–(3.20) определяются следующим образом:

$$\begin{cases} M_{k(\alpha), n(\beta)m} = \delta_{\alpha\beta} \int_{S_{\beta(m)}} (\vec{e}_{k(\alpha)l} \times \vec{h}_{n(\beta)}^*) d\vec{S}_{\beta(m)}; \\ N_{k(\alpha), n(\beta)m} = -\delta_{\alpha\beta} \int_{S_{\beta(m)}} (\vec{h}_{k(\alpha)}^* \times \vec{e}_{n(\beta)}) d\vec{S}_{\beta(m)}; \\ P_{k(\alpha)l, n(\beta)} = \delta_{\alpha\beta} \int_{S_{\alpha(l)}} (\vec{e}_{k(\alpha)} \times \vec{h}_{n(\beta)m}^*) d\vec{S}_{\alpha(l)}; \\ Q_{k(\alpha)l, n(\beta)} = -\delta_{\alpha\beta} \int_{S_{\alpha(l)}} (\vec{h}_{k(\alpha)}^* \times \vec{e}_{n(\beta)m}) d\vec{S}_{\alpha(l)}, \end{cases}$$

$$\text{где } \delta_{\alpha\beta} = \begin{cases} 1, & \alpha = \beta; \\ 0, & \alpha \neq \beta. \end{cases}$$

Запишем системы линейных алгебраических уравнений (3.17) – (3.20) в матричной форме

$$\mathbf{a} = \mathbf{M} \cdot \mathbf{a}^\Phi; \quad \mathbf{b} = \mathbf{N} \cdot \mathbf{b}^\Phi; \quad \mathbf{a}^\Phi = \mathbf{P} \cdot \mathbf{a}; \quad \mathbf{b}^\Phi = \mathbf{Q} \cdot \mathbf{b}. \quad (3.21)$$

Компонентами векторов  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$ ,  $\mathbf{a}^\Phi$ ,  $\mathbf{b}^\Phi$  являются соответственно коэффициенты  $a_{k(\alpha)}$ ,  $b_{k(\alpha)}$ ,  $a_{k(\alpha)l}$ ,  $b_{k(\alpha)l}$  рядов Фурье (3.15), (3.16). Из матричных выражений (3.21) следует унитарность следующих матриц:

$$\mathbf{a} = (\mathbf{M} \cdot \mathbf{P}) \cdot \mathbf{a}; \quad \mathbf{b} = (\mathbf{N} \cdot \mathbf{Q}) \cdot \mathbf{b}; \quad \mathbf{a}^\Phi = (\mathbf{P} \cdot \mathbf{M}) \cdot \mathbf{a}^\Phi; \quad \mathbf{b}^\Phi = (\mathbf{Q} \cdot \mathbf{N}) \cdot \mathbf{b}^\Phi. \quad (3.22)$$

Матрицы  $\mathbf{M}$ ,  $\mathbf{N}$ ,  $\mathbf{P}$ ,  $\mathbf{Q}$  и имеют блочно-диагональную структуру по входным сечениям волноводного трансформатора (рис. 3.4):

$\mathbf{M}, \mathbf{N}, \mathbf{P}, \mathbf{Q} =$


Рис. 3.4. Матрицы  $\mathbf{M}$ ,  $\mathbf{N}$ ,  $\mathbf{P}$ ,  $\mathbf{Q}$  с блочно-диагональной структурой по входным сечениям волноводного трансформатора

Матрица проводимости  $\mathbf{Y}$  базового элемента магнитного нанокompозита на основе опаловой матрицы (волноводный трансформатор) записана в базисах собственных волн каналов Флоке

$$\mathbf{Y} \cdot \mathbf{a}^\Phi = \mathbf{b}^\Phi \quad (3.23)$$

и скомпонована так же, как и векторы  $\mathbf{a}^\Phi$  и  $\mathbf{b}^\Phi$ . Подставляя третье и четвертое матричные уравнения из (3.21) в уравнение (3.22), получаем

$$\mathbf{Y} \cdot \mathbf{P} \cdot \mathbf{a} = \mathbf{Q} \cdot \mathbf{b}.$$

Умножим слева это матричное уравнение на матрицу  $\mathbf{N}$

$$\mathbf{N} \cdot \mathbf{Y} \cdot \mathbf{P} \cdot \mathbf{a} = \mathbf{N} \cdot \mathbf{Q} \cdot \mathbf{b},$$

и учитывая унитарность матрицы  $\mathbf{N} \cdot \mathbf{Q}$  (3.22), получаем

$$(\mathbf{N} \cdot \mathbf{Y} \cdot \mathbf{P}) \cdot \mathbf{a} = \mathbf{b}. \quad (3.24)$$

Матрица  $\mathbf{Y}_B = \mathbf{N} \cdot \mathbf{Y} \cdot \mathbf{P}$  является матрицей проводимости волноводного трансформатора, записанная в базисах собственных волн волноводных каналов волноводного трансформатора.

Матрица сопротивления  $\mathbf{Z}$  волноводного трансформатора, записанная в базисах собственных волн каналов Флоке автономных блоков, имеет форму записи:

$$\mathbf{Z} \cdot \mathbf{b}^\Phi = \mathbf{a}^\Phi.$$

Учитывая выражения (3.21) и (3.22) аналогично получаем

$$(\mathbf{M} \cdot \mathbf{Z} \cdot \mathbf{Q}) \cdot \mathbf{b} = \mathbf{a}, \quad (3.25)$$

где  $\mathbf{Z}_B = \mathbf{M} \cdot \mathbf{Z} \cdot \mathbf{Q}$  – матрица сопротивления волноводного трансформатора, записанная в базисах собственных волн волноводных каналов волноводного трансформатора.

### 3.3. Поля и волны в трехмерных периодических магнитных нанокompозитах на основе опаловых матриц

На рис.3.5 показан магнитный нанокompонент на основе опаловой матрицы из диэлектрических наносфер, который будем рассматривать как трехмерную периодическую решетку с геометрическими размерами ячейки  $a, b, c$ .

Строение магнитного нанокompозита вдоль оси  $\zeta$  является периодическим (рис. 3.5,а). Через длину  $\tilde{\Lambda}$  геометрия структуры в плоскости поперечного сечения  $\xi\eta$  повторяется. Поперечная структура свободных электромагнитных полей в периодической структуре также должна повторяться через пространственный период  $\tilde{\Lambda}$  [48]. Для комплексных амплитуд векторов поля справедливы соотношения:

$$\begin{cases} \vec{E}(\xi, \eta, \zeta + \tilde{\Lambda}) = \vec{E}(\xi, \eta, \zeta) \exp(-i\varphi), \\ \vec{H}(\xi, \eta, \zeta + \tilde{\Lambda}) = \vec{H}(\xi, \eta, \zeta) \exp(-i\varphi), \end{cases} \quad (3.26)$$

$\varphi$  – фазовый сдвиг на длине  $\tilde{\Lambda}$ . Эти равенства выражают содержание теоремы Флоке [75]. Пространственное изменение электромагнитного поля  $\xi + \tilde{\Lambda}$  определяется через фазовый сдвиг  $\varphi$ .

До решения краевой задачи для периодической структуры нельзя сказать, по какому именно закону изменяется фаза поля вдоль ее произвольного отрезка длиной  $\tilde{\Lambda}$ , т.е. вдоль ячейки структуры. Введем величину

$$v = \frac{\varphi}{\tilde{\Lambda}} \quad (3.27)$$

и построим функции

$$\begin{cases} \vec{E}(\xi, \eta, \zeta) = \vec{E}(\xi, \eta, \zeta) \exp(-iv\zeta), \\ \vec{H}(\xi, \eta, \zeta) = \vec{H}(\xi, \eta, \zeta) \exp(-iv\zeta), \end{cases} \quad (3.28)$$

которые являются периодическими. Раскладывая, функции  $\vec{E}(\xi, \eta, \zeta)$ ,  $\vec{H}(\xi, \eta, \zeta)$  в ряд Фурье имеем:

$$\begin{cases} \vec{E}(\xi, \eta, \zeta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \vec{E}_n(\xi, \eta) \exp(-i\frac{2\pi n}{\tilde{\Lambda}}\zeta), \\ \vec{H}(\xi, \eta, \zeta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \vec{H}_n(\xi, \eta) \exp(-i\frac{2\pi n}{\tilde{\Lambda}}\zeta), \end{cases} \quad (3.29)$$

где

$$\vec{E}_n(\xi, \eta) = \frac{1}{\tilde{\Lambda}} \int_{\zeta}^{\zeta+\tilde{\Lambda}} \vec{E}(\xi, \eta, \zeta) \exp(i(v + \frac{2\pi n}{\tilde{\Lambda}})\zeta) d\zeta,$$

$$\vec{H}_n(\xi, \eta) = \frac{1}{\Lambda} \int_{\zeta}^{\zeta+\tilde{\Lambda}} \vec{H}(\xi, \eta, \zeta) \exp(i(v + \frac{2\pi n}{\tilde{\Lambda}})\zeta) d\zeta..$$

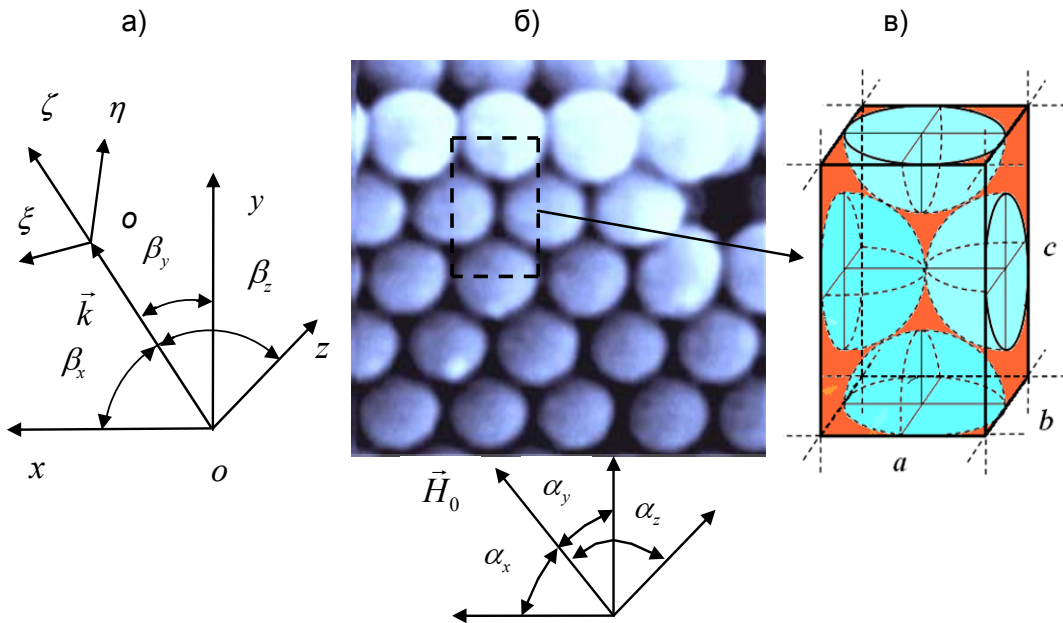


Рис. 3.5. Магнитный наноконтакт на основе опаловой матрицы: а – направление распространения свободного волнового процесса; б – трехмерная периодическая структура; в – моделирование ячейки периодической структуры автономным блоком

Из (3.28) с учетом (3.29) получаем выражения для свободных электромагнитных полей для периодической структуры в направлении оси  $\zeta$  (рис. 3.5,а):

$$\begin{cases} \vec{E}(\xi, \eta, \zeta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \vec{E}_n(\xi, \eta) \exp(-i(v + \frac{2\pi n}{\tilde{\Lambda}})\zeta), \\ \vec{H}(\xi, \eta, \zeta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \vec{H}_n(\xi, \eta) \exp(-i(v + \frac{2\pi n}{\tilde{\Lambda}})\zeta). \end{cases} \quad (3.30)$$

Полученное разложение является одним из основных соотношений теории периодических направляющих структур. Согласно (3.30) свободный волновой процесс в периодической структуре в направлении оси  $\zeta$  можно рассматривать как наложение бесконечной совокупности плоских неоднородных волн с поперечными компонентами  $\vec{E}_n(\xi, \eta)$ ,  $\vec{H}_n(\xi, \eta)$  и постоянными распространения

$$\Gamma_n = v + \frac{2\pi n}{\tilde{\Lambda}}, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm \infty. \quad (3.31)$$

Физическое содержание пространственных гармоник заключается в том, что в области существования электромагнитного поля можно реали-



зовать взаимодействия одной из них с магнитным наноконкомпонентом. Рассмотрим взаимодействие рассматриваем с основным типом пространственной волны в периодической структуре, которая имеет постоянную распространения  $\Gamma_0$ .

### 3.4. Определение постоянных распространения волн в магнитных наноконкомпозитах на основе опаловых матриц

На рис. 3.5, а показано распространение свободного волнового электромагнитного процесса  $(\vec{E}, \vec{H})$  в трехмерной периодической структуре магнитного наноконкомпозита в направлении вектора  $\vec{k} = (\cos\beta_x, \cos\beta_y, \cos\beta_z)$ . Магнитные наночастицы намагничены постоянным магнитным полем  $\vec{H}_0 = (H_0 \cos\alpha_x, H_0 \cos\alpha_y, H_0 \cos\alpha_z)$ , где  $\alpha_x, \alpha_y, \alpha_z$  углы между вектором  $\vec{H}_0$  и координатными осями. Свободный волновой процесс в периодической структуре в направлении вектора  $\vec{k}$  можно рассматривать как наложение бесконечной совокупности плоских неоднородных волн (3.30)

$$\vec{E}(\xi, \eta, \zeta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \vec{E}_n(\xi, \eta) \exp(-i\Gamma_n \zeta), \quad \vec{H}(\xi, \eta, \zeta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \vec{H}_n(\xi, \eta) \exp(-i\Gamma_n \zeta)$$

с постоянными распространения  $\Gamma_n = v + \frac{2\pi n}{\Lambda}$ ,  $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm\infty$ . Значение величины  $v$  является неизвестной и подлежит определению.

Свободный электромагнитный процесс, в трехмерной периодической структуре (рис. 3.5, б) подчинен теореме Флоке [75] в форме

$$\begin{cases} \vec{E}(x+a, y, z) = \vec{E}(x, y, z) \exp(-i\varphi_x), \\ \vec{H}(x+a, y, z) = \vec{H}(x, y, z) \exp(-i\varphi_x), \\ \vec{E}(x, y+b, z) = \vec{E}(x, y, z) \exp(-i\varphi_y), \\ \vec{H}(x, y+b, z) = \vec{H}(x, y, z) \exp(-i\varphi_y), \\ \vec{E}(x, y, z+c) = \vec{E}(x, y, z) \exp(-i\varphi_z), \\ \vec{H}(x, y, z+c) = \vec{H}(x, y, z) \exp(-i\varphi_z), \end{cases} \quad (3.32)$$

где  $\varphi_x = \Gamma_n a \cos\beta_x$ ,  $\varphi_y = \Gamma_n b \cos\beta_y$ ,  $\varphi_z = \Gamma_n c \cos\beta_z$ ;  $\beta_x, \beta_y, \beta_z$  – углы ориентации направления распространения волнового процесса.

Выделим в трехмерной периодической структуре элементарную ячейку с геометрическими размерами  $a, b, c$  (рис. 3.5, б) и представим ее автономным блоком с диэлектрическими наносферами и магнитными наночастицами (рис. 3.5, в). Для дескриптора автономного блока в виде матрицы проводимости

$$\mathbf{b} = \mathbf{Y} \cdot \mathbf{a}, \quad (3.33)$$

где векторы  $\mathbf{a}$  и  $\mathbf{b}$  составлены соответственно из коэффициентов  $a_{n(\beta)}$  и  $b_{k(\alpha)}$  ( $\alpha, \beta = 1, 2, \dots, 6$ ;  $k, n = 1, 2, \dots, N$ ) рядов Фурье (2.83), условия теоремы Флоке (3.32) принимают следующий вид:

$$\begin{cases} a_{n(4)} = a_{n(1)} \exp(-i\varphi_x), & a_{n(5)} = a_{n(2)} \exp(-i\varphi_y), \\ a_{n(6)} = a_{n(3)} \exp(-i\varphi_z), & b_{k(4)} = b_{k(1)} \exp(-i\varphi_x), \\ b_{k(5)} = b_{k(2)} \exp(-i\varphi_y), & b_{k(6)} = b_{k(3)} \exp(-i\varphi_z), \end{cases} \quad k, n = 1, 2, \dots, N. \quad (3.34)$$

Подставляя (3.34) в (3.33), получаем характеристическое уравнение для определения постоянных распространения  $\Gamma_n$  волн в трехмерной периодической структуре из диэлектрических наносфер и магнитных наночастиц:

$$\Delta(\Gamma_n) = \left| \mathbf{Y}_{AA} - \mathbf{H}^{-1} \cdot \mathbf{Y}_{BA} + \mathbf{Y}_{AB} \cdot \mathbf{H} - \mathbf{H}^{-1} \cdot \mathbf{Y}_{BB} \cdot \mathbf{H} \right| = 0, \quad (3.35)$$

где  $\Delta(\Gamma_n)$  – определитель матрицы;  $\mathbf{Y}_{AA}$ ,  $\mathbf{Y}_{BA}$ ,  $\mathbf{Y}_{AB}$ ,  $\mathbf{Y}_{BB}$  – клетки матрицы проводимости  $\mathbf{Y} = \begin{pmatrix} \mathbf{Y}_{AA} & \mathbf{Y}_{AB} \\ \mathbf{Y}_{BA} & \mathbf{Y}_{BB} \end{pmatrix}$  ( $A$  – индексы входных сечений автономного блока  $S_1, S_2, S_3$ ;  $B$  – индексы входных сечений автономного блока

$S_4, S_5, S_6$ );  $\mathbf{H} = \begin{pmatrix} \mathbf{h}_x & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{h}_y & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{h}_z \end{pmatrix}$  – диагональная матрица с элементами:

$$h_{x(lj)} = -i\delta_{lj} \Gamma_n a \cos\beta_x, \quad h_{y(lj)} = -i\delta_{lj} \Gamma_n b \cos\beta_y, \quad h_{z(lj)} = -i\delta_{lj} \Gamma_n c \cos\beta_z.$$

Предметом изучения в трехмерной периодической структуре является нулевая пространственная гармоника, которой соответствует постоянная распространения волны  $\Gamma_0 = v$  ( $n = 0$ ). Все остальные пространственные гармоники можно получить при помощи выражения (3.31).

Сформулируем и решим тестовую задачу, допускающую аналитическое решение. Рассмотрим свободную прецессию вектора намагниченности в бесконечной сплошной гиромангнитной среде, исходя из уравнения движения вектора намагниченности (2.60). Рассматривая вынужденную прецессию с учетом потерь, получим из (2.60) для гармонических колебаний, пренебрегая малыми величинами второго порядка, следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} (i\omega + \omega_r)M_x + \omega_H M_y = \gamma M_0 H_y + \omega_r \chi_0 H_x, \\ -\omega_H M_x + (i\omega + \omega_r)M_y = -\gamma M_0 H_x + \omega_r \chi_0 H_y, \\ (i\omega + \omega_r)M_z = \omega_r \chi_0 H_z, \end{cases} \quad (3.36)$$

где  $\gamma$  – гиромангнитное отношение,  $\chi_0 = \frac{M_0}{H_0}$  – статическая восприимчивость,  $\omega_r = \alpha\gamma H_0$  – частота релаксации,  $\omega_H = \gamma H_0$ . Собственная частота

прецессии является комплексной и равна  $\omega_0 = \omega_H + i\omega_r$ . Постоянное магнитное поле  $H_0$  направлено вдоль оси  $oz$  ( $\vec{H}_0 = \vec{z}_0 H_0$ ).

Решая систему линейных алгебраических уравнений (3.36) определяем компоненты тензора магнитной проницаемости [76-78]:

$$\vec{\mu} = \begin{pmatrix} \mu - i\mu_\alpha & 0 & 0 \\ i\mu_\alpha & \mu & 0 \\ 0 & 0 & \mu_z \end{pmatrix}, \quad (3.37)$$

где

$$\begin{aligned} \mu &= \mu' - i\mu'' = (1 + 4\pi\chi') - i(4\pi\chi''), \\ \mu_\alpha &= \mu'_\alpha - i\mu''_\alpha = (4\pi\chi'_\alpha) - i(4\pi\chi''_\alpha), \\ \mu_\parallel &= \mu'_\parallel - i\mu''_\parallel = (1 + 4\pi\chi'_\parallel) - i(4\pi\chi''_\parallel). \end{aligned}$$

Здесь

$$\begin{aligned} \chi &= \chi' - i\chi'' = \chi_0 \frac{\omega_{rr}^2 (\omega_{rr}^2 - \omega^2) + 2\omega^2 \omega_r^2}{(\omega_{rr}^2 - \omega^2)^2 + 4\omega^2 \omega_r^2} - i\chi_0 \frac{\omega \omega_{rr} (\omega_{rr}^2 + \omega^2)}{(\omega_{rr}^2 - \omega^2)^2 + 4\omega^2 \omega_r^2}, \\ \chi_\alpha &= \chi'_\alpha - i\chi''_\alpha = \chi_0 \frac{\omega \omega_H (\omega_{rr}^2 - \omega^2)}{(\omega_{rr}^2 - \omega^2)^2 + 4\omega^2 \omega_r^2} - i\chi_0 \frac{2\omega^2 \omega_r \omega_H}{(\omega_{rr}^2 - \omega^2)^2 + 4\omega^2 \omega_r^2}, \\ \chi_\parallel &= \chi'_\parallel - i\chi''_\parallel = \chi_0 \frac{\omega_r^2}{\omega^2 + \omega_r^2} - i\chi_0 \frac{\omega \omega_r}{\omega^2 + \omega_r^2}, \end{aligned}$$

где  $\omega_{rr} = \sqrt{\omega_H^2 + \omega_r^2}$  – резонансная частота.

Компоненты тензора  $\vec{\mu}$  магнитной проницаемости бесконечной гиромангнитной среды определены теоретически из решения уравнения Ландау-Лифшица (2.60).

Запишем однородные уравнения Максвелла для тензора магнитной проницаемости  $\vec{\mu}$  (3.37) относительно комплексных амплитуд

$$\begin{cases} \text{rot } \vec{H} = i\omega \epsilon_0 \epsilon \vec{E}; \\ \text{rot } \vec{E} = -i\omega \mu_0 \vec{\mu} \vec{H} \end{cases} \quad (3.38)$$

в системе прямоугольных декартовых координатах:

$$\begin{cases} \frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z} = i\omega \epsilon_0 E_x, \\ \frac{\partial H_x}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial x} = i\omega \epsilon_0 E_y, \\ \frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} = i\omega \epsilon_0 E_z, \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} = -i\omega \epsilon_0 (\mu H_x - i\mu_\alpha H_y), \\ \frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} = -i\omega \epsilon_0 (i\mu_\alpha H_x + \mu H_y), \\ \frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} = i\omega \mu_z H_z. \end{cases} \quad (3.39)$$

Исследуем плоские однородные волны в бесконечной однородной гирромагнитной среде, распространяющиеся в направлении постоянного намагничивания  $z$ , называемые продольными волнами [74]. Волновой процесс является одномерным, следовательно, в уравнениях (3.39), производные по  $x$  и  $y$  равны нулю. Взяв продольную зависимость комплексных амплитуд в виде  $\exp(\mp i\Gamma z)$ , где  $\Gamma$  – пока неизвестная постоянная распространения, запишем выражения для однородных плоских волн ( $TEM$  – волн):

$$\begin{cases} \vec{E} = (\vec{x}_0 \tilde{E}_x + \vec{y}_0 \tilde{E}_y) \exp(\mp i\Gamma z), \\ \vec{H} = (\vec{x}_0 \tilde{H}_x + \vec{y}_0 \tilde{H}_y) \exp(\mp i\Gamma z). \end{cases} \quad (3.40)$$

Внося представления (3.40) в (3.39) получаем:

$$\begin{cases} \pm \Gamma \tilde{H}_y = \omega \varepsilon_0 \varepsilon \tilde{E}_x, & \pm \Gamma \tilde{E}_y = -\mu_0 \omega (\mu \tilde{H}_x - i\mu_\alpha \tilde{H}_y), \\ \pm \Gamma \tilde{H}_x = -i\omega \varepsilon_0 \varepsilon \tilde{E}_y, & \pm \Gamma \tilde{E}_x = -\mu_0 \omega (i\mu_\alpha \tilde{H}_x + \mu \tilde{H}_y), \end{cases} \quad (3.41)$$

После исключения  $\tilde{E}_x$  и  $\tilde{E}_y$  получаем:

$$\begin{cases} (\Gamma^2 - \omega^2 \varepsilon_0 \mu_0 \varepsilon \mu) \tilde{H}_y = i\omega^2 \varepsilon_0 \mu_0 \varepsilon \mu_\alpha \tilde{H}_x, \\ (\Gamma^2 - \omega^2 \varepsilon_0 \mu_0 \varepsilon \mu) \tilde{H}_x = -i\omega^2 \varepsilon_0 \mu_0 \varepsilon \mu_\alpha \tilde{H}_y. \end{cases} \quad (3.42)$$

Перемножая, левые и соответственно правые части в обеих строчках (3.42), получаем следующее уравнение относительно  $\Gamma$ :

$$(\Gamma^2 - \omega^2 \varepsilon_0 \mu_0 \varepsilon \mu)^2 = (\omega^2 \varepsilon_0 \mu_0 \varepsilon \mu_\alpha)^2. \quad (3.43)$$

Из (3.43) следует, что

$$\Gamma^2 = \omega^2 \varepsilon_0 \mu_0 \varepsilon (\mu \pm \mu_\alpha). \quad (3.44)$$

Существует два рода продольных волн с постоянными распространения:

$$\Gamma^+ = \omega \sqrt{\varepsilon_0 \mu_0 \varepsilon (\mu + \mu_\alpha)}, \quad \Gamma^- = \omega \sqrt{\varepsilon_0 \mu_0 \varepsilon (\mu - \mu_\alpha)}. \quad (3.45)$$

Гирромагнитная среда для каждой из таких волн ведет себя как изотропная с эквивалентной магнитной проницаемостью  $\mu^+ = \mu + \mu_\alpha$  или  $\mu^- = \mu - \mu_\alpha$ .

Выясним структуру электромагнитного поля в этих двух случаях. Внося (3.45) в (3.42) получаем следующее решение:

$$\tilde{H}_y = \pm i \tilde{H}_x. \quad (3.46)$$

Из выражения (3.46) видно, что компоненты  $H_x$  и  $H_y$  вектора  $\vec{H}$  равны по амплитуде и сдвинуты по фазе на  $\pm 90^\circ$ . Продольные волны оказываются поляризованными по кругу в противоположных направлениях.

На основании (3.43), (3.46) и первого столбца (3.41) находим выражение комплексных амплитуд их векторов  $\vec{E}$  и  $\vec{H}$ :

волна правой/левой круговой поляризации

$$\vec{E}^+ = \pm W^+ A(i\vec{x}_0 - \vec{y}_0) \exp(\mp i\Gamma^+ z), \quad \vec{H}^+ = A(\vec{x}_0 + i\vec{y}_0) \exp(\mp i\Gamma^+ z), \quad (3.47)$$

волна левой/правой круговой поляризации

$$\vec{E}^- = \pm W^- A(-i\vec{x}_0 - \vec{y}_0) \exp(\mp i\Gamma^+ z), \quad \vec{H}^- = A(\vec{x}_0 - i\vec{y}_0) \exp(\mp i\Gamma^+ z), \quad (3.48)$$

где  $A$  – неопределенный коэффициент,  $W^\pm = \sqrt{\frac{\mu_0 \mu^\pm}{\epsilon_0 \epsilon}} = \sqrt{\frac{\mu_0 (\mu \pm \mu_\alpha)}{\epsilon_0 \epsilon}}$  – волновое сопротивление.

Пусть в гиромангнитной среде одновременно существуют распространяющиеся вдоль оси  $z$  продольные волны правой и левой круговой поляризации с одинаковыми амплитудами (поглощением пренебрежем). Складывая магнитные поля в (3.47) и (3.48) при  $z = l$  получаем

$$\vec{H}(l) = \vec{H}^+(l) + \vec{H}^-(l) = A(\vec{x}_0 (\exp(-i\Gamma^+ l) + \exp(-i\Gamma^- l)) + i\vec{y}_0 (\exp(-i\Gamma^+ l) - \exp(-i\Gamma^- l))),$$

или после простых преобразований:

$$\vec{H}(l) = 2A \exp(-i \frac{\Gamma^+ + \Gamma^-}{2} l) (\vec{x}_0 \cos \frac{\Gamma^+ - \Gamma^-}{2} l + \vec{y}_0 \sin \frac{\Gamma^+ - \Gamma^-}{2} l). \quad (3.49)$$

Вектор  $\vec{H}$  в плоскости поляризации повернут на угол  $\vartheta = \frac{\Gamma^+ - \Gamma^-}{2} l$ .

В гиромангнитной среде вдоль направления постоянного магнитного поля может распространяться линейно поляризованная волна, плоскость поляризации которой при этом вращается, т.е. наблюдается эффект Фарадея [74].

Рассмотрим волны в гиромангнитной среде, распространяющиеся в плоскости, которая перпендикулярна направлению постоянного намагничивания ( $xoy$ ). Рассмотрим направление вдоль оси  $x$ , тогда

$$\vec{E} = \vec{E} \exp(\mp i\Gamma x), \quad \vec{H} = \vec{H} \exp(\mp i\Gamma x), \quad (3.50)$$

Волны однородны, так что по осям  $y$  и  $z$  напряженности поля не изменяются в (3.39) и (3.40). Уравнения (3.39) и (3.40) принимают следующий вид:

$$\vec{E}_x = 0, \quad \pm \Gamma \vec{H}_z = \omega \epsilon_0 \epsilon \vec{E}_y, \quad \mp \Gamma \vec{H}_y = \omega \epsilon_0 \epsilon \vec{E}_z, \quad (3.51)$$

$$\mu \vec{H}_x - i\mu_\alpha \vec{H}_y = 0, \quad \mp \Gamma \vec{E}_z = \mu_0 \omega (i\mu_\alpha \vec{H}_x + \mu \vec{H}_y), \quad \pm \Gamma \vec{E}_y = \mu_0 \mu_z \omega \vec{H}_z. \quad (3.52)$$

Исключая из равенств (3.51), (3.52)  $\vec{H}_z$  и  $\vec{E}_y$ , находим

$$\Gamma^2 = \omega^2 \varepsilon_0 \mu_0 \varepsilon \mu_z. \quad (3.53)$$

Электромагнитная волна имеет комплексные амплитуды:

$$\vec{E} = \vec{y}_0 A \exp(\mp i \Gamma_{\parallel} x), \quad \vec{H} = \pm \vec{z}_0 \frac{A}{W_{\parallel}} \exp(\mp i \Gamma_{\parallel} x), \quad (3.54)$$

где

$$\Gamma_{\parallel} = \omega \sqrt{\varepsilon_0 \mu_0 \varepsilon \mu_z}, \quad W_{\parallel} = \sqrt{\frac{\mu_0 \mu_z}{\varepsilon_0 \varepsilon}}. \quad (3.55)$$

Эта волна, магнитный вектор которой параллелен напряженности постоянного магнитного поля  $\vec{H}_0$ , имеет такой же характер, как обычная однородная *TEM* – волна в изотропной среде и называется обыкновенной[74].

Третье, четверное и пятое равенства (3.51), (3.52) образуют вторую самостоятельную систему уравнений. Из этих уравнений находим:

$$\Gamma^2 = \omega^2 \varepsilon_0 \varepsilon \mu_0 \frac{\mu^2 - \mu_z^2}{\mu}. \quad (3.56)$$

Для соответствующей волны

$$\vec{E} = \vec{z}_0 A \exp(\mp i \Gamma_{\perp} x), \quad \vec{H} = \mp \frac{A}{W_{\perp}} (\vec{y}_0 + \vec{x}_0 \frac{i \mu_{\alpha}}{\mu}) \exp(\mp i \Gamma_{\perp} x), \quad (3.57)$$

где

$$\Gamma_{\perp} = \omega \sqrt{\varepsilon_0 \varepsilon \mu_0 \frac{\mu^2 - \mu_{\alpha}^2}{\mu}}, \quad W_{\perp} = \sqrt{\mu_0 \frac{\mu^2 - \mu_{\alpha}^2}{\varepsilon_0 \varepsilon \mu}}. \quad (3.58)$$

Как видно, в данном случае электрический вектор волны параллелен  $\vec{H}_0$ , а магнитный вектор имеет как поперечную, так и продольную компоненты. Это однородная *H* – волна, называемая необыкновенной, имеет постоянную распространения  $\Gamma_{\perp}$ , зависящую от квадрата недиагональной компоненты тензора магнитной проницаемости. Роль эквивалентной магнитной проницаемости играет в данном случае величина  $\mu_{\perp} = \mu_0 \frac{\mu^2 - \mu_{\alpha}^2}{\mu}$ .

Для феррита  $\text{Ni}_{0.7}\text{Zn}_{0.3}\text{Fe}_2\text{O}_4$  ( $4\pi M_0 = 5000 \text{ Гс}$ ,  $\varepsilon = 9,5 - i0,3$ ,  $\alpha = 2 \cdot 10^{-3}$ ) в точке ферромагнитного резонанса ( $f = 9,375 \cdot 10^9 \text{ Гц}$ ,  $H_0 = 3330 \text{ Э}$ ) проведен аналитический расчет постоянных распространения волн по формулам

(3.45), (3.55), (3.58), (3.37):  $\Gamma^+ / k_0 = 7,852 - i32,66$  (волна правой поляризации);  $\Gamma^- / k_0 = 4,082 - i0,067$  (волна левой поляризации);  $\Gamma_{\parallel} / k_0 = 3,083 - i0,049$  (обыкновенная волна);  $\Gamma_{\perp} / k_0 = 5,81 - i0,116$  (необыкновенная волна), где  $k_0 = 2\pi f \sqrt{\epsilon_0 \mu_0}$  – постоянная распространения волны для вакуума.

Определим постоянные распространения волн для феррита  $\text{Ni}_{0,7}\text{Zn}_{0,3}\text{Fe}_2\text{O}_4$  ( $4\pi M_0 = 5000 \text{ Гс}$ ,  $\epsilon = 9,5 - i0,3$ ,  $\alpha = 2 \cdot 10^{-3}$ ) в точке ферромагнитного резонанса ( $f = 9,375 \cdot 10^9 \text{ Гц}$ ,  $H_0 = 3330 \text{ Э}$ ) методом автономных блоков. Феррит будем рассматривать как трехмерную периодическую структуру с ячейкой в виде прямоугольного параллелепипеда, заполненного однородной гиромагнитной средой (рис. 3.6).

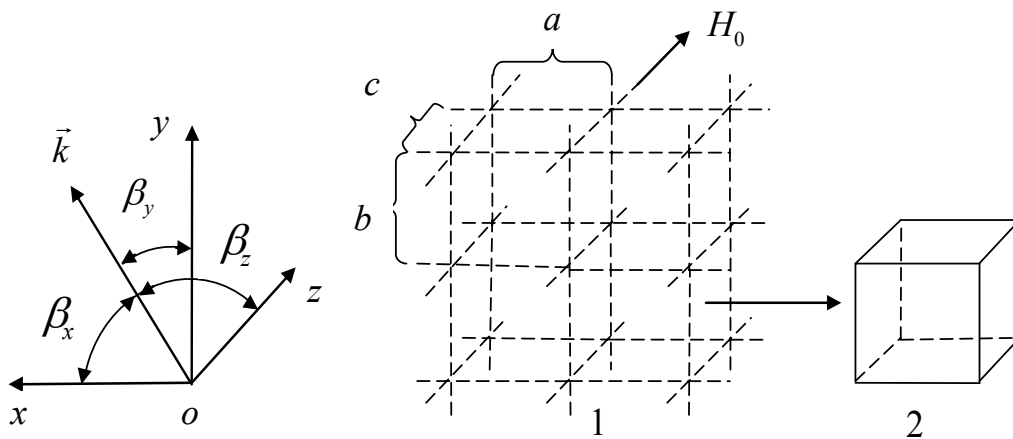


Рис. 3.6. Метод автономных блоков для бесконечной гиромагнитной среды: 1 – трехмерная периодическая структура; 2 – ячейка периодической структуры;  $a = c = 250 \text{ нм}$ ;  $b = 500 \text{ нм}$ ;  $\vec{k}$  – направления распространения волн:  $\Gamma^+$ ,  $\Gamma^-$  –  $\beta_x = \beta_y = 90^\circ$ ,  $\beta_z = 0^\circ$ ;  $\Gamma_{\parallel}$ ,  $\Gamma_{\perp}$  –  $\beta_y = \beta_z = 90^\circ$ ,  $\beta_x = 0^\circ$

Ячейка моделируется автономным блоком с однородным гиромагнитным заполнением (намагниченный феррит). Тройные интегралы в (2.87) вычисляются по объему  $V_0$ , т.к.  $V = 0$ .

В табл. 3.1 приведены результаты математического расчета постоянных распространения волн в бесконечной гиромагнитной среде, полученные методом автономных блоков при различных базисах. Базис в таблице обозначен следующим образом:  $N_{V_0}$  – число полных пространственных гармоник в объеме  $V_0$  автономного блока (прямоугольного параллелепипеда);  $\phi$  – число полных пространственных гармоник на гранях блока (параллелепипеда).

Наблюдается хорошее совпадение результатов расчетов постоянных распространения волн в бесконечной гиромагнитной среде, полученных методом автономных блоков, с аналитическим решением. При базисах  $N_{V_0} = 3$ ,  $N_{S_\alpha} = 3$  результаты расчетов практически совпадают до пятого знака.

Тестовая задача не может в полной мере гарантировать достоверность результатов математического моделирования магнитных наноконпозитов методом автономных блоков. В тестовой задаче не рассматриваются граничные условия непрерывности касательных составляющих напряженностей электрического и магнитного полей на границе раздела сред диэлектрик-феррит.

Т а б л и ц а 3 . 1

Сравнение результатов расчета постоянных распространения волн, полученных методом автономных блоков, с аналитическим решением, для бесконечной гиромангнитной среды

Постоянные распространения волн	Точное значение	Базис: $N_{V_0} = 1$ $N_{S_\alpha} = 1$	Базис: $N_{V_0} = 2$ $N_{S_\alpha} = 2$	Базис: $N_{V_0} = 3$ $N_{S_\alpha} = 3$
$\Gamma^+ / k_0$	27,1689-i38,8583	27,2229-i38,9362	27,1959-i38,8973	27,1716-i38,8622
$\Gamma^- / k_0$	4,07783-i0,06700	4,08133-i0,06706	4,07958-i0,06703	4,07801-i0,06700
$\Gamma_{\parallel} / k_0$	3,08259-i0,04866	3,08837-i0,04872	3,08376-i0,04869	3,08278-i0,04866
$\Gamma_{\perp} / k_0$	5,77316-i0,11519	5,77809-i0,11525	5,77562-i0,11522	5,77340-i0,11519

Математическое моделирование магнитных наноконпозитов на основе опаловых матриц должно учитывать эти граничные условия. На рис. 3.7 показана бесконечная гиромангнитная среда с периодическими включениями в виде диэлектрических параллелепипедов. Постоянные распространения волн в такой периодической структуре невозможно определить при помощи аналитических методов решения.

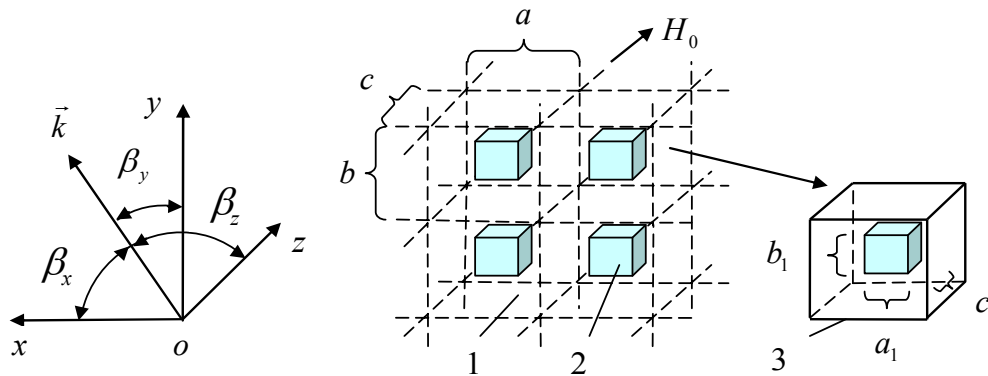


Рис. 3.7. Трехмерная периодическая структура:

- 1 – феррит  $Ni_{0,7}Zn_{0,3}Fe_2O_4$  ( $4\pi M_0 = 5000 \text{ Гс}$ ,  $\epsilon = 9,5 - i0,3$ ,  $\alpha = 2 \cdot 10^{-3}$ );  
 2 – диэлектрик ( $\epsilon_v = 4,6 - i5 \cdot 10^{-4}$ ,  $\mu_v = 1$ ); 3 – ячейка периодической структуры  
 ( $a = b = c = 250 \text{ нм}$ ;  $a_1 = b_1 = c_1 = 239 \text{ нм}$ );  $\vec{k}$  – направления распространения волн:  
 1-ое –  $\beta_x = \beta_y = 90^\circ$ ,  $\beta_z = 0^\circ$ ; 2-ое –  $\beta_y = \beta_z = 90^\circ$ ,  $\beta_x = 0^\circ$



Достоверность результатов математического моделирования для этой задачи будем исследовать следующим образом: решим эту задачу двумя альтернативными алгоритмами на основе метода автономных блоков и сравним результаты расчетов.

Первый алгоритм. Ячейка периодической структуры моделируется автономным блоком в виде прямоугольного параллелепипеда с включением в виде диэлектрического параллелепипеда в гиромагнитную среду (намагниченный феррит) (рис. 3.7). Для автономного блока определяется дескриптор в виде матрицы проводимости, которая используется в характеристическом уравнении (3.35) для определения постоянных распространения волн основного типа в периодической структуре для направлений 1, 2 (рис. 3.7).

Второй алгоритм. Ячейка периодической структуры разбивается условными границами на 27 автономных блоков в виде прямоугольных параллелепипедов с однородным заполнением (рис. 3.8): один блок с диэлектрическим заполнением и 26 блоков с гиромагнитным заполнением (намагниченный феррит). Для автономных блоков определяются дескрипторы в виде матриц проводимости. Для автономного блока с однородным диэлектрическим заполнением тройные интегралы в (2.87) равны нулю, т.к.  $V = V_0$ .

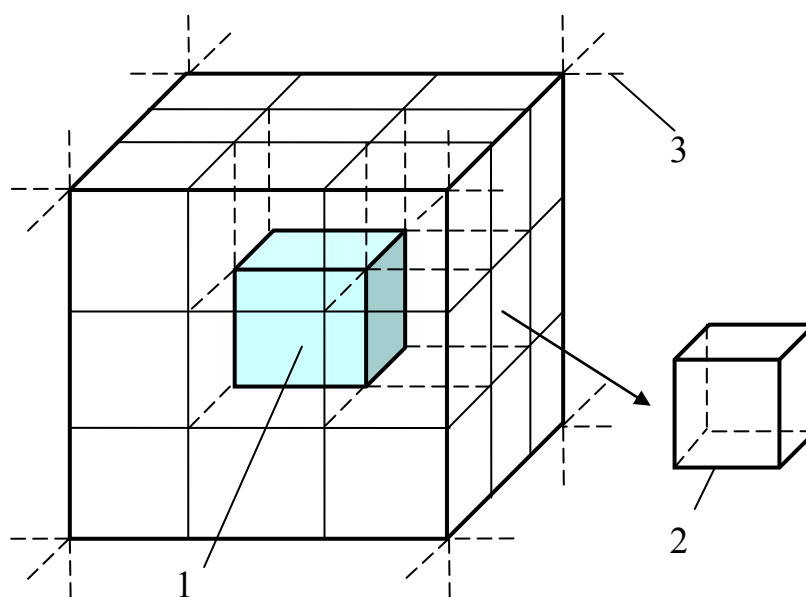


Рис. 3.8. Декомпозиция ячейки периодической структуры на автономные блоки:  
 1 – блок с однородным диэлектрическим заполнением;  
 2 – блоки с однородным гиромагнитным заполнением;  
 3 – каналы Флоке ячейки периодической структуры

В результате рекомпозиции дескрипторов автономных блоков получаем матрицу проводимости ячейки периодической структуры (рис. 3.7), которая записана в базисе собственных волн каналов Флоке прямо-

угольных параллелепипедов. Затем матрица проводимости преобразуется в матрицу, которая записана в базисе собственных волн каналов Флоке ячейки периодической структуры (рис. 3.8).

Из решения характеристического уравнения (3.35) определяем постоянные распространения волн основных типов в периодической структуре для направлений распространения 1, 2 (рис. 3.7).

В табл. 3.2 показаны результаты расчета постоянных распространения волн в бесконечной трехмерной периодической структуре двумя альтернативными алгоритмами. Наблюдается хорошее совпадение результатов, полученных двумя альтернативными алгоритмами. Результаты расчетов получены для базисов: алгоритм 1 –  $N_{V_0} = N_{S_\alpha} = 3$ ; алгоритм 2 –  $N_{V_0} = N_{S_\alpha} = 1$ . В алгоритме 2 матрица проводимости, записанная в базисе каналов Флоке прямоугольных параллелепипедов (автономных блоков), преобразовывалась в матрицу, записанную в базисе каналов Флоке ячейки периодической структуры. Количество базисных функций на гранях ячейки бралось  $N_{S_\alpha} = 3$ .

Т а б л и ц а 3 . 2

Сравнение результатов расчета постоянных распространения волн, полученных альтернативными вычислительными алгоритмами:

$$f = 9,375 \cdot 10^9 \text{ Гц}, H_0 = 3330 \text{ Э}$$

Алгоритм	Распространение волнового процесса в направлении 1		Распространение волнового процесса в направлении 2	
	$\Gamma_1/k_0$	$\Gamma_2/k_0$	$\Gamma_3/k_0$	$\Gamma_4/k_0$
№1	19,3238-i26,7321	2,83724-i0,00197	2,14476-i0,00011	4,01703-i0,01694
№2	19,3431-i26,7590	2,83846-i0,00197	2,14587-i0,00011	4,01874-i0,01693

Сравнивая результаты расчетов постоянных распространения волн в бесконечной гиромангнитной среде (см. табл. 3.1) с результатами расчетов распространения волн в трехмерной периодической структуре (см. табл. 3.2) наблюдаем их качественное совпадение. Это дает основание называть электромагнитную волну с постоянной распространения  $\Gamma_1$  квази волной правой поляризации,  $\Gamma_2$  – квази волной левой поляризации,  $\Gamma_3$  – квази обыкновенной волной,  $\Gamma_4$  – квази необыкновенной волной. Электромагнитные процессы, протекающие в сплошной гиромангнитной среде и магнитном нанокompозите, можно отождествить и для магнитного нанокompозита ввести эффективные тензоры магнитной и диэлектрической проницаемости как это делается для гиромангнитной среды. Разработка методик получения эффективных значений тензоров магнитной и диэлектрической проницаемостей метаматериалов [59] является одной из актуальных задач современной электродинамики.

### 3.5. Экспериментальное подтверждение результатов математического моделирования

Проведем сравнение результатов математического моделирования с экспериментальными результатами, полученными в [59]. В работе [59] синтезирована опаловая матрица и на ее основе изготовлен магнитный нанокompозит, который помещался в прямоугольный волновод (рис. 3.9).

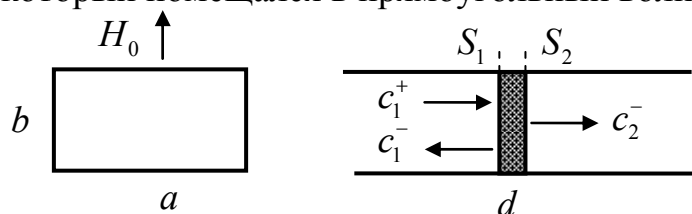


Рис. 3.9. Гиромагнитная пробка из нанокompозита в прямоугольном волноводе:  $a = 3,6 \text{ мм}$ ;  $b = 7,2 \text{ мм}$ ;  $d = 1,0 \text{ мм}$ ;  $c_1^+$ ,  $c_1^-$ ,  $c_2^-$  – амплитуды падающей, отраженной и прошедшей волн типа  $H_{10}$ ;  $H_0$  – постоянное магнитное поле;  $S_1, S_2$  – входные сечения

Математическая модель гиромагнитной пробки из магнитного наноматериала строилась следующим образом. Область магнитного нанокompозита разбивается условными границами на автономные блоки в виде прямоугольных параллелепипедов с диэлектрическими наносферами и магнитными частицами (см. рис. 2.5). В математической модели использовались магнитные наночастицы октаэдрической формы (см. рис. 2.2) (в объемных интегралах (2.87) область  $V_0 - V$ ). В декомпозиционной схеме моделирования магнитного нанокompозита все автономные блоки являются однотипными (см. рис. 2.5), это позволяет использовать вычислительный алгоритм многоуровневой рекомпозиции блоков (рис. 3.10), который существенно сокращает время расчетов на компьютере. Два однотипных автономных блока объединяются в один блок в виде прямоугольного параллелепипеда (фрагмент 1).

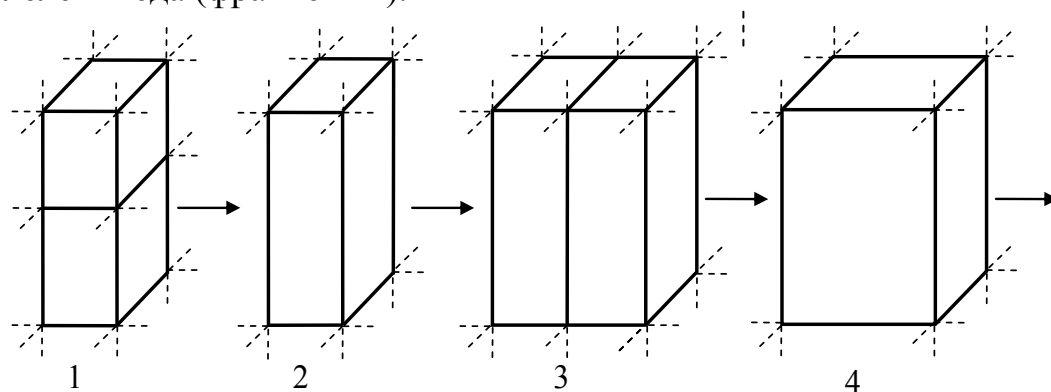


Рис. 3.10. Многоуровневая рекомпозиция автономных блоков в виде прямоугольных параллелепипедов с диэлектрическими наносферами: 1, 2, 3, 4 – фрагменты рекомпозиции

Два виртуальных канала Флоке на гранях этого автономного блока преобразуются в один виртуальный канал. В результате преобразования получаем автономный блок с шестью виртуальными каналами на гранях (фрагмент 2). Затем процесс повторяется (фрагменты 3,4). На грани автономных блоков, которые соприкасаются с боковой поверхностью прямоугольного волновода, граничные условия типа «короткого замыкания» ( $\vec{E}_\tau = 0$ ) не накладываются – для матрицы проводимости они являются естественными.

В результате рекомпозиции автономных блоков и преобразования каналов Флоке на гранях получаем автономный блок с двумя входными сечениями (гранями)  $S_1, S_2$  (рис.3.11).

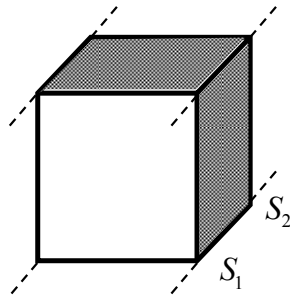


Рис. 3.11. Автономный блок с каналами Флоке на гранях  $S_1, S_2$

Матрицу проводимости автономного блока (рис. 3.11), записанную в базисе собственных волн каналов Флоке, преобразуем в матрицу проводимости, записанную в базисе собственных волн прямоугольного волновода.

Собственные волны прямоугольного волновода определялись следующим образом [62].

$E$ - волны:

$$\left\{ \begin{array}{l} E_z = E_0 \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \exp(-i\Gamma z), \\ E_x = -iE_0 \frac{\Gamma \chi_x}{\chi^2} \cos \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \exp(-i\Gamma z), \\ E_y = -iE_0 \frac{\Gamma \chi_y}{\chi^2} \sin \frac{m\pi x}{a} \cos \frac{n\pi y}{b} \exp(-i\Gamma z), \\ H_y = -iE_0 \frac{\omega \epsilon_0 \chi_y}{\chi^2} \sin \frac{m\pi x}{a} \cos \frac{n\pi y}{b} \exp(-i\Gamma z), \\ H_x = -iE_0 \frac{\omega \epsilon_0 \chi_x}{\chi^2} \cos \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \exp(-i\Gamma z), \\ \chi_x = \frac{\pi m}{a}, \chi_y = \frac{\pi n}{b}, \chi = \sqrt{\chi_x^2 + \chi_y^2}, \Gamma = \sqrt{\omega^2 \epsilon_0 \mu_0 - \chi^2}. \end{array} \right.$$

$H$  – волны:

$$\left\{ \begin{array}{l} H_z = H_0 \cos \frac{m\pi x}{a} \cos \frac{n\pi y}{b} \exp(-i\Gamma z), \\ E_x = iH_0 \frac{\Gamma \chi_x}{\chi^2} \sin \frac{m\pi x}{a} \cos \frac{n\pi y}{b} \exp(-i\Gamma z), \\ H_y = iH_0 \frac{\Gamma \chi_y}{\chi^2} \cos \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \exp(-i\Gamma z), \\ E_x = -iH_0 \frac{\omega \mu_0 \chi_y}{\chi^2} \cos \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \exp(-i\Gamma z), \\ H_y = iH_0 \frac{\omega \mu_0 \chi_x}{\chi^2} \sin \frac{m\pi x}{a} \cos \frac{n\pi y}{b} \exp(-i\Gamma z). \end{array} \right.$$

Коэффициенты  $E_0$  и  $H_0$  определяются из условия нормировки (2.4) и равны:

$$E_0 = \frac{2\chi}{\sqrt{ab\omega\varepsilon_0\Gamma}}, \quad H_0 = \frac{2\chi}{\sqrt{ab\omega\mu_0(1+\delta_{mn})\Gamma}},$$

где  $\delta_{mn} = 0$ , если  $m \neq 0$  и  $n \neq 0$ ;  $\delta_{mn} = 1$ , если  $m = 0$  или  $n = 0$ .

Матрица проводимости  $\mathbf{Y}$  автономного блока преобразуется в матрицу рассеяния  $\mathbf{R} = (\mathbf{I} + \mathbf{Y})^{-1}(\mathbf{I} - \mathbf{Y})$ . Из матрицы рассеяния определяются амплитуды  $c_1^-$ ,  $c_2^-$  отраженной и прошедшей волн типа  $H_{10}$  ( $c_1^+ = 1$ ).

Коэффициент прохождения определяется как  $k_{np} = \frac{c_2^-}{c_1^+}$ .

На графиках (рис. 3.12) приведены результаты математических расчетов зависимостей относительного коэффициента прохождения  $d_m$  от внешнего постоянного магнитного поля  $H_0$  для частоты  $f = 26$  ГГц. Там же показаны результаты эксперимента из [59].

Относительный коэффициент прохождения определялся как  $d_m = \frac{k_{np}^H - k_{np}^0}{k_{np}^0}$ , где  $k_{np}^0$  – коэффициент прохождения, полученный при отсутствии постоянного магнитного поля ( $H_0 = 0$ ),  $k_{np}^H$  – коэффициент прохождения, полученный при наличии постоянного магнитного поля ( $H_0 \neq 0$ ).

Результаты математического моделирования получены при  $N_{V_0} = 5$  (число полных пространственных гармоник в объеме  $V_0$  автономного

блока);  $N_{S_\alpha} = 1$  (число полных пространственных гармоник на гранях блока). Количество полных пространственных гармоник на сечениях  $S_2$  бра-лось  $N_{S_{1,2}} = 5$ . Дальнейшее расширение базисов практически не изменяло значений относительного коэффициента прохождения.

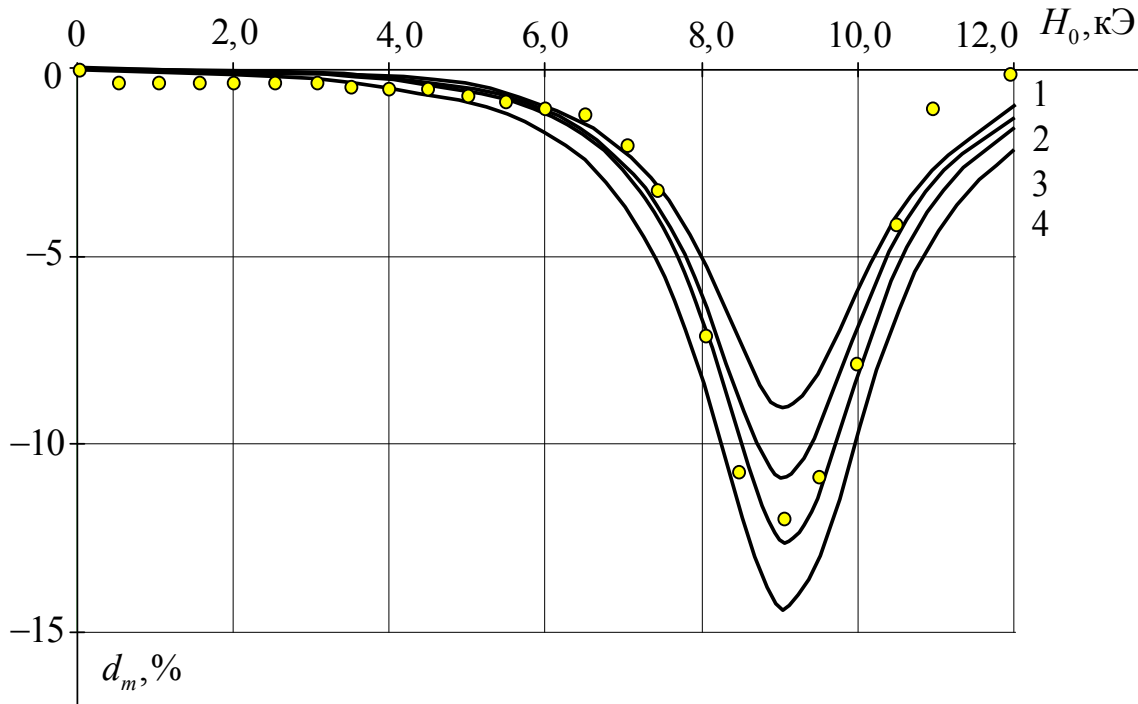


Рис. 3.12. Дифракции  $H_{10}$  волны на магнитном нанокompозите

в прямоугольном волноводе:

$f = 26$  ГГц; наносферы ( $r = 125$  нм,  $\epsilon_v = 4,6 - 4 \cdot 10^{-4}$ ,  $\mu_v = 1$ ); магнитные наночастицы ( $\text{Ni}_{0,7}\text{Zn}_{0,3}\text{Fe}_2\text{O}_4$ ,  $\alpha = 0,1$ ,  $\mu_0 q = 2,2 \cdot 10^{-9}$  Э · см<sup>2</sup>,  $\epsilon = 9,5 - i0,3$ ,  $4\pi M_s = 5000$  Гс); кривая 1 – 30 % заполнение межсферических пустот магнитными наночастицами; 2 – 40 %; 3 – 50 %; 4 – 60 %; ● – эксперимент из [59]

На графиках, изображенных на рис. 3.13, приведены результаты математических расчетов зависимостей относительного коэффициента прохождения  $d_m$  от внешнего постоянного магнитного поля  $H_0$  для частоты  $f = 30$  ГГц.

Там же показаны результаты эксперимента из [59]. Наилучшее совпадение (отклонение не превысило 5 %) теоретических и экспериментальных результатов для частот  $f = 26$  ГГц,  $f = 30$  ГГц наблюдается для магнитных нанокompозитов с 50 % заполнением межсферических пустот магнитными наночастицами октаэдрической формы.

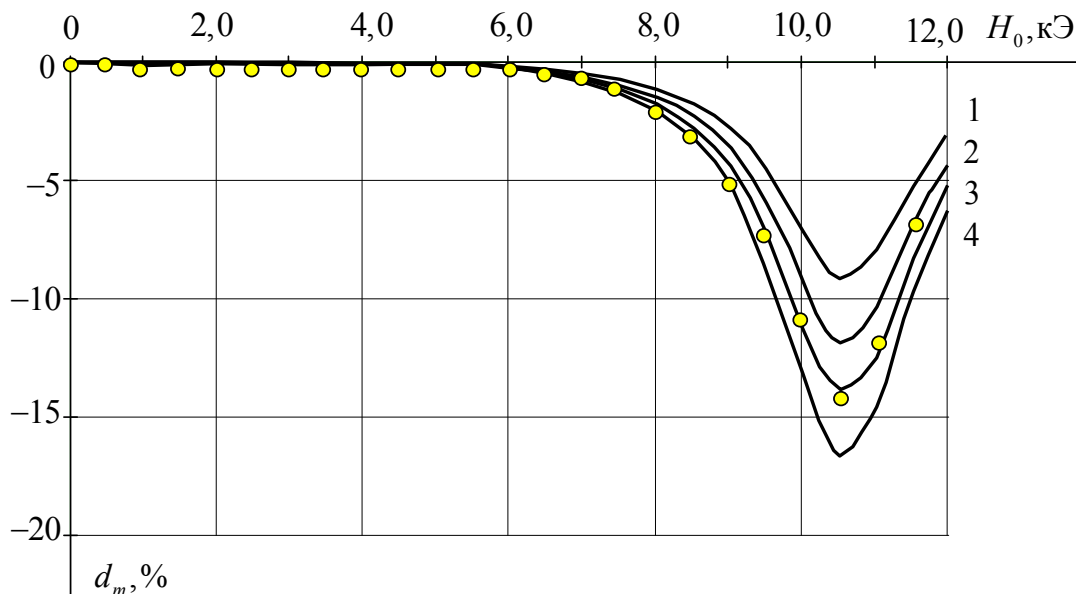


Рис. 3.13. Дифракции  $H_{10}$  волны на магнитном нанокompозите в прямоугольном волноводе:  $f = 30\text{ГГц}$ ; кривая 1 – 30 % заполнение межсферических пустот магнитными наночастицами; 2 – 40 %; 3 – 50 %; 4 – 60 %; ● – эксперимент из [59]

В работе [59] получены фотографии заполнения межсферических пустот опаловой матрицы магнитными наночастицами при помощи электронного микроскопа *JEM – 200CX* (рис. 3.14). Наблюдается 50-60 % заполнение пустот опаловой матрицы.

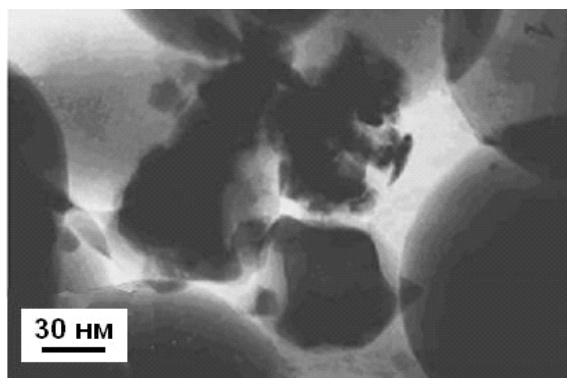


Рис.3.14. Структура нанокompозита на основе опаловой матрицы, содержащего Ni-Zn – шпинель

Совпадение результатов математического моделирования с экспериментом подтверждает достоверность результатов, полученных методом автономного блока с использованием построенных математических моделей и предложенных методик. Необходимо отметить, что магнитный нанокompозит приходится разделить на большое число автономных блоков. Это приводит к большим затратам машинного времени – одна точка рассчитывается несколько десятков минут в зависимости от мощности

процессора. В связи с этим целесообразно использовать многопроцессорные вычислительные комплексы. Время расчетов можно существенно сократить, если для магнитного нанокompозита ввести и обосновать эффективные значения тензоров магнитной и диэлектрической проницаемостей.

### 3.6. Методика определения эффективных значений магнитной и диэлектрической проницаемостей магнитного нанокompозита

Введение эффективных значений магнитной и диэлектрической проницаемостей для магнитного нанокompозита существенно упрощают математические расчеты устройств сверхвысоких частот. Кроме того диэлектрическая и магнитная проницаемости являются фундаментальными понятиями электромагнетизма. Дополнительным основанием для введения магнитной и диэлектрической проницаемостей является и то, что геометрические размеры наносфер и магнитных частиц значительно меньше длины волны (квазисплошная сплошная среда).

Методика определения эффективных значений магнитной и диэлектрической проницаемостей базируется на гипотезе: в магнитном нанокompозите эффект Фарадея и эффект Куттон-Мутона наблюдаются также как в сплошной гиромангнитной среде. Это означает, что постоянные распространения волн левой поляризации  $\Gamma^+$ , правой поляризации  $\Gamma^-$ , обыкновенной волны  $\Gamma_{\parallel}$  и необыкновенной волны  $\Gamma_{\perp}$  в бесконечной сплошной гиромангнитной среде должны совпадать с аналогичными значениями постоянных распространения волн в трехмерной периодической структуре магнитного нанокompозита (рис. 3.14).

Пусть эффективная магнитная проницаемость магнитного нанокompозита является тензором второго ранга (3.37)

$$\tilde{\mu}^{\Sigma} = \begin{pmatrix} \mu^{\Sigma} - i\mu_{\alpha}^{\Sigma} & 0 & 0 \\ i\mu_{\alpha}^{\Sigma} & \mu^{\Sigma} & 0 \\ 0 & 0 & \mu_z^{\Sigma} \end{pmatrix}, \quad (3.59)$$

а диэлектрическая проницаемость  $\epsilon^{\Sigma}$  – скалярной величиной. В этом случае компоненты тензора магнитной проницаемости (3.59)  $\mu^{\Sigma}$ ,  $\mu_{\alpha}^{\Sigma}$ ,  $\mu_z^{\Sigma}$  и диэлектрическая проницаемость  $\epsilon^{\Sigma}$  определяются из решения уравнений (3.45), (3.55), (3.58):



$$\left\{ \begin{array}{l} \Gamma_{\Sigma}^{+} = \omega \sqrt{\epsilon_0 \mu_0 \epsilon^{\Sigma} (\mu^{\Sigma} + \mu_{\alpha}^{\Sigma})}, \\ \Gamma_{\Sigma}^{-} = \omega \sqrt{\epsilon_0 \mu_0 \epsilon^{\Sigma} (\mu^{\Sigma} - \mu_{\alpha}^{\Sigma})}, \\ \Gamma_{\parallel}^{\Sigma} = \omega \sqrt{\epsilon_0 \mu_0 \epsilon^{\Sigma} \mu_z^{\Sigma}}, \\ \Gamma_{\perp}^{\Sigma} = \omega \sqrt{\epsilon_0 \epsilon^{\Sigma} \mu_0 \frac{(\mu^{\Sigma})^2 - (\mu_{\alpha}^{\Sigma})^2}{\mu^{\Sigma}}}, \end{array} \right. \quad (3.60)$$

где  $\Gamma_{\Sigma}^{+}$ ,  $\Gamma_{\Sigma}^{-}$ ,  $\Gamma_{\parallel}^{\Sigma}$ ,  $\Gamma_{\perp}^{\Sigma}$  – постоянные распространения волн в трехмерной периодической структуре магнитного нанокompозита.

Для намагниченных ферритов  $\mu_z^{\Sigma} = 1$  [78]. Система уравнений (3.60) имеет решение, если выполняется условие

$$(\Gamma_{\perp}^{\Sigma})^2 - \frac{2(\Gamma_{\Sigma}^{+})^2 (\Gamma_{\Sigma}^{-})^2}{(\Gamma_{\Sigma}^{+})^2 + (\Gamma_{\Sigma}^{-})^2} = 0. \quad (3.61)$$

В этом случае значения  $\mu^{\Sigma}$ ,  $\mu_{\alpha}^{\Sigma}$ ,  $\epsilon^{\Sigma}$  определяются из решения системы уравнений (3.60) следующим образом:

$$\left\{ \begin{array}{l} \mu^{\Sigma} = \frac{(\Gamma_{\Sigma}^{+}/k_0)^2 + (\Gamma_{\Sigma}^{-}/k_0)^2}{2\epsilon^{\Sigma}}, \\ \mu_{\alpha}^{\Sigma} = \frac{(\Gamma_{\Sigma}^{+}/k_0)^2 - (\Gamma_{\Sigma}^{-}/k_0)^2}{2\epsilon^{\Sigma}}, \\ \epsilon^{\Sigma} = (\Gamma_{\parallel}^{\Sigma}/k_0)^2, \end{array} \right. \quad (3.62)$$

где  $k_0 = \omega \sqrt{\epsilon_0 \mu_0}$ .

На рис. 3.15 показаны результаты математического расчета зависимостей компонентов  $\mu^{\Sigma}$ ,  $\mu_{\alpha}^{\Sigma}$  эффективного тензора магнитной проницаемости  $\check{\mu}^{\Sigma}$  (3.59) от напряженности внешнего магнитного поля  $H_0$ . При значении  $H_0 = 10,67$  кЭ наблюдается ферромагнитный резонанс.

На рис. 3.16 показаны результаты математического расчета зависимости эффективной диэлектрической проницаемости  $\epsilon^{\Sigma}$  магнитного нанокompозита от напряженности внешнего магнитного поля  $H_0$ . Эффективная диэлектрическая проницаемость магнитного нанокompозита не зависит от напряженности внешнего магнитного поля и имеет значение  $\epsilon_{\Sigma} = 5,144 - i0,034$ .

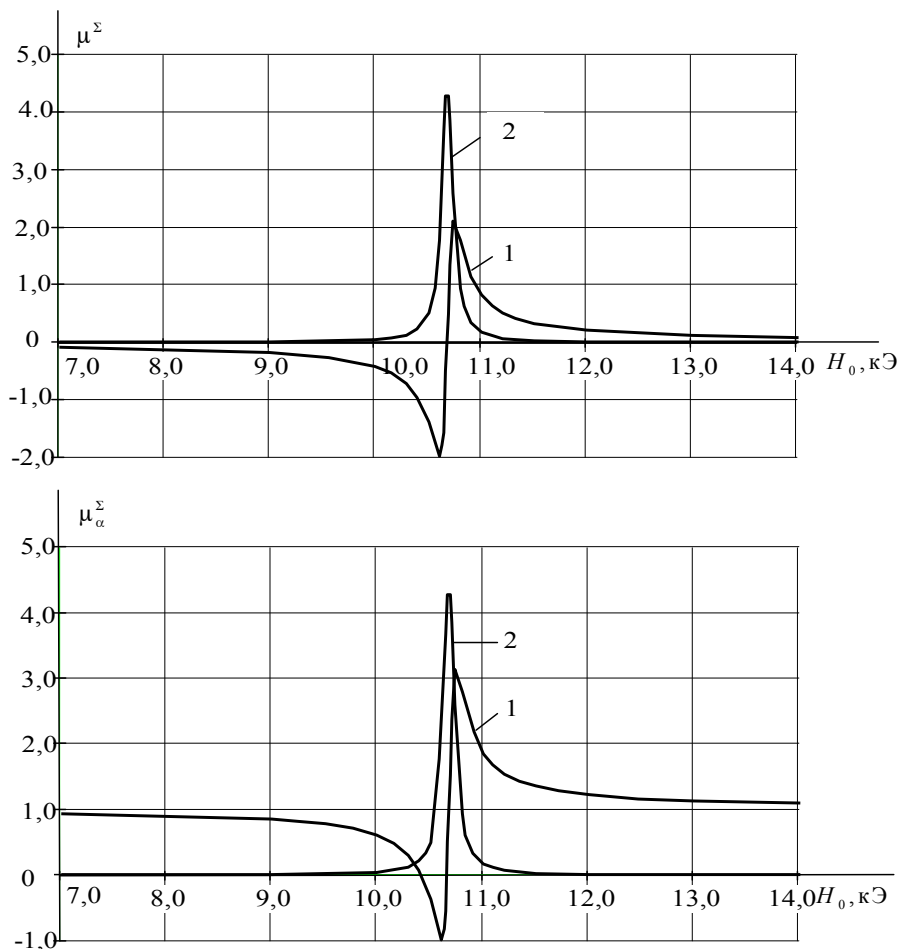


Рис.3.15. Зависимость компонентов эффективного тензора магнитной проницаемости магнитного нанокompозита от напряженности внешнего магнитного поля:  
 $f = 30 \text{ ГГц}$ ; наносферы ( $r = 125 \text{ нм}$ ,  $\epsilon_v = 4,6 - 4 \cdot 10^{-4}$ ,  $\mu_v = 1$ );  
 магнитные наночастицы ( $\text{Ni}_{0,7}\text{Zn}_{0,3}\text{Fe}_2\text{O}_4$ ,  $\alpha = 6 \cdot 10^{-3}$ ,  $\mu_0 q = 2,2 \cdot 10^{-9} \text{ Э} \cdot \text{см}^2$ ,  
 $\epsilon = 9,5 - i0,3$ ,  $4\pi M_S = 5000 \text{ Гс}$ , 50 % заполнение межсферических пустот);  
 кривые 1 –  $\text{Re}\mu^\Sigma$ ,  $\text{Re}\mu^\alpha$ ; 2 –  $\text{Im}\mu^\Sigma$ ,  $\text{Im}\mu^\alpha$

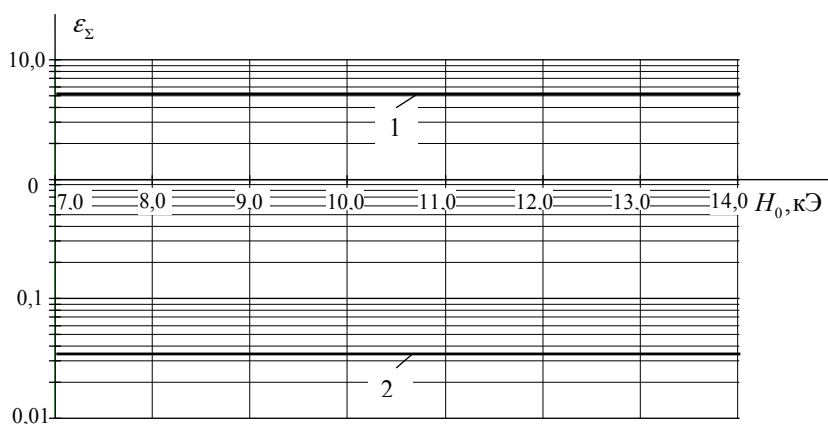


Рис.3.16. Зависимость эффективной диэлектрической проницаемости магнитного нанокompозита от внешнего магнитного поля:  
 кривая 1 –  $\text{Re}\epsilon^\Sigma$ ; кривая 2 –  $\text{Im}\epsilon^\Sigma$

Система уравнений (3.60) имеет решение, если значения постоянных распространения волн  $\Gamma_{\Sigma}^+$ ,  $\Gamma_{\Sigma}^-$ ,  $\Gamma_{\parallel}^{\Sigma}$ ,  $\Gamma_{\perp}^{\Sigma}$  в трехмерной периодической структуре магнитного нанокompозита удовлетворяют условию (3.61). На рис. 3.17 показана зависимость относительной погрешности в процентах выполнения этого условия от напряженности внешнего магнитного поля.

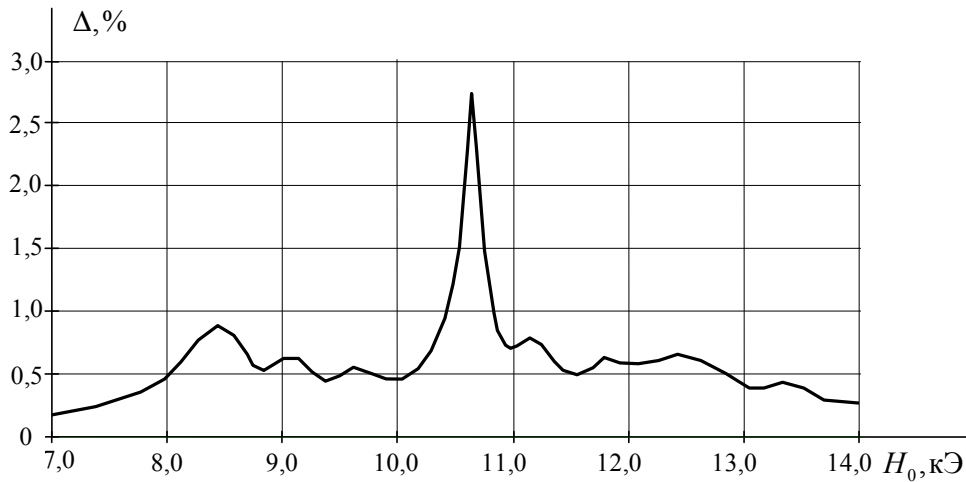


Рис.3.17. Относительная погрешность выполнения условия (3.61) для постоянных распространения волн  $\Gamma_{\Sigma}^+$ ,  $\Gamma_{\Sigma}^-$ ,  $\Gamma_{\parallel}^{\Sigma}$ ,  $\Gamma_{\perp}^{\Sigma}$  в трехмерной периодической структуре магнитного нанокompозита

Наибольшая погрешность наблюдается в точке ферромагнитного резонанса и составляет порядка 3 %, в остальных точках погрешность не превышает 1 %.

Магнитный нанокompозит на основе опаловой матрицы из диэлектрических наносфер с магнитными наночастицами можно описывать, также как и намагниченный феррит, тензором магнитной проницаемости. Математическое моделирование в этом случае устройств сверхвысоких частот с магнитными нанокompозитами существенно упрощается, но требует для гарантии достоверности результатов моделирования альтернативной проверки методом автономных блоков в виде прямоугольных параллелепипедов с диэлектрическими наносферами и магнитными частицами.

### Выводы

По результатам третьей главы можно сделать следующие выводы.

1. Разработана методика рекомпозиции дескрипторов автономных блоков с виртуальными каналами Флоке. Получены матричные выражения рекомпозиции автономных блоков для матриц проводимости, сопротивления и рассеяния.

2. Разработана методика построения декомпозиционных математических моделей СВЧ устройств путем преобразования матриц проводимости, сопротивления базового элемента магнитного нанокompозита (волноводного трансформатора) на сверхвысоких частотах в базисе каналов Флоке к матрицам в базисах собственных волн других волновых каналов.

3. Проведен анализ электромагнитных полей и волн в трехмерных периодических магнитных нанокompозитах на основе опаловых матриц. Свободный электромагнитный волновой процесс в периодической структуре в произвольном направлении можно рассматривать как наложение бесконечной совокупности плоских неоднородных волн.

4. Разработана методика определения постоянных распространения волн в магнитных нанокompозитах, которая сводится к получению и решению характеристического уравнения для определения постоянных распространения волн в периодической структуре из диэлектрических наносфер и магнитных наночастиц октаэдрической формы.

5. Проведено сравнение результатов математического моделирования прямоугольного волновода с магнитным нанокompозитом с результатами эксперимента. При 50 % заполнении межсферических пустот магнитными наночастицами октаэдрической формы наблюдается удовлетворительное совпадение результатов, отклонение относительного коэффициента прохождения не превысило 5 %.

6. Совпадение результатов решения тестовой задачи, одной и той же задачи двумя альтернативными алгоритмами, с экспериментом подтверждает достоверность математического моделирования устройств сверхвысоких частот, в состав которых входят магнитные нанокompозиты.

7. Разработана методика определения эффективных значений магнитной и диэлектрической проницаемостей магнитного нанокompозита. Как и для ферритов, эффективная магнитная проницаемость тензорная величина, диэлектрическая проницаемость – скалярная величина.

## Глава 4. ИССЛЕДОВАНИЕ УСТРОЙСТВ СВЕРХВЫСОКИХ ЧАСТОТ НА МАГНИТНЫХ НАНОКОМПОЗИТАХ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ

Исследование устройств сверхвысоких частот на магнитных нанокompозитах проводилось при помощи пакета прикладных программ, реализующего построенные модели, используя предложенные методики [79]. Пакет прикладных программ состоит из библиотеки базовых элементов (минимальные автономные блоки [25], автономные многомодовые блоки [28], нелинейные минимальные автономные блоки [34], нелинейные автономные многомодовые блоки [32], автономные блоки с виртуальными каналами Флоке [41] и т.д.), компилятора модели, который по заданной программе осуществляет рекомпозицию автономных блоков, описанных дескрипторами в виде матриц проводимости и рассеяния, комплекса программ, осуществляющих вычисления собственных волн волноводных и полосково-щелевых линий. В пакет программ также входят программы преобразования матриц рассеяния и проводимости, записанных в базисе собственных волн виртуальных каналов автономных блоков, к базису в собственных волнах волноводных и полосково-щелевых линий.

Автономный блок в виде прямоугольного параллелепипеда с диэлектрическими наносферами, магнитными наночастицами и виртуальными каналами Флоке на гранях был включен в библиотеку пакета прикладных программ и использовался как базовый элемент для построения устройств сверхвысоких частот с магнитными нанокompозитами [83-93]. Математическое моделирование позволяет исследовать теоретически устройства сверхвысоких частот с магнитными нанокompозитами, не удовлетворяющих принципу взаимности, т.е. имеющих существенно различные характеристики для разных направлений распространения электромагнитной энергии.

### 4.1. Прямоугольный волновод с поперечно намагниченными магнитными нанокompозитами

На рис. 4.1 показан прямоугольный волновод с поперечно намагниченными нанокompозитами с внешним магнитным полем  $H_0$ . Прямоугольный волновод с поперечно намагниченными магнитными нанокompозитами позволяет строить такие устройства СВЧ, как резонансный вентиль и циркулятор.

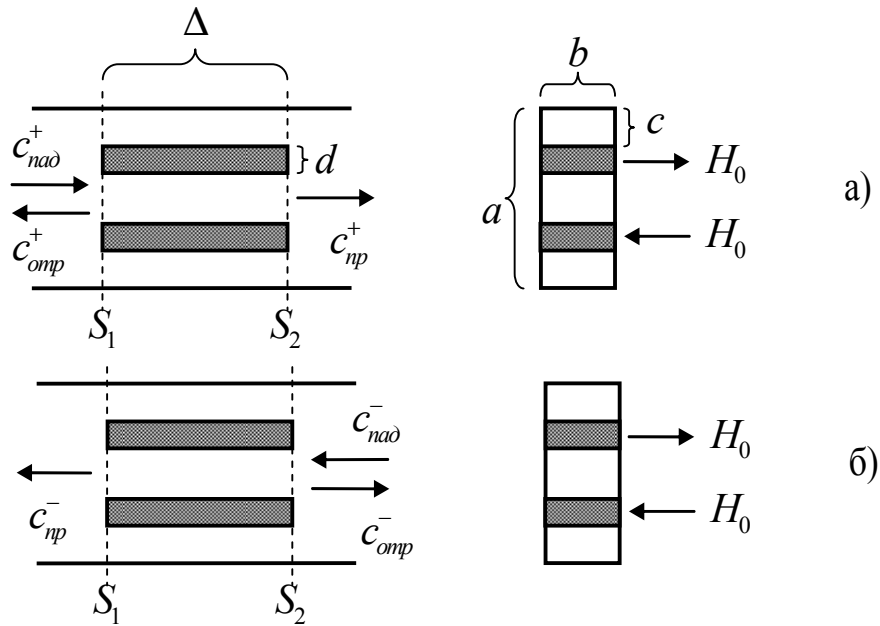


Рис. 4.1. Прямоугольный волновод с поперечно намагниченными магнитными нанокompозитами:

$$a = 7,2 \text{ мм}, b = 3,6 \text{ мм}, c = 1,5 \text{ мм}, d = 1,0 \text{ мм};$$

а, б – взаимно противоположные направления распространения волны  $H_{10}$

Дискретная алгоритмическая модель прямоугольного волновода с поперечно намагниченными магнитными нанокompозитами строилась следующим образом. Область прямоугольного волновода между входными сечениями  $S_1$  и  $S_2$  разбивалась на пять автономных блоков (рис. 4.2). Автономные блоки 2, 4 магнитных нанокompозитов разбивались условными границами на автономные блоки в виде прямоугольных параллелепипедов с диэлектрическими наносферами и магнитными частицами (см. рис. 2.5).

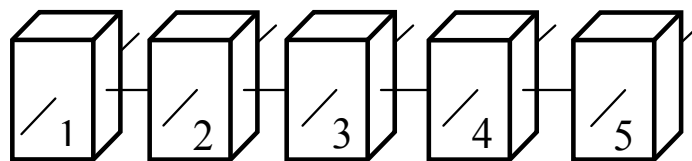


Рис.4.2. Разбиение прямоугольного волновода на автономные блоки:

- 1, 3, 5 – автономные блоки с виртуальными каналами Флоке [41];
- 2, 4 – автономные блоки магнитных нанокompозитов

В результате рекомпозиции автономных блоков (использовалась многоуровневая рекомпозиция (см. рис. 3.10)) и преобразования матриц были получены дескрипторы автономных блоков нанокompозитов в базисе собственных волн каналов Флоке. Затем осуществляется рекомпозиция автономных блоков 1, 2, 3, 4, 5 в декомпозиционной схеме (см. рис. 4.2) и преобразование матриц проводимости, записанной в базисе собственных волн каналов Флоке, к базису, записанному в собственных волнах прямо-

угольного волновода. На заключительном этапе построения моделей матрица проводимости отрезка прямоугольного волновода с поперечно намагниченными магнитными нанокompозитами преобразуется в матрицу рассеяния.

Для прямоугольного волновода с поперечно намагниченными магнитными нанокompозитами (см. рис. 4.1) была построена приближенная аналитическая модель с использованием эффективного тензора магнитной проницаемости и эффективной диэлектрической проницаемости магнитных нанокompозитов. Здесь также использовался декомпозиционный подход (см. рис. 4.2). Дескрипторы автономных блоков 2, 4 магнитных нанокompозитов были получены методом минимальных автономных блоков [25] с гиромангнитным заполнением [80].

Результаты теоретического исследования невзаимности прямоугольного волновода с поперечно намагниченными нанокompозитами показаны на рис. 4.3. Прямому направлению соответствует знак «+». Волна типа  $H_{10}$  с единичной амплитудой  $c_{\text{пад}}^+ = 1$  падает на входное сечение  $S_1$  (см. рис. 4.1, а). В результате дифракции на магнитной неоднородности в прямоугольном волноводе возбуждаются отраженная и прошедшая волны типа  $H_{10}$  с амплитудами соответственно  $c_{\text{отр}}^+ = |c_{\text{отр}}^+| \exp(i\varphi_{\text{отр}}^+)$  и  $c_{\text{пр}}^+ = |c_{\text{пр}}^+| \exp(i\varphi_{\text{пр}}^+)$ . Обратному направлению соответствует знак «-». Волна типа  $H_{10}$  с единичной амплитудой  $c_{\text{пад}}^- = 1$  падает на входное сечение  $S_2$  (см. рис. 4.1, б). В результате дифракции на магнитной неоднородности в прямоугольном волноводе возбуждаются отраженная и прошедшая волны типа  $H_{10}$  с амплитудами соответственно  $c_{\text{отр}}^- = |c_{\text{отр}}^-| \exp(i\varphi_{\text{отр}}^-)$  и  $c_{\text{пр}}^- = |c_{\text{пр}}^-| \exp(i\varphi_{\text{пр}}^-)$ .

Дискретная алгоритмическая модель построена при следующих значениях параметров магнитных нанокompозитов: наносферы ( $r = 125 \text{ нм}$ ,  $\varepsilon_v = 4,6 - 4 \cdot 10^{-4}$ ,  $\mu_v = 1$ ); магнитные наночастицы ( $\text{Ni}_{0,7}\text{Zn}_{0,3}\text{Fe}_2\text{O}_4$ ,  $\alpha = 6 \cdot 10^{-3}$ ,  $\mu_0 q = 2,2 \cdot 10^{-9} \text{ Э} \cdot \text{см}^2$ ,  $\varepsilon = 9,5 - i0,3$ ,  $4\pi M_s = 5000 \text{ Гс}$ , 50 % заполнение межсферических пустот магнитными наночастицами октаэдрической формы). Под дискретной алгоритмической моделью понимается краевая задача дифракции, решенная без упрощения уравнений Максвелла, Ландау-Лившица и краевых условий.

Приближенная аналитическая модель построена при следующих значениях параметров магнитных нанокompозитов:

$$\varepsilon^\Sigma = 5,144 - i0,034 ;$$

$$\tilde{\mu}_1^\Sigma = \begin{pmatrix} 0,699 - i0,02 & -i(0,328 - i0,02) & 0 \\ i(0,328 - i0,02) & 0,699 - i0,02 & 0 \\ 0 & 0 & 1,0 - i0,01 \end{pmatrix} ;$$

$$\tilde{\mu}_2^\Sigma = \begin{pmatrix} 0,699 - i0,02 & i(0,328 - i0,02) & 0 \\ -i(0,328 - i0,02) & 0,699 - i0,02 & 0 \\ 0 & 0 & 1,0 - i0,01 \end{pmatrix}.$$

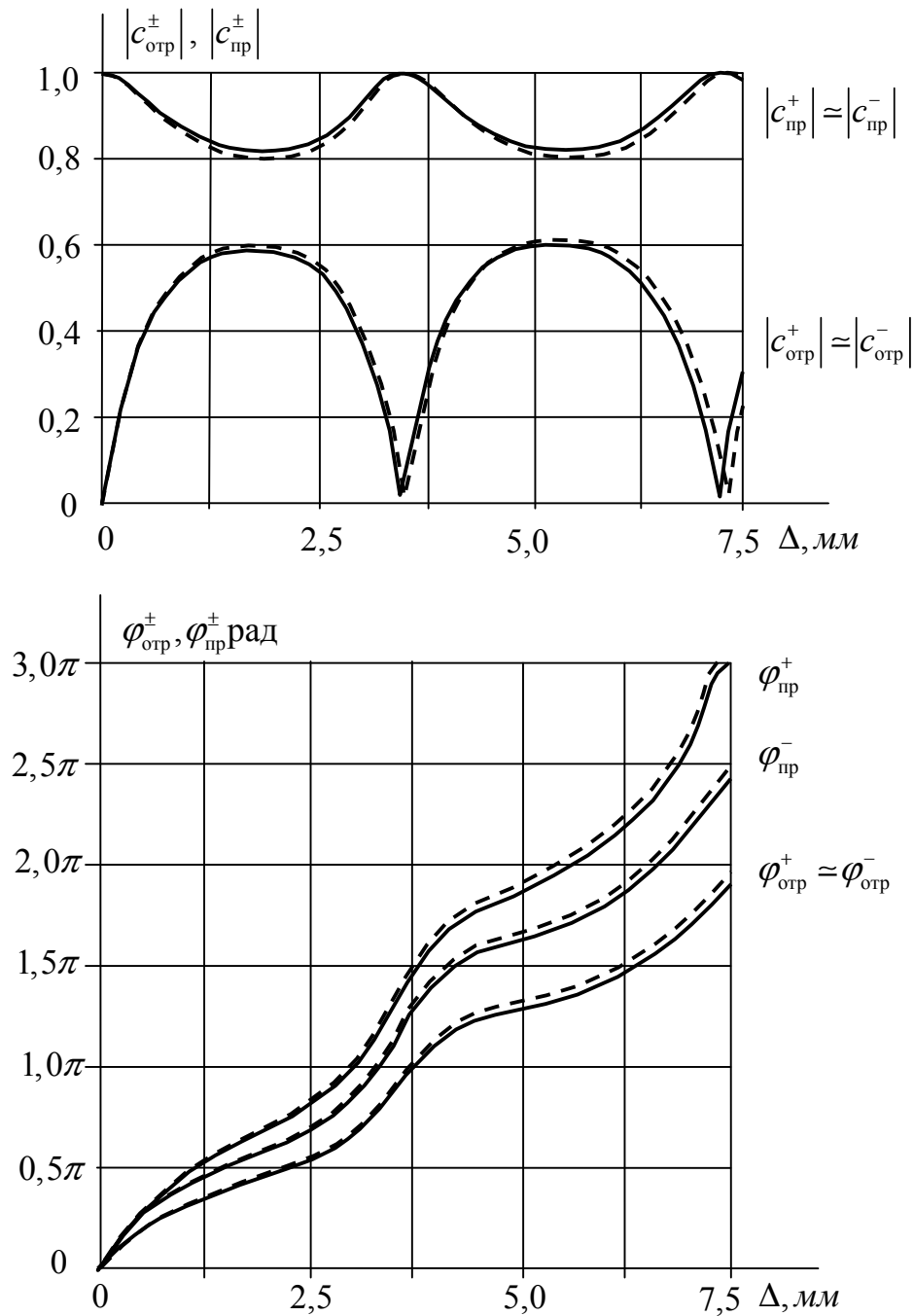


Рис. 4.3. Дифракция волны  $H_{10}$  на поперечно намагниченных магнитных нанокompозитах в прямоугольном волноводе:  
 $f = 30$  ГГц,  $H_0 = 9,8$  кЭ; — — — дискретная модель; — — — — аналитическая формула на основе эффективных значений магнитной и диэлектрической проницаемостей магнитных нанокompозитов



На рис. 4.3 приведены результаты математического расчета зависимостей модулей амплитуд и фаз отраженных и прошедших волн для двух взаимообратных направлений распространения волны  $H_{10}$  от длины магнитных нанокompозитов.

Невзаимность прямоугольного волновода с поперечно намагниченными магнитными нанокompозитами заметно проявляется только в картине фазовых сдвигов прошедших волн ( $\varphi_{np}^+$  и  $\varphi_{np}^-$ ).

На рис. 4.3 приведены результаты расчетов, полученных при помощи аналитической модели – штриховые кривые. Наблюдается близость результатов расчетов с результатами дискретной модели. Количество базисных функций в дискретной и аналитических моделях обеспечивало точность расчетов не хуже 1 %.

При напряженностях внешнего магнитного поля, которые соответствуют ферромагнитному резонансу, волновод с поперечно намагниченными магнитными нанокompозитами может выполнять функции резонансного вентиля.

## 4.2. Резонансный вентиль на магнитных нанокompозитах

В поперечно намагниченных магнитных нанокompозитах в (см. рис. 4.1) зависимости от направления движения волны прямоугольного волновода будет преобладать правая или левая круговая поляризация магнитного поля [62]. Поэтому эквивалентная магнитная проницаемость нанокompозитов для противоположно движущихся волн будет иметь различные значения. Разными будут и постоянные распространения этих волн. Система невзаимна и может быть использована для построения вентиля, а также циркулятора.

На рис. 4.4 приведены результаты математического расчета зависимостей модулей амплитуд отраженных и прошедших волн в прямом и обратном направлениях распространения волны  $H_{10}$  от напряженности внешнего магнитного поля  $H_0$ .

Вблизи ферромагнитного резонанса прямая волна («+») прямоугольного волновода  $H_0$  практически без затухания ( $|c_{np}^+| \approx 0,95$ ) проходит через систему поперечно намагниченных магнитных нанокompозитов. Обратная волна («-») прямоугольного волновода  $H_0$  имеет значительные затухания при прохождении через систему намагниченных магнитных нанокompозитов. В точке ферромагнитного резонанса  $|c_{np}^-| \approx 0,015$ , что составляет 35 дБ. Резонансный вентиль на основе магнитных нанокompозитов имеет

для обратной волны затухание на 5-7 дБ больше по сравнению с вентилем на основе феррита.

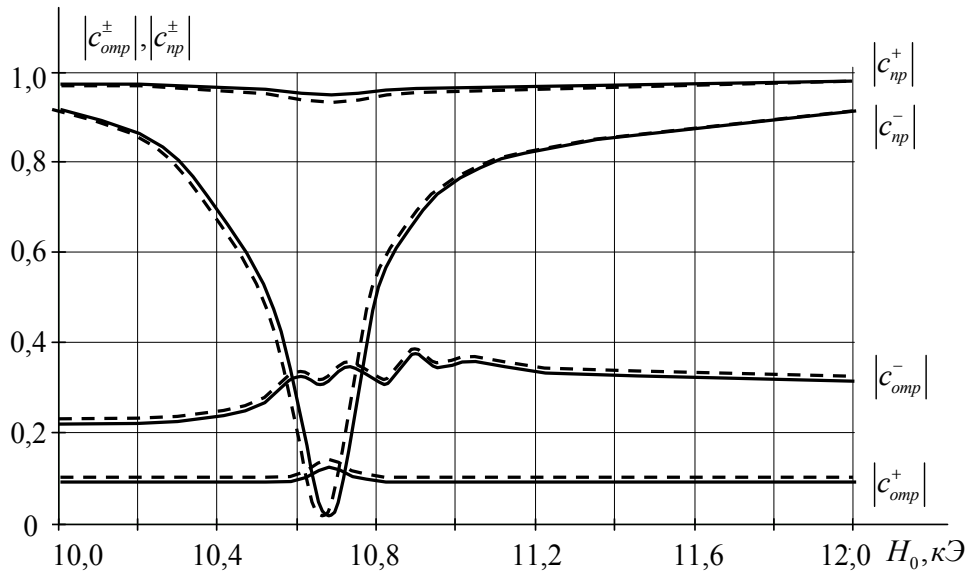


Рис. 4.4. Дифракция волны  $H_{10}$  на поперечно намагниченных магнитных нанокompозитах вблизи ферромагнитного резонанса:

$f = 30$  ГГц,  $\Delta = 7,2$  мм; — — — дискретная модель; — — — — аналитическая формула на основе эффективных значений магнитной и диэлектрической проницаемостей

На рис. 4.4 приведены результаты расчетов, полученных при помощи аналитической модели – штриховые кривые. Наблюдается близость результатов расчетов с результатами дискретной модели. Количество базисных функций в дискретной и аналитических моделях обеспечивало точность расчетов не хуже 1 %.

### 4.3. Волноводный циркулятор на магнитных нанокompозитах

На рис. 4.5 показана конструкция циркулятора, состоящая из двух щелевых мостов, производящих деление передаваемой электромагнитной энергии пополам, поперечно намагниченных магнитных нанокompозитов в одном канале и диэлектрических вставок в другом канале. Циркулятор обеспечивает передачу электромагнитной энергии из канала 1 в канал 2, из 2 в 3, из 3 в 4, из 4 в 1.

Математическая модель циркулятора была построена с использованием декомпозиционного подхода. Область циркулятора между сечениями  $S_1$  и  $S_2$  разделялась условными границами (штриховые вертикальные прямые на рис. 4.5) на два направленных ответвителя (7), четыре отрезка прямо-

угольного волновода (8), отрезок волновода с поперечно намагниченными магнитными нанокompозитами (5), отрезок волновода с диэлектрическими вставками (6).

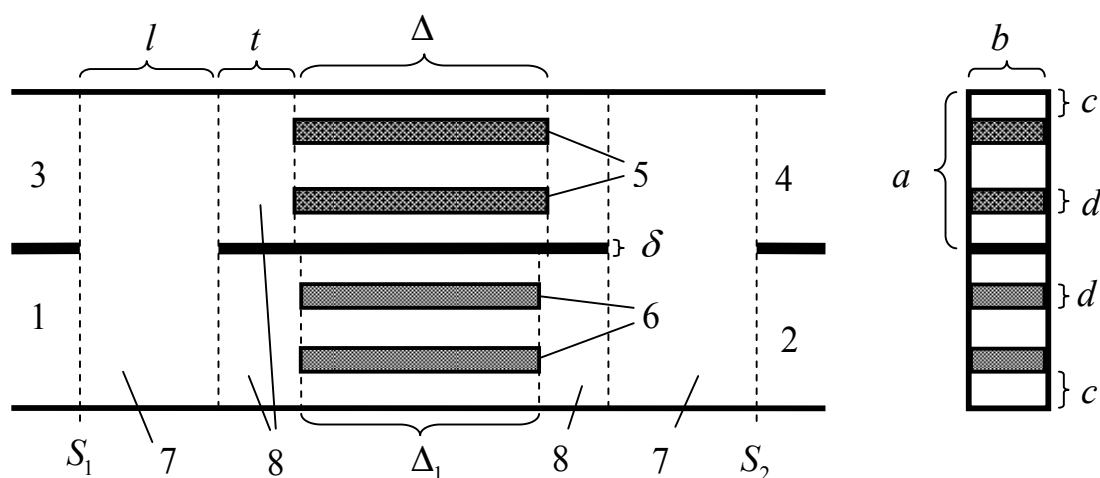


Рис. 4.5. Волноводный циркулятор на магнитных нанокompозитах:  
 $a = 3,6 \text{ мм}$ ,  $b = 7,2 \text{ мм}$ ,  $c = 1,5 \text{ мм}$ ,  $d = 1,0 \text{ мм}$ ,  $\Delta = 14,4 \text{ мм}$ ,  $\Delta_1 = 13,8 \text{ мм}$ ,  $t = 5,0 \text{ мм}$ ,  
 $l = 24,5 \text{ мм}$ ,  $\delta = 0,1 \text{ мм}$ ; 1, 2, 3, 4 – плечи циркулятора;  
 5 – магнитные нанокompозиты; 6 – диэлектрические вставки ( $\epsilon = 5, \mu = 1$ );  
 7 – направленные ответвители; 8 – отрезки прямоугольного волновода

Математические модели направленных ответвителей и отрезков прямоугольного волновода были построены при помощи автономных многомодовых блоков [28]. Дискретная модель отрезка волновода с поперечно намагниченными магнитными нанокompозитами была построена при помощи автономных блоков с виртуальными каналами Флоке [28] и автономных блоков в виде прямоугольных параллелепипедов с диэлектрическими наносферами и магнитными наночастицами октаэдрической формы (см. рис. 2.5). Аналитическая модель отрезка волновода с поперечно намагниченными магнитными нанокompозитами была построена при помощи автономных блоков с виртуальными каналами Флоке [28] и минимальных автономных блоков с гироманитным заполнением [25]. Математическая модель отрезка волновода с диэлектрическими вставками была построена при помощи автономных блоков с виртуальными каналами Флоке [28].

Длина щели  $l$  направленных ответвителей (7) циркулятора (рис. 4.5) должна быть такой, чтобы передаваемая электромагнитная энергия делилась пополам, что обычно и обеспечивается в щелевых волноводных мостах. На рис. 4.6 показаны результаты математического расчета коэффициента деления  $k_{\text{дел}}$  от длины щели.

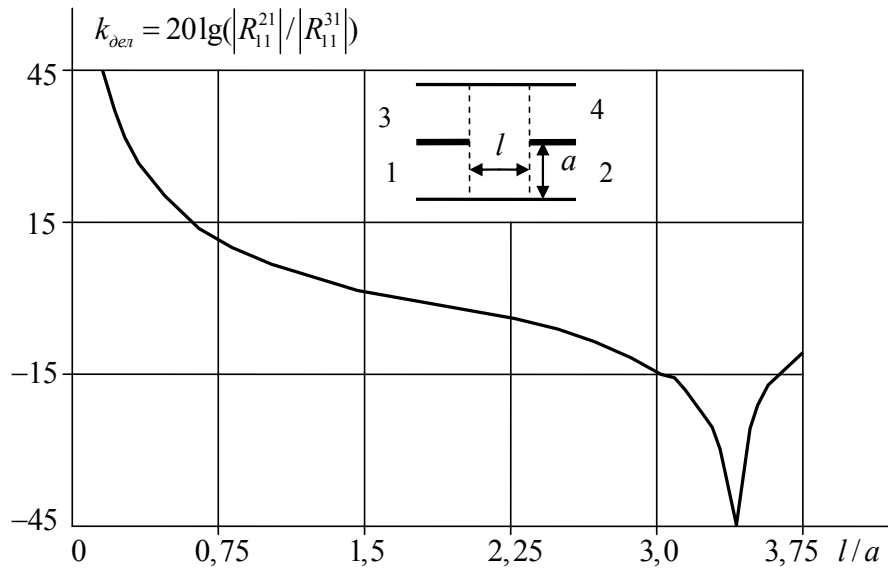


Рис.4.6. Зависимость коэффициента деления направленного ответвителя от длины щели:

$f = 30\text{ГГц}$ ;  $R_{11}^{21}$ ,  $R_{11}^{41}$  – элементы матрицы рассеяния ответвителя для волны  $H_{10}$

Наблюдается деление электромагнитной энергии пополам между каналами 2, 4 при значении  $l/a = 3,4$  ( $l = 24,5\text{мм}$ ). Значение длины щели для направленных ответвителей используется для построения полной математической модели циркулятора.

В канале циркулятора с поперечно намагниченными магнитными нанокompозитами (5) (см. рис. 4.5) для одного направления должен создаваться фазовый сдвиг  $\varphi + \pi$ , а для обратного направления  $\varphi$  [62]. На рис. 4.7 приведены результаты математического расчета (дискретная модель) зависимостей элементов матрицы рассеяния  $R_{11}^{12} = |R_{11}^{12}| \exp(i\varphi^{12})$ ,  $R_{11}^{21} = |R_{11}^{21}| \exp(i\varphi^{21})$  отрезка прямоугольного волновода с поперечно намагниченными магнитными нанокompозитами от напряженности внешнего магнитного поля.  $H_0$ . Наблюдается при  $H_0 = 9,8\text{кЭ}$  фазовый сдвиг между прямым ( $\varphi^{21}$ ) и обратным направлениями ( $\varphi^{12}$ ) распространения электромагнитной энергии равный  $\pi$ . Фазовый сдвиг в канале циркулятора равен  $\varphi = \varphi^{21}|_{H_0=9,8\text{кЭ}} = 5,88\pi$ .

Фазовый сдвиг в канале циркулятора с диэлектрическими вставками (2) (см. рис. 4.5) также должен составлять  $\varphi = 5,88\pi$  [62]. На рис. 4.8 приведены результаты математического расчета зависимости фаз элементов матрицы рассеяния  $R_{11}^{21} = |R_{11}^{21}| \exp(i\varphi^{21})$ ,  $R_{11}^{12} = |R_{11}^{12}| \exp(i\varphi^{12})$  отрезка прямоугольного волновода с диэлектрическими вставками (6) (рис. 4.5) от длины  $\Delta_1$ . Наблюдается при  $\Delta_1 = 13,8\text{мм}$  совпадение фаз для отрезков волноводов с диэлектрическими вставками и магнитными нанокompозитами ( $\Delta = 14,4\text{мм}$ ) для прямого распространения волны ( $\varphi^{21}$ ).

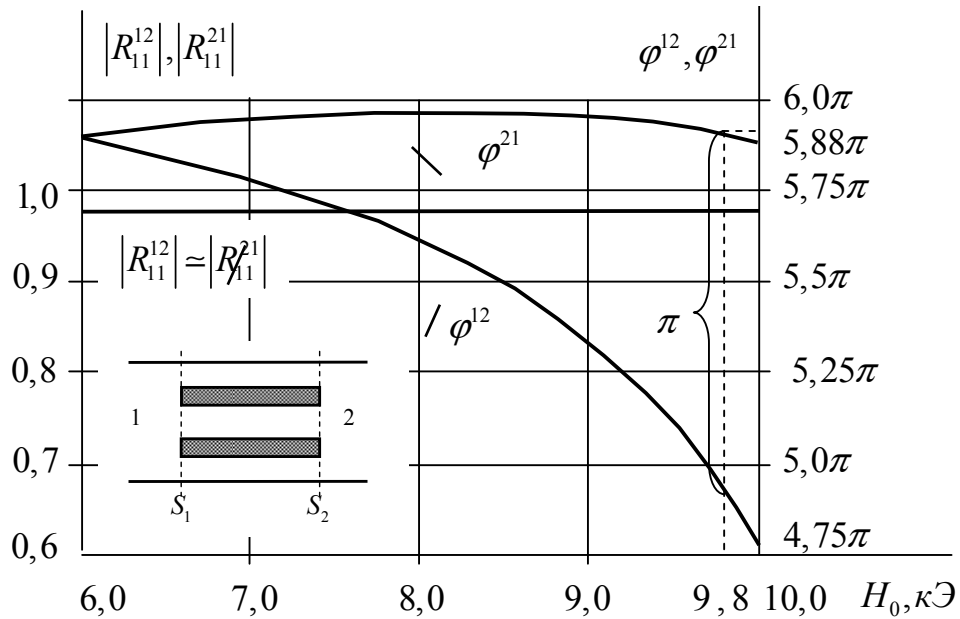


Рис.4.7. Зависимость модулей и фаз элементов матрицы рассеяния  $R_{11}^{12}$ ,  $R_{11}^{21}$  отрезка прямоугольного волновода с поперечно намагниченными магнитными нанокompозитами от напряженности внешнего магнитного поля  $H_0$ :  $f = 30\text{ГГц}$

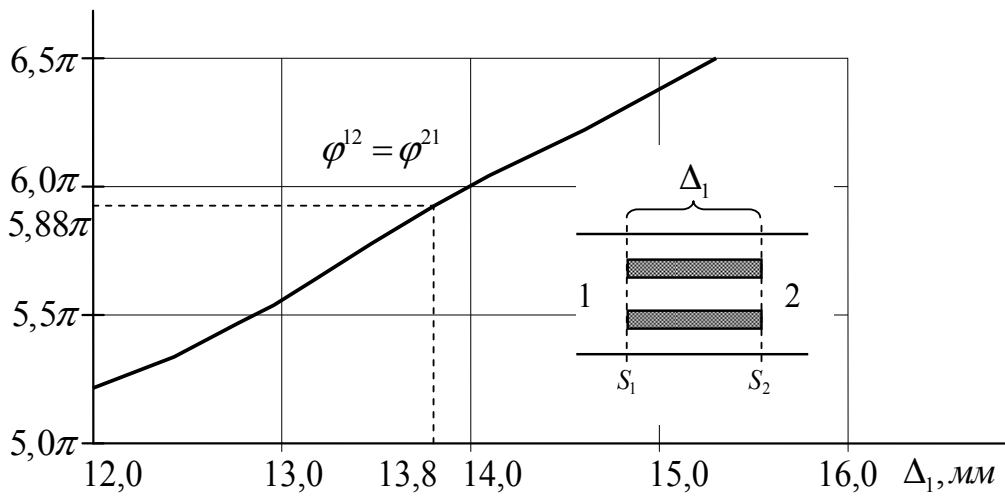


Рис. 4.8. Зависимость фазы элементов матрицы рассеяния  $R_{11}^{21}$ ,  $R_{11}^{12}$  отрезка прямоугольного волновода с диэлектрическими вставками от их длины:  
 $f = 30\text{ГГц}$ ,  $\epsilon = 5$ ,  $\mu = 1$

Результаты исследования математических моделей направленного ответвителя (длина щели для половинного деления энергии равна  $l = 24,5\text{мм}$ ), отрезка прямоугольного волновода с поперечным намагничиванием магнитных нанокompозитов (разность фаз  $\pi$  для взаимно обратных направлений распространения энергии обеспечивается при напряженности внешнего магнитного поля равного  $H_0 = 9,8\text{кЭ}$ ), отрезка прямоугольного волновода с диэлектрическими вставками (фазовый сдвиг в канале

циркулятора с диэлектрическими вставками равен фазовому сдвигу  $\varphi = 5,88\pi$  в канале с магнитными наноккомпозитами при длине вставок равных  $\Delta_1 = 13,8\text{мм}$ ) используются для построения общей математической модели циркулятора (рис. 4.5).

Принцип действия циркулятора (см. рис. 4.5) поясняет рис. 4.9. Электромагнитная энергия, поступающая в плечо 1, передается в плечо 2 и не поступает ни в одно из остальных плеч. Точно так же энергия, подаваемая в плечо 2, передается только в плечо 3 и т.д.

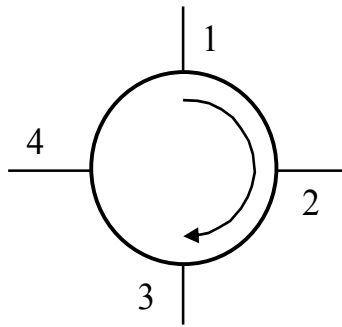


Рис. 4.9. Схематическое изображение циркулятора

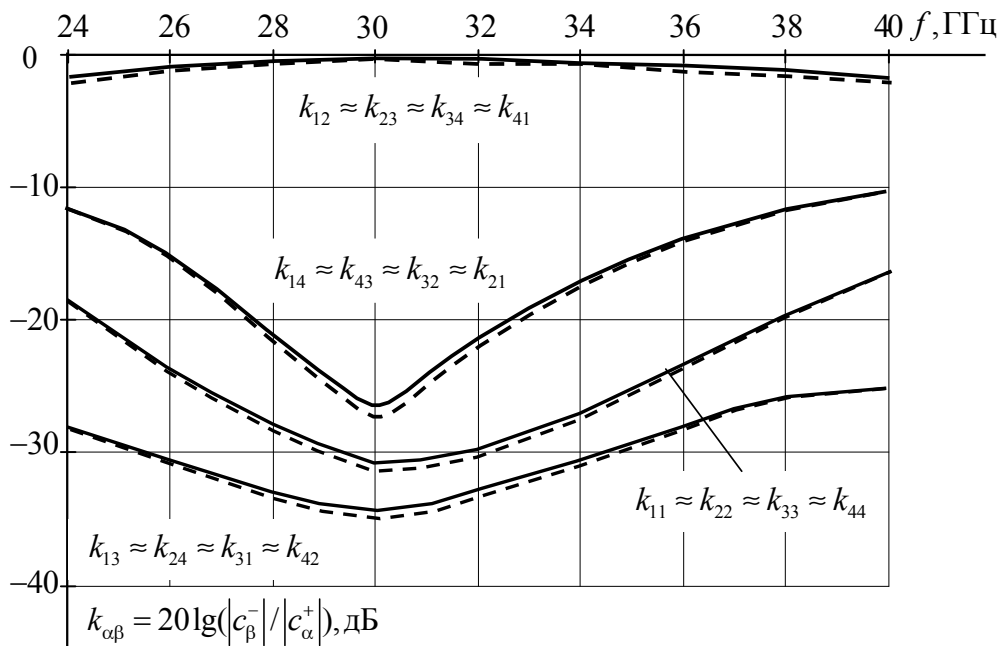


Рисунок 4.10 – Зависимость коэффициентов прохождения  $k_{\alpha\beta}$  ( $\alpha \neq \beta$ ) и отражения  $k_{\alpha\alpha}$  циркулятора от частоты:  
 — дискретная модель; - - - - аналитическая формула

На рис. 4.10 приведены результаты математического расчета распределения электромагнитной энергии по плечам  $\beta$  ( $\beta = 1, 2, \dots, 4$ ) циркулятора при падении в плечо  $\alpha$  ( $\alpha = 1, 2, \dots, 4$ ) волны типа  $H_{10}$  с амплитудой  $c_{\alpha}^+$ . Наблю-

дается практически полная передача электромагнитной энергии из плеча 1 в плечо 2, из 2 в 3, из 3 в 4, из 4 в 1. В остальные плечи электромагнитная энергия поступает с большим затуханием. Качество циркулятора в основном определяется уровнем этого затухания. Для циркуляторов с магнитными нанокompозитами это затухание на 7-10 дБ больше, чем для циркуляторов с ферритами [81].

На рис. 4.10 приведены результаты расчетов, полученных при помощи приближенной аналитической модели – штриховые кривые.

Наблюдается близость результатов математического моделирования резонансного вентиля и циркулятора, полученных при помощи дискретной и приближенной моделей. Погрешность расчета с использованием метода автономных блоков относительно результатов эксперимента составляет 1 %, а по приближенной модели относительно метода автономных блоков составляет 0,1 %. Время расчета у приближенной модели более чем в 50 раз меньше.

## Выводы

По результатам четвертой главы можно сделать следующие выводы.

1. Проведено теоретическое исследование нарушения принципа взаимности для прямоугольного волновода с поперечно намагниченными магнитными нанокompозитами. Невзаимность прямоугольного волновода с поперечно намагниченными магнитными нанокompозитами заметно проявляется только в картине фазовых сдвигов прошедших волн. В картине амплитуд прошедших и отраженных волн невязимность не наблюдается.

2. Теоретическое исследование резонансного вентиля с магнитными нанокompозитами показало, что вентиль для обратной волны имеет затухание на 5-7 дБ больше по сравнению с вентилями на ферритах.

3. Проведен анализ базовых элементов циркулятора и определены основные параметры математической модели циркулятора (длина щели направленных ответвителей, длина магнитных нанокompозитов и диэлектрических вставок в каналах циркулятора, напряженность внешнего магнитного поля), обеспечивающие требуемые технические характеристики.

4. Теоретическое исследование циркулятора с магнитными нанокompозитами показало, что циркулятор имеет переходные затухания в нерабочие плечи (развязки) на 7-10 дБ больше по сравнению с циркуляторами на ферритах.

5. Наблюдается близость результатов математического моделирования резонансного вентиля и циркулятора, полученных при помощи дискретной и приближенной моделей. Погрешность расчета с использованием метода автономных блоков относительно результатов эксперимента составляет 1 %, а по приближенной модели относительно метода автономных блоков составляет 0,1 %. Время расчета у приближенной модели более чем в 50

раз меньше. На основе этого можно сделать вывод, что магнитные нанокompозиты можно как и ферриты описывать тензором магнитной проницаемости и скаляром диэлектрической проницаемости при моделировании устройств и приборов, использующие принцип невзаимности.

6. Разработанные математические модели являются новыми и позволяют проводить расчет устройств СВЧ с магнитными нанокompозитами на уровне их наноструктур.

7. Пакет прикладных программ создан в среде Matlab и состоит из компилятора модели и библиотеки базовых элементов (автономных блоков). Создание автономного блока осуществляется в соответствии с формализованным заданием на моделирование, которое подготавливается на основе декомпозиционной схемы исследуемого устройства СВЧ.



## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Изложенный в монографии материал показывает, что проектирование СВЧ устройств на магнитных нанокompозитах представляет сложную задачу, решение которой требует математического моделирования процесса распространения электромагнитных волн в нанокompозитах и устройствах их содержащих.

Математическая модель магнитного нанокompозита, базирующаяся на решении уравнений Максвелла совместно с уравнением, описывающим изменение намагниченности в форме Ландау – Лифшица, в котором учитывается поле обменного взаимодействия, отличается от ранее известных тем, что решение получено для нового вида автономного блока в виде прямоугольного параллелепипеда с диэлектрическими наносферами, магнитными наночастицами и виртуальными каналами Флоке на гранях. Это позволяет строить математические модели устройств СВЧ на уровне их наноструктур и учитывать их гетерогенную структуру при заполнении магнитными нанокompозитами.

Практическая ценность полученных результатов заключается в возможности использования математических моделей и программно исполненных алгоритмов в практике разработок магнитных нанокompозитов на основе опаловой матрицы из кубических упаковок наносфер двуокиси кремния и устройств СВЧ на их основе. Автоматизированное машинное моделирование СВЧ устройств с использованием математических моделей с автономными блоками в виде прямоугольных параллелепипедов с диэлектрическими наносферами магнитными наночастицами и виртуальными каналами Флоке на их гранях позволяет существенно повысить надежность и качество проектирования, значительно сократить его сроки.

## БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Никольский, В.В. Вариационные методы для внутренних задач электродинамики [Текст] / В. В. Никольский. – М.: Наука, 1967. – 353с.
2. Каценеленбаум, Б.З. Теория нерегулярных волноводов с медленно меняющимися параметрами [Текст] / Б.З. Каценеленбаум. – М.: Изд. АН СССР, 1961. – 297 с.
3. Дмитриев, В.И. Развитие методов решения граничных задач электродинамики в вычислительном центре университета [Текст] / В.И. Дмитриев, А.С. Ильинский, А.Г. Свешников // Вестник Московского университета. Математика, механика. – 1970. – №4. – С. 71.
4. Никольский, В.В. Метод Галеркина Ритца для внешних задач электродинамики [Текст] / В.В. Никольский // Радиотехника и электроника. – 1969. – Т. 14, №2 – С. 201.
5. Свешников, А.Г. Дифракция на ограниченном теле [Текст] / А.Г. Свешников // Доклады АН СССР. – 1969. – Т. 184, № 1. – С.1241.
6. Никольский, В.В. Проекционный метод для внутренних и внешних задач электродинамики с использованием смешанного базиса [Текст] / В.В. Никольский // Труды Московского института радиотехники, электроники и автоматики. – 1969. – Вып. 40. – Т. 1. – с. 3.
7. Никольский, В.В. Импендансная трактовка незамкнутых электродинамических систем [Текст] / В.В. Никольский // Радиотехника и электроника. – 1971. – Т. 16, № 7. – С. 1120.
8. Никольский, В.В. Проекционный метод для незамкнутых электродинамических систем [Текст] / В.В. Никольский // Радиотехника и электроника. – 1971. – Т. 16, №8. – С. 1342.
9. Никольский, В.В., Применение импедансной трактовки к задачам дифракции для прямоугольного волновода [Текст] / В.В. Никольский, Ф.Ф. Измайлов, А.П. Федосеев // Радиотехника и электроника. – 1972. – Т. 17, №6. – С. 1305.
10. Никольский, В.В. Проекционный метод в задаче возбуждения диэлектрической антенны [Текст] / В.В. Никольский, Г.Д. Малушков // Известия вузов. Радиофизика. – 1973. – Т. 16. – С. 1045.
11. Малушков, Г.Д. Рассеяние неоднородным диэлектрическим телом вращения [Текст] / Г.Д. Малушков // Известия вузов. Радиофизика. – 1975. – Т. 18, №2. – С. 268.
12. Никольский, В.В. Разложение поля в задачах дифракции по собственным функциям задачи с вынужденным импедансом [Текст] / В.В. Никольский, В.Г. Феоктистов // Радиотехника и электроника. – 1971. – Т. 16, №9. – С. 1596.
13. Никольский, В.В. Проекционный метод для задач дифракции на основе импедансной трактовки с выделенным полем [Текст] / В.В. Ни-

кольский // Труды Московского института радиотехники, электроники и автоматики. – 1974. – Вып. 70. – С. 112.

14. Никольский, В.В. Улучшение сходимости поля в проекционных методах [Текст] / В.В. Никольский // Труды Московского института радиотехники, электроники и автоматики. – 1974. – Вып.70. – С. 99.

15. Ильинский, А.С. Исследование некоторых задач дифракции в неоднородных средах численными методами [Текст] / А.С. Ильинский, А.Л. Павлов, А.Г. Свешников // Издательство Московского университета. – 1972. – №3. – С. 73.

16. Ильинский, А.С. Дифракция плоской волны на двумерной периодической структуре [Текст] / А.С. Ильинский, Н.В. Косич // Радиотехника и электроника. – 1974. – Т. 16, №6. – С. 1171.

17. Веселов, Г.И. Метод частичных областей для электродинамических задач с некоординатными границами (докторская диссертация) [Текст] / Г.И. Веселов. – М.: МВТУ. – 1971. – 534с.

18. Никольский, В.В. К обоснованию метода Трефтца [Текст] / В.В. Никольский // Теория дифракции и распространения волн (6 Всесоюзный симпозиум по дифракции и распространению волн). – М.: МИРЭА. – Кн. 1. – С. 83.

19. Никольский, В.В. К обоснованию метода Трефтца для задач дифракции [Текст] / В.В. Никольский // Труды Московского института радиотехники, электроники и автоматики. – 1974. – Вып. 70. – С. 3.

20. Никольский, В.В. Реберные гармоники в задачах дифракции для микрополосковых устройств [Текст] / В.В. Никольский // Теория дифракции и распространения волн. (6 Всесоюзный симпозиум по дифракции и распространению волн). – М.: МИРЭА. – Кн. 1. – С. 79.

21. Никольский, В.В. Принципы построения алгоритмов для полосковых устройств [Текст] / В. В. Никольский //Труды Московского института радиотехники, электроники и автоматики. – 1974. – Вып. 70. – С. 24.

22. Никольский, В.В. Электродинамическая теория полосковых устройств [Текст] / В.В. Никольский // Радиотехника и электроника. – 1975. – Т. 20, №3. – С. 457.

23. Феоктистов, В.Г. Дифракция на протяженных гиротропных телах в полых системах с учетом реальной неоднородности намагничивания [Текст] / В.Г. Феоктистов, О.И. Левин // Теория дифракции и распространения волн. (6 Всесоюзный симпозиум по дифракции и распространению волн). – М.: МИРЭА, 1973.– Кн. 1. – С. 12.

24. Винниченко, Ю.Н. Собственные типы волн и постоянные распространения решетки диэлектрических стержней [Текст] / Ю.Н. Винниченко, Л.Н. Захарьев, А.А. Леманский, А.Е. Туманская // Радиотехника и электроника. – 1974. – Т. 19, №8. – С. 1583.

25. Никольский, В.В. Метод минимальных автономных блоков и его реализация для волноводных задач дифракции [Текст] / В.В. Никольский, Т.И. Лаврова // Радиотехника и электроника. – 1978. – Т.23, №2. – С.987.

26. Никольский, В.В. Применение метода МАБ для анализа собственных волн в продольно-регулярных и периодических структурах, включая полосковые линии на гиромангнитной подложке [Текст] / В.В. Никольский, Т.И. Лаврова // Машинное проектирование устройств и систем СВЧ. – М.: МИРЭА, 1978. – С.31.

27. Никольский, В.В. Применение автономных многомодовых блоков для анализа высокочастотной и компланарных линий [Текст] / В.В. Никольский, О. А. Голованов // Радиотехника и электроника. – 1979. – Т.24, №6. – С.1070.

28. Никольский, В.В. Автономные многомодовые блоки и их применение для исследования полосковой линии [Текст] / В.В. Никольский, О.А. Голованов // Радиотехника и электроника. – 1980. – Т.25, №3. – С.751.

29. Голованов, О.А. Исследование методом автономных блоков сложных планарных структур [Текст] / О.А. Голованов // Радиотехника и электроника. – 1985. – Т.30, №5. – С.901-904.

30. Голованов, О.А. Исследование переходов от планарных линий к прямоугольному волноводу [Текст] / О.А. Голованов // Радиотехника и электроника. – 1987. – Т.32, №1. – С.182-184.

31. Голованов, О.А. Математическая модель удвоения частоты в экранированной структуре с полосковым проводником и нелинейным диэлектриком [Текст] / О. А. Голованов // Радиотехника и электроника. – 1988. – Т.33, №5. – С.938-948.

32. Голованов, О.А. Нелинейные автономные блоки и их применение при исследовании нерегулярных волноводов и резонаторов с нелинейными средами [Текст] / О. А. Голованов // Известия вузов. Радиофизика. – 1990. – Т.33, №7. – С.793-803.

33. Голованов, О.А. Численный алгоритм решения задач дифракции для волноводных устройств СВЧ с нелинейными средами [Текст] / О.А. Голованов // Радиотехника и электроника. – 1990. – Т.35, №9. – С.1853-1862.

34. Голованов, О.А. Модели минимальных автономных блоков для волноводных устройств СВЧ с нелинейными средами [Текст] / О.А. Голованов // Радиотехника. – 1990. – №9. – С.79-80.

35. Голованов, О.А. Электродинамический анализ нерегулярных волноводов и резонаторов с нелинейными средами [Текст] / О.А. Голованов // Известия вузов. Радиофизика. – 1990. – Т.33, №7. – С.39-43.

36. Голованов, О.А. Дифракция на нелинейном диэлектрике в системе связанных полосковых линий [Текст] / О.А. Голованов // Радиотехника. – 1991. – №7. – С.65-70.

37. Голованов, О.А. Электродинамический анализ полосково-щелевых линий с гиротропными нелинейными средами [Текст] / О.А. Голованов // Радиотехника и электроника. – 1991. – Т.36, №3. – С.467-474.
38. Голованов, О.А. Электродинамический анализ устройств СВЧ с полупроводниковыми нелинейными средами [Текст] / О.А. Голованов // Известия вузов. Радиофизика. – 1991. – Т.34, №7. – С.442-452.
39. Голованов, О.А. Электродинамический анализ устройств и систем сверхвысоких частот на основе универсальных автономных блоков с каналами Флоке [Текст] / О.А. Голованов Г.С., Макеева // Физика волновых процессов и радиотехнические системы. – 2005. – Т. 8, № 4. – С. 10-18.
40. Голованов, О.А. Метод универсальных автономных блоков с каналами Флоке для электродинамического моделирования полосково-щелевых структур СВЧ (ч. 1) [Текст] / О.А. Голованов Г.С. Макеева // Современные технологии безопасности. – 2005. – №4(15). – С.29-31.
41. Голованов, О.А. Автономные блоки с виртуальными каналами Флоке и их применение для решения прикладных задач электродинамики [Текст] / О.А. Голованов // Радиотехника и электроника. – 2006 – Т.51, №12. – С.1423-1430.
42. Голованов, О.А. Построение дескрипторов нелинейных универсальных автономных блоков с каналами Флоке итерационным методом на основе проекционной модели [Текст] / О.А. Голованов, Г.С. Макеева, А.А. Туманов // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Естественные науки. – 2006. – №5(26). – С. 157-166.
43. Голованов, О.А. Метод универсальных автономных блоков с каналами Флоке для электродинамического моделирования полосково-щелевых структур СВЧ (ч. 2) [Текст] / О.А. Голованов, Г.С. Макеева, А.А. Туманов // Современные технологии безопасности. – 2006. – №1-2 (16-17). – С.40-42.
44. Голованов, О.А. Методы теории бифуркаций в решении нелинейных задач дифракции для устройств сверхвысоких частот с нелинейными средами [Текст] / О.А. Голованов Г.С., Макеева. – Пенза: ПАИИ. 2007. – 103 с.
45. Голованов, О.А. Электродинамический метод рекомпозиции нелинейных универсальных автономных блоков с каналами Флоке на основе линеаризации их дескрипторов [Текст] / О.А. Голованов, Г.С. Макеева, А.А. Туманов // Известия вузов. Поволжский регион. Технические науки. – 2007. – №1 – С. 60-73.
46. Голованов, О.А. Декомпозиционный подход к решению задач прикладной электродинамики и акустики с применением базовых элементов в виде автономных блоков [Текст] / О.А. Голованов, Г.С. Макеева, А.И. Грачев // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Сер. Технические науки. – 2006. – № 6 (27). – С. 215-225.

47. Голованов, О.А. Электродинамический подход к задачам нелинейной дифракции в магнитных наноструктурах [Текст] / О.А. Голованов, Г.С. Макеева, Е.И. Нефедов // Электродинамика и техника СВЧ, КВЧ и оптического диапазона. – 2007. – №15. – Вып.1 (43). – С. 102-105

48. Голованов, О.А. Методы теории бифуркаций в математическом моделировании нелинейных и параметрических взаимодействий волн в электродинамических структурах [Текст] / О.А. Голованов, Г.С. Макеева // Электродинамика и техника СВЧ, КВЧ и оптического диапазона. – 2007. – Т.15, вып.1 (43). – С. 106-113.

49 Голованов, О.А. Бифуркационный анализ параметрического взаимодействия электромагнитных и магнитостатических волн в периодических структурах с ферритовыми сферами [Текст] / О.А. Голованов, Г.С. Макеева // Электродинамика и техника СВЧ, КВЧ и оптического диапазона. – 2007. – Т.15, вып.1 (43). – С. 114-117

50. Голованов, О.А. Математическое моделирование и электродинамический расчет эффективных параметров магнитных наноматериалов [Текст] / О.А. Голованов, Г.С. Макеева, М.В. Савченкова // Известия вузов. Поволжский регион. Технические науки. – 2008. – №4. – С. 124-132.

51. Голованов, О.А. Метод автономных блоков с магнитными нановключениями и каналами Флоке для математического моделирования магнитных наноструктур с учетом обмена и граничных условий [Текст] / О.А. Голованов, Г.С. Макеева // Радиотехника и электроника. – 2009. – Т.54, №12. – С.1421-1428.

52. Никольский, В.В. Проекционные методы в электродинамике [Текст] / В.В. Никольский // Сборник научно-методических статей по прикладной электродинамике. – М.: Высшая школа, 1977. – С. 4-23.

53. Pucci, A. Photoinduced formation of gold nanoparticles into vinyl alcohol based polymers / A. Pucci, M. Bernabo, P. Elvati, L.I. Meza, F. Galembeck, C.A. de P. Leite, N. Tirelli, G. Ruggeriab // J. Mater. Chem. – 2006.- Vol. 16.- PP. 1058-1066.

54. Reinholdt, A. Novel nanoparticle matter: ZrN-nanoparticles / A. Reinholdt, R. Detemple, A.L. Stepanov, T.E. Weirich, U. Kreibig // Applied Physics B: Lasers and Optics. – 2003. – Vol. 77. – PP. 681-686.

55. Maedler, L. Simultaneous deposition of Au nanoparticles during flame synthesis of TiO<sub>2</sub> and SiO<sub>2</sub> / L. Maedler, W.J. Stark, S.E. Pratsinisa // J. Mater. Res. – 2003. – Vol. 18. – No. 1. -PP. 115-120.

56. Akurati, K.K. Silica-based composite and mixed-oxide nanoparticles from atmospheric pressure flame synthesis / K.K. Akurati, R. Dittmann, A. Vital, U. Klotz, P. Hug, T. Graule, M. Winterer, // Journal of Nanoparticle Research. – 2006. – Vol. 8. – PP. 379-393.

57. Prasad, P.N. Nanophotonics / P.N. Prasad. // John Wiley and Sons. – 2004. – PP. 252-258.

58. Ma, X. Fabrication of silica/zinc oxide core-shell colloidal photonic crystals / X. Ma, W. Shi, Z. Yan, B. Shen // *Applied Physics B: Lasers and Optics*. – 2007. – Vol. 88. – PP. 245-248.

59. Ринкевич, А.Б. Нанокompозиты на основе опаловых матриц с 3D-структурой, образованной магнитными наночастицами [Текст] / А.Б. Ринкевич [и др.] // *Технология и конструирование в электронной аппаратуре*. – 2008. – №4. – С.55-63.

60. Никольский, В.В. Декомпозиционный подход к задачам электродинамики [Текст] / В.В. Никольский, Т.И. Никольская. – М.: Наука. 1983. – 297 с.

61. Никольский, В.В. Вариационные методы для задач дифракции [Текст] / В.В. Никольский // *Известия ВУЗов. Радиофизика*. – 1977. – Т.20, №1. – С.5.

62. Никольский, В.В. Электродинамика и распространение радиоволн [Текст] / В.В. Никольский. – М.: Наука, 1973. – 608 с.

63. Корн, Г. Справочник по математике [Текст] / Г. Корн, Т. Корн. – М.: Наука, 1974. – 701 с.

64. Тихонов, А.Н. Уравнения математической физики [Текст] / А.Н. Тихонов, А.А. Самарский. – М.: Наука, 1972. – 437с.

65. Ландау, Л.Д. К теории дисперсии магнитной проницаемости в ферромагнитных телах [Текст] / Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц // *Phys. Zs. Der. S.U.* – 1935. – Т.8, №2. – С. 153.

66. Вонсовский, С.В. Ферромагнетизм [Текст] / С.В. Вонсовский, Я.С. Шур. – М.: Гостехиздат, 1938. – 326 с.

67. Wangsness, R.K. Магнитный резонанс для произвольных полей [Текст] / R.K. Wangsness // *Phys. Rev.* – 1955. – Т.98, №4. – С.927.

68. Бломберген, И.П. Ферромагнитный резонанс и поведение ферромагнетиков в переменных магнитных полях [Текст] / И. П. Бломберген, С.В. Вонсовский // Сб. под ред. С.В. Вонсовского. – М.: ИЛ, 1955. – С.75.

69. Callen, H.V. Динамическое уравнение ферромагнетика [Текст] / H.V. Callen // *J. Phys. Chem. Solids*. – 1958. – Т.4, №4. – С.256.

70. Anderson, P.W. Концепция спин-решеточной релаксации в ферромагнитных материалах [Текст] / P.W. Anderson // *Phys. Rev.* – 1952. – Т.88. – №5. – С.1214.

71. Бахвалов, Н.С. Численные методы [Текст] / Н.С. Бахвалов. – М.: Наука, 1975. – 326 с.

72. Силаев, М.А., Брянцев С.Ф. Приложение матриц и графов к анализу СВЧ устройств [Текст] / М.А. Силаев, С.Ф. Брянцев. – М.: Советское радио, 1970. – 297 с.

73. Никольский, В.В. Измерение параметров ферритов на СВЧ [Текст] / В.В. Никольский // *Радиотехника и электроника*. – 1956. – Т.1, №4. – С.447.

74. Гуревич, А.Г. Ферриты на сверхвысоких частотах [Текст] / А.Г. Гуревич. – М.: Гос. изд. физ.-мат. литер., 1960. – 407с.
75. Якубович, В.А. Линейные дифференциальные уравнения с периодическими коэффициентами и их приложения [Текст] / В.А. Якубович, В.М. Старжинский. – М.: Наука, 1972. – 431с.
76. Киттель, Ч. Введение в физику твердого тела [Текст] / Ч. Киттель. – М.: Гостехиздат, 1957. – 370с.
77. Микаэлян, А.Л. Теория и применение ферритов на сверхвысоких частотах [Текст] / А.Л. Микаэлян. – М.: Госэнергоиздат, 1963. – 407 с.
78. Гуревич А.Г. Ферриты на сверхвысоких частотах [Текст] / А.Г. Гуревич. – М.: Физматиз. 1970. – 396с.
79. Голованов, О.А. Система автоматизированного моделирования устройств СВЧ [Текст] / О.А. Голованов // Изв. вузов. Радиоэлектроника. – 1986. – Т.29. – №2. – С.74.
80. Никольский, В.В. Моделирование полосковых линий на гироманитной подложке при кусочно-однородном намагничивании [Текст] / В.В. Никольский, Т.И. Никольская // Доклады АН СССР. 1979. – Т.246, №4. – С.868.
81. Вамберский, М.В. Конструирование ферритовых развязывающих приборов СВЧ [Текст] / М.В. Вамберский, В.П. Абрамов, В.И. Казанцев. – М.: Радио и связь, 1982. – 362 с.
82. Самойлович, М.И. Глобальная технологическая революция (аналитический обзор) [Текст] / М.И. Самойлович // ОАО ЦНИИТИ «Техномаш». – М., 2001.
83. Чиркина, М.А. Математическое моделирование устройств сверхвысоких частот на магнитных нанокompозитах [Текст] / М.А. Чиркина, А.Н. Якимов, Н.К. Юрков // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Технические науки. – 2011. – №1. – С. 86-93.
84. Чиркина, М.А. Методика определения матрицы проводимости автономного блока в виде прямоугольного параллелепипеда с диэлектрическими наносферами и магнитными наночастицами [Текст] / М.А. Чиркина, А.Н. Якимов, О.А. Гольшевский // Надежность и качество. Труды международного симпозиума. Т.2. – Пенза: ПГУ, 2011. – С. 375-376.
85. Математическое моделирование магнитных нанокompозитов и устройств сверхвысоких частот на их основе [Текст] / О.А. Голованов, А.И. Грачев, А.А. Тюмин, М.А. Чиркина // Вопросы радиоэлектроники. – 2011. – Сер. РЛТ – Вып.2. – С. 104-113.
86. Электродинамический анализ методом автономных блоков зон пропускания и непропускания фотонного кристалла на основе опаловой матрицы из наносфер двуокиси кремния [Текст] / О.А. Голованов, Г.С. Макеева, А.С. Николенко, М.А. Чиркина // Известия высших учебных



заведений. Поволжский регион. Физико-математические. – 2010. – №1. – С. 117-120.

87. Управление спектральными свойствами решеток ферромагнитных металлических нанопроволок внешнем магнитным полем в терагерцовом диапазоне [Текст] / Г.С. Макеева, О.А. Голованов, Суслов В.А., Чиркина М.А. // Надежность и качество. Труды международного симпозиума. Т.1 – Пенза: ПГУ, 2010. – С.117-120.

88. Исследование коэффициента прохождения фотонных кристаллов/ В.Я. Савицкий, О.А. Голованов, Павлов Ф.Д., Чиркина М.А. // Надежность и качество. Труды международного симпозиума. Т.1 – Пенза: ПГУ, 2010. – С.409.

89. Чиркина, М.А. Математическое моделирование магнитных нанокompозитов на основе опаловых матриц из упаковки диэлектрических наносфер [Текст] / М.А. Чиркина // Региональная архитектура и строительство. – 2010. – №1. – С.14-20.

90. Чиркина, М.А. Математическое моделирование опаловых матриц на основе двуокиси кремния методом автономных блоков [Текст] / М.А. Чиркина // Информационные технологии в электротехнике и электроэнергетике: материалы VII Всероссийской научно-технической конференции.– Чебоксары: Изд-во Чувашского университета, 2010. – С. 183-184.

91. Чиркина, М.А. Математическая модель наноматериала на основе магнитных нанорешеток [Текст] / А.М. Чиркина // Актуальные проблемы информатики и информационных технологий: сборник статей XIV Международной научно-практической конференции.– Тамбов, 2010. – С. 132-134.

92. Голованов, О.А. Электродинамический анализ распространения электромагнитных волн в 3-D магнитных нанокompозитах на основе опаловых матриц [Текст] / О.А. Голованов, Г.С. Макеева, М.А. Чиркина // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические. – 2010. – №2. – С.126-135.

93. Макеева, Г.С. Спиновая динамика в решетках ферромагнитных металлических нанопроволок в условиях скин-эффекта в терагерцовом диапазоне [Текст] / Г.С. Макеева, О.А. Голованов, М.А. Чиркина // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические. – 2010. – №2. – С. 117-125.

94. Кошев, А.Н. Анализ математических моделей и теория распределения поляризации проточных объемно-пористых электродов [Текст] / А.Н. Кошев, В.К. Варенцов, М.А. Чиркина // Физикохимия поверхности и защита материалов. – 2009. – Т.45, №4. – С. 441-448.

95. Чиркина, М.А. Математическое моделирование нестационарных процессов электроосаждения в пористых средах [Текст] / М.А. Чиркина, А.Н. Кошев, В.К. Варенцов// Информационно-вычислительные технологии

и их приложения: сборник статей VIII Международной научно-практической конференции. – Пенза, 2008 – С. 184–188.

96. Чиркина, М.А. Нестационарные математические модели электрохимических процессов в реакторах с проточными объемно-пористыми электродами [Текст] / А.Н. Кошев, М.А. Чиркина, В.К. Варенцов // Электрохимия. – 2007. – Т.43, №11. – С. 1372-1378.



Научное издание

Чиркина Марина Александровна

**МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ УСТРОЙСТВ  
СВЕРХВЫСОКИХ ЧАСТОТ НА МАГНИТНЫХ НАНОКОМПОЗИТАХ**  
Монография

**В авторской редакции**  
**Верстка Н.А. Сазонова**

---

Подписано в печать 20.05.13. Формат 60×84/16.  
Бумага офисная «Снегурочка». Печать на ризографе.  
Усл.печ.л. 7,2. Уч.-изд.л. 7,75. Тираж 500 экз. 1-й завод 100 экз.  
Заказ № 111.

---

Издательство ПГУАС.  
440028, г. Пенза, ул. Германа Титова, 28.