МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«Пензенский государственный университет
архитектуры и строительства»

КОНТРОЛЬНО-ИЗМЕРИТЕЛЬНЫЕ МАТЕРИАЛЫ ПО КУРСУ «ВЫЧИСЛИТЕЛЬНАЯ МАТЕМАТИКА»

Учебно-методическое пособие

Пенза 2013

УДК 519.6 (075.8)
ББК 22.193я73
К65

Рекомендовано Редсоветом университета

Рецензент – доктор технических наук, профессор А.М. Данилов (ПГУАС)

Контрольно-измерительные материалы по курсу «Вычислительная математика»: учеб.-метод. пособие / В.В. Кузина, А.Н. Кошев. –
К65 Пенза: ПГУАС, 2013. – 96 с.

Изложены цели и задачи курса вычислительной математики, приведены программа курса, контрольные вопросы и задания для самопроверки уровня теоретических знаний и практических навыков решения задач при выполнении лабораторных работ, задания для лабораторных работ, варианты заданий для промежуточного контроля, задания для коллоквиума, тестовые задания для итогового контроля по всем разделам курса, библиографические сведения.

Подготовлено на кафедре «Информационно-вычислительные системы» и предназначено для студентов, обучающихся по программе бакалавриата по направлению 230400 «Информационные системы и технологии» всех форм обучения. Использование пособия рекомендуется при изучении дисциплины Б2.В.1 «Дополнительные главы математики. Вычислительная математика» математического и естественнонаучного цикла по ФГОС 3-го поколения, но может быть полезно студентам и аспирантам всех направлений, в образовательных программах которых предусмотрено изучение вычислительных методов решения задач.

ПРЕДИСЛОВИЕ

В настоящее время самостоятельной работе студента в учебном процессе уделяется большое внимание, что способствует развитию у студентов таких профессиональных качеств, как способности:

– проводить предпроектный анализ объекта проектирования;

– обосновывать выбор методов и средств при принятии решения;

– разрабатывать средства реализации ИТ и др.

Контрольно-измерительные материалы призваны помочь студентам в организации самоконтроля при изучении дисциплины «Вычислительная математика».

В результате изучения данной дисциплины и контроля усвоения материала у студентов и слушателей курса формируются знания основных алгоритмов типовых численных методов решения математических задач, а также умения применять математические методы при решении профессиональных задач повышенной сложности, в том числе в интегрированной математической среде MathCad.

Необходимыми предпосылками для успешного усвоения дисциплины являются знания, умения, навыки, компетенции, сформированные у студентов при изучении курсов математического анализа и дифференциальных уравнений, а признаком успешного усвоения – выполнение всех контрольных заданий, представленных в данном методическом пособии. Знания, полученные при изучении курса, помогут в освоении дискретной математики, математической логики и теории алгоритмов, , информатики, вероятности и статистики, численных методов и методов оптимизации.

Подготовлено на кафедре «Информационно-вычислительные системы» и предназначено для студентов, обучающихся по программе бакалавриата по направлению 230400 «Информационные системы и технологии» всех форм обучения. Использование пособия рекомендуется при изучении дисциплины Б2.В.1 «Дополнительные главы математики. Вычислительная математика» математического и естественнонаучного цикла по ФГОС 3-го поколения, но может быть полезно студентам и аспирантам всех направлений, в образовательных программах которых предусмотрено изучение вычислительных методов решения задач.

Теоретический материал, примеры решения задач и выполнения лабораторных работ изложены в пособии [11].

Авторы надеются, что пособие поможет студентам дневной, заочной форм обучения и экстерната в систематизации и закреплении теоретических знаний, полученных за время обучения, а также в приобретении и закреплении навыков самостоятельной работы.

СПИСОК ОБОЗНАЧЕНИЙ И СОКРАЩЕНИЙ

$\|A\|$	– норма матрицы A
A^T	– матрица, транспонированная к матрице A
(a, b)	– скалярное произведение векторов a и b
$\mathrm{cond}(A)$	– число обусловленности матрицы A
$F_{1\text{-}\alpha}$	– критерий Фишера
$\min\limits_X f(x)$, $\max\limits_X f(x)$	– минимальное и максимальное значения функции $f(x)$ на множестве X
R^n	– n-мерное евклидово арифметическое пространство
$\|x\|$	– длина (модуль), евклидова норма вектора x
$x \in \Omega$	– x принадлежит множеству Ω, т.е. является его элементом
Δ	– абсолютная погрешность
δ	– относительная погрешность
δ_{ij}	– символ Кронекера
$\left(\dfrac{\partial F}{\partial X}\right)$	– матрица Якоби
Δz	– приращение функции z
μ	– сингулярное число
$\Omega \subset R^n$	– множество Ω принадлежит R^n, т.е. является его подмножеством
ЛР	– лабораторная работа
МНК	– метод наименьших квадратов
ОДЗ	– область допустимых значений
ОДУ	– обыкновенное дифференциальное уравнение
СЛАУ	– система линейных алгебраических уравнений
СНУ	– система нелинейных уравнений
СРС	– самостоятельная работа студента

ВВЕДЕНИЕ

Вычислительная математика как инструмент математического исследования находит все большее применение в различных направлениях научной деятельности и предметных областях. Это обусловлено тем, что вычислительные методы используются при математическом моделировании процессов и явлений как на стадии построения модели, так и на стадии решения задачи на компьютере.

Численные методы и вычислительные алгоритмы являются важнейшими элементами при проведении вычислительных экспериментов.

Численные методы решения задач используются в случаях, когда не удается найти точное решение возникшей математической задачи. Чаще всего это происходит из-за того, что искомое решение обычно не выражается в привычных для нас элементарных или других функциях. Вычислительные методы позволяют свести решение таких задач к арифметическим и некоторым логическим действиям, т.е. к действиям, которые выполняет компьютер.

Именно от вычислительных методов зачастую зависит не только результат решения задачи, но и сама возможность ее решения. Это связано с тем, что вычислительные методы чаще всего имеют итерационный характер и требуют определенных условий сходимости, при несоблюдении которых результат не будет достигнут.

РАБОЧАЯ ПРОГРАММА КУРСА «ВЫЧИСЛИТЕЛЬНАЯ МАТЕМАТИКА»

Общая трудоемкость изучения дисциплины составляет 3 зачетных единицы (108 час).

Цель преподавания дисциплины – формирование у студентов базы для развития профессиональных компетенций в области вычислительной математики, а именно, овладение численными методами решения задач математического анализа и дифференциальных уравнений с целью их дальнейшего применения в профессиональной деятельности.

Задачи изучения дисциплины:

– приобретение студентами знания о численных методах математического анализа, их применимости в профессиональной деятельности;

– формирование умения использовать численные методы для решения задач интегрирования, дифференцирования, интерполирования и аппроксимации функций, для решения дифференциальных уравнений;

– выработка умения реализовывать численные методы в различных интегрированных математических средах (MathCad, MATLAB и др.).

Основные дидактические единицы дисциплины:

1. Численное дифференцирование. Вычисление производной первого и второго порядка. Погрешность формул численного дифференцирования.

2. Численное интегрирование. Квадратурные формулы прямоугольников, трапеций, Симпсона, Ньютона – Котеса, Чебышева. Оценка погрешности вычислительных формул.

3. Численная интерполяция. Алгебраический интерполяционный многочлен: форма Лагранжа и Ньютона. Интерполирование функций двух переменных.

4. Метод наименьших квадратов. Аппроксимация функций полиномами различных порядков и нелинейными функциями.

5. Численные методы решения задачи Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений. Метод Эйлера. Метод предиктор – корректор. Методы Рунге – Кутта. Методы конечных разностей для решения краевых задач нелинейных дифференциальных уравнений.

В результате изучения дисциплины студент должен:

✓ **знать**: методы численного дифференцирования и интегрирования; методы интерполирования и аппроксимации функций; методы, методы численного решения дифференциальных уравнений;

✓ **уметь**: решать дифференциальные уравнения и системы, вычислять производные и интегралы функций, строить интерполяционные полиномы и аппроксимировать функции;

✓ **владеть**: навыками работы в интегрированных математических средах, навыками работы с прикладными математическими пакетами программ.

Виды занятий: лекционные, лабораторные, самостоятельные.

Изучение дисциплины заканчивается зачетом.

Междисциплинарная связь

Необходимыми предпосылками для успешного освоения дисциплины Б2.В.1 «Вычислительная математика» являются знания, умения, навыки, компетенции, сформированные у студентов при изучении курсов: «Математика. Математический анализ», «Математика. Дифференциальные уравнения».

Знания, полученные при изучении курса «Вычислительная математика», необходимы для освоения таких дисциплин, как «Дискретная математика», «Численные методы и методы оптимизации», «Управление технологическими процессами», «Теория информационных процессов и систем».

Компетенции дисциплины

Индекс компетенции	Формулировка
1	2
ПК-1	Способность проводить предпроектное обследование объектов проектирования, их взаимосвязей, системный анализ предметной области
ПК-4	Спосообость разрабатывать средства реализации информационных технологий (методические, информационные, математические, алгоритмические, технические и программные)
ПК-5	Способность проводить моделирование процессов и систем
ПК-12	Способность разрабатывать средства реализации информационных технологий (методические, информационные, математические, алгоритмические, технические и программные)
ПК-13	Способность разрабатывать средства автоматизированного проектирования информационных технологий

1	2
ПК-18	Способность использовать технологии разработки объектов профессиональной деятельности в областях: машиностроение, приборостроение, наука, техника, образование, медицина, административное управление, юриспруденция, бизнес, предпринимательство, коммерция, менеджмент, банковские системы, безопасность информационных систем, управление технологическими процессами, механика, техническая физика, энергетика, ядерная энергетика, силовая электроника, металлургия, строительство, транспорт, железнодорожный транспорт, связь, телекоммуникации, управление инфокоммуникациями, почтовая связь, химическая промышленность, сельское хозяйство, текстильная и легкая промышленность, пищевая промышленность, медицинские и биотехнологии, горное дело, обеспечение безопасности подземных предприятий и производств, геология, нефтегазовая отрасль, геодезия и картография, геоинформационные системы, лесной комплекс, химико-лесной комплекс, экология, сфера сервиса, системы массовой информации, дизайн, медиаиндустрия, а также предприятия различного профиля и все виды деятельности в условиях экономики информационного общества
ПК-23	Способность проводить сбор, анализ научно-технической информации, отечественного и зарубежного опыта по тематике исследования
ПК-25	Способность обосновывать правильность выбранной модели, сопоставляя результаты экспериментальных данных и полученных решений
ПК-26	Готовность использовать математические методы обработки, анализа и синтеза результатов профессиональных исследований
ПК-34	Готовность адаптировать приложения к изменяющимся условиям функционирования

Содержание разделов и тем лекционного курса

Раздел 1. Решение систем алгебраических уравнений

Тема 1. Введение. Системы линейных алгебраических уравнений. Понятие математической модели, способы построения математической модели, примеры. Понятие вычислительного эксперимента, место численных методов в вычислительном эксперименте. Проблемы, возникающие при использовании численных методов. Устойчивые, условно устойчивые и неустойчивые алгоритмы. Понятие корректно и некорректно поставленных задач. Примеры. Дискретизация задач для численного решения. Сетки и сеточные функции. Понятие о прямых и итерационных методах решения СЛАУ. Понятие о разностных схемах и численных методах решения дифференциальных уравнений и систем. Системы линейных уравнений (СЛАУ). Основные понятия, типы СЛАУ, частные случаи СЛАУ. Обусловленность СЛАУ, число обусловленности. Прямые методы решения СЛАУ, метод Гаусса, метод последовательного исключения, связь с методом Гаусса. Обращение матриц: метод исключения. Итерационные методы: метод простой итерации, метод Зейделя, метод релаксации. Сходимость итерационных методов. Двухслойная итерационная схема с чебышевскими параметрами, чебышевская итерационная схема.

Тема 2. Нелинейные уравнения и системы. Понятие нелинейных уравнений и систем, обусловленность системы нелинейных уравнений. Решение нелинейных уравнений: методы итераций, секущих, касательных, комбинированный метод. Сходимость итерационных методов. Решение систем нелинейных уравнений: метод итераций, методы ньютоновского типа. Разностные уравнения. Сеточные функции и разностные аналоги операций математического анализа. Разностные уравнения 1-го и 2-го порядков. Задача Коши и краевая задача. Решение разностных краевых задач методом прогонки. Устойчивость метода.

Раздел 2. Интерполяция и аппроксимация

Тема 3. Приближение функций. Интерполирование алгебраическими многочленами. Понятие полиномиальной интерполяции. Теорема Вейерштрасса. Интерполяционные полиномы Лагранжа, Ньютона. Сплайн-интерполяция.

Тема 4. Среднеквадратичные приближения. Среднеквадратичные приближения: среднеквадратичная аппроксимация. Равенство Парсеваля – Стеклова. Метод наименьших квадратов: линейные, квадратичные приближения. Приближение произвольной функцией.

Раздел 3. Численное дифференцирование и интегрирование функций

Тема 5. Численное интегрирование. Интерполяционные квадратичные формулы: постановка задачи. Формулы прямоугольников, трапеций, Симпсона. Оценка погрешности формул. Формулы Котесса, Гаусса и Чебышева.

Тема 6. Численное дифференцирование. Интегрирование функций специального вида. Формулы численного дифференцирования.

Раздел 4. Численное решение дифференциальных уравнений

Тема 7. Численное решение обыкновенных дифференциальных уравнений. Основные понятия теории разностных схем. Разностные операторы. Разностные схемы. Устойчивость. Аппроксимация. Сходимость.

Тема 8. Методы решения задачи Коши. Методы решения задачи Коши: постановка задачи для уравнения 1-го порядка, схема Эйлера, схема Рунге – Кутта, схема «предиктор – корректор». Устойчивость разностных схем. Многошаговые схемы, метод Адамса, явные и неявные схемы. Задача Коши для уравнения 2-го порядка. Задача Коши для системы линейных обыкновенных дифференциальных уравнений 1-го порядка. Понятие о жестких задачах Коши и методах их решения.

Тема 9. Численные методы решения задач математической физики. Основные понятия теории разностных схем: постановка задачи, сходимость, аппроксимация, устойчивость.

Лабораторные занятия

Решение систем линейных алгебраических уравнений.
Решение нелинейных уравнений.
Решение систем нелинейных уравнений.
Интерполирование функций.
Аппроксимация функций, метод наименьших квадратов.
Численное интегрирование функций.

Численное дифференцирование функций, оценка погрешности формул.

Численное решение обыкновенных дифференциальных уравнений.

Численные методы решения задач математической физики.

Самостоятельная работа

Текущая СРС – работа с лекционным материалом, подготовка к лабораторным занятиям; опережающая самостоятельная работа; выполнение домашних заданий; изучение тем, вынесенных на самостоятельную проработку; подготовка к зачету.

Содержание самостоятельной работы студентов по дисциплине

В процессе изучения дисциплины студенты должны самостоятельно овладеть следующими темами:

1. Решение систем линейных и нелинейных уравнений.
2. Решение нелинейных уравнений и систем.
3. Интерполяция функций полиномами Ньютона и Лагранжа.
4. Аппроксимация задач по методу наименьших квадратов.
5. Решение задач с помощью сплайн-интерполяции.
6. Вычисление определенных интегралов.
7. Численное решение дифференциальных уравнений.

Промежуточный контроль знаний – теоретических и практических – производится в процессе защиты студентами лабораторных работ и выполнения коллоквиума. Контроль и оценка знаний осуществляются в соответствии с рейтингом. Окончательный контроль знаний – в форме сдачи зачета (с учетом набранных баллов).

Контроль самостоятельной работы. Рубежный контроль в опросе студентов по теоретической и практической части. По результатам текущего и рубежного контроля формируется допуск студента к зачету. Зачет проводится в виде тестирования или в устной форме и оценивается преподавателем.

Учебно-методическое обеспечение самостоятельной работы студентов. Для самостоятельной работы студентов используются учебная литература, сеть Internet для работы с Web-серверами научных библиотек, интегрированные математические системы и другие научно-образовательные ресурсы.

Организация самостоятельной работы осуществляется в соответствии с графиком учебного процесса и самостоятельной работы.

ВОПРОСЫ И ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОПРОВЕРКИ

К теме 1

1. Что такое математическое моделирование и из каких этапов оно состоит?

2. Что характерно для вычислительных методов по сравнению с точными методами?

3. Какие виды погрешностей возможны в процессе вычислений и от чего они возникают?

4. В каких единицах измеряются абсолютная и относительная погрешности измерений?

5. Какие задачи называются корректными, а какие – некорректными?

6. Приведите примеры неустойчивых алгоритмов.

7. Определите, по какому закону (экспоненциальному, степенному или какому-либо другому) накапливается погрешность алгоритма вычисления $y^{(n+1)} = d \cdot y^{(n)}$. Является ли устойчивым этот алгоритм при $d \le 1$?

8. Вычислительный процесс организован по алгоритму $y_{i+1} = d \cdot y_i^2$. В каких случаях этот алгоритм можно считать устойчивым, а в каких – нет?

9. Какие типы матриц вам известны?

10. Что такое норма матрицы, как ее можно определить?

11. Какими свойствами обладает норма матрицы? Какую величину можно принять за норму матрицы?

12. Как определить собственные значения матрицы?

13. Что такое сингулярные числа матрицы?

14. Как вычисляется квадратичная форма матрицы?

15. Зависит ли решение СЛАУ от числа обусловленности матрицы?

16. На какие два класса принято подразделять методы решения СЛАУ?

17. Исследуйте обусловленность СЛАУ

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 1; \\ x_1 - x_2 = 5. \end{cases}$$

Внеся 10 %-ю ошибку в правую часть системы, оцените погрешность решения.

18. Покажите эквивалентность соотношений

$$\sum_{j=1}^{i} a_{ij} x_j^{(k+1)} + \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij} x_j^{(k)} = b_i$$

и

$$(A^- + D)\frac{\mathbf{x}^{(k+1)} - \mathbf{x}^{(k)}}{\tau} + A\mathbf{x}^{(k)} = \mathbf{b}, \quad \tau = 1,$$

$$A = A^- + D + A^+,$$

где D, A^-, A^+ – соответственно диагональная, поддиагональная и наддиагональная матрицы.

19. Покажите, при каких условиях метод релаксации совпадает с методом Зейделя.

20. В чем отличие итерационных методов решения СЛАУ от прямых методов?

21. Почему итерационные методы называются одновременно одношаговыми и двухслойными?

22. Приведите примеры двухшаговых (трехслойных) итерационных методов.

23. Каковы условия сходимости итерационных методов?

К теме 2

24. Докажите, что если функция $f(x)$, определенная на интервале $[a, b]$, такова, что $f(a) \cdot f(b) > 0$, то уравнение $f(x) = 0$ имеет четное число корней либо не имеет их вовсе.

25. Для задачи $x^2 - k = 0$ оцените сходимость итерационного процесса $x = 2 \cdot x - \dfrac{k}{x}$.

26. Для функции $f(x) = \lg x + x^2$ определите корень уравнения $f(x) = 0$ методом хорд, методом касательных и графическим методом в системе *MathCAD*.

27. Как выбираются концы отрезка следующего интервала в методе половинного деления?

28. Можно ли найти корень уравнения методом половинного деления, если он находится на границе интервала, в середине интервала?

29. Какой конец интервала неподвижен при реализации метода хорд, метода касательных?

30. В каких случаях использование метода касательных не рекомендуется?

31. Применимы ли методы хорд и касательных, если функция $f(x)$ имеет внутри интервала поиска решения точки перегиба? Обоснуйте ответ.

32. Когда комбинированный метод дает лучшую сходимость по сравнению с методом касательных?

33. Найдите методами Ньютона, Ньютона – Рафсона и Левенберга – Марквардта с точностью $\varepsilon = 0{,}01$ решение системы (точное решение системы $x_1 = x_2 = 1$):

$$\begin{cases} x_1^2 + x_2^2 - 2 = 0; \\ e^{x_1 - 1} + x_2^3 - 2 = 0. \end{cases}$$

34. Как проводится отделение корней при решении СНУ?

35. Как зависит сходимость методов Ньютона от выбора точки начального приближения?

36. Являются ли эквивалентными системы нелинейных уравнений:

$$\begin{cases} x_1^2 + x_2^2 - 2x_1x_2 = 1 \\ x_1 + x_2 = 0 \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} x_1 - x_2 = 1 \\ x_1 + x_2 = 0 \end{cases}$$

Ответ обоснуйте.

37. Дайте определение нормы матрицы Якоби СНУ. Могут ли различаться нормы Якоби двух эквивалентных систем, вычисленных в одной и той же точке? Приведите пример.

38. Найдите интервал выбора начального вектора $X^{(0)} = (x_1^0, x_2^0)$ такой, чтобы метод Ньютона для решения системы уравнений

$$\begin{cases} x_1^2 + x_2^2 = 1; \\ x_1 + x_2 = 0 \end{cases}$$

был сходящимся из любой начальной точки этого интервала.

К теме 3

39. Постройте интерполяционный полином Ньютона по следующей таблице, вычислите приближенное значение функции $f(x)$ в точке $x = -8$.

Постройте график полученного полинома.

i	0	1	2	3
x_i	– 0,7	– 0,5	– 0,3	– 0,1
y_i	– 6,4	– 8,77	– 9,22	– 14,29

40. Вычислите значение функции двух переменных $z = f(x, y)$ в точке $z = (1{,}5,\ 0{,}025)$, если функция задана следующей таблицей:

$y_i \backslash x_i$	1	2	3
0,01	25	35	45
0,02	30	40	50
0,03	41	51	61

41. Чем экстраполяция отличается от интерполяции?

42. Какую степень имеет полином Лагранжа при n узлах интерполирования?

43. Конечную разность какого наивысшего порядка можно получить по n исходным точкам?

44. Можно ли интерполировать функцию, заданную аналитически? С какой целью?

45. Можно ли применять интерполирующий полином Ньютона для интерполирования функций с неравномерно отстоящими узлами интерполирования ($x_{i+1} - x_i \neq x_{j+1} - x_j$). Приведите пример.

46. В каких случаях интерполяционные полиномы Ньютона и Лагранжа совпадают? Приведите пример.

К теме 4

47. Найдите параметры a и b аппроксимирующей функции $\varphi(x) = a\ln(bx)$ для аппроксимации функции, заданной следующей таблицей:

x	0,5	1	2
y	–1	0,01	1

48. Рассчитайте величины a, b линейной модели S_r^2, S_l^2 и оцените адекватность модели, если $F_{1-\alpha} = 5{,}41$ для функции, заданной следующей таблицей:

x	10	10	20	20	30	30
y	12	11	13	16	17	17

49. Оцените адекватность линейной модели функции, заданной в следующей таблице (заметим, что здесь все P_i равны 2):

i	1		2		3		4		5	
Аргумент x_i	10	10	20	20	30	30	40	40	50	50
Функция y	12,05	11,48	12,59	15,82	17,35	16,42	16,24	17,04	20,56	19,3

Рассчитайте величины a, b, а также S_r^2, S_l^2 и оцените их отношение, считая, что $F_{1-\alpha} = 5{,}41$.

50. Покажите, что система многочленов Лежандра является ортогональной, но не ортонормированной, то есть

$$\int_{-1}^{1} P_n(x) \cdot P_m(x)dx = 0 \text{ при } n \neq m,$$

$$\int_{-1}^{1} P_n^2(x)dx = \frac{2}{2n+1} \text{ при } n = m.$$

51. В чем принципиальное различие методов интерполяции и аппроксимации? В каких случаях интерполянта совпадает с аппроксимирующей функцией? Приведите примеры.

52. Всегда ли система уравнений $\left\{\frac{\partial S}{\partial a_i} = 0, \quad i = 0, 1, 2, \ldots, n,\right.$ линейна по неизвестным a_i – параметрам аппроксимирующей функции? Приведите примеры.

53. Напишите алгоритм (процедуру) формирования коэффициентов нормальной СЛАУ для определения параметров аппроксимирующей функции.

54. Всегда ли при использовании метода наименьших квадратов параметры аппроксимирующей функции находятся однозначно? Если нет, то приведите примеры, в каких случаях возможно несколько решений задачи.

55. Разработайте алгоритм по оценке параметров эмпирической формулы, построенной по экспериментальным данным. Используемые формулы поясните.

К теме 5

56. От чего зависит точность нахождения интеграла методом прямоугольников и как можно уменьшить погрешность вычисления?

57. Какой аппроксимирующей функцией заменяется подынтегральная функция в методе Симпсона?

58. Может ли сетка при интегрировании быть неравномерной?

59. С каким методом совпадает метод Симпсона, если подынтегральная функция $f(x) = x + 5$?

60. Получите значения весовых коэффициентов P_i для метода Ньютона – Котеса при $m = 6$.

61. Примените формулу Чебышева при $N = 2$ для вычисления $\int_1^2 x dx$. Сравните с точным значением.

62. Сравните точность формул Симпсона и Чебышева при $m = 3$ по отношению к точному значению $\int_1^2 x dx$.

63. Оцените погрешность формулы прямоугольников при $a = 1$, $b = 2$, $h = 0{,}1$ для функции $f(x) = e^x$.

64. Оцените погрешность формулы трапеции при $a = 1$, $b = 2$, $h = 0{,}1$ для $f(x) = \ln x$.

65. Выведите формулу трапеции для вычисления $\int_\alpha^\beta x^3 dx$.

К теме 6

66. В каких случаях и для каких целей применяют численное интегрирование и дифференцирование?

67. Какого типа погрешности могут возникнуть при численном дифференцировании?

68. Как изменяется погрешность усечения с изменением шага при численном дифференцировании?

69. Что происходит с погрешностью округления с ростом порядка производной при численном дифференцировании?

70. Зависят ли формулы численного дифференцирования от количества используемых узлов? Ответ обоснуйте.

71. Как численно определить значение производной табличной функции в произвольной точке? Приведите пример.

72. Как выбирают начальную точку при нахождении производной табличной функции в фиксированной точке?

К теме 7

73. Какая функция называется сеточной? Приведите пример.

74. Что собой представляет сетка для построения дискретного аналога дифференциального уравнения?

75. Что является аналогом первой производной?

76. Какая формула является разностным аналогом формулы дифференцирования по частям?

77. Какая формула является разностным аналогом формулы интегрирования по частям?

78. Какие разностные уравнения называются однородными?

79. Приведите примеры разностных уравнений 1-го порядка.

80. Проверьте непосредственно формулы

$$\Delta(y_i v_i) = y_i \Delta v_i + v_{i+1} \Delta y_i = y_{i+1} \Delta v_i + v_i \Delta y_i,$$

$$\nabla(y_i v_i) = y_{i-1} \nabla v_i + v_i \nabla y_i = y_i \nabla v_i + v_{i-1} \nabla y_i,$$

где y_i, v_i – произвольные функции целочисленного аргумента.

81. Покажите вывод формулы

$$y_{i+1} = \left(\prod_{k=0}^{i} q_k\right) y_0 + \sum_{k=0}^{i-1} \left(\prod_{s=k+1}^{i} q_s\right) \varphi_k + \varphi_i,$$

где $q_i = -\dfrac{a_0(i)}{a_1(i)}, \varphi_i = -\dfrac{f(i)}{a_1(i)}.$

82. Покажите, что $y_k^{(2)} = kq_0^k$ является решением разностного уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами

$$by_{i+1} - cy_i + ay_{i-1} = 0, \quad i = 1, 2, \ldots$$

Используйте соотношение $bq_0^2 - a = b\dfrac{c^2}{4b^2} - a = \dfrac{D}{4b} = 0$.

83. Найдите общее решение уравнения $y_{k+1} + y_k - 6y_{k-1} = 2^{k+1}$.

84. Сколько начальных условий необходимо для решения разностного уравнения второго порядка?

85. Что представляет собой задача Коши для разностного уравнения второго порядка?

86. Как задаются условия в краевой задаче?

87. В чем заключается метод прогонки?

88. Решите методом прогонки краевую задачу:

$$Ly = f, \quad y = (y_0, y_1, y_2, y_3); \quad N = 3;$$

$$f = (0; \;\; 0{,}5; \;\; 1; \;\; 0{,}5; \;\; 1);$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 0{,}5 & 0 \\ 0 & 0{,}5 & -2{,}5 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

К теме 8

89. Покажите, что если $h < h_0 = \min\left\{1, \dfrac{2}{\|p\|_c}\right\}$, где $\|p\|_c = \max\limits_{x\in[0,1]}|p(x)|$, то выполняется теорема об устойчивости метода прогонки.

90. Найдите величину шага дифференцирования h такую, чтобы точное значение производной функции $y = x^2$ в точке $x = 1$ отличалось от вычисленного по приближенной формуле, полученной при использовании трех узлов, окружающих точку $x = 1$, менее чем на 0,01.

91. Получите общую формулу приближенного вычисления второй производной функции. Примените её для вычисления $f''(x)$, если $f(x) = x^3$, в точке $x = 2$. Сравните с точным значением.

92. В каких случаях результаты численного дифференцирования по формулам при 3-х и 5 узлах, окружающих точку дифференцирования, совпадают? Покажите, что в этом случае совпадают формулы дифференцирования.

93. Что является решением дифференциального уравнения?

94. Какие методы можно применять для решения системы алгебраических уравнений, полученных при аппроксимации дифференциального уравнения второго порядка разностной схемой?

95. Выпишите схему Рунге – Кутта второго порядка для частного случая, когда $\sigma = 1,\ \alpha = \frac{1}{2}$.

К теме 9

96. Какие уравнения называют уравнениями математической физики?

97. Единственным ли способом можно аппроксимировать непрерывное дифференциальное уравнение в частных производных конечно-разностным аналогом?

98. Что называют слоем по переменной t?

99. Какой порядок имеет точность аппроксимации дифференциального уравнения конечно-разностным аналогом?

100. В каких случаях ошибка аппроксимации дифференциального уравнения конечно-разностным аналогом возрастает, а в каких – уменьшается?

101. Какой порядок имеет уравнение теплопроводности?

102. Покажите, как получена формула для аппроксимации второй производной неизвестной функции

$$\frac{u_{k,n+1} - u_{k,n}}{\tau} = a\frac{u_{k+1,n} - 2u_{k,n} + u_{k-1,n}}{h^2},$$

$$u_{k,0} = U_0(x_k),\quad k = 0, \pm 1, \ldots,\quad n = 0, 1, \ldots, N.$$

103. В чем отличие явной схемы аппроксимации от неявной?

104. В чем заключается идея метода прогонки?

105. Является ли уравнение Пуассона частным случаем уравнения Лапласа?

106. Каким образом задаются краевые условия для уравнения Пуассона в узлах сетки, покрывающей область решения?

107. Докажите устойчивость разностной схемы

$$\frac{u_{k,n+1} - u_{k,n}}{\tau} = a\frac{u_{k+1,n+1} - 2u_{k,n+1} + uu_{k-1,n+1}}{h^2},$$

$$u_{k,0} = u_0(x_k),\quad k = 0, \pm 1, \ldots,\quad n = 0, 1, \ldots, N.$$

ВОПРОСЫ И ЗАДАНИЯ ДЛЯ КОЛЛОКВИУМА

1. Доказать, что если $\|x\| = \sqrt{|x_1|^2 + \ldots + |x_n|^2}$, то $\|x + y\| \le \|x\| + \|y\|$.

2. Проверить свойство $\|A\,B\| \le \|A\|\;\|B\|$ для матриц:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

3. Определить, является ли положительно определенной матрица

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

4. Как изменится число обусловленности матрицы $A = \begin{pmatrix} 1 & 0{,}99 \\ 0{,}98 & 0{,}97 \end{pmatrix}$, если ее диагональные элементы увеличить на 0,07?

5. Оценить ошибку решения системы $\begin{cases} x_1 + x_2 = 2 \\ x_1 + 0.5x_2 = 1 \end{cases}$, если в правую часть системы вносится ошибка $\delta в = \begin{pmatrix} 0{,}2 \\ 0{,}1 \end{pmatrix}$.

6. В канонической схеме одношагового итерационного метода решения СЛАУ

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad в = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \tau = 0{,}3$$

записать вычислительную схему решения: $\left(x^{k+1} = F \cdot x^k + d\right)$. Рассмотреть вопрос сходимости такой схемы.

7. Оценить ошибку решения СЛАУ $\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 2 \\ 2x_1 + x_2 = 1 \end{cases}$ методом простой итерации после 3-х шагов решения, сравнить с точным решением.

8. Изменится ли сходимость метода простой итерации при перестановке строк в СЛАУ. Доказать.

9. Изменится ли скорость сходимости метода Зейделя, если в итерационной схеме решения СЛАУ поменять местами первое и последнее уравнения. Показать на примере.

10. В канонической итерационной схеме решений СЛАУ

$$B=\begin{pmatrix}2 & 0\\ 0 & 2\end{pmatrix},\quad A=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 1 & 2\end{pmatrix},\quad в=\begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix}.$$

Найти значение параметра τ такое, чтобы итерационная схема была сходящейся.

11. Если сходится итерационный процесс решения СЛАУ по методу нижней релаксации, обязательно ли будет сходиться метод верхней релаксации? Обосновать.

12. Показать расходимость итерационного процесса решения уравнения $x^2-2=0$ по схеме $x=\dfrac{2}{x}$. Почему расходится данная схема?

13. Показать расходимость итерационного процесса решения уравнения $x^2-2=0$ по схеме $x=2x-\dfrac{2}{x}$. Почему расходится данный итерационный процесс?

14. Доказать сходимость схемы $x=\dfrac{1}{2}\left(x+\dfrac{2}{x}\right)$ на интервале [1, 2] исходя из оценки производной функции $\varphi(x)=\dfrac{1}{2}(x+\dfrac{2}{x})$.

15. Вывести итерационную схему метода Ньютона решения алгебраического уравнения, исходя из разложения функции $\varphi(x)$ в ряд Тейлора.

16. Доказать, что если функция $f(x)$, определенная на интервале $[A, B]$, такова, что $f(A)\cdot f(B)>0$, то уравнение $f(x)=0$ имеет четное число корней либо не имеет их вовсе.

17. Написать процедуру выделения корней функции $f(x)$ на интервале $[A, B]$ с точностью ε (на любом языке программирования или в виде блок-схемы алгоритма).

18. В методе половинного деления используется схема $z_k=A_k+\dfrac{B_k-A_k}{2}$. Можно ли деление на 2 заменить делением на 3 (на произвольное число n)? Как будет выглядеть алгоритм в этом случае? Будет ли он сходящимся?

19. Вывести итерационную схему для метода хорд.

20. Вывести итерационную схему для метода касательных.

21. Применимы ли методы хорд и касательных, если $f(x)$ имеет внутри интервала поиска решения точки перегиба. Обосновать ответ.

22. Привести схему метода касательных и объяснить, почему точка, из которой начинаются вычисления по схеме, выбирается из условия $f''(\xi)\cdot f(\xi)>0$.

23. Определить, являются ли эквивалентными системы нелинейных алгебраических уравнений:

$$\begin{cases} x_1^2 + x_2^2 - 2x_1x_2 = 1, \\ x_1 + x_2 = 0 \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} x_1 - x_2 = 1, \\ x_1 + x_2 = 0. \end{cases}$$

Ответ обосновать.

24. Дать определение нормы матрицы Якоби СНАУ. Могут ли различаться нормы Якоби двух эквивалентных систем, вычисленных в одной и той же точке? Привести пример.

25. В каких интервалах изменения переменных x_1, x_2 функция $\Phi(x_1, x_2) = \sqrt{1 - x_2^2} - x_1$ системы $x = \Phi(x)$ удовлетворяет условию Липшица?

26. Как использовать итерационную схему метода Ньютона решения СЛАУ для поиска экстремума (минимума) функции нескольких переменных ($\min\limits_{x1, x2, \ldots xn} f(x_1, x_2, \ldots x_n)$)?

27. Найти интервал выбора начального вектора $x^0 = (x_1^0, x_2^0)$ такой, чтобы метод Ньютона для решения системы уравнений $\begin{cases} x_1^2 + x_2^2 = 1 \\ x_1 + x_2 = 0 \end{cases}$ был сходящимся из любой начальной точки этого интервала.

28. Написать блок-схему алгоритма метода Ньютона – Рафсона с выбором параметра λ_k из условия минимума нормы функции $\left\| F(x^{k+1}, \lambda_k) \right\|$.

29. В чем принципиальное различие двух итерационных схем:

$$x^{k+1} = x^k - [F'(x^k) + \lambda_k E]^{-1} F(x^k) \quad \text{и} \quad x^{k+1} = x^k - [(F'(x^k))^{-1} + \lambda_k E]\ F(x^k)\,?$$

Привести пример (для системы из двух уравнений с двумя неизвестными).

30. Выполнить два шага решения системы $\begin{cases} x_2 = x_1^2 \\ x_1 - \sin(x) = 0 \end{cases}$ методом Левенберга – Марквардта; λ_k выбрать из условия минимизации.

31. Привести общую постановку задачи интерполяции. Может ли интерполируемая функция бесконечно возрастать в каких-либо точках интервала интерполирования? Как поставить задачу интерполирования в этом случае? Привести пример.

32. Можно ли интерполировать функцию, заданную аналитически? С какой целью? Можно ли использовать в качестве интерполянты разрывные функции? Привести пример.

33. Каким условиям должны удовлетворять функции Φ_k из системы интерполирующих функций? Могут ли они быть разрывными, дискретными, линейно зависимыми? Дать определение, привести пример линейно независимой системы функций.

34. Для интерполирования функции (x_i, y_i) интерполянтой, представленной в виде линейной комбинации тригонометрических функций ($\cos kx$, $\sin kx$), записать СЛАУ для вычисления коэффициентов. Привести пример.

35. Для интерполирования функции (x_i, y_i) записать СЛАУ для вычисления коэффициентов линейной комбинации дробно-рациональных функций $\frac{\alpha_0 + \alpha_1 x}{\beta_0 + \beta_1 x}$, представляющих собой интерполянту.

36. Можно ли использовать для аппроксимации функции (x_i, y_i) систему функций $\{1, x^2, x^4, \ldots, x^{2n}\}$? Если можно, то в каких случаях? Если нельзя, обосновать.

37. Можно ли использовать для аппроксимации функции (x_i, y_i) систему функций $\{1, x, x^3, x^5, \ldots, x^{2n+1}\}$? Ответ обосновать. Привести пример.

38. Доказать, что определитель Вандермонда 3-го порядка отличен от нуля при $x_i \neq x_j$, если $j \neq i$.

39. Записать общий вид интерполяционного полинома Лагранжа, когда $x_i + x_{i-1} = h$ для всех $i = 1, 2, 3, 4, \ldots, n$.

40. Для всех функций $y = \frac{1}{x}$ записать таблицу значений в точках $x = 1, 2, 3$. Построить интерполяционный полином Лагранжа для этой таблицы. Оценить ошибку интерполирования.

41. Для функции, заданной следующей таблицей, построить интерполяционный полином Ньютона. Сравнить значения этого полинома в точке $x = 5$ с точным значением интерполируемой функции $y = 1/x$. Оценить ошибку и объяснить её природу.

x	1	2	3	4
y	1	1/2	1/3	1/4

42. Для функции, заданной следующей таблицей, построить интерполяционные полиномы Ньютона и Лагранжа. Результаты сравнить. Сделать вывод.

x	1	2	3	4
y	1	1/2	1/3	4

43. Построить интерполяционный полином для функции двух переменных $z = f(x, y)$, заданной следующей таблицей:

x \ y	1	2	3
0,1	2	3	4
0,2	3	4	5
0,3	4	5	6

44. Объяснить смысл условий $p'(x_i - 0) = p'(x_i + 0)$, $p''(x_i - 0) = p''(x_i + 0)$ при кубической сплайн-интерполяции. Записать эти условия в развёрнутом виде (с комментариями, можно ли к этим условиям добавить $p'''(x_i - 0) = p'''(x_i + 0)$). Объяснить ответ.

45. Можно ли применять интерполирующий полином Ньютона для интерполирования функций с неравномерно отстоящими узлами интерполирования ($x_{i+1} - x_i \neq x_{j+1} - x_j$)? Привести пример.

46. В каких случаях интерполяционные полиномы Ньютона и Лагранжа совпадают? Привести пример.

47. Разработать процедуру вычисления полинома по схеме Горнера.

48. В чем принципиальное различие методов интерполяции и аппроксимации? В каких случаях интерполянта совпадает с аппроксимирующей функцией? Привести примеры.

49. Известно, что частные производные функции нескольких переменных равны нулю в критических точках (какие точки относятся к критическим?). Может ли случиться, что в методе наименьших квадратов (МНК) решение системы $\left\{ \frac{\partial S}{\partial a_i} = 0, \quad i = 0, 1, 2, \ldots, n \right.$, приведет к точке максимума? Если да, то в каких случаях? Приведите пример.

50. Всегда ли система уравнений $\left\{ \frac{\partial S}{\partial a_i} = 0, \quad i = 0, 1, 2, \ldots, n, \right.$ линейна по неизвестным a_i – параметрам аппроксимирующей функции? Привести примеры.

51. Написать алгоритм (процедуру) формирования коэффициентов нормальной СЛАУ для определения параметров аппроксимирующей функции.

52. Найти параметры A и B аппроксимирующей функции $\varphi(x) = A\ln(Bx)$ для аппроксимации функции, заданной следующей таблицей:

x	0,5	1	2
y	–1	0,01	1

53. Всегда ли при использовании метода наименьших квадратов параметры аппроксимирующей функции находятся однозначно? Если нет, то в каких случаях возможно несколько решений задачи? Привести пример.

54. Разработать алгоритм по оценке параметров эмпирической формулы, построенной по экспериментальным данным. Используемые формулы пояснить.

55. Рассчитать величины a, b линейной модели, S_r^2, S_l^2 и оценить адекватность модели, если $F_{1-\alpha} = 5{,}41$, для следующей таблицы:

x	10	10	20	20	30	30
y	12	11	13	16	17	17

56. Дать развернутый вывод формулы для расчета коэффициентов C_k среднеквадратичной аппроксимации в метрическом пространстве. Объяснить все выкладки.

57. Выполнить обратное преобразование приведения интеграла $\int_0^1 \bar{f}(s)ds$ к интегралу $\int_\alpha^\beta f(x)dx$. Показать на примере.

58. Вывести общую систему алгебраических уравнений для расчета весовых коэффициентов и узлов шаблона квадратной формулы при $m + 1 = 3$ ($m + 1$ – число точек шаблона). Найти хотя бы одно решение этой системы.

59. Вывести формулу прямоугольников для вычисления $\int_\alpha^\beta f(x)dx$, $f(x) = x^2$.

60. Вывести формулу трапеции для вычисления $\int_\alpha^\beta f(x)dx$, $f(x) = x^3$.

61. Вывести формулу Симпсона для вычисления $\int_\alpha^\beta f(x)dx$, $f(x) = x + 3$.

62. Вывести формулу Котеса для трехточечного шаблона.

63. Получить формулу Чебышева при $N = 2$.

64. Применить формулу Чебышева при $N = 2$ для вычисления $\int_1^2 xdx$. Сравнить с точным значением.

65. Сравнить точность формул Симпсона и Чебышева при $N = 3$ по отношению к точному значению $\int_1^2 xdx$.

66. Оценить погрешность формулы прямоугольников при $a = 1$, $b = 2$, $h = 0{,}1$ для функции $f(x) = e^x$.

67. Оценить погрешность формулы трапеции при $a = 1$, $b = 2$, $h = 0{,}1$; $f(x) = \ln x$.

68. Оценить погрешность формулы Симпсона при $a = 1$, $b = 2$, $h = 0{,}1$; $f(x) = \sqrt{x}$.

69. Найти величину h (шага дифференцирования) такую, чтобы точное значение производной функции $y = x^2$ в точке $x = 1$ отличалось от вычисленного по приближенной формуле, полученной при использовании трех узлов, окружающих точку $x = 1$, менее чем на 0,01.

70. Получить общую формулу приближенного вычисления второй производной функции. Применить её при вычислении $f''(x)$, если $f(x) = x^3$, в точке $x = 2$. Сравнить с точным значением.

71. В каких случаях результаты численного дифференцирования по формулам при 3-х и 5 узлах, окружающих точку дифференцирования, совпадают? Показать, что в этом случае совпадают формулы дифференцирования.

ЗАДАНИЯ ДЛЯ ЛАБОРАТОРНЫХ РАБОТ

Лабораторная работа 1
Решение СЛАУ точными методами (входной контроль)

Решить систему линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) следующими методами:

1. Крамера.
2. Обратной матрицы.
3. Гаусса.
4. *LU*-разложения матрицы коэффициентов.

Сравнить результаты и выполнить проверку подстановкой и в системе *MathCAD*.

$$\begin{cases} nx_1 + 10x_2 + mx_3 = n; \\ 10x_1 + mx_2 + nx_3 = m; \\ mx_1 + nx_2 + 10x_3 = m - n, \end{cases}$$

где n – номер группы, m – номер по списку в журнале[1].

Лабораторная работа 2
Исследование СЛАУ и ее решение итерационными методами

1. Исследовать обусловленность СЛАУ

$$\begin{cases} nx_1 + 10x_2 + mx_3 = n; \\ 10x_1 + mx_2 + nx_3 = m; \\ mx_1 + nx_2 + 10x_3 = m - n, \end{cases}$$

2. Внося 10%-ю ошибку в правую часть системы, оценить ошибку решения.

3. Решить СЛАУ методами простой итерации, Зейделя и релаксации, предварительно ее преобразовав.

4. Оценить скорость сходимости системы.

[1] Здесь и в дальнейшем n – номер группы, m – номер по списку в журнале.

Лабораторная работа 3
Решение нелинейного уравнения

1. Графическим способом определить отрезок $[a, b]$, в котором находится действительный корень уравнения $f(x) = 0$.

2. Комбинированным методом, методом половинного деления и с использованием системы *MathCAD* вычислить корень уравнения с точностью $\varepsilon = 1 \cdot 10^{-4}$. Вид функции $f(x)$ для каждого варианта указан в нижеследующей таблице.

3. Оценить скорость сходимости метода Ньютона $\left(\max\limits_{x} \varphi(x)\right)$.

№ варианта	$f(x)$	№ варианта	$f(x)$
1	$e^{mx} - x^3 4m$	16	$e^{-mx} + \lg(mx)$
2	$3^{mx} - x^2 + 5m$	17	$tg(mx) - x^2 + m$
3	$2^{mx} - x^3 - m$	18	$mx^3 + \sin(mx)$
4	$mx^3 - \cos(x + m)$	19	$e^{-mx} - (x - 2m)^2$
5	$\lg(mx) + \dfrac{x^2}{m}$	20	$\lg\dfrac{x}{m} + \sqrt{mx}$
6	$\lg\dfrac{x}{m} - m(x-1)^2$	21	$mx^3 - \cos(mx)$
7	$tg(x) + x^2 - 1$	22	$\sin(mx) - x^3$
8	$e^{mx} + 2x - mx^2$	23	$3^{-mx} - x^2 + 2m$
9	$\lg(mx) + 5mx$	24	$m\ln(mx) - \dfrac{1}{mx}$
10	$2^{-mx} + \ln x$	25	$mx - 0{,}4^{mx}$
11	$\lg(mx) + e^{mx}$	26	$x^3 - mx + \cos(mx)$
12	$mtgx - x^2$	27	$tg\dfrac{x}{m} - e^x$
13	$e^{mx} + \ln(mx)$	28	$(mx)^3 - 2mx$
14	$(mx)^2 - e^{mx}$	29	$tg\dfrac{x}{m} + mx^2$
15	$5x^2 + m(x-7) + e^{mx}$	30	$\sin(mx) + mx^2$

Лабораторная работа 4
Решение системы нелинейных уравнений

Исследовать на сходимость и решить СНУ методом простой итерации, методом Ньютона и с использованием системы *MathCAD*. Исследовать на сходимость метод простой итерации и метод Ньютона.

$$\begin{cases} x_1 + \dfrac{m}{10}x_2^2 = 0{,}1; \\ \dfrac{10x_1^2}{n} - x_2 = \dfrac{n}{10}; \end{cases} \quad x_1^0 = x_2^0 = 0{,}01.$$

Лабораторная работа 5
Полиномиальная интерполяция функций

1. Построить интерполяционный полином Лагранжа по данным, приведенным в следующей таблице:

i	0	1	2	3
x_i	$0{,}5m + 0{,}1n$	$1{,}5m + 0{,}1n$	$3{,}5m + 0{,}1n$	$5m + 0{,}1n$
y_i	$1{,}25m + 3{,}21n$	$3{,}42m + 2{,}53n$	$5{,}73m - 2{,}73n$	$2{,}74n + 3{,}71m$

Вычислить приближенное значение функции $f(x)$ в точке $x = 2{,}74m + 3{,}12n$.

2. Построить интерполяционный полином Ньютона по данным, представленным в следующей таблице:

i	0	1	2	3
x_i	$0{,}3n - 0{,}2m$	$0{,}5n - 0{,}2m$	$0{,}7n - 0{,}2m$	$0{,}9n - 0{,}2m$
y_i	$4{,}25n - 2{,}13m$	$5{,}13n - 2{,}78m$	$6{,}53n - 3{,}15m$	$7{,}31n - 4{,}32m$

Вычислить приближенное значение функции $f(x)$ в точке $x = 4{,}85n - 2{,}57m$.

3. Построить графики полученных полиномов и сравнить их значения в узлах интерполяции со значениями таблично заданных функций.

Лабораторная работа 6
Метод наименьших квадратов

1. Построить аппроксимирующий полином степени k для функции, заданной в нижеследующей таблице.

2. Решить эту задачу с использованием системы *MathCAD*.

Вариант	Табличная зависимость $y = f(x)$							Степень k
1	x	0,1	0,3	0,4	0,6	0,7	0,9	3
	y	–0,1	0,5	0,8	0,7	2,5	2,1	
2	x	–1	0,5	0,1	0,4	0,8		2
	y	1	2,2	1,7	0,8	0,3		
3	x	1,1	1,2	1,4	1,7	2	2,1	3
	y	–2,1	–1,8	–1,3	–1	–0,5	–0,6	
4	x	–1	–0,5	0	0,3	0,7		2
	y	0,9	0,7	0,4	0,8	1,0		
5	x	3	3,2	3,4	3,7	3,9	4	3
	y	–14	–10	–8	–12	–16	–18	
6	x	1	3	7	10	14		2
	y	0,3	0,7	0,9	1	2		
7	x	–10	–8	–5	–2	0	1	3
	y	6	3	0	–4	–2	0	
8	x	2	3	5	6	8	9	3
	y	0,7	1,2	2,2	3	2	3	
9	x	0,7	1,2	2,2	3	3,1		2
	y	0,8	1	1,3	1,2	1,4		
10	x	100	110	125	130	140	150	3
	y	0,01	0,03	0,08	0,12	0,1	0,09	
11	x	–10	–8	–5	–2	1		2
	y	3	4	0	–2	–1		
12	x	1	4	9	15	17	20	3
	y	0,1	–0,2	-0,3	0	0,1	–0,2	
13	x	2	3,1	4,2	5,6	6,4		2
	y	–15	–10	–8	–6	–7		
14	x	–4	–3	–2	0	1	2	3
	y	3	4	5	4	3	1	
15	x	10,5	11,5	12,5	13	14		2
	y	–6	–7	-5	0	2		
16	x	2	4	6	8	10	12	3
	y	–3	–2	0	0	2	3	
17	x	–0,3	–0,1	0,3	0,4	0,5		2
	y	5,5	3,5	0	4,5	6,5		
18	x	–7,1	0,2	3,4	5,6	7,2	8,3	3
	y	–4	–2	–2	0	1	2	
19	x	1	2	3	4	5		2
	y	10	20	15	20	10		
20	x	–5	–4	–2	0	1	3	3
	y	0,2	0,25	0,23	0,19	0,16	0,12	

Лабораторная работа 7
Приближенное вычисление определенных интегралов

Вычислить $\int\limits_b^a f(x)dx$ (варианты представлены в нижеследующей таблице):

1) с использованием системы *MathCAD*.

2) по формуле Ньютона – Лейбница, используя неопределенный интеграл, найденный в п. 1.

3) по формулам прямоугольников, трапеций, Симпсона, Ньютона – Котеса для 4-точечного шаблона, Чебышева и Гаусса.

4) Оценить точность вычислений интеграла разными методами.

Номер варианта	$f(x)$	a	b	Номер варианта	$f(x)$	a	b
1	$x \cdot e^x$	0	1	16	$\cos(m^2 x)\cdot(1+mx)^{-0.5}$	0	1
2	$1-\sin x^2$	0	$\frac{\pi}{2}$	17	$(\sin(mx)+x^3)^{0.5}$	0	$\frac{\pi}{4}$
3	$\log x^2$	1,1	2	18	$(\ln x^2+m\sin x)^{\frac{1}{3}}$	5	7
4	$(1+\cos x)^{-1}$	0	1	19	$(x^2+\ln(mx))^{0.5}$	2	3
5	$x\cdot\sin(x^2+1)$	0	1	20	$e^{mx^2}(1+x^2)^{\frac{1}{2}}$	1	2
6	$(\sin x)^{\frac{3}{2}}$	0,2	1,1	21	$\ln(mx)\cdot\sin(m+x)$	2	4
7	$x\cdot\sin x$	0	$\frac{\pi}{6}$	22	$5^x(\ln(x+mx^2))^{-1}$	2	3
8	$(\sin x-1)^{-1}$	0	$\frac{\pi}{2}$	23	$xe^{mx}\sin(m-x)$	0	1
9	$(x^3+x^2)^{\frac{1}{2}}$	0	$\frac{\pi}{4}$	24	$e^{-mx}(x+m)^{-2}$	1	2
10	$\ln\frac{1}{x}$	2	3	25	$x(m+\sin mx)^{\frac{1}{2}}$	0	$\frac{\pi}{2}$
11	$x\cdot\sin^2 x$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{3}$	26	$e^{\frac{x}{m}}(m+x)^{-3}$	0	1
12	$x\cdot\log x^2$	1,2	1,3	27	$(\lg x+m^2x^3)^{0,5}$	4	6
13	$x^2\cdot\cos x$	0	$\frac{\pi}{4}$	28	$\lg(mx)x^{-2}\sin^{-1}x$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{3}$
14	x^2e^x	0,5	1,5	29	$\lg(m^2x)\cos^{-1}x$	2	4
15	$e^x(2m+\ln mx)^{-}$	4	5	30	$(\cos^2(mx)+m)x^{-1}$	π	2π

Лабораторная работа 8
Приближенное решение задачи Коши для ОДУ

Решить задачу Коши с использованием системы *MathCAD* методами Эйлера, Эйлера – Коши, предиктор – корректор и Рунге – Кутта для данных, приведенных в нижеследующей таблице. Получить решение в десяти точках с различным значением параметра $\tau = \delta x$: $\tau = 0{,}1$; $\tau = 0{,}001$. Сравнить результаты.

№ варианта	$f(x)$	x_0	y_0	№ варианта	$f(x)$	x_0	y_0
1	$y+\sin(x+my)$	0	1	16	$x-y-\cos(mx+y)$	0	2
2	$xy+e^{mx}$	0	1	17	$y^2\sin(y-mx)$	1	–2
3	$\cos(my+x)+2^x$	0	1	18	$x^2+\cos(mx-y)$	1	2
4	$\sin y^2+my-3^x$	–1	0	19	$\sin\left(mx^2+y^2\right)-4^y$	1	3
5	$mx^3-e^{xy^2}$	1	2	20	y^2e^{mxy}	0	3
6	mxy^2-e^{my}	0	1	21	$\sin\left(x^2+my^2\right)-2^{mx}$	1	4
7	$2^{mx-y}+x^3y$	–1	3	22	$yx\sin(my-x)$	1	3
8	$4^{x^2+my}+xy^3$	–2	3	23	$xy^2-\cos(my)$	0	2
9	$\cos\left(my-x^2\right)+xy^4$	2	1	24	$x^3y^2+e^{mx}$	1	2
10	$e^{my}\sin(mx+y)$	1	–1	25	$\sin\left(mx^2y^3\right)-3^{mx}$	4	3
11	$x\sin^2(mx+y)-e^x$	–1	0	26	$y^2\cos(mx-y)+3y^3$	1	2
12	$x\cos^3\left(my+x^3\right)+2^{my}$	–1	0	27	$x^2+\cos\left(mx^2+y\right)$	–1	0
13	$y\sin\left(mx+y^2\right)$	1	0	28	$x^2+2^{mx}+y^2$	3	1
14	$xe^{mx+y}-2^x$	–1	3	29	$y^2\cos\left(mx^2y^3\right)$	2	2
15	$x^2y^2+4^{mxy}$	3	1	30	$xe^{m(x+y)}+mx$	1	2

ЗАДАНИЯ ДЛЯ ПРОМЕЖУТОЧНОГО КОНТРОЛЯ

1. Методом подбора определить область решения системы нелинейных алгебраических уравнений (СНАУ) и начальное приближение к решению.
2. Вычислить матрицу Якоби системы в точке начального приближения и создать процедуру вычисления этой матрицы в любой точке последовательных приближений.
3. Определить число обусловленности матрицы Якоби в точке начального приближения и создать процедуру вычисления числа обусловленности (cond) в любой точке последовательных приближений к решению.
4. Создать процедуру анализа числа обусловленности (cond) и выбора параметра в методе Левенберга – Марквардта в зависимости от числа обусловленности.
5. Найти решение СНАУ с заданной точностью.
6. Исследовать решение на устойчивость.
7. Исследовать алгоритм на эффективность, имея в виду различные способы задания параметра метода Левенберга – Марквардта.

В а р и а н т ы :

1. $$\begin{cases} x_1 + x_1^2 - 2x_2x_3 - 0{,}1 = 0; \\ x_2 - x_2^2 + 3x_1x_3 + 0{,}2 = 0; \\ x_3 - x_3^2 + 2x_1x_2 - 0{,}3 = 0. \end{cases}$$

2. $$\begin{cases} x_1^3 + x_2^3 - 6x_3 + 3 = 0; \\ x_1 - x_2^3 + 6x_3^3 + 2 = 0; \\ x_1^3 - 6x_2 + x_3^3 + 1 = 0. \end{cases}$$

3. $$\begin{cases} 0{,}3\sin(0{,}4x_2) - x_1 + x_3 = 0; \\ 0{,}3\cos(0{,}2x_1) - x_2 + x_3^2 = 1; \\ x_1 - x_2x_3 = 2. \end{cases}$$

4. $$\begin{cases} x_1 + 3\ln x_2 - x_3^2 = 0; \\ 2x_1^2 - x_1x_2 - 5x_3 + 1 = 0; \\ x_1 - 3x_2^2 + x_2x_3 + 2 = 0. \end{cases}$$

5. $$\begin{cases} 5x_1 - 6x_2 + 20\ln x_3 + 16 = 0; \\ 2x_1 + x_2 - 10\ln x_3 - 4 = 0; \\ x_1^2 + 3x_2x_3 + 3 = 0. \end{cases}$$

6. $$\begin{cases} \ln\dfrac{x_2}{x_3} - x_1 + 1 = 0; \\ 2x_1^2 + x_2 - x_3 - 0{,}4 = 0; \\ \dfrac{x_1x_2}{20} - x_3 + 2 = 0. \end{cases}$$

7. $$\begin{cases} 0{,}4\sin(0{,}1x_2) - x_1 + x_3 = 0; \\ 0{,}1\cos(0{,}2x_1) - x_2 + 1 = 0; \\ 0{,}2\sin x_3 + x_1x_2 + 2 = 0. \end{cases}$$

8. $\begin{cases} 0{,}5\sin\dfrac{x_2}{3} - x_1 + x_3 = 0; \\ 0{,}3\cos x_1 - x_2 x_3 + 1 = 0; \\ x_1^2 - x_2 + x_3 + 2 = 0. \end{cases}$

9. $\begin{cases} x_1^2 - x_2^2 - x_3 = 0; \\ 1 + x_1(x_2 - 1) - 6x_3 x_1 = 0; \\ x_1 + x_2 - x_3^3 = 0. \end{cases}$

10. $\begin{cases} 0{,}25\sin(0{,}3x_2) - x_1 + x_3^2 + 1 = 0; \\ 0{,}5\cos(0{,}3x_1) - x_2 - x_3^2 = 0; \\ 0{,}7\cos x_3 + x_1 + x_2 + 2 = 0. \end{cases}$

11. $\begin{cases} 2x_1 - x_2 - 6\ln x_3 - 3 = 0; \\ 15x_1 - 10x_2 - 60\ln x_3 - 6 = 0; \\ \ln x_1 + \ln x_2 + \ln x_3 + 1 = 0. \end{cases}$

12. $\begin{cases} 2x_1^2 + x_2^2 - x_3 - 1 = 0; \\ x_1^3 + 6x_1^2 x_2 - x_1 x_3 + 1 = 0; \\ x_1 x_2 + x_3^2 - 2 = 0. \end{cases}$

13. $\begin{cases} x_1 - x_2 - 6\ln x_3 - 1 = 0; \\ x_1 - 3x_2 - 6\ln x_2 - x_3 = 0; \\ \ln x_1 - x_2 + 6x_3 + 2 = 0. \end{cases}$

14. $\begin{cases} 2x_1^3 - x_2^2 - x_3 - 1 = 0; \\ x_1 x_2^3 - x_3 - 4 = 0; \\ x_1 + x_2 x_3^2 - 2 = 0. \end{cases}$

15. $\begin{cases} 2x_1 - \sin\dfrac{x_1 - x_2}{2} + x_3 = 0; \\ 2x_2 - \cos\dfrac{x_1 + x_3}{2} = 0; \\ x_1 + x_2 - x_3^2 = 0. \end{cases}$

16. $\begin{cases} 6x_1 - 5x_2 - 30\ln x_3 - 12 = 0; \\ 3x_1 - 3x_2 + 30\ln x_3 + 10 = 0; \\ x_1^2 - \ln x_2 + \ln x_3 - 4 = 0. \end{cases}$

17. $\begin{cases} \cos(0{,}4x_2 + x_1^2) + x_3 = 0; \\ 1{,}5x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 = 0; \\ x_1 x_2 - x_3 + 1 = 0. \end{cases}$

18. $\begin{cases} \sin(0{,}3x_2^2) - x_2 + x_3 = 0; \\ \cos x_1 - x_2 x_3 + 1 = 0; \\ \cos x_3 + x_1^2 + x_2 + 2 = 0. \end{cases}$

19. $\begin{cases} \ln\left(1 + \dfrac{x_1 + x_2}{5}\right) - \sin\dfrac{x_2}{3} - x_3 = 0; \\ \cos\dfrac{x_1 x_2}{6} - x_2 + x_3 = 0; \\ x_1 + x_2 + x_3 - 1 = 0. \end{cases}$

20. $\begin{cases} \ln x_2 x_3 - x_2 + x_3 = 0; \\ x_1^2 - x_2 x_3 - 2 = 0; \\ x_1 x_2 x_3 + x_2 - x_3 + 2 = 0. \end{cases}$

21. $\begin{cases} x_1^2 + \ln x_2 - x_3 + 1 = 0; \\ x_1^2 + x_2 + \ln x_3 + 2 = 0; \\ x_1 + \ln x_2 x_3 + 3 = 0. \end{cases}$

22. $\begin{cases} \ln x_1 + \ln x_2 + \ln x_3 - 2 = 0; \\ 1{,}5\ln x_1 + x_2 - \ln x_3 - 2{,}5 = 0; \\ 2x_1 - \ln x_2 - 4{,}4 = 0. \end{cases}$

23. $\begin{cases} x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = 0; \\ \ln x_1 + 2x_2 + x_3 = 0; \\ x_1 + x_2 + 3\ln x_3 + 1 = 0. \end{cases}$

24. $\begin{cases} x_1^2 - x_2^2 - x_3 = 0; \\ x_1 - x_2 + x_3^2 + 1 = 0; \\ x_1x_2 + x_2x_3 + x_1x_3 + 2 = 0. \end{cases}$

25. $\begin{cases} 5(\ln x_1 + \ln x_2) + x_3 = 0; \\ x_1x_2 - x_3 = 0; \\ x_1^2 - x_2^2 + x_3^2 = 0. \end{cases}$

ПРИМЕРНЫЙ ПЕРЕЧЕНЬ ВОПРОСОВ К ЗАЧЕТУ

1. Понятие математической модели и вычислительного эксперимента. Общая характеристика численных методов. Пример.
2. Погрешность численного метода и алгоритма. Реализуемость и устойчивость алгоритма.
3. Корректность постановки задачи. Примеры корректно и некорректно поставленных задач.
4. Системы линейных алгебраических уравнений. Общая характеристика, задачи, приводящие к СЛАУ, типы СЛАУ и матриц коэффициентов.
5. Понятие обусловленности СЛАУ. Число обусловленности. Примеры.
6. Зависимость решения СЛАУ от ошибок правой части системы.
7. Общая характеристика методов решения СЛАУ. Принципы выбора метода решения.
8. Прямые методы решения СЛАУ. Метод Гаусса.
9. Прямые методы решения СЛАУ. Метод треугольного разложения (LU-разложение, алгоритм Краута).
10. Итерационные методы решения СЛАУ. Общая характеристика, двухслойны и трехслойные схемы. Каноническая форма. Явные и неявные, стационарные и нестационарные итерационные методы. Сходимость и точность итерационных методов.
11. Метод простой итерации. Операторная и вычислительная формы. Тип схемы метода простой итерации.
12. Метод Зейделя. Операторная и вычислительная формы. Тип схемы метода Зейделя.

13. Метод релаксации. Операторная и вычислительная формы. Тип схемы метода релаксации.

14. Сходимость стационарных итерационных методов. Пример.

15. Условия сходимости и скорость сходимости метода простой итерации.

16. Условия сходимости метода Зейделя.

17. Скорость сходимости метода Зейделя.

18. Условия сходимости метода релаксации.

19. Общая характеристика нелинейных алгебраических уравнений (НАУ). Понятие корня, способы отделения корней. Пример.

20. Итерационные методы решения НАУ. Условие сходимости. Пример.

21. Принцип выбора функции правой части итерационного метода.

22. Метод половинного деления. Условия и доказательство сходимости.

23. Метод хорд. Условия и доказательство сходимости.

24. Метод касательных. Условия и доказательство сходимости.

25. Комбинированный метод. Условия и доказательство сходимости.

26. Системы нелинейных алгебраических уравнений (СНАУ). Векторная форма записи. Вывод условия сходимости итерационных методов решения СНАУ.

27. Метод Ньютона для решения СНАУ. Операторная и вычислительная формы.

28. Теорема сходимости метода Ньютона. Пример.

29. Метод Ньютона и его модификации.

30. Интерполирование функций. Общая постановка задачи. Общая формула интерполирования, условия реализации.

31. Полиномиальная интерполяция. Теорема Вейерштрасса.

32. Интерполяционный полином Лагранжа. Построение формулы, оценка точности.

33. Интерполяционный полином Ньютона на неравномерной сетке.

34. Интерполяционный полином Ньютона на равномерной сетке.

35. Кубическая сплайн-интерполяция.

36. Приближение функций по методу наименьших квадратов. Общая постановка задачи.

37. Линейное приближение. Вывод нормальных уравнений.

38. Квадратичное приближение. Вывод нормальных уравнений.

39. Нормальная система для расчета коэффициентов полинома произвольного порядка для аппроксимации функции.

40. Численное интегрирование. Общая постановка задачи. Сведение определенного интеграла в пределах от a до b к интегралу с пределами от 0 до 1.

41. Метод построения квадратурной формулы, точной для интегралов от степенных функций.

42. Получение квадратурной формулы прямоугольников.

43. Получение квадратурной формулы трапеций.

44. Получение квадратурной формулы Симпсона.

45. Принцип получения формул Котеса.

46. Формула Котеса на четырехточечном шаблоне.

47. Формула Котеса на пятиточечном шаблоне.

48. Квадратурная формула Гаусса, в том числе при $N = 2$.

49. Квадратурная формула Чебышева, в том числе при $N = 3$.

50. Оценка погрешности квадратурных формул (на примере).

51. Численное решение обыкновенных дифференциальных уравнений (ДУ). Условия существования и единственности решения.

52. Конечно-разностная схема по методу Эйлера.

53. Точность аппроксимации метода Эйлера.

54. Оценка точности решения ДУ по методу Эйлера.

55. Доказательство сходимости приближенного решения к точному по методу Эйлера, когда параметр сетки τ стремится к 0.

56. Метод Рунге – Кутта 4-го порядка.

ТЕСТЫ ДЛЯ ИТОГОВОГО КОНТРОЛЯ

1. Общие вопросы (введение)

1. Выберите верные характеристики численных методов:
   - ✓ это численное описание физических процессов;
   - ✓ это средства, необходимые для выполнения одного из этапов математического моделирования;
   - ✓ это методы построения алгоритмов для численных расчетов;
   - ✓ это дискретные аналоги непрерывных математических задач.

2. Дискретный аналог непрерывной математической задачи – это:
   - ✓ разбиение общей задачи на составляющие ее фрагменты для последующего решения;
   - ✓ задача, которая возникает при замене всех функций непрерывного аргумента, присутствующих в задаче, на функции дискретного аргумента;
   - ✓ задача, которая возникает при использовании вместо точных приближенных функций, полученных в результате дискретизации задачи;
   - ✓ алгоритм, который позволяет решить задачу в численной форме.

3. Этапами математического моделирования являются:
   - ✓ математическая постановка задачи;
   - ✓ теоретическое и экспериментальное исследование свойств моделируемого объекта;
   - ✓ разработка теории решения математических задач;
   - ✓ численное решение моделирующих уравнений.

4. Выберите правильные утверждения:
   - ✓ математическая модель всегда дискретна;
   - ✓ математическое моделирование – это метод решения вычислительных задач;
   - ✓ математическая модель – это описание исследуемого процесса с помощью математических соотношений;
   - ✓ математическая модель – это результат численного решения поставленной задачи.

5. Математическая модель – это:
   - ✓ физические законы и соотношения;
   - ✓ компьютерная программа;
   - ✓ описание процесса средствами математики;

- ✓ системы математических уравнений, устанавливающих связи между факторами, параметрами, исходными данными и результирующими значениями выходных величин.

6. Математическую модель можно представить в виде:
   - ✓ системы алгебраических уравнений;
   - ✓ решения дифференциального уравнения;
   - ✓ теоремы высшей математики;
   - ✓ дифференциальных уравнений и алгебраических неравенств.

7. Какие из следующих действий можно отнести к этапам математического моделирования:
   - ✓ установление эквивалентностей бесконечно-малых величин;
   - ✓ решение систем математических уравнений и неравенств;
   - ✓ описание экономических законов математическими терминами;
   - ✓ полное описание исследуемого процесса разговорным языком в стихотворной форме.

8. Анализ численных результатов при математическом моделировании позволяет:
   - ✓ установить методику экспериментальных исследований;
   - ✓ скорректировать математическую модель;
   - ✓ установить необходимость корректировки математической модели;
   - ✓ принять решение о замене метода решения математической задачи.

9. Вычислительный эксперимент – это:
   - ✓ численный метод решения задачи;
   - ✓ алгоритм для обработки числовых данных;
   - ✓ численное решение задачи для определенного набора значений исходных данных;
   - ✓ получение решения задачи и его анализ средствами вычислительной математики.

10. Выберите верные утверждения:
    - ✓ численные методы всегда позволяют решить задачу с требуемой точностью;
    - ✓ применение численных методов всегда приводит к решению задачи с определенной ошибкой;
    - ✓ погрешность численного метода возникает только из-за ошибок округления;
    - ✓ численные методы всегда предполагают дискретизацию непрерывной задачи.

11. Выберите правильные положения:
   - ✓ реализуемый алгоритм – это алгоритм, позволяющий получить точное решение задачи;
   - ✓ реализуемый алгоритм – это алгоритм получения решения задачи за конечное число действий;
   - ✓ время работы реализуемого алгоритма не зависит от требуемой точности решения задачи;
   - ✓ точность решения задачи посредством реализуемого алгоритма может повышаться до любого уровня путем увеличения числа итераций применения алгоритма.

12. Выберите верные утверждения:
   - ✓ реализуемый алгоритм всегда экономичный;
   - ✓ экономичный алгоритм – это алгоритм, состоящий из наименьшего числа операторов или команд (в сравнении с другими алгоритмами);
   - ✓ экономичный алгоритм позволяет решать задачу за наименьшее компьютерное время (в сравнении с другими алгоритмами, решающими данную задачу);
   - ✓ экономичный алгоритм позволяет решать задачу с максимально достижимой точностью.

13. Термин «некорректность» можно отнести:
   - ✓ к методу решения математической задачи;
   - ✓ к математической модели;
   - ✓ к математической задаче;
   - ✓ к исходным данным для решения задачи.

14. Корректно поставленная математическая задача:
   - ✓ устойчива по отношению к начальным условиям;
   - ✓ имеет хотя бы одно решение;
   - ✓ имеет решение для допустимых исходных данных;
   - ✓ не может иметь два или более решения.

15. Алгоритм называют устойчивым, если:
   - ✓ ошибки округления при его реализации на ЭВМ не превышают заданного значения;
   - ✓ ошибки округления не накапливаются в результате итерационного процесса решения;
   - ✓ ошибки округления накапливаются по степенному закону δ^n;
   - ✓ алгоритм реализуется за конечное число шагов.

16. В каких случаях вычислительный алгоритм по итерационной схеме $y_{i+1} = \frac{y_i}{d}$, где $d = \text{const}$, будет устойчивым:

- ✓ при $d = 1$;
- ✓ при $d < 1$;
- ✓ при $d > 1$;
- ✓ для любого d.

17. Вычислительная задача поставлена таким образом, что ее решение непрерывно зависит от входных данных. Выберите необходимые дополнительные условия корректности задачи:

- ✓ имеет единственное решение для любых допустимых исходных данных;
- ✓ либо имеет единственное решение, либо не имеет решения вовсе;
- ✓ задача устойчива к ошибкам округления, возникающим при решении;
- ✓ каждому набору входных данных из ОДЗ соответствует единственное решение.

18. Задача численного интегрирования по формуле $J_n = \sum_{k=0}^{N-1} C_k f\left(x_k\right)$, $C_k > 0$, $\sum_{k=0}^{N-1} C_k = 1$ корректна, так как (выберите правильные условия):

- ✓ по этой формуле можно вычислить интеграл с любой точностью;
- ✓ ошибка в решении задачи не превосходит ошибку, вносимую в подынтегральную функцию;
- ✓ итерационный процесс устойчивый;
- ✓ задача имеет единственное решение.

19. Задача дифференцирования функции из класса дифференцируемых функций не является корректной, так как:

- ✓ она не является разрешимой для любой функции;
- ✓ можно внести погрешность определенного вида, которая приведет к потере устойчивости решения задачи;
- ✓ операция дифференцирования – обратная к операции интегрирования;
- ✓ решение задачи дифференцирования не является единственным.

20. Вычислительная схема $x_n = \frac{1}{2}\left(x_{n-1} + \frac{1}{x_{n-1}}\right)$ сходится к следующему решению уравнения:

- ✓ $x = 0$;
- ✓ $x = 1$;
- ✓ $x = \sqrt{1}$;
- ✓ $x = 2$.

21. При реализации вычислительной схемы $y_{i+1} = d \cdot y_i$ при $d < 1$ погрешность δ, внесенная на *i*-м шаге, в дальнейшем:

- ✓ накапливается по экспоненциальному закону;
- ✓ накапливается по степенному закону;
- ✓ не накапливается;
- ✓ уменьшается.

22. Если погрешность вычислений при использовании алгоритма накапливается по линейному закону, то:

- ✓ алгоритм не является устойчивым;
- ✓ алгоритм является условно устойчивым;
- ✓ для определения устойчивости алгоритма необходима дополнительная информация;
- ✓ алгоритм называется линейно устойчивым.

2. СЛАУ

23. Выберите неверные определения. В матричной форме *n*-мерной неоднородной СЛАУ $AX = B$:

- ✓ A – треугольная матрица размерности $n \times n$;
- ✓ X – вектор-строка неизвестных;
- ✓ B – заданная константа;
- ✓ B – ненулевая матрица.

24. Выберите тип, к которому относится заданная матрица коэффициентов СЛАУ:

$$\begin{pmatrix} 5 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 7 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 9 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 11 \end{pmatrix}:$$

- ✓ плотная;
- ✓ симметричная;
- ✓ ленточная;
- ✓ диагональная.

25. Выберите правильные утверждения:
- ✓ Норму двумерного вектора можно измерить линейкой.
- ✓ Квадрат вектора – это величина $\left(x^T, x\right)$.
- ✓ Норма вектора вычисляется по формуле $\|x\| = \sqrt{|x_1| + |x_2|^2 + \ldots + |x_n|^2}$.
- ✓ Длина вектора всегда больше его нормы.

26. Выберите верные соотношения, всегда выполняющиеся для нормы вектора:
- ✓ $\|x\| > 0$;
- ✓ $\|cx\| = c\|x\|$;
- ✓ $\dfrac{\|x^T \cdot y\|}{\|y\| \cdot \|x\|} \le 1$;
- ✓ $\|x + y + z\| \le \|x\| + \|y\| + \|z\|$.

27. Выберите неверные определения:
- ✓ Норма матрицы – это ее длина.
- ✓ Норма матрицы может быть задана различными способами.
- ✓ Каким бы способом ни была задана норма матрицы, она имеет единственное значение.
- ✓ За норму матрицы можно принять самый большой ее элемент.

28. Норму матрицы можно вычислить как (выберите все правильные варианты ответов):
- ✓ максимальное значение из сумм модулей элементов матрицы по строкам;
- ✓ максимальное значение из сумм модулей элементов матрицы по столбцам;
- ✓ минимальное значение из сумм модулей элементов матрицы по столбцам;
- ✓ максимальное сингулярное число матрицы.

29. Матрица является положительно определенной, если (выберите все правильные варианты ответов):
- ✓ она имеет положительные собственные числа;

- ✓ все главные миноры матрицы положительны;
- ✓ она соответствует положительно определенной квадратичной форме;
- ✓ все ее элементы положительны.

30. Как изменится число обусловленности матрицы, если ее диагональные элементы увеличить:
- ✓ увеличится;
- ✓ уменьшится;
- ✓ не изменится;
- ✓ увеличится при незначительных изменениях и уменьшится при больших изменениях.

31. Задача является хорошо обусловленной, если:
- ✓ при небольших изменениях входных данных результаты изменяются незначительно;
- ✓ существенные изменения входных данных незначительно изменяют результат;
- ✓ изменения входных данных не влияют на результат;
- ✓ изменения входных данных не влияют на алгоритм решения задачи.

32. От хорошей обусловленности задачи зависит:
- ✓ скорость решения задачи;
- ✓ устойчивость решения;
- ✓ точность результата;
- ✓ выбор метода решения задачи.

33. По формуле $\Delta x = \left| x^* - x \right|$, где x^* – точное значение величины, а x – ее известное приближенное значение, вычисляется:
- ✓ относительная погрешность;
- ✓ абсолютная погрешность;
- ✓ шаг;
- ✓ окрестности точки оптимума.

34. Найдите прямые методы решения СЛАУ:
- ✓ метод Гаусса;
- ✓ метод простых итераций;
- ✓ метод сложных итераций;
- ✓ метод LU-разложения.

35. Итерация – это:
- ✓ приближенное решение;
- ✓ шаг вычислений в направлении решения задачи;
- ✓ последовательное приближение;
- ✓ погрешность вычисления.

36. Какие из математических пакетов и офисных приложений можно использовать при решении задач вычислительного характера на компьютере (введите название программного продукта)?

37. Сходимость метода Зейделя зависит от:
- ✓ от нормы матрицы коэффициентов;
- ✓ от начального приближения к решению;
- ✓ от собственных чисел матрицы коэффициентов;
- ✓ от расположения уравнений в исходной системе.

38. Функция $f(x)$, определенная на интервале $[A, B]$, такова, что $f(A) \cdot f(B) > 0$; это означает, что уравнение $f(x) = 0$ может:
- ✓ иметь четное число корней;
- ✓ не иметь корней вообще;
- ✓ иметь только положительные корни;
- ✓ иметь нечетное число корней.

39. Составляется характеристическое уравнение для матрицы A, чтобы:
- ✓ определить норму этой матрицы;
- ✓ найти собственные значения матрицы;
- ✓ вычислить детерминант матрицы;
- ✓ определить положительную определенность матрицы.

40. Нахождение таблично заданной функции в тех точках внутри интервала определения, где ее значения неизвестны, – это:
- ✓ аппроксимация;
- ✓ экстраполяция;
- ✓ интерполирование;
- ✓ интерполяция.

41. Норму матрицы можно вычислить как (выберите все правильные варианты ответов):
- ✓ максимальное значение из сумм модулей элементов матрицы по строкам;
- ✓ максимальное значение из сумм модулей элементов матрицы по столбцам;

- ✓ минимальное значение из сумм модулей элементов матрицы по столбцам или по строкам;
- ✓ максимальное сингулярное число матрицы.

42. СЛАУ является хорошо обусловленной, если ее число обусловленности cond удовлетворяет соотношению:
   - ✓ $\mathrm{cond} \sim 1$;
   - ✓ $\mathrm{cond} >> 1$;
   - ✓ $\mathrm{cond} << 1$;
   - ✓ $\mathrm{cond} = 0$.

43. СЛАУ является недоопределенной, если в ее матрице коэффициентов размера $m \times n$:
   - ✓ $m > n$;
   - ✓ $m < n$;
   - ✓ $m \neq n$;
   - ✓ $m = n$.

44. В чем различие метода простой итерации и метода Зейделя:
   - ✓ один из них одношаговый, другой двухшаговый;
   - ✓ метод простой итерации – итерационный, а метод Зейделя – точный;
   - ✓ в методе Зейделя для приближения переменной на n-й итерации x_k^n используются все приближения x_i^n, $i = 1, \ldots, k-1$, а в методе простой итерации x_k^n определяются с помощью x_i^{n-1}, $i = 1, \ldots, n$;
   - ✓ различаются условиями сходимости.

45. Выберите правильные определения.
   - ✓ Для любой СЛАУ существует каноническая форма записи.
   - ✓ Матричная форма существует только для определенных СЛАУ.
   - ✓ Итерационные методы нельзя применять для решения плохо обусловленных СЛАУ.
   - ✓ Все одношаговые итерационные методы имеют одну каноническую формулу.

46. Выражение $B\dfrac{x^{(k+1)} - x^{(k)}}{\tau_k} + Ax^{(k)} = b$, где $B,\ A,\ b,\ x^{(k+1)},\ x^{(k)}$ – матрицы, τ_k – параметр:
   - ✓ Является канонической формулой одношаговых итерационных методов.
   - ✓ Позволяет за конечное число итераций решить любую СЛАУ.

- ✓ Представляет собой неявную схему решения СЛАУ.
- ✓ Предназначено для решения СЛАУ вида $Ax = b$.

47. Каноническая формула решения СЛАУ:
- ✓ является явной, если $A = E$, где E – единичная матрица;
- ✓ позволяет последовательно вычислять последующее приближение через предыдущее, когда B – единичная матрица;
- ✓ для любой СЛАУ может быть записана в виде $x^{(k+1)} = x^{(k)} - \tau_{k+1}\left(Ax^{(k)} - b\right)$;
- ✓ в общем случае имеет вид: $Bx^{(k+1)} = Bx^{(k)} - \tau\left(Ax^{(k)} - b\right)$.

48. Пусть $x^{(0)}, x^{(m)}, x^*$ – соответственно начальное, m-е и точное приближение к решению СЛАУ, тогда:
- ✓ всегда существует число ξ: $\left\|x^{(m)} - x^*\right\| \le \xi\left\|x^{(0)} - x^*\right\|$ для любого m;
- ✓ неравенство $\left\|x^{(m)} - x^*\right\| \le \xi\left\|x^{(0)} - x^*\right\|$ при $0 < \xi < 1$ говорит о сходимости последовательных приближений $x^{(m)}$ к решению x^*;
- ✓ если выполняется неравенство $\left\|x^{(m)} - x^*\right\| \le \xi\left\|x^{(0)} - x^*\right\|$, то величина ξ определяет скорость сходимости;
- ✓ если итерационный метод сходится, то x^* является пределом последовательности $\left\{\left(x^{(m)} - x^{(0)}\right)\right\}$ при $m \to \infty$.

49. Выберите правильные канонические формулы метода простой итерации решения СЛАУ:
- ✓ $B\dfrac{x^{(k+1)} - x^{(k)}}{\tau_k} + Ax^{(k)} = b$, где $B = E$ (единичная матрица);
- ✓ $D\dfrac{x^{(k+1)} - x^{(k)}}{\tau_k} + Ax^{(k)} = b$, где D – диагональная матрица;
- ✓ $x_i = -\dfrac{1}{a_{ii}}\left(\sum\limits_{\substack{j=1\\ j\ne i}} a_{ij}x_j^{(k)} - b_i\right)$;
- ✓ $D\dfrac{x^{(k+1)} - x^{(k)}}{\tau_k} + Ax^{(k)} = B$.

50. Выберите эквивалентные СЛАУ:
- ✓ $\begin{cases} 2x + y = 1; \\ x + y = 2. \end{cases}$

✓ $\begin{cases} x = -1; \\ x + y = 2. \end{cases}$

✓ $\begin{cases} 2x + y = 1; \\ 3x + 2y = 3. \end{cases}$

✓ $\begin{cases} 2x + y = 1; \\ -2x - 3y = -7. \end{cases}$

51. Из заданных эквивалентных систем выберите пригодную для решения методом простой итерации:

✓ $\begin{cases} 2x + y = 1; \\ x + y = 2. \end{cases}$

✓ $\begin{cases} x = -1; \\ x + y = 2. \end{cases}$

✓ $\begin{cases} 2x + y = 1; \\ 3x + 2y = 3. \end{cases}$

✓ $\begin{cases} 2x + y = 1; \\ -2x - 3y = -7. \end{cases}$

52. Решая СЛАУ $\begin{cases} 2x_1 + x_2 = 1; \\ x_1 + 3x_2 = 2. \end{cases}$ методом простой итерации, начиная с нулевого приближения $x_1^{(0)} = 0,\ x_2^{(0)} = 0$, выберите правильно вычисленное второе приближение к решению:

✓ $x_1^{(2)} = \frac{1}{2},\ x_2^{(2)} = \frac{1}{4}$;

✓ $x_1^{(2)} = \frac{1}{2},\ x_2^{(2)} = \frac{1}{8}$;

✓ $x_1^{(2)} = \frac{1}{6},\ x_2^{(2)} = \frac{1}{2}$;

✓ $x_1^{(2)} = \frac{1}{12},\ x_2^{(2)} = \frac{1}{4}$.

53. Выберите правильную запись канонической формулы метода простой итерации для СЛАУ $\begin{cases} 2x_1 + x_2 = 1; \\ x_1 + 3x_2 = 2. \end{cases}$

- ✓ $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \dfrac{\begin{pmatrix} x_1^{(k+1)} \\ x_2^{(k+1)} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x_1^{(k)} \\ x_2^{(k)} \end{pmatrix}}{2} + \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1^{(k+1)} \\ x_2^{(k+1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix};$

- ✓ $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1^{(k+1)} \\ x_2^{(k+1)} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1^{(k)} \\ x_2^{(k)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix};$

- ✓ $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1^{(k+1)} - x_1^{(k)} \\ x_2^{(k+1)} - x_2^{(k)} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1^{(k)} \\ x_2^{(k)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix};$

- ✓ $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1^{(k+1)} \\ x_2^{(k+1)} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1^{(k)} \\ x_2^{(k)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$

54. Выполните два шага решения СЛАУ $\begin{cases} 2x_1 + x_2 = 1; \\ x_1 + 3x_2 = 2 \end{cases}$ методом простой итерации, если $x_1^{(0)} = 0,\ x_2^{(0)} = 0$. Запишите вычисленные значения $x_1^{(2)},\ x_2^{(2)}$ – результаты второй итерации – в виде десятичных чисел с двумя знаками после запятой.

55. Для СЛАУ $Ax = b$ каноническая форма записи для метода Зейделя задана в виде: $B\dfrac{x^{(k+1)} - x^{(k)}}{\tau_k} + Ax^{(k)} = b$. Выберите правильную структуру матрицы B:

- ✓ B – диагональная матрица (a_{ii});
- ✓ B – преобразованная матрица $\widetilde{A}$ с преобладанием диагональных элементов;
- ✓ B – сумма диагональной, наддиагональной и поддиагональной матриц матрицы коэффициентов СЛАУ;
- ✓ $B = A^{+} + A^{-} + D$.

56. Выберите правильные положения:

- ✓ метод Зейделя для решения СЛАУ имеет бо́льшую область сходимости, чем метод простой итерации;

- ✓ метод Зейделя и метод простой итерации для решения СЛАУ имеют одинаковую скорость сходимости;
- ✓ метод Зейделя сходится к решению СЛАУ с заданной точностью быстрее метода простой итерации за счет выбора итерационного параметра;
- ✓ метод простой итерации имеет одинаковую область сходимости с методом Зейделя, однако уступает ему по скорости сходимости.

57. Выберите правильные утверждения:

Для реализации метода Зейделя необходимо:

- ✓ вычислить матрицу, обратную к матрице коэффициентов СЛАУ;
- ✓ разложить матрицу коэффициентов СЛАУ на поддиагональную, диагональную и наддиагональную матрицы;
- ✓ преобразовать матрицу коэффициентов СЛАУ к виду с преобладающими диагональными элементами с помощью эквивалентных преобразований;
- ✓ привести СЛАУ к виду, где в левой части системы расположен вектор-столбец неизвестных.

58. Для СЛАУ $\begin{cases} 2x - y = 1; \\ -x + 3y = 2 \end{cases}$ рассчитайте и выберите первые приближения к решению по методу простой итерации и методу Зейделя, если $x_0 = 2,\ y_0 = 2$:

- ✓ $x_1 = \frac{4}{3},\ y_1 = \frac{4}{3}$;
- ✓ $x_1 = \frac{3}{2},\ y_1 = \frac{7}{6}$;
- ✓ $x_1 = \frac{4}{3},\ y_1 = \frac{5}{6}$;
- ✓ $x_1 = \frac{3}{2},\ y_1 = \frac{4}{3}$.

59. Для СЛАУ $\begin{cases} 2x - y = 1; \\ -x + 3y = 2 \end{cases}$ рассчитайте и выберите первые приближения к решению по методам нижней и верхней релаксации с параметрами $\frac{1}{3}$ и $\frac{3}{2}$, если $x_0 = 0,\ y_0 = 0$:

✓ $x_1 = \frac{1}{6},\ y_1 = \frac{13}{54}$;

✓ $x_1 = \frac{1}{3},\ y_1 = \frac{14}{27}$;

✓ $x_1 = \frac{3}{2},\ y_1 = \frac{7}{8}$;

✓ $x_1 = \frac{1}{3},\ y_1 = \frac{9}{7}$.

60. Выберите правильные утверждения.
- ✓ Методы нижней и верхней релаксации для решения СЛАУ сходятся или расходятся одновременно.
- ✓ В методе верхней релаксации используется параметр, монотонно возрастающий от итерации к итерации.
- ✓ В методе нижней релаксации итерационный параметр строго меньше 1.
- ✓ Методы нижней и верхней релаксации при решении СЛАУ используются одновременно.

61. Для того чтобы итерационный процесс решения СЛАУ $B\frac{x^{(k+1)} - x^{(k)}}{\tau} + Ax^{(k)} = b$ был сходящимся, необходимо:
- ✓ $\frac{1}{\|A\|} - \frac{\tau}{2} > 0$;
- ✓ $\tau > \frac{2}{\|A\|}$;
- ✓ $\|A\| < 1$;
- ✓ $\|A\| < \frac{2}{\tau}$.

62. Выберите справедливые утверждения:
- ✓ Любую СЛАУ можно привести к виду, для которого метод простой итерации будет сходиться со скоростью геометрической прогрессии.
- ✓ Для СЛАУ вида $x = Ax + b$ метод простой итерации сходится к решению, если $\|A\| < 1$.

- ✓ Если метод простой итерации для СЛАУ вида $x = Ax + b$ сходится, то скорость его сходимости равна скорости сходимости геометрической прогрессии со знаменателем $\|A\|$.
- ✓ Если СЛАУ $Ax + b$ и $x = A'x + \varphi$ эквивалентны, то $\|A\| = \|A'\|$.

3. Нелинейные уравнения

63. Выберите правильные утверждения.
Корень нелинейного алгебраического уравнения $f(x) = 0$
- ✓ совпадает с минимумом функции $f(x)$;
- ✓ отделяет участок на числовой оси, на котором функция была отрицательной, от «положительного» участка;
- ✓ обращает равенство $f(x) = 0$ в тождество $f(x) \equiv 0$;
- ✓ является точкой пересечения кривой $y = f(x)$ с осью Ox.

64. Если уравнение $f(x) = 0$ преобразовано к виду $x = \varphi(x)$, то:
- ✓ последовательность $\{x^n = \varphi(x^{n-1})\}$, $n \to \infty$, начиная с любого x_0, сходится к решению уравнения $x = \varphi(x)$;
- ✓ всегда существует такое x_0, что последовательность $\{x^n = \varphi(x^{n-1})\}$, $n \to \infty$, сходится к решению $f(x) = 0$;
- ✓ если последовательность $\{x^n\}$, где $x^n = \varphi(x^{n-1})$, сходится, то предел последовательности – корень уравнения $f(x) = 0$;
- ✓ если предела последовательности $\{x^n = \varphi(x^{n-1})\}$, $n \to \infty$, не существует, то не существует и корня уравнения $f(x) = 0$.

65. Какой из перечисленных итерационных процессов приводит к решению уравнения $x^2 - 2 = 0$ на интервале [1, 2]:
- ✓ $x^{n+1} = -\left(x^n - \frac{1}{2}\right)^2 + 2\frac{1}{4}$;
- ✓ $x^{n+1} = \frac{2}{x^n}$;
- ✓ $x^{n+1} = \frac{1}{2}x^n + \frac{1}{x^n}$;
- ✓ $x^{n+1} = 2x^n + \frac{2}{x^n}$.

66. Итерационная схема $x^{n+1} = \frac{1}{2}x^n + \frac{1}{x^n}$ сходится к решению уравнения $x^2 - 2 = 0$ на интервале [1, 2], так как:

- ✓ функция $y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{x}$ на интервале [1, 2] является сжатым отображением;
- ✓ $|\varphi'(x)| < 1$ на интервале [1, 2];
- ✓ $\left|x^{n+1} - x^n\right| \to 0$ при $n \to \infty$;
- ✓ $\left|x^n - 2\right| \to 0$ при $n \to \infty$.

67. Из условия Липшица для функции φ на интервале [a, b] следует, что:

- ✓ $\left|\varphi(x^{n-1}) - \varphi(x^*)\right| < \theta\left|x^{n-1} - x^*\right|$, $\theta < 1$, где x^* – корень уравнения $\varphi(x) - x = 0$;
- ✓ $|\varphi'(x)| < 0$ на интервале [a, b];
- ✓ уравнение $\varphi(x) = 0$ имеет корень на интервале [a, b];
- ✓ для решения уравнения $x = \varphi(x)$ можно использовать итерационную схему $x^{n+1} = \varphi(x^n)$ при $x_0 \in [a, b]$.

68. Скорость сходимости итерационной схемы $x^{n+1} = \varphi(x^n)$ для решения уравнения $x = \varphi(x)$ на интервале [a, b] определяется значением:

- ✓ $\max\limits_{x \in [a,b]} |\varphi(x)|$;
- ✓ $\min\limits_{x \in [a,b]} |\varphi(x)|$;
- ✓ $\max\limits_{x \in [a,b]} |\varphi'(x)|$;
- ✓ $\min\limits_{x \in [a,b]} |x - \varphi(x)|$.

69. Функция $f(x)$ непрерывна на интервале [a, b]. Выберите правильное утверждение:

- ✓ Если $f(a) \cdot f(b) > 0$, то внутри интервала [a, b] не существует корня уравнения $\varphi(x) = 0$.
- ✓ Если $f(a) \cdot f(b) < 0$, то на интервале [a, b] существует единственный корень уравнения $\varphi(x) = 0$.

- ✓ Если $f(a)\cdot f(b)=0$, то либо a, либо b является корнем уравнения $\varphi(x)=0$.
- ✓ Если $f(a)\cdot f(b)<0$, то функция $f(x)$ на интервале [a, b] меняет знак.

70. Для функции $f(x)$, заданной на интервале [a, b], известно, что $f(a)\cdot f(b)>0$. Сколько корней функции $f(x)$ существует на интервале [a, b]:
- ✓ один;
- ✓ два;
- ✓ ни одного;
- ✓ три.

71. Выберите правильные фрагменты алгоритма метода половинного деления для отыскания корня x^* уравнения $f(x)=0$ на интервале [A, B], если выполнено $(k-1)$ итераций и $z_k = A_k + \dfrac{B_k - A_k}{2}$:
- ✓ $if\ \ f(z_k)\cdot f(A_k)<0\ \ then\ \ B_{k+1}=z_k$
- ✓ $if\ \ f(z_k)\cdot f(A_k)>0\ \ then\ \ B_{k+1}=B_k,\ \ A_{k+1}=z_k$
- ✓ $if\ \ f(z_k)\cdot f(A_k)=0\ \ then\ \ z_k=x^*$
- ✓ $if\ \ f(z_k)\cdot f(A_k)<0\ \ then\ \ B_{k+1}=z_k,\ \ A_{k+1}=A_k$

72. На интервале [A, B] выполнено четыре итерации по методу деления отрезка пополам для поиска корня уравнения $f(x)=0$, т.е. найдены значения A_n, B_n. Каково значение $|A_n - B_n|$?
- ✓ 0,025;
- ✓ 0,03125;
- ✓ 0,0625;
- ✓ 0,001525.

73. В каких случаях метод хорд не может быть использован для поиска корня уравнения $f(x)=0$, где $f(x)$ – непрерывная функция, на интервале [A, B]:
- ✓ если $f(x)$ на интервале [A, B] вогнута;
- ✓ если $f(x)$ на интервале [A, B] выпукла;
- ✓ если $f(x)$ на интервале [A, B] имеет точку перегиба;
- ✓ если $f(x)$ на интервале [A, B] одного знака.

74. Функция $f(x)$ на интервале [A, B] такова, что $f(a) \cdot f(b) < 0$ и внутри [A, B] существует один корень уравнения $f(x) = 0$. Исходя из какого математического положения записано уравнение секущей, проходящей через точки $(A, f(A))$; $(B, f(B))$: $\dfrac{y - f(A)}{x - A} = \dfrac{f(B) - f(A)}{B - A}$:

- ✓ из теоремы Пифагора;
- ✓ из свойств прямоугольного треугольника;
- ✓ из свойств подобия треугольников;
- ✓ из свойств касательной к функции в точках A и B.

75. Схема метода для поиска корня $f(x) = 0$ на [A, B] представлена в виде: $A_0 = A$; $A_k = A_{k-1} + \Delta A_k$; $\Delta A_k = \dfrac{-f(A_{k-1})(B - A_{k-1})}{f(B) - f(A_{k-1})}$. Выберите возможные варианты окончания работы алгоритма поиска корня:

- ✓ $|\Delta A_k| < \varepsilon$;
- ✓ $|f(B) - f(A_k)| < \varepsilon$;
- ✓ $|B - A_k| < \varepsilon$;
- ✓ $|f(A_k)| < \varepsilon$.

76. Для функции $y = x^2 - 1$ выберите правильное значение первого приближения к корню по методу хорд на интервале [0, 2]:

- ✓ 0,6;
- ✓ 0,5;
- ✓ 0,55;
- ✓ 0,45.

77. Для функции $y = x^2 - 1$ выберите правильное значение первого приближения к корню по методу касательных на интервале [0, 2]:

- ✓ 1,0;
- ✓ 1,75;
- ✓ 1,25;
- ✓ 1,5.

78. Какова длина интервала на первом шаге поиска корня функции $y = x^2 - 1$ по методу хорд и касательных, если поиск корня начат с интервала [0, 2]:

- ✓ 0,5;
- ✓ 1,0;
- ✓ 0,75;
- ✓ 1,25.

79. Кривая $y = f(x)$ на интервале $[A, B]$ вогнутая, т.е. $f''(x) < 0$, $x \in [A, B]$. Что произойдет, если метод хорд и касательных начать с точки *A* (выбрать правильные утверждения)?

- ✓ Если $f(A) > 0$, то касательная пересечет ось *Ox* за точкой *B*.
- ✓ Если $f(A) > 0 \ \forall x \in [A, B]$, то метод хорд применим только тогда, когда исходной точкой является точка *B*.
- ✓ Если $f(B) < 0 \ \forall x \in [A, B]$, то метод обязательно отыщет корень, если начать из точки *A*.
- ✓ Если $f(A) \cdot f(B) < 0$, то метод хорд и касательных сходится из точки, в которой функция $f(x)$ положительна.

80. Какое максимальное количество корней на некотором интервале $[A, B]$ может иметь функция $f(x) = ax + e^{bx} + cx^2 + dx^3$?

- ✓ один;
- ✓ ни одного;
- ✓ три;
- ✓ два.

81. Какие из методов решения НАУ не требуют задания начального приближения?

- ✓ метод касательных;
- ✓ метод половинного деления;
- ✓ метод секущих;
- ✓ метод Ньютона.

82. Какой из разделов не относится к математическому программированию?

- ✓ линейное программирование;
- ✓ системное программирование;
- ✓ выпуклое программирование;
- ✓ квадратичное программирование.

83. Точка является граничной точкой множества A, если:

- ✓ любая окрестность этой точки содержит как элементы множества A, так и элементы дополнения к этому множеству;
- ✓ существует окрестность, которая содержит как элементы множества A, так и элементы дополнения к этому множеству;
- ✓ любая окрестность этой точки является непустым множеством;
- ✓ любая окрестность этой точки содержит только элементы множества A.

84. Итерационная схема $x = \varphi(x)$ сходится в области поиска решения, потому что:

- ✓ правая часть уравнения является линейной;
- ✓ модуль производной $|\varphi'(x)| < 1$ во всех точках области решения;
- ✓ модуль функции $|\varphi(x)| < 1$ во всех точках области решения;
- ✓ для функции $\varphi(x)$ выполняется условие Липшица.

85. Итерационную схему метода Ньютона решения НАУ можно записать в виде:

- ✓ $x^{k+1} = x^k + \dfrac{f(x^k)}{f'(x^k)}$;
- ✓ $x^{k+1} = x^k - f(x^k) \cdot (f'(x^k))^{-1}$;
- ✓ $x^{k+1} = x^k - f(x^k) \cdot |f'(x^k)|$;
- ✓ $x^{k+1} = x^k - \dfrac{f(x^k)}{f'(x^k)}$.

86. Для решения уравнения $\ln x = 0$ методом Ньютона верна итерационная схема:

- ✓ $x^{k+1} = x^k (1 - \ln x^k)$;
- ✓ $x^{k+1} = x^k - \ln x^k$;
- ✓ $x^{k+1} = x^k + x^k \ln x^k$;
- ✓ $x^{k+1} = x^k - \dfrac{\ln x^k}{x}$.

4. Системы нелинейных уравнений

87. Для системы уравнений $\begin{cases} x^2 - y^2 + xy = 1; \\ x - y - xy = 0 \end{cases}$ выбрать из представленных чисел величину, соответствующую норме матрицы Якоби системы в точке (0, 1), полученной как максимум из суммы модулей элементов строк матрицы:

- ✓ 1;
- ✓ 2;
- ✓ 3;
- ✓ 4.

88. СНАУ представлена в векторной форме $F(X) = 0$. Выберите правильные положения:

- ✓ $F(X)$ и X-вектор представляют собой столбцы одинаковой размерности;
- ✓ в утверждении «$F(X)$ и X-вектор представляют собой столбцы одинаковой размерности» есть ошибка, заключающаяся в том, что $F(X)$ – вектор-строка;
- ✓ размерности векторов $F(X)$ и X могут быть неодинаковыми;
- ✓ правая часть уравнения $F(X) = 0$ является вектором.

89. СНАУ $F(X) = 0$ преобразована в СНАУ $X = \Phi(X)$ таким образом, что обе системы имеют один и тот же корень, тогда:

- ✓ корень уравнения $F(X) = 0$ всегда можно найти по итерационной схеме $X^n = \Phi(X^{n-1})$;
- ✓ если $\Phi(X)$ – непрерывна, то она удовлетворяет условию Липшица;
- ✓ условие $\|\Phi(X') - \Phi(X'')\| < \|X' - X''\|$ является условием Липшица;
- ✓ для выполнения условия Липшица достаточно выполнения условия $\|\Phi'(X)\| < 1$ для всех X из области определения функции $\Phi(X)$.

90. Для СНАУ $X = \Phi(X)$ известно, что $\max\limits_{x} \|\Phi'(X)\| < 1$. В этом случае (выберите верное):

- ✓ итерационный процесс $X^n = \Phi(X^{n-1})$ сходится от любого начального приближения;

- ✓ функция $F(X)$ может как удовлетворять, так и не удовлетворять условию Липшица;
- ✓ за параметр θ в условии Липшица можно принять норму вектора-функции $\|\Phi'(X)\|$, вычисленную в любой точке X области определения функции $\Phi(X)$;
- ✓ существует такая X^*, что $\Phi(X^*) = 0$.

91. Метод Ньютона для СНАУ $F(X) = 0$ записан в следующем виде: $\left(X^{(n)}\right)^T = \left(X^{(n-1)}\right)^T - \left(F'\left(X^{(n-1)}\right)\right)^{-1} \cdot F\left(X^{(n-1)}\right)$. Выберите правильные расшифровки этого соотношения:

- ✓ $X^{(n)}$ – вектор-строка приближения к решению;
- ✓ $F'\left(X^{(n-1)}\right)$ – матрица, состоящая из функций $\left(\dfrac{\partial f_i}{\partial x_j}\right)$, $i = 1, \ldots, n, \quad j = 1, \ldots, n$, где n – порядок СНАУ;
- ✓ $\left(F'\left(X^{(n-1)}\right)\right)^{-1} \cdot F\left(X^{(n-1)}\right)$ – числовой вектор приращения для определения n-го приближения к решению;
- ✓ для одномерного случая $\left(F'\left(X^{(n-1)}\right)\right)^{-1}$ – функция, обратная к производной.

92. Для СНАУ $\begin{cases} x^2 - y = 0 \\ x + y^2 = 1 \end{cases}$ выберите матрицу Якоби в точке (1, 1):

- ✓ $\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$;
- ✓ $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$;
- ✓ $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$;
- ✓ $\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.

93. Для СНАУ $\begin{cases} x^2 - y = 0 \\ x + y^2 = 1 \end{cases}$ выберите матрицу, обратную к матрице Якоби в точке (1, 1):

- ✓ $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$;
- ✓ $\dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$;
- ✓ $\dfrac{1}{5}\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$;
- ✓ $\dfrac{1}{5}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$.

94. Для СНАУ $\begin{cases} x_1^{\ 2} - x_2 = 0 \\ x_1 + x_2^2 = 1 \end{cases}$ выберите правильное первое приближение к решению, если $X^0 = (1, 1)$:

- ✓ $x^1 = (0{,}6;\ 0{,}8)$;
- ✓ $x^1 = (0{,}4;\ 0{,}6)$;
- ✓ $x^1 = (0{,}8;\ 0{,}6)$;
- ✓ $x^1 = (0{,}8;\ -0{,}6)$.

95. Для СНАУ $\begin{cases} x_1^{\ 2} - x_2 = 0 \\ x_1 + x_2^2 = 1 \end{cases}$ определите приращение $\left(F'\left(X^{(0)}\right)\right)^{-1} \cdot F\left(X^{(0)}\right)$, если $X^0 = (1, 1)$:

- ✓ $\begin{pmatrix} 0{,}1 \\ 0{,}2 \end{pmatrix}$;
- ✓ $\begin{pmatrix} 0{,}2 \\ 0{,}4 \end{pmatrix}$;
- ✓ $\begin{pmatrix} 0{,}6 \\ 0{,}8 \end{pmatrix}$;
- ✓ $\begin{pmatrix} 0{,}4 \\ 0{,}2 \end{pmatrix}$.

96. Для СНАУ $\begin{cases} x_1^{\ 2} - x_2 = 0 \\ x_1 + x_2^2 - 1 = 0 \end{cases}$ определите значения функций $f_1\left(x_1^1, x_2^1\right)$; $f_2\left(x_1^1, x_2^1\right)$, где x_1^1, x_2^1 – первое приближение по методу Ньютона для вычисления корня СНАУ, а $X^0 = (1, 1)$:

- ✓ $(0{,}04;\ 1{,}16)$;
- ✓ $(0{,}01;\ 1{,}06)$;
- ✓ $(0{,}1;\ 1{,}1)$;
- ✓ $(0{,}06;\ 0{,}96)$.

97. Выберите правильные утверждения:

- ✓ метод Ньютона сходится при любом начальном приближении;
- ✓ схема метода Ньютона – Рафсона позволяет увеличить скорость сходимости метода Ньютона;
- ✓ метод Левенберга – Марквардта имеет итерационную схему $x^{k+1} = x^k - \lambda_k \left(F'\left(x^k\right)\right)^{-1} F\left(x^k\right)$;
- ✓ схемы методов Ньютона и Ньютона – Рафсона имеют различные области сходимости.

98. Матрица Якоби – это:

- ✓ матрица частных производных первого порядка для вектор-функции многих переменных;
- ✓ матрица частных производных первого порядка для вектор-функции одной переменной;
- ✓ матрица частных производных первого порядка для градиента скалярной функции;
- ✓ матрица частных производных второго порядка для скалярной функции многих переменных.

99. Итерационная схема $x = \varphi(x)$ сходится в области поиска решения, если:

- ✓ правая часть уравнения является линейной;
- ✓ $|\varphi'(x)| < 1$ во всех точках области решения;
- ✓ модуль функции $|\varphi(x)| < 1$ во всех точках области решения;
- ✓ для функции $\varphi(x)$ выполняется условие Липшица.

100. Наиболее эффективным методом для решения СНАУ с плохо обусловленной матрицей Якоби является:

- ✓ метод Ньютона – Рафсона;
- ✓ метод Ньютона;
- ✓ метод Левенберга – Марквардта.

101. Выберите правильные утверждения:

- ✓ метод Ньютона сходится при любом начальном приближении;
- ✓ схема метода Ньютона – Рафсона позволяет расширить область сходимости метода Ньютона;
- ✓ метод Левенберга – Марквардта имеет итерационную схему $x^{k+1} = x^k - \lambda_k \left(F'\left(x^k\right)\right)^{-1} F\left(x^k\right)$;
- ✓ схемы методов Ньютона и Ньютона – Рафсона совпадают при $\lambda_k = 1$, где λ_k – некоторая константа, используемая в методе Ньютона – Рафсона.

102. Метод Левенберга – Марквардта для решения СНАУ имеет следующую итерационную схему:

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} - \left[F'\left(x^{(k)} + \lambda_k E\right)\right]^{-1} F\left(x^{(k)}\right).$$

Выберите правильные пояснения:

- ✓ k – размерность СНАУ;
- ✓ $\lambda_k E$ – матрица, состоящая целиком из чисел λ_k;
- ✓ $F'\left(x^{(k)}\right)$ – производная от функции $F(x)$;
- ✓ При $\lambda_k = 0$ метод совпадает с методом Ньютона.

103. Метод Левенберга – Марквардта для решения СНАУ имеет следующую итерационную схему:

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} - \left[F'\left(x^{(k)} + \lambda_k E\right)\right]^{-1} F\left(x^{(k)}\right).$$

Выберите правильные пояснения.

- ✓ Число обусловленности матрицы $F'\left(x^{(k)}\right)$ всегда больше числа обусловленности матрицы $\left(F'\left(x^{(k)}\right) + \lambda_k E\right)$.
- ✓ Выражение $\left[F'\left(x^{(k)} + \lambda_k E\right)\right]^{-1} F\left(x^{(k)}\right)$ представляет собой квадратную матрицу размера $n \times n$, где n – порядок СНАУ.
- ✓ $F'\left(x^{(k)}\right)$ – числовая матрица, состоящая из значений частных производных функции $F(x)$ в точке $x^{(k)}$.
- ✓ Метод Левенберга – Марквардта имеет бóльшую область сходимости, чем метод Ньютона.

104. Найдите соответствие между методом решения СНАУ и его итерационной схемой:

- ✓ $x^{(k+1)} - x^{(k)} = -\lambda\left[F'\left(x^{(k)}\right)\right]^{-1} F\left(x^{(k)}\right)$ – метод Ньютона – Рафсона
- ✓ $x^{(k+1)} = x^{(k)} - \lambda\left[F'\left(x^{(k)} + \lambda_k E\right)\right]^{-1} F\left(x^{(k)}\right)$ – метод Левенберга – Марквардта

- ✓ $x^{(k+1)} - x^{(k)} = -\left[F'\left(x^{(k)}\right)\right]^{-1} F\left(x^{(k)}\right)$ – метод Ньютона
- ✓ $x^{(k+1)} - x^{(k)} = -\left[\left(F'\left(x^{(k)}\right)\right)^{-1} + \lambda_k E\right] F\left(x^{(k)}\right)$ – без имени

105. Выберите, какими методами решения СНАУ $\begin{cases} x_1^{\ 2} - x_2 = 0 \\ x_1^{\ 2} + x_2 = 2 \end{cases}$ получено $(k+1)$-е приближение к решению, если $x^{(k+1)} - x^{(k)} = -\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix}$, а $x^{(k)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$:

- ✓ методом Ньютона;
- ✓ методом Левенберга – Марквардта при $\lambda = \frac{1}{2}$;
- ✓ методом Ньютона – Рафсона при $\lambda = \frac{1}{2}$.

106. Метод Ньютона сходится при минимизации функции за n итераций, где n – количество переменных:

- ✓ если функция линейна в области определения;
- ✓ если функция равна нулю во всех точках пространства;
- ✓ если функция постоянна в области определения;
- ✓ такая ситуация невозможна.

107. Метод Ньютона сходится при минимизации функции за n итераций, где n – количество переменных:

- ✓ если функция представляет собой квадратичную форму;
- ✓ если функция линейна относительно всех переменных;
- ✓ если функция определяет плоскость в трехмерном евклидовом пространстве;
- ✓ если функция имеет вид: $y = kx + b$.

5. Интерполирование и аппроксимация функций

108. Решение задачи интерполирования функции позволяет находить (выберите правильные ответы):

- ✓ аналитический вид функции, заданной таблично;
- ✓ интерполянту, значения которой в узлах интерполирования совпадают со значениями заданной функции;
- ✓ приближенные значения функции, заданной в виде таблицы, в точках, не совпадающих с таблично заданными значениями аргумента;
- ✓ коэффициенты интерполирующего полинома.

109. Узлы интерполяции – это:

- ✓ множество значений аргумента табличной функции;
- ✓ точки, в которых значения заданной функции и интерполянты совпадают;
- ✓ множество решений уравнения $f(x)-\varphi(x)=0$, где $f(x)$ – заданная функция; $\varphi(x)$ – интерполянта;
- ✓ множество точек на плоскости, через которые проходит заданная функция.

110. Интерполянта $\varphi(x)$ заданной функции $f(x)$ – это:

- ✓ линейная комбинация линейно независимых функций;
- ✓ функция, заданная аналитически и совпадающая с табличной в узлах интерполяции;
- ✓ функция, пересекающаяся с заданной табличной во всех точках ее определения;
- ✓ функция, для которой $\sum_{i=1}^{n}\left(\varphi(x_i)-f(x_i)\right)^2=0$.

111. Если $\varphi(x)=\sum_{k=0}^{n} C_k \Phi_k(x)$ – интерполянта функции $f(x)$, заданной точками (x_i, y_i), то:

- ✓ неизвестные функции $\Phi_k(x)$ можно найти из СНАУ $y_i=\sum_{k=0}^{n} C_k \Phi_k(x_i)$;
- ✓ C_k – система линейно независимых векторов;
- ✓ каждая функция $\Phi_k(x)$ – полином степени k;
- ✓ $\Phi_k(x)$ – система заданных линейно независимых функций.

112. Для функции $f(x)$, $x \in [a,b]$, заданной таблично в узлах (x_i, y_i), найдены две интерполянты: на основе системы степенных функций $\varphi(x)$ и на основе системы тригонометрических функций $\omega(x)$. Выберите правильные положения:

- ✓ $\forall x \in [a,b] \quad f(x) = \varphi(x) = \omega(x)$;
- ✓ $\exists x \in [a,b] \quad f(x) = \varphi(x) = \omega(x)$;
- ✓ $\{x_i\}$ – множество корней функции $v(x) = \varphi(x) - \omega(x)$;
- ✓ если $\varphi(x) = \sum_{k=0}^{n} C_k x^k$, то $\omega(x) = \sum_{k=0}^{n} C_k (\cos kx + \sin kx)$.

113. СЛАУ для определения интерполяционного полинома записана в виде $\sum_{k=0}^{n} C_k x_j^k = y_j$, $j = 0, \ldots, n$. Выберите правильные утверждения:

- ✓ эта система всегда имеет решение;
- ✓ определитель матрицы коэффициентов при любых значениях x_j, таких, что $x_j \neq x_i$ при $i \neq j$ не равен 0;
- ✓ ни один из C_k, $k = 0, \ldots, n$, не может быть равным 0;
- ✓ один из столбцов определителя Вандермонда состоит только из компонент, равных единице.

114. Интерполяционный полином для интерполирования табличной функции, значения которой известны в $(n+1)$-й точке:

- ✓ определяется единственным образом;
- ✓ всегда существует независимо от системы узлов интерполяции (x_i, y_i);
- ✓ имеет степень, меньшую либо равную $(n+1)$;
- ✓ содержит в своей структуре $(n+1)$ коэффициентов.

115. Интерполяционный полином Лагранжа:

- ✓ представляет собой дробно-рациональную функцию;
- ✓ имеет вид $\sum_{k=0}^{n} y_k \cdot \prod_{\substack{i=0 \\ i \neq k}} \frac{(x - x_i)}{(x_k - x_i)}$;
- ✓ определен только на интервале интерполирования;
- ✓ является полиномом степени и вида $d_0 + d_1 x + d_2 x^2 + \ldots + d_n x^n$, где $d \geq 0$, $i = 1, \ldots, n$.

116. Для оценки точности полиномиального приближения функции $\varphi(x)$ в некоторой точке x полиномом Лагранжа степени n необходимо:

- ✓ построить полином Лагранжа степени n;
- ✓ оценить максимальное значение производной функции $\varphi(x)$ порядка $(n+1)$;
- ✓ вычислить приближенное значение $\varphi(x)$ с помощью полинома Лагранжа;
- ✓ знать узлы интерполирования.

117. Определить коэффициент при старшей степени переменной x полинома Лагранжа по следующей таблице:

i	0	1
x_i	1	2
y_i	0,5	1

- ✓ 2;
- ✓ 1,5;
- ✓ 1;
- ✓ 0,5.

118. Построить полином Лагранжа и определить приближенное значение функции в точке $x = 1{,}5$ для функции, заданной следующей таблицей:

i	0	1
x_i	1	2
y_i	0,5	1

- ✓ 1,25;
- ✓ 0,75;
- ✓ 1,5;
- ✓ 0,25.

119. Определить значение коэффициента при x^0 интерполяционного полинома Лагранжа для следующей таблично заданной функции:

i	0	1
x_i	1	2
y_i	0,5	1

- ✓ 0,5;
- ✓ 1;
- ✓ 0;
- ✓ 0,25.

120. Выберите выражения, которые являются слагаемыми в интерполяционном полиноме Ньютона:

- ✓ $\dfrac{\Delta y_0}{h \cdot 1!}(x - x_0)$;
- ✓ $\dfrac{\Delta^2 y_1}{h^2 \cdot 2!}(x - x_0)(x - x_1)$;
- ✓ $\dfrac{\Delta^n y_n}{h^n \cdot n!}(x - x_0)\ldots(x - x_n)$;
- ✓ $\dfrac{\Delta^3 y_0}{h^3 \cdot 3!}(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)$.

121. Выберите правильные положения из нижеприведенных.

- ✓ Для построения интерполяционного полинома Ньютона порядка n необходимо вычислить все разделенные разности до порядка $(n+1)$ включительно.
- ✓ Величина h в записи интерполяционного полинома Ньютона равна расстоянию от точки x_1 до точки x_0, где x_1 и x_0 – узлы интерполяции.
- ✓ Интерполяционные полиномы Лагранжа и Ньютона, построенные интерполированием некоторой табличной функции, представляют собой один и тот же полином.
- ✓ Неразделенные разности используются для записи полинома Ньютона только тогда, когда задан шаг интерполяции табличной функции.

122. Вычислить $\dfrac{\Delta^2 y_0}{h^2 \cdot 2!}$ для следующей табличной функции:

i	0	1	2
x_i	1	2	3
y_i	0,5	1	1,5

- ✓ 1;
- ✓ 0,5;
- ✓ 0;
- ✓ 2.

123. Вычислить $\Delta y_0^1 + \Delta y_1^1$ для следующей табличной функции:

i	0	1	2
x_i	1	2	3
y_i	0,5	1	1,5

- ✓ 0;
- ✓ 1;
- ✓ 2;
- ✓ 3.

124. Записать полином Ньютона и вычислить приближенное значение в точке $x = 2{,}5$ функции, заданной таблично:

i	0	1	2
x_i	1	2	3
y_i	0,5	1	1,5

- ✓ 1,75;
- ✓ 1,5;
- ✓ 1,25;
- ✓ 1.

125. Записать полином Ньютона для функции, заданной таблично:

i	0	1	2
x_i	1	2	3
y_i	0,5	1	1,5

- ✓ $P(x) = 0{,}5 + \frac{1}{1!}(x-1) + \frac{0{,}5}{2!}(x-1)(x-2)$;
- ✓ $P(x) = 0{,}5 + \frac{0{,}5}{2!}(x-1)$;
- ✓ $P(x) = x - 0{,}5$;
- ✓ $P(x) = \frac{1}{2}x$.

126. Выберите правильные условия, необходимые для построения кубического полинома для сплайн-интерполяции в точке x_i, $i = 1, \ldots, n$:

- ✓ $P(x_i) = y_i$;
- ✓ $\lim\limits_{\substack{x \to x_i \\ x_{i-1} < x < x_i}} P'(x) = \lim\limits_{\substack{x \to x_i \\ x_{i-1} > x > x_i}} P'(x)$;
- ✓ $\frac{d^2P}{dx^2}(x_i - 0) = \frac{d^2P}{dx^2}(x_i + 0)$;
- ✓ $P''(x_i) = P''(x_{i+1})$.

127. Заданы точки интерполяции x_i, $i = 1, \ldots, n$. Выберите правильные положения:

- ✓ Для кубической сплайн-интерполяции табличной функции, заданной в точках x_i, необходимо построить множество кубических полиномов, проходящих через каждые четыре соседние точки.
- ✓ Кубический интерполирующий полином для сплайн-интерполяции определен на всем интервале интерполяции и обладает свойством $P(x_i) = y_i$, где (x_i, y_i) – узлы интерполяции.
- ✓ Метод сплайн-интерполяции предполагает построение кубического полинома на каждом из интервалов $[x_i, x_{i+1}]$.
- ✓ Коэффициенты каждого кубического полинома при сплайн-интерполяции определяются из условия совпадения соседних полиномов и их производных до второго порядка включительно.

128. При аппроксимации функций решается задача:

- ✓ построение функции, заданной аналитически и проходящей через те же точки, что и таблично заданная аппроксимируемая функция;
- ✓ приближения заданной табличной функции некоторой функцией из выбранного класса по методу наименьших квадратов;
- ✓ определения коэффициентов функции выбранного типа, заданной аналитически из условия минимума среднеквадратического отклонения;
- ✓ построения алгоритма расчета значений табличной функции в точках, не совпадающих с узлами интерполяции.

129. При аппроксимации табличной функции многочленом степени m:

- ✓ значения многочлена при значениях аргумента, равных табличным, обязательно совпадают со значениями табличной функции;
- ✓ степень многочлена определяется количеством точек, в которых задана табличная функция;
- ✓ его коэффициенты представляют собой вектор решения задачи минимизации среднеквадратичного отклонения многочлена от известной функции, заданной таблично;
- ✓ его коэффициенты являются решением СЛАУ, называемой нормальной.

130. Выберите правильно записанный k-й компонент вектора-столбца нормальной системы, возникающей при решении задачи аппроксимации функции по n точкам:

- ✓ $\sum_{j=0}^{n} y_j^k x_j$;
- ✓ $\sum_{j=0}^{n} y_j^k x_j^k$;
- ✓ $\sum_{j=0}^{n} x_j^k$;
- ✓ $\sum_{j=0}^{n} x_j^k y_j$.

131. k-е уравнение нормальной СЛАУ для решения задачи полиномиальной аппроксимации

$$a_0 \sum_{j=0}^{n} x_j^k + a_1 \sum_{j=0}^{n} x_j^{k+1} + \ldots + a_m \sum_{j=0}^{n} x_j^{k+m} = \sum_{j=0}^{m} y_j x_j^k$$

получается из соотношения:

- ✓ $a_0 + a_1 x_k + a_2 x_k^2 + \ldots + a_m x_k^m - y_k = 0$;
- ✓ $\min\limits_{a_k} \sum_{j=0}^{n} \left(a_0 + a_1 x_j + a_2 x_j^2 + \ldots + a_m x_j^m - y_j\right)^2$;
- ✓ $\dfrac{\partial \left[\sum_{j=0}^{n} \left(a_0 + a_1 x_j + a_2 x_j^2 + \ldots + a_m x_j^m - y_j\right)^2 \right]}{\partial x_k}$;
- ✓ $\dfrac{\partial \left[\sum_{j=0}^{n} \left(a_0 + a_1 x_j + a_2 x_j^2 + \ldots + a_m x_j^m - y_j\right)^2 \right]}{\partial a_k}$.

132. Для решения задачи аппроксимации выберите правильное уравнение $\dfrac{\partial S}{\partial a_1} = 0$, если аппроксимирующей функцией является полином 3-й степени, а исходная функция задана следующей таблицей:

j	0	1	2
x_j	1	2	3
y_j	1	4	9

- ✓ $2a_0 + 4a_1 + 6a_2 = 6$;
- ✓ $3a_0 + 6a_1 + 14a_2 = 14$;
- ✓ $6a_0 + 14a_1 + 32a_2 = 32$;
- ✓ $8a_0 + 16a_1 + 34a_2 = 36$.

133. Для решения задачи аппроксимации выберите правильное уравнение $\frac{\partial S}{\partial a_2} = 0$, если аппроксимирующей функцией является полином 3-й степени, а исходная функция задана следующей таблицей:

j	0	1	2
x_j	1	2	3
y_j	1	4	9

- ✓ $3a_0 + 6a_1 + 14a_2 = 14$;
- ✓ $5a_0 + 10a_1 + 20a_2 = 20$;
- ✓ $6a_0 + 14a_1 + 32a_2 = 36$;
- ✓ $16a_0 + 32a_1 + 44a_2 = 56$.

134. Для решения задачи аппроксимации выберите правильное уравнение $\frac{\partial S}{\partial a_3} = 0$, если аппроксимирующей функцией является полином 3-й степени, а исходная функция задана следующей таблицей:

j	0	1	2
x_j	1	2	3
y_j	1	4	9

- ✓ $6a_0 + 14a_1 + 36a_2 = 36$;
- ✓ $12a_0 + 14a_1 + 28a_2 = 28$;
- ✓ $14a_0 + 36a_1 + 98a_2 = 98$;
- ✓ $7a_0 + 18a_1 + 49a_2 = 49$.

135. Выберите два уравнения для вычисления коэффициентов A и B аппроксимирующей функции $y = Ae^{Bx}$ по методу наименьших квадратов, если исходная функция задана следующей таблицей:

j	0	1	2
x_j	1	2	3
y_j	1	4	9

- ✓ $Ae^{B}-1+\left(Ae^{2B}-1\right)e^{B}+\left(Ae^{3B}-1\right)e^{2B}=0$;
- ✓ $\left(Ae^{B}-1\right)+2\left(Ae^{2B}-1\right)e^{B}+3\left(Ae^{3B}-1\right)e^{2B}=0$;
- ✓ $2\left(Ae^{B}-1\right)+6\left(Ae^{2B}-1\right)e^{2B}+9\left(Ae^{3B}-1\right)e^{3B}=0$;
- ✓ $Ae^{B}-1+\left(2Ae^{2B}-1\right)e^{2B}+\left(3Ae^{3B}-1\right)e^{3B}=0$.

136. Для оценки параметров аппроксимирующей линейной эмпирической формулы, построенной по экспериментальным данным, необходимо вычислить:
- ✓ коэффициенты линейной модели;
- ✓ дисперсию узлы аппроксимации;
- ✓ случайной величины;
- ✓ взвешенную сумму квадратов.

137. Выбор эмпирической линейной модели, построенной по экспериментальным данным, адекватен реальной зависимости, если:
- ✓ отношение меры рассеивания S_l^2, вызванного случайной ошибкой к взвешенной сумме квадратов S_r^2, больше либо равно значению критерия Фишера $F_{1-\alpha}$ (α – уровень значимости);
- ✓ $\dfrac{S_l^2}{S_r^2}\ge\dfrac{1}{F_{1-\alpha}}$, где α – уровень значимости;
- ✓ – модель записана в виде $\hat{y}=a+b\left(x-\bar{x}\right)$, где $\bar{x}$ – среднее, a и b – коэффициенты линейной модели;
- ✓ уровень значимости выбран таким образом, чтобы выполнялось соотношение $\dfrac{S_r^2}{S_l^2}\ge F_{1-\alpha}$, где α – уровень значимости.

138. Решение задачи среднеквадратичной аппроксимации в метрическом пространстве позволяет:
- ✓ найти коэффициенты аппроксимирующей функции, заданной в виде линейной комбинации ортогональных функций;
- ✓ построить систему ортонормированных функций для аппроксимации заданной;
- ✓ минимизировать норму разности между заданной функцией и линейной комбинацией системы аппроксимирующих функций;
- ✓ сконструировать функцию из системы заданных, являющуюся наилучшим приближением к аппроксимируемой функции.

139. Среднеквадратичное отклонение функции $f(x)$ от функции $\varphi(x)$ на интервале $[a,b]$, $x_i \in [a,b]$, $i = 1, 2, \ldots, n$, есть функционал:

- ✓ $I = \int\limits_a^b \left(f(x) - \varphi(x)\right)^2 dx$;
- ✓ $S = \sum\limits_{i=1}^{n} \left(f(x) - \varphi(x)\right)^2$;
- ✓ $Q = \sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n} \left(f(x) - \varphi(x)\right)^2}$;
- ✓ $R = \sum\limits_{i=1}^{n} \int\limits_{x_i}^{x_{i=1}} \left(f(t) - \varphi(t)\right)^2 dt$.

140. Дано множество точек (x_j, y_j), $j = 1, 2, \ldots, n$: $f(x_j) = y_j$, $\varphi(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_m x^m$ – аппроксимирующий полином для функции $f(x)$. Если $m = n - 1$, то задача аппроксимации:

- ✓ не имеет решения;
- ✓ имеет единственное решение;
- ✓ имеет множество решений;
- ✓ является задачей интерполяции.

141. Метод наименьших квадратов позволяет:

- ✓ определить коэффициенты аппроксимации функции полиномом;
- ✓ свести задачу аппроксимации к задаче интерполяции;
- ✓ получить СЛАУ для определения интерполяционного полинома;
- ✓ определить экстремумы аппроксимирующих многочленов.

142. При определении коэффициентов аппроксимации функции всегда решается:

- ✓ система нелинейных алгебраических уравнений;
- ✓ система линейных алгебраических уравнений;
- ✓ СЛАУ или СНАУ, в зависимости от вида аппроксимирующей функции;
- ✓ система линейных дифференциальных уравнений.

143. Нормальная система уравнений для определении коэффициентов аппроксимирующего полинома является:

- ✓ однородной;
- ✓ недоопределенной;
- ✓ однозначно разрешимой;
- ✓ плохообусловленной.

144. Заданную табличную функцию можно аппроксимировать:
- ✓ линейной функцией;
- ✓ полиномом произвольной степени;
- ✓ дробно-рациональной функцией;
- ✓ многоэкстремальной функцией.

145. Для оценки параметров эмпирической функции необходимо знать:
- ✓ число наблюдений;
- ✓ условия наблюдений;
- ✓ меру рассеивания, вызванного случайной ошибкой;
- ✓ дисперсию случайной величины.

146. Задачи аппроксимации и интерполяции различаются между собой:
- ✓ постановкой задачи о приближении табличной функции;
- ✓ методами построения аппроксимирующих функций;
- ✓ полиномиальным приближением заданной функции;
- ✓ условиями существования решения задачи.

6. Численное интегрирование

147. Задача численного интегрирования:
- ✓ является некорректной;
- ✓ имеет единственное решение;
- ✓ устойчива к ошибкам в начальных данных;
- ✓ не ограничена по точности решения.

148. Для задачи численного интегрирования можно:
- ✓ задавать сетку на интервале интегрирования;
- ✓ вычислять сетку на интервале интегрирования;
- ✓ задавать весовые коэффициенты для формулы численного интегрирования;
- ✓ вычислять весовые коэффициенты для формулы численного интегрирования.

149. В основу методов численного интегрирования положен:
- ✓ принцип получения точного решения для полиномиальных подынтегральных функций;
- ✓ метод Зейделя решения СЛАУ;
- ✓ принцип равномерного распределения точек сетки интегрирования;
- ✓ способ вычисления интеграла по частям.

150. Для вычисления определенного интеграла численным методом необходимо:

- ✓ с помощью замены переменных привести интеграл к стандартному виду;
- ✓ на интервале интегрирования $[a, b]$ задать дискретное множество точек, называемое сеткой;
- ✓ определить значения коэффициентов C_k, $k = 0, \ldots, N$, такие, чтобы $\left(\sum_{k=0}^{N} C_k f(x_k) - \int_a^b f(x)dx\right)^2 \to \min_{C_k}$;
- ✓ воспользоваться одним из численных методов в системе MathCAD.

151. Выберите правильные утверждения.

- ✓ Любой определенный интеграл $\int_a^b f(x)dx$ можно привести к виду $k\int_0^1 \bar{f}(s)ds$ таким образом, чтобы численные значения этих интегралов стали одинаковыми.
- ✓ Общая квадратурная формула для вычисления определенного интеграла имеет вид: $\int_a^b f(x)dx = \sum_{k=0}^{n} C_k f(x_k)$.
- ✓ Шаблон квадратурной формулы – это множество точек $0 \le S_0 < S_1 < \ldots < S_m \le 1$, таких, что $S_i - S_{i-1} = h$.
- ✓ Задача численного интегрирования не является устойчивой к ошибкам, вносимым в подынтегральную функцию.

152. Выберите правильные положения.

- ✓ Для построения квадратурной формулы необходимо: а) задать шаблон квадратурной формулы; б) определить каким-либо методом весовые коэффициенты формулы.
- ✓ Если формула интегрирования является точной для всех степенных функций до степени *n*, то она будет точной для любого полинома степени $\le n$.
- ✓ Для определения весов квадратурной формулы необходимо решить СНАУ $\sum_{i=0}^{m} P_i S_i^j = \frac{1}{j+1}$ относительно неизвестных S_i.
- ✓ Система уравнений для определения коэффициентов квадратурной формулы имеет единственное решение.

153. Квадратурная формула задана в виде соотношения: $\int\limits_a^b f(x)dx = \sum\limits_{i=1}^{N} f(x_{i-1} + 0{,}5h) \cdot h$. Выберите правильное утверждение:

- ✓ Эта формула соответствует методу трапеций.
- ✓ Шаблон формулы содержит один узел.
- ✓ В этой формуле $x_i = x_{i-1} + 0{,}5h$.
- ✓ По данной формуле $\int\limits_a^b f(x)dx$ вычисляется как сумма площадей под кусочно-линейной функцией, аппроксимирующей функцию $f(x)$.

154. Квадратурная формула задана в виде соотношения: $\int\limits_a^b f(x)dx = \sum\limits_{i=1}^{N} \frac{f(x_{i-1}) + f(x_{i-1} + h)}{2} h$. Выберите правильное утверждение:

- ✓ Данная формула использует равномерный шаблон на интервале [0, 1].
- ✓ Точки шаблона совпадают с крайними точками интервала [a, b].
- ✓ Каждое слагаемое формулы соответствует площади прямоугольника с высотой $f(x_i)$ и площадью основания $x_i - x_{i-1}$.
- ✓ Это формула трапеций.

155. Из нижеприведенных квадратурных формул выберите те, которые соответствуют методу трапеций:

- ✓ $I_N = \frac{h}{2} f(x_0) + \sum\limits_{i=2}^{N} hf(x_{i-1}) + \frac{h}{2} f(x_N)$;
- ✓ $I_N = hf(x_0 + 0{,}5h) + \sum\limits_{i=2}^{N-1} hf(x_{i-1} + 0{,}5h) + hf(x_{N-1} + 0{,}5h)$;
- ✓ $I_N = \sum\limits_{i=1}^{N} 0{,}5hf(x_{i-1}) + \sum\limits_{i=1}^{N} 0{,}5hf(x_{i-1} + h)$;
- ✓ $I_N = h\left(f(x_0) + 2\sum\limits_{i=1}^{N-1} f(x_i) + f(x_N) \right)$.

156. Система уравнений для определения коэффициентов квадратурной формулы

$$\begin{cases} P_0 + P_1 + P_2 = 1; \\ 0 \cdot P_0 + 0{,}5 \cdot P_1 + P_2 = 0{,}5; \\ 0 \cdot P_0 + 0{,}25 \cdot P_1 + P_2 = \frac{1}{3} \end{cases}$$

соответствует методу:

- ✓ шаблон которого содержит три узла;
- ✓ трапеций;
- ✓ точки шаблона которого равноотстоят друг от друга;
- ✓ Симпсона.

157. В формуле Симпсона

$$I_N = \frac{1}{6}h\sum_{i=1}^{N}\left(f(x_{i-1}) + 4f\left(x_{i-1} + \frac{1}{2}h \right) + f(x_{i-1} + h) \right):$$

- ✓ $x_0 = a,\ x_N = b$;
- ✓ используется параболическая аппроксимация;
- ✓ расстояние между точками шаблона равно 0,5;
- ✓ использованы значения трех коэффициентов квадратурной формулы.

158. Выберите правильные утверждения:

- ✓ Метод построения квадратурной формулы Котеса использует тот же принцип, что и метод построения формулы Симпсона – требование вычисления точных значений интегралов при интегрировании полиномов.
- ✓ Для построения формулы Котеса необходимо знать интерполяционные коэффициенты Лагранжа.
- ✓ Шаблон для формулы Котеса должен совпадать с точками интерполяции подынтегральной функции по методу Лагранжа.
- ✓ При построении формулы Котеса можно использовать только четырехточечный шаблон.

159. При использовании формулы Котеса для вычисления определенного интеграла используются интерполяционные полиномы 2-й степени. В этом случае (выберите правильное положение):

- ✓ вычисляются три коэффициента квадратурной формулы $\int_0^1 f(s)ds = \sum_{k=0}^{m} P_k f(s_k)$;
- ✓ шаблон квадратурной формулы содержит две точки;
- ✓ необходимо вычислить четыре интерполяционных коэффициента Лагранжа;
- ✓ значение определенного интеграла $\int_0^1 f(s)ds$ вычисляется по формуле $I_2 = \sum_{k=0}^{2} f(s_k)\int_0^1 L_k^2(s)ds$.

160. Выберите правильные положения:

- ✓ Общий вид квадратурной формулы Чебышева $I_N = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{m} f(x_i)$, где N – количество точек сетки, m – степень интерполяционного полинома.
- ✓ Система уравнений для определения точек разбиения интервала интегрирования в формуле Чебышева: $\sum_{i=1}^{N} x_i^m = \frac{N}{m+1}$.
- ✓ В формуле Чебышева весовые коэффициенты квадратурной формулы вычисляются по уравнению $P_m = \frac{1}{m}, \quad m = 1, 2, \ldots, N$.
- ✓ Для использования формулы Чебышева необходимо предварительно задать шаблон $s_k: \quad 0 \le s_0 < s_1 < \ldots < s_N \le 1$.

161. Выберите правильные положения:

- ✓ Для вычисления весовых коэффициентов квадратурной формулы Гаусса необходимо решить систему линейных уравнений с определителем матрицы коэффициентов Вандермонда.
- ✓ При использовании формулы Гаусса весовые коэффициенты и узлы шаблона находятся из одной и той же системы нелинейных алгебраических уравнений.
- ✓ Для отыскания двухточечного шаблона квадратурной формулы Гаусса требуется решить два нелинейных алгебраических уравнения.
- ✓ Квадратурную формулу Гаусса нельзя применять при интегрировании функции, значение которой может быть получено только в узлах равномерной сетки.

162. Выберите правильные утверждения:

- ✓ Точность квадратурной формулы всегда определяется только количеством точек шаблона.
- ✓ Точность квадратурной формулы трапеции выше, чем точность формулы прямоугольников, и ниже, чем точность формулы Симпсона.
- ✓ Точность квадратурной формулы Гаусса не может быть ниже точности формулы Чебышева при одинаковом количестве точек шаблона.
- ✓ Погрешность квадратурной формулы не зависит от значений подынтегральной функции, но зависит от максимума скорости изменения первой производной на интервале интегрирования.

163. Шаблон квадратурной формулы содержит три узла: $s_0 = 0$; $s_1 = \frac{1}{2}$; $s_2 = 1$. Выберите первый и третий (в любой последовательности) столбцы матрицы коэффициентов СЛАУ для определения весов квадратурной формулы:

$$\begin{pmatrix} 0{,}5 \\ 0{,}5 \\ 0{,}5 \end{pmatrix}; \qquad \begin{pmatrix} 0 \\ 0{,}25 \\ 1 \end{pmatrix}; \qquad \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}; \qquad \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

164. Шаблон квадратурной формулы содержит два узла: $s_0 = 0$; $s_1 = 1$. Определите весовые коэффициенты P_1, P_2 квадратурной формулы:

- ✓ $P_1 = 1,\ P_2 = 0$;
- ✓ $P_1 = 0{,}5;\ P_2 = 1{,}5$;
- ✓ $P_1 = 0,\ P_2 = 1$;
- ✓ $P_1 = 0{,}5;\ P_2 = 0{,}5$.

165. Шаблон квадратурной формулы прямоугольников содержит один узел. Какие значения можно выбрать в качестве координаты этого узла?

- ✓ $s_0 = 0$;
- ✓ $s_0 = \frac{1}{2}$;
- ✓ $s_0 = \frac{1}{4}$;
- ✓ $s_0 = 1$.

166. При решении задачи численного интегрирования возможны следующие действия:

- ✓ задание шаблона квадратурной формулы;
- ✓ вычисление шаблона квадратурной формулы;
- ✓ задание весовых коэффициентов квадратурной формулы;
- ✓ вычисление весовых коэффициентов квадратурной формулы.

167. Производные функции $f(x)$ в заданной точке x_0, вычисленные аналитически и численно, в точности совпадают, если:

- ✓ для всех x из области определения функции значение $f(x)$ $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \text{const}$;
- ✓ функция $f(x) = kx + b$, где k, b – константы;

- ✓ $f(x)$ – нелинейная, непрерывная и дифференцируемая функция в области определения
- ✓ функция $f(x)$ – постоянная в области определения.

168. Численную производную функции в заданной точке x_0 можно вычислить при помощи:
- ✓ разложения ее в ряд Тейлора;
- ✓ путем дифференцирования интерполяционного Ньютона в точке x_0;
- ✓ посредством геометрических построений и измерений;
- ✓ как предел отношения приращения функции к приращению аргумента;

169. Выберите значения первой и второй производной функции, заданной нижеследующей таблицей, в точке $x = 0{,}7$, по формуле дифференцирования, использующей три узла.

x	0,5	0,7	0,9
y	0,25	0,5	0,8

- ✓ –1,4475;
- ✓ 2,1025;
- ✓ 0,3125;
- ✓ –1,5625.

7. Численное дифференцирование

170. Для задачи Коши $\dfrac{du}{dt} = F(t, u)$, $u(0) = u_0$ известно, что она имеет единственное решение. Выберите условия, входящие в совокупность достаточных условий для этого утверждения:
- ✓ $F(t, u)$ дифференцируема в прямоугольнике
$$P = \{t:\ 0 \le t \le T,\quad u:\ |u - u_0| < V\};$$
- ✓ $F(t, u)$ непрерывна в прямоугольнике
$$P = \{t:\ 0 \le t \le T,\quad u:\ |u - u_0| < V\};$$
- ✓ $|F(t, u_1) + F(t, u_2)| \le k|u_1 - u_2|$, $u_1,\ u_2 \in P$;
- ✓ $|F(t_1, u) + F(t_2, u)| \le r|t_1 - t_2|$, $t_1,\ t_2 \in P$.

171. Для построения дискретного аналога дифференциального уравнения $\frac{du}{dt}=F(t,u)$, $0\le t\le T$, $U\le u\le V$ задается множество точек, называемых сеткой. Выберите правильные определения сетки:

- ✓ $\overline{W}_V=\{u_n=vn;\ n=0,1,\ldots\}$.
- ✓ Разбиение интервала $[0,T]$ точками t_k, произвольно расположенными в этом интервале.
- ✓ Множество точек $t_k\in[0,T]$, $k=0,1,\ldots,N$, $t_0=0$, $t_N=T$, равноотстоящих друг от друга.
- ✓ Множество точек $\varpi=\{t_k=\tau k,\ k=0,1,\ldots,N,\ \ t_N=T\}$.

172. Разностный аналог дифференциального уравнения $\frac{du}{dt}=F(t,u)$ записан в виде $\frac{u_{n+1}-u_n}{\tau}=F(t_n,u_n)$, $n=0,1,\ldots$ Выберите правильные пояснения:

- ✓ t_n – точки равномерного разбиения интервала $[0,T]$ определения переменной $t\in[0,T]$;
- ✓ u_n – известные значения функции $u(t)$ в точках t_n, т.е. $u_n=u(t_n)$;
- ✓ τ – параметр сетки;
- ✓ $\{u_k\}$, $k=0,1,\ldots,N$ – вектор неизвестных системы $u_{n+1}=u_n+\tau F(t_n,u_n)$ алгебраических уравнений.

173. Выберите правильные определения и понятия, связанные с представлением дифференциального уравнения $\frac{du}{dt}=F(t,u)$, $u(0)=u_0$ в дискретной форме $u_{n+1}=u_n+\tau F(t_n,u_n)$, $u(0)=u_0$:

- ✓ Такой метод называется методом Рунге – Кутта.
- ✓ Этот метод позволяет определить все неизвестные значения u_n, не прибегая к решению СЛАУ специальными методами.
- ✓ Такой способ решения дифференциального уравнения называется явной схемой.
- ✓ Этот метод дает возможность оценки ошибки итерационного процесса на $(n+1)$-й итерации по формуле $u_{n+1}-u_n=\tau F(t_n,u_n)$.

174. Метод Эйлера для решения дифференциального уравнения $\frac{du}{dt}=F(t,u)$, $u(0)=0$:

- ✓ является явным;

- ✓ имеет порядок аппроксимации $o(\tau^2)$;
- ✓ имеет порядок точности $o(\tau)$;
- ✓ при $\tau \to 0$, где τ – параметр сетки, обеспечивает сходимость приближенного решения к точному со скоростью $o(\tau^2)$.

175. При определении порядка аппроксимации и порядка точности метода Эйлера для решения дифференциального уравнения $\frac{du}{dt} = F(t, u)$, $u(0) = u_0$ используется:

- ✓ разложение функции u в точке t_n по степеням параметра сетки в ряд Тейлора до второго порядка малости;
- ✓ разложение функции $F(t,\ u(t))$ в точке t_n до второго порядка малости;
- ✓ подстановка точных значений функции $u(t)$ в дискретное уравнение;
- ✓ подстановка дискретных значений u_n, $n = 0, 1, \ldots$, в точное уравнение.

176. Выполнить две итерации по схеме Эйлера для решения задачи Коши $\frac{du}{dt} = u$, $u(0) = 1$, если $0 \le t \le 1$, $\varpi_\tau = \left\{ t_n = \frac{1}{10} n;\ n = 0, 1, \ldots \right\}$ Выбрать из заданных чисел значение u_2 – численное решение в точке t_2 – и значение дискретного аналога производной в точке t_2:

- ✓ 1,11;
- ✓ 1,1;
- ✓ 1,01;
- ✓ 1,21.

177. Анализируя численную последовательность приближенного решения задачи Коши $\frac{du}{dt} = u$, $u(0) = 1$ по методу Эйлера с заданной сеткой $\varpi_\tau = \left\{ t_n = \frac{1}{10} n;\ n = 0, 1, \ldots \right\}$, определить, является ли последовательность значений приближенного решения $\{u_n\}$, $n = 0, 1, \ldots$

- ✓ возрастающей;
- ✓ убывающей;
- ✓ арифметической прогрессией;
- ✓ геометрической прогрессией.

178. Выполнить две итерации по схеме Эйлера для решения задачи Коши $\frac{du}{dt} = t, \quad u(0) = 1$, если $0 \le t \le 1, \quad \overline{\varpi}_\tau = \left\{ t_n = \frac{1}{10} n; \ n = 0, 1, \ldots \right\}$. Выбрать из заданных чисел значение u_2 – численное решение в точке t_2 – и значение дискретного аналога производной в точке t_2:

- ✓ 1,01;
- ✓ 1,11;
- ✓ 1,21;
- ✓ 1,0.

179. Анализируя численную последовательность приближенного решения задачи Коши $\frac{du}{dt} = t, \quad u(0) = 1$, по методу Эйлера с заданной сеткой $\overline{\varpi}_\tau = \left\{ t_n = \frac{1}{10} n; \ n = 0, 1, \ldots \right\}$, определить, является ли последовательность значений приближенного решения $\{u_n\}, \quad n = 0, 1, \ldots$

- ✓ убывающей;
- ✓ возрастающей;
- ✓ арифметической прогрессией;
- ✓ геометрической прогрессией.

180. Схема Эйлера для решения задачи Коши выглядит следующим образом: $u_{n+1} = u_n + \left(1 + \frac{\tau}{t_n} \right)$. Выберите дифференциальные уравнения, соответствующие данной схеме:

- ✓ $t \frac{du}{dt} = u(t)$;
- ✓ $u' = t_n$;
- ✓ $\frac{du}{dt} = u(t)$;
- ✓ $u' = \frac{u}{t}$.

181. Разностная схема для решения задачи Коши задана в виде: $\frac{u_{n+1} - u_n}{\tau} = \frac{1}{2} \left[F(t_n, u_n) + F(t_{n+1}, u_{n+1}) \right]$. Выберите правильные характеристики этой схемы:

- ✓ Схема является неявной, так как неизвестная дискретная функция u_n не может быть явно выражена через аргумент t_n.

- ✓ Схема явная, так как разностный аналог производной $\frac{u_{n+1}-u_n}{\tau}$ явно выражен через функции $F(t_n, u_n)$ и $F(t_{n+1}, u_{n+1})$.
- ✓ Схема неявная, так как u_{n+1} не выражена явно через u_n.
- ✓ Схема неявная, так как не является схемой Эйлера.

182. Если дифференциальное уравнение представлено в виде разностной схемы $\frac{u_{n+1}-u_n}{\tau}=\frac{1}{2}[F(t_n, u_n)+F(t_{n+1}, u_{n+1})]$, то для определения неизвестной дискретной функции $\{u_n\}$ необходимо:

- ✓ решить систему в общем случае нелинейных алгебраических уравнений;
- ✓ использовать метод прогонки;
- ✓ задать начальное приближение вектора $\{u_n\}$ и использовать метод итераций;
- ✓ преобразовать схему, приведя ее к явному виду.

183. Из представленных разностных схем для решения дифференциальных уравнений 1-го порядка выберите схемы с порядком точности $o(\tau^2)$, где τ – параметр сетки:

- ✓ $u_{n+1}=u_n+\frac{\tau}{2}[F(t_n, u_n)+F(t_{n+1}, \tilde{u}_{n+1})], \quad \tilde{u}_{n+1}=u_n+\tau F(t_n, u_n);$
- ✓ $\frac{u_{n+1}-u_n}{\tau}=\frac{1}{2}[F(t_n, u_n)+F(t_{n+1}, u_{n+1})];$
- ✓ $u_{n+1}=u_n+\tau F(t_n, u_n);$
- ✓ $\bar{u}_n=u_n+\frac{1}{2}\tau F(t_n, u_n), \quad u_{n+1}=u_n+\tau F\left(t_n+\frac{1}{2}\tau, \bar{u}_n\right).$

184. Для задачи Коши $\frac{du}{dt}=u, \quad u(0)=1$, по схеме второго порядка при $\sigma=\frac{1}{2}$, $a=1$ вычислить и выбрать значения $\bar{u}_1$, u_1 при параметре сетки, равном 0,1:

1,215; 1,100; 1,015; 1,105.

185. Для задачи Коши $\frac{du}{dt} = u + t$ выбрать из предложенных схему Эйлера и схему «предиктор – корректор»:

- ✓ $u_{n+1} = u_n + \frac{\tau}{2}[u_n + u_{n+1} + t_n + t_{n+1}]$;
- ✓ $\frac{u_{n+1} - u_n}{\tau} = u_n + t_n$;
- ✓ $u_{n+1} = u_n + \tau F(t_n, u_n + \tau F(t_n, u_n))$;
- ✓ $\bar{u}_n = u_n + \frac{1}{2}\tau F(t_n, u_n), \quad u_{n+1} = u_n + \tau F\left(t_n + \frac{1}{2}\tau, \bar{u}_n\right)$.

186. Выберите правильные характеристики метода Рунге – Кутта:

- ✓ Это разностная схема 4-го порядка аппроксимации.
- ✓ Это разностный метод решения дифференциальных уравнений $\frac{du}{dt} = F(t, u)$, использующий на каждой итерации два вычисления функции $F(t, u)$.
- ✓ Это явная разностная схема.
- ✓ Это другое название метода «предиктор – корректор».

187. Для решения задачи Коши $\frac{du}{dt} = t,\ u(0) = 0$, при заданной сетке $\overline{\varpi}_\tau = \{t_n = n \cdot 0{,}1;\ n = 0, 1, \ldots\}$ выполнить один шаг по методу Рунге – Кутта и выбрать правильные значения k_3 и u_1:

- ✓ 0,05;
- ✓ 0,01;
- ✓ $\frac{1}{100}$;
- ✓ $\frac{1}{30}$.

188. Выполнить один шаг решения задачи Коши $\frac{du}{dt} = u,\ u(0) = 1$, по методу Рунге – Кутта и выбрать правильные значения k_2 и u_1, если $\overline{\varpi}_\tau = \{t_n = n \cdot 0{,}1;\ n = 0, 1, \ldots\}$:

- ✓ 1,0525;
- ✓ 1,10525;
- ✓ 1,01;
- ✓ 1,05.

189. Выберите правильные характеристики методов Адамса для решения задачи Коши:

- ✓ Метод Адамса предназначен для решения дифференциальных уравнений, когда правая часть задана в виде интерполяционного полинома.
- ✓ Метод Адамса можно применить только в совокупности с другим явным методом численного решения дифференциального уравнения.
- ✓ При реализации метода Адамса используется метод экстраполяции.
- ✓ Методом Адамса можно решать дифференциальные уравнения, у которых правая часть – разрывная функция.

190. Для того чтобы численно решить дифференциальное уравнение $u'' + p(x)u' - q(x)u = f(x)$ на интервале $[a, b]$, его необходимо дополнить начальными и граничными условиями типа (выберите правильные):

- ✓ $u(a) = u_a$; $\dfrac{du}{dx}(a) = u'_a$;
- ✓ $u(a) = u_a$; $\dfrac{du}{dx}(b) = u'_b$;
- ✓ $u(a) = u_a$; $u(b) = u_b$;
- ✓ $\dfrac{du}{dx}(a) = u'_a$; $\dfrac{du}{dx}(b) = u'_b$.

191. Какому дифференциальному уравнению соответствует разностная схема $\dfrac{u_{i-1} - 2u_i + u_{i+1}}{h^2} + p_i \dfrac{u_{i+1} - u_{i-1}}{2h} - q_i u_i = f_i$?

- ✓ $(u')^2 + \dfrac{1}{2} p(x)u' - q(x)u = f(x)$;
- ✓ $\dfrac{1}{h^2} u'' + \dfrac{p(x)}{h} u' - q(x)u = f(x)$;
- ✓ $u'' + p(x)u' - q(x)u = f(x)$;
- ✓ $\dfrac{du'}{dx} + p(x)u' - q(x)u = f(x)$.

192. Для реализации метода прогонки решения дифференциального уравнения $u'' + p(x)u' - q(x)u = f(x)$ на интервале $[0, L]$ задачу необходимо дополнить условиями вида:

- ✓ $u(0) = u_0$; $\dfrac{du}{dx}(0) = u'_0$;

- ✓ $\frac{du}{dx}(0)=u_0'$; $\frac{du}{dx}(L)=u_L'$;
- ✓ $u(0)=u_0$; $u(L)=u_L$;
- ✓ $u(0)=u(L)$; $\frac{du}{dx}(0)=u_0'$.

193. Выберите правильные положения, используемые при реализации метода прогонки:
- ✓ Базовым является предположение о линейности решения разностного уравнения.
- ✓ Строится зависимость $y_i=\alpha_{i+1}y_{i+1}+\beta_{i+1}$ с неопределенными коэффициентами α_{i+1}, β_{i+1}
- ✓ Вычисление значений y_i происходит пошагово по формулам $y_{n-1}=\alpha_n y_n+\beta_n$, начиная с $n=N$, то есть с конца интервала определения аргумента.
- ✓ Коэффициенты α_1, β_1 определяются из краевых условий.

194. Известно аналитическое решение уравнения в частных производных первого порядка:

$$u(x,t)=\Phi(x-at)+\int_0^t F(x-at+at',\ t')dt'.$$

Выберите правильные пояснения к этому выражению:
- ✓ $\Phi(x-at)$ – это произведение константы Φ на линейную комбинацию переменных *x* и *t*.
- ✓ $F(x-at+at',\ t')$ – функция, стоящая в правой части дифференциального уравнения.
- ✓ Подынтегральная функция получается из функции $F(x,t)$ путем замены переменных.
- ✓ *a* – числовой параметр, $\Phi(x)$ – начальное условие для дифференциального уравнения.

195. Выберите правильные объяснения разностного аналога дифференциального уравнения в частных производных первого порядка: $\frac{u_k^{n+1}-u_k^n}{\tau}+a\frac{u_{k+1}^n-u_k^n}{h}=f_k^n$, $u_k^0=\varphi_k$:
- ✓ u_k^{n+1} – компонента в матрице решения разностного уравнения;
- ✓ $u_{k+1}^n-u_k^n$ – неразделенная разность численных решений в точках сетки $\omega_\tau=\{t_n=\tau n,\ n=0,1,\ldots\}$;

- ✓ $\psi_k = \Phi(x_k)$;
- ✓ $\dfrac{u_k^{n+1} - u_k^n}{\tau}$ – аналог частной производной по переменной t.

196. Вычислительный алгоритм решения разностного аналога дифференциального уравнения в частных производных первого порядка записан в виде: $u_k^{n+1} = \left(1 + a\dfrac{\tau}{h}\right)u_k^n - a\dfrac{\tau}{h}u_{k+1}^n + \tau f_k^n$, $u_k^0 = \varphi_k$. Выберите правильные утверждения:

- ✓ Это неявная схема, т.к. в правой части присутствует неизвестная величина u_{k+1}^n, взятая из $(k+1)$-й итерации.
- ✓ Это явная схема, т.к. в левой части стоит величина с $(n+1)$-й итерации, а в правой части – величины с n-й итерации.
- ✓ Величины a, τ, h, f_k^n таковы, что f_k^n – известная матрица, а a, τ, h задаются при решении задачи.
- ✓ параметр τ выбирается таким образом, чтобы $\dfrac{\tau}{h} = 1$.

197. Для разностной схемы решения дифференциального уравнения в частных производных первого порядка известно выражение, полученное при исследовании аппроксимации и точности разностного аналога:

$$\frac{u_k^{n+1} - u_k^n}{\tau} + a\frac{u_{k+1}^n - u_k^n}{h} = \left(\frac{\partial u}{\partial t} + a\frac{\partial u}{\partial x}\right) + A.$$

Выберите правильные положения:

- ✓ $A = o(\tau^2, h^2)$, то есть имеем второй порядок малости аппроксимации.
- ✓ Величина A говорит о точности решения дифференциального уравнения разностным методом.
- ✓ Точность аппроксимации исходного дифференциального уравнения обусловливается величиной A и равна в данном случае $o(\tau, h)$.
- ✓ Величина A свидетельствует о сходимости численного решения к точному при $\tau,\ h \to 0$.

198. Из приведенных выражений выберите неявную разностную схему решения дифференциального уравнения в частных производных второго порядка

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},\ u(0, x) = u_0(x);\quad -\infty < x < \infty,\quad 0 \le t \le T,$$

а также условие устойчивости явной схемы:

- ✓ $\dfrac{u_k^{n+1} - u_k^n}{\tau} = a\dfrac{u_{k+1}^n - 2u_k^n + u_{k-1}^n}{h^2}$;
- ✓ абсолютно устойчива;
- ✓ $2a\tau \le h^2$;
- ✓ $\dfrac{u_k^{n+1} - u_k^n}{\tau} = a\dfrac{u_{k+1}^{n+1} - 2u_k^{n+1} + u_{k-1}^{n+1}}{h^2}$.

199. Выберите методы, которые можно применять при решении системы алгебраических уравнений, полученных при аппроксимации дифференциального уравнения второго порядка разностной схемой:

- ✓ метод итераций;
- ✓ метод LU-разложения;
- ✓ метод Зейделя;
- ✓ метод прогонки.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Бахвалов, Н.С. Численные методы (анализ, алгебра, обыкновенные дифференциальные уравнения) [Текст]: учеб. пособие / Н.С. Бахвалов – М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1973. – 632 с.

2. Данко, П.Е. Высшая математика в упражнениях и задачах [Текст]: учеб. пособие для вузов: в 2 ч. Ч. 2 / П.Е. Данко, А.Г. Попов, Т.Я. Кожевникова, С.П. Данко. – 7-е изд., испр. – М.: Изд-во «Оникс»; Изд-во «Мир и образование», 2008. – 448 с.

3. Демидович, Б.П. Основы вычислительной математики [Текст]: учеб. пособие для втузов / Б.П. Демидович, И.А. Марон; под общ. редакцией Б.П. Демидовича. – 2-е изд., испр. – М.: Гос. изд. физ.-мат. лит., 1963.– 660 с.

4. Демидович, Б.П. Численные методы анализа. Приближение функций, дифференциальные и интегральные уравнения [Текст]: учеб. пособие / Б.П. Демидович, И.А. Марон, Э.З. Шувалова. – 3-е изд., перераб. – М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1967.– 368 с.

5. Васильков, Ю.В. Компьютерные технологии вычислений в математическом моделировании [Текст]: учеб. пособие / Ю.В. Васильков, Н.Н. Василькова – М.: Финансы и статистика, 1999 – 256 с.

6. Вержбицкий, В.М. Основы численных методов [Текст]: учебник для вузов / В.М. Вержбицкий. – М.: Высшая школа, 2002. – 840 с.

7. Задачи и упражнения по математическому анализу [Текст]: учеб. пособие для втузов / под ред. Б.П. Демидовича. – 7-е изд., стер. – М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1970. – 472 с.

8. Киреев, В.И. Численные методы в примерах и задачах [Текст]: учеб. пособие / В.И. Киреев, А.В. Пантелеев. – М.: Высшая школа, 2004. – 480 с.

9. Копченова, Н.В. Вычислительная математика в примерах и задачах [Текст]: учеб. пособие / Н.В. Копченова, И.А. Марон.– 2-е изд., стер. – СПб.: Лань, 2008. – 368 с.

10. Кошев, А.Н. Введение в численные методы [Текст]: учеб. пособие / А.Н. Кошев, С.В. Бакушев, И.Г. Гвоздева. – Пенза: ПГАСА, 2000. – 53 с.

11. Кошев, А.Н. Вычислительные методы [Текст]: учеб. пособие / А.Н. Кошев, В.В. Кузина. – Пенза: ПГУАС, 2013. – 204 с.

12. Кошев, А.Н. Численные методы и методы оптимизации [Текст]: учеб. пособие: в 2 ч. / А.Н. Кошев, В.В. Кузина. – Пенза: ПГУАС, 2004. – 136 с.

13. Курсовые работы по направлению 230200 «Информационные системы» [Текст]: методические указания для студентов специальности "Информационные системы и технологии" по выполнению курсовых работ / А.Н. Кошев, В.В. Кузина – Пенза: ПГУАС, 2006. – 28 с.

14. Охорзин, В.А. Прикладная математика в системе MATHCAD [Текст]: учеб. пособие / В.А. Охорзин. – 2-е изд., испр. и доп. – СПб.: Лань, 2008. – 352 с.

15. Пантелеев, А.В. Методы оптимизации в примерах и задачах [Текст]: учеб. пособие / А.В. Пантелеев, Т.А. Летова. – М.: Высшая школа, 2002. – 544 с.

16. Плис, А.И. Mathcad. Математический практикум для инженеров и экономистов [Текст]: учеб. пособие / А.И. Плис, Н.А. Сливина. – 2-е изд., перераб. и доп. – М.: Финансы и статистика, 2003. – 656 с.

17. Самарский, А.А. Введение в численные методы [Текст]: учеб. пособие для вузов / А.А. Самарский. – 2-е изд., перераб. и доп. – М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1987. – 287 с.

18. Самарский, А.А. Задачи и упражнения по численным методам [Текст]: учеб. пособие / А.А. Самарский, П.Н. Вабищевич, Е.А. Самарская. – М.: Эдиториал УРСС, 2000. – 208 с.

19. Супрун, А.Н. Вычислительная математика для инженеров-экологов [Текст]: методическое пособие / А.Н. Супрун, В.В. Найденко. – М.: Изд-во Ассоциации строительных вузов, 1996. – 391 с.

20. Тыртышников, Е.Е. Методы численного анализа [Текст]: учеб. пособие для студ. вузов / Е.Е. Тыртышников – М.: ИЦ «Академия», 2007. – 320 с.

21. Химмельблау, Д. Прикладное нелинейное программирование [Текст] / Д. Химмельблау; пер. с англ. И.М. Быховской и Б.Т. Вавилова; под ред. М.Л. Быховского – М.: Мир, 1975. – 534 с.

ТЕРМИНЫ И ПОНЯТИЯ

Адекватность модели
Алгоритм
– реализуемый
– условно-устойчивый
– устойчивый – неустойчивый
– экономичный
Алгоритма
– точность
– устойчивость
Аналог
– дискретный
– непрерывный
– операции
– разностный (конечно-разностный)
– условия
– формулы
Аппроксимация
– среднеквадратичная
– конечно- разностная

Гладкость функции

Задача
аппроксимации
– дифференцирования
– интегрирования
– интерполирования
– корректна – некорректна
– Коши
– краевая
– разрешима
– устойчива

Интерполяция (интерполирование)
– двумерная
– дробно-рациональная
– кубическая
– обратная
– полиномиальная
– – Лагранжа
– – Ньютона
– сплайновая
– тригонометрическая
Интерполянта
Интегрирвание численное

Корень
– уравнения
– функции
Критерий Фишера

Матрица
– высокого порядка
– диагональная
– ленточная
– наддиагональная
– невырожденная
– неособенная
– поддиагональная
– положительно-, отрицательно-определенная
– плотная – разреженная
– расширенная
– самосопряженная
– с диагональным преобладанием элементов
– симметричная
– Якоби
Метод
– LU-разложения
– Адамса
– Гаусса
– двухслойный (одношаговый)
– Зейделя
– интегрирования
– итерационный
– исключения
– касательных
– комбинированный (хорд и касательных)
– Крамера
– наименьших квадратов

О Г Л А В Л Е Н И Е

Учебное издание

Кузина Валентина Владимировна
Кошев Александр Николаевич

КОНТРОЛЬНО-ИЗМЕРИТЕЛЬНЫЕ МАТЕРИАЛЫ ПО КУРСУ «ВЫЧИСЛИТЕЛЬНАЯ МАТЕМАТИКА»

Учебно-методическое пособие

Р е д а к т о р М.А. Сухова
В е р с т к а В.В. Кузина, Н.В. Кучина

Подписано в печать 31.05.2013. Формат 60x84/16.
Бумага офисная «Снегурочка». Печать на ризографе.
Усл.печ.л. 5,58. Уч.-изд.л. 6,0. Тираж 80 экз.
Заказ № 119.

Издательство ПГУАС.
440028, г. Пенза, ул. Германа Титова, 28