МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Федеральное государственное бюджетное образовательное
учреждение высшего профессионального образования
«Пензенский государственный университет
архитектуры и строительства»

КОНТРОЛЬНО-ИЗМЕРИТЕЛЬНЫЕ МАТЕРИАЛЫ ПО КУРСУ «ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ И МЕТОДЫ ОПТИМИЗАЦИИ»

Учебно-методическое пособие

Пенза 2013

УДК 519.6 (075.8)
ББК 22.193я73
К65

Рекомендовано Редсоветом университета

Рецензент – доктор технических наук, профессор А.М. Данилов (ПГУАС)

Контрольно-измерительные материалы по курсу «Численные
К65 методы и методы оптимизации»: учеб.-метод. пособие / В.В. Кузина, А.Н. Кошев. – Пенза: ПГУАС, 2013. – 60 с.

Изложены цели и задачи курса численных методов и методов оптимизации. Приведены программа курса, контрольные вопросы и задания для самопроверки уровня теоретических знаний и практических навыков решения задач при выполнении лабораторных работ. Даны задания для лабораторных работ, варианты заданий для промежуточного контроля, задания для коллоквиума, тестовые задания для итогового контроля по всем разделам курса, библиографические сведения.

Подготовлено на кафедре «Информационно-вычислительные системы» и предназначено для студентов, обучающихся по программе бакалавриата по направлению 230400 «Информационные системы и технологии». Использование пособия рекомендуется при изучении дисциплины Б2.В.3 «Численные методы и методы оптимизации» математического и естественнонаучного цикла по ФГОС 3-го поколения, но может быть полезно студентам и аспирантам всех направлений, в образовательных программах которых предусмотрено изучение численных методов решения задач оптимизации.

© Пензенский государственный университет архитектуры и строительства, 2013
© Кузина В.В., Кошев А.Н., 2013

ПРЕДИСЛОВИЕ

Важной и обязательной составляющей учебного процесса в вузе является контроль знаний и умений студентов. От эффективности организации контроля во многом зависит качество знаний, усвоенных студентами в процессе изучения курса.

Формы реализации и методы как педагогического контроля, так и самоконтроля студентов могут быть разными, однако они должны способствовать достижению цели изучения дисциплины «Численные методы и методы оптимизации».

В результате изучения данной дисциплины и контроля усвоения материала у студентов и слушателей курса формируются знания основных алгоритмов типовых численных методов решения математических задач, а также умения применять математические методы при решении профессиональных задач повышенной сложности, в том числе в интегрированной математической среде MathCad.

Необходимыми предпосылками для успешного усвоения дисциплины являются знания, умения, навыки, компетенции, сформированные у студентов при изучении курсов математического анализа, вычислительной математики, а признаком успешного усвоения – выполнение всех контрольных заданий, представленных в данном учебно-методическом пособии. Знания, полученные при изучении курса, помогут в усвоении дисциплин специализации.

Подготовлено на кафедре «Информационно-вычислительные системы» и предназначено для студентов, обучающихся по программе бакалавриата по направлению 230400 «Информационные системы и технологии». Использование пособия рекомендуется при изучении дисциплины Б2.В.3 «Дополнительные главы математики. Численные методы и методы оптимизации» математического и естественнонаучного цикла по ФГОС 3-го поколения, но может быть полезно студентам и аспирантам всех направлений, в образовательных программах которых предусмотрено изучение численных методов решения задач оптимизации.

Теоретический материал, примеры решения задач и выполнения лабораторных работ изложены в учебном пособии [11].

Авторы надеются, что пособие поможет студентам дневной, заочной форм обучения и экстерната в систематизации и закреплении теоретических знаний, полученных за время обучения, а также в приобретении и закреплении навыков самостоятельной работы.

СПИСОК ОБОЗНАЧЕНИЙ И СОКРАЩЕНИЙ

R^n	– n-мерное евклидово арифметическое пространство
$\Omega \subset R^n$	– множество Ω принадлежит R^n, т.е. является его подмножеством
$x \in \Omega$	– x принадлежит множеству Ω, т.е. является его элементом
$\lvert x \rvert$	– длина (модуль), евклидова норма вектора x
$\lVert A \rVert$	– евклидова норма матрицы A
A^T	– матрица, транспонированная к матрице A
Δz	– приращение функции z
$\nabla \Phi(x)$ или $\mathrm{grad}\Phi(x)$	– градиент функции $\Phi(x_1, x_2, \ldots, x_n)$
$\Phi'_{\bar{e}}(x)$	– производная функции Φ по направлению $\bar{e}$
(a, b)	– скалярное произведение векторов a и b
$\min\limits_X f(x)$, $\max\limits_X f(x)$	– минимальное и максимальное значения функции $f(x)$ на множестве X
$f(x) \to \min, \quad x \in \Omega$	– задача минимизации функции $f(x)$ на множестве Ω
$H(x) = \nabla^2 f(x) = \left[\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} \right]$	– матрица Гёссе
ЗВП	– задача выпуклого программирования
ЗЛП	– задача линейного программирования
ЗМП	– задача математического программирования
ЗНП	– задача нелинейного программирования
ЛР	– лабораторная работа
МО	– методы оптимизации
НЭЗ	– некорректные экстремальные задачи
ОДЗ	– область допустимых значений
ОДУ	– обыкновенное дифференциальное уравнение
СЛАУ	– система линейных алгебраических уравнений
СНУ	– система нелинейных уравнений
СРС	– самостоятельная работа студента

ВВЕДЕНИЕ

Задачи оптимизации представляют собой задачи поиска оптимальных решений – минимума или максимума целевой функции при заданной системе ограничений.

В соответствии с задачами оптимизации классифицируют и методы их решения. Математические методы можно разделить на два класса: аналитические и численные. Каждый из этих классов имеет свою область применения. Аналитические методы более характерны для начальных этапов исследования задачи, численные методы – для заключительных этапов, связанных с получением количественных показателей. Аналитические методы жестко зависят от решаемой задачи и зачастую плохо поддаются формализации. Численные методы в меньшей степени зависят от задачи и легкоформализуемы, что позволяет их запрограммировать на алгоритмических языках.

Численные методы решения задач оптимизации используются в случаях, когда не удается найти точное решение возникшей математической задачи. Чаще всего это происходит из-за того, что искомое решение обычно не выражается в привычных для нас элементарных или других функциях. Численные методы позволяют свести решение таких задач к арифметическим и некоторым логическим действиям, т.е. к действиям, которые выполняет компьютер. Численные методы служат теоретической основой для решения математических задач на компьютерах.

РАБОЧАЯ ПРОГРАММА КУРСА «ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ И МЕТОДЫ ОПТИМИЗАЦИИ»

Целью изучения дисциплины является формирование базы для развития профессиональных компетенций, а именно овладение численными методами алгебры, математического анализа, методами решения задач оптимизации целевых функций без ограничений и с ограничениями различного вида для их дальнейшего применения в профессиональной деятельности.

Задачей изучения дисциплины является приобретение студентами знания о численных методах алгебры и математического анализа, о методах отыскания экстремумов функций и их применимости в профессиональной деятельности; формирование умения использования численных методов для решения линейных уравнений и систем и методов оптимизации для отыскания точек экстремума функций без ограничений и при их наличии; выработка умения реализовывать численные методы и методы оптимизации в различных интегрированных математических средах (MathCAD, MATLAB и др.).

Основные дидактические единицы дисциплины:

1. Введение. Основные этапы численного эксперимента. Погрешности. Корректность. Устойчивость. Требования к алгоритмам.

2. Решение уравнений с одной переменной. Задача отделения корней. Методы уточнения корней: метод половинного деления; метод простой итерации; метод «золотого сечения»; метод хорд и метод касательных; метод Ньютона.

3. Решение систем линейных алгебраических уравнений приближенными методами: простой итерации и Зейделя, методом релаксации, методом LU-разложения матрицы коэффициентов.

4. Решение систем нелинейных алгебраических уравнений методами простой итерации, Ньютона – Рафсона, Левенберга – Марквардта.

5. Задачи линейного программирования. Геометрическая интерпретация. Опорные решения. Численные методы решения задачи линейного программирования.

6. Задачи выпуклого программирования. Функция Лагранжа. Теорема Куна – Таккера.

7. Методы отыскания экстремумов функций без ограничений. Методы численного решения задачи нелинейного программирования (метод Лагранжа, теорема Куна – Таккера для нелинейных задач математического программирования).

В результате изучения дисциплины студент должен:

✓ **знать**: методы решения алгебраических уравнений и их систем; методы отыскания экстремумов функций; методы решения задач линейного, выпуклого и нелинейного программирования;

✓ **уметь**: решать алгебраические уравнения и системы, находить точки экстремума функций при наличии ограничений;

✓ **владеть**: навыками работы в интегрированных математических средах, навыками работы с прикладными математическими пакетами программ.

Виды учебной работы включают в себя: лекции, лабораторные занятия, курсовую работу.

Изучение дисциплины заканчивается экзаменом.

Необходимыми предпосылками для успешного усвоения дисциплины являются знания, умения, навыки, компетенции, сформированные у студентов при изучении курсов математического анализа, вычислительной математики, а признаком успешного усвоения – выполнение всех контрольных заданий, представленных в данном учебно-методическом пособии. Знания, полученные при изучении курса, помогут в усвоении дисциплин специализации.

Структура дисциплины состоит из 68 часов аудиторных занятий (34 часа лекций и 34 часа лабораторных работ) и 68 часов самостоятельной работы студентов.

Компетенции дисциплины[1]

Индекс компетенции	Формулировка
1	2
ПК-1	Способность проводить предпроектное обследование объекта проектирования, системный анализ предметной области, их взаимосвязей
ПК-4	Способность разрабатывать средства реализации информационных технологий (методические, информационные, математические, алгоритмические, технические и программные)
ПК-5	Способность проводить моделирование процессов и систем
ПК-12	Способность разрабатывать средства реализации информационных технологий (методические, информационные, математические, алгоритмические, технические и программные)

[1] Выписка из Федерального государственного образовательного стандарта высшего профессионального образования по укрупненной группе 230400 «Информационные системы и технологии».

1	2
ПК-13	Способность разрабатывать средства автоматизированного проектирования информационных технологий
ПК-18	Способность использовать технологии разработки объектов профессиональной деятельности, в областях: машиностроение, приборостроение, наука, техника, образование, медицина, административное управление, юриспруденция, бизнес, предпринимательство, коммерция, менеджмент, банковские системы, безопасность информационных систем, управление технологическими процессами, механика, техническая физика, энергетика, ядерная энергетика, силовая электроника, металлургия, строительство, транспорт, железнодорожный транспорт, связь, телекоммуникации, управление инфокоммуникациями, почтовая связь, химическая промышленность, сельское хозяйство, текстильная и легкая промышленность, пищевая промышленность, медицинские и биотехнологии, горное дело, обеспечение безопасности подземных предприятий и производств, геология, нефтегазовая отрасль, геодезия и картография, геоинформационные системы, лесной комплекс, химико-лесной комплекс, экология, сфера сервиса, системы массовой информации, дизайн, медиаиндустрия, а также предприятия различного профиля и все виды деятельности в условиях экономики информационного общества
ПК-23	Способность проводить сбор, анализ научно-технической информации, отечественного и зарубежного опыта по тематике исследования
ПК-25	Способность обосновывать правильность выбранной модели, сопоставляя результаты экспериментальных данных и полученных решений
ПК-26	Готовность использовать математические методы обработки, анализа и синтеза результатов профессиональных исследований
ПК-34	Готовность адаптировать приложения к изменяющимся условиям функционирования

Содержание разделов и тем лекционного курса

Раздел 1. Задачи линейного программирования

Тема 1. *Введение*. Предмет и задачи курса, представление о методах математического программирования и их классификации, основные понятия и типы задач оптимизации, примеры формулировки задач математического программирования.

Тема 2. *Элементы линейного программирования.* Постановка задачи линейного программирования (ЗЛП), каноническая форма представления ЗЛП, типичные ЗЛП.

Тема 3. *Решение ЗЛП.* Графический метод решения ЗЛП, свойства решения ЗЛП, свойства и методы определения опорных решений, представление о симплекс-методе решения задачи.

Раздел 2. Элементы выпуклого программирования

Тема 4. *Выпуклый анализ.* Выпуклые множества, выпуклые функции, непрерывность и дифференцируемость. Экстремальные свойства функций на выпуклых множествах.

Тема 5. *Элементы выпуклого программирования*. Постановка и решение задачи выпуклого программирования (ЗВП), основные теоремы.

Раздел 3. Нелинейное программирование

Тема 6. *Решение задач оптимизации нелинейных функций без ограничений.* Методы минимизации нулевого, первого и второго порядков.

Тема 7. *Решение задач оптимизации нелинейных функций с ограничениями.* Теорема Куна – Таккера, методы внутренней и внешней точки, метод барьеров.

Тема 8. *Некорректные экстремальные задачи.* Понятие о некорректных экстремальных задачах (НЭЗ), понятие о методе Левенберга – Марквардта, понятие о методе Тихонова.

Лабораторные занятия

1. Решение ЗЛП графическим способом.
2. Опорные решения ЗЛП.
3. Решение ЗЛП Симплексным методом.
4. Решение задач о выпуклых фукнкциях.
5. Решение задач методами на основе теоремы Куна – Таккера.
6. Решение задач минимизации методами нулевого и первого порядков.
7. Решение задач методом сопряженного градиента и Ньютона.
8. Постановка ЗНП, решение ЗНП методом Лагранжа.

9. Решение задач методами на основе теоремы Куна – Таккера для ЗНП.
10. Решение ЗНП методами внутренней и внешней точки.
11. Решение НЭЗ методом Левенберга – Марквардта.
12. Решение НЭЗ методом Тихонова.

Самостоятельная работа

Текущая СРС – работа с лекционным материалом, подготовка к лабораторным занятиям; опережающая самостоятельная работа; выполнение домашних заданий; изучение тем, вынесенных на самостоятельную проработку; подготовка к зачету.

Содержание самостоятельной работы студентов по дисциплине

В процессе изучения дисциплины студенты должны самостоятельно овладеть следующими темами:

1. Решение задач оптимизации методами линейного программирования.
2. Решение задач минимизации функций.
3. Решение задач выпуклого и нелинейного программирования.

Промежуточный контроль знаний – теоретических и практических – производится в процессе защиты студентами лабораторных работ и выполнение коллоквиума. Контроль и оценка знаний производятся в соответствии с рейтингом. Окончательный контроль знаний осуществляется в форме сдачи зачета (с учетом набранных баллов).

Контроль самостоятельной работы

Рубежный контроль в опросе студентов по теоретической и практической части.

По результатам текущего и рубежного контроля формируется допуск студента к зачету. Зачет проводится в виде тестирования или в устной форме и оценивается преподавателем.

Учебно-методическое обеспечение самостоятельной работы студентов

Для самостоятельной работы студентов используются учебная литература, сеть Internet для работы с Web-серверами научных библиотек, интегрированные математические системы и другие научно-образовательные ресурсы.

Организация самостоятельной работы производится в соответствии с графиком учебного процесса и самостоятельной работы.

ВОПРОСЫ И ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОПРОВЕРКИ

К теме 1

1. Какие задачи решают и где применяются методы оптимизации?
2. На какие этапы можно разделить процесс принятия решений в исследовании операций?
3. Что такое информационное моделирование?
4. Сформулируйте в общем виде задачу математического программирования.
5. По каким признакам классифицируются задачи математического программирования?
6. Что в задаче математического программирования называют допустимым решением, а что – оптимальным решением?
7. Приведите пример задачи дробно-линейного программирования.
8. Какая функция называется целевой?
9. Чем задача безусловной оптимизации отличается от задачи условной оптимизации?
10. Можно ли задачу поиска максимума функции преобразовать в задачу поиска минимума?
11. Приведите пример задачи математического программирования, не имеющей решения. Можно ли утверждать, что задача математического программирования имеет решение, если допустимое множество замкнуто и ограничено?
12. Как построить линии уровня целевой функции?
13. Что такое градиент функции?
14. Что показывает вектор градиента, антиградиента?
15. Как определить производную по направлению **D**?
16. Чему равен градиент функции в точке экстремума?
17. Нарисуйте локальный и глобальный минимумы функции в некоторой области.
18. Какая точка называется стационарной?
19. Определите стационарную точку функции

$$f(x_1, x_2) = x_1^3 + x_2^2 - x_1 - x_2$$

на интервале $x_1 \in (0, 2)$; $x_2 \in (0, 2)$.

20. Задана точка $X^0(1,1)$ и определено направление $\mathbf{D} = (2,1)$. Точки на прямой, соответствующие направлению **D** и проходящие через заданную точку, выражаются уравнением

$$y = X^0 + \tau D .$$

21. Напишите уравнение прямой, проходящей через заданную точку.

22. Для функции $\Phi(x_1, x_2) = x_1^2 + 0{,}1x_2^2$ вычислите направление наискорейшего возрастания в точке $X^0(1,1)$.

23. Определите точки экстремума функции $\Phi(x_1, x_2)$.

24. Вычислите производную по направлению **D** в точке X^0.

К теме 2

25. Докажите, что если функция $f(x)$, определенная на интервале $[a, b]$, такова, что $f(a) \cdot f(b) > 0$, то уравнение $f(x) = 0$ имеет четное число корней либо не имеет их вовсе. Сформулируйте задачу линейного программирования в общем виде.

26. Какой вид могут иметь ограничения в ЗЛП?

27. Можно ли в ЗЛП ограничение типа неравенства привести к ограничению типа равенства? Каким образом?

28. Как привести известные вам типичные ЗЛП к каноническому виду?

29. Предприятие выпускает два типа продукции ($j = 1, 2$) и использует при этом три вида ресурсов ($i = 1, 2, 3$). Запас каждого вида ресурса ограничен условными величинами: 270, 600, 240 соответственно. На производство единицы j-го продукта расходуется a_{ij} единиц i-го ресурса: $a_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 6 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$. Доход от реализации единицы 1-го продукта составляет 3 у.е., 2-го – 2 у.е. Осуществите постановку задачи по определению объема производства каждого продукта таким образом, чтобы при имеющихся ресурсах получить максимальную прибыль.

30. Составьте математическую модель транспортной задачи, имеющей следующие условия.

В трех пунктах отправления сосредоточен однородный груз в количествах 420 т, 380 т и 400 т соответственно, который необходимо перевести в три пункта назначения в количествах, равных 260 т, 520 т и 420 т соответственно. Тарифы перевозок 1 т груза из каждого пункта отправления в каждый пункт назначения задаются матрицей

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 7 & 5 & 8 \\ 6 & 9 & 7 \end{pmatrix}.$$

Найдите план перевозок, обеспечивающий вывоз имеющегося в пунктах отправления и завоз необходимого в пунктах назначения груза при минимальной общей стоимости перевозок.

31. Сформулируйте задачу о передаче максимального количества информации по разветвленной сети каналов связи между двумя пунктами.

К теме 3

32. Сколько решений может иметь ЗЛП? Отчего это зависит? Можно ли определить эти решения графически?

33. Что представляет собой линия уровня?

34. Когда задача оптимизации имеет решение?

35. Дайте определение выпуклого множества и приведите примеры выпуклых и невыпуклых множеств.

36. В каком месте допустимой области ЗЛП находится ее оптимальное решение?

37. Какие решения ЗЛП называются опорными?

38. Как можно определить опорные решения ЗЛП аналитически и графически?

39. К какому виду необходимо привести ЗЛП для решения ее симплексным методом?

40. Как выбирается генеральный элемент в симплекс-методе?

41. Имеются листы бумаги размером 10×10 см. Из этой бумаги необходимо вырезать 5 равносторонних треугольников со стороной 6 см; 8 кругов диаметром 4 см; 7 прямоугольников со стороной 5 см. Сформулируйте ЗЛП для определения оптимального плана раскроя листов бумаги, минимизирующего функцию отходов. Решите задачу графически. Определите опорные решения.

42. Решите ЗЛП симплекс-методом

$$f(x) = x_1 - 2x_2 + 6x_3 + 2x_4 - 3x_5 \to \min$$

при ограничениях

$$\begin{cases} 9x_1 \qquad - 2x_3 + x_4 + x_5 = 4; \\ 3x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 - 3x_5 = 3; \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0. \end{cases}$$

К теме 4

43. Дайте определение функции выпуклой (строго выпуклой), вогнутой (строго вогнутой).

44. Какая матрица называется матрицей Гёссе?

45. Какая функция является положительно-полуопределенной в выпуклом множестве?

46. Какая точка называется внутренней, внешней, граничной точкой выпуклого множества?

47. Какая область называется регулярной?

48. Какую роль в задачах минимизации играет функция Лагранжа?

49. Что такое седловая точка функции Лагранжа?

50. Пусть дана задача поиска $\max \varphi(x)$ при ограничениях $h_i(x) \geq 0$, $i = 1,...,n$; $x_g \geq 0$, $j = 1,\ldots,m$, где $\varphi(x)$, $h_g(x)$ – вогнутые функции. Запишите функцию Лагранжа для этой задачи. Приведите пример.

51. Сформулируйте условия теоремы Куна – Таккера для задачи $f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2 \to \min\limits_{x_1, x_2}$ при ограничениях $x_1 > 0$; $x_2 > 0$; $x_1^2 + x_2^2 - 1 \leq 0$ и решите задачу.

К теме 5

52. Приведите характерные различия методов минимизации нулевого, первого и второго порядков.

53. Влияет ли шаг в методе перебора на точность, на скорость решения задачи нахождения оптимума?

54. Если отрезок $[a, b]$ содержит внутреннюю точку c, то какое условие называется «золотым сечением»?

55. Вычислить коэффициент τ для метода золотого сечения.

56. Всегда ли метод золотого сечения гарантированно дает решение?

57. Можно ли применять для минимизации функции метод, аналогичный методу «золотого сечения», но с параметром $\tau \neq \dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$? Чем такой метод будет существенно отличаться от метода «золотого сечения»?

58. Как повысить точность метода «золотого сечения»?

59. Почему для функций «овражного типа» методы первого порядка не являются эффективными? Является ли функция $z = 10^{-6} y^2 + x^2$ функцией овражного типа? Обоснуйте.

60. В чем преимущество методов минимизации, использующих производные функции, перед методами, не использующими производные? Обоснуйте на примере.

61. Каково условие окончания поиска минимума функции $f(x)$ по методу покоординатного спуска? В каких случаях это условие может «не сработать»? Приведите пример.

62. С какой целью проводится исследующий поиск вокруг базовой точки в методе Хука и Дживса?

63. Почему метод градиентного спуска не может быть использован для отыскания минимума линейной формы? Дайте геометрическую интерпретацию для случая $f(x_1, x_2)$.

64. В каких случаях градиентный метод может не привести в точку минимума?

65. Какую роль в формуле $x^{(k+1)} = x^{(k)} - \dfrac{\lambda^{(k)} \nabla f\left(x^{(k)}\right)}{\left\|\nabla f\left(x^{(k)}\right)\right\|}$ играет делитель $\left\|\nabla f(x^{(k)})\right\|$ и как его вычислить? Является эта величина векторной или скалярной?

66. В чем состоит идея метода сопряженного градиента?

67. Для минимизации каких функций методом Ньютона достаточно выполнить один шаг?

68. В чем сходство и различие методов Ньютона для решения СНАУ и минимизации функций?

69. Выполните один шаг минимизации функции $f(x, y) = x^2 + y^2$ из начальной точки (2, 2) методом наискорейшего спуска с оптимальным выбором параметра оптимизации λ.

70. Напишите алгоритм модифицированного метода наискорейшего спуска, когда вычисленный градиент функции на некотором шаге минимизации используется несколько раз.

71. Найдите минимум $f(x) = (x_1 - 1)^2 + 25(x_2 + 1)^2$ путем сведения задачи к системе алгебраических уравнений.

72. Выполните два шага минимизации функции $y = x_1^2 + 10(x_2 - 1)^2$ всеми известными вам методами многомерной оптимизации. Принять $x_0 = (1,\ 0)$.

К теме 6

73. В чем отличие задачи нелинейного программирования от задачи линейного программирования?

74. Можно ли решать ЗНП методом множителей Лагранжа, если ограничения на переменные заданы в виде неравенств?

75. В чем отличие методов внутренней и внешней точки?

76. Можно ли решать ЗНП методом штрафных функций, если ограничения на переменные заданы в виде равенств?

77. Какими свойствами должны обладать функции, участвующие в постановке ЗНП, чтобы для решения ЗНП можно было применять теорему Куна – Таккера?

78. Решите ЗНП методом, основанным на теореме Куна – Таккера:

$$x_1^2 + 10\left(x_2^2 - 2\right) \to \min_{x_1,\, x_2}; \quad x_1 + x_2 > 0; \quad x_1^2 - x_2^2 > 0.$$

ЗАДАНИЯ ДЛЯ ПРОМЕЖУТОЧНОГО КОНТРОЛЯ

Для заданной системы нелинейных уравнений и неравенств

$$\begin{cases} f(x_1, x_2) = \dfrac{n}{10}x_1^2 + \dfrac{m}{5}x_2^2 - \dfrac{2n}{10}x_1 - \dfrac{m}{5}; \\ g_1(x_1, x_2) = -\dfrac{n}{10}x_1 + \dfrac{m}{5}x_2 + \dfrac{n}{m+n} \ge 0; \\ g_2(x_1, x_2) = -\dfrac{n}{10}x_1^2 + \dfrac{m}{5}x_2 - \dfrac{n}{m+n} \ge 0; \\ x_1 \ge 0; \quad x_2 \ge 0, \end{cases}$$

где n – номер группы, m – номер по списку в журнале, выполнить следующее:

1. Доказать выпуклость функций $f(x_1, x_2)$ и $g_i(x_1, x_2)$.
2. Нарисовать область допустимых значений и линии уровня.
3. Проверить выполнение условия теоремы 3 о выпуклых функциях [11] для функции $f(x_1, x_2)$:

$$(f'(x), y - x) \le f(y) - f(x).$$

4. Сформулировать условия Куна – Таккера для данной задачи.
5. Решить задачу, выбрав начальное приближение из интервала

$$-\frac{m}{10} \le x_1 \le \frac{m}{10}; \qquad \frac{n}{2} \le x_2 \le 2n.$$

6. Проанализировать полученные результаты и сделать выводы.
7. Написать пояснительную записку с анализом литературных источников.

ВОПРОСЫ И ЗАДАНИЯ ДЛЯ КОЛЛОКВИУМА

1. Приведите пример задачи математического программирования. Разберите и классифицируйте поставленную задачу.

2. Как соотносятся между собой выпуклое и квадратичное программирование. Является ли одно из них подразделом другого? Обоснуйте ответ. Приведите пример.

3. В канонической форме ограничения типа неравенств имеют вид $g_i(x_1, \ldots, x_n) \leq 0$. Допустимо ли использование строгого неравенства (типа <) вместо нестрогого (типа $\leq$)? Ответ обоснуйте. Как ограничение с нестрогим неравенством $g_i(x_1, \ldots, x_n) \leq 0$ привести к ограничению со строгим неравенством для той же ЗНП?

4. Используя базовое определение точки минимума функции, докажите, что точка $x = 0$ является минимумом функции $y = x^2$.

5. Сколько локальных экстремумов (максимально) может иметь функция $y = ax^2 + bx^2 + cx + d$? Обоснуйте ответ.

6. Когда выражение $x = x^0 + D\tau$ определяет прямую линию? Что представляют собой величины x, x^0, D, τ? Какова разновидность этих величин?

7. Куда направлен и что показывает градиент функции n переменных? Покажите на примере.

8. В каких случаях градиент функции n переменных равен нулю? Приведите примеры.

9. Какими должны быть направляющие косинусы у заданного направления, чтобы оно совпало направлением градиента?

10. Исходя из определения, вычислите производную функции $z = x^2 + y^2$ в точке (0 ,0) по направлению $D = \{1, 1\}$.

11. Докажите, что антиградиент (вектор, противоположный градиенту) показывает направление наискорейшего убывания функции.

12. Все ли точки, в которых градиент равен нулю, являются точками минимума функции n переменных? Привести примеры.

13. Каким образом можно задать направление, перпендикулярное данному? Найдите вектор, перпендикулярный вектору $D = \{1;\ 0{,}5\}$.

14. Приведите геометрическое обоснование факта равенства нулю градиента в точке минимума. Почему в точке минимума функции одной переменной вторая производная является положительной величиной?

15. Какой математический смысл имеют следующие ситуации:

а) градиент функции равен 0 во всей области определения функции;

б) компоненты градиента одинаковы во всех точках области определения?

16. Является ли возрастающей функцией модуль градиента возрастающей функции? В каких случаях модуль градиента – убывающая функция в области определения?

17. Каково пространственное соотношение выбранного направления $\overline{d}$ и градиента ∇f в некоторой точке области определения x, если производная функции по направлению $f'_{\overline{d}}\left(x^*\right)=0$?

18. Может ли модуль градиента возрастающей функции иметь большую скорость роста, чем сама функция? Приведите пример.

19. Когда ЗЛП имеет единственное решение? Приведите пример.

20. Может ли ЗЛП иметь ровно два решения? Приведите пример.

21. Может ли ЗЛП иметь бесконечное множество решений? Приведите пример.

22. В каких случаях ЗЛП не имеет решений? Приведите пример.

23. В каких случаях ЗЛП заведомо не имеет решения?

24. Может ли ЗЛП $f\left(x\right)=\sum_{g=1}^{n} c_g x_g$; $x_g \geq 0$ иметь единственное решение? Приведите пример и геометрическую интерпретацию для вашего вывода.

25. Дайте геометрическую интерпретацию ЗЛП для функции трех переменных. Что геометрически выражают целевая функция и функции ограничений? Приведите пример.

26. Имеются листы бумаги размером 10×10 см. Из этой бумаги необходимо вырезать 5 равносторонних треугольников с длиной стороны 6 см; 8 кругов диаметром 4 см и 7 прямоугольников с длиной стороны 5 см. Сформулируйте ЗЛП для определения оптимального плана раскроя листов бумаги, минимизирующего функцию отходов.

27. Переформулируйте задачу о рационе таким образом, чтобы рацион содержал минимальное количество некоторого (вредного) вещества при ограничении стоимости корзины и сохранении остальных ограничений в задаче о рационе.

28. Приведите пример ЗЛП с двумя переменными, которая имеет в качестве решения отрезок прямой. Дайте геометрическую интерпретацию этой задачи.

29. Почему градиент целевой функции ЗЛП не зависит от точки, в которой он вычисляется? Какой поверхности он перпендикулярен? Почему?

30. При каких условиях ЗЛП имеет единственное опорное решение? Приведите пример.

31. Может ли ЗЛП иметь ровно два опорных решения? Приведите пример.

32. Каково минимальное количество опорных решений ЗЛП? В каких случаях?

33. Почему ЗЛП не может иметь бесконечное число опорных решений? Пояснить на примере.

34. Дайте геометрическое истолкование факту, что оптимальное решение ЗЛП является опорным, на примере ЗЛП второго порядка.

35. Может ли целевая функция ЗЛП быть разрывной функцией? Обоснуйте ответ.

36. Допустимо ли в ограничениях ЗЛП использование строгих неравенств?

37. Допустима ли ситуация, когда количество переменных в целевой функции не совпадает с количеством переменных в ограничениях?

38. Приведите пример, когда допустимая область ЗЛП является пустым множеством. Какой геометрический и технологический смысл имеет такая ситуация?

39. Предложите компьютерный алгоритм решения ЗЛП.

40. Предложите конкретную (с описанием всех переменных, целевой функции и ограничений) формулировку задачи о раскрое, отличную от примеров, приводимых на лекции, лабораторных и курсовых работах.

41. Предложите конкретную (с описанием всех переменных, целевой функции и ограничений) формулировку задачи о рационе, отличную от примеров, приводимых на лекции, лабораторных и курсовых работах.

42. Предложите конкретную (с описанием всех переменных, целевой функции и ограничений) формулировку задачи о планировании производства, отличную от примеров, приводимых на лекции, лабораторных и курсовых работах.

43. Предложите конкретную (с описанием всех переменных, целевой функции и ограничений) формулировку транспортной задачи, отличную от примеров, приводимых на лекции, лабораторных и курсовых работах.

44. Приведите пример задачи о раскрое, которая не имеет решения.

45. Приведите пример задачи о рационе, которая не имеет решения.

46. Приведите пример задачи о планировании производства, которая не имеет решения.

47. Приведите пример транспортной задачи, которая не имеет решения.

48. Приведите пример двумерной ЗЛП, когда область допустимых решений представляет собой треугольник.

49. Приведите пример двумерной ЗЛП, когда область допустимых решений представляет собой квадрат.

50. Приведите пример двумерной ЗЛП, когда область допустимых решений представляет собой неограниченную область.

51. Приведите пример двумерной ЗЛП, когда область допустимых решений представляет собой отрезок.

52. Приведите пример двумерной ЗЛП, когда область допустимых решений представляет собой точку.

53. Приведите пример двумерной ЗЛП, когда область допустимых решений представляет собой пустое множество.

54. Дайте определение «крайней точки» допустимого множества.

55. Приведите пример двумерной ЗЛП с неограниченной допустимой областью, имеющей единственное решение.

56. Обоснуйте свойство ЗЛП о выпуклости допустимой области.

57. Поясните смысл предложения «Целевая функция ограничена сверху на допустимом множестве» и одного из свойств решений ЗЛП.

58. Каким свойством должна обладать целевая функция, чтобы задача минимизации ЗЛП имела решение?

59. Может ли ЗЛП иметь бесконечное множество решений, когда граница допустимой области является отрезком прямой?

60. Означает ли равенство $A_1x_1 + A_2x_2 + \ldots + A_nx_n = B$ линейную зависимость векторов $A_1,\ A_2, \ldots, A_n$?

61. Может ли вектор опорного решения иметь нулевые компоненты?

62. Напишите алгоритм (составьте схему) проверки: является ли выбранное допустимое решение ЗЛП опорным.

63. Может ли ЗЛП иметь бесконечное число опорных решений? Обоснуйте ответ.

64. Есть ли связь между размерностью ЗЛП и количеством опорных решений?

65. Какова размерность вектора опорного решения? Могут ли существовать два опорных решения разной размерности?

66. Все ли опорные решения являются оптимальными решениями? Могут ли два различных опорных решения быть оптимальными?

67. Напишите алгоритм (составьте схему) решения ЗЛП с использованием понятий и свойств опорных решений.

68. Напишите алгоритм (составьте схему) поиска опорного решения ЗЛП.

69. Может ли выпуклая функция быть определена на невыпуклом множестве?

70. Пусть $y = f(x)$ – выпуклая функция, определенная на множестве *D*. Являются ли $M_1 = \{x, y : x \in D \,\&\, y \ge f(x)\}$ и $M_2 = \{x, y : x \in D \,\&\, y \le f(x)\}$ – выпуклыми множествами?

71. Чем отличаются выпуклая и строго выпуклая функции? Дайте геометрическую интерпретацию.

72. Докажите, что множество точек $M_1 = \{x : x = \lambda x_1 + (1-\lambda)x_2,\ \lambda \in [0,1]\}$ определяет в пространстве отрезок, соединяющий точки x_1 и x_2.

73. Какое множество точек определяется равенством $y = \lambda f(x_1) + (1-\lambda) f(x_2)$ при $x_1, x_2 \in D$, где *D* – выпуклое множество?

74. Является ли неравенство $f(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) \le \alpha_1 f(x_1) + \alpha_2 f(x_2)$, где $\alpha_1 < 1,\ \alpha_2 < 1$, определяющим выпуклую функцию?

75. Всегда ли четные функции (удовлетворяющие условию $f(-x) = f(x)$) – выпуклые? Приведите примеры.

76. Может ли сумма выпуклой и вогнутой функций быть выпуклой? Приведите пример.

77. Из определения выпуклой функции покажите, что выпуклая функция непрерывна в любой внутренней точке.

78. Существуют ли функции, непрерывные на некотором замкнутом интервале, для которых не существует ни одной точки в этом интервале, в окрестности которой функция не является ни выпуклой, ни вогнутой? Обоснуйте ответ.

79. Является ли функция $y = |x|$ выпуклой на интервале [–1, 1]? Везде ли дифференцируема эта функция? В каждой ли точке имеет эта функция производную по направлению?

80. Вычислите производные по возможным направлениям для функции $y = |x|$ в точке $x = 0$.

81. Приведите пример, иллюстрирующий теорему 3 о выпуклости дифференцируемой функции в точке *x* на выпуклом замкнутом множестве *X*, для которой выполняется условие $(f'(x),\ y - x) \le f(y) - f(x),\ x, y \in X$.

82. Докажите, что локальный максимум вогнутой функции совпадает с ее глобальным максимумом.

83. Докажите, что система неравенств $g_i(x) \le 0,\ i = 1, \ldots, m$, определяет выпуклое множество, если все $g_i(x)$ – выпуклые.

84. Что такое матрица Гессе для одномерной функции $y = f(x)$. Что представляет собой условие выпуклости для одномерной функции? Приведите пример.

85. Является ли выпуклой функция $y = 3x + 1$? Обоснуйте ответ.

86. Докажите, что сумма любого конечного числа вогнутых функций является вогнутой функцией.

87. Какую область (вогнутую; выпуклую; произвольную) определяет неравенство $f(x) - g(x) \le 0$, если функция $f(x)$ – выпуклая, а функция $g(x)$ – вогнутая?

88. Почему для выпуклой функции обязательно выполняется неравенство $f\left(\frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{2}x_2\right) \le \frac{1}{2}f(x_1) + \frac{1}{2}f(x_2)$. Является ли обязательным выполнение неравенства $f\left(\frac{1}{3}x_1 + \frac{1}{3}x_2\right) \le \frac{1}{3}f(x_1) + \frac{1}{3}f(x_2)$? Ответ обоснуйте.

89. Какие значения может принимать параметр λ в определении строго выпуклой функции?

90. Может ли выпуклая функция не иметь производной во внутренней точке области определения? Приведите пример.

91. Почему выпуклая функция определяется только на выпуклом множестве? Какие множества называются выпуклыми? Существуют ли «вогнутые множества»?

92. Какое значение имеет производная по произвольному направлению выпуклой функции в точке минимума? Почему?

93. Докажите, что глобальный максимум вогнутой функции совпадает с любым локальным максимумом этой функции.

94. Докажите, что система неравенств $g_i(x) \le 0$, $g = 1, ..., m$, где $g_i(x)$ – выпуклые функции, определяет выпуклое множество.

95. Всегда ли система неравенств $g_i(x) \le 0$, $j = 1, ..., n$, $x \in X$, где $g_i(x)$ – выпуклые, а $h_i(x)$ – вогнутые функции, определяет выпуклое множество? Ответ обоснуйте.

96. Приведите пример ЗВП, для которой не выполняется условие регулярности Слейтера.

97. Пусть дана задача: $\varphi(x) \to \max$ при ограничениях $h_i(x) \ge 0$, $i = 1, ..., n$; $x_g \ge 0$, $j = 1, \ldots, m$, где $\varphi(x)$, $h_g(x)$ – вогнутые функции. Запишите функцию Лагранжа для этой задачи. Приведите пример.

98. Почему из условия о седловой точке $L(x^*, u) \le L(x^*, u^*) \le L(x, u^*)$ следует, что функция $L(x^*, u)$ имеет глобальный минимум по переменной u?

99. Сформулируйте и докажите достаточность условий теоремы Куна – Таккера для задачи: $f = x_1^2 + x_2^2 \to \min$ при ограничениях $x_1 > 0$; $x_2 > 0$; $x_1^2 + x_2^2 - 1 \le 0$.

100. Приведите пример условий теоремы Куна – Таккера для дифференцируемой выпуклой функции одной переменной.

101. Пусть $x \in E''$, $f(x) \in E$. Напишите систему уравнений для отыскания стационарной точки. Когда такая система будет линейной?

102. В каких случаях для функции $f(x) \in E$, $x \in E^n$, не существует стационарной точки? Приведите пример.

103. Существует ли связь между задачей минимизации функции n переменных и задачей решения системы из n уравнений? Можно ли одну задачу заменить другой? Придите пример.

104. Почему для функций «овражного типа» методы первого порядка не являются эффективными? Является ли функция $z = 10^{-6} y^2 + x^2$ функцией овражного типа. Ответ обоснуйте.

105. В чем преимущество методов минимизации, использующих производные функции, перед методами, не использующими производные. Обоснуйте на примере.

106. Покажите, каким образом получен параметр $\tau = \dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$ в методе «золотого сечения».

107. Можно ли применять для минимизации метод, аналогичный методу «золотого сечения», но с параметром $\tau \neq \dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$? Чем такой метод будет существенно отличаться от метода «золотого сечения»?

108. Составьте блок-схему алгоритма метода «золотого сечения».

109. Составьте блок-схему алгоритма метода покоординатного спуска.

110. Каким образом можно искать минимум функции $y = f\left(x_1^k, x_2^k, ..., x_{i-1}^k, x_i, x_{i+1}^k, ..., x_n^k\right)$ как функции одной (какой именно?) переменной в методе покоординатного спуска?

111. Каково условие окончания поиска минимума функции $f(x)$ по методу покоординатного спуска? В каких случаях это условие может «не сработать»? Приведите пример.

112. Составьте блок-схему алгоритма метода прямого поиска.

113. Составьте блок-схему алгоритма исследующего поиска в алгоритме прямого поиска.

114. Составьте блок-схему алгоритма поиск по образцу в алгоритме Хука и Дживса.

115. Составьте блок-схему алгоритма комплексного поиска Бокса.

116. Составьте блок-схему алгоритма замены «наихудшей» вершины в комплексном поиске Бокса.

117. Почему метод градиентного спуска не может быть применим для отыскания минимума линейной формы? Дайте геометрическую интерпретацию для случая $n = 2$.

118. Выполните два шага минимизации функции $z = 10x^2 + 0.1y^2$ методом градиентного спуска. Оцените результат.

119. Какую роль играет делитель $\left\|\nabla f\left(x^k\right)\right\|$ в формуле $x^{k+1} = x^k - \dfrac{\lambda^k \nabla f\left(x^k\right)}{\left\|\nabla f\left(x^k\right)\right\|}$? Является ли эта величина векторной? Скалярной? Как ее вычислить?

120. Каков тип стационарной точки (0,0) для поверхности $z = x^3 + y^3$?

121. Выполните один шаг минимизации функции $z = x^2 + y^2$ из начальной точки (2, 2) методом наискорейшего спуска с оптимальным выбором параметра оптимизации λ.

122. Напишите алгоритм модифицированного метода наискорейшего спуска, когда вычисленный градиент функции на некотором шаге минимизации используется несколько раз.

123. Найдите минимум функции $f(x) = (x_1 - 1)^2 + 25(x_2 + 1)^2$ путем сведения задачи к системе алгебраических уравнений.

124. За сколько шагов можно отыскать минимум квадратичной формы методом Ньютона? Почему? Поясните на примере.

125. Как выбирать параметр λ^k в методе Ньютона для поиска минимума функции n переменных? Поясните на примере.

126. Можно ли решать задачу математического программирования: $z = f(x, y) \to \min$) при ограничении $\varphi(x, y) = 0$, если функции $f(x, y)$ и $\varphi(x, y)$ – линейные формы? Обоснуйте ответ. Приведите пример.

127. Поясните на примере принципиальное отличие методов внутренней и внешней точки для решения ЗНП.

128. Приведите условия (хотя бы одно), при которых ЗНП в векторной форме при $F(X) = 0$; $Y(X) \leq 0$ не имеет решения.

129. Приведите собственный пример задачи оптимизации. Укажите целевую функцию и ограничения.

130. В каких случаях математическое решение задачи оптимизации может не являться истинным решением, т.е. не отражать истинные оптимальные условия реального процесса или явления?

131. Сформулируйте многоэкстремальную задачу оптимизации. Можно ли свести такую задачу к обычной задаче оптимизации?

132. В каких случаях задача математического программирования не имеет решения? Предложите максимальное количество таких случаев.

133. Какова должна быть функция критерия $\Phi(x)$, чтобы выполнялось условие $\min\limits_x \Phi(x) = \max\limits_x \Phi(-x)$?

134. В каких случаях глобальный и локальный минимумы функции совпадают? Приведите пример.

135. Является ли производная по направлению частной производной? Докажите свое утверждение на примере.

136. Что означает каждый из трех случаев: производная по направлению 1) больше 0; 2) меньше 0; 3) равна 0? Ответ обоснуйте.

137. Какое направление задает градиент функции нескольких переменных? Каковы свойства этого направления?

138. Может ли функция в точке, где градиент равен нулю, не иметь экстремума? Приведите примеры.

139. Привести пример допустимой области ЗВП с участием не менее двух выпуклых функций в системе ограничений.

140. Привести пример нерегулярной области ЗВП.

141. Привести пример области, удовлетворяющей условию Слейтера, в ограничении которой участвуют выпуклая и вогнутая функции.

142. ЗВП сформулирована в виде: $f(x) \to \max\limits_{x \in \Omega}$; $x = (x_1, x_2)$ при ограничениях $\varphi(x) \le 0$, $g(x) \ge 0$, где $\varphi(x)$ – выпуклая, $g(x)$ – вогнутая функции; $x_1 \ge 0$, $x_2 \le 0$. Привести ЗВП к канонической форме.

143. Записать функцию Лагранжа для ЗВП: $f(x) \to \max\limits_{x \in \Omega}$; $g(x) \ge 0$, $\varphi(x) \le 0$, где $g(x)$ – вогнутая, $\varphi(x)$ – выпуклая функции; $x \ge 0$.

144. Определите, является функция $\varphi(x) = \sum\limits_{j=1}^{m} u_j g_j(x)$ выпуклой или вогнутой. Ответ обоснуйте.

145. В каком случае функция Лагранжа совпадает с целевой функцией ЗЛП? В каком случае функция Лагранжа равна отрицанию целевой функции?

146. Какова размерность вектора-аргумента функции Лагранжа? Может ли быть седловой точкой нулевой вектор?

147. Является ли седловая точка точкой глобального экстремума? Может ли функция Лагранжа иметь глобальный экстремум в допустимой области?

148. Сформулируйте теорему Куна – Таккера для ЗЛП: $f(x) \to \max\limits_{x \in \Omega}$; $g(x) \le 0$, $\varphi(x) \ge 0$, где $g(x)$ – выпуклая, $\varphi(x)$ –вогнутая функции; $x \le 0$.

149. Подробно поясните, почему из неравенства $f(x^*) + \sum\limits_{j=1}^{m} u_j g_j(x^*) \le f(x^*) + \sum\limits_{j=1}^{m} u_j^* g_j(x^*)$ для функции Лагранжа следует, что $g(x^*) \le 0$.

150. Подробно поясните, почему в функции Лагранжа $\sum\limits_{j=1}^{m} u_j g_j(x^*) = 0$.

151. Выпишите все условия теоремы Куна – Таккера для дифференцируемых функций для ЗВП: $f(x) \to \max\limits_{x \in \Omega}$; $g(x) \le 0$; $\varphi(x) \ge 0$, где $g(x)$ – выпуклая, $\varphi(x)$ – вогнутая функци; $x \ge 0$.

152. Можно ли решать задачи линейного программирования с помощью теоремы Куна – Таккера? Сформулируйте функцию Лагранжа для ЗЛП.

ЗАДАНИЯ ДЛЯ ЛАБОРАТОРНЫХ РАБОТ

Лабораторная работа 1
Общая схема исследования функций
методом дифференциального исчисления (входной контроль)

Исследовать функцию, заданную в нижеследующей таблице в соответствии с номером варианта, методами дифференциального исчисления и построить график.

№ варианта	$f(x)$	№ варианта	$f(x)$
1	2	3	4
1	$y=\dfrac{x^3}{x^2-1}$	11	$y=\dfrac{x^3}{3-x^2}$
2	$y=\dfrac{x^3}{2\cdot(x+1)^2}$	12	$y=\dfrac{x^4}{x^3-1}$
3	$y=\dfrac{1}{(x-2)\cdot(x^2-1)}$	13	$y=\dfrac{2x-1}{(x-1)^2}$
4	$y=\dfrac{x^2-1}{x^2+1}$	14	$y=\dfrac{4x^3}{x^3-1}$
5	$y=\dfrac{x}{1+x^2}$	15	$y=\dfrac{x^3}{x-1}$
6	$y=\dfrac{x^2+1}{x^2-1}$	16	$y=\dfrac{2-4x^2}{1-4x^2}$
7	$y=\dfrac{x}{x^2-1}$	17	$y=\dfrac{x^2-x+1}{x-1}$
8	$y=\dfrac{x^2}{x-1}$	18	$y=\dfrac{4x^2}{3+x^2}$
9	$y=\dfrac{x^2}{x^2-1}$	19	$y=\dfrac{x^2-3x+3}{x-1}$
10	$y=\dfrac{x^3}{x^2+1}$	20	$y=\dfrac{x^2-4x+1}{x-4}$
21	$y=\dfrac{2}{x^2+2x}$	26	$y=\dfrac{8(x-1)}{(x+1)^2}$
22	$y=\dfrac{12x}{9+x^2}$	27	$y=\dfrac{4}{x^2+2x-3}$

1	2	3	4
23	$y=\dfrac{4-x^3}{x^2}$	28	$y=\dfrac{x^3-4}{x^2}$
24	$y=\dfrac{x^2}{(x-1)^2}$	29	$y=\dfrac{x^2-6x+9}{(x-1)^2}$
25	$y=\dfrac{12-3x^2}{x^2+12}$	30	$y=\dfrac{3x^4+1}{x^3}$

Лабораторная работа 2
Градиентное исследование функции

Для функции $\Phi(x_1, x_2) = x_1 + \dfrac{m}{10}x_2^2$ выполнить следующее[2]:

1) определить $\overline{e_d}\| d$ – единичное направление, совпадающее с направлением $d = \left(n, \dfrac{m}{10}\right)$;

2) из точки $x^0\left(x_1^0, x_2^0\right)$, где $x_1^0 = x_2^0 = 0{,}01$, провести прямую в направлении d (написать уравнение этой прямой);

3) вычислить градиент функции $\nabla\Phi$ в точке $x^0\left(x_1^0, x_2^0\right)$;

4) определить производную по направлению **e** в точке $x^0\left(x_1^0, x_2^0\right)$;

5) выявить точки, подозрительные на экстремум, т.е. точки, в которых $\nabla\Phi = 0$;

6) найти $\nabla\Phi^T d$.

Лабораторная работа 3
Задача линейного программирования

Составить смесь, содержащую три химических вещества: S_1, S_2, S_3. Известно, что составная смесь должна содержать вещества S_i не менее b_i ($i = 1,2,3$) единиц.

Вещества S_i содержатся в двух продуктах P_j ($j = 1, 2$) в концентрациях a_{ij}. Стоимость единицы продуктов P_1 и P_2 составляет соответственно C_1 и C_2 рубля.

Смесь следует составить так, чтобы стоимость используемых продуктов была наименьшей. Исходные данные для каждого варианта приведены в следующей таблице:

---

[2] Здесь и далее *n* – номер группы, *m* – номер по списку в журнале.

<table>
<tr><th rowspan="2">Виды питательных веществ</th><th colspan="2">Количество питательных веществ</th><th rowspan="2">Минимальная норма питательных веществ</th><th colspan="2">Стоимость единицы продукта</th></tr>
<tr><th>P_1</th><th>P_2</th><th>C_1</th><th>C_2</th></tr>
<tr><td>S_1</td><td>$\frac{m}{3}$</td><td>$\frac{m}{10}$</td><td>$m-1$</td><td rowspan="3">$\frac{m}{4}$</td><td rowspan="3">$\frac{m}{6}$</td></tr>
<tr><td>S_2</td><td>$\frac{m}{10}$</td><td>$\frac{m}{2}$</td><td>m</td></tr>
<tr><td>S_3</td><td>$\frac{m}{10}$</td><td>$\frac{m}{6}$</td><td>$m+1$</td></tr>
</table>

1. Записать математическую постановку ЗЛП.
2. Решить задачу на компьютере с помощью системы MathCAD.
3. Найти опорное решение.
4. Решить задачу графическим методом.
5. Решить задачу симплексным методом.
6. Сравнить и интерпретировать результаты решения.
7. Показать, что найденное решение является опорным.

Лабораторная работа 4. Одномерная оптимизация

Решить методом перебора, золотого сечения и с помощью системы MathCAD задачу минимизации функции $m \cdot (x-n)^2 + m$ на интервале $[n-0{,}4;\ n+0{,}6]$.

Лабораторная работа 5
Многомерная оптимизация

Выполнить по 3 шага минимизации функции:

$$f(x_1, x_2) = \frac{m}{10} x_1^2 + \frac{1}{10 \cdot n}(x_2 - n)^2$$

Начальное приближение взять из интервала

$$-0{,}1m \le x_1 \le 0{,}1m; \quad 0{,}5n \le x_2 \le 2n\,.$$

Решить методами покоординатного спуска, Хука и Дживса, градиентного спуска, сопряженного градиента, Ньютона и с помощью системы MathCAD.

Лабораторная работа 6
Задача выпуклого программирования

$$\begin{cases} f(x_1, x_2) = 0{,}1nx_1^2 + 0{,}2mx_2^2 - 0{,}2nx_1 - 0{,}2m \to \min\limits_{x_1, x_2}; \\ g_1(x) = -0{,}1nx_1 + 0{,}2mx_2 + \dfrac{n}{m+n} \ge 0; \\ g_2(x) = -0{,}1nx_1^2 + 0{,}2mx_2 - \dfrac{n}{m+n} \ge 0; \\ x_1 \ge 0; \quad x_2 \ge 0. \end{cases}$$

Начальное приближение взять из интервала

$$-0{,}1m \le x_1 \le 0{,}1m; \quad 0{,}5n \le x_2 \le 2n.$$

1. Доказать выпуклость функций f и g_i.
2. Нарисовать область допустимых значений и линии уровня.
3. Проверить выполнение условия теоремы 3 для функции f:

$$(f'(x_1), x_2 - x_1) \le f(x_2) - f(x_1).$$

4. Сформулировать условия теоремы Куна – Таккера для данной задачи.
5. Решить задачу.

Лабораторная работа 7
Задача нелинейного программирования

Решить с помощью системы MathCAD задачу нелинейного программирования:

$$F(x, y) = \frac{1}{n} e^{m(x+y)} \to \min$$

при ограничении $(10 - n) \cdot x^2 + (10 - m) \cdot y^2 > 2$.

ПРИМЕРНЫЙ ПЕРЕЧЕНЬ ВОПРОСОВ К ЗАЧЕТУ

1. Методы оптимизации (МО). Предмет и задачи курса. Построение математической модели. Классификация МО и задач математического программирования.

2. Основные понятия: допустимая точка, точка оптимума, направление, градиент, производная по направлению и ее представление через градиент функции, мгновенная скорость изменения функции по заданному направлению.

3. Теорема о функции, имеющей положительную производную по заданному направлению. Следствие из этой теоремы о равенстве нулю градиента функции в точке оптимума.

4. Общая формулировка задачи линейного программирования (ЗЛП). Пример. Стандартные формы представления ЗЛП. Каноническая форма ЗЛП. Векторная форма.

5.Типичные задачи линейного программирования: задача о раскрое, задача о рационе, задача о планировании производства. Примеры.

6. Геометрическая интерпретация ЗЛП. Допустимая область, вершина допустимой области, примеры допустимых областей. Критерий оптимизации, линии уровня целевой функции, градиент. Геометрическое решение ЗЛП. Пример.

7. Свойства ЗЛП и их решений.

8. Опорные решения ЗЛП. Свойства опорных решений. Базис опорного решения. Способы отыскания опорного решения. Пример. Теорема об оптимальном опорном решении ЗЛП.

9. Решение ЗЛП в системе MathCAD.

10. Выпуклые множества, определения, примеры.

11. Выпуклые функции, определения, примеры.

12. Теоремы о выпуклых функциях: о непрерывности, о производной по направлению, о необходимом и достаточном условии выпуклости, о свойстве локального минимума, о выпуклости допустимой области, о матрице Гессе выпуклой функции.

13. Общая формулировка задачи выпуклого программирования. Пример.

14. Функция Лагранжа задачи выпуклого программирования. Пример.

15. Седловая точка задачи выпуклого программирования.

16. Теорема Куна – Таккера. Доказательство.

17. Условия теоремы Куна – Таккера для дифференцируемых функций.

18. Отыскание седловой точки задачи выпуклого программирования (на примере).

19. Методы безусловной минимизации:

– для функции одной переменной (методы полного перебора, золотого сечения, Ньютона, градиентного поиска);

– для функции нескольких переменных:

1) нулевого порядка (покоординатный спуск, комплексный поиск Бокса);

2) первого порядка (градиентный спуск, метод сопряженного градиента);

3) второго порядка (метод Ньютона).

20. Общая формулировка задачи нелинейного программирования. Пример.

21. Метод множителей Лагранжа (на примере функции двух переменных).

22. Теорема о седловой точке задачи нелинейного программирования. Отыскание седловой точки.

23. Методы штрафных функций. Общее понятие.

24. Метод внутренней точки. Пример.

25. Метод внешней точки. Пример.

26. Метод Левенберга – Марквардта. Пример.

27. Метод Тихонова. Пример.

ТЕСТЫ ДЛЯ ИТОГОВОГО КОНТРОЛЯ

1. Математическая модель, этапы моделирования. Вычислительный эксперимент

1. Математическая модель – это:
   - ✓ физические законы и соотношения;
   - ✓ компьютерная программа;
   - ✓ описание процесса средствами математики;
   - ✓ системы математических уравнений, устанавливающих связи между факторами, параметрами, исходными данными и результирующими значениями выходных величин.

2. Математическую модель можно представить в виде:
   - ✓ системы алгебраических уравнений;
   - ✓ решения дифференциального уравнения;
   - ✓ теоремы высшей математики;
   - ✓ дифференциальных уравнений и алгебраических неравенств.

3. Укажите, какие из следующих действий можно отнести к этапам математического моделирования:
   - ✓ установление эквивалентностей бесконечно-малых величин;
   - ✓ решение систем математических уравнений и неравенств;
   - ✓ описание экономических законов математическими терминами;
   - ✓ полное описание исследуемого процесса разговорным языком в стихотворной форме.

4. Анализ численных результатов при математическом моделировании позволяет:
   - ✓ установить методику экспериментальных исследований;
   - ✓ скорректировать математическую модель;
   - ✓ установить необходимость корректировки математической модели;
   - ✓ принять решение о замене метода решения математической задачи.

5. Термин «некорректность» можно отнести:
   - ✓ к методу решения математической задачи;
   - ✓ к математической модели;
   - ✓ к математической задаче;
   - ✓ к исходным данным для решения задачи.

6. Для корректно поставленной математической задачи выберите все истинные утверждения:
   - ✓ она устойчива по отношению к начальным условиям;
   - ✓ любое ее решение лежит в области допустимых значений;

- ✓ она имеет решение для допустимых исходных данных;
- ✓ она не может иметь два или более решений.

7. Если погрешность вычислений при использовании алгоритма накапливается по линейному закону, то:
   - ✓ алгоритм не является устойчивым;
   - ✓ алгоритм является условно устойчивым;
   - ✓ для определения устойчивости алгоритма необходима дополнительная информация;
   - ✓ алгоритм называется линейно-устойчивым.

2. Общие вопросы

8. В чем заключается задача оптимизации:
   - ✓ в поиске минимума целевой функции?
   - ✓ в поиске максимума целевой функции при заданных ограничениях?
   - ✓ в поиске экстремума целевой функции без ограничений?
   - ✓ в поиске корней целевой функции в заданной области?

9. Наименьшее значение функции в области определения есть:
   - ✓ седловая точка;
   - ✓ локальный минимум;
   - ✓ глобальный минимум;
   - ✓ точка, в которой производная функции может обратиться в 0.

10. Что такое градиент функции:
    - ✓ число, которое показывает скорость изменения функции?
    - ✓ вектор, который показывает направление и скорость наискорейшего возрастания функции?
    - ✓ вектор, перпендикулярный антиградиенту?
    - ✓ вектор, который показывает направление убывания функции?

11. Что показывает вектор антиградиента:
    - ✓ скорость изменения целевой функции?
    - ✓ направление наискорейшего возрастания функции?
    - ✓ направление и скорость наискорейшего убывания функции?
    - ✓ направление, перпендикулярное градиенту?

12. Как направлен градиент функции по отношению к линии уровня на плоскости:
    - ✓ перпендикулярно в любой точке?
    - ✓ перпендикулярно касательной в любой точке?
    - ✓ параллельно?
    - ✓ по касательной?

13. Выберите свойства, которые характерны для модуля градиента функции:

- ✓ это вектор с положительными компонентами;
- ✓ это возрастающая скалярная функция;
- ✓ график функции $|\nabla f(x)|$ пересекает ось Ox в точке минимума функции $f(x)$;
- ✓ является длиной вектора частных производных функции $f(x)$ в точке x.

14. В каких случаях модуль градиента одномерной функции $f(x)$ является убывающей функцией в области определения:

- ✓ когда $f(x)$ – убывающая функция?
- ✓ когда вторая производная $f''(x) < 0$?
- ✓ когда скорость роста функции $f(x)$ – убывающая функция?
- ✓ когда $f(x)$ целиком лежит в отрицательной области?

15. Матрица Гессе – это:

- ✓ матрица частных производных функции n переменных первого порядка;
- ✓ матрица частных производных вектора-функции правых частей СНАУ

$$f_i(X) = 0;\ X = (x_1, x_2, \ldots, x_n);\ i = 1, \ldots, n \quad \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j} \right) \quad j = 1, \ldots, n;$$

- ✓ матрица частных производных второго порядка функции n переменных;
- ✓ то же, что и матрица Якоби для СНАУ.

16. Градиент функции $y = f(x)$ используется при поиске корня:

- ✓ в методе хорд;
- ✓ в методе касательных;
- ✓ в методе наискорейшего спуска;
- ✓ в методе Ньютона для минимизации функции нескольких переменных.

3. Задача линейного программирования

17. Сколько решений может иметь задача линейного программирования (выберите все правильные варианты ответов):

- ✓ единственное решение?
- ✓ несколько решений?
- ✓ бесконечное множество решений?
- ✓ ни одного решения?

18. По каким причинам может отсутствовать решение задачи линейного программирования (выберите все правильные варианты ответов):
- ✓ система ограничений задачи несовместна?
- ✓ область допустимых значений не ограничена?
- ✓ линия уровня проходит через границу области допустимых значений?
- ✓ система ограничений определяет невыпуклую область?

19. Как задачу отыскания максимума линейной формы свести к задаче отыскания минимума:
- ✓ сменить знак целевой функции?
- ✓ сменить знак аргумента целевой функции?
- ✓ найти минимум функции, обратной к целевой?
- ✓ найти минимум целевой функции в области, являющейся дополнением к заданной ограничениями?

20. Какие из компьютерных средств целесообразно использовать при решении задачи линейного программирования (введите название программного продукта)?

21. Область допустимых значений для ЗЛП может представлять собой:
- ✓ первый квадрант на координатной плоскости;
- ✓ выпуклый многоугольник;
- ✓ куб;
- ✓ круг.

22. Опорными решениями ЗЛП являются:
- ✓ внутренние точки допустимого множества;
- ✓ точки на границе допустимой области;
- ✓ крайние точки допустимого множества;
- ✓ точки локальных оптимумов функции-критерия.

23. Какое количество опорных решений может иметь ЗЛП (выделите все возможные варианты):
- ✓ одно решение?
- ✓ бесконечное число?
- ✓ равное количеству ограничений?
- ✓ несколько?

24. ЗЛП не имеет решений, когда:
- ✓ целевая функция является разрывной;
- ✓ область допустимых значений не регулярна;
- ✓ область допустимых значений не ограничена сверху и снизу;
- ✓ все ограничения являются равенствами.

25. ЗЛП некорректна, когда:

- ✓ количество переменных в целевой функции не равно количеству переменных в ограничениях;
- ✓ целевая функция не является линейной формой;
- ✓ область допустимых значений для задачи минимизации не ограничена сверху;
- ✓ все допустимые значения сосредоточены на отрезке прямой.

26. Целевая функция в задаче о раскрое может представлять собой:

- ✓ количественную характеристику отходов производства;
- ✓ стоимость затрат на раскрой материала;
- ✓ количество необходимых заготовок;
- ✓ затраты на утилизацию отходов производства.

27. Ограничения в задаче о рационе могут иметь следующее смысловое значение:

- ✓ являются ограничениями на потребление определенных продуктов;
- ✓ определяют условия удовлетворения организма в необходимых питательных веществах;
- ✓ ограничивают затраты на стоимость потребительской корзины;
- ✓ определяют наиболее рациональные количества потребляемых веществ.

28. Смысл задачи о планировании производства как задачи линейного программирования состоит:

- ✓ в минимизации затрат на производство при условии выполнения плана производства;
- ✓ в максимизации цены продукции при минимальных энергетических затратах;
- ✓ в достижении плановых показателей по выпуску продукции при удовлетворительном ее качестве;
- ✓ в минимизации себестоимости продукции при выполнении плана производства.

29. Какое минимальное количество ограничений на переменные двухмерной ЗЛП необходимо, чтобы допустимая область представляла собой треугольник:

- ✓ одно?
- ✓ два?
- ✓ три?
- ✓ четыре?

30. Какую область определяют ограничения двухмерной ЗЛП: $x_1 > 0$, $x_2 > 0$, $x_1 + x_2 \geq 1$, $x_1 + x_2 \leq 2$:

- ✓ треугольник?

- ✓ квадрат?
- ✓ трапецию?
- ✓ пятиугольник?

31. Что представляет собой поверхность уровня целевой функции $f(x) = x_1 + 2x_2 + 3x_3$:

- ✓ плоскость, параллельную плоскости xOy?
- ✓ сферу?
- ✓ плоскость, перпендикулярную вектору $\{1, 2, 3\}$?
- ✓ часть плоскости, расположенную в первом квадранте?

32. Опорное решение ЗЛП – это:

- ✓ крайняя точка допустимого множества ЗЛП;
- ✓ одно из решений ЗЛП;
- ✓ точка пересечения гиперповерхностей n-мерного пространства;
- ✓ точка, координаты которой удовлетворяют всем ограничениям ЗЛП.

33. Пусть $A_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{12} \\ \vdots \\ a_{1m} \end{pmatrix}$, $A_2 = \begin{pmatrix} a_{21} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{2m} \end{pmatrix}$, …, $A_n = \begin{pmatrix} a_{n1} \\ a_{n2} \\ \vdots \\ a_{nm} \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$ – вектор-столбцы и вектор свободных членов ограничений в канонической постановке ЗЛП. Равенство $A_1x_1 + A_2x_2 + \ldots + A_nx_n = B$ означает:

- ✓ линейную зависимость векторов $A_1, A_2, \ldots, A_n$;
- ✓ систему ограничений на векторы $A_1, A_2, \ldots, A_n$ в ЗЛП;
- ✓ вектор $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ – опорное решение ЗЛП;
- ✓ векторы $A_1, A_2, \ldots, A_n, B$ не являются линейно независимыми.

34. Какие из выражений являются истинными:

- ✓ ЗЛП может иметь бесконечное множество опорных решений?
- ✓ размерность вектора опорного решения равна количеству ограничений типа равенств в канонической постановке ЗЛП?
- ✓ вектор опорного решения имеет только неотрицательные компоненты?
- ✓ размерность вектора опорного решения равна размерности ЗЛП?

35. Для нахождения опорного решения ЗЛП в канонической форме необходимо:

- ✓ найти единственное решение СЛАУ, задающей ограничения на переменные ЗЛП;
- ✓ найти произвольное решение СЛАУ, задающей ограничения на переменные ЗЛП;

- ✓ найти коэффициенты разложения вектора B по базису $A_{i_1}, A_{i_2}, \ldots, A_{i_k}$ для системы ограничений ЗЛП $\sum_{i=1}^{n} A_i x_i = B$;
- ✓ найти разложение вектора B по базису $A_{i_1}, A_{i_2}, \ldots, A_{i_k}$ для системы ограничений ЗЛП $\sum_{i=1}^{n} A_i x_i = B$ с положительными координатами.

4. Задача выпуклого программирования

36. Какую область определяет неравенство $f(x) - g(x) \le 0$, если $f(x)$ – выпуклая, а $g(x)$ – вогнутая:
- ✓ вогнутую?
- ✓ регулярную?
- ✓ выпуклую?
- ✓ произвольную?

37. Как соотносятся между собой векторы $\nabla f(x^*)$ и некоторое направление $\overline{d}$, если $f'_{\overline{d}}(x^*) = 0$:
- ✓ перпендикулярны?
- ✓ параллельны и направлены в одну сторону?
- ✓ противонаправлены?
- ✓ скалярное произведение этих векторов равно 0?

38. В каких случаях модуль градиента $|\nabla f(x)|$ одномерной функции может иметь большую скорость роста, чем сама функция $f(x)$:
- ✓ всегда, когда $f(x)$ – возрастающая функция?
- ✓ всегда, когда $f'(x)$ – возрастающая функция?
- ✓ когда $f(x) = e^{kx}$, $k > 1$?
- ✓ когда $|f'(x)| < |f''(x)|$?

39. Выпуклое множество – это:
- ✓ область значений выпуклой функции;
- ✓ множество, лежащее целиком в одном из полупространств, которое образуется при пересечении всего пространства гиперплоскостью, касательной к произвольной точке границы множества;
- ✓ множество, которое вместе с двумя своими произвольными точками содержит весь отрезок, соединяющий эти точки;
- ✓ множество V, для которого выполняется соотношение:

$$\text{if } x_1 \in V \ \& \ x_2 \in V \ \Rightarrow \ \{\forall \lambda \in [0,1] \Rightarrow \lambda x_1 + (1-\lambda) x_2 \in V\}.$$

40. Выпуклая функция – это:
- ✓ функция, не имеющая точек разрыва;
- ✓ функция, матрица Гессе которой в области определения положительно определена;
- ✓ функция, которая имеет производную во всей области определения;
- ✓ функция, не имеющая точек перегиба.

41. Выберите истинные утверждения:
- ✓ строго выпуклая функция выпукла;
- ✓ непрерывно дифференцируемая функция выпукла;
- ✓ выпуклая функция всегда непрерывна;
- ✓ выпуклая функция не обязательно дифференцируема.

42. Выпуклая функция – это функция, для которой в области определения выполняются условия:
- ✓ $f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \le \lambda f(x_1) + (1-\lambda) f(x_2), \quad \lambda \le 1$;
- ✓ $f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \le \lambda f(x_1) + (1-\lambda) f(x_2), \quad 0 \le \lambda \le 1$;
- ✓ $f(0{,}5x_1 + 0{,}5x_2) \le 0{,}5 f(x_1) + 0{,}5 f(x_2)$;
- ✓ $f(x_1 + \lambda x_2) \le f(x_1) + \lambda f(x_2), \quad \forall \lambda \in R$.

43. Выпуклая функция должна быть определена:
- ✓ на вогнутом множестве;
- ✓ на выпуклом множестве;
- ✓ на множестве

$$D = \{x \in R^n : \text{ если } x_1 \in D; x_2 \in D \Rightarrow \lambda x_1 + (1-\lambda)x_2 \in D \ \forall \lambda \in [0,1]\};$$

- ✓ на любом подмножестве R^n.

44. Множество точек $M = \{x \in R^n : \ x = \lambda x_1 + (1-\lambda)x_2 \ \ \forall \lambda \in [0,1]\}$ определяет:
- ✓ отрезок между точками x_1, x_2 в пространстве R^n;
- ✓ прямую линию в пространстве R^n;
- ✓ отрезок на прямой с направляющим вектором λ;
- ✓ отрезок прямой, соединяющий точки x_1, x_2.

45. Выпуклая функция всегда:
- ✓ четная;
- ✓ нечетная;
- ✓ непрерывная;
- ✓ дифференцируемая.

46. Определите соответствие:

- ✓ $f(x)=x^2, \quad x<0$ – нечетная;
- ✓ $f(x)=x^3$ – выпуклая;
- ✓ $f(x)=e^x$ – возрастающая;
- ✓ $f(x)=-\ln x, \ x>0$ – убывающая.

47. Выпуклая функция непрерывна в любой внутренней точке области определения D, так как:

- ✓ она определена на выпуклом множестве;
- ✓ для нее выполняется условие $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0), \ \forall x_0\in D$;
- ✓ дифференцируема в любой внутренней точке;
- ✓ все собственные числа ее матрицы Гессе положительны.

48. Каким свойствам удовлетворяет функция $f(x)=|x|, \ x\in R^n$:

- ✓ выпуклая, дифференцируемая?
- ✓ выпуклая, непрерывная?
- ✓ четная, выпуклая?
- ✓ четная, непрерывная?

49. Производными по направлению для функции $y=|x|$ являются (выберите возможные варианты ответа):

$$-1; \qquad 1; \qquad \frac{1}{x}; \qquad \left|\frac{1}{x}\right|.$$

50. Для функции $y=|x_1+x_2|$ величина –1 является производной по направлению:

- ✓ $d=(1,\ 1)$;
- ✓ $d=(0,\ 1)$;
- ✓ $d=(-1, 0)$;
- ✓ $d=(0, -1)$.

51. Локальный максимум вогнутой функции $g(x)$ является также:

- ✓ ее глобальным максимумом;
- ✓ глобальным минимумом функции $-g(x)$;
- ✓ локальным минимумом функции $-g(x)$;
- ✓ локальным минимумом функции $\dfrac{1}{g(x)}$.

52. Пусть $g_i(x), \ i=1,\ldots,n$, – система вогнутых функций. Множество Ω – выпуклое, если:

- ✓ $\Omega=\{x : g_i(x)\le 1, \ i=1,\ldots,n\}$;
- ✓ $\Omega=\{x : g_i(x)\le 0, \ i=1,\ldots,n\}$;

- $\Omega = \left\{ x : \sum_{i=1}^{n} g_i(x) \le 0 \right\}$;
- $\Omega = \{\forall x_1, x_2 : \{g_i(x_1) \le 0,\ g_i(x_2) \le 0,\ i = 1, \ldots, n\} \Rightarrow g_i(x_i + (1-\lambda)x_2) \le 0\}$

53. Функция $z = x^2 + y^2$ является выпуклой в области *D*, так как:

- $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} \ge 0,\ \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} \ge 0 \quad \forall (x, y) \in D$;
- $\begin{vmatrix} \dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} & \dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \\ \dfrac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} & \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} \end{vmatrix} \ge 0,\ \left| \dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} \right| \ge 0$;
- матрица Гессе $\begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} & \dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \\ \dfrac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} & \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} \end{pmatrix}$ положительно определена;
- матрица Гессе $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ имеет положительные главные миноры.

54. Неравенство $f(x) - g(x) \le 0$, где $f(x)$ – вогнутая, а $g(x)$ – выпуклая функции, определяет:

- выпуклую область;
- вогнутую область;
- произвольную область;
- не определяет никакую связную область.

55. Составить соответствие утверждений в левой и правой колонках.

В некоторой точке из области определения функции:

✓ если производная по направлению равна нулю,	✓ то функция постоянна по данному направлению;
✓ если производная по направлению есть величина положительная,	✓ то функция может иметь в данной точке локальный экстремум;
✓ если производная по направлению отрицательна,	✓ то функция возрастает в данном направлении;
✓ если производная по направлению равна нулю в любой точке данного направления,	✓ то направление указывает на возможную точку локального минимума.

56. Допустимая область ЗВП, определяемая системой неравенств $x^2 + y^2 \le 1$; $(x-1)^2 + y^2 \le 1$, является:

- нерегулярной;

- ✓ выпуклой;
- ✓ удовлетворяет условию Слейтера;
- ✓ открытой.

57. Допустимая область удовлетворяет условию Слейтера для ЗВП, если она (выберите все возможные варианты ответа):
- ✓ не регулярна;
- ✓ не пустая;
- ✓ выпуклая;
- ✓ содержит хотя бы одну точку, удовлетворяющую ограничениям ЗВП.

58. Для ЗВП: $x^2 \to \min; \quad x^2 + y^2 \le 1; \quad x \ge 0; \quad y \ge 0$, решением будет:
- ✓ точка $(0,0)$;
- ✓ отрезок $0 \le x \le 1; \ y = 0$;
- ✓ отрезок $x = 0; \quad 0 \le y \le 1$;
- ✓ точка $(1,0)$.

59. Функция Лагранжа ЗВП является:
- ✓ выпуклой;
- ✓ положительно определенной;
- ✓ вогнутой;
- ✓ суммой выпуклых функций.

60. Функция Лагранжа в седловой точке (x^*, u^*):
- ✓ минимальна;
- ✓ максимальна;
- ✓ имеет локальный минимум по переменной x;
- ✓ имеет глобальный максимум по переменной u.

61. Функцией Лагранжа для ЗВП: $x^2 \to \min\limits_{x \in \Omega}; \ x \in \Omega \subset R^2; \quad x_1^2 + x_2^2 \le 1;$ $x_1 \ge 0, \ x_2 \ge 0$, будет функция:
- ✓ $x_1^2 + x_2^2 + u_1 x_1^2 + u_2$;
- ✓ $x_1^2 + u_1 x_1^2 + u_2 x_2^2$;
- ✓ $x_1^2 - u_1\left(x_1^2 + x_2^2\right)$;
- ✓ $u_1 x_1^2 + u_2 x_2^2 + x_1^2$.

62. Для функции Лагранжа $L(x,u)$ ЗВП в седловой точке (x^*, u^*) можно записать:
- ✓ $L(x^*, u^*)$ имеет глобальный максимум по переменным x, u;

- ✓ $L(x^*, u^*) = \max_{x \in \Omega} \min_{u_j \geq 0} L(x, u)$;
- ✓ $L(x^*, u^*) = \min_{x \in \Omega} \max_{u_j \geq 0} L(x, u)$;
- ✓ $L(x^*, u) \leq L(x^*, u^*) \leq L(x, u^*)$.

63. Выберите условия выполнения теоремы Куна – Таккера:
- ✓ допустимая область является регулярной;
- ✓ для функции-критерия выполняется условие Слейтера;
- ✓ пара векторов x^*, u^*, где x^* – решение ЗВП, а u^*: $u_j^* \geq 0$, является седловой точкой ЗВП;
- ✓ векторы x^*, u^* являются множителями Лагранжа.

64. Выберите верные утверждения:
- ✓ теорема Куна – Таккера представляет собой необходимые и достаточные условия существования седловой точки ЗВП;
- ✓ существование седловой точки ЗВП является достаточным, но не необходимым условием существования решения ЗВП;
- ✓ все компоненты векторов x^* и u^*, где x^* – решение ЗВП, в седловой точке строго положительны;
- ✓ теорема Куна – Таккера справедлива как для дифференцируемых, так и для недифференцируемых функций.

65. Исходя из свойств седловой точки ЗВП:

$$L(x^*, u) \leq L(x^*, u^*) \leq L(x, u^*),$$

выберите справедливое неравенство:
- ✓ $f(x) + \sum_{j=1}^{m} u_j^* g_j(x) \leq f(x^*) + \sum_{j=1}^{m} u_j g_j(x^*)$;
- ✓ $f(x^*) + \sum_{j=1}^{m} u_j g_j(x^*) \leq f(x^*) + \sum_{j=1}^{m} u_j^* g_j(x^*)$;
- ✓ $f(x) + \sum_{j=1}^{m} u_j^* g_j(x) \leq f(x^*) + \sum_{j=1}^{m} u_j^* g_j(x^*)$;
- ✓ $f(x^*) + \sum_{j=1}^{m} u_j^* g_j(x^*) \leq f(x^*) + \sum_{j=1}^{m} u_j g_j(x^*)$;

66. Какие из соотношений входят в систему необходимых и достаточных условий существования седловой точки функции Лагранжа ЗВП:

$$\left(x^*, \frac{\partial L^*}{\partial x}\right) = 0\,? \qquad \frac{\partial L^*}{\partial u} \geq 0\,? \qquad u^* \geq 0\,? \qquad \left(u^*, \frac{\partial L^*}{\partial u}\right) = 0\,?$$

67. Какие из соотношений входят в систему необходимых и достаточных условий существования седловой точки функции Лагранжа ЗВП:

$$\frac{\partial L^*}{\partial x} \geq 0\,? \qquad x^* \geq 0\,? \qquad \frac{\partial L^*}{\partial u} \leq 0\,? \qquad \left(u^*, \frac{\partial L^*}{\partial x}\right) = 0\,?$$

5. Методы безусловной минимизации

68. Пусть $x = (x_1, \ldots, x_n)$; $F(x) = (F_1(x), F_2(x), \ldots, F_m(x))$. Каковы могут быть размерности векторов x и F, чтобы можно было решать задачу минимизации функции $F(x)$:

- ✓ произвольные?
- ✓ $n = 1$, m – произвольное целое?
- ✓ n – произвольное целое, $m = 1$?
- ✓ $n = 1$; $m = 1$?

69. Пусть $f(x)$, $x = (x_1, \ldots, x_n)$ – непрерывно дифференцируемая функция. Равенство $\nabla f(x^*) = 0$, где ∇ – символ градиента, означает:

- ✓ x^* – точка минимума;
- ✓ x^* – точка максимума;
- ✓ x^* – точка перегиба;
- ✓ x^* – стационарная точка.

70. Стационарную точку функции можно найти:

- ✓ методом минимизации нулевого порядка;
- ✓ методом решения системы уравнений $\nabla f(x^*) = 0$, где ∇ – символ градиента;
- ✓ методом минимизации первого порядка;
- ✓ методом интерполяции функции $f(x)$.

71. Составить соответствие в утверждениях. Указанные методы применяются при минимизации соответствующих функций:

✓ методы второго порядка	✓ для недифференцируемых функций;
✓ методы нулевого порядка	✓ для функций, имеющих производные любого порядка;
✓ методы первого порядка	✓ для дифференцируемых функций, не имеющих вторых производных;
✓ методы аппроксимации	✓ для выпуклых функций.

72. Для поиска минимума функции $f(x)$ с заданной точностью методом «золотого сечения» понадобилось вычисление четырех вложенных интервалов $[a_0, b_0]$, $[a_1, b_1]$, $[a_2, b_2]$, $[a_3, b_3]$. Сколько вычислений $f(x)$ потребовалось:

4? 5? 8? 9?

73. Выберите положения, которые используются в методе «золотого сечения»:

- ✓ строится сходящаяся к точке минимума числовая последовательность;
- ✓ используется деление отрезка, которому принадлежит точка минимума, на три равные части;
- ✓ строится последовательность вложенных интервалов, каждый из которых содержит точку минимума;
- ✓ используется деление отрезка, содержащего точку минимума, на две неравные части так, чтобы отношение длины всего отрезка к длине большей его части равнялось отношению длин большей и меньшей частей.

74. После выполнения k шагов по методу «золотого сечения» вычислены новые значения $(x, y) \in [a_k, b_k]$:

$$y := a_k + \gamma(b_k - a_k); \quad x := b_k + (\gamma - 1)(b_k - a_k).$$

Выберите оператор продолжения алгоритма из предложенных, следующий за оператором проверки условия

$$\text{if} \quad f(y) < f(x) \quad \text{then} \quad ...$$

- ✓ $a_{k+1} := a_k; \quad b_{k+1} = y;$
- ✓ $a_{k+1} := x; \quad b_{k+1} = b_k;$
- ✓ $a_{k+1} := y; \quad b_{k+1} = b_k;$
- ✓ $a_{k+1} := a_k; \quad b_{k+1} = x.$

75. Метод «золотого сечения» – это:

- ✓ метод одномерной оптимизации;
- ✓ метод многомерной оптимизации;
- ✓ итерационный метод;
- ✓ градиентный метод.

76. Как повысить точность нахождения решения в методе «золотого сечения»:

- ✓ увеличить количество итераций?
- ✓ уменьшить задаваемую погрешность?
- ✓ увеличить точность представления чисел компьютере?
- ✓ увеличить быстродействие ЭВМ?

77. Как влияет в методе «золотого сечения» сокращение исходного отрезка $[a, b]$:

- ✓ приводит к уменьшению времени поиска минимума функции?
- ✓ приводит к увеличению числа итераций при поиске минимума функции?
- ✓ позволяет получить результат с большей точностью?
- ✓ не влияет?

78. Параметр $\tau = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$ в методе «золотого сечения» выбран таким по следующим причинам (выберите истинные):

- ✓ позволяет построить сходящуюся последовательность интервалов $[a_k, b_k]$, содержащих x^* – точку минимума функции $f(x)$;
- ✓ позволяет минимизировать количество вычислений функции $f(x)$ за счет быстрой сходимости $a_k \to x^*$; $b_k \to x^*$ при $k \to \infty$;
- ✓ позволяет сократить количество вычислений $f(x)$ за счет правильной организации разбиения интервала $[a_k, b_k]$ точками x, y;
- ✓ позволяет организовать деление отрезка $[a_k, b_k]$ на три равные части.

79. Метод покоординатного спуска (выберите верные утверждения):

- ✓ является методом минимизации нулевого порядка;
- ✓ использует только частные производные минимизируемой функции;
- ✓ является методом последовательных приближений к точке минимума функции;
- ✓ используется только для минимизации функции одной переменной.

80. Метод покоординатного спуска (выберите верные утверждения):

- ✓ содержит в себе алгоритмы одномерной оптимизации;
- ✓ позволяет получать приближение к точке минимума сразу по всем переменным минимизируемой функции;
- ✓ реализуется только совместно с одним из методов одномерной минимизации;
- ✓ реализуется только совместно с методом «золотого сечения».

81. Решением задачи безусловной минимизации является нахождение точки минимума x^* функции $f(x) = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Условием окончания работы метода покоординатного спуска является:

- ✓ полная однократная минимизация функции $f(x)$ по всем компонентам вектора $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$;
- ✓ $\|x^k - x^*\| \le \varepsilon$, где x^k – приближение к точке минимума на k-й итерации;
- ✓ $|f(x^*) - f(x^k)| \le \varepsilon$;
- ✓ $|f(x^{k+1}) - f(x^k)| \le \varepsilon$, где k и $(k+1)$ – приближение к точке минимума соответственно на k-м и $(k+1)$-м шагах минимизации.

82. Пусть минимизируемая функция есть функция двух переменных $f(x_1, x_2)$. Минимизация функции методом покоординатного спуска с заданной точностью потребовала 4 шага. Сколько раз использовался метод одномерной минимизации для отыскания точки минимума $f(x_1, x_2)$:

- ✓ 2 раза?
- ✓ 4 раза?
- ✓ 8 раз?
- ✓ 16 раз?

83. Основными составляющими метода Хука и Дживса для минимизации функции являются:

- ✓ исследующий поиск;
- ✓ минимизация по выбранному направлению;
- ✓ поиск по образцу;
- ✓ поиск по направлению градиента.

84. Направление для минимизации в методе Хука и Дживса задается:

- ✓ вектором антиградиента;
- ✓ случайным образом;
- ✓ после циклического поиска компонент вектора направления убывания функции по всем переменным;
- ✓ одновременным изменением всех переменных в сторону убывания функции.

85. Если поиск по образцу в методе Хука и Дживса привел к нулевому вектору направления, необходимо:

- ✓ увеличить одно из приращений аргумента Δx_i;
- ✓ уменьшить все приращения аргумента Δx_i, $i = 1, 2, \ldots, n$;
- ✓ задать новое начальное приближение x^0;
- ✓ считать процедуру поиска минимума функции законченной.

86. Выберите правильные утверждения.

Для реализации комплексного поиска Бокса необходимо:

- ✓ задать ограничения на все переменные минимизируемой функции;
- ✓ вычислить градиент функции в точке начального приближения к минимуму;
- ✓ построить многогранник со случайными $2n$ вершинами (n – размерность задачи) в области поиска минимума;
- ✓ заменить «наихудшую» вершину, в которой значение функции наибольшее, на центр тяжести всех вершин многогранника.

87. Метод Бокса гарантированно даст решение, если:

- ✓ минимизируемая функция непрерывна и дифференцируема, ограничения представлены в виде равенств;

- ✓ минимизируемая функция не монотонна, ограничения определяют выпуклую область;
- ✓ минимизируемая функция непрерывна и одноэкстремальна, ограничений нет;
- ✓ минимизируемая функция нескольких переменных дифференцируема.

88. При реализации метода случайного поиска для минимизации функции $f(x)$ используется формула $x^{k+1} = x^k + \lambda^k \left[\beta \frac{z^k}{\left\| z^k \right\|} + (1-\beta) r^k \right]$. Выберите верные определения:

- ✓ x^{k+1}, x^k – векторы последовательных приближений к точке минимума;
- ✓ $\frac{z^k}{\left\| z^k \right\|}$ – нормированный вектор предыстории, включающий в себя все удачно выбранные направления до k-й итерации включительно;
- ✓ r^k – случайное число из интервала [0, 1];
- ✓ x^{k+1} принимается в качестве $(k+1)$-го приближения к точке минимума, только если $f\left(x^{k+1}\right) < f\left(x^k\right)$.

89. Для минимизации функции $f(x)$ методом случайного поиска используется формула $x^{k+1} = x^k + \lambda^k \left[\beta \frac{z^k}{\left\| z^k \right\|} + (1-\beta) r^k \right]$.

Если $f\left(x^{k+1}\right) \geq f\left(x^k\right)$, то необходимо:

- ✓ получить новый вектор r^k и продолжить алгоритм случайного поиска;
- ✓ изменить вектор предыстории u^{k+1} посредством изменения параметра β;
- ✓ уменьшить коэффициент λ^k по формуле $\lambda^k := \lambda^k \alpha;\quad 0 \leq \alpha \leq 1$.
- ✓ считать точку x^k точкой минимума.

90. Выберите верные утверждения:

- ✓ Если вектор-градиент функции нескольких переменных отрицателен, то он показывает направление убывания функции.
- ✓ Градиент и антиградиент функции совпадают в точке минимума.
- ✓ Градиент возрастающей функции нескольких переменных есть число положительное.

- ✓ Градиент – это вектор, направленный перпендикулярно касательной плоскости поверхности в трехмерном пространстве, определяемой функцией $z = f(x, y)$.

91. Итерационный процесс минимизации по методу градиентного спуска определяется формулой: $x^{k+1} = x^k + \lambda^k s^k$. Укажите ошибочные утверждения:

- ✓ $\lambda^k = \left(\lambda_1^k, \lambda_2^k, \ldots, \lambda_k^k\right)$ – k-е приближение к точке минимума;
- ✓ $s^k = \dfrac{\nabla f\left(x^k\right)}{\left\|\nabla f\left(x^k\right)\right\|}$, где $\nabla f\left(x^k\right)$ – градиент функции $f(x)$ – единичный вектор в направлении минимизации;
- ✓ λ^k может быть как положительным, так и отрицательным числом, меньшим единицы;
- ✓ размерности векторов x^k и $\nabla f\left(x^k\right)$, градиента функции $f(x)$, совпадают.

92. Методом градиентного поиска $x^{k+1} = x^k - \lambda^k \dfrac{\nabla f\left(x^k\right)}{\left\|\nabla f\left(x^k\right)\right\|}$ можно найти:

- ✓ точку минимума;
- ✓ точку перегиба;
- ✓ стационарную точку;
- ✓ точку максимума.

93. Методом градиентного поиска $x^{k+1} = x^k + \lambda^k \dfrac{\nabla f\left(x^k\right)}{\left\|\nabla f\left(x^k\right)\right\|}$ можно найти:

- ✓ точку максимума;
- ✓ стационарную точку;
- ✓ точку минимума;
- ✓ точку перегиба.

94. Если $x^* = \left(x_1^*,\ x_2^*,\ x_n^*\right)$ – точка минимума функции $f(x)$, то:

- ✓ $\left\|\nabla f\left(x^k\right)\right\| \to 0$ при $x^k \to x^*$, $i = 1,2,\ldots,n$;
- ✓ $\dfrac{\partial f\left(x^k\right)}{\partial x_i^k}$ неограниченно убывает при $x^k \to x^*$;
- ✓ $f\left(x^k\right) \to 0$ при $x^k \to x^*$;
- ✓ $|\Gamma| = 0$, где $\Gamma = \dfrac{\partial^2 f\left(x^k\right)}{\partial x_i\, \partial x_j}$ – матрица Гессе.

95. В процедуре минимизации функции используется формула $x^{k+1} = x^k - \lambda^k \frac{\nabla f\left(x^k\right)}{\left\|\nabla f\left(x^k\right)\right\|}$. Реализация такой процедуры может привести к аварийному останову вычислительного процесса, если (выберите верные утверждения):

- ✓ начиная из точки x^0 ни для какого значения λ^k уменьшение функции в точке x^1 не происходит;
- ✓ $f\left(x^k\right)$ имеет разрыв в точке x^k;
- ✓ x^k – стационарная точка функции $f(x)$;
- ✓ x^{k+1} – точка минимума функции $f(x)$.

96. Выберите возможные способы расчета параметра λ^k в формуле наискорейшего спуска $x^{k+1} = x^k - \lambda^k \frac{\nabla f\left(x^k\right)}{\left\|\nabla f\left(x^k\right)\right\|}$:

- ✓ $\lambda^k = \mathrm{const} > 1$;
- ✓ $\lambda^k = \lambda^{k-1} \cdot \gamma, \quad \gamma < 1$;
- ✓ $\lambda^k = \lambda^{k-1} \cdot \gamma, \quad \gamma$ – возрастающая последовательность;
- ✓ $\lambda^k = \min\limits_{\lambda} f\left(x^k + \lambda^k s^k\right)$.

97. Выберите правильные утверждения:

- ✓ метод наискорейшего спуска при минимизации выпуклой функции сходится из любого начального приближения;
- ✓ метод наискорейшего спуска сходится к глобальному минимуму для любой дважды дифференцируемой функции;
- ✓ если функция имеет производные любого порядка и вогнута, то методом наискорейшего спуска можно найти ее максимум из любого начального приближения;
- ✓ для любой дифференцируемой функции метод наискорейшего спуска из любого начального приближения приведет в стационарную точку.

98. Выберите правильные утверждения:

- ✓ метод сопряженного градиента является методом нулевого порядка;
- ✓ на каждом шаге в методе сопряженного градиента выполняется минимизация функции по заданному направлению;
- ✓ условием окончания работы алгоритма поиска минимума функции по методу сопряженного градиента является равенство нулю всех частных производных функции;

- ✓ если все частные производные функции на $(k+1)$-м шаге ее минимизации по методу сопряженного градиента окажутся равными 0, то произойдет останов работы алгоритма.

99. Выберите случаи из предложенных, когда работа алгоритма по методу Ньютона для минимизации функции

$$x^{k+1} = x^k - [\nabla^2 f(x^k)]^{-1} \cdot \nabla f(x^k)$$

на $(k + 1)$-м шаге будет прервана:

- ✓ $\|\nabla f(x^{k+1})\| < \|\nabla f(x^k)\|$;
- ✓ $\det(\nabla^2 f(x^k)) = 0$;
- ✓ $[\nabla^2 f(x^k)]$ – для плохо обусловленной матрицы;
- ✓ $\|\nabla f(x^k)\| = 0$.

100. Из перечисленных выберите те задачи, которые можно решать методом Ньютона для минимизации функции.

- ✓ находить глобальный минимум любой дифференцируемой функции;
- ✓ решать систему линейных алгебраических уравнений;
- ✓ решать задачи нелинейного программирования без ограничений;
- ✓ находить минимумы квадратичных форм.

6. Задача нелинейного программирования

101. Каноническая форма записи существует (выберите правильные ответы):

- ✓ для задачи линейного программирования;
- ✓ для задачи нелинейного программирования;
- ✓ для задачи выпуклого программирования;
- ✓ для задачи поиска экстремума функции без ограничений.

102. Задача линейного программирования $z = f(x, y) \to \min\limits_{x,y}$; $\varphi(x, y) = 0$, сводится к задаче одномерной минимизации в случае (выберите правильные ответы):

- ✓ когда $f(x, y)$ и $\varphi(x, y)$ – дважды дифференцируемые функции;
- ✓ когда $\varphi(x, y)$ можно преобразовать к виду $x = g(y)$;
- ✓ когда $\varphi(x, y)$ можно преобразовать к виду $y = \varphi(x)$;
- ✓ когда x и y допускают параметрическое представление.

103. Для задачи нелинейного программирования $z = f(x, y) \to \min\limits_{x,y}$; $\varphi(x, y) = 0$, и функции $\Phi(x, y) = f(x, y) + \mu\varphi(x, y)$ выберите правильные записи метода множителей Лагранжа:

- ✓ $\begin{cases} f'_x(x, y) + \mu\varphi(x, y) = 0, \\ f'_y(x, y) + \mu\varphi(x, y) = 0, \\ \varphi(x, y) = 0. \end{cases}$

- ✓ $\begin{cases} \dfrac{f'_x}{\varphi'_x} = \dfrac{f'_y}{\varphi'_y} = -\mu, \\ \varphi(x, y) = 0. \end{cases}$

- ✓ $\Phi'_x = \Phi'_y = \Phi'_\mu = 0$.

- ✓ $\Phi'_x = \Phi'_y = \Phi'_z = 0$.

104. Выберите правильные утверждения:

- ✓ в методе штрафных функций функция штрафа выбирается независимо от функции – критерия минимизации;
- ✓ для решения ЗНП по методу штрафных функций используются методы безусловной минимизации;
- ✓ штрафная функция в методе штрафных функций для решения ЗНП имеет в качестве своих аргументов ограничения в виде неравенств;
- ✓ методом итерационных функций любую ЗНП можно свести к задаче на отыскание безусловного экстремума.

105. Метод штрафных функций позволяет:

- ✓ свести ЗНП с ограничениями к задаче без ограничений;
- ✓ использовать функцию Лагранжа для решения ЗНП;
- ✓ минимизировать целевую функцию;
- ✓ преобразовать систему ограничений.

106. Методы итерационных функций включают в себя (выберите правильные ответы):

- ✓ метод внешней точки;
- ✓ метод внутренних ограничений;
- ✓ метод внешнего поиска;
- ✓ комбинированный метод внешних и внутренних прямых.

107. В качестве функции штрафа в методе внутренней точки выбрана функция $\Phi(x,r_k)=r_k\sum_{i=1}^{m}\frac{1}{\varphi_i(x)}$. Выберите тип ограничений на функции $\varphi_i(x)$, для которых может быть использована такая функция штрафа:

- ✓ $\varphi_i(x)\le 0,\quad i=1,...,n$;
- ✓ $\varphi_{i_k}(x)\ge 0$, $i_k\in I_k$; $\varphi_{j_m}(x)\le 0$, $j_m\in J_m$; $I_k\cup J_m=\{1,2,...,n\}$;
- ✓ $\varphi_{j_s}(x)=0$, $j_s=J_s$; $\varphi_{i_e}(x)\ge 0$, $i_e\in I_e$; $J_s\cup I_e=\{1,2,...,n\}$;
- ✓ $\varphi_i(x)\ge 0,\quad i=1,...,n$.

108. Выберите правильное утверждение:

- ✓ Если для реализации метода необходимо знать хотя бы одну точку из области допустимых значений ЗНП, то это – метод внешней точки.
- ✓ Метод внешней точки нельзя применять в комбинации с методом внутренней точки, так как они являются противоречивыми.
- ✓ В методе внешней точки штрафная функция обращается в 0 только внутри допустимой области ЗНП.
- ✓ В методе внешней точки штрафная функция всегда положительна.

109. В ЗНП ограничения присутствуют в виде неравенств $\varphi_i(x)\ge 0, i=1,...,n$. Выберите возможную функцию штрафа (из предложенных) для реализации метода внешней точки:

- ✓ $\Phi(x,R)=r_k\sum_{i=1}^{n}(\varphi_i(x))^2$;
- ✓ $\Phi(x,R)=r_k\sum_{i=1}^{n}(|\varphi_i(x)|-\varphi_i(x))^2$;
- ✓ $\Phi(x,R)=r_k\sum_{i=1}^{n}(\frac{|\varphi_i(x)|}{\varphi(x)}-1)(\varphi_i(x))^2$;
- ✓ $\Phi(x,R)=r_k\sum_{i=1}^{n}(|\varphi_i(x)|-\varphi_i(x))(e^{\varphi_i(x)}-1)$.

110. ЗНП записана в виде: $f(x)\to\min\limits_x$; $\varphi_i(x)\ge 0,\quad i=1,...,n$. Для некоторой точки x_0, такой, что $\varphi_{i_k}(x)\ge 0$; $\varphi_{i_e}(x)\le 0$; $i_k\in I_k$; $i_e\in I_e$; $I_k\cup I_e=\{1,2,\ldots,n\}$. Выберите правильно сформулированные функции для безусловной минимизации методом штрафных функций:

- ✓ $\Psi(x)=f^2(x)+\sum_{i_k\in I_k}\varphi_{i_k}^2(x)+\sum_{i_e\in I_t}(|\varphi_{i_e}(x)|-\varphi_{i_e}(x))^2$;

- ✓ $\Psi(x) = f^2(x) + \sum_{i_k \in I_k} \ln \varphi_{i_k}(x) + \sum_{i_e \in I_t} (\left|\varphi_{i_e}(x)\right| - \varphi_{i_e}(x))^2$;
- ✓ $\Psi(x) = f(x) + \sum_{i_k \in I_k} \frac{1}{\varphi_{i_k}(x)} + \sum_{i_e \in I_t} (\left|\varphi_{i_e}(x)\right| - \varphi_{i_e}(x))^2$;
- ✓ $\Psi(x) = f(x) + \sum_{i_k \in I_k} \ln \varphi_{i_k}(x) + \sum_{i_e \in I_t} \frac{1}{\left|\varphi_{i_e}(x)\right|}$.

111. Какие из предложенных формулировок теоремы Куна – Таккера для ЗНП верны:

- ✓ оптимальное решение ЗНП всегда является точкой Куна – Таккера ЗНП?
- ✓ если все функции, участвующие в постановке ЗНП, дифференцируемы, то точка Куна – Таккера является точкой локального минимума ЗНП?
- ✓ для дифференцируемых функций ЗНП точка минимума целевой функции ЗНП является точкой Куна – Таккера?
- ✓ для того чтобы точка была точкой Куна – Таккера, достаточно чтобы она была решением ЗНП, если целевая функция и функции ограничений дифференцируемые?

112. Найдите соответствие между методом поиска экстремума и его характеристикой:

✓ метод Ньютона	– это метод нулевого порядка;
✓ метод градиентного спуска	– это метод первого порядка;
✓ метод золотого сечения	– это метод второго порядка;
✓ метод половинного деления	– это не является методом оптимизации.

113. Метод Ньютона сходится при минимизации функции за n итераций, где n – количество переменных, для:

- ✓ линейной функции;
- ✓ квадратичной функции;
- ✓ экспоненциальной функции;
- ✓ дважды дифференцируемой функции.

114. Функция Лагранжа для ЗНП представляет собой:

- ✓ целевую функцию, умноженную на множитель Лагранжа;
- ✓ произведение множителя Лагранжа на функцию ограничения;
- ✓ сумму целевой функции и произведения множителя Лагранжа на функцию ограничения;
- ✓ двухмерную линейную комбинацию целевой функции и функции ограничения.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Акулич, И.Л. Математическое программирование в примерах и задачах [Текст]: учеб. пособие / И.Л. Акулич. – 2-е изд., испр. и доп. – М.: Высшая школа, 1993. – 336 с.

2. Аттетков, А.В. Введение в методы оптимизации [Текст]: учеб. пособие / А.В. Аттетков, В.С. Зарубин, А.Н. Канатников. – М.: Финансы и статистика; ИНФРА-М, 2008. – 272 с.

3. Банди, Б. Методы оптимизации. Вводный курс [Текст]: пер. с англ. / Б. Банди. – М.: Радио и связь, 1988. – 128 с.

4. Васильков, Ю.В. Компьютерные технологии вычислений в математическом моделировании [Текст]: учеб. пособие / Ю.В Васильков, Н.Н. Василькова – М.: Финансы и статистика, 1999. – 256 с.

5. Данко, П.Е. Высшая математика в упражнениях и задачах [Текст]: учеб. пособие для вузов: в 2 ч. Ч. 1. – 7-е изд., испр. / П.Е. Данко, А.Г. Попов, Т.Я. Кожевникова, С.П. Данко. – М.: Изд-во «Оникс»; Изд-во «Мир и образование», 2008. – 368 с.

6. Зангвилл, У. Нелинейное программирование. Единый подход [Текст]: пер. с англ./ У. Зангвилл; под ред. Е.Г. Гольштейна. – М.: Сов. Радио, 1973. – 312 с.

7. Карманов, В.Г. Математическое программирование [Текст]: учеб. пособие / В.Г. Карманов. – М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1975. – 272 с.

8. Кошев, А.Н. Введение в численные методы [Текст]: учеб. пособие / А.Н. Кошев, С.В. Бакушев, И.Г. Гвоздева. – Пенза: ПГАСА, 2000. – 53 с.

9. Кошев, А.Н. Вычислительные методы [Текст]: учеб. пособие / А.Н. Кошев, В.В. Кузина. – Пенза: ПГУАС, 2012. – 204 с.

10. Кошев, А.Н. Численные методы и методы оптимизации [Текст]: учеб. пособие: в 2 ч. / А.Н. Кошев, В.В. Кузина. – Пенза: ПГУАС, 2004. – 136 с.

11. Кошев, А.Н. Численные методы решения задач оптимизации [Текст]: учеб. пособие / А.Н. Кошев, В.В. Кузина. – Пенза: ПГУАС, 2012. – 132 с.

12. Кузнецов, А.В. Высшая математика: Математическое программирование [Текст]: учебник / А.В. Кузнецов, В.А. Сакович, Н.И. Холод; под общ. ред. А. В. Кузнецова. – Мн.: Высш. шк., 1994. – 286 с.

13. Курсовые работы по направлению 230200 «Информационные системы» [Текст]: методические указания для студентов специальности «Информационные системы и технологии» по выполнению курсовых работ / А.Н. Кошев, В.В. Кузина. – Пенза: ПГУАС, 2006.– 28 с.

14. Мышкис, А.Д. Элементы теории математических моделей [Текст]/ А.Д. Мышкис. – 2-е изд., испр. – М.: Едиториал УРСС, 2004. – 192 с.

15. Охорзин, В.А. Прикладная математика в системе MATHCAD [Текст]: учеб. пособие / В.А. Охорзин. – 2-е изд., испр. и доп. – СПб.: Лань, 2008. – 352 с.

16. Пантелеев, А.В. Методы оптимизации в примерах и задачах [Текст]: учеб. пособие / А.В. Пантелеев, Т.А. Летова. – М.: Высшая школа, 2002. – 544 с.

17. Плис, А.И. Mathcad. Математический практикум для инженеров и экономистов [Текст]: учеб. пособие / А.И. Плис, Н.А. Сливина. – 2-е изд., перераб. и доп. – М.: Финансы и статистика, 2003. – 656 с.

18. Пшеничный, Б.Н. Численные методы в экстремальных задачах [Текст]/ Б.Н. Пшеничный, Ю.М. Данилин. – М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1975. – 320 с.

19. Ромакин, М.И. Математический аппарат оптимизационных задач [Текст]/ М.И. Ромакин. – М.: Статистика, 1975. – 112 с.

20. Самарский, А.А. Введение в численные методы [Текст]: учеб. пособие для вузов / А.А. Самарский. – 2-е изд., перераб. и доп.– М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1987. – 287 с.

21. Самарский, А.А. Задачи и упражнения по численным методам [Текст]: учеб. пособие / А.А. Самарский, П.Н. Вабищевич, Е.А. Самарская. – М.: Эдиториал УРСС, 2000. – 208 с.

22. Супрун, А.Н. Вычислительная математика для инженеров-экологов [Текст]: метод. пособие / А.Н. Супрун, В.В. Найденко. – М.: Изд-во Ассоциации строительных вузов, 1996. – 391 с.

23. Табак, Д. Оптимальное управление и математическое программирование [Текст]/ Д. Табак, Б. Куо; пер. с англ.; под ред. Я.З. Цыпкина. – М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1975. – 280 с.

24. Тыртышников, Е.Е. Методы численного анализа [Текст]: учеб. пособие для студентов вузов / Е.Е. Тыртышников – М.: ИЦ «Академия», 2007. – 320 с.

25. Химмельблау, Д. Прикладное нелинейное программирование [Текст] / Д. Химмельблау; пер. с англ. И.М. Быховской и Б.Т. Вавилова; под ред. М.Л. Быховского – М.: Мир, 1975. – 534 с.

СПИСОК ТЕРМИНОВ

Алгоритм
Антиградиент
Базис векторов
Базисная переменная
Базисная неизвестная
Базисная точка
Базисное решение
Внешняя точка
Внутренняя точка
Выпуклость функции
Выпуклое множество
Выпуклое программирование
Вырожденная вершина
Генеральный элемент матрицы
Градиент функции
Граничная точка
Допустимая область
Допустимая точка
Допустимое множество
Допустимое значение
Допустимое решение
Допустимый многоугольник
Задача безусловной оптимизации
Задача условной оптимизации
Задача линейного программирования
Задача выпуклого программирования
Задача геометрического программирования
Задача динамического программирования
Задача дискретного программирования
Задача дробно-линейного программирования
Задача квадратичного программирования
Задача математического программирования (одномерная, многомерная)
Задача нелинейного программмирования
Задача параметрического программирования
Задача сепарабельного программирования
Задача стохастического программирования
Задача целочисленного программирования
Задача о планировании производства
Задача о раскрое
Задача о рационе
Золотое сечение
Каноническая форма ЗЛП, ЗВП
Квадратичная аппроксимация
Квадратичная форма положительно (отрицательно)- определенная, положительно (отрицательно)-полуопределенная
Квадратичное программирование
Комплексный поиск Бокса
Критерий оптимальности
Линия уровня
Линейная форма
Математическое моделирование
Математическое программирование
Матрица Гёссе
Метод безусловной оптимизации
Метод внутренней точки
Метод внешней точки
Метод 0-го, 1-го, … порядка
Метод градиентного спуска
Метод Ньютона

Метод оптимизации (одномерной, …, многомерной)
Метод перебора
Метод прямого, повторяющегося, случайного поиска
Метод золотого сечения
Метод комплексного поиска Бокса
Метод множителей Лагранжа
Метод наискорейшего, покоординатного спуска
Метод сопряженного градиента Флетчера – Ривса
Метод Хука и Дживса
Метод штрафных функций
Минимум локальный, глобальный
Множество допустимых решений
Объект
Опорное решение
Оптимальный план
Параметры оптимизации
Поверхность уровня
Позином
Производная по направлению
Регулярная область
Седловая точка
Симплекс
Симплекс-метод
Стационарная точка
Теорема Куна – Таккера
Функция вогнутая (строго вогнутая), выпуклая (строго выпуклая), штрафная
Функция Лагранжа
Условие выпуклости (регулярности)
Целевая функция
Экстремум

О Г Л А В Л Е Н И Е

Учебное издание

Кузина Валентина Владимировна
Кошев Александр Николаевич

КОНТРОЛЬНО-ИЗМЕРИТЕЛЬНЫЕ МАТЕРИАЛЫ ПО КУРСУ
«ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ И МЕТОДЫ ОПТИМИЗАЦИИ»
Учебно-методическое пособие

Р е д а к т о р М.А. Сухова
В е р с т к а В.В. Кузина, Н.В. Кучина

Подписано в печать 05.07.2013. Формат 60х84/16.
Бумага офисная «Снегурочка». Печать на ризографе.
Усл.печ.л. 3,49. Уч.-изд.л. 3,75. Тираж 80 экз.
Заказ № 150.

Издательство ПГУАС.
440028, г. Пенза, ул. Германа Титова, 28