

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ  
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

---

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение  
высшего профессионального образования  
"Пензенский государственный университет  
архитектуры и строительства"

**А.И. Шеин, В.П. Волков**

## **ОЛИМПИАДНЫЕ ЗАДАЧИ ПО СТРОИТЕЛЬНОЙ МЕХАНИКЕ**

Рекомендовано Редсоветом университета  
в качестве учебного пособия для студентов,  
обучающихся по направлению подготовки 270800.62 «Строительство»  
для профиля «Промышленное и гражданское строительство»

Пенза 2013

УДК624.01/.07(075.8)

ББК38.112я73

Ш39

Рецензенты: доктор технических наук, профессор,  
зав. кафедрой В.В. Смогунов (ПГУ);  
доктор технических наук, профессор,  
зав. кафедрой Н.Н. Ласьков (ПГУАС)

**Шеин А.И.**

Ш39 Олимпиадные задачи по строительной механике: учебное  
пособие / А.И. Шеин, В.П. Волков. – Пенза: ПГУАС, 2013. –  
132 с.

Приводятся подробно разобранные примеры решения задач повышенной сложности по строительной механике. Рассматриваются условия задач для самостоятельного решения.

Учебное пособие подготовлено на кафедре «Механика» и может быть полезным студентам, обучающимся по направлению подготовки 270800.62 «Строительство» (профиль «Промышленное и гражданское строительство»), для углубленного изучения строительной механики.

© Пензенский государственный университет  
архитектуры и строительства, 2013

© Шеин А.И., Волков В.П., 2013

## ПРЕДИСЛОВИЕ

Система проверки знаний путем проведения олимпиад используется во многих учебных заведениях как эффективная система приобретения навыков в самостоятельном решении задач строительной механики повышенной сложности, оптимизации образовательного процесса и повышения качества подготовки студентов.

При самостоятельной подготовке к олимпиаде у студента должна иметься возможность разобрать задачи повышенной сложности на основе ряда примеров. Именно такую возможность и предоставляет данное пособие.

Учебное пособие подготовлено в соответствии с программами изучения строительной механики студентами строительных профилей, содержит пять разделов:

1. Кинематический анализ сооружений.
2. Статически определимые системы.
3. Статически неопределимые системы.
4. Основы устойчивости сооружений.
5. Основы динамики сооружений.

В конце книги приводятся варианты олимпиадных задач.

Все разделы снабжены подробными примерами решения различных задач и хорошо проиллюстрированы.

# 1. КИНЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

Существуют два критерия классификации стержневых систем: кинематический и статический.

По кинематическому признаку стержневые системы могут быть разделены на три категории: геометрически неизменяемые, или кинематически неподвижные; геометрически изменяемые, или кинематически подвижные; мгновенно изменяемые. В свою очередь, геометрически неизменяемые системы могут иметь необходимое число связей или избыточное число связей.

*Геометрически неизменяемая система – это система соединенных между собой тел, не допускающая относительно перемещения ее частей без их деформации. Системы, у которых конечные взаимные перемещения элементов возможны без их деформации, называются геометрически изменяемыми.*

*Мгновенно изменяемая система представляет собой исключительный случай геометрически изменяемой системы: в ней без изменения длин элементов и их деформаций допускаются бесконечно малые перемещения.*

В практике строительства в основном используют геометрически неизменяемые системы. Исключением могут являться некоторые типы подвесных систем.

По статическому признаку стержневые системы разделяются на статически определимые и статически неопределимые.

Основной целью проведения кинематического анализа является выяснение вопроса о том, является ли данная система геометрически неизменяемой, геометрически изменяемой или мгновенно изменяемой. Решение этого вопроса связано с установлением степеней свободы расчетной схемы, для которой введем обозначение  $W$ .

*Степенью свободы системы называется ее кинематическая характеристика, представляющая собой наименьшее число независимых параметров, с помощью которых можно определить положение и движение всех точек системы в любой момент времени.*

Если плоская система содержит  $D$  жестких дисков, то при отсутствии связей между ними число степеней свободы такой системы будет равно:  $W = 3D$ . Каждый простой шарнир уничтожает две степени свободы взаимной подвижности дисков, а каждая одиночная связь – одну. Обозначим через  $\Pi$  число простых шарниров, то есть соединяющих два диска, а через  $C_0$  – число одиночных связей, включая опорные, тогда число степеней свободы рассматриваемой системы равно:

$$W = 3D - 2\Pi - C_0. \quad (1.1)$$

При этом если  $W > 0$ , то система является геометрически изменяемой и не может служить расчетной схемой строительной конструкции.

Если  $W < 0$ , то система имеет избыточное число связей. Здесь однозначно можно утверждать, что система является статически неопределимой, однако определенно сказать, что она неизменяема, нельзя. Поэтому условие  $W < 0$  является необходимым условием геометрической неизменяемости и необходимым и достаточным признаком статической неопределенности.

При  $W = 0$  система формально содержит достаточное количество связей, чтобы считать ее геометрически неизменяемой и статически определимой. Однако выполнение этого условия не гарантирует геометрической неизменяемости конструкции.

Для окончательного решения вопроса о геометрической неизменяемости необходимо провести структурный анализ расчетной схемы.

Структурный анализ расчетной схемы сооружения основан на приведении ее к простейшим видам – двум и трем дисковым соединениям, для которых могут быть установлены четкие правила определения кинематического признака. При этом опорная поверхность (земля) тоже может рассматриваться как отдельный диск.

*Пример 1.1. Произвести проверку геометрической неизменяемости рамы (рис.1.1).*

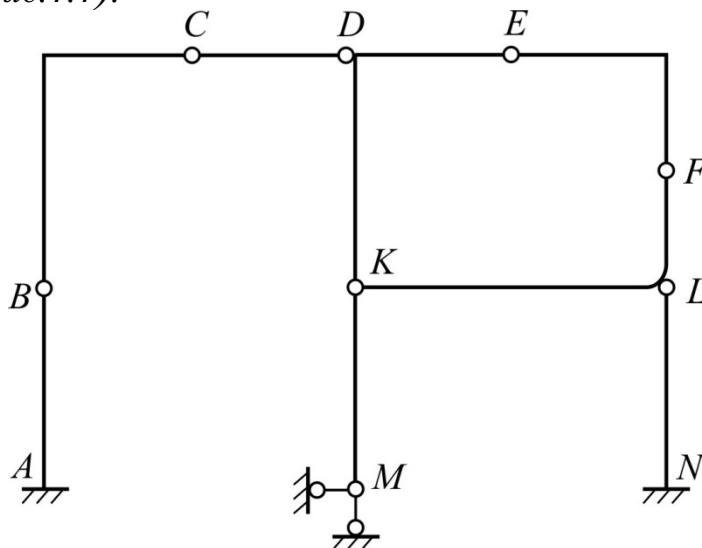


Рис. 1.1. Расчетная схема рамы

Количество дисков  $D=8$ ;

количество шарниров  $\text{Ш}=8$ ;

количество опорных связей  $C_0 = 8$  (рис. 1.2,а);

$$W = 3 \cdot 8 - 2 \cdot 8 - 8 = 0,$$

т.е. необходимое условие геометрической неизменяемости выполнено.

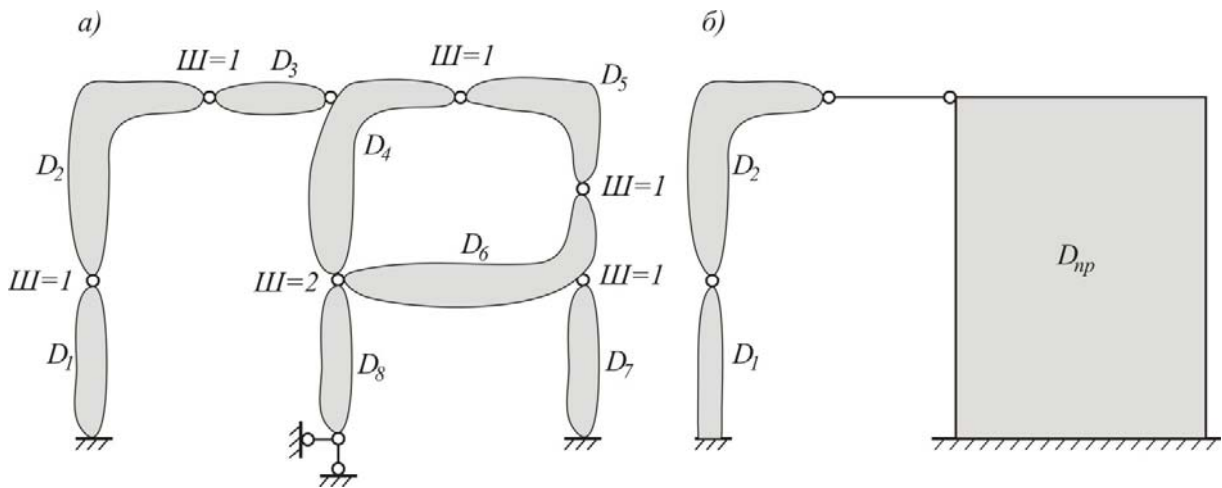


Рис.1.2. Кинематический анализ рамы

Проведем структурный анализ.

Диски  $D_4, D_5, D_6$  образуют геометрически неизменяемый треугольник, т.к. соединены шарнирами, не лежащими на одной прямой. Диск  $D_7$  является основным, так как он связан с землей тремя связями. Шарнирный треугольник соединен с основным диском  $D_7$  в точке  $L$  с помощью шарнира и с помощью единичной связи ( $D_8$ ) с землей. Таким образом, указанная система дисков представляет собой неизменяемую часть конструкции  $D_{np}$  (рис. 1.2,б). Диск  $D_1$  также является основным (он однотипен с диском  $D_7$ ), а диск  $D_3$  можно считать одиночной связью.

Таким образом, прикрепление диска  $D_2$  к основному диску  $D_1$  производится с помощью шарнира и к неизменяемой части  $D_{np}$  – с помощью одиночной связи  $D_3$ . Такое соединение обеспечивает геометрическую неизменяемость диска  $D_2$ . Так как доказана геометрическая неизменяемость отдельных частей системы, то и вся система является геометрически неизменяемой.

*Пример 1.2. Провести анализ геометрической неизменяемости рамы (рис. 1.3,а).*

Количество дисков  $D=4$ ;

количество шарниров  $\text{Ш}=4$ ;

количество опорных связей  $C_0 = 4$ ;

$$W = 3 \cdot 4 - 2 \cdot 4 - 4 = 0.$$

Т.е. необходимое условие геометрической неизменяемости выполняется. Проведем анализ схемы образования системы.

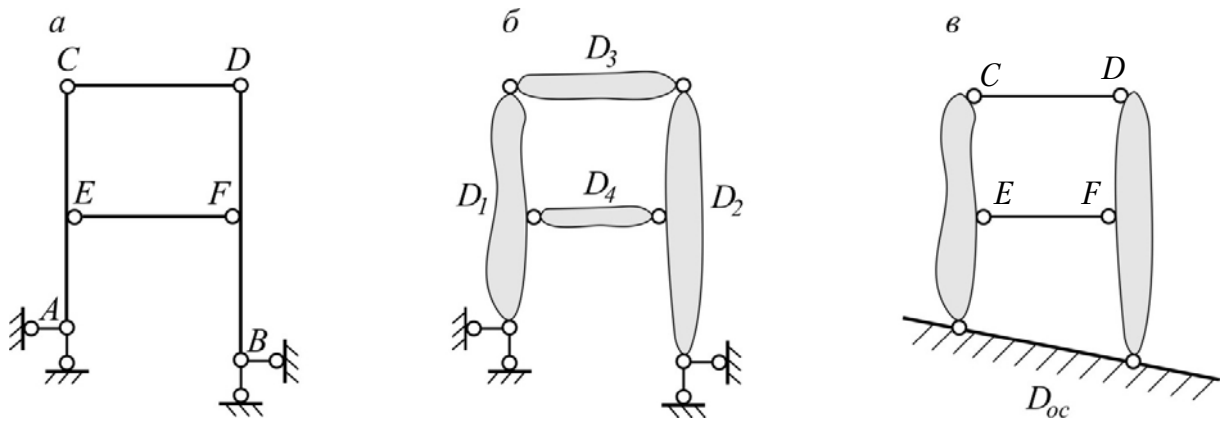


Рис. 1.3. Кинематический анализ рамы

Диски  $D_3$  и  $D_4$  (рис. 1.3,б) можно рассматривать как одиночные связи между дисками  $D_1$  и  $D_2$ . В качестве одиночной связи между дисками  $D_1$  и  $D_2$  можно рассматривать и диск основания  $D_{oc}$ . Тогда получается, что диски  $D_1$  и  $D_2$  соединены тремя одиночными связями (рис.1.3,в). При этом диск основания не параллелен связям  $EF$  и  $CD$ . Следовательно, диски соединены тремя связями в неизменяемую систему.

Пример 1.3. Провести анализ геометрической неизменяемости системы (рис. 1.4).

$$W = 3D - 2Ш - C_{оп} = 3 \cdot 3 - 2 \cdot 2 - 5 = 0$$

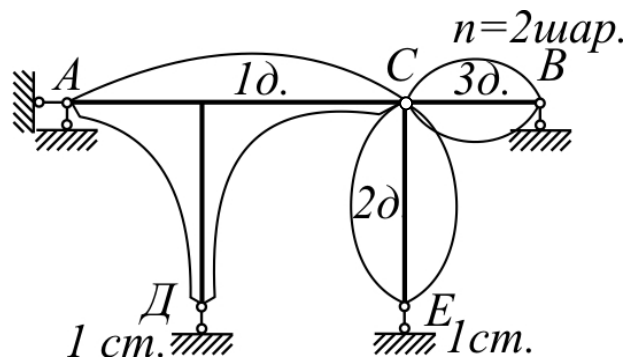


Рис. 1.4

Первый диск является неподвижным, к нему с помощью шарнира  $C$  крепятся 2 диска. Но диск  $CE$  крепится к земле через опорный стержень, проходящий через центр шарнира  $C$ , что приводит к мгновенной изменяемости части  $CE$  – опорного стержня и всей системы.

Системы, полученные из шарнирного треугольника путем последовательного прибавления узлов, с помощью 2 стержней, не лежащих на одной прямой, геометрически неизменяемы. Такие стержневые системы называют фермами.

Пример 1.4 (рис. 1.5). Произвести проверку геометрической неизменяемости плоской фермы.

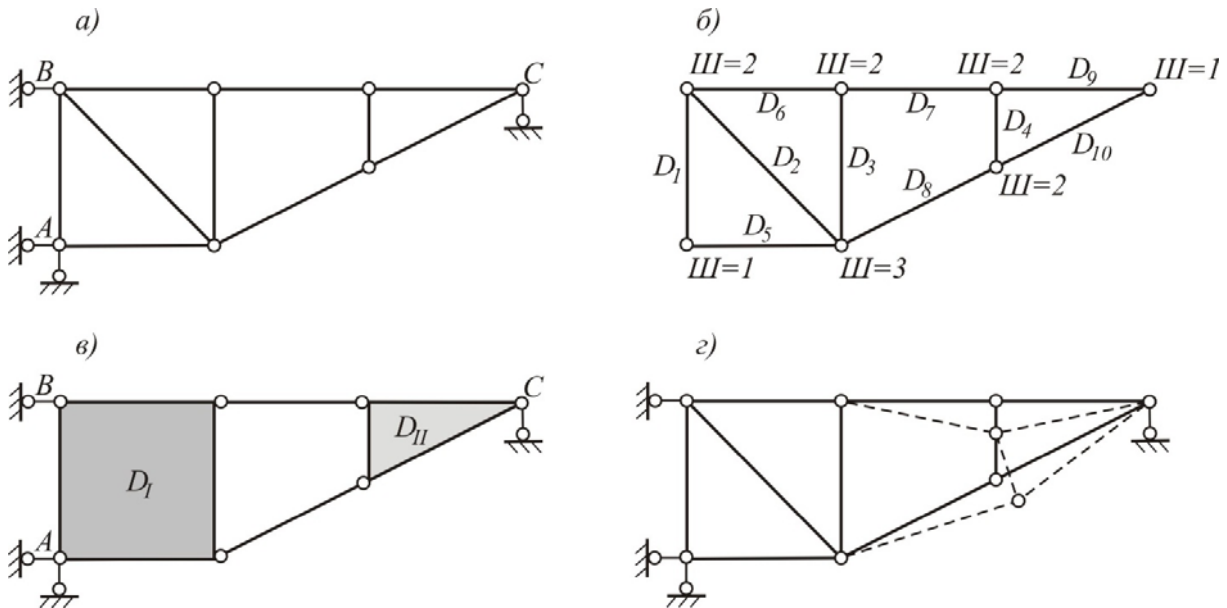


Рис.1.5. Проверка геометрической неизменяемости плоской фермы

Для подсчета количества дисков и количества шарниров рассмотрим ферму отдельно от связей (рис. 1.5,б).

- Количество дисков  $D=10$ ;
- количество шарниров  $\text{Ш}=13$ ;
- количество опорных связей  $C_0 = 4$ ;

$$W = 3 \cdot 10 - 2 \cdot 13 - 4 = 0.$$

Т.е. необходимый признак геометрической неизменяемости выполняется.

Диски (стержни)  $D_1, D_2, D_3, D_5$  и  $D_6$  образуют неизменяемый диск  $D_I$ , который прикреплен к земле тремя связями.

Диски  $D_4, D_9, D_{10}$  образуют неизменяемый шарнирный треугольник  $D_{II}$ , прикрепленный двумя связями к основному диску  $D_I$  и одной связью к основанию. Однако расположение этих связей не удовлетворяет условиям прикрепления одного диска, так как оси связей пересекаются в одной точке  $C$ . Поэтому диск  $D_{II}$  может повернуться (рис. 1.5,г) вокруг точки  $C$  – мгновенного центра поворота. Следовательно, данная ферма является мгновенно изменяемой системой.



Для кинематического анализа ферм удобно пользоваться следующей формулой:

$$W = 2U - C_{\text{фер}} - C_{\text{оп}}, \quad (1.2)$$

где  $U$  – число узлов фермы;

$C_{\text{фер}}$  – число стержней фермы;

$C_{\text{оп}}$  – число опорных стержней.

Пример 1.5 (рис. 1.6). Провести анализ геометрической неизменяемости плоской фермы.

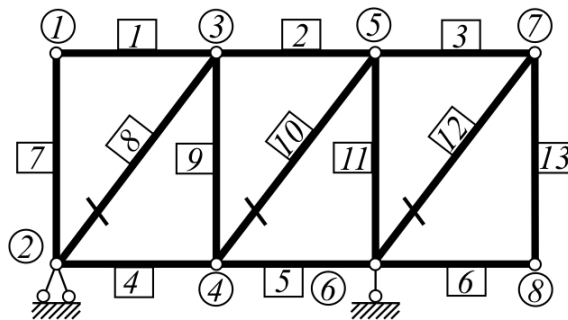


Рис. 1.6

$$W = 2 \cdot 8 - 13 - 3 = 0$$

Расстановку связей в ферме выполняем следующим образом: выделяем треугольник, который является геометрически неизменяемым диском, к этому диску прибавляем узел двумя стержнями, не лежащими на одной прямой, и таким образом формируем всю ферму.

Пример 1.6. Провести анализ геометрической неизменяемости плоской фермы (рис. 1.7).

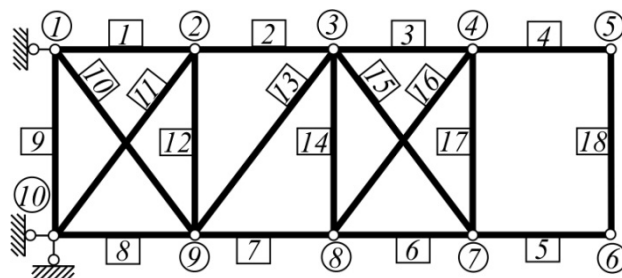


Рис. 1.7

$$W = 2U - C_{\text{фер}} - C_{\text{оп}} = 2 \cdot 10 - 18 - 3 = -1.$$

Ферма статически неопределима, но геометрически изменяема, т.к. неправильно расставлены связи.

Пример 1.7. Выполнить кинематический анализ системы (рис. 1.8).

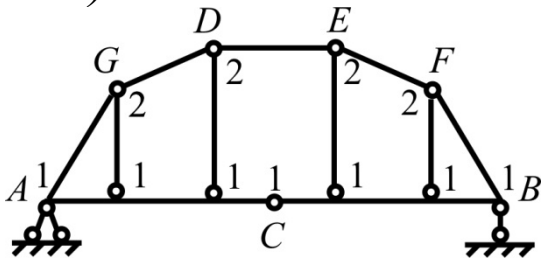


Рис. 1.8

$$D = 11; \quad \text{Ш} = 15; \quad C_0 = 3;$$

$$W = 3 \cdot 11 - 2 \cdot 15 - 3 = 0.$$

Число лишних неизвестных

$$L = W = 0.$$

На рис. 1.8 около каждого узла цифрой указано, какому числу простых шарниров эквивалентен сложный или примыкающий шарнир.

Проанализируем, как образована заданная расчетная схема. Для этого выделим два жестких диска  $AC$  и  $CB$ . Узлы  $G$  и  $F$  присоединены к ним двумя стержнями (диада). Аналогично прикрепляются узлы  $D$  и  $E$ .

Таким образом, имеем 2 диска:  $CAGD$  и  $CBFE$ , которые связаны между собой одним шарниром  $C$  и стержнем  $DE$ , не проходящим через точку  $C$ , т.е. сама конструкция без опорных связей геометрически неизменяема. К основанию она присоединена тремя стержнями, не параллельными и не пересекающимися в одной точке.

Следовательно, заданная система геометрически неизменяема и статически определима.

Пример 1.8. Выполнить кинематический анализ системы (рис. 1.9).

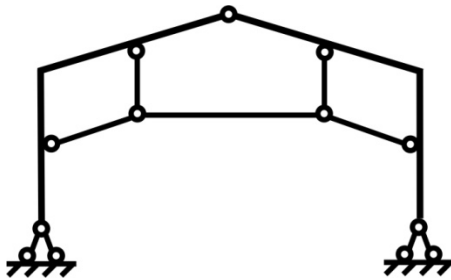


Рис. 1.9

При анализе структуры стержневой системы, изображенной на рис. 1.9, следует воспользоваться предыдущей схемой рассуждений (пример 1.7).

Ответ. Система геометрически неизменяемая и один раз внешне статически неопределимая.

Пример 1.9. Выполнить кинематический анализ системы (рис. 1.10.)

Проверим необходимое условие геометрической неизменяемости системы, показанной на рис. 1.10,а, по формуле (1.1). Анализируя способ ее образования, замечаем, что как левая часть I, так и правая II представляют собой геометрически неизменяемые диски, которые соединены между собой шарниром  $E$ . Прикрепление их к основанию в точках  $A$  и  $B$  также шарнирное. Расположение трех шарниров  $A$ ,  $E$  и  $B$  на одной прямой является признаком мгновенно изменяемой системы.

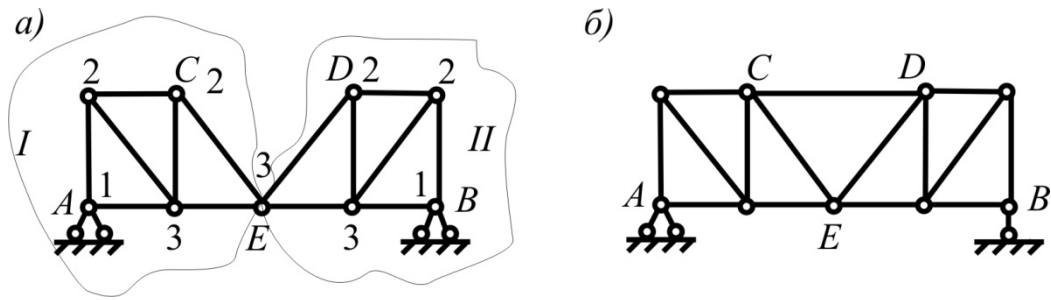


Рис.1.10

$$D = 14; \text{Ш} = 19; C_0 = 4; W = 3 \cdot 14 - 2 \cdot 19 - 4 = 0.$$

Структуру можно превратить в геометрически неизменяемую, если один опорный стержень (в точке  $B$ ) заменить стержнем  $CD$  (рис.1.10,б).

Пример 1.10. Выполнить кинематический анализ системы (рис. 1.11).

Выполним анализ структуры системы, изображенной на рис. 1.11,а, по формуле (1.1).

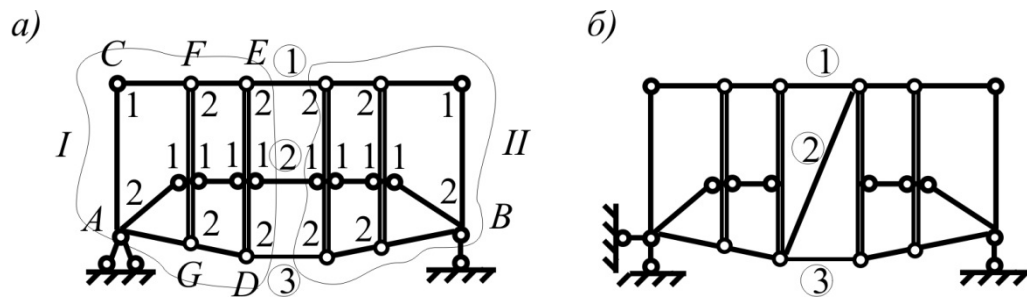


Рис.1.11

$$D = 21; \text{Ш} = 30; C_0 = 3; W = -L = 3 \cdot 21 - 2 \cdot 30 - 3 = 0.$$

Диски  $CA$  и  $GF$  соединены между собой непараллельными и не пересекающимися в одной точке стержнями, т.е. образуют геометрически неизменяемую систему; диск  $DE$  присоединяется к ней аналогичным способом. Таким образом, часть I ( $CADE$ ) геометрически неизменяема. По той же схеме образована симметрично расположенная часть II. Обе части системы соединены тремя параллельными стержнями 1, 2 и 3, что является признаком мгновенной изменяемости.

К основанию система прикреплена тремя непараллельными и непересекающимися стержнями.

Система может быть превращена в геометрически неизменяемую и статически определимую, если один из стержней (1, 2 или 3) поставить так, чтобы все три стержня не были параллельны и не пересекались в одной точке (рис. 1.11,б).

Пример 1.11. Выполнить кинематический анализ системы (рис. 1.12,а).

При анализе по формуле (1.1) имеем:

$$C_0 = 4; D = 8; Ш = 12; W = -L = 3D - 2Ш - C_0 = 3 \cdot 8 - 2 \cdot 12 - 4 = -4.$$

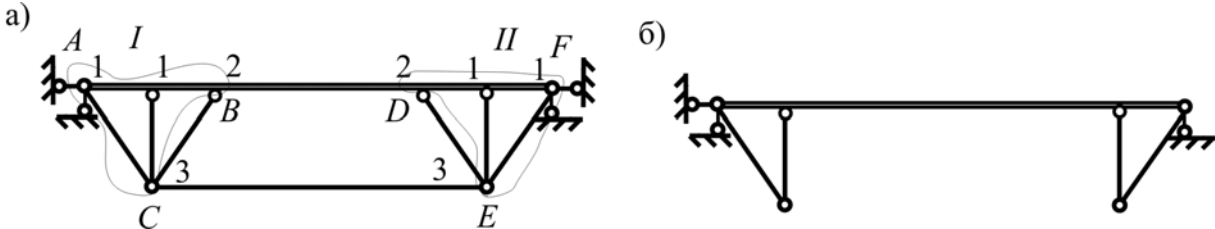


Рис.1.12

Система, показанная на рис. 1.12,а, геометрически неизменяема и четырежды статически неопределима. Структуру можно превратить в геометрически неизменяемую и статически определимую, если убрать три внутренних стержня, например  $CB$ ,  $CE$ ,  $DE$ , и один опорный стержень (рис.1.12,б).

Пример 1.12. Выполнить кинематический анализ системы (рис. 1.13). Анализируя по формуле (1.1), имеем:

$$C_0 = 5; D = 5; Ш = 5; W = -L = 3 \cdot 5 - 2 \cdot 5 - 5 = 0.$$

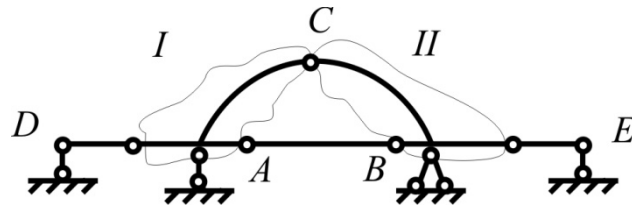


Рис.1.13

Диски I и II соединены стержнем  $AB$  и шарниром  $C$  и образуют геометрически неизменяемую систему, которая прикреплена к основанию тремя непараллельными и непересекающимися стержнями; узлы  $D$  и  $E$  присоединены к ней по способу диады. Таким образом, система геометрически неизменяемая и статически определимая.

Пример 1.13. Выполнить кинематический анализ системы (рис. 1.14).

Проверяем необходимое условие геометрической неизменяемости и статической определимости системы, показанной на рис. 1.14, по формуле (1.1).

$$C_0 = 3; D = 11; Ш = 15; W = 3D - 2Ш - C_0 = -L = 3 \cdot 11 - 2 \cdot 15 - 3 = 0.$$

Проверку геометрической неизменяемости произведем способом нулевой нагрузки.

Из равновесия фермы в целом найдем опорные реакции  $V_A, V_B, H_A$ .

- 1)  $\sum X = 0; H_A = 0;$
- 2)  $\sum m(A) = 0: V_B \cdot AB = 0, V_B = 0;$
- 3)  $\sum m(B) = 0: V_A \cdot AB = 0, V_A = 0.$

Из условия равновесия узла  $E$ , по признаку нулевых стержней, следует, что  $S_{EF} = 0$ . Рассматривая теперь равновесие узла  $F$ , видим, что  $S_{FD} = S_{FG} = 0$ .

Далее, поскольку  $S_{FG} = 0$ , то из узла  $G$  на основании того же признака нулевых стержней следует, что  $S_{GA} = 0$ . Тогда из равновесия узла  $A$  найдем, что  $S_{AC} = S_{AB} = 0$ . На том же основании усилия  $S_{CD} = S_{CE} = 0$ . Это следует из рассмотрения узла  $C$ .  $S_{CE} = S_{EG} = S_{GB} = S_{BD} = 0$ . Поскольку при отсутствии нагрузки усилия во всех элементах равны нулю, система является геометрически неизменяемой и статически определимой.

Пример 1.14. Выполнить кинематический анализ системы (рис. 1.15).

Анализ структуры фермы, приведенной на рис. 1.15, выполняется аналогично тому, как это сделано в примере 1.13.

Ответ. Система геометрически неизменяемая, статически определимая.

Пример 1.15. Выполнить кинематический анализ системы (рис. 1.16).

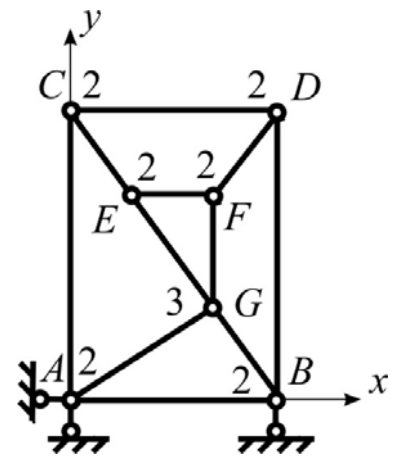


Рис.1.14

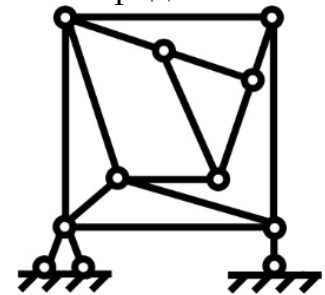


Рис. 1.15

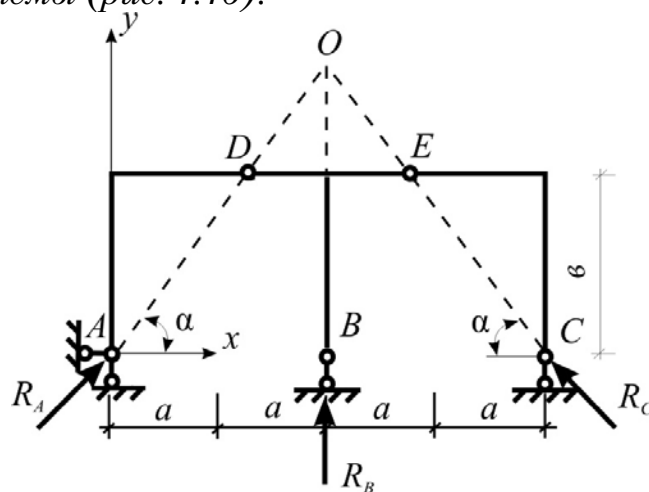


Рис.1.16

При анализе по формуле (1.1) имеем:

$$C_0 = 5; D = 3; Ш = 2; W = 3D - 2Ш - C_0 = 3 \cdot 3 - 2 \cdot 2 - 9 = 0.$$

Как и в предыдущих задачах, проверку геометрической неизменяемости выполним способом нулевой нагрузки.

При отсутствии нагрузки полная реакция  $R_A$  должна проходить через точки  $A$  и  $D$ , т.к. левая часть системы  $AD$  будет находиться под действием двух сил  $R_A$  и  $R_D$  (реакции в шарнире  $D$ ), которые будут направлены по прямой  $AD$ . Из тех же соображений реакция  $R_C$  должна проходить через точки  $C$  и  $E$ . Реакция  $R_B$  в точке  $B$  вертикальна.

Составим три уравнения равновесия для системы в целом:

$$\begin{aligned} 1) \sum X = 0; & R_A \cos \alpha - R_C \cos \alpha = 0; \\ 2) \sum Y = 0; & R_A \sin \alpha + R_B + R_C \sin \alpha = 0; \\ 3) \sum m(0) = 0; & R_A \cdot 0 + R_C \cdot 0 + R_B \cdot 0 = 0. \end{aligned}$$

Составляя определитель из коэффициентов при неизвестных  $R_A$ ,  $R_B$ ,  $R_C$  и раскрывая его, получим:

$$D = \begin{vmatrix} \cos \alpha & 0 & -\cos \alpha \\ \sin \alpha & 1 & \sin \alpha \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Это свидетельствует о том, что система уравнений удовлетворяется при любых значениях реакций  $R_A$ ,  $R_B$  и  $R_C$ , а значит, заданная стержневая система мгновенно изменяема. Рама будет геометрически неизменяемой в том случае, когда шарниры  $D$  и  $E$  будут расположены на разных расстояниях от средней стойки.

**Пример 1.16.** Выполнить кинематический анализ системы (рис. 1.17).

Выполним проверку по формуле (1.1):

$$C_0 = 4; D = 2; Ш = 1; W = 3D - 2Ш - C_0 = 4 - 2 \cdot 1 - 3 \cdot 2 = 0.$$

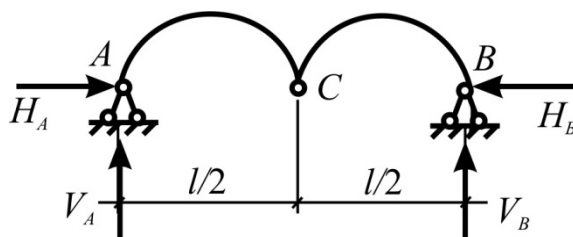


Рис.1.17

Анализ структуры проверяем по принципу нулевой нагрузки. Составим уравнение равновесия для системы в целом:

$$1) \sum X = 0; \quad V_B \cdot l = 0; \quad V_B = 0;$$

$$2) \sum m(B) = 0; \quad V_A \cdot l = 0; \quad V_A = 0;$$

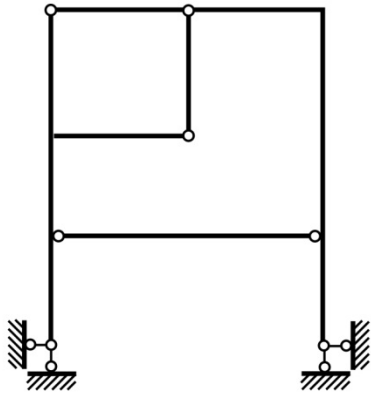
$$3) \sum X = 0; \quad H_A - H_B = 0; \quad H_A = H_B = H;$$

$$4) \sum m(C) = 0; \quad H = \frac{M_C^0}{f} = \frac{V_B \cdot l / 2}{f}.$$

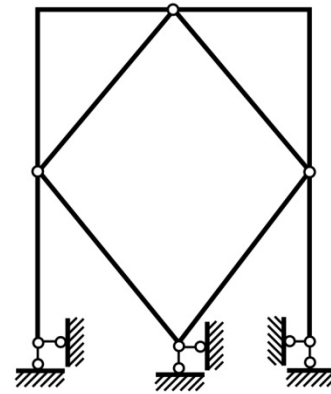
Таким образом, значение распора  $H$  при  $V_B = 0$  и  $f = 0$  обращается в неопределенность, т.е. в рассматриваемой системе при отсутствии нагрузки возникает распор, величина которого может быть произвольной, что свидетельствует о мгновенной изменяемости системы. Систему можно превратить в геометрически изменяемую в том случае, если шарнир  $C$  расположить не на одной прямой с шарнирами  $A$  и  $B$ .

# Варианты задач

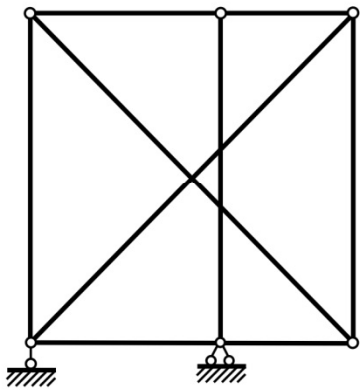
1.1



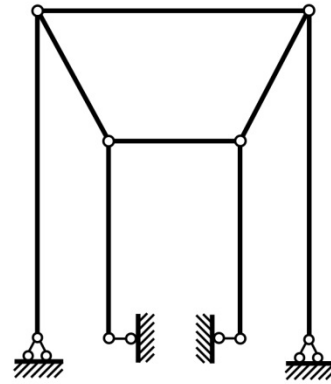
1.2



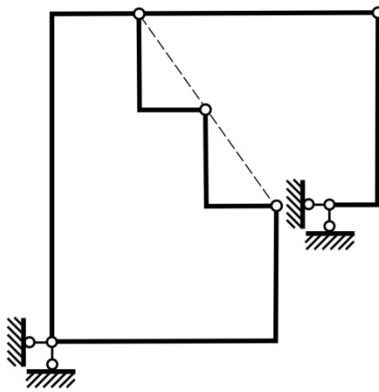
1.3



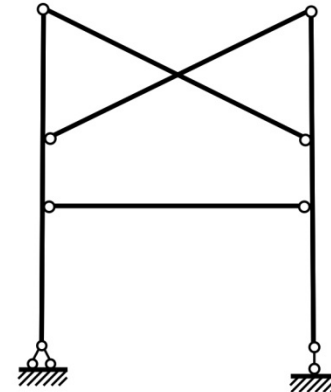
1.4



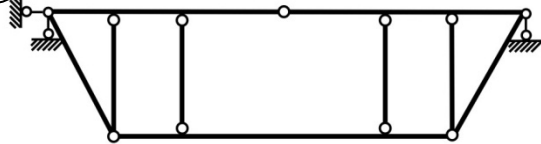
1.5



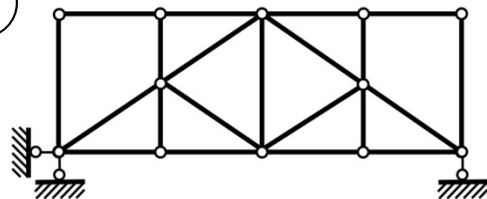
1.6



1.7

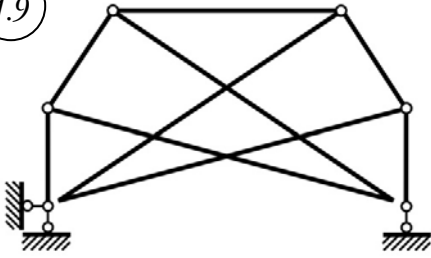


1.8

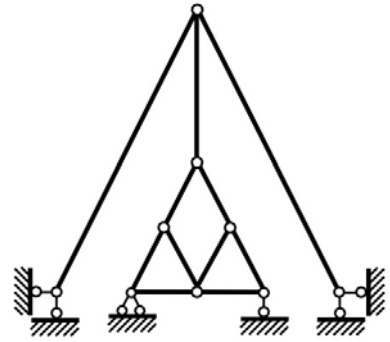




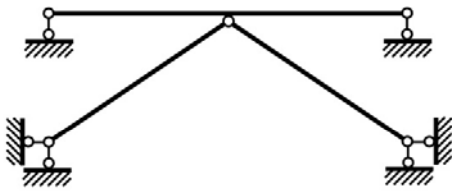
1.9



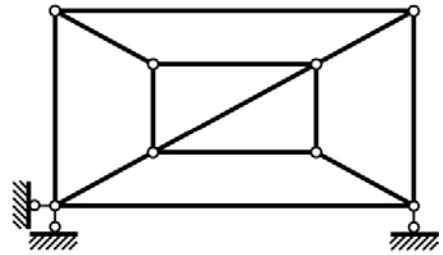
1.10



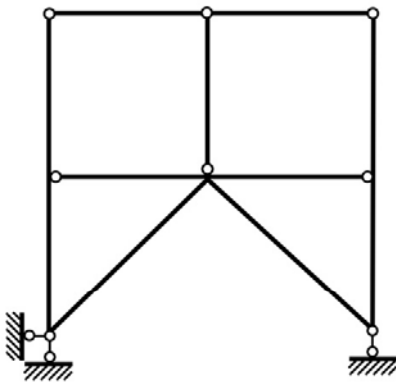
1.11



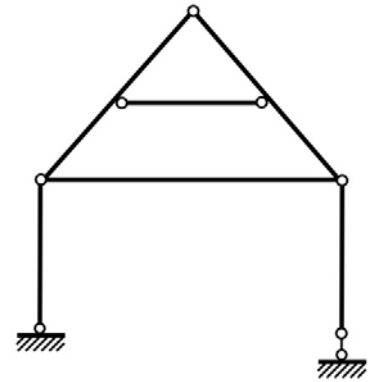
1.12



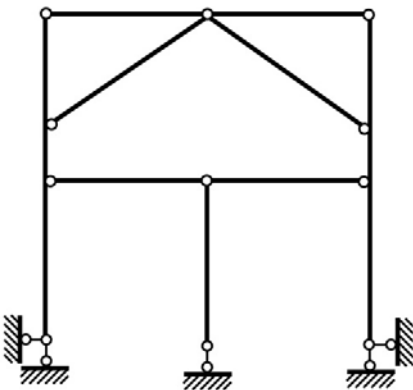
1.13



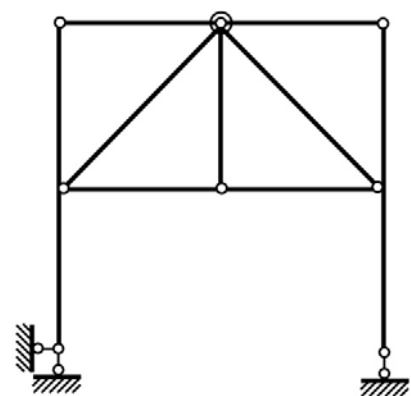
1.14



1.15



1.16



## 2. СТАТИЧЕСКИ ОПРЕДЕЛИМЫЕ СИСТЕМЫ

Пример 2.1. Определить аналитически внутренние усилия и построить эпюры внутренних усилий  $M$ ,  $Q$  и  $N$  в трехшарнирной системе, изображенной на рис. 2.1.

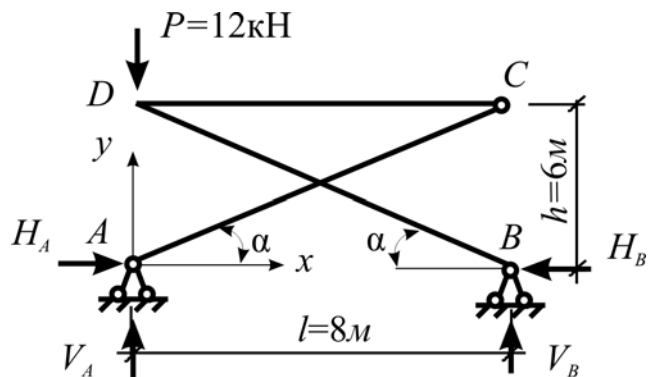


Рис.2.1

Поскольку число лишних неизвестных

$$L = C_0 + 2Ш - 3Д = 4 + 2 \cdot 1 - 3 \cdot 2 = 0,$$

то рассматриваемая система является трехшарнирной статически определимой. Определяем опорные реакции из условий равновесия системы в целом:

$$\begin{aligned} 1) \sum m(A) &= 0; \quad V_B \cdot 8 = 0; \quad V_B = 0; \\ 2) \sum m(B) &= 0; \quad P \cdot 8 - V_A \cdot 8 = 0; \quad V_A = P = 12 \text{ кН}; \\ 3) \sum X &= 0; \quad H_A - H_B = 0; \quad H_A = H_B = H; \\ 4) \sum M_C &= 0; \quad V_A \cdot l - H \cdot h = 0; \\ H &= \frac{M_C^0}{h} = \frac{12 \cdot 8}{6} = 16 \text{ кН}. \end{aligned}$$

Строим эпюры изгибающих моментов  $M$ , перерезывающих сил  $Q$  и нормальных сил  $N$ . Они показаны на рис. 2.2а, б, в.

$$M_{DB} = -H \cdot h = -16 \cdot 6 = -96 \text{ кН} \cdot \text{м}; \quad M_{DC} = -96 \text{ кН} \cdot \text{м}; \quad M_{CD} = M_{CA} = 0;$$

$$Q_{BD} = Q_{DB} = H \sin \alpha = 16 \cdot 0,6 = 9,6 \text{ кН}$$

$$Q_{DC} = Q_{DB} = -12 \text{ кН}; \quad Q_{AC} = Q_{CA} = 0.$$

$$N_{AC} = N_{CA} = -V_A \sin \alpha - H \cos \alpha = -12 \cdot 0,6 - 16 \cdot 0,8 = -20 \text{ кН};$$

$$N_{DB} = N_{BD} = -H \cos \alpha = -16 \cdot 0,8 = -12,8 \text{ кН}; \quad N_{DC} = N_{CD} = 16 \text{ кН}.$$

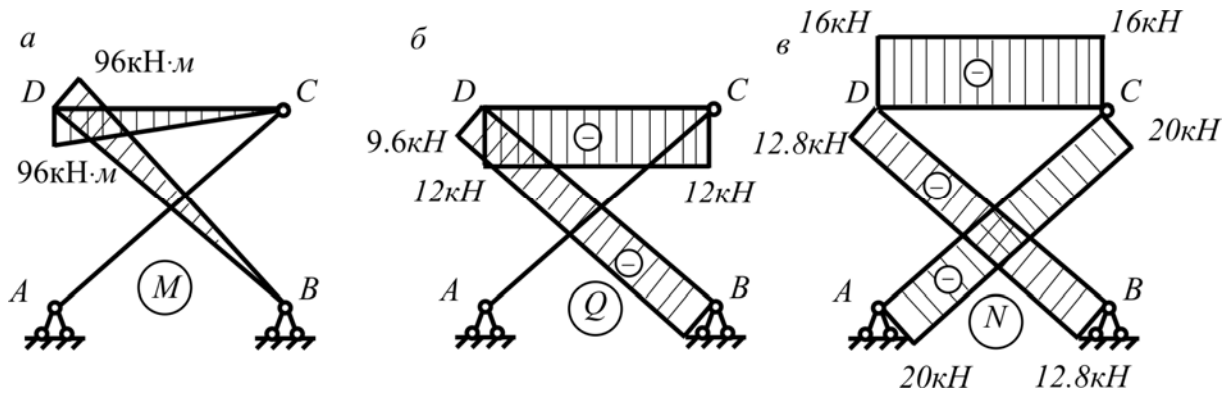


Рис.2.2

Пример 2.2. Определить усилие в стержне  $AB$  фермы, изображенной на рис. 2.3.

Определяем степень статической неопределимости фермы:

$$L = C_0 + C_{\phi} - 2U = 4 + 12 - 2 \cdot 8 = 0.$$

Поскольку система имеет 4 опорных стержня и нельзя применить непосредственно метод вырезания узлов или метод сечений, уберем опорный стержень в точке  $A$  и вместо него введем дополнительный стержень  $BC$ , окончательное усилие в котором должно быть равно нулю. Рассмотрим единичное и грузовое состояния новой фермы (рис. 2.4).

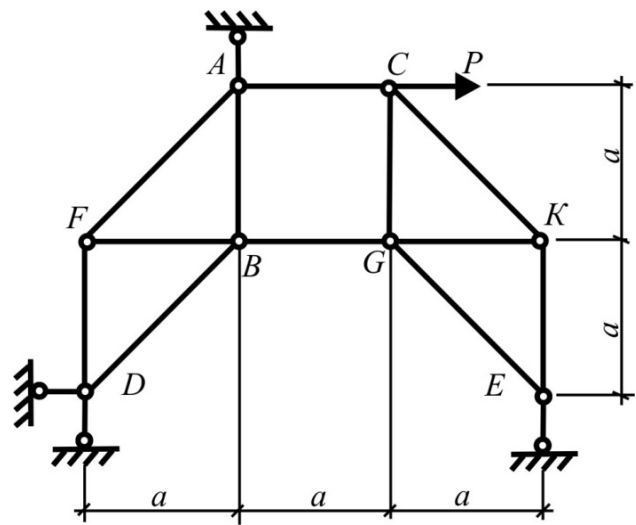


Рис.2.3

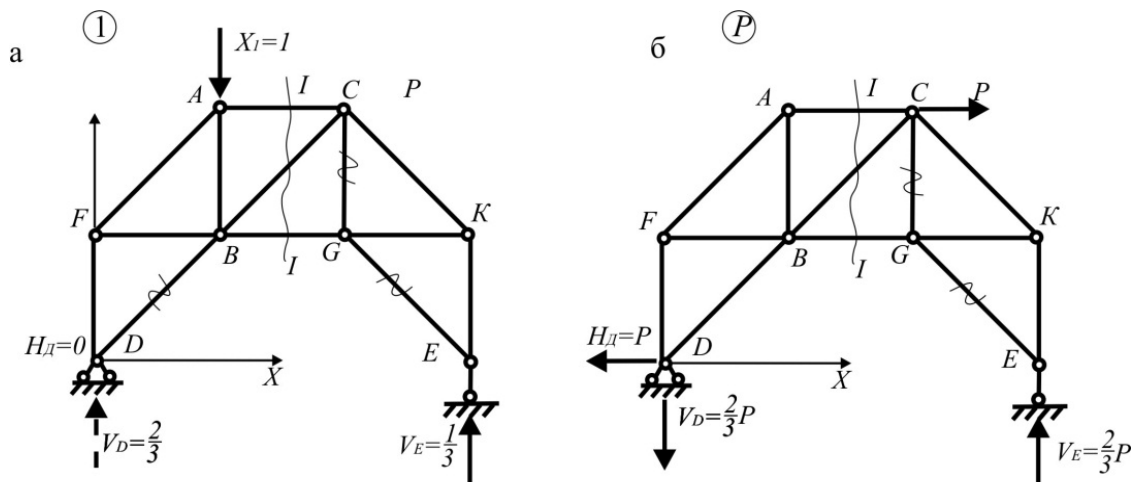


Рис.2.4

В единичном состоянии на основании признаков нулевых стержней усилия  $S_{CG}^{(1)} = S_{GE}^{(1)} = S_{BD}^{(1)} = 0$ . Усилие  $S_{BC}^{(1)}$  найдем по методу сечений (сечение I-I, рис. 2.4,а). Составим уравнение равновесия для правой части фермы:

$$\sum Y = 0; \quad \frac{1}{3} - S_{DC}^{(1)} \cos 45^\circ = 0; \quad S_{BC}^{(1)} = \frac{\sqrt{2}}{3}.$$

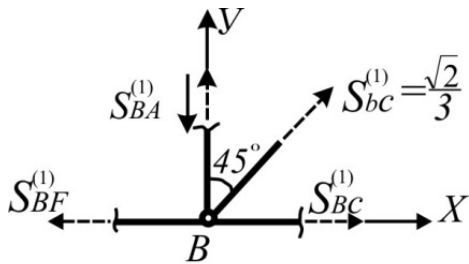


Рис. 2.5

Из условия равновесия узла  $B$  (рис. 2.5) имеем:

$$\sum Y = 0; \quad S_{BA}^{(1)} + S_{BC}^{(1)} \cos 45^\circ = 0;$$

откуда  $S_{BA}^{(1)} = -S_{BC}^{(1)} \cos 45^\circ = -\frac{1}{3}$ .

В грузовом состоянии  $S_{ED}^{(P)} = S_{CG}^{(P)} = 0$  по признакам нулевых стержней.  $S_{BC}^{(P)}$  также определяем методом сечений (сечение I-I, рис. 2.4,б). Из условия равновесия правой части фермы имеем

$$\sum Y = 0; \quad \frac{2}{3}P - S_{BC}^{(P)} \cos 45^\circ = 0; \quad S_{BC}^{(P)} = \frac{2}{3}P + \cos 45^\circ.$$

$$S_{BC}^{(P)} = \frac{2}{3}P\sqrt{2}.$$

Рассматривая последовательно равновесие узлов  $D$  и  $B$  (рис. 2.6), найдем сначала  $S_{DB}^{(P)}$ , а затем  $S_{BA}^{(1)}$ .

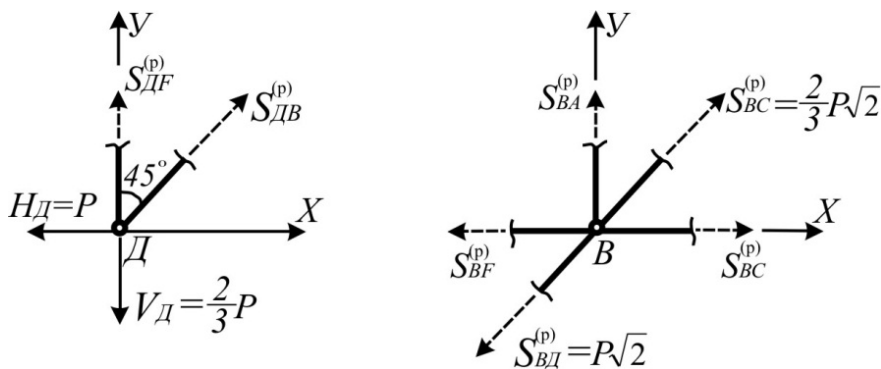


Рис. 2.6

Из равновесия узла  $D$  получим:

$$\sum X = 0; \quad -P - S_{DB}^{(P)} \cos 45^\circ = 0; \quad S_{DB}^{(P)} = \frac{P}{\cos 45^\circ} = P\sqrt{2}.$$

Рассматривая узел  $B$ , найдем

$$\sum Y = 0; S_{AB}^{(P)} + S_{BC}^{(P)} \cos 45^\circ - S_{BD}^{(P)} \cos 45^\circ = 0.$$

$$\text{Откуда } S_{AB}^{(P)} = (S_{BD}^{(P)} - S_{BC}^{(P)}) \cos 45^\circ = \left( P\sqrt{2} - \frac{2}{3}P\sqrt{2} \right) \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{P}{3}.$$

Поскольку окончательное усилие в стержне  $BC$  должно равняться нулю, запишем условие:

$$S_{BC} = S_{BC}^{(1)} \cdot X_1 + S_{BC}^{(P)} = 0.$$

Решая это уравнение относительно  $X_1$ , получим:

$$X_1 = \frac{S_{BC}^P}{S_{BC}^{(1)}} = -\frac{2P\sqrt{2} \cdot 3}{3\sqrt{2}} = -2P.$$

Находим усилие в стержне  $AB$ :

$$S_{AB} = S_{AB}^{(1)} \cdot X_1 + S_{AB}^{(P)} = \frac{1}{3} \cdot (-2P) + \frac{P}{3} = P.$$

**Пример 2.3.** *Определить усилие в стержне  $AB$  фермы, изображенной на рис. 2.7.*

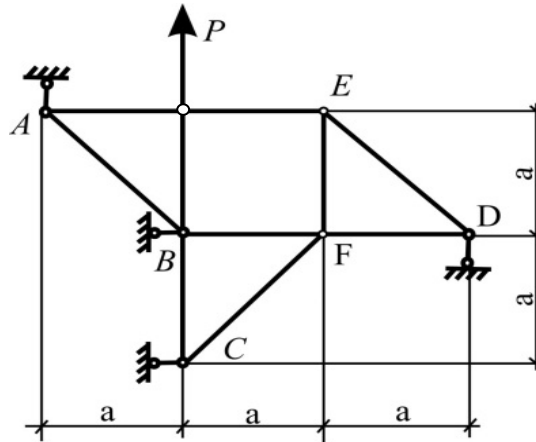


Рис.2.7

Эта задача решается аналогично предыдущей.

Здесь следует убрать опорный стержень в точке  $A$  и ввести новый стержень  $BE$ .

$$\text{О т в е т: усилие } S_{AB} = -\frac{P}{2}\sqrt{2}.$$

**Пример 2.4.** *Построить эпюры внутренних усилий в раме (рис.2.8,а).*

Разложим нагрузку на симметричную и кососимметричную (рис.2.8,б,в).

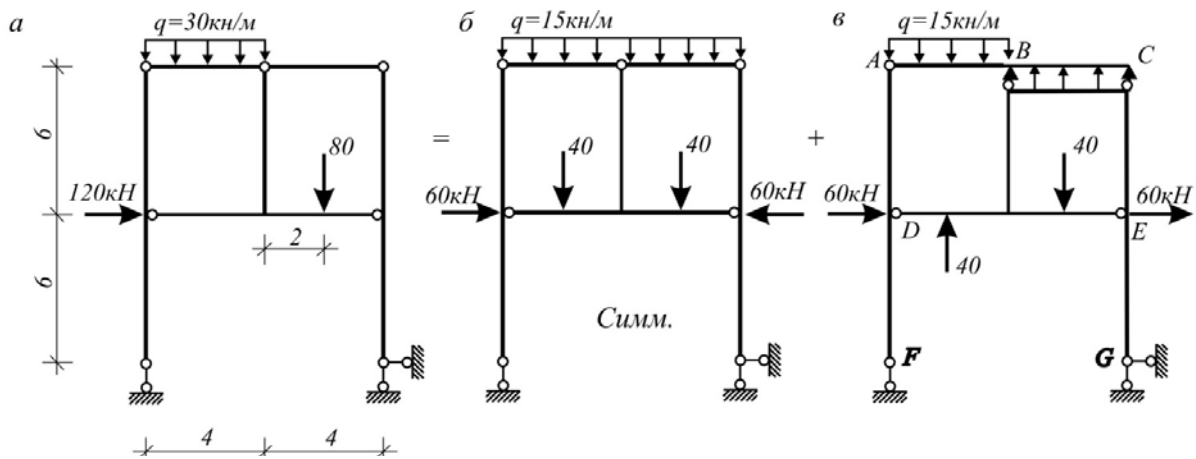


Рис.2.8

Найдем реакции опор и силы взаимодействия шарниров только от нагрузки, показанной на рис.2.9, в. Расчленим раму 1 на звенья 2, 3, 4 (рис.2.9, г, д, е).

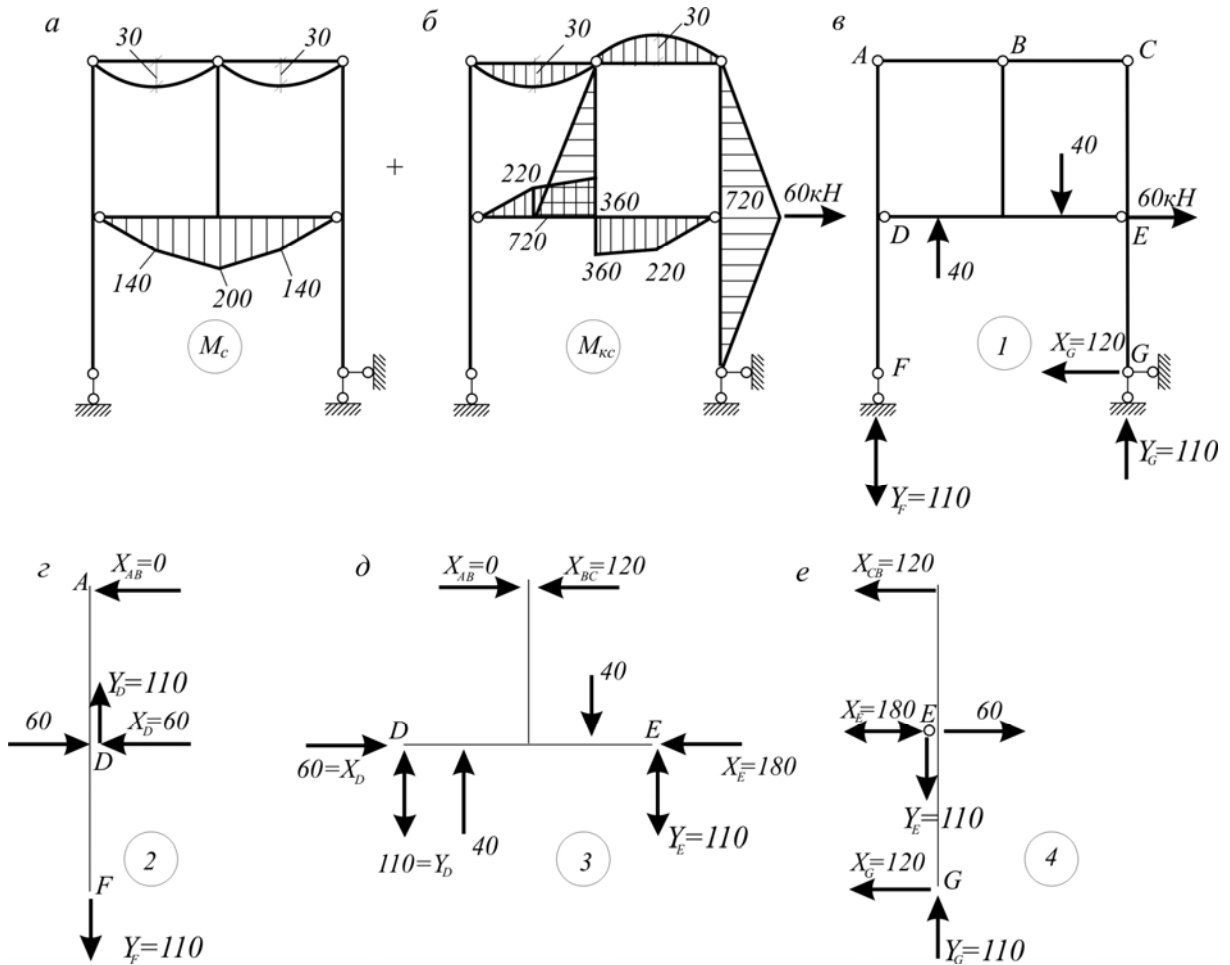


Рис.2.9

Из равновесия рамы I:

$$\text{I. 1) } \sum M_F = 0; 60 \cdot 2 \cdot 6 - 40 \cdot 2 + 40 \cdot 6 - Y_G \cdot 8 = 0;$$

$$720 - 80 + 240 = Y_G \cdot 8; Y_G = 110 \text{ кН.}$$

$$2) \sum M_G = 0; Y_F \cdot 8 + 60 \cdot 6 \cdot 2 + 40 \cdot 6 - 40 \cdot 2 = 0;$$

$$Y_F = -100 \text{ кН.}$$

$$\text{II. 1) } \sum M_D = 0; X_{AB} = 0;$$

$$2) \sum M_A = 0; X_D = 60;$$

$$3) \sum Y = 0; Y_D = -110;$$

$$\text{III. 1) } \sum M_E = 0; X_{CB} = 120;$$

$$2) \sum M_c = 0; X_E = 180;$$

$$3) \sum Y = 0; Y_E = 110.$$

С учетом сил на рис. 2.9,г,д,е, строим эюры на рис.2.9,а,б.

Эюру  $M_{ок}$  (рис.2.10) построим как  $M_{ок} = M_c + M_{kc}$ .

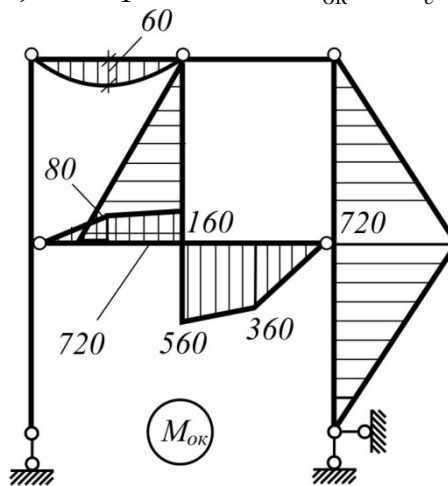


Рис.2.10

**Пример 2.5.** По консольному балочному однопролетному мосту  $l = 24$  м,  $a = 2$  м равномерно перемещаются 2 груза  $P_1 = 3$  кН,  $P_2 = 4$  кН со скоростью соответственно  $v_1 = 2$  м/с и  $v_2 = 3$  м/с. Второй груз въехал на мост через  $t = 8$  с после первого. Пренебрегая массой моста и грузов, определить максимальное давление моста на опору В.

При решении задачи воспользуемся теоремой о критическом положении системы подвижных грузов над полигональной линией влияния, в соответствии с которой одна из сил должна располагаться над одной из вершин линии влияния.

Построим линию влияния реакции  $V_B$  (рис. 2.11) и расположим силу  $P_1$  в точке D над максимальной ординатой этой линии влияния.

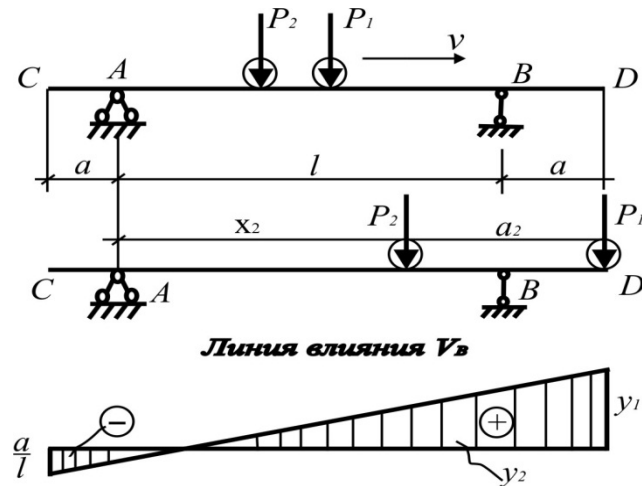


Рис.2.11

В начале движения расстояние между грузами было равно:

$$a_1 = v_1 t = 2 \cdot 8 = 16 \text{ м.}$$

Определим время, за которое первый груз переместился до точки  $D$ , начиная с того момента времени, когда второй груз въехал на балку:

$$S = (l + 2a) - a_1 = 28 - 16 = 12 \text{ м;}$$

$$t_1 = \frac{S}{v_1} = \frac{12}{2} = 6 \text{ с.}$$

Найдем расстояние  $a_2$  между грузами в критическом положении. За время  $t_1$  второй груз приблизился к первому на расстояние:

$$\Delta S = (v_2 - v_1) t_1 = (3 - 2) \cdot 6 = 6 \text{ м.}$$

Тогда  $a_2 = a_1 - \Delta S = 16 - 6 = 10 \text{ м.}$

Таким образом, критическое положение системы грузов установлено, причем соответствующие ему ординаты линий влияния  $V_B$  под грузами составят:

$$y_1 = \frac{x_1}{l} = \frac{26}{24} = \frac{13}{12}; \quad y_2 = \frac{x_2}{l} = \frac{l + a - a_2}{l} = \frac{24 + 2 - 10}{24} = \frac{2}{3}.$$

Определяем реакцию  $V_B$  в этом положении, равную по модулю передаваемому давлению на опору:

$$V_B = P_1 y_1 + P_2 y_2 = 3 \cdot \frac{13}{12} + 4 \cdot \frac{2}{3} = 5,92 \text{ кН.}$$



Пример 2.6. С помощью балочного передающего устройства, показанного на рис. 2.12, добиться уменьшения на опоре B изгибающего момента на 25 %. Выбрать длину передающего устройства 2x.

Задача решается путем построений линий влияния изгибающего момента в сечении B ( $M_B$ ) с учетом узловой передачи нагрузки в точках D и E.

Найдем величину  $M_B$  по линии влияния без учета передающего устройства:

$$M_B = -q \cdot \frac{l}{2} \cdot \frac{3}{2} l \cdot \frac{1}{2} = -\frac{3}{8} q l^2.$$

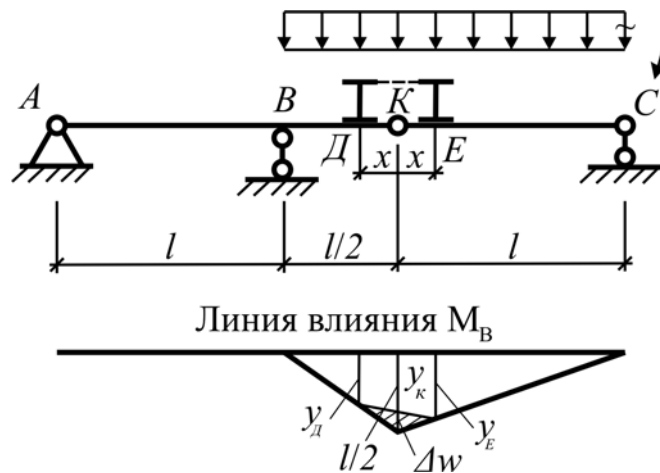


Рис.2.12

Ординаты  $y_D$ ,  $y_E$  и  $y_K$  (рис. 2.9) соответственно равны:

$$y_D = \frac{l}{2} - x; \quad y_E = \frac{l-x}{2}; \quad y_K = \frac{y_D - y_E}{2} = \frac{l/2 - x + (l-x)/2}{2} = \frac{2l-3x}{4}.$$

При узловой передаче нагрузки площадь линии влияния уменьшается на  $\Delta\omega$  (площадь заштрихованного треугольника на рис. 2.9), величина которой составит:

$$\Delta\omega = -\frac{1}{2} \cdot 2x \cdot \left( \frac{l}{2} - \frac{2l-3x}{4} \right) = -\frac{3x^2}{4}.$$

Площадь усеченной линии влияния будет

$$\omega = -\left( \frac{3}{8} l^2 - \frac{3}{4} x^2 \right) = -\frac{3}{8} (l^2 - 2x^2).$$

При введении передающего устройства изгибающий момент  $M_B$  в точке B должен составить 75 % от момента без учета этого устройства, т.е.

$$-\frac{3}{4} \cdot \frac{3}{8} q l^2 = -\frac{3}{8} q (l^2 - 2x^2),$$

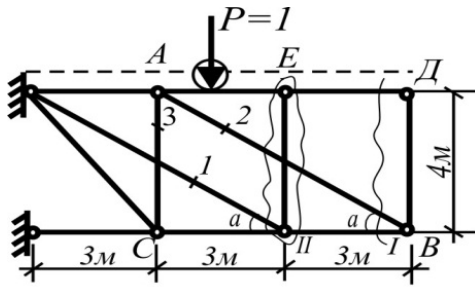
или  $0,75l^2 - l^2 = 2x^2$ ;  $x^2 = 0,125l^2$ .

Решая это уравнение относительно  $x$ , найдем, что  $x=0,353l$ .  
Соответственно длина передающего устройства будет при этом

$$2x = 0,706l.$$

Пример 2.7. Построить линии влияния усилий в указанных стержнях фермы (рис. 2.13).

При решении задачи важно установить последовательность построения линий влияния. Сначала необходимо построить линию влияния усилия  $S_2$ . Для этого проведем сечение I-I (см. рис. 2.13) и рассмотрим равновесие правой части фермы (рис. 2.14,а), считая, что груз  $P=1$  находится слева от указанной панели. Составим уравнение равновесия (узел  $D$  не загружен):



$\sum Y = 0; \quad S_2 \sin \alpha = 0; \quad \sin \alpha \neq 0; \quad S_2 = 0.$

Линия влияния  $S_2$



Линия влияния  $S_3$



Линия влияния  $S_1$



Рис.2.13

При положении груза  $P=1$  в узле  $D$  рассмотрим равновесие той же части фермы. Тогда

$$\sum Y = 0; \quad -P + S_2 \sin \alpha = 0; \quad S_2 = \frac{1}{\sin \alpha};$$

$$\sin \alpha = \frac{AC}{AB} = \frac{4}{\sqrt{6^2 + 4^2}} = \frac{1}{1,8}; \quad S_2 = 1,8.$$

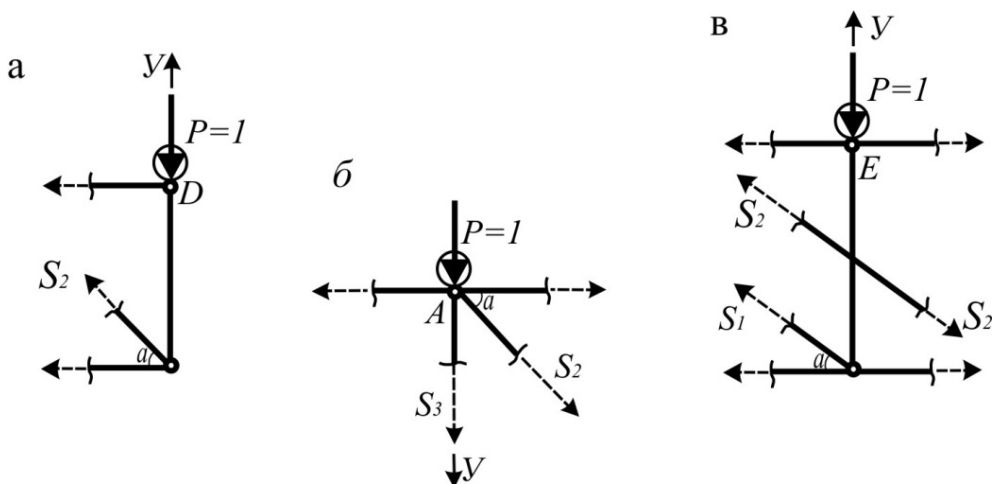


Рис. 2.14

Рис. 2.14,а,б,в соответствуют загруженным состояниям рассматриваемых частей фермы. Чтобы построить линию влияния  $S_3$ , вырежем узел  $A$  (см. рис. 2.14,б) и рассмотрим два положения груза  $P=1$ .

При положении груза  $P=1$  за пределами панелей, смежных с узлом  $A$ , имеем:

$$\sum Y = 0; \quad S_2 \sin \alpha + S_3 = 0; \quad S_3 = -S_2 \sin \alpha; \quad S_3 = \frac{S_2}{1,8}.$$

В случае, когда  $P=1$  находится в узле  $A$ , имеем:

$$\sum Y = 0; \quad S_2 \sin \alpha + S_3 + P = 0; \quad S_3 = -S_2 \sin \alpha - 1; \quad S_3 = \frac{S_2}{1,8} - 1 = -1.$$

При построении линии влияния  $S_1$  проводим замкнутое сечение  $\Pi$  (см. рис. 2.13) и вновь рассматриваем два положения единичного груза  $P=1$  (рис. 2.14,в). Когда  $P=1$  находится вне разрезанных панелей (слева или справа от узла  $E$ ):

$$\sum Y = 0; \quad S_1 \sin \alpha = 0, \quad \sin \alpha \neq 0, \quad S_1 = -0.$$

При положении груза справа в узле  $E$ :

$$\sum Y = 0; \quad -P + S_1 \sin \alpha = 0; \quad S_1 = \frac{P}{\sin \alpha} = 1,8.$$

Линии влияния усилий  $S_1$ ,  $S_2$  и  $S_3$  показаны на рис. 2.13.

**Пример 2.8.** Построить линии влияния усилий в указанных стержнях фермы (рис. 2.15).

При решении задачи построение линий влияния следует начинать с усилия  $S_1$ , используя замкнутое сечение  $I$ , а затем, проведя сечение  $\Pi$ - $\Pi$ , построить линии влияния усилий  $S_2$  и  $S_3$ .

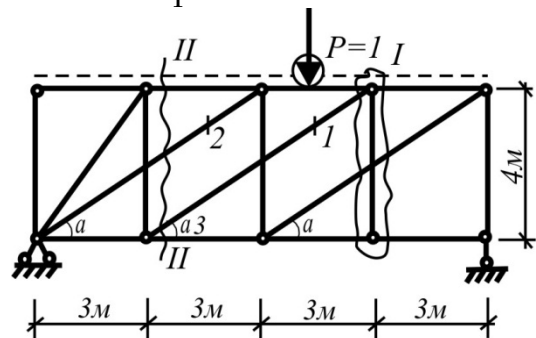


Рис. 2.15

**Пример 2.9.** Найти взаимное сближение точек  $C$  и  $D$  по вертикали для системы, показанной на рис. 2.16. Считать сечение всех стержней одинаковым, т.е.  $EJ = \text{const}$ .

Взаимное сближение по вертикали точек  $C$  и  $D$  определяется по формуле Мора:

$$\Delta_{ik} = \sum \frac{1}{EJ} \int_{(l)} \bar{M}_i M_k dx,$$

где  $M_k$  – эпюра изгибающих моментов от заданной нагрузки (рис. 2.18,а);

$\bar{M}_i$  – эпюра изгибающих моментов в единичном состоянии (рис. 2.18,б).

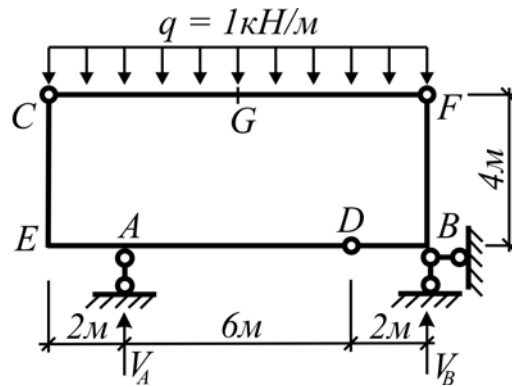


Рис.2.16

Для построения эпюры  $M_k$  в грузовом состоянии определим опорные реакции в точках  $A$  и  $B$ :

$$1. \sum m(B) = 0; \quad V_A \cdot 8 - 1 \cdot 10 \cdot 5 = 0; \quad V_A = \frac{50}{8} = 6,25 \text{ кН.}$$

$$2. \sum m(A) = 0; \quad V_B \cdot 8 + 1 \cdot 2 \cdot 1 - 1 \cdot 8 \cdot 4 = 0; \quad V_B = \frac{32 - 2}{8} = 3,75.$$

$$3. \sum X = 0; \quad H_B = 0.$$

Найдем также реакции в шарнирах  $C$ ,  $D$  и  $F$ . Для этого расчленим систему на отдельные части (см. рис. 2.14а, б, в).

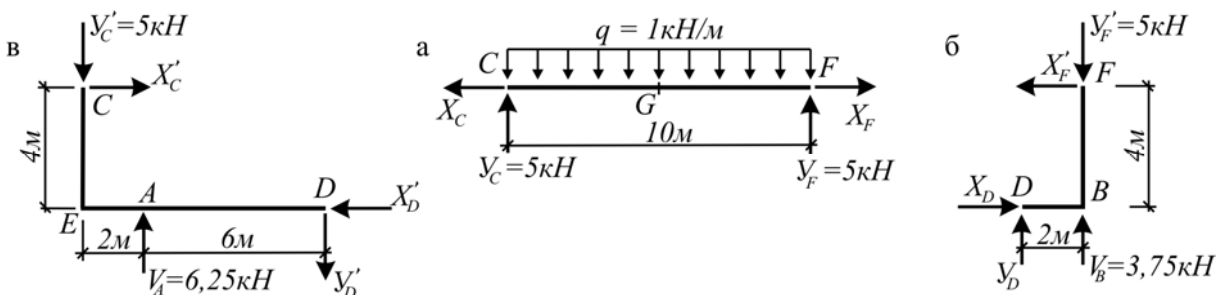


Рис.2.17

Из условия симметрии  $CF$

$$Y_C = Y_F = \frac{9 \cdot 10}{2} = 5 \text{ кН;}$$

$$\sum X = 0; \quad X_F - X_C = 0; \quad X_C = X_F.$$

Составим уравнения равновесия для правой части рамы  $DBF$  (рис. 2.17, б):

$$1. \sum Y = 0; \quad Y_D + V_B - Y'_F = 0; \quad Y_D = 5 - 3,75 = 1,25 \text{ кН;}$$

$$2. \sum m(B) = 0; \quad X'_F \cdot 4 - Y_D \cdot 2 = 0; \quad X'_F = \frac{1,25 \cdot 2}{4} = 0,625 \text{ кН;}$$

$$3. \sum X = 0; \quad X_D - X'_F = 0; \quad X_D = X'_F = 0,625 \text{ кН.}$$

Рассматривая равновесие левой части рамы  $CEAD$  (рис. 2.17,в), найдем

$$1. \sum X = 0; \quad X'_C - X'_B = 0; \quad X'_C = X'_B = 0,625;$$

$$2. \sum Y = 0; \quad V_\Phi - Y'_C + -Y'_D = 0; \quad Y'_D = V_A - Y'_C = 6,25 - 5 = 1,25 \text{ кН.}$$

Вычислим изгибающие моменты в точках  $E, B$  и  $K$ :

$$M_G = \frac{q \cdot 10^2}{8} = 12,5 \text{ кН}\cdot\text{м}; \quad M_{EC} = M_{EA} = M_{BF} = M_{BD} = 0,625 \cdot 4 = 2,5 \text{ кН}\cdot\text{м};$$

$$M_{AE} = 1,25 \cdot 6 = 7,5 \text{ кН}\cdot\text{м.}$$

Эпюры изгибающих моментов  $M_k$  показаны на рис. 2.18,а.

Для построения эпюры изгибающих моментов в единичном состоянии определяем опорные реакции из условия равновесия рамы в целом.

$$1. \sum m(A) = 0; \quad V_B \cdot 10 - 1 \cdot 8 - 1 \cdot 2 = 0; \quad V_B = 1;$$

$$2. \sum Y = 0; \quad V_A - V_B + 1 - 1 = 0; \quad V_A = V_B = 1.$$

Реакции в шарнирах  $C, F$  и  $D$ , как и в грузовом состоянии, определяют-ся из условия равновесия отдельных частей рамы (см. рис. 2.19, а, б, в).

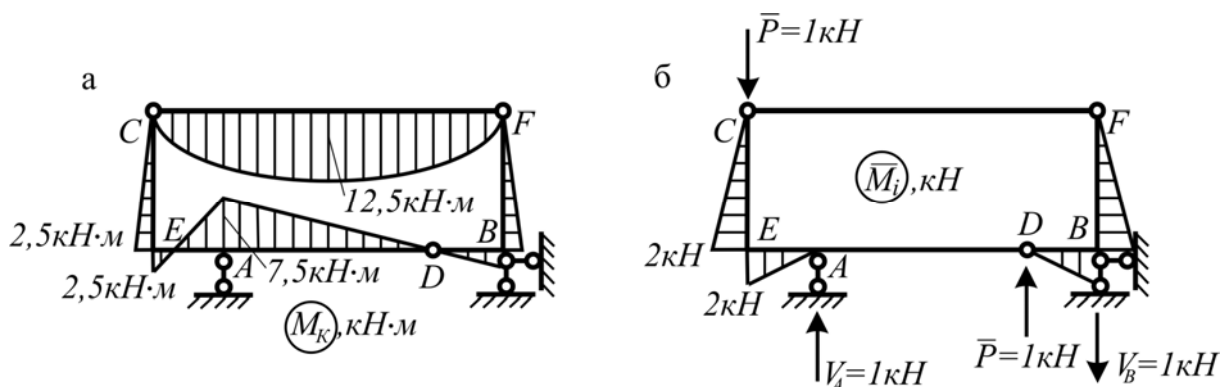


Рис.2.18

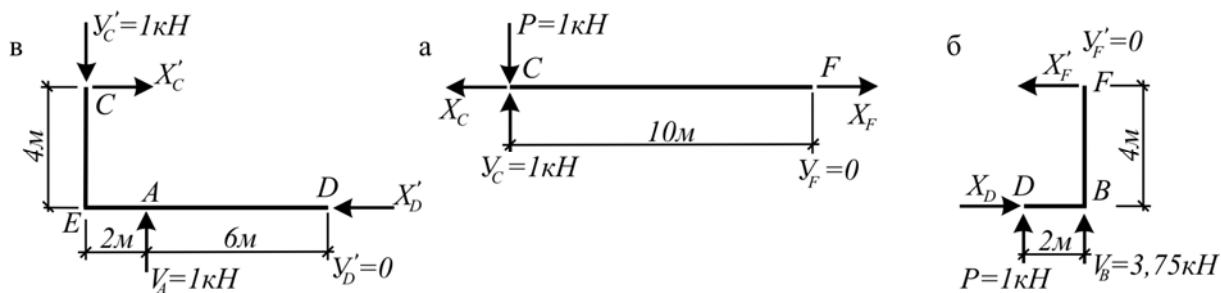


Рис.2.19

Из равновесия правой части  $DBF$  найдем:  
 $\sum m(B) = 0; \quad X'_F \cdot 4 - 1 \cdot 2 = 0; \quad X'_F = 0,5; \quad X_F = X_C = X_D = X'_F = 0,5;$   
 $X'_C = X'_D = X_C = 0,5.$

Эпюра  $\bar{M}_i$  показана на рис. 2.18,б.

Находим искомое перемещение по формуле Мора, вычисляя интеграл Мора по правилу Верещагина:

$$\Delta_{ik} = \sum \frac{1}{EJ} \int_{(l)} \bar{M}_i M_k dx = \frac{1}{EJ} \left[ 2 \cdot \frac{2,5 \cdot 4}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot 2 + \frac{2,5 \cdot 2}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot 2 + \frac{2 \cdot 2}{2} \cdot \left( \frac{2}{3} \cdot 2,5 - \frac{1}{3} \cdot 7,5 \right) \right] =$$

$$= \frac{1}{EJ} \left( \frac{40}{3} + \frac{1}{3} - \frac{5}{3} \right) = \frac{15 \text{ кН} \cdot \text{м}^3}{EJ}.$$

**Пример 2.10.** На каком расстоянии должны быть установлены шарнирные скобы  $A$  и  $B$  монтажной траверсы (рис.2.20), чтобы при подъеме грузов  $P$  прогибы концов траверсы были равны половине выгиба ее середины? Собственным весом траверсы пренебречь.

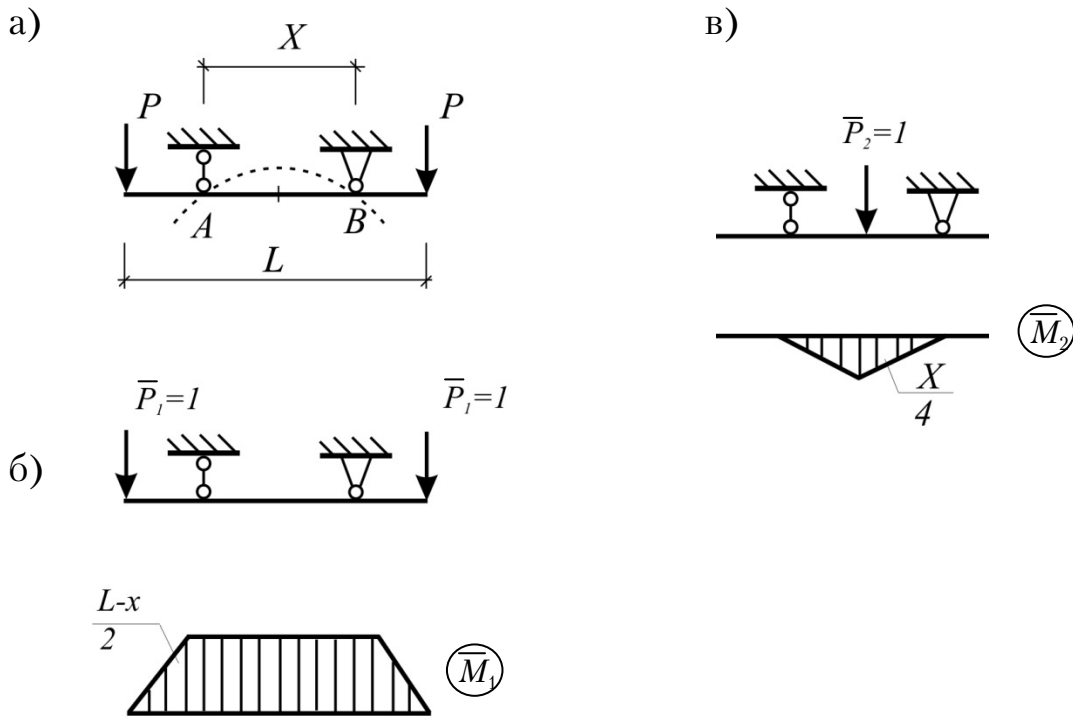


Рис.2.20

**Решение.** На рис. 2.20,б,в, представлены единичные состояния и даны соответствующие эпюры изгибающих моментов  $M_i$  для определения, соответственно, удвоенного прогиба на концах консоли и прогиба в середине пролета. Ординаты грузовой эпюры  $M_p$  в  $P$  раз больше ординат эпюры  $\bar{M}_1$ . Используя при вычислении перемещений правило

Верещагина и пренебрегая в формуле Мора – Максвелла поперечными силами, имеем значения удвоенного прогиба конца траверсы и выгиба ее середины в виде:

$$\Delta_{1P} = \sum \frac{1}{EJ} \int_{(l)} \bar{M}_1 M_p dx = \frac{1}{EJ} = \frac{P(l-x)^2}{12EJ} (l+2x);$$

$$\Delta_{2P} = \sum \frac{1}{EJ} \int_{(l)} \bar{M}_2 M_p dx = \frac{1}{EJ} = -\frac{Px^2(l-x)}{16EJ}.$$

Исходя из условия  $\Delta_{1P} = |\Delta_{2P}|$  и полагая, что  $l-x \neq 0$ , получим:  
 $11x^2 - 4lx - 4l^2 = 0.$

О т в е т:  $x \approx 0.81l.$

Пример 2.11. Найти взаимный угол поворота сечений в точке К системы, изображенной на рис. 2.21, считая сечения всех стержней одинаковыми, т.е.  $EJ = \text{const}.$

Задача решается аналогично 2.9, только в единичном состоянии необходимо приложить в точке К два момента  $m=1.$

О т в е т: Взаимный угол поворота сечений в точке К равен

$$\varphi_K = -\frac{7,33}{EJ}.$$

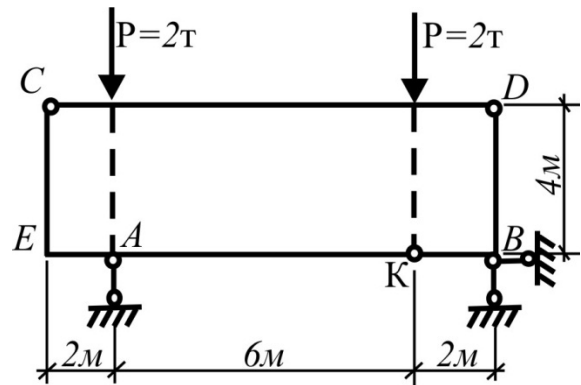


Рис.2.21

Пример 2.12. Оценить возможность использования для расчета рамы по рис.2.22,а расчетной схемы, изображенной на рис.2.22,б.

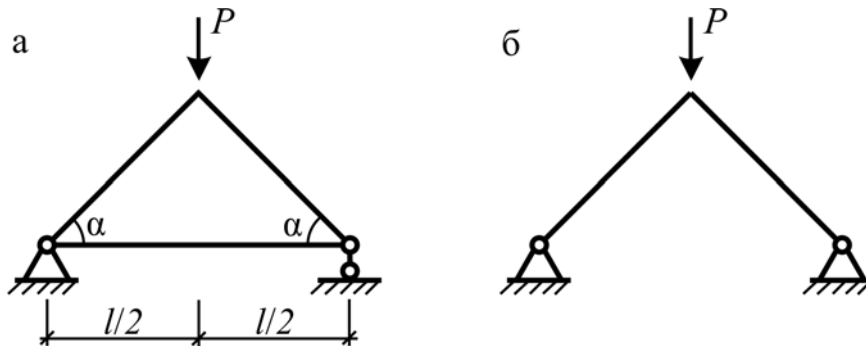


Рис.2.22

О т в е т. Обе схемы эквивалентны, если пренебрегать податливостью затяжки. Чтобы оценить влияние податливости затяжки на

напряженно-деформированное состояние, рассмотрим расчет данной рамы методом сил.

Усилие в затяжке

$$X = -\frac{\Delta_{1p}}{\delta_{11}^0 + l_3 / (E_3 F_3)},$$

где

$$\delta_{11}^0 = \frac{l^3 \operatorname{tg}^2 \alpha}{12EJ \cos \alpha}, \quad \Delta_{1p} = -\frac{Pl^3 \operatorname{tg} \alpha}{24EJ \cos \alpha}.$$

Отсюда следует, что влияние податливости затяжки на величину распора будет практически незначительно (менее 5 %) лишь в тех случаях, когда

$$l_3 / (E_3 F_3) \leq 0.05 \delta_{11}^0 \quad \text{и} \quad X \approx \frac{P}{2} \cdot \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha}.$$

Аналогичным способом можно оценить влияние податливости затяжки на напряженно-деформированное состояние двухшарнирной арки с затяжкой и других систем с одной лишней связью.

*Пример 2.13. Обычно фермы изготавливают из прямолинейных стержней, что вполне оправданно при узловой нагрузке. В тех случаях, когда нагрузка на верхний пояс фермы внеузловая, например равномерно распределенная, целесообразно ли с точки зрения статики также применять для верхнего пояса прямые стержни?*

**О т в е т.** Из-за поперечного изгиба стержней верхнего пояса фермы их поперечное сечение значительно увеличивается по сравнению с аналогичным случаем фермы при узловой нагрузке. Целесообразно использовать для верхнего пояса криволинейные стержни арочного типа. На рис.2.23 показан фрагмент такой фермы. Очертание данного стержня и стрела подъема  $f$  могут быть выбраны из условия регулирования усилий в нем.

Порядок приближенного расчета может быть следующим. Определим усилия в стержнях фермы с прямыми стержнями верхнего пояса. Полученные усилия  $H$  в верхнем поясе рассматриваем как распор арочных стержней. Стрелу подъема  $f$  найдем из условия равенства нулю изгибающего момента в ключевом сечении арки:

$$M_x = M_x^0 - Hf = 0.$$

Отметим, что здесь с целью упрощений расчета криволинейный стержень  $AB$  рассчитывают при неподвижных узлах  $A$  и  $B$ . Однако



работа арочных стержней верхнего пояса существенно зависит от смещений узлов верхнего пояса, для чего необходим поверочный расчет.

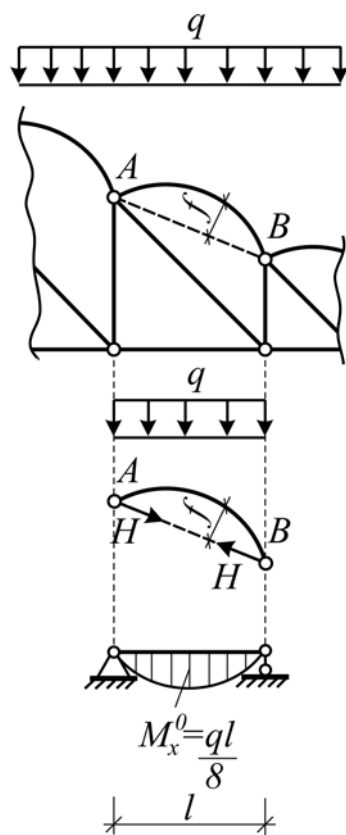


Рис.2.23

### 3. СТАТИЧЕСКИ НЕОПРЕДЕЛИМЫЕ СИСТЕМЫ

Пример 3.1. Определить величину изгибающего момента  $M_{CA}$  в среднем узле рамы с упругоподатливыми крайними опорами (рис. 3.1). Коэффициент упругой податливости (осадка опоры под действием единичной силы) равен  $k$ .

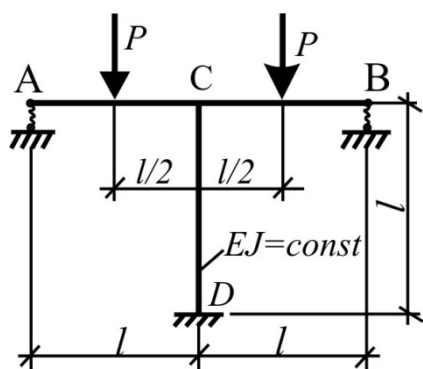


Рис.3.1

Определяем степень статической неопределимости рамы по формуле

$$L = 3K - C_y = 3 \cdot 2 - 4 = 2.$$

Выберем основную систему, удалив опорные стержни в точках  $A$  и  $B$  (рис. 3.2,а). Для упругих опор при симметричном нагружении кососимметричные неизвестные  $X_2=0$ , т.е. реактивные усилия и осадки в опорах  $A$  и  $B$  по величине и по направлению будут одинаковыми. Тогда условие совместности деформаций записывается в виде:

$$\Delta_{1X} = -kX_1,$$

или

$$\delta_{11}X_1 + \Delta_{1P} = -kX_1, \quad X_1(\delta_{11} + k) + \Delta_{1P} = 0.$$

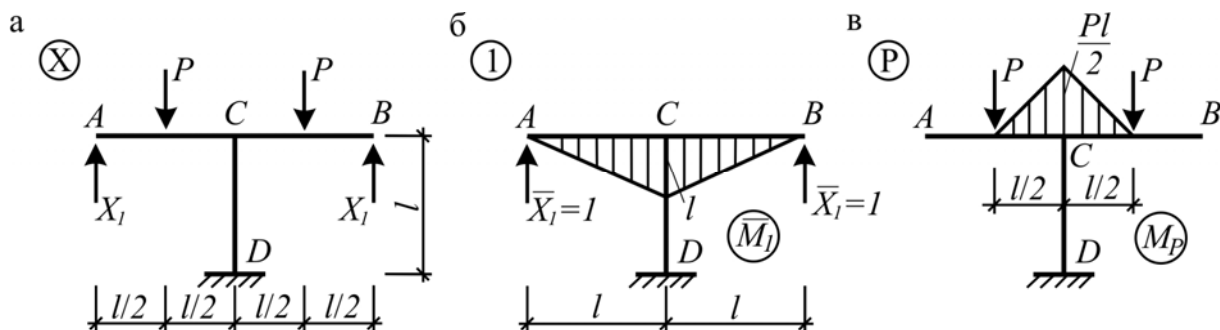


Рис.3.2

Дальнейшее решение осуществляется обычным способом. Эпюры изгибающих моментов в единичном и грузовом состояниях основной системы ( $M_1$  и  $M_p$ ) приведены на рис. 3.2, б, в:

$$\delta_{11} = \sum \frac{1}{EJ} \int_{(l)} \bar{M}_1^2 dx = \frac{1}{EJ} \cdot \frac{l \cdot l}{2} \cdot \frac{2}{3} l = \frac{l^3}{3EJ};$$

$$\Delta_{1P} = \sum \frac{1}{EJ} \int_{(l)} \bar{M}_1 M_p dx = -\frac{1}{EJ} \cdot \frac{P \cdot l}{2} \cdot \frac{l}{4} \left( \frac{l}{2} + \frac{2}{3} \cdot \frac{l}{2} \right) = -\frac{5}{48} \cdot \frac{Pl^3}{EJ};$$

$$X_1 = -\frac{\Delta_{1P}}{\delta_{11} + k} = -\frac{5Pl^3}{\left(\frac{l^3}{3EJ} + k\right) \cdot 48EJ} = \frac{5Pl^3}{16(l^3 + 3kEJ)}.$$

Вычисляем значение изгибающего момента в среднем узле рамы:

$$\begin{aligned} M_{CA} = M_{CB} = M_{CA}^{(1)} X_1 + M_{CA}^{(P)} &= \frac{5Pl^3}{16(l^3 + 3kEJ)} - \frac{Pl}{2} = \frac{Pl}{2} \left( \frac{5}{8} \cdot \frac{l^3}{l^3 + 3kEJ} - 1 \right) = \\ &= -\frac{Pl}{2} \cdot \frac{3}{8} \cdot \frac{l^3 + 8kEJ}{l^3 + 3kEJ}. \end{aligned}$$

Пример 3.2. При какой податливости пружины  $K$  изгибающий момент в середине ригеля рамы, изображенной на рис. 3.3, будет равен  $\frac{Pl}{8}$ ? Под податливостью  $K$  следует понимать величину горизонтального перемещения пружины от реакции, равной единице.

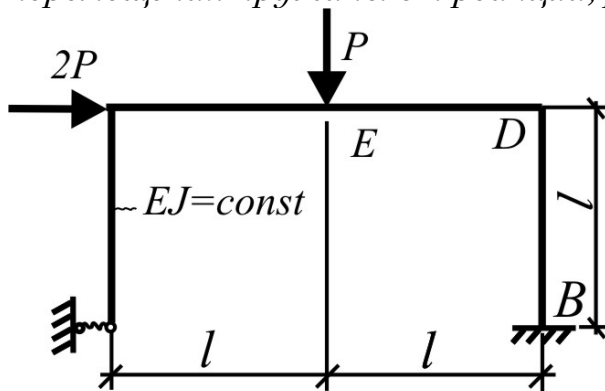


Рис. 3.3

Решение этой задачи выполняется аналогично решению задачи 3.1. Основная система и эпюры изгибающих моментов приведены на рис. 3.4.

$$L = 3K - C_y = 3 \cdot 1 - 2 = 1.$$

Условие деформации:

$$\Delta_{1X} = -kX_1 \text{ или } \delta_{11}X_1 + \Delta_{1P} = -kX_1,$$

$$\text{откуда } X_1 = \frac{-\Delta_{1P}}{(\delta_{11} + k)}.$$

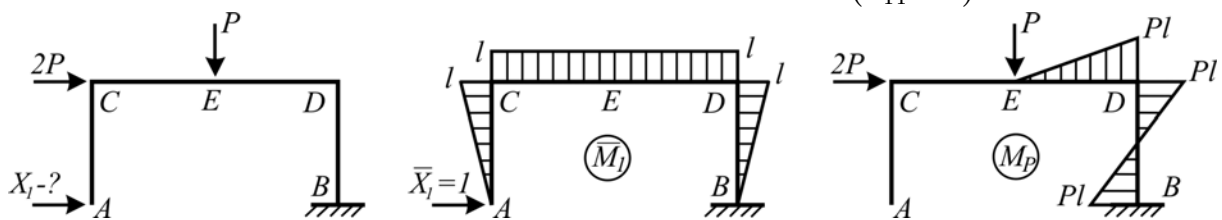


Рис.3.4

$$\delta_{11} = \sum \frac{1}{EJ} \int_{(l)} \bar{M}_1^2 dx = \frac{8}{3} \cdot \frac{l^3}{EJ};$$

$$\Delta_{1P} = \sum \frac{1}{EJ} \int_{(l)} \bar{M}_1 M_P dx = \frac{2}{3} \cdot \frac{Pl^3}{EJ}.$$

Находим лишнее неизвестное  $X_1$ :

$$X_1 = -\frac{2Pl^3}{8l^3 + 3kJ}$$

Вычисляем значение изгибающего момента посередине ригеля в точке  $E$ :

$$M_E = M_E^{(1)}X_1 + M_E^{(P)} = \frac{2Pl^4}{8l^3 + 3kJ},$$

который по условию задачи должен быть равен  $\frac{Pl}{8}$ , т.е.

$$\frac{2Pl^4}{8l^3 + 3kJ} = \frac{Pl}{8}.$$

Из этого условия найдем величину жесткости пружины

$$k = \frac{8}{3} \cdot \frac{l^3}{EJ}.$$

**Пример 3.3.** Определить, какую дополнительную силу следует приложить к затяжке, чтобы усилия в стержнях 1, 2 фермы, изображенной на рис. 3.5, равнялись нулю.

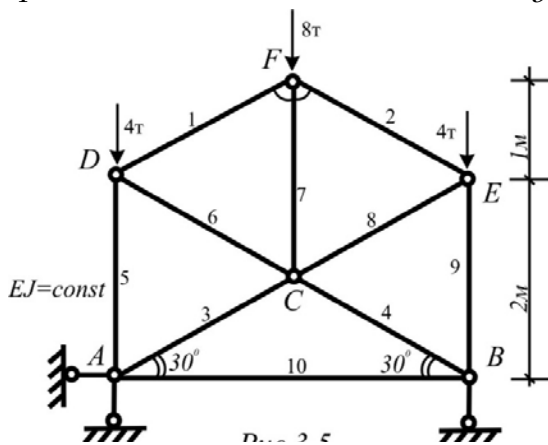


Рис. 3.5

Определяем степень статической неопределимости фермы:

$$L = C_0 + C_\Phi - 2U = 3 + 10 - 2 \cdot 6 = 1.$$

Выберем в качестве лишнего неизвестного  $X_1$  усилия в затяжке 10. Основная система показана на рис. 3.6, а.

Найдем усилия во всех стержнях основной системы в единичном и грузовом состояниях (рис. 3.6, б, в).

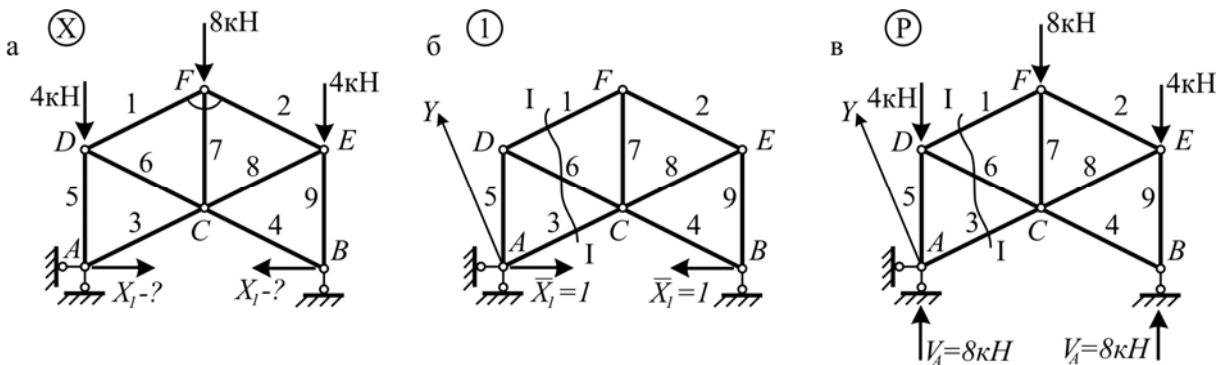


Рис.3.6

Рассмотрим единичное состояние (см. рис. 3.6,б). Усилия в стержнях 3 и 5 определим из условия равновесия узла  $A$ :

$$S_3^{(1)} = -\frac{1}{\cos 30^\circ} = -\frac{2}{\sqrt{3}} = S_4^{(1)}; \quad S_5^{(1)} = 1 \cdot \operatorname{tg} 30^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}} = S_9^{(1)}.$$

Усилия в стержнях 1 и 6 найдем методом сечений (сечение I-I на рис. 3.6,б), рассматривая равновесие левой части фермы:

$$\sum m(c) = 0; \quad 1 \cdot 1 - S_1^{(1)} \cdot 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 0; \quad S_1^{(1)} = \frac{1}{\sqrt{3}} = S_2^{(1)}.$$

$$\sum Y = 0; \quad -1 \cdot \sin 30^\circ - S_6^{(1)} \sin 60^\circ = 0; \quad S_6^{(1)} = -\frac{1}{\sqrt{3}} = S_8^{(1)}.$$

Усилие  $S_7^{(1)}$  найдем из условия равновесия узла  $F$ :  $S_7^{(1)} = -\frac{1}{\sqrt{3}}$ .

В грузовом состоянии основной системы (см. рис. 3.6,в) усилия в стержнях определяются аналогичным образом.

$S_3^{(P)} = S_4^{(P)} = 0$  – по признаку нулевых стержней.

$S_5^{(P)} = S_9^{(P)} = -8$  кН;  $S_1^{(P)} = S_2^{(P)} = -4$  кН;  $S_6^{(P)} = S_8^{(P)} = -4$  кН;  $S_7^{(P)} = -4$  кН.

Для того чтобы основная система в состоянии  $x$  деформировалась как заданная ферма, необходимо выполнить условие

$$\Delta_{1X} = 0 \text{ или } \delta_{11} X_1 + \Delta_{1P} = 0.$$

Вычислим перемещения  $\delta_{11}$  и  $\Delta_{1P}$  по формуле Максвелла, увеличив их в  $EF$  раз:

$$EA\delta_{11} = \sum S_1^2 l = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 \cdot 2 \cdot 7 + \left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^2 \cdot 2 \cdot 2 + 1 \cdot 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 2 = 13,46;$$

$$EA\Delta_{1P} = \sum S_1 \cdot S_P \cdot l = -8 \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot 2 \cdot 2 - 4 \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot 2 \cdot 5 = -41,6.$$

Находим лишнее неизвестное  $X_1$ :

$$X_1 = -\frac{\Delta_{1P}}{\delta_{11}} = \frac{41,6}{13,46} = 3,1 \text{ кН.}$$

Запишем условие обращения в нуль усилий в стержнях 1 и 2:

$$S_1 = S_1^{(1)}(X_1 + X_{\text{доп}}) + S_1^{(P)} = 0,$$

где  $X_{\text{доп}}$  – дополнительная сила, которую следует приложить к затяжке, чтобы  $S_1 = S_2 = 0$ .

$$\frac{1}{\sqrt{3}}(3,1 + X_{\text{доп}}) - 4 = 0, \text{ откуда } X_{\text{доп}} = 3,82 \text{ кН.}$$

Пример 3.4. Определить, с какой силой нужно поддомкратить ферму, изображенную на рис. 3.7, в точке С, чтобы усилия в раскосах были равны нулю.

Решение аналогично 3.3. Основная система приведена на рис. 3.7,б.

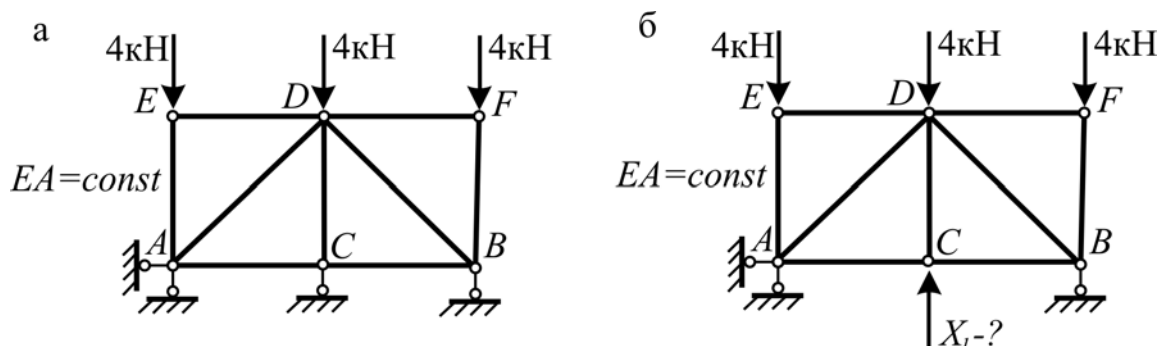


Рис.3.7

Отв е т. Сила, с которой нужно поддомкратить ферму в точке С, чтобы обратить в нуль усилия в раскосах  $AD$  и  $DB$ ,  $X_{доп} = 0,45$  кН.

Пример 3.5. Подобрать угол  $\alpha$ , при котором реакция в опорном стержне  $B$  рамы, изображенной на рис. 3.8, направленная вверх, будет наименьшей. Влиянием перерезывающих и нормальных сил при вычислениях пренебречь.

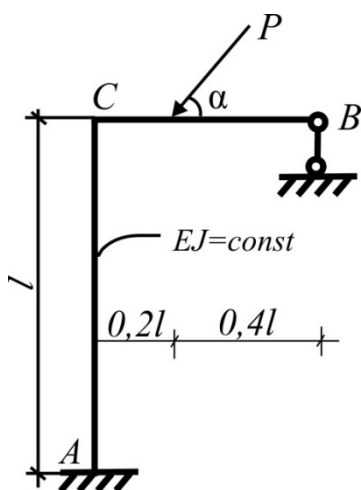


Рис. 3.8

Степень статической неопределимости рамы  $L=1$ , поэтому ее расчет рациональней выполнять методом сил.

Выберем основную систему, приняв за лишнее неизвестное реакцию в опоре  $B$  ( $X_1$ ).

Основная система приведена на рис. 3.9а.

Условие деформации запишем в виде:

$$\Delta_{1X} = 0; \quad \delta_{11}X_1 + \Delta_{1P} = 0,$$

откуда  $X_1 = -\frac{\Delta_{1P}}{\delta_{11}}$ .

Строим эпюры изгибающих моментов в единичном и грузовом состояниях основной системы (рис. 3.9, б, в, г) и вычисляем перемещения  $\delta_{11}$  и  $\Delta_{1P}$ .

В грузовом состоянии силу  $P$  разложим на вертикальную и горизонтальную составляющие.

Эпюра  $M_p$  в грузовом состоянии представлена в виде суммы двух эпюр  $M_p = M'_p + M''_p$  (см. рис.3.9, в, г).

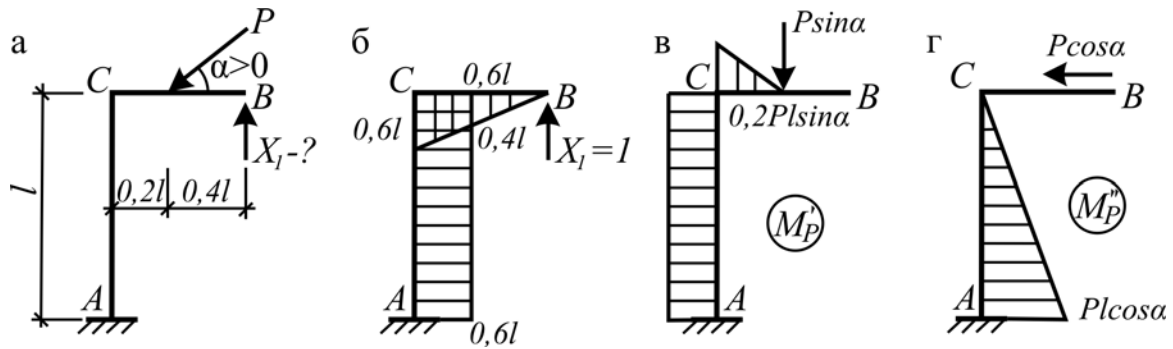


Рис.3.9

Определим перемещения  $\delta_{11}$  и  $\Delta_{1P}$  по формуле Мора, для удобства вычислений увеличим их в  $EJ_0$  раз.

Примем  $EJ_0 = EJ$ :

$$EJ_0 \delta_{11} = \sum \frac{J_0}{J} \int_{(l)} M_1^2 dx = \frac{0,6l \cdot 0,6l}{2} \cdot \frac{2}{3} 0,6l + 0,6l \cdot 0,6l \cdot l = 0,432l^3;$$

$$EJ_0 \Delta_{1P} = \sum \frac{J_0}{J} \int_{(l)} M_1 M_P dx =$$

$$= - \left[ \frac{1}{2} \cdot 0,2Pl \sin \alpha \cdot 0,2l \left( \frac{2}{3} 0,6l + \frac{1}{3} 0,4l \right) + \left( 0,2Pl \sin \alpha - \frac{Pl \cos \alpha}{2} \right) l \cdot 0,6l \right] =$$

$$= Pl^3 (0,3 \cos \alpha - 0,13 \sin \alpha)$$

Находим лишнее неизвестное  $X_1$ :

$$X_1 = - \frac{\Delta_{1P}}{\delta_{11}} = \frac{Pl^3 (0,3 \cos \alpha - 0,13 \sin \alpha)}{0,432l^3} = \frac{P(0,3 \cos \alpha - 0,13 \sin \alpha)}{0,432}.$$

Вычислим  $\alpha$  из условия экстремума функции:

$$\frac{dX_1}{d\alpha} = \frac{P}{0,432} \cdot (0,13 \cos \alpha + 0,3 \sin \alpha) = 0, \text{ откуда } \operatorname{tg} \alpha = - \frac{0,13}{0,3} = -0,433,$$

что соответствует  $\alpha_1 = -23^\circ 25'$ ,  $\alpha_2 = 156^\circ 35'$ .

Чтобы определить, при каком  $\alpha$   $X_1$  будет наименьшим, вычислим  $\frac{d^2 X_1}{d\alpha^2}$  при найденных значениях  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$ :

$$\frac{d^2 X_1}{d\alpha^2} = \frac{P}{0,432} \cdot (0,3 \cos \alpha - 0,13 \sin \alpha).$$

Если  $\frac{d^2 X_1}{d\alpha^2} < 0$  при некоторых значениях  $\alpha$ , то этот угол соответствует максимальному значению  $X_1$  (4).

При  $\alpha_1 = -23^\circ 25'$   $\cos \alpha_1 > 0$ ,  $\sin \alpha_1 < 0$ , т.е.  $\frac{d^2 X_1}{d\alpha^2} > 0$ , что соответствует минимальному значению  $X_1$ .

При  $\alpha_1 = 156^\circ 35'$   $\cos \alpha_1 < 0$ ,  $\sin \alpha_1 > 0$ , т.е.  $\frac{d^2 X_1}{d\alpha^2} < 0$ , что соответствует максимальному значению  $X_1$ . Следовательно, реакция  $X_1$  в опоре  $B$  будет минимальной при значении  $\alpha_1 = -23^\circ 25'$ .

**Пример 3.6.** *Посчитать степень статической неопределенности и найти усилие в стержне 2-3 стержневой системы, изображенной на рис. 3.10.*

Определяем степень статической неопределенности:

$$L = 3K - C_Y = 3 \cdot 2 - 3 = 3 = 1.$$

Основная система метода сил приведена на рис. 3.11.

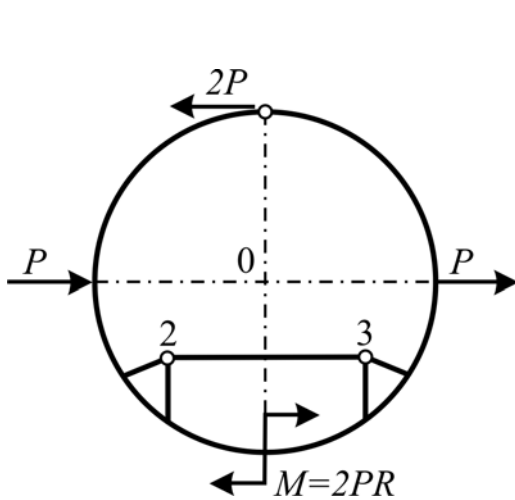


Рис.3.10

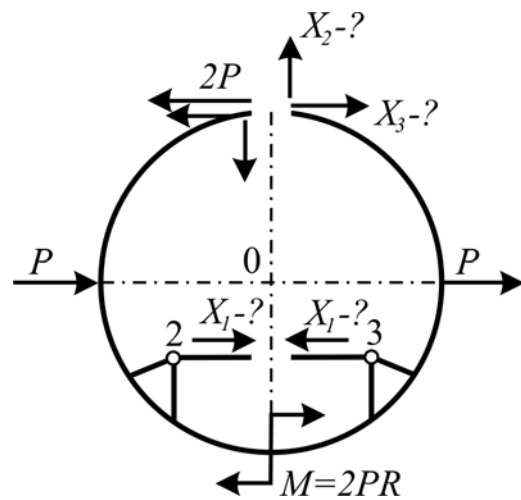


Рис.3.11

Система канонических уравнений имеет вид:

$$\Delta_{1X} = 0; \quad \delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 + \delta_{13}X_3 + \Delta_{1P} = 0;$$

$$\Delta_{2X} = 0; \quad \delta_{21}X_1 + \delta_{22}X_2 + \delta_{23}X_3 + \Delta_{2P} = 0;$$

$$\Delta_{3X} = 0; \quad \delta_{31}X_1 + \delta_{32}X_2 + \delta_{33}X_3 + \Delta_{3P} = 0.$$

Эпюры изгибающих моментов в единичных и грузовом состояниях основной системы приведены на рис. 3.12.



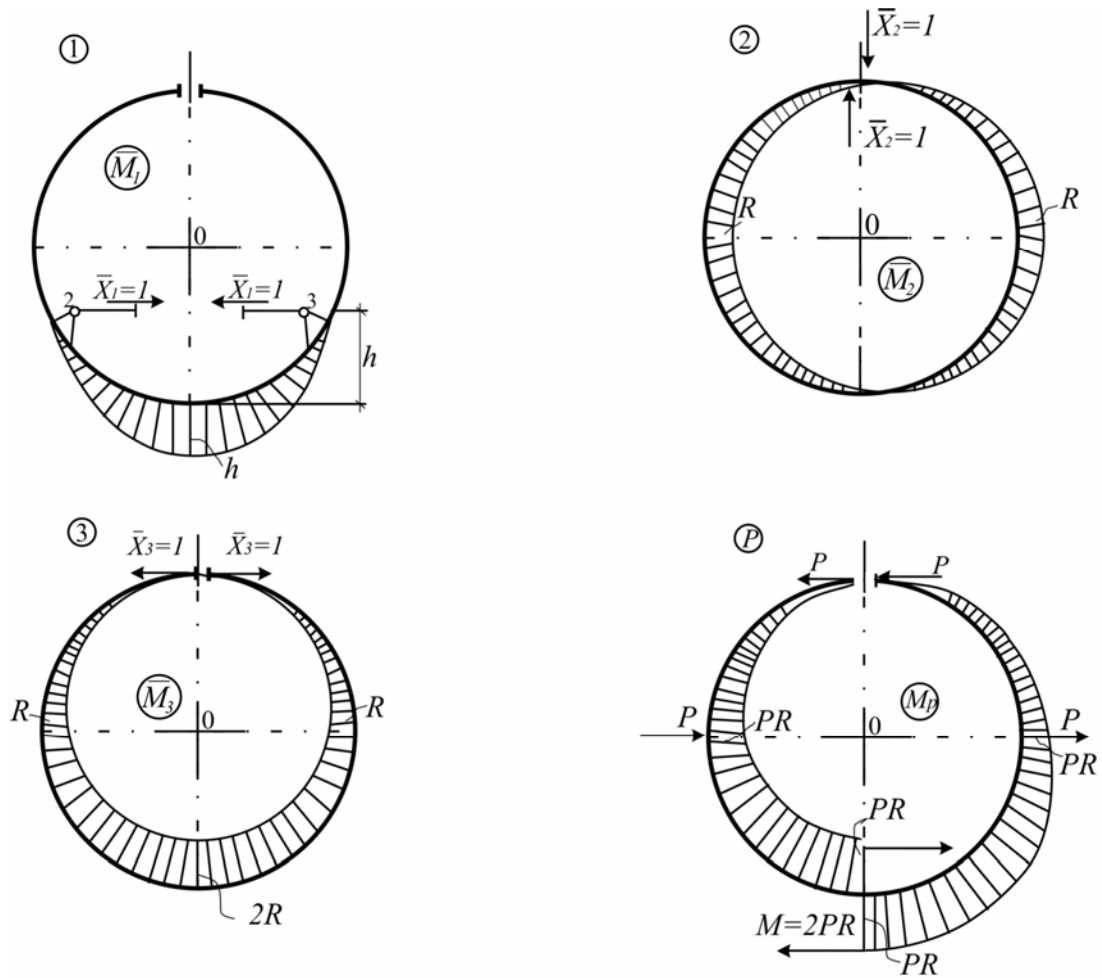


Рис.3.12

Учитывая, что эпюры  $M_1$  и  $M_3$  – симметричные, а эпюры  $M_2$  и  $M_P$  – кососимметричные, замечаем:

$$\delta_{12} = \delta_{21} = \sum \frac{1}{EJ} \int_{(l)} M_1 M_2 dx = 0; \quad \delta_{23} = \delta_{32} = \sum \frac{1}{EJ} \int_{(l)} M_2 M_3 dx = 0;$$

$$\Delta_{1P} = \sum \frac{1}{EJ} \int_{(l)} M_1 M_P dx = 0; \quad \Delta_{3P} = \sum \frac{1}{EJ} \int_{(l)} M_3 M_P dx = 0.$$

При этих условиях система канонических уравнений распадается на две независимые группы:

$$\begin{cases} \delta_{11} X_1 + \delta_{13} X_3 = 0; \\ \delta_{31} X_1 + \delta_{33} X_3 = 0; \end{cases} \quad \text{и} \quad \delta_{22} X_2 + \Delta_{2P} = 0.$$

Так как в общем случае

$$\begin{vmatrix} \delta_{11} & \delta_{13} \\ \delta_{31} & \delta_{33} \end{vmatrix} \neq 0, \quad \text{то} \quad X_1 = X_3 = 0.$$

Следовательно, усилие в стержне 2-3 равно нулю, т.к.  $X_1=0$ .

Пример 3.7. Для стержневой системы, изображенной на рис. 3.13, построить эпюру изгибающих моментов, выполнив расчет методом сил  $EJ = a^2 EA_a$ . Как изменится  $M_{max}$ , если  $EA_a = \infty$ ?

Степень статической неопределенности системы

$$L = 3K - C_y = 3 \cdot 1 - 2 = 1.$$

Основная система для расчета методом сил показана на рис. 3.14.

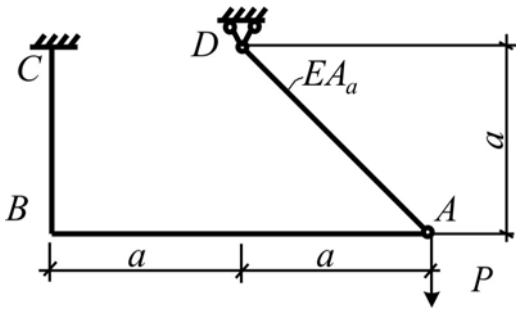


Рис. 3.13

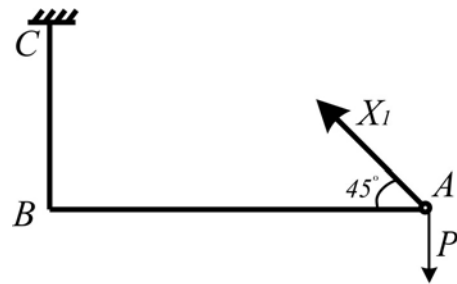


Рис. 3.14

Условие совместности деформаций и каноническое уравнение имеют вид:

$$\Delta_{1X} = 0; \quad \delta_{11}X_1 + \Delta_{1P} = 0.$$

Построим эпюры изгибающих моментов  $M_1$  и нормальных сил  $N_1$  в единичном состоянии и эпюру  $M_P$  в грузовом состоянии. Все эти эпюры представлены на рис. 3.15. Определим перемещения  $\delta_{11}$  и  $\Delta_{1P}$  по формуле Мора. При этом  $\delta_{11}$  будем вычислять с учетом нормальных сил:

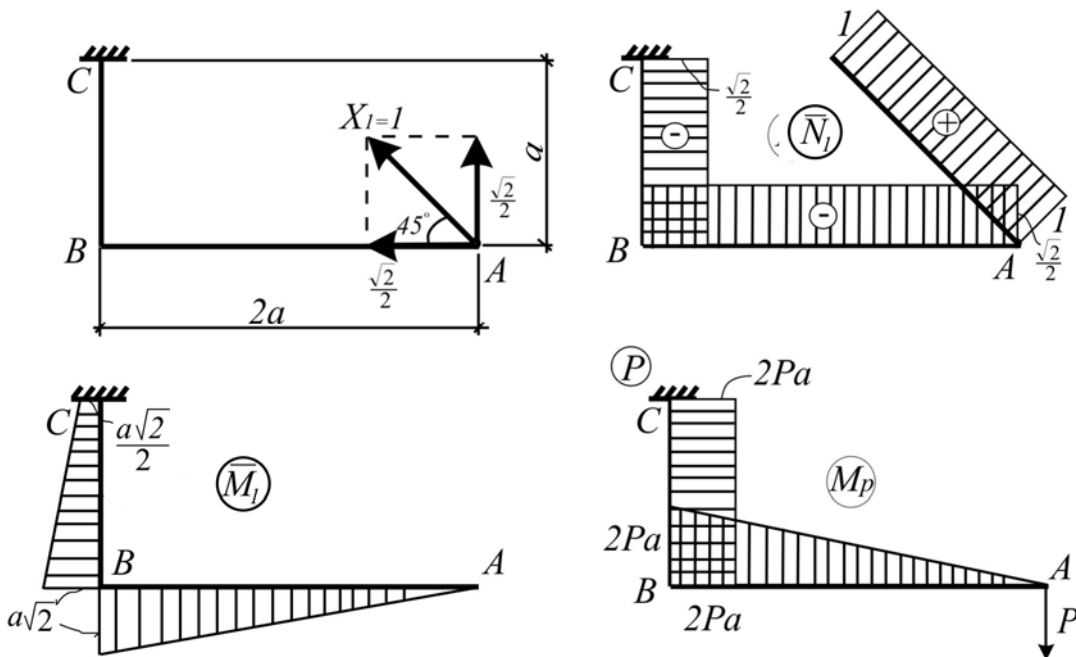


Рис.3.15

$$\Delta_{1P} = \sum \frac{1}{EJ} \int_{(l)} M_1 M_P dx = -\frac{P}{EJ} \left( \frac{2a \cdot 2a}{2} \cdot \frac{2a}{3} \sqrt{2} + \frac{a\sqrt{2} + a\sqrt{\frac{a}{2}}}{2} 2a^2 \right) = -\frac{4Pa^3}{EJ};$$

$$\begin{aligned} \delta_{11}^{(1)} &= \sum \frac{1}{EJ} \int_{(l)} M_1^2 dx + \sum \frac{1}{EA_a} N_1^2 l = \\ &= \frac{1}{EJ} \left[ a\sqrt{2} \cdot \frac{2a}{2} \cdot \frac{2a}{3} \sqrt{2} + \frac{a}{2} \sqrt{2} \cdot a \cdot \frac{3}{4} a \cdot \sqrt{2} + \frac{a}{2} \sqrt{2} \cdot \frac{a}{2} \left( \frac{a}{2} \sqrt{2} + \frac{2}{3} \cdot \frac{a}{2} \sqrt{2} \right) \right] + \\ &\quad + \frac{1 \cdot a\sqrt{2}}{EA_a} = \frac{5a^3}{2EJ} + \frac{a^3 \sqrt{2}}{EJ} = \frac{3,91a^3}{EJ}. \end{aligned}$$

Найдем лишнее известное  $X_1$ :

$$X_1 = -\frac{\Delta_{1P}}{\delta_{11}} = \frac{4Pa^3 EJ}{EJ \cdot 3,91a^3} = 1,02P.$$

Изгибающие моменты в точках  $B$  и  $C$  с учетом продольной силы в стержне  $AD$  будут:

$$M_{BA}^{(1)} = M_{BC}^{(1)} = -2Pa + 1,02Pa\sqrt{2} = -0,56Pa;$$

$$M_{CB}^{(1)} = -2Pa + 1,02Pa \frac{\sqrt{2}}{2} = -1,26Pa.$$

При  $EA_a = \infty$ :  $\delta_{11}^{(1)} = \frac{2,5a^3}{EJ}$  и  $X_1 = \frac{4Pa^3 EJ}{EJ \cdot 2,5a^3} = 1,6P$ .

Тогда

$$M_{BA}^{(2)} = M_{BC}^{(2)} = -2Pa + 1,6Pa\sqrt{2} = 0,26Pa;$$

$$M_{CB}^{(2)} = -2Pa + 1,6Pa \frac{\sqrt{2}}{2} = -0,87Pa.$$

Окончательные эпюры в заданной системе показаны на рис. 3.16:

а) когда  $EA_a = EJ/a^2$  эпюра  $M_x^{(1)}$ ;

б) когда  $EA_a = \infty$  эпюра  $M_x^{(2)}$ .

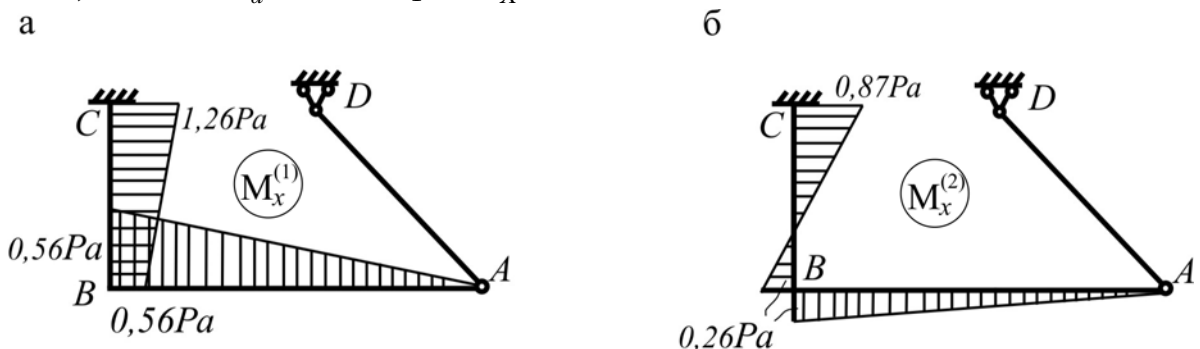


Рис. 3.16

Из сравнения эпюр  $M_X^{(1)}$  и  $M_X^{(2)}$  видно, что влияние продольной силы в стержне  $AD$  оказалось весьма существенным. Так, в точке  $C$  изгибающий момент увеличился на 47 %, а в точке  $B$  даже изменился знак момента, т.е. пренебрегать влиянием продольных деформаций стержня  $AD$  нельзя.

**Пример 3.8.** Для системы, изображенной на рис. 3.17, определить внутренние усилия и построить эпюры  $M$ ,  $Q$  и  $N$ .

Расчет выполнять методом перемещений. Степень кинематической неопределимости системы найдем по формуле

$$\Pi = \Pi_Y + \Pi_L,$$

где  $\Pi_Y$  – степень угловой подвижности узлов;

$\Pi_L$  – степень линейной подвижности узлов.

$$\Pi_Y = Y_{\text{св.ж}} = 1(\varphi_C); \quad \Pi_L = 2Y - C_{\text{ш}} = 8 - (3 + 5) = 0.$$

Основная система представлена на рис. 3.18.

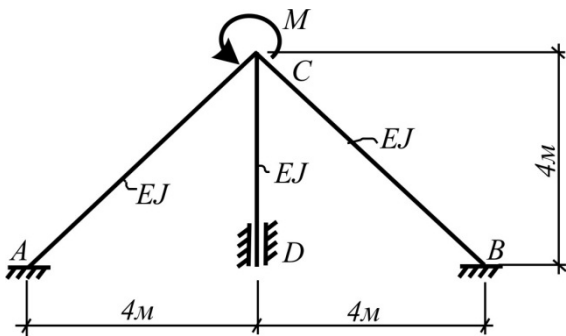


Рис.3.17

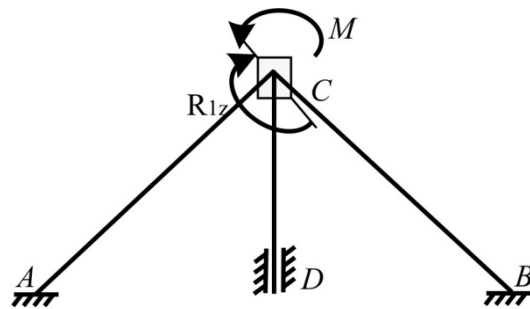


Рис.3.18

Каноническое уравнение метода перемещений имеет вид:

$$R_{1Z} = 0; \quad r_{11}Z_1 + R_{1P} = 0,$$

где  $r_{11}$  и  $R_{1P}$  – реакции в дополнительном заземлении, введенном в узел  $C$  в единичном и грузовом состояниях основной системы;

$Z_1 = \varphi_C$  – угол поворота узла  $C$ .

Приведенные погонные жесткости стержней, отнесенные к погонной жесткости стержней  $AC$  и  $CB$ , составят:

$$i_{AC} = i_{CB} = i_1 = 1; \quad i_{CD} = i_2 = \frac{EJ \cdot 4\sqrt{2}}{4EJ} = \sqrt{2}.$$

Строим единичную эпюру изгибающих моментов (рис. 3.19,б) и вычисляем  $r_{11}$ .

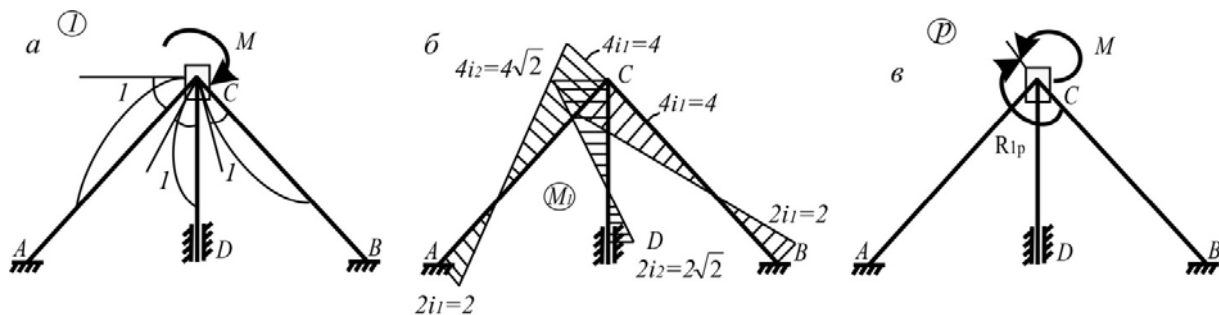


Рис.3.19

Из условия равновесия узла  $C$  находим:

$$r_{11} = 2 \cdot 4i_1 + 4i_2 = 8 + 4\sqrt{2} = 13,64$$

Рассматривая грузовое состояние (рис. 3.19,в), определяем реактивный момент  $R_{1p} = M$ .

Из канонического уравнения находим угол поворота  $Z_1 = \varphi_C$ .

$$Z_1 = -\frac{R_{1p}}{r_{11}} = -\frac{M}{13,64} = -0,0733 \text{ М.}$$

Окончательная эпюра изгибающих моментов  $M_z$ , построенная по формуле  $M_z = M_1 Z_1$ , представлена на рис. 3.20,а, а эпюры перерезывающих и нормальных сил  $Q_z$  и  $N_z$  – соответственно на рис. 3.20, б, в.

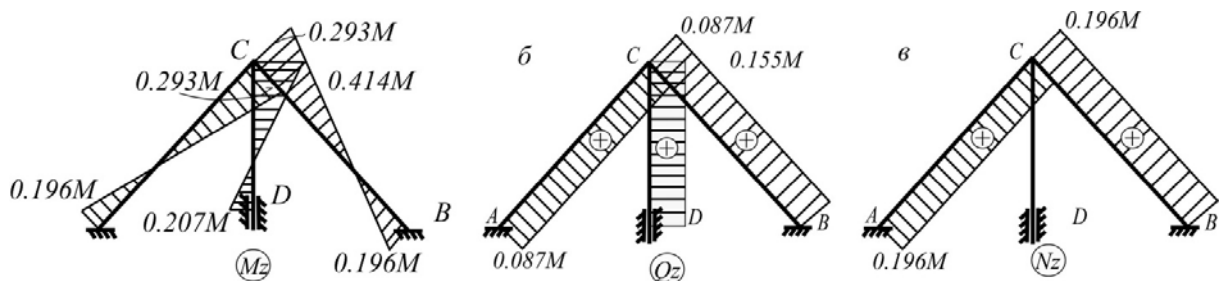


Рис.3.20

**Пример 3.9.** Для рамы, изображенной на рис. 3.21, определить внутренние усилия и построить эпюры  $M, Q, N$ .

При решении этой задачи силу  $P$  следует заменить эквивалентной силой  $P_1$ , приложенной в узле  $C$ , и моментом  $M = P \cdot 0,8 = 8 \text{ кН}\cdot\text{м}$ .

Дальнейшее решение задачи аналогично решению задачи 3.8.

Окончательные эпюры  $M_z, Q_z, N_z$  приведены на рис. 3.22,а,б,в.

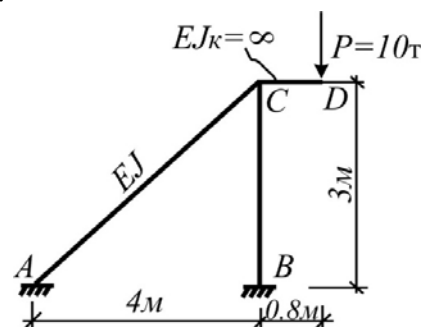


Рис. 3.21

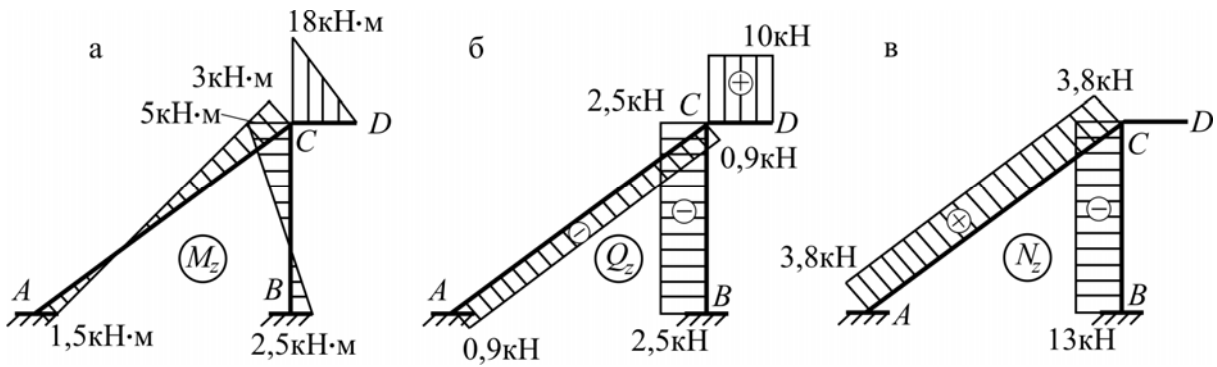


Рис.3.22

Пример 3.10. Определить изгибающие моменты в раме, изображенной на рис. 3.23, и вычислить, во сколько раз изменится величина момента в узлах  $C$  и  $D$ , если задать  $k=1$  и  $k=10$ .

Определяем степень статической и кинематической неопределенности рамы:

$$L=3; \quad \Pi = 3(\varphi_D, \varphi_C, \delta).$$

Однако из условия симметрии рамы и нагрузки следует, что  $\varphi_C = -\varphi_D$ ;  $\delta = 0$  и расчет рациональнее выполнять методом перемещений. Основная система приведена на рис. 3.24.

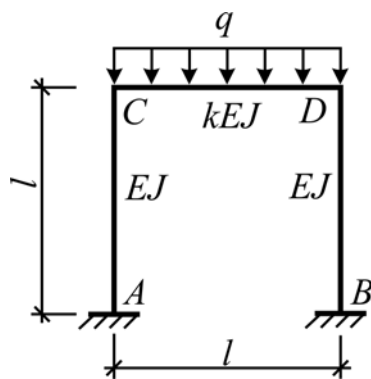


Рис.3.23

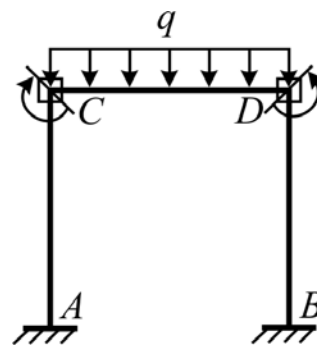


Рис.3.24

Каноническое уравнение имеет вид:

$$R_{1Z} = 0; \quad r_{11}Z_1 + R_{1P} = 0,$$

где  $Z_1 = \varphi_C = \varphi_D$  – угол поворота узлов  $C$  и  $D$ .

Схема деформации рамы и эпюры изгибающих моментов в единичном и грузовом состояниях основной системы показаны на рис. 3.25.

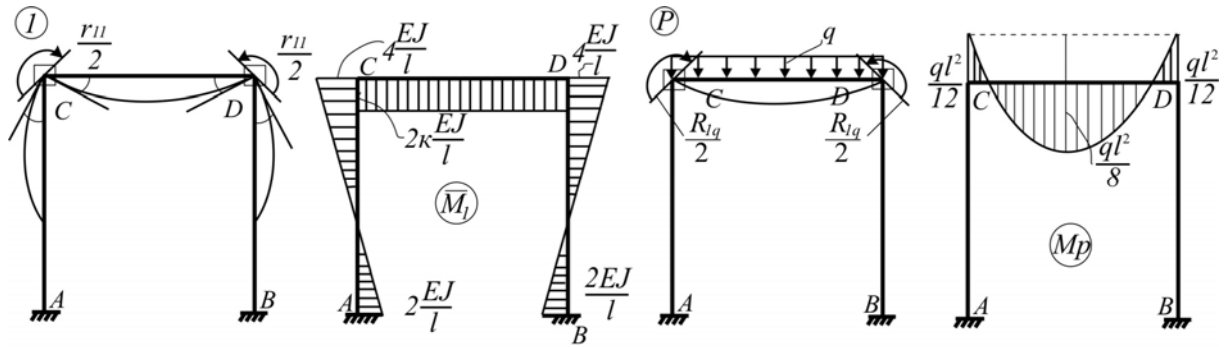


Рис.3.25

Рассматривая равновесие вырезанных узлов в эпюрах  $\bar{M}_1$  и  $M_p$ , вычисляем реактивные усилия  $r_{11}$  и  $R_{1P}$ :

$$r_{11} = \left( 4 \frac{EJ}{l} + 2k \frac{EJ}{l} \right) \cdot 2 = (2+k) \cdot \frac{4EJ}{l};$$

$$R_{1P} = -2 \cdot \frac{ql^2}{12} = -\frac{ql^2}{6}.$$

Из канонического уравнения находим  $Z_1$ :

$$Z_1 = -\frac{R_{1P}}{r_{11}} = \frac{ql^2}{6} \cdot \frac{l}{4EJ(2+k)} = \frac{ql^3}{24EJ(2+k)EJ}.$$

Определяем значение момента  $M_{CA}$ :

$$M_{CA} = M_1 Z_1 = 4 \frac{EJ}{l} \cdot \frac{ql^3}{24(2+k)EJ} = \frac{ql^2}{6(2+k)}.$$

При  $k=1$   $M_{CA} = \frac{ql^2}{18}$ ; при  $k=10$   $M_{CA} = \frac{ql^2}{72}$ .

Таким образом, при увеличении  $k$  в 10 раз изгибающий момент в узле  $C$  уменьшится в  $n = \frac{ql^2}{18} \cdot \frac{72}{ql^2} = 4$  раза.

**Пример 3.11.** Рассчитать раму, изображенную на рис. 3.26, и построить эпюры для двух вариантов: 1) без учета продольных деформаций; 2) с учетом продольных деформаций стержней. Найти поправки в процентах к наибольшим по абс. величине  $M$ ,  $Q$  и  $N$  при учете продольных деформаций.

Принять  $l_p = l_c = 6$  м,  $\frac{J_p}{J_c} = 9$ , гибкость стойки  $\lambda_c = \frac{l_c}{i_c} = l_c \sqrt{\frac{A_c}{J_c}} = 30$ .

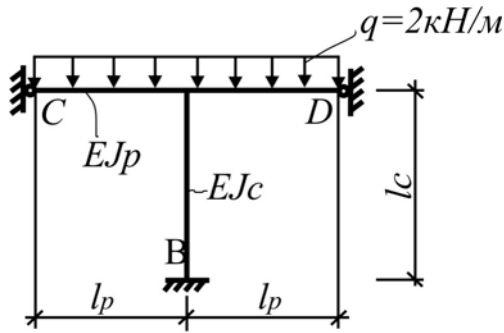


Рис.3.26

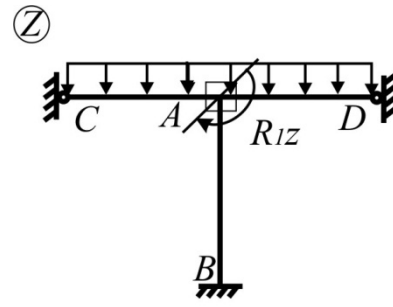


Рис.3.27

Без учета продольных деформаций стержней степень кинематической неопределимости

$$\Pi = \Pi_y + \Pi_l = 1(\varphi_A).$$

Основная система приведена на рис. 3.27. Эпюры изгибающих моментов в единичном и грузовом состояниях показаны на рис. 3.28, а, б.

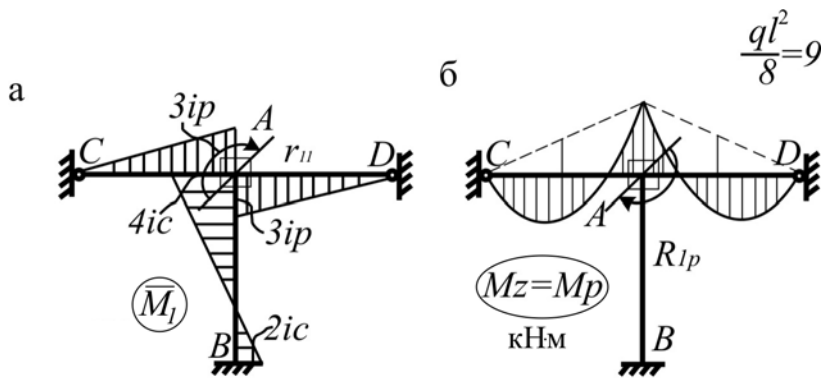


Рис. 3.28

Каноническое уравнение:

$$R_{1Z} = 0; \quad r_{11}Z_1 + R_{1P} = 0,$$

где  $Z_1 = \varphi_A$ .

Приведенные погонные жесткости стержней при условии, что  $m = \frac{EJ_c}{l_c}$ , будут:

$$i_c = \frac{EJ_c}{l_c m} = 1; \quad i_p = \frac{EJ_p}{l_p m} = 9.$$

Тогда  $r_{11} = 3i_p \cdot 2 + 4i_c = 6 \cdot 9 + 4 \cdot 1 = 58$ ;  $R_{1P} = M_{AC} - M_{AD} = 9 - 9 = 0$ .

Поскольку реактивный момент в грузовом состоянии  $R_{1P} = 0$ , то  $Z_1 = 0$  и окончательная эпюра  $M_z$  совпадает с эпюрой  $M_p$  (см. рис. 3.28, б).

Эпюры  $Q_z$  и  $N_z$  приведены на рис. 3.29, а, б.



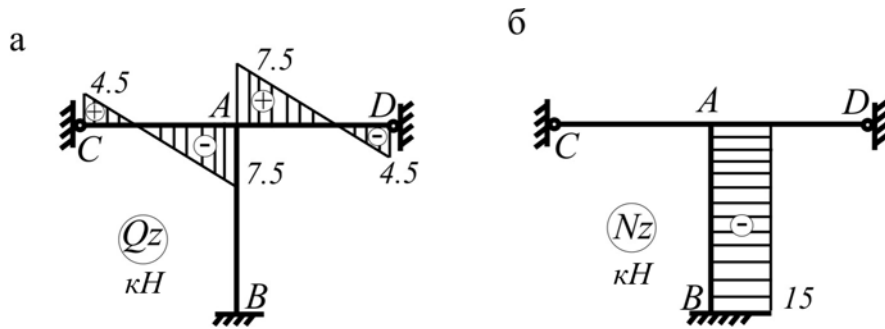


Рис. 3.29

Выполним расчет с учетом продольной деформации стойки. Обозначим продольную деформацию стойки через  $\delta_{AB}$ . Тогда  $\delta_{AB} = \frac{\bar{N}_{AB} l_C}{EA_C}$ , и, следовательно,

$$\bar{N}_{AB} = \frac{EA_C \delta_{AB}}{l_C} \cdot \frac{m}{m} = f_C \delta_{AB},$$

где  $f_C = \frac{EA_C}{l_C m} = \frac{EA_C \cdot l_C}{l_C \cdot EJ_C} \cdot \frac{l_C}{l_C} = \frac{\lambda_C^2}{l_C^2} = \frac{900}{36} = 25$  – приведенная погонная жесткость стойки на растяжение-сжатие.

Для определения  $\delta_{AB}$  рассмотрим равновесие узла A (рис. 3.30).

$$\sum Y = 0; \quad \bar{N}_{AB} + \bar{Q}_{AD} - \bar{Q}_{AC} = 0, \quad (a)$$

где  $\bar{Q}_{AD} = Q_{AD} + \Delta Q_{AD}$ ,  $\bar{Q}_{AC} = Q_{AC} + \Delta Q_{AC}$ .

Здесь  $Q_{AD}$  и  $Q_{AC}$  – перерезывающие силы на эпюре  $Q_Z$  (рис. 3.29,а). Дополнительная перерезывающая сила  $\Delta Q_{AD}$  возникает за счет деформации сжатия стойки AB и определяется на основании эпюры  $\Delta M_Z$  (рис. 3.31).

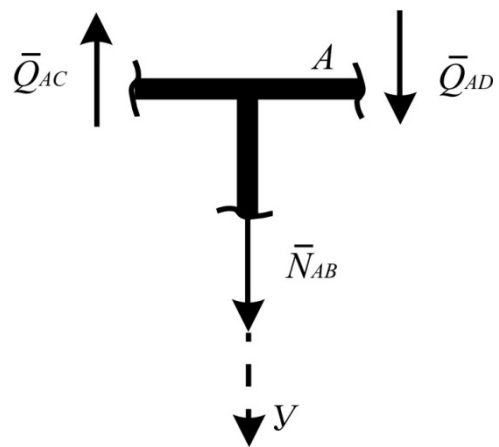


Рис. 3.30

$$Q_{AD} = 7,5 - \frac{3i_p}{l_p^2} \delta_{AB} = 7,5 - \frac{3 \cdot 9}{36} \delta_{AB} = 7,5 - 0,75 \delta_{AB}$$

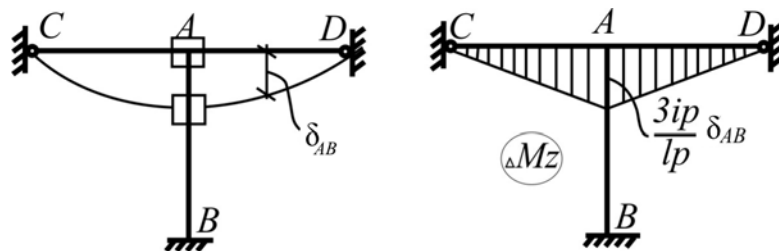


Рис. 3.31

Аналогично  $\bar{Q}_{AC} = Q_{AC} + \Delta Q_{AC} = -7,5 + 0,75\delta_{AB}$ .

Подставляя  $\bar{N}_{AB}$ ,  $\bar{Q}_{AD}$ ,  $\bar{Q}_{AC}$  в уравнение (а), имеем:

$$-f_C \delta_{AB} + 7,5 - 0,75\delta_{AB} + 7,5 - 0,75\delta_{AB} = 0,$$

$$-25\delta_{AB} - 1,5\delta_{AB} + 15 = 0 \text{ или } -26,5\delta_{AB} + 15 = 0 \quad (\text{в})$$

Решая уравнение (в), находим продольную деформацию  $\delta_{AB}$ :

$$\delta_{AB} = \frac{15}{26,5} = \frac{30}{53}.$$

Пользуясь эпюрами  $M_Z$  и  $\Delta M_Z$  (см. рис. 3.28, 3.31), определяем окончательные значения изгибающих моментов с учетом продольной деформации:

$$\bar{M}_{AD} = M_{AD} + \Delta M_{AD} \cdot \delta_{AB} = -9 + \frac{3 \cdot 9}{6} \cdot \frac{30}{53} = -6,453 \text{ кН}\cdot\text{м}.$$

Разница со значением  $M_{AD}$  составляет:

$$P\% = \frac{9 - 6,453}{9} \cdot 100 = 28,3 \%$$

$$\bar{M}_{AC} = M_{AC} + \Delta M_{AC} \cdot \delta_{AB} = 6,453 \text{ кН}\cdot\text{м}.$$

Аналогично

$$\bar{Q}_{AD} = Q_{AD} + \Delta Q_{AD} \cdot \delta_{AB} = 7,5 - 0,75 \frac{30}{53} = 7,5 - 0,425 = 7,075 \text{ кН}.$$

Разница составляет:

$$P\% = \frac{7,75 - 7,075}{7,5} \cdot 100 = 5,7 \%$$

$$\bar{Q}_{DA} = Q_{DA} + \Delta Q_{DA} \cdot \delta_{AB} = -4,5 - 0,425 = -4,925 \text{ кН}.$$

$$\bar{N}_{AB} = \bar{Q}_{AC} - \bar{Q}_{AD} = -7,075 - 7,075 = -14,15 \text{ кН},$$

расхождение с  $N_{AB}$  на 5,7 %.

**Пример 3.12.** Рассчитать раму, изображенную на рис. 3.32, и построить эпюры для двух вариантов: 1) без учета продольных деформаций; 2) с учетом продольных деформаций стержней. Найти поправки в процентах к наибольшим по абс. величине  $M$ ,  $Q$  и  $N$  при учете продольных деформаций.

$$\text{Принять } l_P = l_C = 6 \text{ м, } \frac{J_P}{J_C} = 9, \text{ гибкость стойки } \lambda_C = \frac{l_C}{i_C} = l_C \sqrt{\frac{A_C}{J_C}} = 30.$$

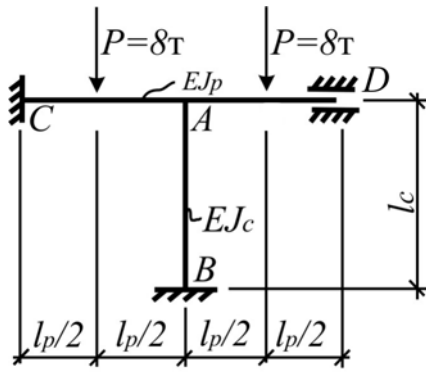


Рис.3.32

Ответ. Поправки к максимальным усилиям при расчете с учетом продольных сил деформаций стержней составят соответственно для изгибающего момента  $M_{AC}$  – 3,87 %, для перерезывающей силы  $Q_{AC}$  и нормальной силы  $N_{AB}$  – 19,35 %.

Пример 3.13. Построить  $M_{ок}$  для симметричной рамы (рис.3.33,а) методом сил и методом перемещений.

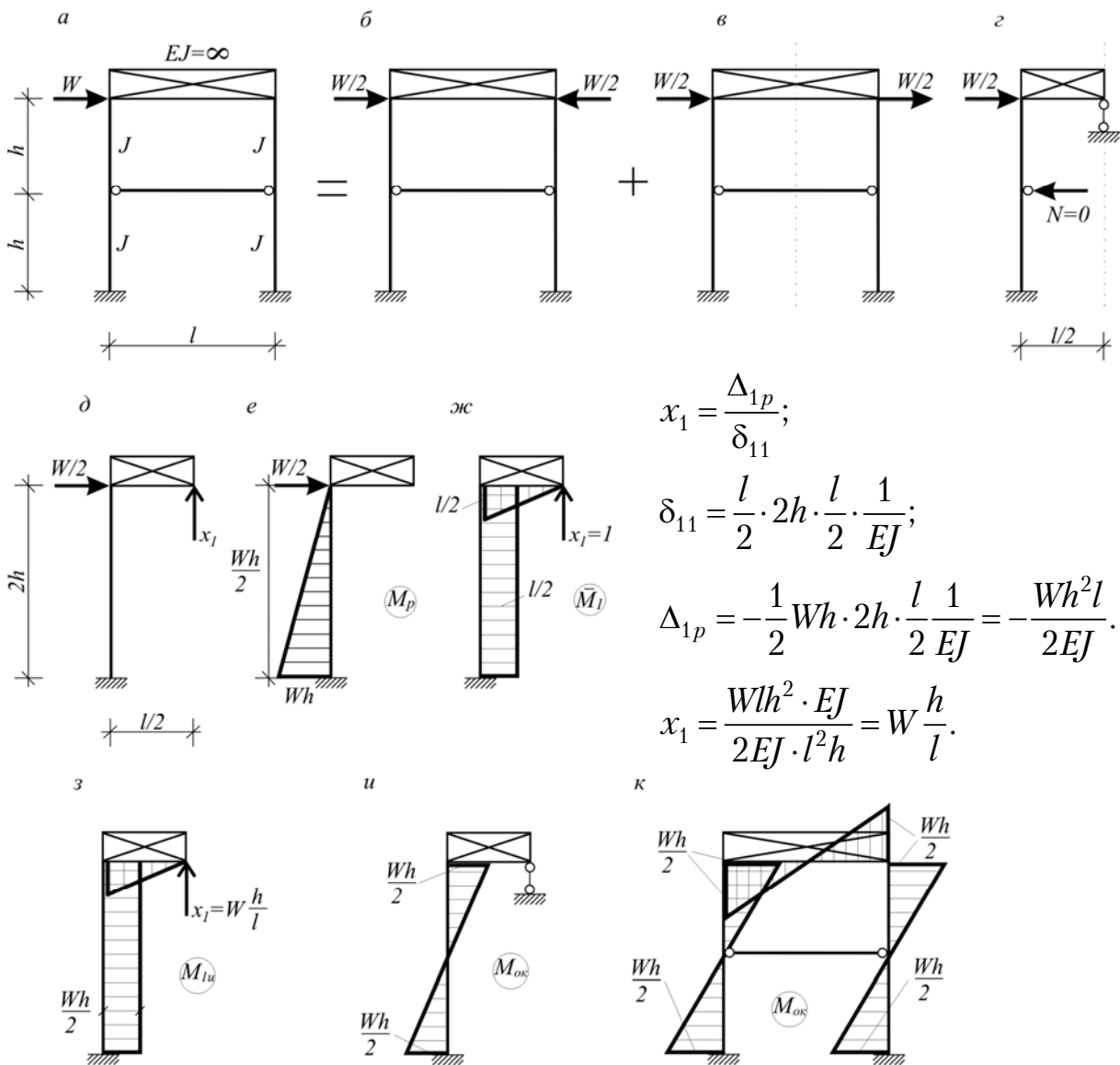


Рис.3.33

### Порядок решения методом сил (рис. 3.33)

Рис. 3.33,а – расширенная схема. Разобьем нагрузку на симметричную и кососимметричную части (рис. 3.33, б и в). Нагрузка симметричная не дает моментов. Раму с кососимметричной нагрузкой заменим на одну симметричную часть (рис. 3.33,г). Рис. 3.33,д – основная система метода сил, рис. 3.33,е – грузовая эпюра, рис. 3.33,ж – единичная эпюра. Рис. 3.33,з – исправленная единичная эпюра, рис. 3.33,и – основная эпюра для одной симметричной части, рис. 3.33,к – основная эпюра в заданной раме.

### Порядок решения схемы методом перемещений (рис.3.34)

$$z_1 = -\frac{R_{1p}}{r_{11}}$$

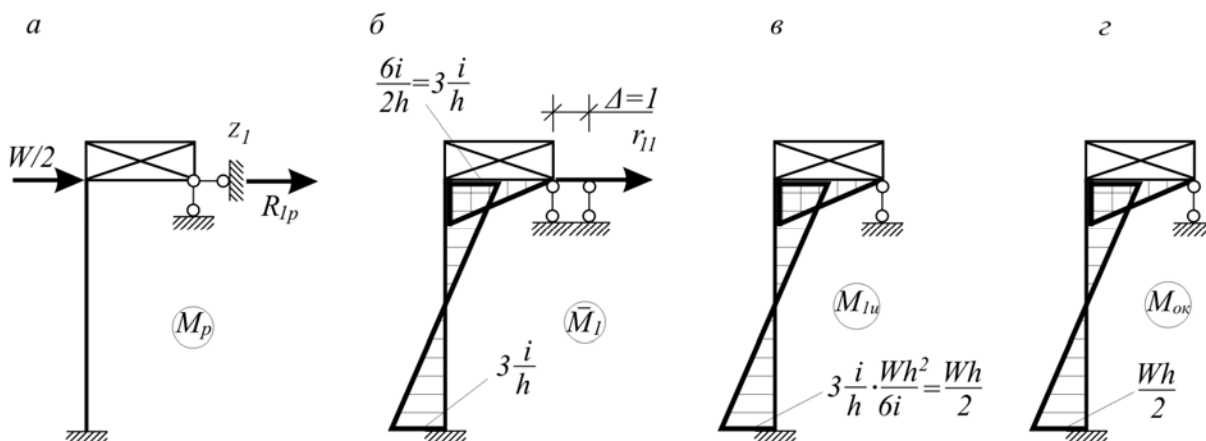


Рис.3.34

$$\left. \begin{aligned} R_{1p} &= -\frac{W}{2}; \\ r_{11} &= \frac{3i}{h \cdot h} = \frac{3i}{h^2} \end{aligned} \right\} z_1 = \frac{W \cdot h^2}{2 \cdot 3i} = \frac{Wh^2}{6i}.$$

Трудоемкость метода сил и метода перемещений одинаковая.

Эту задачу можно решить и таким рассуждением:

1. Изобразим схему деформаций. В середине стоек – точки перегиба; значит, изгибающий момент.

2. Т.к. рама симметрична, то нагрузку  $W$  можно разделить на две равные части – слева и справа по  $W/2$ .

3. В стержне  $AB$  может возникнуть только симметричная продольная сила  $N$ . Но  $N=0$  благодаря кососимметричной нагрузке. Значит, стержень  $AB$  не работает и его можно убрать.

4. В каждой стойке поперечная сила равна  $W/2$  (рис.3.35).

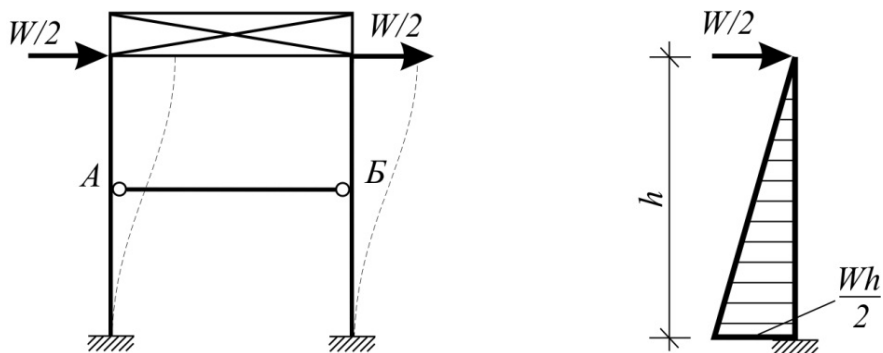


Рис.3.35

5. Аналогичные эпюры возникнут во всех 4-х участках стоек. Отсюда эпюра  $M_{ок}$  в стойках принимает вид, представленный на рис.3.36.

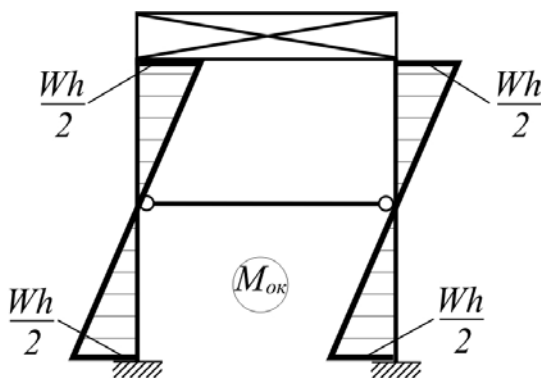


Рис.3.36

Пример 3.14. Указать наиболее вероятный механизм разрушения путем образования пластических шарниров для схемы, изображенной на рис.3.37,а.

$$R_{1p} = -\frac{2Ph}{4h} = -\frac{P}{2}.$$

$$r_{11} = \frac{2 \cdot 6 \cdot i}{h \cdot h} = \frac{12i}{h^2};$$

$$z_1 = -\frac{R_{1p}}{r_{11}} = \frac{P \cdot h^2}{2 \cdot 12i} = \frac{Ph^2}{24i}$$

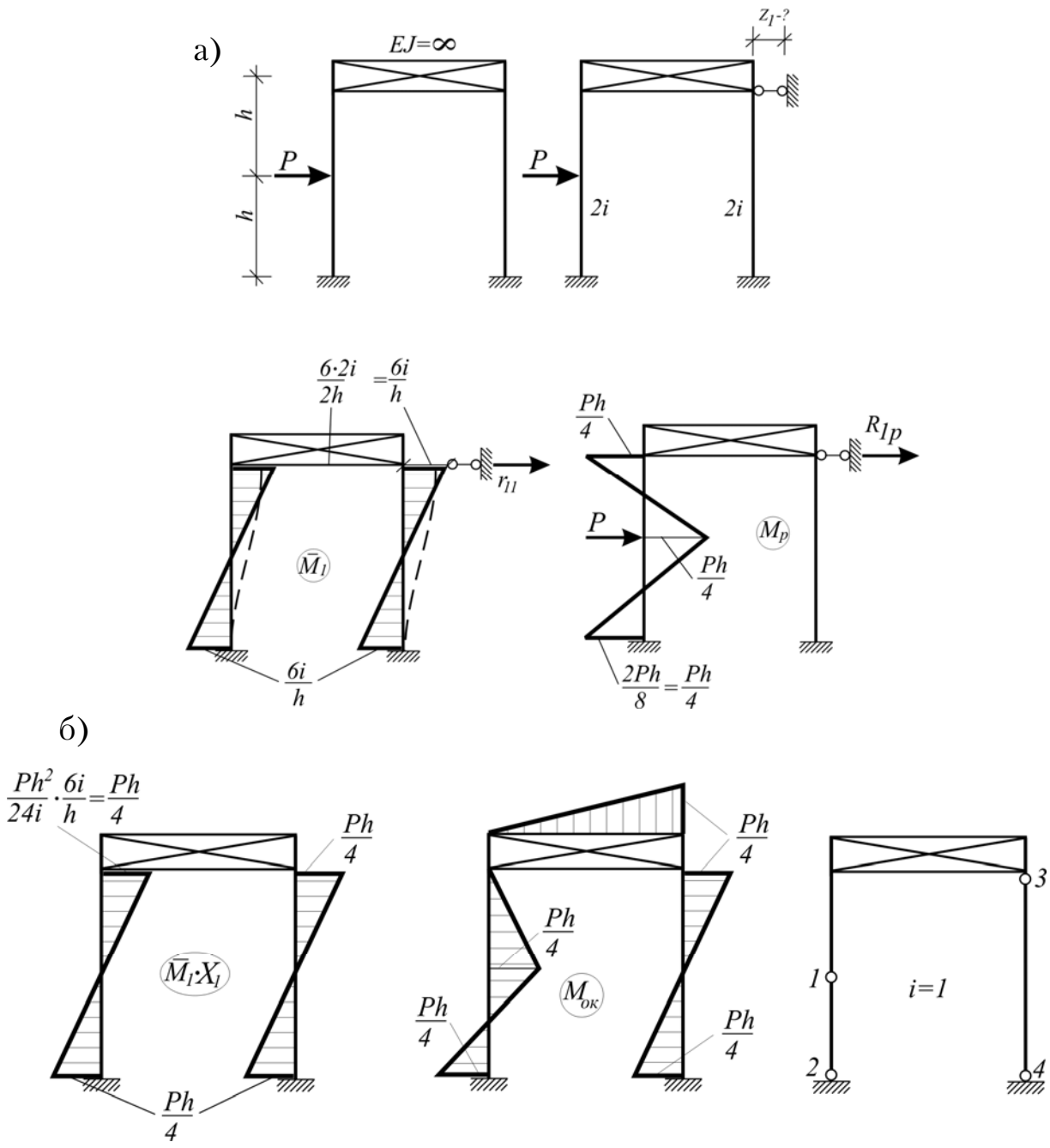


Рис.3.37

Самый вероятный механизм разрушения  $i=1$ , четыре пластичных шарнира (в местах наибольших моментов).

Пример 3.15. Рассчитать раму наиболее целесообразным методом (рис.3.38а).

Решение. Рама симметрична. Значит, сила  $8W$  в т. А одинаково воспринимается левой и правой частями. Значит, усилие в стержне  $AB$   $N=4W$ .

Достаточно рассчитать только левую или правую часть. Например, левую. Она имеет  $\lambda=1$ . При расчете методом сил – одно неизвестное, методом перемещений – 2 неизвестных (перемещение т. С и т. D).

Однако ясно, что в стержне  $DE$  не может быть изгибающих моментов. Поэтому можно ограничиться также одним неизвестным.

Таким образом, имеем одно неизвестное и по методу сил, и по методу перемещений. Ниже приведен расчет левой части рамы методом сил (рис.3.38, в, г, д). Окончательная эпюра в заданной раме приведена на рис. 3.38, е.

$$\delta_{11} = l \cdot h \cdot l \frac{1}{EJ} = \frac{l^2 h}{EJ};$$

$$\Delta_{1p} = h \cdot 6hW \cdot l \frac{1}{EJ} = \frac{6lh^2W}{EJ};$$

$$x_1 = -\frac{\Delta_{1p}}{\delta_{11}} = -\frac{6lh^2W}{l^2 h} = -\frac{6hW}{l}.$$

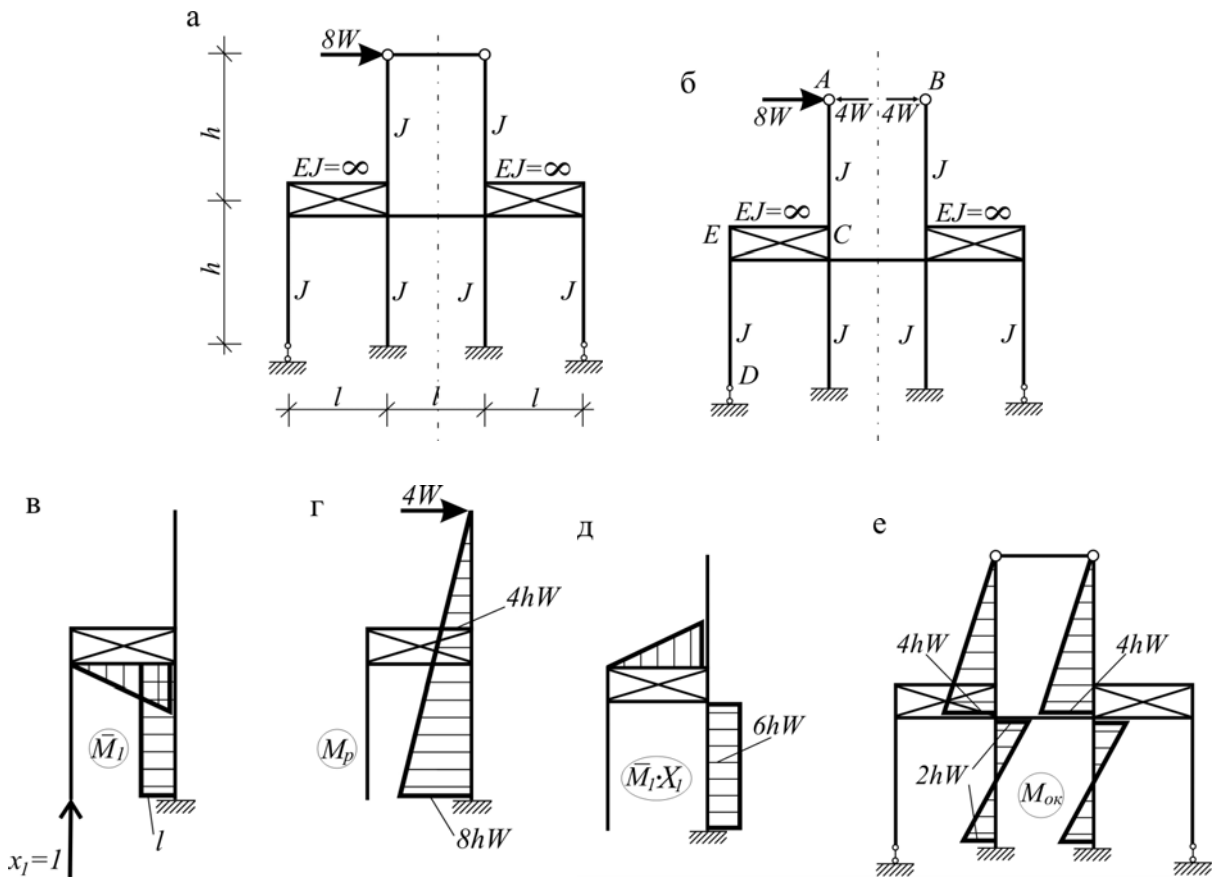


Рис.3.38

Пример 3.16. Какой из расчетных схем Г-образной рамы (рис. 3.39, а) следует отдать предпочтение при строительстве на просадочных грунтах (т.е. когда возможна неравномерная осадка опор), а также при значительных температурных воздействиях (равномерном нагреве всей рамы)?

О т в е т . При  $h = l$  и  $J_1 = J_2 = J$  значения  $M_\Delta$  от осадки (рис. 3.39, б) и равномерного нагрева  $M_t$  (рис. 3.39, в) соответственно равны:

$$M_\Delta = kEJ\Delta / l^2; \quad M_t = cEjat / l,$$

где  $k$  и  $c$  приведены ниже:

Схема рамы	$k$	$c$
I	1.5	3
II	1.7	4.3
III	3	6

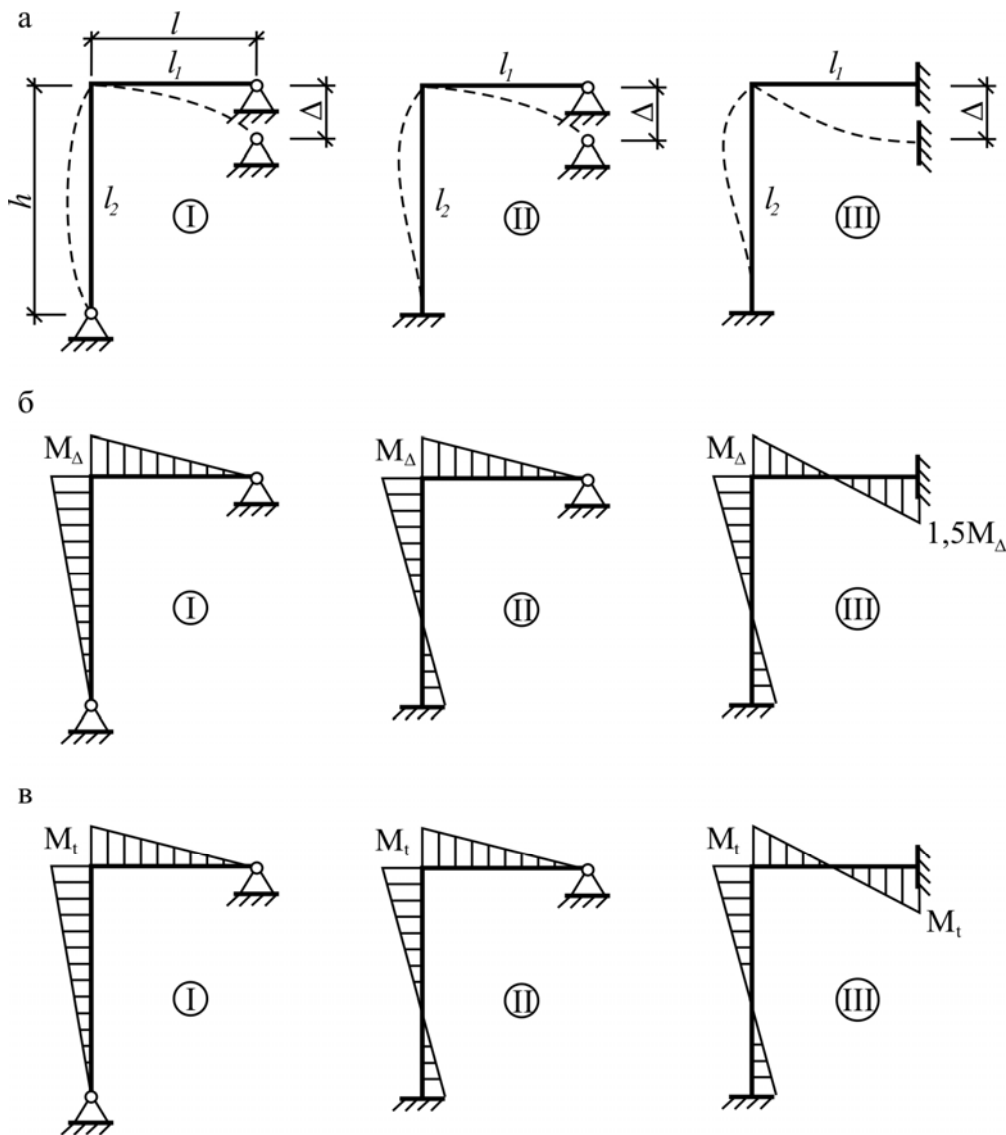


Рис.3.39

Таким образом, из трех рассмотренных схем наиболее чувствительна к неравномерным осадкам опор и равномерному нагреву схема III, имеющая наибольшее число лишних связей. Из рассмотренных схем предпочтение следует отдать раме I.



Пример 3.17. При расчетах плоских рам типа, показанного на рис. 3.40,а, на горизонтальные нагрузки часто принимают ригель абсолютно жестким. Требуется проанализировать возможность указанного упрощения при выборе расчетной схеме рам.

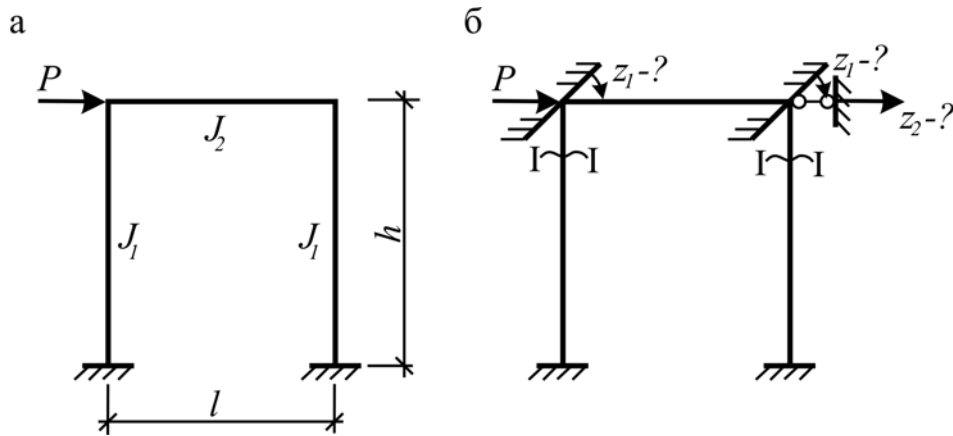


Рис.3.40

О т в е т. Рассчитывая раму методом перемещений с учетом обратной симметрии (основная система приведена на рис. 3.40,б), получаем:

$$Z_1 = \frac{Ph}{4(i_1 + 6i_2)}; \quad Z_2 = \frac{(2i_1 + 3i_2)Ph^2}{12i_1(i_1 + 6i_2)},$$

где  $i_1 = EJ_1 / h$ ;  $i_2 = EJ_2 / l$ .

Момент в сечении I-I (рис. 3.40, б) равен:

- от поворота узла на  $Z_1$

$$M_{Z_1}^{I-I} = \frac{Ph}{1 + 6\eta};$$

- от смещения на  $Z_2$

$$M_{Z_2}^{I-I} = -\frac{Ph}{2} \frac{2 + 3\eta}{1 + 6\eta},$$

где  $\eta = i_2 : i_1$ .

Вышеприведенные зависимости показывают, что с увеличением  $\eta$ , т.е. жесткости ригеля по отношению к жесткости стоек, значение  $M_{Z_1}^{I-I}$  резко уменьшается, приближаясь к нулю, а  $M_{Z_2}^{I-I}$  стремится к  $0,25 Ph$ .

При больших значениях  $\eta$  влияние  $M_{Z_1}^{I-I}$  невелико. Так, при  $\eta = 10$   $M_{Z_1}^{I-I}$  составляет около 3 % от  $M_{Z_2}^{I-I}$ . Опыт проектирования показывает, что при расчете рам на горизонтальные нагрузки, приложенные к стойкам, при  $\eta \geq 6$  жесткость ригеля можно принимать бесконечной, т.е. пренебрегать углами поворота жестких узлов.

Пример 3.18. В результате неточного монтажа рам (рис.3.41, а) стойки имеют отклонение от вертикали (рис.3.41, б). Какие изменения в напряженно-деформированном состоянии рамы это вызовет?

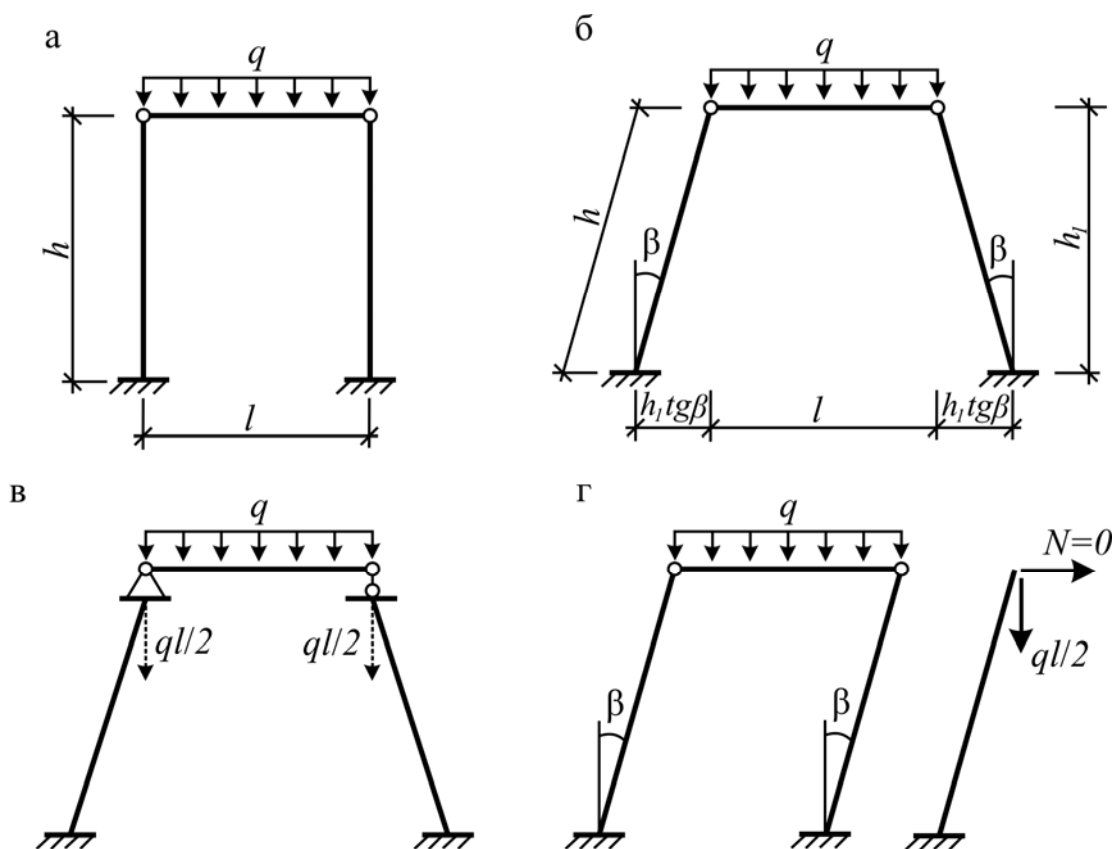


Рис.3.41

О т в е т. В данном случае необходим перерасчет рамы с учетом действительного расположения ее стержней на все виды внешних воздействий. Кроме расчета на прочность должны быть выполнены расчеты на жесткость и устойчивость.

Отметим, что данная задача примыкает к вопросу об исследовании сооружений с близкими геометрическими схемами. Принимая эти отклонения геометрических схем за возможные варьируемые параметры, можно сформулировать вариационную задачу о некоторой оптимизации (в соответствии с принимаемым критерием оптимизации) данного сооружения.

Ограничимся здесь анализом напряженного состояния рам при вертикальной нагрузке.

Для рам, приведенных на рис.3.41,а, отклонение колонн от вертикали по сравнению с проектным положением не вызывает в раме дополнительных изгибающих моментов. (В колоннах также не возникают изгибающие моменты.) Изменения в напряженном состоянии от-

носятся к эпюре продольных сил: в ригеле появились сжимающие усилия  $N_p = (ql \operatorname{tg} \beta) / 2$ , а в колоннах они увеличились:  $N_k = ql / (2 \cos \beta)$ .

Если учесть, что в запроектированной раме наличие продольного усилия в ригеле расчетом не предусматривалось, то необходимо сделать проверку главным образом верхнего узла рамы на передачу данного усилия. Если узел будет недостаточно прочным и рама начнет работать по схеме, изображенной на рис.3.41,в, то в защемлении колонн возникнут изгибающие моменты  $M = (qlh_1 \operatorname{tg} \beta) / 2$ .

Действительно, в раме (см. рис.3.41,б) все элементы сжаты. В схеме (см. рис.3.41,в) ригель представляет собой простую балку, а на колонну передается вертикальная нагрузка, т.е. опорная реакция балки. Именно такое невыгодное распределение изгибающих моментов в колоннах характерно в случае наклонной рамы с параллельными стойками (рис.3.41,г, продольное усилие в ригеле равно нулю).

*Пример 3.19. Однопролетная балка АВ (рис.3.42,а) усиливается шпренгелем (рис.3.42,б). Определить площадь сечения элементов шпренгеля, при которой прогиб точки С шпренгельной системы будет в 2 раза меньше максимального прогиба однопролетной балки. Принять, что для всех элементов шпренгеля ЕА одинаковы, а жесткость балки на изгиб ЕJ постоянна. Обжатием балки пренебречь.*

*Решение.* Требуемую площадь сечения элементов шпренгеля определим путем решения статически неопределимой шпренгельной системы с выполнением условий:

$$\Delta_c = \frac{1}{2} \Delta_c^0,$$

где  $\Delta_c^0 = \frac{5ql^4}{384EJ}$  – прогиб точки С в однопролетной балке от заданной равномерно распределенной нагрузки.

Таким образом, задача сводится к следующей системе уравнений:

$$\begin{cases} \delta_{11} X_1 + \Delta_{1P} = 0; \\ \Delta_c = \frac{1}{2} \cdot \frac{5ql^4}{384EJ}. \end{cases}$$

Значения  $\delta_{11}$  и  $\Delta_{1P}$  определим по формуле Мора с использованием единичных эпюр  $\bar{M}_1$  и  $\bar{N}_1$  и грузовой эпюры  $M_p$  (рис. 3.42, г, д, е) в основной системе метода сил (рис. 3.42,в):

$$\delta_{11} = \delta_{11}^b + \delta_{11}^u = \frac{l^3}{48EJ} + \frac{h}{EA} \left( 1 + \frac{1}{2 \cos^3 \alpha} \right);$$

$$\Delta_{1P} = - \frac{5ql^4}{384EJ}.$$

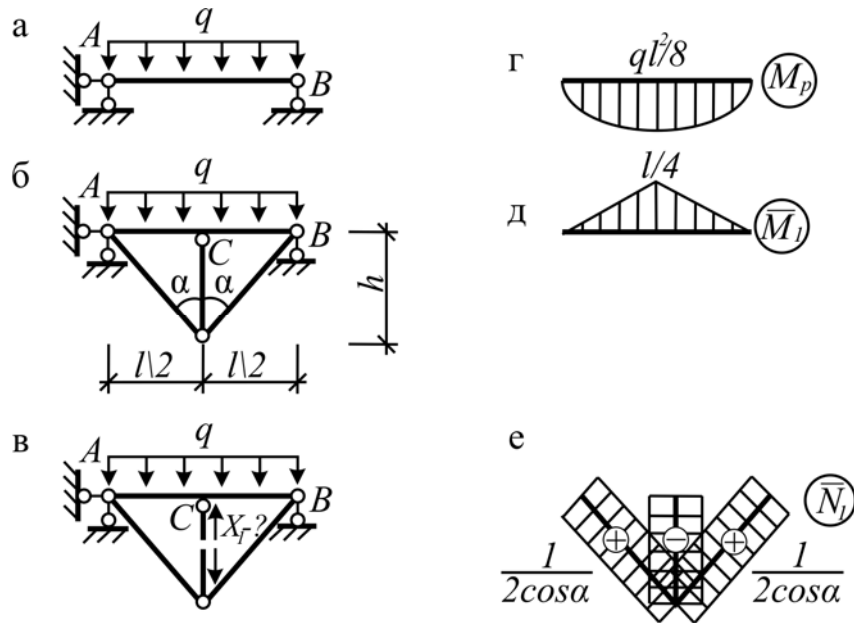


Рис. 3.42

Прогиб точки  $C$  шпренгельной системы:

$$\Delta_c = -\Delta_{1P} - \delta_{11}^6 X_1 = \frac{5ql^4}{384EJ} - \frac{l^3}{48EJ} X_1.$$

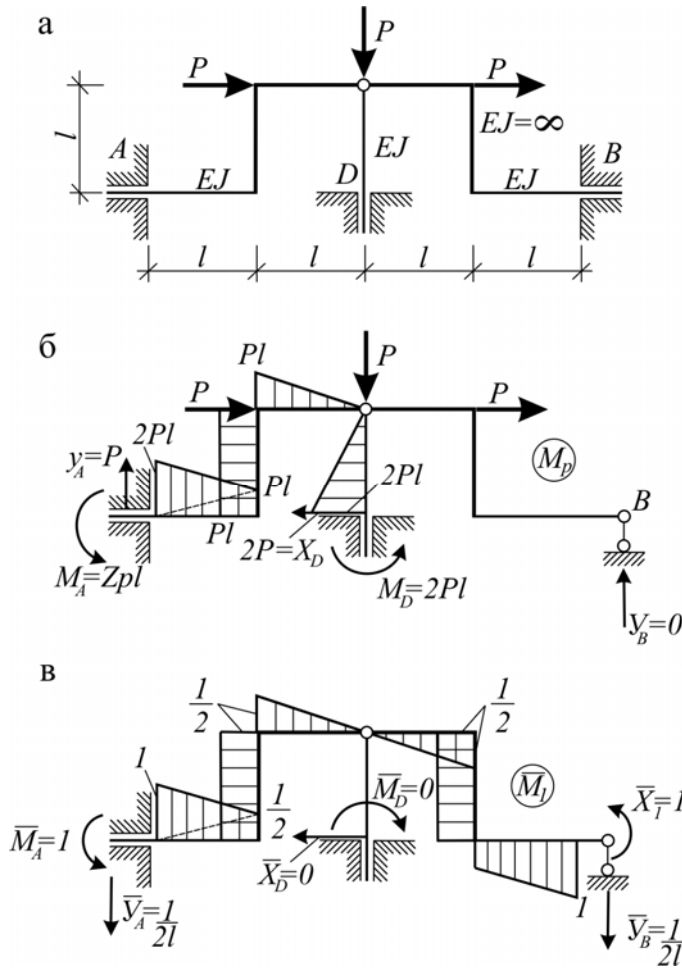
В итоге из решения системы:

$$\begin{cases} \left[ \frac{l^3}{48EJ} + \frac{h}{EA} \left( 1 + \frac{1}{2\cos^3 \alpha} \right) \right] X_1 - \frac{5ql^4}{384EJ} = 0, \\ \frac{5}{384} \frac{ql^4}{EJ} - \frac{l^3}{48EJ} \cdot X_1 = \frac{1}{2} \frac{5}{384} \frac{ql^4}{EJ}. \end{cases}$$

относительно  $X_1$  и  $EA$  получим:

$$\begin{cases} EA = \frac{48EJh}{l^3} \left( 1 + \frac{1}{2\cos^3 \alpha} \right) = \frac{12EJ}{l^2} \cdot \frac{1 + 2\cos^3 \alpha}{\sin \alpha \cos^2 \alpha}, \\ X_1 = \frac{5}{16} ql. \end{cases}$$

Пример 3.20. Построить эпюры внутренних усилий (рис.3.43,а).



При расчете методом перемещений – три неизвестных (все линейные), методом сил – одно неизвестное, так как  $L=6+2 \cdot 2 - 3 \cdot 3=1$ .

Решаем задачу методом сил (МС).

Опорные реакции при построении грузовой эпюры  $M_p$  в основной системе МС (рис.3.43,б) будут:

- 1)  $\sum M_C^{прав} = 0; Y_B = 0.$
- 2)  $\sum X = 0; X_D = 2P;$
- 3)  $\sum M_C^{сп} = 0;$   
 $2P_1l - M_D = 0;$
- 4)  $\sum Y = 0; Y_A = P;$
- 5)  $\sum M_C^{лев} = 0;$   
 $P \cdot 2l - M_A = 0; M_A = 2Pl.$

Рис.3.43

Проверка реакций:

$$\sum M_B = 0: P_1 4l + 2Pl - P2l - 4Pl = 0.$$

Опорная реакция при построении единичной эпюры  $\bar{M}_1$  в основной системе МС (рис.3.43,в) будет:

$$\sum M_C^{сп} = 0; Y_B \cdot 2l - 1 = 0; Y_B = \frac{1}{2l}.$$

Тогда

$$\delta_{11} = 2 \left[ \frac{l}{6} \left( 2 \frac{1}{2} \frac{1}{2} + 2 \cdot 1 \cdot 1 + 2 \frac{1}{2} \cdot 1 \right) \frac{1}{EJ} \right] = \frac{7l}{6EJ}.$$

$$\Delta_{1P} = \left[ \frac{l}{6} (2 \cdot 2Pl \cdot 1 + 2Pl \cdot \frac{1}{2} + 2Pl \cdot \frac{1}{2} + Pl \cdot 1) \right] \frac{1}{EJ} =$$

$$= \frac{l}{6} (4Pl + Pl + Pl + Pl) \frac{1}{EJ} = \frac{7 Pl^2}{6 EJ}.$$

$$X_1 = -\frac{\Delta_{1P}}{\delta_{11}} = -Pl.$$

Исправленная эпюра в ОС МС (рис.3.44,а), окончательные эпюры в заданной раме (рис.3.44, б,в,г).

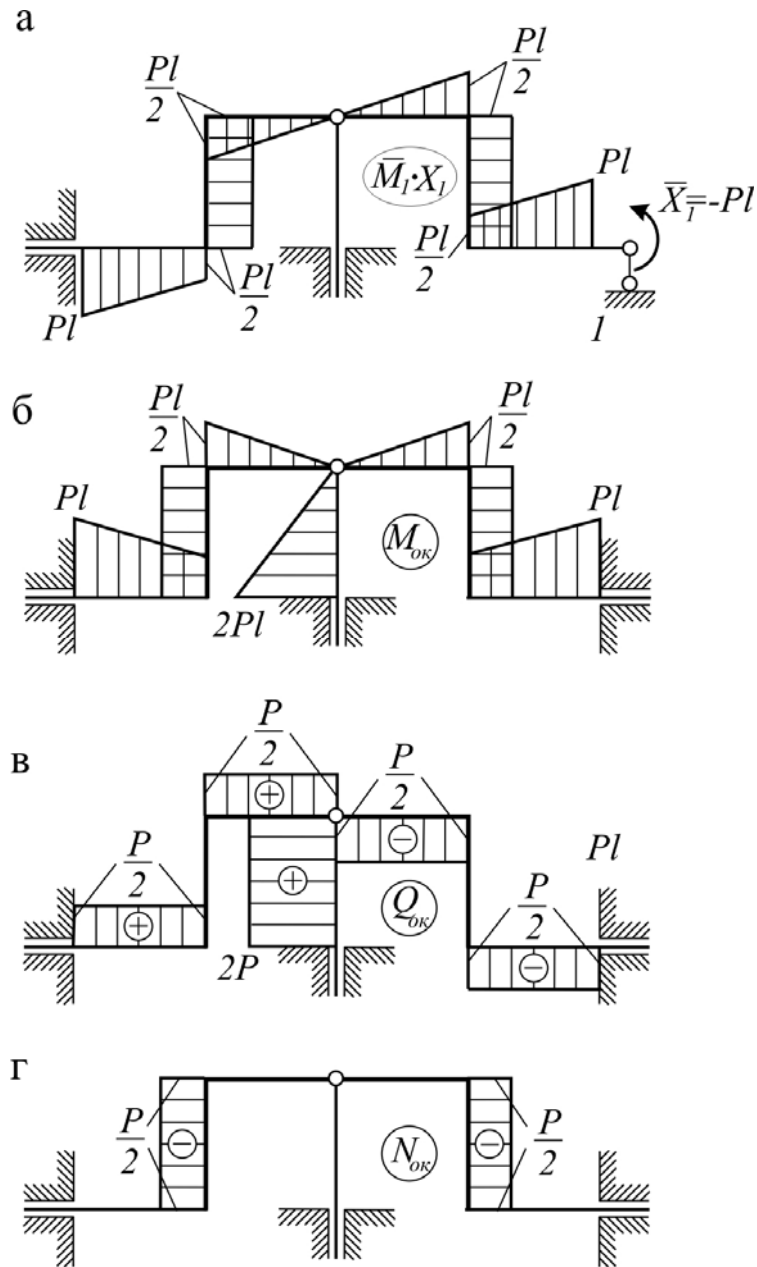


Рис.3.44

## 4. ОСНОВЫ УСТОЙЧИВОСТИ СООРУЖЕНИЙ

Пример 4.1. Показать (доказать) наиболее опасную форму потери устойчивости для рамы (рис.4.1).

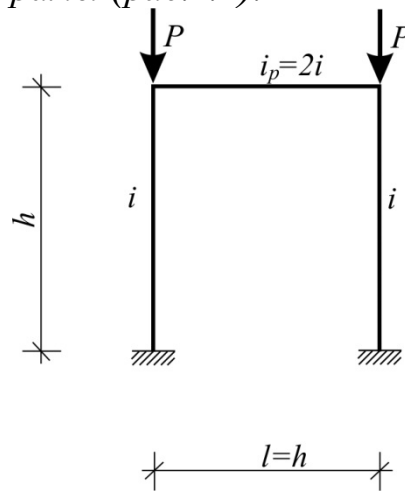


Рис.4.1

Рама симметричная; поэтому возможны две формы потери устойчивости – симметричная и кососимметричная. Реальна та форма потери устойчивости, которая произойдет при меньшей  $P_{кр}$ .

1) Найдем  $P_{кр}^c$  при симметричной форме (рис.4.2).

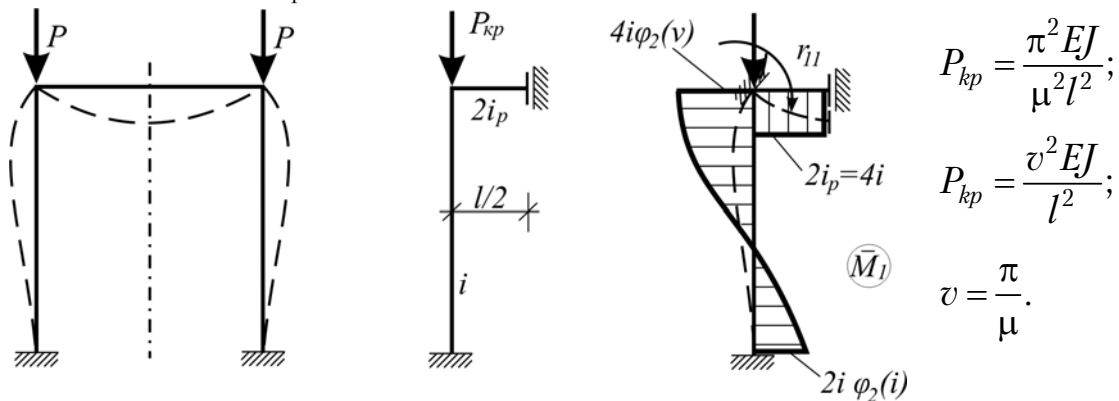


Рис.4.2

Условие критического состояния:

$$r_{11} = 0; \quad 4i\varphi_2(\nu) + 4i = 0; \quad \varphi_2(\nu) = -\frac{4i}{4i} = -1.00; \quad \text{по таблице [4]} \quad \nu = 5,35.$$

$$P_{кр}^c = \frac{5,35^2 EJ}{l^2}.$$

2) Найдем  $P_{кр}^{k/c}$  при кососимметричной форме (рис.4.3).

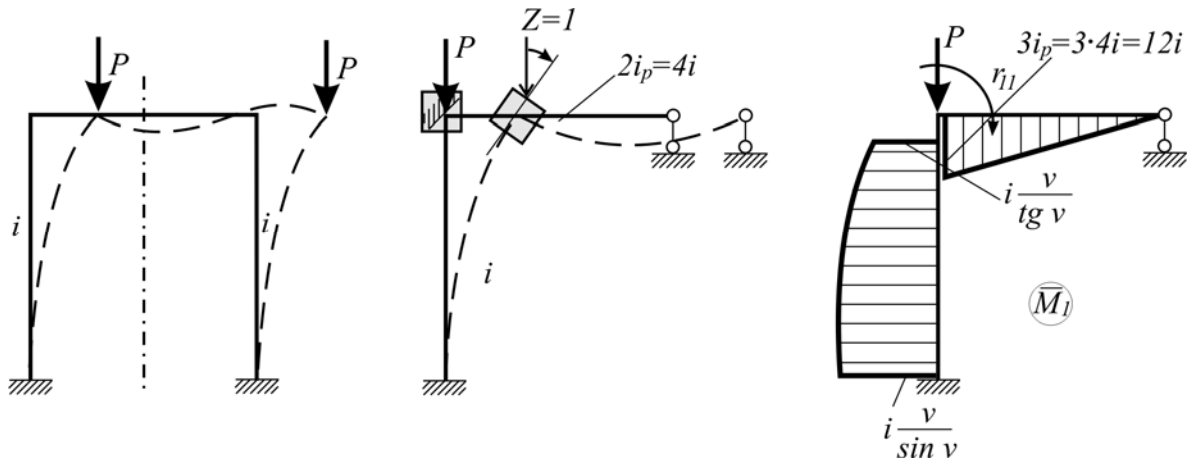


Рис. 4.3

$$r_{11} = 0; \quad i \frac{v}{\operatorname{tg} v} + 12i = 0; \quad \frac{v}{\operatorname{tg} v} = -12; \quad \text{по таблице [4]} \quad v = 2,91.$$

$$P_{kp}^{k/c} = \frac{2.91^2 EJ}{l^2}.$$

Тогда

$$\frac{P_{kp}^c}{P_{kp}^{kc}} = \frac{5.35^2}{2.91^2} = 3.38.$$

Значит,  $P_{kp}^c > P_{kp}^{kc}$  в 3,38 раза. Потеря устойчивости произойдет при кососимметричной форме.

Пример 4.2. Подобрать длину стержня II (безразмерный коэффициент  $n$ ) (рис. 4.4) так, чтобы оба стержня были равноустойчивыми (критические силы одинаковы  $P_{кр}^I = P_{кр}^{II} = P_{кр}$ ). При решении принять

$$\text{критический параметр } v^2 = \frac{Nl^2}{EJ} = \frac{Pl^2}{EJ}.$$

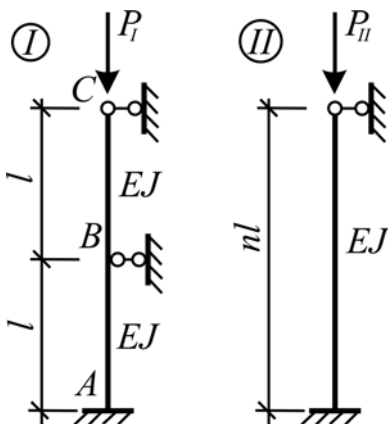


Рис.4.4

Исследование возможной потери устойчивости стержня I проводим методом перемещений. Степень кинематической неопределенности

$$\Pi = 1(\varphi_B).$$

Основная система и эпюра изгибающих моментов в единичном состоянии  $M_1$  приведены на рис. 4.5.

Каноническое уравнение  $R_{1Z} = 0$  или  $r_{11}Z_1 = 0$ .



В момент потери устойчивости  $Z_1 = \varphi_B \neq 0$ , следовательно,  $r_{11} = 0$ , из этого уравнения найдем  $v_{кр}$ .

$$r_{11} = 3i\varphi_1(v_{кр}) + 4i\varphi_2(v_{кр}) = 0,$$

$$\text{или } \frac{\varphi_2(v_{кр})}{\varphi_1(v_{кр})} = -0,75.$$

По таблицам [6] методом попыток находим:

$$\varphi_2(v_{кр}) = 0,4748; \quad \varphi_1(v_{кр}) = -0,6338,$$

откуда  $v_{кр} = 3,575$ , и, следовательно,

$$P_{кр}^I = \frac{3,575^2 EJ}{l^2}.$$

Для стержня II при указанных условиях закрепления

$$P_{кр}^{II} = \frac{4,493^2 EJ}{(nl)^2}.$$

Используя условие  $P_{кр}^I = P_{кр}^{II}$ , имеем

$$\frac{3,575^2 EJ}{l^2} = \frac{4,493^2 EJ}{(nl)^2},$$

откуда

$$n = \frac{4,493}{3,575} = 1,25.$$

**Пример 4.3.** Подобрать соотношение жесткостей стойки и ригеля (безразмерный коэффициент  $n$ ) рамы, изображенной на рис. 4.6, чтобы она оказалась равноустойчивой со стержнем II ( $P_{кр}^I = P_{кр}^{II}$ ).

При решении принять критический параметр  $v^2 = \frac{Pl^2}{EJ}$ .

Задача решается аналогично задаче 4.1.

О т в е т. Соотношение жесткостей стойки и ригеля рамы  $n=3$ .

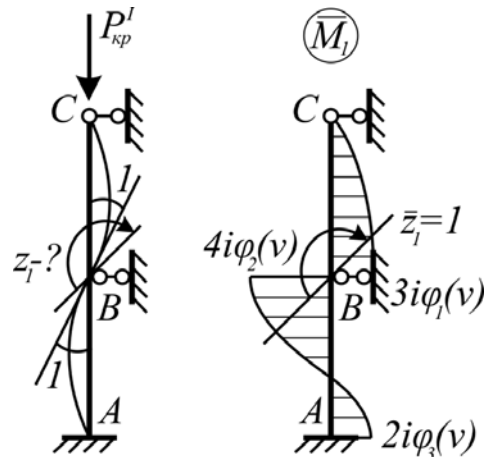


Рис.4.5

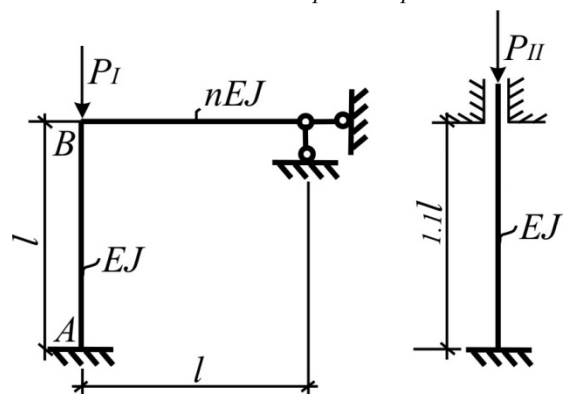


Рис.4.6

Пример 4.4. Найти величину силы  $P_{кр}$ , при которой стержень 2-4 комбинированной системы, показанной на рис. 4.7, потеряет устойчивость. Момент инерции поперечного сечения балки  $J=30 \text{ см}^4$ . Площадь поперечного сечения стержней фермы  $A = 3,14 \text{ см}^2$ . Конструкция выполнена по стали  $E=2,1 \cdot 10^4 \text{ кН/см}^2$ ,  $l=2 \text{ м}$ . Продольными деформациями балки пренебречь.

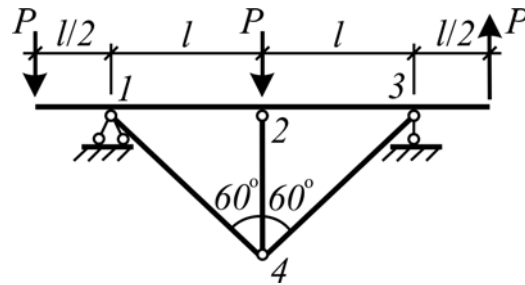


Рис. 4.7

Расчет комбинированной системы выполним методом сил. Степень статической неопределенности равна:

$$L = C \cdot +2Ш - 3Д = 3 + 2 \cdot 5 - 3 \cdot 4 = 13 - 12 = 1.$$

Основная система и эпюры изгибающих моментов в единичном и грузовом состояниях приведены на рис. 4.8.

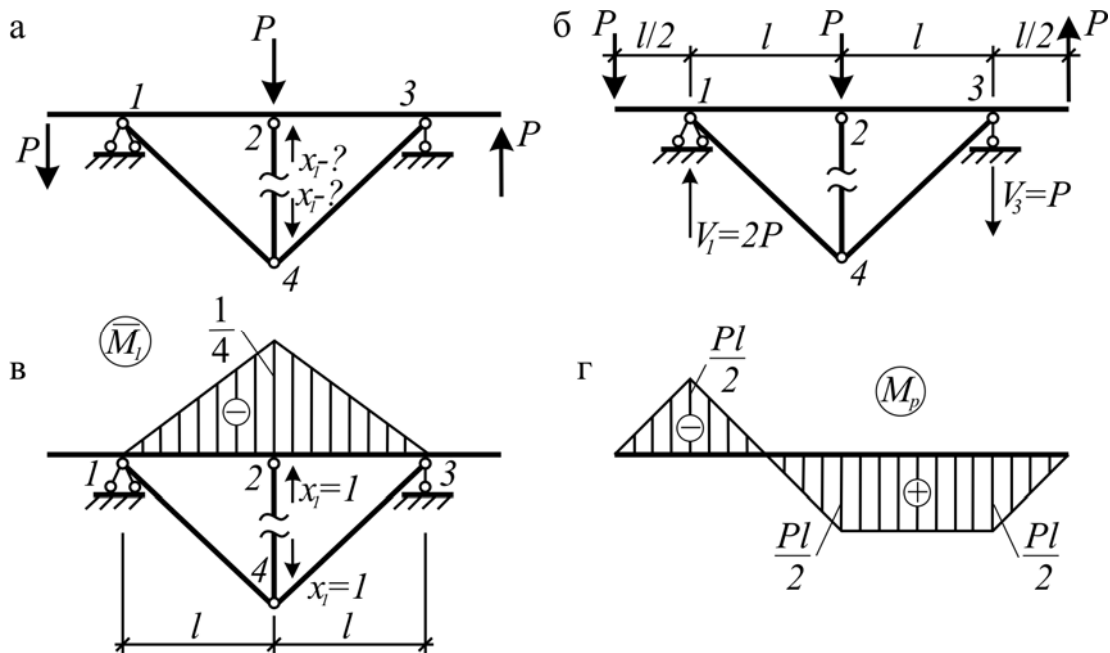


Рис.4.8

Продольные (нормальные) усилия в трех стержнях шпренгеля в единичном состоянии основной системы будут:

$$S_{4-3}^{(1)} = S_{4-1}^{(1)} = \frac{0,5}{\sin 30^\circ} = 1; \quad S_{2-4}^{(1)} = -1.$$

Каноническое уравнение метода сил:

$$\Delta_{1X} = 0 \text{ или } \delta_{11}X_1 + \Delta_{1P} = 0.$$

Единичные и грузовые перемещения соответственно равны:

$$\begin{aligned} E\delta_{11} &= \sum \int_{(l)} \frac{\bar{N}_1^2}{A} ds + \int_{(l)} \frac{\bar{M}_1^2}{J} dx = 2 \cdot 1 \cdot \frac{2}{3} l \sqrt{3} \cdot \frac{1}{3,14} + \frac{l \sqrt{3} \cdot 1}{3 \cdot 3,14} + \frac{l}{4} \cdot \frac{l}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{l}{4} \cdot \frac{2}{30} = \\ &= \frac{5l\sqrt{3}}{9,42} + \frac{l^3}{720} = \frac{5200\sqrt{3}}{9,42} + \frac{8 \cdot 10^6}{720} = 11295. \end{aligned}$$

$$E\Delta_{1P} = \int_{(l)} \frac{\bar{M}_1 M_P}{J} dx = \left[ -\frac{l}{4} \cdot \frac{l}{2} \cdot \frac{Pl}{2} + \frac{l}{4} \cdot \frac{l}{2} \left( \frac{2}{3} \cdot \frac{Pl}{2} - \frac{1}{3} \cdot \frac{Pl}{2} \right) \right] \cdot \frac{1}{J} = -\frac{Pl^3}{12J} = -22250P.$$

Из канонического уравнения определяем лишнее неизвестное  $X_1$  (усилие в стержне 2-3):

$$X_1 = -\frac{\Delta_{1P}}{\delta_{11}} = \frac{22250P}{11295} = 1,97P.$$

Принимая во внимание шарнирное закрепление стержня 2-4, имеем

$$1,97P_{\text{кр}} = \frac{\pi^2 EJ}{l_{2-4}^2}, \text{ т.е. } P_{\text{кр}} = \frac{\pi^2 EJ}{1,97l_{2-4}^2} = \frac{3,14^2 \cdot 2,1 \cdot 10^4 \cdot 30 \cdot 3}{1,97 \cdot 4 \cdot 10^4} = 236,5 \text{ кН.}$$

**Пример 4.5.** Найти величину силы  $P$ , при которой стержни 1-2 и 3-4 комбинированной системы, показанной на рис. 4.9, потеряют устойчивость, при условии, что  $A_\delta = \frac{J}{a^2}$ ,  $A_\phi = \frac{J}{2a^2}$ .

Продольными деформациями балки пренебречь.

Решение задачи аналогично решению задачи 4.3. Основная система приведена на рис. 4.10.

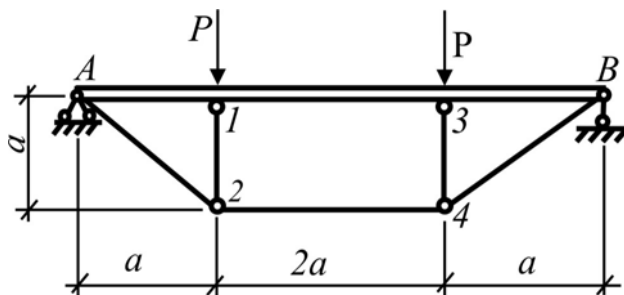


Рис.4.9

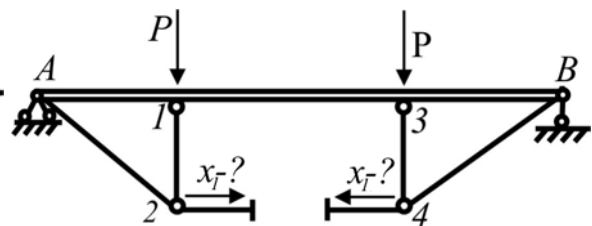


Рис.4.10

О т в е т . Величина силы  $P_{кр}$ , при которой стержни 1-2 и 3-4 потеряют устойчивость, равна  $30,5 \frac{EJ}{a^2}$ .

П р и м е р 4.6. Два одинаковых консольных стержня постоянного сечения ( $EJ=const$ ) загружены на свободном конце продольной, центрально приложенной силой, как указано на рис. 4.11. Какой из стержней потеряет устойчивость раньше (при меньшем значении  $P_{кр}$ ) и каково соотношение  $P_{кр}^{II} / P_{кр}^I$ ?

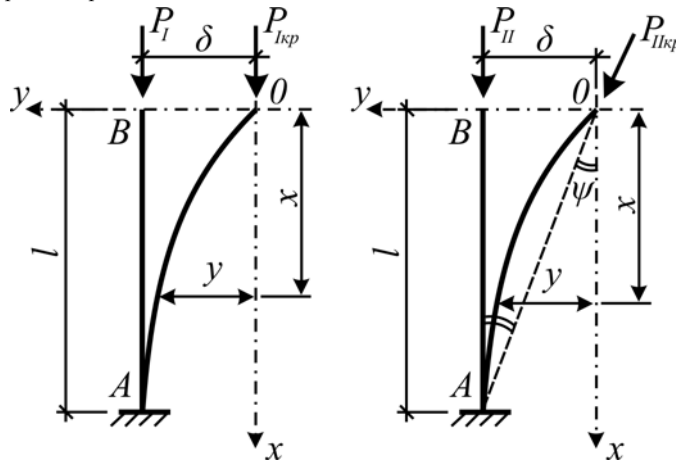


Рис.4.11

У к а з а н и е . При решении деформации считать малыми:  $\cos \psi \cong 1$ ,  $\sin \psi \cong \psi \cong \operatorname{tg} \psi$ , обозначить  $n^2 = \frac{P}{EJ}$ . В положении I, пренебрегая деформациями сдвига и продольными деформациями стержня, его дифференциальное уравнение изгиба записываем в виде:

$$EJy'' = -M_x \quad (a)$$

или  $EJy'' = 1 - Py, \quad (b)$

т.е.  $y'' + n^2y = 0. \quad (c)$

Здесь  $n^2 = \frac{P}{EJ}$ .

Граничные условия, соответствующие закреплению стержня по концам:

при  $x = 0 \quad y(0) = 0;$   
 при  $x = l \quad \left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=l} = 0.$

Общее решение уравнения (с) записывается в виде

$$\left. \begin{aligned} y &= C_1 \cos nx + C_2 \sin nx, \text{ откуда} \\ \frac{dy}{dx} &= -C_1 n \sin nx + C_2 n \cos nx \end{aligned} \right\} \quad (d)$$

Подставляя равенство (d) в граничные условия, получаем систему алгебраических уравнений относительно постоянных  $C_1$  и  $C_2$ :

$$\begin{cases} C_1 + 0 = 0 \\ -C_1 n \sin nl + C_2 n \cos nl = 0. \end{cases}$$

Из условия нетривиальности решения приравняем определитель этой системы нулю:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -n \sin nl & n \cos nl \end{vmatrix} = 0,$$

откуда

$$\cos nl = 0; \quad n_{\min} = \frac{\pi}{2l}; \quad \frac{P_{\text{кр}}^I}{EJ} = \frac{\pi^2}{4l^2}, \quad \text{или} \quad P_{\text{кр}}^I = \frac{\pi^2 EJ}{4l^2}.$$

Аналогичным путем исследуем устойчивость стержня II. Изгибающий момент в произвольном сечении стержня:

$$M_x = P_x y - P_y x \cong Py + P\psi x = Py - P \frac{\delta}{l} x.$$

Постановка  $M_x$  в уравнение (а) формирует уравнение:

$$EJy'' = -Py + P \frac{\delta}{l} x \quad \text{или} \quad y'' + n^2 y = n^2 \frac{\delta}{l} x. \quad (e)$$

При интегрировании уравнения (е) неопределимым является также перемещение  $\delta$ . Поэтому оставляем три граничных условия:

$$\text{при} \quad \left. \begin{aligned} x=0 & \quad y(0) = 0; \\ x=l & \quad y(l) = \delta; \\ x=l & \quad \left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=l} = 0. \end{aligned} \right\} \quad (h)$$

Общее решение уравнения (е):

$$y = y_1 + y_2, \quad (f)$$

где общее  $y_1$  и частное  $y_2$  – решение уравнения (е) соответственно:

$$y_1 = C_1 \cos nx + C_2 \sin nx \quad \text{и} \quad y_2 = \frac{\delta}{l} x. \quad (d)$$

Подставляя (f) и (д) в граничные условия (h), получаем

$$C_1 = 0;$$

$$C_2 \sin nl + \delta = \delta;$$

$$C_2 n \cos nl + \frac{\delta}{l} = 0,$$

откуда при  $C_2 \neq 0$  и  $\delta \neq 0$  имеем:

$$\begin{vmatrix} \sin nl & 0 \\ n \cos nl & 1/l \end{vmatrix} = 0, \text{ или } \sin nl = 0.$$

Следовательно,  $(nl)_{\min} = \pi$ , т.е.  $P_{\text{кр}}^{\text{II}} = \frac{\pi^2 EJ}{l^2}$ .

Таким образом,  $P_{\text{кр}}^{\text{I}} < P_{\text{кр}}^{\text{II}}$ , т.е стержень I теряет устойчивость при наименьшем значении критической силы  $P_{\text{кр}}^{\text{II}} / P_{\text{кр}}^{\text{I}} = 4$

**Пример 4.7.** Составить уравнение устойчивости для системы, изображенной на рис. 4.12.

При решении задачи методом перемещения в качестве расчетной схемы может быть выбран стержень, упруго закрепленный в точке A относительно угла поворота (рис. 4.13). Коэффициент жесткости  $r$  представляет собой реактивный момент в закреплении основной системы метода перемещений при  $\bar{\varphi}_A = 1$  (рис. 4.14).

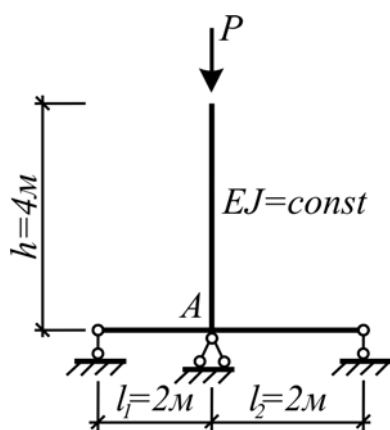


Рис.4.12

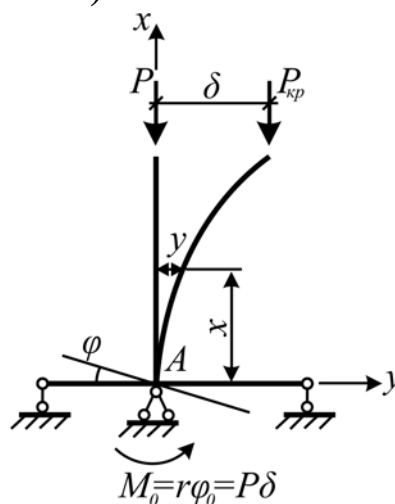


Рис.4.13

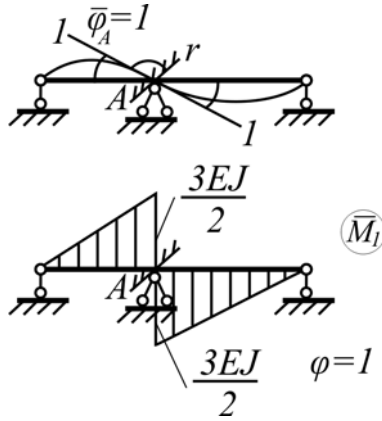


Рис.4.14

Таким образом,  $r = \frac{3}{2}EJ + \frac{3}{2}EJ = 3EJ$ .

Составим выражение для момента в произвольном сечении стержня (см. рис. 4.13):

$$\begin{cases} EJy'' = -M, \\ M = -P(\delta - y). \end{cases}$$

Тогда  $y'' + k^2y = k^2\delta$ , (а)

где  $k^2 = \frac{P}{EJ}$ .

Общий интеграл дифференциального уравнения (а):

$$y = C_1 \cos kx + C_2 \sin kx + \delta. \quad \text{(в)}$$

Неопределенные параметры  $C_1$ ,  $C_2$  и  $\delta$  исключаются на основании граничных условий (см. рис. 4.13):

$$\left. \begin{array}{l} \text{при } x = 0 \\ \text{при } x = h \end{array} \right\} \begin{array}{l} y(0) = 0 \\ \varphi(0) = \frac{P\delta}{r} \\ y(h) = \delta \end{array} \quad \text{(с)}$$

После подстановки выражения (в) в (с) имеем:

$$\left\{ \begin{array}{l} C_1 \cdot 1 + C_2 \cdot 0 + \delta = 0; \\ k(-C_1 \cdot 0 + C_2 \cdot 1) = \frac{P\delta}{r}; \\ C_1 \cos kh + C_2 \sin kh + \delta = \delta \end{array} \right. \quad \text{откуда} \quad \left\{ \begin{array}{l} C_1 = -\delta, \\ C_2 = \frac{P\delta}{kr} \\ \delta \left( -\cos kh + \frac{P}{kr} \sin kh \right) = 0 \end{array} \right.$$

Так как  $\delta \neq 0$ , следовательно,  $\operatorname{tg} kh = \frac{kr}{P} = \frac{kr}{k^2 EJ}$ .

Окончательно получим уравнение устойчивости в виде

$$\operatorname{tg} 4k = \frac{3}{k}, \quad k \approx 0,3626.$$

Пример 4.8. Составить уравнение устойчивости для системы, изображенной на рис. 4.15.

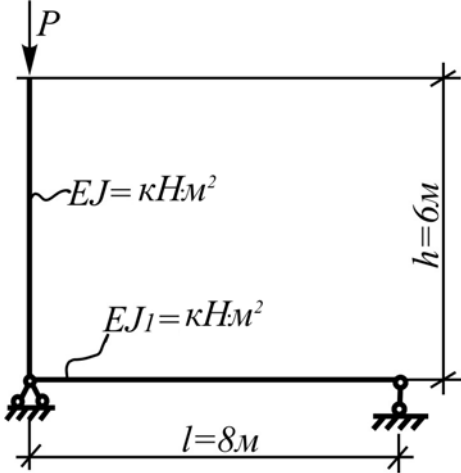


Рис. 4.15

Решение этой задачи аналогично решению задачи 4.7.

О т в е т . Уравнение устойчивости системы имеет вид

$$\operatorname{tg} 6k = \frac{0,375}{k},$$

где  $k^2 = \frac{P}{EJ}$ ,  $k \approx 0,1852$ .

Пример 4.9. Найти величину критической силы  $P_k$  для рамы, изображенной на рис. 4.16, без учета и с учетом продольных деформаций (в докритическом состоянии загрузки). Разницу между значениями  $P_k$  оценить в процентах. Принять  $l_c = l_p = l$ ;  $J_p/J_c = 9$ , гибкость

стойки  $\lambda_c = l_c \frac{1}{r_c} = l_c \sqrt{\frac{A_c}{J_c}} = 20$ . Критический параметр сжатия

принять в виде  $\nu_{кр} = \frac{P_k l_c^2}{EJ_c}$ .

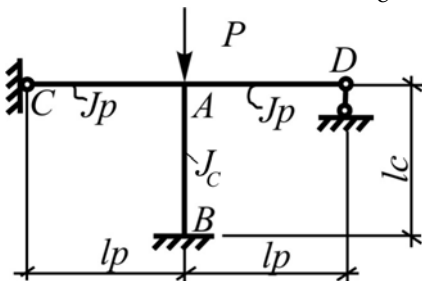


Рис.4.16

Выполним решение без учета продольных деформаций. Используем метод перемещений. Вычисляем степень кинематической неопределенности рамы:

$$\Pi = 1, \text{ т.е. } \varphi_A \neq 0.$$

Приведенные погонные жесткости стержней при  $i = \frac{EJ_c}{l_c}$  соответственно будут:

$$i_c = \frac{EJ_c}{l_c} \cdot \frac{1}{i} = 1; \quad i_p = \frac{EJ_p}{l_p} \cdot \frac{1}{i} = 9.$$



Основная система метода перемещений и эпюра изгибающих моментов в единичном состоянии  $\bar{M}_1$  приведены на рис. 4.17 и 4.18.

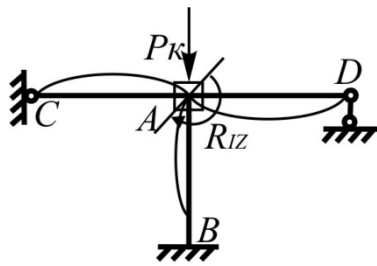


Рис.4.17

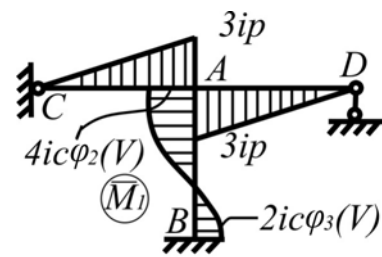


Рис.4.18

Так как

$$r_{11} = 3i_P \cdot 2 + 4i_C\phi_2(v) = 54 + 4\phi_2(v),$$

каноническое уравнение и уравнение устойчивости записываются в следующем виде:

$$r_{11}Z_1 = 0, \quad r_{11} = 0, \quad \text{или} \quad 54 + 4\phi_2(v) = 0,$$

откуда 
$$\phi_2(v) = -\frac{54}{4} = -13,5.$$

По таблицам [6] определяем критический параметр

$$v_k = 6,168, \quad P_k = N_k = \frac{v_k^2 EJ_C}{l_C^2} = \frac{38,04 EJ_C}{l_C^2}.$$

Выполняем решение с учетом продольных деформаций. При этом в докритическом состоянии возникает обжатие стойки  $\delta_{AB}$ , которое нарастает до тех пор, пока нормальная сила в стойке не достигнет  $N_k$  (рис. 4.19).

Используя равновесие узла A (рис. 4.21), получим:

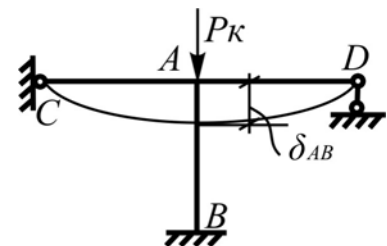


Рис.4.19

$$\sum y = 0; \quad -P_k + N_k + Q_{AC} + Q_{AD} = 0. \quad (a)$$

Эпюра изгибающих моментов от линейного смещения  $\delta_{AB}$  приведена на рис.4.20. На основании этой эпюры имеем:

$$Q_{AC} = Q_{AD} = \frac{3i_P}{l_P^2} \delta_{AB}.$$

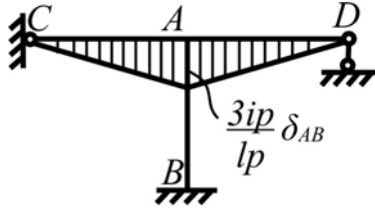


Рис.4.20

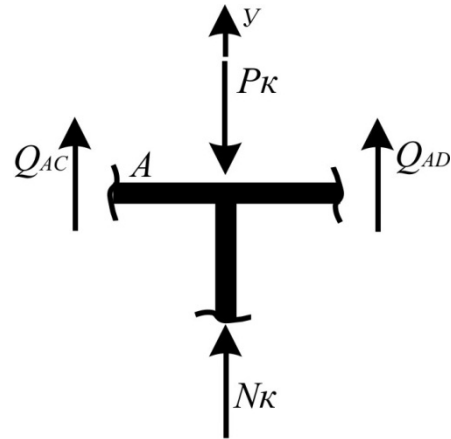


Рис.4.21

На основании закона Гука для увеличенного в  $m$  раз продольного перемещения  $\delta_{AB}$  имеем

$$\delta_{AB} = \frac{N_k l_C m}{EA_C} = \frac{N_k}{f_C},$$

причем

$$f_C = \frac{EA_C}{l_C m}.$$

$$\text{Тогда } Q_{AC} = Q_{AD} = \frac{N_k}{f_C} \cdot \frac{3i_p}{l_p^2}.$$

Подставляя выражения для  $Q_{AC}$  и  $Q_{AD}$  в уравнение (а), получаем:

$$-P_k + N_k + 2 \frac{N_k}{f_C} \cdot \frac{3i_p}{l_p^2} = 0,$$

или

$$P_k = N_k \cdot \left( 1 + \frac{6i_p}{f_C l_p^2} \right) = N_k \cdot \left( 1 + \frac{54}{\lambda_C^2} \right).$$

Здесь  $\lambda_C^2 = l^2 \frac{F_C}{J_C}$  – квадрат гибкости стойки.

Окончательно  $P_{кр} = 1,135N_k$ . Таким образом  $P_{кр}$  возрастает на 13,5 %. Значение критической силы с учетом продольных деформаций будет:

$$P_{кр} = \frac{1,315 \cdot 38,04 EJ_C}{l_C} = 43,1 \frac{EJ_C}{l_C}.$$

**Пример 4.10.** Найти величину критической силы  $P_{кр}$  для рамы, изображенной на рис. 4.22, без учета и с учетом продольных деформаций (в докритическом состоянии загрузки).

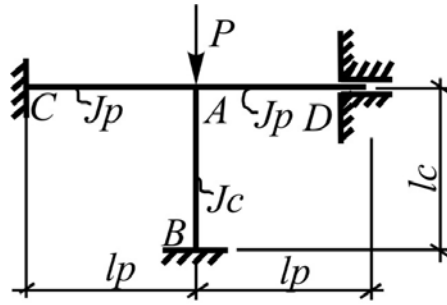


Рис. 4.22

Разницу между значениями  $P_{кр}$  оценить в процентах.

Принять  $l_c = l_p = l$ ;  $J_B/J_C = 9$ ; гибкость стойки

$$\lambda_c = \frac{l_c}{r_c} = l_c \sqrt{\frac{A_c}{J_c}} = 3;$$

критический параметр сжатия

$$v_{кр}^2 = \frac{P_{кр}^2 \cdot l_c^2}{EJ_c}.$$

Решение задачи аналогично решению задачи 4.8.

Ответ. Критическая сила при расчете с учетом продольных деформаций возрастет на 24 % и составит:

$$P_{кр} = 47,62 \frac{EJ_c^2}{l^2}.$$

Пример 4.11. Для того чтобы повысить устойчивость сжатой однопролетной балки (рис.4.23), её подкрепляют промежуточной опорой. Определить наиболее эффективное расположение промежуточной опоры.

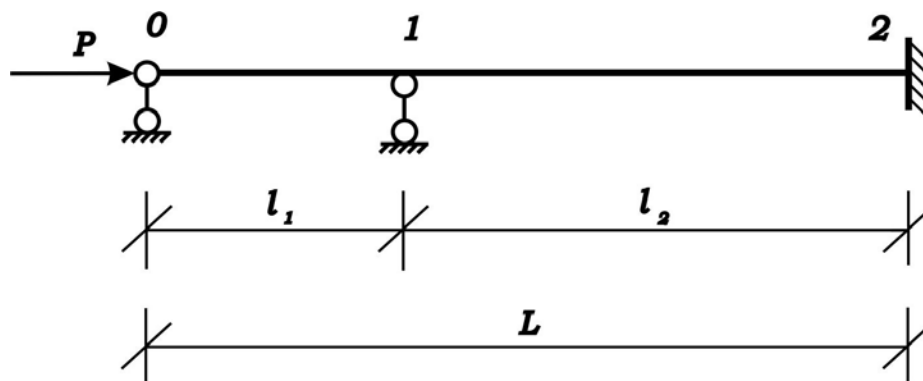


Рис. 4.23

Решение. Составим каноническое уравнение метода перемещений для узла 1:

$$r_{11}Z_1 = 0.$$

Оно удовлетворяет при  $r_{11} = 0$  либо при  $Z_1 = 0$ . Первый из этих вариантов соответствует форме потери устойчивости с меньшим числом полуволн и, следовательно, меньшей критической силе.

Таким образом, приходим к уравнению устойчивости

$$r_{11} = 3\frac{EI}{l_1}\varphi_1(v_1) + 4\frac{EI}{l_2}\varphi_2(v_2) = 0,$$

где  $v_1 = l_1\sqrt{P_{кр}/EI}$ ;  $v_2 = l_2\sqrt{P_{кр}/EI}$ .

Вышеприведенное уравнение решаем подбором с использованием таблиц [4]. Значения  $P_{кр}L^2/EI$ , найденные для различных  $l_1/L$ , приведены на рис. 4.24. Из графика видно, что наиболее устойчивой балка будет при  $l_1/L = 0,385$ .

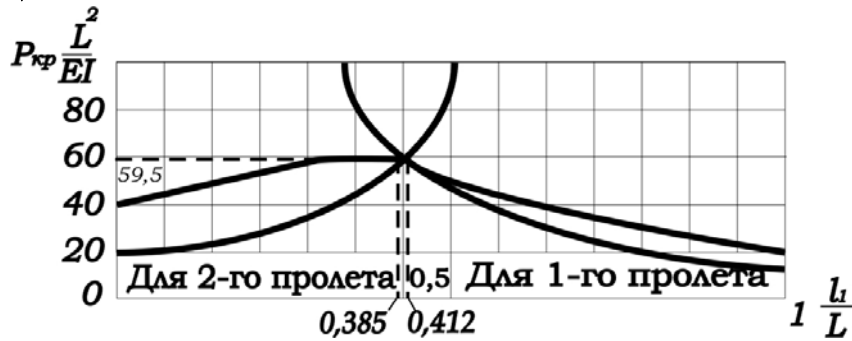


Рис. 4.24

При другом подходе к решению задачи определим форму потери устойчивости данной однопролетной балки, соответствующую второй критической силе, и найдем положение промежуточной нулевой точки. Это и будет искомым местом расположения промежуточной опоры.

Интересно определить положение дополнительной опоры, при котором значения критических сил для каждого из пролетов одинаковы. Известно, что значение критической силы для двухпролетной неразрезной балки всегда лежит между значениями критических сил для каждого из её пролетов. Графики изменения этих величин приведены также на рис. 4.24. Существует точка, где все три графика пересекаются, т.е.  $P_{кр} = P_{1кр} = P_{2кр}$ . Соответствующее значение  $l_1/L$  определяется из уравнения

$$P_{1кр} = \pi^2 EI / (0,7l_2)^2.$$

Отсюда  $l_1/L = 0,412$ .

Пример 4.12. Насколько увеличится критическая сила двухпролетной разрезной балки (рис. 4.25,а), если превратить её в неразрезную (рис. 4.25,б).

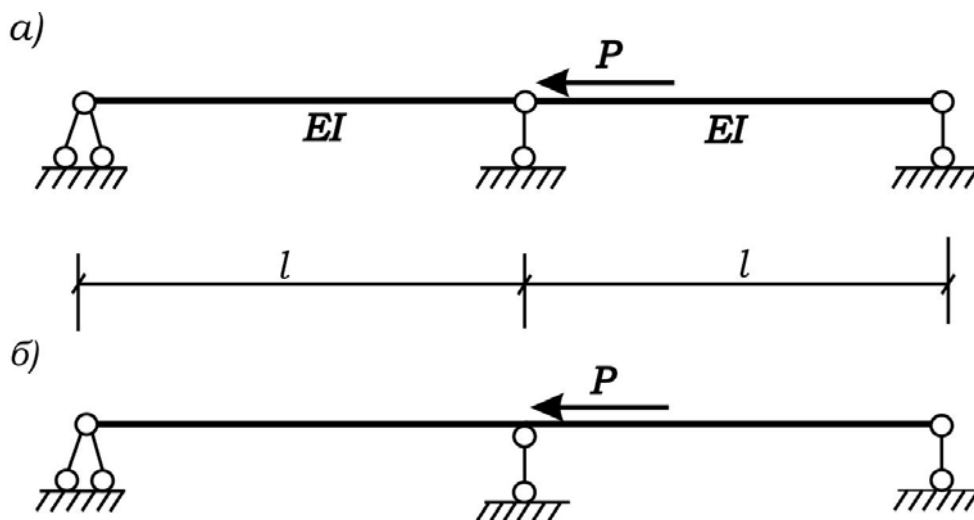


Рис.4.25

О т в е т . Превращение разрезной балки в неразрезную при заданном виде загрузки увеличивает критическую силу в 1,39 раза.

Пример 4.13. Определить критическую силу для системы с одной степенью свободы, состоящей из абсолютно жестких дисков (рис.4.26,а). Значения коэффициентов жесткости относительно взаимного поворота сечений в шарнирах разные:  $k_1$  и  $k_2$ . Задачу решите статическим и энергетическим методами.

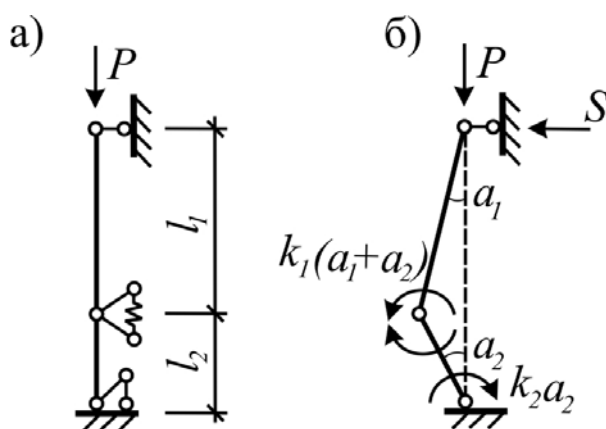


Рис.4.26

Решение. Возможная форма потери устойчивости системы представлена на рис.4.26,б. Следовательно, в горизонтальном опорном стержне на верхнем конце появится опорная реакция  $S$ . При решении задачи статическим методом запишем условия равновесия моментов относительно среднего и опорного шарниров:

$$\begin{cases} Pl_1\alpha_1 - Sl_1 - k_1(\alpha_1 + \alpha_2) = 0; \\ -S(l_1 + l_2) + k_2\alpha_2 = 0. \end{cases}$$

Из геометрических соображений следует, что  $l_1\sin\alpha_1 = l_2\sin\alpha_2$ , но, учитывая малость углов, будем иметь  $l_1\alpha_1 = l_2\alpha_2$  или  $\alpha_2 = \alpha_1 l_1 / l_2$ . Систему полученных уравнений равновесия теперь представим в виде:

$$\begin{cases} \alpha_1 \left[ Pl_1 - k_1 \left( 1 + \frac{l_1}{l_2} \right) \right] - Sl_1 = 0; \\ \alpha_1 \frac{l_1}{l_2} k_2 - S(l_1 + l_2) = 0. \end{cases};$$

Данная система однородна относительно величин  $\alpha_1$  и  $S$ ; поэтому ее решение возможно лишь при обращении в нуль определителя, составленного из коэффициентов при  $\alpha_1$  и  $S$ , т.е.

$$D = \begin{vmatrix} Pl_1 - k_1 \left( 1 + \frac{l_1}{l_2} \right) - l_1 \\ \frac{l_1}{l_2} k_2 - l_1 \left( 1 + \frac{l_2}{l_1} \right) \end{vmatrix} = 0.$$

Раскрывая определитель, получим:

$$P_{кр} = \frac{k_1 \left( 1 + \frac{l_1}{l_2} \right) \left( 1 + \frac{l_2}{l_1} \right) + \frac{l_1}{l_2} k_2}{l_1 (1 + l_2 / l_1)}.$$

Решим эту задачу энергетическим методом. Работа внешней силы  $P$  равна:

$$P[l_1(1 - \cos\alpha_1) + l_2(1 - \cos\alpha_2)] \approx -\frac{P}{2}(l_1\alpha_1^2 + l_2\alpha_2^2).$$

Учитывая ранее установленную связь между углами  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$ , работу силы  $P$  определим как:

$$\frac{P\alpha_1^2 l_1}{2} \left( 1 + \frac{l_1}{l_2} \right).$$

Работа, совершенная в среднем шарнире, равна:

$$\frac{1}{2}k_1(\alpha_1 + \alpha_2)^2 = \frac{1}{2}k_1\alpha_1^2\left(1 + \frac{l_1}{l_2}\right)^2.$$

Работа, совершенная в нижнем шарнире, определится как:

$$\frac{1}{2}k_2\alpha_2^2 = \frac{1}{2}\alpha_1^2\frac{l_1^2}{l_2^2}.$$

Изменение потенциальной энергии системы равно:

$$U = -\frac{P\alpha_1^2 l_1}{2}\left(1 + \frac{l_1}{l_2}\right) + \frac{1}{2}k_1\alpha_1^2\left(1 + \frac{l_1}{l_2}\right)^2 + \frac{1}{2}\alpha_1^2\frac{l_1^2}{l_2^2}.$$

Уравнение для определения критической силы запишется:

$$\frac{dU}{d\alpha_1} = -2\alpha_1\left[\frac{Pl_1}{2}\left(1 + \frac{l_1}{l_2}\right) - \frac{1}{2}k_1\left(1 + \frac{l_1}{l_2}\right)^2 - k_2\frac{l_1^2}{l_2^2}\right] = 0,$$

откуда следует, что

$$P_{\text{кр}} = \frac{k_1\left(1 + \frac{l_1}{l_2}\right)^2 + k_2\frac{l_1^2}{l_2^2}}{l_1\left(1 + \frac{l_1}{l_2}\right)}.$$

Нетрудно проверить, что значения, найденные статистическим и энергетическим методами, хотя и различаются по виду, тождественны:

$$\frac{k_1\left(1 + \frac{l_1}{l_2}\right)\left(1 + \frac{l_2}{l_1}\right) + \frac{l_1}{l_2}k_2}{l_1\left(1 + \frac{l_2}{l_1}\right)} = \frac{k_1\left(1 + \frac{l_1}{l_2}\right)^2 + k_2\frac{l_1^2}{l_2^2}}{l_1\left(1 + \frac{l_1}{l_2}\right)}.$$

**Пример 4.14.** С целью увеличения устойчивости стойки её подкрепляют или шпренгелем (рис. 4.27, а), или подкосами (рис. 4.27, б). Какова должна быть податливость подкрепляющих элементов, обеспечивающая увеличение критического значения силы в заданное число раз? Продольную силу считать постоянной по длине стойки.

**Решение.** Обе схемы могут быть сведены к расчету двухпролетной балки с промежуточной упругооседающей опорой (рис. 4.27, в).

Податливость  $c$  опоры определяется из расчета подкрепляющих элементов.

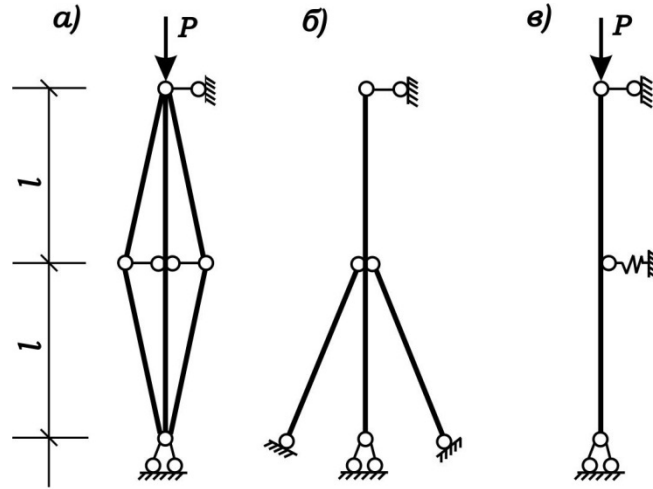


Рис. 4.27

Используем метод перемещений. Основная система и единичные эпюры показаны на рис. 4.28. Уравнение устойчивости метода перемещений при  $Z_1 = 0$ ,  $Z_2 \neq 0$  имеет вид:

$$\left. \begin{aligned} \begin{vmatrix} r_{11} & r_{12} \\ r_{21} & r_{22} \end{vmatrix} = 0 \\ r_{11}r_{22} - r_{12}^2 = 0 \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

где  $r_{12} = 0$ ;  $r_{11} = 6EI\varphi_1(v)/l$ ;  $r_{22} = 6EI\eta_1(v)/l^3 + 1/c$ ;  $v = l\sqrt{P/EI}$ .

Выражение (1) примет вид

$$\left[ \frac{6EI}{l} \varphi_1(v) \right] \left[ \frac{6EI}{l^3} \eta_1(v) + \frac{1}{c} \right] = 0, \quad (2)$$

что возможно, когда

$$\left\{ \begin{aligned} \left[ \frac{6EI}{l} \varphi_1(v) \right] &= 0, \\ \left[ \frac{6EI}{l^3} \eta_1(v) + \frac{1}{c} \right] &= 0, \end{aligned} \right. \quad (3)$$

где  $\eta_1(v) = \varphi_1(v) - v^2/3$ .

Из первой части (3) имеем

$$v = \pi, \quad P_{кр} = \pi^2 EI/l^2, \quad (4)$$

что соответствует случаю, когда опора абсолютно жесткая, т.е.  $c = 0$ ,  $Z_2 = 0$ .



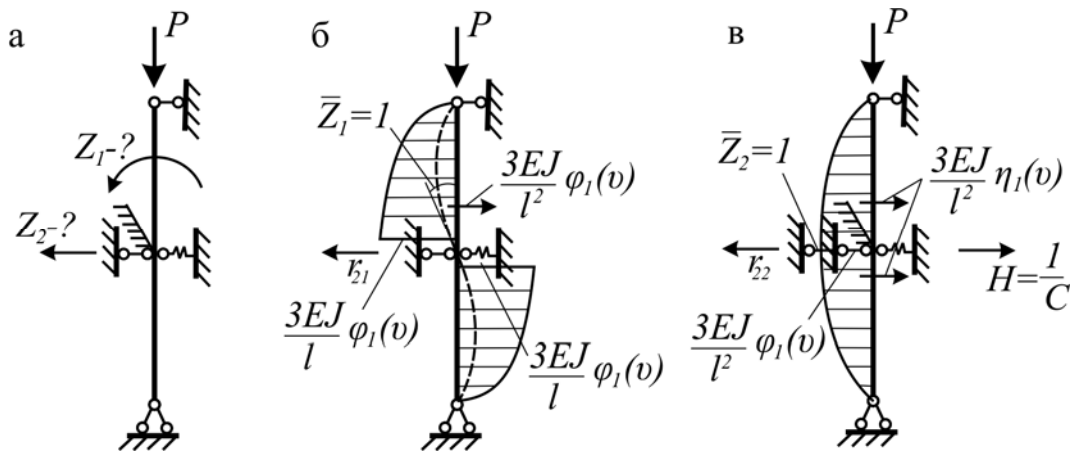


Рис. 4.28

Из второй части (3) имеем:

$$\varphi_1(v) - \frac{v^2}{3} = -\frac{1}{c} \frac{l^3}{6EI}. \quad (5)$$

Отсюда

$$1/c = 6EI \left[ \frac{v^2}{3} - \varphi_1(v) \right] / l^3. \quad (6)$$

В частном случае при отсутствии подкрепления, т.е. при  $c = \infty$ , из (5) получим:

$$v = \pi/2; \quad P_{кр} = \pi^2 EI / (2l)^2. \quad (7)$$

Из (4) и (7) следует, что с помощью указанных приспособлений можно повысить критическую силу максимально в 4 раза. Можно указать такое значение жесткости подкрепляющих элементов, при котором они ведут себя как вполне жесткие, т.е. допускающие такую изгибную форму потери устойчивости, как в неразрезной балке на жестких опорах. Для определения  $c$ , соответствующего этому случаю, достаточно в (6) подставить  $v = \pi$ . Получим:  $1/c = 2\pi^2 EI / l^3$ .

Если требуется повысить устойчивость стержня в  $k$  раз (при  $k \leq 4$ ) по сравнению с (7), то следует найти значение  $c$  по (6) при условии, что  $v = \pi\sqrt{k}/2$ . Жесткость подкрепляющих элементов подбирается так, чтобы перемещение в точке контакта как упругой опоры от действия единичной силы равнялось  $c$ .

**Пример 4.15.** Определить критическую силу  $P$  для рамы, состоящей из жестких дисков (рис.4.29), с упругими связями в верхних узлах. Жесткость упругих связей относительно взаимного угла поворота смежных сечений в шарнирах равна  $k_1$  и  $k_2$ .

О т в е т .  $P_{кр} = \frac{2(k_1 + k_2)}{h}$ .

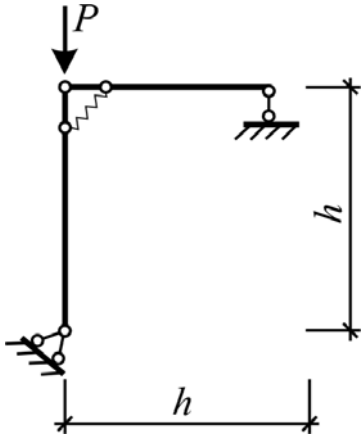


Рис.4.29

Вопрос. Как в рассмотренной системе влияют на величину критической силы следующие факторы: а) величина пролета рамы; б) перемена местами упругих связей; в) исключение одной упругой связи и наделение другой связи новой жесткостью, равной сумме прежних; г) перестановка узловой нагрузки из левого верхнего узла в правый; д) перестановка нагрузки из узла в пролет ригеля; е) замена сосредоточенной силы  $P$  равномерно распределенной по ригелю нагрузкой интенсивностью  $q = \frac{P}{h}$ ?

Пример 4.16. Рассчитать раму по деформированной схеме, т.е. с учетом продольных сил в стойках рамы (рис.4.30).

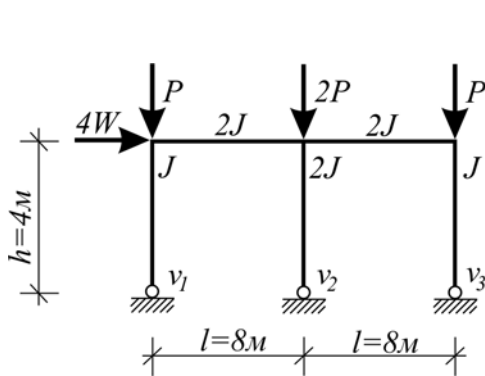


Рис. 4.30

Дано:  $\begin{cases} k = \frac{v}{v_{кр}} = 0,8; \\ W = 1 \text{ кН.} \end{cases}$   
 $v_1 = h \sqrt{\frac{P}{EJ}}$

Разобьем раму на две П-образные (рис. 4.31,а). Но и эту раму разобьем на две полурамы (рис. 4.31,б). Основная система метода перемещений (ОС МП) (рис. 4.31,г).

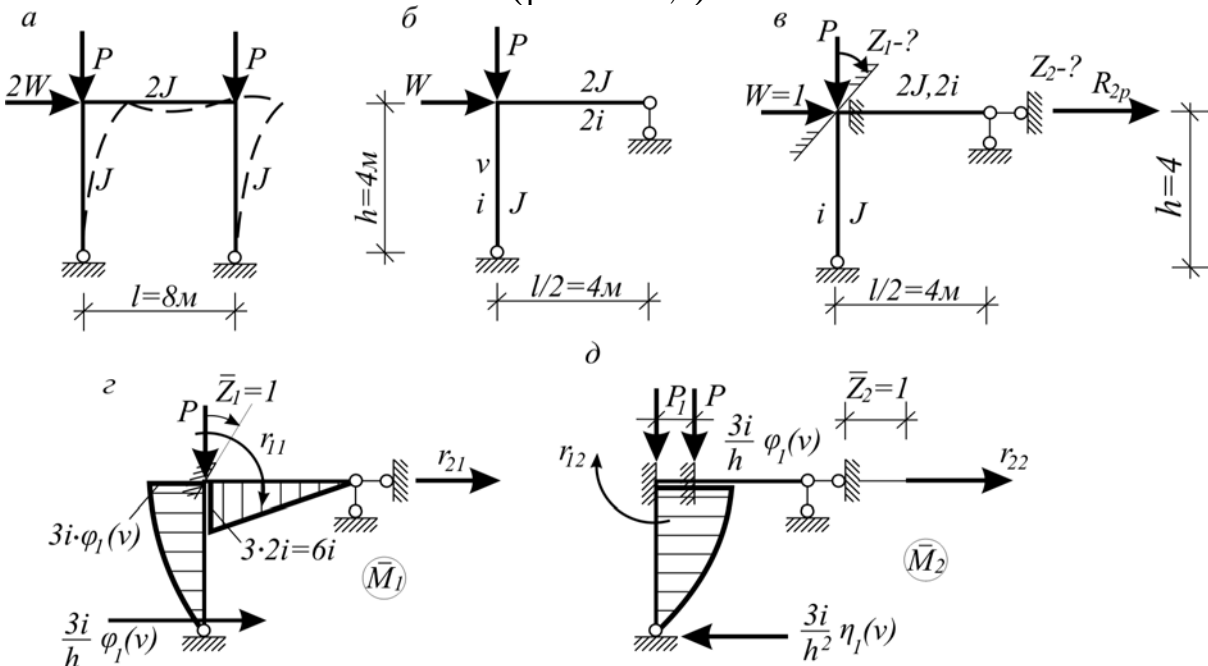


Рис.4.31

Система уравнений:

$$\left. \begin{aligned} r_{11}Z_1 + r_{12}Z_2 + R_{1p} &= 0; \\ r_{21}Z_1 + r_{22}Z_2 + R_{2p} &= 0. \end{aligned} \right\}$$

$$r_{11} = 3i \cdot \varphi_1(v) + 6i = 3\varphi_1(v) + 6.$$

$$r_{12} = -\frac{3i}{h} \varphi_1(v) = -\frac{3}{h} \varphi_1(v).$$

$$r_{21} = -\frac{3i}{h} \varphi_2(v) = -\frac{3}{4} \varphi_2(v).$$

$$r_{22} = \frac{3i}{h^2} \eta(v) = \frac{3}{16} \eta(v).$$

$$R_{1p} = 0; \quad R_{2p} = -W = -1;$$

$$v = h \sqrt{\frac{p}{EJ}} = 4 \sqrt{\frac{p}{EJ}}.$$

Найдем  $P_{кр}$ , т.е. рассчитаем на устойчивость раму без учета  $W$  (рис.4.32).

Условие критического состояния:

$$\begin{aligned} r_{11} &= 0; \\ v \operatorname{tg} v &= +6; \quad v_{кр} = 1,33; \end{aligned}$$

$$P_{кр} = \frac{v_{кр}^2 EJ}{l_0^2} = \frac{1,33^2 EJ}{16} = 0,1106 EJ.$$

Вернемся к расчету рамы на прочность:

так как  $\frac{v}{v_{кр}} = 0,8$ , то  $v = 0,8 \cdot v_{кр} = 0,8133 = 1,064$ .

$$\varphi_1(v) = 0,9230; \quad \eta_1(v) = 0,555;$$

$$r_{11} = 3 \cdot 0,923 + 6 = 8,769;$$

$$r_{12} = r_{21} = -0,75 \cdot 0,923 = -0,6922;$$

$$r_{22} = \frac{3}{16} \cdot 0,555 = 0,10406;$$

$$\left. \begin{aligned} 8,769Z_1 - 0,6922Z_2 &= 0; \\ -0,6922Z_1 + 0,10406Z_2 - 1 &= 0; \end{aligned} \right\}$$

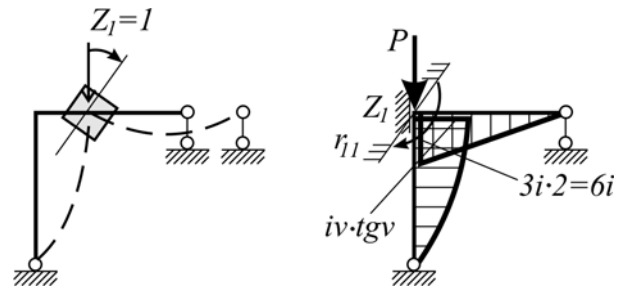


Рис.4.32

$$\left. \begin{aligned} Z_2 &= 20,237 = 20,237 / i \\ Z_1 &= 1,598 = 1,598 / i. \end{aligned} \right\}$$

Исправленные единичные эпюры в ОС МП  $M_{iu} = \bar{M}_i \cdot Z_i$  (рис.4.33).

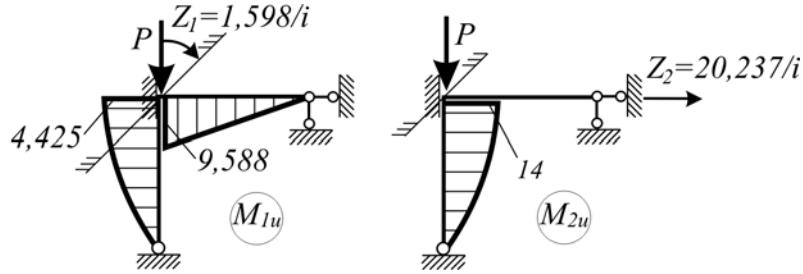


Рис. 4.33

Окончательные эпюры  $M_{ок}$  в заданной раме приведены на рис.4.34.

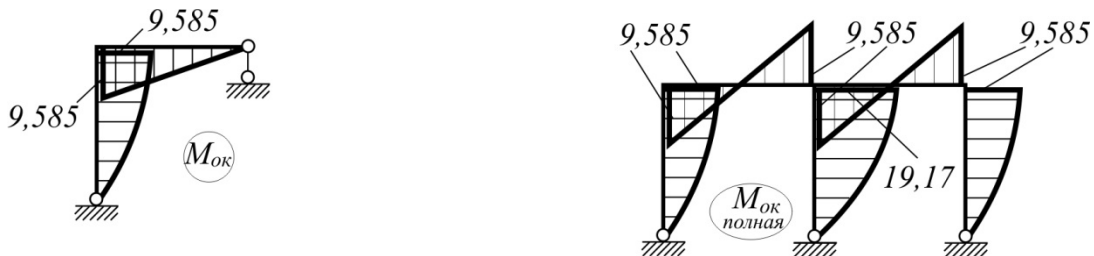


Рис.4.34

### Расчет без учета продольных сил в стойках рамы

Единичные эпюры в ОС МП изображены на рис.4.35, а,б.

$$\left\{ \begin{aligned} r_{11} &= 9i; \\ r_{21} &= r_{12} = -0,75i; \\ r_{22} &= \frac{3i}{16}. \end{aligned} \right.$$

Система разрешающих уравнений МП принимает вид:

$$\left\{ \begin{aligned} 9iZ_1 - 0,75iZ_2 + 0 &= 0; \\ -0,75iZ_1 + \frac{3}{16}iZ_2 - 1 &= 0; \\ Z_2 &= 8; \\ Z_1 &= 0,6666. \end{aligned} \right.$$

Исправленные единичные эпюры в ОС МП приведены на рис.4.35, в,г. Окончательные эпюры  $M_{ок}$  в заданной раме – на рис.4.35,д,е.

За счет влияния продольных сил моменты возросли в  $\frac{9,585}{4} = 2,396 \approx 2,4$  раза.

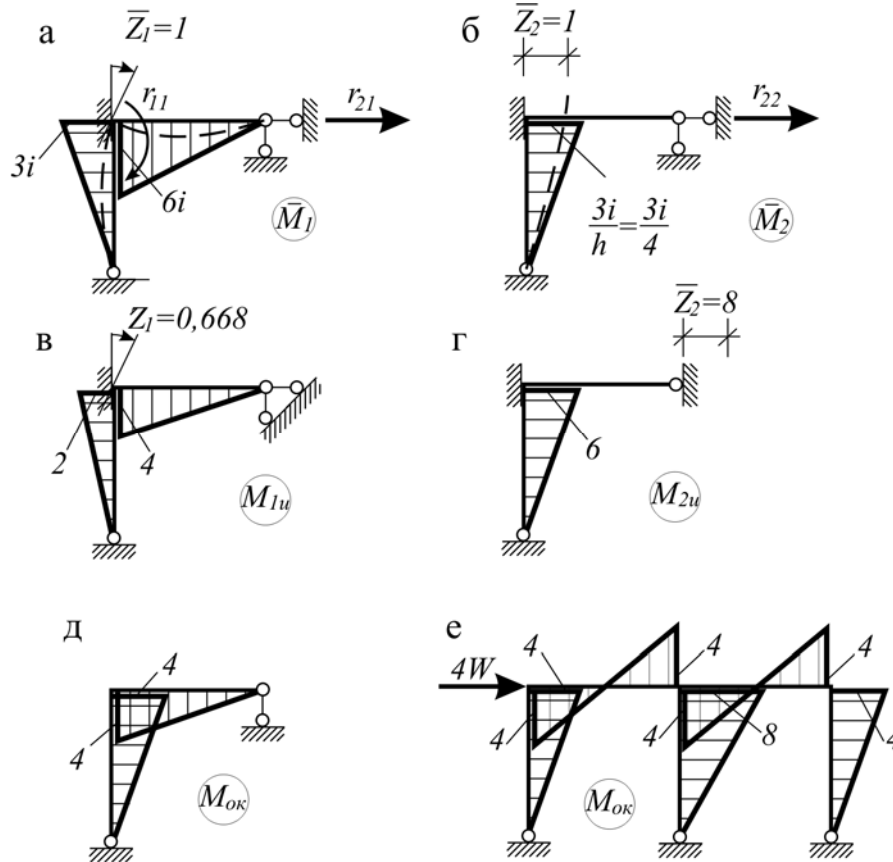


Рис. 4.35

Пример 4.17. Найти значение критической нагрузки  $P$ , действующей на конструкцию, представленную на рис.4.36. Стойка имеет момент инерции  $J$  в обеих главных плоскостях. Момент инерции сечения ригеля относительно вертикальной оси равен  $0,1J$ , а относительно горизонтальной —  $J$ .

Решение. Для решения задачи воспользуемся методом перемещений. При смещении узла  $C$  из плоскости рамы сечение над узлом  $C$  поворачиваться не будет; следовательно, число неизвестных равно одному. На рис.4.37 показана эпюра моментов от смещения узла  $C$  на единицу из плоскости рамы.

На стойке эпюра моментов построена в соответствии с данными схемы закрепления 2 [4, табл.2].

Каноническое уравнение запишется в следующем виде:

$$r_{11}Z_1 = 0.$$

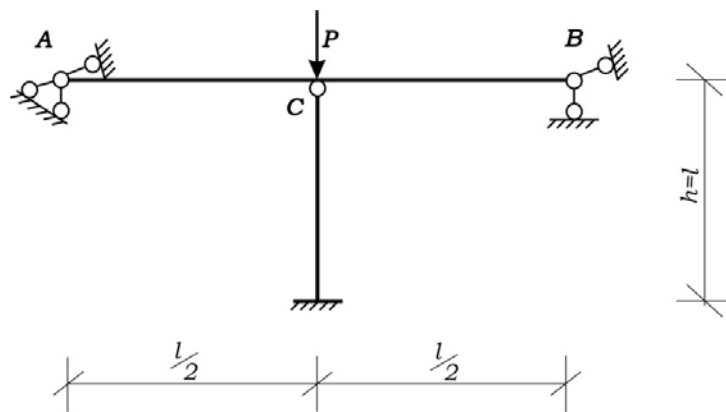


Рис.4.36

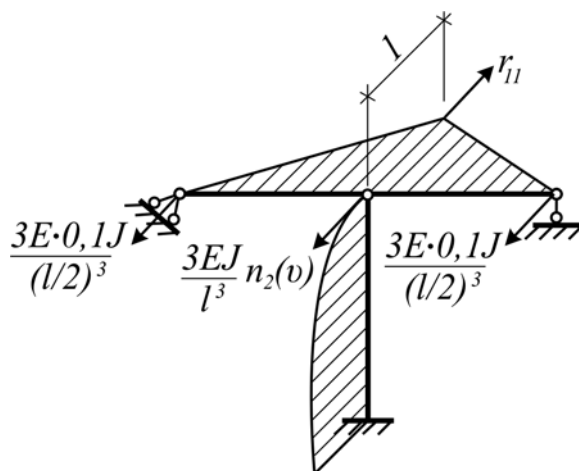


Рис.4.37

Так как  $Z_1 \neq 0$ , то уравнение устойчивости представим в виде

$$r_{11} = 0$$

или

$$r_{11} = 2 \frac{3E \cdot 0,1J}{\left(\frac{l}{2}\right)^3} + \frac{3EI}{l^3} \eta_1(v) = 0,$$

откуда

$$\eta_1(v) = 1,6.$$

В соответствии с [4, табл. 5] получаем:

$$v = 2,5,$$

откуда

$$P_{кр} = v^2 \frac{EI}{l^2} = \frac{6,25EI}{l^2}.$$

У к а з а н и е. Меньшая критическая сила будет соответствовать потере устойчивости из плоскости рамы.

$$\text{О т в е т. } P_{кр} = \frac{6,25EI}{l^2}.$$

## 5. ОСНОВЫ ДИНАМИКИ СООРУЖЕНИЙ

**Пример 5.1.** Определить частоту свободных колебаний упругой балки на двух опорах с грузом  $G$  (рис. 5.1, а) при следующих данных:  $l = 2$  м,  $a = 1$  м;  $E = 2 \cdot 10^{11}$  (Па);  $J = 100$  см<sup>4</sup>;  $G = 7500$  Н, принять для простоты вычислений приближенно  $g \approx 10$  м/с<sup>2</sup>, собственным весом балки пренебречь.

Сначала получим формулу частоты в общем виде. Вертикальное перемещение  $\delta_{11}$  от  $P = 1$  (рис. 5.1, б) будет:

$$\delta_{11} = \frac{a^2(l-a)^2}{3EI}.$$

Частота свободных колебаний

$$\omega = \frac{1}{a(l-a)} \sqrt{\frac{3EI}{m}}.$$

Для нашего случая масса

$$m = G/g = 7500/10 = 750 \text{ кг};$$

$$\omega = \frac{1}{1(2-1)} \sqrt{\frac{3 \cdot 2 \cdot 10^{11} (100 \cdot 10^{-8}) 2}{750}} = 40 \text{ с}^{-1}.$$

**Пример 5.2.** Получить приближенную формулу частоты свободных колебаний стойки с массой на свободном конце (рис. 5.2), если пренебречь массой стойки.

Масса на стойке может совершать горизонтальные колебания, при которых стойка будет находиться в условиях продольно-поперечного изгиба. Это значит, что  $\delta_{11}$  должно определяться с учетом сжатия стойки силой тяжести массы  $G$ .

Используя приближенную формулу продольно-поперечного изгиба получим:

$$\delta_{11} = \frac{l^3}{3EI} \cdot \frac{1}{\left(1 - \frac{G}{P_s}\right)} = \frac{l^3}{3EI} \cdot \frac{1}{\left(1 - \frac{mg}{P_s}\right)}.$$

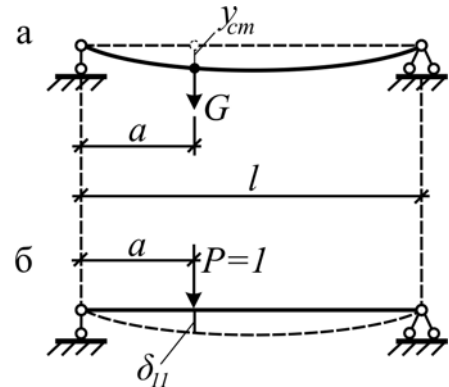


Рис. 5.1

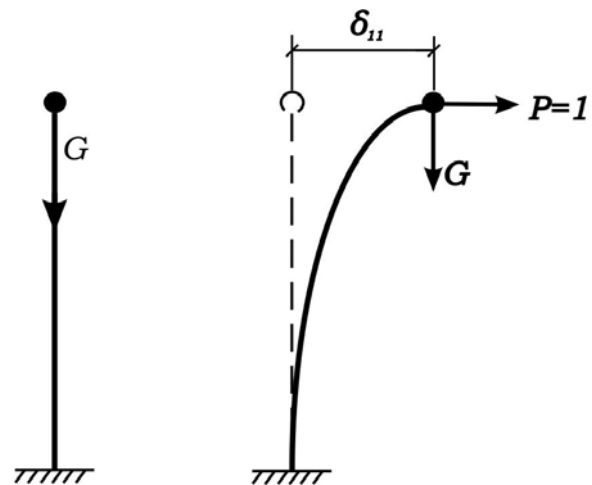


Рис. 5.2

Частота свободных колебаний по формуле

$$\omega^2 = \frac{1}{m\delta_{11}} = \frac{r_{11}^*}{m} = \frac{g}{y_{ct}} (\text{с}^{-2}),$$

$$\omega = \sqrt{\frac{1}{m} \cdot \frac{3EI}{l^3} \cdot \left(1 - \frac{mg}{P_9}\right)} (\text{с}^{-1}),$$

где  $P_9 = \frac{\pi^2 EI}{4l^2}$  – Эйлера сила.

**Пример 5.3.** На конце консоли балки (рис. 5.3) колеблется масса  $m$ . Перестановкой правой опоры, находящейся первоначально на расстоянии  $l/3$  от массы, добиться повышения частоты колебаний массы в 2 раза.

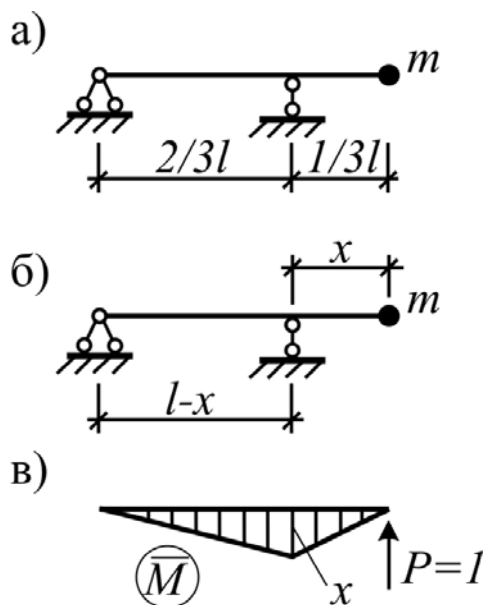


Рис. 5.3

**Решение.** Для системы с одной степенью свободы  $\omega^2 = 1/[m\delta_{11}]$ .

При произвольном положении опоры  $\delta_{11} = x^2l/(3EI)$ ; при  $x = l/3$  получаем:

$$\delta_{11} = l^3/[27EI]; \quad \omega_{l/3}^2 = 27EI/[ml^3].$$



При новом положении опоры  $\omega_x^2 = \left(2\omega_{l/3}\right)^2$  получаем:

$$3EI/(mx^2l) = \frac{4 \cdot 27 \cdot EI}{(ml^3)}, \quad x = l/6.$$

Следовательно, при перестановке правой опоры вправо на  $l/6$  пролета частота колебаний массы увеличится вдвое.

*Пример 5.4.* С целью увеличения частоты поперечных колебаний массы  $m$  (рис. 5.4, а) стойку подкрепляют оттяжками. Подобрать жесткость, при которой частота колебаний увеличится в  $n$  раз.

*Решение.* Задача сводится к определению податливости  $s$  упругой опоры (рис 5.4, б) из условия обеспечения требуемой частоты колебаний массы с одной степенью свободы.

$$\omega^* = \sqrt{\frac{1}{m\delta_{11}}} \quad \text{или} \quad \delta_{11} = \frac{1}{m\omega^{*2}} \quad (1)$$

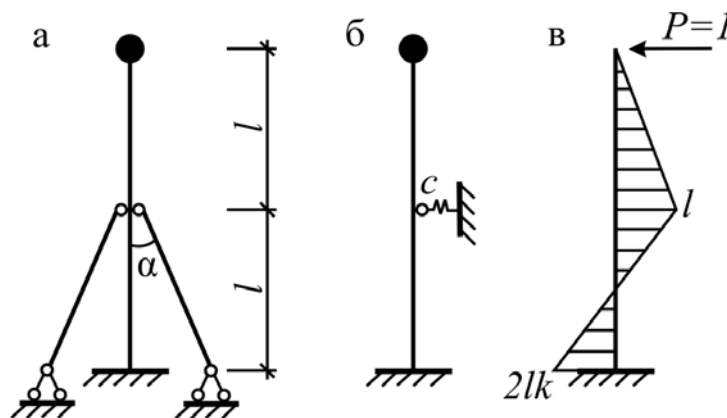


Рис. 5.4

Выразим  $\delta_{11}$  через податливость опоры  $s$ , для чего, решая задачу методом сил, построим единичную эпюру (рис. 5.4, в). Перемножив эту эпюру саму на себя по правилу Верещагина, получим:

$$\delta_{11} = \frac{l}{3EI} (4k^2 + 2k + 2), \quad (2)$$

где

$$k = \frac{\varphi + 0,5}{\varphi - 2}; \quad \varphi = \frac{6EI}{l^3} c. \quad (3)$$

При  $c = \infty$  (отсутствие опоры) получаем:  $\varphi = \infty$ ,  $k = 1$ ,  $\delta_{11} = 8l^3/3(EI)$  и по (1) имеем:

$$\omega^2 = 0,375 EI / [ml^3].$$

При  $c = 0$  (жесткая опора) получаем:  $\varphi = 0$ ,  $k = -0,25$ ,  $\delta_{11} = 0,58l^3/EI$   
и по (1) имеем:

$$\omega^2 = 1,7 EI / [ml^3].$$

Таким образом, область возможного изменения частоты колебаний стойки в данном случае лежит в пределах

$$2,13 \omega \leq \omega^* \leq \omega, \quad (4)$$

где  $\omega$  – частота колебаний неподкрепленной системы.

По условию требуется

$$\omega^* = n\omega, \quad 1 \leq n \leq 2,13. \quad (5)$$

Подставим (1) в (2) и с учетом (5) получим:

$$4k^2 + 2k + 2 - \frac{3}{n^2} = 0. \quad (6)$$

Определив  $k$  из (6), по (3) найдем требуемую податливость упругой опоры  $c$ , при этом требуемая жесткость равна  $1/c$ .

Заметим, что, меняя положение подкрепляющей точки (приближая её к массе), можно добиться более эффективного изменения частоты колебаний массы.

**Пример 5.5.** Определить частоту колебаний системы (рис. 5.5,а), пренебрегая весом стержней.

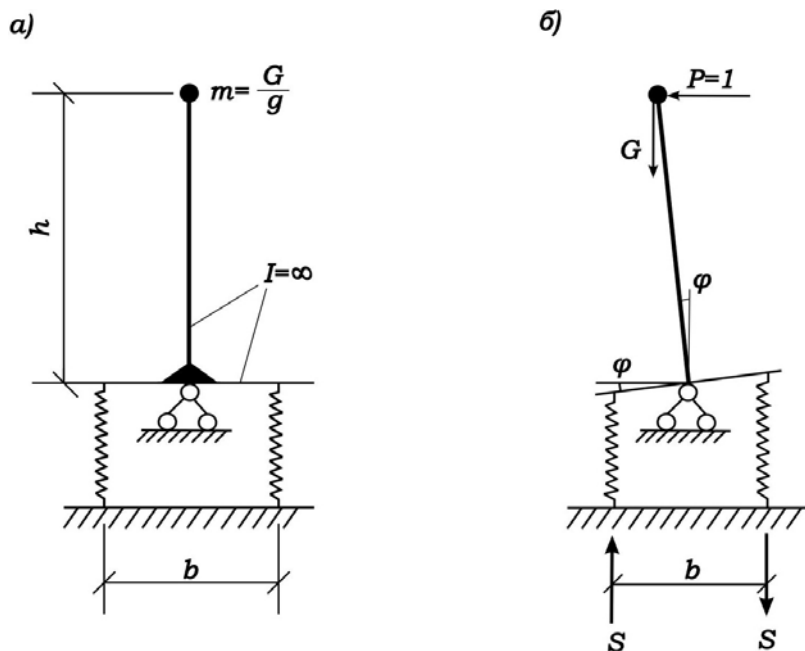


Рис. 5.5

Система может поворачиваться вокруг опоры  $a$  (рис. 5.5,а). Масса  $m$  при малых углах поворота будет перемещаться горизонтально. Поэтому для определения  $\delta_{11}$  прикладываем горизонтальную силу  $P = 1$  (рис. 5.5,б).

Условие равновесия системы в отклоненном состоянии при малых углах

$$\sum M_a = -1h - Gh\varphi + Sb = 0,$$

где  $S$  – усилие в пружине, для которой  $S = k\Delta = k\frac{b}{2}\varphi$ .

Следовательно, условие равновесия будет:

$$-h - Gh\varphi + \frac{kb^2}{2}\varphi = 0.$$

Отсюда  $\varphi = \frac{h}{\left(\frac{kb^2}{2} - Gh\right)}$  и соответственно  $\delta_{11} = \varphi h = \frac{h^2}{\left(\frac{kb^2}{2} - Gh\right)}$ .

Частота колебаний:

$$\omega^2 = \frac{1}{m\delta_{11}} = \frac{r_{11}^*}{m} = \frac{g}{y_{ст}} \left( \frac{1}{c^2} \right);$$

$$\omega = \sqrt{\frac{1}{mh^2} \cdot \left( \frac{kb^2}{2} - Gh \right)}.$$

При  $Gh = kb^2/2$  частота колебаний будет равна нулю. Это свидетельствует о том, что при таких условиях система находится в неустойчивом равновесии.

**Пример 5.6.** *Определить соотношение изгибных жесткостей стоек и ригеля  $k = \frac{J_1}{J_2}$ , при котором низшая частота колебаний рамы с*

*сосредоточенной массой  $m$  (рис. 5.6, а) равна заданному числу ( $\omega = \omega^*$ ).*

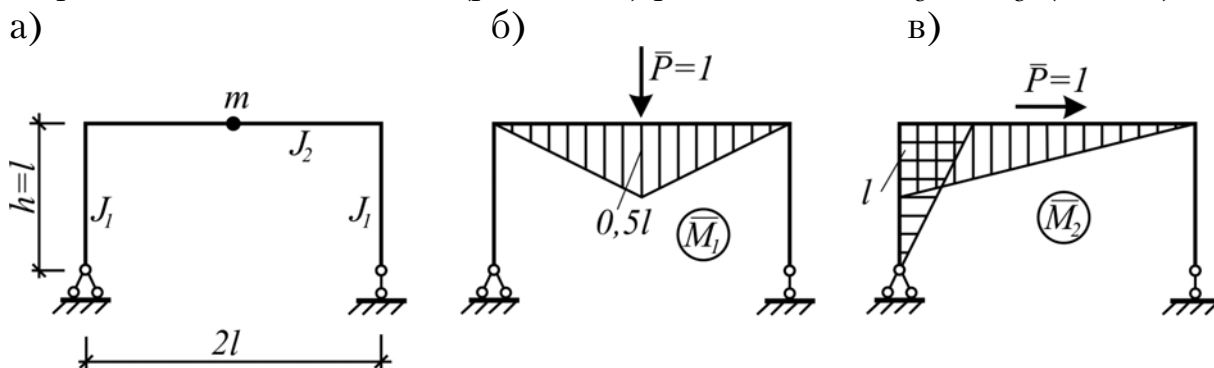


Рис. 5.6

Решение. С учетом только поперечных изгибных колебаний рамы масса  $m$  имеет две степени свободы. Уравнение колебаний имеет вид:

$$\begin{vmatrix} (\delta_{11}m - \frac{1}{\omega^{*2}}) & \delta_{12}m \\ \delta_{21}m & (\delta_{22}m - \frac{1}{\omega^{*2}}) \end{vmatrix} = 0. \quad (1)$$

Единичные эпюры приведены на рис. 5.6,б,в. Из их анализа получим:

$$\delta_{11} = \frac{l^3}{6EI_2}; \quad \delta_{12} = \delta_{21} = \frac{l^3}{4EI_2}; \quad \delta_{22} = \frac{l^3}{3EI_2} \frac{1+2k}{k}, \quad (2)$$

где  $k = J_1/J_2$ .

Приведем (1) к виду:

$$\begin{vmatrix} (1-\lambda) & 1,5 \\ 1,5 & (2\frac{1+2k}{k} - \lambda) \end{vmatrix} = 0, \quad (3)$$

где 
$$\lambda = \frac{6EI_2}{l^3 m \omega^{*2}}. \quad (4)$$

Уравнение (3) удовлетворяется при

$$k = \frac{2(\lambda - 1)}{\lambda^2 - 5\lambda + 1,75}. \quad (5)$$

Отметим, что при  $\lambda_1 = 0,38$ ,  $\lambda_2 = 4,62$  знаменатель в (5) обратится в нуль и  $k = \infty$ . Это означает, что заданная частота колебаний может возникнуть в данной системе при бесконечно большой жесткости стоек ( $J = \infty$ ). При этом первая и вторая формы колебаний совпадают.

*Пример 5.7. Построить динамическую эпюру моментов (рис.5.7, а), где  $P_0 = 2$  кН;  $\theta = 0,7\omega$ ;  $P = P_0 \sin \theta t$ .*

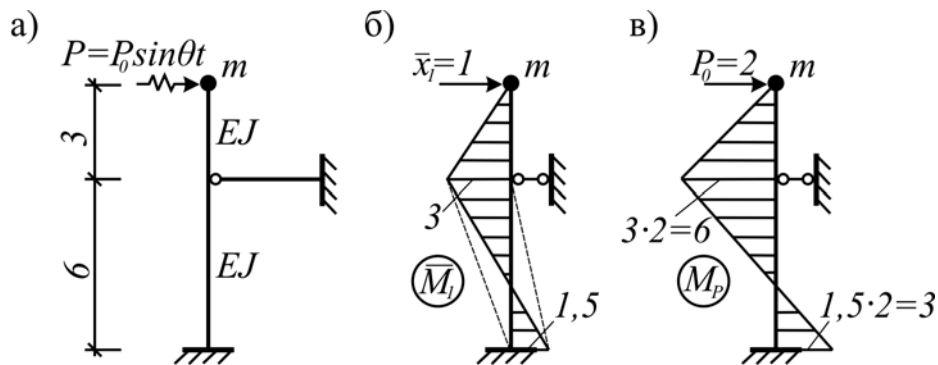


Рис. 5.7

Формально  $i_{ct}=2$ , т.е.  $\lambda=2$ . Однако изгибающие моменты будут возникать только в вертикальном стержне, который имеет одну лишнюю связь; следовательно,  $\lambda=1$ . Так как  $i_{дин}=1$ , то

$$\omega = \sqrt{\frac{c}{m}} = \sqrt{\frac{1}{\delta_{11}m}}.$$

Единичная и грузовая эпюры изгибающих моментов изображены на рис. 5.7, б, в.

$$\delta_{11} = \left[ \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 3 \cdot \frac{2}{3} \cdot 3 + \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 6 \left( \frac{2}{3} \cdot 3 - \frac{1}{3} \cdot 1,5 \right) + \frac{1}{2} \cdot 1,5 \cdot 6 \left( \frac{2}{3} \cdot 1,5 - \frac{1}{3} \cdot 3 \right) \right] \frac{1}{EJ} =$$

$$= (9 + 13,5) \frac{1}{EJ} = \frac{22,5}{EJ};$$

$$\omega = \sqrt{\frac{EJ}{22,5m}}; \quad \theta = 0,7 \sqrt{\frac{EJ}{22,5m}};$$

$$\Delta_{1p} = \delta_{11} \cdot P = \frac{P \cdot 22,5}{EJ}; \quad S_1 \left( \delta_{11} - \frac{1}{m\theta^2} \right) + \Delta_{1p} = 0;$$

$$\frac{1}{m\theta^2} = \frac{1 \cdot 22,5m}{m \cdot 0,49 \cdot EJ} = \frac{45,92}{EJ}; \quad S_1 = - \frac{\Delta_{1p}}{\delta_{11} - \frac{1}{m\theta^2}}.$$

$$S_1 = - \frac{P \cdot 22,5}{EJ \left( \frac{22,5}{EJ} - \frac{45,92}{EJ} \right)} = P \cdot 0,961.$$

Динамическая эпюра изгибающих моментов показана на рис. 5.8, где  $M_{дин} = Mp_0 + \bar{M}_1 \cdot S_1$ .

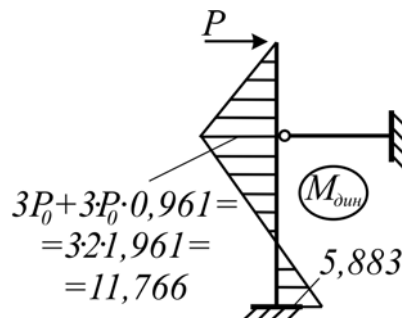


Рис. 5.8

**Пример 5.8.** Определить число собственных колебаний кронштейна, нагруженного сосредоточенной силой  $Q = 1000$  кг. Собственным весом кронштейна можно пренебречь. Длины и площади поперечных сечений кронштейна указаны на рис. 5.9.  $A = 5$  см<sup>2</sup>.

Решение. Для определения прогиба узла кронштейна воспользуемся теоремой Мора, согласно которой

$$y_{\text{ст}} = \sum \bar{N}_i N_i \cdot \frac{l_i}{EA_i},$$

где  $N_i$  – усилие в  $i$ -м стержне от заданной нагрузки;

$\bar{N}_i$  – усилие в  $i$ -м стержне от единичной силы по направлению искомого перемещения;

$l_i$  – длина  $i$ -го стержня;

$EA_i$  – жесткость  $i$ -го стержня при растяжении-сжатии.

В данном случае, очевидно,  $N = Q\bar{N}$ .

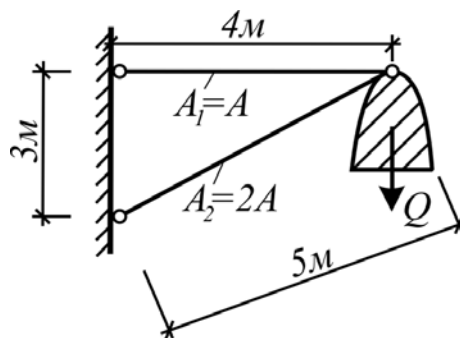


Рис. 5.9

Таким образом,

$$y_{\text{ст}} = \frac{Q}{E} \sum \bar{N}_i^2 \frac{l_i}{A_i} = \frac{1000}{2,1 \cdot 10^6} \left[ 1333^2 \frac{400}{5} + 1667^2 \frac{500}{10} \right] = 0,134 \text{ см.}$$

Число колебаний в 1 мин

$$n \approx \frac{300}{\sqrt{y_{\text{ст}}}} = 820 \text{ кол/мин.}$$

Примечание. В действительности рассмотренная ферма представляет собой систему с двумя степенями свободы так как подвешенная масса при колебаниях помимо вертикальных перемещений (которые только и рассматривались выше) будет иметь и горизонтальное перемещение.

Пример 5.9. На верхнем конце стойки находится сосредоточенная масса  $M$  (рис.5.10, а). Основанием стойки является плита, которая покоится на упругой постели (грунт), позволяющей плите вращаться относительно точки (в плоскости чертежа). Жесткость постели задана числом  $k$ , представляющим собой момент пары, которая, будучи статически приложена к плите (рис.5.10, в), поворачивает её на единичный угол (указанная жесткость может быть определена,

если даны коэффициент постели грунта и размеры плиты). По сравнению с малой жесткостью  $k$  жесткость стойки можно полагать равной бесконечности. Определить частоту свободных колебаний.

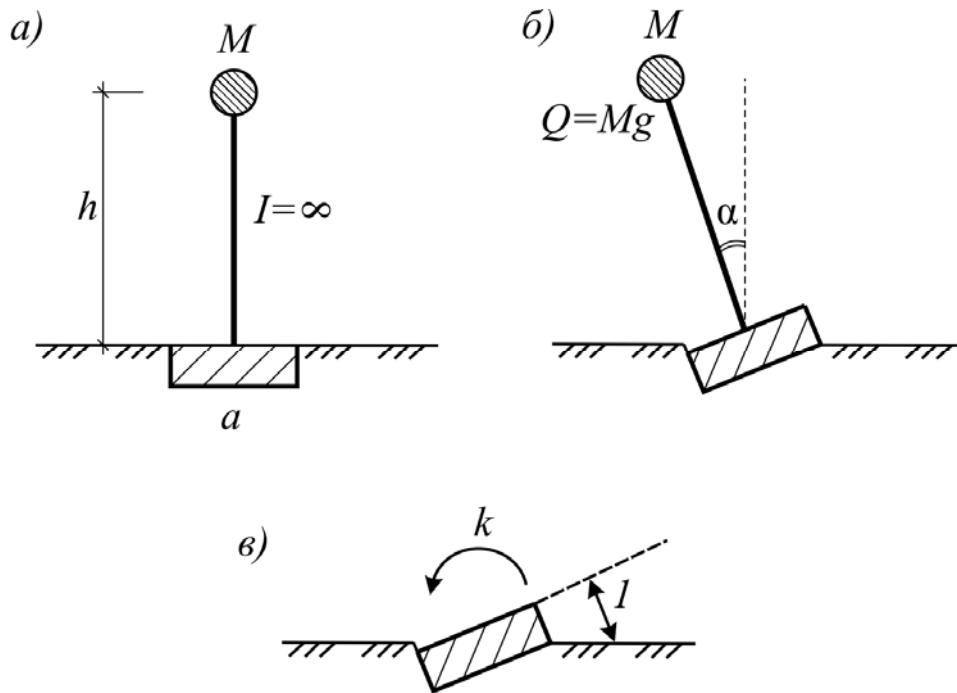


Рис.5.10

Решение. Частота  $\omega = \sqrt{\frac{K}{J}}$ , где  $J$  – момент инерции массы относительно оси вращения и  $K$  – момент воображаемой пары, который приложен к системе и при котором угол вращения оказывается равным единице. Этот момент равен моменту  $k$ , уменьшенному на величину того момента, который появляется в системе при её наклоне (рис.5.10, б).

При  $\alpha = 1$

$$K = k - Q(h\alpha) = k - Qh.$$

Момент инерции массы (если пренебрегать массой стойки) равен

$$J = M h^2.$$

Следовательно,

$$\omega = \sqrt{\frac{k - Qh}{Mh^2}}.$$

Примечание. Как следует истолковать решение предыдущей задачи, если  $k = Qh$ ?

Пример 5.10. Дан высокий монолитный мостовой бык (или дымовая фабричная труба), покоящийся на упругом основании (рис.5.11). Определить частоту свободных колебаний, полагая возможность вращения сооружения как целого жесткого тела относительно несдвигаемой оси основания  $x - x$ . Известны вес сооружения (включая фундамент)  $V$ , месторасположение центра вертикальных сил (плечо  $h_1$ ), момент инерции массы сооружения относительно оси  $x - x$  ( $J$ ), коэффициент постели грунта  $C$ .

Примечание. Полагая незначительной глубину заложения фундамента, пренебречь упругими силами сопротивления грунта на боковых гранях.

Решение. Используем формулу

$$\omega = \sqrt{\frac{K}{J}},$$

где, как и в примере 5.9,

$$K = k - Vh_1.$$

Определим жесткость  $k$ .

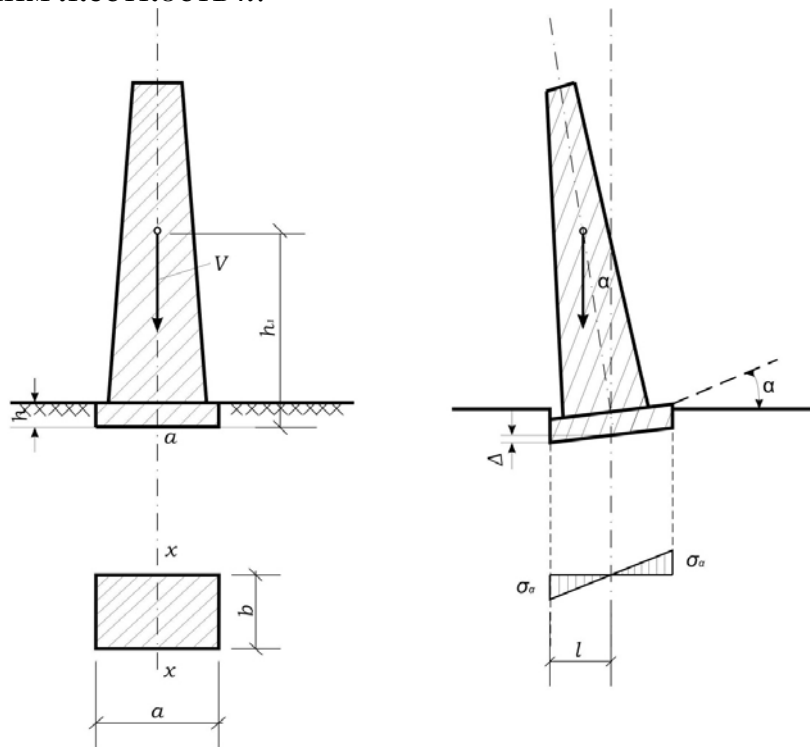


Рис.5.11

При единичном повороте  $\Delta = l \cdot \alpha = l \cdot 1$ ; следовательно,

$$\frac{M}{J}l = \frac{kl}{J} = C\Delta = Cl,$$

откуда

$$k = CJ.$$



Таким образом,

$$\omega = \sqrt{\frac{CJ - Vh_1}{J}}.$$

При неглубоких фундаментах и невысоких сооружениях величиной  $Vh_1$  по сравнению с  $CJ$  можно пренебречь; тогда

$$\omega = \sqrt{C}.$$

**Пример 5.11.** Подобрать приведенную сосредоточенную массу  $M$ , установив ее в четверти пролета (точка  $I$ ) невесомой балки (рис. 5.12, б) так, чтобы частота основного тона собственных колебаний этой балки совпала с частотой собственных колебаний балки с распределенной массой  $m = \text{const}$  (рис. 5.12, а).

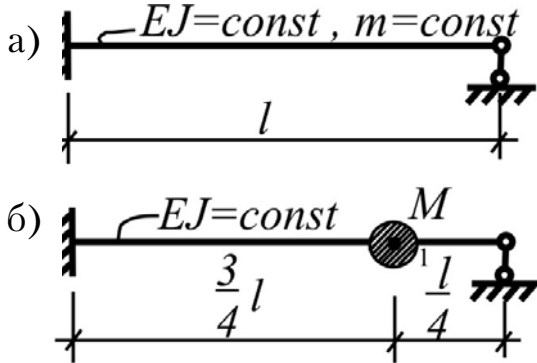


Рис.5.12

Решение задачи осуществляем методом начальных параметров [7]. Граничные условия, соответствующие закреплениям концов балки (рис. 5.12):

$$\left. \begin{array}{l} \text{при } x = 0: y_0 = 0; \varphi_0 = 0; \\ \text{при } x = l: y(l) = 0; M(l) = 0. \end{array} \right\} \quad (\text{а})$$

Подставляя формулы метода начальных параметров в граничные условия (а), получаем однородную систему алгебраических уравнений относительно начальных параметров  $M_0$  и  $Q_0$ :

$$\left. \begin{array}{l} -\frac{M_0}{EJk_i^2} \cdot C(l) - \frac{Q_0}{EJk_i^3} \cdot D(l) = 0; \\ M_0 A(l) + \frac{Q_0}{k_i} \cdot B(l) = 0. \end{array} \right\} \quad (\text{в})$$

$$\text{Здесь } \begin{cases} A(l) = \frac{ch(k_i l) + \cos(k_i l)}{2}; & B(l) = \frac{ch(k_i l) + \sin(k_i l)}{2}; \\ C(l) = \frac{ch(k_i l) - \cos(k_i l)}{2}; & D(l) = \frac{ch(k_i l) - \sin(k_i l)}{2}, \end{cases}$$

$$\text{где } k_i = \sqrt[4]{\frac{m\omega_i^2}{EJ}};$$

$A(l)$ ,  $B(l)$ ,  $C(l)$ ,  $D(l)$  – гиперболо-тригонометрические фундаментальные функции поперечных колебаний стержня (функции А.Н. Крылова), для которых имеются таблицы [5].

Приравнивая главный определитель системы (в) к нулю, имеем:

$$\frac{1}{EJk_i^3}[-C(l) \cdot B(l) + A(l) \cdot D(l)] = 0,$$

или после подстановки выражений  $A, B, C, D$  окончательно получаем следующее трансцендентное уравнение для параметров  $k_i$ :

$$thk_i l = tgk_i l,$$

откуда  $k_1 l = 3,927$ ;

$k_2 l = 7,069$  и т.д.

Круговые частоты собственных колебаний при этом будут:

$$\omega_1 = k_1^2 \sqrt{\frac{EJ}{m}} = \frac{15,42}{l^2} \sqrt{\frac{EJ}{m}};$$

$$\omega_2 = k_2^2 \sqrt{\frac{EJ}{m}} = \frac{49,96}{l^2} \sqrt{\frac{EJ}{m}} \text{ и т.д.}$$

Определим частоту основного тона колебаний  $\omega$  для системы с одной степенью свободы (рис. 5.13):

$$\omega_1^* = \sqrt{\frac{1}{M\delta_{11}^*}}.$$

Поскольку балка один раз статически неопределима, для определения единичного перемещения  $\delta_{11}^*$  используем метод сил. Основная система, эпюры изгибающих моментов в единичном и грузовом состояниях приведены на рис. 5.13 и 5.14.

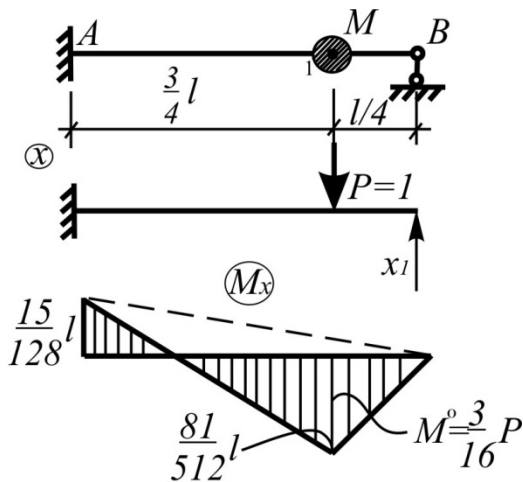


Рис. 5.13

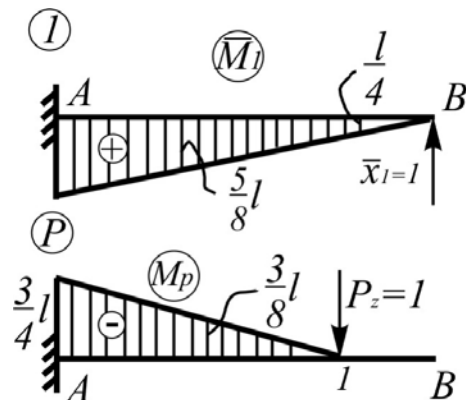


Рис. 5.14

Тогда

$$\delta_{11}x_1 + \Delta_{1p} = 0,$$

$$\text{где } \delta_{11} = \frac{1}{EJ} \int_{(l)} M_1^2 dx = \frac{l^3}{EJ}; \quad \Delta_{1p} = \frac{1}{EJ} \int_{(l)} M_1 M_p dx = \frac{27l^3}{128EJ}.$$

Следовательно,

$$x_1 = -\frac{\Delta_{1p}}{\delta_{11}} = \frac{81}{128}.$$

Окончательная эпюра изгибающих моментов  $M_x = M_1 x_1 + M_p$  приведена на рис. 5.13.

Искомое единичное перемещение в статически неопределимой балке:

$$\delta_{11}^* = \frac{1}{EJ} \int_{(l)} M_x M_p dx = \frac{l^3}{140EJ}.$$

Частота основного тона собственных колебаний  $\omega_1^*$  будет:

$$\omega_1^* = \sqrt{\frac{1}{M\delta_{11}^*}} = \sqrt{\frac{140EJ}{Ml^3}}.$$

Приравняв частоты  $\omega_1$  и  $\omega_1^*$ , получим:

$$\sqrt{\frac{140EJ}{Ml^3}} = \frac{15,42}{l^2} \sqrt{\frac{EJ}{m}},$$

откуда

$$M = \frac{140}{239} ml = 0,586ml.$$

**Пример 5.12.** Подобрать приведенную массу  $M$ , установленную в середине пролета невесомой балки (точка  $I$ ) (рис. 5.15,б), так, чтобы частота основного тона собственных колебаний балки с распределенной массой  $m = \text{const}$  (рис.5.4,а) совпала с частотой колебаний балки, изображенной на рис. 5.15,б.

Задача решается аналогично задаче 5.11.

**О т в е т.** Величина приведенной массы  $M$ , установленной в середине пролета,  $M = 0,51 ml$ .

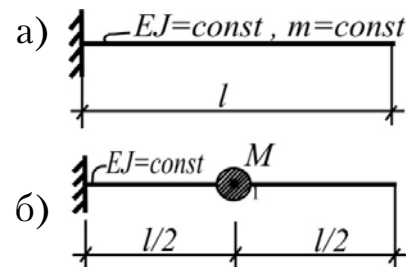


Рис.5.15

Пример 5.13. Определить частоту собственных колебаний балки с одной упругоподатливой опорой (рис. 5.16), жесткость которой  $r = \frac{EJ}{a^3}$  ( $r$  – реакция опоры при деформации пружины, равной единице).

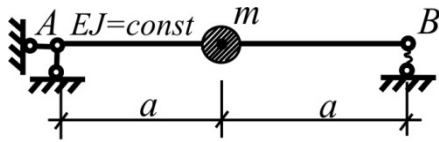


Рис. 5.16

Система имеет одну степень свободы. Частоту собственных колебаний определяем по формуле

$$\omega = \sqrt{\frac{1}{\delta_{11}^* m}}.$$

Здесь  $\delta_{11}^* = \delta_{11} + \delta_{oc}$ ,  
 где  $\delta_{11}$  – единичный прогиб балки под массой;  
 $\delta_{oc}$  – перемещение под массой вследствие упругости пружины, считаем жесткость балки  $EJ = \infty$ .

Таким образом, на основании эпюры  $M_1$  (рис.5.17,а) имеем

$$\delta_{11} = \frac{1}{EJ} \int_{(l)} M_1^2 dx = \frac{1}{EJ} \cdot \frac{a}{2} \cdot \frac{a}{2} \cdot \frac{2}{3} a \cdot 2 = \frac{a^3}{6EJ}.$$

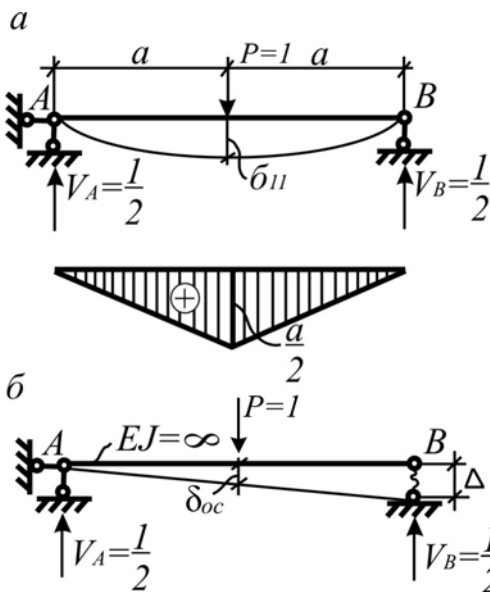


Рис.5.17

При осадке опоры B, равной  $\Delta$  (рис.5.16,б), реакция в точке B:

$$V_B = r\Delta.$$

Используя мгновенное равновесие системы, получим:

$$V_B = \frac{P}{2} = \frac{1}{2}, \text{ откуда } V_B = \frac{1}{2} = r\Delta,$$

$$\text{т.е. } \Delta = \frac{1}{2r} = \frac{a^3}{2EJ}.$$

$$\text{Следовательно, } \delta_{oc} = \frac{\Delta}{2} = \frac{a^3}{4EJ}.$$

Таким образом,

$$\delta_{11}^* = \frac{a^3}{6EJ} + \frac{a^3}{4EJ} = \frac{5}{12} \frac{a^3}{EJ}.$$

При этом круговая частота собственных колебаний балки:

$$\omega = \sqrt{\frac{12EJ}{5a^3 m}}.$$

Пример 5.14. Определить частоту собственных колебаний абсолютно жесткой балки ( $EJ = \infty$ ), изображенной на рис. 5.18,а, при условии, что  $m_1 = m_2 = m_3 = m$  и жесткости упругоподатливых опор В и С равны  $r$  ( $r$  – реакция опоры при деформации пружины, равной единице). При решении воспользоваться энергетическим методом.

Система имеет одну степень свободы, так как один параметр (угол поворота  $\varphi$ ) определяет положение всех масс системы при ее возможных отклонениях от положения равновесия (рис.5.18,б).

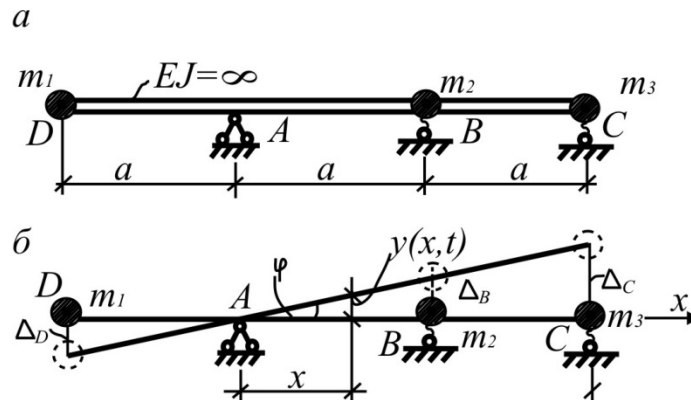


Рис.5.18

Перемещения масс при этом соответственно будут:

$$\Delta_D = -a\varphi, \quad \Delta_B = a\varphi, \quad \Delta_C = 2a\varphi.$$

Учитывая жесткости упругих опор В и С, получим реакции опор:

$$V_B = ra\varphi; \quad V_C = 2ra\varphi.$$

Круговую частоту определяем на основании закона сохранения механической энергии:

$$T_{\max} = U_{\max}, \tag{а}$$

где  $T_{\max}$  – максимальная кинетическая энергия системы, соответствующая наибольшим скоростям;

$U_{\max}$  – максимальная потенциальная энергия деформации системы при наибольших отклонениях от положения равновесия.

По теореме Клапейрона имеем:

$$U_{\max} = \frac{V_B \Delta_B}{2} + \frac{V_C \Delta_C}{2}.$$

Тогда

$$U_{\max} = \frac{ra^2\varphi}{2} + \frac{4ra^2\varphi}{2} = 2,5ra^2\varphi^2. \tag{в}$$

Вычисляем кинетическую энергию системы:

$$T_{\max} = \sum \frac{1}{2} m_i v_i^2.$$

Полагая колебания системы гармоническими, т.е.

$$y(x, t) = y_x \sin(\omega t + \varepsilon),$$

$$v(x, t) = \frac{\partial y}{\partial t} = y_x \omega \cos(\omega t + \varepsilon),$$

и имея в виду, что при  $EJ = \infty$ :  $y(x) = \varphi x$ , получим:

$$y(x, t) = \varphi x \sin(\omega t + \varepsilon),$$

$$v(x, t) = \varphi x \omega \cos(\omega t + \varepsilon).$$

При  $\cos(\omega t + \varepsilon) = 1$  имеем:

$$v_{\max}(x, t) = \varphi x \omega.$$

Скорости, соответствующие заданным массам, при этом будут:

$$v_D = -\varphi a \omega; v_B = \varphi a \omega; v_C = 2\varphi a \omega.$$

С учетом этого

$$T_{\max} = \frac{1}{2} m \omega^2 (a^2 \varphi^2 + a^2 \varphi^2 + 4a^2 \varphi^2) = 3\omega^2 m a^2 \varphi^2. \quad (c)$$

Подставив (в) и (с) в (а), получим:

$$2,5ra^2\varphi^2 = 3\omega^2 m a^2 \varphi^2,$$

откуда

$$\omega^2 = \frac{2,5r}{3m} = 0,83 \frac{r}{m} \text{ или } \omega = \sqrt{0,83 \frac{r}{m}} = 0,91 \sqrt{\frac{r}{m}}.$$

**Пример 5.15.** Сравнить частоты собственных вертикальных колебаний системы для случаев, когда масса расположена посередине стержня 1-3 (рис.5.19) и когда масса расположена над опорой А (в этом случае принять  $EJ = \infty$ , массой стержней пренебречь).

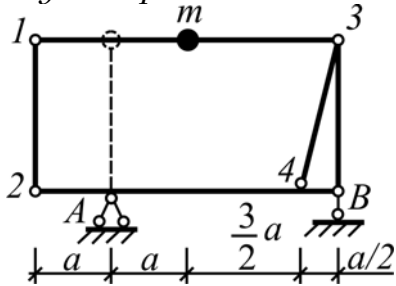


Рис.5.19

Частота собственных вертикальных колебаний (без учета горизонтальных колебаний) определяется по формуле

$$\omega = \sqrt{\frac{1}{\delta_{11} m}},$$

где  $\delta_{11}$  – перемещение в точке сосредоточения массы от  $P = 1$ .

Эпюра изгибающих моментов в единичном состоянии, когда масса  $m$  расположена посередине стержня 1-3, показана на рис.5.20.

Для этого состояния усилия в стержнях 1-2 и 3-В соответственно равны:

$$S_{1-2} = S_{3-B} = \frac{1}{2}; S_{3-4} = 0.$$

Перемещение  $\delta_{11}$  вычисляется по формуле Мора с учетом изгибающих моментов в стержнях 1-3 и 2-В, а также продольных усилий в стержнях 1-2 и 3-В:

$$\begin{aligned} \delta_{11} &= \delta_{11}^{(M)} + \delta_{11}^{(N)} = \sum \frac{1}{EJ} \int_{(l)} M_1^2 dx + \sum \frac{S_1^2}{EA} l = \\ &= \frac{1}{EJ} \left( a \cdot \frac{2a}{a} \cdot \frac{2}{3} a \cdot 2 + \frac{a}{2} \cdot \frac{a}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{a}{2} \right) + \frac{1}{EA} \cdot 2 \left( \frac{1}{2} \right)^2 a = \frac{5 a^3}{3 EJ} + \frac{3 a^3}{2 EJ} = \frac{19 a^3}{6 EJ}. \end{aligned}$$

Частота собственных колебаний  $\omega$  в этом случае:

$$\omega = \sqrt{\frac{1}{\delta_{11} m}} = \sqrt{\frac{6EJ}{19a^3 m}} = 0,56 \sqrt{\frac{EJ}{a^3 m}}.$$

Для случая, когда масса  $m$  располагается над опорой А, эпюра изгибающих моментов в единичном состоянии  $\bar{M}_1$  показана на рис.5.21.

Поскольку по условию задачи следует, что жесткости стержней 1-2 и 3-В  $EA = \infty$ , то перемещение

$$\bar{\delta}_{11} = \sum \frac{1}{EJ} \bar{M}_1^2 dx = \frac{2}{EJ} \left( \frac{0,75a^2}{2} \cdot \frac{2}{3} 0,75a + \frac{0,75a \cdot 3a}{2} \cdot \frac{2}{3} 0,75a \right) = \frac{1,5a^3}{EJ}.$$

Частота собственных колебаний  $\bar{\omega}$  равна:

$$\bar{\omega} = \sqrt{\frac{1}{\bar{\delta}_{11} m}} = \sqrt{\frac{EJ}{1,5a^3 m}} = 0,815 \sqrt{\frac{EJ}{a^3 m}}.$$

Таким образом,

$$\frac{\bar{\omega}}{\omega} = \frac{0,815}{0,56} = 1,45.$$

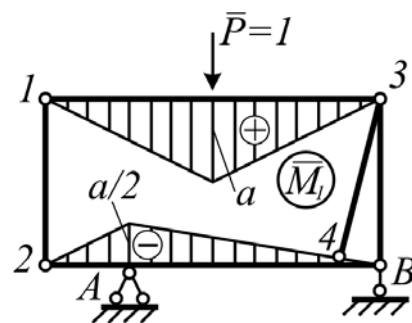


Рис.5.20

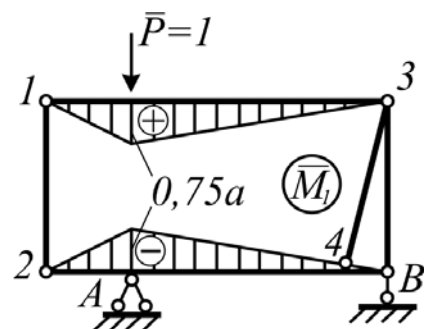


Рис.5.21

**Пример 5.16.** Оценить влияние веса железобетонной шарнирно опертой балки на силу контактного взаимодействия (силу удара), если груз весом  $Q = 2000$  Н падает посередине пролета с высоты  $h = 20$  см

(без начальной скорости) (рис. 5.22). Собственный вес балки  $Q_6 = 2000$  Н,  $l = 6$  м,  $E = 34$  ГПа,  $J = 3,6 \cdot 10^5$  см<sup>4</sup>. В решении принять, что прогиб балки мал по сравнению с  $h$ , и заменить распределенную массу балки сосредоточенной, приведенной к точке удара.

Контактная сила, развиваемая при падении груза  $Q$  на балку, равна:

$$P = \mu Q, \quad (a)$$

где  $\mu$  – динамический коэффициент, определяемый в случае, когда  $y_{ст} \ll h$ , по формуле

$$\mu = \sqrt{\frac{2h}{y_{ст} \left(1 + \frac{Q_1}{Q}\right)}}. \quad (b)$$

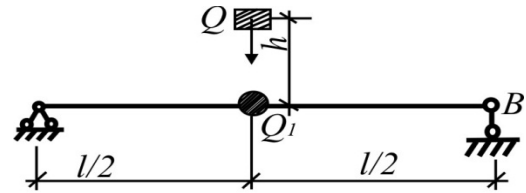


Рис.5.22

Здесь  $Q_1 \approx 0,5Q_6 = 0,5 \cdot 2000 = 10000$  Н – вес шарнирно опертой балки, приведенной к точке удара.

По формулам (а) и (в) находим  $P$  в двух случаях:

1) с учетом массы балки

$$\mu = \sqrt{\frac{2h}{y_{ст} \left(1 + \frac{Q_1}{Q}\right)}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 20}{0,0074 \cdot \left(1 + \frac{10000}{2000}\right)}} = 31.$$

$$\text{Здесь } y_{ст} = \frac{Ql^3}{48EJ} = \frac{2000 \cdot 6^3}{48 \cdot 34 \cdot 10^9 \cdot 3,6 \cdot 10^{-3}} = 0,0074 \text{ см.}$$

$$P = \mu Q = 31 \cdot 2000 = 62000 \text{ Н;}$$

2) без учета массы балки, полагая  $Q_1 = 0$ , тогда

$$\mu = \sqrt{\frac{2h}{y_{ст}}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 20}{0,0074}} = 73,5;$$

$$P = \mu Q = 73,5 \cdot 2000 = 147000 \text{ Н.}$$

Таким образом, пренебрегать весом (массой) балки в данном примере нельзя, так как в противном случае сила контактного взаимодействия оказывается завышенной в 2,37 раза.

**Пример 5.17.** Груз  $Q = 2000$  Н падает посередине шарнирно опертой балки с высоты  $h = 10$  см без начальной скорости. Имея в виду, что  $l = 6$  м,  $E =$  ГПа,  $J = 1,93 \cdot 10^4$  см<sup>4</sup> и масса балки мала по сравнению с массой падающего груза, определить силу контактного взаимодействия



в предположении, что прогиб балки (рис.5.23) мал по сравнению с  $h$ , а также без этого предположения. Какова контактная сила, когда груз положен на балку без начальной скорости?

Сила контактного взаимодействия

$$P = \mu Q, \quad (a)$$

где динамический коэффициент в предположении, что  $y_{\max} \ll h$  и вес балки мал по сравнению с весом падающего груза  $Q$ , определяется по формуле

$$\mu = \sqrt{\frac{2h}{y_{\text{ст}}}}. \quad (b)$$

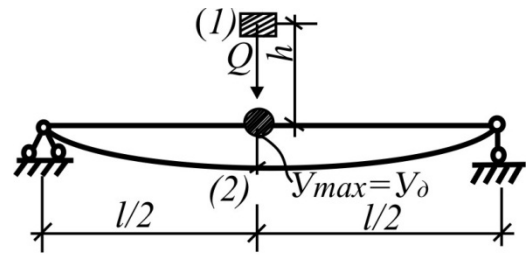


Рис.5.23

Статический прогиб балки посередине пролета

$$y_{\text{ст}} = \frac{Ql^3}{48EJ} = \frac{2000 \cdot 6^3}{48 \cdot 34 \cdot 10^9 \cdot 1,93 \cdot 10^{-4}} = 0,137 \text{ см.}$$

В общем случае (без учета массы балки) коэффициент динамичности  $\mu$  может быть определен на основании теоремы об изменении кинетической энергии, записанной для двух положений груза  $Q$  (1) и (2) (см. рис.5.23).

$$\frac{mv_2}{2} - \frac{mv_1}{2} = A_{12},$$

так как  $v_1 = v_2 = 0$  ( $v_2$  – скорость балки, соответствующая  $y_{\max} = y_{\text{дин}}$ ).

Следовательно,

$$A_{12} = 0. \quad (c)$$

Работу  $A_{12}$  совершают упругие силы балки и груз  $Q$ . Имеем

$$A_{12} = Q(h + y_{\max}) - r_{11} \int_0^{y_{\max}} y dy.$$

Здесь коэффициент жесткости балки  $r_{11} = Q/y_{\text{ст}}$ .

Тогда

$$A_{12} = Q(h + y_{\max}) - \frac{Q}{y_{\text{ст}}} \frac{y^2}{2} \Big|_0^{y_{\max}} = Q \left( h + y_{\max} - \frac{y_{\max}^2}{2y_{\text{ст}}} \right). \quad (d).$$

Подставляя выражение (d) в (c), находим

$$h + y_{\max} - \frac{y_{\max}^2}{2y_{\text{ст}}} = 0,$$

откуда

$$y_{\max} = y_{\text{ст}} \pm \sqrt{y_{\text{ст}}^2 + 2y_{\text{ст}}h},$$

следовательно,

$$\mu = \frac{y_{\max}}{y_{\text{ст}}} = 1 + \sqrt{1 + \frac{2h}{y_{\text{ст}}}}. \quad (\text{e}).$$

Вычисляем теперь  $\mu$ , а следовательно и  $P$ , в двух случаях по формулам (b) и (e):

1) по формуле (b)

$$\mu = \sqrt{\frac{2 \cdot 10}{0,137}} = 16,6; \quad P = 16,6 \cdot 2000 = 33200 \text{ Н};$$

2) по формуле (e)

$$\mu = 1 + \sqrt{1 + \frac{2 \cdot 10}{0,137}} = 1 + \sqrt{147} = 17,8; \quad P = 17,8 \cdot 2000 = 35600 \text{ Н}.$$

В случае, когда груз положен на балку без начальной скорости (удар груза, падающего с нулевой высоты), принимаем в (e)  $h = 0$ .

При этом имеем:

$$\mu = 1 + \sqrt{1 + 0} = 2; \quad P = 2 \cdot 2000 = 4000 \text{ Н},$$

т.е. получили величину динамического коэффициента, соответствующую внезапно приложенной нагрузке.

**Пример 5.18.** *Определим частоты собственных колебаний рамы с объемной массой (рис. 5.24). Длина ригеля рамы  $l = 1,5$  м, высота рамы  $h = 3$  м, масса  $t = 500$  кг, момент инерции массы  $J_p = 200$  кг·м<sup>2</sup>, изгибная жесткость элементов рамы  $EI_0 = 10^5$  Н·м<sup>2</sup>.*

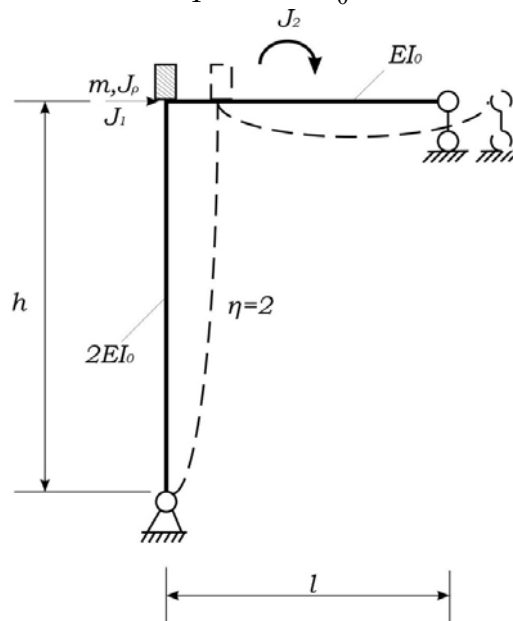


Рис.5.24

Для определения частот собственных колебаний рамы необходимо составить и решить уравнение:

$$\lambda^2 - \lambda(m_1\delta_{11} + m_2\delta_{22}) + m_1m_2(\delta_{11}\delta_{22} - \delta_{12}^2) = 0.$$

Для нашего случая  $m_1 = m, m_2 = J_p$ . Перемещения  $\delta_{11}, \delta_{12}, \delta_{22}$  находим по формуле Мора, построив для этого эпюры изгибающих моментов от единичных сил инерции, как показано на рис. 5.25, а, б, при загрузении рамы усилиями  $\bar{J}_1 = 1$  и  $\bar{J}_2 = 1$ .

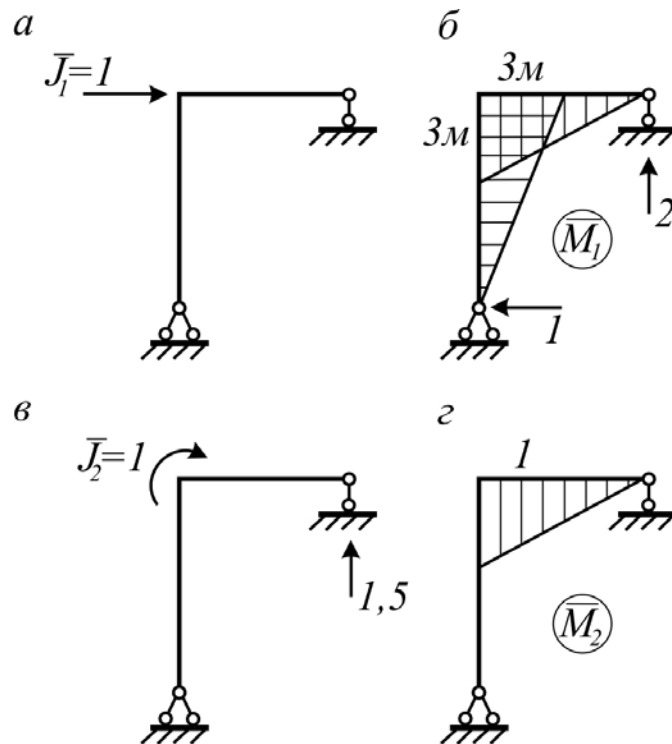


Рис.5.25

$$\delta_{11} = 9 \cdot 10^{-5} \text{ м/Н}; \quad \delta_{12} = \delta_{21} = 1,5 \cdot 10^{-5} \text{ 1/Н}; \quad \delta_{22} = 0,5 \cdot 10^{-5} \text{ 1/Н} \cdot \text{м}.$$

Подставив эти значения коэффициентов и величины масс в решение уравнения, имеем:

$$\lambda_{1,2} = \frac{m_1\delta_{11} + m_2\delta_{22}}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{m_1\delta_{11} + m_2\delta_{22}}{2}\right)^2 - m_1m_2(\delta_{11}\delta_{22} - \delta_{12}^2)},$$

или

$$\lambda_{1,2} = 2,3 \cdot 10^{-2} \pm \sqrt{2,3^2 \cdot 10^{-4} - 2,25 \cdot 10^{-5}},$$

ИЛИ

$$\lambda_1 = 4,550555 \cdot 10^{-2} \text{ с}^2; \lambda_2 = 4,944451 \cdot 10^{-4} \text{ с}^2.$$

Частоты собственных колебаний будут равны:

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{1}{\lambda_1}} = \sqrt{\frac{10^2}{4,550555}} = 4,69 \text{ рад/с};$$

$$\omega_2 = \sqrt{\frac{1}{\lambda_2}} = \sqrt{\frac{10^4}{4,944451}} = 44,97 \text{ рад/с}.$$

**Пример 5.19.** *Определим максимальные силы инерции при вынужденных колебаниях статически определимой рамы (рис. 5.26). Характеристики рамы такие же, как в примере 5.18, максимальное значение возмущающей силы  $P_0 = 200 \text{ Н}$ , частота возмущающей силы  $\theta = 10 \text{ 1/с}$ .*

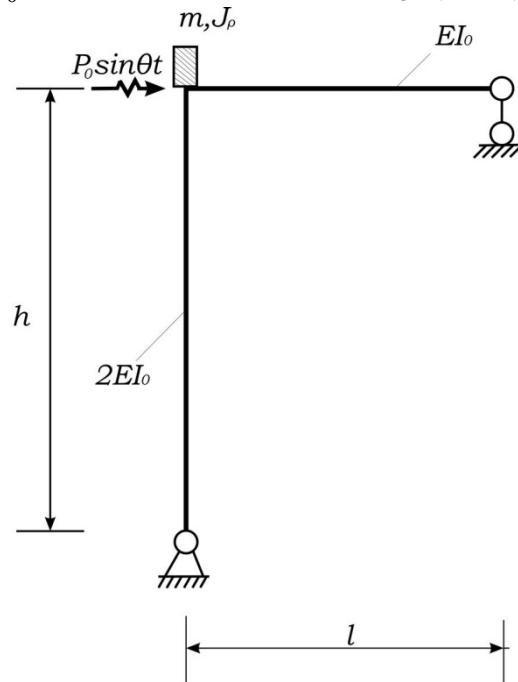


Рис. 5.26

Система уравнений

$$\delta_{i1} J_1 + \delta_{i2} J_2 + \dots + \delta_{ii}^{**} J_i + \dots + \delta_{in} J_n + \Delta_{ip} = 0,$$

где  $\delta_{ii}^{**} = \delta_{ii} - \frac{1}{m_i \theta^2},$

для рамы с двумя степенями свободы будет иметь вид:

$$\left. \begin{aligned} \delta_{11}^{**} J_1 + \delta_{12} J_2 + \Delta_{1p} &= 0, \\ \delta_{21} J_1 + \delta_{22}^{**} J_2 + \Delta_{2p} &= 0. \end{aligned} \right\}$$

Перемещения подсчитаны в примере 5.18:

$$\delta_{11} = 9 \cdot 10^{-5} \text{ м/Н}, \delta_{22} = 0,5 \cdot 10^{-5} \text{ 1/Н} \cdot \text{м}, \delta_{12} = 1,5 \cdot 10^{-5} \text{ 1/Н}.$$

Коэффициенты  $\delta_{11}^{**}$  и  $\delta_{22}^{**}$  определим по формуле:

$$\delta_{11}^{**} = 9 \cdot 10^{-5} - \frac{1}{500 \cdot 10^2} = 7 \cdot 10^{-5} \text{ м/Н},$$

$$\delta_{22}^{**} = 0,5 \cdot 10^{-5} - \frac{1}{200 \cdot 10^2} = -4,5 \cdot 10^{-5} \text{ 1/Н}.$$

Вычислим грузовые члены:

$$\Delta_{1p} = \delta_{11} P_0 = 9 \cdot 10^{-5} \cdot 200 = 1,8 \cdot 10^{-2} \text{ м},$$

$$\Delta_{2p} = \delta_{12} P_0 = 1,5 \cdot 10^{-5} \cdot 200 = 3 \cdot 10^{-3} \text{ рад}.$$

Составим систему уравнений:

$$\left. \begin{aligned} 7 \cdot 10^{-5} J_1 + 1,5 \cdot 10^{-5} J_2 + 1,8 \cdot 10^{-2} &= 0, \\ 1,5 \cdot 10^{-5} J_1 - 4,5 \cdot 10^{-5} J_2 + 0,3 \cdot 10^{-2} &= 0. \end{aligned} \right\}$$

Решив её, получим значения максимальных сил инерции:

$$J_1 = -253,3 \text{ Н}, J_2 = -17,78 \text{ Н} \cdot \text{м}.$$

## 6. ПРИМЕРЫ ОЛИМПИАДНЫХ ЗАДАЧ

### Вариант 1

Задача 1

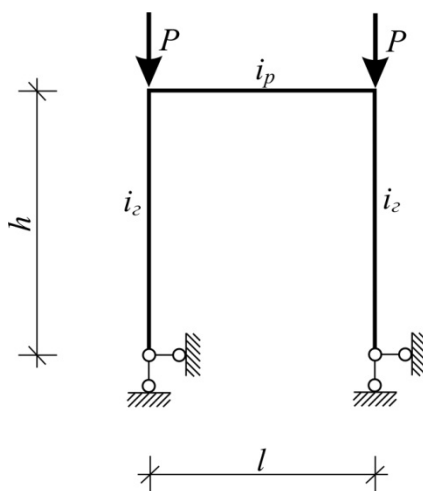
1 балл

Нужно ли перемножать эпюры при расчете методом перемещений?

Задача 2

2 балла

Показать (доказать) опасную форму потери устойчивости для рамы.



Задача 3

2 балла

Записать в матричной форме вековое уравнение методом сил и методом перемещений. Указать основные различия составляющих матриц.

## Вариант 2

### Задача 1

1 балл

Укажите аналитическую зависимость между величинами фокусных отношений и действующей на балку нагрузкой.

### Задача 2

2 балла

Установите аналитическую зависимость между коэффициентом приведенной длины и критической силой для колонн рамной системы.

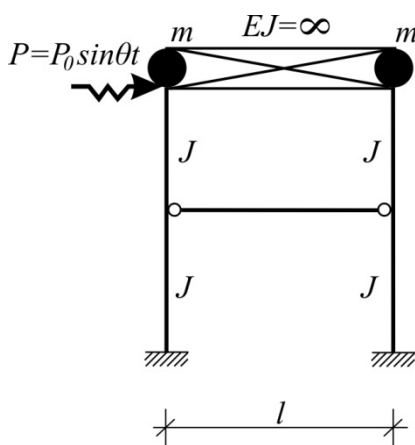
### Задача 3

3 балла

Построить динамическую эпюру моментов, используя симметрию рамы.

Дано:  $P_0=4$  кН;

$\theta=0,7\omega$ .



### Вариант 3

#### Задача 1

2 балла

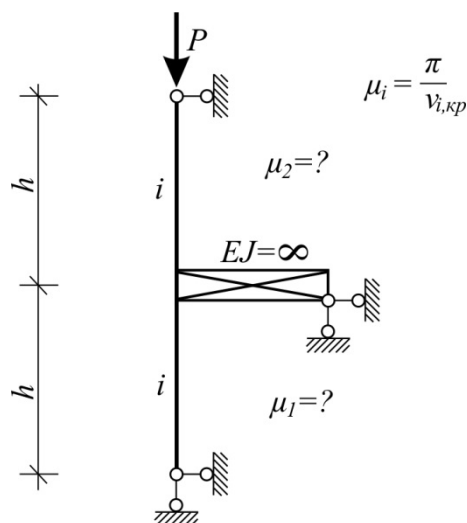
Перечислите основные различия расчета статически неопределимых стержневых систем методом сил и методом перемещений

- а) основная система;
- б) неизвестные;
- в) способ вычисления и проверка коэффициентов;
- г) и т.д.

#### Задача 2

2 балла

Вычислить коэффициент приведенной длины для каждой стойки рамы.



#### Задача 3

1 балл

Имеется ли какая-либо физическая или аналитическая связь между расчетом стержневых систем на вынужденные колебания и расчетом по деформированной схеме?



## Вариант 4

### Задача 1

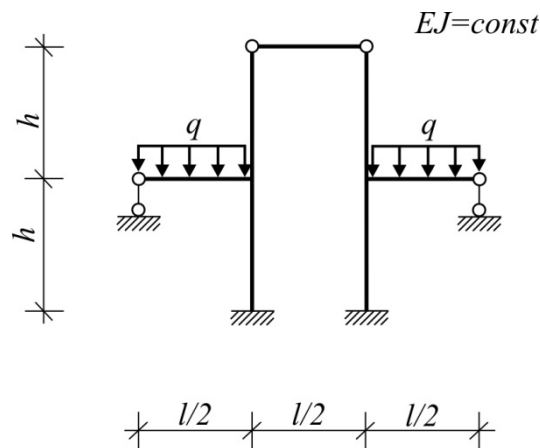
2 балла

Нарисуйте любую комбинированную стержневую систему. Укажите степень её статической неопределёмости.

### Задача 2

2 балла

Укажите метод и ход решения, которым наиболее целесообразно рассчитать данную раму.



### Задача 3

1 балл

Каковы общие аналитические понятия задач устойчивости и собственных колебаний?

## Вариант 5

### Задача 1

1,5 балла

При расчете какими методами используется формула Гвоздева?

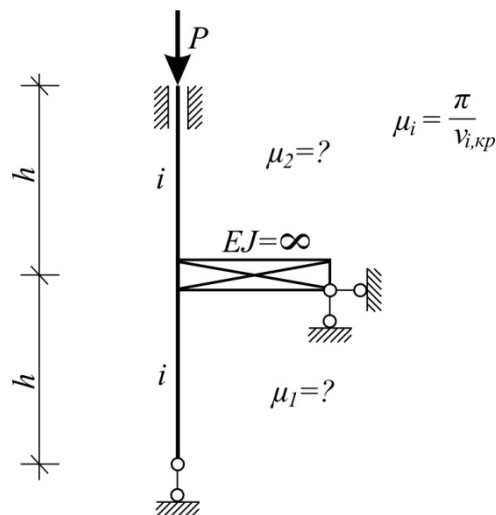
- а) МС;
- б) МП;
- в) СМ;
- г) КМ;
- д) уравнение 3-х моментов;
- е) метод фокусных отношений.

Нужное подчеркнуть.

### Задача 2

2 балла

Вычислить коэффициенты приведенных длин для каждой стойки.



### Задача 3

1,5 балла

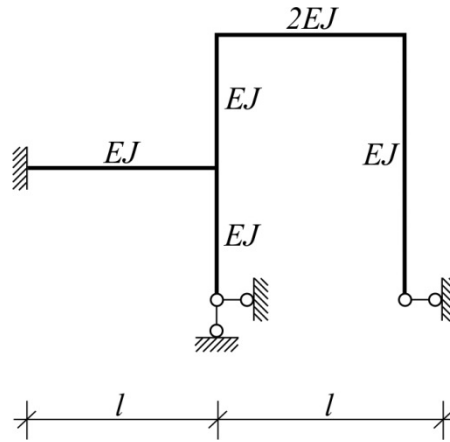
Можно ли определить действительные величины перемещений стержневой системы в момент потери устойчивости и в условиях вынужденных колебаний?

## Вариант 6

### Задача 1

2 балла

Указать метод, которым целесообразно рассчитывать рамы. Отметить число неизвестных МС, МП, КМ, СМ.



Метод	МС	МП	СМ
Число неизвестных			

### Задача 2

1 балл

Что является основной (результатирующей) величиной расчета на устойчивость? Нормативный и теоретический методы определения этой величины.

### Задача 3

2 балла

Физическая связь понятий форм потери устойчивости и форм собственных колебаний.

### Вариант 7

#### Задача 1

0,5 балла

Линия влияния усилия – это:

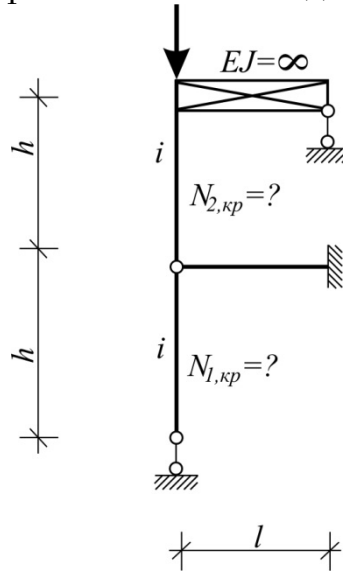
- а) эпюра;
- б) график;
- в) схема.

Нужное подчеркнуть.

#### Задача 2

2,5 балла

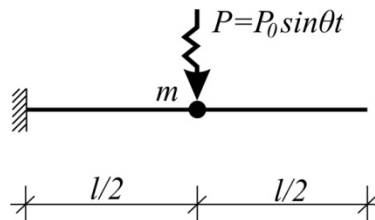
Определить величину критической силы для каждой стойки.



#### Задача 3

2 балла

Построить динамическую эпюру моментов для балки.

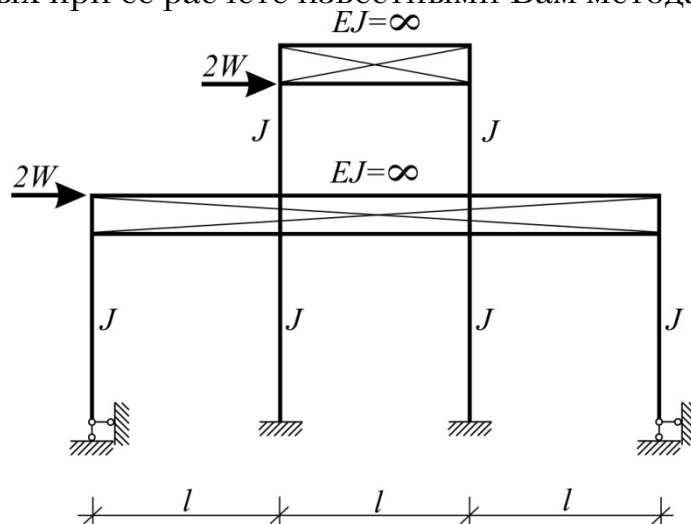


## Вариант 8

### Задача 1

2 балла

Укажите наиболее целесообразный способ расчета рамы. Укажите число неизвестных при её расчете известными Вам методами.



Метод	МС	МП	СМ
Число неизвестных			

### Задача 2

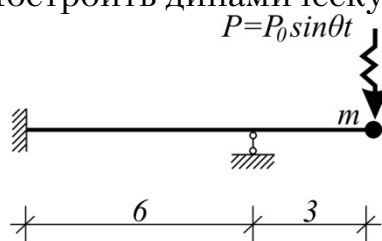
1 балл

Физическая и аналитическая связь расчетов стержневых систем на устойчивость и по деформированной схеме.

### Задача 3

2 балла

Построить динамическую эпюру моментов.



Дано:

$$EJ = \text{const}$$

$$P_0 = 2 \text{ кН}$$

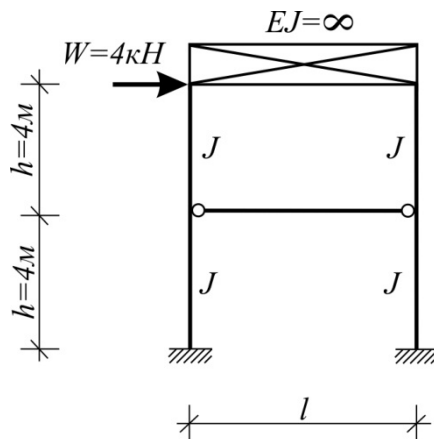
$$\theta = 0,7\omega$$

## Вариант 9

### Задача 1

4 балла

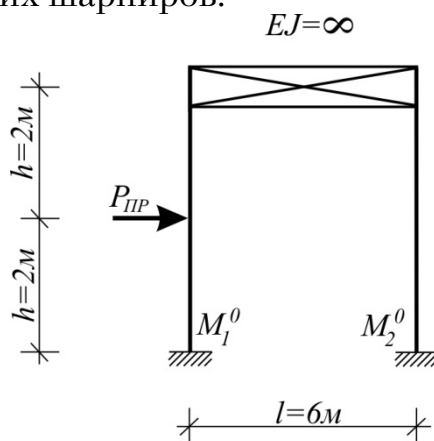
Построить окончательную эпюру моментов для симметричной рамы.



### Задача 2

2 балла

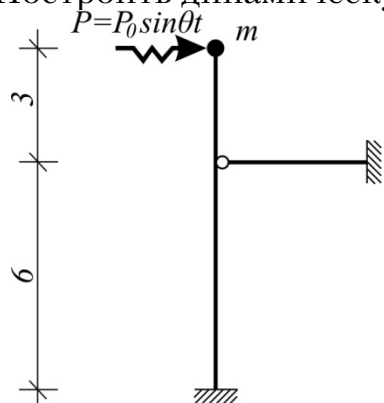
Укажите наиболее вероятный механизм разрушения путем образования пластических шарниров.



### Задача 3

4 балла

Построить динамическую эпюру моментов.



$$EJ = \text{const};$$

$$P_0 = 2 \text{ кН}$$

$$\theta = 0,7\omega$$

## Вариант 10

### Задача 1

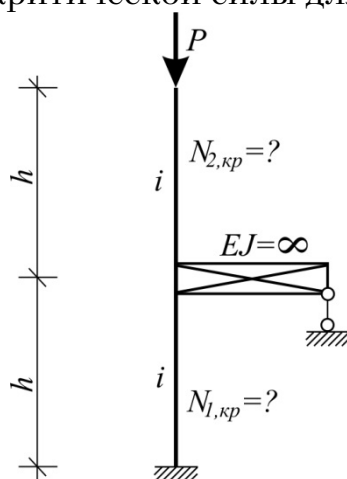
1 балл

Как нужно проектировать арку, чтобы ни в одном её сечении не возникали изгибающие моменты?

### Задача 2

2 балла

Определить величину критической силы для каждой стойки рамы.

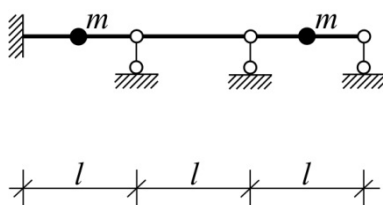


### Задача 3

2 балла

Показать все формы колебаний для балки.

$EJ = const$

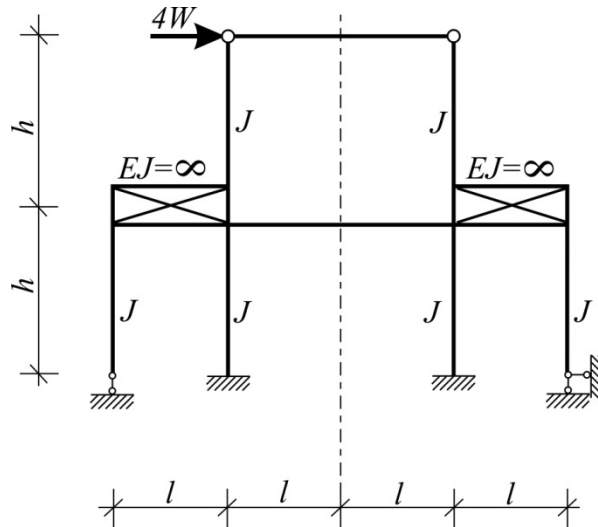


## Вариант 11

### Задача 1

3 балла

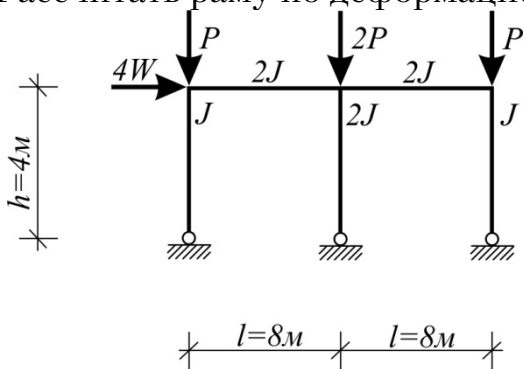
Указать метод, которым наиболее целесообразно рассчитывать раму. Показать основную систему избранного метода, окончательную эпюру моментов.



### Задача 2

4 балла

Рассчитать раму по деформационной схеме приближенно.



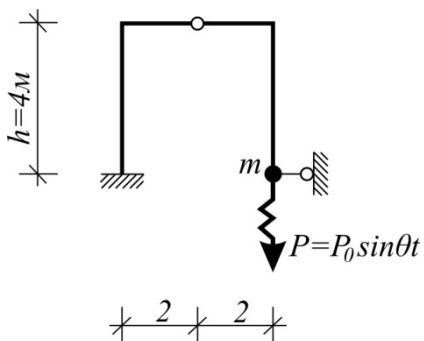
$$k = \frac{v}{v_E} = 0,8;$$

$$W = 1 \text{ кН.}$$

### Задача 3

3 балла

Построить динамическую эпюру моментов.



$$EJ = \text{const};$$

$$P_0 = 1 \text{ кН}$$

$$\theta = 0,7\omega$$

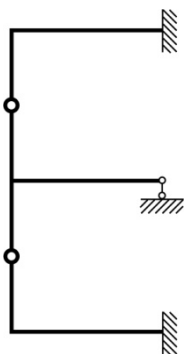




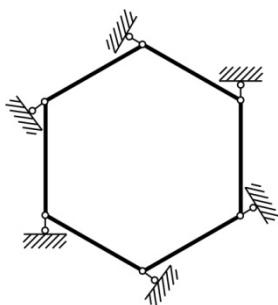
## Вариант 13

### Задача 1

1 балл



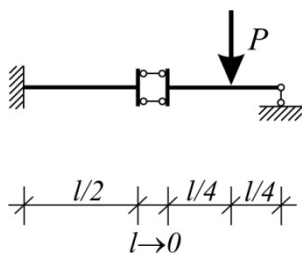
4 балла



Провести полный кинематический анализ стержневых систем.

### Задача 2

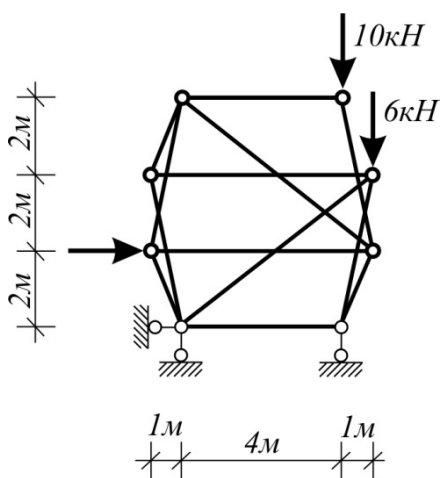
2 балла



Поостроить эпюру внутренних усилий.

### Задача 3

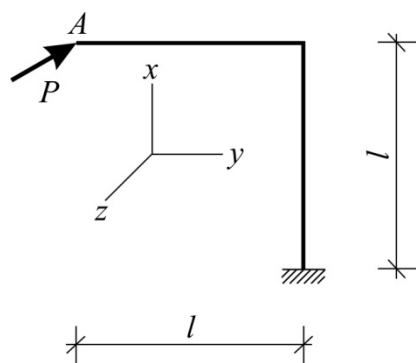
4 балла



Определить усилия в указанных стержнях.

### Задача 4

5 баллов

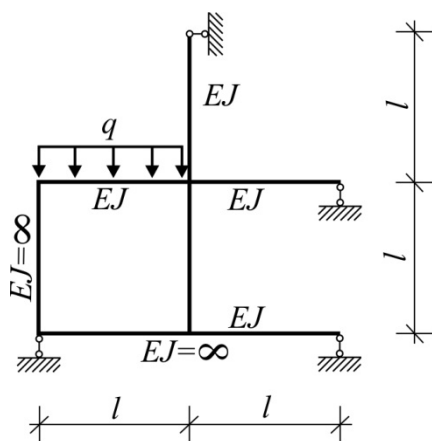


Определить перемещение в точке  $A$  в направлении действия внешней силы. Смещением в точке  $A$  в направлении оси  $Ox$  пренебречь.

$$EJ_x = EJ_y = GJ_k$$

### Задача 5

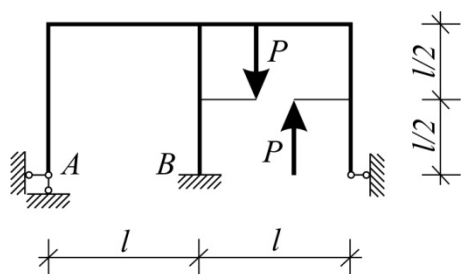
8 баллов



Раскрыть кинематическую неопределенность рамы методом перемещений. Построить эпюры  $M$ ,  $Q$ ,  $N$ .

### Задача 6

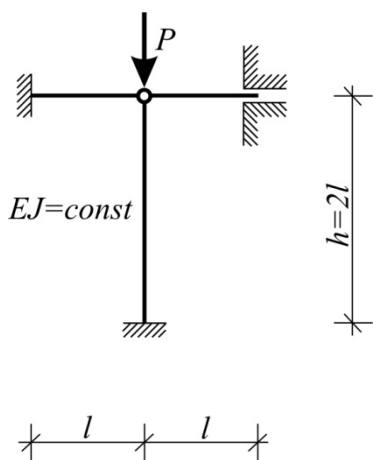
6 баллов



Раскрыть статическую неопределенность рамы. Построить эпюры  $M$ ,  $Q$ ,  $N$ .

### Задача 7

6 баллов

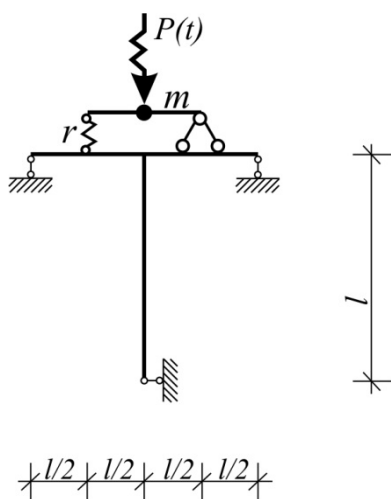


Найти значение критической силы для одиночной T-образной рамы, нагруженной сосредоточенной силой  $P$ .

Как изменится величина критической силы, если жесткость ригеля  $EJ_p$  принять равной  $\infty$ ?

### Задача 8

6 баллов



Построить эпюру динамических изгибающих моментов

$$P(t) = 10 \sin \theta t,$$

$$EJ = \text{const},$$

$$m = 0,2 \text{ кН} \cdot \text{с}^2 / \text{м},$$

$$l = 4 \text{ м},$$

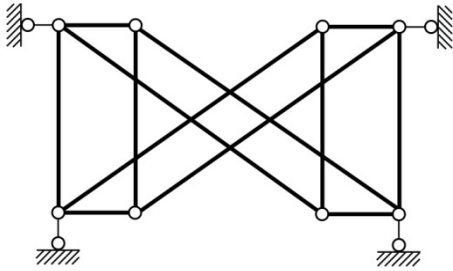
$$r = \frac{12EJ}{l^3},$$

$$\theta = 0,5\omega.$$

Вариант 14

Задача 1

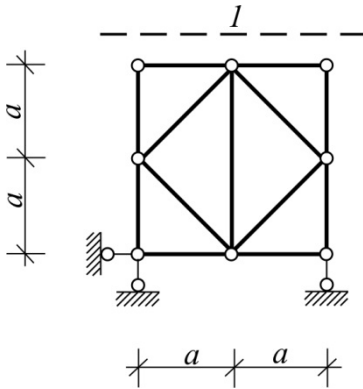
6 баллов



Выполнить анализ неизменяемости расчетной схемы.

Задача 2

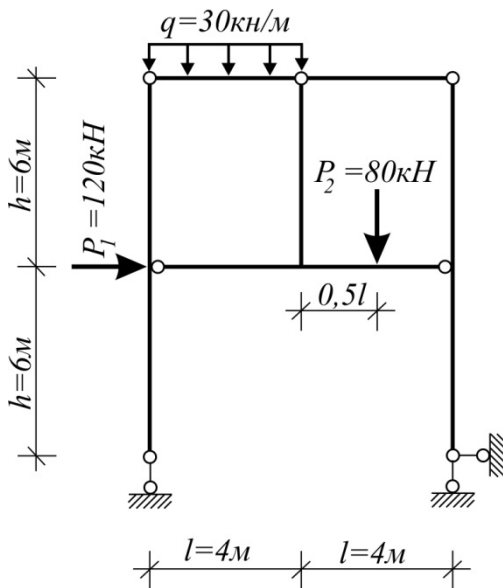
2 балла



Построить линию влияния усилия в стержне 1 – 2.

Задача 3

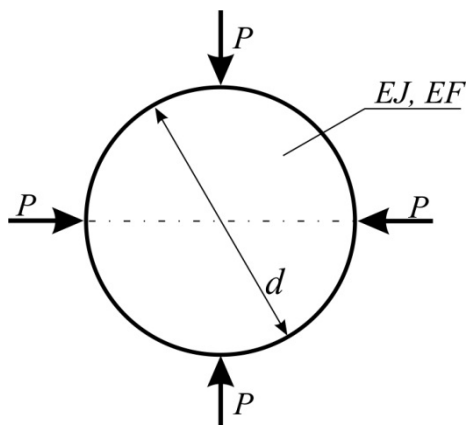
6 баллов



Построить эпюру внутренних усилий.

Задача 4

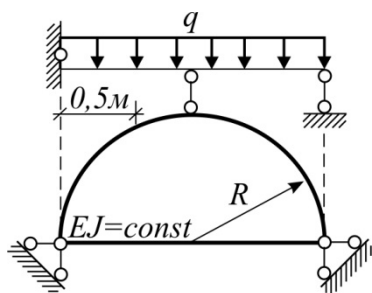
3 балла



Определить изменение длины окружности кольца.

Задача 5

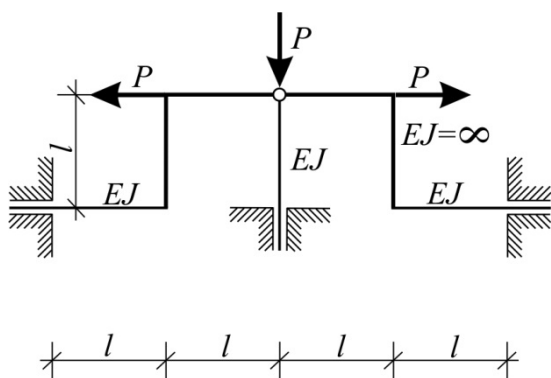
5 баллов



Определить вертикальное перемещение в т. С.

Задача 6

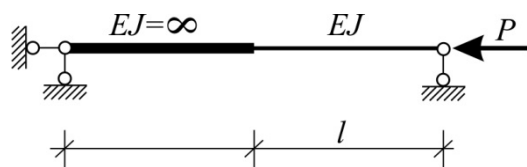
5 баллов



Построить эпюры внутренних усилий.

Задача 7

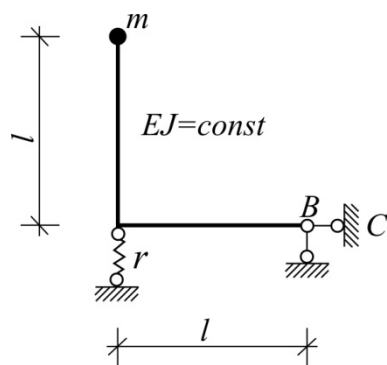
8 баллов



Посчитать критическую силу.

Задача 8

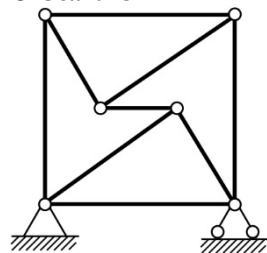
5 баллов



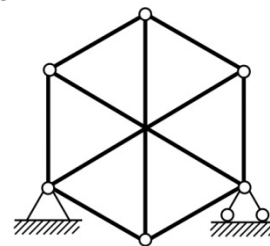
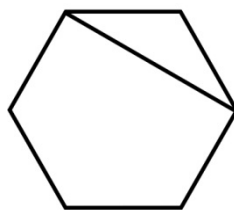
Исследовать свободные колебания системы.

Задача 9

6 баллов



7 баллов



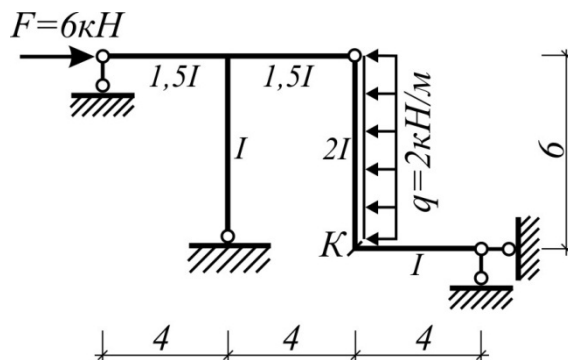
Выполнить кинематический анализ.

## Вариант 15

### Задача 1

7 баллов

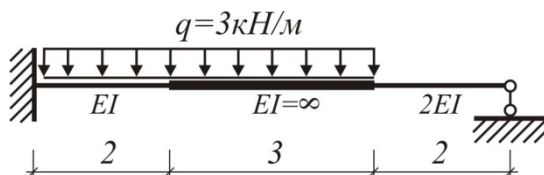
Определить вертикальное перемещение т. **К** от нагрузки в заданной статически неопределимой системе по одному из трех вариантов.



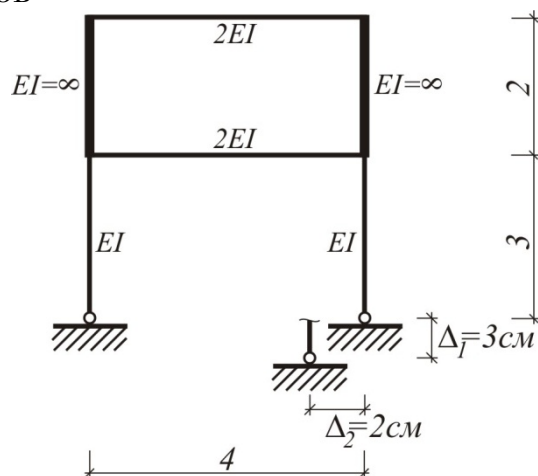
### Задача 2

10 баллов

Выбрать основную систему метода перемещений, записать уравнения в общем виде от воздействий  $P$ ,  $\Delta$  и продемонстрировать, как определить  $r_{ij}$ ,  $R_{iP}$ ,  $R_{i\Delta}$ .



10 баллов

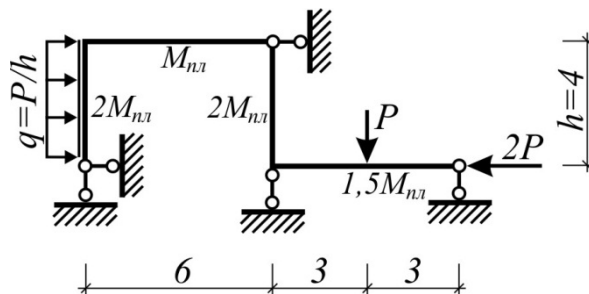




### Задача 3

10 баллов

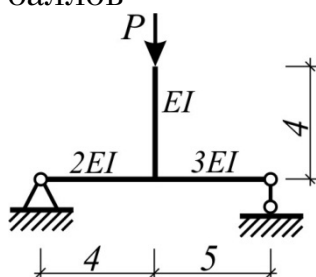
Определить  $P_{пред}$ : по кинематической теореме – 7 баллов; по статической теореме.



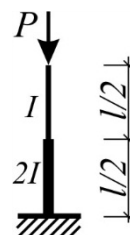
### Задача 4

Найти критическую нагрузку на конструкцию методом перемещений.

6 баллов



10 баллов



## БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Сеницкий, Ю.Э. Сборник олимпиадных задач по строительной механике [Текст] / Ю.Э. Сеницкий, И.А. Епанчинцева. – Куйбышев: КГУ, 1986. – 52 с.
2. Избранные задачи по строительной механике и теории упругости (регулирование, синтез, оптимизация) [Текст] / под ред. д-ра техн. наук, проф. Н.П. Абовского. – М.: Стройиздат, 1978. – 188 с.
3. Киселев, В.А. Строительная механика. Специальный курс. Динамика и устойчивость сооружений [Текст] / В.А. Киселев. – М.: Стройиздат, 1980. – 616 с.
4. Безухов, Н.И. Устойчивость и динамика сооружений в примерах и задачах [Текст] / Н.И. Безухов, О.В. Лужин, Н.В. Колкунов. – М.: Высшая школа, 1987.
5. Анохин, Н.Н. Строительная механика в примерах и задачах [Текст] / Н.Н. Анохин. – М.: АВС, 2007. Ч.1, 2.
6. Александров, А.В. Строительная механика. Стержневые системы [Текст] / А.В. Александров, Б.Я. Лащенников, Н.Н. Шапошников; под ред. чл.-кор. АН СССР А.Ф. Смирнова. – М.: Стройиздат, 1981. – 512 с.
7. Смирнов, А.Ф. Строительная механика. Динамика и устойчивость сооружений [Текст] / А.Ф., Смирнов А.В. Александров, Б.Я. Лащенников, Н.Н. Шапошников: под ред. чл.-кор. АН СССР А.Ф. Смирнова. – М.: Стройиздат, 1984. – 416 с.

## О Г Л А В Л Е Н И Е

ПРЕДИСЛОВИЕ.....	3
1. КИНЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ.....	4
2. СТАТИЧЕСКИ ОПРЕДЕЛИМЫЕ СИСТЕМЫ.....	18
3. СТАТИЧЕСКИ НЕОПРЕДЕЛИМЫЕ СИСТЕМЫ.....	34
4. ОСНОВЫ УСТОЙЧИВОСТИ СООРУЖЕНИЙ.....	63
5. ОСНОВЫ ДИНАМИКИ СООРУЖЕНИЙ.....	87
6. ПРИМЕРЫ ОЛИМПИАДНЫХ ЗАДАЧ.....	110
БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК.....	130

Учебное издание

Шеин Александр Иванович  
Волков Владимир Павлович

ОЛИМПИАДНЫЕ ЗАДАЧИ  
ПО СТРОИТЕЛЬНОЙ МЕХАНИКЕ  
Учебное пособие

Редактор М.А. Сухова  
Верстка Н.А. Сазонова

---

Подписано в печать 08.06.13. Формат 60×84/16.  
Бумага офисная «Снегурочка». Печать на ризографе.  
Усл. печ. л. 7,67. Уч.-изд. л. 8,25. Тираж 80 экз.  
Заказ №126.



---

Издательство ПГУАС.  
440028, г.Пенза, ул. Германа Титова, 28.