МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«Пензенский государственный университет
архитектуры и строительства»
(ПГУАС)

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ: ОБРАБОТКА ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫХ ДАННЫХ, ИНТЕРПОЛЯЦИЯ

**Методические указания
к практическим занятиям**

Под общей редакцией доктора технических наук,
профессора Ю.П. Скачкова

Пенза 2013

УДК 517
ББК 22-161.1
М34

Методические указания подготовлены в рамках проекта «ПГУАС – региональный центр повышения качества подготовки высококвалифицированных кадров для строительной отрасли» (конкурс Министерства образования и науки Российской Федерации – «Кадры для регионов»)

Рекомендовано Редсоветом университета

Рецензент – доктор химических наук, профессор кафедра «Информационно-вычислительные системы» А.Н. Кошев (ПГУАС)

М34 **Математическое** моделирование: обработка опытных данных, интерполяция: метод. указания к практическим занятиям / А.М. Данилов, И.А. Гарькина, С.В. Кучин; под общ. ред. д-ра техн. наук, проф. Ю.П. Скачкова. – Пенза: ПГУАС, 2013. – 12 с.

Рассматриваются вопросы математического моделирования, имеющие приоритетное прикладное значение, приводятся основные методы интерполяции таблично заданных функций, приложения к решению инженерных задач, предлагаются упражнения для самостоятельной работы.

Методические указания направлены на развитие у студентов способности демонстрировать знания фундаментальных и прикладных дисциплин ООП магистратуры, проводить научные эксперименты, разрабатывать физические и математические модели явлений и объектов, относящихся к профилю деятельности; овладение умением оценивать результаты исследований.

Подготовлены на кафедре «Математика и математическое моделирование» и базовой кафедре ПГУАС при ЗАО «Строймеханизация» и предназначены для магистрантов, обучающихся по направлению 270800 «Строительство».

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

В инженерной практике (исследования процессов, анализ и синтез систем и др.) часто возникает задача аппроксимации (приближения) функций.

Это можно сделать разными способами и точностью (например, кусочно-постоянными, кусочно-линейными, кусочно-квадратичными функциями, так и более сложными – многочленами достаточно высокой степени; сплайнами и т.д.).

Естественно, повышение точности аппроксимации неизбежно ведет к усложнению вида аппроксимирующей функции.

Задачи интерполяции и экстраполяции (восстановление значений функции на заданном отрезке по ее значениям в некоторых точках отрезка) являются частным случаем задачи аппроксимации.

Пусть на отрезке $[a,b]$ известны значения функции $f(x)$ и, возможно, некоторых ее производных лишь в точках $x_0, x_1, \ldots, x_n$ (все перечисленные величины называют исходными данными, а точки $x_0, x_1, \ldots, x_n$ – *узлами интерполяции*). Требуется найти приближенно значения функции $f(x)$ и, возможно, значение некоторых ее производных в точках x, лежащих между узлами $x_0, x_1, \ldots, x_n$ (*задача интерполяции*) или в точках x, лежащих вне, справа и/или слева от узлов (*задача экстраполяции*). Таким образом, по исходным данным требуется построить такую интерполирующую функцию $\tilde{f}(x)$, чтобы ее значения в узлах интерполяции *с заданной точностью* совпадали с данными значениями $f(x)$, а в остальных точках отрезка [a,b] были близки к неизвестным значениям функции $f(x)$.

Возможность построения такой функции $\tilde{f}(x)$ дают известные результаты по теории аппроксимации. Так, *если данная функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$, то ее с любой точностью можно аппроксимировать многочленам или другими функциями достаточно простой структуры (кусочно-постоянными, кусочно-линейными, кусочно-квадратичными).*

ЗАДАЧА ИНТЕРПОЛЯЦИИ

Пусть данная функция $y = f(x)$ задана таблично: $y_k = f(x_k)$; $x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n$

Интерполяция кусочно-постоянной функцией. Определим интерполяционную функцию $f(x)$ на отрезке $[x_0, x_n]$ формулой

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} y_k, \text{если} \quad x = x_k \\ \dfrac{y_k + y_{k+1}}{2}, \text{если} \quad x_k < x < x_{k+1} \end{cases}.$$

Замечания

1. Возможны и иные определения кусочно-постоянной интерполяционной функции, например, $f(x) = y_k$, если $x_k \le x \le x_{k+1}$.

2. Интерполяция кусочно-постоянной функцией очень грубая, однако для решения многих прикладных задач вполне достаточная. Такую интерполяцию удобно применять, например, при решении задач, связанных с интегрированием функции $f(x)$.

3. Погрешность кусочно-постоянной интерполяции имеет порядок величины $\max\limits_k |y_{k+1} - y_k|$, если шаг интерполяции $h = \max\limits_i |x_{k+1} - x_k|$ достаточно мал.

Задания для самостоятельной работы

1. Построить график интерполирующей кусочно-постоянной функции

$\tilde{f}(x)$ на $[x_0, x_n]$ по данным:

а)

x	-2,5	-2,3	-2,0	-1,6	-1,1	-0,9	-0,6	-0,4	-0,1
y	1,5	1,9	2,5	2,1	1,7	1,3	1,1	0,7	1,3

б)

x	$(m/5)$	$(m/5)+0{,}1$	$(m/5)+0{,}4$	$(m/5)+0{,}6$	$(m/5)+0{,}7$	$(m/5)+0{,}9$	$(m/5)+1{,}3$
y	$(k+1)/10$	$(k+5)/10$	$(k+9)/10$	$(k+11)/10$	$(k+7)/10$	$(k+3)/10$	$(k-1)/10$

Здесь m – номер студента по журналу, k – номер группы (последняя цифра).

2. Вычислить $\int\limits_{x_0}^{x_n} f(x)dx$ для функции $f(x)$, заданной таблицами а) и б), применив кусочно-постоянную интерполяцию. Изобразить на рисунке фигуру, площадь которой вычислили.

Что за приближенную форму численного интегрирования вы при этом получили (формулу прямоугольников, трапеций или Симпсона)?

3. Вычислить коэффициенты Фурье a_0, a_1, a_2, b_1, b_2 функции $f(x)$, заданной таблицей на отрезке $[0, \pi]$ и продолженной на четным образом для нечетных m и нечетным образом для четных m (m – номер студента по журналу)

x	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	p
y	$\frac{m-13}{10}$	$\frac{m-9}{10}$	$\frac{m-3}{10}$	$\frac{m-7}{10}$	$\frac{m-11}{10}$

Построить графики функций $f(x)$ и $\tilde{f}(x)$ на $[-\pi, \pi]$.

Интерполяция кусочно-линейной функцией. Интерполяционную функцию $\tilde{f}(x)$ на отрезке $[x_0, x_n]$, определим формулой

$$\tilde{f}(x) = y_k + \frac{y_{k+1} - y_k}{x_{k+1} - x_k} \cdot (x - x_k), \text{ если } \quad x_k \le x \le x_{k+1}$$

(воспользовались уравнением прямой, проходящей через две точки $A(x_k, y_k)$ и $B(x_{k+1}, y_{k+1})$).

Кусочно-линейная функция графически представляет собой ломаную линию, соединяющую точки $(x_0, y_0), (x_1, y_1), \ldots, (x_n, y_n)$.

Кусочно-линейная интерполяция дает более полную информацию о функции $f(x)$, в частности, о ее графике. На практике такой интерполяцией пользуются значительно чаще (метод Эйлера решения дифференциальных уравнений).

Задания для самостоятельной работы

При данных предыдущего задания:

– построить графики интерполяционной кусочно-линейной функции $\tilde{f}(x)$ и ее производной $\tilde{f}'(x)$;

– вычислить $\int\limits_{x_0}^{x_n} f(x)dx$ применив кусочно-линейную интерполяцию функции *f(x)* (результат сравнить с результатом, полученным выше); какую приближенную формулу интегрирования вы при этом получили?

– применяя кусочно-линейную интерполяцию, найдите приближенное решение задачи Коши

$$\frac{dx}{dt} = txy - y^2 + 1 + t\frac{m-k}{10},$$

$$\frac{dy}{dt} = x^2 + t\cdot(x-y), \quad x(0)=0, y(0)=1$$

на отрезке [0,1] с шагом h=0,2 (здесь m – номер студента по журналу, k – номер группы). Изобразите *приближенное* решение на плоскостях ($t;x$) и ($t;y$), а также фазовой плоскости ($x;y$).

Интерполяция кусочно-квадратичной функцией. Интерполяционную кусочно-квадратичную функцию на отрезке $[x_0, x_n]$ определим формулой

$$\tilde{f}(x) = \frac{(x-x_k)\cdot(x-x_{k+1})}{(x_{k-1}-x_k)\cdot(x_{k-1}-x_{k+1})}y_{k-1} + \frac{(x-x_{k-1})\cdot(x-x_{k+1})}{(x_k-x_{k-1})\cdot(x_k-x_{k+1})}y_k +$$
$$+\frac{(x-x_{k+1})\cdot(x-x_k)}{(x_{k+1}-x_{k-1})\cdot(x_{k+1}-x_k)}y_{k+1}$$

если $x_{k-1} \le x \le x_{k-1}$, $k = 1,3,5,\ldots,n-1$ (n должно быть четным числом).

Нетрудно убедиться, что это парабола $y = a_k x^2 + b_k x + c_k$, $k = 1,3,5,\ldots,n-1$, проходящая через три точки: (x_{k-1}, y_{k-1}), (x_k, y_k), (x_{k+1}, y_{k+1}); коэффициенты a_k, b_k, c_k легко вычисляются с использованием интерполяционной формулы.

Кусочно-квадратичная интерполяция для решения многих задач оказывается наиболее удобной, как имеющая достаточно простой вид и малую погрешность..

Задания для самостоятельной работы

При данных предыдущих заданий с точностью до 10^{-2}:

– вычислить $\int_{x_0}^{x_n} f(x)dx$, применив кусочно-квадратичную интерполяцию функции *f(x)* (результат сравнить с результатом, полученным ранее); какую приближенную формулу вы при этом получили?

– вычислить кривизну кривой $y = f(x)$ в точках $x_1, \frac{x_2 + x_3}{2}, x_4$, применив кусочно-квадратичную интерполяцию; для каждой точки вычислить радиус кривизны, построить центр кривизны.

Интерполяция многочленом *n*-й степени. Можно доказать, что существует и притом единственный многочлен *n*-й степени, принимающий в точках $x_0, x_1, \dots, x_n$ заданные значения $y_0, y_1, \dots, y_n$.

Записать такой многочлен можно разными формулами (каждая из них может оказаться более удобной в той или другой ситуации). Наиболее часто используются две формулы.

Формула Лагранжа.

$$\tilde{f}(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)...(x-x_n)}{(x_0-x_1)\cdot(x_0-x_2)...(x_0-x_n)}y_0 + \frac{(x-x_0)\cdot(x-x_2)...(x-x_n)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)\cdot...(x_1-x_n)}y_1 + ...$$

$$\dots + \frac{(x-x_0)\cdot(x-x_1)...(x-x_{n-1})}{(x_n-x_0)\cdot(x_n-x_1)...(x_n-x_{n-1})}y_n$$

или сокращенно

$$\tilde{f}(x) = \sum_{k=0}^{n}\prod_{\substack{i=0\\ i\neq k}}^{n}\frac{x-x_i}{x_k-x_i}y_k.$$

Отметим, что стоящий перед y_k множитель будет равен 1, если $x = x_k$ и 0, если $x = x_i, j \neq k$. Так что $\tilde{f}(x_k) = y_k$.

Формула Ньютона (для равностоящих узлов).

$$\tilde{f}(x) = y_0 + \frac{\Delta y_0}{1!}\cdot\frac{x-x_0}{h} + \frac{\Delta^2 y_0}{2!}\cdot\frac{x-x_0}{h}\left(\frac{x-x_0}{h}-1\right) + ...$$

$$+\frac{\Delta^n y_0}{n!}\cdot\frac{x-x_0}{h}\left(\frac{x-x_0}{h}-1\right)\cdot\left(\frac{x-x_0}{h}-2\right)......\left(\frac{x-x_0}{h}-n+1\right),$$

здесь $\Delta y_0 = y_1 - y_0,$ $\Delta^2 y_0 = \Delta y_1 - \Delta y_0 = (y_2 - y_1)(y_1 - y_0)$;

$\Delta^3 y_0 = \Delta^2 y_1 - \Delta^2 y_0, ..., \Delta^n \Delta y_0 = \Delta^{n-1} y_1 - \Delta^{n-1} y_0$, $h = x_k - x_{k-1}$.

Для погрешности $R(x)=f(x)\cdot\tilde{f}(x)$ интерполяции многочленом *n*-ой степени (ошибка при замене функции *f(x)* многочленом $\tilde{f}(x)$) справедливо:

$$\left|R(x)\right|\le\left|x-x_0\right|\cdot\left|x-x_1\right|...\left|x-x_n\right|\cdot\frac{1}{(n+1)!}\cdot\max_x\left|f^{(n+1)}(x)\right| \quad .$$

Задания для самостоятельной работы

1. Воспользовавшись формулами Лагранжа и Ньютона, найти коэффициенты интерполяционного многочлена *n*-ой степени, для таблично заданной функции

x_k	-0,1	0	0,1	0,2	0,3
$y_k=f(x_k)$	$(m\text{-}k)/10$	$(m\text{-}k+3)/10$	$(m\text{-}k+8)/10$	$(m\text{-}k+h)/10$	$(m\text{-}k+6)/10$

2. Воспользовавшись полученным интерполяционным многочленом, вычислить кривизну кривой *y* = *f(x)* в точке 0,15.

3. Заменив *f(x)* полученным интерполяционным многочленом $\tilde{f}(x)$, вычислить $\int\limits_{0,2}^{0,4}f(x)dx$.

Интерполяция функциями с конечным числом параметров. Пусть *K(a, b, c,...)* – некоторый класс функций, каждая из которых определяется *конечным* числом параметров (коэффициентов):

– класс линейных функций $y=ax+b$ (параметры a,b);

– класс квадратичных функций $y=ax^2+bx+c$ (параметры a,b,c);

– класс многочленов степени *n*: $y=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n$ (параметры $a_0,\ldots,a_n$);

– класс функций $y=a+b\cdot\sin x+c\cdot\cos x$ (параметры a,b,c)

и т.д.

Воспользуемся **методом наименьших квадратов**: в качестве интерполяционной функции $\tilde{f}(x)$ из *заданного* класса *K(a, b, c,...)* возьмем такую функцию, чтобы для погрешностей в узлах интерполяции выполнялось условие

$$R(a,b,c,...)=\sum_{k=0}^{n}\left(\tilde{f}(x_k)-y_k\right)^2=\min.$$

Таким образом, коэффициенты (параметры) функции $\tilde{f}(x)$ должны вычисляться из условий минимума функции многих переменных $R = R(a,b,c,\ldots)$.

Пример. Пусть $f(x)$ задана таблицей (в общем виде)

x	x_0	x_1	...	x_n
$f(x)$	y_0	y_1	...	y_n

Возьмем класс квадратичных функций. Будем иметь

$$R(a,b,c) = \sum_{k=0}^{n}(ax_k^{\ 2} + bx_k + c - y_k)^2.$$

Для определения коэффициентов a,b,c интерполяционной функции $\tilde{f}(x) = ax^2 + bx + c$, найдем стационарные точки функции $R(a, b, c)$ из системы уравнений (необходимые условия безусловного экстремума $R(a,b,c)$):

$$\left.\begin{aligned} R'_a &= \sum_{k=0}^{n} 2\left(ax_k^{\ 2} + bx_k + c - y_k\right)x_k^{\ 2} = 0,\\ R'_b &= \sum_{k=0}^{n} 2\left(ax_k^{\ 2} + bx_k + c - y_k\right)x_k = 0,\\ R'_c &= \sum_{k=0}^{n} 2\left(ax_k^{\ 2} + bx_k + c - y_k\right)1 = 0 \end{aligned}\right\}$$

или

$$\left.\begin{aligned} a\cdot\sum x_k^{\ 4} + b\sum x_k^{\ 3} + c\cdot\sum x_k^{\ 2} &= \sum y_k x_k^{\ 2}\\ a\cdot\sum x_k^{\ 3} + b\sum x_k^{\ 2} + c\cdot\sum x_k &= \sum y_k x_k\\ a\cdot\sum x_k^{\ 2} + b\sum x_k + c\cdot(n+1) &= \sum y_k \end{aligned}\right\}.$$

Решив систему, найдем искомые интерполяционные коэффициенты a,b,c , а затем и саму интерполяционную функцию.

Задания для самостоятельного решения

При данных предыдущих заданий:

– найти интерполяционную функцию $\tilde{f}(x)$ из класса кубичных функций $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$;

– найти интерполяционную функцию $\tilde{f}(x)$ из класса функций $y = a + b\cdot\sin x + c\cdot\cos x$;

– заменив *f(x)* полученными ранее интерполяционными функциями $\tilde{f}(x)$, вычислить $\int\limits_{x_0}^{x_n} f(x)dx$.

Кусочно-постоянная интерполяция функций нескольких переменных. Рассмотрим функцию *k* переменных $f(X) = f\left(x^1, x^2, \ldots, x^k\right)$. Пусть D – область изменения $X\left(x^1, x^2, \ldots, x^k\right)$; X – точка области D. Разобьем область D на малые области D_j так, чтобы каждая из областей D_j содержала *одну* из *заданных* точек X_j, $j = \overline{o,n}$, в которых известны значения функции $f(X)$, а именно:

$$f(X_0) = f\left(x_o^1, x_0^2, \ldots, x_0^k\right) = y_0,$$
$$f(X_1) = f\left(x_1^1, x_1^2, \ldots, x_1^k\right) = y_1,$$
$$\ldots$$
$$f(X_n) = f\left(x_n^1, x_n^2, \ldots, x_n^k\right) = y_n$$

(точки $\left(x_j^1, x_j^2, \ldots, x_j^k, y_j\right)$ – узлы интерполяции).

Здесь интерполирующая функция $\tilde{f}(x)$ будет кусочно-постоянной функцией и на каждой частичной области D_j будем иметь

$$\tilde{f}\left(x^1, x^2, \ldots, x^k\right) = y_j,\ \left(x_j^1, x_j^2, \ldots, x_j^k\right) \in D_j;$$

$$f\left(x^1, x^2, \ldots, x^k\right) \approx \begin{cases} y_0 \text{ при } \left(x^1, x^2, \ldots, x^k\right) \in D_0 \\ y_1 \text{ при } \left(x^1, x^2, \ldots, x^k\right) \in D_1 \\ \ldots \\ y_n \text{ при } \left(x^1, x^2, \ldots, x^k\right) \in D_n \end{cases}.$$

Кусочно-постоянной интерполяцией часто пользуются при вычислении многомерных интегралов, при решении уравнений математической физики методом сеток и т.п.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Зарубин, В.С. Математическое моделирование в технике [Текст] / В.С. Зарубин. – М.: МГТУ им.Н.Э.Баумана, 2010. – 496 с.

2. Солдатенко, Л.В. Введение в математическое моделирование строительно-технологических задач [Текст]: учеб. пособие / Л.В. Солдатенко. – Оренбург: ГОУ ОГУ, 2009. – 161 с.

3. Сидоров, В.Н. Математическое моделирование в строительстве [Текст] / В. Н. Сидоров, В. К. Ахметов. – М.: АСВ, 2007. – 336 с.

4. Чашкин, Ю.Р. Математическая статистика. Анализ и обработка данных [Текст] / Ю.Р. Чашкин. – Ростов н/Д.: Феникс, 2010. – 240 с.

5. Данилов, А.М. Теория систем: математические методы строительного материаловедения [Текст]: моногр. / А.М. Данилов, И.А. Гарькина. – Пенза: ПГУАС, 2008. – 379 с.

6. Данилов, А.М. Математическое и компьютерное моделирование сложных систем [Текст] / А.М. Данилов, И.А. Гарькина, Э.Р. Домке. – Пенза: ПГУАС, 2011. – 296 с.

Учебное издание

Данилов Александр Максимович
Гарькина Ирина Александровна
Кучин Сергей Владимирович

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ:
ОБРАБОТКА ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫХ ДАННЫХ,
ИНТЕРПОЛЯЦИЯ

Методические указания
к практическим занятиям

Под общ. ред. д-ра техн. наук, проф. Ю.П. Скачкова

Редактор М.А. Сухова
Верстка Н.А. Сазонова

Подписано в печать 16.12.13. Формат 60×84/16.
Бумага офисная «Снегурочка». Печать на ризографе.
Усл. печ.л. 2,79. Уч.-изд.л. 3,0. Тираж 80 экз.
Заказ № 306.

Издательство ПГУАС.
440028, г.Пенза, ул. Германа Титова, 28.