МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«Пензенский государственный университет
архитектуры и строительства»

Г.А. Левова, О.В. Снежкина

МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ
Практикум

Рекомендовано Редсоветом университета
в качестве учебного пособия для студентов,
обучающихся по направлению 270800 «Строительство»

Пенза 2013

УДК 518
ББК 22.19
Л34

Рецензенты: кандидат технических наук, доцент кафедры «Физика» О.А. Захаров (ПГУАС)
кандидат педагогических наук, доцент кафедры «Автоматизированных систем управления и программного обеспечения» филиала Военного учебно-научного центра Сухопутных войск «Общевойсковая Академия ВС РФ» г. Пенза О.В. Бочкарева (ПГУАС)

Левова Г.А.
Л34 Методы решения систем линейных уравнений: практикум / Г.А. Левова, О.В. Снежкина. – Пенза: ПГУАС, 2013 – 90 с.

Настоящее учебное пособие представляет собой практикум по решению задач по вычислительной математике.

Содержатся краткие теоретические сведения, подробное решение типовых примеров, представлены задачи для самостоятельного решения. Учебное пособие соответствует образовательным стандартам третьего поколения направления 270800 «Строительство» (квалификация бакалавр) и рекомендуется при изучении дисциплины «Математика».

Пособие подготовлено на кафедре математики и математического моделирования и предназначено для студентов вузов инженерных и экономических специальностей. Может быть полезно аспирантам, инженерам-исследователям, работающим в области прикладных наук.

ОГЛАВЛЕНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ

Разумное использование современной вычислительной техники немыслимо без умелого применения приближенного и численного анализа. Этим объясняется чрезвычайно возросший интерес к методам приближенных вычислений и, соответственно, к литературе, посвященной этим вопросам. Особенно остро ощущается нехватка учебно-методических пособий по решению задач по вычислительной математике.

Цель настоящего пособия – восполнить этот пробел.

Учебное пособие имеет следующую структуру. В начале каждого раздела даются краткие теоретические сведения: постановка задачи, рабочие формулы, вычислительные схемы, сравнение отдельных методов с точки зрения их трудоемкости, достигаемой степени точности и т.п. Далее приводится подробное решение типовых примеров, иллюстрирующих соответствующие алгоритмы. В конце раздела предлагаются задачи для самостоятельной работы и пример решения типового варианта такой задачи.

Пособие рассчитано на читателя, который занимается не столько разработкой численных методов, сколько их применением при решении прикладных проблем. Причем в процессе работы над пособием читатель не только знакомится с основными идеями построения вычислительных алгоритмов и с их обоснованием, но и приобретет знания, достаточные для разработки новых алгоритмов.

Таким образом, пособие ориентировано в первую очередь на студентов высших учебных заведений, обучающихся по направлению «Строительство» и желающих приобрести необходимые навыки в решении прикладных задач. Также оно может оказаться полезным аспирантам, инженерам-исследователям, работающим в области прикладных наук.

ВВЕДЕНИЕ

Изложению численных методов посвящено немало книг, однако большинство из них ориентировано на студентов-математиков и научных сотрудников. В то же время практически отсутствует учебная литература, в которой доступным для студента технического вуза или инженера были бы изложены основы вычислительных методов, применяемых сегодня при решении прикладных задач. Предлагаемое пособие отвечает этим требованиям. Оно довольно полно отражает круг вопросов, посвященных одному из разделов алгебры “Решение систем линейных уравнений”.

Системы линейных алгебраических уравнений можно решать как с помощью прямых, так и с помощью итерационных методов. Для систем уравнений средней размерности чаще используют прямые методы. Итерационные методы применяют главным образом для решения задач большой размерности. Сложные вычислительные задачи, возникающие при исследовании технических и экономических проблем, можно разбить на ряд элементарных, многие из которых являются несложными и хорошо изученными. Для каждой задачи существует множество методов решения. Например, хорошо обусловленную систему линейных уравнений можно решать методом Крамера, Гаусса, Жордана, оптимального исключения, окаймления, отражений, ортогонализации и др. Окончательный выбор лучших методов можно сделать только на основании большого опыта практических расчетов.

В данном пособии сделана попытка такого отбора, опирающаяся на многолетний опыт решения большого числа разнообразных задач. Пособие рассчитано на читателя, который занимается не столько разработкой численных методов, сколько их применением к прикладным проблемам. Однако в процессе работы над пособием читатель, знакомясь с основными идеями построения вычислительных алгоритмов и с их обоснованием, приобретет знания, достаточные для разработки новых алгоритмов.

1. РЕШЕНИЕ СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

1.1. Системы линейных уравнений

В общем виде *система m линейных уравнений с n неизвестными* записывается так:

$$\begin{cases} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + ... + a_{1,j}x_j + ... + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + ... + a_{2,j}x_j + ... + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{i,1}x_1 + a_{i,2}x_2 + ... + a_{i,j}x_j + ... + a_{in}x_n = b_i, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m,1}x_1 + a_{m,2}x_2 + ... + a_{m,j}x_j + ... + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases} \qquad (1)$$

Уравнения системы считаются пронумерованными: первое, второе, ..., m-е. Числа $x_1, x_2, ..., x_n$ называются *неизвестными* системы; a_{11}, a_{12}, ..., a_{mn} – *коэффициентами* при неизвестных системы.

Коэффициент при неизвестном x_{ij} в i-м уравнении обозначается через a_{ij}, где первый индекс i указывает номер уравнения, в котором находится данный коэффициент, а второй индекс i – номер неизвестного при данном коэффициенте. Например, коэффициент a_{23} находится во втором уравнении системы при неизвестном x_3.

Числа b_1, b_2,..., b_m называются *свободными членами* системы.

Кратко система (1) может быть записана так:

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i\left(i = 1, 2, ..., m\right). \qquad (2)$$

Решением системы линейных уравнений (1) называется любая совокупность чисел $a_1, a_2, ..., a_n$, которая, будучи подставленной на место неизвестных $x_1, x_2, ..., x_n$ в уравнения данной системы, обращает все эти уравнения в тождества.

Система линейных уравнений (1) называется *совместной,* если она имеет решение. Если система линейных уравнений не имеет решения, то она называется *несовместной* (или *противоречивой).*

Совместная система линейных уравнений может иметь одно или несколько решений и называется *определенной*, если имеет только одно единственное решение, и *неопределенной,* если имеет больше одного решения.

Две системы линейных уравнений с одним и тем же числом неизвестных называются *эквивалентными,* если они или обе несовместны, или обе совместны и имеют одни и те же решения.

Элементарными преобразованиями системы линейных уравнений называются следующие три типа преобразований:

1) перестановка двух уравнений системы;

2) умножение обеих частей уравнения системы на любое, отличное от нуля число;

3) прибавление (вычитание) к обеим частям одного уравнения соответствующих частей другого уравнения, умноженных на любое число.

Можно доказать, что элементарные преобразования переводят данную систему линейных уравнений в эквивалентную. Выполнение элементарных преобразований равносильно выражению одного неизвестного через другие.

Система, в которой свободные члены $b_1, b_2, ..., b_n$ равны нулю, называется *однородной.*

1.2. Теорема Кронекера–Капелли

Вопрос о совместности системы (1) решается с помощью теоремы Кронекера–Капелли.

Пусть дана система линейных уравнений

$$\begin{cases} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m,1}x_1 + a_{m,2}x_2 + ... + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases} \qquad (3)$$

Для установления условия совместности этой системы необходимо ввести понятие матрицы системы и расширенной матрицы системы.

Матрицей системы (3) называется матрица, составленная из коэффициентов при неизвестных этой системы:

$$A = \begin{bmatrix} a_{1,1}a_{1,2}...a_{1,n} \\ a_{2,1}a_{2,2}...a_{2,n} \\ \dots\dots\dots\dots \\ a_{m,1}a_{m,2}...a_{m,n} \end{bmatrix}.$$

Если присоединить к матрице A столбец свободных членов, то получится матрица $\overline{A}$, которая называется *расширенной матрицей системы* (3):

$$A = \begin{bmatrix} a_{1,1}a_{1,2}...a_{1,n}b_1 \\ a_{2,1}a_{2,2}...a_{2,n}b_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m,1}a_{m,2}...a_{m,n}b_m \end{bmatrix}.$$

Из определения матрицы системы A и расширенной матрицы $\overline{A}$ ясно, что их ранги $r(A)$ и $r(\overline{A})$ либо равны между собой, либо ранг $r(\overline{A})$ на единицу больше, чем $r(A)$.

Используя теорему Кронекера–Капелли, принимают решение о совместимости системы (3): *система линейных уравнений* (3) *совместна тогда и только тогда, когда ранг расширенной матрицы* $\overline{A}$ *равен рангу матрицы A, т. е. когда* $r(\overline{A}) = r(A)$.

П р и м е р. Исследовать на совместность следующую систему линейных уравнений:

$$\begin{cases} 7x_1 + 3x_2 = 2, \\ x_1 - 2x_2 = -3, \\ 4x_1 + 9x_2 = 11. \end{cases}$$

1. Составим матрицу данной системы и вычислим ее ранг:

$$A = \begin{bmatrix} 7 & 3 \\ 1 & -2 \\ 4 & 9 \end{bmatrix}; \quad r(A) = 2, \text{ поскольку } M_2^1 = \begin{vmatrix} 7 & 3 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} \neq 0.$$

2. Составим расширенную матрицу системы:

$$\overline{A} = \begin{bmatrix} 7 & 3 & 2 \\ 1 & -2 & -3 \\ 4 & 9 & 11 \end{bmatrix}.$$

Так как $M_2^1 \neq 0$, а окаймляющий его минор

$$M_3 = \det A = \begin{vmatrix} 7 & 3 & 2 \\ 1 & -2 & -3 \\ 4 & 9 & 11 \end{vmatrix} = 0$$

(1-я строка равна сумме 2-й, умноженной на 3, и 3-й строк), то $r\left(\overline{A}\right)$.

Итак, $r(A) = r\left(\overline{A}\right) = 2$, т. е. данная система совместна.

Следствие 1. *Если система* (3) *совместна и ранг матрицы системы* $r(A) = r$ *равен числу неизвестных n, то система имеет единственное решение.*

Следствие 2. *Если система* (3) *совместна и ранг матрицы системы* $r(A) = r$ *меньше числа неизвестных n, то система имеет бесчисленное множество решений.*

1.3. Решение систем линейных уравнений по формулам Крамера

Пусть дана система линейных уравнений, в которой число уравнений равно числу неизвестных:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_2, \\ .... \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + ... + a_{nn}x_n = b_n, \end{cases} \tag{4}$$

а $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{nn} \end{bmatrix}$, $b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ . \\ b_n \end{bmatrix}$, $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ . \\ x_n \end{bmatrix}$ – соответственно матрица системы, столбец свободных членов и столбец неизвестных. Предположим, что определитель системы

$$d = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{nn} \end{vmatrix} \neq 0.$$

Если теперь заменить последовательно в определителе d столбцы коэффициентов при неизвестных x_j ($j = 1, 2, ..., n$) столбцом свободных членов b_i, то получатся соответственно определители:

$$d_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & \dots & a_{1,n-1} & a_{1n} \\ b_{21} & a_{22} & \dots & a_{2,n-1} & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_n & a_{n2} & \dots & a_{n,n-1} & a_{nn} \end{vmatrix}; \quad d_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & \dots & a_{1,n-1} & a_{1n} \\ a_{21} & b_2 & \dots & a_{2,n-1} & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_n & b_n & \dots & a_{n,n-1} & a_{nn} \end{vmatrix},$$

....

$$d_{n--1} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & b_1 & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & b_2 & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & b_n & a_{nn} \end{vmatrix}; \quad d_n = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1,n-1} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2,n-1} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{n,n-1} & b_n \end{vmatrix}.$$

Теорема Крамера. *Система n линейных уравнений с n неизвестными, определитель которой отличен от нуля, всегда совместна и имеет единственное решение, вычисляемое по формулам*:

$$x_1 = d_1/d; \quad x_2 = d_2/d; \quad ...; \quad x_{n-1} = d_{n-1}/d; \quad x_n = d_n/d. \qquad (5)$$

Формулы (5) называются *формулами Крамера*.

П р и м е р 1. Решить по формулам Крамера систему линейных уравнений

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 = -1, \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 = -1, \\ 4x_1 + x_2 + 4x_3 = -2. \end{cases}$$

Р е ш е н и е.

1. Вычисляем определитель системы:

$$d = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 4 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 4 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 2(-2+4+2+4-4-1) = 6.$$

2. Вычисляем определители, составленные из коэффициентов при неизвестных x_1, x_2, x_3:

$$d_1 = \begin{vmatrix} -1 & 1 & 2 \\ -4 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -4 & -1 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 2(2-2-4-2+1+8) = 6;$$

$$d_2=\begin{vmatrix}1&-1&2\\2&-4&2\\4&-2&4\end{vmatrix}=2\begin{vmatrix}1&-1&1\\2&-4&1\\4&-2&2\end{vmatrix}=4\begin{vmatrix}1&-1&1\\2&-4&1\\2&-1&1\end{vmatrix}=$$

$$=4(-4-2-2+8+2+1)=12;$$

$$d_3=\begin{vmatrix}1&1&-1\\2&-1&-4\\4&1&-2\end{vmatrix}=2-16-2-4+4+4=-12.$$

3. Используя формулы Крамера (5), находим решение системы:

$$x_1=d_1/d=6/6=1;\quad x_2=d_2/d=12/6=2;\quad x_3=-12/6=-2.$$

П р и м е р 2. Решить по формулам Крамера систему линейных уравнений

$$\begin{cases}2x_1-x_2+x_3+3x_4=-1,\\ x_1+x_2-x_3-4x_4=6,\\ 3x_1-x_2+x_3+x_4=4,\\ x_1-3x_2+3x_4=-5.\end{cases}$$

Р е ш е н и е. Находим определители d, d_1, d_2, d_3 и d_4, раскладывая их на миноры по элементам последней строки, а затем применяя правило треугольников:

$$d=\begin{vmatrix}2&-1&1&3\\1&1&-1&-4\\3&-1&1&1\\1&-3&0&3\end{vmatrix}=-\begin{vmatrix}-1&1&3\\1&-1&-4\\-1&1&1\end{vmatrix}-3\begin{vmatrix}2&1&3\\1&-1&-4\\3&1&1\end{vmatrix}+3\begin{vmatrix}2&-1&1\\1&1&-1\\3&-1&1\end{vmatrix}=$$

$$=(-1)\cdot 0-3\cdot 5+3\cdot 0=-15.$$

(Первый и третий определители равны нулю, так как имеют пропорциональные столбцы).

$$d_1=\begin{vmatrix}-1&-1&1&3\\6&1&-1&-4\\4&-1&1&1\\-5&-3&0&3\end{vmatrix}=5\begin{vmatrix}-1&1&3\\1&-1&-4\\-1&1&1\end{vmatrix}-3\begin{vmatrix}-1&1&3\\1&-1&-4\\-1&1&1\end{vmatrix}+$$

$$+3\begin{vmatrix}-1&-1&1\\6&1&-1\\4&-1&1\end{vmatrix}=5\cdot 0-3\cdot 5+3\cdot 0=-15;$$

$$d_2=\begin{vmatrix}2&-1&1&3\\1&6&-1&-4\\3&4&1&1\\1&-5&0&3\end{vmatrix}=-\begin{vmatrix}-1&1&3\\6&-1&-4\\4&1&1\end{vmatrix}-5\begin{vmatrix}2&1&3\\1&-1&-4\\3&1&1\end{vmatrix}+$$

$$+3\begin{vmatrix}2&-1&1\\1&6&-1\\3&4&1\end{vmatrix}=(-1)\cdot5-5\cdot5+3\cdot10=0;$$

$$d_3=\begin{vmatrix}2&-1&-1&3\\1&1&6&-4\\3&-1&4&1\\1&-3&-5&3\end{vmatrix}=-\begin{vmatrix}-1&-1&3\\1&6&-4\\-1&4&1\end{vmatrix}-3\begin{vmatrix}2&-1&3\\1&6&-4\\3&4&1\end{vmatrix}+$$

$$+5\begin{vmatrix}2&-1&3\\1&1&-4\\3&-1&1\end{vmatrix}+3\begin{vmatrix}2&-1&1\\1&1&6\\3&-1&4\end{vmatrix}=(-1)\cdot5-3\cdot15+5\cdot(-5)+3\cdot10=-45;$$

$$d_4=\begin{vmatrix}2&-1&1&-1\\1&1&-1&6\\3&-1&1&4\\1&-3&0&-5\end{vmatrix}=-\begin{vmatrix}-1&1&-1\\1&-1&6\\-1&1&4\end{vmatrix}-3\begin{vmatrix}2&1&-1\\1&-1&6\\3&1&4\end{vmatrix}-$$

$$-5\begin{vmatrix}2&-1&1\\1&1&-1\\3&-1&1\end{vmatrix}=(-1)\cdot0-3\cdot(-10)-5\cdot0=30.$$

Теперь по формулам Крамера (5) получаем решение системы:

$$x_1=d_1/d=(-15)/(-15)=1;\quad x_2=d_2/d=0/(-15)=0;$$

$$x_3=d_3/d=(-45)/(-15)=3;\quad x_4=d_4/d=30/(-15)=-2.$$

Заметим, что решение системы линейных уравнений по формулам Крамера очень громоздко. На практике такие системы обычно решают другими методами.

1.4. Решение произвольных систем линейных уравнений

Пусть

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_2, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \tag{6}$$

– произвольная система линейных уравнений, где число m уравнений системы не равно числу n неизвестных ($m\ n$).

Предположим, что система (6) совместна, т.е. $r(A) = (\overline{A}) = r$, и $r < \min\ \{m, n\}$. Тогда в матрицах A и $\overline{A}$ данной системы найдутся r линейно независимых строк, а остальные $m-r$ строк окажутся их линейными комбинациями. Перестановкой уравнений можно добиться того, что эти r линейно независимых строк займут первые r мест.

Отсюда следует, что любое из последних $m-r$ уравнений системы (6) можно представить как сумму первых r уравнений (которые называются линейно независимыми или базисными), взятых с некоторыми коэффициентами. Тогда система (6) эквивалентна следующей системе r уравнений с n неизвестными:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_2, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{\kappa 1}x_1 + a_{\kappa 2}x_2 + ... + a_{\kappa}x_n = b_m. \end{cases} \tag{7}$$

Предположим, что минор r-го порядка, составленный из коэффициентов при первых r неизвестных, отличен от нуля:

$$M_r = \begin{vmatrix} a_{11}a_{12}.....a_{1r} \\ a_{11}a_{12}.....a_{1r} \\ .... \\ a_{r1}a_{r2}....a_{rr} \end{vmatrix} \neq 0,$$

т.е. является базисным минором. В этом случае неизвестные, коэффициенты при которых составляют базисный минор, называются базисными неизвестными, а остальные $n-r$ – свободными неизвестными.

В каждом из уравнений системы (7) перенесем в правую часть все члены со свободными неизвестными x_{r+1}, x_{r+2},..., x_n ,Тогда получим систему

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ...+ a_{1r}x_r = b_1 - a_{1,r+1}x_{r+1} - a_{1,r+2}x_{r+2} - ...... - a_{1n}x_n, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ...+ a_{2r}x_r = b_2 - a_{2,r+1}x_{r+1} - a_{2,r+2}x_{r+2} - ...... - a_{2n}x_n, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{r1}x_1 + a_{r2}x_2 + ...+ a_{rr}x_r = b_m - a_{r,r+1}x_{r+1} - a_{r,r+2}x_{r+2} - ...... - a_{rn}x_n, \end{cases} \quad (8)$$

которая содержит r уравнений с r базисными неизвестными. Так как определитель системы (8) есть базисный минор $M_r \neq 0$, то система (8) имеет единственное решение относительно базисных неизвестных x_1, x_2,...,x_r, которое можно найти по формулам Крамера. Давая свободным неизвестным x_{r+1}, x_{r+2},..., x_n произвольные числовые значения $x_{r+1} = c_1$, $x_{r+2} = c_2$,..., $x_n = c_{n-r}$, получим общее решение исходной системы (6).

Пример. Решить систему трех уравнений с четырьмя неизвестными

$$\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + 5x_3 + 4x_4 = 2, \\ 6x_1 - 4x_2 + 4x_3 + 3x_4 = 3, \\ 9x_1 - 6x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 3. \end{cases} \quad (*)$$

Исследуем систему на совместность. Составим матрицы A и $\overline{A}$:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 5 & 4 \\ 6 & -4 & 4 & 3 \\ 9 & -6 & 3 & 2 \end{bmatrix}, \quad \overline{A} = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 5 & 4 & 2 \\ 6 & -4 & 4 & 3 & 3 \\ 9 & -6 & 3 & 2 & 4 \end{bmatrix}.$$

Определим ранги этих матриц, применяя элементарные преобразования:

а) 1-й и 2-й столбцы пропорциональны, один из них (2-й) отбрасываем;

б) 1-й столбец умножим на 1/3;

в) 1-й столбец последовательно умножим на (–5) и (–4) и прибавим соответственно ко 2-му и 3-му столбцам;

г) в полученной матрице два столбца (2-й и 3-й) пропорциональны; один из них (3-й) отбросим, а 2-й умножим на -1/6;

д) 1-ю строку последовательно умножим на (–2) и (–3) и прибавим соответственно ко 2-й и 3-й строкам;

е) 2-ю строку умножим на (–2), прибавим к 3-й и отбросим полученную нулевую строку.

Имеем:

$$A=\begin{bmatrix}3 & -2 & 5 & 4\\ 6 & -4 & 4 & 3\\ 9 & -6 & 3 & 2\end{bmatrix}\tilde{a}\begin{bmatrix}3 & 5 & 4\\ 6 & 4 & 3\\ 9 & 3 & 2\end{bmatrix}\tilde{б}\begin{bmatrix}1 & 5 & 4\\ 2 & 4 & 3\\ 3 & 3 & 2\end{bmatrix}\tilde{в}\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 2 & -6 & -5\\ 3 & -12 & -10\end{bmatrix}\tilde{г}\begin{bmatrix}1 & 0\\ 2 & 1\\ 3 & 2\end{bmatrix}\tilde{д}\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\\ 0 & 2\end{bmatrix}\tilde{e}\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}.$$

Очевидно, что ранг последней матрицы равен 2: $r(A)$ = 2, Матрицу $\overline{A}$ преобразуем аналогичным образом:

$$\overline{A}=\begin{bmatrix}3 & -2 & 5 & 4 & 2\\ 6 & -4 & 4 & 3 & 3\\ 9 & -6 & 3 & 2 & 4\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}3 & 5 & 4 & 2\\ 6 & 4 & 3 & 3\\ 9 & 3 & 2 & 4\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1 & 5 & 4 & 2\\ 2 & 4 & 3 & 3\\ 3 & 3 & 2 & 4\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 2 & -6 & -5 & -1\\ 3 & -12 & -10 & -2\end{bmatrix}\sim$$

$$\begin{bmatrix}1 & 0\\ 2 & -1\\ 3 & -2\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}.$$

Следовательно, $r\,(A)$ = 2.

Таким образом, $r\,(A) = r\,(\overline{A}\,)$ = 2, т. е. данная система совместна.

Поскольку ранг системы равен 2, максимальный порядок минора, отличного от нуля, равен 2 и система имеет два базисных неизвестных. Найдем какой-нибудь отличный от нуля минор второго порядка.

Таким, например, является минор $M_2=\begin{vmatrix}5 & 4\\ 4 & 3\end{vmatrix}\neq 0$, образованный коэффициентами при неизвестных x_3 и x_4. Следовательно, неизвестные x_3 и x_4 можно считать базисными, а неизвестные x_1 и x_2 – свободными.

Система (*) эквивалентна следующей:

$$\begin{cases}3x_1-2x_2+5x_3+4x_4=2,\\ 6x_1-4x_2+4x_3+3x_4=3.\end{cases}$$

Переносим свободные неизвестные в правую часть:

$$\begin{cases}5x_3+4x_4=2-3x_1+2x_2,\\ 4x_3+3x_4=3-6x_1+4x_2.\end{cases}$$

Решаем систему (8) по формулам Крамера:

$$M_2=\begin{vmatrix}5 & 4\\ 4 & 3\end{vmatrix}\neq 0;$$

$$d_3=\begin{vmatrix}2-3x_1+2x_2 & 4\\ 3-6x_1+4x_2 & 3\end{vmatrix}=3(2-3x_1+2x_2)-4(3-6x_1+4x_2)=-6+15x_1-10x_2;$$

$$d_3=\begin{vmatrix}5 & 2-3x_1+2x_2\\ 4 & 3-6x_1+4x_2\end{vmatrix}=5(3-6x_1+4x_2)-4(2-3x_1+2x_2)=7-18x_1+12x_2;$$

$$x_3=d_3/d=6-15x_1+10x_2,\quad x_4=d_4/d=-7+18x_1-12x_2.$$

Полученное решение, в котором базисные неизвестные x_3 и x_4 выражены через свободные x_1 и x_2, является общим решением системы (*). Подставляя в него произвольные значения для свободных неизвестных, получаем различные частные решения. Например, если $x_1=0$, $x_2=0$, то $x_3=6$, $x_4=-7$; если $x_1=1$, $x_2=2$, то $x_3=11$, $x_4=13$ и т.д. Наборы чисел (0, 0, 6, -7) (1, 2, 11, 13) и т.д. являются частными решениями системы (*).

1.5. Однородная система линейных уравнений

Пусть дана однородная система m линейных уравнений с n неизвестными

$$\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2+......+a_{1n}x_n=b_1,\\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+.....+a_{2n}x_n=b_2,\\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+...+a_{mn}x_n=b_m.\end{cases}\tag{9}$$

Так как добавление столбца из нулей не изменяет ранга матрицы системы, то на основании теоремы Кронекера–Капелли эта система всегда совместна и имеет, по крайней мере, нулевое решение ($x_1=x_2=$ $=...=x_n=0$). Если определитель системы (9) отличен от нуля и число уравнений системы равно числу неизвестных, то по теореме Крамера нулевое решение является единственным.

В том случае, когда ранг матрицы системы (9) меньше числа неизвестных, т.е. $r(\mathrm{A})<n$, данная система кроме нулевого решения будет иметь и ненулевые решения. Для нахождения этих решений в системе (9) выделяем r линейно независимых уравнений, остальные отбрасываем. В выделенных уравнениях в левой части оставляем r базисных неизвестных, а остальные $n-r$ свободных неизвестных переносим в правую часть. Тогда приходим к системе

$$\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2+......+a_{1r}x_r=-a_{1,r+1}x_{r+1}-a_{1,r+2}x_{r+2}-......-a_{1n}x_n,\\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+.....+a_{2r}x_r=-a_{2,r+1}x_{r+1}-a_{2,r+2}x_{r+2}-......-a_{2n}x_n,\\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\ a_{r1}x_1+a_{r2}x_2+...+a_{rr}x_r=-a_{r,r+1}x_{r+1}-a_{r,r+2}x_{r+2}-......-a_{rn}x_n,\end{cases}\tag{10}$$

решая которую по формулам Крамера, выразим r базисных неизвестных $x_1, x_2,..., x_n$ через $n-r$ свободных неизвестных $x_{r+1}, x_{r+2},..., x_n$.

Система (9) имеет бесчисленное множество решений. Среди этого множества есть решения, линейно независимые между собой.

Фундаментальной системой решений называются $n-r$ линейно независимых решений однородной системы уравнений.

П р и м е р . Дана однородная система уравнений

$$\begin{cases} 2x_1 - 4x_2 + 5x_3 + 3x_4 = 0, \\ 3x_1 - 6x_2 + 4x_3 + 2x_4 = 0, \\ 4x_1 - 8x_2 + 17x_3 + 11x_4 = 0. \end{cases}$$

Найти ее общее решение и фундаментальную систему решений.

1) Здесь число неизвестных n = 4, число уравнений m = 3. Вычислим ранг матрицы системы, используя элементарные преобразования:

а) отбрасываем 2-й столбец, так как он пропорционален 1-му;

б) 3-й столбец сначала умножим на (−2) и прибавим ко 2-му, а затем умножим его на (−3) и сложим с 1-м, умноженным на 2;

в) отбрасываем 1-й столбец, так как он пропорционален 2-му;

г) 1-й столбец умножим на 3 и прибавим ко 2-му;

д) 1-ю строку умножим на 5 и прибавим к 4-й;

е) отбрасываем 3-ю строку и делим 1-ю строку на (−1), а 2-ю на 2.

Имеем

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 5 & 3 \\ 3 & -6 & 4 & 2 \\ 4 & -8 & 17 & 11 \end{bmatrix} \overset{\sim}{\text{а}} \begin{bmatrix} 2 & 5 & 3 \\ 3 & 4 & 2 \\ 4 & 17 & 11 \end{bmatrix} \overset{\sim}{\text{б}} \begin{bmatrix} -5 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \\ -25 & -5 & 11 \end{bmatrix} \overset{\sim}{\text{в}} \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 0 & 2 \\ -5 & 11 \end{bmatrix}$$

$$\overset{\sim}{\text{г}} \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \\ -5 & -4 \end{bmatrix} \overset{\sim}{\text{д}} \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \\ 0 & -4 \end{bmatrix} \overset{\sim}{\text{е}} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Так как r (A) = 2, т.е. $r \le \min \{m, n\}$, то данная система имеет фундаментальную систему решений, число которых n – 2 = 4–2 =2.

2) Будем искать общее решение системы. Найдем базисный минор, т.е. минор второго порядка, отличный от нуля. Таким минором является, например, минор, составленный из коэффициентов при x_3 и x_4 в первом и втором уравнениях системы $M_2 = \begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = 2 \neq 0$. Оставляя

базисные неизвестные x_3 и x_4 в левой части и перенося свободные неизвестные x_1 и x_2 в правую часть, приходим к системе

$$\begin{cases} 5x_3 + 3x_4 = -2x_1 + 4x_2, \\ 4x_3 + 2x_4 = -3x_1 + 6x_2. \end{cases}$$

Ее решение, найденное по формулам Крамера, имеет вид

$$x_3 = -\ 2{,}5\ x_1 + 5\ x_2,$$

$$x_4 = 3{,}5\ x_1 - 7\ x_2.$$

3) Чтобы получить фундаментальную систему решений, нужно найти любые два линейно независимых решения данной системы (так как $n - r = 2$). Полагая сначала $x_1 = 1$, $x_2 = 0$, имеем $x_3 = -2{,}5$, $x_4 = 3{,}5$; полагая затем $x_1 = 0$, $x_2 = 1$, получим $x_3 = 5$, $x_4 = -7$. Таким образом, фундаментальная система решений имеет вид

$$R_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2{,}5 \\ 3{,}5 \end{pmatrix}; \quad R_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 5 \\ -7 \end{pmatrix},$$

а общее решение $R = c_1 R_1 + c_2 R_2$, где c_1 и c_2 – произвольные числа.

Придавая c_1 и c_2 различные значения, можно получить любое решение данной системы.

Пусть, например, $x_1 = 1$, $x_2 = 2$; тогда $x_3 = -2{,}5 \cdot 1 x_1 + 5 \cdot x_2 = 7{,}5$, $x_4 = 3{,}5 \cdot 1 - 7 \cdot 2 = -10{,}5$.

Полученное частное решение

$$R = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 7{,}5 \\ -10{,}5 \end{pmatrix}$$

является линейной комбинацией решений, образующих фундаментальную систему при $c_1 = 1$, $c_2 = 2$; $R = R_1 + R_2$.

1.6. Решение систем линейных уравнений методом последовательного исключения неизвестных (метод Гаусса)

Наиболее распространенным методом решения систем линейных уравнений является метод последовательного исключения неизвестных (метод Гаусса).

Рассмотрим его на примере системы четырех уравнений с четырьмя неизвестными. Пусть дана система

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + a_{14}x_4 = a_{15}, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + a_{24}x_4 = a_{25}, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + a_{34}x_4 = a_{35}, \\ a_{41}x_1 + a_{42}x_2 + a_{43}x_3 + a_{44}x_4 = a_{45}. \end{cases} \tag{11}$$

Будем исключать неизвестное x_1 из всех уравнений системы (11) кроме первого. Назовём x_1 *ведущим неизвестным*, а коэффициент a_{11} – *ведущим коэффициентом*. Разделив первое уравнение на a_{11} (это возможно, если $a_{11} \neq 0$), получим

$$x_1 + \frac{a_{12}}{a_{11}}x_2 + \frac{a_{13}}{a_{11}}x_3 + \frac{a_{14}}{a_{11}}x_4 = \frac{a_{15}}{a_{11}}.$$

Обозначим $\frac{a_{12}}{a_{11}} = b_{12}$, $\frac{a_{13}}{a_{11}} = b_{13}$, $\frac{a_{14}}{a_{11}} = b_{14}$, $\frac{a_{15}}{a_{11}} = b_{15}$ и вообще $b_{ij} = \frac{a_{ij}}{a_{11}}$ $(j > 1)$.

Тогда рассматриваемое уравнение примет вид

$$x_1 + b_{12}x_2 + b_{13}x_3 + b_{14}x_4 = b_{15}, \tag{12}$$

или

$$x_1 = b_{15} - b_{12}x_2 - b_{13}x_3 - b_{14}x_4.$$

Для исключения неизвестного x_1 из уравнений системы (11) произведем следующие преобразования.

1. Из второго уровня системы (11) вычтем уравнение (12), умноженное на a_{21}:

$$\begin{array}{r} - \begin{array}{r} a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + a_{24}x_4 = a_{25} \\ a_{21}x_1 - a_{21}b_{12}x_2 - a_{21}b_{13}x_3 - a_{21}b_{14}x_4 = -a_{21}b_{15} \end{array} \\ \hline (a_{22} - a_{21}b_{12})x_2 + (a_{23} - a_{21}b_{13})x_3 + (a_{24} - a_{21}b_{14})x_4 = (a_{25} - a_{21}b_{15}) \end{array}.$$

Обозначим

$$a_{22} - a_{21}b_{12} = a_{22}^{(1)}; \quad a_{23} - a_{21}b_{13} = a_{23}^{(1)};$$
$$a_{24} - a_{21}b_{14} = a_{24}^{(1)}; \quad a_{25} - a_{21}b_{15} = a_{25}^{(1)}$$

и перепишем полученное уравнение в виде

$$a_{22}^{(1)}x_2 + a_{23}^{(1)}x_3 + a_{24}^{(1)}x_4 = a_{25}^{(1)}.$$

2. Из третьего уравнения системы (11) вычтем уравнение (12), умноженное на a_{31}:

$$\begin{array}{r} -\begin{array}{l} a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + a_{34}x_4 = a_{35} \\ a_{31}x_1 - a_{31}b_{12}x_2 - a_{31}b_{13}x_3 - a_{31}b_{14}x_4 = -a_{31}b_{15} \end{array} \\ \hline (a_{32} - a_{31}b_{12})x_2 + (a_{33} - a_{31}b_{13})x_3 + (a_{34} - a_{31}b_{14})x_4 = a_{35} - a_{31}b_{15} \end{array}.$$

Обозначив $a_{32} - a_{31}b_{12} = a_{32}^{(1)}; a_{33} - a_{31}b_{13} = a_{33}^{(1)}$ и т.д., перепишем полученное уравнение в виде $a_{32}^{(1)}x_2 + a_{33}^{(1)}x_3 + a_{34}^{(1)}x_4 = a_{35}^{(1)}$.

3. Из четвертого уравнения системы (11) вычтем уравнение (12), умноженное на a_{41}. Применив аналогичные обозначения, получим следующее уравнение:

$$a_{42}^{(1)}x_2 + a_{43}^{(1)}x_3 + a_{44}^{(1)}x_4 = a_{45}^{(1)}.$$

В результате проведенных элементарных преобразований имеем систему трех уравнений с тремя неизвестными:

$$\begin{cases} a_{22}^{(1)}x_2 + a_{23}^{(1)}x_3 + a_{24}^{(1)}x_4 = a_{25}^{(1)}, \\ a_{32}^{(1)}x_2 + a_{33}^{(1)}x_3 + a_{34}^{(1)}x_4 = a_{35}^{(1)}, \\ a_{42}^{(1)}x_2 + a_{43}^{(1)}x_3 + a_{44}^{(1)}x_4 = a_{45}^{(1)}, \end{cases} \tag{11'}$$

где коэффициенты $a_{ij} (i, j \geq 2)$ вычисляются по формуле

$$a_{ij}^{(1)} = a_{ij} - a_{i1}b_{1j} \text{ (например, } a_{23}^{(1)} = a_{23} - a_{21}b_{12}\text{)}.$$

Разделив далее коэффициенты первого уравнения системы (11′) на ведущий коэффициент $a_{22}^{(1)} \neq 0$, получим первое уравнение системы в виде

$$x_2 + \frac{a_{23}^{(1)}}{a_{22}^{(1)}}x_3 + \frac{a_{24}^{(1)}}{a_{22}^{(1)}}x_4 = \frac{a_{25}^{(1)}}{a_{22}^{(1)}}.$$

Обозначим

$$a_{23}^{(1)} / a_{22}^{(1)} = b_{23}^{(1)};\ a_{24}^{(1)} / a_{22}^{(1)} = b_{24}^{(1)};\ a_{25}^{(1)} / a_{22}^{(1)} = b_{25}^{(1)}$$

и вообще $a_{2j}^{(1)} / a_{22}^{(1)} = b_{2j}^{(1)} (j > 2)$. Тогда первое уравнение системы (11′) примет вид

$$x_2 + b_{23}^{(1)} x_3 + b_{24}^{(1)} x_4 = b_{25}^{(1)} \tag{12′}$$

или

$$x_2 = b_{25}^{(1)} + b_{23}^{(1)} x_3 - b_{24}^{(1)} x_4.$$

Исключая теперь x_2 из всех уравнений системы (11′), кроме первого, таким же способом, каким мы исключили x_1, придем к следующей системе из двух уравнений с двумя неизвестными:

$$\begin{cases} a_{33}^{(2)} x_3 + a_{34}^{(2)} x_4 = a_{35}^{(2)}, \\ a_{43}^{(2)} x_2 + a_{44}^{(2)} x_4 = a_{45}^{(2)}, \end{cases} \tag{11″}$$

где $a_{ij}^{(2)} = a_{ij}^{(1)} - a_{i2}^{(1)} b_{2j}^{(1)} (i, j \geq 3)$. (Например, $a_{34}^{(2)} = a_{34}^{(1)} - a_{32}^{(1)} b_{24}^{(1)}$.)

Разделив коэффициенты первого уровня системы (11″) на ведущий коэффициент $a_{33}^{(2)} \neq 0$, получим

$$x_3 + b_{34}^{(2)} x_4 = b_{35}^{(2)}, \tag{12″}$$

где $b_{3j}^{(2)} = a_{3j}^{(2)} / a_{33}^{(2)} (j > 3)$, т.е. $x_3 = b_{35}^{(2)} - b_{34}^{(2)} x_4$.

Исключив теперь x_3 аналогичным путем из системы (12″), находим

$$a_{44}^{(3)} x_4 = a_{45}^{(3)}, \tag{11‴}$$

где $a_{ij}^{(3)} = a_{ij}^{(2)} - a_{i3}^{(2)} b_{3j}^{(2)} (i, j \geq 4)$.

Отсюда

$$x_4 = a_{45}^{(3)} / a_{44}^{(3)}. \tag{12‴}$$

Остальные неизвестные системы последовательно определяются из уравнений (12″), (12′) и (12):

$$x_3 = b_{35}^{(2)} - b_{34}^{(2)} x_4,$$

$$x_2 = b_{25}^{(1)} - b_{24}^{(1)} x_4 - b_{23}^{(1)} x_3,$$

$$x_1 = b_{15} - b_{24} x_4 - b_{13} x_3 - b_{12} x_2.$$

Таким образом, процесс решения системы линейных уравнений по методу Гаусса сводится к построению эквивалентной системы уравнений (12), (12′), (12″), (12‴). Метод Гаусса применим при том условии, что все ведущие коэффициенты отличны от нуля.

Для удобства вычисления производят по схеме, называемой *схемой единственного деления*. Вычисление элементов b_{ij} называется *прямым ходом*, вычисление значений неизвестных – *обратным ходом*, так как сначала определяется значение последнего неизвестного.

Схема единственного деления (схема Гаусса) составляется следующим образом.

В раздел I схемы (табл. 1.1) записываются: коэффициенты при неизвестных (в столбцах соответствующих неизвестных), свободные члены и для каждой строки – «контрольные суммы» (столбец $\sum_2$), равные сумме элементов a_{ij} в данной строке (здесь i = 1, 2, 3, 4; j = 1, 2, 3, 4, 5); последняя строка раздела I, состоящая из 1 и элементов b_{ij}, получается делением первой строки раздела на ведущий коэффициент a_{11}.

Элементы раздела II схемы равны соответствующим элементам раздела I минус произведение $a_{i1}\,b_{1j}$ $(i, j \geq 2)$; например, $a_{23}^{(1)} = a_{23} - a_{21}b_{13}$. Последняя строка раздела II, состоящая из I и элементов $b_{2j}^{(1)}$, получается делением первой строки раздела на ведущий коэффициент $a_{22}^{(1)}$.

Аналогично вычисляются элементы III и IV разделов схемы.

I, II, III и IV разделы, заканчивающиеся вычислением элементов $b_{ij}^{(i-1)}\left(i = 1, 2, 3, 4;\ j = 2, 3, 4, 5\right)$, составляют *прямой ход* вычислений схемы.

Обратный ход начинается с вычисления последнего неизвестного системы линейных уравнений x_4 и заканчивается вычислением первого неизвестного x_1. При обратном ходе используются лишь строки прямого хода, содержащие единицы и соответствующие элементы b_{ij} (назовем эти строки «отмеченными»).

Элемент $b_{45}^{(3)}$ последней «отмеченной» строки и столбца свободных членов дает значение x_4. Остальные неизвестные x_3, x_2 и x_1 находят вычитанием из свободного члена «отмеченной» строки суммы произведений ее коэффициентов на соответствующие значения ранее найденных неизвестных, например, $x_3 = b_{35}^{(2)} - b_{34}^{(2)}x_4$.

Таблица 1.1

x_1	x_2	x_3	x_4	Свободные члены	$\sum_1$	$\sum_2$	Разделы схемы	
1	2	3	4	5	6	7	8	9
a_{11} a_{21} a_{31} a_{41}	a_{12} a_{22} a_{32} a_{42}	a_{13} a_{23} a_{33} a_{43}	a_{14} a_{24} a_{34} a_{44}	a_{15} a_{25} a_{35} a_{45}		$a_{16}=a_{11}+a_{12}+a_{13}+a_{14}+a_{15}$ $a_{26}=a_{21}+a_{22}+a_{23}+a_{24}+a_{25}$ $a_{36}=a_{31}+a_{32}+a_{33}+a_{34}+a_{35}$ $a_{46}=a_{41}+a_{42}+a_{43}+a_{44}+a_{45}$	I	Прямой ход
$1=\dfrac{a_{11}}{a_{11}}$	$b_{12}=\dfrac{a_{12}}{a_{11}}$	$b_{13}=\dfrac{a_{13}}{a_{11}}$	$b_{14}=\dfrac{a_{14}}{a_{11}}$	$b_{15}=\dfrac{a_{15}}{a_{11}}$	$b_{16}=\dfrac{a_{16}}{a_{11}}$	$b_{16}=1+b_{12}+b_{13}+b_{14}+b_{15}$		
	$a_{22}^{(1)}$ $a_{32}^{(1)}$ $a_{42}^{(1)}$	$a_{23}^{(1)}$ $a_{33}^{(1)}$ $a_{43}^{(1)}$	$a_{24}^{(1)}$ $a_{34}^{(1)}$ $a_{44}^{(1)}$	$a_{25}^{(1)}=a_{25}-a_{21}b_{15}$ $a_{35}^{(1)}=a_{35}-a_{31}b_{15}$ $a_{45}^{(1)}=a_{45}-a_{41}b_{15}$	$a_{26}^{(1)}=a_{26}-a_{21}b_{16}$ $a_{36}^{(1)}=a_{36}-a_{31}b_{16}$ $a_{46}^{(1)}=a_{46}-a_{41}b_{16}$	$a_{26}^{(1)}=a_{22}^{(1)}+a_{23}^{(1)}+a_{24}^{(1)}+a_{25}^{(1)}$ $a_{36}^{(1)}=a_{32}^{(1)}+a_{33}^{(1)}+a_{34}^{(1)}+a_{35}^{(1)}$ $a_{46}^{(1)}=a_{42}^{(1)}+a_{43}^{(1)}+a_{44}^{(1)}+a_{45}^{(1)}$	II	
	$1=\dfrac{a_{22}^{(1)}}{a_{22}^{(1)}}$	$b_{23}^{(1)}=\dfrac{a_{23}^{(1)}}{a_{22}^{(1)}}$	$b_{24}^{(1)}=\dfrac{a_{24}^{(1)}}{a_{22}^{(1)}}$	$b_{25}^{(1)}=\dfrac{a_{25}^{(1)}}{a_{22}^{(1)}}$	$b_{26}^{(1)}=\dfrac{a_{26}^{(1)}}{a_{22}^{(1)}}$	$b_{26}^{(1)}=1+b_{23}^{(1)}+b_{24}^{(1)}+b_{25}^{(1)}$		
		$a_{33}^{(2)}$ $a_{43}^{(2)}$	$a_{34}^{(2)}$ $a_{44}^{(2)}$	$a_{35}^{(2)}=a_{35}^{(1)}-a_{32}^{(1)}b_{25}^{(1)}$ $a_{45}^{(2)}=a_{45}^{(1)}-a_{42}^{(1)}b_{25}^{(1)}$	$a_{36}^{(2)}=a_{36}^{(1)}-a_{32}^{(1)}b_{26}^{(1)}$ $a_{46}^{(2)}=a_{46}^{(1)}-a_{42}^{(1)}b_{46}^{(1)}$	$a_{36}^{(2)}=a_{33}^{(2)}+a_{34}^{(2)}+a_{35}^{(2)}$ $a_{46}^{(2)}=a_{43}^{(2)}+a_{44}^{(2)}+a_{45}^{(2)}$	III	
		$1=\dfrac{a_{33}^{(2)}}{a_{33}^{(2)}}$	$b_{34}^{(2)}=\dfrac{a_{34}^{(2)}}{a_{33}^{(2)}}$	$b_{35}^{(2)}=\dfrac{a_{35}^{(2)}}{a_{33}^{(2)}}$	$b_{36}^{(2)}=\dfrac{a_{36}^{(2)}}{a_{33}^{(2)}}$	$b_{36}^{(2)}=1+b_{34}^{(2)}+b_{35}^{(2)}$		
			$a_{44}^{(3)}$	$a_{45}^{(3)}=a_{45}^{(2)}-a_{43}^{(2)}b_{35}^{(2)}$	$a_{46}^{(3)}=a_{46}^{(2)}-a_{43}^{(2)}b_{36}^{(2)}$	$a_{46}^{(3)}=a_{44}^{(3)}+a_{45}^{(3)}$	IV	
			$1=\dfrac{a_{44}^{(3)}}{a_{44}^{(3)}}$	$b_{45}^{(3)}=\dfrac{a_{45}^{(3)}}{a_{44}^{(3)}}$	$b_{46}^{(3)}=\dfrac{a_{46}^{(3)}}{a_{44}^{(3)}}$	$b_{46}^{(3)}=1+b_{45}^{(3)}$		

Окончание табл. 1.1

1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	1	1	1	$x_4 = b_{45}^{(3)}$ $x_3 = b_{35}^{(2)} - b_{34}^{(2)} x_4$ $x_2 = b_{25}^{(1)} - b_{24}^{(1)} x_4 - b_{23}^{(1)} x_3$ $x_1 = b_{15} - b_{14} x_4 -$ $-b_{13} x_3 - b_{12} x_2$	$\overline{x}_4 = b_{46}^{(3)}$ $\overline{x}_3 = b_{36}^{(2)} - b_{34}^{(2)} \overline{x}_4$ $\overline{x}_2 = b_{26}^{(1)} - b_{24}^{(1)} \overline{x}_3$ $\overline{x}_1 = b_{16} - b_{14} \overline{x}_4 -$ $-b_{13} \overline{x}_3 - b_{12} \overline{x}_2$	$\overline{x}_4 = 1 + x_4$ $\overline{x}_3 = 1 + x_3$ $\overline{x}_2 = 1 + x_2$ $\overline{x}_1 = 1 + x_1$	V	Обратный ход

Значения неизвестных последовательно вписывают в V раздел. Расставленные там единицы помогают находить для x_j соответствующие коэффициенты в «отмеченных» строках.

Для контроля вычислений используются так называемые контрольные суммы: $a_{i6} = \sum_{j=1}^{5} a_{ij} \left(i = 1,2,3,4 \right)$ и $b_{i6} = \sum_{j=1}^{5} b_{ij} + 1\left(i = 1, 2, 3, 4 \right)$, помещенные в столбце $\sum_2$.

В столбце $\sum_1$ разделов II, III и IV над контрольными суммами в каждой строке проделываются те же операции, что и над остальными элементами этой строки. При отсутствии ошибок в вычислениях элементы столбцов $\sum_1$ и $\sum_2$ равны. Таким образом контролируется прямой ход схемы.

Для контроля обратного хода $\overline{x}_4$ в последней «отмеченной» строке столбца находят $\sum_1$, т.е. $\overline{x}_4 = b_{46}^{(3)}$, а остальные неизвестные этого столбца $\overline{x}_j \left(j = 3,2,1 \right)$ подсчитывают в тех же строках и по тем же формулам, что и неизвестные x_j, только в формулы подставляются соответствующие $\overline{x}_j$. В итоге числа $\overline{x}_j$ должны совпадать с числами $x_j + 1$ из столбца $\sum_2$.

П р и м е р 1 . По схеме единственного деления решить систему

$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 4, \\ 4x_1 + 3x_2 - x_3 + 2x_4 = 6, \\ 8x_1 + 5x_2 - 3x_3 + 4x_4 = 12, \\ 3x_1 + 3x_2 - 2x_3 + 2x_4 = 6. \end{cases}$$

Р е ш е н и е . В раздел I табл. 1.2 вписываем матрицу системы, ее свободные члены и контрольные суммы. Затем подсчитываем «отмеченную» строку этого раздела, разделив первою строку на $a_{11} = 2$. Например: $b_{12} = a_{12} / a_{11} = 2 / 2 = 1$.

Элементы раздела II вычисляем по следующему правилу: каждый элемент раздела равен соответствующему элементу раздела I минус произведение первого элемента его строки на элемент «отмеченной» строки в его столбце. Полученный результат записываем на соответствующее место в разделе II. Например:

$$a_{23}^{(1)} = a_{23} - a_{21}b_{13} = -1 - 4(-0{,}5) = 1,$$

$$a_{33}^{(1)} = a_{33} - a_{31}b_{13} = -3 - 8(-0{,}5) = 1.$$

Таблица 1.2

x_1	x_2	x_3	x_4	Свободные члены	$\sum_1$	$\sum_2$	Разделы схемы
$\boxed{2}$	2	−1	1	4	8		I
4	3	−1	2	6	14		
8	5	−3	4	12	26		
3	3	−2	2	6	12		
1	1	−0,5	0,5	2	4	4	
	$\boxed{-1}$	1	0	−2	−2	−2	II
	−3	1	0	−4	−6	−6	
	0	−0,5	0,5	0	0	0	
	1	−1	0	2	2	2	
		$\boxed{-2}$	0	2	0	0	III
		−0,5	0,5	0	0	0	
		1	0	−1	0	0	
			$\boxed{0{,}5}$	−0,5	0	0	IV
			1	−1	0	0	
			1	$x_4 = -1$	$\bar{x}_4 = 0$	0	V
		1		$x_3 = -1$	$\bar{x}_3 = 0$	0	
	1			$x_2 = 1$	$\bar{x}_2 = 2$	2	
1				$x_1 = 1$	$\bar{x}_1 = 2$	2	

Элементы «отмеченной» строки раздела II получим, разделив его первую строку на ведущий коэффициент $a_{22}^{(1)} = -1.$ Например,

$$b_{23}^{(1)} = a_{23}^{(1)} / a_{22}^{(1)} = 1/(-1) = -1.$$

Аналогично вычисляются элементы III и IV разделов. Например:

$$a_{44}^{(2)} = a_{44}^{(1)} - a_{42}^{(1)} \cdot b_{24}^{(1)} = 2 - 3 \cdot 0{,}5 = 0{,}5,$$

$$a_{45}^{(3)} = a_{45}^{(2)} - a_{43}^{(2)} \cdot b_{35}^{(2)} = 0 - (-0{,}5)(-1) = -0{,}5.$$

Для вычисления элементов раздела V, т.е. для нахождения неизвестных, используем «отмеченные» строки, начиная с последней.

Неизвестное x_4 представляет собой свободный член последней «отмеченной» строки: $x_4 = b_{45}^{(3)} = 1$, а остальные неизвестные x_3, x_2 и x_1 получают последовательно в результате вычитания из свободных членов «отмеченных» строк суммы произведений соответствующих коэффициентов $b_{ij}^{(i-1)}$ на ранее найденные значения неизвестных.

Контроль осуществляется с помощью столбцов $\sum_1$ и $\sum_2$. Над столбцом $\sum_1$ производятся те же действия, что и над остальными столбцами (см. табл. 1.1 и 1.2), и в итоге сумма элементов каждой строки схемы (без столбца $\sum_1$) должна быть равна элементу этой строки из столбца $\sum_2$. Числа $\bar{x}_j$ из столбца $\sum_1$ должны быть равны числам $1+x_j$ из столбца $\sum_2$.

В результате получаем $x_1=1,\ x_2=1,\ x_3=-1,\ x_4=-1.$

П р и м е р 2. По схеме единственного деления решить следующую систему с точностью до 0,0001:

$$\begin{cases} 0,63x_1+1,00x_2+0,71x_3+0,34x_4=2,08, \\ 1,17x_1+0,18x_2-0,65x_3+0,71x_4=0,17, \\ 2,71x_1-0,75x_2+1,17x_3-2,35x_4=1,28, \\ 3,58x_1+0,28x_2-3,45x_3-1,18x_4=0,05. \end{cases}$$

Решение системы приведено в табл. 1.3. Окончательный ответ: $x_2=0,4026,\ x_2=1,5016,\ x_2=0,5862,\ x_4=-0,2678.$

Если приближенные значения неизвестных, полученные по схеме Гаусса, достаточно точны, т.е. их поправки малы по абсолютной величине, то уточнение можно не производить.

В случае же необходимости уточнения приближенных значений неизвестных поступают следующим образом:

1) вычисляют для каждого уравнения системы *невязки* – разности между правой и левой частями системы, получающиеся после подстановки в уравнения приближенных значений неизвестных. Если обозначить приближенные значения неизвестных через $x_1^{(0)},\ x_2^{(0)},\dots,\ x_n^{(0)}$, невязки – через $\varepsilon_1,\ \varepsilon_2,\dots,\ \varepsilon_n$ и свободные члены – через $b_1,\ b_2,\dots,\ b_n$, то

$$\varepsilon_1=b_1-\sum_{j=1}^{n}a_{1j}x_j^{(0)},$$

$$\varepsilon_2=b_2-\sum_{j=1}^{n}a_{2j}x_j^{(0)},$$

....

$$\varepsilon_n=b_n-\sum_{j=1}^{n}a_{nj}x_j^{(0)}.$$

Таблица 1.3

x_1	x_2	x_3	x_4	Свободные члены	$\sum_1$	$\sum_2$
$\boxed{0{,}63}$ 1,17 2,71 3,58	1,00 0,18 −0,75 0,21	0,71 −0,65 1,17 −3,45	0,34 0,71 −2,35 −1,18	2,08 0,17 1,28 0,05	4,76 1,58 2,06 −0,79	
1	1,587	1,127	0,539	3,302	7,555	
	$\boxed{-1{,}6768}$ −5,0508 −5,4715	−1,9686 −1,8842 −7,4847	0,0794 −3,8107 −3,1096	−3,6933 −7,6684 −11,7712	−7,2593 −18,4141 −27,8370	−7,2593 −18,4141 −27,8370
	1	1,17402	−0,04735	2,20259	4,32926	4,32926
		$\boxed{4{,}04554}$ −1,06105	−4,04986 −3,36868	3,45644 0,28027	3,45212 −4,14946	3,45212 −4,14946
		1	−1,00106	0,85438	0,85332	0,85332
			$\boxed{-4{,}43085}$	1,18681	−3,24404	−3,24404
			1	−0,26785	0,73215	0,73215
			1	$x_4=-0{,}26785$	$\bar{x}_4=0{,}73215$	0,73215
		1		$x_3=0{,}58625$	$\bar{x}_3=1{,}58625$	1,58625
	1			$x_2=1{,}50164$	$\bar{x}_2=2{,}50164$	2,50164
1				$x_1=0{,}40257$	$\bar{x}_1=1{,}40257$	1,40257

2) выписывают невязки ε_i $(i=1,2,...,n)$ в отдельный столбец схемы Гаусса (ε) и производят над ними те же операции, что и над другими столбцами схемы;

3) считая столбец ε столбцом свободных членов, получают поправки δ_i неизвестных;

4) находят уточненные значения неизвестных, прибавляя к приближенным значениям неизвестных $x_i^{(0)}$ соответствующие поправки δ_i:

$$x_1=x_1^{(0)}+\delta_1;\ x_2=x_2^{(0)}+\delta_2;\ ...;\ x_n=x_n^{(0)}+\delta_n.$$

Пример 3. Решить методом Гаусса с тремя десятичными знаками систему

$$\begin{cases}7,09x_1+1,17x_2-2,23x_3=-4,75,\\ 0,43x_1+1,4x_2-0,62x_3=-1,05,\\ 3,21x_1-4,25x_2+2,13x_3=5,06\end{cases}$$

и уточнить полученные приближенные значения неизвестных до 10^{-4}.

Р е ш е н и е . По схеме Гаусса вычисляем $x_1^{(0)}$, $x_2^{(0)}$ и $x_3^{(0)}$ с тремя значащими цифрами (табл. 1.4).

Т а б л и ц а 1 . 4

x_1	x_2	x_3	Свободные члены	$\sum$	ε
$\boxed{7{,}09}$ 0,43 3,21	1,17 1,4 –4,25	–2,23 –0,62 2,13	–4,75 –1,05 5,06	1,28 0,16 6,15	0,00097 0,00087 –0,00295
1	0,1650	–0,3145	–0,6700	0,1805	0,00014
	$\boxed{1{,}3290}$ –4,7796	–0,4847 3,1395	–0,7619 7,2107	0,0824 5,5706	0,00081 –0,00340
	1	–0,3647	–0,5733	0,0620	0,00061
		$\boxed{1{,}3964}$	4,4705	5,8669	–0,00048
		1	3,2015	4,2015	–0,00035
  1	 1 	1 	3,2015 0,5943 0,2388	4,2015 1,5943 1,2388	–0,00035 0,00048 –0,0005

Таким образом, $x_1^{(0)} = 0{,}239$, $x_2^{(0)} = 0{,}594$, $x_3^{(0)} = 3{,}202$.

Чтобы найти поправку $\delta = \begin{bmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \\ \delta_3 \end{bmatrix}$, необходимо решить данную систему с той же матрицей $A = \begin{bmatrix} 7{,}09 & 1{,}17 & -2{,}23 \\ 0{,}43 & 1{,}4 & -0{,}62 \\ 3{,}21 & -4{,}25 & 2{,}13 \end{bmatrix}$ и новыми свободными членами ε_i (невязки), которые подсчитываем следующим образом.

1. Вычисляем невязки, для чего подставляем в уравнения данной системы значения $x_1^{(0)}$, $x_2^{(0)}$ и $x_3^{(0)}$:

$$7{,}09 \cdot 0{,}239 + 1{,}17 \cdot 0{,}594 - 2{,}23 \cdot 3{,}202 = -4{,}75097;$$

$$0{,}43 \cdot 0{,}239 + 1{,}4 \cdot 0{,}594 - 0{,}62 \cdot 3{,}202 = -1{,}05087;$$

$$3{,}21 \cdot 0{,}239 - 4{,}25 \cdot 0{,}594 - 2{,}13 \cdot 3{,}202 = 5{,}06295.$$

Невязки соответственно равны:

$$\varepsilon_1 = -4{,}75 - (-4{,}75097) = 0{,}00097;$$

$$\varepsilon_2 = -1{,}05 - (-1{,}05087) = 0{,}00087;$$

$$\varepsilon_3 = 5{,}06 - 5{,}06295 = -0{,}00295.$$

2. Решаем данную систему по схеме Гаусса со свободными членами $\varepsilon_1 = 0{,}00097$, $\varepsilon_2 = 0{,}00087$, $\varepsilon_3 = -0{,}00295$. Соответственно с точностью до 10^{-4} получаем значения поправок $\delta_1 = -0{,}0004$; $\delta_2 = 0{,}0005$; $\delta_3 = -0{,}0001$. Теперь уточним неизвестные:

$$x_1 = x_1^{(0)} + \delta_1 = 0{,}239 - 0{,}0004 = 0{,}2386;$$

$$x_2 = x_2^{(0)} + \delta_2 = 0{,}594 + 0{,}0005 = 0{,}5945;$$

$$x_3 = x_3^{(0)} + \delta_3 = 3{,}202 - 0{,}0001 = 3{,}2019.$$

1.7. Вычисление определителей с помощью схемы Гаусса

Метод Гаусса может быть использован при вычислении определителей:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & . & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & . & a_{2n} \\ . & . & . & . \\ a_{n1} & a_{n2} & . & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11} a_{22}^{(1)}\ a_{33}^{(2)} \ldots a_{nn}^{(n-1)},$$

где $a_{11}, a_{22}^{(1)}, a_{33}^{(2)}, \ldots, a_{nn}^{(n-1)}$ – ведущие элементы схемы единственного деления.

П р и м е р 1. По схеме единственного деления вычислить определитель

$$d = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & -1 & -1 & -2 \\ 2 & 3 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 3 & -1 \end{vmatrix}.$$

Р е ш е н и е. Решение приведено в табл. 1.5.

Таблица 1.5

Столбцы				$\sum_1$	$\sum_2$
1	2	3	4		
1 3 2 1	1 –1 3 2	2 –1 –1 3	3 –2 –1 –1	7 –1 3 5	
1	1	2	3	7	7
	–4 1 1	–7 –5 1	–11 –7 –4	–22 –11 –2	–22 –11 –2
	1	7/4	11/4	22/4	22/4
		–27 / 4 –3/4	–39/4 –27/4	–66/4 –30/4	–66/4 –30/4
		1	13/9	22/9	22/9
			–17 / 3	–17/3	–17/3

Таким образом

$$d = 1 \cdot (-4) \cdot (-27/4) \cdot (-17/3) = -153.$$

Пример 2. По схеме единственного деления с точностью до 0,001 вычислить определитель

$$d = \begin{vmatrix} 1{,}00 & 0{,}42 & 0{,}54 & 0{,}66 \\ 0{,}42 & 1{,}00 & 0{,}32 & 0{,}44 \\ 0{,}54 & 0{,}32 & 1{,}00 & 0{,}22 \\ 0{,}66 & 0{,}44 & 0{,}22 & 1{,}00 \end{vmatrix}.$$

Решение. Решение приведено в табл. 1.6.

Таблица 1.6

Столбцы				$\sum_1$	$\sum_2$
1	2	3	4		
$\boxed{1}$ 0,42 0,54 0,66	0,42 1,00 0,32 0,44	0,54 0,32 1,00 0,22	0,66 0,44 0,22 1,00	2,62 2,18 2,08 2,32	
	0,42	0,54	0,66	2,62	
	$\boxed{0{,}8236}$ 0,0932 0,1628	0,0932 0,7084 –0,1364	0,1628 0,1364 0,5644	1,0796 0,6652 0,5908	1,0796 0,6652 0,5908
	1	0,1135	0,1973	1,3108	1,3108
		$\boxed{0{,}6978}$ –0,1549	–0,1548 0,5323	0,5430 0,3774	0,5430 0,3774
		1	–0,2219	0,7782	0,7781
			$\boxed{0{,}4979}$	0,4979	0,4979

Окончательно имеем $d = 1 \cdot 0{,}8236 \cdot 0{,}6978 \cdot 0{,}4979 = 0{,}286$.

1.8. Обращение матрицы с помощью схемы Гаусса

Пусть дана неособенная матрица $A=\left[a_{ij}\right]$ (i,j = 1,2,...,n). Для нахождения обратной матрицы A^{-1} = $\left[x_{ij}\right]$ используется основное соотношение $AA^{-1} = E$, где E – единичная матрица n-го порядка.

Так, для матрицы четвёртого порядка, умножив

$$AA^{-1} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} & x_{14} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} & x_{24} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} & x_{34} \\ x_{41} & x_{42} & x_{43} & x_{44} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

получим 4 системы уравнений относительно 16 неизвестных x_{ij} (i,j = 1,2,3,4).

В общем случае имеют место соотношения

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik} \cdot x_{kj} = \delta_{ij} \quad (i, j = 1,2,...,n),$$

где

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{при} \quad i = j, \\ 0 & \text{при} \quad i \neq j; \end{cases}$$

δ_{ij} называется символом Кронекера.

Полученные n систем линейных уравнений для $j = 1,2,...,n$ имеют одну и ту же матрицу A и различные свободные члены, составляющие единичную матрицу. Поэтому эти системы можно решить по схеме Гаусса.

Решения x_{ij}, найденные по схеме единственного деления, и будут элементами обратной матрицы A^{-1}.

П р и м е р 1. Обратить по схеме Гаусса матрицу

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 3 & 1 \\ 4 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Решение приведено в табл. 1.7.

Т а б л и ц а 1.7

x_{1j}	x_{2j}	x_{3j}	x_{4j}	i=1	i=2	i=3	i=4	$\sum_1$	$\sum_2$
1	0	1	2	1	0	0	0	5	
−1	2	3	1	0	1	0	0	0	
4	0	− 2	1	0	0	1	0	4	
0	2	1	2	0	0	0	1	6	
1	0	1	2	1	0	0	0	5	5
	2	4	3	1	1	0	0	11	11
	0	−6	−7	−4	0	1	0	−16	−16
	2	1	2	0	0	0	1	6	6
	1	2	3/2	1/2	1/2	0	0	11/2	11/2
		-6	-7	-4	0	1	0	-16	-16
		3	−7	−1	−1	0	1	−5	−5
		1	7/6	4/6	0	-1/6	0	16/6	16/6
			5/2	1	-1	-1/2	1	3	3
			1	2/5	-2/5	-1/5	2/5	6/5	6/5
			1	2/5	-2/5	-1/5	2/5	6/5	6/5
		1		1/5	7/15	1/15	−7/15	19/15	19/15
	1			−1/2	1/6	1/6	1/3	7/6	7/6
1				0	1/3	1/3	−1/3	4/3	4/3

Таким образом,

$$A^{-1}=\begin{bmatrix} 0 & 1/3 & 1/3 & -1/3 \\ -1/2 & 1/6 & 1/6 & 1/3 \\ 1/5 & 7/15 & 1/15 & -7/15 \\ 2/5 & -2/5 & -1/5 & 2/5 \end{bmatrix}.$$

П р и м е р 2. Обратить по схеме Гаусса матрицу

$$A=\begin{bmatrix} 1{,}00 & 0{,}47 & -0{,}11 & 0{,}55 \\ 0{,}42 & 1{,}00 & 0{,}35 & 0{,}17 \\ -0{,}25 & 0{,}67 & 1{,}00 & 0{,}36 \\ 0{,}54 & -0{,}32 & -0{,}74 & 1{,}00 \end{bmatrix};$$

все расчёты вести с четырьмя десятичными знаками.

Ответ округлить до трёх десятичных знаков.

Решение приведено в табл. 1.8.

Таблица 1.8

x_{1j}	x_{2j}	x_{3j}	x_{4j}	j=1
1,00 0,42 – 0,25 0,54	0,47 1,00 0,67 0,32	-0,11 0.35 1,00 – 0,74	0,55 0,17 0,36 1,00	1 0 0 0
1	0,47	-0,11	0,55	1
	0,8026 0,7875 – 0,5738	0,3962 0,9725 – 0,6806	-0,0610 0,4975 0,7030	-0,4200 0,2500 0,5400
	1	0,4936	-0,0760	-0,5233
		0,5838 – 0,3974	0,5573 0,6594	0,6621 – 0,8403
		1	0,9546	1,1341
			1,0388	-0,3896
			1	-0,3750
   1	 1 	 1 	1 	X_{41}=-0,3750 X_{31}= 1,4921 X_{21}=-1,2883 X_{11}= 1,9759

Продолжение табл. 1.8

j=2	j=3	j=4	Σ_1	Σ_2
0 1 0 0	0 0 1 0	0 0 0 1	2,91 2,94 2,78 1,48	
0	0	0	2,91	2,91
1 0 0	0 1 0	0 0 1	1,7178 3,5075 – 0,0914	1,7178 3,5075 – 0,0914
1,2460	0	0	2,1403	2,1403
-0,9812 0,7150	1 0	0 1	1,8220 1,1367	1,8220 1,1367
-1,6807	1,7129	0	3,1209	3,1209
0,0471	0,6807	1	2,3770	2,3770
0,0453	0,6553	0,9626	2,2882	2,2882
X_{42}= 0,0453 X_{32}=-1,7239 X_{22}= 2,1003 X_{12}=-1,2017	X_{43}= 0,6553 X_{33}= 1,0873 X_{23}=-0,4869 X_{13}=-0,0120	X_{44}= 0,9626 X_{34}=-0,9189 X_{24} = 0,5268 X_{14}=-0,8781	2,2862 0,9366 1,8519 0,8841	2,2882 0,9366 1,8519 0,8841

Следовательно,

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 1{,}9759 & -1{,}2017 & -0{,}0120 & -0{,}8781 \\ -1{,}2883 & 2{,}1003 & -0{,}4869 & 0{,}5268 \\ 1{,}4921 & -1{,}7239 & 1{,}0873 & -0{,}9189 \\ -0{,}3750 & 0{,}0453 & 0{,}6553 & 0{,}9626 \end{bmatrix} \approx$$

$$\approx \begin{bmatrix} 1{,}976 & -1{,}202 & -0{,}012 & -0{,}878 \\ -1{,}288 & 2{,}100 & -0{,}487 & 0{,}527 \\ 1{,}492 & -1{,}724 & 1{,}087 & -0{,}919 \\ -0{,}375 & 0{,}045 & 0{,}655 & 0{,}963 \end{bmatrix}.$$

1.9. Метод главных элементов

Пусть дана система n линейных уравнений с n неизвестными:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1q}x_q + \ldots + a_{1n}x_n = a_{1,n+1}, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2q}x_q + \ldots + a_{2n}x_n = a_{2,n+1}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{p1}x_1 + a_{p2}x_2 + \ldots + a_{pq}x_q + \ldots + a_{pn}x_n = a_{p,n+1}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nq}x_q + \ldots + a_{nn}x_n = a_{n,n+1}. \end{cases} \qquad (13)$$

Составим расширенную матрицу системы (13):

$$\bar{A} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \ldots & a_{1q} & \ldots & a_{1n} & a_{1,n+1} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \ldots & a_{2q} & \ldots & a_{2n} & a_{2,n+1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{p1} & a_{p2} & a_{p3} & \ldots & \boxed{a_{pq}} & \ldots & a_{pn} & a_{p,n+1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \ldots & a_{nq} & \ldots & a_{nn} & a_{n,n+1} \end{vmatrix}.$$

Выберем ненулевой наибольший по модулю и не принадлежащий столбцу свободных членов элемент a_{pq} матрицы $\bar{A}$, который называется *главным элементом,* и вычислим множители $m_i = -a'_{iq} / a_{pq}$ для всех строк с номерами $i \neq p$ (p-я строка, содержащая главный элемент, называется *главной строкой*).

Далее, к каждой неглавной i-й строке прибавим главную строку, умноженную на соответствующий множитель m_i для этой строки. Например:

$$b_{n1}^{(1)} = a_{11} - a_{p1}\frac{a_{1q}}{a_{pq}}; \qquad b_{n2}^{(1)} = a_{n2} - a_{p2}\frac{a_{nq}}{a_{pq}} \text{ и т.д.}$$

В результате получим новую матрицу, все элементы q-го столбца которой, кроме a_{qp}, состоят из нулей:

$$a_{1q} - a_{pq}\frac{a_{1q}}{a_{pq}} = 0,$$

$$a_{2q} - a_{pq}\frac{a_{2q}}{a_{pq}} = 0,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$a_{nq} - a_{pq}\frac{a_{nq}}{a_{pq}} = 0.$$

Отбросив этот столбец и главную p-ю строку, получим новую матрицу $B^{(1)}$, число строк и столбцов которой на единицу меньше. Повторяем те же операции с матрицей $B^{(1)}$, после чего получаем матрицу $B^{(2)}$ и т.д.

Таким образом, построим последовательность матриц $\bar{A}$, $B^{(1)}$, $B^{(2)}$, ..., $B^{(n-1)}$, последняя из которых является двучленной матрицей–строкой (главной строкой).Для определения неизвестных x_i объединяем в систему все главные строки, начиная с последней.

Изложенный метод решения системы линейных уравнений с n неизвестными называется **методом главных элементов.** Необходимое условие его применения состоит в том, что $\det A \neq 0$.

П р и м е р 1 . Методом главных элементов решить систему

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 5, \\ 2x_1 + 5x_2 + x_3 = -3, \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 11. \end{cases}$$

Р е ш е н и е.

1. Составляем расширенную матрицу $\overline{A}$ данной системы, находим главный элемент и вычисляем множители m_1:

$$\overline{A} = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 & 5 \\ 2 & [5] & 1 & -3 \\ 2 & 1 & 3 & 11 \end{bmatrix},$$

где $a_{22} = 5$ – главный элемент; $m_1 = -2/5$; $m_3 = -1/5$.

2. Находим матрицу $B^{(1)}$. Имеем:

$$b_{11}^{(1)} = 3 - 2\cdot\frac{2}{5} = \frac{11}{5}; \quad b_{12}^{(1)} = 1 - 1\cdot\frac{2}{5} = \frac{3}{5}; \quad b_{13}^{(1)} = 5 + 3\cdot\frac{2}{5} = \frac{31}{5};$$

$$b_{21}^{(1)} = 2 - 2\cdot\frac{1}{5} = \frac{8}{5}; \quad b_{22}^{(1)} = 3 - 1\cdot\frac{1}{5} = \frac{14}{5}; \quad b_{23}^{(1)} = 11 + 3\cdot\frac{1}{5} = \frac{58}{5};$$

$$B^{(1)} = \begin{bmatrix} 11/5 & 3/5 & 31/5 \\ 8/5 & [14/5] & 58/5 \end{bmatrix}.$$

Здесь $b_{22}^{(1)}$ = 14/5 – главный элемент; $m_1 = -3/14$.

3. Находим $B^{(2)}$. Имеем:

$$b_{11}^{(1)} = \frac{11}{5} - \frac{8}{5}\cdot\frac{3}{14} = \frac{13}{7}; \quad b_{12}^{(2)} = \frac{31}{5} - \frac{58}{5}\cdot\frac{3}{14} = \frac{26}{7};$$

$$B^{(2)} = \begin{bmatrix} 13/7 & 26/7 \end{bmatrix}.$$

4. Используя главные строки, приходим к системе

$$\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 + x_3 = -3, \\ (8/5)x_1 + (14/5)x_3 = 58/5, \\ (13/7)x_1 = 26/7 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} 2x_1 + 5x_2 + x_3 = -3, \\ 4x_1 + 7x_3 = 29, \\ 13x_1 = 26. \end{cases}$$

С помощью обратного хода получаем $x_1 = 2;\quad x_3 = 3;\quad x_2 = -2.$

Метод Гаусса является частным случаем метода главных элементов, если в качестве главного элемента выбрать левый верхний, отличный от нуля, элемент соответствующей матрицы системы.

Для решения систем линейных уравнений методом главных элементов можно пользоваться схемой, приведенной в табл. 1.9 (в ней главные элементы, выбранные для примера произвольно, заключены в рамку, а главные строки пронумерованы римскими цифрами I-IV).

Таблица 1.9

m_i	Столбцы матрицы системы				Свободные члены	$\sum$	Главные строки	Матрицы
	x_1	x_2	x_3	x_4				
m_1	a_{11}	a_{12}	a_{13}	a_{14}	a_{15}	$\sum a_{1j}$		
	a_{21}	a_{22}	a_{23}	a_{24}	a_{25}	$\sum a_{2j}$	II	$\bar{A}$
m_3	a_{3a1}	a_{32}	a_{33}	a_{34}	a_{35}	$\sum a_{3j}$		
m_4	a_{41}	a_{42}	a_{43}	a_{44}	a_{45}	$\sum a_{4j}$		
	$b_{11}^{(1)}$	$b_{12}^{(1)}$		$b_{14}^{(1)}$	$b_{15}^{(1)}$	$\sum b_{1j}^{(1)}$		
$m_3^{(1)}$	$b_{31}^{(1)}$	$b_{32}^{(1)}$		$b_{34}^{(1)}$	$b_{35}^{(1)}$	$\sum b_{3j}^{(1)}$	I	$B^{(1)}$
$m_4^{(1)}$	$b_{41}^{(1)}$	$b_{42}^{(1)}$		$b_{44}^{(1)}$	$b_{45}^{(1)}$	$\sum b_{45}^{(1)}$		
	$b_{31}^{(2)}$			$b_{34}^{(2)}$	$b_{35}^{(2)}$	$\sum b_{3j}^{(2)}$	III	$B^{(2)}$
$m_4^{(2)}$	$b_{41}^{(2)}$			$b_{44}^{(2)}$	$b_{45}^{(2)}$	$\sum b_{4j}^{(2)}$		
				$b_{44}^{(3)}$	$b_{45}^{(3)}$	$\sum b_{4j}^{(3)}$	IV	$B^{(3)}$

Пример 2. Методом главных элементов решить систему

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 5, \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 1, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 = 1, \\ 4x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 = -5. \end{cases}$$

Решение приведено в табл. 1.10.

Таблица 1.10

m_i	Столбцы матрицы системы				Свободные члены	Σ	Главные строки	Матрицы
	x_1	x_2	x_3	x_4				
	1	2	3	$\boxed{4}$	5	15		
−3/4	2	1	2	3	1	9		$\bar{A}$
−1/2	3	2	1	2	1	9	I	
−1/4	4	3	2	1	−5	5		
−1/3	5/4	−1/2	−1/4		−11/4	−9/4		$B^{(1)}$
−2/3	5/2	1	−1/2		−3/2	1	III	
	$\boxed{15/4}$	5/2	5/4		−25/4	5/4		
		$\boxed{-4/3}$	−2/3		−2/3	−8/3	I	$B^{(2)}$
−1/2		−2/3	−4/3		8/3	2/3		
			−1		3	2	IV	$B^{(3)}$

Итак, получаем систему:

$$\begin{cases} -x_3 = 3, \\ -(4/3)x_2 - (2/3)x_3 = -2/3, \\ (15/4)x_1 + (5/2)x_2 + (5/4)x_3 = -25/4, \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 5, \end{cases}$$

откуда находим $x_3 = -3.\quad x_2 = 2,\quad x_1 = -2,\quad x_4 = 3.$

1.10. Метод итераций (метод последовательных приближений)

Приближенные методы решения систем линейных уравнений позволяют получать значения корней системы с заданной точностью в виде предела последовательности некоторых векторов. Процесс построения такой последовательности называется *итерационным* (повторяющимся).

Эффективность применения приближенных методов зависит от выбора начального вектора и быстроты сходимости процесса.

В настоящем разделе рассмотрим метод итераций (метод последовательных приближений). Пусть дана система n линейных уравнений с n неизвестными:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n. \end{cases} \tag{14}$$

Запишем систему (14) в матричном виде:

$$Ax = b, \tag{15}$$

где $A = \begin{bmatrix} a_{11}\, a_{12} \ldots a_{1n} \\ a_{21}\, a_{22} \ldots a_{2n} \\ . \quad . \quad . \quad . \\ a_{n1}\, a_{n2} \ldots a_{nn} \end{bmatrix};\ x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix};\quad b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}.$

Предполагая, что диагональные элементы $a_{ii} \neq 0$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$, выразим x_1 через первое уравнение системы, x_2 – через второе уравнение и т.д. В результате получим систему, эквивалентную системе (14):

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{b_{11}}{a_{11}} - \dfrac{a_{12}}{a_{11}} x_2 - \dfrac{a_{13}}{a_{11}} x_3 - \ldots - \dfrac{a_{1n}}{a_{11}} x_n, \\ x_2 = \dfrac{b_2}{a_{22}} - \dfrac{a_{21}}{a_{22}} x_1 - \dfrac{a_{23}}{a_{22}} x_3 - \ldots - \dfrac{a_{2n}}{a_{22}} x_n, \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ x_n = \dfrac{b_n}{a_{nn}} - \dfrac{a_{n1}}{a_{nn}} x_1 - \dfrac{a_{n2}}{a_{nn}} x_2 - \ldots - \dfrac{a_{n,n-1}}{a_{nn}} x_{n-1}. \end{cases} \tag{16}$$

Обозначим $b_i / a_{ii} = \beta_i$; $-a_{ij} / a_{ii} = \alpha_{ij}$, где $i = 1, 2, \ldots, n$; $j = 1, 2, \ldots, n$. Тогда система (16) запишется таким образом:

$$\begin{cases} x_1 = \beta_1 + \alpha_{12} x_2 + \alpha_{13} x_3 + \ldots + \alpha_{1n} x_n, \\ x_2 = \beta_2 + \alpha_{21} x_1 + \alpha_{23} x_3 + \ldots + \alpha_{2n} x_n, \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ x_n = \beta_n + \alpha_{n1} x_1 + \alpha_{n2} x_2 + \ldots + \alpha_{n,n-1} x_{n-1}. \end{cases} \tag{16$'$}$$

Система (16′) называется системой, приведенной к *нормальному виду*. Введя обозначения

$$\alpha = \begin{bmatrix} \alpha_{11}\, \alpha_{12} \ldots \alpha_{1n} \\ \alpha_{21}\, \alpha_{22} \ldots \alpha_{2n} \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \alpha_{n1}\, \alpha_{n2} \ldots \alpha_{nn} \end{bmatrix}; \quad \beta = \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_n \end{bmatrix},$$

запишем систему (16′) в матричной форме:

$$x = \beta + \alpha x$$

или

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \alpha_{11}\, \alpha_{12} \ldots \alpha_{1n} \\ \alpha_{21}\, \alpha_{22} \ldots \alpha_{2n} \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \alpha_{n1}\, \alpha_{n2} \ldots \alpha_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}. \tag{17}$$

Решим систему (17) методом последовательных приближений. За нулевое приближение примем столбец свободных членов:

$$\begin{bmatrix} x_1^{(0)} \\ x_2^{(0)} \\ \vdots \\ x_n^{(0)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_n \end{bmatrix} \text{ – нулевое приближение,}$$

далее, построим матрицы-столбцы

$$\begin{bmatrix} x_1^{(1)} \\ x_2^{(1)} \\ \vdots \\ x_n^{(1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \alpha_{11}\,\alpha_{12} \ldots \alpha_{1n} \\ \alpha_{21}\,\alpha_{22} \ldots \alpha_{2n} \\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ \alpha_{n1}\,\alpha_{n2} \ldots \alpha_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1^{(0)} \\ x_2^{(0)} \\ \vdots \\ x_n^{0} \end{bmatrix} \text{ – первое приближение;}$$

$$\begin{bmatrix} x_1^{(2)} \\ x_2^{(2)} \\ \vdots \\ x_n^{(2)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \alpha_{11}\,\alpha_{12} \ldots \alpha_{1n} \\ \alpha_{21}\,\alpha_{22} \ldots \alpha_{2n} \\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ \alpha_{n1}\,\alpha_{n2} \ldots \alpha_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1^{(1)} \\ x_2^{(1)} \\ \vdots \\ x_n^{(1)} \end{bmatrix} \text{ – второе приближение и т.д.}$$

Вообще, любое $(k+1)$-е приближение вычисляют по формуле

$$x^{(k+1)} = \beta + \alpha x^{(k)}, \quad (k = 0, 1, \ldots, n). \tag{18}$$

Если последовательность приближений $x^{(0)}, x^{(1)}, \ldots, x^{(k)}$ имеет предел $x = \lim\limits_{k\to\infty} x^{(k)}$, то этот предел является решением системы (16), поскольку в силу свойства предела $\lim\limits_{k\to\infty} x^{(k+1)} = \beta + \alpha \lim\limits_{k\to\infty} x^{(k)}$, т.е. $x = \beta + \alpha x$.

П р и м е р 1. Методом итераций с точностью до 10^{-1} решить систему

$$\begin{cases} 8x_1 + x_2 + x_3 = 26, \\ x_1 + 5x_2 - x_3 = 7, \\ x_1 - x_2 + 5x_3 = 7. \end{cases}$$

Р е ш е н и е.

1. Приведем систему к нормальному виду:

$$\begin{cases} x_1 = 3,25 - 0,125x_2 - 0,125x_3, \\ x_2 = 1,4 - 0,2x_1 + 0,2x_3, \\ x_3 = 1,4 - 0,2x_1 + 0,2x_2; \end{cases} \qquad \alpha = \begin{bmatrix} 0 & -0,125 & -0,125 \\ -0,2 & 0 & 0,2 \\ -0,2 & 0,2 & 0 \end{bmatrix};$$

$$\beta = \begin{bmatrix} 3,25 \\ 1,4 \\ 1,4 \end{bmatrix}.$$

2. Строим последовательные приближения.

- Нулевое приближение:

$$\begin{bmatrix} x_1^{(0)} \\ x_2^{(0)} \\ x_3^{(0)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3,25 \\ 1,4 \\ 1,4 \end{bmatrix}.$$

- Первое приближение:

$$\begin{bmatrix} x_1^{(1)} \\ x_2^{(1)} \\ x_3^{(1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3,25 \\ 1,4 \\ 1,4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -0,125 & -0,125 \\ -0,2 & 0 & 0,2 \\ -0,2 & 0,2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3,25 \\ 1,4 \\ 1,4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2,9 \\ 1,03 \\ 1,03 \end{bmatrix}.$$

- Второе приближение:

$$\begin{bmatrix} x_1^{(2)} \\ x_2^{(2)} \\ x_3^{(2)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3,25 \\ 1,4 \\ 1,4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -0,125 & -0,125 \\ -0,2 & 0 & 0,2 \\ -0,2 & 0,2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2,9 \\ 1,03 \\ 1,03 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2,992 \\ 1,026 \\ 1,026 \end{bmatrix}.$$

- Третье приближение:

$$\begin{bmatrix} x_1^{(3)} \\ x_2^{(3)} \\ x_3^{(3)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3,25 \\ 1,4 \\ 1,4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -0,125 & -0,125 \\ -0,2 & 0 & 0,2 \\ -0,2 & 0,2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2,992 \\ 1,026 \\ 1,026 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2,99 \\ 1,01 \\ 1,01 \end{bmatrix}.$$

Таким образом, $x_1 = 2,99, x_2 = 1,01, x_3 = 1,01$, и с точностью до 10^{-1} получаем $x_1 = 3,0, x_2 = 1,0\ x_3 = 1,0$.

П р и м е р 2. Методом итераций с точностью до 10^{-3} решить систему

$$\begin{cases} 7{,}6x_1 + 0{,}5x_2 + 2{,}4x_3 = 1{,}9, \\ 2{,}2x_1 + 9{,}1x_2 + 4{,}4x_3 = 9{,}7, \\ -1{,}3x_1 + 0{,}2x_2 + 5{,}8x_3 = -1{,}4. \end{cases} \qquad (*)$$

Р е ш е н и е.

1. Приведем систему к нормальному виду:

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{1{,}9}{7{,}6} - \dfrac{0{,}5}{7{,}6}x_2 - \dfrac{2{,}4}{7{,}6}x_3, \\ x_2 = \dfrac{9{,}7}{9{,}1} - \dfrac{2{,}2}{9{,}1}x_1 - \dfrac{4{,}4}{9{,}1}x_3, \\ x_3 = \dfrac{-1{,}4}{5{,}8} + \dfrac{1{,}3}{5{,}8}x_1 - \dfrac{0{,}2}{5{,}8}x_2 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} x_1 = 0{,}25 - 0{,}065x_2 - 0{,}3158x_3, \\ x_2 = 1{,}0659 - 0{,}2418x_1 - 0{,}4847x_2, \\ x_3 = -0{,}2414 + 0{,}2241x_1 - 0{,}3448x_2; \end{cases}$$

$$\alpha = \begin{bmatrix} 0 & -0{,}065 & -0{,}3158 \\ -0{,}2418 & 0 & -0{,}4847 \\ 0{,}2241 & -0{,}3448 & 0 \end{bmatrix}; \quad \beta = \begin{bmatrix} 0{,}25 \\ -1{,}0659 \\ -0{,}2414 \end{bmatrix}.$$

Заметим, что линейную систему можно привести к нормальному виду также следующим образом: записать коэффициенты при x_1, x_2, x_3 в соответствующих уравнениях системы (*) в виде kx, где k-число, близкое к коэффициенту при соответствующем неизвестном и на которое легко разделить коэффициенты при неизвестных и свободные члены.

Например:

$10x_1 = 7{,}6x_1 + 2{,}4x_1$ (в первом уравнении),

$10x_2 = 9{,}1x_2 + 0{,}9x_2$ (во втором уравнении),

$10x_3 = 5{,}8x_3 + 4{,}2x_3$ (в третьем уравнении).

Перепишем систему (*) так:

$$\begin{cases} 10x_1 = 1{,}9 + 2{,}4x_1 - 0{,}5x_2 - 2{,}4x_3, \\ 10x_2 = 9{,}7 - 2{,}2x_1 + 0{,}9x_2 - 4{,}4x_3, \\ 10x_3 = -1{,}4 + 1{,}3x_1 - 0{,}2x_2 + 4{,}2x_3, \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 = 0{,}19 + 0{,}24x_1 - 0{,}05x_2 - 0{,}24x_3, \\ x_2 = 0{,}97 - 0{,}22x_1 + 0{,}09x_2 - 0{,}44x_3, \\ x_3 = -0{,}14 + 0{,}13x_1 - 0{,}02x_2 + 0{,}42x_3. \end{cases}$$

Матрица α и вектор β принимают вид

$$\alpha = \begin{bmatrix} 0,24 & -0,05 & -0,24 \\ -0,22 & 0,09 & -0,44 \\ 0,13 & -0,02 & 0,42 \end{bmatrix}; \ \beta = \begin{bmatrix} 0,19 \\ 0,97 \\ -0,14 \end{bmatrix}.$$

2. Последовательно находим

$$\begin{bmatrix} x_1^{(0)} \\ x_2^{(0)} \\ x_3^{(0)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,19 \\ 0,97 \\ -0,14 \end{bmatrix};$$

$$\begin{bmatrix} x_1^{(1)} \\ x_2^{(1)} \\ x_3^{(1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,19 \\ 0,97 \\ -0,14 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0,24 & -0,05 & -0,24 \\ -0,22 & 0,09 & -0,44 \\ 0,13 & -0,02 & 0,42 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0,19 \\ 0,97 \\ -0,14 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,2207 \\ 1,0771 \\ -0,1935 \end{bmatrix};$$

$$\begin{bmatrix} x_1^{(2)} \\ x_2^{(2)} \\ x_3^{(2)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,19 \\ 0,97 \\ -0,14 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0,24 & -0,05 & -0,24 \\ -0,22 & 0,09 & -0,44 \\ 0,13 & -0,02 & 0,42 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0,2207 \\ 1,0771 \\ -0,1935 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,2359 \\ 1,1034 \\ -0,2141 \end{bmatrix}.$$

Таким образом, с точностью до 10^{-3} получаем $x_1 = 0,236$, $x_2 = 1,103$, $x_3 = -0,214$.

1.11. Условия сходимости итерационного процесса

Пусть дана приведенная к нормальному виду система линейных уравнений $x = \beta + \alpha x$. Условие сходимости итерационного процесса заключается в следующем: *если сумма модулей элементов строк или сумма модулей элементов столбцов меньше единицы, то процесс итерации для данной системы сходится к единственному решению независимо от выбора начального вектора.*

Следовательно, условие сходимости можно записать так:

$$\sum_{j=1}^{n} \left| a_{ij} \right| < 1 \quad (i = 1,2,...,n) \quad \text{или} \quad \sum_{i=1}^{n} \left| a_{ij} \right| < 1 \quad (j = 1,2,...,n).$$

П р и м е р . Для системы

$$\begin{cases} 8x_1 + x_2 + x_3 = 26, \\ x_1 + 5x_2 - x_3 = 7, \\ x_1 - x_2 + 5x_3 = 7, \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} x_1 = 3,25 - 0,125x_2 - 0,125x_3, \\ x_2 = 1,4 - 0,2x_1 + 0,2x_3, \\ x_3 = 1,4 - 0,2x_1 - 0,2x_2 \end{cases}$$

итерационный процесс сходится, так как

$$\alpha = \begin{bmatrix} 0 & -0,125 & -0,125 \\ -0,2 & 0 & 0,2 \\ -0,2 & 0,2 & 0 \end{bmatrix}$$

и

$$|\alpha_{11}| + |\alpha_{21}| + |\alpha_{31}| = 0,2 + 0,2 = 0,4 < 1;$$

$$|\alpha_{12}| + |\alpha_{22}| + |\alpha_{32}| = 0,125 + 0,2 = 0,325 < 1;$$

$$|\alpha_{13}| + |\alpha_{23}| + |\alpha_{33}| = 0,125 + 0,2 = 0,325 < 1.$$

Аналогично можно было бы проверить выполнение условия сходимости, взяв суммы модулей элементов строк.

Процесс итерации заведомо сходится, если элементы матрицы α удовлетворяют неравенству $|\alpha_{ij}| < 1/n$, где n – число неизвестных данной системы. В данном примере n = 3 и все элементы $|\alpha_{ij}| < 1/3$.

Сходимость итерационного процесса связана с нормами матрицы α следующими соотношениями.

Если выполняется одно из условий:

$$\|\alpha\|_1 = \max_i \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}| < 1 \quad \text{либо} \quad \|\alpha\|_2 = \max_j \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}| < 1,$$

$$\text{либо} \quad \|\alpha\|_3 = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|^2} < 1,$$

то процесс итерации линейной системы сходится к единственному решению.

Так, в рассмотренном выше примере норма

$$\|\alpha\|_2 = \max(0,4; 0,325; 0,325) = 0,4 < 1,$$

т.е. итерационный процесс сходится.

1.12. Оценка погрешности приближенного процесса метода итераций

Если задана допустимая погрешность вычислений ε и x_i – вектор точных значений неизвестных линейной системы, а $x_i^{(k)}$ есть k-е приближение значений неизвестных, вычисленное методом итерации, то для оценки погрешности $\left\|x_i - x_i^{(k)}\right\| \le \varepsilon$ метода применяется формула

$$\left\|x_i - x_i^{(k)}\right\| \le \frac{\|\alpha\|^{k+1}}{1-\|\alpha\|} \cdot \|\beta\|, \tag{19}$$

где $\|\alpha\|$ – одна из трех норм матрицы α;

$\|\beta\|$ – та же норма вектора β;

k – число итераций, необходимое для достижения заданной точности.

При этом предполагается, что последовательные приближения $x_i^{(j)}$ (где $j = 0, 1, ...;\quad k, i = 1, 2, ..., n$) вычисляются точно, в них отсутствуют погрешности округления.

П р и м е р . Показать, что для системы

$$\begin{cases} 9{,}9x_1 - 1{,}5x_2 + 2{,}6x_3 = 0, \\ 0{,}4x_1 + 13{,}6x_2 - 4{,}2x_3 = 8{,}2, \\ 0{,}7x_1 + 0{,}4x_2 + 7{,}1x_3 = -1{,}3 \end{cases}$$

итерационный процесс сходится, и определить, сколько итераций следует выполнить, чтобы найти неизвестные с точностью до 10^{-4}.

Р е ш е н и е .

1. Приводим систему к нормальному виду:

$$\begin{cases} 10x_1 = 0{,}1x_1 + 1{,}5x_2 - 2{,}6x_3, \\ 20x_2 = -0{,}4x_1 + 6{,}4x_2 + 4{,}2x_3 + 8{,}2, \\ 10x_3 = -0{,}7x_1 - 0{,}4x_2 + 2{,}9x_3 - 1{,}3, \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} x_1 = 0{,}01x_1 + 0{,}15x_2 - 0{,}26x_3, \\ x_2 = -0{,}02x_1 + 0{,}32x_2 + 0{,}21x_3 + 0{,}41, \\ x_3 = -0{,}07x_1 - 0{,}04x_2 + 0{,}29x_3 - 0{,}13. \end{cases}$$

2. Матрица системы

$$\alpha = \begin{bmatrix} 0,01 & 0,15 & -0,26 \\ -0,02 & 0,32 & 0,21 \\ -0,07 & -0,04 & 0,29 \end{bmatrix}.$$

Используя норму $\|\alpha\|_2$, получим

$$\|\alpha\|_2 = \max(0,1; 0,51; 0,76) = 0,76 < 1.$$

Следовательно, итерационный процесс для данной системы сходится.

3. Имеем $\beta = \begin{bmatrix} 0 \\ 0,41 \\ -0,13 \end{bmatrix}$, $\quad \|\beta\|_2 = 0 + 0,41 + 0,13 = 0,54.$

4. Применяя формулу (13), находим:

$$\left\|x - x^{(k)}\right\| \le \frac{\|\alpha\|_2^{k+1} \cdot \|\beta\|_2}{1 - \|\alpha\|_2} = \frac{0,76^{k+1} \cdot 0,54}{0,46} \le 10^{-4};$$

$$0,76^{k+1} \cdot 0,54 \le 10^{-4} \cdot 0,46; \quad 0,76^{k+1} \le \frac{10^{-4} \cdot 46}{54};$$

$$(k+1)\lg 0,76 \le \lg 46 - \lg 54 - 4;$$

$$-(k+1) \cdot 0,1192 \le 1,6628 - 1,7324 - 2 = -4,0696;$$

$$k + 1 > \frac{4,0696}{0,1192} = 32,9; \quad k > 32,9; \quad k = 33.$$

Теоретическая оценка числа итераций, необходимых для обеспечения заданной точности, практически оказывается завышенной.

2. ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ

2.1. Индивидуальное задание № 1
РЕШЕНИЕ СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ ПО ФОРМУЛАМ КРАМЕРА И С ПОМОЩЬЮ ОБРАТНОЙ МАТРИЦЫ

Задания. 1. Решить систему по формулам Крамера.
2. Решить систему с помощью обратной матрицы.
3. Выполнить действия над матрицами.
4. Решить уравнение.

№ 1.

1) $\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 1; \\ 3x_1 - x_2 - x_3 - 2x_4 = -4; \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 - x_4 = -6; \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4 = -4. \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 5x + 8y - z = -7; \\ x + 2y + 3z = 1; \\ 2x - 3y + 2z = 9. \end{cases}$

3) $2(A+B)\cdot(2B-A)$,

где $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 4 & 5 & 2 \\ -1 & 0 & 7 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 3 \\ 2 & -2 & 4 \end{pmatrix}$.

4) $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -1 & 2 & 4 \\ 5 & 3 & 0 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 2 & 7 & 13 \\ -1 & 0 & 5 \\ 5 & 13 & 21 \end{pmatrix}$.

№ 2.

1) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 6; \\ x_1 - x_2 - 2x_3 - 3x_4 = 8; \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4 = 4; \\ 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 + x_4 = -8. \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x + 2y + z = 4; \\ 3x - 5y + 3z = 1; \\ 2x + 7y - z = 8. \end{cases}$

3) $3A - (A+2B)B$,

где $A = \begin{pmatrix} 4 & 5 & -2 \\ 3 & -1 & 0 \\ 4 & 2 & 7 \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 5 & 7 & 3 \end{pmatrix}$.

4) $X \cdot \begin{pmatrix} -1 & -2 & 3 \\ 2 & 3 & 5 \\ 1 & 4 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 11 & 3 \\ 1 & 6 & 1 \\ 2 & 2 & 16 \end{pmatrix}$.

№ 3.

1) $\begin{cases} x_1+2x_2+3x_3+4x_4=5; \\ 2x_1+x_2+2x_3+3x_4=1; \\ 3x_1+2x_2+x_3+2x_4=1; \\ 4x_1+3x_2+2x_3+x_4=-5. \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 3x+2y+z=5; \\ 2x+3y+z=1; \\ 2x+y+3z=11. \end{cases}$

3) $2(A-B)\cdot(A^2+B)$,

где $A=\begin{pmatrix} 5 & 1 & 7 \\ -10 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \\ 7 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

4) $\begin{pmatrix} 4 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ 3 & -2 & 0 \end{pmatrix}\cdot X=\begin{pmatrix} 0 & -2 & 6 \\ 2 & 4 & 3 \\ 0 & -3 & 4 \end{pmatrix}$.

№ 4.

1) $\begin{cases} x_2-3x_3+4x_4=-5; \\ x_1-2x_3+3x_4=-4; \\ 3x_1+2x_2-5x_4=12; \\ 4x_1+3x_2-5x_3=5. \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x_1+2x_2+4x_3=31; \\ 5x_1+x_2+2x_3=29; \\ 3x_1-x_2+x_3=10. \end{cases}$

3) $(A^2-B^2)(A+B)$,

где $A=\begin{pmatrix} 7 & 2 & 0 \\ -7 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & -2 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

4) $X\cdot\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & -2 & 0 \\ 4 & -3 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 22 & -14 & 3 \\ 6 & -7 & 0 \\ 11 & 3 & 15 \end{pmatrix}$.

№ 5.

1) $\begin{cases} x_1+3x_2+5x_3+7x_4=12; \\ 3x_1+5x_2+7x_3+x_4=0; \\ 5x_1+7x_2+x_3+3x_4=4; \\ 7x_1+x_2+3x_3+5x_4=16. \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 4x-3y+2z=9; \\ 2x+5y-3z=4; \\ 5x+6y-2z=18. \end{cases}$

3) $(A-B^2)(2A+B)$,

где $A=\begin{pmatrix} 5 & 2 & 0 \\ 10 & 4 & 1 \\ 7 & 3 & 2 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 3 & 6 & -1 \\ -1 & -2 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.

4) $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 4 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 9 & 8 & 7 \\ 2 & 7 & 3 \\ 4 & 3 & 5 \end{pmatrix}$.

№ 6.

1) $\begin{cases} x_1+5x_2+3x_3-4x_4=20; \\ 3x_1+x_2-2x_3=9; \\ 5x_1-7x_2+10x_4=-9; \\ 3x_2-5x_3=1. \end{cases}$

2) $\begin{cases} 2x_1-x_2-x_3=4; \\ 3x_1+4x_2-2x_3=11; \\ 3x_1-2x_2+4x_3=11. \end{cases}$

3) $(A-B)\cdot 2A+2B$,

где $A=\begin{pmatrix} 5 & -1 & 3 \\ 0 & 2 & -1 \\ -2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 3 & 7 & -2 \\ 1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.

4) $X \cdot \begin{pmatrix} 5 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 1 & 5 \\ -2 & 2 & -1 \\ 17 & 1 & 7 \end{pmatrix}$.

№ 7.

1) $\begin{cases} 2x_1+x_2-5x_3+x_4=8; \\ x_1-3x_2-6x_4=9; \\ 2x_2-x_3+2x_4=-5; \\ x_1+4x_2-7x_3+6x_4=0. \end{cases}$

2) $\begin{cases} x_1+x_2+2x_3=-1; \\ 2x_1-x_2+2x_3=-4; \\ 4x_1+x_2+4x_3=-2. \end{cases}$

3) $2(A-0{,}5B)+AB$,

где $A=\begin{pmatrix} 5 & 3 & -1 \\ 2 & 0 & 4 \\ 3 & 5 & -1 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 1 & 4 & 16 \\ -3 & -2 & 0 \\ 5 & 7 & 2 \end{pmatrix}$.

4) $\begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 3 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 5 & -7 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

№ 8.

1) $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 4; \\ 3x_1 + 3x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 6; \\ 3x_1 - x_2 - x_3 + 2x_4 = 6; \\ 3x_1 - x_2 + 3x_3 - x_4 = 6. \end{cases}$

2) $\begin{cases} 3x_1 - x_2 = 5; \\ -2x_1 + x_2 + x_3 = 0; \\ 2x_1 - x_2 + 4x_3 = 15. \end{cases}$

3) $(A - B)A + 3B$,

где $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -5 \\ 4 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 4 \\ 0 & 3 & 2 \\ -1 & -3 & 4 \end{pmatrix}$.

4) $X \cdot \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 6 & -2 \\ 4 & 10 & 1 \\ 2 & 4 & -5 \end{pmatrix}$.

№ 9.

1) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 8; \\ 2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 5; \\ x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 = -1; \\ x_1 + x_2 - x_3 + 3x_4 = 10. \end{cases}$

2) $\begin{cases} 3x_1 - x_2 + x_3 = 4; \\ 2x_1 - 5x_2 - 3x_3 = -17; \\ x_1 + x_2 - x_3 = 0. \end{cases}$

3) $2A - (A^2 + B)B$,

где $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 4 & 6 & -2 \\ 4 & 10 & 1 \\ 2 & 4 & -5 \end{pmatrix}$.

4) $\begin{pmatrix} 3 & 2 & -5 \\ 4 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 4 \\ 0 & 3 & 2 \\ -1 & -3 & 4 \end{pmatrix}$.

№ 10.

1) $\begin{cases} 4x_1 + x_2 - x_4 = -9; \\ x_1 - 3x_2 + 4x_3 = -7; \\ 3x_2 - 2x_3 + 4x_4 = 12; \\ x_1 + 2x_2 - x_3 - 3x_4 = 0. \end{cases}$

2) $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 2; \\ 2x_1 - x_2 - 6x_3 = -1; \\ 3x_1 - 2x_2 = 8. \end{cases}$

3) $3(A^2-B^2)-2AB$,

где $A=\begin{pmatrix}4 & 2 & 1\\ 3 & -2 & 0\\ 0 & -1 & 2\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}2 & 0 & 2\\ 5 & -7 & -2\\ 1 & 0 & -1\end{pmatrix}$.

4) $X\cdot\begin{pmatrix}5 & 3 & -1\\ -2 & 0 & 4\\ 3 & 5 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 4 & 16\\ -3 & -2 & 0\\ 5 & 7 & 2\end{pmatrix}$.

№ 11.

1) $\begin{cases}2x_1-x_2+x_3-x_4=1;\\ 2x_1-x_2-3x_4=2;\\ 3x_1-x_3+x_4=-3;\\ 2x_1+2x_2-2x_3+5x_4=-6.\end{cases}$

2) $\begin{cases}2x_1+x_2-x_3=1;\\ x_1+x_2+x_3=6;\\ 3x_1-x_2+x_3=4.\end{cases}$

3) $(2A-B)(3A+B)-2AB$,

где $A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 3\\ -2 & 0 & 1\\ -1 & 3 & 1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}7 & 5 & 2\\ 0 & 1 & 2\\ -3 & -1 & -1\end{pmatrix}$.

4) $X\cdot\begin{pmatrix}5 & -1 & 3\\ 0 & 2 & -1\\ -2 & -1 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3 & 7 & -2\\ 1 & 1 & -2\\ 0 & 1 & 3\end{pmatrix}$.

№ 12.

1) $\begin{cases}x_1+x_2-x_3-x_4=0;\\ x_2+2x_3-x_4=2;\\ x_1-x_2-x_4=-1;\\ -x_1+3x_2-2x_3=0.\end{cases}$

2) $\begin{cases}2x_1-x_2-3x_3=3;\\ 3x_1+4x_2-5x_3=8;\\ 2x_2+7x_3=17.\end{cases}$

3) $A(A^2-B)-2(B+A)B$,

где $A=\begin{pmatrix}2 & 3 & 1\\ -1 & 2 & 4\\ 5 & 3 & 0\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}2 & 7 & 13\\ -1 & 0 & 5\\ 5 & 13 & 21\end{pmatrix}$.

4) $\begin{pmatrix}4 & 5 & -2\\ 3 & -1 & 0\\ 4 & 2 & 7\end{pmatrix}\cdot X=\begin{pmatrix}2 & 1 & -1\\ 0 & 1 & 3\\ 5 & 7 & 3\end{pmatrix}$.

№ 13.

1) $\begin{cases} 5x_1 + x_2 - x_4 = -9; \\ 3x_1 - 3x_2 + x_3 + 4x_4 = -7; \\ 3x_1 - 2x_3 + x_4 = -16; \\ x_1 - 4x_2 + x_4 = 0. \end{cases}$

2) $\begin{cases} x_1 + 5x_2 + x_3 = -7; \\ 2x_1 - x_2 - x_3 = 0; \\ x_1 - 2x_2 - x_3 = 2. \end{cases}$

3) $(A+B)A - B(2A+3B)$,

где $A = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 3 \\ 2 & 3 & 5 \\ 1 & 4 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 4 & 11 & 3 \\ 1 & 6 & 1 \\ 2 & 2 & 16 \end{pmatrix}$.

4) $X \cdot \begin{pmatrix} 2 & -8 & 5 \\ -1 & 1 & 1 \\ -2 & -2 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & -2 & 6 \\ 0 & 4 & -2 \\ -4 & -2 & 0 \end{pmatrix}$.

№ 14.

1) $\begin{cases} 2x_1 + x_3 + 4x_4 = 9; \\ x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 8; \\ 2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 5; \\ x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 = -1. \end{cases}$

2) $\begin{cases} x - 2y + 3z = 6; \\ 2x + 3y - 4z = 16; \\ 3x - 2y - 5z = 12. \end{cases}$

3) $A(2A+B) - B(A-B)$,

где $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 4 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 9 & 8 & 7 \\ 2 & 7 & 3 \\ 4 & 3 & 5 \end{pmatrix}$.

4) $\begin{pmatrix} 5 & 3 & -1 \\ 2 & 0 & 4 \\ 3 & 5 & -1 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 16 \\ -3 & -2 & 0 \\ 5 & 7 & 2 \end{pmatrix}$.

№ 15.

1) $\begin{cases} 2x_1 - 6x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 12; \\ x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 7x_4 = 12; \\ 3x_1 + 5x_2 + 7x_3 + x_4 = 0; \\ 5x_1 + 7x_2 + x_3 + 3x_4 = 4. \end{cases}$

2) $\begin{cases} 3x + 4y + 2z = 8; \\ 2x - y - 3z = -1; \\ x + 5y + z = 0. \end{cases}$

3) $3(A+B)(AB-2A)$,

где $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & -2 & 0 \\ 4 & -3 & 0 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 22 & -14 & 3 \\ 6 & -7 & 0 \\ 11 & 3 & 15 \end{pmatrix}$.

4) $X\cdot\begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 4 & 5 & 2 \\ -1 & 0 & 7 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 & 0 & 5 \\ 2 & 1 & 3 \\ 0 & -2 & 4 \end{pmatrix}$.

№ 16.

1) $\begin{cases} x_1+5x_2=2; \\ 2x_1-x_2+3x_3+2x_4=4; \\ 3x_1-x_2-x_3+2x_4=6; \\ 3x_1-x_2+3x_3-x_4=6. \end{cases}$

2) $\begin{cases} 2x_1-x_2+3x_3=7; \\ x_1+3x_2-2x_3=0; \\ 2x_2-x_3=2. \end{cases}$

3) $2AB-(A+B)(A-B)$,

где $A=\begin{pmatrix} 4 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ 3 & -2 & 0 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 0 & -2 & 6 \\ 2 & 4 & 3 \\ 0 & -3 & 4 \end{pmatrix}$.

4) $\begin{pmatrix} 12 & 15 & -6 \\ 9 & -3 & 0 \\ 12 & 0 & 21 \end{pmatrix}\cdot X=\begin{pmatrix} 8 & 7 & -4 \\ 3 & 1 & 6 \\ 16 & 16 & 13 \end{pmatrix}$.

№ 17.

1) $\begin{cases} x_1-4x_2-x_4=2; \\ x_1+x_2+2x_3+3x_4=1; \\ 2x_1+3x_2-x_3-x_4=-6; \\ x_1+2x_2+3x_3-x_4=-4. \end{cases}$

2) $\begin{cases} 2x_1+x_2+4x_3=20; \\ 2x_1-x_2-3x_3=3; \\ 3x_1+4x_2-5x_3=-8. \end{cases}$

3) $2A+3B(AB-2A)$,

где $A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 5 & 3 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \\ -3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

4) $X\cdot\begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 6 & 6 & 5 \\ -1 & -2 & 11 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -4 & -3 & 11 \\ 0 & -3 & 4 \\ 1 & -4 & 1 \end{pmatrix}$.

№ 18.

1) $\begin{cases} 5x_1 - x_2 + x_3 + 3x_4 = -4; \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 6; \\ 2x_1 - x_2 - 2x_3 - 3x_4 = 8; \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4 = 4. \end{cases}$

2) $\begin{cases} x_1 - x_2 = 4; \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 1; \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 11. \end{cases}$

3) $(A-B)(A+B)-2AB$,

где $A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 5 \\ -1 & 0 & 2 \\ -2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ -1 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

4) $\begin{pmatrix} 8 & -5 & -1 \\ -4 & 7 & -1 \\ -4 & 1 & 5 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 5 & 4 & -1 \\ 10 & 12 & -3 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

№ 19.

1) $\begin{cases} 4x_1 - 2x_2 + x_3 - 4x_4 = 3; \\ 2x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 1; \\ 3x_1 - x_3 + x_4 = -3; \\ 2x_1 + 2x_2 - 2x_3 + 5x_4 = -6. \end{cases}$

2) $\begin{cases} x_1 + 5x_2 - x_3 = 7; \\ 2x_1 - x_2 - x_3 = 4; \\ 3x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 11. \end{cases}$

3) $2A - AB(B-A) + B$,

где $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 5 & 7 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \\ -3 & 1 & 4 \end{pmatrix}$.

4) $X \cdot \begin{pmatrix} 3 & 2 & -5 \\ 4 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 4 \\ 0 & 3 & 2 \\ -1 & -3 & 4 \end{pmatrix}$.

№ 20.

1) $\begin{cases} 2x_1 - x_3 - 2x_4 = -1; \\ x_2 + 2x_3 - x_4 = 2; \\ x_1 - x_2 - x_4 = -1; \\ -x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 0. \end{cases}$

2) $\begin{cases} 11x + 3y - z = 2; \\ 2x + 5y - 5z = 0; \\ x + y + z = 2. \end{cases}$

3) $A^2-(A+B)(A-3B)$,

где $A=\begin{pmatrix} 4 & 5 & 6 \\ -1 & 0 & 3 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & -2 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

4) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & -5 & 3 \\ 2 & 7 & -1 \end{pmatrix}\cdot X=\begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 1 & -5 & 3 \\ 8 & 7 & -1 \end{pmatrix}$.

№ 21.

1) $\begin{cases} -x_1+x_2+x_3+x_4=4; \\ 2x_1+x_2+2x_3+3x_4=1; \\ 3x_1+2x_2+x_3+2x_4=1; \\ 4x_1+3x_2+2x_3+x_4=-5. \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 7x+5y+2z=18; \\ x-y-z=3; \\ x+y+2z=-2. \end{cases}$

3) $B(A+2B)-3AB$,

где $A=\begin{pmatrix} 7 & -3 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} -4 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

4) $X\cdot\begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ -3 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 5 & -1 & 3 \\ 4 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

№ 22.

1) $\begin{cases} 5x_1+3x_2-7x_3+3x_4=1; \\ x_2-3x_3+4x_4=-5; \\ x_1-2x_3+3x_4=-4; \\ 4x_1+3x_2-5x_3=5. \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 2x+3y+z=1; \\ x+z=0; \\ x-y-z=2. \end{cases}$

3) $3(A+B)-(A-B)A$,

где $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & -1 \end{pmatrix}$.

4) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 4 & -3 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}\cdot X=\begin{pmatrix} 7 & 0 & -5 \\ 4 & 11 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$.

№ 23.

1) $\begin{cases} x_1+x_2-x_3-x_4=0; \\ x_1+2x_3-2x_4=1; \\ x_1-x_2-x_4=-1; \\ -x_1+3x_2-2x_3=0. \end{cases}$

2) $\begin{cases} x-2y-2z=3; \\ x+y-2z=0; \\ x-y-z=1. \end{cases}$

3) $A(A-B)+2B(A+B)$,

где $A=\begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ 1 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 0 & 3 & 5 \\ 4 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

4) $X\cdot\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 7 & 5 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

№ 24.

1) $\begin{cases} 2x_1+x_2-x_3+3x_4=-6; \\ 3x_1-x_2+x_3+5x_4=3; \\ x_1+2x_2-x_3+2x_4=28; \\ 2x_1+3x_2+x_3-x_4=0. \end{cases}$

2) $\begin{cases} 3x_1+x_2-5x_3=-7; \\ 2x_1-3x_2+4x_3=-1; \\ 5x_1-x_2+3x_3=0. \end{cases}$

3) $(2A+B)B-0{,}5A$,

где $A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & -2 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 2 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

4) $X\cdot\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 5 & 0 \\ 3 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

№ 25.

1) $\begin{cases} 2x_1-x_2+2x_3+2x_4=-3; \\ 3x_1+2x_2+x_3-x_4=3; \\ x_1-3x_2-x_3-3x_4=0; \\ 4x_1+2x_2+2x_3+5x_4=-15. \end{cases}$

2) $\begin{cases} x_1-2x_2+x_3=15; \\ 2x_1+x_2+3x_3=9; \\ x_1+3x_2+2x_3=-6. \end{cases}$

3) $AB-2(A+B)A$,

где $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & -2 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \end{pmatrix}$.

4) $\begin{pmatrix} -2 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 4 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

№ 26.

1) $\begin{cases} x_1-2x_2+3x_3-4x_4=-2; \\ 2x_1+3x_2+4x_3-5x_4=8; \\ 3x_1-x_2-x_3+7x_4=-2; \\ 2x_1-x_2+6x_3-3x_4=7. \end{cases}$

2) $\begin{cases} 2x_1-x_2-2x_3=1; \\ 3x_1+2x_2+x_3=1; \\ x_1+3x_2+3x_3=0. \end{cases}$

3) $(A+2B)(3A-B)$,

где $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ -2 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

4) $X \cdot \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 4 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

№ 27.

1) $\begin{cases} 3x_1+2x_2+5x_3-x_4=3; \\ 2x_1-3x_2-3x_3+4x_4=1; \\ 4x_1+x_2+3x_3+2x_4=3; \\ 5x_1-2x_2+x_3+3x_4=5. \end{cases}$

2) $\begin{cases} 2x_1+3x_2+4x_3=5; \\ 3x_1+4x_2-x_3=3; \\ 4x_1+5x_2-2x_3=3. \end{cases}$

3) $2AB+A(B-A)$,

где $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

4) $X \cdot \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

№ 28.

1) $\begin{cases} 2x_1+x_2+5x_3-x_4=1; \\ 3x_1+3x_2-2x_3-5x_4=2; \\ x_1-x_2+2x_3+3x_4=10; \\ 3x_1+2x_2+7x_3-2x_4=1. \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 2x_1-x_2-3x_3=-9; \\ x_1+2x_2+x_3=3; \\ 3x_1+x_2-x_3=-1. \end{cases}$

3) $(3A+0{,}5B)(2B-A)$,

где $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

4) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

№ 29.

1) $\begin{cases} 3x_1+x_2+2x_3-x_4=8; \\ 2x_1-3x_2-3x_3+x_4=-3; \\ 4x_1+2x_2+5x_3+3x_4=6; \\ x_1+2x_2-4x_3-3x_4=-3. \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 3x_1+x_2-2x_3=4; \\ 2x_1-3x_2+x_3=9; \\ 5x_1+x_2+3x_3=-4. \end{cases}$

3) $2A(A+B)-3AB$,

где $A=\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

4) $X \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$.

№ 30.

1) $\begin{cases} 2x_1+3x_2+5x_3+x_4=6; \\ 3x_1+x_2-x_3+5x_4=0; \\ 2x_1-x_2+3x_4=-5; \\ 2x_1+2x_2-x_3+7x_4=-3. \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 2x_1-x_2+3x_3=-4; \\ x_1+3x_2-x_3=2; \\ 5x_1+2x_2+x_3=5. \end{cases}$

3) $3AB+(A-B)\left(A+2B\right)$,

где $A=\begin{pmatrix}2 & 5 & -1\\ 0 & 2 & 1\\ 1 & 0 & 1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1 & -2 & 0\\ 1 & 0 & 2\\ 0 & 0 & 3\end{pmatrix}$.

4) $\begin{pmatrix}1 & 2 & 1\\ 0 & -1 & 2\\ 2 & -1 & 0\end{pmatrix}\cdot X=\begin{pmatrix}1 & 1 & 3\\ 3 & 2 & 1\\ 0 & 2 & -1\end{pmatrix}$.

Решение типового варианта задания № 1

Задание. 1. Решить систему по формулам Крамера.
2. Решить систему с помощью обратной матрицы.
3. Выполнить действия над матрицами.
4. Решить уравнение.

1) $\begin{cases}2x_1+x_2-2x_3+x_4=1;\\ 3x_1+4x_2+x_3-3x_4=-7;\\ 4x_1-2x_2+3x_3-4x_4=3;\\ 2x_1+2x_2-3x_3-x_4=-11.\end{cases}$ 2) $\begin{cases}2x_1-4x_2+3x_3=1;\\ x_1+3x_2+2x_3=4;\\ 3x_1-5x_2+4x_3=1.\end{cases}$

3) $(3A+B)(2A-B)$,

где $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & -1\\ 0 & 2 & -3\\ 1 & -1 & 2\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}2 & 1 & 3\\ 1 & 0 & 1\\ -1 & 3 & 1\end{pmatrix}$.

4) $\begin{pmatrix}1 & 3 & -1\\ 0 & 1 & -2\\ 1 & -1 & 2\end{pmatrix}\cdot X=\begin{pmatrix}13 & -4 & 6\\ 2 & -4 & 2\\ -2 & 5 & 5\end{pmatrix}$.

1) Решение

$$\Delta=\begin{vmatrix}2 & 1 & -2 & 1\\ 3 & 4 & 1 & -3\\ 4 & -2 & 3 & -4\\ 2 & 2 & -3 & -1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}0 & 1 & 0 & 0\\ -5 & 4 & 4 & -7\\ 8 & -2 & 7 & -2\\ -2 & 2 & -1 & -3\end{vmatrix}=-\begin{vmatrix}-5 & 4 & -7\\ 8 & 7 & -2\\ -2 & -1 & -3\end{vmatrix}=$$

$$=-(105+16+56-98+10+96)=-185;$$

$$\Delta_{X_1}=\begin{vmatrix}1&1&-2&1\\-7&4&1&-3\\3&-2&3&-4\\-11&2&-3&-1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}0&1&0&0\\-11&4&9&-7\\5&-2&-1&-2\\-13&2&1&-3\end{vmatrix}=-\begin{vmatrix}-11&9&-7\\5&-1&-2\\-13&1&-3\end{vmatrix}=$$
$$=-(-33+234-35+91-22+135)=-370;$$

$$\Delta_{X_2}=\begin{vmatrix}2&1&-2&1\\3&-7&1&-3\\4&3&3&-4\\2&-11&3&-1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}0&1&0&0\\4&-7&-13&4\\7&3&9&-7\\-1&11&-25&10\end{vmatrix}=-\begin{vmatrix}4&-13&4\\7&9&-7\\-1&-25&10\end{vmatrix}=$$
$$=-(360-91-700+36-700+910)=185;$$

$$\Delta_{X_3}=\begin{vmatrix}2&1&1&1\\3&4&-7&-3\\4&-2&3&-4\\2&2&-11&-1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}0&1&0&0\\-5&4&-11&-7\\8&-2&5&-2\\-2&2&-13&-3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}-5&-11&-7\\8&5&-2\\-2&-13&-3\end{vmatrix}=$$
$$=-(75-44+728-70+130-264)=-555;$$

$$\Delta_{X_4}=\begin{vmatrix}2&1&-2&1\\3&4&1&-7\\4&-2&3&3\\2&2&-3&-11\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}0&1&0&0\\-5&4&4&-11\\8&-2&7&5\\-2&2&-1&-13\end{vmatrix}=-\begin{vmatrix}-5&4&-11\\8&7&5\\-2&-1&-13\end{vmatrix}=$$
$$=-(455-40+88-154+416-25)=-740;$$

$$X_1=\frac{\Delta_{X_1}}{\Delta}=\frac{-370}{-185}=2;\quad X_2=\frac{\Delta_{X_2}}{\Delta}=\frac{185}{-185}=-1;\quad X_3=\frac{\Delta_{X_3}}{\Delta}=\frac{-555}{-185}=3;$$
$$X_4=\frac{\Delta_{X_4}}{\Delta}=\frac{-740}{-185}=4.$$

О т в е т : $x_1=2; x_2=-1; x_3=3; x_4=4.$

2) Р е ш е н и е

$$\begin{pmatrix}2&-4&3\\1&3&2\\3&-5&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\4\\1\end{pmatrix};$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -4 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \\ 3 & -5 & 4 \end{vmatrix} = 24 - 24 - 15 - 27 + 16 + 20 = -6;$$

$$A_{11} = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ -5 & 4 \end{vmatrix} = 22; \quad A_{12} = -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 2; \quad A_{13} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & -5 \end{vmatrix} = -14;$$

$$A_{21} = -\begin{vmatrix} -4 & -3 \\ -5 & 4 \end{vmatrix} = 1; \quad A_{22} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = -1; \quad A_{23} = -\begin{vmatrix} 2 & -4 \\ 3 & -5 \end{vmatrix} = -2;$$

$$A_{31} = \begin{vmatrix} -4 & 3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -17; \quad A_{32} = -\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -1; \quad A_{33} = \begin{vmatrix} 2 & -4 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 10;$$

$$A^{-1} = -\frac{1}{6}\begin{pmatrix} 22 & 1 & -17 \\ 2 & -1 & -1 \\ -14 & -2 & 10 \end{pmatrix};$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = -\frac{1}{6}\begin{pmatrix} 22 & 1 & -17 \\ 2 & -1 & -1 \\ -14 & -2 & 10 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1{,}5 \\ 0{,}5 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Ответ: x_1 = -1,5; x_2 = 0,5; x_3 = 2.

3) Решение

$$3A+B = \begin{pmatrix} 3 & 6 & -3 \\ 0 & 6 & -9 \\ 3 & -3 & 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 7 & 0 \\ 1 & 6 & -8 \\ 2 & 0 & 7 \end{pmatrix};$$

$$2A - B = \begin{pmatrix} 2 & 4 & -2 \\ 0 & 4 & -6 \\ 2 & -2 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 3 & -5 \\ -1 & 4 & -7 \\ 3 & -5 & 3 \end{pmatrix};$$

$$(3A+B)\cdot(2A-B) = \begin{pmatrix} 5 & 7 & 0 \\ 1 & 6 & -8 \\ 2 & 0 & 7 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & 3 & -5 \\ -1 & 4 & -7 \\ 3 & -5 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 & 43 & -74 \\ -30 & 67 & -71 \\ 21 & -29 & 11 \end{pmatrix}.$$

4) Решение. Имеем $AX = B$, откуда $X = A^{-1}B$. Находим

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = -6 + 1 - 2 = -7;$$

$$A_{11} = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = -2; \quad A_{12} = -\begin{vmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -2; \quad A_{13} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -1;$$

$$A_{21} = -\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = 1; \quad A_{22} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 1; \quad A_{23} = -\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 4;$$

$$A_{31} = \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -5; \quad A_{32} = -\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = 2; \quad A_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1;$$

$$A^{-1} = -\frac{1}{7}\begin{pmatrix} -2 & 1 & -5 \\ -2 & 1 & 2 \\ -1 & 4 & 1 \end{pmatrix};$$

$$X = -\frac{1}{7}\begin{pmatrix} -2 & 1 & -5 \\ -2 & 1 & 2 \\ -1 & 4 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 13 & -4 & 6 \\ 2 & -4 & 2 \\ -2 & 5 & 5 \end{pmatrix} =$$

$$= -\frac{1}{7}\begin{pmatrix} -14 & -21 & -35 \\ -28 & 14 & 0 \\ -7 & -7 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 4 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

2.2. Индивидуальное задание № 2
РЕШЕНИЕ СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ ПО СХЕМЕ ГАУССА

Задание. Используя схему Гаусса, решить систему уравнений с точностью до 0,0001.

№1

$$\begin{cases} 3{,}21x_1 - 4{,}25x_2 + 2{,}13x_3 = 5{,}06; \\ 7{,}09x_1 + 1{,}17x_2 - 2{,}23x_3 = 4{,}75; \\ 0{,}43x_1 - 1{,}4x_2 - 0{,}62x_3 = -1{,}05. \end{cases}$$

№2

$$\begin{cases} 0,42x_1 - 1,13x_2 + 7,05x_3 = 6,15; \\ 1,14x_1 - 2,15x_2 + 5,11x_3 = -4,16; \\ -0,71x_1 + 0,81x_2 - 0,02x_3 = -0,17. \end{cases}$$

№3

$$\begin{cases} 2,5x_1 - 3,12x_2 - 4,03x_3 = -7,5; \\ 0,61x_1 + 0,71x_2 - 0,05x_3 = 0,44; \\ -1,03x_1 - 2,05x_2 + 0,877x_3 = -1,16. \end{cases}$$

№4

$$\begin{cases} 7,09x_1 + 1,17x_2 - 2,23x_3 = -4,75; \\ 0,43x_1 - 1,4x_2 - 0,62x_3 = -1,05; \\ 3,21x_1 - 4,25x_2 + 2,13x_3 = 5,06. \end{cases}$$

№5

$$\begin{cases} 1,14x_1 - 2,15x_2 - 5,11x_3 = -4,16; \\ -0,71x_1 + 0,81x_2 - 0,02x_3 = -0,17; \\ 0,42x_1 - 1,13x_2 + 7,05x_3 = 6,15. \end{cases}$$

№6

$$\begin{cases} 0,61x_1 + 0,71x_2 - 0,05x_3 = 0,44; \\ -1,03x_1 - 2,05x_2 + 0,87x_3 = -1,16; \\ 2,5x_1 - 3,12x_2 - 5,03x_3 = -7,5. \end{cases}$$

№7

$$\begin{cases} 3,11x_1 - 1,66x_2 - 0,60x_3 = -0,92; \\ -1,65x_1 + 3,51x_2 - 0,78x_3 = 2,57; \\ 0,60x_1 + 0,78x_2 - 1,87x_3 = 1,65. \end{cases}$$

№8

$$\begin{cases} 0,10x_1 + 12x_2 - 0,13x_3 = 0,10; \\ 0,12x_1 + 0,71x_2 + 0,15x_3 = 0,26; \\ -0,13x_1 + 0,15x_2 + 0,63x_3 = 0,38. \end{cases}$$

№9

$$\begin{cases} 0,71x_1 + 0,10x_2 + 0,12x_3 = 0,29; \\ 0,10x_1 + 0,34x_2 - 0,04x_3 = 0,32; \\ 0,12x_1 - 0,04x_2 + 0,10x_3 = -0,10. \end{cases}$$

№10

$$\begin{cases} 0,34x_1 - 0,04x_2 + 0,10x_3 = 0,33; \\ -0,04x_1 + 0,10x_2 + 0,12x_3 = -0,05; \\ 0,10x_1 + 0,12x_2 + 0,71x_3 = 0,28. \end{cases}$$

№11

$$\begin{cases} 0,82x_1 - 0,43x_2 + 0,14x_3 = -0,17; \\ -0,07x_1 + 0,34x_2 + 0,72x_3 = 0,62; \\ 1,18x_1 - 0,08x_2 - 0,25x_3 = 1,12. \end{cases}$$

№12

$$\begin{cases} 1,17x_1 + 0,53x_2 - 0,84x_3 = 1,15; \\ 0,64x_1 - 0,72x_2 - 0,43x_3 = 0,15; \\ 0,32x_1 + 0,43x_2 - 0,93x_3 = -0,48. \end{cases}$$

№13

$$\begin{cases} 0,66x_1 - 1,44x_2 - 0,18x_3 = 1,83; \\ 0,48x_1 - 0,24x_2 + 0,37x_3 = -0,84; \\ 0,86x_1 + 0,43x_2 + 0,64x_3 = 0,64. \end{cases}$$

№14

$$\begin{cases} 0,82x_1 + 0,43x_2 - 0,57x_3 = 0,48; \\ -0,35x_1 + 1,12x_2 - 0,48x_3 = 0,52; \\ 0,48x_1 + 0,23x_2 + 0,37x_3 = 1,44. \end{cases}$$

№15

$$\begin{cases} 1,6x_1 + 0,12x_2 + 0,57x_3 = 0,18; \\ 0,38x_1 + 0,25x_2 - 54x_3 = 0,63; \\ 0,28x_1 + 0,46x_2 - 1,12x_3 = 0,88. \end{cases}$$

№16

$$\begin{cases} 1,16x_1 + 1,3x_2 - 1,14x_3 = 0,43; \\ 0,83x_1 - 0,48x_2 - 2,44x_3 = -0,15; \\ 2x_1 - 0,16x_2 + 1,3x_3 = 1,5. \end{cases}$$

№17

$$\begin{cases} 0,10x_1 - 0,04x_2 - 0,13x_3 = -0,15; \\ -0,04x_1 + 0,34x_2 + 0,05x_3 = 0,31; \\ -0,13x_1 + 0,05x_2 + 0,63x_3 = 0,37. \end{cases}$$

№18

$$\begin{cases} 0,63x_1 + 0,05x_2 + 0,15x_3 = 0,34; \\ 0,05x_1 + 0,34x_2 + 0,10x_3 = 0,32; \\ 0,15x_1 + 0,10x_2 + 0,71x_3 = 0,42. \end{cases}$$

№19

$$\begin{cases} 1,20x_1 - 0,20x_2 + 0,30x_3 = -0,60; \\ -0,20x_1 + 1,60x_2 - 0,10x_3 = 0,30; \\ -0,30x_1 + 0,10x_2 - 1,5x_3 = 0,40. \end{cases}$$

№20

$$\begin{cases} 0,30x_1 + 1,20x_2 - 0,20x_3 = -0,60; \\ -0,10x_1 - 0,20x_2 + 1,60x_3 = 0,30; \\ -1,50x_1 - 0,30x_2 + 0,10x_3 = 40. \end{cases}$$

№21

$$\begin{cases} 0,20x_1 + 0,44x_2 + 0,81x_3 = 0,74; \\ 0,58x_1 - 0,29x_2 + 0,05x_3 = 0,02; \\ 0,05x_1 + 0,34x_2 + 0,10x_3 = 0,32. \end{cases}$$

№22

$$\begin{cases} 6,36x_1 + 11,75x_2 + 10x_3 = -41,70; \\ 7,42x_1 + 19,03x_2 + 11,75x_3 = -49,49; \\ 5,77x_1 + 7,42x_2 + 6,36x_3 = -27,67. \end{cases}$$

№23

$$\begin{cases} 0,40x_1 + 0,11x_2 + 0,18x_3 = 0,47; \\ 0,28x_1 - 0,59x_2 + 0,03x_3 = 0,01; \\ 0,02x_1 + 0,24x_2 + 0,10x_3 = 0,22. \end{cases}$$

№24

$$\begin{cases} 0,18x_1 + 0,25x_2 - 0,44x_3 = 1,15; \\ 0,42x_1 - 0,35x_2 + 1,12x_3 = 0,86; \\ 1,14x_1 + 0,12x_2 - 0,83x_3 = 0,68. \end{cases}$$

№25

$$\begin{cases} 1,2x_1 + 0,18x_2 - 0,42x_3 = 1,5; \\ 0,44x_1 + 0,36x_2 + 0,12x_3 = 1,16; \\ 0,36x_1 - 0,42x_2 - 0,22x_3 = 0,15. \end{cases}$$

№26

$$\begin{cases} 0,64x_1 - 0,43x_2 + 0,57x_3 = 0,43; \\ 0,56x_1 + 0,12x_2 - 0,27x_3 = 0,88; \\ 0,63x_1 - 0,83x_2 + 0,43x_3 = -0,12. \end{cases}$$

№27

$$\begin{cases} 1,60x_1 + 2,18x_2 - 0,72x_3 = 1,15; \\ 0,43x_1 - 0,16x_2 + 0,53x_3 = 0,83; \\ 0,34x_1 + 0,57x_2 - 0,83x_3 = -0,42. \end{cases}$$

№28

$$\begin{cases} 0,8x_1 - 0,13x_2 + 0,63x_3 = 1,15; \\ 0,42x_1 + 0,57x_2 + 0,32x_3 = 0,84; \\ 0,54x_1 + 0,62x_2 - 0,32x_3 = 0,25. \end{cases}$$

№29

$$\begin{cases} 1,06x_1 - 0,28x_2 + 0,84x_3 = 0,57; \\ 0,43x_1 + 0,62x_2 - 0,35x_3 = 0,66; \\ 0,37x_1 - 0,75x_2 - 0,64x_3 = -0,38. \end{cases}$$

№30

$$\begin{cases} 0,75x_1 - 0,84x_2 + 1,11x_3 = 0,66; \\ 1,12x_1 - 0,14x_2 + 0,45x_3 = 0,83; \\ 0,32x_1 + 0,23x_2 - 0,48x_3 = 0,14. \end{cases}$$

Решение типового варианта задания № 2

Задание. Используя схему Гаусса, решить систему уравнений с точностью до 0,0001.

$$\begin{cases} 0,14x_1 + 0,24x_2 - 0,84x_3 = 1,11; \\ 1,07x_1 - 0,83x_2 + 0,56x_3 = 0,48; \\ 0,64x_1 + 0,43x_2 - 0,38x_3 = -0,83. \end{cases}$$

Вычисления производим по схеме единственного деления:

Коэффициенты при неизвестных			Свободные члены	Σ	Σ'	ε (невязки)
X_1	X_2	X_3				
$\boxed{0,14}$	0,24	−0,84	1,11	0,65	0,65	−0,00099
1,07	−0,83	0,56	0,48	1,28	1,28	−0,00022
0,64	0,43	−0,38	−0,83	−0,14	−0,14	−0,00106
1	1,7143	−6,0000	7,926	4,6429	4,6429	−0,00707
	$\boxed{-2,6643}$	6,98	−8,0036	−3,6879	−3,6879	0,01180
	0,6672	−3,4600	−5,9043	−3,1115	−3,1115	0,00346
	1	−2,6198	3,0040	1,3842	1,3842	−0,00443
1		$\boxed{1,7121}$	−3,9000	−2,1880	−2,1879	0,00050
	1	1	−2,2279	−1,2780	−1,2779	0,00029
		1	−2,2779	−1,2780	−1,2779	0,00029
			−2,9636	−1,9639	−1,9636	−0,00367
			−0,6583	0,3416	0,3417	0,00095

Столбец Σ содержит контрольные суммы, определяемые по общему правилу, столбец Σ' – строчные суммы, а столбец ε – невязки:

$$\varepsilon_1 = 0,14(-0,6583)+0,24(-2,9636)-0,84(-2,2779)-1,11 = -0,00099;$$

$$\varepsilon_2 = 1,07(-0,6583)-0,83(-2,9636)+0,56(-2,2779)-0,48 = -0,00022;$$

$$\varepsilon_3 = 0,64(-0,6583)+0,43(-2,9636)-0,38(2,2779)+0,83 = -0,00106;$$

$$x_3 \approx -2{,}2779+0{,}0003 = -2{,}2776; \quad x_2 \approx -2{,}9636-0{,}0037 = -2{,}9673;$$
$$x_1 \approx -0{,}6583+0{,}0010 = \; = -0{,}6573.$$

О т в е т : $x_1 \approx -0{,}6573$; $x_2 \approx -2{,}9673$; $x_3 \approx -2{,}2776$.

2.3. Индивидуальное задание № 3 ОБРАЩЕНИЕ МАТРИЦЫ И ВЫЧИСЛЕНИЕ ОПРЕДЕЛИТЕЛЯ ПО СХЕМЕ ГАУССА

Задания. 1. Обратить матрицу по схеме единственного деления. Все расчеты вести с четырьмя десятичными знаками. Ответ округлить до трех десятичных знаков.

2. Вычислить определитель по схеме Гаусса с точностью до 0,0001.

№1

1) $\begin{pmatrix} 1{,}00 & 0{,}47 & -0{,}11 & 0{,}55 \\ 0{,}42 & 1{,}00 & 0{,}35 & 0{,}17 \\ -0{,}25 & 0{,}67 & 1{,}00 & 0{,}36 \\ 0{,}54 & -0{,}32 & -0{,}74 & 1{,}00 \end{pmatrix}$; 2) $\begin{vmatrix} 1{,}00 & 0{,}42 & 0{,}54 & 0{,}66 \\ 0{,}42 & 1{,}00 & 0{,}32 & 0{,}44 \\ 0{,}54 & 0{,}32 & 1{,}00 & 0{,}22 \\ 0{,}66 & 0{,}44 & 0{,}22 & 1{,}00 \end{vmatrix}$.

№2

1) $\begin{pmatrix} 0{,}15 & 0{,}23 & 0{,}12 & 0{,}44 \\ -0{,}52 & 0{,}35 & 0{,}21 & -0{,}72 \\ 0{,}35 & 0{,}42 & 0{,}38 & -0{,}63 \\ 0{,}74 & -0{,}25 & 0{,}37 & 0{,}55 \end{pmatrix}$; 2) $\begin{vmatrix} 1{,}00 & 0{,}17 & -0{,}25 & 0{,}54 \\ 0{,}47 & 1{,}00 & 0{,}67 & -0{,}32 \\ -0{,}11 & 0{,}35 & 1{,}00 & -0{,}74 \\ 0{,}55 & 0{,}43 & 0{,}36 & 1{,}00 \end{vmatrix}$.

№3

1) $\begin{pmatrix} 0{,}75 & 0{,}16 & 0{,}27 & 0{,}83 \\ 0{,}55 & 0{,}22 & -0{,}12 & 0{,}32 \\ 1{,}00 & 0{,}42 & 0{,}35 & 0{,}18 \\ -0{,}37 & 0{,}23 & 0{,}15 & 0{,}28 \end{pmatrix}$; 2) $\begin{vmatrix} 8{,}2 & 1{,}4 & -2{,}3 & 0{,}2 \\ -1{,}6 & 5{,}4 & -7{,}7 & 3{,}1 \\ 0{,}7 & 1{,}9 & -8{,}5 & 4{,}8 \\ 5{,}3 & -5{,}9 & 2{,}7 & -7{,}9 \end{vmatrix}$.

№4

1) $\begin{pmatrix} 1{,}5 & 2{,}7 & -1{,}3 & 5{,}2 \\ 2{,}7 & -3{,}4 & 1{,}8 & 2{,}2 \\ -1{,}3 & 0{,}16 & 0{,}82 & 1{,}05 \\ 5{,}2 & 2{,}2 & 1{,}05 & 3{,}4 \end{pmatrix}$; 2) $\begin{vmatrix} 0{,}42 & 1{,}00 & 0{,}32 & 0{,}44 \\ 1{,}00 & 0{,}42 & 0{,}54 & 0{,}66 \\ 0{,}66 & 0{,}44 & 0{,}22 & 1{,}00 \\ 0{,}54 & 0{,}32 & 1{,}00 & 0{,}22 \end{vmatrix}$.

№5

$$1)\begin{pmatrix} 1{,}17 & 2{,}13 & 0{,}32 & 0{,}56 \\ 2{,}13 & 0{,}82 & -0{,}72 & 1{,}10 \\ 0{,}32 & 0{,}25 & -0{,}42 & 0{,}16 \\ 0{,}56 & 1{,}10 & -0{,}25 & -0{,}44 \end{pmatrix}; \qquad 2)\begin{vmatrix} 0{,}47 & 1{,}00 & 0{,}67 & -0{,}32 \\ 1{,}00 & 0{,}17 & -0{,}25 & 0{,}54 \\ 0{,}55 & 0{,}43 & 0{,}36 & 1{,}00 \\ -0{,}11 & 0{,}35 & 1{,}00 & -0{,}74 \end{vmatrix}.$$

№6

$$1)\begin{pmatrix} 1{,}2 & 3{,}2 & -1{,}5 & 2{,}7 \\ -5{,}3 & 4{,}1 & 3{,}8 & 1{,}7 \\ 0{,}3 & 1{,}5 & -1{,}6 & 4{,}2 \\ 1{,}6 & 4{,}5 & 6{,}3 & -1{,}2 \end{pmatrix}; \qquad 2)\begin{vmatrix} -1{,}6 & 5{,}4 & -7{,}7 & 3{,}1 \\ 8{,}2 & 1{,}4 & -2{,}3 & 0{,}2 \\ 5{,}3 & -5{,}9 & 2{,}7 & -7{,}9 \\ 0{,}7 & 1{,}9 & -8{,}5 & 4{,}8 \end{vmatrix}.$$

№7

$$1)\begin{pmatrix} 0{,}62 & 0{,}73 & -0{,}43 & -0{,}23 \\ 0{,}73 & 1{,}00 & 0{,}25 & 0{,}64 \\ -0{,}41 & 0{,}62 & 0{,}21 & 0{,}44 \\ 0{,}84 & 0{,}32 & 0{,}18 & -0{,}47 \end{pmatrix}; \qquad 2)\begin{vmatrix} 0{,}42 & 1{,}00 & 0{,}32 & 0{,}44 \\ 1{,}00 & 0{,}42 & 0{,}54 & 0{,}66 \\ 0{,}66 & 0{,}44 & 0{,}22 & 1{,}00 \\ 0{,}54 & 0{,}32 & 1{,}00 & 0{,}22 \end{vmatrix}.$$

№8

$$1)\begin{pmatrix} 1{,}13 & 2{,}15 & 0{,}83 & 0{,}77 \\ 0{,}64 & -0{,}43 & 0{,}62 & -0{,}32 \\ 2{,}32 & 1{,}15 & 1{,}84 & 0{,}68 \\ -0{,}72 & 0{,}53 & 0{,}64 & -0{,}57 \end{pmatrix}; \qquad 2)\begin{vmatrix} -1{,}6 & 5{,}4 & -7{,}7 & 3{,}1 \\ 8{,}2 & 1{,}4 & -2{,}3 & 0{,}2 \\ 5{,}3 & -5{,}9 & 2{,}7 & -7{,}9 \\ 0{,}7 & 1{,}9 & -8{,}5 & 4{,}8 \end{vmatrix}.$$

№9

$$1)\begin{pmatrix} 0{,}42 & 0{,}26 & 0{,}33 & -0{,}22 \\ 0{,}74 & -0{,}55 & 0{,}28 & -0{,}65 \\ 0{,}88 & 0{,}42 & -0{,}33 & 0{,}75 \\ 0{,}92 & 0{,}82 & -0{,}62 & 0{,}75 \end{pmatrix}; \qquad 2)\begin{vmatrix} 0{,}47 & 1{,}00 & 0{,}67 & -0{,}32 \\ 1{,}00 & 0{,}17 & -0{,}25 & 0{,}54 \\ 0{,}55 & 0{,}43 & 0{,}36 & 1{,}00 \\ -0{,}11 & 0{,}35 & 1{,}00 & -0{,}74 \end{vmatrix}.$$

№10

$$1)\begin{pmatrix} 0{,}75 & 0{,}18 & 0{,}63 & -0{,}32 \\ 0{,}92 & 0{,}38 & -0{,}14 & 0{,}56 \\ 0{,}63 & -0{,}42 & 0{,}18 & 0{,}37 \\ -0{,}65 & 0{,}52 & 0{,}47 & 0{,}27 \end{pmatrix}; \qquad 2)\begin{vmatrix} 1{,}00 & 0{,}42 & 0{,}54 & 0{,}66 \\ 0{,}42 & 1{,}00 & 0{,}32 & 0{,}44 \\ 0{,}54 & 0{,}32 & 1{,}00 & 0{,}22 \\ 0{,}66 & 0{,}44 & 0{,}22 & 1{,}00 \end{vmatrix}.$$

№11

$$1)\begin{pmatrix} -2,41 & 7,55 & 0,82 & 0,33 \\ 0,28 & -3,44 & 0,75 & 0,23 \\ 0,17 & 0,28 & 0,05 & 3,48 \\ -1,00 & 0,23 & 2,00 & 7,00 \end{pmatrix}; \qquad 2)\begin{vmatrix} 1,13 & 0,15 & 0,26 & -0,43 \\ 0,45 & 0,62 & -0,80 & 0,74 \\ 0,62 & -1,12 & 0,64 & 0,78 \\ -0,13 & 0,73 & 0,16 & -0,36 \end{vmatrix}.$$

№12

$$1)\begin{pmatrix} -1,09 & 7,56 & 3,45 & 0,78 \\ 3,33 & 4,45 & -0,21 & 3,44 \\ 2,33 & -4,45 & 0,17 & 2,21 \\ 4,03 & 1,00 & 3,05 & 0,11 \end{pmatrix}; \qquad 2)\begin{vmatrix} 0,84 & 1,32 & 0,48 & -1,13 \\ 1,16 & -0,46 & 0,64 & -0,13 \\ 0,44 & 0,83 & -1,12 & 0,44 \\ 0,16 & 0,32 & 0,08 & -0,57 \end{vmatrix}.$$

№13

$$1)\begin{pmatrix} 4,5 & 4,8 & -3,7 & 2,1 \\ 4,5 & -3,7 & 5,6 & 3,3 \\ 4,8 & 7,5 & 8,3 & 9,2 \\ -1,5 & 2,3 & 4,8 & 3,1 \end{pmatrix}; \qquad 2)\begin{vmatrix} 0,52 & 0,83 & -1,2 & 0,82 \\ 0,63 & -0,42 & 0,57 & 1,15 \\ 0,44 & 0,52 & 0,44 & 0,18 \\ 0,62 & -0,12 & 0,08 & 0,42 \end{vmatrix}.$$

№14

$$1)\begin{pmatrix} 5,5 & 3,7 & -8,3 & 9,1 \\ -4,5 & 6,8 & 7,2 & 3,4 \\ 7,5 & -4,9 & 3,5 & 7,1 \\ 5,6 & -4,8 & 7,3 & 5,3 \end{pmatrix}; \qquad 2)\begin{vmatrix} 1,5 & 0,84 & 0,63 & -0,18 \\ 0,15 & 0,36 & -0,16 & 0,88 \\ -0,27 & 0,45 & 0,64 & -0,38 \\ 0,41 & -0,83 & 0,62 & 0,27 \end{vmatrix}.$$

№15

$$1)\begin{pmatrix} 1,8 & 1,02 & 1,03 & 1,05 \\ 7,03 & 8,04 & 9,05 & 6,08 \\ 1,11 & -2,02 & 2,03 & -3,04 \\ -3,41 & 4,52 & 7,28 & 5,51 \end{pmatrix}; \qquad 2)\begin{vmatrix} 0,8 & 1,3 & -0,12 & 0,25 \\ -1,2 & 0,18 & 0,72 & 0,13 \\ 1,6 & 0,2 & 0,12 & -0,11 \\ 1,4 & 0,15 & -0,83 & 0,41 \end{vmatrix}.$$

№16

$$1)\begin{pmatrix} 1,71 & 3,56 & -0,33 & 0,17 \\ 2,81 & 3,45 & 0,17 & -0,22 \\ -0,34 & 0,75 & 0,33 & 0,22 \\ 7,03 & -3,45 & 0,32 & 0,17 \end{pmatrix}; \qquad 2)\begin{vmatrix} 2,5 & 0,35 & 0,4 & -0,8 \\ 0,2 & -1,5 & 0,61 & 2,3 \\ 0,16 & -0,42 & 0,57 & 0,63 \\ 0,23 & 0,15 & -0,08 & 3,1 \end{vmatrix}.$$

№17

$$1)\begin{pmatrix} 0,17 & -0,13 & 0,45 & 0,66 \\ 0,18 & 0,22 & -0,11 & 0,71 \\ 0,82 & 0,33 & 0,18 & -0,63 \\ -0,28 & 0,41 & 0,28 & 0,33 \end{pmatrix}; \qquad 2)\begin{vmatrix} 0,42 & 1,00 & 0,32 & 0,44 \\ 1,00 & 0,42 & 0,54 & 0,66 \\ 0,66 & 0,44 & 0,22 & 1,00 \\ 0,54 & 0,32 & 1,00 & 0,22 \end{vmatrix}.$$

№18

$$1)\begin{pmatrix} 1,41 & 2,42 & 3,53 & 4,48 \\ 1,28 & -3,04 & 1,09 & 1,05 \\ 7,01 & 8,03 & 9,01 & 7,04 \\ 3,15 & 4,18 & -8,11 & 7,12 \end{pmatrix}; \qquad 2)\begin{vmatrix} 1,00 & 0,17 & -0,25 & 0,54 \\ 0,47 & 1,00 & 0,67 & -0,32 \\ -0,11 & 0,35 & 1,00 & -0,74 \\ 0,55 & 0,43 & 0,36 & 1,00 \end{vmatrix}.$$

№19

$$1)\begin{pmatrix} 0,28 & 0,33 & 0,42 & 0,51 \\ 0,17 & 0,88 & 0,19 & 0,22 \\ -0,23 & 0,18 & 0,11 & -0,13 \\ 0,51 & 0,15 & 0,72 & -0,14 \end{pmatrix}; \qquad 2)\begin{vmatrix} 8,2 & 1,4 & -2,3 & 0,2 \\ -1,6 & 5,4 & -7,7 & 3,1 \\ 0,7 & 1,9 & -8,5 & 4,8 \\ 5,3 & -5,9 & 2,7 & -7,9 \end{vmatrix}.$$

№20

$$1)\begin{pmatrix} 1,17 & 4,12 & 1,08 & 3,05 \\ 2,01 & -1,02 & 1,03 & 1,00 \\ 1,00 & 2,00 & 1,00 & 3,00 \\ 7,05 & 8,03 & -4,04 & 5,55 \end{pmatrix}; \qquad 2)\begin{vmatrix} 1,6 & 5,4 & -7,7 & -3,1 \\ 8,2 & 1,4 & -2,3 & 0,2 \\ 5,3 & -5,9 & 2,7 & -7,9 \\ 0,7 & 1,9 & -8,5 & 4,8 \end{vmatrix}.$$

№21

$$1)\begin{pmatrix} 1,00 & 0,42 & 0,54 & 0,66 \\ 0,42 & 1,00 & 0,32 & 0,44 \\ 0,54 & 0,32 & 1,00 & 0,22 \\ 0,66 & 0,44 & 0,22 & 1,00 \end{pmatrix}; \qquad 2)\begin{vmatrix} 0,47 & 1,00 & 0,67 & -0,32 \\ 1,00 & 0,17 & -0,25 & 0,54 \\ 0,55 & 0,43 & 0,36 & 1,00 \\ -0,11 & 0,35 & 1,00 & -0,74 \end{vmatrix}.$$

№22

$$1)\begin{pmatrix} 2,11 & 3,01 & 4,02 & 0,22 \\ 0,18 & 3,41 & 0,15 & 1,43 \\ 2,14 & 0,17 & 0,26 & 0,18 \\ 1,28 & 0,42 & 0,54 & 1,00 \end{pmatrix}; \qquad 2)\begin{vmatrix} 1,00 & 0,42 & 0,54 & 0,66 \\ 0,42 & 1,00 & 0,32 & 0,44 \\ 0,54 & 0,32 & 1,00 & 0,22 \\ 0,66 & 0,44 & 0,22 & 1,00 \end{vmatrix}.$$

№23

1) $\begin{pmatrix} 7{,}13 & 8{,}21 & 4{,}47 & -2{,}11 \\ 3{,}25 & 1{,}54 & 2{,}91 & 5{,}43 \\ -6{,}34 & -8{,}17 & -10{,}2 & 3{,}93 \\ 4{,}52 & 6{,}73 & 1{,}37 & -9{,}89 \end{pmatrix}$; 2) $\begin{vmatrix} 0{,}2 & -7{,}7 & 3{,}1 & -1{,}6 \\ 0{,}7 & 1{,}4 & -8{,}5 & 4{,}8 \\ 8{,}2 & -2{,}3 & 0{,}3 & -7{,}9 \\ 0{,}55 & 1{,}00 & 0{,}32 & 0{,}4 \end{vmatrix}$.

№24

1) $\begin{pmatrix} -2{,}00 & 3{,}01 & 0{,}12 & -0{,}11 \\ 2{,}92 & -0{,}17 & 0{,}11 & 0{,}22 \\ 0{,}66 & 0{,}52 & 3{,}17 & 2{,}11 \\ 3{,}01 & 0{,}42 & -0{,}27 & -0{,}15 \end{pmatrix}$; 2) $\begin{vmatrix} 0{,}25 & 0{,}16 & 0{,}35 & 0{,}18 \\ 1{,}2 & -0{,}8 & 0{,}62 & 0{,}34 \\ 0{,}83 & 0{,}48 & -0{,}18 & 0{,}72 \\ 0{,}43 & 0{,}57 & 0{,}62 & -0{,}13 \end{vmatrix}$.

№25

1) $\begin{pmatrix} 3{,}41 & -0{,}18 & 2{,}34 & 7{,}08 \\ 0{,}21 & 0{,}17 & -0{,}51 & -0{,}44 \\ 0{,}33 & 3{,}42 & -5{,}17 & 0{,}66 \\ 0{,}77 & 3{,}68 & 0{,}22 & -0{,}19 \end{pmatrix}$; 2) $\begin{vmatrix} 1{,}00 & 2{,}14 & 0{,}42 & -1{,}13 \\ 0{,}23 & 0{,}42 & -1{,}5 & 0{,}16 \\ 0{,}34 & -0{,}12 & 0{,}18 & 0{,}57 \\ 0{,}83 & -0{,}17 & 0{,}62 & -0{,}83 \end{vmatrix}$.

№26

1) $\begin{pmatrix} 4{,}20 & 0{,}32 & 0{,}11 & 0{,}13 \\ 0{,}17 & 0{,}25 & 0{,}48 & 0{,}52 \\ 0{,}12 & 0{,}08 & 0{,}72 & 0{,}61 \\ 0{,}54 & 0{,}13 & 0{,}81 & 0{,}17 \end{pmatrix}$; 2) $\begin{vmatrix} 0{,}92 & 0{,}16 & -0{,}23 & 0{,}8 \\ 0{,}16 & 0{,}12 & 0{,}15 & 0{,}72 \\ -0{,}23 & 0{,}15 & 0{,}88 & 0{,}16 \\ 0{,}8 & 0{,}72 & -0{,}13 & 0{,}72 \end{vmatrix}$.

№27

1) $\begin{pmatrix} 2{,}00 & 0{,}17 & 3{,}02 & 0{,}11 \\ 0{,}28 & 0{,}13 & 0{,}54 & 3{,}12 \\ 0{,}54 & 0{,}18 & 2{,}11 & 3{,}08 \\ 2{,}33 & 0{,}11 & 0{,}22 & 2{,}22 \end{pmatrix}$; 2) $\begin{vmatrix} 1{,}00 & 0{,}13 & 0{,}25 & 0{,}82 \\ -0{,}15 & 0{,}27 & 0{,}35 & -0{,}44 \\ 0{,}83 & 0{,}11 & 0{,}72 & -0{,}32 \\ 0{,}94 & 0{,}08 & 0{,}32 & 0{,}12 \end{vmatrix}$.

№28

1) $\begin{pmatrix} 0{,}54 & 0{,}32 & 1{,}00 & 0{,}22 \\ 0{,}66 & 0{,}44 & 0{,}22 & 1{,}00 \\ 1{,}00 & 0{,}42 & 0{,}54 & 0{,}66 \\ 0{,}42 & 1{,}00 & 0{,}32 & 0{,}44 \end{pmatrix}$; 2) $\begin{vmatrix} 1{,}03 & 0{,}88 & 0{,}64 & 0{,}12 \\ 0{,}12 & 0{,}62 & -0{,}13 & 0{,}32 \\ 0{,}18 & 0{,}25 & 0{,}42 & 0{,}82 \\ 0{,}32 & 0{,}43 & 0{,}85 & 0{,}93 \end{vmatrix}$.

№29

1) $\begin{pmatrix} -0{,}33 & 0{,}42 & 0{,}51 & -0{,}11 \\ 2{,}71 & -0{,}92 & -2{,}17 & 0{,}81 \\ 0{,}75 & 0{,}68 & 0{,}33 & 0{,}17 \\ 0{,}28 & -3{,}71 & 2{,}17 & 0{,}16 \end{pmatrix}$; 2) $\begin{vmatrix} 1{,}00 & 0{,}27 & 0{,}64 & 0{,}83 \\ 0{,}27 & 0{,}35 & -0{,}81 & 0{,}16 \\ 0{,}64 & -0{,}81 & -0{,}14 & 0{,}15 \\ 0{,}83 & -0{,}14 & 0{,}25 & 0{,}37 \end{vmatrix}$.

№30

1) $\begin{pmatrix} 0{,}72 & 3{,}54 & 7{,}28 & 0{,}33 \\ -0{,}28 & -0{,}72 & 3{,}04 & 0{,}22 \\ 1{,}00 & 0{,}35 & -0{,}78 & 1{,}00 \\ 7{,}03 & -5{,}04 & -3{,}75 & 3{,}41 \end{pmatrix}$; 2) $\begin{vmatrix} 0{,}52 & 0{,}42 & 0{,}36 & 0{,}84 \\ 0{,}42 & 0{,}56 & 0{,}83 & -0{,}73 \\ 0{,}36 & 0{,}83 & -0{,}13 & 0{,}28 \\ 0{,}84 & 0{,}24 & -0{,}38 & 0{,}49 \end{vmatrix}$.

Решение типового варианта задания № 3

Задание. 1. Обратить матрицу по схеме единственного деления. Все расчеты вести с четырьмя десятичными знаками. Ответ округлить до трех десятичных знаков.

2. Вычислить определитель по схеме Гаусса с точностью до 0,0001.

1) $A = \begin{pmatrix} 0{,}32 & 0{,}52 & -0{,}42 & 0{,}23 \\ 0{,}44 & -0{,}25 & 0{,}36 & -0{,}51 \\ -1{,}06 & 0{,}74 & -0{,}83 & 0{,}48 \\ 0{,}96 & 0{,}82 & 0{,}55 & 0{,}36 \end{pmatrix}$;

2) $\Delta = \begin{vmatrix} 0{,}32 & 0{,}54 & 0{,}67 & -0{,}82 \\ 0{,}84 & 0{,}88 & -0{,}35 & 0{,}71 \\ 1{,}02 & 0{,}32 & 0{,}48 & 0{,}57 \\ -0{,}18 & 0{,}64 & -0{,}24 & 0{,}43 \end{vmatrix}$.

1) Решение. Вычисления производим в таблице:

0,32	0,52	−0,42	0,23	1	0	0	0	1,65
0,44	−0,25	0,36	−0,51	0	1	0	0	1,04
−1,06	0,74	−0,83	0,48	0	0	1	0	0,33
0,96	0,82	0,55	0,36	0	0	0	1	3,69
1	1,625	−1,3125	0,7188	3,125	0	0	0	5,1562
	−0,965	0,9375	−0,8262	−1,375	1	0	0	−1,2288
	2,4625	−2,2212	1,2419	3,3125	0	1	0	5,7956
	−0,74	1,81	−0,33	−3,000	0	0	1	−1,26
	1	−0,9715	0,8562	1,4249	−1,0363	0	0	1,2733
		0,1711	−0,8666	−0,1962	2,5518	1	0	2,6601
		1,0911	0,3036	−1,9456	0,7668	0	1	−0,3177
		1	−5,0656	−1,1471	14,9168	5,8456	0	15,5496
			5,8306	−0,6940	−17,0424	6,3780	1	−17,2837
			1	−0,1190	−2,9229	−1,0939	0,1715	−2,9643
			1	−0,1190	−2,9229	−1,0939	0,1715	−2,9643
		1		−1,7500	0,1105	0,3044	0,8688	0,5336
	1			−0,1734	1,5737	1,2323	0,6972	4,3298
1				1,1954	−0,3114	−0,8168	−0,1159	0,9512

Ответ: $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1{,}1954 & -0{,}3114 & -0{,}8168 & -0{,}1159 \\ -0{,}1734 & 1{,}5737 & 1{,}2323 & 0{,}6972 \\ -1{,}7500 & 0{,}1105 & 0{,}3044 & 0{,}8688 \\ -0{,}1190 & -2{,}9229 & -1{,}0939 & 0{,}1715 \end{pmatrix}$

2) Решение. Вычисления производим в таблице:

	$\boxed{0{,}32}$ 0,84 1,02 −0,18	0,54 0,88 0,32 0,64	0,67 −0,35 0,48 −0,24	−0,82 0,71 0,57 0,43 0,43	
	1	1,6875	2,09375	−2,5625	
		$\boxed{-0{,}5375}$ −1,40125 0,94375	−2,20875 −1,655625 0,136875	2,8625 3,18375 −0,03125	
		1	3,92326	−5,32558	
			$\boxed{3{,}84184}$ −3,56570	−4,27872 4,99477	
		1	1	−1,11372	
				$\boxed{1{,}02358}$	
Δ =	0,32	−0,5375	3,84184	1,02358 =	−0,676378

Ответ:

$$\Delta = 0{,}32 \cdot (-0{,}5375) \cdot 3{,}84184 \cdot 1{,}02358 = -0{,}676378 \approx -0{,}6764 .$$

2.4. Индивидуальное задание № 4
РЕШЕНИЕ СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ МЕТОДОМ ГЛАВНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

Задание. Решить систему линейных уравнений методом главных элементов с точностью до 0,001.

№1

$$\begin{cases} 0,34x_1 + 0,71x_2 + 0,63x_3 = 2,08; \\ 0,71x_1 - 0,65x_2 - 0,18x_3 = 0,17; \\ 1,17x_1 - 2,35x_2 + 0,75x_3 = 1,28. \end{cases}$$

№2

$$\begin{cases} 3,75x_1 - 0,28x_2 + 0,17x_3 = 0,75; \\ 2,11x_1 - 0,11x_2 - 0,12x_3 = 1,11; \\ 0,22x_1 - 3,17x_2 + 1,81x_3 = 0,05. \end{cases}$$

№3

$$\begin{cases} 0,21x_1 - 0,18x_2 + 0,75x_3 = 0,11; \\ 0,13x_1 + 0,75x_2 - 0,11x_3 = 2,00; \\ 3,01x_1 - 0,33x_2 + 0,11x_3 = 0,13. \end{cases}$$

№4

$$\begin{cases} 0,13x_1 - 0,14x_2 - 2,00x_3 = 0,15; \\ 0,75x_1 + 0,18x_2 - 0,77x_3 = 1,11; \\ 0,28x_1 - 0,17x_2 + 0,39x_3 = 0,12. \end{cases}$$

№5

$$\begin{cases} 3,01x_1 - 0,14x_2 - 0,15x_3 = 1,00; \\ 1,11x_1 + 0,13x_2 - 0,75x_3 = 0,13; \\ 0,17x_1 - 2,11x_2 + 0,71x_3 = 0,17. \end{cases}$$

№6

$$\begin{cases} 0,92x_1 - 0,83x_2 + 0,62x_3 = 2,15; \\ 0,24x_1 - 0,54x_2 + 0,43x_3 = 0,62; \\ 0,73x_1 - 0,81x_2 + 0,67x_3 = 0,88. \end{cases}$$

№7

$$\begin{cases} 1,24x_1 - 0,87x_2 - 3,17x_3 = 0,46; \\ 2,11x_1 - 0,45x_2 + 1,44x_3 = 1,50; \\ 0,48x_1 + 1,25x_2 - 0,63x_3 = 0,35. \end{cases}$$

№8

$$\begin{cases} 0,64x_1 - 0,83x_2 + 4,20x_3 = 2,23; \\ 0,58x_1 - 0,83x_2 + 1,43x_3 = 1,71; \\ 0,86x_1 + 0,77x_2 + 0,88x_3 = -0,54. \end{cases}$$

№9

$$\begin{cases} 0,32x_1 - 0,42x_2 + 0,85x_3 = 1,32; \\ 0,63x_1 - 1,43x_2 - 0,58x_3 = -0,44; \\ 0,84x_1 - 2,23x_2 - 0,52x_3 = 0,64. \end{cases}$$

№10

$$\begin{cases} 0,73x_1 + 1,24x_2 - 0,38x_3 = 0,58; \\ 1,25x_1 + 0,66x_2 - 0,78x_3 = 0,66; \\ 0,75x_1 + 1,22x_2 - 0,83x_3 = 0,92. \end{cases}$$

№11

$$\begin{cases} 0,62x_1 - 0,44x_2 - 0,86x_3 = 0,68; \\ 0,83x_1 + 0,42x_2 - 0,56x_3 = 1,24; \\ 0,58x_1 - 0,37x_2 + 0,62x_3 = 0,87. \end{cases}$$

№12

$$\begin{cases} 1,26x_1 - 2,34x_2 + 1,17x_3 = 3,14; \\ 0,75x_1 + 1,24x_2 - 0,48x_3 = -1,17; \\ 3,44x_1 - 1,85x_2 + 1,16x_3 = 1,83. \end{cases}$$

№13

$$\begin{cases} 0,46x_1 + 1,72x_2 + 2,53x_3 = 2,44; \\ 1,53x_1 - 2,32x_2 - 1,83x_3 = 2,83; \\ 0,75x_1 + 0,86x_2 + 3,72x_3 = 1,06. \end{cases}$$

№14

$$\begin{cases} 2,47x_1 + 0,65x_2 - 1,88x_3 = 1,24; \\ 1,34x_1 + 1,17x_2 + 2,54x_3 = 2,35; \\ 0,86x_1 - 1,73x_2 + 1,08x_3 = 3,15. \end{cases}$$

№15

$$\begin{cases} 4,24x_1 + 2,73x_2 - 1,55x_3 = 1,87; \\ 2,34x_1 + 1,27x_2 + 3,15x_3 = 2,16; \\ 3,05x_1 - 1,05x_2 - 0,63x_3 = -1,25. \end{cases}$$

№16

$$\begin{cases} 0,43x_1 + 1,24x_2 - 0,58x_3 = 2,71; \\ 0,74x_1 + 0,83x_2 + 1,17x_3 = 1,26; \\ 1,43x_1 - 1,58x_2 + 0,83x_3 = 1,03. \end{cases}$$

№17

$$\begin{cases} 0,43x_1 + 0,63x_2 + 1,44x_3 = 2,18; \\ 1,64x_1 - 0,83x_2 - 2,45x_3 = 1,84; \\ 0,58x_1 + 1,55x_2 + 3,18x_3 = 0,74. \end{cases}$$

№18

$$\begin{cases} 1,24x_1 + 0,62x_2 - 0,95x_3 = 1,43; \\ 2,15x_1 - 1,18x_2 + 0,57x_3 = 2,43; \\ 1,72x_1 - 0,83x_2 + 1,57x_3 = 3,88. \end{cases}$$

№19

$$\begin{cases} 0,62x_1 + 0,56x_2 - 0,43x_3 = 1,16; \\ 1,32x_1 - 0,88x_2 + 1,76x_3 = 2,07; \\ 0,73x_1 + 1,42x_2 - 0,34x_3 = 2,18. \end{cases}$$

№20

$$\begin{cases} 1,06x_1 + 0,34x_2 + 1,26x_3 = 1,17; \\ 2,54x_1 - 1,16x_2 + 0,55x_3 = 2,23; \\ 1,34x_1 - 0,47x_2 - 0,83x_3 = 3,26. \end{cases}$$

№21

$$\begin{cases} 3,15x_1 - 1,72x_2 - 1,23x_3 = 2,15; \\ 0,72x_1 + 0,67x_2 + 1,18x_3 = 1,43; \\ 2,57x_1 - 1,34x_2 - 0,68x_3 = 1,03. \end{cases}$$

№22

$$\begin{cases} 1,73x_1 - 0,83x_2 + 1,82x_3 = 0,36; \\ 0,27x_1 + 0,53x_2 - 0,64x_3 = 1,23; \\ 0,56x_1 - 0,48x_2 + 1,95x_3 = -0,76. \end{cases}$$

№23

$$\begin{cases} 0,95x_1 + 0,72x_2 - 1,14x_3 = 2,15; \\ 0,63x_1 + 0,24x_2 + 0,38x_3 = 0,74; \\ 1,23x_1 - 1,08x_2 - 1,16x_3 = 0,97. \end{cases}$$

№24

$$\begin{cases} 2,18x_1 + 1,72x_2 - 0,93x_3 = 1,06; \\ 1,42x_1 + 0,18x_2 + 1,12x_3 = 2,07; \\ 0,92x_1 - 1,14x_2 - 2,53x_3 = -0,45. \end{cases}$$

№25

$$\begin{cases} 2,23x_1 - 0,73x_2 + 1,27x_3 = 2,43; \\ 2,15x_1 + 3,17x_2 - 1,43x_3 = -0,73; \\ 0,83x_1 + 0,72x_2 + 2,12x_3 = 1,42. \end{cases}$$

№26

$$\begin{cases} 0,65x_1 - 0,93x_2 + 0,45x_3 = -0,72; \\ 1,15x_1 + 0,43x_2 - 0,72x_3 = 1,24; \\ 0,56x_1 - 0,18x_2 + 1,03x_3 = 2,15. \end{cases}$$

№27

$$\begin{cases} 1,16x_1 - 0,28x_2 + 2,16x_3 = 1,16; \\ 0,65x_1 + 0,76x_2 - 1,18x_3 = 0,28; \\ 0,53x_1 + 1,07x_2 - 0,63x_3 = 1,27. \end{cases}$$

№28

$$\begin{cases} 2{,}16x_1 - 2{,}83x_2 + 1{,}15x_3 = 2{,}32; \\ 1{,}71x_1 + 2{,}17x_2 - 0{,}83x_3 = 1{,}25; \\ 0{,}35x_1 - 0{,}72x_2 + 1{,}03x_3 = 0{,}82. \end{cases}$$

№29

$$\begin{cases} 1{,}02x_1 + 0{,}72x_2 - 0{,}65x_3 = 1{,}27; \\ 0{,}74x_1 - 1{,}24x_2 - 1{,}73x_3 = 0{,}77; \\ 1{,}78x_1 + 2{,}32x_2 + 0{,}74x_3 = 1{,}16. \end{cases}$$

№30

$$\begin{cases} 1{,}53x_1 - 1{,}63x_2 - 0{,}76x_3 = 2{,}18; \\ 0{,}86x_1 + 1{,}17x_2 + 1{,}84x_3 = 1{,}95; \\ 0{,}32x_1 - 0{,}65x_2 + 1{,}11x_3 = -0{,}47. \end{cases}$$

Решение типового варианта задания № 4

Задание. Решить систему линейных уравнений методом главных элементов с точностью до 0,001.

$$\begin{cases} 2{,}74x_1 - 1{,}18x_2 + 3{,}17x_3 = 2{,}18; \\ 1{,}12x_1 + 0{,}83x_2 - 2{,}16x_3 = -1{,}15; \\ 0{,}18x_1 + 1{,}27x_2 + 0{,}76x_3 = 3{,}23. \end{cases}$$

Решение. Вычисления производим по следующей схеме:

m_i	Коэффициенты при неизвестных			Свободные члены	$\sum$	$\sum{}'$
	x_1	x_2	x_3			
−1	2,74	−1,18	$\boxed{3{,}17}$	2,18	6,91	6,91
0,6814	1,12	0,83	−2,16	−1,15	−1,36	−1,36
−0,2397	0,18	1,27	0,76	3,23	5,44	5,44
−1	$\boxed{2{,}9870}$	0,0259	–	0,3355	3,3485	3,3484
0,1596	−0,4768	1,5528	–	2,7075	3,7837	3,7835
–	–	$\boxed{1{,}5569}$	–	2,7601	4,3181	4,3170
	0,0970	1,7728	1,2638			
	1,0970	2,7735	2,2638			

$$x_2 = \frac{2,7601}{1,5569} = 1,7728; \quad \overline{x_2} = \frac{4,3181}{1,5569} = 2,7735;$$

$$x_1 = \frac{0,3355 - 0,0259 \cdot 1,7728}{2,9870} = 0,0970;$$

$$\overline{x}_1 = \frac{3,3485 - 0,0259 \cdot 2,7735}{2,9870} = 1,0970;$$

$$x_3 = \frac{2,18 - 2,74 \cdot 0,0970 + 1,18 \cdot 1,7728}{3,17} = 1,2638;$$

$$\overline{x}_3 = \frac{6,91 - 2,74 \cdot 1,0970 + 1,18 \cdot 2,7735}{3,17} = 2,2638;$$

О т в е т : $x_1 \approx 0,097$; $x_2 \approx 1,773$; $\overline{x}_3 \approx 1,264$.

Ответ контрольной системы: $\overline{x}_1 \approx 1,0970$; $\overline{x}_2 \approx 2,7735$; $\overline{x}_3 \approx 2,2638$.

2.5. Индивидуальное задание № 5 РЕШЕНИЕ СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ МЕТОДОМ ИТЕРАЦИЙ

Задание. Методом итераций решить систему линейных уравнений с точностью до 0,001, предварительно оценив число необходимых для этого шагов.

№1

$$\begin{cases} x_1 = 0,23x_1 - 0,04x_2 + 0,21x_3 - 0,18x_4 + 1,24; \\ x_2 = 0,45x_1 - 0,23x_2 + 0,06x_3 - 0,88; \\ x_3 = 0,26x_1 + 0,34x_2 - 0,11x_3 + 0,62; \\ x_4 = 0,05x_1 - 0,26x_2 + 0,34x_3 - 0,12x_4 - 1,17. \end{cases}$$

№2

$$\begin{cases} x_1 = 0,21x_1 + 0,12x_2 - 0,34x_3 - 0,16x_4 - 0,64; \\ x_2 = 0,34x_1 - 0,08x_2 + 0,17x_3 - 0,18x_4 + 1,42; \\ x_3 = 0,16x_1 + 0,34x_2 + 0,15x_3 - 0,31x_4 - 0,42; \\ x_4 = 0,12x_1 - 0,26x_2 - 0,08x_3 + 0,25x_4 + 0,83. \end{cases}$$

№3

$$\begin{cases} x_1 = 0,32x_1 - 0,18x_2 + 0,02x_3 + 0,21x_4 + 1,83; \\ x_2 = 0,16x_1 + 0,12x_2 - 0,14x_3 + 0,27x_4 - 0,65; \\ x_3 = 0,37x_1 + 0,27x_2 - 0,02x_3 - 0,24x_4 + 2,23; \\ x_4 = 0,12x_1 + 0,21x_2 - 0,18x_3 + 0,25x_4 - 1,13. \end{cases}$$

№4

$$\begin{cases} x_1 = 0,42x_1 - 0,52x_2 + 0,03x_3 + 0,44; \\ x_2 = 0,31x_1 - 0,26x_2 - 0,36x_3 + 1,42; \\ x_3 = 0,12x_1 + 0,08x_2 - 0,14x_3 - 0,24x_4 - 0,83; \\ x_4 = 0,15x_1 - 0,35x_2 - 0,18x_3 - 1,42. \end{cases}$$

№5

$$\begin{cases} x_1 = 0,18x_1 - 0,34x_2 - 0,12x_3 + 0,15x_4 - 1,33; \\ x_2 = 0,11x_1 + 0,23x_2 - 0,45x_3 + 0,32x_4 + 0,84; \\ x_3 = 0,05x_1 - 0,12x_2 + 0,14x_3 - 0,18x_4 - 1,16; \\ x_4 = 0,12x_1 + 0,08x_2 + 0,06x_3 + 0,57. \end{cases}$$

№6

$$\begin{cases} x_1 = 0,13x_1 + 0,23x_2 - 0,44x_3 - 0,05x_4 + 2,13; \\ x_2 = 0,24x_1 - 0,31x_3 + 0,15x_4 - 0,18; \\ x_3 = 0,06x_1 + 0,15x_2 - 0,23x_4 + 1,44; \\ x_4 = 0,72x_1 - 0,08x_2 - 0,05x_3 + 2,42. \end{cases}$$

№7

$$\begin{cases} x_1 = 0,17x_1 + 0,31x_2 - 0,18x_3 + 0,22x_4 - 1,71; \\ x_2 = -0,21x_1 + 0,33x_3 + 0,22x_4 + 0,62; \\ x_3 = 0,32x_1 - 0,18x_2 + 0,05x_3 - 0,19x_4 - 0,89; \\ x_4 = 0,12x_1 + 0,28x_2 - 0,14x_3 + 0,94. \end{cases}$$

№8

$$\begin{cases} x_1 = 0,13x_1 + 0,27x_2 - 0,22x_3 - 0,18x_4 + 1,21; \\ x_2 = -0,21x_1 - 0,45x_3 + 0,18x_4 - 0,33; \\ x_3 = 0,12x_1 + 0,13x_2 - 0,33x_3 + 0,18x_4 - 0,48; \\ x_4 = 0,33x_1 - 0,05x_2 + 0,06x_3 - 0,28x_4 - 0,17. \end{cases}$$

№9

$$\begin{cases} x_1 = 0,19x_1 - 0,07x_2 + 0,38x_3 - 0,21x_4 - 0,81; \\ x_2 = -0,22x_1 + 0,08x_2 + 0,11x_3 + 0,33x_4 - 0,64; \\ x_3 = 0,51x_1 - 0,07x_2 + 0,09x_3 - 0,11x_4 + 1,71; \\ x_4 = 0,33x_1 - 0,41x_2 - 1,21. \end{cases}$$

№10

$$\begin{cases} x_1 = 0,22x_2 - 0,11x_3 + 0,31x_4 + 2,7; \\ x_2 = 0,38x_1 - 0,12x_3 + 0,22x_4 - 1,5; \\ x_3 = 0,11x_1 + 0,23x_2 - 0,51x_4 + 1,2; \\ x_4 = 0,17x_1 - 0,21x_2 + 0,31x_3 - 0,17. \end{cases}$$

№11

$$\begin{cases} x_1 = 0,07x_1 - 0,08x_2 + 0,11x_3 - 0,18x_4 - 0,51; \\ x_2 = 0,18x_1 + 0,52x_2 + 0,21x_4 + 1,17; \\ x_3 = 0,13x_1 + 0,31x_2 - 0,21x_4 - 1,02; \\ x_4 = 0,08x_1 - 0,33x_3 + 0,28x_4 - 0,28. \end{cases}$$

№12

$$\begin{cases} x_1 = 0,05x_1 - 0,06x_2 - 0,12x_3 + 0,14x_4 - 2,17; \\ x_2 = 0,04x_1 - 0,12x_2 + 0,68x_3 + 0,11x_4 + 1,4; \\ x_3 = 0,34x_1 + 0,08x_2 - 0,06x_3 + 0,44x_4 - 2,1; \\ x_4 = 0,11x_1 + 0,12x_2 - 0,03x_4 - 0,8. \end{cases}$$

№13

$$\begin{cases} x_1 = 0,08x_1 - 0,03x_2 - 0,04x_4 - 1,2; \\ x_2 = 0,51x_2 + 0,27x_3 - 0,08x_4 + 0,81; \\ x_3 = 0,33x_1 - 0,37x_3 + 0,21x_4 - 0,92; \\ x_4 = 0,11x_1 + 0,03x_3 + 0,58x_4 + 0,17. \end{cases}$$

№14

$$\begin{cases} x_1 = 0,12x_1 - 0,23x_2 + 0,25x_3 - 0,16x_4 + 1,24; \\ x_2 = 0,14x_1 + 0,34x_2 - 0,18x_3 + 0,24x_4 - 0,89; \\ x_3 = 0,33x_1 + 0,03x_2 + 0,46x_3 - 0,32x_4 + 1,15; \\ x_4 = 0,12x_1 - 0,05x_2 + 0,15x_4 - 0,57. \end{cases}$$

№15

$$\begin{cases} x_1 = 0,23x_1 - 0,14x_2 + 0,06x_3 - 0,12x_4 + 1,21; \\ x_2 = 0,12x_1 + 0,32x_3 - 0,18x_4 - 0,72; \\ x_3 = 0,08x_1 - 0,12x_2 + 0,23x_3 + 032x_4 - 0,58; \\ x_4 = 0,25x_1 + 0,22x_2 + 0,14x_3 + 1,56. \end{cases}$$

№16

$$\begin{cases} x_1 = 0,14x_1 + 0,23x_2 + 0,18x_3 + 0,17x_4 - 1,42; \\ x_2 = 0,12x_1 - 0,14x_2 + 0,08x_3 + 0,09x_4 - 0,83; \\ x_3 = 0,16x_1 + 0,24x_2 - 0,35x_4 + 1,21; \\ x_4 = 0,23x_1 - 0,08x_2 + 0,55x_3 + 0,25x_4 + 0,65. \end{cases}$$

№17

$$\begin{cases} x_1 = 0,24x_1 + 0,21x_2 + 0,06x_3 - 0,34x_4 + 1,42; \\ x_2 = 0,05x_1 + 0,32x_3 + 0,12x_4 - 0,57; \\ x_3 = 0,35x_1 - 0,27x_2 - 0,05x_4 + 0,68; \\ x_4 = 0,12x_1 - 0,43x_2 + 0,34x_3 - 0,21x_4 - 2,14. \end{cases}$$

№18

$$\begin{cases} x_1 = 0,17x_1 + 0,27x_2 - 0,13x_3 - 0,11x_4 - 1,42; \\ x_2 = 0,13x_1 - 0,12x_2 + 0,09x_3 - 0,06x_4 + 0,48; \\ x_3 = 0,11x_1 + 0,05x_2 - 0,02x_3 + 0,12x_4 - 2,34; \\ x_4 = 0,13x_1 + 0,18x_2 + 0,24x_3 + 0,43x_4 + 0,72. \end{cases}$$

№19

$$\begin{cases} x_1 = 0,15x_1 + 0,05x_2 - 0,08x_3 + 0,14x_4 - 0,48; \\ x_2 = 0,32x_1 - 0,43x_2 - 0,12x_3 + 0,11x_4 + 1,24; \\ x_3 = 0,17x_1 + 0,06x_2 - 0,08x_3 + 0,12x_4 + 1,15; \\ x_4 = 0,21x_1 - 0,16x_2 + 0,36x_3 - 0,88. \end{cases}$$

№20

$$\begin{cases} x_1 = 0,28x_2 - 0,17x_3 + 0,06x_4 + 0,21; \\ x_2 = 0,52x_1 + 0,12x_3 + 0,17x_4 - 1,17; \\ x_3 = 0,17x_1 - 0,18x_2 + 0,21x_3 - 0,81; \\ x_4 = 0,11x_1 + 0,22x_2 + 0,03x_3 + 0,05x_4 + 0,72. \end{cases}$$

№21

$$\begin{cases} x_1 = 0,52x_2 + 0,08x_3 + 0,13x_4 - 022; \\ x_2 = 0,07x_1 - 0,38x_2 - 0,05x_3 + 0,41x_4 + 1,8; \\ x_3 = 0,04x_1 + 0,42x_2 + 0,11x_3 - 0,07x_4 - 1,3; \\ x_4 = 0,17x_1 + 0,18x_2 - 0,13x_3 + 0,19x_4 + 0,33. \end{cases}$$

№22

$$\begin{cases} x_1 = 0,01x_1 + 0,02x_2 - 0,62x_3 + 0,08x_4 - 1,3; \\ x_2 = 0,03x_1 + 0,28x_2 + 0,33x_3 - 0,07x_4 + 1,1; \\ x_3 = 0,09x_1 + 0,13x_2 + 0,42x_3 + 0,28x_4 - 1,7; \\ x_4 = 0,19x_1 - 0,23x_2 + 0,08x_3 + 0,37x_4 + 1,5. \end{cases}$$

№23

$$\begin{cases} x_1 = 0,17x_2 - 0,33x_3 + 0,18x_4 - 1,2; \\ x_2 = 0,18x_2 + 0,43x_3 - 0,08x_4 - 0,33; \\ x_3 = 0,22x_1 + 0,18x_2 + 0,21x_3 + 0,07x_4 + 0,48; \\ x_4 = 0,08x_1 + 0,07x_2 + 0,71x_3 + 0,04x_4 - 1,2. \end{cases}$$

№24

$$\begin{cases} x_1 = 0,03x_1 - 0,05x_2 + 0,22x_3 - 0,33x_4 + 0,43; \\ x_2 = 0,22x_1 + 0,55x_2 - 0,88x_3 + 0,07x_4 - 1,8; \\ x_3 = 0,33x_1 + 0,13x_2 - 0,08x_3 - 0,05x_4 - 0,8; \\ x_4 = 0,08x_1 + 0,17x_2 + 0,29x_3 + 0,33x_4 + 1,7. \end{cases}$$

№25

$$\begin{cases} x_1 = 0,13x_1 + 0,22x_2 - 0,33x_3 + 0,07x_4 + 0,11; \\ x_2 = 0,45x_2 - 0,23x_3 + 0,07x_4 - 0,33; \\ x_3 = 0,11x_1 - 0,08x_3 + 0,78x_4 + 0,85; \\ x_4 = 0,08x_1 + 0,09x_2 + 0,33x_3 + 0,21x_4 - 1,7. \end{cases}$$

№26

$$\begin{cases} x_1 = 0,32x_1 - 0,16x_2 - 0,08x_3 + 0,15x_4 + 2,42; \\ x_2 = 0,16x_1 - 0,23x_2 + 0,11x_3 - 0,21x_4 + 1,43; \\ x_3 = 0,05x_1 - 0,08x_2 + 0,34x_4 - 0,16; \\ x_4 = 0,12x_1 + 0,14x_2 - 0,18x_3 + 0,06x_4 + 1,62. \end{cases}$$

№27

$$\begin{cases} x_1 = 0,08x_2 - 0,23x_3 + 0,32x_4 + 1,34; \\ x_2 = 0,16x_1 - 0,23x_2 + 0,18x_3 + 0,16x_4 - 2,33; \\ x_3 = 0,15x_1 + 0,12x_2 + 0,32x_3 - 0,18x_4 + 0,34; \\ x_4 = 0,25x_1 + 0,21x_2 - 0,16x_3 + 0,03x_4 + 0,63. \end{cases}$$

№28

$$\begin{cases} x_1 = 0,06x_1 + 0,18x_2 + 0,33x_3 + 0,16x_4 + 2,43; \\ x_2 = 0,32x_1 + 0,23x_2 - 0,35x_4 - 1,12; \\ x_3 = 0,16x_1 - 0,08x_2 - 0,12x_4 + 0,43; \\ x_4 = 0,09x_1 + 0,22x_2 - 0,13x_3 + 0,83. \end{cases}$$

№29

$$\begin{cases} x_1 = 0,34x_2 + 0,23x_3 - 0,06x_4 + 1,42; \\ x_2 = 0,11x_1 - 0,23x_2 - 0,18x_3 + 0,36x_4 - 0,66; \\ x_3 = 0,23x_1 - 0,12x_2 + 0,16x_3 - 0,35x_4 + 1,08; \\ x_4 = 0,12x_1 + 0,12x_2 - 0,47x_3 + 0,18x_4 + 1,72. \end{cases}$$

№30

$$\begin{cases} x_1 = 0,32x_1 - 0,23x_2 + 0,41x_3 - 0,06x_4 + 0,67; \\ x_2 = 0,18x_1 + 0,12x_2 - 0,33x_3 - 0,88; \\ x_3 = 0,12x_1 + 0,32x_2 - 0,05x_3 + 0,67x_4 - 0,18; \\ x_4 = 0,05x_1 - 0,11x_2 + 0,09x_3 - 0,12x_4 + 1,44. \end{cases}$$

Решение типового варианта задания № 5

Задание. Методом итераций решить систему линейных уравнений с точностью до 0,001, предварительно оценив число необходимых для этого шагов.

$$\begin{cases} x_1 = 0,32x_1 - 0,05x_2 + 0,11x_3 - 0,08x_4 + 2,15; \\ x_2 = 0,11x_1 + 0,16x_2 - 0,28x_3 - 0,06x_4 - 0,83; \\ x_3 = 0,08x_1 - 0,15x_2 + 0,12x_4 + 1,16; \\ x_4 = -0,21x_1 + 0,13x_2 - 0,27x_3 + 0,44. \end{cases}$$

Решение. Число шагов, дающих наверняка ответ с точностью до 0,001, определим с помощью соотношения

$$\left\|X^*-X^k\right\| \le \frac{\|A\|_1^{k+1}}{1-\|A\|_1} \cdot \|F\|_1 \le 0{,}001.$$

Здесь $\|A\|_1 = \max\{0{,}56;\ 0{,}61;\ 0{,}35;\ 0{,}61\} < 1$; значит, итерационный процесс сходится; $\|F\|_1 = 2{,}15$.

Имеем

$$\frac{0{,}61^{k+1}}{0{,}39} \cdot 2{,}15 < 0{,}001; \quad 0{,}61^{k+1} < \frac{0{,}001 \cdot 0{,}39}{2{,}15};$$

$$(k + 1) \cdot \lg 0{,}61 < -3 + \lg 0{,}39 - \lg 2{,}15;$$

$$k + 1 > \frac{-3+1{,}5911-0{,}3324}{1{,}7853} = \frac{3{,}7413}{0{,}2147} = 17{,}5; \quad k \ge 17 .$$

Вычисления располагаем в таблице:

k	x_1	x_2	x_3	x_4
0	2,15	–0,83	1,16	0,44
1	2,9719	–1,0775	1,5093	–0,4326
2	3,3555	–1,0721	1,5075	–0,7317
3	3,5017	–1,0106	1,5015	–0,8111
4	3,5511	–0,9277	1,4944	–0,8321
5	3,5637	–0,9563	1,4834	–0,8298
6	3,5678	–0,9566	1,4890	–0,8332
7	3,5700	–0,9575	1,4889	–0,8356
8	3,5709	–0,9573	1,4890	–0,8362
9	3,5712	–0,9571	1,4889	–0,8364
10	3,5713	–0,9570	1,4890	–0,8364

Сходимость в тысячных долях имеет место уже на 10-м шаге.

О т в е т : $x_1 \approx 3{,}571$; $x_2 \approx -0{,}957$; $x_3 \approx 1{,}489$; $x_4 \approx -0{,}836$.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В вычислительной математике можно выделить три основных направления. Первое связано с применением ЭВМ в различных областях научной и практической деятельности и включающее, в частности, численное решение различных математических задач; второе – с разработкой новых и совершенствованием существующих численных методов и алгоритмов; третье – с вопросами взаимодействия человека и ЭВМ. Настоящее пособие посвящено первому из указанных направлений, а именно применению численных методов при решении практических задач.

Данное пособие довольно полно отражает круг вопросов, посвященных одному из разделов алгебры «Решение систем линейных уравнений». Сложные вычислительные задачи, возникающие при исследовании технических и экономических проблем, можно разбить на ряд элементарных, многие из которых являются несложными и хорошо изученными. Для каждой задачи существует множество методов решения. Однако окончательный выбор лучших методов можно сделать только на основании большого опыта практических расчетов.

За пределами данного пособия остался один из центральных вопросов, относящийся к понятию корректности, устойчивости и обусловленности вычислительных задач и вычислительных алгоритмов, к особенностям поведения вычислительной погрешности. Важность их понимания для эффективного применения велика и авторы планируют посвятить этим вопросам следующее учебное пособие.

В заключение отметим, что никакие теоретические положения и советы не могут заменить собственного опыта вычислительной работы. Как надеются авторы, параллельно с изучением данного пособия такой опыт может приобрести читатель, переходя от решения задач учебного характера к серьезным практическим задачам.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Бугров, Я.С. Элементы линейной алгебры и аналитической геометрии [Текст] / Я.С. Бугров, С.М. Никольский. – М., 1984.
2. Данко, П.Е. Высшая математика в упражнениях и задачах [Текст]: в 2 ч. / П.Е. Данко, А.Г. Попов, Г.Я. Кожевникова. – М., 1997.
3. Вычислительная математика [Текст] / Н.И. Данилина [и др.]. – М.: Высш. шк., 1985.
4. Курош, А.Т. Курс высшей алгебры [Текст] / А.Т. Курош. – М.: Наука, 1965.
5. Воробьева, Г.Н. Практикум по численным методам [Текст] / Г.Н. Воробьева, А.Н. Данилова. – М.: Высш. шк., 1979.
6. Калиткин, Н.Н. Численные методы [Текст] / Н.Н. Калиткин. – М.: Наука, 1978.
7. Кострикин, А.И. Введение в алгебру [Текст] / А.И. Кострикин. – М.: Наука, 1997.

Учебное издание

Левова Галина Анатольевна
Снежкина Ольга Викторовна

МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ
СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ
Практикум

Редактор В.С. Кулакова
Верстка Н.А. Сазонова

Подписано в печать 11.12.10. Формат 60×84/16.
Бумага офисная «Снегурочка». Печать на ризографе.
Усл.печ.л. 5,23. Уч.-изд.л. 5.625. Тираж 80 экз.
Заказ №13.

РЕГИСТР
ИСО 9001

Издательство ПГУАС.
440028, г. Пенза, ул. Германа Титова, 28.