

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

---

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение  
высшего профессионального образования  
«Пензенский государственный университет  
архитектуры и строительства»  
(ПГУАС)

В.П. Волков

**НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОЕ  
СОСТОЯНИЕ КОНСТРУКТИВНО-ОРТОТРОПНЫХ  
ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ОБОЛОЧЕК С ПРОЕМОМ**

Пенза 2014

УДК 624.074.4  
ББК 30.121:30.4  
В67

Рецензенты: доктор технических наук, профессор  
Н.Н. Ласьков (ПГУАС);  
доктор технических наук, профессор  
В.В. Коновалов (ПГТУ)

**Волков В.П.**

В67 Напряженно-деформированное состояние конструктивно-ортоотропных цилиндрических оболочек с проемом: моногр. / В.П. Волков. – Пенза: ПГУАС, 2014. – 120 с.  
ISBN 978-5-9282-1136-3

Работа посвящена исследованию напряженно-деформированного состояния металлических силосов спирально-навивного типа в зоне дверного проема. В результате был разработан прикладной метод расчета, основанный на использовании вариационного метода В.З. Власова, применительно к задаче исследования напряженно-деформированного состояния спирально-навивных оболочек в зоне дверного отверстия с учетом реальных конструктивных особенностей. Приведен расчет конструкции алюминиевого силоса емкостью 250 т, анализ его напряженно-деформированного состояния с разработкой некоторых рекомендаций для практического применения в проектных организациях.

Монография подготовлена на кафедре «Механика» и рекомендуется для научных работников, аспирантов, занимающихся вопросами расчета тонкостенных пространственных конструкций, а также студентов, обучающихся по направлению 08.04.01 «Строительство».

ISBN 978-5-9282-1136-3

© Пензенский государственный университет  
архитектуры и строительства, 2014  
© Волков В.П., 2014

# ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ .....	5
1. КРАТКИЙ ОБЗОР МЕТОДОВ РАСЧЕТА РЕБРИСТЫХ ОБОЛОЧЕК И ОБОЛОЧЕК С ОТВЕРСТИЯМИ .....	8
1.1. Методы расчета ребристых оболочек в линейно-упругой постановке .....	8
1.2. Методы расчета оболочек с отверстиями .....	10
1.3. Выводы.....	12
2. МЕТОДИКА РАСЧЕТА КОНСТРУКТИВНО-ОРТОТРОПНЫХ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ОБОЛОЧЕК С ПРОЕМОМ .....	14
2.1 Выбор и обоснование расчетной схемы.....	14
2.2. Вывод разрешающих уравнений .....	17
2.3. Решение разрешающих уравнений и постановка граничных условий .....	28
2.4. Особенности расчета при решении задачи на ЭВМ.....	39
2.5. Выводы.....	49
3. ПЛОСКОЕ НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОЕ СОСТОЯНИЕ ПЛАСТИНЫ С ПРОЕМОМ.....	51
3.1. Исходные положения и рабочие гипотезы .....	51
3.2. Построение разрешающих уравнений для плоского напряжённого состояния. ....	52
3.3. Решение разрешающих уравнений.....	58
3.4. Выбор единичных состояний и формулы для вычисления коэффициентов разрушающих уравнений.....	64
3.5. Примеры расчета пластин с отверстием .....	68
3.6. Выводы.....	79
4. НАПРЯЖЁННО-ДЕФОРМИРОВАННОЕ СОСТОЯНИЕ КОНСТРУКТИВНО-ОРТОТРОПНЫХ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ОБОЛОЧЕК С ПРОЁМОМ .....	80
4.1 Исходные положения и рабочие гипотезы. ....	80
4.2. Напряжённо-деформированное состояние конструктивно- ортотропных круговых цилиндрических оболочек с проёмом в нулевом приближении.....	81
4.2.1. Напряжённо-деформированное состояние изгиба пластины на упругом основании.....	81

4.2.2. Плоское напряженно-деформированное состояние пластины в нулевом приближении с учетом расчета изгиба пластинки на упругом основании.....	92
4.3. Анализ напряженно-деформированного состояния круговой цилиндрической оболочки с проемом и приближенные критерии точности расчета .....	99
4.4. Выводы .....	108
ЗАКЛЮЧЕНИЕ .....	110
БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК.....	112

## ВВЕДЕНИЕ

Одним из наиболее прогрессивных типов тонкостенных пространственных конструкций является высокоиндустриальные и экономичные металлические силоса спирально-навивного типа. Однако развитие этих прогрессивных конструкций сдерживается из-за отсутствия исследования напряженно-деформированного состояния этих оболочек, поскольку эти конструкции обладают рядом специфических особенностей, какими являются наличие ребра фальцевого типа, и наличие дверного проема, усиленного элементами жесткости.

Наличие проема в оболочке является источником возникновения местного резкого повышения (возмущения) внутренних усилий. Хотя зона возмущения поля напряжений ограничена, концентрация напряжений опасна вследствие высокого уровня напряжений в окрестности концентратора. Особенно опасно в данной конструкции увеличение сжимающих усилий вдоль образующей, в связи с опасностью потери устойчивости «обечайки», т.е. части оболочки расположенной между ребрами фальцевого типа. Наличие ребер фальцевого типа, дверного проема, усиленного элементами жесткости значительно затрудняет исследование напряженно-деформированного состояния данного типа оболочек.

Расчет таких оболочек с отверстием по методу конечных элементов сопряжен с трудностями технического порядка, к которым относится

наличие большого количества типоразмеров для учета податливости фальцевых ребер, для учета усиления отверстия элементами жесткости, что связано с очень большими затратами машинного времени.

Таким образом, актуальность темы настоящей монографии определяется как ее практической необходимостью для проектирования спирально-навивных оболочек при наличии проема, усиленного элементами жесткости, так и ее недостаточной изученностью, созданием методов и программ расчета конструкций данного типа, численной реализацией расчетов на ЭВМ.

*Целью работы является:*

- разработка прикладного метода расчета, основанного на использовании вариантного метода В.З. Власова, применительно к задаче исследования напряженно-деформированного состояния спирально-навивных оболочек в зоне дверного отверстия с учетом реальных конструктивных особенностей: дискретного расположения кольцевых ребер фальцевого типа, усиления отверстия элементами жесткости типа накладки и эксцентрично-расположенного ребра, подкрепляющего край отверстия, реальных граничных условий, учитывающих близость расположения отверстия к краю оболочки;

- разработка практических алгоритмов с реализацией их в программах на ЭВМ;

- расчет конструкции алюминиевого силоса емкостью 250 т, анализ напряженно-деформированного состояния и разработка некоторых рекомендаций для практического применения полученных результатов в проектных организациях.

*Научная новизна работы заключается в следующем:*

- разработана прикладная методика расчета, основанная на вариационном методе приведения двумерных задач расчета тонкостенных систем к одномерным применительно к круглым ребристым, в том числе с фальцевыми ребрами, цилиндрическим оболочкам с отверстием, подкрепленным элементами жесткости;

- для полой цилиндрической оболочки относительно произвольной начальной поверхности получена система обоснованных разрешающих дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами, учитывающими дискретное расположение фальцевых ребер;

- решен ряд задач, связанных с численной реализацией метода на ЭВМ;

- создан алгоритм и программа расчета ребристых цилиндрических оболочек и пластин с проемом, усиленным элементами жесткости;
- проведены расчеты новой конструкции алюминиевого спирально-навивного силоса и анализ его напряженно-деформированного состояния.

Работа состоит из четырех глав и заключения с основными выводами.

В первой главе создан краткий обзор основных методов расчета ребристых оболочек в линейно-упругой постановке, в том числе с отверстиями.

Вторая глава посвящена изложению методики расчета конструктивно-ортотропных цилиндрических оболочек с проемом. В данной главе приведены разрешающие дифференциальные уравнения в перемещениях при использовании вариационного метода В.З.Власова, показано «точное» и приближенное решение задачи и особенности, связанные с решением задачи на ЭВМ.

В третьей главе рассмотрено определение плоского напряженно-деформированного состояния пластины с отверстием, усиленным элементами жесткости, показано влияние податливой связи на сжатие-растяжение на коэффициенты системы разрешающих уравнений, получены формулы для определения этих коэффициентов, рассмотрена контактная задача для пластинки с ребром типа стрингера, усиливающим отверстие, приведены примеры расчета плоских пластин с отверстием.

Четвертая глава посвящена определению напряженно-деформированного состояния конструктивно-ортотропных цилиндрических оболочек с проемом, подробно рассмотрено решение задачи методом возмущения в нулевом приближении, рассмотрено получение частного решения из системы разрешающих дифференциальных уравнений при постоянных свободных членах от нагрузки непосредственно из самой системы.

# 1. КРАТКИЙ ОБЗОР МЕТОДОВ РАСЧЕТА РЕБРИСТЫХ ОБОЛОЧЕК И ОБОЛОЧЕК С ОТВЕРСТИЯМИ

## 1.1. Методы расчета ребристых оболочек в линейно-упругой постановке

Развитие теории ребристых оболочек во многом обязано трудам известных ученых в области механики деформируемых тел: Н.П. Абовского, С.А. Амбарцумяна, В.В. Болотина, В.З. Власова, А.С. Вольмора, Э.И. Григолюка, А.Л. Гольденвейзера, В.А. Заруцкого, А.И. Лурье, И.Е. Милейковского, Х.М. Муштари, В.В. Новожилова, П.Ф. Папковича, Г.И. Пшеничникова, И.С. Цуркова и других.

Так в настоящее время число публикаций по рассматриваемой теме достаточно велико. Наиболее широкий обзор работ по данной теме дан в обзорах [6.55.67], а также в вышедшей в последние годы монографии И.А. Амиро, В.А. Заруцкого из серии «Методы расчета оболочек» [45].

Исследования в области расчета подкрепленных оболочек ведутся сейчас, в основном, в двух направлениях: с использованием расчетной схемы конструктивной анизотропии и методами, учитывающими дискретное расположение ребер.

Согласно первому методу расчета подкрепленных оболочек последнюю рассматривают как конструктивно-анизотропную с использованием схемы «размазывания» ребер. Одним из первых этой методикой воспользовался И.Г. Бубнов [9] при расчете балочных систем, как конструктивно-анизотропных пластин. В дальнейшем эта теория получила свое развитие в работах М.Т. Губера [84], В. Флюгге [82], С.П. Тимошенко и С. Войковского-Кригера [72], Х.М. Муштари [53], J.L. Taylor [88] и других ученых при расчете плит, ребристых цилиндрических оболочек и перекрестных систем из балок.

Для первого метода характерны два подхода в построении теории. В первом из них принимается гипотеза сразу для всей толщины оболочки (пакетная гипотеза), второй характерен тем, что используется гипотеза ломаной нормали. Примером первого подхода, т.к. использование пакетной гипотезы, могут служить работы А.Н. Уляшина [73]. Пакетный подход дает достаточно приемлемую точность описания напряженно-деформированного состояния лишь в случае относительно незначительного различия между оболочкой и фиктивным слоем, имитирующем ребра, который, как правило, ортотропен. Большое достоинство пакетного подхода к построению теории состоит в том, что



порядок разрешающей системы дифференциальных уравнений не зависит от числа слоев.

Одним из первых в теории слоистых сред гипотезу ломаной нормали применил В.В. Болотин [8]. Используется она также и в книгах Э.И. Григолюка и П.П. Чулкова [25]. В этом случае порядок разрешающей системы уравнений существенно зависит от числа слоев, отмеченное очень осложняет доведение до числа расчета даже при использовании ЭВМ, хотя получаемые при этом решения достаточно хорошо согласуются с экспериментальными данными.

Основы метода дискретной континуальности ребристых оболочек были заложены в работах С.П. Тимошенко [71], В.З. Власова [18], А.И. Лурье [43]. По сравнению с методом конструктивной анизотропии дискретно-континуальный метод обладает следующими преимуществами: более высокая точность получаемых решений, возможность построения решения при нерегулярной геометрии подкреплений. Однако в этой области до настоящего времени нет ни единой точки зрения на саму теорию ребристых оболочек, ни до конца оформленных решений общими методами.

На первом этапе развития метода дискретной континуализации в тридцатые годы делалась попытка решения отдельных задач, одной из них является расчет ребристой оболочки как составной конструкции.

Современный этап развития теории ребристых оболочек, учитывающий работу ребер дискретно, связан в первую очередь с работой А.И. Лурье [43]. В ней были сформированы общие принципы теории ребристых оболочек. В основу теории был положен принцип минимума потенциальной энергии, складывающейся из энергии стержневой системы и обшивки. В.З. Власовым в 1949 г. был предложен другой подход к расчету ребристых оболочек. В работе [18] В.З. Власов предложил отрезать ребра от оболочки, а их воздействие на последнюю заменить усилиями и моментами по линии сопряжения, подлежащими определению, при этом использовалось условие неразрывности деформаций. Основное различие между подходами заключается в том, что А.И. Лурье трактовал ребра как стержни Кирхгофа-Клебша, а В.З. Власов рассматривал их как тонкостенные стержни. Подход В.З. Власова к рассмотрению ребристых оболочек был использован также в работах [6,51], где рассматривались случаи контакта ребер с обшивкой по некоторой поверхности. В дальнейшем различные подходы к учету сопряжения подкрепляющих элементов с оболочкой исследовались в работе [79]. В статье [15] авторами была проведена

оценка погрешности теории ребристых оболочек, основанной на гипотезах Кирхгофа-Лява. На примере расчета бесконечно длинной замкнутой цилиндрической оболочки, нагруженной внешним давлением и усиленной шпангоутами было показано, что реакции ребер согласно уравнений прикладной теории вычисляются с погрешностью, не превышающей большую из величин  $h/R$  или  $H/R$ , где  $h$  – толщина оболочки,  $H$  – высота ребра,  $R$  – радиус срединной поверхности оболочки, при этом предполагалось, что ширина ребер оболочки порядка толщины обшивки.

Подводя предварительный итог можно сказать, что специфика расчета ребристых оболочек породила различные методы решения поставленных задач. Среди них можно выделить основные [55] :

Энергетические методы [22,80].

Метод расчленения исходной подкрепленной оболочки на панели, связанные ребрами, и решение затем контактной задачи [23].

Вариационные методы, основанные на представлении решений системы уравнений равновесий оболочек, подкрепленных ребрами одного направления, в виде тригонометрических рядов по координате, ортогональной ребру и в виде рядов Фурье [16,85].

Итерационные методы [32,86,89].

Методы, основанные на использовании интегральных и интегро-дифференциальных уравнений [14].

## 1.2. Методы расчета оболочек с отверстиями

Большой вклад в развитие теории пластин и оболочек с отверстиями внесли ученые современной украинской школы оболочек. Так фундаментальным трудом по концентрации напряжений около отверстий в оболочках с закругленными краями является книга Г.Н. Савина [66].

Вопрос концентрации напряжений около отверстий исследовался и А.Н. Гузем и его сотрудниками. Отметим работы [27-31]. В монографии [31] рассмотрено напряженно-деформированное состояние в случае многосвязных областей ослабление отверстиями с гладкими криволинейными контурами, в том числе периодическая задача. В [30] обсуждены напряженно-деформированное состояние и устойчивость оболочек из композиционных материалов в линейной и нелинейной постановках

задачи при наличии малых и больших вырезов, при статическом и динамическом воздействии. В работе [28] исследуются оболочки с многосвязными областями ослабление отверстиями с контурами, имеющими углы как треугольные, так и квадратные.

К литературе, посвященной концентрации напряжений, относятся и книги Д.В. Вайнберга [10], Б.Л. Пелеха и А.А. Сяського [57], Б.Л. Пелеха [56]. В книге [57] концентрация напряжений, возникающих вследствие наличия включений и отверстий, исследуется в условиях учета поперечного сдвига, а также подкрепления края тонким стержнем. Обсуждается и вопрос оптимизации напряженно-деформированного состояния возле отверстий в оболочках из армированных пластмасс. В [56], кроме вопросов теории и методов определения концентрации напряжений около отверстий, свободных и подкрепленных, рассматривается влияние концентраторов в виде трещин при силовом и температурном изгибе пластин и оболочек из трансверсально-изотропных материалов.

Большая группа работ посвящена проблеме напряженно-деформированного состояния в многосвязных конструкциях. Выделяются исследования А.С. Космодамианского, представленные в книгах [36-37], а также в трудах, написанных им в соавторстве с Г.М. Ивановым [38] с С.А. Колоеровым [39], с Б.Н. Ложкиным, Ю.В. Мысовским, В.А. Шалдырваном [40], с В.И. Сторожевым [41] и другие. Особенностью этой серии работ является использование для решения задач обобщенного плоского напряженного состояния в пластинах с отверстиями, свободными и подкрепленными, в том числе периодических задач, теории функции комплексного переменного, метода малого параметра. Рассматриваются также задачи изгиба пластин. В [39] решается и задача термоупругости. В [40] для оценки применимости приближенных теорий производится сопоставление с результатом решения пространственной задачи теории упругости. В [40] решается пространственная задача теории упругости для слоя с цилиндрическими полостями.

Многосвязные тонкостенные системы, их колебания и устойчивость рассматриваются в сборнике статей ученых Англии, США, Японии и др., изданном под редакцией И.Н. Преображенского [42].

Значительный интерес представляет книга [13], поскольку содержит информацию, имеющую значение для применения распространяющегося в настоящее время метода граничных элементов (интегральные уравнения теории оболочек, содержащие интегралы, по поверх-

ности и контурные интегралы, интегро-дифференциальные уравнения в функциях напряжений и перемещений).

Подводя предварительный итог можно сказать, что специфика расчета оболочек с отверстием породила различные методы решения задач о концентрации напряжений. Для тонкостенных конструкций с закругленными краями можно выделить следующие основные методы [66]:

1. Метод комплексных потенциалов Колосова-Мусхелишвили с дальнейшим применением в большинстве случаев конформного отображения внешности или внутренности единичного круга на рассматриваемые области и интегралов типа Коши или формул Шварца.

2. Метод возмущения формы границ.

3. Метод, основанный на принципе В. Вольтера, для решения задач о влиянии вязко-упругих свойств материала на концентрацию напряжений около отверстий.

4. Численные методы.

Однако, как отмечается в обзорной статье [52], для расчета пластин и оболочек с прямоугольными отверстиями более эффективным является аппарат обобщения функций [13] и численные методы.

Следует отметить, что численные методы, используемые в теории пластин и оболочек, имеют решающее значение в доведении расчетов до конкретных результатов.

### 1.3. Выводы

Вышеизложенный краткий обзор методов расчета ребристых оболочек позволяет сделать некоторые выводы.

1. Расчет ребристых оболочек в виде двухслойной оболочки с фиктивным слоем, имитирующим ребра, является приближенным и обычно недооценивает действительную работу подкрепленных оболочек. Однако он сравнительно прост и может служить в качестве первого приближения для получения точного решения задачи, где учитывается расположение ребер.

2. По сравнению с методом конструктивной анизотропии дискретно-континуальный метод обладает следующими преимуществами: более высокая точность получаемых решений, возможность учета нерегулярной геометрии подкреплений. Однако до настоящего времени

пока нет единой точки зрения на саму теорию ребристых оболочек и до конца оформленных решений общими методами.

3. Специфические особенности поведения спирально-навивных ребристых оболочек под воздействием различных нагрузок могут быть выявлены расчетным путем лишь в том случае, когда расчетная схема составлена с учетом дискретного размещения ребер.

4. Из рассмотренной выше литературы, посвященной расчету оболочек с отверстиями, видно, что задача расчета оболочки цилиндрической со спирально-навивными ребрами с прямоугольным отверстием, усиленным элементами жесткости пока не решена.

## 2. МЕТОДИКА РАСЧЕТА КОНСТРУКТИВНО-ОРТОТРОПНЫХ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ОБОЛОЧЕК С ПРОЕМОМ

### 2.1 Выбор и обоснование расчетной схемы

Рассматривается задача определения напряженно-деформированного состояния тонкой цилиндрической оболочки (рис. 2.1), для которой справедливы гипотезы Кирхгофа-Лява, с прямоугольным отверстием. Предполагается, что оболочка может быть усилена ребрами по кольцевой линии (координата  $s$  или индекс 2), которые могут обладать податливостью на растяжение-сжатие вдоль образующей (координата  $x$  или индекс 1), кроме того, предполагается, что отверстие может быть усилено элементами жесткости.

Если габаритные размеры отверстия или усиления отверстия, при наличии последнего, меньше в три и более раз, чем радиус цилиндрической оболочки, то можно выделить примерную область, за пределами которой возмущения в усилиях, вызванные наличием концентратора, которым является отверстие, практически пренебрежимо мало, и рассматривать выделенную область как пологую оболочку с граничными условиями, полученными из расчета всей цилиндрической оболочки без наличия конденсатора.

Если же габаритные размеры отверстия или усиления отверстия соизмеримы с радиусом цилиндрической оболочки, то вместо граничных условий вдоль образующей, надо использовать условия периодичности.

Таким образом, задача определения напряженно-деформированного состояния тонкой цилиндрической оболочки с отверстием решается с использованием уравнений теории пологих оболочек (рис. 2.2).

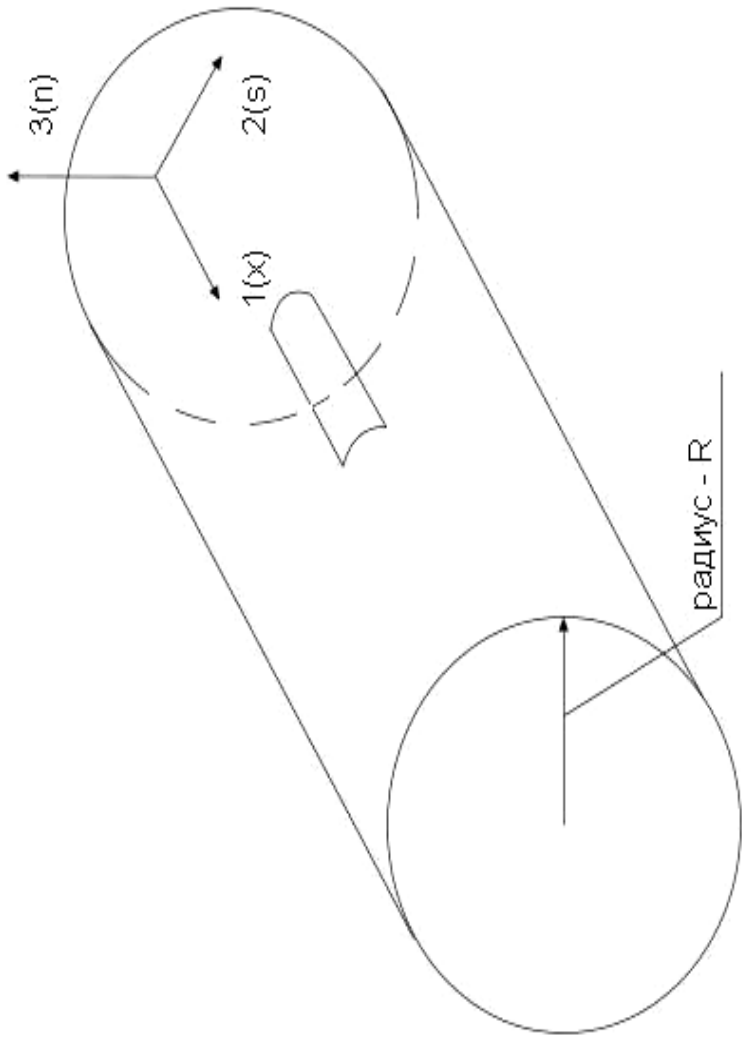


Рис.2.1. Тонкая цилиндрическая оболочка с отверстием.

Граничные условия  
из расчета всей  
цилиндрической  
оболочки без  
отверстия или условия  
периодичности

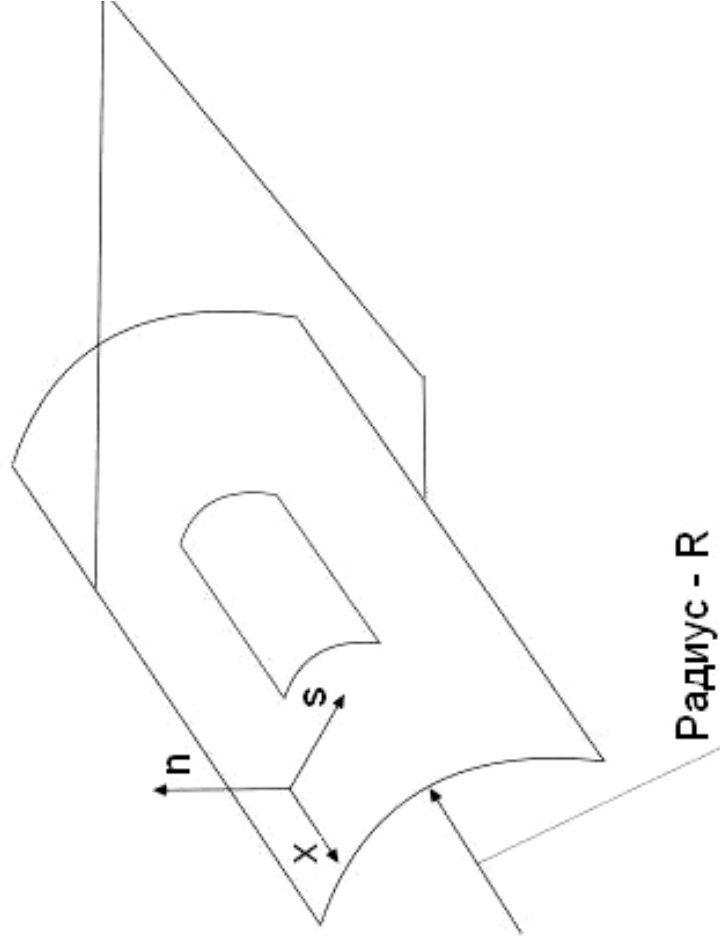


Рис.2.2. Выделенная пологая область



## 2.2. Вывод разрешающих уравнений

Рассмотрим пологую оболочку с прямоугольным отверстием изображенную на рис. 2.3.

За продольное принято направление вдоль оси  $x$ , за поперечное – вдоль оси  $s$ , за нормальное – по оси  $n$ . Положительное направление компонентов внутренних усилий, перемещений и нагрузки показано на рис. 2.4.

Оболочка имеет ребра расположенные параллельно оси  $s$ , обладающие жесткостью на растяжение-сжатие вдоль оси  $x$  и жесткостью на изгиб в плоскости  $n\theta s$ , а жесткостью которых на кручение и изгиб в плоскости  $n\theta x$  можно пренебречь.

Разобьем оболочку на участки так, чтобы при движении в пределах участка вдоль оси  $s$  жесткостные характеристики оставались постоянными рис. 2.3.

Дифференциальные уравнения равновесия в главных кривизнах для пологих цилиндрических оболочек в правовинтовой системе координат рис. 2.4 будут иметь вид

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial N_1}{\partial x} + \frac{\partial S}{\partial s} + q_1 &= 0; \\ \frac{\partial S}{\partial x} + \frac{\partial N_2}{\partial s} + q_2 &= 0; \\ \frac{\partial Q_1}{\partial x} + \frac{\partial Q_2}{\partial s} - \frac{N_2}{R} + q_n &= 0; \\ \frac{\partial M_2}{\partial s} + \frac{\partial H}{\partial x} - Q_2 &= 0; \\ \frac{\partial M_1}{\partial x} + \frac{\partial H}{\partial s} - Q_1 &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (2.1)$$

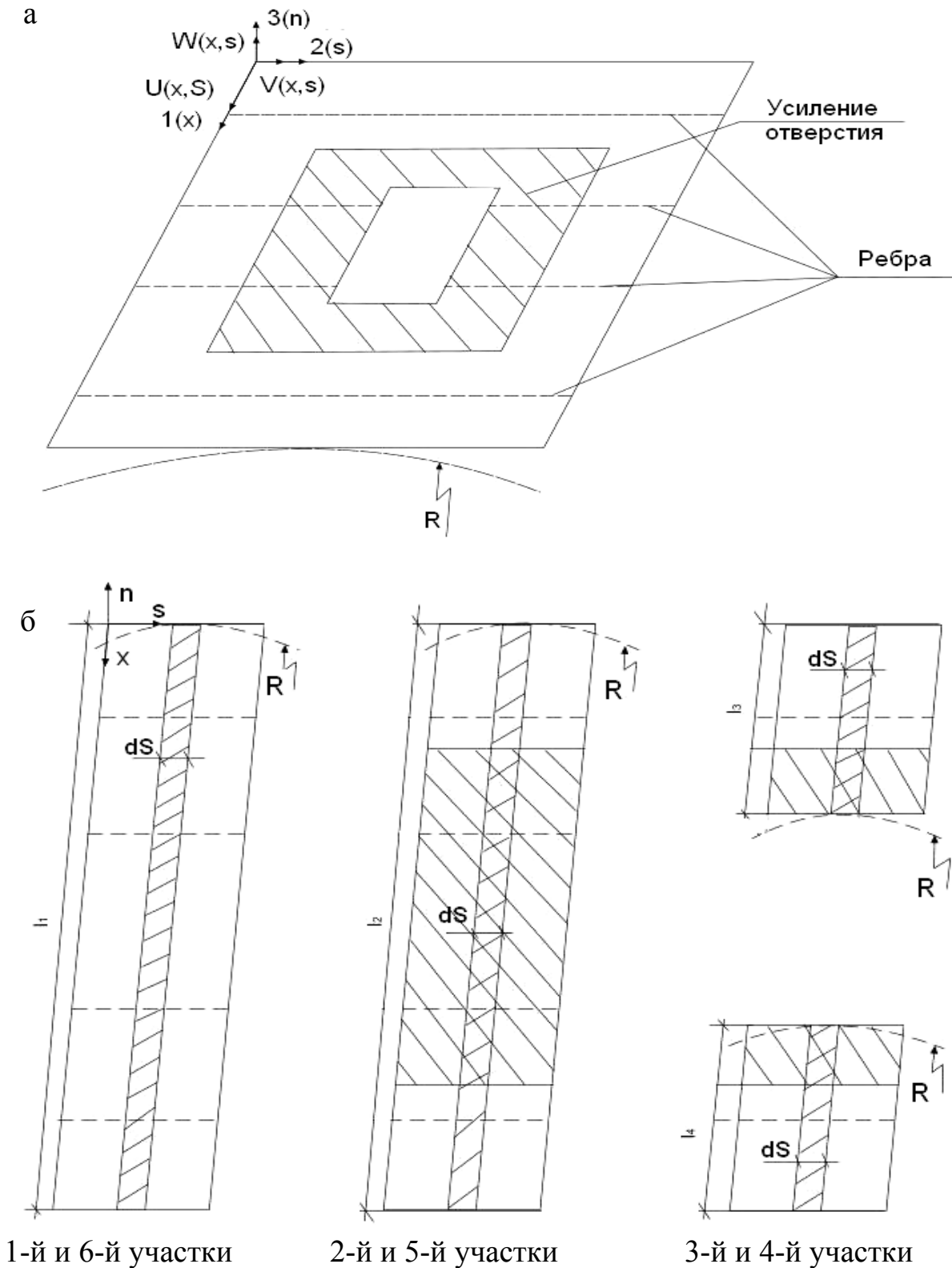


Рис.2.3. Пологая цилиндрическая оболочка с отверстием:  
 а – расчетная схема полой оболочки с прямоугольным отверстием  
 и с прямоугольным усилением отверстия; б – оболочка разбитая на участки,  
 в пределах которых жесткостные характеристики постоянны

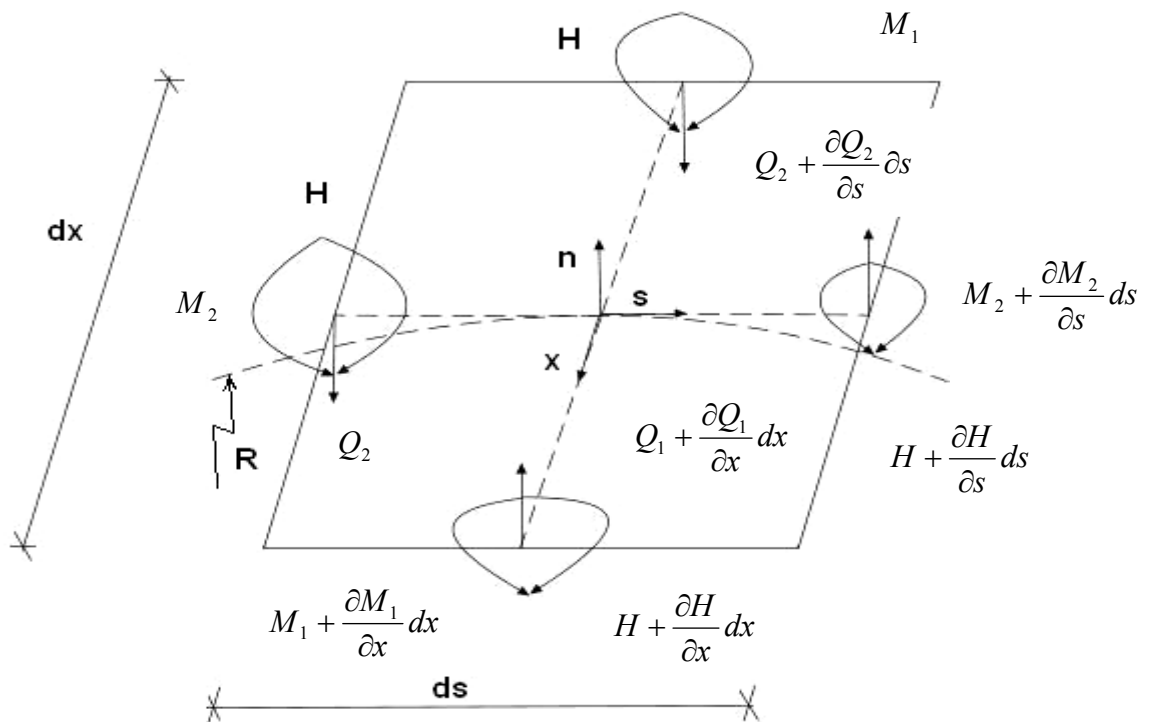
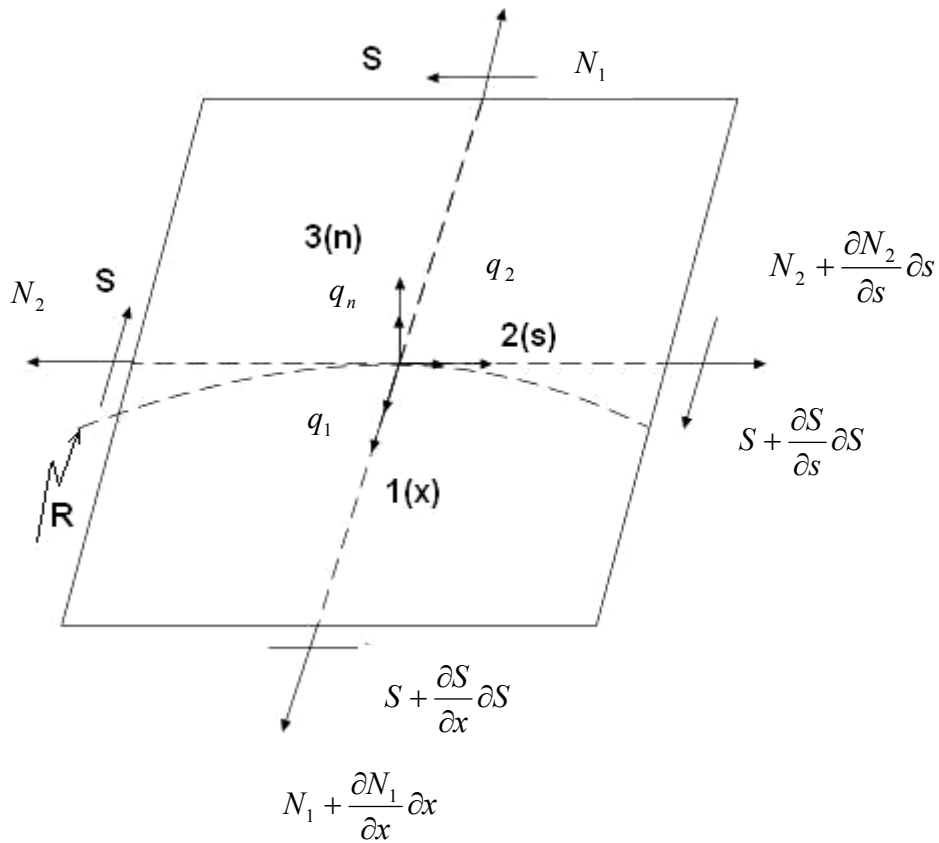


Рис.2.4. Элемент полой цилиндрической оболочки и действующие на него усилия:  
 а – тангенциальные усилия; б – изгибающие и крутящие моменты и поперечные силы

$$\frac{\partial N_1}{\partial x} + \frac{\partial S}{\partial s} + q_1 = 0;$$

или

$$\frac{\partial S}{\partial x} + \frac{\partial N_2}{\partial s} + q_2 = 0; \quad (2.2)$$

$$-\frac{\partial^2 M_1}{\partial x^2} - 2\frac{\partial^2 H}{\partial x \partial s} - \frac{\partial^2 M_2}{\partial x^2} + \frac{N_2}{R} - q_n = 0$$

Усилия  $N_1$ ,  $N_2$ ,  $S$  и моменты  $M_1$ ,  $M_2$ ,  $H$  при наличии ребер, параллельных оси  $s$ , согласно работе [50], определяются следующими физическими уравнениями

$$\left. \begin{aligned} N_1 &= B(\varepsilon_1 + \nu\varepsilon_2) + C(\alpha_1 + \nu\alpha_2); \\ N_2 &= B(\varepsilon_2 + \nu\varepsilon_1) + C(\alpha_2 + \nu\alpha_1) + B(\varepsilon_2 \bar{F}_j + H_2 \bar{S}_j); \\ S &= \frac{1-\nu}{2} B\gamma + (1-\nu) C\tau; \\ M_1 &= D(\alpha_1 + \nu\alpha_2) + C(\varepsilon_1 + \nu\varepsilon_2); \\ M_2 &= D(\alpha_2 + \nu\alpha_1) + C(\varepsilon_2 + \nu\varepsilon_1) + B(\varepsilon_2 \bar{S}_j + \alpha_2 \bar{J}_j); \\ H &= \frac{1-\nu}{2} C\gamma + (1-\nu) D\tau, \end{aligned} \right\} \quad (2.3)$$

где жесткостные характеристики  $B$ ,  $C$ ,  $D$  оболочки с толщиной  $h$ , модулем упругости  $E$ , коэффициентом Пуассона  $\nu$  и эксцентриситетом начальной поверхности  $e$  определяются по формуле

$$\left. \begin{aligned} B &= \frac{Eh}{1-\nu^2}; \\ C &= \frac{Eh}{1-\nu^2} e; \\ D &= \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} + \frac{Eh}{1-\nu^2} e^2; \end{aligned} \right\} \quad (2.4)$$

а площадь сечения  $\bar{F}_j$ , статический момент  $\bar{S}_j$  и момент инерции  $\bar{J}_j$  ребра относительно произвольной начальной поверхности при помощи дельта-функции  $\delta(x - x_j)$ , учитывающей дискретный характер расположения ребер, находятся по формуле

$$\left. \begin{aligned} \bar{F}_j &= \frac{1-\nu}{h} \sum_j F_j \delta(x - x_j); \\ \bar{S}_j &= \frac{1-\nu}{h} \sum_j S_j \delta(x - x_j); \\ \bar{J}_j &= \frac{1-\nu}{h} \sum_j J_j \delta(x - x_j). \end{aligned} \right\} \quad (2.5)$$

Компоненты вектора перемещения точки срединной поверхности оболочки показаны на рис.2.3. При этом через  $U(x,s)$  обозначено продольное перемещение вдоль оси  $x$ , через  $V(x,s)$  – поперечное продольное перемещение вдоль оси  $s$ , через  $W(x,s)$  – нормальное перемещение вдоль оси  $n$ .

Зависимости между деформациями и перемещениями для пологой цилиндрической оболочки в правовинтовой системе координат, когда нормаль направлена от центра окружности, имеют вид:

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_1 &= \frac{\partial U(x,s)}{\partial x}; \\ \varepsilon_2 &= \frac{\partial V(x,s)}{\partial s} + \frac{W(x,s)}{R}; \\ \gamma &= \frac{\partial V(x,s)}{\partial x} + \frac{\partial U(x,s)}{\partial s}; \\ \varkappa_1 &= -\frac{\partial^2 W(x,s)}{\partial x^2}; \\ \varkappa_2 &= -\frac{\partial^2 W(x,s)}{\partial s^2}; \\ \tau &= -\frac{\partial^2 W(x,s)}{\partial x \partial s}. \end{aligned} \right\} \quad (2.6)$$

Компоненты вектора перемещения согласно вариационному методу В.3. Власова представим в виде разложений

$$\left. \begin{aligned} U(x,s) &= \sum_{i=1}^{n_1} U_i(s) \xi_i(x) ; \\ V(x,s) &= \sum_{j=1}^{n_2} V_j(s) \eta_j(x) ; \\ W(x,s) &= \sum_{d=1}^{n_3} W_d(s) f_d(x) . \end{aligned} \right\} \quad (2.7)$$

Число  $n_1, n_2, n_3$ , обобщенных  $U_i(s), V_j(s), W_d(s)$  и единичных  $\xi_i(x), \eta_j(x), f_d(x)$  функций перемещений произвольно.

На основе принципа возможных перемещений составляем интегральные условия равновесия элементарной продольной полоски шириной (см. рис.2.3,б). Эти условия выражают равенство нулю работы всех внешних и внутренних усилий, действующих на эту полоску, на возможных для нее перемещениях. При этом за возможные перемещения принимаются выбранные функции перемещений

$$\xi_i(x), \eta_j(x), f_d(x) \quad (i=1, \dots, n_1; j=1, \dots, n_2; d=1, \dots, n_3)$$

Умножая первое из уравнений (2.2) на  $\xi_k(x)$ , второе на  $\eta_g(x)$ , а третье на  $f_d(x)$  и интегрируя их по всей длине продольной полоски выделенного участка оболочки  $l$ , получим интегральные условия равновесия элементарной полоски  $ds$  (см. рис.2.3)

$$\left. \begin{aligned} \int_0^l \frac{\partial N_1}{\partial x} \xi_k(x) dx + \int_0^l \frac{\partial S}{\partial s} \xi_k(x) dx + \int_0^l q_1 \xi_k(x) dx &= 0 \\ \int_0^l \frac{\partial S}{\partial x} \eta_g(x) dx + \int_0^l \frac{\partial N_2}{\partial s} \eta_g(x) dx + \int_0^l q_2 \eta_g(x) dx &= 0 \\ - \int_0^l \frac{\partial^2 M_1}{\partial x^2} f_l(x) dx - 2 \int_0^l \frac{\partial^2 H}{\partial x \partial s} f_l(x) dx - \int_0^l \frac{\partial^2 M^2}{\partial s^2} f_l(x) dx + \\ + \int_0^l \frac{N_2}{R} f_l(x) dx - \int_0^l q_n f_l(x) dx &= 0 . \end{aligned} \right\} \quad (2.8)$$

Интегрируя по частям один раз члены уравнений (2.8), содержащие первую производную по координате  $x$ , и два раза члены, содержащие вторую производную по  $x$ , получим

$$\left. \begin{aligned}
 & \int_0^l \frac{\partial S}{\partial s} \xi_k(x) dx - \int_0^l N_1 \xi_k'(x) dx + |N_1 \xi_k|_0^l + \\
 & \quad + \int_0^l q_1 \xi_k(x) dx = 0 ; \\
 & \int_0^l \frac{\partial N_2}{\partial s} \eta_g(x) dx - \int_0^l S \eta_g'(x) dx + |S \eta_g|_0^l + \\
 & \quad + \int_0^l q_2 \eta_g(x) dx = 0 ; \\
 & - \int_0^l M_1 f_l''(x) dx + 2 \int_0^l \frac{\partial H}{\partial s} f_l'(x) dx - \int_0^l \frac{\partial^2 M_2}{\partial s^2} f_l(x) dx + \\
 & + \int_0^l \frac{N_2}{R} f_l(x) dx + |M_1 f_l'|_0^l - |\bar{Q}_1 f_l|_0^l - \int_0^l q_n f_l(x) dx = 0 .
 \end{aligned} \right\} (2.9)$$

Выражения в прямых скобках означают работу нормальных усилий  $N_1$  сдвигающих  $S$ , обобщенных поперечных усилий  $\bar{Q}_1$ , когда  $\bar{Q}_1 = \frac{\partial M_1}{\partial x} + 2 \frac{\partial H}{\partial s}$ , и изгибающих моментов,  $M_1$ , действующих по концам выделенной продольной полоски оболочки, на возможных перемещениях. Эти силовые факторы определяются граничными условиями на поперечных краях оболочки при  $x=0$  и  $x=l$  и могут быть отнесены к свободным членам от нагрузки.

Отметим, что этими же выражениями в прямых скобках учитывается податливость ребер на сжатие и изгиб, при наличии последних. В этом случае, подобно составным стержням из работы [64], эти члены входят в выражения для подсчета коэффициентов приведенной ниже системы уравнений (2.10). Подробнее учет податливости разберем в последующих главах, в главе 3 – податливость на сжатие, в главе 4 – на изгиб.

Подставляя выражения для  $N_1$ ,  $N_2$ ,  $S$ ,  $M_1$ ,  $M_2$  и  $H$  из уравнений (2.3) в (2.9) и учитывая при этом выражения для деформаций и перемещений (2.6-2.7), получим следующую систему разрешающих дифференциальных уравнений равновесия элементарной продольной полоски  $ds$  для каждого участка, на котором разбита пологая оболочка с отверстием:

$$\left. \begin{aligned}
 & \sum_{i=1}^{n_1} a_{ki} U_i''(s) - \sum_{i=1}^{n_1} b_{ki} U_i(s) + \sum_{j=1}^{n_2} (\tilde{c}_{kj} - \bar{c}_{kj}) V_j'(s) + \\
 & + \sum_{d=1}^{n_3} (\tilde{d}_{kd} - \bar{d}_{kd}) W_d''(s) + \sum_{d=1}^{n_3} (\tilde{e}_{kd} - \bar{e}_{kd}) W_d(s) + q_{1k} = 0; \\
 & \sum_{i=1}^{n_1} (\bar{c}_{gi} - \tilde{c}_{gi}) U_i'(s) + \sum_{j=1}^{n_2} f_{gj} V_j''(s) - \sum_{j=1}^{n_2} V_j(s) - \\
 & - \sum_{d=1}^{n_3} h_{gd} W_d'''(s) + \sum_{d=1}^{n_3} (\tilde{k}_{gd} + \bar{k}_{gd} - \hat{k}_{gd}) W_d'(s) + q_{2g} = 0; \\
 & \sum_{i=1}^{n_1} (\bar{d}_{li} - \tilde{d}_{li}) U_i''(s) + \sum_{i=1}^{n_1} (\bar{e}_{li} - \tilde{e}_{li}) U_i(s) - \\
 & - \sum_{j=1}^{n_2} h_{lj} V_j'''(s) + \sum_{j=1}^{n_2} (\tilde{k}_{lj} + \bar{k}_{lj} - \hat{k}_{lj}) V_j'(s) + \\
 & + \sum_{d=1}^{n_3} l_{ld} W_d'''(s) - \sum_{d=1}^{n_3} (\tilde{m}_{ld} + \bar{m}_{ld} - \hat{m}_{ld} - \check{m}_{ld}) W_d''(s) + \\
 & + \sum_{d=1}^{n_3} (\tilde{n}_{ld} + \bar{n}_{ld} - \hat{n}_{ld} - \check{n}_{ld}) W_d(s) - q_3 l = 0.
 \end{aligned} \right\} \quad (2.10)$$

$$(k = 1, \dots, n_1; g = 1, \dots, n_2; l = 1, \dots, n_3)$$

Отличительной особенностью полученных дифференциальных уравнений для отдельного участка, на которые разбита оболочка с отверстием так, чтобы в пределах участка жесткостные характеристики оставались постоянными, является то, что в пределах участка



коэффициенты этих уравнений являются постоянными и вычисляются по формулам

$$\begin{aligned}
 a_{ki} &= \frac{1-\nu}{2} \int_0^l B \xi_i(x) \xi_k(x) dx, \quad a_{ki} = a_{ik} \\
 b_{ki} &= \int_0^l B \xi_i'(x) \xi_k'(x) dx, \quad b_{ki} = b_{ik} \\
 \tilde{c}_{kj} &= \frac{1-\nu}{2} \int_0^l B \eta_j'(x) \xi_k(x) dx; \\
 \bar{c}_{kj} &= \nu \int_0^l C f_d(x) \xi_k'(x) dx; \\
 \tilde{d}_{kd} &= \nu \int_0^l C f_d(x) \xi_k'(x) dx; \\
 \bar{d}_{kd} &= (1-\nu) \int_0^l C f_d'(x) \xi_k(x) dx; \\
 \tilde{e}_{kd} &= \int_0^l C f_d''(x) \xi_k'(x) dx; \\
 \bar{e}_{kd} &= \nu \frac{1}{R} \int_0^l B f_d(x) \xi_k'(x) dx; \\
 \bar{c}_{gi} &= \nu \int_0^l B \xi_i'(x) \eta_g(x) dx; \\
 \tilde{c}_{gi} &= \frac{1-\nu}{2} \int_0^l B \xi_i(x) \eta_g'(x) dx; \\
 f_{gj} &= \int_0^l (B + E F_j) \eta_j(x) \eta_g(x) dx, \quad f_{gj} = f_{jg} \\
 g_{gj} &= \frac{1-\nu}{2} \int_0^l B \eta_j'(x) \eta_g'(x) dx, \quad g_{gj} = g_{jg} \\
 h_{gd} &= \int_0^l (C + E S_j) f_d(x) \eta_g(x) dx; \\
 \tilde{k}_{gd} &= \frac{1}{R} \int_0^l (B + E F_j) f_d(x) \eta_g(x) dx;
 \end{aligned} \tag{2.11}$$

$$\begin{aligned}
\bar{k}_{gd} &= (1-\nu) \int_0^l C f_d'(x) \eta_g(x) dx; \\
\hat{k}_{gd} &= \nu \int_0^l C f_d''(x) \eta_g(x) dx; \\
\bar{d}_{li} &= (1-\nu) \int_0^l C \xi_i(x) f_l'(x) dx; \\
\tilde{d}_{li} &= \nu \int_0^l C \xi_i'(x) f_l(x) dx; \\
\bar{e}_{li} &= \nu \frac{1}{R} \int_0^l B \xi_i'(x) f_l(x) dx; \\
\tilde{e}_{li} &= \int_0^l C \xi_i'(x) f_l''(x) dx; \\
h_{lj} &= \int_0^l (C + ES_j) \eta_j(x) f_l(x) dx; \\
\tilde{k}_{lj} &= \frac{1}{R} \int_0^l (B + EF_j) \eta_j(x) f_l(x) dx; \\
\bar{k}_{lj} &= (1-\nu) \int_0^l C \eta_j'(x) f_l'(x) dx; \\
\hat{k}_{lj} &= \nu \int_0^l C \eta_j(x) f_l''(x) dx; \\
l_{ld} &= \int_0^l (D + EJ_j) f_d(x) f_l(x) dx, \quad l_{ld} = l_{dl}; \\
\tilde{m}_{ld} &= 2(1-\nu) \int_0^l D f_d'(x) f_l'(x) dx, \quad \tilde{m}_{ld} = \tilde{m}_{dl}; \\
\bar{m}_{ld} &= 2 \frac{1}{R} \int_0^l (C + ES_j) f_d(x) f_l(x) dx, \quad \bar{m}_{ld} = \bar{m}_{dl}; \\
\hat{m}_{ld} &= \nu \int_0^l D f_d''(x) f_l(x) dx, \quad \hat{m}_{ld} = \hat{m}_{dl};
\end{aligned} \tag{2.11}$$

$$\left. \begin{aligned}
\tilde{m}_{ld} &= \nu \int_0^l Df_d(x) f_l''(x) dx, \quad \tilde{m}_{ld} = \tilde{m}_{dl}; \\
\tilde{n}_{ld} &= \frac{1}{R^2} \int_0^l (B + EF_j) f_d(x) f_l(x) dx, \quad \tilde{n}_{ld} = \tilde{n}_{dl}; \\
\bar{n}_{ld} &= \int_0^l Df_d''(x) f_l''(x) dx, \quad \bar{n}_{ld} = \bar{n}_{dl}; \\
\hat{n}_{ld} &= \nu \frac{1}{R} \int_0^l Cf_d''(x) f_l(x) dx, \quad \hat{n}_{ld} = \tilde{n}_{dl}; \\
\check{n}_{ld} &= \nu \frac{1}{R} \int_0^l Cf_d(x) f_l''(x) dx, \quad \check{n}_{ld} = \hat{n}_{dl}; \\
&\left. \begin{aligned}
\tilde{c}_{kj} &= \tilde{c}_{gi}, \quad \bar{c}_{kj} = \bar{c}_{gi} \\
\tilde{d}_{kd} &= \tilde{d}_{li}, \quad \bar{d}_{kd} = \bar{d}_{li} \\
\tilde{e}_{kd} &= \tilde{e}_{li}, \quad \bar{e}_{kd} = \bar{e}_{li} \\
h_{gd} &= h_{lj}, \quad \tilde{k}_{gd} = \tilde{k}_{lj} \\
\bar{k}_{gd} &= \bar{k}_{lj}, \quad \hat{k}_{gd} = k_{lj}
\end{aligned} \right\} \begin{array}{l} k=i \\ d=l \\ g=j \end{array}
\end{aligned} \right\} \quad (2.11)$$

Коэффициенты свободных членов от внешней нагрузки определяются по формуле:

$$\left. \begin{aligned}
q_{1k} &= \int_0^l q_1 \xi_k(x) dx + |N_1 \xi_k|_0^l; \\
q_{2g} &= \int_0^l q_2 \eta_g(x) dx + |S \eta_g|_0^l; \\
q_{3l} &= \int_0^l q_n f_l(x) dx + |\bar{Q}_1 f_l|_0^l - |M_1 f_l'|_0^l.
\end{aligned} \right\} \quad (2.12)$$

Понимая квадратуры (2.11-2.12) в смысле интегралов Стильтьесса, легко учитывается дискретное расположение ребер. Для этого к интегралам при непрерывном распределении по всей длине выделенной

продольной полоски  $ds$  дифференциалов  $Bdx, Cdx, Ddx, qdx$  следует добавить величины, представляющие собой суммы произведений из сосредоточенных в определенных точках  $x_j$  конечных факторов ( $EF_j, ES_j, EJ_j$ , сосредоточенных сил) и значений соответствующих подынтегральных функций в этих точках  $x_j$ .

Таким образом, имеем для пологой цилиндрической оболочки относительно произвольной начальной поверхности систему обыкновенных разрешающих дифференциальных уравнений (2.10) с постоянными коэффициентами (2.11), учитывающими дискретное расположение ребер, в том числе фальцевых, обладающих податливостью на сжатие и изгиб, и учитывающими близость расположения отверстия к краю оболочки.

### 2.3. Решение разрешающих уравнений и постановка граничных условий

Прежде чем перейти к решению полученной системы разрешающих дифференциальных уравнений (2.10) с постоянными коэффициентами рассмотрим решение системы обыкновенных дифференциальных уравнений в нормальной форме

$$\vec{Y}'(s) - A \cdot \vec{Y}(s) = 0. \quad (2.13)$$

Согласно работе [68] будем искать решение системы в виде:

$$Y_1 = \beta_1 e^{\lambda s}, Y_2 = \beta_2 e^{\lambda s}, \dots, Y_N = \beta_N e^{\lambda s} \quad (2.14)$$

Подставляя в систему (2.13) и сокращая на множитель  $e^{\lambda s}$ , будем иметь для определения постоянных  $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_N$  систему уравнений

$$\left. \begin{aligned} (a_{11} - \lambda)\beta_1 + a_{12}\beta_2 + \dots + a_{1N}\beta_N &= 0; \\ a_{2N}\beta_1 + (a_{22} - \lambda)\beta_2 + \dots + a_{2N}\beta_N &= 0; \\ \dots & \\ a_{N1}\beta_1 + a_{N2}\beta_2 + \dots + (a_{NN} - \lambda)\beta_N &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (2.15)$$

Так как для неизвестных  $\beta$  мы должны получить решение отличное от нулевого, определитель написанной системы должен равняться нулю, т.е. для постоянной  $\lambda$  мы получаем уравнение вида:

$$\begin{vmatrix} (a_{11} - \lambda) & a_{12} & \dots & a_{1N} \\ a_{21} & (a_{22} - \lambda) & \dots & a_{2N} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{N1} & a_{N2} & \dots & (a_{NN} - \lambda) \end{vmatrix} = 0. \quad (2.16)$$

Уравнение (2.16) есть алгебраическое уравнение степени  $N$  со старшим членом  $(-\lambda)^N$ . Если это уравнение имеет  $N$  различных корней

$$\lambda = \lambda_1, \lambda = \lambda_2, \dots, \lambda = \lambda_N,$$

то, подставляя каждый из них  $\lambda = \lambda_j$  в коэффициенты системы (2.15), будем иметь  $N$  однородных уравнений для соответствующих неизвестных  $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_N$  с определителем равным нулю, и сможем получить для этих неизвестных решение, отличное от нулевого. Таким образом, по формулам (2.14) получим  $N$  линейно-независимых решений системы (2.13), и их линейная комбинация даст общий интеграл. Если же уравнение (2.16) имеет корень кратности  $k$ , где  $k \geq 1$ , то этому корню должны соответствовать  $k$  линейно-независимых решений. Если удастся получить  $\mu$  линейно-независимых векторов  $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_N$ , где  $\mu \leq k$ , то все  $\mu$  решений соответствующих корню кратности  $k$  будут иметь вид (2.14), а оставшиеся  $(k - \mu)$  решений должны содержать еще множителем полином от  $S$ .

Разберем последний случай более подробно. Пусть корню кратности  $k$  соответствует только одно решение вида (2.14). Тогда подобно работе [68], найдем матрицу  $(A - \lambda_k)$  в степени  $k$

$$(A - \lambda_k)^k = \left| \begin{vmatrix} (a_{11} - \lambda) & a_{12} & \dots & a_{1N} \\ a_{21} & (a_{22} - \lambda) & \dots & a_{2N} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{N1} & a_{N2} & \dots & (a_{NN} - \lambda) \end{vmatrix} \right|^k \quad (2.17)$$

Из матрицы (2.17), имеющей ранг  $(N-k)$ , найдем  $k$  линейно-независимых векторов. Таким образом, получим полную матрицу  $\tilde{N}_1$  состоящую из  $N$  линейно-независимых собственных векторов  $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_N$ , расположенных по столбцам, с определителем отличным от нуля. Затем преобразованием подобия  $\tilde{N}^{-1} \cdot A \cdot \tilde{N}$  приведем матрицу  $A$  к квазидиагональной форме, состоящей из диагональных элементов, соответствующих простым корням, и подматрицы  $D$  порядка  $k$ , имеющей характеристическое число  $\lambda = \lambda_k$  кратности  $k$ . Составляем матрицу  $B = (D - \lambda_k)$ , имеющую характеристическое число  $\lambda=0$ , кратности  $k$ . Определив наименьшее число  $l$ , такое что  $B^l = 0$ , найдем матрицу  $C = B^{(l-1)}$ . Определяя ранг матрицы  $C$ , возьмем те векторы, которые не удовлетворяют системе уравнений  $C_{\tilde{\beta}} = 0$ , и, совершая над ними последовательное  $(l-1)$  раз преобразование  $B$ , построим серии новых ортов, состоящие из векторов  $\tilde{\beta}$ . Если после этого в подпространстве, определяемом написанной системой, останутся еще векторы, т.е., если  $k > l$ , то применяя к ним последовательное преобразование  $B$ , мы получим новые серии ортов и т.д. Построив, таким образом, матрицу  $\tilde{N}_2$   $k$ -го порядка, состоящую из  $k$  линейно-независимых новых ортов, расположенных по столбцам, можно перейти ко второму преобразованию подобия для основной матрицы  $A$ , которое и приводит эту матрицу к канонической форме

$$\tilde{N}^{-1} \cdot A \cdot \tilde{N} = \left[ J_{\rho_1}(\lambda_1), J_{\rho_2}(\lambda_2), \dots, J_{\rho_p}(\lambda_p) \right], \quad (2.18)$$

где матрицы  $J_\rho(\lambda)$  имеют вид

$$J_\rho(\lambda) = \left\| \begin{array}{cccc} \lambda & 0 & 0 & \dots 0 \\ 1 & \lambda & 0 & \dots 0 \\ 0 & 1 & \lambda & \dots 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots \lambda \end{array} \right\|. \quad (2.19)$$

Нижний значок  $\rho$  указывает порядок матрицы, а аргумент дает число  $\lambda$ , стоящее на главной диагонали, т.е. для простого корня  $\rho=1$ , для кратного  $\rho > 1$ . Для получения такой матрицы  $\tilde{N}$ , надо подматрицу, состоящую из  $k$  столбцов матрицы  $\tilde{N}_1$ , соответствующих корню

кратности  $k$ , умножить на матрицу  $\tilde{N}_2$   $k$ -го порядка, состоящую из ортов, расположенных по столбцам.

Таким образом, после определения характеристических чисел для матрицы  $A$  из (2.13), при помощи которых определяется матрица  $\tilde{N}$ , с определителем отличным от нуля, приводящая матрицу  $A$  преобразованием подобия  $(\tilde{N}^{-1} \cdot A \cdot \tilde{N})$  к матрице канонической формы (2.18), перейдем к интегрированию системы (2.13).

Введем новые функции  $\vec{Y}$ , связанные с  $\vec{Y}$  по формуле

$$\vec{Y} = \tilde{N} \cdot \vec{Y}, \quad \vec{Y}' = \tilde{N} \cdot \vec{Y}' \quad (2.20)$$

Тогда (2.13) примет вид

$$\tilde{N} \cdot \vec{Y}' - A \cdot \tilde{N} \cdot \vec{Y} = 0 \quad (2.21)$$

Умножим (2.21) на матрицу  $\tilde{N}^{-1}$ , тогда

$$\tilde{N}^{-1} \cdot \tilde{N} \cdot \vec{Y}' - \tilde{N}^{-1} \cdot A \cdot \tilde{N} \cdot \vec{Y} = 0,$$

или

$$\vec{Y}' - [J_\rho(\lambda)] \cdot \vec{Y} = 0 \quad (2.22)$$

Система (2.22) легко интегрируется. Для простого корня  $\lambda = \lambda_j$  имеем  $\rho=1$ , т.е. независимое уравнение

$$\tilde{Y}'_j - \lambda_j \tilde{Y}_j = 0 \quad (2.23)$$

для кратного корня  $\rho > 1$  имеем либо независимые дифференциальные уравнения, либо дифференциальные уравнения с известной правой частью, ранее определенной

$$\begin{aligned} \tilde{Y}'_{j+1} - \lambda_{j+1} \tilde{Y}_{j+1} &= 0; \\ \dots\dots\dots & \end{aligned} \quad (2.24)$$

$$\tilde{Y}'_{j+\rho} - \lambda_{j+1} \tilde{Y}_{j+\rho} = \tilde{Y}_{j+\rho-1}.$$

Перейдем теперь к решению системы разрешающихся дифференциальных уравнений (2.10) для каждого участка полой оболочки.

Введем обобщенные выражения для усилий, представляющие собой подсчитанную по всей длине  $l$  продольной полоски  $ds$  (см. рис.2.3)

пологой оболочки работу усилий  $S$ ,  $N_2$ , момента  $M_2$  и обобщенных усилий  $\bar{Q}_2 = Q_2 + \frac{\partial H}{\partial x}$  на возможных перемещениях  $\xi_k(x)$ ,  $\eta_g(x)$ ,  $f_l(x)$ :

$$S_k(s) = \int_0^l S \xi_k(x) dx; \quad (2.25)$$

$$N_g(s) = \int_0^l N_2 \eta_g(x) dx; \quad (2.26)$$

$$M_l(s) = \int_0^l M_2 f_l(x) dx; \quad (2.27)$$

$$Q_l(s) = \int_0^l \bar{Q}_2 f_l(x) dx. \quad (2.28)$$

Интегрируя в (2.28) по частям выражение, содержащее производную по  $x$ , получаем с точностью до выражений  $2|Hf_l(x)|_0^l$ , которые можно отнести к свободным членам от нагрузки, что

$$Q_l(s) = \int_0^l \frac{\partial M_2}{\partial s} f_l(x) dx - 2 \int_0^l H f_l'(x) dx. \quad (2.29)$$

Подставляя выражения  $S$ ,  $N_2$ ,  $M_2$ ,  $H$  из уравнений (2.3) в (2.25-2.29) и учитывая при этом выражения для деформаций и перемещений (2.6-2.7), получим

$$S_k(s) = \sum_{i=1}^{n_1} a_{ki} U_i'(s) + \sum_{j=1}^{n_2} \tilde{c}_{kj} V_j(s) - \sum_{d=1}^{n_3} \bar{d}_{kd} W_d'(s); \quad (2.30)$$

$$N_g(s) = \sum_{i=1}^{n_1} \bar{c}_{gi} U_i(s) + \sum_{j=1}^{n_2} f_{gj} V_j'(s) - \sum_{d=1}^{n_3} h_{gd} W_d''(s) + \sum_{d=1}^{n_3} (\tilde{k}_{gd} - \hat{k}_{gd}) W_d(s); \quad (2.31)$$

$$M_l(s) = \sum_{i=1}^{n_1} \tilde{d}_{li} U_i(s) + \sum_{j=1}^{n_2} h_{lj} V_j'(s) - \sum_{d=1}^{n_3} l_{ld} W_d''(s) + \sum_{d=1}^{n_3} \left( \frac{1}{2} \bar{m}_{ld} - \hat{m}_{ld} \right) W_d(s); \quad (2.32)$$



$$\begin{aligned}
Q_l(s) = & \sum_{i=1}^{n_1} (\tilde{d}_{li} - \bar{d}_{li}) U_1'(s) + \sum_{j=1}^{n_2} h_{lj} V_j''(s) - \sum_{j=1}^{n_2} k_{lj} V_j(s) - \\
& - \sum_{d=1}^{n_3} l_{ld} W_d'''(s) + \sum_{d=1}^{n_3} (\tilde{m}_{ld} + \bar{m}_{ld} \frac{1}{2} - \hat{m}_{ld}) W_d'(s), \quad (2.33)
\end{aligned}$$

где коэффициенты подсчитываются по формуле (2.11).

Приведем систему (2.10), состоящую из двух уравнений второго порядка и одного уравнения четвертого порядка, к эквивалентной ей системе, состоящей из восьми уравнений первого порядка, путем введения добавочных неизвестных, в качестве которых возьмем, например обобщенный угол поворота  $W_l(s)$  и обобщенные усилия  $S_k(s)$ ,  $N_g(s)$ ,  $M_l(s)$ ,  $Q_l(s)$  по формулам (2.30-2.33), тогда

$$\left. \begin{aligned}
& W_l'(s) - W_{1l}(s) = 0; \\
& \sum_{i=1}^{n_1} \tilde{d}_{li} U_i(s) + \sum_{j=1}^{n_2} h_{lj} V_j'(s) - \sum_{d=1}^{n_3} l_{ld} W_d'(s) + \\
& + \sum_{d=1}^{n_3} \left( \frac{1}{2} \bar{m}_{ld} - \hat{m}_{ld} \right) W_d(s) - M_l(s) = 0; \\
& - \sum_{i=1}^{n_1} \bar{d}_{li} U_i'(s) - \sum_{j=1}^{n_2} \bar{k}_{lj} V_j(s) + \sum_{d=1}^{n_3} \tilde{m}_{ld} W_d'(s) + M_l(s) - Q_l(s) = 0; \\
& \sum_{i=1}^{n_1} (\bar{e}_{li} - \tilde{e}_{li}) U_i(s) + \sum_{j=1}^{n_2} (\tilde{k}_{lj} - \hat{k}_{lj}) V_j'(s) - \sum_{d=1}^{n_3} \left( \frac{\bar{m}_{ld}}{2} - \tilde{m}_{ld} \right) W_{1d}'(s) - \\
& - Q_l'(s) + \sum_{d=1}^{n_3} (\tilde{n}_{ld} + \bar{n}_{ld} - \hat{n}_{ld} - \tilde{n}_{ld}) W_d(s) - q_{3l} = 0; \\
& \sum_{i=1}^{n_1} a_{ki} U_i'(s) + \sum_{j=1}^{n_2} \tilde{c}_{kj} V_j(s) - \sum_{d=1}^{n_3} \bar{d}_{kd} W_d'(s) - S_k(s) = 0; \\
& \sum_{i=1}^{n_1} \bar{c}_{gi} U_i(s) + \sum_{j=1}^{n_2} f_{gj} V_j(s) - \sum_{d=1}^{n_3} h_{gd} W_d'(s) + \\
& + \sum_{d=1}^{n_3} (\tilde{k}_{gd} - \hat{k}_{gd}) W_d(s) - N_g(s) = 0;
\end{aligned} \right\} (2.34)$$

$$\left. \begin{aligned}
& S'_k(s) - \sum_{i=1}^{n_1} b_{ki} U_i(s) - \sum_{j=1}^{n_2} \bar{c}_{kj} V'_j(s) + \sum_{d=1}^{n_3} \tilde{d}_{kd} W'_{1d}(s) + \\
& \quad + \sum_{d=1}^{n_3} (\tilde{e}_{kd} - \bar{e}_{kd}) W_d(s) + q_{1k} = 0; \\
& N'_g(s) - \sum_{i=1}^{n_1} \tilde{c}_{gi} U'_i(s) - \sum_{j=1}^{n_2} g_{gj} V_j(s) + \sum_{d=1}^{n_3} \bar{k}_{gd} W'_d(s) + q_{2g} = 0.
\end{aligned} \right\} (2.34)$$

Система (2.34) в матричной форме представлена на рис.2.5, где через  $J$  обозначена единичная матрица, индекс «т» обозначает транспорирование матрицы, коэффициенты подматриц, образующих блочную структуру общей матрицы находятся по формулам (2.11).

Таким образом в векторной форме имеем систему вида

$$B \cdot \vec{Y}'(s) - A \cdot \vec{Y}(s) + \vec{F} = 0, \quad (2.35)$$

или

$$\vec{Y}'(s) - (B^{-1} \cdot A) \cdot \vec{Y}(s) + (B^{-1} \cdot \vec{F}) = 0. \quad (2.36)$$

Вводя новые функции по формуле (2.20), после преобразования придем к уравнению (2.22) со свободными членами.

Частное решение для получения общего интеграла системы (2.34) удобно находить от вида свободных членов, например, если

$$\tilde{Y}'_j(s) - \lambda_j \tilde{Y}_j(s) = e^{(\mu s)} \sum_{t=0}^n a_{t+1} s^{(t)}, \quad (2.37)$$

при  $\mu = \lambda_j$ , то частное решение  $\tilde{Y}_*(s)$  имеет вид:

$$\tilde{Y}_*(s) = e^{(\mu s)} \sum_{t=0}^n a_{t+1} \frac{s^{(t+1)}}{t+1}. \quad (2.38)$$

J							
	-L				$H^T$		
$\tilde{M}$		J		$-\bar{D}^T$			
	$M_1$		-J		$K_1$		
$-\bar{D}$				A			
	-H				F		
	$\tilde{D}$				$-\bar{C}$	J	
$\bar{K}$				$-\tilde{C}^T$			J

$\vec{W}'(s)$
$\vec{W}'_1(s)$
$\vec{M}'(s)$
$\vec{Q}'(s)$
$\vec{U}'(s)$
$\vec{V}'(s)$
$\vec{S}'(s)$
$\vec{N}'(s)$

\*

$\vec{W}(s)$
$\vec{W}_1(s)$
$\vec{M}(s)$
$\vec{Q}(s)$
$\vec{U}(s)$
$\vec{V}(s)$
$\vec{S}(s)$
$\vec{N}(s)$

$-\vec{F}_3$
$\vec{F}_1$
$\vec{F}_2$

+

=0 ;

	J						
$M_2$		J		$-\tilde{D}^T$			
			J		$\bar{K}^T$		
N				$E_1$			
					$-\tilde{C}$	J	
$K_2$				$-\bar{C}_T$			J
$E_2$				B			
					G		

$\vec{W}(s)$
$\vec{W}_1(s)$
$\vec{M}(s)$
$\vec{Q}(s)$
$\vec{U}(s)$
$\vec{V}(s)$
$\vec{S}(s)$
$\vec{N}(s)$

$-\vec{F}_3$
$\vec{F}_1$
$\vec{F}_2$

+

=0 ;

$$M_1 = \tilde{M} - \frac{1}{2} \cdot \bar{M}; \quad M_2 = \hat{M} - \frac{1}{2} \cdot \bar{M};$$

$$E_1 = \tilde{E}^T - \bar{E}^T; \quad E_2 = \bar{E} - \tilde{E};$$

$$K_1 = \tilde{K}^T - \hat{K}^T; \quad K_2 = \hat{K} - \tilde{K}.$$

Рис.2.5. Запись системы (2.34) в матричной форме

При  $\mu \neq \lambda_j$ , то частное решение  $\tilde{Y}_*(s)$  имеет вид:

$$\tilde{Y}_*(s) = \frac{e^{(\mu s)}}{\mu - \lambda_j} \sum_{t=0}^n \left( \sum_{k=t}^n a_{k+1} \frac{k!}{t!} \left( \frac{1}{\lambda_j - \mu} \right)^{(k-t)} \right) s^{(t)}, \quad (2.39)$$

Где индекс «!» означает факториал, причем  $0! = 1$ .

Сумма частного и общего решения системы (2.34) даст общий интеграл системы (2.10) для каждого отдельного участка (см. рис.2.3). Произвольные постоянные интегрирования для каждого участка определяются из решения краевой задачи, т.е. граничных условий или условий периодичности по краям выделенной области оболочки с проемом при  $s = \text{const}$  (см. рис.2.2) и условий контакта соседних участков.

Условиями контакта двух соседних участков будут:

- равенство обобщенных перемещений  $U_i(s), V_j(s), W_d(s)$  и обобщенного угла поворота  $W_{1d}(s) = W'_d(s)$  ;
- равенство обобщенных сил  $S_k(s), N_g(s), M_l(s), Q_l(s)$ , определяемых по формулам (2.25-2.28).

Найдя для каждого участка общий интеграл системы (2.10) и определив произвольные постоянные, определяем напряженно-деформированное состояние конструктивно-ортотропной цилиндрической оболочки с проемом.

Следует отметить, что для численной реализации решение системы (2.10) в форме системы (2.34) не всегда удобно из-за большого порядка матриц, входящих в систему (2.34). Для численной реализации удобнее воспользоваться приближенным решением системы (2.10) методом возмущений. В работах [61-62] исследуется сходимость итерационного процесса различных случаев закрепления пологой оболочки.

Согласно работе [62] методика расчета пологих оболочек будет следующей.

Пусть имеется система дифференциальных уравнений в главных кривизнах

$$\left. \begin{aligned} L_{11}(U) + L_{12}(V) + L_{13}(W) &= -X ; \\ L_{21}(U) + L_{22}(V) + L_{23}(W) &= -Y ; \\ L_{31}(U) + L_{32}(V) + L_{33}(W) &= -Z , \end{aligned} \right\} \quad (2.40)$$

и четыре граничных условия

$$L_j(U, V, W) = f_j(\alpha, \beta), \quad j = 1, 2; \quad (2.41)$$

$$L_j(U, V, W) = f_j(\alpha, \beta), \quad j = 3, 4. \quad (2.42)$$

Вместо системы (2.40) рассматривается система

$$\left. \begin{aligned} L_{11}(U) + L_{12}(V) + L_{13}(W) &= -X; \\ L_{21}(U) + L_{22}(V) + L_{23}(W) &= -Y; \\ \varepsilon L_{31}(U) + \varepsilon L_{32}(V) + L_{33}(W) &= -Z, \end{aligned} \right\} \quad (2.43)$$

и

$$L_j(U, V, W) = f_j(\alpha, \beta), \quad j = 1, 2; \quad (2.44)$$

$$L_j(\varepsilon U, \varepsilon V, W) = f_j(\alpha, \beta), \quad j = 3, 4, \quad (2.35)$$

равные исходным при значении возмущенного параметра  $\varepsilon = 1$ .

Перемещения представим в форме

$$\left. \begin{aligned} U(\alpha, \beta) &= \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^n U_n(\alpha, \beta); \\ V(\alpha, \beta) &= \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^n V_n(\alpha, \beta); \\ W(\alpha, \beta) &= \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^n W_n(\alpha, \beta), \end{aligned} \right\} \quad (2.46)$$

причем первый член этих разложений удовлетворяет условиям (2.44) и (2.45), а все последующие – им же при  $f_j = 0$ ,  $j = 1, 2, 3, 4$

Тогда в нулевом приближении при  $\varepsilon = 0$

$$\left. \begin{aligned} L_{11}(U_0) + L_{12}(V_0) &= -L_{12}(W_0) - X; \\ L_{21}(U_0) + L_{22}(V_0) &= -L_{23}(W_0) - Y; \\ L_{33}(W_0) &= -Z, \end{aligned} \right\} \quad (2.47)$$

и

$$L_j(U_0, V_0, W_0) = f_j(\alpha, \beta), \quad j = 1, 2; \quad (2.48)$$

$$L_j(W_0) = f_j(\alpha, \beta), \quad j = 3, 4, \quad (2.49)$$

а последующие приближения при различных степенях  $\varepsilon$

$$\left. \begin{aligned} L_{11}(U_n) + L_{12}(V_n) &= -L_{13}(W_n) \\ L_{21}(U_n) + L_{22}(V_n) &= -L_{23}(W_n) \\ L_{33}(W_n) &= -L_{31}(U_{n-1}) - L_{31}(V_{n-1}) \end{aligned} \right\} \quad (2.50)$$

и

$$\begin{aligned} L_j(U_n, V_n, W_n) &= 0, \quad j = 1, 2 \\ L_j(U_{n-1}, V_{n-1}, W_n) &= 0, \quad j = 3, 4 \end{aligned}$$

Следовательно, формальное введение малого параметра  $\varepsilon$  в систему (2.40) и в граничных условиях (2.41, 2.42) позволяет свести решение (2.40) к решению уравнений изгиба пластинки на упругом основании и плоской задачи теории упругости при граничных условиях, которые в нулевом приближении распадаются на тангенциальные и не тангенциальные, а в последующих приближениях являются однородными.

Отметим, что данный метод можно применять, если при  $\varepsilon=1$  ряды (2.46) будут сходящимися.

Следовательно, для системы (2.10) решение методом возмущений примет следующий вид.

Для нулевого приближения  $\varepsilon=0$

$$\left. \begin{aligned} A\vec{U}_0'' - B\vec{U}_0 + (\tilde{C} - \bar{C})\vec{V}_0 &= (\bar{D} - \tilde{D})\vec{W}_0'' + (\bar{E} - \tilde{E})\vec{W}_0 - \vec{F}_1 \\ (\bar{C}^T - \tilde{C}^T)\vec{U}_0' + F\vec{V}_0'' - G\vec{V}_0 &= H\vec{W}_0''' + (\hat{K} - \tilde{K} - \bar{K})\vec{W}_0' - \vec{F}_2 \\ L\vec{W}_0^{IV} - (\tilde{M} + \bar{M} - \hat{M} - \check{M})\vec{W}_0'' &+ (\tilde{N} + \bar{N} - \hat{N} - \check{N})\vec{W}_0 = \vec{F}_3 \end{aligned} \right\} \quad (2.53)$$

при граничных условиях относительно обобщенных перемещений  $\vec{U}_0(s)$ ,  $\vec{V}_0(s)$ ,  $\vec{W}_0(s)$  и обобщенного угла поворота  $\vec{W}_0'(s)$  и обобщенных усилий:

$$\vec{S}_0(s) = A\vec{U}_0' + \tilde{C}\vec{V}_0 - \bar{D}\vec{W}_0'; \quad (2.54)$$

$$\vec{N}_0(s) = \bar{C}^T\vec{U}_0 + F\vec{V}_0' - H\vec{W}_0'' + (\tilde{K} - \hat{K})\vec{W}_0; \quad (2.55)$$

$$\vec{M}_0(s) = -L\vec{W}_0'' + \left( \frac{1}{2}\bar{M} - \hat{M} \right) \vec{W}_0; \quad (2.56)$$

$$\vec{Q}_0(s) = -L\vec{W}_0''' + \left( \frac{1}{2}\bar{M} - \hat{M} + \tilde{M} \right) \vec{W}_0. \quad (2.57)$$

Для последующих приближениях при различных степенях

$$\left. \begin{aligned} A\vec{U}_n'' - B\vec{U}_n + (\tilde{C} - \bar{C})\vec{V}_n' &= (\bar{D} - \tilde{D})\vec{W}_n'' + (\bar{E} - \tilde{E})\vec{W}_n \\ (\bar{C}^T - \tilde{C}^T)\vec{U}_n' + F\vec{V}_n'' - G\vec{V}_n &= H\vec{W}_n''' + (\hat{K} - \tilde{K} - \bar{K})\vec{W}_n' \\ L\vec{W}_n^{IV} - (\tilde{M} + \bar{M} - \hat{M} - \check{M})\vec{W}_n'' + (\tilde{N} + \bar{N} - \hat{N} - \check{N})\vec{W}_n &= \\ = (\tilde{D}^T - \bar{D}^T)\vec{U}_{n-1}'' + (\tilde{E}^T - \bar{E}^T)\vec{U}_{n-1}' + H^T\vec{V}_{n-1}''' + (\hat{K}^T - \tilde{K}^T - \bar{K}^T)\vec{V}_{n-1}' & \end{aligned} \right\} (2.58)$$

при граничных условиях относительно обобщенных перемещений  $\vec{U}_n(s)$ ,  $\vec{V}_n(s)$ ,  $\vec{W}_n(s)$  и обобщенного угла поворота  $\vec{W}_n'(s)$  и обобщенных усилий:

$$\vec{S}_n(s) = A\vec{U}_n' + \tilde{C}\vec{V}_n - \bar{D}\vec{W}_n'; \quad (2.59)$$

$$\vec{N}_n(s) = \bar{C}^T\vec{U}_n + F\vec{V}_n' - H\vec{W}_n'' + (\tilde{K} - \bar{K})\vec{W}_n; \quad (2.60)$$

$$\vec{M}_n(s) = -L\vec{W}_n'' + \left( \frac{1}{2}\bar{M} - \hat{M} \right) \vec{W}_n + \tilde{D}^T\vec{U}_{n-1} + H^T\vec{V}_{n-1}'; \quad (2.61)$$

$$\begin{aligned} \vec{Q}_n(s) &= -L\vec{W}_n''' + \left( \frac{1}{2}\bar{M} - \hat{M} + \tilde{M} \right) \vec{W}_n' + \\ &+ (\tilde{D}^T - \bar{D}^T)\vec{U}_{n-1}' + H^T\vec{V}_{n-1}'' - \bar{K}\vec{V}_{n-1}. \end{aligned} \quad (2.62)$$

В формулах (2.53-2.62) коэффициенты матриц находятся по формулам (2.11).

Индекс «Т» означает транспонирование.

Суммируя нулевое и последующие приближения получаем напряженно-деформированное состояние полой цилиндрической оболочки с проемом.

## 2.4. Особенности расчета при решении задачи на ЭВМ

При определении напряженно-деформированного состояния цилиндрической оболочки с проемом приходится определять общий интеграл системы (2.10) для каждого участка оболочки с постоянными жесткостными характеристиками.

Вопрос определения общего интеграла системы (2.10) связан с вопросом приведения матрицы  $A$  преобразованием подобия к канонической форме (2.18), что, в свою очередь, связано с вопросом определения собственных значений матрицы  $A$ , по которым определяется матрица  $N$  с определителем отличным от нуля и состоящая из собственных векторов, расположенных по столбцам. При помощи матрицы  $N$  и приводится матрица  $A$  преобразованием подобия к канонической форме (2.18).

В работе [44] имеется программа *EVVGM* определения собственных значений и собственных векторов действительной матрицы общего вида, при помощи которой осуществляется численная реализация на ЕС ЭВМ.

Следует отметить, что программа *EVVGM* правильно определяет собственные вектора, соответствующие простым собственным значениям. В случае кратных собственных значений вопрос определения собственных векторов должен быть рассмотрен самостоятельно по методике, изложенной в начале 3-го параграфа настоящей главы.

Определение собственных значений и собственных векторов осуществляется на ЭВМ приближенно, поэтому преобразование подобия (2.18) приводит матрицу  $A$  к форме, стремящейся к канонической, но у которой коэффициенты, нулевые у канонической формы, отличны от нуля. Для матриц большого порядка суммарная абсолютная ошибка по столбцу может превышать абсолютное значение диагонального элемента  $\tilde{\lambda}_j$ , поэтому определение общего интеграла происходит с тем большей ошибкой, чем больше отличны от нулевых побочные коэффициенты у канонической формы. Разберем этот случай подробнее.

Пусть имеется система дифференциальных уравнений

$$\vec{Y}'(s) - A \cdot \vec{Y}(s) + \vec{F}(s) = 0. \quad (2.63)$$

При помощи программы *EVVGM* определяем все собственные значения  $\lambda_j$  матрицы  $A$ , по которым определяется с определенной погрешностью матрица  $N$  с определителем отличным от нуля и приводящая преобразованием подобия ( $N^{-1}AN$ ) матрицу  $A$  к форме, стремящейся к канонической.

Тогда введем новые функции  $\vec{X}(s)$  по формуле

$$\vec{Y}(s) = N \cdot \vec{X}(s), \quad \vec{Y}'(s) = N \cdot \vec{X}'(s). \quad (2.64)$$



При этом система (2.63) примет вид

$$\vec{X}'(s) - (N^{-1}AN) \cdot \vec{X}(s) + N^{-1} \cdot \vec{F}(s) = 0, \quad (2.65)$$

где матрица  $(N^{-1}AN)$  равна

$$(N^{-1}AN) = J_\rho(\tilde{\lambda}) + Z, \quad (2.66)$$

причем матрица  $J_\rho(\tilde{\lambda})$  является матрицей канонической формы (2.18), у которой диагональные элементы  $\tilde{\lambda}_j$  стремятся к собственным значениям  $\lambda_j$  матрицы  $A$ .

Система (2.65) легко интегрируется когда матрица  $Z$  тождественно равно нулю, т.е. когда система (2.65) принимает вид

$$\vec{X}'(s) - J_\rho(\tilde{\lambda}) \cdot \vec{X}(s) + N^{-1} \cdot \vec{F}(s) = 0. \quad (2.67)$$

Общий интеграл системы (2.67) равен сумме общего решения однородных дифференциальных уравнений и какого-либо частного решения.

При численном решении задачи на ЭВМ матрица  $Z$  будет отлична от нуля. В этом случае, если ограничиться рассмотрением только решения системы (2.67), то ошибка при определении общего интеграла системы (2.63) будет равна  $(NZN^{-1})$ , т.е. при обратном переходе от решения системы (2.65) к (2.63) получим общий интеграл системы, которая будет отличаться от (2.63) и равняется

$$\vec{Y}'(s) - \{A - NZN^{-1}\} \cdot \vec{Y}(s) + \vec{F}(s) = 0. \quad (2.68)$$

Для решения системы (2.65), когда матрица  $Z$  в (2.66) отлична от нулевой, примем метод возмущения.

Согласно методу возмущения вместо системы (2.65) будем рассматривать систему

$$\vec{X}'(s) - (J_\rho(\tilde{\lambda}) + \varepsilon Z) \cdot \vec{X}(s) + N^{-1} \cdot \vec{F}(s) = 0, \quad (2.69)$$

которая равна исходной при  $\varepsilon = 1$ .

Представим  $\vec{X}(s)$  в форме

$$\vec{X}(s) = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^{(n)} \vec{X}_n(s), \quad (2.70)$$

причем первый член этих разложений учитывает свободные члены  $(N^{-1}\vec{F})$  из (2.65), а для всех последующих членов свободные члены из (2.65) тождественно равны нулю.

Тогда в нулевом приближении при  $\varepsilon = 0$

$$\vec{X}'_0(s) - J_\rho(\tilde{\lambda})\vec{X}_0(s) + N^{-1}\vec{F}(s) = 0. \quad (2.71)$$

При последующих приближениях при различных степенях  $\varepsilon$

$$\vec{X}'_n(s) - J_\rho(\tilde{\lambda})\vec{X}_n(s) = Z\vec{X}_{n-1}(s). \quad (2.72)$$

Данный метод можно применить, если при  $\varepsilon = 1$ , ряды (2.70) сходятся. Необходимым условием сходящегося итерационного процесса является условие

$$|Z_{ij}| < |\tilde{\lambda}_j|, \quad |Z_{ij}| < |\tilde{\lambda}_i|, \quad i \neq j. \quad (2.73)$$

Предварительно разберем общее решение системы однородных уравнений.

Для нулевого приближения при  $\varepsilon = 0$  решение имеет вид.

В случае простых собственных значений, когда  $\rho = 1$

$$x_j(s) = A_j e^{(\bar{\lambda}_j s)}, \quad (2.74)$$

где постоянные интегрирования  $A_j$  определяются из граничных условий, а характеристическое число  $\bar{\lambda}_j$  принимается равным либо собственному значению матрицы  $(A) = \lambda_j$ , либо диагональному элементу матрицы  $(N^{-1}AN) = \tilde{\lambda}_j$ , в зависимости от того, чтобы ошибка в (2.71) не превышала например 0,15 % от  $\lambda_j$ , следовательно  $\bar{\lambda}_j$  равно

$$\bar{\lambda}_j = \begin{cases} \tilde{\lambda}_j, & |\lambda_j - \tilde{\lambda}_j| \geq 0,0015|\lambda_j|; \\ \lambda_j, & |\lambda_j - \tilde{\lambda}_j| < 0,0015|\lambda_j|; \\ 0, & \lambda_j = 0. \end{cases} \quad (2.75)$$

В случае кратных собственных значений  $\lambda_{j+1} = \dots = \lambda_{j+\rho}$ , когда  $\rho > 1$

$$\left. \begin{aligned}
 x_{j+1}(s) &= A_{j+1} e^{(\bar{\lambda}_{j+1}s)}; \\
 x_{j+2}(s) &= \left\{ A_{j+1} s \tilde{\lambda}_{j+2,j+1} + A_{j+2} \right\} e^{(\bar{\lambda}_{j+1}s)}; \\
 \dots\dots\dots \\
 x_{j+k}(s) &= \int x_{j+k-1} ds \tilde{\lambda}_{j+k,j+k-1} + A_{j+k} e^{(\bar{\lambda}_{j+1}s)}; \\
 \dots\dots\dots
 \end{aligned} \right\}$$

где  $\tilde{\lambda}_{j+k,j+k-1}$  элемент нижней кодиагонали матрицы  $(N^{-1}AN)$ .

Следовательно, для нулевого приближения при  $\varepsilon = 0$  допускаем погрешность при решении однородных уравнений не превышающую, учитывая (2.75), 0,15 % от  $|\lambda_j|$ .

Для последующего приближения при  $\varepsilon = 1$ , пренебрегая предыдущей ошибкой 0,15 % от  $|\lambda_j|$ , т.е. принимая диагональные элементы матрицы  $\tilde{Z}_{ij}$  равным нулю, получаем решение системы (2.72) следующего вида:

$$\vec{X}_1(s) = \tilde{Z} \vec{X}_0(s), \quad (2.77)$$

причем коэффициенты матрицы  $\tilde{Z}$  принимаются равными

$$\tilde{Z}_{ij} = \begin{cases} \tilde{Z}_{ij}, & i \neq j, |\tilde{Z}_{ij}| < 1; \\ 0, & i = j, |\tilde{Z}_{ij}| \geq 1, \end{cases} \quad (2.78)$$

и определяются по формуле, в случае простых корней  $\rho = 1$

$$\tilde{Z}_{ij} = \frac{Z_{ij}}{\bar{\lambda}_j - \bar{\lambda}_i}, \quad (2.79)$$

в случае кратных корней  $\lambda_{j+1} = \dots = \lambda_{j+\rho}$  при  $\rho > 1$

$$\tilde{Z}_{i,j+\rho} = \frac{Z_{i,j+\rho}}{\bar{\lambda}_{j+\rho} - \bar{\lambda}_i}; \quad (2.80)$$

$$\tilde{Z}_{i,j+\rho-1} = \tilde{Z}_{i,j+\rho} \frac{\tilde{\lambda}_{j+\rho,j+\rho-1}}{\bar{\lambda}_i - \bar{\lambda}_{j+\rho}} + \frac{Z_{i,j+\rho-1}}{\bar{\lambda}_{j+\rho} - \bar{\lambda}_i};$$

$$\tilde{Z}_{i,j+p-2} = \tilde{Z}_{i,j+p-1} \frac{\tilde{\lambda}_{j+p-1,j+p-2}}{\tilde{\lambda}_i - \tilde{\lambda}_{j+p}} + \frac{Z_{i,j+p-2}}{\tilde{\lambda}_{j+p} - \tilde{\lambda}_i} ;$$

.....

Следовательно, при  $|\tilde{Z}_{ij}| > 1$  оставляем ошибку  $Z_{ij}$ , полученную при переходе от решения системы (2.71), без изменения.

Для последующего приближения при  $\varepsilon = 2$ , опять пренебрежем диагональными элементами матрицы  $\tilde{\tilde{Z}}_{ii}$ , т.е.  $\tilde{\tilde{Z}}_{ii} = 0$ .

Тогда решение системы (2.72) при  $n=2$  принимает вид:

$$\bar{X}_2(s) = \tilde{\tilde{Z}} \bar{X}_0(s), \quad (2.81)$$

причем коэффициенты матрицы .. принимаются равными как в (2.78) и определяются по формулам (2.79-2.80) путем замены в них коэффициентов  $\tilde{Z}_{ij}$  на коэффициенты  $\tilde{\tilde{Z}}_{ij}$ , а коэффициенты  $Z_{ij}$  на коэффициенты, определяемые по формуле  $\sum_{k=1}^n Z_{ik} \tilde{Z}_{ik}$ .

И так далее для всех последующих приближениях при  $n=3, 4, \dots$ .

В итоге получаем решение системы однородных уравнений

$$\bar{X}(s) = \bar{X}_0(s) + \tilde{Z} \bar{X}_0(s) + \tilde{\tilde{Z}} \bar{X}_0(s) + \dots, \quad (2.82)$$

или

$$\bar{X}(s) = R \bar{X}_0(s), \quad (2.83)$$

где матрица  $R$  равна

$$R = J + \tilde{Z} + \tilde{\tilde{Z}} + \dots \quad (2.84)$$

Тогда, учитывая (2.64), получаем, что решение системы однородных дифференциальных уравнений (2.63) принимает вид

$$\bar{Y}(s) = NR \bar{X}_0(s), \quad \bar{Y}'(s) = NR \bar{X}'_0(s). \quad (2.85)$$

Следует отметить, что матрица  $R$  зависит как от матрицы  $Z$  из (2.66), так и от вида правой части из (2.72). Поэтому получая частное решение для (2.65) по методу возмущения, получим матрицу  $R_1$ , которая, вообще говоря, будет отличаться от матрицы  $R$  из (2.85).

Однако в частном случае, когда свободные члены из (2.63) не зависят от переменной  $S$ , т.е.  $\vec{F}(s) = \vec{F}$ , можно получить частное решение  $\vec{Y}_*(s)$  в форме (2.86). Пусть

$$\vec{Y}_*(s) = NR\vec{X}_*(s), \quad \vec{Y}'_*(s) = NR\vec{X}'_*(s). \quad (2.86)$$

Тогда при определении частного решения  $\vec{X}_*$  нужно рассмотреть систему вида

$$R\vec{X}'_*(s) - (J_p(\tilde{\lambda}) + Z)R\vec{X}_*(s) + N^{-1}\vec{F} = 0. \quad (2.87)$$

Составляя матрицу из столбцов матрицы  $\{(J_p(\tilde{\lambda}) + Z)R\}$ , соответствующим собственным значениям  $\lambda_j \neq 0$  для матрицы  $A$  из столбцов матрицы  $R$ , для собственных значений  $\lambda_j = 0$ , решим систему алгебраических уравнений с известной правой частью  $(N^{-1}\vec{F})$ .

Для решения этой системы можно применить прямой метод Гаусса-Жордана. Для уточнения решения, в случае матриц большого порядка, можно применить итерационный метод Якоби, который будет сходиться при соблюдении условий (2.73, 2.78).

Сумма общего решения системы однородных уравнений (2.85) и частного решения (2.86) при свободных членах  $(N^{-1}\vec{F})$  даст общий интеграл системы (2.63) при  $\vec{F}(s) = \vec{F}$ .

При определении собственных значений действительной матрицы общего вида, как правило, появляются комплексно-сопряжённые собственные значения, а, следовательно, и соответствующие им и комплексно-сопряжённые собственные векторы, расположенные по столбцам в матрице  $N$ , которая приводит преобразованием подобия  $(N^{-1}AN)$  матрицу  $A$  к форме, стремящейся к канонической.

Комплексно-сопряженным собственным значениям  $\lambda_j$  и  $\lambda_{j+1} = \bar{\lambda}_j$  соответствует решение из комплексно-сопряженных функций с комплексными постоянными  $A_j$  и  $A_{j+1}$

$$\left. \begin{aligned} X_j(s) &= A_j e^{(\lambda_j s)} + X_{*j}(s); \\ X_{j+1}(s) &= A_{j+1} e^{(\bar{\lambda}_j s)} + X_{*j}(s). \end{aligned} \right\} \quad (2.88)$$

Покажем как можно переходить от рассмотрения комплексных функций  $x_j(s)$  и  $x_{j+1}(s)$  с комплексными постоянными  $A_j$  и  $A_{j+1}$  к действительным функциям с действительными постоянными и свободными членами и действительными собственными векторами.

Отметим следующее обстоятельство, что комплексно-сопряженным столбцам в матрице  $N$  соответствует комплексно-сопряженные строки в обратной матрице  $N^{-1}$ . Следовательно, для комплексно-сопряженных функций  $x_j(s)$  и  $x_{j+1}(s)$  из (2.88) имеем комплексно-сопряженные свободные члены  $(N^{-1}\vec{F}(s))$  и, как следствие из этого, комплексно-сопряженные функции  $X_{*j}(s)$  и  $\bar{X}_{*j}(s)$  из (2.88), соответствующие частным решениям.

Учитывая тригонометрическую запись комплексного числа и обозначая через  $i = \sqrt{-1}$ , запишем решение однородных уравнений из (2.88) в форме

$$\left. \begin{aligned} A_j e^{(\lambda_j s)} &= A_j e^{(\alpha + i\beta)s} = A_j (\cos(\beta s) + i \sin(\beta s)) e^{(\alpha s)}; \\ A_{j+1} e^{(\bar{\lambda}_j s)} &= A_{j+1} e^{(\alpha - i\beta)s} = A_{j+1} (\cos(\beta s) - i \sin(\beta s)) e^{(\alpha s)}. \end{aligned} \right\}; \quad (2.89)$$

Каждой паре комплексно-сопряженных чисел  $\lambda_j$  и  $\lambda_{j+1} = \bar{\lambda}_j$  соответствует пара комплексно-сопряженных столбцов  $Z_{ij}$  и  $Z_{i,j+1} = \bar{Z}_{ij}$  матрицы  $N$  в (2.64) или матрицы  $(NR)$  в (2.85-2.86). Следовательно, для каждого решения  $Y_i(s)$  системы (2.63) для этой пары  $\lambda_j$  и  $\lambda_{j+1} = \bar{\lambda}_j$  будем иметь

$$Y_i(s) = \dots + Z_{ij} x_j(s) + \bar{Z}_{ij} x_{j+1}(s) + \dots \quad (2.90)$$

Обозначая действительную часть  $Z_{ij}$  через  $\text{Re}(Z_{ij})$ , а мнимую часть  $Z_{ij}$  через  $\text{Im}(Z_{ij})$ , запишем (2.90) в виде

$$\begin{aligned} Y_i(s) &= \dots + \text{Re}(Z_{ij})(x_j(s) + x_{j+1}(s)) + \\ &+ \text{Im}(Z_{ij})(x_j(s) - x_{j+1}(s))i + \dots \end{aligned} \quad (2.91)$$

Учитывая зависимость (2.88) и (2.89), будем иметь для

$$\left. \begin{aligned} (x_j(s) + x_{j+1}(s)) &= \left\{ (A_j + A_{j+1}) \cos(\beta s) + \right. \\ &+ i(A_j - A_{j+1}) \sin(\beta s) \left. \right\} e^{(\alpha s)} + 2 \operatorname{Re}(X_{*j}(s)); \\ (x_j(s) - x_{j+1}(s)) &= \left\{ i(A_j - A_{j+1}) \cos(\beta s) - \right. \\ &- (A_j + A_{j+1}) \sin(\beta s) \left. \right\} e^{(\alpha s)} - 2 \operatorname{Im}(X_{*j}(s)). \end{aligned} \right\} \quad (2.92)$$

Обозначая через

$$\left. \begin{aligned} D_j &= (A_j + A_{j+1}); \\ D_{j+1} &= (A_j - A_{j+1})i, \end{aligned} \right\} \quad (2.93)$$

запишем зависимости (2.92) в виде

$$\left. \begin{aligned} (x_j(s) + x_{j+1}(s)) &= \left\{ D_j \cos(\beta s) + D_{j+1} \sin(\beta s) \right\} e^{(\alpha s)} + \\ &+ 2 \operatorname{Re}(X_{*j}(s)); \\ (x_j(s) - x_{j+1}(s)) &= \left\{ D_{j+1} \cos(\beta s) - D_j \sin(\beta s) \right\} e^{(\alpha s)} - \\ &- 2 \operatorname{Im}(X_{*j}(s)). \end{aligned} \right\} \quad (2.94)$$

Таким образом, перейдем в (2.91) к действительным функциям с действительными постоянными  $D_j$  и  $D_{j+1}$  и действительными частными решениями  $\{2 \operatorname{Re}(X_{*j}(s))\}$  и  $\{-2 \operatorname{Im}(X_{*j}(s))\}$  соответствующим действительным столбцам  $\operatorname{Re}(Z_{ij})$  и  $\operatorname{Im}(Z_{ij})$  из (2.64) или из (2.85-2.86), для каждой пары комплексно-сопряженных чисел  $\lambda_j = \alpha + i\beta$  и  $\lambda_{j+1} = \bar{\lambda}_j = \alpha - i\beta$

$$\begin{aligned} Y_i(s) &= \dots + \operatorname{Re}(Z_{ij}) \left\{ (D_j \cos(\beta s) + D_{j+1} \sin(\beta s)) e^{(\alpha s)} + \right. \\ &\quad \left. + 2 \operatorname{Re}(X_{*j}(s)) \right\} + \\ &+ \operatorname{Im}(Z_{ij}) \left\{ (D_{j+1} \cos(\beta s) - D_j \sin(\beta s)) e^{(\alpha s)} - \right. \\ &\quad \left. - 2 \operatorname{Im}(X_{*j}(s)) \right\} + \dots \end{aligned} \quad (2.95)$$

Для всех собственных значений матрицы  $A$  из (2.63), у которых действительная часть  $\text{Re}(\lambda_j)$  отлична от нуля, приходится вычислять экспоненту. При большой протяженности участка, т.е. при больших колебаниях переменной  $s$ , а также при большой величине  $|\text{Re}(\lambda_j)|$ , приходится вычислять экспоненту при большой величине аргумента. При решении задачи ЭВМ, если аргумент экспоненты отрицательный, то при большой его величине происходит обнуление, т.е. экспонента стремится к нулю, если же аргумент положительный, то при большой его величине может произойти переполнение порядка и остановка ЭВМ, т.е. экспонента стремится к бесконечности.

Чтобы избежать этого применим следующий формальный прием. Например, пусть рассматривается функция

$$X_j(s) = D_j e^{(\alpha s)}, \quad (2.96)$$

где 
$$-R \leq s \leq R. \quad (2.97)$$

Вместо (2.96) рассмотрим

$$x_j(s) = D_j e^{(\alpha s)} e^{(\alpha R)} e^{(-\alpha R)}, \quad (2.98)$$

Если  $\alpha > 0$ , то рассмотрим

$$x_j(s) = \tilde{D}_j e^{\alpha(s-R)}, \quad (2.99)$$

где постоянная  $D_j$  связана с постоянной  $\tilde{D}_j$  формулой

$$\tilde{D}_j = D_j e^{(\alpha R)}. \quad (2.100)$$

Если  $\alpha < 0$ , то рассмотрим

$$x_j(s) = \bar{D}_j e^{\alpha(s+R)}, \quad (2.101)$$

где постоянная  $D_j$  связана с постоянной  $\bar{D}_j$  формулой

$$\bar{D}_j = D_j e^{(-\alpha R)}. \quad (2.102)$$

Таким образом, вместо (2.96) с постоянной  $D_j$ , где аргумент экспоненты изменяется от  $(-|\alpha R|)$  до  $(|\alpha R|)$ , в зависимости от знака  $\alpha$ , приходим к (2.99) с постоянной  $\tilde{D}_j$  или к (2.101) с постоянной  $\bar{D}_j$ , где аргумент экспоненты изменяется от  $(0)$  до  $(-2|\alpha R|)$ , а сама экспонента



изменяется от 1 до 0, т.е. избегаем переполнения порядка при решении задачи на ЭВМ.

Геометрической интерпретацией данного приема служит перенос оси координат  $OX$  с середины участка для (2.96) на границы участка  $s=+R$  для (2.99) при  $\alpha > 0$  и  $s=-R$  для (2.101) при  $\alpha < 0$ .

## 2.5. Выводы

1. Выведены разрешающие дифференциальные уравнения относительно искомым обобщённых функций перемещения  $U_i(s)$ ,  $V_j(s)$ ,  $W_d(s)$  относительно произвольной начальной поверхности при дискретном расположении рёбер, в том числе фальцевых, имеющих податливость на сжатие-изгиб, для пологой круговой цилиндрической оболочки.

2. Из работы [21,68] приведена методика получения матрицы собственных векторов с определителем, отличным от нуля, для действительной матрицы общего вида, приводящей преобразованием подобия эту действительную матрицу к матрице канонической формы, как для простых корней характеристического уравнения, так и для кратных.

3. Выведены обобщённые выражения для усилий  $S$ ,  $N_2$ ,  $M_2$ ,  $\bar{Q}_2$  относительно произвольной начальной поверхности при дискретном разложении рёбер, относительно которых решается краевая задача.

4. Приведена система разрешающих дифференциальных уравнений первого порядка, полученная путём введения дополнительных неизвестных, за которые приняты обобщённые углы поворота  $W'_\alpha(s)$  и обобщённые усилия  $S$ ,  $N_2$ ,  $M_2$ ,  $\bar{Q}_2$ , эквивалентная исходной системе разрешающих дифференциальных уравнений относительно  $U_i(s)$ ,  $V_j(s)$ ,  $W_d(s)$ . Решение системы дифференциальных уравнений первого порядка с постоянными коэффициентами связано с вопросом приведения преобразования подобия действительной матрицы общего вида и удобно для численного решения ЭВМ.

5. Из работы [62] приведена методика приближённого решения методом возмущения системы разрешающих дифференциальных уравнений относительно обобщённых перемещений  $U_i(s)$ ,  $V_j(s)$ ,  $W_d(s)$  выведенной относительно произвольной начальной поверхности при наличии дискретнорасположенных ребер, в том числе фальцевых.

6. При интегрировании системы разрешающих дифференциальных уравнений первого порядка, что непосредственно связано с вопросом приведения матрицы к канонической форме, учитывая приближённость расчёта на ЭВМ, был применён метод возмущения. Показана методика применения метода возмущения при интегрировании системы дифференциальных уравнений 1-го порядка с постоянными коэффициентами. Как показали результаты расчёта, выполненные автором, при больших размерах матрицы ошибка достигает значительных размеров. Применение метода возмущения даёт хорошо сходящийся итерационный процесс, при котором достаточно одного-двух приближений. При каждой итерации ошибка снижается примерно на порядок.

7. Приведена методика перехода от комплексных функций с комплексными постоянными и соответствующих им комплексных собственных векторов при комплексно-сопряжённых корнях характеристического уравнения к действительным функциям с действительными постоянными и соответствующим действительными собственными векторами.

8. Приведён способ, позволяющий избежать переполнения порядка чисел при расчёте экспоненты для большого значения аргумента при решении задачи на ЭВМ, основанный на переносе начала координат.

### 3. ПЛОСКОЕ НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОЕ СОСТОЯНИЕ ПЛАСТИНЫ С ПРОЕМОМ

#### 3.1. Исходные положения и рабочие гипотезы

В данной главе рассматривается плоское напряжённо-деформированное состояние пластины с прямоугольным отверстием. Как отмечалось ранее, решению задачи об определении напряжённо-деформированного состояния цилиндрической оболочки с проёмом методом возмущения приходится решать краевую задачу для плоского напряжённо-деформированного состояния и, кроме того, задача определения плоского напряжённо-деформированного состояния имеет самостоятельное значение.

Определение напряжённо-деформированного состояния пластинки с проёмом является, по существу, задачей определения концентрации напряжений, поэтому при определении напряжённо-деформированного состояния нельзя пренебрегать деформацией сдвига.

Построение расчётных уравнений выполняется на основе общего вариационного метода В.З.Власова, сущность которого состоит в приведении двумерной задачи расчёта к одномерной. При этом здесь оказывается более удобным использовать метод перемещений в форме, предложенной И.Е. Милейковским [48] к расчёту оболочек и складов.

Разбивая пластину на участки таким образом, чтобы в пределах каждого участка жесткостные характеристики были постоянны, получаем для каждого участка систему дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами, которую можно проинтегрировать путём предварительного разложения искомых функций по собственным решениям системы дифференциальных уравнений. Условиями контакта соседних участков будут равенство обобщённых перемещений и обобщённых сил, т.е. решение краевой задачи сводится к решению системы линейных алгебраических уравнений.

### 3.2. Построение разрешающих уравнений для плоского напряжённого состояния.

Рассмотрим пластинку с прямоугольным отверстием, имеющую ось симметрии и изображённую на рис.3.1,а.

За продольное принято направление вдоль оси  $x$ . Положительное направление компонентов внутренних усилий, перемещений и нагрузки показано на рис.2.4,а.

Разобьём пластинку на участки так, чтобы при движении в пределах участка вдоль оси  $S$  жесткостные характеристики оставались постоянными рис.3.1,б.

Дифференциальные уравнения равновесия для каждого участка имеют вид

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial N_1}{\partial x} + \frac{\partial S}{\partial s} + q_1 &= 0; \\ \frac{\partial N_2}{\partial s} + \frac{\partial S}{\partial x} + q_2 &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (3.1)$$

Усилия  $N_1$ ,  $S$ ,  $N_2$  при наличии ребер, параллельных оси типа стрингеров, определяются следующими физическими уравнениями

$$\left. \begin{aligned} N_1 &= B(\varepsilon_1 + \nu\varepsilon_2); \\ N_2 &= B(\varepsilon_2 + \nu\varepsilon_1) + B\varepsilon_2\bar{F}_j; \\ S &= \frac{1-\nu}{2}B\gamma, \end{aligned} \right\} \quad (3.2)$$

где линейная жёсткость  $B$  и площадь сечения ребра  $\bar{F}_j$  определяются формулами (2.4-2.5).

Компоненты вектора перемещения точки срединной поверхности пластинки показаны на рис.3.1,а. При этом через  $U(x,s)$  обозначено продольное перемещение, а через  $V(x,s)$  – поперечное перемещение.

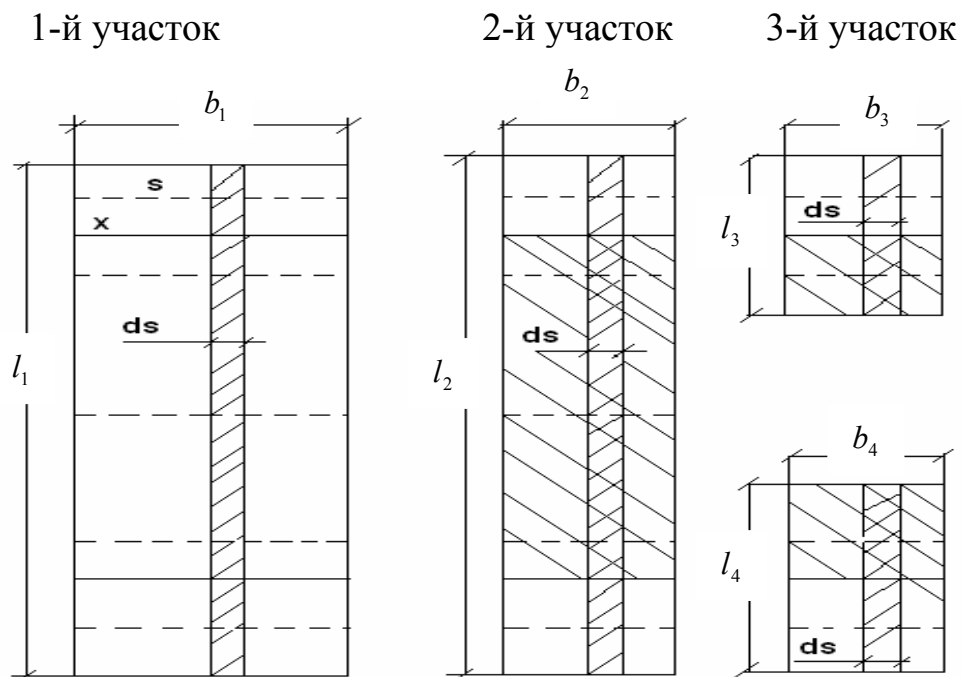
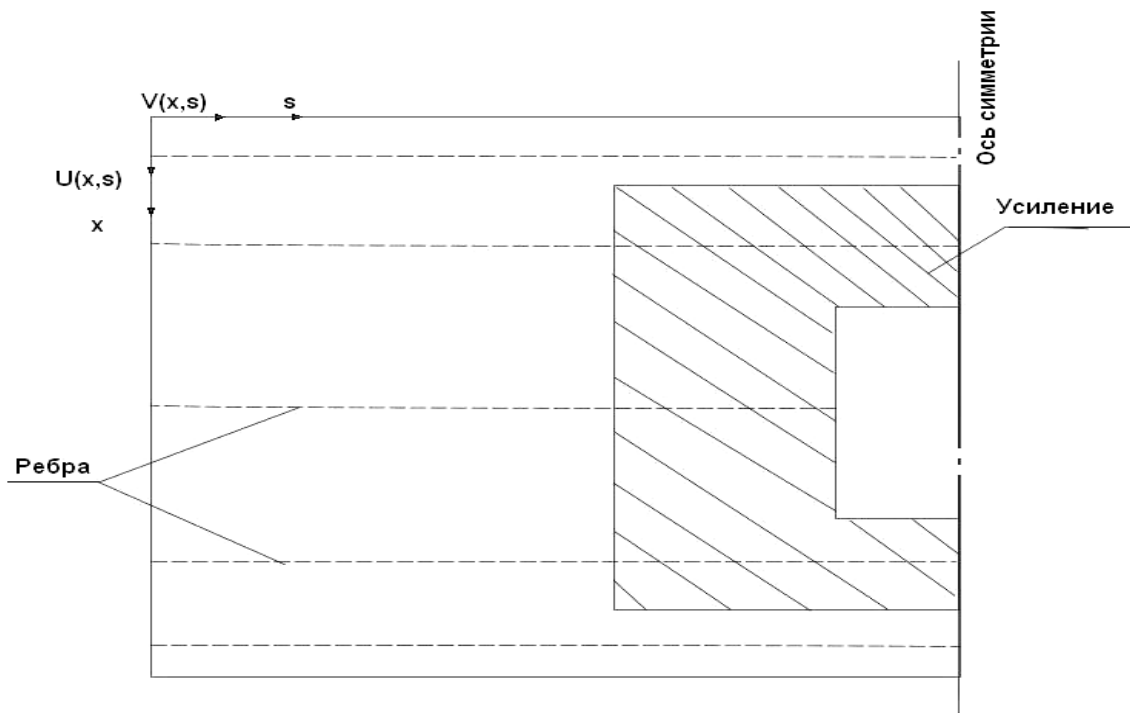


Рис.3.1. Пластика с прямоугольным отверстием:  
 а – общий вид пластины с прямоугольным отверстием и с прямоугольным усилением отверстия; б – пластина разбитая на участки, в пределах которых жесткостные характеристики постоянны

Компоненты деформации представим в следующей форме

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_1 &= \frac{\partial U(x, s)}{\partial x}; \\ \varepsilon_2 &= \frac{\partial V(x, s)}{\partial s}; \\ \gamma &= \frac{\partial V(x, s)}{\partial x} + \frac{\partial U(x, s)}{\partial s}. \end{aligned} \right\} \quad (3.3)$$

Компоненты вектора перемещению представим в виде разложений

$$U(x, s) = \sum_{i=1}^{n_1} U_i(s) \xi_i(x); \quad (3.4)$$

$$V(x, s) = \sum_{j=1}^{n_2} V_j(s) \eta_j(x). \quad (3.5)$$

Число  $n_1$  и  $n_2$  обобщенных функций  $U_i(s)$  и  $V_j(s)$  единичных  $\xi_i(x)$  и  $\eta_j(x)$  функций перемещений произвольно из-за отсутствия гипотез  $\gamma = 0$  или  $\varepsilon_2 = 0$ .

На основе принципа возможных перемещений составляем интегральные условия равновесия элементарной шириной  $ds$  (рис.3.1,б). Эти условия выражают равенство нулю работы всех внешних и внутренних усилий, действующих на эту полоску, на возможных для нее перемещениях. При этом за возможные перемещения принимаются выбранные единичные функции перемещений

$$\xi_i(x); \quad \eta_j(x) \quad (i=1, 2, \dots, n_1; \quad j=1, 2, \dots, n_2)$$

Умножая первое из уравнений (3.1) на  $\xi_k(x)$ , а второе на  $\eta_g(x)$  и интегрируя их по всей длине продольной полоски  $l$ , получим интегральные условия равновесия элементарной полоски пластинки для каждого участка

$$\left. \begin{aligned} \int_0^l \frac{\partial N_1}{\partial x} \xi_k(x) dx + \int_0^l \frac{\partial S}{\partial s} \xi_k(x) dx + \int_0^l q_1 \xi_k(x) dx = 0; \\ \int_0^l \frac{\partial S}{\partial x} \eta_g(x) dx + \int_0^l \frac{\partial N_2}{\partial s} \eta_g(x) dx + \int_0^l q_2 \eta_g(x) dx = 0. \end{aligned} \right\} \quad (3.6)$$

Интегрируя по частям члены уравнений (3.6), содержащие производные по координате  $x$ , получим

$$\left. \begin{aligned} \int_0^l \frac{\partial S}{\partial s} \xi_k(x) dx - \int_0^l N_1 \xi_k'(x) dx + |N_1 \xi_k|_0^l + \int_0^l q_1 \xi_k(x) dx = 0; \\ \int_0^l \frac{\partial N_2}{\partial s} \eta_g(x) dx - \int_0^l S \eta_g'(x) dx + |S \eta_g|_0^l + \int_0^l q_2 \eta_g(x) dx = 0. \end{aligned} \right\} \quad (3.7)$$

Выражения в прямых скобках можно отнести к свободным членам

$$\left. \begin{aligned} F_{1k} &= \int_0^l q_1 \xi_k(x) dx + |N_1 \xi_k|_0^l; \\ F_{2g} &= \int_0^l q_2 \eta_g(x) dx + |S \eta_g|_0^l. \end{aligned} \right\} \quad (3.8)$$

Подставляя выражения для  $N_1$ ,  $S$ ,  $N_2$  из уравнений (3.2) в (3.7) и учитывая при этом выражения для деформаций и перемещений (3.3-3.5), получим после преобразования следующую систему  $n$  разрешающих дифференциальных уравнений равновесия относительно искомых обобщенных перемещений для каждого участка пластинки

$$\left. \begin{aligned} \sum_{i=1}^{n_1} a_{ki} U_i''(s) - \sum_{i=1}^{n_1} b_{ki} U_i(s) + \sum_{j=1}^{n_2} c_{kj} V_j'(s) + F_{1k} = 0; \\ - \sum_{i=1}^{n_1} c_{gi} U_i'(s) + \sum_{j=1}^{n_2} f_{gj} V_j''(s) - \sum_{j=1}^{n_2} g_{gj} V_j(s) + F_{2g} = 0; \end{aligned} \right\} \quad (3.9)$$

( $k = 1, 2, \dots, n_1$ ;  $g = 1, 2, \dots, n_2$ ;  $n = n_1 + n_2$ ) .

Коэффициенты этих уравнений, выражающие жесткостные характеристики, в пределах участка остаются постоянными и находятся по формулам (2.11), причем коэффициенты  $c_{kj}$  и  $c_{gi}$  из (3.9) связаны с коэффициентами из (2.11) следующими соотношениями

$$\left. \begin{aligned} c_{kj} &= \tilde{c}_{kj} - \bar{c}_{kj}; \quad c_{gi} = \tilde{c}_{gi} - \bar{c}_{gi}; \\ c_{kj} &= c_{gi}, \quad k = 1, \quad j = g. \end{aligned} \right\} \quad (3.10)$$

Из выражения (3.8) следует, что

$$\left. \begin{aligned} F_{1k} &= \int_0^l q_1 \xi_k(x) dx + N_1(l, s) \xi_k(l) - N_1(o, s) \xi_k(o); \\ F_{2g} &= \int_0^l q_2 \eta_g(x) dx + S(l, s) \eta_g(l) - S(o, s) \eta_g(o). \end{aligned} \right\} \quad (3.11)$$

Заметим, что положительное направление перемещений  $U(x, s)$  и  $V(x, s)$ , нагрузки  $q_1$  и  $q_2$ , усилий  $N_1(l, s)$  и  $S(l, s)$  совпадает с направлением осей  $x$  и  $s$ , а усилий  $N_1(o, s)$  и  $S(o, s)$  – противоположно направлено с осями  $ox$  и  $os$ . Для совмещения положительного направления усилий  $N_1(o, s)$  и  $S(o, s)$  с направлением осей  $ox$  и  $os$  изменим направление усилий на обратное, для этого изменим знак перед членами, содержащими  $N_1(o, s)$  и  $S(o, s)$  в уравнениях (3.11) на обратный. Тогда свободные члены от нагрузки примут следующий вид

$$\left. \begin{aligned} F_{1k} &= \int_0^l q_1 \xi_k(x) dx + N_1(l, s) \xi_k(l) + N_1(o, s) \xi_k(o); \\ F_{2g} &= \int_0^l q_2 \eta_g(x) dx + S(l, s) \eta_g(l) + S(o, s) \eta_g(o). \end{aligned} \right\} \quad (3.12)$$

где слагаемые надо брать со знаком плюс, если они совпадают с направлением осей  $x$  и  $s$ , и со знаком минус, если они противоположно направлены.

Рассмотрим влияние податливой связи на растяжение-сжатие на коэффициенты уравнений (3.9).

Наличие податливой связи на растяжение-сжатие обуславливает наличие разрыва в перемещениях  $U(x, s)$  в точке  $x_j$ , где имеет место податливая связь, а, следовательно, в этой точке  $x_j$  будет совершаться работа сил податливой связи на возможных перемещения  $\xi_k(x_j^-)$  и  $\xi_k(x_j^+)$ . Поэтому напишем выражение в прямых скобках для первого уравнения из (3.7) в виде:

$$|N_1 \xi_k|_0^l = |N_1 \xi_k|_0^{x_j^-} + |N_1 \xi_k|_{x_j^+}^l. \quad (3.13)$$



Раскрывая выражение (3.13), будем иметь

$$\begin{aligned} |N_1 \xi_k|_0^l = N_1(x_{j-}, s) \xi_k(x_{j-}) - N_1(o, s) \xi_k(o) + \\ + N_1(l, s) \xi_k(l) - N_1(x_{j+}, s) \xi_k(x_{j+}). \end{aligned} \quad (3.14)$$

Второе и третье слагаемые из (3.14) относятся к свободным членам от нагрузки (3.11) и уже разобраны выше, а первое и четвертое слагаемые учитывают работу сил податливой связи на возможных перемещениях в точке разрыва перемещений  $x_j$ , выпишем их, имея ввиду равенство  $N_1(x_{j+}, s)$  и  $N_1(x_{j-}, s)$  и обозначая их как  $N_1(x_j, s)$ , тогда

$$|N_1 \xi_k|_{x_{j+}}^{x_{j-}} = N_1(x_j, s) \xi_k(x_{j-}) - N_1(x_j, s) \xi_k(x_{j+}). \quad (3.15)$$

Знаки плюс и минус перед  $N_1(x_j, s)$  в (3.15) соответствуют положительному направлению  $N_1(x_{j-}, s)$  и  $N_1(x_{j+}, s)$  (рис.2.4) т.е. когда  $N_1$  является растягивающим усилием. Для податливой связи с жесткостью на растяжение-сжатие  $r_{sj}$  это усилие равно:

$$N_1(x_j, s) = r_{sj} (U(x_{j+}, s) - U(x_{j-}, s)), \quad (3.16)$$

или, учитывая (3.4) и опуская знак суммы  $\sum_{i=1}^{n_1}$ , имеем

$$N_1(x_j, s) = r_{sj} (U_i(s) \xi_i(x_{j+}) - U_i(s) \xi_i(x_{j-})), \quad (3.17)$$

( $i = 1, 2, \dots, n_1$ ).

Подставляя (3.17) в (3.15), имеем

$$\begin{aligned} |N_1 \xi_k|_{x_{j+}}^{x_{j-}} = r_{sj} (U_i(s) \xi_i(x_{j+}) - U_i(s) \xi_i(x_{j-})) \xi_k(x_{j-}) - \\ - r_{sj} (U_i(s) \xi_i(x_{j+}) - U_i(s) \xi_i(x_{j-})) \xi_k(x_{j+}), \end{aligned} \quad (3.18)$$

( $i, k = 1, 2, \dots, n_1$ ).

Из выражения (3.18) видно, что учет податливой связи на растяжение-сжатие приводит к изменению коэффициентов при обобщенных перемещениях  $U_i(s)$  из (3.9).

Поэтому при учете податливой связи на растяжение-сжатие коэффициенты  $b_{ki}$  определяются по формуле

$$b_{ki} = \int_0^l B \xi'_i(x) \xi'_k(x) dx - |N_1 \xi_k|_{x_j^-}^{x_j^+}; \quad b_{ki} = b_{ik}, \quad (3.19)$$

а остальные коэффициенты уравнений (3.9) остаются без изменений и подсчитываются по формулам (2.11) и (3.10).

### 3.3. Решение разрешающих уравнений

Перепишем систему разрешающих дифференциальных уравнений относительно искомым обобщенных перемещений  $U_i(s)$  и  $V_j(s)$  с постоянными коэффициентами (3.9) в векторной форме

$$\left. \begin{aligned} A\vec{U}''(s) - B\vec{U}(s) + C\vec{V}'(s) + \vec{F}_1 &= 0; \\ -c^T \vec{U}'(s) + F\vec{V}''(s) - G\vec{V}(s) + \vec{F}_2 &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (3.20)$$

где через  $\vec{U}(s)$  обозначен вектор-столбец обобщенных функций  $U_i(s)$ , а через  $\vec{V}(s)$  – обобщенных функций  $V_j(s)$ , коэффициенты матриц  $A, B, F, G, C, c^T$  находятся по формулам (2.11) с учетом (3.10) и (3.19), а через  $\vec{F}_1$  и  $\vec{F}_2$  – вектор-столбцы свободных членов от нагрузки по формуле (3.12)

Индекс «т» означает транспонирование.

Интегрирование системы произведем путем предварительного разложения ее по собственным решениям системы. Для этого перепишем систему (3.20) в следующей форме

$$R\vec{W}''(s) + S\vec{W}'(s) - T\vec{W}(s) + \vec{F} = 0, \quad (3.21)$$

где матрицы  $R$  и  $T$  являются клеточными квазидиагональными матрицами, а матрица  $S$  имеет блочную структуру, т.е.

$$R = \begin{array}{|c|c|} \hline A & \\ \hline \hline & F \\ \hline \end{array}; \quad T = \begin{array}{|c|c|} \hline B & \\ \hline \hline & G \\ \hline \end{array}; \quad S = \begin{array}{|c|c|} \hline & C \\ \hline \hline -c^T & \\ \hline \end{array};$$

$$r_{ij} = r_{ji}; \quad t_{ij} = t_{ji}; \quad s_{ij} = -s_{ji}, \quad (3.22)$$

а вектора коэффициентов перемещений и внешней нагрузки имеют вид

$$\vec{W}^T = \{U_1(s), \dots, U_{n_1}(s), V_1(s), \dots, V_{n_2}(s)\}; \quad (3.23)$$

$$\vec{F}^T = \{F_{11}, \dots, F_{1n_1}, F_{21}, \dots, F_{2n_2}\}. \quad (3.24)$$

Вводя добавочные неизвестные  $\vec{W}_1(s)$  по формуле

$$R\vec{W}'(s) + S\vec{W}(s) - \vec{W}_1(s) = 0, \quad (3.25)$$

приведем систему (3.21)  $n$  уравнений второго порядка к системе  $2n$  уравнений первого порядка, т.е.

$$\left. \begin{aligned} R\vec{W}'(s) + S\vec{W}(s) - \vec{W}_1(s) &= 0; \\ \vec{W}_1'(s) - T\vec{W}(s) + \vec{F} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (3.26)$$

Напишем систему (3.26) в форме

$$R_1\vec{Y}'(s) - S_1\vec{Y}(s) + \vec{F} = 0, \quad (3.27)$$

где матрица  $R_1$  является клеточной квазидиагональной матрицей, а матрица  $S_1$  имеет блочную структуру, т.е.

$$R_1 = \begin{array}{|c|c|} \hline R & \\ \hline & J \\ \hline \end{array}; \quad S_1 = \begin{array}{|c|c|} \hline -S & J \\ \hline T & \\ \hline \end{array};$$

$$r_{(1)ij} = r_{(1)ji}. \quad (3.28)$$

Единичная матрица обозначена через  $J$ .

Вектор коэффициентов внешней нагрузки имеет следующий вид

$$\vec{F}^T = \{(o)^T, \vec{F}^T\}. \quad (3.29)$$

Вектор перемещений имеет вид:

$$\vec{Y}^T(s) = \{\vec{W}^T(s), \vec{W}_1^T(s)\}. \quad (3.30)$$

В развернутом виде система (3.27) представлена на рис.3.2,а. Умножая систему (3.27) на обращенную в матрицу  $R^{-1}$ , приведем ее к нормальному виду

$$\vec{Y}'(s) - S_2\vec{Y}(s) + \vec{F} = 0, \quad (3.31)$$

где

$$S_2 = R_1^{-1} S_1, \quad (3.32)$$

$$\vec{F} = R_1^{-1} \vec{F}. \quad (3.33)$$

Система (3.31) подобна системе (2.63), решение которой рассмотрено в параграфе 4 второй главы. Следовательно, вопрос ее интегрирования связан с вопросом приведения матрицы  $S_2$  к канонической форме. Определяя по программе *EVVGM* все собственные значения матрицы  $S_2$ , а по ним собственные векторы, получим матрицу  $N$  с определителем, отличным от нуля, которая приводит преобразованием подобия  $(N^{-1} S_2 N)$  матрицу  $S_2$  к форме, стремящейся к канонической. Вводя новые функции  $\vec{X}(s)$  по формуле

$$\vec{Y}(s) = N \vec{X}(x), \quad \vec{Y}'(s) = N \vec{X}'(s)$$

и приводя матрицу  $S_2$  к форме, стремящейся к канонической, можем проинтегрировать систему (3.31) с заданной точностью.

Покажем, что можно заранее предсказать количество кратных корней  $\lambda = 0$ , т.е. степень вырожденности матрицы  $S_2$ . Отметим, что наличие корней  $\lambda = 0$  свидетельствует о том, что рассматриваемый участок пластинки имеет перемещение как абсолютно твёрдое тело, т.е. участок имеет степень свободы и является кинематическим механизмом.

Разрешающая система дифференциальных уравнений (3.20) получена из рассмотрения элементарной полоски шириной  $ds$  и длиной  $l$  (рис.3.1,б), которая на протяжении всей ширины  $b$  выделенного участка остается без изменений. Поэтому для определения степени свободы элементарной полоски  $ds$  нужно определить степень свободы всего выделенного участка, которая зависит от закрепления продольных краев участка при  $x=0$  и  $x=l$ . Заметим, что граничные условия на поперечных краях участка при  $s=\text{const}$  при определении степени свободы участка не учитываются, они учитываются только при решении контактной или краевой задачи для определения произвольных постоянных интегрирования системы (3.20), поэтому при определении степени свободы выделенного участка принимаем поперечные края при  $s=\text{const}$  свободными от закрепления.

Система  $2n$  уравнений первого порядка (3.31) получена из системы  $n$  уравнений второго порядка (3.20) путём введения  $n$  дополнительных

неизвестных, поэтому степень вырожденности  $m_s$  матрицы  $S_2$  связана со степенью вырожденности системы (3.20) следующей формулой:

$$m_s = 2m. \quad (3.34)$$

Как известно, твёрдое тело на плоскости имеет 3 степени свободы, поэтому при свободных краях при  $x=0$  и  $x=l$  имеем  $m_s = 6$ .

Отметим, что если участок имеет отрицательную степень свободы, то при определении  $m_s$  в формуле (3.34) надо брать равным  $m$  нулю.

На рис.3.2 приведена зависимость степени свободы участка от закрепления продольных краев участка при  $x=0$  и  $x=l$ .

В зависимости от закрепления продольных краев участка при  $x=0$  и  $x=l$  определяется и вырожденность матриц  $B$  и  $G$  из системы (3.20):

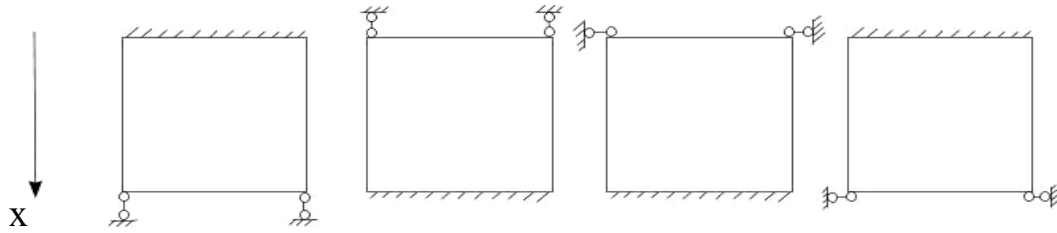
$$\left. \begin{array}{l} \xi_i(o) \neq 0, \xi_i(l) \neq 0, \det(B) = 0. \\ (i = 1, 2, \dots, n_1) \end{array} \right\} \quad (3.35)$$

$$\left. \begin{array}{l} \eta_j(o) \neq 0, \eta_j(l) \neq 0, \det(G) = 0. \\ (j = 1, 2, \dots, n_2) \end{array} \right\} \quad (3.36)$$

Следовательно, если хотя бы одна из единичных функций перемещения  $\xi_i(x)$  отлична от нуля при  $x=0$  и  $x=l$  то определитель матрицы  $B$  равен нулю, т.е. матрица  $B$  вырождена, это справедливо и для функций  $\eta_j(x)$  и матрицы  $G$ .

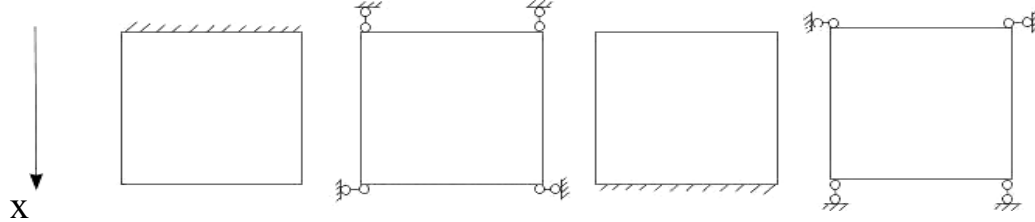
Следует отметить, что при матрицах большого порядка, подпрограмма *EVVGM* из [44] чувствительна к форме приведения системы (3.20)  $n$  уравнений второго порядка к системе  $2n$  уравнений первого порядка при вырожденности матриц  $B$  и  $G$ . Поэтому желательно приводить систему (3.20) к системе типа (2.63), в зависимости от вырожденности матриц  $B$  и  $G$ , так как показано на рис.3.3, чтобы получить устойчивый процесс вычисления собственных значений при использовании программы *EVVGM* из [44].

$$\left\{ \begin{array}{l} \xi_i(0) = 0, \eta_j(0) = 0; \\ \xi_i(l) = 0, \eta_j(l) \neq 0 \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} \xi_i(0) = 0, \eta_j(0) \neq 0; \\ \xi_i(l) = 0, \eta_j(l) = 0 \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} \xi_i(0) \neq 0, \eta_j(0) = 0; \\ \xi_i(l) = 0, \eta_j(l) = 0 \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} \xi_i(0) = 0, \eta_j(0) = 0; \\ \xi_i(l) \neq 0, \eta_j(l) = 0 \end{array} \right\} .$$



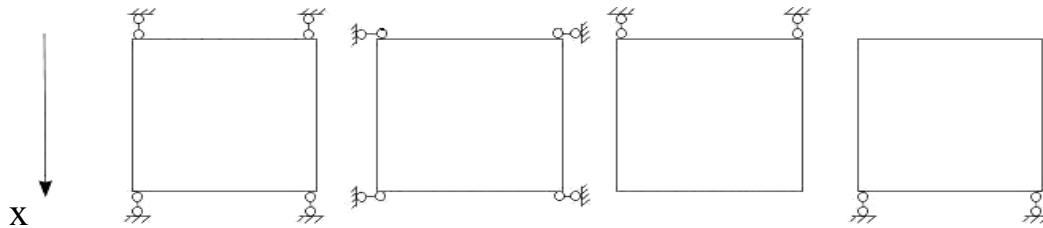
а) с одной лишней связью,  $m=0$ .

$$\left\{ \begin{array}{l} \xi_i(0) = 0, \eta_j(0) = 0; \\ \xi_i(l) \neq 0, \eta_j(l) \neq 0 \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} \xi_i(0) = 0, \eta_j(0) \neq 0; \\ \xi_i(l) \neq 0, \eta_j(l) = 0 \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} \xi_i(0) \neq 0, \eta_j(0) \neq 0; \\ \xi_i(l) = 0, \eta_j(l) = 0 \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} \xi_i(0) \neq 0, \eta_j(0) = 0; \\ \xi_i(l) = 0, \eta_j(l) \neq 0 \end{array} \right\} .$$



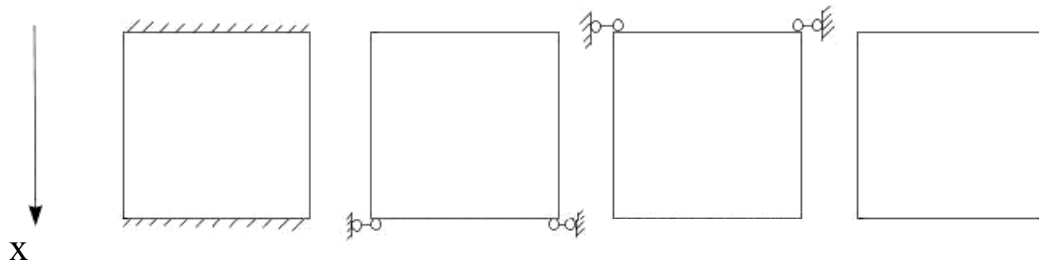
б) с нулевой степенью свободы,  $m=0$ .

$$\left\{ \begin{array}{l} \xi_i(0) = 0, \eta_j(0) \neq 0; \\ \xi_i(l) = 0, \eta_j(l) \neq 0 \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} \xi_i(0) \neq 0, \eta_j(0) = 0; \\ \xi_i(l) \neq 0, \eta_j(l) = 0 \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} \xi_i(0) = 0, \eta_j(0) \neq 0; \\ \xi_i(l) \neq 0, \eta_j(l) \neq 0 \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} \xi_i(0) \neq 0, \eta_j(0) \neq 0; \\ \xi_i(l) = 0, \eta_j(l) \neq 0 \end{array} \right\} .$$



в) с одной степенью свободы,  $m=1$

$$\left\{ \begin{array}{l} \xi_i(0) = 0, \eta_j(0) = 0; \\ \xi_i(l) = 0, \eta_j(l) = 0 \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} \xi_i(0) \neq 0, \eta_j(0) \neq 0; \\ \xi_i(l) \neq 0, \eta_j(l) = 0 \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} \xi_i(0) \neq 0, \eta_j(0) = 0; \\ \xi_i(l) \neq 0, \eta_j(l) \neq 0 \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} \xi_i(0) \neq 0, \eta_j(0) \neq 0; \\ \xi_i(l) \neq 0, \eta_j(l) \neq 0 \end{array} \right\} .$$



$m=0$

$m=2$

$m=2$

$m=3$

г) другие случаи закрепления

Рис.3.2. Зависимость степени свободы участка  $m$  от закрепления участка на продольных краях при  $x=0$  и  $x=l$

$$\begin{array}{|c|c|c|c|} \hline A & & & \\ \hline & F & & \\ \hline & & J & \\ \hline & & & J \\ \hline \end{array} * \begin{array}{|c|} \hline \vec{U}'(s) \\ \hline \vec{V}'(s) \\ \hline \vec{U}'_1(s) \\ \hline \vec{V}'_1(s) \\ \hline \end{array} - \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline & -C & J & \\ \hline C^T & & & J \\ \hline B & & & \\ \hline & G & & \\ \hline \end{array} * \begin{array}{|c|} \hline \vec{U}(s) \\ \hline \vec{V}(s) \\ \hline \vec{U}_1(s) \\ \hline \vec{V}_1(s) \\ \hline \end{array} + \begin{array}{|c|} \hline \vec{F}_1 \\ \hline \vec{F}_2 \\ \hline \end{array} = 0$$

а) в случае, если  $\det(B) \neq 0$  и  $\det(G) \neq 0$ ; или, если  $\det(B) = 0$  и  $\det(G) = 0$

$$\begin{array}{|c|c|c|c|} \hline A & & & \\ \hline & F & & \\ \hline & & B & \\ \hline & & & J \\ \hline \end{array} * \begin{array}{|c|} \hline \vec{U}'(s) \\ \hline \vec{V}'(s) \\ \hline \vec{U}'_1(s) \\ \hline \vec{V}'_1(s) \\ \hline \end{array} - \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline & -C & B & \\ \hline C^T & & & J \\ \hline B & & & \\ \hline & G & & \\ \hline \end{array} * \begin{array}{|c|} \hline \vec{U}(s) \\ \hline \vec{V}(s) \\ \hline \vec{U}_1(s) \\ \hline \vec{V}_1(s) \\ \hline \end{array} + \begin{array}{|c|} \hline \vec{F}_1 \\ \hline \vec{F}_2 \\ \hline \end{array} = 0$$

б) в случае, если  $\det(B) \neq 0$ , а  $\det(G) = 0$

$$\begin{array}{|c|c|c|c|} \hline A & & & \\ \hline & F & & \\ \hline & & J & \\ \hline & & & G \\ \hline \end{array} * \begin{array}{|c|} \hline \vec{U}'(s) \\ \hline \vec{V}'(s) \\ \hline \vec{U}'_1(s) \\ \hline \vec{V}'_1(s) \\ \hline \end{array} - \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline & -C & J & \\ \hline C^T & & & G \\ \hline B & & & \\ \hline & G & & \\ \hline \end{array} * \begin{array}{|c|} \hline \vec{U}(s) \\ \hline \vec{V}(s) \\ \hline \vec{U}_1(s) \\ \hline \vec{V}_1(s) \\ \hline \end{array} + \begin{array}{|c|} \hline \vec{F}_1 \\ \hline \vec{F}_2 \\ \hline \end{array} = 0$$

в) в случае, если  $\det(B) = 0$ , а  $\det(G) \neq 0$

Рис.3.3. Блочная структура системы  $2n$  уравнений первого порядка, полученной из системы (3.20)  $n$  уравнений второго порядка, в зависимости от вырожденности матриц  $B$  и  $G$  для численной реализации на ЕС ЭВМ

### 3.4. Выбор единичных состояний и формулы для вычисления коэффициентов разрушающих уравнений

Для принятой на рис.3.1,б расчетной схемы с учетом формул (3.4) и (3.5) разобьем элементарную полоску  $ds$  для каждого участка по всей длине  $l$  так, чтобы характерные точки участка находились на границе разбиений по длине  $l$ , кроме того, участок между характерными точками разобьем не менее чем на два раза, т.е. аппроксимируем неизвестную функцию между характерными точками по длине  $l$  как минимум тремя точками.

Далее примем, что по длине разбиения, функции  $\xi_i(x)$  и  $\eta_j(x)$  изменяются линейно от нуля до единицы, причем в точке  $x = x_0$  где  $\xi_i(x_0) = 1$ , а  $\eta_j(x_0) = 1$ , все остальные функции соответственно  $\xi_i(x_0) = 0$  и  $\eta_j(x_0) = 0$  при  $k \neq i$  и  $g \neq j$ , т.е.

$$\xi_i(x_0) = 1, \xi_k(x_0) = 0, k \neq i; \quad (3.37)$$

$$\eta_j(x_0) = 1, \eta_g(x_0) = 0, g \neq j. \quad (3.38)$$

Следовательно, функции  $\xi_i(x)$  и  $\eta_j(x)$  имеют вид треугольника с высотой равной единице (рис.3.4,в). В точках  $x=0$  и  $x=l$  функции  $\xi_i(x)$  и  $\eta_g(x)$  принимают вид прямоугольных треугольников с высотой, равной либо единице, либо нулю в зависимости от условий закрепления.

При наличии податливости на растяжение-сжатие в точках  $x = x_j$  в возможных перемещениях  $\xi_i(x)$  должен быть разрыв. Таким образом, в точках  $x = x_j$  разрывные функции  $\xi_{i+1}(x)$  и  $\xi_{i+2}(x)$  имеют вид прямоугольных треугольников с высотой равной единице (рис.3.4,г).

Учитывая формулы (3.4-3.5), примем, что количество функций  $n_1$   $\xi_i(x)$  может быть меньше или равно количеству функций  $n_2$   $\eta_j(x)$

$$n_1 \leq n_2, \quad (3.39)$$

т.е. разбиение элементарной полоски длиной  $l$  для  $\eta_j(x)$  может быть более мелким, чем для  $\xi_i(x)$  (рис.3.4,г).



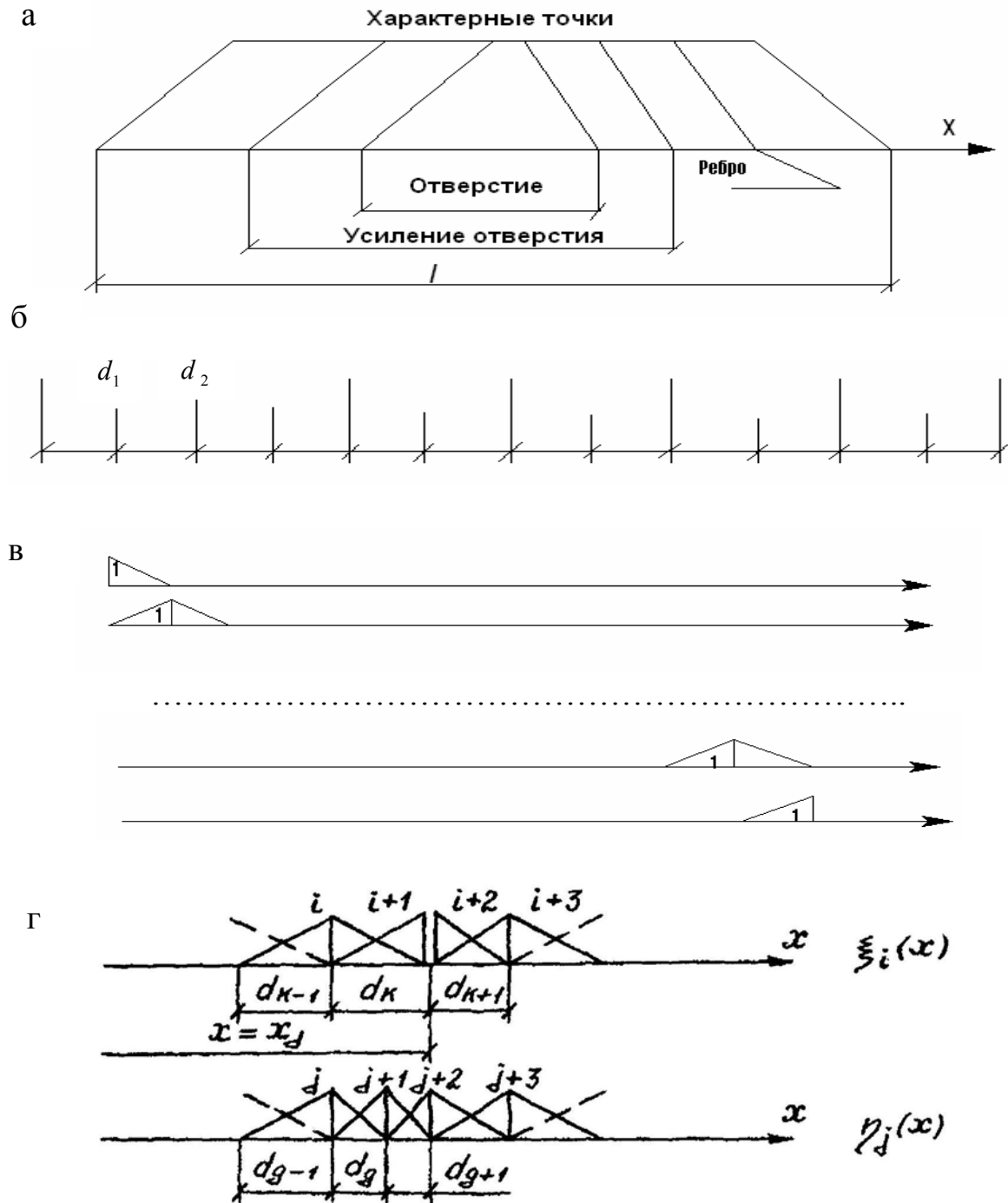


Рис.3.4. Вид единичных состояний  $\xi_i(x)$  и  $\eta_j(x)$

и возможное их распределение по длине  $l$ :

а – характерные точки элементарной полоски длиной  $l$ ; б – минимальное разбиение полоски по длине  $l$ ; в – вид функции  $\xi_i(x)$  и  $\eta_j(x)$  с высотой равной единице; г – возможное распределение функций  $\xi_i(x)$  и  $\eta_j(x)$  при наличии податливости на растяжение-сжатие в точке  $x_j$ , а также для случая, когда количество функций  $\xi_i(x)$   $n_1$  меньше, чем количество функций  $\eta_j(x)$   $n_2$

После построения эпюр и вычисления ординат функций  $\xi'_i(x)$  и  $\eta'_j(x)$  коэффициенты разрешающих уравнений (3.9) определяются согласно выражениям (2.11, 3.10, 3.19) путем перемножения соответствующих эпюр по правилу Верещагина.

Таким образом, как легко видеть из рис.3.4,в, при принятом виде распределения функций  $\xi_i(x)$  и  $\eta_j(x)$  постоянные коэффициенты матриц  $A, B, F, G$  из (3.20) будут иметь трехдиагональную структуру, у которых коэффициенты на главной диагонали отличны от нуля и находятся с точностью до модуля упругости, т.е. до множителя  $E$ , по формулам (рис.3.4,г):

$$\left. \begin{aligned} a_{ii} &= \frac{1-\nu}{2} \left( h(x) \frac{d_{K-1}}{3} + h(x) \frac{d_K}{3} \right); \\ b_{ii} &= \frac{h(x)}{d_{K-1}} + \frac{h(x)}{d_K}; \\ f_{jj} &= h(x) \frac{d_{g-1}}{3} + h(x) \frac{d_g}{3}; \\ g_{jj} &= \frac{1-\nu}{2} \left( \frac{h(x)}{d_{g-1}} + \frac{h(x)}{d_g} \right), \end{aligned} \right\} \quad (3.40)$$

а для точек при  $x=0$  и  $x=l$  при свободных от закрепления краях:

$$\left. \begin{aligned} a_{ii} &= \frac{1-\nu}{2} h(x) \frac{d_K}{3}; \\ b_{ii} &= \frac{h(x)}{d_K}; \\ f_{jj} &= h(x) \frac{d_g}{3}; \\ g_{jj} &= \frac{1-\nu}{2} \left( \frac{h(x)}{d_g} \right), \end{aligned} \right\} \quad (3.41)$$

а для точек  $x = x_j$  при наличии податливости на сжатие-растяжение и, учитывая формулы (3.15-3.19), имеем:

$$\left. \begin{aligned} a_{ii} &= \frac{1-\nu}{2} h(x) \frac{d_K}{3}; \\ b_{ii} &= \frac{h(x)}{d_K} + \frac{r_{sd}}{E}. \end{aligned} \right\} \quad (3.42)$$

А коэффициенты на нижней и верхней кодиагонали для этих матриц равны:

$$\left. \begin{aligned} a_{i+1,i} &= a_{i,i+1} = \frac{1-\nu}{2} h(x) \frac{d_K}{6}; \\ b_{i+1,i} &= b_{i,i+1} = -\frac{h(x)}{d_k}; \\ f_{j+1,j} &= f_{j,j+1} = h(x) \frac{d_g}{6}; \\ g_{j+1,j} &= g_{j,j+1} = \frac{1-\nu}{2} \left(-\frac{h(x)}{d_g}\right), \end{aligned} \right\} \quad (3.43)$$

а при наличии податливости на растяжение-сжатие в точке  $x = x_j$  и учитывая формулы (3.15-3.19) имеем:

$$\left. \begin{aligned} a_{i+1,i} &= a_{i,i+1} = 0; \\ b_{i+1,i} &= b_{i,i+1} = -\frac{r_{sd}}{E}. \end{aligned} \right\} \quad (3.44)$$

В случае, если пластинка имеет ребра, типа стингеров, в точке  $x = x_j$ , у которых площадь сечения равна  $F_j$ , то учитывая формулы (2.11), для такой характерной точки  $j$  к коэффициентам  $f_{jj}$  найденным по формулам (3.40-3.41) нужно прибавить  $F_j$

$$f_{jj} = f_{jj} + F_j. \quad (3.45)$$

В формулах (3.40-3.44) толщина пластинки по длине разбиений принята постоянной  $h(x) = h$  и равной толщине пластинки на рассматриваемом участке разбиения  $d_K$ .

Коэффициенты матриц  $A$ ,  $B$ ,  $F$ ,  $G$  из (3.20), определяемые по формулам (3.40-3.45), равны, с точностью до множителя  $E$ , коэффициентам, определяемым по формулам (2.11).

### 3.5. Примеры расчета пластин с отверстием

После определения произвольных постоянных интегрирования системы (3.9) из решения краевой задачи для участков, на которые была разбита пластинка с отверстием, т.е. после определения перемещений, усилия можно определить по закону Гука (3.2) после подстановки в него выражений (3.3) с учетом (3.4-3.5), т.е. по формулам

$$N_1 = B \left( \sum_{i=1}^{n_1} U_i(s) \xi'_i(x) + \nu \sum_{j=1}^{n_2} V'_j(s) \eta_j(x) \right); \quad (3.46)$$

$$N_2 = B \left( \sum_{j=1}^{n_2} V'_j(s) \eta_j(x) + \nu \sum_{i=1}^{n_1} U_i(s) \xi'_i(x) \right) +; \quad (3.47)$$

$$+ E \sum_{j=1}^{n_2} V'_j(s) \eta_j(x) \sum_j F_j \delta(x - x_j)$$

$$S = \frac{1-\nu}{2} B \left( \sum_{j=1}^{n_2} V_j(s) \eta'_j(x) + \sum_{i=1}^{n_1} U'_i(s) \xi_i(x) \right). \quad (3.48)$$

Следовательно, после завершения расчета мы имеем аппроксимацию с точностью до разбиений  $d_K$  (рис.3.4,б) неизвестных функций перемещений  $U(x,s)$  и  $V(x,s)$  для элементарной полоски  $ds$  предварительно заданными линейными единичными функциями  $\xi'_i(x)$  и  $\eta'_j(x)$  умноженными соответственно на  $U_i(s)$  и  $V_j(s)$ .

Легко видеть из (3.46-3.48), что при линейных функциях  $\xi'_i(x)$  и  $\eta'_j(x)$ , перемещения  $U_i(s)$  и  $V_j(s)$  по всей длине  $l$  участка линейно непрерывны, за исключением точек, в которых имеется податливая связь, а усилия  $N_1$ ,  $N_2$ ,  $S$  кусочно-линейные по длине  $l$ , причем разрыв в усилиях будет тем меньшим, чем более мелким будет разбиение  $d_K$  для полоски  $l$ , т.е. чем более точно будет аппроксимирована функции перемещения.

Рассмотрим решение контактной задачи для пластины с ребром, например, для случая, когда отверстие в пластине усилено по контуру ребром типа стингера, на которое действует распределенная нагрузка  $q_x$  со стороны отверстия (рис.3.5,а).

Ребра  $(\kappa)$  и  $(\kappa+1)$  учитываются при подсчете жесткостных характеристик нижнего и верхнего участков при отверстии, т.е. площадь сечения этих ребер учитывается при определении коэффициентов  $f_{gj}$  из системы (3.9).

Для учета ребра  $(m)$  с площадью сечения  $F_m$  необходимо решить контактную задачу. Для этого выпишем дифференциальное уравнение равновесия для стержня

$$\frac{dN_1}{dx} + \tilde{q}_x = 0. \quad (3.49)$$

Физическая зависимость для стержня имеет вид

$$N_1 = (EF_m)\varepsilon_1. \quad (3.50)$$

Примем за возможные перемещения для ребра  $\tilde{\xi}_p, \xi_{p+1}, \dots, \tilde{\xi}_n$  возможные перемещения, принятые для пластинки. Причем первое и последнее возможное перемещение для ребра  $(m)$  отличаются от возможных перемещений для пластинки, так как ребра  $l_m$  менее длины участка  $l$  (рис.3.5,б).

Воспользовавшись принципом возможных перемещений составим интегральные условия равновесия ребра, тогда, умножая уравнение (3.49) последовательно на возможные перемещения для ребра  $\xi_{p+K}(x)$  и, проинтегрируем их по всей длине ребра  $(m)$  причем, интегрируя по частям члены уравнений, содержащие производную  $x$ , получаем следующую систему алгебраических уравнений

$$-\sum_{i=p}^n \tilde{b}_{Ki} U_i(s) + F_{x,K} = 0 \quad (K=P, P+1, \dots, n) \quad (3.51)$$

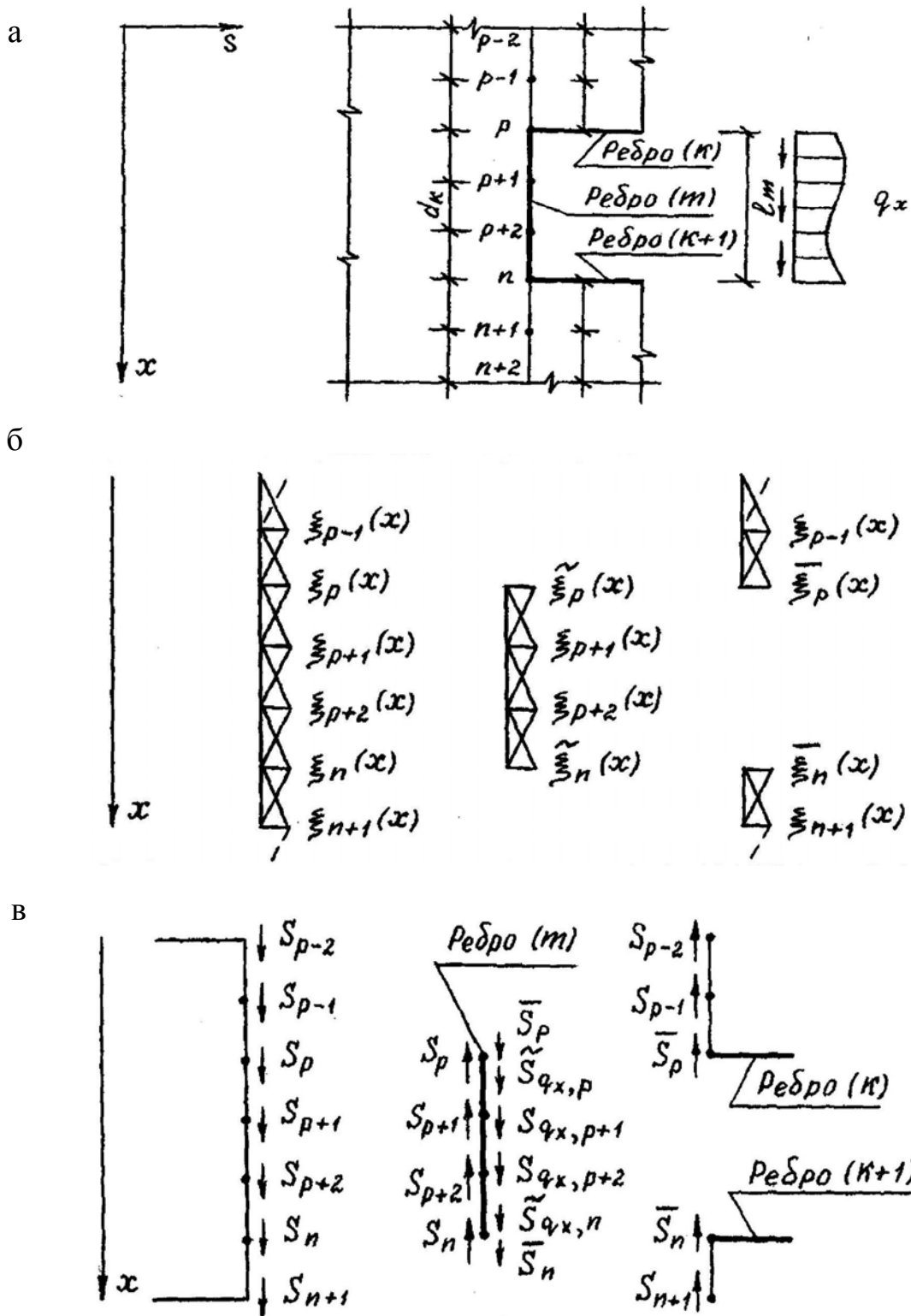


Рис.3.5. К решению контактной задачи пластинки с ребром (м):  
 а – общий вид пластинки с отверстием, усиленным по контуру ребрами типа стрингеров; б – возможные перемещения  $\xi_i(x)$  для пластинки и ребра (м);  
 в – обобщенные сдвигающие силы, действующие на ребро (м)

Следовательно, решение контактной задачи свелось к решению системы алгебраических уравнений относительно обобщенных перемещений  $U_p(s), U_{p+1}(s), \dots, U_n(s)$  со свободными членами от нагрузки  $F_{x,K}$ , действующей на стержень, за которую принимается распределенная нагрузка  $q_x$  и сдвигающие усилия  $S$ , действующие на ребро со стороны пластинки.

В системе (3.5) коэффициенты  $\tilde{b}_{ki}$ , за исключением коэффициентов  $\tilde{b}_{pp}$  и  $\tilde{b}_{nn}$  с точностью до множителя  $(EF_j)$  совпадают с коэффициентами  $b_{ki}$ , подсчитанными по формулам (2.11) для участка пластинки длиной  $l$ .

Вектор свободных членов от нагрузки для обобщенных сдвигающих усилий от нагрузки  $q_x$  и от сдвигающих усилий со стороны пластинки (рис.3.5,в) имеет вид:

$$\{\tilde{F}_x\}^T = \{(-S_p + \bar{S}_p + \tilde{S}_{q_x,p}), (-S_{p+1} + S_{q_x,p+1}), \dots, (-S_n + \bar{S}_n + \tilde{S}_{q_x,n})\}. \quad (3.52)$$

Таким образом, краевыми условиями пластинки по линии ребра ( $m$ ) (рис.3.5,а) будут: для перемещений  $U_i(s)$  и сдвигающих сил  $S_i(s)$

– равенство обобщенных перемещений соседних участков

$$U_1(s), U_2(s), \dots, U_{p+1}(s), U_p(s), U_n(s), U_{n+1}(s), \dots, U_{n_1}(s);$$

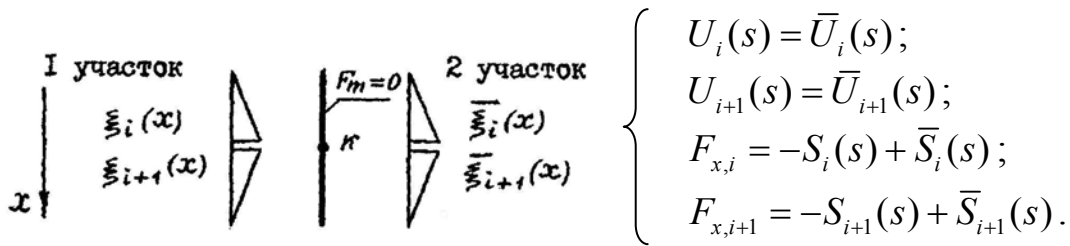
– равенство обобщенных усилий

$$S_1(s), S_2(s), \dots, S_{p-1}(s), S_{n+1}(s), \dots, S_{n_1}(s) ;$$

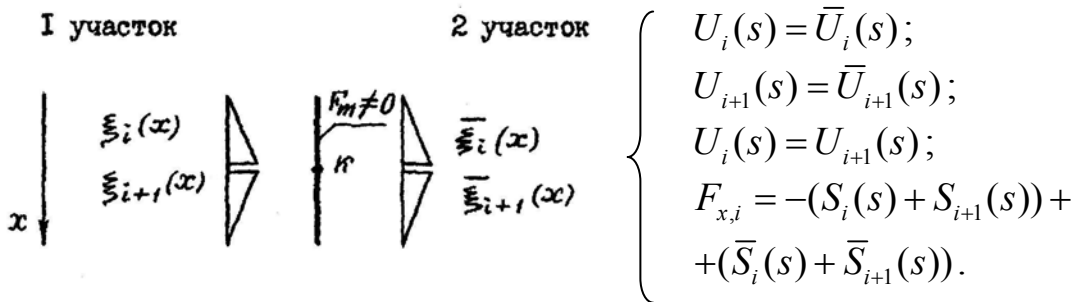
– система алгебраических уравнений (3.51), представляющая собой контактную задачу ребра ( $m$ ) и пластинки.

Для случая, когда жесткость ребра  $(EF_m) = 0$ , а, следовательно, и коэффициенты  $\tilde{b}_{ki} = 0$ , что соответствует случаю отсутствия ребра ( $m$ ), система (3.51) вырождается в равенство обобщенных усилий, что и имеет место при отсутствии ребра. Следовательно, система (3.51) охватывает решение более широкого класса задач.

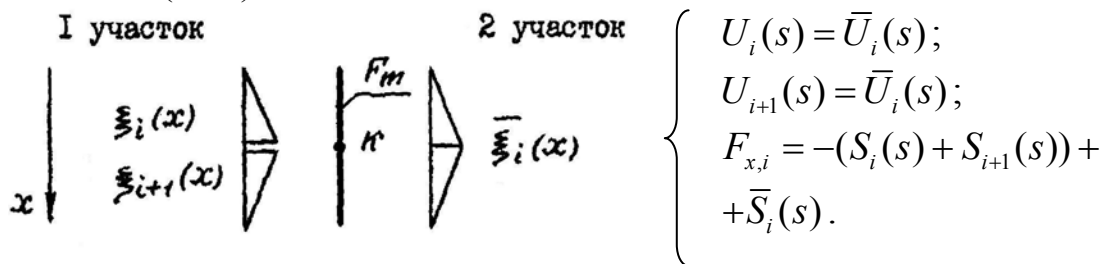
Условия контакта для соседних участков в точке  $k$  для перемещения  $U_i(s)$  и обобщенных сдвигающих сил  $S_i(s)$  при наличии податливой связи в точке  $k$  изображены на рис.3.6



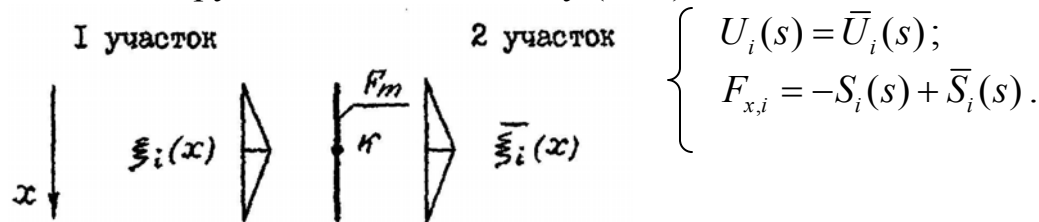
а) при наличии податливости на обоих участках при отсутствии ребра ( $m$ ). Здесь коэффициенты системы (3.51) равны нулю и следовательно, свободные члены от нагрузки  $F_{x,i}$  и  $F_{x,i+1}$  равны 0



б) при наличии податливой связи на обоих участках, когда жесткость ребра ( $m$ ) отлична от нуля. Здесь свободный член от нагрузки входит в (3.51)



в) при наличии податливой связи на одном участке. Здесь свободный член от нагрузки входит в систему (3.51)



г) при отсутствии податливой связи на обоих участках. Здесь свободный член от нагрузки  $F_{x,i}$  входит в систему (3.51)

Рис.3.6. Условия контакта для перемещения  $U(x,s)$  соседних участков в точке  $k$  при наличии податливой связи



Автором составлена программа *PZTU* определения напряженно-деформированного состояния пластины с отверстием с одной или с двумя осями симметрии на языке фортран для решения задачи на ЭВМ.

Программа *PZTU* может дискретно расположенные ребра типа стрингеров параллельно оси  $os$ , которые могут иметь податливость на растяжение-сжатие в направлении оси  $ox$ . Программа позволяет учитывать усиление отверстия элементами жесткости и контурное усиление отверстия ребрами типа стрингеров.

Алгоритм, положенный в основу программы *PZTU*, реализует метод перемещения с использованием вариационного метода В.З. Власова. Максимально возможное количество участков, на которые разбивается пластина с отверстием так, чтобы в пределах участка жесткостные характеристики участка оставались постоянными, равно 4. Разрешающая система дифференциальных уравнений (3.20) для каждого участка приводится к нормальному виду (3.31) путем введения дополнительных функций, причем максимальный размер матриц из (3.31) не должен превышать 120. Произвольные постоянные интегрирования для каждого участка определяются из решения краевой и контактных задач для соседних участков путем решения системы алгебраических уравнений равен 322.

Отметим, что решение системы дифференциальных уравнений для каждого участка производится с итерационным уточнением по методу возмущения.

На рис.3.7 приведено сравнение *HDC* пластинки с проемом, полученного при решении задачи согласно изложенной методики, с известными решениями, представленными в работе [59]. Как видно из рис.3.7, *HDC* полоской пластины с проемом, найденное при помощи вариационного метода В.З. Власова, дает хорошее совпадение с уже имеющимися результатами.

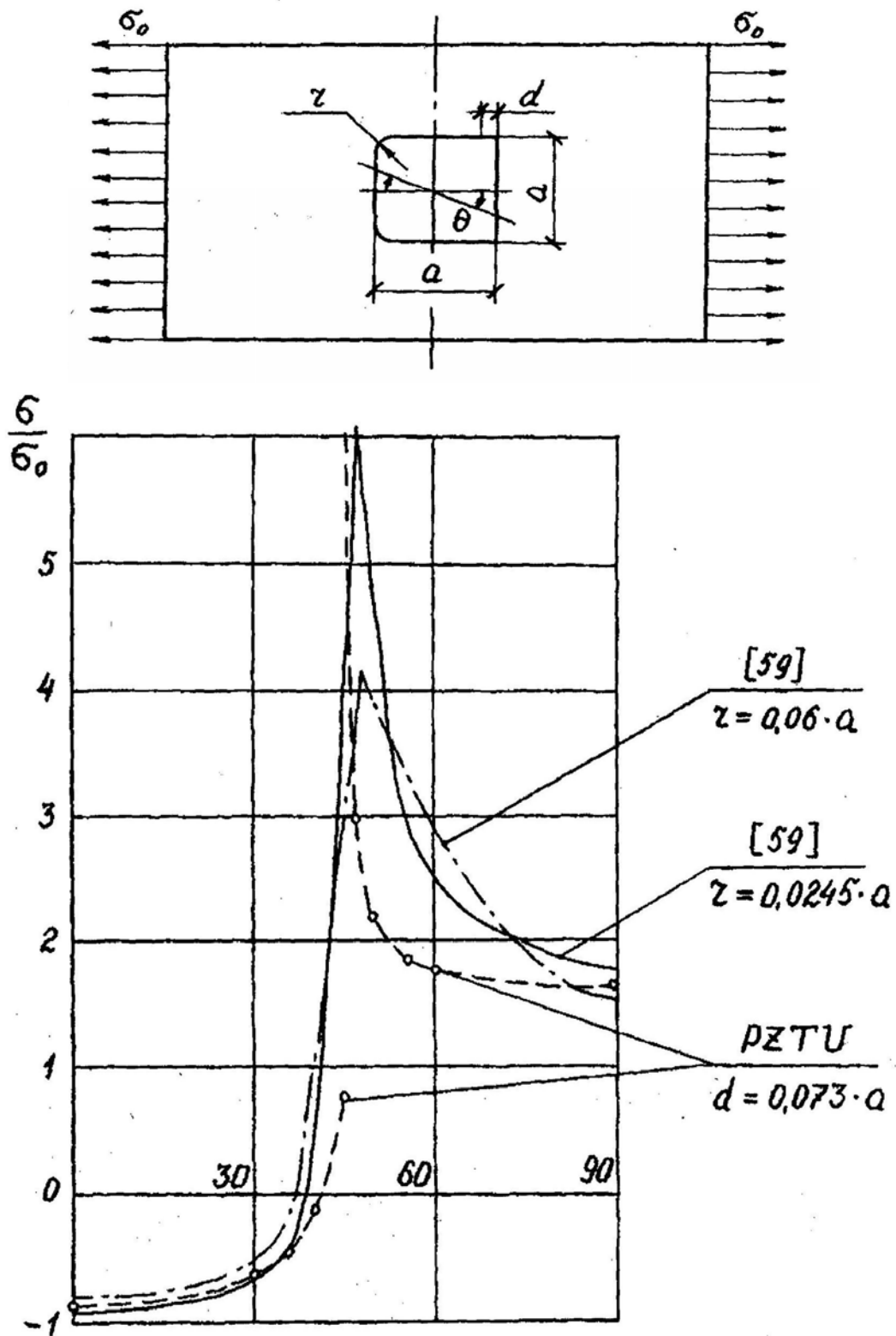


Рис.3.7. Сравнение результатов расчета с уже имеющимися из работы [59]

Общий вид и привязка к краю для плоской пластины являющейся «картой» выделенной области спирально-навивного силоса емкостью 250 т, без учета фальцевых ребер и усиления отверстия элементами жесткости, представлены на рис.3.8. НДС такой плоской пластинки с проемом при  $h_0 = 50$  см представлено на рис.3.9-3.10. Нагрузка, действующая на пластину, представлена в виде эпюры сжимающих сил (слева от рис.3.9-3.10), которую испытывала бы данная пластинка без отверстий. Коэффициент концентрации внутренних усилий возрастает при приближении к угловым точкам, т.е. при более мелком разбиении элементарной полоски. Для данной пластинки учет близости расположения закрепленного края к отверстию приводит к снижению коэффициента концентрации усилий на близлежащем крае отверстия. При удалении закрепленного края примерно на  $h_0$  получаем снижение коэффициента концентрации усилий на близрасположенном крае отверстия примерно в 1,25 раз по отношению к коэффициенту концентрации усилия на дальнем крае.

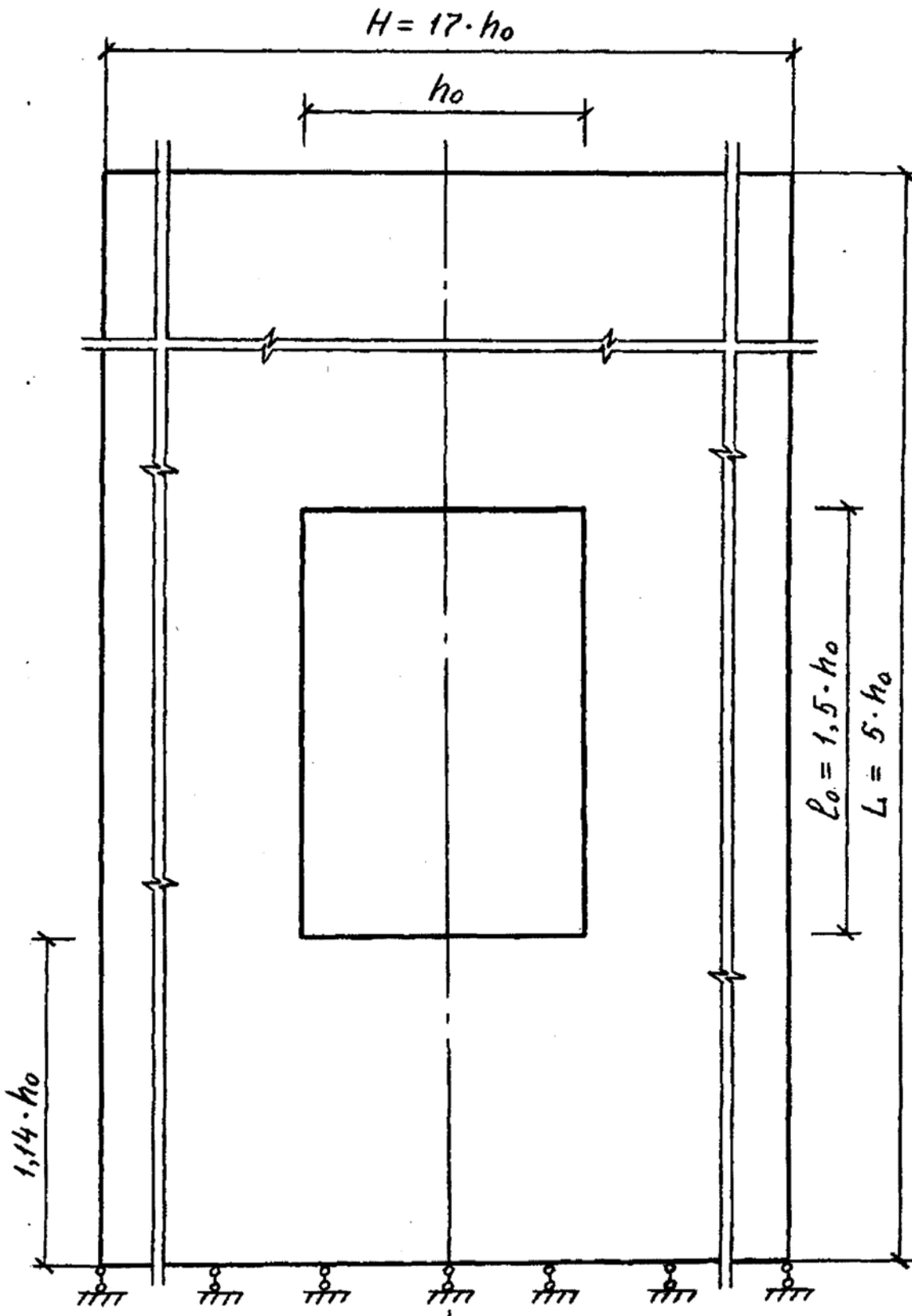


Рис.3.8. Общий вид плоской пластинки с отверстием.

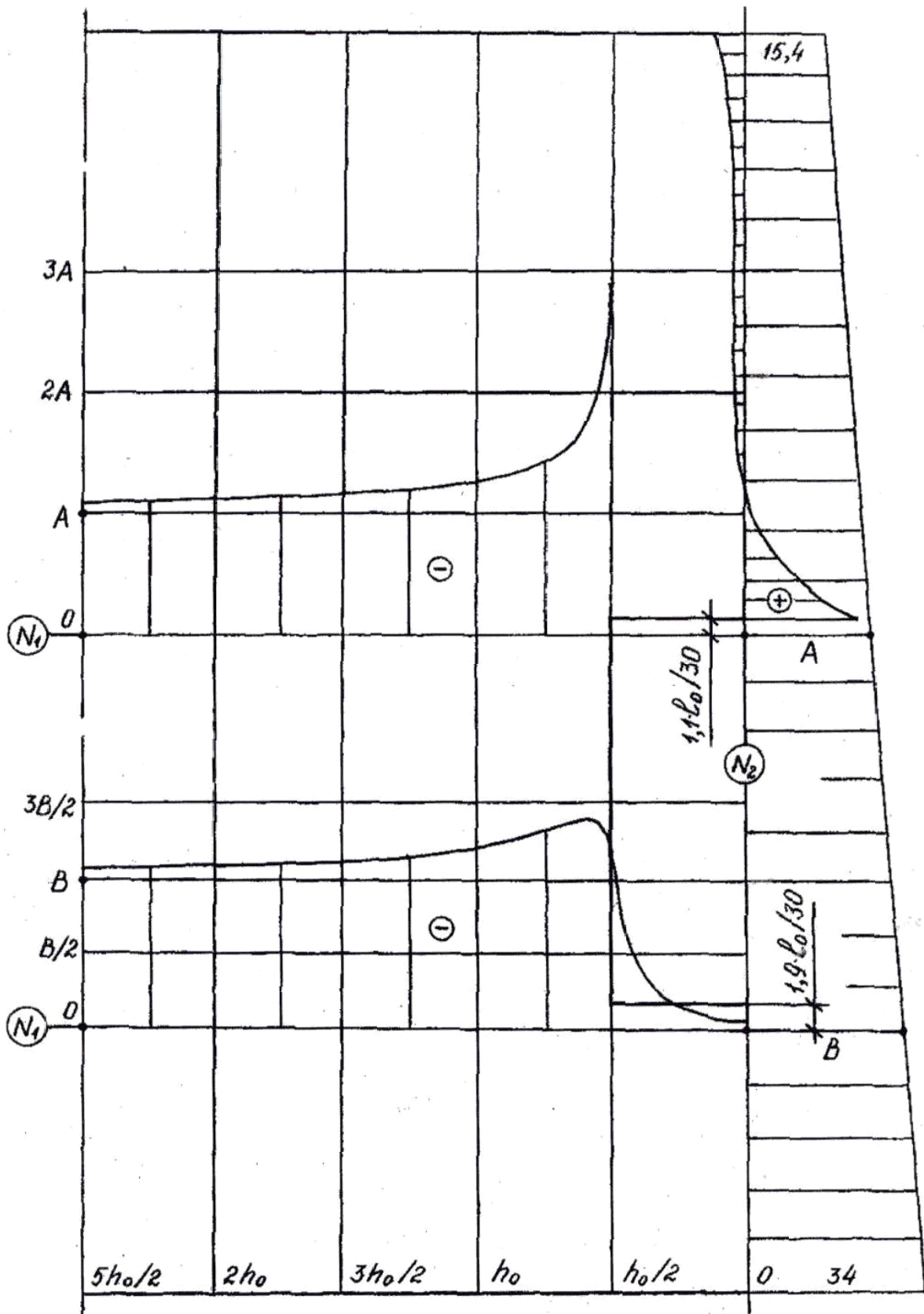


Рис.3.9. НДС плоской пластинки с отверстием.

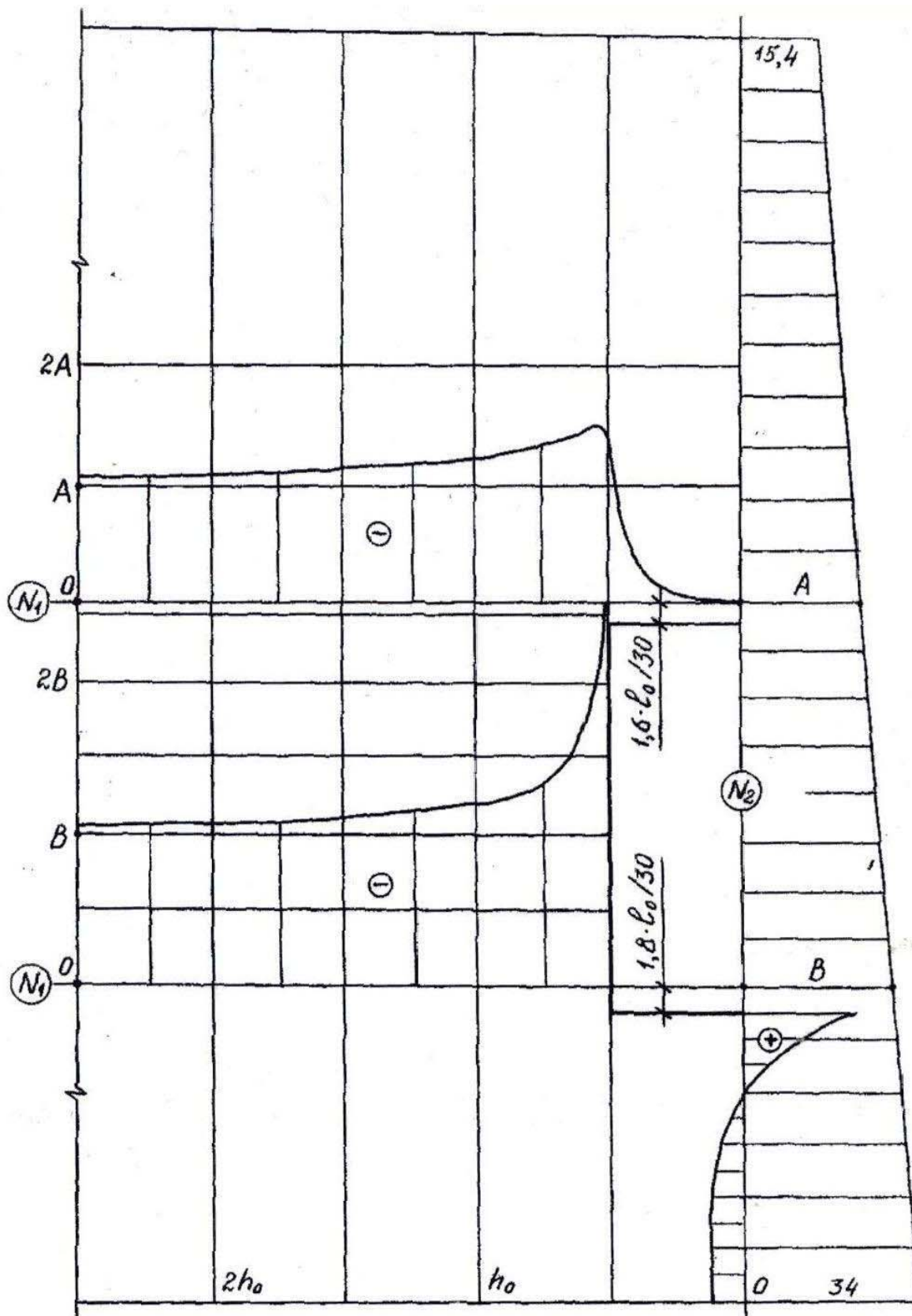


Рис.3.10. НДС плоской пластинки с отверстием.

### 3.6. Выводы

1. Выведены разрешающие дифференциальные уравнения для плоского напряженного состояния при наличии ребер типа стрингеров.
2. Рассмотрено влияние податливой связи на коэффициенты системы разрешающих дифференциальных уравнений.
3. Приведены способы приведения системы  $(n)$  разрешающих дифференциальных уравнений второго порядка к системе  $(2n)$  дифференциальных уравнений первого порядка для получения устойчивого численного процесса при решении задачи на ЭВМ.
4. Подробно рассмотрено влияние условий закрепления каждого участка при  $x=0$  и  $x=l$  на вырожденность матриц из системы  $(n)$  разрешающих дифференциальных уравнений второго порядка и на вырожденность матриц из системы  $(2n)$  дифференциальных уравнений первого порядка.
5. Для аппроксимации функций перемещения  $U(x,s)$  и  $V(x,s)$  по координате  $x$  выбраны линейные единичные функции  $\xi_i(x)$  и  $\eta_j(x)$ , при линейных единичных функциях  $\xi_i(x)$  и  $\eta_j(x)$  приведены формулы для подсчета коэффициентов матриц, из системы разрешающих дифференциальных уравнений для каждого участка пластинки, как при наличии ребер типа стрингеров и при наличии податливой связи, так и без них.
6. Рассмотрена контактная задача для участка пластинки с ребром типа стрингеров.
7. Приведены условия контакта для перемещений  $U(x,s)$  для соседних участков пластинки при наличии ребра типа стрингера, расположенного на границе данных участков.
8. Составлена программа PZTU определения напряженно-деформированного состояния пластинки с отверстием с одной или с двумя симметрии на языке программирования Фортран.
9. Приведены примеры расчета определения напряженно-деформированного состояния пластины с отверстием.

## 4. НАПРЯЖЁННО-ДЕФОРМИРОВАННОЕ СОСТОЯНИЕ КОНСТРУКТИВНО-ОРТОТРОПНЫХ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ОБОЛОЧЕК С ПРОЁМОМ

### 4.1. Исходные положения и рабочие гипотезы.

В данной главе рассматривается решение круговой цилиндрической оболочки с проёмом методом возмущения, причём подробно рассматривается решение для нулевого приближения при постоянных свободных членах от нагрузки.

Круговая цилиндрическая оболочка имеет податливую связь вдоль образующей на сжатие-растяжение, на изгиб и на сжатие-исгиб вдоль направляющей.

Прямоугольное отверстие в оболочке усилено ребром, жесткостью которого на изгиб из плоскости и на кручение можно пренебречь.

Рассматриваются расчётные уравнения, полученные на основе вариационного метода В.З.Власова при решении задачи методом перемещений.

Разбивая оболочку на участки таким образом, чтобы в пределах каждого участка жесткостные характеристики были постоянны, получаем для каждого участка систему разрешающих дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами, которую можно проинтегрировать путём предварительного разложения искомым функций по собственным решениям системы дифференциальных уравнений. Условиями контакта соседних участков будут равенство обобщённых перемещений и обобщённых усилий, т.е. решение краевой задачи сводится к решению системы линейных алгебраических уравнений. При решении пластины на упругом основании используются полученная автором матрица ортонормированная собственных векторов по метрике, задаваемой матрицей при производных от функции.



## 4.2. Напряжённо-деформированное состояние конструктивно-ортотропных круговых цилиндрических оболочек с проёмом в нулевом приближении

### 4.2.1. Напряжённо-деформированное состояние изгиба пластины на упругом основании

Рассмотрим решение круговой цилиндрической оболочки с проемом методом возмущения при нулевом приближении.

Для этого надо предварительно решить для каждого участка, на которые разбита оболочка с отверстием, с постоянными жесткостными характеристиками (рис.2.3,б) систему разрешающих дифференциальных уравнений, которой является третье уравнение из (рис.2.53), записанное в векторной форме. Это уравнение является разрешающим дифференциальным уравнением изгиба пластины на упругом основании, когда радиус кривизны оболочки стремится к бесконечности, т.е.

$$L\vec{W}_0''''(s) - (\tilde{M} + \bar{M} - \check{M} - \hat{M})\vec{W}_0''(s) + (\tilde{N} + \bar{N} - \hat{N} - \check{N})\vec{W}_0(s) = \vec{F}_3, \quad (4.1)$$

где матрица  $N$  учитывается упругое основание, а коэффициентом жесткости основания  $(B + EF_j)/(R^2)$  согласно (2.11), а коэффициенты вектора свободных членов  $\vec{F}_3$  имеют вид:

$$F_{3l} = \int_0^l q_n f_l(x) dx + \left| \bar{Q}_1 f_l \right|_0^l - \left| M_1 f_l' \right|_0^l. \quad (4.2)$$

( $l = 1, 2, \dots, n_3$ )

Перепишем векторное уравнение (4.1) в виде

$$L\vec{W}_0^{IV}(s) - M\vec{W}_0''(s) + N\vec{W}_0(s) = \vec{F}_3. \quad (4.3)$$

Из формул (2.11) для подсчета коэффициентов матриц из (4.1) видно, что матрицы  $L, M, N$  в (4.3) являются симметричными матрицами, а матрицы  $N$ , за счет матрицы  $\hat{N}$ , и  $L$ , независимо от закреплений участка на краях  $x=0$  и  $x=l$ , являются невырожденными матрицами.

Из выражения (4.2) следует, что

$$F_{3l} = \int_0^l q_n f_l(x) dx + \bar{Q}_1(l, s) f_l(l) - \bar{Q}_1(0, s) f_l(0) - \\ - M_1(l, s) f_l'(l) + M_1(0, s) f_l'(0). \quad (4.4)$$

Заменим, что положительное направление перемещения  $W(x,s)$  (рис.2.3,а), нагрузки  $q_n$ , усилий  $\bar{Q}_1(l,s)$  (рис.2.4,б) совпадает с направлением оси  $n$ , а направление усилия  $\bar{Q}_1(o,s)$  (рис.2.4,б) противоположно направлено с осью  $n$ . Положительное направление момента  $M_1(o,s)$  совпадает с положительным углом поворотов  $\partial W(x,s)/\partial x$ , что соответствует случаю, когда при изменении координат  $x$  по направлению оси  $ox$ , перемещение  $W(x,s)$  увеличивается, а положительное направление момента  $M_1(l,s)$  не совпадает с положительным направлением угла поворота  $\partial W(x,s)/\partial x$ , что соответствует случаю, когда при увеличении координаты  $x$  перемещение  $W(x,s)$  уменьшается.

Для совмещения положительного направления усилия  $\bar{Q}_1(o,s)$  с направлением оси  $n$  изменим направление усилия на обратное, при этом изменим знак перед членом  $\bar{Q}_1(o,s)$  в (4.4) на обратный. Соответственно, для совмещения положительного направления момента  $M_1(l,s)$  с положительным направлением угла поворота  $\partial W(x,s)/\partial x$ , т.е. чтобы при действии момента  $M_1(l,s)$  перемещения  $W(x,s)$  возрастали при увеличении  $x$ , изменим направление момента  $M_1(l,s)$  на обратное, при этом изменим знак перед  $M_1(l,s)$  в (4.4) на обратный.

Тогда свободные члены от нагрузки  $F_{3l}$  примут следующий вид:

$$F_{3l} = \int_0^l q_n f_l(x) dx + \bar{Q}_1(l,s) f_l(l) + \bar{Q}_1(o,s) f_l(0) + M_1(l,s) f_l'(l) + M_1(o,s) f_l'(0), \quad (4.5)$$

где слагаемые для нагрузки и усилий надо брать со знаком плюс, если они совпадают с положительным направлением оси  $n$ , и со знаком минус, если противоположно направлены, а слагаемые для моментов надо брать со знаком плюс, если при действии этих моментов перемещения  $W(x,s)$  возрастают при увеличении координаты  $x$ , и со знаком минус – когда перемещение уменьшаются при увеличении  $x$ .

Рассмотрим влияние податливой связи на изгиб на коэффициенты матриц из (4.1).

Наличие податливой связи на изгиб в точке  $x_j$  обуславливает наличие разрыва в углах поворота  $\partial W(x,s)/\partial x$  в этой точке, следовательно, в этой точке  $x_j$  будет совершаться работа сил

податливой связи на возможных перемещениях  $f_l'(x_{j-})$  и  $f_l'(x_{j+})$ . Поэтому напишем выражение в прямых скобках для  $M_1$  из (4.2), отмечая, что упругие силы податливой связи по отношению к элементарной полоске являются внешними силами, в виде:

$$|M_1 f_l'|_0^l = |M_1 f_l'|_0^{x_{j-}} + |M_1 f_l'|_{x_{j+}}^l. \quad (4.6)$$

Раскрывая выражение (4.6), будем иметь

$$|M_1 f_l'|_0^l = M_1(x_{j+}, s) f_l'(x_{j-}) - M_1(0, s) f_l'(0) + \\ + M_1(l, s) f_l'(l) - M_1(x_{j+}, s) f_l'(x_{j+}). \quad (4.7)$$

Второе и третье слагаемые из (4.7) относятся к свободным членам от нагрузки (4.4) и уже разобраны выше, а первое и четвертое слагаемые учитывают работу сил податливой связи на возможных углах поворота в точке разрыва сил податливой связи на возможных углах поворота в точке разрыва углов поворота  $x_j$ , выпишем их, имея в виду равенство  $M_1(x_{j-}, s)$  и  $M_1(x_{j+}, s)$  и обозначая их как  $M_1(x_j, s)$ , тогда

$$|M_1 f_l'|_{x_{j+}}^{x_{j-}} = M_1(x_j, s) f_l'(x_{j-}) - M_1(x_j, s) f_l'(x_{j+}). \quad (4.8)$$

Знаки плюс и минус перед  $M_1(x_j, s)$  в (4.8) соответствуют положительному направлению  $M_1(x_j, s)$ , изображенному на рис.2.4,б.

Для податливой связи с жесткостью на изгиб  $r_{mj}$  этот момент  $M_1(x_j, s)$ , соответствующий положительному направлению  $M_1$  (рис.2.4) равен, учитывая выражение для  $\mathfrak{N}_1$  из (2.6):

$$M_1(x_j, s) = -r_{mj} (W_d'(x_{j+}, s) - W_d'(x_{j-}, s)). \quad (4.9)$$

или, учитывая выражение для перемещения  $W(x, s)$  из (2.7) и опуская знак суммы  $\sum_{d=1}^{n_3}$ , имеем

$$M_1(x_j, s) = -r_{mj} (W_d(s) f_d'(x_{j+}) - W_d(s) f_d'(x_{j-})), \quad (4.10)$$

$(d = 1, 2, \dots, n_3)$ .

Подставляя (4.10) в (4.8), имеем

$$\begin{aligned} |M_1 f_l|_{x_{j+}}^{x_{j-}} = & -r_{mj} (W_d(s) f_d'(x_{j+}) - W_d(s) f_d'(x_{j-})) f_l'(x_{j-}) + \\ & + r_{mj} (W_d(s) f_d'(x_{j+}) - W_d(s) f_d'(x_{j-})) f_l'(x_{j+}), \end{aligned} \quad (4.11)$$

$(d, l = 1, 2, \dots, n_3)$  .

Из выражения (4.11) видно, что учет податливой связи на изгиб в точке  $x_j$  приводит к изменению коэффициентов матрицы при обобщенных перемещениях  $W_d(s)$  в (4.1).

Так коэффициенты матриц  $\bar{n}_{ld}$  матрицы  $\bar{N}$  из (4.1) согласно (2.11) учитывают работу изгибающих моментов на возможных изменениях углов поворота, то работу сил податливой связи на углах поворота в точке  $x_j$  отнесем к этим коэффициентам  $\bar{n}_{ld}$  матрицы  $\bar{N}$  из (4.1), которая в сумме с матрицами  $\tilde{N}, \hat{N}, \check{N}$  из (4.1) дает симметричную невырожденную матрицу  $N$  при обобщенных перемещениях  $\vec{W}_0(s)$  из (4.3). Тогда коэффициенты  $\bar{n}_{ld}$  определяются по формуле

$$\bar{n}_{ld} = \int_0^l Df_d''(x) f_l''(x) dx + |M_1 f_l|_{x_{j+}}^{x_{j-}}, \quad (4.12)$$

а остальные коэффициенты матриц из (4.1) остаются без изменений и находятся по формулам (2.11).

Вводя добавочные неизвестные  $\vec{W}_{0,1}(s)$  по формуле

$$\vec{W}_0''(s) - \vec{W}_{0,1}(s) = 0, \quad (4.13)$$

приведем систему (4.3)  $n_3$  разрешающих уравнений четвертого порядка к системе  $(2n_3)$  уравнений второго порядка

$$\left. \begin{aligned} \vec{W}_0''(s) - \vec{W}_{0,1}(s) &= 0; \\ L\vec{W}_{0,1}''(s) - M\vec{W}_{0,1}(s) + N\vec{W}_0(s) &= \vec{F}_3. \end{aligned} \right\} \quad (4.14)$$

Напишем систему (4.14) в форме

$$R\vec{Y}''(s) - S\vec{Y}(s) = \vec{F}, \quad (4.15)$$

где матрица  $R$  является клеточной квазидиагональной матрицей, а матрица  $S$  имеет блочную структуру

$$R = \begin{array}{|c|c|} \hline J & \\ \hline & L \\ \hline \end{array}, \quad r_{ij} = r_{ji}; \quad S = \begin{array}{|c|c|} \hline & J \\ \hline -N & M \\ \hline \end{array}. \quad (4.16)$$

Единичная матрица обозначена через  $J$ .

Вектор коэффициентов внешней нагрузки имеет вид

$$\vec{F}^T = \{(0)^T, \vec{F}_3^T\}. \quad (4.17)$$

Вектор перемещений  $\vec{Y}(s)$  имеет вид

$$\vec{Y}^T(s) = \{\vec{W}_0^T(s), \vec{W}_{0,1}^T(s)\}. \quad (4.18)$$

Умножая (4.15) на обобщенную матрицу  $R^{-1}$ , имеем уравнение

$$\vec{Y}''(s) - S_1\vec{Y}(s) = \vec{F}, \quad (4.19)$$

где

$$S_1 = R^{-1}S, \quad (4.20)$$

$$\vec{F} = R^{-1}\vec{F}. \quad (4.21)$$

Определяя все свободные значения матрицы  $S_1$  и находя по ним невырожденную матрицу собственных векторов  $T$  приводящей преобразование подобия  $(T^{-1}S_1T)$  матрицу к матрице канонической формы (2.18), введем новые функции по формуле

$$\vec{Y}(s) = T\vec{x}(s); \quad \vec{Y}''(s) = T\vec{x}''(s). \quad (4.22)$$

Затем, умножая векторное уравнение (4.19) на обобщенную матрицу  $T^{-1}$ , приходим к векторному уравнению виду

$$\vec{x}''(s) - J_p(\lambda)\vec{x}(s) = \vec{F}, \quad (4.23)$$

которое легко интегрируется. Причем каждому собственному значению  $\lambda_j$  будет соответствовать решение  $x_j(s)$  вида

$$x_j(s) = A_j e^{\sqrt{\lambda_j} s} + A_{j+1} e^{-\sqrt{\lambda_j} s} + X_{*j}(s), \quad (4.24)$$

где  $X_{*j}(s)$  частное решение уравнения, зависящее от вида правой части  $\tilde{F}$

$$\tilde{F} = T^{-1} R^{-1} \tilde{F}. \quad (4.25)$$

Переходя от комплексно-сопряженных функций, постоянных интегрирования и собственных векторов, соответствующих комплексно-сопряженным значениям матрицы  $S_1$   $\lambda_j = \xi + i\mu$  и  $\lambda_{j+1} = \bar{\lambda}_j = \xi - i\mu$ , причем учитывая, что  $(\sqrt{\lambda_j}) = \alpha + i\beta$  и  $(\sqrt{\lambda_{j+1}}) = \alpha - i\beta$ , а  $(-\sqrt{\lambda_j}) = -\alpha - i\beta$  и  $(-\sqrt{\lambda_{j+1}}) = -\alpha + i\beta$ , где

$$\alpha = \sqrt{\frac{\xi + \sqrt{\xi^2 + \mu^2}}{2}}; \quad \beta = \sqrt{\frac{-\xi + \sqrt{\xi^2 + \mu^2}}{2}},$$

к действительным функциям, постоянным и собственным вектором  $\text{Re}(z_{ij})$  и  $\text{Im}(z_{ij})$  будем иметь подобно (2.95)

$$\begin{aligned} Y_k(s) = & \dots + \text{Re}(z_{ij}) \left\{ (D_j \cos(\beta s) + D_{j+1} \sin(\beta s)) e^{\alpha s} + \right. \\ & \left. + (D_{j+2} \cos(\beta s) - D_{j+3} \sin(\beta s)) e^{-\alpha s} + 2 \text{Re}(X_{*j}(s)) \right\} + \\ & + \text{Im}(z_{ij}) \left\{ (-D_j \sin(\beta s) + D_{j+1} \cos(\beta s)) e^{\alpha s} + \right. \\ & \left. + (D_{j+2} \sin(\beta s) + D_{j+3} \cos(\beta s)) e^{-\alpha s} - 2 \text{Im}(X_{*j}(s)) \right\} + \dots \quad (4.26) \end{aligned}$$

Покажем, что можно находить частное решение  $Y_{*j}(s)$  общего интеграла системы типа (4.15), зависящего от вида правой части  $\tilde{F}$ , не прибегая к операции обращения матриц  $R$  и в (4.25).

Для этого предварительно докажем, что если матрицы  $R$  – невырожденная симметричная матрица, а матрица  $S$  – симметричная матрица, то производя ортонормирование матрицы собственных векторов  $T$  по методике, задаваемой матрицей  $R$ , т.е. получая ортонормированную матрицу  $\bar{T}$ , где

$$\bar{T}^T = (R \cdot \bar{T})^{-1}, \quad (4.27)$$

можем получить преобразованием подобия  $(\bar{T}^T R \bar{T})$  единичную матрицу  $J$ , а для  $(\bar{T}^T S \bar{T})$  – матрицу канонической формы  $J_\rho(\lambda)$  с диагональными элементами  $\lambda_j$  равными собственным значениям матрицы  $(R^{-1}S)$ .

Матрица  $\bar{T}$  находится из матрицы  $T$  по следующей формуле

$$\bar{T}^T = T \cdot Z; \quad (4.28)$$

$$Z = ((T^T \cdot R \cdot T)^{-1})^{\frac{1}{2}}. \quad (4.29)$$

Отметим следующее, что если  $R$  и  $S$  симметричные матрицы, то матрица  $(T^T R T)$  диагональная, поэтому операции обращения и извлечения квадратного корня производятся для каждого диагонального элемента в отдельности.

Из (4.28) получаем, что

$$\bar{T}^T = Z^T \cdot T^T. \quad (4.30)$$

Подставляя (4.30, 4.28) в матрицу  $(\bar{T}^T R \bar{T})$  и учитывая (4.29) после преобразования, имеем

$$Z^T \cdot Z^{-1} = J,$$

что является верным равенством, если матрица  $Z$  симметричная, а согласно сказанному выше, она является диагональной матрицей; а из (4.27) имеем верное равенство для матрицы

$$(\bar{T}^T S \bar{T}) = \bar{T}^{-1} \cdot (R^{-1}S) \cdot \bar{T} = J_\rho(\lambda).$$

Что и требовалось доказать.

Для получения симметричных матриц  $R$  и  $S$  приведем систему (4.3) к системе  $(2n_3)$  уравнений второго порядка с новыми дополнительными неизвестными  $\vec{W}_{0,1}(s)$  вида

$$\left. \begin{aligned} L\vec{W}_0''(s) - M\vec{W}_0(s) - N\vec{W}_{0,1}(s) &= 0; \\ N\vec{W}_{0,1}''(s) + N\vec{W}_0(s) - \vec{F}_3 &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (4.31)$$

или

$$\tilde{R}\vec{Y}''(s) - \tilde{S}\vec{Y}(s) + \tilde{F} = 0,$$

где

$$\tilde{R} = \begin{bmatrix} L & \\ & -N \end{bmatrix}, \quad \tilde{r}_{ij} = \tilde{r}_{ji}; \quad \tilde{S} = \begin{bmatrix} M & N \\ N & \end{bmatrix}, \quad \tilde{s}_{ij} = \tilde{s}_{ji}. \quad (4.32)$$

Вектор коэффициентов внешней нагрузки  $\tilde{F}$  и вектор перемещений  $\tilde{Y}(s)$  имеют вид соответственно (4.17) и (4.18).

Определяя затем собственные значения матрицы  $(\tilde{R}^{-1} \cdot S)$  а по ним невырожденную матрицу собственных векторов  $T$ , получим по формулам (4.28, 4.29) ортонормированную матрицу  $\bar{T}$  по метрике, задаваемой матрицей  $\tilde{R}$ .

Вводя новые функции  $\bar{X}(s)$ , по формулам

$$\bar{Y}(s) = \bar{T}\bar{X}(s); \quad \bar{Y}''(s) = \bar{T}\bar{X}''(s), \quad (4.34)$$

и умножая (4.32) на матрицу  $\bar{T}^T$ , получим векторное уравнение

$$\bar{x}''(s) - J_p(\lambda)\bar{x}(s) + \hat{F} = 0, \quad (4.35)$$

которое легко интегрируется. Причем каждому собственному значению  $\lambda_j$  будет соответствовать решение  $x_j(s)$  вида (4.24), где  $x_{*j}(s)$  частное решение уравнения, зависящее от вида правой части  $\hat{F}$ , где

$$\hat{F} = \bar{T}^T \cdot \tilde{F}. \quad (4.36)$$

Для принятой на рис.2.3,б расчетной схемы с учетом формулы (2.7) разобьем элементарную полоску  $ds$  для каждого участка по всей длине  $l$  так, чтобы характерные точки участка находились на границе разбиений по длине  $l$  (рис.4.1,а).

Будем аппроксимировать неизвестную функцию по координате  $x$  с точностью до разбиений  $d_k$  по длине  $l$  предварительно выбранным единичным функциями  $f_d(x)$ :

$$f_d(x) = \tilde{f}_k(x) + \bar{f}_m(x); \quad (d = 1, 2, \dots, n_3). \quad (4.37)$$

$$(\kappa = 1, 2, \dots, \tilde{n}_3; m = \tilde{n}_3 + 1, \tilde{n}_3 + 2, \dots, n_3)$$

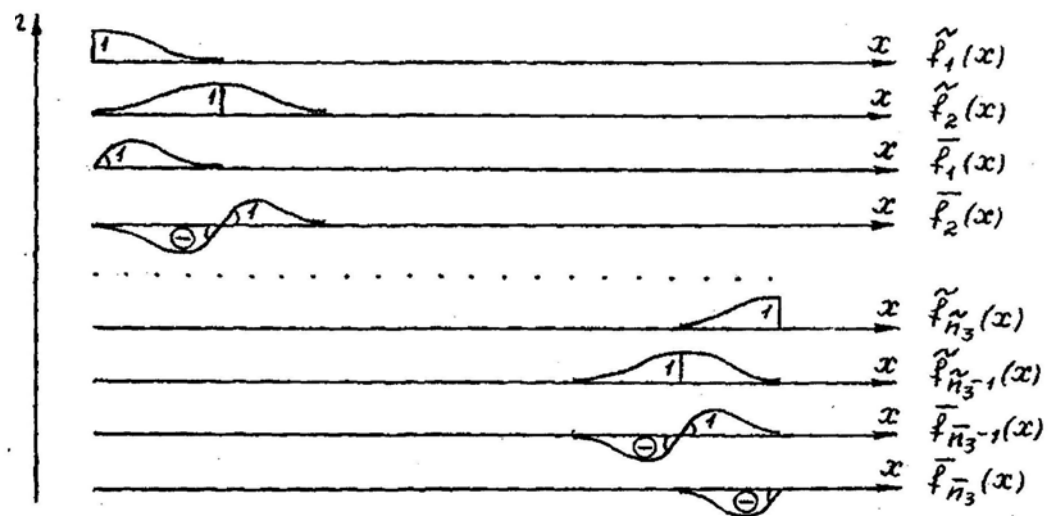
где  $\tilde{f}_k(x)$  функция от единичного смещения в характерных точках,  $\bar{f}_m(x)$  функция от единичного угла поворота в характерной точке.



а



б



в

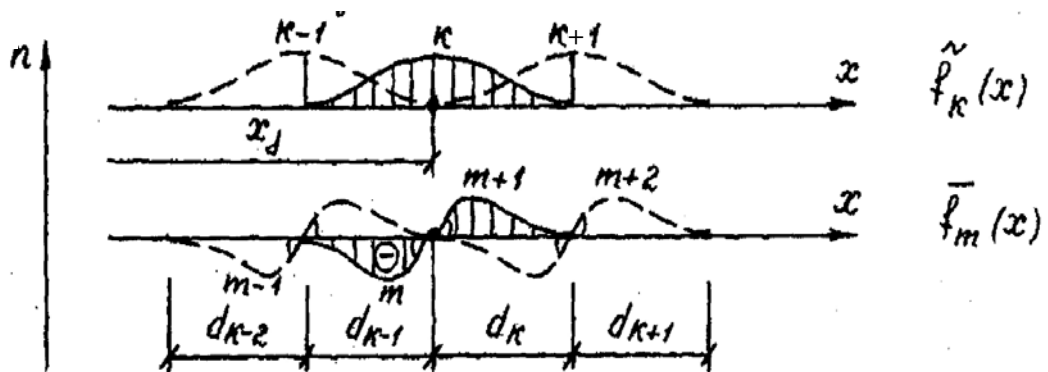
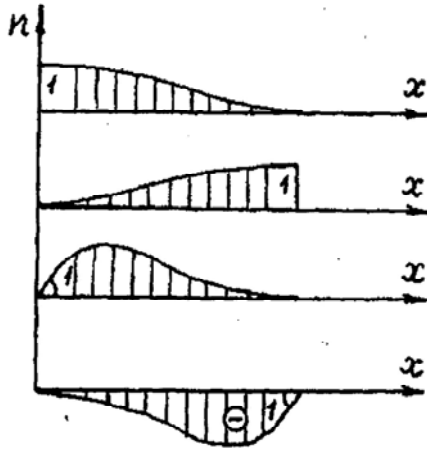


Рис.4.1. Вид функций  $f_d(x) = \tilde{f}_k(x) + \bar{f}_m(x)$  и возможное распределение их по длине элементарной полоски  $l$ :

а – характерные точки по длине  $l$  элементарной полоски  $ds$ ; б – вид функций от единичного смещения  $\tilde{f}_k(x)$  и от единичного угла поворота  $\bar{f}_{m-\tilde{n}_3}(x)$ ;

в – распределение функций  $\tilde{f}_k(x)$  и  $\bar{f}_m(x)$  при наличии податливой связи на изгиб в точке  $x_j$



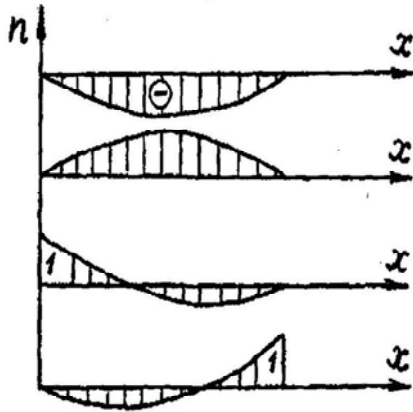
$$\tilde{f}_K(x) = \left(\frac{2}{d_K^3}\right)x^3 + \left(-\frac{3}{d_K^2}\right)x^2 + 1;$$

$$\tilde{f}_{K+1}(x) = \left(\frac{2}{d_K^3}\right)x^3 + \left(\frac{3}{d_K^2}\right)x^2;$$

$$\bar{f}_m(x) = \left(\frac{1}{d_K^2}\right)x^3 + \left(-\frac{2}{d_K}\right)x^2 + x;$$

$$\bar{f}_{m+1}(x) = \left(\frac{1}{d_K^2}\right)x^3 + \left(-\frac{1}{d_K}\right)x^2.$$

а) Функции  $f_d(x)$  и их уравнения, причем  $0 \leq x \leq d_K$ .



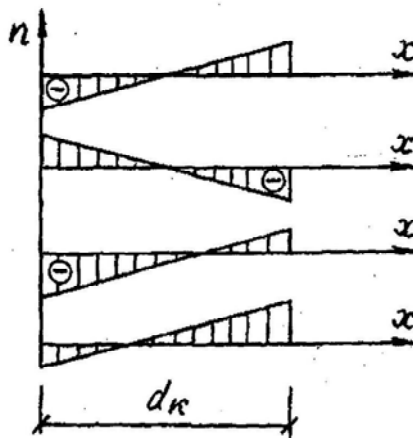
$$\tilde{f}'_K(x) = \left(\frac{6}{d_K^3}\right)x^3 + \left(-\frac{6}{d_K^2}\right)x;$$

$$\tilde{f}'_{K+1}(x) = \left(-\frac{6}{d_K^3}\right)x^3 + \left(\frac{6}{d_K^2}\right)x;$$

$$\bar{f}'_m(x) = \left(\frac{3}{d_K^2}\right)x^3 + \left(-\frac{4}{d_K}\right)x + 1;$$

$$\bar{f}'_{m+1}(x) = \left(\frac{3}{d_K^2}\right)x^3 + \left(-\frac{2}{d_K}\right)x$$

б) производные  $f'_d(x)$  и их уравнения, где  $0 \leq x \leq d_K$



$$\tilde{f}''_K(x) = \left(\frac{12}{d_K^3}\right)x + \left(-\frac{6}{d_K^2}\right);$$

$$\tilde{f}''_{K+1}(x) = \left(-\frac{12}{d_K^3}\right)x + \left(\frac{6}{d_K^2}\right);$$

$$\bar{f}''_m(x) = \left(\frac{6}{d_K^2}\right)x + \left(-\frac{4}{d_K}\right);$$

$$\bar{f}''_{m+1}(x) = \left(\frac{6}{d_K^2}\right)x + \left(-\frac{2}{d_K}\right).$$

в) вторые производные  $f''_d(x)$  и их уравнения,  $0 \leq x \leq d_K$

Рис.4.2. Вид и уравнения единичных функций  $f_d(x)$  и их производных по длине разбиения  $d_k$

При наличии податливой связи на изгиб в характерной точке  $x = x_j$  в возможных перемещениях  $f'_d(x)$  должен быть разрыв. Распределение функций  $\tilde{f}_k(x)$  и  $\bar{f}_m(x)$  в окрестности такой точки  $x_j$  показано на рис.4.1,в.

Примем за уравнение функций  $\tilde{f}_k(x)$  элементарной полоски  $ds$  уравнения прогибов прямой балки с жестко заделанными концами от единичных смещений в характерных точках элементарной полоски  $ds$ , а за уравнения функций  $\bar{f}_m(x)$  примем уравнения прогибов прямой балки с жестко заделанными концами в характерных точках элементарной полоски  $ds$  от единичного угла поворота заделки, с учетом разрывов в перемещениях  $\bar{f}'_m(x)$  в точках  $x = x_j$ , где имеется податливая связь на изгиб, (рис.4.2.).

После построения эпюр  $\tilde{f}_k(x), \tilde{f}'_k(x), \tilde{f}''_k(x); \bar{f}_m(x), \bar{f}'_m(x), \bar{f}''_m(x)$  коэффициенты матриц из (4.1) определяются согласно выражениям (2.11, 4.12). Эти коэффициенты с точностью до жесткостных характеристик разбиений  $d_k$  по длине  $l$  изображены на рис.4.3.

Таким образом, как легко видеть из рис.4.1,б, матрицы из (4.1) имеют блочную структуру, состоящую из подматриц  $S_{11}, S_{12}, S_{21}, S_{22}$ , где подматрица  $S_{11}$ , учитывая взаимное влияние функций от  $\tilde{f}_k(x)$ , и подматрица  $S_{22}$ , учитывая взаимное влияние функций от  $\bar{f}_m(x)$ , имеют трехдиагональную структуру, а подматрицы  $S_{12}$  и  $S_{21}$ , учитывающие взаимное влияние функций от  $\tilde{f}_k(x)$  и от  $\bar{f}_m(x)$  являются матрицами общего вида.

При наличии податливой связи на изгиб в точке  $x = x_j$  коэффициенты  $\bar{n}_{id}$  матрицы  $\bar{N}$  из (4.1) для функций  $\bar{f}'_m(x)$  которые испытывают разрыв в этой точке  $x_j$  (рис.4.1,в), учитывая формулы (4.11, 4.12) и рис.4.3,в, имеют вид:

$$\left. \begin{aligned} \bar{n}_{m,m} &= D_{d_{k-1}} \cdot 4 \cdot \frac{1}{d_k} + r_{mj}; \\ \bar{n}_{m+1,m+1} &= D_{d_k} \cdot 4 \cdot \frac{1}{d_k} + r_{mj}; \\ \bar{n}_{m,m+1} &= \bar{n}_{m+1,m} = -r_{mj}. \end{aligned} \right\} \quad (4.38)$$

#### 4.2.2. Плоское напряженно-деформированное состояние пластины в нулевом приближении с учетом расчета изгиба пластинки на упругом основании

После определения произвольных постоянных интегрирования системы (4.1) из решения краевой задачи для участков, на которые разбита оболочка с отверстием, усилия  $M_1, M_2, H$  определяются по закону Гука (2.3), после подстановки в него выражений (2.6) с учетом (2.7), т.е.

Т а б л и ц а 4.1

$(l_{ld}, \bar{m}_{ld}, \tilde{n}_{ld})$

$\int_0^{d_\kappa} f_d f_l dx$	$\tilde{f}_{l=\kappa}$	$\tilde{f}_{l=\kappa+1}$	$\bar{f}_{l=m}$	$\bar{f}_{l=m+1}$
$\tilde{f}_{d=\kappa}$	$\frac{156}{420} d_\kappa$	$\frac{54}{420} d_\kappa$	$\frac{22}{420} d_\kappa^2$	$-\frac{13}{420} d_\kappa^2$
$\tilde{f}_{d=\kappa+1}$	$\frac{54}{420} d_\kappa$	$\frac{156}{420} d_\kappa$	$\frac{13}{420} d_\kappa^2$	$-\frac{22}{420} d_\kappa^2$
$\bar{f}_{d=m}$	$\frac{22}{420} d_\kappa^2$	$\frac{13}{420} d_\kappa^2$	$\frac{4}{420} d_\kappa^3$	$-\frac{3}{420} d_\kappa^3$
$\bar{f}_{d=m+1}$	$-\frac{13}{420} d_\kappa^2$	$-\frac{22}{420} d_\kappa^2$	$-\frac{3}{420} d_\kappa^3$	$\frac{4}{420} d_\kappa^3$

Т а б л и ц а 4.2

$(\tilde{m}_{ld})$

$\int_0^{d_\kappa} f'_d f'_l dx$	$\tilde{f}'_{l=\kappa}$	$\tilde{f}'_{l=\kappa+1}$	$\bar{f}'_{l=m}$	$\bar{f}'_{l=m+1}$
$\tilde{f}'_{d=\kappa}$	$\frac{72}{60} \frac{1}{d_\kappa}$	$-\frac{72}{60} \frac{1}{d_\kappa}$	$\frac{6}{60}$	$\frac{6}{60}$
$\tilde{f}'_{d=\kappa+1}$	$-\frac{72}{60} \frac{1}{d_\kappa}$	$\frac{72}{60} \frac{1}{d_\kappa}$	$-\frac{6}{60}$	$-\frac{6}{60}$
$\bar{f}'_{d=m}$	$\frac{6}{60}$	$-\frac{6}{60}$	$\frac{8}{60} d_\kappa$	$-\frac{2}{60} d_\kappa$
$\bar{f}'_{d=m+1}$	$\frac{6}{60}$	$-\frac{6}{60}$	$-\frac{2}{60} d_\kappa$	$\frac{8}{60} d_\kappa$

Рис.4.3,а. Таблицы значений интегралов вида  $\int_0^{d_\kappa} f_d^{(n)} f_l^{(m)} dx$

к подсчету коэффициентов матриц из (4.1)

Таблица 4.3

$$(\bar{n}_{ld})$$

$\int_0^{d_\kappa} f_d'' f_l'' dx$	$\tilde{f}_{l=\kappa}''$	$\tilde{f}_{l=\kappa+1}''$	$\bar{f}_{l=m}''$	$\bar{f}_{l=m+1}''$
$\tilde{f}_{d=\kappa}''$	$12 \frac{1}{d_\kappa^3}$	$-12 \frac{1}{d_\kappa^3}$	$6 \frac{1}{d_\kappa^2}$	$6 \frac{1}{d_\kappa^2}$
$\tilde{f}_{d=\kappa+1}''$	$-12 \frac{1}{d_\kappa^3}$	$12 \frac{1}{d_\kappa^3}$	$-6 \frac{1}{d_\kappa^2}$	$-6 \frac{1}{d_\kappa^2}$
$\bar{f}_{d=m}''$	$6 \frac{1}{d_\kappa^2}$	$-6 \frac{1}{d_\kappa^2}$	$4 \frac{1}{d_\kappa}$	$2 \frac{1}{d_\kappa}$
$\bar{f}_{d=m+1}''$	$6 \frac{1}{d_\kappa^2}$	$-6 \frac{1}{d_\kappa^2}$	$2 \frac{1}{d_\kappa}$	$4 \frac{1}{d_\kappa}$

Таблица 4.4

$$(\hat{m}_{ld}, \check{m}_{ld}, \hat{n}_{ld}, \check{n}_{ld})$$

$\int_0^{d_\kappa} f_d f_l'' dx$	$\tilde{f}_{l=\kappa}''$	$\tilde{f}_{l=\kappa+1}''$	$\bar{f}_{l=m}''$	$\bar{f}_{l=m+1}''$
$\tilde{f}_{d=\kappa}$	$-\frac{72}{60} \frac{1}{d_\kappa}$	$\frac{72}{60} \frac{1}{d_\kappa}$	$-\frac{66}{60}$	$-\frac{6}{60}$
$\tilde{f}_{d=\kappa+1}$	$\frac{72}{60} \frac{1}{d_\kappa}$	$-\frac{72}{60} \frac{1}{d_\kappa}$	$\frac{6}{60}$	$\frac{66}{60}$
$\bar{f}_{d=m}$	$-\frac{6}{60}$	$\frac{6}{60}$	$-\frac{8}{60} d_\kappa$	$\frac{2}{60} d_\kappa$
$\bar{f}_{d=m+1}$	$-\frac{6}{60}$	$\frac{6}{60}$	$\frac{2}{60} d_\kappa$	$-\frac{8}{60} d_\kappa$

Рис.4.3,б. Таблицы значений интегралов вида  $\int_0^{d_\kappa} f_d^{(n)} f_l^{(m)} dx$   
к подсчету коэффициентов матриц из (4.1)

$$\left. \begin{aligned}
M_1 &= -D \left( \sum_{d=1}^{n_3} W_d(s) f_d''(x) + \nu \sum_{d=1}^{n_3} W_d''(s) f_d(x) \right); \\
M_2 &= -D \left( \sum_{d=1}^{n_3} W_d''(s) f_d(x) + \nu \sum_{d=1}^{n_3} W_d(s) f_d(x) \right) - \\
&\quad - E \sum_{d=1}^{n_3} W_d''(s) f_d(x) \sum_j J_j \sigma(x - x_j); \\
H &= -(1 - \nu) D \left( \sum_{d=1}^{n_3} W_d'(s) f_d'(x) \right).
\end{aligned} \right\} \quad (4.39)$$

Рассмотрим решение контактной задачи для оболочки с ребром, обладающим моментом инерции  $J_m$ , статическим моментом  $S_m$  и площадью сечения  $F_m$ , а жесткостью которого на кручение и изгиб из плоскости можно пренебречь, и параллельным оси  $Ox$ .

Дифференциальные уравнения равновесия для стержня параллельного оси  $Ox$ , жесткостью которого на изгиб из плоскости и на кручение можно пренебречь, имеет вид

$$\left. \begin{aligned}
\frac{dN_1}{dx} + \tilde{q}_x &= 0; \\
\frac{d^2 M}{dx^2} + \tilde{q}_n &= 0.
\end{aligned} \right\} \quad (4.40)$$

Физические зависимости относительно произвольной оси стержня:

$$\left. \begin{aligned}
N_1 &= (EF_m) \varepsilon_1 + (ES_m) \varkappa_1; \\
M_1 &= (ES_m) \varepsilon_1 + (EJ_m) \varkappa_1.
\end{aligned} \right\} \quad (4.41)$$

Компоненты деформации для такого стержня  $\varepsilon_1$  и  $\varkappa_1$  связаны с перемещениями  $U(x, s = \text{const})$  и  $V(x, s = \text{const})$  зависимостями (2.6).

Принимая за возможные перемещения для ребра возможные перемещения для оболочки и воспользовавшись принципом возможных перемещений, составим интегральные условия равновесия, равные:

$$\begin{aligned}
& - \sum_{d=1}^{n_1} U_i(s) \int_0^l (EF_m) \xi_i'(x) \xi_k'(x) dx + \sum_{d=1}^{n_3} W_d(s) \int_0^l (ES_m) f_d''(x) \xi_k'(x) dx + \\
& + \int_0^l \tilde{q}_x \xi_k(x) dx + |N_1 \xi_k|_0^l = 0;
\end{aligned}$$

$$\sum_{d=1}^{n_1} U_i(s) \int_0^l (ES_m) \xi_i'(x) f_l''(x) dx + \sum_{d=1}^{n_3} W_d(s) \int_0^l (EJ_m) f_d''(x) f_l''(x) dx + \int_0^l \tilde{q}_x f_l(x) dx + |\bar{Q}_1 f_l|_0^l - |M_1 f_l|_0^l = 0. \quad (4.42)$$

где за нагрузку  $\tilde{q}_x$  принимается распределенная нагрузка  $q_x$ , действующая на стержень, и сдвигающие силы при  $s=\text{const}$ , действующие со стороны оболочки на стержень, а за нагрузку  $\tilde{q}_n$  принимается распределенная нагрузка  $q_n$ , действующая на стержень, и поперечные силы  $\bar{Q}_2$ , действующие на стержень со стороны оболочки.

Таким образом, решение контактной задачи оболочки с ребром относительно произвольной оси стержня, жесткостью которого на кручение и на изгиб из плоскости можно пренебречь, сводится к решению системы алгебраических уравнений (4.42) относительно обобщенных перемещений  $U_i(s)$  и  $W_d(s)$  при свободных членах от нагрузки, равных соответственно сумме обобщенных сдвигающих усилий и обобщенной внешней нагрузки от  $q_x$  и сумме обобщенных поперечных усилий от  $\bar{Q}_2$  и обобщенной внешней нагрузки от  $q_n$ .

Разрешающие дифференциальные уравнения для плоского напряженно-деформированного состояния при определении напряженно-деформированного состояния оболочки в нулевом приближении для каждого участка при решении методом возмущения имеют вид первых двух векторных уравнений из (2.53), коэффициенты матриц из (2.53) находятся по формулам (2.11), а при наличии податливой связи на сжатие с учетом формулы (3.19) и на изгиб с учетом формулы (4.12).

Рассмотрим влияние податливой связи при учете сжатия от изгиба и изгиба от сжатия на коэффициенты из (2.10).

Пусть  $r_{msj}$  жесткость податливой связи на растяжение-сжатие от единичного угла поворота, а  $r_{smj}$  жесткость на изгиб от единичного смещения. Из теоремы Бетти о взаимности работ следует, что  $r_{msj} = r_{smj}$ .

Жесткость  $r_{msj}$  принимается положительной, если от действия положительно направленных моментов  $M_1$  (рис.2.4) на податливую связь, в этой связи возникает растягивающее усилие  $N_1$  (рис.2.4), т.е. когда эксцентриситет центра тяжести податливой связи по отношению к срединной поверхности оболочки положителен.

Из (3.15) выпишем выражение, учитывающее влияние податливой связи на первое уравнение из (2.10)

$$\left[ N_1 \xi_k \right]_{x_{j+}}^{x_{j-}} = N_1(x_j, s) \xi_k(x_{j-}) - N_1(x_j, s) \xi_k(x_{j+}) ,$$

где усилие  $N_1$  от изгиба в точке  $x_j$  равно

$$N_1 = r_{msj} \chi_1 , \quad (4.43)$$

или, учитывая выражение для  $\chi_1$  из (2.6) и наличие разрывов в перемещениях  $U(x_j, s)$  и  $W'_x(x_j, s)$ , обусловленных податливой связью на изгиб и сжатие в точке  $x_j$ ,

$$N_1 = -r_{msj} (W'_x(x_{j+}, s) - W'_x(x_{j-}, s)) , \quad (4.44)$$

или, учитывая (2.7) и опуская знак суммы  $\sum_{d=1}^{n_3}$ ,

$$N_1 = -r_{msj} (W_d(s) f'_d(x_{j+}) - W_d(s) f'_d(x_{j-})) . \quad (4.45)$$

Из (4.45) видно, что учет податливой связи на сжатие от изгиба, влияет на коэффициенты матрицы при обобщенных перемещениях  $W_d(s)$  из (2.10) и не влияет на другие коэффициенты первого уравнения из (2.10).

Для возможных перемещений  $\xi_i(x)$  и  $f_d(x)$ , изображенных на рис.3.4 и на рис.4.1, коэффициенты  $\tilde{e}_{kd}$  для функций непосредственно расположенных у точки  $x_j$ , учитывающие взаимное влияние изгиба на сжатие, имеет вид:

$$\left. \begin{aligned} \tilde{e}_{k=i+1, d=m} &= \int_0^l C f_d''(x) \xi_k'(x) dx + r_{msj} ; \\ \tilde{e}_{k=i+2, d=m+1} &= \int_0^l C f_d''(x) \xi_k'(x) dx + r_{msj} ; \\ \tilde{e}_{k=i+1, d=m+1} &= \tilde{e}_{k=i+1, d=m} = -r_{msj} . \end{aligned} \right\} \quad (4.46)$$

Соответственно влияние податливой связи на изгиб от сжатия учитывается третьим уравнением из (2.10), согласно (4.8)

$$\left[ M_1 f_l \right]_{x_{j+}}^{x_{j-}} = M_1(x_j, s) f_l'(x_{j-}) - M_1(x_j, s) f_l'(x_{j+}) ,$$



где момент  $M_1$  от растяжения-сжатия в точке  $x_j$  равен

$$M_1 = r_{smj} \epsilon_1; \quad (4.47)$$

или  $M_1 = r_{smj} (U(x_{j+}, s) - U(x_{j-}, s))$ , (4.48) или, учитывая (2.7) и опуская

знак суммы  $\sum_{i=1}^{n_1}$ ,

$$M_1 = r_{smj} (U_i(s) \xi_i(x_{j+}) - U_i(s) \xi_i(x_{j-})). \quad (4.49)$$

Из (4.49) видно, что учет податливой связи на изгиб от сжатия влияет на коэффициенты матрицы при обобщенных перемещениях  $U_i(s)$  из третьего уравнения (2.10). Тогда для  $\xi_i(x)$  и  $f_d(x)$ , изображенных на рис.3.4. и на рис.4.1, коэффициенты  $\tilde{e}_{li}$  из третьего уравнения (2.10) равны

$$\left. \begin{aligned} \tilde{e}_{l=m, i=i+1} &= \int_0^l C \xi_i'(x) f_l'' dx + r_{smj} \\ \tilde{e}_{l=m+1, i=i+2} &= \int_0^l C \xi_i'(x) f_l'' dx + r_{smj} \\ \tilde{e}_{l=m, i=i+2} &= \tilde{e}_{l=m+1, i=i+1} = -r_{smj} \end{aligned} \right\}; \quad (4.50)$$

Таким образом, зависимость из (2.11)

$$\tilde{e}_{kd} = \tilde{e}_{li}, \quad d=l, \quad k=i$$

сохраняется и при учете взаимного влияния сжатие-изгиб в податливой связи на коэффициенты системы уравнений из (2.10).

Выпишем систему разрешающих дифференциальных уравнений для плоской задачи из (2.53)

$$\left. \begin{aligned} A\vec{U}_0''(s) - B\vec{U}_0(s) + C\vec{V}_0'(s) &= -D\vec{W}_0''(s) - E\vec{W}_0(s) - \vec{F}_1; \\ -C^T\vec{U}_0'(s) + F\vec{V}_0''(s) - G\vec{V}_0(s) &= H\vec{W}_0'''(s) - K\vec{W}_0'(s) - \vec{F}_2. \end{aligned} \right\} \quad (4.51)$$

Для случая, когда вектор свободных членов от внешней нагрузки  $\vec{F}_3$  из (4.1) не зависит от координаты  $s$ , то частное решение  $X_{*j}$  имеет вид постоянной от  $s$ , т.е.

$$\frac{d}{ds} \vec{X}_* = 0, \quad (4.52)$$

и общее решение  $\vec{X}(s)$  из (4.23, 4.35) складывается из суммы общего решения однородных дифференциальных уравнений  $\vec{X}_1(s)$ , соответствующих значениям  $(\sqrt{\lambda_j})$ , и  $\vec{X}_2(s)$ , соответствующих значениям  $(-\sqrt{\lambda_j})$ , и частного решения  $\vec{X}_*$ , имеющего вид постоянной от  $s$ , т.е.

$$\vec{X}(s) = \vec{X}_1(s) + \vec{X}_2(s) + \vec{X}_*. \quad (4.53)$$

Из решений однородных дифференциальных уравнений (4.23, 4.35) следует, что

$$\frac{d^n}{ds^n} \vec{X}_i(s) = J_\rho^n(\xi) \vec{X}_i(s), \quad (i=1,2), \quad (4.54)$$

где  $J_\rho(\xi)$  матрица канонической формы из (4.23, 4.35) с диагональными элементами соответственно  $\xi_j = (\sqrt{\lambda_j})$ ,  $\xi_j = (-\sqrt{\lambda_j})$ .

Отметим, что комплексным функциям  $x_{i,j}(s)$  и  $x_{i,j+1}(s)$ , соответствующим комплексно-сопряженным диагональным элементам матрицы  $J_\rho(\xi)$   $\xi_j$  и, соответствует матрица комплексная

$$J_\rho(\xi_j) = \begin{array}{|c|c|} \hline \xi_j & \\ \hline & \xi_{j+1} = \bar{\xi}_j \\ \hline \end{array}, \quad (4.55)$$

а для действительных функций  $\tilde{x}_{i,j}(s)$  и  $\tilde{x}_{i,j+1}(s)$  соответствующих комплексно-сопряженным диагональным элементам матрицы  $J_\rho(\xi)$   $\xi_j$  и  $\xi_{j+1} = \bar{\xi}_j$ , и полученных из комплексных функций  $\tilde{x}_{i,j}(s)$  и  $\tilde{x}_{i,j+1}(s)$  путем перехода (4.26, 2.95), соответствует действительная матрица

$$J_\rho(\xi_j) = \begin{array}{|c|c|} \hline \text{Re}(\xi_j) & \text{Im}(\xi_j) \\ \hline -\text{Im}(\xi_j) & \text{Re}(\xi_j) \\ \hline \end{array}, \quad (4.56)$$

Как видно из (4.54), матрицы  $J_\rho(\sqrt{\lambda})$  и  $J_\rho(-\sqrt{\lambda})$  связаны соотношением

$$J_\rho(-\sqrt{\lambda}) = -J_\rho(\sqrt{\lambda}). \quad (4.57)$$

Из (4.22) следует, что

$$\vec{W}_0(s) = T_1(\vec{X}_1(s) + \vec{X}_2(s) + \vec{X}_*), \quad (4.58)$$

где  $T_1$  подматрица, состоящая из строк матрицы  $T$ , соответствующих обобщенным перемещениям  $\vec{W}_0(s)$  в (4.22).

Подставляя (4.58) в (4.51) и учитывая выражения (4.52, 4.54, 4.57), после преобразований получаем

$$\left. \begin{aligned} A\vec{U}_0''(s) - B\vec{U}_0(s) + C\vec{V}_0'(s) &= S_1\vec{X}_1(s) + S_1\vec{X}_2(s) - \vec{F}_{11}; \\ -C^T\vec{U}_0'(s) + F\vec{V}_0''(s) - G\vec{V}_0(s) &= S_2\vec{X}_1(s) - S_2\vec{X}_2(s) - \vec{F}_2, \end{aligned} \right\} \quad (4.59)$$

где матрицы  $S_1$  и  $S_2$  имеют вид

$$S_1 = -D \cdot T_1 \cdot J_\rho(\lambda) - E \cdot T_1, \quad (4.60)$$

$$S_2 = \{H \cdot T_1 \cdot J_\rho(\lambda) - K \cdot T_1\} \cdot J_\rho(\sqrt{\lambda}), \quad (4.61)$$

а вектор свободных членов от нагрузки  $\vec{F}_{11}$  равен

$$\vec{F}_{11} = \vec{F}_1 + E \cdot T_1 \cdot \vec{X}_*. \quad (4.62)$$

### 4.3. Анализ напряженно-деформированного состояния круговой цилиндрической оболочки с проемом и приближенные критерии точности расчета

Рассмотрим нахождение частного решения системы разрешающих дифференциальных уравнений для оболочки (2.10) при постоянных свободных членах от нагрузки непосредственно из самой системы. Для этого предварительно разберем нахождение частного решения для плоской задачи, т.е. для системы (4.51), когда свободные члены от нагрузки не зависят от переменной  $s$ .

Будем искать решение в форме полинома четвертой степени от  $s$

$$\begin{pmatrix} \vec{U}_*(s) \\ \vec{V}_*(s) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{x} \\ \vec{o} \end{pmatrix} s^4 + \begin{pmatrix} \vec{o} \\ \vec{y} \end{pmatrix} s^3 + \begin{pmatrix} \vec{\mu} \\ \vec{\eta} \end{pmatrix} s^2 + \begin{pmatrix} \vec{\gamma} \\ \vec{\tau} \end{pmatrix} s + \begin{pmatrix} \vec{\xi} \\ \vec{\beta} \end{pmatrix}, \quad (4.63)$$

где  $\vec{o}$  – нулевой вектор-столбец.

Причем вектор при  $(s)^4$  должен удовлетворять уравнению

$$B \cdot \vec{x} = 0, \quad (4.64)$$

где  $\vec{x}$  – вектор-столбец постоянных  $x=0$ , если  $\det(B) \neq 0$ , и  $x \neq 0$ , если  $\det(B)=0$ .

Тогда вектор при  $(s)^3$  должен быть равен

$$G \cdot \vec{y} = -4 \cdot C^T \cdot \vec{x}, \quad (4.65)$$

причем для вектора-столбца  $\vec{y}$  с точностью до произвольного множителя  $x$  всегда можно найти решение, отличное от нулевого, так например, если  $\det(G) \neq 0$ , то и характеристический определитель, полученный путем замены строки  $G$  строкой свободных членов, также равен нулю.

Вектор при  $(s)^2$  должен удовлетворять уравнениям

$$B \cdot \vec{\mu} = 3 \cdot C \cdot \vec{y} + 12 \cdot A \cdot \vec{x}, \quad (4.66)$$

$$G \cdot \vec{\eta} = 0, \quad (4.67)$$

где  $\vec{\eta}$  – вектор-столбец постоянных  $\eta=0$ ,  $\det(G) \neq 0$ , а для вектора-столбца  $\vec{\mu}$  с точностью до множителя  $x$  из (4.64) всегда можно найти решение, отличное от тождественно равного нулю.

Вектор при  $(s)$  должен будет удовлетворять уравнениям

$$G \cdot \vec{\tau} = -2 \cdot C^T \cdot \vec{\mu} + 6 \cdot F \cdot \vec{y}, \quad (4.68)$$

$$B \cdot \vec{\gamma} = 2 \cdot G \cdot \vec{\eta}, \quad (4.69)$$

где для вектор-столбцов  $\vec{\tau}$  и  $\vec{\gamma}$  с точностью до множителей  $x$  и  $\eta$  можно найти решения, отличные от тождественно нулевых.

Свободный вектор, независимый от  $s$ , из (4.63) находится из уравнений

$$B \cdot \vec{\xi} = C \cdot \vec{\tau} + 2 \cdot A \cdot \vec{\mu} + \vec{F}_1, \quad (4.70)$$

$$G \cdot \vec{\beta} = -C^T \cdot \vec{\gamma} + 2 \cdot F \cdot \vec{\eta} + \vec{F}_2, \quad (4.71)$$

причем, учитывая (4.64-4.69), имеем в (4.70) для случая, когда  $\det(B) \neq 0$ :

$$\vec{\xi} = B^{-1} \cdot \vec{F}_1,$$

а когда  $\det(B)=0$ : систему  $n_1$  уравнений с  $(n_1+1)$  неизвестными  $\left\{ \left\{ \vec{\xi} \right\}^T, x \right\}$ , где, принимая один из коэффициентов вектора  $\vec{\xi}$  равным, например, нулю, получим  $n_1$  уравнений с  $n_1$  неизвестными и с определителем отличным от нуля, а в (4.71) для случая, когда  $\det(G) \neq 0$ :  $\vec{\beta} = G^{-1} \cdot \vec{F}_2$ , а когда  $\det(G)=0$ : систему  $n_2$  уравнений с  $(n_2+1)$  неизвестными  $\left\{ \left\{ \vec{\beta} \right\}^T, \eta \right\}$  для которой с точностью до одного из коэффициентов вектора  $\vec{\beta}$  находим решение.

Теперь найдем частное решение при постоянных свободных членах от нагрузки для оболочки, т.е. для системы (2.10).

Как и для плоской задачи будем искать решение в виде полинома четвертой степени от  $s$

$$\begin{pmatrix} \vec{U}_*(s) \\ \vec{V}_*(s) \\ \vec{W}_*(s) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{x} \\ \vec{o} \\ \vec{o} \end{pmatrix} s^4 + \begin{pmatrix} \vec{o} \\ \vec{y} \\ \vec{o} \end{pmatrix} s^3 + \begin{pmatrix} \vec{\mu} \\ \vec{\eta} \\ \vec{g} \end{pmatrix} s^2 + \begin{pmatrix} \vec{\gamma} \\ \vec{\tau} \\ \vec{k} \end{pmatrix} s + \begin{pmatrix} \vec{\xi} \\ \vec{\beta} \\ \vec{\alpha} \end{pmatrix}. \quad (4.72)$$

Тогда, учитывая, что рассуждения для (4.64-4.71) имеют место и в случае оболочек, имеем следующее:

– вектор при  $(s)^4$  должен удовлетворять уравнению

$$\left. \begin{aligned} -B \cdot \vec{x} &= 0; \\ E^T \cdot \vec{x} &= 0; \end{aligned} \right\} \quad (4.73)$$

– вектор при  $(s)^3$  должен удовлетворять уравнению

$$G \cdot \vec{y} = -4 \cdot C^T \cdot \vec{x}; \quad (4.74)$$

– вектор при  $(s)^2$  должен удовлетворять уравнениям

$$\left. \begin{aligned} -B \cdot \vec{\mu} + E \cdot \vec{g} &= -3 \cdot C \cdot \vec{y} - 12 \cdot A \cdot \vec{x}; \\ E^T \cdot \vec{\mu} - N \cdot \vec{g} &= 3 \cdot K^T \cdot \vec{y} - 12 \cdot D^T \cdot \vec{x}; \end{aligned} \right\} \quad (4.75)$$

$$G \cdot \vec{\eta} = 0; \quad (4.76)$$

– вектор при (s) должен удовлетворять условиям

$$G \cdot \vec{\tau} = -2 \cdot C^T \cdot \vec{\mu} + 2 \cdot K \cdot \vec{g} + 6 \cdot F \cdot \vec{y}; \quad (4.77)$$

$$\left. \begin{aligned} -B \cdot \vec{\gamma} + E \cdot \vec{k} &= -2 \cdot C \cdot \vec{\eta}; \\ E^T \cdot \vec{\gamma} - N \cdot \vec{k} &= 2 \cdot K^T \cdot \vec{\eta}; \end{aligned} \right\} \quad (4.78)$$

– вектор свободных членов находится из уравнений

$$\left. \begin{aligned} -B \cdot \vec{\xi} + E \cdot \vec{\lambda} &= -C \cdot \vec{\tau} - 2 \cdot A \cdot \vec{\mu} - 2 \cdot D \cdot \vec{g} - \vec{F}_1; \\ E^T \cdot \vec{\xi} - N \cdot \vec{\alpha} &= K^T \cdot \vec{\tau} - 2 \cdot D^T \cdot \vec{\mu} - 2 \cdot M \cdot \vec{g} - \vec{F}_3; \end{aligned} \right\} \quad (4.79)$$

$$G \cdot \vec{\beta} = -C^T \cdot \vec{\gamma} + K \cdot \vec{k} + 2 \cdot F \cdot \vec{\eta} + \vec{F}_2. \quad (4.80)$$

Имея частное решение системы (2.10) в виде (4.72) и находя общее решение системы однородных дифференциальных уравнений при помощи метода возмущения, получаем общий интеграл системы (2.10) для каждого участка при любых граничных условиях, а после решения контактной задачи и напряженно-деформированное состояние всей оболочки с отверстием.

Приближенным критерием точности решения системы однородных дифференциальных уравнений при использовании метода возмущения является сходимость итерационного процесса или ошибка, получающаяся после подстановки собственных векторов для каждой произвольной постоянной в исходную систему и отличная от нуля. Точность тем больше, чем меньше ошибка.

Автором составлена программа *POTL3* определения напряженно-деформированного состояния оболочки с отверстием с одной или двумя осями симметрии на языке фортран.

Программа *POTL3* может учитывать дискретно расположенные ребра параллельные оси  $O_s$ , которые могут иметь податливость на сжатие-исгиб в направлении оси  $Ox$ . Программа позволяет учитывать усиление отверстия элементами жесткости типа накладки и эксцентрично расположенным ребром по контуру отверстия, а также близость расположения отверстия к граничным условиям закрепления.

Сравнение результатов расчета по определению напряженно-деформированного состояния цилиндрической оболочки с проемом с уже имеющимися данными на рис.4.4.

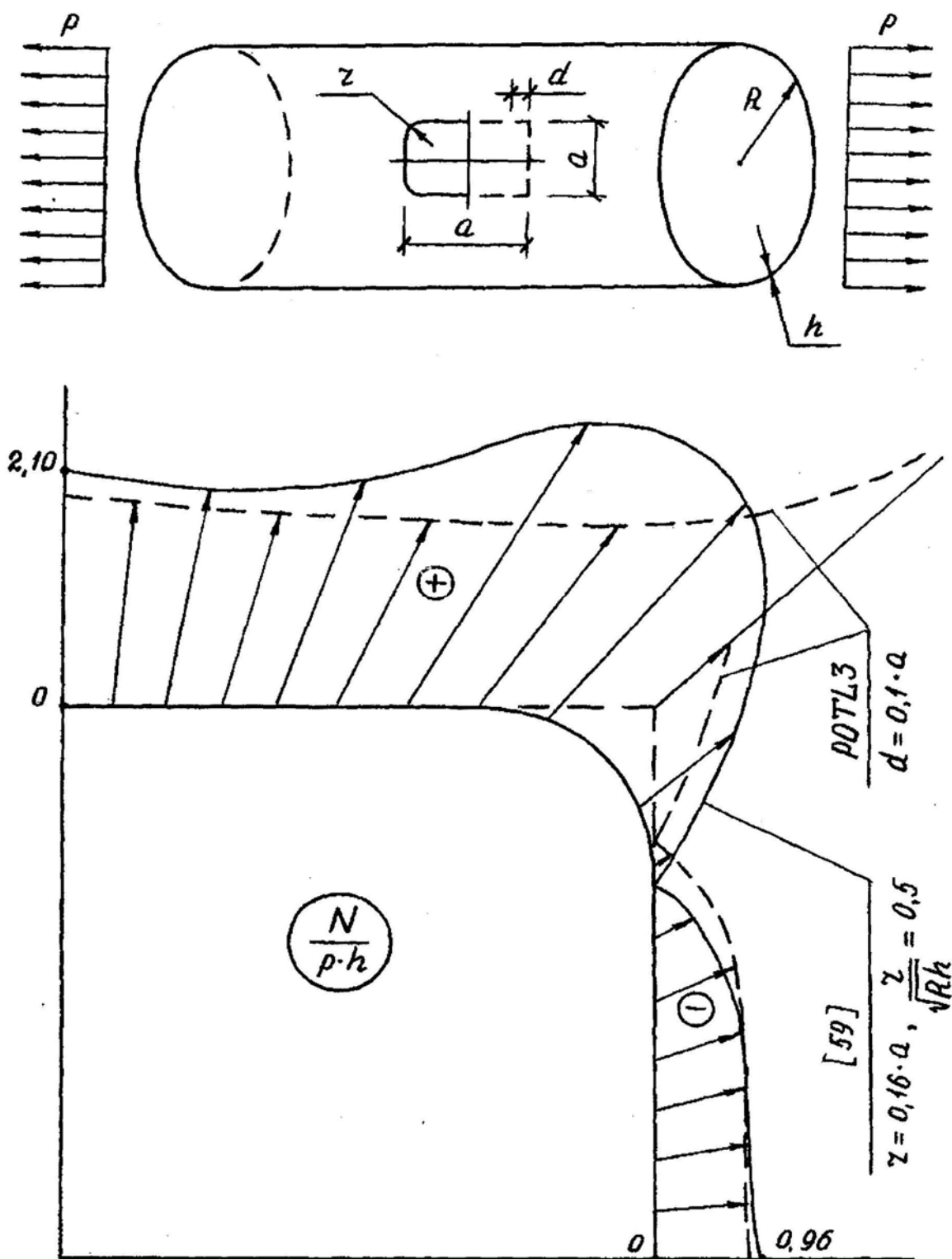


Рис.4.4. Сравнение результатов расчета по определению НДС цилиндрической оболочки с отверстием с уже имеющимися

Общий вид, привязка отверстия к краю оболочки и напряженно-деформированное состояние новой конструкции алюминиевого спирально-навивного силоса емкостью 250 т с диаметром 8 м и высотой 6,5 м с дверным проемом, разработанным институтом ВИЛС, представлены на рис.4.5.-4.7. Дверной проем усилен элементами жесткости типа накладки и эксцентрично расположенного ребра по контуру отверстия. Статическая нагрузка от зерна принята по Янсену.

Из анализа НДС видно, что возмущение в НДС, вызванное наличием отверстия, усиленного элементами жесткости, носит ярко выраженный местный характер. Так на удалении примерно на от накладки, НДС силоса с отверстием примерно равно НДС этого силоса без возмущающих факторов. Причем учет податливости дискретно расположенных фальцевых ребер приводит к значительному изменению НДС оболочки с отверстием по сравнению с обычными ребрами. Так в верхнем сечении над усилением отверстия учет податливости ребер снижает коэффициент концентрации усилия на 30-40% (рис.4.6.-4.7.).



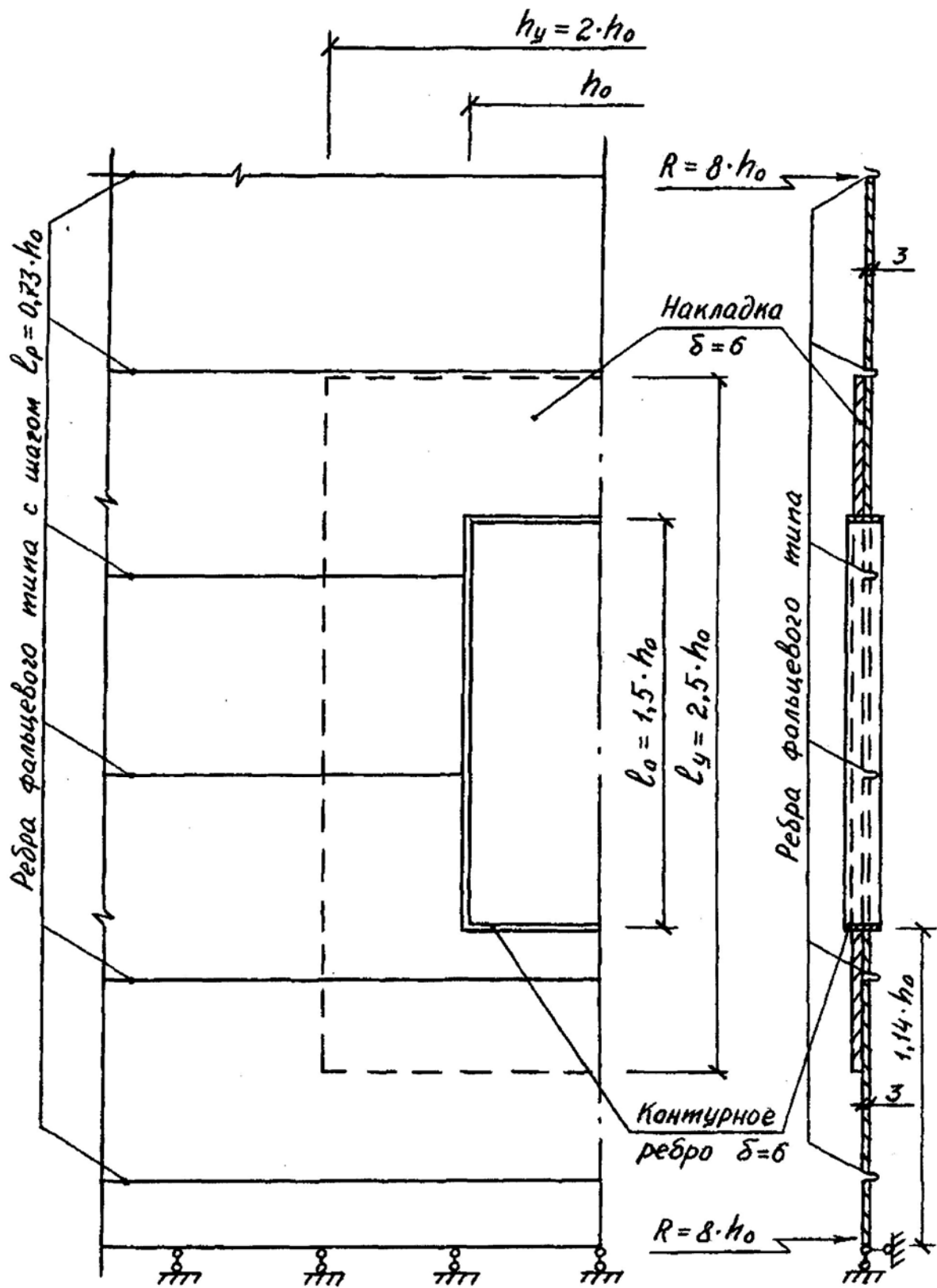


Рис.4.5. Общий вид алюминиевого силоса емкостью 250 т в зоне дверного проема при  $h_0 = 50$  см

$$[N_1] = \left[ \frac{\text{кН}}{\text{м}} \right]$$

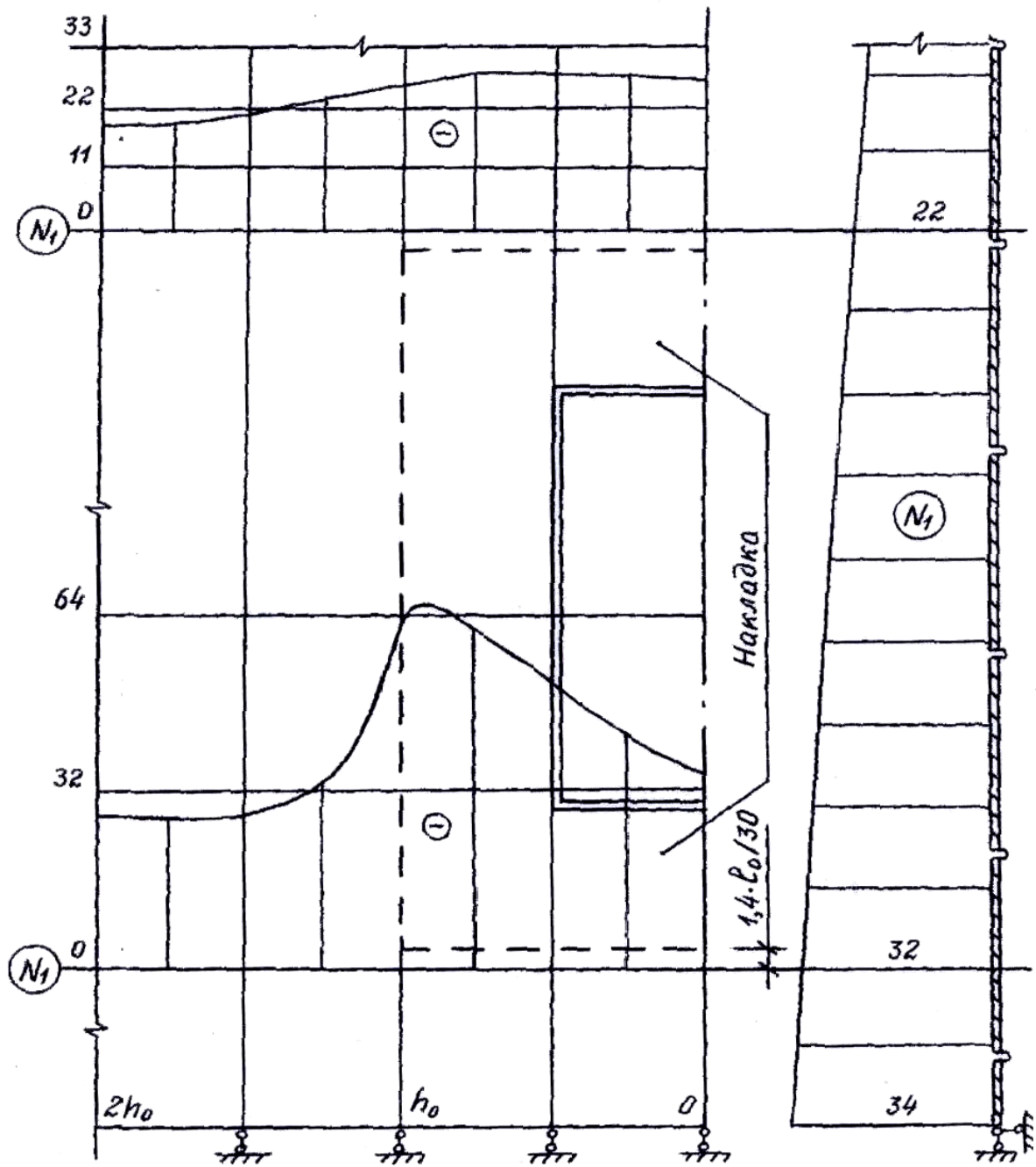


Рис.4.6. НДС спирально-навивного силоса емкостью 250 т

$$[M_1] = [H]; [q_n] = [\text{кПа}]$$

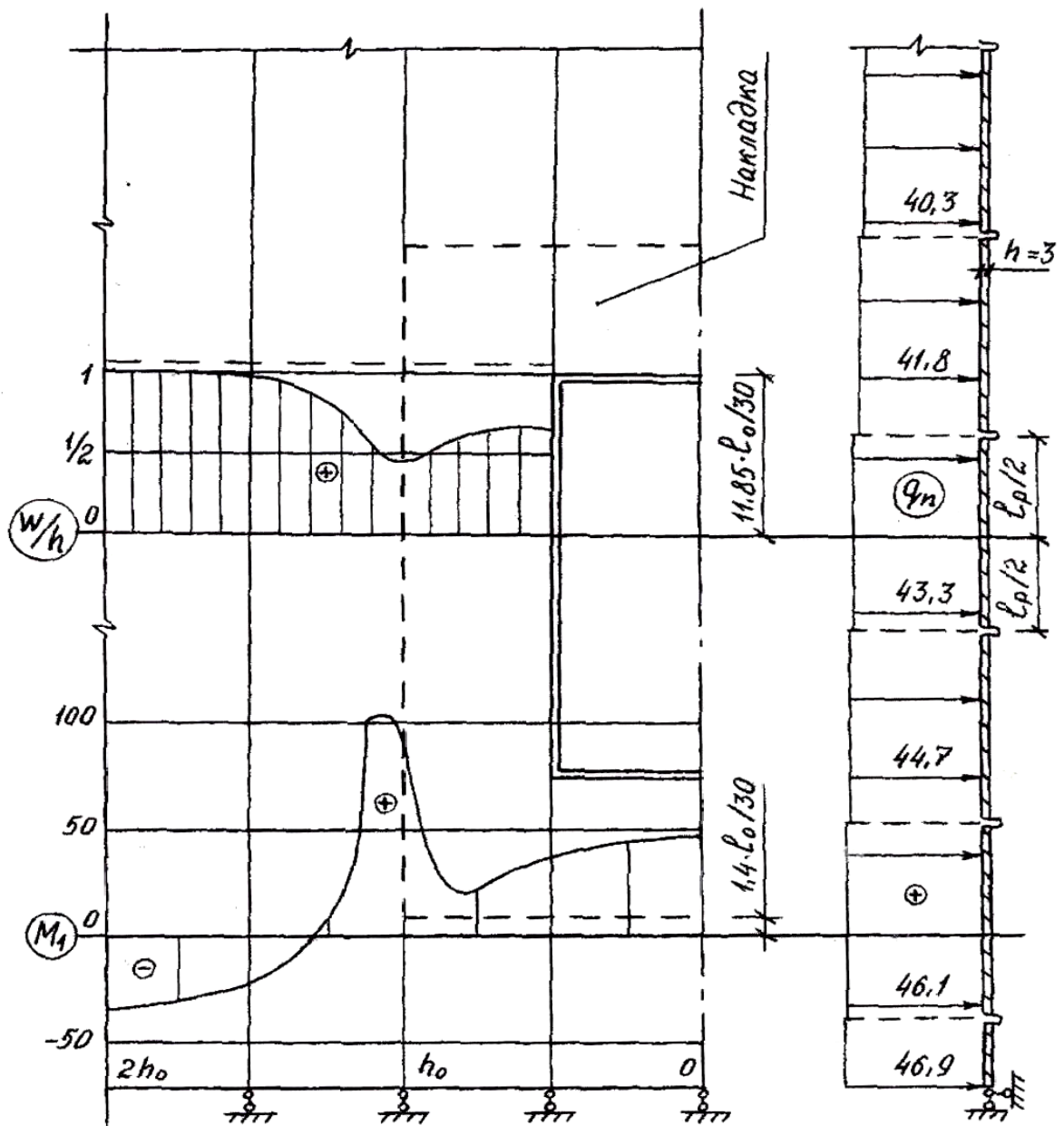


Рис.4.7. НДС спирально-навивного силоса емкостью 250 т

#### 4.4. Выводы

1. Рассмотрено влияние податливой связи на изгиб на коэффициенты системы разрешающих дифференциальных уравнений.

2. Рассмотрены способы приведения системы  $n_3$  разрешающих дифференциальных уравнений четвертого порядка изгиба плиты на упругом основании к системе  $2n_3$  дифференциальных уравнений второго порядка для решения задачи на ЭВМ.

3. Показан переход от комплексных функций к действительным для случая комплексно-сопряженных корней характеристического уравнения при интегрировании системы дифференциальных уравнений второго порядка.

4. Доказывается полученная автором формула получения ортонормированной матрицы собственных векторов по методике, задаваемой матрицей при производных от функций в системе разрешающих дифференциальных уравнений.

5. Для аппроксимации неизвестной функции от  $W(x,s)$  по координате  $x$  выбраны, с точностью до определяемых множителей  $W_a(s)$ , уравнения прогибов прямой балки с жестко заделанными концами в характерных точках элементарной полоски заделанными концами в характерных точках элементарной полоски  $ds$  каждого участка от единичного смещения и от единичного угла поворота заделки. Приведены формулы для подсчета коэффициентов матриц из системы разрешающих дифференциальных уравнений для изгиба пластины на упругом основании, как при наличии податливой связи на изгиб, так и без нее.

6. Составлена программа *PIZPL* для расчета пластины с отверстием на упругом основании с одной или с двумя осями симметрии на ЕС ЭВМ на языке Фортран.

7. Рассмотрено решение контактной задачи для оболочки с ребром, расположенным параллельно направляющей цилиндрической оболочки, жесткостью которого на кручение и на изгиб из плоскости ребра можно пренебречь, относительно произвольной оси стержня.

8. Рассмотрено взаимное влияние сжатие-изгиб податливой связи на коэффициенты системы разрешающих дифференциальных уравнений.

9. При постоянных членах от нагрузки получено частное решение для системы разрешающих дифференциальных уравнений как для плоской задачи, так и для оболочки, непосредственно из самой системы

разрешающих уравнений независимо от условий закрепления элементарной полоски  $ds$  при  $x=0$  и  $x=l$  для каждого участка.

10. Составлена программа ROTL3 определения напряженно-деформированного состояния круговой пологой цилиндрической оболочки с отверстием с одной или с двумя осями симметрии на языке программирования Фортран.

11. Проведены расчет цилиндрической оболочки с отверстием и сравнение результатов расчета с уже имеющимися.

12. Произведены расчет на прочность новой конструкции спирально-навивного силоса емкостью 250 т в зоне дверного проема и анализ его напряженно-деформированного состояния.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Основные выводы данной работы заключаются в следующем:

1. Разработана прикладная методика, основанная на применении вариационного метода В.З.Власова, позволяющего сводить двумерные задачи расчёта оболочек к одномерной, применительно к расчёту круговых цилиндрических оболочек с подкрепляющими ребрами фальцевого типа с прямоугольным отверстием, усиленным элементами жёсткости.

2. Построены разрешающие дифференциальные уравнения в перемещениях, при использовании вариационного метода В.З.Власова, для пологой круговой цилиндрической оболочки относительно произвольной начальной поверхности при наличии ребер фальцевого типа в кольцевом направлении.

3. Рассмотрено решение контактной задачи оболочки с ребром, усиливающим оболочку в продольном направлении, жёсткостью которого на кручение и на изгиб из плоскости можно пренебречь, для случая когда линия контакта не переходит через центр тяжести ребра.

4. При интегрировании системы дифференциальных уравнений на ЭВМ, что связано с вопросом приведения матрицы к канонической форме преобразованием подобия, применён метод возмущения, что позволяет значительно точнее находить общий интеграл системы разрешающих дифференциальных уравнений, состоящей из матриц больших размеров. Показан переход от комплексных функций к действительным для комплексно-сопряжённых корней характеристического уравнения системы. Доказывается полученная автором формула нахождения ортонормированной матрицы собственных векторов по методике, задаваемой матрицей при производных от функции в системе дифференциальных уравнений.

5. При постоянных свободных членах от нагрузки, не зависящей от переменной интегрирования, получено частное решение при нахождении общего интеграла системы непосредственно из самой системы разрешающих дифференциальных уравнений, что позволяет находить решение для системы однородных дифференциальных уравнений методом возмущения, что значительно более проще, чем определение частного решения по методу возмущения.

6. Составлен алгоритм и разработаны программы расчёта определения напряжённо-деформированного состояния для оболочки с проёмом, для расчёта плоской пластинки с проёмом и для расчёта

пластинки на упругом основании с проёмом. Выполнены расчёты конкретных конструкций.

7. Проведённые численные исследования напряжённо-деформированного состояния и сопоставление их с уже имеющимися результатами расчёта показало возможность применения разработанной методики к задачам подобного типа.

8. Результаты расчёта показали, что учёт в расчётной схеме податливой связи приводит к существенному снижению концентрации напряжений.

## БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Материалы XXVII съезда КПСС [Текст]. – М.: Политиздат, 1986. – 352 с.
2. Абовский, Н.П. Вариационные принципы теории упругости и теории оболочек [Текст] / Н.П. Абовский, Н.П. Андреев, А.П. Деруга; под ред. Н.А.Абовского. – М.: Наука, 1978. – 288 с.
3. Абовский, Н.П. Пологие оболочки, подкреплённые ребрами произвольной ориентации [Текст] / Н.П. Абовский, И.И. Гетц. – Красноярск, 1973. – 115 с.
4. Александров, А.В. Строительная механика тонкостенных пространственных систем [Текст]: учебник / А.В. Александров, Б.Я. Лашенников, Н.Н. Шапошников. – М.: Стройиздат, 1983. – 488 с.
5. Амбрацумян, С.А. Общая теория анизотропных оболочек [Текст] / С.А. Амбрацумян. – М.: Наука, 1974. – 446 с.
6. Амиро, И.Я. Ребристые цилиндрические оболочки [Текст] / И.Я. Амиро, В.А. Заруцкий, П.С. Поляков. – Киев: Наукова думка. 1973. – 248 с.
7. Бережницкий, Л.Т. Изгиб тонких пластин с дефектами типа трещин [Текст] / Л.Т. Бережницкий, М.В. Делявский, В.В. Панасюк. – Киев: Наукова думка. 1979. – 400 с.
8. Болотин, В.В. К теории слоистых сред [Текст] / В.В. Болотин // Изв. АН СССР. ОТН. Механика и машиностроение. – 1963. – №3. – С.65-72.
9. Бубнов, И.Г. Строительная механика корабля [Текст] / И.Г. Бубнов. – СПб., 1914. – Ч.2. – С.331-640.
10. Вайнберг, Д.В. Концентрация напряжений в пластинах около отверстий и выкручек [Текст]: справ. пособие / Д.В. Вайнберг. – Киев: Техника. – 1969. – 220 с.
11. Вайнберг, Д.В. Справочник прочности, устойчивости и колебаниям пластин [Текст] / Д.В. Вайнберг. – Киев: Будивельник, 1973. – 488 с.
12. Вайнберг, Д.В. Матричные алгоритмы в теории оболочек вращения [Текст] / Д.В. Вайнберг, В.З. Ждан. – Киев: Изд-во при Киев. ун-те, 1967. – 164 с.
13. Вайнберг, Д.В. Расчёт оболочек [Текст] / Д.В. Вайнберг, А.Л. Синявский. – Киев: Госстройиздат УССР, 1961. – 119 с.
14. Варвак, А.П. Интегральные уравнения в теории пластин и оболочек, подкреплённых пересекающимися рёбрами [Текст] / А.П. Варвак



// Расчёт пространственных конструкций: сб. ст. – М.: Стройиздат, 1973. – Вып.15. – С.113-120.

15. Варвак, А.П. О погрешности теории ребристых оболочек, основанных на гипотезах Кирхгофа – Лява [Текст] / А.П. Варвак, В.А. Заруцкий // Прикладная механика. – 1970. –Т.6. – №6. – С.49-57.

16. Василенко, А.Г. К анализу напряжённого состояния некруговых цилиндрических оболочек с продольными ребрами жесткости [Текст] / А.Г. Василенко, Я.М. Григоренко, Н.Д. Панкратова // Прикладная механика. 1976. –Т.12. – №4. – С.117-121.

17. Власов, В.З. Общая теория оболочек и ее приложение в технике [Текст] / В.З. Власов. – М.-Л.: Гостехиздат, 1958. – 784 с.

18. Власов, В.З. Тонкостенные пространственные системы [Текст] / В.З. Власов. – М.: Госстройиздат, 1958. – 502 с.

19. Власов, В.З. Избранные труды. В 3 т. – Т.2 Тонкостенные упругие стержни. Принципы построения общей технической теории оболочек [Текст] / В.З. Власов. – М.: Изд-во АН СССР, 1963. – 507 с.

20. Вольмир, А.С. Устойчивость деформируемых систем [Текст] / А.С. Вольмир. –М.: Наука, 1967. – 984 с.

21. Гантмахер, Ф.Р. Теория матриц [Текст] / Ф.Р. Гантмахер. –М.: Наука, 1966.

22. Гетц, И.И. Расчёт и исследование пологих оболочек, подкреплённых рёбрами произвольной ориентации [Текст]: дис. ... канд. техн. наук / И.И. Гетц. – Красноярск, 1974. – 210 с.

23. Гильгур, З.Л. Практический способ расчёта ребер жесткости оболочек [Текст] / З.Л. Гильгур //Строительная механика и расчёт сооружений. – 1973. – №2. – С. 49-51.

24. Гольденвейзей, А.Л. Теория упругих тонких оболочек [Текст] / А.Л. Гольденвейзей. – М.: Гостехиздат, 1953. – 533 с.

25. Григолюк, Э.И. Устойчивость и колебания трехслойных оболочек [Текст] / Э.И. Григолюк, П.П. Чулков. – М.: Машиностроение, 1973. – 170 с.

26. Григоренко, Я.М. Решение задач теории оболочек на ЭВМ [Текст] / Я.М. Григоренко, А.П. Мукоед. – Киев: Вища школа, 1979. – 279 с.

27. Гузь, А.Н. Концентрация напряжений около отверстий в тонких оболочках [Текст] / А.Н. Гузь // Прикладная механика. – 1969. –Т.5. – №3. – С.25-33.

28. Гузь, А.Н. Методы расчёта оболочек. Т.1. Теория оболочек, ослабленных отверстиями [Текст] / А.Н. Гузь, И.С. Чернышенко, К.И. Шнеренко. – Киев: Наукова думка, 1980.

30. Гузь, А.Н. Цилиндрические оболочки, ослабленные отверстиями [Текст] / А.Н. Гузь, И.С. Чернышенко, Вал.Н. Чехов, Вик.Н. Чехов, К.И. Шнеренко // Цилиндрические оболочки, ослабленные отверстиями. – Киев: Наукова думка, 1974. – 271 с.

31. Гузь, А.Н. Сферические днища, ослабленные отверстиями [Текст] / А.Н. Гузь, И.С. Чернышенко, К.И. Шнеренко. – Киев: Наукова думка, 1970. – 323 с.

32. Деруга, А.П. Некоторые вариационно-разностные схемы расчёта неоднородных анизотропных ребристых оболочек и эффективные алгоритмы их реализации [Текст] / А.П. Деруга, Н.П. Абовский, Н.П. Андреев // Пространственные конструкции в Красноярском крае. – 1977. – №10. – С.74-92.

33. Золотов, О.Н. Методы расчёта и исследование работы конструкций покрытий из оболочек с разрывными параметрами [Текст]: дис. ... канд. техн. наук / О.Н. Золотов. – М., 1971. – 149 с.

34. Золотов, О.Н. Использование свойства ортогональности тригонометрических функций дискретного аргумента при расчёте пространственных систем [Текст] / О.Н. Золотов, И.Е. Милейковский // Изв. АН СССР. Сер. МТТ. – 1975. – №2. – С.148-154.

35. Кан, С.Н. Строительная механика оболочек [Текст] / С.Н. Кан. – М.: Машиностроение, 1966. – 508 с.

36. Космодамианский, А.С. Напряжённое состояние анизотропных сред с отверстиями и полостями [Текст] / А.С. Космодамианский. – Киев, Донецк: Вища школа, 1976. – 200 с.

37. Космодамианский, А.С. Плоская задача теории упругости для пластин с отверстиями и выступами [Текст]: учеб. пособие / А.С. Космодамианский. – Киев: Вища школа, 1975. – 227 с.

38. Космодамианский, А.С. Изгиб тонких многосвязных плит [Текст]: учеб. пособие / А.С. Космодамианский, Г.М. Иванов. – Донецк, 1973. – 264 с.

39. Космодамианский, А.С. Температурные напряжения в многосвязных пластинах [Текст]: учеб. пособие / А.С. Космодамианский, С.А. Колоеров. – Киев, Донецк: Вища школа, 1983. – 160 с.

40. Космодамианский, А.С. Напряжённое состояние пластинок с отверстиями в трехмерной постановке [Текст]: учеб. пособие / А.С. Кос-

модамианский, Б.Н. Ложкин, Ю.В. Мысовский, В.А. Шалдырван. – Донецк, 1970. – 253 с.

41. Космодамианский, А.С. Динамические задачи для анизотропных сред с усложнённой геометрией [Текст] / А.С. Космодамианский, В.И. Сторожев. – Донецк, 1983. – 119 с.

42. Колебания и устойчивость многосвязных тонкостенных систем [Текст] / В.Г. Дмитриева; под ред. И.Н. Преображенского; пер.с англ. – М.: Мир, 1984. – 311 с. /Сер. Механика. Новое в зарубежной науке [ред. сер. А.Ю. Ишлинский, Г.Г. Чёрный. Вып.3].

43. Лурье, А.И. Статика тонкостенных оболочек [Текст] / А.И. Лурье. – М., Л.: Гостехтеориздат, 1947. – 252 с.

44. Математическое обеспечение ЕС ЭВМ. Пакет научных подпрограмм [Текст]. –Минск: Институт математики, 1977. – Вып. 12.

45. Методы расчёта тонколистовых силосов спирально-навивного типа [Текст] / И.Е. Милейковский, Н.Н. Столыпин, Б.Н. Скотников, Г.И. Соловьёв // Строительная механика и расчёт сооружений. – 1985. – №5. – С.19-23.

47. Милейковский, И.Е. Расчёт массивных конструкций методами строительной механики пространственных систем [Текст] / И.Е. Милейковский. –М.: Госстройиздат, 1958.

48. Милейковский, И.Е. Расчёт оболочек и складов методом перемещений [Текст] / И.Е. Милейковский. – М.: Госстройиздат, 1960.

49. Милейковский, И.Е. Разрушающие уравнения пологих многослойных ортотропных оболочек относительно произвольной начальной поверхности [Текст] / И.Е. Милейковский // Пространственные конструкции зданий и сооружений. –1972. – Вып. 1.

50. Милейковский, И.Е. Устойчивость прямоугольных в плане пологих оболочек [Текст] / И.Е. Милейковский, И.П. Гречанников //Расчёт пространственных конструкций.– М.: Изд-во лит. по строительству, 1969. – Вып. 12. – С.168-176.

51. Милейковский, И.Е. Метод расчёта сборных ребристых оболочек покрытий с ломаной формой поверхности [Текст]: сб. ст. / И.Е. Милейковский, О.Н. Зотов; под ред. А.А. Уманского, С.А. Алексеева, В.В. Новожилова // Расчёт пространственных конструкций. – М.: Стройиздат, 1974. – Вып.ХVI. – С.5-43.

52. Михайлов, Б.К. Обзор работ по расчёту пластин и оболочек с прямоугольными отверстиями [Текст] / Б.К. Михайлов, Ф.М. Абрамов. Обзор работ за 10 лет. ЛИСИ. – Л., 1983 [Рук. деп. в ВИНТИ 17 окт.1983. №5691-83. Деп.].

53. Муштари Х.М. Некоторые обобщения теории тонких оболочек с приложением к задаче устойчивости упругого равновесия // Прикладная математика и механика. – 1939. – Т.2. – №4. – С.91-97.

54. Новожилов, В.В. Теория тонких оболочек [Текст] / В.В. Новожилов. – Л.: Судпромгиз, 1962.

55. О теории оболочек подкреплённых рёбрами жесткости [Текст] / Б.Я. Кантор [и др.]. – Харьков: Ин-т проблем машиностроения АН УССР, 1982. – 77 с. /Препринт АН УССР ИПМ, №167.

56. Пелех, В.Л. Концентрация напряжений около отверстий при изгибе травенсально-изотропных пластин [Текст] / В.Л. Пелех. – Киев: Наукова думка, 1977. – 182 с.

57. Пелех, В.Л. Распределение напряжений возле отверстий в податливых на сдвиг анизотропных оболочках [Текст] / В.Л. Пелех, А.А. Сяський. – Киев: Наук.думка, 1975. – 198 с.

58. Преображенский, И.Н. Вырезы в несущих конструкциях [Текст] / И.Н. Преображенский, И.А. Цурпал. – М.: Машиностроение, 1984. – 109 с.

59. Прочность. Устойчивость. Колебания. Справочник в трёх томах [Текст] / под общ. ред. И.А. Биргера, Я.Г. Панковко. – М.: Машиностроение, 1968. – Т.2.

60. Применение электронных вычислительных машин в строительной механике [Текст]: Труды IV Всесоюзной конференции по применению электронных математических машин в строительной механике. Киев, 1965. – Киев: Наукова думка, 1968. – 503 с.

61. Пшеничников, Г.И. Теория тонких упругих сетчатых оболочек и пластинок [Текст] / Г.И. Пшеничников. – М.: Наука, 1982. – 352 с.

62. Пшеничников, Г.И. Расчёт ребристых оболочек [Текст] / Г.И. Пшеничников, И.Г. Тагиев // Строительная механика и расчёт сооружений. – 1977. – №1. – С. 51-54.

64. Ржаницын, А.Р. Составные стержни и пластинки [Текст] / А.Р. Ржаницын. – М.: Стройиздат, 1986.

65. Ржаницын, А.Р. Строительная механика [Текст]: учеб. пособие / А.Р. Ржаницын. – М.: Высшая школа, 1982. – 400 с.

66. Савин, Г.Н. Распределение напряжений около отверстий [Текст] / Г.Н. Савин. – Киев: Наукова думка, 1968. – 887 с.

67. Савин, Г.Н. Пластинки и оболочки с ребрами жесткости [Текст] / Г.Н. Савин, Н.П. Флейшман. – Киев: Наукова думка, 1964. – 384 с.

68. Смирнов, В.И. Курс высшей математики. В 5 т. [Текст] / В.И. Смирнов. – М.: Наука, 1974. Т.3. Ч.1; Т.3, Ч.2.

69. Справочник по математике для научных работников и инженеров [Текст] / Г. Корн, Т. Корн. – М.: Наука, 1984.
70. Справочник по математике для инженеров и учащихся ВТУЗов. [Текст] / И.Н. Бронштейн, К.А. Семендяев. – М.: Наука, 1986. – 544 с.
71. Тимошенко, С.П. Устойчивость упругих систем [Текст] / С.П. Тимошенко. – М.-Л.: Гостехиздат, 1946. – 532 с.
72. Тимошенко, С.П. Пластины и оболочки [Текст] / С.П., Тимошенко С. Войновский-Кригер; пер. с англ. под ред. Г.С. Шапиро. – М.: Физматгиз, 1963. – 635 с.
73. Ульяшин, А.Н. Напряжённо-деформированное состояние слоистых пластин [Текст] / А.Н. Ульяшин // Изв. АН СССР, МТТ. – 1979. – №1. – С. 145-154.
74. Филин, А.П. Современные проблемы использования ЭЦВМ в механике твёрдого деформируемого тела: О согласовании дискретных и континуальных объектов в механике твёрдых деформируемых тел [Текст] / А.П. Филин. – Л.: Стройиздат, 1974. – 73 с.
75. Филин, А.П. Элементы теории оболочек [Текст] / А.П. Филин. – Л.: Стройиздат, 1987. – 384 с.
76. Чехов, В.Н. Численное определение концентрации напряжений около отверстия в круговой цилиндрической оболочке [Текст] / В.Н. Чехов, С.В. Загора // Прикладная механика. – 1972. – Т.8. – №7. – С. 108-112.
77. Численные методы в теории упругости и теории оболочек [Текст] / Н.П. Абовский, Н.П. Андреев, А.П. Деруга, В.И. Савченков. – Красноярск, 1986. – 383 с.
78. Шевченко В.П. Интегральные преобразования в теории пластин и оболочек [Текст] / В.П. Шевченко. – Донецк, 1977. – 116 с.
79. Юдин, А.С. Исследование устойчивости деформации и больших перемещениях [Текст]: автореф. дис. ... канд. физ.-мат. наук / А.С. Юдин. – Ростов н/Д, 1974. – 17 с.
80. Яковлев, М.Ф. О численном расчёте на прочность цилиндрической оболочки, подкреплённой ребрами [Текст] / М.Ф. Яковлев, И.С. Левченко, В.Е. Спиро // Численные методы решения задач теории упругости и пластичности. – Новосибирск: Издательство АН СССР. – Сибирское отделение, 1976. – Т.2. – с.114-125.
81. Baker E.H., Capelli A.P., Kovalevsky L., Vorette R.M., Rish F.L., Shell analysis manual. Washington, 1968, XLVI, 804 p.
82. Flugge W. Die Stabilitat dez Kreisulinder –Sckakke //Ing. Arch. - 1932. -3, N5 -p.463-506.

83. Furuchi Nobuyoshi. Strength analysis of shell structure with stiffeners by finite strip method // Нихон дзосен чаккай рамбунсю. –J. Soc. Nov. Arskhit. Jap. –p. 289-297.
84. Huber M.T. Die Theorie der kreuzweise bewabrtten insenbetonplatten. Bawingeneur, 1923. vol.4. –p. 354-357.
85. Tira Josef. Analyses of a shallow elitic paraboloid eccentrically reinforced with ribs // Acta techn. CSAV. -1978. -25. No. –p. 723-731.
86. Nova’k Otakar. Thin shallow shells with ribs. //Acta techn. CSAV. -1978. -22. N22 –p. 123-130.
87. Plates and shells with cracks. A collection of stress intensity factor solutions for crackes in plates and shells. Ed. by G.C. Sih. –Leyden: Noordhoff intern. publ., 1977. XLVIII. 302 p.
88. Taylor J.L. The stability of monocoque in compression //Aeronaut. Res. Coun. Repts. and Mem. -1935. –N 1679. – p. 1-9.
89. Rajagopalan K., Chettiart C. Ganapathy. Application of finite-element method to intersiffener buckling in submersible cylindrical hulls // J. Ship. Res. -1983. –vol. 27. N4. –p. 281-285.
90. Reissner E. Reflections on the theory of elastic plates //App1. Mech. Rev. Vol. 38. 1985. N11. p. 1453-1456.
91. Reissner E. Stress-strain relations in the theory of thin elastic shells. J. Math. Phys., 31, 1952. p. 109-119.

Для заметок

Научное издание

Волков Владимир Павлович

НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОЕ СОСТОЯНИЕ  
КОНСТРУКТИВНО-ОРТОТРОПНЫХ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ  
ОБОЛОЧЕК С ПРОЕМОМ

Монография

В авторской редакции

Верстка Н.В. Кучина

---

Подписано в печать 22.09.14. Формат 60×84/16.

Бумага офисная «Снегурочка». Печать на ризографе.

Усл. печ. л. 7,0. Уч.-изд.л. 7,5. Тираж 500 экз. 1-й завод 100 экз.

Заказ № 308.

---

Издательство ПГУАС.  
440028, г.Пенза, ул. Германа Титова, 28.