МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«Пензенский государственный университет
архитектуры и строительства»
(ПГУАС)

В.А. Монахов

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА

МАТРИЧНАЯ ФОРМА АНАЛИЗА СЛОЖНОГО ДВИЖЕНИЯ ТОЧКИ

Рекомендовано Редсоветом университета
в качестве учебного пособия для студентов,
обучающихся по направлению 08.03.01 «Строительство»

Пенза 2014

УДК 531/534
ББК 22.21я73
М77

Рецензенты: доктор технических наук, профессор В.В. Коновалов (ПГТУ);
кандидат технических наук, доцент М.Б. Зайцев (ПГУАС)

Монахов В.А.
М77 Теоретическая механика. Матричная форма анализа сложного движения точки: учеб. пособие / В.А. Монахов. – Пенза: ПГУАС, 2014. – 80 с.

Изложен материал, предусмотренный программой курса теоретической механики для технических вузов. Представлены теоретические аспекты и методика применения вычислительной техники при решении задач о сложном движении материальной точки. Изложение понятий кинематики, определение кинематических характеристик и свойств сложного движения точки сочетается с решением задач по данной теме. Основное внимание уделено приложению теории матричных преобразований систем координат при определении закона сложного движения и других кинематических характеристик точки, что способствует эффективному применению средств современной вычислительной техники в теоретической механике.

Учебное пособие подготовлено на кафедре «Механика» и предназначено для студентов высших учебных заведений, обучающихся по направлению 08.03.01 «Строительство».

ПРЕДИСЛОВИЕ

Теоретическая механика относится к разряду фундаментальных естественнонаучных дисциплин, методы исследований которой развивались в течение столетий. Основные положения механики приняли классическую форму. В частности, при изучении сложного движения материальных частиц, которое обсуждается в предлагаемом учебном пособии, приводятся известные теоремы о сложении скоростей и ускорений.

Появление средств вычислительной техники в сфере образования стимулирует разработку новых прогрессивных форм обучения. В связи с этим возникает необходимость в переложении теорем о сложении на язык машин, каковыми являются матричная алгебра и анализ. Их использование для описания сложного движения частицы позволяет составить процедуры автоматического вычисления скоростей и ускорений на ПЭВМ на основе закона сложного движения, который выводится на основе теории матричных преобразований систем координат. Синхронно с численным решением задачи в программах может быть предусмотрена также демонстрация компьютерного фильма о сложном движении частицы.

Внедрение подобных программ открывает широкие перспективы при изучении теоретической механики. Программы могут носить как обучающий, так и контролирующий характер. С их помощью значительно повышается эффективность освоения учебного материала, существенно сокращается время, затрачиваемое на выполнение или проверку контрольных заданий и т.п.

СЛОЖНОЕ ДВИЖЕНИЕ МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ

Когда вы видите капли дождя, скользящие по стёклам окна движущегося автомобиля, в котором находитесь, или наблюдаете, как на стройке башенный кран, поворачиваясь вокруг себя, одновременно перемещает груз по стреле, знайте, что пред вами не простое движение капли или груза, а сложное (рис. 1,а). Стекание частиц грязи по канавкам протектора шины катящегося колеса автомобиля, течение жидкости в шланге, когда вы переносите его с места на место (рис. 1, б) – тоже примеры сложного движения. Конструируя кран с оптимальными параметрами или разрабатывая рисунок протектора шины, инженер должен знать все характеристики движения с тем, чтобы обеспечить надёжную работу крана или безопасное движение автомобиля (вероятно, разлёт частиц грязи или камешков щебня дорожного покрытия при большой скорости машины зависит от рисунка протектора).

а б

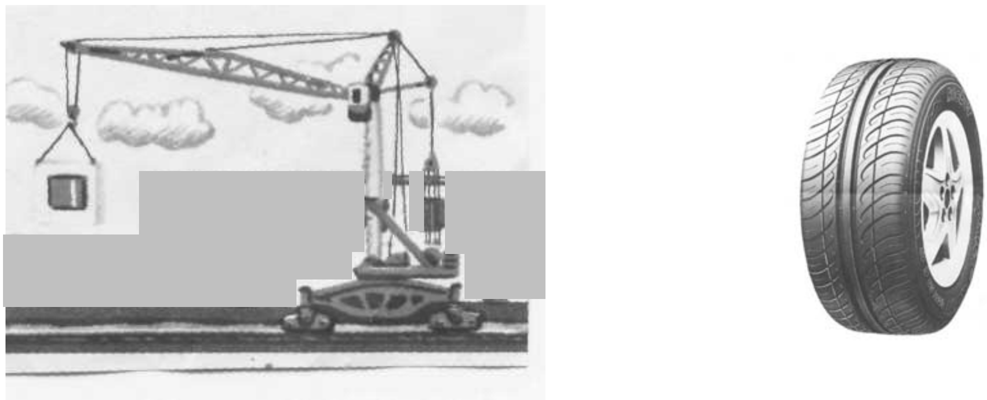


Рис. 1

1. Закон сложного движения точки

Изучение движения материальной точки связано с выбором точки зрения наблюдателя или системы координат, в которой оно может быть описано. Рассмотрим, например, падение предмета, выпавшего из рук пассажира движущегося автобуса. Очевидно, за движением предмета, как материальной точки, можно следить из двух позиций или в двух системах отсчета: 1) – в системе координат, связанной с автобусом, и 2) – с наблюдателем, стоящим на обочине дороги.

Конечно, движение предмета по отношению к автобусу является простым, а вот его движение относительно неподвижной системы - сложным, которое можно разложить на два: первое – движение относительно автобуса и второе – падение предмета, "сносимое" автобусом при его движении.

Определение 1. Сложным движением материальной точки называется движение точки, рассматриваемое или происходящее в двух и более системах координат, хотя бы одна из которых подвижна.

Покажем две системы координат: неподвижную, которую обозначим греческими буквами $\Omega\eta\theta\zeta$, и подвижную *Oxyz* и рассмотрим движущуюся точку *M*, положение которой определим радиус-векторами:

через $\overline{r}(t)$ – в подвижной системе координат и с помощью $\overline{\rho}(t)$ – в неподвижной (рис. 2).

Дополнительно введём и радиус-вектор начала подвижной системы координат $\overline{\rho}_0(t)$, который также изменяется со временем.

Очевидно, движение точки *M* можно описать *векторным способом*, составив выражение

$$\overline{\rho}(t) = \overline{\rho}_0(t) + \overline{r}(t). \tag{1}$$

Оно и характеризует закон сложного движения.

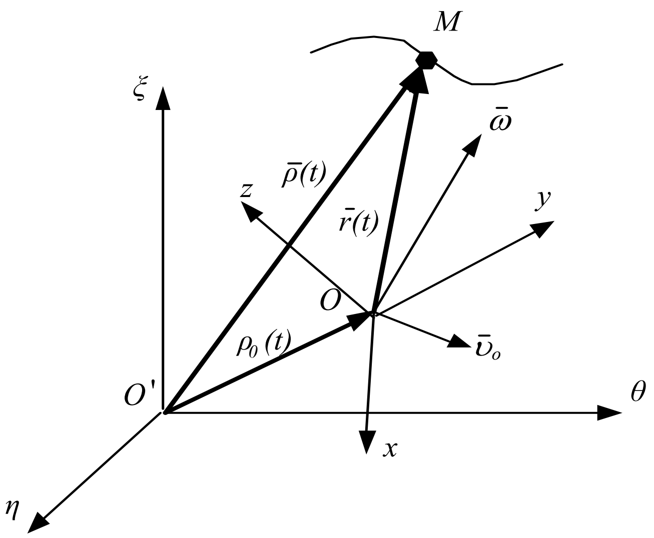


Рис. 2

Определение 2. Движение точки М относительно подвижной системы координат Oxyz называется относительным.

Определение 3. Движение той точки подвижной системы координат, с которой в рассматриваемый (фиксированный) момент времени совпадает положение точки М, по отношению к неподвижной системе, называется переносным.

Определение 4. Движение точки М по отношению к неподвижной системе координат $O_1\eta\theta\zeta$ называется сложным или абсолютным.

2. Производная радиус-вектора $\bar{r}(t)$ в подвижной системе координат

Очевидно, в подвижной системе координат радиус-вектор точки M можно представить разложением

$$\bar{r}(t) = x(t)i + y(t)j + z(t)k \quad .$$

Найдем производную $\bar{r}(t)$ по времени*

$$\frac{\tilde{d}(\bar{r})}{dt} = \frac{dx}{dt}i + \frac{dy}{dt}j + \frac{dz}{dt}k + x\frac{di}{dt} + y\frac{dj}{dt} + z\frac{dk}{dt}$$

[$\tilde{d}(\bar{r})$ – читается: дэ тильда эр] и назовем её *полной производной*.

Единичные орты *i, j, k* подвижной системы координат совершают повороты вокруг некоторой оси с одинаковой мгновенной угловой скоростью ω; поэтому по аналогии с известной формулой Эйлера

$$\bar{\upsilon} = \frac{d\bar{r}}{dt} = \bar{\omega} \times \bar{r}$$

справедливы равенства:

$$\begin{cases} \dfrac{di}{dt} = \bar{\omega} \times i, \\ \dfrac{dj}{dt} = \bar{\omega} \times j, \\ \dfrac{dk}{dt} = \bar{\omega} \times k. \end{cases}$$

С учетом последних соотношений полная производная принимает вид

$$\frac{\tilde{d}\bar{r}}{dt} = \frac{d\bar{r}}{dt} + x(\bar{\omega} \times i) + y(\bar{\omega} \times j) + z(\bar{\omega} \times k) = \frac{d\bar{r}}{dt} + \bar{\omega} \times (xi + yj + zk) = \frac{d\bar{r}}{dt} + \bar{\omega} \times \bar{r} \, .$$

Производная

$$\frac{d(\bar{r})}{dt} = \frac{dx}{dt}i + \frac{dy}{dt}j + \frac{dz}{dt}k$$

называется *локальной*; она характеризует изменение радиус-вектора $\bar{r}$ в подвижной системе координат.

Произведение $\bar{\omega} \times \bar{r}$ называется *конвективной* частью полной производной радиус-вектора $\bar{r}$.

Итак, полная производная вектора $\bar{r}$, заданного в подвижной системе координат, находится по формуле

$$\frac{\tilde{d}\bar{r}}{dt} = \frac{d\bar{r}}{dt} + \bar{\omega} \times \bar{r} \, .$$

* Поскольку говорится о новом виде производной, то она и снабжена индексом «тильда», т.е. $\frac{\tilde{d}\bar{r}}{dt}$.

3. Теорема о сложении скоростей

Основанием для вывода формулы скорости точки M при сложном движении (рис. 2) служит закон сложного движения, представленный в форме (1)

$$\overline{\rho}(t) = \overline{\rho}_0(t) + \overline{r}(t).$$

Взяв *полную* производную от обеих частей этого выражения

$$\frac{\tilde{d}\overline{\rho}}{dt} = \frac{\tilde{d}\overline{\rho}_0}{dt} + \frac{\tilde{d}\overline{r}}{dt} = \frac{d\overline{\rho}_0}{dt} + \frac{d\overline{r}}{dt} + \overline{\omega} \times \overline{r}$$

и назвав затем величину

$$\overline{\upsilon}_r = \frac{d\overline{r}}{dt}$$

относительной скоростью, а

$$\overline{\upsilon}_e = \frac{d\overline{\rho}_0}{dt} + \overline{\omega} \times \overline{r}$$

– *переносной*, значение скорости при *сложном движении* точки можно определить по формуле

$$\overline{\upsilon}_a = \overline{\upsilon}_r + \overline{\upsilon}_e .$$

Таким образом, скорость точки при сложном движении равна сумме скоростей относительного и переносного движений точки.

4. Теорема о сложении ускорений (теорема Кориолиса)

Исходным соотношением для доказательства теоремы служит выражение

$$\overline{\upsilon}_a = \overline{\upsilon}_r + \overline{\upsilon}_e .$$

Вычислив полную производную от обеих частей этого равенства, можно установить, что

$$\frac{\tilde{d}\overline{\upsilon}_a}{dt} = \frac{\tilde{d}\overline{\upsilon}_r}{dt} + \frac{\tilde{d}\overline{\upsilon}_e}{dt} = \frac{\tilde{d}\overline{\upsilon}_r}{dt} + \frac{\tilde{d}}{dt}\left(\frac{d\overline{\rho}_0}{dt} + \overline{\omega}\times\overline{r}\right) = \frac{d\overline{\upsilon}_r}{dt} + \overline{\omega}\times\overline{\upsilon}_r + \frac{d^2\overline{\rho}_0}{dt^2} +$$

$$+\frac{\tilde{d}\overline{\omega}}{dt}\times\overline{r} + \overline{\omega}\times\frac{\tilde{d}\overline{r}}{dt}.$$

Оставляя без изменения три первых слагаемых*, следует продолжить вычисление производных в двух последних. В соответствии с правилом вычисления полной производной получим соотношение

$$\frac{\tilde{d}\overline{\omega}}{dt}\times\overline{r} + \overline{\omega}\times\frac{\tilde{d}\overline{r}}{dt} = \left(\frac{d\overline{\omega}}{dt} + \overline{\omega}\times\overline{\omega}\right)\times\overline{r} + \overline{\omega}\times\left(\frac{d\overline{r}}{dt} + \overline{\omega}\times\overline{r}\right) =$$

$$= \frac{d\overline{\omega}}{dt}\times\overline{r} + \overline{\omega}\times\frac{d\overline{r}}{dt} + \overline{\omega}\times\left(\overline{\omega}\times\overline{r}\right),$$

т.к. $\overline{\omega}\times\overline{\omega}\equiv 0$.

Вспомнив к тому же, что $\overline{\varepsilon} = \dfrac{d\overline{\omega}}{dt}$ – это угловое ускорение, а

$$\overline{\upsilon}_r = \frac{d\overline{r}}{dt}$$

– относительная скорость, соотношение можно представить как сумму трёх слагаемых

$$\overline{\varepsilon}\times\overline{r} + \overline{\omega}\times\overline{\upsilon}_r + \overline{\omega}\times\left(\overline{\omega}\times\overline{r}\right).$$

Следовательно, полная производная теперь находится по формуле

$$\frac{d\overline{\upsilon}_a}{dt} = \frac{d\overline{\upsilon}_r}{dt} + \overline{\omega}\times\overline{\upsilon}_r + \frac{d^2\overline{\rho}_0}{dt^2} + \overline{\varepsilon}\times\overline{r} + \overline{\omega}\times\overline{\upsilon}_r + \overline{\omega}\times\left(\overline{\omega}\times\overline{r}\right).$$

* Здесь принято во внимание тождество $\frac{\tilde{d}}{dt}\left(\frac{d\overline{\rho}_0}{dt}\right) = \frac{d^2\overline{\rho}_0}{dt^2}$, поскольку вектор $\overline{\rho}_0(t)$ задан в неподвижной системе координат.

Группируя слагаемые этой суммы и одновременно анализируя их смысл, можно установить, что ускорение точки при сложном движении, т.е. абсолютное ускорение точки при сложном движении складывается из трёх составляющих:

$$\overline{a}_a = \overline{a}_r + \overline{a}_e + \overline{a}_k,$$

где вектор

$$\overline{a}_r = \frac{d\overline{\upsilon}_r}{dt}$$

является *относительным* ускорением,

$$\overline{a}_e = \frac{d^2\overline{\rho}_0}{dt} + \overline{\varepsilon} \times \overline{r} + \overline{\omega} \times \left(\overline{\omega} \times \overline{r} \right)$$

– *переносным*,

$$\overline{a}_k = 2\overline{\omega} \times \overline{\upsilon}_r$$

– *поворотным* (*кориолисовым*) ускорением точки.

Этот вывод является содержанием теоремы Кориолиса: *при сложном движении точки её ускорение складывается из трех частей: относительного, переносного и поворотного ускорений*.

5. Определение направления поворотного ускорения (по правилу Жуковского)

Вектор поворотного ускорения равен

$$\bar{a}_k = 2\bar{\omega} \times \bar{\upsilon}_r .$$

Определение модуля векторного произведения по формуле

$$a_k = 2\omega \cdot \ \upsilon_r \cdot \sin\left(\bar{\omega}, \bar{\upsilon}_r\right)$$

подсказывает правило установления направления данного вектора $\bar{a}_k$.

В правой системе декартовых координат, каковой является обычно изображаемая (без оговорки, что она правая) система, следует изобразить векторы скоростей $\bar{\omega}$, $\bar{\upsilon}_r$, угол между которыми обозначается через α (рис. 3).

Проектируя вектор $\bar{\upsilon}_r$ на плоскость *P*, перпендикулярную вектору $\bar{\omega}$, показывают его проекцию

$$\upsilon_{rP} = \upsilon_r \cdot \sin\left(\bar{\omega}, \bar{\upsilon}_r\right) = \upsilon_r \sin\alpha.$$

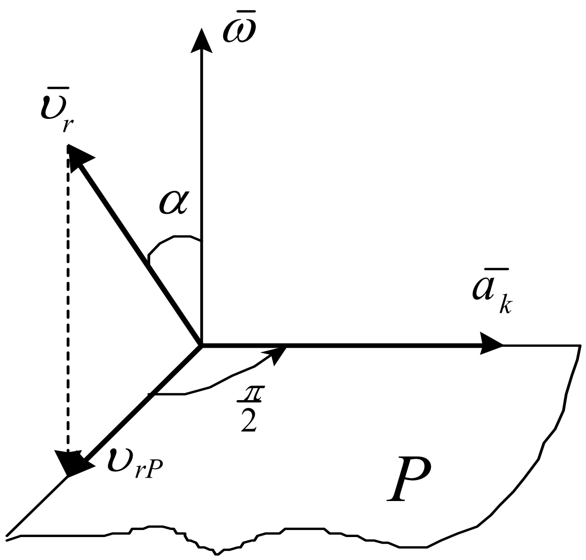


Рис. 3

Очевидно, это произведение содержится в определении модуля вектора $\bar{a}_k$. Поскольку вектор $\bar{a}_k$ является векторным произведением векторов $\bar{\omega}$, $\bar{\upsilon}_r$, то он должен быть перпендикулярен плоскости, проведенный через векторы $\bar{\omega}$, $\bar{\upsilon}_r$. Следовательно, для определения направления вектора $\bar{a}_k$ необходимо проекцию υ_{rP}, лежащую в плоскости векторов $\bar{\omega}$, $\bar{\upsilon}_r$, повернуть на угол $\varphi = \dfrac{\pi}{2}$ в положительном направлении переносного вращения. Правило знаков для углов φ было сформулировано при определении знака $\overline{\omega}$ при вращательном движении тела.

Описанная процедура и составляет *правило Жуковского*:

Направление вектора кориолисового ускорения совпадает с направлением проекции вектора относительной скорости υ_{rP}, повернутой на угол $\dfrac{\pi}{2}$ по направлению переносного вращения.

Замечания:

Величина кориолисова ускорения

$$a_k = 2\omega\upsilon_r \sin\alpha$$

равна нулю в тех случаях, когда:

1) переносное движение является поступательным $(\omega \equiv 0)$;

2) в те моменты движения точки, когда векторы $\overline{\omega}$ и $\overline{\upsilon}_r$ оказываются параллельными; при этом $\sin\alpha = 0$ $(\alpha = 0, \pi)$;

3) в некоторые моменты времени, например, при изменении направления относительного движения точки $\upsilon_r = 0$.

6. Примеры решения задач

П р и м е р 1. Точка *M* совершает движение по трубке в соответствии с законом $s_\rho = \rho(t)$, s_ρ – координата, характеризующая относительное движение. Трубка, в свою очередь, вращается вокруг одного из концов по закону $\varphi(t)$. (рис. 4,а).

Требуется установить закон сложного движения частицы *M* и вычислить значения абсолютной скорости и ускорения.

а б

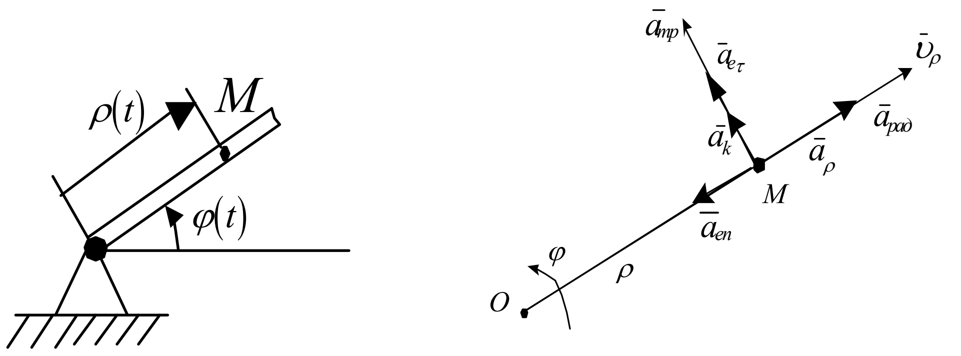


Рис. 4

Движение точки *M* можно рассматривать как сложное и ассоциировать его с перемещением шарика по трубке, вращающейся вокруг опоры. Очевидно, движение точки вдоль радиальной координаты – относительное. Его скорость обозначается через $\bar{\upsilon}_\rho$. Вращение самой трубки – переносное; угловая скорость переносного движения обозначается через ω, ускорение – ε.

Скорость относительного движения точки *M* равна $\upsilon_\rho = \dot{s}_\rho$. Величина скорости переносного движения – $\upsilon_\varphi = \dot{\varphi}\rho$. Направления данных векторов показаны на рис. 4,б. Так как, их направления взаимно перпендикулярны в любой момент времени, то модуль скорости сложного движения находится по формуле

$$\upsilon_a = \sqrt{\upsilon_\rho^2 + \upsilon_\varphi^2} = \sqrt{\left(\dot{s}\right)^2 + \left(\dot{\varphi}\rho\right)^2}.$$

Полученный вектор направлен по диагонали прямоугольника, стороны которого равны модулям векторов $\bar{\upsilon}_\rho$, $\bar{\upsilon}_\varphi$.

Ясно, что*

$$a_\rho = \ddot{\rho}(t),$$

$$a_{e\tau} = \varepsilon\rho = \ddot{\varphi}\rho,$$

$$a_{en} = \omega^2\rho = \dot{\varphi}^2\rho.$$

Модуль кориолисова ускорения находится по формуле

$$a_k = 2\,\upsilon_\rho\,\omega\sin\left(\overline{\omega},\overline{\upsilon}_\rho\right) = 2\omega\upsilon_\rho = 2\dot{\varphi}\dot{\rho}.$$

В соответствии с теоремой Кориолиса абсолютное ускорение точки равно

$$\overline{a}_a = \overline{a}_\rho + \overline{a}_{e\tau} + \overline{a}_{en} + \overline{a}_k.$$

Проектируя полученное равенство на направление радиус - вектора и перпендикулярное к нему, получим компоненты ускорения

$$a_{рад} = \ddot{\rho} - \dot{\varphi}^2\rho,$$

$$a_{тр} = \ddot{\varphi}\rho + 2\dot{\varphi}\dot{\rho} = \frac{d}{\rho dt}\left(\rho^2\dot{\varphi}\right)$$

в радиальном и перпендикулярном к нему направлениях.

Первая из них называется *радиальной*, а вторая – *трансверсальной* проекцией полного ускорения. Модуль вектора ускорения точки при задании движения в полярной системе координат находится по формуле

$$a = \sqrt{a_{рад}^2 + a_{тр}^2},$$

а его направление определяется в результате геометрического сложения указанных компонент).

П р и м е р 2. Точка M совершает движение по кольцу в соответствии с законом

$$s_r = \overset{\frown}{CM}(t) = Sin\left(\frac{\pi t^3}{4}\right),$$

s_r – дуговая координата. Кольцо радиуса R, в свою очередь, вращается вокруг оси по закону

$$\varphi(t) = 2t^2 - 1{,}5t.$$

* См. формулы ускорений при поступательном и вращательном движениях тела [1].

В начальный момент времени положение точки M характеризуется углом α_0 (рис. 5,а). Требуется установить закон сложного движения частицы M и найти скорость в текущий момент времени.

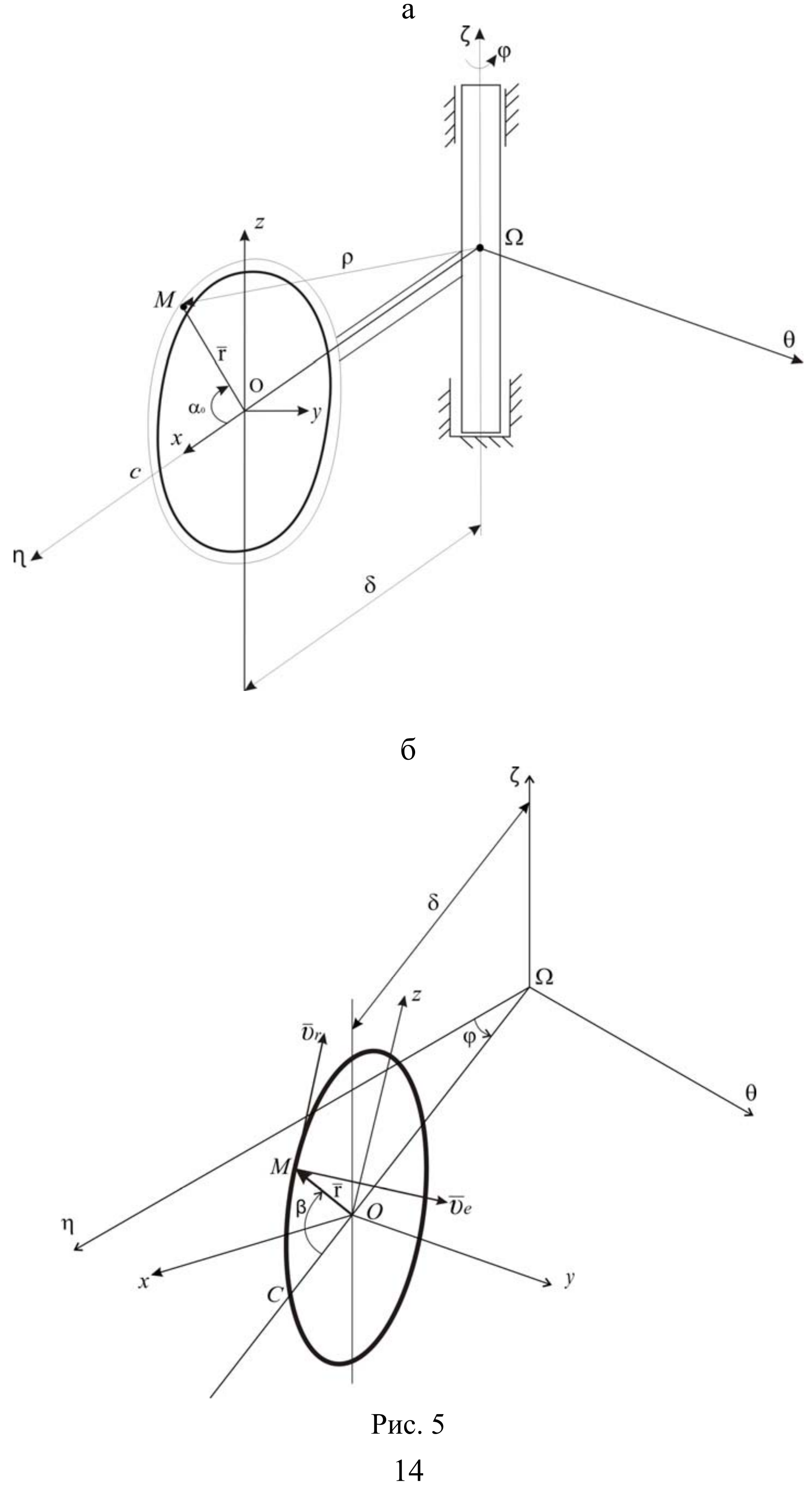


Рис. 5

При решении задачи следует перейти к угловой координате в описании относительного движения точки $\beta(t) = s_r / R = Sin\left(\frac{\pi t^3}{4}\right) / R$.

Модуль вектора скорости относительного движения точки M, расположенный в плоскости кольца и направленный перпендикулярно радиус - вектору $\overline{r}$, равен $\upsilon_r = \dot{\beta} R$ (рис. 5,б). На этом же рисунке показан и вектор переносной скорости, направление которого перпендикулярно плоскости кольца в текущий момент времени. Модуль его, очевидно, равен $\upsilon_e = \dot{\varphi}\,(\delta + R\cos\beta)$.

Проектируя указанные векторы на оси неподвижной системы координат $\Omega\eta\theta\zeta$ и суммируя затем соответствующие проекции согласно теореме о сложении скоростей (см. п. 3), можно найти проекции абсолютной скорости.

Действительно, проектируя сначала вектор скорости $\overline{\upsilon}_r$ на плоскость $\Omega\eta\theta$, находят

$$\upsilon_{r\eta\theta} = -\dot{\beta}\, R\sin\beta.$$

Проекция скорости относительного движения на ось $\Omega\xi$ равна

$$\upsilon_{r\xi} = \dot{\beta} R\cos\beta\,.$$

Проекции скорости $\overline{\upsilon}_e$ переносного движения точки М на оси неподвижной системы координат $\Omega\eta\theta\xi$ равны:

$$\upsilon_{e\eta} = -\dot{\varphi}\,(\delta + R\cos\beta)\sin\varphi\,,$$

$$\upsilon_{e\theta} = \dot{\varphi}\,(\delta + R\cos\beta)\cos\varphi\,,$$

$$\upsilon_{e\xi} = 0\,.$$

Вычислив теперь проекции вектора $\upsilon_{r\eta\theta}$ на оси координат $\Omega\eta$ и $\Omega\theta$ и сложив их с проекциями скорости переносного движенияна те же оси, можно определить проекции вектора скорости сложного движения точки M в виде:

$$\upsilon_\eta = -\dot{\varphi}\left(\delta + R\cos\beta\right)\sin\varphi - \dot{\beta} R\sin\beta\, cos\varphi,$$

$$\upsilon_\theta = \dot{\varphi}\,\left(\delta + R\cos\beta\right)\cos\varphi - \dot{\beta} R\sin\beta\sin\varphi,$$

$$\upsilon_\xi = \dot{\beta} R\cos\beta\,.$$

7. Движение объекта и сопутствующее ему преобразование системы координат

А. Перенос объекта

Закон прямолинейного движения точки (объекта движения) можно записать в матричном виде

$$\bar{\rho} = [U]\,\bar{r}, \qquad (3)$$

если воспользоваться матрицей переноса [1]

$$[U] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \delta_x \\ 0 & 1 & 0 & \delta_y \\ 0 & 0 & 1 & \delta_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad (4)$$

где $\delta_x,\ \delta_y,\ \delta_z$ – проекции вектора перемещения $\bar{\Delta}(t) = \left(\delta_x,\ \delta_y,\ \delta_z,\ 1\right)^T$, изменяющегося с течением времени. С помощью матрицы $[U]$ координаты точки M или проекций вектора $\bar{r}$, рассматриваемых в качестве объектов движения или переноса, можно охарактеризовать двумя расширенными за счёт дополнительной компоненты (единицы) вектор-столбцами $\bar{r} = \left(x_M, y_M, z_M,\ 1\right)^T$ и $\bar{\rho} = (\eta_M, \theta_M, \zeta_M,\ 1)^T$. Первый из них характеризует исходное (начальное) положение точки M_0, а второй относится к текущему моменту времени (точке M на рисунке 6,а).

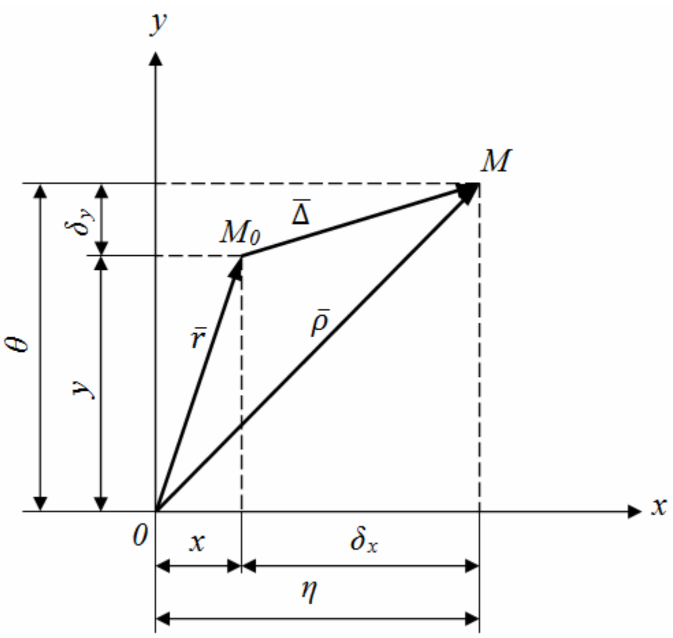
В справедливости преобразования (3) легко убедиться, выполнив умножение матрицы $[U]$ на вектор $\bar{r} = \left(x_M, y_M, z_M,\ 1\right)^T$:

$$\eta_M = x_M + \delta_x,$$
$$\theta_M = y_M + \delta_y,$$
$$\zeta_M = z_M + \delta_z,$$

Очевидно, элементы последнего столбца матрицы $[U]$ являются проекциями вектора перемещения $\bar{\Delta}(t) = \left(\delta_x,\ \delta_y,\ \delta_z,\ 1\right)^T$, изменяющегося с течением времени . четвёртое измерение радиус – векторов $\bar{\rho} = (\eta_M, \theta_M, \zeta_M,\ 1)^T$ и $\bar{r} = \left(x_M, y_M, z_M,\ 1\right)^T$, обозначаемое безразмерной единицей, вводится с целью обобщения операций при выводе формул.

Иной подход к описанию движения точки можно дать с позиций теории преобразования систем координат. В этом случае следует обратиться к двум различным система координат, образующим параллельные слои. Пусть одна из них – подвижная (система xOy), жёстко связана с рассматриваемой точкой M и потому её координаты при движении не изменяются; другая (система $\eta\Omega\theta$) остается неподвижной. Следовательно, перенос объекта и обусловленное им изменение координат точки M можно рассматривать как движение подвижной системы координат относительно неподвижной. Предлагаемое раздвоение (расслоение) изначально совпадавших систем координат, в дальнейшем оказывается чрезвычайно полезным при решении многих задач кинематики. В частности, оно расширяет возможности для формализации вывода закона сложного движения точки или иного объекта, определения их траектории и скорости. В дальнейшем изложении координаты движущейся точки M в неподвижной системе координат обозначаются греческими буквами η, θ, ζ, а в подвижной латинским – x, y, z (рис. 6,б).

а



б

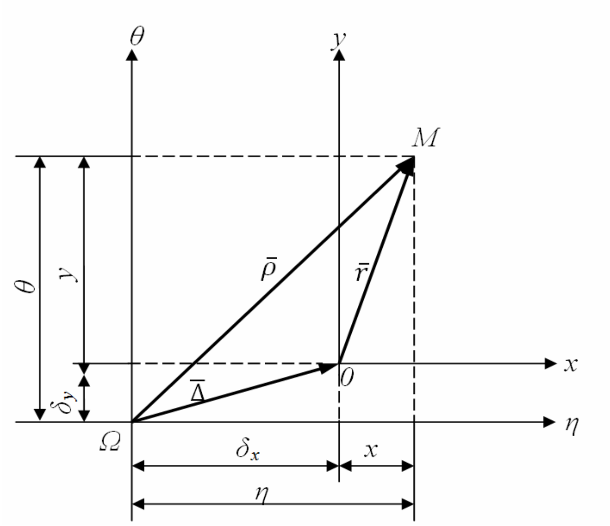


Рис. 6

Для установления зависимости между координатами произвольной точки M в указанных системах следует показать систему координат xOy в текущем состоянии, удалённом на отрезок $\overline{\Delta}(t)=\left(\delta_x,\ \delta_y,\ \delta_z,\ 1\right)^T$, и обозначить положение точки с помощью вектора $\overline{r}=\left(x_M, y_M, z_M,\ 1\right)^T$, координаты которого в рассматриваемой системе не меняются с течением времени. Положение точки M в неподвижной системе координат $\eta\Omega\theta$ характеризуется вектором $\overline{\rho}=(\eta_M, \theta_M, \zeta_M,\ 1)^T$. Координаты точки M в неподвижной системе можно выразить через координаты в подвижной системе:

$$x_M=\eta_M-\delta_x,$$
$$y_M=\theta_M-\delta_y,$$
$$z_M=\zeta_M-\delta_z,$$

По аналогии с матричной формой *закона движения точки* последние соотношения предстанут в виде

$$\overline{r}=\left[W\right]\overline{\rho},$$

где
$$\left[W\right]=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & -\delta_x\\ 0 & 1 & 0 & -\delta_y\\ 0 & 0 & 1 & -\delta_z\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix} \tag{5}$$

– матрица преобразования координат точки при переносе положения системы координат (рис. 6,б). Очевидно, если изменить направление переноса системы координат на противоположное, то в матрице $\left[W\right]$ следует заменить знаки компонент перемещения $\overline{\Delta}$ на противоположные.

На этом основании можно сделать вывод о том, что перемещение точки М на отрезок $\overline{\Delta}$ в неподвижной системе эквивалентно переносу (начала) подвижной системы координат с жёстко связанной с ней точкой М в противоположном направлении.

Матрицы перемещения точки (в неподвижной системе) и преобразования системы координат, обусловленные её переносом, взаимно-обратны, т.к. $\left[U\right]\left[W\right]=1$, откуда вытекает, что $\left[U\right]=\left[W\right]^{-1}$. Следовательно, движение точки в неподвижной системе можно описать с помощью закона

$$\overline{\rho} = \left[W\right]^{-1}\overline{r} = \left[U\right]\overline{r} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \delta_x \\ 0 & 1 & 0 & \delta_y \\ 0 & 0 & 1 & \delta_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\overline{r}.$$

Б. Поворот объекта

Подобно переносу, движение точки, рассматриваемой в качестве объекта, по окружности в положительном направлении (против хода часовой стрелки в правой неподвижной системе координат $O\eta\theta$) также можно рассматривать с позиций теории матричных преобразований систем координат.

Преобразование координат точки, соответствующее её движению по окружности, нетрудно установить, обратившись к описанию положения точки *M* в неподвижной системе координат $\eta\Omega\theta$ (рис. 7,а).

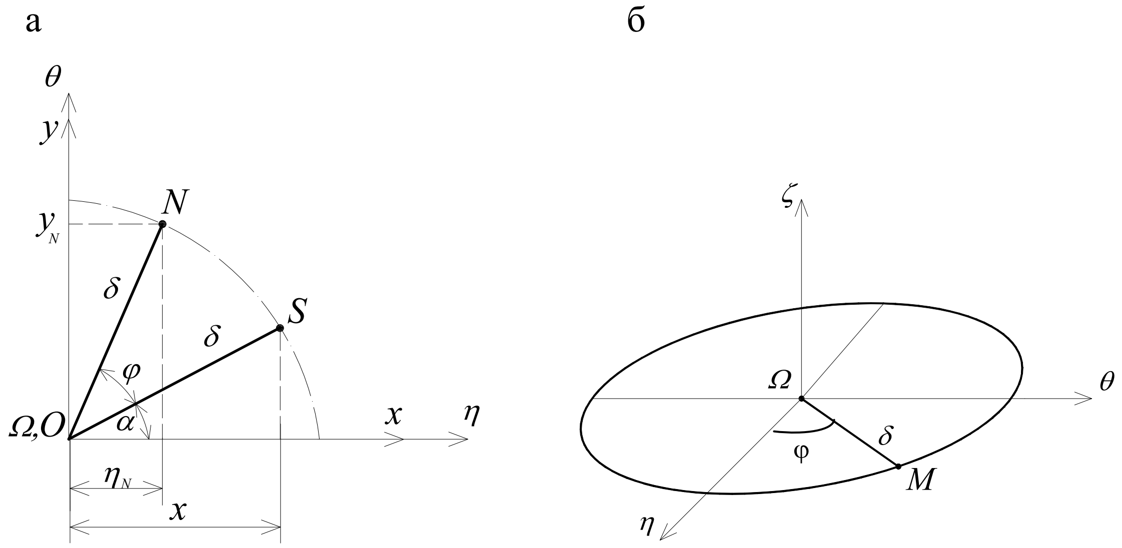


Рис. 7

Пусть некоторая точка плоскости, первоначально занимавшая положение M_0, определяемое углом α, сместилась по дуге окружности радиуса δ на угол φ. Её координаты в текущем положении *M* равны:

$$x = \delta\cos(\alpha + \varphi),$$
$$y = \delta\sin(\alpha + \varphi).$$

Раскрыв синус и косинус суммы двух углов на основе формул тригонометрии и отталкиваясь от начальных координат точки: $\eta=\delta\cos\varphi$, $\theta=\delta\sin\varphi$, полученные выражения можно переписать в виде системы равенств

$$\begin{cases} x=\eta\cos\varphi-\theta\sin\varphi, \\ y=\eta\sin\varphi+\theta\cos\varphi. \end{cases} \tag{6}$$

Если ввести матрицу

$$[\phi]=\begin{bmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix}, \tag{7}$$

характеризующую движение точки по окружности – «поворот объекта» – на угол φ против хода часовой стрелки и воспользоваться обозначениями радиус – векторов $\overline{r}=(x,y)^T$ и $\overline{\rho}=(\eta,\theta)^T$ в текущем и начальном положениях, соответственно, то систему равенств (6) можно представить в матричном виде*

$$\overline{r}=[\phi]\overline{\rho}. \tag{8}$$

При использовании радиус – векторов, рассматриваемых в пространстве и дополненных третьим и четвёртым измерением - безразмерной единицей, поворот объекта в плоскости $\eta\Omega\theta$ можно описать как поворот его вокруг оси $\Omega\zeta$ (рис. 7,б) с помощью расширенной матрицы поворота четвёртого порядка

$$[\phi]=\begin{bmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \tag{9,а}$$

где третий диагональный единичный элемент указывает на ось $\Omega\zeta$, вокруг которой происходит поворот. Третий и четвёртый единичные элементы вводятся здесь с целью последующего обобщения формул матричных преобразований систем координат в трёхмерном пространстве.

Аналогично, поворот объекта вокруг оси $\Omega\theta$ на угол α в пространстве характеризуется матрицей

$$[\alpha]=\begin{bmatrix} \cos\alpha & 0 & -\sin\alpha & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \sin\alpha & 0 & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \tag{9,б}$$

* Следует подчеркнуть, что как и при описании переноса точки, координаты точки, движущейся по окружности, в начальном положении заданы в неподвижной системе.

С другой стороны, движение точки по окружности можно рассматривать как преобразование системы координат при повороте последней. Для установления соответствующего преобразования следует обратиться к рис. 8, где представлены две системы координат: неподвижная, оси которой обозначены, как и выше, греческими буквами η, θ, и повёрнутая на угол ψ против хода часовой стрелки система Oxy.

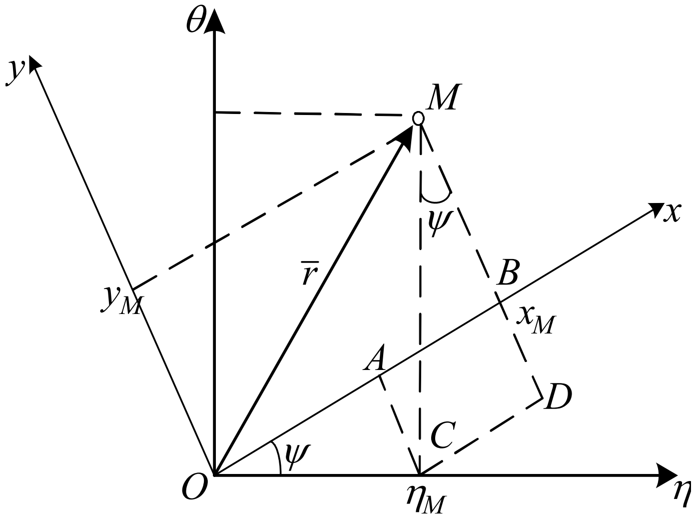


Рис. 8

Положение произвольной точки M на подвижной плоскости характеризуется фиксированным радиус-вектором $\overline{OM}$. Обозначив его в системе координат Oxy символом $\overline{r} = \left(x_M,\ y_M\right)^T$, а в системе $O\eta\theta$ - $\overline{\rho}$ с проекциями η_M *и* θ_M, нетрудно установить связи между компонентами векторов. Очевидно, что

$$x_M = OB = OA + AB,$$

где $OA = \eta_M \cos\psi,$

$AB = \theta_M \sin\psi.$

Следовательно,

$$x_M = \eta_M \cos\psi + \theta_M \sin\psi.$$

Аналогично,

$$y_M = BM = -BD + DM,$$

$$y_M = -\eta_M \sin\psi + \theta_M \cos\psi.$$

Подчёркнутые зависимости можно объединить в одно соотношение, представив их в матричном виде

$$\overline{r} = [\Psi]\overline{\rho}, \tag{10}$$

если воспользоваться матрицей

$$[\Psi] = \begin{bmatrix} \cos\psi & \sin\psi \\ -\sin\psi & \cos\psi \end{bmatrix},$$

характеризующей поворот системы координат xOy на угол ψ против хода часовой стрелки.

Очевидно, при изменении направления поворота подвижной системы в матрице $[\Psi]$ следует переменить знак угла, что приведёт к изменению знаков элементов матрицы, содержащих только синусы. И тогда матрица $[\Psi]$ ничем не будет отличаться от матрицы $[\phi]$. Таким образом, как и при рассмотрении прямолинейного движения (см. подраздел А) можно утверждать, что ***движение точки по окружности или вращение вектора, как объектов движения, в одном направлении эквивалентно вращению жёстко связанной с ним подвижной систем координат в противоположном.***

Матрицы поворота $[\Psi]$, $[\phi]$, как и матрицы преобразования переноса, взаимно обратны, т.е. $[\Psi] = [\phi]^{-1}$. Поскольку обе матрицы ортогональны (их определители равны единице), то они, к тому же, и взаимно транспонируемы

$$[\Psi] = [\varphi]^T.$$

Следовательно, справедливо равенство $[\varphi]^{-1} = [\varphi]^T$.

В. Сдвиг

Кроме преобразований переноса и вращения при решении задач теоретической и прикладной механики встречаются ещё преобразования сдвига и масштабирования. Например, сдвиг (shear) поперечного сечения балки, вызванный силой *Q*, по нормали к её оси (в направлении, например, оси *Oy*) характеризуется углом γ (рис. 9) [3].

Преобразование сдвига сечения балки, удалённого на расстоянии ds вдоль оси *Ox*, оставляет без изменения координаты x и z любой точки данного сечения; лишь абсцисса y меняет своё значение:

$$\eta = x,$$
$$\theta = y + ds\ ctg\gamma,$$
$$\zeta = z\ .$$

Полученные равенства можно записать в матричной форме

$$\overline{\rho} = \left[G_y\right]\overline{r}\ ,$$

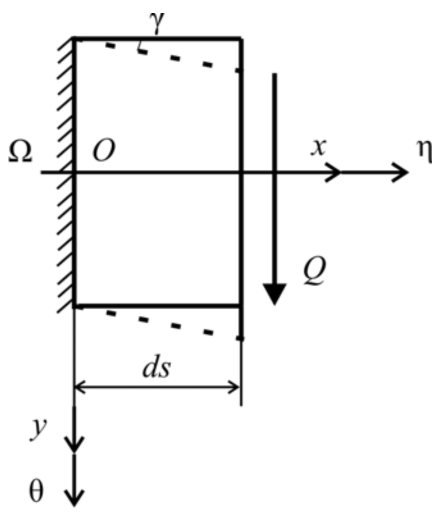


Рис. 9

если воспользоваться *матрицей сдвига* вдоль оси Oy:

$$\left[G_y\right] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & ctg\ \gamma & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

и принятыми обозначениями векторов начального $\overline{r} = \left(x,\ y,\ z,\ 1\right)^T$ и конечного $\overline{\rho} = \left(\eta,\ \theta,\ \zeta,\ 1\right)^T$ положений рассматриваемого сечения.

Матрицу обратного преобразования несложно получить, если выполнить сдвиг в направлении, противоположном оси Oy, для чего достаточно изменить знак угла γ в матрице $\left[G_y\right]$ на отрицательный; и тогда

$$\left[G_{-y}\right] = \left[G_y\right]^{-1}.$$

Г. Масштабирование

Пусть задан вектор $\overline{r} = \left(x,\ y,\ z,\ 1\right)^T$, исходящий из начала системы координат (рис. 10).

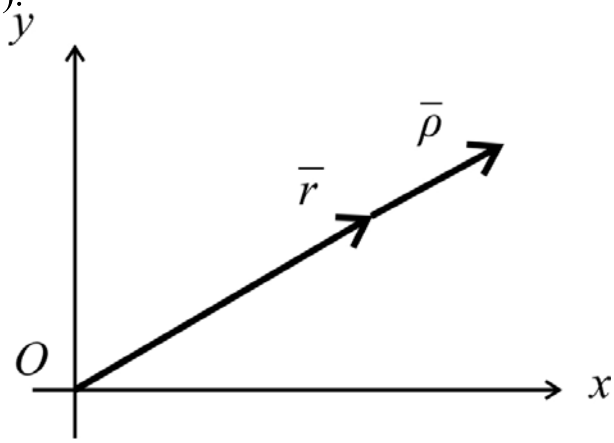


Рис. 10

Очевидно, его можно увеличить или уменьшить в m раз, если воспользоваться матрицей масштабирования вида

$$\left[M\right] = \begin{bmatrix} m & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Масштаб изображения вдоль отдельной оси можно выбрать не зависящим от масштаба по другим направлениям. В таком случае масштабные коэффициенты в матрице $\left[M\right]$ будут разными

$$\left[M\right] = \begin{bmatrix} m_x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m_y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m_z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Обращение матрицы масштабирования приводит к матрице

$$\left[M\right]^{-1} = \begin{bmatrix} 1/m_x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/m_y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/m_z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Рассматриваемые преобразования составляют группу базовых преобразований. Однако, следует заметить, что, к примеру, преобразование переноса объекта $[W]$ можно получить в результате осуществления двух преобразований вращения системы координат $[\psi]$ (см. пример в следующем разделе).

Матричные преобразования систем координат широко используются при решении задач прикладной механики. В частности, в сопротивлении материалов при определении напряжений на площадках, имеющих наклон с общепринятыми осями [2], в строительной механике при формировании глобальной матрицы жёсткости механической системы методом конечных элементов [3] и т. п. случаях.

8. Композиция матричных преобразований

В случае сложного движения точки её перемещение в пространстве можно представить в виде совокупности матричных преобразований систем координат, выполняемых в определённой последовательности.

Пусть, например, при выводе закона движения некоторой точки требуется выполнить три преобразования. В общем случае результирующее преобразование можно записать в виде

$$\overline{\rho} = [\Theta]\,\overline{r},$$

где $[\Theta] = [\Psi][\Lambda][\phi]$ – произведение трёх матриц преобразований. Так как произведение матриц некоммутативно, то очерёдность умножения играет важную роль при вычислениях. Следовательно, порядок выполнения преобразований существенно влияет на результат. Хотя иногда случается, что это и не имеет особого значения. Например, перенос системы координат на отрезок δ может происходить в любой последовательности на основе трёх простейших преобразований:

$$[X] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \delta_x \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},\quad [Y] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \delta_y \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},\quad [Z] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \delta_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

соответствующих раздельным переносам по направлениям осей координат $x,\ y,\ z$. Легко проверить, что произведение данных матриц не зависит от порядка операций умножения, т.е.

$$[W] = [X][Y][Z] = [Y][X][Z] = [Z][Y][X].$$

В общем случае при умножении матриц следует соблюдать правило очерёдности: ***если подвижная (локальная) система совершает поворот или перенос, характеризуеый матрицей $[B]$, относительно собственной оси, то матрицу $[A]$ предыдущего (в том числе и результирующего) преобразования следует умножить справа*** * ***на соответствующую матрицу поворота или переноса; если движение локальной системы координат происходит относительно неподвижной системы, то умножение выполняется слева*** [9]**.**

Изложенное можно проиллюстрировать на примерах решения задач о сложном движении, приведенных в п. 6.

---

* Умножение матрицы $[A]$ ***справа*** на матрицу $[B]$ означает, что первым сомножителем в произведении $[A]\cdot[B]$ является матрица $[A]$ [5].

В первом из них, как известно шарик M совершает прямолинейное движение внутри трубки в соответствии с заданным законом $\delta(t)$.

Одновременно с этим трубка вращается вокруг шарнирной опоры, установленной на конце трубки, по закону $\varphi(t)$.

Требуется найти закон сложного движения шарика M в матричном виде (рис. 4).

Сложное движение точки в данной задаче можно рассматривать как результирующее преобразование координат, составленное из вращения локальной системы вокруг оси $O\zeta$ на угол φ с последующим переносом её на плоскости, осуществляемым относительно подвижной системы на отрезок λ:

- первоначальный поворот системы координат xOy с центром в точке O вокруг вертикальной оси $\Omega\zeta$ на угол φ характеризуется матрицей

$$[\phi]=\begin{bmatrix} cos\varphi & -\sin\varphi & 0 & 0 \\ \sin\varphi & cos\varphi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

- переносу локальной системы вдоль оси Ox (рис. 11) на отрезок δ соответствует матрица

$$[\Delta]=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \delta \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

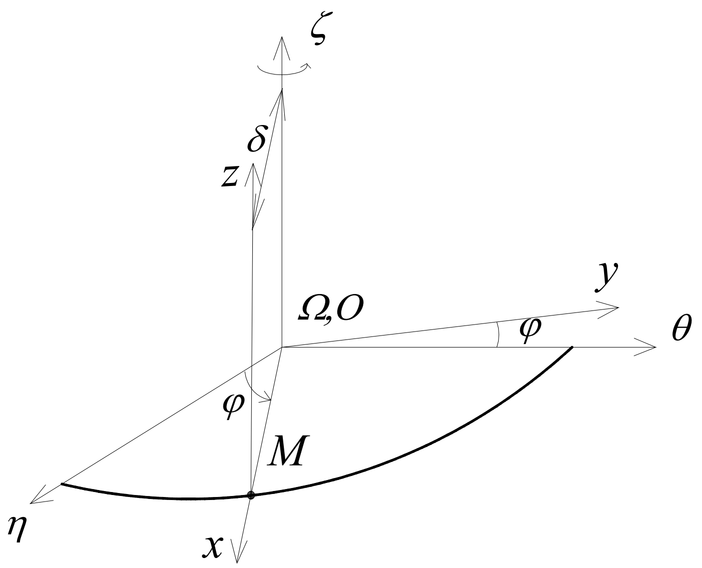


Рис. 11

Результирующее преобразование координат

$$\bar{\rho} = [P]\,\bar{r},$$

характеризующее закон сложного движения шарика, определяется произведением матрицы $[\phi]$ справа на $[\Lambda]$ в соответствии с правилом очерёдности умножения матриц (движение локальной системы координат на втором шаге преобразований происходит относительно подвижной системы)

$$[P] = [\phi][\Delta] =$$

$$= \begin{bmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \delta \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 & \delta\cos\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 & \delta\sin\varphi \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Умножая полученную матрицу на вектор $\bar{r} = (x_M, y_M, z_M,\ 1)^T$, текущие координаты точки в неподвижной системе можно выразить и в скалярной форме:

$$\eta_M(t) = \left[x_M + \delta(t)\right]\cos\varphi(t) - y_M \sin\varphi(t),$$

$$\theta_M(t) = \left[x_M + \delta(t)\right]\sin\varphi(t) + y_M \cos\varphi(t).$$

С другой стороны, закон сложного движения точки M:

$$\eta_M = \Omega A + AB = (x_M + \delta)\cos\varphi - y_M \sin\varphi,$$

$$\theta_M = AC + CM = (x_M + \delta)\sin\varphi + y_M \cos\varphi.$$

легко установить по аналогии с определением матрицы поворота, обратившись непосредственно к рис. 12.

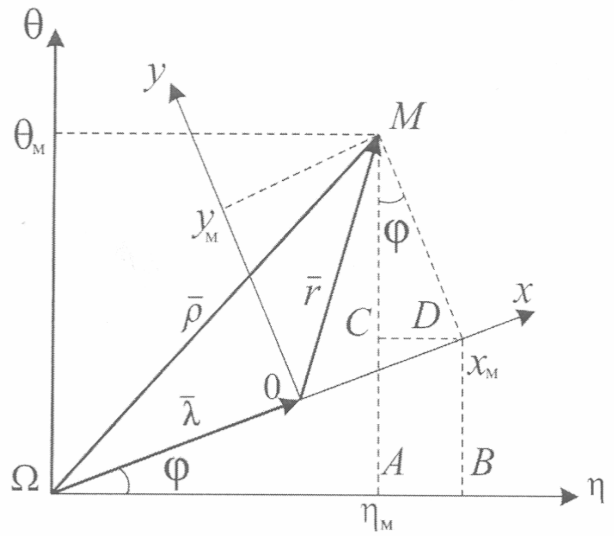


Рис. 12

В соответствии с полученным законом сложного движения нетрудно построить траекторию точки (рис. 13).

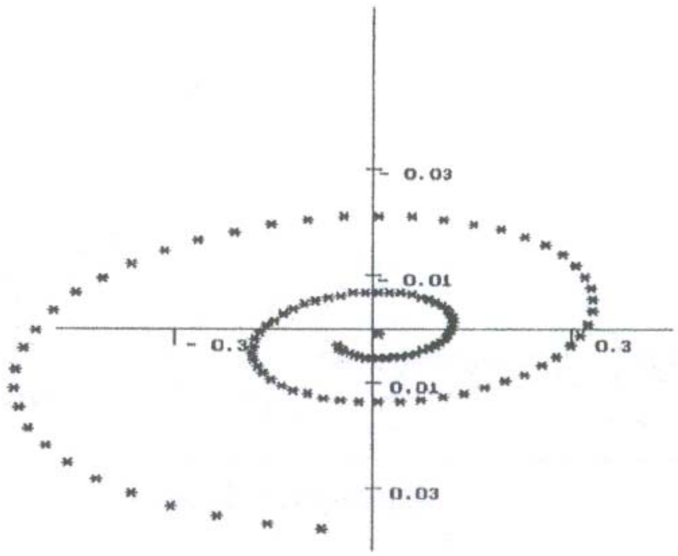


Рис. 13

Другим примером, немногим более сложным, чем предыдущий, где легко подтвердить рассматриваемый подход, является движение точки M тела, совершающего вращение вокруг собственной оси (пусть это будет вертикальная ось Oz локальной системы координат), и, одновременно, вращение вокруг неподвижной оси $\Omega\zeta$, удалённой на расстояние δ от оси Oz (рис. 14), как сложное, в соответствии с изложенной выше теорией матричных преобразований следует выполнить следующие действия:

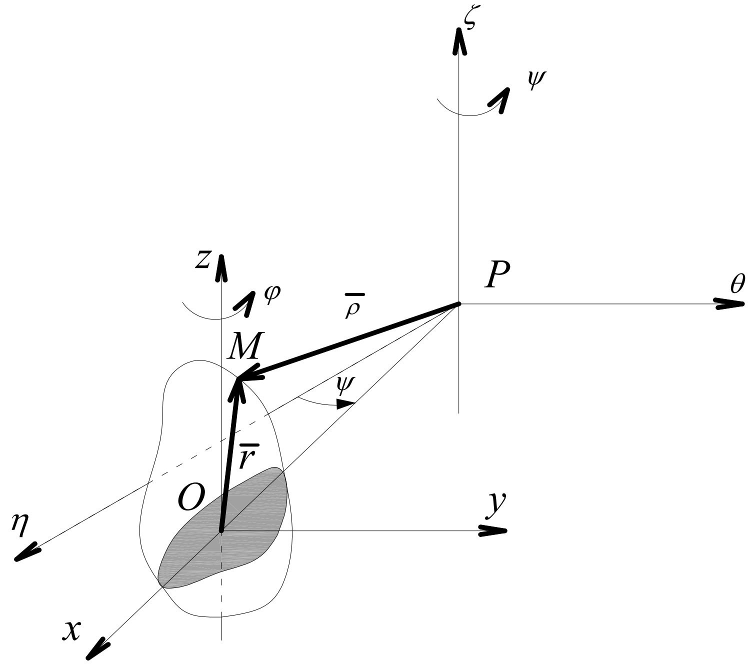


Рис. 14

2. Перенести локальную систему координат $Oxyz$, первоначально совпадавшую с положением неподвижной системы в точке Ω, вдоль оси $O\eta$ на отрезок δ; данному преобразованию соответствует матрица

$$[\Delta]=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & -\delta\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix},\quad [\Delta]=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & \delta\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

3. Затем осуществить поворот полученной системы на угол ψ вокруг неподвижной оси $\Omega\zeta$, характеризуемый матрицей

$$[\Psi]=\begin{bmatrix}\cos\psi & \sin\psi & 0 & 0\\ -\sin\psi & \cos\psi & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix},\quad [\Psi]=\begin{bmatrix}\cos\psi & -\sin\psi & 0 & 0\\ \sin\psi & \cos\psi & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

и вращение локальной системы вокруг собственной оси Oz, описываемое матрицей

$$[A]=\begin{bmatrix}\cos\alpha & \sin\alpha & 0 & 0\\ -\sin\alpha & \cos\alpha & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\quad [A]=\begin{bmatrix}\cos\alpha & -\sin\alpha & 0 & 0\\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

где $\alpha=\alpha(t)$ – закон собственного вращения тела (рис. 15).

Указанные операции сводят сложное движение произвольной точки M к выполнению серии матричных преобразований систем координат.

В результате перемножения матриц можно найти закон суммарного вращения тела вокруг параллельных осей $\bar{\rho}=[P]\bar{r}$, где $[P]$ – матрица результирующего вращения.

Последовательность умножения матриц на каждом этапе преобразований выполняется согласно установленному выше правилу очерёдности. В данном случае, поскольку на первом этапе преобразований ***движение локальной системы*** (поворот системы $Oxyz$ на угол ψ вокруг оси $\Omega\zeta$), ***происходит относительно неподвижной системы, то матрица предыдущего преобразования*** (матрица$[\Lambda]$) ***умножается слева на матрицу поворота*** $[\Psi]$***, т е.*** $[\Delta][\phi]=[Q]$**.**

На втором этапе следует результирующую матрицу $[Q]$ умножить справа на матрицу $[A]$, поскольку поворот тела на угол α происходит теперь вокруг собственной оси Oz; следовательно, $[P]=[A][Q]$.

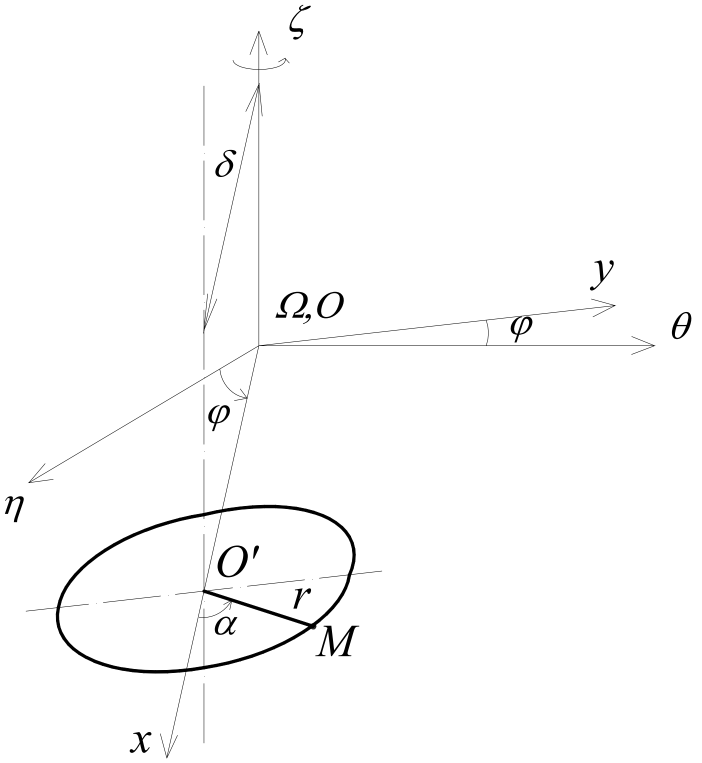


Рис. 15

В итоге полное преобразование системы координат, соответствующее совокупности трёх частных переходов, находится по формуле

$$[P]=[\Delta][\phi][A].$$

Выполнив сначала перемножение матриц $[\Delta]$, $[\phi]$, находят матрицу

$$[Q]=[\Delta][\phi]=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & \delta\cos\varphi\\ 0 & 1 & 0 & \delta\sin\varphi\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}\cos\varphi & -\sin\varphi & 0 & 0\\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}=$$

$$=\begin{bmatrix}\cos\varphi & -\sin\varphi & 0 & \delta\cos\varphi\\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 & \delta\sin\varphi\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

На втором шаге полученная матрица умножается на матрицу $[A]$. В итоге находят результирующую матрицу

$$[P]=[Q][A]=\begin{bmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 & \delta\cos\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 & \delta\sin\varphi \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\times\begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}=$$

$$=\begin{bmatrix} \cos(\alpha+\phi) & -\sin\alpha(\alpha+\phi), & 0 & \delta\cos\varphi \\ \sin(\alpha+\phi) & \cos(\alpha+\phi) & 0 & \delta\cos\varphi \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & & 1 \end{bmatrix},$$

характеризующую закон сложного движения точки M в матричной форме.

Очевидно, с помощью матрицы подобной структуры может быть задан также закон *плоского движения* тела (см. [6]). В частности, если направление собственного вращения тела противоположно вращению тела вокруг неподвижной оси $\Omega\zeta$, то $\alpha=-\psi$. В таком случае структура матрицы преобразования

$$[p]=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -d\cos\psi \\ 0 & 1 & 0 & d\sin\psi \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

указывает на то, что суммарное движение тела, описываемое с позиций теории преобразований систем координат в виде $\bar{\rho}=[p]\bar{r}$, будет *поступательным, поскольку матрица* $[p]$, очевидно, *является матрицей переноса, подобной* (4). Точно такой же закон движения может быть выведен и на основе матриц преобразований объекта.

З а м е ч а н и е. В учебных пособиях по теоретической механике [10] плоское движение обычно описывается в векторном или скалярном виде путём задания изменения координат произвольной точки B тела относительно неподвижной системы $P\eta\theta$, которое складывается из функций линейных смещений базовой точки A по направлениям осей системы координат $P\eta\theta$ и функции угла поворота ψ локальной системы вокруг собственной оси, проходящей через точку A (рис. 16).

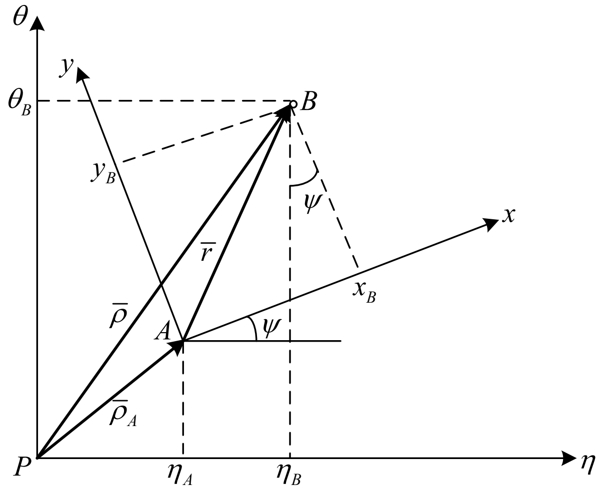


Рис. 16

В этом случае координаты точки B выражают через координаты точки A и угол наклона ψ и записывают закон плоского движения тела в виде:

$$\eta_B = \eta_A + x_B \cos\psi - y_B \sin\psi,$$
$$\theta_B = \theta_A + x_B \sin\psi + y_B \cos\psi.$$

Последние соотношения, очевидно, можно представить в матричной форме, воспользовавшись матрицей поворота объекта $[\Psi]$ и обозначениями вектор-столбцов $\bar r = (x_B, y_B)^T$ и $\bar\rho(t) = (\eta_B, \theta_B)^T$, ограничившись двумя компонентами в каждом их них. Тогда матричная форма закона плоского движения имеет вид

$$\bar\rho(t) = \bar\rho_A + [\psi]\ \bar r(t),$$

где $[\psi] = \begin{bmatrix} \cos\psi & -\sin\psi \\ \sin\psi & \cos\psi \end{bmatrix}$ – матрица вращения.

Если же ввести расширенные векторы перемещений третьего, условившись считать последние компоненты векторов $\bar r$, $\bar\rho$ единичными, т.е. составить вектор-столбцы $\bar\rho(t) = (\eta_B, \theta_B, 1)^T$ и $\bar r = (x_B, y_B, 1)^T$ *, то закон плоского движения можно представить как произведение расширенной матрицы преобразования координат вида

$$[H] = \begin{bmatrix} \cos\psi & -\sin\psi & \eta_A \\ \sin\psi & \cos\psi & \theta_A \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

на вектор $\bar r$, т.е. $\bar\rho\ (t) = [H]\bar r$. Следовательно, матрица $[H]$ является частной формой полученной ранее матрицы преобразования $[P]$.

* Индекс B в обозначениях проекций векторов $\bar\rho$ и $\bar r$ без искажения смысла далее опущен.

9. Приложение теории матричных преобразований к выводу закона сложного движения точки

Теория матричных преобразований систем координат или векторов находит применение и при выводе закона сложного движения точки. Представление закона сложного движения точки в матричной форме может быть использовано для автоматического построения траектории движения и вычисления скорости точки с помощью ПЭВМ.

Преимущества матричного подхода к решению указанных задач несомненны, т.к. некоторые сложности вывода закона сложного движения, обусловленные трудоёмкостью ручных операций с матрицами, легко преодолеваются при применении ПЭВМ.

Для примера можно обратиться к исследованию движения точки *M*, которая совершает движение по кольцу радиуса *R* в соответствии с законом $s_r = CM(t) = Sin\left(\pi t^3/4\right)$, где s_r – дуговая координата, t – время (рис. 17). Кольцо, в свою очередь, вращается вокруг вертикальной оси $O\zeta$ по закону $\varphi\left(t\right) = 2t^2 - 1{,}5t$. Требуется установить закон сложного движения точки *M*.

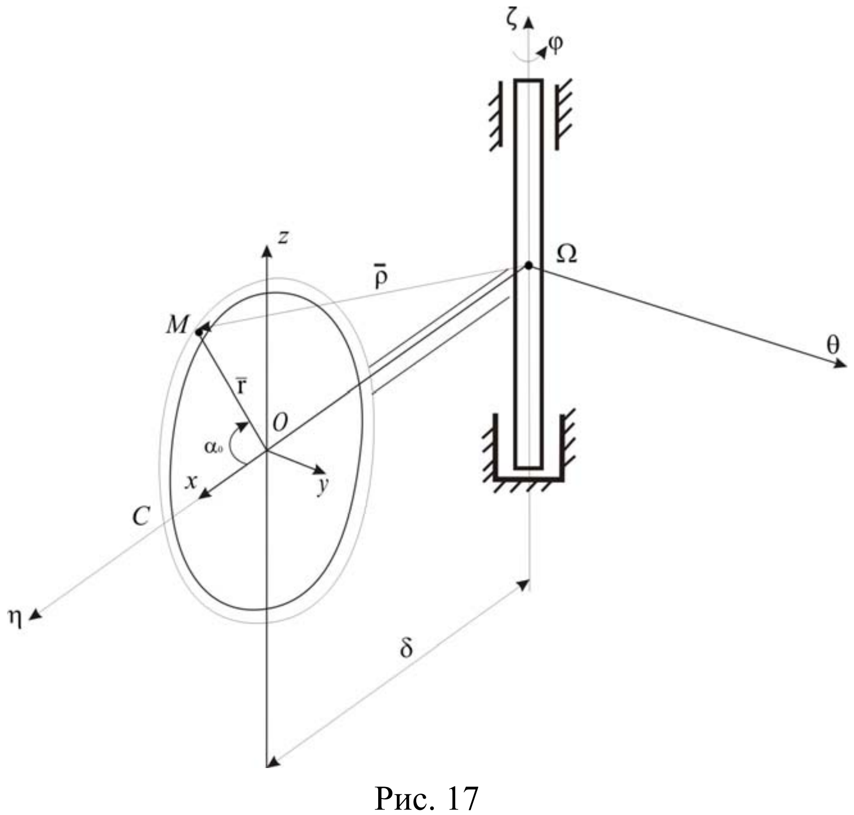


Рис. 17

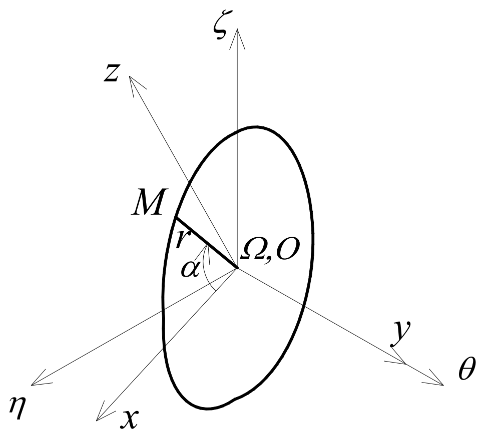
В данном случае сложное движение точки можно рассматривать, как движение точки *M* по кольцу (в системе координат *Oxyz*, связанной к кольцом), «сносимое» им относительно неподвижной системы $\Omega\eta\theta\zeta$, точнее, относительно неподвижной вертикальной оси $\Omega\zeta$.

С другой стороны, тоже движение можно считать результатом трёх матричных преобразований подвижной системы координат *Oxyz*, первоначально совпадающей с положением системы $\Omega\eta\theta\zeta$, осуществляемых в следующей последовательности [7]:

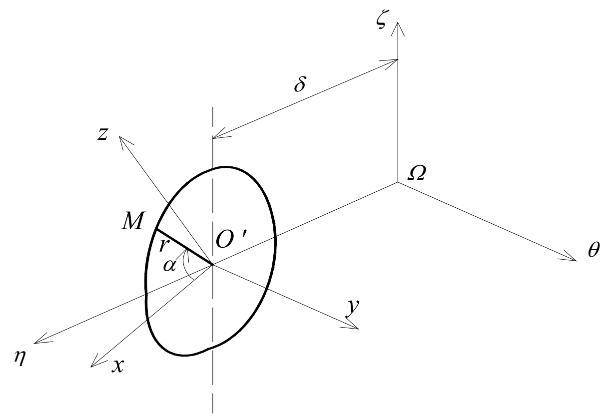
• перенос системы вдоль оси $O\eta$ (рис. 18,а) на отрезок δ, которому соответствует матрица

$$[\Delta]=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & -\delta\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix},$$

а



б



в

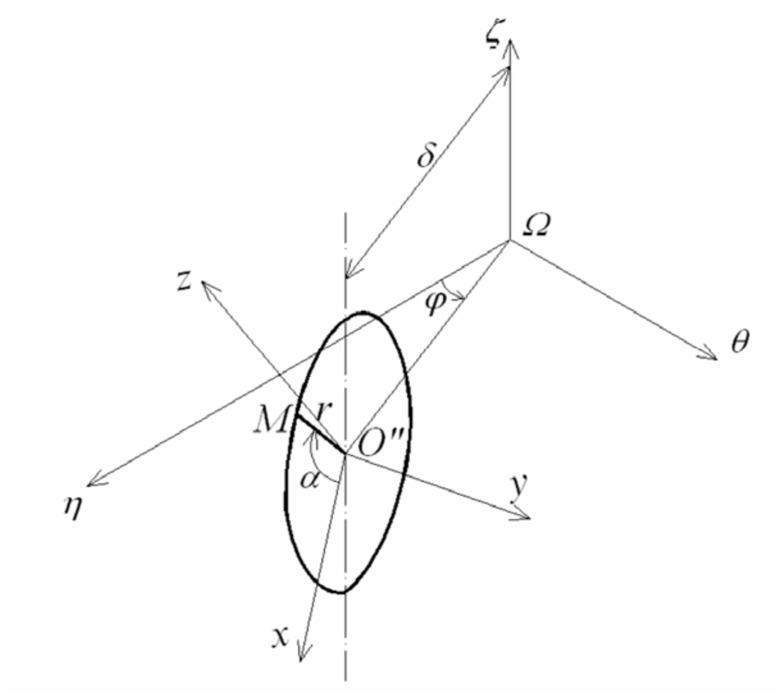


Рис. 18

• поворот сдвинутой в точку O' системы координат вокруг вертикальной оси $O\xi$ на угол φ (рис. 18,б), описываемый матрицей

$$[\phi]=\begin{bmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi & 0 & 0 \\ -\sin\varphi & \cos\varphi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

где $\varphi=\varphi(t)$ – закон переносного движения точки,

• и ещё один поворот на угол α вокруг собственной оси Oy (рис. 18,в), характеризуемый матрицей

$$[\alpha]=\begin{bmatrix} \cos\alpha & 0 & \sin\alpha & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sin\alpha & 0 & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Результирующее матричное преобразование $\bar{\rho}=[\Psi]\,\bar{r}$ определяется как суперпозиция матриц, т. е. $[\Psi]=[\phi]\,[\Delta]\,[\alpha]$; $\bar{r}$ – радиус-вектор точки M, заданный в подвижной системе координат, а радиус-вектор $\bar{\rho}$, очевидно, характеризует закон сложного движения точки M (в неподвижной системе координат).

Последовательность перемножения матриц в указанном преобразовании определяется правилами очерёдности вычисления произведения линейных преобразований.

Вычислив сначала промежуточную матрицу

$$[U]=[\phi][\Delta]=\begin{bmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi & 0 & 0 \\ -\sin\varphi & \cos\varphi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\times\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -\delta \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}=$$

$$=\begin{bmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi & 0 & -\delta\cos\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi & 0 & \delta\sin\varphi \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

и умножив её затем на матрицу $[\alpha]$, несложно установить результирующую матрицу

$$[\Psi]=[U][\alpha]=\begin{bmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi & 0 & -\delta\cos\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi & 0 & \delta\sin\varphi \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\times\begin{bmatrix} \cos\alpha & 0 & \sin\alpha & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sin\alpha & 0 & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}=$$

$$=\begin{bmatrix} \cos\alpha\cos\varphi & \sin\varphi & \sin\alpha\cos\varphi & -\delta\cos\varphi \\ -\cos\alpha\sin\varphi & \cos\varphi & -\sin\alpha\sin\varphi & \delta\sin\varphi \\ -\sin\alpha & 0 & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Далее умножив матрицу $[\Psi]$ на вектор $\bar{r}$, т.е. определив компоненты вектора $\bar{\rho}=(\eta_M,\ \theta_M,\ \xi_M,\ 1)$, нетрудно перейти к скалярной записи закона сложного движения точки M:

$$\begin{aligned} \eta_M &= \left[\delta + R\cos(\alpha+\alpha_0)\right]\cos\varphi, \\ \theta_M &= \left[\delta + R\cos(\alpha+\alpha_0)\right]\sin\varphi, \\ \xi_M &= R\sin(\alpha+\alpha_0), \end{aligned}$$

При определении проекций вектора $\bar{\rho}=[\Psi]\,\bar{r}$ компоненты вектора $\bar{r}=(x,\ y,\ z,\ 1)$, заданного в локальной системе координат, были выражены через радиус R кольца и угловую координату α_0 точки M в начальный момент времени t_0: $\bar{r}=(R\cos\alpha_0,\ 0,\ R\sin\alpha_0,\ 1)$. Необходимо заметить, что в последних формулах, в отличие от закона движения, выводимого при традиционном (аналитическом) решении, аргумент тригонометрических функций, заключённый в круглых скобках, представлен в виде суммы углов: переменного угла α, соответствующего текущему моменту, и его начального значения α_0. Данное разложение объясняется спецификой предлагаемого подхода к выводу закона сложного движения. Это, кстати, касается и формул для проекций скоростей (см. окончание статьи), где встречается та же сумма углов $\alpha+\alpha_0$.

Приняв достаточно большой интервал времени T движения механической системы и раздробив его на малые отрезки времени $\Delta t = T/n$, где n – степень дробления, несложно построить траекторию сложного движения точки M (рис. 19). Для этого следует вычислить значения координат $\eta_M(t)$, $\theta_M(t)$, $\xi_M(t)$ движущейся точки согласно последним выражениям через малые интервалы, пользуясь заданными функциями изменения дуги $s_r = Sin\left(\pi t^3/4\right)$ или угловой координаты $\alpha = s_r/R$ относительного движения, а также законом переносного движения точки $\varphi(t) = 2t^2 - 1{,}5t$.

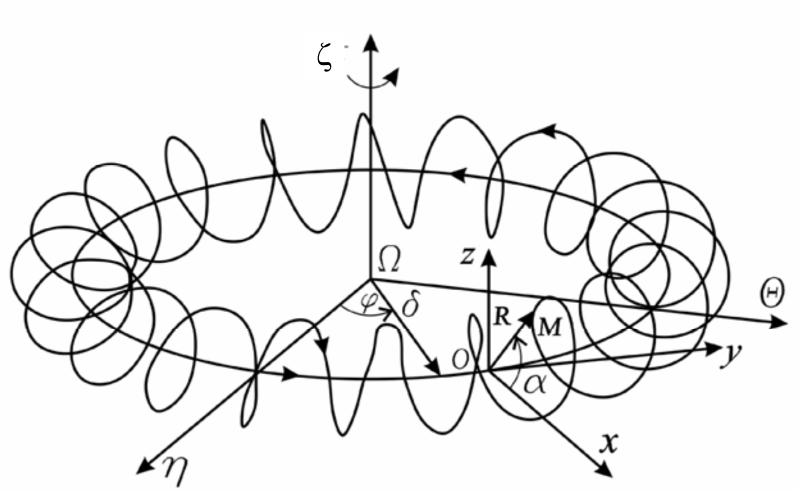


Рис. 19

10. Матрица скорости сложного движения точки

Обладая законом сложного движения точки в матричной форме, с помощью компьютера можно находить не только траекторию движения, но и скорость точки. Для этого, очевидно, необходимо теорему о сложении скоростей представить в терминах матричных преобразований систем координат.

Пусть, для общности, закон сложного движения точки $\overline{\rho} = [\Psi]\overline{r}$ записан в общей форме

$$\overline{r}_0^i = P_0^i \cdot \overline{r}_i^i ,$$

где радиус-вектор произвольной точки M в i-й промежуточной системе координат $O_i x_i y_i z_i$ обозначен как $\overline{r}_i^i = (x_i, y_i, z_i, 1)^T$; под $\overline{r}_0^i$ подразумевается радиус-вектор $\overline{\rho}$, а роль результирующей матрицы преобразования $[\Psi]$ играет теперь матрица P_0^i. Здесь и в дальнейшем скобки в записи матриц для сокращения письма не используются; нижний индекс указывает на предшествующую систему координат, относительно которой совершается i-е преобразование системы. То же относится и к индексам у вектора $\overline{r}_0^i$.

В новых обозначениях, очевидно, матрица результирующего преобразования имеет вид $P_0^i = P_0^1 \cdot P_1^2 \cdot \ldots \cdot P_{i-1}^i$.

Скорость произвольной точки M i-го звена относительно базовой системы координат определяется по формуле

$$\upsilon_0^i = \frac{dr_0^i}{dt} = \frac{d}{dt}\left(P_0^i \cdot r_i^i\right).$$

Подставив сюда выражение для матрицы P_0^i и выполнив затем дифференцирование произведения, стоящего в скобках, можно записать

$$\upsilon_0^i = \dot{P}_0^1 \cdot P_1^2 \cdot \ldots \cdot P_{i-1}^i \cdot r_i^i + P_0^1 \cdot \dot{P}_1^2 \ldots P_{i-1}^i \cdot r_i^i \ldots + P_0^1 \cdot P_1^2 \cdots \dot{P}_{i-1}^{\,i} \cdot r_i^i + \ldots +$$

$$+ P_0^1 \cdot P_1^2 \cdots P_{i-1}^i \dot{r}_i^i$$

Поскольку точка M движется вместе с системой координат $O_i x_i y_i z_i$, постольку производная $\dot{r}_i^i = 0$ на каждом шаге преобразований. Следовательно, скорость произвольной точки на i-м шаге преобразований находится по формуле

$$\upsilon_0^i = \dot{P}_0^1 \cdot P_1^2 \cdot \ldots \cdot P_{i-1}^i \cdot r_i^i + P_0^1 \cdot \dot{P}_1^2 \ldots \cdot P_{i-2}^i \cdot P_{i-1}^i \cdot r_i^i \ldots + P_0^1 \cdot P_1^2 \cdot \ldots \cdot \dot{P}_{i-1}^i \cdot r_i^i .$$

Так как любая матрица P_{i-1}^{i} является сложной функцией одного из параметров – либо угловой, либо линейной координаты, которую в общем случае можно обозначить символом q_j, то полученное выражение приобретает компактный вид

$$\upsilon_0^i = \sum_{j=1}^{i} \frac{\partial P_0^i}{\partial q_j} \dot{q}_j \cdot r_i^i .$$

Операторами дифференцирования матриц преобразований при поворотах систем координат вокруг осей служат матрицы:

$$D_\eta = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad D_\theta = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad D_\xi = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

соответственно, а матриц преобразований при переносах систем вдоль осей – матрицы:

$$D_x = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad D_y = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad D_z = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Используя их, нетрудно вывести формулу дифференцирования матрицы P_{i-1}^{i}, а именно,

$$\frac{\partial P_{i-1}^{i}}{\partial q_i} = D P_{i-1}^{i} .$$

Здесь индекс матрицы D опущен, т.к. в каждом случае он соответствует структуре матрицы преобразования P_{i-1}^{i}, подлежащей дифференцированию. Таким образом, вычисление частной производной матрицы P_{i-1}^{i} осуществляется путём её умножения на один из перечисленных выше операторов D.

Применение матриц дифференцирования D позволяет представить любое слагаемое, содержащееся в формуле скорости, в виде произведения матриц:

$$\frac{\partial P_{i-1}^{i}}{\partial q_i} = \begin{cases} P_0^1 P_1^2 \ldots P_{j-2}^{j-1} D P_{j-1}^{j} \ldots P_{i-1}^{i}, & j < i, \\ 0, & j > i. \end{cases}$$

Если ввести ещё одно сокращение для записи любого слагаемого в формуле скорости υ_0^i, обозначив произведение матриц, содержащее оператор дифференцирования, т.е. принять символ

$$Q_{ij} = \begin{cases} P_0^{j-1} D P_{j-1}^{j} ... P_{i-1}^{i}, & j \le i, \\ 0 & j > i, \end{cases} \tag{12}$$

то формулу скорости тогда можно записать в компактном виде, а именно,

$$\upsilon_0^i = \left(\sum_{j=1}^{i} Q_{ij} \dot{q}_j \right) \cdot r_i^i . \tag{13}$$

Сумма произведений, заключённая в скобках полученного выражения, является матрицей. Следовательно, скорость точки M (при $i = n$) относительно базовой системы, как и скорость точки в любой системе координат, определяется по формуле

$$\upsilon_0^i = \omega_{ij} \cdot r_i^i ,$$

которая в матричной форме имеет вид

$$\overline{\upsilon} = [\Omega] \overline{r} . \tag{14}$$

Матрица $[\Omega]$, по аналогии с вектором угловой скорости вращающегося тела в формуле Эйлера ($\overline{\upsilon} = \overline{\omega} \times \overline{r}$), называется матрицей скорости сложного движения точки. Её элементы находятся по формуле

$$\omega_{ij} = \sum_{j=1}^{i} Q_{ij} \dot{q}_j . \tag{15}$$

11. Алгоритм построения траектории и вычисления скорости точки при сложном движении

Как правило, решение задач о сложном движении точки основано на использовании законов относительного движения точки в виде $s_r = s(t)$ и переносного движения точки, с которым жестко связана подвижная система координат, заданного одной из форм: либо в форме $\varphi_e = \varphi(t)$, либо – $\lambda_e = \delta(t)$. Целью решения является:

- определение закона сложного движения,
- построение траектории,
- вычисление скорости и ускорения точки в заданный момент времени $t = t_1 \ \ (c)$.

При определении закона сложного движения необходимо сначала сформировать матрицы частных преобразований систем координат, соответствующие перемещениям (переносам или поворотам) систем. Последовательность выполнения операций умножения матриц преобразований, обусловленная характером того или иного перехода, при установлении результирующего преобразования диктуется правилом очерёдности (см. п. 8).

Результирующее преобразование играет двоякую роль. С одной стороны оно определяет закон сложного движения, представленный в матричной форме. С другой – является уравнением траектории движения точки, записанным в параметрическом виде.

12. Примеры формирования матрицы скорости сложного движения точки

Процедуру формирования матрицы скорости сложного движения точки достаточно конкретизировать на двух примерах, для которых в п. 8 получены законы движения, представленные в матричной форме.

При обращении к первому из них, следует исходить из закона

$$\overline{\rho} = [P]\ \overline{r},$$

где

$$[P] = [\Lambda][\phi] = \begin{bmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi & 0 & \rho\cos\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi & 0 & \rho\sin\varphi \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

– матрица закона сложного движения шарика (рис. 20).

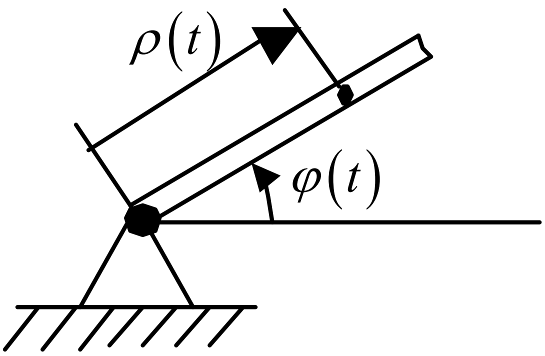


Рис. 20

Скорость точки при сложном движении вычисляется по формуле (13)

$$\upsilon_0^i = \left(\sum_{j=1}^{i=2} Q_{ij}\, \dot{q}_j \right) \cdot r_i^i,$$

где матрица

$$Q_{ij} = \begin{cases} P_0^{j-1} D P_{j-1}^j \ldots P_{i-1}^i, & j \le i, \\ 0 & j > i, \end{cases}$$

записана в поэлементной форме. При $i=2,\ j=2$ в составе произведений Q_{ij} остаётся лишь по три сомножителя, а сумма произведений $Q_{ij}\dot{q}_j$ в соответствии с (12) при решении рассматриваемой задачи состоит из двух слагаемых

$$Q_{21}\dot{q}_1+Q_{22}\dot{q}_2 \quad \text{или} \quad Q_{21}\dot{\varphi}+Q_{22}\dot{\delta}.$$

Матрицы Q_{21}, Q_{22}, представленные в первоначальных обозначениях, имеют вид:

$$Q_{21}=D_\zeta\cdot P_0^1\cdot P_1^2=\left[D_\zeta\right]\cdot[\varphi]\cdot[\Delta],\ \ Q_{22}=P_0^1\cdot D_x\cdot P_1^2=[\varphi]\cdot\left[D_x\right]\cdot[\Delta],\qquad (16)$$

где

$$D_\zeta=\begin{bmatrix}0&1&0&0\\-1&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix},\quad D_x=\begin{bmatrix}0&0&0&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}$$

– матрицы-операторы дифференцирования матриц преобразований систем координат при переносе и повороте, на что указывают индексы x и ζ при D.

Вычислив произведения матриц по формулам (16), нетрудно найти их структуру. В частности, первая матрица

$$Q_{21}=\begin{bmatrix}0&1&0&0\\-1&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}\cos\varphi&\sin\varphi&0&0\\-\sin\varphi&\cos\varphi&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}1&0&0&-\delta\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}=$$

принимает следующую форму

$$\begin{bmatrix}-\sin\varphi&\cos\varphi&0&0\\-\cos\varphi&-\sin\varphi&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}1&0&0&-\delta\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-\sin\varphi&\cos\varphi&0&\delta\sin\varphi\\-\cos\varphi&-\sin\varphi&0&\delta\cos\varphi\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix},$$

а вторая –

$$Q_{22}=\begin{bmatrix}\cos\varphi & \sin\varphi & 0 & 0\\ -\sin\varphi & \cos\varphi & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & -\delta\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}=$$

$$=\begin{bmatrix}0 & 0 & 0 & \cos\varphi\\ 0 & 0 & 0 & -\sin\varphi\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

С учётом полученных структур матриц Q_{21}, Q_{22} скорость точки в итоге определяется по формуле

$$\upsilon_0^i=\left(\sum_{j=1}^{i=2}Q_{ij}\dot{q}_j\right)\cdot r_i^i=$$

$$=\left\{\begin{bmatrix}-\sin\varphi & \cos\varphi & 0 & \delta\sin\varphi\\ -\cos\varphi & -\sin\varphi & 0 & \delta\cos\varphi\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}\dot{\varphi}+\begin{bmatrix}0 & 0 & 0 & \cos\varphi\\ 0 & 0 & 0 & -\sin\varphi\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}\dot{\delta}\right\}r_i^i=$$

$$=\begin{bmatrix}-\dot{\varphi}\sin\varphi & \dot{\varphi}\cos\varphi & 0 & \dot{\varphi}\delta\sin\varphi+\dot{\delta}\cos\varphi\\ -\dot{\varphi}\cos\varphi & -\dot{\varphi}\sin\varphi & 0 & \dot{\varphi}\delta\cos\varphi-\dot{\delta}\sin\varphi\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}r_i^i.$$

Выполнив операцию умножения, предписываемую правой частью этого выражения, находят проекции вектора скорости на оси неподвижной системы:

$$\upsilon_\eta=-\dot{\varphi}x\sin\varphi+\dot{\varphi}y\cos\varphi+\dot{\delta}\cos\varphi+\delta\dot{\varphi}\sin\varphi,$$

$$\upsilon_\theta=-\dot{\varphi}x\cos\varphi-\dot{\varphi}y\sin+\delta\dot{\varphi}\cos\varphi-\dot{\delta}\sin\varphi,$$

$$\upsilon_\zeta=0.$$

В текущем положении точки M (при $x = 0$, $y = 0$) компоненты вектора скорости шарика равны:

$$\upsilon_\eta = \delta\dot{\varphi}\sin\varphi + \dot{\delta}\cos\varphi,$$

$$\upsilon_\theta = \delta\dot{\varphi}\cos\varphi - \dot{\delta}\sin\varphi.$$

Данные формулы полностью идентичны аналитическим выражениям для проекций скорости сложного движения, выведенным выше в п. 6.

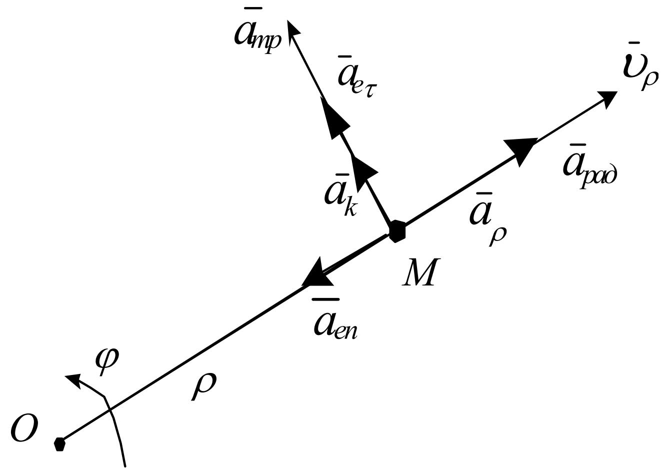


Рис. 21

Величина скорости сложного движения точки определяется по формуле (13). Очевидно, что при её вычислении могут быть использованы производные законов движения, характеризующие линейную или угловую скорости переносного движения точки, а также скорости относительного движения, которые находят путем численного дифференцирования заданных функций $s_r = s(t)$, $\varphi_e = \varphi(t)$ по времени. Поэтому в алгоритме программы автоматического решения содержится процедура *GRAD*, осуществляющая дифференцирование функций (прил. 2).

Визуализация решения рассматриваемой задачи, производимая процедурой *GRAF*, позволяет вести наблюдение за сложным движением точки по её траектории с одновременной фиксацией значений скорости в текущий момент времени в окне экрана.

При решении аналогичных задач с большим числом частных преобразований, содержащихся в матричном законе сложного движения, например, такой, как задача, приведенная в п. 9, возникает необходимость в автоматизации процедуры вычисления скорости сложного движения точки. Никаких принципиальных затруднений на этом пути нет.

Действительно, обладая законом сложного движения (см. с. 30) в виде

$$\bar{\rho} = [\Psi]\,\bar{r} = [\phi]\,[\Delta]\,[\alpha]\,\bar{r},$$

скорость точки M относительно неподвижной системы координат можно найти путём дифференцирования радиус-вектора $\bar{\rho}$ по времени

$$\bar{\upsilon} = \frac{d\bar{\rho}}{dt} = \frac{d}{dt}\left([\Psi]\,\bar{r}\right) = \frac{d}{dt}\left([\phi]\,[\Delta]\,[\alpha]\,\bar{r}\right). \qquad (17)$$

Так как матрица отдельного преобразования является функцией одного из двух параметров – либо угловой (φ, α), либо линейной координаты (δ) и, в общем случае, времени t, то последнее выражение следует дифференцировать как сложную функцию [8]

$$\bar{\upsilon} = \frac{d}{dt}\left([\phi]\,[\Delta]\,[\alpha]\,\bar{r}\right) =$$

$$= \left\{ \frac{d[\phi]}{d\varphi}\frac{d\varphi}{dt}[\Delta]\,[\alpha] + [\phi]\frac{d[\Delta]}{d\delta}\frac{d\delta}{dt}[\alpha] + [\phi]\,[\Delta]\,\frac{d[\alpha]}{d\alpha}\frac{d\alpha}{dt} \right\}\bar{r} \qquad (18)$$

Как известно, определение производной матрицы по параметру состоит в умножении самой матрицы на оператор дифференцирования, например,

$$\frac{d[\phi]}{d\varphi} = \left[D_{\zeta}\right][\phi].$$

Операторами дифференцирования матриц преобразований при поворотах системы координат вокруг осей $\Omega\zeta$ и Oy служат матрицы:

$$\left[D_{\zeta}\right] = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \left[D_{\theta}\right] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

соответственно, а матрицы преобразования переноса системы вдоль оси Ox – матрица:

$$\left[D_{x}\right] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Сумма произведений, заключённая в скобках выражения (3), является матрицей

$$[V]=\left[D_\zeta\right]\cdot[\phi]\dot{\varphi}\cdot[\Delta]\cdot[\alpha]+[\phi]\cdot[D_x]\cdot[\Delta]\dot{\delta}\cdot[\alpha]+[\phi]\cdot[\Delta]\cdot[D_\theta]\cdot[\alpha]\dot{\alpha}\ . \quad (19)$$

Следовательно, скорость сложного движения точки M можно представить в матричной форме

$$\bar{\upsilon}=[V]\,\bar{r}\,. \quad (20)$$

Матрица $[V]$, по аналогии с вектором угловой скорости вращающегося тела в формуле Эйлера ($\bar{\upsilon}=\bar{\omega}\times\bar{r}$), называется матрицей скорости сложного движения точки.

Вычислив произведение матриц в каждом из слагаемых формулы (19), нетрудно установить их структуру.

В частности, первое слагаемое

$$[P_1]=\begin{bmatrix}0 & -1 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}\cos\varphi & -\sin\varphi & 0 & 0\\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\times$$

$$\times\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & \delta\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}\cos\alpha & 0 & -\sin\alpha & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ \sin\alpha & 0 & \cos\alpha & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

сводится к матрице

$$[P_1]=\begin{bmatrix}-\sin\varphi\, cos\alpha & \cos\varphi & \sin\varphi\sin\alpha & -\delta\sin\varphi\\ \cos\varphi\, cos\alpha & -\sin\varphi & -\cos\varphi\sin\alpha & \delta\cos\varphi\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix},$$

второе – к

$$[P_2]=\begin{bmatrix}\cos\varphi & -\sin\varphi & 0 & 0\\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}\times$$

$$\times\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & \delta\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}\cos\alpha & 0 & -\sin\alpha & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ \sin\alpha & 0 & \cos\alpha & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}=$$

$$=\begin{bmatrix}0 & 0 & 0 & \cos\varphi\\ 0 & 0 & 0 & \sin\varphi\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix},$$

третье

$$[P_3]=\begin{bmatrix}\cos\varphi & -\sin\varphi & 0 & 0\\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & \delta\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\times$$

$$\times\begin{bmatrix}0 & 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\cos\alpha & 0 & -\sin\alpha & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ \sin\alpha & 0 & \cos\alpha & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

– к матрице

$$[P_3]=\begin{bmatrix}-\sin\alpha\cos\varphi & 0 & -\cos\alpha\cos\varphi & 0\\ -\sin\alpha\sin\varphi & 0 & -\cos\alpha\sin\varphi & 0\\ \cos\alpha & 0 & -\sin\alpha & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}.$$

После умножения матриц $\left[P_1\right], \left[P_2\right], \left[P_3\right]$, соответственно, на $\dot{\varphi}, \dot{\delta}=0, \dot{\alpha}$ и последующего сложения согласно (19) находят *матрицу скорости сложного движения* точки

$$[V]=\begin{bmatrix} -\dot{\varphi}\sin\varphi\cos\alpha-\dot{\alpha}\sin\alpha\cos\varphi & \dot{\varphi}\cos\varphi & \dot{\varphi}\sin\varphi\sin\alpha-\dot{\alpha}\cos\alpha\cos\varphi & -\delta\dot{\varphi}\sin\varphi \\ \dot{\varphi}\cos\varphi\cos\alpha-\dot{\alpha}\sin\alpha\sin\varphi & -\dot{\varphi}\sin\varphi & -\dot{\varphi}\cos\varphi\sin\alpha-\dot{\alpha}\cos\alpha\sin\varphi & \delta\dot{\varphi}\cos\varphi \\ \dot{\alpha}\cos\alpha & 0 & -\dot{\alpha}\sin\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Вычислив произведение матрицы $[V]$ на радиус-вектор $\bar{r}=\left(R\cos\alpha_0,\ 0,\ R\sin\alpha_0,\ 1\right)$, легко установить *проекции вектора скорости* при сложном движении точки M:

$$\upsilon_\eta=-\dot{\varphi}\left[\delta+R\cos\left(\alpha+\alpha_0\right)\right]\sin\varphi-\dot{\alpha}R\sin\left(\alpha+\alpha_0\right)cos\varphi,$$

$$\upsilon_\theta=\dot{\varphi}\left[\delta+R\cos\left(\alpha+\alpha_0\right)\right]\cos\varphi-\dot{\alpha}\ R\sin\left(\alpha+\alpha_0\right)\sin\varphi,\ \ (21)$$

$$\upsilon_\xi=\dot{\alpha}R\cos\left(\alpha+\alpha_0\right)\ .$$

Если обозначить сумму углов символом $\beta(t)=\alpha(t)+\alpha_0$ и считать величину $\beta(t)$ законом относительного движения точки, то тогда данные выражения для проекций абсолютной скорости совпадают с аналогичными формулами, полученными выше в п. 6 (см. пример 2). Отсюда следует, что при решении задачи в матричной форме выражение закона относительного движения необходимо представить в виде суммы двух слагаемых, одно из которых – $\alpha(t)$ описывает движение локальной системы координат, а другое – α_0 характеризует положение точки в начальный момент времени (рис. 22).

Благодаря матричной форме решения задачи о сложном движении точки оказывается возможным не только автоматическое построение траектории движения (рис. 16), но и вычисление скорости согласно (20) с помощью ПЭВМ, что позволяет демонстрировать на экране монитора компьютерный фильм о движении точки с одновременной фиксацией в окне монитора координат точки и значений скорости в текущий момент времени.

Предлагаемый способ решения задачи может быть использован для проведения контроля при выполнении заданий для курсовых работ по теоретической механике по теме сложного движения точки [11].

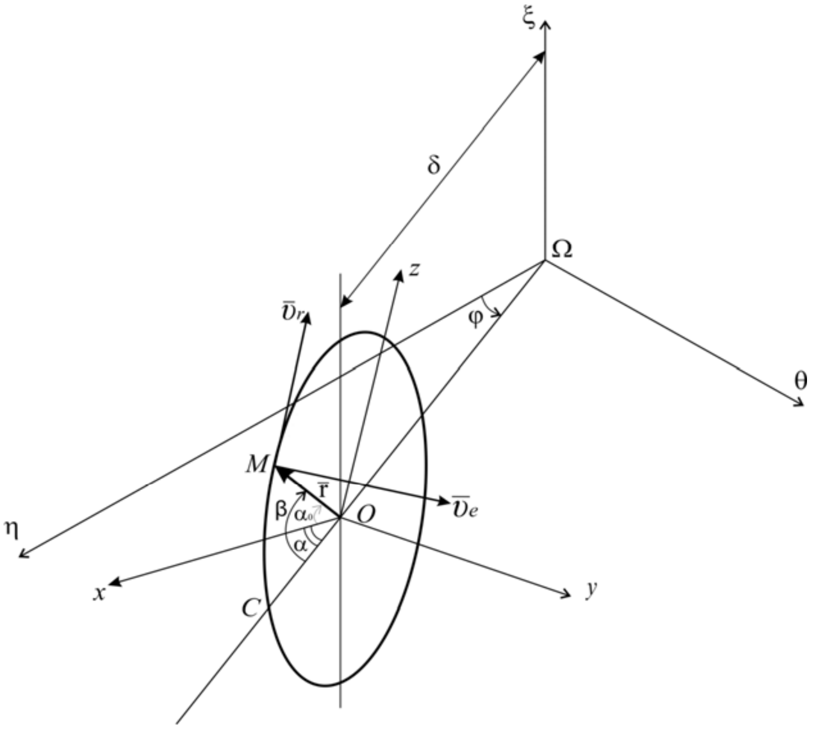


Рис. 22

13. Сферическое движение тела. Закон движения. Степень свободы сферического движения

Ещё одним примером, где можно продемонстрировать эффективность применения теории метричных преобразований для вывода закона движения, служит кинематика сферического движения – движение твердого тела, имеющего одну неподвижную точку. Действительно, любая точка A тела при этом движется по сферической поверхности s радиуса $\overline{\rho} = OA$ (рис. 23). Отсюда и название движения.

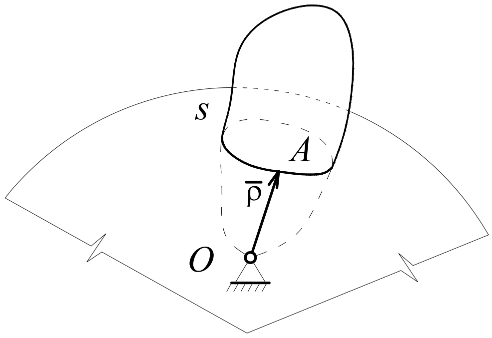


Рис. 23

Примерами такого движения являются вращение волчка (юлы) при сохранении неподвижной точки опоры, движение кисти руки относительно локтевого участка и др.

Положение твердого тела в пространстве можно определить координатами трех точек, не лежащих на одной прямой. А так как при сферическом движении одна из точек (точка O) остаётся неподвижной, то положение тела можно задать координатами лишь двух точек M, N, не лежащих на одной прямой с точкой O (рис. 24).

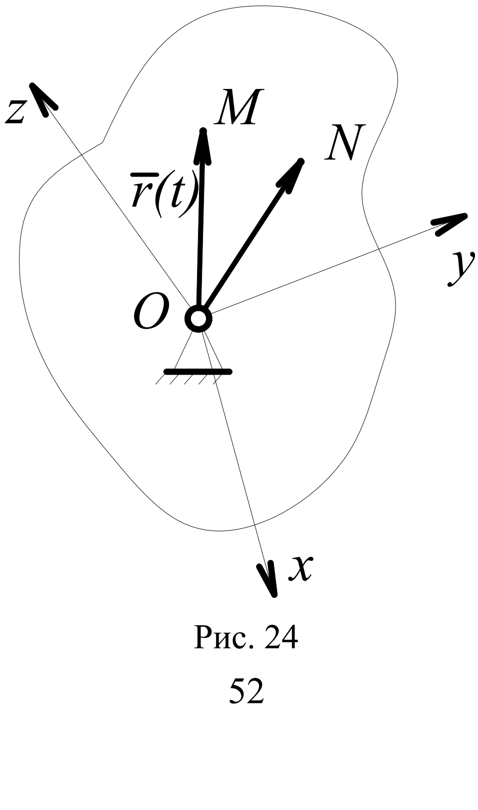


Рис. 24

Очевидно, для координат точек M, N справедливы следующие соотношения:

1. $OM = \sqrt{x_M^{\ 2} + y_M^2 + z_M^2} = d_1 = \text{const}$,

2. $ON = \sqrt{x_N^{\ 2} + y_N^2 + z_N^2} = d_2 = \text{const}$,

3. $MN = \sqrt{\left(x_N - x_M\right)^2} + \left(y_N - y_M\right)^2 + \left(z_N - z_M\right)^2 = d_3 = \text{const}$,

где d_i (i =1,2,3) – длины отрезков OM, ON, MN, сохраняющие свои значения в процессе движения.

Характеристиками сферического движения тела могут служить законы движения точек M и N, представленные в виде функций времени:

$$x_M = x_M\left(t\right), \quad y_M = y_M\left(t\right), \ \ldots, \quad z_N = z_N\left(t\right).$$

Всего их шесть. Однако, из этих шести величин лишь три независимы вследствие наличия трех указанных соотношений. Следовательно, задание любых трех координат произвольной точки тела в виде функций времени однозначно характеризует сферическое движение, например, координат точки M:

$$x_M = x_M(t), \quad y_M = y_M(t), \quad z_M = z_M(t).$$

В качестве независимых параметров, характеризующих сферическое движение можно взять также углы Эйлера, корабельные углы Крылова (углы дифферента, рыскания, крена) и др. Очевидно, *степень свободы твердого тела при сферическом движении равна трём*.

14. Углы Эйлера

Как и ранее следует воспользоваться двумя системами координат: неподвижной, которую обозначают греческими буквами η, θ, ζ (рис. 25). Следовательно, координаты произвольной точки тела тоже обозначаются этими буквами. Для описания сферического движения понадобится ещё и подвижная система координат, жёстко связанная с телом и которая в начальном положении совпадает с неподвижной.

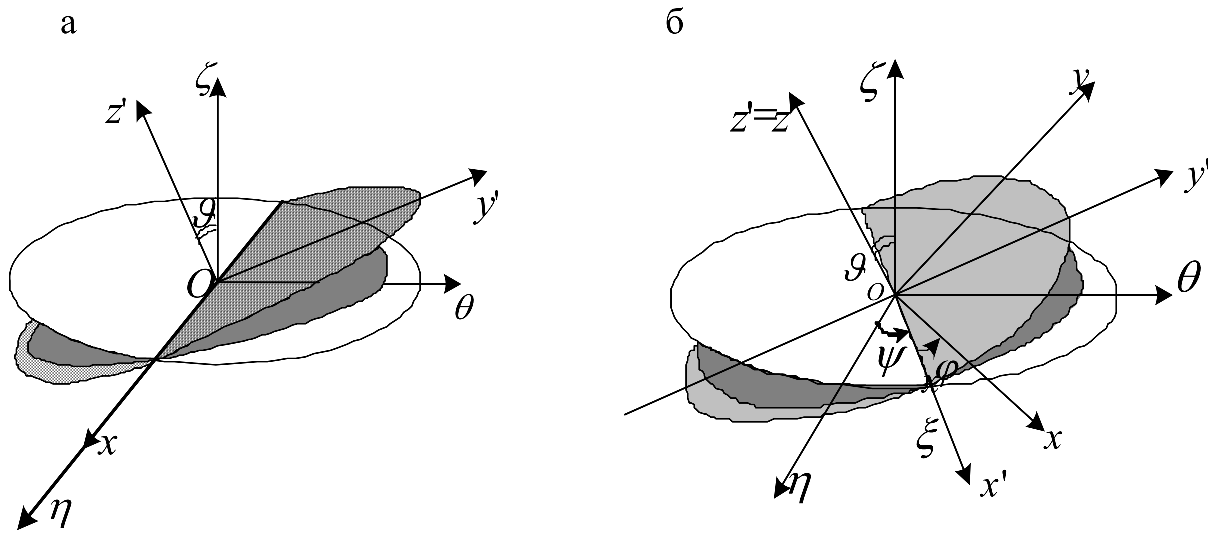
Наша цель найти то положение подвижной декартовой системы координат, которое она может занять при произвольном движении тела с одной неподвижной точкой *O*. Эту систему координат обозначают латинскими буквами *x, y, z*. В общем случае сферическое движение можно представить в виде совокупности трёх характерных преобразований подвижной системы координат:

I. Сначала осуществить наклон подвижной системы координат вокруг оси $O\eta$ или Ox на угол ϑ, который принято называть *углом нутации.* В результате ось *Oz* займёт положение *Oz'*, а ось *Oy* – *Oy'* (рис. 25, а).

II. Затем повернуть наклонённую систему координат вокруг оси $O\zeta$ на угол ψ, который называется *углом прецессии*. Ось Ox перейдёт в новое положение Ox'; эта ось называется *линией узлов* и обозначается чаще как $O\xi$ (рис. 25,б).

III. А в конце полученную систему координат следует закрутить вокруг оси *Oz'* на угол φ, т. н. *угол собственного или чистого вращения*.

Углы φ, ψ, ϑ, характеризующие положение тела при сферическом движении, называются *углами Эйлера*.



φ – *угол собственного вращения*,

ψ – *угол прецессии*,

ϑ – *угол нутации*.

Рис. 25

Закон сферического движения твердого тела в переменных Эйлера записывается в виде:

$$\vartheta = \vartheta(t), \quad \psi = \psi(t), \quad \varphi = \varphi(t).$$

15. Матрица преобразования систем координат при сферическом движении

Словесное описание этапов путешествия можно перевести на язык математики – язык формул; в данном случае на язык матричных преобразований. Материал данного раздела показывает огромные преимущества, открывающиеся в механике при описании движения материальных частиц и тел с позиций матричных преобразований систем координат.

Каждый, из перечисленных в предыдущем разделе, поворот подвижной системы координат, а, следовательно, и тела, можно описать матрицей поворота или вращения подвижной декартовой системы координат. Действительно, повороту тела вокруг оси $O\zeta$, соответствует преобразование вида

$$[R]=\begin{bmatrix}\cos\psi & sin\psi & 0\\ -\sin\psi & \cos\psi & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}.$$

Очевидно, квадратная матрица третьего порядка, кроме поворота подвижной системы на угол ψ, характеризует также сохранение координаты вдоль оси $O\zeta$, т.е. $z=1\cdot\zeta$.

Повороту тела вокруг линии узлов $O\xi$ на угол ϑ соответствует матрица преобразования $[P]$

$$[P]=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \cos\vartheta & \sin\vartheta\\ 0 & -\sin\vartheta & \cos\vartheta\end{bmatrix},$$

а вращению на угол φ вокруг оси Oz' – матрица

$$[L]=\begin{bmatrix}\cos\varphi & \sin\varphi & 0\\ -\sin\varphi & \cos\varphi & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}.$$

Матрицей произвольного сферического движения тела будет служить матрица $[\phi]$, являющаяся их произведением*, т.е.

$$[\phi]=[L][P][R].$$

** Здесь важна последовательность умножения матриц.

Выполнив умножение матриц, получим

$$[\phi]=\begin{bmatrix} \cos\psi\cos\varphi-\cos\vartheta\sin\psi\sin\varphi, & \cos\psi\sin\varphi+\cos\vartheta\cos\psi\cos\varphi, & \sin\varphi\sin\vartheta \\ -\sin\psi\sin\varphi-\cos\vartheta\sin\psi\sin\varphi, & -\sin\psi\sin\varphi+\cos\vartheta\cos\psi\cos\varphi, & \cos\varphi\sin\vartheta \\ \sin\theta\sin\psi & -\sin\theta\cos\psi & \cos\vartheta \end{bmatrix}$$

Итак, новые координаты произвольной точки M тела можно выразить через старые с помощью матрицы преобразования $[\phi]$.

Пользуясь терминами «путешественников», можно говорить о том, что если у «греков» взять вектор (подразумевать можно и стержень) $\overline{\rho}$, то в результате «путешествия из *греков в варяги*» он преобразится в вектор $\overline{r}$ в соответствии с формулой

$$\overline{r}=[\phi]\overline{\rho},$$

где $\overline{r}=(x,y,z)^T$, а $\overline{\rho}=(\eta,\theta,\zeta)^T$.

Преобразование, обратное $[\phi]$, с помощью которого можно осуществить переход от системы $Oxyz$, связанной с телом, к неподвижной системе координат $O\eta\theta\zeta$ описывается зависимостью $\overline{\rho}=[\phi]^{-1}\overline{r}$, где $\overline{\rho}$- радиус-вектор точки M в неподвижной системе координат, а $\overline{r}$- его отражение в подвижной.

Для ортогональных матриц*, а таковой является матрица $[\phi]$, справедливо равенство $[\phi]^{-1}=[\phi]^T$. Таким образом, обратное преобразование можно описать той же матрицей $[\phi]$, поменяв в ней положение строк и столбцов в соответствии с операцией транспонирования.

---

* Матрица $[\phi]$ ортогональна, если ее элементы удовлетворяют условиям ортогональности:

$$\sum_{i=1}^{3}\varphi_{ij}\varphi_{ik}=\delta_{jk} \quad (j,\ k=1,2,3),$$

где δ_{jk} – символ Кронекера ($\delta_{jk}=1$ при $k=j$ и $\delta_{jk}=0$ при $k\neq j$).

16. Мгновенная ось вращения. Теорема Эйлера – Даламбера

Допустим, что при сферическом движении тела в любой момент времени существует некая ось вращения, проходящая через неподвижный центр O. Но в отличие от оси вращательного движения тела, эта прямая в процессе движения непрерывно меняет свое положение (рис. 26).

Движение твердого тела около неподвижной точки можно рассматривать как непрерывную последовательность элементарных вращений. Согласно принятому, любое элементарное перемещение можно осуществить только одним поворотом на бесконечно малый угол вокруг некоторой оси, проходящей через неподвижную точку и называемой *мгновенной осью вращения.* Таким образом, *движение твердого тела около неподвижной точки можно рассматривать как непрерывную серию бесконечно малых поворотов вокруг мгновенных осей вращения, проходящих через эту точку*.

В этом заключается теорема Эйлера – Даламбера.

Для её доказательства рассмотрим два смежных положения тела, характеризуемые двумя положениями дуг AB и CD (рис. 27).

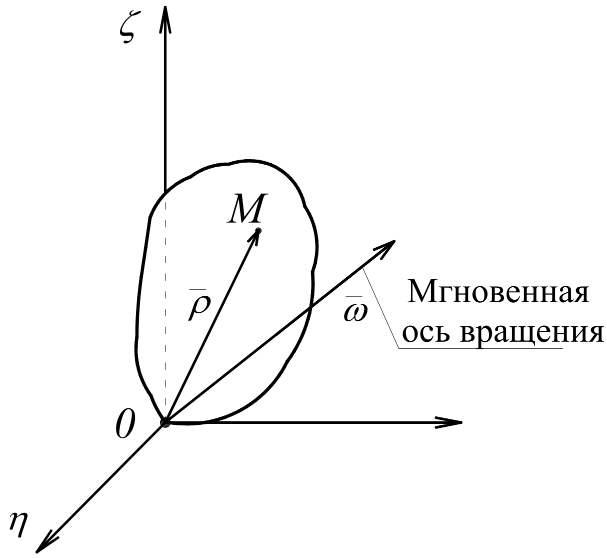


Рис. 26

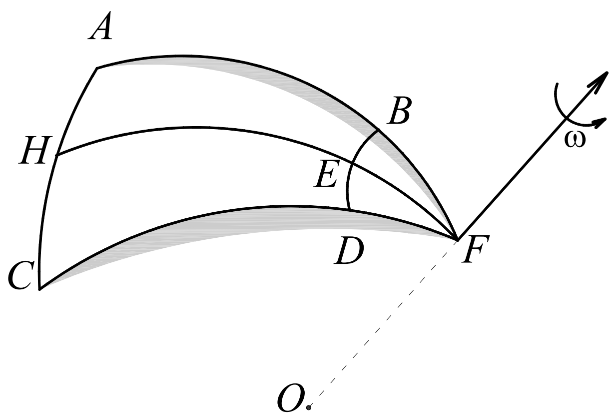


Рис. 27

Соединим их концы и найдём середины дуг AC и BD, которые обозначим буквами H, Е. Проведём через эти точки «большие» круги с центром в точке O, перпендикулярные к предыдущим дугам. Указанные круги пересекаются в точке F. Так как сферические треугольники AFB и CFD равны, поскольку дуги AB и CD одинаковы по построению, а дуги AF и CF, BF и DF попарно равны как сферические наклонные, одинаково удалённые от оснований сферических перпендикуляров, то треугольник AFB может быть совмещён с треугольником CFD одним поворотом на угол AFC вокруг центра. Отсюда следует, что и сферический отрезок AB совместится с отрезком CD. При таком повороте точки O и F остаются неподвижными. Следовательно, прямая OF тоже неподвижна. Она и будет осью вращения тела, что и доказывает теорему.

17. Скорость тела при сферическом движении

а) Скорость (линейная) любой точки при сферическом движении может быть определена по формуле Эйлера

$$\overline{\upsilon} = \overline{\omega} \times \overline{r} \ ,$$

т.к. в любое мгновенье движение твердого тела является вращательным (вокруг мгновенной оси вращения). Вектор скорости $\overline{\upsilon}$ точки M направлен по нормали к плоскости, образованной радиус-вектором $\overline{r}$ и вектором мгновенной угловой скорости $\overline{\omega}$ (рис. 28). Модуль скорости равен

$$\upsilon = \omega r \sin\alpha = \omega h .$$

Обозначив проекции вектора $\overline{\omega}$ на оси координат через $\omega_x, \omega_y, \omega_z$ и представив радиус-вектор $\overline{r}$ произвольной точки M в проекциях на оси x, y, z, на основе определения векторного произведения в виде

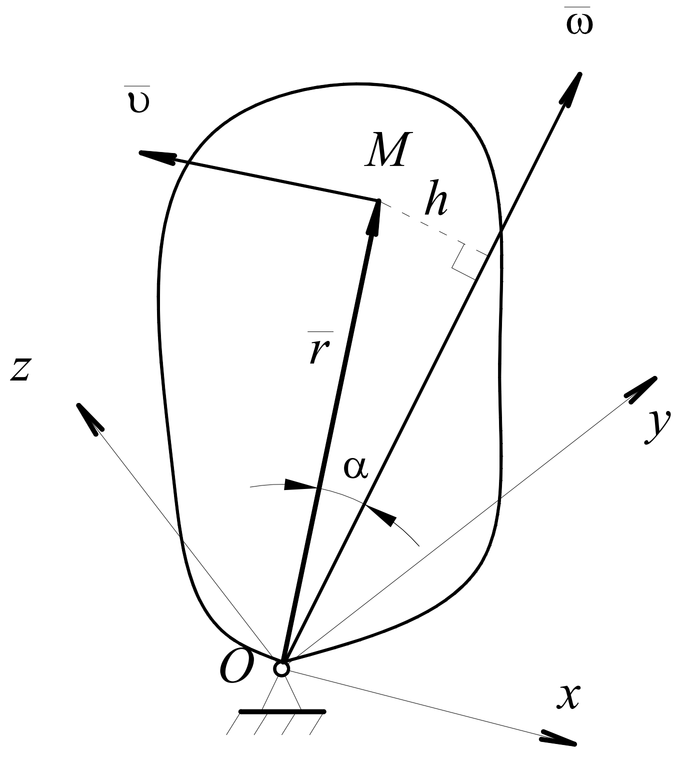


Рис. 28

$$\overline{\upsilon} = \overline{\omega} \times \overline{r} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \omega_x & \omega_y & \omega_z \\ x & y & z \end{vmatrix}$$

после раскрытия определителя найдем проекции вектора скорости $\overline{\upsilon}$:

$$\begin{aligned} \upsilon_x &= \omega_y z - \omega_z y, \\ \upsilon_y &= \omega_z x - \omega_x z, \\ \upsilon_z &= \omega_x y - \omega_y x. \end{aligned} \tag{22}$$

Эти формулы также носят имя Эйлера. Они сохраняют свой вид независимо от того, в какой системе координат рассматривается движение – локальной или неподвижной.

З а м е ч а н и е .

Формулы (22) можно записать и в матричном виде, если воспользоваться так называемым псевдовектором угловой скорости (см. кн. Ю.Г. Алдошкина Введение в механику твёрдого тела. М.: Мир, 2003).

$$[\Omega] = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_z & \omega_y \\ \omega_z & 0 & -\omega_x \\ -\omega_y & \omega_x & 0 \end{bmatrix},$$

поскольку

$$[\Omega]\overline{r} = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_z & \omega_y \\ \omega_z & 0 & -\omega_x \\ -\omega_y & \omega_x & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \omega_y z - \omega_z y \\ \omega_z x - \omega_x z \\ \omega_x y - \omega_y x \end{pmatrix}. \tag{23}$$

Сравнивая правые части равенств (22) и (23), можно вывести формулу

$$\overline{\upsilon} = [\Omega]\overline{r}, \tag{24}$$

где $\overline{\upsilon} = \left(\upsilon_x, \upsilon_y, \upsilon_z\right)^T$ – вектор-столбец скорости точки *M*.

Из определения мгновенной оси вращения следует, что линейные скорости точек мгновенной оси вращения равны нулю. Следовательно, проекции вектора скорости любой точки этой оси $\upsilon_x = \upsilon_y = \upsilon_z = 0$. С учетом определений (22) получим равенства:

$$\omega_x z - \omega_z y = 0, \quad \omega_z x - \omega_x z = 0, \quad \omega_x y - \omega_y x = 0,$$

откуда вытекает пропорция

$$\frac{x}{\omega_x} = \frac{y}{\omega_y} = \frac{z}{\omega_z}.$$

Это соотношение и есть уравнение оси вращения, относящейся к некоторому мгновению.

б) Матричная формула скорости.

В том случае, когда сферическое движение тела задано в переменных Эйлера распределение скоростей можно найти путём дифференцирования преобразования $\bar{r} = [\phi]\bar{\rho}$, по времени. Оно несложно. По существу в данном случае следует воспользоваться правилом дифференцирования сложной функции и матричным оператором дифференцирования.

Действительно, каждая из матриц, образующих преобразование $[\phi]$, является сложной функцией, поскольку её элементы зависят от времени. Но сами элементы – углы Эйлера – независимы. Следовательно, справедлива следующая формула дифференцирования

$$\bar{\upsilon} = \frac{d\bar{r}}{dt} = \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial[\phi]}{\partial q_i} \dot{q}_i \cdot \bar{\rho}, \tag{25}$$

где обобщённая координата q_i $(i = 1,2,3)$ обозначает любой из углов Эйлера (см. рис. 25). В соответствии с правилом дифференцирования матриц скорость тела при сферическом движении можно представить в форме

$$\bar{\upsilon} = \Big([D_\varphi][L][P][R]\dot{\varphi} + [L][D_\vartheta][P][R]\dot{\vartheta} + [L][P][D_\varphi][R]\dot{\psi} \Big)\bar{\rho}.$$

Здесь использованы матричные операторы частного дифференцирования третьего порядка:

$$[D_\varphi] = \frac{\partial[L]}{\partial\varphi} = \frac{\partial[R]}{\partial\psi} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad [D_\vartheta] = \frac{\partial[P]}{\partial\vartheta} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

С учётом ранее принятых обозначений для угловых скоростей

$$\omega_\psi = \dot{\psi}, \quad \omega_\vartheta = \dot{\vartheta}, \quad \omega_\varphi = \dot{\varphi},$$

в результате перемножения матриц с последующим сложением скорость любой точки тела при сферическом движении находится по формуле

$$\bar{\upsilon} = [V]\bar{\rho}, \tag{26}$$

где *матрица*

$$[V] = [D_\varphi][L][P][R]\dot{\varphi} + [L][D_\vartheta][P][R]\dot{\vartheta} + [L][P][D_\varphi][R]\dot{\psi} \tag{26,а}$$

называется матрицей скорости сферического движения тела. Благодаря ей легко найти распределение скоростей при сферическом движении тела в неподвижной системе координат в автоматическом режиме программным способом*.

Сравнивая выражения для скорости (23) и (24), можно убедиться, что матрица $[V]$ находится по формуле

$$[V]=\sum_{i=1}^{3}\frac{\partial[\phi]}{\partial q_i}\dot{q}_i\,, \qquad (26,б)$$

где $[\phi]$ является матрицей преобразования координат при сферическом движении.

Замечание. Аналогом полученной формулы может служить выражение (3.1) из книги Алдошкина Ю. Г. «Введение в механику твёрдого тела», М., «Мир», 2003, в которой матрица скорости $[V]$ представлена в виде произведения

$$[V]=[\Omega][\phi],$$

где матрица

$$[\Omega]=\begin{bmatrix}0 & -\omega_z & \omega_y\\ \omega_z & 0 & -\omega_x\\ -\omega_y & \omega_x & 0\end{bmatrix},$$

может рассматриваться как некий оператор дифференцирования, имеющий вид

$$[\Omega]=\begin{bmatrix}0 & -\omega_z & \omega_y\\ \omega_z & 0 & -\omega_x\\ -\omega_y & \omega_x & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -1\\ 0 & 1 & 0\end{bmatrix}\omega_x+\begin{bmatrix}0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0\\ -1 & 0 & 0\end{bmatrix}\omega_y+\begin{bmatrix}0 & -1 & 0\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}\omega_z$$

или

$$[\Omega]=[D_x]\omega_x+\left[D_y\right]\omega_y+[D_z]\omega_z$$

* Очевидно, полученное выражение скорости является обобщением формулы (23).

18. Кинематические уравнения Эйлера

Кинематические уравнения устанавливают зависимость между проекциями вектора угловой скорости $\overline{\omega}$ и углами Эйлера. Для отыскания указанной зависимости в подвижной системе координат воспользуемся тем, что бесконечно малый поворот тела вокруг мгновенной оси вращения можно рассматривать как совокупность трех бесконечно малых поворотов с угловыми скоростями

$$\omega_\psi = \dot{\psi}, \quad \omega_\vartheta = \dot{\vartheta}, \;\; \omega_\varphi = \dot{\varphi}.$$

Вектор $\overline{\omega}_\psi$ направлен вдоль оси ζ; вектор $\overline{\omega}_\vartheta$ – по линии узлов ξ, а $\overline{\omega}_\varphi$ – по оси *Oz* (рис. 29).

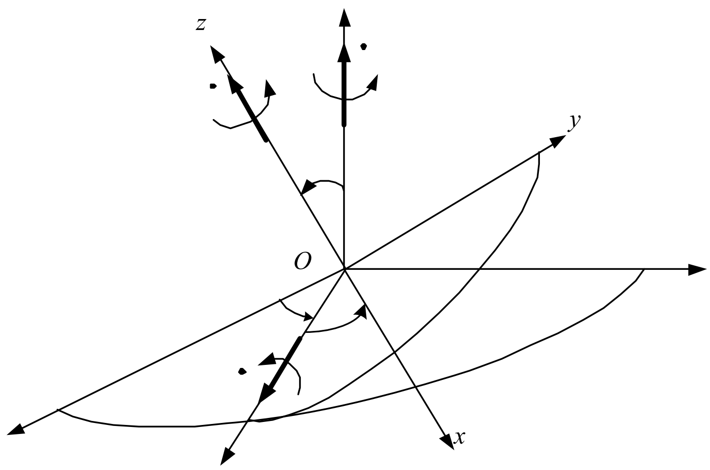


Рис. 29

Компоненты этих векторов в любой системе координат можно получить с помощью преобразований вращения. Найдем сначала разложение вектора $\overline{\omega}_\vartheta$ в подвижной системе координат *Oxyz*.

Очевидно, что проекции вектора $\overline{\omega}_\vartheta$ на оси, связанные с телом, могут быть определены посредством преобразования

$$\begin{bmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi & 0 \\ -\sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

φ

ϑ

характеризующего поворот вокруг оси *Oz* на угол φ (рис. 29). В соответствии с ним компоненты угловой скорости будут равны:

ψ

$$(\omega_\vartheta)_x = \dot\vartheta\cos\varphi,$$
$$(\omega_\vartheta)_y = \dot\vartheta\sin\varphi,$$
$$(\omega_\vartheta)_z = 0.$$

Чтобы убедиться в этом, вспомните преобразование координат на плоскости при повороте на угол ψ. Вектор $\overline{\omega}_\vartheta$ может быть ассоциирован с проекцией η_M точки *M* из преобразования поворота.

Компоненты:

$$(\omega_\psi)_x = \dot\psi\sin\vartheta\sin\varphi,$$
$$(\omega_\psi)_y = \dot\psi\sin\vartheta\cos\varphi,$$
$$(\omega_\psi)_z = \dot\psi\cos\vartheta \quad ,$$

вектора $\overline{\omega}_\psi$, параллельного неподвижной оси $O\zeta$, определяются последним столбцом матрицы полного ортогонального преобразования

$$[\phi] = [L][P][R] \quad .$$

Проекции вектора $\overline{\omega}_\varphi$ вовсе не требуют преобразований, т.к. этот вектор направлен вдоль оси *Oz*.

Складывая соответствующие составляющие отдельных угловых скоростей, получим разложение вектора $\overline{\omega}$ по осям координат, связанным с телом*, т. е.

$$\omega_x = \dot\psi\sin\vartheta\sin\varphi + \dot\vartheta\cos\varphi,$$
$$\omega_y = \dot\psi\sin\vartheta\cos\varphi - \dot\vartheta\sin\varphi,$$
$$\omega_z = \dot\psi\cos\vartheta + \dot\varphi.$$

Этот же прием позволяет выразить через углы Эйлера и проекции вектора $\overline{\omega}$ на неподвижные оси:

$$\omega_\eta = \dot\vartheta\cos\psi + \dot\varphi\sin\psi\sin\vartheta,$$
$$\omega_\theta = \dot\vartheta\sin\psi - \dot\varphi\cos\psi\sin\vartheta,$$
$$\omega_\zeta = \dot\psi + \dot\varphi\cos\vartheta \quad .$$

Модуль мгновенной угловой скорости $\overline{\omega}$ при сферическом движении находится по формуле

$$|\overline{\omega}| = \sqrt{\omega_\eta^2 + \omega_\theta^2 + \omega_\zeta^2} = \sqrt{\dot\psi^2 + \dot\varphi^2 + \dot\vartheta^2 + 2\dot\psi\dot\varphi\cos\vartheta}\,.$$

* В неявном виде данное разложение содержится в формуле (26,а). Поэтому вывод полученных выражений можно рассматривать как геометрическое доказательство матричного соотношения (26,а).

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Александров, А.П. Лекции по аналитической геометрии [Текст] / А.П. Александров. – СПб.: Наука, 2008. – 912 с.
2. Александров, А.В. Сопротивление материалов [Текст] / А.В. Александров. – М.: Высшая школа, 2010. – 510 с.
3. Белкин ,А.Е. Расчёт пластин методом конечных элементов [Текст] / А.Е. Белкин, С. С. Гаврюшин. – М.: МГТУ им. М.Э. Баумана, 2008. – 231 с.
4. Грязнов, А.Ю. Абсолютное пространство как идея чистого разума [Текст] / А.Ю. Грязнов // Вопросы философии. – 2001. – № 2. – С. 34-43.
5. Курош, А.Г. Курс высшей алгебры [Текст] / А.Г. Курош. – М.: Наука, - 2008. – 431с.
6. Монахов, В.А. Кинематика. Лекции по теоретической механике Ч.2 [Текст] / В.А. Монахов. – Пенза: ПГУАС, 2014. – 124 с.
7. Потапова, Т.Ю. Матричная форма закона сложного движения точки [Текст]: сб. ст. по материалам Междунар. науч.-техн. конф. молодых учёных и исследователей / Т.Ю. Потапова, В.А. Монахов. – Пенза: ПГУАС, 2010. – С. 135-142.
8. Потапова Т.Ю., Формирование матрицы скорости сложного движения точки [Текст] / Т.Ю. Потапова, В.А. Монахов // Известия вузов. Строительство. – 2012.– № 3. – С. 53-55.
9. Юревич Е.И. Робототехника [Текст] / Е.И. Юревич. – СПб.: СПбГТУ, 2001. – 300 с.
10. Яблонский, А.А. Курс теоретической механики, Ч. 1 [Текст] / А.А. Яблонский. – М.: Интеграл–пресс, 2008. – 382 с.
11. Яблонский, А.А. Сборник заданий для курсовых работ по теоретической механике [Текст] / А.А. Яблонский. – М.: Интеграл–пресс, 2008. – 382 с.

Приложение 1
ФОРМЫ ОПИСАНИЯ ЗАКОНОВ ДВИЖЕНИЯ ТЕЛ

1. Принцип относительности

В теоретической механике изучается движение тел, вызванное действием сил или иных причин. Движение тел происходит во времени и в пространстве. В классической механике принято, что *течение времени и измерения пространства в любых направлениях не связаны с движением тел*, т.е. не зависят от кинематических параметров движущегося тела. Время считается равномерно текущим в любом месте пространства (так называемое, *абсолютное время*). За пространство, в котором происходит движение тел, принимают «обычное» евклидово трехмерное пространство, метрические свойства которого одинаковы во всех направлениях; другими словами, пространство однородно и изотропно. Для его описания используют различные системы координат.

В классической механике постулируют законы Ньютона, справедливость которых проверена многовековой практикой[1]. Законы Ньютона проявляют себя не во всех системах отсчета. Предполагается наличие хотя бы одной такой системы координат, т. н. *инерциальной* системы отсчета, по отношению которой при отсутствии каких-либо воздействий на рассматриваемый объект, он движется равномерно и прямолинейно, т.е. по инерции.

Если рассмотреть ещё одну систему координат, совершающую равномерное и прямолинейное движение относительно первой, то законы свободного движения тела в этой новой системе будут теми же, что и по отношению к первой. Обобщая высказанное можно утверждать, что

ОСНОВНЫЕ ЗАКОНЫ МЕХАНИКИ ОДИНАКОВО ФОРМУЛИРУЮТСЯ ВО ВСЕХ СИСТЕМАХ ОТСЧЁТА, КОТОРЫЕ ДВИГАЮТСЯ С ПОСТОЯННОЙ СКОРОСТЬЮ ОТНОСИТЕЛЬНО ДРУГ ДРУГА.

В этом заключается *принцип относительности* (*принцип Галилея*).

[1] Некоторые учёные полагают, что законы Ньютона носят априорный характер, т. е. они не выводимы из опыта, а заложены в человеческом рассудке (И.Кант, А.Ю. Грязнов [4]).

2. Описание движения с позиций теории преобразования систем координат

При решении такой задачи кинематики, как установление соотношения между законами движения материальной частицы *M* в двух системах координат, одна из которых, обозначаемая латинскими буквами *Oxyz*, движется в некотором направлении с постоянной скоростью *V* относительно другой (неподвижной $\Omega\eta\theta\zeta$) (рис. 1,п), следует воспользоваться зависимостью

$$\bar{\rho}\,(t) = \bar{\rho}_O(t) + \bar{r}(\tau) = Vt + \bar{r}(\tau). \qquad (*)$$

Здесь $\bar{\rho}\,(t)$ – закон движения точки *M*, заданный в неподвижной системе координат $\Omega\eta\theta\zeta$, $\bar{r}(\tau)$ – тоже, при описании движения в подвижной; $\bar{\rho}_O(t) = Vt$ – закон равномерного движения начала *O* подвижной системы координат.

При этом, как отмечено в п. 1, ход времени в той и другой системах отсчёта одинаков, т. е.

$$t = \tau,$$

несмотря на то, что одна из них покоится, а другая находится в движении. Здесь t – измерение времени в неподвижной системе координат, а τ – его течение – в движущейся. В этом суть постулата об *абсолютности времени*, принятого в классической механике.

Если теперь, воспользовавшись зависимостью (*), выразить из неё закон движения точки в подвижной системе, т.е. найти $\bar{r}(\tau)$, то можно увидеть картину, похожую на прежнюю запись, а именно,

$$\bar{r}(\tau) = -V \cdot \tau + \bar{\rho}(\tau). \qquad (**)$$

Она отличается от выражения (*) взаимной переменой мест величин $\bar{r}$, $\bar{\rho}$, иным обозначением текущего времени, а также знаком минус, стоящим перед первым слагаемым.

Связь между соотношениями (*), (**) нетрудно понять. Для этого, в первую очередь, следует с подвижной системой отсчёта жестко связать тело *A* (рис. 1,п).

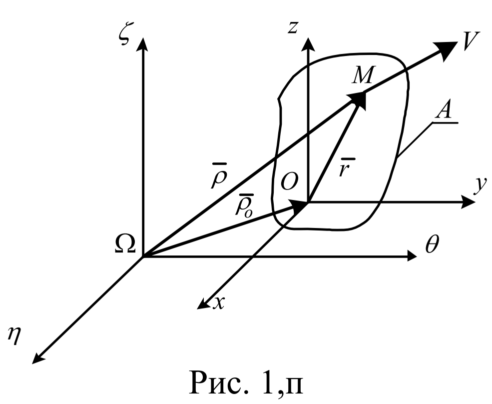


Рис. 1,п

Тогда движение тела относительно неподвижной системы координат $\Omega\eta\theta\zeta$ можно охарактеризовать двумя способами. Один из них совершенно очевиден - он заключён в форме закона, представленного в первоначальной записи (*). Здесь положение тела A характеризуется изменением радиус-вектора $\overline{\rho}(t)$ точки M тела в неподвижной системе координат при положительном направлении скорости V.

Очевидно, что выражение (**) также является формулировкой закона движения рассматриваемого тела. Но, в отличие от прежней формулировки, сейчас движение рассматривается с иной позиции. Оно видится теперь с точки зрения наблюдателя, находящегося в подвижной системе координат $Oxyz$. Отсюда он наблюдает, как неподвижная система координат или тело, связанное с ней, постепенно удаляется в направлении, противоположном вектору скорости V, о чём свидетельствует отрицательный знак в выражении (**). Все испытали хотя бы однажды ощущение кажущегося движения здания вокзала при взгляде на него из окна вагона в тот момент, когда поезд плавно трогается со станции. Это и наводит на мысль описания движения тела не как собственно физического, а абстрактно, в форме преобразований, происходящих с системами координат, принятыми при изучении движения. *Действительному равномерному прямолинейному движению тела в каком-либо направлении соответствует формальное перемещение неподвижной системы координат в противоположном.*

Преобразования систем координат при поступательном и вращательном движениях, изменениях масштабов измерения пространств и т.п. подробно изучены в математике [1]. Если сформулировать их в матричном виде, то они могут быть пригодны в кинематике при решении различных задач с применением ПЭВМ. В данном пособии рассматриваемый абстрактный подход к описанию движения материальных частиц или тел предлагается использовать в качестве основного, т.к. с его помощью оказывается возможным полностью формализовать все процедуры вычислений кинематических характеристик сложного движения точки и осуществлять их в автоматическом режиме на компьютере.

Приложение 2
Правила дифференцирования матриц преобразований систем координат

Операторами дифференцирования матриц преобразований при поворотах системы координат вокруг осей $\Omega\zeta$ и Oy служат матрицы:

$$\left[D_\zeta\right]=\begin{bmatrix}0&-1&0&0\\1&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix},\ \left[D_\theta\right]=\begin{bmatrix}0&0&-1&0\\0&0&0&0\\1&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix},\ D_\eta=\begin{bmatrix}0&0&0&0\\0&0&1&0\\0&-1&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}$$

Операторами дифференцирования матриц преобразований переноса являются матрицы:

$$D_x=\begin{bmatrix}0&0&0&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix},\ D_y=\begin{bmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix},\ D_z=\begin{bmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{bmatrix}.$$

Например, производная матрицы переноса по направлению оси *Ox*, находится путём умножения оператора дифференцирования $\left[D_x\right]$ на матрицу переноса $[\Delta]$

$$\frac{d[\Delta]}{dx}=[D_x][\Delta]=\begin{bmatrix}0&0&0&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}1&0&0&x\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&0&0&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}.$$

Производная матрицы поворота вокруг оси О или $\Omega\theta$

$$\frac{d[\phi]}{d\varphi}=D_\zeta\cdot[\phi]=\begin{bmatrix}0&1&0&0\\-1&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}\cos\varphi&\sin\varphi&0&0\\-\sin\varphi&\cos\varphi&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}=$$

$$=\begin{bmatrix}-\sin\varphi&\cos\varphi&0&0\\-\cos\varphi&-\sin\varphi&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}.$$

Замечание.

При выполнении преобразования системы координат в процессе решения задач следует обращать внимание на одну особенность преобразований вращения систем координат.

Например, при повороте вектора $\overline{r} = (0,\quad R\cos\beta,\quad R\sin\beta,\quad 1)$, лежащего в плоскости $\Omega\theta\xi$, вокруг оси $\Omega\eta$ на угол β, в положительном направлении, осуществляемого с помощью матрицы вращения

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\beta & -\sin\beta & 0 \\ 0 & \sin\beta & \cos\beta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

приходят к вектору $(0,\quad R\cos 2\beta,\quad R\sin 2\beta,\quad 1)^T$ (рис. 2.п,а), поскольку

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\beta & -\sin\beta & 0 \\ 0 & \sin\beta & \cos\beta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ R\cos\beta \\ R\sin\beta \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ R\cos^2\beta - R\sin^2\beta \\ R\sin\beta\cos\beta + R\sin\beta\cos\beta \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ R\cos 2\beta \\ R\sin 2\beta \\ 1 \end{pmatrix};$$

если же вращение происходит в противоположном направлении (рис. 2.п,б), то – к вектору $(0,\quad R,\quad 0,\quad 1)^T$, т. к.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\beta & \sin\beta & 0 \\ 0 & -\sin\beta & \cos\beta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ R\cos\beta \\ R\sin\beta \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ R\cos^2\beta + R\sin^2\beta \\ -R\sin\beta\cos\beta + R\sin\beta\cos\beta \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ R \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

а

б

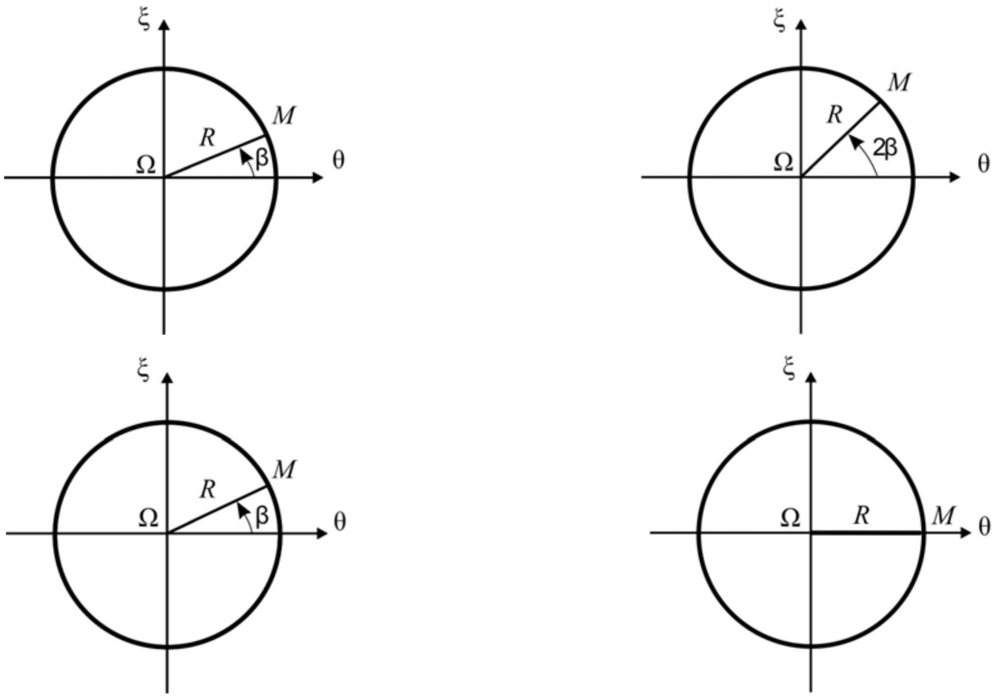


Рис. 2,п

Приложение 3

GRAD

```
unit U_Procedur;
interface
 uses Variants,Math;

 type TVektor = array of real; //динамический массив столбец
 type TMatric = array of array of real; //динамический массив матрица

 //VarArrayHighBound, High, Length, SetLength

 type T_AB = record
 A,B : Real;
 end;

 function    Diff(const    Matrix_Funct    :TMatric;const    Vektor_Absces
:TVektor):TVektor;
 function Function_AB(const X1,X2,X3,Y1,Y2,Y3 :real):T_AB;
 function Funct(const X : Real):Extended;

implementation
//##########################################################################
//ПРОЦЕДУРА ВЫЧИСЛЕНИЯ ПРОИЗВОДНОЙ ФУНКЦИИ (заданной в табличной форме)
//Параметры: функция, заданная массивом размером [2,n]('Matrix_Funct'), где
 первый столбец значения по 'x'(необходимо чтобы 'x' монотонно возростал),
 а второй столбец значения 'f(x)', и массив абсцисс ('Vektor_Absces'), в
 которых необходимо вычислить производную.
//При этом необходимо, чтобы значения абсцисс лежали на интервале от 1-ой до n-
ой
 точек функции, и чтобы эти значения монотонно возрастали.
//Возвращаемое значение вектор (массив) производных функции в точках, заданных
 также массивом ('Vektor_Absces').
function Diff(const Matrix_Funct :TMatric;const Vektor_Absces :TVektor):TVektor;
var Bufer : TVektor;
 AB_1,AB_2 : T_AB;
 i, Kol_Dx, Kol_Fx, SmeshVek :integer;
begin
 Kol_Dx:= Length(Vektor_Absces)+1;
 SetLength(Bufer,Kol_Dx);
 Kol_Fx:= VarArrayHighBound(Matrix_Funct,1);
 SmeshVek:=0;
 if ((VarArrayHighBound(Matrix_Funct,2) = 1)and(Kol_Fx >= 2)) then begin
 AB_1:=Function_AB(Matrix_Funct[0,0], Matrix_Funct[1,0], Matrix_Funct[2,0],
 Matrix_Funct[0,1], Matrix_Funct[1,1], Matrix_Funct[2,1]);
 while((SmeshVek        <=        Kol_Fx-1)and((Matrix_Funct[0,0]        <=
Vektor_Absces[SmeshVek])and(Vektor_Absces[SmeshVek] <= Matrix_Funct[1,0])))do begin
 Bufer[SmeshVek]:=2*AB_1.A*(Vektor_Absces[SmeshVek])+AB_1.B;
 SmeshVek:=SmeshVek+1;
 end;
 for i := 1 to Kol_Fx-2 do begin
 AB_1:=Function_AB(Matrix_Funct[i-1,0], Matrix_Funct[i,0], Matrix_Funct[i+1,0],
 Matrix_Funct[i-1,1], Matrix_Funct[i,1], Matrix_Funct[i+1,1]);
 AB_2:=Function_AB(Matrix_Funct[i,0], Matrix_Funct[i+1,0], Matrix_Funct[i+2,0],
 Matrix_Funct[i,1], Matrix_Funct[i+1,1], Matrix_Funct[i+2,1]);
 AB_1.A:=(AB_1.A+AB_2.A)/2;
 AB_1.B:=(AB_1.B+AB_2.B)/2;
 while((SmeshVek        <=        Kol_Fx-1)and((Matrix_Funct[i,0]        <
Vektor_Absces[SmeshVek])and(Vektor_Absces[SmeshVek]   <=   Matrix_Funct[i+1,0])))do
begin
 Bufer[SmeshVek]:=2*AB_1.A*(Vektor_Absces[SmeshVek])+AB_1.B;
 SmeshVek:=SmeshVek+1;
 end;
 end;
 AB_1:=Function_AB(Matrix_Funct[Kol_Fx-2,0],        Matrix_Funct[Kol_Fx-1,0],
Matrix_Funct[Kol_Fx,0],
 Matrix_Funct[Kol_Fx-2,1], Matrix_Funct[Kol_Fx-1,1], Matrix_Funct[Kol_Fx,1]);
```

```
     while((SmeshVek        <=        Kol_Fx)and((Matrix_Funct[Kol_Fx-1,0]        <
Vektor_Absces[SmeshVek])and(Vektor_Absces[SmeshVek]  <=  Matrix_Funct[Kol_Fx,0])))do
begin
     Bufer[SmeshVek]:=2*AB_1.A*(Vektor_Absces[SmeshVek])+AB_1.B;
     SmeshVek:=SmeshVek+1;
     end;
     end;
     result:=Bufer;
    end;
    //-------------------------------------------------------------------------------
    function Function_AB(const X1,X2,X3,Y1,Y2,Y3 :real):T_AB;
    var t1,t2,t3: Extended;
     Bufer : T_AB;
    begin
     t1:=Y1/((X1-X2)*(X1-X3));
     t2:=Y2/((X2-X1)*(X2-X3));
     t3:=Y3/((X3-X1)*(X3-X2));
     Bufer.A:=t1+t2+t3;
     Bufer.B:=-((X2+X3)*t1+(X1+X3)*t2+(X1+X2)*t3);
     result:=Bufer;
    end;
    //-------------------------------------------------------------------------------
    function Funct(const X : Real):Extended;
    begin
     result:=sin(X);//sin(X);//3.71*X*X+8.125*X+12.0215;
    end;
    //+++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++
    end.
```

Приложение 4
Задания для курсовых работ

Определение абсолютной скорости и абсолютного ускорения

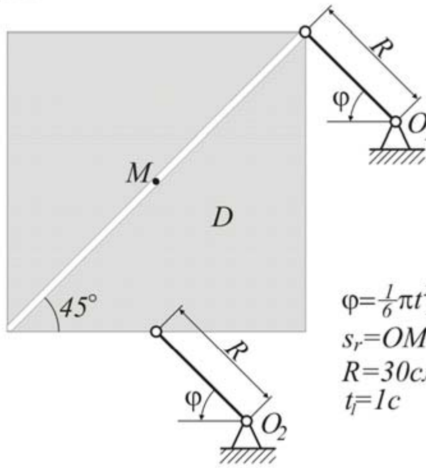
Точка M движется относительно тела D. По заданным уравнениям относительного движения точки М и движения тела D определить в момент времени $t=t_1$ абсолютную скорость и абсолютное ускорение точки M.

Схемы механизмов и необходимые для расчёта данные приведены ниже.

Указания. Для решения задачи надо воспользоваться теоремами о сложении скоростей и сложении ускорений. В начале расчёта следует определить положение точки М в заданный момент времени и изобразить точку именно в этом положении (на рисунках к заданию положение точки показано произвольно).

Примечания. Для каждого варианта положение точки M на схеме соответствует положительному значению s_r.

К-4.1



$\varphi=\frac{1}{6}\pi t^2$ *рад*

$s_r=OM=3t^3$ *см*

$R=30$ *см*

$t_1=1$ *с*

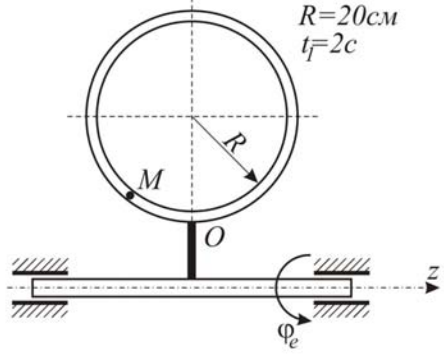
К-4.2

$\varphi_e=\frac{1}{8}\pi t^2$ *рад*

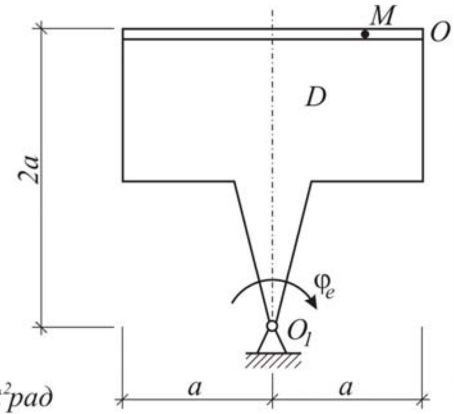
$s_r=OM=t^2+2t$ *см*

$R=20$ *см*

$t_1=2$ *с*



К-4.3



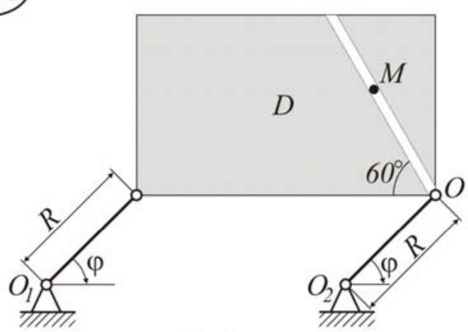
$\varphi_e=\frac{1}{12}\pi t^2$ *рад*

$OM=3t^2+3$ *см*

$a=30$ *см*

$t_1=2$ *с*

К-4.4



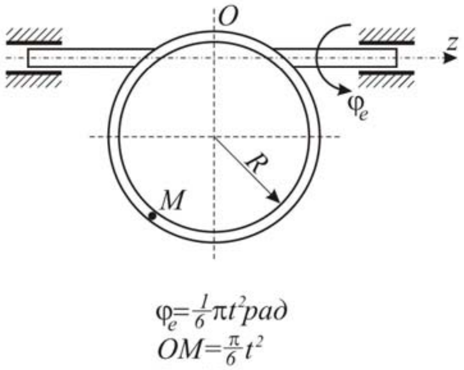
$\varphi_e=\frac{1}{12}\pi t^2$ *рад*

$S=t^3+2t$ *см*

$R=35$ *см*

$t_1=2$ *с*

К-4.5



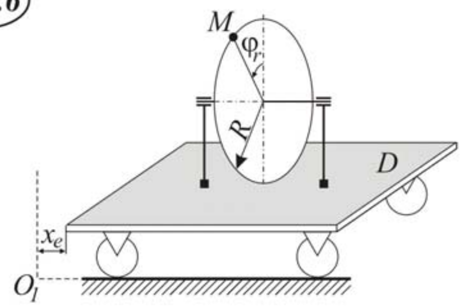
$\varphi_e=\frac{1}{6}\pi t^2$ *рад*

$OM=\frac{\pi}{6}t^2$

$R=15$ *см*

$t_1=1$ *с*

К-4.6



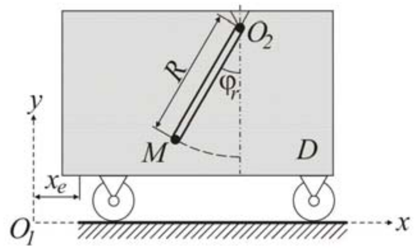
$x_e=4t^2+5t$ *см*

$\varphi_r=\frac{\pi}{6}t^2$ *рад*

$R=10$ *см*

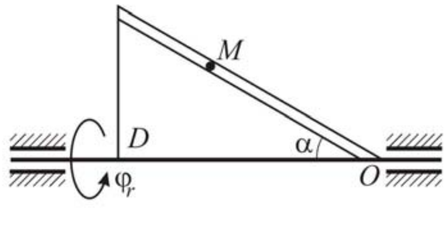
$t_1=2$ *с*

К-4.7



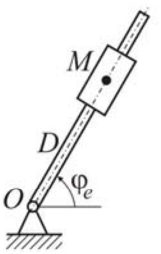
$x_e = 20t^2 + 15t$ см
$\varphi_r = \frac{1}{3}\pi\cos 2\pi t$ рад
$R = 15$см
$t_1 = \frac{1}{6}$ с

К-4.8



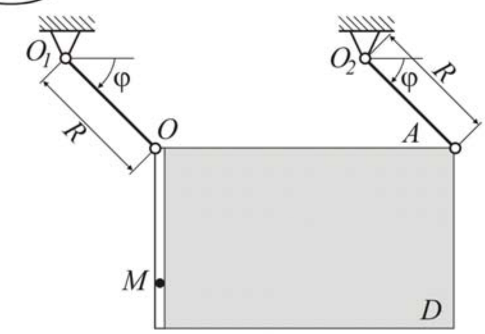
$\varphi_e = \frac{1}{12}\pi t^3$ рад
$OM = 2t^2 + 4$ см
$\alpha = 20^\circ$
$t_1 = 2$с

К-4.9



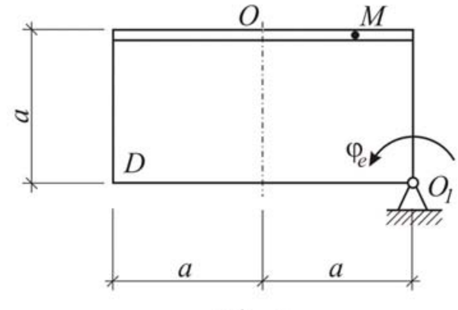
$\varphi_e = \frac{1}{18}t^3$ рад
$OM = 2t^2 + 4$ см
$t_1 = 2$с

К-4.10



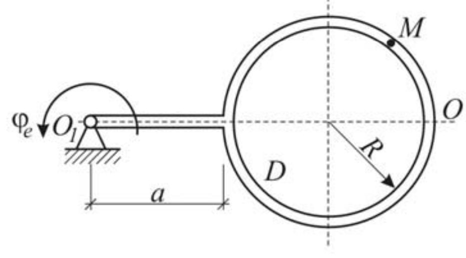
$\varphi_e = \frac{\pi}{6}t$ рад
$OM = 3t^2 + 3$ см
$R = 20$см
$t_1 = 1$с

К-4.11



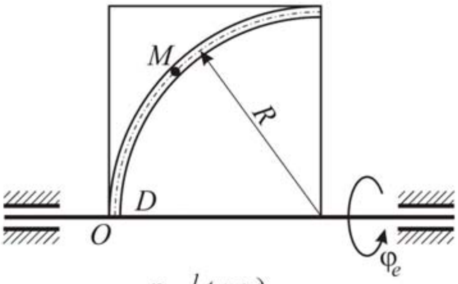
$\varphi_e = \frac{\pi}{6}t^2$ рад
$OM = 5t^2 + 5$ см
$a = 20$см
$t_1 = 1$с

К-4.12



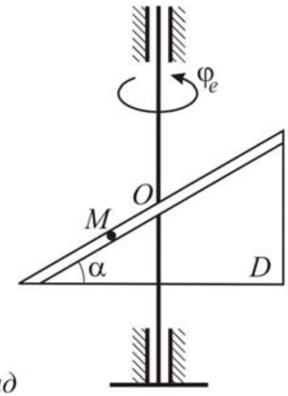
$\varphi_e = \frac{1}{12}\pi^2 t$ рад
$OM = \frac{\pi}{6}Rt$ см
$R = a = 15$см
$t_1 = 2$с

К-4.13



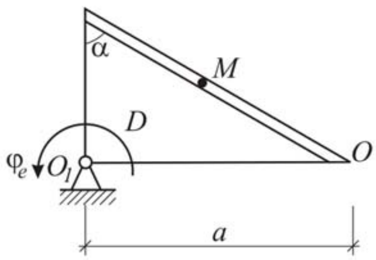
$\varphi_e=\frac{1}{10}t$ *рад*
$OM=4t+5$ *см*
$R=20$*см*
$t_1=2c$

К-4.14



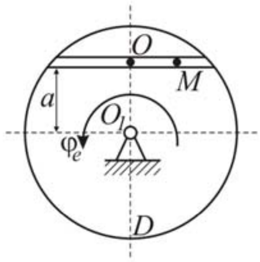
$\varphi_e=\frac{1}{12}\pi t$ *рад*
$OM=3t$ *см*
$\alpha=30^\circ$
$t_1=2c$

К-4.15



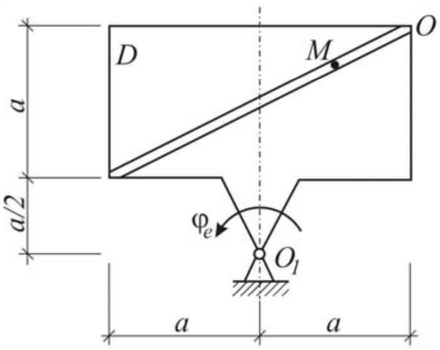
$\varphi_e=\frac{\pi}{6}t^2$*рад*
$OM=4t^2+1$ *см*
$\alpha=45^\circ$
$t_1=2c$

К-4.16



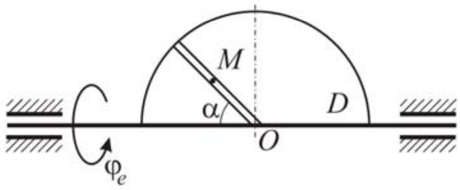
$\varphi_e=\frac{\pi}{6}t^2$*рад*
$R=2a=18$ *см*
$OM=4t^2$*см*
$t_1=1c$

К-4.17



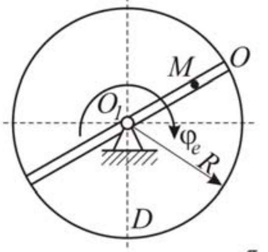
$\varphi_e=\frac{\pi}{6}t$ *рад*
$a=20$ *см*
$OM=10t^2$*см*
$t_1=\frac{1}{2}c$

К-4.18



$\varphi_e=\frac{\pi}{12}t^2$*рад*
$OM=4t^2+3$*см*
$R=20$ *см*
$\alpha=45^\circ$

К-4.19



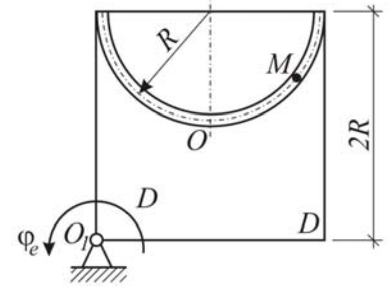
$\varphi_e = \frac{\pi}{12} t^2$ *рад*

$OM = 5/3t^2$

$R = 20$ *см*

$t_1 = 2c$

К-4.20



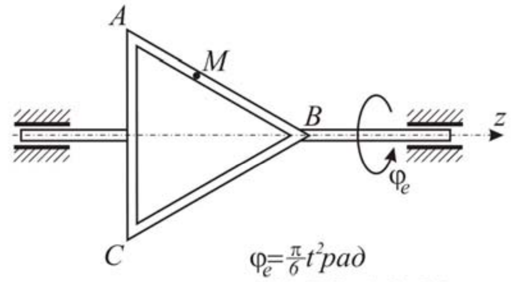
$\varphi_e = \frac{\pi}{6} t^2$ *рад*

$OM = 3t$ *см*

$R = 10$ *см*

$t_1 = 2c$

К-4.21



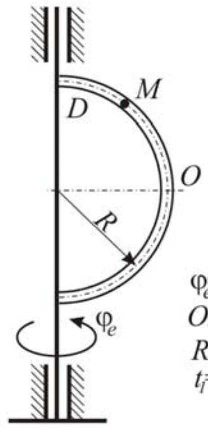
$\varphi_e = \frac{\pi}{6} t^2$ *рад*

$AB = BC = AC = 25$ *см*

$s_r = AM = \frac{1}{3} t^2 + 6$*см*

$t_1 = 1c$

К-4.22



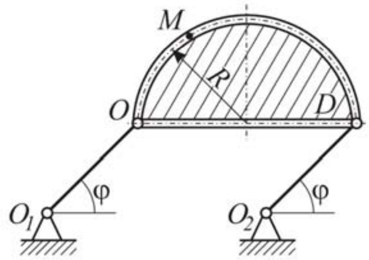
$\varphi_e = \frac{\pi}{18} t^3$ *рад*

$OM = 3t^2 + 3$ *см*

$R = 25$ *см*

$t_1 = 2c$

К-4.23



$\varphi_e = \frac{\pi}{6} t^3$ *рад*

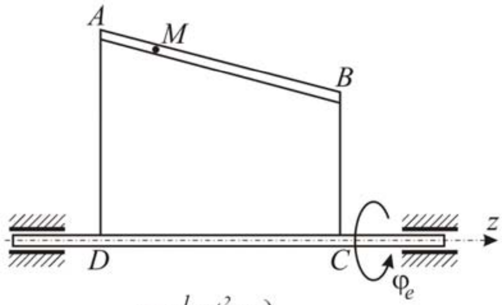
$R = 10$ *см*

$OM = 4t^2 + 2$ *см*

$t_1 = 12c$

$O_1O = O_2A = 2R$

К-4.24



$\varphi_e = \frac{1}{6} \pi t^2$ *рад*

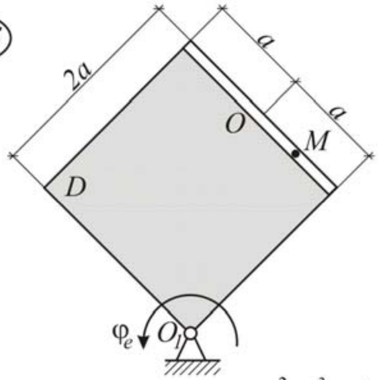
$AM = s_r = \frac{1}{4} t^2 + 8$ *см*

$t_1 = 1c$

$AD = 30$ *см*

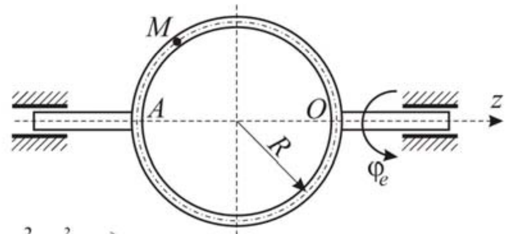
$BC = 20$ *см*

К-4.25



$\varphi_e = \frac{2}{3}\pi t^2$ *рад*
$a = 20$ *см*
$s_r = 1{,}5t + 10 = OM$
$t_1 = \frac{1}{2}$ *с*

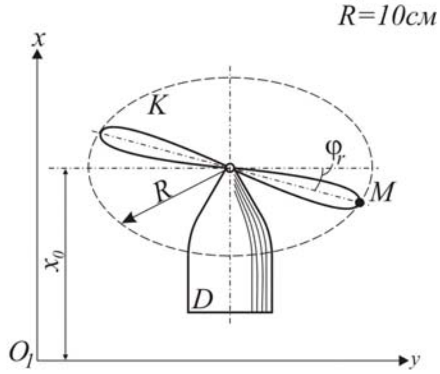
К-4.26



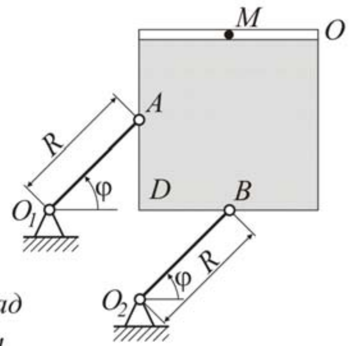
$\varphi_e = \frac{2}{3}\pi t^2$ *рад*
$R = 20$ *см*
$OM = s_r = 4t^3 + 9t$ *см*
$t_1 = \frac{1}{2}$ *с*

К-4.27

$x_e = 3t^2 + 3$ *см*
$\varphi_r = \frac{4\pi}{3} t^2$ *см*
$R = 10$ *см*



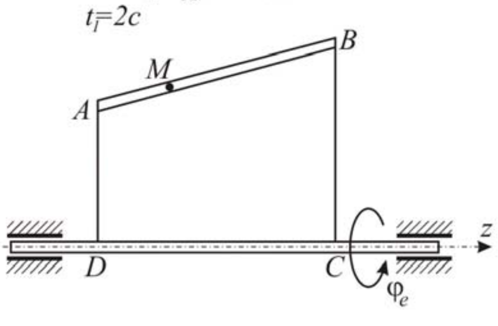
К-4.28



$\varphi_e = \frac{\pi}{12} t$ *рад*
$R = 10$ *см*
$OM = 4t^2 + 2$ *см*
$t_1 = 2$ *с*

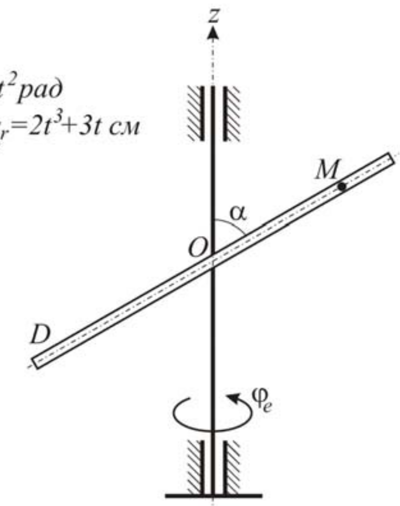
К-4.29

$\varphi_e = \frac{1}{12}\pi t^2$ *рад*
$AD = 15$ *см*
$BC = 25$ *см*
$AM = s_r = \frac{1}{12} t^2 + 2$ *см*
$t_1 = 2$ *с*



К-4.30

$\varphi_e = \frac{1}{24}\pi t^2$ *рад*
$OM = s_r = 2t^3 + 3t$ *см*
$\alpha = 45^\circ$
$t_1 = 2$ *с*



О Г Л А В Л Е Н И Е

ПРЕДИСЛОВИЕ 3
СЛОЖНОЕ ДВИЖЕНИЕ МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ 4
1. Закон сложного движения точки 4
2. Производная радиус-вектора $\bar{r}(t)$ в подвижной системе координат 6
3. Теорема о сложении скоростей 7
4. Теорема о сложении ускорений (теорема Кориолиса) 8
5. Определение направления поворотного ускорения (по правилу Жуковского) 10
6. Примеры решения задач 12
7. Движение объекта и сопутствующее ему преобразование системы координат 16
8. Композиция матричных преобразований 26
9. Приложение теории матричных преобразований к выводу закона
сложного движения точки 34
10. Матрица скорости сложного движения точки 39
11. Алгоритм построения траектории и вычисления скорости точки при сложном
движении 42
12. Примеры формирования матрицы скорости сложного движения точки 43
13. Сферическое движение тела. Закон движения. Степень свободы
сферического движения 52
14. Углы Эйлера 54
15. Матрица преобразования систем координат при сферическом движении 56
16. Мгновенная ось вращения. Теорема Эйлера – Даламбера 58
17. Скорость тела при сферическом движении 60
18. Кинематические уравнения Эйлера 64
БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК 66
Приложение 1. Формы описания законов движения тел 67
Приложение 2. Правила дифференцирования матриц преобразований
систем координат 70
Приложение 3 72
Приложение 4. Задания для курсовых работ 74

Учебное издание

Монахов Владимир Андреевич

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА.
МАТРИЧНАЯ ФОРМА АНАЛИЗА СЛОЖНОГО ДВИЖЕНИЯ ТОЧКИ
Учебное пособие

В авторской редакции
Верстка Н.В. Кучина

Подписано в печать 19.11.2014. Формат 60х84/16.
Бумага офисная «Снегурочка». Печать на ризографе.
Усл.печ.л. 4,65. Уч.-изд.л. 5,0. Тираж 100 экз.
Заказ № 419.

Издательство ПГУАС.
440028, г. Пенза, ул. Германа Титова, 28