МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«Пензенский государственный университет
архитектуры и строительства»
(ПГУАС)

И.А. Гарькина, А.М. Данилов

СПЕЦИАЛЬНЫЕ РАЗДЕЛЫ ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКИ

Рекомендовано УМО РАЕ по классическому
университетскому образованию в качестве учебного пособия
для студентов высших учебных заведений,
обучающихся по направлению подготовки 08.04.01 – «Строительство»

Пенза 2014

УДК 51 (07)
ББК 74.58:22.1я73
Г20

Рецензенты: кафедра высшей и прикладной математики ФГБОУ ВПО «Пензенский государственный университет» (зав. кафедрой – доктор физико-математических наук, профессор *И.В. Бойков*);
доктор физико-математических наук, профессор *О.А. Голованов* (Пензенский артиллерийский инженерный институт)

Гарькина И.А.
Г20 Специальные разделы высшей математики: учебное пособие / И.А. Гарькина, А.М. Данилов. – Пенза: ПГУАС, 2014. – 160 с.
ISBN 978-5-9282-1209-4

Содержит отдельные разделы математики важные для расширенного использования математических методов в профессиональной деятельности.

Пособие подготовлено на кафедре «Математика и математическое моделирование» и предназначено для студентов (квалификация выпускника – магистр) технических вузов, обучающихся по направлению 08.04.01 – «Строительство» с учетом требований Федерального государственного образовательного стандарта поколения «три плюс», а также может быть полезным специалистам и научным работникам, использующим в своей деятельности современные математические методы анализа, моделирования систем и процессов для поиска оптимальных решений и наилучшего способа их реализации.

ISBN 978-5-9282-1209-4

«Чем фундаментальнее закономерность,
тем проще ее можно сформулировать».

Петр Капица

ПРЕДИСЛОВИЕ

Предлагаемое пособие подготовлено в соответствии с «Федеральным государственным образовательным стандартом высшего образования» по направлению подготовки 08.04.01 Строительство (уровень магистратуры).

При определении содержания исходили из предпосылки, что математика является фундаментом не только математического образования и основой для успешного изучения общетеоретических и специальных дисциплин, но и расширенного использования математических методов в профессиональной деятельности.

С учетом их важности для решения прикладных задач в пособие выборочно включены отдельные вопросы:

– теории вероятностей и математической статистики;
– математической физики;
– временных рядов;
– теории массового обслуживания;
– дискретной математики, логических исчислений, графов.

Пособие может быть полезным специалистам и научным работникам, использующим в своей деятельности современные математические методы анализа, моделирования систем и процессов для поиска оптимальных решений и наилучшего способа их реализации.

При подготовке издания использован собственный практический опыт работы авторов по подготовке магистров, а также по проектированию сложных систем различного назначения.

Авторы выражают свою признательность рецензентам: кафедре «Высшая и прикладная математика» ФГБОУ ВПО «Пензенский государственный университет» (зав. кафедрой – д.ф.-м.н., проф. И.В.Бойков); д.ф.-м.н., проф. О.А.Голованову (Пензенский артиллерийский инженерный институт), сделавшим ряд ценных поправок в процессе подготовки рукописи.

ВВЕДЕНИЕ

Дисциплина «М1.Б.3.Специальные разделы высшей математики» входит в базовую часть федерального государственного образовательного стандарта высшего образования по направлению подготовки 08.04.01 «Строительство» (уровень магистратуры).

Процесс изучения дисциплины направлен на формирование *компетенций:*

– способность использовать углубленные знания правовых и этических норм при оценке последствий своей профессиональной деятельности, при разработке и осуществлении социально значимых проектов (ОПК-7);

– способность и готовность ориентироваться в постановке задачи, применять знания о современных методах исследования, анализировать, синтезировать и критически резюмировать информацию (ОПК-10);

– способность разрабатывать физические и математические (компьютерные) модели явлений и объектов, относящихся к профилю деятельности (ПК-7).

Цель преподавания дисциплины: обучение современным математическим методам анализа, моделирования процессов и систем для поиска оптимальных решений и наилучшего способа их реализации.

Задачи дисциплины курса состоят в ориентировании студентов на расширенное использование математических методов в профессиональной деятельности.

В результате изучения дисциплины магистрант должен:

знать: современные проблемы науки и техники, формы и методы научного познания в применении к профессиональной деятельности;

уметь: формулировать физико-математическую постановку задачи исследований, выбирать и реализовывать методы ведения научных исследований; анализировать и обобщать результаты исследований, доводить их до практической реализации;

владеть: математическим аппаратом для разработки математических моделей процессов и явлений и решения практических задач профессиональной деятельности.

Дисциплина «Специальные разделы высшей математики» опирается на общий курс математики для бакалавров; является одной из основных для изучения дисциплин «Методология научных исследований», «Методы решения научно-технических задач в строительстве», «Философские проблемы науки и техники».

1. ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА

1.1. Системы случайных величин

В практических задачах часто результат опыта описывается не одной случайной величиной, а системой случайных величин. Случайные величины $X_1, X_2, \ldots, X_n$, входящие в систему, могут быть как дискретными, так и непрерывными.

Пример 1. Станок-автомат штампует стальные плитки. Если контролируемыми размерами являются длина X и ширина Y, то имеем двумерную случайную величину (X, Y); если же контролируется и толщина Z, то имеем трехмерную величину (X, Y, Z).

Двумерную случайную величину (X, Y) геометрически можно истолковать как случайную точку или случайный вектор на плоскости XOY.

Исчерпывающей характеристикой системы случайных величин является ее *закон распределения.* Как и для отдельных случайных величин могут быть различные формы задания системы случайных величин (функция распределения, плотность распределения, таблица вероятностей отдельных значений случайного вектора и т.д.).

Если рассматривается двумерная дискретная случайная величина (X,Y), то ее двумерное распределение можно представить в виде *таблицы (матрицы) распределения:*

X	x_1	x_2	…	x_i	…	x_n	$\sum_{i=1}^{n}$
y_1	p_{11}	p_{21}	…	p_{i1}	…	p_{n1}	p_1
…	…	…	…	…	…	…	…
y_j	p_{1j}	p_{2j}	…	p_{ij}	…	p_{nj}	p_j
…	…	…	…	…	…	…	…
y_m	p_{1m}	p_{2m}	…	p_{im}	…	p_{nm}	p_m
$\sum_{j=1}^{n}$	p_1	p_2	…	p_{1p_i}	…	p_n	1

где $x_1 < x_2 < \ldots < x_n$, $y_1 < y_2 < \ldots < y_m$, p_{ij} – вероятность события, заключающегося в одновременном выполнении равенств $X = x_i, Y = y_j$. При этом $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} p_{ij} = 1$. Таблица может содержать бесконечное множество строк и столбцов.

П р и м е р 2. Двумерная дискретная величина (X,Y) задана законом распределения:

X \ Y	2	3	4
2	0,3	0,15	0,05
3	0,15	0,10	0,05
4	0,05	0,05	0,05
5	0,05	0	0

Найти законы распределения составляющих X и Y.

Решение. Сложив вероятности по столбцам, получим вероятности возможных значений X, то есть:

$$P(X = x_i) = p_i;$$

$$P(X = 2) = 0,3 + 0,15 + 0,05 + 0,05 = 0,55;$$

$$P(X = 3) = 0,15 + 0,10 + 0,05 + 0 = 0,3;$$

$$P(X = 4) = 0,05 + 0,05 + 0,05 + 0 = 0,15;$$

$$0,55 + 0,3 + 0,15 = 1.$$

Сложив вероятности по строкам, получим вероятности возможных значений Y:

$$P(Y = y_j) = p_j;$$

$$P(Y = 2) = 0,3 + 0,15 + 0,05 = 0,50;$$

$$P(Y = 3) = 0,15 + 0,10 + 0,05 = 0,30;$$

$$P(Y = 4) = 0,05 + 0,05 + 0,05 = 0,15;$$

$$P(Y = 5) = 0,05 + 0 + 0 = 0,05;$$

$$0,50 + 0,30 + 0,15 + 0,05 = 1.$$

Законы распределения X и Y имеют вид:

x_i	2	3	4
p_i	0,55	0,3	0,05

y_j	2	3	4	5
p_j	0,5	0,3	0,15	0,05

Функцией распределения двух случайных величин (X,Y) называется вероятность совместного выполнения двух неравенств $X < x,\ Y < y$:

$$F(x,y) = P(X < x, Y < y).$$

П р и м е р 3. Задана функция распределения двумерной случайной величины (X,Y)

$$F(x,y) = \left(1-e^{-x}\right)\left(1-e^{-y}\right) \quad (x \geq 0, y \geq 0).$$

Найти вероятность того, что в результате испытания составляющие X и Y примут значения соответственно $X < 2, Y < 4$.

Решение. $P(X < 2, Y < 4) = F(2,4) = \left(1-e^{-2}\right)\left(1-e^{-4}\right) \approx 0{,}849$.

Геометрически $F(x,y)$ есть вероятность того, что случайная точка (X,Y) попадет в бесконечный квадрант с вершиной (x,y), расположенный левее и ниже этой точки. Правая и верхняя границы области в квадрант не включаются (рис. 1.1).

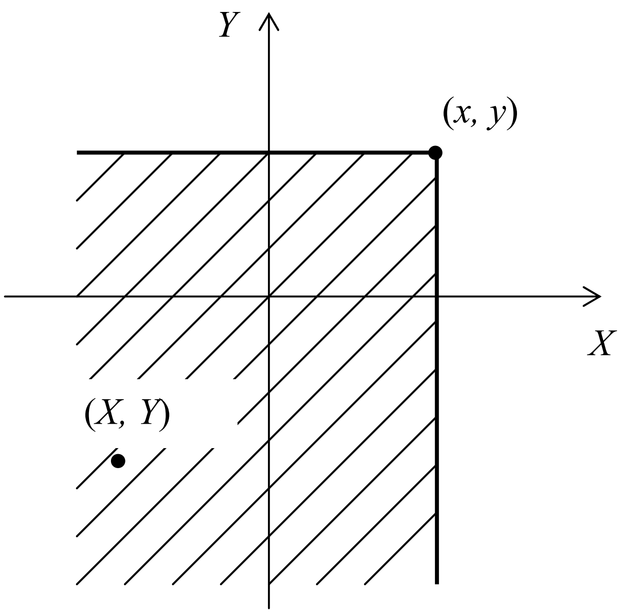


Рис. 1.1

В случае *дискретной* двумерной случайной величины ее *функция распределения* определяется по формуле

$$F(x,y) = \sum_i \sum_j p_{ij},$$

где суммирование вероятностей распространяется на все i, для которых $x_i < x$, и все j, для которых $y_j < y$.

Укажем основные свойства функции распределения.

1. Функция распределения $F(x,y)$ есть *неотрицательная* функция, заключенная между нулем и единицей:

$$0 \le F(x,y) \le 1$$

(следует из определения $F(x,y)$ как вероятности).

2. Функция распределения $F(x,y)$ есть *неубывающая* функция по каждому из аргументов:

- при $x_2 > x_1$ $\quad F(x_2,y) \ge F(x_1,y)$;
- при $y_2 > y_1$ $\quad F(x,y_2) \ge F(x,y_1)$.

Действительно, пусть $x_2 > x_1$. Тогда, используя аксиому сложения вероятностей для несовместных событий, получим:

$$F(x_2,y) = P(X < x_2, Y < y) = P(X < x_1, Y < y) +$$
$$+ P(x_1 \le X < x_2, Y < y) \ge P(X < x_1, Y < y) = F(x_1,y).$$

Аналогично, при $y_2 > y_1$ получили бы $F(x,y_2) \ge F(x,y_1)$.

3. При одном из аргументов, равным $+\infty$, функция распределения системы превращается в функцию распределения случайной величины, соответствующей другому аргументу:

$$F(x,+\infty) = F_1(x) = P(X < x);$$

$$F(+\infty,y) = F_2(y) = P(Y < y),$$

где $F_1(x)$, $F_2(y)$ – функции распределения случайных величин X и Y соответственно.

Действительно, $F(x,+\infty) = P(X < x, Y < +\infty) = P(X < x) = F_1(x)$, так как любое событие $\{X < x\}$, будучи умноженным на достоверное событие $\{Y < +\infty\}$, не меняется. Аналогично получили бы $F(+\infty,y) = F_2(y)$.

4. Если оба аргумента равны $+\infty$, то функция распределения равна единице:

$$F(+\infty,+\infty) = 1$$

(совместное осуществление достоверных событий $\{X < +\infty\}$ и $\{Y < +\infty\}$ есть событие достоверное).

5. Если хотя бы один из аргументов равен $-\infty$, то функция распределения равна нулю:

$$F(x,-\infty) = F(-\infty,y) = F(-\infty,-\infty) = 0$$

(так как события $\{X<-\infty\},\{Y<-\infty\}$ и их произведение являются невозможными событиями).

6. Вероятность попадания значений двумерной случайной величины (X,Y) *в прямоугольник* $ABCD$ (рис. 1.2) можно найти с помощью ее функции распределения $F(x,y)$ по формуле

$$P(a\le X<b,c\le Y<d)=\left[F(b,d)-F(a,d)\right]-\left[F(b,c)-F(a,c)\right].$$

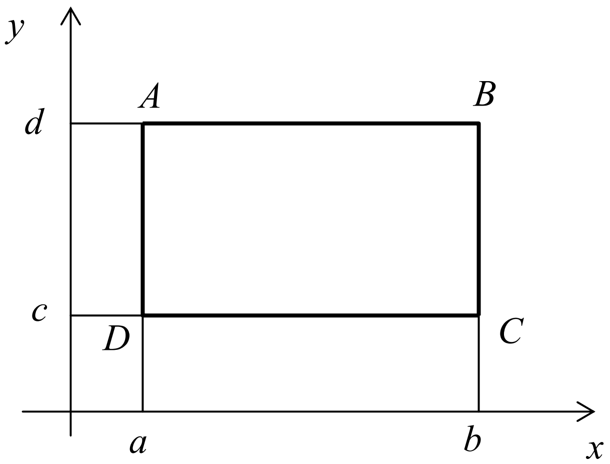


Рис. 1.2

Эта формула получается из двух формул для вероятности попадания значений (X,Y) в вертикальную или горизонтальную полуполосу.

Вероятность того, что значения величины (X,Y) попадут в полуполосу $a<X<b,Y<y$ (рис.1.3) выражается формулой

$$P(a\le X<b,Y<y)=F(b,y)-F(a,y).$$

Вероятность того, что значения величины (X,Y) попадут в полуполосу $X<x,c<Y<d$ (рис.1.4) выражается формулой

$$P(X<x,c\le Y<d)=F(x,d)-F(x,c).$$

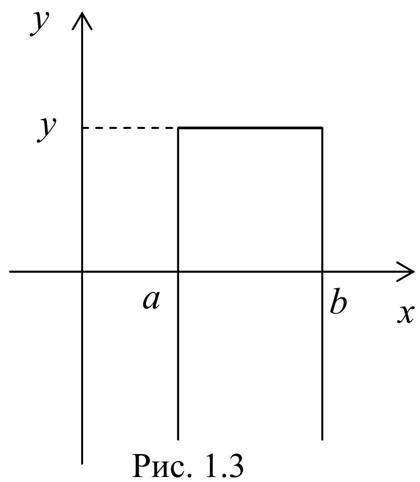


Рис. 1.3

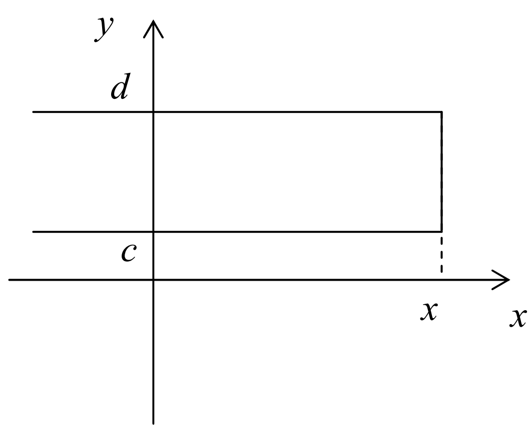


Рис. 1.4

Таким образом, вероятность попадания двумерной случайной величины в полуполосу равна приращению функции распределения по одному из аргументов.

Двумерная *случайная величина* (X,Y) называется *непрерывной*, если ее функция распределения $F(x,y)$ – непрерывная функция, дифференцируемая по каждому из аргументов, у которой существует вторая смешанная производная $\dfrac{\partial^2 F(x,y)}{\partial x \partial y}$.

Обе составляющие X и Y представляют собой непрерывные случайные величины.

Вводя в рассмотрение плотность распределения непрерывной случайной величины X, ее определяли как предел отношения вероятности попадания на малый участок к длине этого участка при ее неограниченном уменьшении. Аналогично *плотность распределения системы двух случайных величин* (X,Y) определяется как *предел отношения вероятности попадания случайной точки* (X,Y) *в малый прямоугольник* D *к площади этого прямоугольника, когда оба его размера стремятся к нулю.*

Найдем предел отношения вероятности попадания случайной точки (X,Y) *в элементарный прямоугольник*

$$x \le X < x + \Delta x; \quad y \le Y < y + \Delta y$$

к площади этого прямоугольника $\Delta x \cdot \Delta y$, когда Δx и $\Delta y \to 0$.

Полагая $a = x, c = y$, $b = x + \Delta x, d = y + \Delta y$, получим:

$$P(x \le X \le x + \Delta x,\, y \le Y \le y + \Delta y) =$$
$$= F(x + \Delta x,\, y + \Delta y) - F(x, y + \Delta y) - F(x + \Delta x, y) + F(x, y).$$

Тогда, если $F(x,y)$ не только непрерывна, но и дифференцируема, получим:

$$\lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \frac{P(x \le X \le x + \Delta x,\, y \le Y \le y + \Delta y)}{\Delta x \cdot \Delta y} =$$
$$= \lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \frac{\left[F(x + \Delta x, y + \Delta y) - F(x, y + \Delta y)\right] - \left[F(x + \Delta x, y) - F(x, y)\right]}{\Delta x \cdot \Delta y} =$$
$$= \lim_{\Delta y \to 0} \frac{1}{\Delta y} \left[\lim_{\Delta x \to 0} \frac{F(x + \Delta x, y + \Delta y) - F(x, y + \Delta y)}{\Delta x} - \right.$$
$$\left. - \lim_{\Delta x \to 0} \frac{F(x + \Delta x, y) - F(x, y)}{\Delta x} \right] = \frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial x \partial y} = f(x, y).$$

Таким образом, *плотностью распределения или совместной плотностью непрерывной двумерной случайной величины* (X, Y) *называется вторая смешанная частная производная ее функции распределения*:

$$f(x, y) = \frac{\partial^2 F(x, y)}{\partial x \partial y} = F''_{xy}(x, y).$$

Геометрически $f(x, y)$ дает поверхность распределения (рис. 1.5).

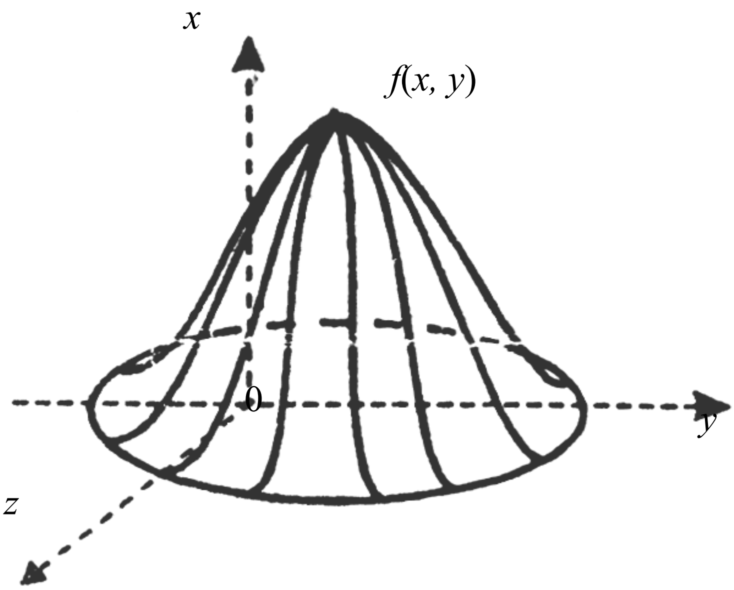


Рис. 1.5

С точностью до бесконечно малых более высоких порядков элемент вероятности $f(x, y)dxdy$ определяет вероятность попадания случайной точки (X, Y) в элементарный прямоугольник с размерами dx, dy, примыкающий к точке (x, y). Эта вероятность приближенно равна объему параллелепипеда с высотой $f(x, y)$, опирающегося на элементарный прямоугольник. Отсюда следует, что вероятность попадания случайной точки (X, Y) в область D плоскости XOY *геометрически* дает *объем тела*, ограниченного сверху поверхностью $z = f(x, y)$ и опирающегося на область D, так что

$$P\{(X, Y) \in D\} = \iint_D f(x, y)\,dxdy.$$

В частности, если D есть прямоугольник $a \le X \le b,\ c \le Y \prec d$, то

$$P(a \le X \le b,\ c \le Y \le d) = \int_a^b \int_c^d f(x, y)\,dxdy.$$

П р и м е р 4. Дана дифференциальная функция двумерной случайной величины $f(x,y)=\dfrac{1}{\pi^2\left(1+x^2\right)\left(1+y^2\right)}$. Найти вероятность попадания случайной точки в прямоугольник с вершинами $A(1;1)$, $B\left(\sqrt{3};1\right)$, $C(1;0)$, $D\left(\sqrt{3};0\right)$.

Решение. Искомая вероятность равна

$$P\{(X,Y)\in D\}=\iint_D \frac{1}{\pi^2\left(1+x^2\right)\left(1+y^2\right)}dxdy=$$

$$=\frac{1}{\pi^2}\int_0^1\left[\frac{1}{1+y^2}\int_1^{\sqrt{3}}\frac{dx}{1+x^2}\right]dy=$$

$$=\frac{1}{\pi^2}\cdot\operatorname{arctg}x\,\Big|_1^{\sqrt{3}}\int_0^1\frac{dy}{1+y^2}=\frac{1}{\pi^2}\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}\right)\operatorname{arctg}y\,\Big|_0^1=\frac{1}{\pi^2}\cdot\frac{\pi}{12}\cdot\frac{\pi}{4}=\frac{1}{48}.$$

Плотность вероятности $f(x,y)$ обладает свойствами, аналогичными свойствам плотности вероятности одномерной случайной величины.

1. *Плотность вероятности двумерной случайной величины есть неотрицательная функция*

$$f(x,y)\geq 0.$$

Действительно, вероятность попадания случайной точки в прямоугольник со сторонами Δx и Δy есть неотрицательное число; площадь этого прямоугольника – положительное число. Следовательно, $f(x,y)$ как предел отношения этих двух чисел есть неотрицательное число.

2. *Двойной несобственный интеграл с бесконечными пределами от плотности вероятности равен единице*

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dxdy=1.$$

Действительно, бесконечные пределы интегрирования указывают, что областью интегрирования служит вся плоскость XOY.Поскольку событие, состоящее в том, что случайная точка попадет при испытании на плоскость XOY достоверно, то вероятность этого события равна единице. Это означает, что *полный объем тела, ограниченного поверхностью распределения и плоскостью XOY, равен 1*.

Функция распределения непрерывной двумерной случайной величины может быть выражена через ее плотность вероятностей по формуле

$$F(x,y)=\int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y} f(x,y)dxdy.$$

Зная плотность вероятности двумерной случайной величины (X,Y), можно найти функции распределения $F_1(x), F_2(y)$ и плотности вероятностей $f_1(x), f_2(y)$ ее одномерных составляющих X и Y.

Приняв во внимание, что

$$F(x,y)=\int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y} f(x,y)\,dxdy \quad \text{и} \quad F_1(x)=F(x,\infty),$$

найдем:

$$F_1(x)=\int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,dxdy.$$

Продифференцировав обе части этого равенства по x, получим:

$$\frac{dF_1(x)}{dx}=\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,dy$$

или

$$f_1(x)=\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,dy.$$

Аналогично:

$$F_2(y)=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{y} f(x,y)\,dxdy;$$

$$f_2(y)=\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,dx.$$

Пример 5. Система случайных величин (X,Y) подчинена закону распределения с плотностью

$$f(x,y)=\begin{cases} a\left(x^2+y^2\right), & \text{если} \quad x^2+y^2\le r^2; \\ 0, & \text{если} \quad x^2+y^2>r^2. \end{cases}$$

Найти коэффициент *a*.

Решение. Коэффициент *a* определим из уравнения

$$a\iint\limits_D \left(x^2+y^2\right)dxdy=1,$$

где D – круг, ограниченный окружностью $x^2+y^2=r^2$.

Перейдя к полярным координатам, получим:

$$a\int_0^{2\pi}\int_0^{r}\rho^3\,d\rho\,d\varphi=1,\quad \frac{\rho^4}{4}\cdot 2\pi a=1,\quad a=\frac{2}{\pi r^4}.$$

П р и м е р 6. Система случайных величин (X,Y) подчинена закону распределения с плотностью

$$f(x,y)=\begin{cases}0{,}5\sin(x+y) & \text{в области } D;\\ 0 & \text{вне этой области.}\end{cases}$$

Область D – квадрат, ограниченный прямыми $x=0$, $x=\frac{\pi}{2}$, $y=0$, $y=\frac{\pi}{2}$. Найти функцию распределения $F(x,y)$ этой величины. Вычислить вероятность того, что X и Y примут значения: $X<\frac{\pi}{6}$, $Y<\frac{\pi}{6}$.

Решение.

$$F(x,y)=\int_0^x\int_0^y 0{,}5\sin(x+y)\,dxdy=0{,}5\int_0^x\left[\int_0^y\sin(x+y)\,dy\right]dx=$$

$$=-0{,}5\int_0^x\cos(x+y)\big|_0^y\,dx=-0{,}5\int_0^x(\cos(x+y)-\cos x)\,dx=$$

$$=-0{,}5\sin(x+y)\big|_0^x+0{,}5\sin x\big|_0^x=\ -0{,}5\left[\sin(x+y)-\sin y\right]+0{,}5\sin x.$$

Итак,

$$F(x,y)=0{,}5\left[\sin x+\sin y-\sin(x+y)\right];$$

$$P\left(X<\frac{\pi}{6},Y<\frac{\pi}{6}\right)=F\left(\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{6}\right)=0{,}5\left[\sin\frac{\pi}{6}+\sin\frac{\pi}{6}-\sin\frac{\pi}{3}\right]\approx 0{,}67.$$

Для того чтобы охарактеризовать зависимость между составляющими двумерной случайной величины, вводят понятие условного распределения.

Условным распределением дискретной случайной величины X при $Y=y_j$ называется множество значений $x_i, i=\overline{1,n}$ и условных вероятностей $p(x_1\,|\,y_j)$, $p(x_2\,|\,y_j)$, …, $p(x_i\,|\,y_j)$, вычисленных в предположении, что событие $Y=y_j$ уже наступило.

Из определения условной вероятности имеем:

$$p_j(x_i)=\frac{p(X=x_i,Y=y_j)}{p(Y=y_j)}=\frac{p_{ij}}{p_j}.$$

Аналогично определяется условное распределение *дискретной* случайной величины Y при $X = x_i$:

$$p_i\left(y_j\right) = \frac{p\left(X = x_i, Y = y_j\right)}{p\left(X = x_i\right)} = \frac{p_{ij}}{p_i}.$$

Сумма вероятностей условного распределения равна единице.

Условным законом распределения *одной из одномерных составляющих двумерной случайной величины* $\left(X, Y\right)$ *называется закон ее распределения при условии, что другая составляющая приняла определенное значение (или попала в какой-то интервал).*

В случае *непрерывных* случайных величин *условная плотность вероятности* одной из одномерных составляющих двумерной случайной величины равна *отношению ее совместной плотности к плотности вероятности другой составляющей*:

$$f_x\left(y\right) = \frac{f\left(x, y\right)}{f_1\left(x\right)} = \frac{f\left(x, y\right)}{\int\limits_{-\infty}^{\infty} f\left(x, y\right)dy}; \quad f_y\left(x\right) = \frac{f\left(x, y\right)}{f_2\left(y\right)} = \frac{f\left(x, y\right)}{\int\limits_{-\infty}^{\infty} f\left(x, y\right)dx}.$$

Справедлива следующая *теорема умножения плотностей распределений*

$$f\left(x, y\right) = f_1\left(x\right) \cdot f_x\left(y\right) = f_2\left(y\right) \cdot f_y\left(x\right).$$

Условные плотности $f_x\left(y\right), f_y\left(x\right)$ обладают всеми свойствами безусловной.

Случайные величины X и Y будут **независимыми**, *если закон распределения каждой из них не зависит от того, какое значение приняла другая.*

Для независимых случайных величин

$$F\left(x, y\right) = F_1\left(x\right) \cdot F_2\left(y\right);$$

$$f\left(x, y\right) = f_1\left(x\right) \cdot f_2\left(y\right).$$

Верно и обратное.

П р и м е р 7. Закон распределения дискретной двумерной случайной величины задан таблицей

X \ Y	1	2	3	4
0	0,04	0,08	0,06	0,02
1	0,15	0,20	0,12	0,03
2	0,01	0,22	0,02	0,05

Найти условный закон распределения величины Y при $X=1$. Являются ли независимыми величины X и Y?

Решение. Поскольку $P(X=1)=0,15+0,20+0,12+0,03=0,5$, то условные вероятности равны:

$$p(Y=1\,|\,X=1)=\frac{0,15}{0,5}=0,3;\quad p(Y=2\,|\,X=1)=\frac{0,20}{0,5}=0,4;$$

$$p(Y=3\,|\,X=1)=\frac{0,12}{0,5}=0,24;\quad p(Y=4\,|\,X=1)=\frac{0,03}{0,5}=0,06.$$

Итак, при условии, что $X=1$, величина Y имеет следующий условный закон распределения

y_j	1	2	3	4
p_j	0,3	0,4	0,24	0,06

Безусловный закон распределения для составляющей Y имеет вид

y_j	1	2	3	4
p_j	0,2	0,5	0,2	0,1

Вероятности p_j получены суммированием по столбцам вероятностей первой таблицы; например, $p_1=0,04+0,15+0,01=0,2$ и.т.д.

Так как условный и безусловный законы распределения не совпадают, то величины X и Y зависимы.

Пример 8. Независимые случайные величины X и Y имеют соответственно плотности:

$$f_1(x)=\begin{cases}0,5 & \text{при} \quad -1<x\le 1;\\ 0 & \text{при} \quad x<-1 \text{ или } x>1;\end{cases}$$

$$f_2(y)=\begin{cases}0,5 & \text{при} \quad 0<y\le 2;\\ 0 & \text{при} \quad y<0 \text{ или } y>2.\end{cases}$$

Найти:

1) функции распределения $F_1(x)$ и $F_2(y)$;

2) плотность распределения вероятностей системы (X,Y);

3) функцию распределения системы (X,Y);

4) вероятность события $\{-1 \le x < 0, 0 \le y < 1\}$ двумя способами с помощью функции $f(x,y)$ и с помощью функции $F(x,y)$.

Решение:

1. Функции распределения $F_1(x)$ и $F_2(y)$ найдем с помощью формулы $F(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} f(x)dx$.

Если $x \le -1$, то

$$F_1(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} f(x)dx = \int\limits_{-\infty}^{x} 0 \cdot dx = 0.$$

Если $-1 < x \le 1$, то

$$F_1(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} f(x)dx = \int\limits_{-\infty}^{-1} 0 \cdot dx + \int\limits_{-1}^{x} 0{,}5dx = 0.5x\,|_{-1}^{x} = 0{,}5(x+1).$$

Если $x > 1$, то

$$F_1(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} f(x)dx = \int\limits_{-\infty}^{-1} 0 \cdot dx + \int\limits_{-1}^{1} 0{,}5dx + \int\limits_{1}^{x} 0 \cdot dx = 0{,}5x\,|_{-1}^{1} = 1.$$

Следовательно,

$$F_1(x) = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad x \le -1; \\ 0{,}5(x+1) & \text{при} \quad -1 < x \le 1; \\ 1 & \text{при} \quad x > 1. \end{cases}$$

Аналогично найдем:

$$F_2(y) = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad y \le 0; \\ 0{,}5y & \text{при} \quad 0 < y \le 2; \\ 1 & \text{при} \quad y > 2. \end{cases}$$

2. Так как случайные величины X и Y независимы, то должно выполняться равенство $F(x,y) = F_1(x) \cdot F_2(y)$, с помощью которого получим функцию распределения $F(x,y)$ системы (X,Y):

$$F(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad x \le -1 \text{ или } \quad y \le 0; \\ 0{,}25(x+1)y & \text{при} \quad -1 < x \le 1, \quad 0 < y \le 2; \\ 0{,}5(\text{x}+1) & \text{при} \quad -1 < x \le 1, \quad y > 2; \\ 0{,}5y & \text{при} \quad x > 1, \quad 0 < y \le 2; \\ 1 & \text{при} \quad x > 1, \quad y > 2. \end{cases}$$

3. Так как случайные величины X и Y независимы, то должно выполняться равенство $f(x,y)=f_1(x)\cdot f_2(y)$, с помощью которого получим плотность распределения $f(x,y)$ системы (X,Y):

$$f(x,y)=\begin{cases}0,25 & \text{при} \quad -1<x\le 1, \quad 0<y\le 2;\\ 0 & \text{при} \quad x<-1 \text{ или } x>1, \quad y<0 \quad \text{или} \quad y>2.\end{cases}$$

4. Поскольку для указанных значений x и y функция $F(x,y)$ имеет вид $F(x,y)=0,25(x+1)y$ при $-1<x\le 1, 0<\text{y}\le 2$, то по формуле $F(x,y) = P(X<x,Y<y)$ получим:

$$P(X<0,Y<1)=F(0,1)=0,25(0+1)\cdot 1=0,25.$$

С учетом $P(a<X<b,\, c<Y<d)=\int\limits_a^b\int\limits_c^d f(x,y)\,dxdy$ найдем:

$$P(-1\le X<0,\, 0\le Y<1)=\int\limits_{-1}^{0}\int\limits_{0}^{1}0,25\,dxdy=0,25x\,|_{-1}^{0}\cdot y\,|_0^1=0,25.$$

Числовые характеристики системы двух случайных величин. При изучении двумерных случайных величин рассматриваются числовые характеристики одномерных составляющих X и Y: математические ожидания и дисперсии.

Для дискретных случайных величин X и Y

$$a_x=M[X]=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}x_i p_{ij}; \quad a_y=M[Y]=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}y_j p_{ij};$$

$$D[X]=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}p_{ij}(x_i-a_x)^2; \quad D[Y]=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}p_{ij}\left(y_j-a_y\right)^2.$$

Для непрерывных случайных величин X и Y

$$a_x=M[X]=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}x\cdot f(x,y)\,dxdy;$$

$$a_y=M[Y]=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}y\cdot f(x,y)\,dxdy;$$

$$D[X]=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}(x-a_x)^2\cdot f(x,y)\,dxdy;$$

$$D[Y]=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left(y-a_y\right)^2\cdot f(x,y)\,dxdy.$$

Средние квадратические отклонения случайных величин X и Y определяются по формулам:

$$\sigma_x = \sqrt{D[X]}; \quad \sigma_y = \sqrt{D[Y]}.$$

Наряду с ними рассматриваются также числовые характеристики условных распределений: условные математические ожидания $M_x[Y]$ и $M_y[X]$ и условные дисперсии $D_x[Y]$ и $D_y[X]$. Эти характеристики находятся по обычным формулам математического ожидания и дисперсии, в которых вместо вероятностей событий или плотностей вероятности используются условные вероятности или условные плотности вероятности.

Условное математическое ожидание $M_x[Y]$ случайной величины Y при $X = x$, есть функция от x и называется *функцией регрессии* или просто *регрессией* Y по X; аналогично $M_y[X]$ называется функцией регрессии X по Y. Графики этих функций называются соответственно *линиями (кривыми) регрессии* Y по X и X по Y.

Однако математические ожидания и дисперсии случайных величин X и Y недостаточно полно характеризуют двумерную случайную величину (X,Y), так как не выражают степени зависимости ее составляющих X и Y. Поэтому пользуются и другими характеристиками, к числу которых относятся *корреляционный момент (ковариация) и коэффициент корреляции.*

Корреляционным моментом (*или моментом связи*) K_{xy} *случайных величин* X *и* Y *называют математическое ожидание произведения центрированных случайных величин* $\overset{\circ}{X} = (X - M[X])$ *и* $\overset{\circ}{Y} = (Y - M[Y])$, *то есть*

$$K_{xy} = M\left[\overset{\circ}{X}\overset{\circ}{Y}\right] = M\left[(X - M[X]) \cdot (Y - M[Y])\right]$$

или

$$K_{xy} = \operatorname{cov}(X,Y) = M\left[(X - a_x) \cdot (Y - a_y)\right].$$

При *дискретных* X и Y для вычисления корреляционного момента пользуются формулой:

$$K_{xy} = \sum_i \sum_j (X_i - a_x)(Y_j - a_y) p_{ij}; \quad p_{ij} = P(X = x_i, Y = y_j).$$

Для *непрерывных* величин:

$$K_{xy} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (X - a_x) \cdot (Y_i - a_y) f(x,y) dxdy.$$

В механической интерпретации, когда распределение вероятностей трактуется как распределение единичной массы на плоскости, точка (a_x, a_y) есть центр массы распределения; $D[X], D[Y]$ – моменты инерции распределения масс относительно точки (a_x, a_y); K_{xy} – центробежный момент инерции распределения масс.

Непосредственно из определения K_{xy} следует:

1. $K_{xy} = K_{yx}$.

2. *Корреляционный момент двух случайных величин равен математическому ожиданию их произведения минус произведение математических ожиданий*

$$K_{xy} = M[XY] - a_x a_y.$$

Действительно,

$$K_{xy} = M\left[(X - a_x)\cdot(Y - a_y)\right] = M\left[XY - a_x Y - a_y X + a_x a_y\right] =$$
$$= M[XY] - a_x M[Y] - a_y M[X] - a_x a_y = M[XY] - a_x a_y.$$

3. *Корреляционный момент двух независимых случайных величин равен нулю.*

Действительно, для независимых случайных величин $f(x,y) = f_1(x)\cdot f_2(y)$. Откуда для них

$$K_{xy} = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}(X - a_x)(Y_i - a_y) f_1(x)\cdot f_2(y)\,dxdy =$$
$$= \int_{-\infty}^{\infty}(X - a_x) f_1(x)\,dx \int_{-\infty}^{\infty}(Y - a_y) f_2(y)\,dy = 0,$$

так как каждый из полученных интегралов есть центральный момент первого порядка, который равен нулю.

Если X мало отличается от $M[X]$ (т.е. она почти не случайна), то корреляционный момент будет мал. Так что корреляционный момент характеризует не только зависимость величин, но и их рассеивание.

Корреляционный момент зависит от размерностей X и Y, так как размерность корреляционного момента равна произведению размерностей X и Y. Чтобы избавиться от этого недостатка, вводят безразмерную характеристику – *коэффициент корреляции:*

$$r_{xy} = \frac{K_{xy}}{\sigma_x \sigma_y},$$

где σ_x, σ_y – среднеквадратические отклонения X и Y.

Естественно, *для независимых величин* $r_{xy} = 0$ ($K_{xy} = 0$).

Случайные величины, для которых $r_{xy} = 0$, называются *некоррелированными* (несвязанными). *Из независимости следует некоррелированность.* Обратное не всегда верно.

Если $r_{xy} = 0$, то это означает только *отсутствие линейной связи* между случайными величинами. Любой другой вид связи может при этом присутствовать.

Если *коэффициент корреляции* двух случайных величин *равен* (по абсолютной величине) *единице,* то между этими случайными величинами *существует линейная функциональная зависимость*.

Для любых случайных величин X и Y коэффициент корреляции принимает значения на отрезке $[-1,1]$, то есть $|r_{xy}| \le 1$.

П р и м е р 9. Система случайных величин (X,Y) подчинена закону распределения с плотностью

$$f(x,y) = \begin{cases} a\sin(x+y) & \text{в области D} \\ 0 & \text{вне этой области} \end{cases}.$$

Область D – квадрат, ограниченный прямыми $x = 0$, $x = \frac{\pi}{2}$, $y = 0$, $y = \frac{\pi}{2}$.

Найти:

1) коэффициент *a*; 2) математические ожидания a_x и a_y; 3) средние квадратичные отклонения σ_x, σ_y; 4) коэффициент корреляции r_{xy}.

Решение.

1. Коэффициент *a* найдем из условия

$$a \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(x+y)\,dxdy = 1.$$

Должны иметь

$$a \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(x+y)\,dxdy = -a \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(x+y)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} dx = a \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin x + \cos x)\,dx =$$

$$= a(\sin x + \cos x)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 2a.$$

Откуда $2a = 1$ и $a = 0{,}5$, то есть $f(x,y) = 0{,}5\sin(x+y)$ в области D.

2. $a_x = 0{,}5\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\sin(x+y)\,dxdy = 0{,}5\int_0^{\frac{\pi}{2}} xdx\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(x+y)\,dy = \frac{\pi}{4}$;

$$a_y = 0{,}5\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}} y\sin(x+y)\,dxdy = 0{,}5\int_0^{\frac{\pi}{2}} ydy\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin(x+y)\,dx = \frac{\pi}{4}.$$

3. $D[X] = M\left[X^2\right] - \left(M[X]\right)^2 =$

$$= 0{,}5\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2\sin(x+y)\,dxdy - \frac{\pi^2}{16} = \frac{\pi^2}{16} + \frac{\pi}{2} - 2;$$

$$D[Y] = M\left[Y^2\right] - \left(M[Y]\right)^2 =$$

$$= 0{,}5\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}} y^2\sin(x+y)\,dxdy - \frac{\pi^2}{16} = \frac{\pi^2}{16} + \frac{\pi}{2} - 2;$$

$$\sigma_x = \sigma_y = \sqrt{\frac{\pi^2}{16} + \frac{\pi}{2} - 2} = \sqrt{\frac{\pi^2 + 8\pi - 32}{16}}.$$

4. Определим корреляционный момент

$$K_{xy} = M[XY] - a_x a_y = 0{,}5\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}} xy\sin(x+y)\,dxdy - \frac{\pi}{4}\cdot\frac{\pi}{4} = \frac{8\pi - 16 - \pi^2}{16}.$$

Отсюда коэффициент корреляции

$$r_{xy} = \frac{K_{xy}}{\sigma_x\sigma_y} = \frac{8\pi - 16 + \pi^2}{\pi^2 + 8\pi - 32} \approx -0{,}2454.$$

Случайная величина (X, Y) называется распределенной *по двумерному нормальному закону*, если ее совместная плотность имеет вид:

$$f(x,y) = \frac{1}{2\pi\sigma_x\sigma_y\sqrt{1-r^2_{xy}}}\times$$

$$\times\exp\left[-\frac{1}{2\sqrt{1-r_{xy}^2}}\left(\frac{(x-a_x)^2}{\sigma_x^2} + \frac{(y-a_y)^2}{\sigma_y^2} - 2r_{xy}\frac{x-a_x}{\sigma_x}\cdot\frac{y-a_y}{\sigma_t}\right)\right].$$

Нормальный закон на плоскости определяется пятью параметрами: $a_x, a_y, \sigma_x, \sigma_y, r_{xy}$.

Если случайные величины X, Y *подчиняются нормальному закону* на плоскости и при этом $r_{xy} = 0$ (то есть X, Y – *некоррелированы*), то

$$f(x,y) = \frac{1}{2\pi\sigma_x\sigma_y} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{(x-a_x)^2}{\sigma_x^2}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{(y-a_y)^2}{\sigma_y^2}\right)\right] =$$

$$= \frac{1}{2\pi\sigma_x\sigma_y} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{(x-a_x)^2}{\sigma_x^2}\right)} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{(y-a_y)^2}{\sigma_y^2}\right)} =$$

$$= \frac{1}{\sigma_x\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a_x)^2}{2\sigma_x^2}} \frac{1}{\sigma_y\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(y-a_y)^2}{2\sigma_y^2}} = f_1(x) \cdot f_2(x).$$

Как видим, здесь из некоррелированности составляющих X, Y следует их независимость (равносильны понятия независимости и некоррелированности).

Контрольные вопросы

1. Закон распределения системы двух случайных величин.
2. Функция распределения системы двух случайных величин.
3. Плотность распределения системы двух непрерывных случайных величин.
4. Условный закон распределения одной из одномерных составляющих двумерной случайной величины.
5. Условная плотность вероятности одной из одномерных составляющих двумерной случайной величины.
6. Числовые характеристики системы двух случайных величин.
7. Функция регрессии.
8. Корреляционный момент.
9. Коэффициент корреляции.

1.2. Оценка параметров распределения

Сформулируем задачу оценки параметров в общем виде. Пусть распределение признака X – генеральной совокупности – задается функцией вероятностей $\varphi(x_i, \theta) = P(X = x_i)$, которая содержит неизвестный параметр θ. Допустим, удалось установить: распределение – нормальное. Тогда требуется оценить (определить приближенно) математическое ожидание и среднее квадратическое отклонение, так как эти два параметра определяют нормальное распределение. Если распределение Пуассона, то необходимо оценить параметр λ, которым это распределение определяется.

Для вычисления параметра θ исследовать все элементы генеральной совокупности не представляется возможным. Поэтому о параметре θ пытаются судить по выборке, состоящей из значений $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Эти значения можно рассматривать как частные значения (реализации) n независимых случайных величин $X_{1,}, X_2 \ldots, X_n$, каждая из которых имеет тот же закон распределения, что и сама случайная величина X.

Определение. **Статистической оценкой** $\tilde{\theta}_n$ неизвестного параметра θ теоретического распределения называется его приближенное знчение, зависящее от данных выборки, то есть некоторая функция от наблюдаемых случайных величин.

Оценка $\tilde{\theta}_n$ (в отличие от оцениваемого параметра θ – величины неслучайной, детерминированной) является случайной величиной, зависящей от закона распределения случайной величины X и числа n.

В качестве статистических оценок параметров генеральной совокупности используются оценки, удовлетворяющие одновременно требованиям несмещенности, состоятельности и эффективности.

Определение. Оценка $\tilde{\theta}_n$ параметра θ называется **несмещенной,** если математическое ожидание равно оцениваемому параметру, то есть

$$M\left(\tilde{\theta}_n\right) = \theta .$$

В противном случае оценка (математическое ожидание которой не равно оцениваемому параметру) называется **смещенной**.

Если равенство $M\left(\tilde{\theta}_n\right) = \theta$ не выполняется, то оценка $\tilde{\theta}_n$, полученная по разным выборкам, будет в среднем либо завышать значение θ (если $M\left(\tilde{\theta}_n\right) > \theta$), либо занижать его (если $M\left(\tilde{\theta}_n\right) < \theta$).

Таким образом, *требование несмещенности гарантирует отсутствие систематических ошибок при оценивании.*

Определение. Оценка $\tilde{\theta}_n$ параметра θ называется **состоятельной**, если она удовлетворяет закону больших чисел, то есть *сходится по вероятности* к оцениваемому параметру:

$$\lim_{n \to \infty} P\left(\left|\tilde{\theta}_n - \theta\right| < \varepsilon\right) = 1$$

или

$$\tilde{\theta}_n \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} \theta .$$

В случае использования состоятельных оценок оправдывается увеличение объема выборки, так как при этом становятся маловероятными значительные ошибки при оценивании. Поэтому практичес-кий смысл имеют только состоятельные оценки. Если оценка состоятельна, то практически достоверно, что при достаточно большом n $\tilde{\theta}_n \approx \theta$.

Если оценка $\tilde{\theta}_n$ параметра θ является несмещенной, а ее дисперсия $\sigma^2_{\theta_n} \to 0$ при $n \to \infty$, то оценка $\tilde{\theta}_n$ является и состоятельной. Это непосредственно вытекает из неравенства Чебышева:

$$P\left(\left|\tilde{\theta}_n - \theta\right| < \varepsilon\right) \geq 1 - \frac{\sigma^2_{\tilde{\theta}_n}}{\varepsilon^2}.$$

Определение. Несмещенная оценка $\tilde{\theta}_n$ параметра θ называется **эффективной**, если она имеет наименьшую дисперсию среди всех возможных несмещенных оценок параметра θ, вычисленных по выборкам одного и того же объема n.

Эффективность оценки $\tilde{\theta}_n$ определяют отношением

$$e = \frac{\sigma^2_{\tilde{\theta}^{э}_n}}{\sigma^2_{\tilde{\theta}_m}},$$

где $\sigma^2_{\tilde{\theta}^{э}_n}$ и $\sigma^2_{\tilde{\theta}_m}$ – соответственно дисперсии эффективной и данной оценок.

Чем ближе e к единице, тем эффективнее оценка. Если $e \to 1$ при $n \to \infty$, то такая **оценка** называется **асимптотически эффективной.**

Справедливы следующие теоремы:

Теорема 1. Выборочная средняя $\overline{x}_{в}$ является несмещенной и состоятельной оценкой математического ожидания

Теорема 2. Исправленная выборочная дисперсия $S^2 = \frac{n}{n-1} D_{в}$ является несмещенной и состоятельной оценкой дисперсии $D[X]$.

Однако **точечная** оценка $\tilde{\theta}_n$ (*определяемая одним числом*) является лишь приближенным значением неизвестного параметра θ и для выборки малого объема может существенно отличаться от θ.

Чтобы получить представление о точности и надежности оценки $\tilde{\theta}_n$ параметра θ, используют **интервальную оценку** (числовой интервал) параметра.

Пусть $\tilde{\theta}_n$ по данным выборки служит оценкой неизвестного параметра θ. $\tilde{\theta}_n$ тем точнее определяет параметр θ, чем меньше абсолютная величина разности $\left|\theta-\tilde{\theta}_n\right|<\delta$.

Положительное число δ характеризует **точность оценки**.

Однако статистические методы не позволяют категорически утверждать, что $\tilde{\theta}_n$ удовлетворяет неравенству $\left|\theta-\tilde{\theta}_n\right|<\delta$. Можно говорить лишь о вероятности γ, с которой это неравенство осуществляется.

Надежностью (**доверительной вероятностью**) оценки θ по $\tilde{\theta}_n$ называется вероятность γ, с которой осуществляется неравенство $\left|\theta-\tilde{\theta}_n\right|<\delta$.

Обычно надежность оценки задается наперед, причем в качестве γ берут число, близкое к единице (наиболее часто задают надежность, равную 0,95;0.99; и 0,999).

Пусть вероятность того, что $\left|\theta-\tilde{\theta}_n\right|<\delta$ равна γ:

$$P\left(\left|\theta-\tilde{\theta}_n\right|<\delta\right)=\gamma.$$

Заменив неравенство $\left|\theta-\tilde{\theta}_n\right|<\delta$ равносильным ему двойным неравенством

$$-\delta<\theta-\tilde{\theta}_n<\delta$$

или

$$\tilde{\theta}_n-\delta<\theta<\tilde{\theta}_n+\delta,$$

будем иметь:

$$P(\tilde{\theta}_n-\delta<\theta<\tilde{\theta}_n+\delta)=\gamma.$$

Это соотношение следует понимать так: вероятность того, что интервал $(\tilde{\theta}_n-\delta,\tilde{\theta}_n+\delta)$ заключает в себе неизвестный параметр θ, равна γ.

Доверительным *называют интервал* $(\tilde{\theta}_n-\delta,\tilde{\theta}_n+\delta)$, *который накрывает неизвестный параметр с заданной надежностью* γ.

Величина доверительного интервала существенно зависит от объема выборки n (уменьшается с ростом n) и от значения доверительной вероятности γ (увеличивается с приближением γ к единице).

Решается и обратная задача, когда по заданному доверительному интервалу находится соответствующая надежность оценки.

Пусть, например, $\gamma=0,95$; тогда число $\alpha=1-\gamma=0,05$ показывает, с какой вероятностью заключение о надежности оценки ошибочно. Число $\alpha=1-\gamma$ называется *уровнем значимости*, обычно принимается равным 0,05; 0,01; 0,001.

Метод доверительных интервалов разработан американским статистиком Ю.Нейманом, исходя из идей английского статистика Р.Фишера.

Выясним, как построить **доверительный интервал для математического ожидания нормально распределенного признака**.

Приняв во внимание, что

$$M[\overline{x}_{в}] = M[X] = a;$$

$$\sigma[\overline{x}_{в}] = \frac{\sigma[X]}{\sqrt{n}},$$

оценим математическое ожидание с помощью выборочной средней, учитывая, что $\overline{x}_{в}$ также имеет нормальное распределение.

Имеем

$$P\left(\left|\overline{x}_{в} - a\right| < \delta\right) = \gamma.$$

Пользуясь формулой $P\left(\left|X - a\right| < \delta\right) = 2\Phi\left(\frac{\delta}{\sigma}\right)$ и заменив X через $\overline{x}_{в}$, а σ через $\sigma[\overline{x}_{в}] = \frac{\sigma[X]}{\sqrt{n}}$, получим:

$$P\left(\left|\overline{x}_{в} - a\right| < \delta\right) = 2\Phi\left(\frac{\delta\sqrt{n}}{\sigma[X]}\right) = 2\Phi(t),$$

где $t = \frac{\delta\sqrt{n}}{\sigma[X]}$.

Найдя из последнего равенства $\delta = t\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$, можем записать:

$$P\left(\left|\overline{x}_{в} - a\right| < t\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = 2\Phi(t)$$

или

$$P\left(\overline{x}_{в} - t\frac{\sigma}{\sqrt{n}} < a < \overline{x}_{в} + t\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = 2\Phi(t) = \gamma.$$

Смысл полученного выражения таков: с надежностью γ можно утверждать, что доверительный интервал $(\overline{x}_{в} - t\frac{\sigma}{\sqrt{n}}; \overline{x}_{в} + t\frac{\sigma}{\sqrt{n}})$ содержит неизвестный параметр a; точность оценки равна $\delta = t\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$.

Число t определяется из равенства $2\Phi(t)=\gamma$ или $\Phi(t)=\frac{\gamma}{2}$; по таблице функции Лапласа находят аргумент t, которому соответствует значение функции Лапласа, равное $\frac{\gamma}{2}$.

Для проведения выборочного наблюдения весьма важно правильно установить объем выборки n, который в значительной степени определяет необходимые при этом временные, трудовые и стоимостные затраты. *Для определения объема выборки необходимо задать надежность (доверительную вероятность) оценки* γ *и точность (предельную ошибку выборки)* δ*:*

$$n=\frac{t^2\sigma^2}{\delta^2}.$$

В большинстве случаев среднее квадратическое отклонение $\sigma[X]$ исследуемого признака неизвестно. Поэтому вместо $\sigma[X]$ при большой выборке ($n<30$) применяют исправленное выборочное среднее квадратическое отклонение $S=\sqrt{\frac{n}{n-1}}\sigma_{\text{в}}$. Доверительный интервал в этом случае будет иметь вид

$$\overline{x}_{\text{в}}-t\frac{S}{\sqrt{n}}<a<\overline{x}_{\text{в}}+t\frac{S}{\sqrt{n}}.$$

Но сделать большую выборку удается не всегда и это не всегда целесообразно. Из $\overline{x}_{\text{в}}-t\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$; $\overline{x}_{\text{в}}+t\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ видно, что чем меньше n, тем шире доверительный интервал, то есть он зависит от объема выборки.

Английский статистик Госсет (псевдоним Стьюдент) доказал, что в случае нормального распределения признака X в генеральной совокупности нормированная случайная величина

$$T=\sqrt{n}\frac{\overline{x}_{\text{в}}-a}{S}$$

зависит только от объема выборки.

Дифференциальная функция (плотность вероятности) случайной величины T имеет вид

$$S(t,n)=B_n\left(1+\frac{t^2}{n-1}\right)^{-\frac{n}{2}},$$

где коэффициент $B_n = \dfrac{\Gamma\left(\dfrac{n}{2}\right)}{\sqrt{\pi(n-1)}\,\Gamma\left(\dfrac{n-1}{2}\right)}$ зависит и от объема выборки n;

$\Gamma(x) = \int\limits_0^\infty t^{x-1}e^{-t}dt$ – гамма-функция; t – возможное значение T.

Это распределение и называют распределением Стьюдента (рис. 1.6).

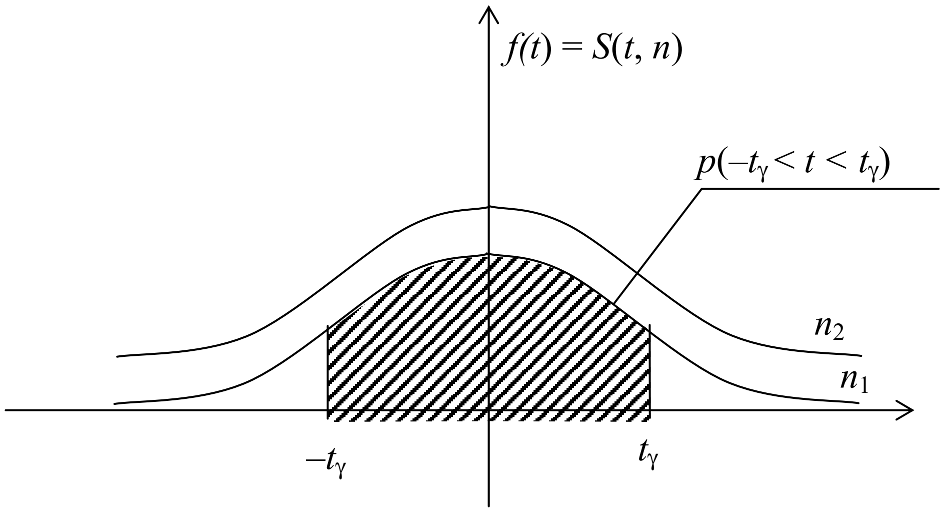


Рис. 1.6

Функция $S(t,n)$ – четная функция от t, поэтому вероятность осуществления неравенства $\left|\dfrac{\overline{x}_в - a}{\frac{S}{\sqrt{n}}}\right| < t_\gamma$ равна

$$P\left(\left|\frac{\overline{x}_в - a}{\frac{S}{\sqrt{n}}}\right| < t_\gamma\right) = 2\int\limits_0^{t_\gamma} S(t,n)\,dt = \gamma$$

или

$$P\left(\left|\overline{x}_в - a\right| < \frac{t_\gamma \cdot S}{\sqrt{n}}\right) = \gamma,$$

где t_γ – точность оценки.

Заменив неравенство, заключенное в круглых скобках, равносильным ему двойным неравенством, получим:

$$P\left(\overline{x}_{\text{в}} - \frac{t_\gamma \cdot S}{\sqrt{n}} < a < \overline{x}_{\text{в}} + \frac{t_\gamma \cdot S}{\sqrt{n}}\right) = \gamma,$$

где $t_\gamma = t(\gamma, n)$ находится по табл. П4.

Доверительный интервал для дисперсии нормально распределенной случайной величины X определяется с использованием так называемого χ^2-распределения с $n-1$ степенями свободы, плот-ность которого определяется формулой

$$k_{n-1}(v) = \begin{cases} \dfrac{1}{2^{\frac{n-1}{2}}\, \Gamma\left(\dfrac{n-1}{2}\right)} \cdot v^{\left(\frac{n-1}{2}-1\right)} \cdot e^{-\frac{v}{2}}, & \text{при } v > 0 \\ 0, & \text{при } v < 0 \end{cases}$$

$$\left(\Gamma(x) = \int_0^\infty u^{x-1} e^{-u} du; \quad \Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right) = \int_0^\infty u^{\frac{n-1}{2}} e^{-u} du \right).$$

Можно доказать, что случайная величина $\dfrac{(n-1)S^2}{\sigma^2}$ подчиняется приведенному χ^2-распределению, где $\sigma^2 = \dfrac{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \tilde{a})^2}{n-1}$ – несмещенная оценка дисперсии случайной величины.

Поэтому для заданной доверительной вероятности γ можно записать: $P\left(\chi_1^2 < \dfrac{(n-1)S^2}{\sigma^2} < \chi_2^2\right) = \gamma$ (графически (рис. 1.7) – это площадь под кривой распределения между χ_1^2 и χ_2^2).

Обычно χ_1^2 и χ_2^2 выбирают такими, чтобы вероятности событий $\chi^2 < \chi_1^2$ и $\chi^2 > \chi_2^2$ были одинаковы, то есть

$$P(\chi^2 < \chi_1^2) = P(\chi^2 > \chi_2^2) = \frac{1-\gamma}{2}.$$

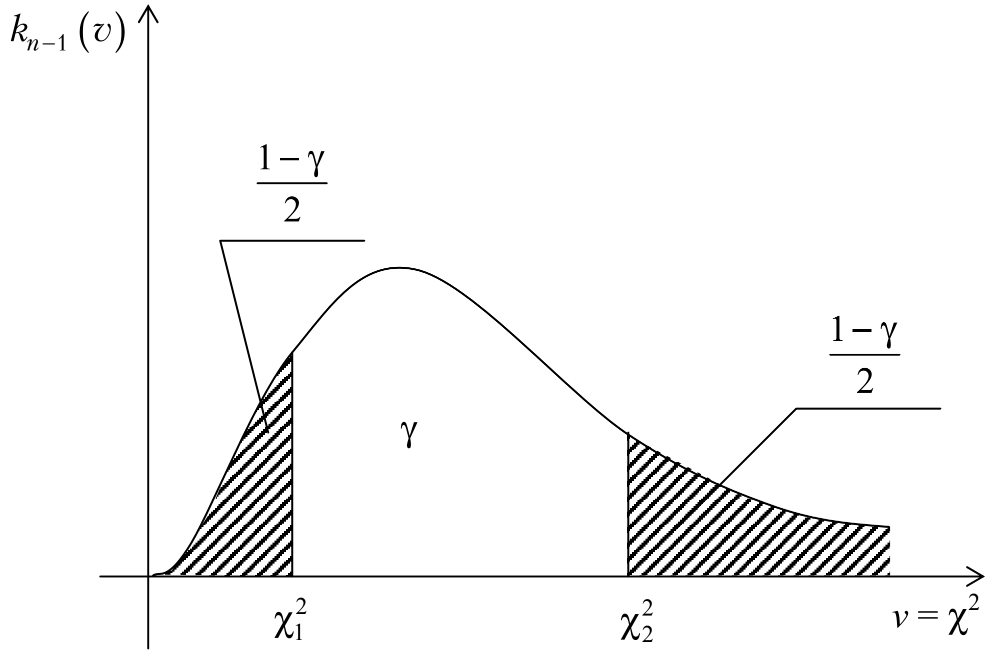


Рис. 1.7

Преобразовав двойное неравенство $\chi_1^2 < \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} < \chi_2^2$ к равносильному виду $\frac{(n-1)S^2}{\chi_1^2} < \sigma^2 < \frac{(n-1)S^2}{\chi_2^2}$, получим формулу доверительной вероятности для дисперсии:

$$P\left(\frac{(n-1)S^2}{\chi_1^2} < \sigma^2 < \frac{(n-1)S^2}{\chi_2^2}\right) = \gamma,$$

а для среднего квадратического отклонения:

$$P\left(\frac{\sqrt{n-1}\cdot S}{\chi_1} < \sigma < \frac{\sqrt{n-1}\cdot S}{\chi_2}\right) = \gamma.$$

Оценка вероятности по частоте. Пусть X – число появлений события A в n независимых опытах, X_i – число появлений события A в i-м опыте. X_i принимает два значения: 0, 1. Тогда $X = \sum_{i=1}^{n} X_i = M$ и по известной теореме $M[X] = np$.

Если в качестве оценки неизвестной вероятности p брать $p^* = \frac{M}{n}$, то:

– эта оценка по теореме Бернулли будет *состоятельной*;

– в силу $M\left[p^*\right]=\frac{1}{n}M\left[\sum_{i=1}^{n}X_i\right]=\frac{1}{n}np=p$ оценка $p*$ для p является *несмещенной*;

$$-D\left(p^*\right)=D\left[\frac{\sum_{i=1}^{n}X_i}{n}\right]=\frac{1}{n^2}D\left[\sum_{i=1}^{n}X_i\right]=\frac{1}{n^2}npq=\frac{pq}{n}$$

(можно показать, что $D\left(p^*\right)$ является минимально возможной, то есть оценка $p*$ для p является *эффективной).*

Таким образом, в качестве точечной оценки для неизвестной вероятности p целесообразно принимать частоту $p*$. Точность и надежность такой оценки можно производить построением доверительного интервала для вероятности p (это частный случай задачи о доверительном интервале для математического ожидания). Когда число опытов n сравнительно велико, а вероятность p не слишком велика и не слишком мала, можно считать, что частота события $p*$ есть случайная величина, распределение которой близко к нормальному (частота события при n опытах есть дискретная случайная величина и близость ее закона распределения к нормальному оценивается по виду функции распределения, а не плотности!).

П р и м е р 1. По результатам 10 наблюдений установлено, что средний темп роста акций предприятий отрасли равен 104,4 %. В предположении, что ошибки наблюдений распределены по нормальному закону со средним квадратическим отклонением 1 %, определить с надежностью 0,95 интервальную оценку для генеральной средней.

Решение. По условию n = 10, $\overline{x}_{\text{в}}=104{,}4\,\%$, σ = 1 %, γ = 0,95. Поскольку параметр σ известен, интервальную оценку найдем согласно формуле

$$P\left(\overline{x}_{\text{в}}-t\frac{\sigma}{\sqrt{n}}<a<\overline{x}_{\text{в}}+t\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)=2\Phi\left(t\right)=\gamma\,.$$

По таблице интегральной функции Лапласа Φ(t) из условия γ = 0,95 найдем t = 1,96.

Тогда точность оценки равна

$$\delta=t\frac{\sigma}{\sqrt{n}}=1{,}96\cdot\frac{1}{\sqrt{10}}=0{,}62\,.$$

Отсюда доверительный интервал имеет вид

$$104{,}4-0{,}62\le a\le 104{,}4+0{,}62$$

и окончательно

$$103{,}78 \le a \le 105{,}02.$$

Пример 2. Количественный признак X генеральной совокупности распределен нормально. По выборке объема 16 найдены выборочная средняя $\overline{x}_{\text{в}} = 20{,}2$ и исправленное среднее квадратическое отклонение $S = 0{,}8$. Оценить неизвестное математическое ожидание при помощи доверительного интервала с надежностью $\gamma = 0{,}95$.

Решение. Так как σ неизвестно, интервальную оценку генеральной средней a найдем по формуле

$$P\left(\overline{x}_{\text{в}} - \frac{t_\gamma \cdot S}{\sqrt{n}} < a < \overline{x}_{\text{в}} + \frac{t_\gamma \cdot S}{\sqrt{n}}\right) = \gamma.$$

Пользуясь табл. П4 по $\gamma = 0{,}95$ найдем $t_\gamma = 2{,}13$. Тогда точность оценки равна $\delta = \dfrac{t_\gamma \cdot S}{\sqrt{n}} = 2{,}13 \cdot \dfrac{0{,}8}{\sqrt{16}} = 0{,}426$.

Отсюда доверительный интервал имеет вид

$$19{,}774 \le a \le 20{,}626.$$

Пример 3. Высота стебля некоторого растения X – случайная величина, имеющая нормальное распределение. Сколько необходимо отобрать растений, чтобы $\overline{x}_{в}$ отличалось от a меньше чем на 2 см, если известно, что по результатам предыдущих измерений $\sigma = 6$ см. Результат найти с надежностью $\gamma = 0{,}95$.

Решение. Имеем $\gamma = 0{,}95$, $\Phi(t) = 0{,}475$, $t = 1{,}96$.

$$n = \frac{1{,}96^2 \cdot 6^2}{2^2} = 34{,}5744.$$

Таким образом, $n \ge 35$.

1.3. Проверка статистических гипотез

Статистическая проверка гипотез тесно связана с теорией оценивания параметров распределений. В экономике, технике, естествознании, медицине, демографии и т.д. часто для выяснения того или иного случайного явления прибегают к гипотезам (предположениям), которые можно проверить статистически, то есть опираясь на результаты наблюдений в случайной выборке.

Определение. **Статистической гипотезой** называется любое предположение о виде или параметрах неизвестного закона распределения.

Статистическую гипотезу, однозначно определяющую закон распределения, называют **простой**, в противном случае ее называют **сложной**. Например, гипотезы «вероятность появления события в схеме Бернулли равна 1/2», «закон распределения случайной величины нормальный с параметрами $a = 0$, $\sigma^2 = 1$« являются простыми, а гипотезы «вероятность появления события в схеме Бернулли заключена между 0,3 и 0,6», «закон распределения не является нормальным» – сложными.

Нулевой гипотезой H_0 называют выдвинутую гипотезу, которую необходимо проверить. **Конкурирующей** (альтернативной) гипотезой H_1 называют гипотезу, противоположную нулевой. *Нулевая и альтернативная гипотезы представляют собой две воз-можности выбора, осуществляемого в задачах проверки статис-тических гипотез.*

Правило, по которому гипотеза H_0 отвергается или принимается, называется **статистическим критерием**.

Возможны четыре случая принятия или непринятия гипотезы H_0.

Гипотеза H_0	Принимается	Отвергается
Верна	Правильное решение	Ошибка 1-го рода
Неверна	Ошибка 2-го рода	Правильное решение

Вероятность α допустить ошибку 1-го рода, то есть отвергнуть гипотезу H_0, когда она верна, называется **уровнем значимости критерия**. (вероятность $1-\alpha$ не допустить ошибку первого рода, то есть принять гипотезу H_0, когда она верна, иногда называют *оперативной характеристикой критерия.*

Вероятность допустить ошибку 2-го рода, то есть принять гипотезу H_0, когда она неверна, обычно обозначают β.

Вероятность $(1-\beta)$ не допустить ошибку 2-го рода, то есть отвергнуть гипотезу H_0, когда она неверна, называется **мощностью** (или функцией мощности) критерия.

Принцип проверки статистической гипотезы не дает логического доказательства ее верности или неверности. Принятие гипотезы H_0 в сравнении с альтернативной H_1 не означает, что мы уверены в абсолютной правильности H_0 или что высказанное в гипотезе H_0 утверждение является наилучшим, единственно подходящим; просто гипотеза H_0 не противоречит имеющимся выборочным данным. Таким же свойством наряду с H_0 могут обладать и другие гипотезы. Так что **принятие гипотезы H_0 следует расценивать не как раз и навсегда установленный, абсолютно**

верный содержащийся в ней факт, а лишь как достаточно правдоподобное, не противоречащее опыту утверждение.

Одной из важнейших задач математической статистики является установление теоретического закона распределения случайной веичины, характеризующей изучаемый признак по опытному (эмпири-ческому) распределению, представляющему вариационный ряд.

Для решения этой задачи необходимо определить вид и параметры закона распределения.

Как бы хорошо не был подобран теоретический закон распределения, между эмпирическим и теоретическим распределениями неизбежны расхождения. Естественно возникает вопрос: объясняются эти расхождения только случайными обстоятельствами, связанными с ограниченным числом наблюдений, или они являются существенными и связаны с тем, что теоретический закон распределения подобран неудачно. Для ответа на этот вопрос и служат **критерии согласия.**

Пусть необходимо проверить нулевую гипотезу H_0 о том, что исследуемая случайная величина X подчиняется определенному закону распределения. Для проверки гипотезы H_0 выбирают некоторую случайную величину U, характеризующую степень расхождения теоретического и эмпирического распределения, закон распределения которой при достаточно больших n известен и практически не зависит от закона распределения случайной величины X.

Зная закон распределения U, можно найти вероятность того, что U приняла значение не меньше, чем фактически наблюдаемое в опыте u, то есть $U \geq u$. Если $P(U \geq u = \alpha)$ мала, то это означает в соответствии с принципом практической уверенности, что такие, как в опыте, и большие отклонения практически невозможны. В этом случае гипотезу H_0 отвергают. Если же вероятность $P(U \geq u = \alpha)$ не мала, расхождение между эмпирическим и теоретическим распределениями несущественно, и гипотезу H_0 можно считать правдоподобной или, по крайней мере, не противоречащей опытным данным.

χ^2**-критерий Пирсона**. В наиболее часто используемом на практике критерии χ^2 Пирсона в качестве меры расхождения U берется величина χ^2, равная сумме квадратов отклонений частостей (статистических вероятностей) w_i от гипотетических p_i, рассчитанных по предполагаемому распределению, взятых в некоторыми весами c_i:

$$U = \chi^2 = \sum_{i=1}^{m} c_i \left(w_i - p_i \right)^2 .$$

Веса c_i вводятся таким образом, чтобы при одних и тех же отклонениях $\left(w_i - p_i\right)^2$ больший вес имели отклонения, при которых p_1 мала, и меньший вес – при которых p_i велика. Очевидно, этого удается достичь, если взять c_i обратно пропорционально вероятностям p_i. Взяв в качестве весов $c_i = \dfrac{n}{p_i}$, можно доказать, что при $n \to \infty$ статистика

$$U = \chi^2 = \sum_{i=1}^{m} \frac{n}{p_i}\left(w_i - p_i\right)^2$$

или

$$U = \chi^2 = \sum_{i=1}^{m} \frac{\left(w_i - p_i\right)^2}{np_i}$$

имеет χ^2-распределение с $k = m - r - 1$ степенями свободы, где m – число интервалов эмпирического распределения (вариационного ряда); r – число параметров теоретического распределения, вычисленных по экспериментальным данным.

Числа $n_i = nw_i$ и np_i называются соответственно *эмпирическими и теоретическими частотами.*

Для определения статистики χ^2 удобно составить таблицу вида

Интервал $\left[x_i, x_{i+1}\right]$	Эмпирические частоты n_i	Вероятности p_i	Теоретические частоты np_i	$\left(n_i - np_i\right)^2$	$\dfrac{\left(n_i - np_i\right)^2}{np_i}$
$\sum$					χ^2

Для выбранного уровня значимости α по таблице χ^2- распределения находят критическое значение χ^2 (α, k) при числе степеней свободы $k = m - r - 1$. Если фактически наблюдаемое значение χ^2 больше критического, то есть $\chi^2_{\text{набл}} > \chi^2_{\text{крит}}$, то гипотеза H_0 отвергается, если $\chi^2_{\text{набл}} \leq \chi^2_{\text{крит}}$, гипотеза H_0 не противоречит опытным данным.

П р и м е р 1. Результаты измерений отклонения X контролируемого размера изделия от номинала сведены в статистический ряд.

$[x_i, x_{i+1}]$	(–4;–3)	(–3;–2)	(–2;–1)	(–1;0)	(0;1)	(1;2)	(2;3)	(3;4)
n_i	6	23	72	133	120	88	46	10
W_i	0,012	0,050	0,144	0,266	0,240	0,176	0,092	0,020

Определим закон распределения X (I_i – интервалы значений ошибки в десятых долях мм; n_i– число наблюдений в данном интервале; W_i – относительные частоты).

Известно, что отклонения размеров изделий от номинала при постоянной технологии их изготовления, как правило, подчиняются нормальному закону распределения. Поэтому в качестве гипотетического распределения примем нормальное.

Нормальный закон определяется значениями a и σ. Выберем эти параметры так, чтобы выполнялись условия:

$$a = \overline{x}_в; \quad \sigma^2 = S^2 = \frac{n}{n-1} D_в,$$

где $\overline{x}_в = \sum_{i=1}^{m} x_i W_i$ – выборочная средняя (за представителя каждого разряда примем его середину $\tilde{x}_i$);

$D_в = \sum_{i=1}^{m} \left(x_i - \overline{x}_в\right)^2 W_i$ – выборочная дисперсия;

S^2 – исправленная выборочная дисперсия.

Имеем:

$$\overline{x}_в = -3,5 \cdot 0,012 - 2,5 \cdot 0,050 - 1,5 \cdot 0,144 - 0,5 \cdot 0,266 + 0,5 \cdot 0,240 + \\ +1,5 \cdot 0,176 + 2,5 \cdot 0,092 + 3,5 \cdot 0,020 = 0,168;$$

$$D_в = \sum_{i=1}^{m} x_i^2 W_i - \overline{x}_в^2 =$$

$$= (-3,5)^2 \cdot 0,012 + \left(-2,5\right)^2 \cdot 0,050 + \left(-1,5\right)^2 \cdot 0,144 + \left(-0,5\right)^2 \cdot 0,266 + \\ +0,5^2 \cdot 0,240 + 1,5^2 \cdot 0,176 + +2,5^2 \cdot 0,092 + 3,5^2 \cdot 0,020 - 0,168^2 = 2,098;$$

$$S^2 = \frac{500}{499} 2,098 = 2,102;$$

$$\sigma = \sqrt{2,102} = 1,450.$$

Таким образом, гипотетический нормальный закон имеет вид

$$f\left(x\right) = \frac{1}{1,448\sqrt{2\pi}} e^{-\left(x-0,168\right)^2/2\cdot 1,450^2}.$$

С целью проверки согласованности теоретического и статистического распределений используем χ^2-критерий К.Пирсона.

Определим теоретические вероятности попадания X в разряды

$$P_i = \Phi\left(\frac{x_{i+1}-a}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{x_i - a}{\sigma}\right),$$

где x_i, x_{i+1} – границы i-го разряда:

$$P_1 = \Phi\left(\frac{-3-0,168}{1,450}\right) - \Phi\left(\frac{-4-0,168}{1,450}\right) = \Phi(-2,185) - \Phi(-2,874) =$$
$$= -0,4856 + 0,4979 = 0,0123;$$

$$P_2 = \Phi\left(\frac{-2-0,168}{1,450}\right) - \Phi\left(\frac{-3-0,168}{1,450}\right) = \Phi(-1,495) - \Phi(-2,185) =$$
$$= -0,4325 + 0,4856 = 0,0531;$$

$$P_3 = \Phi\left(\frac{-1-0,168}{1,450}\right) - \Phi\left(\frac{-2-0,168}{1,450}\right) = \Phi(-0,805) - \Phi(-1,495) =$$
$$= -0,2890 + 0,4325 = 0,1435;$$

$$P_4 = \Phi\left(\frac{0-0,168}{1,450}\right) - \Phi\left(\frac{-1-0,168}{1,450}\right) = \Phi(-0,116) - \Phi(-0,805) =$$
$$= -0,0458 + 0,2890 = 0,2432;$$

$$P_5 = \Phi\left(\frac{1-0,168}{1,450}\right) - \Phi\left(\frac{0-0,168}{1,450}\right) = \Phi(0,574) - \Phi(-0,116) =$$
$$= 0,2172 + 0,0458 = 0,2630;$$

$$P_6 = \Phi\left(\frac{2-0,168}{1,450}\right) - \Phi\left(\frac{1-0,168}{1,450}\right) = \Phi(1,263) - \Phi(0,574) =$$
$$= 0,3938 + 0,2172 = 0,1766;$$

$$P_7 = \Phi\left(\frac{3-0,168}{1,450}\right) - \Phi\left(\frac{2-0,168}{1,450}\right) = \Phi(1,953) - \Phi(1,263) =$$
$$= 0,4744 + 0,3938 = 0,0806;$$

$$P_8 = \Phi\left(\frac{4-0,168}{1,450}\right) - \Phi\left(\frac{3-0,168}{1,450}\right) = \Phi(2,643) - \Phi(1,953) =$$
$$= 0,4959 + 0,4744 = 0,0215.$$

Результаты занесем в таблицу

Интервал $[x_i, x_{i+1}]$	Эмпирические частоты n_i	Вероятности p_i	Теоретические частоты np_i	$(n_i - np_i)^2$	$\frac{(n_i - np_i)^2}{np_i}$
(–4; –3)	6	0,0123	6,15	0,0225	0,004
(–3; –2)	23	0,0531	26,50	12,2500	0,462
(–2; –1)	72	0,1435	71,75	0,0625	0,001
(–1; 0)	133	0,2432	121,60	129,96	1,069
(0; 1)	120	0,2630	131,50	132,25	1,006
(1; 2)	88	0,1766	88,30	0,09	0,001
(2; 3)	46	0,0806	40,30	32,49	0,806
(3; 4)	10	0,0215	10,75	0,5625	0,052
$\sum$	500	0,9938	496		$\chi^2_{\text{набл}}=3{,}401$

Для $r = 8 - 3 = 5$ и $\alpha = 0{,}05$ найдем $\chi^2_{\text{табл}} = 11{,}07$ (табл. П5).

Так как $\chi^2_{\text{набл}} < \chi^2_{\text{табл}}$, гипотезу о том, что X распределена по нормальному закону, можно считать правдоподобной.

Имеется и ряд других критериев, в частности **критерий Колмогорова**, в котором в качестве меры расхождения между теоретическим и эмпирическим распределениями рассматривают максимальное значение абсолютной величины разности между эмпирической функцией распределения $F^*(x)$ и соответствующей теоретической функцией распределения

$$D = \max\left|F^*(x) - F(x)\right|,$$

называемое статистикой критерия Колмогорова.

Схема применения критерия Колмогорова следующая:

1. Строятся эмпирическая функция распределения $F^*(x)$ и предполагаемая теоретическая функция распределения $F(x)$.

2. Определяется мера расхождения между теоретическим и эмпирическим распределением D и вычисляется величина $\lambda = D\sqrt{n}$.

3. Если вычисленное значение λ окажется больше критического λ_α, определенного на уровне значимости α, то нулевая гипотеза H_0 о том, что случайная величина X имеет заданный закон распределения, отвергается. Если $\lambda \le \lambda_\alpha$, то считают, что гипотеза H_0 не противоречит опытным данным.

Контрольные вопросы

1. Статистическая оценка неизвестного параметра распределения.
2. Несмещенная, смещенная, состоятельная и эффективная оценки неизвестного параметра.
3. Точечная и интервальная оценки.
4. Доверительный интервал и доверительная вероятность оценки.
5. Простая и сложная статистические гипотезы.
6. Нулевая и конкурирующая гипотезы.
7. Статистический критерий. Уровень значимости и мощность критерия.
8. Критерии согласия. Критерий Пирсона.

2. УРАВНЕНИЯ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

Дифференциальным уравнением с частными производными называется дифференциальное уравнение, содержащее, кроме независимых переменных и искомой функции, частные производные этой функции.

Наивысший порядок входящих в уравнение частных производных называется порядком дифференциального уравнения.

Для *математической физики* наиболее важны и лучше всего изучены уравнения второго порядка. В случае двух независимых переменных уравнение второго порядка может быть записано в следующей форме:

$$F(x,y,u,\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial y},\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},\frac{\partial^2 u}{\partial y^2},\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y})=0. \qquad (2.1)$$

Уравнение называется линейным, если оно линейно относительно искомой функции и всех ее производных. Линейное уравнение 2-го порядка с двумя независимыми переменными имеет следующий общий вид:

$$\begin{aligned} &A(x,y)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+2B(x,y)\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+C(x,y)\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\\ &+a(x,y)\frac{\partial u}{\partial x}+b(x,y)\frac{\partial u}{\partial y}+c(x,y)u=f(x,y), \end{aligned} \qquad (2.2)$$

где $A(x,y),B(x,y),\ldots,C(x,y),u=f(x,y)$ – некоторые заданные функции переменных x,y.

Если $f(x,y)=0$, то уравнение (2.2) называется *однородным*, в противном случае – *неоднородным*.

Уравнение, линейной относительно старших производных, в случае двух независимых переменных имеет следующий вид:

$$A(x,y)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+2B(x,y)\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+C(x,y)\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\Phi(x,y,u,\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial y}). \qquad (2.3)$$

Если коэффициенты *A*, *B* и *C* зависят не только от *x* и *y*, но и от $u,\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial y}$,

то уравнение называется *квазилинейным*. Линейное уравнение является частным случаем квазилинейного.

Линейной уравнение второго порядка от *n* независимых переменных может быть записано в следующей общей форме:

$$\sum_{i,j=1}^{n} A_{ij}\frac{\partial^2 u}{\partial x_i\partial x_i}+\sum_{i=1}^{n} B_i\frac{\partial u}{\partial x_i}+Cu=f, A_{ij}=A_{ij}, \qquad (2.4)$$

где A_{ij}, B_i, C, f – заданные функции от независимых переменных.

Функция u, заданная в некоторой области D изменения независимых переменных, называется решением или интегралом данного уравнения в области D, если в этой области функция u имеет непрерывные частные производные до порядка m включительно и при подстановке m-го уравнение порядка обращает его в тождество.

Рассмотрим линейное уравнение порядка m с n независимыми переменными, которые обозначим через $x_1, x_2, ..., x_n$. Неизвестную функцию обозначим, как и выше, через u. Перенеся известные слагаемые направо, а известные – налево, приведем данное уравнение к виду

$$L[u] = f(x_1.x_2, ..., x_m). \tag{2.5}$$

Если $f = 0$, то уравнение окажется однородным и примет вид

$$L[u] = 0. \tag{2.6}$$

Иногда скобки опускают и пишут просто Lu. Символ $L[u]$ называется линейным дифференциальным оператором от функции u.

Линейные дифференциальные операторы обладают следующими двумя свойства:

$$L[cu] = cL[u]; \tag{2.7}$$

$$L[u_1 + u_2] = L[u_1] + L[u_2]. \tag{2.8}$$

Отсюда вытекает справедливость приведенных ниже свойств.

А. *Для однородных уравнений*:

1) если u – решение, а c – постоянная, то cu также есть решение;

2) если u_1 и u_2 – решения, то $u_1 + u_2$ также есть решение.

Второе свойство распространяется на сумму с произвольным конечным числом слагаемых.

Если имеется бесконечная последовательность решений $\{u_n\}$, то ряд

$$\sum_{n=1}^{x} u_n,$$

независимо от его сходимости называется, называется *формальным решением.*

Б. *Для неоднородных уравнений*:

1) если u и есть решение неоднородного уравнения, а u есть решение соответствующего однородного уравнения, то $u + v$ есть решение неоднородного уравнения;

2) если u_1 есть решение неоднородного уравнения с правой частью f_1, а u_2 есть решение неоднородного уравнения с правой частью f_2, то $u_1 + u_2$

есть решение уравнения с правой частью $f_1 + f_2$. Последнее свойство распространяется и на сумму любого конечного числа слагаемых.

Рассмотрим линейный дифференциальный оператор второго порядка

$$L[u] \equiv \sum_{i,j=1}^{n} A_{ij} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial y_j} + \sum_{i=1}^{n} B_i \frac{\partial u}{\partial x_i} + Cu. \tag{2.9}$$

Пусть в некоторой области D коэффициент C непрерывен, коэффициенты B_i непрерывно дифференцируемы, а коэффициенты A_{ij}, так же как и функция u, дважды непрерывно дифференцируемы.

Оператор

$$M[v] \equiv \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 (A_{ij} v)}{\partial x_i \partial x_j} - \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial (B_i v)}{\partial x_i} + Cv \tag{2.10}$$

называют *сопряженным* (часто – *сопряженным по Лагранжу*) к оператору L. Для оператора M сопряженным будет первоначальный оператор L.

Если оператор L совпадает с оператором M, то он называется *самосопряженным*.

Самосопряженный оператор можно привести к виду

$$L[u] \equiv \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(A_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_j} \right) + Cu$$

Справедлива формула

$$vL[u] - uM[v] = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial P_i}{\partial x_i}, \tag{2.11}$$

где

$$P_i = \sum_{i=1}^{n} \left(vA_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_j} - u \frac{\partial (A_{ij} v)}{\partial x_j} \right) + B_i uv, \ i = \overline{1,n}. \tag{2.12}$$

Преобразуем уравнение (2.3), введя новые независимые переменные:

$$\xi = \varphi_1(x, y), \eta = \varphi_2(x, y) \tag{2.13}$$

Предположим, что во всей рассматриваемой области переменных x и y якобиан преобразования не обращается в нуль, т.е.

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial \xi}{\partial x} & \frac{\partial \xi}{\partial y} \\ \frac{\partial \eta}{\partial x} & \frac{\partial \eta}{\partial y} \end{vmatrix} \neq 0.$$

Такое преобразование приводит к следующему уравнению:

$$\overline{A}(\xi,\eta)\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} - 2\overline{B}(\xi,\eta)\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + C(\xi,\eta)\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} = \Phi\left(\xi,\eta,u,\frac{\partial u}{\partial \xi},\frac{\partial u}{\partial \eta}\right), \qquad (2.14)$$

где

$$\overline{A} = A\left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\right)^2 + 2B\frac{\partial \xi}{\partial x}\frac{\partial \xi}{\partial y} + C\left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\right)^2;$$

$$\overline{B} = A\frac{\partial \xi}{\partial x}\frac{\partial \eta}{\partial x} - 2B\left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial \eta}{\partial x}\frac{\partial \xi}{\partial y}\right) + C\frac{\partial \xi}{\partial y}\frac{\partial \eta}{\partial y}; \qquad (2.15)$$

$$\overline{C} = A\left(\frac{\partial \eta}{\partial x}\right)^2 + 2B\frac{\partial \eta}{\partial x}\frac{\partial \eta}{\partial y} + C\left(\frac{\partial \eta}{\partial x}\right)^2$$

Введем $\delta = B^2 - AC$. Будем говорить, что линейное уравнение второго порядка с двумя независимыми переменными принадлежит в данной точку (x,y) к *гиперболическому, параболическому или эллиптическому типу*, если в этой точку соответственно $\delta > 0, \delta = 0, \delta < 0.$ Уравнение принадлежит к тому или иному типу в данной области плоскости (x,y), если оно принадлежит к этому типу в каждой точке рассматриваемой области. Будем считать, что в интересующей области тип уравнения сохраняется.

Тип уравнения не меняется при любых преобразованиях переменных, при которых якобиан не обращается в нуль.

Рассмотрим канонические формы уравнений *гиперболического типа.* Выберем новые переменные ξ и η так, чтобы в уравнении (2.14) коэффициенты $\overline{A}$ и $\overline{C}$ обратились в нуль.

Из первого и третьего равенств (2.15) очевидно, что ξ и η должны удовлетворять уравнению

$$A\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)^2 + 2B\frac{\partial \varphi}{\partial x}\frac{\partial \varphi}{\partial y} + C\left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)^2 = 0, \qquad (2.16)$$

которое распадается на два вида:

$$A\frac{\partial \varphi_1}{\partial x} + \left(B + \sqrt{B^2 - AC}\right)\frac{\partial \varphi_1}{\partial y} = 0,$$
$$A\frac{\partial \varphi_2}{\partial x} + \left(B + \sqrt{B^2 - AC}\right)\frac{\partial \varphi_2}{\partial y} = 0. \qquad (2.17)$$

Решения этих уравнений определяются интегралами обыкновенных дифференциальных уравнений, называемых *характеристическими*:

$$Ady - \left(B + \sqrt{B^2 - AC}\right)dx = 0;$$

$$Ady - (B - \sqrt{B^2 - AC})dx = 0. \qquad (2.18)$$

Оба характеристических уравнения можно объединить в одно:

$$A(dy)^2 - 2Bdxdy + C(dx)^2 = 0. \qquad (2.19)$$

Решения уравнения (18) запишется в следующем виде:

$$\varphi_1(x,y) = \text{const}, \ \varphi_2(x,y) = \text{const} \qquad (2.20)$$

и примем

$$\xi = \varphi_1(x,y), \eta = \varphi_2(x,y). \qquad (2.21)$$

Если $\delta \neq 0$, то якобиан преобразования (2.21) отличен от нуля. Интегральные кривые $\varphi_1(x,y) = C$ и $\varphi_2(x,y) = C$ называются *характеристиками* рассматриваемого уравнения в частных производных. Уравнения *гиперболического типа* имеют два семейства различных и действительных характеристик.

Возвращаясь к уравнению (2.15), в котором теперь $\overline{A} = \overline{C} = 0$, и деля его почленно на $2\overline{B}$, приведем уравнение (2.15) к следующей форме:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta} = \Phi_1\left(\xi,\eta,u,\frac{\partial u}{\partial\xi},\frac{\partial u}{\partial\eta}\right), \qquad (2.22)$$

называемой *первой канонической формой*.

Если функция Φ_1 линейна, то и $\overline{\Phi}_1$ будет линейна, и уравнение (2.22) может быть записано в следующем виде:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta} + a\frac{\partial u}{\partial\xi} + b\frac{\partial u}{\partial\eta} + cu = f(\xi,\eta). \qquad (2.23)$$

В случае постоянных коэффициентов a,b,c можно еще больше упростить это уравнение, введя вместо u новую неизвестную v, определенную равенством

$$u = e^{-(b\xi + a\eta)}v.$$

Тогда для v получим уравнение

$$\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta} + c_1 v = fe^{(a\xi + b\eta)}v,$$

где

$$c_1 = c - ab, \ f_1(\xi,\eta) = fe^{(a\xi - b\eta)}v.$$

Введя новые независимые переменные

$$a=\xi+\eta, \beta=\xi-\eta, \qquad (2.24)$$

получим вторую *каноническую форму уравнения* (2.15):

$$\frac{\partial^2 u}{\partial\alpha^2}-\frac{\partial^2 u}{\partial\beta^2}=\Phi_2\left(\alpha,\beta,u,\frac{\partial u}{\partial\alpha},\frac{\partial u}{\partial\beta}\right). \qquad (2.25)$$

Эта форма характеризуются отсутствием смешанной производной. Если $\Phi_2\equiv 0$, то получается так называемое *волновое уравнение* с двумя независимыми переменными:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial\alpha^2}-\frac{\partial^2 u}{\partial\beta^2}=0.$$

К этому уравнению приводит, например, исследование *колебаний однородной струны.*

Для уравнения *параболического типа* $\delta=0$ и оба семейства характеристик сливаются. Положим в этом случае

$$\xi=\phi(x,y), \eta=\eta(x,y),$$

где $\varphi(x,y)$ – интеграл уравнения (2.17);

$\eta(x,y)$ – любая функция от x,y, независящая от $\varphi(x,y)$, например, $\eta=y$.

В этом случае $\bar{A}=0$, так как

$$B=\left(\sqrt{A}\frac{\partial\xi}{\partial x}+\sqrt{C}\frac{\partial\xi}{\partial y}\right)\left(\sqrt{A}\frac{\partial\eta}{\partial x}+\sqrt{C}\frac{\partial\eta}{\partial y}\right)=0.$$

Разделив уравнение (2.15) на $\bar{C}$, получим каноническую форму параболического уравнения:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial\eta^2}=\Phi_1\left(\xi,\eta,u,\frac{\partial u}{\partial\xi},\frac{\partial u}{\partial\eta}\right). \qquad (2.26)$$

Если $\bar{\Phi}_1$ не зависит от ξ и $\dfrac{\partial u}{\partial\xi}$, то получим обыкновенное дифференциальное уравнение, в котором ξ является параметром.

В линейном случае уравнение (2.17) имеет вил

$$\frac{\partial^2 u}{\partial\eta^2}=a\frac{\partial u}{\partial\xi}+b\frac{\partial u}{\partial\eta}+cu+f,$$

где a,b,c и f – известные функции от ξ и η.

Дальнейшее упрощение этого уравнения достигается подстановкой

$$u = ve^{\frac{1}{2}\int b(\xi,\eta)d\eta}.$$

Для v получим уравнение

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} = a\frac{\partial \upsilon}{\partial \xi} + c_1 + f_1, \tag{2.27}$$

где

$$c_1 = \frac{1}{4}b^2 + c + \frac{a}{2}\int \frac{\partial b}{\partial \xi}\partial\eta - \frac{1}{2}\frac{\partial b}{\partial \eta}, f_1 = fe^{-\frac{1}{2}\int b(\xi,\eta)d\eta}.$$

При постоянном $a > 0$ и $c_1 = 0$ получим так называемое *уравнение теплопроводности.*

В случае уравнения *эллиптического типа* уравнение (2.15) приводится к следующей канонической форме:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} = \Phi_1\left(\xi, \eta, u, \frac{\partial u}{\partial \xi}, \frac{\partial u}{\partial \eta}\right). \tag{2.28}$$

Если $\Phi_1 \equiv 0$, получается уравнение

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} = 0, \tag{2.29}$$

называемое *уравнением Лапласа.*

В подавляющем большинстве задач математической физики требуется найти решение уравнений, удовлетворяющее некоторым дополнительным данным. Эти дополнительные условия весьма различны по характеру и зависят от постановки физической задачи, приводящей к данным уравнениям.

При всем разнообразии видов дополнительных условий они чаще всего таковы: некоторые производные от искомого решения (часто и само решение) должны принимать заданные значения на заданных поверхностях (линиях в случае двух независимых переменных). Такие дополнительные условия обычно называются *краевыми.* Задача интегрирования дифференциального уравнения при заданных краевых условиях называется *краевой задачей*.

Одной из важнейших краевых задач математической физики является *задача Коши*.

Пусть в плоскости *XOY* задана некоторая кривая L_0, точки которой будем обозначать (x_0, y_0), и параметрические уравнения этой кривой будут

$$x_0 = x_0(s), y_0 = y_0(s). \tag{2.30}$$

Можно считать, что s есть длина дуги кривой, отсчитываемая от некоторой начальной точки. Кривую L_0 предположим гладкой, так что функция $x_0(s)$ и $y_0(s)$ непрерывно дифференцируемы.

Пусть вдоль кривой заданы некоторые функции *f(s)* и *g(s). Задача Коши для уравнения* (2.3) состоит в следующем: в окрестностях кривой L_0 требуется найти интеграл этого уравнения *u(x,y),* удовлетворяющий *условиям Коши*:

$$u\Big|_{L_0} = f(s)\ ,\ \frac{\partial u}{\partial l}\Big|_{L_0} = g(s), \tag{2.31}$$

где l – данное направление, вообще говоря, свое в каждой точке кривой L_0 и ни в одной точке не касательное к этой кривой.

Функции *f(s)* и *g(s)* называются *данными Коши*.

Краевая задача называется корректной, если существует одно и только одно решение уравнения, удовлетворяющее заданным краевым условиям, и если малым изменениям данных функций, входящих в краевые условия, соответствуют малые изменения решения (иначе говоря, если *решение непрерывно зависит от краевых данных*). Последнее требование необходимо для того, чтобы теоретические результаты, полученные решением краевой задачи, можно было использовать *в практических приложениях*, в которых краевые данные на самом деле известны лишь с точностью, которую могут обеспечить *измерительные* приборы. В случае корректной задачи возможные погрешности в определении краевых условий не обесценивают найденные решения, приводя лишь к незначительным количественным отклонениям теоретического решения от экспериментальных результатов.

Условия существования и единственности решения определяются теоремой Коши-Ковалевской.

2.1. Уравнения параболического типа

2.1.1. Распространение тепла в пространстве

Рассмотрим процесс распространения тепла в трехмерном пространстве. Пусть $U(x,y,z,t)$ – температура в точке с координатами (x,y,z) в момент *t*. Известно, что количество тепла, протекающего за единицу времени через площадку ΔS, определяется в виде

$$\Delta Q = -k\frac{\partial u}{\partial \overline{n}}\Delta s, \tag{2.32}$$

где k – коэффициент теплопроводности рассматриваемой среды (которая предполагается однородной и изотопной);

$\overline{n}$ – единичный вектор, направленный по нормали вектора площадке ΔS в направлении движения тепла.

Для производной по направлению вектора $\overline{n}$ справедливо

$$\frac{\partial u}{\partial n} = \frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial u}{\partial n}\cos\gamma,$$

где $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ – направляющие косинусы вектора $\overline{n}$, или

$$\frac{\partial u}{\partial n} = (\overline{n}, \overline{\text{grad}\, u}).$$

Отсюда получим

$$\Delta Q = -k(\overline{n}, \overline{\text{grad}\, u})\Delta S.$$

Количество тепла, протекающего за время Δt через площадку ΔS, будет равно: $\Delta Q \Delta t = -k(\overline{n}, \overline{\text{grad}\, u})\Delta t \Delta S$.

В рассматриваемой среде выделим малый объем *V*, ограниченный поверхность *s*. Количество тепла, протекающего через поверхность *s*, будет равно:

$$Q = -\Delta t \iint_s k(\overline{n}, \overline{\text{grad}\, u})ds \tag{2.33}$$

где $\overline{n}$ – единичный вектор, направленный по внешней нормали к поверхности s.

Формула (2.33) определяет количество тепла, поступающего в объем *V* (или уходящего из объема *V*) за время Δt. (Количество тепла, поступающего в объем *V*, идет на повышение температуры вещества этого объема).

Рассмотрим элементарный объем Δv. Пусть за время Δt его температура поднялась на Δu. Количество тепла, затраченное на повышение температуры элемента Δv, равно:

$$c\Delta v\rho\Delta u \approx c\Delta v\rho\frac{\partial u}{\partial t}\Delta t,$$

где c – теплоемкость вещества;

ρ – плотность.

Тогда общее количество тепла, затраченное на повышение температуры в объеме *V* за время Δt, будет

$$\Delta t \iiint_V c\rho\frac{\partial u}{\partial t}dv.$$

В силу предыдущего должны иметь

$$\Delta t \iint_s k(\overline{n}, \overline{\text{grad}\, u})ds = \Delta t \iiint_V c\rho\frac{\partial u}{\partial t}dv.$$

Откуда

$$\iint_s k(\overline{n}, \overline{\text{grad}\, u})ds = \iiint_V c\rho \frac{\partial u}{\partial t} dv .$$

По формуле Остроградского получим

$$\iint_s (k\overline{\text{grad}\, u}, \overline{n})ds = \iiint_V di\upsilon(k\overline{\text{grad}\, u})dv .$$

Заменяя двойной интеграл, стоящий в левой части равенства (2.33), тройным интегралом, имеем:

$$\iiint_V di\upsilon(k\overline{\text{grad}u})dv = \iiint_V c\rho \frac{\partial u}{\partial t} dv$$

или

$$\iiint_V \left[di\upsilon(k\overline{\text{grad}u}) - c\rho \frac{\partial u}{\partial t} \right] dv = 0 . \qquad (2.34)$$

По теореме о среднем для тройного интеграла

$$\left[di\upsilon(k\overline{\text{grad}\, u}) - c\rho \frac{\partial u}{\partial t} \right]_{x=x_1, y=y_1, z=z_1} = 0 , \qquad (2.35)$$

где точка *P(x,y,z)* – некоторая точка объема *V*.

Так как *V* выражается произвольно в трехмерном пространстве, где происходит распространение тепла, и так как предполагается, что подынтегральная функция в равенстве (2.34) непрерывна, то равенство (2.35) будет выполняться в каждой точке пространства

$$c\rho \frac{\partial u}{\partial t} = di\upsilon(k\overline{\text{grad}\, u}) . \qquad (2.36)$$

В силу

$$k\overline{\text{grad}\, u} = k\frac{\partial u}{\partial x}\overline{i} + k\frac{\partial u}{\partial y}\overline{j} + k\frac{\partial u}{\partial z}\overline{k}$$

имеем

$$c\rho \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(k\frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(k\frac{\partial u}{\partial y} \right) - \frac{\partial}{\partial z}\left(k\frac{\partial u}{\partial z} \right). \qquad (2.37)$$

Если k – постоянное, то

$$di\upsilon\left(k\overline{\text{grad}\, u}\right) = kdi\upsilon\left(\overline{\text{grad}\, u}\right) = k\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right).$$

И уравнение (2.36) примет вид

$$c\rho\frac{\partial u}{\partial t}=k\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)$$

или, положив $\frac{k}{c\rho}=a^2$, получим

$$\frac{\partial u}{\partial t}=a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right). \tag{2.38}$$

Часто уравнение (2.38) записывают в виде

$$\frac{\partial u}{\partial t}=a^2\Delta u,$$

где $\Delta u=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$ – оператор Лапласа.

Уравнение (2.38) и есть *уравнение теплопроводности в пространстве*.

Пусть поверхность тела Ω равна σ. Пусть далее температура тела задана при $t=0$

$$u(x,y,z,0)=\varphi(x,y,z) \tag{2.39}$$

(начальное условие).

При известной температуре в любой точке M поверхности σ тела в любой момент времени

$$u(M,t)=\psi(M,t) \tag{2.40}$$

(граничные условия).

Если искомая функция $u(x,y,z,t)$ не зависит от *z*, то получим уравнение

$$\frac{\partial u}{\partial t}=a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right). \tag{2.41}$$

Это *уравнение распространения тепла на плоскости*.

Если же функция *u* не зависит ни от *z*, ни от *y*, то получим уравнение

$$\frac{\partial u}{\partial t}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}. \tag{2.42}$$

Это *уравнение распространение тепла в стержне.*

2.1.2. Распространение тепла в неограниченном стержне

Пусть в начальный момент задана температура в различных сечениях неограниченного стержня. Требуется определить распределение температуры в стержне в последующие моменты времени. (К задаче распространения тепла в неограниченном стержне сводятся физические задачи в этом случае, когда стержень столь длинный, что температура во внутренних точках стержня в рассматриваемые моменты времени мало зависит от условий на концах стержня).

Пусть стержень совпадает с осью OX и требуется найти решение уравнения (2.42) области $-\infty<x<\infty$, удовлетворяющее начальному условию

$$u(x,0)=\varphi(x). \tag{2.43}$$

Воспользуемся *методом разделения переменных*, а именно, будем искать частное решение уравнения (2.42) в виде произведения двух функций:

$$u(x,t)=X(x)T(t). \tag{2.44}$$

Имеем

$$\frac{T'}{a^2T}=\frac{X''}{X}=-\lambda^2. \tag{2.45}$$

Откуда

$$T'+a^2\lambda^2X=0. \tag{2.46}$$

$$X''+\lambda^2X=0. \tag{2.47}$$

Решая их, найдем:

$$T=Ce^{-a^2\lambda^2t},$$

$$X=A\cos\lambda x+B\sin\lambda x.$$

Подставляя X,T в (2.44) для каждого λ, получим:

$$u_\lambda(x,t)=e^{-a^2\lambda^2t}\left[A(\lambda)\cos\lambda x+B(\lambda)\sin\lambda x\right]. \tag{2.48}$$

Здесь A и B – функции от λ.

В силу линейности уравнения (2.42) сумма решений вида (2.48)

$$\sum_\lambda e^{-a^2\lambda^2t}\left[A(\lambda)\cos\lambda x+B(\lambda)\sin\lambda x\right]$$

также является решением.

Интегрируя (2.48) по параметру λ в пределах от 0 до ∞, также получим решение

$$u_\lambda(x,t)=\int\limits_0^\infty e^{-a^2\lambda^2 t}\left[A(\lambda)\cos\lambda x+B(\lambda)\cos\lambda x\right]d\lambda. \qquad (2.49)$$

$A(\lambda)$ и $B(\lambda)$ предполагаются такими, что этот интеграл, его производная по t и вторая производная по x существуют и получаются путем дифференцирования интеграла по t и x. Подберем $A(\lambda)$ и $B(\lambda)$ так, чтобы решение $u(x,t)$ удовлетворяло условию (2.43). Полагая в равенстве (2.49) $t = 0$, на основании условия (2.43) получим:

$$u_\lambda(x,t)=\varphi(x)=\int\limits_0^\infty\left[A(\lambda)\cos\lambda x+B(\lambda)\sin\lambda x\right]d\lambda \qquad (2.50)$$

Предположим, что функция $\varphi(x)$ такова, что ее можно представить интегралом Фурье

$$\varphi(x)=\frac{1}{\pi}\int\limits_0^\infty\left(\int\limits_{-\infty}^{x}\varphi(\alpha)\cos\lambda(\alpha-x)\,dx\right)d\lambda,$$

который можно привести к виду

$$\varphi(x)=\int\limits_0^x\left\{\left(\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\varphi(\alpha)\cos\lambda\alpha\,d\alpha\right)\cos\lambda x+\left(\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\varphi(\alpha)\sin\lambda\alpha\,d\alpha\right)\sin\lambda x\right\}d\lambda. \qquad (2.51)$$

Сравнивая первые части (2.50) и (2.51), получим:

$$A(\lambda)=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\varphi(\alpha)\cos\lambda\alpha\,d\alpha,\quad B(\lambda)=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\varphi(\alpha)\sin\lambda\alpha\,d\alpha. \qquad (2.52)$$

Подставляя найденные выражения $A(\lambda)$ и $B(\lambda)$ в формулу (2.49), получим:

$$u_\lambda(x,t)=\frac{1}{\pi}\int\limits_0^\infty e^{-\alpha^2\lambda^2 t}\left[\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left(\varphi(\alpha)\cos\lambda\alpha\,d\alpha\right)\cos\lambda x+\left(\int\limits_{-\infty}^{\infty}\varphi(\alpha)\sin\lambda\alpha\,d\alpha\right)\sin\lambda x\right]d\lambda=$$

$$=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}e^{-\alpha^2\lambda^2 t}\left[\int\limits_{-\infty}^{\infty}\varphi(\alpha)\left(\cos\lambda\alpha\cos\lambda x+\sin\lambda\alpha\sin\lambda x\right)d\alpha\right]d\lambda=$$

$$=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}e^{-\alpha^2\lambda^2 t}\left[\int\limits_{-\infty}^{\infty}\varphi(\alpha)\cos\lambda(\alpha-x)\,d\alpha\right]d\lambda.$$

Или, изменив порядок интегрирования, окончательно получим:

$$u(x,t)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left[\varphi(\alpha)\left(\int_{0}^{\infty}e^{-\alpha^2\lambda^2 t}\cos\lambda(\alpha-x)\,d\lambda\right)\right]d\alpha. \qquad (2.53)$$

Это и есть решение поставленной задачи.

Подстановкой

$$\alpha\lambda\sqrt{t}=z, \frac{\alpha-x}{a\sqrt{t}}=\beta \qquad (2.54)$$

найдем

$$\int_{0}^{\infty}e^{-\alpha^2\lambda^2 t}\cos\lambda(\alpha-x)\,d\lambda=\frac{1}{a\sqrt{t}}\int_{0}^{\infty}e^{-z^2}\cos\beta z dz. \qquad (2.55)$$

Введя

$$k(\beta)=\int_{0}^{\infty}e^{-z^2}\cos\beta z dz. \qquad (2.56)$$

Оттуда

$$k'(\beta)=-\int_{0}^{\infty}e^{-z^2}z\sin\beta z dz.$$

Интегрируя по частям, найдем:

$$k'(\beta)=\frac{1}{2}\left[\int_{0}^{\infty}e^{-z^2}\sin\beta z\right]_{0}^{\infty}-\frac{\beta}{2}\int_{0}^{\infty}e^{-z^2}\cos\beta z dz$$

или

$$k'(\beta)=-\frac{\beta}{2}k(\beta).$$

Откуда

$$k'(\beta)=ce^{-\frac{\beta^2}{4}}. \qquad (2.57)$$

Из (2.56) следует:

$$k'(0)=\int_{0}^{\infty}e^{-z^2}dz=\frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

Откуда

$$c=\frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

Так что

$$k(\beta)=\frac{\sqrt{\pi}}{2}e^{-\frac{\beta^2}{4}}. \qquad (2.58)$$

Из (2.58), (2.56), (2.54) следует:

$$\int_0^\infty e^{-\alpha^2\lambda^2 t}\cos\lambda(\alpha-x)\,d\lambda=\frac{1}{a\sqrt{t}}\frac{\sqrt{\pi}}{2}e^{-\frac{\beta^2}{4}}.$$

С учетом (2.55) получим значение интеграла (2.54):

$$\int_0^\infty e^{-\alpha^2\lambda^2 t}\cos\lambda(\alpha-x)\,d\lambda=\frac{1}{2a}\sqrt{\frac{\pi}{t}}e^{-\frac{(\alpha-x)^2}{4\alpha^2 t}}. \qquad (2.59)$$

Подставляя в (2.53), окончательно получим:

$$u(x,t)=\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(\alpha)e^{-\frac{(\alpha-x)^2}{4a^2 t}}\,d\alpha. \qquad (2.60)$$

(*интеграл Пуассона*).

2.1.3. Распространение тепла в конечном стержне

Задача линейной теплопроводности в *конечном* стержне отличается от задачи для *бесконечного* стержня, рассмотренной ранее, тем, что необходимо учитывать *краевые условия на торцевых сечениях* (концах) стержня. Наличие краевых условий вносит весьма существенные изменения в метод Фурье по сравнению с задачей без краевых условий.

Начальное условие для уравнения теплопроводности состоит в задании температуры во всех точках стержня в некоторый момент, от которого ведется отсчет времени. Обычно полагают, что в начальный момент t = 0. Тогда начальное условие имеет вид:

$$u(0,t)=u\big|_{x=0}=\varphi(x), \qquad (2.61)$$

где $\varphi(x)$ – данная функция.

Краевые условия должны выполняться там, где стержень может иметь теплообмен с окружающей средой, т.е. торцевых сечениях стержня (боковая поверхность тела по условию изолирована). Пусть начало стержня совпадает с началом координат (x = 0), а его конец имеет абсциссу x = t. Самый простой случай краевых условий будет тогда, когда на концах стержня поддерживается постоянная температура. Это значит, что

$$u(0,t)=u\big|_{x=0}=\tilde{u}_0, u\big|_{x=l}=\tilde{u}_l, \qquad (2.62)$$

где $\tilde{u}_0,\tilde{u}_l$ – заданные числа.

Возможны, однако, и более общие краевые условия, когда на торцевых сечениях стержня происходит теплообмен с окружающей средой по закону Ньютона.

В соответствии с ним *поток тепла через единицу поверхности в единицу времени пропорционален разности температур тела и окружающей среды*, т.е. равен

$$h\left(u-\tilde{u}\right), \tag{2.63}$$

где u – температура конца стержня;

$\tilde{u}$ – температура окружающей среды;

h – коэффициент пропорциональности, зависящий от физических свойств стержня и среды.

Коэффициент h называется *коэффициентом теплообмена* (или коэффициентом внешней теплопроводности); будем считать его для данного торцевого сечения стержня *постоянным*. Условимся также, что $h.>0$, т.е. что поток тепла считается положительным, когда тепло уходит из стержня в окружающую среду ($u>\tilde{u}$), и отрицательным – в противоположном случае. Количество тепла, передаваемое со всего торцевого сечения в момент Δt, будет равно $h\left(u-\tilde{u}\right)s\Delta t$.

По закону сохранения энергии количество уходящего тепла должно быть в точности равно потоку тепла, проходящего через рассматриваемое торцевое сечение в силу теплопроводности стержня.

Тепловой поток, проходящий через поперечное сечение стержня в направлении оси *OX*, равен $-ks\dfrac{\partial u}{\partial x}\Delta t$. *На правом* конце стержня направление потока, идущего во внешнюю среду, совпадает с направлением оси *OX* и поток равен $-ks\Delta t\left.\dfrac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=l}$. На *левом* конце эти направления противоположны и поэтому поток равен $ks\Delta t\left.\dfrac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=0}$. Будем полагать, что внешние среды могут быть на концах стержня разными, так что могут быть различными h и $\tilde{u}$.

Пусть на левом конце $h=h_0$ и $\tilde{u}=\tilde{u}_0$, а на правом $h=h_l$ и $\tilde{u}=\tilde{u}_l$. Тогда краевые условия на торцевых сечениях запишутся в виде:

$$\begin{aligned} ks\Delta t\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=0} &= h_0\left\{\left.u\right|_{x=0}-\tilde{u}_0\right\}, \\ -ks\Delta t\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=l} &= h_l\left\{\left.u\right|_{x=l}-\tilde{u}_l\right\}, \end{aligned} \tag{2.64}$$

где $\tilde{u}_0,\tilde{u}_l$ – заданные температуры внешней среды, которые будем считать известными *функциями времени*, а в наиболее простом случае – постоянными величинами.

Если какой-либо конец стержня теплоизолирован, то соответствующий коэффициент теплообмена равен нулю краевое условие на этом конце примет вид

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 0. \tag{2.65}$$

Условие (2.62) также можно рассматривать как частный случай условий (2.64) при очень больших значениях коэффициентов теплообмена. Записав, например, первое условие (2.64) в виде

$$\left.\frac{k}{h_0}\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=0} = u\big|_{x=0} - \tilde{u}_0.$$

И перейдя к пределу при $h_0 \to \infty$, получим первое из условий (2.62). Разумеется, можно рассматривать любую комбинацию краевых условий на разных концах стержня.

Таким образом, математическую задачу теплопроводности для однородного стержня с теплоизолированной боковой поверхностью без тепловых источников можно сформулировать в данном ниже виде. А именно: определить температуру $u = u(x,t)$, удовлетворяющую уравнению (2.42)

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

начальному условию (2.61)

$$u(0,t) = u\big|_{x=0} = \varphi(x)$$

и краевым условиям (2.64)

$$\left.ks\Delta t \frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=0} = h_0\left\{u\big|_{x=0} - \tilde{u}_0\right\},\ \left.-ks\Delta t \frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=l} = h_l\left\{u\big|_{x=l} - \tilde{u}_l\right\}$$

(или их частным случаем (2.62) и (2.65)).

Можно показать. Что эта задача всегда имеет единственное решение (при некоторых достаточно общих предположениях относительно заданных функций $\varphi(x), \tilde{u}_0(t)$ и $\tilde{u}_l(t)$).

Метод Фурье в случае краевых условий (2.64) непосредственно не применим, так они *неоднородны*, если $\tilde{u}_0 \neq 0$ и $\tilde{u}_l \neq 0$: решение $u \equiv 0$ им не удовлетворяет. Это значит, что *сумма двух решений* $u_1(x,t)$ и $u_2(x,t)$, каждое из которых в отдельности удовлетворяет условиям (2.64), этим условиям *не удовлетворяет*; точно также не удовлетворяет этим условиям *произведение* любого решения на *постоянную величину*. Поэтому, прежде чем применять метод Фурье, необходимо свести задачу к такой, в которой краевые условия *однородны*. Это можно сделать в предположении, что *температуры внешних сред* $\tilde{u}_0$ *и* $\tilde{u}_l$ *постоянны*.

Для этого введем новую искомую функцию $\omega=\omega(x,t)$, связанную с u формулой

$$u(x,t)=\omega(x,t)+\gamma+\gamma_1 x, \tag{2.66}$$

где γ и γ_1 – некоторые постоянные коэффициенты, которые подбираются так, чтобы для функции ω получились однородные краевые условия.

Так как $\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial \omega}{\partial x}+\gamma_1$, то условия (2.64) перепишутся в виде:

$$k\left.\frac{\partial \omega}{\partial x}\right|_{x=0}=h_0\left.\omega\right|_{x=0}+h_0\gamma-k\gamma_1-h_0\tilde{u}_0;$$

$$-k\left.\frac{\partial \omega}{\partial x}\right|_{x=l}=h_l\left.\omega\right|_{x=l}+h_l\gamma-\left(lh_l-k\right)\gamma_1-h_l\tilde{u}_l.$$

Требование однородности этих условий состоит в выполнении равенств

$$\begin{aligned} &h_0\gamma-k\gamma_1=h_0\tilde{u}_0;\\ &h_l\gamma+\left(lh_l+k\right)\gamma_1=h_l\tilde{u}_l. \end{aligned} \tag{2.67}$$

Система уравнений (2.67) относительно γ и γ_1 имеет единственное решение, поскольку определитель этой системы не равен нулю:

$$\begin{vmatrix} h_0 & -k \\ h_l & lh_l+k \end{vmatrix}=h_0\left(lh_l+k\right)+kh_l>0,$$

так как h_0, h_l, k и l – положительные числа.

Найдя из уравнений (2.67) γ и γ_1, для $\omega=\omega(x,t)$ получим краевые условия в виде:

$$k\left.\frac{\partial \omega}{\partial x}\right|_{x=0}=h_0\left.\omega\right|_{x=0}, -k\left.\frac{\partial \omega}{\partial x}\right|_{x=l}=h_l\left.\omega\right|_{x=l}, \tag{2.68}$$

которые являются *однородными*.

С другой стороны в качестве начального условия для функции ω получим

$$\left.\omega\right|_{t=0}=\left.u\right|_{t=0}-\gamma-\gamma_1 x=\varphi(x)-\gamma-\gamma_1 x=\varphi_1(x), \tag{2.69}$$

где $\varphi(x)$, как и $\varphi_1(x)$ – функция, заданная на интервале $0<x<l$.

Наконец, уравнение которому должна удовлетворять функция ω, не отличается от исходного уравнения (2.42), так как

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial \omega}{\partial t} \text{ и } \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2}.$$

Пришли к следующей задачи: найти функцию $\omega = \omega(x,t)$, *удовлетворяющую для* $0 < x < l$ *и всех* $t > 0$ *уравнению*

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2}, \tag{2.70}$$

начальному условию (2.69) и *краевым условиям* (2.68). Эта задача уже решается методом Фурье, так как краевые условия *однородны* (им удовлетворяет решение $\omega \equiv 0$).

Первая часть методы Фурье – разделение переменных – применяется без каких бы то ни было изменений. В силу предыдущего, частные решения будут иметь вид

$$\omega(x,t) = (\alpha \cos \lambda x + \beta \sin \lambda x) e^{-\lambda^2 a^2 \tau}. \tag{2.71}$$

Но если в случае бесконечного стержня λ оставалось *совершенно произвольным*, то наличие краевых условий накладывает на λ определенные требования. Действительно, подставляя функцию $\omega(x,t)$ из (2.71) в условия (2.68) и сокращая на $e^{-\lambda^2 a^2 \tau}$, найдем, что для первого множителя в правой части (2.71)

$$\alpha \cos \lambda x + \beta \sin \lambda x = X(x)$$

должны выполняться равенства

$$kX'(0) = h_0 X(0),\ -kX'(l) = h_l X(l). \tag{2.72}$$

Заменяя значения X и X' их выражениями, получим:

$$k\beta\lambda = h_0 \alpha\lambda \sin \lambda l - k\beta\lambda \cos \lambda l = h_l \alpha \cos \lambda l + h_l \beta \sin \lambda l,$$

откуда, с одной стороны,

$$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{h}{h_0} \lambda, \tag{2.72}$$

а с другой

$$\beta(h_l \sin \lambda l + k\lambda \cos \lambda l) = \alpha(k\lambda \sin \lambda l - h_l \cos \lambda l),$$

то есть

$$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{h_l \sin \lambda l + kl \cos \lambda l}{k\lambda \sin \lambda l - h_l \cos \lambda l} = \frac{h_l tg\lambda l + k\lambda}{k\lambda tg\lambda l - h_l}.$$

Таким образом, λ должно удовлетворять уравнению

$$\frac{k}{h_0}\lambda = \frac{h_l \operatorname{tg} \lambda l + k\lambda}{k\lambda \operatorname{tg} \lambda l - h_l}$$

или

$$\operatorname{tg}\lambda l = \frac{k\left(h_0 - h_l\right)\lambda}{k^2\lambda^2 - h_0 h_l}. \tag{2.73}$$

Ограничимся рассмотрением наиболее важной частной задачи, а именно. Изучим *распространение тепла в стержне, концы которого находятся на заданных переменных температурах*. Эта задача сводится к решению уравнению теплопроводности (2.42) при граничных условиях

$$u\big|_{x=0} = \psi_1(t),\, u\big|_{x=t} = \psi_2(t) \tag{2.74}$$

и начальном условии

$$u\big|_{t=0} = \varphi(x), \tag{2.75}$$

где $\psi_1(t), \psi_2(t)$ и $\varphi\left(x\right)$ – заданные функции.

Решение будем иметь в виде ряда

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t) \sin\frac{n\pi x}{l}, \tag{2.76}$$

$$T_n(t) = \frac{2}{l}\int_0^1 u(x,t)\sin\frac{n\pi x}{l}dx. \tag{2.77}$$

Интегрируя два раза по частям, получим:

$$T_n(t) = \frac{2}{\pi n}\left[u\left(0.t\right) - (-1)^n u(l,t)\right] - \frac{2l}{n^2\pi^2}\int_0^1 \frac{\partial^2 x}{\partial x^2}\sin\frac{n\pi x}{l}dx.$$

Так как $u\left(x,t\right)$ удовлетворяет уравнению (2.53) и граничным условиям (2.74), то

$$T_n(t) = \frac{2}{n\pi}\left[\psi_1(t) - (-1)^n \psi_2(t)\right] - \frac{2l}{n^2\pi^2 a^2}\int_0^1 \frac{\partial u}{\partial t}\sin\frac{n\pi x}{l}dx. \tag{2.78}$$

Дифференцируя теперь выражение (2.77) по t, получим:

$$\frac{dT_n(t)}{dt} = \frac{2}{l}\int_0^1 \frac{\partial u}{\partial t}\sin\frac{n\pi x}{l}dx. \tag{2.79}$$

Исключая интеграл из равенств (2.78) и (2.79), получим следующее уравнение для определения коэффициентов $T_n(t)$:

$$\frac{dT_n(t)}{dt} + \left(\frac{n\pi a}{l}\right)^2 T_n(t) = \frac{2\pi n a^2}{l^2}\left[\psi_1(t) - (-1)^2 v_2(t)\right]. \tag{2.80}$$

Общее решение этого уравнения имеет вид

$$T_n(t)=e^{-\left(\frac{n\pi a}{l}\right)^2 t}\left[C_n+\frac{2n\pi a^2}{l^2}\int_0^1 e^{\left(\frac{n\pi a}{l}\right)^2\tau}(\psi_1(t)-(-1)^2 v(t)d\tau\right], \qquad (2.81)$$

где, очевидно,

$$C_n=T_n(0).$$

В соответствии с начальным условием (2.75), потребуем выполнения равенства

$$u(x,0)=\sum_{n=1}^{\infty}T_n(0)\sin\frac{n\pi x}{l}=\varphi(x)$$

и, следовательно,

$$T_n(0)=C_n=\frac{2}{l}\int_0^1\phi(x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx. \qquad (2.82)$$

Таким образом, решением задач (2.42), (2.74)-(2.75) будет ряд (2.76), где $T_n(t)$ определяются равенствами (2.81) и (2.82).

В частном случае, когда концы стержня поддерживаются при постоянных температурах, т.е.

$$\psi_1(t)=u_1=\text{const},\ \psi_2(t)=u_2=\text{const},$$

уравнение (2.81) принимает следующий вид:

$$T_n(t)=\frac{2}{n\pi}\left[u_1-(-1)^n u_2\right]\left[1-e^{-\left(\frac{n\pi a}{l}\right)^2 t}\right]+\frac{2}{l}\int_0^1\varphi(x)\sin\frac{n\pi x}{l}dxe^{-\left(\frac{n\pi a}{l}\right)^2 t}.$$

Подставляя $T_n(t)$ в ряд (2.76), будем иметь:

$$u(x,t)=\frac{2u_1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin\frac{n\pi x}{l}}{n}+\frac{2u_2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{\sin\frac{n\pi x}{l}}{n}+$$

$$+\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}u_2-u_1}{n}e^{-\left(\frac{n\pi a}{l}\right)^2 t}\sin\frac{n\pi x}{l}+$$

$$+\frac{2}{l}\sum_{n=1}^{\infty}e^{-\left(\frac{n\pi a}{l}\right)^2 t}\sin\frac{n\pi x}{l}\int_0^1\varphi(x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx.$$

В силу известных соотношений

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n\xi}{n}=\begin{cases}\dfrac{\pi-\xi}{2} & 0<\xi<2\pi\\ 0 & \xi=0,2\pi,\end{cases}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{\sin n\xi}{n}=\begin{cases}\dfrac{\xi}{2} & -\pi<\xi<\pi\\ 0 & \xi=-\pi,\pi.\end{cases}$$

Окончательно получим

$$u(x,t)=u_1+(u_2-u_1)\frac{x}{l}+\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}u_2-u_1}{n}e^{-\left(\frac{n\pi a}{l}\right)^2 t}\sin\frac{n\pi x}{l}+$$
$$+\frac{2}{l}\sum_{n=1}^{\infty}e^{-\left(\frac{n\pi a}{l}\right)^2 t}\sin\frac{n\pi x}{l}dx. \tag{2.83}$$

2.1.4. Неоднородное уравнение теплопроводности

1. Рассмотрим неоднородное уравнение

$$\frac{\partial u}{\partial t}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+f(x,t) \tag{2.84}$$

с начальным условием

$$u\big|_{t=0}=0 \tag{2.85}$$

и граничными условиями

$$u(0,t)=0, u(l,t)=0. \tag{2.86}$$

Будем искать решение этой задачи в виде

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}T_n(t)\sin\frac{n\pi x}{l}, \tag{2.87}$$

так что граничные условия (2.86) удовлетворяются сами собою. Предположим, что функция $f(x,t)$, рассматриваемая как функция от x, может быть разложена в ряд Фурье:

$$f(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}f_n(t)\sin\frac{n\pi x}{l}, \tag{2.88}$$

где

$$f_n(t)=\frac{2}{l}\int_0^1 f(x,t)\sin\frac{n\pi x}{l}dx. \tag{2.89}$$

Подставляя ряд (2.87) в уравнение (2.84) и принимая во внимание (2.88), получим

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left[T_2'(t)+\left(\frac{n\pi a}{l}\right)^2 T_n(t)-f_n(t)\right]\sin\frac{n\pi x}{l},$$

откуда, заменяя $\frac{n\pi a}{l}$ величиной ω_n,

$$T_n'(t) + \omega_n^2 T_n(t) = f_n(t). \qquad (2.90)$$

Пользуясь начальным условием для $u(x,t)$

$$u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(0) \sin\frac{n\pi x}{l} = 0.$$

Получим начальное условие для $T_n(t)$

$$T_n(0) = 0. \qquad (2.91)$$

Решая обыкновенное дифференциальное уравнение (2.90) с нулевым начальным условием (2.91), найдем:

$$T_n(t) = \int_0^t e^{-\omega_n^2(t-\tau)} f_n(\tau) d\tau. \qquad (2.92)$$

Подставив в ряд (2.77), получим решение задачи (2.84)-(2.86) в виде

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[\int_0^t e^{-\omega_n^2(t-\tau)} f_n(\tau) d\tau \right] \sin\frac{n\pi x}{l}. \qquad (2.93)$$

2. Рассмотрим теперь тот случай, когда начальное и граничные условия неоднородные, т.е требуется найти решение уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x,t) \qquad (2.94)$$

при начальном условии

$$u\big|_{t=0} = \varphi(x) \qquad (2.95)$$

и при граничных условиях

$$u(0,t) = \psi_1(t), \quad u(l,t) = \psi_2(t). \qquad (2.96)$$

Эта задача легко сводится к задачам, определенным (2.42), (2.74), (2.75) и (2.84)…(2.86). Действительно, примем,

$$u = v + \omega, \qquad (2.97)$$

где v удовлетворяет однородному уравнению

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \qquad (2.98)$$

граничным условиям

$$v(0,t)=\psi_1(t),\quad v(l,t)=\psi_2(t) \tag{2.99}$$

и начальному условию

$$u\big|_{t=0}=\varphi(x) \tag{2.100}$$

а функция $\omega(x,t)$ удовлетворяет неоднородному уравнению

$$\frac{\partial\omega}{\partial t}=a^2\frac{\partial^2\omega}{\partial x^2}+f(x,t), \tag{2.101}$$

граничным условиям

$$\omega\big|_{x=0}=0,\quad \omega\big|_{x=l}=0 \tag{2.102}$$

и начальному условию

$$\omega\big|_{t=0}=0. \tag{2.103}$$

Очевидно, что сумма (2.97) является решением задачи (2.94)-(2.96).

2.2. Уравнения гиперболического типа

2.2.1. Дифференциальное уравнение крутильных колебаний цилиндрического стержня

Рассмотрим однородный круговой цилиндрический стержень длиной l. Допустим, что под влиянием какой-нибудь причины этот стержень совершает так называемые крутильные колебания, т.е. такие колебания, при которых его поперечные сечения остаются плоскими и поворачиваются без какого-либо искажения одно относительно другого, вращаясь вокруг оси стержня. В случае кругового цилиндрического стержня при кручении поперечные сечения не смещаются параллельно его оси. Будем рассматривать малые колебания.

Поместим начало координат в один из концов стержня, а ось OX направим по его оси.

Пусть mn и m_1n_1 – два поперечных сечения, расстояние между которыми равно ∂x. Для того чтобы сечение mn повернулось относительно сечения m_1n_1, на угол θ, необходимо наличие приложенного к нему некоторого момента M, носящего название закручивающего момента.

Для вычисления этого момента поступим следующим образом. Выделим из стержня бесконечно тонкий цилиндр с поперечным сечением $\partial\sigma$ (рис.2.1). Допустим, что под действием закручивающего момента, приложенного к этому сечению, конец A прямолинейной образующей AA_1, переместится на малое расстояние

$$\cup AB=rd\theta. \tag{2.104}$$

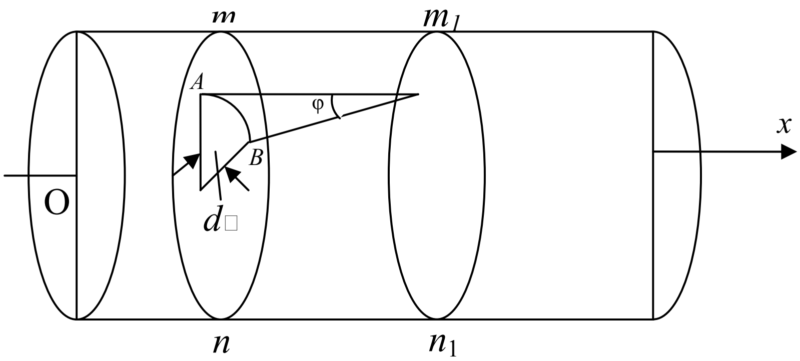


Рис. 2.1

Обозначим через τ величину напряжения, вызванного сдвигом образующей AA_1 в положении BA_1.

Применяя закон Гука, найдем

$$\tau = G\varphi,$$

где φ – угол AA_1B;

G – постоянная величина, называемая модулем сдвига.

Таким образом, усилие, приходящееся на поперечное сечение $d\sigma$, имеет вид:

$$\tau d\sigma = G\varphi d\sigma \qquad (2.105)$$

В силу малых размеров треугольника AA_1B можно считать что

$$\tau d\sigma = G\varphi d\sigma \qquad (2.106)$$

а из сравнения формул (2.104) и (2.106)

$$\varphi = r\frac{\partial\theta}{\partial x}.$$

Откуда

$$\tau d\sigma = G\frac{\partial\theta}{\partial x} r d\sigma.$$

Элементарный закручивающий момент dM, приложенный к сечению $d\sigma$, определяется в виде

$$dM = r\tau d\sigma = G\frac{\partial\theta}{\partial x} r^2 d\sigma.$$

Полный закручивающий момент M выразится интегралом по всей площади сечения mn. Так что

$$M = G\frac{\partial\theta}{\partial x}\iint r^2 d\sigma.$$

Но $\iint r^2 d\sigma$ есть полярный момент инерции J сечения mn. Откуда искомый закручивающий момент

$$M = GJ\frac{\partial\theta}{\partial x}. \tag{2.107}$$

Выведем далее дифференциальное уравнение крутильных колебаний стержня.

С этой целью рассмотрим часть стержня, заключенного между двумя поперечными сечениями mn и m_1n_1 с абсциссами x и $x+dx$. Закручивающий момент в сечении с абсциссой x равен $GJ\frac{\partial\theta}{\partial x}$, момент в сечении с абсциссой $x+dx$ равен $GJ\frac{\partial\theta}{\partial x}+GJ\frac{\partial^2\theta}{\partial x^2}dx$. Для получения уравнения крутильных колебаний приравняем результирующий момент $GJ\frac{\partial^2\theta}{\partial x^2}dx$ произведению углового ускорения $\frac{\partial^2\theta}{\partial x^2}$ на момент инерции элемента $mn\ m_1n_1$ относительно оси стержня.

Получим

$$GJ\frac{\partial^2\theta}{\partial x^2}dx = \frac{\partial^2\theta}{\partial x^2}Kdx,$$

где через K обозначен момент инерции единицы длины стержня

Откуда

$$\frac{\partial^2\theta}{\partial t^2} = a^2\frac{\partial^2\theta}{\partial x^2},\ a = \sqrt{\frac{GJ}{K}}. \tag{2.108}$$

Это и есть дифференциальное уравнений *крутильных колебаний* кругового цилиндрического стержня.

Рассмотрим далее практически важную задачу, а именно, изучим *колебания стержня с одним прикрепленным диском*.

Займемся исследованием крутильных колебаний однородного стержня в том случае, когда один из его концов $x=0$ закреплен, а к другому концу $x=l$ прикреплен массивный диск с моментом инерции K_1 относительно оси стержня. Приравнивая момент силы инерции диска закручивающему моменту в сечении $x=l$, получим следующее граничное условие на конце $x=l$:

$$\left.\frac{\partial^2\theta}{\partial x^2}\right|_{x=l} = -GJ\left.\frac{\partial\theta}{\partial x}\right|_{x=l}.$$

Таким образом, задача сводится к решению уравнения (2.108) при граничных условиях

$$\theta\big|_{x=0} = 0, \left.\frac{\partial^2\theta}{\partial t^2}\right|_{x=l} = -c^2 \left.\frac{\partial\theta}{\partial x}\right|_{x=l} \left(c = \sqrt{\frac{GJ}{K_1}}\right). \tag{2.109}$$

и начальных условиях

$$\theta\big|_{t=0} = f(x), \left.\frac{\partial\theta}{\partial t}\right|_{t=0} = F(x). \tag{2.110}$$

По методу Фурье частные решения уравнения (2.108) будем искать в виде

$$\theta(x,t) = T(t)X(x). \tag{2.111}$$

Должны иметь

$$T''(t) + a^2\lambda^2 T(t) = 0; \tag{2.112}$$

$$X''(x) + \lambda^2 X(x) = 0. \tag{2.113}$$

Чтобы функция (2.111), отличная от тожественного нуля, удовлетворяла граничным условиям (2.109), очевидно, нужно потребовать выполнения условий

$$X(x) = 0, c^2 X'(l) - a^2\lambda^2 X(l) = 0. \tag{2.114}$$

Интегрируя уравнения (2.113), получим:

$$X(x) = C_1 \cos\lambda x + C_2 \sin\lambda x.$$

Из граничных условий (2.114) находим

$$C_1 = 0, \left(c_2\lambda\cos\lambda l - a^2\lambda^2 \sin\lambda l\right)C_2 = 0.$$

Полагая $C_2 \neq 0$, получим трансцендентное уравнение

$$a^2\lambda^2 \sin\lambda l - c_2\lambda\cos\lambda l = 0, \tag{2.115}$$

Определяющее собственные значения задачи (2.113), (2.114). Исследуем уравнение (2.115). Если положить

$$\lambda l = \mu,\ p = \frac{lc^2}{a^2} = \frac{lK}{K_1}, \tag{2.116}$$

то уравнение (2.115) примет следующий вид

$$\mu\sin\mu - p\cos\mu = 0 \quad (p > 0). \tag{2.117}$$

Для нахождения вещественных корней этого уравнения достаточно построить графики функций

$$y = ctg\mu, y = \frac{\mu}{p}$$

и затем определить абсциссы точек пересечения этих кривых (рис.2.2).

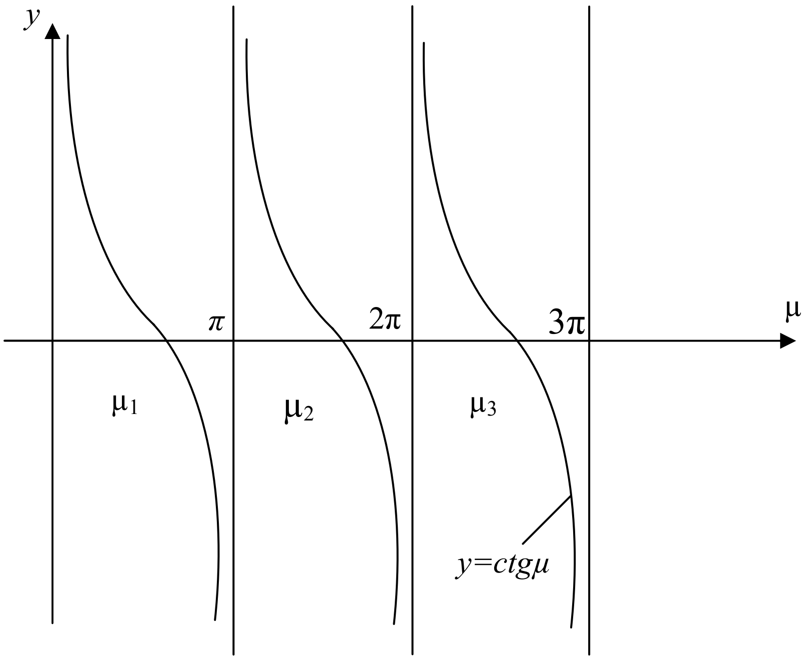


Рис. 2.2

Из рисунка видно, что корень μ_k уравнения (2.117) с увеличением индекса k неорганично возрастает по абсолютной величине, причем разность $\mu_k = (k-1)\pi$ стремится к нулю. Отсюда следует, что при достаточно большом k можно положить

$$\mu_k = (k-1)\pi. \qquad (2.118)$$

Если по условиям задачи число p имеет малую величину, то приближенное равенство (2.118) будет давать достаточно точный результат и при небольших значениях k. Если же величина не очень мала, то для вычисления корней

$$\mu_1, \mu_2, \mu_3 ...$$

можно прибегнуть к методу итераций.

Согласно этому методу положим

$$\mu_k = (k-1)\pi + \varepsilon_k \qquad (2.119)$$

и приведем уравнение (2.117) к следующему виду:

$$\operatorname{ctg}\varepsilon_k = \frac{(k-1)\pi}{p} + \frac{\varepsilon_k}{p}. \tag{2.120}$$

Возьмем затем известное разложение

$$\operatorname{ctg}\varepsilon_k = \frac{1}{\varepsilon_k} - \frac{1}{3}\varepsilon_k - \frac{1}{45}\varepsilon_k^3 + \ldots \tag{2.121}$$

и будем считать $k > 1$; тогда уравнение (2.120) запишется в виде

$$\varepsilon_k = \frac{p}{(k-1)\pi} - \left(\frac{1}{p} + \frac{1}{3}\right)\frac{p}{(k-1)\pi}\varepsilon_k^2 + \frac{p}{45(k-1)\pi}\varepsilon_k^4 + \ldots \tag{2.122}$$

Возьмем

$$\varepsilon_k^{(1)} = \frac{p}{(k-1)x} \tag{2.123}$$

за *первое приближение* корня уравнения (2.122) и подставим его в правую часть того же уравнения; тогда, ограничиваясь лишь двумя первыми членами, получим *второе приближение* корня, а именно:

$$\varepsilon_k^{(2)} = \frac{p}{(k-1)\pi} - \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{p}\right)\left(\frac{p}{(k-1)\pi}\right)^3. \tag{2.124}$$

Внося последовательно оба найденных выражения для ε_k в формулу (2.119), получим приближенные значения корней $\mu_2, \mu_3 \ldots$, причем в первом приближении будем иметь

$$\mu_2 = \pi + \frac{p}{\pi}, \mu_3 = 2\pi + \frac{p}{2\pi},$$

а во втором

$$\mu_2 = \pi + \frac{p}{\pi} - \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{p}\right)\left(\frac{p}{\pi}\right)^3, \quad \mu_3 = 2\pi + \frac{p}{2\pi} - \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{p}\right)\left(\frac{p}{2\pi}\right)^3$$

Для первого корня $\mu_1 = \varepsilon_1$ уравнение (2.120) принимает вид:

$$\operatorname{ctg}\varepsilon_1 = \frac{\varepsilon_1}{p}.$$

Разлагая $\operatorname{ctg}\varepsilon_1$ в ряд по формулам (2.121), получим:

$$\varepsilon_1^2 = \frac{3p}{3+p} - \frac{1}{15}\frac{p}{3+p}\varepsilon_1^4 + \ldots \tag{2.125}$$

За первое приближение корня μ_1 возьмем

$$\mu_1 = \varepsilon_1^{(1)} = \sqrt{\frac{3p}{3+p}}. \tag{2.126}$$

Для того чтобы получить второе приближение корня μ_1, нужно подставить (2.116) в правую часть равенства (2.125) и ограничиться двумя членами.

Найденное таким путем второе приближение корня μ_1 подставим снова в правую часть равенства (2.125) и т.д. Повторяя этот процесс достаточное число раз. Можно вычислить корень μ_1 с большей степенью точности.

Уравнение (2.117) не моет иметь число мнимых корней. Допустим обратное: положим $\mu = iv$, где v - вещественное число. Тогда будем иметь

$$iv\sin iv - p\cos iv = 0$$

или

$$v sh v + p ch v = 0,$$

что невозможно, так как слева оба слагаемых неотрицательны при любом вещественном v.

Ниже будет показано, что уравнение (2.117) не моет иметь также и комплексных корней.

Таким образом, уравнение (2.117) имеет только вещественные корни, причем они будут попарно одинаковыми по абсолютной величине и обратными по знаку, так что достаточно рассматривать только положительные корни. Обозначим через $\mu_1, \mu_2, \mu_3....,$ положительные корни уравнения (2.117). Тогда, согласно (2.116), собственные значения будут

$$\lambda_k^2 = \left(\frac{\mu_k}{l}\right)^2, \quad k = 1, 2, 3, \ldots \tag{2.127}$$

Каждому собственному значению λ_k^2 соответствует собственная функция

$$X_k(x) = \sin\frac{\mu_k x}{l}, k = 1, 2, 3, \ldots \tag{2.128}$$

Нетрудно показать, что собственные функции (2.128) не *ортогональны* на промежутке $(0, l)$.

При $\lambda = \lambda_k$ общее решение уравнения (2.112) имеет вид

$$T_k(t) = a_k \cos\frac{\mu_k at}{l} + b_k \sin\frac{\mu_k at}{l},$$

где a_k и b_k – произвольные постоянные.

В силу (2.111) получим, что функция

$$Q_k(x,t) = \left(a_k \cos\frac{\mu_k at}{l} + b_k \sin\frac{\mu_k at}{l} \right) \sin\frac{\mu_k x}{l}$$

удовлетворяет уравнению (2.108) и граничным условиям (2.109) при любых a_k и b_k.

Далее, составим ряд

$$Q_k(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \cos\frac{\mu_k at}{l} + b_k \sin\frac{\mu_k at}{l} \right) \sin\frac{\mu_k x}{l}. \qquad (2.129)$$

Для выполнения начальных условий (2.110) необходимо, чтобы

$$Q_k(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \sin\frac{\mu_k x}{l} = f(x); \qquad (2.130)$$

$$\frac{\partial\theta(x,t)}{\partial t} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a\mu_k}{l} b_k \sin\frac{\mu_k x}{l} = F(x). \qquad (2.131)$$

Отсюда следует, что для нахождения коэффициентов a_k и b_k необходимо разложить функции $f(x)$ и $F(x)$ в ряд Фурье по собственным функциям (2.128). Как отмечалось ранее, указанные функции не ортогональны в промежутке $(0,l)$. Однако нетрудно показать, что функции

$$\cos\frac{\mu_k x}{l}, k = 1, 2, \ldots, \qquad (2.132)$$

образуют в промежутке $(0,l)$ ортогональную систему функций.

В самом деле,

$$\int_0^l \cos\frac{\mu_k x}{l} \cos\frac{\mu_n x}{l} dx = l \cos\mu_k \cos\mu_n \frac{\mu_k tg\mu_k - \mu_n tg\mu_n}{\mu_k^2 - \mu_n^2}.$$

Откуда видно, что если μ_k и μ_n есть корни уравнения (2.117), то

$$\int_0^l \cos\frac{\mu_k x}{l} \cos\frac{\mu_n x}{l} dx = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad k \neq m; \\ \dfrac{l}{4\mu_k}(2\mu_k + \sin 2\mu_k) & \text{при} \quad k = m. \end{cases} \qquad (2.133)$$

Допустим далее, что ряды (2.130) и (2.131) можно почленно дифференцировать по x. Тогда, принимая во внимание формулы (2.133), легко найдем значения коэффициентов a_k и b_k, а именно:

$$a_k = \frac{4}{2\mu_k + \sin 2\mu_k} \int_0^l f'(x) \cos\frac{\mu_k x}{l} dx;$$

$$b_k = \frac{4l}{a\mu_k} \frac{1}{2\mu_k + \sin 2\mu_k} \int_0^l F'(x) \cos\frac{\mu_k x}{l} dx.$$

Подставляя эти значения коэффициентов в ряд (2.129), получим искомое решение *задачи о крутильных колебаниях* однородного стержня.

Выше указывалось что уравнение (2.117)

$$\mu\sin\mu-\rho\cos\mu=0$$

не может иметь комплексных корней. От противного: пусть уравнение (2.117) имеет комплексный корень $\mu=a+ib$. Этим корням будут соответствовать две собственные функции:

$$X(x)=\sin\frac{(a+ib)x}{l},\ \overline{X(x)}=\sin\frac{(a-ib)x}{l}.$$

Из условия ортогональности (2.133) имеем

$$\int_0^1\cos\frac{(a+ib)x}{l}\cos\frac{(a-ib)x}{l}dx=0$$

или

$$\int_0^1\left(\cos^2\frac{ax}{l}ch^2\frac{bx}{l}+\sin^2\frac{ax}{l}sh^2\frac{bx}{l}\right)dx=0$$

Полученное противоречие доказывает утверждение.

Легко убедиться: если конец стержня $x=0$ свободен, а на конце $x=l$ прикреплен диск с моментом инерции K_1, то

$$\theta(x,t)=\sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k\cos\frac{\mu_k at}{l}+b_k\sin\frac{\mu_k at}{l}\right)\sin\frac{\mu_k x}{l}$$

где

$$a_k=\frac{2}{\mu_k}\frac{p^2+\mu_k^2}{p(p+1)+\mu_k^2}\int_0^1 f'(x)\sin\frac{\mu_k x}{l}dx;$$

$$b_k=\frac{2l}{a\mu_k^2}\frac{p^2+\mu_k^2}{p(p+1)+\mu_k^2}\int_0^1 F'(x)\sin\frac{\mu_k x}{l}dx;$$

$\mu_1,\mu_2,\mu_3,\ldots$ – положительные корни уравнения;

$$\mu\cos\mu+p\sin\mu=0\left(p=\frac{lk}{k_1}\rhd 0\right).$$

2.2.2. Дифференциальное уравнение поперечных колебаний мембраны

Будем рассматривать только поперечные колебания мембраны, при которых каждая ее точка движется перпендикулярно плоскости *xOy* параллельно оси *u.* Тогда смещение *u* точки (*x,y)* мембраны будет функцией от *x,y* и *t.*

Перейдем к выводу уравнения *поперечных* колебаний мембраны. С этой целью выделим произвольный участок σ мембраны, ограниченный в состоянии покоя кривой l. Когда мембрана будет выведена из положения равновесия этот участок перейдет в участок S поверхности мембраны, ограниченный пространственной кривой l', причем

$$\sigma = S\cos\gamma,$$

где γ – угол между осью Ou и нормалью к S (рис.2.3).

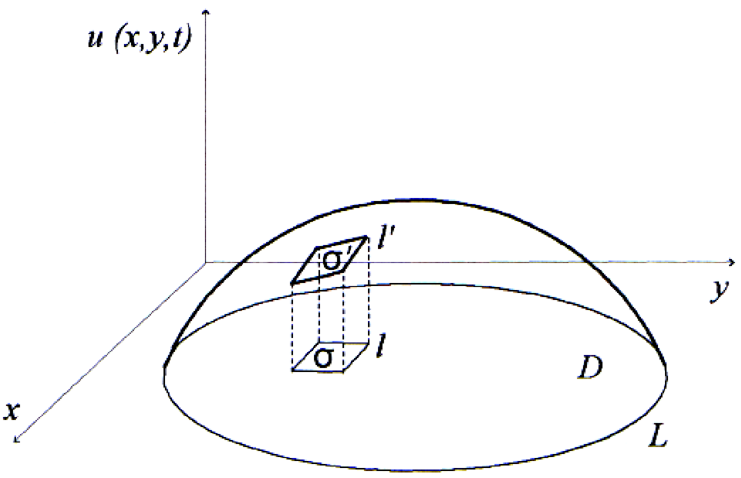


Рис. 2.3

Если ограничиться исследованием малых колебаний, при которых можно пренебречь квадратом первых производных $\frac{\partial u}{\partial x}$ и $\frac{\partial u}{\partial y}$, то из формулы

$$\cos\gamma = \frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{\partial u}{\partial x}^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right)}} \approx 1$$

следует, что $S \approx \sigma$ в любой момент времени t т.е. изменением площади произвольно взятого участка мембраны можно пренебречь. Тогда можно считать, что при алых колебаниях мембраны, участок S будет находиться под действием первоначального натяжения T.

Вычислим проекцию на ось $0u$ равнодействующей сил натяжения, приложенных к участку S. Для этого обозначим через ds' элемент кривой l'. Вектор натяжения на элемент ds', в силу отсутствия сопротивления изгибу, находится в касательной плоскости к поверхности мембраны и нормален к самому элементу ds'. Косинус угла, образованного этим вектором с осью $0u$, равен, очевидно, $\frac{\partial u}{\partial n'}$, где n' – направление внешней нормали к контуру l'. Отсюда вытекает, что проекция на ось $0u$ натяжения T, рассчитанного на элемент ds' контура l', равна произведению

$$T = \frac{\partial u}{\partial n'} ds'.$$

Интегрируя это произведение по всему контуру l', найдем следующее выражение равнодействующей сил натяжения вдоль этого контура:

$$T\int_{l'} \frac{\partial u}{\partial n'} ds'.$$

Так как при малых колебаниях мембраны $ds = ds'$, то можно заменить путь интегрирования l' на l. Тогда, применяя формулу Грина, получим:

$$T\int_{l} \frac{\partial u}{\partial n} ds = T\iint_{\sigma} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) dxdy. \tag{2.134}$$

Предположим далее, что на мембрану, параллельно оси $0u$ действует внешняя сила $p(x, y, t)$, рассчитанная на единицу площади. Тогда внешняя сила, действующая на часть мембраны σ, будет равна

$$\iint_{\sigma} p(x, y, t) dxdy. \tag{2.135}$$

Силы (2.134) и (2.135) в любой момент времени уравновешиваются силами инерции, действующими на участок S мембраны, сумма которых равна

$$-\iint_{\sigma} p(x, y) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} dxdy,$$

где $p(x, y)$ – поверхностная плотность мембраны.

Таким образом, получим равенство

$$\iint_{\sigma} \left[p(x, y) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - T\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right) - p(x, y, t) \right] dxdy = 0,$$

из которого в силу произвольной площадки σ следует, что

$$p(x, y) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = T\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) + p(x, y, t). \tag{2.136}$$

Это и есть дифференциальное *уравнение поперечных колебаний мембраны*.

В случае однородной мембраны $p=\text{const}$, уравнение малых колебаний мембраны можно записать в виде

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)+g(x,y,t), \tag{2.137}$$

где

$$a=\sqrt{\frac{T}{p}},\ g(x,y,t)=\frac{p(x,y,t)}{p}. \tag{2.138}$$

Если внешняя сила отсутствует, т.е. $p\left(x,y,t\right)$, то из уравнения (2.137) получим уравнение *свободных колебаний* однородной мембраны

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right). \tag{2.139}$$

Уравнение (2.139) называется *волновым уравнением на плоскости*.

Одного уравнения движения (2.139), как известно, недостаточно для полного определения движения мембраны; нужно еще задать положение и скорость всех точек мембраны в начальный момент времени $t=0$:

$$u\big|_{t=0}=f(x,y),\ \frac{\partial u}{\partial t}\big|_{t=0}=F(x,y), \tag{2.140}$$

и, кроме того, граничные условия. Например, когда на контуре мембрана закреплена, должно быть

$$u\big|_{l}=0. \tag{2.141}$$

Рассмотрим *далее задачу о колебании круглой мембраны* радиусом l, *закреплённой по контуру*. Эта задача приводится к решению волнового уравнения в полярных координатах:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \phi^2}=\frac{1}{a^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t} \tag{2.142}$$

при граничном условии

$$u\big|_{r=l}=0 \tag{2.143}$$

и начальных условиях

$$u\big|_{t=0}=f(r,\varphi),\quad \frac{\partial u}{\partial t}\big|_{t=0}=F\left(r,\varphi\right). \tag{2.144}$$

Из физического смысла задачи ясно, что решение $u(r,\varphi,t)$ должно быть однозначной периодической функцией от φ с периодом 2π и оставаться ограниченным во всех точках мембраны, в том числе и в центре мембраны $r=0$.

Применяя метод Фурье, положим:

$$u(r,\varphi,t)=T(t)v(r,\varphi). \tag{2.145}$$

Получим уравнение для $T(t)$:

$$T''(t)+a^2\lambda^2T(t)=0.$$

Его общее решение

$$T(t)=C_1\cos\alpha\lambda t+C_2\sin\alpha\lambda t. \tag{2.146}$$

Функция $v(r,\varphi)$ определится из краевой задачи

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2}+\lambda^2 v=0, \tag{2.147}$$

$$v\big|_{r=l}=0, \tag{2.148}$$

$v\big|_{r=1}=0$ равно конечной величине

$$v(r,\varphi)=\varphi(r,\varphi+2\pi). \tag{2.149}$$

Буде искать решение уравнения (2.147) в виде

$$v(r,\varphi)=R(r)\Phi(\varphi). \tag{2.150}$$

Подставляя v в уравнение (2.147) и разделяя переменные, получим

$$\frac{\Phi''(\varphi)}{\Phi(\varphi)}=-\frac{r^2R''(r)+rR'(r)+\lambda^2r^2R(r)}{R(r)}=-p^2.$$

Откуда, принимая во внимание (2.148), (2.149) и (2.150), приходим к двум краевым задачам:

1)

$$\Phi''(\varphi)+p^2\Phi(\varphi)=0, \tag{2.151}$$

$$\Phi(\varphi)=\Phi(\varphi+2\pi),\ \Phi'(\varphi)=\Phi'(\varphi+2\pi); \tag{2.152}$$

2)

$$R''(r)+\frac{1}{r}R'(r)+\left(\lambda^2-\frac{p^2}{r^2}\right)R(r)=0, \tag{2.153}$$

$R(l)=0$, $R(0)$ равно конечной величине. (2.154)

Нетрудно видеть, что нетривиальные периодические решения задачи (2.151)-(2.152) существуют лишь при условии, что $p=n$ (n – целое число) и имеет вид

$$\Phi_n(\varphi)=A_n\cos n\varphi+B_n\sin n\varphi,\ \ n=0\,,1\,,2\,,\dots$$

Вернёмся к уравнению (2.153). Его общее решение при $p=n$ имеет вид

$$R_n(r)=D_nJ_n(\lambda r)+\varepsilon_nY_n(\lambda r).$$

Из условия (2.154) следует, что $\varepsilon_n=0$. Первое условие даст

$$J_n(\lambda l)=0.$$

Полагая $\lambda l=\mu$, для определения μ получим трансцендентное уравнение

$$J_n(\mu)=0. \tag{2.155}$$

Оно, как известно, имеет бесчисленное множество корней

$$\mu_1^{(n)},\mu_2^{(n)},\mu_3^{(n)},\dots$$

По ним определяются значения

$$\lambda_{mn}=\frac{\mu^{(n)}}{l},m=1\,,2\,,\dots;\ n=0\,,1\,,2\,,\dots,$$

И соответствующие решения задачи(2.153)-(2.154):

$$R_{mn}(r)=J_n\left(\frac{\mu_m^{(n)}r}{l}\right).$$

Возвращаясь к краевой задаче (2.147)…(2.149), получим, что собственному значению $\lambda_{nm}^2=\left(\frac{\mu_m^{(n)}}{l}\right)^2$ соответствуют две линейно независимые функции:

$$J_n\left(\frac{\mu_m^{(n)}}{l}\right)\cos n\varphi,\ \ I_n\left(\frac{\mu_m r}{l}\right)\sin n\varphi,\ \ m=\ 1\,,2\,,\dots;\ n=\ 0\,,1\,,2\,,\dots$$

Из вышеизложенного следует, что можно составить бесчисленное множество частных решений уравнения (2.142), удовлетворяющих граничному условию (2.143) и имеющих вид:

$$u(r,\varphi,t)=\begin{bmatrix}\left(A_{nm}\cos\frac{\alpha\mu_m^{(n)}t}{l}+B_{nm}\sin\frac{a\mu_m^{(n)}t}{l}\right)\cos n\varphi+\\+\left(C_{nm}\cos\frac{a\mu_m^{(n)}t}{l}+D_{nm}\sin\frac{a\mu_m^{(n)}t}{l}\right)\sin n\varphi\end{bmatrix}J_n\left(\frac{\mu_m^{(n)}r}{l}\right).$$

Чтобы удовлетворить начальным условиям (2.144), составим ряд

$$u(r,\varphi,t)=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\left[\begin{array}{l}\left(A_{nm}\cos\frac{\alpha\mu_m^{(n)}t}{l}+B_{nm}\sin\frac{a\mu_m^{(n)}t}{l}\right)\cos n\varphi+\\ \left(C_{nm}\cos\frac{a\mu_m^{(n)}t}{l}+D_{nm}\sin\frac{a\mu_m^{(n)}t}{l}\right)\sin n\varphi\end{array}\right]J_n\left(\frac{\mu_m^{(n)}r}{l}\right). \qquad (2.156)$$

Коэффициенты A_{nm},B_{nm},C_{nm} и D_{nm} определяются из начальных условий (2.144). Действительно, полагая в ряде (2.156) $t=0$ получим:

$$f(r,\varphi)=\sum_{m=1}^{\infty}A_{0m}J_0\left(\frac{\mu_m^{(0)}}{l}\right)+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{m=1}^{\infty}A_{nm}J_n\left(\frac{\mu_m^{(n)}r}{l}\right)\right)\cos n\varphi+$$

$$+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{m=1}^{\infty}C_{nm}J_n\left(\frac{\mu_m^{(n)}r}{l}\right)\right)\sin n\varphi. \qquad (2.157)$$

Этот ряд представляет собой разложение периодической функции $f(r,\varphi)$ в ряд Фурье в интервале $(0;2\pi)$ и, следовательно, множители при $\cos n\varphi$ и $\sin n\varphi$ должны быть коэффициентами Фурье. При этом должны иметь место следующие равенства:

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f(r,\varphi)d\varphi=\sum_{m=1}^{\infty}A_{0m}J_0\left(\frac{\mu_m^{(0)}r}{l}\right), \qquad (2.158)$$

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f(r,\varphi)\cos n\varphi d\varphi=\sum_{m=1}^{\infty}A_{nm}J_n\left(\frac{\mu_m^{(n)}r}{l}\right), \qquad (2.159)$$

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f(r,\varphi)\sin n\varphi d\varphi=\sum_{m=1}^{\infty}C_{nm}J_n\left(\frac{\mu_m^{(n)}r}{l}\right). \qquad (2.160)$$

Получим разложение произвольной функции $\Phi(r)$ в ряд по *функциям Бесселя*:

$$\Phi(r)=\sum_{m=1}^{\infty}a_mJ_n\left(\frac{\mu_m^{(n)}r}{l}\right).$$

Можно показать, что коэффициенты a_m определяются формулой

$$a_m=\frac{2}{I^2J_{n+1}^2\left(\mu_m^{(n)}\right)}\int_0^1 r\Phi(r)J_n\left(\frac{\mu_m^{(n)}r}{l}\right)dr.$$

Справедливо:

$$A_{0m} = \frac{2}{\pi l^2 J_1^2\left(\mu_m^{(0)}\right)} \int_0^1 \int_0^{2\pi} f(r,\varphi) J_0\left(\frac{\mu_m^{(0)} r}{l}\right) r dr d\varphi; \tag{2.161}$$

$$A_{nm} = \frac{2}{\pi l^2 J_{n+1}^2\left(\mu_m^{(n)}\right)} \int_0^1 \int_0^{2\pi} f(r,\varphi) J_n\left(\frac{\mu_m^{(n)} r}{l}\right) \cos n\varphi r dr d\varphi; \tag{2.162}$$

$$C_{nm} = \frac{2}{\pi l^2 J_{n+1}^2\left(\mu_m^{(n)}\right)} \int_0^1 \int_0^{2\pi} f(r,\varphi) J_n\left(\frac{\mu_m^{(n)} r}{l}\right) \sin n\varphi r dr d\varphi. \tag{2.163}$$

Рассуждая аналогичным образом, определим и коэффициенты B_{0m}, B_{nm}, D_{nm} – нужно только заменить в формулах (2.161), (2.162) и (2.163) $f(r,\varphi)$ на $F(r,\varphi)$ и разделить соответствующие выражения на $\frac{a\mu_m^{(n)}}{l}$. Таким образом, все коэффициенты в разложении (2.156) определены, решение задачи (2.142)…(2.144) можно представить в виде

$$u(r,\varphi,t) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} M_{nm} J_n\left(\frac{\mu_m^{(n)} r}{l}\right) \sin\left(n\varphi + \psi_{nm}\right) \sin\left(\frac{\mu_m^{(n)} at}{l} + v_{nm}\right), \tag{2.164}$$

где постоянные M_{nm}, ψ_{nm} и v_{nm} связаны очевидным образом с постоянными A_{nm}, B_{nm}, C_{nm} и D_{nm}.

Из выражения (2.164) видно, что общее колебание круглой мембраны складывается из бесчисленного множества собственных гармонических колебаний с частотой

$$\omega_{nm} = \frac{\mu_m^{(n)}}{l} \sqrt{\frac{T_0}{\sigma}},$$

где T_0 – натяжение, а σ – поверхностная плотность мембраны.

При $n = 0$ и $m = 1$ основной тон наименьшей частоты

$$\omega_{01} = \frac{\mu_1^{(0)}}{l} \sqrt{\frac{T_0}{\sigma}}.$$

Кроме того, формула (2.164) показывает, что для круглой мембраны стоячие волны различной частоты имеют узловые линии. Простейшие из линий определяются уравнениями:

$$J_n\left(\frac{\mu_m^{(n)} r}{l}\right) = 0, \sin\left(n\varphi + \psi_{nm}\right) = 0. \tag{2.165}$$

Первое из этих уравнений определяет $m-1$ окружностей, концентрических с контуром мембраны и имеющих следующие уравнения:

$$r_1=\frac{\mu_1^{(n)}}{\mu_m^{(n)}}l,\, r_2=\frac{\mu_2^{(n)}}{\mu_m^{(n)}}l,\ldots,r_{m-1}=\frac{\mu_{m-1}^{(n)}}{\mu_m^{(n)}}l\,.$$

Второе из уравнений (165) определяет n диаметров мембраны с уравнениями

$$\varphi_1=-\frac{\psi_{nm}}{n},\,\varphi_2=\frac{\pi}{n}-\frac{\psi_{nm}}{n},\ldots,\varphi_n=\frac{(n-1)\pi}{n}-\frac{\psi_{nm}}{n}.$$

В случае радикальных колебаний круглой мембраны начальные функции зависят только от r:

$$u\big|_{r=0}=f(r),\,\frac{\partial u}{\partial t}\bigg|_{r=0}=F(r). \qquad (2.166)$$

Тогда из формул (2.161), (2.162), (2.163) и им аналогичным следует, что

$$A_{0m}=\frac{2}{l^2J_1^2\left(\mu_m^{(0)}\right)}\int_0^1 rf(r)J_0\left(\frac{\mu_m^{(0)}r}{l}\right)dr\,,$$

$$B_{0m}=\frac{2}{al\mu_{1m}^{(0)}J_1^2\left(\mu_m^{(0)}\right)}\int_0^l rf(r)J_0\left(\frac{\mu_m^{(0)}r}{l}\right)dr\,,$$

и при n>0 коэффициенты A_{nm},B_{nm},C_{nm} и D_{nm} равны нулю.

Ряд (2.156) сводится к ряду

$$u(r,t)=\sum_{m=1}^{\infty}\left(A_{0m}\cos\frac{a\mu_m^{(0)}t}{l}+B_{0m}\sin\frac{a\mu_m^{(0)}t}{l}\right)J_0\left(\frac{\mu_m^{(0)}r}{l}\right), \qquad (2.167)$$

где $\mu_m^{(0)}$ – положительные корни уравнения $J_0(\mu)=0$.

2.3. Уравнения эллиптического типа

2.3.1. Уравнения Лапласа и Пуассона

К уравнениям Лапласа и Пуассона приводят многочисленные задачи теории теплопроводности, электростатики, гидродинамики и т.д. Рассмотрим постановку некоторых задач для уравнения Лапласа.

1.*Стационарное* (установившееся) *распределение температуры в одном теле*. Пусть имеется однородное тело Ω, ограниченное поверхностью σ. Ранее было показано, что температура в различных точках тела удовлетворяет уравнению теплопроводности в пространстве

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right).$$

Если процесс установившийся, то есть если температура не зависит от времени, а зависит только от координат точек тела, то $\frac{\partial u}{\partial t} = 0$, и температура удовлетворяет уравнению Лапласа

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) = 0. \quad (2.168)$$

Чтобы температура в теле из этого уравнения определялась однозначно, нужно знать температуру на поверхности σ.

Получим краевую задачу: определить функцию $u(x,y,z)$, удовлетворяющую уравнению (2.168) внутри объема Ω и принимающую в каждой точке M поверхности σ заданные значения

$$u\big|_{\sigma} = \psi(M). \quad (2.169)$$

Эта задача называется *задачей Дирихле* или *первой краевой задачей* для уравнения (2.168).

Если известен тепловой поток в каждой точке поверхности, который пропорционален $\frac{\partial u}{\partial n}$, но неизвестна температура на поверхности тела, то на поверхности σ вместо краевого условия (2.169) будет иметь место

$$\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{\sigma} = \psi'(M). \quad (2.170)$$

Получили *задачу Неймана* или *вторую краевую задачу*.

2. Потенциальное течение жидкости или газа. Уравнение неразрывности. Рассмотрим течение жидкости внутри объема Ω, ограниченного поверхностью σ (в частности, объем Ω может быть и неограниченным). Пусть скорость жидкости

$$\overline{\nu} = v_x \overline{i} + v_y \overline{j} + v_z \overline{k}, \quad (2.171)$$

где v_x, v_y, v_z – проекции вектора $\overline{\nu}$ на оси координат.

Выделим в теле Ω малый объем ω, ограниченный поверхностью s. За время Δt через каждый элемент Δs поверхности s пройдет количество жидкости

$$\Delta Q = \left(\bar{v}, \bar{n}\right) \Delta s \rho \Delta t,$$

где $\bar{n}$ – единичный вектор, направленный по внешней нормали к поверхности s;

ρ – плотность жидкости.

Общее количество жидкости Q, которое поступило в объем ω (или вытекло из объема ω), выразится интегралом

$$Q = \Delta t \iint_s \rho\left(\bar{v}, \bar{n}\right) \Delta s. \tag{2.172}$$

Количество жидкости в объеме ω в момент t

$$\iiint_\omega \rho d\omega.$$

За время Δt количество жидкости, *в силу изменения плотности*, изменится на величину

$$Q = \iiint_\omega \rho d\omega \approx t \iiint_\omega \frac{\partial \rho}{\partial t} d\omega. \tag{2.173}$$

Ввиду отсутствия источников в объеме ω это изменение вызвано притоком жидкости, количество которой определяется равенством (2.172). Из (2.172) и (2.173) следует

$$-\iint_s \rho(\bar{\nu}, \bar{n}) ds = +\iiint_\omega \frac{\partial \rho}{\partial t} d\omega. \tag{2.174}$$

Заменив двукратный интеграл, стоящий слева, по формуле Остроградского, получим:

$$-\iiint_\omega div(\rho \bar{\nu}) d\omega = +\iiint_\omega \frac{\partial \rho}{\partial t} d\omega$$

или

$$\iiint_\omega \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + div(\rho \bar{\nu}) \right) d\omega = 0.$$

В силу произвольности объема ω и непрерывности подынтегральной функции должны иметь

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + div(\rho \bar{\nu}) = 0 \tag{2.175}$$

или

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial t}(\rho v_x) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v_y) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho v_z) = 0. \qquad (2.175')$$

Получили *уравнение неразрывности течения сжимаемой жидкости*.

Если жидкость несжимаемая, то $\rho = const, \dfrac{\partial \rho}{\partial t} = 0$ и уравнение (2.175) примет вид

$$di\nu(\overline{\nu}) = 0. \qquad (2.176)$$

Если движение потенциальное, то есть вектор $\overline{v}$ есть градиент некоторой функции $\varphi(\overline{\mathrm{v}} = \overline{\mathrm{grad}}\overline{\varphi})$, то уравнение (2.176) принимает вид

$$\mathrm{div}\left(\overline{\mathrm{grad}\,\varphi}\right) = 0$$

или

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 0, \qquad (2.177)$$

то есть *потенциальная функция скорости φ должна удовлетворять уравнению Лапласа.*

В задачах фильтрации можно принять

$$\overline{v} = -k_1 \overline{\mathrm{grad}\, p},$$

где p – давление;

k – постоянное.

Тогда для определения давления получим *уравнение Лапласа*

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial z^2} = 0. \qquad (2.177')$$

Краевые условия уравнения (2.177) или (2.177’) могут быть следующими:

1. На поверхности σ задаются значения искомой функции p – условие 2 *(задача Дирихле)*.

2. На поверхности задаются σ задаются значения нормальной производной $\dfrac{\partial p}{\partial n}$ – условие 3 (*задача Неймана*).

3. На части поверхности задаются значения искомой функции p – давления, а на части поверхности задаются значения нормальной производной $\dfrac{\partial p}{\partial n}$ потока через поверхность (*задача Дирихле-Неймана*).

Если движение плоско-параллельное то есть функция φ (или p) не зависит от z, то получается уравнение Лапласа в двумерной области D с границей C:

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}=0\,. \tag{2.178}$$

Краевые условия типа (2.169) – задача Дирихле или типа (2.170) – задача Неймана задаются на контуре C.

2.4. Приближенные методы решения дифференциальных уравнений в частных производных методом конечных разностей

В качестве иллюстрации приведем пример решения задачи для уравнения теплопроводности.

Требуется найти решение уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial t}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\,, \tag{2.179}$$

удовлетворяющее краевым условиям

$$u(x,0)=\varphi\left(x\right),\, 0\le x\le L\,; \tag{2.180}$$

$$u(0,t)=\psi_2(t), 0\le t\le T\,, \tag{2.181}$$

$$u(l,t)=\psi_2(t), 0\le t\le T\,. \tag{2.182}$$

Определить решение $u(x,t)$ в прямоугольнике, ограниченном прямыми: t=0, x=0, x=L, t=T (рис. 2.4).

Значения искомой функции $u(x,t)$ на трех сторонах прямоугольника OL, OT, LE в силу (2.180), (2.181), (2.182) заданы.

Как и в случае обыкновенных дифференциальных уравнений, при решении уравнений с частными производными, методом конечных разностей производные заменяются соответствующими разностями (рис. 2.5):

$$\frac{\partial u}{\partial x}\approx\frac{u[(x+h),t]-u(x,t)}{h}\,; \tag{2.183}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}&\approx\frac{1}{h}\left[\frac{u[(x+h),t]-u(x,t)}{h}-\frac{u(x,t)-u[(x-h),t]}{h}\right]=\\&=\frac{u(x+h,t)-2u(x,t)+u(x-h,t)}{h^2},\end{aligned} \tag{2.184}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}\approx\frac{u(x,t+l)-u(x,t)}{l}\,. \tag{2.185}$$

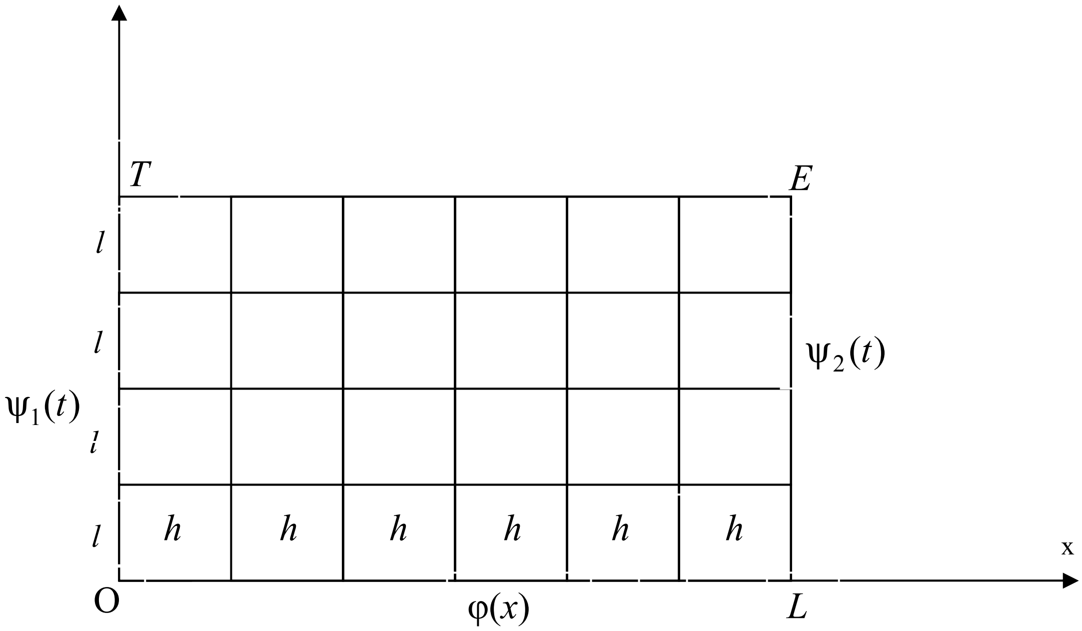


Рис. 2.4

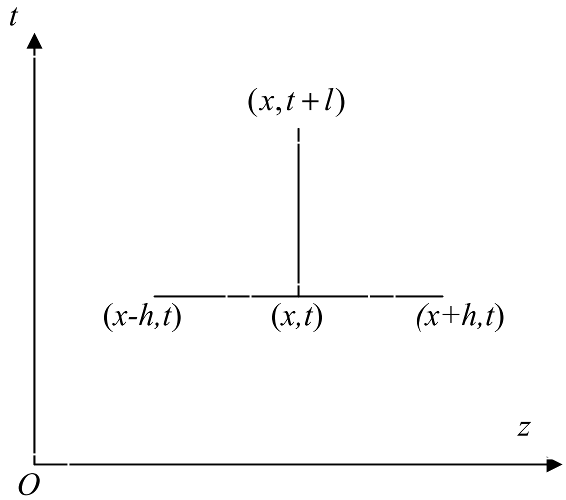


Рис.2.5

Подставляя (2.185), (2.184) в (2.179) получим:

$$\frac{u(x,t+l)-u(x,t)}{l}=a^2\frac{u(x+h,t)-2u(x,t)+u(x-h,t)}{h^2}. \qquad (2.186)$$

Покроем заданный прямоугольник *OTEL* сеткой (рис. 2.6), образованной прямыми

$$x=ih, i=1,2,...,n;$$

$$t=\kappa l, \kappa=1,2,...,m$$

$$(nh=l, ml=T).$$

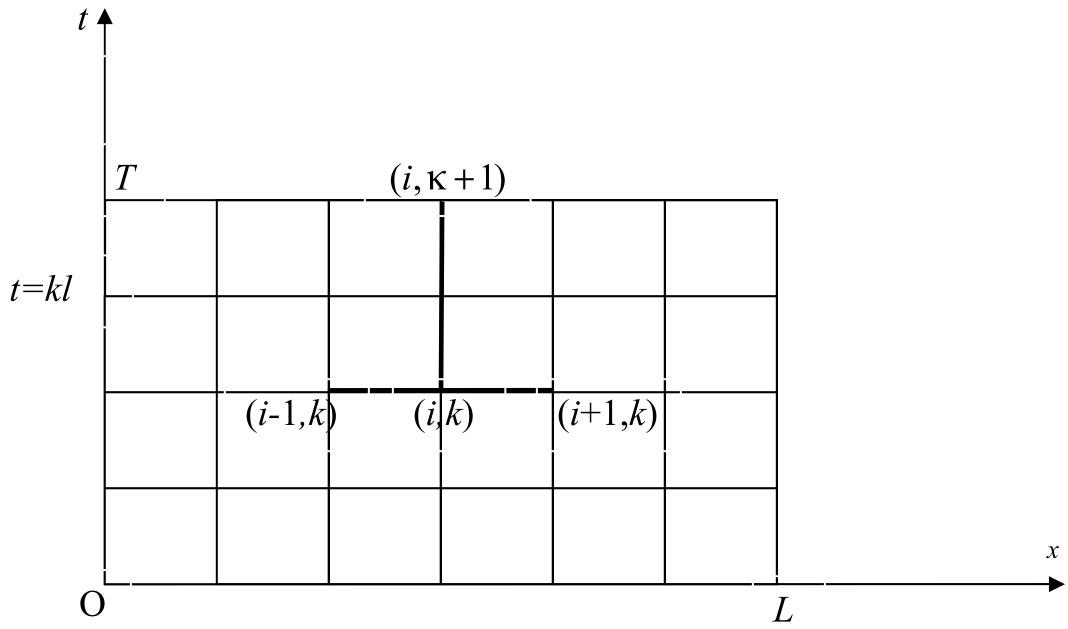


Рис. 2.6

Определяем приближенные значения $u(x,t)$ в узлах сетки, то есть в точках пересечения этих прямых:

$$u(ih,kl) = u_{i,k}\,. \tag{2.187}$$

Для точек (ih,kl) справедливо:

$$\frac{u(ih,(k+1)l) - u(ih,kl)}{l} = a^2\,\frac{u((i+1)h,kl) - 2u(ih,kl) + u((i-1)h,kl)}{h^2}$$

или с учетом (2.187):

$$\frac{u_{i,k+1} - u_{i,k}}{l} = \frac{a^2}{h^2}\left(u_{i+1,k} - 2u_{i,k} + u_{i-1,k}\right). \tag{2.188}$$

Из (2.188) следует:

$$u_{i,k+1} = u_{i,k} + \frac{la^2}{h^2}u_{i+1,k} - 2\frac{la^2}{h^2}u_{i,k} + \frac{la^2}{h^2}u_{i-1,k}$$

или

$$u_{i,k+1} = \left(1 - \frac{2la^2}{h^2}\right)u_{i,k} + \frac{la^2}{h^2}\left(u_{i+1,k} + u_{i-1,k}\right). \tag{2.189}$$

Из (2.189) следует, что если известны три значения в k-м ряду сетки $u_{i,k}, u_{i+1,k}, u_{i-1,k}$, то определится значение $u_{i,k+1}$ в $(k+1)$-м ряду. В силу (2.180)-(2.182) все значения на прямой t=0 известны, а именно:

$$u(ih,0) = u_{i,0} = \varphi(ih) \text{ при } i = 1,2,....,n-1;$$

$$u(0,0) = u_{i,0} = \psi_1(0) \text{ при } i = 0;$$
$$u(0,0) = u_{i,0} = \psi_2(0) \text{ при } i = n.$$

Поэтому из (2.189) следует:

$$u_{i,1} = \left(1 - \frac{2la^2}{h^2}\right)u_{i,0} + \frac{la^2}{h^2}\left(u_{i+1,0} + u_{i,0}\right), i = 1,2,...,n.$$

Зная $u_{i,1}$, по (2.189) далее определим

$$u_{i,2} = \left(1 - \frac{2la^2}{h^2}\right)u_{i,1} + \frac{la^2}{h^2}\left(u_{i+1,1} + u_{i-1,1}\right).$$

И так далее, пока не определим

$$u_{i,m} = \left(1 - \frac{2la^2}{h^2}\right)u_{i,m-1} + \frac{la^2}{h^2}\left(u_{i+1,m-1} + u_{i-1,m-1}\right).$$

Таким образом, значение $u(x,t)$ во всех *внутренних точках* отрезка $t = kl$ при $i = \overline{1, n-1}$ определяется по формуле (2.181), при $i = 0$ – по (2.181), при $i = n$ по (2.182).

Таким образом, ряд за рядом определятся значения искомого решения во всех узлах сетки.

Можно доказать, что приближенное решение уравнения (2.179) можно получить по (2.189) не при произвольном соотношении шагов h и l, а только при

$$l \le \frac{h^2}{2a^2}.$$

Формула (2.189) приобретает особенно простой вид, если принять

$$1 - \frac{2a^2 l}{h^2} = 0$$

или

$$l = \frac{h^2}{2a^2}.$$

В этом случае вместо (2.189) получим

$$u_{i,k+1} = \frac{1}{2}\left(u_{i+1,k} + u_{i-1,k}\right).$$

Контрольные вопросы

1. Определение дифференциального уравнения с частными производными. Порядок уравнения с частными производными. Общее решение. Начальные и граничные условия.
2. Линейное дифференциальное уравнение с частными производными, общее решение. Приведение к каноническому виду дифференциальных уравнений второго порядка с частными производными.
3. Классификация линейных уравнений с частными производными второго порядка (уравнения эллиптического, гиперболического и параболического типа).
4. Виды начальных и граничных условий.
5. Метод сеток.

3. ВРЕМЕННЫЕ РЯДЫ

Под временными рядами понимаются значения исследуемой величины (остаточная прочность строительного материала по годам эксплуатации; процесс разрушения декоративного покрытия; устойчивость материала во времени к радиационному воздействию и др.) *U(t)*, полученные через *одинаковые* интервалы времени (рис.3.1).

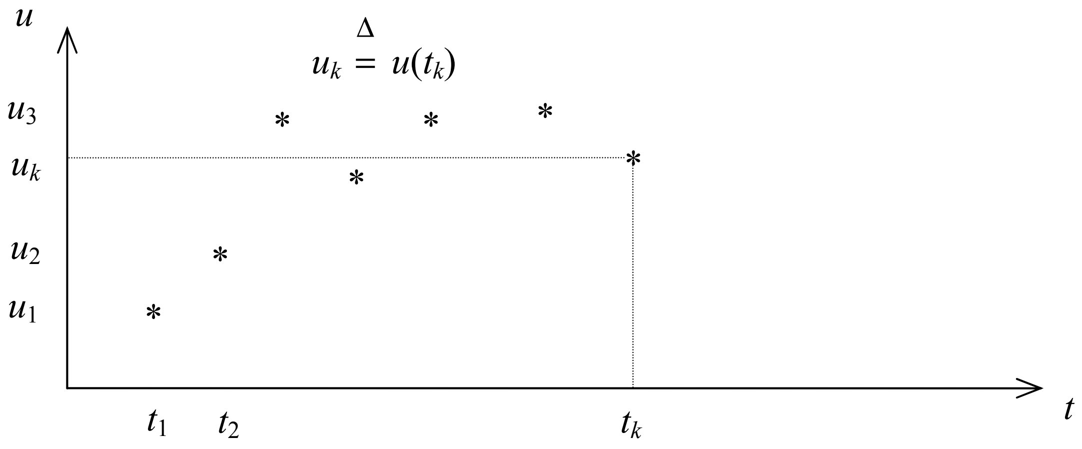


Рис. 3.1

Временные ряды имеют различную природу. В зависимости от вида решаемых задач временные ряды часто представляются как:

– стационарные случайные процессы (последовательности случайных величин, вероятностные свойства которых не изменяются во времени); используются в радиотехнике, метеорологии, сейсмологии и т.д.;

– диффузионные процессы (отражают взаимопроникновение жидкостей и газов);

– точечные процессы (описывают последовательности событий, например, поступление заявок на обслуживание); изучаются в теории массового обслуживания; стихийных и техногенных катастроф.

На основе практического изучения временного ряда выявляются свойства ряда, и определяется вероятностный механизм, порождающий этот ряд; строится модель временного ряда, определяется алгоритм предсказания будущих значений ряда на основе прошлых наблюдений; разрабатывается методика управления процессом, порождающим временной ряд.

Целью анализа временных рядов является описание, объяснение и прогнозирование поведения объекта на основе построения математических моделей. В модели выделяются две основные составляющие: детерминированная и случайная. Под *детерминированной составляющей* временного ряда $u_1, u_2, \ldots, u_N$ понимается числовая последовательность, элементы которой вычисляются по определенному правилу (как функция времени t). После исключения детерминированной составляющей получается колеблющийся вокруг нуля ряд, который может в одном предельном случае представлять чисто случайные скачки, а в другом – плавное колебательное движение. Детерминированная составляющая может содержать структурные компоненты:

– тренд $g(t)$, представляющий собой плавное изменение процесса во времени и обусловленный действием долговременных факторов;

– сезонный эффект $s(t)$, связанный с наличием факторов, действующих циклически с заранее известной периодичностью.

Случайная составляющая ряда отражает воздействие многочисленных факторов случайного характера и может иметь разнообразную структуру (белый шум, модели авторегрессии).

В общем случае временной ряд включает четыре компоненты:

– тренд или долгосрочное движение;

– колебания относительно тренда;

– сезонная компонента;

– случайная составляющая.

Тренд отражает действие постоянных долговременных факторов и носит плавный характер; объясняется наличием постоянных влияющих величин, а краткосрочные колебания относительно этого долгосрочного движения происходят по совокупности причин. В общем случае содержится некоторое возмущение, присущее случайным процессам. Существенным в понятии тренда является гладкость (возможность представления непрерывной и дифференцируемой функцией времени). Для описания тренда могут использоваться различные функции, в частности, полиномы невысокого порядка, гармонические функции и т.д.

Процедура выбора коэффициентов полинома состоит из этапов:

– весь временной ряд делится на группы из $(2m+1)$ первых членов ряда и подбирается полином для определения тренда в $(m+1)$-й средней точке группы;

– подбирается полином ко второй группе, состоящий из второго, третьего, ..., $(2m+1)$-го членов ряда и определяется тренд в $(m+2)$-й средней точке этой группы и т.д. до последней группы (в действительности нет необходимости подбора полинома каждый раз, поскольку эта процедура эквивалентна линейной комбинации членов ряда с коэффициентами, которые могут быть определены один раз).

Наряду с полиномиальными моделями используются (особенно в экономике) и другие:

– экспоненциальная модель $g\left(t\right)=e^{a_0+a_1 t}$ (описывает процесс с постоянным темпом прироста $\dfrac{\frac{dg}{dt}}{g}=a_1$);

– логистическая модель $g\left(t\right)=\dfrac{a_0}{1+a_1 e^{-\alpha t}}$ (описывает процесс, когда темп прироста изучаемой характеристики $\dfrac{\frac{dg}{dt}}{g}=\dfrac{k\left(a_0-g\right)}{a_0}$ линейно падает с увеличением g);

– модель Гомперца $g\left(t\right)=a_0 e^{-a_1 e^{-\alpha t}}$ (описывает процесс, в котором темп прироста $\dfrac{\frac{dg}{dt}}{g}=k\ln\left(\dfrac{a_0}{g}\right)=k\left(\ln a_0-\ln g\right)$ исследуемой характеристики пропорционален ее логарифму).

При подборе подходящей функциональной зависимости (спецификации тренда) весьма полезным является графическое представление временного ряда. Две последние модели задают кривые тренда *S*-образной формы, представляя процессы с нарастающим темпом роста в начальной стадии с постепенным замедлением в конце. Тренд, отражая действие долговременных факторов, является определяющим при построении долговременных прогнозов.

Сезонный эффект во временном ряде проявляется на фоне тренда и его выделение оказывается возможным после предварительной оценки тренда. Действительно, линейно растущий ряд помесячных данных будет иметь схожие эффекты в одноименных точках – наименьшее значение в январе и наибольшее в декабре; однако вряд ли здесь уместно говорить о сезонном эффекте: исключив линейный тренд, мы получим ряд, в котором сезонность полностью отсутствует. В то же время ряд, описывающий помесячные объемы продаж новогодних открыток, хотя и будет иметь такую же особенность (минимум продаж в январе и максимум в декабре) будет носить скорее всего колебательный характер относительно тренда, что позволяет специфицировать эти колебания как сезонный эффект. В простейшем случае сезонный эффект проявляется как строго периодическая зависимость. Тренд и сезонность обычно трудно отделить одно от другого.

Пример. Пусть требуется подобрать полином третьего порядка к группам по семь точек. Без потери общности примем, что рассматриваются моменты

$$t=\{-3;-2;-1;0;1;2;3\}.$$

Представим искомый полином в виде

$$\tilde{\hat{u}}_t = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3 .$$

Коэффициенты полинома a_0, a_1, a_2, a_3 могут быть найдены методом наименьших квадратов, т.е. путём минимизации:

$$I = \sum_{t=-3}^{3} \left(\tilde{u}_t - \tilde{\hat{u}}_t \right)^2 .$$

Дифференцирование по каждому из коэффициентов даёт четыре уравнения типа

$$\sum \tilde{u}_t t^j - a_0 \sum t^j - a_1 \sum t^{j+1} - a_2 \sum t^{j+2} - a_3 \sum t^{j+3} = 0,$$

где $j = 0, 1, 2, 3$.

Поскольку суммы нечётных порядков t от –3 до +3 равны 0, уравнения сводятся к виду

$$\begin{aligned}
\sum \tilde{u}_t &= 7a_0 + 28a_2 \\
\sum t\tilde{u}_t &= +28a_1 + 196a_3 \\
\sum t^2\tilde{u}_t &= 28a_0 + 196a_2 \\
\sum t^3\tilde{u}_t &= 196a_1 + 1588a_3
\end{aligned} \qquad (3.1)$$

Из первого и третьего уравнений в момент времени $t = 0$

$$\sum t\tilde{u}_t = \sum t^2\tilde{u}_t = \sum t^3\tilde{u}_t = 0$$

получим:

$$\tilde{\hat{u}}_t = a_0 = \frac{1}{21}\left[7\sum_{t=-3}^{3} \tilde{u}_t - \sum_{t=-3}^{3} t^2\, \tilde{u}_t \right] = \frac{1}{21}\Big[7\big(\tilde{u}_{-3} + \tilde{u}_{-2} + \tilde{u}_{-1} + \tilde{u}_0 +$$

$$+ \tilde{u}_1 + \tilde{u}_2 + \tilde{u}_3 \big) - \big(9\tilde{u}_{-3} + 4\tilde{u}_{-2} + \tilde{u}_{-1} + 0 + \tilde{u}_1 + 4\tilde{u}_2 + 9\tilde{u}_3 \big) \Big] =$$

$$= \frac{1}{21}\left[-2\tilde{u}_{-3} + 3\tilde{u}_{-2} + 6\tilde{u}_{-1} + 7\tilde{u}_0 + 6\tilde{u}_1 + 3\tilde{u}_2 - 2\tilde{u}_3 \right].$$

Следовательно, значение тренда в какой-либо точке равно средневзвешенному значению семи точек с данной точкой в качестве центральной и весами

$$\frac{1}{21}\ [\ -2;\ 3;\ 6;\ 7;\ 6;\ 3;\ -2\ ],$$

которые в силу симметрии можно записать короче:

$$\frac{1}{21}\ [\ -2;\ 3;\ 6;\ 7;\ ...\ ].$$

Такое средневзвешенное значение нескольких точек называется *скользящим средним.*

Предположим, что имеем ряд $u_t = (t - 1)^3$, который представлен в табл. 3.1.

Таблица 3.1

t	1	2	3	4	5	6	7	8
u_t	0	1	8	27	64	125	216	343

Значение тренда в точке $t = 4$ согласно описанной процедуре будет равно:

$$a_0 = \hat{u}_t = \frac{1}{21}\ (\ -2 \cdot 0 + 3 \cdot 1 + 6 \cdot 8 + 7 \cdot 27 + 6 \cdot 64 + 3 \cdot 125 - 2 \cdot 216\ ) =$$

$$= \frac{0+3+48+189+384+375-432}{21} = \frac{567}{21} = 27\,.$$

Аналогично можно определить значения весовых коэффициентов членов ряда в случае произвольного порядка p полинома, которые представлены в табл. 3.2.

Таблица 3.2

Число $2m$+1 членов в группе	Коэффициенты	
	второй и третий порядок полинома	четвёртый и пятый порядок полинома
5	$\frac{1}{35}$ [-3; 12; 17; ...]	-
7	$\frac{1}{21}$ [-2; 3; 6; 7; ...]	$\frac{1}{231}$ [5; -30; 75; 131; ...]
9	$\frac{1}{231}$ [-21; 14; 39; 54; 59; ...]	$\frac{1}{429}$ [15; -55; 30; 135; 179; ...]
11	$\frac{1}{429}$ [-36; 9; 44; 69; 84; 89; ...]	$\frac{1}{429}$ [18; -45; -10; 60; 120; 143; ...]

Для скользящих средних справедливо:

– сумма весов равна 1;

– значения весов симметричны относительно середины;

– значения тренда не зависят от направления отсчёта времени;

– значение a_0 не зависит от того, является ли полином степени $2k$ или $(2k+1)$;

– приведённая методика позволяет вычислять значения тренда для первых и последних m значений ряда;

– при чётном числе точек в группе могут быть получены значения тренда в серединах временных интервалов между наблюдениями.

Значения скользящих средних иногда более удобно определять через конечные разности:

$$\Delta u_t = u_{t+1} - u_t \,;$$

$$\Delta^2 u_t = u_{t+2} - 2\, u_{t+1} + u_t \text{ и т.д.}$$

Получим

$$\hat{u}_t = \frac{1}{21}\ [\ -2;\ 3;\ 6;\ 7;\ 6;\ 3;\ -2\ ] =$$

$$= \frac{1}{21}\ [\, -2\, u_{t+3} + 3\, u_{t+2} + 6\, u_{t+1} + 7\, u_t + 6\, u_{t-1} + 3\, u_{t-2} - 2\, u_{t-3}] =$$

$$= u_t - \frac{1}{21}\ [\ 9\,\Delta^4 + 9\,\Delta^5 + 2\,\Delta^6\ ]\, u_{t-3}.$$

Преимущество такой записи состоит в представлении в явном виде разности между рядом и трендом.

В частности, для рассмотренного примера $u_t = (t-1)^3$ конечные разности четвёртого и более высоких порядков равны 0. Поэтому $\hat{u}_t = u_t$.

Скользящее среднее можно также рассматривать как среднее разностей. Например (табл. 3.3),

$$\hat{u}_t = \frac{1}{21}\ [-2;\ 3;\ 6;\ 7;\ 6;\ 3;\ -2] =$$

$$= u_t + \frac{1}{21}\ [2\,\Delta^3 u_{t-3} + 3\,\Delta^3 u_{t-2} - 3\,\Delta^3 u_{t-1} - 2\,\Delta^3 u_t\ ] =$$

$$= u_t + \frac{1}{21}\ [\ 2;\ 3;\ -3;\ -2\ ]\,\Delta^3 u_{t-3} = u_t - \frac{1}{21}\ [\ 2;\ 5;\ 2\ ]\,\Delta^4 u_{t-3}$$

Таблица 3.3

Число $2m+1$ членов в группе	Выражение для $\hat{u}_t$	
	второй и третий порядок полинома	четвёртый и пятый порядок полинома
5	$u_3 - \frac{3}{35}\ [\ 1\ ]\,\Delta^4 u_1$	-
7	$u_4 - \frac{1}{21}\ [\ 2;\ 5;\ 2\ ]\,\Delta^4 u_2$	$u_4 + \frac{5}{231}\ [\ 1\ ]\,\Delta^6 u_1$
9	$u_5 - \frac{1}{231}\ [\ 21;\ 70;\ 115;\ 70;\ 21\ ]\,\Delta^4 u_3$	$u_5 + \frac{5}{429}\,[\ 3;\ 7;\ 3\ ]\,\Delta^6 u_2$
11	$u_6 - \frac{1}{429}\ [\ 36;\ 135;\ 280;\ 385;\ ...\ ]\,\Delta^4 u_4$	$u_6 + \frac{1}{429}\ [\ 18;\ 63;\ 98;\ 63;\ 18\ ]\,\Delta^6 u_3$

Пример. Вычислим значения конечных разностей и определим $\tilde{u}_t$ двумя приведёнными выше способами для ряда:

t	1	2	3	4	5	6	7
u_t	0	1	8	26	64	125	216

Справедливо:

t	u_t	Δu_t	$\Delta^2 u_t$	$\Delta^3 u_t$	$\Delta^4 u_t$	$\Delta^5 u_t$	$\Delta^6 u_t$
1	0	1	6	5	4	-10	20
2	1	7	11	9	-6	10	
3	8	18	20	3	4		
4	26	38	23	7			
5	64	61	30				
6	125	91					
7	216						

Вычислим значение $\tilde{u}_t$:

$$\tilde{u}_t = \frac{1}{21}\,[-2;\ 3;\ 6;\ 7;\ 6;\ 3;\ -2] =$$

$$= \frac{1}{21}\,[-2 \cdot 0 + 3 \cdot 1 + 8 \cdot 6 + 7 \cdot 26 + 64 \cdot 6 + 125 \cdot 3 - 216 \cdot 2] = 26\frac{2}{3}.$$

Аналогично

$$\hat{u}_t = u_t - \frac{1}{21}\,[\,9\,\Delta^4 + 9\,\Delta^5 + 2\,\Delta^6\,]\,u_{t-3} =$$

$$= 26 - \frac{1}{21}\,[\,9 \cdot 4 + 9 \cdot (-10) + 2 \cdot 20\,] = 26\frac{2}{3}.$$

Или

$$\hat{u}_t = u_t - \frac{1}{21}\,[\,2;\ 5;\ 2\,]\,\Delta^4 u_2 = 26 - \frac{1}{21}[\,2\,\Delta^4 u_1 + 5\,\Delta^4 u_2 + 2\,\Delta^4 u_3\,] =$$

$$= 26 - \frac{1}{21}\,[\,2 \cdot 4 + 5 \cdot (-6) + 2 \cdot 4\,] = 26\frac{2}{3}.$$

Указанные формулы не дают значений тренда для первых и последних членов ряда. Отсутствие этих значений в начале ряда не столь важно; иметь же их в конце, как правило, просто необходимо.

Значения $\hat{u}_t$ определяются через весовые коэффициенты a_1, a_2, a_3, которые находятся из системы (3.1):

$$a_1 = \frac{1}{1512}\left[397\sum_{t=-3}^{3} tu_t - 49\sum_{t=-3}^{3} t^3 u_t\right];$$

$$a_2 = \frac{1}{84}\left[-4\sum_{t=-3}^{3} tu_t + \sum_{t=-3}^{3} t^3 u_t\right];$$

$$a_3 = \frac{1}{216}\left[-7\sum_{t=-3}^{3} tu_t + \sum_{t=-3}^{3} t^3 u_t\right].$$

Выражая эти коэффициенты в виде скользящих средних семи последних членов, получим:

$$\hat{u}_t = \frac{1}{21}\ [-2;\ 3;\ 6;\ 7;\ 6;\ 3;\ -2] + \frac{1}{252}\ [22;\ -67;\ -58;\ 0;\ 58;\ 67;\ -22]\ t +$$
$$+\ \frac{1}{84}\ [5;\ 0;\ -3;\ -4;\ -3;\ 0;\ 5]\ t^2 + \frac{1}{36}\ [-1;\ 1;\ 1;\ 0;\ -1;\ -1;\ 1]\ t^3.$$

При t = 1, 2, 3 соответственно имеем:

$$\tilde{u}_1 = \frac{1}{42}\ [\ 1;\ -4;\ 2;\ 12;\ 19;\ 16;\ -4\ ];$$

$$\tilde{u}_2 = \frac{1}{42}\ [\ 4;\ -7;\ -4;\ 6;\ 16;\ -19;\ 8\ ];$$

$$\tilde{u}_3 = \frac{1}{42}\ [\ -2;\ 4;\ 1;\ -4;\ -4;\ 8;\ 39].$$

В частности, при последних семи членов ряда соответственно равных 0, 1, 8, 27, 64, 125, 216:

$$\tilde{\tilde{u}}_1 = \frac{1}{42}\ (1 \cdot 0 - 4 \cdot 1 + 2 \cdot 8 + 12 \cdot 27 + 19 \cdot 64 + 16 \cdot 125 - 4 \cdot 216) = 64;$$

$$\tilde{\tilde{u}}_2 = \frac{1}{42}\ (4 \cdot 0 - 7 \cdot 1 - 4 \cdot 8 + 6 \cdot 27 + 16 \cdot 64 + 19 \cdot 125 - 8 \cdot 216) = 125;$$

$$\tilde{\tilde{u}}_3 = \frac{1}{42}\ (-2 \cdot 0 + 4 \cdot 1 + 1 \cdot 8 - 4 \cdot 27 - 4 \cdot 64 + 8 \cdot 125 + 39 \cdot 216) = 216.$$

Рассмотрим далее, как влияет исключение тренда с помощью скользящего среднего на случайные колебания, которые могут присутствовать в исходном ряде.

Усреднение обычно приводит к уменьшению дисперсии колебаний. Члены ряда, полученного в результате усреднения, в общем случае *не являются независимыми*.

Для членов u_t и u_{t+k} *сериальные коэффициенты корреляции* порядка k определяются в виде:

$$r_k = \frac{\frac{1}{n-k}\sum_{i=1}^{k}(u_i - \overline{u})\,(u_{i+k} - \overline{u})}{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k}(u_i - \overline{u})^2}.$$

Для приведённого выше примера (табл. 3.4):

$$\overline{u} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} u_i = \frac{1}{7}\ (0 + 1 + 8 + 27 + 64 + 125 + 216) = 63.$$

Таблица 3.4

t	u_i	$u_i - \overline{u}$	$(u_i - \overline{u})^2$
1	0	- 63	3969
2	1	- 62	3844
3	8	- 55	3025
4	27	- 36	1296
5	64	1	1
6	125	62	3844
7	216	153	23409
$\sum$	441		39388

Имеем

$$r_1 = \frac{\frac{1}{7-1}\left[(-63)(-62)+(-62)(-55)+(-55)(-36)-36\cdot 1+1\cdot 62+62\cdot 153\right]}{\frac{1}{7}\cdot 39388} = 0{,}56;$$

$$r_2 = \frac{\frac{1}{7-2}\left[(-63)(-55)+(-62)(-36)+(-55)\cdot 1-36\cdot 62+1\cdot 153\right]}{\frac{1}{7}\cdot 39388} = 0{,}13\,.$$

Если ряд рассматривается как генеральная совокупность бесконечной длины, то говорят об *автокорреляциях* ρ_k. Можно показать:

$$\rho_k = \frac{\sum_{i=1}^{2m+1-k} a_i a_{i+k}}{\sum_{i=1}^{2m+1} a_i^2}.$$

Для того же примера

$$\sum_{i=1}^{2m+1} a_i^2 = (-2)^2 + 3^2 + 6^2 + 7^2 + 6^2 + 3^2 + (-2)^2 = (4 + 9 + 36) \cdot 2 + 49 = 147,$$

$$\rho_1 = \frac{-2\cdot 3 + 3\cdot 6 + 6\cdot 7 + 7\cdot 6 + 6\cdot 3 + 3\cdot(-2)}{147} = \frac{2(-6+18+42)}{147} = 0,73.$$

Аналогично

$$\rho_2 = \frac{-2\cdot 6 + 3\cdot 7 + 6\cdot 6 + 7\cdot 3 + 6\cdot(-2)}{147} = \frac{54}{147} = 0,37.$$

Если ряд имеет постоянное среднее (тренд исключен) и колеблется вокруг среднего с постоянной дисперсией, то этот *ряд стационарен* как по среднему, так и по дисперсии. Тогда

$$M[x_t] = \mu;$$

$$M[x_t - \mu]^2 = D[x_t] = \sigma^2;$$

$$M[(x_t - \mu)(x_{t+k} - \mu)] = \gamma_k, \text{ } k\text{-я автоковариация;}$$

$$\frac{M\left[(x_t - \mu)(x_{t+k} - \mu)\right]}{M\left[x_t - \mu\right]^2} = \frac{\gamma_k}{\sigma^2}, \text{ } k\text{-я автокорреляция.}$$

Как и в теории вероятностей, здесь математическое ожидание рассматривается как среднее значение случайной величины. Однако в этом случае математическое ожидание оценивается не по множеству значений, извлечённых случайным образом из вероятностного распределения X, а по множеству X_t, которые имеют одно и то же одномерное распределение, но при этом *коррелированы.*

Если ряд является выборкой из всех рядов такой же длины, сгенерированных тем же «механизмом», то её можно рассматривать как *реализацию* изучаемого «механизма» (*стохастического* процесса). Параметры стохастического процесса можно определить по одной его реализации.

При изучении кинетических процессов представляет интерес определение значения ряда в момент t через прошлые значения (*систематическая зависимость от прошлой истории*), а также значения «возмущения» ε в момент t. Решение этой задачи связано с изучением *авторегрессионных процессов* порядка k с постоянными коэффициентами вида

$$x_{t+k} + \alpha_1 x_{t+k-1} + \alpha_2 x_{t+k-2} + \ldots + \alpha_k x_t = \varepsilon_{t+k}$$

или (полагая $k = 0$)

$$x_t = -\alpha_1 x_{t-1} - \alpha_2 x_{t-2} - \alpha_3 x_{t-3} - \ldots - \alpha_k x_{t-k} + \varepsilon_t.$$

Последнее выражение можно рассматривать как регрессию x_t на x_{t-1}, x_{t-2}, ... со случайным остатком ε_t. Рассмотрим подробнее два наиболее важных частных случаев.

Марковский процесс. Этот *наипростейший авторегрессионный процесс*, отличный от чисто случайного ряда, определяется выражением

$$x_t = -\alpha_1 x_{t-1} + \varepsilon_t.$$

Умножив это выражение на x_{t-1} и беря математические ожидания, получим:

$$M[x_t x_{t-1}] = M[(-\alpha_1 x_{t-1} + \varepsilon_t) x_{t-1}].$$

Если ε имеет нулевое среднее, то такое же нулевое среднее имеет и x. При этом

$$M[(x_t - \mu)(x_{t-1} - \mu)] = \alpha_1 M[(x_{t-1} - \mu)^2],$$

или

$$-\alpha_1 = \frac{M\left[\left(x_t - \mu\right)\left(x_{t-1} - \mu\right)\right]}{M\left[\left(x_{t-1} - \mu\right)^2\right]} = \rho.$$

Следовательно,

$$x_t = \rho\, x_{t-1} + \varepsilon_t = \varepsilon_t + \rho\, x_{t-1} = \varepsilon_t + \rho\, x_{t-1} + \rho^2 x_{t-2} = \ldots$$

Для ряда, имеющего бесконечное прошлое:

$$x_t = \sum_{j=0}^{\infty} \rho^j \varepsilon_{t-j}$$

(x_t представляется как скользящее среднее с бесконечной длиной отрезка усреднения; сумма весов равна $\frac{1}{1-\rho}$).

Для марковского процесса все корреляции можно выразить через первую автокорреляцию ρ:

$$\rho_k = \rho^k$$

(совокупность значений ρ_k, как и их представление на графике, называется *коррелограммой*).

Процесс Юла. Авторегрессионный процесс Юла определяется как

$$x_t = -\alpha_1 x_{t-1} - \alpha_2 x_{t-2} + \varepsilon_t. \tag{3.2}$$

Как и в марковском процессе ε_t независима от x_{t-1} и x_{t-2}.

Умножая это уравнение последовательно на x_{t-1} и x_{t-2} и беря математические ожидания, получим:

$$\begin{cases} \rho_1 + \alpha_1 + \alpha_2\rho_1 = 0; \\ \rho_2 + \alpha_1\rho_1 + \alpha_2 = 0. \end{cases}$$

Откуда

$$\rho_1 = -\frac{\alpha_1}{1+\alpha_2};$$

$$\rho_2 = -\alpha_2 + \frac{\alpha_1^2}{1+\alpha_2},$$

или

$$\alpha_1 = -\frac{\rho_1(1-\rho_2)}{1-\rho_1^2};$$

$$\alpha_2 = -1 + \frac{1-\rho_2}{1-\rho_1^2} = -\frac{\rho_2-\rho_1^2}{1-\rho_1^2}.$$

И, вообще, умножая выражение (3.2) на x_{t-k} ($k \geq 1$), получим ряд уравнений

$$\rho_k + \alpha_1 \rho_{k-1} + \alpha_2 \rho_{k-2} = 0.$$

Они могут быть использованы для выражения ρ более высоких порядков через первые две автокорреляции, которые полностью определяют коррелограмму.

Для стационарности процесса Юла должны соблюдаться условия:

$$|\alpha_1| < 2;$$

$$-\alpha_2 < 1 - |\alpha_1|.$$

Коэффициенты α_j *общего линейного авторегрессионного процесса* определяются из так называемых *уравнений Юла-Уолкера:*

$$\begin{aligned}
&\alpha_1 + \rho_1 \alpha_2 + \rho_2 \alpha_3 + \ldots + \rho_{h-1} \alpha_h = -\rho_1\\
&\rho_1 \alpha_1 + \alpha_2 + \rho_2 \alpha_3 + \ldots + \rho_{h-2} \alpha_h = -\rho_2\\
&\rho_2 \alpha_1 + \rho_1 \alpha_2 + \alpha_3 + \ldots + \rho_{h-3} \alpha_h = -\rho_3\\
&\ldots\\
&\rho_{h-1} \alpha_1 + \rho_{h-2} \alpha_2 + \rho_{h-3} \alpha_3 + \ldots + \alpha_h = -\rho_h .
\end{aligned}$$

Как видим, все автокорреляции ряда определяются первыми h автокорреляциями.

Значения автокорреляций определяются в виде:

$$\rho_k = \frac{\gamma_k}{\sigma^2},\ k = \overline{1,h},\ h \leq \frac{N}{4},$$

где N – число членов ряда;

$$\sigma^2 = \frac{1}{N}\sum_{t=1}^{N}\left(x_t - \mu\right)^2 = \frac{1}{N}\sum_{t=1}^{N} x_t^2\,;$$

$$\gamma_k = \frac{1}{N}\sum_{t=1}^{N-k}\left(x_t - \mu\right)\left(x_{t+k} - \mu\right) = \frac{1}{N}\sum_{t=1}^{N-k} x_t x_{t+k}\,.$$

Для авторегрессионной модели порядка h

$$x_t = -\,\alpha_1\, x_{t\text{-}1} - \alpha_2\, x_{t\text{-}2} - \ldots - \alpha_h\, x_{t\text{-}h}$$

справедлива рекуррентная формула, позволяющая определить оценку α_{h+1} для модели порядка (h + 1) по оценкам $\alpha_j(h)$ (*алгоритм Левинсона-Дурбина*):

$$\alpha_{h+1} = \frac{\sigma^2}{\sigma_e^2}\left[\rho_{h+1} + \sum_{j=1}^{h}\alpha_j\left(h\right)\rho_{h+1-j}\right].$$

Здесь $\sigma_e^2 = M\left[e_o\ e_t\right] = 1 + \sum_{j=1}^{h}\alpha_j\,\rho_j$ – дисперсия *случайного остатка*

$$e_t = x_t - \hat{x}_t\,;\ \rho_{h+1} = \frac{\dfrac{1}{N}\displaystyle\sum_{t=1}^{N-(p-1)} x_t\, x_{t+p+1}}{\dfrac{1}{N}\displaystyle\sum_{t=1}^{N} x_t^2}\,.$$

В этом случае модель порядка (h + 1) будет иметь вид

$$x_t = -\,\alpha_1\, x_{t\text{-}1} - \alpha_2\, x_{t\text{-}2} - \ldots - \alpha_h\, x_{t\text{-}h} - \alpha_{h+1}\, x_{t\text{-}(h+1)}.$$

Если авторегрессионная модель имеет истинный порядок, равный h, то должно выполняться условие

$$\alpha_m\left(h\right) = \begin{cases} \neq 0, & \text{если} \leq h; \\ = 0, & \text{если} > h \end{cases}$$

(что даёт *условие проверки* правильности выбранного *порядка модели*).

Для проверки правильности выбранного порядка модели при h=2 следует определить

$$\rho_3 = \frac{\dfrac{1}{N}\displaystyle\sum_{t=1}^{N-3} x_t\, x_{t+3}}{\dfrac{1}{N}\displaystyle\sum_{t=1}^{N} x_t^2},\ \ \alpha_3 = \frac{\sigma^2}{1 + \left(\alpha_1\,\rho_1 + \alpha_2\,\rho_2\right)}\left[\rho_3 + \left(\alpha_1\,\rho_2 + \alpha_2\,\rho_1\right)\right].$$

Если α_3 = 0, то можно считать, что

$$x_t = -\,\alpha_1\, x_{t\text{-}1} - \alpha_2\, x_{t\text{-}2}.$$

Изложенное выше приводит к следующим алгоритмам построения моделей кинетических процессов (временных рядов) по данным нормального функционирования.

Алгоритм составления авторегрессионной модели (АР-модели):

1. Определение дискретных центрированных значений

$$\{ x_t \} = \{ x(\Delta t), ..., x(N \Delta t) \} = \{ x_1, x_2, ..., x_N \}$$

(при использовании нецентрированных значений обязательно последующее центрирование с предварительным определением скользящих средних).

2. Вычисление оценок автоковариаций с задержкой k:

$$\hat{\gamma}_0 = M\left[x_t^2\right] = \sigma_x^2 = \frac{1}{N}\sum_{t=1}^{N} x_t^2 ;$$

$$\hat{\gamma}_k = M\left[x_t\, x_{t+k}\right] = \frac{1}{N}\sum_{t=1}^{N-k} x_t\, x_{t+k}, \qquad k = \overline{1, p}$$

(p предварительно следует задать).

3. Вычисление коэффициентов автокорреляции с задержкой k:

$$r_k = \frac{\hat{\gamma}_k}{\hat{\gamma}_0}; \quad k = \overline{1, p}; \quad p \le \frac{N}{4}; \ \hat{r}_0 = 1.$$

4. Решение системы *уравнений Юла-Уолкера* (относительно $\hat{a}_1, \hat{a}_2, \ldots, \hat{a}_p$):

$$\begin{gathered}
\hat{a}_1 + \hat{r}_1\hat{a}_2 + \hat{r}_2\hat{a}_3 + \ldots + \hat{r}_{p-1}\hat{a}_p = \hat{r}_1; \\
\hat{r}_1\hat{a}_1 + \hat{a}_2 + \hat{r}_1\hat{a}_3 + \ldots + \hat{r}_{p-2}\hat{a}_p = \hat{r}_2; \\
\hat{r}_2\hat{a}_1 + \hat{r}_1\hat{a}_2 + \hat{a}_3 + \ldots + \hat{r}_{p-3}\hat{a}_p = \hat{r}_3; \\
\ldots \\
\hat{r}_{p-1}\hat{a}_1 + \hat{r}_{p-2}\hat{a}_2 + \hat{r}_{p-3}\hat{a}_3 + \ldots + \hat{a}_p = \hat{r}_p.
\end{gathered}$$

В матричной форме

$$pA = R,$$

где

$$p = \begin{bmatrix} 1 & \hat{r}_1 & \hat{r}_2 & \ldots & \hat{r}_{p-1} \\ \hat{r}_1 & 1 & \hat{r}_1 & \ldots & \hat{r}_{p-2} \\ & & \ldots & & \\ \hat{r}_{p-1} & \hat{r}_{p-2} & \hat{r}_{p-3} & \ldots & 1 \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} \hat{a}_1 \\ \hat{a}_2 \\ \vdots \\ \hat{a}_p \end{bmatrix}, \quad R = \begin{bmatrix} \hat{r}_1 \\ \hat{r}_2 \\ \vdots \\ \hat{r}_p \end{bmatrix}.$$

Оценка искомых коэффициентов $\hat{a}_j$ получится в виде

$$A = p^{-1} R.$$

Искомая АР-модель будет иметь вид

$$x_t = \hat{a}_1 x_{t-1} + \hat{a}_2 x_{t-2} + \ldots + \hat{a}_p x_{t-p}.$$

Для АР-модели 2-го порядка

$$\hat{a}_1 = \frac{\hat{r}_1(1-\hat{r}_2)}{1-\hat{r}_1^2}; \quad \hat{a}_2 = \frac{\hat{r}_2 - \hat{r}_1^2}{1-\hat{r}_1^2}; \quad \hat{\gamma}_0 = \frac{1}{N}\sum_{t=1}^{N} x_t^2; \quad \hat{\gamma}_1 = \frac{1}{N}\sum_{t=1}^{N-1} x_t x_{t+1};$$

$$\hat{\gamma}_2 = \frac{1}{N}\sum_{t=1}^{N-2} x_t x_{t+2}; \quad \hat{r}_1 = \frac{\hat{\gamma}_1}{\hat{\gamma}_0}; \quad \hat{r}_2 = \frac{\hat{\gamma}_2}{\hat{\gamma}_0}.$$

Откуда искомая модель

$$x_t = \hat{a}_1 x_{t-1} + \hat{a}_2 x_{t-2}.$$

Рассмотрим далее определение оценки $\hat{a}_{p+1}$ по оценкам $\hat{a}_j(p)$ (*алгоритм Левинсона-Дурбина*).

Пусть решением уравнения Юла-Уолкера определена АР-модель порядка p:

$$x_t = \hat{a}_1 x_{t-1} + \hat{a}_2 x_{t-2} + \ldots + \hat{a}_p x_{t-p}.$$

Для определения $\hat{a}_p$ справедлива рекуррентная формула

$$\hat{a}_{p+1} = \frac{\hat{\gamma}_0}{\sigma_e^2}\left[\hat{r}_{p+1} - \sum_{j=1}^{p} \hat{a}_j(p)\hat{r}_{p+1-j}\right],$$

где

$$\hat{r}_{p+1} = \frac{\dfrac{1}{N}\displaystyle\sum_{t=1}^{N-(p+1)} x_t x_{t+p+1}}{\dfrac{1}{N}\displaystyle\sum_{t=1}^{N} x_t^2} = \frac{\hat{\gamma}_{p+1}}{\hat{\gamma}_0}.$$

Модель $(p+1)$-го порядка будет иметь вид

$$x_t = \hat{a}_1 x_{t-1} + \hat{a}_2 x_{t-2} + \ldots + \hat{a}_{p+1} x_{t-(p+1)}.$$

Если АР-модель имеет истинный порядок, равный m, должно выполняться

$$a_m(p) = \begin{cases} \neq 0, & m \le p; \\ = 0, & m > p. \end{cases}$$

Это даёт условие проверки правильности выбранного порядка модели.

В частности, для проверки правильности выбора порядка модели при $p = 2$ следует определить

$$\hat{r}_3 = \frac{\frac{1}{N}\sum_{t=1}^{N-3} x_t x_{t+3}}{\hat{\gamma}_0};$$

$$\hat{a}_3 = \frac{\hat{\gamma}_0}{1-\left(\hat{a}_1\hat{r}_1 + \hat{a}_2\hat{r}_2\right)}\left[\hat{r}_3 - \left(\hat{a}_1\hat{r}_1 + \hat{a}_2\hat{r}_2\right)\right].$$

Если $\hat{a}_3 = 0$, то можно считать, что

$$x_t = \hat{a}_1 x_{t-1} + a_2 x_{t-2}.$$

Дисперсия оценки $\{x_t\}$ по МНК определится в виде:

$$\hat{\sigma}^2(p) = \frac{1}{N}\sum_{t=1}^{N}\left[x_t - \sum_{j=1}^{p}\hat{a}_j\hat{r}_{t-j}\right]^2.$$

Оказывается, при $N \to \infty$

$$M\left[\hat{\sigma}^2(p)\right] \to \left[1-\frac{p+1}{N}\right]\sigma_e^2.$$

Поэтому естественно принять

$$\hat{\sigma}_e^2 = \frac{\sigma^2(p)}{1-\frac{p+1}{N}} = \frac{N}{N-(p+1)}\sigma^2(p).$$

Оценку порядка p для АР-модели можно получить из условия

$$\frac{N+p+1}{N-m-1}\,\hat{\sigma}^2(p) = \min_m \frac{N+m+1}{N-m-1}\,\hat{\sigma}^2(m),\; m = \overline{o, L},$$

где L – установленный предельный порядок модели.

Таким образом,

$$\sigma_e^2 = \frac{1}{N-(p+1)}\sum_{t=1}^{N}\left[x_t - \sum_{j=1}^{p}\hat{a}_j x_{t-j}\right]^2.$$

Справедлива формула для оценки *энергетического спектра*

$$G_{xx}(f) = \frac{2\sigma_e^2}{\left|1-\sum_{k=1}^{p}\hat{a}_k\, e^{-j2\pi f}\right|^2}.$$

В частности, при $p = 2$

$$G_{xx}(f)=\frac{2\sigma_e^2}{1+\hat{a}_1^2+\hat{a}_2^2-2\hat{a}_1(1-\hat{a}_2)\cos 2\pi f-2\hat{a}_2\cos 4\pi f}=\frac{2\sigma_e^2}{F};$$

$$\sigma_x^2=\frac{1-\hat{a}_2}{1+\hat{a}_2}\,\frac{\sigma_e^2}{(1-\hat{a}_2)^2-\hat{a}_1^2};\quad G_{xx}(f)=\frac{1}{F}\,\frac{(1+\hat{a}_2)\left[(1-\hat{a}_2)^2-\hat{a}_1^2\right]}{1-\hat{a}_2}.$$

Рассмотрим далее построение *авторегрессионной модели со скользящим средним (АРСС-модели*). Здесь модель представляется в виде

$$x_t=a_1x_{t-1}+\ \dots\ +\hat{a}_px_{t-p}+e_t+b_1e_{t-1}+\ \dots\ +b_qe_{t-q}.$$

Введя

$$A\,(z^{-1}) = 1 - a_1 z^{-1} - \dots - a_p z^{-p};$$
$$B\,(z^{-1}) = 1 + b_1 z^{-1} + \dots + b_q z^{-p}.$$

получим

$$A\,(z^{-1})\,x_t = B\,(z^{-1})\,e_t.$$

Определение $\hat{a}_1,\hat{a}_2,\dots,\hat{a}_p,\ \hat{b}_1,\hat{b}_2,\dots,\hat{b}_q$ осуществляется с помощью *модифицированной системы уравнений Юла-Уолкера*

$$\hat{r}_q\hat{a}_1+\hat{r}_{q-1}\hat{a}_2+\dots+\hat{a}_{q+1}+\hat{r}_1\hat{a}_{q+2}+\dots+\hat{r}_{p-(q+1)}\hat{a}_p=\hat{r}_{q+1};$$

$$\hat{r}_{q+(p-1)}\hat{a}_1+\hat{r}_{q+(p-2)}\hat{a}_2+\dots+\hat{r}_{p-1}\hat{a}_{q+1}+\hat{r}_{p-2}\hat{a}_{q+2}+\dots+\hat{r}_q\hat{a}_p=\hat{r}_{q+p}$$

или, введя

$$p_M=\begin{bmatrix} \hat{r}_q & \hat{r}_{q-1} & \dots & \hat{r}_1 & 1 & \hat{r}_1 & \dots & \hat{r}_{p-(q+1)} \\ \hat{r}_{q+1} & \hat{r}_q & \dots & \hat{r}_2 & \hat{r}_2 & 1 & \dots & \hat{r}_{p-(q+2)} \\ & & & \dots & & & & \\ \hat{r}_{q+(p-1)} & \hat{r}_{q+(p-2)} & \dots & \hat{r}_p & \hat{r}_{p-1} & \hat{r}_{p-2} & \dots & \hat{r}_p \end{bmatrix},$$

$$A=\begin{bmatrix}\hat{a}_1\\ \hat{a}_2\\ \vdots\\ \hat{a}_p\end{bmatrix};\quad R_M=\begin{bmatrix}\hat{r}_{q+1}\\ \hat{r}_{q+2}\\ \vdots\\ \hat{r}_{q+p}\end{bmatrix},$$

получим

$$\hat{A}=p_M^{-1}R_M.$$

Чтобы оценить параметры скользящего среднего, введём

$$\tilde{x}_t\overset{\Delta}{=}x_t-\sum_{j=1}^{p}\hat{a}_jx_{t-j}.$$

Тогда

$$\tilde{x}_t \approx e_t + b_1\, e_{t-1} + \ldots + b_q\, e_{t-q}.$$

Получили СС-модель процесса $\tilde{x}_t$.

Автокорреляция $\hat{r}_k$ для $\tilde{x}_t$:

$$\hat{r}_k = \begin{cases} \left(1 + b_1^2 + \ldots + b_q^2\right)\dfrac{\sigma_e^2}{\hat{\tilde{\gamma}}}, k = 0; \\ \left(b_0 b_k + b_1 b_{k+1} + \ldots + b_{q-k} b_q\right)\dfrac{\sigma_e^2}{\hat{\tilde{\gamma}}}, k = \overline{1, q}; \\ 0,\ k > q; \\ b_0 = 1. \end{cases}$$

Пусть оценки $\hat{a}_j$, $j = \overline{1, p}$, уже определены решением уравнения

$$A = p_M^{-1}\, R_M.$$

Пусть затем определены значения

$$\tilde{x}_t = x_t - \sum_{j=1}^{p} \hat{a}_j x_{t-j}\,.$$

Определим

$$r_k = \frac{\dfrac{1}{N}\sum\limits_{t=1}^{N-k} \tilde{x}_t\ \tilde{x}_{t+k}}{\dfrac{1}{N}\sum\limits_{t=1}^{N} \tilde{x}_t^2}, \quad k = \overline{1, q} \quad \left(\tilde{r}_0 = 1\right).$$

Тогда для определения $\hat{b}_1, \hat{b}_2, \ldots, \hat{b}_q$, σ_e^2 получим уравнения

$$\left(1 + \hat{b}_1^2 + \ldots + \hat{b}_q^2\right)\hat{\sigma}_e^2 = \hat{\tilde{\gamma}}_0\,;$$

$$\left(\hat{b}_0 \hat{b}_1 + \hat{b}_1 \hat{b}_2 + \ldots + \hat{b}_{q-1} \hat{b}_q\right)\hat{\sigma}_e^2 = \hat{\tilde{r}}_1 \hat{\tilde{\gamma}}_0\,;$$

$$\ldots$$

$$\left(\hat{b}_0 \hat{b}_{q-1} + \hat{b}_1 \hat{b}_q\right)\hat{\sigma}_e^2 = \hat{\tilde{r}}_{q-1} \hat{\tilde{\gamma}}_0\,;$$

$$\left(\hat{b}_0 \hat{b}_q\right)\hat{\sigma}_e^2 = \hat{\tilde{r}}_q \hat{\tilde{\gamma}}_0\,.$$

Отметим, что эти уравнения *нелинейны.*

В частности, для $q = 2$ получим:

$$\left(1+\hat{b}_1^2+\hat{b}_2^2\right)\hat{\sigma}_e^2=\hat{\tilde{\gamma}};$$

$$\frac{\hat{b}_1\left(1+\hat{b}_2\right)}{1+\hat{b}_1^2+\hat{b}_2^2}=\hat{\tilde{r}}_1,\ \frac{\hat{b}_2}{1+\hat{b}_1^2+\hat{b}_2^2}=\hat{\tilde{r}}_2\,.$$

Откуда

$$\hat{b}_1=\frac{\hat{\tilde{r}}_1\hat{\tilde{\gamma}}_0}{\hat{\sigma}_e^2+\hat{\tilde{r}}_2\hat{\tilde{\gamma}}_0};\ \ \hat{b}_2=\frac{\hat{\tilde{r}}_2\hat{\tilde{\gamma}}_0}{\hat{\sigma}_e^2};$$

$$\hat{\tilde{D}}^4+\left[\hat{\tilde{\gamma}}_0\left(2\hat{\tilde{r}}_2-1\right)\right]\hat{\tilde{D}}^3+\left[\hat{\tilde{r}}_1^2+2\hat{\tilde{r}}_2\left(\hat{\tilde{r}}_2-1\right)\hat{\tilde{\gamma}}_0^2\right]\hat{\tilde{D}}^2+$$

$$+\left[\hat{\tilde{r}}_2^2+\left(2\hat{\tilde{r}}_2-1\right)\hat{\tilde{\gamma}}_0^3\right]\hat{\tilde{D}}+\hat{\tilde{r}}_2^4\,\hat{\tilde{\gamma}}_0^4=0,\quad\left(\hat{\tilde{D}}=\hat{\tilde{\sigma}}_e^2\right).$$

Определив $\hat{b}_1,\hat{b}_2,\ldots,\hat{b}_q$ по найденному значению $\hat{\tilde{D}}$, получим модель СС-процесса $\tilde{x}_t$:

$$\tilde{x}_t=e_t+\hat{b}_1e_{t-1}+\ldots+\hat{b}_qe_{t-q}\,.$$

Окончательно получим *АРСС-модель процесса* x_t в виде

$$x_t=\hat{a}_1x_{t-1}+\ldots+\hat{a}_px_{t-p}+e_t+\hat{b}_1e_{t-1}+\ldots+\hat{b}_qe_{t-q}\,.$$

Определение $\tilde{r}_k$ производится на основе формул

$$\tilde{\gamma}_k=\sum_{i=0}^{p}\sum_{j=0}^{p}\hat{a}_i\,\hat{a}_j\,\gamma_{k+j-i};\quad \hat{a}_0=1;\quad \tilde{r}_k=\frac{\tilde{\gamma}_k}{\tilde{\gamma}_0}.$$

Контрольные вопросы

1. Структура временного ряда.
2. Тренд.
3. Скользящее среднее.
4. Марковский процесс.
5. Процесс Юла.
6. АР-модель; определение порядка.
7. АРСС-модель.
8. Алгоритм Юла-Уолкера.

4. СИСТЕМЫ МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ

Система, в которую поступают объекты, нуждающиеся в обслуживании, называется «*обслуживающей системой*», а сами объекты носят название «*требований*» или «*заявок*». Объектами могут быть письма на подпись; автомашины для парковки; суда, подлежащие разгрузке; детали для сборки; люди, ожидающие обслуживания в магазине, парикмахерской и т.д. Если требования в систему поступают «слишком часто», то им приходится ожидать обслуживания или обходиться без него. Если же, напротив, требования поступают слишком редко, то ожидать (т.е. простаивать) придется средствам или каналам обслуживания. Ожидающие обслуживания требования или простаивающие каналы образуют *очередь*.

Совокупность правил, пользуясь которыми из очереди выбирают требования для обслуживания, называется *дисциплиной обслуживания*. Правила могут быть разными: живая очередь (первым пришел – первым обслужился), обслуживание в порядке возраста, по степени срочности, по какой-либо *шкале приоритетов* и т.д. Требования для обслуживания могут выбираться и случайным образом.

Устройство или средство, способное в любой момент времени обслуживать лишь *одно* требование, называется *каналом* или *пунктом обслуживания*. Если обслуживание производится *поэтапно* некоторой *последовательностью каналов*, то такую систему обслуживания называют *многофазной*. При наличии нескольких каналов для *одновременного* обслуживания требований говорят о *многоканальной* системе. Все каналы или часть их могут выполнять один и тот же, либо различные виды обслуживания.

Задача массового обслуживания заключается либо в формировании потока требований в систему, либо в обеспечении средствами обслуживания, либо в одновременном решении этих вопросов.

Целью решения этой общей задачи является минимизация суммарных затрат, связанных с ожиданием обслуживания требований и потерями от простоя средств обслуживания.

Предметом теории массового обслуживания является построение математических моделей, связывающих заданные условия работы системы массового обслуживания (СМО) – число каналов, их производительность, характер потока заявок и т.п. – с показателями эффективности СМО (описывают способность справляться с потоком заявок).

В качестве *показателей эффективности* СМО используются: *среднее число заявок*, обслуживаемых *в единицу времени*; *среднее число заявок в очереди; среднее время ожидания* обслуживания; вероятность *отказа* при обслуживании без ожидания; *вероятность превышения числа заявок* в очереди заданного значения и т.п.

Отметим два основных класса СМО: *с отказами* и *с ожиданием* (очередью). В СМО с отказами заявка, поступившая в момент, когда все каналы заняты, покидает СМО и в дальнейшем процессе обслуживания не участвует (например, заявка на телефонный разговор в момент, когда все каналы заняты, получает отказ и покидает СМО необслуженной). В СМО с ожиданием заявка, поступившая в момент, когда все каналы заняты, становится в очередь на обслуживание.

СМО с ожиданием могут отличаться друг от друга организацией очереди: *с ограниченной или неограниченной длиной очереди, с ограниченным временем ожидания* и т.п.

Работу СМО можно рассматривать как случайный процесс. Если возможные события $S_1, S_2, \ldots, S_n$ этого процесса можно заранее перечислить, а переход системы из одного состояния в другое происходит мгновенно, то такой процесс называется *процессом с дискретным состоянием*.

Если моменты возможных переходов системы из состояния в состояние случайны, а не фиксированы заранее, то такой процесс называется *процессом с непрерывным временем*.

Случайный процесс называется *марковским* или случайным *процессом без последействий*, если для любого момента времени вероятностные характеристики процесса в будущем зависят только от его состояния в данный момент t и не зависят от того, когда и как система пришла в это состояние. Анализ работы СМО существенно упрощается, если процесс этой работы – марковский.

Введем несколько определений.

Последовательность однородных событий, следующих одно за другим в случайные моменты времени, называется *потоком событий*.

Среднее число λ событий, поступающих в СМО в единицу времени, называется *интенсивностью потока*.

Поток событий называется *регулярным*, если события следуют одно за другим через равные промежутки времени.

Стационарным называется *поток* событий, если его вероятностные характеристики не зависят от времени.

Поток событий называется *потоком без последействия*, если для любых двух непересекающихся участков времени t_1 и t_2 число событий, не попадающих на один из участков, не зависит от числа событий, попадающих на другой.

Ординарным называется *поток* событий, если вероятность попадания на малый участок времени h двух и более событий мала по сравнению с вероятностью попадания одного события.

Поток событий называется *простейшим* или *стационарным пуассоновским*, если он стационарен, ординарен и не имеет последствий.

Для исследования системы обслуживания требуется знать законы, которым подчиняются моменты поступления требований и время обслуживания. Если расписание потока требований не задано, то с математической точки зрения удобно предположить, что они появляются случайным образом (требование с равной вероятностью может поступить в любой момент времени). Более строго это означает, что вероятность появления очередного требования в некотором интервале не зависит от времени, прошедшего с момента появления предыдущего: в достаточно малом интервале времени h при средней плотности потока λ *вероятность появления требования в интервале* $(t,t+h)$ *равна* λh *и не зависит от* t: $P(h)=\lambda\cdot h$.

Поток требований, удовлетворяющий этому допущению, называется *пуассоновским* (можно показать, что вероятность поступления n требований на любом конечном отрезке времени t равна $\dfrac{e^{-\lambda t}(\lambda t)^n}{n!}$ – распределение Пуассона с параметром λt).

Вероятность того, что промежуток времени между двумя последовательными требованиями превысит величину t, равна вероятности отсутствия требований на интервале t, следующем за моментом появления первого требования. Эта вероятность равна $e^{-\lambda t}$ (n=0). Как видим, при указанных допущениях *длина интервалов между моментами поступления требований подчиняется экспоненциальному распределению*.

4.1. Марковские случайные процессы с дискретными состояниями

Пусть некоторое устройство состоит из 2-х узлов, каждый из которых в случайный момент может выйти из строя. Вышедший узел ремонтируется. Потребное время ремонта неопределенное.

Здесь возможны следующие состояния системы:

S_0 – оба узла исправны;

S_1 – 1-й узел ремонтируется, 2-й работает;

S_2 – 2-й ремонтируется, 1-й работает;

S_3 – оба узла ремонтируются (рис. 4.1).

Пусть переходы системы из состояния S_i в состояние S_j можно рассматривать как простейшие потоки с интенсивностями λ_{ij} (i,j=0...3). Так, переход системы из состояния S_0 в S_1 происходит под воздействием потока отказов 1-го узла, а переход из состояния S_1 в S_0 под воздействием потока «завершения ремонтов» 1-го узла.

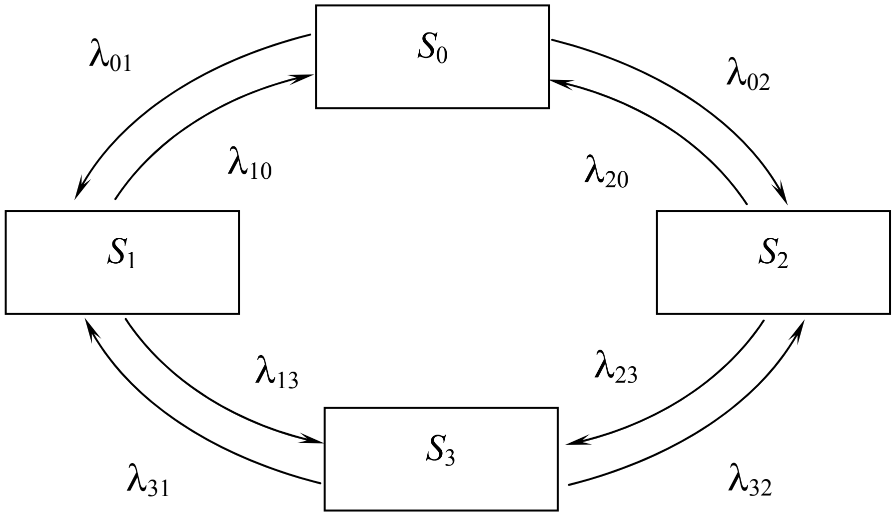


Рис.4.1. Граф состояний системы

Назовем *вероятностью i-го состояния* вероятность $P_i(t)$ того, что в момент t система находится в состоянии S_i .

Для любого момента t справедливо

$$\sum_{i=0}^{3} P_i(t) = 1.$$

Рассмотрим систему в момент t. Зададим малый промежуток времени h и найдем вероятность $P_0(t+h)$ того, что система в момент $t+h$ будет находиться в состоянии S_0. Переход системы в состояние S_0 может осуществляться по-разному. Ниже указываются возможные переходы:

1. Система в момент t с вероятностью $P_0(t)$ находилась в состоянии S_0, а за время h не вышла из него. Из состояния S_0 систему можно вывести суммарным простейшим потоком с интенсивностью $(\lambda_{01}+\lambda_{02})h$, а вероятность противоположного события, что система не выйдет из состояния S_0, равна $\left[1-(\lambda_{01}+\lambda_{02})h\right]$. В рассматриваемом случае вероятность того, что система будет находиться в состоянии S_0 по теореме умножения вероятностей будет равна $P_0(t)\left[1-(\lambda_{01}+\lambda_{02})h\right]$.

2. Система в момент t с вероятностью $P_1(t)$ (или $P_2(t)$) находилась в состоянии S_1 (или S_2) и за время h перешла в состояние S_0. Потоком с интенсивностью λ_{10} (или λ_{20}) система перейдет в состояние S_0 с вероятностью, приближенно равной $\lambda_{10}h$ (или $\lambda_{20}h$). Здесь вероятность того, что система будет находиться в состоянии S_0 равна $P_1(t)\lambda_{10}h$ (или $P_2(t)\lambda_{20}h$).

С учетом пп.1, 2 по теореме сложения вероятностей:

$$P_0(t+h)=P_1(t)\lambda_{10}h+P_2(t)\lambda_{20}h+P_0(t)\left[1-(\lambda_{01}+\lambda_{02})h\right].$$

Откуда

$$\frac{P_0(t+h)-P_0(t)}{h}=P_1(t)\lambda_{10}+P_2(t)\lambda_{20}-(\lambda_{01}+\lambda_{02})P_0(t).$$

Переходя к пределу при $h\to 0$, получим

$$P_0'(t)=\lambda_{10}P_1+\lambda_{20}P_2-(\lambda_{01}+\lambda_{02})P_0.$$

Аналогично определяются вероятности $P_1'(t),P_2'(t),P_3'(t)$ для других состояний системы. Объединив эти результаты, получим *систему дифференциальных уравнений Колмогорова для вероятностей состояний* $P_i',\ i=\overline{0,3}$:

$$\begin{cases}P_0'=\lambda_{10}P_2+\lambda_{20}P_2-(\lambda_{01}+\lambda_{02})P_0;\\ P_1'=\lambda_{01}P_0+\lambda_{31}P_3-(\lambda_{10}+\lambda_{13})P_1;\\ P_2'=\lambda_{02}P_0+\lambda_{32}P_3-(\lambda_{20}+\lambda_{23})P_2;\\ P_3'=\lambda_{13}P_1+\lambda_{23}P_2-(\lambda_{31}+\lambda_{32})P_3.\end{cases}.$$

Для простоты запоминания отметим, что в правой части каждого из уравнений стоит сумма произведений вероятностей всех состояний. На графе из них идут стрелки в данное состояние, на интенсивности соответствующих потоков, выводящих систему из данного состояния, умноженные на вероятности *i*-го состояния.

В полученной системе уравнений независимых будет три. В качестве четвертого уравнения принимается очевидное равенство $\sum_{i=0}^{3}P_i(t)=1$. Начальные условия имеют вид:

$$P_0(0)=1;P_1(0)=P_2(0)=P_3(0)=0.$$

Решив полученную задачу Коши, определим все вероятности состояний как функции времени.

Аналогичную картину получим для любых систем с конечным числом состояний.

В предположении возможности перехода системы из каждого состояния в любое другое можно определить вероятности $P_i(t)$ при $t\to\infty$, которые называются *предельными вероятностями*. Предельная вероятность состояния S_i показывает среднее относительное время пребывания системы в этом состоянии. Так как предельные вероятности постоянны, то, принимая производные в системе дифференциальных уравнений Колмогорова равными нулю, для определения предельных вероятностей получим следующую систему линейных алгебраических уравнений, описывающую *стационарный режим*:

$$\begin{cases} \left(\lambda_{01}+\lambda_{02}\right) P_0 = \lambda_{10} P_1 + \lambda_{20} P_2; \\ \left(\lambda_{10}+\lambda_{13}\right) P_1 = \lambda_{01} P_0 + \lambda_{31} P_3; \\ \left(\lambda_{20}+\lambda_{23}\right) P_2 = \lambda_{02} P_0 + \lambda_{32} P_3; \\ \left(\lambda_{31}+\lambda_{32}\right) P_3 = \lambda_{13} P_1 + \lambda_{23} P_2. \end{cases} \tag{4.1}$$

*Пример***.** Определить предельные состояния рассмотренной выше системы S при $\lambda_{01}=1$, $\lambda_{02}=2$, $\lambda_{10}=2$, $\lambda_{13}=2$, $\lambda_{20}=3$, $\lambda_{23}=1$, $\lambda_{31}=3$, $\lambda_{32}=2$.

Здесь система уравнений, описывающая стационарный режим ($P_i'=0;\ i=\overline{0,3}$), имеет вид:

$$\begin{cases} 3P_0 = 2P_1 + 3P_2; \\ 4P_1 = P_0 + 3P_3; \\ 4P_2 = 2P_0 + 2P_3; \\ P_0 + P_1 + P_2 + P_3 = 1. \end{cases}$$

Решив ее, найдем: P_0=0,40; P_1= 0,20; P_2=0,27; P_3 =0,13. Откуда следует, что в предельном стационарном режиме система будет находиться в состоянии S_0 – 40 %, S_1 – 20 %, S_2 – 27 %, S_3 – 13 % времени.

Рассмотрим далее упорядоченное множество состояний системы S_0, S_1, S_2, S_3,..., S_n. Пусть переходы могут осуществляться из любого состояния S_k только в состояния с соседними номерами: S_{k-1} или S_{k+1}. Соответствующий граф состояний приводится на рис. 4.2.

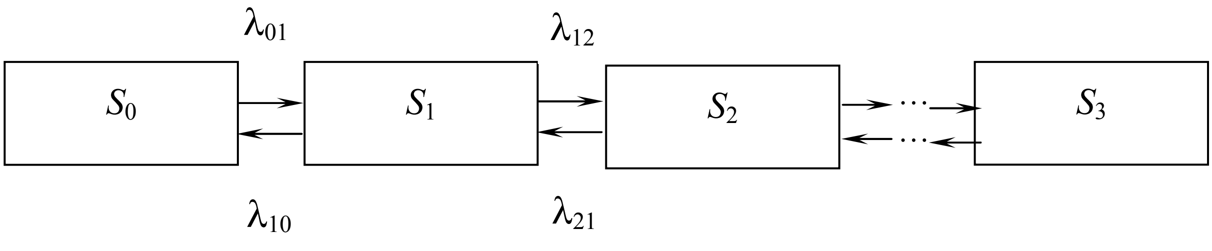


Рис.4.2

Пусть далее все потоки событий, соответствующие переходам системы по стрелкам графа, являются простейшими с интенсивностями $\lambda_{k,k+1}$ или $\lambda_{k+1,k}$.

По графу составим алгебраические уравнения для предельных вероятностей.

Для состояния S_1 справедливо: $\lambda_{01} P_0 = \lambda_{10} P_1$.

Для S_2: $(\lambda_{12} + \lambda_{10}) P_1 = \lambda_{01} P_0 + \lambda_{21} P_2$. С учетом приведенного равенства для S_1 отсюда получим $\lambda_{12} P_1 = \lambda_{21} P_2$.

Аналогично определятся уравнения и для других состояний. Окончательно для определения предельных вероятностей P_i, $i = \overline{1,n}$ получим следующую систему алгебраических уравнений:

$$\begin{cases} \lambda_{01} P_0 = \lambda_{10} P_1; \\ \lambda_{12} P_1 = \lambda_{21} P_2; \\ \dots \\ \lambda_{k-1,k} P_{k-1} = \lambda_{k,k-1} P_k; \\ \dots \\ \lambda_{n-1,n} P_{n-1} = \lambda_{n,n-1} P_n. \end{cases}$$

Добавив к этой системе уравнение $P_0 + P_1 + P_2 + \dots + P_n = 1$ и решив ее, получим:

$$P_0 = \left(1 + \frac{\lambda_{01}}{\lambda_{10}} + \frac{\lambda_{12}\lambda_{01}}{\lambda_{21}\lambda_{10}} + \ldots + \frac{\lambda_{n-1,n} \cdots \lambda_{12}\lambda_{01}}{\lambda_{n,n-1} \ldots \lambda_{21}\lambda_{10}}\right)^{-1}, \tag{4.2}$$

$$P_1 = \frac{\lambda_{01}}{\lambda_{10}} P_0,\ P_2 = \frac{\lambda_{12}\lambda_{01}}{\lambda_{21}\lambda_{10}} P_0, \ldots, P_n = \frac{\lambda_{n-1,n} \ldots \lambda_{12}\lambda_{01}}{\lambda_{n,n-1} \ldots \lambda_{21}\lambda_{10}} P_0. \tag{4.3}$$

В формулах для P_1, P_2, ..., P_n коэффициенты при P_0 есть слагаемые, стоящие после 1 в формуле (4.2). Числители этих коэффициентов представляют собой произведения всех интенсивностей, стоящих у стрелок, ведущих слева направо до данного состояния S_k, а знаменатели – произведения всех интенсивностей, стоящих у стрелок, ведущих справа налево до состояния S_k.

4.2. СМО с отказами

Преобладающее большинство систем массового обслуживания относится к классу СМО с отказами. В таких системах определенная часть заявок уходит из СМО необслуженной. Ниже на конкретных примерах такие системы и рассматриваются.

Одноканальная система с отказами. Пусть на данный канал с интенсивностью λ поступает поток заявок. Среднее время обслуживания $T_{об} = \frac{1}{\mu}$ $(\mu = \frac{1}{T_{об}})$. Найти предельные вероятности состояний системы и показатели ее эффективности.

Эта система имеет 2 состояния: S_0 – канал свободен, S_1 – канал занят (рис. 4.3).

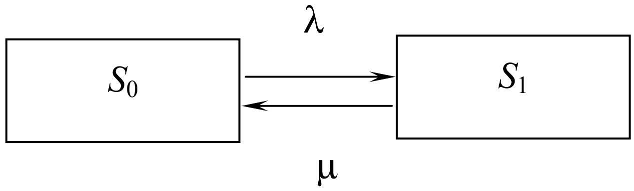


Рис.4.3

Здесь система алгебраических уравнений для вероятностей состояний в предельном стационарном режиме имеет вид:

$$\begin{cases} \lambda\, p_0 = \mu\, p_1 \\ \mu\, p_1 = \lambda\, p_0 \end{cases}$$

или

$$\lambda\, p_0 = \mu\, p_1 .$$

Добавив $p_0 + p_1 = 1$, получим систему

$$\begin{cases} p_0 + p_1 = 1 \\ \lambda\, p_0 = \mu\, p_1 \end{cases}$$

для определения предельных вероятностей. Решив ее, получим

$$p_0 = \frac{\mu}{\lambda + \mu}, \qquad p_1 = \frac{\lambda}{\lambda + \mu} \quad .$$

Полученные вероятности p_0, p_1 определяют среднее относительное время пребывания системы в состояниях S_0 и S_1 соответственно, то есть относительную пропускную способность системы M и вероятность отказа $\overline{P}$:

$$M = \frac{\mu}{\lambda + \mu}; \qquad \overline{P} = \frac{\lambda}{\lambda + \mu}.$$

При этом абсолютная пропускная способность $L = \dfrac{\lambda\mu}{\lambda + \mu}$.

Задача 2. На переговорный пункт поступают заявки на переговоры с интенсивностью λ=120 заявок в час, средняя продолжительность разговора $T_{об}$=2 мин. Определить показатели эффективности работы телефонной связи при наличии одного телефонного аппарата.

Решение

Интенсивность потока обслуживания

$$\mu = \frac{1}{T_{об}} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{мин}\right) = 30 \ (1/ч).$$

Относительная пропускная способность

$$M = \frac{\mu}{\lambda + \mu} = \frac{30}{120 + 30} = \frac{1}{5} = 0,2.$$

То есть будет обслужено в среднем только 20 % заявок, а вероятность отказа составит $\overline{P} = 0,8$. Абсолютная пропускная способность

$$L = \frac{\lambda\mu}{\lambda + \mu} = 120 \cdot 0,2 = 24.$$

Таким образом, в среднем в час будут обслужены 24 заявки на переговоры.

Многоканальная система с отказами. Задача Эрланга. Пусть на n каналов поступает поток заявок с интенсивностью λ; поток обслуживания имеет интенсивность μ. Найти предельные вероятности системы и показатели ее эффективности.

Здесь система S имеет следующие состояния: $S_0, S_1, S_2, ..., S_k, ..., S_n$, где S_k – состояние системы, когда в ней находится k заявок.

Поток заявок последовательно переводит систему из левого состояния в соседнее правое с интенсивностью λ. Интенсивность потока обслуживания, переводящего систему из любого правого состояния в соседнее левое, меняется в зависимости от состояния системы. Например, если система находится в состоянии S_2 (2 канала заняты), то она может перейти в состояние S_1 (1 канал занят), когда обслужит 1-й или 2-й канал, то есть суммарная интенсивность их обслуживания будет равна 2μ.

Суммарный поток обслуживания, переводящий систему из состояния S_3 в S_2, будет иметь интенсивность 3μ; освободиться может любой из 3-х каналов. Здесь справедливо:

$$p_0 = \left(1 + \frac{\lambda}{\mu} + \frac{\lambda^2}{2!\mu} + ... + \frac{\lambda^k}{k!\mu^k} + ... + \frac{\lambda^n}{n!\mu^n}\right)^{-1}$$

Введем $\rho = \frac{\lambda}{\mu}$, называемую *интенсивностью нагрузки канала.* Она выражает число заявок, приходящих за среднее время обслуживания одной заявки.

В соответствии с предыдущим

$$\left.\begin{aligned} p_0 &= \left(1+\rho+\frac{\rho^2}{2!}+\ldots+\frac{\rho^k}{k!}+\ldots+\frac{\rho^n}{n!}\right)^{-1}; \\ p_1 &= \rho\, p_0;\; p_2=\frac{\rho^2}{2!}p_0;\ldots;\; p_k=\frac{\rho^k}{k!}p_0;\ldots;\; p_n=\frac{\rho^n}{n!}p_0 \end{aligned}\right\} \tag{4.4}$$

Формулы (4.4) для предельных вероятностей называются *формулами Эрланга.*

Вероятность отказа системы есть предельная вероятность того, что все каналы системы заняты:

$$\overline{P}=\frac{\rho^n}{n!}p_0.$$

Относительная пропускная способность (вероятность того, что заявка будет обслужена):

$$M=1-\overline{p}=1-\frac{\rho^n}{n!}p_0.$$

Абсолютная пропускная способность:

$$L=\lambda M=\lambda\left(1-\frac{\rho^n}{n!}p_0\right).$$

Среднее число занятых каналов:

$$\overline{k}=\frac{M}{\mu}=\rho\left(1-\frac{\rho^n}{n!}p_0\right).$$

Задача 3. При условиях задачи 2 определить оптимальное число телефонных номеров на переговорном пункте, если условием оптимальности является удовлетворение в среднем не менее 80 заявок из каждых 100.

Интенсивность нагрузки канала:

$$\rho=\frac{\lambda}{\mu}=\frac{120}{30}=4.$$

Как видим, за среднюю продолжительность разговора, равную $T_{\text{об}}$=2 мин, в среднем поступает 4 заявки на переговоры.

Определим характеристики обслуживания для n-канальной системы (при n телефонных номеров).

В частности, при n=2 получим:

$$p_0=\left(1+4+\frac{4^2}{2!}\right)^{-1}=\frac{1}{13}\approx 0{,}75;$$

$$M=\left(1-\frac{4^2}{2!}\cdot\frac{1}{13}\right)=1-\frac{8}{13}=\frac{5}{13}\approx 0,38;$$

$$L=120\cdot\frac{5}{13}=\frac{600}{13}\approx 46.$$

Аналогично определятся указанные характеристики и при других n. Данные сведены в табл.4.1.

Таблица 4.1

Характеристики обслуживания	Число каналов				
	1	2	3	4	5
M	0,20	0,38	39/71	71/103	515/643
L	24	46	65,9	82,7	95

С учетом условия оптимальности ($M \geq 0,8$) из данных табл.1 следует, что на переговорном пункте необходимо установить 5 телефонных номеров. В этом случае за 1 час будет обслужено в среднем 95 заявок, а среднее число отказов (занятых телефонных номеров) будет $\bar{k}=\frac{L}{M}=\frac{95}{30}=3,26$.

Задача 4. В малое предприятие из 3 человек поступают заказы от частных лиц. Если все сотрудники заняты, то новый заказ не принимается. Среднее время выполнения работы по одному заказу составляет 4 часа. Определить предельные вероятности состояний и показатели работы малого предприятия при интенсивности потока заявок – 0,2 (1/ч).

Решение

Здесь n=3, λ=0,2 (1/ч), $t_{об}$= 4 ч, $\mu=0,25$.

Интенсивность нагрузки сотрудников $\rho=\frac{\lambda}{\mu}$=0,8.

Получим следующие предельные вероятности состояний:

$$p_0=\left(1+\rho+\frac{\rho^2}{2!}+\frac{\rho^3}{3!}\right)^{-1}=\left(1+0,8+\frac{0,8^2}{2}+\frac{0,8^3}{6}\right)^{-1}\approx 0,34,$$

$$p_1=\rho\, p_0=0,34\cdot 0,8\approx 0,27;$$

$$p_2=\frac{\rho^2}{2!}p_0=\frac{0,8^2}{2!}0,34\approx 0,1;$$

$$p_3=\frac{\rho^3}{3!}p_0=\frac{0,8^3}{6}\cdot 0,34\approx 0,29.$$

Как видим, в стационарном режиме работы в среднем в течение 34 % времени не будет ни одной заявки, 27 % – одна заявка, 10 % – две заявки, вероятность отказа $\overline{p} = p_3 = 0{,}29$ (29 % заявок не обслуживается).

Относительная пропускная способность M=1–0,29=0,71 (из каждых 100 заявок обслуживаются 71).

Абсолютная пропускная способность $L=\lambda\cdot M$=0,25·0,71=0,177 (за 1 час обслуживается 0,177 заявок).

Среднее число заявок

$$\overline{k} = \frac{L}{M} = \frac{0{,}177}{0{,}25} = 0{,}7\,.$$

(Каждый из сотрудников будет занят обслуживанием заявок в течение $\frac{70}{3} \approx 23\%$ времени).

4.3. СМО с ожиданием. Системы с неограниченной очередью

Здесь показателями эффективности работы будут: среднее число заявок в системе – Z, среднее число заявок в очереди $Z_{оч}$, среднее число обслуживающихся заявок – $Z_{об}$, среднее время пребывания заявки в системе – T, среднее время пребывания заявки в очереди – $T_{оч}$, степень загрузки канала – $P_{зан}$.

Одноканальная система с неограниченной очередью. Примером такой системы является заводской склад инструментов с одним кладовщиком. Рассмотрим следующую задачу. Пусть требуется определить предельные вероятности состояний и показатели эффективности одноканальной системы с очередью при отсутствии ограничений на длину очереди, на время ожидания при заданных интенсивностях потоков поступающих заявок и обслуживания, соответственно равных λ и μ.

Здесь система может иметь одно из состояний $S_0, S_1, S_2,..., S_n,...$, ($S_0$ – канал свободен, а S_n – канал занят и $(n$-1) заявок стоят в очереди). Соответствующий граф приводится на рис.4.4.

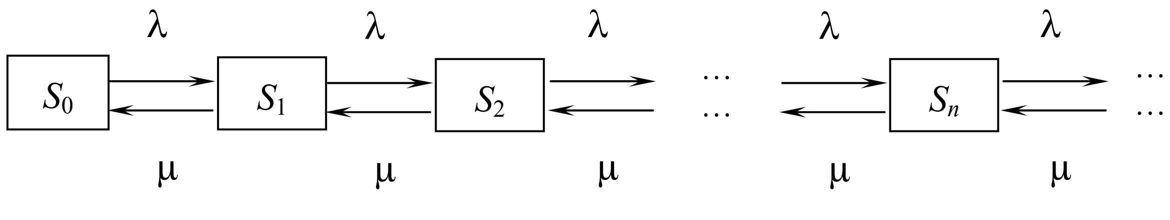


Рис.4.4

Полагая $\rho < 1$ (иначе очередь бы росла до бесконечности) и воспользовавшись формулами (4.1) и (4.2), получим

$$p_o = \left[1 + \frac{\lambda}{\mu} + \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k + \ldots + \right]^{-1} =$$

$$= \left[1 + \rho + \rho^2 + \ldots + \rho^n + \ldots\right]^{-1} = \left[\frac{1}{1-\rho}\right]^{-1} = 1 - \rho,$$

$$p_1 = \rho \cdot p_o, \quad p_2 = \rho^2 \cdot p_0, \ldots, p_n = \rho^n \cdot p_0, \ldots$$

или

$$p_1 = \rho \cdot (1-\rho), \quad p_2 = \rho^2 \cdot (1-\rho), \ldots, p_n = \rho^n \cdot (1-\rho).$$

Предельные вероятности $p_1, p_2, \ldots, p_n, \ldots$ образуют бесконечно убывающую геометрическую прогрессию ($\rho < 1$). Так как $p_0 > p_i$, $i=1,2,\ldots$, то наиболее вероятным состоянием системы будет отсутствие заявок в системе.

Среднее число заявок в системе

$$Z = \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot p_n = (1-\rho) \cdot \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot \rho^n = (1-\rho) \cdot \left(\rho + 2\rho^2 + 3\rho^3 + \ldots\right) =$$

$$= \rho \cdot (1-\rho) \cdot \left(\rho + 2\rho + 3\rho^2 + \ldots\right).$$

Выражение в последней скобке является производной от $\left(\rho + \rho^2 + \rho^3 + \ldots\right) = \frac{\rho}{1-\rho}$ и равно $\frac{1}{(1-\rho)^2}$. Окончательно имеем

$$Z = \frac{\rho}{1-\rho}.$$

Среднее число заявок в очереди

$$Z_{\text{оч}} = Z - Z_{\text{об}}.$$

Среднее число $Z_{об}$ обслуживаемых заявок определим как их математическое ожидание (0 – канал свободен, 1 – канал занят):

$$Z_{\text{об}} = P_{\text{зан}} = 1 - p_0 = \rho.$$

Также справедливы следующие формулы Литтла:

$$T_{\text{оч}} = Z_{\text{оч}}/\lambda, \quad T = \frac{Z}{\lambda}.$$

Из них следует

$$T = \frac{\rho}{\lambda \cdot (1-\rho)}; \qquad T_{\text{оч}} = \frac{\rho^2}{\lambda \cdot (1-\rho)}.$$

Пример 1. В отделении банка, работающего с 7 до 13 часов без перерыва и имеющего одного кассира-оператора, среднее число клиентов в день равно 54, а время обслуживания – 5 минут на одного человека. Определим характеристики обслуживания.

Имеем $\lambda = \frac{54}{6} = 9$, $\mu = \frac{60}{5} = 12$, $\rho = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{3}{4}$.

Откуда

$$Z = \frac{\rho}{1-\rho} = \frac{3/4}{1-3/4} = 3,$$

$$Z_{\text{оч}} = \frac{\rho^2}{1-\rho} = \frac{9/16}{1-3/4} = \frac{9}{16} \cdot \frac{4}{1} = \frac{9}{4},$$

$$T_{\text{оч}} = Z_{\text{îч}}/\lambda = \frac{9/4}{9} = \frac{1}{4}.$$

Из приведенного следует, что среднее число клиентов, включая тех, кто еще обслуживается, равно 3, среднее число клиентов в очереди (не считая тех, которые проходят обслуживание) равно 9/4 и, наконец, средняя продолжительность ожидания в очереди – 1/4 (ч).

Пример 2. В порту с одним причалом для разгрузки судов интенсивность потока составляет 0,4 (судов в сутки). Среднее время разгрузки одного судна – 2 суток. Найти показатели эффективности работы причала при отсутствии ограничений на длину очереди. Определить вероятность того, что разгрузки ожидают не более чем 2 судна.

Имеем

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu} = \lambda \cdot T_{\text{об}} = 0{,}4 \cdot 2 = 0{,}8.$$

Откуда вероятности того, что причал свободен или занят соответственно равны

$$p_0 = 1 - 0{,}8 = 0{,}2,$$

$$P_{\text{зан}} = 1 - 0{,}2 = 0{,}8.$$

Если к причалу прибывает одно судно и причал свободен, то начинается разгрузка судна. В очереди на разгрузку не будет ни одного судна. Если одновременно подошли к причалу два судна, то одно судно будет на разгрузке, а другое – в очереди. Аналогично, если одновременно прибудут три судна, то одно судно уйдет на разгрузку, два других будут в очереди. Так что вероятности того, что у причала ожидают разгрузки 0, 1, 2 судна соответственно будут равны:

$$p_1 = 0{,}8 \cdot (1 - 0{,}8) = 0{,}16,$$

$$p_2 = 0{,}8^2 \cdot (1 - 0{,}8) = 0{,}126,$$

$$p_3 = 0{,}8^3 \cdot (1 - 0{,}8) = 0{,}1024.$$

Откуда вероятность того, что разгрузку ожидают не более чем 2 судна, равна

$$P = p_1 + p_2 + p_3 = 0{,}16 + 0{,}126 + 0{,}1024 = 0{,}3904.$$

Среднее число судов, ожидающих разгрузки:

$$Z_{\text{оч}} = \frac{0{,}8}{1 - 0{,}8} = 3{,}2.$$

Среднее время разгрузки

$$T_{\text{оч}} = \frac{3{,}2}{0{,}8} = 4 \text{ (сут)}.$$

Среднее число судов, находящихся у причала:

$$Z = \frac{0{,}8}{1 - 0{,}8} = 4.$$

Среднее время пребывания судна у причала

$$T = \frac{4}{0{,}8} = 5 \text{ (сут)}.$$

Как видим, эффективность разгрузки судов невысокая. Для ее повышения необходимо уменьшить среднее время разгрузки судна $T_{\text{об}}$ либо увеличить число причалов n.

Многоканальная система с неограниченной очередью. Пусть имеется n-канальная система с неограниченной очередью. Поток поступающих в систему заявок имеет интенсивность λ, а поток обслуживаний – интенсивность μ. Необходимо определить предельные вероятности состояний системы и показатели ее эффективности.

Система может находиться в одном из состояний S_0, S_1, S_2,...,S_k,..., S_n (S_0 – заявок нет, каналы свободны, S_1 – занят один канал, остальные свободны, S_2 – заняты 2 канала, остальные свободны, ..., S_n – заняты все каналы, а очереди нет, S_{n+r} – заняты все каналы, r – заявок в очереди). Соответствующий граф приводится на рис. 4.5.

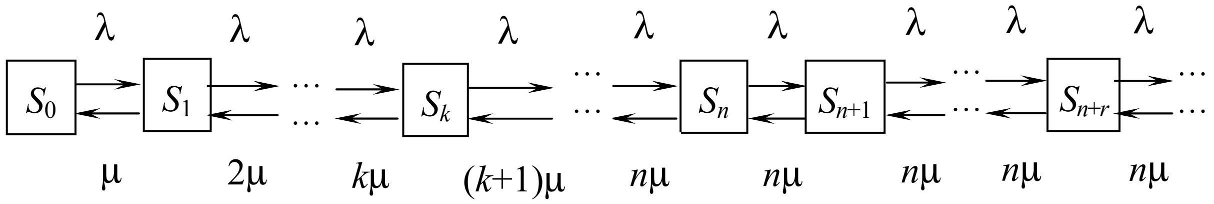


Рис.4.5

Интенсивность потока обслуживания, переводящего систему из одного состояния в другое (справа налево), увеличивается от μ до nμ по мере увеличения числа заявок от 0 до n (соответственно увеличивается число каналов обслуживания).

При числе заявок, большем n, интенсивность потока обслуживаний сохраняется и равна $n \cdot \mu$.

При $\frac{\rho}{n} < 1$ предельные вероятности существуют. Если $\frac{\rho}{n} \geq 1$ очередь растет до бесконечности. Используя формулы (1) и (2), можно показать, что *предельные вероятности состояний n-канальной системы с неограниченной очередью* определятся в виде:

$$p_0 = \left(1 + \frac{\rho}{1!} + \frac{\rho^2}{2!} + \ldots + \frac{\rho^n}{n!} + \frac{\rho^{n+1}}{n!(n-\rho)}\right)^{-1},$$

$$p_1 = \frac{\rho}{1!} \cdot p_0, \ldots, p_k = \frac{\rho^k}{k!} \cdot p_0, \ldots, p_n = \frac{\rho^n}{n!} \cdot p_0,$$

$$p_{n+1} = \frac{\rho^{n+1}}{n \cdot n!} \cdot p_0, \ldots, p_{n+r} = \frac{\rho^{n+r}}{n^r \cdot n!} \cdot p_0, \ldots .$$

Можно также показать:

– вероятность того, что заявка окажется в очереди

$$P_{\text{оч}} = \frac{\rho^{n+1}}{n!(n-\rho)} \cdot p_0;$$

– среднее число занятых каналов

$$\bar{k} = \frac{\lambda}{\mu} = \gamma;$$

– среднее число заявок в очереди

$$Z_{\text{о ч}} = \frac{\rho^{n+1} \cdot p_0}{n \cdot n!\left(1-\frac{\rho}{n}\right)^2},$$

– среднее число заявок в системе

$$Z = Z_{\text{о ч}} + \rho .$$

Среднее время пребывания заявки в очереди и среднее время пребывания заявки в системе определятся по формулам Литтла.

Для системы с неограниченной очередью при $\rho < 1$ любая заявка, пришедшая в систему, будет обслужена, то есть вероятность отказа $\overline{P}=0$. Относительная пропускная способность $N=1$, абсолютная пропускная способность равна интенсивности входящего потока заявок, то есть $L=\lambda$.

Пример. К кассе вокзала поступает поток пассажиров с интенсивностью $\lambda=81$ человек в час. Средняя продолжительность обслуживания кассиром одного пассажира $t_{\text{об}}=2$ мин. Определить:

а) минимальное количество кассиров $n_{\min}$, при котором очередь не будет расти до бесконечности, а также соответствующие характеристики обслуживания при $n=n_{\min}$;

б)оптимальное количество $n_{\text{опт}}$ кассиров, при котором относительная величина затрат $C_{\text{отн}}$, связанная с издержками на содержание каналов обслуживания и с пребыванием в очереди покупателей (принимается $C_{\text{отн}}=\frac{1}{\lambda}n+3T_{\text{оч}}$), будет минимальна. Сравнить характеристики обслуживания при $n=n_{\text{опт}}$ и $n=n_{\min}$;

в) вероятность того, что в очереди будет не более 3-х пассажиров.

Решение

а) По условию $\lambda=81/60=1{,}35$ (1/мин). Откуда

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu} = \lambda \cdot \bar{t}_{\text{об}} = 1{,}35 \cdot 2 = 2{,}7 .$$

Очередь не будет возрастать до бесконечности при $\frac{\rho}{n} < 1$, то есть при $n > \rho > 2{,}7.$ Таким образом, минимальное количество кассиров $n_{\min}=3$. Найдем характеристики обслуживания при $n= n_{\min}=3$.

Вероятность того, что у кассы нет пассажиров

$$P_0 = 1 + 2{,}7 + \frac{2{,}7^2}{2!} + \frac{2{,}7^3}{3!} + \frac{2{,}7^4}{3!(3-2{,}7)} = 0{,}025 ,$$

то есть в среднем 2,5 % времени кассиры будут простаивать. Вероятность того, что у кассы будет очередь, равна

$$P_{\text{о ч}}=\frac{2,7^4}{3!(3-2,7)}\cdot 0,025=0,735.$$

Среднее число пассажиров в очереди

$$Z_{\text{оч}}=\frac{2,7^4}{3\cdot 3!\left(1-\frac{2,7}{3}\right)^2}=7,35.$$

Среднее время ожидания в очереди

$$T_{\text{оч}}=\frac{7,35}{1,35}=5,44\,(\text{мин}).$$

Среднее число покупателей у кассы

$$Z=7,35+2,7=10,05.$$

Среднее время пребывания пассажиров у кассы

$$T=\frac{10,05}{1,35}=7,44.$$

Среднее число кассиров, обслуживающих пассажиров, $\bar{k}=2,7$.

Доля занятых обслуживанием кассиров

$$k_3=\frac{\rho}{n}=\frac{2,7}{3}=0,9.$$

Абсолютная пропускная способность кассы L=1,35 (1/мин) или 81 пассажир в час.

б) Относительная величина затрат при n=3.

$$C_{\text{отн}}=\frac{1}{\lambda}n+3T_{\text{оч}}=\frac{3}{1,35}+3\cdot 5,44=18,54.$$

Характеристики обслуживания при других значениях n приводятся в табл.4.2.

Т а б л и ц а 4 . 2

Характеристика обслуживания	Число кассиров n				
	3	4	5	6	7
Вероятность простоя кассиров P_0	0,025	0,057	0,065	0,067	0,067
Среднее число покупателей в очереди $T_{\text{оч}}$	5,44	0,60	0,15	0,03	0,01
Относительная величина затрат $C_{\text{отн}}$	18,54	4,77	4,14	4,53	5,22

Из табл. 4.2 следует, что минимальные затраты будут достигнуты при n=$n_{опт}$=5. При этом значении n имеем:

$$P_{оч}=0{,}091,\ L_{оч}=0{,}198,\ T_{оч}=0{,}15\ (\text{мин}),$$

$$Z=2{,}15\ (\text{мин}),\ \overline{k}=2{,}7,\ k_з=0{,}54.$$

Отсюда видно, что уменьшились значения таких характеристик, как вероятность возникновения очереди, длина очереди, среднее время пребывания пассажира у кассы, доля занятых обслуживанием кассиров. Среднее число занятых обслуживанием кассиров и абсолютная пропускная способность L кассы не изменились.

в) При n=5 вероятность того, что в очереди будет не более 3 пассажиров, определяется в виде:

$$P(r\le 3)=(p_1+p_2+p_3+p_4+p_5)+(p_{5+1}+p_{5+2}+p_{5+3})=$$

$$1-\frac{2{,}7^6}{5!(5-2{,}3)}0{,}065+\frac{2{,}7^6}{5\cdot 5!}0{,}65+\frac{2{,}7^7}{5^2\cdot 5!}0{,}065+\frac{2{,}7^8}{5^3\cdot 5!}0{,}065=0{,}986\,.$$

(первое слагаемое в скобках соответствует случаю, когда заняты от одного до пяти кассиров, второе слагаемое – случаю, когда в очереди стоят от одного до трех покупателей).

При n=3 вероятность $P(r\le 3)=0{,}464$.

Пример 1. В медсанчасти станции технического обслуживания автомобилей на осмотр больного и заполнение истории болезни в среднем врач тратит 0,25 часа. Исходя из этого, планирующие органы делают вывод: за 3 часа амбулаторного приема врач должен обслужить 12 больных.

Определить параметры обслуживания и показать ошибочность в указанном планировании.

При подсчете пропускной способности врача планирующие органы исходят из предположения, что интенсивность потока заявок λ=12/3=4, а среднее время обслуживания одной заявки $T_{об}$=0,25, то есть μ=4.

При этом предполагают, что очереди на прием к врачу не будет (то есть p_0=1).

Однако больные приходят к врачу в случайные моменты времени. При этом $\rho=\dfrac{\lambda}{\mu}=1$. А в силу предыдущего получим p_0=0, то есть неизбежно возникновение очереди.

Аналогичная *ошибка* совершается экономистами и при расчетах погрузочных средств в карьерах, строительно-монтажной техники, числа касс в магазинах, коек в больницах и т.д.

Контрольные вопросы

1. Классификация систем массового обслуживания.
2. Показатели эффективности СМО с отказами и с ожиданием.
3. Виды потока событий; простейший поток; стационарный поток.
4. Дифференциальные уравнения Колмогорова для вероятностей состояний.
5. Стационарный режим; предельные вероятности.
6. Одноканальная и многоканальная системы с отказами.

Задачи для самоконтроля

Задание 1. Рассматривается станция связи с n каналами обслуживания. Интенсивность потока заявок – λ (заявок в мин.); среднее время обслуживания одной заявки – $\bar{t}_{об}$ (мин.). Потоки заявок и обслуживаний – простейшие. Заявка, поступившая при всех занятых каналах, покидает станцию необслуженной.

Определить предельные вероятности состояний и характеристики обслуживания станции (вероятность отказа, относительную и абсолютную пропускную способность, среднее число занятых каналов). Указать оптимальное число каналов обслуживания $n_{опт}$, если критерием оптимальности считать удовлетворение в среднем 80 заявок из 100 заявок на обслуживание. Вычислить характеристики обслуживания при $n = n_{опт}$.

Варианты:

1.1. $n=3$; $\lambda=2$; $\bar{t}_{об} = 2{,}5$;
1.2. $n=4$; $\lambda=2{,}5$; $\bar{t}_{об} = 2$;
1.3. $n=5$, $\lambda=3$; $\bar{t}_{об} = 2{,}5$;
1.4. $n=6$; $\lambda=3{,}5$; $\bar{t}_{об} = 2$;
1.5. $n=7$; $\lambda=4$; $\bar{t}_{об} = 1{,}5$.

Задание 2. В инструментальный участок сборочного цеха за инструментом обращаются в среднем λ рабочих в минуту. Обслуживание одного рабочего (поиск требуемого инструмента и выдача его) занимает в среднем $t_{об}$ (мин). В предположении потоков заявок и обслуживания простейшими, отсутствии ограничения на длину очереди и при стоимостях минуты работы рабочего и кладовщика соответственно равными C_1 и C_2, определить:

– минимальное число n_{min} кладовщиков, при котором очередь не будет возрастать до бесконечности, а также соответствующие n_{min} характеристики обслуживания (вероятности простоя кладовщиков и образования очереди; среднее число рабочих и среднее время их нахождения в инструментальном участке и в очереди; среднее число занятых обслуживанием кладовщиков);

– установить число n кладовщиков, при котором затраты C на простои рабочих в очереди и кладовщиков будут минимальными.

Варианты:

2.1. $\lambda=1{,}5$; $\bar{t}_{об}=1{,}2$; $C_1=3$; $C_2=2$;

2.2. $\lambda=2$; $\bar{t}_{об}=0{,}9$; $C_1=2{,}5$; $C_2=1{,}5$;

2.3. $\lambda=1{,}6$; $\bar{t}_{об}=1{,}0$; $C_1=3$; $C_2=1{,}5$;

2.4. $\lambda=2{,}5$; $\bar{t}_{об}=1{,}2$; $C_1=1{,}5$; $C_2=3$;

2.5. $\lambda=3$; $\bar{t}_{об}=1{,}4$; $C_1=2$; $C_2=2{,}5$.

Задание 3. В инструментальной мастерской строительного участка работают 2 мастера. Если рабочий заходит в мастерскую, когда оба мастера заняты обслуживанием ранее обратившихся работников, то он уходит из мастерской, не ожидая ослуживания. Статистика показала, что среднее число рабочих, обращающихся в мастерскую в течение часа, равно 18; среднее время, которое затрачивает мастер на заточку или ремонт инструмента, равно 10 мин.

Оценить основные характеристики работы данной мастерской как СМО с отказами.

Задание 4. Отдел СМУ осуществляет монтаж котельного оборудования. В среднем в течение года поступает 12 заявок от различных организаций. Монтажные работы на объекте производятся одной из 4 бригад. Затрачиваемое при этом время является случайной величиной и зависит от сложности монтажа, характера выполняемых работ, слаженности бригад и других причин. Статистика показала, что в среднем за год одна бригада успевает поставить оборудование на 4 объектах.

Требуется оценить работу данного отдела как СМО с ожиданием.

Задание 5. На базу поступает простейший поток заявок с плотностью 3 автомашины в единицу времени. Среднее время обслуживания $T=\frac{1}{\mu}=1$ (в единицу времени одним погрузочно-разгрузочным механизмом может быть обслужена одна заявка).

Определить необходимое количество погрузочно-разгрузочных механизмов, чтобы вероятность отказа в обслуживании была не более 0,05.

Задание 6. Поток клиентов, прибывающих в управление снабжения для оформления транспортных документов, является пуассоновским с интенсивностью 9 клиентов в час. Продолжительность обслуживания одного клиента распределена по показательному закону и в среднем длится 8 мин. Сколько работников должны находиться на обслуживании клиентов, чтобы среднее число клиентов, ожидающих обслуживания, не превышало трех.

5. ЭЛЕМЕНТЫ ДИСКРЕТНОЙ МАТЕМАТИКИ, МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛОГИКИ, ТЕОРИИ ГРАФОВ

5.1. Дискретная математика

Одним из центральных понятий математической логики является понятие множества. Множество считается заданным, если относительно любого объекта можно установить, является он элементом данного множества или нет. Множество из конечного числа элементов задается:

– *перечислением* всех своих элементов; порядок расположения элементов не существенен (так, множество корней уравнения $x^2 - 5x + 6 = 0$ есть множество A = {2,3} или А = {3,2}).

– *указанием отличительных свойств,* которые выделяют элементы множества из элементов известного более широкого *основного* множества (например, $A = \{ x \in R \mid x^2 - 7x + 8 = 0 \}$ состоит из тех элементов x множества действительных чисел, для которых справедливо равенство $x^2 - 7x + 8 = 0$). Для задания бесконечных множеств используется только второй способ, ибо перечислить бесконечное число элементов невозможно.

Множество, не содержащее ни одного элемента, называется *пустым* множеством и обозначается 0. Например, множество A натуральных чисел, меньших, чем 1 / 2, есть пустое множество; пишут $A = 0$.

Если все элементы множества A являются и элементами множества B, то множество A называется *подмножеством* множества B и говорят, что множество A содержится в множестве B. Обозначается: $A \subset B$ или $B \supset A$ (множество всех натуральных чисел N есть подмножество всех целых чисел Z: $N \subset Z$). Из определения следует, что само множество также является своим подмножеством, т.е. всегда $A \subset A$. Пустое множество является подмножеством любого множества.

Если $A \subset B$ и $B \subset A$, то множества A и B называют *равными;* обозначают: $A = B$.

Объединением произвольных множеств A и B называется множество C, состоящее из тех и только тех элементов, которые принадлежат хотя бы одному из множеств A или В; обозначают: $C = A \cup B$.

Пересечением множеств A и B называется множество C, состоящее из тех и только тех элементов, которые принадлежат и множеству A, и множеству B; обозначают: $C = A \cap B$.

Разностью множеств A и B называется множество C, состоящее только из тех элементов множества A, которые не являются элементами B; обозначается: $C=A \backslash B$. Аналогично определяется объединение и пересечение любого числа множеств.

Свойства операций объединения и пересечения

1. $A \cup B = B \cup A$
2. $A \cap B = B \cap A$
3. $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$
4. $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$
5. $A \cup A = A$
6. $A \cap A = A$
7. $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
8. $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
9. Если $B \subset A$, то $A \cup B = A$ и $A \cap B = B$

Для графического изображения множеств часто используются диаграммы Эйлера-Венна.

5.2. Математическая логика

В математической логике используется понятие «*высказывание»*, под которым понимается утверждение, о котором можно говорить истинно оно или ложно. Новые высказывания можно образовывать на основе логических связок (операций): *отрицание, дизъюнкция, конъюнкция, импликация, эквивалентность.* Простые высказывания рассматриваются *логическими переменными;* обозначаются заглавными буквами латинского алфавита. Истинному высказыванию ставится в соответствие 1, ложному – 0. Рассмотрим основные логические операции над высказываниями, с помощью которых можно образовывать новые высказывания, а также проводить анализ их истинности или ложности:

Коньюнкция (*логическое умножение*) – это соединение двух простых высказываний A и B в новое высказывание С с использованием союза «и»; обозначается С=$A \cap B$ или $A \cdot B$ (если: A – «Отказал бензонасос», B – «Двигатель не заводится», то $A \cap B$ – «Отказал бензонасос, и двигатель не заводится»). Конъюнкция двух высказываний истинна только тогда, когда истинны оба входящих в неё высказывания (таблица истинности конъюнкции на рис. 5.1).

A	B	$A \cap B$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Рис. 5.1. Таблица истинности конъюнкции

Дизьюнкция (*логическое сложение*) – это соединение двух простых высказываний *A*, *B* в новое высказывание С с помощью союза «или»; обозначается $C = A \bigcup B$ или $A + B$ (если *A* – «Отказал бензонасос», *B* – «Отказала система зажигания», то $A \bigcup B$ – «Отказал бензонасос, или отказала система зажигания»). Дизъюнкция двух высказываний ложна только тогда, когда ложны оба входящих в неё высказывания (таблица истинности дизъюнкции на рис. 5.2).

A	B	$A \bigcup B$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

Рис. 5.2. Таблица истинности дизъюнкции

Инверсия (*логическое отрицание*) определяется присоединением частицы «не» к сказуемому в данном простом высказывании *A*; обозначается: $\overline{A}$ (если *A* – «Тормозная система исправна», то $\overline{A}$ – «Тормозная система не исправна»

Инверсия истинна, если исходное высказывание ложно; ложна, если исходное высказывание истинно (таблица истинности инверсии на рис.5.3).

A	$\overline{A}$
0	1
1	0

Рис. 5.3. Таблица истинности инверсии

Импликация (*логическое следование*) соответствует обороту «если, то» ; обозначается: $A \to B$ (*A* – «Все системы автомобиля исправны», *B* – «Автомобиль допускается к участию в дорожном движении»; $A \to B$ – «Если все системы автомобиля исправны, то автомобиль допускается к участию в дорожном движении»). Импликация ложна только в том случае, если условие *A* истинно, а следствие *B* ложно (таблица истинности импликации на рис. 5.4)

A	B	$A \to B$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

Рис. 5.4. Таблица истинности импликации

Эквивалентность (*равнозначность*) соответствует обороту речи: «тогда и только тогда»; обозначается: $A \leftrightarrow B$ или $A \sim B$ (если A – «Автомобиль допускается к участию в дорожном движении», B – «Все системы автомобиля исправны», тогда $A \leftrightarrow B$ – «Автомобиль допускается к участию в дорожном движении тогда и только тогда, когда все системы автомобиля исправны»).Эквивалентность двух выражений истинна только тогда, когда оба высказывания одновременно истинны или одновременно ложны; таблица истинности на рис.5.5.

A	B	$A \leftrightarrow B$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Рис. 5.5. Таблица истинности эквивалентности.

Л*огическая функция* – это функция, в которой переменные принимают только два значения: логические 1 или 0.

Истинность или ложность сложных суждений представляет собой *функцию истинности или ложности* простых; называют *булевой функцией суждений* f (a, b). Любая логическая функция может быть задана с помощью таблицы истинности, в левой части которой записывается набор аргументов, а в правой части – соответствующие значения логической функции. При построении таблицы истинности учитывается порядок выполнения логических операций.

При построении таблиц истинности для сложных выражений используется следующий алгоритм:

– определяется число строк (2^n + строка для заголовка, n – количество простых высказываний),

– определяется число столбцов (число переменных + число логических операций),

– в столбцах указываются результаты выполнения логических операций в обозначенной последовательности (с учетом таблиц истинности основных логических операций).

Пример: Составить таблицу истинности логического выражения: $D = \overline{A} \wedge \left(B \vee C\right)$

Решение:

1. Определим число строк: имеем три простых высказывания: ***A, B, C***. Здесь n=3, количество строк = 2^3 +1 = 9.

2. Определим количество столбцов. Здесь:

– ***A, B, C*** – простые выражения (переменные):;

– промежуточные результаты (логические операции): $\overline{A}$ – инверсия; $B \vee C$ – операция дизъюнкции; а также искомое окончательное значение арифметического выражения; конъюнкция $D = \overline{A} \wedge (B \vee C)$.

3. С учетом таблиц истинности логических операций получим таблицу:

A	B	C	$\overline{A}$	$B \vee C$	$D = \overline{A} \wedge (B \vee C)$
0	0	0	1	0	0
0	0	1	1	1	1
0	1	0	1	1	1
0	1	1	1	1	1
1	0	0	0	0	0
1	0	1	0	1	0
1	1	0	0	1	0
1	1	1	0	1	0

Для упрощения логических выражений используются приводимые ниже законы логики и правила преобразования логических выражений.

1. Закон двойного отрицания: $A = \overline{\overline{A}}$.

2. Переместительный (коммутативный) закон:

– для логического сложения: $A \vee B = B \vee A$;

– для логического умножения: $A \wedge B = B \wedge A$.

3. Сочетательный (ассоциативный) закон:

– для логического сложения: $(A \vee B) \vee C = A \vee (B \vee C)$;

– для логического умножения: $(A \wedge B) \wedge C = A \wedge (B \wedge C)$.

4. Распределительный (дистрибутивный) закон:

– для логического сложения: $(A \vee B) \wedge C = (A \wedge C) \vee (B \wedge C)$;

– для логического умножения: $(A \wedge B) \vee C = (A \vee C) \wedge (B \vee C)$.

5. Закон общей инверсии (законы де Моргана):

– для логического сложения: $\overline{A \vee B} = \overline{A} \wedge \overline{B}$;

– для логического умножения: $\overline{A \wedge B} = \overline{A} \vee \overline{B}$.

6. Закон идемпотентности (от латинских слов idem — тот же самый и potens — сильный; дословно — равносильный):

– для логического сложения: $A \vee A = A$;

– для логического умножения: $A \wedge A = A$.

7. Законы исключения констант:

– для логического сложения: $A \vee 1 = 1$, $A \vee 0 = A$;

– для логического умножения: $A \wedge 1 = A$, $A \wedge 0 = 0$.

8. Закон противоречия: $A \wedge \overline{A} = 0$.

9. Закон исключения третьего: $A \vee \overline{A} = 1$.

10. Закон поглощения:

– для логического сложения: $A \vee (A \wedge B) = A$;

– для логического умножения: $A \wedge (A \vee B) = A$.

Указанные законы позволяют упрощать сложные логические выражения; сложная логическая функция заменяется более простой, но равносильной ей. Нарушения законов логики приводят к логическим ошибкам и вытекающим из них противоречиям. При упрощении сложного логического выражения необходимо следовать порядку выполнения логических операций: инверсия; конъюнкция; дизъюнкция; импликация; эквивалентность. Для изменения указанного порядка выполнения операций используются скобки.

Пример. Упростить формулу $(A \vee B) \wedge (A \vee C)$

Решение:

Имеем :

$$(A \vee B) \wedge (A \vee C) = A \wedge A \vee A \wedge C \vee B \wedge A \vee B \wedge C .$$

Откуда с учетом $A \wedge A = A$, получим:

$$A \wedge A \vee A \wedge C \vee B \wedge A \vee B \wedge C = A \vee A \wedge C \vee B \wedge A \vee B \wedge C =$$
$$= A \wedge (1 \vee C) \vee B \wedge A \vee B \wedge C$$

(в высказываниях A и $A \wedge C$ вынесли за скобки A). Из $A \vee 1 = 1$ далее получим $A \vee A \wedge C \vee B \wedge A \vee B \wedge C = A \wedge (1 \vee C) \vee B \wedge A \vee B \wedge C = A \vee B \wedge A \vee B \wedge C$.

Аналогично предыдущему так же получим

$$A \vee B \wedge A \vee B \wedge C = A \wedge (1 \vee B) \vee B \wedge C = A \vee B \wedge C$$

Отметим, всякую логическую формулу можно преобразовать так, чтобы в ней не было отрицаний сложных высказываний (все отрицания будут применяться только к простым высказываниям).

5.3. Графы

Граф состоит из множества вершин и множества рёбер. Каждое ребро соединяет ровно две вершины.

Обыкновенным графом называется пара $G = (V, E)$, где V – конечное множество, E – множество неупорядоченных пар различных элементов из V. Элементы множества V называются вершинами графа, элементы множества E – его ребрами.

Граф называется конечным, если множество V конечно. Здесь ограничимся рассмотрением только конечных графов.

Вершина (узел)— это точка, где сходятся (выходят) рёбра. Множество вершин графа G обозначается $V(G)$.

Число вершин графа G=(V, E) называется его порядком.

Две вершины, соединяемые ребром, называются смежными, и каждая из этих вершин называется инцидентной данному ребру.

Инцидентность — понятие, используемое только в отношении ребра и вершины: если ν_1, ν_2 — вершины, а $e=(\nu_1,\nu_2)$ — соединяющее их ребро, то вершина ν_1 и ребро e инцидентны, вершина ν_2 и ребро e тоже инцидентны. Две вершины (или два ребра) инцидентными быть не могут. Если два различных ребра инцидентны одной и той же вершине, то они называются смежными. Смежность — понятие, используемое в отношении только двух рёбер либо только двух вершин: Два ребра, инцидентные одной вершине, называются смежными; две вершины, инцидентные одному ребру, также называются смежными. Количество рёбер графа G, инцидентных вершине ν_1 называется степенью вершины и обозначается $d(\nu_1)$; $\delta(G)$ – минимальная степень вершины графа G, $\Delta(G)$ – максимальная. Число вершин, смежных с данной вершиной v, называются степенью этой вершины. Если степень вершины равна нулю, то такая вершина называется изолированной.

Граф можно представить графически: каждая вершина представляется точкой или окружностью, а каждое ребро – линией, соединяющей две его любые вершины. Так на рис.5.6 представлен граф $G=(V,E)$; $V=\{v_1,v_2,v_3,v_4\}$; $E=\{(v_1,v_2), (v_1,v_4), (v_2,v_3), (v_2,v_4), (v_3,v_4)\}$ – соответственно его вершины и ребра.

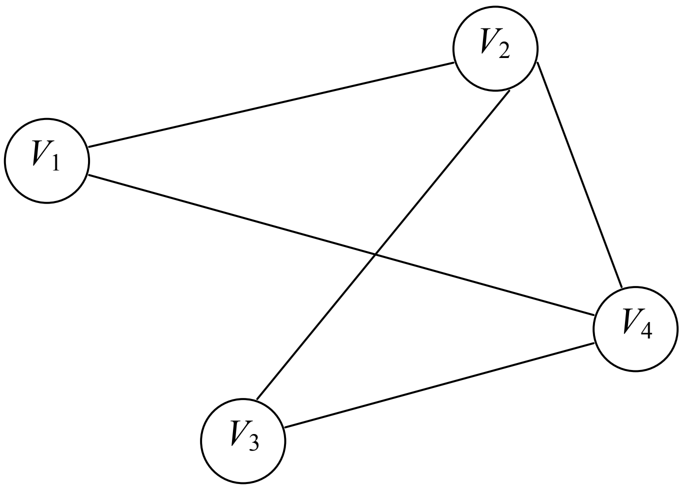


Рис. 5.6. Пример графа

Если в графе существуют несколько ребер, соединяющих одну и ту же пару вершин, то такие ребра называются кратными. При наличии кратных ребер граф называется мультиграф (рис. 5.7).

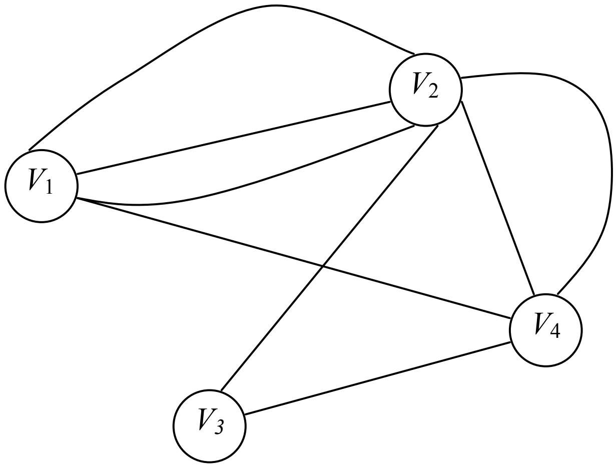


Рис. 5.7. Пример мультиграфа

Ребро, начало и конец которого находятся в одной и той же вершине называется петлей (соединяет вершину саму с собой). Граф с петлями называется псевдографом (рис. 5.8).

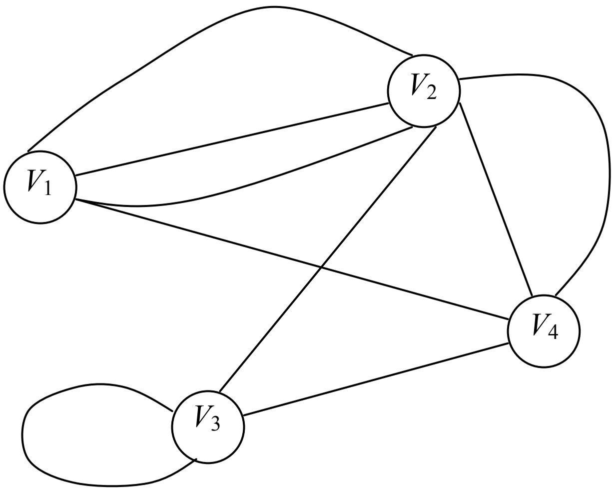


Рис. 5.8. Пример псевдографа

При отсутствии кратных рёбер и петель граф называется простым.

Пустой граф, не содержащий рёбер, называется нуль-графом.

Чередующаяся последовательность вершин и рёбер v_0, e_1, v_1, e_2, v_2, …, e_n, v_n, в которой любые два соседних элемента инцидентны, называется маршрутом; при $v_0 = v_n$ – маршрут замкнут, при $v_0 \neq v_n$ – открыт.

Различают также ориентированные и смешанные графы.

Ориентированное ребро графа называется дугой. Для упорядоченной пары вершин (ν_1, ν_2), вершина ν_1 – начало, а ν_2 – конец дуги. Можно сказать, что дуга $\nu_1 \rightarrow \nu_2$ ведет от вершины ν_1 к вершине ν_2, при этом вершина ν_1 смежная с вершиной ν_2. На рисунке дуги отмечаются стрелками, указывающими направление от начала к концу.

Ориентированным графом или орграфом называется пара множеств (V,E), где V – множество вершин (узлов), E – множество дуг (ориентированных рёбер). Пример орграфа на рис.5.9 ($G=(V,E)$, $V=\{v_1,v_2,v_3,v_4\}$, $E=\{(v_1,v_2), (v_1,v_4), (v_2,v_3), (v_2,v_4), (v_3,v_4)\}$).

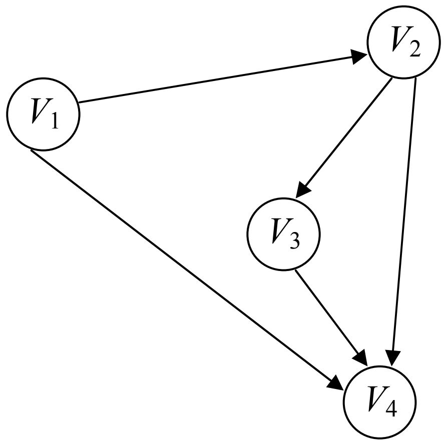


Рис. 5.9. Пример орграфа

Последовательность рёбер (в неориентированном графе) и/или дуг (в ориентированном графе), такая, что конец одной дуги (ребра) является началом другой дуги (ребра) называется путем (последовательность ребер $\{(v_0, v_1), (v_1, v_2), \ldots, (v_{n-1}, v_n)\}$ – путь, соединяющий v_0 и v_n). Число ребер в такой последовательности называется длиной пути. В частности, длина пути, соединяющего вершины 1 и 4 ($\pi=\{(1, 2), (2, 3), (3, 4)\}$) приведенного на рис. 5.10 графа равна 3.

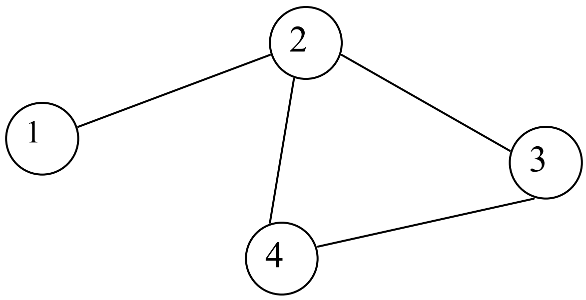


Рис. 5.10

Последовательность вершин $v_1, v_2, ..., v_n$, для которой существуют дуги $v_1 \to v_2$, $v_2 \to v_3$, …, $v_{n-1} \to v_n$ называется путем в орграфе ; начинается в вершине v_1, проходит через вершины v_2, v_3, …, v_{n-1}, и заканчивается в вершине v_n. Замкнутый путь в орграфе называется контуром.

Путь, вершины которого, за исключением, быть может, первой и последней, различны, называется элементарным, простым (путь не проходит дважды через одну вершину). Если такой путь начинается и заканчивается в одной и той же вершине, то он называется циклом (элементарным циклом).

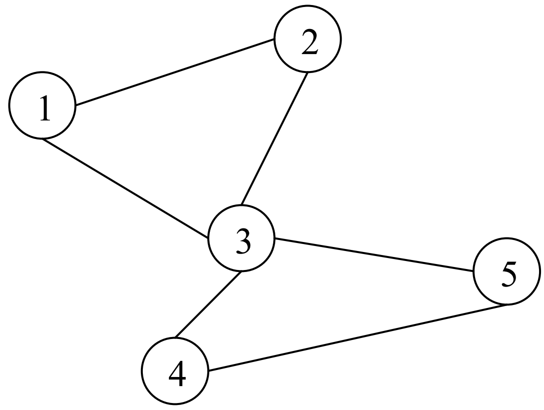


Рис. 5.11

На рисунке 5.11 представлены циклы:

1) (1, 2), (2, 3), (3, 1).
2) (5, 4), (4, 3), (3, 5).
3) (1, 3), (3, 4), (4, 5), (5, 3), (3, 2), (2, 1).

(1-й и 3-й циклы различаются только длиной пути)

Цепь в графе — маршрут, все рёбра которого различны. Если все вершины (а тем самым и рёбра) различны, то такая цепь называется простой (элементарной). В цепи v_0, e_1, v_1, e_2, v_2, …, e_n, v_n вершины v_0 и v_n называются концами цепи. Цепь с концами u и v соединяет вершины u и v. Цепь, соединяющая вершины u и v обозначается $\langle u,v \rangle$.

Цикл называется простым, если он не проходит через одну и ту же вершину более одного раза ($v_0, \ldots, v_{n-1}$ – различные).

Граф называется связным, если для любых двух вершин существует в нем путь, соединяющий эти вершины (рис.5.12).

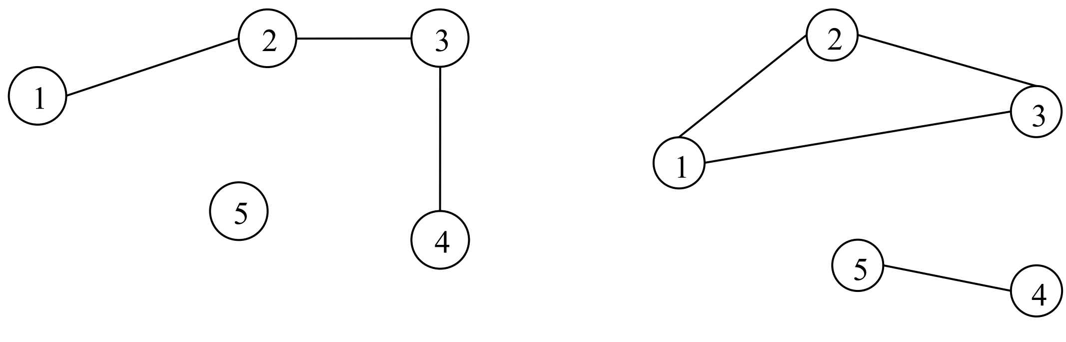


Рис. 5.12. Примеры несвязных графов

Справедливы утверждения:

1. Если в графе имеется путь, соединяющий вершины A и B, то в нем имеется простой путь, соединяющий эти вершины (например, в графе на рис.5.12 имеется путь (1, 2, 3, 4, 2, 5); путь (1, 2, 5) – простой).

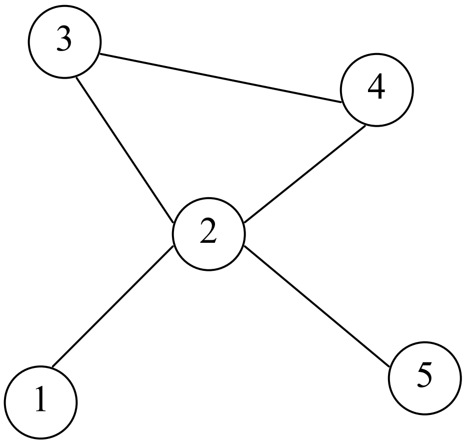


Рис.5.13

2. Если в графе имеется цикл, проходящий через ребро (A, B), в этом графе имеется и простой цикл, проходящий через ребро (A, B).

3. Если в графе степень каждой вершины не меньше 2, то в этом графе имеется цикл.

Длина кратчайшей цепи (в орграфе пути), соединяющей заданные вершины, называется расстоянием между вершинами (при отсутствии такой цепи расстояние принимается равным бесконечности).

Смешанные графы имеют как дуги, так и неориентированные рёбра (рис.5.14).

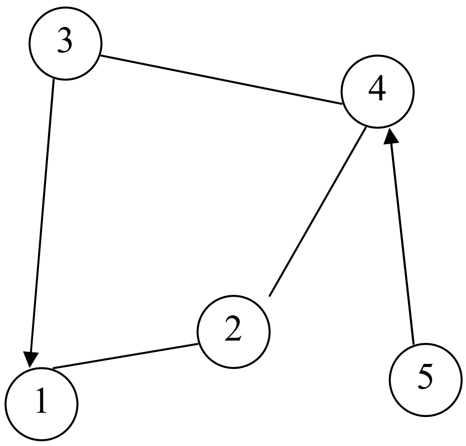


Рис. 5.14. Пример смешанного графа

Часто каждой дуге графа ставят в соответствие одно или несколько чисел. Такой граф называется взвешенным (или сетью).

Взвешенный граф – граф, каждому ребру которого поставлено в соответствие вещественное число (вес ребра).

Эйлеров граф – это граф, в котором существует цикл, содержащий все рёбра графа по одному разу (вершины могут повторяться).

Эйлерова цепь (или Эйлеров цикл) – это цепь (цикл), которая содержит все рёбра графа (вершины могут повторяться).

Существует три основных способа задания графа:

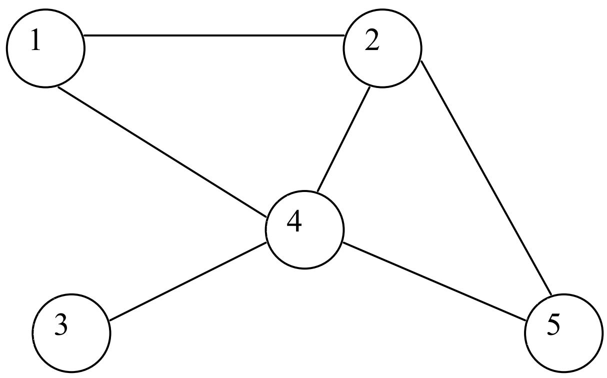
– задание списка вершин и ребер: $G = (V, E)$;

– графический способ;

– матричный.

Квадратная матрица $A = \left\| A_{ij} \right\|$, $A_{ij} = \begin{cases} 1, \text{если } v_i \text{ и } v_j \text{ смежные}, \\ 0, \text{если } v_i \text{ и } v_j \text{ несмежные} \end{cases}$; $i, j = \overline{1,n}$

для графа $G=(V,E)$ с вершинами $V = \{1, 2, \ldots, n\}$ называется матрицей смежности (рис. 5.15).



$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Рис. 5.15

Для обыкновенного графа на главной диагонали будут нули (отсутствие петель); матрица симметрична относительно главной диагонали (граф неориентированный).

Верно и обратное, каждой квадратной матрице порядка n, составленной из нулей и единиц и обладающей двумя указанными свойствами, соответствует обыкновенный граф с множеством вершин $\{1, 2, \ldots, n\}$.

Матрица $I = \left\| I_{ij} \right\|$, $I_{ij} = \begin{cases} 1, \text{если } v_i \text{ инцидентно ребру } x_j, \\ 0, \text{если } v_i \text{ неинцидентно ребру } x_j \end{cases}$ $i = \overline{1,n},\ j = \overline{1,m}$

называется матрицей инцидентности .

Для ориентированного графа матрица инцидентности определяется несколько иначе: ее элемент I_{ij} равен 1, если вершина i является началом ребра j, он равен –1, если она является концом этого ребра, и он равен 0, если эта вершина и это ребро не инцидентны друг другу.

Теория графов широко используется при решении ряда практических задач:

– отыскание минимального по стоимости плана выполнения комплекса работ при заданной его продолжительности;

– организация снабжения;

– определение наиболее экономного строительства энергетических сетей, нефте- и газопроводов, железных и шоссейных дорог и др.;

– задачи об оптимальных назначениях;

При решении таких задач используется понятие сети.

Сеть – это конечный граф без циклов и петель, ориентированный в одном общем направлении от вершины *I* (исток) графа, к вершине *S* (сток) графа; в логистике сеть – система автомобильных дорог. Наибольшее число машин, проходящих через систему за единицу времени определяется как максимальная величина потока **P**. Наибольшее число машин, проходящих через дугу, называется пропускной способностью дуги.

В качестве иллюстрации рассмотрим систему автомобильных дорог населенного пункта (рис.5.16; транспортная сеть с одним входом и одним выходом). Определим максимальный поток.

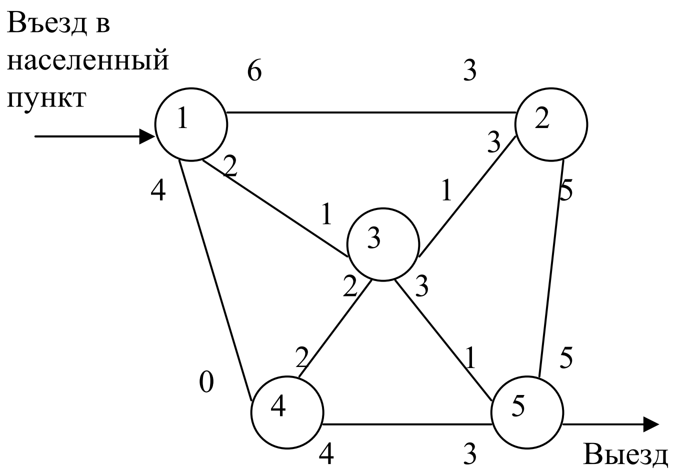
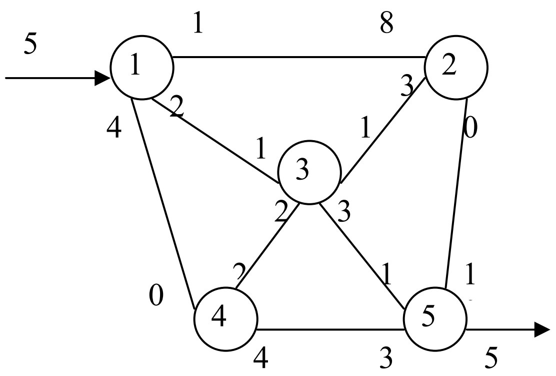
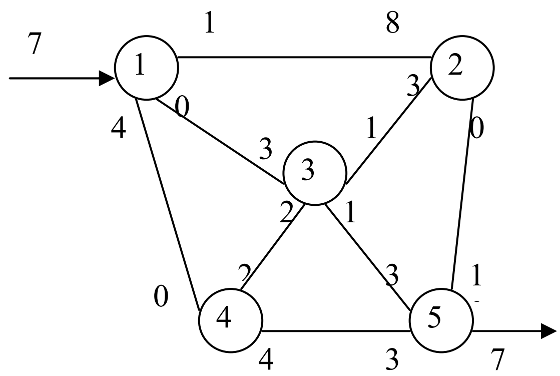


Рис. 5.16. Система автомобильных дорог населенного пункта

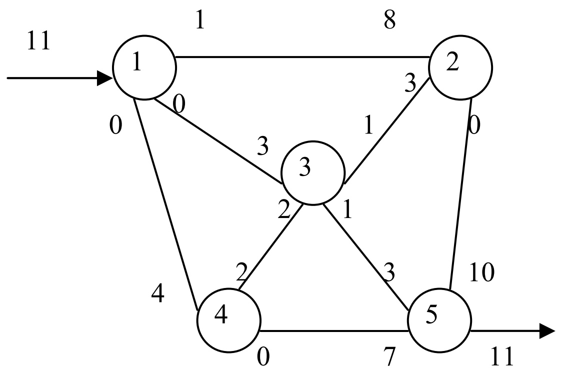
Сначала примем максимальный поток в системе равным нулю (P=0)

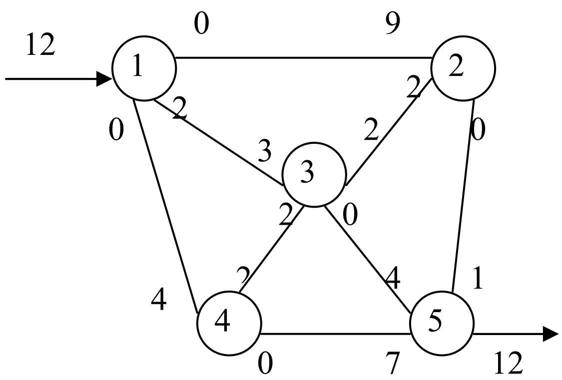
1 шаг. Выберем путь от вершины 1 до вершины 5 (от въезда до выезда; например, **1-2-5)**. Наименьшее значение пропускной способности соединяющих эти вершины дуг равно 5: P=min (6, 5)=5. Уменьшим на эту величину (на 5) пропускную способность потока от вершины 1 до вершины 5, а в обратном направлении (от вершины 5 к вершине 1) – увеличим на 5. Тогда общий поток станет равным P=0+5=5. Система дорог преобразуется к виду, приведенному на рис.5.17,а:





а б





в г

Рис. 5.17. Пошаговые преобразования графов:
а – первый шаг; б – второй; в – третий; г – четвертый шаг

2 шаг. Выберем другой путь от вершины 1 до вершины 5, например, ***1-3-5***. Наименьшее значение пропускной способности соединяющих эти вершины дуг P=min (2, 3)=2. Пропускную способность потока от 1 к 3 и от 3 к 5 уменьшим на 2, а в обратном направлении – увеличим на 2. Общий поток будет P=2+5=7. Система дорог преобразуется к виду, приведенному на рис.5.17,б:

3 шаг. Выберем новый путь от вершины 1 до вершины 5: ***1-4-5***. Наименьшее значение пропускной способности соединяющих эти вершины дуг равно 4: P=min (4, 4)=4. Пропускную способность потока от 1 к 4 и от 4 к 5 уменьшим на 4, а в обратном направлении – увеличим на 4. Тогда общий поток P=4+7=11. Система дорог преобразуется к виду, приведенному на рис.5.17,в.

4 шаг. Выберем новый путь ***1-2-3-5*** от вершины 1 до вершины 5. В этом случае наименьшее значение пропускной способности P=min (1, 3, 1)=1. Уменьшим пропускную способность потока от 1 к 2, от 2 к 3 и от 3 к 5 на 1, а в обратном направлении – увеличиваем на 1. Тогда общий поток станет равным P=11+1=12. Система дорог преобразуется к виду, приведенному на рис.5.17,г. Как видим, из вершины 1 до вершины 5 нет путей, на которых минимальное значение пропускной способности было бы большим нуля. Таким образом, максимальный поток через данную транспортную сеть равен P=12.

Заметим, можно определить как величину, так и направление потока на каждой дуге (конечная модель потоков, рис. 5.18). Величина потока (пропускная способность дуги) от 1 вершины до вершины 2 первоначально была равна 6 (рис.5.16), после преобразований – 0. Разность между первоначальной и конечной пропускной способностью дуги равна 6-0=6; т.е. величина потока на дуге 1-2 равна 6.

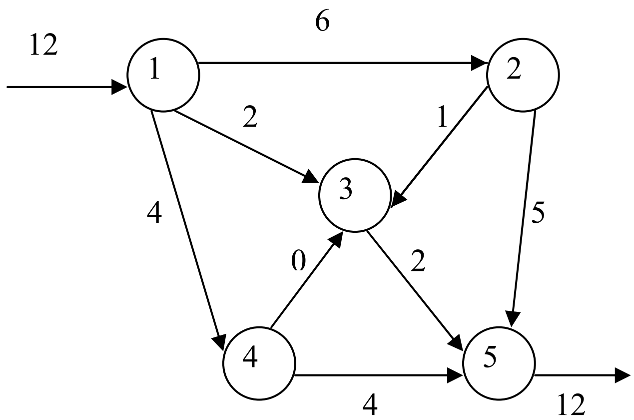


Рис. 5.18. Конечная модель потоков

Контрольные вопросы

1. Множество. Операции над множествами. Свойства.
2. Отрицание, дизъюнкция, конъюнкция, импликация, эквивалентность.
3. Обыкновенный граф.
4. Матрица инцидентности.
5. Ориентированный граф.
6. Несвязный и связный графы.
7. Сеть.
8. Максимальный поток.
9. Полный путь.

Задачи для самоконтроля

1. Укажите верную таблицу истинности для конъюнкции

1)

A	B	$A \cap B$
0	0	0
1	0	1
0	1	0
1	1	1

2)

A	B	$A \cap B$
0	0	0
1	0	1
0	1	1
1	1	0

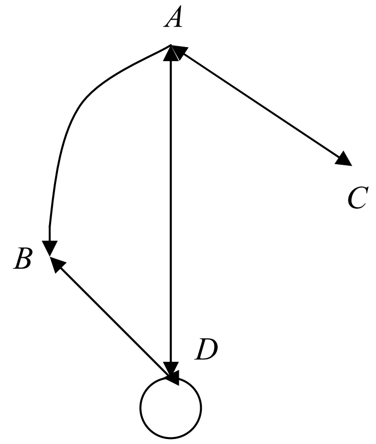
3)

A	B	$A \cap B$
0	0	0
1	0	1
0	1	1
1	1	1

4)

A	B	$A \cap B$
0	0	1
1	0	0
0	1	0
1	1	1

2. Матрица смежности для графа



имеет вид:

1) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$; 2) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; 3) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$; 4) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

3. Пусть ***A*** – высказывание «Коля выучил все билеты», ***B*** – высказывание «Коля успешно сдал экзамен». Тогда высказывание «Коля выучил все билеты и успешно сдал экзамен» на языке формул логики имеет вид:

1) $A \cap B$; 2) $A \cup B$; 3) $\overline{A} \cup B$; 4) $A \to B$.

4. Какое из следующих предложений является высказыванием:

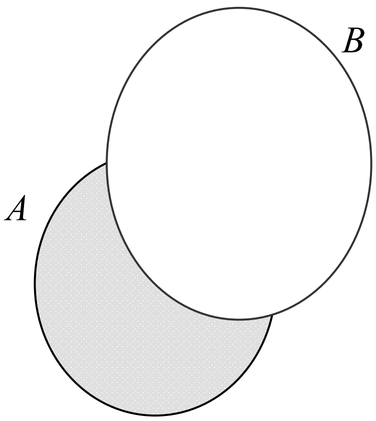
1) «Москва – столица нашей родины»;
2) «Фиолетовый карандаш»;
3) $\sqrt{7236}$;
4) $2x$-$37y$+$128z$.

5. Выберите из трех сложных высказываний только истинные:

А) 7+4=12 и 2*2=4;
Б) 7-7=0 или Париж – главный город России;
В) Если 4 – нечетное число, то 12 делится на 5.

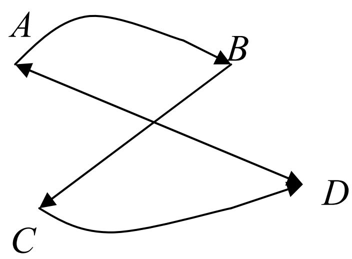
1) А и Б;	2) Б;	3) А;	4) Б и В.

6. Операцией над множествами A и B, результат которой выделен на рисунке, является…



1) $A \cup \overline{B}$; 2) $A \setminus B$; 3) $B \setminus A$; 4) $A \cap B$.

7. Матрица смежности для графа



имеет вид:

1) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$; 2) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$; 3) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$; 4) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

8. Пусть высказывание A – «$\sqrt[3]{125} = 15$», высказывание B – «36 делится на 13». Тогда из высказываний

I) $\overline{A} \to B$;

II) $A \vee B$;

III) $A \to \overline{B}$;

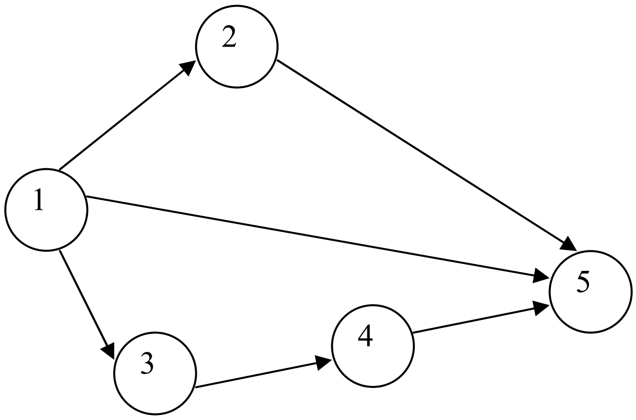
IV) $A \leftrightarrow \overline{B}$

являются истинными…

1) II и III;	2) II и IV;	3) II;	4) I, III и IV.

10.Укажите полный путь орграфа:

11.



1) 1-3-5; 2) 1-2-5; 3) 2-3-5; 4) 1-5.

10. Пусть ***A*** – высказывание «Роман идет в кино», ***B*** – высказывание «Сергей готовится к экзаменам». Тогда высказывание «Роман идет в кино, или Сергей готовится к экзаменам» на языке формул логики имеет вид:

1) $A \cap B$; 2) $A \cup B$; 3) $\overline{A} \cup B$; 4) $A \rightarrow B$.

11. Какое из следующих предложений является высказыванием:

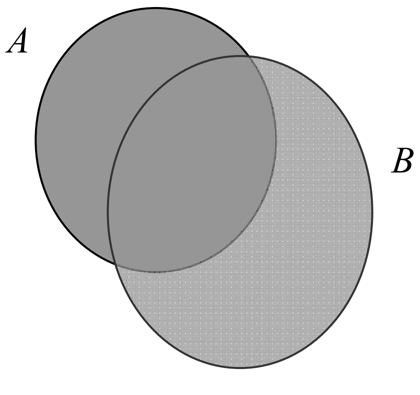
1) «Пенза – столица нашей родины»;

2) «Двигатель исправен?»;

3) $\sqrt{7236}$;

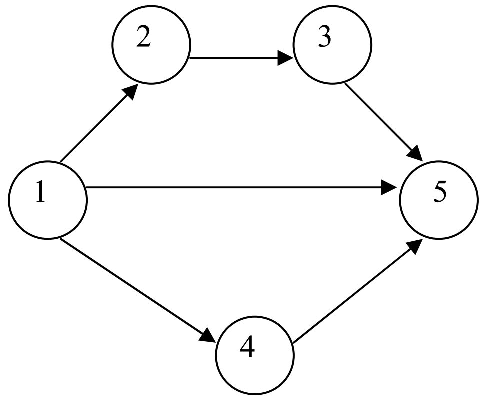
4) $5x$-$37y$+$14xy$.

12. Операцией над множествами А и В, результат которой выделен на рисунке, является…



1) $A \cup \overline{B}$; 2) $A \cup B$; 3) $A \cap \overline{B}$; 4) $A \cap B$.

12. Укажите полный путь графа:



1) 1-3-5; 2) 1-2-5; 3) 2-3-5; 4) 1-5.

14. Какое из следующих предложений является высказыванием:
1) «Рига – столица Латвии»;
2) «Аккуратный пешеход»;
3) $\sqrt{7236}$;
4) $5x - 3y = z$.

15. Пусть высказывание A – «3 – корень уравнения $x^2 - 9 = 0$», высказывание B – «26 делится на 13». Тогда из высказываний

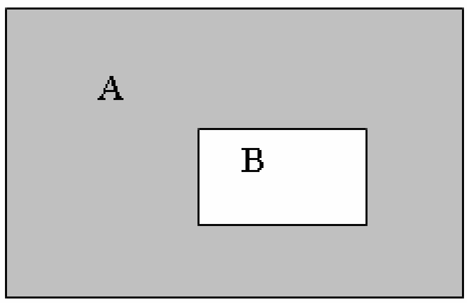
I) $A \wedge \overline{B}$\4 II) $A \vee B$; III) $B \leftrightarrow A$; IV) $A \to \overline{B}$

являются истинными…

1) II и III; 2) II и IV; 3) II; 4) I, III и IV.

16. Операцией над множествами A и B, результат которой выделен на рисунке, является…

1) $A \cup \overline{B}$; 2) $A \setminus B$; 3) $A \setminus \overline{B}$; 4) $A \cap B$.

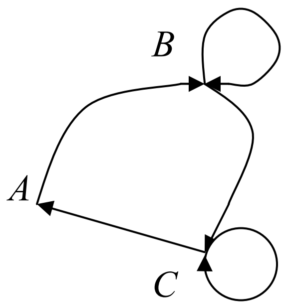


17. Выберите из трех сложных высказываний только истинные:
А) 23 делится на 11 тогда и только тогда, когда 23 – простое число;
Б) $12^2 = 145$ или Москва – столица России;

В) если 4 – четное число, то 12 делится на 5.

1) А и Б; 2) Б; 3) А; 4) Б и В.

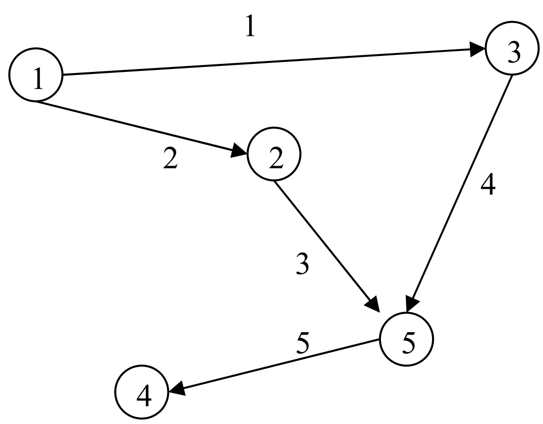
18. Матрица смежности для графа



имеет вид:

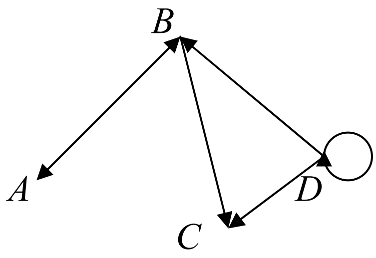
1) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$; 2) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; 3) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; 4) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

19. Матрица инцидентности орграфа имеет вид



1) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$; 2) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$; 3) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

20. Граф G, представленный на рисунке является…



1) мультиграфом; 2) псевдографом;
3) орграфом; 4) смешанным графом.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Пособие предназначено студентам технических ВУЗов, обучающихся по направлению 08.04.01 – Строительство (уровень магистратуры) и написано с учетом требований Федерального государственного образовательного стандарта поколения «три плюс». Содержит отдельные вопросы, важные для решения практических задач в профессиональной деятельности: теории вероятностей и математической статистики; математической физики; временных рядов; теории массового обслуживания; элементы дискретной математики, логические исчисления, графы.

Издание может использоваться при подготовке магистров и по ряду других специальностей технических вузов.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Вентцель, А.Д. Теория вероятностей [Текст]: учебник для вузов / А.Д. Вентцель. – М.: Высшая школа, 2010. – 575 с.
2. Вентцель, А.Д. Теория вероятностей и ее инженерные приложения [Текст] / А.Д. Вентцель. – М.: Академия, 2010. – 464 с.
3. Теория вероятностей и математическая статистика. Математические модели [Текст] / В.Д. Мятлев, Л.А. Панченко, Г.Ю. Ризниченко, А.Т. Терехин. – М.: Академия, 2009. – 320 с.
4. Чашкин, Ю.Р. Математическая статистика. Анализ и обработка данных [Текст] / Ю.Р. Чашкин. – Ростов н/Д: Феникс, 2010. – 240 с.
5. Данилов, А.М. Теория вероятностей и математическая статистика с инженерными приложениями [Текст]: учебное пособие / А.М. Данилов, И.А. Гарькина. – Пенза: ПГУАС, 2010. – 228 с.
6. Тихонов, А.Н. Уравнения математической физики [Текст] / А.Н. Тихонов, А.А Самарский.. – М.: Наука. – 2007. – 736 с.
7. Бокс, Дж. Анализ временных рядов. Прогноз и управление [Текст]: монография / Дж. Бокс, Г. Дженкинс. – М., 1974. – 288 с.
8. Отнес, Р. Прикладной анализ временных рядов [Текст]: монография / Р. Отнес, Л. Эноксон. – М.: Мир. – 1982. – 432 с.
9. Саати, Т.Л. Элементы теории массового обслуживания и ее приложения [Текст]: пер. с англ. / Т.Л. Саати. –3-е изд. – М.: Либроком, 2010. – 520 с.
10. Гнеденко, Б.В. Введение в теорию массового обслуживания [Текст] / Б.В. Гнеденко, И.Н. Коваленко. – М.: ЛКИ, 2007. – 400 с.
11. Зыков А.А. Основы теории графов [Текст] / А.А. Зыков. – М.: Вузовская книга, 2004. – 664 с.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Таблица П1

Таблица значений функции $\varphi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	0,3989	3989	3989	3988	3986	3984	3982	3980	3977	3973
0,1	3970	3965	3961	3956	3951	3945	3939	3932	3925	3918
0,2	3910	3902	3894	3885	3876	3867	3857	3847	3836	3825
0,3	3814	3802	3790	3778	3765	3752	3739	3726	3712	3697
0,4	3683	3668	3653	3637	3621	3605	3589	3572	3555	3538
0,5	3521	3503	3485	3467	3448	3429	3410	3391	3372	3352
0,6	3332	3312	3292	3271	3251	3230	3209	3187	3166	3144
0,7	3123	3101	3079	3056	3034	3011	2989	2966	2943	2920
0,8	2897	2874	2850	2827	2803	2780	2756	2732	2709	2685
0,9	2661	2637	2613	2589	2565	2541	2516	2492	2468	2444
1,0	0,2420	2396	2371	2347	2323	2299	2275	2251	2227	2203
1,1	2179	2155	2131	2107	2083	2059	2036	2012	1989	1965
1,2	1942	1919	1895	1872	1849	1826	1804	1781	1758	1736
1,3	1714	1691	1669	1647	1626	1604	1582	1561	1539	1518
1,4	1497	1476	1456	1435	1415	1394	1374	1354	1334	1315
1,5	1295	1276	1257	1238	1219	1200	1182	1163	1145	1127
1,6	1109	1092	1074	1057	1040	1023	1006	0989	0973	0957
1,7	0940	0925	0909	0893	0878	0863	0848	0833	0818	0804
1,8	0790	0775	0761	0748	0734	0721	0707	0694	0681	0669
1,9	0656	0644	0632	0620	0608	0596	0584	0573	0562	0551
2,0	0,0540	0529	0519	0508	0498	0488	0478	0468	0459	0449
2,1	0440	0431	0422	0413	0404	0396	0387	0379	0371	0363
2,2	0355	0347	0339	0332	0325	0317	0310	0303	0297	0290
2,3	0283	0277	0270	0264	0258	0252	0246	0241	0235	0229
2,4	0224	0219	0213	0208	0203	0198	0194	0189	0184	0180
2,5	0175	0171	0167	0163	0158	0154	0151	0147	0143	0139
2,6	0136	0132	0129	0126	0122	0119	0116	0113	0110	0107
2,7	0104	0101	0099	0096	0093	0091	0088	0086	0084	0081
2,8	0079	0077	0075	0073	0071	0069	0067	0065	0063	0061
2,9	0060	0058	0056	0055	0053	0051	0050	0048	0047	0046
3,0	0,0044	0043	0042	0040	0039	0038	0037	0036	0035	0034
3,1	0033	0032	0031	0030	0029	0028	0027	0026	0025	0025
3,2	0024	0023	0022	0022	0021	0020	0020	0019	0018	0018
3,3	0017	0017	0016	0016	0015	0015	0014	0014	0013	0013
3,4	0012	0012	0012	0011	0011	0010	0010	0010	0009	0009
3,5	0009	0008	0008	0008	0008	0007	0007	0007	0007	0006
3,6	0006	0006	0006	0005	0005	0005	0005	0005	0005	0004
3,7	0004	0004	0004	0004	0004	0004	0003	0003	0003	0003
3,8	0003	0003	0003	0003	0003	0002	0002	0002	0002	0002
3,9	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0001	0001

П р о д о л ж е н и е п р и л о ж е н и я

Т а б л и ц а П 2

Таблица значений функции $\Phi(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_0^x e^{-\frac{z^2}{2}} dz$

x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$
0,00	0,0000	0,37	0,1443	0,74	0,2703	1,11	0,3665
0,01	0,0040	0,38	0,1480	0,75	0,2734	1,12	0,3686
0,02	0,0080	0,39	0,1517	0,76	0,2764	1,13	0,3708
0,03	0,0120	0,40	0,1554	0,77	0,2794	1,14	0,3729
0,04	0,0160	0,41	0,1591	0,78	0,2823	1,15	0,3749
0,05	0,0199	0,42	0,1628	0,79	0,2852	1,16	0,3770
0,06	0,0239	0,43	0,1664	0,80	0,2881	1,17	0,3790
0,07	0,0279	0,44	0,1700	0,81	0,2910	1,18	0,3810
0,08	0,0319	0,45	0,1736	0,82	0,2939	1,19	0,3830
0,09	0,0359	0,46	0,1772	0,83	0,2967	1,20	0,3849
0,10	0,0398	0,47	0,1808	0,84	0,2995	1,21	0,3869
0,11	0,0438	0,48	0,1844	0,85	0,3023	1,22	0,3883
0,12	0,0478	0,49	0,1879	0,86	0,3051	1,23	0,3907
0,13	0,0517	0,50	0,1915	0,87	0,3078	1,24	0,3925
0,14	0,0557	0,51	0,1950	0,88	0,3106	1,25	0,3944
0,15	0,0596	0,52	0,1985	0,89	0,3133	1,26	0,3962
0,16	0,0636	0,53	0,2019	0,90	0,3159	1,27	0,3980
0,17	0,0675	0,54	0,2054	0,91	0,3186	1,28	0,3997
0,18	0,0714	0,55	0,2088	0,92	0,3212	1,29	0,4015
0,19	0,0753	0,56	0,2123	0,93	0,3238	1,30	0,4032
0,20	0,0793	0,57	0,2157	0,94	0,3264	1,31	0,4049
0,21	0,0832	0,58	0,2190	0,95	0,3289	1,32	0,4066
0,22	0,0871	0,59	0,2224	0,96	0,3315	1,33	0,4082
0,23	0,0910	0,60	0,2257	0,97	0,3340	1,34	0,4099
0,24	0,0948	0,61	0,2291	0,98	0,3365	1,35	0,4115
0,25	0,0987	0,62	0,2324	0,99	0,3389	1,36	0,4113
0,26	0,1026	0,63	0,2357	1,00	0,3413	1,37	0,4147
0,27	0,1064	0,64	0,2389	1,01	0,3438	1,38	0,4162
0,28	0,1103	0,65	0,2422	1,02	0,3461	1,39	0,4177
0,29	0,1141	0,66	0,2454	1,03	0,3485	1,40	0,4192
0,30	0,1179	0,67	0,2486	1,04	0,3508	1,41	0,4207
0,31	0,1217	0,68	0,2517	1,05	0,3531	1,42	0,4222
0,32	0,1255	0,69	0,2549	1,06	0,3554	1,43	0,4236
0,33	0,1293	0,70	0,2580	1,07	0,3577	1,44	0,4251
0,34	0,1331	0,71	0,2611	1,08	0,3599	1,45	0,4265
0,35	0,1368	0,72	0,2642	1,09	0,3621	1,46	0,4279
0,36	0,1406	0,73	0,2673	1,10	0,3643	1,47	0,4292

П р о д о л ж е н и е   п р и л о ж е н и я

О к о н ч а н и е   т а б л .   П 2

x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$
1,48	0,4306	1,76	0,4608	2,08	0,4812	2,62	0,4956
1,49	0,4319	1,77	0,4616	2,10	0,4821	2,64	0,4959
1,50	0,4332	1,78	0,4625	2,12	0,4830	2,66	0,4961
1,51	0,4345	1,79	0,4633	2,14	0,4838	2,68	0,4963
1,52	0,4357	1,80	0,4641	2,16	0,4846	2,70	0,4965
1,53	0,4370	1,81	0,4649	2,18	0,4854	2,72	0,4967
1,54	0,4382	1,82	0,4656	2,20	0,4861	2,74	0,4969
1,55	0,4394	1,83	0,4664	2,22	0,4868	2,76	0,4971
1,56	0,4406	1,84	0,4671	2,24	0,4875	2,78	0,4973
1,57	0,4418	1,85	0,4678	2,26	0,4881	2,80	0,4974
1,58	0,4429	1,86	0,4686	2,28	0,4887	2,82	0,4976
1,59	0,4441	1,87	0,4693	2,30	0,4893	2,84	0,4977
1,60	0,4452	1,88	0,4699	2,32	0,4898	2,86	0,4979
1,61	0,4463	1,89	0,4706	2,34	0,4904	2,88	0,4980
1,62	0,4474	1,90	0,4713	2,36	0,4909	2,90	0,4981
1,63	0,4484	1,91	0,4719	2,38	0,4913	2,92	0,4982
1,64	0,4495	1,92	0,4726	2,40	0,4918	2,94	0,4984
1,65	0,4505	1,93	0,4732	2,42	0,4922	2,96	0,4985
1,66	0,4515	1,94	0,4738	2,44	0,4927	2,98	0,4986
1,67	0,4525	1,95	0,4744	2,46	0,4931	3,00	0,49865
1,68	0,4535	1,96	0,4750	2,48	0,4934	3,20	0,49931
1,69	0,4545	1,97	0,4756	2,50	0,4938	3,40	0,49966
1,70	0,4554	1,98	0,4761	2,52	0,4941	3,60	0,499841
1,71	0,4564	1,99	0,4767	2,54	0,4945	3,80	0,499928
1,72	0,4573	2,00	0,4772	2,56	0,4948	4,00	0,499968
1,73	0,4582	2,02	0,4783	2,58	0,4951	4,50	0,499997
1,74	0,4591	2,04	0,4793	2,60	0,4953	5,00	0,499997
1,75	0,4599	2,06	0,4803				

Продолжение приложения

Таблица П3

Таблица значений $t_\gamma = t(\gamma, n)$

n \ γ	0,95	0,99	0,999	n \ γ	0,95	0,99	0,999
5	2,78	4,60	8,61	20	2,093	2,861	3,883
6	2,57	4,03	6,86	25	2,064	2,797	3,745
7	2,45	3,71	5,96	30	2,045	2,756	3,659
8	2,37	3,50	5,41	35	2,032	2,729	3,600
9	2,31	3,36	5,04	40	2,023	2,708	3,558
10	2,26	3,25	4,78	45	2,016	2,692	3,527
11	2,23	3,17	4,59	50	2,009	2,679	3,502
12	2,20	3,11	4,44	60	2,001	2,662	3,464
13	2,18	3,06	4,32	70	1,996	2,649	3,439
14	2,16	3,01	4,22	80	1,991	2,640	3,418
15	2,15	2,98	4,14	90	1,987	2,633	3,403
16	2,13	2,95	4,07	100	1,984	2,627	3,392
17	2,12	2,92	4,02	120	1,980	2,617	3,374
18	2,11	2,90	3,97	∞	1,960	2,576	3,291
19	2,10	2,88	3,92				

Таблица П4

Таблица значений $q = q(\gamma, n)$

n \ γ	0,95	0,99	0,999	n \ γ	0,95	0,99	0,999
5	1,37	2,67	5,64	20	0,37	0,58	0,88
6	1,09	2,07	3,88	25	0,32	0,49	0,73
7	0,92	1,62	2,98	30	0,28	0,43	0,63
8	0,80	1,38	2,42	35	0,26	0,38	0,56
9	0,71	1,20	2,06	40	0,24	0,35	0,50
10	0,65	1,08	1,80	45	0,22	0,32	0,46
11	0,59	0,98	1,60	50	0,21	0,30	0,43
12	0,55	0,90	1,45	60	0,188	0,269	0,38
13	0,52	0,83	1,33	70	0,174	0,245	0,34
14	0,48	0,78	1,23	80	0,161	0,226	0,31
15	0,46	0,73	1,15	90	0,151	0,211	0,29
16	0,44	0,70	1,07	100	0,143	0,198	0,27
17	0,42	0,66	1,01	150	0,115	0,160	0,221
18	0,40	0,63	0,96	200	0,099	0,136	0,185
19	0,39	0,60	0,92	250	0,089	0,120	0,162

Окончание приложения

Таблица П5

Критические точки распределеиия χ^2

Число степеней свободы	Уровень значимости α					
	0,01	0,025	0,05	0,95	0,975	0,99
1	66	5,0	3,8	0,0039	0,00098	0,00016
2	9,2	7,4	6,0	0,103	0,051	0,020
3	11,3	9,4	7,8	0,352	0,216	0,115
4	13,3	11,1	9,5	0,711	0,484	0,297
5	15,1	12,8	11,1	1,15	0,831	0,554
6	16,8	14,4	12,6	1,64	1,24	0,872
7	18,5	16,0	14,1	2,17	1,69	1,24
8	20,1	17,5	15,5	2,73	2,18	1,65
9	21,7	19,0	16,9	3,33	2,70	2,09
10	23,2	20,5	18,3	3,94	3,25	2,56
11	24,7	21,9	19,7	4,57	3,82	3,05
12	26,2	23,3	21,0	5,23	4,40	3,57
13	27,7	24,7	22,4	5,89	5,01	4,11
14	29,1	26,1	23,7	6,57	5,63	4,66
15	30,6	27,5	25,0	7,26	6,26	5,23
16	32,0	28,8	26,3	7,96	6,91	5,81
17	33,4	30,2	27,6	8,67	7,56	6,41
18	34,8	31,5	28,9	9,39	8,23	7,01
19	36,2	32,9	30,1	10,1	8,91	7,63
20	37,6	34,2	31,4	10,9	9,59	8,26
21	38,9	35,5	32,7	11,6	10,3	8,90
22	40,3	36,8	33,9	12,3	11,0	9,54
23	41,6	38,1	35,2	13,1	11,7	10,2
24	43,0	39,4	36,4	13,8	12,4	10,9
25	44,3	40,6	37,7	14,6	13,1	11,5
26	45,6	41,9	38,9	15,4	13,8	12,2
27	47,0	43,2	40,1	16,2	14,6	12,9
28	48,3	44,5	41,3	16,9	15,3	13,6
29	49,6	45,7	42,6	17,7	16,0	14,3
30	50,9	47,0	43,8	18,5	16,8	15,0

О Г Л А В Л Е Н И Е

ПРЕДИСЛОВИЕ 3
ВВЕДЕНИЕ 4
1. ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА ..5
1.1. Системы случайных величин 5
Контрольные вопросы...23
1.2. Оценка параметров распределения...23
1.3. Проверка статистических гипотез...33
Контрольные вопросы...40
2. УРАВНЕНИЯ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ 41
2.1. Уравнения параболического типа..48
2.1.1. Распространение тепла в пространстве..48
2.1.2. Распространение тепла в неограниченном стержне 52
2.1.3. Распространение тепла в конечном стержне................................55
2.1.4. Неоднородное уравнение теплопроводности................................62
2.2. Уравнения гиперболического типа...64
2.2.1. Дифференциальное уравнение крутильных колебаний цилиндрического стержня 64
2.2.2. Дифференциальное уравнение поперечных колебаний мембраны...72
2.3. Уравнения эллиптического типа...80
2.3.1. Уравнения Лапласа и Пуассона 80
2.4. Приближенные методы решения дифференциальных уравнений в частных производных методом конечных разностей 84
Контрольные вопросы...88
3. ВРЕМЕННЫЕ РЯДЫ 89
Контрольные вопросы...107
4. СИСТЕМЫ МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ.....................................108
4.1. Марковские случайные процессы с дискретными состояниями 110
4.2. СМО с отказами 114
4.3. СМО с ожиданием. Системы с неограниченной очередью.............119
Контрольные вопросы...127
Задачи для самоконтроля...127
5. ЭЛЕМЕНТЫ ДИСКРЕТНОЙ МАТЕМАТИКИ, МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛОГИКИ, ТЕОРИИ ГРАФОВ...129
5.1. Дискретная математика...129
5.2. Математическая логика...130

5.3. Графы 134
Контрольные вопросы 143
Задачи для самоконтроля 143
ЗАКЛЮЧЕНИЕ 150
БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК 151
ПРИЛОЖЕНИЕ 152

Учебное издание

Гарькина Ирина Александровна
Данилов Александр Максимович

СПЕЦИАЛЬНЫЕ РАЗДЕЛЫ ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКИ

Учебное пособие

В авторской редакции
Верстка Н.А. Сазонова

Подписано в печать 28.11.2014. Формат 60×84/16.
Бумага офисная «Снегурочка». Печать на ризографе.
Усл. печ. л. 9,3. Уч.-изд. л. 10,0. Тираж 100 экз.
Заказ №442.

Издательство ПГУАС.
440028, г.Пенза, ул. Германа Титова, 28.