МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«Пензенский государственный университет
архитектуры и строительства»
(ПГУАС)

Е.И. Куимова, С.Н. Ячинова, О.В. Снежкина

ОПТИМИЗАЦИОННЫЕ ЗАДАЧИ В ЭКОНОМИКЕ

Пенза 2014

УДК 517.86(035.3)
ББК 22.18
К89

Рецензенты: профессор кафедры математики и математического моделирования И.А. Гарькина (ПГУАС);
кандидат педагогических наук, доцент 13-й кафедры (общепрофессиональных дисциплин) Т.Ю. Новичкова (ПАИИ)

Куимова Е.И.
К89 Оптимизационные задачи в экономике: моногр. / И.Е. Куимова, С.Н. Ячинова, О.В. Снежкина. – Пенза: ПГУАС, 2014. – 140 с.
ISBN 978-5-9282-1063-2

Работа посвящена обзору определенных детерминированных методов теории исследования операций, нашедших наиболее широкое применение в теории принятии оптимальных решений в экономике. В каждом разделе предложены четкие пошаговые рекомендации по использованию оптимизационных алгоритмов.

Подготовлена на кафедре «Математика и математическое моделирование» и предназначена для специалистов, научных работников, аспирантов и студентов ВУЗов, интересующихся вопросами оптимизации при решении различных задач в экономике.

ISBN 978-5-9282-1063-2

© Пензенский государственный университет архитектуры и строительства, 2014
© Куимова И.Е., Ячинова С.Н., Снежкина О.В., 2014

ВВЕДЕНИЕ

В данной работе представлен обзор детерминированных экономических задач, которые могут возникать при моделировании процесса поиска оптимального решения проблемы. Принято параллельное изложение математических основ исследования операций и их экономических реализаций. При изложении каждой темы приводится полный набор связанных с ней математических понятий, однако авторы не ставили своей задачей проведение строгих математических доказательств, делая акцент на содержательные пояснения и графические иллюстрации.

Рассматриваются темы:

- линейного программирования;
- динамического программирования;
- сетевого моделирования.

Предложенные алгоритмы решения могут быть использованы для эффективного анализа следующих задач:

✓ Задача максимизации или минимизации производственной функции при наличии ограничений.

✓ Задача производственного планирования.

✓ Задача об оптимальном соотношении ингредиентов смеси.

✓ Транспортная задача.

✓ Задача о назначениях.

✓ Задача о распределении инвестиций.

✓ Задача о замене оборудования.

✓ Задача о кратчайшем пути.

✓ Задача оптимизации временных параметров сетевых графиков.

Следует отметить, что приведенные примеры экономических задач носят схематический характер. Реальные задачи, безусловно, требуют большого объема исходных данных и трудоемкого анализа, который в современных реалиях должен проводиться с помощью программных компьютерных средств. Но показать возможности моделирования, проследить основные этапы анализа, логику рассуждений гораздо легче на упрощенных моделях. Это даст возможность исследователю грамотно подойти к оптимизации более сложной ситуации, правильно формализовать цель и необходимые ограничения на рассматриваемые факторы экономического процесса, адекватно интерпретировать математический итог решения задачи, особенно, если алгоритм дает неопределенный или противоречивый ответ.

1. ЗАДАЧИ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ. ГРАФИЧЕСКИЙ МЕТОД

1.1. Математическая модель задачи линейного программирования

Дана система из m ограничений, содержащая n переменных ($m \le n$)

$$
\begin{aligned}
&A_{11}X_1 + A_{12}X_2 + \ldots + A_{1n}X_n = B_1, \\
&A_{21}X_1 + A_{22}X_2 + \ldots + A_{21n}X_n = B_2, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\
&A_{s1}X_1 + A_{s2}X_2 + \ldots + A_{sn}X_n = B_s, \\
&A_{s+1,1}X_1 + A_{s+1,2}X_2 + \ldots + A_{s+1,n}X_n \ge B_{s+1}, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\
&A_{m1}X_1 + A_2X_2 + \ldots + A_{mn}X_n \ge B_m.
\end{aligned} \tag{1}
$$

и целевая функция этих переменных:

$$Z = C_1X_1 + C_2X_2 + \ldots + C_nX_n. \tag{2}$$

Задача, в которой требуется среди множества решений системы ограничений (1) *найти такие решения, при которых целевая функция* (2) *достигает экстремума (максимума или минимума) называется общей задачей линейного программирования, заданной в **произвольной форме** записи.*

Пусть система ограничений имеет вид:

$$
\begin{cases}
A_{11}X_1 + A_{12}X_2 + \ldots + A_{1n}X_n \le B_1, \\
A_{21}X_1 + A_{22}X_2 + \ldots + A_{2n}X_n \le B_2, \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\
A_{m1}X_1 + A_{m2}X_2 + \ldots + A_{mn}X_n \le B_m.
\end{cases} \tag{3}
$$

Задача, в которой требуется среди множества решений системы ограничений (3) *найти такие **неотрицательные** решения, при которых целевая функция* (2) *достигает экстремума (максимума или минимума) называется задачей линейного программирования, заданной в **стандартной форме** записи.*

В стандартной задаче соотношение между числом переменных n и числом ограничений m может быть произвольным: задача имеет смысл при $n > m$, $n = m$, $n < m$.

Для решения задач линейного программирования симплексным методом применяется ***каноническая форма*** математической модели. Отличие канонической формы от стандартной состоит в том, что система ограничений содержит только уравнения, а целевую функцию нужно только максимизировать, т.е.

$$Z = C_1X_1 + C_2X_2 + \ldots + C_nX_n \to \max,$$

$$\begin{cases} A_{11}X_1 + A_{12}X_2 + \ldots + A_{1n}X_n = B_1, \\ A_{21}X_1 + A_{22}X_2 + \ldots + A_{2n}X_n = B_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ A_{m1}X_1 + A_{m2}X_2 + \ldots + A_{mn}X_n = B_m. \end{cases} \tag{4}$$

В канонической задаче число переменных всегда больше числа уравнений $(n > m)$.

Все ограничения задачи определяют некоторую область в n – мерном пространстве, которую называют *областью допустимых решений* или *областью допустимых планов. Допустимый план* $X = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, при котором целевая функция достигает своего экстремального значения (максимального или минимального), называется *оптимальным решением* или *оптимальным планом*.

Задача линейного программирования называется *допустимой*, если множество M планов задачи непусто, и *разрешимой,* если непусто множество оптимальных планов этой задачи.

Чтобы перейти от одной формы записи задачи линейного программирования к другой, необходимо уметь:

- сводить задачу минимизации целевой функции к задаче максимизации;
- переходить от ограничений – неравенств к ограничениям-равенствам и наоборот;
- заменять переменные, которые не подчинены условию неотрицательности.

Первая проблема решается достаточно просто: в том случае, когда требуется исследовать на минимум целевую функцию $Z = C_1X_1 + C_2X_2 + \ldots + C_nX_n$, можно перейти к нахождению максимума функции $F = -Z = -C_1X_1 - C_2X_2 - \ldots - C_nX_n$, поскольку $\min Z = -\max(-Z)$.

Ограничения, имеющие первоначально вид неравенств, можно свести к равенствам, используя дополнительные переменные. Так, неравенство вида

$$A_{i1}X_1 + A_{i2}X_2 + \ldots + A_{in}X_n \le B_i,$$

преобразуется в равенство добавлением к его левой части дополнительной неотрицательной переменной

$$A_{i1}X_1 + A_{i2}X_2 + \ldots + A_{in}X_n + X_{n+1} = B_i \quad (X_{n+1} \geq 0),$$

а ограничение – неравенство

$$A_{i1}X_1 + A_{i2}X_2 + \ldots + A_{in}X_n \geq B_i,$$

преобразуется в равенство вычитанием из его левой части дополнительной неотрицательной переменной

$$A_{i1}X_1 + A_{i2}X_2 + \ldots + A_{in}X_n - X_{n+1} = B_i \quad (X_{n+1} \geq 0).$$

Вводя дополнительные переменные, мы изменяем задачу линейного программирования, так как число неизвестных увеличивается. Естественно считать, что вводимые переменные будут входить в исследуемую целевую функцию с коэффициентами, равными нулю.

При необходимости каждое уравнение системы ограничений

$$A_{i1}X_1 + A_{i2}X_2 + \ldots + A_{in}X_n = B_i,$$

можно записать в виде системы неравенств

$$\begin{cases} A_{i1}X_1 + A_{i2}X_2 + \ldots + A_{in}X_n \leq B_i, \\ -A_{i1}X_1 - A_{i2}X_2 - \ldots - A_{in}X_n \leq -B_i. \end{cases},$$

Наконец, если переменная X_k не подчинена условию неотрицательности, то ее следует заменить двумя неотрицательными переменными U_k и V_k, приняв $X_k = U_k - V_k$.

В некоторых случаях удобно пользоваться *матричной формой задачи линейного программирования*

$$\begin{aligned} &\max(\min) Z = \mathbf{CX}, \\ &A\mathbf{X} \leq \mathbf{B} \ \ (A\mathbf{X} = \mathbf{B}), \end{aligned} \tag{5}$$

где $A = \left(A_{ij}\right)$ – матрица коэффициентов в системе ограничений,

$$C = (C_1, C_2, \ldots, C_n), B = (B_1, B_2, \ldots, B_m), X = (X_1, X_2, \ldots, X_n).$$

Задача, заданная в канонической форме, имеет смысл лишь в том случае, система ограничений совместна, то есть когда ранги основной и расширенной матриц системы совпадают. Как известно из линейной алгебры, этот общий ранг r не может превосходить числа n переменных. При $r = n$ система имеет единственное решение, которое и будет оптимальным. Имеет смысл рассматривать лишь случай $r < n$. В этом случае r переменных линейно выражаются через остальные $n - r = k$ переменных (их принято называть *свободными*). Всегда можно добиться того, чтобы последние $X_{k+1},\ldots,X_n$ были выражены через первые $X_1, X_2,\ldots,X_k$.

$$\begin{cases} X_{k+1} = \alpha_{11}X_1 + \alpha_{12}X_2 + \ldots + \alpha_{1k}X_k + \beta_1, \\ X_{k+2} = \alpha_{21}X_1 + \alpha_{22}X_2 + \ldots + \alpha_{2k}X_k + \beta_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ X_n = \alpha_{r1}X_1 + \alpha_{r2}X_2 + \ldots + \alpha_{rn}X_n + \beta_r. \end{cases}, \tag{6}$$

Если теперь вместо величин $X_{k+1},\ldots,X_n$ в выражении (2) для целевой функции Z подставить их значения из (6), то целевая функция примет другой вид:

$$Z = \gamma_1 X_1 + \gamma_2 X_2 + \ldots + \gamma_k X_k + \gamma_0,$$

то есть по-прежнему останется линейной, но выразится через свободные переменные $X_1, X_2,\ldots,X_k$. Переменные $X_{k+1},\ldots,X_n$ (их ровно r) будем называть *базисными*. Частное решение системы (6) ,в котором свободные переменные равны нулю, называется *базисным*. Базисное допустимое решение называется *невырожденным*, если все его компоненты положительны, и *вырожденным* в противном случае.

1.2. Геометрическая интерпретация и графический метод решения задач линейного программирования

Одним из наиболее простых методов решения задач линейного программирования является графический метод. Графически могут решаться:

- задачи, заданные в стандартной форме, содержащие не более двух независимых переменных;
- задачи, заданные в канонической форме с числом свободных переменных $n\text{-}r \le 2$, где r – ранг матрицы коэффициентов системы ограничений;
- задачи общего вида, которые после приведения к канонической форме будут содержать не более 2-х переменных.

Задачи 2-го и 3-го типов для решения должны быть приведены к форме 1-го типа.

При построении области допустимых решений может встретиться один из следующих 3-х случаев:

I – *пустая область*. Задача *не имеет решения* из-за несовместности системы ограничений в области допустимых решений;

II – *выпуклый многоугольник*. Задача *всегда имеет оптимальное решение*. Задача может иметь *единственное* оптимальное решение, совпадающее с одной из вершин области или *бесчисленное множество* решений (альтернативный оптимум) (рис. 1.1 и 1.2).

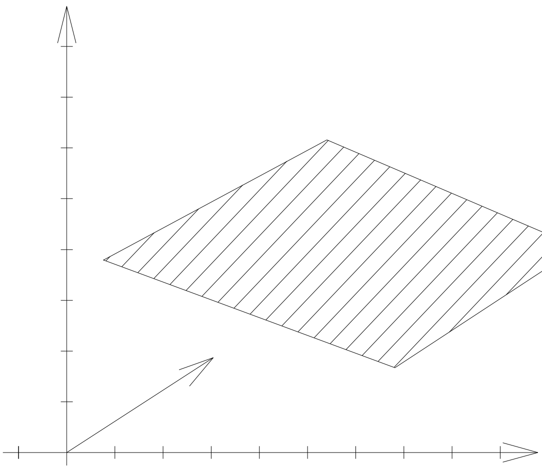


Рис. 1.1

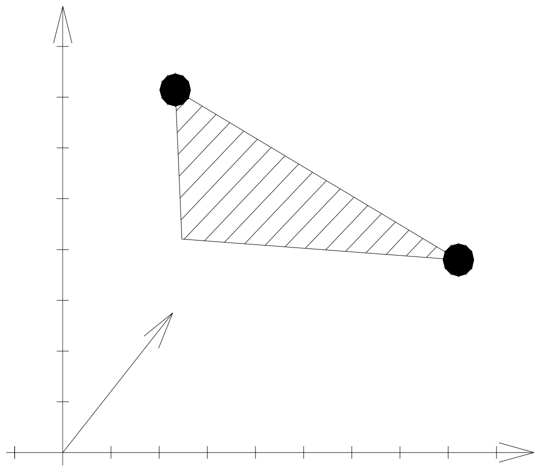


Рис. 1.2

III – *неограниченная выпуклая многоугольная область*. В зависимости от коэффициентов функции Z задача *может иметь или не иметь решения*. Последнее связано с неограниченным возрастанием $\left(Z_{\max} \to \infty\right)$ или убыванием $\left(Z_{\min} \to \infty\right)$ целевой функции Z в области допустимых решений.

Графическое решение задачи линейного программирования следует проводить в несколько этапов:

1. Построить область допустимых планов.
2. Построить прямую, соответствующую какому-нибудь значению целевой функции, например, $C_1 X_1 + C_2 X_2 = 0$. Желательно, чтобы эта прямая была *опорной*, то есть имела общие точки с областью допустимых планов.
3. В случае решения задачи на *максимум* эту прямую передвигать параллельно в *направлении вектора* **c** *(*C_1*,* C_2*)* до тех пор, пока она не пройдет через *последнюю* ее общую точку с многоугольником решений, то есть пока не будет найдено такое ее положение, что при дальнейшем перемещении в нужном направлении у области допустимых планов и у опорной прямой не будет общих точек. При поиске *минимума* целевой функции параллельный перенос осуществляется в *направлении, противоположном вектору* **c** *(*C_1*,* C_2*)*.
4. Если оказывается, что при неограниченном перемещении в направлении возрастания целевой функции для области допустимых планов и опорной прямой всегда будут оставаться общие точки, то *задача на максимум неразрешима* (целевая функция не ограничена сверху). При поиске минимума возможен случай, когда целевая функция не ограничена снизу.
5. В случае альтернативного оптимума и ограниченной области оптимальные решения соответствуют всем точкам отрезка, соединяющего две вершины области. В случае неограниченной области может оказаться, что среди множества оптимальных решений только одно совпадает с вершиной

области (точка $X'_{\text{опт}}$ на рис.1.3). Тогда на оптимальной граничной прямой находят еще одно оптимальное решение $X''_{\text{опт}}$ и далее общее решение представляют формулой $X_{\text{ОПТ}} = (1-t)X'_{\text{ОПТ}} + tX''_{\text{ОПТ}}$, где $0 \le t \le \infty$.

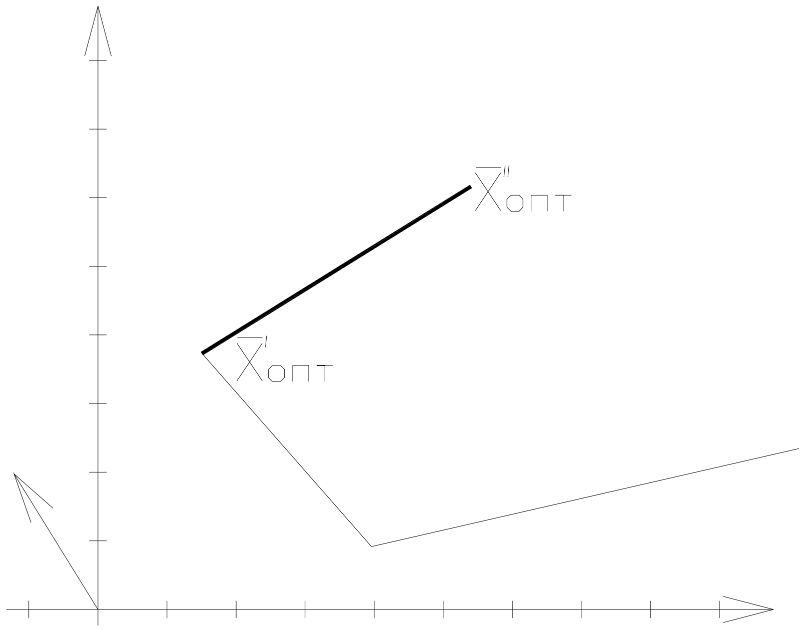


Рис. 1.3

В изучении данной темы можно выделить несколько типов вспомогательных и основных задач разной степени сложности.

Пример 1.

Построить область решений системы неравенств:

$$\begin{cases} X_1 + 5X_2 \le 10, \\ 3X_1 + 2X_2 \le 1, \\ X_1 - X_2 \le 7, \\ 6X_1 + 3X_2 \ge 6. \end{cases}$$

Любое линейное неравенство с двумя переменными делит плоскость на две полуплоскости, точки одной из которых удовлетворяют данному неравенству, точки другой – не удовлетворяют. Границей этих полуплоскостей является прямая, в уравнении которой левые и правые части такие же, как и в данном неравенстве.

1. Изобразим графически полуплоскость, удовлетворяющую неравенству $X_1 + 5X_2 \le 10$. Построим прямую $X_1 + 5X_2 = 10$. Причем удобнее для построения привести уравнение прямой к виду $\dfrac{X_1}{a} + \dfrac{X_2}{b} = 1$, поскольку сразу определяются точки пересечения прямой с осями координат: (a, 0) и (0, b).

В данном случае $\frac{X_1}{10}+\frac{X_2}{2}=1$ и поскольку точка с координатами (0, 0) удовлетворяет неравенству $X_1+5X_2\le 10$, то графическим решением неравенства будет полуплоскость, включающая начало координат (нужное направление указывается стрелками).

2. Аналогично преобразуем и строим решение трех других неравенств

$\frac{X_1}{1/2}+\frac{X_2}{-1}\le 1$ – полуплоскость, включающая начало координат;

$\frac{X_1}{7}+\frac{X_2}{7}\le 1$ – полуплоскость, включающая начало координат;

$\frac{X_1}{1}+\frac{X_2}{2}\ge 1$ – полуплоскость,не включающая начало координат.

Решением системы неравенств будет треугольная область, заштрихованная на рис. 1.4.

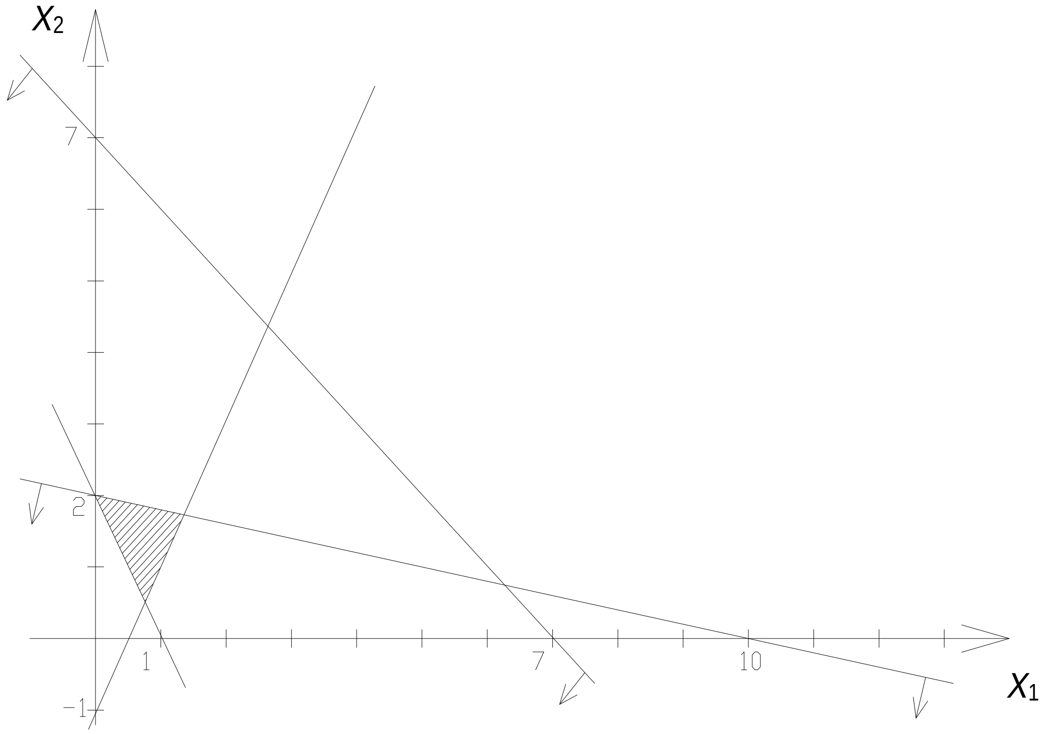


Рис. 1.4

Пример 2.

$$\begin{cases} X_1\le 2, \\ X_1+X_2\le 2, \\ X_1-X_2\le 1. \end{cases}$$

В данном примере область решений системы неравенств неограничена. (рис. 1.5).

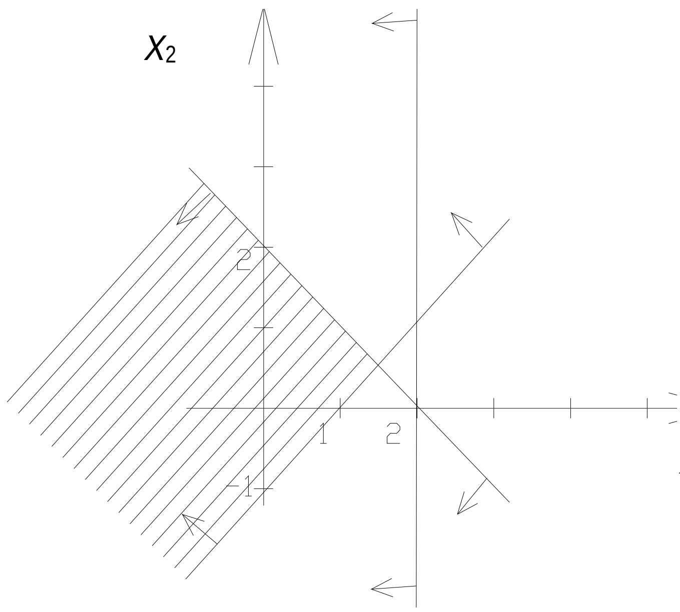


Рис. 1.5

Пример 3.

Построить область допустимых решений системы неравенств и уравнений.

$$\begin{cases} X_1 + X_2 + X_3 = 4, \\ X_1 - X_2 + X_3 \le 2, \\ X_1, X_2, X_3 \ge 0. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} X_3 = 4 - X_1 - X_2, \\ X_1 - X_2 + 4 - X_1 - X_2 \le 2, \\ X_1, X_2, X_3 \ge 0. \end{cases}$$

Учитывая, что $X_3 \ge 0$, получаем

$$\begin{cases} 4 - X_1 - X_2 \ge 0, \\ -2X_2 \le -2, \\ X_1, X_2, X_3 \ge 0. \end{cases} \qquad \begin{cases} X_1 + X_2 \le 4, \\ X_2 \ge 1, \\ X_1, X_2 \ge 0. \end{cases}$$

Область решений изображена на рис. 1.6.

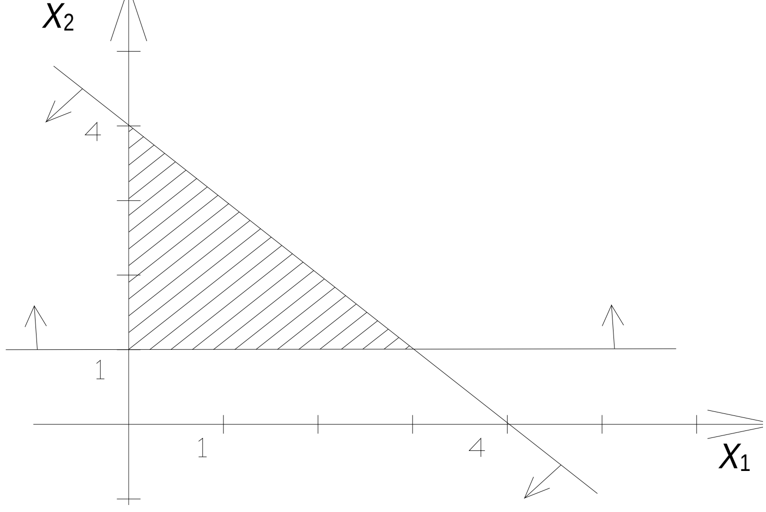


Рис. 1.6

Пример 4.

Построить область допустимых решений системы неравенств.

$$\begin{cases} X_1 + X_2 + X_3 \le 1, \\ -X_1 + X_2 + X_3 \le 1, \\ -X_1 - X_2 + X_3 \le 1, \\ X_1 - X_2 + X_3 \le 1, \\ X_1, X_2, X_3 \le 0. \end{cases}$$

$X_1 \le 1 - X_2 - X_3$, что следует из 1-го неравенства и $X_1 \ge X_2 + X_3 - 1$, что следует из 2-го. Объединяя, получим неравенство

$$X_2 + X_3 - 1 \le X_1 \le 1 - X_2 - X_3 .$$

Очевидно, что:

$$\begin{aligned} & X_2 + X_3 - 1 \le 1 - X_2 - X_3 \\ & X_2 + X_3 \le 1. \end{aligned}$$

Комбинируя подобным образом 1-е и 3-е неравенство, имеем

$$\begin{aligned} & X_1 \le 1 - X_2 - X_3, \\ & X_1 \ge -X_2 + X_3 - 1, \\ & -X_2 + X_3 - 1 \le X_1 \le 1 - X_2 - X_3, \\ & -X_2 + X_3 - 1 \le 1 - X_2 - X_3, \\ & X_3 \le 1. \end{aligned}$$

Комбинация 2-го и 4-го дает следующий результат:

$$X_1 \ge X_2 + X_3 - 1,$$

$$\begin{aligned} & X_1 \le 1 + X_2 - X_3, \\ & X_2 + X_3 - 1 \le X_1 \le 1 + X_2 - X_3, \\ & X_2 + X_3 - 1 \le 1 + X_2 - X_3, \\ & X_3 \le 1. \end{aligned},$$

Из 3-го и 4-го:

$$\begin{aligned} & X_1 \ge -X_2 + X_3 - 1, X_1 \le 1 + X_2 - X_3, \\ & -X_2 + X_3 - 1 \le X_1 \le 1 + X_2 - X_3, \\ & -X_2 + X_3 - 1 \le 1 + X_2 - X_3, \\ & X_2 + X_3 \le 1. \end{aligned},$$

Таким образом, переходим к эквивалентной системе

$$\begin{cases} X_2 + X_3 \le 1, \\ X_3 \le 1, \\ X_2, X_3 \ge 0. \end{cases},$$

Изобразим область решений на рис. 1.7.

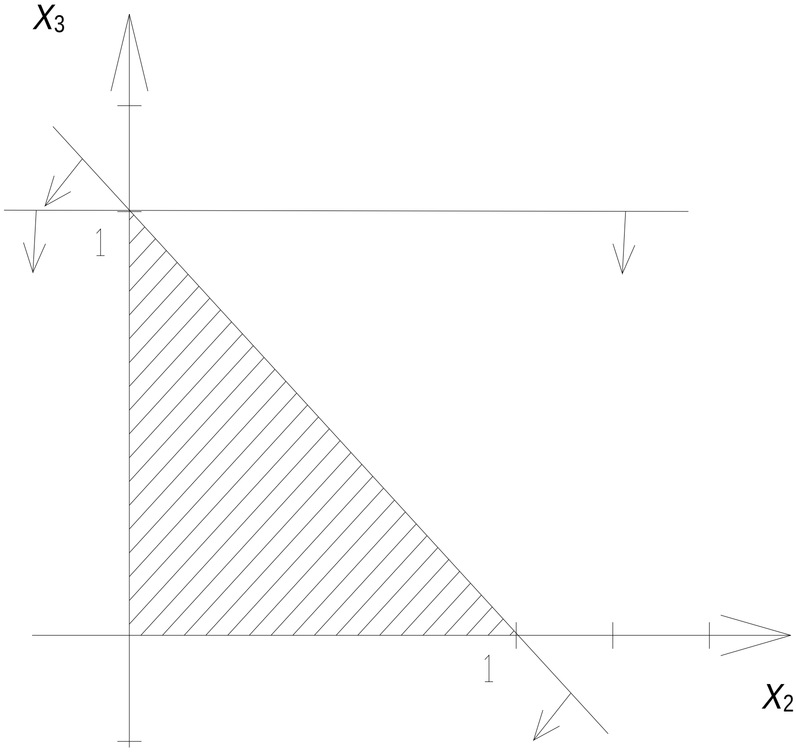


Рис. 1.7

Пример 5.

$$\begin{cases} X_1 + X_2 + X_3 + X_4 = 5, \\ X_1 + X_2 - X_3 + 3X_4 = 7, \\ X_1, X_2, X_3, X_4 \ge 0. \end{cases}$$

В данной системе 4 переменные. Поэтому, очевидно, речь может идти о построении области допустимых значений свободных переменных, определяющих допустимые решения системы.

Запишем систему в векторном виде:

$$\mathbf{A}_1 X_1 + \mathbf{A}_2 X_2 + \ldots + \mathbf{A}_n X_n = \mathbf{A}_0,$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} X_1 + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} X_2 + \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} X_3 + \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} X_4 = \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \end{pmatrix}.$$

Прежде всего, приведем систему к единичному базису. Удобнее это делать методом Жордана-Гаусса и оформлять в виде таблицы.

1	1	1	1	5
1	1	-1	3	7

1	1	1	1	5
0	0	-2	2	2

Вектор–столбец $\mathbf{A}_1$, соответствующий переменной X_1 – $\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$, переменной X_2 соответствует такой же вектор $\mathbf{A}_2$ – $\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$. Переменные X_1 и X_2 не могут быть базисными (векторы $\mathbf{A}_1$ и $\mathbf{A}_2$ линейно зависимы, а базис могут образовывать только линейно независимые векторы).

Поменяем местами, например, 2-й и 4-й столбец

1	1	1	1	5
0	2	-1	0	2

1	0	$\frac{3}{2}$	1	4
0	1	$-\frac{1}{2}$	0	1

Векторы $\mathbf{A}_1$ и $\mathbf{A}_4$ единичные, а значит линейно независимые, и образуют базис. Выразим базисные переменные X_1, X_4 через свободные X_2, X_3.

$$\begin{cases} X_1 + \frac{3}{2}X_3 + X_2 = 4, \\ X_4 - \frac{1}{2}X_3 = 1; \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} X_1 = -\frac{3}{2}X_3 - X_2 + 4, \\ X_4 = \frac{1}{2}X_3 + 1. \end{cases}$$

Поскольку все переменные по условию неотрицательны, можно записать систему неравенств

$$\begin{cases} -\frac{3}{2}X_3 - X_2 + 4 \ge 0, \\ \frac{1}{2}X_3 + 1 \ge 0, \\ X_3, X_4 \ge 0. \end{cases}$$

Область, изображенная на рис. 1.8 является не только областью допустимых решений переменных X_2, X_3, но и областью допустимых решений исходной системы уравнений.

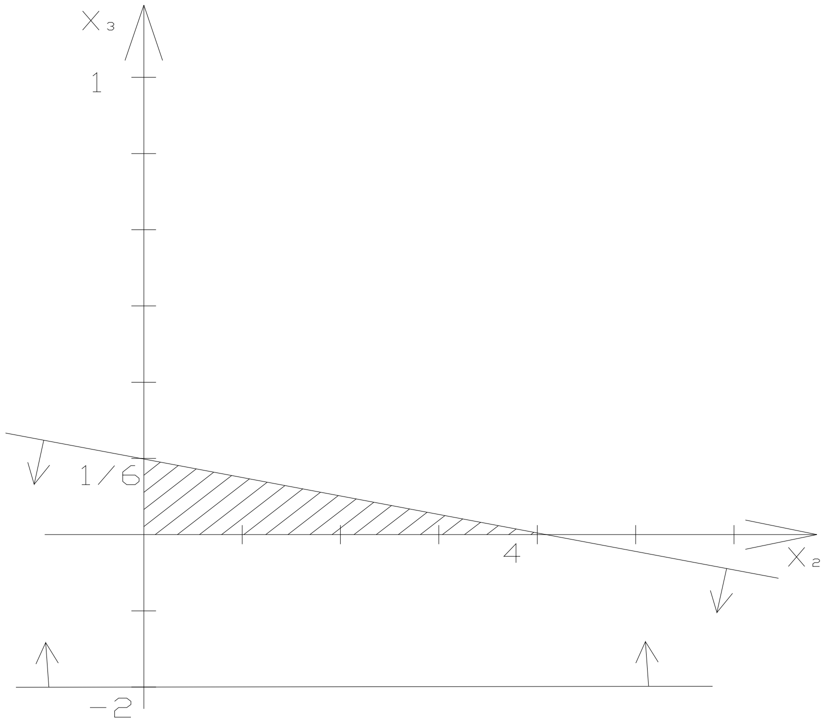


Рис. 1.8

Пример 6.

$$\begin{cases} -2X_1 + X_2 + X_3 + X_4 + X_5 + X_6 = 9, \\ -3X_1 + X_3 + X_5 = 3, \\ 3X_1 + 2X_4 - 3X_5 - X_6 = 5, \\ X_1 + X_2 + 3X_5 - 2X_6 = 9, \\ X_1, X_2, X_3, X_4, X_5, X_6 \geq 0. \end{cases}$$

В данной системе 6 переменных. Приведем систему к единичному базису.

X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	
-2	1	1	1	1	-1	9
-3	0	1	0	1	0	3
3	0	0	2	-3	-1	5
1	1	0	0	3	-2	-1

Поменяем местами 1-й и 2- й столбцы таблицы

X_2	X_1	X_3	X_4	X_5	X_6	
1	-2	1	1	1	-1	9
0	-3	1	0	1	0	3
0	3	0	2	-3	-1	5
1	1	0	0	3	-2	-1

1	-2	1	1	1	-1	9
0	-3	1	0	1	0	3
0	3	0	2	-3	-1	5
0	3	-1	-1	2	-1	-10

1	0	$\frac{1}{3}$	1	$\frac{1}{3}$	$-\frac{5}{3}$	7
0	1	$-\frac{1}{3}$	0	$-\frac{1}{3}$	0	-1
0	0	1	2	-2	-1	8
0	0	0	-1	3	-1	-7

1	0	0	$\frac{1}{3}$	1	$-\frac{4}{3}$	$\frac{13}{3}$
0	1	0	$\frac{2}{3}$	-1	$-\frac{1}{3}$	$\frac{5}{3}$
0	0	1	2	-2	-1	8
0	0	0	-1	3	-1	-7

X_2	X_1	X_3	X_4	X_5	X_6	
1	0	0	0	4	-1	2
0	1	0	0	1	-1	-3
0	0	1	0	5	-3	-6
0	0	0	1	-3	1	7

Получили систему уравнений:

$$\begin{cases} X_2 + 4X_5 - X_6 = 2, \\ X_1 + X_5 - X_6 = -3, \\ X_3 + 5X_5 - 3X_6 = -6, \\ X_4 - 3X_5 + X_6 = 7; \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} X_2 = -4X_5 + X_6 + 2, \\ X_1 = -X_5 + X_6 - 3, \\ X_3 = -5X_5 + 3X_6 - 6, \\ X_4 = 3X_5 - X_6 + 7. \end{cases}$$

Считая значения базисных переменных X_1, X_2, X_3, X_4 неотрицательными, придем к системе неравенств

$$\begin{cases} -4X_5 + X_6 \geq -2, \\ -X_5 + X_6 \geq 3, \\ -5X_5 + 3X_6 \geq 6, \\ 3X_5 - X_6 \geq -7, \\ X_5, X_6 \geq 0. \end{cases}$$

Область допустимых решений этой системы неравенств, построенная в плоскости X_5OX_6 (рис. 1.9), служит одновременно областью допустимых решений свободных переменных X_5 и X_6 исходной системы уравнений.

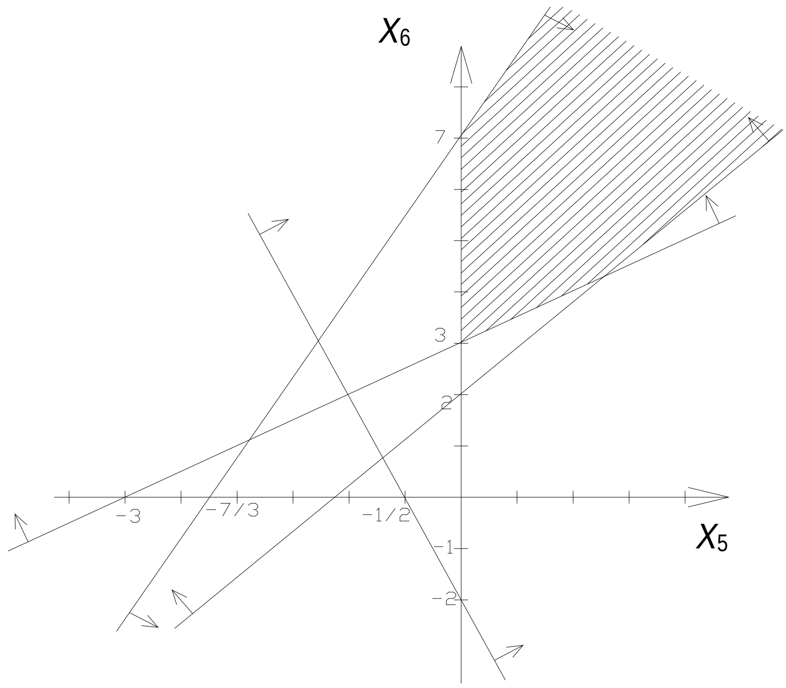


Рис. 1.9

Пример 7.

Решить графически задачу линейного программирования или убедиться в ее неразрешимости. Найти максимум целевой функции $Z = 4X_1 + 2X_2$ при условиях

$$\begin{cases} 2X_1 + 3X_2 \leq 18, \\ -X_1 + 3X_2 \leq 9, \\ 2X_1 - X_2 \leq 10, \\ X_1, X_2 \geq 0. \end{cases}$$

Итак, в начале необходимо построить область решений данной системы неравенств. Затем построим прямую, соответствующую некоторому постоянному значению целевой функции. Пусть, например, Z=0, то есть $4X_1 + 2X_2$=0.

Графиком этого уравнения является прямая l. Построим вектор **c,** перпендикулярный этой прямой. Как известно из аналитической геометрии, этот вектор имеет координаты (4,2) (рис. 1.10).

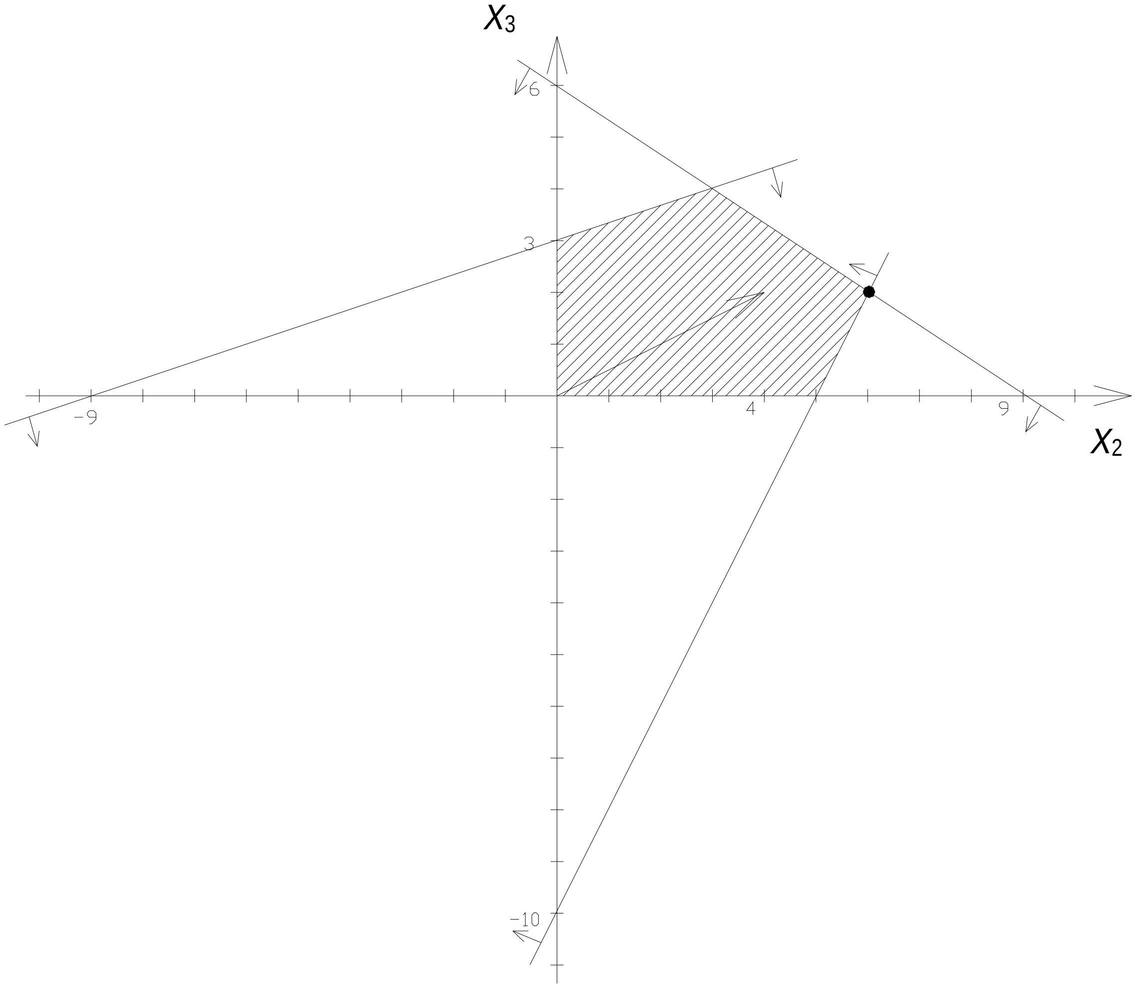


Рис. 1.10

Если перемещать прямую l параллельно самой себе в направлении вектора **c**, то значение целевой функции при этом будет возрастать. Очевидно, что наибольшее значение она примет, когда прямая будет находиться в выделенной точке с координатами (6,2). Если далее перемещать опорную прямую, то значение целевой функции возрастает, но на прямой не будет точек, принадлежащих области решений системы неравенств (см. рис.1.10).

max Z= Z(6, 2)= 28.

max Z = Z(6, 2) = 28.

Если в этой задаче изменить коэффициенты целевой функции и рассмотреть $Z = 2X_1 + 3X_2$, то решение изменится (рис. 1.11)

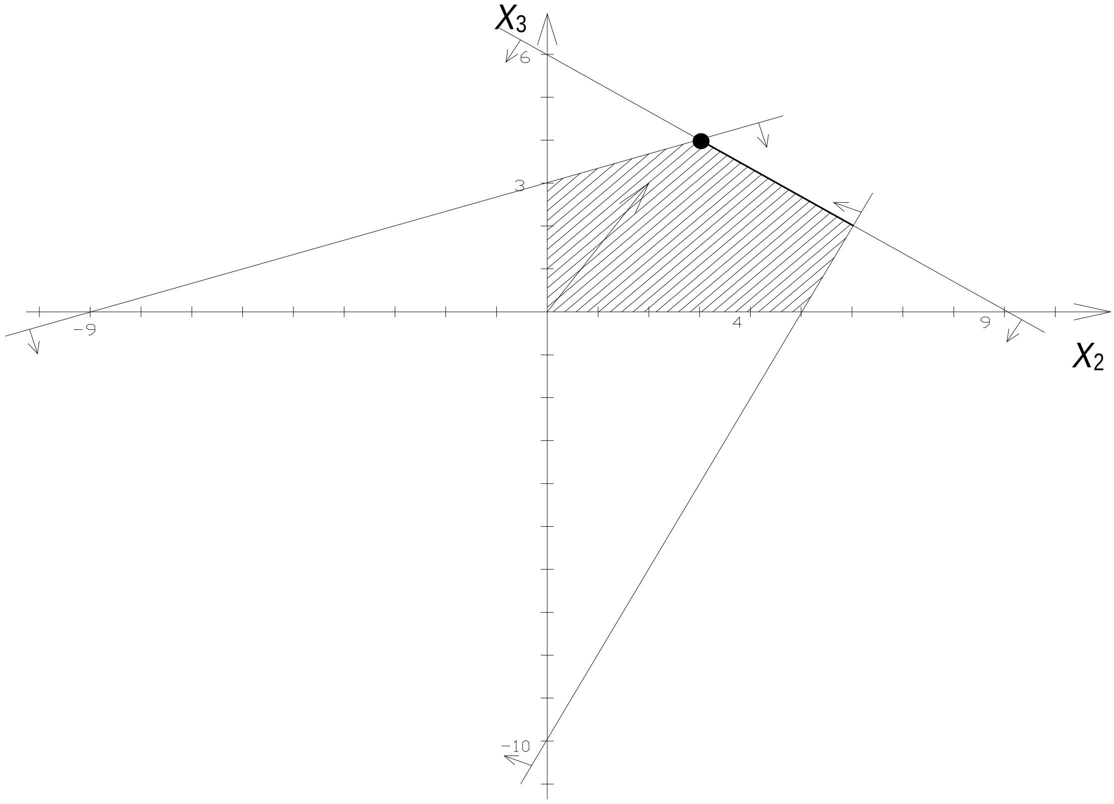


Рис. 1.11

Пример 8.

Найти максимум целевой функции $Z = 2X_1 + 4X_2$ при данной системе ограничений

$$\begin{cases} 3X_1 + 2X_2 \ge 11, \\ -2X_1 + X_2 \le 2, \\ X_1 - 3X_2 \le 0, \\ X_1, X_2 \ge 0. \end{cases}$$

Перемещение опорной прямой в направлении вектора **c**(2, 4) можно проводить неограниченно (рис. 1.12). Следовательно, $Z_{max} \to \infty$. Задача линейного программирования не имеет решения из-за неограниченности целевой функции сверху. В случае постановке задачи о поиске минимума оптимальное решение существует и является единственным – точка A(3, 1).

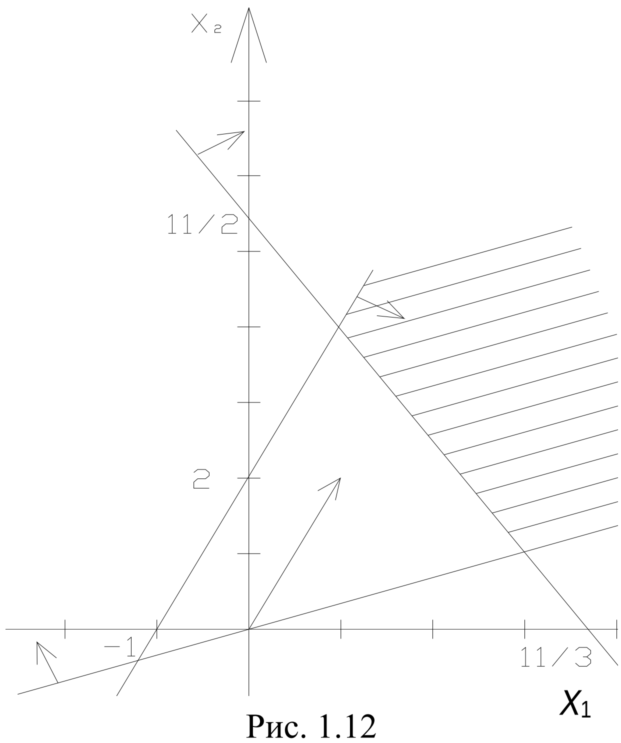


Рис. 1.12

Пример 9.

Решить графически задачу линейного программирования, заданную в канонической форме.

$$Z = X_1 + 2X_6 \rightarrow \max$$

$$\begin{cases} X_1 + X_2 + X_6 = 1, \\ X_2 + X_5 + X_6 = 1, \\ X_3 + X_4 + X_6 = 1, \\ X_4 - X_5 - X_6 = 2, \\ X_1, X_2, X_3, X_4, X_5, X_6 \geq 0. \end{cases}$$

X_2	X_1	X_3	X_4	X_5	X_6	
1	1	0	0	0	1	1
0	1	0	0	1	1	1
0	0	1	1	0	1	1
0	0	0	1	-1	-1	2

Поменяем местами 1-й и 5-й столбцы с тем расчетом, чтобы переменные X_1, X_6 входящие в целевую функцию, стали свободными переменными системы ограничений.

X_5	X_2	X_3	X_4	X_1	X_6	
0	1	0	0	1	1	1
1	1	0	0	0	1	1
0	0	1	1	0	1	1
-1	0	0	1	0	-1	2

Поменяем местами 1-ю и 2-ю строку.

1	1	0	0	0	1	1
0	1	0	0	1	1	1
0	0	1	1	0	1	1
-1	0	0	1	0	-1	2

1	1	0	0	0	1	1
0	1	0	0	1	1	1
0	0	1	1	0	1	1
0	1	0	1	0	0	3

1	0	0	0	-1	0	0
0	1	0	0	1	1	1
0	0	1	1	0	1	1
0	0	0	1	-1	-1	2

1	0	0	0	-1	0	0
0	1	0	0	1	1	1
0	0	1	0	1	2	-1
0	0	0	1	-1	-1	2

$$\begin{cases} X_5 - X_1 = 0, \\ X_2 + X_1 + X_6 = 1, \\ X_3 + X_1 + 2X_6 = -1, \\ X_4 - X_1 - X_6 = 2; \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} X_5 = X_1, \\ X_2 = -X_1 - X_6 + 1, \\ X_3 = -X_1 - 2X_6 - 1, \\ X_4 = X_1 + X_6 + 2. \end{cases}$$

Можем перейти к системе неравенств:

$$\begin{cases} X_1 \ge 0, \\ -X_1 - X_6 + 1 \ge 0, \\ -X_1 - 2X_6 - 1 \ge 0, \\ X_1 + X_6 + 2 \ge 0, \\ X_6 \ge 0. \end{cases}$$

Решение системы ограничений изображено на рис. 1.13. Очевидно, что система условий противоречива, поскольку область допустимых решений пуста.

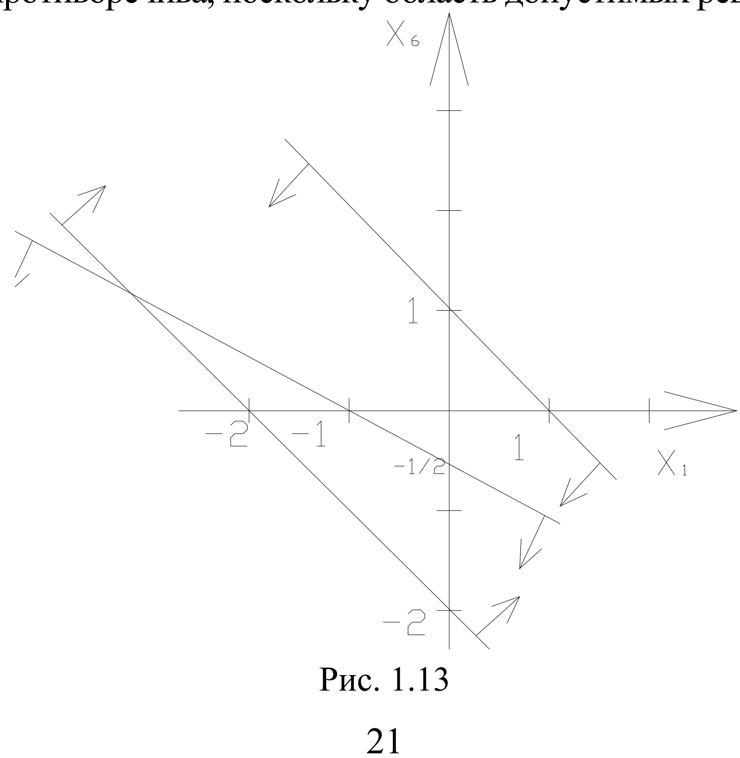


Рис. 1.13

1.3. Пример решения задачи производственного планирования графическим методом

Автозавод выпускает две модели автомобилей: *A* и *B*. На заводе работают 1000 неквалифицированных и 800 квалифицированных рабочих, каждому из которых оплачивается 40 ч в неделю. Для изготовления модели *A* требуется 30 ч неквалифицированного и 50 ч квалифицированного труда; для модели *B* требуется 40 ч неквалифицированного и 20 ч квалифицированного труда. Каждая модель *A* требует затрат в размере 500 у.е. на сырье и комплектующие, тогда как каждая модель *B* требует затрат в размере 1500 у. е., суммарные затраты не должны превосходить 900 000 у. е. в неделю. Рабочие, осуществляющие доставку, работают по пять дней в неделю и могут забрать с завода не более 210 машин в день.

Каждая модель *A* приносит фирме 1000 у. е. прибыли, а каждая модель *B* – 500 у. е. прибыли. Какой объем выпуска каждой модели Вы бы порекомендовали для повышения прибыли?

Пусть X_1 – количество автомобилей *A*, выпускаемых в неделю; X_2 – количество автомобилей *B*, выпускаемых в неделю.

Тогда $30X_1 + 40X_2$ – затраты неквалифицированного рабочего времени на изготовление недельного объема производства, $50X_1 + 20X_2$ – затраты квалифицированного рабочего времени на изготовление недельного объема производства.

Лимит неквалифицированного рабочего времени: $1000 \cdot 40 = 40000$ часов. Лимит квалифицированного рабочего времени: $800 \cdot 40 = 32000$ часов.

Затраты на сырье и комплектующие в неделю описываются неравенством: $500X_1 + 1500X_2 \le 900000$. Ограничение по возможностям сбыта таково: $X_1 + X_2 \le 5 \cdot 210$.

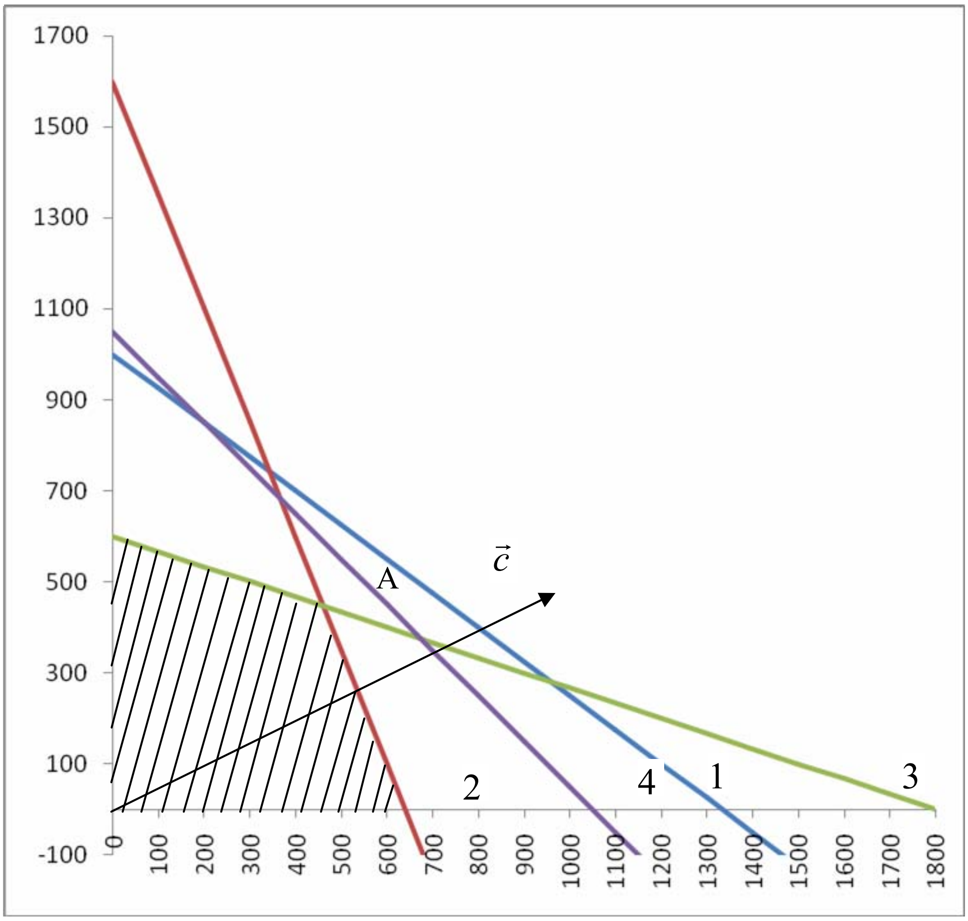
Целевая функция прибыли $Z = 1000X_1 + 500X_2$, необходимо определить максимум этой функции, если он существует.

Решаем следующую задачу линейного программирования

$$Z = 1000X_1 + 500X_2 \to \max$$

$$\begin{cases} 30X_1 + 40X_2 \le 40000 & (1) \\ 50X_1 + 20X_2 \le 32000 & (2) \\ 500X_1 + 1500X_2 \le 90000 & (3) \\ X_1 + X_2 \le 1050 & (4) \\ X_1, X_2 \ge 0. \end{cases}$$

Изображаем ограничения задачи в системе координат, указываем направление полуплоскостей, выделяем область допустимых решений. Максимум функции *Z* ищем по направлению вектора $\vec{c} = (1000,\ 500)$.



Точка максимума целевой функции находится на пересечении прямых второго и третьего ограничений. Чтобы определить координаты точки *A* решаем систему уравнений:

$$\begin{cases} 50X_1 + 20X_2 = 32000 \\ 500X_1 + 1500X_2 = 90000 \end{cases}$$

Решение таково: $X_1 \approx 446$, $X_2 \approx 462$, max *Z*=685000. Это и есть оптимальные с точки зрения прибыли характеристики производственного плана.

2. СИМПЛЕКС-МЕТОД РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

Решенные графическим методом задачи свидетельствуют о справедливости следующего положения: *если оптимальное решение задачи существует и единственно, то оно достигается в некоторой вершине многоугольника области допустимых планов. Если же оптимальное решение не единственное, то таких решений бесчисленное множество, и они достигаются во всех точках некоторой стороны многоугольника.*

Симплекс – метод, если его кратко охарактеризовать, это алгебраический метод направленного перебора угловых точек области допустимых планов. На первом этапе решения определяется начальная угловая точка (первоначальный опорный план), а затем, переходя к другим угловым точкам в направлении улучшения целевой функции, получаем оптимальное решение, если оно существует, за конечное число шагов.

Целевая функция в конкретной угловой точке имеет конкретное значение Z_i. Если мы перейдем к другому базису, значение целевой функции может измениться. Следует помнить, что изменять базис следует только в положительном направлении.

Рассмотрим на конкретном примере применение симплекс-метода в развернутой, не табличной форме.

Найдем максимум целевой функции $Z = X_1 + 2X_2$ при ограничениях

$$\begin{cases} X_1 + X_2 + X_3 = 4, \\ 3X_1 + X_2 + X_4 = 10, \\ X_1 + 4X_2 + X_5 = 12, \\ X_i \geq 0, \quad i = \overline{1,5}. \end{cases}$$

Очевидно, что переменные X_3, X_4, X_5 легко выражаются через X_1 и X_2.

$$\begin{cases} X_3 = 4 - X_1 - X_2, \\ X_4 = 10 - 3X_1 - X_2, \\ X_5 = 12 - X_1 - 4X_2, \end{cases}$$

$$Z = X_1 + 2X_2.$$

Таким образом, X_1 и X_2 – свободные переменные, и целевая функция зависит только от них. Переменные X_3, X_4, X_5 составляют базис. Базисное решение, то есть решение, соответствующее нулевым значениям свободных переменных, на данном этапе таково:

$$\overline{X_1} = \{0;0;4;10;12\}.$$

Соответствующее значение целевой функции $Z_1 = 0$.

Переменные X_1 и X_2 входят в целевую функцию с положительными коэффициентами. Поэтому значения переменных X_1 и X_2 при решении задачи на максимум имеет смысл увеличивать. На рост функции Z сильнее будет влиять увеличение переменной X_2 , поэтому именно X_2 переведем в базис(то есть ее значение уже не будет равно нулю). Возникает вопрос о том, какая переменная будет выведена из базиса. Проведем исследование:

$$\begin{cases} X_3 = 4 - X_1 - X_2, \\ X_4 = 10 - 3X_1 - X_2, \\ X_5 = 12 - X_1 - 4X_2. \end{cases}$$

Если $X_2 \neq 0$, а $X_1 = 0$, то

$$\begin{cases} X_3 = 4 - X_2, \\ X_4 = 10 - X_2, \\ X_5 = 12 - 4X_2. \end{cases}$$

Поскольку по условию все переменные неотрицательны, имеет место система неравенств

$$\begin{cases} 4 - X_2 \geq 0, \\ 10 - X_2 \geq 0, \\ 12 - 4X_2 \geq 0; \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} X_2 \leq 4, \\ X_2 \leq 10, \\ X_2 \leq \dfrac{12}{4}. \end{cases}$$

Общим решением является неравенство $X_2 \leq 3$. Максимально увеличиваем X_2 , то есть теперь $X_2 = 3$. Тогда $X_3 = 1$, $X_4 = 7$, $X_5 = 0$. Таким образом, новый базис X_2, X_3, X_4. Выразим базисные переменные через свободные X_1 и X_5:

$$\begin{cases} 4X_2 = 12 - X_1 - X_5, \\ X_3 = 4 - X_1 - \dfrac{1}{4}(12 - X_1 - X_5), \\ X_4 = 10 - 3X_1 - \dfrac{1}{4}(12 - X_1 - X_5); \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} X_2 = 3 - \dfrac{1}{4}X_1 - \dfrac{1}{4}X_5, \\ X_3 = 1 - \dfrac{3}{4}X_1 + \dfrac{1}{4}X_5, \\ X_4 = 7 - \dfrac{11}{4}X_1 + \dfrac{1}{4}X_5. \end{cases}$$

Тогда $Z = X_1 + 2(3 - \frac{1}{4}X_1 - \frac{1}{4}X_5)$ или $Z = \frac{1}{2}X_1 - \frac{1}{2}X_2 + 6$.

Базисное решение на втором этапе – $\overline{X_2}\{0; 3; 1; 7; 0\}$.

Соответствующее значение целевой функции $Z_2 = 6$. После смены базиса значение целевой функции увеличилось. Но переменная X_1 по прежнему входит в целевую функцию с положительным коэффициентом, и ее увеличение будет способствовать росту функции *Z*. Введем X_1 в базис. Проанализируем, чье место в нем она займет.

Если $X_1 \neq 0, X_5 = 0,$ то

$$\begin{cases} X_2 = 3 - \frac{1}{4}X_1, \\ X_3 = 1 - \frac{3}{4}X_1, \\ X_4 = 7 - \frac{11}{4}X_1. \end{cases}$$

Перейдем к системе неравенств

$$\begin{cases} 3 - \frac{1}{4}X_1 \geq 0, \\ 1 - \frac{3}{4}X_1 \geq 0, \\ 7 - \frac{11}{4}X_1 \geq 0; \end{cases} \qquad \Rightarrow \qquad \begin{cases} X_1 \leq 12, \\ X_1 \leq \frac{4}{3}, \\ X_1 \leq \frac{28}{11}; \end{cases}$$

что эквивалентно неравенству $X_1 \leq 4/3$. (Читателю следует обратить внимание на то, что *общим решением будет неравенство с наименьшей правой частью, а сама правая часть формируется как отношение свободного члена к коэффициенту при соответствующей переменной*.)

Максимально увеличиваем X_1 до значения $4/3$.

Тогда: $X_2 = \frac{8}{3}, X_3 = 0, X_4 = \frac{10}{3}.$

Выведем X_3 из базиса. Новый базис X_1, X_2, X_4. Выразим базисные переменные через свободные X_3 и X_5.

$$\begin{cases} X_1 = \frac{4}{3} - \frac{4}{3}X_3 + \frac{1}{3}X_5, \\ X_2 = \frac{8}{3} + \frac{1}{3}X_3 - \frac{1}{3}X_5, \\ X_4 = \frac{10}{3} - \frac{28}{3}X_3 - \frac{2}{3}X_5, \end{cases} \qquad Z = \frac{20}{3} - \frac{2}{3}X_3 - \frac{1}{3}X_5.$$

Новое базисное решение: $\overline{X_3}\left\{\frac{4}{3};\frac{8}{3};0;\frac{10}{3};0\right\}$ дает значение целевой функции $Z_3=\frac{20}{3}$. Очевидно, что увеличить значение целевой функции за счет увеличения значений свободных переменных X_3 и X_5 невозможно. Базисное решение $\overline{X_3}$ является оптимальным.

Таким образом,

$$Z_{\max}=\frac{20}{3} \text{ при } X_1=\frac{4}{3};\ X_2=\frac{8}{3};\ X_3=0;\ X_4=\frac{10}{3};\ X_5=0.$$

Подобное оформление решения несомненно наглядно, но трудоемко. Поэтому вычисления по симплекс-методу удобнее проводить в таблицах.

Приведем решение задачи в табличном виде. Рассмотрим векторную форму предложенной выше задачи:

Найти максимум целевой функции $Z=X_1+2X_2$ при ограничениях

$$\begin{pmatrix}\mathbf{1}\\\mathbf{3}\\\mathbf{1}\end{pmatrix}X_1+\begin{pmatrix}\mathbf{1}\\\mathbf{1}\\\mathbf{4}\end{pmatrix}X_2+\begin{pmatrix}\mathbf{1}\\\mathbf{0}\\\mathbf{0}\end{pmatrix}X_3+\begin{pmatrix}\mathbf{0}\\\mathbf{1}\\\mathbf{0}\end{pmatrix}X_4+\begin{pmatrix}\mathbf{0}\\\mathbf{0}\\\mathbf{1}\end{pmatrix}X_5=\begin{pmatrix}\mathbf{4}\\\mathbf{10}\\\mathbf{12}\end{pmatrix}.$$

Векторы $\mathbf{A}_3=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$, $\mathbf{A}_4=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$, $\mathbf{A}_5=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$ линейно независимые и образуют базис. Составим исходную симплекс-таблицу.

Базис	С базиса	A_0	$C_1=1$ A_1	$C_2=2$ A_2	$C_3=0$ A_3	$C_4=0$ A_4	$C_5=0$ A_5
A_3	$C_3=0$	4	1	1	1	0	0
A_4	$C_4=0$	10	3	1	0	1	0
A_5	$C_5=0$	12	1	4	0	0	1
Z_j-C_j		0	-1	-2	0	0	0

В первой колонке записываются базисные векторы первоначального опорного плана. Во второй колонке – соответствующие коэффициенты целевой функции. В третьей колонке таблицы записаны коэффициенты свободных членов системы. Если же базисные векторы приведены к единичному виду, то в этой колонке находятся значения базисных переменных на данном этапе.

Таким образом, $\overline{X_1}=\{0;0;4;10;12\}$.

Последняя строка, которую в дальнейшем будем называть *m*+ 1 строкой (*m* – число уравнений в системе ограничений), служит для проверки найденного плана на оптимальность. Здесь C_j – коэффициенты целевой функции. Эту строку следует интерпретировать так: если у вектора $\mathbf{A}_1$ в *m*+ 1 строке стоит (-1), значит переменная X_1 входит в целевую функцию с коэффициентом 1. То есть в этой строке записаны коэффициенты целевой функции в виде

$$Z - X_1 - 2X_2 = 0.$$

Под колонкой, соответствующей вектору свободных членов $\mathbf{A}_0$, находится значение целевой функции, соответствующей данному опорному плану. В нашем случае $Z_1 = 0$. Это значение получится, если значения в колонке *C* базиса умножим на значения колонки $\mathbf{A}_0$ и все произведения сложим.

Для задачи линейного программирования на максимум критерием оптимальности является выполнение неравенств $Z_i - C_i \geq 0$ *для всех i.* Иначе говоря, если *коэффициенты целевой функции отрицательны*.

Возможны следующие случаи:

1. Если, по крайней мере, для одного *i* разность $Z_i - C_i < 0$, и хотя бы один элемент соответсвующего вектора $\mathbf{A}_i$ положителен, то *существует другой опорный план, улучшающий решение*.

2. Если все элементы вектора $\mathbf{A}_i$, для которого критерий оптимальности не выполняется, то есть $Z_i - C_i < 0$, *отрицательны,* то целевая функция *не ограничена*.

3. Если для всех *i* разности $Z_i - C_i \geq 0$, то найденный опорный план является *оптимальным*.

В нашем случае оценки $Z_i - C_i$ отрицательны для векторов $\mathbf{A}_1$ и $\mathbf{A}_2$. Это значит, что первоначальный опорный план $\overline{X_1} = \{0;0;4;10;12\}$ не является оптимальным и необходимо найти новый опорный план, в который входила бы переменная X_1 или X_2. Для того, чтобы определиться, какой именно вектор будет базисным и вместо какого, необходимо определить *разрешающий элемент* первоначальной симплекс – таблицы. Это можно сделать следующим образом:

1. Нам выгодно включить в план максимально возможное значение той переменной, которая входит в целевую функцию с наибольшим положительным коэффициентом, поэтому выбирается наибольшая по абсолютной величине отрицательная оценка в *m*+ 1 строке. Этим мы определяем тот вектор, который должен войти в базис. В данном случае такая оценка находится в столбце вектора $\mathbf{A}_2$: $Z_2 - C_2 = -2$.

2. Мы должны учитывать имеющиеся возможности (ограничения задачи). Для вектора $\mathbf{A}_j$, который должен войти в базис, находим

$$\Delta_j = \min \frac{a_i}{X_{ij}}$$

для всех i, для которых $X_{ij} > 0$. Здесь a_i – значение элемента в колонке $\mathbf{A}_0$, стоящее в i- ой строке. В нашем случае j =2.

$$\Delta_2 = \min(\frac{4}{1}, \frac{10}{1}, \frac{12}{4}) = \frac{12}{4},$$

что означает, что разрешающий элемент будет находиться в строке вектора $\mathbf{A}_5$ и столбце вектора $\mathbf{A}_2$. В данном случае ведущий элемент равен 4.

Для удобства выбора разрешающего элемента лучше добавлять на каждом этапе еще один столбец в симплекс – таблицу.

Базис	C базиса	A_0	$C_1 = 1$ A_1	$C_2 = 2$ A_2	$C_3 = 0$ A_3	$C_4 = 0$ A_4	$C_5 = 0$ A_5	Δ_j	
A_3	$C_3 = 0$	4	1	1	1	0	0	$\frac{4}{1}$	
A_4	$C_4 = 0$	10	3	1	0	1	0	$\frac{10}{1}$	
A_5	$C_5 = 0$	12	1	**4**	0	0	1	$\underline{\frac{12}{4}}$	min
$Z_i - C_i$		0	-1	$\underline{-2}$	0	0	0		

Для того, чтобы вектор $\mathbf{A}_2$ стал базисным, его надо сделать единичным, причем единица должна стоять на месте разрешающего элемента. Это можно сделать с помощью преобразований Жордана – Гаусса.

Запишем вторую симплекс – таблицу.

Базис	C базиса	A_0	$C_1 = 1$ A_1	$C_2 = 2$ A_2	$C_3 = 0$ A_3	$C_4 = 0$ A_4	$C_5 = 0$ A_5	Δ_j	
A_3	$C_3 = 0$	1	$\boldsymbol{\frac{3}{4}}$	0	1	0	$-\frac{1}{4}$	$\underline{\frac{1}{3/4}}$	**min**
A_4	$C_4 = 0$	7	$\frac{11}{4}$	0	0	1	$-\frac{1}{4}$	$\frac{7}{11/4}$	
A_2	$C_2 = 2$	3	$\frac{1}{4}$	1	0	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{1/4}$	
$Z_j - C_j$		6	$-\frac{1}{2}$	0	0	0	$\frac{1}{2}$		

На данном этапе $\overline{X_2}\{0;3;1;7;0\}$ и $Z=6$. Очевидно, что значение целевой функции можно улучшить, если ввести в базис вектор $\mathbf{A}_1$, оценка Z_1-C_1 отрицательна. После вычисления всех Δ_j делаем вывод о том, что из базиса следует вывести вектор $\mathbf{A}_3$. Перейдем к третьей таблице, используя разрешающий элемент $\frac{3}{4}$.

Базис	C базиса	A_0	$C_1=1$ A_1	$C_2=2$ A_2	$C_3=0$ A_3	$C_4=0$ A_4	$C_5=0$ A_5	Δ_j
A_1	$C_1=1$	$\frac{4}{3}$	1	0	$\frac{4}{3}$	0	$-\frac{1}{3}$	
A_4	$C_4=0$	$\frac{10}{3}$	0	0	$-\frac{11}{3}$	1	$\frac{2}{3}$	
A_2	$C_2=2$	$\frac{8}{3}$	0	1	$-\frac{1}{3}$	0	$\frac{1}{3}$	
Z_j-C_j		$\frac{20}{3}$	0	0	$\frac{2}{3}$	0	$\frac{1}{3}$	

Все значения в m+ 1 строке неотрицательны, то есть целевая функция имеет вид

$$Z=\frac{20}{3}-\frac{2}{3}X_3-\frac{1}{3}X_5.$$

Найденный опорный план $\overline{X_3}\left\{\frac{4}{3};\frac{8}{3};0;\frac{10}{3};0\right\}$ является оптимальным, при этом $\max Z=\frac{20}{3}$.

Заметим, что порой после смены базиса опорный план и значение целевой функции остаются неизменными. Это – так называемый случай *вырождения*. Теоретически возможен случай, когда последовательность вырожденных опорных планов начинает повторяться – зацикливается. Для предотвращения зацикливания разработаны специальные приемы.

Если среди оценок оптимального плана нулевые только оценки, соответствующие базисным векторам, то это говорит о единственности оптимального плана. Если же нулевая оценка соответствует вектору, не входящему в базис, то в общем случае это означает, что оптимальный план не единственный, их бесконечно много и они принадлежат одной из сторон многоугольника решений.

Сигналом неограниченности целевой функции будет наличие *только* отрицательных элементов в колонке симплекс – таблицы, где критерий оптимальности не выполняется. Вообще этот случай свидетельствует, что исходная задача на максимум не соответствует реальной ситуации (не все ограничения учтены), а значит надо более внимательно проанализировать постановку задачи.

2.1. Построение начального опорного плана

Описанная выше вычислительная схема симплекс – метода применима лишь к задачам в базисной форме, то есть к задачам, для которых известен начальный опорный план и соответствующий ему базис. Иногда его построение не вызывает затруднений, хотя в общем случае нахождение начального опорного плана составляет самостоятельную проблему. Один из способов ее преодоления дает *метод искусственного базиса*.

Вместо исходной канонической задачи

$$Z = C_1X_1 + C_2X_2 + \ldots + C_nX_n \to \max,$$

$$\begin{cases} A_{11}X_1 + A_{12}X_2 + \ldots + A_{1n}X_n = B_1, \\ A_{21}X_1 + A_{22}X_2 + \ldots + A_{21n}X_n = B_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ A_{m1}X_1 + A_{m2}X_2 + \ldots + A_{mn}X_n = B_m. \end{cases}$$

будем рассматривать задачу с $n + m$ переменными, полученными введением в систему ограничений *искусственных переменных* $X_{n+i} \geq 0, i = 1,\ldots,m.$ Эти переменные включаются в целевую функцию с одинаковыми отрицательными коэффициентами $-M$, где M – сколь угодно большое положительное число.

$$Z = C_1X_1 + C_2X_2 + \ldots + C_nX_n - MX_{n+1} - MX_{n+2} - \ldots - MX_{n+m} \to \max$$

$$\begin{cases} A_{11}X_1 + A_{12}X_2 + \ldots + A_{1n}X_n + X_{n+1} = B_1 \\ A_{21}X_1 + A_{22}X_2 + \ldots + A_{2n}X_n + X_{n+2} = B_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ A_{m1}X_1 + A_{m2}X_2 + \ldots + A_{mn}X_n + X_{n+m} = B_m \end{cases},$$

Тогда переменным X_{n+1}, X_{n+2},…, X_{n+m} соответствуют векторы – столбцы:

$$\mathbf{A}_{n+1} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ . \\ . \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{A}_{n+2} - \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ . \\ 0 \end{pmatrix}, \ldots, \mathbf{A}_{n+m} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ . \\ . \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Векторы, соответствующие искусственным переменным, составляют искусственный единичный базис. Ему соответствует очевидный начальный опорный план $\overline{X} = \{0, 0, \ldots, B_1, B_2, \ldots, B_m\}$, где нулевыми являются первые n координат. Введение в целевую функцию коэффициентов -M при искусственных переменных эквивалентно введению штрафа за включение в опорный план переменных X_{n+1}, X_{n+2}, …, X_{n+m}. Числа –M, по абсолютной величине значительно превосходящие остальные коэффициенты целевой функции, позволяют выводить из базиса искусственные переменные и вводить в базис переменные исходной задачи.

Имея начальный опорный план, можно применить симплекс – метод для отыскания оптимального плана расширенной задачи. При этом возможны следующие ситуации:

1. Получен оптимальный план расширенной задачи, в котором все искусственные переменные равны нулю. Тогда его первые n координат дают оптимальный план исходной задачи.
2. Если в оптимальном плане расширенной задачи хотя бы одна из искусственных переменных положительна, то исходная задача не имеет допустимых планов – ее условия несовместны.
3. Если расширенная задача не имеет решения, то и исходная задача неразрешима.

Решим методом искусственного базиса следующую задачу:

$$Z = X_1 + X_2 + X_3 + X_4 \to \max,$$

$$\begin{cases} 4X_1 + 2X_2 + 5X_3 - X_4 = 5, \\ 5X_1 + 3X_2 + 6X_3 - 2X_4 = 5, \\ 3X_1 + 2X_2 + 4X_3 - X_4 = 4. \end{cases}$$

В системе ограничений ни одной переменной не соответствует единичный вектор – столбец, поэтому введем в уравнения искусственные переменные X_5, X_6, X_7

$$\begin{cases} 4X_1 + 2X_2 + 5X_3 - X_4 + X_5 = 5, \\ 5X_1 + 3X_2 + 6X_3 - 2X_4 + X_6 = 5,, \\ 3X_1 + 2X_2 + 4X_3 - X_4 + X_7 = 4. \end{cases}$$

В целевую функцию включим их с коэффициентом -M, значение которого можно заранее не фиксировать. Составим симплекс – таблицу, причем в данном методе она содержит на одну строку больше. Вычисляя Z_i- C_i, отдельно записывают коэффициенты при M и слагаемые, не содержащие M. Итерационный процесс по-прежнему ведут по m+ 1 строке.

Базис	$C_б$	A_0	$C_1=1$ A_1	$C_2=1$ A_2	$C_3=1$ A_3	$C_4=1$ A_4	$C_5=-M$ A_5	$C_6=-M$ A_6	$C_7=-M$ A_7	Δ_i
A_5	-M	5	4	2	5	-1	1	0	0	$\frac{5}{5}$
A_6	-M	5	5	3	**6**	-2	0	1	0	$\underline{\frac{5}{6}}$
A_7	-M	4	3	2	4	-1	0	0	1	$\frac{4}{4}$
$Z_j - C_j$		-14M	-12M	-4M	$\underline{-15M}$	4M	0	0	0	
			-1	-1	-1	-1	0	0	0	

Вектор $\mathbf{A}_3$ заменяет вектор $\mathbf{A}_6$ в базисе. Следует отметить, что после вывода искусственного вектора из числа базисных, в силу выбора коэффициента -*M* он уже не может больше входить в базис. Поэтому если не требуется получение обратной матрицы, то в последующих симплекс – таблицах столбец этого вектора можно исключить.

Базис	$C_б$	A_0	$C_1=1$ A_1	$C_2=1$ A_2	$C_3=1$ A_3	$C_4=1$ A_4	$C_5=-M$ A_5	$C_7=-M$ A_7	Δ_i
A_5	-*M*	$\frac{5}{6}$	$-\frac{1}{6}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\mathbf{\frac{2}{3}}$	1	0	$\underline{\frac{5/6}{2/3}=\frac{5}{4}}$
A_3	1	$\frac{5}{6}$	$\frac{5}{6}$	$\frac{1}{2}$	1	$-\frac{1}{3}$	0	0	
A_7	-*M*	$\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{3}$	0	0	$\frac{1}{3}$	0	1	$\frac{2/3}{1/3}=2$
$Z_j - C_j$		$-\frac{3}{2}M$	$\frac{1}{2}M$	$\frac{1}{2}M$	0	$\underline{-M}$	0	0	
		$\frac{5}{6}$	$-\frac{1}{6}$	-1	0	$-\frac{4}{3}$	0	0	

Базис	$C_б$	A_0	$C_1=1$ A_1	$C_2=1$ A_2	$C_3=1$ A_3	$C_4=1$ A_4	$C_7=-M$ A_7	Δ_i
A_4	1	$\frac{5}{4}$	$-\frac{1}{4}$	$-\frac{3}{4}$	0	1	0	
A_3	1	$\frac{5}{4}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{4}$	1	0	0	$\frac{5/4}{1/4}=5$
A_7	-*M*	$\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{4}$	$\mathbf{\frac{1}{4}}$	0	0	1	$\underline{\frac{1/4}{1/4}=1}$
$Z_j - C_j$		$-\frac{1}{4}M$	$\frac{1}{4}M$	$\underline{-\frac{1}{4}M}$	0	0	0	
		$\frac{10}{4}$	$-\frac{3}{8}$	$-\frac{13}{8}$	0	0	0	

Базис	$C_б$	A_0	C_1=1 A_1	C_2=1 A_2	C_3=1 A_3	C_4=1 A_4	Δ_i
A_4	1	2	-1	0	0	1	
A_3	1	1	**1**	0	1	0	$\underline{1}$
A_2	1	1	-1	1	0	0	
Z_j- C_j		4	$-\underline{2}$	0	0	0	

Базис	$C_б$	A_0	C_1=1 A_1	C_2=1 A_2	C_3=1 A_3	C_4=1 A_4	Δ_i
A_4	1	3	0	0	1	1	
A_1	1	1	1	0	1	0	
A_2	1	2	0	1	1	0	
Z_j- C_j		4	0	0	4	0	

Оптимальный план задачи $X_1 = 1,\ X_2 = 2,\ X_3 = 0,\ X_4 = 3$ дает значение целевой функции $Z = 4$. Отметим, что возможен один из следующих случаев:

1. Матрица системы ограничений содержит единичную подматрицу порядка *m,* то есть *m* единичных векторов условий. В этом случае задача имеет начальный опорный план, и введение векторов искусственного базиса не требуется.

2. Матрица системы ограничений содержит $k < m$ различных единичных векторов. В этом случае достаточно ввести $m - k$ искусственных переменных.

3. Матрица условий не содержит единичных векторов. В этом случае в каждое уравнение вводится искусственная переменная. Следует отметить, что иногда начальный опорный план бывает заранее известен, то есть указаны вектора первоначального базиса. Тогда необходимо методом Жордана – Гаусса привести их к единичному виду и продолжать вычисления по симплекс – методу.

2.2. Двойственность в линейном программировании

Каждой задаче линейного программирования может быть поставлена в соответствие другая вполне определенная задача линейного программирования, такая, что при решении одной из них одновременно решается и другая.

Рассмотрим стандартную задачу линейного программирования, которую в дальнейшем будем называть *прямой* задачей:

$$Z = C_1X_1 + C_2X_2 + \ldots + C_nX_n \to \max,$$

$$\begin{cases} A_{11}X_1 + A_{12}X_2 + \ldots + A_{1n}X_n \le B_1, \\ A_{21}X_1 + A_{22}X_2 + \ldots + A_{21n}X_n \le B_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ A_{m1}X_1 + A_{m2}X_2 + \ldots + A_{mn}X_n \le B_m, \\ X_1, X_2, \ldots, X_n \ge 0. \end{cases}$$

Построим стандартную задачу вида:

$$W = B_1Y_1 + B_2Y_2 + \ldots + B_mY_m \to \min$$

$$\begin{cases} A_{11}Y_1 + A_{21}Y_2 + \ldots + A_{m1}Y_m \ge C_1, \\ A_{12}Y_1 + A_{22}Y_2 + \ldots + A_{m2}Y_m \ge C_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ A_{1n}Y_1 + A_{2n}Y_2 + \ldots + A_{mn}Y_m \ge C_n, \\ Y_1,\ \ldots, Y_m \ge 0. \end{cases}$$

Назовем эту задачу *двойственной* по отношению к прямой задаче.

Сравнивая эти задачи, замечаем, что:

1. Матрица из коэффициентов при переменных в прямой задаче

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \ldots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \ldots & A_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ A_{m1} & A_{m2} & \ldots & A_{mn} \end{pmatrix}$$

и аналогичная матрица в двойственной задаче

$$\mathbf{A}' = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \ldots & A_{m1} \\ A_{12} & A_{22} & \ldots & A_{m2} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ A_{1m} & A_{2n} & \ldots & A_{mn} \end{pmatrix}$$

получаются друг из друга транспонированием (т. е. заменой строк столбцами, с сохранением их порядка).

2. В правых частях системы ограничений каждой задачи стоят коэффициенты целевой функции, взятой из другой задачи.

3. В системе ограничений прямой задачи все неравенства типа $\le$, причем в этой задаче требуется достичь максимума целевой функции Z. В системе ограничений прямой задачи все неравенства типа $\ge$, причем в этой задаче необходимо найти минимум целевой функции W.

В описанном случае прямая и двойственная задачи называются *симметричными.* Система ограничений в обоих случаях задана неравенствами.

Рассмотрим теперь каноническую задачу (для краткости рассуждений возьмем матричную форму).

$$\max Z = \mathbf{CX};\ A\mathbf{X} = \mathbf{B};\ \mathbf{X} \ge 0.$$

Если предварительно записать эту задачу в стандартном виде, то для нее также возможно построить двойственную задачу. Задача, двойственная канонической, имеет вид

$$\min W = \mathbf{YB};\ \mathbf{Y}A \ge \mathbf{C},$$

причем на вектор **Y** не накладывается условие неотрицательности. Рассмотрим пример двойственных задач. В качестве прямой задачи рассмотрим задачу производственного планирования. Предприятие имеет m видов ресурсов и выпускает n продукции. На производство единицы j–й продукции расходуется A_{ij} единиц i-го ресурса. Запас i-го ресурса составляет B_i единиц, i= 1, …,m, доход от реализации единицы j–й продукции равен C_j единиц, j = 1, …,m. Требуется составить план $\mathbf{X} = \left(X_1, X_2, \ldots, X_n\right)$ выпуска продукции, при котором ее суммарная стоимость максимальна. В математической постановке имеем

$$Z = C_1X_1 + C_2X_2 + \ldots + C_nX_n \to \max,$$

$$\begin{cases} A_{11}X_1 + A_{12}X_2 + \ldots + A_{1n}X_n \le B_1, \\ A_{21}X_1 + A_{22}X_2 + \ldots + A_{21n}X_n \le B_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ A_{m1}X_1 + A_{m2}X_2 + \ldots + A_{mn}X_n \le B_m, \\ X_1, X_2, \ldots, X_n \ge 0. \end{cases}$$

Экономическую интерпретацию двойственной задачи

$$W = B_1Y_1 + B_2Y_2 + \ldots + B_mY_m \to \min$$

$$\begin{cases} A_{11}Y_1 + A_{21}Y_2 + \ldots + A_{m1}Y_m \ge C_1, \\ A_{12}Y_1 + A_{22}Y_2 + \ldots + A_{m2}Y_m \ge C_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ A_{1n}Y_1 + A_{2n}Y_2 + \ldots + A_{mn}Y_m \ge C_n, \\ Y_1, \ \ldots, Y_m \ge 0 \end{cases}$$

можно дать следующим образом. Введем следующее условие: сырье можно направить или на изготовление продукции, или на продажу другому предприятию. Спрашивается, какую минимальную цену надо установить за единицу каждого вида сырья i= 1, …,m при условии, что доход от реализации всех его запасов должен быть не меньше дохода от реализации всей продукции, которая может быть выпущена из этого сырья.

Обозначим $Y_i \ge 0$ искомую цену единицы сырья i-го вида. Доход, который можно было бы получить от продажи сырья, необходимого для изготовления единицы продукции вида j, равен

$$\sum_{i=1}^{m} A_{ij}Y_i, \ j = 1, \ldots, n,$$

а доход от реализации всех запасов составит величину $\sum\limits_{i=1}^{m} B_iY_i.$

Для того, чтобы продажа сырья была не менее выгодна, чем реализация изготовленной из него продукции, должно выполняться неравенство

$$\sum_{i=1}^{m} A_{ij} Y_i \geq C_j, \; j = 1, \ldots, n.$$

Любая система цен $Y_i \geq 0$, установленных с учетом этого условия, удовлетворяет интересам предприятия – продавца. Естественно, что учет интересов предприятия – покупателя требует выбора такой системы цен, которая минимизирует суммарную стоимость сырья $\sum_{i=1}^{m} B_i Y_i$. В итоге постановка двойственной задачи принимает вид, записанный выше.

Для прямой и двойственной задач линейного программирования справедлива следующая *теорема двойственности;*

Если прямая и двойственная задачи допустимы, то они имеют оптимальные решения, причем значения их целевых функций совпадают, то есть

$$\max Z = \min W.$$

Если в прямой задаче целевая функция не ограничена, то в двойственной задаче система ограничений не имеет ни одного неотрицательного решения. Обратное утверждение справедливо не всегда. Если в одной из задач система ограничений противоречива, то отсюда вовсе не следует, что в двойственной задаче целевая функция не ограничена; может оказаться, что и в ней система ограничений также противоречива.

Приведем некоторые выводы, касающиеся экономической интерпретации результатов решения двойственных задач.

1. Если некоторый продукт j входит в оптимальный план производства, $X_j \geq 0$, то при оптимальной системе цен двойственной задачи затраты ресурсов на его изготовление совпадают со стоимостью этого продукта.

2. Если в оптимальной системе цен какой- то ресурс j получает отличную от нуля цену $Y_j \geq 0$, то в соответствии с оптимальным планом производства прямой задачи этот ресурс будет израсходован полностью.

3. Если затраты ресурсов на выпуск какого-либо продукта j превышают его стоимость, то этот продукт не производится, $X_j = 0$.

4. Если какой-либо ресурс расходуется не полностью, то его цена $Y_j = 0$.

Таким образом, каждому ресурсу можно присвоить оценку, являющуюся характеристикой его дефицитности. Ресурсы, которые при оптимальном плане производства не используются полностью, получают нулевую оценку. Увеличение или уменьшение запасов таких ресурсов не отражается на величине целевой функции и, следовательно, не влияет на показатель качества производственного плана. Если же оценка i-го ресурса положительна, то увеличение его использования на единицу означает улучшение показателя качества работы – значения целевой функции – на Y_j единиц.

Тесная связь, существующая между двойственными задачами, проявляется и в том, что при решении одной из них одновременно решается и другая. Действительно, нетрудно заметить, что симплекс – таблица с условиями прямой задачи включает и условия двойственной задачи. Поэтому при решении двойственной задачи можно не строить специальную симплекс – таблицу, а решать ее по таблице, где записаны условия прямой задачи. Их оптимальные решения отыскиваются одновременно. *Компоненты оптимального плана двойственной задачи находятся в клетках оценочной $m+1$ строки, соответствующих начальному единичному базису прямой задачи.*

2.3. Пример решения задачи производственного планирования симплекс-методом

Предположим, что в день небольшая кондитерская может расходовать 150 кг муки, 22 кг сахара, 27,5 кг масла для изготовления тортов двух типов *A* и *B*. Пусть на изготовления одного торта *A* требуется 3 кг муки, 1 кг сахара, 1 кг масла, а для одного торта *B* требуется 6 кг муки, 0,5 кг сахара и 1 кг масла. Пусть прибыль от продажи одного торта *A* составляет 20 рублей, а торта *B* – 30 рублей. Сколько тортов типов *A* и *B* должна изготавливать в день кондитерская, чтобы прибыль была максимальной?

Пусть X_1 – количество изготовленных тортов *A*, X_2 – количество изготовленных тортов *B*. Необходимо найти максимум функции $Z = 20X_1 + 30X_2$, выражающей суммарную прибыль. Из условий задачи можно записать несколько ограничений:

$3X_1 + 6X_2 \le 150$ – ограничение на муку;

$X_1 + 0.5X_2 \le 22$ – ограничение на сахар;

$X_1 + X_2 \le 27.5$ – ограничение на масло.

Количество изготовляемой продукции не может быть отрицательным, т.е. $X_1, X_2 \ge 0$.

Приведем задачу к каноническому виду:

$$Z = 20X_1 + 30X_2 \to \max$$

$$\begin{cases} 3X_1 + 6X_2 + X_3 = 150, \\ X_1 + 0,5X_2 + X_4 = 22, \\ X_1 + X_2 + X_5 = 27,5, \\ X_1, X_2 \ge 0. \end{cases}$$

и проведем решение в симплекс – таблицах.

Базис	$C_б$	B	$C_1=20$ A_1	$C_2=30$ A_2	$C_3=0$ A_3	$C_4=0$ A_4	$C_5=0$ A_5	Δ_i
A_3	0	150	3	**6**	1	0	0	$\underline{\frac{150}{6}}$
A_4	0	22	1	0.5	0	1	0	$\frac{22}{0,5}$
A_5	0	27.5	1	1	0	0	1	$\frac{27,5}{1}$
Z_j- C_j		0	-20	-<u>30</u>	0	0	0	

Базис	$C_б$	B	$C_1=20$ A_1	$C_2=30$ A_2	$C_3=0$ A_3	$C_4=0$ A_4	$C_5=0$ A_5	Δ_i
A_2	30	25	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{6}$	0	0	$\frac{25}{1/2}$
A_4	0	$\frac{19}{2}$	$\frac{3}{4}$	0	$-\frac{1}{12}$	1	0	$\frac{19/2}{3/4}$
A_5	0	$\frac{5}{2}$	$\mathbf{\frac{1}{2}}$	0	$-\frac{1}{6}$	0	1	$\underline{\frac{5/2}{1/2}}$
Z_j- C_j		750	-<u>5</u>	0	5	0	0	

Базис	$C_б$	B	$C_1=20$ A_1	$C_2=30$ A_2	$C_3=0$ A_3	$C_4=0$ A_4	$C_5=0$ A_5
A_2	30	$\frac{45}{5}$	0	1	$\frac{1}{3}$	0	-1
A_4	0	6	0	0	$\frac{1}{6}$	1	$-\frac{3}{2}$
A_1	20	5	1	0	$-\frac{1}{3}$	0	2
Z_j- C_j		775	0	0	$\frac{10}{3}$	0	10

Оптимальным решением этой задачи являются значения $X_1 = 5, X_2 = 22.5$ и при этом максимальная прибыль равна 775. Двойственная задача

$$\min W = 150Y_1 + 22Y_2 + 27,5Y_3,$$

$$\begin{cases} 3Y_1 + Y_2 + Y_3 \geq 20, \\ 6Y_1 + 0,5Y_2 + Y_3 \geq 30, \\ Y_1, Y_2, Y_3 \geq 0, \end{cases}$$

имеет оптимальный план $Y_1 = \frac{10}{3}, Y_2 = 0, Y_3 = 10$, а $\min Y = 775$. Каждая компонента оптимального плана двойственной задачи показывает, на сколько изменится оптимальное значение целевой функции прямой задачи, если запас соответствующего ресурса изменится на единицу. Проверим это. Предположим, что количество муки изменилось на один килограмм. Решая задачу с изменившимся первым ограничением $3X_1 + 6X_2 \le 151$, получим другое оптимальное решение $X_1 = \frac{14}{3}, X_2 = \frac{137}{6}$, а прибыль, равная

$$Z = 20 \cdot \frac{14}{3} + 30 \cdot \frac{137}{6} = \frac{2435}{3} \ ,$$

увеличилась на $\frac{10}{3}$. Аналогично можно показать, что увеличение запасов сахара на один килограмм не изменяет оптимального решения, а увеличение на один килограмм запасов масла увеличивает прибыль на 10 единиц.

2.4. Двойственный симплекс-метод

Обычный симплекс-метод приводит к последовательности эквивалентных задач с возрастающим значением целевой функции и неотрицательными значениями в столбце свободных членов, так что каждое базисное решение является допустимым. Двойственный симплекс-метод приводит к последовательности задач с убывающим значением целевой функции, *неотрицательными оценками* $Z_j - C_j$ в m + 1 строке и значениями B_i в столбце свободных членов *любого знака*. Преобразования выполняются до тех пор, пока не будет установлено, что исходная задача не имеет допустимого решения или будет получена задача с допустимым базисным решением (все $B_i \ge 0$), которое одновременно и оптимальна.

Двойственный симплекс-метод удобно использовать для решения задач, которые обладают единичным базисом, но имеют отрицательные коэффициенты в столбце свободных членов и в оценочной строке $Z_j - C_j$ одновременно. Решение такой задачи состоит из двух этапов: сначала с помощью двойственного симплекс-метода исключаются все $X_i < 0$, затем оптимальный план находиться обычным симплекс-методом.

В решении задач двойственным симплекс-методом возможны следующие ситуации.

1. Все оценки $Z_j - C_j \ge 0$, координаты столбца свободных членов также неотрицательны. Коэффициенты B_i дают оптимальный план задач.

2. Имеется *i*-я строка, такая, что $B_i < 0$ и $A_{ij} \ge 0$ для всех $j = 1, \ldots, n$. Задача неразрешима в силу несовместности ограничения.

3. Имеется *k*-я строка, такая, что $B_k < 0$ и $A_{kj} \ge 0$ для хотя бы для одного $j \in 1, \ldots, n$. Тогда возможно отыскание разрешающего элемента преобразования Жордана – Гаусса для перехода к следующей симплекс-таблице.

Рассмотрим последовательность действий по данному методу в случае, когда все оценки $Z_j - C_j \geq 0$.

1. Проверяем знаки коэффициентов B_i. Если все $B_i \geq 0$, то имеет место случай 1. Если не все $B_i \geq 0$, переходим к шагу 2.

2. Среди отрицательных коэффициентов B_i выбираем коэффициент B_k, наибольший по абсолютной величине, и строку k называем разрешающей.

3. В разрешающей строке проверяем знаки всех коэффициентов A_{kj}, $j = 1, \ldots, n$. Если все $A_{kj} \geq 0$, имеет место случай 2. Если найдется хотя бы один коэффициент $A_{kj} < 0$, имеет место случай 3.

4. Среди отрицательных коэффициентов A_{kj} ведущей строки выбираем элемент A_{ks}, для которого

$$\frac{Z_s - C_s}{A_{ks}} = \max\left(\frac{Z_j - C_j}{A_{kj}}\right),\ j = 1, \ldots, n,$$

и называем его разрешающим.

5. Выполняем преобразование симплекс-таблицы с разрешающим элементом A_{ks} и переходим к шагу 1.

Если на начальном этапе среди оценок $Z_j - C_j$ есть отрицательные, то на первом этапе следует изменить шаг 4 следующим образом.

4'. Среди отрицательных коэффициентов A_{kj} ведущей строки выбираем элемент A_{ks}, для которого

$$\frac{B_k}{A_{ks}} = \max\left(\frac{B_k}{A_{kj}}\right),\ j = 1, \ldots, n.$$

С помощью этого метода можно решать задачи минимизации вида

$$\min W = \mathbf{CX};$$

$$\begin{cases} A\mathbf{X} \geq 0; \\ \mathbf{X} \geq 0. \end{cases}$$

где все коэффициенты $C_j \geq 0$. Такая задача может быть сведена к эквивалентной задаче, решаемой двойственным симплекс-методом, с использованием:

- замены минимизации целевой функции W максимизацией функции $Z = -W$, поскольку $\min Z = \max(-W)$;
- умножением на (-1) обеих частей всех неравенств вида $\geq$;
- введением дополнительных переменных для построения единичного базиса.

Пример.

$$Z = 8X_1 + 2X_2 - 5X_3 \to \max ,$$

$$\begin{cases} -X_1 + 2X_2 + X_3 \geq 6, \\ X_1 - 2X_2 + 2X_3 \geq 3, \\ 2X_1 + X_2 - X_3 \leq 2, \\ X_1, X_2, X_3 \geq 0. \end{cases}$$

С помощью дополнительных переменных $X_4, X_5, X_6 \geq 0$ переходим от ограничений – неравенств к ограничениям – равенствам, и после умножения первого и второго ограничений на (-1) окончательно получим

$$\begin{cases} X_1 - 2X_2 - X_3 + X_4 = 6, \\ -X_1 + 2X_2 - 2X_3 + X_5 = -3, \\ 2X_1 + X_2 - X_3 + X_6 = 2, \\ X_1, X_2, X_3, X_4, X_5, X_6 \geq 0. \end{cases}$$

Базис	$C_б$	A_0	C_1=8 A_1	C_2=2 A_2	C_3=-5 A_3	C_4=0 A_4	C_5=0 A_5	C_6=0 A_6
A_4	0	-<u>6</u>	1	-2	**-1**	1	0	0
A_5	0	-3	-1	2	-2	0	1	0
A_6	0	2	2	1	-1	0	0	1
Z_i-C_i		0	-8	-2	5	0	0	0

Заполнив симплекс-таблицу, в соответствии с шагами 1 и 2 двойственного алгоритма выбираем строку с самым большим по абсолютной величине отрицательным элементом в столбце A_0. Это первая строка. Выполняя шаг 4', сравним отношения $\frac{-6}{-2}$ и $\frac{-6}{-1}$. Поскольку второе отношение больше, то разрешающий элемент будет находиться в столбце вектора A_3.

Базис	$C_б$	A_0	C_1=8 A_1	C_2=2 A_2	C_3=-5 A_3	C_4=0 A_4	C_5=0 A_5	C_6=0 A_6	
A_3	-5	6	-1	2	1	-1	0	0	$\frac{6}{2}$
A_5	0	9	-3	6	0	-2	1	0	$\frac{9}{6}$
A_6	0	8	1	3	0	-1	0	1	$\frac{8}{3}$
Z_i-C_i		-30	-3	-<u>12</u>	0	5	0	0	

Поскольку во второй таблице в столбце свободных членов нет отрицательных значений, следующие итерации проводятся по правилам обычного симплекс-метода.

Базис	$C_б$	A_0	$C_1=8$ A_1	$C_2=2$ A_2	$C_3=-5$ A_3	$C_4=0$ A_4	$C_5=0$ A_5	$C_6=0$ A_6
A_3	-5	3	0	0	1	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	0
A_2	2	$\frac{3}{2}$	$-\frac{1}{2}$	1	0	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$	0
A_6	0	$\frac{7}{2}$	$\boldsymbol{\frac{5}{2}}$	0	0	0	$-\frac{1}{2}$	1
Z_i-C_i		-12	-<u>8</u>	0	0	1	2	0

Базис	$C_б$	A_0	$C_1=8$ A_1	$C_2=2$ A_2	$C_3=-5$ A_3	$C_4=0$ A_4	$C_5=0$ A_5	$C_6=0$ A_6
A_3	-5	3	0	0	1	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	0
A_2	2	$\frac{11}{5}$	0	1	0	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{15}$	$\frac{1}{5}$
A_1	8	$\frac{7}{5}$	1	0	0	0	$-\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$
Z_i-C_i		$\frac{3}{5}$	0	0	0	1	$\frac{1}{5}$	$\frac{18}{5}$

Получаем оптимальный план $X = \left\{\frac{7}{5}, \frac{11}{5}, 3, 0, 0, 0\right\}$, при котором целевая функция принимает свое максимальное значение $Z = \frac{3}{5}$.

Пример.

$$W = X_1 + 2X_2 \to \min$$

$$\begin{cases} 2X_1 + X_2 \geq 3, \\ 2X_1 - 7X_2 \leq 1, \\ 2X_1 + 3X_2 \geq 6, \\ X_1, X_2 \geq 0. \end{cases}$$

Перейдем к эквивалентной задаче максимизации. Для этого поменяем знаки целевой функции, умножим на (-1) первое и третье неравенства и введем дополнительные переменные X_3, X_4, X_5. В результате получаем задачу

$$Z = -X_1 - 2X_2 \to \max,$$

$$\begin{cases} -2X_1 - X_2 + X_3 = -3, \\ 2X_1 - 7X_2 + X_4 = 1, \\ -2X_1 - 3X_2 + X_5 = -6, \\ X_1, X_2, X_3, X_4, X_5 \geq 0. \end{cases}$$

Базис	$C_б$	A_0	C_1=-1 A_1	C_2=-2 A_2	C_3=0 A_3	C_4=0 A_4	C_5=0 A_5
A_3	0	-3	-2	-1	1	0	0
A_4	0	1	2	-7	0	1	0
A_5	0	-<u>6</u>	**-2**	-3	0	0	1
Z_j-C_j		0	1	2	0	0	0

Все элементы оценочной строки неотрицательны. Выбираем третью строку в качестве строки разрешающего элемента. Выполняя шаг 4, находим отношения коэффициентов оценочной строки к отрицательным элементам третьей строки: это $\frac{1}{-2}$ и $\frac{2}{-3}$. Большее из этих чисел указывает разрешающий элемент $A_{31} = -2$.

Базис	$C_б$	A_0	C_1=-1 A_1	C_2=-2 A_2	C_3=0 A_3	C_4=0 A_4	C_5=0 A_5
A_3	0	3	0	2	1	0	1
A_4	0	-<u>5</u>	0	-10	0	1	1
A_1	-1	3	1	$\frac{3}{2}$	0	0	$-\frac{1}{2}$
Z_j-C_j		-3	0	$\frac{1}{2}$	0	0	$\frac{1}{2}$

На данном этапе разрешающий элемент находится во второй строке.

Базис	$C_б$	A_0	C_1=-1 A_1	C_2=-2 A_2	C_3=0 A_3	C_4=0 A_4	C_5=0 A_5
A_3	0	2	0	0	1	$\frac{1}{5}$	$-\frac{4}{5}$
A_2	-2	$\frac{1}{2}$	0	1	0	$-\frac{1}{10}$	$-\frac{1}{10}$
A_1	-1	$\frac{9}{4}$	1	0	0	$\frac{3}{20}$	$-\frac{7}{20}$
Z_j-C_j		$-\frac{13}{4}$	0	0	0	$\frac{1}{20}$	$\frac{11}{20}$

Получаем оптимальный план $X = \left\{\frac{9}{4}, \frac{1}{2}, 2, 0, 0\right\}$. Это дает решение исходной задачи в виде $X = \left\{\frac{9}{4}, \frac{1}{2}\right\}$, $W_{\min} = \frac{13}{4}$.

3. ТРАНСПОРТНАЯ ЗАДАЧА

Симплексный метод является основным, универсальным методом решения задач линейного программирования. Однако многие классы широко распространенных на практике задач приводят к задачам линейного программирования, которые можно решать более простыми методами. Наиболее широким классом таких задач являются транспортные задачи, с решения которых исторически и начало развиваться линейное программирование.

Транспортными задачами называются задачи определения плана перевозок груза из заданных пунктов отправления в заданные пункты назначения.

В пунктах отправления (на базах) $Б_1, Б_2, \ldots, Б_m$ находится соответственно $a_1, a_2, \ldots, a_m$ единиц (тонн) однородного груза (груз в пунктах отправления будем называть запасами). Этот груз должен быть доставлен в пункты назначения (на предприятия) $П_1, П_2, \ldots, П_n$ в количестве соответственно $b_1, b_2, \ldots, b_n$ тонн (этот груз будем называть потребностями предприятий). Помимо чисел a_i, b_j $\left(i = \overline{1,m},\ j = \overline{1,n}\right)$ заданы еще величины c_{ij} – стоимости перевозки одной тонны груза из базы B_i на предприятие $П_j$. Необходимо спланировать перевозки так, чтобы общие суммарные затраты были бы наименьшими.

Если общий запас груза на базах совпадает с объемом потребностей предприятий

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_m = b_1 + b_2 + \ldots + b_n,$$

то говорят о *транспортной задаче закрытого типа*. В случае превышения запасов над потребностями или наоборот задача называется *транспортной задаче открытого типа*. Исходные данные открытой задачи удобно располагать в таблице:

Предприятия / Базы	$П_1$	…	$П_j$	…	$П_n$	Запасы
$Б_1$	c_{11} X_{11}	…	c_{1j} X_{1j}	…	c_{1n} X_{1n}	a_1
⋮	⋮		⋮		⋮	⋮
$Б_i$	c_{i1} X_{i1}		c_{ij} X_{ij}		c_{in} X_{in}	a_i
⋮	⋮		⋮		⋮	⋮
$Б_m$	c_{m1} X_{m1}	…	c_{mj} X_{mj}	…	c_{mn} X_{mn}	a_m
Потребности	b_1	…	b_j	…	b_n	$\sum a_i = \sum b_j$

Через X_{ij} в таблице обозначено предполагаемое количество тонн груза, перевозимого с базы $Б_i$ на предприятие $П_j$. В таблице описана задача закрытого типа.

Очевидно, что число переменных X_{ij} равно mn. Эти переменные должны удовлетворять $m+n$ уравнениям. Первые m уравнений – это ограничения по запасам, например,

$$X_{i1} + X_{i2} + \ldots + X_{in} = a_i,$$

суммарный вес груза, отправленного из $Б_i$ должен равняться a_i. Последующие n уравнений показывают, что общее количество груза, доставленное в $П_j$, должно равняться b_j

$$X_{1j} + X_{2j} + \ldots + X_{nj} = b_j.$$

Количество перевозимого груза не может быть отрицательным, стоимость перевозки из $Б_i$ в $П_j$ равна $c_{ij}X_{ij}$, а общая стоимость всех перевозок

$$S = \sum_{ij} c_{ij} X_{ij}.$$

Математическая модель транспортной задачи является математической моделью задачи линейного программирования. Среди множества решений системы ограничений необходимо найти такое неотрицательное решение, при котором целевая функция S принимала бы минимальное значение. Как и любая другая задача линейного программирования, транспортная задача может быть решена при помощи симплекс-метода. Благодаря особому устройству системы ограничений общая процедура симплекс-метода в применении к транспортной задаче сильно упрощается.

3.1. Поиск начального опорного плана

Для транспортной задачи существуют несколько весьма простых и удобных методов отыскания начального допустимого решения (опорного плана).Транспортная задача всегда имеет опорные решения и число базисных переменных в них равно $m+n-1$. Рассмотрим на примере как это можно делать при помощи метода северо-западного угла.

Предприятия / Базы	$П_1$	$П_2$	$П_3$	$П_4$	Запасы
$Б_1$	4	6	5	7	350
$Б_2$	8	5	3	4	250
$Б_3$	5	6	7	8	400
Потребности	160	290	320	230	1000

Вначале полагаем все переменные X_{ij} равными нулю. После того как определено значение какой-либо переменной X_{ij}, оно заносится в соответствующую клетку (ячейку) таблицы, и клетка считается занятой.

Заполнение таблицы начинаем с верхней левой клетки. Стоимость перевозки одной тонны груза с первой базы к первому потребителю c_{11}=4. Перевезем с базы $Б_1$ 160 тонн груза (максимально возможное количество) на предприятие $П_3$. Величину этой перевозки впишем в клетку (1, 1).

Потребности первого предприятия полностью удовлетворены. Запас но первой базе изменился – теперь это 190 тонн.

П Б	$П_1$	$П_2$	$П_3$	$П_4$	Запасы
$Б_1$	4 150	6	5	7	190
$Б_2$	8	5	3	4	250
$Б_3$	5	6	7	8	400
Потребности	-	290	320	230	1000

Не рассматривая клетки первого столбца, снова берем левую верхнюю клетку из оставшихся. Это клетка (1, 2). С первой базы перевезем оставшиеся 190 тонн на второе предприятие. Его потребность не удовлетворена на 100 тонн.

П Б	$П_1$	$П_2$	$П_3$	$П_4$	Запасы
$Б_1$	4 150	6 190	5	7	-
$Б_2$	8	5	3	4	250
$Б_3$	5	6	7	8	400
Потребности	-	100	320	230	1000

На данном этапе построения исходного опорного плана верхняя левая клетка – (2, 2). Помещаем в эту клетку 100 тонн груза для второго предприятия, изменяя запас на второй базе.

П Б	$П_1$	$П_2$	$П_3$	$П_4$	Запасы
$Б_1$	4 150	6 190	5	7	-
$Б_2$	8	5 100	3	4	150
$Б_3$	5	6	7	8	400
Потребности	-	-	320	230	1000

Продолжаем распределение и выбираем клетку (2, 3). Направляем все 150 тонн со второй базы на третье предприятие.

Б \ П	$П_1$	$П_2$	$П_3$	$П_4$	Запасы
$Б_1$	4 150	6 190	5	7	-
$Б_2$	8	5 100	3 150	4	-
$Б_3$	5	6	7	8	400
Потребности	-	-	170	230	1000

Оставшиеся 400 тонн со второй базы распределяем соответственно потребностям на третье и четвертое предприятия. Получим окончательную таблицу, в которой необходимо проверить суммы поставок по строкам и по столбцам.

Б \ П	$П_1$	$П_2$	$П_3$	$П_4$	Запасы
$Б_1$	4 150	6 190	5	7	350
$Б_2$	8	5 100	3 150	4	250
$Б_3$	5	6	7 170	8 230	400
Потребности	160	290	170	230	1000

Число занятых клеток в составленном плане оказалось равным шести. Число базисных переменных также должно быть равно шести: $m+n-1=6$. Это означает, что полученный данным методом план является опорным.

План, содержащий более $m+n-1$ компонент, не является опорным. Часто случается так, что заполненных клеток меньше, чем это требуется для разрешимости задачи. В этом случае в некоторую клетку помещают условное количество груза ε, и работают с ней, как с заполненной, полагая в реальном смысле ε=0.

Существуют методы первоначального распределения поставок, связывающие выбор клетки (i, j) с величиной издержек c_{ij}. Так, в методе минимальной стоимости на каждом этапе выбирается та клетка из свободных, которой соответствует минимальный коэффициент c_{ij}. Его разновидностями являются метод минимума по строке и метод минимума по столбцу.

Здесь минимальный элемент c_{ij} выбирается не из всех свободных клеток, а в первом из невычеркнутых строк или в первом из невычеркнутых столбцов.

Например, в рассмотренном примере распределительная таблица, созданная по методу минимальной стоимости выглядит следующим образом:

Б \ П	П$_1$	П$_2$	П$_3$	П$_4$	Запасы
Б$_1$	4 160	6 120	5 70	7	350
Б$_2$	8	5	3 250	4	250
Б$_3$	5	6 170	7	8 230	400
Потребности	160	290	170	230	1000

Можно было бы ожидать, что в смысле близости к оптимуму, допустимые решения, построенные с учетом затрат, будут лучше планов, построенных диагональным методом северо-западного угла. Однако на практике это не всегда так.

3.2. Метод потенциалов

Чтобы установить, является ли найденный опорный план оптимальным, необходимо по определенному правилу каждому пункту отправления и каждому пункту назначения поставить в соответствие числа, которые должны удовлетворять определенным условиям.

Для того, чтобы решение транспортной задачи было оптимальным, необходимо и достаточно, чтобы существовала система из $m+n$ чисел α_i и β_j, которые удовлетворяли бы следующим условиям

$\alpha_i + \beta_j = c_{ij}$ – для занятых клеток,

$\alpha_i + \beta_j \le c_{ij}$ – для свободных клеток.

Числа α_i ($i = 1, 2, \ldots, m$) называются потенциалами пунктов отправления (баз). Числа β_j ($j = 1, 2, \ldots, n$) называются потенциалами пунктов назначения (предприятий).

Если хотя бы для одной свободной клетки сумма соответствующих потенциалов превосходит стоимость перевозки, стоящей в этой клетке, то опорный план не является оптимальным и его можно улучшить.

Потенциалы α_i и β_j находим, решая систему уравнений, составленную исходя из условия $\alpha_i + \beta_j = c_{ij}$ по каждой из занятых клеток.

Вернемся к решению задачи, для которой в предыдущем параграфе составили исходный опорный план по методу минимальной стоимости. Имеем

$$\alpha_1 + \beta_1 = 4,$$

$$\alpha_1 + \beta_2 = 6,$$
$$\alpha_1 + \beta_3 = 5,$$
$$\alpha_2 + \beta_3 = 3,$$
$$\alpha_3 + \beta_2 = 6,$$
$$\alpha_3 + \beta_4 = 8.$$

В этой системе шесть уравнений и семь переменных, она является неопределенной, и одной переменной можно дать произвольное значение (обычно потенциалу первой базы α_1 придают нулевое значение). После этого все остальные переменные определяются однозначно.

Если $\alpha_1 = 0$, то очевидно по 1-му уравнению, что $\beta_1 = 4$, по 2-му уравнению, что $\beta_2 = 6$, из третьего уравнения системы $\beta_3 = 5$.

Если $\beta_3 = 5$, то $\alpha_2 = -2$, что следует из четвертого уравнения системы. Далее находим: $\alpha_3 = 0$, $\beta_4 = 8$. Найденные значения потенциалов запишем в таблицу

α_i \ β_j	$\beta_1 = 4$	$\beta_2 = 6$	$\beta_3 = 5$	$\beta_4 = 8$
$\alpha_1 = 0$	4 160	6 120	5 70	7
$\alpha_2 = -2$	8	5	3 250	4
$\alpha_3 = 0$	5	6 170	7	8 230

Найдем суммы соответствующих потенциалов для свободных клеток

$$\alpha_1 + \beta_4 = 8,\ 8 \geq c_{14} = 7,$$
$$\alpha_2 + \beta_1 = 2,\ 2 \leq c_{21} = 8,$$
$$\alpha_2 + \beta_2 = 4,\ 4 \leq c_{22} = 5,$$
$$\alpha_2 + \beta_4 = 6,\ 6 \geq c_{24} = 4,$$
$$\alpha_3 + \beta_1 = 4,\ 4 \leq c_{31} = 4,$$
$$\alpha_3 + \beta_3 = 5,\ 5 \leq c_{33} = 5.$$

Запишем для наглядности эти суммы в клетки таблицы

α_i \ β_j	$\beta_1 = 4$	$\beta_2 = 6$	$\beta_3 = 5$	$\beta_4 = 8$
$\alpha_1 = 0$	4 160	6 120	5 70	7 **8**
$\alpha_2 = -2$	8 **2**	5 **4**	3 250	4 **6**
$\alpha_3 = 0$	5 **4**	6 170	7 **5**	8 230

В клетках (1, 4) и (2, 4) сумма потенциалов больше стоимости перевозки, следовательно, построенный опорный план еще не является оптимальным.

Для того, чтобы улучшить план, составим цикл перераспределения перевозок. Возьмем ту клетку, где сумма потенциалов больше стоимости перевозки. Если таких клеток несколько, то рациональнее выбрать ту клетку, где сумма потенциалов превосходит стоимость перевозки на большую величину. В нашей задаче это клетка (2, 4). Из этой клетки необходимо пройти по занятым клеткам, двигаясь только по горизонтали или по вертикали и вернуться в эту же клетку, создав ломаную замкнутую линию. Эту ломаную в дальнейшем и будем называть циклом. Для каждой свободной клетки цикл по приведенному правилу составляется единственным образом.

Построим для клетки (2, 4) цикл перераспределения. (Поворачивать можно только в занятых клетках!)

β_j / α_i	$\beta_1 = 4$	$\beta_2 = 6$	$\beta_3 = 5$	$\beta_4 = 8$
$\alpha_1 = 0$	4 160	6 120 –	5 70 +	7 **8**
$\alpha_2 = -2$	8 **2**	5 **4**	3 250 –	4 + **9**
$\alpha_3 = 0$	5 **4**	6 170 +	7 **5**	8 230 –

Каждой угловой точке цикла присваивается знак, начиная со знака “+” и чередуя их в дальнейшем. Среди отрицательных вершин цикла (в клетках, где стоят знаки “–“) выбираем клетку с наименьшей по величине перевозкой

$$\min(120, 250, 230) = 120.$$

Перераспределим 120 тонн груза по построенному циклу. В тех клетка, где стоит знак “+” прибавим 120 тонн, а в тех клетках, где стоит “ – “ уменьшим количество груза на 120 тонн. В результате этих операций общее количество груза, предназначенного для перевозки, не изменяется.

4 160	6	5 190	7
8	5	3 130	4 120
5	6 290	7	8 110

Для полученного опорного решения снова найдем потенциалы, затем суммы потенциалов и проверим, является ли это решение оптимальным.

α_i \ β_j	$\beta_1=4$	$\beta_2=4$	$\beta_3=5$	$\beta_4=6$
$\alpha_1=0$	4 160 –	6 **4**	5 190 +	7 **6**
$\alpha_2=-2$	8 **2**	5 **2**	3 130 –	4 120 +
$\alpha_3=2$	5 + **6**	6 290	7 **7**	8 110 –

Построили цикл перераспределения для клетки (3, 1).

$$\min(160, 130, 110) = 110.$$

α_i \ β_j	$\beta_1=4$	$\beta_2=5$	$\beta_3=5$	$\beta_4=6$
$\alpha_1=0$	4 50	6 **5**	5 300	7 **6**
$\alpha_2=-2$	8 **2**	5 **3**	3 20	4 230
$\alpha_3=1$	5 110	6 290	7 **6**	8 **7**

В полученном решении во всех свободных клетках сумма потенциалов не превосходит стоимость перевозок, следовательно, это решение является оптимальным. Общая стоимость перевозок

$$S = 50 \cdot 4 + 300 \cdot 5 + 20 \cdot 3 + 230 \cdot 4 + 110 \cdot 5 + 290 \cdot 6 = 3520$$

будет наименьшая из всех возможных.

3.3. Дополнительные аспекты транспортной задачи

1. Транспортную задачу открытого типа нетрудно преобразовать в задачу закрытого типа.

Пусть, например, общие запасы груза на базах превышают общие потребности предприятий. Разумеется, что весь груз вывести не удастся. Поэтому введем фиктивный пункт назначения $П_{n+1}$, потребность в грузе для которого положим равной

$$b_{n+1} = \sum_{i=1}^{m} a_i - \sum_{j=1}^{n} b_i \ .$$

Стоимость перевозки в этот пункт назначения будем считать равной нулю. Процесс нахождения решения в этом случае ничем не отличается от рассмотренного ранее. Если в оптимальном решении в столбце, соответствующем фиктивному предприятию, будут находиться занятые клетки, то именно они показывают, на каких базах следует оставить неиспользованным излишек груза.

Если спрос превышает имеющиеся запасы на базах для разрешения задачи, вводится фиктивный поставщик.

2. Вполне реальна ситуация, когда невозможно по каким-либо причинам осуществить какую-то конкретную перевозку. Например, из-за ремонта подъездных путей в нужное время доехать с первой базы ко второму предприятию. С точки зрения решения транспортной задачи это означает, что клетка (1, 2) должна в итоге стать незанятой. Иначе говоря, нужно заблокировать эту клетку.

Это достигается следующим образом. В клетку, которая должна быть заблокирована, вместо действительной стоимости перевозки ставится новая стоимость, равная M, причем, по величине M настолько большое число, что оно намного больше любого c_{ij}. Это позволит сделать данную клетку незанятой в оптимальном решении, т.к. в противном случае общая стоимость перевозки была бы очень большой.

3. Как уже упоминалось, первоначальный опорный план может содержать занятых клеток меньше, чем m+n-1. Решение в этом случае называется вырожденным.

Рассмотрим подробнее на примере, к чему это приводит и как находится оптимальное решение. Пусть условия задачи приведены в распределительной таблице:

Б \ П	$П_1$	$П_2$	$П_3$	$П_4$	Запасы
$Б_1$	12	13	4	6	500
$Б_2$	6	4	10	11	700
$Б_3$	10	9	12	4	1000
Потреб-ности	400	900	200	500	2200 \ 2000

Запасы превышают потребности на 200 тонн. Переделаем таблицу с учетом пятого фиктивного потребителя.

Б \ П	$П_1$	$П_2$	$П_3$	$П_4$	$П_5$	Запасы
$Б_1$	12	13	4	6	0	500
$Б_2$	6	4	10	11	0	700
$Б_3$	10	9	12	4	0	1000
Потребности	400	800	200	600	200	2000 \ 2000

Найдем первоначальный план методом северо–западного угла.

Б \ П	$П_1$	$П_2$	$П_3$	$П_4$	$П_5$
$Б_1$	12 400	13 100	4	6	0
$Б_2$	6	4 700	10	11	0
$Б_3$	10	9	12 200	4 600	0 200

Из таблицы видно, что число занятых клеток равно 6, что меньше, чем требуется ($m+n$-1=7). Для проверки данного решения на оптимальность нужно найти потенциалы. Составим систему уравнений для их определения:

$$\alpha_1 + \beta_1 = 12,$$
$$\alpha_1 + \beta_2 = 13,$$
$$\alpha_2 + \beta_3 = 4,$$
$$\alpha_3 + \beta_3 = 12,$$
$$\alpha_3 + \beta_4 = 4,$$
$$\alpha_3 + \beta_5 = 0.$$

Имеем 6 уравнений и 8 переменных. Если α_1=0, то β_1=12, а β_2=13. Далее значения переменных определять не удается. Не хватает одного условия. Оно может быть получено, если какую-нибудь клетку считать условно занятой и поместить в нее условное количество груза ε. Очевидно, что эта клетка должна связывать одну из найденных переменных α_1, β_1, β_2 с еще не определенными. Кроме того, желательно из всех таких клеток выбрать клетку с наименьшей стоимостью перевозки. В нашем примере это клетка (1, 3), которая добавляет уравнение $\alpha_1 + \beta_3 = 4$. Потенциалы баз и предприятий, а также расчет по проверке плана на оптимальность представим в таблице.

α_i \ β_j	$\beta_1=12$	$\beta_2=13$	$\beta_3=4$	$\beta_4=-4$	$\beta_5=8$
$\alpha_1=0$	12 400	13 100 –	4 ε+	6 **–4**	0 **8**
$\alpha_2=-9$	6 **3**	4 700	10 **–5**	11 **–13**	0 **–1**
$\alpha_3=8$	10 **20**	9 + **21**	12 200 –	4 600	0 200

Осуществим пересчет по построенному циклу. Определим, какая из “отрицательных” клеток освободиться. Это клетка (1, 3), т. к.

$$\min(100, 200) = 100.$$

α_i \ β_j	$\beta_1=12$	$\beta_2=1$	$\beta_3=4$	$\beta_4=-4$	$\beta_5=-8$
$\alpha_1=0$	12 400 –	13 **1**	4 100 +	6 **–4**	0 **–8**
$\alpha_2=3$	6 **15**	4 700	10 **7**	11 **–1**	0 **–5**
$\alpha_3=8$	10 + **20**	9 100	12 100 –	4 600	0 200

Как можно убедиться, построенный план не является оптимальным. Осуществляем пересчет для клетки (3, 1).

α_i \ β_j	$\beta_1=12$	$\beta_2=11$	$\beta_3=4$	$\beta_4=6$	$\beta_5=2$
$\alpha_1=0$	12 300 –	13 **11**	4 200	6 **6**	0 + **2**
$\alpha_2=-7$	6 **5**	4 700	10 **–3**	11 **–1**	0 **–5**
$\alpha_3=-2$	10 100 +	9 100	12 **2**	4 600	0 200 –

На данном этапе необходимо построение еще одного цикла пересчета, поскольку в клетке (1, 5) не выполняется условие оптимальности.

β_j / α_i	$\beta_1=12$	$\beta_2=11$	$\beta_3=4$	$\beta_4=6$	$\beta_5=0$
$\alpha_1=0$	12 100	13 **11**	4 200	6 **6**	0 200
$\alpha_2=-7$	6 **5**	4 700	10 **– 3**	11 **– 1**	0 **– 7**
$\alpha_3=-2$	10 300	9 100	12 **2**	4 600	0 **– 2**

Найденное решение является оптимальным. Удобнее всего записать план перевозок в виде матрицы

$$\begin{pmatrix} 100 & 0 & 200 & 0 \\ 0 & 700 & 0 & 0 \\ 300 & 100 & 0 & 600 \end{pmatrix},$$

что означает, к примеру, перевозку 100 тонн груза с первой базы на первое предприятие и 200 тонн на третье. Пятый столбец фиктивного потребителя показывает, что излишек груза в 200 тонн выгоднее всего оставить именно на первой базе.

4. ЗАДАЧА О НАЗНАЧЕНИЯХ

Транспортная задача выделяется в самостоятельный класс задачи линейного программирования, так как для ее решения имеются специальные методы, эффективность которых гораздо выше по сравнению с методами решения общей задачи линейного программирования. В свою очередь известны специальные типы транспортной задачи, для решения которых существуют более эффективные алгоритмы, чем для общей транспортной задачи.

В общем случае смысл задачи о назначениях заключается в следующем: как наилучшим образом назначить n рабочих для выполнения n различных работ. При этом считается, что

- квалификация каждого рабочего позволяет выполнить практически любой вид работ, но с различной производительностью (или за разное время, с разными затратами и т. д.);
- каждый рабочий может быть назначен для выполнения одной конкретной работы.

Цель назначений зависит от реальной ситуации. Это могут быть наименьшие общие затраты, наименьшее общее время выполнения, получение наибольшей прибыли и т. д.

Пусть назначение i-го исполнителя на работу j-го вида связано с затратами C_{ij}, $i=1, 2, \ldots, n$; $j=1, 2, \ldots, n$, (в общем случае C_{ij} – любая другая характеристика выполнения конкретной работы конкретным исполнителем). Обозначим через X_{ij} – тип назначения i–го исполнителя на работу j-го вида. Очевидно, что величина X_{ij} может принимать только два значения: $X_{ij}=1$, если исполнитель i назначается на работу j, и $X_{ij}=0$ в противном случае.

Так как на каждый вид работы может быть назначен только один исполнитель, то

$$\sum_{j=1}^{n} X_{ij} = 1, \; i = 1, 2, \ldots, n.$$

А в силу того, что каждый рабочий может быть назначен только на один вид работы

$$\sum_{i=1}^{n} X_{ij} = 1, \; j = 1, 2, \ldots, n.$$

Сформулируем математическую модель задачи о назначениях полностью. Определить переменные X_{ij} таким образом, чтобы функция

$$Z = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} C_{ij} X_{ij}$$

принимала бы наименьшее (или наибольшее) значение при выполнении условий

1) $\sum_{j=1}^{n} X_{ij} = 1,\ i = 1, 2, \ldots, n,$

2) $\sum_{i=1}^{n} X_{ij} = 1,\ j = 1, 2, \ldots, n,$

3) $X_{ij}=0$ или $X_{ij}=1$.

Ее решение можно представить в виде матрицы назначений $\mathbf{X} = \left(X_{ij}\right)$, в каждой строке и в каждом столбце имеется только один элемент, равный 1, а все остальные нули. Таким образом, любое допустимое решение задачи о назначениях всегда вырождено, так как число положительных компонент $X_{ij}=1$ в нем равно n, а ранг матрицы условий, как и в обычной транспортной задаче, равен $m+n-1 = 2n-1$. Отметим, что условие $m=n$ не снижает общности постановки задачи. Если $m<n$, введем фиктивных исполнителей с характеристикой $C_{ij}=0$ для всех $i>m$, а если $m>n$, введем фиктивные работы при $C_{ij}=0$ для всех $j>n$.

Существуют несколько достаточно простых и эффективных методов решения задачи о назначениях – метод Мака и венгерский метод.

Рассмотрим особенности венгерского метода на конкретном примере. Предположим, что требуется 4-х рабочих назначить на работу на 4-х станках таким образом, чтобы суммарное время изготовления деталей было бы минимальным. Известно время, за которое каждый рабочий изготавливает деталь на каждом станке. Эти данные приведены в матрице назначений:

Рабочие \ Станки	1	2	3	4
1	48	20	42	22
2	28	44	20	30
3	30	34	40	38
4	22	38	28	26

Суть венгерского метода заключается в последовательном преобразовании исходной матрицы, чтобы добиться необходимого числа нулей. При этом основываются на выводах, сформулированных в двух теоремах:

Теорема 1.

Если некоторое решение $\mathbf{X} = \left(X_{ij}\right)$ минимизирует $Z = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} C_{ij} X_{ij}$ по всем другим (X_{ij}), таким, что $\sum_{j=1}^{n} X_{ij} = 1$, $\sum_{i=1}^{n} X_{ij} = 1$, то $\mathbf{X} = \left(X_{ij}\right)$ минимизирует так же функцию $Z' = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} C'_{ij} X_{ij}$, где $C'_{ij} = C_{ij} - U_i - V_j$ при всех $i = 1, 2, ..., n,\ j = 1, 2, ..., n$.

Теорема 2.

Если все $C_{ij} \geq 0$ и можно отыскать решение $\mathbf{X} = \left(X_{ij}\right)$ такое, что $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} C_{ij} X_{ij} = 0$, то это решение оптимально.

1. Из каждого элемента каждой строки вычитаем минимальный элемент этой строки. В результате получим новую матрицу назначений, а, значит и другую задачу. В силу теоремы 1 новая задача имеет то же оптимальное решение, что и исходная. Но она проще, чем исходная, поскольку в таблице есть нули. Если эти нули оказались в разных строках и столбцах, то оптимальное решение получено. В противном случае составляем новую матрицу.

Станки / Рабочие	1	2	3	4
1	28	0	22	2
2	8	24	0	10
3	0	4	10	8
4	0	16	6	4

2. Заметим, что в некоторых столбцах после первого этапа есть нули. Естественно, нуль и будет наименьшим элементом, поэтому такие столбцы остаются неизменными. В примере изменится только четвертый столбец.

Станки / Рабочие	1	2	3	4
1	28	0	22	0
2	8	24	0	8
3	0	4	10	6
4	0	16	6	2

3. Определяется наименьшее число горизонтальных (по строкам) и вертикальных (по столбцам) прямых, которыми можно зачеркнуть все нули последней матрицы. Заметим, что в результате выполнения первых двух этапов каждая строка и каждый столбец будут содержать, по крайней мере, один нулевой элемент. Разумеется, проще всего зачеркнуть все нули с помощью прямых, совпадающих с каждой строкой (или столбцом), но их количество должно быть наименьшим.

Если число таких прямых равно размерности матрицы назначений, то переходим на этап 5. Если число прямых меньше размерности матрицы, то переходим на этап 4.

В рассмотренном примере все нули можно зачеркнуть тремя прямыми:

Станки / Рабочие	1	2	3	4
1	28	0	22	0
2	8	24	0	8
3	0	4	10	6
4	0	16	6	2

4. Среди всех незачеркнутых такими прямыми элементов в таблице выбирается наименьший и вычитается из остальных незачеркнутых элементов. В результате получается по крайней мере один незачеркнутый нуль, т. е. нужно добавить минимум еще одну прямую, чтобы зачеркнуть все нули.

Станки / Рабочие	1	2	3	4
1	28	0	22	0
2	8	24	0	8
3	0	2	8	4
4	0	14	4	0

То есть, для зачеркивания необходимы минимум 4 прямые. Число 4 равно размерности матрицы, переходим на этап 5. Если бы наименьшее число прямых снова оказалось меньше размерности матрицы, то этап 4 пришлось бы повторить.

5. На этом этапе мы получаем оптимальное решение. Выбирается нулевая клетка, которая является *единственной* в данной строке или столбце и помечается символом X (таким образом мы производим назначения рабочих на станки, каждый рабочий закрепляется за одним станком).

Станки / Рабочие	1	2	3	4
1	28	X	22	0
2	8	24	X	8
3	X	2	8	4
4	0	14	4	X

То есть первый рабочий будет работать на втором станке, 2-й на третьем, 3-й на первом и 4-й на четвертом: $X_{12} = X_{23} = X_{31} = X_{44} = 1$, все остальные X_{ij}=0.

По исходной таблице подсчитаем минимальное значение целевой функции

$$\min Z = 20 + 20 + 26 + 30 = 96.$$

В случае, когда матрица назначений состоит из большого числа строк и столбцов, на этапе 3 определять количество прямых, которыми зачеркиваются строки и столбцы, содержащие нули, визуально затруднительно. Поэтому необходимо использовать четкий и последовательный алгоритм, состоящий в следующем.

3.1. В каждой строке один из нулей помечаем символом (*), а другие нули данной строки (если они есть) зачеркиваем $\varnothing$. Тоже следует сделать в столбце, где находится отмеченный нуль – 0*.

3.2. Отмечаем символом X каждую строку, содержащую 0*. Если в отмеченной строке есть зачеркнутый нуль – $\varnothing$, то столбец, содержащий этот $\varnothing$ также отмечаем X. Если в отмеченном столбце X есть $\varnothing$, то строку, содержащую $\varnothing$ отмечаем X. Повторяем эти действия, попеременно просматривая строки и столбцы, необходимое количество раз, пока не достигнем следующего:

а) либо будет помечен столбец, не содержащий (*);

б) либо приписать никаких пометок больше нельзя и все отмеченные столбцы содержат (*)

В случае а) общее количество (*) (назначений) увеличиваем следующим образом. В помеченном столбце, не содержащем звездочки, поставим звездочку в клетке той строки, где есть 0*. Затем в строке, где проставлена новая звездочка, уберем прежний 0*. В столбце, где находится удаляемая звездочка, перейдем к клетке той строки, где уже есть 0* и поставим (*), и т.д. В конце концов, придем к одной из строк, где до сих пор не было 0*, и общее число назначений возрастет на 1. После этого процесс расстановки пометок начинают заново, продолжая процесс до тех пор, пока не придем к случаю б), в котором оптимальное назначение достигнуто.

Минимальное число строк и столбцов, содержащих клетки с нулями, состоит из числа непомеченных строк и помеченных столбцов. Их мы и вычеркиваем.

3.3. Среди невычеркнутых элементов находим минимальных и вычитаем его из каждого, не вычеркнутого элемента и прибавляем его те ко всем элементам, которые находятся на пересечении вычеркнутых строк и столбцов.

Рассмотрим следующую задачу.

Автобусы компании совершают рейс между городами Москва и Нижний Новгород в обоих направлениях.

Где должны жить бригады, и какие рейсы они должны обслуживать, чтобы суммарное время, которое все бригады теряют на ожидание обратного рейса, было бы минимальным при том ограничении, что время ожидание каждой бригады должно быть больше 4 часов (водители должны отдохнуть между рейсами) и меньше 24 часов?

Расписание движения автобуса Москва – Н.Новгород

Отправление из Москвы	Номер рейса	Прибытие в Н.Новгород	
6.00	a	12.00	Время в пути 6 часов
7.30	b	13.30	
11.30	c	17.30	
19.00	d	1.30	
0.30	e	6.30	

Расписание движения автобуса Н.Новгород – Москва

Отправление из Н.Новгорода	Номер рейса	Прибытие в Москву	
11.30	1	5.30	Время в пути 6 часов
15.00	2	9.00	
21.00	3	15.00	
0.30	4	18.30	
6.00	5	0.00	

Составим две таблицы потерянного времени, считая в 1-м случае, что все бригады живут в Москву, а во 2-м, что все они живут в Н.Новгороде.

Все бригады живут в Москве

	1	2	3	4	5
a	17,5	21	3	6,5	12
b	16	19,5	1,5	5	10,5
c	12	15,5	21,5	1	6,5
d	4,5	8	14	17,5	23
e	23	2,5	8,5	12	17,5

Все бригады живут в Н.Новгороде

	1	2	3	4	5
a	18,5	15	9	5,5	0
b	20	16,5	10,5	7	1,5
c	0	20,5	14,5	11	5,5
d	7,5	4	22	18,5	13
e	13	9,5	3,5	0	18,5

Составим на основе этих двух таблиц третью, каждый элемент которой будет являться меньшим из чисел, занимающих соответствующие клетки в двух исходных таблицах. Учитывая потребности в отдыхе, мы не будем принимать во внимание числа не превосходящие четырех.

	1	2	3	4	5
a	17,5	15	9	5,5	12
b	16	16,5	10,5	5	10,5
c	12	15,5	14,5	11	5,5
d	4,5	8	14	17,5	13
e	13	9,5	8,5	12	17,5

Назовем назначением факт приписания бригады к одному из рейсов. Очевидно, каждая бригада может быть назначена на один прямой и один обратный рейс. Таким образом, любое возможное решения может быть представлено таблицей, в клетках которой стоят числа 0 или 1, причем в каждой строке и в каждом столбце имеется ровно одна единица.

1. *Получение нулей.*

Среди элементов каждого столбца выбираем наименьший и вычтем его из всех элементов этого столбца. Описанный прием позволяет получить хотя бы один нуль в каждом столбце.

	1	2	3	4	5
a	13	7	0,5	0,5	6,5
b	11,5	8,5	2	0	5
c	7,5	7,5	6	6	0
d	0	0	5,5	12,5	7,5
e	8,5	1,5	0	7	12

2. *Поиск оптимального решения.*

При помощи нулевых значений попытаемся сконструировать решение для которого суммарное время потерь имело бы нулевое значение. Рассмотрим вначале ту строку (или те строки), которая содержит наименьшее число нулей. Отметим (*) один из нулей этой стоки, и вычеркнем все другие нули, которые находятся в той же строке или в том же столбце, что и отмеченный нуль. Повторяем этот процесс по другим столбцам.

	1	2	3	4	5
a	~~13~~	~~7~~	~~0,5~~	~~0,5~~	~~6,5~~
b	11,5	8,5	2	0*	5
c	7,5	7,5	6	6	0*
d	0*	∅	5,5	12,5	7,5
e	8,5	1,5	0*	7	12

Ясно, что на данном этапе оптимальное решение не найдено, поскольку ни одна бригада на назначена для выполнения 2-го рейса.

3. *Поиск минимального набора строк и столбцов, содержащих все нули.*

Выполним действия в такой последовательности:

а) Пометим символом Х все те строки, которые не содержат ни одного отмеченного нуля;

б) Отметим каждый столбец, содержащий перечеркнутый нуль хотя бы в одной из отмеченных строк.

	1	2	3	4	5	
a	13	7	0,5	0,5	6,5	X
b	11,5	8,5	2	0*	5	
c	7,5	7,5	6	6	0*	
d	0*	∅	5,5	12,5	7,5	
e	8,5	1,5	0*	7	12	

в) Отметим каждую строку, имеющую 0* хотя бы в одном из отмеченных столбцов;

г) Будем повторять действия б) и в) до тех пор, пока не останется строк и столбцов, которые еще можно отметить.

Этот процесс позволит нам получить минимальное количество строк и столбцов, содержащих все перечеркнутые и отмеченные нули. В данном случае отметили 1-ую строку, столбцов, которые мы могли бы отметить нет.

д) Перечеркнем каждую неотмеченную строку и каждый отмеченный столбец.

	1	2	3	4	5	
a	13	7	0,5	0,5	6,5	X
b	~~11,5~~	~~8,5~~	~~2~~	~~0*~~	~~5~~	
c	~~7,5~~	~~7,5~~	~~6~~	~~6~~	~~0*~~	
d	~~0*~~	~~∅~~	~~5,5~~	~~12,5~~	~~7,5~~	
e	~~8,5~~	~~1,5~~	~~0*~~	~~7~~	~~12~~	

5. *Перемещение некоторых нулей.*

Рассмотрим часть таблицы, состоящую из из непрочеркнутых элементов, и вычтем из них наименьшее число (в данном случае 0,5), а также прибавим это число к элементам прочеркнутых столбцов.

	1	2	3	4	5	
a	12,5	6,5	0	0	6	X
b	11,5	8,5	2	0*	5	
c	7,5	7,5	6	6	0*	
d	0*	∅	5,5	12,5	7,5	
e	8,5	1,5	0*	7	12	

6. *Получение оптимального решения или переход к новому назначению.*

В новой таблице необходимо заново проставить разметку нулей, как это уже показывалось в п. 2. Если при этом придем к оптимальному решению, то процесс заканчивается. В противном случае придется еще раз повторить п. 3, 4 и 5. Полученное в результате описанных действий оптимальное решение может оказаться не единственным.

	1	2	3	4	5	
a	12,5	6,5	0*	∅	6	X
b	11,5	8,5	2	0*	5	X
c	7,5	7,5	6	6	0*	
d	0*	∅	5,5	12,5	7,5	
e	8,5	1,5	0*	7	12	X
			X	X		

(Порядок отметки: строка *e,* столбец 3, строка *a,* столбец 4, строка *b*). Прочеркиваем строки *c* и *d*, а также столбцы 3,4.

	1	2	3	4	5	
a	12,5	6,5	0*	∅	6	X
b	11,5	8,5	2	0*	5	X
c	~~7,5~~	~~7,5~~	~~6~~	~~6~~	~~0*~~	
d	~~0*~~	~~∅~~	~~5,5~~	~~12,5~~	~~7,5~~	
e	8,5	1,5	0*	7	12	X
			X	X		

Наименьшее число свободной части таблицы – 1,5. Вычтем его из элементов столбцов 1, 2 и 5 и прибавим к элементам строк *a, b* и *e*.

	1	2	3	4	5
a	11	5	0*	∅	4.5
b	10	7	2	0*	3.5
c	7,5	7,5	7.5	7.5	0*
d	0*	∅	7	14	7,5
e	7	0	0*	7	10.5

Сделав разметку нулей заново, получим таблицу

	1	2	3	4	5
a	11	5	0*	∅	4.5
b	10	7	2	0*	3.5
c	7,5	7,5	7.5	7.5	0*
d	0*	∅	7	14	7,5
e	7	0*	∅	7	10.5

На этот раз решение будет оптимальным, каждая бригада назначена на один из рейсов. Представим его для удобства в таком виде:

	1	2	3	4	5
a	0	0	1	0	0
b	0	0	0	1	0
c	0	0	0	0	1
d	1	0	0	0	0
e	0	1	0	0	0

А именно, 1-я бригада живет в Москве. Рейсы *d* и 1. Перерыв 4,5 часа.

2-я бригада живет в Н.Новгороде. Рейсы *e* и 2. Перерыв 9,5 часов.

3-я бригада живет в Н.Новгороде. Рейсы *a* и 3. Перерыв 9 часов.

4-я бригада живет в Москве. Рейсы *b* и 4. Перерыв 5 часов.

5-я бригада живет в Н.Новгороде. Рейсы *c* и 5. Перерыв 5,5 часа.

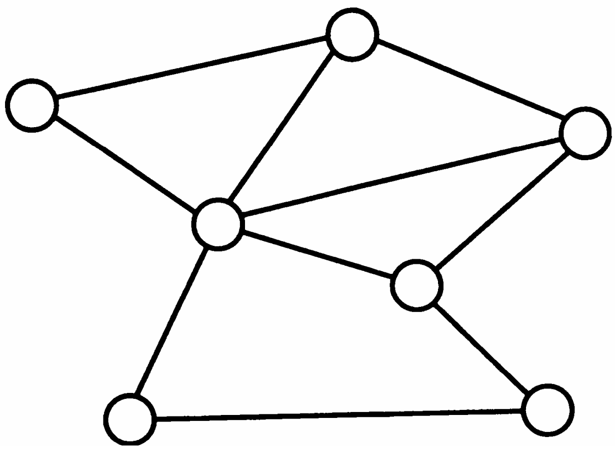
Суммарная потеря времени – 33,5 часа. Аналогичный расчет показывает, что максимальное время простоя составляет 83,5 часа.

5. ЗАДАЧА О КРАТЧАЙШЕМ ПУТИ

Рассмотрим задачи составления оптимальных маршрутов, которые часто объединяют под названием «задачи о кратчайшем пути».

Моделирование задач этого раздела существенно облегчает теория графов.

Графом принято называть фигуру, состоящую из вершин и соединяющих их ребер.



Обычно вершины графа соответствуют каким-либо объектам (города, филиалы предприятия, торговые точки, этапы производственного процесса и пр.) и изображаются на схеме в виде точек, кругов или прямоугольников. Ребра соединяют эти объекты и выглядят как соединяющие их отрезки, дуги или стрелки.

Последовательность ребер графа, соединяющая его вершины A и B, называют *путем,* при этом сами вершины A и B считают *связанными*. Граф называется *связным*, если связаны любые его две вершины.

В большинстве случаев вершинам или ребрам графа приписывают числовые характеристики. Иногда их называют *весами*, а сам граф – *взвешенным*. Смысл весового коэффициента устанавливается по контексту задачи: это могут быть расстояния, тарифы, всевозможные издержки, ресурсы, в том числе временные. Взвешенный граф часто называют *сетью*, его вершины – *узлами*.

Различают *ориентированные* и *неориентированные* графы, в зависимости от того, существует ли принципиальная и весовая разница между путями графа AB и BA.

Рассмотрим следующие задачи:

- найти кратчайший путь, соединяющий все узлы графа;
- найти кратчайший путь, соединяющий два определенных узла графа;
- найти замкнутый кратчайший путь из заданной вершины, соединяющий все узлы графа, с возвращением в заданную вершину.

КРАТЧАЙШИЙ ПУТЬ, СОЕДИНЯЮЩИЙ ВСЕ УЗЛЫ ГРАФА

Алгоритм решения задачи (Прим).

Шаг 1

В начальной вершине ставят метку (это может быть штриховка, выделение цветом или символом).

Шаг 2

Из всех ребер, исходящих из помеченной вершины, выбираем ребро наименьшей длины (веса). Если таких вершин несколько, выбираем любое из них. Ставим метку в вершину, в которую входит выбранное ребро. Выделяем выбранное ребро (жирной линией, цветом или штриховкой).

Шаг 3

Рассматриваем все ребра, ведущие из двух отмеченных вершин в еще неотмеченные. Выбираем ребро наименьшей длины. Отмечаем вершину, в которую входит выбранное ребро. Выделяем выбранное ребро.

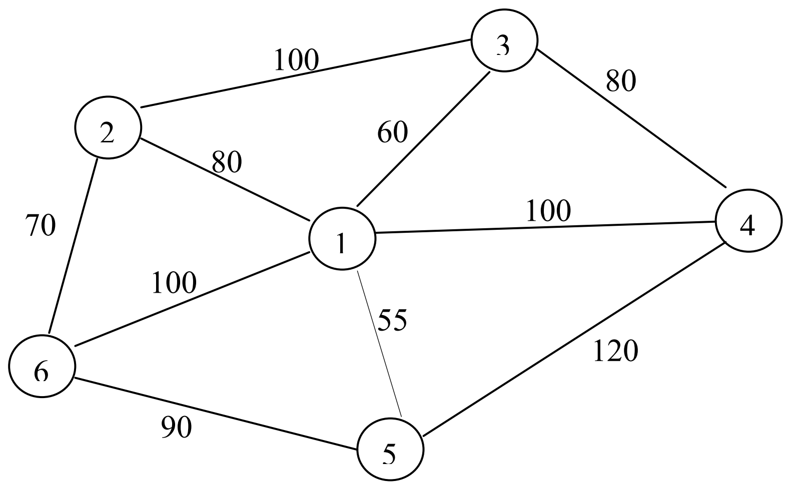
Шаг 4

Рассматриваем все ребра, ведущие из всех отмеченных вершин в еще неотмеченные. Выбираем ребро наименьшей длины. Отмечаем вершину, в которую входит выбранное ребро. Выделяем выбранное ребро.

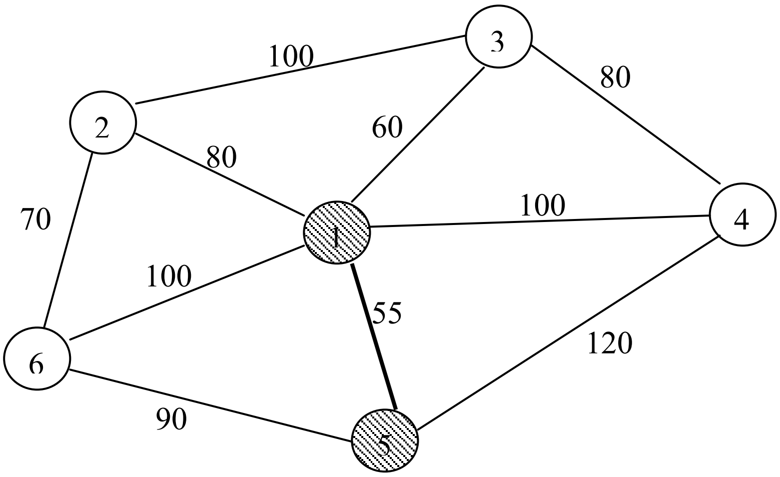
Если граф содержит n узлов, алгоритм заканчивается за n-1 шаг.

Пример.

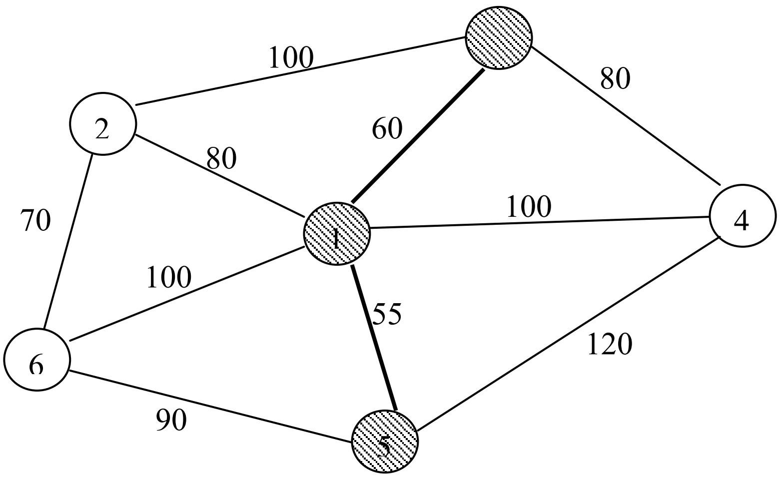
Имеется 6 населенных пунктов, которые следует соединить наиболее дешевой сетью дорог. На графе указаны расстояния между узлами. Считать, что стоимость дороги пропорциональна ее длине.



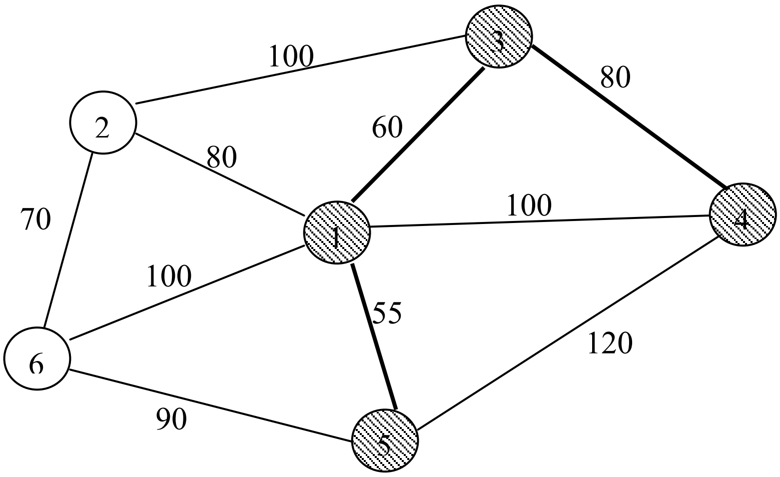
Шаг 1и 2



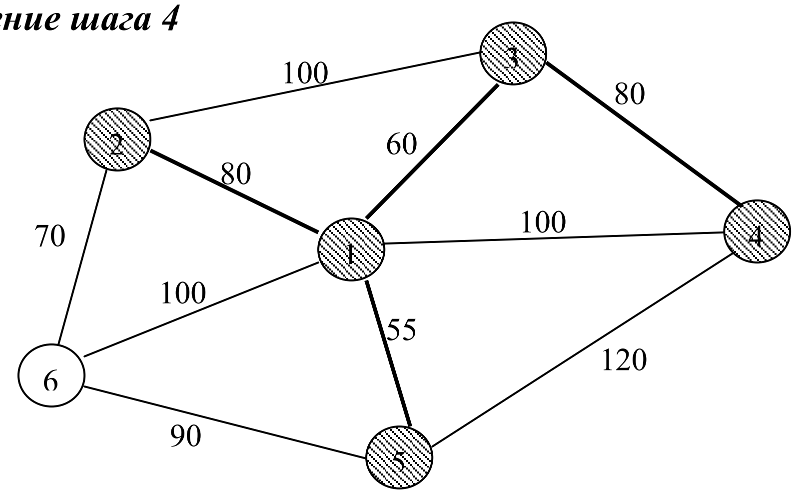
Шаг 3

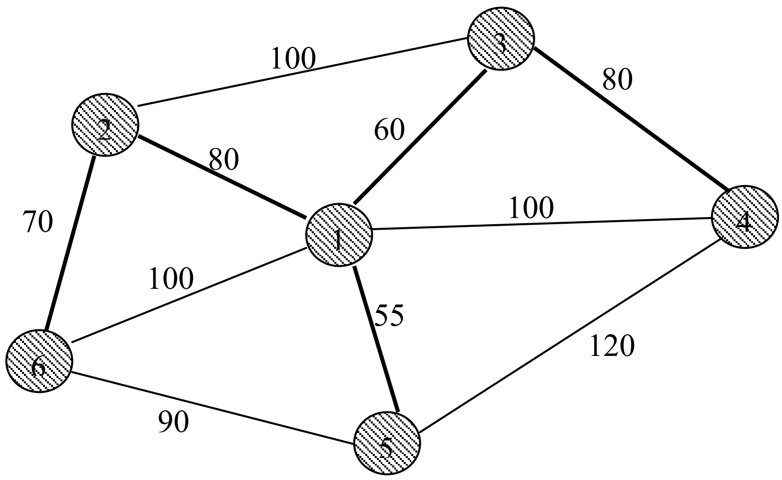


Шаг 4



Повторение шага 4





В результате получен путь кратчайшей длины, соединяющий все узлы сети.

НАЙТИ КРАТЧАЙШИЙ ПУТЬ, СОЕДИНЯЮЩИЙ ДВА ОПРЕДЕЛЕННЫХ УЗЛА ГРАФА

Алгоритм решения задачи (Декстра)

Шаг 1

В начальной вершине ставят ***постоянную*** метку (это может быть штриховка, выделение цветом или символом).

Шаг 2

Рассмотрим все ребра, выходящие из начального узла. Припишем все узлам, в которые входят эти ребра, ***временные*** метки.

Временная метка выглядит следующим образом: $\left(A_1, \rho\right)$, где A_1 – название начального узла, ρ – расстояние до него.

Шаг 3

Среди всех узлов с временными метками выбираем узел с ***наименьшим*** расстоянием ρ и присваиваем ему постоянную метку. Если таких узлов несколько выбираем любой из них.

Шаг 4

Рассмотрим все ребра, исходящие из узлов с постоянными метками. Снабдим все узлы, в которые они входят, временными метками по следующему правилу:

- Если узел еще не был помечен, в метке указывается $\left(A_i, \rho\right)$, где A_i – название предшествующего узла, ρ – ***суммарное*** расстояние от начальной вершины до помечаемого узла.
- Если узел уже имел временную метку, необходимо сравнить длины нового и старого маршрутов, ведущих в этот узел из начального узла. Если новый маршрут короче, временную метку корректируют.

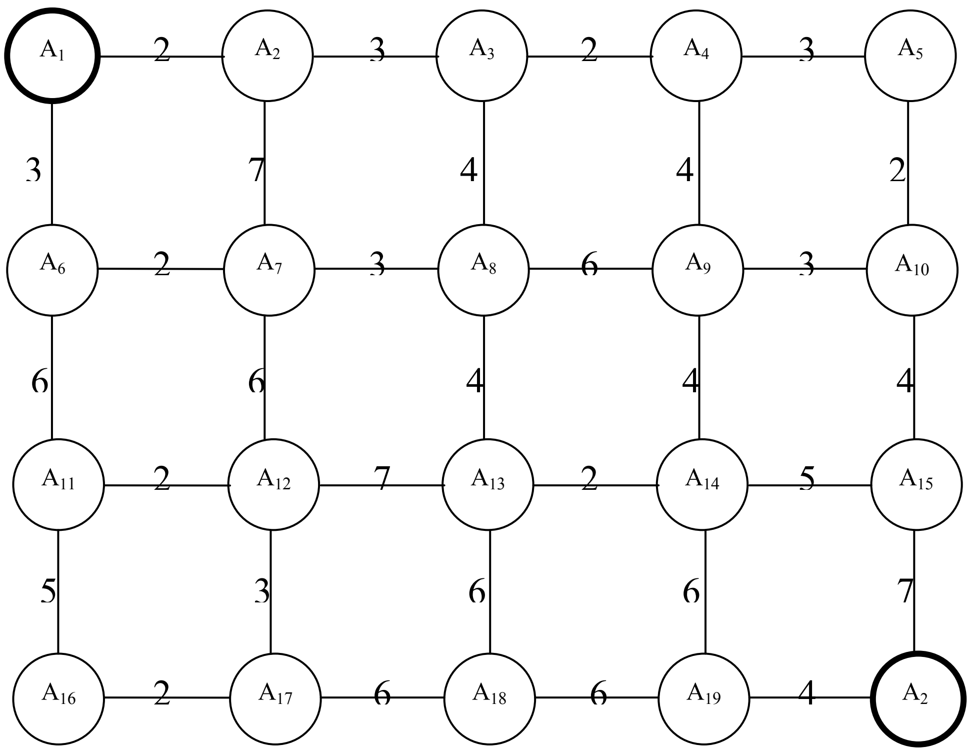
В результате получаем новый набор узлов с временными метками.

Далее повторяем *шаги 3 и 4* до тех пор, пока все узлы графа не получат постоянные метки.

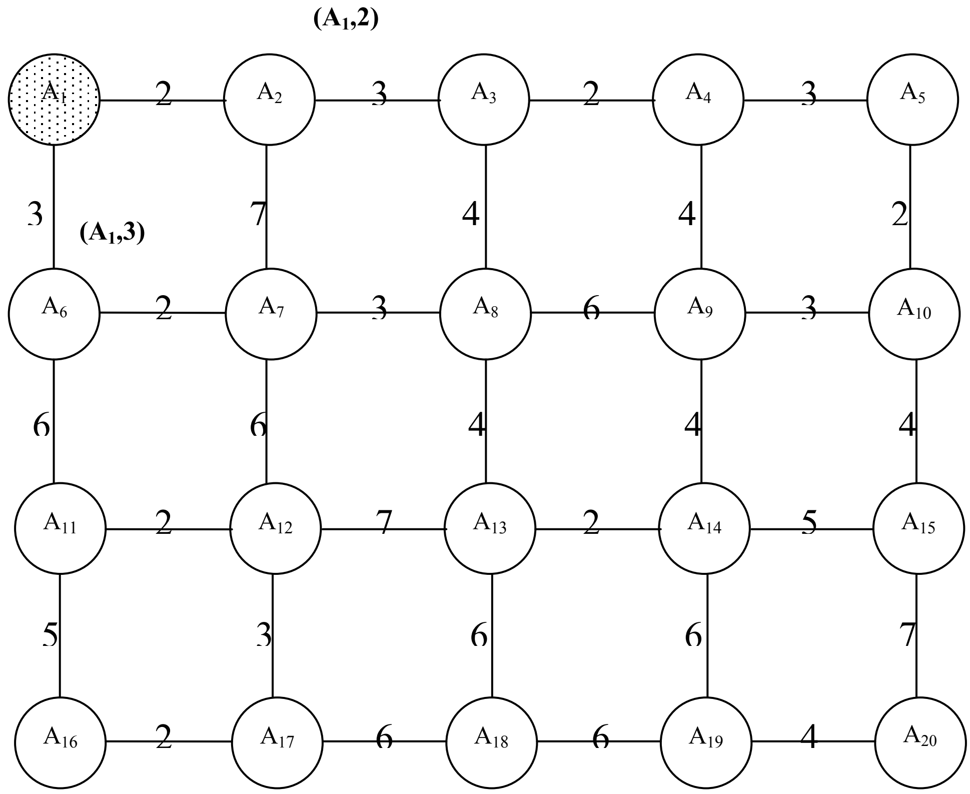
По постоянным меткам кратчайшие маршруты между начальным узлом и любым другим узлом сети легко восстанавливаются.

Пример

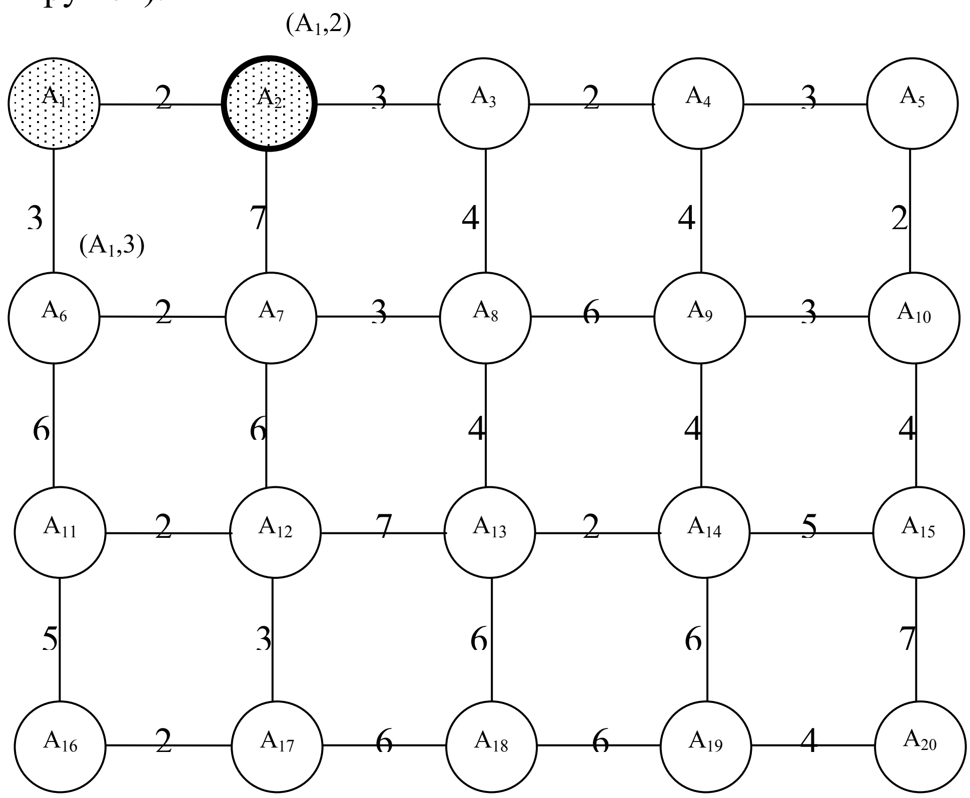
Имеется 20 населенных пунктов, На графе указано расстояние между узлами. Рассчитать кратчайший маршрут между пунктами A_1 и A_{20}.



Из пункта A_1 ведут дороги в A_2 и A_6. Снабжаем эти пункты временными метками. В метке отмечаем, откуда мы попадаем в данный пункт и каково расстояние до A_1.

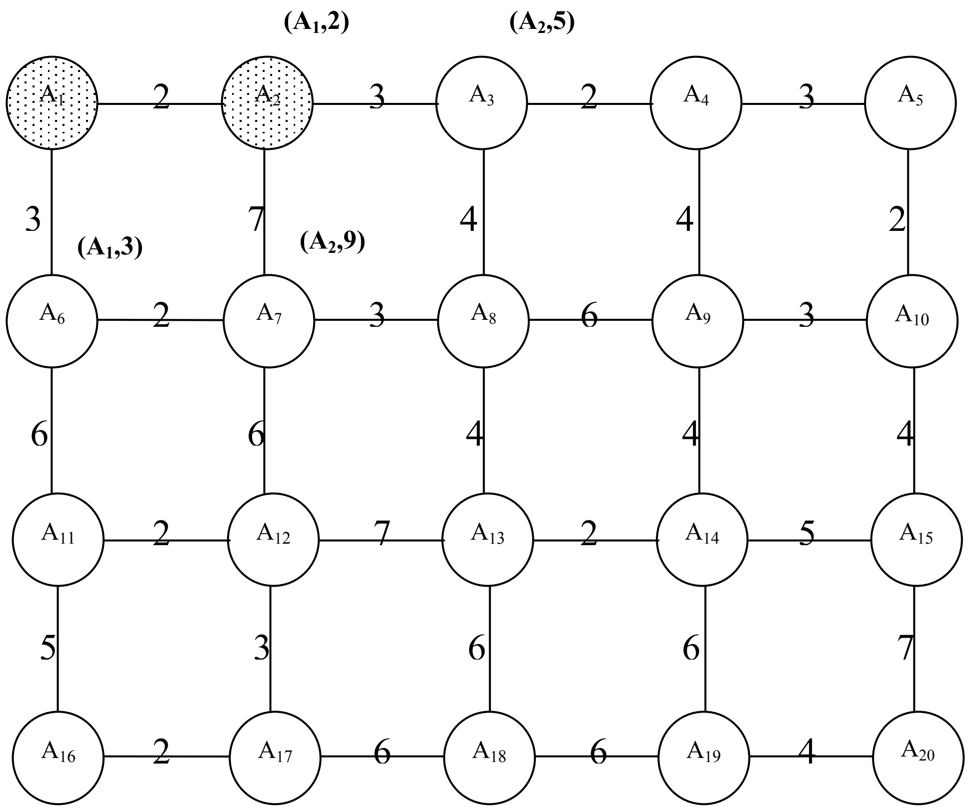


Среди временных меток находим метку с наименьшим расстоянием: это пункт A_2. Меняем его временную метку на постоянную (заштриховываем кружок).

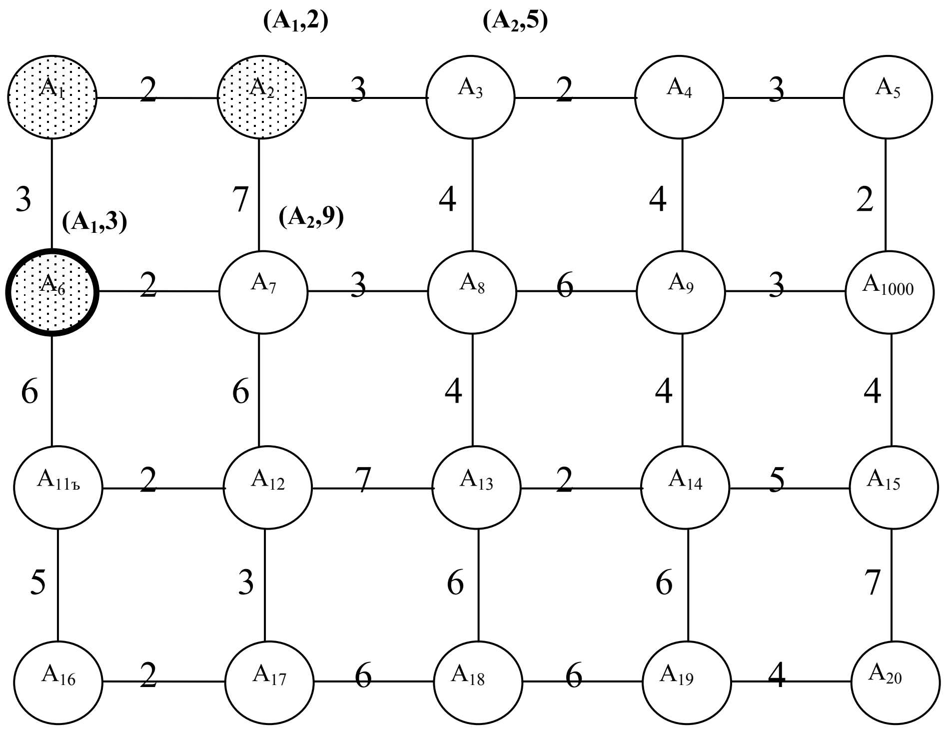


Из пункта A_2 ведут дороги в A_3 и A_7. Снабжаем эти пункты временными метками. Например, в метке пункта A_3 указываем, что попадаем в него из пункта A_2, а суммарное расстояние до A_1 равно (2+3). Складываем расстояние, указанное в метке пункта A_2 с расстоянием между A_2 и A_3.

В метке пункта A_7 указываем, что попадаем в него из пункта A_2, а суммарное расстояние до A_1 равно (2+7). Складываем расстояние, указанное в метке пункта A_2 с расстоянием между A_2 и A_7.

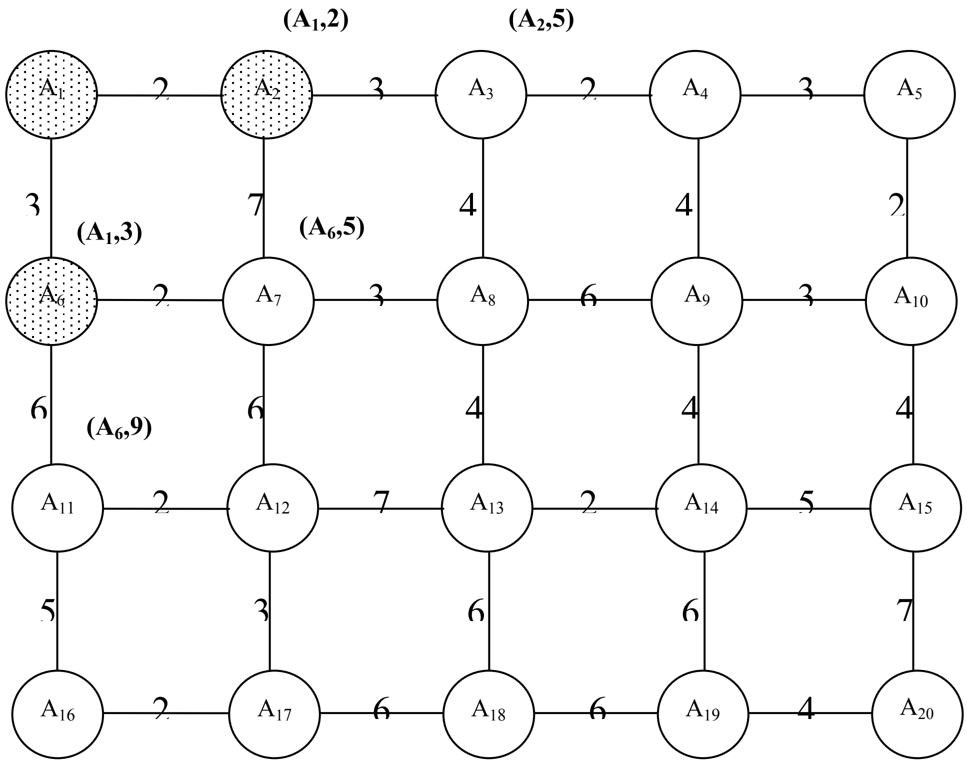


Среди всех временных меток находим метку с наименьшим расстоянием: это пункт A_6. Меняем его временную метку на постоянную (заштриховываем кружок).

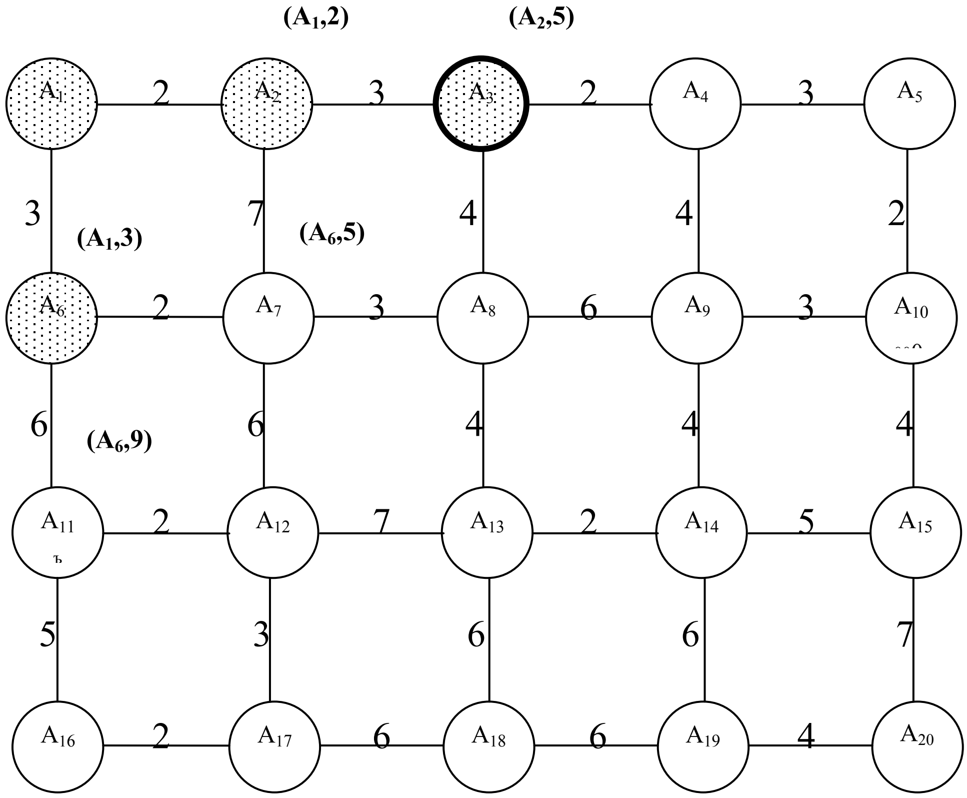


Из пункта A_6 ведут дороги в A_{11} и A_7. Снабжаем пункт A_{11} временной меткой, указывая, что попадаем в него из пункта A_6, а суммарное расстояние до A_1 равно (3+6). Складываем расстояние, указанное в метке пункта A_6 с расстоянием между A_6 и A_{11}.

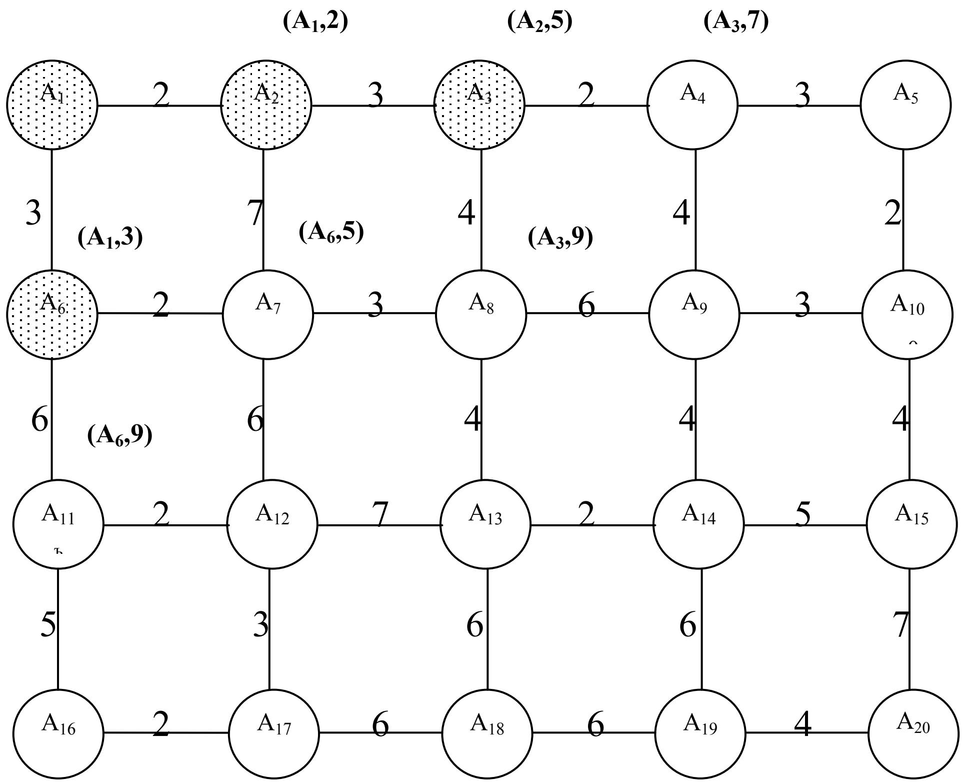
В пункте A_7 уже есть временная метка. Выясняем, нельзя ли ее улучшить. Путь в A_7 из A_6 короче: (3+2) по сравнению с $(A_2, 9)$. Поэтому метку пункта A_7 меняем на $(A_6, 5)$.



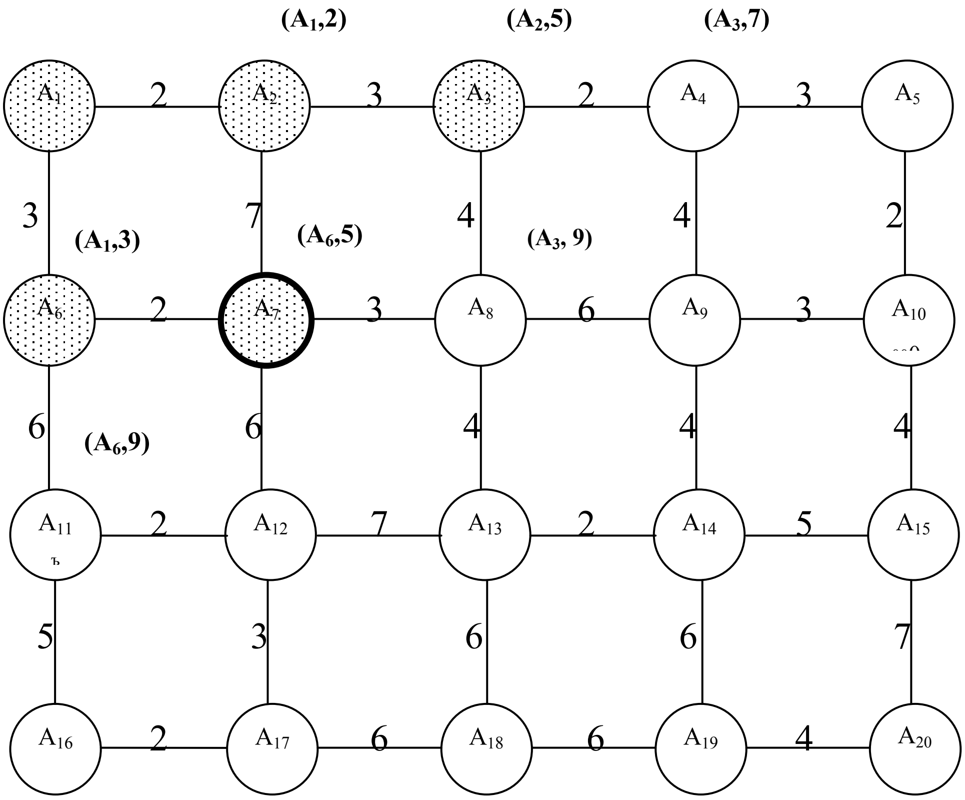
Среди всех временных меток находим метку с наименьшим расстоянием: это пункт A_3 (можно было взять A_7). Меняем его временную метку на постоянную.



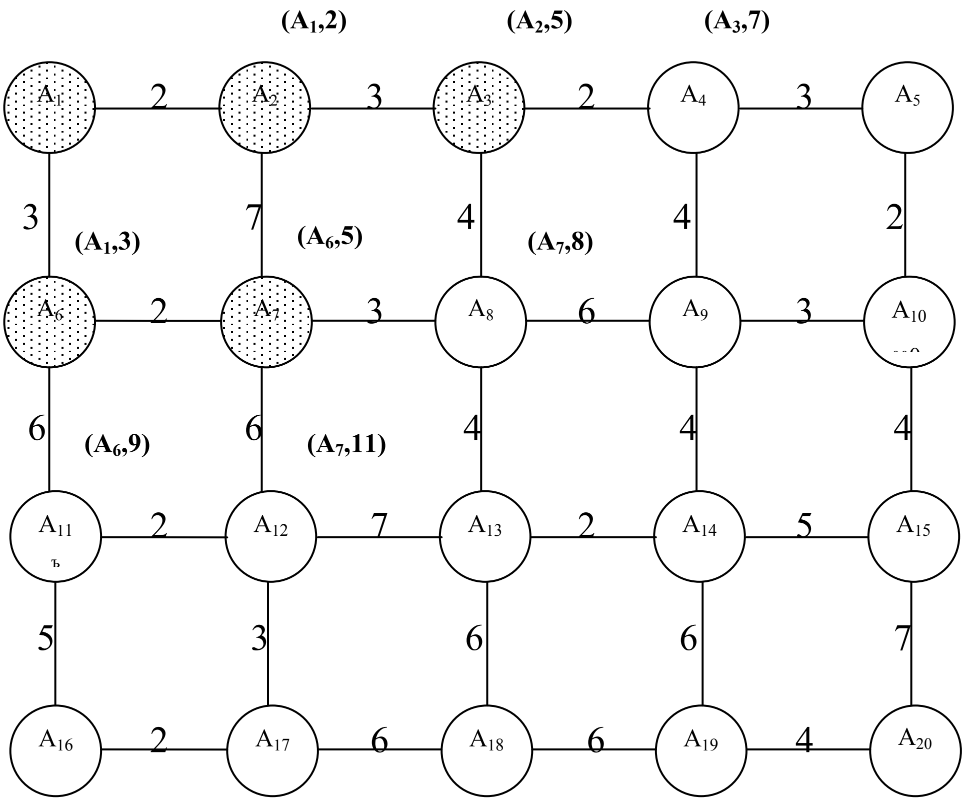
Из пункта A_3 ведут дороги в A_4 и A_8. Снабжаем эти пункты временными метками.



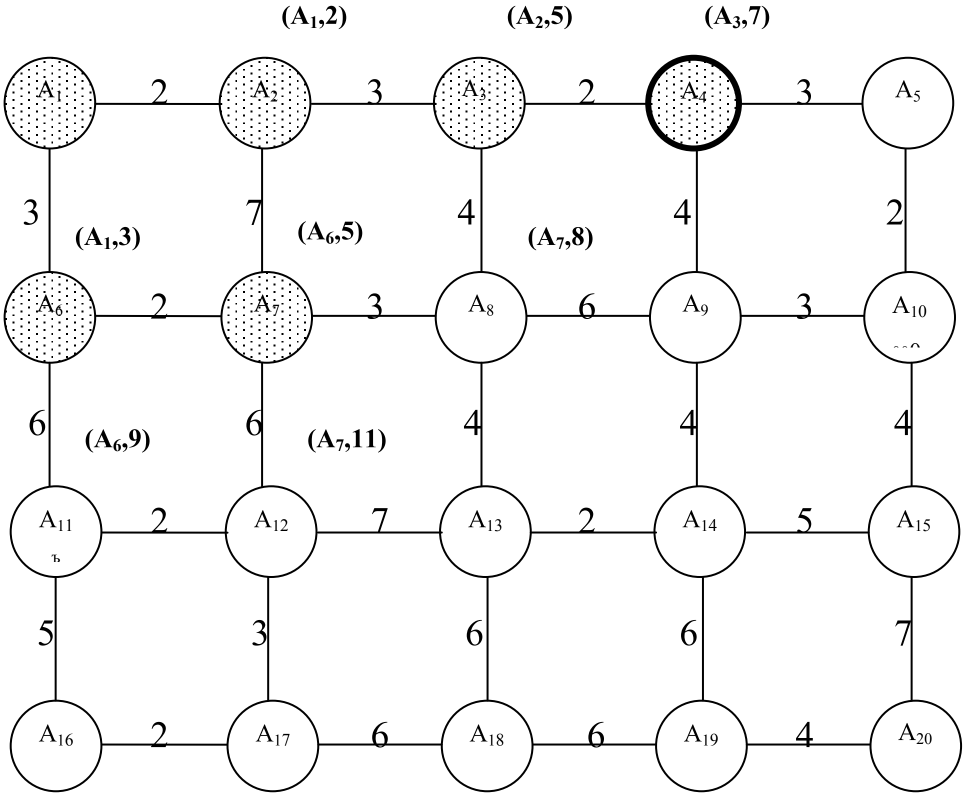
Среди всех временных меток находим метку с наименьшим расстоянием: это пункт A_7. Меняем его временную метку на постоянную.

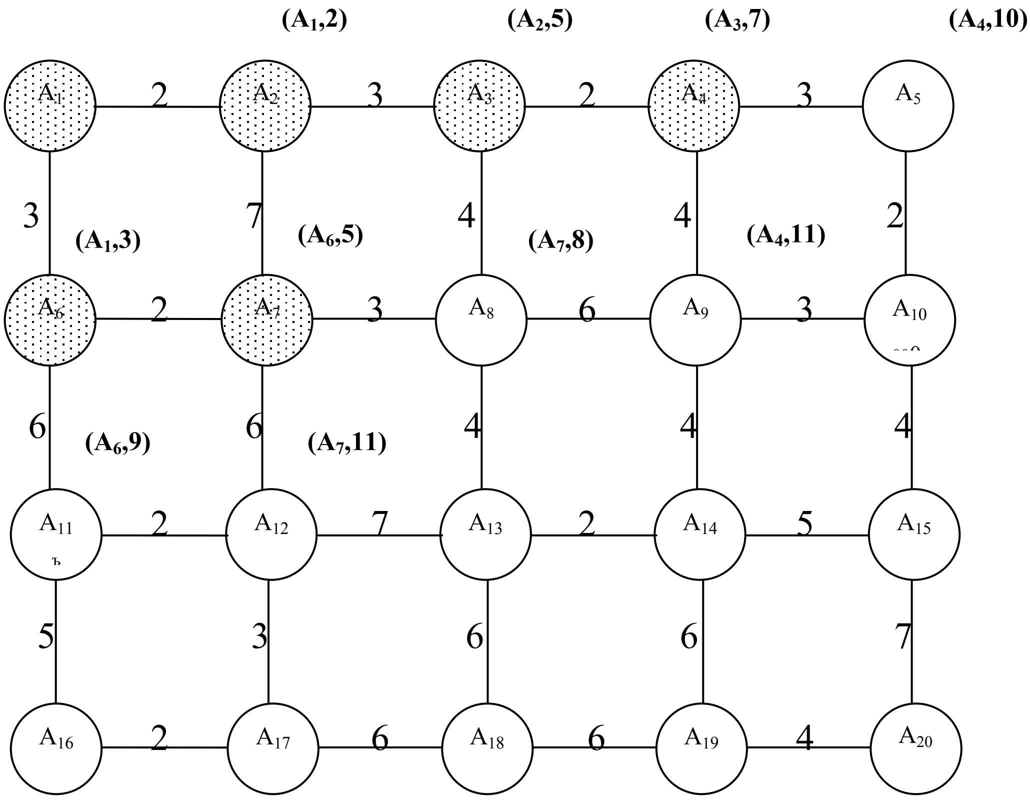


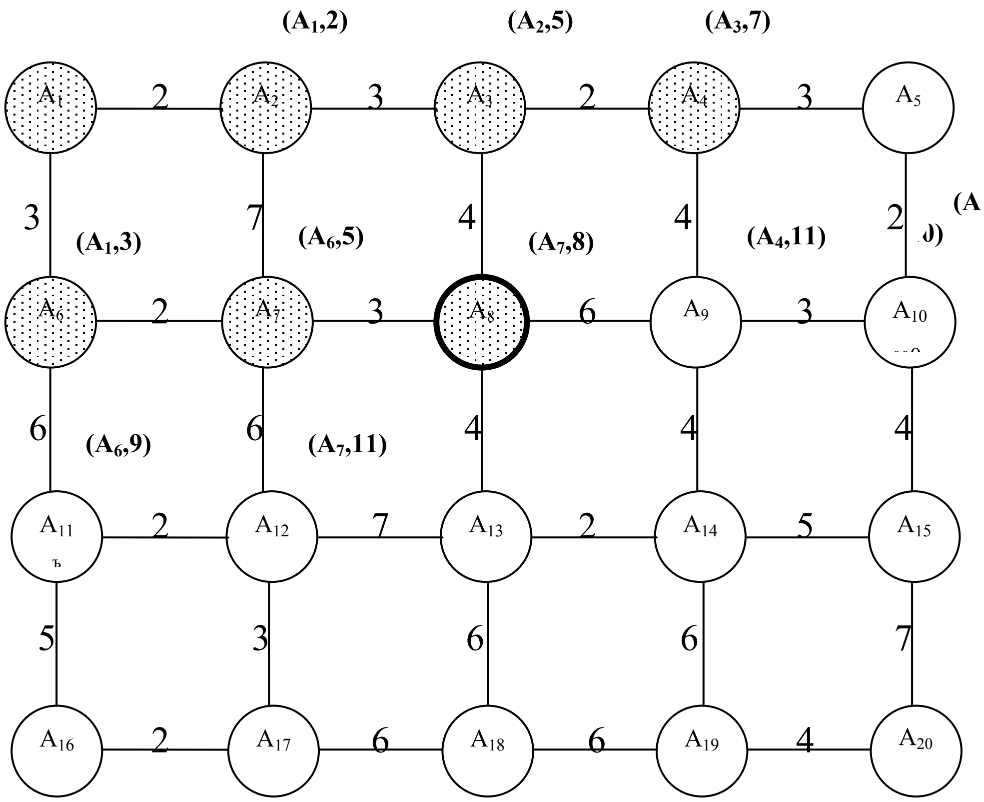
Ставим временную метку в пункт A_{12} и анализируем, следует ли поменять метку пункта A_8. Метка $(A_7, 8)$ «лучше», чем $(A_3, 9)$.

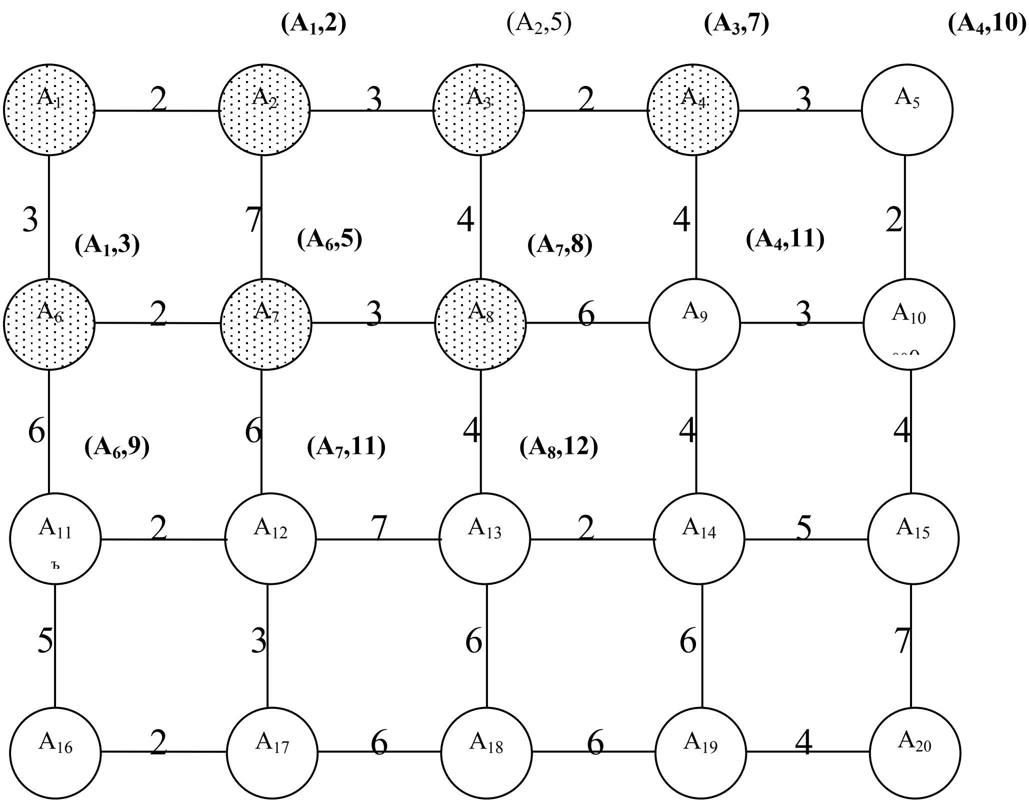


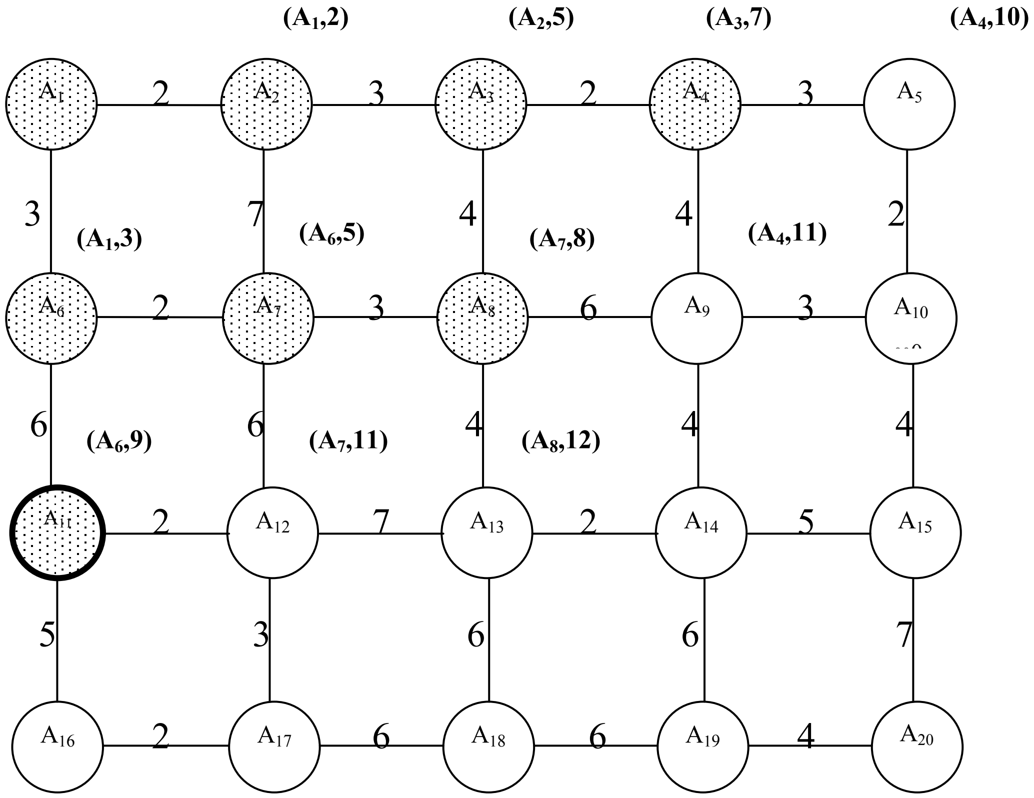
Среди всех временных меток находим метку с наименьшим расстоянием: это пункт A_4. Меняем его временную метку на постоянную.

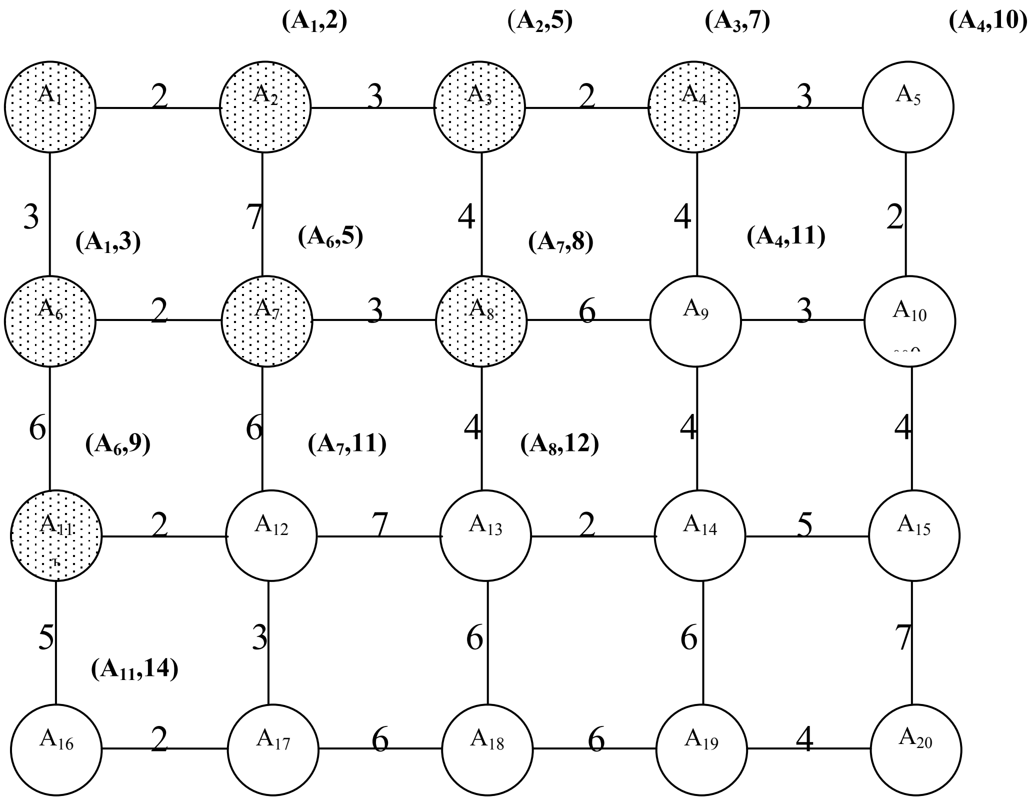


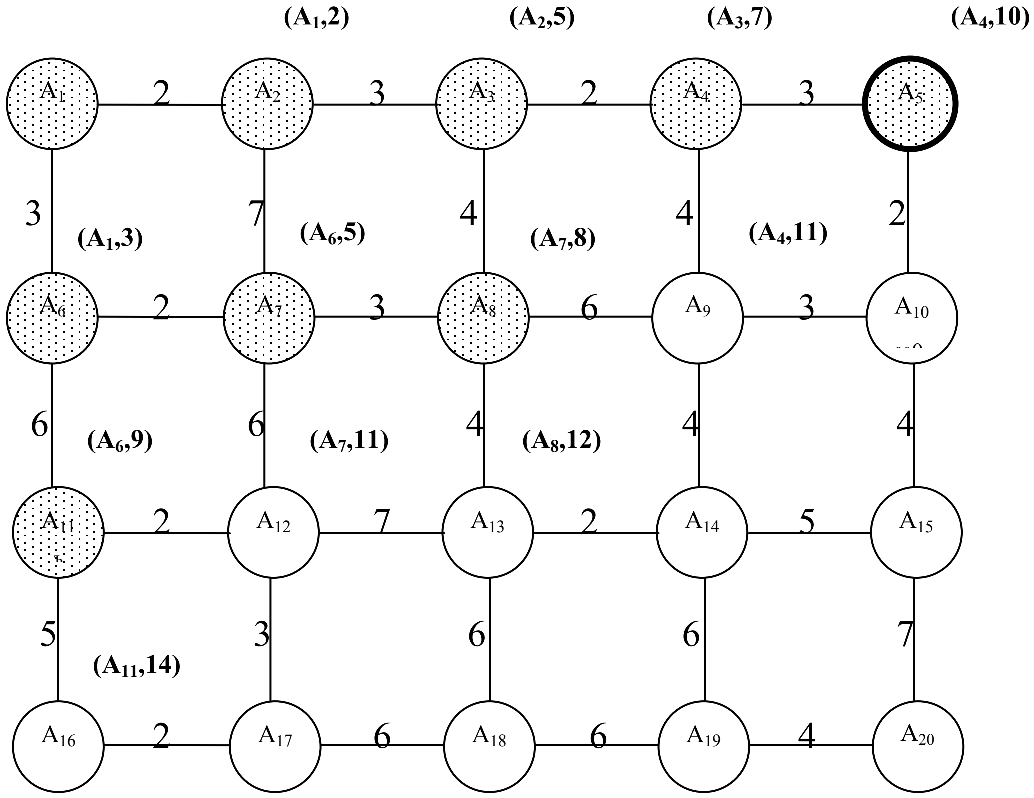


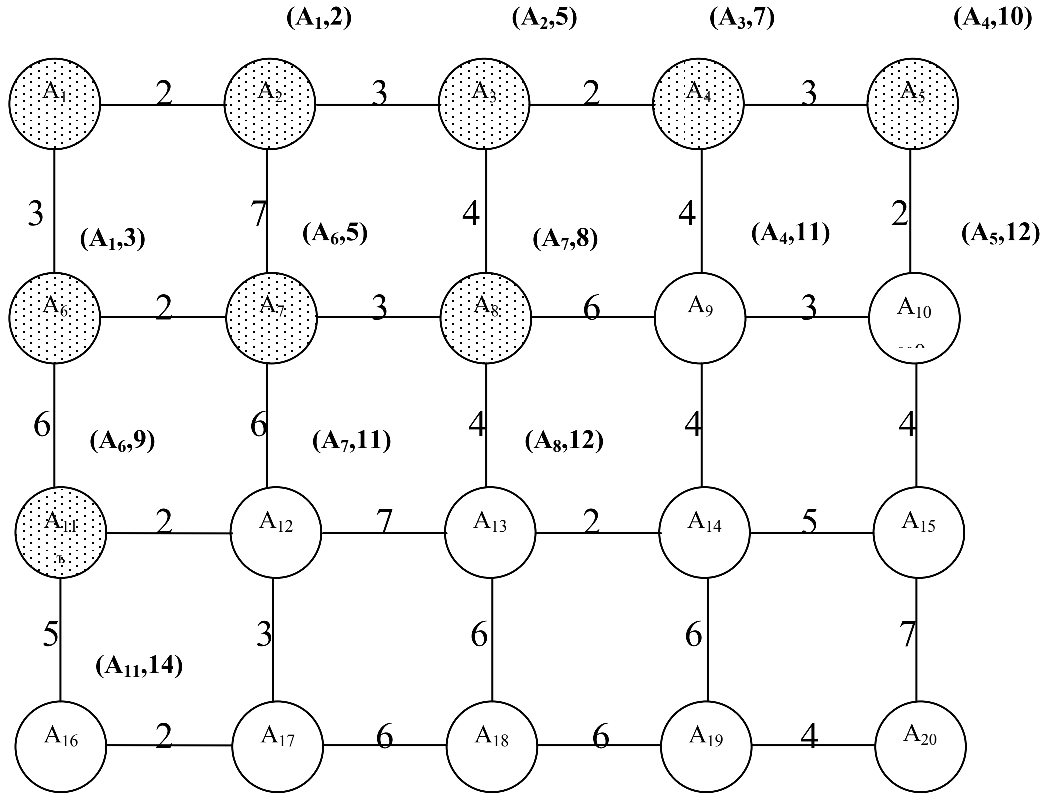

(A$_1$,2)
(A$_2$,5)
(A$_3$,7)
A$_1$
A$_2$
A$_3$
A$_4$
A$_5$
(A$_1$,3)
(A$_6$,5)
(A$_7$,8)
(A$_4$,11)
A$_6$
A$_7$
A$_8$
A$_9$
A$_{10}$
(A$_6$,9)
(A$_7$,11)
A$_{11}$
A$_{12}$
A$_{13}$
A$_{14}$
A$_{15}$
A$_{16}$
A$_{17}$
A$_{18}$
A$_{19}$
A$_{20}$

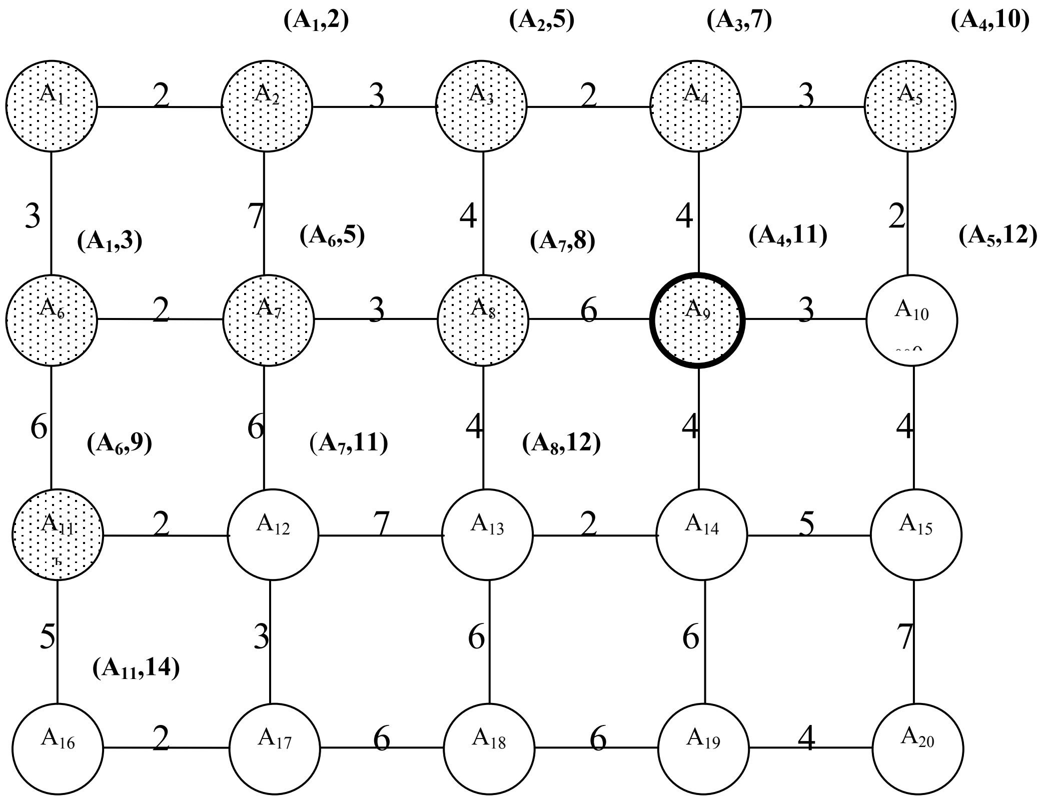

(A$_1$,2)
(A$_2$,5)
(A$_3$,7)
(A$_4$,10)
A$_1$
A$_2$
A$_3$
A$_4$
A$_5$
(A$_1$,3)
(A$_6$,5)
(A$_7$,8)
(A$_4$,11)
A$_6$
A$_7$
A$_8$
A$_9$
A$_{10}$
(A$_6$,9)
(A$_7$,11)
(A$_8$,12)
A$_{11}$
A$_{12}$
A$_{13}$
A$_{14}$
A$_{15}$
A$_{16}$
A$_{17}$
A$_{18}$
A$_{19}$
A$_{20}$

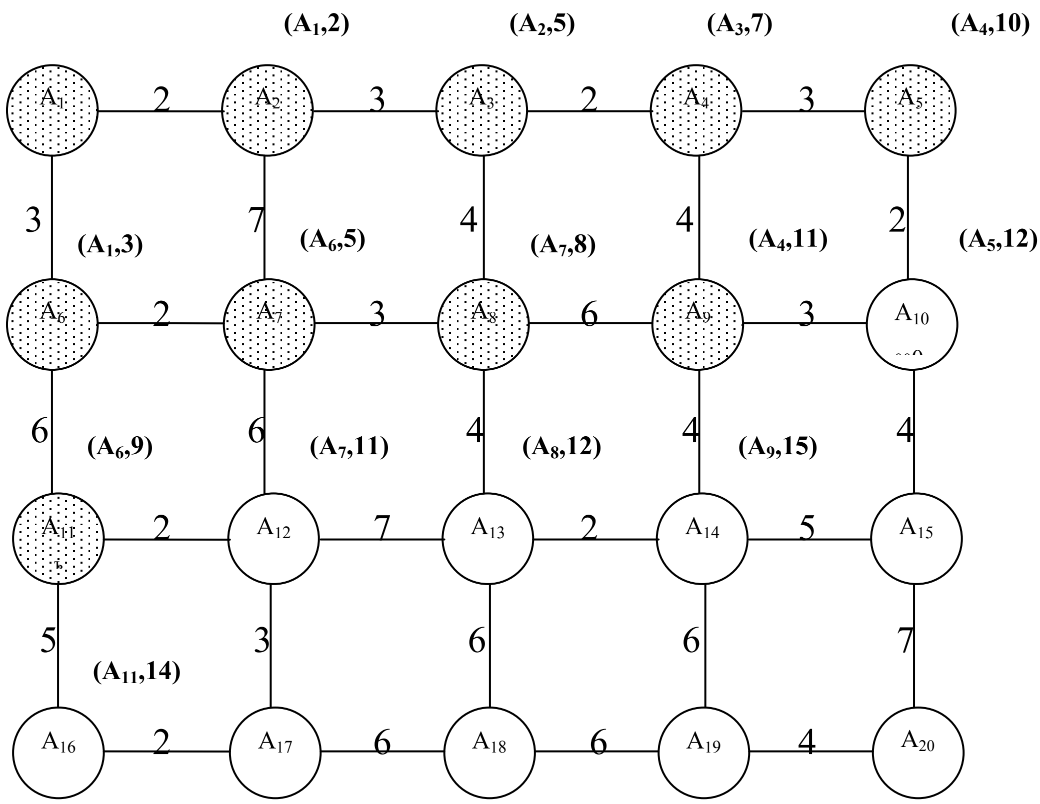

(A1,2)
(A2,5)
(A3,7)
(A4,10)
A1
A2
A3
A4
A5
(A1,3)
(A6,5)
(A7,8)
(A4,11)
A6
A7
A8
A9
A10
(A6,9)
(A7,11)
(A8,12)
A11
A12
A13
A14
A15
A16
A17
A18
A19
A20

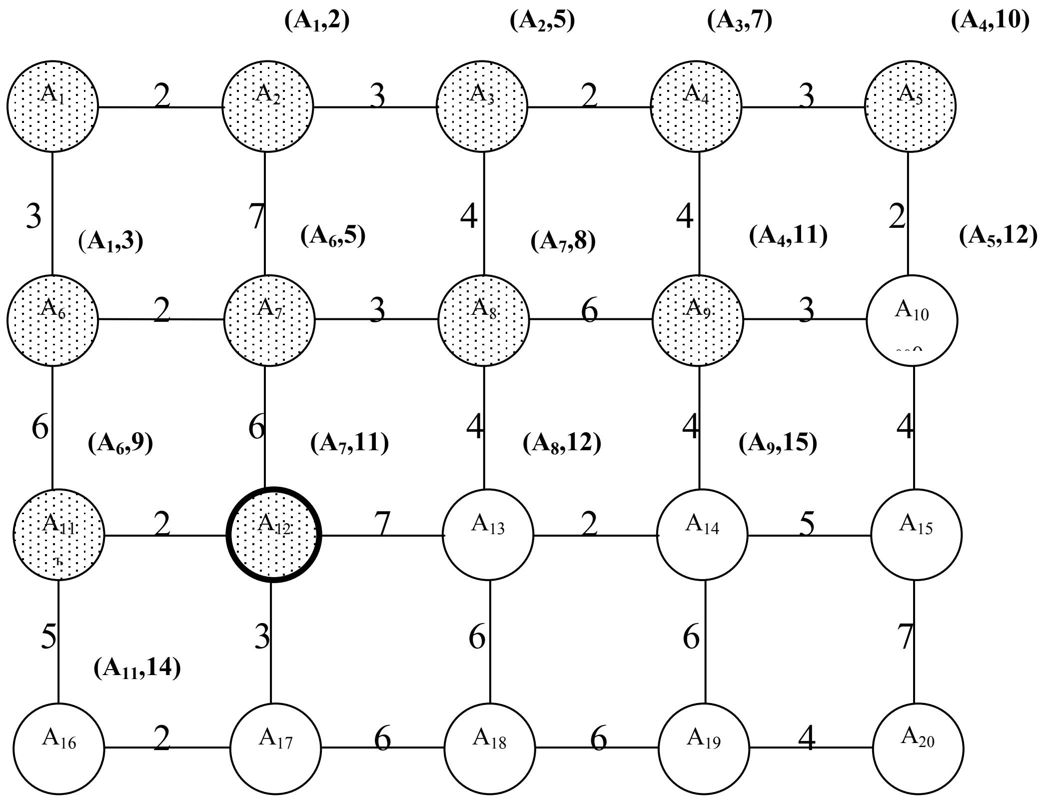

(A1,2)
(A2,5)
(A3,7)
(A4,10)
A1
A2
A3
A4
A5
(A1,3)
(A6,5)
(A7,8)
(A4,11)
A6
A7
A8
A9
A10
(A6,9)
(A7,11)
(A8,12)
A11
A12
A13
A14
A15
(A11,14)
A16
A17
A18
A19
A20


(A1,2)
(A2,5)
(A3,7)
(A4,10)
A1
A2
A3
A4
A5
(A1,3)
(A6,5)
(A7,8)
(A4,11)
A6
A7
A8
A9
A10
(A6,9)
(A7,11)
(A8,12)
A11
A12
A13
A14
A15
(A11,14)
A16
A17
A18
A19
A20

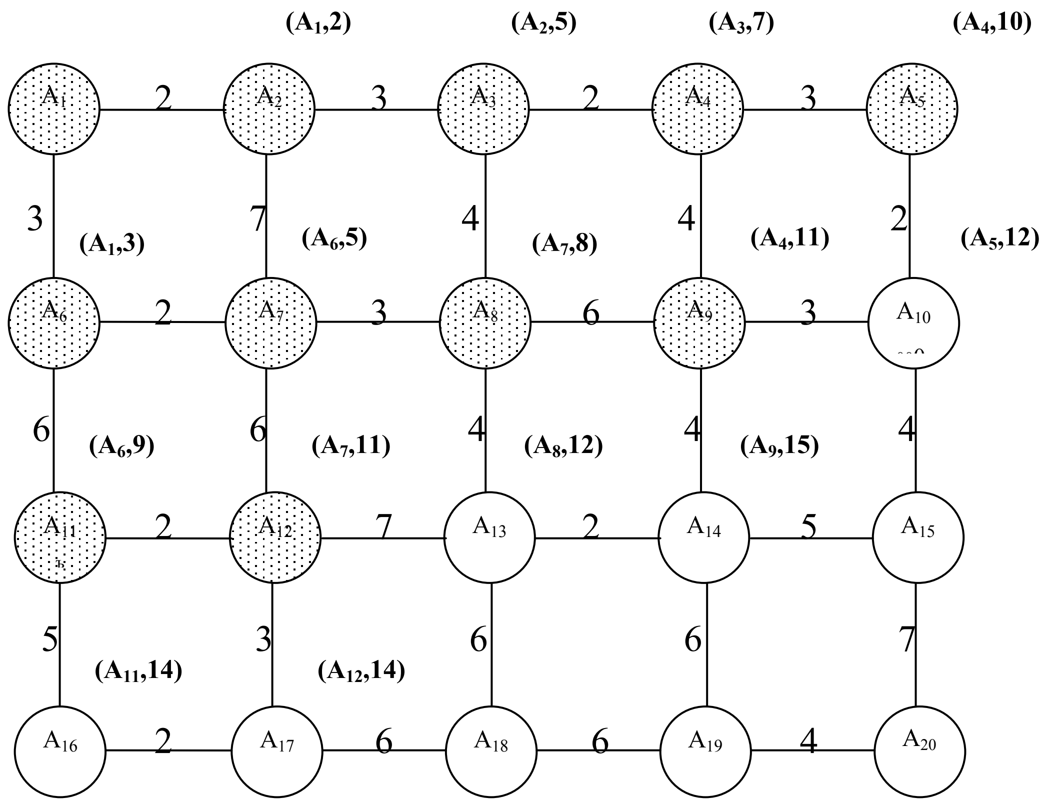

(A1,2)
(A2,5)
(A3,7)
(A4,10)
A1
A2
A3
A4
A5
(A1,3)
(A6,5)
(A7,8)
(A4,11)
(A5,12)
A6
A7
A8
A9
A10
(A6,9)
(A7,11)
(A8,12)
A11
A12
A13
A14
A15
(A11,14)
A16
A17
A18
A19
A20


(A1,2)
(A2,5)
(A3,7)
(A4,10)
A1
A2
A3
A4
A5
(A1,3)
(A6,5)
(A7,8)
(A4,11)
(A5,12)
A6
A7
A8
A9
A10
(A6,9)
(A7,11)
(A8,12)
A11
A12
A13
A14
A15
(A11,14)
A16
A17
A18
A19
A20

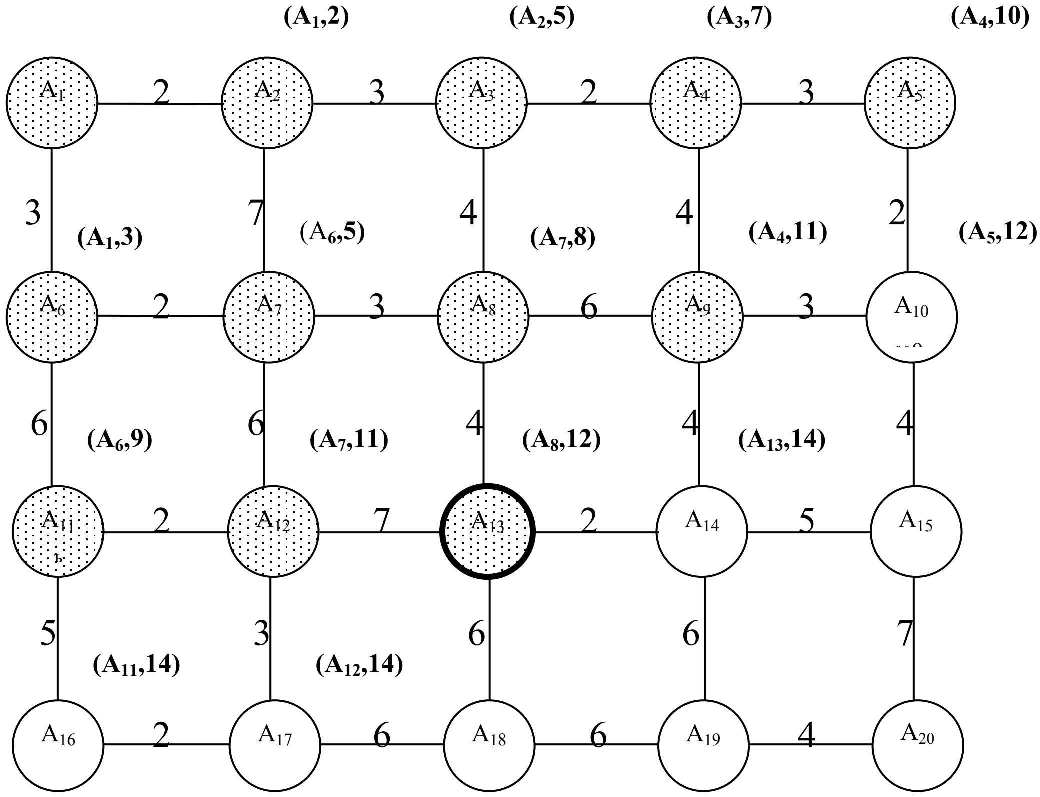

(A1,2)
(A2,5)
(A3,7)
(A4,10)
A1
A2
A3
A4
A5
(A1,3)
(A6,5)
(A7,8)
(A4,11)
(A5,12)
A6
A7
A8
A9
A10
(A6,9)
(A7,11)
(A8,12)
(A9,15)
A11
A12
A13
A14
A15
(A11,14)
A16
A17
A18
A19
A20

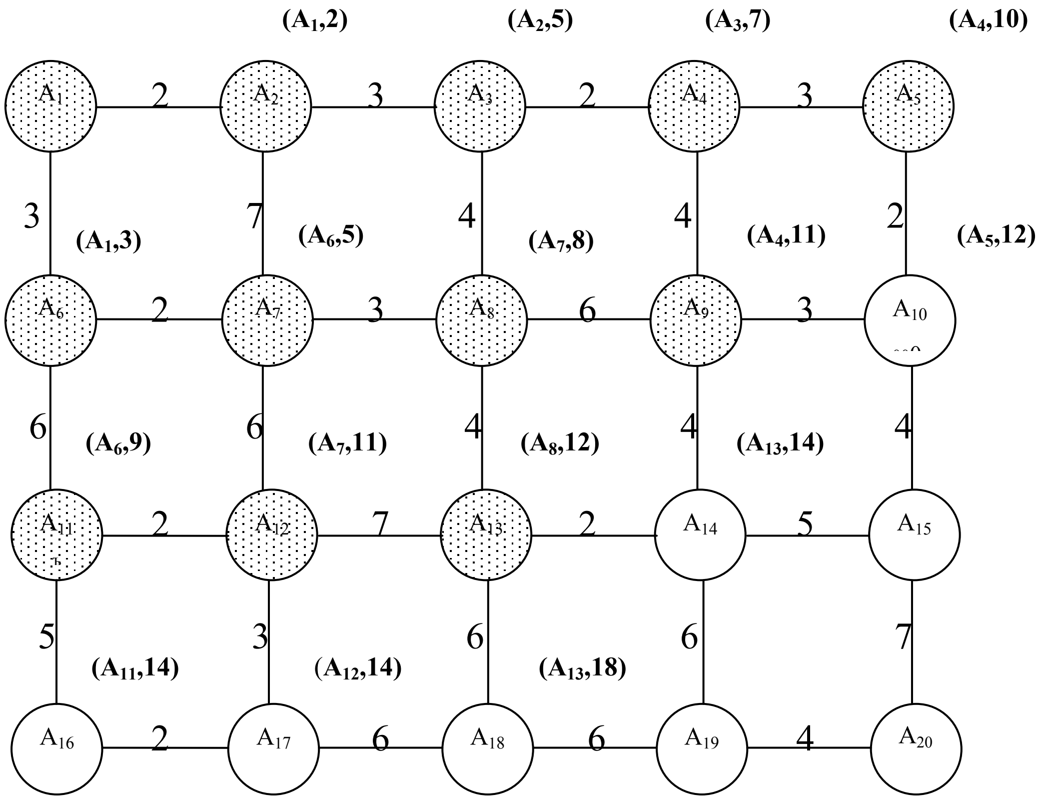


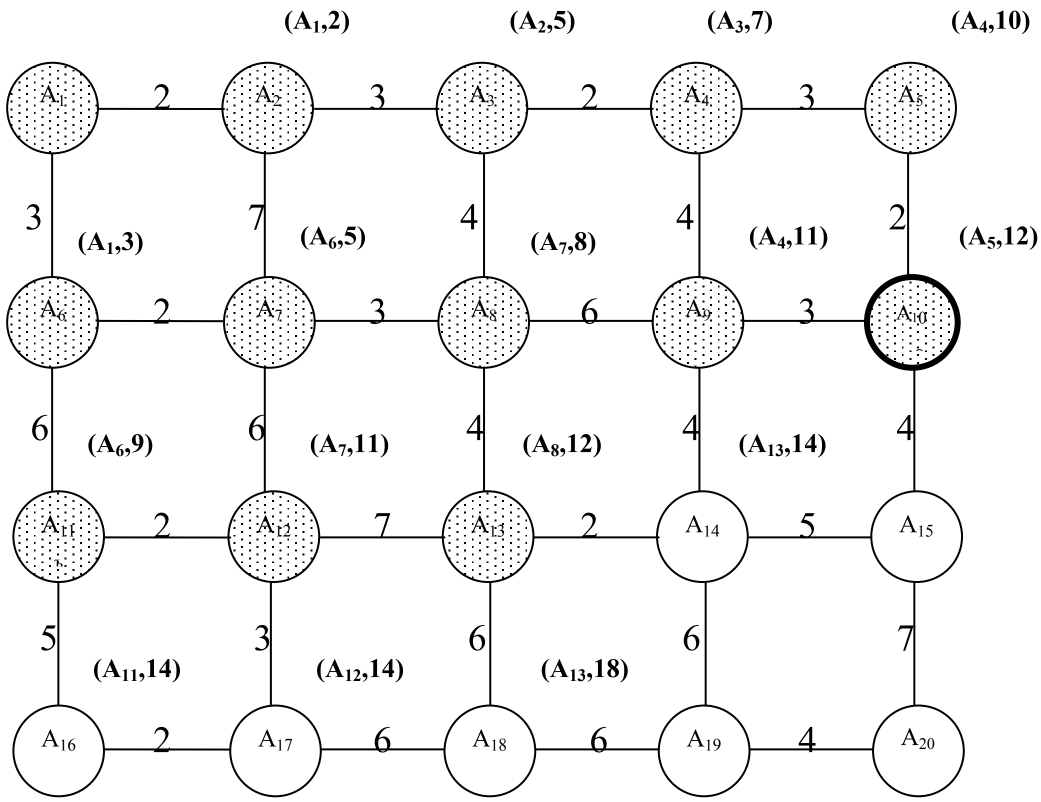
(A_1,2) (A_2,5) (A_3,7) (A_4,10)
A_1 2 A_2 3 A_3 2 A_4 3 A_5
3 (A_1,3) 7 (A_6,5) 4 (A_7,8) 4 (A_4,11) 2 (A_5,12)
A_6 2 A_7 3 A_8 6 A_9 3 A_{10}
6 (A_6,9) 6 (A_7,11) 4 (A_8,12) 4 (A_9,15) 4
A_{11} 2 A_{12} 7 A_{13} 2 A_{14} 5 A_{15}
5 (A_{11},14) 3 6 6 7
A_{16} 2 A_{17} 6 A_{18} 6 A_{19} 4 A_{20}

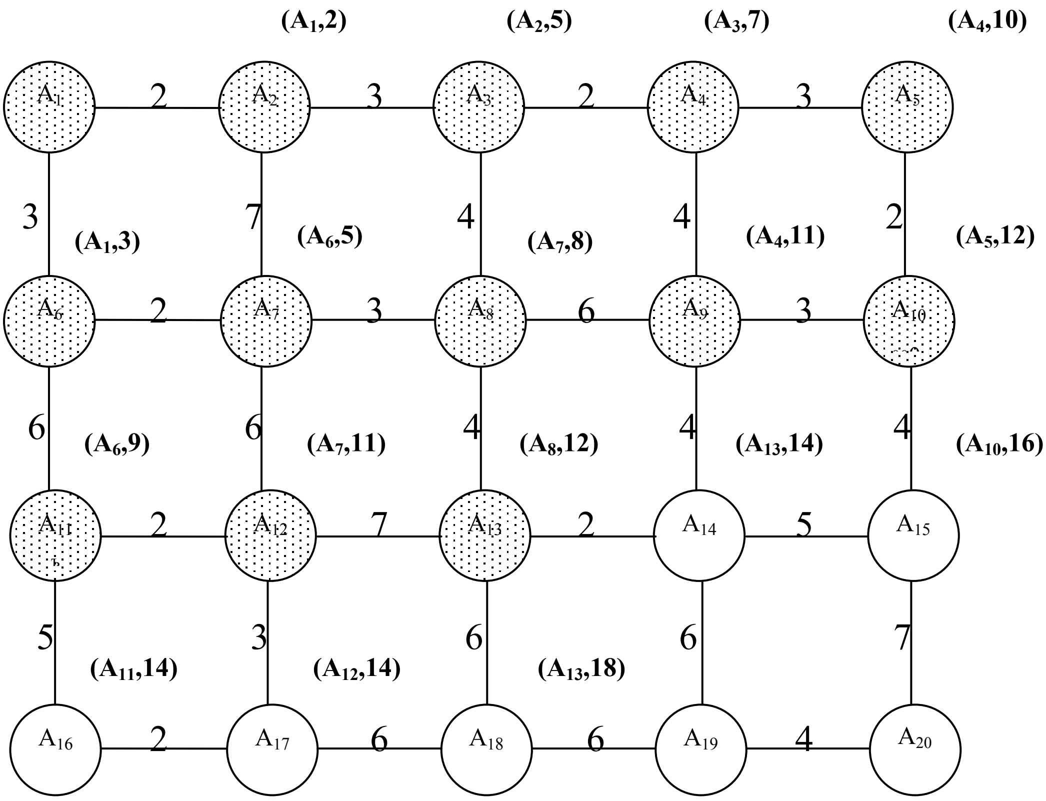


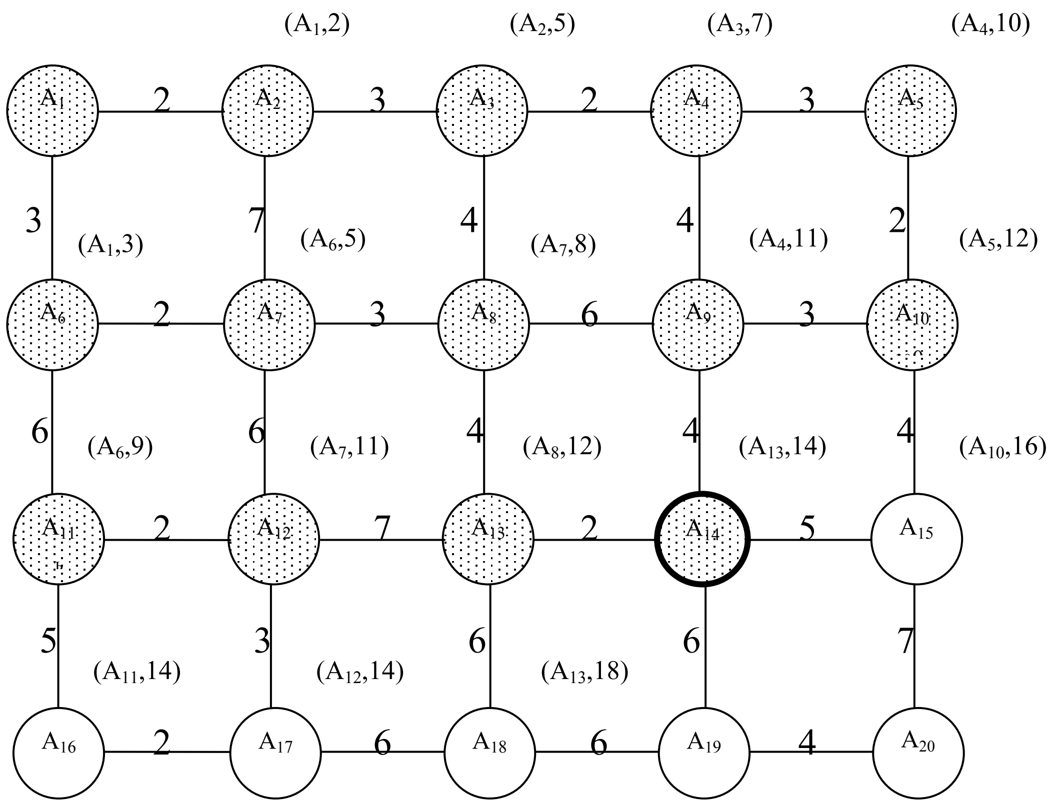
(A_1,2) (A_2,5) (A_3,7) (A_4,10)
A_1 2 A_2 3 A_3 2 A_4 3 A_5
3 (A_1,3) 7 (A_6,5) 4 (A_7,8) 4 (A_4,11) 2 (A_5,12)
A_6 2 A_7 3 A_8 6 A_9 3 A_{10}
6 (A_6,9) 6 (A_7,11) 4 (A_8,12) 4 (A_9,15) 4
A_{11} 2 A_{12} 7 A_{13} 2 A_{14} 5 A_{15}
5 (A_{11},14) 3 (A_{12},14) 6 6 7
A_{16} 2 A_{17} 6 A_{18} 6 A_{19} 4 A_{20}

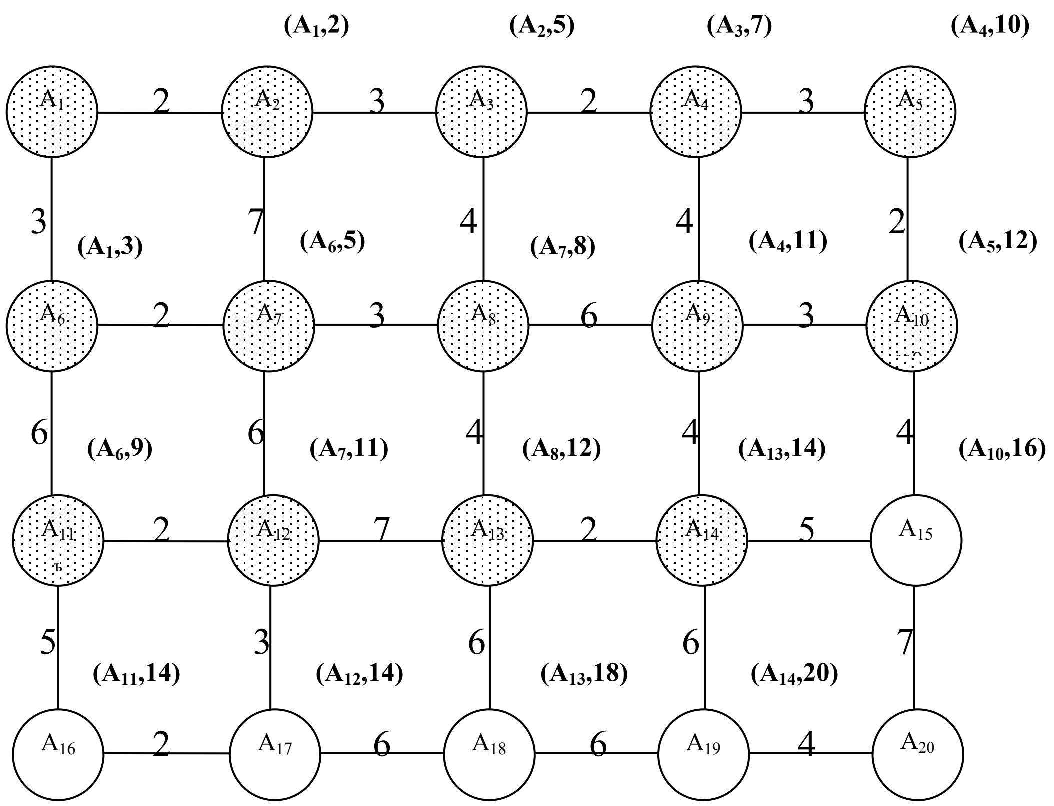

(A1,2)
(A2,5)
(A3,7)
(A4,10)
A1
2
A2
3
A3
2
A4
3
A5
3
(A1,3)
7
(A6,5)
4
(A7,8)
4
(A4,11)
2
(A5,12)
A6
2
A7
3
A8
6
A9
3
A10
6
(A6,9)
6
(A7,11)
4
(A8,12)
4
(A13,14)
4
A11
2
A12
7
A13
2
A14
5
A15
5
(A11,14)
3
(A12,14)
6
6
7
A16
2
A17
6
A18
6
A19
4
A20

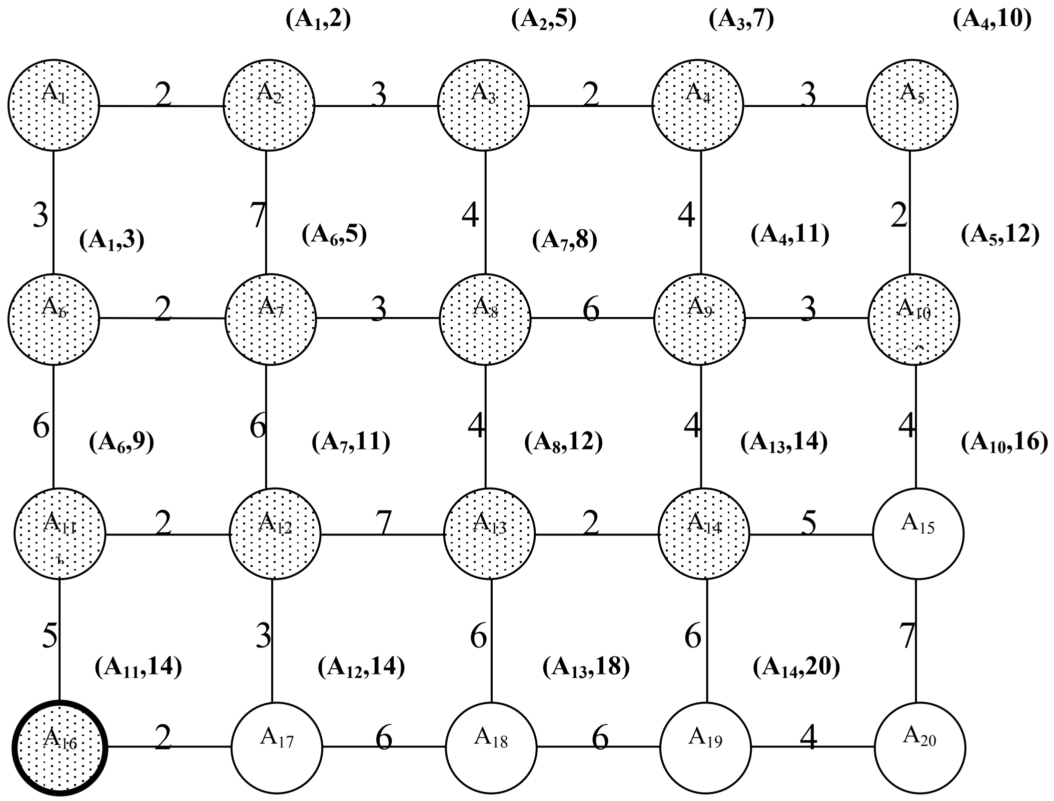

(A1,2)
(A2,5)
(A3,7)
(A4,10)
A1
2
A2
3
A3
2
A4
3
A5
3
(A1,3)
7
(A6,5)
4
(A7,8)
4
(A4,11)
2
(A5,12)
A6
2
A7
3
A8
6
A9
3
A10
6
(A6,9)
6
(A7,11)
4
(A8,12)
4
(A13,14)
4
A11
2
A12
7
A13
2
A14
5
A15
5
(A11,14)
3
(A12,14)
6
(A13,18)
6
7
A16
2
A17
6
A18
6
A19
4
A20

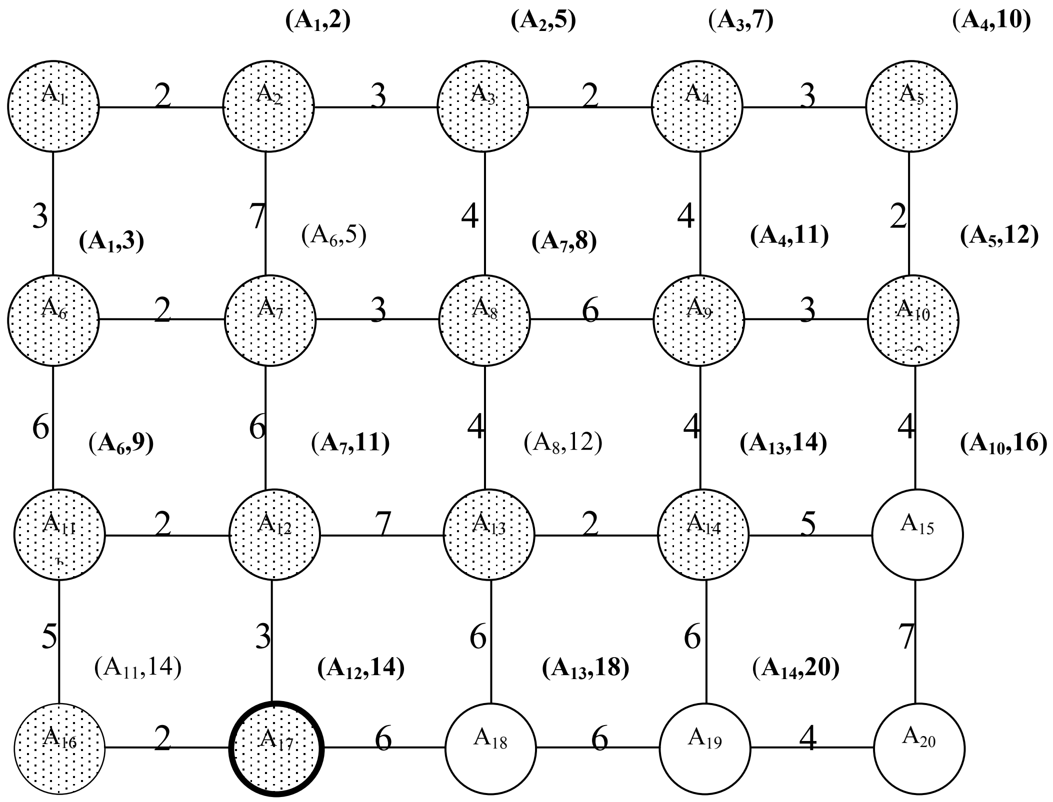

(A1,2)
(A2,5)
(A3,7)
(A4,10)
A1
2
A2
3
A3
2
A4
3
A5
3
7
4
4
2
(A1,3)
(A6,5)
(A7,8)
(A4,11)
(A5,12)
A6
2
A7
3
A8
6
A9
3
A10
6
6
4
4
4
(A6,9)
(A7,11)
(A8,12)
(A13,14)
A11
2
A12
7
A13
2
A14
5
A15
5
3
6
6
7
(A11,14)
(A12,14)
(A13,18)
A16
2
A17
6
A18
6
A19
4
A20

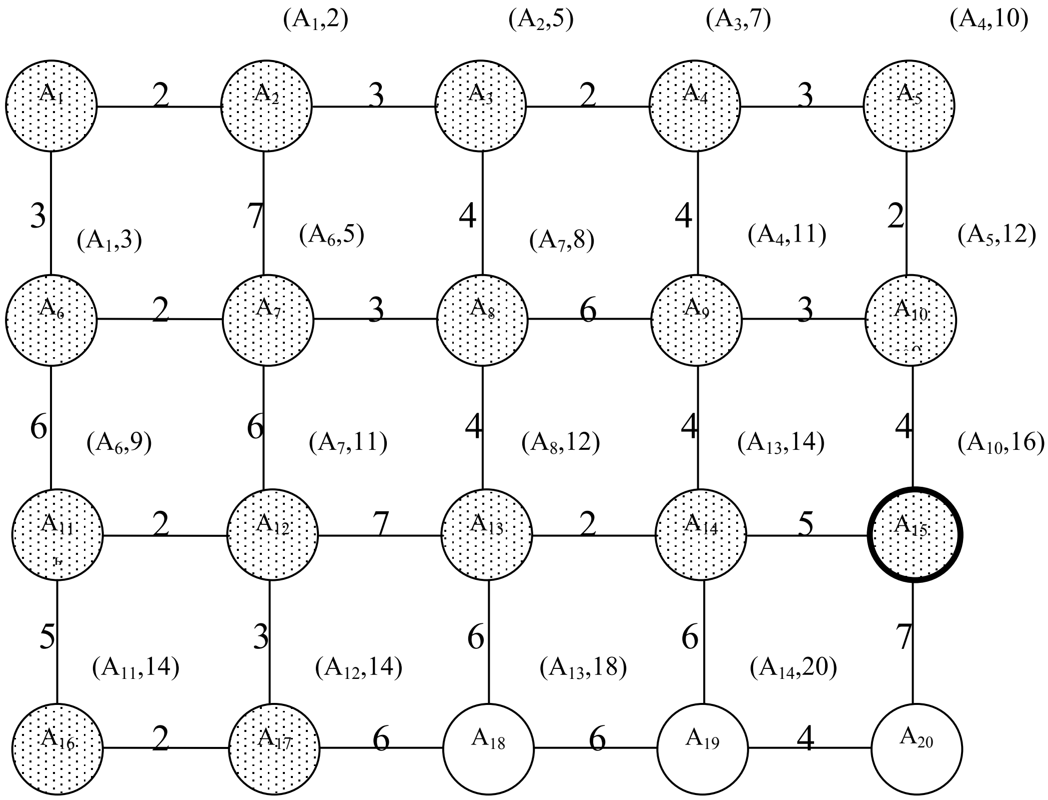

(A1,2)
(A2,5)
(A3,7)
(A4,10)
A1
2
A2
3
A3
2
A4
3
A5
3
7
4
4
2
(A1,3)
(A6,5)
(A7,8)
(A4,11)
(A5,12)
A6
2
A7
3
A8
6
A9
3
A10
6
6
4
4
4
(A6,9)
(A7,11)
(A8,12)
(A13,14)
(A10,16)
A11
2
A12
7
A13
2
A14
5
A15
5
3
6
6
7
(A11,14)
(A12,14)
(A13,18)
A16
2
A17
6
A18
6
A19
4
A20


(A1,2)
(A2,5)
(A3,7)
(A4,10)
A1
A2
A3
A4
A5
(A1,3)
(A6,5)
(A7,8)
(A4,11)
(A5,12)
A6
A7
A8
A9
A10
(A6,9)
(A7,11)
(A8,12)
(A13,14)
(A10,16)
A11
A12
A13
A14
A15
(A11,14)
(A12,14)
(A13,18)
A16
A17
A18
A19
A20

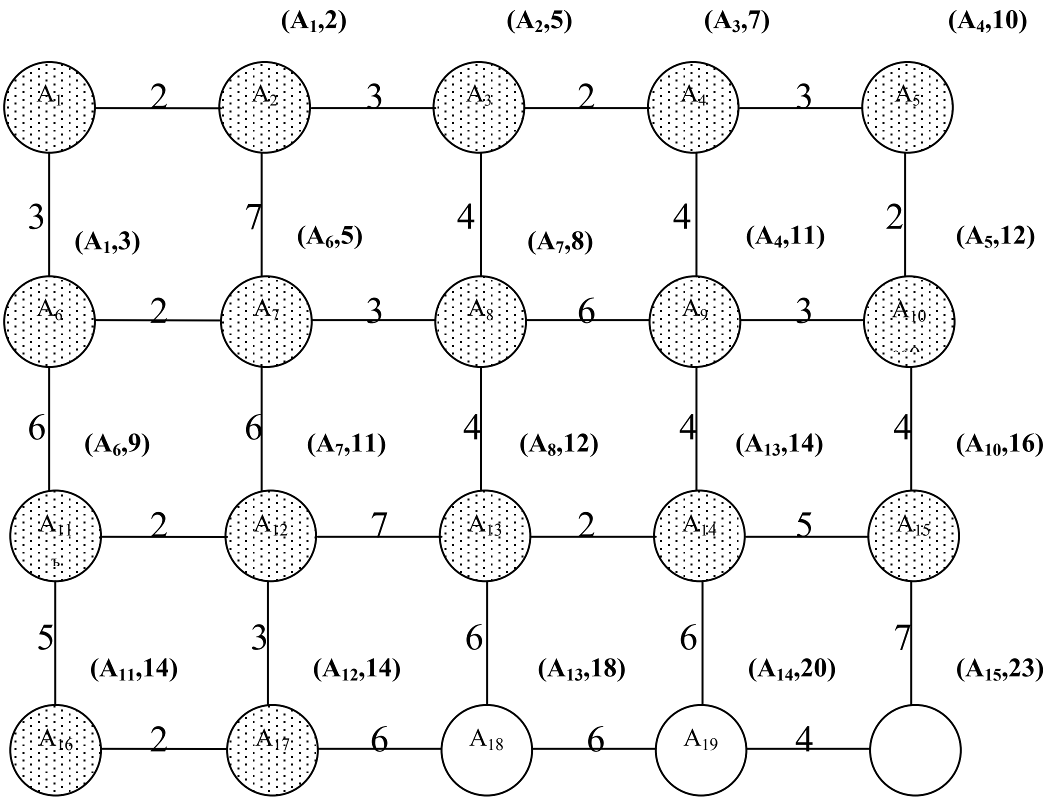

(A1,2)
(A2,5)
(A3,7)
(A4,10)
A1
A2
A3
A4
A5
(A1,3)
(A6,5)
(A7,8)
(A4,11)
(A5,12)
A6
A7
A8
A9
A10
(A6,9)
(A7,11)
(A8,12)
(A13,14)
(A10,16)
A11
A12
A13
A14
A15
(A11,14)
(A12,14)
(A13,18)
(A14,20)
A16
A17
A18
A19
A20


(A1,2) (A2,5) (A3,7) (A4,10)
A1 2 A2 3 A3 2 A4 3 A5
3 (A1,3) 7 (A6,5) 4 (A7,8) 4 (A4,11) 2 (A5,12)
A6 2 A7 3 A8 6 A9 3 A10
6 (A6,9) 6 (A7,11) 4 (A8,12) 4 (A13,14) 4 (A10,16)
A11 2 A12 7 A13 2 A14 5 A15
5 (A11,14) 3 (A12,14) 6 (A13,18) 6 (A14,20) 7
A16 2 A17 6 A18 6 A19 4 A20

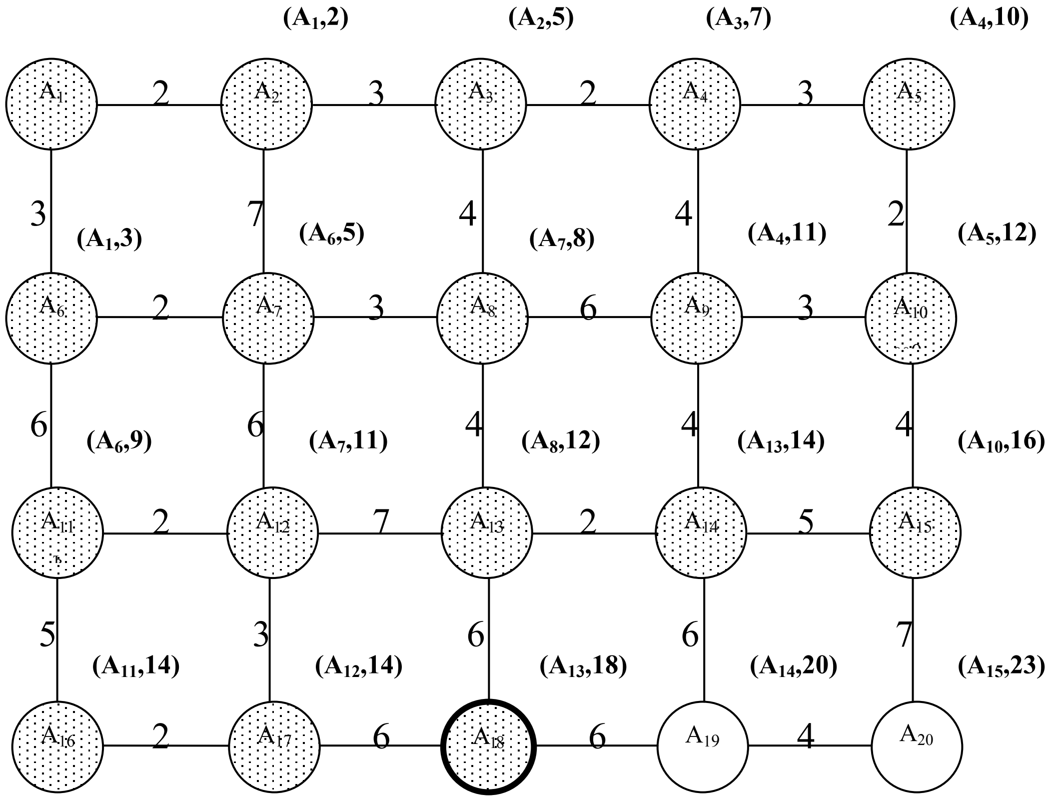

(A1,2) (A2,5) (A3,7) (A4,10)
A1 2 A2 3 A3 2 A4 3 A5
3 (A1,3) 7 (A6,5) 4 (A7,8) 4 (A4,11) 2 (A5,12)
A6 2 A7 3 A8 6 A9 3 A10
6 (A6,9) 6 (A7,11) 4 (A8,12) 4 (A13,14) 4 (A10,16)
A11 2 A12 7 A13 2 A14 5 A15
5 (A11,14) 3 (A12,14) 6 (A13,18) 6 (A14,20) 7
A16 2 A17 6 A18 6 A19 4 A20

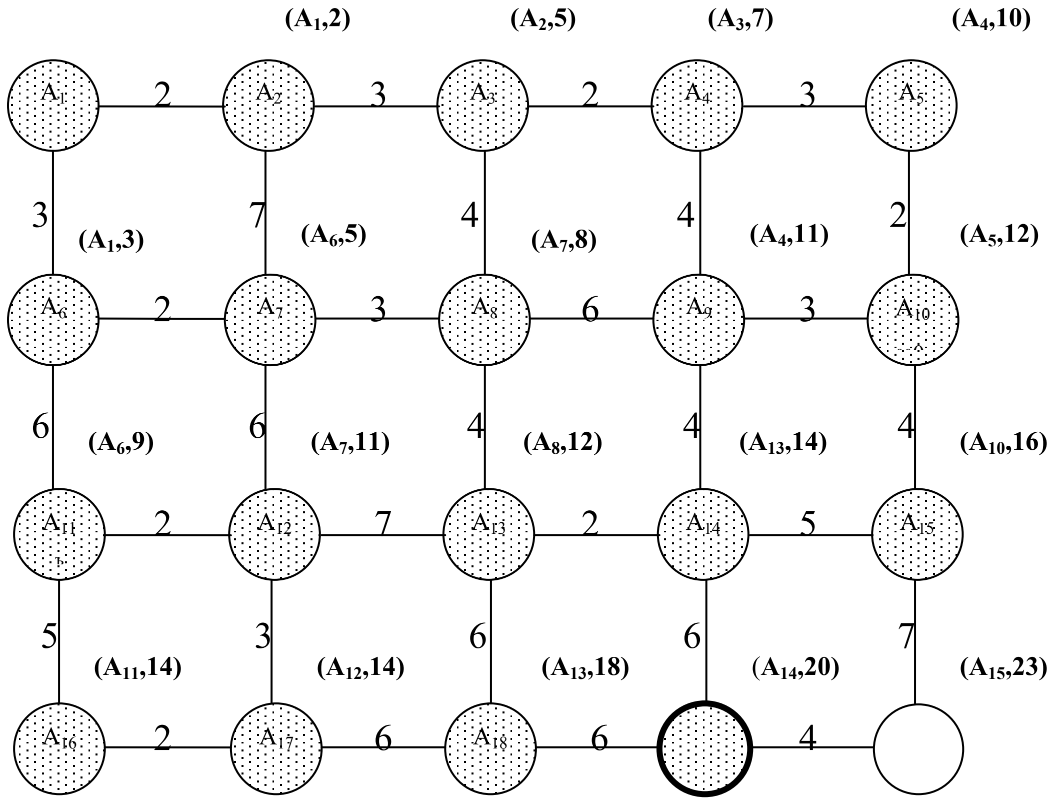


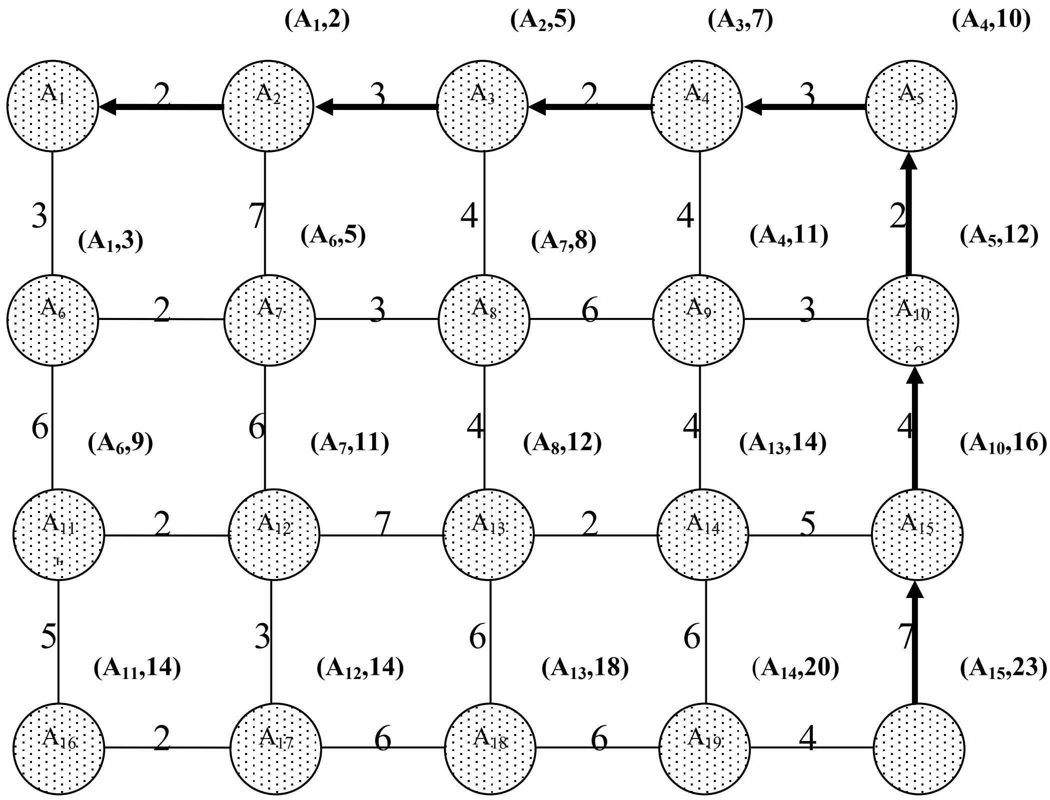
(A_1,2) (A_2,5) (A_3,7) (A_4,10)
A_1 2 A_2 3 A_3 2 A_4 3 A_5
3 (A_1,3) 7 (A_6,5) 4 (A_7,8) 4 (A_4,11) 2 (A_5,12)
A_6 2 A_7 3 A_8 6 A_9 3 A_{10}
6 (A_6,9) 6 (A_7,11) 4 (A_8,12) 4 (A_{13},14) 4 (A_{10},16)
A_{11} 2 A_{12} 7 A_{13} 2 A_{14} 5 A_{15}
5 (A_{11},14) 3 (A_{12},14) 6 (A_{13},18) 6 (A_{14},20) 7
A_{16} 2 A_{17} 6 A_{18} 6 A_{19} 4 A_{20}



(A_1,2) (A_2,5) (A_3,7) (A_4,10)
A_1 2 A_2 3 A_3 2 A_4 3 A_5
3 (A_1,3) 7 (A_6,5) 4 (A_7,8) 4 (A_4,11) 2 (A_5,12)
A_6 2 A_7 3 A_8 6 A_9 3 A_{10}
6 (A_6,9) 6 (A_7,11) 4 (A_8,12) 4 (A_{13},14) 4 (A_{10},16)
A_{11} 2 A_{12} 7 A_{13} 2 A_{14} 5 A_{15}
5 (A_{11},14) 3 (A_{12},14) 6 (A_{13},18) 6 (A_{14},20) 7 (A_{15},23)
A_{16} 2 A_{17} 6 A_{18} 6 A_{19} 4


(A1,2)
(A2,5)
(A3,7)
(A4,10)
A1
A2
A3
A4
A5
(A1,3)
(A6,5)
(A7,8)
(A4,11)
(A5,12)
A6
A7
A8
A9
A10
(A6,9)
(A7,11)
(A8,12)
(A13,14)
(A10,16)
A11
A12
A13
A14
A15
(A11,14)
(A12,14)
(A13,18)
(A14,20)
(A15,23)
A16
A17
A18
A19
A20


(A1,2)
(A2,5)
(A3,7)
(A4,10)
A1
A2
A3
A4
A5
(A1,3)
(A6,5)
(A7,8)
(A4,11)
(A5,12)
A6
A7
A8
A9
A10
(A6,9)
(A7,11)
(A8,12)
(A13,14)
(A10,16)
A11
A12
A13
A14
A15
(A11,14)
(A12,14)
(A13,18)
(A14,20)
(A15,23)
A16
A17
A18



Двигаясь с конца, от узла A_{20}, ориентируясь по меткам, проходим до начального узла A_1, создавая траекторию маршрута кратчайшей длины.

Следует отметить, что по размеченному последнему графу можно проследить кратчайший маршрут от любого узла до A_1.

6. СЕТЕВЫЕ ГРАФИКИ

Задача о сетевом графике возникает при планировании сроков выполнения комплекса работ.

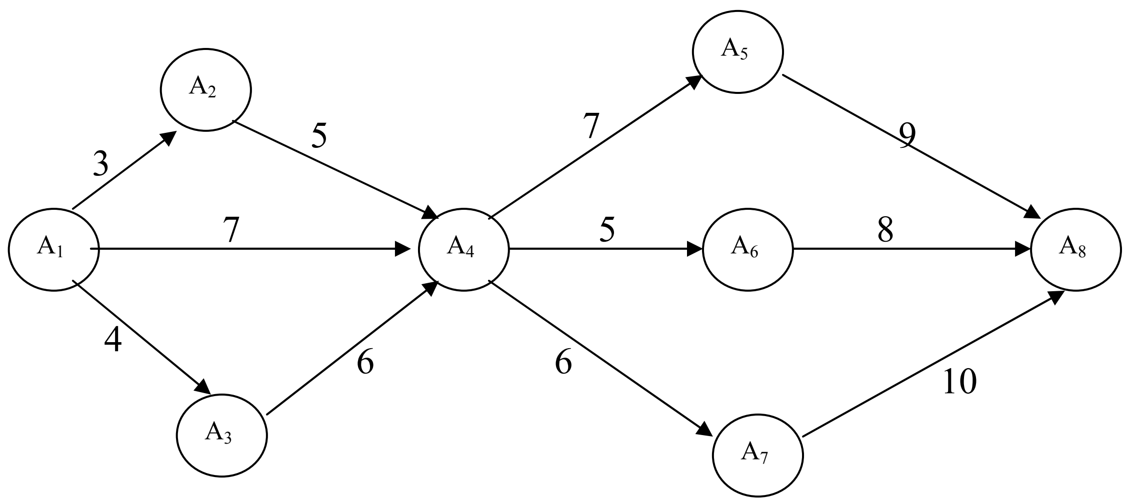
Дуга сети называется *ориентированной*, если узлы, которые она соединяет, упорядочены, один из них принят за начальный, другой – за конечный. На рисунках и схемах ориентированная дуга обозначается стрелкой, которая проходит из начального узла в конечный. Сеть называется *ориентированной*, если ориентированы все ее дуги.

Обычно, сеть имеет один узел, который является начальным для всех своих дуг, его можно назвать *источником*. Также есть узел, конечный для всех входящих в него дуг, называемый *стоком.*

Каждой дуге ориентированной сети приписывается неотрицательное число, характеризующее максимальную пропускную способность, выраженную в контекстных единицах.

Если речь идет о расчете минимального времени на выполнение комплекса работ, под узлами A_i будем подразумевать отдельные этапы работ (или производственные подразделения, ответственные за эти этапы). Характеристикой дуги $A_i \to A_j$ является время на выполнение той части работы отдела A_i, без которой невозможно начать выполнять работу отдела A_j.

Исходная модель задачи удобно представлять в виде графа, например:



Основные принципы решения задачи о минимальном времени на выполнение всего комплекса работ от A_1 до A_8 состоят в следующем:

- для каждой работы нужно определить временной интервал от возможно самого раннего ее начала до максимально позднего ее окончания;
- любая работа по возможности не должна задерживать зависящих от нее узлов;

* любая работа не должна изменять в большую сторону минимального времени на выполнение всего комплекса работ.

Шаг 1

Определяем для каждой работы самый ранний срок ее начала.

Для этого у данной работы находим всех ее предшественников и анализируем, когда закончится самая продолжительная из них.

Ранний срок начала любой работы равен максимуму среди самых ранних сроков окончания предшествующих работ.

Шаг 2

Определяем для каждой работы самый ранний срок ее окончания.

После первого шага мы будем знать, когда может начаться данная работа.

Чтобы определить ранний срок ее окончания надо к сроку начала прибавить время на ее выполнение (оно указано на графе).

Шаг 3

Определяем для каждой работы самый поздний срок ее окончания.

Для этого у данной работы находим все ее последующие работы и анализируем, когда самое позднее они должны начаться. Ориентируемся на ту работу, которая должна начаться раньше других, тогда и все остальные начнут вовремя.

Самый ранний срок окончания любой работы определяется самыми поздними сроками начала ожидающих ее работ и равен минимальному из этих сроков.

Шаг 4

Определяем для каждой работы самый поздний срок ее начала.

После третьего шага мы будем знать, когда, самое позднее, должна окончится данная работа.

Чтобы определить поздний срок ее начала надо от срока окончания вычесть время на ее выполнение (оно указано на графе).

Решение задач удобно оформить в таблицу

Для начала в таблицу заносят все переходы (дуги) с указанием соответствующей продолжительности.

Затем по каждой строке выполняют *шаги 1* и *2*.

Например, работа $2 \to 4$ начнется только, когда закончится работа $1 \to 2$, значит раннее начало $2 \to 4$ равно 3. Длительность работы $2 \to 4$ равна 5, значит ее раннее окончание: 3+5=8.

Работа $3 \to 4$ начнется только, когда закончится работа $1 \to 3$, значит раннее начало $3 \to 4$ равно 4. Длительность работы $3 \to 4$ равна 6, значит ее раннее окончание: 4+6=10.

Дуга	Продолжительность	Раннее начало	Раннее окончание	Позднее начало	Позднее окончание
$1 \to 2$	3	0	0+3=3		
$1 \to 3$	4	0	0+4=4		
$1 \to 4$	7	0	0+7=7		
$2 \to 4$	5	3	3+5=8		
$3 \to 4$	6	4	4+6=10		
$4 \to 5$	7				
$4 \to 6$	5				
$4 \to 7$	6				
$5 \to 8$	9				
$6 \to 8$	8				
$7 \to 8$	10				

Например, работа $4 \to 5$ начнется только, когда закончатся:

- работа $1 \to 4$ (окончание в 7);
- работа $2 \to 4$ (окончание в 8);
- работа $3 \to 4$ (окончание в 10).

Значит раннее начало $4 \to 5$ равно максимальному из чисел $\{7;\ 8;\ 10\}$, то есть 10. Длительность работы $4 \to 5$ равна 7, значит ее раннее окончание: 10+7=17.

Аналогично, работа $4 \to 6$ начнется только, когда закончатся:

- работа $1 \to 4$ (окончание в 7);
- работа $2 \to 4$ (окончание в 8);
- работа $3 \to 4$ (окончание в 10).

Значит раннее начало $4 \to 6$ равно максимальному из чисел $\{7;\ 8;\ 10\}$, то есть 10. Длительность работы $4 \to 6$ равна 5, значит ее раннее окончание: 10+5=15.

Аналогично, работа $4 \to 7$ начнется только, когда закончатся:

- работа $1 \to 4$ (окончание в 7);
- работа $2 \to 4$ (окончание в 8);
- работа $3 \to 4$ (окончание в 10).

Значит раннее начало $4 \to 7$ равно максимальному из чисел $\{7;\ 8;\ 10\}$, то есть 10. Длительность работы $4 \to 7$ равна 6, значит ее раннее окончание: 10+6=16.

Дуга	Продол-жительность	Раннее начало	Раннее окончание	Позднее начало	Позднее оконча-ние
$1 \to 2$	3	0	0+3=3		
$1 \to 3$	4	0	0+4=4		
$1 \to 4$	7	0	~~0~~+7=7		
$2 \to 4$	5	3	3+5=8		
$3 \to 4$	6	4	4+6=10		
$4 \to 5$	7	10	10+7=17		
$4 \to 6$	5	10	10+5=15		
$4 \to 7$	6	10	10+6=16		
$5 \to 8$	9				
$6 \to 8$	8				
$7 \to 8$	10				

Работа $5 \to 8$ начнется только, когда закончится работа $4 \to 5$, значит раннее начало $5 \to 8$ равно 17. Длительность работы $5 \to 8$ равна 9, значит ее раннее окончание: 17+9=26.

Работа $6 \to 8$ начнется только, когда закончится работа $4 \to 6$, значит раннее начало $6 \to 8$ равно 15. Длительность работы $6 \to 8$ равна 8, значит ее раннее окончание: 15+8=23.

Работа $7 \to 8$ начнется только, когда закончится работа $4 \to 7$, значит раннее начало $7 \to 8$ равно 16. Длительность работы $7 \to 8$ равна 10, значит ее раннее окончание: 16+10=26.

Дуга	Продол-жительность	Раннее нача-ло	Раннее окончание	Позднее начало	Позднее оконча-ние
$1 \to 2$	3	0	0+3=3		
$1 \to 3$	4	0	0+4=4		
$1 \to 4$	7	0	0+7=7		
$2 \to 4$	5	3	3+5=8		
$3 \to 4$	6	4	4+6=10		
$4 \to 5$	7	10	~~10~~+7=17		
$4 \to 6$	5	10	~~10~~+5=15		
$4 \to 7$	6	10	~~10~~+6=16		
$5 \to 8$	9	17	17+9=26		
$6 \to 8$	8	15	15+8=23		
$7 \to 8$	10	16	16+10=26		

Анализируем полученные расчеты. Позже всех окончатся работы $4 \to 5$ и $7 \to 8$, самый оптимистичный срок их окончания равен 26. Поскольку мы планируем окончить весь комплекс работ как можно раньше, ориентируемся именно на этот срок – 26. Чтобы, тем не менее, выяснить, есть ли у каких то отделов (этапов работ) временные резервы, высчитываем поздние сроки для каждой работы.

Расчет поздних сроков начинают снизу таблицы.

Работы $4 \to 5$, $6 \to 8$ и $7 \to 8$ заключительные, значит, все они могут быть закончены в 26. Тогда, например, $7 \to 8$ может начаться в 16, где 15=26-10 (позднее окончание минус продолжительность работы $7 \to 8$).

Дуга	Продолжительность	Раннее начало	Раннее окончание	Позднее начало	Позднее окончание
$1 \to 2$	3	0	0+3=3		
$1 \to 3$	4	0	0+4=4		
$1 \to 4$	7	0	0+7=7		
$2 \to 4$	5	3	3+5=8		
$3 \to 4$	6	4	4+6=10		
$4 \to 5$	7	10	10+7=17		
$4 \to 6$	5	10	10+5=15		
$4 \to 7$	6	10	10+6=16		
$5 \to 8$	9	17	17+9=26	26-9=17	26
$6 \to 8$	8	15	15+8=23	26-8=18	26
$7 \to 8$	10	16	16+10=26	26-10=16	26

Работа $4 \to 5$ не должна задерживать работу $7 \to 8$ и, если та должна самое позднее начаться в 16, то $4 \to 5$ в 16 должна закончиться.

Работа $4 \to 6$ не должна задерживать работу $6 \to 8$ и, если та должна самое позднее начаться в 18, то $4 \to 6$ в 18 должна закончиться.

Работа $4 \to 5$ не должна задерживать работу $5 \to 8$ и, если та должна самое позднее начаться в 17, то $4 \to 5$ в 17 должна закончиться.

Дуга	Продолжительность	Раннее начало	Раннее окончание	Позднее начало	Позднее окончание
$1 \to 2$	3	0	0+3=3		
$1 \to 3$	4	0	0+4=4		
$1 \to 4$	7	0	0+7=7		
$2 \to 4$	5	3	3+5=8		
$3 \to 4$	6	4	4+6=10		
$4 \to 5$	7	10	10+7=17	17-7=10	17
$4 \to 6$	5	10	10+5=15	18-5=13	18
$4 \to 7$	6	10	10+6=16	16-6=10	16
$5 \to 8$	9	17	17+9=26	26-9=17	26
$6 \to 8$	8	15	15+8=23	26-8=18	26
$7 \to 8$	10	16	16+10=26	26-10=16	26

Работа $3 \to 4$ не должна задерживать работы:

- $4 \to 5$ (начало 10);
- $4 \to 6$ (начало 13);
- $4 \to 7$ (начало 10).

Чтобы не задерживать никого из них, работа $3 \to 4$ должна закончиться в 10: это минимальное из чисел $\{10; 13; 10\}$. Начнется работа $3 \to 4$ в 4=10-6 (окончание минус продолжительность).

Аналогично, работа $2 \to 4$ не должна задерживать работы:

- $4 \to 5$ (начало 10);
- $4 \to 6$ (начало 13);
- $4 \to 7$ (начало 10).

Чтобы не задерживать никого из них, работа $2 \to 4$ должна закончиться в 10: это минимальное из чисел $\{10; 13; 10\}$. Начнется работа $2 \to 4$ в 5=10-5 (окончание минус продолжительность).

Аналогично, работа $1 \to 4$ не должна задерживать работы:

- $4 \to 5$ (начало 10);
- $4 \to 6$ (начало 13);
- $4 \to 7$ (начало 10).

Чтобы не задерживать никого из них, работа $1 \to 4$ должна закончиться в 10: это минимальное из чисел $\{10; 13; 10\}$. Начнется работа $1 \to 4$ естественно, в 3=10-7 (окончание минус продолжительность).

Дуга	Продол-жительность	Раннее начало	Раннее окончание	Позднее начало	Позднее оконча-ние
$1 \to 2$	3	0	0+3=3		
$1 \to 3$	4	0	0+4=4		
$1 \to 4$	7	0	0+7=7	10-7=3	10
$2 \to 4$	5	3	3+5=8	10-5=5	10
$3 \to 4$	6	4	4+6=10	10-6=4	10
$4 \to 5$	7	10	10+7=17	17-7=10	17
$4 \to 6$	5	10	10+5=15	18-5=13	18
$4 \to 7$	6	10	10+6=16	16-6=10	16
$5 \to 8$	9	17	17+9=26	26-9=17	26
$6 \to 8$	8	15	15+8=23	26-8=18	26
$7 \to 8$	10	16	16+10=26	26-10=16	26

Работа $1 \to 3$ не должна задерживать работу $3 \to 4$, и, если та должна самое позднее начаться в 4, то $1 \to 3$ в 4 должна закончиться.

Работа $1 \to 2$ не должна задерживать работу $2 \to 4$, и, если та должна самое позднее начаться в 5, то $1 \to 2$ в 5 должна закончиться.

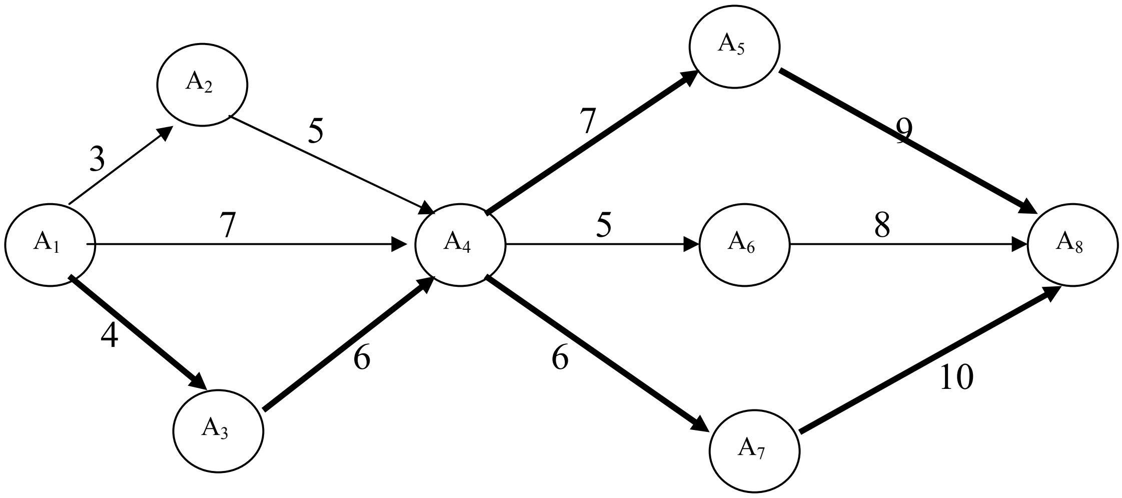
Дуга	Продол-жительность	Раннее начало	Раннее окончание	Позднее начало	Позднее оконча-ние
$1 \to 2$	3	0	0+3=3	5-3=2	5
$1 \to 3$	4	0	0+4=4	4-4=0	4
$1 \to 4$	7	0	0+7=7	10-7=3	10
$2 \to 4$	5	3	3+5=8	10-5=5	10
$3 \to 4$	6	4	4+6=10	10-6=4	10
$4 \to 5$	7	10	10+7=17	17-7=10	17
$4 \to 6$	5	10	10+5=15	18-5=13	18
$4 \to 7$	6	10	10+6=16	16-6=10	16
$5 \to 8$	9	17	17+9=26	26-9=17	26
$6 \to 8$	8	15	15+8=23	26-8=18	26
$7 \to 8$	10	16	16+10=26	26-10=16	26

Можно рассмотреть два вида резервов.

Полный резерв, это время, на которое можно задержать выполнение данной работы без изменения времени окончания всего комплекса работ. Найти полный резерв несложно: это разница между поздним и ранним началом данной работы.

Дуга	Продол-жительность	Раннее начало	Раннее окончание	Позднее начало	Позднее окончание	Полный резерв
$1 \to 2$	3	**0**	3	**2**	5	2-0=**2**
$1 \to 3$	4	**0**	4	**0**	4	0-0=**0**
$1 \to 4$	7	**0**	7	**3**	10	3-0=**3**
$2 \to 4$	5	**3**	8	**5**	10	5-3=**2**
$3 \to 4$	6	**4**	10	**4**	10	4-4=**0**
$4 \to 5$	7	**10**	17	**10**	17	10-10=**0**
$4 \to 6$	5	**10**	15	**13**	18	13-10=**3**
$4 \to 7$	6	**10**	16	**10**	16	10-10=**0**
$5 \to 8$	9	**17**	26	**17**	26	17-17=**0**
$6 \to 8$	8	**15**	23	**18**	26	18-15=**3**
$7 \to 8$	10	**16**	26	**16**	26	16-16=**0**

Некоторые работы имеют нулевой полный резерв, на графе выделены их дуги. Это означает, что данные роботы должны быть непременно выполнены по графику во избежание срыва общего срока выполнения.



Свободный резерв – это время, на которое можно задержать выполнение данной работы без изменения самых ранних роков начала всех последующих работ.

Для нахождения свободного резерва нужно найти минимальное (самое раннее) время, когда эта работа кому-то понадобится и отнять самое раннее время окончания данной работы.

Дуга	Продолжительность	Раннее начало	Раннее окончание	Позднее начало	Позднее окончание	Полный резерв	Свободный резерв
$1 \to 2$	3	0	3	2	5	2	3-3=0
$1 \to 3$	4	0	4	0	4	0	
$1 \to 4$	7	0	7	3	10	3	
	5	3	8	5	10	2	
$3 \to 4$	6	4	10	4	10	0	
$4 \to 5$	7	10	17	10	17	0	
$4 \to 6$	5	10	15	13	18	3	
$4 \to 7$	6	10	16	10	16	0	
$5 \to 8$	9	17	26	17	26	0	
$6 \to 8$	8	15	23	18	26	3	
$7 \to 8$	10	16	26	16	26	0	

Свободный резерв для $1 \to 2$:

Результаты работы $1 \to 2$ самое раннее понадобятся для $2 \to 4$ (ее раннее начало равно 3). Раннее окончание работы $1 \to 2$ также равно 3, 3-3=0, то есть, чтобы не сдвигать с графика другие отделы, работа $1 \to 2$ не имеет резерва времени.

Дуга	Продол-жительность	Раннее начало	Раннее окончание	Позднее начало	Позднее окончание	Полный резерв	Свободный резерв
$1 \to 2$	3	0	3	2	5	2	3-3=0
$1 \to 3$	4	0	4	0	4	0	4-4=0
$1 \to 4$	7	0	7	3	10	3	
$2 \to 4$	5	3	8	5	10	2	
$3 \to 4$	6	4	10	4	10	0	
$4 \to 5$	7	10	17	10	17	0	
$4 \to 6$	5	10	15	13	18	3	
$4 \to 7$	6	10	16	10	16	0	
$5 \to 8$	9	17	26	17	26	0	
$6 \to 8$	8	15	23	18	26	3	
$7 \to 8$	10	16	26	16	26	0	

Свободный резерв для $1 \to 3$:

Результаты работы $1 \to 3$ самое раннее понадобятся для $3 \to 4$ (ее раннее начало равно 4). Раннее окончание работы $1 \to 3$ также равно 4, 4-4=0, то есть, чтобы не сдвигать с графика другие отделы, работа $1 \to 3$ не имеет резерва времени.

Свободный резерв для $1 \to 4$:

Результаты работы $1 \to 4$ нужны для:

- $4 \to 5$ (раннее начало 10),
- $4 \to 6$ (раннее начало 10),
- $4 \to 7$ (раннее начало 10).

Раннее окончание работы $1 \to 4$ равно 7, 10-7=3, то есть, у этой работы есть, например, три дополнительных дня на выполнение, которые никак не повлияют на изменение сроков начала работ на других этапах.

Дуга	Продол-жительность	Раннее начало	Раннее окончание	Позднее начало	Позднее окончание	Полный резерв	Свободный резерв
$1 \to 2$	3	0	3	2	5	2	3-3=0
$1 \to 3$	4	0	4	0	4	0	4-4=0
$1 \to 4$	7	0	7	3	10	3	10-7=3
$2 \to 4$	5	3	8	5	10	2	
$3 \to 4$	6	4	10	4	10	0	
$4 \to 5$	7	10	17	10	17	0	
$4 \to 6$	5	10	15	13	18	3	
$4 \to 7$	6	10	16	10	16	0	
$5 \to 8$	9	17	26	17	26	0	
$6 \to 8$	8	15	23	18	26	3	
$7 \to 8$	10	16	26	16	26	0	

Свободный резерв для $2 \rightarrow 4$:

Результаты работы $2 \rightarrow 4$ нужны для:

- $4 \rightarrow 5$ (раннее начало 10),
- $4 \rightarrow 6$ (раннее начало 10),
- $4 \rightarrow 7$ (раннее начало 10).

Раннее окончание работы $2 \rightarrow 4$ равно 8, 10-8=2, то есть, у этой работы есть 2 дополнительных дня на выполнение, которые никак не повлияют на изменение сроков начала работ на других этапах.

Дуга	Продолжительность	Раннее начало	Раннее окончание	Позднее начало	Позднее окончание	Полный резерв	Свободный резерв
$1 \rightarrow 2$	3	0	3	2	5	2	3-3=0
$1 \rightarrow 3$	4	0	4	0	4	0	4-4=0
$1 \rightarrow 4$	7	0	7	3	10	3	10-7=3
$2 \rightarrow 4$	5	3	8	5	10	2	10-8=2
$3 \rightarrow 4$	6	4	10	4	10	0	
$4 \rightarrow 5$	7	10	17	10	17	0	
$4 \rightarrow 5$	5	10	15	13	18	3	
$4 \rightarrow 5$	6	10	16	10	16	0	
$4 \rightarrow 5$	9	17	26	17	26	0	
$6 \rightarrow 8$	8	15	23	18	26	3	
$7 \rightarrow 8$	10	16	26	16	26	0	

Свободный резерв для $3 \rightarrow 4$:

Результаты работы $3 \rightarrow 4$ нужны для:

- $4 \rightarrow 5$ (раннее начало 10),
- $4 \rightarrow 5$ (раннее начало 10),
- $4 \rightarrow 5$ (раннее начало 10).

Раннее окончание работы $3 \rightarrow 4$ равно 10, 10-10=0, то есть, у этой резерва времени нет.

Можно заметить, что при отсутствии полного резерва, у работы не может быть и свободного резерва. Поэтому далее свободный резерв работ

$3 \rightarrow 4$, $4 \rightarrow 5$, $4 \rightarrow 5$, $4 \rightarrow 5$ и $7 \rightarrow 8$ выставляем равный нулю.

Дуга	Про-дол-житель-ность	Раннее начало	Раннее окон-чание	Позд-нее нача-ло	Позднее оконча-ние	Пол-ный резерв	Свобод-ный резерв
$1 \to 2$	3	0	3	2	5	2	3-3=0
$1 \to 3$	4	0	4	0	4	0	4-4=0
$1 \to 4$	7	0	7	3	10	3	10-7=3
$2 \to 4$	5	3	8	5	10	2	10-8=2
$3 \to 4$	6	4	10	4	10	0	0
$4 \to 5$	7	10	17	10	17	0	0
$4 \to 5$	5	10	15	13	18	3	
$4 \to 5$	6	10	16	10	16	0	0
$4 \to 5$	9	17	26	17	26	0	0
$6 \to 8$	8	15	23	18	26	3	
$7 \to 8$	10	16	26	16	26	0	0

Свободный резерв для $4 \to 6$:

Результаты работы $4 \to 6$ нужны для $6 \to 8$ (раннее начало 15). Раннее окончание работы $4 \to 6$ также равно 15, 15-5=0, то есть, чтобы не сдвигать с графика другие отделы, работа $4 \to 6$ не имеет резерва времени.

Дуга	Продол-житель-ность	Ран-нее нача-ло	Раннее оконча-ние	Позд-нее начало	Позднее оконча-ние	Пол-ный резерв	Свобод-ный ре-зерв
$1 \to 2$	3	0	3	2	5	2	3-3=0
$1 \to 3$	4	0	4	0	4	0	4-4=0
$1 \to 4$	7	0	7	3	10	3	10-7=3
$2 \to 4$	5	3	8	5	10	2	10-8=2
$3 \to 4$	6	4	10	4	10	0	0
$4 \to 5$	7	10	17	10	17	0	0
$4 \to 6$	5	10	15	13	18	3	15-15=0
$4 \to 7$	6	10	16	10	16	0	0
$5 \to 8$	9	17	26	17	26	0	0
$6 \to 8$	8	15	23	18	26	3	
$7 \to 8$	10	16	26	16	26	0	0

Свободный резерв для $6 \to 8$:

Это одна из заключительных работ, она должна окончится не позднее общего срока – 26. Раннее начало $6 \to 8$ равно 15, 26-15=11. Имеется существенный свободный резерв.

Дуга	Продол-жительность	Раннее начало	Раннее окончание	Позднее начало	Позднее окончание	Полный резерв	Свободный резерв
$1 \to 2$	3	0	3	2	5	2	3-3=0
$1 \to 3$	4	0	4	0	4	0	4-4=0
$1 \to 4$	7	0	7	3	10	3	10-7=3
$2 \to 4$	5	3	8	5	10	2	10-8=2
$3 \to 4$	6	4	10	4	10	0	0
$4 \to 5$	7	10	17	10	17	0	0
$4 \to 6$	5	10	15	13	18	3	15-15=0
$4 \to 7$	6	10	16	10	16	0	0
$5 \to 8$	9	17	26	17	26	0	0
$6 \to 8$	8	15	23	18	26	3	26-15=11
$7 \to 8$	10	16	26	16	26	0	0

Таким образом, проведя подобный анализ сетевого графика, всегда можно ответить на вопросы:

- За какое минимальное время можно выполнить данный комплекс работ?
- Есть ли резервы сроков выполнения отдельных этапов работ?
- Срыв сроков каких работ неизбежно приведет к срыву сдачи всего комплекса, то есть, какие работы являются критическими?

Выводы по данному графику таковы:

Минимальное время на выполнение всего комплекса –26 дней.

Резервное время имеется у работ: $1 \to 4$ *– 3 дня,* $2 \to 4$ *– 2 дня,* $6 \to 8$ *– 11 дней. Такие задержки не повлияют на сроки начала работ зависящих от них отделов.*

Критическими являются работы: $1 \to 3$, $3 \to 4$, $4 \to 5$, $4 \to 7$, $5 \to 8$, $7 \to 8$*, у них нулевой полный резерв.*

7. ЗАДАЧИ ДИНАМИЧЕСКОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

Динамическое программирование это метод оптимизации, приспособленный к операциям, в которых процесс принятия решения может быть разбит на этапы (шаги). Такие операции называются *многошаговыми*.

Модели динамического программирования применяются при разработке правил управления запасами, при распределении инвестиций между возможными направлениями их использования, разработке правил замены выбывающих из эксплуатации основных фондов и т.п.

Общая постановка задач динамического программирования состоит в следующем:

- Рассматривается управляемый процесс. В результате многошагового управления система S (объект управления) переводится из начального состояния s_0 в конечное состояние s_1.
- Обозначим как X_k управление на каждом этапе. X_k может быть числом или качественным признаком.
- Показателем эффективности управления на каждом этапе служит некоторая целевая функция Z, зависящая от начального состояния системы и управления.
- Состояние s_k системы в конце каждого k-го шага зависит только от предшествующего состояния s_{k-1} и управления X_k на k-м шаге (и не зависит от предшествующих состояний и управлений. Это требование называется *отсутствием последействия.*
- Целевая функция Z суммируется по всем показателям эффективности отдельных шагов.
- Необходимо определить такое допустимое управление, переводящее систему из начального состояния в конечное, при котором целевая функция принимает максимальное (минимальное) значение.
- Руководствуются *принципом оптимальности Беллмана*:

Каково бы не было состояние системы после какого-либо числа шагов, на ближайшем шаге нужно выбирать управление так, чтобы оно в совокупности с оптимальным управлением на всех последующих шагах приводило к оптимальному выигрышу на всех оставшихся шагах, включая данный.

7.1. Задача о распределении инвестиций между предприятиями

Планируется деятельность четырех промышленных предприятий на очередной год. Необходимо распределить между ними 120 млн. у.е. Размеры вложений в каждое предприятие кратны 20 млн. Средства, вложенные в предприятие, приносят в конце года прибыль $g_k(x)$, $k = 1, 2, 3, 4$.

x	$g_1(x)$	$g_2(x)$	$g_3(x)$	$g_4(x)$
20	8	10	12	11
40	16	20	21	23
60	25	28	27	30
80	36	40	38	37
100	44	48	50	51
120	62	62	63	63

Определить, какое количество средств нужно выделить каждому предприятию, чтобы суммарная прибыль была наибольшей.

Решение.

Введем следующие обозначения:

x_i – инвестиции (управление) в i-е предприятие;

$g_i(x_i)$ – функция полезности (величина дохода от ресурса x_i, полученного i-м предприятием);

$f_k(x)$ – наибольший доход, который можно получить от вложения средств x на первых k предприятиях.

I этап

Выделяем средства 1-му предприятию. При этом $k = 1$.

Вычисляем $f_1(x)$ – наибольший доход при использовании ресурса x на 1-м предприятии; $f_1(x) = g_1(x)$, а именно

$$f_1(0) = 0;$$

$$f_1(20) = 8;$$

$$f_1(40) = 16;$$

$$f_1(60) = 25;$$

$$f_1(80) = 36;$$

$$f_1(100) = 44;$$

$$f_1(120) = 62.$$

II этап

Выделяем средства 2-му предприятию (с учетом и средств, выделенных 1-му). При этом $k = 2$.

Вычисляем $f_2(x)$ – наибольший доход при использовании ресурса x на 1-м и 2-м предприятиях; $f_2(x) = \max\left\{ f_1(x - x_2) + g_2(x_2) \right\}$, а именно

➢ Если на первые два предприятия выделяем всего $x=20$, то

$$f_2(20)=\max\begin{array}{c}\begin{matrix}1\text{-е} & 2\text{-е}\end{matrix}\\ \left\{\begin{matrix}20 & 0\\ 0 & 20\end{matrix}\right\}\end{array}=\max\left\{f_1(20)+g_2(0);\ f_1(0)+g_2(20)\right\}= .$$

$$=\max\{8+0;\ \ 0+10\}=\max\{8;\ 10\}=10$$

➢ Если на первых два предприятия выделяем всего $x=40$, то

$$f_2(40)=\max\begin{array}{c}\begin{matrix}1\text{-е} & 2\text{-е}\end{matrix}\\ \left\{\begin{matrix}40 & 0\\ 20 & 20\\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{40}\end{matrix}\right\}\end{array}=\max\{16+0;\ \ 8+10;\ 0+20\}=\max\{16;\ 18;\ 20\}=20.$$

➢ Если на первых два предприятия выделяем всего $x=60$, то

$$f_2(60)=\max\begin{array}{c}\begin{matrix}1\text{-е} & 2\text{-е}\end{matrix}\\ \left\{\begin{matrix}60 & 0\\ 40 & 20\\ 20 & 40\\ 0 & 60\end{matrix}\right\}\end{array}=\max\{25+0;\ \ 16+10;\ 8+20;\ 0+28\}=$$

$$=\max\{25;\ 26;\ 28;\ 28\}=28.$$

➢ Если на первых два предприятия выделяем всего $x=80$, то

$$f_2(80)=\max\begin{array}{c}\begin{matrix}1\text{-е} & 2\text{-е}\end{matrix}\\ \left\{\begin{matrix}80 & 0\\ 60 & 20\\ 40 & 40\\ 20 & 60\\ 0 & 80\end{matrix}\right\}\end{array}=\max\{36+0;\ \ 25+10;\ 16+20;\ 8+28;\ 0+40\}=$$

$$=\max\{36;\ 35;\ 36;\ 36;\ 40\}=40.$$

➢ Если на первых два предприятия выделяем всего $x=100$, то

$$f_2(100)=\max\begin{array}{c}\begin{matrix}1\text{-е} & 2\text{-е}\end{matrix}\\ \left\{\begin{matrix}100 & 0\\ 80 & 20\\ 60 & 40\\ 40 & 60\\ 20 & 80\\ 0 & 100\end{matrix}\right\}\end{array}=\max\{44+0;\ \ 36+10;\ 25+20;\ 16+28;\ 8+40;\ 0+48\}=$$

$$=\max\{44;\ 46;\ 45;\ 44;\ 48;\ 48\}=48.$$

➢ Если на первых два предприятия выделяем всего $x = 120$, то

$$f_2(120) = \max \begin{Bmatrix} \text{1-е} & \text{2-е} \\ 120 & 0 \\ 100 & 20 \\ 80 & 40 \\ 60 & 60 \\ 40 & 80 \\ 20 & 100 \\ 0 & 120 \end{Bmatrix} = \max \begin{Bmatrix} 62+0; \;\; 44+10; \; 36+20; \; 25+28; \\ 16+40; \; 8+48; \; 0+62 \end{Bmatrix} =$$

$$= \max\{62; \; 54; \; 56; \; 53; \; 56; \; 56; \; 62\} = 62.$$

III этап

Выделяем средства 3-му предприятию (с учетом средств, выделенных 1-му и 2-му). При этом $k = 3$.

Вычисляем $f_3(x)$ – наибольший доход при использовании ресурса x на 1-м, 2-м и 3-ем предприятиях; $f_3(x) = \max\{f_2(x - x_3) + g_3(x_3)\}$, а именно

➢ Если на три первых предприятия всего выделяем $x = 20$, то

$$f_3(20) = \max \begin{Bmatrix} \text{II этап (1-е и 2-е)} & \text{3-е предприятие} \\ 20 & 0 \\ 0 & 20 \end{Bmatrix} = \max\{f_2(20) + g_3(0)\} =$$

$$= \max\{10+0; \; 0+12\} = 12.$$

➢ Если на первых три предприятия выделяем всего $x = 40$, то

$$f_3(40) = \max \begin{Bmatrix} \text{II этап} & \text{3-е предп} \\ 40 & 0 \\ 20 & 20 \\ 0 & 40 \end{Bmatrix} = \max\{20+0; \;\; 10+12; \; 0+21\} =$$

$$= \max\{20; \; 22; \; 21\} = 22$$

➢ Если на первых три предприятия выделяем всего $x = 60$, то

$$f_3(60) = \max \begin{Bmatrix} \text{II этап} & \text{3-е предп} \\ 60 & 0 \\ 40 & 20 \\ 20 & 40 \\ 0 & 40 \end{Bmatrix} = \max\{28+0; \;\; 20+12; 10+21; \; 0+27\} =$$

$$= \max\{28; 32; \; 31; \; 27\} = 32.$$

➢ Если на первых три предприятия выделяем всего $x = 80$, то

$$f_3(80) = \max \begin{Bmatrix} \text{II этап} & \text{3-е предп} \\ 80 & 0 \\ 60 & 20 \\ \boldsymbol{40} & \boldsymbol{40} \\ 20 & 60 \\ 0 & 80 \end{Bmatrix} = \max\{40+0;\ \ 28+12;\ 20+21;\ 10+27;\ 0+38\} =$$

$$= \max\{40;\ 40;\ 41;\ 37;\ 38\} = 41.$$

➢ Если на первых три предприятия выделяем всего $x = 100$, то

$$f_3(100) = \max \begin{Bmatrix} \text{II этап} & \text{3-е предп} \\ 100 & 0 \\ 80 & 20 \\ 60 & 40 \\ 40 & 60 \\ 20 & 80 \\ 0 & 100 \end{Bmatrix} = \max \begin{Bmatrix} 48+0;\ 40+12;\ 28+21; \\ 20+27;\ 10+38;\ 0+50 \end{Bmatrix} =$$

$$= \max\{48;\ 52;\ 49;\ 47;\ 48;\ 50\} = 52.$$

➢ Если на первых три предприятия выделяем всего $x = 120$, то

$$f_3(120) = \max \begin{Bmatrix} \text{II этап} & \text{3-е предп} \\ 120 & 0 \\ 100 & 20 \\ 80 & 40 \\ 60 & 60 \\ 40 & 80 \\ 20 & 100 \\ 0 & 120 \end{Bmatrix} = \max \begin{Bmatrix} 62+0;\ \ 48+12;\ 40+21;\ 28+27; \\ 20+38;\ 10+50;\ 0+63 \end{Bmatrix} =$$

$$= \max\{62;\ 60;\ 61;\ 55;\ 58;\ 60;\ 63\} = 63.$$

IV этап

Финансируем 4-е предприятие (с учетом средств, выделенных всем предыдущим). Возможная сумма к распределению только $x = 120$ (должны распределить всю исходную сумму на четыре предприятия).

$$f_4(120)=\max\left\{\begin{matrix} \text{III этап} & \text{4-е предп} \\ 120 & 0 \\ 100 & 20 \\ \mathit{80} & \mathit{40} \\ 60 & 60 \\ 40 & 80 \\ 20 & 100 \\ 0 & 120 \end{matrix}\right\}=\max\left\{\begin{matrix} 63+0;\ \ 52+11;\ 41+23;\ 32+30; \\ 22+37;\ 12+51;\ 0+63 \end{matrix}\right\}=$$

$$=\max\{63;\ 63;\ 64;\ 62;\ 59;\ 63;\ 63\}=64.$$

Выводы

Просматриваем расчеты назад и выделяем жирным шрифтом наиболее выгодные размеры инвестиций:

$$\left\{\begin{matrix} \text{III этап} & \text{4-е предприятие} \\ 80 & 40 \end{matrix}\right\}\Rightarrow \text{смотрим } f_3(80)\Rightarrow\left\{\begin{matrix} \text{II этап} & \text{3-е предприятие} \\ 40 & 40 \end{matrix}\right\}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \text{смотрим } f_2(40)\Rightarrow\left\{\begin{matrix} \text{1-е предприятие} & \text{2-е предприятие} \\ 0 & 40 \end{matrix}\right\}$$

Таким образом, оптимальное распределение 120 млн у.е., обеспечивающее максимум эффективности следующее:

1	2	3	4
0	40	40	40

Показатель эффективности 0+20+21+23=64.

7.2. Задача о замене оборудования

Рассчитать оптимальные сроки замены оборудования, исходя из следующих условий:

1. Известна стоимость нового оборудования S_0. Она может быть постоянной величиной или меняться с каждым годом, например, с учетом инфляции.

2. Оборудование приносит доход, возможно, величина дохода может быть больше, если оборудование новее. Кроме дохода, полезность оборудования можно охарактеризовать его производительностью.

3. Затраты на содержание и ремонт эксплуатируемого оборудования зависят от срока эксплуатации (возраста оборудования) и задаются как функция от времени.

4. Характеристики дохода и издержек могут быть объединены в общую функцию прибыли, зависящую от возраста оборудования.

5. Остаточная стоимость (стоимость оборудования, бывшего в употреблении, ликвидная стоимость) также напрямую зависит от его возраста: $S(t)$.

6. Обычно оговаривается период рассмотрения ситуации: например, независимо от текущего возраста оборудования, оно обновляется каждые n лет.

7. В начале каждого года принимается решение: сохранить оборудование или заменить его новым.

8. Суммарные затраты на эксплуатацию оборудования в течение n лет с учетом начальной покупки и заключительной продажи должны быть минимальными.

9. Суммарная прибыль от эксплуатации оборудования в течение n лет должна быть максимальной.

Динамический процесс использования оборудования разбивается на n шагов. Управление на каждом шаге характеризуется качественными признаками и, как правило, состоит из двух возможных решений:

- продолжить эксплуатацию оборудования, с учетом издержек на поддержание его в рабочем состоянии;
- продать оборудование, бывшее в употреблении, и приобрести новое, которое уже в течение первого года эксплуатации потребует некоторых издержек на поддержание его в рабочем состоянии.

Решение задачи удобно проводить на графе, размещенном в системе координат. На оси абсцисс откладывают номер шага (количество прошедших лет), на оси ординат – возраст оборудования на данный момент времени.

Пример решения задачи на максимум получаемой прибыли от эксплуатации оборудования.

Найти оптимальный план замены оборудования на 6-летний период, если известны:

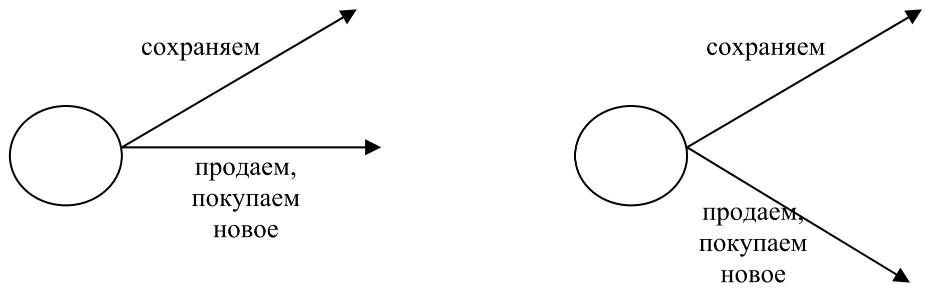
- прибыль от эксплуатации оборудования $r(t)$ в зависимости от возраста;
- остаточная стоимость $s(t)$ оборудования в зависимости от возраста;
- стоимость нового оборудования $S_0 = 20$.

Возраст	0 новое	1	2	3	4	5	6
Прибыль $r(t)$	11	10	9	9	8	8	
Остаточная стоимость $s(t)$		18	15	14	10	5	1

Перемещение на графе начинается из начала координат, что соответствует началу нового календарного года и началу эксплуатации нового оборудования. Каждый узел графа в данном примере маркирован как $\boldsymbol{ij}$, где i – текущий год, j – возраст оборудования, эксплуатируемого в текущем году.

Переход по стрелке вверх означает решение о продолжении эксплуатации «старого» оборудования.

Переход по стрелке вниз или горизонтально вправо означает решение о продаже «старого» оборудования, приобретении нового с последующей эксплуатацией в течение года нового оборудования.



Над каждым соединением в графе записывают его характеристику, в данной задаче суммарную величину полученной прибыли.

Если стрелка идет вверх, то на прибыль влияют:

- доходы от эксплуатации оборудования в зависимости от его возраста на данный момент; его производительность.
- издержки на эксплуатацию оборудования в зависимости от его возраста на данный момент.

В данной задаче доходы и издержки уже согласованы и в исходной таблице указана прибыль, зависящая от возраста оборудования.

Если стрелка идет вниз или вправо, то на прибыль могут влиять:

- остаточная стоимость продаваемого «старого» оборудования;
- расходы на покупку нового оборудования;
- доходы от эксплуатации нового оборудования;
- издержки на эксплуатацию нового оборудования в течение первого года его эксплуатации.

Первый переход (рис. 7.1) от начала координат к узлу ***11*** означает, что

✓ мы потратили 20 ед. на покупку нового оборудования;
✓ мы за первый год заработаем на нем 11 ед.
✓ тем самым, текущее состояние прибыли равно (-9).

От узла ***11*** (прошел 1 календарный год, возраст оборудования также 1 год) возможны два перехода (рис. 7.2):

✓ стрелка вверх, к узлу ***22***, будет означать, что «старое» оборудование продолжаем эксплуатировать, возраст оборудования 1 год, оно принесет 10 ед. прибыли (см. в таблице);

✓ стрелка вправо, к узлу ***21***, означает решение о продаже оборудования возраста 1 год по остаточной стоимости 18 ед., покупке нового оборудования за 20 ед., которое принесет прибыль 11 ед.; таким образом, прибыль характеризуем числом 18–20+11=9 ед.

От узла ***21*** (прошло 2 календарных года, возраст оборудования 1 год) возможны два перехода (рис. 7.3):

✓ стрелка вверх, к узлу ***32***, будет означать, что «старое» оборудование продолжаем эксплуатировать, возраст оборудования 1 год, оно принесет 10 ед. прибыли (см. в таблице);

✓ стрелка вправо, к узлу ***31***, означает решение о продаже оборудования возраста 1 год по остаточной стоимости 18 ед., покупке нового оборудования за 20 ед., которое принесет прибыль 11 ед.; таким образом, прибыль характеризуем числом 18–20+11=9 ед.

От узла ***22*** (прошло 2 календарных года, возраст оборудования 2 года) возможны два перехода (рис. 7.4):

✓ стрелка вверх, к узлу ***33***, будет означать, что «старое» оборудование продолжаем эксплуатировать, возраст оборудования 2 года, оно принесет 9 ед. прибыли (см. в таблице);

✓ стрелка вниз, к узлу ***31***, означает решение о продаже оборудования возраста 2 года по остаточной стоимости 15 ед., покупке нового оборудования за 20 ед., которое принесет прибыль 11 ед.; таким образом, прибыль характеризуем числом 15–20+11=6 ед.

От узла ***31*** (прошло 3 календарных года, возраст оборудования 1 год) возможны два перехода (рис. 7.5):

✓ стрелка вверх, к узлу ***42***, будет означать, что «старое» оборудование продолжаем эксплуатировать, возраст оборудования 1 год, оно принесет 10 ед. прибыли (см. в таблице);

✓ стрелка вправо, к узлу ***41***, означает решение о продаже оборудования возраста 1 год по остаточной стоимости 18 ед., покупке нового оборудования за 20 ед., которое принесет прибыль 11 ед.; таким образом, прибыль характеризуем числом 18–20+11=9 ед.

От узла ***32*** (прошло 3 календарных года, возраст оборудования 2 года) возможны два перехода (рис. 7.6):

✓ стрелка вверх, к узлу ***43***, будет означать, что «старое» оборудование продолжаем эксплуатировать, возраст оборудования 2 года, оно принесет 9 ед. прибыли (см. в таблице);

✓ стрелка вниз, к узлу ***41***, означает решение о продаже оборудования возраста 2 года по остаточной стоимости 15 ед., покупке нового оборудования за 20 ед., которое принесет прибыль 11 ед.; таким образом, прибыль характеризуем числом 15–20+11=6 ед.

От узла ***33*** (прошло 3 календарных года, возраст оборудования 3 года) возможны два перехода (рис. 7.7):

✓ стрелка вверх, к узлу ***44***, будет означать, что «старое» оборудование продолжаем эксплуатировать, возраст оборудования 3 года, оно принесет 9 ед. прибыли (см. в таблице);

✓ стрелка вниз, к узлу ***41***, означает решение о продаже оборудования возраста 3 года по остаточной стоимости 14 ед., покупке нового оборудования за 20 ед., которое принесет прибыль 11 ед.; таким образом, прибыль характеризуем числом 14–20+11=5 ед.

От узла ***41*** (прошло 4 календарных года, возраст оборудования 1 год) возможны два перехода (рис. 7.8):

✓ стрелка вверх, к узлу ***52***, будет означать, что «старое» оборудование продолжаем эксплуатировать, возраст оборудования 1 год, оно принесет 10 ед. прибыли (см. в таблице);

✓ стрелка вправо, к узлу ***51***, означает решение о продаже оборудования возраста 1 год по остаточной стоимости 18 ед., покупке нового оборудования за 20 ед., которое принесет прибыль 11 ед.; таким образом, прибыль характеризуем числом 18–20+11=9 ед.

От узла ***42*** (прошло 4 календарных года, возраст оборудования 2 года) возможны два перехода (рис. 7.9):

✓ стрелка вверх, к узлу ***53***, будет означать, что «старое» оборудование продолжаем эксплуатировать, возраст оборудования 2 года, оно принесет 9 ед. прибыли (см. в таблице);

✓ стрелка вниз, к узлу ***51***, означает решение о продаже оборудования возраста 2 года по остаточной стоимости 15 ед., покупке нового оборудования за 20 ед., которое принесет прибыль 11 ед.; таким образом, прибыль характеризуем числом 15–20+11=6 ед.

От узла ***43*** (прошло 4 календарных года, возраст оборудования 3 года) возможны два перехода (рис. 7.10):

✓ стрелка вверх, к узлу ***54***, будет означать, что «старое» оборудование продолжаем эксплуатировать, возраст оборудования 3 года, оно принесет 9 ед. прибыли (см. в таблице);

✓ стрелка вниз, к узлу ***51***, означает решение о продаже оборудования возраста 3 года по остаточной стоимости 14 ед., покупке нового оборудования за 20 ед., которое принесет прибыль 11 ед.; таким образом, прибыль характеризуем числом 14–20+11=5 ед.

От узла ***44*** (прошло 4 календарных года, возраст оборудования 4 года) возможны два перехода (рис. 7.11):

✓ стрелка вверх, к узлу ***55***, будет означать, что «старое» оборудование продолжаем эксплуатировать, возраст оборудования 4 года, оно принесет 8 ед. прибыли (см. в таблице);

✓ стрелка вниз, к узлу ***51***, означает решение о продаже оборудования возраста 4 года по остаточной стоимости 10 ед., покупке нового оборудования за 20 ед., которое принесет прибыль 11 ед.; таким образом, прибыль характеризуем числом 10–20+11=1 ед.

От узла ***51*** (прошло 5 календарных лет, возраст оборудования 1 год) возможны два перехода (рис. 7.12):

✓ стрелка вверх, к узлу ***62***, будет означать, что «старое» оборудование продолжаем эксплуатировать, возраст оборудования 1 год, оно принесет 10 ед. прибыли (см. в таблице);

✓ стрелка вправо, к узлу ***61***, означает решение о продаже оборудования возраста 1 год по остаточной стоимости 18 ед., покупке нового оборудования за 20 ед., которое принесет прибыль 11 ед.; таким образом, прибыль характеризуем числом 18–20+11=9 ед.

От узла ***52*** (прошло 5 календарных лет, возраст оборудования 2 года) возможны два перехода (рис. 7.13):

✓ стрелка вверх, к узлу ***63***, будет означать, что «старое» оборудование продолжаем эксплуатировать, возраст оборудования 2 года, оно принесет 9 ед. прибыли (см. в таблице);

✓ стрелка вниз, к узлу ***61***, означает решение о продаже оборудования возраста 2 года по остаточной стоимости 15 ед., покупке нового оборудования за 20 ед., которое принесет прибыль 11 ед.; таким образом, прибыль характеризуем числом 15–20+11=6 ед.

От узла ***53*** (прошло 5 календарных лет, возраст оборудования 3 года) возможны два перехода (рис. 7.14):

✓ стрелка вверх, к узлу ***64***, будет означать, что «старое» оборудование продолжаем эксплуатировать, возраст оборудования 3 года, оно принесет 9 ед. прибыли (см. в таблице);

✓ стрелка вниз, к узлу ***61***, означает решение о продаже оборудования возраста 3 года по остаточной стоимости 14 ед., покупке нового оборудования за 20 ед., которое принесет прибыль 11 ед.; таким образом, прибыль характеризуем числом 14–20+11=5 ед.

От узла ***54*** (прошло 5 календарных лет, возраст оборудования 4 года) возможны два перехода (рис. 7.15):

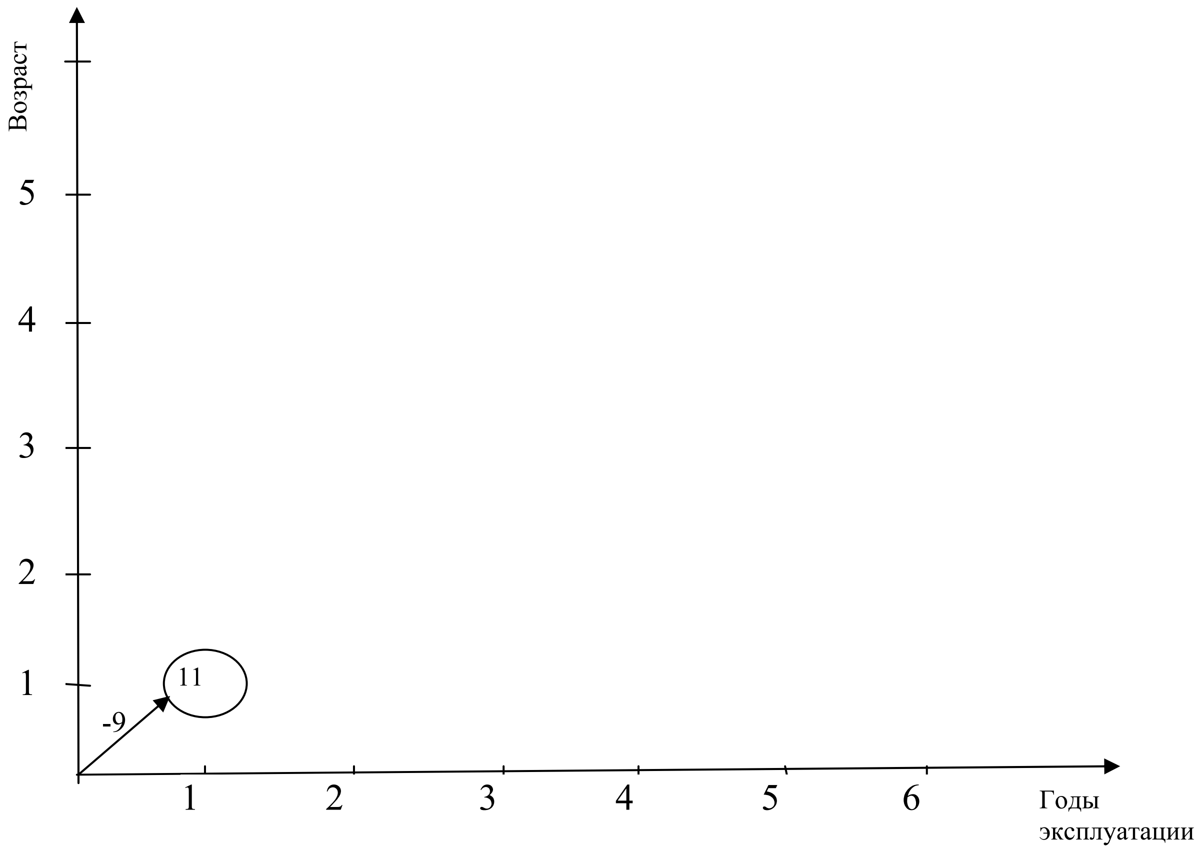
✓ стрелка вверх, к узлу ***65***, будет означать, что «старое» оборудование продолжаем эксплуатировать, возраст оборудования 4 года, оно принесет 8 ед. прибыли (см. в таблице);

✓ стрелка вниз, к узлу ***61***, означает решение о продаже оборудования возраста 4 года по остаточной стоимости 10 ед., покупке нового оборудования за 20 ед., которое принесет прибыль 11 ед.; таким образом, прибыль характеризуем числом 10–20+11=1 ед.

От узла ***55*** (прошло 5 календарных лет, возраст оборудования 5 лет) возможны два перехода (рис. 7.16):

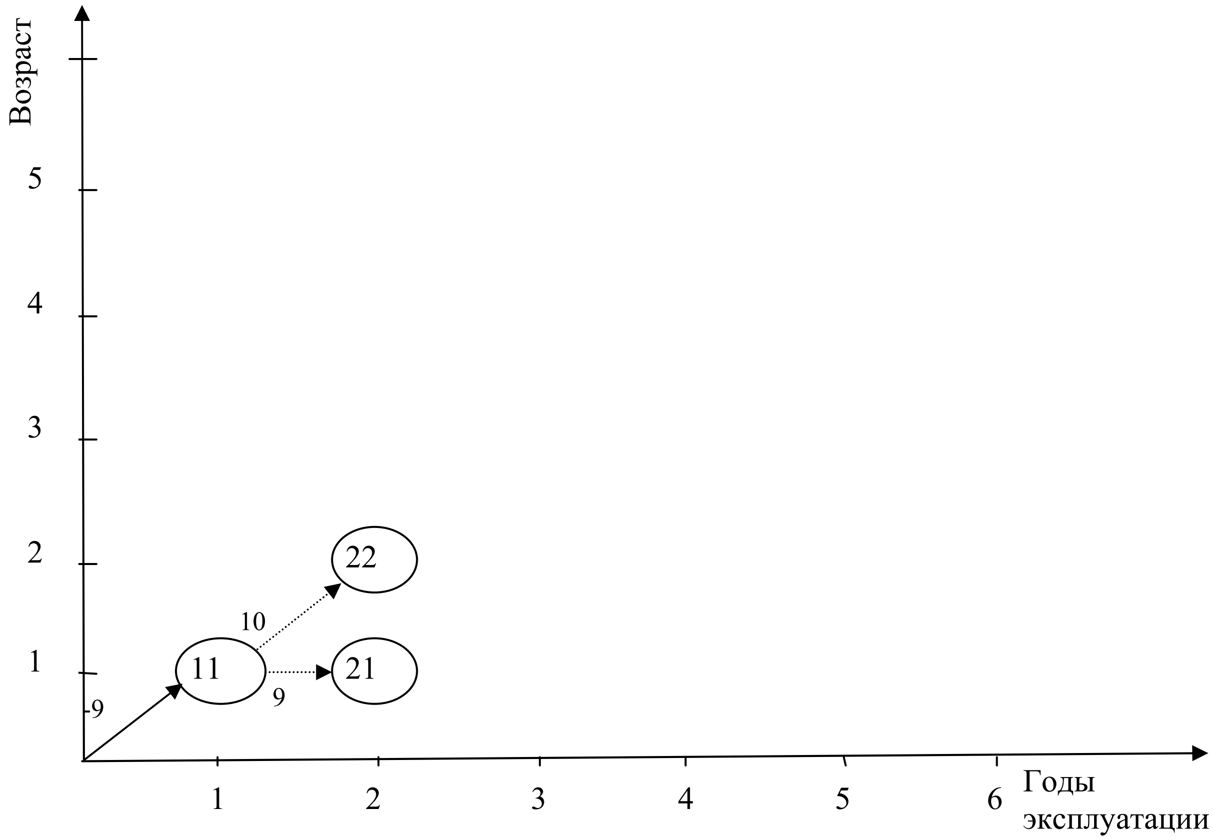
✓ стрелка вверх, к узлу ***66***, будет означать, что «старое» оборудование продолжаем эксплуатировать, возраст оборудования 5 лет, оно принесет 8 ед. прибыли (см. в таблице);

✓ стрелка вниз, к узлу ***61***, означает решение о продаже оборудования возраста 5 лет по остаточной стоимости 5 ед., покупке нового оборудования за 20 ед., которое принесет прибыль 11 ед.; таким образом, прибыль характеризуем числом 5–20+11= (–4) ед.



Возраст
5
4
3
2
1
11
-9
1
2
3
4
5
6
Годы эксплуатации

Рис. 7.1



Возраст
5
4
3
2
1
22
10
11
21
9
-9
1
2
3
4
5
6
Годы эксплуатации

Рис. 7.2

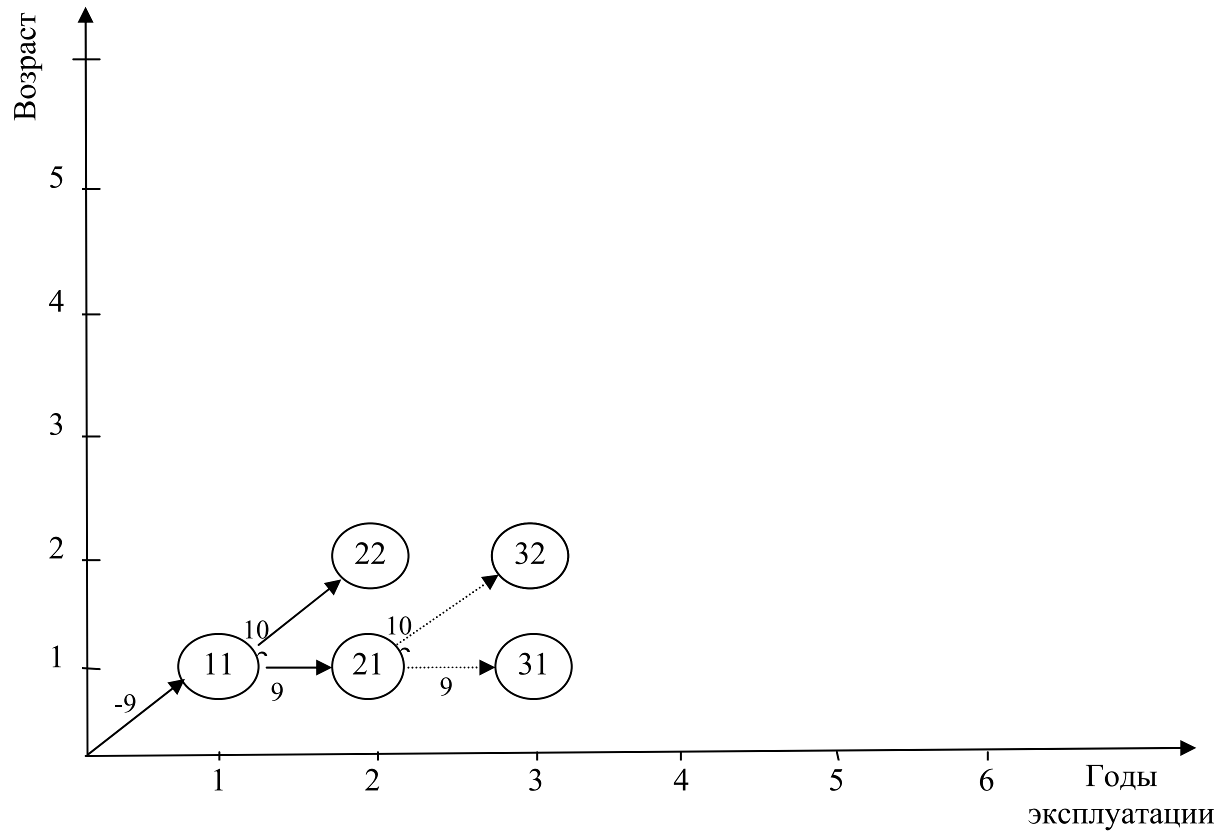

Возраст
5
4
3
2
1
22
32
10
10
11
21
31
-9
9
9
1
2
3
4
5
6
Годы
эксплуатации

Рис. 7.3

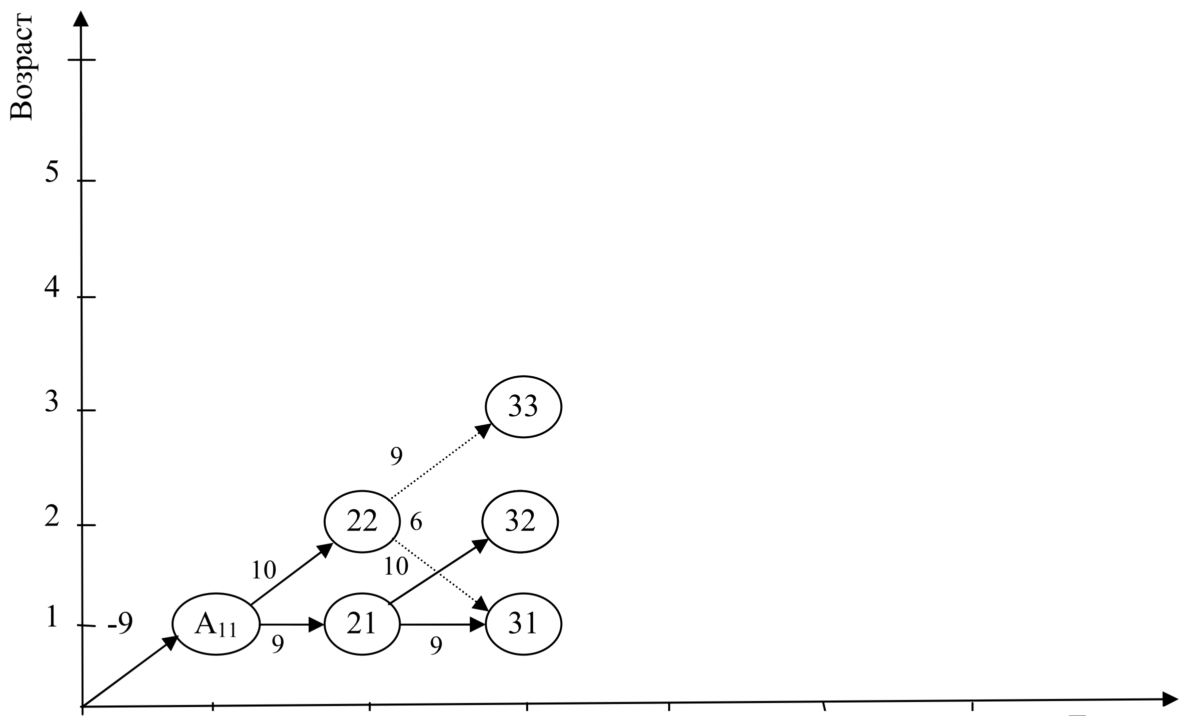

Возраст
5
4
3
2
1
33
9
22
6
32
10
10
-9
A_{11}
21
31
9
9
1
2
3
4
5
6
Годы
эксплуатации

Рис. 7.4

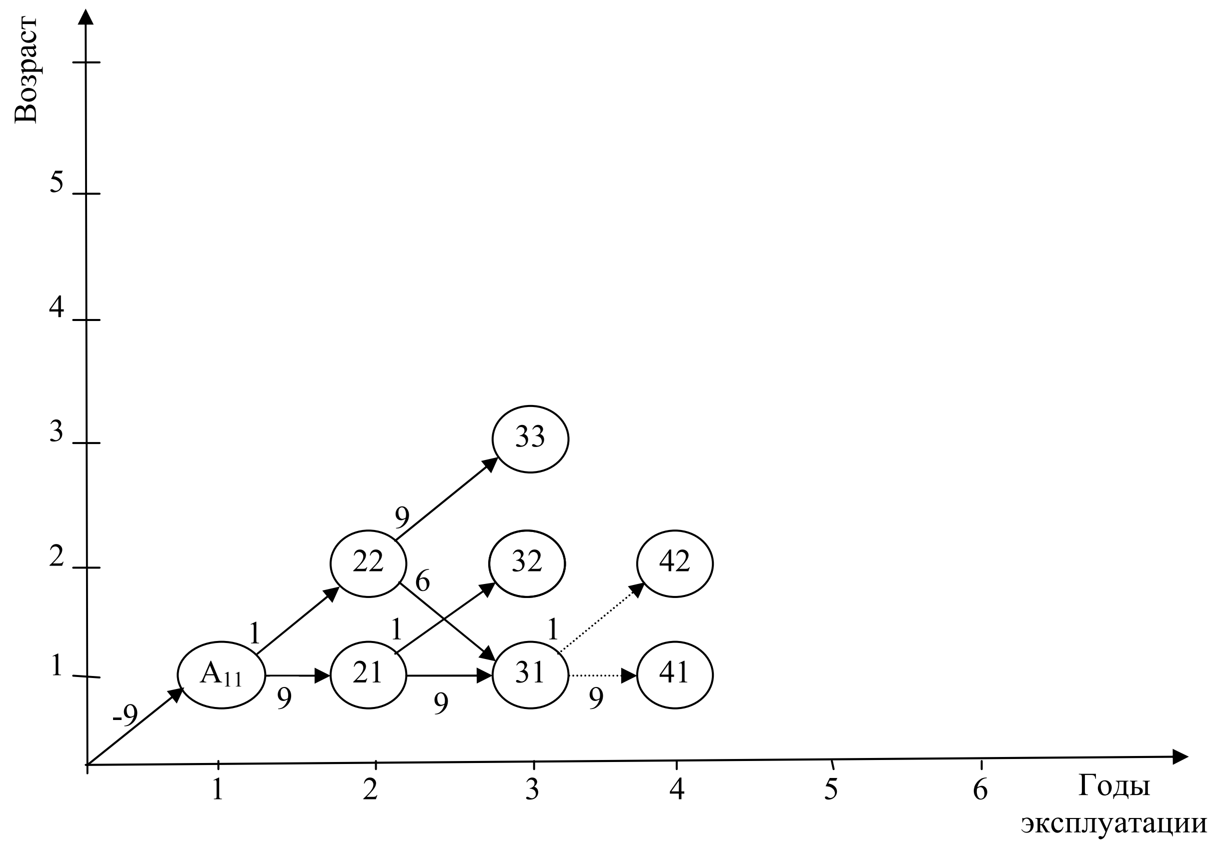

Возраст
5
4
3
2
1
33
9
22
32
42
6
1
1
1
A11
21
31
41
-9
9
9
9
1
2
3
4
5
6
Годы
эксплуатации

Рис. 7.5

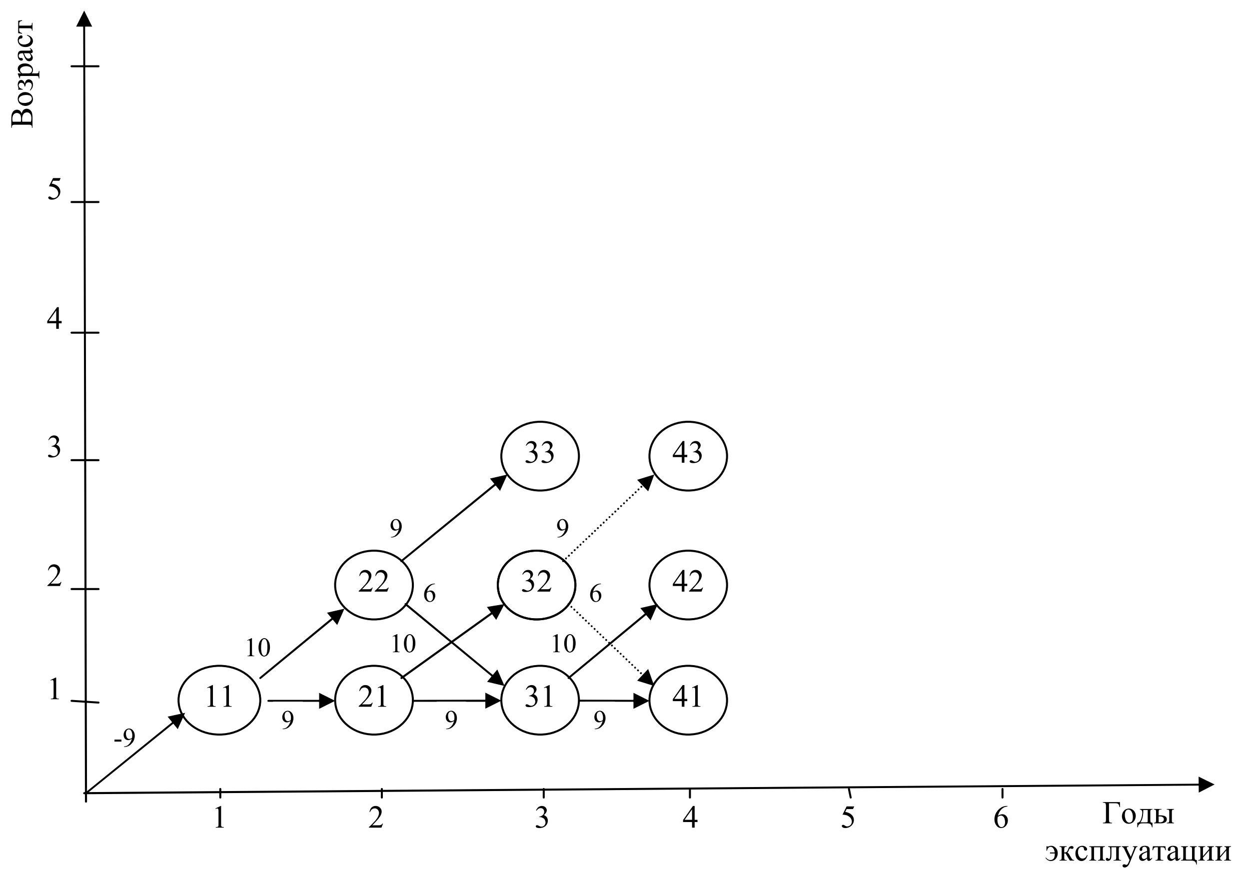

Возраст
5
4
3
2
1
33
43
9
9
22
32
42
6
6
10
10
10
11
21
31
41
-9
9
9
9
1
2
3
4
5
6
Годы
эксплуатации

Рис. 7.6

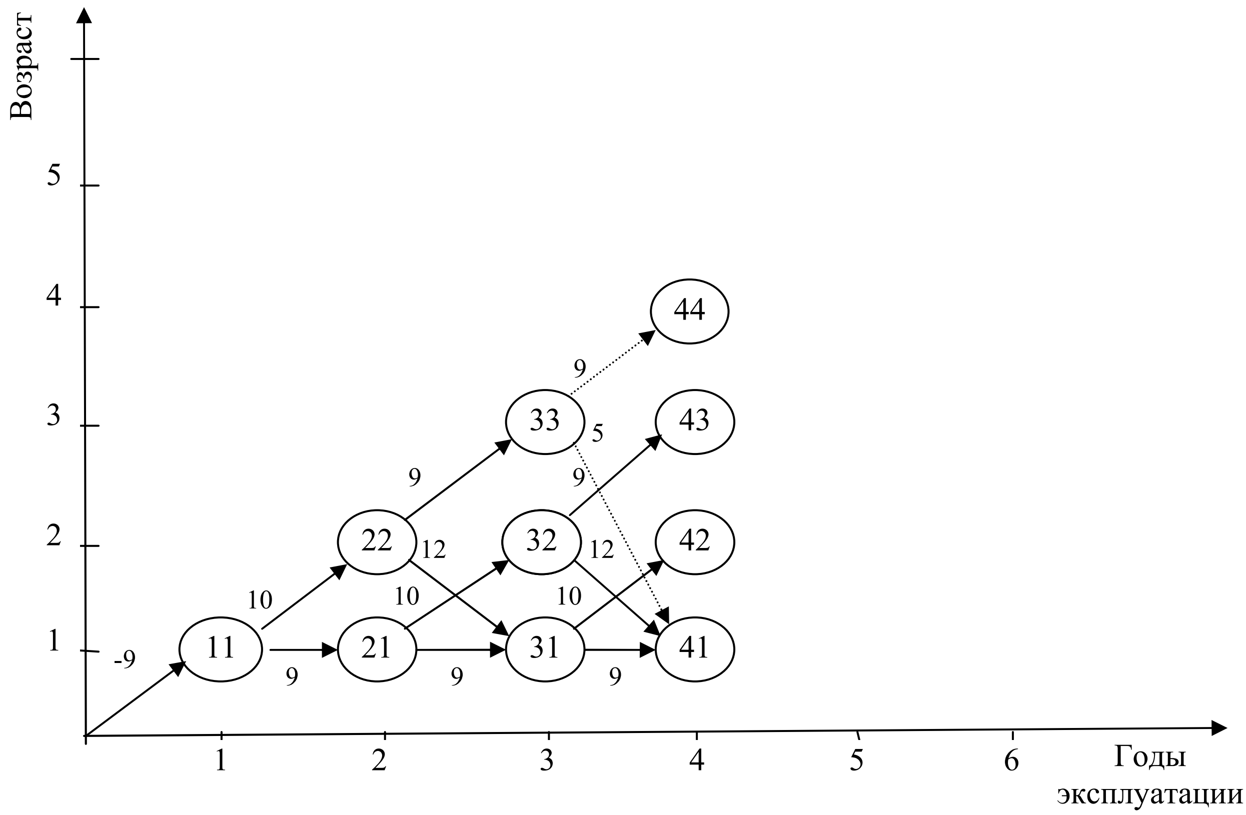

Возраст
5
4
3
2
1
44
9
33
5
43
9
9
22
12
32
12
42
10
10
10
-9
11
21
31
41
9
9
9
1
2
3
4
5
6
Годы
эксплуатации

Рис. 7.7

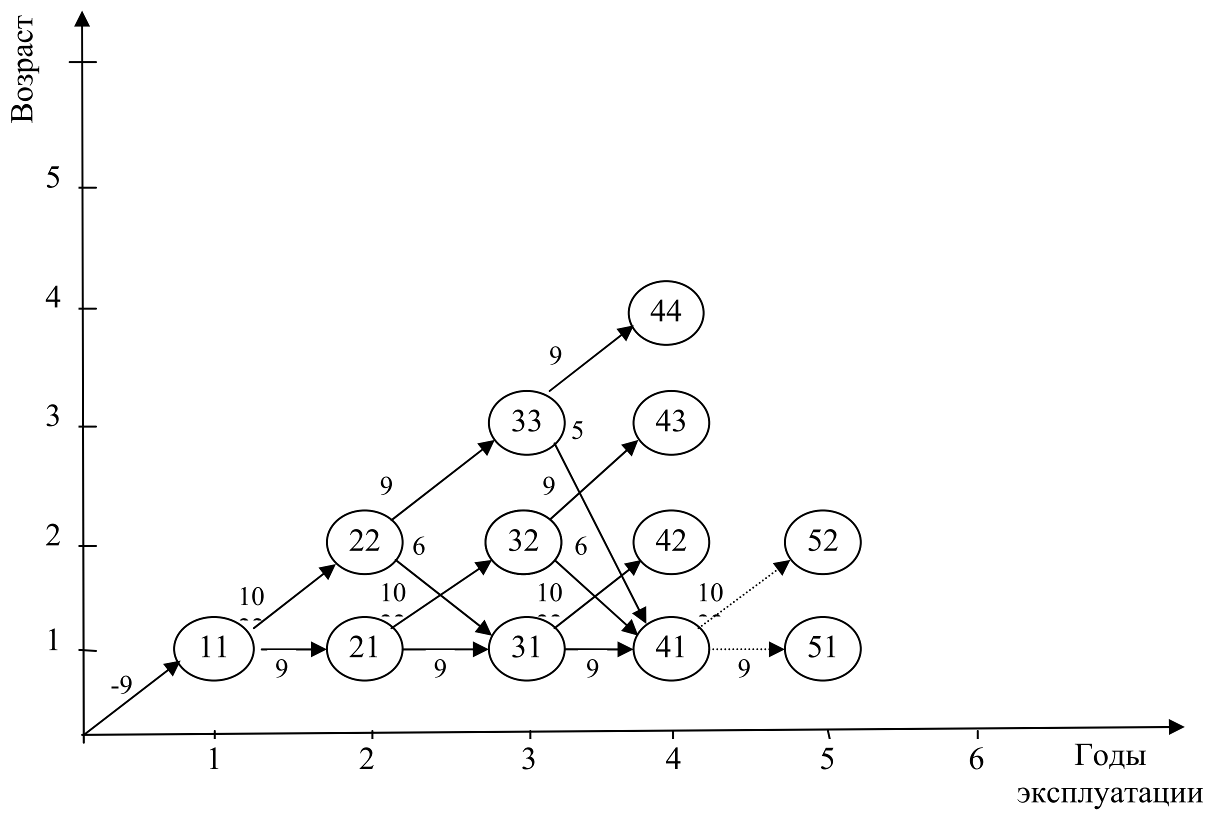

Возраст
5
4
3
2
1
44
9
33
5
43
9
9
22
6
32
6
42
52
10
10
10
10
-9
11
21
31
41
51
9
9
9
9
1
2
3
4
5
6
Годы
эксплуатации

Рис. 7.8

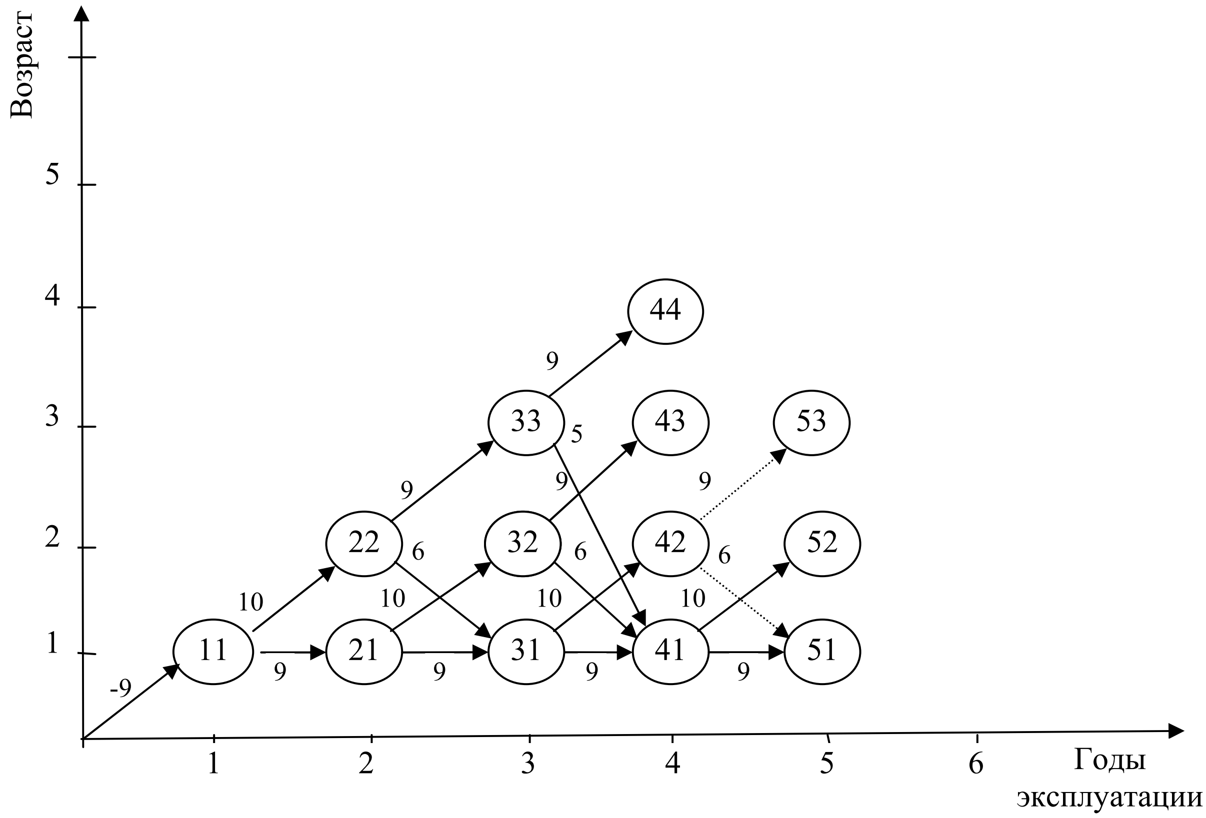


Рис. 7.9

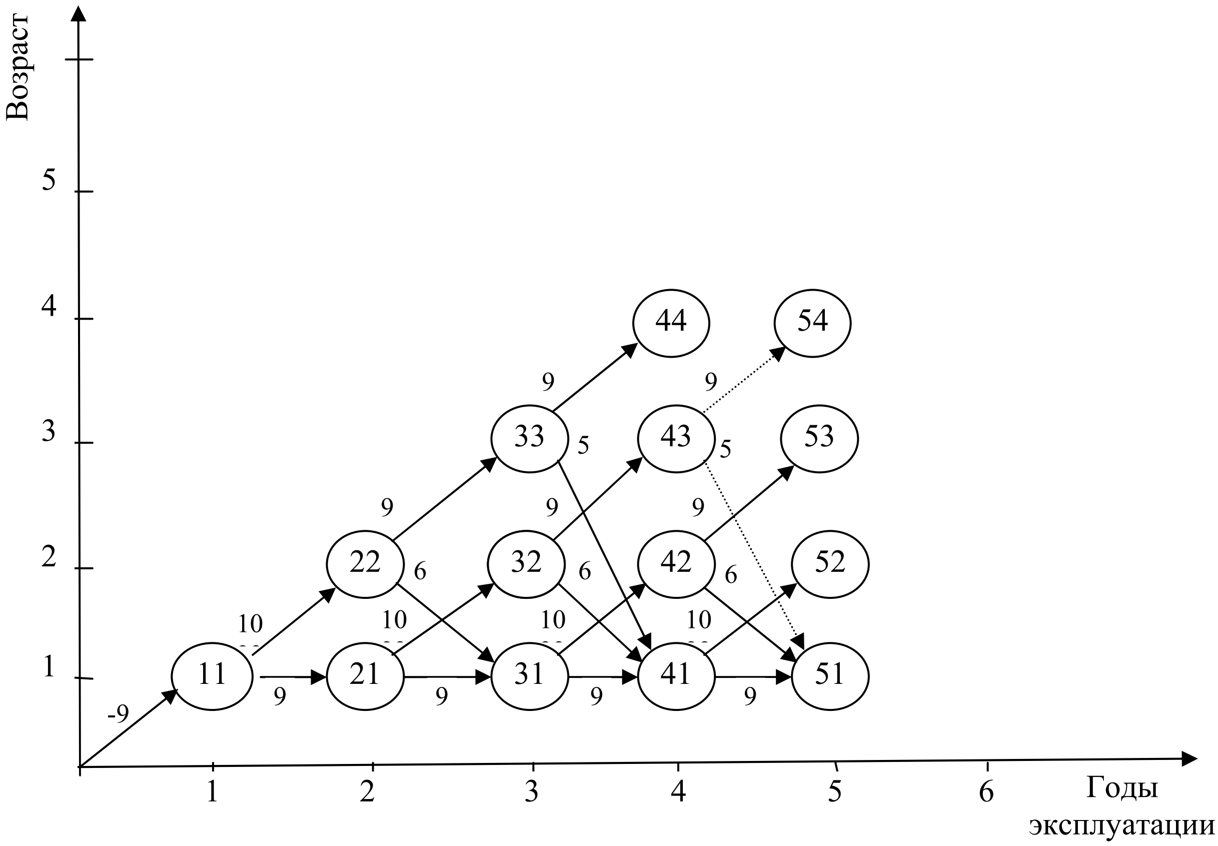


Рис. 7.10

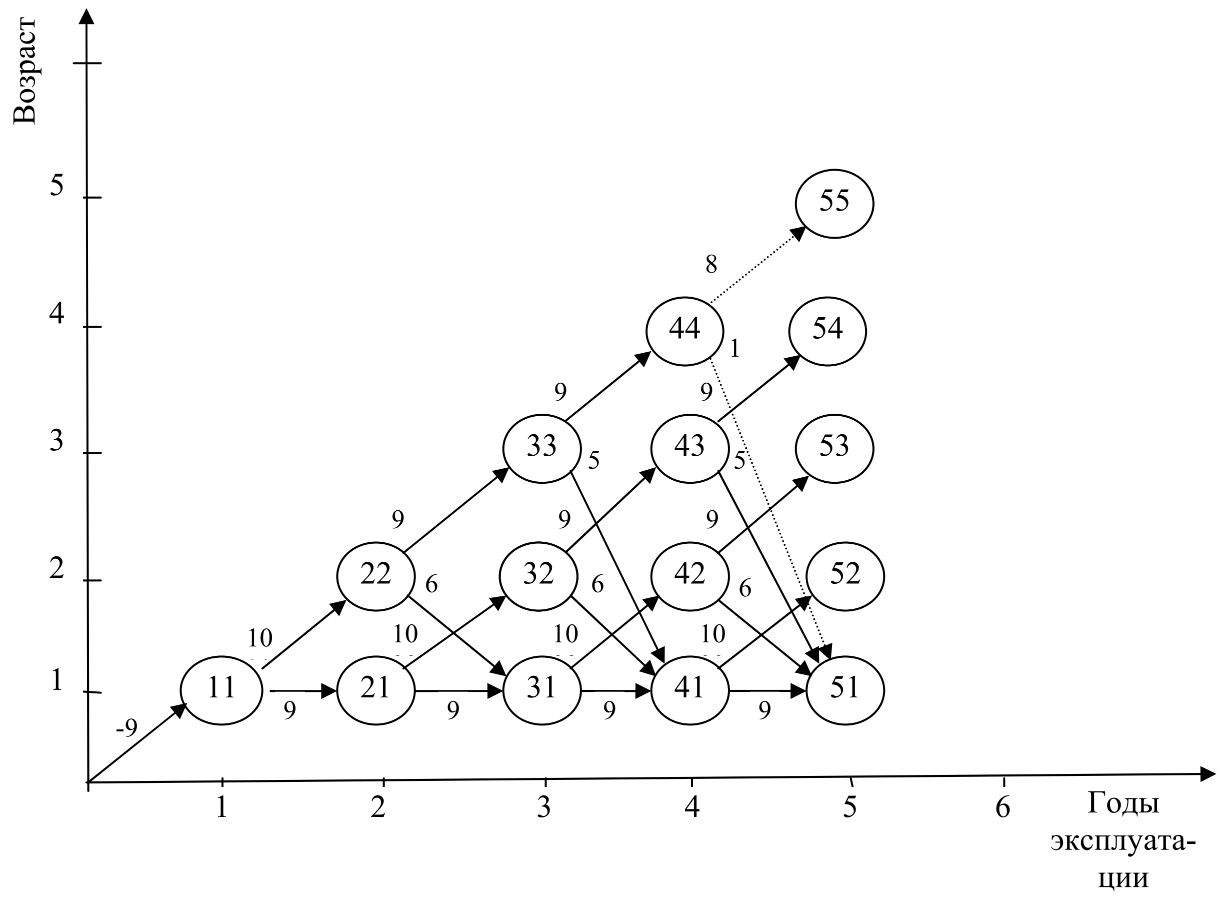


Рис. 7.11

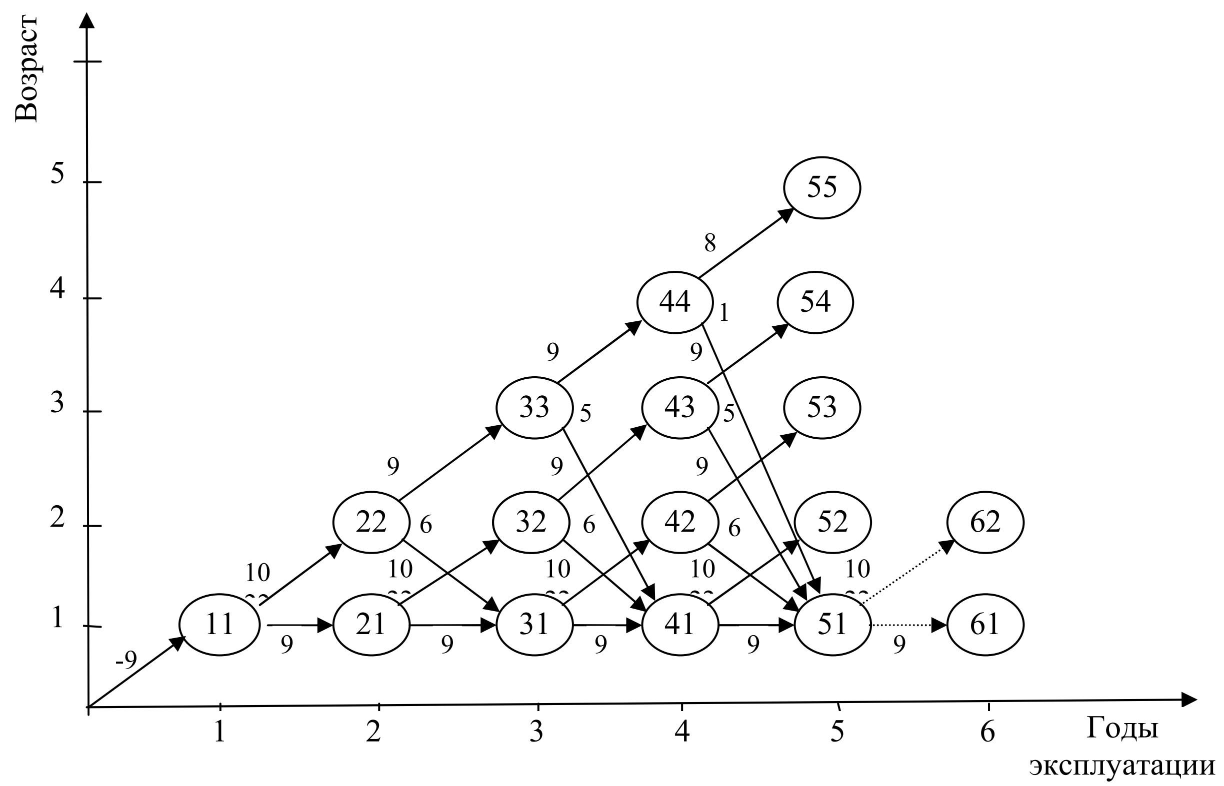


Рис. 7.12

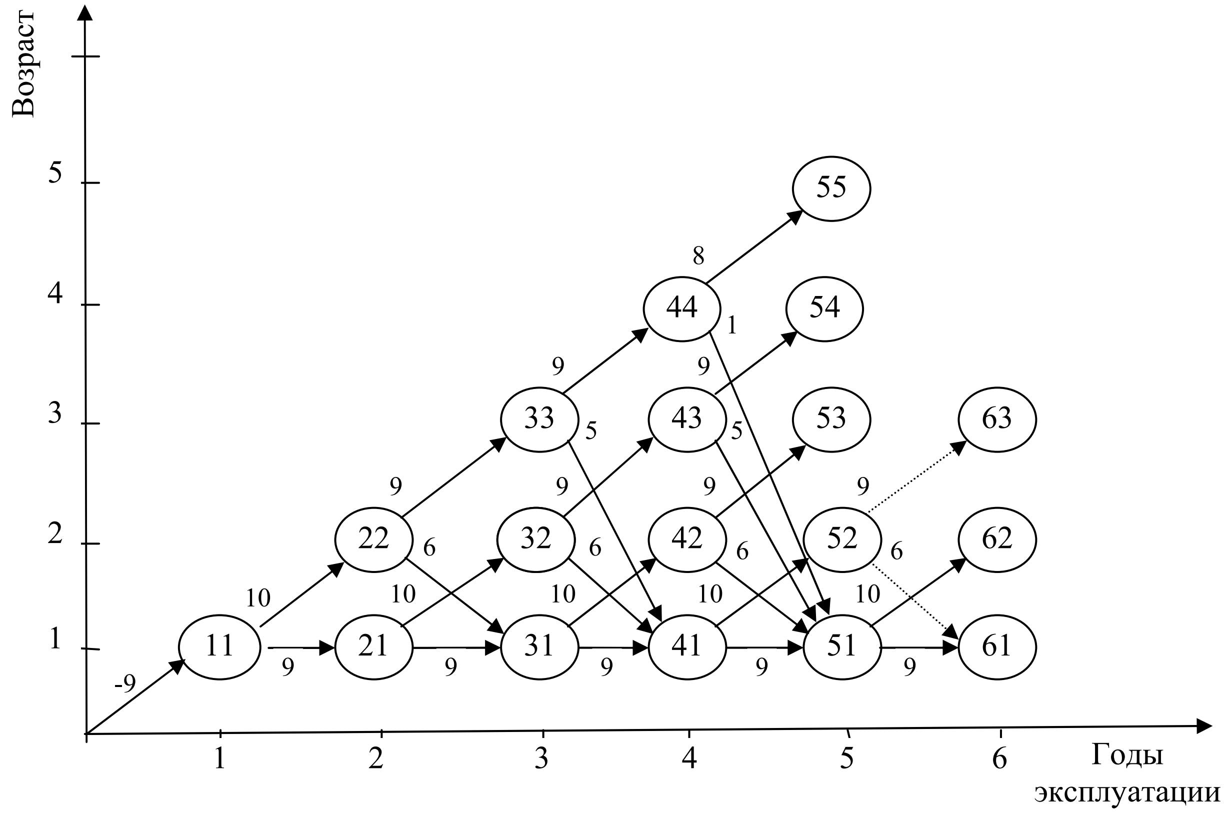


Рис. 7.13

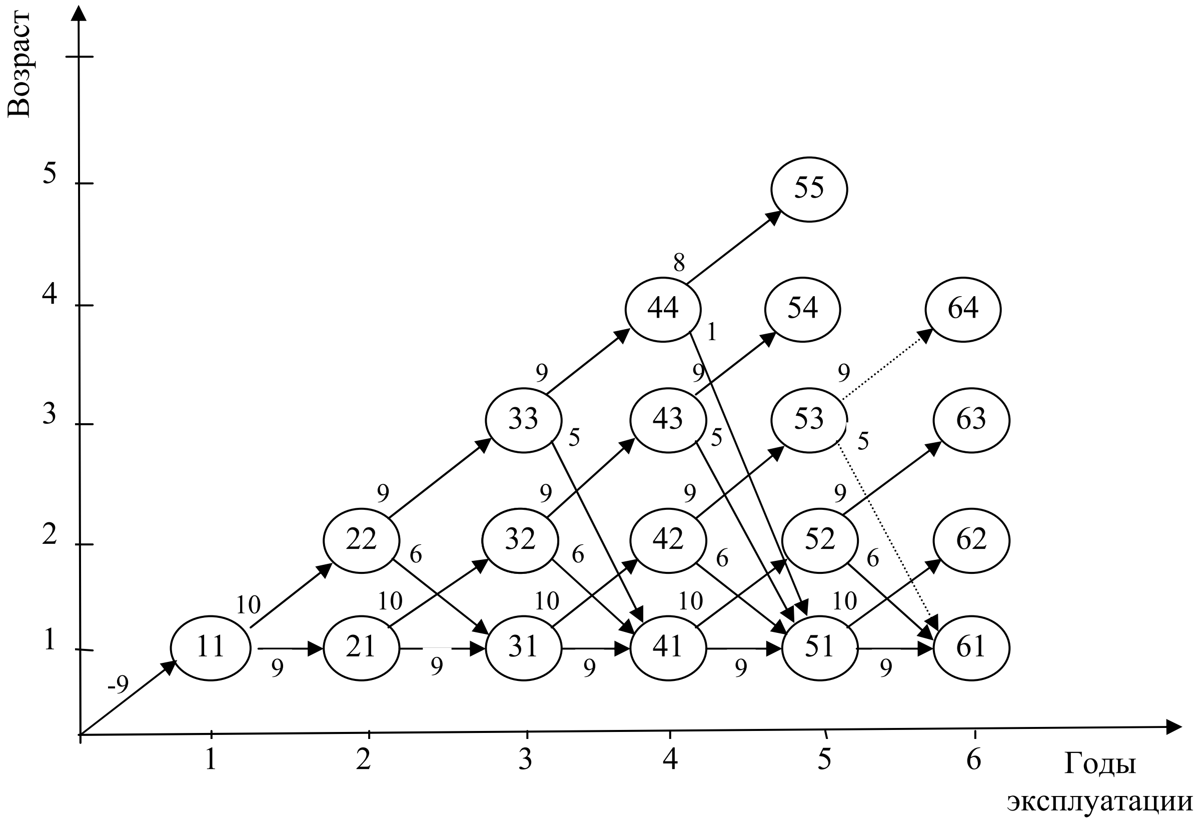


Рис. 7.14

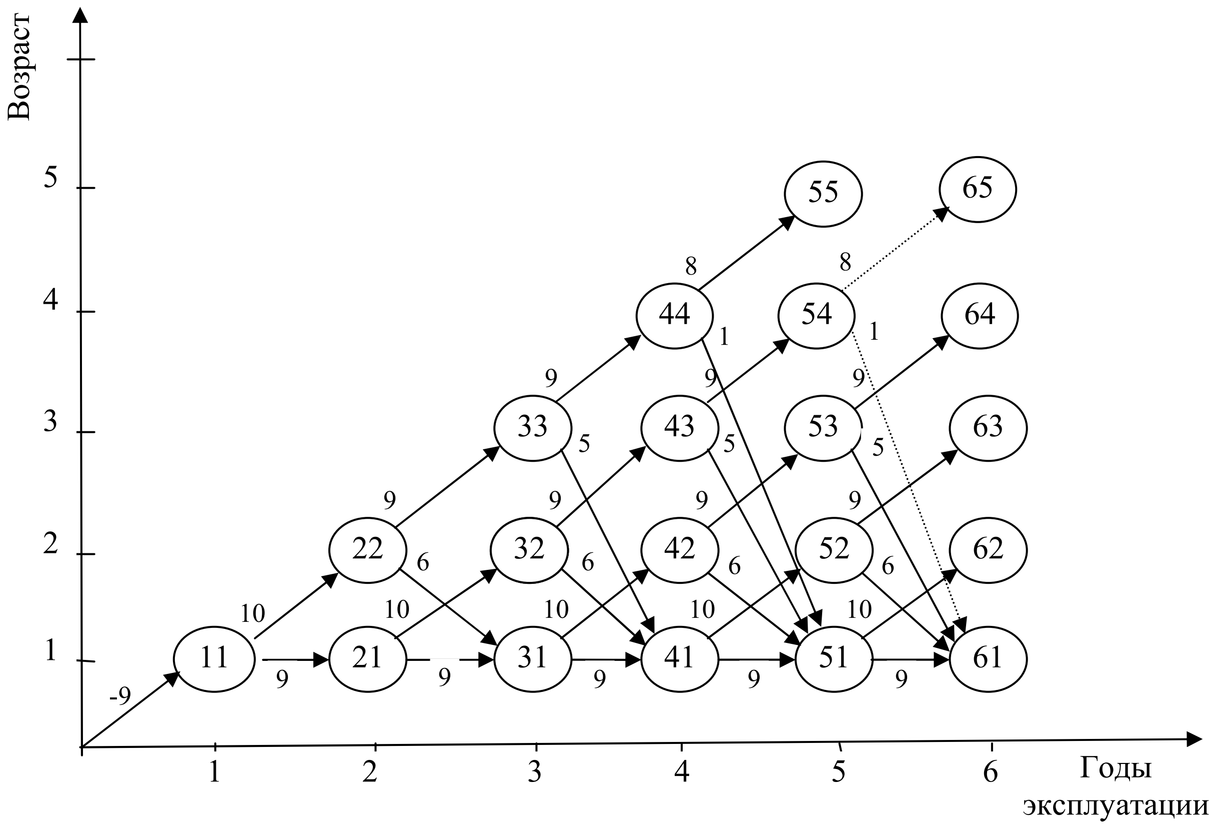


Рис. 7.15

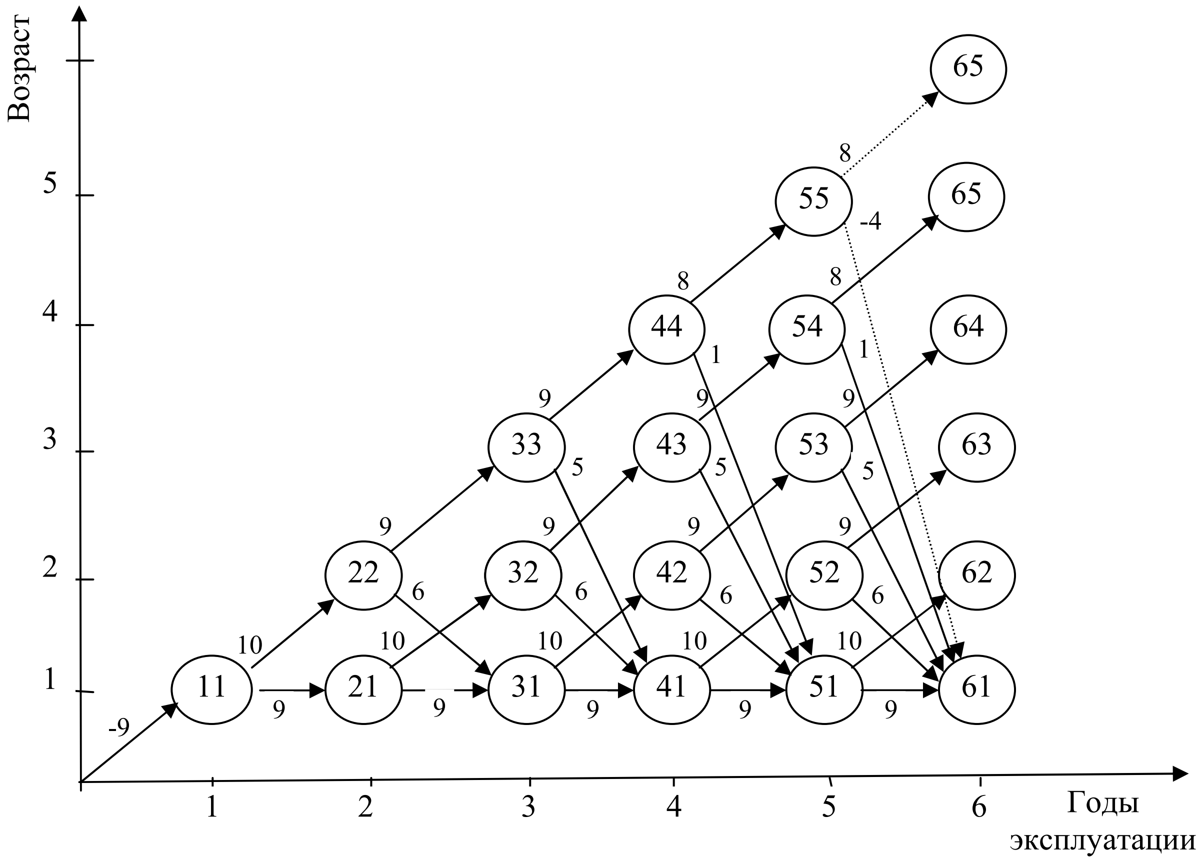


Рис. 7.16

Закончив маркировку стрелок, далее начинают обратный ход по графу, выясняя для каждого узла оптимальный переход (оптимальное решение).

Маркировка узлов к началу обратного хода должна отсутствовать.

На первом шаге обратного хода заполняют узлы 6-го календарного года. В них указывают, по какой остаточной стоимости продаем (продаем в любом случае) эксплуатируемое оборудование. В зависимости от его возраста, в узлах расставляем прибыль от продажи (рис. 7.17).

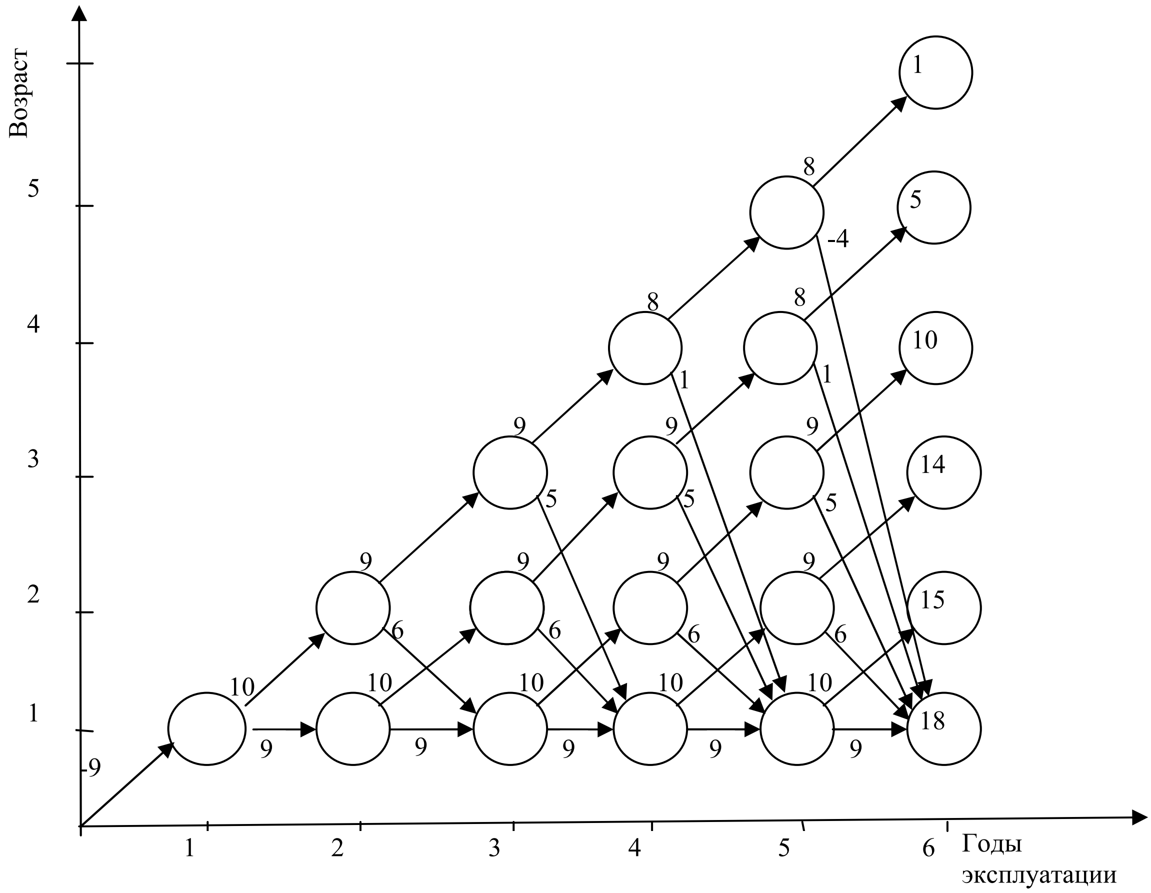
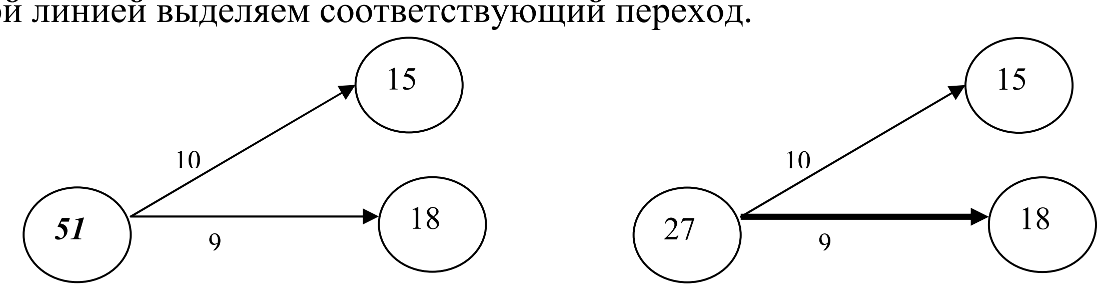


Рис. 7.17

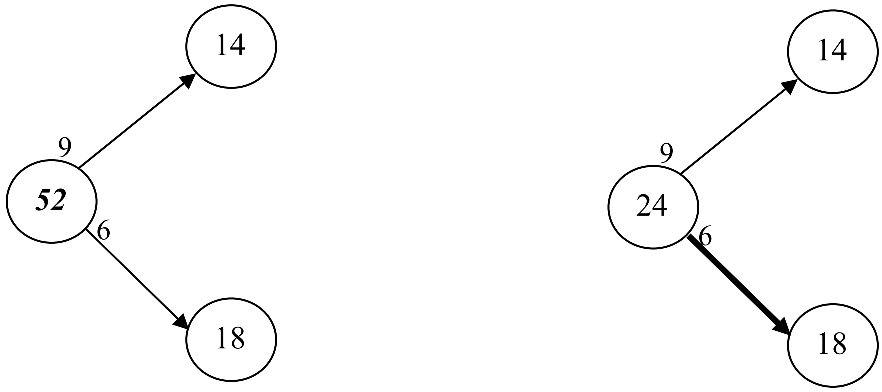
На втором шаге обратного хода заполняют узлы 5-го календарного года. Для каждого из них выясняем, какой переход принесет большую прибыль, учетом продажи оборудования в 6-м году.

Например, для узла ***5ì*** рассуждения следующие: переход вверх: прибыль 10+15=25; переход вправо: прибыль 9+18=27.

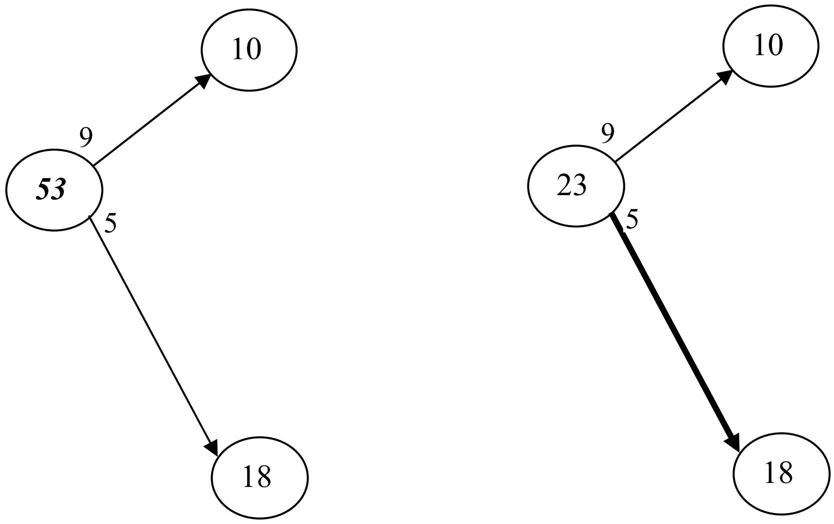
Выбираем большее значение прибыли, записываем внутрь узла, жирной линией выделяем соответствующий переход.



Для узла *52* рассуждения таковы: переход вверх: прибыль 9+14=23; переход вниз: прибыль 6+18=24. Выбираем большее значение прибыли, записываем внутрь узла, жирной линией выделяем соответствующий переход.



Для узла *53* рассуждения таковы: переход вверх: прибыль 9+10=19; переход вниз: прибыль 5+18=23. Выбираем большее значение прибыли, записываем внутрь узла, жирной линией выделяем соответствующий переход.



Дальнейшие расчеты обратного хода для узлов 5-го года выведены на полный граф (рис. 7.18).

На третьем шаге обратного хода заполняют узлы 4-го календарного года. Для каждого из них выясняем, какой переход принесет большую прибыль, учетом последующей наилучшей прибыли, уже рассчитанной в узлах 5-го года, не забывая выделять жирной линией оптимальный переход (рис. 7.19).

Аналогичным образом, последовательно заполняем остальные узлы (рис. 7.20, 7.21).

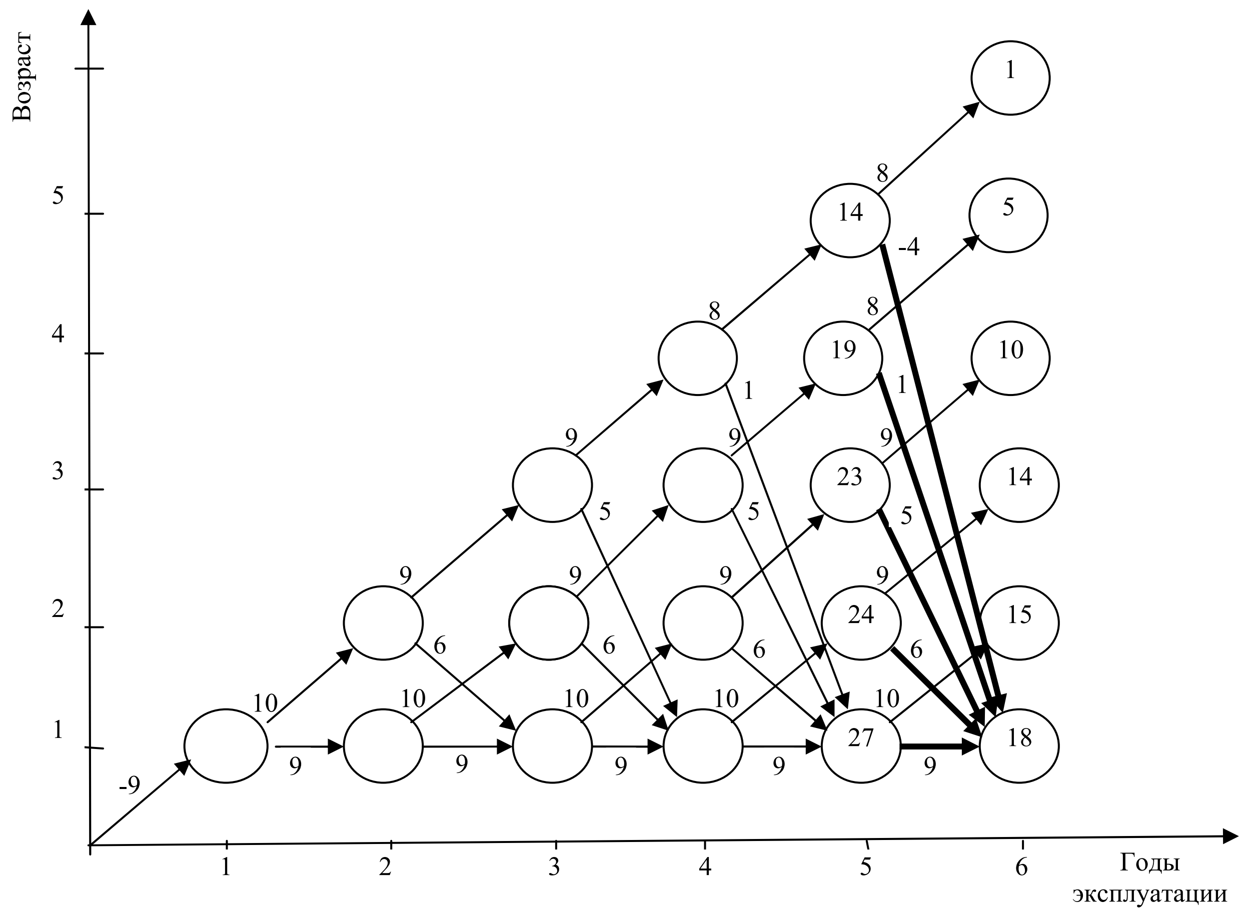


Рис. 7.18

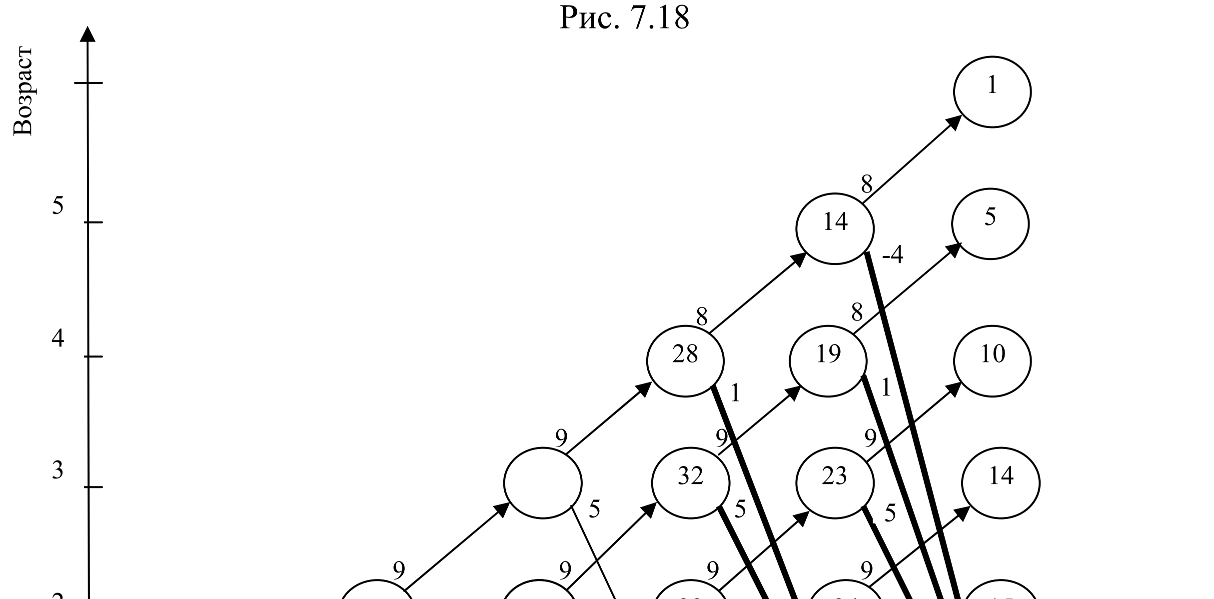


Рис. 7.19

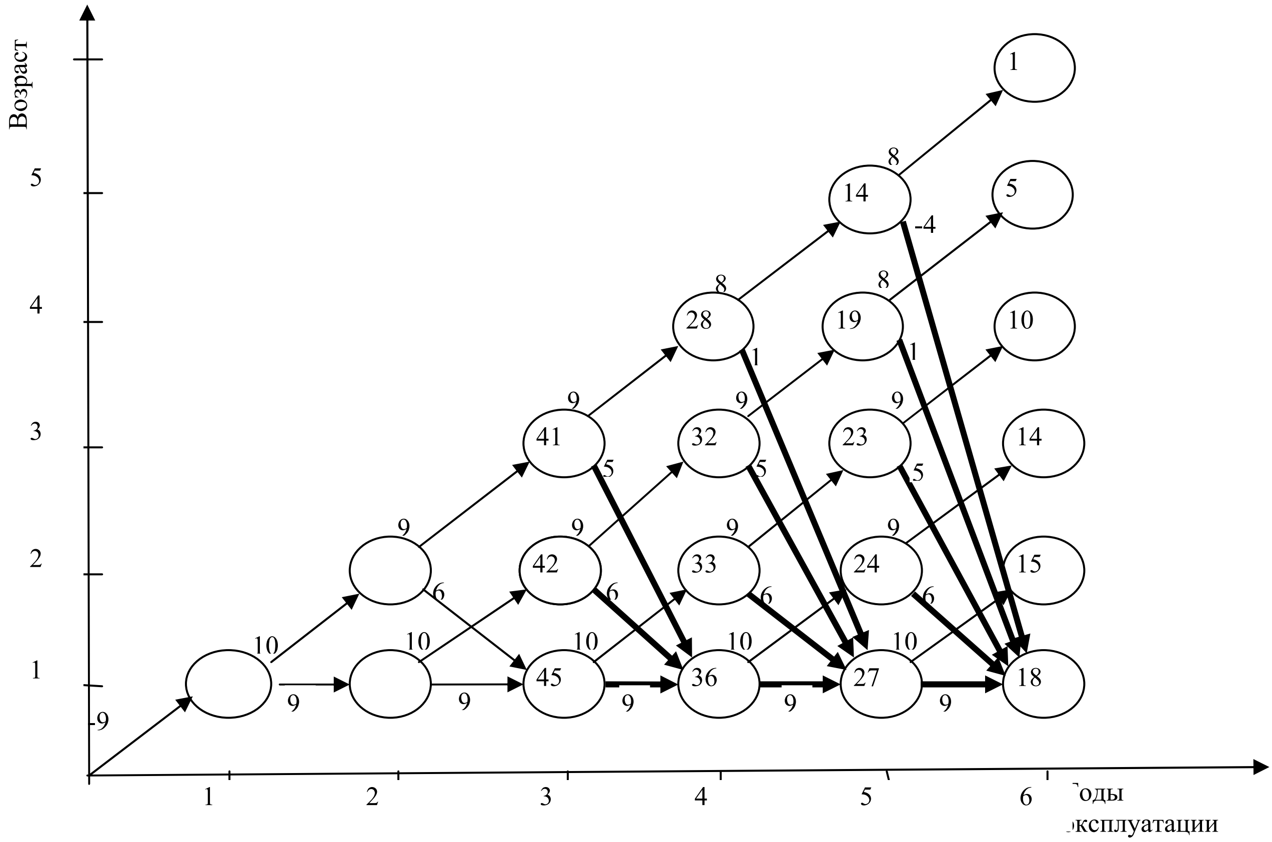


Рис. 7.20

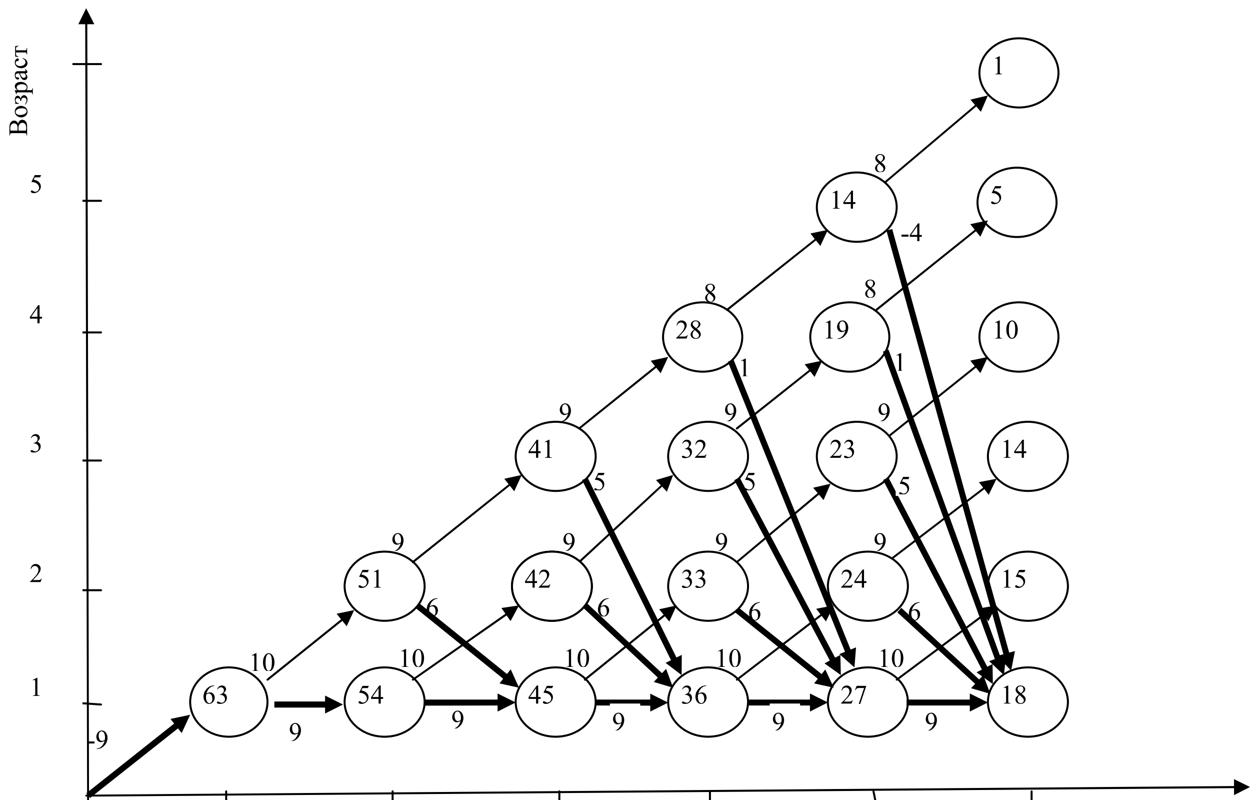


Рис. 7.21

Закончив заполнение графа, визуально по жирным стрелкам определяют траекторию оптимального перехода по всему периоду эксплуатации. В данном случае такая траектория единственная (рис. 7.22).

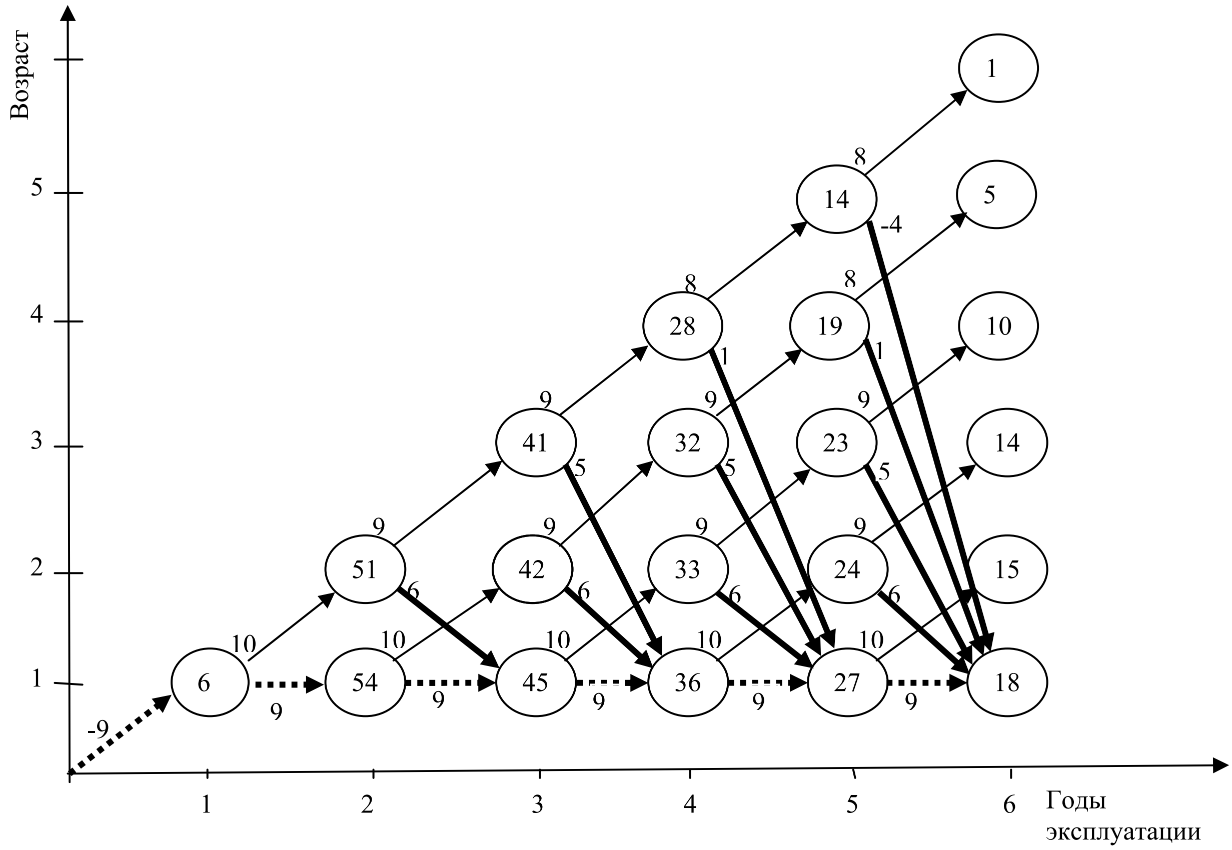


Рис. 7.22

Поскольку вся траектория состоит из стрелок вправо, нет ни одной стрелки вверх, делаем вывод о том, что выгоднее всего с точки зрения максимальной прибыли за 6 лет, обновлять оборудования каждый год.

Пример решения задачи на минимум издержек от эксплуатации оборудования

Исходные данные представлены в таблице:

Возраст оборудования	0	1	2	3	4	5
Стоимость нового оборудования	100					
Издержки	10	12	12	13	13	14
Остаточная стоимость		90	70	60	50	40

При заполнении графа предлагается использовать «быстрый» способ, основанный на следующем наблюдении: *независимо от позиции узла ха-*

рактеристики переходов от него совпадают с характеристиками других узлов того же горизонтального уровня.

Например, на рис. 7.23 для данных предыдущего примера показаны «одинаковые» переходы 1-го, 2-го и 2-го горизонтальных уровней.

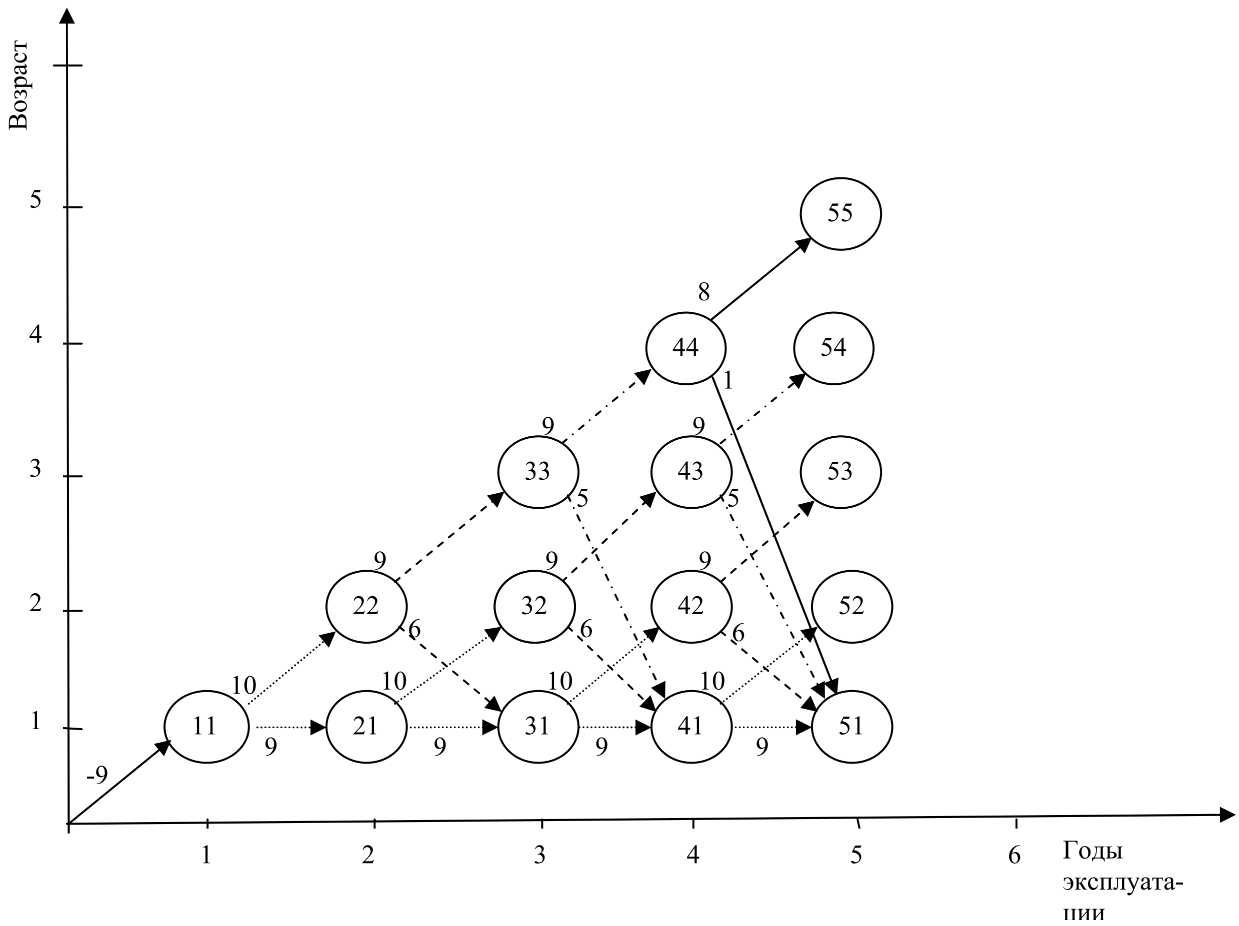


Рис. 7.23

Первый переход (рис. 7.24) от начала координат к узлу 11 означает, что:

✓ мы потратили 100 ед. на покупку нового оборудования;

✓ издержки по эксплуатации нового оборудования составят 10 ед.

✓ тем самым, текущее состояние величины издержек равно 110 ед.

От узла 11 (прошел 1 календарный год, возраст оборудования также 1 год) возможны два перехода (рис. 7.24):

✓ стрелка вверх, к узлу 22, будет означать, что «старое» оборудование продолжаем эксплуатировать, возраст оборудования 1 год, издержки 12 ед. (см. в таблице);

✓ стрелка вправо, к узлу 21, означает решение о продаже оборудования возраста 1 год по остаточной стоимости 90 ед., покупке нового оборудования за 100 ед., которое принесет издержки в 10 ед.; таким образом, совокупные издержки характеризуем числом (–90)+100+10=20 ед.

✓Остальные переходы первого горизонтального уровня расставляем без расчета, копируя переходы от узла ***11*** (рис. 7.24).

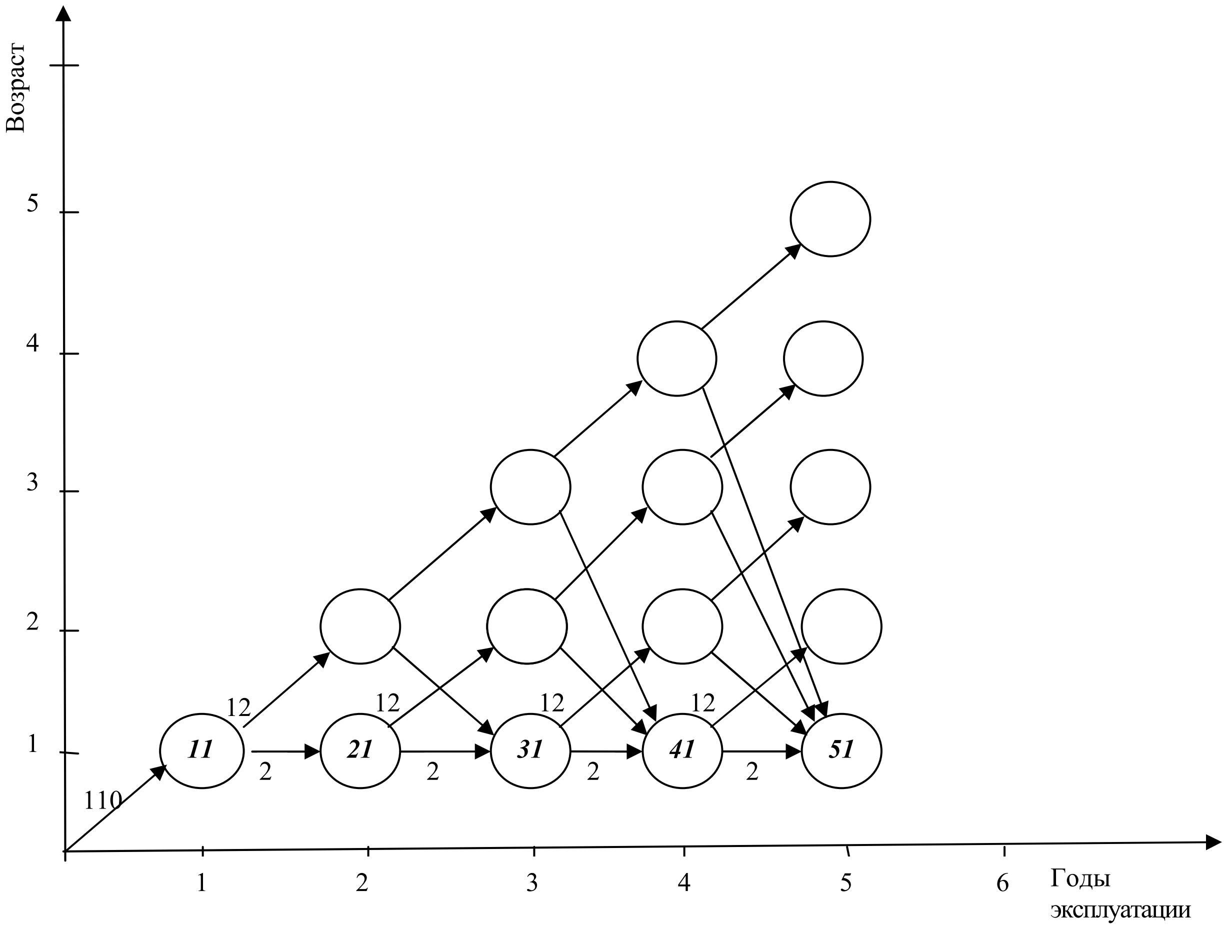


Рис. 7.24

От узла ***22*** (прошло 2 календарных года, возраст оборудования 2 года) возможны два перехода (рис. 7.25):

✓стрелка вверх, к узлу ***32***, будет означать, что «старое» оборудование продолжаем эксплуатировать, возраст оборудования 2 года, оно принесет 12 ед. издержек (см. в таблице);

✓стрелка вниз, к узлу ***31***, означает решение о продаже оборудования возраста 2 года по остаточной стоимости 70 ед., покупке нового оборудования за 100 ед., которое даст 10 ед. издержек; таким образом, совокупные издержки характеризуем числом (–70)+100+10=40 ед.

✓Остальные переходы второго горизонтального уровня расставляем без расчета, копируя переходы от узла ***22*** (рис. 7.25).

От узла ***32*** (прошло 3 календарных года, возраст оборудования 3 года) возможны два перехода (рис. 7.26):

✓ стрелка вверх, к узлу 44, будет означать, что «старое» оборудование продолжаем эксплуатировать, возраст оборудования 3 года, издержки составят 13 ед. (см. в таблице);

✓ стрелка вниз, к узлу 41, означает решение о продаже оборудования возраста 3 года по остаточной стоимости 60 ед., покупке нового оборудования за 100 ед., которое принесет прибыль 10 ед.; таким образом, совокупные издержки характеризуем числом (–60)+100+10=50 ед.

✓ Остальные переходы третьего горизонтального уровня расставляем без расчета, копируя переходы от узла 33 (рис. 7.26).

От узла 44 (прошло 4 календарных года, возраст оборудования 4 года) возможны два перехода (рис. 7.27):

✓ стрелка вверх, к узлу 55, будет означать, что «старое» оборудование продолжаем эксплуатировать, возраст оборудования 4 года, издержки составят 13 ед. (см. в таблице);

✓ стрелка вниз, к узлу 51, означает решение о продаже оборудования возраста 4 года по остаточной стоимости 50 ед., покупке нового оборудования за 100 ед., которое принесет прибыль 10 ед.; таким образом, издержки характеризуем числом (–50)+100+10=60 ед.

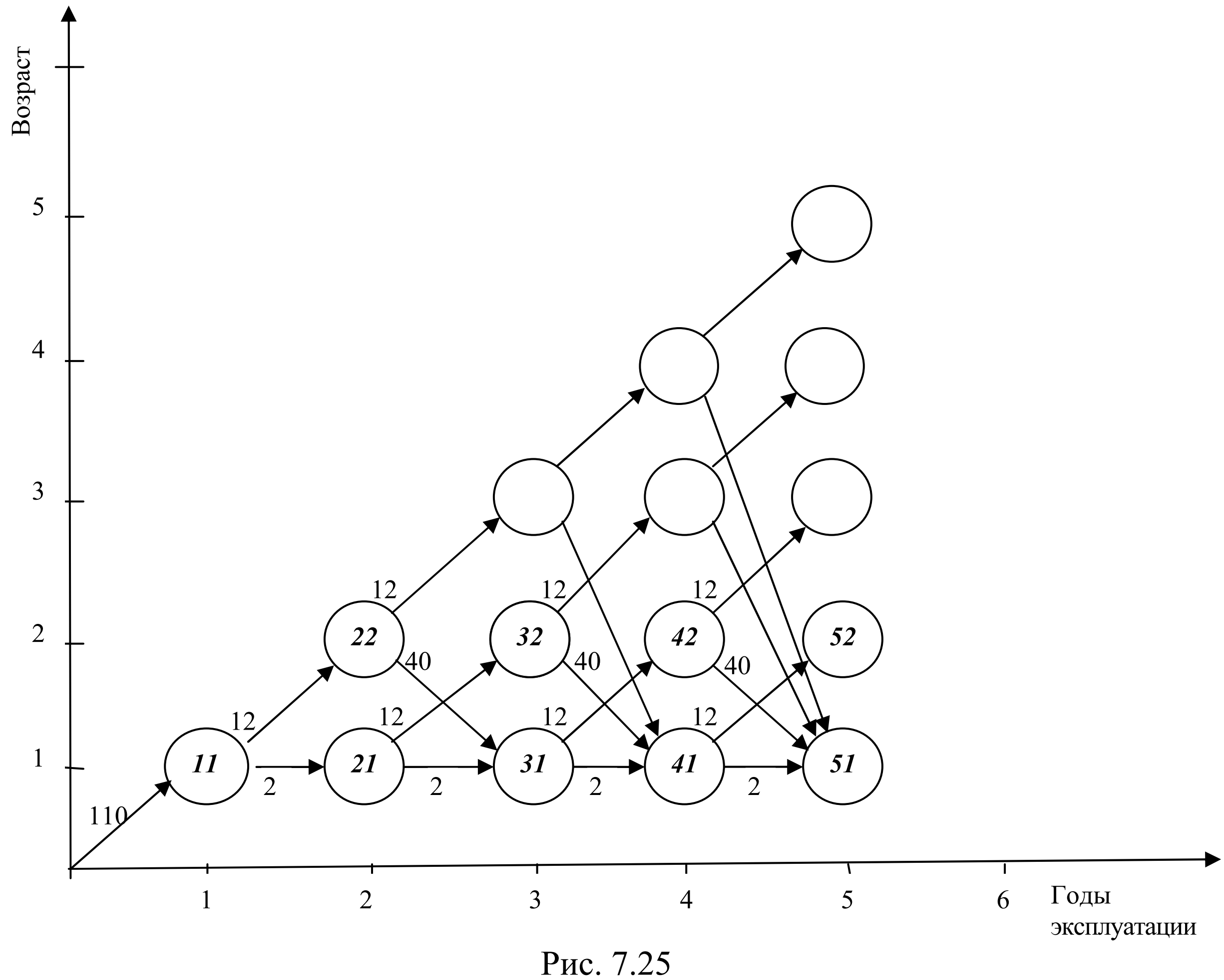


Рис. 7.25

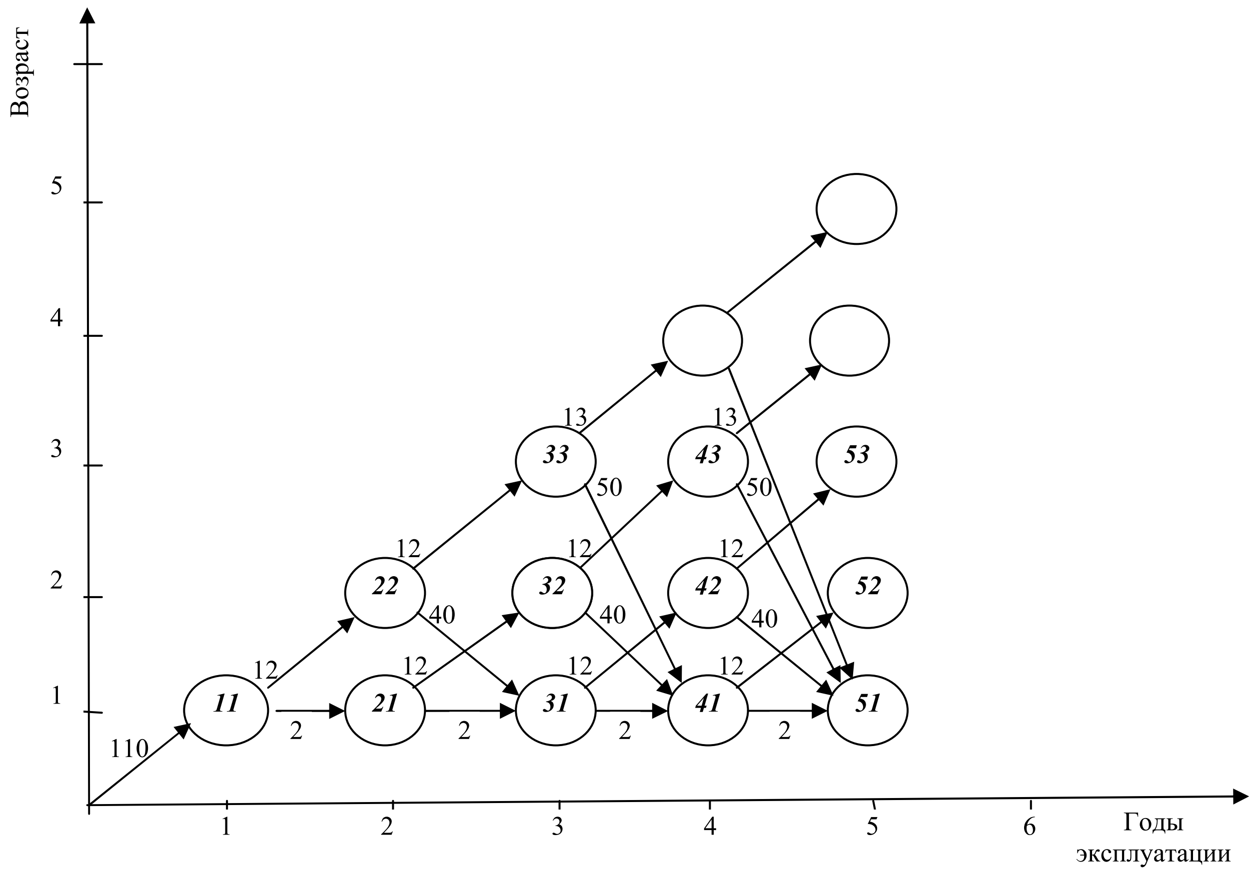


Рис. 7.26

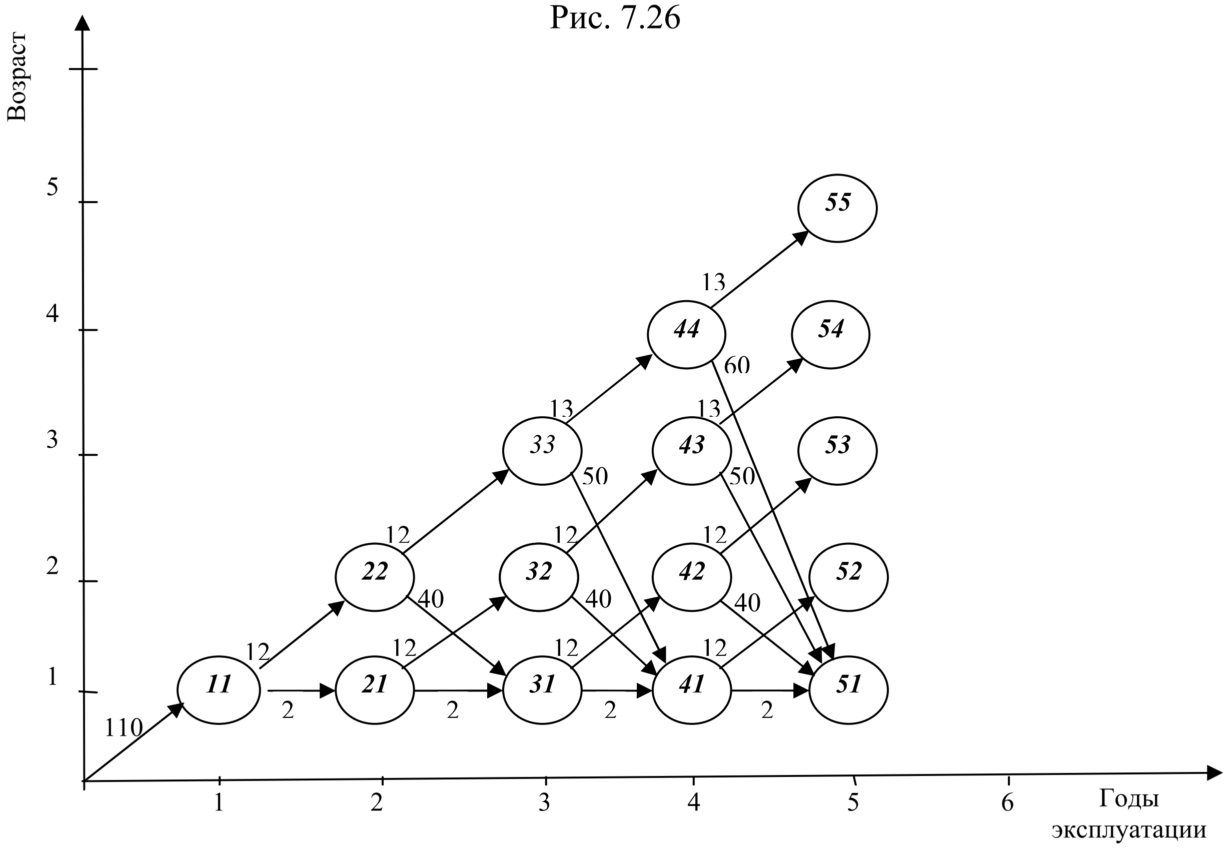


Рис. 7.27

Закончив маркировку стрелок, далее начинают обратный ход по графу, выясняя для каждого узла оптимальный переход (оптимальное решение) для минимизации издержек.

Маркировка узлов к началу обратного хода должна отсутствовать.

На первом шаге обратного хода заполняют узлы 5-го календарного года. В них указывают, по какой остаточной стоимости продаем (продаем в любом случае) эксплуатируемое оборудование. В зависимости от его возраста, в узлах расставляем прибыль от продажи, которая влияет на суммарные издержки, уменьшая их, поэтому прибыль указываем со знаком минус (рис. 7.28).

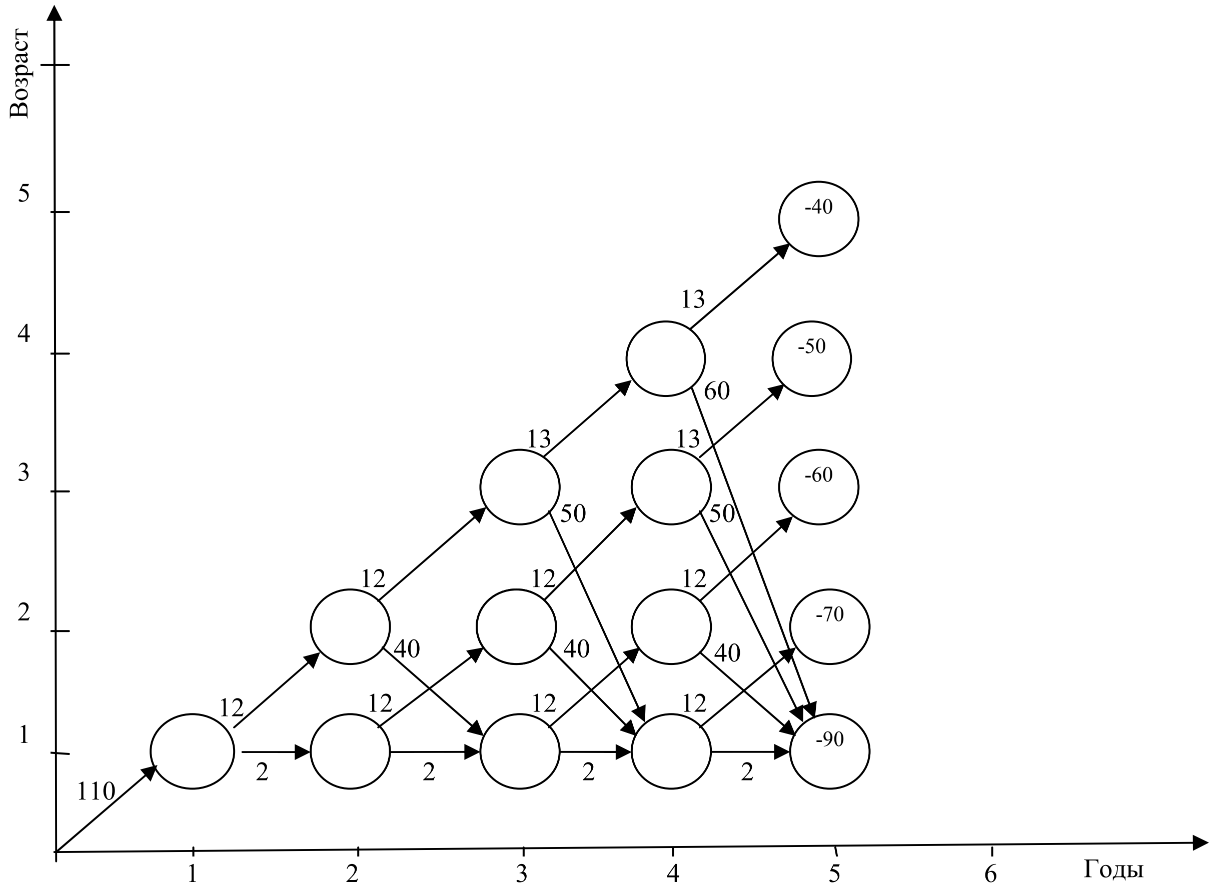


Рис. 7.28

На втором шаге обратного хода заполняют узлы 4-го календарного года. Для каждого из них выясняем, какой переход принесет меньшие издержки, учетом продажи оборудования в 5-м году (рис. 7.29).

Для узла 44 рассуждения таковы: переход вверх: издержки равны 13+(–40)= –27; переход вниз: издержки составят 60+(–90)= –30. Выбираем меньшее значение издержек, записываем внутрь узла, жирной линией выделяем соответствующий переход.

Для узла 43 рассуждения таковы: переход вверх: издержки равны 13+(–50)= –37; переход вниз: издержки составят 50+(–90)= –40. Выбираем меньшее значение издержек, записываем внутрь узла, жирной линией выделяем соответствующий переход.

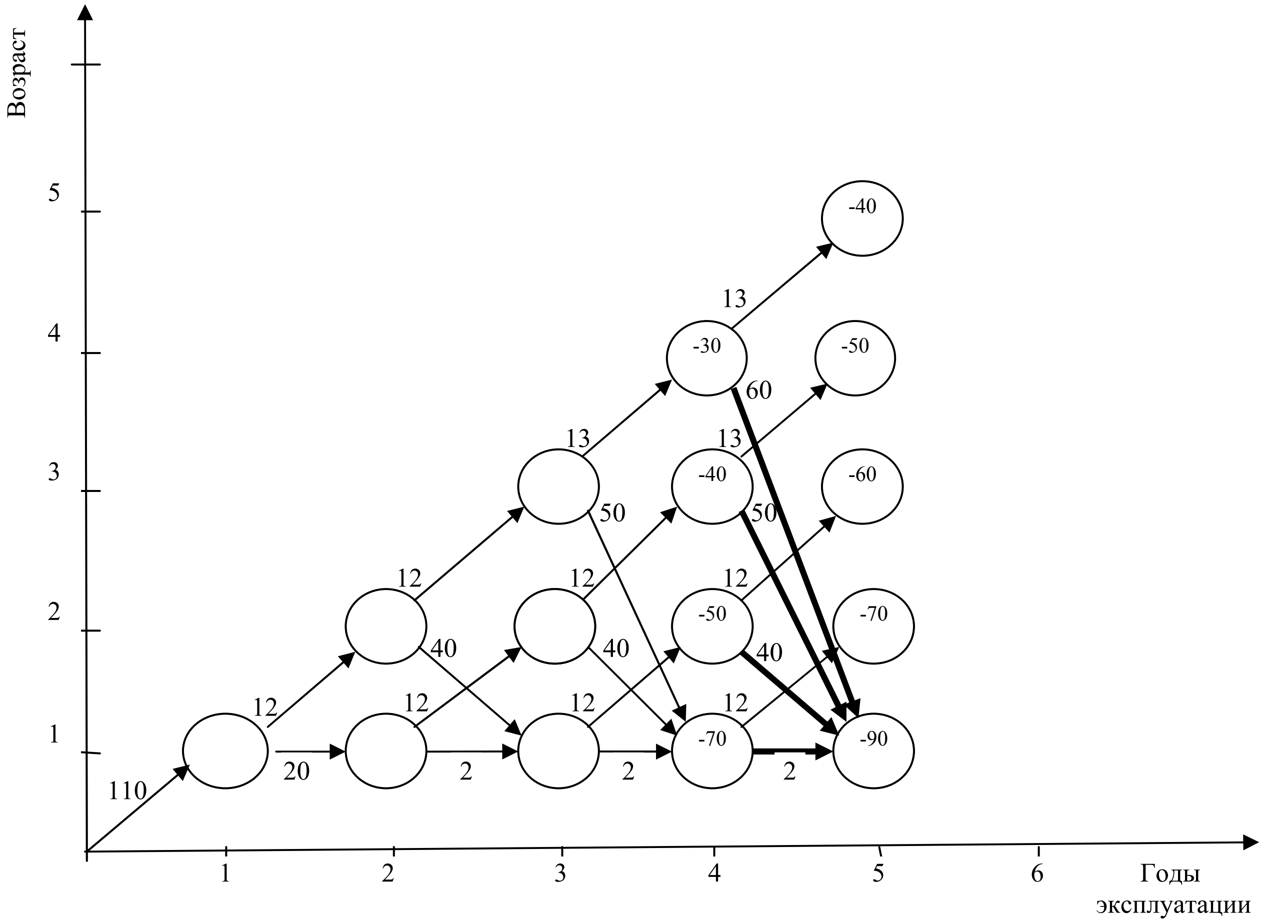


Рис. 7.29

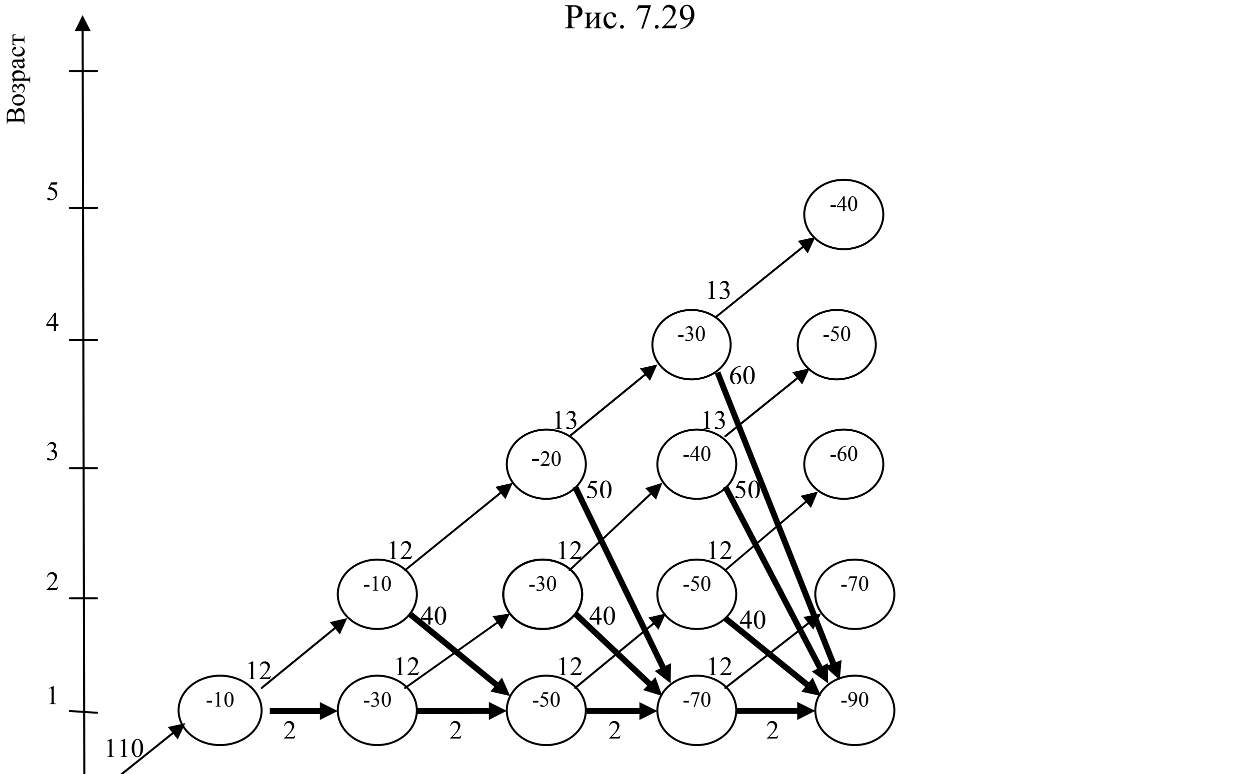


Рис. 7.30

Для узла *42* рассуждения таковы: переход вверх: издержки равны 12+(–60)= –48; переход вниз: издержки составят 40+(–90)= –50. Выбираем меньшее значение издержек, записываем внутрь узла, жирной линией выделяем соответствующий переход.

Для узла *41* рассуждения таковы: переход вверх: издержки равны 12+(–70)= –52; переход вниз: издержки составят 20+(–90)= –70. Выбираем меньшее значение издержек, записываем внутрь узла, жирной линией выделяем соответствующий переход.

Аналогичным образом продолжаем маркировку оставшихся узлов. Очевидно, что существует единственная оптимальная траектория (рис. 7.31).

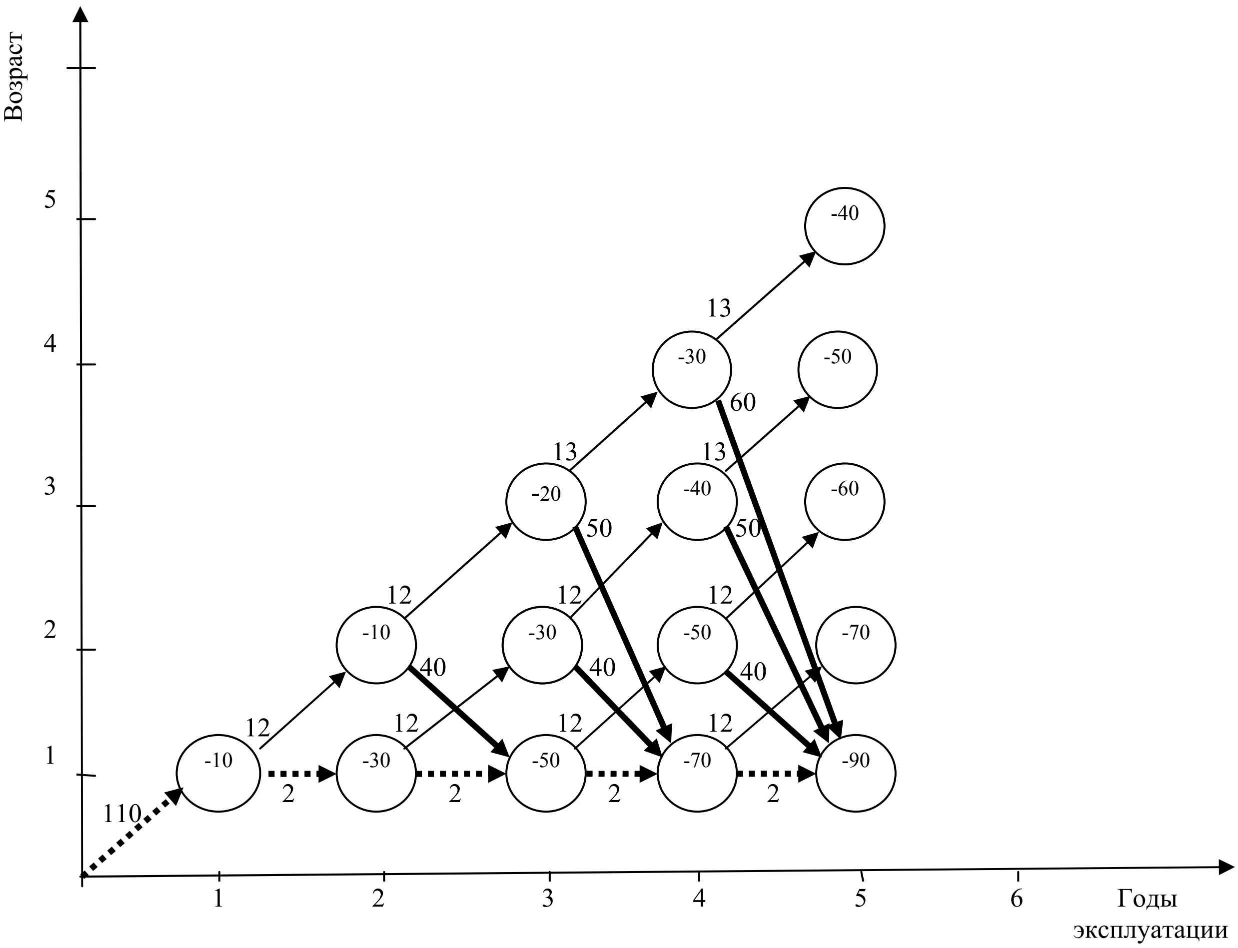


Рис. 7.31

Следовательно, в условиях данного примера, для оптимизации издержек необходимо обновлять оборудование каждый год.

Следует отметить, что зачастую оптимальная траектория не является единственной. Это иллюстрируется решением нижеследующей задачи, все выкладки по которой сделаны на одном графе (рис. 7.32), как собственно и следует оформлять процесс решения при самостоятельной его проработке.

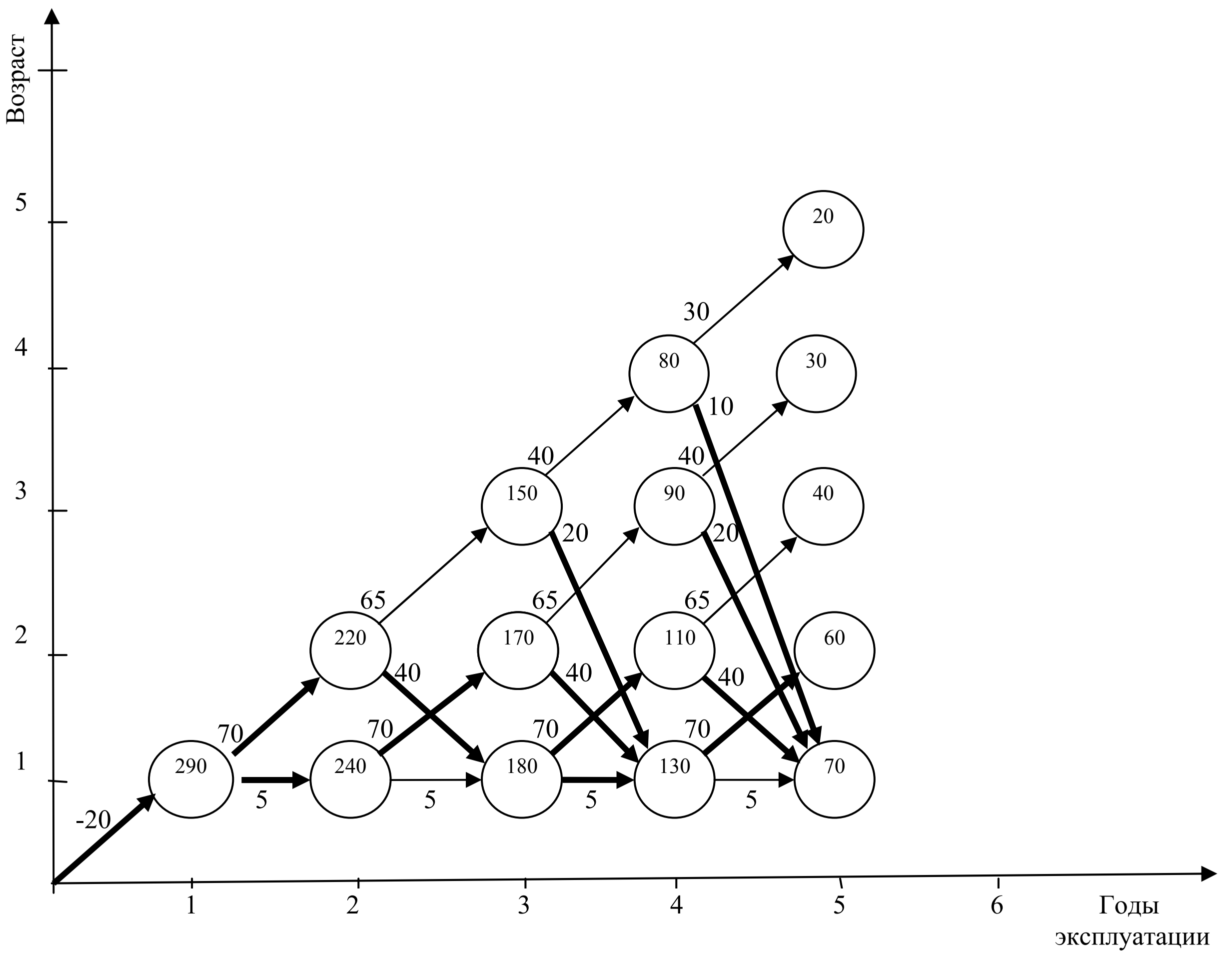


Рис. 7.32

Пример.

Найти оптимальный план замены оборудования на 5-летний период, если известны:

- прибыль от эксплуатации оборудования $r(t)$ в зависимости от возраста;
- остаточная стоимость $s(t)$ оборудования в зависимости от возраста;
- стоимость нового оборудования $S_0 = 90$.

Возраст	0 новое	1	2	3	4	5
Прибыль $r(t)$	70	70	65	40	30	
Остаточная стоимость $s(t)$		70	60	40	30	20

По выделенным стрелкам видны три оптимальные траектории (рис. 7.33, 7.34, 7.35).

Траектория рис. 7.33 означает следующее оптимальное управление по годам:

Год	1	2	3	4	5
Управление	сохраняем	обновляем	сохраняем	обновляем	продаем

Траектория рис. 7.34 означает следующее оптимальное управление по годам:

Год	1	2	3	4	5
Управление	обновляем	сохраняем	обновляем	сохраняем	продаем

Траектория рис. 7.35 означает следующее оптимальное управление по годам:

Год	1	2	3	4	5
Управление	сохраняем	обновляем	обновляем	сохраняем	продаем

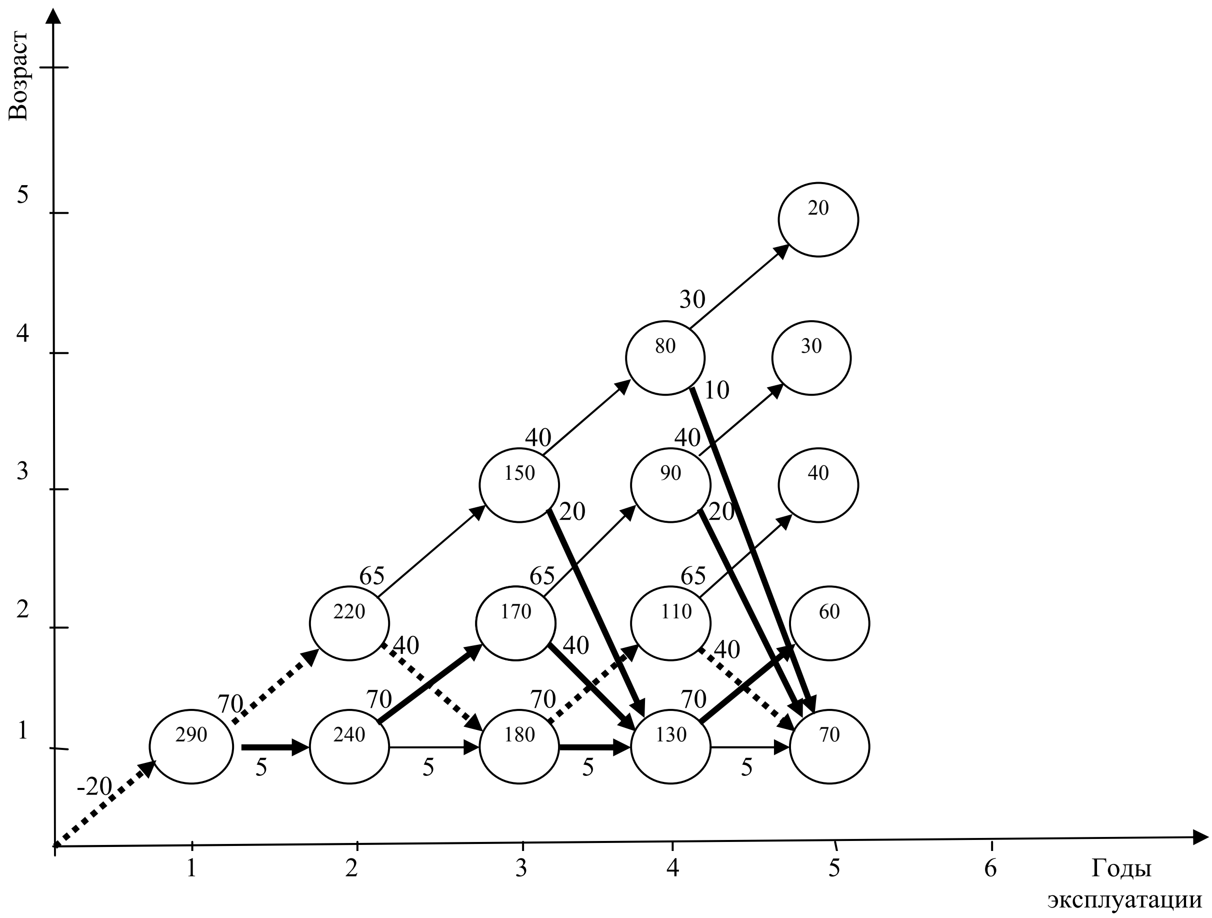


Рис. 7.33

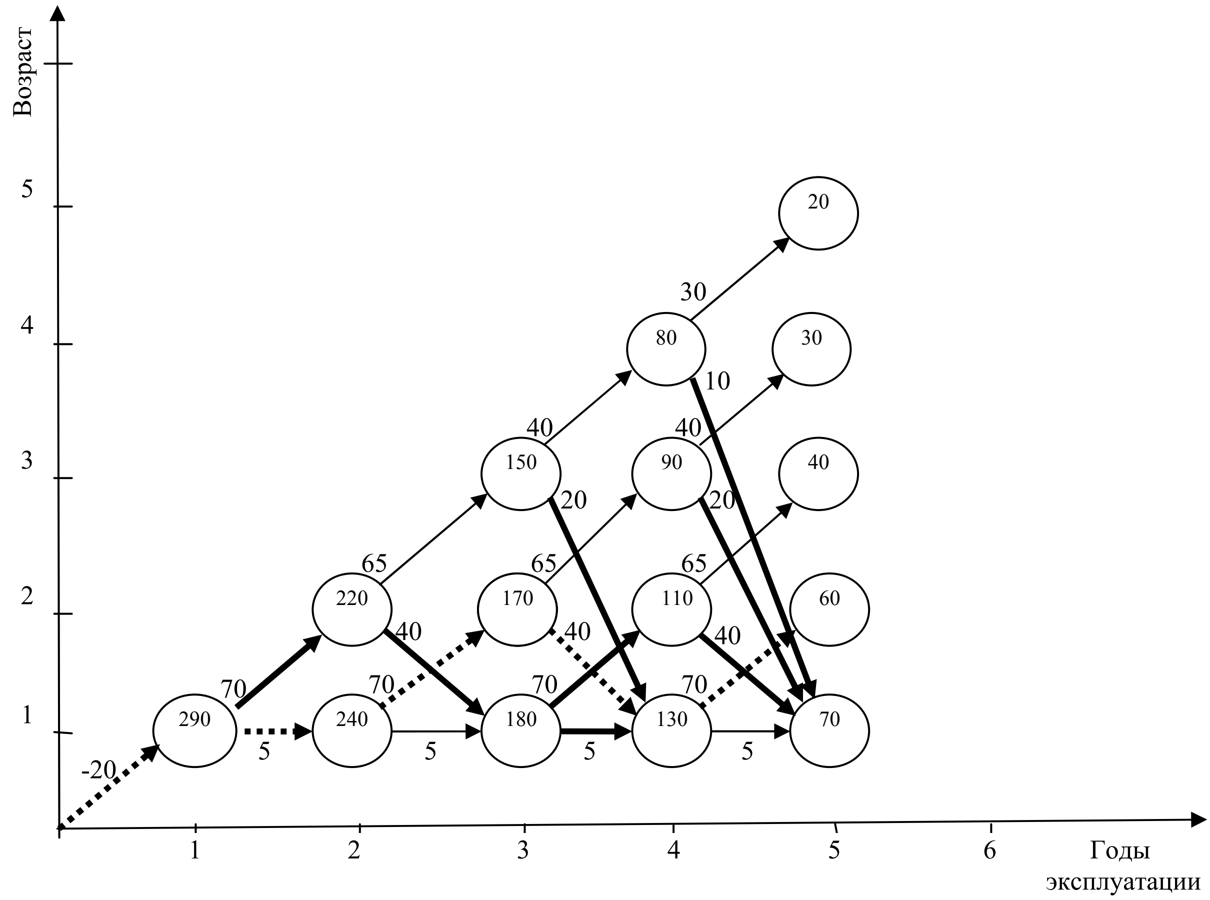


Рис. 7.34

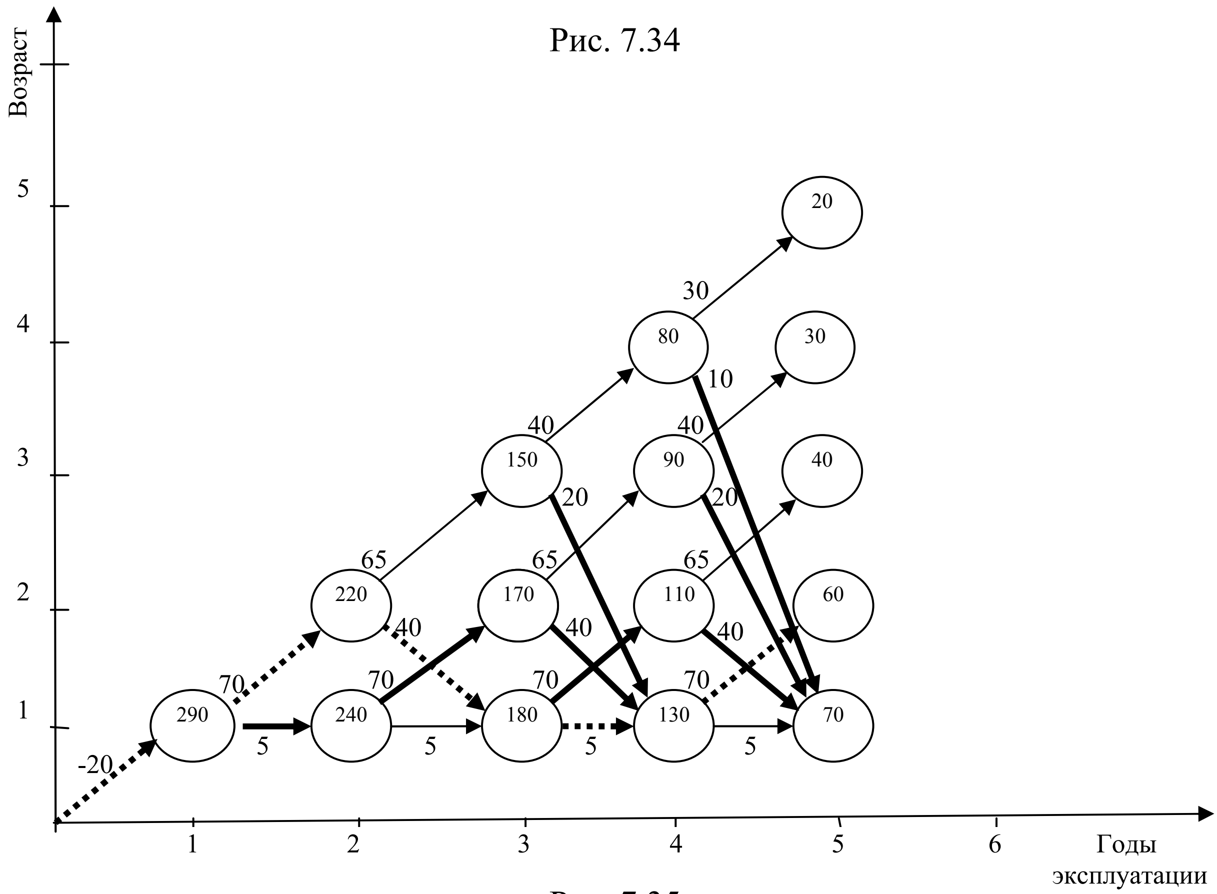


Рис. 7.35

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе представлен обзор методов исследования операций, применяемых при построении и исследовании моделей принятия экономических решений. Авторы ограничиваются рассмотрением экономических задач с детерминированными исходными данными. Краткое описание типов рассматриваемых здесь задач таково: в экономике часто возникает ситуация, когда имеется множество способов (планов) выполнить определенное задание, такие планы называют допустимыми. В этом случае возникает задача выбора из всех допустимых планов наилучшего в некотором смысле. С математической точки зрения эта задача может быть сведена к определению экстремума некоторой целевой функции, заданной на множестве допустимых планов. В результате получается задача оптимизации при наличии ограничений, причем с экономической точки зрения эти ограничения выражают условия ограниченности ресурсов. Оптимальных решений может быть несколько; поэтому приходиться выбирать одно из них, основываясь на дополнительных соображениях содержательного характера, не отраженных в построенной математической модели.

Маловероятно, что теория непременно даст наилучшее решение, его в большинстве сложных ситуаций просто не существует. Но, бесспорно, теория позволяет отсеивать заведомо худшие варианты, предохраняя тем самым от грубых ошибок. Кроме того, процесс формализации задачи выявляет характер дополнительной информации, на базе которой множество альтернатив может быть сужено, что увеличивает шансы на правильный выбор оптимальной стратегии. Иначе говоря, овладение методами логико-математического анализа решения оптимизационных экономических задач позволяет глубже проникнуть в суть изучаемой проблемы.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Шикин, Е.В. Исследование операций [Текст] / Е.В. Шикин, Г.Е. Шикина. – М.: Проспект, 2006.

2. Акулич, И.Л. Математическое программирование в примерах и задачах [Текст] / И.Л. Акулич. – М.: Высшая школа, 1986.

3. Грешилов, А.А. Прикладные задачи математического программирования [Текст] / А.А. Грешилов. – М.: Логос, 2006.

4. Математические модели в природе и обществе [Текст] / Н.Н. Калиткин [и др.]. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2005.

5. Минюк, С.А. Математические методы и модели в экономике [Текст] / С.А. Минюк, Е.А. Ровба, К.К. Кузьмич. – Минск: ТетраСистемс, 2002.

6. Конюховский, П.В. Математические методы исследования операций в экономике [Текст] / П.В. Конюховский. – СПб.: Питер, 2000.

7. Задачи оптимизации в экономике. Методы и решения [Текст]: курс лекций. – Рязань: РВШ МВД России, 1993г.

8. Красс, М.С. Основы математике и ее приложения в экономическом образовании [Текст] / М.С. Красс, Б.П. Чупрынов. – М.: Дело, 2001.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Научное издание

Куимова Елена Ивановна
Ячинова Светлана Николаевна
Снежкина Ольга Викторовна

ОПТИМИЗАЦИОННЫЕ ЗАДАЧИ В ЭКОНОМИКЕ

Монография

В авторской редакции
Верстка Н.А. Сазонова

Подписано в печать 10.04.14. Формат 60×84/16.
Бумага офисная «Снегурочка». Печать на ризографе.
Усл.печ.л. 8,14. Уч.-изд.л. 8,75. Тираж 500 экз. 1-й завод 100 экз.
Заказ № 119.

Издательство ПГУАС.
440028, г. Пенза, ул. Германа Титова, 28.