МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«Пензенский государственный университет
архитектуры и строительства»
(ПГУАС)

Е.И. Куимова, О.В. Снежкина, С.Н. Ячинова

ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА
Практикум

Рекомендовано Редсоветом университета
в качестве учебного пособия для студентов,
обучающихся по направлению 38.03.01 «Экономика»

Пенза 2014

УДК 512.64(075.8)
ББК 22.143я73
К89

Рецензенты: кандидат педагогических наук, доцент 13 кафедры (общепрофессиональных дисциплин) Т.Ю.Новичкова (ПАИИ);
кандидат педагогических наук, доцент кафедры математики и математического моделирования Г.А.Левова (ПГУАС)

Куимова Е.И.
К89 Линейная алгебра. Практикум: учеб. пособие / И.Е. Куимова, О.В. Снежкина, С.Н. Ячинова. – Пенза: ПГУАС, 2014. – 96 с.

Настоящее учебное пособие представляет собой руководство к решению задач линейной алгебры. Излагаемые теоретические вопросы сопровождаются задачами, приводимыми с решениями. Содержит варианты заданий для самостоятельного решения.

Данное учебное пособие соответствует образовательным стандартам третьего поколения направления 38.03.01 «Экономика» (квалификация бакалавр) и рекомендуется при изучении дисциплины «Линейная алгебра».

Подготовлено на кафедре «Математика и математическое моделирование» и предназначено для студентов обучающихся по направлению 38.03.01 «Экономика», может быть использовано преподавателями, заинтересованными в освоении методов линейной алгебры.

ПРЕДИСЛОВИЕ

В настоящее время имеется много учебных пособий для студентов высших учебных заведений, но ощущается потребность в пособии, в котором основное внимание было уделено решению практических задач.

Основная цель данной работы – на простых примерах изложить основные методы и приемы линейной алгебры. Оно призвано помочь студентам со скромной математической подготовкой освоить курс линейной алгебры. Может использоваться при самостоятельной работе студентами дневного и заочного отделений, а также при дистанционном обучении.

Содержание охватывает основные вопросы линейной алгебры. Подробно рассмотрены такие вопросы как определители, матрицы, системы линейных уравнений, линейные пространства, линейные операторы, собственные векторы, квадратичные формы.

Весь материал разбит на главы, а главы – на параграфы. В каждом параграфе рассматриваются необходимые теоретические сведения, затем разбираются основные примеры. После каждого параграфа приводятся задачи для самостоятельного решения. Также в конце пособия имеются варианты индивидуальных заданий, которые помогут проверить уровень освоения дисциплины.

За основу пособия принят материал курса «Линейная алгебра», читаемый студентам, обучающимся по направлению 38.03.01 «Экономика».

1. МАТРИЦЫ И ОПРЕДЕЛИТЕЛИ

§1. Определители, свойства определителей, вычисление

Определителем n-го порядка называется число Δ_n, записываемое в виде квадратной таблицы

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \qquad (1)$$

и вычисляемое, по правилу указанному ниже по заданным числам a_{ij} $(i, j = \overline{1,n})$, которые называются ***элементами определителя***. Индекс i указывает номер строки, а j – номер столбца квадратной таблицы (1), на пересечении которых находится элемент a_{ij}.

Любая строка или столбец таблицы (1) называется *рядом*.

Главной диагональю определителя называется называется совокупность элементов $a_{11}, a_{22}, ..., a_{nn}$.

Минором M_{ij} элемента a_{ij} называется определитель $(n-1)$-го порядка, полученный из определителя n-го порядка вычеркиванием i-й строки и j-го столбца.

Алгебраическое дополнение A_{ij} элемента определяется равенством

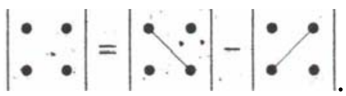
$$A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}.$$

Значение определителя Δ_n вычисляется по следующему правилу.

Для $n = 2$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21}. \qquad (2)$$

Вычисление определителя второго порядка иллюстрируется схемой:



Например,

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & -5 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = 1 \cdot 2 - (-5) \cdot 4 = 2 + 20 = 22.$$

Если элементами определителя являются некоторые функции, то данный определитель тоже функция, но может быть и числом. Например,

$$\begin{vmatrix} \cos x & \sin x \\ \sin x & \cos x \end{vmatrix} = \cos^2 x - \sin^2 x = \cos 2x;$$

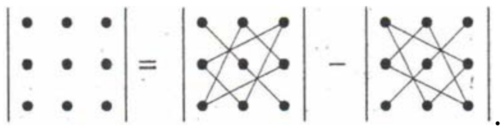
$$\begin{vmatrix} \cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x \end{vmatrix} = \cos^2 x + \sin^2 x = 1.$$

При вычислении определителя третьего порядка Δ_3 удобно пользоваться ***правилом треугольников*** (или Саррюса):

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} + a_{13} \cdot a_{21} \cdot a_{32} + a_{31} \cdot a_{12} \cdot a_{23} -$$

$$- a_{13} \cdot a_{22} \cdot a_{31} - a_{11} a_{23} a_{32} - a_{33} \cdot a_{12} \cdot a_{21}.$$

Символически правило треугольников можно записать следующим образом:



Например,

$$\begin{vmatrix} 5 & -2 & 1 \\ 3 & 2 & -4 \\ 0 & 6 & 3 \end{vmatrix} = 5 \cdot 2 \cdot 3 + 1 \cdot 3 \cdot 6 + 0 \cdot (-2) \cdot (-4) -$$

$$-1 \cdot 2 \cdot 0 - 5 \cdot (-4) \cdot 6 - 3 \cdot (-2) \cdot 3 = 30 + 18 + 0 - 0 + 120 + 18 = 186.$$

Основные свойства определителей:

1) значение определителя не изменится, если все его строки заменить соответствующими столбцами, и наоборот:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix};$$

2) при перестановке местами двух параллельных рядов определитель изменит знак на противоположный;

3) определитель с двумя одинаковыми параллельными рядами равен нулю;

4) если все элементы некоторого ряда определителя имеют общий множитель, то его можно вынести за знак определителя. Отсюда следует, что если элементы какого-либо ряда умножить на число λ, то определитель Δ_n умножится на это же число λ;

5) если все элементы некоторого ряда определителя равны нулю, то определитель также равен нулю;

6) определитель, у которого элементы двух параллельных рядов соответственно пропорциональны, равен нулю;

7) если элементы какого-либо ряда определителя представляют собой суммы двух слагаемых, то определитель может быть разложен на сумму двух определителей, в первом из которых соответствующий ряд состоит из первых слагаемых, а во втором – из вторых слагаемых:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13}+b \\ a_{21} & a_{22} & a_{23}+c \\ a_{31} & a_{32} & a_{33}+d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b \\ a_{21} & a_{22} & c \\ a_{31} & a_{32} & d \end{vmatrix};$$

8) определитель не изменится, если ко всем элементам какого-либо его ряда прибавить соответствующие элементы другого параллельного ряда, умноженные на одно и то же произвольное число λ. Например, для столбцов определителя это свойство выражается равенством

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13}+\lambda\cdot a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23}+\lambda\cdot a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33}+\lambda\cdot a_{32} \end{vmatrix}.$$

9) определитель равен сумме произведений элементов некоторого ряда на соответствующие им алгебраические дополнения, т.е.

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13},$$

где

$$A_{11} = (-1)^{1+1}M_{11} = (-1)^{1+1}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix};$$

$$A_{12} = (-1)^{1+2}M_{12} = (-1)^{1+2}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix};$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3}M_{12} = (-1)^{1+3}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}.$$

Величины A_{11}, A_{12}, A_{13} – алгебраические дополнения, а M_{11}, M_{12}, M_{13} – миноры определителя Δ_3, соответствующие его элементам a_{11}, a_{12}, a_{13}. Эти миноры являются определителями второго порядка, получаемыми из определителя третьего порядка Δ_3, вычеркиванием соответствующих строки и столбца. Например, чтобы найти минор M_{13}, следует в определителе Δ_3 вычеркнуть первую строку и второй столбец.

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 3 & -2 & 5 \\ 0 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 2 \cdot \begin{vmatrix} -2 & 5 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} - 3 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} + (-1) \cdot \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= 2 \cdot (-8-5) - 3 \cdot (12-0) - 1 \cdot (3+0) = -26 - 36 - 3 = -65;$$

$$\Delta_4 = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 4 & 3 \\ 1 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & -3 & 2 \end{vmatrix} = 2 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & -3 & 2 \end{vmatrix} - 0 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 2 & -3 & 2 \end{vmatrix} + 4 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{vmatrix} - 3 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & -3 \end{vmatrix} =$$

$$= 2 \cdot \left(3 \cdot (-2) - 2 \cdot 0 + 1 \cdot 0\right) - 0 + 4 \cdot 0 - 3 \cdot \left(1 \cdot 0 - 3 \cdot 2 + 2 \cdot 0\right) = -12 + 18 = 6.$$

Данное свойство содержит в себе способ вычисления определителей высоких порядков.

Пример 1. Вычислить определитель, разлагая его по элементам третьего столбца:

$$\begin{vmatrix} 2 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \\ 5 & 2 & 1 & 0 \end{vmatrix}.$$

Решение.

$$\begin{vmatrix} 2 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \\ 5 & 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = a_{13}A_{13} + a_{23}A_{23} + a_{33}A_{33} + a_{43}A_{43} = (-1)^{1+3} \cdot 0 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 2 \\ 5 & 2 & 0 \end{vmatrix} +$$

$$+ (-1)^{2+3} \cdot 3 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 5 & 2 & 0 \end{vmatrix} + (-1)^{3+3} \cdot 0 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 4 \\ 5 & 2 & 0 \end{vmatrix} + (-1)^{4+3} \cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}.$$

Первое и третье слагаемые равны нулю, второе слагаемое вычислим разложив определитель по элементам третьего столбца, четвёртое слагаемое -разложив определитель по элементам первой строки. Получим

$$-3\cdot\left((-1)^{1+3}\cdot 1\cdot\begin{vmatrix}1 & 1\\ 5 & 2\end{vmatrix}+(-1)^{2+3}\cdot 2\cdot\begin{vmatrix}2 & 2\\ 5 & 2\end{vmatrix}+(-1)^{3+3}\cdot 0\cdot\begin{vmatrix}2 & 2\\ 1 & 1\end{vmatrix}\right)+$$

$$+(-1)\cdot\left((-1)^{1+1}\cdot 2\cdot\begin{vmatrix}1 & 4\\ 1 & 2\end{vmatrix}+(-1)^{1+2}\cdot 2\cdot\begin{vmatrix}2 & 4\\ 1 & 2\end{vmatrix}+(-1)^{1+3}\cdot 1\cdot\begin{vmatrix}2 & 1\\ 1 & 1\end{vmatrix}\right)=$$

$$=-3\cdot\left((2-5)-2\cdot(4-10)+0\right)-\left(2\cdot(2-4)-2\cdot(4-4)-(2-1)\right)=$$

$$=-3\cdot(-3+12)-(-3)=-3\cdot 9+3=-24.$$

Рассмотрим основные ***методы вычисления определителей***.

1. *Метод эффективного понижения порядка.*

Используя основные свойства определителей, вычисление $\Delta_n \neq 0$ всегда можно вести к вычислению одного определителя $(n-1)$-го порядка, сделав в каком-либо ряду Δ_n все элементы, кроме одного, равными нулю. Рассмотрим это на примере.

Пример 2. Вычислить определитель

$$\Delta=\begin{vmatrix}30 & -10 & 120 & 80\\ -5 & 3 & -34 & -23\\ 1 & 1 & 3 & -7\\ -9 & 2 & 8 & -15\end{vmatrix}.$$

Решение. По свойству 4 определителей из первой строки вынесем множитель 10, а затем будем последовательно умножать полученную строку на 3, 1, 2 и складывать соответственно со второй, третьей и четвертой строками.

$$\Delta=10\cdot\begin{vmatrix}3 & -1 & 12 & 8\\ -5 & 3 & -34 & -23\\ 1 & 1 & 3 & -7\\ -9 & 2 & 8 & -15\end{vmatrix}=10\cdot\begin{vmatrix}3 & -1 & 12 & 8\\ 4 & 0 & 2 & 1\\ 4 & 0 & 15 & 1\\ -3 & 0 & 32 & 1\end{vmatrix}.$$

По свойству 9 определителей полученный определитель можно разложить по элементам второго столбца. Тогда

$$\Delta=10\cdot\begin{vmatrix}3 & -1 & 12 & 8\\ 4 & 0 & 2 & 1\\ 4 & 0 & 15 & 1\\ -3 & 0 & 32 & 1\end{vmatrix}=10\cdot\left(-(-1)\right)\cdot\begin{vmatrix}4 & 2 & 1\\ 4 & 15 & 1\\ -3 & 32 & 1\end{vmatrix}=10\cdot\begin{vmatrix}4 & 2 & 1\\ 4 & 15 & 1\\ -3 & 32 & 1\end{vmatrix}.$$

Получили определитель третьего порядка, который можно вычислить по правилу Саррюса или свести к вычислению одного определителя второго порядка. Вычитая из второй и третьей строк данного определителя первую строку, получаем

$$\Delta = 10\cdot\begin{vmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 4 & 15 & 1 \\ -3 & 32 & 1 \end{vmatrix} = 10\cdot\begin{vmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 0 & 13 & 0 \\ -7 & 30 & 0 \end{vmatrix} = 10\cdot 1\cdot\begin{vmatrix} 0 & 13 \\ -7 & 30 \end{vmatrix} =$$

$$= 10\cdot\left(0\cdot 30 - 13\cdot(-7)\right) = 10\cdot\left(0+91\right) = 910\,.$$

2. *Приведение определителя к треугольному виду*. Определитель, у которого все элементы, находящиеся выше или ниже главной диагонали, равны нулю, называется определителем треугольного вида. В этом случае определитель равен произведению элементов главной диагонали.

Пример 3. Вычислить определитель

$$\Delta = \begin{vmatrix} 5 & 8 & 7 & 4 & -2 \\ -1 & 4 & 2 & 3 & 1 \\ 9 & 27 & 6 & 10 & -9 \\ 3 & 9 & 6 & 2 & -3 \\ 1 & 3 & 2 & 8 & -1 \end{vmatrix}.$$

Решение. Пятый столбец определителя сложим с первым, этот же столбец, умноженный на 3, сложим со вторым. Затем пятый столбец умножим на 2 и сложим с третьим столбцом и умножим пятый столбец на 8 и сложим с четвертым столбцом. В итоге получим определитель треугольного вида, который равен исходному:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 5 & 8 & 7 & 4 & -2 \\ -1 & 4 & 2 & 3 & 1 \\ 9 & 27 & 6 & 10 & -9 \\ 3 & 9 & 6 & 2 & -3 \\ 1 & 3 & 2 & 8 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 3 & -12 & -2 \\ 0 & 7 & 4 & 11 & 1 \\ 0 & 0 & -12 & -62 & -9 \\ 0 & 0 & 0 & -22 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} =$$

$$= 3\cdot 7\cdot(-12)\cdot(-22)\cdot(-1) = -5544\,.$$

Приведение определителей к треугольному виду будет применяться при решении систем линейных уравнений методом Гаусса.

Задачи для самостоятельного решения

Вычислить определители второго порядка:

1. $\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & -3 \end{vmatrix}$; **2.** $\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 6 \end{vmatrix}$; **3.** $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -8 & -1 \end{vmatrix}$;

4. $\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ -4 & 10 \end{vmatrix}$; **4.** $\begin{vmatrix} x+2 & x-2 \\ x & x+2 \end{vmatrix}$; **6.** $\begin{vmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ \sin\alpha & -\cos\alpha \end{vmatrix}$.

Вычислить определители третьего порядка с помощью правила треугольников (правила Саррюса):

7. $\begin{vmatrix} 5 & 2 & 3 \\ 4 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix}$; **8.** $\begin{vmatrix} 3 & 1 & 5 \\ 10 & 3 & 16 \\ 4 & 2 & 6 \end{vmatrix}$; **9.** $\begin{vmatrix} 9 & 8 & 7 \\ 6 & 5 & 4 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix}$;

10. $\begin{vmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 3 & 2 & -1 \\ 5 & 6 & 3 \end{vmatrix}$; **11.** $\begin{vmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 2 & 8 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}$; **12.** $\begin{vmatrix} 3 & 4 & -5 \\ 8 & 7 & -2 \\ 2 & -1 & 8 \end{vmatrix}$;

13. $\begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 3 & 1 & -5 \\ 4 & 2 & 5 \end{vmatrix}$; **14.** $\begin{vmatrix} x & a & a \\ a & x & -a \\ a & a & x \end{vmatrix}$.

Вычислить определитель путем разложения его по элементам второй строки:

15. $\begin{vmatrix} 3 & 0 & -1 & -1 \\ x & y & z & t \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -3 & -2 & -4 \end{vmatrix}$; **16.** $\begin{vmatrix} 3 & 3 & 2 & 2 \\ a & b & c & d \\ 2 & 3 & 3 & 2 \\ -2 & -2 & 0 & -1 \end{vmatrix}$.

Вычислить определитель, разложив его по элементам третьего столбца:

17. $\begin{vmatrix} 5 & 1 & a & 8 \\ -4 & -1 & b & -5 \\ 8 & -1 & c & 12 \\ 4 & -1 & d & 7 \end{vmatrix}$; **18.** $\begin{vmatrix} 1 & -1 & x & -1 \\ -1 & -2 & y & -1 \\ -2 & 0 & z & 1 \\ 0 & 1 & t & 0 \end{vmatrix}$.

Вычислить определитель, разлагая его по элементам строки или столбца:

19. $\begin{vmatrix} 2 & 0 & 3 & 1 \\ -1 & -3 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 4 & 1 \\ 3 & 2 & 2 & 2 \end{vmatrix}$; **20.** $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 0 & 3 \\ 6 & 3 & 1 & -3 \\ 3 & 3 & 1 & -2 \end{vmatrix}$; **21** $\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 \\ a_1 & 0 & a_3 & 0 & 0 \\ b_1 & 0 & b_3 & 0 & 0 \\ c_1 & 0 & c_3 & 0 & 0 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_4 & y_5 \end{vmatrix}$.

Методом понижения порядка вычислить определители:

22. $\begin{vmatrix} 2 & 4 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 5 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 0 & 3 \end{vmatrix}$; **23.** $\begin{vmatrix} 15325 & 15323 & 37527 \\ 23735 & 23735 & 17417 \\ 23737 & 23737 & 17418 \end{vmatrix}$.

Вычислить определители методом приведения их треугольному виду:

24. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 5 & 9 \\ 0 & 0 & 3 & 7 \\ -2 & -4 & -6 & 0 \end{vmatrix}$; **25.** $\begin{vmatrix} 1 & -2 & 5 & 9 \\ 1 & -1 & 7 & 4 \\ 1 & 3 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{vmatrix}$.

Вычислить определители:

26. $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$; **27.** $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 4 \end{vmatrix}$; **28.** $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 3 & 5 \\ 5 & 4 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \end{vmatrix}$;

29. $\begin{vmatrix} 4 & 3 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{vmatrix}$; **30.** $\begin{vmatrix} 13 & 14 & 15 & 13 \\ 18 & 18 & 23 & 22 \\ 5 & 6 & 7 & 7 \\ 25 & 29 & 30 & 26 \end{vmatrix}$;

31. $\begin{vmatrix} 1 & 4 & 3 & 1 \\ 13 & 19 & 6 & 9 \\ 6 & 17 & 11 & 3 \\ 3 & 6 & 3 & 2 \end{vmatrix}$; **32.** $\begin{vmatrix} 9 & 9 & 13 & -17 \\ 10 & 15 & 22 & 3 \\ 5 & 9 & 13 & 6 \\ 9 & 15 & 21 & 17 \end{vmatrix}$;

33. $\begin{vmatrix} 27 & 44 & 40 & 55 \\ 29 & 64 & 21 & 40 \\ 13 & -20 & -13 & 24 \\ 46 & 45 & -55 & 84 \end{vmatrix}$; **34.** $\begin{vmatrix} -2 & 7 & 4 & 3 & 2 \\ -1 & -3 & 2 & 9 & -2 \\ -3 & 7 & 5 & 2 & 3 \\ -1 & -2 & 2 & 3 & -2 \\ -1 & -4 & 1 & 1 & -2 \end{vmatrix}$;

35. $\begin{vmatrix} 5 & -6 & 10 & -7 & -2 \\ -3 & 4 & -2 & 2 & -2 \\ -2 & 2 & -4 & 5 & -3 \\ 6 & -8 & 7 & -4 & -1 \\ 2 & 1 & 7 & 0 & 5 \end{vmatrix}$; **36.** $\begin{vmatrix} -2 & 5 & 4 & 4 & 0 \\ -2 & 7 & 3 & 5 & -1 \\ -4 & -2 & 5 & -2 & -4 \\ -6 & 4 & 5 & 2 & -4 \\ -3 & 3 & 2 & 1 & -2 \end{vmatrix}$.

§2. Матрицы и операции над ними

Прямоугольная таблица, составленная из $m\times n$ элементов a_{ij} $\left(i=\overline{1,m},\, j=\overline{1,n}\right)$ некоторого множества, называется ***матрицей*** и записывается в виде

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \text{ или } A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Первый индекс i элемента матрицы a_{ij} обозначает номер строки, а второй j – номер столбца, на пересечении которых находится этот элемент в матрице.

Матрицы обозначаются прописными буквами латинского алфавита: A, B, C, ... Если у матрицы m строк и n столбцов, то она имеет размерность $m\times n$ и это обозначается $A_{m\times n}$. Элементы, стоящие на диагонали, идущей из верхнего угла, образуют *главную диагональ*.

Матрицы A и B называются ***равными***, если равны все соответствующие элементы этих матриц, т.е.

$$A=B \text{, если } a_{ij}=b_{ij} \text{, где } i=\overline{1,m},\, j=\overline{1,n}.$$

Следовательно, равными могут быть только матрицы одинаковой размерности.

Матрицы, у которых число строк равно числу столбцов, называются ***квадратными***. Квадратную матрицу размера $n \times n$ называют матрицей ***n-го порядка***. Если $i = 1$, то получаем *матрицу-строку*; если $j = 1$ – *матрицу-столбец*. Их также называют *вектор-строкой* и *вектор-столбцом* соответственно. Их вид:

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_n \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_m \end{pmatrix}.$$

Квадратная матрица, у которой все элементы, кроме элементов главной диагонали, равны нулю, называется ***диагональной***.

Диагональная матрица, у которой каждый элемент главной диагонали равен единице, называется ***единичной***. Единичная матрица обозначается E.

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$ – единичная матрица третьего порядка.

Квадратная матрица называется ***треугольной***, если все элементы, расположенные по одну сторону от главной диагонали, равны нулю.

Матрица, все элементы которой равны нулю, называется ***нулевой***. Обозначается буквой O. Имеет вид:

$$O = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

В матричном исчислении матрицы O и E играют роль чисел 0 и 1 в арифметике.

Матрица, полученная из данной заменой каждой её строки столбцом с тем же номером, называется матрицей т***ранспонированной*** к данной. Обозначается A^T.

$$\text{Если } A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 0 & -1 & 2 \\ 3 & 7 & -2 \end{pmatrix}, \text{ то } A^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 4 & -1 & 7 \\ 5 & 2 & -2 \end{pmatrix}.$$

Транспонированная матрица обладает свойством $\left(A^T\right)^T = A$.

Основные операции над матрицами:

1. ***Сложение и вычитание матриц***.

Эти операции определяются только для матриц одинаковой размерности.

Суммой (разностью) матриц A и B, обозначаемой $A+B$ $(A-B)$, называется матрица C, элементы которой $c_{ij}=a_{ij}\pm b_{ij}$, где a_{ij} и b_{ij} – элементы матриц A и B.

$$A\pm B=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}_{2\times 2}\pm\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}_{2\times 2}=\begin{pmatrix} a_{11}\pm b_{11} & a_{12}\pm b_{12} \\ a_{21}\pm b_{21} & a_{22}+b_{22} \end{pmatrix}_{2\times 2}$$

Например, пусть

$$A=\begin{pmatrix} 1 & -3 & 6 \\ 2 & 0 & -2 \end{pmatrix},\ \ B=\begin{pmatrix} 3 & 7 & -4 \\ 2 & -5 & 8 \end{pmatrix}.$$

Тогда

$$A+B=\begin{pmatrix} 4 & 4 & 2 \\ 4 & -5 & 6 \end{pmatrix},\ \ A-B=\begin{pmatrix} -2 & -10 & 10 \\ 0 & 5 & -10 \end{pmatrix}.$$

2. ***Умножение матрицы на число.***

Произведением матрицы A ***и числа*** λ, обозначаемым λA, называется матрица B той же размерности, элементы которой $b_{ij}=\lambda\cdot a_{ij}$, где a_{ij} – элементы матрицы A, т.е. при умножении матрицы на число (числа на матрицу) надо все элементы матрицы умножить на это число.

$$\lambda\cdot A=\lambda\cdot\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \lambda\cdot a_{11} & \lambda\cdot a_{12} & \lambda\cdot a_{13} & \lambda\cdot a_{14} \\ \lambda\cdot a_{21} & \lambda\cdot a_{22} & \lambda\cdot a_{23} & \lambda\cdot a_{24} \end{pmatrix}.$$

Например, пусть

$$\lambda=2,\ A=\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}.$$

Тогда

$$\lambda A=2\cdot\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 8 & -4 \end{pmatrix}.$$

3. ***Умножение матриц.***

Произведением матриц $A_{m\times n}$ и $B_{n\times p}$ называется матрица $C_{m\times p}=A\cdot B$ такая что

$$c_{ik}=a_{i1}\cdot b_{1k}+a_{i2}\cdot b_{2k}+...+a_{in}\cdot b_{nk},\ \text{где}\ i=\overline{1,m},\ k=\overline{1,p},$$

т.е. элемент i-й строки и k-го столбца матрицы произведения C равен сумме произведений элементов i-й строки матрицы A на соответствующие элементы k-го столбца матрицы B.

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix}_{2\times 3} \cdot \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \end{pmatrix}_{3\times 2} =$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11} \cdot b_{11} + a_{12} \cdot b_{21} + a_{13} \cdot b_{31} & a_{11} \cdot b_{12} + a_{12} \cdot b_{22} + a_{13} \cdot b_{32} \\ a_{21} \cdot b_{11} + a_{22} \cdot b_{21} + a_{23} \cdot b_{31} & a_{21} \cdot b_{12} + a_{22} \cdot b_{22} + a_{23} \cdot b_{32} \end{pmatrix}_{2\times 2}.$$

Следовательно, *произведение AB существует* **только** когда первый множитель A имеет число столбцов, равное числу строк второго множителя B. Из существования произведения AB не следует существование произведения BA. В случае его существования, как правило $BA \neq AB$. Если $AB = BA$, то матрицы A и B называются ***перестановочными*** (или ***коммутирующими***). Известно, что всегда $(AB)C = A(BC)$.

Например,

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -5 & 8 \\ 1 & 3 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 5 \\ -2 & -3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

Найдем произведение AB:

$$AB = \begin{pmatrix} 4 \cdot (-1) + (-5) \cdot (-2) + 8 \cdot 3 & 4 \cdot 5 + (-5) \cdot (-3) + 8 \cdot 4 \\ 1 \cdot (-1) + 3 \cdot (-2) + (-1) \cdot 3 & 1 \cdot 5 + 3 \cdot (-3) + (-1) \cdot 4 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -4 + 10 + 24 & 20 + 15 + 32 \\ -1 - 6 - 3 & 5 - 9 - 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 30 & 67 \\ -10 & -8 \end{pmatrix}.$$

Далее найдем произведение BA:

$$BA = \begin{pmatrix} -1 \cdot 4 + 5 \cdot 1 & -1 \cdot (-5) + 5 \cdot 3 & -1 \cdot 8 + 5 \cdot (-1) \\ -2 \cdot 4 + (-3) \cdot 1 & -2 \cdot (-5) + (-3) \cdot 3 & (-2) \cdot 8 + (-3) \cdot (-1) \\ 3 \cdot 4 + 4 \cdot 1 & 3 \cdot (-5) + 4 \cdot 3 & 3 \cdot 8 + 4 \cdot (-1) \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -4 + 5 & 5 + 15 & -8 - 5 \\ -8 - 3 & 10 - 9 & -16 + 3 \\ 12 + 4 & -15 + 12 & 24 - 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 20 & -13 \\ -11 & 1 & -13 \\ 16 & -3 & 20 \end{pmatrix}.$$

Получили, что $AB \neq BA$.

Задачи для самостоятельного решения

Даны матрицы A и B. Найти: $A+B$, $2A$, $A-3B$, если:

37. $A=\begin{pmatrix}1 & 8\\ 0 & 9\\ -7 & 1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}-1 & -7\\ 0 & 1\\ 6 & -1\end{pmatrix}$;

38. $A=\begin{pmatrix}5 & 7 & 9 & 1\\ 4 & 3 & -1 & 0\\ -2 & 4 & 4 & -3\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}-4 & 1 & -8 & 1\\ 0 & 1 & -2 & 3\\ 2 & 5 & 11 & 7\end{pmatrix}$.

Найти матрицу X, выполнив указанные действия с матрицами:

$$A=\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & -1\end{pmatrix},\ E=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}.$$

39. $X=4A+4B+E$;

40. $X=4A-3E$;

41. $X=2A-3B+2E$;

42. $X=2B+3E$;

43. $X=-A+5B-2E$;

44. $X=B-A+E$;

45. $X=3E-A+B$;

46. $X=4A-6E$.

Найти матрицу X, выполнив указанные действия с матрицами:

$$A=\begin{pmatrix}2 & -1 & 5\\ -3 & 4 & 1\\ 7 & -4 & -1\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}8 & -2 & 2\\ 5 & 1 & 4\\ 3 & -3 & 0\end{pmatrix},\ E=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}.$$

47. $X=2A+B+2E$;

48. $X=A-B-3E$;

49. $X=-3A+B-E$;

50. $X=4A-B+5E$.

Даны матрицы A и B. Найти AB и BA, если:

51. $A=\begin{pmatrix}2 & 2\\ 1 & 2\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}3 & 4\\ 2 & 3\end{pmatrix}$;

52. $A=\begin{pmatrix}2 & -4\\ 5 & 1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}-2 & -1\\ 6 & 4\end{pmatrix}$;

53. $A=\begin{pmatrix}4 & -1\\ 3 & -2\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}0 & 3\\ 0 & -2\end{pmatrix}$;

54. $A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 2\\ 0 & -1 & 3\\ 4 & 0 & 5\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}2 & 7 & 1\\ 3 & 2 & -4\\ 1 & -3 & 5\end{pmatrix}$;

55. $A=\begin{pmatrix}1&2&3\\4&5&6\\7&8&9\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}0&1&3\\2&4&0\\5&0&6\end{pmatrix}$;

56. $A=\begin{pmatrix}1&6&3\\5&-2&0\\4&0&0\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&2&-3\\3&-2&4\end{pmatrix}$;

57. $A=\begin{pmatrix}1&1&0\\3&-1&5\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}0&7\\3&4\\1&0\end{pmatrix}$;

58. $A=\begin{pmatrix}-1&9\\-2&3\\-5&3\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}2&-4\\7&-3\end{pmatrix}$;

59. $A=\begin{pmatrix}6&-2\\4&1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}2&-5&-4\\1&-3&2\end{pmatrix}$;

60. $A=\begin{pmatrix}1&3\\6&-5\\-2&0\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}2\\7\end{pmatrix}$;

61. $A=\begin{pmatrix}3\\4\\2\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}5&-2&3\end{pmatrix}$.

Даны матрицы A и B. Найти A^2, B^2, A^2B.

62. $A=\begin{pmatrix}-4&-3\\2&5\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}7&-2\\1&3\end{pmatrix}$;

63. $A=\begin{pmatrix}0&-1\\-1&1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}-2&-1\\0&0\end{pmatrix}$;

64. $A=\begin{pmatrix}-2&4&5\\3&-1&2\\7&-3&-9\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}3&-4&3\\2&-2&7\\1&-5&8\end{pmatrix}$;

65. $A=\begin{pmatrix}0&3&1\\0&0&5\\0&0&0\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}0&0&4\\0&-2&0\\3&0&0\end{pmatrix}$.

Выполнить умножение, применяя транспонирование:

66. $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}^T \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$; **67.** $\begin{pmatrix} 10 & 5 \\ 20 & 30 \end{pmatrix}^T \cdot \begin{pmatrix} 10 & 5 \\ 20 & 30 \end{pmatrix}$;

68. $\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}^T$; **69.** $\begin{pmatrix} 2 \\ 6 \end{pmatrix}^T \cdot \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 0 & -7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Даны матрицы A, B, C. Найти $A(BC)$, $(AB)C$ и показать, что $(AB)C = A(BC)$, если:

70. $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & -6 \\ 7 & -8 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 5 & 14 \\ -2 & -30 \end{pmatrix}$;

71. $A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 9 & -7 \\ 8 & 3 & 11 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ -2 \\ 8 \end{pmatrix}$; $C = \begin{pmatrix} -1 & 9 & 3 & 6 \end{pmatrix}$.

§3. Обратная матрица. Элементарные преобразования матриц. Ранг матрицы

Квадратная матрица A порядка n

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

называется ***невырожденной***, если её определитель не равен нулю.

В случае, когда определитель равен нулю, матрица называется ***вырожденной***.

Понятие обратной матрицы вводится только для квадратных невырожденных матриц.

Матрица A^{-1} называется обратной для квадратной невырожденной матрицы A, если выполняется условие

$$AA^{-1} = A^{-1}A = E,$$

где E – единичная матрица.

Для матрицы A существует единственная обратная матрица A^{-1}, которая определяется формулой

$$A^{-1} = \frac{1}{\Delta A} \cdot A^*, \quad A^* = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}.$$

Матрица A^* называется присоединенной, её элементами являются алгебраические дополнения A_{ij} транспонированной матрицы A^T.

Пример 4. Дана матрица A. Найти обратную матрицу A^{-1} и проверить выполнимость равенств $AA^{-1} = A^{-1}A = E$, если:

а) $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$; б) $A = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 1 \\ 1 & -5 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

Решение. а) Найдем определитель матрицы A:

$$\Delta A = \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = -1 \cdot 3 - 1 \cdot 2 = -3 - 2 = -5 \neq 0.$$

Так как $\Delta A \neq 0$, то матрица A невырожденная и обратная матрица A^{-1} существует.

Найдем алгебраические дополнения транспонированной матрицы A.

$$A^T = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix},$$

$A_{11} = 3$, $A_{12} = -2$, $A_{21} = -1$, $A_{22} = -1$.

Следовательно,

$$A^{-1} = -\frac{1}{5}\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{3}{5} & \frac{2}{5} \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \end{pmatrix}.$$

Проверим выполнимость равенств

$$AA^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\frac{3}{5} & \frac{2}{5} \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{5} + \frac{2}{5} & -\frac{2}{5} + \frac{2}{5} \\ -\frac{3}{5} + \frac{3}{5} & \frac{2}{5} + \frac{3}{5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = E.$$

$$A^{-1}A=\begin{pmatrix}-\frac{3}{5} & \frac{2}{5}\\ \frac{1}{5} & \frac{1}{5}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-1 & 2\\ 1 & 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{3}{5}+\frac{2}{5} & -\frac{6}{5}+\frac{6}{5}\\ -\frac{1}{5}+\frac{1}{5} & \frac{2}{5}+\frac{3}{5}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=E.$$

б) $$\Delta A=\begin{vmatrix}2 & -4 & 1\\ 1 & -5 & 3\\ 1 & -1 & 1\end{vmatrix}=2\cdot\begin{vmatrix}-5 & 3\\ -1 & 1\end{vmatrix}-(-4)\cdot\begin{vmatrix}1 & 3\\ 1 & 1\end{vmatrix}+1\cdot\begin{vmatrix}1 & -5\\ 1 & -1\end{vmatrix}=$$

$$=2\cdot(-5+3)+4\cdot(1-3)+(-1+5)=-4-8+4=-8\neq 0,$$

матрица A невырожденная и обратная матрица существует.

Запишем матрицу A^T транспонированную к матрице A и найдем алгебраические дополнения её элементов.

$$A^T=\begin{pmatrix}2 & 1 & 1\\ -4 & -5 & -1\\ 1 & 3 & 1\end{pmatrix}.$$

$$A_{11}=(-1)^{1+1}\begin{vmatrix}-5 & -1\\ 3 & 1\end{vmatrix}=-5+3=-2;$$

$$A_{12}=(-1)^{1+2}\begin{vmatrix}-4 & -1\\ 1 & 1\end{vmatrix}=-(-4+1)=3;$$

$$A_{13}=(-1)^{1+3}\begin{vmatrix}-4 & -5\\ 1 & 3\end{vmatrix}=-12+5=-7;$$

$$A_{21}=(-1)^{2+1}\begin{vmatrix}1 & 1\\ 3 & 1\end{vmatrix}=-(1-3)=2;$$

$$A_{22}=(-1)^{2+2}\begin{vmatrix}2 & 1\\ 1 & 1\end{vmatrix}=2-1=1;$$

$$A_{23}=(-1)^{2+3}\begin{vmatrix}2 & 1\\ 1 & 3\end{vmatrix}=-(6-1)=-5;$$

$$A_{31}=(-1)^{3+1}\begin{vmatrix}1 & 1\\ -5 & -1\end{vmatrix}=-1+5=4;$$

$$A_{32}=(-1)^{3+2}\begin{vmatrix}2 & 1\\ -4 & -1\end{vmatrix}=-(-2+4)=-2;$$

$$A_{33}=(-1)^{3+3}\begin{vmatrix}2 & 1\\ -4 & -5\end{vmatrix}=-10+4=-6.$$

Следовательно,

$$A^{-1} = -\frac{1}{8}\begin{pmatrix} -2 & 3 & -7 \\ 2 & 1 & -5 \\ 4 & -2 & -6 \end{pmatrix}.$$

Проверим выполнимость равенств.

$$AA^{-1} = -\frac{1}{8}\begin{pmatrix} 2 & -4 & 1 \\ 1 & -5 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 & 3 & -7 \\ 2 & 1 & -5 \\ 4 & -2 & -6 \end{pmatrix} =$$

$$= -\frac{1}{8}\begin{pmatrix} 2\cdot(-2)+(-4)\cdot 2+1\cdot 4 & 2\cdot 3+(-4)\cdot 1+1\cdot(-2) & 2\cdot(-7)+(-4)\cdot(-5)+1\cdot(-6) \\ 1\cdot(-2)+(-5)\cdot 2+3\cdot 4 & 1\cdot 3+(-5)\cdot 1+3\cdot(-2) & 1\cdot(-7)+(-5)\cdot(-5)+3\cdot(-6) \\ 1\cdot(-2)+(-1)\cdot 2+1\cdot 4 & 1\cdot 3+(-1)\cdot 1+1\cdot(-2) & 1\cdot(-7)+(-1)\cdot(-5)+1\cdot(-6) \end{pmatrix} =$$

$$= -\frac{1}{8}\begin{pmatrix} -4-8+4 & 6-4-2 & -14+20-6 \\ -2-10+12 & 3-5-6 & -7+25-18 \\ -2-2+4 & 3-1-2 & -7+5-6 \end{pmatrix} = -\frac{1}{8}\begin{pmatrix} -8 & 0 & 0 \\ 0 & -8 & 0 \\ 0 & 0 & -8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = E$$

$$A^{-1}A = -\frac{1}{8}\begin{pmatrix} -2 & 3 & -7 \\ 2 & 1 & -5 \\ 4 & -2 & -6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -4 & 1 \\ 1 & -5 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= -\frac{1}{8}\begin{pmatrix} -2\cdot 2+3\cdot 1+(-7)\cdot 1 & -2\cdot(-4)+3\cdot(-5)+(-7)\cdot(-1) & -2\cdot 1+3\cdot 3+(-7)\cdot 1 \\ 2\cdot 2+1\cdot 1+(-5)\cdot 1 & 2\cdot(-4)+1\cdot(-5)+(-5)\cdot(-1) & 2\cdot 1+1\cdot 3+(-5)\cdot 1 \\ 4\cdot 2+(-2)\cdot 1+(-6)\cdot 1 & 4\cdot(-4)+(-2)\cdot(-5)+(-6)\cdot(-1) & 4\cdot 1+(-2)\cdot 3+(-6)\cdot 1 \end{pmatrix} =$$

$$= -\frac{1}{8}\begin{pmatrix} -4+3-7 & 8-15+7 & -2+9-7 \\ 4+1-5 & -8-5+5 & 2+3-5 \\ 8-2-6 & -16+10+6 & 4-6-6 \end{pmatrix} = -\frac{1}{8}\begin{pmatrix} -8 & 0 & 0 \\ 0 & -8 & 0 \\ 0 & 0 & -8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = E$$

Рассмотрим понятие ранга матрицы.

Рангом матрицы A (обозначается $rangA$) называется наибольший порядок порожденных ею определителей, отличных от нуля. Если равны нулю все определители порядка k (число, меньшее или равное меньшему из чисел m и n), порожденные данной матрицей A, то $rangA < k$.

Базисным минором матрицы называется всякий отличный от нуля минор, порядок которого равен рангу данной матрицы. У матрицы может быть несколько базисных миноров.

Теорема 1. Ранг матрицы не изменится, если:

1) поменять местами любые два параллельных ряда;
2) умножить каждый элемент ряда на один и тот же множитель;
3) прибавить к элементам ряда соответствующие элементы любого другого параллельного ряда, умноженные на один и тот же множитель.

Преобразования 1-3 называют ***элементарными.***

Две матрицы называют ***эквивалентными***, если одна матрица получается из другой с помощью элементарных преобразований. Эквивалентность матриц A и B обозначается $A \sim B$.

Рассмотрим ***основные методы нахождения ранга матрицы***.

1. Метод единиц и нулей.

С помощью элементарных преобразований любую матрицу можно привести к виду, когда каждый её ряд будет состоять только из нулей и одной единицы. Тогда число оставшихся единиц и определит ранг исходной матрицы, так как полученная матрица будет эквивалентна исходной.

Пример 5. Найти ранг матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 0 & -4 & -5 \\ -1 & -1 & 0 & -3 & -2 \\ 6 & 3 & 4 & 8 & -3 \end{pmatrix}.$$

Решение. Умножим третий столбец матрицы A на $\frac{1}{2}$.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 0 & -4 & -5 \\ -1 & -1 & 0 & -3 & -2 \\ 6 & 3 & 4 & 8 & -3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 0 & -4 & -5 \\ -1 & -1 & 0 & -3 & -2 \\ 6 & 3 & 2 & 8 & -3 \end{pmatrix}.$$

Далее, в полученной матрице первую строку умножаем на (-2) и складываем её с четвертой строкой:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 0 & -4 & -5 \\ -1 & -1 & 0 & -3 & -2 \\ 6 & 3 & 2 & 8 & -3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 0 & -4 & -5 \\ -1 & -1 & 0 & -3 & -2 \\ 4 & 1 & 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Замечаем, что третий столбец содержит три нуля и единицу в первой строке. Поэтому в первой строке на первый, второй, четвертый и пятый элемент обращаем в ноль. Для этого третий столбец поочередно умножаем на (-1) и складываем с первым, умножаем на (-1) и складываем со вторым, умножаем на (-3) и складываем с четвертым, складываем с пятым. Имеем:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 0 & -4 & -5 \\ -1 & -1 & 0 & -3 & -2 \\ 4 & 1 & 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & -4 & -5 \\ -1 & -1 & 0 & -3 & -2 \\ 4 & 1 & 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Теперь четвертую строку последней матрицы складываем поочередно о второй и третьей, получая при этом еще два нуля во втором столбце.

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & -4 & -5 \\ -1 & -1 & 0 & -3 & -2 \\ 4 & 1 & 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 6 & 0 & 0 & -2 & -6 \\ 3 & 0 & 0 & -1 & -3 \\ 4 & 1 & 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Далее делаем нули в четвертой строке везде, кроме единицы, стоящей на пересечении четвертой строки и второго столбца. Для этого поочередно умножаем второй столбец на (-4) и складываем с первым, умножаем второй столбец на (-2) и складываем с четвертым, складываем второй столбец с пятым. Затем в полученной матрице третью строку умножаем на (-2) и складываем с третьей. Имеем:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 6 & 0 & 0 & -2 & -6 \\ 3 & 0 & 0 & -1 & -3 \\ 4 & 1 & 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 6 & 0 & 0 & -2 & -6 \\ 3 & 0 & 0 & -1 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & -1 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Третью строку умножаем на (-1), а затем получаем в ней нули на пересечении третий строки с первым и с пятым столбцами, умножая четвертый столбец на 3 и складывая с первым и умножая четвертый столбец на (-3) и складывая с пятым. В полученной матрице третью строку умножаем на (-1). В результате этих элементарных преобразований имеем:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & -1 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Получили в матрице три единицы. Следовательно, $rangA = 3$.

За базисный минор можно взять, например, определитель третьего порядка, который находится на пересечении первой, третьей, четвертой строк и второго, третьего и четвертого столбцов (на пересечении этих строк и столбцов в последней матрице стоят единицы).Так как перестановки рядов матрицы не было, то один из базисных миноров матрицы A следующий:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & -3 \\ 3 & 4 & 8 \end{vmatrix} = 12 - 2 \cdot (-8+9) + 3 \cdot (-4) = 12 - 2 - 12 = -2 \neq 0 .$$

2. ***Метод окаймляющих миноров***.

Минор M_{k+1} порядка $k+1$, содержащий в себе минор M_k порядка k, называется окаймляющим минор M_k. Если у матрицы A существует минор $M_k \neq 0$, а все окаймляющие его миноры $M_{k+1} = 0$, то $rang A = k$.

Пример 6. Найти ранг матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 5 & 4 \\ 2 & -6 & 4 & 3 \\ 3 & -9 & 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

Решение. Минор $M_2 = \begin{vmatrix} -3 & 5 \\ -6 & 4 \end{vmatrix} = -12 + 30 = 18 \neq 0$. Для него окаймляющими будут только два минора:

$$M_3^1 = \begin{vmatrix} 1 & -3 & 5 \\ 2 & -6 & 4 \\ 3 & -9 & 3 \end{vmatrix} \text{ и } M_3^2 = \begin{vmatrix} -3 & 5 & 4 \\ -6 & 4 & 3 \\ -9 & 3 & 2 \end{vmatrix}.$$

Вычислим их, раскладывая по элементам первой строки:

$$M_3^1 = \begin{vmatrix} 1 & -3 & 5 \\ 2 & -6 & 4 \\ 3 & -9 & 3 \end{vmatrix} = -18 + 36 + 3(6-12) + 5(-18+18) = 18 - 18 = 0,$$

$$M_3^2 = \begin{vmatrix} -3 & 5 & 4 \\ -6 & 4 & 3 \\ -9 & 3 & 2 \end{vmatrix} = -3 \cdot (8-9) - 5 \cdot (-12+27) + 4 \cdot (-18+36) = 3 - 75 + 72 = 0.$$

Каждый из окаймляющих минора равен нулю. Поэтому $rangA = 2$, а указанный минор M_2 может быть принят за базисный.

Теорема 2 (Кронекера-Капелли). Для того чтобы система m линейных алгебраических уравнений относительно n неизвестных $x_1, x_2, ..., x_n$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_{1n}, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_{2n}, \\ .... \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases} \tag{3}$$

была совместной (имела решение), необходимо и достаточно, чтобы ранг основной матрицы

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ \multicolumn{4}{l}{.........................} \\ a_{m1} & a_{m2} & ... & a_{mn} \end{pmatrix}$$

системы (1) и ранг расширенной матрицы

$$B = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} & b_2 \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ a_{m1} & a_{m2} & ... & a_{mn} & b_m \end{array}\right)$$

системы (1) были равны, т.е. $rangA = rangB = r$.

Если $rangA = rangB$ и $r = n$, то система (3) имеет единственное решение; если $r < n$, то система (3) имеет бесконечное множество решений, зависящее от $n - r$ произвольных параметров.

Система (3) называется ***однородной***, если все ее свободные члены $b_i \, (i = \overline{1, m})$ равны нулю. Если хотя бы одно из чисел отлично от нуля, то система называется ***неоднородной***. Для однородной системы уравнений $rangA = rangB$, поэтому она всегда совместна.

Пример 7. Выяснить, совместна ли система уравнений

$$\begin{cases} 4x_1 + 3x_2 - 3x_3 - x_4 = 4, \\ 3x_1 - x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 1, \\ 3x_1 + x_2 - x_4 = 0, \\ 5x_1 + 4x_2 - 2x_3 + x_4 = 3. \end{cases}$$

Решение. Выпишем расширенную матрицу данной системы и найдем ранги основной и расширенной матриц.

$$B=\left(\begin{array}{cccc|c} 4 & 3 & -3 & -1 & 4\\ 3 & -1 & 3 & -2 & 1\\ 3 & 1 & 0 & -1 & 0\\ 5 & 4 & -2 & 1 & 3 \end{array}\right).$$

Не будем переставлять столбец свободных членов с другими столбцами матрицы, чтобы сразу определить ранги основной и расширенной матриц.

Второй столбец матрицы B умножим на (-3) и сложим с первым, затем сложим второй столбец с четвертым.

$$B=\left(\begin{array}{cccc|c} 4 & 3 & -3 & -1 & 4\\ 3 & -1 & 3 & -2 & 1\\ 3 & 1 & 0 & -1 & 0\\ 5 & 4 & -2 & 1 & 3 \end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{cccc|c} -5 & 3 & -3 & 2 & 4\\ 6 & -1 & 3 & -3 & 1\\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0\\ -7 & 4 & -2 & 5 & 3 \end{array}\right).$$

В третье строке получим все нули, кроме единицы во втором столбце. Обратим все элементы второго столбца в нули для этого третью строку умножаем на (-3) и складываем с первой, складываем третью строку со второй и умножаем третью строку на (-4) и складываем с четвёртой. Получаем:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} -5 & 3 & -3 & 2 & 4\\ 6 & -1 & 3 & -3 & 1\\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0\\ -7 & 4 & -2 & 5 & 3 \end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{cccc|c} -5 & 0 & -3 & 2 & 4\\ 6 & 0 & 3 & -3 & 1\\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0\\ -7 & 0 & -2 & 5 & 3 \end{array}\right).$$

Затем вторую строку прибавим к первой и четвертой строкам, а затем в полученной матрице первый столбец сложим с четвертым. Имеем:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} -5 & 0 & -3 & 2 & 4\\ 6 & 0 & 3 & -3 & 1\\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0\\ -7 & 0 & -2 & 5 & 3 \end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 & 5\\ 6 & 0 & 3 & -3 & 1\\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0\\ -1 & 0 & 1 & 2 & 4 \end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 5\\ 6 & 0 & 3 & 3 & 1\\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0\\ -1 & 0 & 1 & 1 & 4 \end{array}\right).$$

Далее третий столбец последней матрицы вычтем из четвертого равного ему, и прибавим третий столбец к первому.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 5 \\ 6 & 0 & 3 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 1 & 4 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 5 \\ 9 & 0 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 4 \end{array}\right).$$

В полученной матрице, первый столбец умножим на (-5) и сложим с пятым и в полученной матрице первую строку умножим на (-9) и сложим со второй. Тогда

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 5 \\ 9 & 0 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 4 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 9 & 0 & 3 & 0 & -44 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 4 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & -44 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 4 \end{array}\right).$$

Далее умножим четвертую строку на (-3) и сложим со второй строкой. В полученной матрице третий столбец умножим на (-4) и сложим с пятым. Умножим вторую строку на $\left(-\frac{1}{56}\right)$ и получим:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & -44 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 4 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -56 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 4 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -56 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Получили $rangA = 3$, $rangB = 4$, $rangA \neq rangB$, т.е. данная система уравнений несовместна.

Задачи для самостоятельного решения

Найти матрицу A^{-1}, обратную матрице A, и сделать проверку, если:

72. $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -7 & -3 \end{pmatrix}$;

73. $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 2 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & -5 \end{pmatrix}$;

74. $A = \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 6 & 2 \end{pmatrix}$;

75. $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 4 & 2 \\ 1 & -2 & 6 \end{pmatrix}$;

76. $A=\begin{pmatrix}2 & 0\\ 5 & 2\end{pmatrix}$;

77. $A=\begin{pmatrix}3 & 1 & -5\\ 1 & 2 & 4\\ 3 & 2 & -1\end{pmatrix}$;

78. $A=\begin{pmatrix}-3 & 6\\ 5 & -9\end{pmatrix}$;

79. $A=\begin{pmatrix}3 & 5 & 6\\ 4 & 5 & 6\\ -4 & 1 & -1\end{pmatrix}$.

Найти ранг матрицы A, вычислив ее миноры:

80. $A=\begin{pmatrix}2 & -4 & 6\\ 1 & -2 & 3\end{pmatrix}$;

81. $A=\begin{pmatrix}-1 & 2 & 0 & 7\\ 0 & 4 & 2 & 0\end{pmatrix}$;

82. $A=\begin{pmatrix}3 & 1 & -6\\ 2 & 5 & -4\end{pmatrix}$;

83. $A=\begin{pmatrix}6 & 10 & -2 & 14\\ 9 & 15 & -3 & 21\end{pmatrix}$.

Найти ранг матрицы A с помощью элементарных преобразований:

84. $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 0\\ 2 & 3 & 0\\ 4 & -1 & -3\end{pmatrix}$;

85. $A=\begin{pmatrix}3 & 0 & 2\\ -1 & 0 & -1\\ 4 & 5 & -7\end{pmatrix}$;

86. $A=\begin{pmatrix}-3 & 7 & 2\\ -2 & 12 & 2\\ 1 & 5 & 0\end{pmatrix}$;

87. $A=\begin{pmatrix}8 & -16 & 12\\ 6 & -12 & 9\\ -2 & 4 & -3\end{pmatrix}$;

88. $A=\begin{pmatrix}3 & 1 & -2 & 8\\ -1 & 3 & 4 & 4\\ 2 & 7 & 5 & 18\\ 1 & 1 & 4 & 4\end{pmatrix}$;

89. $A=\begin{pmatrix}5 & 1 & -2 & -4\\ 10 & 2 & 11 & 7\\ -15 & -3 & 5 & 11\\ -5 & -1 & 16 & 3\end{pmatrix}$;

90. $A=\begin{pmatrix}-4 & -12 & 8 & 10\\ 3 & 7 & 0 & 0\\ 2 & 6 & -4 & 8\\ -3 & -7 & 0 & 0\end{pmatrix}$;

91. $A=\begin{pmatrix}0 & -1 & 2 & 0\\ 1 & -1 & -2 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 2\\ 1 & 0 & 1 & 1\\ 0 & 2 & 1 & -1\end{pmatrix}$;

92. $A=\begin{pmatrix}0 & 1 & 3 & 3 & 2\\ 1 & 0 & 2 & 1 & 1\\ 3 & 2 & 0 & 2 & 0\\ 2 & 3 & 1 & 0 & 3\end{pmatrix}$;

93. $A=\begin{pmatrix}-1 & 4 & 2 & 0 & 0\\ -8 & 2 & -1 & -3 & 1\\ 7 & 2 & 3 & 3 & -1\\ 8 & 0 & 0 & 0 & -1\end{pmatrix}$.

2. СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

§1. Формулы Крамера. Системы линейных однородных уравнений

Пусть дана система n линейных уравнений с n неизвестными

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n. \end{cases}$$

Основная матрица A такой системы квадратная. Определитель этой матрицы

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

называется ***определителем системы***. Если определитель системы отличен от нуля, то система называется ***невырожденной***.

Если $\Delta \neq 0$, то система имеет единственное решение, которое определяется по ***формулам Крамера***:

$$x_1 = \frac{\Delta x_1}{\Delta}, \quad x_2 = \frac{\Delta x_2}{\Delta}, \quad \ldots, \quad x_n = \frac{\Delta x_n}{\Delta},$$

где Δx_1, Δx_2, ..., Δx_n – определители, получаемые из определителя Δ заменой k-го столбца $(k = \overline{1,n})$ столбцом свободных членов.

Пример 8. Решить систему линейных уравнений по формулам Крамера

$$\begin{cases} 3x + 2y + z = 5, \\ x + y - z = 0, \\ 4x - y + 5z = 3. \end{cases}$$

Решение. Найдем определитель системы:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 4 & -1 & 5 \end{vmatrix} = 3 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 5 \end{vmatrix} - 2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} + 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 4 & -1 \end{vmatrix} =$$

$$= 3 \cdot (5 - 1) - 2 \cdot (5 + 4) + (-1 - 4) = 12 - 18 - 5 = -11 \neq 0.$$

Вычислим вспомогательные определители Δx, Δy, Δz, которые получаются соответственно заменой первого, второго и третьего столбца в определителе системы Δ на столбец свободных членов. Имеем:

$$\Delta x=\begin{vmatrix}5 & 2 & 1\\ 0 & 1 & -1\\ 3 & -1 & 5\end{vmatrix}=5\cdot\begin{vmatrix}1 & -1\\ -1 & 5\end{vmatrix}+3\cdot\begin{vmatrix}2 & 1\\ 1 & -1\end{vmatrix}=5\cdot(5-1)+3\cdot(-2-1)=20-9=11,$$

$$\Delta y=\begin{vmatrix}3 & 5 & 1\\ 1 & 0 & -1\\ 4 & 3 & 5\end{vmatrix}=-5\cdot\begin{vmatrix}1 & -1\\ 4 & 5\end{vmatrix}-3\cdot\begin{vmatrix}3 & 1\\ 1 & -1\end{vmatrix}=-5\cdot(5+4)-3\cdot(-3-1)=$$

$$=-45+12=-33,$$

$$\Delta z=\begin{vmatrix}3 & 2 & 5\\ 1 & 1 & 0\\ 4 & -1 & 3\end{vmatrix}=5\cdot\begin{vmatrix}1 & 1\\ 4 & -1\end{vmatrix}+3\cdot\begin{vmatrix}3 & 2\\ 1 & 1\end{vmatrix}=5\cdot(-1-4)+3\cdot(3-2)=-25+3=-22.$$

Вспомогательный определитель Δx вычисли разложением по элементам первого столбца, Δy – по элементам второго столбца, Δz – по элементам третьего столбца.

Найдем x, y, z по формулам Крамера

$$x=\frac{\Delta x}{\Delta}=\frac{11}{-11}=-1,\quad y=\frac{\Delta y}{\Delta}=\frac{-33}{-11}=3,\quad z=\frac{\Delta z}{\Delta}=\frac{-22}{-11}=2.$$

Пусть дана система *n линейных однородных уравнений* с n неизвестными

$$\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2+...+a_{1n}x_n=0,\\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+...+a_{2n}x_n=0,\\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+...+a_{nn}x_n=0.\end{cases}$$

Все определители Δx_k $(k=\overline{1,n})$ содержат столбец, состоящий из нулей, и поэтому равны нулю. Поэтому, если определитель системы $\Delta\neq 0$, то она имеет единственное нулевое (тривиальное) решение

$$x_1=0, x_2=0, ..., x_n=0.$$

Однородная система имеет ненулевые решения при следующих условиях:

1. Для того, чтобы система однородных линейных уравнений имела ненулевые решения, необходимо и достаточно, чтобы ранг ее основной матрицы был меньше числа n неизвестных.

2. Для того, чтобы однородная система n линейных уравнений с n неизвестными имела ненулевые решения, необходимо и достаточно, чтобы ее определитель был равен нулю.

Пример 9. По формулам Крамера решить систему линейных однородных уравнений, найти общее решение и какое-либо частное решение системы

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 0, \\ 2x_1 - 3x_2 + 5x_3 = 0. \end{cases}$$

Решение. Найдем ранг матрицы A системы

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 2 & -3 & 5 \end{pmatrix},\ rangA = 2,\ \text{т.к.}\ \Delta = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} = 1 \neq 0.$$

Неизвестных $n = 3$. Система имеет бесчисленное множество решений, так как $rangA < n$. Найдем эти решения

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 = -4x_3, \\ 2x_1 - 3x_2 = -5x_3. \end{cases}$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} -4x_3 & -2 \\ -5x_3 & -3 \end{vmatrix} = 12x_3 - 10x_3 = 2x_3,$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & -4x_3 \\ 2 & -5x_3 \end{vmatrix} = -5x_3 + 8x_3 = 3x_3.$$

Значит общее решение $x_1 = \dfrac{\Delta_1}{\Delta} = 2x_3$, $x_2 = \dfrac{\Delta_2}{\Delta} = 3x_3$.

Положив $x_3 = 0$, получаем одно частное решение: $x_1 = 0, x_2 = 0, x_3 = 0$.

Положив $x_3 = 1$, получаем второе частное решение: $x_1 = 2, x_2 = 3, x_3 = 1$.

Задачи для самостоятельного решения

Решить системы уравнений по формулам Крамера:

1. $\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 6, \\ x_1 - 2x_2 + x_3 = 9, \\ x_1 - 4x_2 - 2x_3 = 3. \end{cases}$ **2.** $\begin{cases} 4x_1 + 2x_2 - x_3 = 1, \\ 5x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 2, \\ 3x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 0. \end{cases}$

3. $\begin{cases} 3x_1 + x_2 + 3x_3 = 2, \\ 5x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 1, \\ 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 1. \end{cases}$

4. $\begin{cases} 5x_1 + 2x_2 + 5x_3 = 4, \\ 3x_1 + 5x_2 - 3x_3 = -1, \\ -2x_1 - 4x_2 + 3x_3 = 1. \end{cases}$

5. $\begin{cases} 5x - y - z = 0, \\ x + 2y + 3x = 14, \\ 4x + 3y + 2z = 16. \end{cases}$

6. $\begin{cases} x + 3y - 6z = 12, \\ 3x + 2y + 5z = -10, \\ 2x + 5y - 3z = 6. \end{cases}$

7. $\begin{cases} -5x + y + z = 0, \\ x - 6y + z = 0, \\ x + y - 7z = 0. \end{cases}$

8. $\begin{cases} x + y + z = 0, \\ 3x + 6y + 5z = 0, \\ x + 4y + 3z = 0. \end{cases}$

§2. Матричный метод решения систем линейных уравнений

Пусть дана система n линейных уравнений с n неизвестными

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + ... + a_{nn}x_n = b_n. \end{cases}$$

или в матричной форме $A \cdot X = B$, где

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{nn} \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ ... \\ x_n \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ ... \\ b_n \end{pmatrix}.$$

Найдем решение данной системы в случае, когда определитель системы отличен от нуля ($\Delta \neq 0$).

Умножим обе части уравнения $A \cdot X = B$ слева на матрицу A^{-1}, получим

$$A^{-1} \cdot A \cdot X = A^{-1} \cdot B.$$

Так как $A^{-1} \cdot A = E$ и $E \cdot X = X$, то

$$X = A^{-1} \cdot B. \tag{4}$$

Нахождение решения системы по формуле (4) называют ***матричным способом*** решения системы. Рассмотрим на примере более подробно.

Пример 9. Решить систему линейных уравнений матричным способом

$$\begin{cases} 2x-4y+z=3, \\ x-5y+3z=-1, \\ x-y+z=1. \end{cases}$$

Решение. Запишем систему в матричной форме $A\cdot X=B$, где

$$A=\begin{pmatrix} 2 & -4 & 1 \\ 1 & -5 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix},\ \ X=\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix},\ \ B=\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Решение будем искать по формуле $X=A^{-1}\cdot B$.

Найдем определитель системы

$$\Delta A=\begin{vmatrix} 2 & -4 & 1 \\ 1 & -5 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix}=2\cdot(-5+3)+4\cdot(1-3)+1\cdot(-1+5)=-4-8+4=-8\neq 0.$$

Так как $\Delta A\neq 0$, то матрица A невырожденная и обратная матрица A^{-1} существует. Обратную матрицу найдем по формуле

$$A^{-1}=\frac{1}{\Delta A}\cdot A^{*}.$$

Запишем матрицу A^{T} транспонированную к матрице A и вычислим алгебраические дополнения её элементов.

$$A^{T}=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -4 & -5 & -1 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix},$$

$$A_{11}=(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} -5 & -1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}=-5+3=-2,$$

$$A_{12}=(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} -4 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}=-(-4+1)=3,$$

$$A_{13}=(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} -4 & -5 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}=-12+5=-7,$$

$$A_{21}=(-1)^{2+1}\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}=-(1-3)=2,$$

$$A_{22}=(-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}=2-1=1,$$

$$A_{23} = (-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = -(6-1) = -5,$$

$$A_{31} = (-1)^{3+1}\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -5 & -1 \end{vmatrix} = -1+5 = 4,$$

$$A_{32} = (-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -4 & -1 \end{vmatrix} = -(-2+4) = -2,$$

$$A_{33} = (-1)^{3+3}\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -4 & -5 \end{vmatrix} = -10+4 = -6.$$

Тогда $A^{-1} = -\dfrac{1}{8}\begin{pmatrix} -2 & 3 & -7 \\ 2 & 1 & -5 \\ 4 & -2 & -6 \end{pmatrix}$.

Далее найдем матрицу X:

$$X = -\frac{1}{8}\begin{pmatrix} -2 & 3 & -7 \\ 2 & 1 & -5 \\ 4 & -2 & -6 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = -\frac{1}{8}\begin{pmatrix} -2\cdot 3+3\cdot(-1)+(-7)\cdot 1 \\ 2\cdot 3+1\cdot(-1)+(-5)\cdot 1 \\ 4\cdot 3+(-2)\cdot(-1)+(-6)\cdot 1 \end{pmatrix} =$$

$$= -\frac{1}{8}\begin{pmatrix} -6-3-7 \\ 6-1-5 \\ 12+2-6 \end{pmatrix} = -\frac{1}{8}\begin{pmatrix} -16 \\ 0 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix},$$

т.е. $x = 2$, $y = 0$, $z = -1$.

Задачи для самостоятельного решения

Решить системы уравнений матричным способом:

9. $\begin{cases} 11x+3y-z=2, \\ 2x+5y-5z=0, \\ x+4y+z=2. \end{cases}$

10. $\begin{cases} 3x+2y+z=5, \\ 2x+3y+z=1, \\ 2x+y+3z=11. \end{cases}$

11. $\begin{cases} x+5y-z=7, \\ 2x-y-z=4, \\ 3x-2y+4z=11. \end{cases}$

12. $\begin{cases} x-2y+z=4, \\ 2x+y+3z=5, \\ 3x+4y+z=-2. \end{cases}$

13. $\begin{cases} 2x-y=-1, \\ x+2y-z=-2, \\ y+z=-2. \end{cases}$

14. $\begin{cases} 4x+2y-z=0, \\ x+2y+z=1, \\ y-z=-3. \end{cases}$

§3. Метод Гаусса

Метод Гаусса является одним из наиболее универсальных и эффективных методов решений линейных алгебраических систем. Он состоит в последовательном исключении неизвестных.

Пусть дана система уравнений

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases}$$

Процесс решения по методу Гаусса состоит из двух этапов. На первом этапе (прямой ход) система приводится к ступенчатому (в частности, треугольному) виду.

На втором этапе (обратный ход) идет последовательное определение неизвестных из этой ступенчатой системы.

Замечания. 1. Если ступенчатая система оказывается треугольной, то исходная система имеет единственное решение. Из последнего уравнения находим x_n, из предпоследнего уравнения x_{n-1}, далее поднимаясь по системе вверх, найдем все остальные неизвестные.

2. На практике удобнее работать не с системой, а с расширенной матрицей, выполняя все элементарные преобразования над ее строками. Удобно, чтобы коэффициент a_{11} был равен 1 (уравнения переставить местами, либо разделить обе части уравнения на $a_{11} \neq 0$).

Рассмотрим метод Гаусса подробнее на примере.

Пример 10. Решить систему методом Гаусса

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 - 5x_4 = 1, \\ x_1 - x_2 - 5x_3 = 2, \\ 3x_1 - 2x_2 - 2x_3 - 5x_4 = 3, \\ 7x_1 - 5x_2 - 9x_3 - 10x_4 = 8. \end{cases}$$

Решение. Запишем расширенную матрицу системы. Для того чтобы коэффициент $a_{11} = 1$, переставим местами первую и вторую строчку расширенной матрицы. В полученной матрице обратим все элементы, стоящие в первом столбце, кроме единицы, в нули (первую строчку поочередно умножаем на (–2) и складываем со второй строчкой, умножаем на (-3) и складываем с третьей строчкой, умножаем на (-7) и складываем с четвертой строчкой).

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & 3 & -5 & 1 \\ 1 & -1 & -5 & 0 & 2 \\ 3 & -2 & -2 & -5 & 3 \\ 7 & -5 & -9 & -10 & 8 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & -5 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 3 & -5 & 1 \\ 3 & -2 & -2 & -5 & 3 \\ 7 & -5 & -9 & -10 & 8 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & -5 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 13 & -5 & -3 \\ 0 & 1 & 13 & -5 & -3 \\ 0 & 2 & 26 & -10 & -6 \end{array}\right).$$

В полученной матрице элемент $a_{22}=1$, поэтому все элементы стоящие во втором столбце под элементом a_{22} обращаем в ноль. Для этого вторую строчку поочередно умножаем на (-1) и складываем с третьей, умножаем на (-2) и складываем с четвертой. Получаем

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & -5 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 13 & -5 & -3 \\ 0 & 1 & 13 & -5 & -3 \\ 0 & 2 & 26 & -10 & -6 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & -5 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 13 & -5 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Исходная система свелась к ступенчатой:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 - 5x_3 = 2, \\ x_2 + 13x_3 - 5x_4 = -3. \end{cases}$$

Общее решение системы:

$$\begin{cases} x_1 = 2 + x_2 + 5x_3, \\ x_2 = -3 - 13x_3 + 5x_4. \end{cases}$$

Если положить $x_3 = 0$, $x_4 = 0$, то найдем одно из частных решений этой системы $x_1 = -1$, $x_2 = -3$, $x_3 = 0$, $x_4 = 0$.

Пример 11. Решить систему методом Гаусса

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 3, \\ 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 7, \\ 3x_1 + x_2 + x_3 = 5, \\ 5x_1 - x_2 - x_3 = 3. \end{cases}$$

Решение. Запишем расширенную матрицу системы и произведем элементарные преобразования над ее строчками. Получая нули в первом столбце под элементом $a_{11}=1$, умножаем поочередно первую строчку на (-2) и складываем со второй, на (-3) и складываем с третьей, умножаем на (-5) и складываем с четвертой. В полученной матрице третью сточку делим на (-2), а четвертую – на (-6). Далее получаем нули во втором столбце под элементом $a_{22}=1$, умножаем вторую строку на (-1) и складываем с третьей, умножаем третью строчку на (-1) и складываем с четвертой.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 2 & 7 \\ 3 & 1 & 1 & 5 \\ 5 & -1 & -1 & 3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & -2 & -4 \\ 0 & -6 & -6 & -12 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Ступенчатая система имеет вид

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 3, \\ x_2 = 1, \\ x_3 = 1. \end{cases}$$

Осуществляя обратный ход, находим $x_3 = 1$, $x_2 = 1$, $x_1 = 1$.

Задачи для самостоятельного решения

Методом Гаусса решить систему однородных линейных уравнений, найти общее решение и какое-либо частное решение системы:

15. $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 = 0, \\ x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 0. \end{cases}$

16. $\begin{cases} x_1 - x_2 + 6x_3 = 0, \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 0. \end{cases}$

17. $\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 = 0, \\ 7x_1 - 3x_2 + 4x_3 = 0. \end{cases}$

18. $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0, \\ x_1 - x_2 - x_3 = 0. \end{cases}$

19. $\begin{cases} 4x_1 + x_2 + 5x_3 + x_4 = 0, \\ -x_1 + 6x_2 + 4x_3 = 0. \end{cases}$

20. $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0, \\ x_1 - x_2 + 5x_3 + x_4 = 0. \end{cases}$

Установить совместность системы, методом Гаусса решить систему неоднородных линейных уравнений, найти общее решение и какое-либо частное решение системы:

21. $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 4, \\ x_1 - x_2 - x_3 = 0. \end{cases}$

22. $\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 = 2, \\ -x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 6. \end{cases}$

23. $\begin{cases} 3x_1 - x_2 + x_3 = 4, \\ x_1 - 7x_2 - x_3 = 0. \end{cases}$

24. $\begin{cases} x_1 - x_2 + 5x_3 = 0, \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = -3. \end{cases}$

§4. Метод Жордана-Гаусса

Пусть дана система линейных уравнений

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases} \tag{5}$$

В матрице A этой системы выберем отличный от нуля элемент a_{qp}. Этот элемент называется ***разрешающим элементом***, p-й столбец матрицы A – ***разрешающим столбцом***, а q-я строка – ***разрешающей строкой***.

Рассмотрим новую систему уравнений

$$\begin{cases} a'_{11}x_1 + a'_{12}x_2 + \ldots + a'_{1n}x_n = b'_1, \\ a'_{21}x_1 + a'_{22}x_2 + \ldots + a'_{2n}x_n = b'_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a'_{m1}x_1 + a'_{m2}x_2 + \ldots + a'_{mn}x_n = b'_m. \end{cases} \tag{6}$$

с матрицей A'. Коэффициенты и свободные члены этой системы определяются по формулам

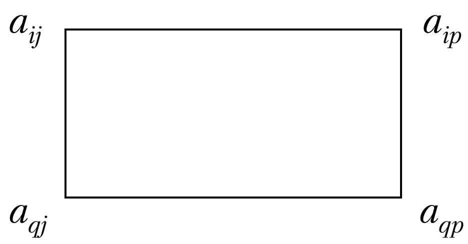
$$\begin{cases} a'_{ij} = a_{ij} - \dfrac{a_{ip}a_{qj}}{a_{qp}}, \\ b'_i = b_i - \dfrac{a_{ip}b_q}{a_{qp}}. \end{cases} \text{ если } i \neq q.$$

В частности, $a_{ip} = 0$, если $i \neq q$. Если же $i = q$, то принимаем $a'_{qj} = a_{qj}$, $b'_q = b_q$. Таким образом, q-е уравнение в системах (5) и (6) одинаковы, а коэффициенты при x_p во всех уравнениях системы (6), кроме q-го, равны нулю.

Системы (5) и (6) одновременно совместны или несовместны. В случае совместности эти системы равносильны (их решения совпадают).

Для определения элемента a'_{ij} матрицы A' полезно применять *«правило прямоугольника»*.

Рассмотрим 4 элемента матрицы A: a_{ij} – элемент, подлежащий преобразованию, a_{qp} – разрешающий элемент и элементы a_{ip} и a_{qj}. Для нахождения элемента a'_{ij} следует из элемента a_{ij} вычесть произведение элементов a_{ip} и a_{qj}, расположенных в противоположных вершинах прямоугольника, деленное на разрешающий элемент a_{qp}:



Пример 13. Решить систему линейных уравнений методом Жордана-Гаусса

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 8, \\ x_2 + 3x_3 + x_4 = 15, \\ 4x_1 + x_3 + x_4 = 11, \\ x_1 + x_2 + 5x_4 = 23. \end{cases}$$

Решение. Запишем коэффициенты, свободные члены и суммы коэффициентов и свободных членов ($\sum$ – контрольный столбец) в таблицу:

x_1	x_2	x_3	x_4	b	$\sum$
1	2	1	0	8	12
0	1	3	1	15	20
4	0	1	1	11	17
1	1	0	5	23	30

Возьмем за разрешающий элемент коэффициент при x_1 в первом уравнении. Перепишем без изменения строку таблицы, содержащую этот элемент (разрешающую строку), а все элементы первого столбца, кроме разрешающего, заменим нулями. Применив правило прямоугольника, заполняем остальные клетки таблицы (это же правило применяем к контрольному столбцу $\sum$):

x_1	x_2	x_3	x_4	b	$\sum$
1	2	1	0	8	12
0	1	3	1	15	20
0	-8	-3	1	-21	-31
0	-1	-1	5	15	18

В контрольном столбце получаются суммы элементов соответствующих строк.

Возьмем за разрешающий второй элемент второй строки. Первый столбец перепишем без изменения, элементы второго столбца, кроме разрешающего, заменим нулями, вторую строку (разрешающую) перепишем без изменения, элементы остальных клеток таблицы преобразуем по правилу прямоугольника:

x_1	x_2	x_3	x_4	b	Σ
1	0	-5	-2	-22	-28
0	1	3	1	15	20
0	0	21	9	99	129
0	0	2	6	30	38

Разделив на 2 элементы четвертой строки, получаем таблицу:

x_1	x_2	x_3	x_4	b	Σ
1	0	-5	-2	-22	-28
0	1	3	1	15	20
0	0	21	9	99	129
0	0	1	3	15	19

Преобразуем таблицу, приняв за разрешающий элемент третий элемент четвертой строки:

x_1	x_2	x_3	x_4	b	Σ
1	0	0	13	53	67
0	1	0	-8	-30	-37
0	0	0	-54	-216	-270
0	0	1	3	15	19

Разделим элементы третьей строки на -54:

x_1	x_2	x_3	x_4	b	Σ
1	0	0	13	53	67
0	1	0	-8	-30	-37
0	0	0	1	4	5
0	0	1	3	15	19

Преобразуем таблицу, приняв за разрешающий четвертый элемент третьей строки:

x_1	x_2	x_3	x_4	b	Σ
1	0	0	0	1	2
0	1	0	0	2	3
0	0	0	1	4	5
0	0	1	0	3	4

В результате получим

$$\begin{cases} x_1 = 1, \\ x_2 = 2, \\ x_3 = 3, \\ x_4 = 4. \end{cases}$$

Пример 14. Решить систему линейных уравнений методом Жордана-Гаусса

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 = 1, \\ x_1 - 3x_2 + x_3 + x_4 = 0, \\ 4x_1 - x_2 - x_3 - x_4 = 1, \\ 4x_1 + 3x_2 - 4x_3 - 5x_4 = 2. \end{cases}$$

Решение. Составим таблицу

x_1	x_2	x_3	x_4	b	Σ
1	1	-2	1	1	2
1	-3	1	1	0	0
4	-1	-1	-1	1	2
4	3	-4	-1	2	4

В качестве разрешающего элемента возьмем первый элемент первого столбца (первая строка разрешающая):

x_1	x_2	x_3	x_4	b	Σ
1	1	-2	1	1	2
0	-4	3	0	-1	-2
0	-5	7	-5	-3	-6
0	-1	4	-5	-2	-4

Четвертую строку разделим на -1:

x_1	x_2	x_3	x_4	b	Σ
1	1	-2	1	1	2
0	-4	3	0	-1	-2
0	-5	7	-5	-3	-6
0	1	-4	5	2	4

Преобразуем таблицу, приняв за разрешающий второй элемент четвертой строки (четвертая строка разрешающая):

x_1	x_2	x_3	x_4	b	Σ
1	0	2	-4	-1	-2
0	0	-13	20	7	14
0	0	-13	20	7	14
0	1	-4	5	2	4

Вычтем из третьей строки вторую и вычеркнем третью строку, состоящую из нулей:

x_1	x_2	x_3	x_4	b	Σ
1	0	2	-4	-1	-2
0	0	-13	20	7	14
0	1	-4	5	2	4

Примем за разрешающий четвертый элемент второй строки (вторая строка разрешающая):

x_1	x_2	x_3	x_4	b	Σ
1	0	-0,6	0	0,4	0,8
0	0	-13	20	7	14
0	1	-0,75	0	0,25	0,5

Матрица имеет ранг, равный трем, следовательно, система содержит три базисных неизвестных x_1, x_2 и x_4 и одно свободное неизвестное x_3. Получаем систему уравнений

$$\begin{cases} x_1 - 0,6x_3 = 0,4, \\ -13x_3 + 20x_4 = 7, \\ x_2 - 0,75x_3 = 0,25. \end{cases}$$

Отсюда $\begin{cases} x_1 = 0,4 + 0,6x_3, \\ x_2 = 0,25 + 0,75x_3, \\ x_4 = 0,35 + 0,65x_3. \end{cases}$

Общее решение системы имеет вид

$$x_1 = 0,4 + 0,6t, \quad x_2 = 0,25 + 0,75t, \quad x_3 = t, \quad x_4 = 0,35 + 0,65t,$$

где t – произвольное число.

Задачи для самостоятельного решения

Решить систему методом Жордана-Гаусса:

25. $\begin{cases} x_1 + x_2 - 3x_3 + 2x_4 = 6, \\ x_1 - 2x_2 - x_4 = -6, \\ x_2 + x_3 + 3x_4 = 16, \\ 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 6. \end{cases}$

26. $\begin{cases} x_2 - x_1 + x_3 - x_4 = -2, \\ x_1 + 2x_2 - 2x_3 - x_4 = -5, \\ 2x_1 - x_2 - 3x_3 + 2x_4 = -1, \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 6x_4 = -10. \end{cases}$

27. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 2x_4 + x_5 = 4, \\ 3x_1 + 6x_2 + 5x_3 - 4x_4 + 3x_5 = 5, \\ x_1 + 2x_2 + 7x_3 - 4x_4 + x_5 = 11, \\ 2x_1 + 4x_2 + 2x_3 - 3x_4 + 3x_5 = 6. \end{cases}$

28. $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - 4x_3 + 2x_4 = 2, \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 3x_5 = -3, \\ 2x_1 + 2x_3 - 3x_4 + 5x_5 = 4, \\ 5x_1 - 3x_2 + 4x_3 + 2x_4 - 7x_5 = 2. \end{cases}$

3. ЭЛЕМЕНТЫ МАТРИЧНОГО АНАЛИЗА

§1. Линейные пространства. Основные понятия

Множество L элементов $x, y, z, \ldots$ любой природы называют ***линейным пространством,*** если выполняются условия:

1) задано ***сложение элементов*** L, т.е закон по которому любым элементам $x, y \in L$ ставится в соответствие элемент $z \in L$, называемый ***суммой элементов x и y*** и обозначаемый $z = x + y$;

2) задано ***умножение элемента на число***, т.е. закон, по которому любому элементу $x \in L$ и любому числу $\lambda \in R$ ставится в соответствие элемент $z \in L$, называемый ***произведением элемента x на*** (действительное) ***число*** и обозначаемый $z = \lambda x$;

3) указанные законы (***линейные операции***) подчиняются следующим ***аксиомам линейного пространства***:

а) сложение коммутативно: $x + y = y + x$;

б) сложение ассоциативно: $(x + y) + z = x + (y + z)$;

в) существует такой элемент $0 \in L$, что $x + 0 = x$ для любого $x \in L$;

г) для каждого элемента x множества L существует такой элемент $(-x) \in L$, что $x + (-x) = 0$;

д) произведение любого x множества L на единицу равно этому элементу: $1 \cdot x = x$;

е) умножение на число ассоциативно: $\lambda(\mu x) = (\lambda\mu)x$;

ж) умножение на число и сложение связаны законом дистрибутивности по числам: $(\lambda + \mu)x = \lambda x + \mu x$;

з) умножение на число и сложение связаны законом дистрибутивности по элементам: $\lambda(x + y) = \lambda x + \lambda y$.

Элементы линейного пространства называют ***векторами***. Элемент 0 называют ***нулевым вектором***, а элемент $(-x)$ – вектором, ***противоположным*** к вектору x.

Линейным пространством является:

1) множество матриц размера $m \times n$, элементами которых являются действительные числа, с линейными операциями над матрицами;

2) множество всех геометрических векторов в пространстве с началом в данной точке и параллельных данной плоскости с линейными операциями над векторами;

3) множество матриц-строк (матриц-столбцов) длины n является линейным пространством относительно матричных операций сложения и умножения на число (это частный случай первого примера);

4) множество всех решений данной однородной системы линейных алгебраических уравнений. Решения можно рассматривать как матрицы-столбцы, складывать и умножать на числа по законам матричных операций. Столбец, получаемый в результате сложения решений или умножения решения на число, снова будет решением системы.

Из аксиом линейного пространства можно получить ряд простейших свойств:

1. Любое линейное пространство имеет только один нулевой вектор.
2. Каждый вектор линейного пространства имеет только один противоположный вектор.
3. Если вектор $(-x)$ противоположен вектору x, то вектор x противоположен вектору $(-x)$.
4. Для любых двух векторов a и b уравнение $a+x=b$ относительно x имеет решение, и притом единственное.
5. Произведение произвольного элемента линейного пространства на число 0 равно нулевому вектору: $0 \cdot x = 0$.
6. Вектор, противоположный данному вектору x, равен произведению x на число (-1): $(-x) = (-1) \cdot x$.
7. Произведение нулевого вектора на любое число есть нулевой вектор: $\lambda \cdot 0 = 0$.

§2. Линейная зависимость. Базис линейного пространства

Рассмотрим произвольное линейное пространство L. Выберем векторы $x_1, x_2, ..., x_n$ в пространстве L и рассмотрим их ***линейную комбинацию*** – выражение вида

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + ... + \alpha_n x_n,$$

где $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$ – действительные числа, называемые коэффициентами линейной комбинации.

Систему векторов $x_1, x_2, ..., x_n$ в линейном пространстве L называют ***линейно зависимой***, если найдутся такие вещественные числа $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$, из которых хотя бы одно отлично от нуля, что линейная комбинация является нулевым элементом пространства L, т.е. имеет место равенство

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + ... + \alpha_n x_n = 0.$$

Систему векторов $x_1, x_2, ..., x_n$ пространства L называются ***линейно независимыми***, если линейная комбинация является нулевым элементом пространства L лишь при условии $\alpha_1 = \alpha_2 = ... = \alpha_n$.

Критерием линейной зависимости векторов является следующее утверждение:

Для того, чтобы система векторов $x_1, x_2, ..., x_n$ была линейно зависима, необходимо и достаточно, чтобы один из векторов системы являлся линейной комбинацией остальных.

Пример 15. Исследовать на линейную зависимость систему векторов $\vec{x}_1 = (5;4;3)$, $\vec{x}_2 = (3;3;2)$, $\vec{x}_3 = (8;1;3)$.

Решение. Имеем векторное равенство:

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3 = 0.$$

Распишем это векторное равенство для каждой из координат:

$$\begin{cases} 5\alpha_1 + 3\alpha_2 + 8\alpha_3 = 0, \\ 4\alpha_1 + 3\alpha_2 + \alpha_3 = 0, \\ 3\alpha_1 + 2\alpha_2 + 3\alpha_3 = 0. \end{cases}$$

Запишем расширенную матрицу системы и произведем элементарные преобразования над строками матрицы, получим:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 5 & 3 & 8 & 0 \\ 4 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 3 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 5 & 3 & 8 & 0 \\ 0 & 3 & -27 & 0 \\ 0 & 1 & -9 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 5 & 3 & 8 & 0 \\ 0 & 1 & -9 & 0 \\ 0 & 1 & -9 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 5 & 3 & 8 & 0 \\ 0 & 1 & -9 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 5 & 0 & 35 & 0 \\ 0 & 1 & -9 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 7 & 0 \\ 0 & 1 & -9 & 0 \end{array}\right).$$

Исходная система свелась к ступенчатой системе:

$$\begin{cases} \alpha_1 + 7\alpha_3 = 0, \\ \alpha_2 - 9\alpha_3 = 0. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha_1 = -7\alpha_3, \\ \alpha_2 = 9\alpha_3. \end{cases}$$

Получаем, что $\alpha_1 = -7\alpha_3$, $\alpha_2 = 9\alpha_3$, α_3 – любое. Значит, система векторов линейно зависима.

В линейном пространстве наибольший интерес представляют системы векторов, в виде линейной комбинации которых можно представить любой вектор, причем единственным образом. Если зафиксировать такую систему векторов, то любой вектор можно будет однозначно представить набором чисел, являющихся коэффициентами соответствующей линейной комбинации, а все возможные векторные соотношения превратить с соотношения числовые.

Базисом линейного пространства L называют любую упорядоченную систему векторов, для которых выполнены два условия:

1) эта система векторов линейно зависима;

2) каждый вектор $\vec{v}$ в линейном пространстве может быть представлен в виде линейной комбинации векторов этой системы, т.е.

$$\vec{v} = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \dots + \alpha_n x_n .$$

Числа $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ называются координатами вектора $\vec{v}$ в базисе $x_1, x_2, \dots, x_n$.

Для нахождения базиса системы векторов нужно записать координаты векторов в виде строк матрицы и привести полученную матрицу к ступенчатому виду. Справа от матрицы указываются векторы и регистрируются проводимые преобразования матрицы.

Ненулевые строки ступенчатого вида матрицы определяют базис системы векторов, а нулевые строки ступенчатого вида матрицы позволяют получить разложение остальных векторов системы по базисным векторам.

Пример 16. Найти базис системы векторов $\vec{a}_1(1;2;3;-4)$, $\vec{a}_2(2;3;-4;1)$, $\vec{a}_3(2;-5;8;-3)$, $\vec{a}_4(5;26;-9;-12)$, $\vec{a}_5(3;-4;1;2)$ и все векторы, не вошедшие в базис, разложить по базису.

Решение. Запишем координаты векторов в виде строк матрицы и приведем полученную матрицу к ступенчатому виду:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -4 \\ 2 & 3 & -4 & 1 \\ 2 & -5 & 8 & -3 \\ 5 & 26 & -9 & -12 \\ 3 & -4 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{matrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ a_5 \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -4 \\ 0 & -1 & -10 & 9 \\ 0 & -8 & 12 & -4 \\ 0 & 16 & -24 & 8 \\ 0 & -10 & -8 & 14 \end{pmatrix} \begin{matrix} a_1 \\ a_2 - 2a_1 \\ a_3 - a_2 \\ a_4 - 5a_1 \\ a_5 - 3a_1 \end{matrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -4 \\ 0 & -1 & -10 & 9 \\ 0 & 0 & 92 & -76 \\ 0 & 0 & -184 & 152 \\ 0 & 0 & 92 & -76 \end{pmatrix} \begin{matrix} a_1 \\ a_2 - 2a_1 \\ a_3 - a_2 - 8(a_2 - 2a_1) \\ a_4 - 5a_1 + 16(a_2 - 2a_1) \\ a_5 - 3a_1 - 10(a_2 - 2a_1) \end{matrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -4 \\ 0 & -1 & -10 & 9 \\ 0 & 0 & 92 & -76 \\ 0 & 0 & -184 & 152 \\ 0 & 0 & 92 & -76 \end{pmatrix} \begin{matrix} a_1 \\ a_2 - 2a_1 \\ a_3 - 9a_2 + 16a_1 \\ a_4 - 37a_1 + 16a_2 \\ a_5 + 17a_1 - 10a_2 \end{matrix} \sim$$

$$\sim\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -4 \\ 0 & -1 & -10 & 9 \\ 0 & 0 & 92 & -76 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} a_1 \\ a_2-2a_1 \\ a_3-9a_2+16a_1 \\ 0,5(a_4-37a_1+16a_2)+a_3-9a_2+16a_1 \\ a_5+17a_1-10a_2-(a_3-9a_2+16a_1) \end{matrix} \sim$$

$$\sim\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -4 \\ 0 & -1 & -10 & 9 \\ 0 & 0 & 92 & -76 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} a_1 \\ a_2-2a_1 \\ a_3-9a_2+16a_1 \\ 0,5a_4-2,5a_1-a_2+a_3 \\ a_5+a_1-a_2-a_3 \end{matrix}.$$

Ненулевыми строками ступенчатого вида матрицы соответствуют векторы a_1, a_2-2a_1, $a_3+16a_1-9a_2$ поэтому векторы a_1,a_2,a_3 образуют базис линейной оболочки векторов.

Нулевым строкам ступенчатого вида матрицы соответствуют равенства $0,5a_4-2,5a_1-a_2+a_3=0$, $a_5+a_1-a_2-a_3=0$. Отсюда получаем разложение векторов a_4 и a_5 по базису a_1,a_2,a_3:

$$a_4=5a_1+2a_2-2a_3,\ a_5=-a_1+a_2+a_3.$$

Задачи для самостоятельного решения

Исследовать линейную зависимость и независимость элементов (векторов) линейного пространства:

1. $\vec{a}_1(2;7;-4)$, $\vec{a}_2(1;1;-4)$, $\vec{a}_3(2;-2;-2)$.

2. $\vec{a}_1(1;2;3)$, $\vec{a}_2(2;-1;0)$, $\vec{a}_3(3;1;3)$.

3. $\vec{a}_1(2;5;4)$, $\vec{a}_2(0;-1;1)$, $\vec{a}_3(1;5;7)$.

4. $\vec{a}_1(5;2;4)$, $\vec{a}_2(0;1;4)$, $\vec{a}_3(5;1;0)$.

5. $\vec{a}_1(1;2;3)$, $\vec{a}_2(4;5;6)$, $\vec{a}_3(7;8;9)$.

6. $\vec{a}_1(1;-2;-3)$, $\vec{a}_2(-4;5;6)$, $\vec{a}_3(7;-8;9)$.

7. $\vec{a}_1(2;-1;1)$, $\vec{a}_2(0;-1;2)$, $\vec{a}_3(2;5;7)$, $\vec{a}_4(1;-1;1)$.

8. $\vec{a}_1(2;-7;3)$, $\vec{a}_2(3;-1;1)$, $\vec{a}_3(1;-13;5)$, $\vec{a}_4(1;6;-2)$.

9. $\vec{a}_1(1;-1;1;1)$, $\vec{a}_2(1;-1;1;-1)$, $\vec{a}_3(-1;1;0;1)$, $\vec{a}_4(1;0;-1;1)$.

10. $\vec{a}_1(1;1;1;1)$, $\vec{a}_2(1;-1;-1;-1)$, $\vec{a}_3(0;1;0;1)$, $\vec{a}_4(1;0;-1;0)$.

Найти базис системы векторов и все векторы, не вошедшие в базис, разложить по базису:

11. $\vec{a}_1(1;2;1)$, $\vec{a}_2(2;1;3)$, $\vec{a}_3(1;5;0)$, $\vec{a}_4(2;-2;4)$.

12. $\vec{a}_1(1;1;2)$, $\vec{a}_2(0;1;2)$, $\vec{a}_3(2;1;-4)$, $\vec{a}_4(1;1;0)$.
13. $\vec{a}_1(1;-2;3)$, $\vec{a}_2(0;1;-1)$, $\vec{a}_3(1;3;0)$, $\vec{a}_4(0;-7;3)$, $\vec{a}_5(1,1,1)$.

14. Найти базис системы векторов $\vec{a}_1(1;1;4;2)$, $\vec{a}_2(1;-1;-2;4)$, $\vec{a}_3(0;2;6;-2)$, $\vec{a}_4(-3;3;3;-12)$, $\vec{a}_5(-1,0,-4,-3)$, содержащий вектор $\vec{a}_5$, и все векторы, не входящие в этот базис, разложить по базису.

15. Найти базис системы векторов $\vec{a}_1(1;3;0;5)$, $\vec{a}_2(1;2;0;4)$, $\vec{a}_3(1;1;1;3)$, $\vec{a}_4(1;0;-1;2)$, $\vec{a}_5(1,-3,3,-1)$, содержащий векторы $\vec{a}_2$ и $\vec{a}_3$, и векторы, не входящие в этот базис, разложить по базису.

Найти все базисы системы векторов:
16. $\vec{a}_1(1;1;2)$, $\vec{a}_2(3;1;2)$, $\vec{a}_3(1;2;1)$, $\vec{a}_4(2;1;2)$.
17. $\vec{a}_1(1;1;1)$, $\vec{a}_2(-3;-5;5)$, $\vec{a}_3(3;4;-1)$, $\vec{a}_4(1;-1;4)$.
18. $\vec{a}_1(1;1;0;-1)$, $\vec{a}_2(1;2;1;0)$, $\vec{a}_3(1;3;2;1)$, $\vec{a}_4(1;4;3;2)$.
19. $\vec{a}_1(1;0;1;0)$, $\vec{a}_2(-2;1;3;-7)$, $\vec{a}_3(3;-1;0;3)$, $\vec{a}_4(-4;1;-3;1)$.

§3. Преобразования базиса

Пусть $\vec{a}_1,...,\vec{a}_n$ и $\vec{b}_1,...,\vec{b}_n$ – два различных базиса линейного пространства L.

Матрица T, столбцы которой равны координатам векторов $\vec{b}_1,...,\vec{b}_n$ в базисе $\vec{a}_1,...,\vec{a}_n$, называется ***матрицей перехода*** от базиса $\vec{a}_1,...,\vec{a}_n$ к базису $\vec{b}_1,...,\vec{b}_n$. Тогда $(\vec{b}_1,...,\vec{b}_n)=(\vec{a}_1,...,\vec{a}_n)T$.

Определитель матрицы перехода отличен от нуля: $\Delta T \neq 0$.

Пример 17. Определить матрицу перехода от базиса $\vec{a}_1(1,2)$, $\vec{a}_2(3,5)$ к базису $\vec{b}_1(-1,3)$, $\vec{b}_2(4,6)$.

Решение. Запишем координаты векторов в идее строк матрицы и приведем полученную матрицу к ступенчатому виду. Справа от матрицы указываются векторы и регистрируются проводимые преобразования матрицы.

$$\begin{array}{c}\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 5\\ -1 & 3\\ 4 & 6\end{pmatrix}\end{array}\begin{array}{c}\vec{a}_1\\ \vec{a}_2\\ \vec{b}_1\\ \vec{b}_2\end{array} \sim \begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & -1\\ 0 & 5\\ 0 & -2\end{pmatrix}\begin{array}{c}\vec{a}_1\\ \vec{a}_2-3\vec{a}_1\\ \vec{b}_1+\vec{a}_1\\ \vec{b}_2-4\vec{a}_1\end{array} \sim \begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & -1\\ 0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}\begin{array}{c}\vec{a}_1\\ \vec{a}_2-3\vec{a}_1\\ \vec{b}_1+\vec{a}_1+5(\vec{a}_2-3\vec{a}_1)\\ \vec{b}_2-4\vec{a}_1-2(\vec{a}_2-3\vec{a}_1)\end{array} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{array}{c} \vec{a}_1 \\ \vec{a}_2 - 3\vec{a}_1 \\ \vec{b}_1 - 14\vec{a}_1 + 5\vec{a}_2 \\ \vec{b}_2 + 2\vec{a}_1 - 2\vec{a}_2 \end{array}.$$

Нулевым строкам ступенчатого вида матрицы соответствуют равенства $\vec{b}_1 - 14\vec{a}_1 + 5\vec{a}_2 = 0$ и $\vec{b}_2 + 2\vec{a}_1 - 2\vec{a}_2 = 0$. Отсюда $\vec{b}_1 = 14\vec{a}_1 - 5\vec{a}_2$ и $\vec{b}_2 = -2\vec{a}_1 + 2\vec{a}_2$.

Получено разложение векторов $\vec{b}_1$ и $\vec{b}_2$ по базису $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$. Записав коэффициенты этого разложения в виде столбцов матрицы, получим матрицу перехода $T = \begin{pmatrix} 14 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$. Тогда $(\vec{b}_1 \vec{b}_2) = (\vec{a}_1 \vec{a}_2)T$.

Задачи для самостоятельного решения

20. Определить матрицу перехода от базиса $\vec{a}_1(2,4)$, $\vec{a}_2(1,6)$ к базису $\vec{b}_1(2,-3)$, $\vec{b}_2(7,2)$.

Найти матрицу перехода от базиса $\vec{e}_1(1,0)$, $\vec{e}_2(0,1)$ к базису $\vec{g}_1$, $\vec{g}_2$ и вычислить координаты вектора $\vec{a}$ в базисе $\vec{g}_1$, $\vec{g}_2$:

21. $\vec{a} = 5\vec{e}_1 - 2\vec{e}_2$, $\vec{g}_1 = (2,-1)$, $\vec{g}_2 = (7,-3)$.

22. $\vec{a} = -2\vec{e}_1 + \vec{e}_2$, $\vec{g}_1 = (7,-8)$, $\vec{g}_2 = (7,-6)$.

23. $\vec{a} = \vec{e}_1 + 4\vec{e}_2$, $\vec{g}_1 = (0,3)$, $\vec{g}_2 = (1,-3)$.

24. $\vec{a} = 7\vec{e}_1 + 12\vec{e}_2$, $\vec{g}_1 = (2,4)$, $\vec{g}_2 = (-8,-12)$.

§4. Связь между координатами вектора в разных базисах

Пусть $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix}$ и $X' = \begin{pmatrix} x'_1 \\ \ldots \\ x'_n \end{pmatrix}$ – координаты вектора x в базисах $\vec{a}_1,\ldots,\vec{a}_n$ и $\vec{b}_1,\ldots,\vec{b}_n$ соответственно. Известна матрица перехода T от базиса $\vec{a}_1,\ldots,\vec{a}_n$ к базису $\vec{b}_1,\ldots,\vec{b}_n$. Тогда $X = T \cdot X'$. Отсюда $X' = T^{-1} \cdot X$.

Пример 18. Координаты вектора $\vec{x}(6,7)$ в базисе a_1,a_2, $\vec{a}_1(1,2)$, $\vec{a}_2(3,5)$. Найти координаты вектора $\vec{x}$ в базисе b_1,b_2, $\vec{b}_1(-1,3)$, $\vec{b}_2(4,6)$.

Решение. Матрица перехода найдена в примере 17: $T=\begin{pmatrix}14 & -2\\ -5 & 2\end{pmatrix}$, матрица $X=\begin{pmatrix}6\\ 7\end{pmatrix}$.

Обратная матрица $T^{-1}=\frac{1}{18}\begin{pmatrix}2 & 2\\ 5 & 14\end{pmatrix}$.

Тогда координаты вектора $\vec{x}$ в базисе b_1, b_2 равны

$$T^{-1}\cdot X=\frac{1}{18}\begin{pmatrix}2 & 2\\ 5 & 14\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}6\\ 7\end{pmatrix}=\frac{1}{18}\begin{pmatrix}2\cdot 6+2\cdot 7\\ 5\cdot 6+14\cdot 7\end{pmatrix}=\frac{1}{18}\begin{pmatrix}26\\ 128\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{13}{9}\\ \frac{64}{9}\end{pmatrix}.$$

Задачи для самостоятельного решения

Найти координаты вектора $\vec{a}$ в данном базисе:

25. $\vec{a}(6;-3)$, $\vec{b}(1;3)$, $\vec{c}(-1;4)$.

26. $\vec{a}(-2;2)$, $\vec{b}(1;-4)$, $\vec{c}(-3;5)$.

27. $\vec{a}(1;0)$, $\vec{b}(-2;-4)$; $\vec{c}(1;1)$.

28. $\vec{a}(6;-3)$, $\vec{b}(1;3)$, $\vec{c}(-1;4)$.

29. $\vec{a}(0;1)$, $\vec{b}(-4;3)$, $\vec{c}(-5;2)$.

30. $\vec{a}(7;-4;-4)$, $\vec{b}(2;-1;0)$, $\vec{c}(3;0;2)$, $\vec{d}(1;-2;1)$.

31. $\vec{a}(-2;-6;6)$, $\vec{b}(-1;1;-3)$, $\vec{c}(2;0;1)$, $\vec{d}(0;-4;2)$.

32. Координаты вектора $\vec{x}(9,8)$ в базисе $(\vec{a}_1,\vec{a}_2)$, если $\vec{a}_1(2,4)$, $\vec{a}_2(1,6)$. Найти координаты вектора $\vec{x}$ в базисе $(\vec{b}_1,\vec{b}_2)$, $\vec{b}_1(2,-3)$, $\vec{b}_2(7,2)$.

§5. Фундаментальная система решения системы линейных однородных уравнений

Пусть дана система линейных однородных уравнений

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\ldots+a_{1n}x_n=0,\\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\ldots+a_{2n}x_n=0,\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\ldots+a_{mn}x_n=0. \end{cases}$$

Система линейных однородных уравнений всегда совместна, так как она всегда имеет, по крайней мере, нулевой (тривиальной) решение.

Линейно независимые решения $\vec{e}_1, \vec{e}_2, ..., \vec{e}_k$ однородной системы уравнений называются ***фундаментальной системой решений***, если каждое решение является линейной комбинацией решений $\vec{e}_1, \vec{e}_2, ..., \vec{e}_k$.

Если ранг r матрицы коэффициентов при переменных системы линейных однородных уравнений меньше числа переменных n, то всякая фундаментальная система решений системы состоит из $n-r$ решений.

Поэтому общее решение системы линейных однородных уравнений имеет вид:

$$C_1\vec{e}_1 + C_2\vec{e}_2 + ... + C_K\vec{e}_k,$$

где $\vec{e}_1, \vec{e}_2, ..., \vec{e}_k$ – любая фундаментальная система решений; $C_1, C_2, ..., C_k$ – произвольные числа и $k = n - r$.

Пример 19. Найти фундаментальную систему решений однородной системы уравнений

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 4x_3 - 3x_4 = 0, \\ 3x_1 + 5x_2 + 6x_3 - 4x_4 = 0, \\ 4x_1 + 5x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 0, \\ 3x_1 + 8x_2 + 24x_3 - 19x_4 = 0. \end{cases}$$

Решение. Решим систему методом Гаусса

$$\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} x_1 & x_3 & x_3 & x_4 \end{array} \\ \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 4 & -3 & 0 \\ 3 & 5 & 6 & -4 & 0 \\ 4 & 5 & -2 & 3 & 0 \\ 3 & 8 & 24 & -19 & 0 \end{array}\right) \end{array} \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 4 & -3 & 0 \\ 0 & -1 & -6 & 5 & 0 \\ 0 & -3 & -18 & 15 & 0 \\ 0 & 2 & 12 & -10 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 4 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 6 & -5 & 0 \\ 0 & 1 & 6 & -5 & 0 \\ 0 & 1 & 6 & -5 & 0 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 4 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 6 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 4 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 6 & -5 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -8 & 7 & 0 \\ 0 & 1 & 6 & -5 & 0 \end{array}\right).$$

Анализируя главный ступенчатый вид матрицы, видим что x_1 и x_2 – главные переменные, x_3, x_4 – свободные переменные. Тогда

$$\begin{cases} x_1 = 8x_3 - 7x_4, \\ x_2 = -6x_3 + 5x_4, \\ x_3, x_4 \text{ любые.} \end{cases}$$

Для нахождения фундаментальной системы решения применим метод бегущей единицы (поочередно одну свободную переменную приравниваем единице, другую свободную переменную приравниваем нулю и находим соответствующие значения главных переменных).

$$\begin{cases} x_1 = 8\cdot 1 - 7\cdot 0 = 8, \\ x_2 = -6\cdot 1 + 5\cdot 0 = -6, \\ x_3 = 1, \\ x_4 = 0. \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} x_1 = 8\cdot 0 - 7\cdot 1 = -7, \\ x_2 = -6\cdot 0 + 5\cdot 1 = 5, \\ x_3 = 0, \\ x_4 = 1. \end{cases}$$

Векторы $\vec{e}_1(8,-6,1,0)$ и $\vec{e}_2\left(-7,5,0,1\right)$ создают фундаментальную систему решений, то есть базис пространства решений.

Общее решение линейной однородной системы имеет вид:

$$\vec{a} = C_1\vec{e}_1 + C_2\vec{e}_2 = C_1(8,-6,1,0) + C_2(-7,5,0,1),$$

где C_1 и C_2 – произвольные постоянные (действительные числа).

Задачи для самостоятельного решения

Найти фундаментальную систему решений однородной системы уравнений:

33. $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = 0, \\ x_1 + x_2 + x_3 - 2x_4 = 0. \end{cases}$

34. $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 - x_4 = 0, \\ x_1 + 3x_2 + 10x_3 - 8x_4 = 0. \end{cases}$

35. $\begin{cases} 5x_1 - 3x_2 + 2x_3 + 4x_4 = 0, \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 + 5x_4 = 0, \\ 4x_1 - 3x_2 - 5x_3 - 7x_4 = 0. \end{cases}$

36. $\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 4x_3 - 2x_4 = 0, \\ 2x_1 - x_2 - 4x_3 + 4x_4 = 0, \\ 6x_1 - x_2 - 4x_3 + 6x_4 = 0. \end{cases}$

37. $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = 0, \\ 3x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = 0. \end{cases}$

38. $\begin{cases} 3x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 0, \\ x_1 + 3x_2 + x_3 - x_4 = 0, \\ -x_1 + x_2 + 3x_3 + x_4 = 0, \\ x_1 - x_2 + x_3 + 3x_4 = 0. \end{cases}$

39. $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - 5x_3 + 4x_4 = 0, \\ 3x_1 - x_2 + 3x_3 - 3x_4 = 0, \\ 3x_1 + 5x_2 - 13x_3 + 11x_4 = 0, \\ -3x_1 + 4x_2 - 11x_3 + 10x_4 = 0. \end{cases}$

40. $\begin{cases} 3x_1 - x_2 + 3x_3 + 2x_4 + 5x_5 = 0, \\ 5x_1 - 3x_2 + 2x_3 + 3x_4 + 4x_5 = 0, \\ x_1 - 3x_2 - 5x_3 - 7x_5 = 0. \end{cases}$

41. $\begin{cases} 13x_1 - 4x_2 - x_3 - 4x_4 - 6x_5 = 0, \\ 11x_1 - 2x_2 + x_3 - 2x_4 - 3x_5 = 0, \\ 5x_1 + 4x_2 + 7x_3 + 4x_4 + 6x_5 = 0, \\ 7x_1 + 2x_2 + 5x_3 + 2x_4 + 3x_5 = 0. \end{cases}$

§6. Линейные операторы

Линейная алгебра больше внимание уделяет отображениям, которые векторам одного линейного пространства ставят в соответствие векторы другого линейного пространства. Среди таких отображений выделяются те, которые сохраняют алгебраические соотношения. Такие отображения являются наиболее простыми, так как они естественным образом связаны со структурой линейного пространства.

Отображение $f: L \to L'$ из линейного пространства L в линейное пространство L' называют ***линейным отображением*** или ***линейным оператором,*** если выполнены следующие условия:

1) $f(x+y) = f(x) + f(y)$ для всех x, y из L;

2) $f(\alpha x) = \alpha f(x)$ для всех x из L и любого числа $\alpha \in R$.

Линейный оператор $f: L \to L$, который осуществляет отображение линейного пространства L в себя, называют также ***линейным преобразованием*** линейного пространства L и говорят, что линейный оператор f действует в линейном пространстве L.

Действие любого линейного оператора сводится к умножению столбца координат вектора на матрицу.

Пусть задан линейный оператор $f: L \to L$, т.е. линейное преобразование n-мерного линейного пространства L в себя. Выберем базис в L: $e = (\vec{e}_1,...,\vec{e}_n)$ в L. Действие линейного оператора полностью определено, если известны образы векторов базиса. Действительно, если вектор $\vec{x}$ имеет координаты $\vec{x} = (x_1,...,x_n)$, то

$$f(x) = f(x_1e_1 + ... + x_ne_n) = x_1f(e_1) + ... + x_nf(e_n),$$

т.е., зная векторы $f(e_i)$, можно найти образ любого вектора $\vec{x}$ линейного пространства L.

Связь между вектором $\vec{x}$ и его образом $y = f(x)$ можно выразить в матричной форме уравнением

$$Y = A \cdot X,$$

где A – матрица линейного оператора; X, Y – матрицы-столбцы из координат векторов x и y.

Матрицу $A = (f(e_1)f(e_2)...f(e_n))$, составленную из координатных столбцов векторов $f(e_1),...f(e_n)$ в базисе $e = (\vec{e}_1,...,\vec{e}_n)$, называют ***матрицей линейного оператора*** f в базисе $e = (\vec{e}_1,...,\vec{e}_n)$.

Если рассмотреть другой базис $e' = (\vec{e}'_1,...,\vec{e}'_n)$ пространства R^n, то у оператора f в этом базисе будет матрица

$$A' = T^{-1}AT,$$

где T – матрица перехода от базиса $e = (\vec{e}_1,...,\vec{e}_n)$ к базису $e' = (\vec{e}'_1,...,\vec{e}'_n)$.

Матрица линейного оператора $f: L \to L$ является квадратной, ее порядок совпадает с размерностью линейного пространства L.

Каждому линейному оператору $f: L \to L'$ соответствуют *ядро* и его *образ*.

Множество тех векторов линейного пространства L, которые под действием линейного оператора f переходят в нулевой вектор линейного пространства L, называется ***ядром*** линейного оператора и обозначается $Ker\, f$.

Множество векторов линейного пространства L', являющихся значениями этого оператора, называется ***образом*** линейного оператора и обозначается $im\ f$.

Важнейшие характеристики линейного оператора – размерность ядра и образа. Размерность ядра называют ***дефектом*** линейного оператора ($d(f)$), а размерность образа – его ***рангом*** ($Rg(f)$). Дефект и ранг оператора $f: L \to L'$ связаны с размерностью пространства L соотношением

$$d(f) + Rg(f) = \dim L.$$

Рассмотрим несколько примеров линейных операторов и их матриц.

Пример 20. Оператор f переводит вектор $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3)$ в вектор $f(x) = (x_1 + x_2, x_2, 2x_1 - x_2 + 3x_3)$. Показать, что f -линейный оператор и найти его матрицу.

Решение. Покажем, что f -линейный оператор. Для этого проверим выполнимость двух условий.

$f(x) = (x_1 + x_2, x_2, 2x_1 - x_2 + 3x_3)$.

$y = (y_1, y_2, y_3)$, $f(y) = (y_1 + y_2, y_2, 2y_1 - y_2 + 3y_3)$.

$f(x) + f(y) = (x_1 + x_2 + y_1 + y_2, x_2 + y_2, 2x_1 - x_2 + 3x_3 + 2y_1 - y_2 + 3y_3)$.

$x + y = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, x_3 + y_3)$,

$f(x + y) = (x_1 + y_1 + x_2 + y_2,\ x_2 + y_2,\ 2(x_1 + y_1) - (x_2 + y_2) + 3(x_3 + y_3))$.

Видим, что $f(x + y) = f(x) + f(y)$.

$\alpha x = (\alpha x_1, \alpha x_2, \alpha x_3)$,

$f(\alpha x) = (\alpha x_1 + \alpha x_2, \alpha x_2, 2\alpha x_1 - \alpha x_2 + 3\alpha x_3)$.

$\alpha f(x) = \alpha(x_1 + x_2, x_2, 2x_1 - x_2 + 3x_3) = (\alpha(x_1 + x_2), \alpha x_2, \alpha(2x_1 - x_2 + 3x_3))$.

Видим, что $f(\alpha x) = \alpha f(x)$. Оба свойства выполнены. Поэтому f – линейный оператор.

Найдем матрицу линейного оператора. Для этого определим образы базисных векторов $\vec{e}_1(1,0,0)$, $\vec{e}_2(0,1,0)$, $\vec{e}_3(0,0,1)$ под действием оператора f.

$f(e_1) = (1 + 0, 0, 2 \cdot 1 - 0 + 3 \cdot 0) = (1,0,2)$,

$f(e_2) = (0 + 1, 1, 2 \cdot 0 - 1 + 3 \cdot 0) = (1,1,-1)$,

$f(e_3) = (0 + 0, 0, 2 \cdot 0 - 0 + 3 \cdot 1) = (0,0,3)$.

Запишем полученные координаты в виде столбцов матрицы:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Это и есть матрица линейного оператора f в базисе $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$.

Пример 21. Оператор f переводит вектор $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3)$ в вектор $f(x) = (x_1 + 1, x_2, x_3)$. Выяснить является ли что f линейным оператором.

Решение. Проверим выполнимость двух условий

$f(x)=(x_1+1,x_2,x_3)$.

$y=(y_1,y_2,y_3)$, $f(y)=(y_1+1,y_2,y_3)$

$f(x)+f(y)=(x_1+1+y_1+1,x_2+y_2,\ x_3+y_3)$.

$x+y=(x_1+y_1,x_2+y_2,x_3+y_3)$,

$f(x+y)=(x_1+y_1+1,\ x_2+y_2,\ x_3+y_3)$.

Видим, что $f(x+y)\neq f(x)+f(y)$. Поэтому f не является линейным оператором.

Пример 22. Дана матрица линейного оператора $A=\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}$ в базисе $\vec{e}_1(1,0)$, $\vec{e}_2(0,1)$. Найти матрицу этого линейного оператора в базисе $\vec{e}_1'(5,3)$, $\vec{e}_2'(2,1)$.

Решение. Известны координаты векторов $\vec{e}_1'$ и $\vec{e}_2'$ в базисе $\vec{e}_1(1,0)$, $\vec{e}_2(0,1)$, поэтому разложение их базису имеет вид:

$$\vec{e}_1'=5\vec{e}_1+3\vec{e}_2,\ \vec{e}_2'=\vec{e}_1+\vec{e}_2.$$

Матрица перехода состоит из записанных в столбцы координат векторов $\vec{e}_1',\vec{e}_2'$ в базисе $\vec{e}_1,\vec{e}_2$:

$$T=\begin{pmatrix}5&2\\3&1\end{pmatrix}.$$

Тогда матрица линейного оператора в базисе $\vec{e}_1',\vec{e}_2'$ вычисляется по формуле $A'=T^{-1}AT$.

Обратная матрица

$$T^{-1}=\frac{1}{\Delta T}\cdot T^*,\ \ T^{-1}=\frac{1}{5-6}\begin{pmatrix}1&-2\\-3&5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1&2\\3&-5\end{pmatrix}.$$

$$A'=T^{-1}AT=\begin{pmatrix}-1&2\\3&-5\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}5&2\\3&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}43&16\\-102&-38\end{pmatrix}.$$

Пример 23. Линейный оператор в базисе $\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3$ задан матрицей

$$A=\begin{pmatrix}3&2&4\\-1&5&6\\1&8&2\end{pmatrix}.$$

Найти образ вектора $\vec{x}=4\vec{e}_1-3\vec{e}_2+\vec{e}_3$.

Решение. По формуле $Y = A \cdot X$ имеем

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ -1 & 5 & 6 \\ 1 & 8 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12-6+4 \\ -4-15+6 \\ 4-24+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ -13 \\ -18 \end{pmatrix}.$$

Следовательно, $\vec{y} = 10\vec{e}_1 - 13\vec{e}_2 - 18\vec{e}_3$.

Задачи для самостоятельного решения

Установить, какие из указанных преобразований координат задают линейный оператор и составить матрицу этого оператора:

42. $f(x) = (x_2 - 3x_3, x_1)$.

43. $f(x) = (6x_1 + x_2, -5x_1, -7x_2)$.

44. $f(x) = (3x_2 - 3, x_1)$.

45. $f(x) = (4x_1 + 2, x_2)$.

46. $f(x) = (x_2^3 + 9x_1, 2x_1 - x_2)$.

47. $f(x) = (x_1^2 - 4x_2, x_1 + x_2)$.

48. $f(x) = (x_1, 11x_1 + 2x_2)$.

49. $f(x) = (-4x_1 - x_2, 3x_1 + 10x_2)$.

50. $f(x) = (6x_1 + x_2 - x_3, 7x_2)$.

51. $f(x) = (x_1 + 2x_2 - 3x_3, -x_1 + 2x_2, x_2 - x_3)$.

52. $f(x) = (x_1 + 3x_3, -x_1 + x_3, x_2 - x_3)$.

53. $f(x) = (x_3, 4x_1 + x_2 - 5x_3, x_1 - 2x_3)$.

54. $f(x) = (2 - 3x_3, -x_1 + 2x_3, x_2 + 7x_3)$.

55. $f(x) = (5x_1 + x_2 - x_3, 2, x_2 + x_3)$.

56. $f(x) = (x_1 + \sqrt{x_2} - x_3, -x_1 + x_2, x_2 + x_3)$.

57. $f(x) = (x_3, -x_1 + x_2, x_2 - \sqrt{x_3})$.

58. $f(x) = (x_1^2 + x_2 + 4x_3, x_1 + x_2 - x_3)$.

59. $f(x) = (x_2 + x_3, x_2^2, x_2 + 7x_3)$.

60. Дана матрица линейного оператора $A = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ в базисе $\vec{e}_1(1,0)$, $\vec{e}_2(0,1)$. Найти матрицу этого линейного оператора в базисе $\vec{e}_1'(1,2)$, $\vec{e}_2'(2,5)$.

Найти матрицу линейного оператора, определить его ранг и дефект:

61. $f(x)=(x_1+x_2+x_3, x_1+x_2, x_2+x_3)$.

62. $f(x)=(x_1+2x_2+3x_3, x_1+2x_2, 2x_2+3x_3)$.

63. $f(x)=(x_1+2x_2-x_3, x_1+x_2+x_3, -x_1+x_3)$.

64. $f(x)=(-x_1+5x_2-x_3, -2x_1+2x_2+2x_3, x_1+x_2-x_3)$.

Найти обратный оператор к оператору, заданному указанной матрицей:

65. $A=\begin{pmatrix} 2 & -7 \\ -3 & 10 \end{pmatrix}$.

66. $A=\begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -9 & 7 \end{pmatrix}$.

67. $A=\begin{pmatrix} 5 & 8 \\ 6 & 10 \end{pmatrix}$.

68. $A=\begin{pmatrix} -2 & -4 \\ -4 & -9 \end{pmatrix}$.

69. $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 4 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

70. $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 2 & -3 & -4 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$.

71. $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ -5 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.

72. $A=\begin{pmatrix} 1 & -2 & -4 \\ 9 & 5 & -6 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

§7. Собственные значения и собственные векторы матрицы

Если при действии линейного оператора f на ненулевой вектор $\vec{x}$ получается тот же вектор, умноженный на какое-либо число λ, то такой вектор называется ***собственным вектором*** линейного оператора f: $f(x)=\lambda x$. Число λ называется ***собственным значением***.

Для нахождения собственных векторов и собственных значений в матрице A порядка n линейного оператора f на главной диагонали вычитается число λ. Определитель полученной матрицы приравнивается к нулю:

$$\Delta=\left|A-\lambda E\right|=0.$$

Это ***характеристическое уравнение***. Его решения и есть собственные значения $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_k$.

Для каждого λ_i, $i=(\overline{1,k})$, решается однородная система

$$(A-\lambda E)\cdot X=0,$$

где $X=\begin{pmatrix} x_1 \\ ... \\ x_n \end{pmatrix}$, $0=\begin{pmatrix} 0 \\ ... \\ 0 \end{pmatrix}$.

Главные переменные выражаем через свободные переменные и ***методом бегущей единицы*** (поочередно одну свободную переменную приравниваем единице, остальные свободные переменные приравниваем нулю, находим значения главных переменных) получаем все собственные векторы, соответствующие собственному значению λ_i.

Рассмотрим на примерах нахождение собственных значений собственных векторов линейного оператора.

Пример 24. Найти собственные векторы и собственные значения линейного оператора, заданного матрицей

$$A=\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}.$$

Решение. Найдем характеристическое уравнение матрицы A. Так как

$$|A-\lambda E|=\begin{vmatrix} 3-\lambda & 4 \\ 5 & 2-\lambda \end{vmatrix}=(3-\lambda)\cdot(2-\lambda)-5\cdot 4=6-3\lambda-2\lambda+\lambda^2-20=$$
$$=\lambda^2-5\lambda-14,$$

т.е. $\lambda^2-5\lambda-14=0$ – характеристическое уравнение матрицы A. Решив квадратное уравнение, найдем собственные значения: $\lambda_1=-2$, $\lambda_2=7$.

Найдем собственные векторы.

Пусть $\lambda_1=-2$, получим:

$$\begin{pmatrix} 3-(-2) & 4 \\ 5 & 2-(-2) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Полученную однородную систему линейных уравнений решим методом Гаусса. Запишем расширенную матрицу системы и произведем элементарные преобразования над строками матрицы.

$$\begin{array}{cc} x_1 & x_2 \end{array}$$
$$\left(\begin{array}{cc|c} 5 & 4 & 0 \\ 5 & 4 & 0 \end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{cc|c} 5 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0{,}8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0{,}8 & 0 \end{array}\right)$$

Получили, что $x_1=-0{,}8x_2$, x_2 – любое число. Одна свободная переменная – x_2. Приравняем ее единице и найдем соответствующее значение главной переменной x_1: $x_2 = 1$, $x_1 = -0,8$. Следовательно, собственный вектор, соответствующий собственному значению $\lambda_1 = -2$ равен:

$$X_{\lambda_1} = X_{-2} = (-0,8;\ 1).$$

Пусть $\lambda_2 = 7$. Тогда

$$\begin{pmatrix} 3-7 & 4 \\ 5 & 2-7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix} -4 & 4 \\ 5 & -5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Применим метод Гаусса для решения однородной системы линейных уравнений.

$$\begin{array}{cc} x_1 & x_2 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} -4 & 4 & 0 \\ 5 & -5 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 0 \end{array}\right)$$

Получили, что $x_1 = x_2$, x_2 – любое число. Одна свободная переменная – x_2. Приравняем ее единице и найдем соответствующее значение главной переменной x_1: $x_2 = 1$, $x_1 = 1$. Следовательно, собственный вектор, соответствующий собственному значению $\lambda_2 = 7$ равен:

$$X_{\lambda_2} = X_7 = (1; 1).$$

Пример 25. Найти собственные векторы и собственные значения линейного оператора, заданного матрицей

$$A = \begin{pmatrix} 7 & -12 & 6 \\ 10 & -19 & 10 \\ 12 & -24 & 13 \end{pmatrix}.$$

Решение. Найдем характеристическое уравнение матрицы A.

$$|A - \lambda E| = \begin{vmatrix} 7-\lambda & -12 & 6 \\ 10 & -19-\lambda & 10 \\ 12 & -24 & 13-\lambda \end{vmatrix} = (7-\lambda)\cdot(-19-\lambda)\cdot(13-\lambda) +$$

$$+(-12)\cdot 10\cdot 12 + 10\cdot(-24)\cdot 6 - 6\cdot(-19-\lambda)\cdot 12 - 10\cdot(-12)\cdot(13-\lambda) -$$

$$-10\cdot(-24)\cdot(7-\lambda) = -\lambda^3 + \lambda^2 + \lambda - 1 = 0.$$

Характеристическое уравнение матрицы имеет вид

$$\lambda^3 - \lambda^2 - \lambda + 1 = 0.$$

Целые корни могут быть только среди делителей свободного члена 1, т.е. среди ± 1. Применяя схему Горнера, получим собственные значения $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$, $\lambda_3 = -1$.

Найдем собственные векторы.

Пусть $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$. Тогда

$$\begin{pmatrix} 7-1 & -12 & 6 \\ 10 & -19-1 & 10 \\ 12 & -24 & 13-1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 6 & -12 & 6 \\ 10 & -20 & 10 \\ 12 & -24 & 12 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Для решения системы линейных однородных уравнений воспользуемся методом Гаусса.

$$\begin{array}{c} \begin{matrix} x_1 & x_2 & x_3 & \end{matrix} \\ \left(\begin{array}{ccc|c} 6 & -12 & 6 & 0 \\ 10 & -20 & 10 & 0 \\ 12 & -24 & 12 & 0 \end{array}\right) \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

Получили, что $x_1 = 2x_2 - x_3$, x_2, x_3 - любые.

Таким образом, имеем две свободные переменные x_2 и x_3. Применим метод бегущей единицы (поочередно одну свободную единицу приравниваем единице, другую свободную переменную приравниваем нулю и находим соответствующее значение главной переменной).

$$\begin{cases} x_1 = 2\cdot 1 - 0 = 2, \\ x_2 = 1, \\ x_3 = 0. \end{cases} \quad \begin{cases} x_1 = 2\cdot 0 - 1 = -1, \\ x_2 = 0, \\ x_3 = 1. \end{cases}$$

$X^{(1)}_{\lambda_{1,2}} = X^{(1)}_1 = (2,1,0)$ и $X^{(2)}_{\lambda_{1,2}} = X^{(2)}_1 = (-1,0,1)$ – собственные векторы, соответствующие собственному значению $\lambda_{1,2} = 1$.

Пусть $\lambda_3 = -1$. Тогда

$$\begin{pmatrix} 7-(-1) & -12 & 6 \\ 10 & -19-(-1) & 10 \\ 12 & -24 & 13-(-1) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 8 & -12 & 6 \\ 10 & -18 & 10 \\ 12 & -24 & 14 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Применяя метод Гаусса для решения системы линейных однородных уравнений, найдем собственные векторы, соответствующие собственному значению $\lambda_3 = -1$.

$$\begin{array}{ccc} x_1 & x_2 & x_3 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 8 & -12 & 6 & 0 \\ 10 & -18 & 10 & 0 \\ 12 & -24 & 14 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & -6 & 3 & 0 \\ 5 & -9 & 5 & 0 \\ 6 & -12 & 7 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & -6 & 3 & 0 \\ 0 & -6 & 5 & 0 \\ 0 & -12 & 10 & 0 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & -6 & 3 & 0 \\ 0 & -6 & 5 & 0 \\ 0 & -6 & 5 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & -6 & 3 & 0 \\ 0 & -6 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & -6 & 5 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -0,5 & 0 \\ 0 & 1 & -5/6 & 0 \end{array}\right)$$

Получили

$$\begin{cases} x_1 = 0,5x_3, \\ x_2 = 5/6x_3, \\ x_3 \text{ любое.} \end{cases}$$

Имеем одну свободную переменную x_3. Приравниваем ее единице и находим соответствующие значения главных переменных:

$$\begin{cases} x_1 = 0,5, \\ x_2 = 5/6, \\ x_3 = 1. \end{cases}$$

$X_{\lambda_3} = X_{-1} = \left(0,5; \frac{5}{6}; 1\right)$ – собственный вектор, соответствующий собственному значению $\lambda_3 = -1$.

Задачи для самостоятельного решения

Найти собственные векторы и собственные значения операторов, заданных своими матрицами в некотором базисе:

73. $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

74. $A = \begin{pmatrix} -5 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.

75. $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$.

76. $A = \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$.

77. $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -5 & 0 \end{pmatrix}$.

78. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

79. $A=\begin{pmatrix}-3 & 2\\ 0 & 4\end{pmatrix}$.

80. $A=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 7 & -1\end{pmatrix}$.

81. $A=\begin{pmatrix}4 & -2 & 0\\ 1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 3\end{pmatrix}$.

82. $A=\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ -4 & 4 & 0\\ -2 & 1 & 2\end{pmatrix}$.

83. $A=\begin{pmatrix}3 & 0 & 0\\ 1 & 2 & -1\\ 1 & -1 & 2\end{pmatrix}$.

84. $A=\begin{pmatrix}4 & -2 & 1\\ -8 & 4 & 7\\ 0 & 0 & -4\end{pmatrix}$.

85. $A=\begin{pmatrix}4 & 1 & 1\\ -3 & 2 & 1\\ -3 & 1 & 2\end{pmatrix}$.

86. $A=\begin{pmatrix}2 & -1 & 2\\ 5 & -3 & 3\\ -1 & 0 & -2\end{pmatrix}$.

87. $A=\begin{pmatrix}4 & -5 & 2\\ 5 & -7 & 3\\ 6 & -9 & 4\end{pmatrix}$.

88. $A=\begin{pmatrix}1 & -3 & 4\\ 4 & -7 & 8\\ 6 & -7 & 7\end{pmatrix}$.

§8. Процесс ортогонализации Грама-Шмидта

Процесс ортогонализации Грама-Шмидта позволяет из любого базиса $\vec{f}_1,...,\vec{f}_n$ сделать ортонормированный базис $\vec{h}_1,...,\vec{h}_n$.

Сначала по $\vec{f}_1,...,\vec{f}_n$ строим ортогональный базис $\vec{g}_1,...,\vec{g}_n$ по формулам ($k=2,...,n$):

$$\vec{g}_1=\vec{f}_1,\ \vec{g}_2=\vec{f}_2-\frac{\vec{f}_2\cdot\vec{g}_1}{\vec{g}_1\cdot\vec{g}_1}\vec{g}_1,$$

$$\vec{g}_3=\vec{f}_3-\frac{\vec{f}_3\cdot\vec{g}_1}{\vec{g}_1\cdot\vec{g}_1}\vec{g}_1-\frac{\vec{f}_3\cdot\vec{g}_2}{\vec{g}_2\cdot\vec{g}_2}\vec{g}_2,\ ...,$$

$$\vec{g}_k=\vec{f}_3-\frac{\vec{f}_k\cdot\vec{g}_1}{\vec{g}_1\cdot\vec{g}_1}\vec{g}_1-\frac{\vec{f}_k\cdot\vec{g}_2}{\vec{g}_2\cdot\vec{g}_2}\vec{g}_2-...-\frac{\vec{f}_k\cdot\vec{g}_{k-1}}{\vec{g}_{k-1}\cdot\vec{g}_{k-1}}\vec{g}_{k-1}.$$

Затем из ортогонального базиса $\vec{g}_1,...,\vec{g}_n$ получаем ортонормированный базис $\vec{h}_1,...,\vec{h}_n$ по формуле (каждая координата вектора делится на его длину):

$$\vec{h}_k=\frac{\vec{g}_k}{|\vec{g}_k|},\quad k=1,...,n.$$

Пример 26. Применить процесс ортогонализации Грамма-Шмидта к системе векторов $\vec{f}_1(1,2,2)$, $\vec{f}_2(1,1,-5)$, $\vec{f}_3(3,2,8)$.

Решение. Применим процесс ортогонализации Грамма-Шмидта к системе векторов $\vec{f}_1,\vec{f}_2,\vec{f}_3$. Сначала построим ортогональный базис $\vec{g}_1,\vec{g}_2,\vec{g}_3$.

$\vec{g}_1=\vec{f}_1=(1,2,2)$, $\vec{g}_1\cdot\vec{g}_1=1^2+2^2+2^2=9$, $\vec{f}_2\cdot\vec{g}_1=1\cdot1+1\cdot2+(-5)\cdot2=-7$,

$$\vec{g}_2=\vec{f}_2-\frac{\vec{f}_2\cdot\vec{g}_1}{\vec{g}_1\cdot\vec{g}_1}\vec{g}_1=(1,1,-5)-\frac{-7}{9}(1,2,2)=$$

$$=\frac{1}{9}\big(9(1,1,-5)+7(1,2,2)\big)=\frac{1}{9}\big(9+7,9+14,-45+14\big)=\frac{1}{9}(16,23,-31).$$

Умножим $\vec{g}_2$ на 9 (угол между векторами $\vec{g}_1$ и $\vec{g}_2$ от этого не изменится) и полученный вектор вновь обозначим $\vec{g}_2$:

$$\vec{g}_2(16,23,-31).$$

Проверим, что векторы $\vec{g}_1$ и $\vec{g}_2$ ортогональны:

$$\vec{g}_1\cdot\vec{g}_2=1\cdot16+2\cdot23+2\cdot(-31)=16+46-62=0.$$

Найдем координаты вектора $\vec{g}_3$.

$\vec{g}_2\cdot\vec{g}_2=16^2+23^2+(-31)^2=1746$,

$\vec{f}_3\cdot\vec{g}_1=3\cdot1+2\cdot2+8\cdot2=23$,

$\vec{f}_3\cdot\vec{g}_2=3\cdot16+2\cdot23+8\cdot(-31)=-154$,

$$\vec{g}_3=\vec{f}_3-\frac{\vec{f}_3\cdot\vec{g}_1}{\vec{g}_1\cdot\vec{g}_1}\vec{g}_1-\frac{\vec{f}_3\cdot\vec{g}_2}{\vec{g}_2\cdot\vec{g}_2}\vec{g}_2=$$

$$=(3,2,8)-\frac{23}{9}(1,2,2)-\frac{-154}{1746}(16,23,-31)=$$

$$=\frac{1}{1746}\big(1746(3,2,8)-4462(1,2,2)+154(16,23,-31)\big)=$$

$$=\frac{1}{1746}(1746\cdot3-4462\cdot1+154\cdot16,\ 1746\cdot2-4462\cdot2+154\cdot23,\ 1746\cdot8-$$

$$-4462\cdot2+154\cdot(-31))=\frac{1}{1746}(3240,-1890,270)=\frac{270}{1746}(12,-7,1).$$

Умножим координаты вектора $\vec{g}_3$ на $\dfrac{1746}{270}$ и полученный вектор вновь обозначим $\vec{g}_3$:

$$\vec{g}_3(12,-7,1).$$

Проверим, что векторы $\vec{g}_3$ и $\vec{g}_1$ ортогональны:

$$\vec{g}_1 \cdot \vec{g}_3 = 1\cdot 12 + 2\cdot(-7) + 2\cdot 1 = 12 - 14 + 2 = 0.$$

Проверим, что векторы $\vec{g}_3$ и $\vec{g}_2$ ортогональны:

$$\vec{g}_3 \cdot \vec{g}_2 = 12\cdot 16 - 7\cdot 23 + 1\cdot(-31) = 192 - 161 - 31 = 0\,.$$

Ортогональный базис $\vec{g}_1, \vec{g}_2, \vec{g}_3$ построен. Получим из него ортонормированный базис $\vec{h}_1, \vec{h}_2, \vec{h}_3$.

$$\vec{h}_1 = \frac{1}{\sqrt{\vec{g}_1 \cdot \vec{g}_1}}\vec{g}_1 = \frac{1}{\sqrt{9}}(1, 2, 2) = \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right).$$

$$\vec{h}_2 = \frac{1}{\sqrt{\vec{g}_2 \cdot \vec{g}_2}}\vec{g}_2 = \frac{1}{\sqrt{1746}}(16, 23, -31)\,.$$

$$\vec{h}_3 = \frac{1}{\sqrt{\vec{g}_3 \cdot \vec{g}_3}}\vec{g}_3 = \frac{1}{\sqrt{12^2 + (-7)^2 + 1^2}}(12, -7, 1) = \frac{1}{\sqrt{194}}(12, -7, 1)\,.$$

Задачи для самостоятельного решения

Применить процесс ортогонализации Грамма-Шмидта к системе векторов

89. $\vec{f}_1(1, 1, -1)$, $\vec{f}_2(5, -2, -3)$, $\vec{f}_3(1, 3, 1)$.

90. $\vec{f}_1(0, 1, 1)$, $\vec{f}_2(1, 1, 1)$, $\vec{f}_3(-3, 3, 1)$.

91. $\vec{f}_1(1, -1, 1)$, $\vec{f}_2(2, 1, 2)$, $\vec{f}_3(3, 1, 1)$.

92. $\vec{f}_1(1, -2, 1)$, $\vec{f}_2(0, 1, -4)$, $\vec{f}_3(2, -3, -2)$, $\vec{f}_4(7, 4, 1)$.

93. $\vec{f}_1(1, 2, 1, 3)$, $\vec{f}_2(12, 3, 3, 3)$, $\vec{f}_3(7, -1, 40, 0)$.

94. $\vec{f}_1(-1, 1, 1, 1)$, $\vec{f}_2(0, 2, 1, 1)$, $\vec{f}_3(1, 1, 1, 3)$.

95. $\vec{f}_1(-1, 0, 3, 2)$, $\vec{f}_2(1, 2, 3, 3)$, $\vec{f}_3(-3, -2, 3, 1)$.

§9. Квадратичные формы

Переход от системы n неизвестных $x_1, x_2, ..., x_n$ к системе n неизвестных $y_1, y_2, ..., y_n$ по формуле

$$x = S\,y\,,$$

где $x = (x_1, ..., x_n)$, $y = (y_1, ..., y_n)$ – столбцы, составленные из переменных; S – квадратная матрица порядка n, называется ***линейным преобразованием неизвестных***.

Квадратичной формой $F(x_1,x_2,...,x_n)$ n неизвестных $x_1,x_2,...,x_n$ называется сумма, каждое слагаемое которой является или квадратом одного из этих неизвестных, или произведением двух разных неизвестных. Квадратичную форму можно записать в матричном виде:

$$F(x) = x^T A x,$$

где A – симметрическая матрица порядка n, которая называется матрицей квадратичной формы $F(x)$.

Пример 27. Найти матрицу квадратичной формы $F(x_1, x_2, x_3) = 17x_1^2 + 14x_2^2 + 14x_3^2 - 4x_1x_2 - 4x_1x_3 - 8x_2x_3$.

Решение. Порядок искомой матрицы будет равен трем, так как квадратичная форма содержит три переменные. На главной диагонали расположены числа 17, 14, 14 (коэффициенты при квадратах),на пересечении переменных $x_i, x_j\,(i \neq j)$ пишем $\dfrac{a_{ij}}{2}$, где a_{ij} – коэффициент при x_ix_j $(i \neq j)$ в квадратичной форме.

$$\begin{array}{c c} & \begin{array}{ccc} x_1 & x_2 & x_3 \end{array} \\ \begin{array}{c} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{array} & \begin{pmatrix} 17 & -2 & -2 \\ -2 & 14 & -4 \\ -2 & -4 & 14 \end{pmatrix} = A \end{array}$$

Заметим, что при транспонировании полученная матрица не меняется.

Ранг матрицы A квадратичной формы называют ***рангом квадратичной формы***. Если матрица имеет максимальный ранг, равный числу переменных n, то квадратичную форму называют ***невырожденной***, если ранг меньше n, то ее называют вырожденной.

Две квадратичные формы называются ***эквивалентными***, если одна из них переводится в другую посредством невырожденного линейного преобразования.

Каноническим видом данной квадратичной формы называется эквивалентная ей форма, не содержащая произведений неизвестных. Каждую квадратичную форму можно привести к каноническому виду с помощью линейного преобразования неизвестных $x = S\,y$ с ортогональной матрицей S.

Если $F(x) > 0$ $(F(x) < 0)$ для всех $x \neq 0$, то квадратичная форма $F(x)$ называется ***положительно*** (***отрицательно***) ***определенной***. Квадратичная форма положительно (отрицательно) определена, если в каком-нибудь ее каноническом виде нет отрицательных (положительных) коэффициентов при квадратах неизвестных.

Следующие условия равносильны:

1) квадратичная форма положительно определена;
2) собственные значения матрицы A положительны;
3) угловые миноры матрицы A положительны.

Следующие условия равносильны:

1) квадратичная форма отрицательно определена;
2) собственные значения матрицы A отрицательны;
3) все угловые миноры матрицы A нечетного порядка отрицательны, а все угловые миноры четного порядка положительны.

Пример 28. Привести к каноническому виду квадратичную форму

$$F = x_1^2 + 2x_2^2 + 7x_3^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 4x_2x_3 .$$

Решение. Сгруппируем все члены, содержащие неизвестное x_1, и дополним их до полного квадрата:

$$F = (x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3) + 2x_2^2 + 7x_3^2 + 4x_2x_3 = (x_1^2 + 2x_1(x_2 + x_3) + (x_2 + x_3)^2) -$$
$$-(x_2 + x_3)^2 + 2x_2^2 + 7x_3^2 + 4x_2x_3 = (x_1 + x_2 + x_3)^2 + x_2^2 + 6x_3^2 + 2x_2x_3 .$$

В дальнейшем полный квадрат, содержащий неизвестное x_1, не изменяется. Среди оставшихся членов сгруппируем все, содержащие x_2 и дополним их до полного квадрата:

$$F(x) = (x_1 + x_2 + x_3)^2 + (x_2^2 + 2x_2x_3 + x_3^2) - x_3^2 + 6x_3^2 =$$
$$= (x_1 + x_2 + x_3)^2 + (x_2 + x_3)^2 + 5x_3^2.$$

Теперь перейдем от неизвестных x_1, x_2, x_3 к неизвестным y_1, y_2, y_3 по формулам:

$$\begin{cases} y_1 = x_1 + x_2 + x_3, \\ y_2 = x_2 + x_3, \\ y_3 = x_3. \end{cases}$$

В результате этого перехода получим канонический вид данной квадратичной формы:

$$F = y_1^2 + y_2^2 + 5y_3^2 .$$

Пример 29. Исследовать на положительную определенность квадратичную форму

$$F = 17x_1^2 + 14x_2^2 + 14x_3^2 - 4x_1x_2 - 4x_1x_3 - 8x_2x_3.$$

Решение. Матрица квадратичной формы имеет вид (отчеркнуты угловые миноры):

$$A = \begin{pmatrix} 17 & -2 & -2 \\ -2 & 14 & -4 \\ -2 & -4 & 14 \end{pmatrix}.$$

Найдем все угловые миноры и определим их знак.

$$\Delta_1 = 17 > 0, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 17 & -2 \\ -2 & 14 \end{vmatrix} = 234 > 0, \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} 17 & -2 & -2 \\ -2 & 14 & -4 \\ -2 & -4 & 14 \end{vmatrix} = 2916 > 0.$$

Все угловые миноры положительны. По ***критерию Сильвестра*** (квадратичная форма положительно определена тогда и только тогда, когда все угловые миноры матрицы квадратичной формы положительны) квадратичная форма положительно определена.

Рассмотрим приведение квадратичной формы ***ортогональным способом*** к каноническому виду на примерах.

Пример 30. Квадратичную форму

$$F = x_1^2 - 4x_1x_2$$

привести к каноническому виду методом ортогонального преобразования.

Решение. Матрица квадратичной формы имеет вид

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Найдем характеристическое уравнение этой матрицы:

$$|A - \lambda E| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & -2 \\ -2 & 0-\lambda \end{vmatrix} = 0, \; (1-\lambda)\cdot(-\lambda) - 4 = -\lambda + \lambda^2 - 4 = 0.$$

Вычисляем корни характеристического уравнения – собственные значения матрицы A:

$$\lambda_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{17}}{2}.$$

Канонический вид квадратичной формы имеет вид:

$$F=\frac{1+\sqrt{17}}{2}y_1^2+\frac{1-\sqrt{17}}{2}y_2^2.$$

Пример 31. Квадратичную форму

$$F(x_1,x_2,x_3)=17x_1^2+14x_2^2+14x_3^2-4x_1x_2-4x_1x_3-8x_2x_3$$

привести к каноническому виду методом ортогонального преобразования.

Решение. Матрица квадратичной формы

$$A=\begin{pmatrix}17&-2&-2\\-2&14&-4\\-2&-4&14\end{pmatrix}.$$

Найдем для нее собственные значения:

$$\left|A-\lambda E\right|=\begin{vmatrix}17-\lambda&-2&-2\\-2&14-\lambda&-4\\-2&-4&14-\lambda\end{vmatrix}=0,\ \lambda_1=9,\ \lambda_{2,3}=18.$$

Канонический вид квадратичной формы

$$F=\lambda_1y_1^2+\lambda_2y_2^2+\lambda y_3^2=9y_1^2+18y_2^2+18y_3^2.$$

Найдем собственные векторы для каждого собственного значения.
$\lambda_1=9$. Тогда

$$\begin{pmatrix}17-9&-2&-2\\-2&14-9&-4\\-2&-4&14-9\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}8&-2&-2\\-2&5&-4\\-2&-4&5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}.$$

Применим метод Гаусса.

$$\begin{array}{c}\begin{array}{ccc}x_1&x_2&x_3\end{array}\\ \left(\begin{array}{ccc|c}8&-2&-2&0\\-2&5&-4&0\\-2&-4&5&0\end{array}\right)\end{array}\sim\left(\begin{array}{ccc|c}4&-1&-1&0\\-2&5&-4&0\\-2&-4&5&0\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccc|c}-2&5&-4&0\\0&9&-9&0\\0&-9&9&0\end{array}\right)\sim$$

$$\sim\left(\begin{array}{ccc|c}-2&5&-4&0\\0&1&-1&0\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccc|c}-2&0&1&0\\0&1&-1&0\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccc|c}1&0&-0{,}5&0\\0&1&-1&0\end{array}\right).$$

Получили

$$\begin{cases} x_1 = 0{,}5x_3, \\ x_2 = x_3, \\ x_3 \text{ любое.} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 0{,}5, \\ x_2 = 1, \\ x_3 = 1. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 1, \\ x_2 = 2, \\ x_3 = 2. \end{cases}$$

Собственный вектор, соответствующий собственному значению $\lambda_1 = 9$, $\vec{v}_9(1,2,2)$. Применим к нему процесс ортогонализации.

$$\vec{h} = \frac{\vec{v}_9}{|\vec{v}_9|} = \frac{1}{\sqrt{1^2 + 2^2 + 2^2}}(1,2,2) = \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right).$$

$\lambda_{2,3} = 18$. Тогда

$$\begin{pmatrix} 17-18 & -2 & -2 \\ -2 & 14-18 & -4 \\ -2 & -4 & 14-18 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -1 & -2 & -2 \\ -2 & -4 & -4 \\ -2 & -4 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Применим метод Гаусса.

$$\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} x_1 & x_2 & x_3 \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & -2 & -2 & 0 \\ -2 & -4 & -4 & 0 \\ -2 & -4 & -4 & 0 \end{array}\right) \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 2 & 0 \end{array}\right).$$

Получили

$$\begin{cases} x_1 = -2x_2 - 2x_3, \\ x_2, x_3 \text{ любые.} \end{cases}$$

У нас две свободные переменные (x_2 и x_3). Применим метод бегущей единицы (поочередно одну свободную переменную приравниваем единице, другую свободную переменную приравниваем нулю и находим соответствующее значение главной переменной).

$$\begin{cases} x_1 = -2\cdot 1 - 2\cdot 0 = -2, \\ x_2 = 1, \\ x_3 = 0. \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1 = -2\cdot 0 - 2\cdot 1 = -2, \\ x_2 = 0, \\ x_3 = 1. \end{cases}$$

$\vec{f}_1(-2,1,0)$ и $\vec{f}_2(-2,0,1)$ – собственные векторы, соответствующие собственному значению $\lambda_{2,3} = 18$. Применим к ним процесс ортогонализации Грама-Шмидта.

Сначала по $\vec{f}_1, \vec{f}_2$ построим ортогональную систему $\vec{g}_1, \vec{g}_2$.

$$\vec{g}_1 = \vec{f}_1 = (-2, 1, 0).$$

Тогда скалярные произведения:

$$\vec{g}_1 \cdot \vec{g}_2 = (-2)^2 + 1^2 + 0^2 = 5,$$

$$\vec{f}_2 \cdot \vec{g}_1 = -2 \cdot (-2) + 0 \cdot 1 + 1 \cdot 0 = 4.$$

Найдем координаты вектора $\vec{g}_2$.

$$\vec{g}_2 = \vec{f}_2 - \frac{\vec{f}_2 \cdot \vec{g}_1}{\vec{g}_1 \cdot \vec{g}_2} \cdot \vec{g}_1 = (-2,0,1) - \frac{4}{5}(-2,0,1) = \frac{1}{5}\big(5(-2,0,1) - 4(-2,1,0)\big) =$$
$$= \frac{1}{5}\big((-10,0,5) - (-8,4,0)\big) = \frac{1}{5}(-2,-4,5).$$

Умножим $\vec{g}_2$ на 5 (угол между векторами $\vec{g}_1$ и $\vec{g}_2$от этого не изменится) и полученный вектор вновь обозначим $\vec{g}_2$: $\vec{g}_2 = (-2,-4,5)$.

Проверим, что $\vec{g}_1 \perp \vec{g}_2$:

$$\vec{g}_1 \cdot \vec{g}_2 = -2 \cdot (-2) + 1 \cdot (-4) + 0 \cdot 5 = 4 - 4 + 0 = 0.$$

Построена ортогональная система $\vec{g}_1, \vec{g}_2$. Получим из неё ортонормированную систему $\vec{h}_1, \vec{h}_2$.

$$\vec{h}_1 = \frac{1}{\sqrt{\vec{g}_1 \cdot \vec{g}_2}} \vec{g}_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}(-2,1,0) = \left(-\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}, 0\right).$$

$$\vec{h}_2 = \frac{1}{\sqrt{\vec{g}_2 \cdot \vec{g}_2}} \vec{g}_2 = \frac{1}{\sqrt{(-2)^2 + (-4)^2 + 5^2}}(-2,-4,5) =$$
$$= \frac{1}{3\sqrt{5}}(-2,-4,5) = \left(-\frac{2}{3\sqrt{5}}, -\frac{4}{3\sqrt{5}}, \frac{5}{3\sqrt{5}}\right).$$

Получили ортонормированный базис пространства

$$\vec{h} = \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right),\ \ \vec{h}_1 = \left(-\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}, 0\right) \text{ и } \vec{h}_2 = \left(-\frac{2}{3\sqrt{5}}, -\frac{4}{3\sqrt{5}}, \frac{5}{3\sqrt{5}}\right).$$

В этом базисе квадратичная форма имеет канонический вид $F = 9y_1^2 + 18y_2^2 + 18y_3^2$.

Матрица перехода от базиса $\vec{e}_1(1,0,0)$, $\vec{e}_2(0,1,0)$, $\vec{e}_3(0,0,1)$, в котором была задана исходная квадратичная форма $F = 17x_1^2 + 14x_2^2 + 14x_3^2 - 4x_1x_2 -$

$-4x_1x_3 - 8x_2x_3$ к базису $\vec{h}, \vec{h}_1, \vec{h}_2$ будет иметь вид (координаты векторов $\vec{h}, \vec{h}_1, \vec{h}_2$ нужно записать в столбцы матрицы):

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{-2}{\sqrt{5}} & \frac{-2}{3\sqrt{5}} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{-4}{3\sqrt{5}} \\ \frac{2}{3} & 0 & \frac{5}{3\sqrt{5}} \end{pmatrix}.$$

Заметим, что

$$A \cdot A^T = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{-2}{\sqrt{5}} & \frac{-2}{3\sqrt{5}} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{-4}{3\sqrt{5}} \\ \frac{2}{3} & 0 & \frac{5}{3\sqrt{5}} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{-2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} & 0 \\ \frac{-2}{3\sqrt{5}} & \frac{-4}{3\sqrt{5}} & \frac{5}{3\sqrt{5}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = E.$$

Такие преобразования называются *ортогональными.*

Мы привели квадратичную форму ортогональным преобразованием к каноническому виду.

Координаты вектора x_1, x_2, x_3 были заданы в базисе $\vec{e}_1(1,0,0)$, $\vec{e}_2(0,1,0)$, $\vec{e}_3(0,0,1)$. Теперь y_1, y_2, y_3 – это координаты вектора в базисе $\vec{h}, \vec{h}_1, \vec{h}_2$. Замена переменных происходит следующим образом:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = A \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{-2}{\sqrt{5}} & \frac{-2}{3\sqrt{5}} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{-4}{3\sqrt{5}} \\ \frac{2}{3} & 0 & \frac{5}{3\sqrt{5}} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{y_1}{3} - \frac{2y_2}{\sqrt{5}} - \frac{2y_3}{3\sqrt{5}} \\ \frac{2y_1}{3} + \frac{y_2}{\sqrt{5}} - \frac{4y_3}{3\sqrt{5}} \\ \frac{2y_1}{3} + \frac{5y_3}{3\sqrt{5}} \end{pmatrix},$$

то есть
$$\begin{cases} x_1 = \frac{y_1}{3} - \frac{2y_2}{\sqrt{5}} - \frac{2y_3}{3\sqrt{5}}, \\ x_2 = \frac{2y_1}{3} + \frac{y_2}{\sqrt{5}} - \frac{4y_1}{3\sqrt{5}}, \\ x_3 = \frac{2y_1}{3} + \frac{5y_3}{3\sqrt{5}}. \end{cases}$$

Задачи для самостоятельного решения

Написать матрицу квадратичной формы

96. $F = 2x_1^2 - 5x_2^2 + 8x_3^2 + 4x_1x_2 - 2x_1x_3 + 6x_2x_3$.

97. $F = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 4x_1x_2 - 4x_1x_3 + 4x_2x_3$.

98. $F = -x_1^2 + 2x_2^2 - 3x_3^2 + 2x_1x_2 + 2x_2x_3$

99. $F = 2x_1x_2 + 4x_1x_3 - 6x_2x_3$.

Привести к каноническому виду квадратичную форму

100. $F = x_1^2 + 3x_2^2 + 4x_3^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 6x_2x_3$.

101. $F = 2x_1^2 - 3x_3^2 - 4x_1x_2 + 4x_1x_3 - 8x_2x_3$.

102. $F = x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_2x_3$.

103. $F = x_1^2 + x_3^2 - 4x_2x_3$.

104. $F = x_1^2 + 3x_2^2 + 4x_1x_2$.

105. $F = x_1^2 - 2x_2^2 + 2x_1x_2$.

106. $F = 5x_1^2 - x_1x_2$.

107. $F = x_2^2 + 6x_1x_2$.

108. $F = x_1^2 + x_2^2 + 3x_3^2 + 4x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2x_3$.

109. $F = x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3$.

110. $F = x_1^2 + 5x_2^2 - 4x_3^2 + 2x_1x_2 - 4x_1x_3$.

111. $F = 4x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 4x_1x_2 + 4x_1x_3 - 3x_2x_3$.

112. $F = 3x_1^2 + 2x_2^2 - x_3^2 + 2x_1x_2 - 4x_2x_3$.

113. $F = 2x_1^2 + 3x_2^2 + 4x_3^2 - 2x_1x_2 + 4x_1x_3 - 3x_2x_3$.

Найти все значения параметра λ, при котором положительно определена квадратичная форма:

114. $F = 2x_1^2 + x_2^2 + \lambda x_3^2 + 2x_1x_2 - 2x_1x_3 - 2x_2x_3$.

115. $F = \lambda x_1^2 + 2x_2^2 + 3x_3^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 4x_2x_3$.

116. $F = 2\lambda x_1^2 + x_2^2 + 2x_3^2 + 2x_1x_2 + 2x_2x_3$.

117. $F = 2x_1^2 + \lambda x_2^2 + 2x_3^2 + 2x_1x_2 + 6x_1x_3 + 4x_2x_3$.

Найти все значения параметра λ, при котором отрицательно определена квадратичная форма:

118. $F = -x_1^2 + \lambda x_2^2 + 3x_3^2 + 4x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2x_3$.

119. $F = -2x_1^2 - 2x_2^2 + \lambda x_3^2 + 2x_1x_2 + 4x_1x_3 - 2x_2x_3$.

120. $F = 2\lambda x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 4x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2x_3$.

121. $F = -x_1^2 - 2x_2^2 + 2\lambda x_3^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 - 6x_2x_3$.

Найти ортогональное преобразование неизвестных, приводящее квадратичную форму к каноническому виду, и записать полученный канонический вид:

122. $F = x_1^2 + 4x_2^2 + x_3^2 + 2x_1x_2 + 8x_1x_3 + 2x_2x_3$.

123. $F = 3x_1^2 - x_2^2 + 3x_3^2 + 6x_1x_2 - 2x_1x_3 + 6x_2x_3$.

124. $F = -6x_1^2 - 3x_2^2 + 2x_3^2 + 4x_1x_2 + 6x_1x_3 + 12x_2x_3$.

125. $F = 5x_1^2 + 5x_2^2 + 5x_3^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2x_3$.

126. $F = 17x_1^2 + 17x_2^2 + 11x_3^2 - 16x_1x_2 + 8x_1x_3 - 8x_2x_3$.

ИНДИВИДУАЛЬНЫЕ ЗАДАНИЯ

I. Вычислить определитель третьего порядка.

1. $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & 4 \end{vmatrix}$.

2. $\begin{vmatrix} 2 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 4 \end{vmatrix}$.

3. $\begin{vmatrix} 5 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix}$.

4. $\begin{vmatrix} 4 & 5 & 0 \\ -1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 3 \end{vmatrix}$.

5. $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -2 & 0 & 3 \\ 5 & 0 & 1 \end{vmatrix}$.

6. $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 3 \\ 2 & 0 & 4 \end{vmatrix}$.

7. $\begin{vmatrix} 4 & 0 & -2 \\ 5 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix}$.

8. $\begin{vmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 2 & 5 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}$.

9. $\begin{vmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 0 & -2 & 5 \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix}$.

16. $\begin{vmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 0 \end{vmatrix}$.

17. $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & -1 & 0 \\ 2 & 4 & 1 \end{vmatrix}$.

18. $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 4 & -5 \\ 0 & 6 & 1 \end{vmatrix}$.

19. $\begin{vmatrix} 2 & 4 & 0 \\ 1 & 1 & 3 \\ 0 & 5 & 2 \end{vmatrix}$.

20. $\begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \\ -2 & 3 & 0 \end{vmatrix}$.

21. $\begin{vmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 1 & 5 & 2 \\ -1 & 0 & 2 \end{vmatrix}$.

22. $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \\ 2 & 4 & 0 \end{vmatrix}$.

23. $\begin{vmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & 3 \end{vmatrix}$.

24. $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 0 \end{vmatrix}$.

10. $\begin{vmatrix} 4 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 4 \\ 0 & 3 & 0 \end{vmatrix}$.

11. $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix}$.

12. $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 1 \\ 5 & 0 & 2 \end{vmatrix}$.

13. $\begin{vmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 3 & -2 & 4 \\ 1 & 0 & 5 \end{vmatrix}$.

14. $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 4 & -1 \\ 2 & 0 & 3 \end{vmatrix}$.

15. $\begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 4 & 0 & 5 \\ 0 & -1 & 3 \end{vmatrix}$.

25. $\begin{vmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 2 \end{vmatrix}$.

26. $\begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \end{vmatrix}$.

27. $\begin{vmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 4 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix}$.

28. $\begin{vmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 2 \end{vmatrix}$.

29. $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 2 \\ 3 & 1 & 0 \end{vmatrix}$.

30. $\begin{vmatrix} 2 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}$.

II. Вычислить определитель четвертого порядка, разложив его по элементам строки или столбца.

1. $\begin{vmatrix} 1 & 1 & -2 & 0 \\ 3 & 6 & -2 & 5 \\ 1 & 0 & 6 & 4 \\ 2 & 3 & 5 & -1 \end{vmatrix}$.

2. $\begin{vmatrix} 2 & 0 & -1 & 3 \\ 6 & 3 & -9 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 3 \\ 4 & 2 & 0 & 6 \end{vmatrix}$.

3. $\begin{vmatrix} 2 & 7 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 2 \\ 0 & 5 & -1 & -3 \end{vmatrix}$.

16. $\begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 & 0 \\ 5 & 0 & -6 & 1 \\ -2 & 2 & 1 & 3 \\ -1 & 3 & 2 & 1 \end{vmatrix}$.

17. $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 & 3 \\ 4 & 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}$.

18. $\begin{vmatrix} 5 & 0 & 4 & 2 \\ 1 & -1 & 2 & 1 \\ 4 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$.

4. $\begin{vmatrix} 4 & -5 & -1 & -5 \\ -3 & 2 & 8 & -2 \\ 5 & 3 & 1 & 3 \\ -2 & 4 & -6 & 8 \end{vmatrix}$.

5. $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 0 & -5 \\ 4 & 3 & -5 & 0 \\ 1 & 0 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & -3 & 4 \end{vmatrix}$.

6. $\begin{vmatrix} 3 & 5 & 3 & 2 \\ 2 & 4 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 2 & 1 \\ 5 & 1 & -2 & 4 \end{vmatrix}$.

7. $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 2 & 0 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & -2 \end{vmatrix}$.

8. $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 3 & -3 \end{vmatrix}$.

9. $\begin{vmatrix} 0 & 4 & 1 & 1 \\ -4 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & -2 \\ 1 & 3 & 4 & -3 \end{vmatrix}$.

10. $\begin{vmatrix} 0 & -2 & 1 & 7 \\ 4 & -8 & 2 & -3 \\ 10 & 1 & -5 & 4 \\ -8 & 3 & 2 & -1 \end{vmatrix}$.

11. $\begin{vmatrix} 5 & -3 & 7 & -1 \\ 3 & 2 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 4 & -6 \\ 3 & -2 & 9 & 4 \end{vmatrix}$.

19. $\begin{vmatrix} 6 & 2 & -10 & 4 \\ -5 & -7 & -4 & 1 \\ 2 & 4 & -2 & -6 \\ 3 & 0 & -5 & 4 \end{vmatrix}$.

20. $\begin{vmatrix} -1 & -2 & 4 & 1 \\ 2 & 3 & 0 & 6 \\ 2 & -2 & 1 & 4 \\ 3 & 1 & -2 & -1 \end{vmatrix}$.

21. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -2 & 1 & -4 & 3 \\ 3 & -4 & -1 & 2 \\ 4 & 3 & -2 & -1 \end{vmatrix}$.

22. $\begin{vmatrix} -1 & 1 & -2 & 3 \\ 1 & 2 & 2 & 3 \\ -2 & 3 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & -2 & 0 \end{vmatrix}$.

23. $\begin{vmatrix} -1 & 2 & 0 & 4 \\ 2 & -3 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 1 & 3 \end{vmatrix}$.

24. $\begin{vmatrix} 4 & 1 & 2 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & -1 \\ 3 & -1 & 2 & 1 \\ 5 & 0 & 4 & 2 \end{vmatrix}$.

25. $\begin{vmatrix} 4 & 3 & -2 & -1 \\ -2 & 1 & -4 & 3 \\ 0 & 4 & 1 & -2 \\ 5 & 0 & 1 & -1 \end{vmatrix}$.

26. $\begin{vmatrix} 3 & -5 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 3 & 1 & -3 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & 2 \end{vmatrix}$.

12. $\begin{vmatrix} 4 & -1 & 1 & 5 \\ 0 & 2 & -2 & 3 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 1 & -2 \end{vmatrix}$.

13. $\begin{vmatrix} 1 & 8 & 2 & -3 \\ 3 & -2 & 0 & 4 \\ 5 & -3 & 7 & -1 \\ 3 & 2 & 0 & 2 \end{vmatrix}$.

14. $\begin{vmatrix} 2 & -3 & 4 & 1 \\ 4 & -2 & 3 & 2 \\ 3 & 0 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & 4 & 3 \end{vmatrix}$.

15. $\begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 & 3 \\ 4 & -1 & 2 & 4 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 4 & -1 & 2 & 5 \end{vmatrix}$.

27. $\begin{vmatrix} 2 & -2 & 0 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -2 & 1 \\ 3 & 4 & -4 & 0 \end{vmatrix}$.

28. $\begin{vmatrix} 6 & 0 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -3 & 3 \\ 4 & 1 & -1 & 2 \end{vmatrix}$.

29. $\begin{vmatrix} -1 & -2 & 3 & 4 \\ 2 & 0 & 1 & -1 \\ 3 & -3 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & 1 & -2 \end{vmatrix}$.

30. $\begin{vmatrix} -4 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 2 & 3 \\ -3 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -2 & 3 \end{vmatrix}$.

III. Найти произведение матриц A и B, если:

1. а) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & 4 \\ 1 & 5 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 4 & -5 & 0 \\ 1 & 1 & -4 \end{pmatrix}$;

б) $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \\ 1 & 5 \\ 6 & -3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 3 \\ 2 & 0 & 6 \end{pmatrix}$.

2. а) $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -2 \\ 4 & 6 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & -1 \\ 3 & 0 & 5 \end{pmatrix}$;

б) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 1 \\ 0 & -1 & 6 & 2 \\ 1 & -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$

3. а) $A=\begin{pmatrix}2 & 4 & 0\\ 3 & 1 & 1\\ -1 & 3 & 5\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}0 & 2 & 4\\ 1 & 3 & 3\\ 2 & 0 & -1\end{pmatrix}$;

б) $A=\begin{pmatrix}1 & 4 & 6\\ 2 & 8 & 0\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1\\ -3\\ 0\end{pmatrix}$.

4. а) $A=\begin{pmatrix}1 & 4 & -2\\ 3 & 6 & 0\\ 1 & 1 & 5\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}0 & 1 & 1\\ 2 & 3 & 0\\ 1 & 4 & -1\end{pmatrix}$;

б) $A=\begin{pmatrix}1 & 4 & -1\\ 2 & 0 & 3\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}2 & 4\\ 0 & -1\\ 5 & 3\end{pmatrix}$.

5. а) $A=\begin{pmatrix}2 & 0 & -2\\ 1 & 4 & 3\\ 0 & 1 & 1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1 & -1 & 0\\ 2 & 3 & -2\\ 1 & 4 & 5\end{pmatrix}$;

б) $A=\begin{pmatrix}2\\ 3\\ -1\\ 0\\ 1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1 & 0 & 2\end{pmatrix}$.

6. а) $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 0\\ 3 & 4 & -1\\ 0 & 5 & 1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}4 & 0 & 1\\ 3 & 2 & -1\\ 5 & 0 & 2\end{pmatrix}$;

б) $A=\begin{pmatrix}1\\ 2\\ -1\\ 6\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}2 & 0 & -3 & 0\end{pmatrix}$.

7. а) $A=\begin{pmatrix}3 & 4 & 0\\ 2 & 2 & 1\\ 1 & 0 & 5\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1 & 1 & 4\\ 2 & 0 & 3\\ 3 & 1 & -2\end{pmatrix}$;

б) $A=\begin{pmatrix} 3 & 4 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -5 \end{pmatrix}$.

8. а) $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 3 & -1 & 0 \\ 4 & 0 & 5 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 1 & 1 & -5 \\ 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$;

б) $A=\begin{pmatrix} -3 & 0 & 1 \\ 0 & 9 & -1 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 & -4 \\ 2 & 0 & 5 & 1 \\ 2 & -4 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

9. а) $A=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 2 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 1 & -5 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$;

б) $A=\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$.

10. а) $A=\begin{pmatrix} 1 & 4 & 6 \\ 2 & 2 & 0 \\ 3 & -2 & 4 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & -4 \end{pmatrix}$;

б) $A=\begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$.

11. а) $A=\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 5 & -1 \\ 2 & 4 & 0 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ -1 & 5 & 3 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$;

б) $A=\begin{pmatrix} 4 & -1 & -3 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 4 & 4 & 0 \\ -1 & 1 & 3 \\ 5 & 6 & 2 \end{pmatrix}$.

12. а) $A=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 4 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 0 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 1 & 5 & -1 \\ 2 & 0 & 3 \\ 3 & 2 & 5 \end{pmatrix}$;

б) $A=\begin{pmatrix}3 & 0 & -1\\ 2 & 5 & 1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1 & 9\\ -4 & 3\\ -1 & 4\end{pmatrix}$.

13. $A=\begin{pmatrix}3 & 2 & 4\\ 2 & 0 & -1\\ 3 & 1 & 1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}2 & -1 & 3\\ 5 & 2 & 0\\ 0 & 3 & 1\end{pmatrix}$;

б) $A=\begin{pmatrix}1\\ -1\\ 2\\ 3\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}5 & 1 & 0 & 4\end{pmatrix}$.

14. а) $A=\begin{pmatrix}5 & 0 & 5\\ 3 & 1 & -1\\ 0 & 2 & 2\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}-3 & 2 & 0\\ 4 & 1 & 2\\ 1 & 0 & 3\end{pmatrix}$;

б) $A=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 4 & 2\\ 0 & 1\\ 7 & -2\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}0 & -3 & 1\\ 5 & 1 & -2\end{pmatrix}$.

15. а) $A=\begin{pmatrix}-1 & 0 & 1\\ 5 & 3 & 0\\ 2 & 4 & 6\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}3 & 6 & 0\\ 1 & 3 & 4\\ -1 & 2 & 5\end{pmatrix}$:

б) $A=\begin{pmatrix}-2 & 1 & 2\\ 0 & 5 & 3\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}4\\ 1\\ 2\end{pmatrix}$.

16. а) $A=\begin{pmatrix}5 & 6 & 0\\ -3 & 1 & 1\\ 4 & 0 & 2\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1 & -1 & 3\\ 0 & 2 & 4\\ 3 & 5 & 6\end{pmatrix}$;

б) $A=\begin{pmatrix}-1\\ 2\\ 0\\ 3\\ 3\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}4 & 1 & 2\end{pmatrix}$.

17. а) $A=\begin{pmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ -2 & 3 & 0 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 4 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$;

б) $A=\begin{pmatrix} 4 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 5 & -4 \\ 0 & 1 \\ 1 & 6 \end{pmatrix}$.

18. а) $A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & 2 \\ 0 & 5 & 1 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 5 & 0 & 4 \\ 3 & 6 & 0 \\ 2 & -2 & 3 \end{pmatrix}$;

б) $A=\begin{pmatrix} 3 & 4 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 5 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 3 & 7 & 6 \end{pmatrix}$.

19. а) $A=\begin{pmatrix} -2 & 1 & 4 \\ -3 & 2 & 2 \\ 0 & 5 & -1 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 5 & 0 & -1 \\ 2 & 4 & 1 \\ 2 & 0 & 4 \end{pmatrix}$;

б) $A=\begin{pmatrix} 6 & -1 & 0 \\ 0 & -4 & -2 \\ 7 & 3 & -1 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 1 & -1 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$.

20. а) $A=\begin{pmatrix} 3 & -2 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & -7 & 4 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 0 & 4 & -5 \\ 3 & 2 & -4 \\ 1 & 6 & 0 \end{pmatrix}$;

б) $A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 6 & -1 & 5 \\ 0 & 0 & -8 \\ 2 & 2 & 4 \end{pmatrix}$.

21. а) $A=\begin{pmatrix} 3 & 3 & -4 \\ 5 & 4 & 3 \\ 0 & -7 & 3 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 4 & 5 & -1 \\ 1 & 2 & -3 \end{pmatrix}$;

б) $A=\begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ -5 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 3 & 0 & 6 \end{pmatrix}$.

22. а) $A=\begin{pmatrix}1 & -6 & 2\\ 2 & 0 & 4\\ 0 & 4 & 3\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}0 & 3 & 2\\ 5 & 1 & 1\\ 3 & -2 & 2\end{pmatrix}$;

б) $A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 6\\ -1 & 2 & 4\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}-1\\ 2\\ 3\end{pmatrix}$.

23. а) $A=\begin{pmatrix}5 & 0 & -4\\ 2 & -3 & 3\\ -1 & 0 & 2\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1 & 4 & -3\\ 2 & 0 & 1\\ 5 & 0 & 5\end{pmatrix}$;

б) $A=\begin{pmatrix}0 & -4 & 7\\ 3 & 2 & 3\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}-1 & 5\\ 1 & -4\\ 1 & 2\end{pmatrix}$.

24. а) $A=\begin{pmatrix}2 & 2 & -4\\ 0 & 3 & 1\\ 1 & 2 & 2\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1 & 0 & 5\\ 6 & -1 & 4\\ -2 & 0 & 3\end{pmatrix}$;

б) $A=\begin{pmatrix}0 & 1 & 1\\ 2 & 1 & 0\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}2 & 0 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 4 & 2\\ 1 & 2 & 0 & 3\end{pmatrix}$.

25. а) $A=\begin{pmatrix}4 & 4 & 0\\ -1 & 1 & 3\\ 5 & 6 & 2\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1 & -5 & 4\\ 0 & 3 & 2\\ 1 & 0 & -2\end{pmatrix}$;

б) $A=\begin{pmatrix}-5 & 0\\ 3 & 3\\ 2 & -1\\ 1 & -1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}0 & 5 & -3\\ 2 & 1 & 2\end{pmatrix}$.

26. а) $A=\begin{pmatrix}2 & 3 & 1\\ 0 & 4 & -1\\ 5 & 6 & -2\end{pmatrix}$. $B=\begin{pmatrix}-2 & 4 & 2\\ 0 & 3 & 1\\ 1 & 1 & 0\end{pmatrix}$;

б) $A=\begin{pmatrix}0\\ 1\\ -3\\ 5\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1 & 1 & 4 & 4\end{pmatrix}$.

27. а) $A=\begin{pmatrix} 2 & -4 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \\ 5 & 0 & -5 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 5 \\ 7 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -3 \end{pmatrix}$;

б) $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \\ 3 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 1 & 6 & 0 \\ 6 & 1 & 8 \end{pmatrix}$.

28. а) $A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 3 & 0 \\ -6 & 0 & 4 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 7 & 5 & 0 \\ 6 & 1 & 2 \\ 1 & 5 & 4 \end{pmatrix}$;

б) $A=\begin{pmatrix} 3 & -5 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 5 & -4 \\ 4 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

29. а) $A=\begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 0 & 4 & 6 \\ 5 & 3 & -2 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 1 & 0 & -6 \\ 5 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & 4 \end{pmatrix}$;

б) $A=\begin{pmatrix} -4 & -4 & 6 \\ 2 & 3 & 2 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix}$.

30. а) $A=\begin{pmatrix} 5 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 3 & 7 & 6 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 6 & -1 & 2 \\ 4 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 5 \end{pmatrix}$;

б) $A=\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -4 \\ 5 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 & 5 \end{pmatrix}$.

IV. Найти матрицу A^{-1}, обратную данной матрице A, и сделать проверку.

1. $A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$.

16. $A=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.

2. $A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 2\\ 3 & -1 & 0\\ 2 & 4 & 1\end{pmatrix}.$

3. $A=\begin{pmatrix}2 & 1 & 0\\ -1 & 3 & 1\\ 5 & 2 & 2\end{pmatrix}.$

4. $A=\begin{pmatrix}3 & 0 & -1\\ 1 & 2 & 1\\ 3 & 2 & 0\end{pmatrix}.$

5. $A=\begin{pmatrix}3 & 1 & 2\\ 4 & 0 & 5\\ 0 & -1 & 3\end{pmatrix}.$

6. $A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 2\\ 3 & 4 & -5\\ 0 & 6 & 1\end{pmatrix}.$

7. $A=\begin{pmatrix}0 & 2 & 1\\ 3 & -2 & 4\\ 1 & 0 & 5\end{pmatrix}.$

8. $A=\begin{pmatrix}2 & 4 & 0\\ 1 & 1 & 3\\ 0 & 5 & 2\end{pmatrix}.$

9. $A=\begin{pmatrix}1 & 3 & 2\\ 0 & 4 & -1\\ 2 & 0 & 3\end{pmatrix}.$

10. $A=\begin{pmatrix}3 & 1 & 2\\ 3 & 0 & 1\\ -2 & 3 & 0\end{pmatrix}.$

11. $A=\begin{pmatrix}2 & 0 & 3\\ 1 & 5 & 2\\ -1 & 0 & 2\end{pmatrix}.$

17. $A=\begin{pmatrix}3 & 0 & 1\\ 2 & 1 & 1\\ 3 & 0 & 2\end{pmatrix}.$

18. $A=\begin{pmatrix}2 & 1 & 0\\ -1 & 2 & 2\\ 3 & 1 & 0\end{pmatrix}.$

19. $A=\begin{pmatrix}1 & -2 & 1\\ 0 & 3 & 0\\ 2 & 2 & 1\end{pmatrix}.$

20. $A=\begin{pmatrix}2 & 2 & 3\\ -1 & 2 & 3\\ 0 & 3 & 4\end{pmatrix}.$

21. $A=\begin{pmatrix}2 & 3 & 1\\ 0 & -1 & 2\\ 0 & 3 & 4\end{pmatrix}.$

22. $A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 2\\ -2 & 0 & 3\\ 5 & 0 & 1\end{pmatrix}.$

23. $A=\begin{pmatrix}2 & 2 & 0\\ -2 & 1 & 0\\ 3 & 1 & 4\end{pmatrix}.$

24. $A=\begin{pmatrix}3 & 2 & 1\\ -1 & 0 & 3\\ 2 & 0 & 4\end{pmatrix}.$

25. $A=\begin{pmatrix}3 & -1 & 0\\ 2 & 5 & 4\\ 0 & 1 & 2\end{pmatrix}.$

26. $A=\begin{pmatrix}5 & 0 & 2\\ 3 & 1 & 2\\ -1 & 0 & 1\end{pmatrix}.$

12. $A=\begin{pmatrix}1 & -2 & 2\\ 0 & 3 & 4\\ 2 & 3 & 0\end{pmatrix}$. **27.** $A=\begin{pmatrix}1 & 4 & 3\\ 0 & -2 & 5\\ 1 & 2 & 0\end{pmatrix}$.

13. $A=\begin{pmatrix}1 & 3 & 0\\ 0 & -1 & 2\\ 2 & 4 & 0\end{pmatrix}$. **28.** $A=\begin{pmatrix}4 & -1 & 2\\ 2 & 1 & 4\\ 0 & 3 & 0\end{pmatrix}$.

14. $A=\begin{pmatrix}3 & -1 & 0\\ 2 & 1 & 2\\ 0 & 3 & 2\end{pmatrix}$. **29.** $A=\begin{pmatrix}4 & 0 & -2\\ 5 & 1 & 0\\ 3 & 2 & 1\end{pmatrix}$.

15. $A=\begin{pmatrix}-1 & 2 & 0\\ 3 & 1 & 4\\ 2 & 0 & 1\end{pmatrix}$. **30.** $A=\begin{pmatrix}4 & 5 & 0\\ -1 & 2 & 3\\ 3 & 2 & 3\end{pmatrix}$.

V. Решить систему линейных уравнений: а) по формулам Крамера; б) матричным способом; в) методом Гаусса; г) методом Жордана-Гаусса.

1. $\begin{cases}-2x+z=-3;\\ x-y+2z=4;\\ 2x+4y-3z=1.\end{cases}$ **16.** $\begin{cases}-2x-y+6z=31;\\ x-y+2z=13;\\ 2x+4y-3z=-10.\end{cases}$

2. $\begin{cases}-2x+2z=0;\\ x-y+2z=6;\\ 2x+4y-3z=-2.\end{cases}$ **17.** $\begin{cases}-2x-y+7z=44;\\ x-y+2z=15;\\ 2x+4y-3z=-13.\end{cases}$

3. $\begin{cases}-2x+3z=5;\\ x-y+2z=8;\\ 2x+4y-3z=-5.\end{cases}$ **18.** $\begin{cases}-2x-y+8z=59;\\ x-y+2z=17;\\ 2x+4y-3z=-16.\end{cases}$

4. $\begin{cases}-2x+4z=12;\\ x-y+2z=10;\\ x+4y-3z=-10.\end{cases}$ **19.** $\begin{cases}-2x-y+9z=76;\\ x-y+2z=19;\\ 2x+4y-3z=-19.\end{cases}$

5. $\begin{cases}-2x+5z=21;\\ x-y+2z=12;\\ 2x+4y-3z=-11.\end{cases}$ **20.** $\begin{cases}-2x-2y=-8;\\ x-y+2z=0;\\ 2x+4y-3z=-12.\end{cases}$

6. $\begin{cases} -2x+6z=32; \\ x-y+2z=14; \\ 2x+4y-3z=-14. \end{cases}$

7. $\begin{cases} -2x+7z=45; \\ x-y+2z=16; \\ 2x+4y-3z=-17. \end{cases}$

8. $\begin{cases} -2x+8z=60; \\ x-y+2z=18; \\ 2x+4y-3z=-20. \end{cases}$

9. $\begin{cases} -2x+9z=77; \\ x-y+2z=20; \\ 2x+4y-3z=-23. \end{cases}$

10. $\begin{cases} -2x-y=-5; \\ x-y+2z=1; \\ 2x+4y-3z=8. \end{cases}$

11. $\begin{cases} -2x-y+z=-4; \\ x-y+2z=3; \\ 2x+4y-3z=5. \end{cases}$

12. $\begin{cases} -2x-y+2z=-1; \\ x-y+2z=5; \\ 2x+4y-3z=2. \end{cases}$

13. $\begin{cases} -2x-y+3z=4; \\ x-y+2z=7; \\ 2x+4y-3z=-1. \end{cases}$

14. $\begin{cases} -2x-y+4z=11; \\ x-y+2z=9; \\ 2x+4y-3z=-4. \end{cases}$

15. $\begin{cases} -2x-y+5z=20; \\ x-y+2z=11; \\ 2x+4y-3z=-7. \end{cases}$

21. $\begin{cases} -2x-2y+z=-7; \\ x-y+2z=2; \\ 2x+4y-3z=9. \end{cases}$

22. $\begin{cases} -2x-2y+2z=-4; \\ x-y+2z=4; \\ 2x+4y-3z=6. \end{cases}$

23. $\begin{cases} -2x-2y+3z=1; \\ x-y+2z=6; \\ 2x+4y-3z=3. \end{cases}$

24. $\begin{cases} -2x-2y+4z=8; \\ x-y+2z=8; \\ 2x+4y-3z=0. \end{cases}$

25. $\begin{cases} -2x-2y+5z=17; \\ x-y+2z=10; \\ 2x+4y-3z=-3. \end{cases}$

26. $\begin{cases} -2x-2y+6z=28; \\ x-y+2z=12; \\ 2x+4y-3z=-6. \end{cases}$

27. $\begin{cases} -2x-2y+7z=41; \\ x-y+2z=14; \\ 2x+4y-3z=-9. \end{cases}$

28. $\begin{cases} -2x-2y+8z=56; \\ x-y+2z=16; \\ 2x+4y-3z=-12. \end{cases}$

29. $\begin{cases} -2x-3y+9z=71; \\ x-y+2z=18; \\ 2x+4y-3z=-15. \end{cases}$

30. $\begin{cases} -2x-3y=-13; \\ x-y+2z=-1; \\ 2x+4y-3z=16. \end{cases}$

VI. Решить систему линейных однородных уравнений.

1. $\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 + x_5 = 0, \\ 2x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 + x_5 = 0, \\ 3x_1 + x_2 - 6x_3 + 3x_4 + 3x_5 = 0. \end{cases}$

2. $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 - 2x_5 = 0, \\ 2x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 - x_5 = 0. \end{cases}$

3. $\begin{cases} -2x_1 + x_2 - 3x_3 + x_4 = 0, \\ x_1 - 2x_2 + x_3 - 3x_4 = 0, \\ 5x_1 - x_2 + 4x_3 + 2x_4 = 0. \end{cases}$

4. $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 - 2x_4 - x_5 = 0, \\ 4x_1 + x_2 - x_3 - 3x_4 + x_5 = 0. \end{cases}$

5. $\begin{cases} -3x_1 + x_2 - x_3 + 3x_4 + 2x_5 = 0, \\ 6x_1 - 2x_2 + 3x_3 - x_4 - x_5 = 0, \\ x_1 + x_2 - 4x_3 + x_4 - 3x_5 = 0. \end{cases}$

6. $\begin{cases} 3x_1 + x_2 + x_3 - 3x_4 - x_5 = 0, \\ 6x_1 - 3x_2 - x_3 + x_4 + 4x_5 = 0. \end{cases}$

7. $\begin{cases} 3x_1 - 4x_2 + x_3 - 4x_4 = 0, \\ 9x_1 + 7x_2 - x_3 + 3x_4 = 0, \\ 6x_1 - 3x_2 + 2x_3 - x_4 = 0. \end{cases}$

8. $\begin{cases} 4x_1 - x_2 - 2x_3 - x_4 - 5x_5 = 0, \\ 8x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 + 2x_5 = 0. \end{cases}$

9. $\begin{cases} 8x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 + 2x_5 = 0, \\ 4x_1 + 2x_2 - 3x_3 + x_4 - 3x_5 = 0, \\ 12x_1 - 3x_2 + 2x_3 - 2x_4 + x_5 = 0. \end{cases}$

10. $\begin{cases} 5x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 - x_5 = 0, \\ 10x_1 - 3x_2 - x_3 - x_4 + 5x_5 = 0. \end{cases}$

11. $\begin{cases} 15x_1 - 10x_2 - 3x_3 + x_4 = 0, \\ x_1 + x_2 - 10x_3 + 12x_4 = 0, \\ -3x_1 + 2x_2 + 6x_3 - x_4 = 0. \end{cases}$

12. $\begin{cases} 6x_1 - x_2 - 3x_3 - x_4 4x_5 = 0, \\ 12x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 - x_5 = 0. \end{cases}$

13. $\begin{cases} 9x_1+4x_2-x_3+5x_4-x_5=0, \\ -3x_1-3x_2+2x_3-3x_4+2x_5=0, \\ 6x_1+x_2-4x_3+2x_4-x_5=0. \end{cases}$

14. $\begin{cases} 7x_1+2x_2-x_3+2x_4+x_5=0, \\ 14x_1-3x_2+x_3-x_4-2x_5=0. \end{cases}$

15. $\begin{cases} -10x_1+5x_2-x_3+2x_4=0, \\ 5x_1-x_2+3x_3-x_4=0, \\ -15x_1+2x_2-2x_3+x_4=0. \end{cases}$

16. $\begin{cases} 8x_1-2x_2+x_3+5x_4-3x_5=0, \\ 16x_1+2x_2-2x_3+x_4-x_5=0. \end{cases}$

17. $\begin{cases} 4x_1+x_2-3x_3+4x_4-2x_5=0, \\ -2x_1-x_2+2x_3-3x_4+x_5=0, \\ 6x_1+2x_2-4x_3+x_4-3x_5=0. \end{cases}$

18. $\begin{cases} 9x_1-x_2-4x_3-x_4+4x_5=0, \\ 18x_1+3x_2+x_3+3x_4-5x_5=0. \end{cases}$

19. $\begin{cases} 4x_1+2x_2+x_3-2x_4=0, \\ 14x_1-6x_2-3x_3+x_4=0, \\ -x_1+x_2+2x_3-x_4=0. \end{cases}$

20. $\begin{cases} 10x_1+x_2-2x_3+3x_4-2x_5=0, \\ 20x_1+3x_2+x_3+2x_4-3x_5=0. \end{cases}$

21. $\begin{cases} 8x_1-3x_2+x_3-3x_4+2x_5=0, \\ -4x_1+x_2-2x_3+x_4-x_5=0, \\ 12x_1-2x_2+3x_3-x_4+x_5=0. \end{cases}$

22. $\begin{cases} x_1+x_2+4x_3-5x_4+x_5=0, \\ 3x_1-2x_2+3x_3-x_4-2x_5=0. \end{cases}$

23. $\begin{cases} 6x_1-3x_2-x_3+2x_4=0, \\ -4x_1+x_2+2x_3-3x_4=0, \\ 2x_1-2x_2+x_3-x_4=0. \end{cases}$

24. $\begin{cases} 2x_1-2x_2+x_3-4x_4-5x_5=0, \\ 6x_1+3x_2-2x_3+x_4-3x_5=0. \end{cases}$

25. $\begin{cases} 4x_1 + x_2 - 2x_3 + 2x_4 + x_5 = 0, \\ -8x_1 - 2x_2 + 3x_3 - x_4 - 2x_5 = 0, \\ 12x_1 + 2x_2 - 3x_3 + x_4 + 2x_5 = 0. \end{cases}$

26. $\begin{cases} 3x_1 + x_2 - 3x_3 - x_4 + 2x_5 = 0, \\ 9x_1 - 2x_2 + x_3 + 2x_4 - 4x_5 = 0. \end{cases}$

27. $\begin{cases} -21x_1 + 4x_2 + x_3 - 4x_4 = 0, \\ 7x_1 + 2x_2 - 2x_3 + x_4 = 0, \\ 14x_1 - 3x_2 + 3x_3 - x_4 = 0. \end{cases}$

28. $\begin{cases} 4x_1 - 2x_2 + x_3 + 2x_4 - x_5 = 0, \\ 12x_1 + 5x_2 - x_3 + x_4 + 3x_5 = 0. \end{cases}$

29. $\begin{cases} -3x_1 + 3x_2 + x_3 - 4x_4 - x_5 = 0, \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 - x_4 - 3x_5 = 0, \\ 2x_1 - 3x_2 + 3x_3 - x_4 + 2x_5 = 0. \end{cases}$

30. $\begin{cases} 5x_1 + x_2 + 5x_3 - 2x_4 + 3x_5 = 0, \\ 15x_1 - 4x_2 + x_3 - 6x_4 - x_5 = 0. \end{cases}$

VII. Дана система векторов $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3, \vec{a}_4, \vec{a}_5, \vec{a}_6$, в которой $\vec{a}_3(0,1,1,2)$, $\vec{a}_4(1,1,1,3)$, $\vec{a}_5(1,0,-2,-1)$, $\vec{a}_6(1,0,1,2)$. Дополнить линейно независимую часть $\vec{a}_1, \vec{a}_2$ до базиса системы векторов $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3, \vec{a}_4, \vec{a}_5, \vec{a}_6$ и все векторы, не вошедшие в базис, разложить по базису.

1. $\vec{a}_1(2,-4,5,3)$, $\vec{a}_2(12,2,-5,9)$.

2. $\vec{a}_1(7,0,9,16)$, $\vec{a}_2(3,1,4,8)$.

3. $\vec{a}_1(4,1,3,8)$, $\vec{a}_2(7,-1,0,6)$.

4. $\vec{a}_1(5,2,7,14)$, $\vec{a}_2(2,11,-10,3)$.

5. $\vec{a}_1(6,12,-7,11)$, $\vec{a}_2(2,3,3,8)$.

6. $\vec{a}_1(9,11,-1,19)$, $\vec{a}_2(5,3,-5,3)$.

7. $\vec{a}_1(2,4,1,7)$, $\vec{a}_2(3,-7,8,4)$.

8. $\vec{a}_1(1,6,-7,0)$, $\vec{a}_2(5,-3,9,11)$.

9. $\vec{a}_1(1,3,0,4)$, $\vec{a}_2(2,-1,-2,-1)$.

10. $\vec{a}_1(1,2,-5,-2)$, $\vec{a}_2(2,9,-7,4)$.

11. $\vec{a}_1(1,7,-2,6)$, $\vec{a}_2(4,-1,1,4)$.

12. $\vec{a}_1(5,1,-4,2)$, $\vec{a}_2(1,-4,-2,-5)$.

13. $\vec{a}_1(2,3,0,5)$, $\vec{a}_2(4,1,0,5)$.

14. $\vec{a}_1(0,-1,2,1)$, $\vec{a}_2(3,2,1,6)$.

15. $\vec{a}_1(3, 1, 3, 7)$, $\vec{a}_2(5, 0, 1, 6)$.
16. $\vec{a}_1(2, -3, 2, 1)$, $\vec{a}_2(3, 2, 0, 5)$.
17. $\vec{a}_1(3, 3, 2, 8)$, $\vec{a}_2(0, 4, -3, 1)$.
18. $\vec{a}_1(5, 4, -2, 7)$, $\vec{a}_2(1, 0, 2, 3)$.
19. $\vec{a}_1(2, 7, -3, 6)$, $\vec{a}_2(5, 8, -5, 8)$.
20. $\vec{a}_1(4, 5, -3, 6)$, $\vec{a}_2(1, -4, 5, 2)$.
21. $\vec{a}_1(3, 5, -5, 3)$, $\vec{a}_2(4, 8, -6, 6)$.
22. $\vec{a}_1(1, 3, -3, 1)$, $\vec{a}_2(2, -1, 3, 4)$.
23. $\vec{a}_1(4, 5, -2, 7)$, $\vec{a}_2(1, -5, 4, 0)$.
24. $\vec{a}_1(2, 8, -1, 9)$, $\vec{a}_2(3, 10, -6, 7)$.
25. $\vec{a}_1(-4, 2, 1, 3)$, $\vec{a}_2(-1, 4, 2, 5)$.
26. $\vec{a}_1(1, 7, -2, 6)$, $\vec{a}_2(2, 3, -4, 1)$.
27. $\vec{a}_1(3, 2, -1, 1)$, $\vec{a}_2(0, 1, -3, -1)$.
28. $\vec{a}_1(2, 1, 3, -1)$, $\vec{a}_2(1, 2, -1, 3)$.
29. $\vec{a}_1(-1, 1, -2, 1)$, $\vec{a}_2(3, 1, 1, 1)$.
30. $\vec{a}_1(2, -1, 3, 5)$, $\vec{a}_2(-2, 1, -1, 3)$.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Бараненков, А.И. Сборник задач и типовых расчетов по высшей математике [Текст]: учеб. пособие / А.И. Бараненков, Е.П. Богомолова, И.М. Петрушко. – СПб.: Лань, 2009. – 240 с.

2. Ильин, В.А. Линейная алгебра [Текст]: учеб. для вузов / В.А. Ильин, Э.Г. Позняк. – М.: Наука. Физматлит, 1999. – 296 с.

3. Канатников, А.Н. Линейная алгебра [Текст]: учеб. для вузов / А.Н. Канатников, А.П. Крищенко. – М.: МГТУ им. Н.Э.Баумана, 2002. – 336 с.

4. Колесников, А.Н. Краткий курс математики для экономистов [Текст]: учеб. пособие / А.Н.Колесников. – М.: ИНФРА-М, 2001. – 208 с.

5. Кремер, Н.Ш. Высшая математика для экономистов [Текст] / Н.Ш. Кремер. – М.:ЮНИТИ, 2003. – 471 с.

6. Курош, А.Г. Курс высшей алгебры [Текст] / А.Г.Курош. – М.: Наука, 1968. – 432 с.

7. Просветов, Г.И. Линейная алгебра и аналитическая геометрия. Задачи и решения [Текст]: учеб.-практ. пособие / Г.И.Просветов. – М.: Альфа-Пресс, 2009. – 208 с.

8. Сборник задач по высшей математике для экономистов [Текст]: учеб. пособие / под ред. В.И.Ермакова. – М.: ИНФРА-М, 2003. – 575 с.

О Г Л А В Л Е Н И Е

Учебное издание

Куимова Елена Ивановна
Снежкина Ольга Викторовна
Ячинова Светлана Николаевна

ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА
Практикум

Учебное пособие

В авторской редакции
Верстка Н.А. Сазонова

Подписано в печать 11.08.14. Формат 60×84/16.
Бумага офисная «Снегурочка». Печать на ризографе.
Усл.печ.л. 5,58. Уч.-изд.л. 6,0. Тираж 80 экз.
Заказ № 267.

Издательство ПГУАС.
440028, г. Пенза, ул. Германа Титова, 28.