

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ  
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

---

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение  
высшего профессионального образования  
«Пензенский государственный университет  
архитектуры и строительства»  
(ПГУАС)

**Л.А. Найниш, Л.Е. Гаврилюк**

## **НАЧЕРТАТЕЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ**

Допущено УМО вузов РФ по образованию в области транспортных  
машин и транспортно-технологических комплексов  
в качестве учебного пособия для студентов,  
обучающихся по направлениям подготовки бакалавров  
23.03.01 «Технология транспортных процессов»  
и 23.03.03 «Эксплуатация транспортно-технологических машин  
и комплексов»

Пенза 2014

УДК 515 (07)  
ББК 22.151.3 я 73  
Н20

Рецензенты: кандидат технических наук, профессор,  
академик Академии транспорта РФ, за-  
служенный работник Высшей школы  
РФ Э.Р. Домке;  
доктор технических наук, профессор,  
зав. кафедрой «Информатика и компью-  
терный дизайн» Санкт-Петербургского  
государственного университета теле-  
коммуникаций им. проф. Бонч-Бруе-  
вича Д.В. Волошинов

**Найниш Л.А.**

Н20 Начертательная геометрия: учеб. пособие / Л.А. Найниш,  
Л.Е. Гаврилюк. – Пенза: ПГУАС, 2013. – 196 с.  
**ISBN 978-5-9282-1111-0**

Показаны значения изображений в жизни человека как способ фиксации и хранения информации. Выявлен и сформулирован закон построения плоских изображений трехмерных объектов. Установлены условия, при которых плоские изображения сохраняют всю геометрическую информацию исходных объектов, становясь геометрическими моделями. Рассмотрены наиболее распространенные методы построения моделей: аксонометрия и эпюр Монжа. Даны примеры решения основных позиционных и метрических задач, построения разверток. Предложены методики освоения этих методов.

Учебное пособие подготовлено на кафедре «Начертательная геометрия и графика» и предназначено для студентов, обучающихся по направлениям подготовки бакалавров 23.03.01 «Технология транспортных процессов», 23.03.03 «Эксплуатация транспортно-технологических машин и комплексов».

**ISBN 978-5-9282-1111-0**

© Пензенский государственный университет  
архитектуры и строительства, 2014  
© Найниш Л.А., Гаврилюк Л.Е., 2014

## ПРЕДИСЛОВИЕ

Предлагаемое учебный курс разработан на основе алгоритмической методики освоения процесса создания плоских изображений трехмерных объектов. Он представляет собой обобщение сорокалетнего опыта работы, который представлен в следующих изданиях: учебном пособии «Позиционные задачи. Тени», изданном в 1999 году; монографии «Как изображать трехмерный мир на плоскости» (1999 год); учебнике «Начертательная геометрия» (2000 год); учебном пособии «Метод двух изображений; моделирования основных геометрических элементов» (2000 год); учебном пособии «Теория построения изображений» (2010 год) и научно-методическом пособии «Моделирование оптимальной обучающей технологии» (2010 год).

В этот учебный курс включены базовые геометрические знания проективной геометрии, что, по мнению авторов, облегчит его освоение. Предложенный учебный курс начертательной геометрии позволяет изучить основные приемы построения геометрических моделей, которыми являются плоские изображения трехмерных объектов. Эти изображения оказываются одной из составляющих профессиональной деятельности различного рода инженеров, профессиональная деятельность которых тесно связана с изображениями.

## ВВЕДЕНИЕ

С давних пор человечество владеет языком изображений. Этот язык является универсальным средством общения. Такую универсальность обеспечивают следующие особенности изображений:

1. Они понятны людям любой национальности. Язык изображений является средством межнационального общения. Изображение, которое сделал индус, может быть понятно и русскому, и французу, и якуту. На основе этого возникла идея поиска контактов с внеземными цивилизациями. С помощью изображений земляне пытаются установить общение с жителями иных планет.

2. Язык изображений является также средством межвременного общения [5, 14]. Современному человеку понятны изображения, которые сделаны несколько тысячелетий назад. Мы получаем информацию об уровне развития древнейших цивилизаций по изображениям, которые они нам оставили. Такую же информацию получают о нас наши потомки, которые будут жить много веков спустя.

3. Изображения являются информационно насыщенными в большей степени, чем письменность. Это обстоятельство обеспечило широкое применение изображений в технике и строительстве. Без чертежей невозможны создание и эксплуатация различных технических устройств и строительных сооружений [8, 9].

4. Неоценимую роль играют изображения как средство фиксации, хранения и обработки геометрической информации. Поскольку геометрической информацией обладают почти все реальные объекты, то фиксация этой информации в изображениях является важной составляющей человеческого бытия.

В зависимости от особенностей фиксируемой информации и целей ее фиксации все существующие изображения можно поделить на два вида: художественные и технические. Технические изображения, в свою очередь, подразделяются на четыре подвида: перспектива, аксонометрия, эпюр Монжа и проекции с числовыми отметками (рис. 1).

Процессы создания этих изображений имеют следующие различия. Создание художественных изображений называется рисованием или живописью. Его характерной чертой является игнорирование использования специальных инструментов для проведения линий. Процесс создания технических изображений называется черчением, где проведение различных линий требует использования специальных инструментов.

Из перечисленных видов изображений раньше всех применялась перспектива. Есть сведения, что египетские пирамиды, храмы Древней Греции и Древнего Рима были построены по изображениям, которые напоминают перспективные [18]. Попытки объяснить построение перспек-

тивных изображений с геометрических позиций были еще в трудах древнегреческого ученого Эсхила (525–456 гг. до н.э.). Он внес значительный вклад в формирование наблюдательной перспективы.



Рис. 1. Виды изображений

Использовал геометрию для описания процесса построения перспективных изображений и древнегреческий ученый Демокрит (460–370 гг. до н.э.). В конце первого века до новой эры греческий ученый Витрувий обобщил труды Эсхила и Демокрита. Это позволило сформулировать правила построения перспективы. Первые попытки сформулировать правила построения теней отмечены во втором веке новой эры в работах еще одного древнегреческого ученого – Птолемея [19]. В результате перспектива раньше всех остальных подвидов изображений обрела теоретическую базу.

Новый толчок в своем развитии теория перспективы получила в эпоху возрождения. Исследования в области построения перспективных изображений подхватили такие ученые, как Филиппо Брунеллески (1377–1446), Лоренцо Гильберти (1378–1455), Леон Батиста Альберти (1404–1472) и Пьеро дель Борго. Наибольший вклад в построение теории перспективы внесли титаны Возрождения – Леонардо да Винчи и Альбрехт Дюрер.

Успешно развивалась теория перспективы в трудах русских ученых и художников, таких, как А.Г. Венецианов, С.К. Зарянко, П.П. Чистяков, А.П. Сапожников, Я.А. Савостьянов, Н.А. Рынин, Н.И. Чечелев, Н.Н. Чернецов, И.П. Машков и многих других. В настоящее время эта теория

используется художниками, скульпторами, архитекторами и дизайнерами при изображении трехмерных объектов на плоскости.

Следует обратить внимание на обратную перспективу, которая использовалась в русских иконах, ее особенности долго оставались загадкой, раскрытой только в XX веке в трудах П.А. Флоренского и Б.В. Раушенбаха.

Необходимость построения изображений, обладающих не только наглядностью, но и точностью, вызвала к жизни аксонометрию, впервые использованную в XVI веке для иллюстрации работ Г. Агриколы. Примерно в то же время Жирар Дезарг предложил строить перспективу по координатам. Тем самым он положил начало методу аксонометрических проекций, который до сих пор применяется как средство выражения технической и архитектурной мысли [11].

Бурное развитие техники требовало изображений, которые сохраняли форму и размеры исходных объектов. Это требование было удовлетворено Гаспаром Монжем в VIII в. Он предложил такой способ построения изображений, который позволял максимально возможно сохранять форму и размеры исходных объектов. Наряду с этим достоинством был и существенный недостаток: в этих изображениях практически отсутствовала наглядность. Иначе говоря, такие изображения мало напоминали те, которые воспринимает глаз человека. В настоящее время, несмотря на указанный недостаток, такой способ широко используется в самых различных областях науки и техники [3].

Эпоха путешествий требовала создания изображений, в которых нужно было фиксировать геометрическую информацию об объектах, имеющих большие размеры длины и ширины по сравнению с высотой. Это были рельефы различной местности. Они изображались с помощью проекций с числовыми отметками. Этот метод лег в основу создания навигационных карт.

В результате можно сказать, что изображения являются очень важной частью жизни человека. Это способ фиксации и хранения информации. Изображения обладают большей информационной насыщенностью по сравнению с письменностью. В настоящее время, когда объем информации катастрофически возрастает, фиксация информации в изображения имеет несомненное преимущество.

Это обстоятельство обостряет проблему, связанную с обучением способам создания плоских изображений трехмерных объектов. К ним относятся черчение и рисование.

В настоящее время бытует мнение, что рисовать может научиться только человек, обладающий соответствующими способностями. Но если обратиться к прошлому, мы увидим, что были времена, когда читать и писать могли только избранные. Все остальные считались как бы неспособными обучиться этим премудростям. Прошло не так уж много времени,

и неграмотный человек стал вызывать удивление. Но вот отношение к обучению рисованию с тех времен мало изменилось, хотя попытки обучать всех поголовно изображению трехмерного мира на плоскости все-таки существуют. В школах введены уроки рисования. Но результаты этой попытки для многих оканчиваются плачевно. Они получают пожизненный приговор: к рисованию не способен. Этот приговор конечно не смертелен, и человек может с ним жить долгую жизнь, не понимая, что многие аспекты реальной действительности остались за пределами его сознания.

С черчением, на первый взгляд, дело обстоит несколько лучше. Это объясняется жесткой необходимостью владения способами построения технических изображений. В соответствующих учебных заведениях изучается теоретическая основа создания таких изображений (начертательная геометрия). Но почему-то в школе изучают ее прикладную составляющую: черчение. Таким образом нарушается логика в освоении способа построения технических изображений. В результате у большинства людей складывается впечатление, что черчение – это лишь умение проводить линии в соответствии с требованиями стандартов.

Как же обучить людей способам создания плоских изображений трехмерных объектов? Существующие методики обучения рисованию и черчению пока не дают результатов. Причина заключается в отсутствии понимания основных законов построения плоских изображений трехмерных объектов.

1. Что общего в возникновении художественных и технических изображений? Иначе говоря, существуют ли закономерности этого процесса?

2. Что нужно сделать, чтобы в них сохранялась вся геометрическая информация исходного объекта? Иначе говоря, какие существуют условия узнаваемости исходного объекта на его изображении?

3. Какие существуют приемы работы с созданными изображениями?

Ответ на эти вопросы позволяет создать алгоритмическую методику, благодаря которой можно каждого человека обучить процессу рисования и черчения.

Чтобы этот процесс стал понятен для большинства обучающихся, нужно выбрать соответствующий язык. Такой язык был выбран достаточно давно. Им оказалась геометрия. С помощью геометрии объясняли процесс возникновения перспективных изображений еще титаны Возрождения. Но геометрия достаточно развитая область человеческого знания. Она содержит много различных разделов. Какой из них наиболее соответствует для описания процесса создания плоских изображений трехмерных объектов? Наиболее соответствует задачам этого процесса проективная геометрия. Она позволяет с общих позиций рассматривать интересующий процесс, что существенно упрощает понимание многих его закономерностей. Но проективная геометрия не изучается в школе. В результате это

осложняет понимание процесса создания плоских изображений трехмерных объектов.

Предлагаемый учебный курс разработан на основе алгоритмической методики освоения процесса создания плоских изображений трехмерных объектов. В него включены базовые геометрические знания проективной геометрии, что, по мнению автора, облегчит усвоение этого учебного курса.

## ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ

Введение в любой курс начинается с определения его цели и задач. Чтобы сформулировать цель и задачи учебного курса «Начертательная геометрия», необходимо ввести ряд определений.

**Геометрическая информация** – это сведения о размерах, форме и относительном положении объекта в пространстве. Эту информацию доставляют почти все известные человеку объекты. Поэтому получение и переработка такой информации является важной стороной деятельности человека [9]. Понятно, что мы отличаем один объект от другого потому, что каждый из них несет различную информацию. Но среди этой информации можно найти области одинаковой информации, которая принадлежит различным объектам. Если наблюдателя интересует именно эта информация, то не возникает принципиальных различий, от какого объекта ее можно получить. Это дает возможность заменить один объект другим. В результате можно говорить о процессе моделирования.

**Моделирование** – это процесс замены одного объекта другим по циклу одинаковой информации. Объект, которым заменяют, называют *моделью*. Объект, который заменяют, – *исходным*. Если основанием для замены является геометрическая информация, то мы имеем дело с процессом *геометрического моделирования* [4].

Получить геометрическую информацию можно непосредственно наблюдая объект. Но, к сожалению, это не всегда возможно. Наблюдаемый объект может быть недостижим или вообще отсутствовать. Например, возникла необходимость восстановить разрушенное здание. Как определить его размеры, форму, взаимное расположение деталей? Или: как будет выглядеть проектируемый объект, которого пока еще нет? Каковы его размеры и форма? На все эти вопросы можно получить ответ, если есть что-то, что может предоставить необходимую геометрическую информацию, заменяющую собой объект. Таким заменителем обычно оказываются макеты, фотографии, чертежи, рисунки и т.д., которые дают наблюдателю необходимую геометрическую информацию об исходном объекте.

Геометрической информацией обладают почти все окружающие нас объекты; поэтому процесс получения и переработки геометрической информации является широко распространенной процедурой. Это обуславливает значимость геометрических моделей в жизни людей.

Изучением процесса построения геометрических моделей занимается начертательная геометрия, **основной целью** которой является построение

геометрических моделей. Конкретная реализация этой цели определяется следующими **задачами**:

- *изучение закона построения геометрических моделей;*
- *освоение приемов работы с геометрическими моделями.*

Для решения этих задач необходимо освоить теоретические знания по темам, указанным в схеме (рис. 2), приобрести навыки в моделировании различных геометрических объектов – точек, линий, плоскостей и поверхностей – и освоить приемы при решении позиционных и метрических задач. Схема, изображенная на рис. 2, представляет собой моноструктуру. Она отражает логическую связность дидактических единиц учебного курса «Начертательная геометрия» [17]. Все дидактические единицы связаны друг с другом так, что каждый последующий шаг опирается на прочное знание всего предыдущего учебного материала. Сначала нужно изучить устройство проекционного аппарата и алгоритм его работы применительно к общему случаю и частным вариантам – аксонометрии и эпюру Монжа. Научиться строить модели основных геометрических объектов – точек, линий, плоскостей и поверхностей. Затем освоить приемы работы с этими моделями.

При этом моделирование каждой последующей группы геометрических объектов опирается на теоретический и практический материал, который описывает процесс построения моделей предыдущей группы. Учебный материал, описывающий процесс построения плоских моделей всех геометрических объектов, является основой для изучения приемов решения первой группы позиционных задач, которые, в свою очередь, являются базовыми для решения второй группы этих задач. После усвоения раздела «Позиционные задачи» можно приступать к построению теней. Обе группы позиционных задач оказываются основой для решения метрических задач, на которых основано построение разверток геометрических поверхностей.

Такая логическая структура учебного курса предъявляет жесткие требования к методике его усвоения, характерной чертой которой является регулярность в контроле качества знаний и максимально возможная индивидуализация обучения. Результатом освоения этого учебного курса является формирование алгоритмического мышления.

Поскольку начертательная геометрия пользуется геометрией для описания процесса возникновения изображений, то для ее усвоения необходимы базовые геометрические знания. Они складываются из школьных знаний геометрии и фундаментальных разделов проективной геометрии.

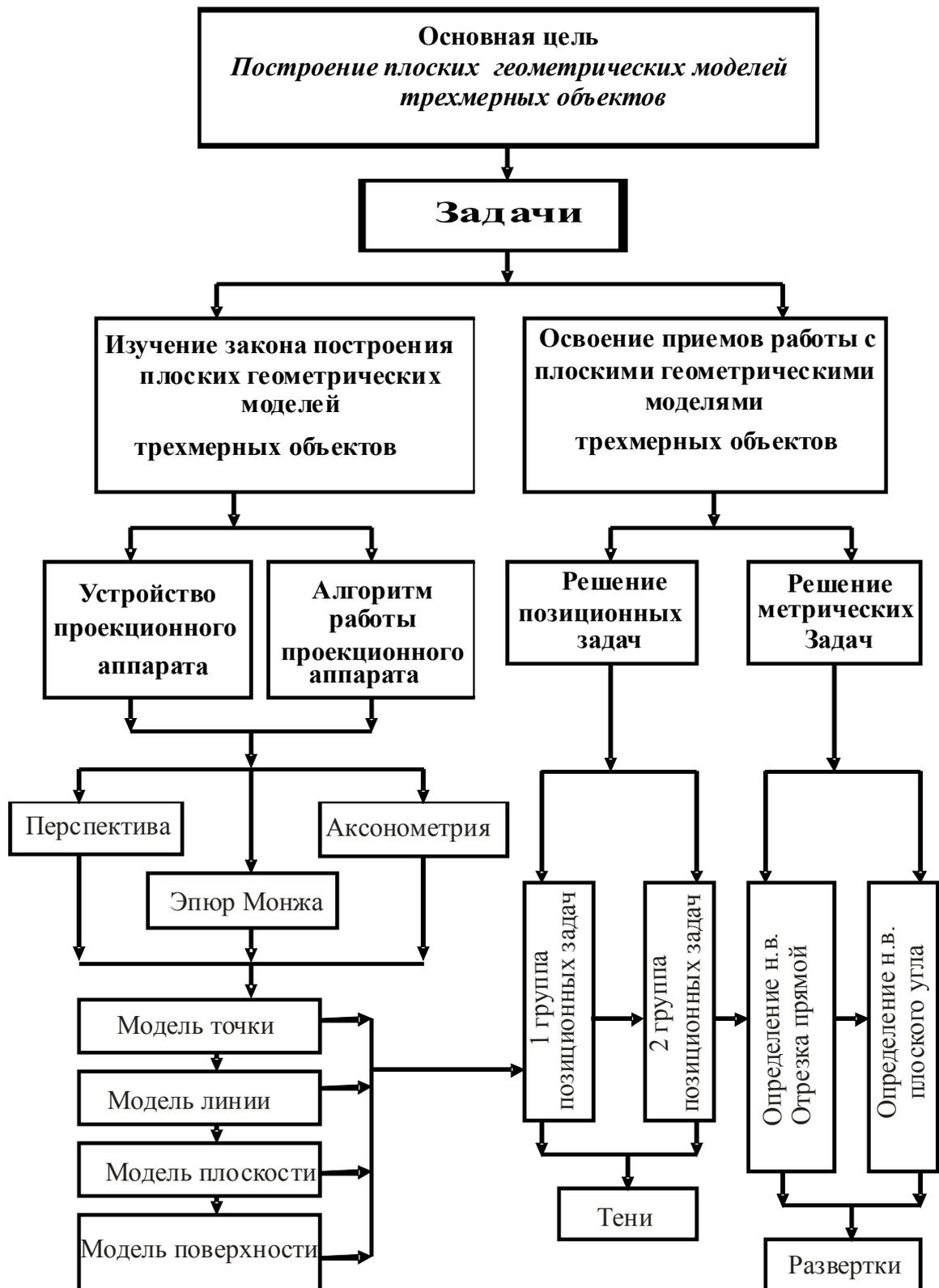


Рис. 2. Логическая структура учебного курса «Начертательная геометрия»

### Контрольные вопросы

1. Что такое геометрическая информация?
2. Дать определение процессу моделирования.
3. Какой объект называется исходным?
4. Какой объект принято называть моделью?
5. Что называется процессом геометрического моделирования?
6. Привести примеры известных Вам геометрических моделей.
7. Что является основной целью начертательной геометрии?

# 1. БАЗОВЫЕ ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ЗНАНИЯ

## 1.1. Геометрическое пространство

**Геометрическим пространством** принято считать бесконечное множество геометрических элементов. Например, прямую можно считать пространством, если она представляется как множество точек. Плоскость как пространство является множеством точек или прямых. Этот ряд примеров можно продолжать достаточно долго, что обеспечивается универсальностью определения пространства.

Распространенным способом образования пространства является кинематический. Суть его заключается в том, что некоторый элемент, например точка, прямая или плоскость, перемещаясь по какому-либо закону, образует это пространство. Например, результатом перемещения точки является линия. Прямолинейное перемещение образует прямую линию, криволинейное – кривую линию. Перемещение прямой или кривой линии образует плоскость или пространство и т.д.

Геометрическое пространство отличаются следующие свойства, которые необходимо учитывать при работе с ним:

- относительность;
- абстрактность;
- размерность;
- проективность.

**Относительность.** Любой геометрический элемент может являться одновременно пространством, и, наоборот, любое пространство может оказаться элементом. Здесь важно понять, что принцип относительности действует и в геометрии. Любое определение не является жестко фиксированным по отношению к определяемому объекту. Например, прямая может быть представлена как множество точек, тогда она является пространством. Если она мыслится как неделимый объект, тогда она может быть элементом плоскости или другого пространства.

**Абстрактность.** Геометрическое пространство является математическим объектом, и, как любой математический объект, оно не существует в реальной действительности.

**Размерность.** Одной из распространенных операций над геометрическими пространствами является выделение элемента этого пространства. Для этого в пространстве фиксируется система координат и намечается процедура соотнесения элементов с этой системой. В результате образуется некий набор чисел, который принято считать размерностью этого пространства.

Рассмотрим несколько примеров применительно к линейным пространствам. Положению произвольных точек  $A$  и  $B$  на прямой  $l$  (рис. 3)

ставится в соответствие набор из одного числа. Это расстояние от выбранной точки до некоторой фиксированной точки  $O$ , играющей роль координатной системы. В результате прямая, как множество точек, представляет собой одномерное пространство.

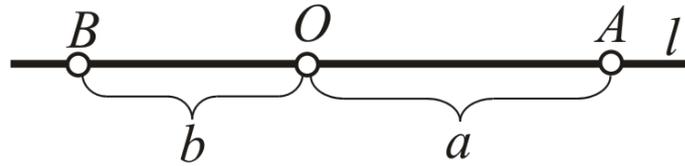


Рис. 3. Выделение точки из множества точек прямой

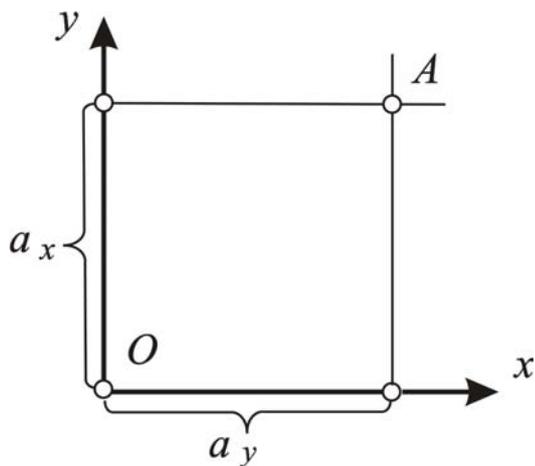


Рис. 4. Выделение точки из множества точек в плоскости

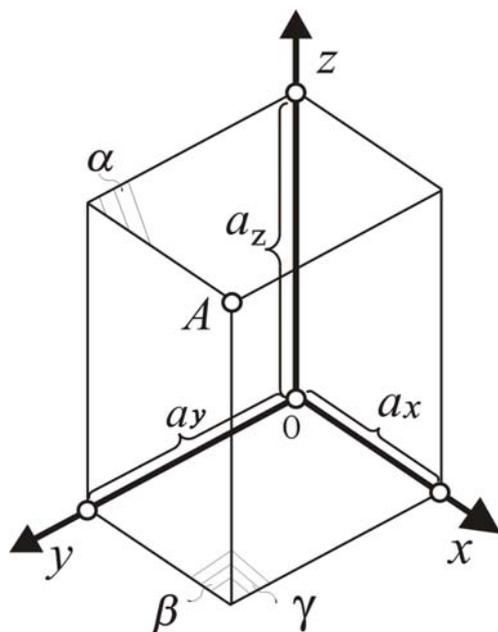


Рис. 5. Выделение точки из множества точек в трехмерном пространстве

Положению точки  $A$  в плоскости ставится в соответствие набор из двух чисел (рис. 4), которые считываются на координатных осях  $x$  и  $y$ . Процедура сопоставления заключается в проведении через точку прямых, параллельных осям координат. Множество точек плоскости – двумерное пространство.

Положению точки  $A$  в трехмерном пространстве соответствует набор из трех чисел (рис. 5). Для того чтобы ее выделить, необходимо выполнить известную процедуру. Через заданную точку провести три плоскости  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$ . Каждая из этих плоскостей пересечет ось координат, которой она перпендикулярна, и выделит на ней точку. Расстояние от этой точки до начала координат измеряется конкретными числами  $a_x$ ,  $a_y$ ,  $a_z$ . В результате получим три числа, которые позволяют выделить в трехмерном пространстве одну точку из бесконечного множества ей подобных.

Исходя из требования рациональности, набор чисел должен быть минимальным. Это требование является неизменным условием при выделении геометрического элемента из множества ему подобных. Поэтому выделяя одну прямую из множества прямых плоскости, достаточно набора из двух чисел, поскольку положение прямой опреде-

ляется двумя точками, но взять их нужно на координатных осях (рис. 6). В результате плоскость, как множество прямых, оказывается двумерным пространством.

Положение прямой в трехмерном пространстве соответствует набору из четырех чисел, так как две ее точки целесообразно взять в координатных плоскостях (рис. 7). Следовательно, множество прямых трехмерного пространства образует четырехмерное пространство. Возникающая здесь риторическая тавтология связана с традицией в наименовании пространств, но она не искажает существо рассматриваемой ситуации.

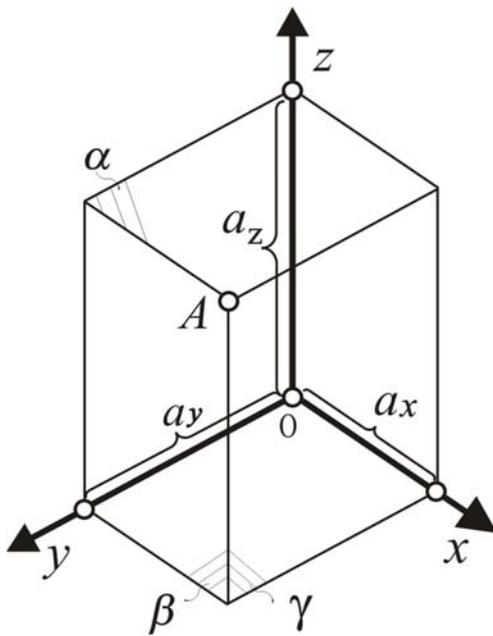


Рис. 6. Выделение одной прямой из множества прямых в плоскости

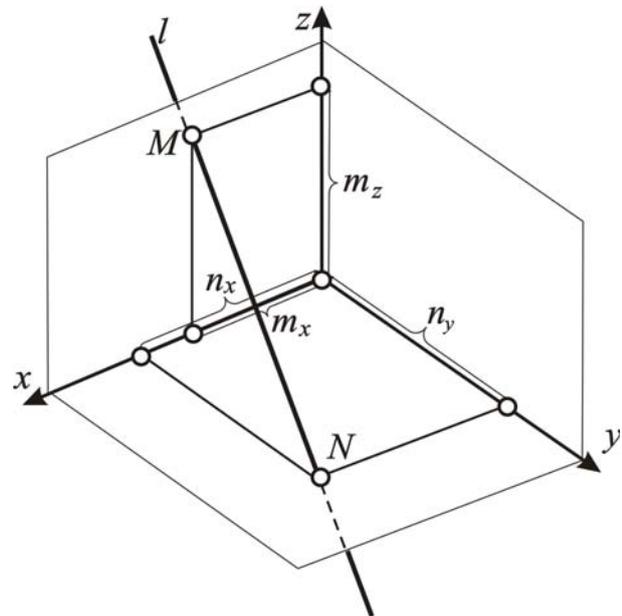


Рис. 7. Выделение одной прямой из множества прямых трехмерного пространства

Три точки, определяющие положение плоскости в трехмерном пространстве, лучше всего выбрать на координатных осях. Таким образом, положению плоскости в пространстве соответствуют три числа (рис. 8).

Очевидно, что этот ряд примеров можно продолжать достаточно долго, и в каждом случае положение элемента в пространстве соответствует набору чисел. С этим соответствием связано понятие о размерности пространства. Сколько чисел входит в набор, такова и размерность пространства. Таким образом, прямолинейный ряд

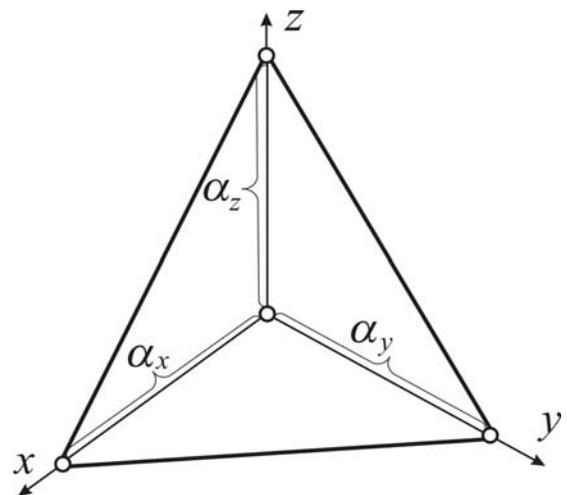


Рис. 8. Выделение одной плоскости из множества плоскостей трехмерного пространства

точек имеет размерность, равную единице ( $R^1$ ), плоское поле точек и прямых двумерно ( $R^2$ ), трехмерное пространство ( $R^3$ ) как множество точек имеет размерность, равную трем, но как множество прямых оно уже четырехмерно ( $R^4$ ).

Обобщая сказанное, можно сделать вывод: *размерность – это минимальный набор чисел, который определяет положение элемента в пространстве.*

**Проективность.** Основная цель, которая определяла необходимость создания геометрии как науки, – конструирование геометрических моделей реальности. Историческая ретроспектива показывает, что период ее существования накопил много вариантов геометрии, которые описывают те или иные аспекты реальности. Это геометрии Евклида, Лобачевского, Римана (многомерная, аффинная и проективная геометрии). Следует заметить, что глаз человека устроен так, что он не видит параллельных объектов. Поэтому для описания процесса возникновения изображений, аналогичных тем, которые видит глаз человека, целесообразно использовать проективную геометрию [10]. Она, как и глаз человека, не видит различия между параллельными и непараллельными объектами. Геометрическое пространство в этой геометрии обладает свойством проективности. Его обеспечивает наличие бесконечно удаленных элементов. Чтобы понять, что это такое, рассмотрим пример (рис. 9).

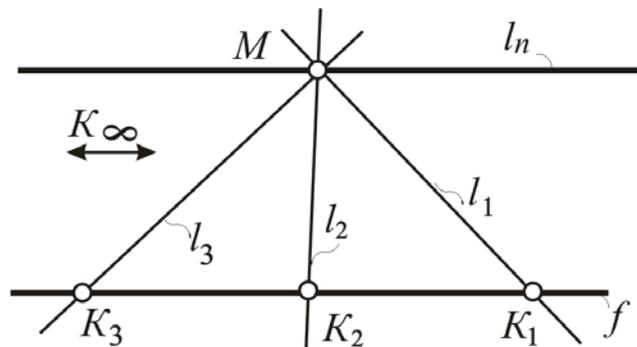


Рис. 9. Выявление бесконечно удаленной точки прямой

В плоскости зафиксированы точка  $M$  и прямая  $f$ . Через точку  $M$  проведем прямую  $l$ , которая пересечет прямую  $f$  в точке  $K$ . Вращая прямую  $l$  вокруг точки  $M$  по часовой стрелке (можно и против часовой стрелки), будем следить за движением точки  $K$ . Она пробежит по всем точкам прямой  $f$ . В случае, когда прямая  $l$  окажется параллельной прямой  $f$ , мы увидим точку  $K$  в бесконечности, если посмотрим влево. Если посмотрим вправо, то также увидим общую точку этих прямых. Но здесь возникает парадоксальная ситуация: известно, что две несовпавшие прямые имеют только одну общую точку. А у нас их две. Это противоречит одному из базовых положений геометрии Евклида. Чтобы ликвидировать это противоречие, объединим эти точки в одну. В результате получим проективную прямую,

которая оказывается замкнутой на бесконечности одной точкой. В этой точке с ней будут пересекаться и другие параллельные ей прямые. Таким образом, все прямые, которые лежат в одной плоскости, пересекаются друг с другом. Только точки пересечения параллельных прямых находятся в бесконечности.

Повысим размерность всех элементов на единицу. В результате получим конструкцию, которая состоит из двух плоскостей  $\alpha, \beta$  и двух прямых  $m, k$  (рис. 10). Плоскость  $\beta$  будем вращать вокруг прямой  $m$  и следить за перемещением прямой  $k$ . В случае, когда плоскости  $\alpha$  и  $\beta$  станут параллельными друг другу, прямая  $k$  уйдет в бесконечность. Плоскость  $\alpha$  (как и плоскость  $\beta$ ) окажется замкнутой на бесконечности одной прямой. По этой прямой будут пересекаться все плоскости, параллельные  $\alpha$  и  $\beta$ . Таким образом, все плоскости, которые принадлежат одному трехмерному пространству, пересекаются друг с другом. Только линии пересечения параллельных плоскостей находятся в бесконечности.

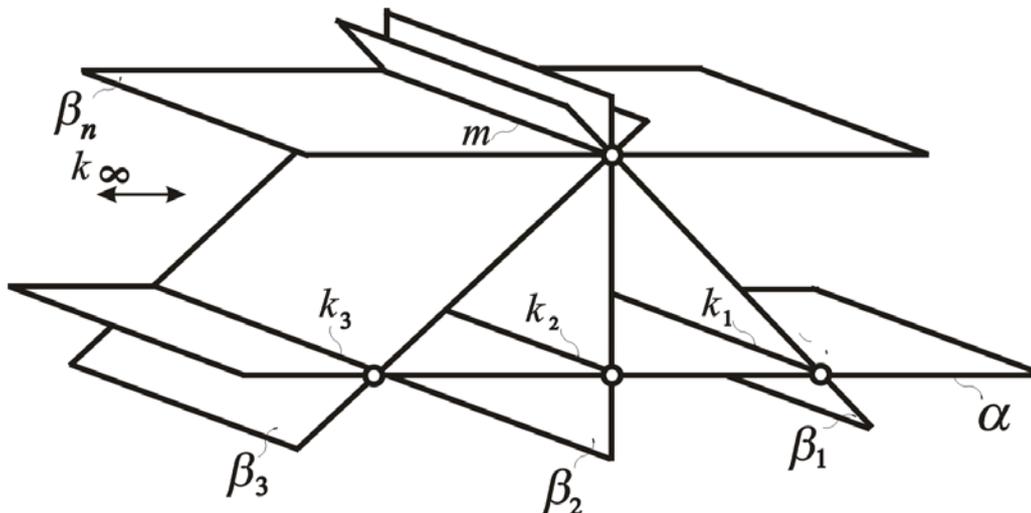


Рис. 10. Выявление бесконечно удаленной прямой плоскости

Символическая запись выявленной ситуации выглядит следующим образом:

$$\begin{aligned}
 R^1 &\supset \text{одна } R^0, \\
 R^2 &\supset \text{одна } R^1, \\
 R^3 &\supset \text{одна } R^2, \\
 &\dots\dots\dots \\
 R^n &\supset \text{одно } R^{n-1}.
 \end{aligned}$$

Она позволяет логически обобщить принадлежность бесконечно удаленных элементов их пространствам. Словесное описание этой символической записи выглядит так:

- прямая, как проективное пространство, содержит одну бесконечно удаленную точку;

- плоскость, как проективное пространство, содержит одну бесконечно удаленную прямую;
- трехмерное проективное пространство содержит одну бесконечно удаленную плоскость.

Обобщая сказанное, дадим определение проективному пространству.

*Проективное геометрическое пространство содержит одно бесконечно удаленное подпространство, размерность которого на единицу меньше размерности самого пространства.*

В существующей литературе бесконечно удаленные элементы еще называют несобственными.

Между пространствами или их элементами существует два типа отношений: позиционные и метрические.

**Позиционные отношения геометрических элементов** возникают тогда, когда они характеризуются без применения чисел, а только с использованием таких терминов, как “принадлежит”, “пересекается”, “объединяется” и т.п. Выявление позиционных характеристик связано с решением позиционных задач, таких, как установление принадлежности элементов пространству или выявление третьего элемента (пространства), который является результатом расположения двух данных элементов (пространств). Например, очень распространенной задачей является установление принадлежности точки к прямой, плоскости или поверхности; линии к плоскости или поверхности. Очень часто встречаются задачи на объединение двух элементов (пространств): через две точки нужно провести прямую, через три точки – плоскость и т.д. Результатом взаимного расположения пространств может быть точка пересечения прямой с плоскостью или поверхностью, а также линия пересечения двух поверхностей и т.п. Целесообразно поделить все позиционные задачи на две группы:

- 1) выявление взаимной принадлежности элемента и пространства;
- 2) определение третьего пространства (элемента) как результата расположения двух данных.

Первая группа задач является наиболее простой и лежит в основе решения второй группы задач. Основными операциями, которые приходится выполнять при решении этих задач, являются пересечение и объединение. Используя символическую запись, данную в табл. 1 можно очень подробно записать решение любой задачи.

**Метрические отношения геометрических элементов** возникают тогда, когда к оценке их взаимного расположения привлекаются числа. Для их выявления решаются такие метрические задачи, как определение расстояния от одного элемента до другого, угла между двумя элементами и натуральной величины плоской фигуры.

Задача освоения приемов работы с геометрическими моделями конкретизируется в решении позиционных и метрических задач (рис. 2). Алго-

ритмы решения указанных задач нашли практическое применение в построении теней (позиционные задачи) и разверток (метрические задачи).

Решение как позиционных, так и метрических задач представляет собой последовательность действий (алгоритм). Эту последовательность целесообразно записывать. Запись может быть текстовая и символическая. Последняя отличается лаконичностью и образностью. В табл. 1 даны условные обозначения элементов пространства и их отношений.

Т а б л и ц а 1

Условные обозначения

Элементы пространства или отношения элементов	Условные обозначения	Примеры
Точки	Прописные буквы латинского алфавита	$A, B, C, \dots$
Линии	Строчные буквы латинского алфавита	$a, b, c, \dots$
Плоскости, поверхности, углы	Строчные буквы греческого алфавита	$\alpha, \beta, \gamma, \dots$
Тождественное совпадение элементов	$\equiv$	$A \equiv B$
Принадлежность одного элемента другому	$\supset, \subset$	$A \subset \alpha, l \supset M$
Пересечение элементов	$\cap$	$m \cap n$
Объединение элементов	$\cup$	$M \cup f$
Непересечение элементов	$\nexists$	$k \nexists r$
Результат операции	$=$	$m \cap n = K$

Геометрические пространства могут иметь различную организацию. Традиционно некоторые из них имеют названия. Множество точек прямой называется **прямолинейным рядом точек**. Точки, заполняющие кривую линию, образуют **криволинейный ряд точек**. Плоскость как множество точек называется **плоским полем точек**, а как множество прямых – **плоским полем прямых**.

Если в плоскости зафиксировать точку, то множество прямых, принадлежащих ей, образует **пучок прямых**. В случае, когда точка зафиксирована в трехмерном пространстве, то множество прямых, проходящих через нее, образует **связку прямых**. Множество плоскостей, принадлежащих фиксированной точке трехмерного пространства, образует **связку плоскостей**. Множество плоскостей, содержащих одну фиксированную прямую, образует **пучок плоскостей**.

## Контрольные вопросы

1. Дать определение геометрическому пространству.
2. Как объяснить относительность геометрического пространства?
3. Почему геометрическое пространство абстрактно?
4. Что такое размерность геометрического пространства?
5. Какое пространство считают проективным?
6. Какие отношения геометрических элементов считают позиционными?
7. Какие отношения геометрических элементов считают метрическими?
8. Что такое прямолинейный ряд точек?
9. Что такое криволинейный ряд точек?
10. Какое множество называют плоским полем точек?
11. Что такое пучок прямых?
12. Какое множество называют пучком плоскостей?
13. Что такое связка прямых?
14. Какое множество называют связкой плоскостей?

## 1.2. Линии

Результатом перемещения точки является линия. В геометрии описано и рассматривается очень большое разнообразие различных линий. Чтобы ориентироваться в этом многообразии эти линии классифицируют.

Общепринятая схема классификации линий представлена на рис. 11.

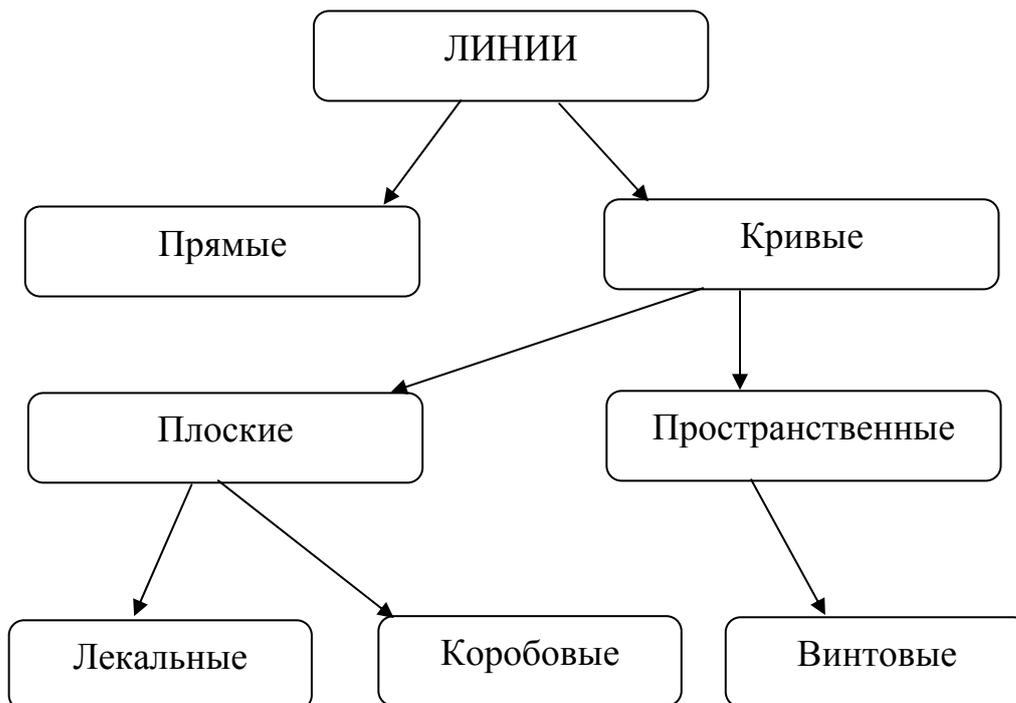


Рис. 11. Схема классификации линий

Основаниями для классификации линий являются следующие положения:

1. Линии делятся в зависимости от способа перемещения точки на прямые и кривые. Прямолинейное перемещение точки образует прямую линию, криволинейное – кривую.

2. В зависимости от того, как точки кривой линии относятся к плоскости, все кривые делятся на плоские и пространственные. Все точки плоских кривых принадлежат одной плоскости. Пространственные кривые имеют с плоскостью только несколько общих точек.

3. Способы изображения разделяют линии на лекальные и коробовы. Лекальные кривые вычерчиваются по точкам с помощью кривой линейки (лекало). Коробовы кривые являются результатом сопряжения дуг окружностей.

Одной из характеристик кривой линии является ее порядок. Геометрически *порядок кривой определяется максимальным количеством точек пересечения с прямой, если кривая плоская, или с плоскостью, если кривая пространственная*. Аналитически порядок кривой соответствует порядку уравнения, которым она описывается.

**Плоские лекальные кривые.** Самыми распространенными плоскими кривыми являются окружность, эллипс, парабола и гипербола, которые называются лекальными кривыми. Учитывая их проективные характеристики, необходимо знать, как эти линии расположены по отношению к несобственной прямой плоскости. Окружность и эллипс не пересекают эту прямую, парабола касается ее, а гипербола пересекает ее в двух точках. Если к несобственной прямой плоскости относиться как к любой другой прямой, то можно утверждать, что названные выше кривые линии принципиально не отличаются друг от друга.

**Эллипс.** *Сумма расстояний от любой точки эллипса до двух фиксированных точек (фокусов  $F_1, F_2$ ) есть величина постоянная*. Наименьшее расстояние между двумя противоположными точками эллипса принято считать малой осью, наибольшее – большой осью. Малая и большая ось взаимно перпендикулярны и, пересекаясь, делят друг друга пополам.

Если даны фокусы эллипса, то построение его точек ( $M, K$ ) показано на рис. 12. Делим расстояние между ними пополам, получаем точку  $O$ . Восстанавливаем перпендикуляр к прямой  $F_1F_2$  и берем на нем произвольную точку  $A$ . При этом отрезок  $AO$  не должен быть больше отрезка  $FO$ . Сумма расстояний от точки  $A$  до точек  $F_1F_2$  определит построение до любой другой точки эллипса. Множество полученных таким образом точек соединяются линейкой, которая называется лекалом.

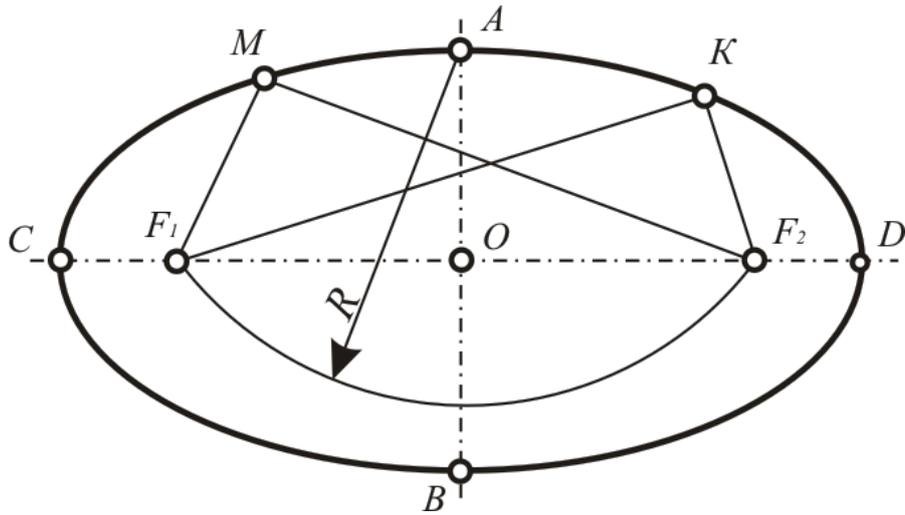


Рис. 12. Построение эллипса с заданными фокусами

Построение эллипса по малой и большой осям представлено на рис. 13. Проводят две concentric окружности. Диаметр одной равен малой оси эллипса, диаметр другой – большой оси. Делят окружности на равные части. В рассмотренном примере – на двенадцать. Через точки деления на малой окружности проводят горизонтальные прямые, через аналогичные точки на большой окружности – вертикальные. Точки пересечения этих прямых принадлежат эллипсу, которые соединяют кривой линейкой (лекалом).

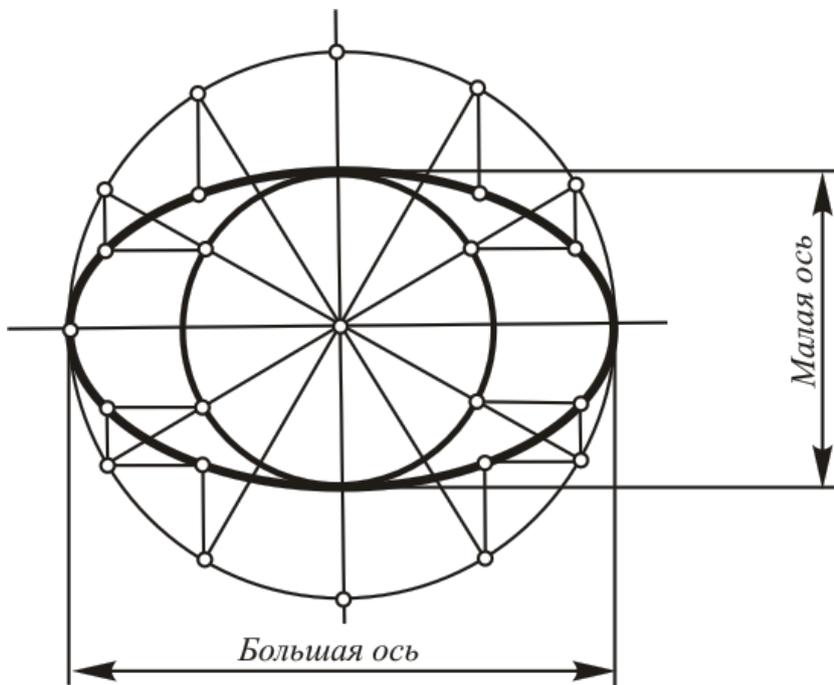


Рис. 13. Эллипс



**Гипербола.** Гиперболой называется плоская кривая линия, у которой разность расстояний от каждой точки до двух фиксированных точек  $F_1$ ,  $F_2$  (фокусов) есть величина постоянная и равная расстоянию между вершинами гиперболы (рис. 16).

Гипербола симметрична относительно двух взаимно перпендикулярных осей. Ось, которая содержит фокусы, называется действительной, другая ось – мнимой. Точка пересечения осей называется центром гиперболы. Прямые, проходящие через центр гиперболы и касающиеся ее в бесконечно удаленных точках, называются асимптотами.

На рис. 16 показано построение точек гиперболы, основанное на приведенном выше определении. В этом случае в качестве исходных элементов даны действительная ось, фокусное расстояние и вершины  $M_1$ ,  $M_2$ .

На действительной оси наносят точки, расстояние между которыми увеличивается по мере удаления от фокуса. Из фокусов проводят дуги радиусом, равным расстоянию от точки 1 до вершины  $M_1$  или  $M_2$ . Точки пересечения этих дуг принадлежат гиперболе.

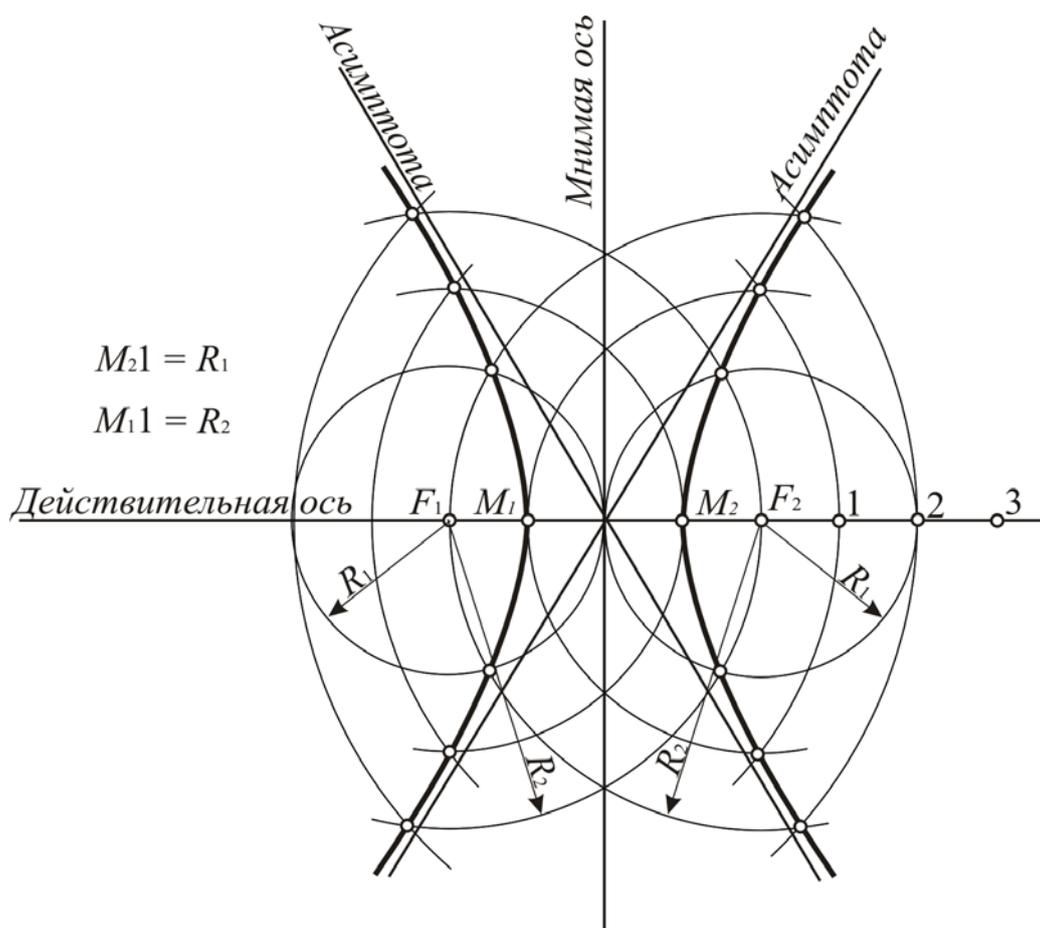


Рис. 16. Построение гиперболы, основанное на свойствах ее точек

Если асимптоты гиперболы взаимно перпендикулярны и являются биссектрисами углов, образованных осями, то для ее построения достаточно иметь эти асимптоты и одну произвольную точку гиперболы. На рис. 17 через произвольную точку  $M$  проведены две взаимно перпендикулярные прямые, которые параллельны асимптотам  $a$  и  $b$ . На вертикальную прямую нанесены произвольные точки: 1, 2, 3, 4, 5... Дальнейшее построение ясно из рис. 17.

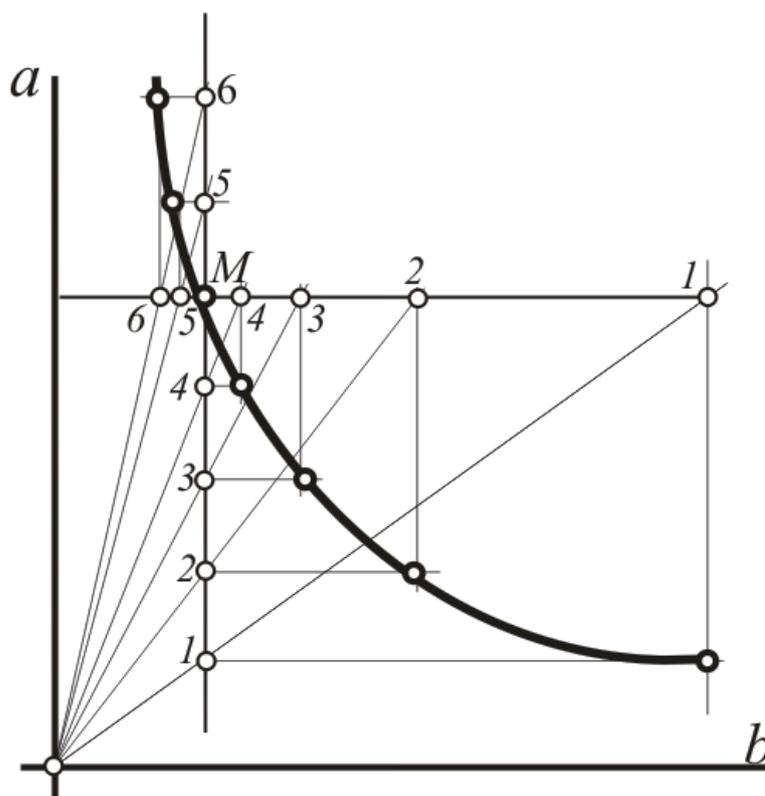


Рис. 17. Построение одной ветви гиперболы по произвольной точке и двум взаимно перпендикулярным асимптотам

Рассмотренные линии эллипс, гипербола, парабола и еще окружность образуют группу линий, которые называются кониками. Такое название они получили потому, что каждую из них можно получить в результате сечения прямого кругового конуса плоскостью.

Если коника задана двумя касательными и тремя точками, что на практике бывает достаточно часто, точки этой кривой строят по алгоритму, представленному на рис. 18. Исходными являются точки  $A$ ,  $B$  и  $C$ , касательные прямые  $m$  и  $n$ , пересекающиеся в точке  $D$ , и прямые  $a$  и  $b$ , которые соединяют точки  $A$  и  $B$  с точкой  $C$ . Последовательность графических построений отмечена цифрами. Первую прямую можно провести через точку  $A$  или точку  $B$  под любым углом. Последующие операции видны на рис. 18.

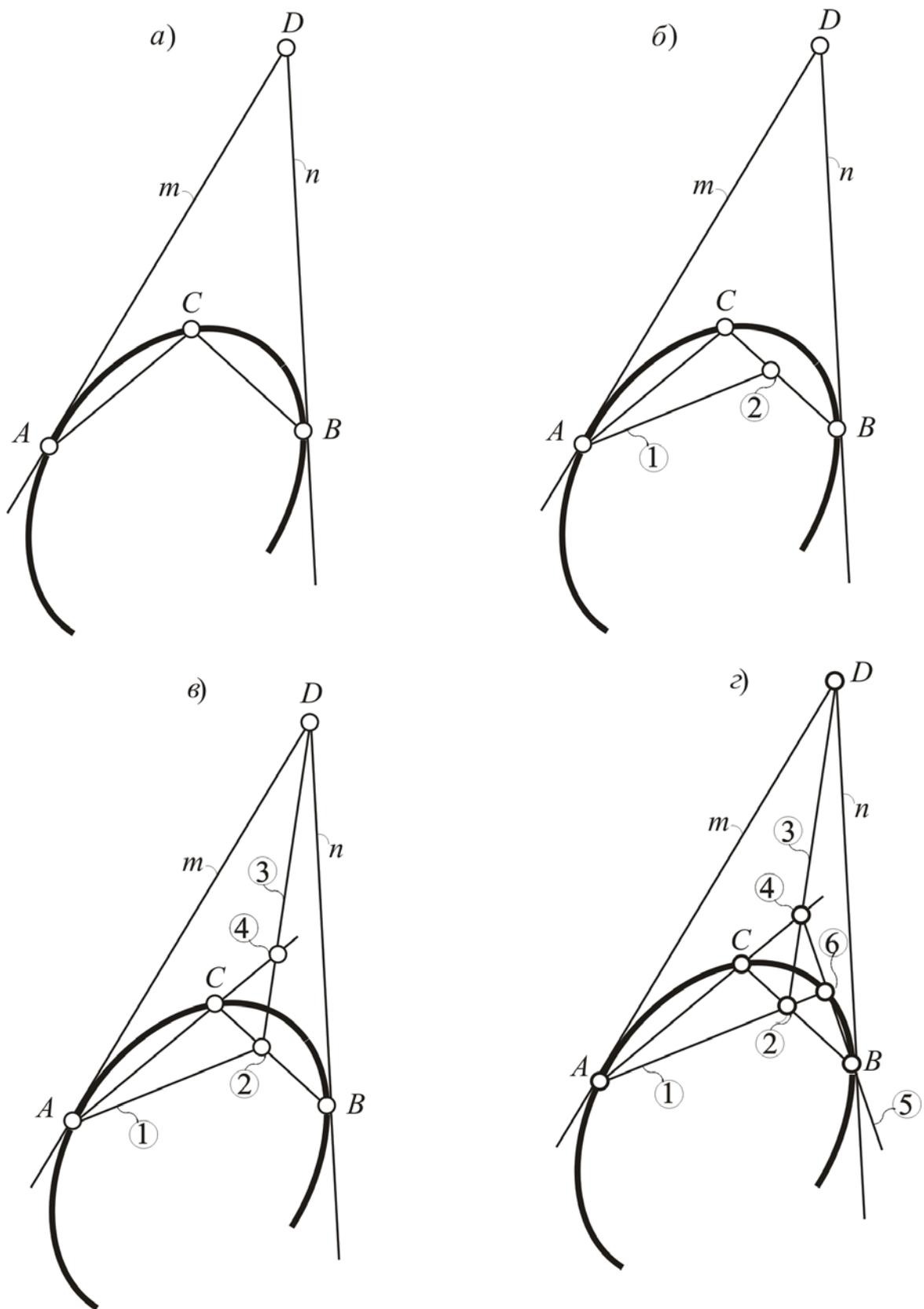


Рис. 18. Построение кривой второго порядка по трем точкам и двум касательным

**Эвольвента.** Эвольвентой называется развертка окружности (лат. *evolventis* – разворачивающийся). Эвольвенту можно представить как конец нити  $N$ , который наматывается на окружность или разматывается с нее (рис. 19).

Для построения эвольвенты окружность делят на несколько равных частей (например на 12). В точках деления проводят касательные к окружности. На двенадцатой касательной от точки 12 откладывают длину окружности, которая равна  $\pi D$  и которую делят также на двенадцать равных частей. На каждой касательной от точки касания откладывают такое количество таких частей, которое соответствует номеру касательной. Например, на касательной, проходящей через точку 10, откладывают 10 частей, на касательной 9 – 9 частей и т.п. Соединив полученные точки с помощью лекала, получим эвольвенту.

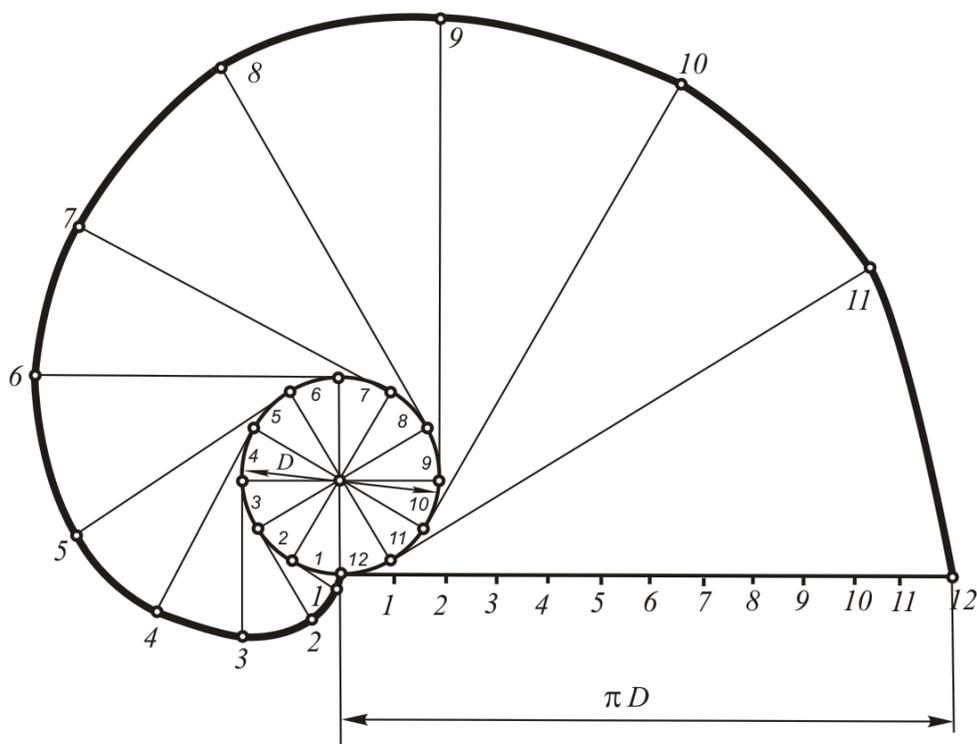


Рис. 19. Построение эвольвенты

**Синусоида.** Синусоидой называется плоская кривая, показывающая изменение тригонометрической функции в зависимости от изменения величины угла  $\alpha$ . Графическое построение синусоиды показано на рис. 20. Окружность произвольного радиуса и делят на равное количество частей (например на 12).

Через полученные точки проводят горизонтальные прямые. На прямой, проходящей через центр, от произвольной точки откладывают отрезок, равный длине изображенной окружности. Этот отрезок делят тоже на 12 равных частей. Через полученные точки проводят вертикальные прямые.

Последовательно соединив точки пересечения горизонтальных и вертикальных прямых плавной линией, получим изображение синусоиды.

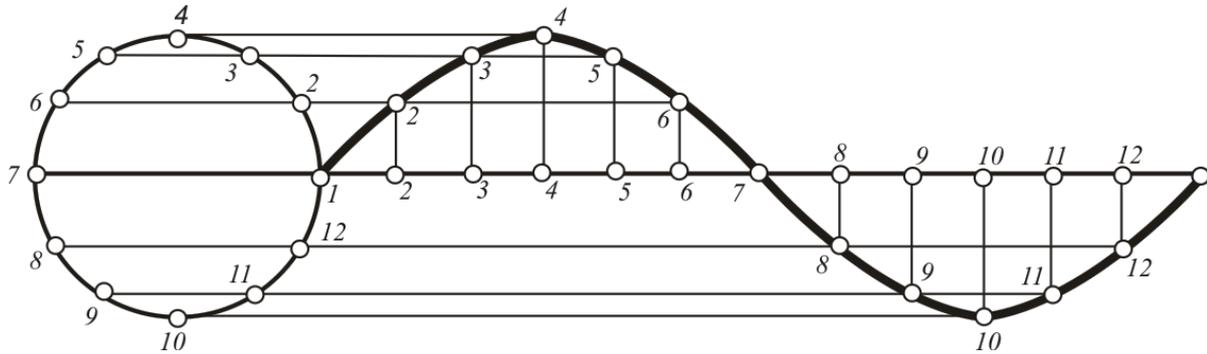


Рис. 20. Построение синусоиды

**Спираль Архимеда.** Спиралью Архимеда называется плоская кривая линия, которую описывает точка, вращающаяся и одновременно удаляющаяся от заданного фиксированного центра (рис. 21).

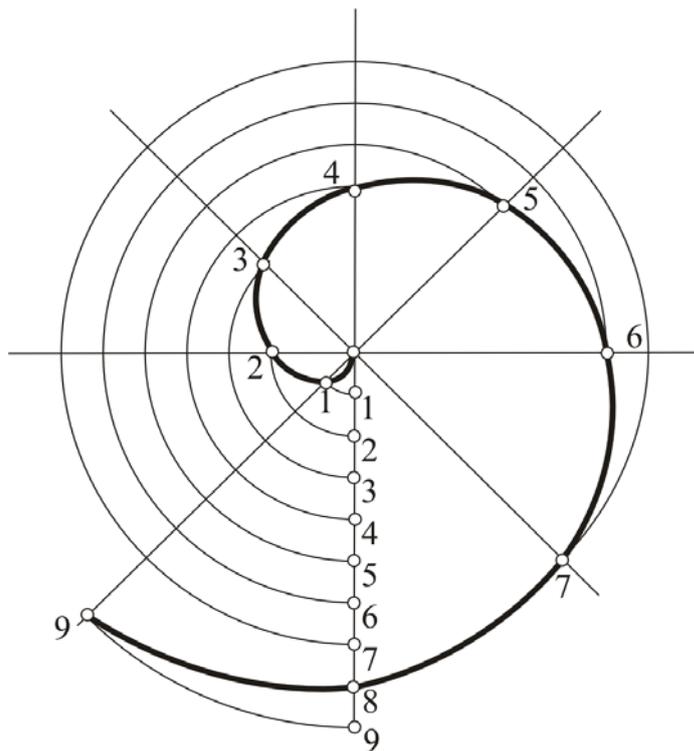


Рис. 21. Построение спирали Архимеда

Для построения спирали Архимеда проводят окружность произвольного радиуса  $R$  и делят ее на равное количество частей. В рассматриваемом примере окружность поделена на 8 частей. Полученные на окружности точки соединяют с центром прямыми. На такое же количество частей делится радиус окружности. Через каждую точку на радиусе проводят кон-

центрические окружности. Последовательно пересекая прямые с окружностями, получаем точки спирали, которые соединяем по лекалу плавной линией.

**Циклоидальные кривые.** Циклоидальными кривыми линиями называются плоские кривые – траектории некоторой точки окружности, которая катится по прямой или по окружности без скольжения.

На рис. 22, 23 и 24 показано построение различных циклоидальных кривых. При перемещении окружности по направляющей прямой линии получится циклоида (рис. 22). Если направляющая является дугой окружности, то траекторией перемещения точки будет эпициклоида (рис. 23) или гипоциклоида (рис. 24), в зависимости от того, как катится окружность: по внешней стороне направляющей дуги или по внутренней.

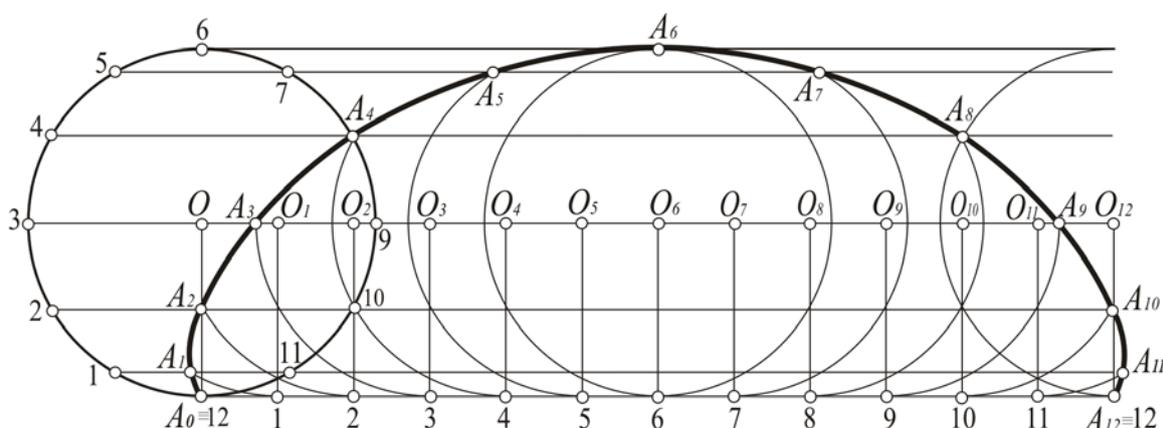


Рис. 22. Построение циклоиды

Для построения точек циклоидальных кривых образующую окружность делят на равное число частей, удобнее – на 12. На направляющей линии откладывают величину, равную длине этой окружности, и делят полученный отрезок или дугу на такое же число равных между собой частей. Через точки на образующей окружности проводят прямые, параллельные направляющей линии (если направляющая является окружностью, то – концентрические ей окружности). Параллельно этим линиям проводят такую же линию через центр образующей окружности и наносят на нее 12 точек, которые являются центрами ее последовательного перемещения. На рис. 22, 23, 24 – это точки  $O_1, O_2, O_3, \dots$ ; с центрами в этих точках проводят окружности, радиус которых равен радиусу направляющей окружности, и пересекают их с соответствующими линиями, проходящими через точки деления направляющей окружности. Полученные точки соединяют по лекалу плавной линией.

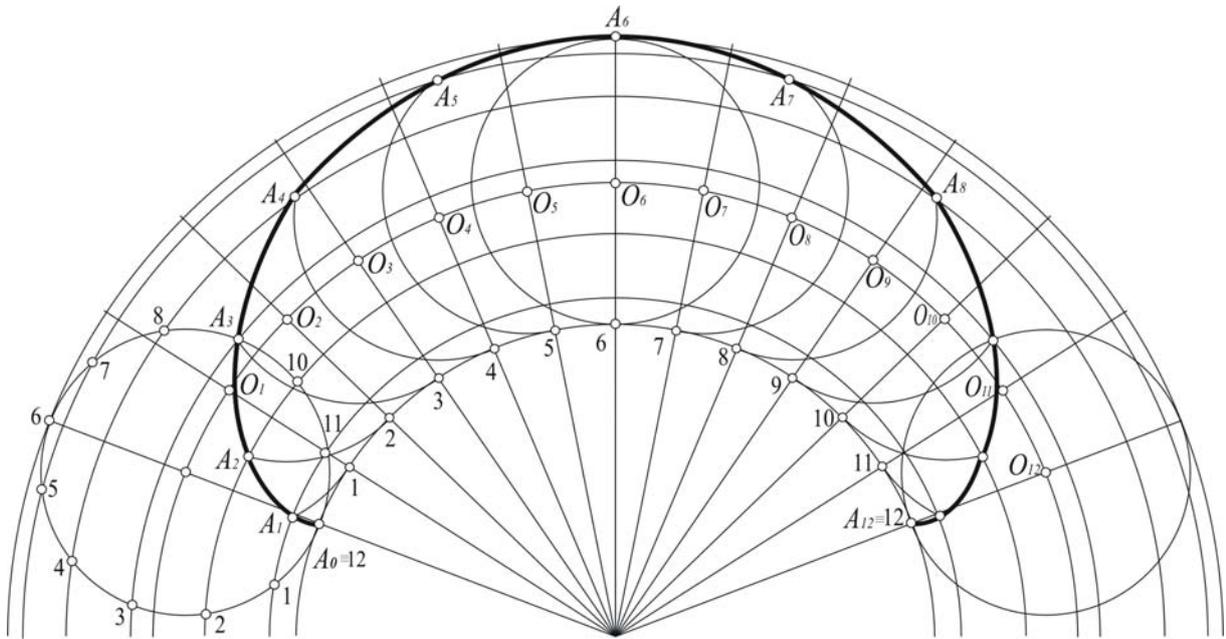


Рис. 23. Построение эпициклоиды

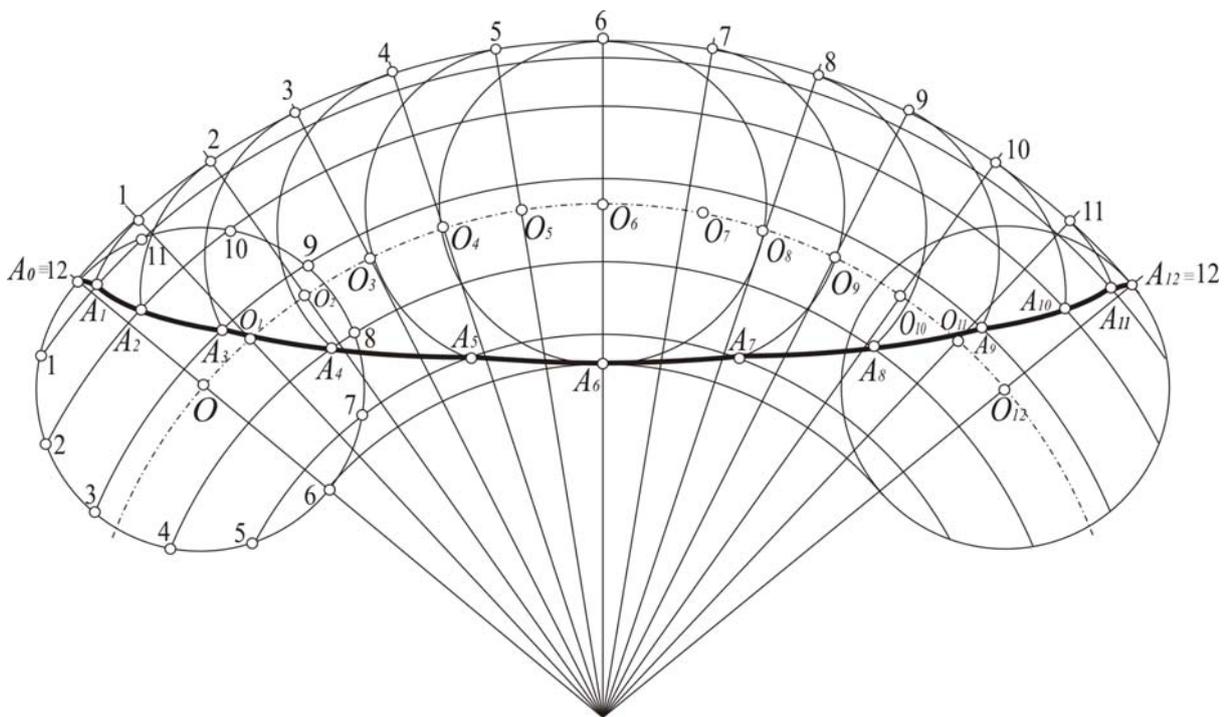


Рис. 24. Построение гипоциклоиды

**Коробовы кривые.** Кроме лекальных кривых в архитектурной и дизайнерской практике широкое распространение получили *коробовы кривые*, которые состоят из сопряженных дуг окружностей различного радиуса.

Рассмотрим некоторые из них. На рис. 25 изображены четырехцентровые овалы с двумя осями симметрии (рис. 25,а) и с одной осью симметрии (рис. 25,б). Овал на рис. 25,а состоит из дуг двух окружностей радиуса  $R_1$ , сопряженных с дугами окружностей радиуса  $R_2$ . Овал на рис. 25,б представляет собой сопряжение дуг трех окружностей радиусов  $R_1$ ,  $R_2$ ,  $R_3$ . Построение этих линий основано на построении касательных окружностей и ясно из рис. 25.

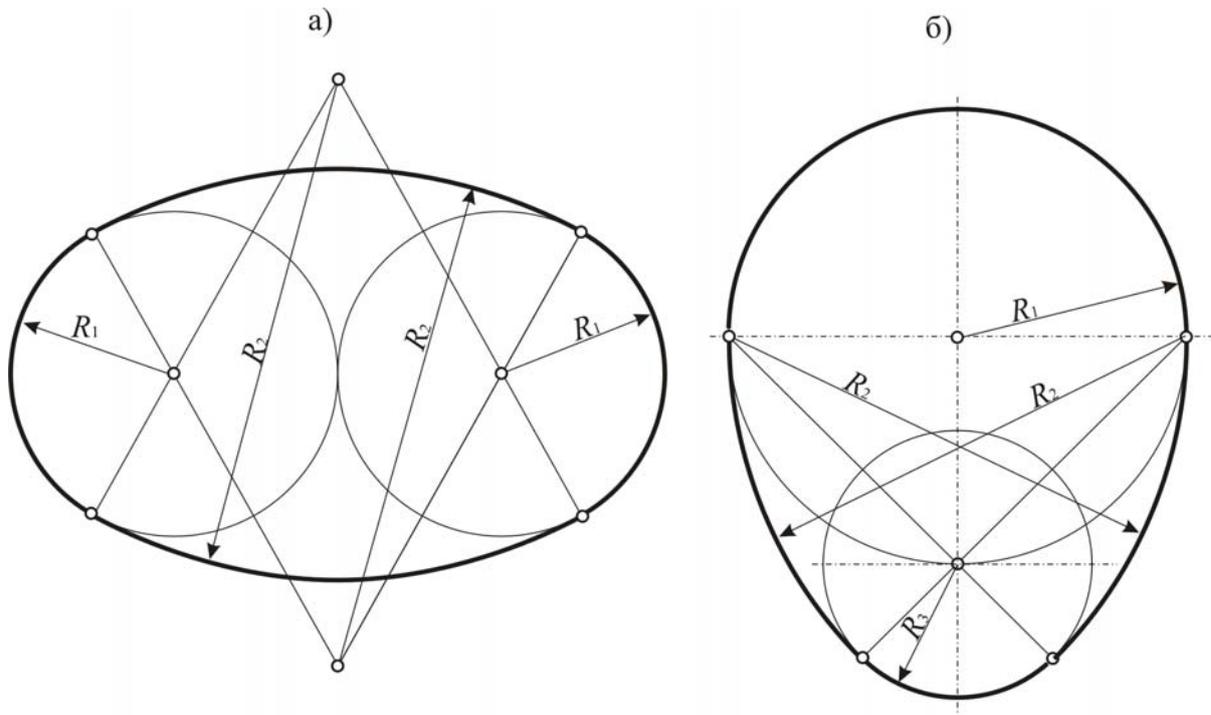


Рис. 25. Построение овалов

С помощью коробовых кривых строят архитектурные обломы. В настоящем курсе рассматриваются только те из них, которые встречаются чаще других. На рис. 26 показано построение архитектурного облома – каннелюры, которую образуют три дуги сопрягающихся окружностей различных радиусов. Исходными являются точки  $A$  и  $B$  на стволе колонны. Отрезок  $AB$  делится пополам, и на каждой половинке, как на диаметре, описывается окружность. Дуги  $AC$  и  $BD$  этих окружностей рисуют часть формы каннелюры. Построение центра окружности, содержащей дугу  $CD$ , ясно из рис. 26. Ее центр определяется пересечением двух одинаковых по величине дуг, величина которых равна трем радиусам окружностей  $AC$  и  $BD$ . Центры этих окружностей располагаются в точках  $A$  и  $B$ .

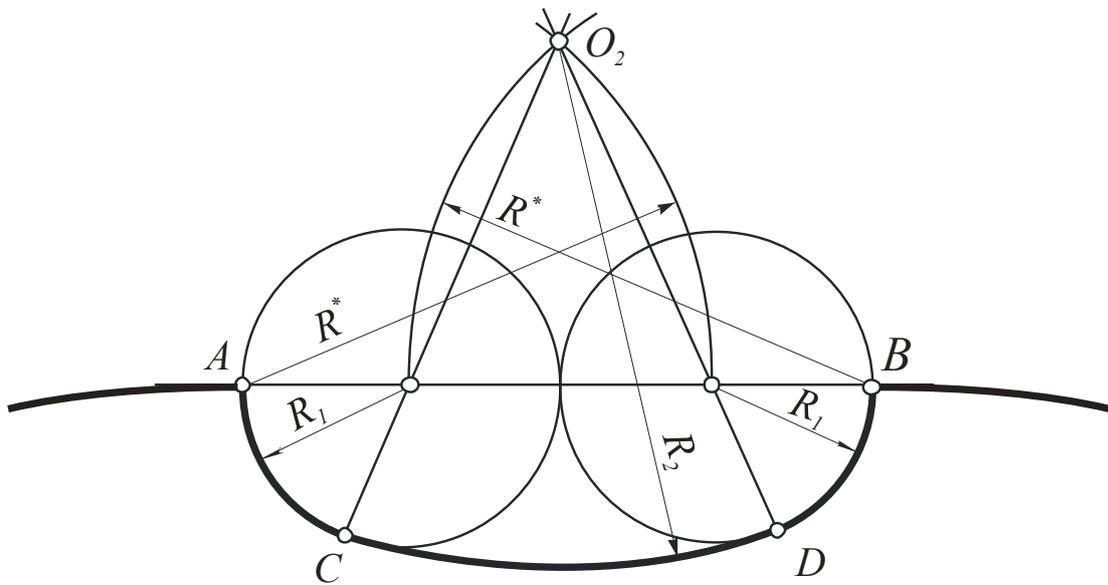


Рис. 26. Построение каннелюры

Приемы построения других архитектурных обломов – гуська и каблучка – представлены на рис 27, 28. В обоих случаях радиусы сопряжения  $R_1$  и  $R_2$  равны друг другу.

Построение двух скоций, образованных двумя и тремя радиусами сопряженных окружностей, показано на рис. 29 и 30. В одном случае исходными являются точки  $A, B, C$ , в другом –  $A, B, C, D$ . Порядок построения ясен из рис. 29 и 30. Он основан на теоремах школьного курса геометрии.

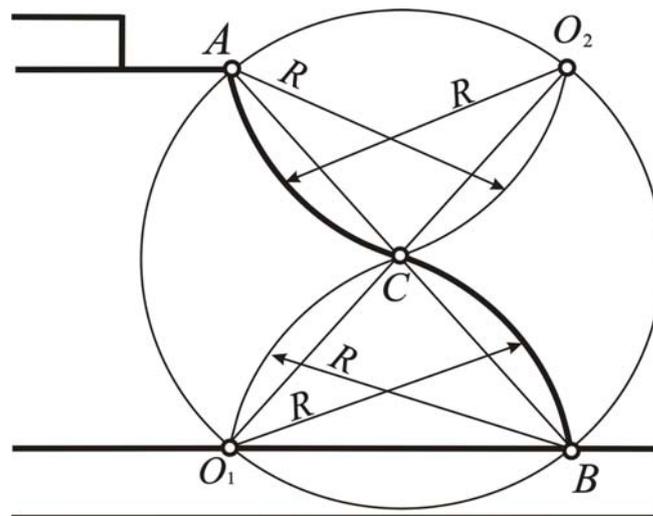


Рис. 27. Построение каблучка

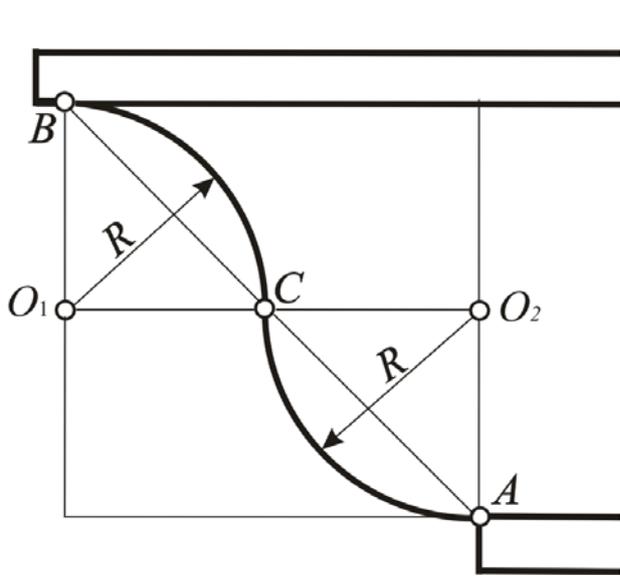


Рис. 28. Построение гуська

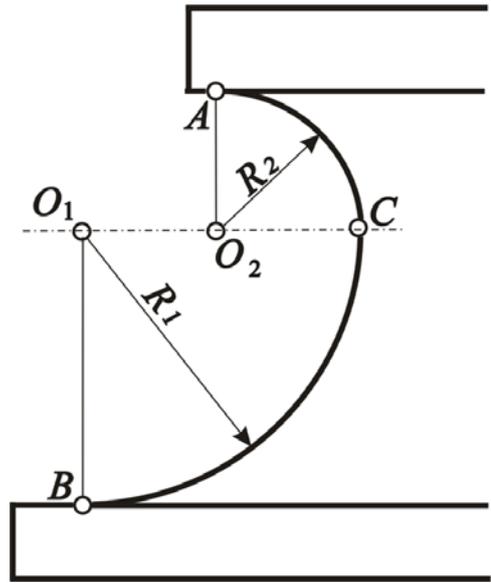


Рис.29. Построение скоции с двумя радиусами сопряжения

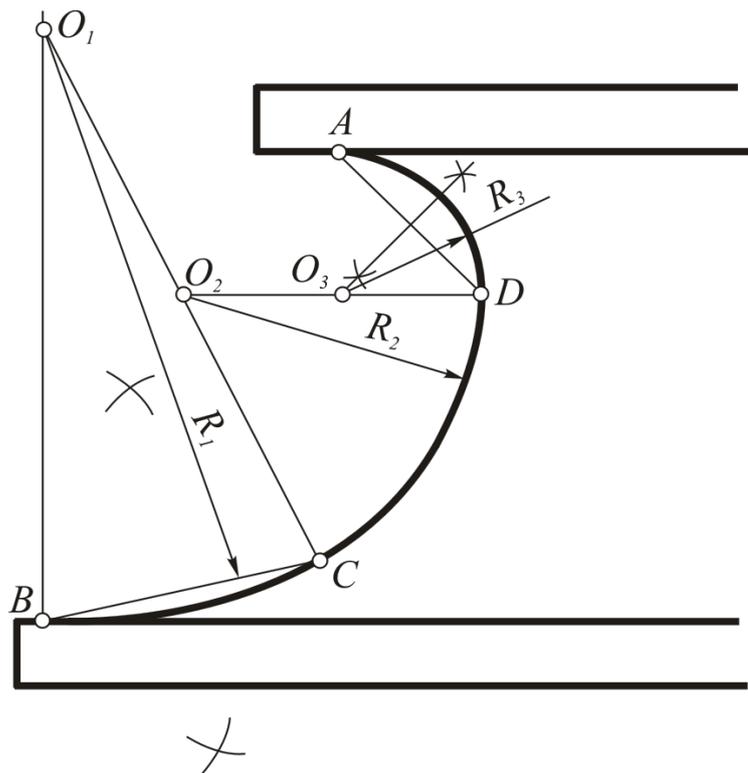


Рис. 30. Построение скоции с тремя радиусами сопряжения

Из всего многообразия **пространственных кривых** линий рассмотрим только те, которые чаще всего встречаются на практике. К ним относятся винтовые линии.

**Винтовая линия** образована в результате одновременного поступательного и вращательного движения точки по поверхности вращения. Если точка движется по цилиндрической поверхности, образуется цилиндрическая винтовая линия (рис. 31,а). В случае, когда точка перемещается по конической поверхности, возникает коническая винтовая линия (рис. 31,б).

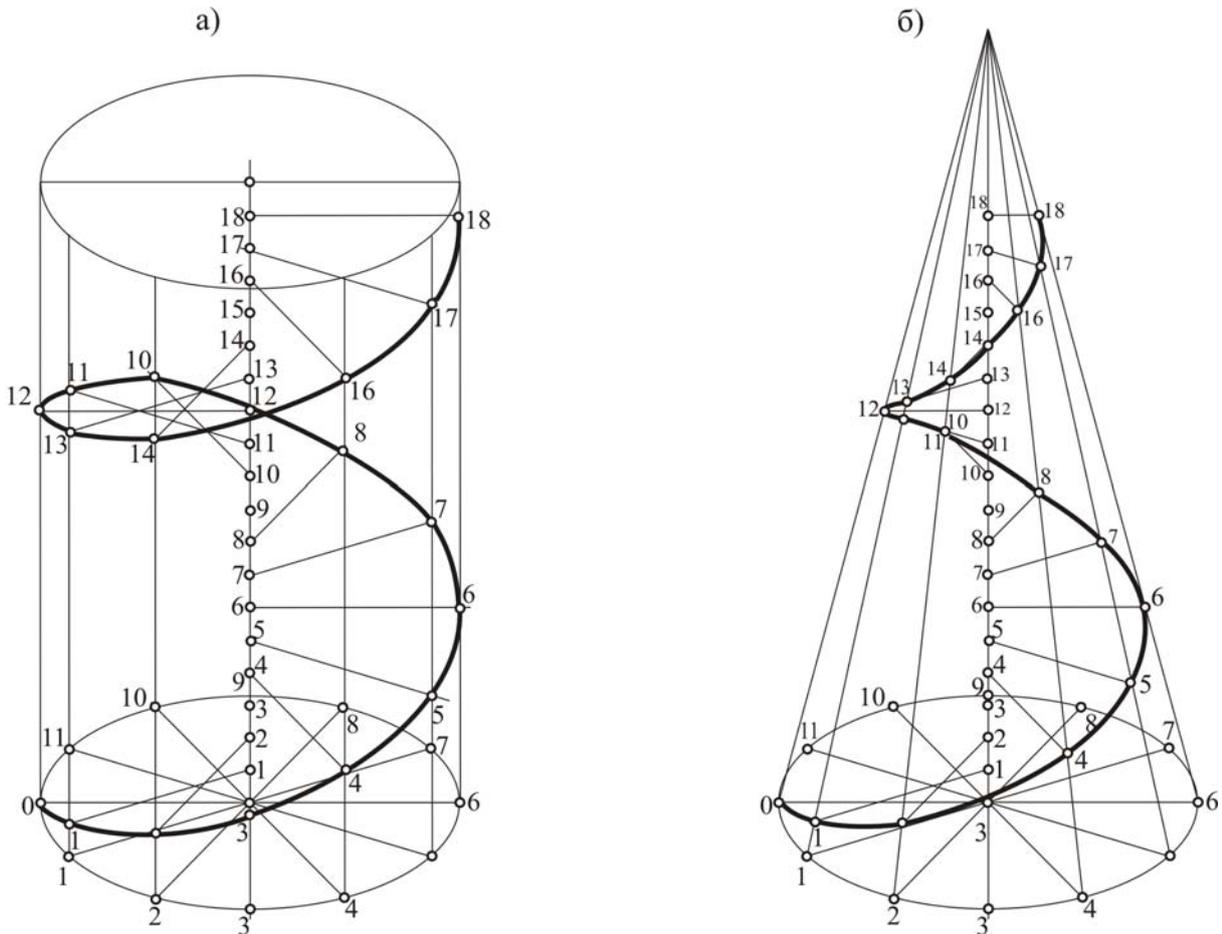


Рис. 31. Образование винтовых линий

Расстояние  $h$ , на которое точка перемещается за один оборот, называется шагом. Траектория точки, пройденная за один шаг, называется витком.

Винтовые линии могут быть как правые, так и левые. Правой линия считается тогда, когда наблюдатель, смотрящий вдоль оси, видит ее закручивающейся при подъеме против часовой стрелки. Если линия при подъеме закручивается по часовой стрелке, то она является левой винтовой линией.

Винтовая линия – кратчайшее расстояние по поверхности между двумя ее точками.

## Контрольные вопросы

1. Каким способом образуются прямые и кривые линии?
2. Что считается порядком кривой?
3. Какие кривые линии называются плоскими?
4. Какие кривые линии считаются пространственными?
5. Дайте определение лекальным кривым.
6. Дайте характеристику эллипсу.
7. Какая линия называется параболой?
8. Что такое гипербола?
9. Воспроизведите алгоритм построения плоских кривых второго порядка.
10. Как образуется эвольвента?
11. Как образуется синусоида?
12. Дать определение циклоидальным кривым.
13. Какие линии называются коробовыми кривыми?
14. Перечислить известные вам коробовы кривые, которые используются для вычерчивания архитектурных деталей.
15. Как образуется винтовая линия?
16. Чем отличается коническая винтовая линия от цилиндрической?

## 1.3. Поверхности

Особую группу геометрических множеств составляют поверхности. Самым распространенным способом образования поверхностей является кинематический. Сущность его сводится к следующему. Выделяется некоторая линия, которая, перемещаясь по заранее заданному закону, образует поверхность.

Наиболее распространенной является классификация, которая представлена в виде схемы на рис. 32. Деление поверхностей на линейчатые и нелинейчатые основывается на возможности или невозможности выделения на ней прямой линии. Поверхности, на которых можно выделить прямую линию, называются **линейчатыми**. Если на поверхности невозможно выделить прямую линию, поверхность называется **нелинейчатой**.

Способы образования поверхностей являются основанием для деления их на поверхности вращения и перемещения по направляющим. На схеме видно, что линейчатые и нелинейчатые поверхности могут быть образованы как вращением, так и другими способами.

Одной из важных характеристик поверхностей является их порядок. **Порядком поверхности** считается максимальное количество ее точек, общих с прямой, что соответствует порядку алгебраического уравнения, описывающего эту поверхность. Из всех рассмотренных выше поверхностей второй порядок имели цилиндрическая, коническая, призматическая, пирамидальная, а также сфера, эллипсоид, параболоид и гиперболоид. Остальные поверхности имели более высокий порядок.



Рис. 32. Классификация поверхностей

Рассмотрим образование наиболее распространенных геометрических поверхностей. Зафиксируем в трехмерном пространстве точку  $T$  и некоторую кривую линию  $f$  (рис. 33,а). Проведем через точку  $T$  прямую  $l$ , которая пересекает линию  $f$ . Прямая  $l$ , перемещаясь в пространстве таким образом, что она скользит по линии  $f$  и проходит через точку  $T$ , образует **коническую** поверхность. Прямая  $l$  называется *образующей*, точка  $T$  – *вершиной*, кривая  $f$  – *направляющей*.

В зависимости от характера направляющей и расположения вершины возникают следующие поверхности (табл. 2):

- **коническая** – вершина  $T$  на конечном расстоянии, направляющая  $f$  – кривая (рис. 33,б);
- **цилиндрическая** – вершина  $T$  бесконечно удалена, направляющая  $f$  – кривая (рис. 33,б);
- **пирамидальная** – вершина  $T$  – на конечном расстоянии, направляющая  $f$  – ломаная (рис. 33,в);
- **призматическая** – вершина  $T$  бесконечно удалена, направляющая  $f$  – ломаная (рис. 33,г).

Т а б л и ц а 2

Класс конических поверхностей

Название поверхности	Расположение вершины	Вид направляющей	Вид образующей
Собственно коническая поверхность	На конечном расстоянии	Кривая линия	Прямая линия
Цилиндрическая поверхность	В бесконечности		
Пирамидальная поверхность	На конечном расстоянии	Ломаная линия, состоящая из прямых отрезков	
Призматическая поверхность	В бесконечности		

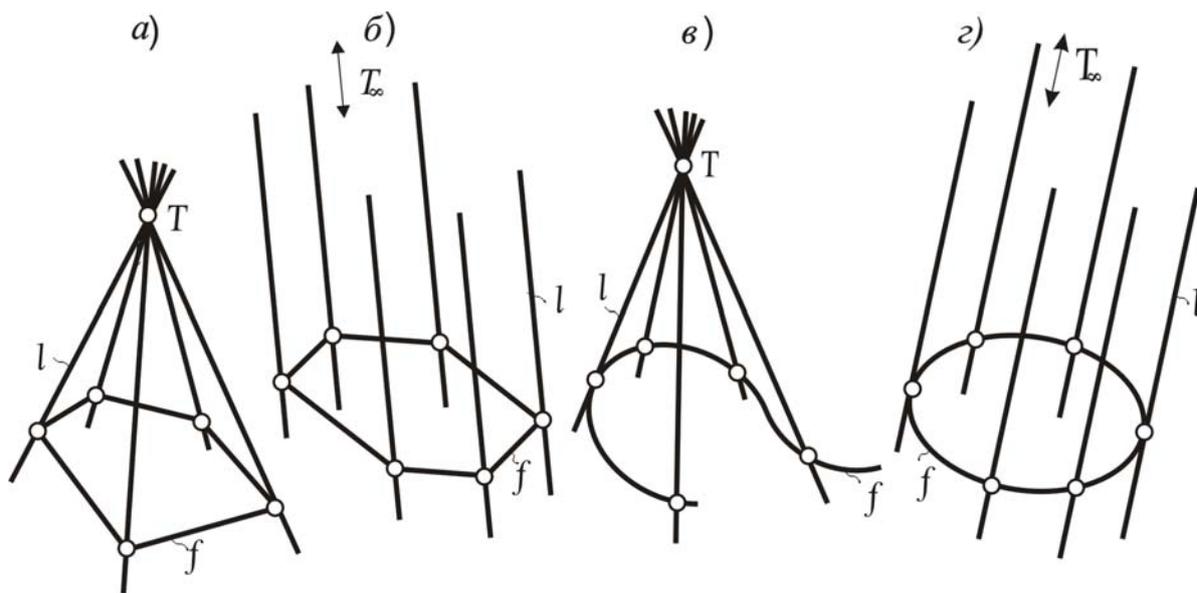


Рис. 33. Образование класса конических поверхностей

Поверхности могут быть образованы вращением образующей вокруг оси  $i$ . Так возникают коническая (рис. 34,а) и цилиндрическая поверхности вращения (рис. 34,б).

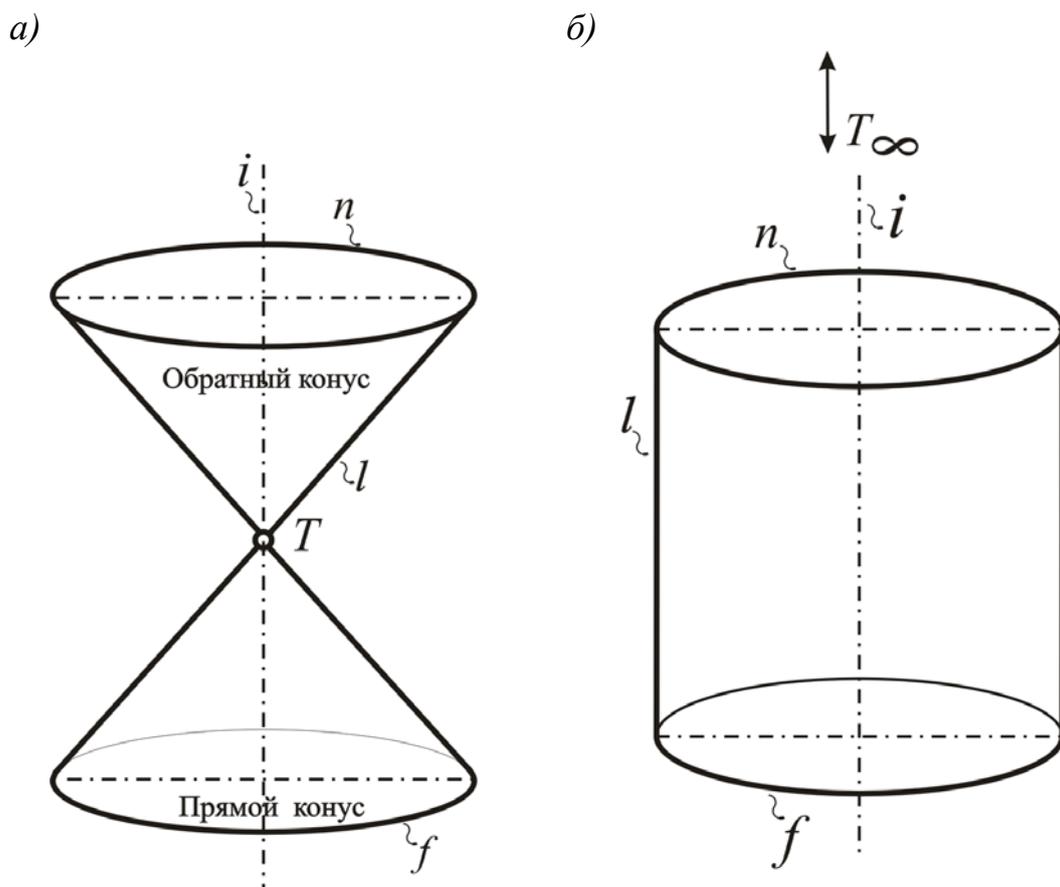


Рис. 34. Образование поверхностей вращения (коническая, цилиндрическая)

Вместо прямой вокруг оси может вращаться и другая линия, например окружность или эллипс. При вращении окружности вокруг оси, совпадающей с одним из ее диаметров, образуется сфера (рис. 35,а). Если ось вращения лежит в плоскости окружности, но не проходит через ее центр, возникает тор (рис. 35,б,в,г). В зависимости от взаимного расположения оси по отношению к центру образующей окружности возникают две разновидности тора:

- 1) открытый – окружность не пересекается с осью (рис. 35,б);
- 2) закрытый – ось касается или пересекает окружность (рис. 35,в,г).

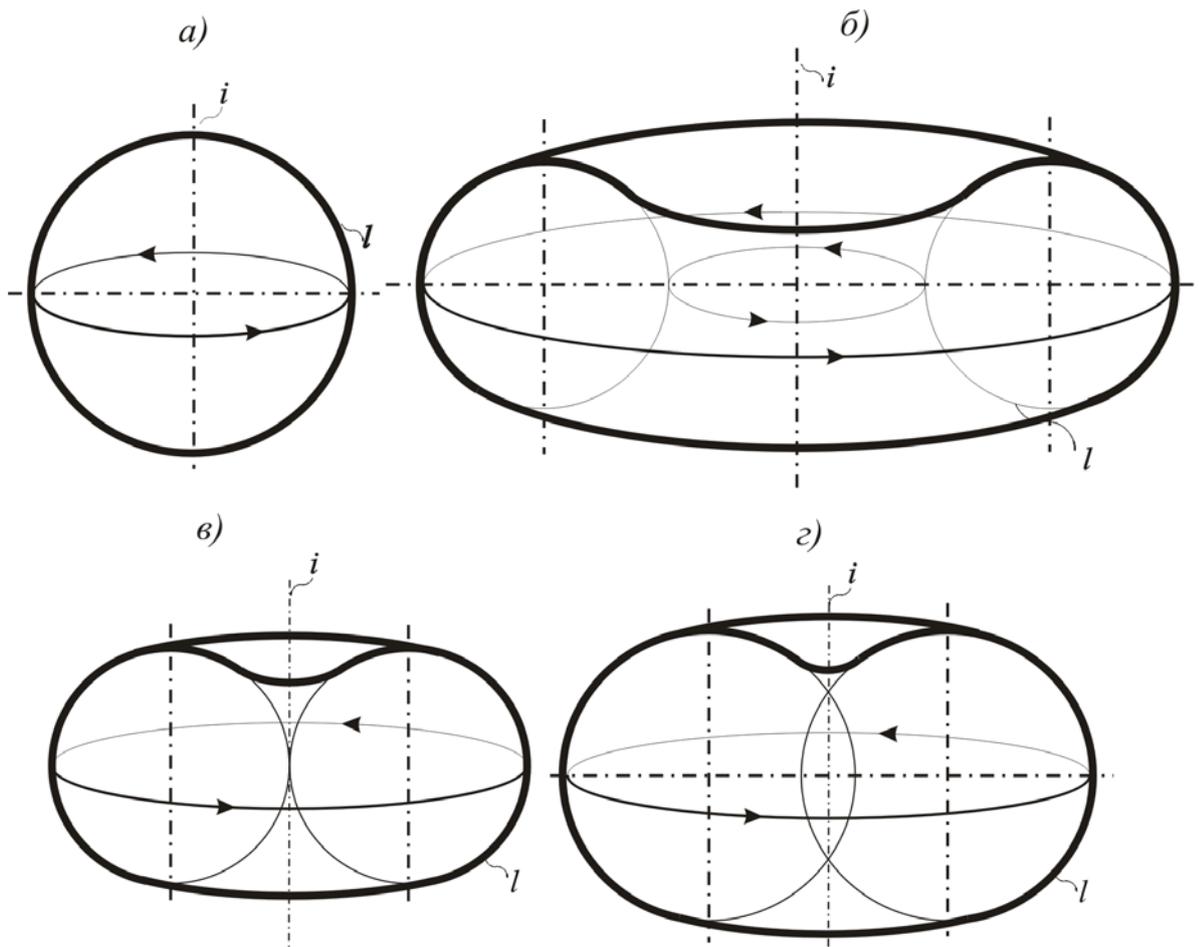


Рис. 35. Образование сферы и тора (открытого и закрытого)

Вокруг оси  $i$  могут вращаться гипербола, парабола или эллипс (рис. 36). При условии, что ось вращения тождественно совпадает с осью этих кривых линий, образуются соответственно гиперболоид (рис. 36, а, б), параболоид (рис. 36,в) или эллипсоид (рис. 36,г). При совмещении оси  $i$  с мнимой осью гиперболы возникает однополостной гиперболоид вращения (рис. 36,а). Если ось  $i$  совпадает с действительной осью гиперболы, образуется двуполостной гиперболоид.

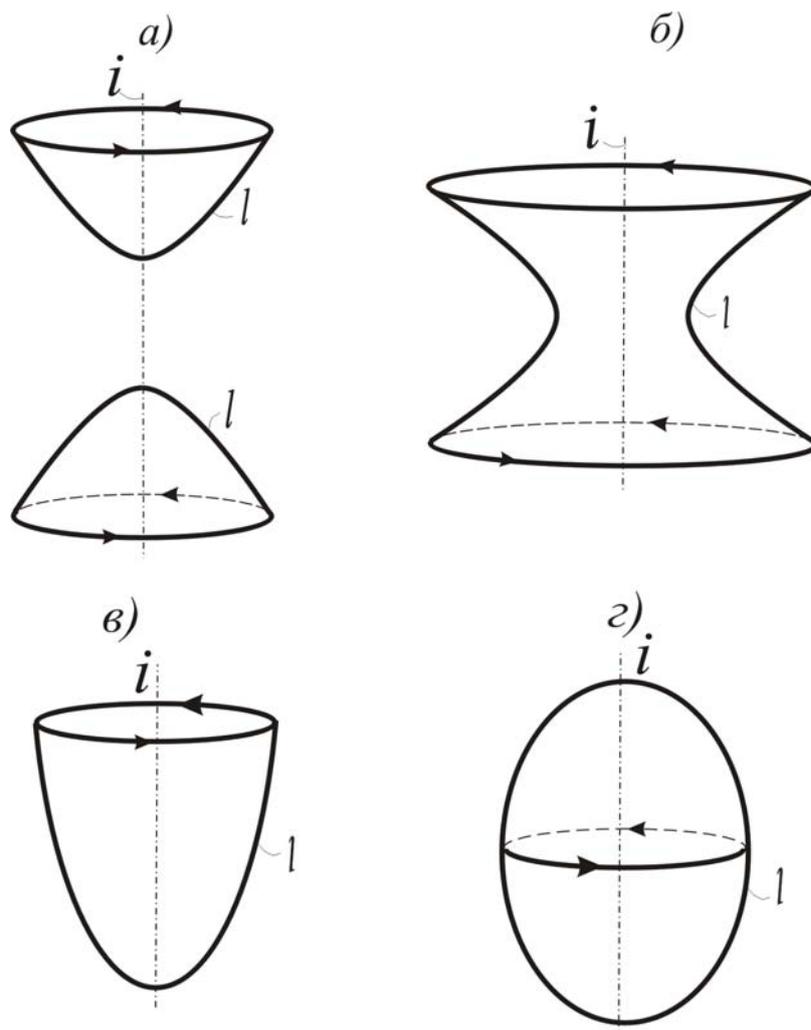


Рис. 36. Образование гиперboloидов, параболоида и эллипсоида

В качестве направляющих для движения прямолинейной образующей могут быть выбраны две линии: одна – прямая, другая – винтовая. В этом случае образуется винтовая поверхность, которая называется **геликоидом** (рис. 37). Широкое распространение получили прямой и наклонный геликоиды.

**Прямой геликоид** возникает при движении образующей, которая перпендикулярна к оси  $i$ , вращаясь вокруг нее, смещается по высоте на расстояние, пропорциональное углу поворота (рис. 37,а).

**Наклонный (архимедов) геликоид** отличается от прямого тем, что образующие пересекают ось под некоторым углом. При своем движении образующие геликоида остаются параллельными образующим конуса с тем же углом наклона (рис. 37,б).

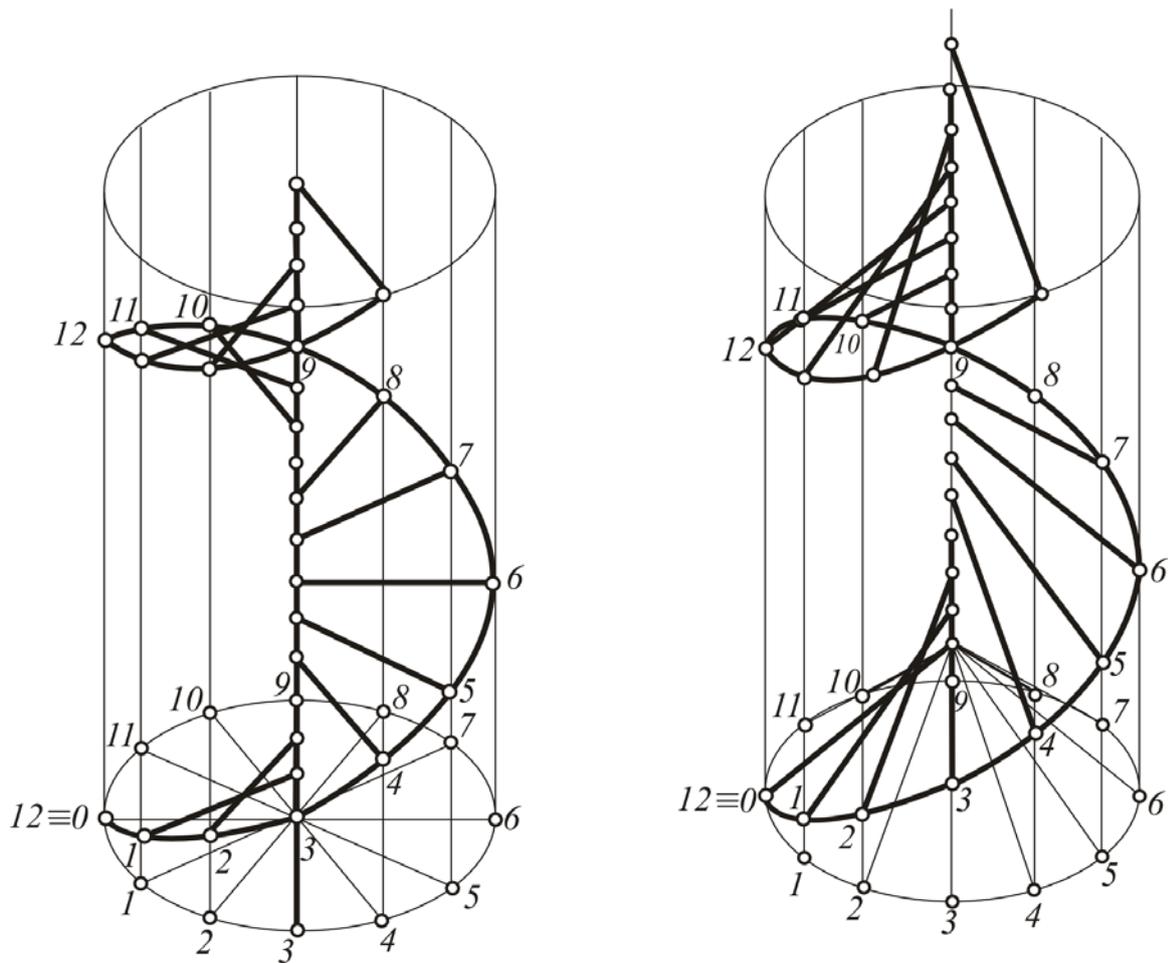


Рис. 37. Образование прямого и наклонного геликоидов

**Циклической поверхностью** называется такая поверхность, которая образована произвольным движением окружности постоянного (рис. 38, б) или переменного (рис. 38, а) радиуса. Из определения следует, что направляющей циклической поверхности может быть любая кривая линия и угол между ней и плоскостью образующей окружности может быть также любым. В случае, когда этот угол прямой, образуется трубчатая поверхность постоянного или переменного радиуса.

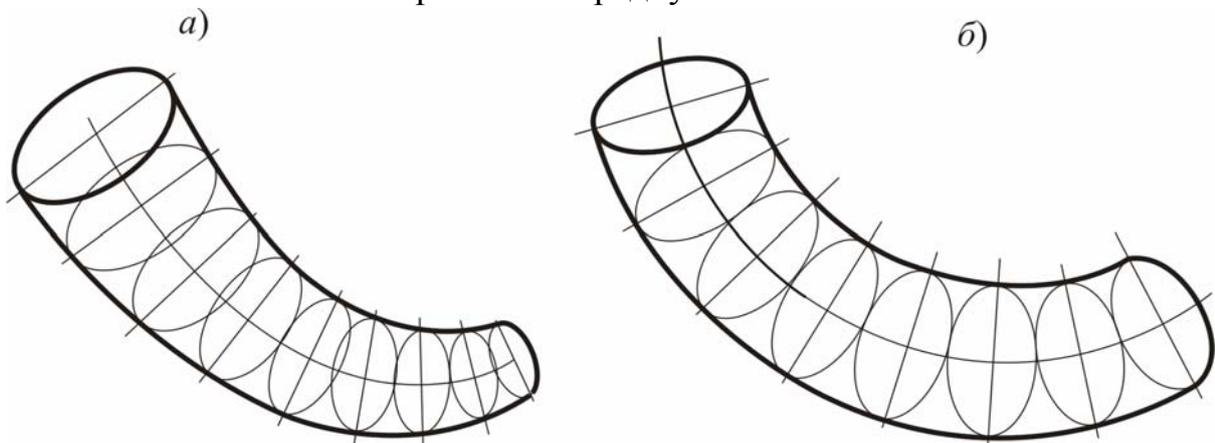


Рис. 38. Образование циклической поверхности

## Контрольные вопросы

1. Охарактеризовать способ образования поверхностей.
2. Что называется образующей поверхности?
3. Какая линия играет роль направляющей?
4. Что такое вершина поверхности?
5. Какие поверхности называются линейчатыми?
6. Какие поверхности называются нелинейчатыми?
7. Что такое порядок поверхности?
8. Какие поверхности называются поверхностями вращения? Привести примеры.
9. Как образуются поверхности, принадлежащие к классу конических? Перечислить эти поверхности.
10. Как образуется прямой геликоид?
11. Как образуется наклонный геликоид?
12. Как образуется циклическая поверхность?

## 2. ЗАКОНОМЕРНОСТЬ ПОСТРОЕНИЯ ПЛОСКИХ ИЗОБРАЖЕНИИ ТРЕХМЕРНЫХ ОБЪЕКТОВ

Возникновение плоского изображения трехмерного объекта подчиняется **закономерности**, которая определяется двумя составляющими:

- структурой проекционного аппарата,
- алгоритмом его работы.

Рассмотрим подробно эти составляющие.

### 2.1. Структура проекционного аппарата

Проекционным аппаратом принято считать устройство, с помощью которого возникают изображения [7]. Посмотрим с точки зрения геометрии, как возникает изображение в реально существующих проекционных аппаратах, таких, как глаз человека, фотоаппарат, кинопроектор и т.п. Все они содержат некоторое устройство (хрусталик, объектив), которое собирает лучи в точку, и все они имеют некоторую плоскость (или поверхность), на которой возникает изображение (рис. 39).

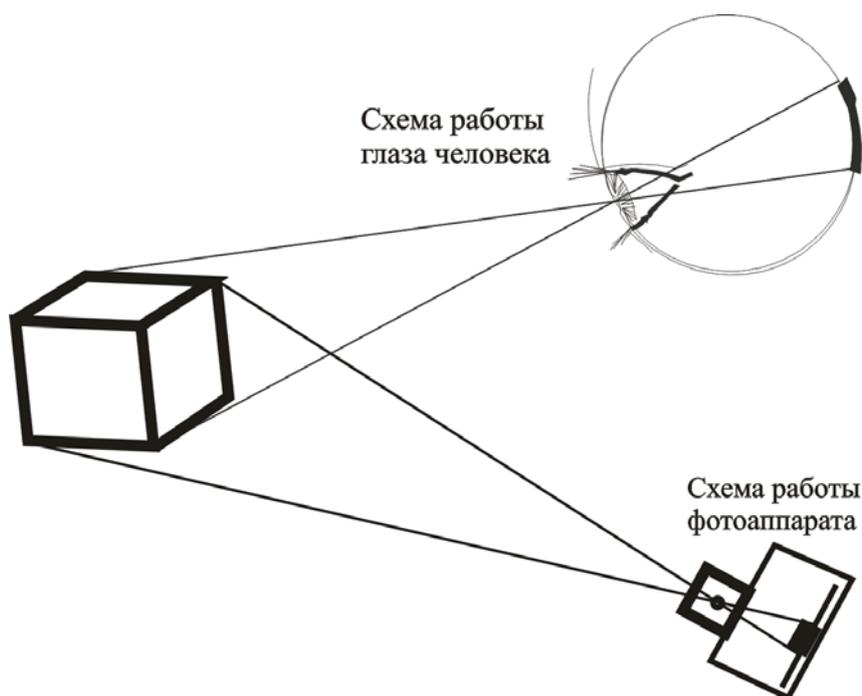


Рис. 39. Схема работы проекционных аппаратов

Если отвлечься от конкретного устройства объектива, хрусталика и поверхности, получим **структуру геометрического проекционного аппарата**, которую составляют точка  $S$  и плоскость (или поверхность)  $\pi$  (рис. 40).

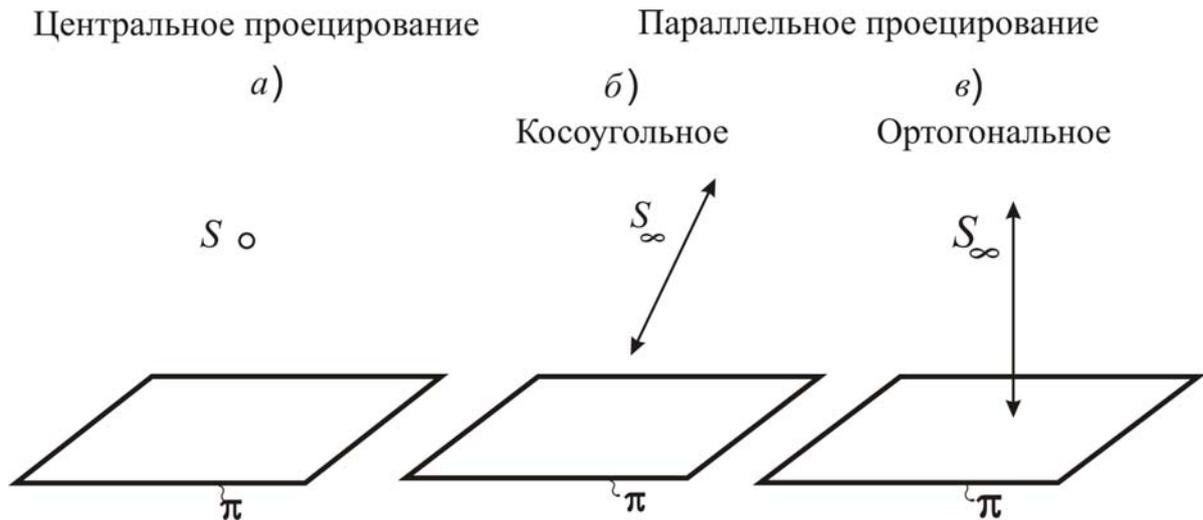


Рис. 40. Структура проекционных аппаратов

Точка  $S$  называется **центром проецирования**, плоскость (или поверхность)  $\pi$  – **картиной**. В дальнейшем чаще всего будет использоваться плоская картина.

В зависимости от взаимного расположения центра  $S$  по отношению к картине  $\pi$  выделяют два вида проецирования: **центральное** (рис. 40,а) и **параллельное** (рис. 40,б,в). При параллельном проецировании центр  $S$  бесконечно удален. Направление, в котором он удален по отношению к картине, может быть различным. Если направление удаления центра  $S$  составляет с картиной угол, не равный девяноста градусам, то проецирование называется **косоугольным** (рис. 40,б). Если же центр  $S$  удален в бесконечность в направлении, перпендикулярном картине, проецирование называется **ортогональным** (рис. 40,в).

Традиционно процесс работы алгоритма называется **проецированием**, а плоское изображение – **проекцией**.

## 2.2. Алгоритм работы проекционного аппарата

Для того чтобы построить плоское изображение, необходимо использовать следующий алгоритм (рис. 41):

1. Объединить исходный объект с центром проецирования. В результате получим проецирующий объект.
2. Пересечь проецирующий объект с картиной и получить плоское изображение исходного объекта.

В качестве проецирующих объектов в примерах на рис. 41 возникают пирамида и цилиндр.

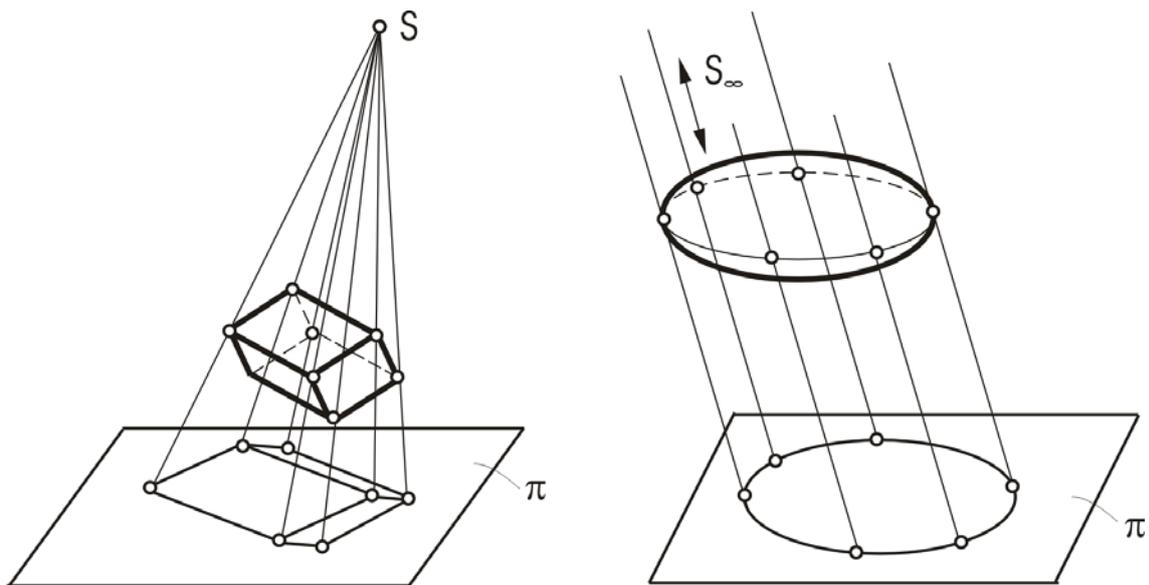


Рис. 41. Примеры работы алгоритма при построении плоских изображений трехмерных объектов

Таким образом, чтобы построить плоское изображение трехмерного объекта, необходим проекционный аппарат, который, создавая плоские изображения, работает по рассмотренному выше алгоритму. Это происходит всегда, поэтому можно считать закономерностью в возникновении плоских изображений трехмерных объектов.

### 2.3. Инварианты проецирования

Очевидно, что какие-то элементы исходных объектов видоизменяются в проекциях, другие – сохраняются, то есть остаются инвариантными [5, 6].

**Первый инвариант проецирования.** Если проецировать точку исходного пространства, то проецирующим образом оказывается прямая, которая пересекается с картиной тоже в точке (рис. 42). Таким образом, *проекцией точки является точка*.

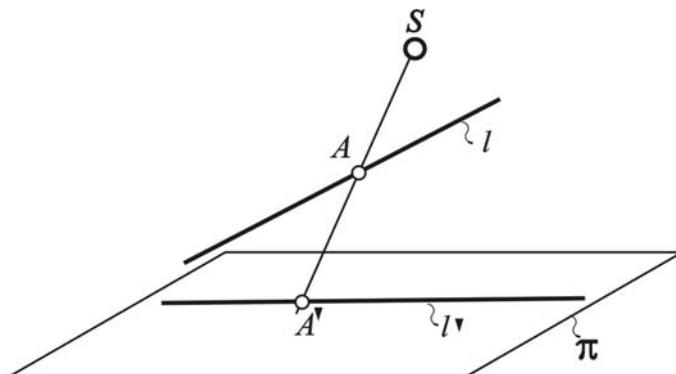


Рис. 42. Первый инвариант проецирования

**Второй инвариант.** Проекцией прямой в общем случае является *прямая*, так как проецирующим образом здесь оказывается плоскость, которая пересекает картину по прямой (рис. 43). Исключение составляют только прямые, проходящие через центр проецирования. Они изображаются точкой (рис. 44).

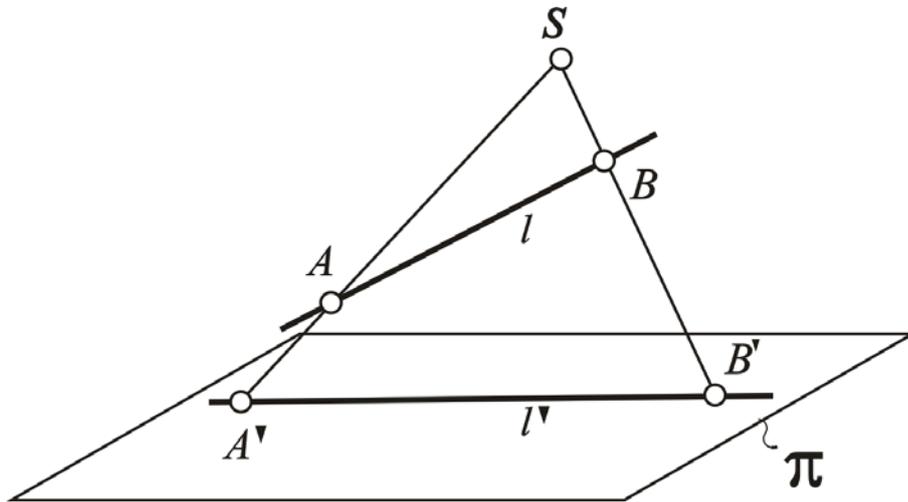


Рис. 43. Второй инвариант проецирования

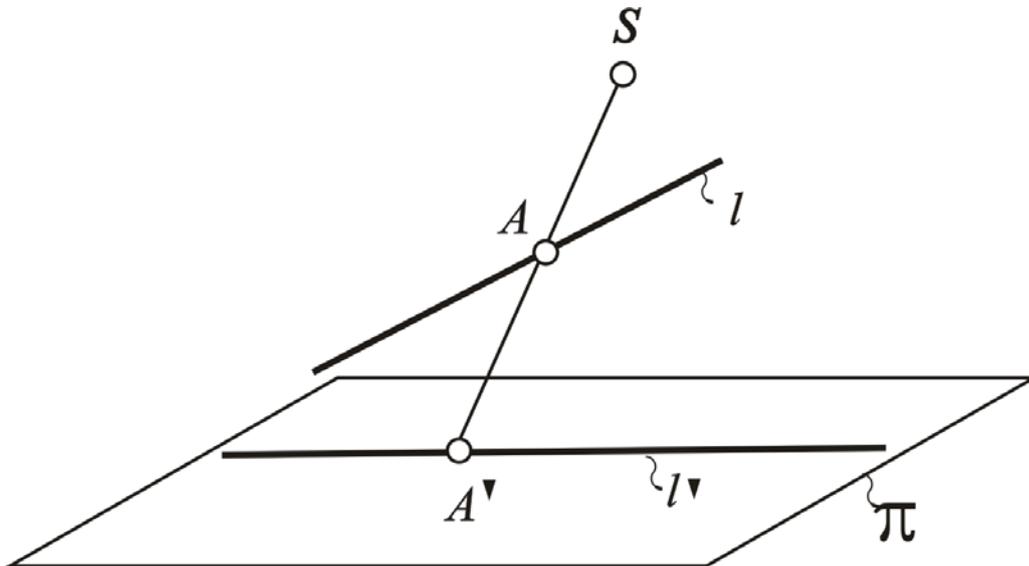


Рис. 44. Третий инвариант проецирования

**Третий инвариант.** Проецирование сохраняет взаимную принадлежность элементов друг другу. Рассмотрим пример со взаимной принадлежностью точки и прямой (см. рис. 44). Знания школьного курса геометрии делает это очевидным.

Перечисленные три инварианта относятся как к центральному, так и к параллельному проецированию. При параллельном проецировании возникают еще два инварианта.

**Четвертый инвариант.** *Параллельное проецирование сохраняет параллельность элементов друг другу.* Например, возьмем две параллельные прямые  $m$  и  $n$ . Вместе с центром проецирования они образуют две параллельные проецирующие плоскости  $\alpha = m \cup S$  и  $\beta = n \cup S$ , которые пересекаются с картиной  $\pi$  по двум параллельным прямым (рис. 45).

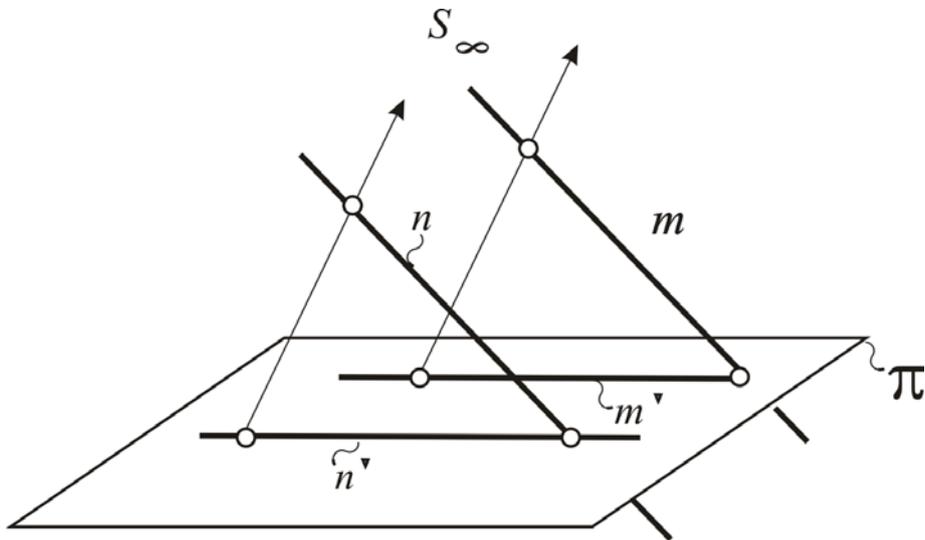


Рис. 45. Четвертый инвариант проецирования

**Пятый инвариант.** *При параллельном проецировании сохраняется пропорциональность.* Это легко доказать на примере проецирования прямой  $l$ , содержащей отрезок  $AB$ . Продолжим эту прямую до пересечения с картиной  $\pi$  (рис. 46). Получаем две пересекающиеся прямые, одна из которых исходная, другая – ее проекция. Проецирующие лучи делят их в одном и том же отношении (теорема Фаллеса).

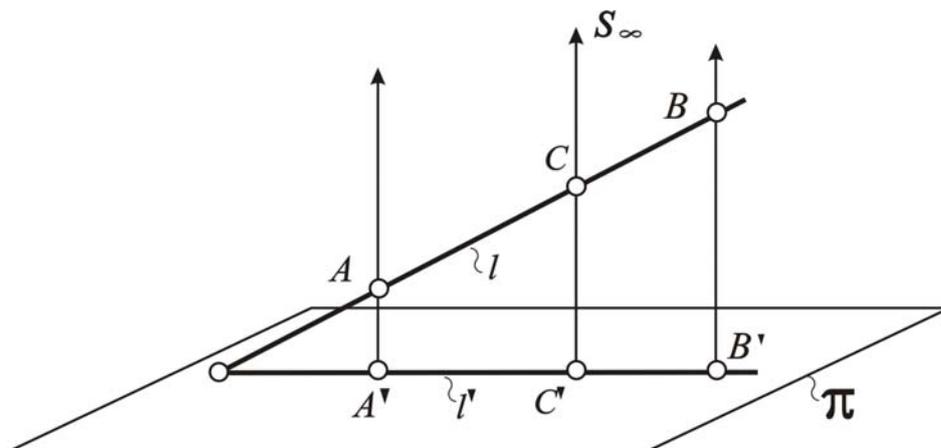


Рис. 46. Пятый инвариант проецирования

## 2.4. Основное требование к плоским изображениям трехмерных объектов

Посмотрим, могут ли плоские изображения трехмерных объектов, построенные на основании выявленного закона, являться геометрическими моделями исходных объектов? Для этого нужно ответить на другой вопрос: сохраняют ли они всю геометрическую информацию исходных объектов? Если ответ окажется положительным, то замена возможна, при отрицательном – нет. Итак, **основное требование**, которое предъявляется к геометрическим моделям, – это сохранение всей геометрической информации исходного объекта. Иначе говоря, объект на своем изображении должен быть узнаваем.

Пусть в качестве исходного объекта будет точка  $A$  на рис. 47. Она не имеет никакой геометрической информации, кроме положения в пространстве. Можно ли определить это положение, имея проекцию точки  $A$  и проекционный аппарат? Ответ очевиден: этого сделать нельзя. Можно лишь указать проецирующую прямую  $l = A' \cup S$ .

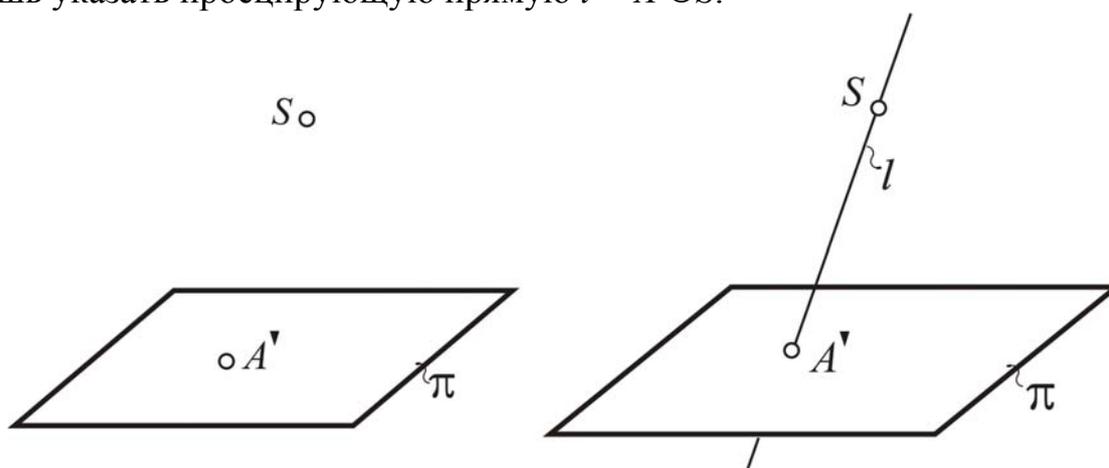


Рис. 47. Определение положения точки в трехмерном пространстве по ее плоскому изображению

Аналогичный вывод можно сделать, если восстанавливать положение прямой  $l$  в исходном пространстве (рис. 48). Для общего случая можно лишь указать проецирующую плоскость, которая содержит эту прямую. Причина станет ясна, если сравнить размерности картинного и исходного пространств.

Рассмотрим еще один пример. На рис. 49 изображена окружность. Вопрос: какой трехмерный объект здесь изображен? Ответ дан на рис. 50. Это может быть сфера, конус или цилиндр или любой другой объект, которого проецирующие прямые будут касаться по окружности.

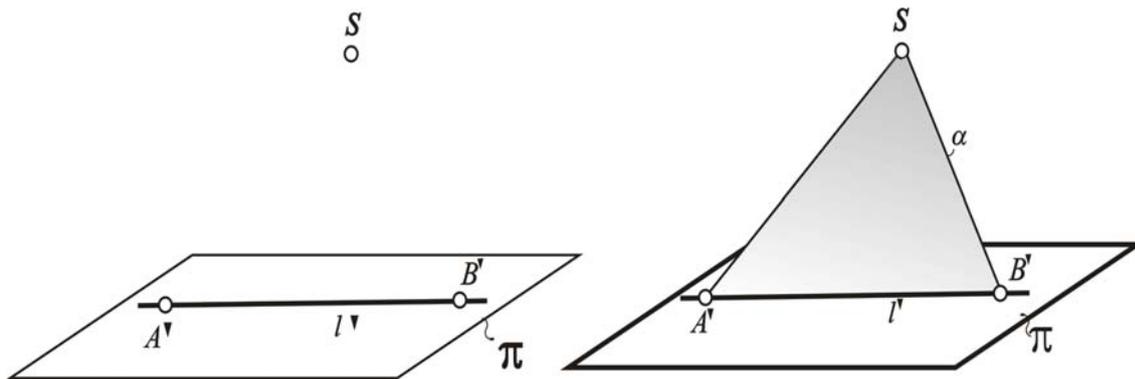


Рис. 48. Определение положения прямой в трехмерном пространстве по ее плоскому изображению

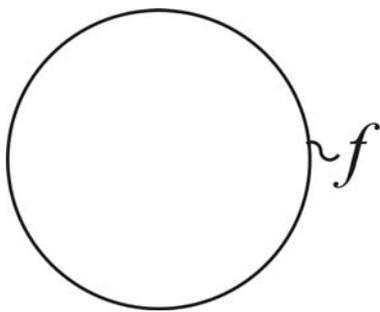


Рис. 49. Какой трехмерный объект здесь изображен?

Ряд таких примеров можно продолжать достаточно долго. И каждый раз мы будем отмечать невозможность узнавания исходного объекта по одному плоскому изображению. Можем указать только некую группу объектов. В первом примере (см. рис. 47) – множество точек проецирующей прямой, во втором примере (см. рис. 48) – множество прямых проецирующей плоскости, в третьем (рис. 50) – множество объектов, касающихся проецирующего конуса.

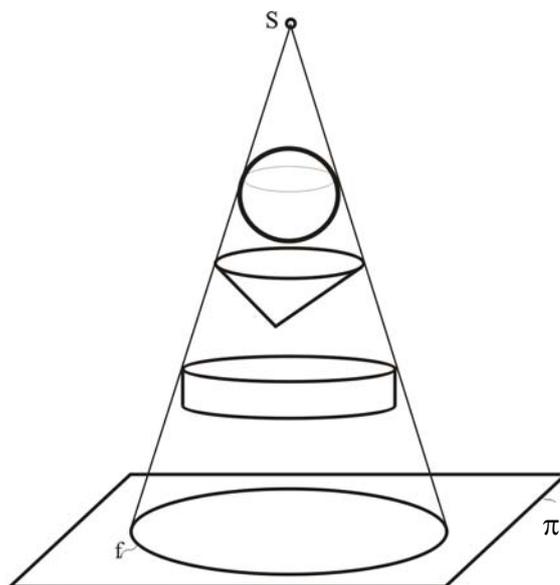


Рис. 50. Множество объектов, имеющих изображение в виде окружности

Причина здесь в разнице размерностей исходного (трехмерного) пространства и картинного (двухмерного). Для того чтобы выделить точку в исходном трехмерном пространстве, нужно затратить три параметра, в картинной плоскости – два параметра. На выделение прямой в трехмерном пространстве нужно затратить четыре параметра, в плоскости – два. В

третьем примере эта разница увеличивается. В результате плоское изображение утрачивает часть своей размерности, а вместе с ней и часть геометрической информации. Вывод напрашивается сам собой: чтобы изображение сохранило всю геометрическую информацию исходного объекта (стало его моделью), необходимо равенство размерностей исходного и картинного пространств. В этом случае модель сохранит всю геометрическую информацию исходного объекта. Такая модель называется однозначной.

Если размерности картинного и исходного пространств одинаковы, то модель сохраняет всю геометрическую информацию об исходном объекте. Пусть исходным и картинным пространствами будут соответственно прямолинейные ряды точек  $l$  и  $k$  (рис. 51). Проецируя произвольную точку  $A$ , принадлежащую прямой  $l$ , на прямую  $k$  из центра  $S$ , получаем проекцию точки  $A'$  на прямую  $k$ . Очевидно, что в этом случае легко решается обратная задача.

Так же легко решается аналогичная задача при сопоставлении плоских полей  $\alpha$  и  $\beta$  (рис. 52). Любая точка  $A$  и прямая  $a$ , которые принадлежат плоскости  $\alpha$ , восстанавливаются в исходном пространстве по их проекциям, данным в картинном пространстве  $\beta$ .

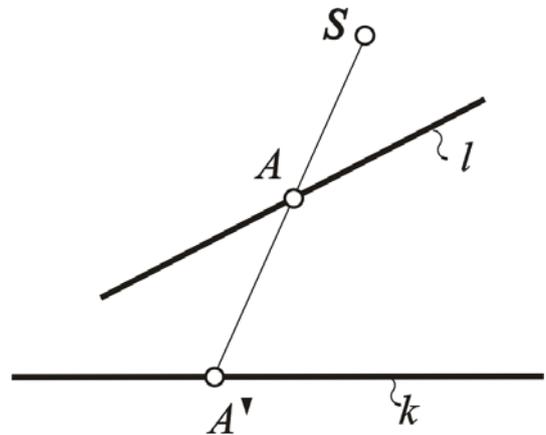


Рис. 51. Построение геометрических моделей в случае, когда размерность исходного и картинного пространств равна единице

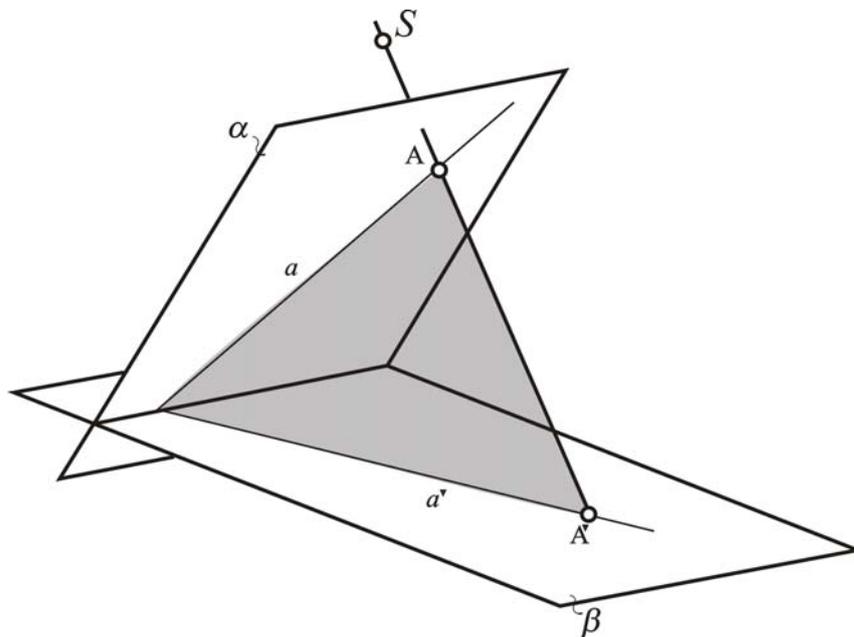


Рис. 52. Построение геометрических моделей в случае, когда размерность исходного и картинного пространств равна двум

Итак, чтобы геометрическая модель сохранила всю информацию исходного объекта, необходимо равенство размерностей исходного и картинного пространств. Если же размерность исходного пространства равна трем, картинного – двум, то решение проблемы заключается в удвоении проекционного аппарата. Такое решение было подсказано самой природой: все, что имеет глаза, имеет их в количестве, равном двум. Оно позволяет сохранить всю геометрическую информацию исходного трехмерного объекта на его плоской модели. Это утверждение будет доказано далее.

### Контрольные вопросы

1. Какому закону подчиняется возникновение плоских изображений трехмерных объектов?
2. Назвать элементы, составляющие структуру проекционного аппарата.
3. Перечислить варианты проекционных аппаратов, которые зависят от взаимного расположения элементов проекционного аппарата?
4. Какое проецирование называется центральным, косоугольным, ортогональным?
5. Из каких операций складывается алгоритм работы проекционного аппарата?
6. Назвать инварианты проецирования.
7. В чем состоит основное требование, которое предъявляется к плоским изображениям трехмерных объектов? Каково условие сохранения этого требования?
8. Благодаря чему обеспечивается равенство размерностей исходного и картинного пространств при построении геометрических моделей трехмерных объектов на плоскости?

### 3. МЕТОД ДВУХ ИЗОБРАЖЕНИЙ. МОДЕЛИРОВАНИЕ ОСНОВНЫХ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ЭЛЕМЕНТОВ

#### 3.1. Характеристика проекционного аппарата. Общий случай

В практической деятельности человека очень часто возникают задачи, связанные с изображением трехмерных объектов на плоскости. Как отмечалось ранее, разница размерностей исходного и картинного пространств порождает проблемы, которые связаны с утратой геометрической информации. Они решаются, если удвоить проекционный аппарат. Выберем в трехмерном пространстве две произвольные точки:  $S_1, S_2$  и две произвольные плоскости:  $\pi_1, \pi_2$ .

Точки играют роль центров проецирования, плоскости – роль картин (рис. 53). Однозначность полученных с помощью такого проекционного аппарата моделей будет доказана ниже. А пока рассмотрим более подробно его структуру.

Прямая  $u$ , которая проходит через центры  $S_1, S_2$ , называется исключенной прямой. Точки пересечения исключенной прямой с картинками ( $U_1 = u \cap \pi_1; U_2 = u \cap \pi_2$ ) – исключенными точками.

В зависимости от взаимного расположения картин и центров проецирования выделяют частные виды метода двух изображений: (перспектива, аксонометрия и эюр Монжа). Для студентов, обучающихся по направлениям подготовки бакалавров «Технология транспортных процессов» и «Эксплуатация транспортно-технологических машин и комплексов», необходимы только два вида: аксонометрия и эюр Монжа.

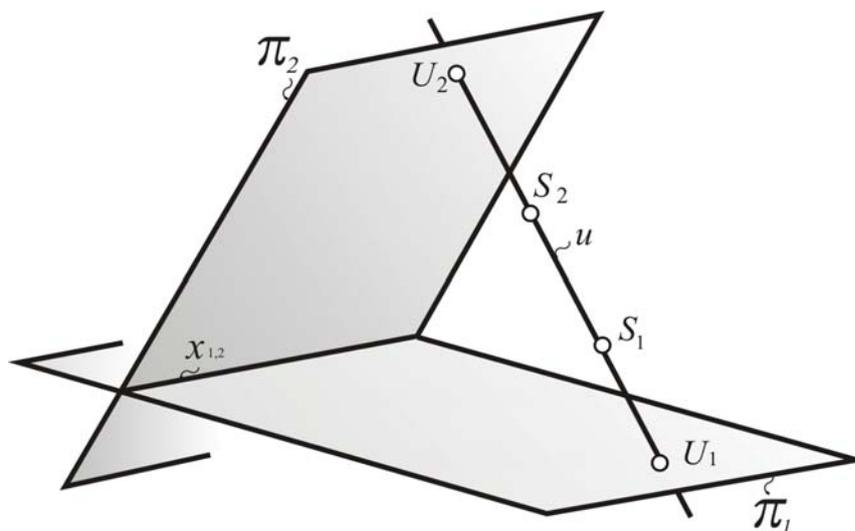


Рис. 53. Проекционный аппарат метода двух изображений

### 3.2. Характеристика проекционного аппарата. Аксонометрия

Характерную особенность проекционного аппарата аксонометрии определяют следующие признаки: центры проецирования  $S_1$  и  $S_2$  бесконечно удалены, проецирование из  $S_1$  всегда ортогональное, из  $S_2$  может быть ортогональным или косоугольным; угол между картинками  $\pi_1$ ,  $\pi_2$  – произвольный; исключенная прямая удалена в бесконечность (рис. 54).

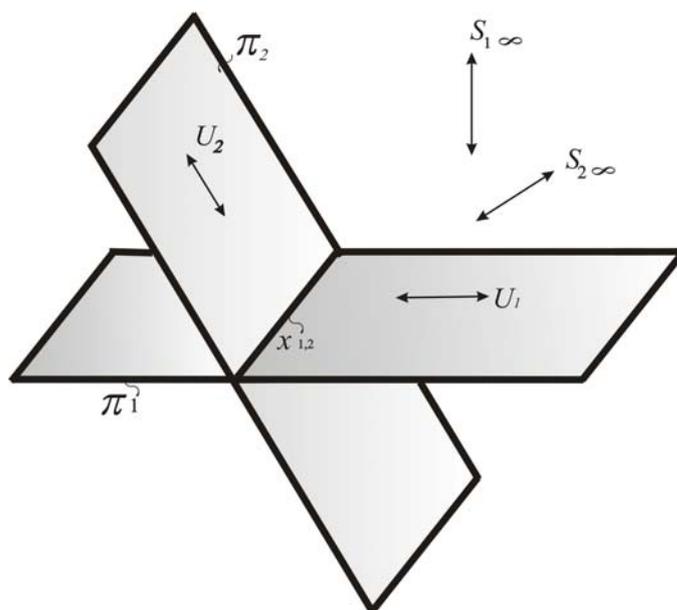


Рис. 54. Проекционный аппарат аксонометрии



Рис. 55. Изображение объекта в аксонометрии

### 3.3. Характеристика проекционного аппарата. Эпюр Монжа

Проекционный аппарат этого варианта метода двух изображений обладает следующими особенностями: угол между картинами  $\pi_1$  и  $\pi_2$  равен  $90^\circ$ . Центры  $S_1$  и  $S_2$  удалены в бесконечность, проецирование из них ортогональное. Линия пересечения плоскостей называется осью проекций и обозначается символом  $x_{1,2}$  (рис. 56).

Изображение объекта, построенное с помощью такого проекционного аппарата, представлено на рис. 57. Следует заметить, что оно существенно отличается от тех, которые воспринимает глаз человека. Поэтому необходимо привыкнуть к особенностям восприятия объектов, изображенных с помощью проекционного аппарата, который предложил Гаспар Монж.

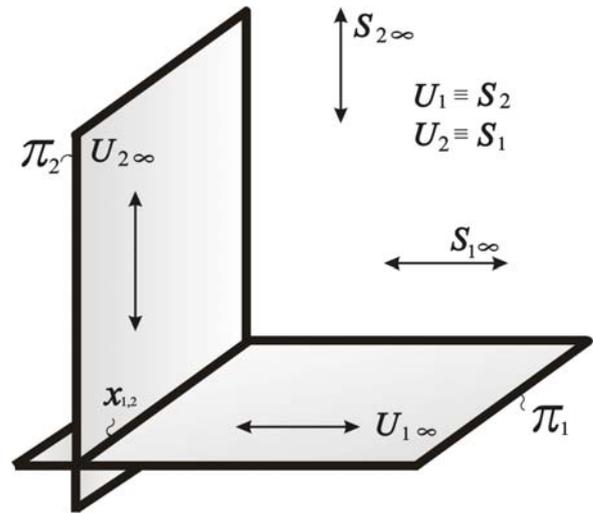


Рис.56. Проекционный аппарат эпюра Монжа

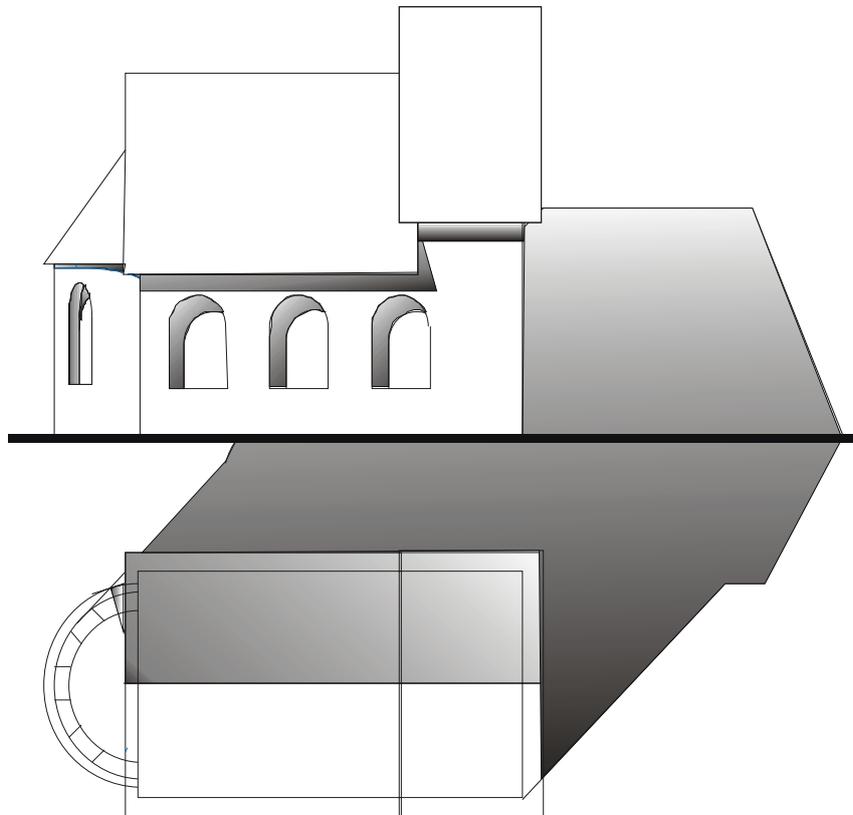


Рис. 57. Изображение объекта на эпюре Монжа

## Контрольные вопросы

1. Перечислить элементы, которые составляют удвоенный проекционный аппарат общего вида.
2. Назвать частные случаи метода двух изображений, зависящие от взаимного расположения картин и центров проецирования.
3. Перечислите элементы, составляющие проекционный аппарат перспективы, и дайте характеристику их взаимного расположения.
4. Чем отличаются проекционные аппараты перспектив на наклонной картине с высоким горизонтом и низким горизонтом?
5. Каковы особенности проекционного аппарата перспективы на вертикальной картине?
6. Перечислите элементы, составляющие проекционный аппарат аксонометрии, и дайте характеристику их взаимного расположения.
7. Дайте характеристику проекционного аппарата эпюра Монжа.

## 3.4. Модель точки

На рис.53, 55 плоские изображения трехмерного объекта построены с помощью линий. Каждая линия – это множество точек, которые ограничивают линию, превращая ее в отрезок или дугу. Работая с этими изображениями, приходится выделять на линиях точки. В связи с этим необходимо знать, как строится модель точки, какие задачи нужно решать при работе с этой моделью. Поэтому рассмотрим процедуру возникновения модели точки, построенной методом двух изображений, и приемы решения задач, которые необходимо решать, работая с этой моделью.

**Общий случай.** Возьмём произвольную точку  $A$  трехмерного пространства и построим её модель, используя метод двух изображений (рис. 58).

Алгоритм этой процедуры составят следующие операции:

- 1)  $A \cup u = \alpha$  – проецирующая плоскость;
- 2)  $\alpha \cap \pi_1 = a_1$  – линия связи;
- 3)  $\alpha \cap \pi_2 = a_2$  – линия связи;
- 4)  $A \cup S_1 = m_1$  – проецирующая прямая;
- 5)  $A \cup S_2 = m_2$  – проецирующая прямая;
- 6)  $m_1 \cap a_1 = A_1$  – первая проекция точки  $A$ ;
- 7)  $m_2 \cap a_2 = A_2$  – вторая проекция точки  $A$ .

Плоскость  $\alpha$  – плоскость в пучке проецирующих плоскостей с осью  $u$ . Прямые  $a_1$  и  $a_2$  называются линиями связи, а прямые  $m_1$  и  $m_2$  – проецирующими прямыми.

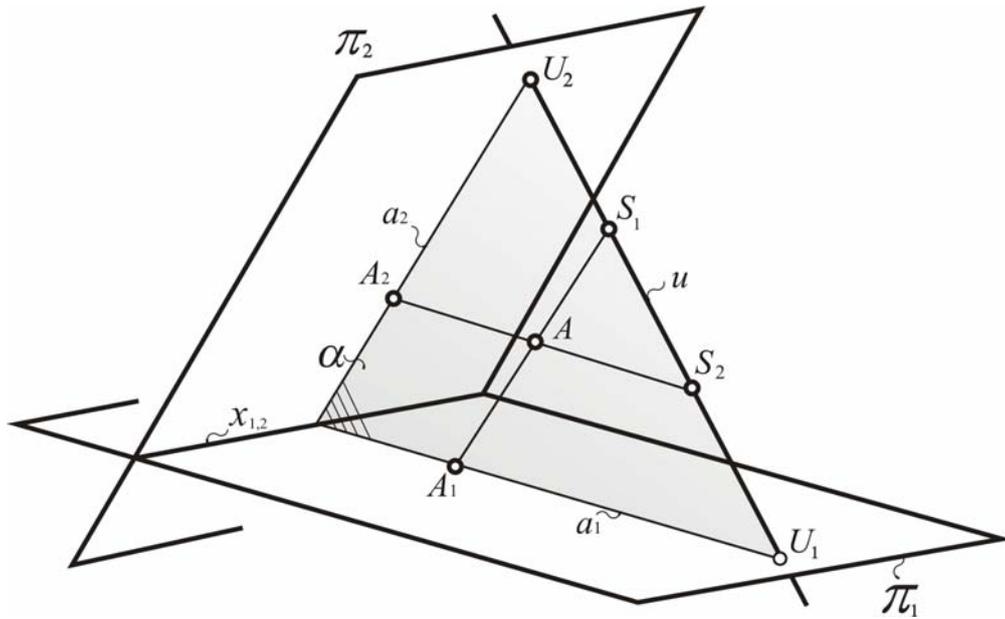


Рис. 58. Моделирование точки. Метод двух изображений: общий случай

Аналогично возникают изображения любой другой точки трёхмерного пространства. Множество таких точек  $M, N, \dots$  и исключенная прямая  $u$  порождают пучок проецирующих плоскостей (рис. 59). Эти пучки рассекаются картинками по пучкам прямых – линиям связи с вершинами в исключенных точках  $U_1$  и  $U_2$ .

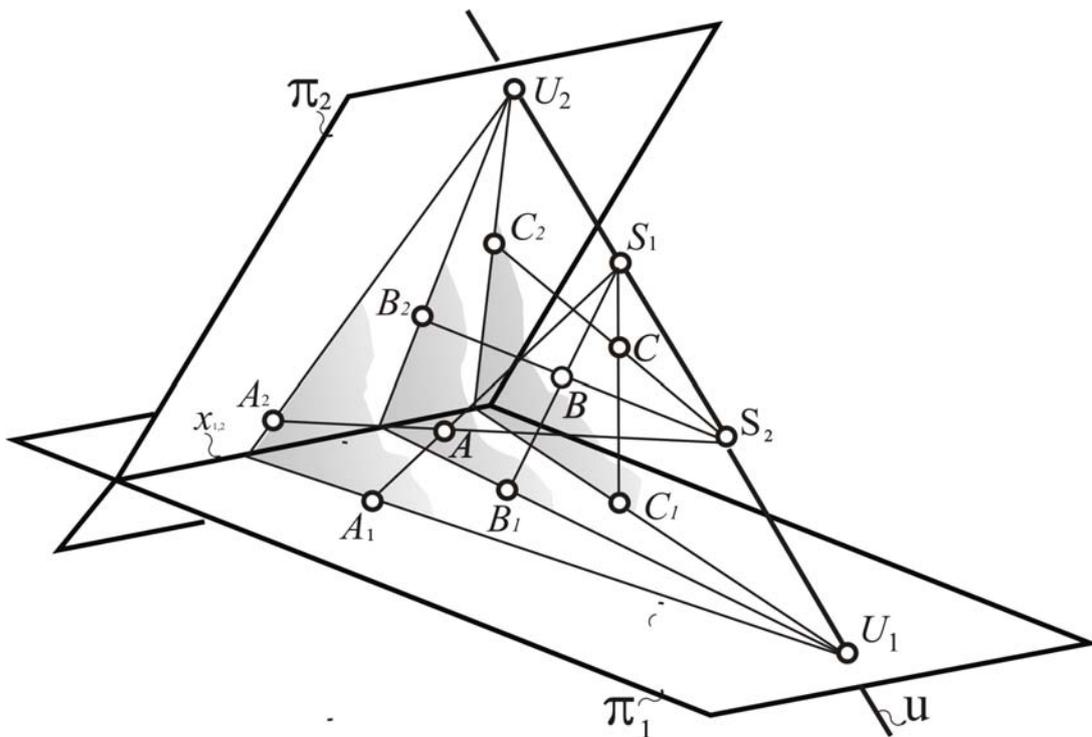


Рис. 59. Моделирование точек трехмерного пространства

Таким образом, моделью точки трёхмерного пространства называют два её изображения (проекции), расположенные на соответствующих линиях связи.

Докажем, что такая модель является однозначной, т.е. сохраняет всю геометрическую информацию исходной точки. Такой информацией будет только положение в пространстве, так как точка не имеет ни размеров, ни формы. Для этого через центры проецирования ( $S_1, S_2$ ) и изображения точки ( $A_1, A_2$ ) достаточно провести проецирующие прямые, которые, пересекаясь, восстановят положение исходной точки в исходном пространстве. Кроме того, если сравнить размерность исходного и картинного пространств, то она окажется одинаковой. Действительно, на выделение одной точки из множества точек трехмерного пространства затрачивается три параметра и на выделение пары точек, которые принадлежат соответствующим лучам двух пучков, – также три параметра: один параметр тратится на то, чтобы выделить один луч в пучке прямых, другой – на выделение на этом луче проекции исходной точки, еще один параметр нужно затратить, чтобы выделить на другом луче другую проекцию точки.

Исключением из этого правила окажутся точки, принадлежащие прямой  $u$ . Моделью любой точки этой прямой будут только точки  $U_1$  и  $U_2$ . Поэтому прямая названа исключенной, а точки  $U_1, U_2$  – исключенными.

Полученная модель, как было доказано, однозначна, но не удобна в работе, так как представляет собой громоздкую конструкцию, состоящую из двух плоскостей. Поэтому был предложен переход к однокартинному чертежу. Он заключается в перепроецировании изображений с одной картины на другую из дополнительного центра, который может совпадать с одним из заданных центров проецирования. Для каждого из частных случаев метода двух изображений, о которых будет сказано ниже, предлагается свой конкретный переход к однокартинному чертежу. Но во всех случаях возникает совмещенная картинная плоскость, каждая точка которой содержит точку обеих картин. Поэтому появилась необходимость приписывать индексы проекциям. Значения этих индексов соответствуют значению индекса той картины, которой принадлежала проекция до совмещения. При этом после совмещения тождественно совпадают исключенные точки и линии связи. Двойные элементы, имеющие один и тот же символ, но разные индексы, помечаются двойным индексом.

В результате плоской моделью точки трехмерного пространства окажутся две ее проекции, которые располагаются на двойной линии связи, проходящей через двойную исключенную точку.

Работа с моделью точки заключается в решении следующих задач:

- 1) построение модели любой точки трёхмерного пространства;
- 2) определение положения точки относительно проекционного аппарата по её модели.

В сущности, решение этих задач сводится к установлению принадлежности точки к одной из групп, на которые делятся точки исходного пространства. Основанием для такой классификации служит положение точки относительно проекционного аппарата. В результате выделяются следующие группы точек:

1. Точки частного положения:
  - принадлежащие тождественной плоскости;
  - принадлежащие картинам  $\pi_1, \pi_2$ ;
  - бесконечно удаленные;
2. Точки общего положения – все остальные.

**Тождественной плоскостью** называют такую, точки которой моделируются тождественно совпавшими проекциями.

Работа с моделью точки обеспечивается системой знаний (схема представлена на рис. 60). Для построения модели любой точки трехмерного пространства необходимо знать устройство проекционного аппарата и алгоритм его работы. Для определения положения точки по отношению к проекционному аппарату следует овладеть умением проводить процедуру, обратную той, которая позволяет построить модель, для чего необходимо знать характерные признаки моделей точек частного положения.



Рис. 60. Знания, необходимые при работе с моделью точки

Следует заметить, что при моделировании точек трехмерного пространства методом двух изображений мы получаем модель, которая сохраняет всю информацию исходного объекта, но пользоваться такой моделью неудобно потому, что проекции точки принадлежат двум различным плоскостям. Это обстоятельство обусловило переход к однокартинному чертежу, который осуществляется с помощью дополнительного проецирования. В различных вариантах метода двух изображений для этого выбирают различные положения дополнительного центра, но всегда проецируют из него на картину  $\pi_2$ .

Рассмотрим решение обеих вышеуказанных задач на примере моделирования точек общего и частного положения в аксонометрии и на эюре Монжа.

### 3.4.1. Моделирование точек общего положения в стандартных вариантах метода двух изображений

**Аксонометрия.** На рис. 61, 62 приведен пример построения модели точки трехмерного пространства в аксонометрии. Порядок операций осуществляется в соответствии со следующим алгоритмом:

1.  $A \cup S_1 \cup S_2 = \alpha$     *Проецирующая плоскость*
2.  $\alpha \cap \pi_1 = a_1$
3.  $\alpha \cap \pi_2 = a_2$     *Линии связи*
4.  $A \cup S_1 = m_1$
5.  $A \cup S_2 = m_2$     *Проецирующие прямые*
6.  $m_1 \cap a_1 = A_1$
7.  $m_2 \cap a_2 = A_2$     *Проекции точки*
8.  $A_1 \cup S_2 = m_3$
9.  $m_3 \cap a_2 = A_1$

Переход к однокартинному чертежу выполняется благодаря перепроецированию из центра  $S_2$  изображений с картины  $\pi_1$  на картину  $\pi_2$ . В результате к алгоритму добавляются две операции. Возникает прямая  $m_3$ , которая пересекает линию связи  $a_2$  в точке  $A_1$ . Чтобы различить два положения первой проекции точки  $A$ , первоначальное ее положение на картине  $\pi_1$  также помечают штрихом.



операции. Через этот центр и  $A_1'$  проходит прямая  $m_3$ , которая пересекает линию связи  $a_2$  в точке  $A_1$ .

1.  $A \cup S_1 \cup S_2 = \alpha$  Проецирующая плоскость
2.  $\alpha \cap \pi_1 = a_1$
3.  $\alpha \cap \pi_2 = a_2$  } Линии связи
4.  $A \cup S_1 = m_1$
5.  $A \cup S_2 = m_2$  } Проецирующие прямые
6.  $m_1 \cap a_1 = A_1$
7.  $m_2 \cap a_2 = A_2$  } Проекции точки
8.  $A_1 \cup S_3 = m_3$
9.  $m_3 \cap a_2 = A_1$

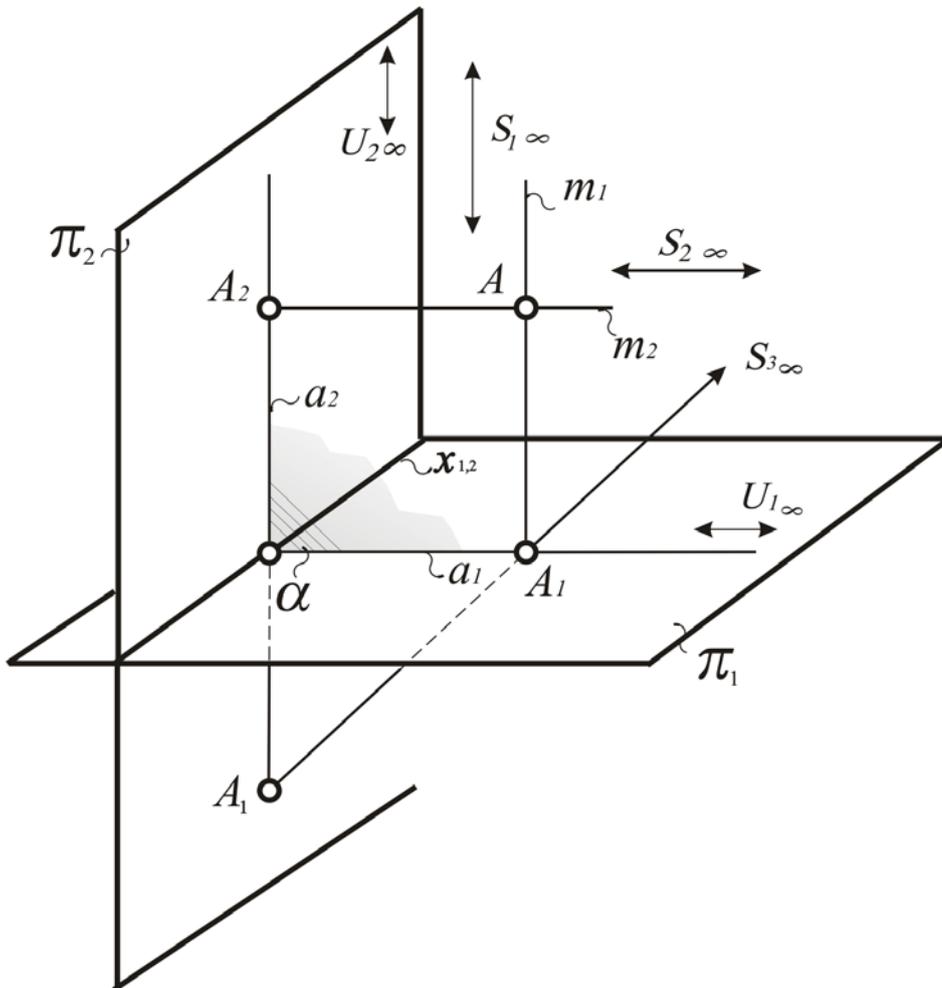


Рис. 63. Моделирование точки трехмерного пространства на эюре Монжа

В результате получаем модель точки. Ее определение не отличается от определений в аксонометрии: **моделью точки на эюре Монжа** являются два ее изображения (проекции) на совмещенных картинах, которые принадлежат двойной линии связи пучка  $U_{1,2}$  (рис. 64).

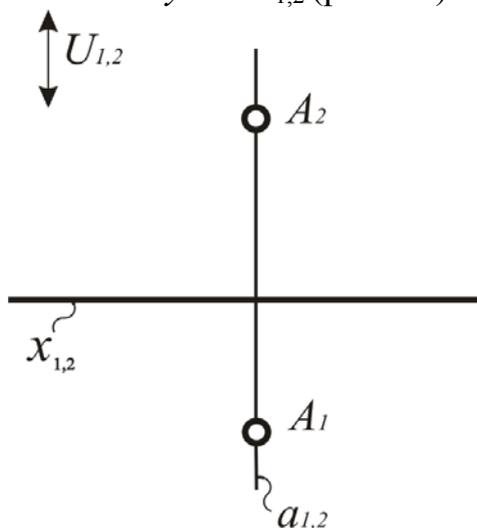


Рис. 64. Модель точки на эюре Монжа

### 3.4.2. Моделирование точек частного положения в стандартных вариантах метода двух изображений

Характерный признак модели точки, принадлежащей тождественной плоскости во всех вариантах метода двух изображений, один и тот же: тождественное совпадение обеих ее проекций. Роль тождественной плоскости в аксонометрии играет картина  $\pi_1$ , на эюре Монжа это биссекторная плоскость тождества. В качестве примеров приведены точка  $A$  картины  $\pi_1$ , которая моделируется в аксонометрии (рис. 65), и точка  $A$ , принадлежащая биссекторной плоскости тождества проекционного аппарата эюра Монжа (рис. 66).

Доказательством совпадения обеих проекций точек служат не только чертежи на рис. 65, 66, но и приведенный ниже алгоритм для аксонометрии. Он показывает, что тождественное совпадение исходной точки и ее первой проекции ( $A_1'$ ) приводит к тождественному совпадению проецирующих прямых  $m_2$  и  $m_3$ . Это, в свою очередь, обеспечивает тождественное совпадение обеих проекций точки.

1.  $A \cup S_1 \cup S_2 = \alpha$
2.  $\alpha \cap \pi_1 = a_1$
3.  $\alpha \cap \pi_2 = a_2$
4.  $A \cup S_1 = m_1$
5.  $A \cup S_2 = m_2$



На эпюре Монжа роль тождественной плоскости играет биссекторная плоскость, которая делит один из углов между картинками и располагается в удаленных от наблюдателя квадрантах. Она называется биссекторной плоскостью тождества. Процесс моделирования точки этой плоскости представлен на рис. 67. Тождественное совпадение проекций происходит в результате совмещения картин перепроецированием из центра  $S_3$ . Причиной этого совпадения является свойство точек, принадлежащих биссекторной плоскости: они равно удалены от плоскостей, которые образуют двугранный угол. В результате получаем тот же характерный признак (рис. 68), что и модели точек, принадлежащих картине  $\pi_1$  в аксонометрии.

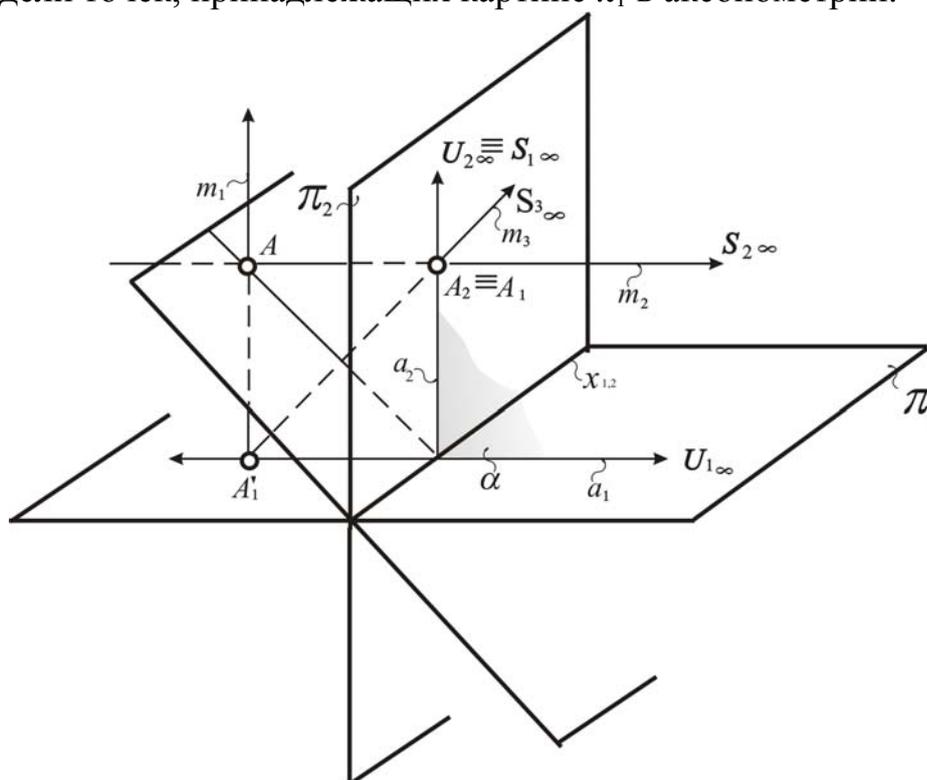


Рис. 67. Моделирование точки, принадлежащей биссекторной плоскости тождества, на эпюре Монжа

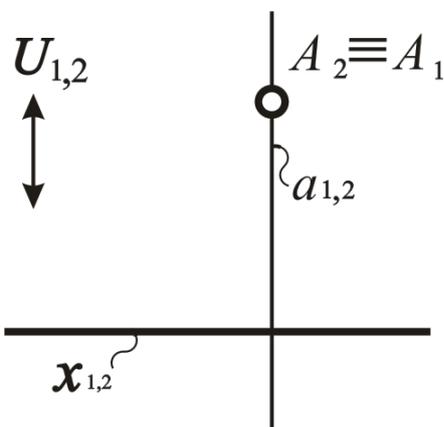


Рис. 68. Модель точки, принадлежащей биссекторной плоскости тождества, на эпюре Монжа

Характерный признак модели бесконечно удаленной точки в аксонометрии и на эюре Монжа состоит в том, что обе проекции точки находятся в бесконечности.

Приведем доказательства, опираясь на алгоритм для перспективы и эюра Монжа.

1.  $A_\infty \cup S_{1\infty} \cup S_{2\infty} = \alpha_\infty$
2.  $\alpha_\infty \cap \pi_1 = a_{1\infty}$
3.  $\alpha_\infty \cap \pi_2 = a_{2\infty}$
4.  $A_\infty \cup S_{1\infty} = m_{1\infty}$
5.  $A_\infty \cup S_{2\infty} = m_{2\infty}$
6.  $m_{1\infty} \cap a_1 = A'_{1\infty}$
7.  $m_{2\infty} \cap a_{2\infty} = A_{2\infty}$
8.  $A'_{1\infty} \cup S_{2\infty} = m_{3\infty}$
9.  $m_{3\infty} \cap a_2 = A_1 \equiv A_2$

В соответствии с первой операцией алгоритма образуется бесконечно удаленная плоскость  $\alpha$ , которая является результатом объединения трех бесконечно удаленных точек  $A$ ,  $S_1$ ,  $S_2$ . Это проецирующая плоскость. Она содержит все остальные элементы проецирования: линии связи, проецирующие прямые и обе проекции точки  $A$  (рис. 69, 70).

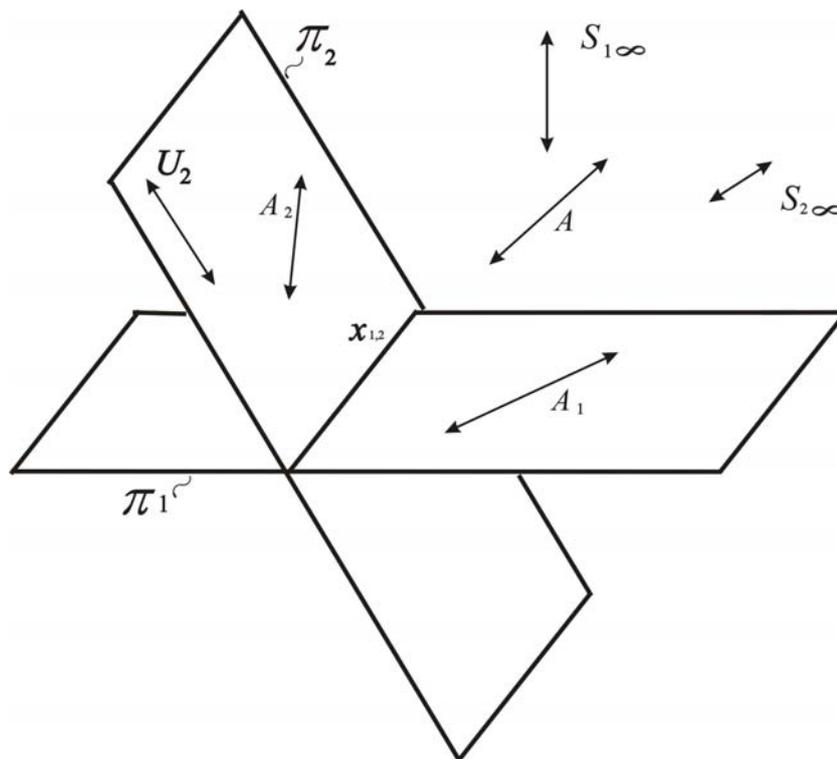


Рис. 69. Моделирование бесконечно удаленной точки в аксонометрии

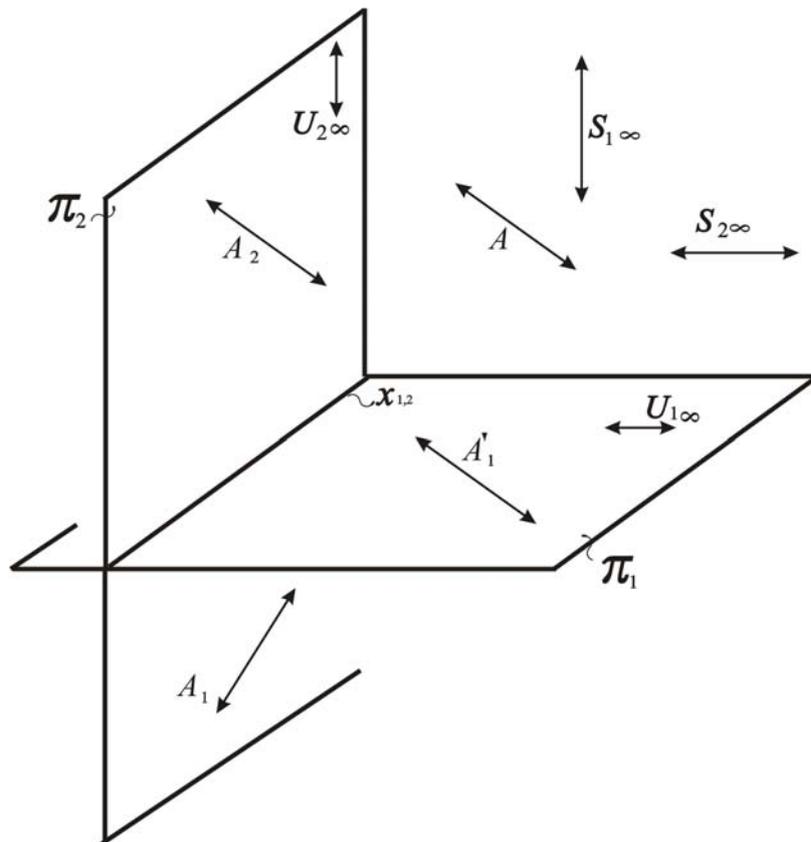


Рис. 70. Моделирование бесконечно удаленной точки на эюре Монжа

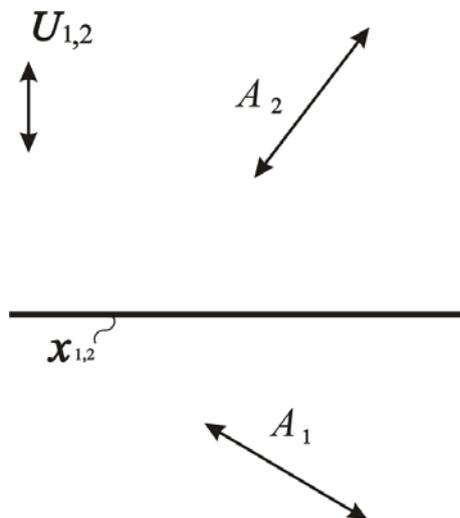


Рис. 71. Модель бесконечно удаленной точки на эюре Монжа и аксонометрии

Посмотрим, какой характерный признак имеет модель точки, расположенной в картине  $\pi_1$ , при ее моделировании на эюре Монжа (рис. 72, 73). Принадлежность точки к картине  $\pi_1$  отражается на алгоритме следующим образом: тождественно совпадают проецирующая прямая  $m_2$  и линия связи  $a_1$ . А это, в свою очередь, является условием принадлежности второй проекции

точки к оси проекций  $x_{1,2}$ . Таким образом, *характерным признаком модели точки, которая принадлежит картине  $\pi_1$  на эюре Монжа, является принадлежность второй проекции оси  $x_{1,2}$ .*

1.  $A \cup S_1 \cup S_2 = \alpha$
2.  $\alpha \cap \pi_1 = a_1$
3.  $\alpha \cap \pi_2 = a_2$
4.  $A \cup S_1 = m_1$
5.  $A \cup S_2 = m_2 = a_1$
6.  $m_1 \cap a_1 = A'_1 \equiv A$
7.  $m_2 \cap a_2 = A_2 \subset x_{1,2}$
8.  $A'_1 \cup S_3 = m_3$
9.  $m_3 \cap a_2 = A_1$

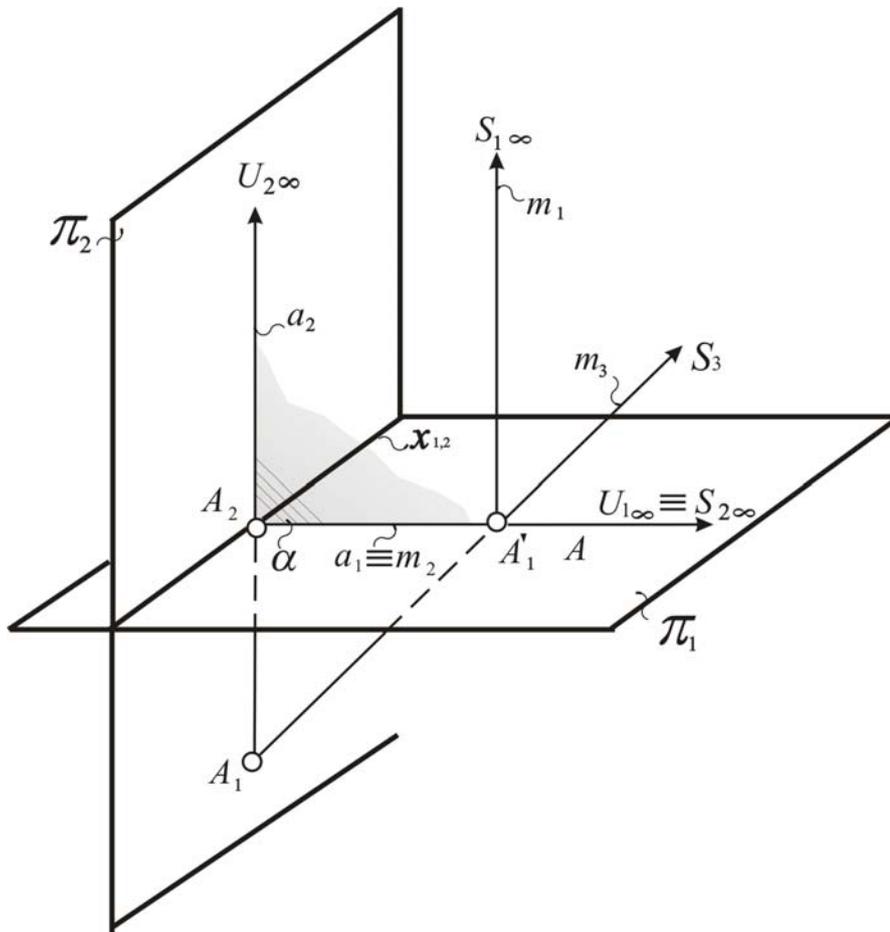


Рис. 72. Моделирование точки, принадлежащей картине  $\pi_1$ , на эюре Монжа



1.  $A \cup S_1 \cup S_2 = \alpha$
2.  $\alpha \cap \pi_1 = a_1$
3.  $\alpha \cap \pi_2 = a_2$
4.  $A \cup S_1 = m_1 \equiv a_2$
5.  $A \cup S_2 = m_2$
6.  $m_1 \cap a_1 = A_1 \subset x_{1,2}$
7.  $m_2 \cap a_2 = A_2$
8.  $A_1 \cup S_2 = m_3$
9.  $m_3 \cap a_2 = A_1$

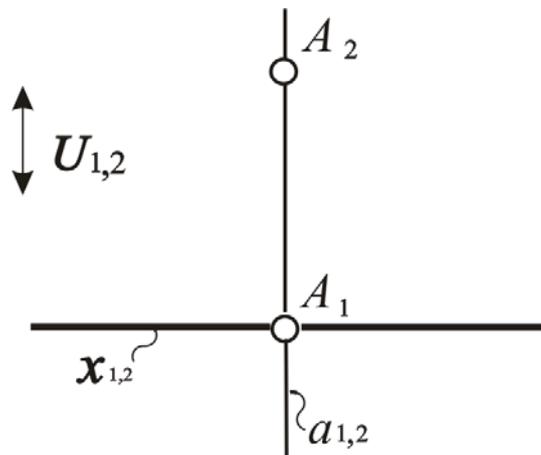


Рис. 75. Модель точки, принадлежащей картине  $\pi_2$  на эпюре Монжа

### Контрольные вопросы

1. Каковы операции алгоритма по построению модели точки, построенной методом двух изображений?
2. Как называется плоскость, образованная произвольной точкой трехмерного пространства и центрами проецирования?
3. Как называются линии пересечения этой плоскости с картинами?
4. Как называются прямые, проходящие через произвольную точку трехмерного пространства и центры проецирования?
5. Как называются изображения точки на картинах?
6. Дайте определение плоской модели точки трехмерного пространства, построенной методом двух изображений.
7. Приведите доказательство, что полученная модель сохраняет всю геометрическую информацию исходной точки.
8. Положение, каких точек невозможно восстановить в исходном пространстве по их модели?

9. Почему необходим и как осуществляется переход к однокартинному чертежу?

10. Из решения, каких задач складывается работа с моделью точки?

11. Перечислить точки, которые занимают частное положение по отношению к проекционному аппарату.

12. Какая плоскость называется тождественной в аксонометрии, на эюре Монжа?

13. Каков характерный признак модели точки, которая принадлежит картине  $\pi_1$  в аксонометрии, на эюре Монжа?

14. Каков характерный признак модели точки, которая принадлежит картине  $\pi_2$  в аксонометрии, на эюре Монжа?

15. Что характерного в модели точки, которая бесконечно удалена в аксонометрии, на эюре Монжа?

### 3.5. Модель прямой

В рассмотренных плоских изображениях трехмерных объектов преобладают прямые линии. Они по-разному расположены относительно проекционного аппарата. В связи с этим их модели обладают различными характерными признаками, которые приводят к некоторым особенностям при работе с этими моделями. Чтобы понять возникновение этих признаков, необходимо знать, как строится модель прямой и какие задачи нужно решать при работе с этой моделью. Поэтому рассмотрим процедуру возникновения модели прямой, построенной методом двух изображений, характерные признаки моделей прямых частного положения и приемы решения задач при работе с этими моделями.

Чтобы построить модель произвольной прямой  $l$  трехмерного пространства (рис. 76), выполним следующие операции алгоритма:

$$l \cup S_1 = \alpha;$$

$$l \cup S_2 = \beta;$$

$$\alpha \cap \pi_1 = l'_1;$$

$$\beta \cap \pi_2 = l_2.$$

После того как построены изображения прямой, осуществим переход к однокартинному чертежу, используя тот прием, который присущ конкретному частному варианту. В результате **моделью прямой в общем случае окажутся две ее проекции, произвольно расположенные на плоскости.**

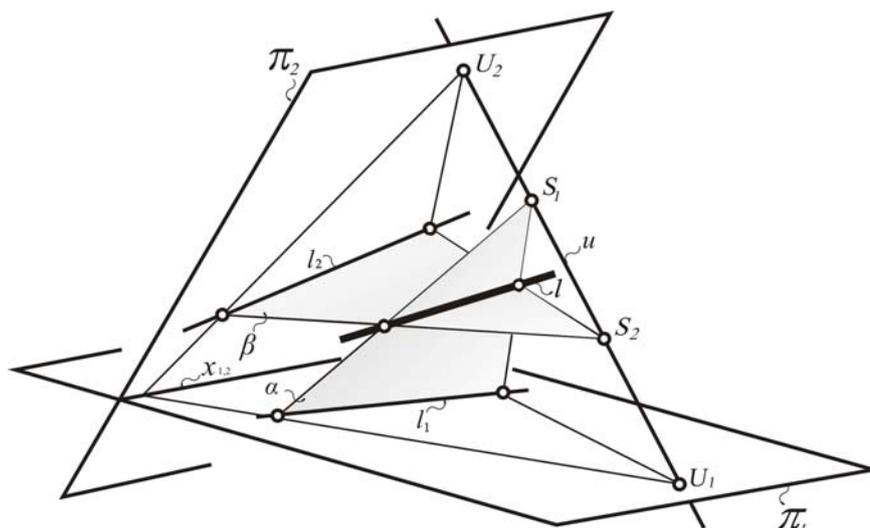


Рис. 76. Моделирование прямой трехмерного пространства методом двух изображений (общий случай)

Однозначность такой модели легко доказать. Достаточно восстановить положение проецирующих плоскостей – они пересекутся по исходной прямой  $l$ . Этот факт подтвердится, если подсчитать размерность множества пар прямых, моделирующих исходную прямую. Для выделения двух произвольных прямых плоскости необходимо затратить четыре параметра. Столько же параметров нужно затратить, чтобы выделить прямую в трехмерном пространстве.

Работа с моделью прямой заключается в решении следующих задач:

- 1) моделирование любой прямой трехмерного пространства;
- 2) определение положения прямой относительно проекционного аппарата по ее модели;
- 3) построение одной из проекций точки, принадлежащей прямой, если дана другая ее проекция;
- 4) построение точек пересечения прямой с картинками.

При решении этих задач необходимо учитывать их взаимосвязь, которая представлена графом на рис. 77. Для создания этого графа было выделено множество, составленное из перечисленных выше задач и соответствующих сведений из предыдущих разделов. Отношение, которое задано на этом множестве, выглядит следующим образом: «элемент  $X$  не может быть освоен без знания элемента  $Y$ ».

В результате видим, что построение модели любой прямой трехмерного пространства невозможно без знания закона, который обуславливают структура проекционного аппарата и алгоритм его работы. Для определения положения прямой относительно проекционного аппарата необходимо знание закона построения модели прямой, классов прямых трехмерного пространства и характерных признаков моделей прямых частного положения. Задачи на построение модели прямой и определение ее положения относительно проекционного аппарата необходимы при решении

остальных задач. Кроме того важны еще знания раздела «модель точки». Они обеспечивают возможность нахождения точек пересечения прямой с картинами ее точки схода.



Рис. 77. Взаимосвязь знаний, умений и навыков, обеспечивающих работу с моделью прямой

Классификация прямых осуществляется в зависимости от их положения относительно проекционного аппарата. В результате выделяют следующие два класса:

1. Прямые частного положения:

а) **проецирующие** прямые: они содержат один из центров проецирования;

б) **прямые уровня** – это прямые, которые параллельны одной из картин. Если прямая параллельна  $\pi_1$ , она называется горизонталью, если параллельна  $\pi_2$ , – фронталью;

в) **профильные прямые**. К этим прямым относят такие, которые пересекают исключенную прямую.

2. Прямые общего положения. К этой группе относятся все остальные прямые.

### 3.5.1. Моделирование прямых общего положения

Рассмотрим решение выделенных выше задач, из которых складывается работа с моделью прямой.

**Задача 1.** В трехмерном пространстве выделена прямая. Построить ее модель, используя метод двух изображений.

Рассмотрим примеры построения моделей прямых общего положения в аксонометрии и на эюре Монжа. Количество операций алгоритма в этом случае возрастает на две за счет перепроецирования изображения прямой с картины  $\pi_1$  на картину  $\pi_2$ .

В аксонометрии перепроецирование происходит благодаря плоскости  $\gamma$ , возникающей в результате объединения первой проекции прямой с центром проецирования  $S_2$  (рис. 78, 79). Это отражено на приведенном ниже алгоритме.

$$l \cup S_1 = \alpha;$$

$$l \cup S_2 = \beta;$$

$$\alpha \cap \pi_1 = l'_1;$$

$$\beta \cap \pi_2 = l_2;$$

$$l'_1 \cup S_2 = \gamma;$$

$$\gamma \cap \pi_2 = l_1.$$

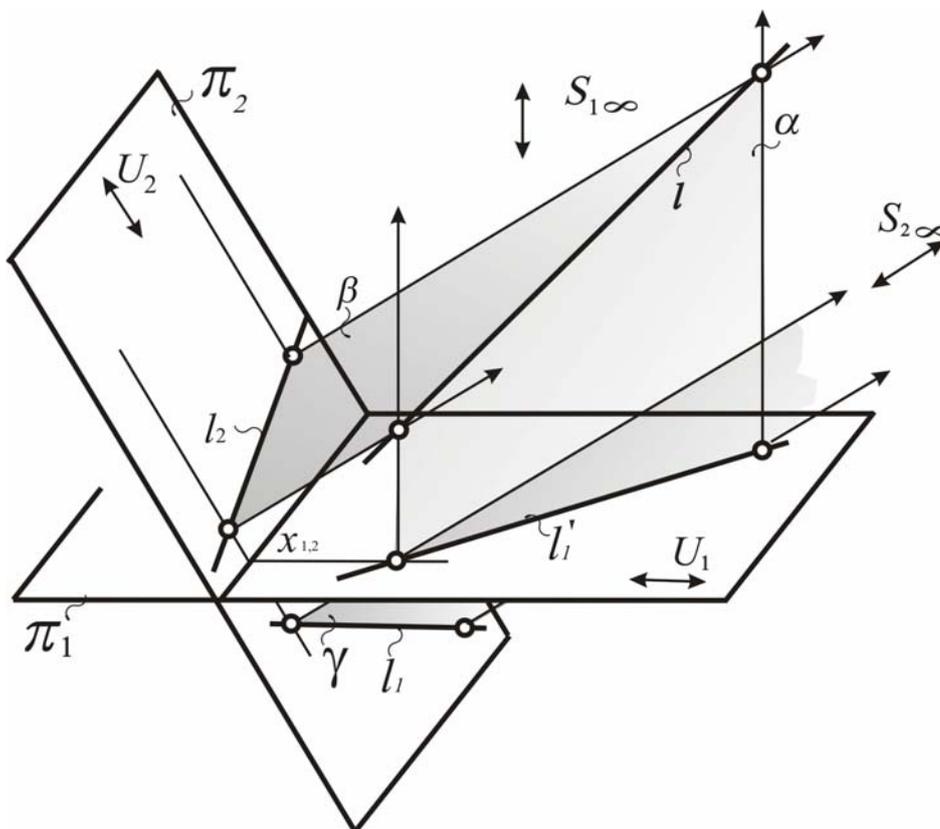


Рис. 78. Моделирование прямой общего положения в аксонометрии

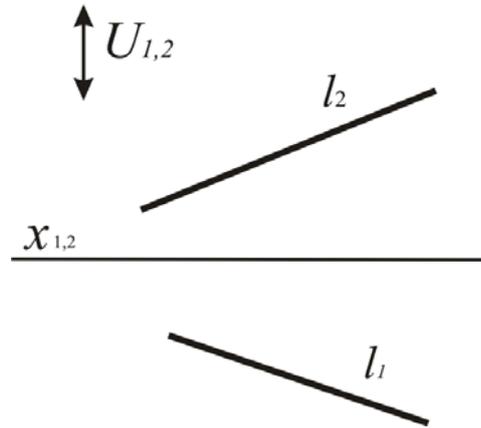


Рис.79. Модель прямой общего положения в аксонометрии

На эюре Монжа совмещение картин происходит благодаря плоскости  $\gamma$ , возникающей в результате объединения первой проекции прямой с центром проецирования  $S_3$  (рис. 80, 81). Это также отражено на приведенном ниже алгоритме.

$$l \cup S_1 = \alpha;$$

$$l \cup S_2 = \beta;$$

$$\alpha \cap \pi_1 = l'_1;$$

$$\beta \cap \pi_2 = l_2;$$

$$l'_1 \cup S_3 = \gamma;$$

$$\gamma \cap \pi_2 = l_1.$$

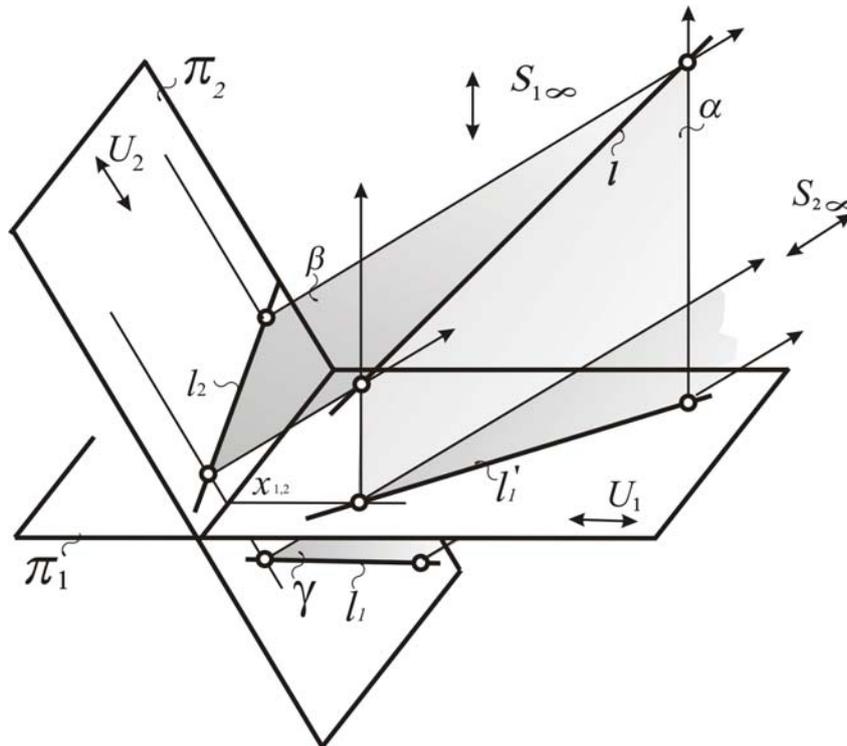


Рис. 80. Моделирование прямой общего положения на эюре Монжа

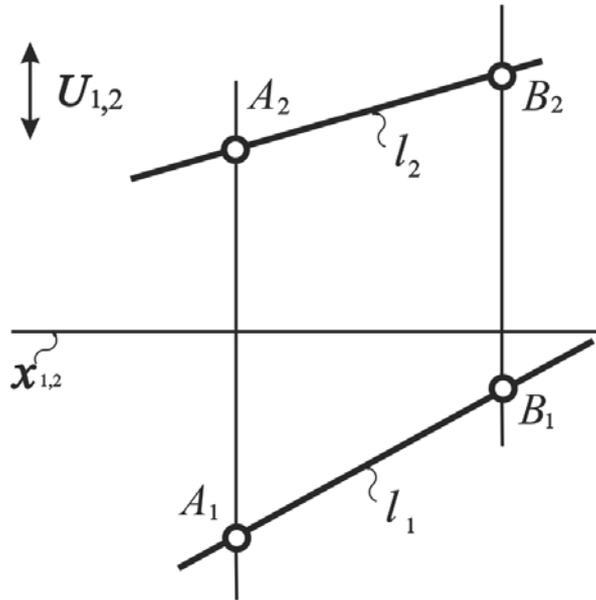


Рис.81. Модель прямой общего положения на эпюре Монжа

### 3.5.2. Моделирование прямых частного положения

**Задача 2.** *Определить положение прямой относительно проекционного аппарата по ее модели.*

Определение положения прямой относительно проекционного аппарата по ее модели сводится к выявлению ее принадлежности к одному из классов. Иначе говоря, необходимо определить, относится промоделированная прямая к общему положению или к частному. Если к частному, то указать конкретно к какому.

Для поиска ответа, можно выбрать любой из двух способов:

1. Восстановить положение прямой в исходном пространстве. Для этого проделать процедуру, обратную процедуре проецирования.
2. Ориентироваться на характерные признаки моделей прямых частного положения.

Более простым оказывается второй путь. Поэтому рассмотрим, какими характерными признаками обладают модели прямых частного положения.

**Проецирующие прямые.** Характерным признаком проецирующей прямой является изображение одной ее проекции в виде точки, которая принадлежит другой проекции, совпадающей с линией связи. На рис. 82 приведен пример моделирования прямой  $l$ , которая содержит центр  $S_1$ . Общий вариант метода двух изображений показывает, что при моделировании такой прямой исчезает одна из проецирующих плоскостей. Оставшаяся плоскость содержит исключенную прямую. В результате одна из проекций совпадает с соответствующей линией связи, а другая – превращается в точку, которая принадлежит другой линии связи. Такие проекции обозначают термином: «вырождается в точку».

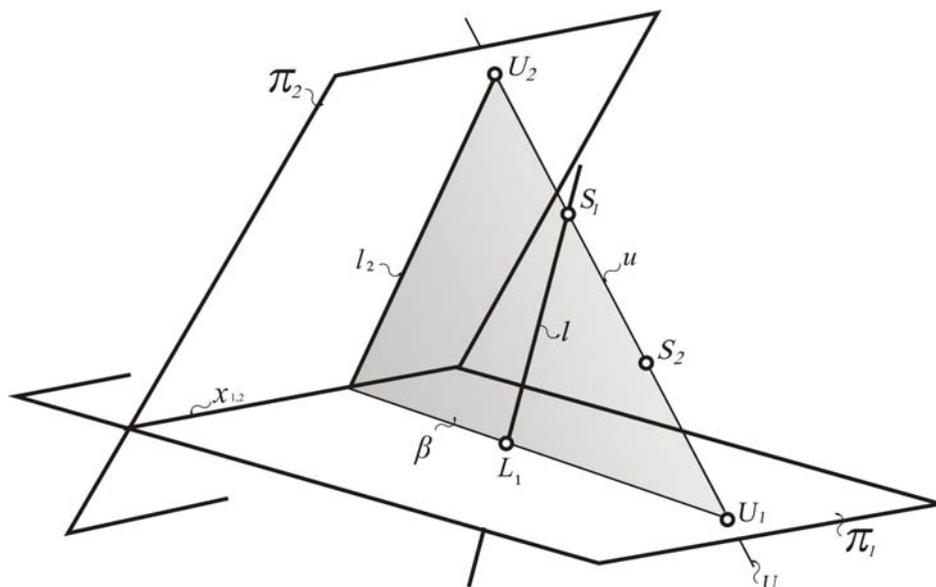


Рис. 82. Моделирование проецирующей прямой (общий случай)

Для стандартных вариантов метода двух изображений алгоритм проецирования прямой, содержащей центр проецирования  $S_1$ , выглядит следующим образом:

$$\begin{aligned}
 l \cup S_1 &= l; \\
 l \cup S_2 &= \beta; \\
 l \cap \pi_1 &= L'_1; \\
 \beta \cap \pi_2 &= l_2; \\
 L'_1 \cup S_{2(3)} &= m_3; \\
 m_3 \cap l_2 &= L_1.
 \end{aligned}$$

Если прямая  $l$  пройдет через центр  $S_2$ , то в точку выродится ее вторая проекция, а первая совпадет с линией связи. После перехода к однокартинному чертежу вырожденная проекция точки расположится на другой проекции прямой.

Если прямая  $l$  пройдет через центр  $S_2$ , то в точку выродится ее вторая проекция, а первая совпадет с линией связи. После перехода к однокартинному чертежу вырожденная проекция точки расположится на другой проекции прямой.

Моделирование прямой, содержащей центр проецирования  $S_2$ , в аксонометрии избегают. Это объясняется тем, что аксонометрия строится с целью показать объект таким, каким его видят глаза человека. Жизненный опыт человека показал, что человек лучше воспринимает невырожденное изображение. Поэтому вырождение объектов нежелательно. Но прямые, которые содержат центр проецирования  $S_1$ , изображаются достаточно часто. Процесс моделирования проецирующей прямой, содержащей центр

проецирования  $S_1$ , представлен на рис. 83 и приведенном ниже алгоритме. Полученная модель изображена на рис 84.

На эюре Монжа моделируются прямые, содержащие как центр проецирования  $S_1$ , так и центр  $S_2$ . На рис. 85 приведен пример моделирования прямой, которая содержит центр проецирования  $S_1$ , а на рис. 87 – центр  $S_2$ . Полученные в итоге модели изображены на рис. 86, 88.

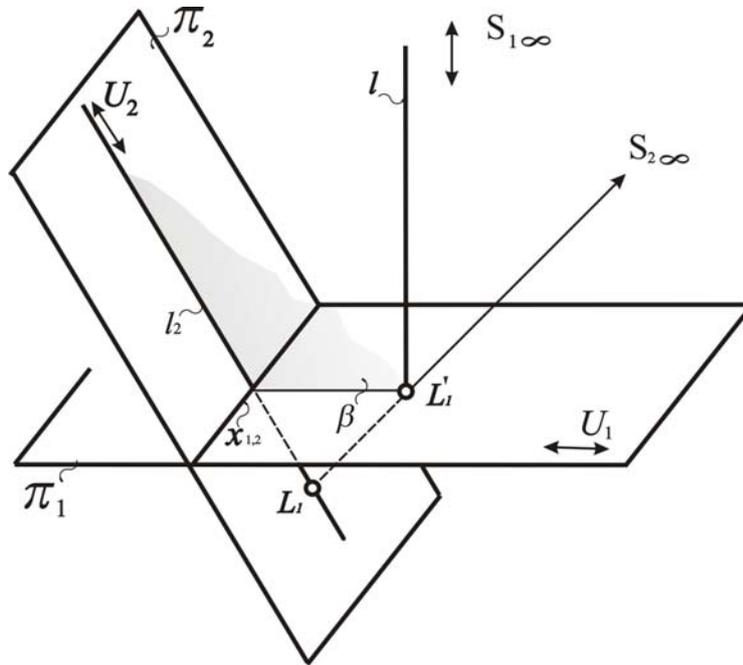


Рис. 83. Моделирование проецирующей прямой в аксонометрии

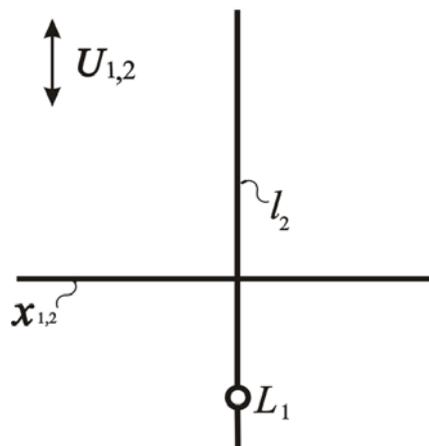


Рис. 84. Модель проецирующей прямой в аксонометрии

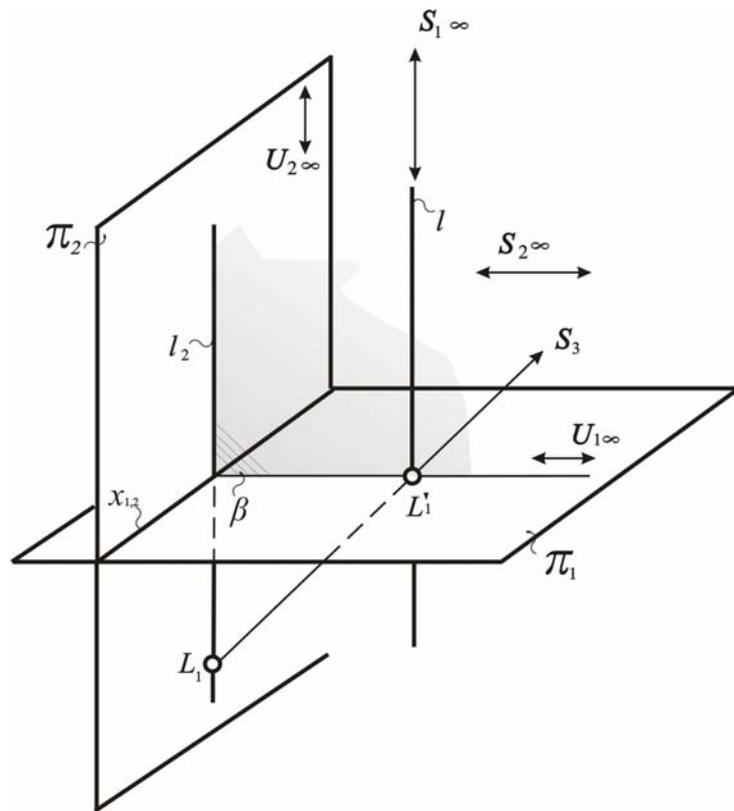


Рис. 85. Моделирование проецирующей прямой, которая содержит центр  $S_1$ , на эюре Монжа

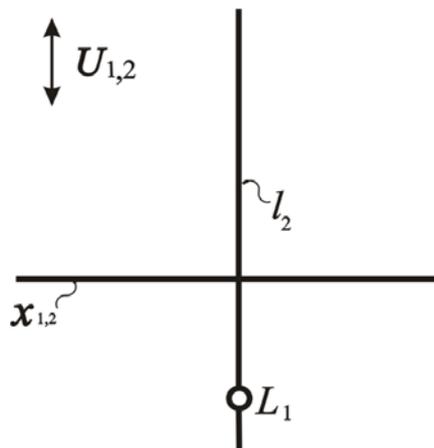


Рис. 86. Модель на эюре Монжа проецирующей прямой, которая содержит центр  $S_1$

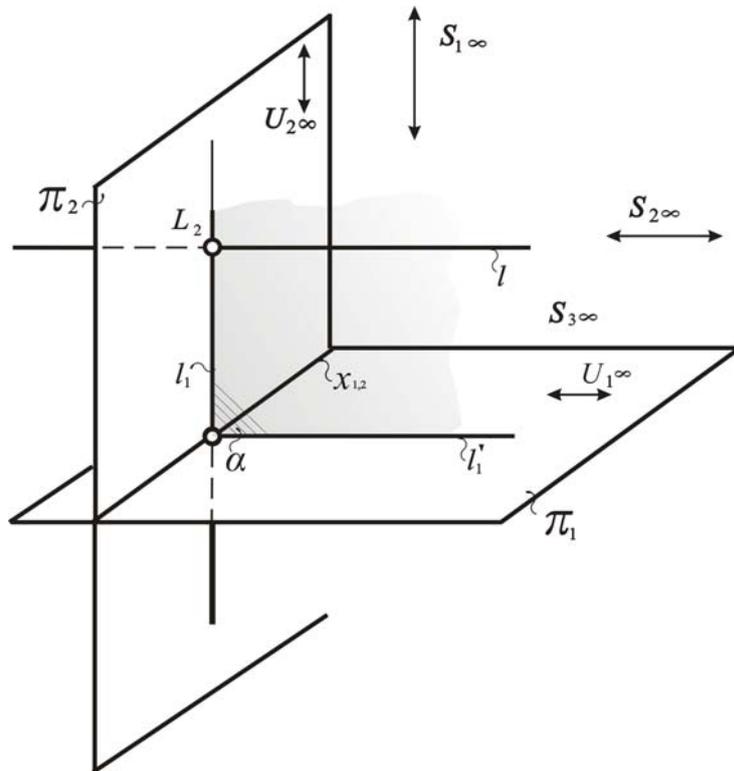


Рис. 87. Моделирование проецирующей прямой, которая содержит центр  $S_2$ , на эюре Монжа

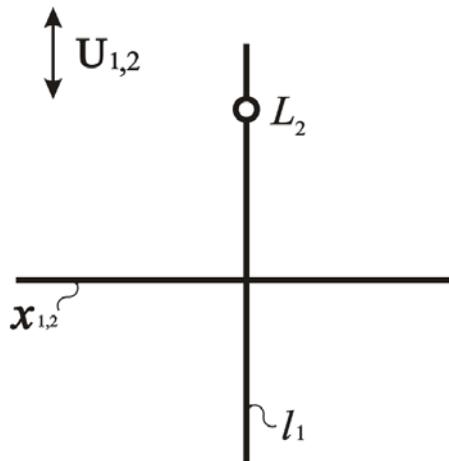


Рис. 88. Модель проецирующей прямой, которая содержит центр  $S_2$ , на эюре Монжа

**Прямые уровня.** Характерные признаки прямых уровня в различных вариантах метода двух изображений различаются.

Рассмотрим, какие характерные признаки возникают при моделировании горизонтали в аксонометрии и на эюре Монжа.

Из определения горизонтали следует, что она пересекает картину  $\pi_1$  в бесконечно удаленной точке.

Отличительным признаком модели горизонтали в аксонометрии является параллельность ее проекций друг другу. Он возникает благодаря тому, что проецирующие плоскости  $\beta$  и  $\gamma$  оказываются параллельны друг другу (рис. 89). Параллельность обусловлена общей для них бесконечно удаленной прямой, которая проходит через центр  $S_1$  и точку пересечения прямых  $l$  и  $l_1$ .

$$\begin{aligned}
 l \cup S_1 &= \alpha; \\
 l \cup S_2 &= \beta; \\
 \alpha \cap \pi_1 &= l'_1; \\
 \beta \cap \pi_2 &= l_2; \\
 l'_1 \cup S_3 &= \gamma \parallel \beta; \\
 \gamma \cap \pi_2 &= l_1 \parallel l_2.
 \end{aligned}$$

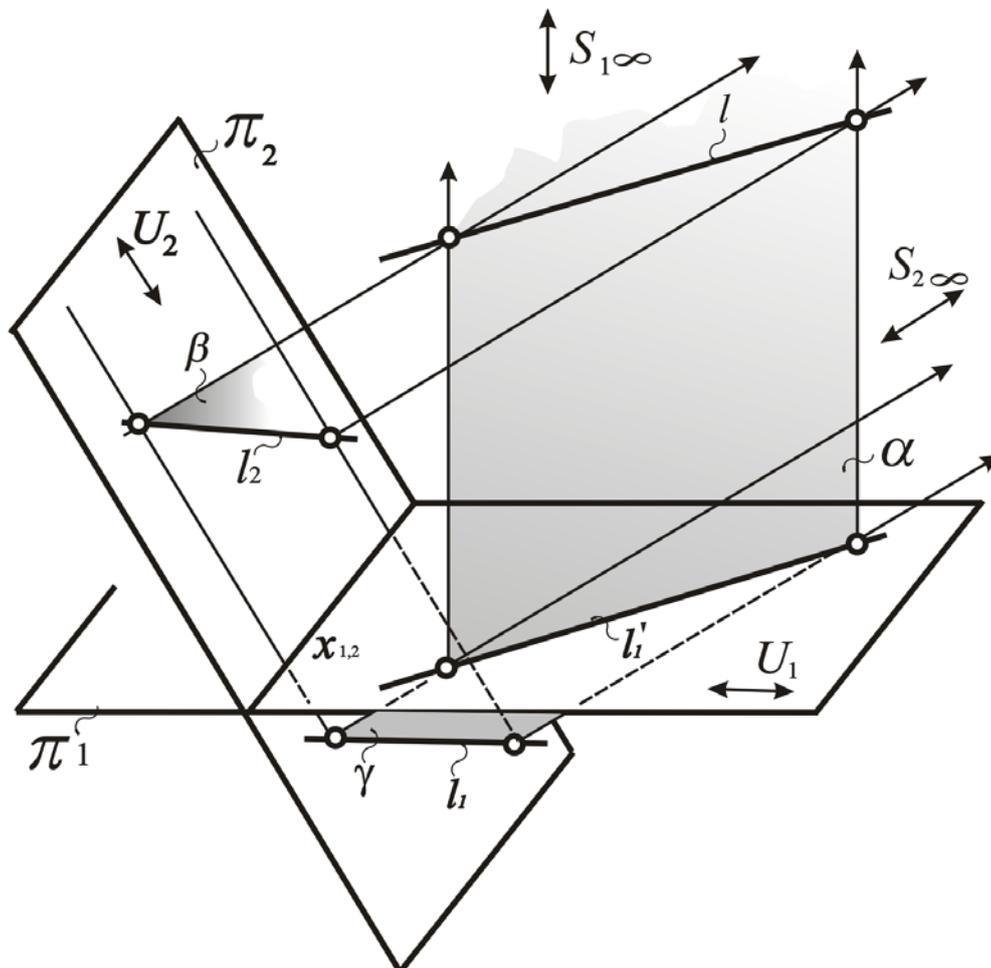


Рис. 89. Моделирование горизонтали в аксонометрии

Модель горизонтали в аксонометрии изображена на рис.90.

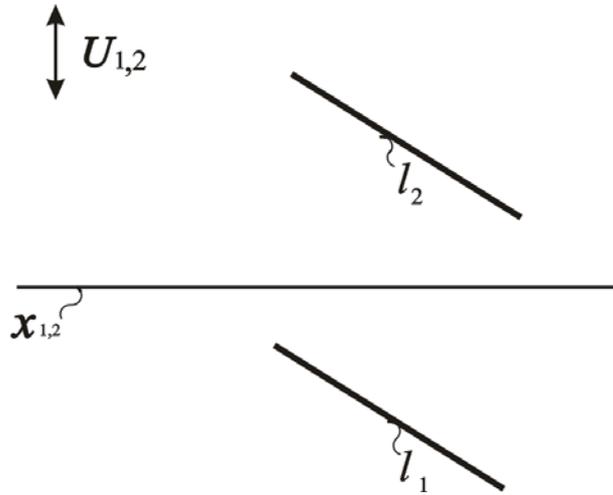


Рис. 90. Модель горизонтали в аксонометрии

При моделировании горизонтали на эюре Монжа (рис.91) проецирующая плоскость  $\beta$  оказывается параллельна картине  $\pi_1$ . Это обстоятельство порождает следующий характерный признак: вторая проекция горизонтали параллельна оси проекций  $x_{1,2}$  (рис. 92). Эта особенность отражена и в приведенном ниже алгоритме.

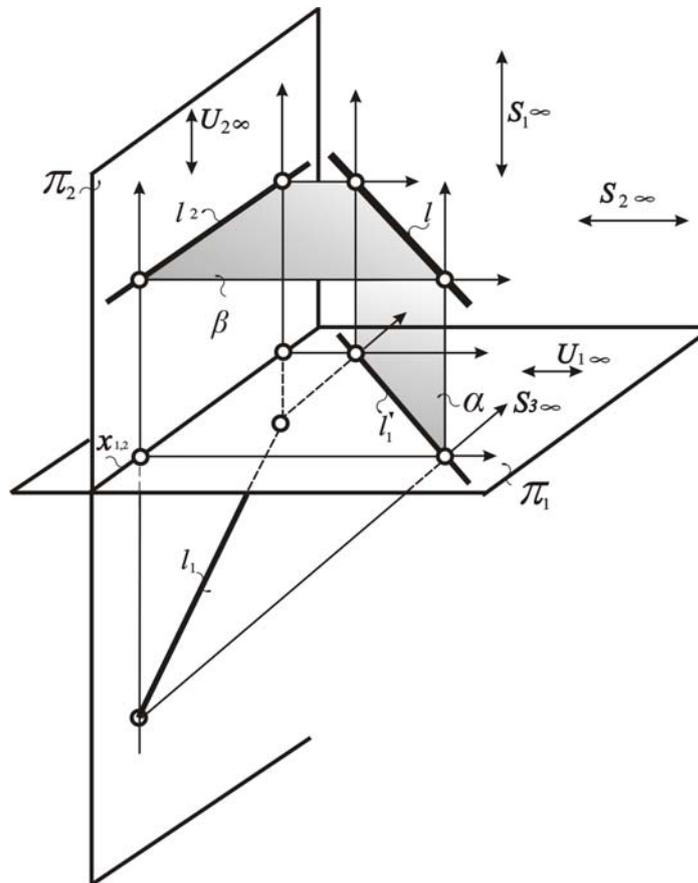


Рис. 91. Моделирование горизонтали на эюре Монжа

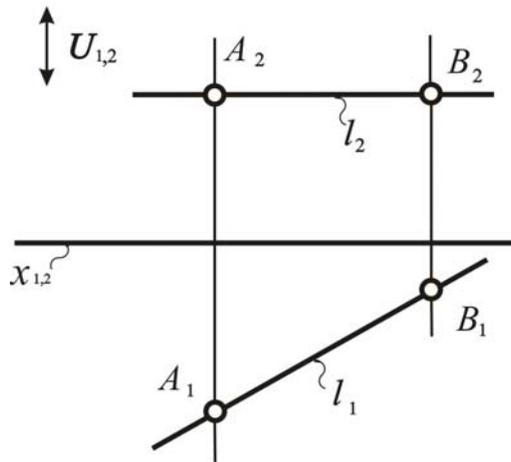


Рис. 92. Модель горизонтали на эюре Монжа

При моделировании фронтали на эюре Монжа (рис.93) проецирующая плоскость  $\acute{\alpha}$  оказывается параллельна картине  $\pi_2$ . Это обстоятельство порождает следующий характерный признак: первая проекция фронтали параллельна оси проекций  $x_{1,2}$  (рис. 94).

- $l \cup S_1 = \alpha;$
- $l \cup S_2 = \beta \parallel \pi_1;$
- $\alpha \cap \pi_1 = l'_1;$
- $\beta \cap \pi_2 = l_2 \parallel x_{1,2};$
- $l'_1 \cup S_3 = \gamma;$
- $\gamma \cap \pi_2 = l_1.$

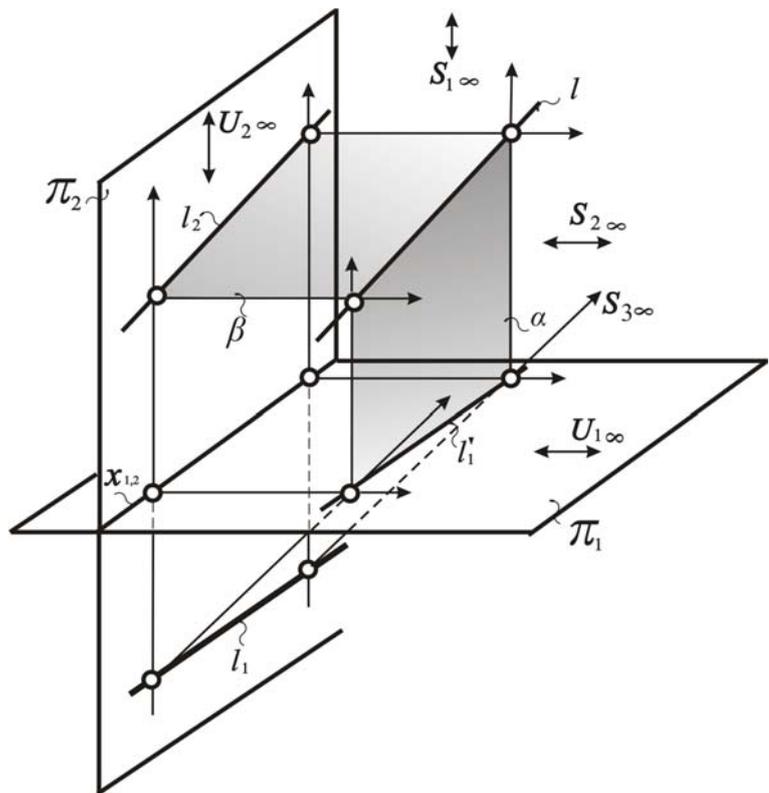


Рис. 93. Моделирование фронтали на эюре Монжа

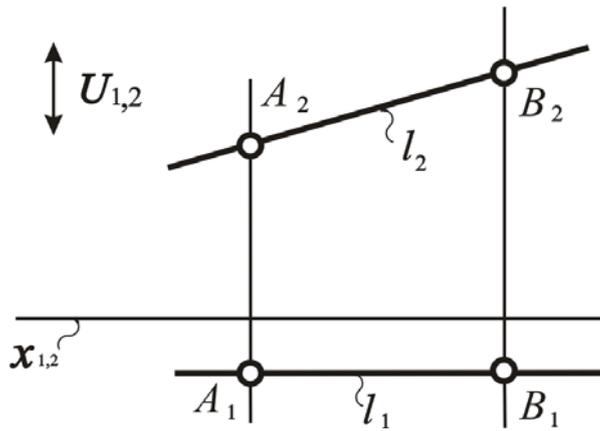
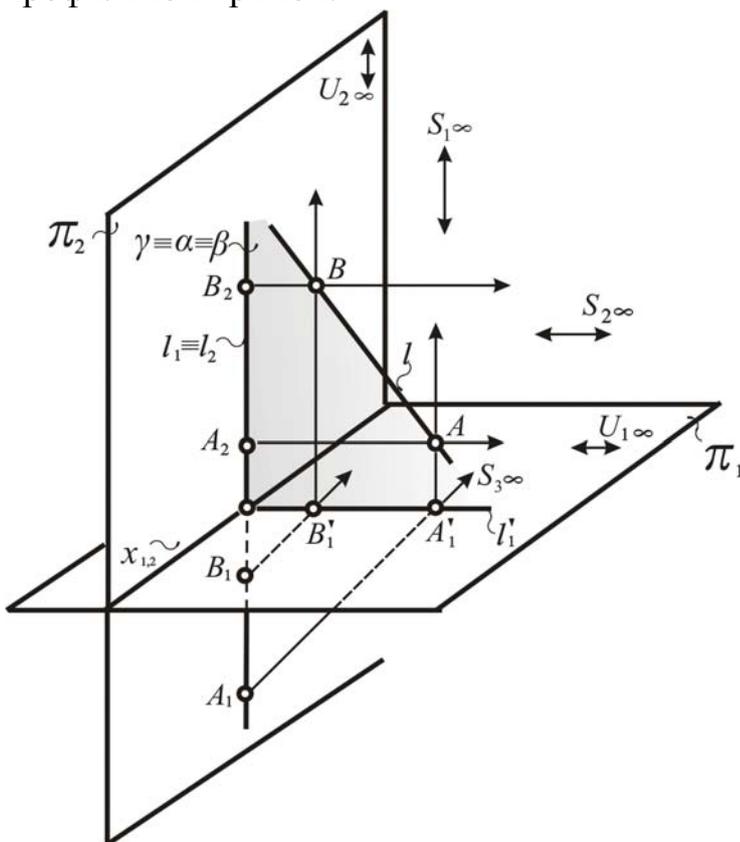


Рис. 94. Модель фронтали на эюре Монжа

Характерные признаки модели профильной прямой лишают ее модель наглядности. Поэтому ее избегают изображать в аксонометрии, а работают с ней в основном на эюре Монжа, где она встречается достаточно часто. На рис. 95 и приведенном ниже алгоритме показан процесс моделирования профильной прямой.



$$\begin{aligned}
 l \cup S_1 \cup S_2 &= \alpha \equiv \beta; \\
 \alpha \equiv \beta \cap \pi_1 &= l'_1; \\
 \alpha \equiv \beta \cap \pi_2 &= l_2; \\
 l'_1 \cup S_3 &= \gamma \equiv \alpha \equiv \beta; \\
 \gamma \cap \pi_2 &= l_1 \equiv l_2.
 \end{aligned}$$

Рис. 95. Моделирование профильной прямой на эюре Монжа

Поскольку профильная прямая пересекает исключенную прямую, то все проецирующие плоскости  $\alpha$ ,  $\beta$ , и  $\gamma$  тождественно совпадают друг с другом. В конечном счете это приводит к совпадению обеих проекций прямой, но при этом проекции точек этой прямой не совпадают. В рассмотренном примере это подтверждают проекции точек  $A$  и  $B$  (рис. 96).

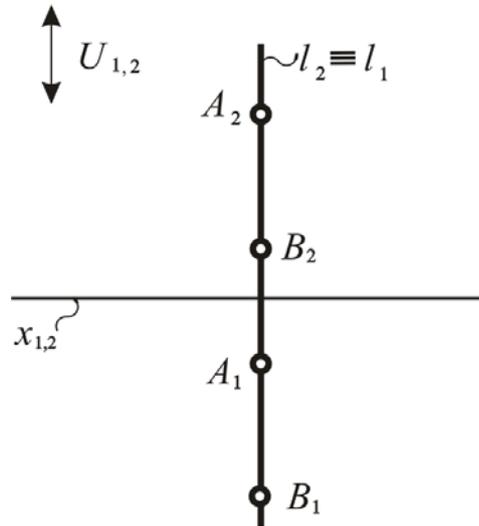


Рис. 96. Модель профильной прямой на эпюре Монжа

### 3.5.3. Приемы работы с моделью прямой

**Задача 3.** Дана одна проекция точки, которая принадлежит прямой. Построить другую проекцию точки.

Рассмотрим решение третьей задачи. Независимо от того, где она решается – в аксонометрии или на эпюре Монжа, алгоритм ее решения одинаков, если дана модель прямой  $l$  (рис. 97, а). На одной проекции дана точка  $C \in l$ . Построить другую проекцию точки  $C$ .

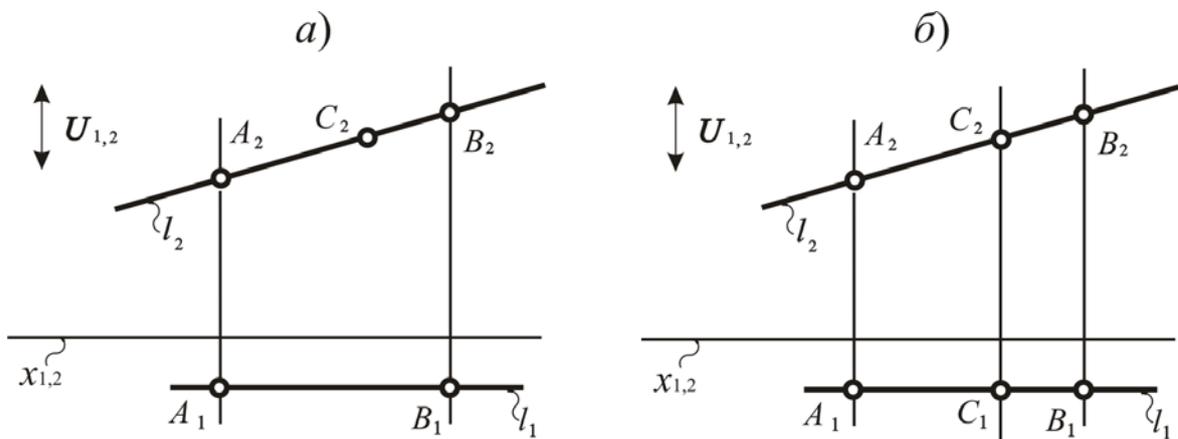


Рис. 97. Построение точки  $C$ , которая лежит на прямой  $l$ , по одной заданной проекции

Решение определяется следующими положениями:

1) Проецирование сохраняет взаимную принадлежность элементов друг другу (инварианты проецирования).

2) Две проекции точки располагаются на соответственных друг другу линиях связи исключенных пучков (определение модели точки).

Алгоритм решения:

1. Через заданную проекцию точки  $C$  проведем линию связи.

2. Пересечем линией связи другую проекцию прямой  $l$ . Получим искомую проекцию точки  $C$  (рис. 97, б).

На рис. 98 дан второй вариант условия, при котором прямая занимает проецирующее положение. Искомая проекция точки определяется по этому же алгоритму. Только линия связи совпадает с невырожденной проекцией прямой, а искомая проекция точки тождественно совпадает с вырожденной проекцией прямой.

В случае, когда прямая занимает проецирующее положение и заданная проекция точки принадлежит вырожденной проекции прямой, задача решения не имеет.

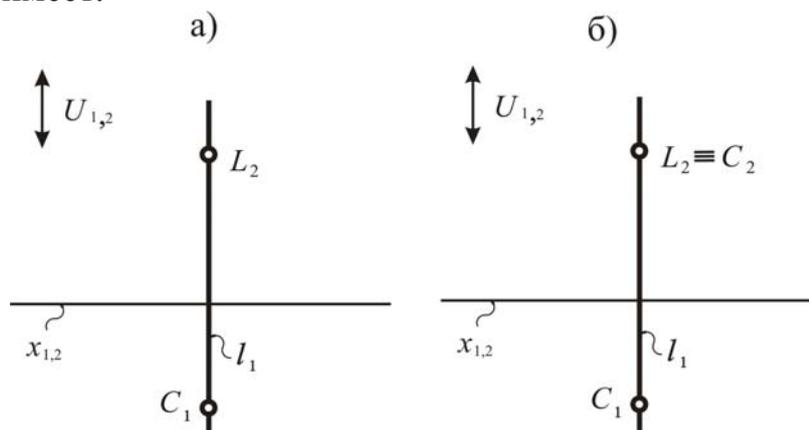


Рис. 98. Построение точки  $C$ , которая лежит на прямой  $l$ , по одной из заданных проекций (прямая занимает проецирующее положение)

В случае с профильной прямой решение задачи усложняется. При ее решении на эпюре Монжа и в аксонометрии необходимо опираться на пятый инвариант проецирования. Выполним следующие операции алгоритма (рис. 99):

1. Через один из концов проекции отрезка прямой, на котором отсутствует модель точки, под произвольным углом проведем вспомогательную прямую.

2. Отложим на ней другую проекцию отрезка вместе с заданной проекцией точки.

3. Соединим свободные концы отрезков прямой.

4. Через заданную проекцию точки на вспомогательном отрезке проведем прямую, параллельную той, которая соединила свободные концы отрезков. Получим искомую проекцию точки.

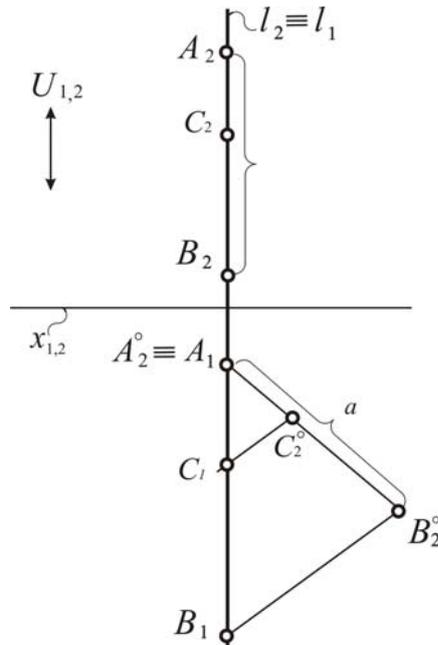


Рис. 99. Построение точки  $C$ , которая лежит на прямой  $l$ , по одной из заданных проекций (прямая занимает профильное положение)

**Задача 4.** Дана модель прямой. Построить точки ее пересечения с картинами.

При решении этой задачи необходимо иметь в виду характерные признаки моделей точек, которые принадлежат картинам.

Если точка промоделирована в аксонометрии (рис. 100), то характерным признаком модели точки, лежащей в  $\pi_1$ , является тождественное совпадение ее проекций. Поэтому, найдя общую точку проекций, определим общую точку прямой и картины  $\pi_1$ . В приведенном примере это точка  $D$ .

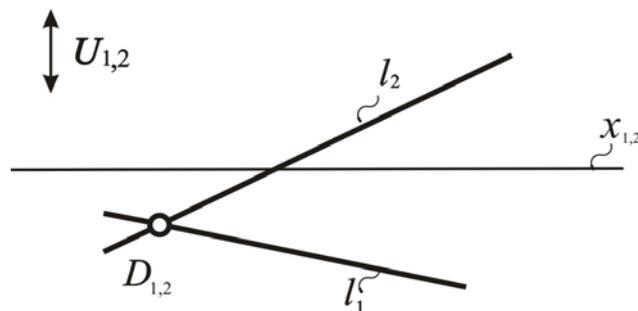


Рис. 100. Построение точек пересечения прямой с картиной  $\pi_1$  в аксонометрии

Если аналогичная задача решается на эпюре Монжа, то характерным признаком точки, лежащей в картине  $\pi_1$ , является принадлежность ее второй проекции оси  $x_{1,2}$ . Принадлежность точки к картине  $\pi_2$  располагает ее первую проекцию на оси  $x_{1,2}$ ; поэтому пересекаем первую проекцию прямой  $l$  с осью  $x_{1,2}$  и получаем точку  $M$ , в которой прямая пересекает  $\pi_1$  (рис. 101). Для определения общей точки прямой и картины  $\pi_2$  необходимо

начать с пересечения второй проекции прямой  $l$  с осью  $x_{1,2}$ . Получаем точку  $N$ .

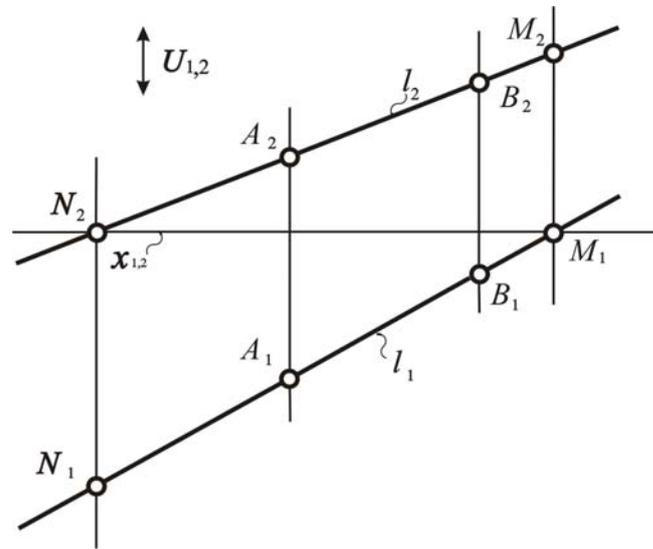


Рис. 101. Построение точек пересечения прямой с картинами  $\pi_1$  и  $\pi_2$  на эпюре Монжа

### Контрольные вопросы

1. Каковы операции алгоритма по построению модели прямой, построенной методом двух изображений?

2. Как называются прямые, проходящие через произвольную точку трехмерного пространства и центры проецирования?

3. Дайте определение плоской модели прямой трехмерного пространства, построенной методом двух изображений на совмещенных картинах.

4. Приведите доказательство, что полученная модель сохраняет всю геометрическую информацию исходной прямой.

5. Из решения, каких задач складывается работа с моделью прямой?

6. Перечислить прямые, которые занимают частное положение по отношению к проекционному аппарату.

7. Каков характерный признак модели прямой, которая содержит центр проецирования  $S_1$  в аксонометрии, на эпюре Монжа?

8. Каков характерный признак модели прямой, которая проходит через центр проецирования  $S_2$  в аксонометрии, на эпюре Монжа?

9. Каков характерный признак модели прямой, которая параллельна картине  $\pi_1$  в аксонометрии, на эпюре Монжа?

10. Каков характерный признак модели прямой, которая параллельна картине  $\pi_2$  аксонометрии, на эпюре Монжа?

11. Каков характерный признак модели прямой, которая пересекает исключенную прямую?

12. Каков алгоритм построения проекции точки, принадлежащей прямой, если дана одна ее проекция? Как изменяется алгоритм решения этой задачи при частных положениях прямой?

13. Каков алгоритм построения проекций общих точек прямой и картин? Как изменяется алгоритм решения этой задачи при частных положениях прямой

### 3.6. Модель плоскости

Моделирование плоскости определяется рассмотренным ранее законом построения плоских моделей трехмерных объектов. Следуя ему, необходимо объединить центры проецирования с заданной плоскостью. В результате проецирующим элементом окажется все трехмерное пространство, которое невозможно пересечь с картиной, так как оно содержит картинную плоскость. Поэтому будем проецировать точки и прямые заданной плоскости на картины  $\pi_1, \pi_2$  из центров  $S_1, S_2$ . В результате их проекции заполнят все плоские поля этих картин. После перехода к однокартинному чертежу получим совмещенное плоское поле точек и прямых, которое можно считать моделью плоскости. Но работать с такой моделью крайне затруднительно. Чтобы снять эти трудности, следует выявить какие-то элементы в виде точек и прямых, которые однозначно определяли бы промоделированную плоскость. Для этого обратимся к трехмерному пространству.

Чтобы выделить плоскость из множества плоскостей трехмерного пространства, необходим минимальный набор элементов, который называется **репером**.

Реперами могут служить следующие наборы:

1. Три точки, которые не лежат на одной прямой.
2. Точка и прямая, не содержащая эту точку.
3. Две пересекающиеся (параллельные) прямые.
4. Треугольник или другая плоская фигура.

Учитывая, что метод двух изображений позволяет однозначно моделировать трехмерные объекты на плоскости, можно утверждать, что **моделью плоскости, построенной методом двух изображений, является модель одного из ее реперов.**

Работа с моделью плоскости складывается из решения следующих задач:

- 1) моделирования любой плоскости трехмерного пространства;
- 2) определения положения плоскости относительно проекционного аппарата по заданной модели;

3) построения проекций прямых, принадлежащих плоскости, по одной проекции;

4) построения проекций точек, принадлежащих плоскости, по одной заданной проекции;

Для решения этих задач необходима система всех предыдущих знаний, которая представлена графом на рис. 102.

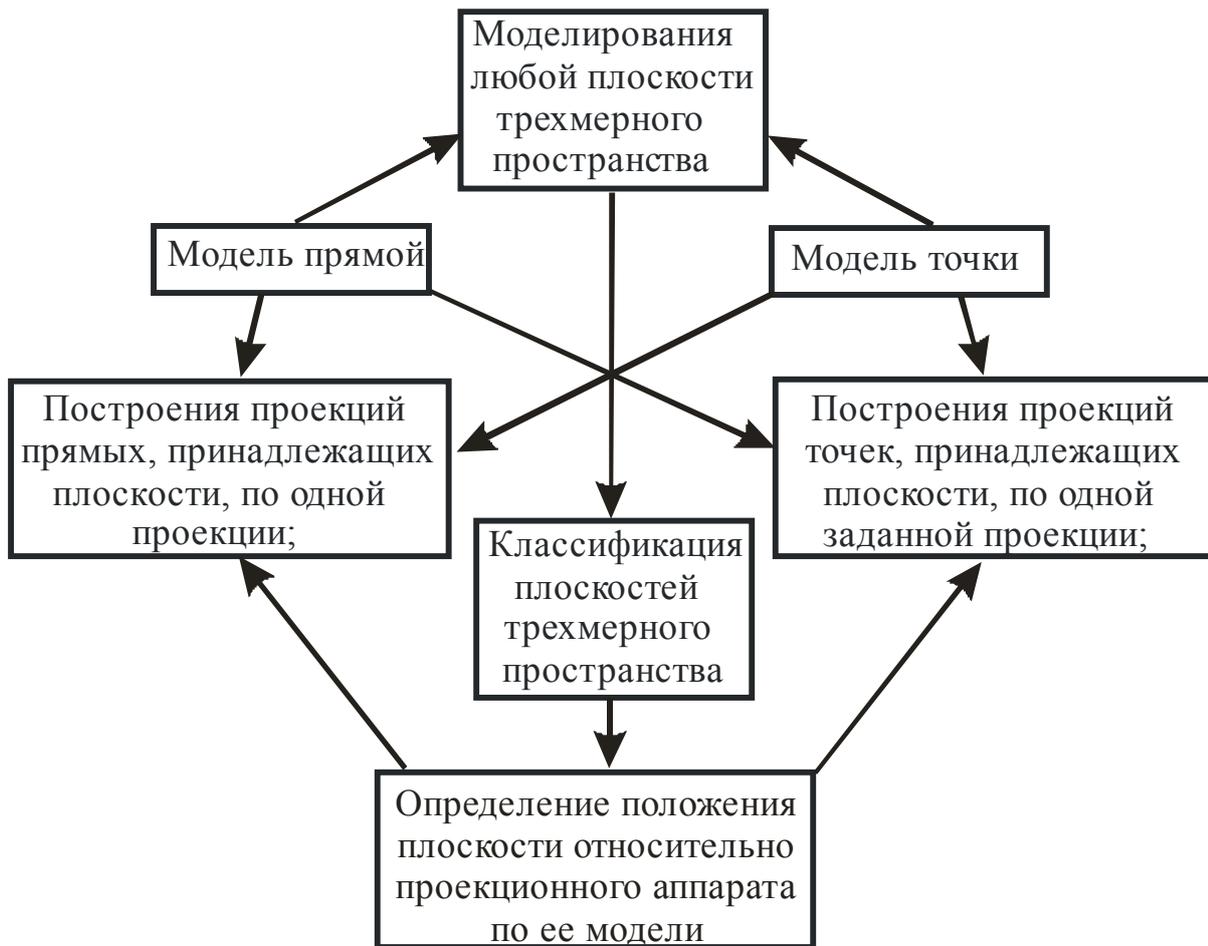


Рис. 102. Система знаний, необходимых для освоения раздела «Модель плоскости»

### 3.6.1. Моделирование плоскости общего положения

**Задача 1.** *Про моделировать плоскость трехмерного пространства на плоской модели.*

Исходя из определения модели плоскости, можно утверждать, что процесс ее моделирования складывается из моделирования точек и прямых трехмерного пространства. Эта процедура рассматривалась ранее. Примеры моделей плоскостей, заданных различными реперами, даны на рис. 103.

На рис. 103, а, б, в, г плоскости промоделированы в аксонометрии и на эюре Монжа. Реперы этих плоскостей представляют собой соответственно три точки, две пересекающиеся прямые, прямую с точкой и треугольник.

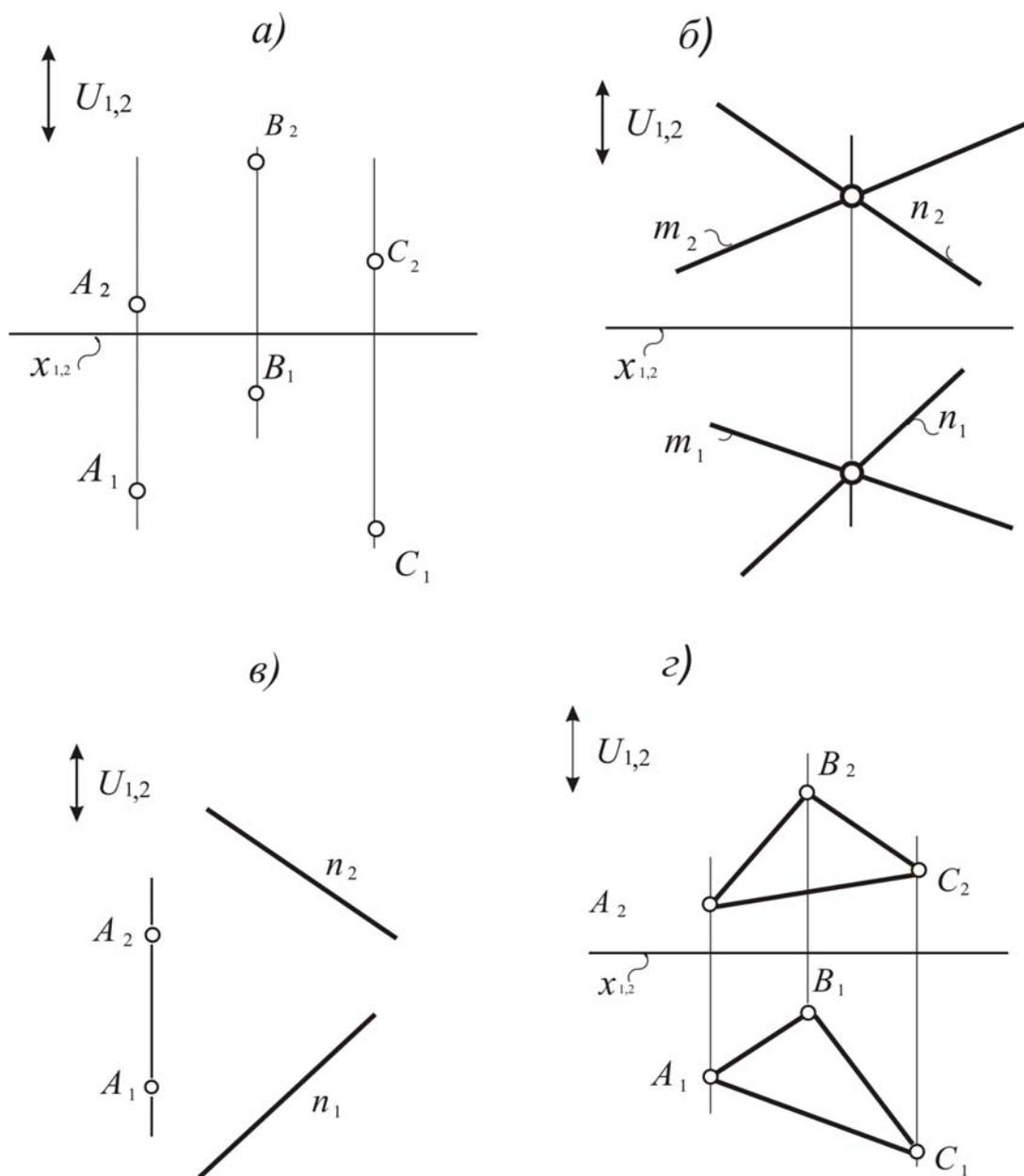


Рис. 103. Примеры моделей плоскостей, заданных различными реперами

### 3.6.2. Моделирование плоскости частного положения

**Задача 2.** Определение положения плоскости относительно проекционного аппарата по заданной модели связано с отнесением ее к одной из групп плоскостей трехмерного пространства.

Основанием к делению на эти группы является расположение плоскости в исходном пространстве относительно проекционного аппарата. В результате получим следующие группы плоскостей:

1. **Плоскости частного положения.**

- *Проецирующие.* К ним относятся такие плоскости, которые содержат один центр проецирования, т.е. принадлежат связке плоскостей с центром в точке  $S_1$  или  $S_2$ .

- *Плоскости уровня.* Это плоскости, параллельные одной из картин. Плоскость, параллельная  $\pi_1$ , называется горизонтальной плоскостью уровня, параллельная  $\pi_2$  – фронтальной плоскостью уровня.

- *Профильные плоскости* – это плоскости, которые принадлежат пучку с осью  $u$  (исключенная прямая). Иначе говоря, содержат оба центра проецирования.

2. *Плоскости общего положения.* К ним относятся все остальные плоскости.

Модели плоскостей частного положения обладают характерными признаками, по которым их легко отличить от моделей других плоскостей.

Характерной особенностью модели проецирующей плоскости является вырождение одной из ее проекций в прямую линию. Например, если плоскость содержит центр  $S_1$  (рис. 104), то в прямую линию вырождается ее первая проекция. Примеры моделей таких проецирующих плоскостей приведены на совмещенной модели аксонометрии и эпюра Монжа (рис. 104, а, б, в).

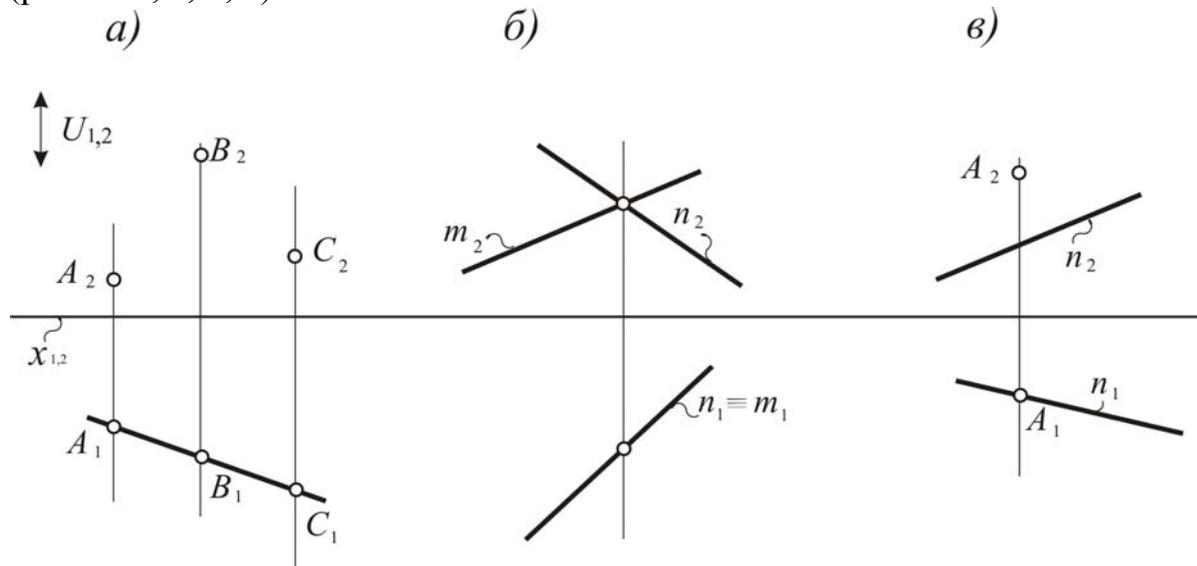


Рис. 104. Примеры моделей проецирующих плоскостей, которые содержат центр проецирования  $S_1$

Плоскость, содержащая центр  $S_2$ , имеет вторую проекцию в виде прямой. В аксонометрии обычно избегают пользоваться моделями таких плоскостей. Хотя работать с ними можно, но они не отвечают основному

требованию – наглядности, которое предъявляется к этим изображениям в аксонометрии, где основную смысловую нагрузку несет второе изображение. Примеры моделей на эпюре Монжа проецирующих плоскостей, содержащих центр  $S_2$ , даны на рис. 105. Плоскости заданы всеми вариантами реперов.

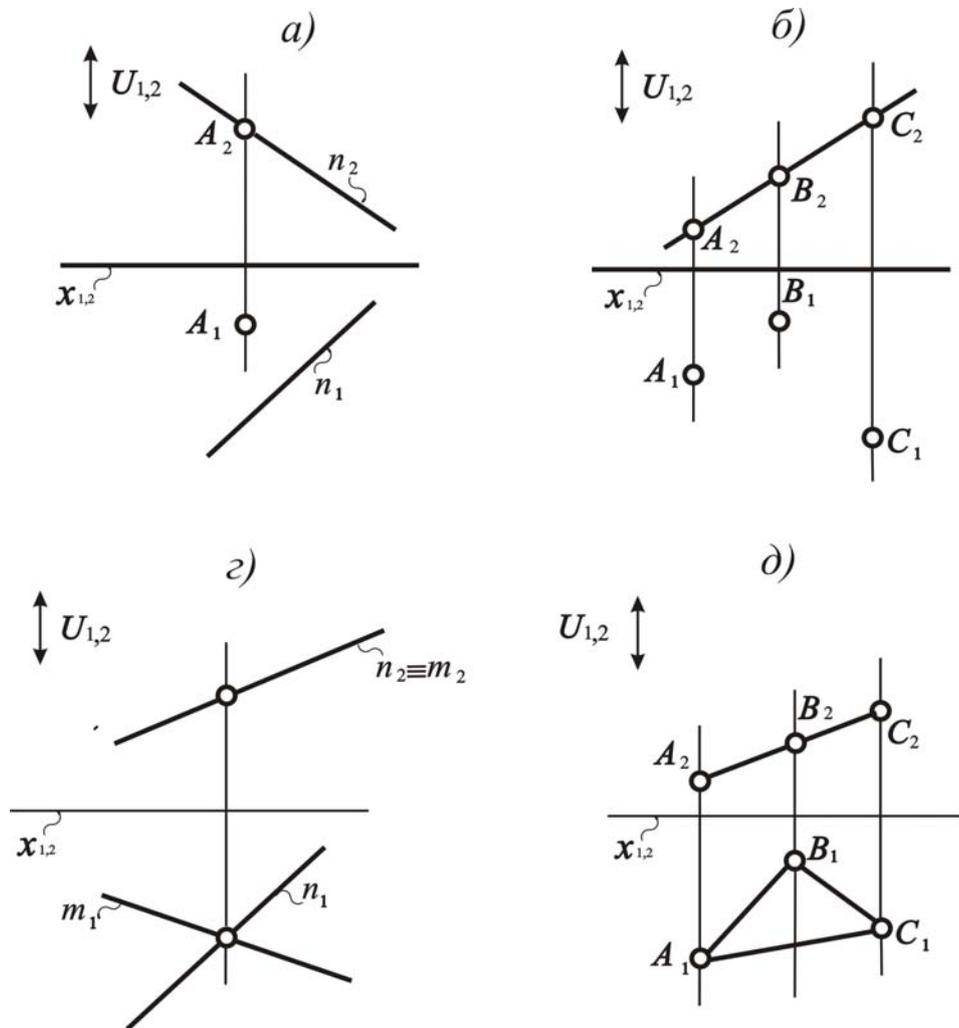


Рис. 105. Примеры моделей проецирующих плоскостей, которые содержат центр проецирования  $S_2$

Характерные особенности, возникающие при моделировании **плоскостей уровня**, определяются конкретным устройством проекционного аппарата. Поскольку проекционные аппараты аксонометрии и эпюра Монжа имеют некоторые различия, то рассмотрим процесс построения модели плоскостей уровня для каждого случая отдельно.

**Аксонометрия.** Модель плоскости, параллельной картине  $\pi_2$ , в аксонометрии не имеет характерных признаков и не отличается от модели плоскости общего положения. Плоскость, параллельная  $\pi_1$ , содержит прямые, которые являются только горизонталями. В результате возникает характер-

ный признак, который выделяет модель этой плоскости (рис. 106) и состоит в том, что обе проекции ее репера параллельны друг другу.

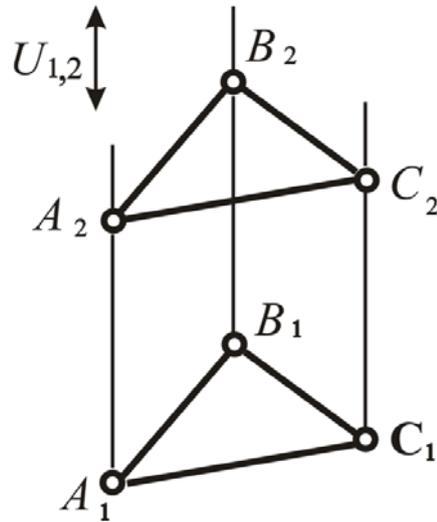


Рис. 106. Модель горизонтальной плоскости уровня (аксонометрия)

**Эпюр Монжа.** Отличительной чертой проекционного аппарата эпюра Монжа является принадлежность центров проецирования картинам ( $\pi_1 \supset S_2$ ,  $\pi_2 \supset S_1$ ). В результате все плоскости уровня на эпюре Монжа содержат один из центров проецирования и соответствующая проекция вырождается в прямую, которая параллельна оси  $x_{1,2}$ . На рис. 107 дан пример модели горизонтальной плоскости уровня, которая одновременно содержит центр проецирования  $S_2$ . Модель фронтальной плоскости уровня показана на рис.108.

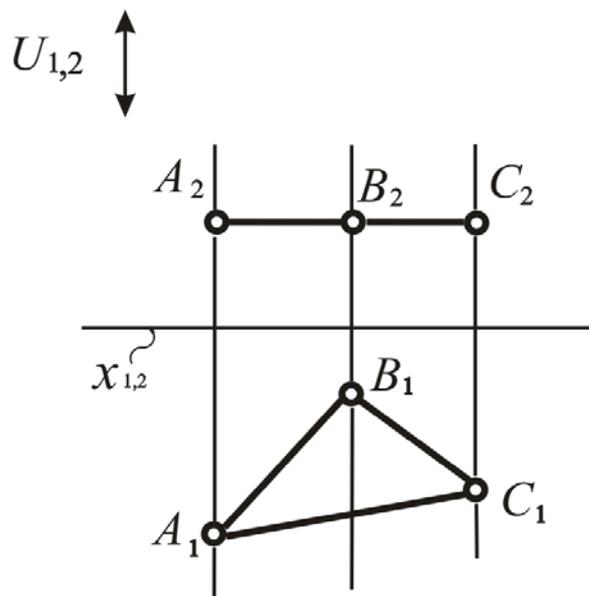


Рис. 107. Модель горизонтальной плоскости уровня (репер – треугольник)

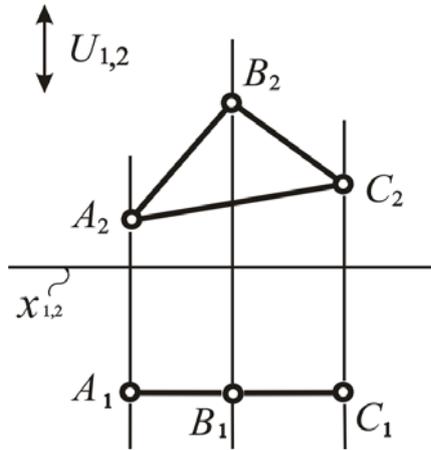


Рис. 108. Модель фронтальной плоскости уровня (репер – треугольник)

Характерной особенностью модели профильной плоскости является вырождение в прямые линии обеих ее проекций, которые совпадают с линиями связи (рис. 109). Это происходит потому, что плоскость содержит оба центра проецирования. Иначе говоря, профильная плоскость оказывается дважды проецирующей. При этом проецирует сама себя.

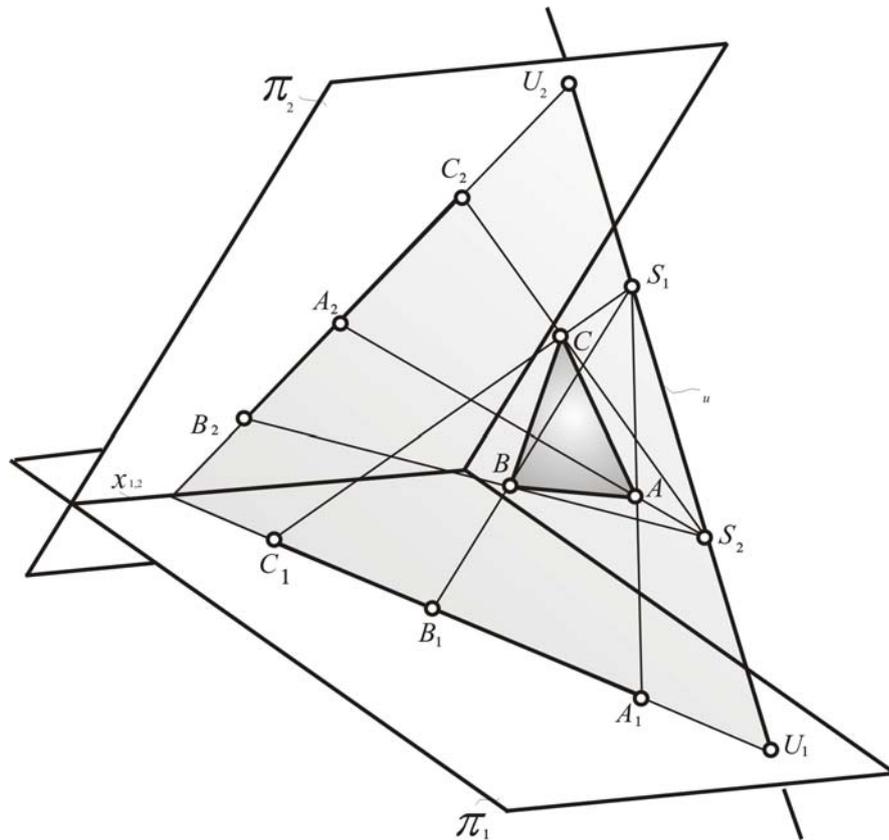


Рис. 109. Моделирование профильной плоскости

После перехода к однокартинному чертежу обе вырожденные проекции совпадают друг с другом и проходят через исключенную точку. Но тождественного совпадения здесь не происходит, т.к. проекции точек в

общем случае не совпадают друг с другом. Построенная таким образом модель профильной плоскости очень неудобна в ее использовании. Поэтому ее, по возможности, избегают изображать. Изредка она встречается на эюре Монжа (рис. 110).

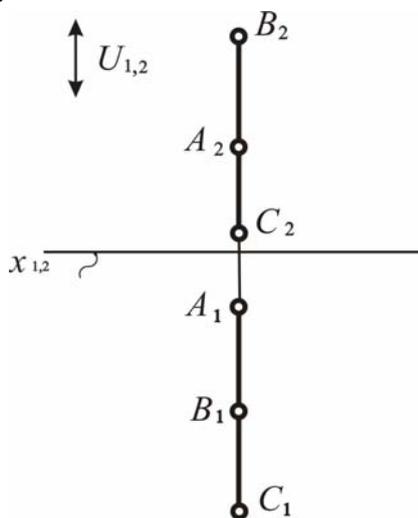


Рис. 110. Модель профильной плоскости (репер – треугольник)

### 3.6.3. Приемы работы с моделью плоскости

**Задача 3.** Построение проекции прямой, которая принадлежит плоскости, когда дана одна ее проекция (рис. 111), основано на знании следующих разделов:

1. Определение модели прямой.
2. Определение модели точки.
3. Признак принадлежности прямой к плоскости.
4. Третий инвариант проецирования.
5. Алгоритм решения задачи на построение проекции точки, принадлежащей прямой, в случае, когда дана одна ее проекция.

Моделью прямой являются два ее изображения. Поэтому если дана одна проекция прямой, есть и другая. Чтобы ее найти, воспользуемся признаком принадлежности прямой к плоскости и третьим инвариантом проецирования. Для этого возьмем на заданной проекции прямой две точки, которые принадлежат одновременно и плоскости. В примере на рис. 111,б это точки  $M$  и  $N$ . В этих точках  $l_1$  пересекает соответственно прямые  $m$  и  $n$ , представляющие плоскость. Теперь необходимо построить недостающие проекции этих точек. Они определяют положение искомой проекции прямой. Приведенное рассуждение справедливо и в случае, когда исходной является не только первая проекция прямой, но и вторая. Алгоритм решения этой задачи для обоих вариантов расположения исходной проекции прямой приведен ниже.

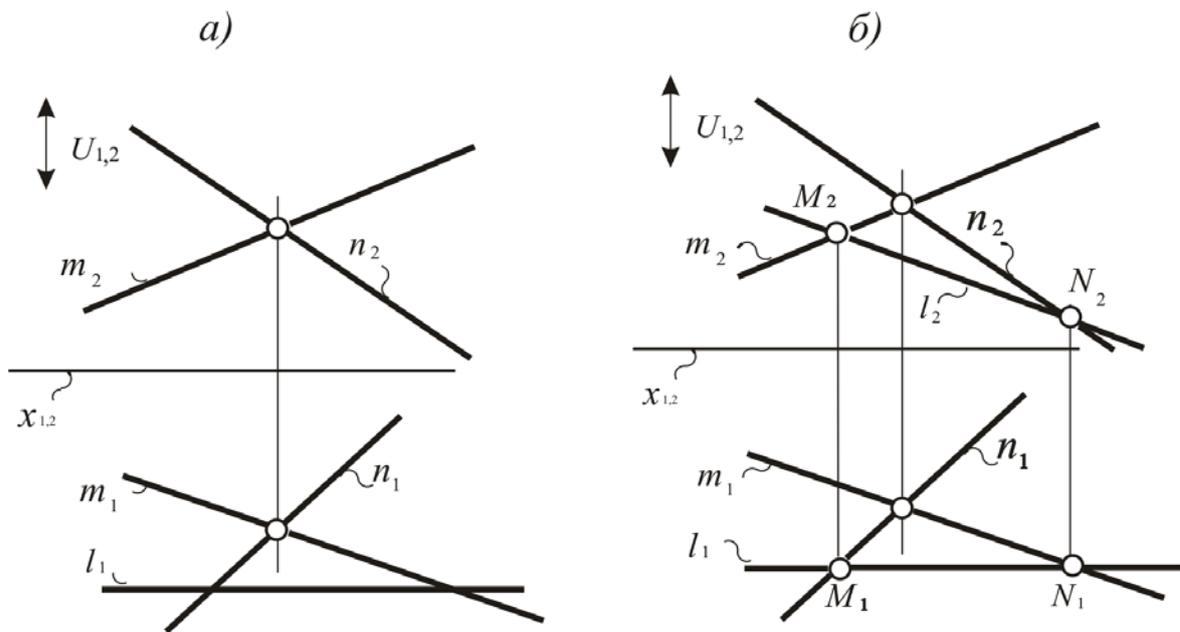


Рис. 111. Построение проекции прямой, которая лежит в плоскости, по одной ее проекции (репер – две пересекающиеся прямые)

$$l_{1(2)} \cap m_{1(2)} = M_{1(2)}$$

$$l_{1(2)} \cap n_{1(2)} = N_{1(2)}$$

$$M_{1(2)} \rightarrow M_{2(1)}$$

$$N_{1(2)} \rightarrow N_{2(1)}$$

$$M_{2(1)} \cup N_{2(1)} = l_{2(1)}$$

Если плоскость занимает проецирующее положение и исходная проекция прямой задана на невырожденной проекции плоскости, то решение задачи упрощается (рис. 112). Искомая проекция прямой принадлежит вырожденной проекции плоскости. В случае, когда исходная проекция принадлежит вырожденной проекции плоскости, задача решения не имеет.

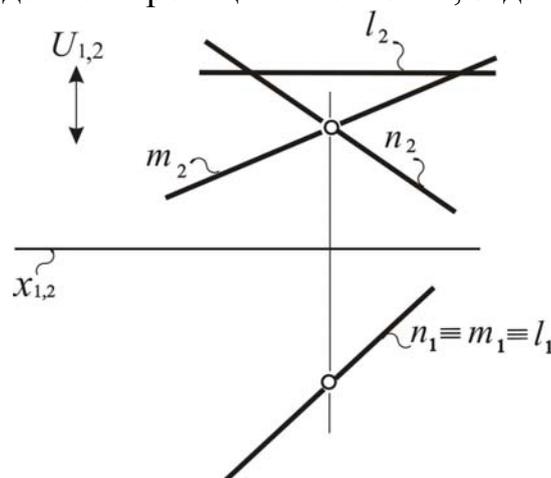


Рис. 112. Построение проекции прямой, которая лежит в проецирующей плоскости, по одной ее проекции

**Задача 4.** Построение проекции точки, которая принадлежит плоскости, по одной заданной проекции основано на знании следующих разделов:

1. Определение модели точки.
2. Признак принадлежности точки к плоскости.
3. Третий инвариант проецирования.
4. Алгоритм решения задачи 3 настоящего подраздела.

На рис. 113 представлен пример решения этой задачи одновременно во всех вариантах метода двух изображений. Дана первая проекция точки  $K$  (рис. 113, а), может быть дана и вторая проекция. Любая точка плоскости определяется в результате пересечения двух линий. Исходя из определения модели точки, через заданную проекцию точки  $K$  проведем линию связи. Другой линией будет произвольная прямая  $l$ , которая лежит в плоскости и содержит точку  $K$ . Построим другую проекцию этой прямой. Она, пересекаясь с проведенной линией связи, определит положение искомой проекции точки (рис. 113,б). Эта последовательность действий отражена в приведенном ниже алгоритме.

$$K_{1(2)} \cap l_{1(2)}$$

$$l_{1(2)} \rightarrow l_{2(1)}$$

$$K_{1(2)} \rightarrow K_{2(1)}$$

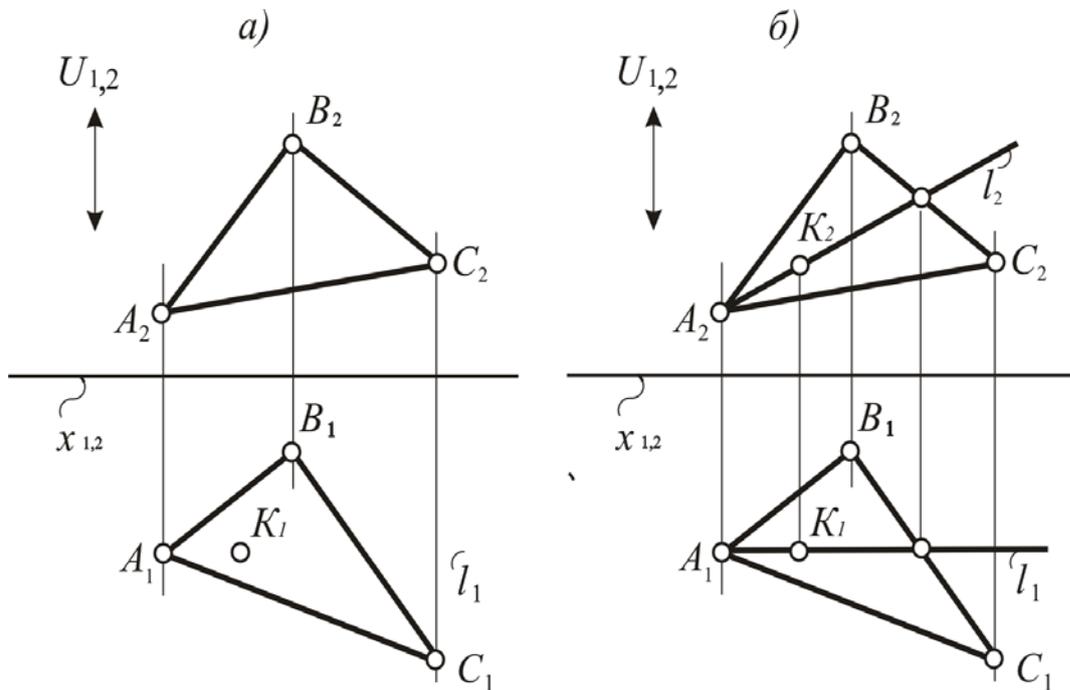


Рис. 113. Построение проекции точки, которая лежит в плоскости, по одной ее проекции

Если плоскость занимает проецирующее положение и исходная проекция точки  $K$  задана на невырожденной проекции плоскости, то решение задачи упрощается (рис. 114). Искомая проекция точки  $K$  принадлежит

вырожденной проекции плоскости. В случае, когда исходная проекция точки принадлежит вырожденной проекции плоскости, задача решения не имеет.

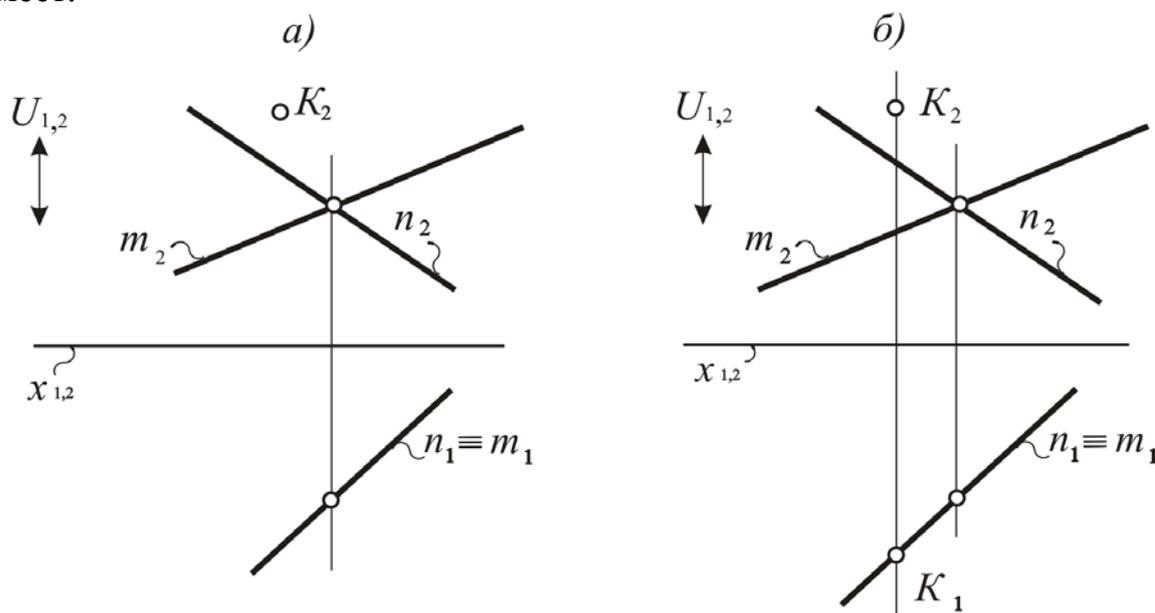


Рис. 114. Построение проекции точки, которая лежит в проецирующей плоскости, по одной ее проекции

### Контрольные вопросы

1. Перечислить варианты реперов плоскости.
2. Что такое модель плоскости?
3. Перечислить задачи, которые решаются при работе с моделью плоскости.
4. Каков характерный признак модели проецирующей плоскости в аксонометрии, на эпюре Монжа?
5. Какие плоскости называются плоскостями уровня?
6. Каковы характерные признаки моделей плоскостей уровня в перспективе, аксонометрии, на эпюре Монжа?
7. Какая плоскость считается профильной?
8. Каков характерный признак модели профильной плоскости на эпюре Монжа?
9. Перечислить операции алгоритма по построению проекции прямой, принадлежащей плоскости, когда дана одна ее проекция.
10. В чем состоят особенности построения проекции прямой, принадлежащей плоскости, по одной заданной проекции, когда плоскость занимает проецирующее положение?
11. Перечислить операции алгоритма по построению проекции точки, принадлежащей плоскости, когда дана одна ее проекция.

12. В чем состоят особенности построения проекции точки, принадлежащей плоскости, по одной заданной проекции, когда плоскость занимает проецирующее положение?

### 3.7. Моделирование плоских кривых второго порядка

Если в трехмерном пространстве дана плоская кривая второго порядка  $f$ , то, проведя через ее точки и центр проецирования прямые, получим коническую (центр проецирования на конечном расстоянии) или цилиндрическую (центр проецирования бесконечно удален) поверхность, которая пересечется с картинками по плоским кривым линиям второго порядка. В результате на картинах  $\pi_1$  и  $\pi_2$  возникнут два изображения плоской кривой второго порядка (рис. 115).

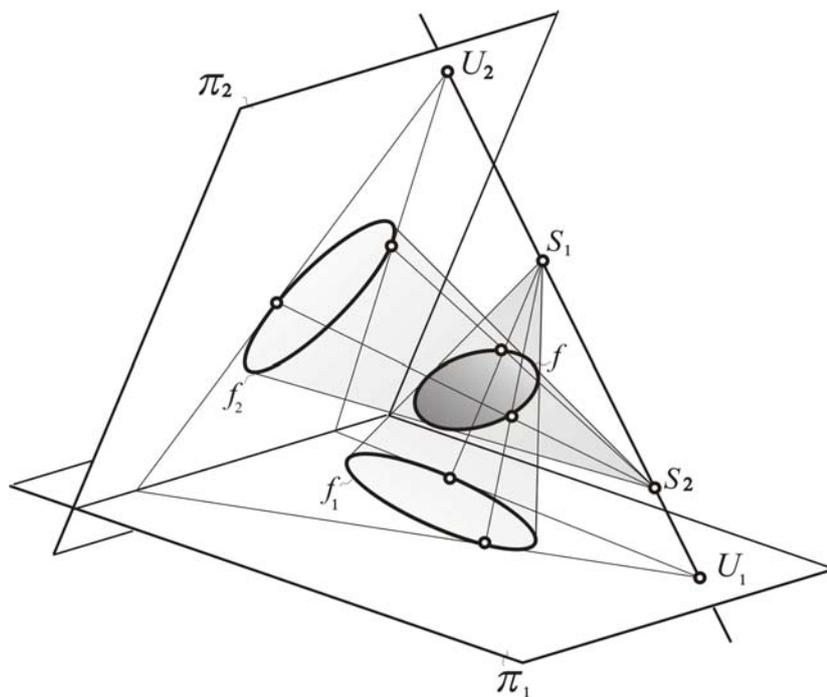


Рис. 115. Моделирование плоской кривой линии методом двух изображений

Таким образом, **моделью плоской кривой линии** являются два ее изображения.

Чтобы задать модель плоской кривой второго порядка достаточно промоделировать три ее точки и две касательные. В качестве касательных могут использоваться линии связи. В этом случае можно применить алгоритм, который описан в подразд. 1.2 «Линии».

Работа с моделью плоской кривой линии второго порядка предполагает решение следующих задач:

1) моделирование любой плоской кривой второго порядка с помощью метода двух изображений;

2) определение по модели ее характера и положения относительно проекционного аппарата;

3) построение точек кривой линии на ее модели по одной заданной проекции.

**Задача 1.** Моделирование любой плоской кривой второго порядка с помощью метода двух изображений рассмотрено выше (см. рис. 115).

**Задача 2.** Определяя, какая кривая линии второго порядка промоделирована методом двух изображений, следует учитывать, по какой линии пересекает проецирующая поверхность картину. Поскольку проецирующей является коническая или цилиндрическая поверхность, то её сечение плоскостью картины даст также плоскую кривую второго порядка. На рис. 116 приведен пример модели плоской кривой второго порядка на совмещенной модели: аксонометрия, эпюр Монжа.

При проецирующем положении плоскости моделируемой кривой проходящая через соответствующий центр поверхность вырождается в плоскость, а проекция линии оказывается прямой (рис. 117). Таким образом, характерным признаком модели кривой второго порядка, которая лежит в проецирующей плоскости, является вырождение одной проекции в прямую линию. Это утверждение справедливо для всех частных случаев метода двух изображений.

**Задача 3.** Алгоритм построения проекции точки, которая принадлежит плоской кривой линии второго порядка, принципиально не отличается от алгоритма построения точки, принадлежащей прямой. Решение этой задачи осуществляется одинаково в аксонометрии и на эпюре Монжа.

Рассмотрим пример построения точки  $A$ , принадлежащей кривой  $f$ , когда дана одна из ее проекций. Если плоскость, содержащая кривую, занимает общее положение (рис. 118, а, проекция  $A_1$ ), возникают два ва-

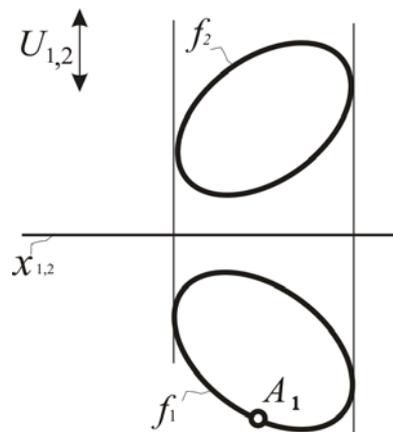


Рис. 116. Модель плоской кривой второго порядка (совмещенная модель: аксонометрия, эпюр Монжа)

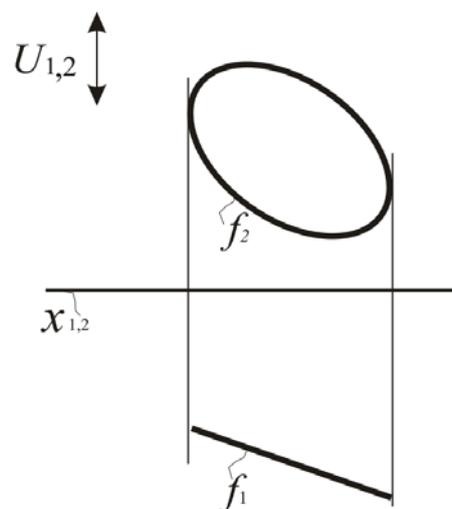


Рис. 117. Модель плоских кривых линий второго порядка, которая принадлежит проецирующей плоскости (совмещенная модель: аксонометрия, эпюр Монжа)

рианта искомой проекции (рис. 118, б). Какую из них следует выбрать, решает конкретная дополнительная информация.

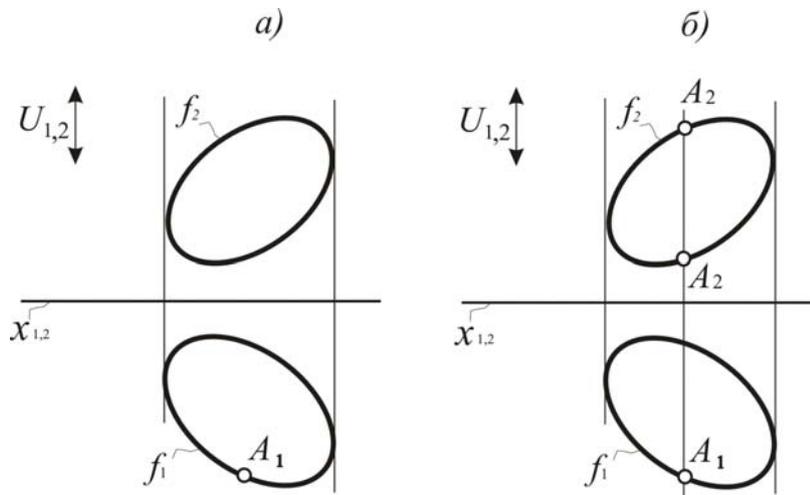


Рис. 118. Построение проекции точки  $A$  плоской кривой второго порядка, принадлежащей плоскости общего положения (совмещенная модель: аксонометрия, эпюр Монжа)

Эта проблема не возникает, если плоскость занимает проецирующее положение (рис. 119, а).

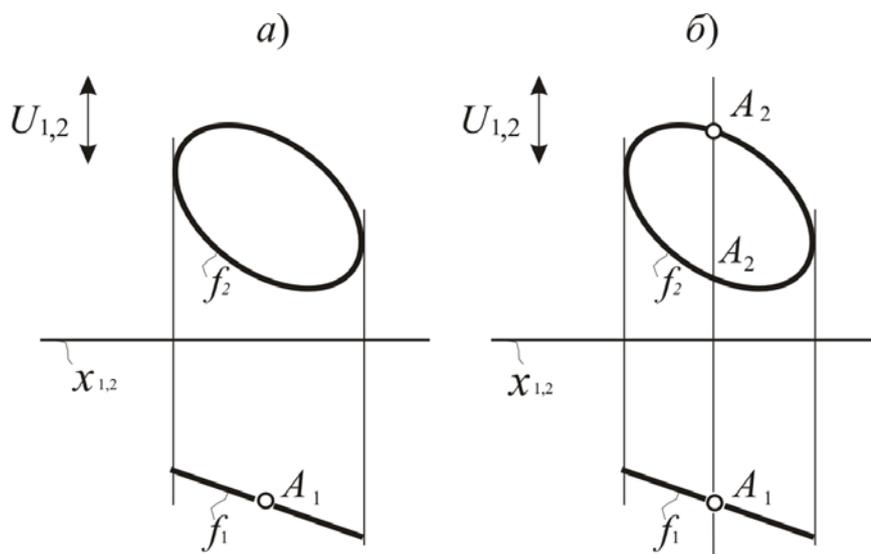


Рис. 119. Построение проекции точки  $A$ , которая принадлежит плоской кривой второго порядка, в проецирующей плоскости (совмещенная модель: аксонометрия, эпюр Монжа)

### Контрольные вопросы

1. Какие геометрические поверхности проецируют плоские кривые линии второго порядка на картины  $\pi_1, \pi_2$ ? Какие изображения возникают в результате этого проецирования на картинах?

2. Что является моделью плоской кривой второго порядка?

3. Решением, каких задач определяется работа с моделью плоской кривой второго порядка?

4. Назвать отличительный признак модели плоской кривой второго порядка, лежащей в проецирующей плоскости.

### 3.8. Моделирование поверхностей

**Процесс моделирования поверхностей** определяется законом построения плоских моделей трехмерных объектов на плоскости. Действуя в рамках этого закона, выделим два множества проецирующих прямых, которые касаются исходной поверхности, и получим две проецирующие поверхности. Если центр проецирования находится на конечном расстоянии, то поверхность оказывается конической или пирамидальной. Если центр  $S_1$  или  $S_2$  удален в бесконечность, то получаем цилиндрическую или призматическую поверхность.

Проекция линии касания проецирующей поверхности ограничивает изображение ее модели и называется **очерком**.

Проекции двух очерков в общем случае образуют **модель поверхности**, которая построена методом двух изображений. Частный случай возникает при **моделировании многогранников**. Здесь к очерку добавляются еще изображения остальных ребер и вершин.

Полученная таким образом модель поверхности оказывается не только однозначной, но и наглядной, т.е. узнаваемой.

В зависимости от положения поверхности относительно проекционного аппарата разделим все поверхности на две группы:

1. Поверхности частного положения. Их вершины тождественно совпадают с одним из центров проецирования. Из рассмотренных ранее поверхностей частное положение могут занимать цилиндры или призмы.

2. Поверхности общего положения – все остальные.

Работа с их моделями складывается из решения следующих задач:

1) моделирование любой поверхности трехмерного пространства с помощью метода двух изображений;

2) определение характера поверхности и положения относительно проекционного аппарата по ее модели;

3) выделение на поверхности графически простых линий (прямых, окружностей);

4) построение любого числа точек поверхности по одной заданной проекции;

5) построение линий поверхности по заданной проекции.

Чтобы успешно решать выделенные задачи, необходимы следующие знания, которые представляют собой систему, показанную графом на рис. 120.

Для его создания было выделено множество, составленное из перечисленных выше задач и необходимых сведений из предыдущих разделов. Отношение, которое задано на этом множестве, выглядит следующим образом: «элемент  $X$  не может быть освоен без знания элемента  $Y$ ». Граф показывает, что приобретение умений в моделировании поверхности и работе с ее моделью невозможно без соответствующих знаний законов построения геометрических моделей, способов образования поверхностей, разновидностей их плоских сечений.



Рис. 120. Взаимосвязь знаний, необходимых при работе с моделью поверхности

Кроме того, решение всех вышеперечисленных задач находится во взаимосвязи. Так, без умения создать модель поверхности невозможно решить никакую из них, а без умения выделить графически простую

линию невозможно построить точки на поверхности, без умения строить точку на поверхности невозможно построить на ней линию. Таким образом, для усвоения этого раздела требуются прочные знания по всем предыдущим разделам.

### 3.8.1. Моделирование поверхностей в стандартных вариантах метода двух изображений

Рассмотрим решения всех выделенных задач, учитывая их взаимосвязь.

**Задача 1.** *В трехмерном пространстве дана поверхность. Построить ее модель методом двух изображений.*

Рассмотрим моделирование самых распространенных поверхностей.

#### Моделирование сферы.

В аксонометрии очерком сферы оказывается линия, которая является плоским сечением проецирующего цилиндра (рис. 121). Он образован проецирующими прямыми, касающимися сферы и проходящими через центр  $S_2$ . Чаще всего это бывает эллипс, который обычно заменяют на окружность по причине сохранения наглядности. Таким образом, модель сферы в аксонометрии оказывается приближенной (рис. 122).

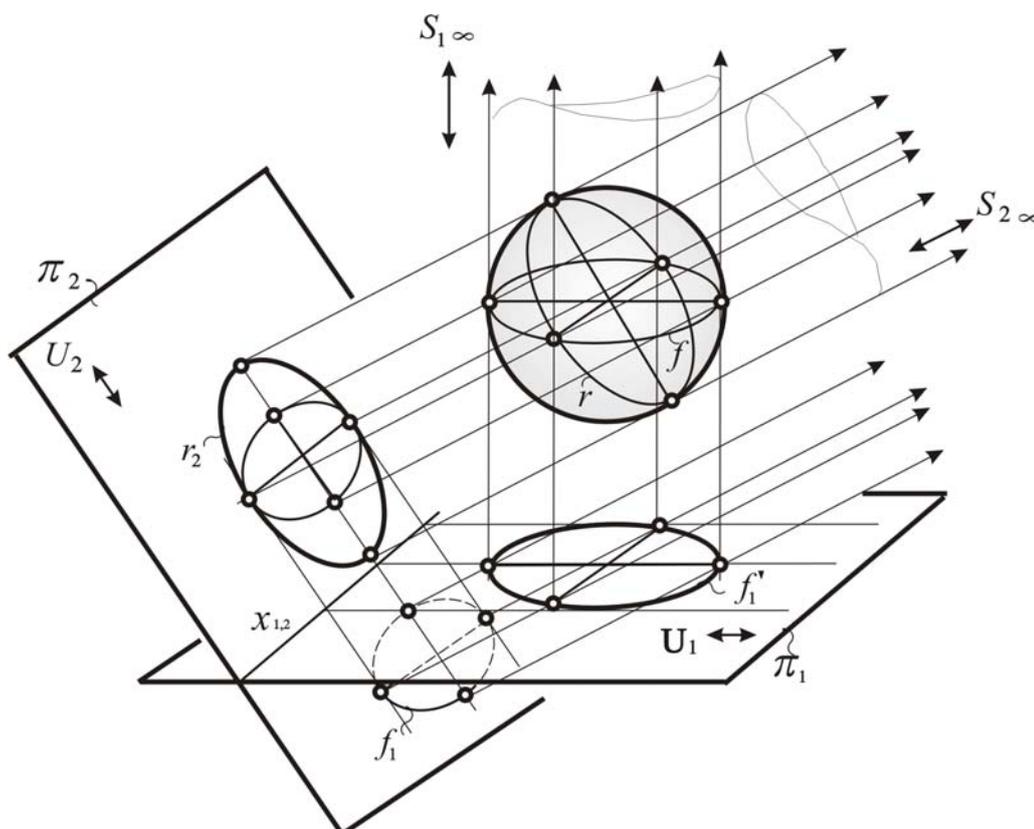


Рис. 121. Моделирование поверхности сферы в аксонометрии

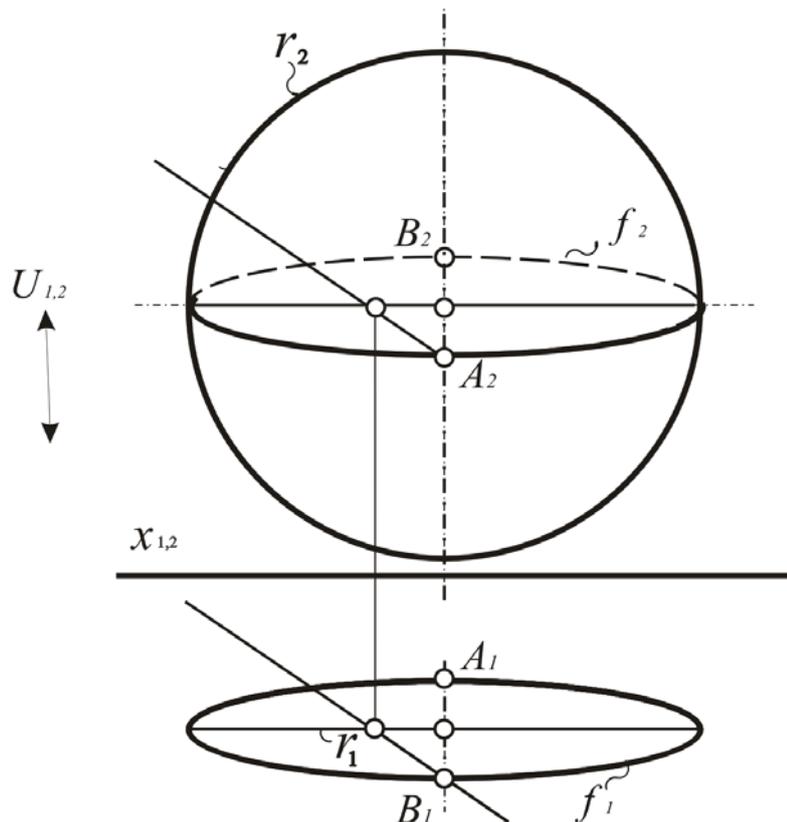


Рис. 122. Модель поверхности сферы в аксонометрии

Для работы с такой моделью необходимо изобразить и ее экватор (окружность  $f$ ). Первая и вторая проекции этой линии оказываются эллипсами, которые связаны параллельным переносом. В аксонометрии параллельный перенос размеры не меняет. Чтобы построить вторую проекцию экватора, достаточно выполнить этот перенос. На рис. 122 он выполнен тоже благодаря горизонтали, которая проведена через точку  $B$ . Используя точку пересечения горизонтали с большой осью и ее характерный признак, построим ее вторую проекцию, получим  $B_2$ , которая позволит определить величину малой оси эллипса, являющегося второй проекцией экватора.

При моделировании сферы на эюре Монжа возникают две проецирующие цилиндрические поверхности, которые пересекают картины по окружностям (рис. 123). Одна из них – экватор  $f$ , другая – главный меридиан  $r$ . Радиусы этих окружностей равны. При переходе к однокартинному чертежу получаем модель сферы, которая представляет собой две равные окружности (рис. 124).

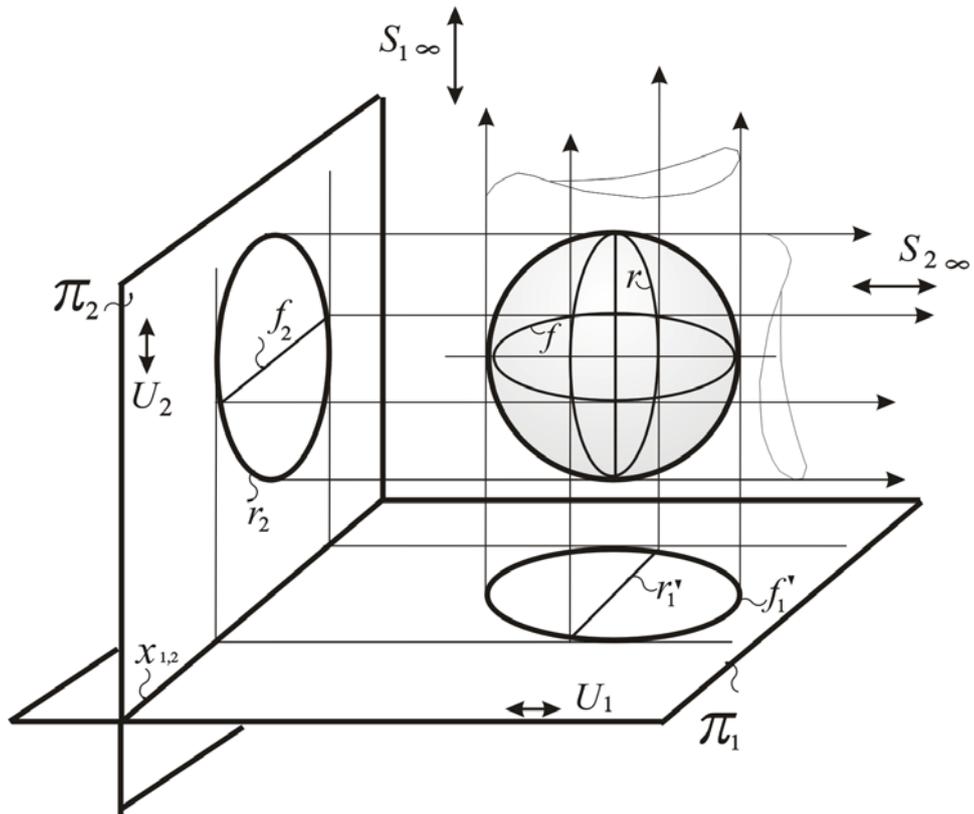


Рис. 123. Моделирование поверхности сферы на эюре Монжа

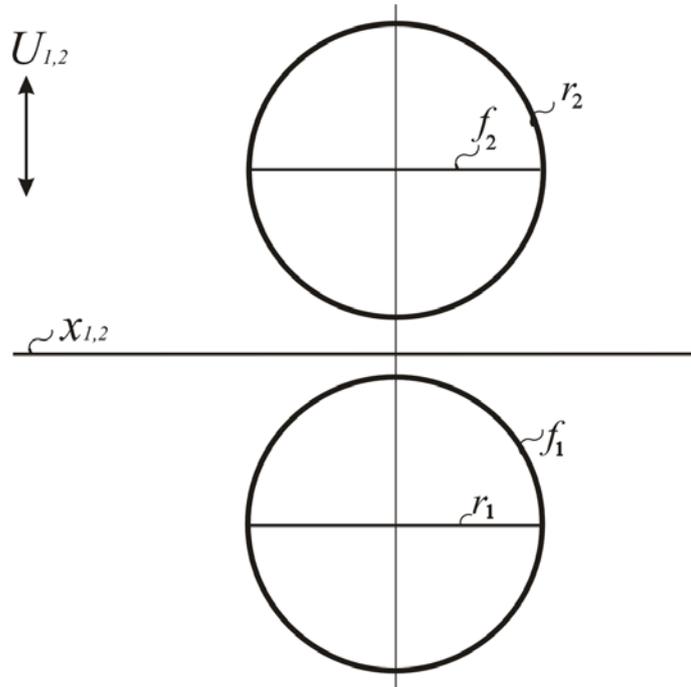


Рис. 124. Модель поверхности сферы на эюре Монжа

**Модель тора.** При моделировании тора в аксонометрии обе проецирующие поверхности оказываются цилиндрическими. Сложность этих поверхностей определяется расположением тора относительно проекционного аппарата. Эти поверхности, пересекаясь с соответствующей картиной, образуют очерки. Если в пересечении возникают линии, отличные от окружностей их заменяют на окружность. На рис. 125 очерками оказываются внутренний экватор  $g$  и наружный  $f$ . Для работы с моделью тора помимо очерков еще необходимо иметь проекции его экваторов. На рис. 125 изображены наружный экватор  $m$  и внутренний  $n$ .

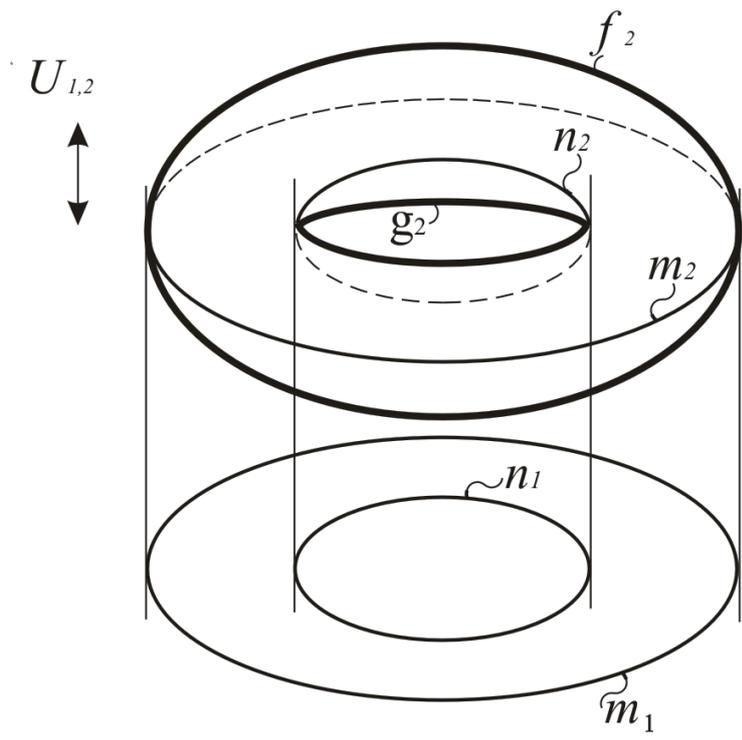


Рис. 125. Модель тора в аксонометрии

При моделировании тора на эпюре Монжа его обычно располагают так, что его ось оказывается проецирующей прямой. Это приводит к тому, что одна из проецирующих поверхностей является прямым круговым цилиндром. Его ось совпадает с осью тора. Другая поверхность (тоже цилиндрическая) имеет более сложный вид, но порожденный ей очерк, как правило, не требует коррекции. Тор на обеих проекциях оказывается узнаваемым. На рис. 126 показана модель тора на эпюре Монжа. Очерками этого тора являются диаметры  $f$ ,  $r$ , нижняя окружность  $n$  и верхняя окружность  $m$ .

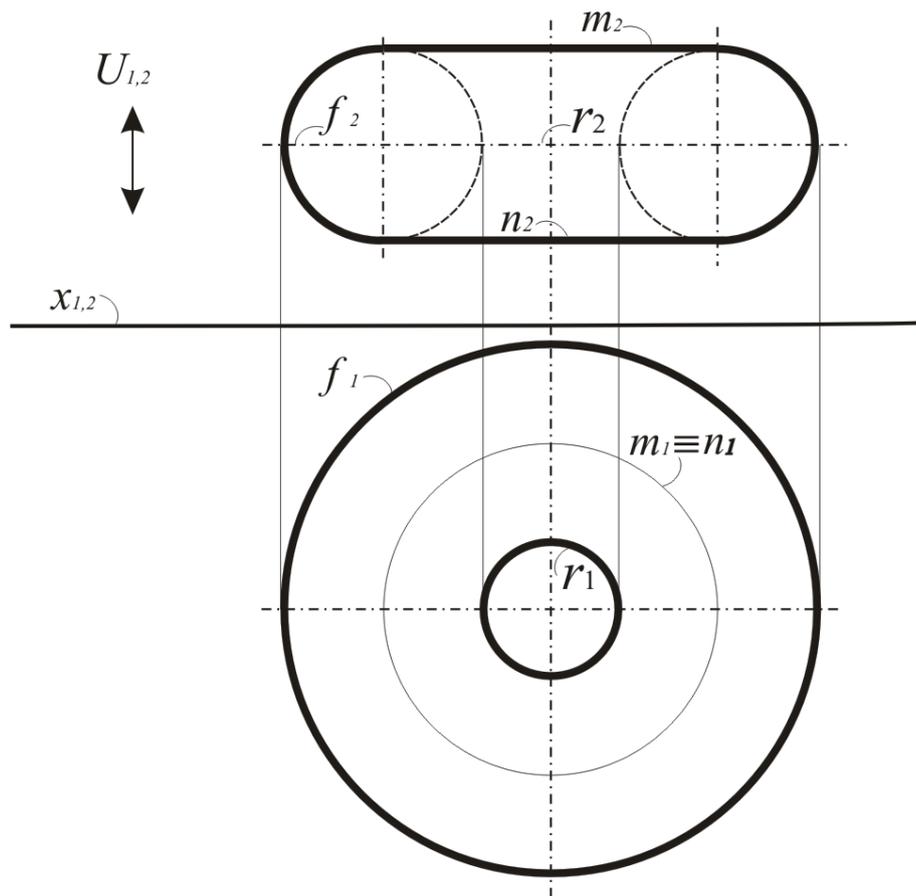


Рис. 126. Модель тора на эюре Монжа

**Моделируя конус**, мы получаем два очерка, которые составляют его модель. На рис. 127–128 даны примеры моделей различных конусов: прямого кругового конуса (рис. 127, а; 128, а, б), обратного конуса (рис. 128, б) и наклонного конуса (рис. 127, в; 128, в). Прямые круговые конусы располагаются таким образом, что их основания принадлежат картине  $\pi_1$ . Исключение составляет конус, представленный на рис. 128, б. Его основание параллельно картине  $\pi_1$ . На модели изображены очерковые образующие  $m$  и  $n$ . Положение этих образующих необходимо знать при решении задач, которые будут рассмотрены ниже.

При моделировании обратного конуса и конуса, у которого основание находится над картиной  $\pi_1$ , вторая и первая его проекции связаны параллельным переносом в перспективе и аксонометрии (рис. 127, б).

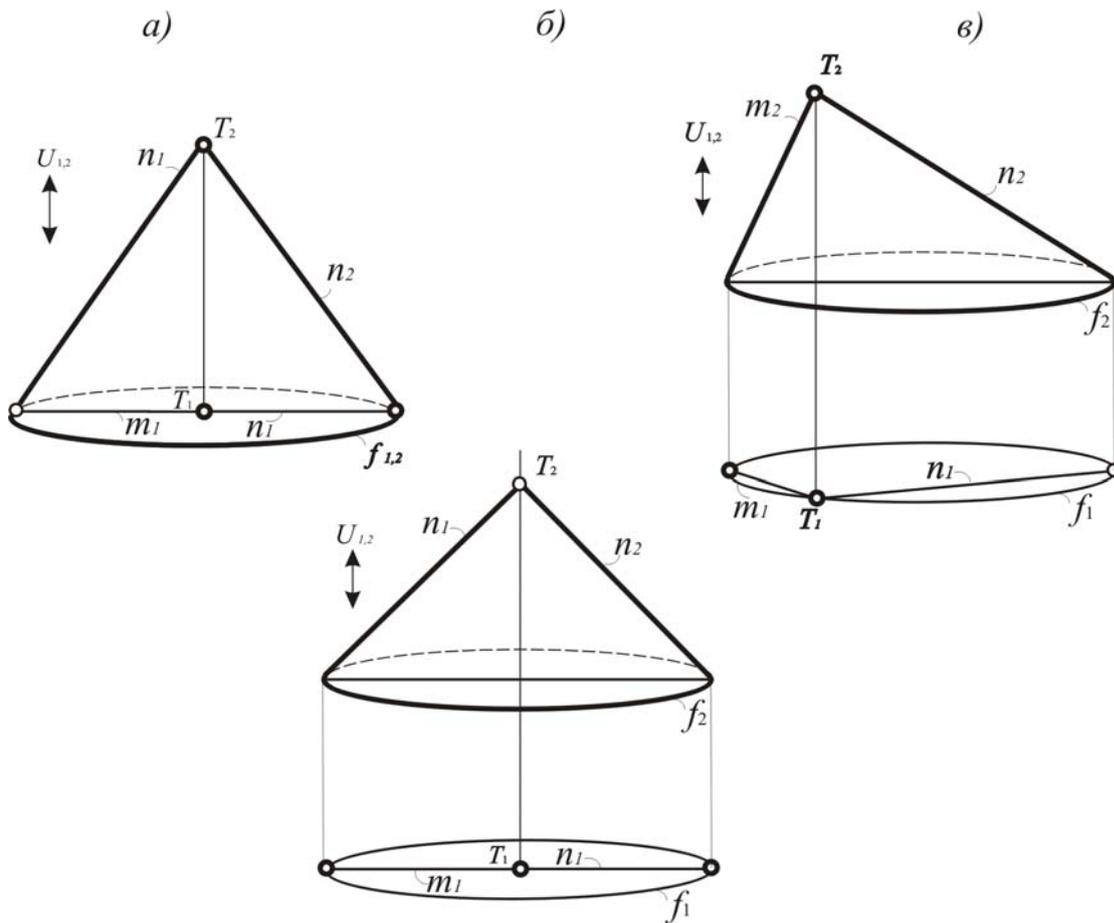


Рис. 127. Модель конуса в аксонометрии

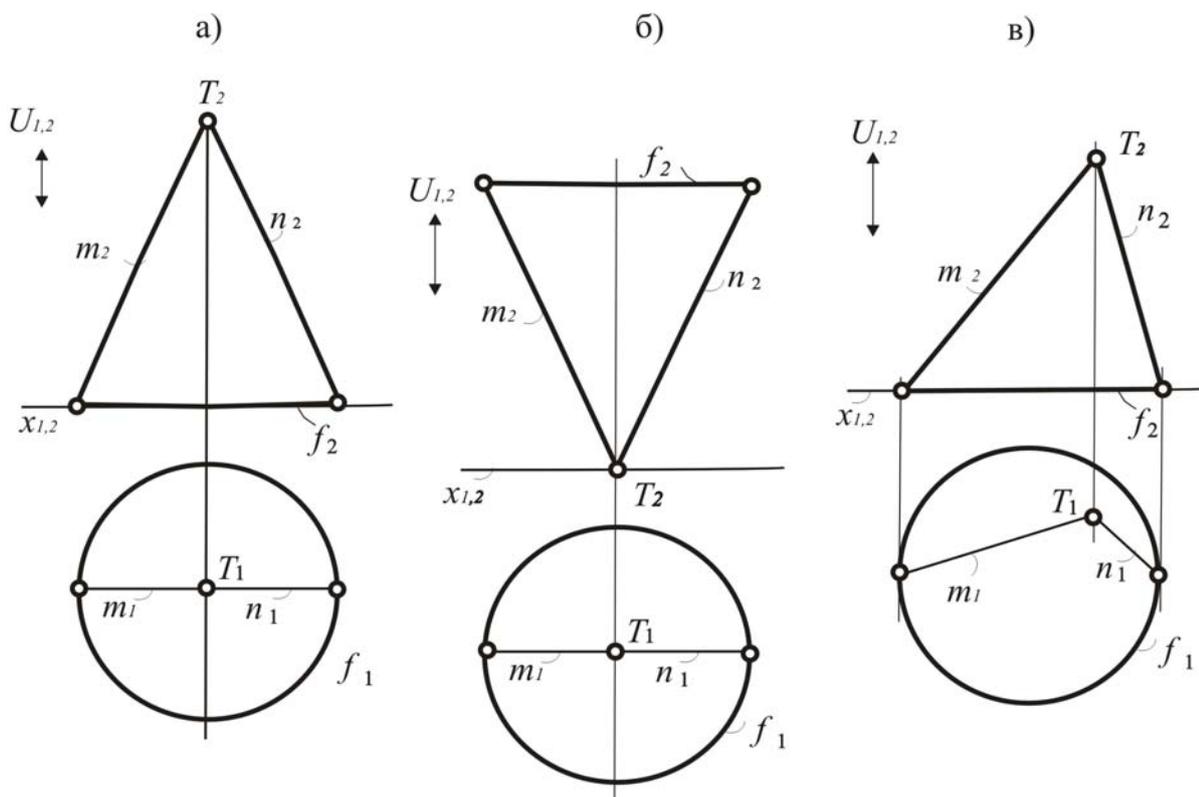


Рис. 128. Модель конуса на эюре Монжа

**Моделирование цилиндра.** Известно, что цилиндрическая поверхность – это коническая с бесконечно удаленной вершиной. В результате она может совпадать с одним из центров проецирования. Это приводит к вырождению соответствующей проекции цилиндра в линию (рис. 129, а; 130, а). Такой цилиндр называют проецирующим. При моделировании цилиндра с параллельными основаниями следует учитывать, что они связаны параллельным переносом.

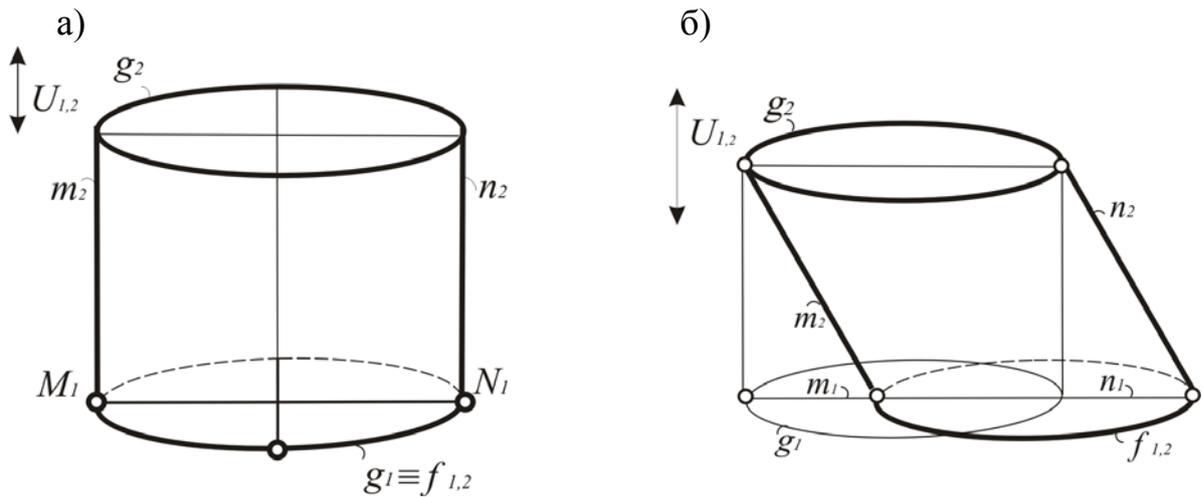


Рис. 129. Модель цилиндра в аксонометрии

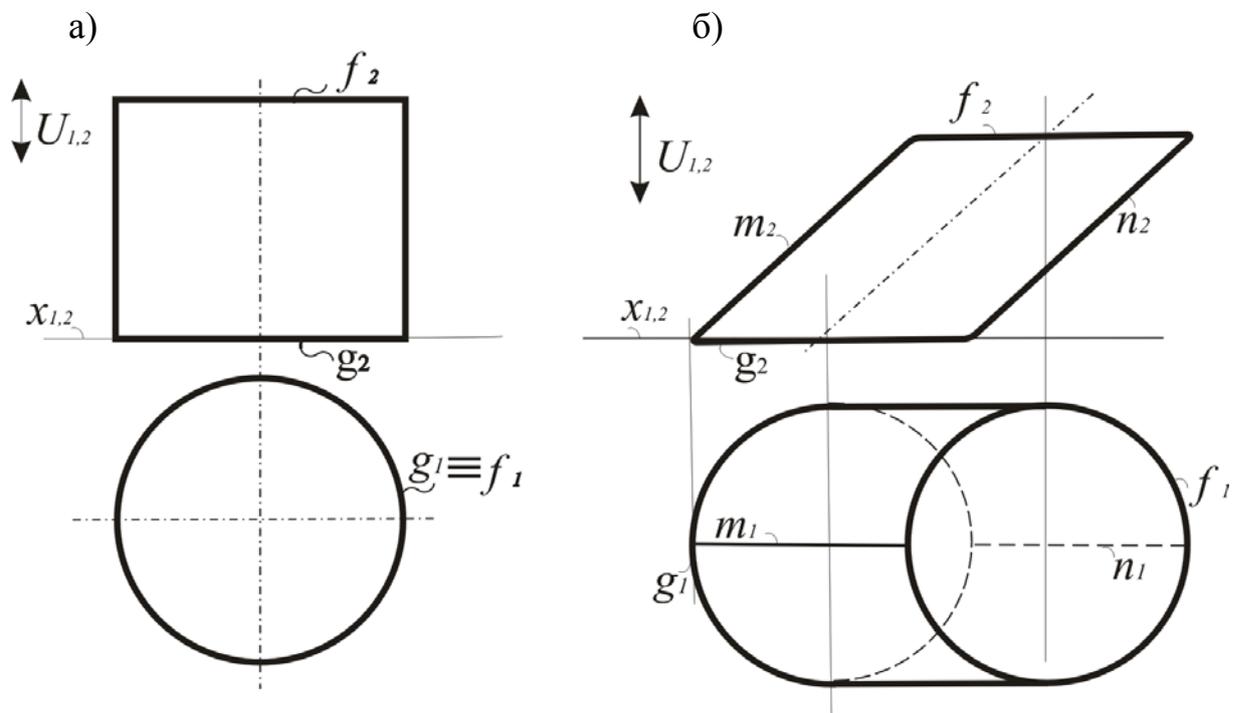


Рис. 130. Модель цилиндра на эпюре Монжа

**Моделирование пирамиды.** Из подразд. 1.3 «Поверхности» известно, что пирамида отличается от конуса только характером направляющей. Поэтому все положения, касающиеся моделирования конической поверхности, относятся и к пирамидальной. Примеры моделей различных пирамид даны на рис. 131, 132. На этих рисунках промоделированы пирамиды, основания которых принадлежат картине  $\pi_1$ . На рис 131,б ребро  $TA$  занимает проецирующее положение.

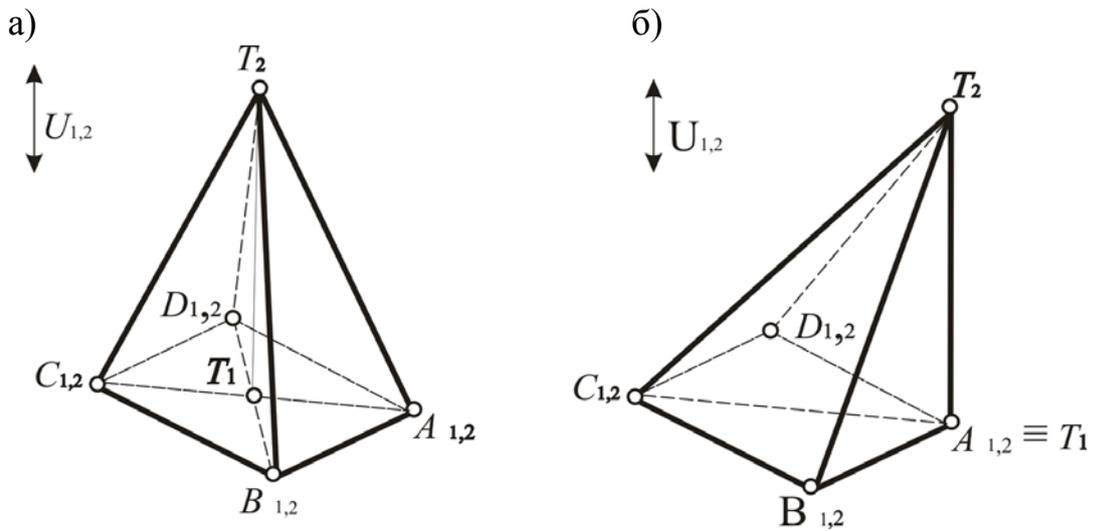


Рис. 131. Модель пирамиды в аксонометрии

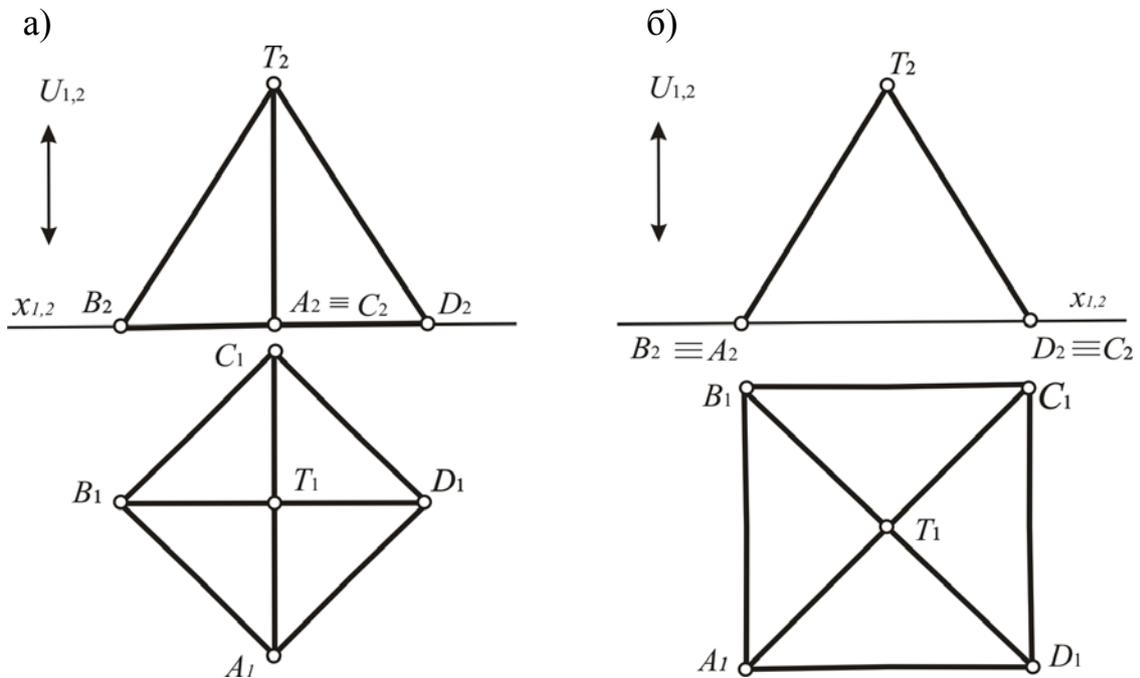


Рис. 132. Модель пирамиды на эюре Монжа

**Моделирование призмы.** Известно, что призматическая поверхность – это пирамидальная с бесконечно удаленной вершиной. В результате она может совпадать с одним из центров проецирования. Это приводит к вырождению соответствующей проекции призмы в линию. Такая призма называется проецирующей. При моделировании призмы с параллельными основаниями следует учитывать, что они связаны параллельным переносом (рис. 133–134).

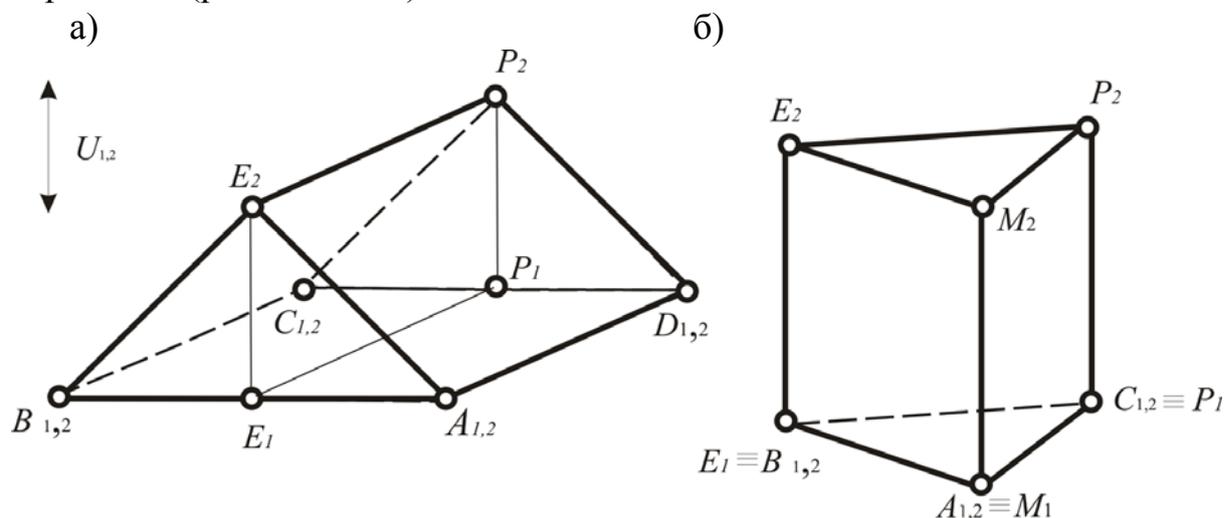


Рис. 133. Модель призмы в аксонометрии

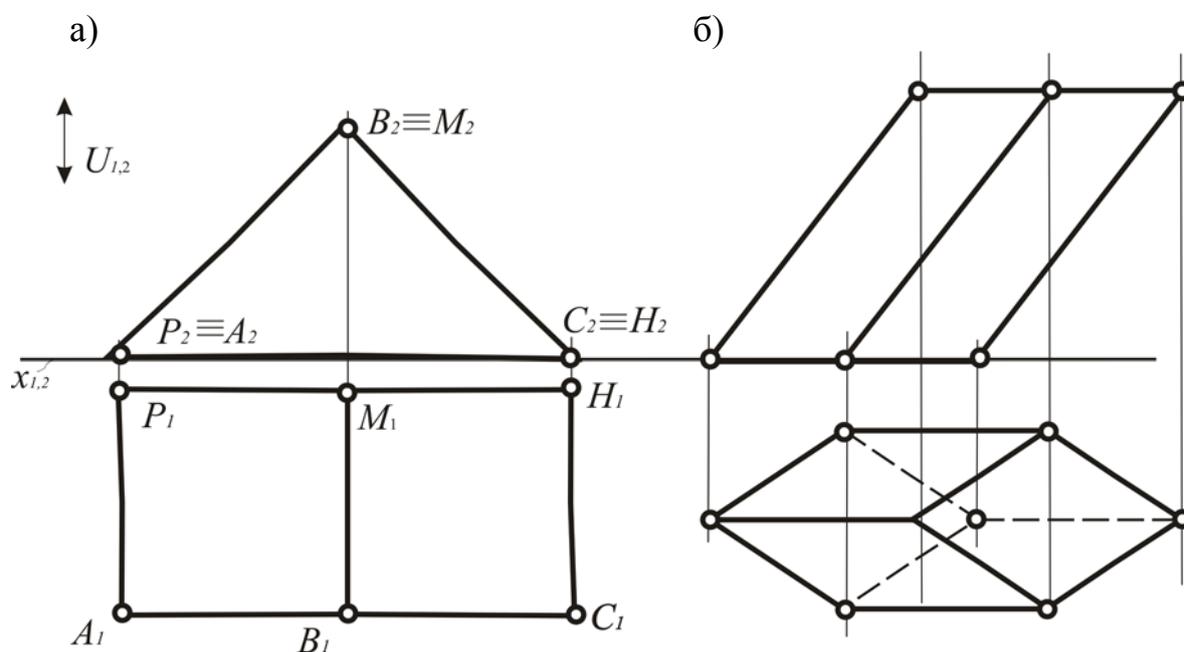


Рис. 134. Модель призмы на эмпоре Монжа

Знание процесса образования той или иной поверхности, умение ее моделировать и работать с моделями – основа грамотного построения плоских изображений трехмерных объектов.

Рассмотрим основные приемы, которые позволяют работать с моделями поверхностей, построенными методом двух изображений.

### 3.8.2. Определение положения поверхности относительно проекционного аппарата по ее модели

**Задача 2.** *Определить, какая поверхность промоделирована и какое положение она занимает относительно проекционного аппарата.*

Если модель поверхности содержит очерк, то установить, какая поверхность промоделирована, не составит труда. В этом случае поверхность легко узнаваема на своей модели. На изображениях, рассмотренных в подразд. 3.8.1, видно, что любая поверхность, которая там изображена, легко узнаваема. На них даны примеры моделей сферы, тора, конуса, цилиндра, пирамиды и призмы, которые построены в аксонометрии и на эюре Монжа.

Чтобы определить положение поверхности по отношению к проекционному аппарату, достаточно выяснить, совпадает вершина поверхности с одним из центров проецирования или нет. Очевидно, что это касается только тех поверхностей, которые имеют вершину. Если окажется, что вершина совпадает с  $S_1$  или  $S_2$ , то соответственная проекция поверхности вырождается в линию. На рис. 129, а; 130, а вырождаются в линии их первые проекции. Рис. 133,б демонстрирует призму  $ABCMP$ , первая проекция которой вырождается в линию. Вершина призмы  $ABCMP$  на рис. 134,а совпадает с центром  $S_2$ .

### 3.8.3. Построение на модели поверхности графически простых линий

**Задача 3.** *Выделить на модели поверхности графически простые линии (прямые, окружности).*

Схема на рис. 120 показывает, что для решения этой задачи, необходимы знания, полученные при изучении подразд. 1.3 «Поверхности». При усвоении этого раздела важны умения отличать линейчатую поверхность от нелинейчатой. При этом следует учитывать, что графически простая линия должна изображаться без искажения.

В табл. 3 рассмотрены условия получения графически простой линии на самых распространенных поверхностях.

Из определения графически простой линии ясно, что плоские линии возникают при сечении поверхности плоскостью. Приведенные ранее способы образования поверхностей позволили разделить все поверхности на те, у которых можно выделить прямую линию (линейчатые), и те, у которых это сделать невозможно (нелинейчатые). Из рассматриваемых поверхностей на конусе, цилиндре и многогранниках можно выделить прямую линию, а на сфере и торе невозможно. Но эти поверхности образованы вращением окружности, каждая точка которой при этом описывает окружность. Если она лежит в плоскости уровня, то изображается на

соответствующей картине без искажения. Это обстоятельство поможет выделять окружности на сфере и торе.

Т а б л и ц а 3

Условия получения графически простой линии

	Наименование поверхности		Пример на рисунке
1	Сфера	Окружность, полученная при сечении поверхности плоскостью, которая параллельна одной из картин	122, 124
2	Тор		126
3	Конус	Прямая, полученная при сечении поверхности плоскостью, которая проходит через вершину	127, 128
4	Цилиндр		
5	Конус	Окружность, полученная при сечении конуса, плоскостью, которая параллельна одной из картин	128
6	Цилиндр	Окружность, полученная при сечении цилиндра плоскостью, которая параллельна одной из картин	129, 130
7	Пирамида	Прямая, полученная при сечении одной из граней любой плоскостью	131, 132
8	Призма		133, 134

На рис. 135 показано построение окружности  $l$ , которая получена при сечении сферы плоскостью, параллельной картине  $\pi_2$  в аксонометрии. Точка  $A$  позволяет определить положение ее горизонтального диаметра, точка  $B$  является ее центром.

На рис. 136 видно, что на эпюре Монжа окружность  $l$  может возникнуть при сечении сферы как фронтальной, так и горизонтальной плоскостью уровня. Точка  $B$  является ее центром. Во всех других случаях выделить окружность на поверхности сферы невозможно. Достаточно вспомнить, как происходит моделирование этих поверхностей.

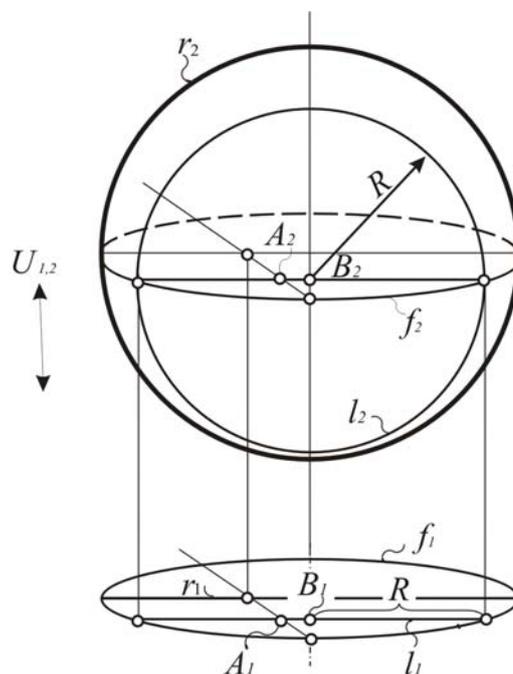


Рис. 135. Окружность, полученная при сечении сферы плоскостью, которая параллельна картине  $\pi_2$  (аксонометрия)

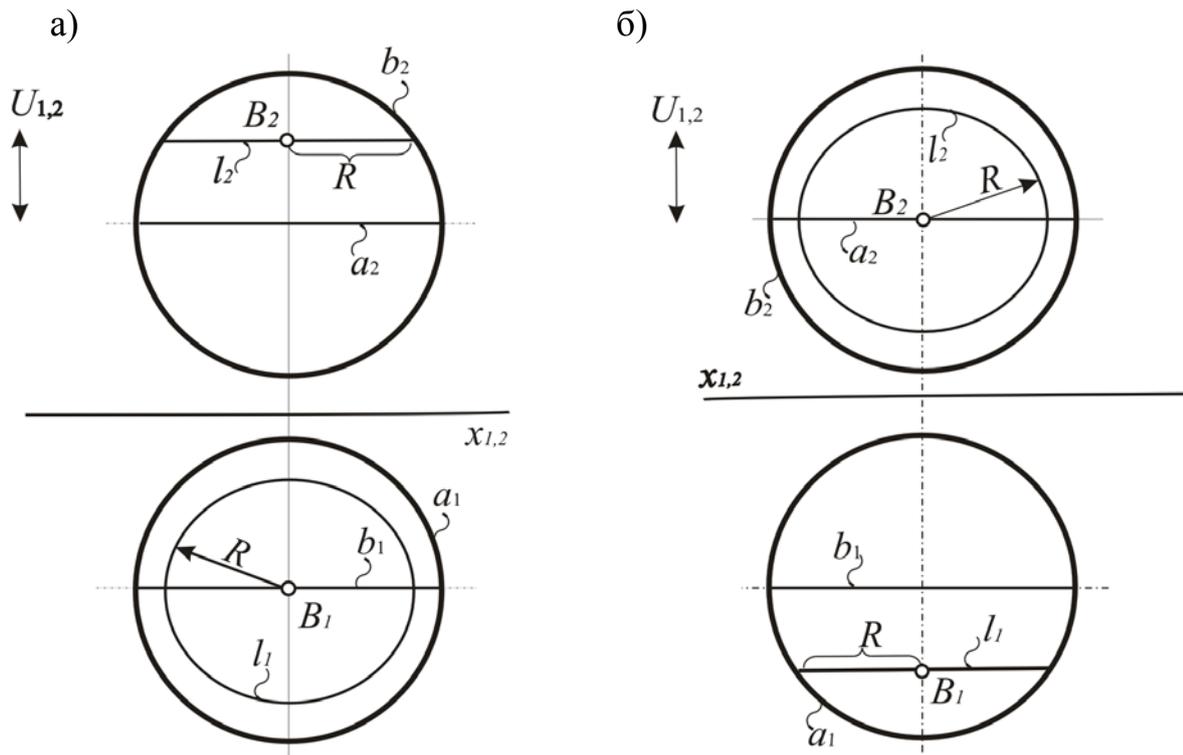


Рис. 136. Окружность, полученная при сечении сферы плоскостью, которая параллельна одной из картин (эпюр Монжа)

Приближенная модель тора в аксонометрии позволяет строить окружности в основном только на вертикальной картине. На рис. 137 показано построение окружности, принадлежащей поверхности тора.

Рис. 138 демонстрирует построение окружностей  $m$ ,  $n$ ,  $f$ ,  $l$  на торе, который промоделирован на эпюре Монжа. Получить модель такой окружности без искажения можно только тогда, когда ось тора проходит через один из центров проецирования. В приведенном примере ось тора содержит центр проецирования  $S_1$ . Это приводит к тому, что окружности возникают при сечении тора горизонтальной плоскостью уровня.

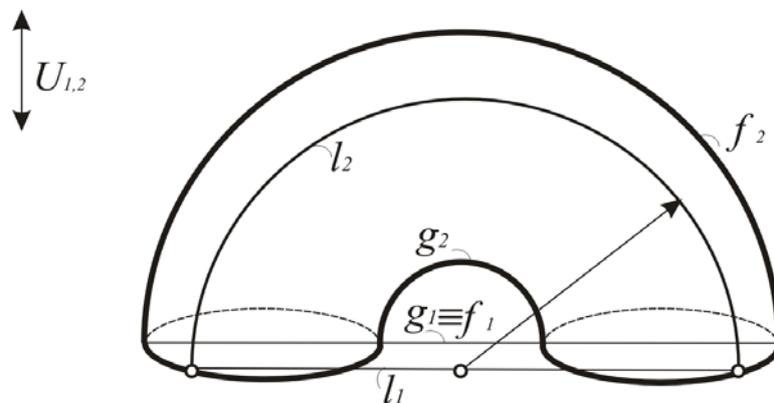


Рис. 137. Окружность, полученная при сечении тора плоскостью, которая параллельна картине  $\pi_2$  (аксонометрия)

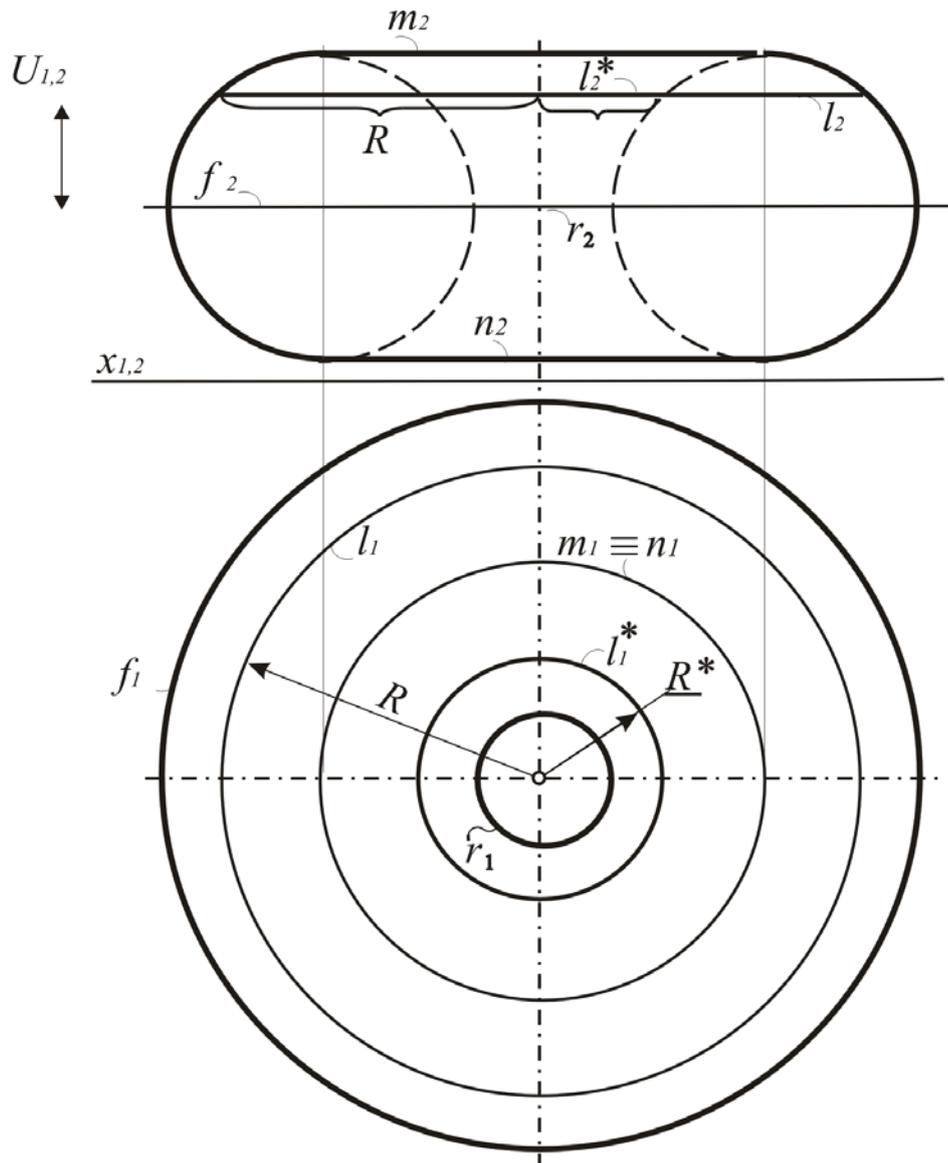


Рис. 138. Окружности, полученные при сечении тора плоскостью, которая параллельна картине  $\pi_1$  (эпюр Монжа)

Чтобы получить прямую на поверхности конуса, достаточно рассечь его плоскостью, которая проходит через вершину. Примеры построения прямой  $l$  на конической поверхности даны на рис. 139. Поскольку цилиндр – это конус с бесконечно удаленной вершиной, то выделение на его поверхности прямой  $l$  не имеет принципиальных отличий (рис. 140). Если модель сохраняет параллельность, то все образующие цилиндра параллельны друг другу.

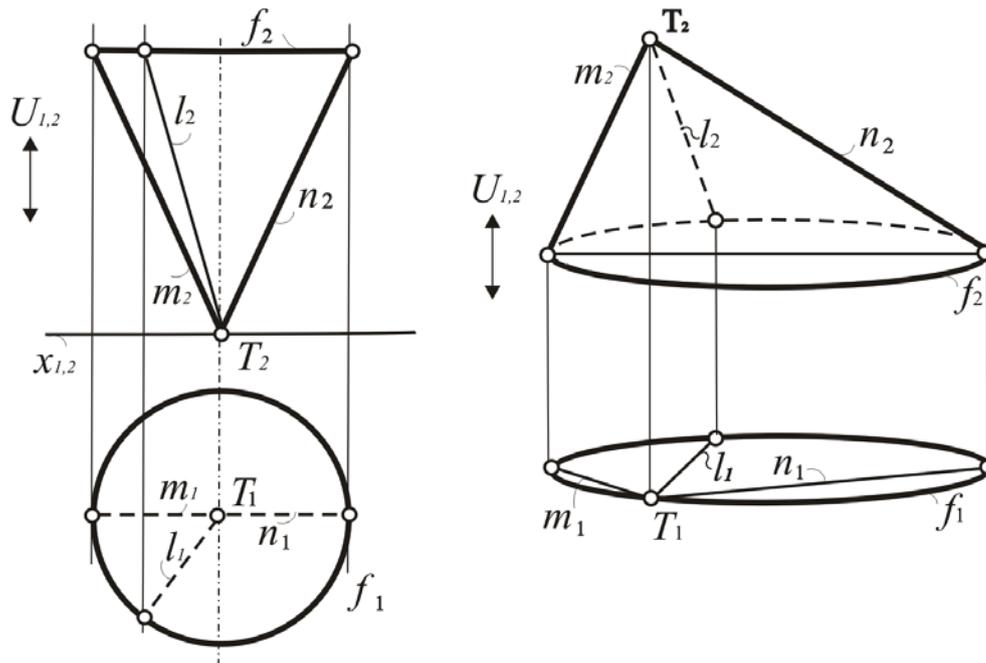


Рис. 139. Прямая, полученная при сечении конуса плоскостью, которая проходит через его вершину (эпюр Монжа, аксонометрия)

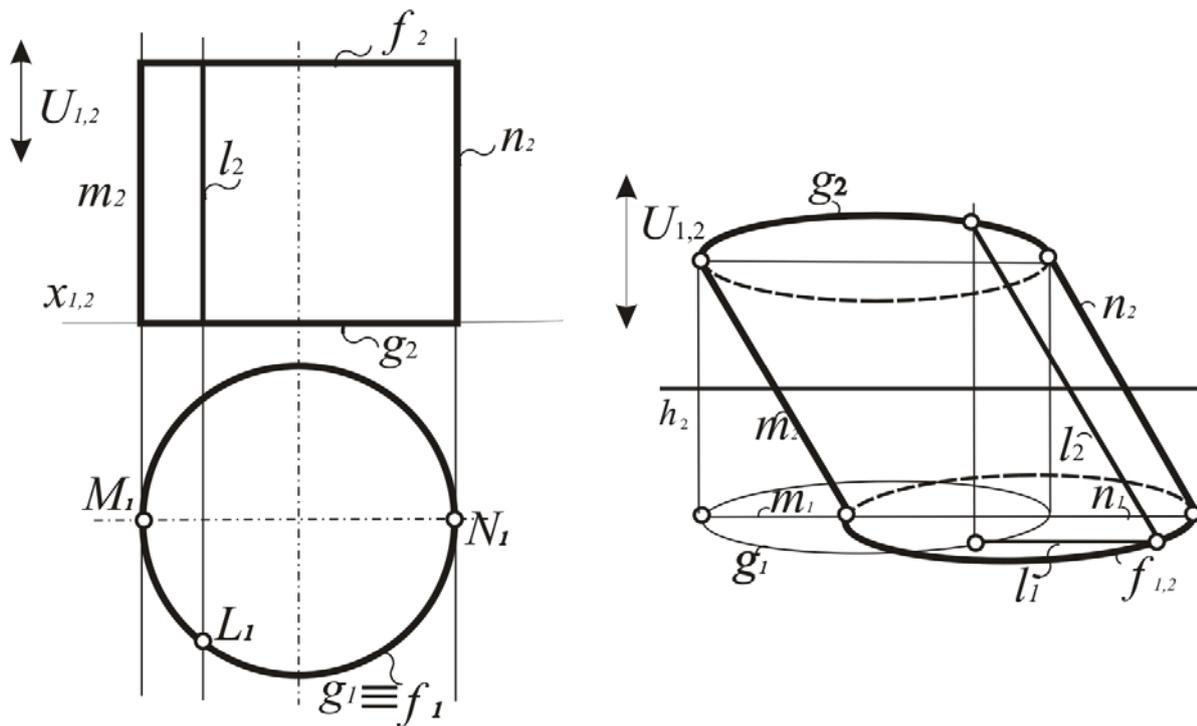


Рис. 140. Прямая, полученная при сечении цилиндра плоскостью, которая проходит через его вершину (эпюр Монжа, аксонометрия)

На конической и цилиндрической поверхностях помимо прямой можно выделить окружность. Примеры построения таких окружностей даны на рис. 141 и 142.

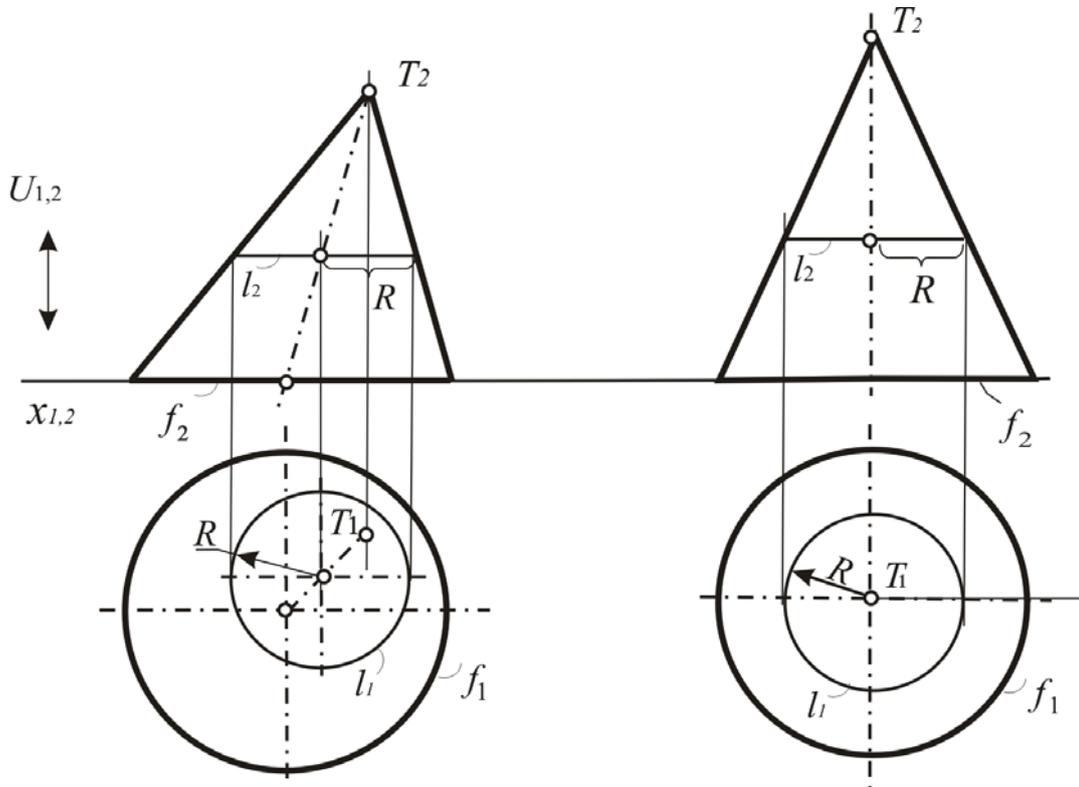


Рис. 141. Окружность, полученная при сечении конуса плоскостью, которая параллельна картине  $\pi_1$  (эпюр Монжа)

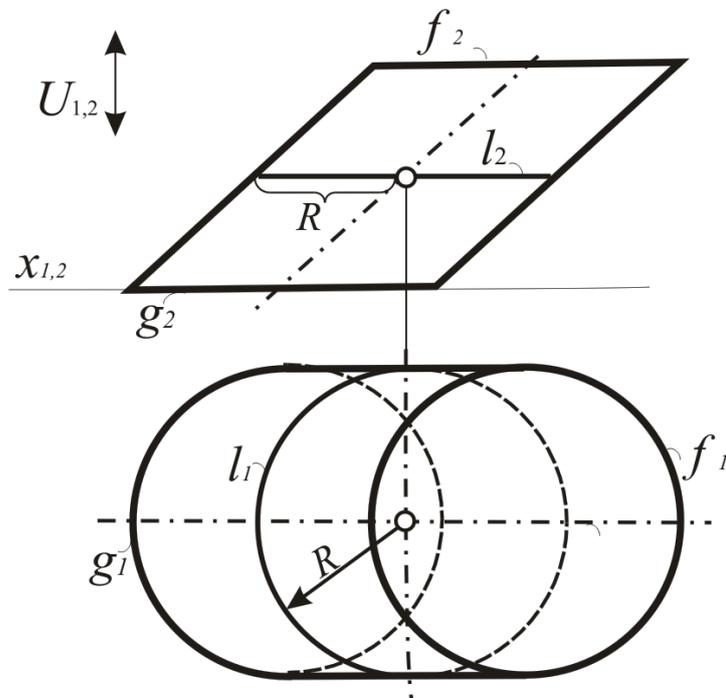


Рис. 142. Окружность, полученная при сечении цилиндра плоскостью, которая параллельна картине  $\pi_1$  (эпюр Монжа)

Любая грань многогранника – это плоская фигура (многоугольник). А в плоскости, как известно, можно выделить бесконечно много прямых, как угодно расположенных. Рис. 143 демонстрирует выделение прямой  $l$  на пирамиде и призме.

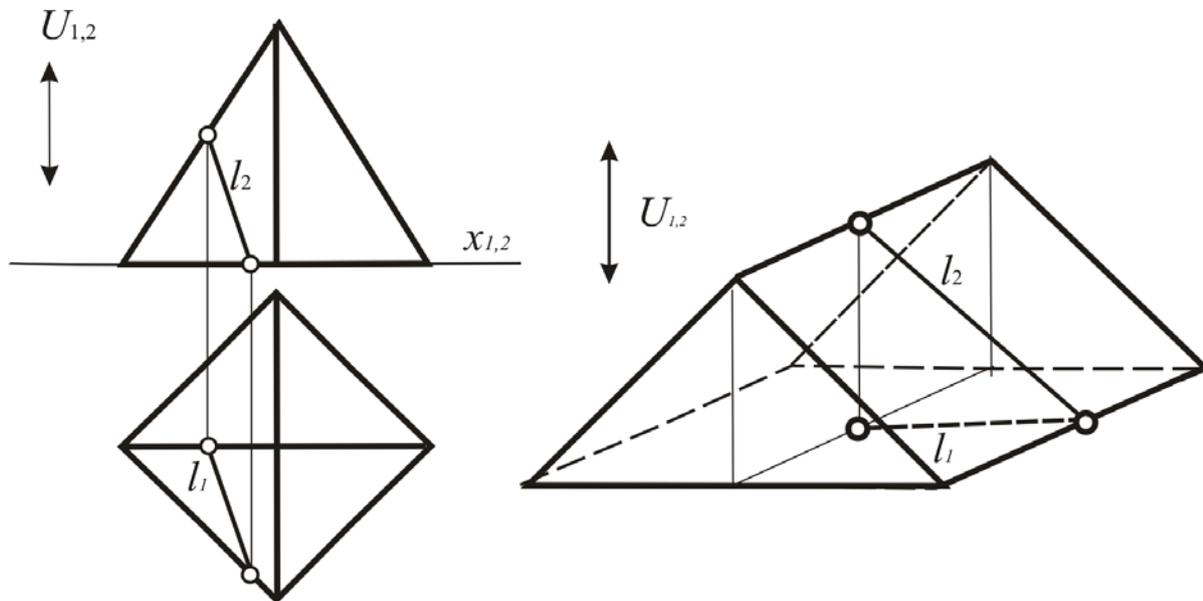


Рис. 143. Прямая  $l$ , полученная при сечении одной из граней любой плоскостью (эпюр Монжа, аксонометрия)

### 3.8.4. Построение на модели поверхности точек и линий

**Задача 4.** Дана одна проекция точки  $M$ , которая лежит на поверхности. Построить другую проекцию этой точки.

Алгоритм построения модели точки поверхности по одной заданной проекции имеет следующие операции:

1. Через заданную проекцию точки необходимо провести графически простую вспомогательную линию, принадлежащую поверхности.
2. Построить другую проекцию вспомогательной линии.
3. На построенной вспомогательной линии найти положение искомой проекции точки.

Для построения точки  $M$  на всех линейчатых поверхностях в качестве вспомогательной линии выбрана прямая линия  $l$  (рис. 144, 147), на сфере – окружность (рис. 145). Окружность использована и для построения точки  $M$ , принадлежащей поверхности тора (рис. 146).

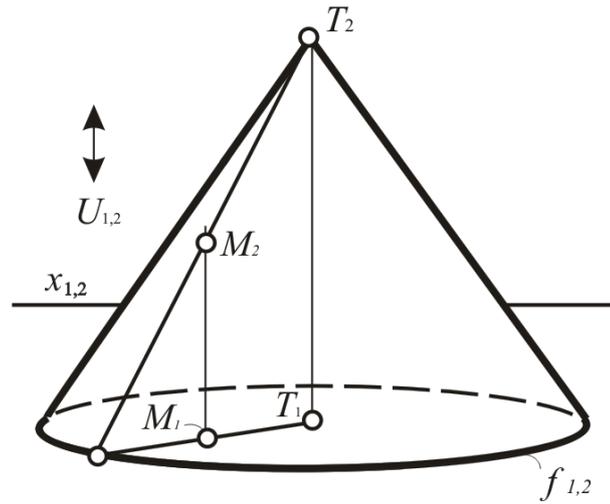


Рис. 144. Построение точки  $M$  поверхности конуса по заданной проекции  $M_1$  (аксонометрия)

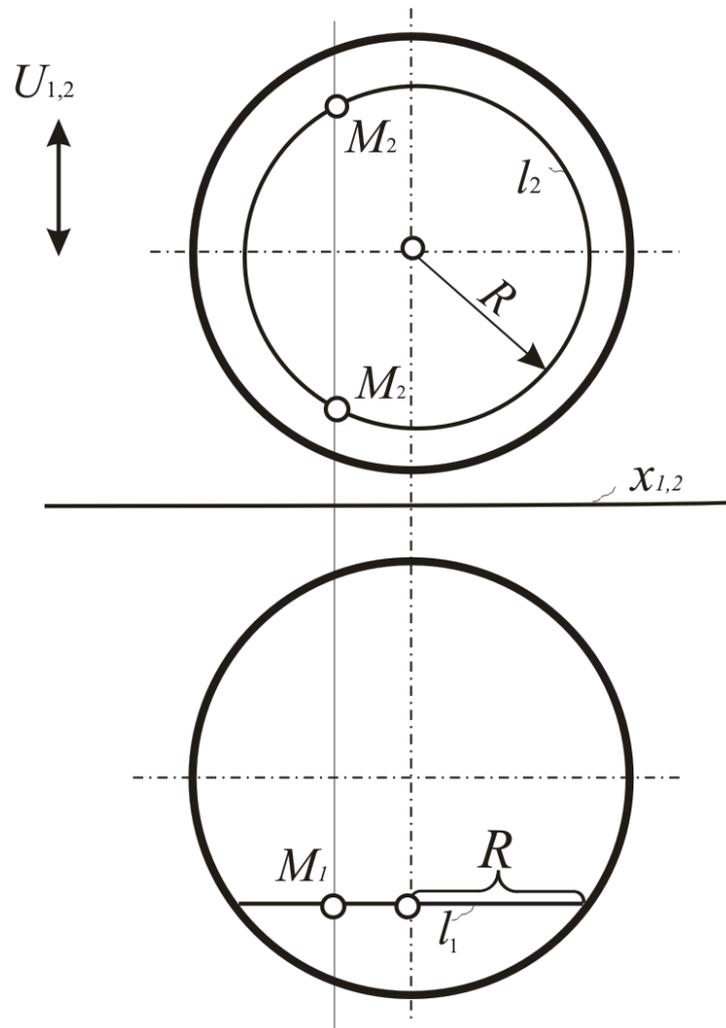


Рис. 145. Построение точки  $M$  поверхности сферы по заданной проекции  $M_1$  (эпюр Монжа)

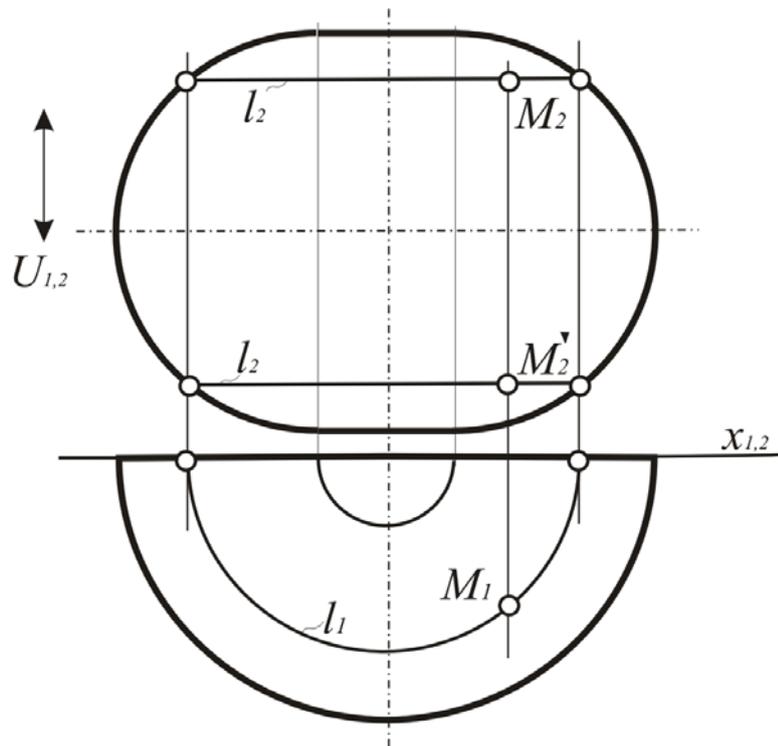


Рис. 146. Построение точки  $M$  поверхности тора по заданной проекции  $M_1$  (эпюр Монжа)

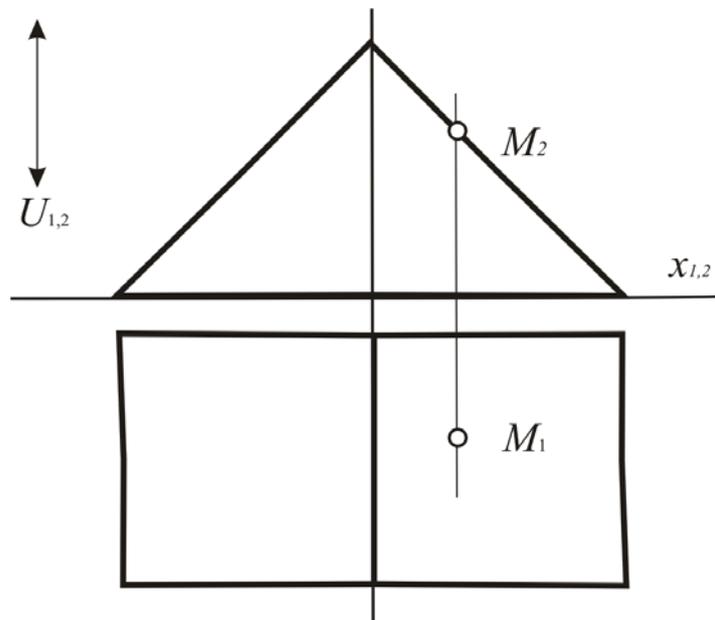


Рис. 147. Построение точки  $M$  проецирующей поверхности по заданной проекции  $M_1$  (эпюр Монжа)

В случае когда поверхность занимает проецирующее положение (см. рис. 147), следует учитывать следующие обстоятельства:

1. Если заданная проекция точки принадлежит невырожденной проекции поверхности, то решение задачи упрощается. Достаточно провести через эту проекцию точки линию связи и пересечь ее с вырожденной проекцией поверхности.

2. Если заданная проекция точки принадлежит вырожденной проекции поверхности, то задача решения не имеет.

**Задача 5.** *На модели поверхности дана одна проекция линии  $l$ , которая является ее плоским сечением. Построить другую проекцию этой линии.*

Наиболее востребованными являются сечения, полученные проецирующей плоскостью; поэтому рассмотрим только этот вариант.

Алгоритм построения модели плоского сечения поверхности по одной заданной проекции имеет следующие операции:

1. Определить, какое плоское сечение поверхности представляет собой искомая линия.

2. Выявить ее характерные и, если необходимо, случайные точки.

3. Построить искомые проекции выявленных точек. Для чего необходимое количество раз решить задачу 3 этого раздела. Соединить полученные точки с учетом сведений, полученных в п. 1.

4. Установить видимый и невидимый участки построенной линии.

На рис. 148–155 приведены примеры нескольких вариантов построения линии  $l$ , принадлежащей поверхности, если дана одна ее проекция. Она получена от сечения поверхности проецирующей плоскостью.

Чтобы реализовать первый пункт алгоритма, необходимо знать плоские сечения поверхностей.

### **Плоские сечения поверхностей:**

1. *Коническая поверхность*, у которой в качестве направляющей окружность или эллипс, имеет следующие плоские сечения:

- Гипербола образуется, если секущая плоскость параллельна двум образующим поверхности (см. рис. 148).

- Парабола возникает, когда секущая плоскость параллельна одной образующей конуса (см. рис. 149).

- Окружность или эллипс получаются при пересечении плоскостью всех образующих конической поверхности (см. рис. 150).

- Две прямые выделяют на поверхности плоскость, которая проходит через вершину конической поверхности (см. рис. 151).

2. *Цилиндрическая поверхность*, у которой в качестве направляющей окружность или эллипс, имеет следующие плоские сечения:

- Окружность или эллипс получаются при пересечении плоскостью всех образующих цилиндрической поверхности (см. рис. 152).

- Две прямые выделяют на поверхности плоскость, которая проходит через вершину цилиндрической поверхности (см. рис. 153).

3. Любое сечение сферы плоскостью представляет собой окружность (см. рис. 154).

4. Плоское сечение тора является окружностью только тогда, когда секущая плоскость содержит ось тора или перпендикулярна ей (см. рис. 155).

Две окружности  $l, f$  получены при сечении открытого тора двумя горизонтальными плоскостями уровня. Другие положения секущих плоскостей дают кривые второго, третьего или четвертого порядка.

5. Плоское сечение многогранника – многоугольник (рис. 156, 157).

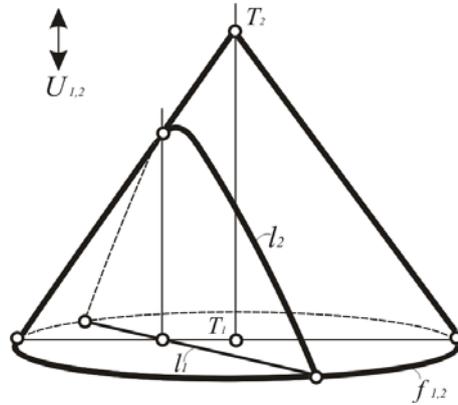


Рис. 148. Построение гиперболы  $l$ , которая лежит на поверхности конуса, по заданной проекции  $l_2$  (аксонометрия)

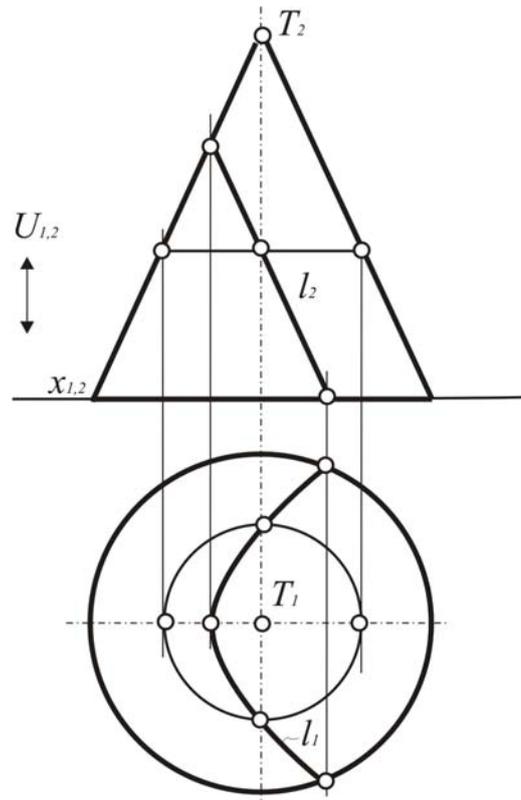


Рис. 149. Построение параболы  $l$ , которая лежит на поверхности конуса, по заданной проекции  $l_2$  (эпюр Монжа)

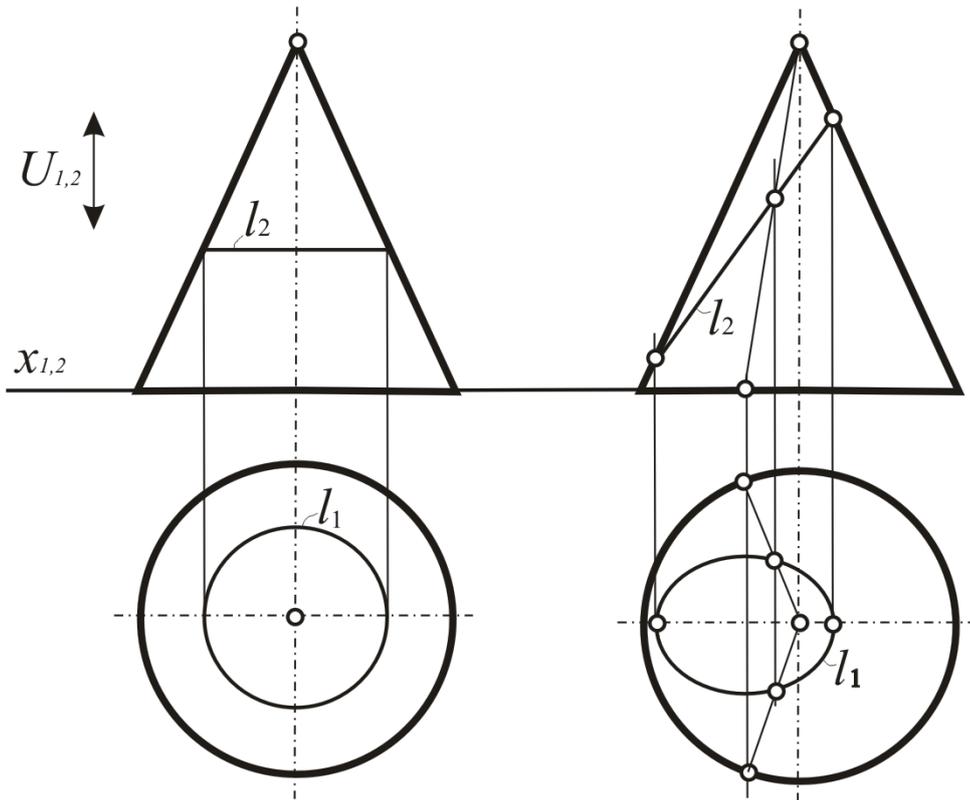


Рис. 150. Построение окружности  $l$  и эллипса  $l_1$ , которые лежат на поверхности конуса, по заданной проекции  $l_2$  (эпюр Монжа)

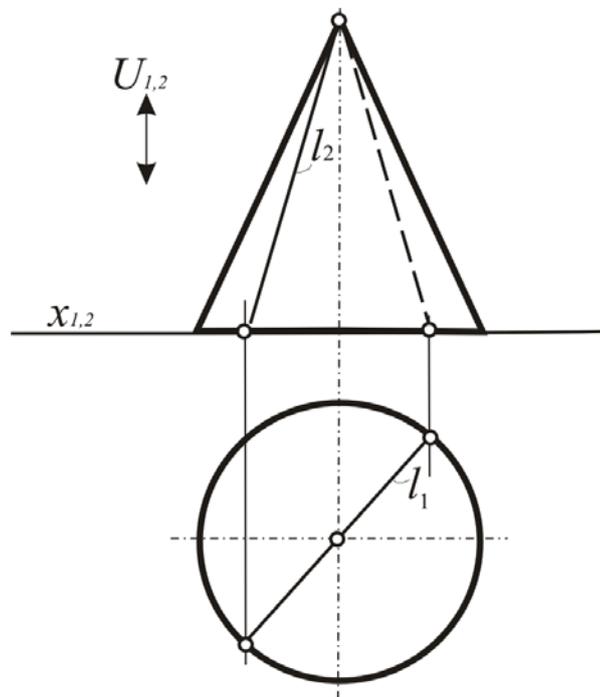


Рис. 151. Построение прямых  $l$ , которые лежат на поверхности конуса, по заданной проекции  $l_1$  (эпюр Монжа)

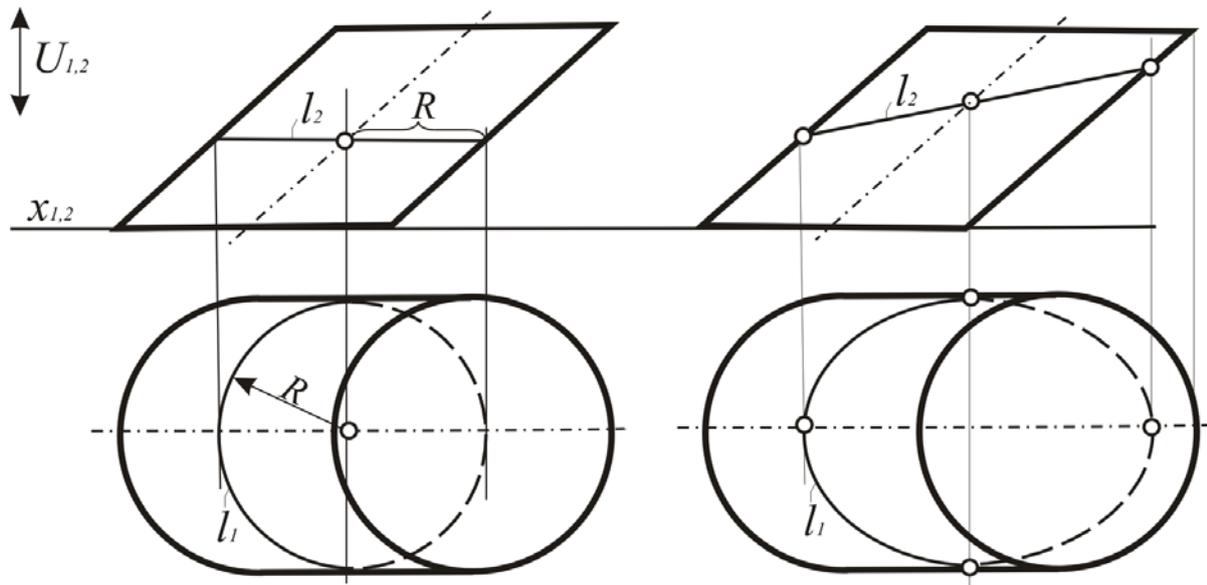


Рис. 152. Построение окружности  $l$  и эллипса  $l_1$ , которые лежат на поверхности цилиндра, по заданной проекции  $l_2$  (эпюр Монжа)

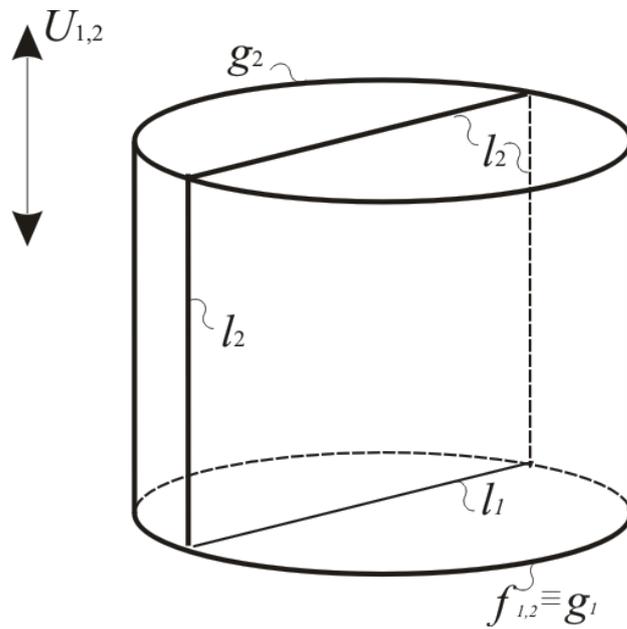


Рис. 153. Построение прямой  $l$ , которые лежат на поверхности цилиндра, по заданной проекции  $l_1$  (аксонометрия)

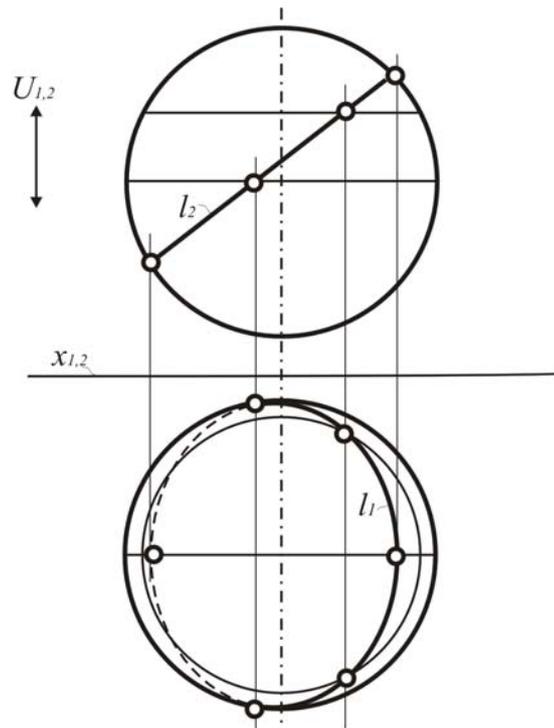


Рис. 154. Построение модели окружности  $l_1$ , которая лежит на поверхности сферы, по заданной проекции  $l_2$  (эпюр Монжа)

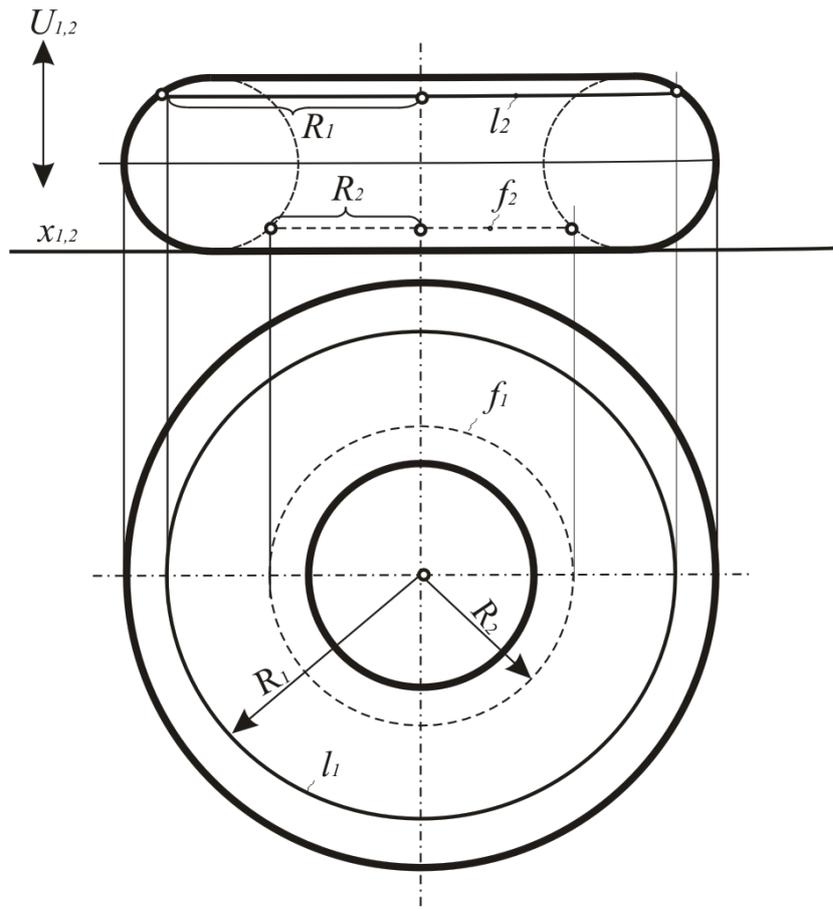


Рис. 155. Построение окружностей  $l, f$ , которые лежат на поверхности тора, по заданным вторым проекциям (эпюр Монжа)

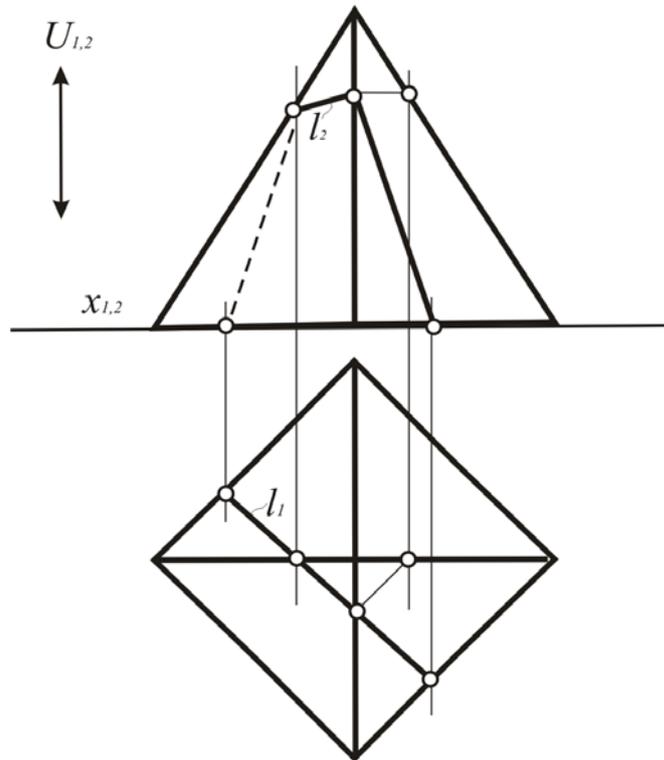


Рис. 156. Построение многоугольника  $l$ , который лежит на поверхности пирамиды, по заданной проекции  $l_1$  (эпюр Монжа)

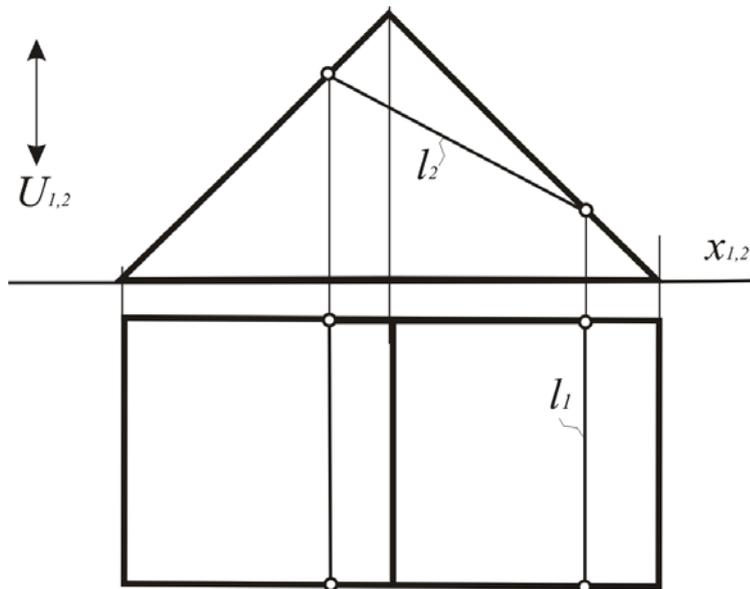


Рис. 157. Построение многоугольника  $l$ , который лежит на поверхности призмы, по заданной проекции  $l_1$  (эпюр Монжа)

Характерные точки линии поверхности – это точки, которые принадлежат очеркам и ребрам поверхностей. Остальные точки, определяющие линию, называются случайными или промежуточными.

Если заранее известно, какая линия окажется в сечении поверхности, то, как правило, для построения искомой проекции линии достаточно только

опорных точек (см. рис. 148, 151, 156). Если необходимо уточнить искомую проекцию линии, то выбирают еще случайные точки (см. рис. 149, 150, 154). При построении проекции линии на многограннике необходимо взять точки только на его ребрах и построить их другие проекции (см. рис. 153, 157).

При построении линии на проецирующей поверхности следует учитывать, что проекция любой ее линии тождественно совпадает с вырожденной проекцией поверхности (рис. 157).

В рассмотренных примерах линии строились с использованием характерных точек. Случайные точки, как правило, не требуются, если заранее известно, как выглядит плоское сечение. Построение этих точек осуществлялось с помощью решения задачи 3, представленной в этом разделе.

Видимый и невидимый участки построенной линии разделяются точками, лежащими на очерках.

### Контрольные вопросы

1. Что называется очерком поверхности?
2. Дайте определение модели поверхности.
3. Перечислить задачи, из решения которых складывается работа с моделью поверхности.
4. В каких случаях поверхность может занимать частное положение?
5. Почему модели сферы и тора в аксонометрии считаются приближенными?
6. Как называются очерки сферы при моделировании ее на эюре Монжа?
7. Какие линии считаются графически простыми?
8. Перечислить операции алгоритма по построению проекции точки, если она принадлежит промоделированной поверхности и дана одна ее проекция.
9. В каких случаях упрощается алгоритм по построению проекции точки, если она принадлежит промоделированной поверхности и дана одна ее проекция,?
10. Перечислить плоские сечения конуса и указать, при каких условиях они возникают.
11. Перечислить плоские сечения цилиндра и указать, при каких условиях они возникают.
12. Что является плоским сечением сферы?
13. Что является плоским сечением многогранника?
14. Перечислить опорные точки линии, которые принадлежат линии поверхности.

## 4. ПОЗИЦИОННЫЕ ЗАДАЧИ

Работа с геометрическими моделями, как было отмечено ранее, складывается из решения позиционных и метрических задач. Причем на практике чаще всего приходится иметь дело с позиционными задачами. Это условие определяет доминирующий характер позиционных задач в курсе начертательной геометрии. Общая характеристика и классификация позиционных задач была даны в разд. 2.

**Позиционными задачами** называют такие, которые позволяют без применения чисел определить взаимную принадлежность или не принадлежность геометрических элементов друг другу или выявить третий элемент, возникающий как следствие взаимного расположения двух других элементов.

В зависимости от числа элементов, между которыми устанавливаются позиционные характеристики, все позиционные задачи делятся на две группы задач, где:

- 1) выясняется взаимная принадлежность двух элементов друг другу;
- 2) выявляется третий элемент как результат расположения двух данных элементов. В этой группе выделяют следующие подгруппы:

- задачи на пересечение;
- задачи на объединение элементов.

Примером первой группы задач являются задачи на определение принадлежности прямой плоскости или поверхности, принадлежности точки прямой, плоскости или поверхности. Примером второй группы позиционных задач являются задачи на объединение элементов. Например, две точки объединяет одна прямая или точку и прямую объединяет одна плоскость. Примером задач на пересечение являются пересечение прямой с плоскостью или поверхностью, пересечение поверхностей. Задачи на объединение – это проведение прямой через две точки или плоскости через три точки и т.п. Очевидно, что для решения задач на объединение не требуется знания специальных приёмов. Но когда дана задача на пересечение, то для поиска общего элемента двух заданных геометрических элементов необходимо выполнить специальные построения.

Основными задачами этой группы являются задачи по определению точки пересечения прямой с плоскостью или поверхностью. Умение решать их позволит осуществлять решение более сложных: пересечение плоскостей и пересечение поверхностей. Причем последняя задача требует умения решать все остальные, которые в той или иной комбинации позволяют найти общую линию двух и более поверхностей. Следует заметить, что задачи на объединение элементов участвуют как базовые в решении всей группы задач на пересечение.

На рис. 158 отражена взаимозависимость всех групп позиционных задач. Она показывает, что самой сложной является задача на пересечение поверхностей. Ее решение можно представить как многократное решение всех предыдущих задач. Поэтому для успешного освоения настоящего раздела учебного курса необходимы прочные навыки в решении всей группы позиционных задач. Но кроме указанных знаний здесь требуются знания всего предыдущего учебного материала. Схема, отражающая взаимосвязь дидактических единиц, способствующих освоению раздела «Позиционные задачи», представлена на рис. 159.

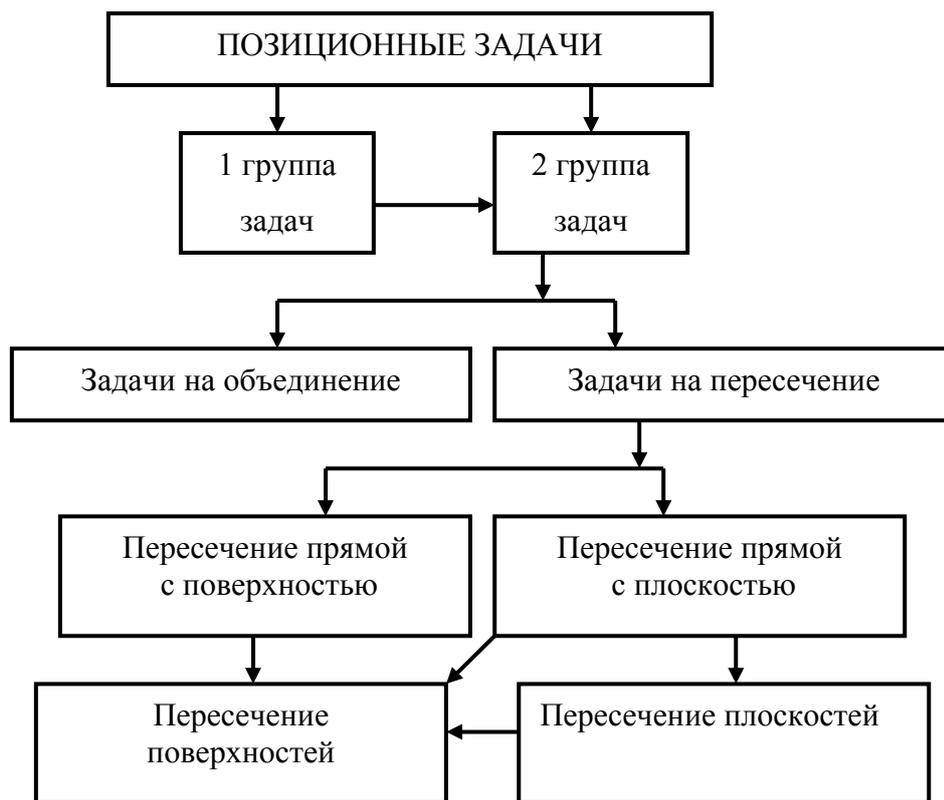


Рис. 158. Схема взаимозависимости позиционных задач

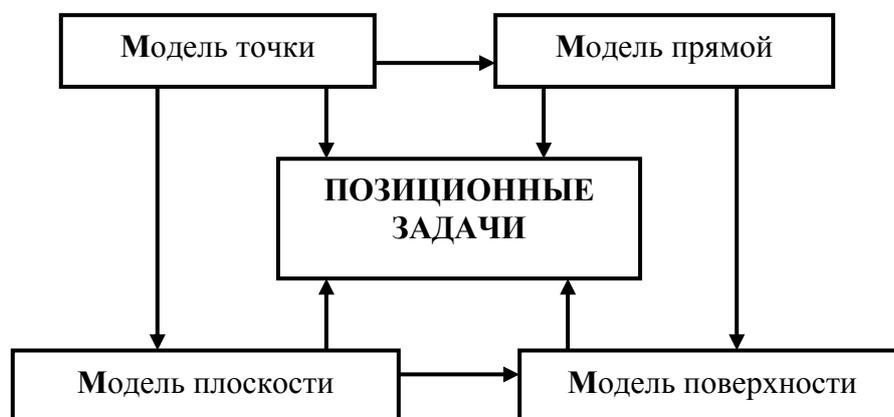


Рис. 159. Схема, отражающая взаимосвязь дидактических единиц, влияющих на освоение раздела «Позиционные задачи»

## 4.1. Пересечение прямой с плоскостью

Рассмотрим решение одной из самых распространенных задач: пересечение прямой с плоскостью. Успех в решении этой задачи определяется, с одной стороны, умением свободно обращаться с моделями геометрических элементов, с другой стороны – знанием специальных приемов, обусловленных спецификой плоской модели.

Задача по определению общей точки прямой и плоскости встречается на практике в самых различных вариантах. Она входит как составной элемент во многие другие задачи. Поэтому ее нужно научиться решать быстро и безотказно.

В трехмерном пространстве плоскость и прямая, пересекаясь, определяют положение некоторой точки. Иное дело, когда нам дана плоская модель этих объектов (рис. 160).

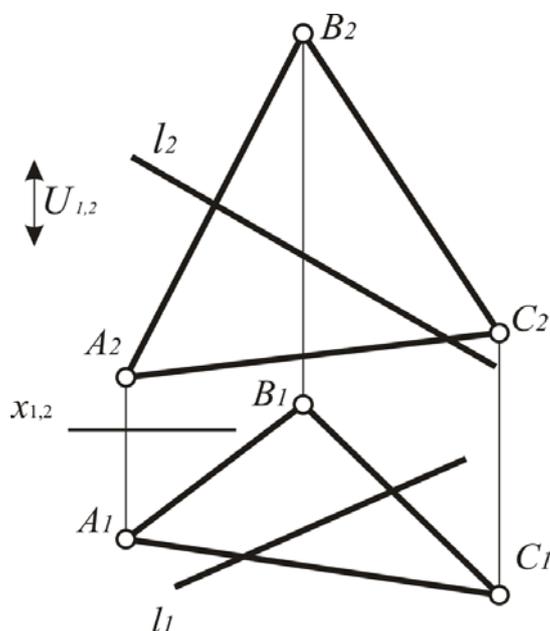


Рис. 160. Определение точки пересечения прямой с плоскостью (эпюр Монжа)

Общая точка  $K$  прямой  $l$  и плоскости  $\alpha$ , которая задана треугольником  $ABC$ , здесь присутствует, но не выявлена. Чтобы ее найти, нужно учесть плоский характер модели, а именно то обстоятельство, что точка на плоскости определяется как результат пересечения линий.

Одной такой линией будет заданная прямая  $l$ , другой – вспомогательная  $l^*$ . Последняя возникает в результате пересечения двух плоскостей: заданной  $\alpha$  и вспомогательной  $\lambda$ , которая проведена через прямую  $l$  и один из центров проецирования (рис. 161).

Проецирующее положение плоскости  $\lambda$  приводит к тому, что на одной из картин тождественно совпадают ее вырожденная проекция и одноименные по нижнему индексу проекции прямых  $l$  и  $l^*$ . Например, на рис. 161

плоскость  $\lambda$  содержит  $S_2$ . В результате ее вырождения проекция тождественно совпадает с проекциями прямых  $l$  и  $l^*$  ( $\lambda_2 \equiv l_2^* \equiv l_2$ ). Построив первую проекцию  $l^*$ , пересечём её с  $l_1$  и получим первую проекцию искомой точки  $K = \alpha \cap l$ . Затем необходимо найти точку  $K_2$ . Для этого достаточно провести линию связи (рис. 162).

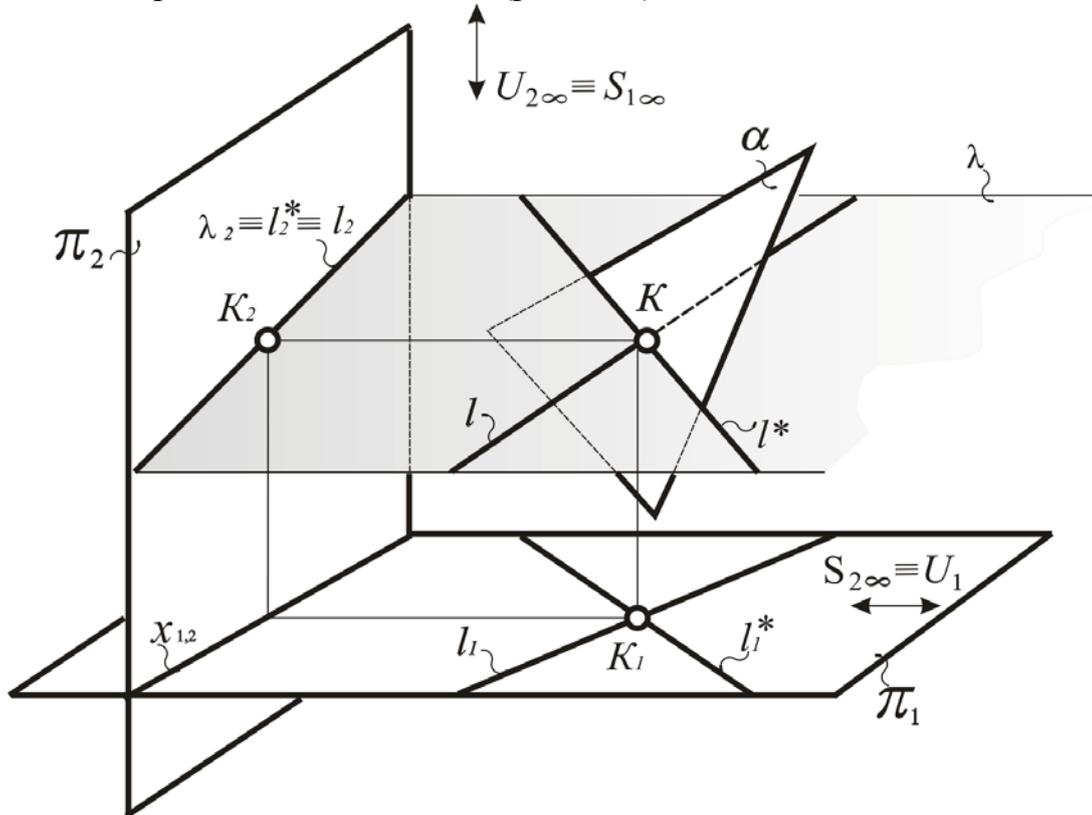


Рис. 161. Определение точки пересечения прямой с плоскостью (эпюр Монжа)

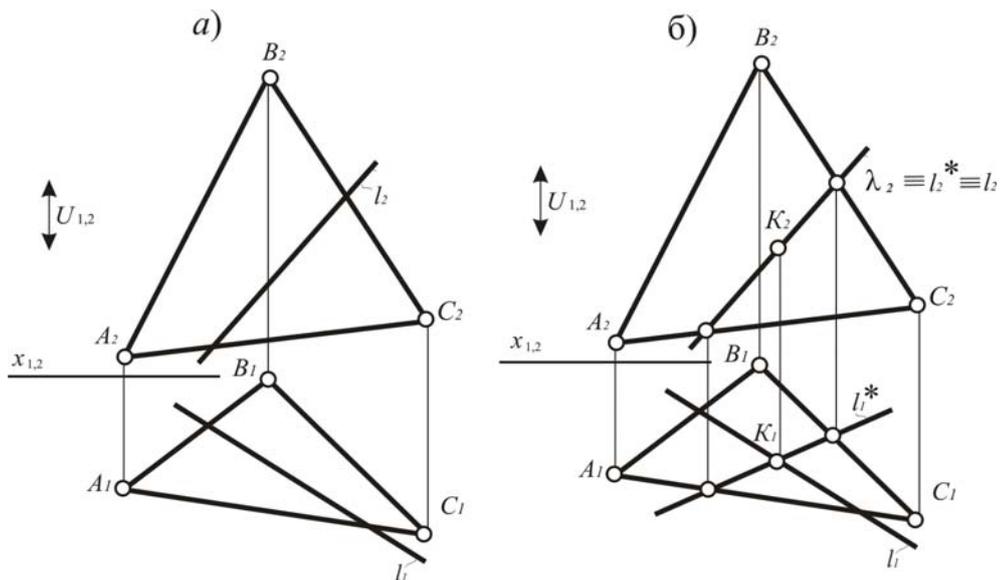


Рис. 162. Определение точки пересечения прямой с плоскостью на плоской модели (эпюр Монжа)

Таким образом, на плоской модели точка пересечения прямой с плоскостью определяется благодаря операциям, описание которых дано в табл. 4.

Т а б л и ц а 4

Операции алгоритма по нахождению точки пересечения  
прямой с плоскостью

	Описание операций алгоритма	Символическая запись
1	Тождественно совмещаем одну из проекций заданной прямой с соответствующей проекцией	$l_{2(1)} \equiv l_{2(1)}^*$
2	Строим другую проекцию вспомогательной прямой	$l_{2(1)}^* \rightarrow l_{1(2)}^*$
3	Пересекаем построенную проекцию вспомогательной прямой с одноимённой по нижнему индексу проекцией заданной прямой; в результате получаем одну проекцию точки пересечения	$l_{1(2)}^* \cap l_{1(2)} = K_{1(2)}$
4	Находим другую проекцию искомой точки пересечения	$K_{1(2)} \rightarrow K_{2(1)}$

На рис. 163 приведен пример построения общей точки проецирующей прямой  $l$  с плоскостью общего положения  $\alpha$  (треугольник  $ABC$ ). Если прямая  $l$  занимает проецирующее положение, то через нее можно провести бесконечное множество вспомогательных плоскостей, которые будут проходить через тот же центр проецирования, что и прямая. Поэтому выберем ту вспомогательную плоскость, с которой удобно работать. На рис. 161,б вспомогательная плоскость проходит через вершину  $A$  треугольника  $ABC$ , которым задана плоскость. На рис. 161,а дано условие задачи, на рис. 161,б – ее решение.

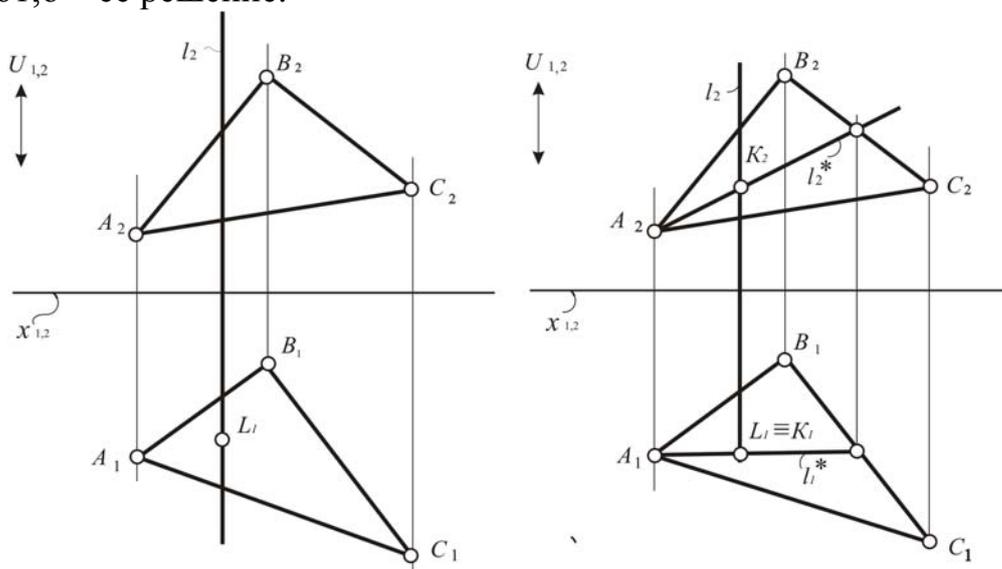


Рис. 163. Определение точки пересечения проецирующей прямой с плоскостью общего положения на плоской модели (эпюр Монжа)

Проецирующее положение заданной плоскости  $\alpha$  (рис. 164) не меняет существо алгоритма, но значительно упрощает решение задачи, потому что точка пересечения видна на той картине, где плоскость вырождается в прямую.

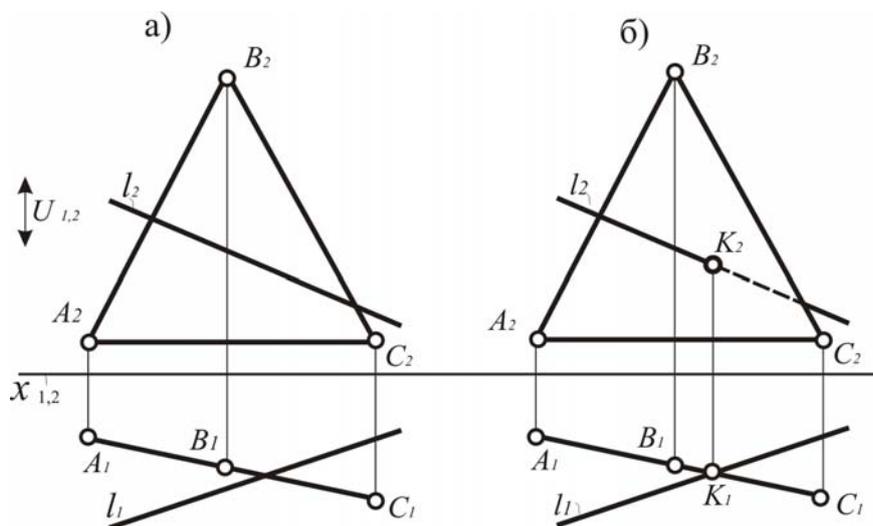


Рис. 164. Определение точки пересечения прямой общего положения с проецирующей плоскостью (эпюр Монжа)

## 4.2. Пересечение прямой с поверхностью

Пересечение прямой с поверхностью также является фундаментальной позиционной задачей. Кроме того, она входит как составной элемент в решение более сложных позиционных задач, таких, как пересечение плоскости с поверхностью и пересечение поверхностей.

Принцип, лежащий в основе решения задачи на определение точки пересечения прямой с плоскостью, сохраняется и в случае определения общих точек прямой и поверхности (рис. 165, 166, 167). Через прямую  $l$  проводится вспомогательная плоскость  $\lambda$ , которая пересекает поверхность по вспомогательному сечению  $l^*$ . Это сечение, пересекаясь с заданной прямой  $l$ , выделяет на ней искомые точки  $M$  и  $N$ .

Поскольку через прямую  $l$  можно провести бесконечно много плоскостей, выберем такие, с которыми удобно работать. Критериями такого удобства являются:

1. Графически простое сечение поверхности вспомогательной плоскостью.
2. Проецирующее положение вспомогательной плоскости.

Решение задачи рекомендуется проводить по следующему алгоритму:

- 1) определить, какие сечения поверхности представляют собой графически простые линии;

2) через заданную прямую и один из центров проецирования провести секущую плоскость  $\lambda$  так, чтобы она пересекла поверхность по графически простой линии  $l^*$  (если это возможно);

3) осуществить построение точек пересечения прямой  $l$  с полученным сечением  $l^*$ .

На рис. 165 приведен пример построения точек пересечения прямой  $l$  с пирамидой  $TABC$ . Прямая  $l$  занимает общее положение. Вспомогательная секущая плоскость  $\lambda$  содержит прямую  $l$  и проходит через центр проецирования  $S_1$ . Сечение  $l^*$  представляет собой многоугольник. Если вспомогательная секущая плоскость пройдет через центр  $S_2$ , то решение задачи принципиально не изменится. Изменится только форма многоугольника, полученного от сечения плоскостью  $\lambda$ .

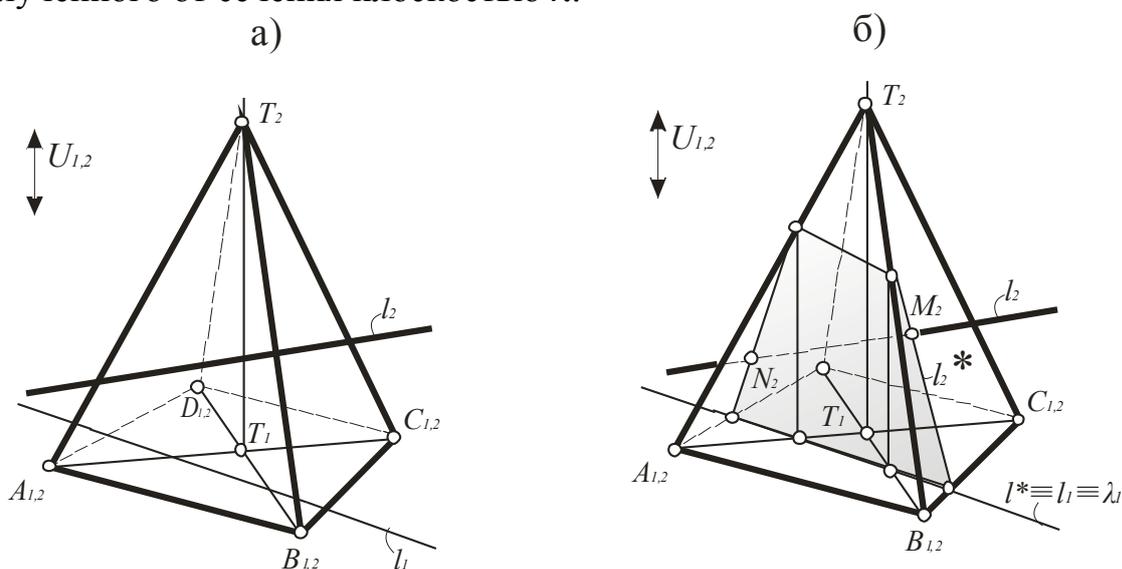


Рис. 165. Определение точки пересечения прямой с поверхностью на плоской модели (аксонометрия)

Проецирующее положение прямой  $l$  дано в примере на рис. 166, где  $l$  содержит центр  $S_1$  и пересекает конус. Из бесконечного множества плоскостей выберем ту, которая даст самое простое коническое сечение – прямую  $AT$ . Это плоскость  $\lambda$ , проходящая через вершину  $T$ , которая пересечет еще и основание конуса по прямой  $AB$ . Эти две прямые входят в часть сечения  $l^*$ , позволяющего выявить точки, общие как для конуса, так и для прямой  $l$ .

Если поверхность занимает проецирующее положение, плоскость  $\lambda$  можно не проводить. Общие точки видны сразу на той картине, на которой поверхность вырождается в линию. В примере на рис. 167 проецирующее положение занимает цилиндр. Его вершина тождественно совпадает с центром проецирования  $S_1$ , и первая проекция вырождается в линию. Её достаточно пересечь с  $l_1$ , чтобы получить точки  $M$  и  $N$ , в которых прямая  $l$  пересекает цилиндр. Хотя в этом случае секущая плоскость  $\lambda$  все-таки существует. Она проходит через центр  $S_1$  и прямую  $l$ .

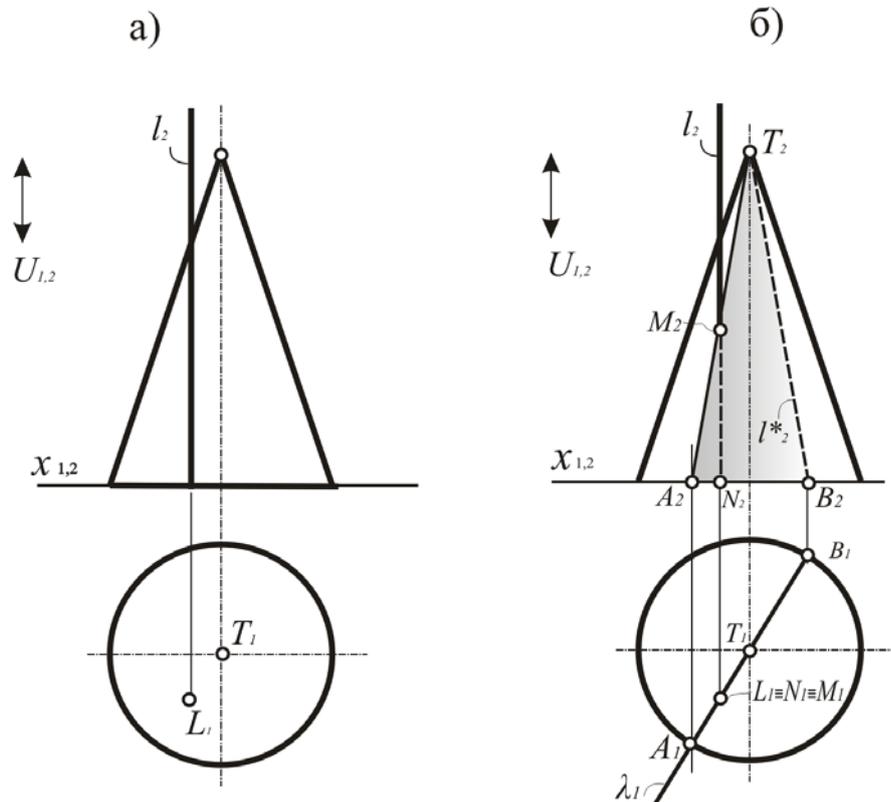


Рис. 166. Определение точки пересечения проецирующей прямой с поверхностью на плоской модели (эпюр Монжа)

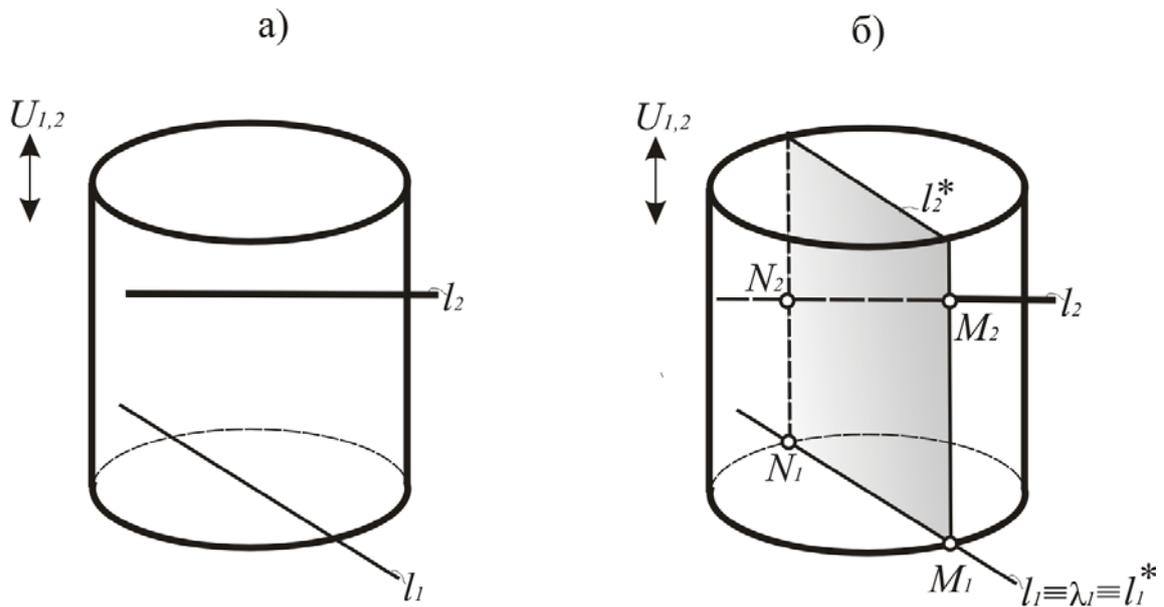


Рис. 167. Определение точки пересечения прямой общего положения с проецирующей поверхностью на плоской модели (аксонометрия)

Сравнивая алгоритмы решения задачи на пересечение прямой с плоскостью и с поверхностью, мы видим, что они не имеют принципиального различия. Оно возникает только тогда, когда речь заходит о вспомогательном сечении. На поверхности это сложная линия, а на плоскости – прямая.

### 4.3. Пересечение плоскостей

Другой часто встречающейся позиционной задачей является построение линии пресечения плоскостей. На рис. 168 приведены примеры решения этой задачи на эпюре Монжа. Даны две плоскости  $\alpha = A \cup B \cup C$  и  $\beta = m \cap n$ . В случае, представленном на рис. 168, обе плоскости занимают общее положение. В этом случае линия пересечения  $l$  определяется по двум точкам, в которых прямые  $m$  и  $n$ , принадлежащие плоскости  $\beta$ , пересекают плоскость  $\alpha$ . Очевидно, что для определения этих точек необходимо два раза решить задачу на пересечение прямой с плоскостью. Последовательность этих действий показана на рис. 168.

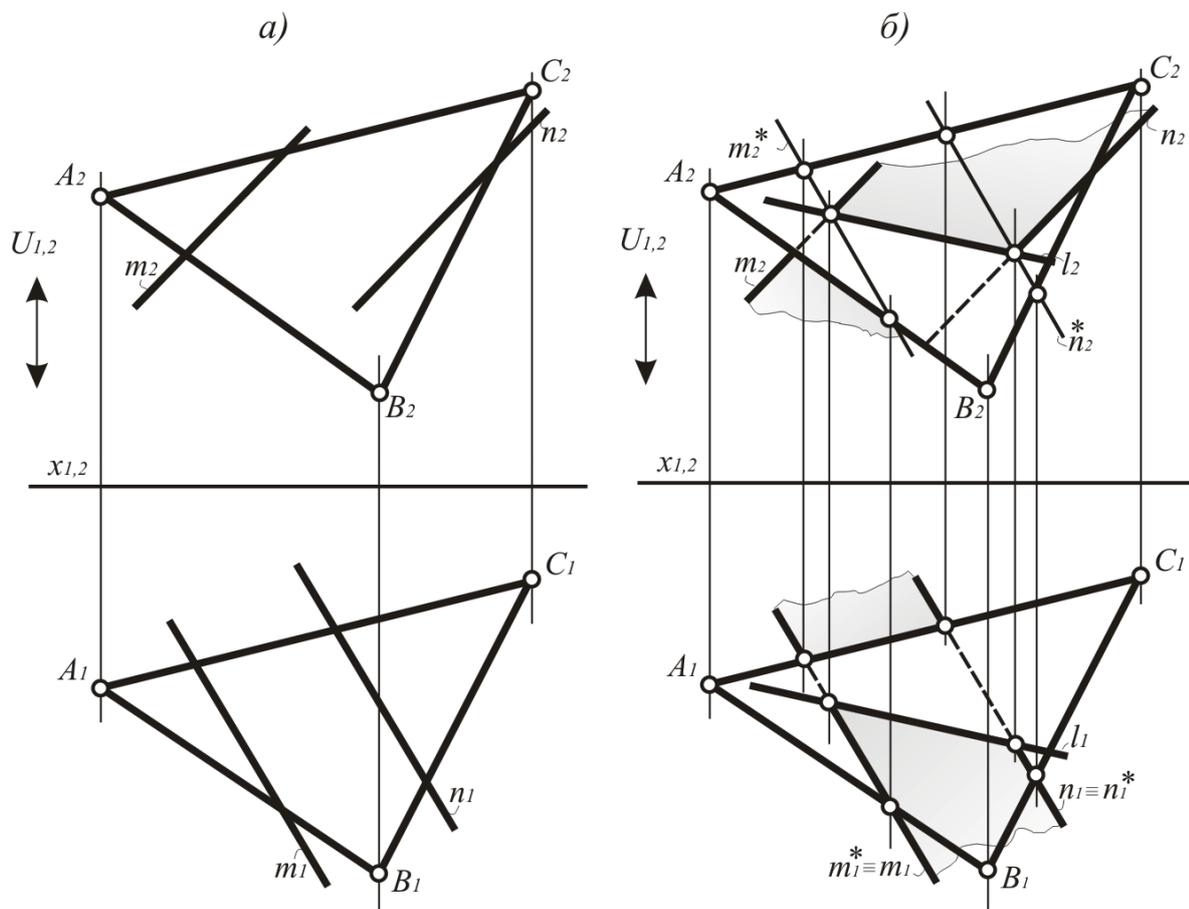


Рис. 168. Построение линии пересечения двух плоскостей общего положения

Если одна из плоскостей занимает проецирующее положение, то решение задачи несколько упрощается, так как одна из проекций  $l$  тождественно совпадает с вырожденной проекцией плоскости. В примере на рис. 169 проецирующее положение занимает плоскость  $\beta$ . Она содержит центр проецирования  $S_1$ , и ее вторая проекция представляет собой прямую линию, с которой тождественно совпадает вторая проекция линии пересечения.

Если обе плоскости содержат один и тот же центр проецирования, то через тот же центр пройдет и линия пересечения. На рис. 170 плоскости  $\alpha$  и  $\beta$  содержат центр  $S_1$ , через него пройдет и линия пересечения плоскостей.

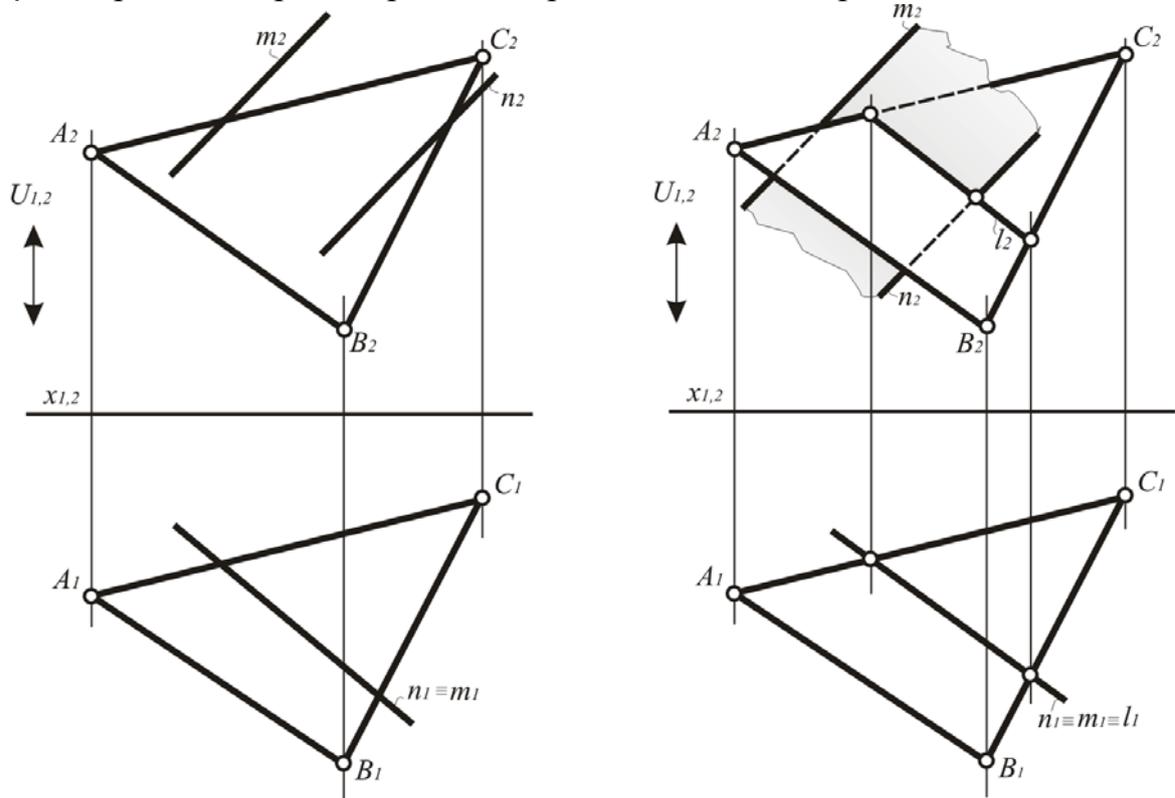


Рис. 169. Построение линии пересечения двух плоскостей – общего и проецирующего положений

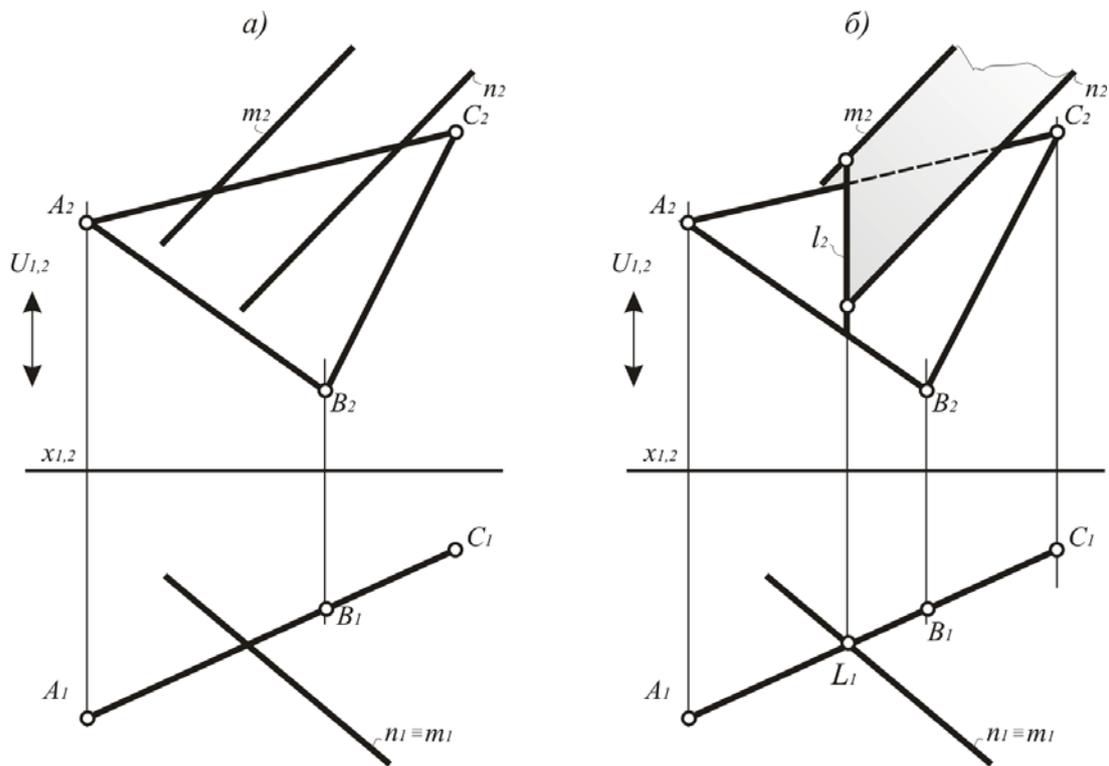


Рис. 170. Построение линии пересечения двух проецирующих плоскостей

## 4.4. Пересечение поверхностей

Самыми сложными в группе позиционных задач являются задачи на пересечение поверхностей. Их сложность обуславливается тем, что приходится многократно решать более простые позиционные задачи, которые необходимо выделить, четко сформулировать, а затем уже решать.

Небольшая по объему теоретическая часть этого подраздела дает необходимые, но достаточные сведения по построению линии пересечения поверхностей. Овладеть искусством построения этих линий можно только на практике. Причем каждый раз может возникать какая-то своя нестандартная ситуация. Поэтому так важно наличие не только хороших знаний теоретического материала, но и прочных навыков в решении рассмотренных задач.

Результатом взаимного расположения двух поверхностей является некоторая линия, точки которой принадлежат одновременно обеим поверхностям. На плоской модели линию пересечения приходится строить по точкам. Чтобы правильно их соединить, нужно заранее знать, как она выглядит.

Для предварительного определения вида общей линии поверхностей разделим последние на два класса:

- многогранные поверхности;
- кривые поверхности второго порядка.

В результате пересечения этих поверхностей возникают следующие линии:

1. Если пересекаются два многогранника, то их общая линия представляет собой пространственную ломаную, которая состоит из прямых отрезков. Точки излома принадлежат ребрам многогранников.

2. При пересечении многогранника и кривой поверхности второго порядка возникает пространственная ломаная линия, которая состоит из дуг кривых второго порядка. Точки излома принадлежат ребрам многогранника.

3. Две кривые поверхности второго порядка в качестве общей линии имеют кривую четвертого порядка, которая может распадаться на две плоские кривые второго порядка.

Рассмотрим пример пересечения двух многогранников (рис. 171). Пересечение двух плоских граней дает отрезок прямой, из совокупности этих отрезков образуются пространственные линии. Поскольку с учетом требований практики рассматриваются замкнутые поверхности, то эти совокупности представляют собой замкнутые линии.

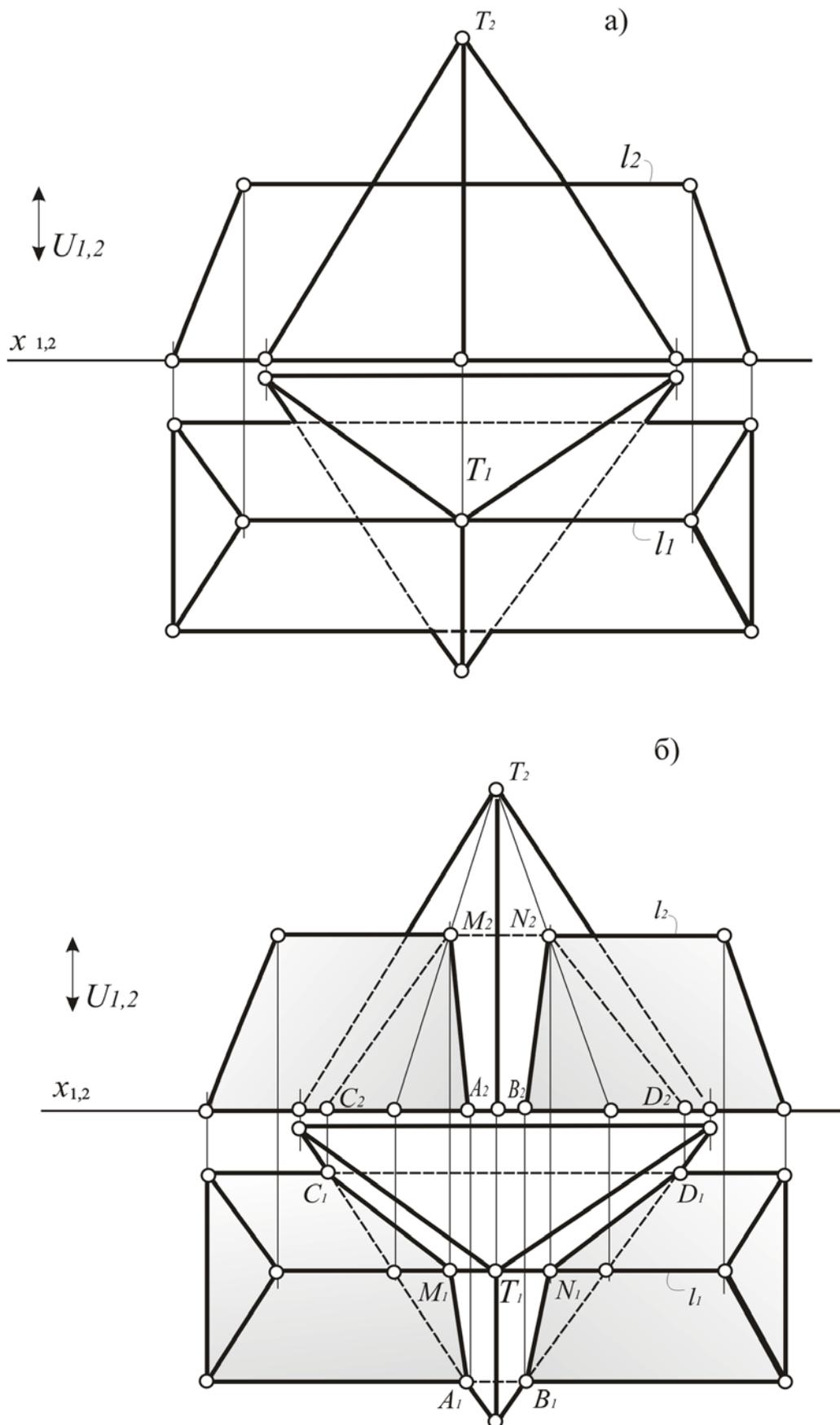


Рис. 171. Пересечение многогранников общего положения (эпюр Монжа)

Начинать решение задачи рекомендуется с определения ребер, участвующих в пересечении. В примере на рис. 171 пересекаются призма и пирамида. Их взаимное расположение позволяет утверждать, что ребра обоих оснований призмы в пересечении не участвуют. Не участвует в пересечении также ребро  $AT$  призмы. В точках  $A, B, C$  и  $D$  пересекаются стороны оснований, которые лежат в одной плоскости. Точки  $M$  и  $N$  определены в результате пересечения ребра  $l$  призмы с пирамидой. Отрезки  $AM, MC$  и  $BN, ND$  образуют общую линию этих поверхностей.

Если одна из поверхностей занимает проецирующее положение, то соответствующая проекция линии пересечения тождественно совпадает с вырожденной проекцией поверхности. В задаче на рис. 172 вершина призмы содержит центр проецирования  $S_1$ . Ее первая проекция вырождается в линию, с которой совпадает первая проекция их общей линии. В этой задаче определяется линия пересечения многогранника и кривой поверхности второго порядка, которая представляет собой ломаную линию, состоящую из дуг кривых второго порядка. В частности, на линии пересечения могут возникать отдельные прямые участки.

Точки излома  $A, B, C$  и  $D$  принадлежат соответствующим ребрам призмы. Для их выявления четыре раза решалась задача по пересечению прямой с поверхностью. Через проецирующие ребра призмы  $a, b, c$  и  $d$  проведены секущие плоскости  $\alpha \supset c, d$  и  $\beta \supset a, b$ , которые совпадают с гранями призмы. Они пересекают цилиндр по образующим  $k$  и  $i$ , которые, в свою очередь, пересекаясь с ребрами, дают упомянутые выше точки  $A, B, C$  и  $D$ . Чтобы определить характер кривых линий, по которым грани призмы пересекают цилиндр, придется несколько раз решать задачу на пересечение прямой с поверхностью. Например, пересечение образующей  $f$  с поверхностью призмы дает точки  $E$  и  $I$ .

Две дуги различных гипербол образуют общую линию конуса и проецирующей призмы (рис. 173). В точках  $A$  и  $B$  пересекаются основания этих поверхностей. Все остальные точки  $C, K, D$  и  $H$  определены в результате пересечения образующих конуса  $f, m, n, l$  с поверхностью призмы. Сначала найдем опорную точку  $C$ , лежащую на очерковой образующей конической поверхности. Чтобы найти точку  $D$  излома линии пересечения, в которой ребро призмы пересекает поверхность конуса, необходимо пересечь это ребро с образующей  $n$  конической поверхности. Остальные точки общей линии конуса и призмы возникают в результате многократного решения задачи на пересечение прямой (образующей конической поверхности) с проецирующей поверхностью призмы. В примере на рис. 173 случайные точки  $K$  и  $H$  получены в результате пересечения прямых  $m, l$  с гранями призмы.

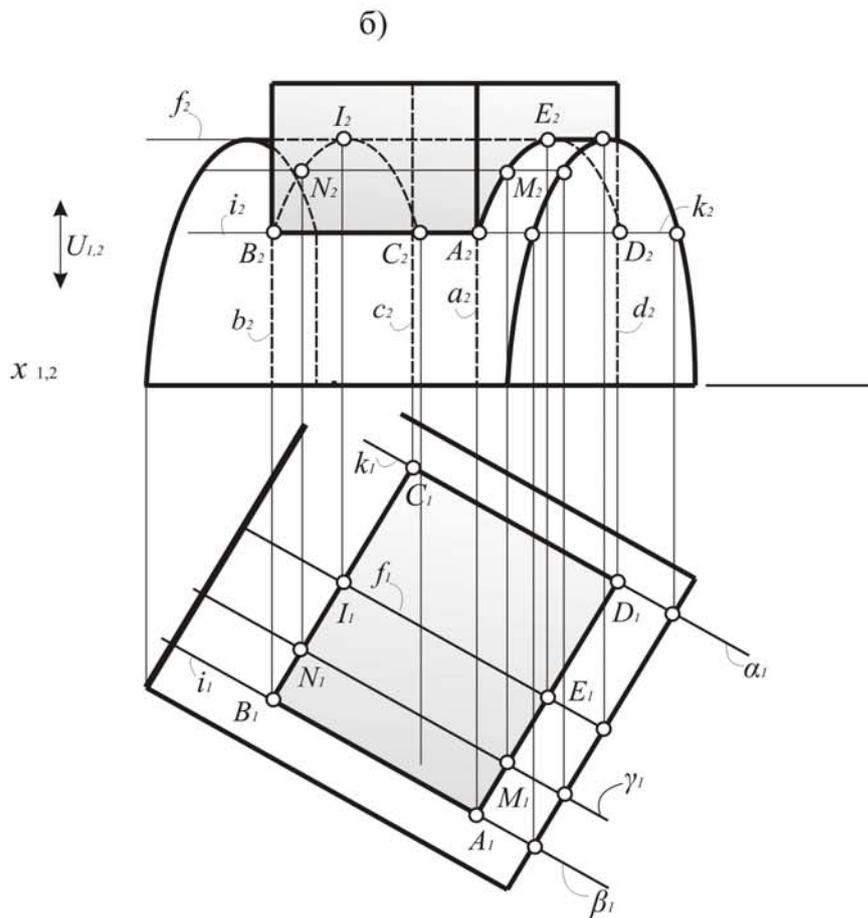
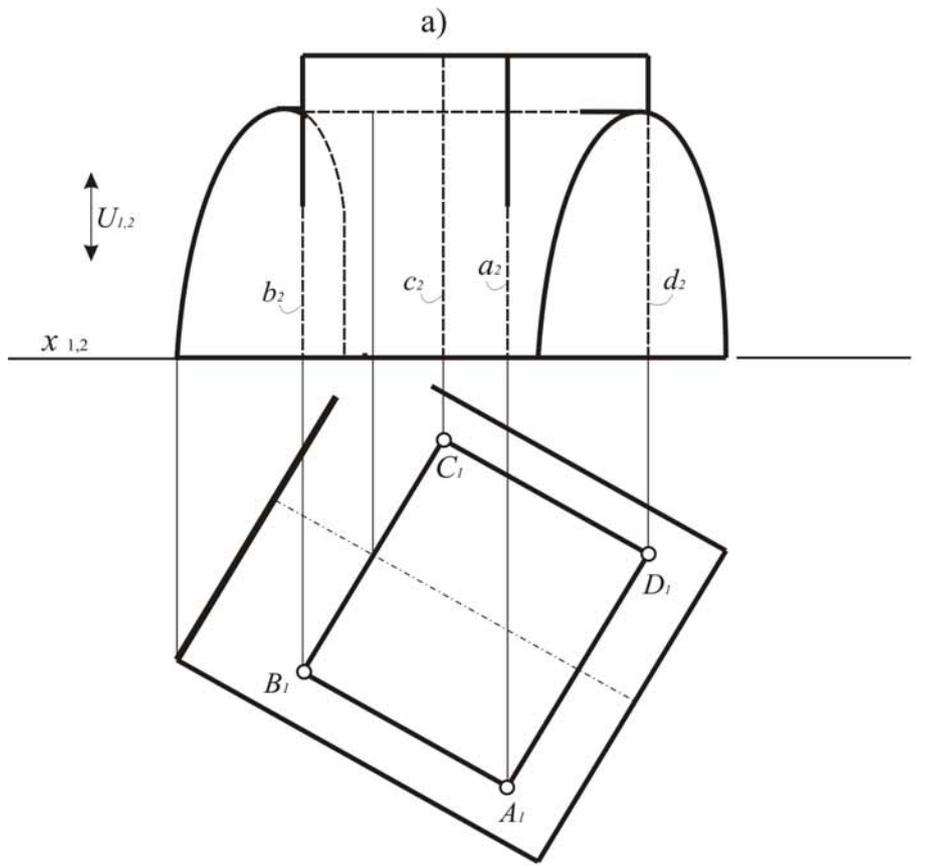


Рис. 172. Пересечение проецирующей призмы с цилиндром (эпюры Монжа)

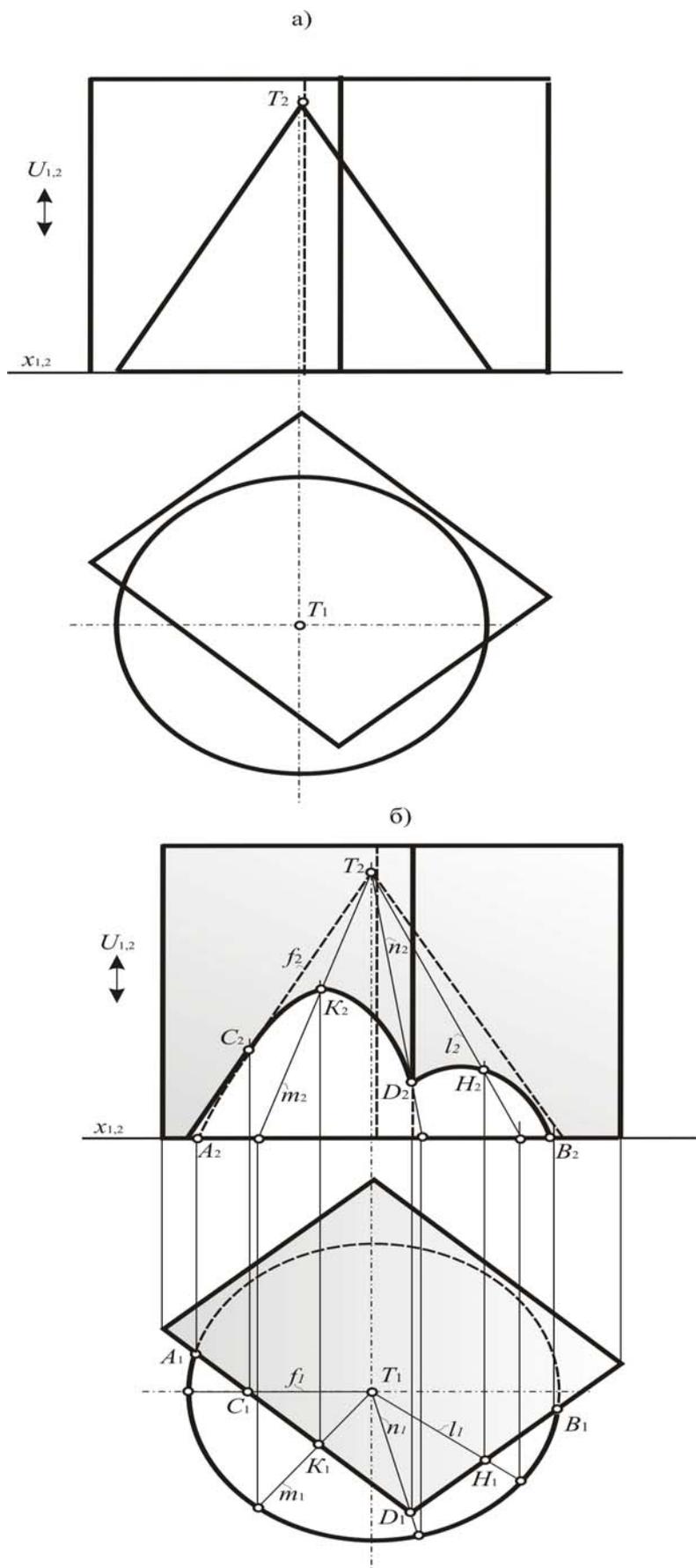


Рис. 173. Пересечение проецирующей призмы с конусом (эпюр Монжа)

На рис. 174 цилиндр и конус имеют основания, лежащие в одной плоскости. Общие точки этих оснований  $A$  и  $B$  принадлежат линии пересечения заданных поверхностей. Эта линия представляет собой кривую четвертого порядка. Чтобы построить такую кривую, будем многократно решать задачу на пересечение двух прямых. Это прямолинейные образующие цилиндра и конуса. Каждую пару образующих получаем, пересекая обе поверхности плоскостью, которая проходит одновременно через обе вершины поверхностей. В результате возникает пучок секущих плоскостей с осью  $i = T \cup S_1$ . Пересечем  $i$  с плоскостью, которая содержит общее основание поверхностей, и получим точку  $M$ .

Построение линии пересечения начнем с опорных точек  $C$  и  $D$ , которые принадлежат очеркам поверхностей. Для этого в выделенном пучке плоскостей выберем плоскости  $\alpha$  и  $\beta$ . Они выделяют две пары прямых, которые определяют положение точек  $C$  и  $D$ . Самую ближнюю точку  $K$  определим с помощью плоскости  $\zeta$ . Плоскость  $\gamma$  позволяет определить случайную точку линии пересечения поверхностей.

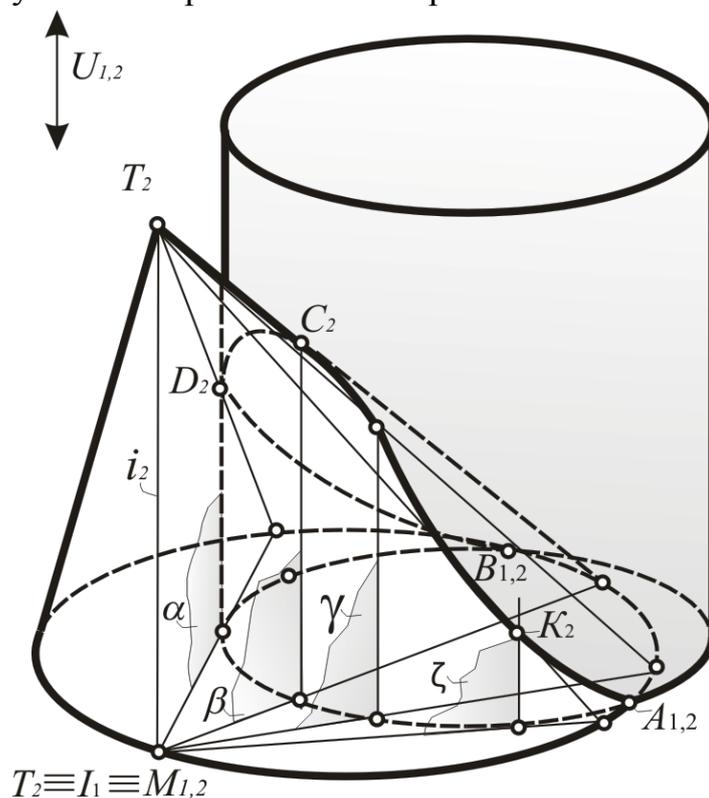


Рис.174. Пересечение проецирующего цилиндра с конусом (аксонометрия)

Идея одновременного сечения поверхностей вспомогательными плоскостями широко используется для построения линии пересечения как линейчатых поверхностей, так и нелинейчатых. Например, линия пересечения двух эллипсоидов построена по точкам, которые найдены в результате сечения обеих поверхностей по окружностям (рис. 175). Каждая пара окружностей получена при одновременном сечении поверхностей пло-

скостью. В рассмотренном примере на рис. 175 такими плоскостями являются плоскости  $\pi_1$ ,  $\alpha$  и  $\beta$ .

Условия выбора вспомогательных секущих плоскостей определяются практической целесообразностью: в сечениях на поверхностях должны возникать графически простые линии.

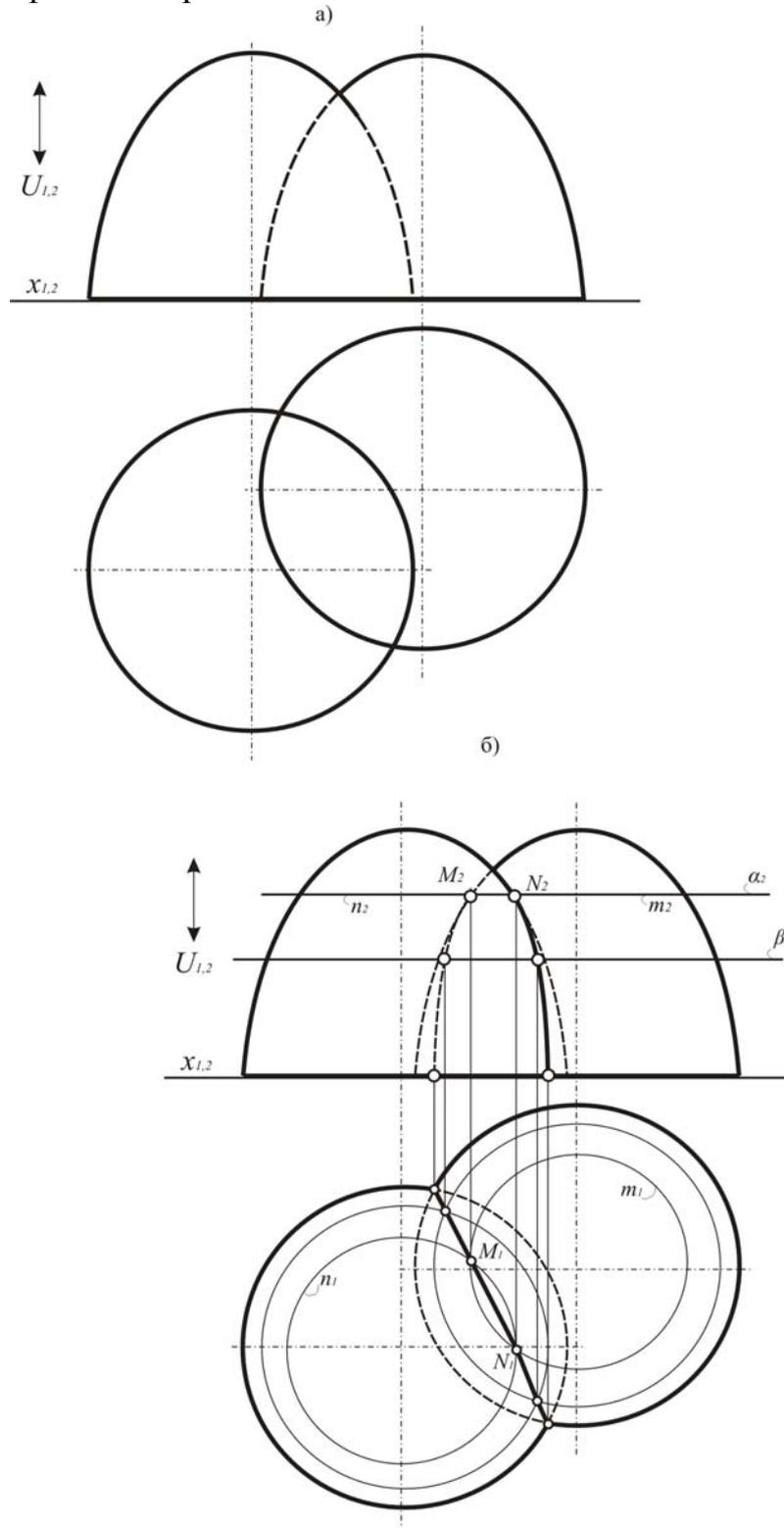


Рис.175. Пересечение двух эллипсоидов (эпюр Монжа)

## Контрольные вопросы

1. Какие задачи называются позиционными?
2. Перечислить и дать характеристику основным группам позиционных задач.
3. Перечислить операции алгоритма, который позволяет определить точку пересечения прямой с плоскостью. Как видоизменяется этот алгоритм в случае, когда прямая или плоскость занимает проецирующее положение?
4. Перечислить операции алгоритма, который позволяет определить точку пересечения прямой с поверхностью. Как видоизменяется этот алгоритм в случае, когда прямая или поверхность занимает проецирующее положение?
5. Как определяются точки, принадлежащие линии пересечения двух плоскостей?
6. Если одна из заданных плоскостей занимает проецирующее положение, то как это отражается на решении задачи?
7. Как изображается линия пересечения плоскостей в случае, когда обе эти плоскости проходят через один и тот же центр проецирования?
8. Перечислить простые позиционные задачи, которые необходимо решать при определении общей линии двух поверхностей.
9. Что представляет собой линия пересечения двух многогранников?
10. Как выглядит линия пересечения многогранника и кривой поверхности второго порядка ?
11. По какой линии пересекаются две кривые поверхности второго порядка?
12. Как распадается общая линия двух кривых поверхностей второго порядка?
13. Какие существуют критерии в выборе положения вспомогательных секущих плоскостей, которые упрощают решение задачи?
14. Перечислить условия, благодаря которым упрощается построение линии пересечения поверхностей.

## 5. МЕТРИЧЕСКИЕ ЗАДАЧИ

Работа с геометрическими моделями складывается не только из решения позиционных задач. Достаточно часто приходится определять величину той или иной геометрической фигуры или давать численную оценку взаимному положению геометрических объектов. Так две точки определяют число, которое является расстоянием между ними; две прямые дают число, соответствующее углу между ними и т. п. Задачи, решаемые в этих случаях, принято называть метрическими.

При решении метрических задач недостаточно иметь только модели исходных элементов. Необходимы модели опорных элементов, которые заранее фиксируются на модели. Благодаря им можно по мере надобности получать любую измерительную шкалу.

В качестве таких опорных элементов возьмем **абсолютную полярность** – это взаимное соответствие прямых и точек. Оно является результатом сечения бесконечно удаленной плоскостью связки из взаимно перпендикулярных прямых и плоскостей. Соответственными элементами в этой связке являются прямая и перпендикулярная ей плоскость. На секущей плоскости они порождают соответственные точки и прямые.

Если выделить пару соответственных элементов в этой полярности, то они окажутся точкой схода и прямой схода взаимно перпендикулярных прямых и плоскостей, имеющих эти точку схода и прямую схода.

Существуют различные способы определения полярности. Наиболее подходящим является выделение ядра полярности – окружность.

Для перспективы такой окружностью является дистанционная окружность с центром в главной точке картины.

В аксонометрии и на эпюре Монжа центр проецирования  $S_2$  находится в бесконечности; следовательно, радиус дистанционной окружности, которая является ядром полярности, бесконечно велик. В результате возникает парадоксальная с обыденной точки зрения ситуация: дистанционная окружность совпадает с бесконечно удаленной прямой картины  $\pi_2$ . Этой прямой принадлежат все бесконечно удаленные точки, в которых пересекаются параллельные прямые трехмерного пространства. По этой же прямой пересекаются все параллельные плоскости трехмерного пространства. Следовательно, имеем вырожденную абсолютную полярность, которая не позволяет ей пользоваться при решении метрических задач. В результате методы решения метрических задач в перспективе существенно отличаются от их решения на эпюре Монжа и в аксонометрии.

Сравнивая приемы решения метрических задач, можно утверждать, что в аксонометрии они решают гораздо сложнее, чем на эпюре Монжа. Это обстоятельство обуславливается нефиксированным положением угла между картинками на аксонометрических проекциях. Для решения метрических

задач в аксонометрии требуется привлечение дополнительных знаний, что приведет к существенному увеличению объема учебного материала. Поэтому в настоящем учебном пособии они не рассматриваются.

Традиционно наиболее востребованные метрические задачи делятся на несколько групп:

- 1) определяется метрика геометрического объекта (находится натуральная величина отрезка прямой или плоского угла);
- 2) определяется величина поверхности в процессе совмещения ее с плоскостью (построение развертки).

Наиболее востребованными метрическими задачами оказались при решении задач на эпюре Монжа. Поэтому дальнейшее изложение учебного материала будет относиться только к эпюру Монжа.

### 5.1. Определение натуральной величины отрезка прямой

Если дан некоторый отрезок  $AB$ , принадлежащий прямой общего положения (рис. 176), то для определения его натуральной величины изменим положение этого отрезка по отношению к картинам. Для чего повернем его вокруг оси до положения, в котором он окажется параллельным одной из картин. Можно использовать два варианта.

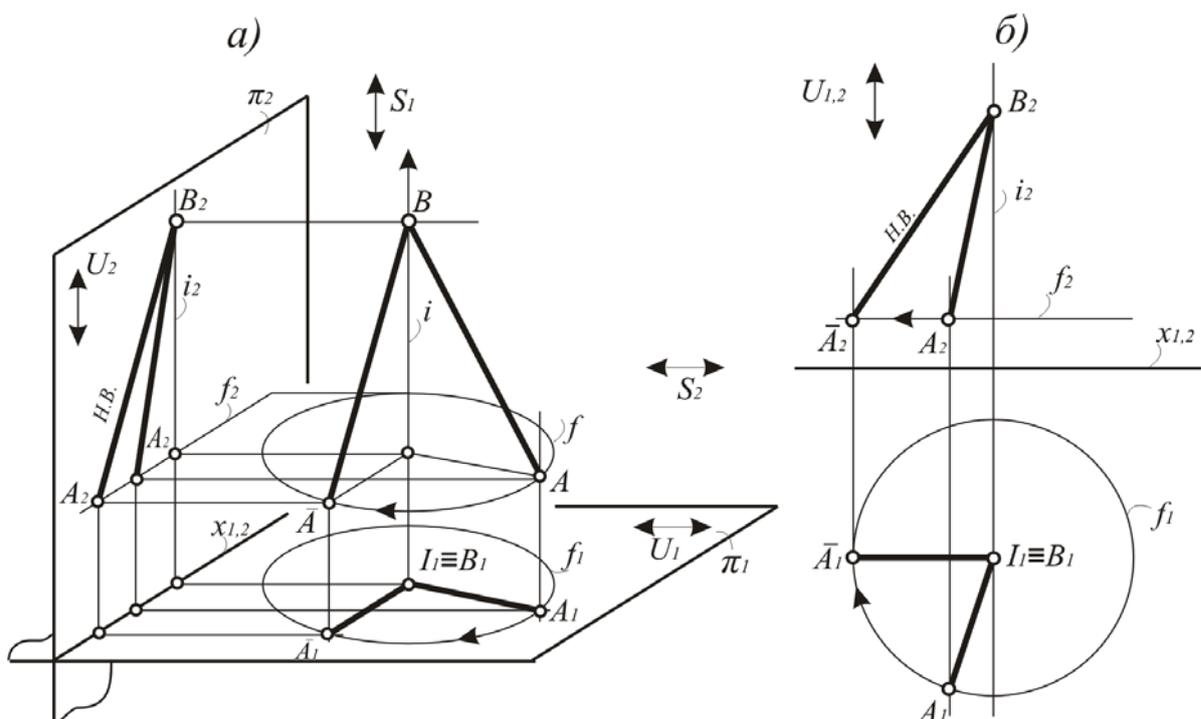


Рис. 176. Нахождение натуральной величины отрезка на эпюре Монжа вращением вокруг проецирующей прямой

В одном варианте ось  $i$  поведем через центр  $S_1$  и через один из концов отрезка, например через точку  $B$ . Точка  $A$  при этом будет перемещаться по

окружности  $f$ , плоскость которой перпендикулярна оси  $i$  и параллельна картине  $\pi_1$ . На картине  $\pi_1$  окружность  $f$  изобразится без искажения. Ее радиус равен величине проекции отрезка  $AB$  на картине  $\pi_1$ . Второе изображение окружности  $f$  представляет собой прямую линию, параллельную оси  $x_{1,2}$ . После поворота отрезок  $AB$  окажется фронталью и на картине  $\pi_2$  изобразится в натуральную величину. При другом варианте ось можно провести через центр  $S_2$ . В этом случае отрезок после перемещения займет положение горизонтали и изобразится на  $\pi_1$  без искажения.

Получить натуральную величину отрезка можно, изменив положение проекционного аппарата по отношению к отрезку. Для этого введем новую картинную плоскость  $\pi_3$ , которая перпендикулярна  $\pi_1$  или  $\pi_2$  (рис. 177, 178) и параллельна прямой, содержащей заданный отрезок. Введем также новый центр ортогонального проецирования  $S_3$ . В результате объединения центра проецирования  $S_3$  с каждым из имеющихся центров  $S_2$  и  $S_1$  возникнут две новые исключенные прямые, которые дадут две пары исключенных точек:  $V_2, V_3$ , принадлежащих соответственно картинам  $\pi_2, \pi_3$ , и  $W_1, W_3$ , которые расположены соответственно в картинах  $\pi_1, \pi_3$ .

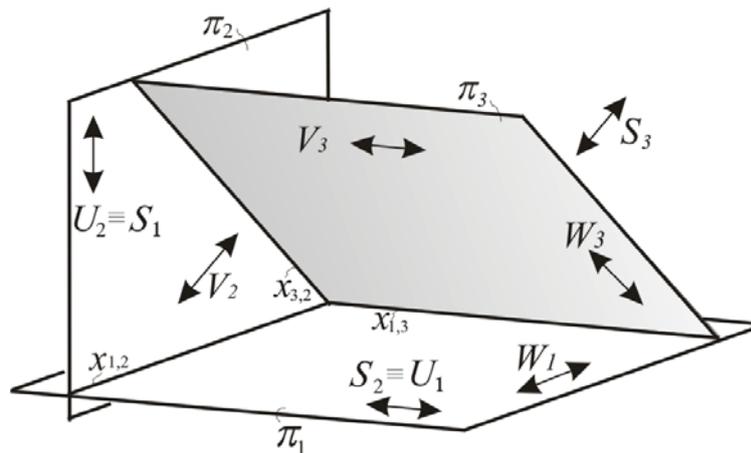


Рис. 177. Дополнительная картина  $\pi_3$  перпендикулярна картине  $\pi_2$

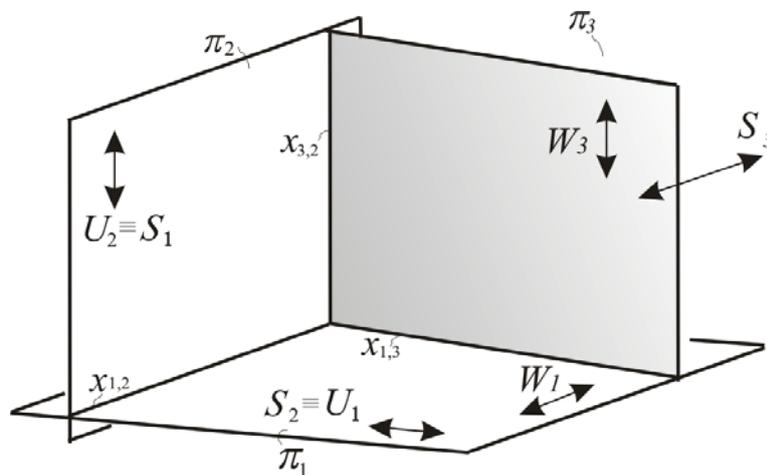


Рис. 178. Дополнительная картина  $\pi_3$  перпендикулярна картине  $\pi_1$

После перехода к одной картине предложенная конструкция проекционного аппарата дает тождественное совпадение пар исключенных точек:  $U_1 \equiv U_2 (U_{1,2})$ ,  $V_2 \equiv V_3 (V_{2,3})$ ,  $W_1 \equiv W_3 (W_{1,3})$ . Исключенные точки  $U_{1,2}$  удалены в бесконечность в направлении, перпендикулярном оси проекций  $x_{1,2}$ . В таком же направлении по отношению к оси  $x_{1,3}$  удалены в бесконечность точки  $W_1 \equiv W_3$ . Точки  $V_2 \equiv V_3$  удалены также в бесконечность в направлении, перпендикулярном оси  $x_{3,2}$  (рис. 179, 180).

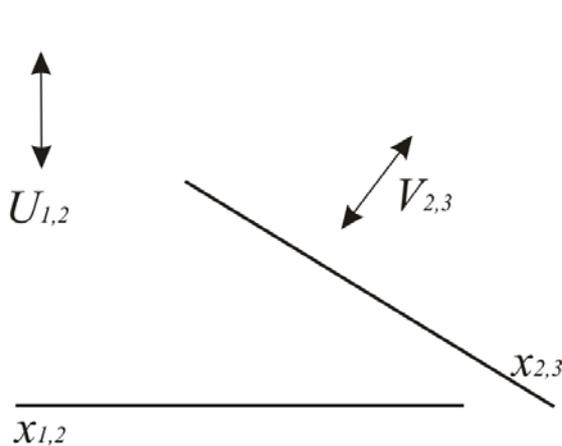


Рис. 179. Расположение элементов проекционного аппарата после совмещения картин ( $\pi_3$  перпендикулярна  $\pi_2$ )

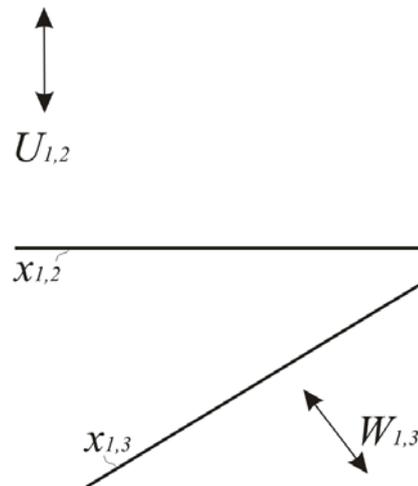


Рис. 180. Расположение элементов проекционного аппарата после совмещения картин ( $\pi_3$  перпендикулярна  $\pi_1$ )

Чтобы построить третью проекцию отрезка  $AB$ , используем следующее обстоятельство, которое позволяет строить дополнительные проекции точек:

- если мы выбираем картину  $\pi_3$ , перпендикулярную картине  $\pi_1$ , то расстояние всех точек отрезка  $AB$  до  $\pi_1$  изображается на  $\pi_2$  и  $\pi_3$  без искажения;
- если мы выбираем картину  $\pi_3$ , перпендикулярную картине  $\pi_2$ , то расстояние всех точек отрезка  $AB$  до  $\pi_2$  изображается на  $\pi_1$  и  $\pi_3$  без искажения.

Эти расстояния отображаются на соответствующих линиях связи от проекций точек до осей проекций.

Рассмотрим на примере построения натуральной величины отрезка  $AB$ . Если картина  $\pi_3$  перпендикулярна картине  $\pi_1$  (рис. 181), то расстояние от картины  $\pi_1$  до точек в исходном пространстве изображается без искажения на картинах  $\pi_2$  и  $\pi_3$ . На плоской модели эти расстояния от осей  $x_{1,2}$  и  $x_{1,3}$  до соответствующих проекций точек. Поэтому изображение линий связи этого пучка часто заменяют измерением по линиям связи пучков  $U_1 \equiv U_2$  и  $W_1 \equiv W_3$ .

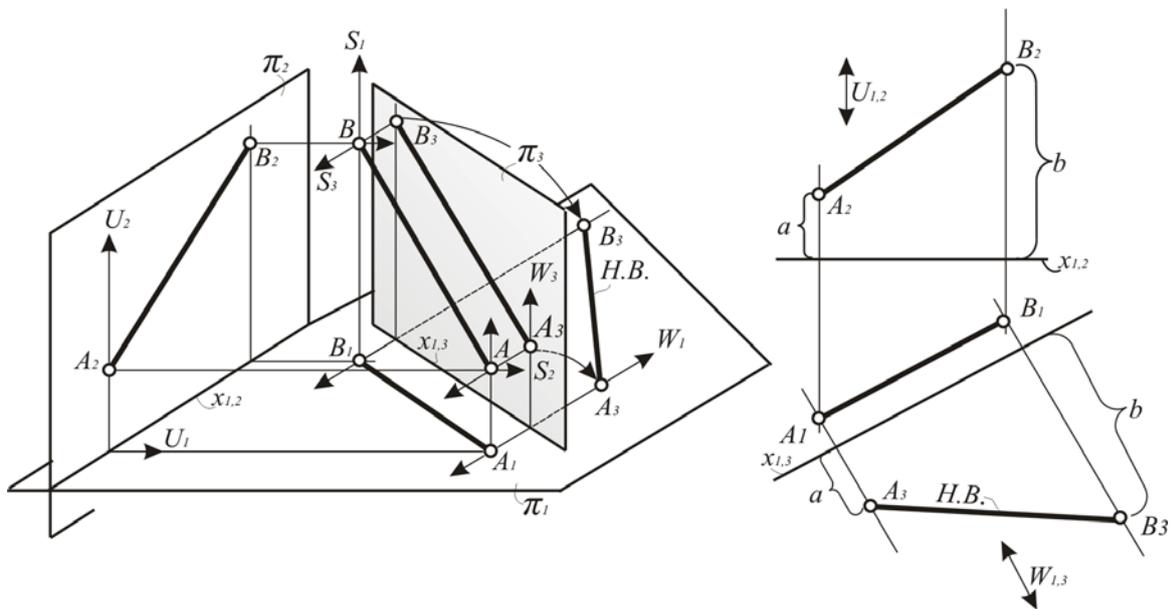


Рис. 181. Определение натуральной величины отрезка благодаря изменению положения проекционного аппарата (эпюр Монжа)

## 5.2. Определение натуральной величины плоского угла и плоской фигуры

Принципиально определение натуральной величины плоского угла и плоской фигуры не имеет различий. В любой плоский угол можно вписать любую плоскую фигуру, и любая плоская фигура может быть представлена как множество углов, или вокруг нее может быть описан угол. Поэтому в настоящем подразделе рассмотрено определение натуральной величины треугольника.

Одним из самых распространенных способов определения натуральной величины плоской фигуры является ее вращение вокруг оси, занимающей положение прямой уровня (рис. 182). Суть этого способа заключается в том, что в плоскости, которая содержит измеряемую фигуру, проводится прямая уровня. Она играет роль оси вращения. В рассматриваемом примере это прямая  $f \parallel \pi_2$ . Точки  $A$  и  $B$  перемещаются соответственно в плоскостях  $\alpha$  и  $\beta$ , которые занимают проецирующее положение. Их вырожденные проекции располагаются перпендикулярно оси вращения. Точки  $C$  и  $M$  остаются на месте. Для построения треугольника в новом положении достаточно определить натуральную величину отрезка, проходящего через одну из этих точек. В рассматриваемом примере натуральная величина отрезка  $BM$  определена вращением вокруг проецирующей прямой  $i$ . После этого с центром в точке  $M_2$  проводят дугу, радиус которой равен натуральной величине отрезка  $BM$ , до пересечения с траекторией вращения точки  $B$ , получают точку  $B_2^*$ . Продолжим прямую  $BM$  и получим точку  $A$ , которую соединим с точкой  $B$ . Треугольник  $A^*B^*C^*$  является натуральной величиной.



## 6. РАЗВЕРТКИ ПОВЕРХНОСТЕЙ

Любую поверхность можно тем или иным способом с разрывами, с искажениями или без них совместить с плоскостью. В результате на плоскости возникнет некоторая фигура, которую принято называть **разверткой**. Множество всех разверток делится на три группы: точные, приближенные и условные. В общих чертах можно дать следующую характеристику каждой группе: **точная развертка** сохраняет площадь поверхности, **приближенная** – строится с незначительным искажением этой площади, **условная** – искажает не только площадь поверхности, но и ее форму.

Если конкретизировать свойство сохранения площади поверхности на развертке, то следует обратить внимание на следующие моменты:

1) длины соответствующих линий на поверхности и на развертке равны;

2) углы между линиями на поверхности и между соответствующими линиями на развертке равны.

Как следствие из этого – развертка сохраняет прямолинейность линий и параллельность прямых поверхности. Очевидно, что многогранники являются развертываемыми поверхностями, так как все их грани – это плоские многоугольники, которые без особого труда совмещаются с плоскостью. Другое дело кривые поверхности, развертываемость или не развертываемость которых не так очевидна. Но существует признак, позволяющий определить, является ли кривая поверхность развертываемой или неразвертываемой. Плоскости, касательные к этим поверхностям, проведенные во всех точках одной образующей, совпадают.

В зависимости от того, какая может быть построена развертка все поверхности можно разделить на развертываемые и неразвертываемые. Для развертываемой поверхности строится точная или приближенная развертка, для неразвертываемых – условная.

### 6.1. Примеры построения точных разверток

Как было отмечено ранее, точные развертки можно построить для многогранников. Самыми распространенными многогранниками являются призмы и пирамиды, примеры построения разверток которых мы рассмотрим в настоящем подразделе.

**Пример 1.** Построить развертку поверхности пирамиды  $TABC$ , основание которой принадлежит картине  $\pi_1$  (рис. 183).

Для этого достаточно определить натуральную величину каждой грани и расположить их на плоскости по возможности последовательно одну за другой. Все грани боковой поверхности пирамиды представляют собой

треугольники. Чтобы их построить, нужно определить натуральные величины их сторон. Вначале нужно установить, какие из ребер изображаются без искажения, а какие – с искажением. В приведенном примере без искажения изображаются только стороны основания пирамиды.

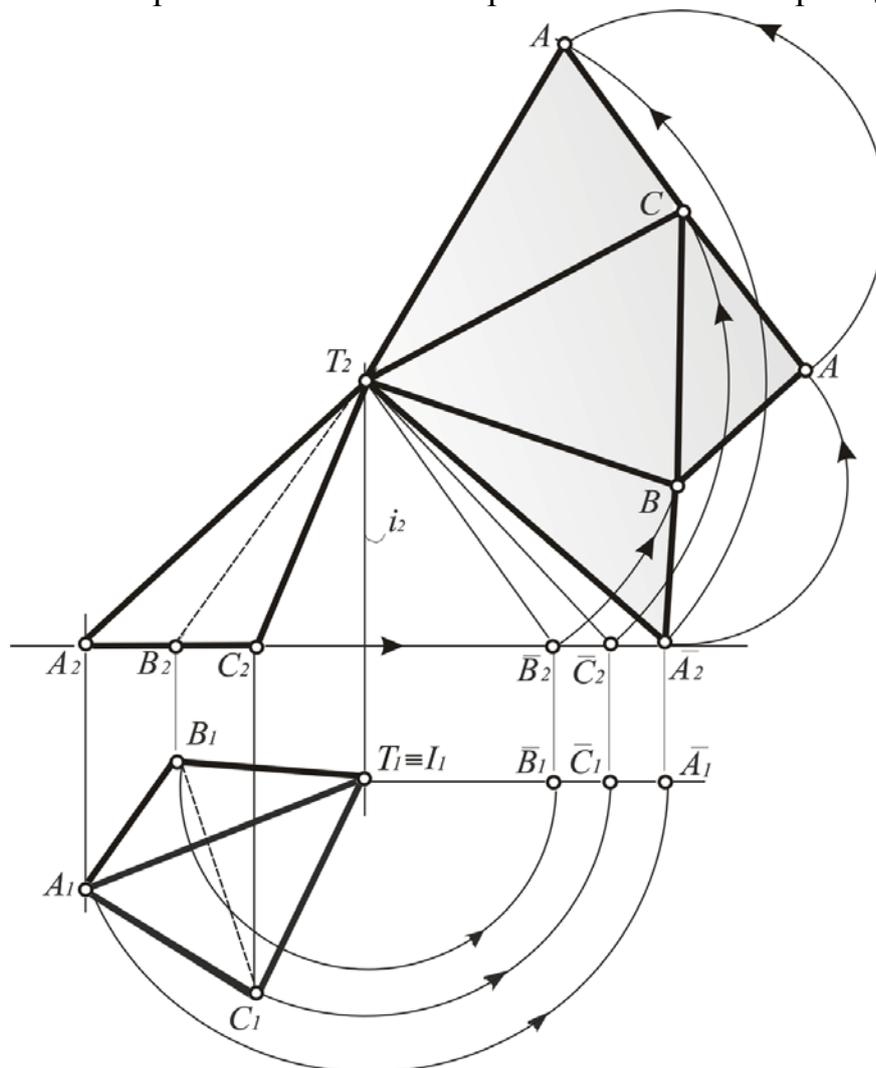


Рис. 183. Построение точной развертки пирамиды

Для определения натуральной величины боковых ребер воспользуемся вращением вокруг проецирующей прямой  $i$ , проходящей через вершину пирамиды. Повернем все боковые ребра до положения, в котором они станут фронталями. Тогда они изобразятся на картине  $\pi_2$  без искажения. Теперь можно построить каждый треугольник в натуральную величину и расположить их последовательно один за другим, построив таким образом развертку боковой поверхности. К ней добавим еще основание, которое на картине  $\pi_1$  изображается без искажения, и развертка всей пирамиды готова.

Построение развертки поверхности с использованием треугольников является одним из универсальных способов, который называется способом **триангуляции**. Он применим и для построения развертки призмы. Ниже приведен пример построения развертки призмы этим способом.

**Пример 2.** Построить развертку призмы  $ABCDFE$ . Она занимает положение, при котором все ее ребра являются прямыми общего положения (рис. 184).

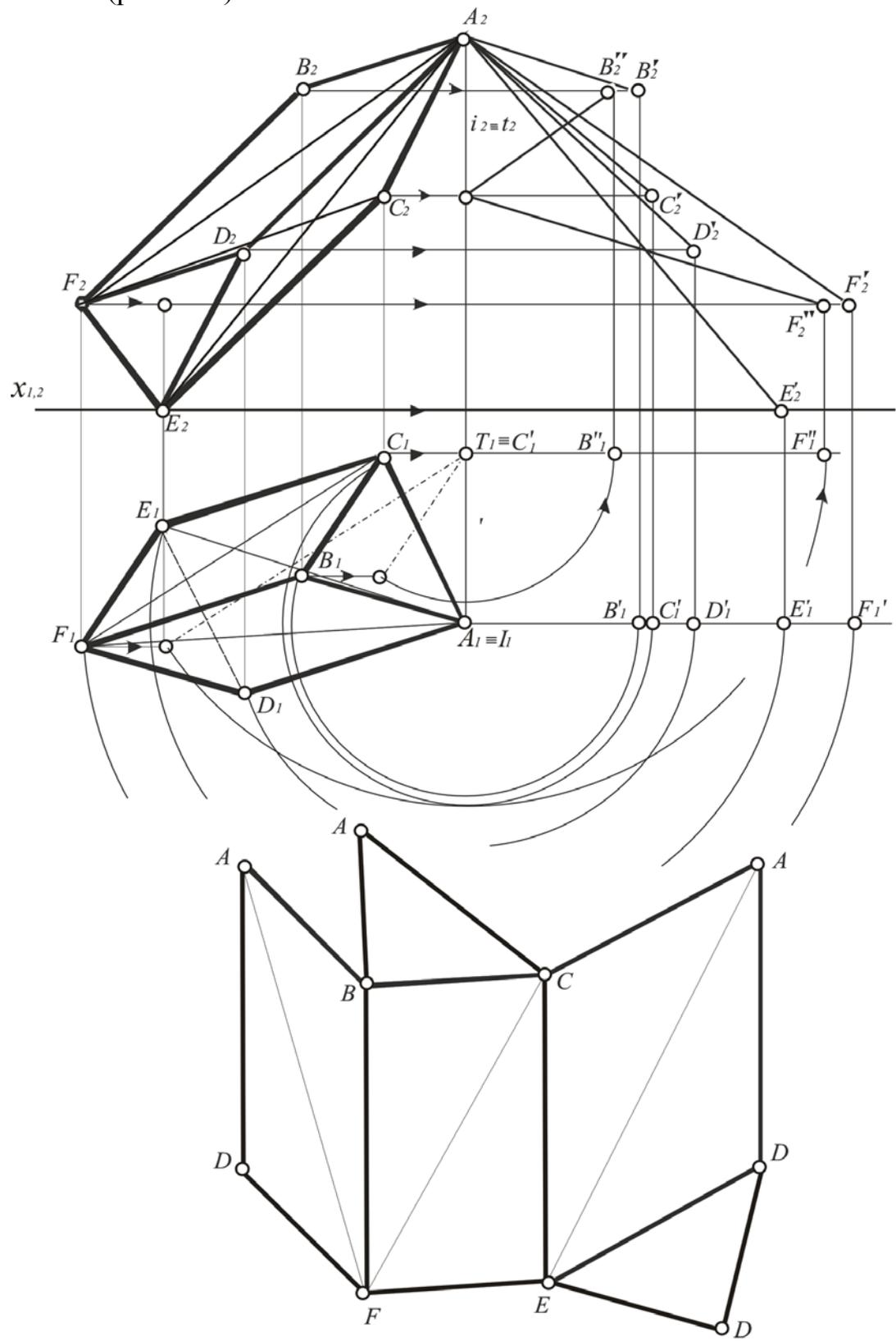


Рис. 184. Построение точной развертки призмы

Все три боковые грани призмы разобьем на треугольники, проведя в них диагонали. Используя вращение вокруг проецирующей прямой, определим натуральную величину каждого из ребер призмы и построенных диагоналей. Ось проведем через вершину  $A$ , перпендикулярно картине  $\pi_1$ . Вращение вокруг этой оси позволит определить натуральную величину всех ребер и диагоналей, проходящих через вершину  $A$ . Этого было бы достаточно, если бы были известны натуральные величины стороны нижнего основания  $BC$  и диагонали  $CF$ , которые определим, повернув их вокруг оси  $t \subset \lambda$ , где  $\lambda \supset S_1, S_2, i$ . В результате на картине  $\pi_2$  получим диаграмму натуральных величин бокового ребра  $AD$ , сторон основания  $AB, BC, AC$  и диагоналей  $AF, AE, FC$ . Поскольку стороны нижнего основания попарно равны сторонам верхнего основания и все боковые ребра равны между собой, то полученные на диаграмме величины позволяют построить развертку боковой поверхности.

В тех случаях, когда ребра призмы являются прямыми уровня, построение развертки несколько упрощается. Чаще всего для построения развертки такой призмы используют **способ раскатки**, который рассмотрен в следующем примере.

**Пример 3.** Дана трехгранная призма  $ABCMNP$ , развертку которой нужно построить (рис. 185). Ее боковые ребра представляют собой фронталы, а стороны основания – горизонталы. Суть способа раскатки, который здесь применяется, заключается в том, что грани поворачиваются вокруг боковых ребер до положения, в котором они становятся плоскостями уровня. В предложенном примере грань  $ABPM$  повернута вокруг ребра  $AP$ . При этом точка  $B$  вращается в плоскости  $\beta$ , точка  $M$  – в плоскости  $\delta$ . Эти плоскости, как и плоскости вращения всех остальных точек, содержат центр проецирования  $S_2$ . Их вырожденные проекции располагаются перпендикулярно оси вращения  $AP$ .

После поворота стороны  $AB$  и  $PM$  изобразятся без искажения. Грань  $BCMN$  повернута вокруг ребра  $BN$  до положения плоскости уровня и, чтобы не было наложения, еще и параллельно сдвинута. Точки  $C$  и  $N$  при этом перемещаются соответственно в плоскостях  $\gamma$  и  $\eta$ . Такая же процедура проделана с гранью  $APNC$ . Она повернута вокруг ребра  $AP$  и подвергнута параллельному переносу. Плоскости  $\alpha$  и  $\rho$  содержат соответственно траектории перемещения точек  $A$  и  $P$ . Из чертежа видно, что после поворота и остальные стороны основания  $BC, MN, AC$  и  $NP$  изображаются в натуральную величину:  $BC = B_1C_1$ ;  $AC = A_1C_1$ ;  $NP = N_1P_1$ ;  $MN = M_1N_1$ .

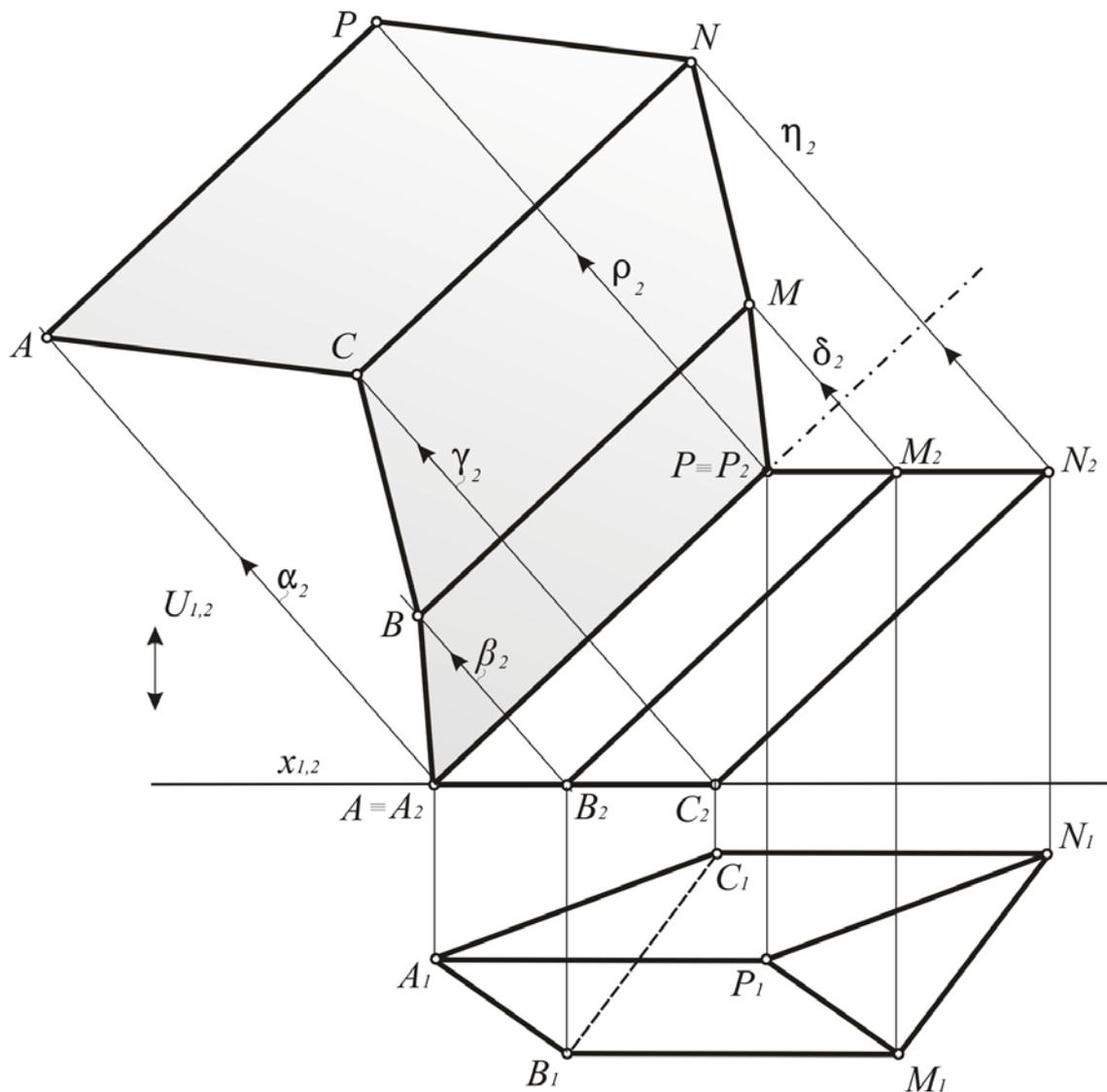


Рис. 185. Построение точной развертки методом раскатки

Точную развертку можно построить и для некоторых кривых поверхностей. Таковыми являются конус и цилиндр вращения. В этом случае обычно пользуются простыми аналитическими зависимостями, позволяющими определить длину окружности основания цилиндра. Она, как известно, равна  $2\pi r$ . Такую длину имеет одна из сторон прямоугольника, являющегося разверткой цилиндра (рис. 186). Длина другой стороны равна высоте отсека цилиндрической поверхности.

Развертка конуса вращения (рис. 187) представляет собой сектор окружности, радиус которой  $R = l$ , где  $l$  – длина образующей конуса. Величина угла сектора  $\alpha = 2\pi r / R$ , где  $r$  – радиус окружности основания конуса.

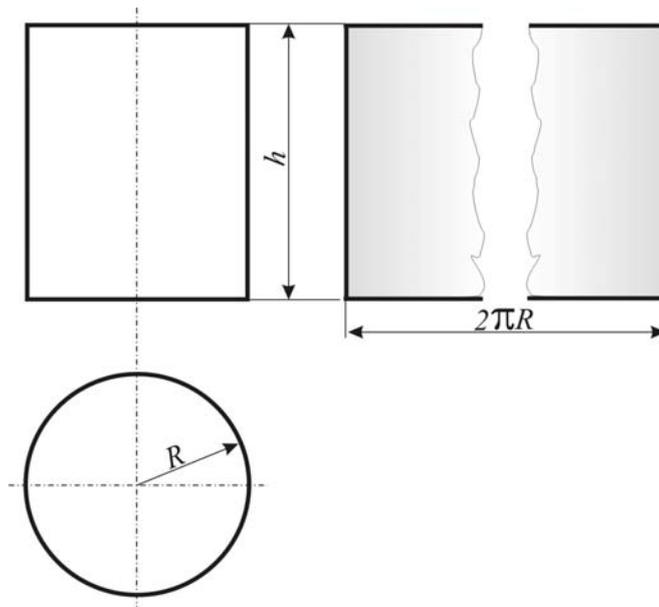


Рис. 186. Построение точной развертки цилиндра

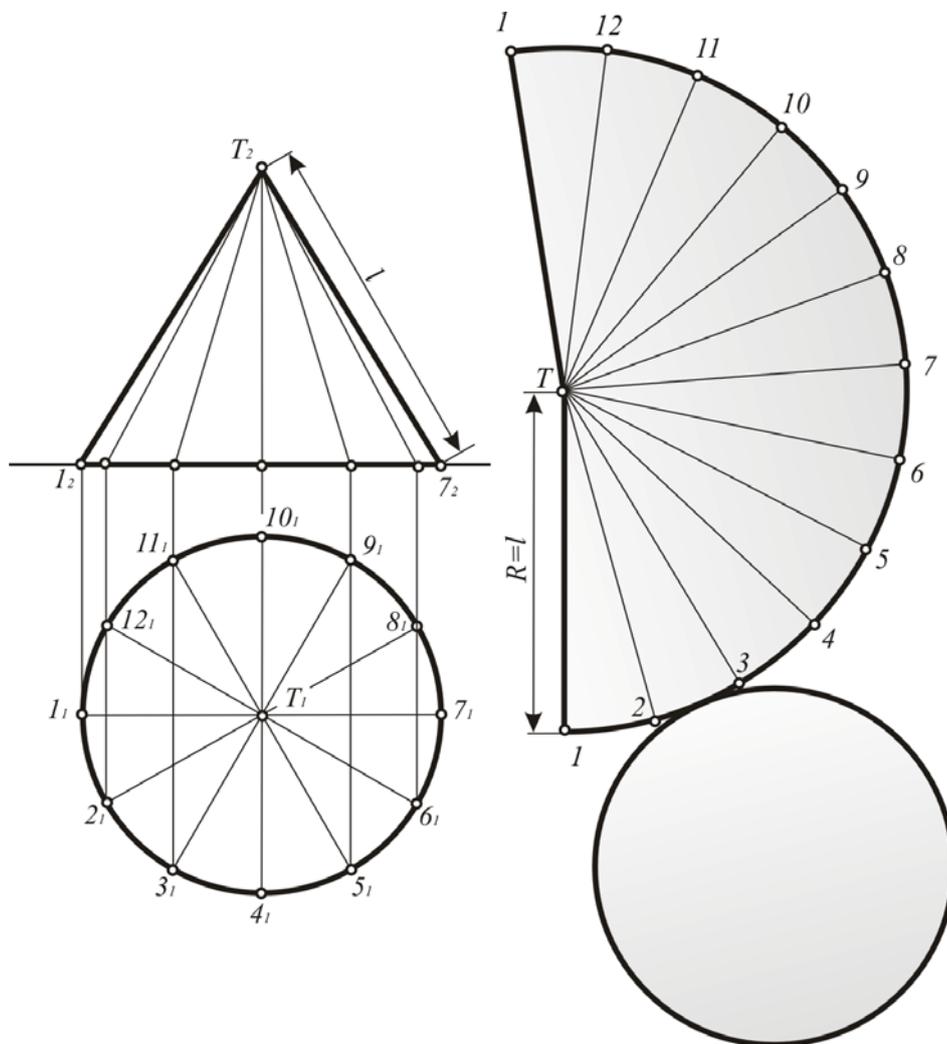


Рис. 187. Построение точной развертки прямого кругового конуса

## 6.2. Примеры построения приближенных разверток

Приближенные развертки обычно строятся для развертываемых поверхностей. В их числе наиболее распространенными являются конические и цилиндрические поверхности. Сущность способа определяется следующими действиями:

- 1) в данную кривую поверхность вписывают многогранник;
- 2) строят точную развертку вписанного многогранника, которую принимают за развертку кривой поверхности.

Рассмотрим на примерах построение приближенных разверток цилиндрической и конической поверхностей.

**Пример 1.** Построить развертку конической поверхности (рис. 188) с вершиной в точке  $T$  и основанием с плоской кривой  $f$ , принадлежащей картине  $\pi_1$ .

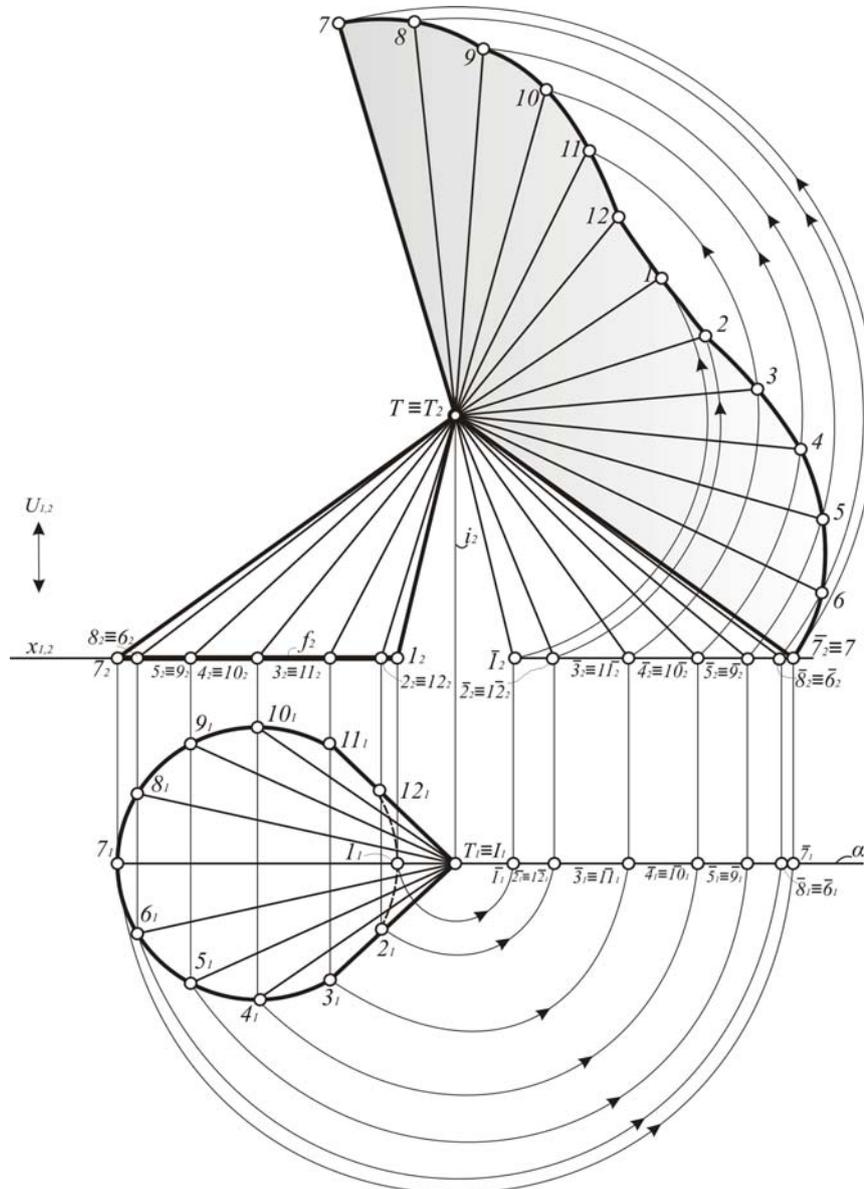


Рис. 188. Построение приближенной развертки конической поверхности

Впишем в коническую поверхность пирамиду, число граней боковой поверхности которой равно двенадцати (можно и больше). Для этого разделим окружность основания  $f$  на двенадцать равных частей. Эти точки соединим с вершиной. Получим двенадцать ребер вписанной пирамиды. Через вершину  $T$  проведем ось  $i$  и повернем ребра вокруг этой оси до совмещения их с плоскостью  $\alpha \parallel \pi_2$  ( $\alpha \supset i$ ). Тогда на картине  $\pi_2$  они изображаются без искажения. После этого по трем сторонам построим треугольники, которые являются боковыми гранями вписанной пирамиды, расположив их последовательно один за другим. Соединим плавной кривой линии точки с 1-й по 12-ю, принадлежащие основанию конической поверхности, и развертка боковой поверхности готова.

**Пример 2.** Дан эллиптический цилиндр, образующие которого принадлежат прямым общего положения. Нужно построить его развертку (рис. 189).

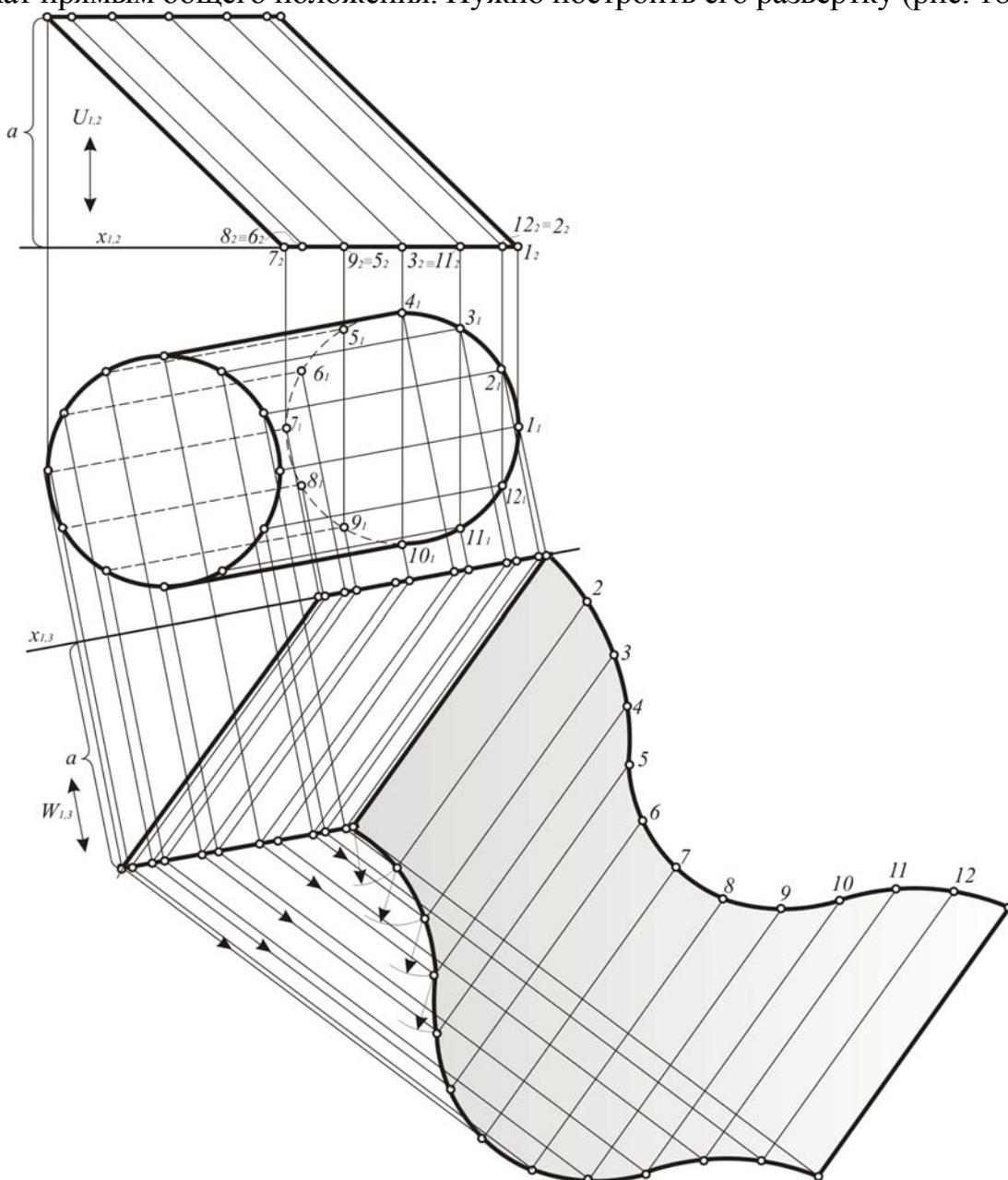


Рис. 189. Построение приближенной развертки цилиндрической поверхности

С помощью дополнительного проецирования определим натуральную величину образующих цилиндра. Новую картинную плоскость  $\pi_3$  расположим параллельно образующим цилиндра и перпендикулярно картине  $\pi_1$ . Центр проецирования  $S_3$  удален в бесконечность в ортогональном направлении по отношению к картине  $\pi_3$ . В результате получим проекцию цилиндра с натуральной величиной образующих. Впишем в этот цилиндр призму, число граней которой равно двенадцати. Используя метод раскатки, построим развертку боковой поверхности этой призмы. Вершины верхнего и нижнего оснований призмы на развертке соединим плавной кривой линией. Полученная таким образом плоская фигура является приближенной разверткой боковой поверхности цилиндра

### 6.3. Построение условных разверток

Как было отмечено ранее, неразвертывающиеся поверхности невозможно совместить с плоскостью без разрывов и искажений. Но на практике все-таки приходится строить развертки таких поверхностей. В общих чертах эта процедура выглядит так: заданную поверхность разрезают примерно на равные части (отсеки), количество которых определяется степенью точности развертки. Полученные отсеки заменяют частями развертывающихся поверхностей. В качестве примера построим развертку половины сферы (рис. 190).

Разрежем полусферу на двенадцать равных частей, используя для этого пучок плоскостей, ось которого совпадает с осью сферы. В рассматриваемом примере это прямая  $i \supset S_1$ . Полученные в результате сечения части сферы принято называть лепестками. Эти лепестки заменим лепестками, вырезанными из цилиндрической поверхности, и построим их приближенную развертку. Для этого среднюю линию лепестка разделим на равные отрезки, получим точки  $1, 2, 3, 4$ , через которые проведем образующие цилиндрической поверхности. Длина каждой образующей определяется формой лепестка. Через точку  $1$  пройдет образующая, ограниченная точками  $A$  и  $B$ . Образующая, проходящая через точку  $2$ , имеет длину, равную отрезку  $CD$ . Отрезок  $EF$  ограничивает образующую, проходящую через точку  $3$ . В точке  $4$  образующая имеет нулевую длину. Совместим среднюю линию лепестка вместе с точками  $1, 2, 3, 4$  с плоскостью, определив предварительно натуральную величину ее длины. Из чертежа видно, что углы между образующими и средней линией равны  $90^\circ$ . Их величина должна сохраниться и на развертке. Поэтому через точки  $1, 2$  и  $3$  проведем прямые, перпендикулярные средней линии и отложим на них отрезки  $1A, B1, 2C, 2D, 3F, 3E$ . Точки  $A, C, E, 4$  и точки  $B, D, F, 4$  соединим плавными кривыми. Таким образом построим и остальные одиннадцать лепестков. Поскольку сфера – поверхность симметричная, то прямая  $AB$  является осью симметрии в полном лепестке. Используя этот факт, можно построить развертку полной сферы.

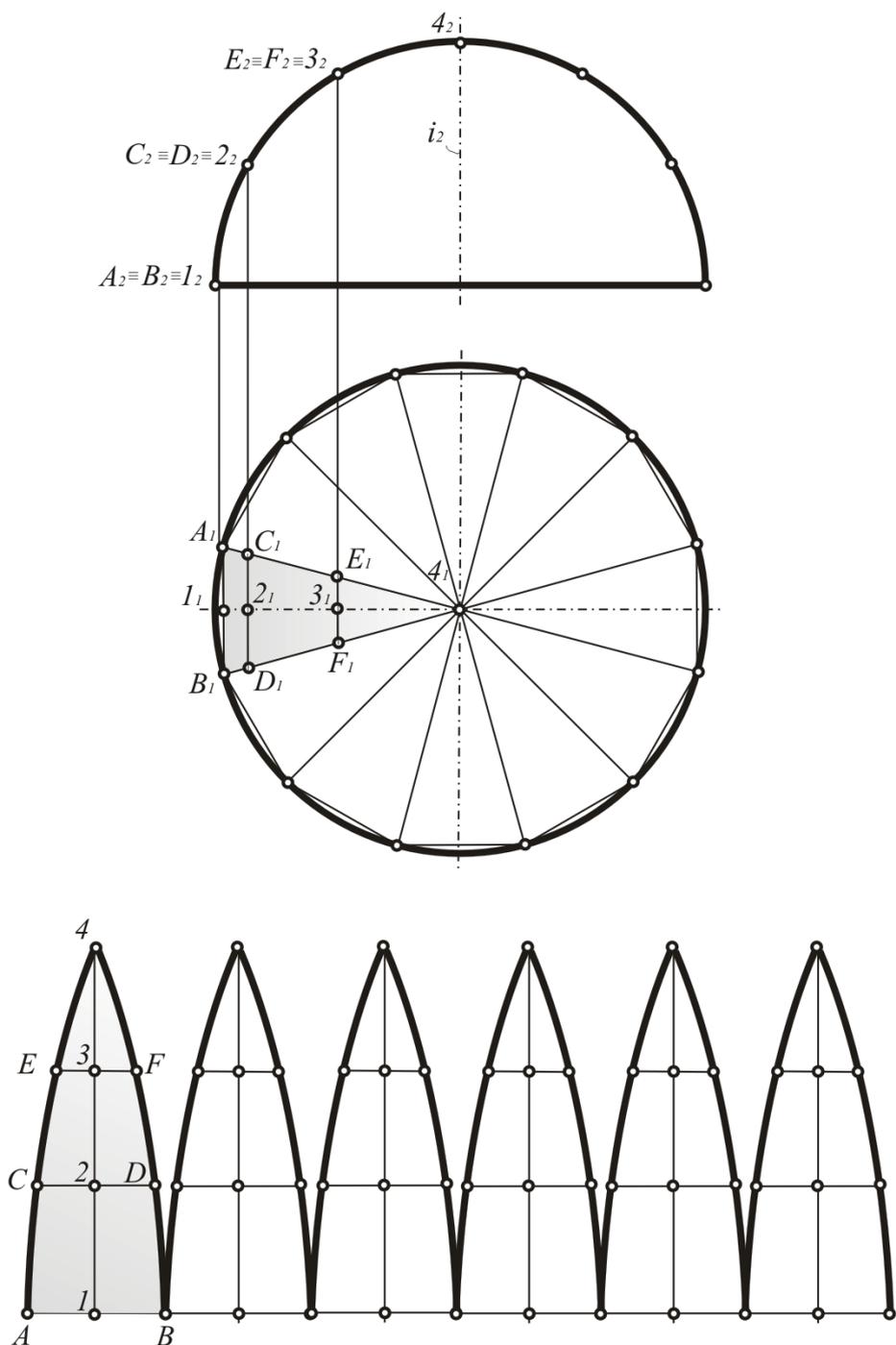


Рис.190. Построение условной развертки сферы

### 6.4. Линии на развертках

Инженерная практика достаточно часто ставит задачи, решение которых связано с построением различных линий на развертках. Одной из самых распространенных задач является определение кратчайшего расстояния между двумя точками на поверхности. Линия, которая соединяет эти точки, называется геодезической. На развертке она выглядит прямой. В

примере на рис. 191 геодезическая линия соединяет точки  $A$  и  $B$  на цилиндрической поверхности. Она построена сначала на развертке цилиндра. Чтобы нанести ее на изображение поверхности, необходимо пересечь ее с образующими цилиндра. Полученные точки пересечения найти на ортогональных проекциях цилиндра и, учитывая плавную кривизну поверхности, соединить их.

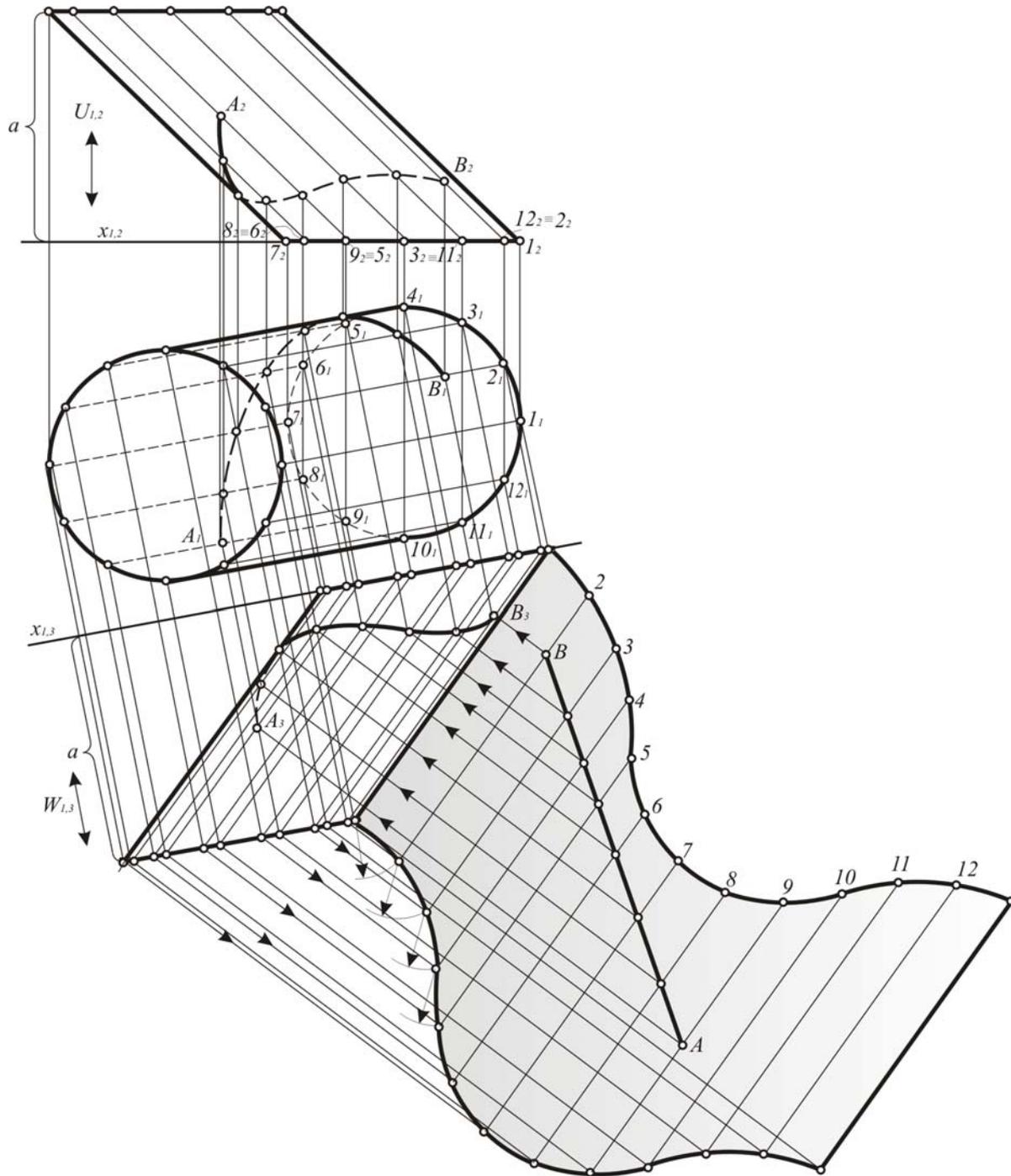


Рис. 191. Геодезическая линия  $A$  и  $B$  на развертке цилиндрической поверхности.

При макетировании, как правило, приходится строить развертки пересекающихся поверхностей. В этом случае на развертку нужно нанести линию пересечения поверхностей. На рис. 192 приведен пример построения разверток пересекающихся конуса и цилиндра. Обе поверхности пересечем по образующим пучком из двенадцати плоскостей, ось которого проходит через вершины конуса и призмы. Общие точки этих образующих определяют характер линии пересечения поверхностей. Кроме того, эти образующие служат одновременно ребрами вписанных пирамиды и призмы. Развернем эти поверхности и нанесем на ребра точки, принадлежащие линии пересечения поверхностей. Полученные точки соединим плавными линиями, которые на макете совпадут друг с другом.

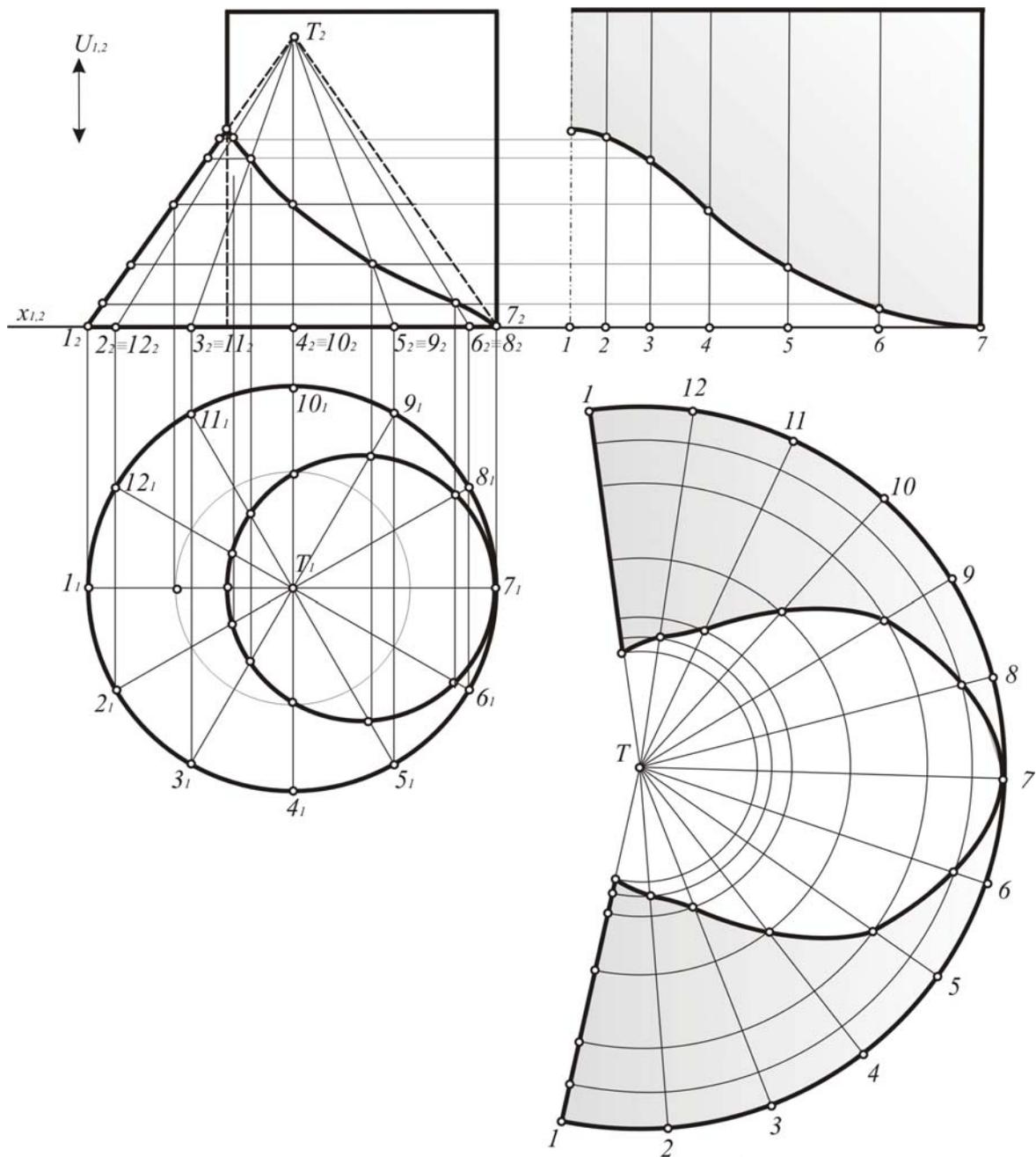


Рис. 192. Построение разверток пересекающихся поверхностей

### Контрольные вопросы

1. Что принято считать разверткой поверхности?
2. Перечислить виды разверток в зависимости от того, какие свойства площади поверхности сохраняются на развертке.
3. Какая развертка называется точной?
4. Какая развертка называется приближенной?
5. Какая развертка называется условной?
6. По каким признакам определяется свойство сохранения площади поверхности?
7. Какие поверхности принято считать развертываемыми?
8. Какие поверхности считаются неразвертываемыми?
9. Перечислить известные вам типы разверток.
10. В чем заключается способ триагуляции?
11. Какова особенность способа раскатки?
12. Как строится приближенная развертка?
13. Каким образом строится условная развертка?
14. Описать прием, с помощью которого строится линия на развертке поверхности.

## 7. ПРОЕКЦИИ С ЧИСЛОВЫМИ ОТМЕТКАМИ

Способ проекций с числовыми отметками позволяет изображать строительные земляные сооружения (дороги, мосты, каналы, плотины, строительные площадки), горизонтальные размеры которых значительно больше вертикальных.

### 7.1. Структура проекционного аппарата и алгоритм его работы

**Проекционный аппарат** проекций с числовыми отметками составляют следующие элементы (рис. 193):

- 1) картинная плоскость  $\pi_0$ , которая располагается горизонтально и называется плоскостью нулевого уровня;
- 2) один центр проецирования  $S$ , удаленный в бесконечность. Проецирование из него ортогональное;
- 3) линейный масштаб или указание, в каких линейных единицах выражены данные числовые отметки высоты по отношению к плоскости нулевого уровня; при необходимости также дают ориентацию относительно сторон света.

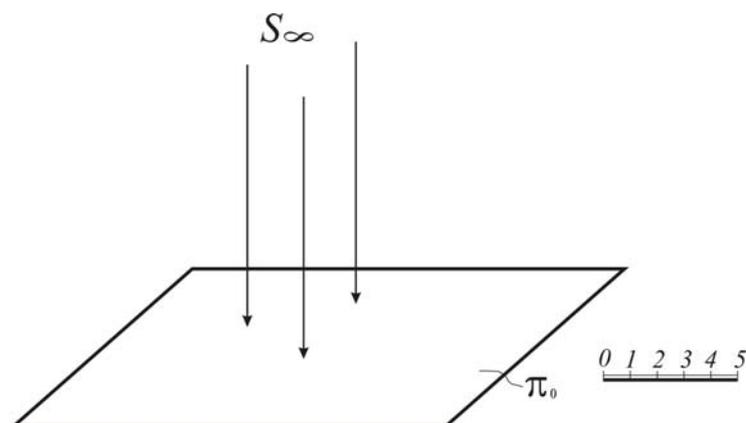


Рис. 193. Структура проекционного аппарата в проекциях с числовыми отметками

### 7.2. Моделирование геометрических элементов

#### 7.2.1. Модель точки

Для того чтобы построить модель любой точки в проекциях с числовыми отметками, необходимо выполнить следующие операции алгоритма:

1. Через производную точку трехмерного пространства и центр проецирования  $S$  проводим проецирующую прямую.

2. Пересекаем проецирующую прямую с картиной  $\pi_0$ , получаем проекцию точки.

Приписываем полученной проекции точки числовую отметку, которая соответствует расстоянию от исходной точки до плоскости нулевого уровня в выбранных единицах измерения.

На рис. 194 показано построение модели точек  $A$ ,  $B$ ,  $C$ . Точка  $A$  находится над плоскостью нулевого уровня, точка  $B$  – под ней, а точка  $C$  принадлежит этой плоскости.

Таким образом, **моделью точки в проекциях с числовыми отметками является одна проекция точки с приписанной ее числовой отметкой, которая указывает на расстояние от плоскости нулевого уровня до исходной точки.**

Числовые отметки ставятся справа или снизу около проекции точек.

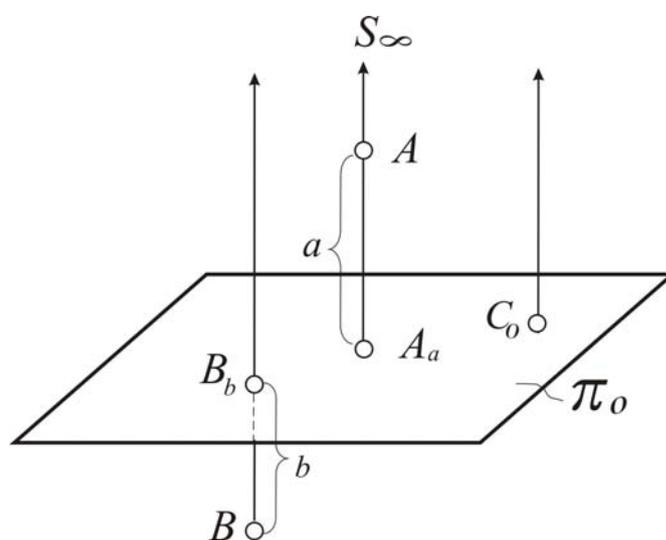


Рис. 194. Построение моделей точек в проекциях с числовыми отметками

Работа с моделью точки складывается из решения следующих задач:

- 1) построение модели любой точки трехмерного пространства в проекциях с числовыми отметками;
- 2) определение положения точки относительно проекционного аппарата.

В зависимости от положения точки по отношению к проекционному аппарату выделяют следующие группы: точки **общего положения** и точки **частного положения**.

1. Точки общего положения – это точки, располагающиеся над плоскостью нулевого уровня; числовая отметка этих точек положительная (+).

2. Точки частного положения – это точки, принадлежащие плоскости нулевого уровня, и точки, лежащие ниже плоскости нулевого уровня с нулевой и отрицательной числовой отметкой (–).

Рассмотрим **характерные признаки точек частного положения** в проекциях с числовыми отметками:

1. Если точка лежит в картине  $\pi_0$ , то ее числовая отметка равна 0.
2. Если точка располагается под картиной, то ее числовая отметка отрицательная, то есть приписывается знак «минус» (–).

На чертежах необходимо вычерчивать линейный масштаб, которым следует пользоваться при решении различных задач [3].

Положение плоскости нулевого уровня может быть изменено параллельно самой себе вниз или вверх, при этом будут изменяться числовые отметки заданных точек на ту величину, на которую будет перемещена плоскость [9]. На рис. 195 плоскость нулевого уровня перемещена на 8 масштабных единиц, также на 8 единиц изменились и числовые отметки точек  $A$ ,  $B$ ,  $C$ .

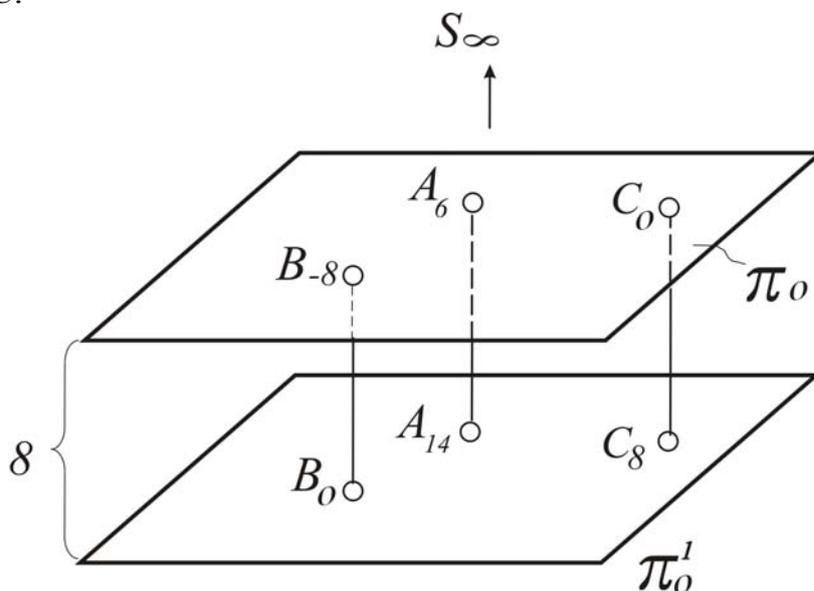


Рис. 195. Перемещение плоскости нулевого уровня

### Контрольные вопросы

1. В чем сущность способа проекций с числовыми отметками?
2. Назовите элементы проекционного аппарата.
3. Какой вид проецирования осуществляется в проекциях с числовыми отметками?
4. Что является моделью точки в проекциях с числовыми отметками?
5. Назовите характерный признак точки, принадлежащей плоскости нулевого уровня.

6. Назовите характерный признак точки, лежащей ниже плоскости нулевого уровня.

7. Каким образом изменяется числовая отметка точки при перемещении плоскости нулевого уровня?

### 7.2.2. Модель прямой

Для того чтобы построить модель прямой в проекциях с числовыми отметками, необходимо выполнить следующие операции алгоритма:

1. Через заданную прямую трехмерного пространства и центр проецирования  $S$  проводим проецирующую плоскость.

2. Пересекаем проецирующую плоскость с картиной  $\pi_0$ , получаем проекцию прямой.

Таким образом, **модель прямой в общем случае представляет собой прямую**, так как проецирующим образом здесь оказывается плоскость, которая пересекает плоскую картину по прямой линии (рис. 196, а). Исключение составляет только проецирующая прямая, проходящая через центр проецирования. Она изображается точкой (рис. 196, б).

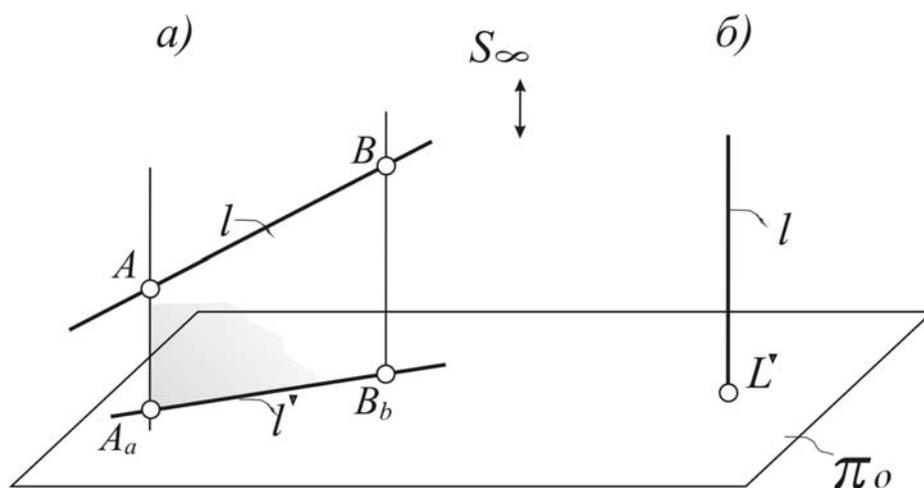


Рис. 196. Моделирование прямой в проекциях с числовыми отметками

Чтобы можно было работать с полученной моделью прямой, необходимо выделить на ней две точки с соответствующими числовыми отметками. Кроме того, используются следующие характеристики положения прямой относительно проекционного аппарата: заложение, превышение, интервал, уклон.

**Заложение прямой  $l$**  – длина проекции отрезка прямой, обозначается  $l$  (рис.197).

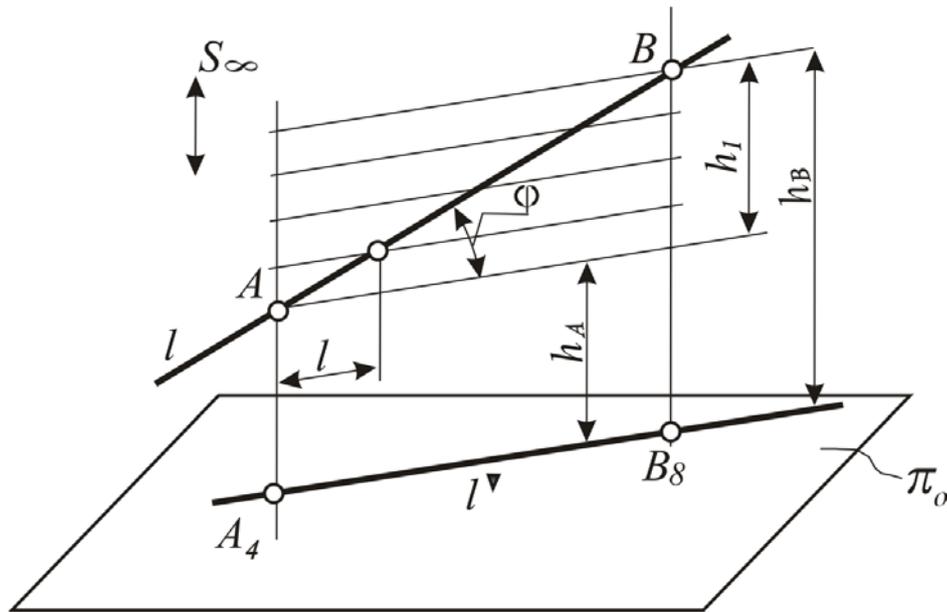


Рис. 197. Основные понятия модели прямой в проекциях с числовыми отметками

**Превышение концов отрезка  $AB$**  – это разность отметок его концевых точек ( $h_B - h_A$ ) (см. рис. 197). Иногда он называется подъемом отрезка.

**Уклон отрезка  $i$**  – это отношение превышения к заложению прямой  $i = \frac{h_B - h_A}{L} = \operatorname{tg} \varphi$ . Он равен тангенсу угла наклона отрезка к картине  $\pi_0$  ( $i = \operatorname{tg} \varphi$ ). Уклон может задаваться отношением, например 1:2, в градусах ( $15^\circ$ ), в процентах (10 %, 20 %) или дробью (1/10).

**Интервал прямой  $l$**  – это заложение прямой, соответствующее единице превышения  $l = \frac{L}{h_B - h_A} = \operatorname{ctg} \varphi$ .

Так как  $\operatorname{ctg} \varphi = \frac{1}{\operatorname{tg} \varphi}$ , то  $l = \frac{1}{i}$ , т. е. уклон и интервал величины обратны друг другу. В частном случае, когда прямая линия горизонтальна, угол  $\varphi = 0$  и  $i = 0$ , интервал  $l = \frac{1}{0} = \infty$ ; если прямая вертикальна, а угол  $\varphi = 90^\circ$ , тогда  $i = \infty$ , а интервал  $l = 0$  [9].

**Работа с моделью прямой заключается в решении следующих задач:**

1. Моделирование любой прямой трехмерного пространства.
2. Определение положения прямой относительно проекционного аппарата по ее модели.
3. Градуирование прямой.
4. Определение числовой отметки точки, принадлежащей прямой.
5. Нанесение на модель прямой точки с заданной числовой отметкой.

Чтобы решать эти задачи, необходимо знать особенности моделей прямых, различным образом расположенных относительно проекционного аппарата. Разделим все прямые трехмерного пространства на две группы.

**1. Прямые частного положения:**

а) *проецирующие прямые*. Это прямые, содержащие центр проецирования. Пример дан на рис. 198, а. Это отрезок прямой  $EF$ ;

б) *горизонтали*. Это прямые, параллельные нулевой плоскости уровня  $V_0$ . В примере на рис 198, а – это отрезки прямых  $MN$  и  $CD$ .

**2. Прямые общего положения:** К этой группе относятся все остальные прямые. На рис. 198 к ним относятся прямая, заданная отрезком  $AB$ , и прямые, заданные точкой  $A_6$  и уклоном  $i = 1/3$ , а также прямая, заданная точкой  $B_{15}$  и уклоном  $i = 1/2$  (рис. 198, б).

Из приведенного примера видны **характерные признаки прямых частного положения** в проекциях с числовыми отметками:

1. Если прямая занимает проецирующее положение, то все ее точки совпадают друг с другом, хотя имеют различные числовые отметки.

2. Если прямая параллельна нулевой плоскости уровня, числовые отметки прямой равны друг другу.

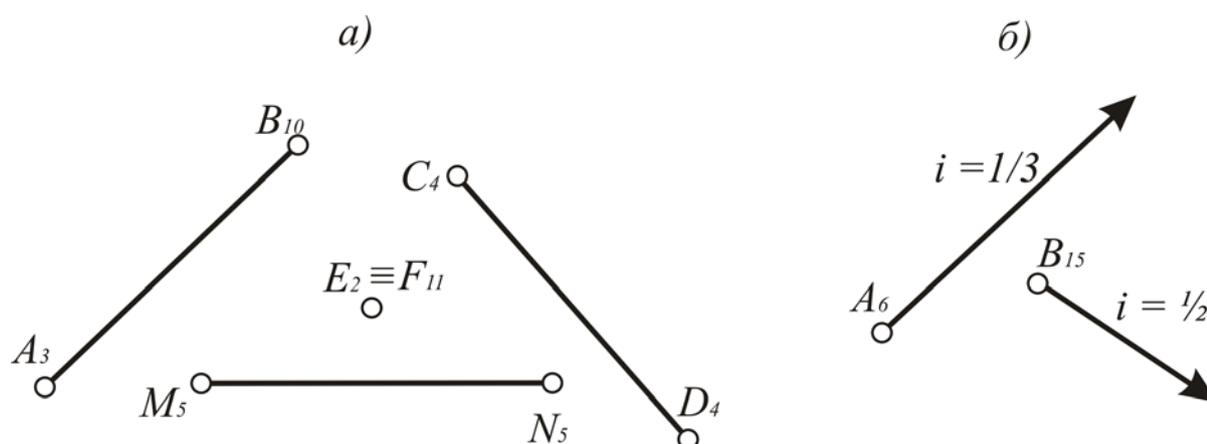


Рис. 198. Примеры моделей прямых в проекциях с числовыми отметками

Решение первых двух задач при работе с моделями прямых, построенных в проекциях с числовыми отметками, уже были рассмотрены выше. Для построение модели прямой необходимо включить в работу соответствующий алгоритм, а для определения ее положения в исходном трехмерном пространстве достаточно отнести ее к прямым общего или частного положения. Если это окажется прямая частного положения, то необходимо указать, к какому конкретно. Рассмотрим решение других задач.

**Задача 1.** Дана модель прямой. Необходимо проградировать ее (рис. 199).

*Градирование прямой* – это нанесение на проекцию прямой целочисленных отметок, равных интервалу. При решении данной задачи используют деление отрезка в данном отношении.

**Алгоритм решения задачи:**

1. Под произвольным углом к заданному отрезку, через любой из его концов, проводим вспомогательную прямую, откладываем на ней разность числовых отметок (превышение):  $26 - 22 = 4$  линейные единицы (см. рис. 199).

2. Свободные концы отрезков соединяем прямой линией, параллельно этой прямой проводим делящий пучок параллельных прямых, которые выявят на заданном отрезке искомые точки.

3. Введем числовые отметки, проставив их справа или снизу от точки.

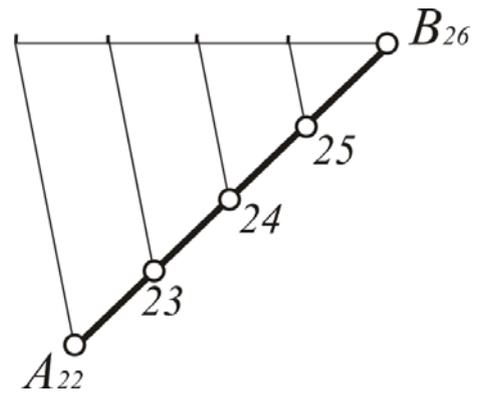


Рис. 199. Градуирование прямой

**Задача 2.** Дана прямая  $A_6 B_{11}$  и точка  $C$  на этой прямой, найти числовую отметку точки  $C$ , принадлежащей прямой (рис. 200).

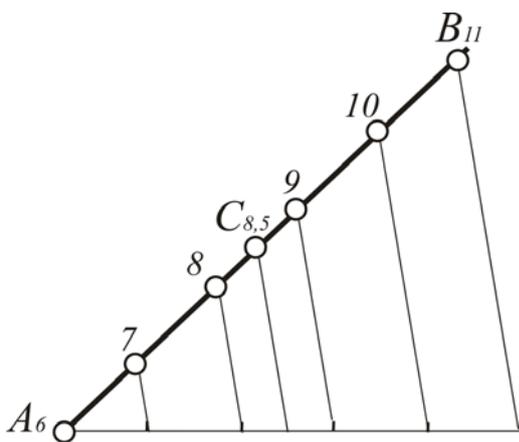


Рис. 200. Определение числовой отметки заданной на прямой точки  $C$

**Алгоритм решения:**

1. Для решения задачи необходимо проградировать прямую  $AB$ .

2. Определить числовую отметку точки  $C$ .

Полученная отметка точки  $C$  равна 8,5.

Нанесение на модель прямой точки с заданной числовой отметкой является задачей, обратной только что рассмотренной.

**Контрольные вопросы**

1. Что является моделью прямой в проекциях с числовыми отметками?
2. Как проградировать прямую?
3. Каковы характерные признаки модели горизонтали в проекциях с числовыми отметками?
4. Каковы особенности модели проецирующей прямой в проекциях с числовыми отметками?
5. Что считается уклоном прямой?
6. Что называется заложением прямой?
7. Что считается интервалом прямой?

### 7.2.3. Модель плоскости

Если проецировать точки и прямые заданной плоскости на картины  $\pi_0$  из центра  $S$ , то их проекции заполнят все плоское поле картины. Получим совмещенное плоское поле точек и прямых, которое можно считать моделью плоскости. Поэтому плоскость моделируют ее репером, как во всех вариантах метода двух изображений.

Моделирование плоскости в проекциях с числовыми отметками ее реперами не всегда удобно для решения большинства задач, целесообразней, когда плоскость задана **масштабом уклона плоскости**, который представляет собой проградуйрованную проекцию линии, перпендикулярной горизонтали плоскости. Чтобы построить масштаб уклона плоскости, нужно в плоскости провести горизонталь и опустить на нее перпендикуляр, который затем необходимо проградуйровать.

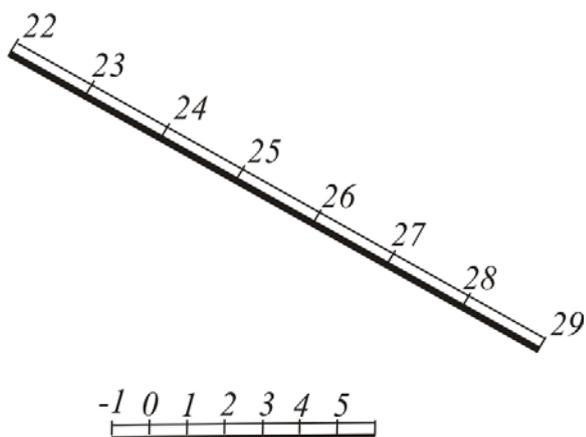


Рис. 201. Масштаб уклона плоскости

Масштаб уклона изображается на чертежах двумя проградуйрованными параллельными линиями, расположенными рядом на расстоянии 1-2 мм. Одна линия вычерчивается сплошной основной, другая – основной тонкой, числовые отметки наносят со стороны тонкой линии (рис. 201). Плоскость, промоделированная ее масштабом уклона, сохраняет всю ее геометрическую информацию и является наиболее удобным вариантом ее модели.

**Работа с моделью плоскости складывается из решения следующих задач:**

1. Моделирование плоскости трехмерного пространства в проекциях с числовыми отметками.
2. Определение положения плоскости относительно проекционного аппарата по ее модели.
3. Построение горизонтали, лежащей в плоскости.
4. Построение масштаба уклона плоскости.
5. Определение принадлежности точки плоскости.
6. Определение принадлежности прямой плоскости.

Модели плоскостей, различным образом расположенные по отношению к проекционному аппарату, имеют конкретные особенности, которые следует учитывать при решении указанных задач. Чтобы выявить эти особенности, разделим все плоскости трехмерного пространства на две

группы. Основанием к такому делению является расположение плоскости в исходном пространстве относительно проекционного аппарата.

**Первая группа** – плоскости **частного** положения:

1. Плоскости, которые содержат центр проецирования. Они называются проецирующими.

2. Плоскости уровня, которые параллельны нулевой плоскости уровня  $\pi_0$ .

**Вторая группа** – плоскости **общего** положения. К ним относятся все остальные плоскости.

Рассмотрим **характерные признаки** модели плоскости частного положения (рис. 202):

1. Характерной особенностью модели проецирующей плоскости, заданной треугольником  $ABC$ , является то, что ее проекция вырождается в линию (рис. 202, а).

2. Характерной чертой модели плоскости уровня, заданной треугольником  $MNK$ , является то, что все ее геометрические объекты имеют одинаковую числовую отметку (рис. 202, б).

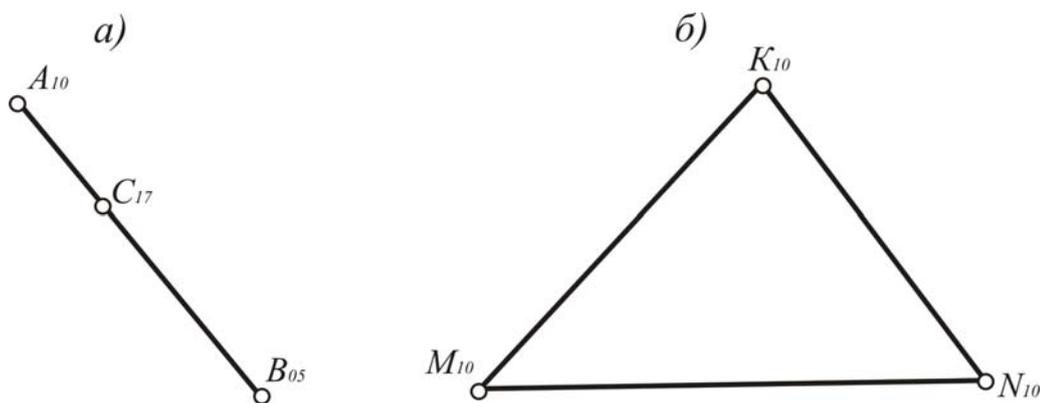


Рис. 200. Характерные признаки моделей плоскостей частного положения

**Задача 1.** Плоскость задана треугольником  $ABC$ , вершины которого имеют соответственно отметки 6, 4 и 9 (рис. 203). Построить горизонтали данной плоскости [6].

**Алгоритм решения:**

1. Чтобы построить горизонтали плоскости, необходимо выделить в ней две точки, которые имели бы одинаковые числовые отметки. Для этого достаточно проградуровать две прямые, которые предположительно имеют по точке с одинаковыми числовыми отметками.

2. Соединим эти точки прямой линией. Она и будет искомой.

Согласно предложенному алгоритму, решение задачи заключается в следующем: градуируем сторону треугольника, расположенную между вершинами, имеющими наибольшую разность отметок. В рассмотренном на рис. 203 примере это сторона  $AC$ . Находим на ней пометку, равную,

пометке при вершине  $B$ . Соединяем полученные пометки, получаем горизонталь. Все остальные горизонтали будут ей параллельны.

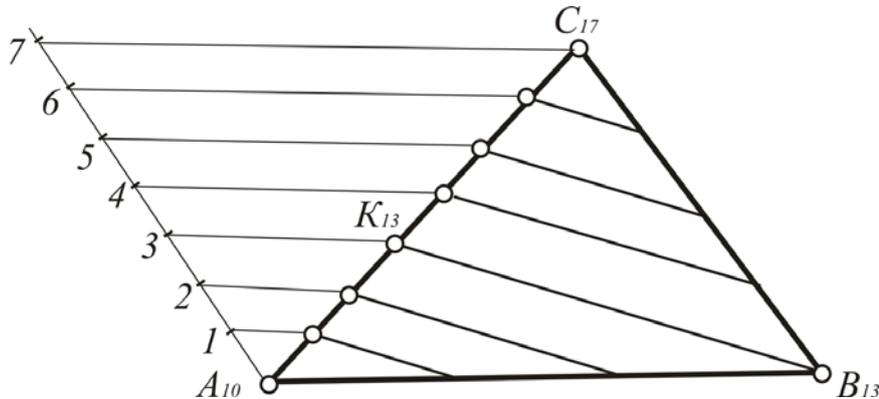


Рис. 203. Построение горизонталей в плоскости

Решение этой задачи является основой для построения масштаба уклона плоскости.

**Задача 2.** Построить масштаб уклона ( $\alpha_i$ ) плоскости, заданной треугольником  $ABC$  (рис. 204).

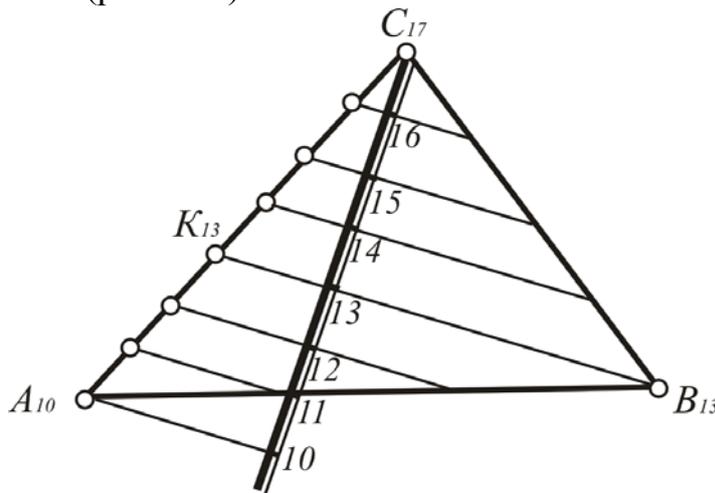


Рис. 204. Построение масштаба уклона плоскости

**Алгоритм решения:**

Построить горизонталь плоскости. В рассматриваемом примере – это горизонталь с пометкой 13.

Перпендикулярно горизонтали провести прямую в этой плоскости и проградировать ее. В предложенном примере она проведена через вершину  $C$  треугольника. Это масштаб уклона плоскости. Для его градуировки были использованы горизонтали этой плоскости.

**Задача 3.** Определить числовую отметку точки  $K$ , проекция которой дана и о которой известно, что она принадлежит плоскости, заданной масштабом уклона (рис. 205).

**Алгоритм решения:**

1. На основании признака принадлежности точки к плоскости, проведем через точку  $K$  вспомогательную прямую, принадлежащую плоскости. Целесообразно провести горизонталь.

2. Определим числовую отметку этой горизонтали, которая окажется одновременно числовой отметкой точки  $K$ .

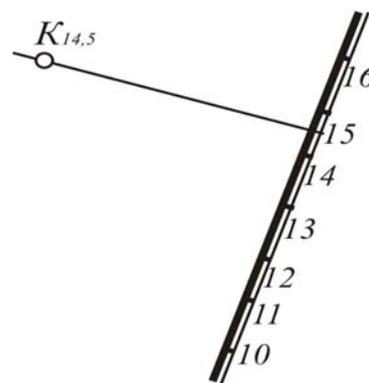


Рис. 205. Определение числовой отметки точки, принадлежащей плоскости

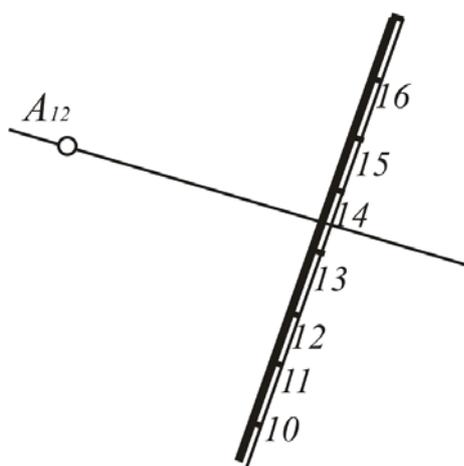


Рис. 206. Определение принадлежности точки  $A$  к плоскости, промоделированной масштабом уклона

**Задача 4.** Определить принадлежность точки  $A_{12}$  плоскости, заданной масштабом уклона (рис. 206).

**Алгоритм решения:** Через заданную точку проведем горизонталь и определим ее точку пересечения с масштабом уклона. Если числовая отметка этой точки совпадает с числовой отметкой масштаба уклона плоскости, то точка  $A$  принадлежит плоскости. В рассматриваемом примере такого совпадения не произошло. Следовательно, точка  $A$  не принадлежит плоскости.

**Задача 5.** Определить принадлежность прямой, заданной точками  $A_{12}$ ,  $B_{15}$ , к плоскости, заданной масштабом уклона (рис. 207).

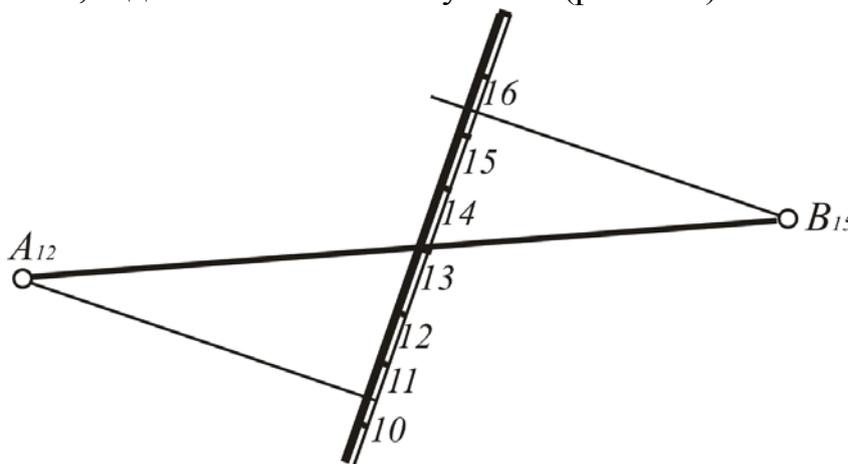


Рис. 207. Определение принадлежности прямой  $AB$  к плоскости, промоделированной масштабом уклона

**Алгоритм решения** этой задачи сводится к удвоению алгоритма предыдущей задачи 4. В рассматриваемом примере прямая не принадлежит плоскости, так как ни одна из ее точек, которыми она задана, не принадлежит плоскости.

### Контрольные вопросы

1. Что считается моделью плоскости в проекциях с числовыми отметками?
2. Что называется масштабом уклона плоскости?
3. Назовите характерный признак проецирующей плоскости, плоскости уровня.
4. В чем заключается работа с моделью плоскости?

### 7.2.4. Модель поверхности

Чтобы промоделировать поверхность в проекциях с числовыми отметками, используют следующий прием. Поверхность разрезают горизонтальными плоскостями уровня, отстоящими друг от друга на какую-либо определенную единицу длины, и получают на ней серию горизонталей, которые затем проецируют, включая в работу проекционный аппарат.

В результате *моделью поверхности в проекциях с числовыми отметками является совокупность моделей ее горизонталей.*

### Моделирование геодезической поверхности

Одной из самых распространенных поверхностей, которую приходится моделировать в проекциях с числовыми отметками, является геодезическая поверхность, закон образования которой неизвестен. Примером геодезической поверхности может служить земная поверхность, которую называют еще топографической. На рис. 208 представлена трехмерная модель земной поверхности, выполненная средствами компьютерной графики ProSITE.

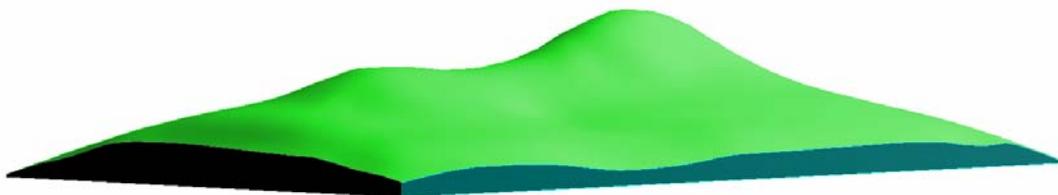


Рис. 208. Модель геодезической поверхности в аксонометрии

Эту поверхность разрезают горизонтальными плоскостями уровня, отстоящими друг от друга на расстояние, равное одному метру, и получают на ней серию горизонталей, которые затем проецируют, включая в работу проекционный аппарат. Каждой горизонтали приписывают соответствующую числовую отметку. В результате получают ее модель в проекциях с числовыми отметками (рис. 209).

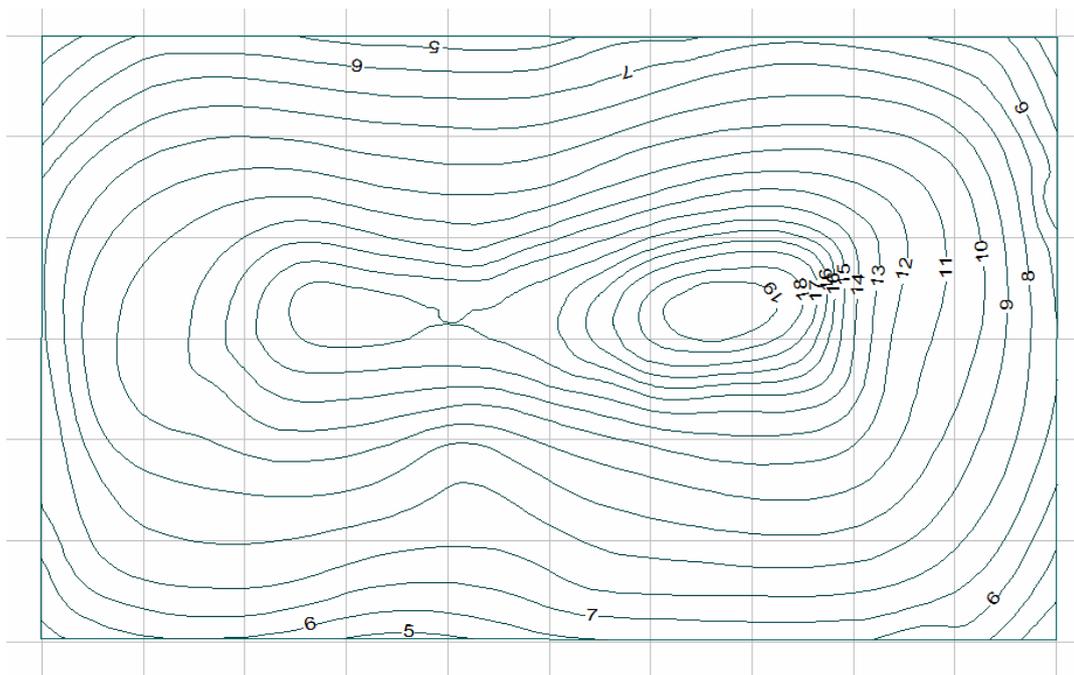


Рис. 209. Топографическая поверхность, промоделированная в проекциях с числовыми отметками

Участок топографической поверхности изображен на рис. 210. Здесь он задан горизонталями, которые пронумерованы от 5-й до 19-й, что соответствует их отметкам. Горизонтали геодезической поверхности представляют собой незакономерные кривые линии. Высота сечения может быть равна одному, пяти, десяти и т.д. метрам. Каждая пятая горизонталь обводится более толстой линией, чем остальные.

По возрастанию горизонталей (в левой части чертежа) можно судить о том, что изображено **возвышение** (холм, гора) – неровность земли, расположенная выше окружающей местности. Неровность, противоположная возвышению, называется **котловиной**.

Высшая точка возвышения (или горизонтальная площадка – плато), от которой местность понижается во все стороны, называется **вершиной** (на рассматриваемом чертеже отметка вершины составляет 11,4 м), боковая поверхность – **склоном**. Низшая часть котловины называется **дном**, боковые поверхности – **щеками**.

## Рельеф местности и его изображение на топографических картах и планах I

Основные формы рельефа местности и их изображение горизонталями

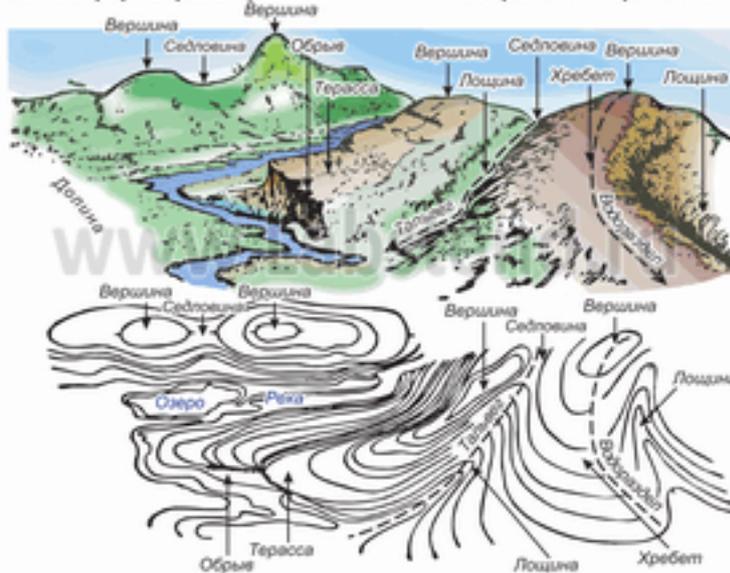


Рис. 210. Рельеф местности и его изображение на топографических картах и плане

По взаиморасположению горизонталей можно судить о том, где склоны, возвышения или щеки котловины имеют больший или меньший уклон, называемый **крутизной**. Крутизна, как и уклон линии или плоскости, измеряется тангенсом угла наклона ската к горизонтальной плоскости. Принято говорить о крутизне ската в данной точке, так как в разных точках топографической поверхности он обычно различен.

**Седловиной** называется поверхность, ограниченная с четырех сторон выпуклыми сторонами горизонталей. При этом противоположные горизонталю образуют одно семейство горизонталей. Любая горизонталь, которая имеет числовую отметку, меньшую (или большую) числовой отметки любой горизонтали второго семейства, образованного другими горизонталями.

**Водоразделом** (или линией хребта) называется линия наибольшего ската поверхности, проходящая через точки максимальной кривизны горизонталей в случае, когда всякая огибающая горизонталь имеет меньшую числовую отметку, чем огибаемая.

**Водослив** (талвег) – это линия ската, проходящая через точки максимальной кривизны горизонталей (линия долины), когда всякая огибающая горизонталь имеет числовую отметку больше числовой отметки огибаемой горизонтали. Водяные струи всегда стремятся от линии водораздела к линии водослива.

## Моделирование геометрических поверхностей

Модели геометрических поверхностей в проекциях с числовыми отметками встречаются реже, чаще всего для вспомогательных задач. Рассмотрим возникновение моделей тех поверхностей, которые наиболее употребительны.

При моделировании многогранника строят модели его вершин и ребер. Таким образом многократно решаются уже рассмотренные ранее задачи по моделированию точек и прямых.

На рис. 211 показана модель пирамиды, основание которой  $ABC$  расположено в плоскости  $\pi_0$ , а вершина  $T$  отстоит от этой плоскости на 5 единиц. Горизонтالي пирамидальной поверхности представляют собой подобные многоугольники.

На рис. 212 дана модель треугольной призмы, основания которой  $ABC$  и  $LDF$  расположены в горизонтальных плоскостях, имеющих соответственно отметки 0 и 4.

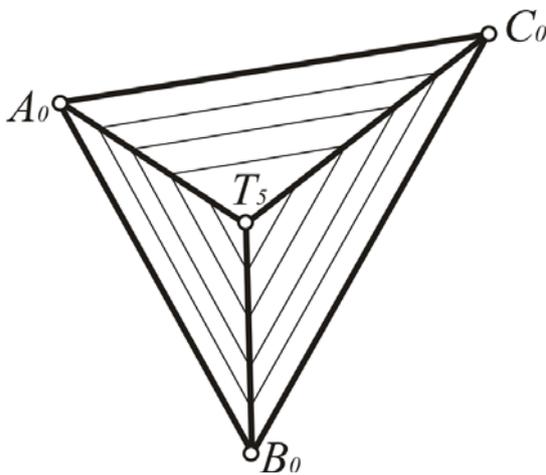


Рис. 211. Модель пирамиды в проекциях с числовыми отметками

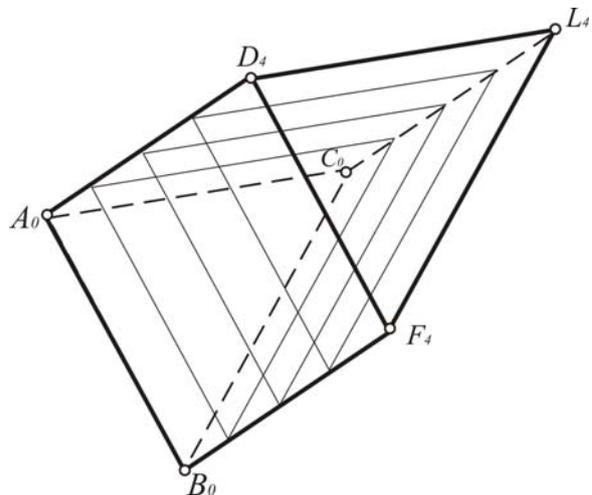


Рис. 212. Модель призмы в проекциях с числовыми отметками

На рис. 213 и 214 изображен прямой круговой конус. Сечения боковой поверхности конуса горизонтальными плоскостями дают горизонтали поверхности. Спроецировав их на плоскость проекций, получим систему концентрических окружностей, которые представляют собой модель прямого кругового конуса в проекциях с числовыми отметками. Если расстояние между смежными секущими плоскостями равно единице длины, то радиус одной окружности будет отличаться от радиуса следующей на величину интервала образующей конической поверхности. Таким образом, градуированная проекция любой образующей может рассматриваться как масштаб уклона, а сама образующая – как линия ската поверхности. Прямая круговая коническая поверхность может быть задана масштабом уклонов и вершиной.

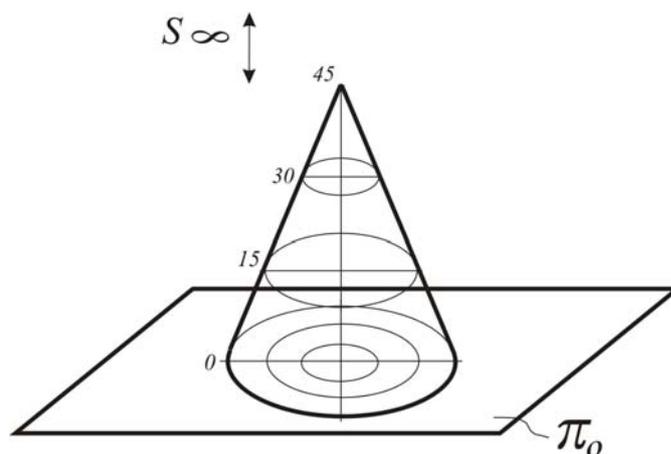


Рис. 213. Построение модели прямого кругового конуса в проекциях с числовыми отметками

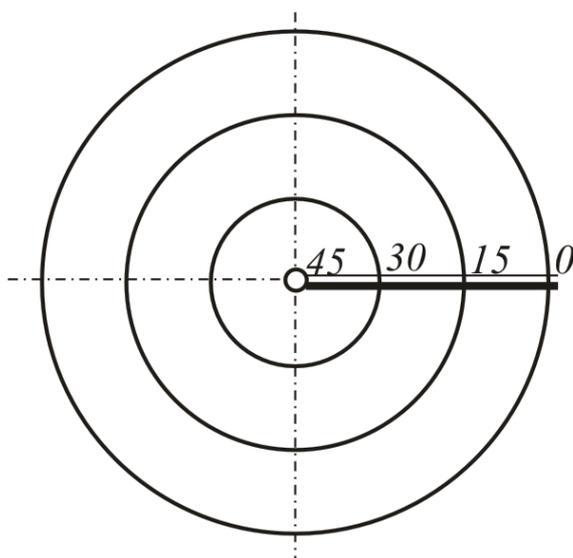


Рис. 214. Модель прямого кругового конуса в проекциях с числовыми отметками

На рис. 215,а продемонстрирован обратный конус – числовые отметки убывают к вершине. Интервалы равны по всем образующим; следовательно, данная коническая поверхность имеет один и тот же уклон по всем направлениям.

Наклонный конус показан на рис. 215, б – уклоны разные, наименьший интервал будет иметь наибольший уклон. Образующая, имеющая цепь наименьших интервалов, является линией наибольшего ската кривой поверхности.

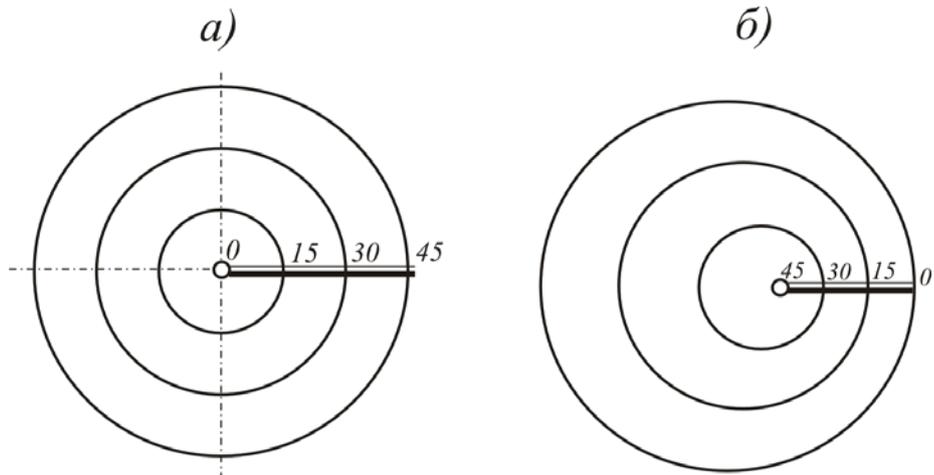


Рис. 215. Модель обратного кругового конуса и наклонного конуса в проекциях с числовыми отметками

Практическая целесообразность диктует построение поверхности одинакового ската. Она изображается множеством горизонталей, огибающих семейство прямых круговых конусов, вершины которых расположены на некоторой пространственной кривой  $m$ , называемой **направляющей** (рис. 216).

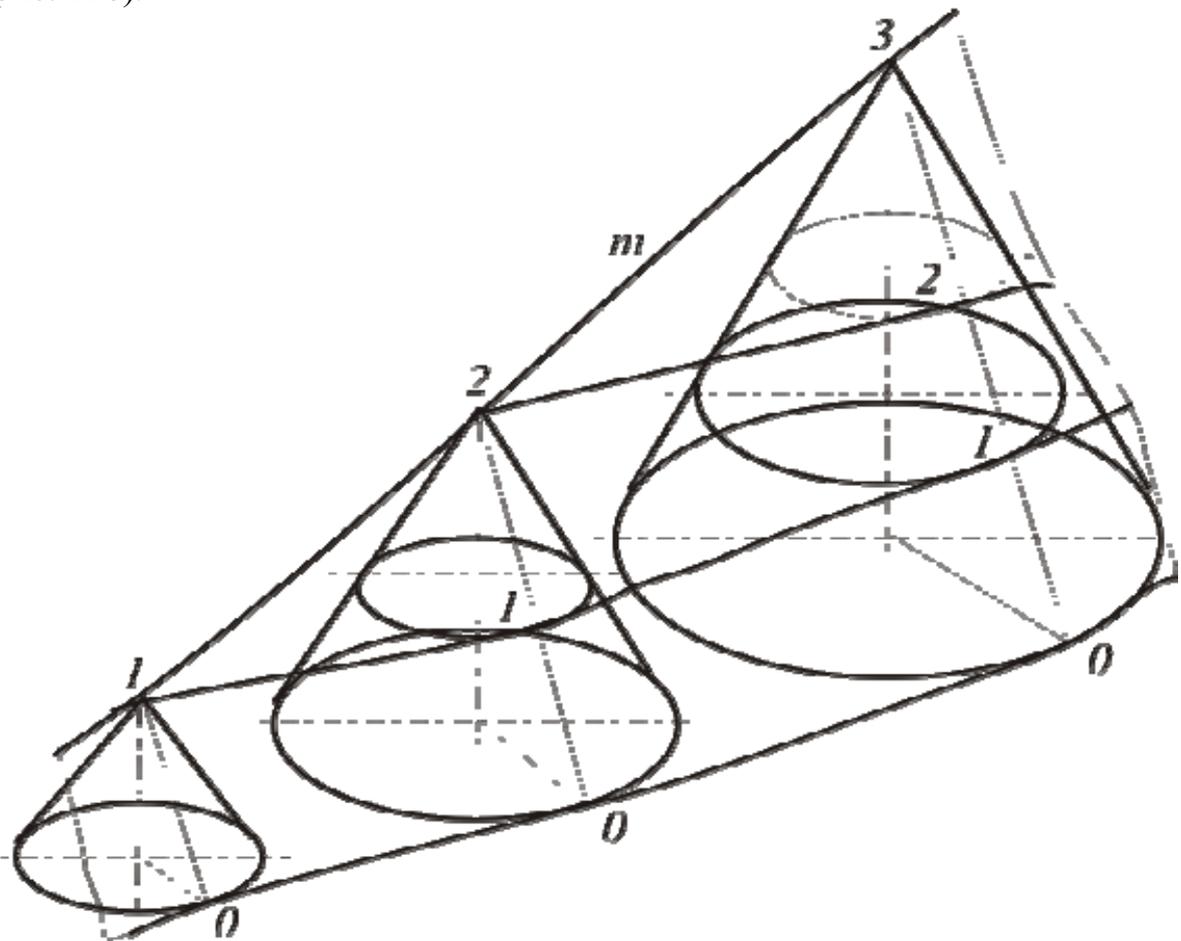


Рис. 216. Поверхность одинакового ската

**Поверхность одинакового ската** – это линейчатая поверхность, которая является касательной к серии конических поверхностей, имеющих одинаковый наклон. На рис. 216 показано построение горизонталей поверхности одинакового ската в проекциях с числовыми отметками. Здесь каждая горизонталь поверхности является огибающей семейства горизонталей конусов, причем все горизонталы данного семейства имеют одинаковую отметку. Так, горизонталь поверхности с отметкой 1 огибает семейство горизонталей конусов с той же отметкой.

Поверхность одинакового ската является линейчатой поверхностью, все прямолинейные образующие которой составляют с плоскостью  $\pi_0$  одинаковые углы, равные углу наклона к  $\pi_0$  образующих конусов.

При проецировании поверхности одинакового ската на картину  $\pi_0$  получаем ее модель (рис. 217), которая обладает следующими особенностями:

- 1) за вершины конических поверхностей принимаются точки с целочисленными пометками, принадлежащими проградуйрованной направляющей;
- 2) наклон образующих конических поверхностей одинаков;
- 3) горизонталы касаются окружностей конических поверхностей с одними и теми же числовыми отметками.

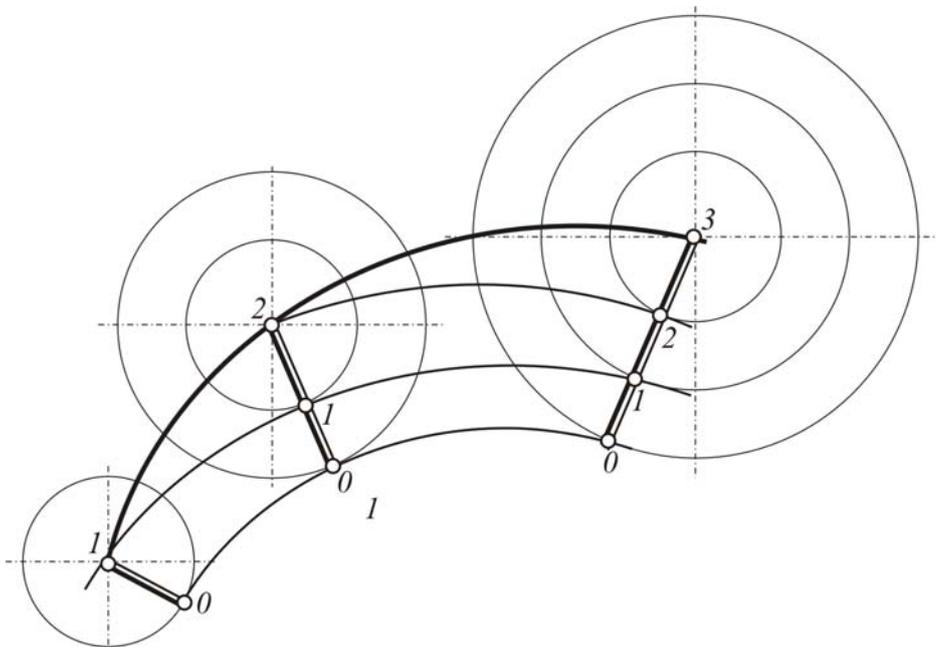


Рис. 217. Модель поверхности одинакового ската

Работа с моделью поверхности складывается из решения следующих задач:

1. Моделирование поверхности трехмерного пространства в проекциях с числовыми отметками.

2. Определение положения геометрической поверхности относительно проекционного аппарата по ее модели.

3. Градуирование поверхности.

4. Построение плоских сечений топографической (и не только) поверхности, которые получены при сечении поверхности проецирующей плоскости называются **профилем**.

Решение первой задачи из приведенного выше списка, связанной с моделированием поверхностей, уже рассмотрено. Вторая задача является обратной первой. Изображение поверхности, как правило, хорошо читается, поэтому не требует рассмотрения каких-то специальных процедур, а вот на примере решения третьей задачи остановимся.

**Задача 1.** Дана модель поверхности пирамиды. Проградуировать эту поверхность.

**Градуированием поверхности** называется процесс построения горизонталей поверхности с проставлением целочисленных отметок, отметок различающихся на единицу длины.

На рис. 218 дана модель пирамиды. Чтобы проградуировать пирамиду нужно проградуировать каждую грань. Для этого строятся масштабы уклона в плоскостях каждой грани и проводятся горизонтали через целочисленные пометки.

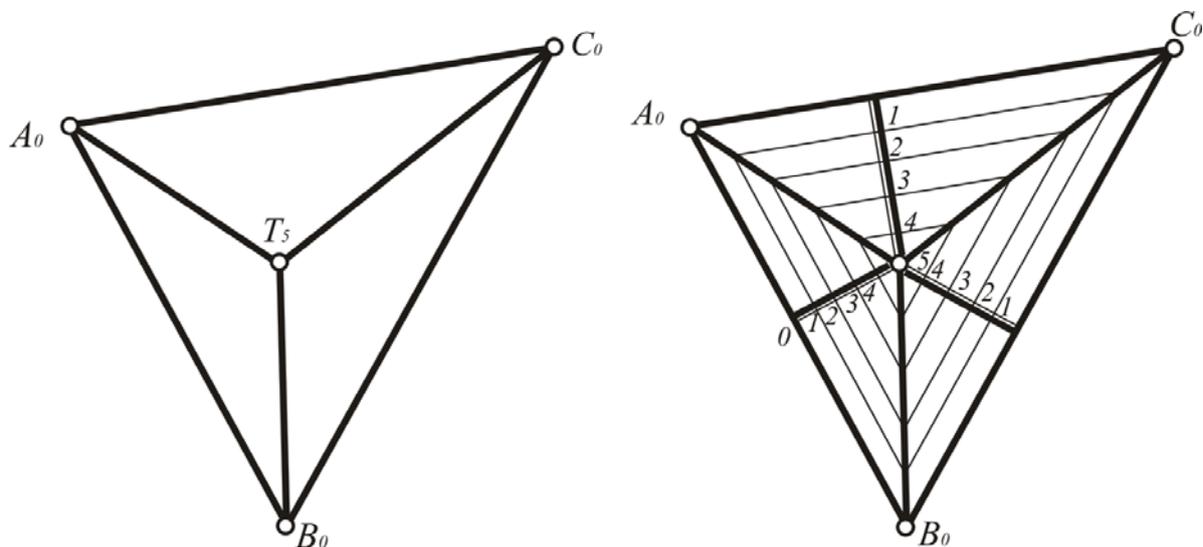


Рис. 218. Градуирование поверхности

**Задача 2.** Дана модель топографической поверхности. Построить плоское сечение этой поверхности, проецирующей плоскостью.

Горизонтальная проекция такой плоскости проецируется в линию, называемую направлением профилирования. Чтобы определить форму профиля, необходимо его совместить с плоскостью нулевого уровня или

другой плоскостью, которая ей параллельна. При этом профиль может быть построен в проекционной связи (**наложенный профиль**) и отдельно (**вынесенный профиль**).

Когда топографическая поверхность задана горизонталями, способ построения профиля одинаков, независимо от вида поверхности.

Чтобы построить наложенный профиль топографической поверхности (рис. 219), нужно на свободном месте чертежа в проекционной связи задать вспомогательную плоскость масштабом уклона. Затем все точки пересечения вспомогательной плоскости с горизонталями топографической поверхности (а она пройдет по заданной прямой) перенести на однозначные горизонтали вспомогательной плоскости. Плавной кривой соединить точки.

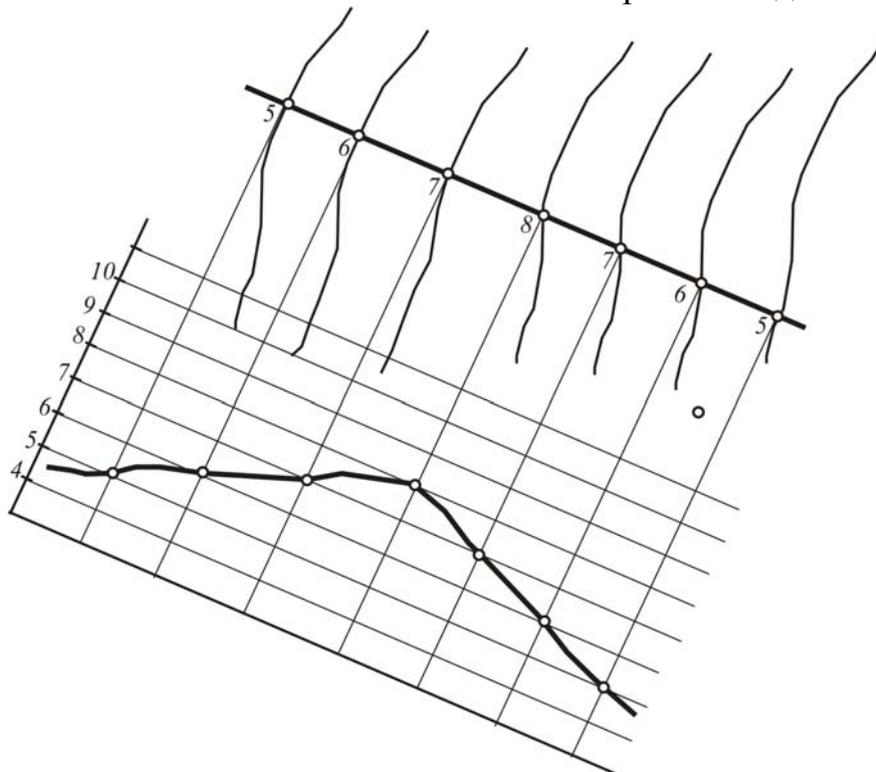


Рис. 219. Построение наложенного профиля топографической поверхности

В тех случаях, когда необходимо построить вынесенный профиль (рис. 220), его располагают в свободном месте чертежа и обозначают. Обозначение складывается из указания стрелкой направления взгляда на секущую плоскость. Возле стрелки приписывают число, начиная с единицы. Обозначают сечение с обеих сторон от проекции поверхности. Над вынесенным профилем выполняется надпись: «Профиль 1». Если выполняется несколько сечений, то второй профиль обозначается: «Профиль 2», третий – «Профиль 3» и т.д.

Кроме числа профиль обозначают еще буквами русского алфавита, начиная с буквы А. Если выполняется несколько сечений, то первый профиль обозначают «Профиль А», второй профиль – «Профиль Б», третий – «Профиль С» и т.д.

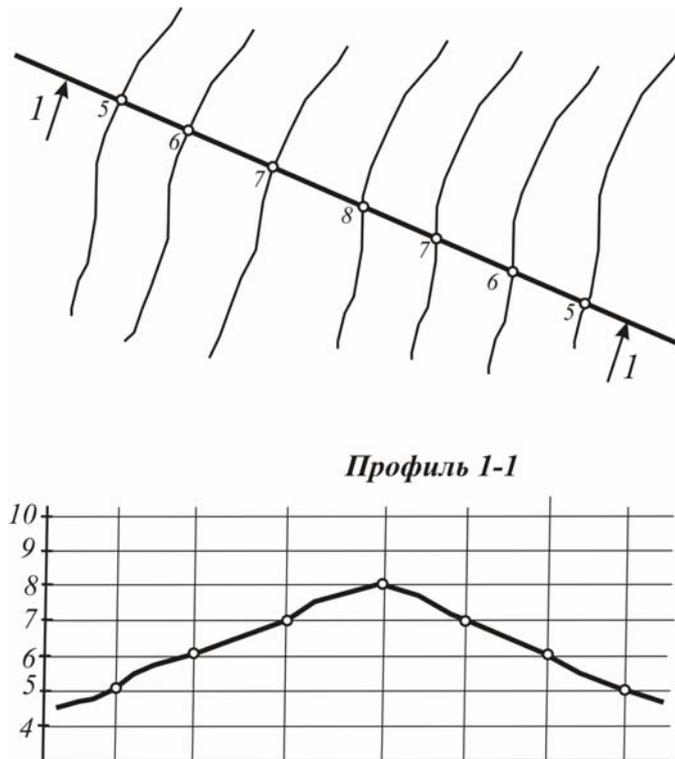


Рис. 220. Построение вынесенного профиля топографической поверхности

Для построения вынесенного профиля на свободном месте чертежа задают базу профиля. Базой профиля может быть горизонталь с наибольшей или с наименьшей числовой отметкой. Затем строят наложение секущей плоскости, обычно ее изображают масштабом уклона в соответствии с масштабом чертежа. На базе профиля откладывают расстояние между соседними горизонталями, восстанавливая перпендикуляр до высоты необходимой горизонтали, получают точки, которые принадлежат сечению. Соединяют полученные точки плавной кривой (см. рис. 220).

В зависимости от положения секущей плоскости по отношению к объекту сечения выделяют следующие виды профилей:

- *продольный* выполняется вдоль длины объекта;
- *поперечный* – секущая плоскость пересекает объект по его ширине.

На рис. 221 построен продольный профиль земляного сооружения – аппарели. Аппарель – это пологий спуск для въезда (выезда) различной техники, который широко применяется при постройке земляных сооружений. Для построения профиля аппарели (или пандуса) в проекционной связи на свободном месте чертежа параллельно направлению линии профилирования С-С проводим нулевую горизонталь. В соответствии с числовым масштабом чертежа строим другие горизонтали сооружения, восстанавливаем перпендикуляры от точек 0, 1, 2, 3 до пересечения с однозначными горизонталями профиля. Горизонтальная часть сооружения покрыта бетоном, изображаем его графически в соответствии с ГОСТ 21.204–93,

наклонная часть профиля является неукрепленной, изображаем ее бергштрихами. Изображение продольного и поперечного профилей автомобильных дорог строится и оформляется в соответствии с ГОСТ Р 21.1701–97.

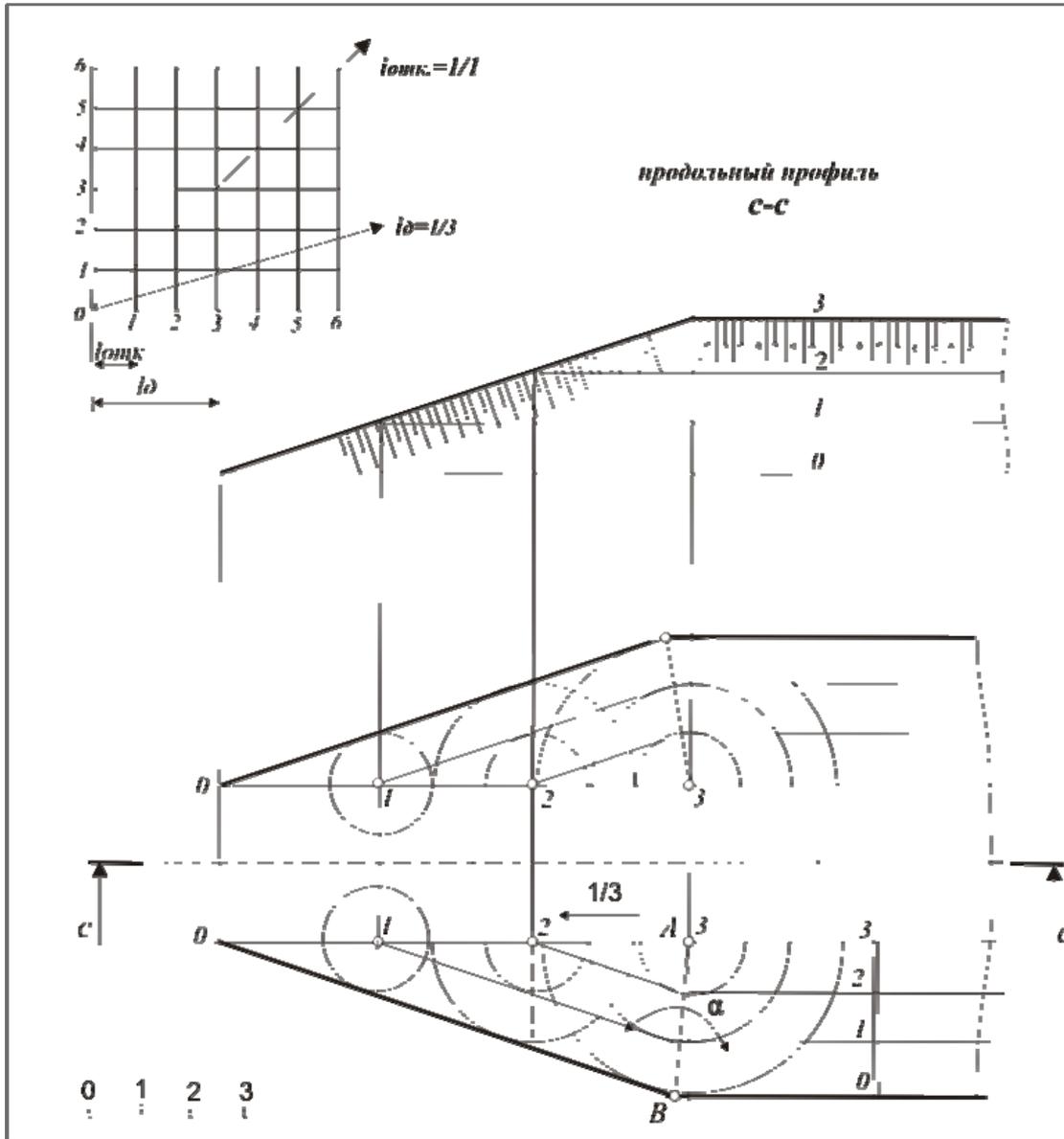


Рис. 221. Продольный профиль аппарели

Очень часто приходится строить поперечные профили автомобильных дорог общей сети. Они выполняются в соответствии с принятыми стандартами (рис. 222).

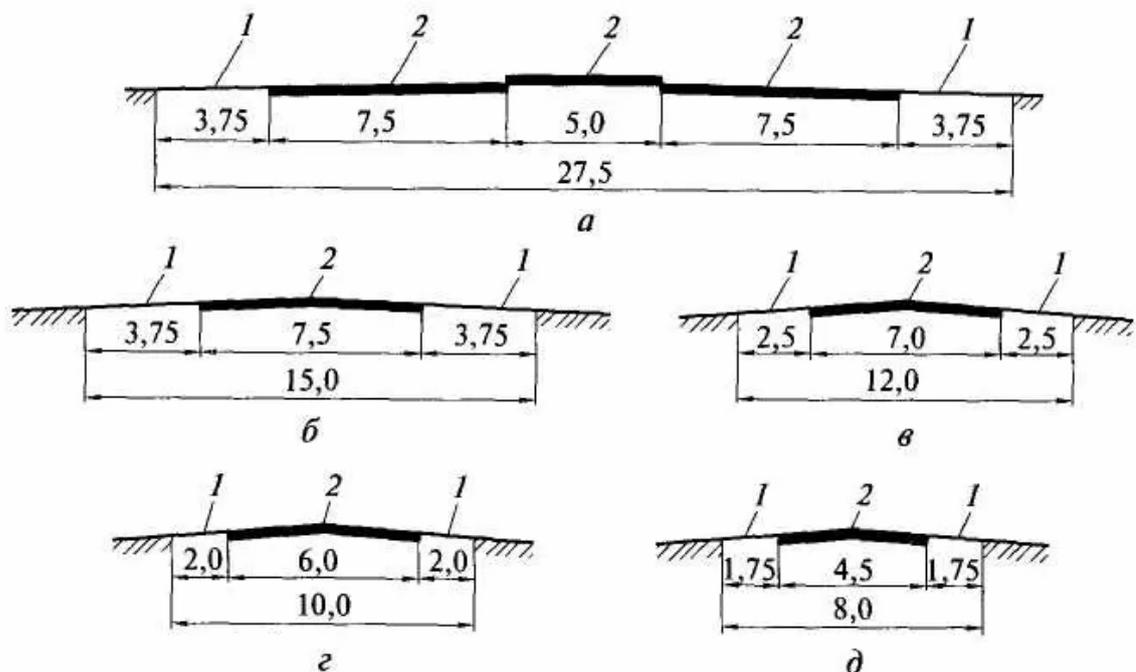


Рис. 222. Типовые поперечные профили автомобильных дорог общей сети

### Контрольные вопросы

1. Как промоделировать поверхности в проекциях с числовыми отметками?
2. Каковы особенности модели конической поверхности в проекциях с числовыми отметками?
3. Каковы особенности модели пирамидальной поверхности в проекциях с числовыми отметками?
4. Каковы особенности модели геодезической поверхности в проекциях с числовыми отметками?
5. Как построить поверхность одинакового ската?
6. Что называется профилем?
7. Какие виды профилей вы знаете?

### 7.3. Позиционные задачи в проекциях с числовыми отметками

Базовыми позиционными задачами в проекциях с числовыми отметками являются задачи на пересечение двух плоскостей, плоскости и поверхности, двух поверхностей. Они лежат в основе определения точки пересечения прямой с плоскостью и поверхностью. Рассмотрим приемы решения этих задач.

Рассмотрим применение этого алгоритма на конкретном примере.

**Задача 1.** Даны две плоскости общего положения масштабом наибольшего уклона (рис. 223). Найти их общую линию.

Известно, что две плоскости пересекаются по прямой. Чтобы определить ее положение, необходимо выполнить два раза следующие операции алгоритма:

1. В каждой из заданных плоскостей выделить по одной прямой. Эти прямые являются горизонталями, полученными от сечения заданных плоскостей вспомогательной плоскостью уровня.

2. Найти точку пересечения выделенных прямых, которые принадлежат общей линии плоскостей.

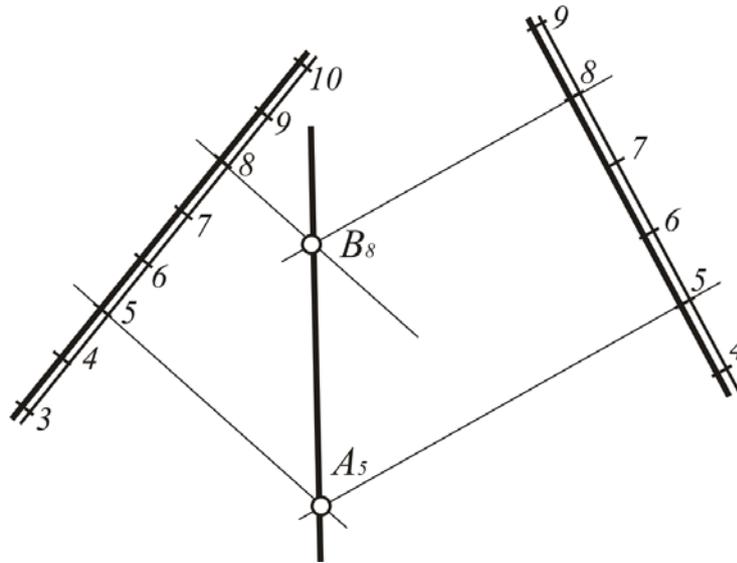


Рис. 223. Построение линии пересечения двух плоскостей

Следуя предложенному алгоритму, выделим в каждой из заданных плоскостей по две горизонтали. При этом каждая пара этих горизонталей имеет одинаковые числовые пометки. В рассмотренном случае это горизонтали с пометками 5 и 8. Находим точки пересечения каждой пары горизонталей, получаем точки  $A$  и  $B$ . Через них проходит искомая прямая.

**Задача 2.** Даны плоскость общего положения масштабом наибольшего уклона и геодезическая поверхность – ее горизонталями (рис. 224). Найти их общую линию.

Необходимо многократно выполнить следующие операции алгоритма:

1. В заданных плоскости и поверхности выделить пары горизонталей с одинаковыми числовыми пометками.

2. Найти точку пересечения выделенных горизонталей, которая принадлежит искомой линии.

Эти действия нужно повторять до тех пор, пока не станет ясен характер линии пересечения. В рассматриваемом примере эта линия является сложной незакономерной кривой.

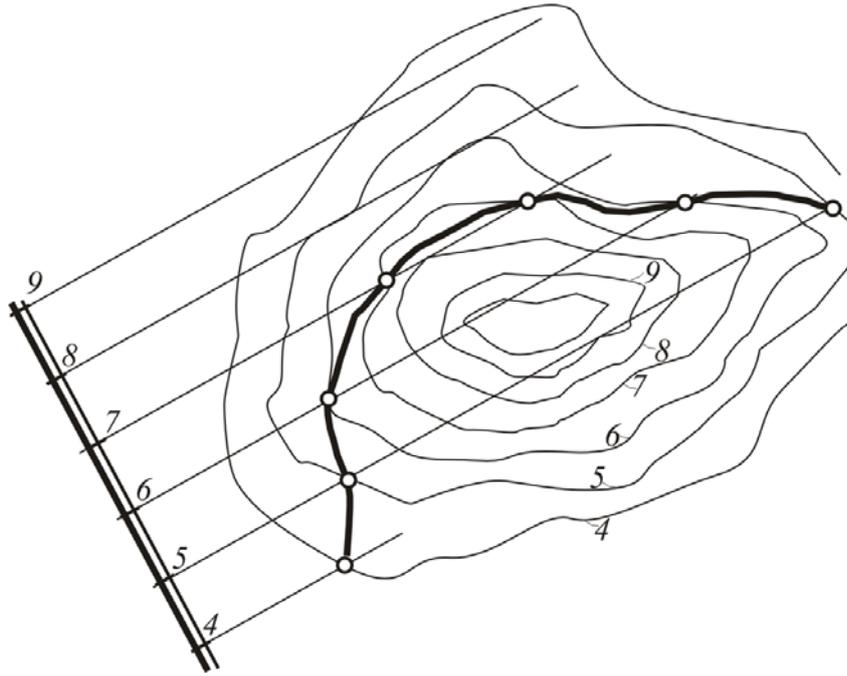


Рис. 224. Построение линии пересечения плоскости и поверхности

**Задача 3.** Даны коническая и геодезическая поверхности их горизонталями (рис. 225). Найти их общую линию.

Необходимо многократно выполнить следующие операции алгоритма:

1. На заданных поверхностях выделить пары горизонталей с одинаковыми числовыми пометками.

2. Найти точки пересечения выделенных горизонталей, которые принадлежит искомой линии.

Эти действия нужно повторять до тех пор, пока не станет ясен характер линии пересечения. В рассматриваемом примере эта линия является сложной незакономерной кривой.

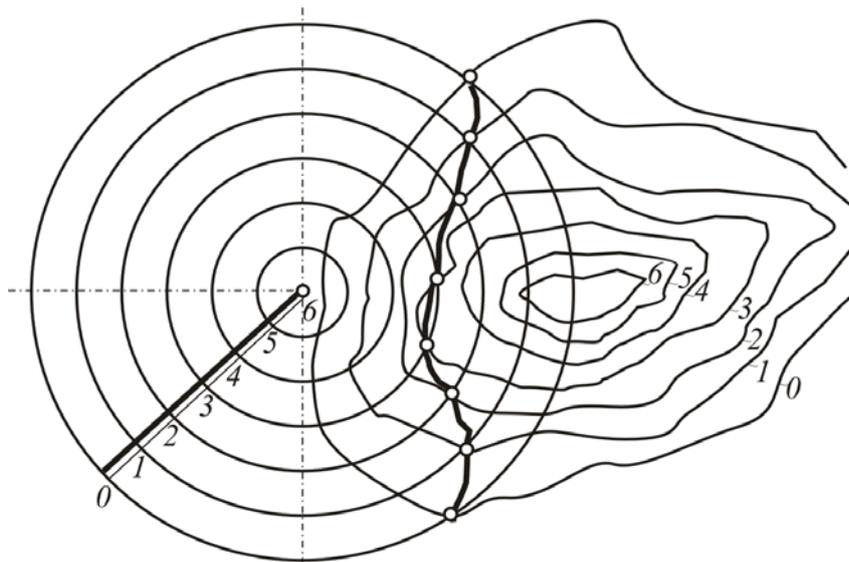


Рис. 225. Построение линии пересечения двух поверхностей

**Задача 4.** Даны плоскость общего положения масштабном наибольшего уклона и прямая  $AB$  общего положения (рис. 226). Найти их общую точку.

Необходимо выполнить следующие операции алгоритма:

1. Через заданную прямую провести вспомогательную плоскость. Для этого целесообразно данную прямую принять за масштаб уклона вспомогательной плоскости и проградировать ее. Для решения задачи достаточно провести две горизонтали, которые в пределах чертежа пересекут соответствующие горизонтали заданной плоскости. В рассмотренном примере это горизонтали, имеющие числовые пометки 3 и 8.

2. Найти линию пересечения заданной и вспомогательной плоскостей, пересекая выделенные горизонтали.

3. Определить точку пересечения построенной линии и заданной прямой, которая является искомой точкой  $K$ , установить ее числовую отметку – 10,3.

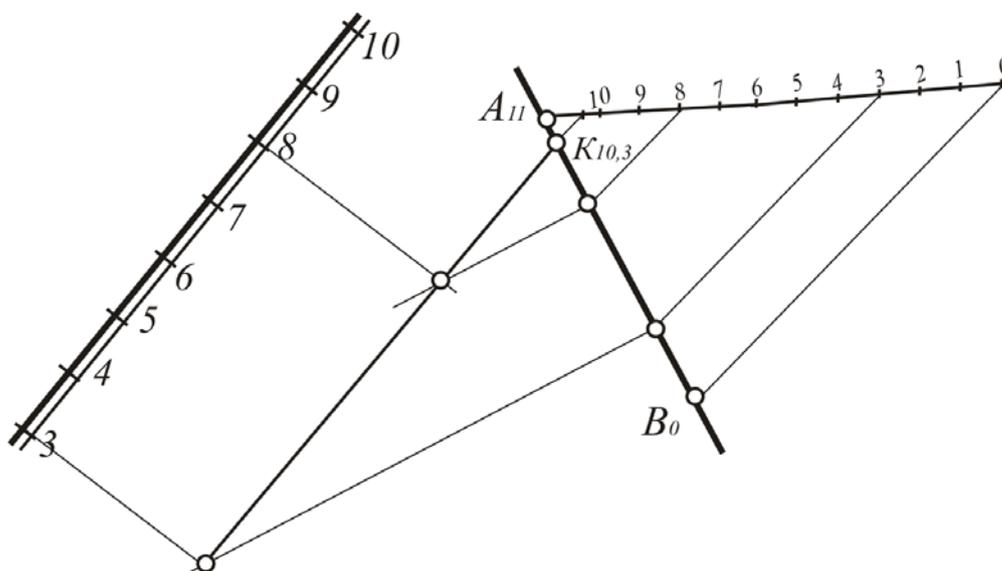


Рис. 226. Построение точки пересечения прямой и плоскости

**Задача 5.** Даны прямая  $AB$  общего положения и коническая поверхность (рис. 227). Найти их общие точки.

Необходимо выполнить следующие операции алгоритма:

1. Через заданную прямую провести вспомогательную плоскость. Для этого целесообразно данную прямую принять за масштаб уклона вспомогательной плоскости и проградировать ее. Через полученные точки провести горизонтали и пересечь их с соответствующими горизонталями заданной поверхности.

2. Выделить полученные точки пересечения и соединить их. В результате возникает плоское сечение поверхности. В рассматриваемом примере это коническое сечение.

3. Определить точки пересечения построенного сечения и заданной прямой. В данном примере это точки  $K_{25,75}$  и точка с пометкой 23.

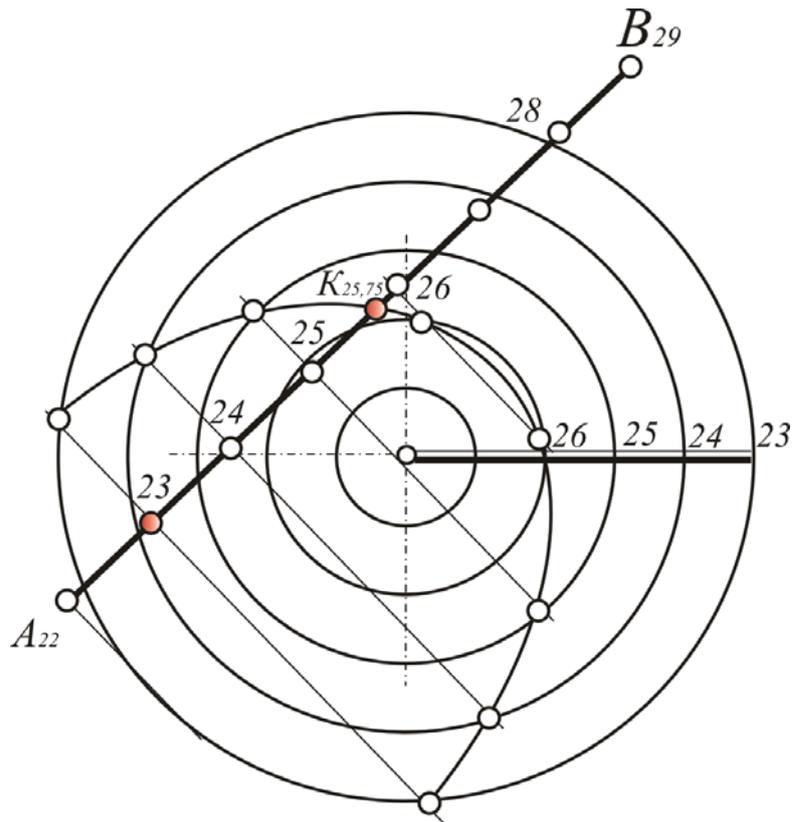


Рис. 227. Построение точки пересечения прямой и поверхности

В настоящем подразделе представлены базовые позиционные задачи, которые решаются при определении границ земляных работ в дорожном строительстве и строительстве различных сооружений.

### Контрольные вопросы

1. Каковы операции алгоритма по определению общей линии двух плоскостей и поверхностей?
2. Как строится точка пересечения прямой с плоскостью?
3. Что нужно сделать, чтобы определить общую точку прямой с поверхностью?

# БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

## Основная литература

1. Вавилова, И.И. Краткий курс начертательной геометрии [Текст]: учеб. пособие / И.И. Вавилова. – Воронеж: Изд-во ВВВАИУ ВИ, 2006. – 106 с.
2. Королев, Ю.И. Начертательная геометрия [Текст]: учебник / Ю.И. Королев. – СПб.: Питер, 2010. – 256 с.
3. Лапшов, А.Ю. Проекция с числовыми отметками [Текст]: методические указания к самостоятельной работе студентов / А.Ю. Лапшов, Л.Л. Сидоровская, В.И. Чурбанов. – Ульяновск: УлГТУ, 2007. – 41 с.
4. Найниш, Л.А. Теория построения изображений [Текст]: учеб. пособие / Л.А. Найниш, Г.Л. Виноградова, Л.В. Ремонтова, С.А. Кочерова. – Пенза: ПГТА, 2010. – 168 с.
5. Фролов С.А. Начертательная геометрия [Текст]: учебник / С.А. Фролов. – М.: Инфра-М, 2013. – 257 с.
6. Чекмарев, А.А. Начертательная геометрия и черчение [Текст]: учебник для бакалавров / А.А. Чекмарев. – М.: Юрайт, 2012. – 231 с.

## Дополнительная литература

7. Вавилов, С.И. Глаз и солнце [Текст]: моногр. / С.И. Вавилов. – 10-е изд. – М.: Наука, 1981. – 167 с.
8. Вальков, К.И. Курс начертательной геометрии [Текст]: учебник / К.И. Вальков. – Л.: ЛИСИ, 1970. – 245 с.
9. Вальков, К.И. Лекции по основам геометрического моделирования [Текст]: учебник / К.И. Вальков. – Л.: ЛГУ, 1975. – 278 с.
10. Глаголев, Н.А. Проективная геометрия [Текст]: учебник / Н.А. Глаголев. – М.: Высшая школа, 1963. – 126 с.
11. Четверухин, Н.Ф. Аксонометрия [Текст]: учебник / Н.Ф. Четверухин, Е.А. Глазунов. – М.: Гостехиздат, 1954. – 363 с.
12. Демидов, В.Е. Как мы видим то, что видим [Текст]: моногр. / В.Е. Демидов. – М.: Знание, 1987. – 196 с.
13. Дюрер, А. Дневники, письма, трактаты [Текст] / А. Дюрер. – М.: Искусство, 1957. – 231 с.
14. Еремеев, А.Ф. Первобытная культура [Текст]: моногр. / А.Ф. Еремеев. – В 2-х ч. – Саранск, 1997. – 153 с.
15. Лихачев, Д.С. Русское искусство от древности до авангарда [Текст]: моногр. / Д.С. Лихачев. – М., 1992. – 311 с.
16. Монж, Г. Начертательная геометрия [Текст]: учебник / Г. Монж. – М.: Изд-во АН СССР, 1947. – 322 с.
17. Найниш, Л.А. Структурный анализ курса начертательной геометрии [Текст]: моногр. / Л.А. Найниш. – Пенза: ПГАСА, 2000. – 198 с.

18. Раушенбах, Б.В. Система перспективы в изобразительном искусстве: Общая теория перспективы [Текст]: моногр. / Б.В. Раушенбах. – М.: Наука, 1986. – 254 с.

19. Флоренский, П.А. Обратная перспектива [Текст] / П.А. Флоренский // Избранные труды по искусству. – М.: Изобразительное искусство, 1996. – 285 с.

## ОГЛАВЛЕНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ .....	3
ВВЕДЕНИЕ.....	4
ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ.....	9
1. БАЗОВЫЕ ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ЗНАНИЯ .....	13
1.1. Геометрическое пространство .....	13
1.2. Линии.....	20
1.3. Поверхности.....	35
2. ЗАКОНОМЕРНОСТЬ ПОСТРОЕНИЯ ПЛОСКИХ ИЗОБРАЖЕНИИ ТРЕХМЕРНЫХ ОБЪЕКТОВ .....	42
2.1. Структура проекционного аппарата.....	42
2.2. Алгоритм работы проекционного аппарата.....	43
2.3. Инварианты проецирования.....	44
2.4. Основное требование к плоским изображениям трехмерных объектов.....	47
Контрольные вопросы .....	50
3. МЕТОД ДВУХ ИЗОБРАЖЕНИЙ. МОДЕЛИРОВАНИЕ ОСНОВНЫХ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ЭЛЕМЕНТОВ .....	51
3.1. Характеристика проекционного аппарата. Общий случай .....	51
3.2. Характеристика проекционного аппарата. Аксонометрия.....	52
3.3. Характеристика проекционного аппарата. Эпюр Монжа .....	53
3.4. Модель точки.....	54
3.4.1. Моделирование точек общего положения в стандартных вариантах метода двух изображений .....	58
3.4.2. Моделирование точек частного положения в стандартных вариантах метода двух изображений .....	61
3.5. Модель прямой .....	69
3.5.1. Моделирование прямых общего положения .....	72
3.5.2. Моделирование прямых частного положения.....	74
3.5.3. Приемы работы с моделью прямой .....	83
3.6. Модель плоскости .....	87
3.6.1. Моделирование плоскости общего положения .....	88
3.6.2. Моделирование плоскости частного положения .....	89
3.6.3. Приемы работы с моделью плоскости .....	94
3.7. Моделирование плоских кривых второго порядка .....	98
3.8. Моделирование поверхностей .....	101
3.8.1. Моделирование поверхностей в стандартных вариантах метода двух изображений .....	103
3.8.2. Определение положения поверхности относительно проекционного аппарата по ее модели .....	112
3.8.3. Построение на модели поверхности графически простых линий.....	112
3.8.4. Построение на модели поверхности точек и линий .....	118
4. ПОЗИЦИОННЫЕ ЗАДАЧИ.....	128
4.1. Пересечение прямой с плоскостью.....	130
4.2. Пересечение прямой с поверхностью .....	133
4.3. Пересечение плоскостей.....	136

4.4. Пересечение поверхностей .....	138
5. МЕТРИЧЕСКИЕ ЗАДАЧИ .....	146
5.1. Определение натуральной величины отрезка прямой .....	147
5.2. Определение натуральной величины плоского угла и плоской фигуры .....	150
6. РАЗВЕРТКИ ПОВЕРХНОСТЕЙ.....	152
6.1. Примеры построения точных разверток .....	152
6.2. Примеры построения приближенных разверток .....	158
6.3. Построение условных разверток.....	160
6.4. Линии на развертках.....	161
7. ПРОЕКЦИИ С ЧИСЛОВЫМИ ОТМЕТКАМИ.....	165
7.1. Структура проекционного аппарата и алгоритм его работы.....	165
7.2. Моделирование геометрических элементов .....	165
7.2.1. Модель точки .....	165
7.2.2. Модель прямой .....	168
7.2.3. Модель плоскости.....	172
7.2.4. Модель поверхности .....	176
7.3. Позиционные задачи в проекциях с числовыми отметками .....	187
БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК.....	192

Учебное издание

Найниш Лариса Алексеевна  
Гаврилюк Людмила Евгеньевна

## НАЧЕРТАТЕЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ

Учебное пособие

Редактор      М.А. Сухова  
Верстка      Н.А. Сазонова

---

Подписано в печать 30.06.2014. Формат 60×84/16.  
Бумага «Снегурочка». Печать на ризографе.  
Усл. печ. л. 11,39. Уч.-изд. л. 12,25. Тираж 300 экз. 1-й завод 100 экз.  
Заказ № 215.



---

Издательство ПГУАС.  
440028, г. Пенза, ул. Германа Титова, 28.